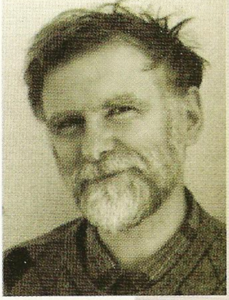
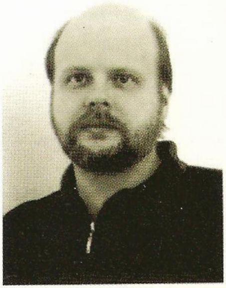
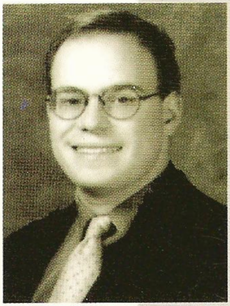
مبادی هندسهٔ جبری

کارن ای. اسمیت، لری کاهانپا
پکا ککالاینن، ویلیام ترویز

ترجمهٔ دکتر رحیم زارع نهندی

کارن ای. اسمیت
لری کاهانپا
پکا ککالاینن
ویلیام ترویز

هدف این کتاب توصیف اصول زیربنایی هندسهٔ جبری است همراه با بخشی از پیشرفتهای مهم آن در سدهٔ بیستم و مسائلی که امروز محققان این شاخه را به خود مشغول کرده است. مخاطبان کتاب دانشجویان ریاضی و علاقمندانی هستند که با هندسهٔ جبری آشنایی ندارند ولی مشتاقند با کمترین پیشنیاز، از مبانی و اهداف آن برآوردی پیدا کنند. مفاهیم جبری مختصری فراتر از یک درس پایه در جبر خطی دانسته فرض شده‌اند.

کارن اسمیت دانشیار ریاضی دانشگاه میشیگان است که بارها در فنلاند تدریس کرده است. لری کاهانپا و پکا ککالاینن از ریاضیدانان فنلاندی شرکت‌کننده در کلاسهای هندسهٔ جبری خانم اسمیت در آنجا بوده‌اند. ویلیام ترویز استادیار ریاضی آکادمی علوم نیروی دریایی امریکا در آناپولیس مریلند است.

مبادی
هندسهٔ جبری

کارن ای. اسمیت، لری کاهانپا، پکا ککالاینِن، ویلیام ترویز

ترجمهٔ دکتر رحیم زارع نهندی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان | صفحه

دکتر زارع نهندی عزیز

از ابراز علاقهٔ شما به کتاب *An Invitation to Algebraic Geometry* بسیار متشکرم. من و مؤلفان دیگر این کتاب، ترجمهٔ آن را به زبان فارسی فکر بسیار جالبی می‌دانیم و از اینکه شما داوطلب انجام آن شده‌اید از شما سپاسگزاریم و به کیفیت ممتاز کار شما اعتقاد داریم.

شرکت اشپرینگر ـ فرلاک که حق چاپ کتاب به این شرکت تعلق دارد، حق ترجمهٔ کتاب به زبان فارسی و چاپ آن را به اینجانب واگذار کرده است که بدین وسیله به شما منتقل می‌کنم. لذا پیرو توافق شما با مرکز نشر دانشگاهی، این مرکز مجوز چاپ ترجمهٔ فارسی کتاب را دارا می‌باشد. این مجوز در مورد چاپ دوم کتاب در سال ۲۰۰۴ نیز معتبر است.

کارن ای. اسمیت
ان آربور، میشیگان
دسامبر ۲۰۰۵

پیشگفتار ویراست دوم

در ویراست دوم کتاب غلطهای چاپی و خطاهای زیادی که خوانندگان آن از کشورهای مختلف دنیا تذکر داده‌اند، اصلاح شده‌اند. همچنین تمرینهایی اضافه و قسمتهایی از متن توضیح داده شده‌اند. ما از همهٔ خوانندگانی که ما را در بهبود این کتاب یاری داده‌اند، سپاسگزاری می‌کنیم، منتها لازم می‌دانیم به‌ویژه از برایان کنراد[1]، شاندور کوواچ[2]، گریشا استوارت[3] و خصوصاً از رحیم زارع نهندی از دانشگاه تهران که ترجمهٔ این کتاب را به فارسی بر عهده دارد، صمیمانه تشکر کنیم.

کارن ای. اسمیت
برکلی، کالیفرنیا
مارس ۲۰۰۳

---

1. Brian Conrad 2. Sándor Kovács 3. Grisha Stewart

پیشگفتار ویراست اول

این کتاب حاصل درسی است که در زمستان ۱۹۹۶ در دانشگاه یوَسکوله[1] به عنوان بخشی از برنامهٔ جدید تحصیلات تکمیلی ریاضی درکشور فنلاند عرضه شده است. این درسِ پیشنهادیِ استاد کَری آستالا[2] بود که از من خواسته بود آن را در ده جلسهٔ دوساعته با عنوان «هندسهٔ جبری برای آنالیزدانان» تدریس کنم. شرکت‌کنندگان بیشتر شامل دو گروه از ریاضیدانان بودند: دانشجویان دورهٔ دکترای دانشگاههای یووسکوله و هلسینکی، و ریاضیدانان پخته‌ای که زمینهٔ آموزش و پژوهش آنان از جبر فاصله داشت. فنلاند از سنتی پرمایه در آنالیز کلاسیک و توپولوژیک برخوردار است، و شرکت‌کنندگان کلاس عمدتاً فرهیختگان این مکتب بودند، هرچند نمایندگانی از مکتب معروف دیگر فنلاند یعنی منطق ریاضی نیز، حضور داشتند.

تلاش من این بود که درس را طوری تنظیم کنم که برای همگان قابل فهم باشد، ولی این امر ایجاب می‌کرد که به شرکت‌کنندگان درسی فراتر از یک درس استانده در هندسهٔ جبری بدهم. می‌خواستم توجه آنها را به اصول زیربنایی جبری در هندسهٔ جبری جلب کنم ولی با همان اولویت، می‌خواستم بخشی از دستاوردهای اصلی هندسهٔ جبری در سدهٔ بیستم و نیز پاره‌ای از مسائل این مبحث را که امروزه متخصصان را به خود مشغول داشته است، شرح دهم. با این هدفهای مهم، لازم بود بسیاری از برهانها را حذف کنم و از دقت بیان بکاهم.

با توجه به زمینهٔ ریاضی حاضران این درس، پیشنیازهای جبری کمی علاوه بر یک درس پایه در جبر خطی دانسته فرض شده بودند. از سوی دیگر، زبان نظریهٔ مقدماتی توپولوژی نقطه‌ـمجموعه

1. Jyväskylä   2. Kari Astala

و پاره‌ای از نکته‌های اساسی از آنالیز مختلط، بسیار زیاد به‌کار رفته بودند، همین طور آشنایی گذرا با تعریف یک خمینه لازم بوده است.

درسهای مجمل من توسط لری کاهانپا[1] و پکا ککالاینن[2] به نحوی عالی تنظیم و دستکاری شده و مبنای تدوین این کتاب شده بودند. این کار تلاش طاقت‌فرسایی را طلبیده بود، و شکلهای بسیار جالبی که لری به کمک رایانه ابداع کرده بود، دلیل این مدعا بود. به یاری لری و پکا، بازنگری جامعی در نسخهٔ فنلاندی کتاب به عمل آمده بود؛ سپس ویل ترویز برای بازنگری اساسی در نسخهٔ انگلیسی، به این جمع پیوسته بود. حاصل نهایی، کتاب حاضر است که بدون مشارکتهای ارزشمند همهٔ اعضای تیم چهارنفرهٔ نویسندگان میسر نمی‌شد.

این کتاب ویژهٔ ریاضیدان مشتاق یا کاربری تدوین شده که با هندسهٔ جبری آشنا نیست ولی می‌خواهد با کمترین پیشنیازها، درکی از مبانی و هدفهای هندسهٔ جبری به دست آورد. این کتاب به منظور رقابت با کتابهای مقدماتی جامع مانند کتابهای هارتشورن[3] یا شافارویچ[4] که برای برهانها و بیان دقیق خیلی زیاد به آنها ارجاع کرده‌ایم، تهیه نشده است. بلکه، امیدواریم این کتاب دست کم الهام‌بخش پاره‌ای از خوانندگان برای مطالعهٔ جدی‌تری در این مبحث زیبا باشد. خلاصه، این کتاب درآمدی است بر هندسهٔ جبری.

کارن ای. اسمیت
یوُوَسکولَه، فنلاند
اوت ۱۹۹۸

1. Lauri Kahanpää 2. Pekka Kekäläinen 3. Hartshorne 4. Shafarevich

فهرست نمادها

فضای آفین nبعدی	$\mathbb{A}^n$
فراگستری V در راستای ایدِآل I	$B_I(V)$
فراگستری V در نقطهٔ p	$B_p(V)$
فراگستری V در راستای زیر چندگونای Y	$B_Y(V)$
اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
حلقهٔ مختصاتی چندگونای V	$\mathbb{C}[V]$
میدان تابعی V	$\mathbb{C}(V)$
دیفرانسیل F	dF
میدان p عنصری	$\mathbb{F}_p$
پسکشی ریختپایی F	$F^{\#}$
ایدِآل تولیدشده توسط چندجمله‌ییهای F_i	$(\{F_i\})$
گروه ماتریسهای مختلط $n \times n$ وارونپذیر	$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$
چندگونای گراسمانی	$\mathbf{Gr}(k, n)$
نمودار نگاشت گویای F	Γ_F
ایدِآل توابعی که روی V صفر می‌شوند	$\mathbb{I}(V)$
رادیکال ایدِآل I	$\sqrt{I}$

$\vert L\vert$	دستگاه خطی کامل
$\operatorname{maxSpec}(R)$	طیف ماکسیمال حلقهٔ R
$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$	فضای پیمانه‌ای خمهایی از گونای g
$\mathcal{O}_V$	بافهٔ ساختار V
Ω_X	بافهٔ برشهای کلاف کتانژانت
ω_X	کلاف خطی متعارف
$\mathbb{P}^n$	فضای تصویری nبعدی
$(\mathbb{P}^n)^\vee$	دوگان فضای تصویری nبعدی
$[a_\circ : \ldots : a_n]$	نقطه در $\mathbb{P}^n$
$\mathbf{PGL}(n, \mathbb{C})$	گروه خودریختیهای $\mathbb{P}^{n-۱}$
$\mathbb{R}$	اعداد حقیقی
$\tilde{R}$	بافهٔ وابسته به $\operatorname{Spec}(R)$
$\mathcal{R}(U)$	برشهای بافهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ باز U
$X \dashrightarrow Y$	نگاشت گویا از X در Y
$\operatorname{Sec} X$	چندگونای قاطعهای X
$\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$	گروه ماتریسهای مختلط $n \times n$ با دترمینان یک
$\operatorname{Spec}(R)$	طیف حلقهٔ R
$\sum_{m,n}$	نگاشت سگره
$\operatorname{Sing} V$	مکان تکین V
$\operatorname{Tan} X$	چندگونای مماس X
T_pV	فضای مماس بر V در نقطهٔ p
TV	کلاف مماس کلی V
Θ_X	بافهٔ برشهای کلاف مماس
$\mathbf{U}(n)$	گروه ماتریسهای یکانی $n \times n$
$\bar{V}$	بستار تصویری V
$\mathbb{V}(\{F_i\})$	صفرهای مشترک چندجمله‌ییهای F_i
ν_d	نگاشت ورونزه از درجهٔ d
$\mathbb{Z}$	اعداد صحیح

۱

چندگوناهای جبری آفین

هندسهٔ جبری‌دانان مکانهای صفر چندجمله‌ییها را مطالعه می‌کنند. به بیانی دقیق‌تر، آنان اشیایی هندسی را مطالعه می‌کنند که چندگوناهای جبری خوانده می‌شوند، و به طور موضعی، به صورت مکانهای صفر چندجمله‌ییها تعریف می‌شوند. مثلاً، هر دانش‌آموز ریاضی دبیرستانی زمانی که ویژگیهای اساسی مقطعهای مخروطی مانند سهمیها و هذلولیها را فرا می‌گرفته، اندکی هندسهٔ جبری مطالعه کرده است.

هندسهٔ جبری نظامی است بالنده با تاریخچه‌ای پربار. در یونان باستان، ریاضیدانانی چون آپولونیوس[1]، می‌دانستند هر مقطع مخروطی ناتباهیده، با پنج خط مماس در وضعیت عمومی، به طور یکتا مشخص می‌شود، مسئله‌ای که بسیاری از هندسهٔ جبری‌دانان امروزی را به تأمل وا می‌دارد. ولی در واقع، تنها پس از معرفی دستگاه مختصات دکارتی در سدهٔ هفدهم، که مطالعهٔ مقطعهای مخروطی را به کمک چندجمله‌ییهای درجه دوم ممکن ساخت، هندسهٔ جبری توانست پیشروی خود را آغاز کند.

1. Apollonius

تا اواسط سدهٔ نوزدهم، هندسهٔ جبری در حال شکوفایی بود. از یک‌سو، ریمان پی برده بود که رویه‌های فشردهٔ ریمانی را همواره می‌توان به وسیلهٔ معادله‌های چندجمله‌یی مشخص کرد. از سوی دیگر، مثالهای خاصی از چندگوناهای جبری، مانند رویه‌های درجهٔ دوم و درجهٔ سوم (مکانهای صفر یک چندجمله‌یی درجهٔ دوم یا درجهٔ سوم سه‌متغیره) کاملاً شناسایی و عمیقاً مطالعه شده بودند. برای مثال، مشخص شده بود که هر رویهٔ درجهٔ دوم با خانواده‌ای از خطهای جدا از هم کاملاً پوشش داده می‌شود، در حالی که هر رویهٔ درجهٔ سوم دقیقاً بیست‌وهفت خط را در بر دارد. مطالعات مشروح چگونگی آرایش این بیست‌وهفت خط و نحوهٔ تغییر آنها در خانواده‌ها، نظر تعداد زیادی از ریاضیدانان سدهٔ نوزدهم را به خود جلب می‌کرد.

با رشد هندسهٔ جبری فراسوی مبانی منطقی تا حدی نااستوار، سرانجام در آغاز سدهٔ جدید، شهود چشمگیر هندسهٔ جبری‌دانان روبه تزلزل نهاد. فرهنگ ریاضی، به رهبری داوید هیلبرت[1]، در راستای تأکید بیشتر بر دقت ریاضی، تحول یافت و با پیدایش نقصانها و حتی خطاهایی در هندسهٔ جبری، این شاخه از نظرها افتاد. خوشبختانه، روح و روشهای هندسهٔ جبری که بیشتر مرهون ریاضیدانان ایتالیایی بود، زنده مانده بود. در نیمهٔ سدهٔ بیستم، در سایهٔ تلاشهای ریاضیدانانی چون داوید هیلبرت و امی‌نوتر[2]، توسعهٔ جبر به حدی رسید که توانست بار دیگر پشتیبان این مبحث زیبا و مهم باشد.

در نیمهٔ سدهٔ بیستم، اُسکار زاریسکی[3] و آندره وِیل[4] بخش عمده‌ای از زندگی خود را صرف این کردند تا مبانی هندسهٔ جبری را بر پایهٔ استوار ریاضی بازسازی کنند. این کار به هیچ وجه تکمیل ریزه‌کاریهای به‌جامانده از پیش نبود، بلکه نگرشی بود نو و انقلابی، بر پایهٔ تحلیل ویژگیهای جبری مجموعهٔ همهٔ توابع چندجمله‌یی روی چندگونای جبری. این نوآوریها ارتباطهای عمیق بین مباحث ریاضی مانند نظریهٔ اعداد و نظریهٔ رویه‌های ریمانی را که قبلاً جدا از هم قلمداد می‌شدند آشکار ساخت، و سرانجام الکساندر گروتندیک[5] را قادر ساخت تا در نیمهٔ دوم سدهٔ بیستم، هندسهٔ جبری را تا مرزهای حیرت‌آور تجرید پیش ببرد. این تجرید سبب تسهیل، یکپارچگی و پیشرفت بسیار زیاد هندسهٔ جبری شد. و ابزارهای توانمندی برای حل مسائل دشوار پدید آورد. امروزه هندسهٔ جبری تقریباً با همهٔ شاخه‌های ریاضی مرتبط است.

اثر نامطلوب تجرید در اواخر سدهٔ بیستم این است که گاهی هندسهٔ جبری را برای افراد ناوارد غیر قابل فهم جلوه می‌دهد. با این حال، چنانکه امیدواریم بتوانیم در این مبادی هندسهٔ جبری، نشان دهیم، اشیای اصلی مورد مطالعه در هندسهٔ جبری، چندگوناهای جبری آفین و تصویری، و مسائل اصلی پژوهشی دربارهٔ آنها، همواره جالب و قابل فهم بوده و هستند.

---

1. David Hilbert 2. Emmy Noether 3. Oscar Zariski 4. André Weil
5. Alexander Grothendieck

۱۰۱ تعریف و مثالها

چندگونای جبری شیئی است هندسی که از لحاظ موضعی شبیه مکان صفر مجموعه‌ای از چندجمله‌ییهاست. مفهوم «از لحاظ موضعی شبیه» برای آنانی که خمینه‌ها را مطالعه کرده‌اند آشناست، که اشیایی هستند هندسی که از لحاظ موضعی با فضای اقلیدسی مشابه‌اند. ما مطالعهٔ هندسهٔ جبری را با بررسی مشروح این تصویر موضعی، یعنی با مطالعهٔ چندگوناهای جبری آفین آغاز می‌کنیم.

تعریف: یک چندگونای جبری آفین مجموعهٔ صفرهای مشترک گردایه‌ای است از چندجمله‌ییهای مختلط $\{F_i\}_{i\in I}$ در فضای nبعدی مختلط $\mathbb{C}^n$. برای این مجموعه از صفرهای مشترک می‌نویسیم

$$V = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \subset \mathbb{C}^n$$

باید توجه داشت که مجموعهٔ اندیس‌گذار I دلخواه است و لازم نیست متناهی یا حتی شمارا باشد.

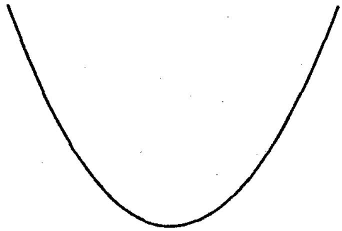
برای مثال، $V = \mathbb{V}(x_۱, x_۲) \subset \mathbb{C}^۳$ خط مختلط در $\mathbb{C}^۳$ متشکل از نقاط محور $x_۳$ است.

این تعریف از چندگونای جبری آفین باید تنها به عنوان یک تعریف اولیه برای شروع کار تلقی شود. مسئله این است که این تعریف به ملاحظات عارضی اشیا یعنی نشانیدن چندگونای آفین در فضای آفین خاص $\mathbb{C}^n$ مربوط می‌شود. بعداً در بخش ۱.۴، این تعریف چندگونای جبری آفین را اصلاح می‌کنیم و طوری تعمیم خواهیم داد که بیشتر به صورت یک مفهوم ذاتی درآید.

به بیان دقیق‌تر، آنچه در بالا تعریف کردیم باید یک چندگونای جبری آفین مختلط نامیده شود، زیرا ما چندگوناهای خود را روی اعداد مختلط در نظر می‌گیریم. میدان اعداد مختلط می‌تواند با هر میدان دیگری مانند میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$، یا حتی یک میدان متناهی جایگزین شود. به دلایلی که بعداً خواهیم دید، به کار بردن اعداد مختلط به جای اعداد حقیقی، هندسهٔ جبری را آسان‌تر می‌کند و برای آنکه این درس هرچه بیشتر به قلمرو آشنای ما نزدیک باشد، تنها روی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ کار خواهیم کرد. ولی، لازم است خواننده امکان به‌کارگیری میدانهای دیگر را در ذهن داشته باشد؛ این انعطاف‌پذیری به هندسهٔ جبری امکان می‌دهد تا در مسائل نظریهٔ اعداد (با استفاده از اعداد گویا یا میدانهای اعداد pـای) به کار گرفته شود.

مثالها:

(۱) فضای $\mathbb{C}^n$؛ مجموعهٔ تهی؛ و مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای، منفرده، مثالهای نمایانی از چندگوناهای



شکل ۱۰۱ $\mathbb{V}(y-x^{۲}) \subset \mathbb{C}^{۲}$.

جبری آفین هستند:

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{V}(\circ);$$

$$\varnothing = \mathbb{V}(۱);$$

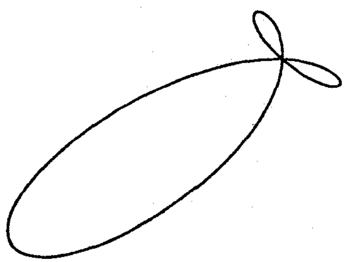
$$\{(a_{۱},\ldots,a_n)\} = \mathbb{V}(x_{۱}-a_{۱},\ldots,x_n-a_n)$$

فضای $\mathbb{C}$ را خط مختلط، و فضای $\mathbb{C}^{۲}$ را صفحهٔ مختلط گوییم. در بعضی از شاخه‌های دیگر ریاضیات، خط مختلط $\mathbb{C}$ را «صفحهٔ مختلط» گویند که ممکن است سبب اشتباه شود. به طور کلی، فضای $\mathbb{C}^n$ را فضای nبعدی مختلط یا فضای nبعدی آفین می‌نامند.

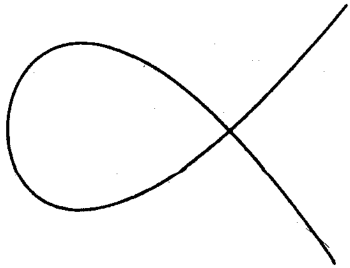
وقتی نمایشی از یک چندگونای آفین V را رسم می‌کنیم، البته، فقط نقطه‌های حقیقی آن $V \bigcap \mathbb{R}^n$ را رسم خواهیم کرد.

(۲) یک خم مسطح آفین مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی مختلط در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}^{۲}$ است. شکلهای ۱.۱، ۲.۱ و ۳.۱ مثالهایی از خمهای مسطح را نشان می‌دهند.

(۳) مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی تنها، در فضای دلخواه mبعدی یک ابررویه در $\mathbb{C}^n$ خوانده می‌شود، مخروط درجهٔ دوم در شکل ۴.۱ نمونه‌ای از یک ابررویه است.



شکل ۲۰۱ $\mathbb{V}(x^{۲}y+xy^{۲}-x^{۴}-y^{۴}) \subset \mathbb{C}^{۲}$.



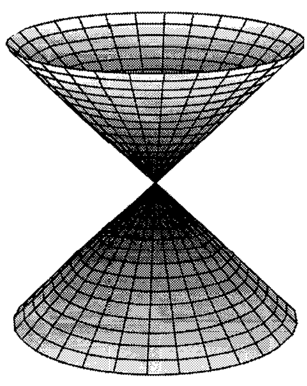
شکل ۳.۱ $\mathbb{V}(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$.

(۴) مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی خطی (درجهٔ یک) یک چندگونای جبری آفین است که یک ابرصفحهٔ آفین خوانده می‌شود. مثلاً خطی که با رابطهٔ $ax + by = c$ تعریف می‌شود یک ابرصفحه در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}^2$ است، که a، b و c عددهای مختلط‌اند. یک چندگونایِ جبریِ آفینِ خطی مجموعهٔ صفرهای مشترک گردایه‌ای از چندجمله‌ییهای خطی به شکل

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b$$

در $\mathbb{C}^n$ است. اگر تعداد چندجمله‌ییهای مستقل خطی k باشد، چندگونای خطی یک فضای مختلط $n-k$ بعدی است.

(۵) مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ را می‌توان با مجموعهٔ $\mathbb{C}^{n^2}$ یکی گرفت. این فضا شامل اشیای شناخته‌شده‌ای به عنوان چندگونای جبری آفین است. مثلاً، زیرمجموعهٔ $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ مرکب



شکل ۴.۱ مخروط درجهٔ دوم $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2)$ در $\mathbb{C}^3$.

از ماتریسهای با دترمینان ۱ یک چندگونای جبری آفین در $\mathbb{C}^{n^2}$ تشکیل می‌دهد، ابررویه‌ای که با چندجمله‌یی $\Delta - 1$ تعریف می‌شود، که Δ معرف دترمینان

$$\Delta(x_{ij}) = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

است، و روشن است که Δ یک چندجمله‌یی از n^2 متغیر x_{ij} است.

(۶) یک چندگونای دترمینانی مجموعه‌ای است در $\mathbb{C}^{n^2}$ متشکل از همهٔ ماتریسها با رتبهٔ حداکثر k که k عدد طبیعی ثابتی است. به ازای $k \geq n$ این چندگونای دترمینانی تمامی فضای $\mathbb{C}^{n^2}$ است، ولی به ازای $k < n$ رتبهٔ یک ماتریس A حداکثر k است اگر و تنها اگر همهٔ زیر دترمینانهای از نوع $(k+1) \times (k+1)$ آن صفر شوند. چون زیر دترمینانها چندجمله‌ییهایی از متغیرهای x_{ij} هستند، مجموعهٔ ماتریسهای با رتبهٔ حداکثر k یک چندگونای جبری آفین است.

مثالهای غیرچندگونا

(۱) یک گوی باز در توپولوژی اقلیدسی معمولی روی $\mathbb{C}^n$ یک چندگونای جبری نیست. زیرا، چنانکه در تمرین ۱.۱.۱ نشان خواهیم داد، هر چندگونای جبری آفین در $\mathbb{C}^n$ نسبت به توپولوژی اقلیدسی بسته است. به این دلیل، بر اساس تعریفی که تا اینجا داده‌ایم، $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$، مجموعهٔ ماتریسهای وارونپذیر، یک چندگونای جبری آفین نیست. زیرا، $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ متمم چندگونایی در $\mathbb{C}^{n^2}$ است که با صفر شدن چندجمله‌یی دترمینان تعریف می‌شود، و بنابراین نسبت به توپولوژی اقلیدسی بر $\mathbb{C}^{n^2}$ باز است. در عمل، بعداً در بخش ۱.۴ تعریف چندگونای جبری آفین را تعمیم خواهیم داد و مجموعهٔ $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ به معنای این تعمیم یک چندگونای آفین خواهد شد.

مجموعهٔ $\mathbf{U}(n)$ متشکل از ماتریسهای یکانی حتی نسبت به این تعریف تعمیم‌یافته، چندگونای جبری مختلط نیست. یادآوری می‌کنیم که یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های مختلط یکانی است اگر ستونهای آن نسبت به ضرب مختلط داخلی $\langle z, w \rangle = z \,.\, \bar{w}^t = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$ یکا متعامد باشند.

(۲) مربع بستهٔ $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ در $\mathbb{C}^2$ مثالی است از یک مجموعهٔ بسته که یک چندگونای جبری نیست این نتیجه‌گیری از این واقعیت است که هیچ مجموعهٔ جبری غیرنمایان در $\mathbb{C}^2$ نمی‌تواند نقاط درونی داشته باشد، زیرا مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی ناصفر نقاط درونی ندارد.

(۳) نمودارهای توابع متعالی چندگوناهای جبری نیستند. برای مثال، مجموعهٔ صفر تابع $y - e^x$ یک چندگونای جبری نیست. تمرین ۶ در بخش ۳.۲ را ببینید.

تمرین ۱۰۱۰۱. نشان دهید که هر چندگونای جبری آفین در $\mathbb{C}^n$ نسبت به توپولوژی اقلیدسی بسته است. (راهنمایی: چندجمله‌ییها توابعی پیوسته از $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{C}$ هستند، بنابراین مجموعه‌های صفر آنها بسته‌اند.)

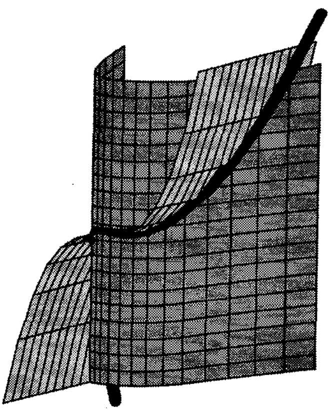
تمرین ۲۰۱۰۱. یک زیرچندگونای یک چندگونای جبری آفین $V \subset \mathbb{C}^n$ یک چندگونای جبری آفین $W \subset \mathbb{C}^n$ گنجیده در V است. نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbf{U}(n)$ یک زیرچندگونای جبری آفین $\mathbb{C}^{n^2}$ نیست. ولی نشان دهید که این مجموعه می‌تواند به صورت مکان صفر گردایه‌ای از چندجمله‌ییها با ضرایب حقیقی در $\mathbb{R}^{2n^2}$ تعریف شود، یعنی، یک چندگونای جبری حقیقی است.

۲۰۱ توپولوژی زاریسکی

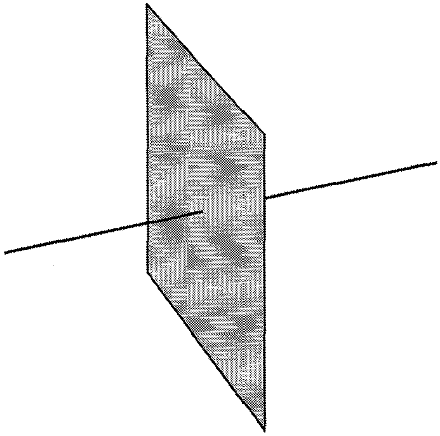
اشتراک هر تعدادی از چندگوناهای جبری آفین در $\mathbb{C}^n$ یک چندگونای جبری آفین است. زیرا، این اشتراک توسط اجتماع مجموعه‌های چندجمله‌ییهای معرف چندگوناهای داده‌شده بیان می‌شود. مثلاً، اشتراک دو چندگونا را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \cap \mathbb{V}(\{F_j\}_{j\in J}) = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I\cup J})$$

خم درجهٔ سوم تابدار که در شکل ۵.۱ نمایش داده شده، یک مثال عینی از اشتراک دورویه است.



شکل ۵۰۱ $V = \mathbb{V}(x^2 - y, x^3 - z) = \mathbb{V}(x^2 - y) \cap \mathbb{V}(x^3 - z)$.



شکل ۶.۱ $V = \mathbb{V}(y,z) \cup \mathbb{V}(x) = \mathbb{V}(xy, xz)$.

اجتماع دو چندگونای جبری آفین در $\mathbb{C}^n$ یک چندگونای جبری آفین است. برای مثال به‌سادگی می‌توان دید که اجتماع دو ابررویه با حاصلضرب چندجمله‌ییهای متناظرشان تعریف می‌شود:

$$\mathbb{V}(F)_1 \cup \mathbb{V}(F_2) = \mathbb{V}(F_1 F_2)$$

در واقع، چندجمله‌یی $F_1 F_2$ در یک نقطهٔ p صفر می‌شود اگر و تنها اگر یکی از (یا هر دو) دو چندجمله‌یی F_1 و F_2 در p صفر شود. مثلاً، اجتماع محورهای x و y در صفحه، مجموعهٔ صفر چندجمله‌یی منفرد xy است.

به طور کلی، اجتماع دو چندگونای جبری آفین دلخواه با مجموعهٔ همهٔ حاصلضربهای دوبه‌دو چندجمله‌ییهای معرف دو چندگونای اولیه تعریف می‌شود:

$$\mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \cup \mathbb{V}(\{F_j\}_{j\in J}) = \mathbb{V}(\{F_i F_j\}_{(i,j)\in I\times J})$$

برای مثال، شکل ۶.۱ نمایش اجتماع صفحهٔ yz (که با صفر قرار دادن x تعریف می‌شود) و محور xها (که با صفر قرار دادن y و z با هم، تعریف می‌شود) است. این اجتماع مجموعهٔ صفر مشترک چندجمله‌ییهای xy و xz است.

بدین ترتیب تحقیق کرده‌ایم که مجموعهٔ تهی، تمامی فضای $\mathbb{C}^n$، اشتراک هر تعداد دلخواه از چندگوناهای جبری آفین، و اجتماع دو (و طبق استقرا، هر تعداد متناهی) چندگوناهای جبری آفین همگی چندگوناهای جبری آفین در $\mathbb{C}^n$ هستند. بنابراین، مجموعهٔ $\mathcal{Z}$ متشکل از همهٔ مکملهای

مجموعه‌های جبری آفین در چهار اصل موضوع معرف یک توپولوژی در $\mathbb{C}^n$ صدق می‌کنند: کل فضا و مجموعهٔ تهی در $\mathcal{Z}$ هستند، همچنین‌اند اشتراک تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{Z}$ و اجتماع هر چند عضو دلخواه $\mathcal{Z}$. لذا، $\mathcal{Z}$ مجموعهٔ $\mathbb{C}^n$ را به یک فضای توپولوژیک بدل می‌کند، که در آن مجموعه‌های باز دقیقاً مکملهای چندگوناهای جبری آفین هستند. این توپولوژی، توپولوژی زاریسکی بر $\mathbb{C}^n$ نامیده می‌شود. به منظور تأکید بر تمایز با فضای برداری $\mathbb{C}^n$، فضای توپولوژیک حاصل از مجموعهٔ $\mathbb{C}^n$ با توپولوژی زاریسکی‌اش را با $\mathbb{A}^n$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای nبعدی آفین می‌خوانیم. به‌ویژه، در $\mathbb{A}^n$ «مبدأ» مشخصی وجود ندارد. علی‌رغم این موضوع، ما اغلب به طور ضمنی مختصاتی را انتخاب و از «مبدأ در $\mathbb{A}^n$» صحبت می‌کنیم.

چون هر چندگونای جبری آفین در توپولوژی اقلیدسی بسته است، هر مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در توپولوژی اقلیدسی بسته است. ولیکن، عکس این مطلب درست نیست؛ توپولوژی زاریسکی از توپولوژی اقلیدسی بر $\mathbb{C}^n$ به مراتب درشت‌بافت‌تر است. توپولوژی اقلیدسی دارای پایه‌ای است متشکل از گویهای باز با شعاعهای کوچک دلخواه؛ به عکس، مجموعه‌های ناتهی باز زاریسکی بسیار بزرگ‌اند، مثل مکملهای خمها یا رویه‌ها در فضای ۳ بعدی. هر مجموعهٔ باز ناتهی زاریسکی هم در توپولوژی زاریسکی چگال است و هم در توپولوژی اقلیدسی، لذا به‌ویژه، هیچ مجموعهٔ باز زاریسکی در توپولوژی اقلیدسی معمولی کراندار نیست. اشتراک دو مجموعهٔ باز ناتهی زاریسکی در $\mathbb{A}^n$ هیچ وقت تهی نیست، بنابراین توپولوژی زاریسکی نمی‌تواند یک توپولوژی هاوسدورف باشد. یک مجموعه به‌خوبی می‌تواند مجموعهٔ فشردهٔ زاریسکی باشد بدون اینکه بستهٔ زاریسکی باشد یا حتی در توپولوژی اقلیدسی بسته باشد.[۱] مثال ۲ـ۳ـ۵ را ببینید.

برخلاف توپولوژی اقلیدسی، توپولوژی زاریسکی روی میدانهای دیگری غیر از میدان اعداد مختلف نیز مفهوم پیدا می‌کند. اگر بخواهیم مجموعه‌های صفر چندجمله‌ییها در فضای $\mathbb{K}^n$ را مطالعه کنیم، که $\mathbb{K}$ یک میدان دلخواه است، توپولوژی زاریسکی در دسترس ماست، لیکن توپولوژی اقلیدسی در اختیار ما نیست.

هر چندگونای جبری آفین، یک توپولوژی از توپولوژی $\mathbb{A}^n$، فضای محیطی خود، را به ارث می‌برد. توپولوژی زاریسکی روی یک چندگونای جبری آفین V، توپولوژی القاشده توسط توپولوژی زاریسکی $\mathbb{A}^n$ روی V است. به‌ویژه، مجموعه‌های بسته در V همان اشتراکهای $V \cap W$ از V با چندگوناهای جبری آفین $W \subset \mathbb{A}^n$ خواهد بود. به عبارت دیگر، مجموعه‌های بستهٔ V زیرچندگوناهای جبری آفین V هستند.

۱. فضای فشرده فضایی توپولوژیک است که هر پوشش باز آن یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. بعضی از مؤلفان چنین فضاهایی را شبه فشرده گویند و کلمهٔ «فشرده» را برای فضاهای هاوسدورف با ویژگی اخیر به کار می‌برند.

مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های سرهٔ بستهٔ زاریسکی از سهمی $V = \mathbb{V}(y-x^۲) \subset \mathbb{A}^۲$ متناهی‌اند. زیرا، توپولوژی زاریسکی بر هر خم مسطح توپولوژی متمم-متناهی است، به شرط اینکه این خم اجتماع دو خم دیگر نباشد.

در هندسهٔ جبری، چندگوناها با توپولوژی زاریسکی خود در نظر گرفته می‌شوند. منظور ما از مفاهیم توپولوژیک در این کتاب، همواره مفاهیم توپولوژی زاریسکی خواهند بود، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

تمرین ۱۰۲۰۱. نشان دهید اجتماع دو چندگونای جبری آفین در فضای مختلط nبعدی یک چندگونای جبری آفین است.

تمرین ۲۰۲۰۱. نشان دهید که توپولوژی زاریسکی بر $\mathbb{A}^۲$ با توپولوژی حاصلضرب بر $\mathbb{A}^۱ \times \mathbb{A}^۱$ یکی نیست. (راهنمایی: قطر را درنظر بگیرید.)

تمرین ۳۰۲۰۱. نشان دهید که خم درجهٔ سوم تابدار که در شکل ۵.۱ نمایش داده شده متشکل است از همهٔ نقاط $\mathbb{A}^۳$ که مختصات آنها به صورت $(t, t^۲, t^۳)$ هستند که $t \epsilon \mathbb{C}$.

۳۰۱ ریختپاییهای چندگوناهای جبری آفین

درست همان‌گونه که یک چندگونای جبری با چندجمله‌ییها داده می‌شود، یک ریختپایی از چندگوناهای جبری نیز با چندجمله‌ییها داده می‌شود.

ساده‌ترین مثال از یک ریختپایی از چندگوناهای جبری نگاشت چندجمله‌یی

$$\mathbb{A}^n \xrightarrow{F} \mathbb{A}^m$$

$$x \longmapsto (F_۱(x), F_۲(x), \ldots, F_m(x))$$

است که منظور ما از نگاشت چندجمله‌یی این است که هر مؤلفهٔ F_i از F یک چندجمله‌یی از n مختصِ $x_۱$، ...، x_n از $\mathbb{A}^n$ است. در حالت کلی، یکریختپایی از چندگوناهای جبری آفین چنین تعریف می‌شود:

تعریف: فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{A}^n$ و $W \subseteq \mathbb{A}^m$ چندگوناهای جبری آفین باشند. نگاشت $V \xrightarrow{F} W$ یک ریختپایی از چندگوناهای جبری است اگر F تحدید یک نگاشت چندجمله‌یی در فضاهای آفین محیطی $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ باشد.

یک ریختپایی از چندگوناهای جبری $V \longrightarrow W$ یک یکریختی است هرگاه دارای ریختپایی وارون باشد، یعنی، دوسویی باشد و وارون آن نیز یک ریختپایی باشد. دو چندگونای جبری آفین را یکریخت گوییم هرگاه یک یکریختی بین آنها وجود داشته باشد.

مثال: هر تعویض مختصات آفین در $\mathbb{A}^n$ مثالی از یک یکریختی $\mathbb{A}^n$ با خودش، یعنی یک خودریختی است. روشن‌تر بگوییم، فرض کنید

$$L_i(x) = \lambda_{i1}x_1 + \ldots + \lambda_{in}x_n + \mu_i$$

یک چندجمله‌یی درجهٔ ۱ برحسب x_1، ...، x_n است، که هر λ_{ij} و هر μ_i عددی مختلط است. در این صورت نگاشت

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

$$x \longmapsto (L_1(x), \ldots, L_n(x))$$

یک ریختپایی از چندگوناهای جبری است. این ریختپایی یک یکریختی است اگر و تنها اگر ماتریس (λ_{ij}) وارونپذیر باشد.

مثال: نگاشت تصویر $\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ که (x, y) را به x می‌فرستد، یک ریختپایی از چندگوناهای جبری است. این ریختپایی نمی‌تواند یک یکریختی باشد چون دوسویی نیست.

مثال: فرض می‌کنیم C سهمی $y - x^2 = 0$ در صفحه است که از صفر قرار دادن چندجمله‌یی $y - x^2$ به دست آمده است. به‌راحتی می‌توان دید که ریختپایی

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow C$$

$$t \longmapsto (t, t^2)$$

یک یکریختی است. نگاشت وارون آن با (تحدید) نگاشت تصویر داده شده است.

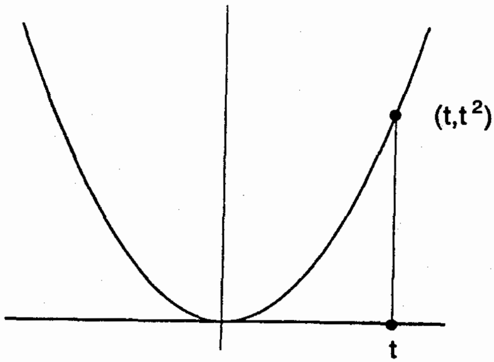
$$\mathbb{A}^2 \supset C \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

$$(x, y) \longmapsto x$$

این تناظر در شکل ۷.۱ نمایش داده شده است.

نگاشت تصویر دیگر یعنی $y \longmapsto (x, y)$ ریختپایی سهمیِ C به خط آفین است که دو-به-یک است.

تشخیص این مطلب حائز اهمیت است که هر ریختپایی از چندگوناهای جبری، لزوماً زیرچندگوناهای جبری را به زیرچندگوناهای جبری نمی‌نگارد، یعنی، هر ریختپایی الزاماً یک نگاشت



شکل ۷.۱ سهمی با خط یکریخت است.

بسته نیست. مثال ساده برای این نگاشت تصویر

$$\mathbb{A}^{۲} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^{۱}$$

$$(x, y) \longmapsto x$$

است. هذلولی $\mathbb{V}(xy-۱) = \{(t, t^{-۱}) | t \neq ۰\}$ یک مجموعهٔ بسته در $\mathbb{A}^{۲}$ است که بر مجموعهٔ $\mathbb{A}^{۱} \setminus \{۰\}$ نگاشته می‌شود، که زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی از $\mathbb{A}^{۱}$ نیست.

تمرین ۱.۳.۱ فرض کنید $V \xrightarrow{F} W$ یک ریختپایی از چندگوناهای جبری آفین است. ثابت کنید F نسبت به توپولوژی زاریسکی پیوسته است.

تمرین ۲.۳.۱ نشان دهید که خم درجهٔ سوم تابدار V شکل ۵.۱، به‌کمک یک یکریختی صریح $V \longrightarrow \mathbb{A}^{۱}$ که تعریف می‌کنید، با خط آفین، یکریخت است. (راهنمایی: تمرین ۳.۲.۱ را ببینید).

۴.۱ بُعد

پدید آوردن یک نظریهٔ خوب برای بُعد مسئلهٔ چالش‌برانگیزی در هر شاخه از ریاضیات است، و هندسهٔ جبری از این امر مستثنا نیست. از سوی دیگر اکثر خوانندگان احساس خاصی نسبت به آنچه ما بُعدِ یک چندگونای جبری می‌نامیم، دارند. برای پرورانیدن دقیق این موضوع بهترین روش اتخاذ دیدگاهی است که جنبهٔ جبری بیشتری داشته باشد. در اینجا، ما تنها بعد را تعریف می‌کنیم و با اتکا به شهود خواننده و ارجاع وی به [۳۷، فصل I، بخش ۶] برای ریزه‌کاریهای تکنیکی، واقعیات اساسی دربارهٔ آن را مورد بحث قرار خواهیم داد.

ابتدا، یک مثال اساسی: بُعدِ فضای n بعدی آفین $\mathbb{A}^n$ برابر با n است.

وانگهی، منطقی به نظر می‌رسد که بعد زیرچندگونای $\mathbb{A}^3$ که با صفر قرار دادن چندجمله‌یی منفرد $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ تعریف می‌شود، دوگرفته شود، زیرا این چندگونا را می‌توان به صورت یک کرهٔ مختلط دوبعدی درنظر گرفت.

اگر سؤال شود که بعد زیرچندگونای $\mathbb{A}^3$ متشکل از اجتماع صفحهٔ yz و محور xها یعنی $V = \mathbb{V}(xy, xz)$ چیست؟، باید بگوییم این چندگونا دو مؤلفه دارد: صفحهٔ yz با بعد دو، و محور xها با بعد یک. در این حالت ما این قرارداد را می‌پذیریم، که بعد چندگونای V برابر ۲ است.

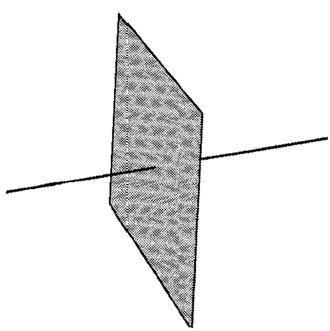
چندگوناهایی را که نتوان به صورت اجتماع غیرنمایان دو زیرچندگونا نوشت تحویلناپذیر می‌خوانند. صفحه yz و محور xها مؤلفه‌های تحویلناپذیر چندگونای V مذکور در فوق هستند.

اکنون بعد یک چندگونای جبری را دقیقاً تعریف می‌کنیم. بعد یک چندگونای V، $\dim V$، عبارت است از طول d، طولانی‌ترین زنجیر ممکن از زیرچندگوناهای تحویلناپذیر متمایز V،

$$V_d \supsetneq V_{d-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0$$

مثلاً، بعد خط $\mathbb{A}^1$ برابر ۱ است زیرا تنها زیرچندگوناهای سرهِ آن مجموعه‌های منفرده هستند: {نقطه} $\supsetneq$ {خط}. با این تعریف، بعدِ یک چندگونا همان بیشترین بعد مؤلفه‌های تحویلناپذیر آن است. چندگونا را متساوی‌البعد گوییم هر گاه بعدهای همهٔ مؤلفه‌های تحویلناپذیر آن یکی باشند. چندگونای شکل ۸.۱ متساوی‌البعد نیست.

متمم بعد چندگونای $V \subset \mathbb{A}^n$ عبارت است از عدد $\operatorname{codim} V = n - \dim V$ البته متمم بعد به فضای دربرگیرنده بستگی دارد: یک خط در صفحه دارای متمم بعد ۱ است، در حالی که در فضای سه‌بعدی متمم بعد ۲ دارد.



شکل ۸.۱ چندگونای دومؤلفه‌ای.

همچنین می‌توان از بعد V در نزدیکی یک نقطهٔ x، $\dim_x(V)$ صحبت کرد که x نقطه‌ای در V است. این درست همان طول طولانی‌ترین زنجیر از زیرچندگوناهای تحویلناپذیری است که به $\{x\}$ ختم می‌شوند:

$$V_d \supsetneq V_{d-1} \supsetneq \dots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = \{x\}$$

باید توجه داشت که

$$\dim V = \sup\{\dim_x V : x \in V\}$$

می‌توان ثابت کرد که بعد یک چندگونای تحویلناپذیر در نزدیکی همهٔ نقاط آن یکی است.

باید اذعان کرد که با تعریف ما از بعد، روشن نیست که بعد $\mathbb{A}^n$ برابر n باشد. ولی، با در نظر گرفتن یک زنجیر افزایشی از زیرچندگوناهای خطی $\mathbb{A}^n$، می‌توان به‌آسانی تحقیق کرد که بعد $\mathbb{A}^n$ حداقل برابر n است. برای اثبات اینکه بعد $\mathbb{A}^n$ دقیقاً برابر n است، ایجاد نظام جبری بیشتری نیاز است؛ در این مورد، [۳۷] را ببینید. دست کم در بخش ۳.۲ این موضوع را ثابت خواهیم کرد که بعد هر چندگونا، از جمله $\mathbb{A}^n$، متناهی است. البته با فرض اینکه بعد $\mathbb{A}^n$ برابر n است، روشن است که، بعد هر زیرچندگونای سرهٔ $\mathbb{A}^n$ حداکثر $n-1$ خواهد بود.

تعریف ما از بعد با مفهوم بعد برای خمینه‌ها سازگار است: معلوم می‌شود که هر چندگونا شامل یک زیرمجموعهٔ چگال باز زاریسکی از «نقاط هموار» است، که در آن نقاط، چندگونا ساختار یک خمینهٔ مختلط را دارد. در این گونه نقاط، تعریف ما از بعد، با تعریف بعد برای یک خمینهٔ مختلط مطابقت دارد. برهانی را می‌توان در کتاب شافارویچ [۳۷، کتاب ۱، بخش ۶، قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۵۴]، دید که خواننده می‌تواند به وجود آمدن دقیق‌تر نظریهٔ بعد را برای چندگوناهای جبری نیز ملاحظه نماید.

تمرین ۱۰۴۰۱۰ نشان دهید که بعد ناوردایی است برای ردهٔ یکریختی یک چندگونا. یعنی، چندگوناهای جبری آفین یکریخت، یک بعد دارند.

تمرین ۲۰۴۰۱۰ نشان دهید اگر $Y \longrightarrow X$ یک ریختپایی پوشای چندگوناهای جبری آفین باشد، بعد X حداقل برابر بعد Y است.

تمرین ۳۰۴۰۱۰ نشان دهید که یک ابررویه در $\mathbb{A}^n$ تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر معادلهٔ معرف آن، F، توانی از چندجمله‌یی تحویلناپذیر G باشد (یعنی، G را نتوان به صورت حاصلضرب دو چندجمله‌یی ناثابت نوشت).

۲

مبانی جبری

۱.۲ مروری اجمالی بر نظریه حلقه‌های تعویض‌پذیر

بیشتر توانایی و دقت هندسهٔ جبری از این واقعیت نشئت می‌گیرد که مسائل هندسی را می‌تواند به مسائل جبری محض برگرداند.

$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$، یعنی مجموعهٔ همه توابع چندجمله‌یی مختلط برحسب n متغیر را در نظر می‌گیریم. از آنجا که حاصل‌جمع دو چندجمله‌یی یک چندجمله‌یی است و حاصلضرب دو چندجمله‌یی یک چندجمله‌یی، این مجموعه به روالی طبیعی یک حلقهٔ تعویض‌پذیر تشکیل می‌دهد؛ چندجمله‌یی ثابت ۱، عنصر یکه نسبت به ضرب است و چندجمله‌یی ثابت ۰، عنصر بی‌اثر نسبت به جمع. در واقع، چون حلقهٔ $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ شامل توابع چندجمله‌یی ثابت است. این حلقهٔ چندجمله‌ییها، به طور طبیعی، یک $\mathbb{C}$ـجبر است، یعنی حلقه‌یی (تعویض‌پذیر) که $\mathbb{C}$ یک زیرحلقهٔ آن است.

رابطهٔ نزدیک شگفت‌انگیزی بین مطالعهٔ چندگونای جبری $\mathbb{A}^n$ و مطالعهٔ حلقهٔ $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

متشکل از توابع چندجمله‌یی بر آن وجود دارد. چنانکه به‌زودی خواهیم دید، زیرچندگوناهای $\mathbb{A}^n$ دقیقاً با برخی از انواع ایدِآلها در حلقهٔ $\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ متناظرند.

اکنون به یادآوری سریع تعاریف و مفاهیمی در جبر می‌پردازیم که در بخشهای بعد مورد نیاز خواهند بود. به خواننده توصیه می‌کنیم که این بخش را به طور اجمالی مرور و در صورت نیاز مجدداً به آن مراجعه کند.

از نظر ما، یک حلقه همواره شرکت‌پذیر، تعویض‌پذیر و شامل یکهٔ ضربی ۱ خواهد بود. نگاشت $R \xrightarrow{f} S$ بین حلقه‌ها یک همریختی حلقه‌یی یا به طور خلاصه یک نگاشت حلقه‌یی خوانده می‌شود اگر حاصل‌جمع و حاصلضرب و عنصر یکه را حفظ کند. زیرمجموعهٔ ناتهی $I \subset R$ از حلقهٔ R یک ایدِآل است هرگاه نسبت به جمع و ضرب در عناصر R بسته باشد. ایدِآل صفر $\{۰\}$ و ایدِآل یکهٔ R ایدِآلهای نمایان هستند.

مثال: مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ییها با جملهٔ ثابت صفر در حلقهٔ چندجمله‌ییهای $R = \mathbb{C}[x, y]$ یک ایدِآل است.

اشتراک تعدادی دلخواه از ایدِآلها یک ایدِآل است. بنابراین می‌توان از ایدِآل تولیدشده توسط یک مجموعهٔ $J \subset R$ صحبت کرد، که همان ایدِآل

$$(J) = \cap\{I \mid J \text{ شامل } R \text{ ایدِآلی است در } I\}$$

است. از اینجا، روشن می‌شود که ایدِآل (J) کوچکترین ایدِآلی است که شامل مجموعهٔ J است. همچنین می‌توانیم ایدِآل (J) تولیدشده توسط مجموعهٔ J، $J \subset R$، را به صورت گردایهٔ همهٔ ترکیبات Rـخطی متناهی از عناصر J، یعنی همهٔ عناصر به شکل $r_۱ j_۱ + \ldots + r_n j_n$ که $r_i \in R$ و $j_i \in J$، تصور کنیم.

یک ایدِآل I متناهی مولد خوانده می‌شود هرگاه یک مجموعهٔ متناهی $J = \{j_۱, \ldots, j_n\} \subset R$ وجود داشته باشد که I را تولید کند. در این صورت می‌نویسیم $I = (J) = (j_۱, \ldots, j_n)$.

مثال: عناصر ایدِآل $I \subset \mathbb{C}[x, y]$ متشکل از چندجمله‌ییها با جملهٔ ثابت صفر، به صورت $xP(x, y) + yQ(x, y)$ هستند که $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$. پس ایدِآل I توسط چندجمله‌ییهای x و y تولید شده است؛ و می‌نویسیم $I = (x, y)$.

پیشنگارهٔ هر ایدِآل تحت یک نگاشت حلقه‌یی یک ایدِآل است. به‌ویژه، هستهٔ یک نگاشت حلقه‌یی $R \xrightarrow{f} S$، یعنی $f^{-۱}(\{۰\})$، یک ایدِآل است.

- یک ایدِآل m، $m \subsetneq R$، وقتی ماکسیمال است که تنها ایدِآل شامل آن و نامساوی با خود آن، فقط ایدِآل واحد R باشد.

- یک ایدِآل $\mathfrak{p}$، $\mathfrak{p} \subset R$، زمانی اول خوانده می‌شود که فقط وقتی $fg \in \mathfrak{p}$، که یا $f \in \mathfrak{p}$ یا $g \in \mathfrak{p}$.

- یک ایدِآل I، $I \subset R$، زمانی رادیکال خوانده می‌شود که با رادیکال خود برابر باشد، که رادیکال ایدِآل I به صورت

$$\sqrt{I} := \{f \in R | f^n \in I \ \text{،}n > \circ \text{ برای مقداری از}\}$$

تعریف می‌شود.

اگر I یک ایدِآل R باشد، مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های $R/I = \{[x] = x + I | x \in R\}$ با عملهایِ طبیعیِ $[x] + [y] = [x + y]$ و $[x][y] = [xy]$، یک حلقه تشکیل می‌دهد. نگاشت پوشای متعارف $R \longrightarrow R/I$ هر عنصر x را به هم‌مجموعهٔ متناظرش، یعنی $[x]$ می‌فرستد. هستهٔ این نگاشت ایدِآل I است.

از آنجا که نگاشت پوشای متعارف $R \xrightarrow{\pi} R/I$ یک همریختی است، $\pi^{-1}(J)$ پیشنگارهٔ هر ایدِآل J در R/I، ایدِآلی است از R شامل I. از سوی دیگر، π هر ایدِآل K در R را که شامل I باشد بر یک ایدِآل در حلقهٔ خارج قسمت می‌نگارد. بنابراین، بین ایدِآلهای حلقهٔ خارج قسمت و ایدِآلهای R که شامل I هستند یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک وجود دارد:

$$\{\text{ایدِآلهای } R \text{ که شامل } I \text{ هستند}\} \longleftrightarrow \{\text{ایدِآلهای } R/I\}$$

این نگاشت دوسویی ایدِآلهای ماکسیمال (به ترتیب، اول و رادیکال) را به ایدِآلهای ماکسیمال (به ترتیب اول و رادیکال) می‌برد.

در این کتاب، تقریباً همهٔ حلقه‌هایی که در نظر می‌گیریم، $\mathbb{C}$ـجبر خواهند بود. یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R زمانی یک $\mathbb{C}$ـجبر خوانده می‌شود که $\mathbb{C}$ زیرحلقهٔ آن باشد. هر $\mathbb{C}$ـجبر هم، خود یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است، که جمع بردارها همان جمع در R است و ضرب یک اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ و یک بردار $r \in R$، با ضرب این عناصر در R تعریف می‌شود.

می‌توانیم مفاهیمی را در $\mathbb{C}$ـجبرها که مشابه آنها در حلقه‌ها و ایدِآلها آمده‌اند، تعریف کنیم:

- $\mathbb{C}$ـزیرجبر تولیدشده توسط زیرمجموعهٔ J در یک $\mathbb{C}$ـجبر R چنین است:

$$\cap\{A | J \subset A \text{ و } R \text{ یک } \mathbb{C}\text{ـزیرجبر } A\}$$

این کوچکترین $\mathbb{C}$ـزیرجبر شامل J است. $\mathbb{C}$ـزیرجبر تولیدشده توسط J متشکل از همهٔ عناصر R است که می‌توانند به صورت چندجمله‌ییهایی از عناصر J نوشته شوند که ضرایب آنها در $\mathbb{C}$ هستند.

- جبر R متناهی مولد است اگر توسط یک مجموعهٔ متناهی J در R تولید شود. برای مثال، حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x,y]$ یک $\mathbb{C}$ـجبر است چون شامل زیرحلقهٔ $\mathbb{C}$ متشکل از توابع ثابت است، و $\mathbb{C}$ـجبر متناهی‌ـمولدی است که توسط x و y تولید شده است.
- اگر R و S دو $\mathbb{C}$ـجبر باشند، نگاشت

$$R \xrightarrow{\phi} S$$

یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری خوانده می‌شود هرگاه یک نگاشت حلقه‌یی باشد و روی $\mathbb{C}$ خطی، یعنی، $\phi(\lambda r) = \lambda\phi(r)$ به ازای هر λ در $\mathbb{C}$ و هر r در R.

مثالی از یک نگاشت حلقه‌یی که یک نگاشت $\mathbb{C}$ـجبری نیست، نگاشت مزدوج مختلط

$$\mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$$

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \longmapsto \bar{a_0} + \bar{a_1}x + \cdots + \bar{a_n}x^n$$

است، با اینکه این نگاشت معرف یک نگاشت $\mathbb{R}$ـخطی است.

هر نگاشت $\mathbb{C}$ـجبری توسط نگاره‌های مجموعه‌یی از مولدهای $\mathbb{C}$ـجبر، معین می‌شود. مثلاً، نگاشت $\mathbb{C}$ـجبری

$$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^2+y^3)} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[z]$$

توسط نگاره‌های مولدهای x و y از $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^3)$، به طور کامل معین می‌شود. مثلاً، ϕ با داده‌های $\phi(x) = z^3$ و $\phi(y) = -z^2$ مشخص خواهد شد. باید توجه داشت که نگاره‌های مولدهای $\mathbb{C}$ـجبر نمی‌توانند اختیاری باشند: این نگاره‌ها باید در همان رابطه‌هایی صدق کنند که مولدها در آنها صدق می‌کنند.

تمرین ۰۱۰۱۰۲ ثابت کنید که هر ایدِآل ماکسیمال اول است، و هر ایدِآل اول رادیکال. همچنین ثابت کنید که رادیکال یک ایدِآل I، $\sqrt{I}$، یک ایدِآل است.

تمرین ۰۲۰۱۰۲ ثابت کنید که یک ایدِآل $\mathfrak{m}$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر $R/\mathfrak{m}$ یک میدان باشد. نشان دهید که یک ایدِآل P اول است اگر و تنها اگر حلقهٔ R/P یک حوزه باشد، یعنی، R/P دارای این ویژگی باشد که اگر $xy = 0$، آنگاه یا $x = 0$ یا $y = 0$.

تمرین ۰۳.۱.۲ فرض می‌کنیم I یک ایدِآل S است. نشان دهید که هر نگاشت حلقه‌یی $\sigma : R \longrightarrow S$ یک همریختی یک‌ـبه‌ـیک از حلقه‌ها را القا می‌کند: $R/\sigma^{-1}(I) \longrightarrow S/I$ از اینجا نتیجه بگیرید که اگر I اول باشد، $\sigma^{-1}(I)$ نیز اول است.

تمرین ۰۴.۱.۲ حلقهٔ R تحویل‌یافته است اگر برای هر $f \in R$ و هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f^n = 0 \Longleftrightarrow f = 0$$

یعنی، R تحویل‌یافته است اگر هیچ عضو پوچتوان غیرصفر نداشته باشد. ثابت کنید حلقهٔ R تحویل‌یافته است اگر و تنها اگر ایدِآل صفر رادیکال باشد.

تمرین ۰۵.۱.۲ ثابت کنید که حلقهٔ خارج قسمت R/I تحویل‌یافته است اگر و تنها اگر I یک ایدِآل رادیکال باشد.

تمرین ۰۶.۱.۲ فرض کنید R یک $\mathbb{C}$ـجبر و I ایدِآلی در R باشد. نشان دهید که نگاشت پوششی متعارف $R \longrightarrow R/I$ یک نگاشت $\mathbb{C}$ـجبری است.

۲.۲ قضیهٔ پایهٔ هیلبرت

با اینکه هر چندگونای جبری آفین مجموعهٔ صفر مشترک تعدادی دلخواه از چندجمله‌ییها تعریف می‌شود، در واقع، تعداد این چندجمله‌ییها را در هر مورد می‌توان متناهی گرفت. این مطلب از ویژگی مهم نوتری برای حلقهٔ چندجمله‌ییها نتیجه می‌شود.

تعریف: حلقهٔ R را نوتری گویند هرگاه هر ایدِآل آن متناهی مولد باشد.

قضیهٔ پایهٔ هیلبرت: اگر R حلقه‌یی نوتری باشد، آنگاه حلقهٔ چندجمله‌ییهای یک‌متغیره روی R، $R[x]$، نیز نوتری است. بیان جزئیات برهان زیر به عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود.

خلاصهٔ برهان: ایدِآل دلخواه J را در $R[x]$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $I_i \subset R$ ایدِآل متشکل از عضوهای $a_i \in R$ باشد که a_i ضریب پیشرو یک چندجمله‌یی درجهٔ i، $a_ix^i + \cdots + a_1x + a_0 \in J$ است. ایدِآلهای $I_i \subset R$ تشکیل یک زنجیر صعودی $I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ را می‌دهند. بنابر ویژگیِ نوتریِ R (تمرین انتهای این بخش را ببینید)، سرانجام تساوی

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r = I_{r+1} = \cdots$$

را داریم. به ازای $i = 0, \dots, r$، مولدهای a_{i1}، ...، a_{in} را برای I_i انتخاب و فرض می‌کنیم $F_{ij} \in J$ یک چندجمله‌یی درجهٔ i است که ضریب پیشرو آن a_{ij} است ($i = 0, \dots, r$ و $j = 1, \dots, n_i$). می‌توانیم با استقرا بر درجهٔ $f \in J$، ثابت کنیم که چندجمله‌ییهای F_{ij} ایدِآل J را تولید می‌کنند. □

قضیهٔ پایهٔ هیلبرت بلافاصله نتیجه می‌دهد که حلقهٔ چندجمله‌ییها روی یک حلقهٔ نوتریِ R خود نیز نوتری است. این موضوع، با استقرا روی تعداد متغیرها و استفاده از تساوی $R[x_1,\dots,x_n] = R[x_1,\dots,x_{n-1}][x_n]$ نتیجه می‌شود. به‌ویژه، $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$، یعنی حلقه اساسی هندسهٔ جبری، نوتری است.[1] برای این موضوع، کافی است بررسی کنیم که $\mathbb{C}$ نوتری است، که روشن است زیرا هر میدان تنها دو ایدِآل دارد، ایدِآل صفر و ایدِآل واحد (که توسط ۱ تولید می‌شود).

حال به یک کاربرد مهم می‌پردازیم. یک چندگونای جبری آفین V را در $\mathbb{A}^n$ در نظر می‌گیریم. می‌گوییم که مجموعهٔ

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] | f(x) = 0 \text{ ،} x \in V \text{ برای هر}\}$$

یک ایدِآل از $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ است. زیرا، اگر f و g هر دو بر V صفر شوند آنگاه به‌روشنی دیده می‌شود که $f + g$ بر V صفر می‌شود؛ همچنین، اگر f بر V صفر شود، و r یک چندجمله‌یی دلخواه باشد، rf بر V صفر می‌شود. بنابراین $\mathbb{I}(V)$ یک ایدِآل است.

حال، طبق تعریف، V در $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ قرار دارد. از سوی دیگر، به‌آسانی دیده می‌شود که $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ نیز در V قرار دارد. زیرا، اگر $x \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$، آنگاه برای هر $f \in \mathbb{I}(V)$، $f(x) = 0$، ولی چون V به صورت صفر مشترک چندجمله‌ییهایی مانند $\{F_i\}_{i \in I}$ تعریف شده است، به‌آسانی دیده می‌شود که $F_i \in \mathbb{I}(V)$، و لذا، x در مجموعهٔ صفر مشترک چندجمله‌ییهای F_i قرار دارد. بنابراین، به ازای هر چندگونای آفین V در $\mathbb{A}^n$ داریم

$$\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$$

حال می‌توانیم مشاهدات خود را کنار هم گذاشته و نتیجه بگیریم که هر چندگونای جبری را می‌توان به صورت مکان صفر مشترک تعدادی متناهی از چندجمله‌ییها بیان کرد. از آنجا که $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ نوتری است، ایدِآل $\mathbb{I}(V)$ متشکل از چندجمله‌ییهایی که روی $V \subset \mathbb{A}^n$ صفر می‌شوند متناهی مولد است، مثلاً

$$\mathbb{I}(V) = (F_1, \dots, F_r)$$

۱. در نظریهٔ جبری اعداد، یک حلقهٔ نوتری اساسیِ مشابه وجود دارد که حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است.

لذا طبق توضیحات بالا،

$$V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}((F_1, \ldots, F_r)) = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_r)$$

و V مجموعهٔ صفر مشترک F_1، ...، F_r است که یک گردایهٔ متناهی از چندجمله‌ییهاست.

این واقعیت که هر چندگونای جبری آفین را می‌توان با تعدادی متناهی از چندجمله‌ییها بیان کرد، واقعیتی است مهم و مفید.

نکات تاریخی: نظریهٔ ناورداها، مطالعهٔ چندجمله‌ییهایی که بر اثر عمل گروهی از تبدیلات خطی واقع در $\mathbf{GL}(n)$ ناوردا می‌مانند، توجه هیلبرت را به خود جلب کرده بود. قضیهٔ پایه به متناهی مولد بودن چندجمله‌ییهای ناوردا بر اثر عمل یک گروه متناهی اشاره داشت؛ رجوع کنید به [۹، بخش ۱.۴.۱]. این موضوع در زمانی که مقالهٔ هیلبرت در ۱۸۹۰ منتشر شد، مسئلهٔ محوری در نظریهٔ ناورداها به حساب می‌آمد. سخنرانیهای درسی هیلبرت هنوز هم، مرجع خوبی برای آشنایی با نظریهٔ ناورداها هستند [۲۳].

از آنجا که در نظریهٔ ناورداها عمدتاً محاسبهٔ صریح پایه مورد توجه بود، برهان غیرسازندهٔ هیلبرت بحث‌انگیز بود. پاول گوردان، کارشناس پیشگام آن زمان در نظریهٔ ناورداها، به اعتراض گفته بود، «این ریاضیات نیست، این الهیات است!» وقتی هیلبرت نظریات خود را بهبود بخشیده بود تا روشی پدید آورد که بتواند (از لحاظ نظری) برای محاسبهٔ مولدها به کار رود، گوردان مجبور به تسلیم شده گفته بود، «الهیات نیز مزایای خود را دارد». کتاب سرگرم‌کنندهٔ زندگینامهٔ هیلبرت اثر رید را ببینید [۳۵].

این مسئله را که آیا حلقهٔ ناورداها برای هر گروه G متناهی مولد است یا نه، هیلبرت در سخنرانی معروف خود در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان ۱۹۰۰ مطرح ساخته بود. این مسئله، به عنوان چهاردهمین مسئلهٔ هیلبرت شهرت یافته، و تا اواخر دههٔ پنجاه بی‌پاسخ مانده بود، تا اینکه ناگاتا حلقه‌یی از ناورداها پیدا کرد که متناهی مولد نبود.

روش هستی‌شناختی که هیلبرت پیش گرفته بود، ضربهٔ سنگینی به جبر محاسباتی وارد کرد، زیرا ریاضیدانان به سرعت به روشهای مجردتر روی آوردند. با ابداع رایانه، در این اواخر روشهای محاسباتی جایگاه خود را در روند کلی تحقیقات ریاضی باز یافته است. برای یک مقدمهٔ جالب در این مبحث، رجوع کنید به [۵] و کتاب همراه آن [۶].

تمرین ۱.۲.۲. نشان دهید که یک حلقهٔ R نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیر اکیداً صعودی از ایدآلهای آن، $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$، متناهی باشد.

تمرین ۲.۲.۲. نشان دهید هر چندگونای جبری آفین اشتراک تعدادی متناهی ابررویه است.

تمرین ۳۰۲۰۲۰ فرض می‌کنیم S_3، گروه جایگشتهای سه حرف، بر حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ از راه جایگشت متغیرها عمل می‌کند. حلقهٔ چندجمله‌ییهای ناوردا را به دست آورید.

۳۰۲ قضیهٔ صفرهای هیلبرت

اینک به مطالعهٔ یک قضیهٔ اساسی در هندسهٔ جبری، قضیهٔ صفرهای هیلبرت، می‌پردازیم.

قبلاً دیده‌ایم که مجموعهٔ چندجمله‌ییهایی که در همهٔ نقاط یک چندگونای جبری آفین V صفر می‌شوند، در حلقهٔ چندجمله‌ییها یک ایدِآل تشکیل می‌دهند. لیکن، این ایدِآلها، از نوعی خاص هستند: این ایدِآلها رادیکال‌اند.[1] زیرا، اگر f یک چندجمله‌یی باشد که f^n بر V صفر شود، آنگاه به‌ازای هر $x \in V$ ، $f^n(x) = (f(x))^n = 0$. یعنی، $f(x)$ هم صفر می‌شود و f نیز بر V صفر است. این موضوع نشان می‌دهد که $\mathbb{I}(V)$، ایدِآل همهٔ چندجمله‌ییهای که بر V صفر می‌شوند، یک ایدِآل رادیکال است.

همچنین، دیده‌ایم که به ازای هر چندگونای جبری آفین V، $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$. قضیهٔ صفرهای هیلبرت بیان می‌کند که نگاشتهای $V \longmapsto \mathbb{I}(V)$ و $I \longmapsto \mathbb{V}(I)$ در واقع وارون یکدیگرند، حداقل وقتی که توجه خود را به ایدِآلهای رادیکال I محدود کنیم. این قضیهٔ مشهور اولین مورد در قاموس ریاضی است که ما را یاری می‌کند تا قضایای هندسی را به زبان جبری ترجمه کنیم.

قضیهٔ صفرهای هیلبرت: به ازای هر ایدِآل $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$،

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$$

به‌ویژه، اگر I رادیکال باشد، آنگاه

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = I$$

برهان: می‌توانید به هر کتاب در جبر تعویضپذیر، مثلاً [۹، ص ۱۳۴، و ص ۱۴۴ـ۱۳۲] یا کتابهای هندسهٔ جبری مثلاً [۱۷، ص ۵۷] مراجعه کنید. □

قضیهٔ صفرهای هیلبرت، به تناظر یک‌ـبه‌ـیک به شرح زیر اشاره دارد:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ایدِآلهای رادیکال در} \\ \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{چندگوناهای جبری} \\ \text{آفین در } \mathbb{A}^n \end{array} \right\}$$

---

۱. یادآوری می‌کنیم که ایدِآل I زمانی رادیکال است که $r^n \in I$ ایجاب کند که $r \in I$. بخش ۱.۲ را ببینید.

باید توجه داشت که اگر V یک زیرچندگونای W باشد، چندجمله‌ییهایی که بر W صفر می‌شوند، به اجبار بر روی V نیز صفر خواهند شد، لذا $\mathbb{I}(W) \subset \mathbb{I}(V)$. بنابراین، تناظر هیلبرت، ترتیب برگردان است.

این تناظر ترتیب برگردان که توسط قضیهٔ صفرهای هیلبرت داده شده اشاره بر این دارد که هر ایدِآل ماکسیمال در حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ایدِآل توابعی است که در نقطهٔ منفرد $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ صفر می‌شوند. به‌ویژه، هر ایدِآل ماکسیمالی شکل $\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ را دارد، و چندگونای متناظر، منفردهٔ $\mathbb{V}(\mathfrak{m}_a) = \{a\} = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \subset \mathbb{A}^n$ است. به عبارت دیگر، در قضیهٔ صفرهای هیلبرت، مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ با نقاط فضای آفین $\mathbb{A}^n$ یکی گرفته می‌شود.

قضیهٔ صفرهای هیلبرت ممکن است شکل چندبعدی قضیهٔ اساسی جبر تلقی شود. ایدِآلی که یک چندجمله‌یی یک‌متغیره پدید می‌آورد رادیکال است اگر و تنها اگر هیچ ریشهٔ مکرر نداشته باشد. قضیهٔ اساسی به معنی این واقعیت است که هر ایدِآل رادیکال در $\mathbb{C}[z]$ را مجموعهٔ صفر یک مولد آن به طور کامل معین می‌کند. قضیهٔ صفرهای هیلبرت حاکی از این است که هر ایدِآل رادیکال $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ را مجموعهٔ صفر آن، یعنی $\mathbb{V}(I)$، به طور کامل معین می‌سازد.

سؤال طبیعی که در مورد قضیهٔ صفرهای هیلبرت پیش می‌آید این است که آیا می‌توان آن را به شکلی «ثمربخش» بیان کرد. ایدِآل $I = (F_1, \ldots, F_r) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ و چندگونای متناظر آن $V = \mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^n$ را درنظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ صفرهای هیلبرت، $\sqrt{I} = \mathbb{I}(V)$. بنابراین، اگر برای هر $x \in V$، $g(x) = 0$، آنگاه برای عددی مانند $M > 0$ داریم $g^M \in I$. آیا می‌توان کران بالایی برای M، مثلاً برحسب درجهٔ چندجمله‌ییهای F_i، پیدا کرد؟ کوچکترین مقدار ممکن M که در حالت کلی جوابگو باشد چیست؟ تا همین اواخر، آنچه در مورد چنین «قضیهٔ صفرهای ثمربخش» شناخته شده بود، بسیار جزئی بوده است، لیکن در سال ۱۹۸۸، یانوش کولار یک جواب تقریباً قطعی به دست داده است. مثلاً، کولار نشان می‌دهد که اگر I توسط r چندجمله‌یی همگن[1] F_i از درجهٔ $d_i > 2$ تولید شده باشد، آنگاه

$$g \in \sqrt{I} \Longleftrightarrow g^M \in I$$

که $M \leq \prod_{i=1}^{r} d_i$. اگر $r < n$، این نتیجه «عالی» است: یعنی هیچ مقدار کوچکتر M در

۱. یک چندجمله‌یی همگن است اگر همهٔ جملات آن درجهٔ مساوی داشته باشند؛ در مورد اهمیت هندسی چندجمله‌ییهای همگن، بخش ۲.۳ را ببینید.

حالت کلی جوابگو نیست. کولار همچنین بهترین کران بالا برای M را وقتی $r \geq n$، به دست آورده است؛ رجوع کنید به [۲۶].

هندسهٔ جبری روی میدانهایی غیر از $\mathbb{C}$: هندسهٔ جبری برای مکانهای صفر چندجمله‌ییها روی میدانهایی غیر از $\mathbb{C}$ نیز به کار می‌رود. برای هر میدان دادهشدهٔ $\mathbb{K}$، می‌توانیم مجموعه‌های صفر چندجمله‌ییها را، که ضرایب آنها متعلق به $\mathbb{K}$ هستند، در $\mathbb{K}^n$ مطالعه کنیم. توپولوژی زاریسکی در $\mathbb{K}^n$ تعریف شده است. مجموعهٔ چندجمله‌ییهایی که روی یک چندگونا در $\mathbb{K}^n$ صفر می‌شوند، یک ایدِآل در $\mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_n]$ تشکیل می‌دهند، و این ایدِآل متناهی مولد است. بنابراین، اغلب اجزای اصلی نظام مورد بحث تغییر نمی‌کنند. لیکن، در مورد قضیهٔ صفرهای هیلبرت، دشواریهای جدی وجود دارند.

همانند قضیهٔ اساسی جبر، قضیهٔ صفرهای هیلبرت روی اعداد حقیقی برقرار نیست. برای مثال، می‌توان به آسانی بررسی کرد که ایدِآل $(x^۲ + ۱)$ در $\mathbb{R}[x]$ یک ایدِآل رادیکال است، زیرا $\mathbb{R}[x]/(x^۲ + ۱) \cong \mathbb{C}$ یک میدان است. مجموعهٔ صفر حقیقی این ایدِآل یعنی $\mathbb{V}(x^۲ + ۱)$، تهی است، بنابراین با مجموعهٔ صفر ایدِآل نمایان که توسط ۱ در $\mathbb{R}[x]$ تولید شده، یکی است. یعنی، دو ایدِآل رادیکال مختلف یک چندگونا را در $\mathbb{R}^n$ تعیین می‌کنند، قضیهٔ صفرهای هیلبرت برقرار نیست.

ولی قضیهٔ صفرهای هیلبرت برای چندگوناهایی که روی میدان جبری بسته تعریف شده باشند، برقرار است (یادآوری می‌کنیم که میدان $\mathbb{K}$ وقتی جبری بسته گفته می‌شود که هر چندجمله‌یی ناثابت با ضرایب در $\mathbb{K}$، یک ریشه در $\mathbb{K}$ داشته باشد). اگر $\mathbb{K}$ جبری بسته باشد، قضیهٔ صفرهای هیلبرت وجود یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین زیرچندگوناهای $\mathbb{K}^n$ و ایدِآلهای رادیکال حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_n]$ را مسلم می‌سازد. این امر حتی برای، مثلاً، میدانهای کمیابی نظیر $\bar{\mathbb{F}}_۲$، بستار جبری میدان دوعضوی، صادق است.

هندسهٔ جبری روی میدانهای ناجبری بسته (به‌ویژه $\mathbb{R}$) یک زمینهٔ تحقیقاتی مشکل و فعال عصر حاضر است. رجوع کنید، مثلاً، به [۲۸] و [۳۸].

علاوه بر این واقعیت که $\mathbb{C}$ جبری بسته است، ویژگی دیگر $\mathbb{C}$ که اغلب بسیار سودمند است، این است که $\mathbb{C}$ میدانی با مشخصهٔ صفر است، یعنی حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک زیرحلقهٔ $\mathbb{C}$ است. برای یک عدد اول p، وقتی گوییم یک میدان دارای مشخصهٔ p است که شامل میدان p عضوی $\mathbb{F}_p$ به عنوان یک زیرحلقه باشد؛ در غیر این صورت گوییم میدان دارای مشخصهٔ صفر است. میدان $\bar{\mathbb{F}}_۲$ که در بالا ذکر شد، دارای مشخصهٔ دو است. در این کتاب ما با میدانهای با

مشخصهٔ غیرصفر سروکار نخواهیم داشت، اگرچه گاهی به مواردی که، اگر میدان شامل اعداد صحیح نباشد، ممکن است مشکل‌ساز باشد، اشاره خواهیم کرد.

تمرین ۰۱.۳.۲ بررسی کنید که ایدِآلهای اول با چندگوناهای تحویلناپذیر متناظرند. (یادآوری می‌کنیم که چندگونای V زمانی تحویلناپذیر است که نتواند به اجتماع دو زیرچندگونای سره متمایز تجزیه شود.) بررسی کنید که ایدِآل (xy, xz) معرف یک چندگونای تحویلپذیر است و این ایدِآل رادیکال است ولی اول نیست.

تمرین ۰۲.۳.۲ نشان دهید که بعد هر چندگونای آفین عددی متناهی است.

تمرین ۰۳.۳.۲ نشان دهید که هر ایدِآل رادیکال I در حلقهٔ $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ اشتراک همهٔ ایدِآلهای ماکسیمال $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ است که شامل I هستند.

تمرین ۰۴.۳.۲ ثابت کنید که توپولوژی زاریسکی روی هر مجموعهٔ جبری آفین فشرده است: هر پوشش باز یک زیرپوشش متناهی دارد.

تمرین ۰۵.۳.۲ ثابت کنید که مکمل یک نقطه در $\mathbb{A}^n$ مجموعه‌یی است باز که نسبت به توپولوژی زاریسکی فشرده است.

تمرین ۰۶.۳.۲ نشان دهید که مجموعهٔ صفر تابع $y - e^x$ در $\mathbb{A}^2$ یک چندگونای جبری آفین نیست.

۴.۲ حلقهٔ مختصاتی

یکی از درون‌مایه‌های ریاضیات نوین این است که برای پی بردن به برخی اشیا، باید رده‌های طبیعی از توابع روی آنها را مطالعه کنیم. در توپولوژی، توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیک را مطالعه می‌کنیم، در هندسهٔ دیفرانسیل توابع هموار روی خمینه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، و در هندسهٔ مختلط به مطالعهٔ توابع تمامریخت روی خمینه‌های مختلط می‌پردازیم. در هندسهٔ جبری، چندگوناها توسط چندجمله‌ییها تعریف شده‌اند، و مناسبترین کار این است که توابع چندجمله‌یی روی آنها را مد نظر قرار دهیم.

فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{A}^n$ یک چندگونای جبری آفین است. برای هر چندجمله‌یی مختلط n متغیرهٔ داده‌شده، تحدید آن به V یک تابع $V \longrightarrow \mathbb{C}$ را تعیین می‌کند. با عملهای معمولی جمع و ضرب نقطه‌ای، این توابع به طور طبیعی $\mathbb{C}$ـجبر

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]|V$$

را تشکیل می‌دهند که حلقهٔ مختصاتی V نام دارد و با $\mathbb{C}[V]$ نمایش داده می‌شود. به‌ویژه، حلقهٔ مختصاتی فضای آفین $\mathbb{A}^n$ حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ است.

عضوهای $\mathbb{C}[V]$ تحدیدهای چندجمله‌ییها بر $\mathbb{A}^n$ به V هستند، ولی ما معمولاً آنها را با همان چندجمله‌یی اولیه نمایش می‌دهیم. این امر می‌تواند تا حدی سبب اشتباه شود، زیرا دو چندجمله‌یی متفاوت به‌راحتی می‌توانند تحدید واحدی به V داشته باشند. برای مثال، روشن است که چندجمله‌یی صفر و چندجمله‌یی $P(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ بر چندگونای $\mathbb{V}(x^۲ + y^۲ + z^۲) \subset \mathbb{A}^۳$ که با $P = ۰$ تعریف می‌شود تحدید واحدی دارند.

به‌روشنی دیده می‌شود که نگاشت تحدید معرف یک همریختی پوشای حلقه‌یی

$$\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[x_۱ \ldots, x_n]|V$$

است که هستهٔ آن دقیقاً ایدِآل توابع $\mathbb{I}(V)$ است که روی V صفر می‌شوند. بنابراین، حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$ با حلقهٔ

$$\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(V)$$

به طور طبیعی، یکریخت است. رده‌های هم‌ارزی در $\mathbb{C}[V]$ با توابع بر V متناظرند. هر ردهٔ هم‌ارزی معمولاً با نماینده‌ای نمایش داده می‌شود که یک چندجمله‌یی است مانند x، y، $x_۱$ یا $x^۲ + xy$.

گاهی تحدید یک چندجمله‌یی به شکلی نوشته می‌شود که مشخصهٔ چندجمله‌یی آن را از نظر می‌پوشاند. مثلاً، تابع $\frac{۱}{x}$ را که بر چندگونای $V = \mathbb{V}(xy - ۱) \subset \mathbb{A}^۲$ تعریف شده، در نظر می‌گیریم. چون در هر نقطه بر V، $xy = ۱$، روشن است که تابع $\frac{۱}{x}$ با تحدید تابع چندجمله‌یی y بر V یکی است.

مثال: مخروط $V = \mathbb{V}(x^۲ + y^۲ - z^۲)$ را در $\mathbb{A}^۳$ در نظر می‌گیریم. چون چندجمله‌یی $x^۲ + y^۲ - z^۲$ تحویلناپذیر است، یک ایدِآل اول و در نتیجه یک ایدِآل رادیکال تولید می‌کند. طبق قضیهٔ صفرهای هیلبرت، $\mathbb{I}(V)$ توسط چندجمله‌یی $x^۲ + y^۲ - z^۲$ تولید می‌شود. بنابراین، حلقهٔ مختصاتی مخروط مورد نظر، حلقهٔ خارج قسمتی $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^۲ + y^۲ - z^۲)$ است. معمولاً این حلقه را حلقهٔ $\mathbb{C}[x, y, z]$ مقید به رابطهٔ $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ می‌نامند، درست به این معنی که چندجمله‌یی $x^۲ + y^۲ - z^۲$ می‌تواند، هر جا که ظاهر شود، صفر تعبیر شود. برای مثال، در این حلقه داریم

$$x^۳ + ۲xy^۲ - ۲xz^۲ + x = ۲x(x^۲ + y^۲ - z^۲) + x - x^۳ = x - x^۳$$

درست همان گونه که هر چندگونای جبری آفین $\mathbb{C}$ جبر یکتایی (حلقهٔ مختصاتی آن) را معین می‌کند، هر ریختپایی از چندگوناهای آفین یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری یکتایی را بین $\mathbb{C}$ـجبرهای متناظر معین می‌کند.

در واقع، برای هر ریختپایی چندگوناهای جبری آفین مانند $V \xrightarrow{F} W$، یک نگاشت القایی طبیعی بین حلقه‌های مختصاتی به صورت

$$\mathbb{C}[W] \longrightarrow \mathbb{C}[V]$$

$$g \longmapsto g \circ F$$

وجود دارد که آن را پسکشی F گویند، که از ترکیب یک تابع چندجمله‌یی g بر W با F به دست می‌آید. بررسی این مطلب ساده است که پسکشی $g \circ F$ از یک تابع چندجمله‌یی g بر W، در واقع یک تابع چندجمله‌یی بر V است، زیرا نگاشت $V \xrightarrow{F} W$ خود با چندجمله‌ییها داده شده است، و ترکیب دو چندجمله‌یی، خود یک چندجمله‌یی است. این نکته نیز به‌آسانی دیده می‌شود که این نگاشت پسکشی معرف یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری از $\mathbb{C}[W]$ به $\mathbb{C}[V]$ است.

مثال: ریختپایی چندگونای جبری

$$\mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 y, x - z)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم (u, v) معرف مختصات در $\mathbb{A}^2$ باشد، پسکشی این ریختپایی نگاشت

$$\mathbb{C}[u, v] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y, z]$$

$$u \longmapsto x^2 y$$

$$v \longmapsto x - z$$

است. باید توجه داشت که این همریختی $\mathbb{C}$ـجبری با نگاره‌های مولدهای u و v کاملاً معین می‌شود. مثلاً چندجمله‌یی $u^2 + v^2$ در $\mathbb{C}[u, v]$ به چندجمله‌یی $(x^2y)^2 + (x - z)^3$ در $\mathbb{C}[x, y, z]$ نگاشته می‌شود.

مثال: نگاشت پسکشی تعمیم نگاشت دوگان در جبری خطی است. برای روشن کردن این مطلب، به یک ریختپایی F با مؤلفه‌های همگن خطی $F_1, \ldots, F_m$ توجه می‌کنیم. نگاشت F یک

نگاشت خطی $\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ است که ماتریس آن از ضرایب صورتهای خطی F_i ساخته می‌شود. عمل پسکشی برحلقهٔ مختصاتی را می‌توان به تابعکهای خطی (چندجمله‌ییهای درجه ۱) تحدید کرد. تحدید پسکشی F را با F^* نمایش می‌دهیم. در این صورت F^* معرف یک نگاشت فضاهای برداری $(\mathbb{C}^n)^* \longrightarrow (\mathbb{C}^m)^*$ است، و این موضوع نگاشت دوگان استانده در جبر خطی است.

تمرین ۰۱۰۴۰۲ ثابت کنید که حلقهٔ مختصاتی هر چندگونای جبری آفین یک $\mathbb{C}$ـجبر تحویل‌یافته و متناهی مولد است. (یادآوری می‌کنیم که یک حلقه زمانی تحویل‌یافته گفته می‌شود که هیچ عضو پوچتوان غیر صفر نداشته باشد.)

تمرین ۰۲۰۴۰۲ یادآوری می‌کنیم که هر ایدِآل رادیکال در حلقهٔ $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ اشتراک همهٔ ایدِآلهای ماکسیمال شامل آن است. حال همین حکم را برای هر ایدِآل رادیکال در حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$، با در نظر گرفتن تناظر بین ایدِآلهای یک حلقهٔ خارج قسمت R/I و ایدِآلهای R که شامل I باشند، ثابت کنید.

۵۰۲ هم‌ارزی جبر و هندسه

بنابر آنچه دیده‌ایم هر چندگونای جبری آفین V، معرف $\mathbb{C}$ـجبر یکتایی است که حلقهٔ مختصاتی آن $\mathbb{C}[V]$ باشد، و هر ریختپایی چندگوناهای جبری آفین $W \longrightarrow V$ معرف یک همریختی یکتا از $\mathbb{C}$ـجبرهای $\mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[W]$ است که پسکشی آن ریختپایی باشد. ویژگی تعیین‌کنندهٔ هندسهٔ جبری این واقعیت چشمگیر است که نه تنها این هندسه «جبر» را معین می‌کند بلکه به‌عکس، جبر نیز هندسه را مشخص می‌کند. یعنی، برای هر $\mathbb{C}$ـجبر متناهی مولد R که عناصر پوچتوان غیر صفر نداشته باشد، یک چندگونای جبری آفین V وجود دارد، که با تقریب یکریختی به صورتی یکتا تعریف می‌شود، به طوری که R با حلقهٔ مختصاتی V یکریخت است. به‌علاوه، هر همریختی بین چنین $\mathbb{C}$ـجبرهایی، یک ریختپایی بین چندگوناهای متناظر را، به طور یکتا معین می‌کند. به بیان دیگر یک هم‌ارزی رسته‌یی بین رستهٔ چندگوناهای جبری آفین و رستهٔ $\mathbb{C}$ـجبرهای متناهی مولد تحویل‌یافته، وجود دارد. کار بعدی ما بیان این هم‌ارزی است.

در آغاز، باید توجه کرد که حلقهٔ مختصاتی یک چندگونای جبری آفین، $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(V)$، یک $\mathbb{C}$ـجبر تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد است. توابع $x_1, \ldots, x_n$ مولدهای $\mathbb{C}$ـجبر $\mathbb{C}[V]$ هستند، و چون $\mathbb{I}(V)$ یک ایدِآل رادیکال است، حلقهٔ خارج قسمت $\mathbb{C}[V]$ هیچ عنصر پوچتوان غیر صفر ندارد (یعنی، $\mathbb{C}[V]$ تحویل‌یافته است).

به‌عکس، هر $\mathbb{C}$ـجبر متناهی مولد تحویل‌یافتهٔ R با حلقهٔ مختصاتی یک چندگونا یکریخت

است. برای روشن شدن این مطلب، مجموعه‌یی متناهی از مولدهای R را به عنوان $\mathbb{C}$ـجبر در نظر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که R با $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ یکریخت است، که I هستهٔ همریختی پوشای

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R$$

$$x_j \longmapsto R \text{ مولد j\_ام }$$

است. چون حلقهٔ خارج قسمت $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ تحویل‌یافته است، ایدِآل I یک ایدِآل رادیکال $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ است. بنابراین، ایدِآل I معرف چندگونای $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ است که حلقهٔ مختصاتی آن با R یکریخت است.

به علاوه، همان‌طور که گفتیم هر ریختپایی چندگوناهای جبری آفین $V \longrightarrow W$، از راه پسکشی یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری $\mathbb{C}[W] \longrightarrow \mathbb{C}[V]$ به دست می‌دهد. به‌عکس چنانکه در زیر ثابت خواهیم کرد، هر همریختی $\mathbb{C}$ـجبری بین $\mathbb{C}$ـجبرهای متناهی مولد تحویل‌یافته، پسکشی یک ریختپایی یکتای تعریف‌شده بین چندگوناهای متناظر است.

قضیه: هر $\mathbb{C}$ـجبر متناهی مولد تحویل‌یافته با حلقهٔ مختصاتی یک چندگونای جبری آفین یکریخت است.

اگر $V \xrightarrow{F} W$ یک ریختپایی از چندگوناهای جبری آفین باشد، آنگاه پسکشی آن

$$\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^{\#}} \mathbb{C}[V]$$

یک همریختی بین حلقه‌های مختصاتی است.

اگر $R \xrightarrow{\sigma} s$ یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبرهای متناهی مولد تحویل‌یافته باشد، یک ریختپایی F بین چندگوناهای جبری آفین متناظر با R و S وجود دارد به طوری که σ پسکشی آن است. این ریختپایی با تقریب یکریختی یکتاست.

برهان: قسمت اول قضیه دقیقاً تکرار مطلب مورد بحث فوق است. آنچه باقی می‌ماند این است که ببینیم چگونه می‌توانیم از یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری مجرد یک ریختپایی از چندگوناهای جبری آفین بسازیم.

یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری $R \xrightarrow{\sigma} S$ را در نظر می‌گیریم. چون R و S دو $\mathbb{C}$ـجبر متناهی مولد تحویل‌یافته هستند، می‌توانیم نمایشهایی برای آنها انتخاب کرده و بنویسیم

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{I} \xrightarrow{\sigma} \frac{\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]}{J}$$

که I و J ایدِآلهای رادیکال هستند. ما در پی یک ریختپایی، یعنی، یک نگاشت چندجمله‌یی $\mathbb{A}^m \xrightarrow{F} \mathbb{A}^n$ هستیم که F زیرچندگونای $V = \mathbb{V}(J)$ از $\mathbb{A}^m$ را در چندگونای $W = \mathbb{V}(I)$ بنگارد. به علاوه، باید داشته باشیم $F^\# = \sigma$.

به ازای $j = 1, \ldots, n$، فرض می‌کنیم $F_j \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$ها چندجمله‌ییهایی باشند که نگارهٔ x_j، $\sigma(x_j)$، را تحت نگاشت $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/J$، نشان دهند. نگاشت چندجمله‌یی F را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{A}^m \xrightarrow{F} \mathbb{A}^n$$

$$a = (a_1, \ldots, a_m) \longmapsto (F_1(a), \ldots, F_n(a))$$

می‌گوییم که F چندگونای V را به W می‌نگارد. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم $a \in V = \mathbb{V}(J)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $F(a) \in W$. برای این منظور، کافی است بررسی کنیم که $F(a)$ در مجموعهٔ صفر هر چندجمله‌یی $G \in I$ قرار دارد. با استفاده از این واقعیت که $F_j = \sigma(x_j)$، به ازای هر $G \in I$ داریم،

$$\begin{aligned} G(F(a)) &= G(F_1(a), \ldots, F_n(a)) \\ &= G(\sigma(x_1)(a), \ldots, \sigma(x_n)(a)) \\ &= \sigma(G)(a) \end{aligned}$$

چون $G \in I$، پس G نشان‌دهندهٔ ردهٔ صفر در $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ است؛ بنابراین نگارهٔ آن $\sigma(G)$، تحت همریختی حلقه‌یی σ، باید ردهٔ صفر را در $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/J$ نشان دهد. به عبارت دیگر، $\sigma(G)$ که در J قرار دارد، ایدِآل همهٔ توابعی است که بر V صفر می‌شوند. حال برای $a \in V$، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $G \in I$، $\sigma(G)(a) = 0$، بنابراین، برای هر $G \in I$، $G(F(a)) = 0$. در نتیجه، $F(a) \in W = \mathbb{V}(I)$ و F چندگونای V را به W می‌نگارد. خواننده نباید برای تحقیق $F^\# = \sigma$ مشکلی داشته باشد.

انتخاب نمایندهٔ F_j برای $\sigma(x_j)$ اختیاری بوده است؛ و F_j را می‌توان با هر چندجمله‌یی F'_j در $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$ که همان ردهٔ هم‌ارزی را در $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]/J$ نمایش می‌دهد جایگزین کرد. چون تفاضل $F_j - F'_j$ در V صفر می‌شود، ریختپاییهای حاصل از $\mathbb{A}^m$ در $\mathbb{A}^n$ به یک ریختپایی در V تحدید می‌شوند.

بالاخره، این نکته را بیان می‌کنیم که ریختپایی اخیر با تقریب یکریختی یکتاست و در واقع، به محض اینکه نمایش جبرهای داده‌شدهٔ اولیه را به صورت

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{I}$$

تثبیت کنیم، ریختپایی مورد نظر یکتاست. هر مجموعهٔ دیگر از مولدهای جبرهای R و S ایدِآلهای متفاوتی از روابط (احتمالاً در تعداد متفاوتی از متغیرها) تولید خواهد کرد. بنابراین، چندگونای حاصل، V' و W' با V و W متفاوت (ولی یکریخت با آنها) خواهند بود، و همچنین است ریختپایی متناظر $W' \xrightarrow{F'} V'$. ولی، F با F' یکریخت است بدین معنی که نمودار زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ V' & \xrightarrow[F']{} & W' \end{array}$$

تحقیق مطلب اخیر را با دنبال کردن از راه تعاریف به خواننده واگذار می‌کنیم. □

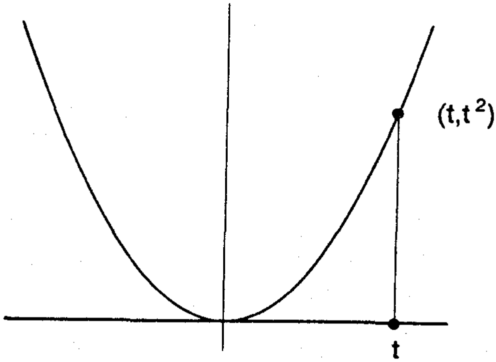
این قضیه نشان می‌دهد که چندگوناهای آفین و ریختپاییهای بین آنها اساساً با $\mathbb{C}$ـجبرهای تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد و همریختیهای بین آنها هم‌ارزند، تنها باید عوض شدن جهت سهمها مد نظر قرار گیرد. به عبارت دیگر، ردهٔ چندگوناهای جبری آفین با ردهٔ $\mathbb{C}$ـجبرهای تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد هم‌ارز است (یا این دو رده پاد-یکریخت‌اند، اگر بر جنبهٔ تعویض ترتیب این هم‌ارزی تأکید داشته باشیم). به‌روشنی دیده می‌شود که $(F \circ G)^{\#} = G^{\#} \circ F^{\#}$ هر وقت که این ترکیب قابل تعریف باشد، بنابراین تشکیل پسکشی فی حد ذاته نوعی «همریختی» با تعویض جهت است، که اصطلاحاً «تابعگون پادورد» خوانده می‌شود. این مطلب برای هم‌ارزی رده‌ها اساسی است.

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، می‌بینیم که دوچندگونا یکریخت‌اند اگر و تنها اگر حلقه‌های مختصاتی آنها یکریخت باشند. مثالهای بعدی سودمندی این مطلب را روشن می‌کنند.

مثال: دیده‌ایم که ریختپایی

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{V}(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2$$

$$t \longmapsto (t, t^2)$$



شکل ۱.۲ سهمی و خط یکریخت‌اند.

یک یکریختی است. شکل ۱.۲ را ببینید.

توجه کنید که پسکشی

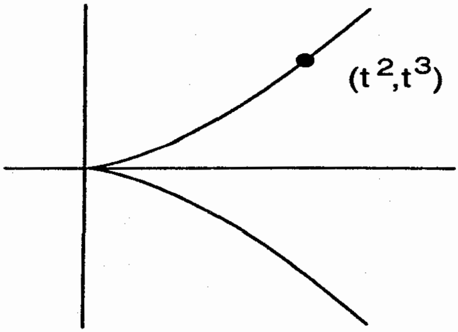
$$\mathbb{C}[x,y]/(y-x^{۲}) \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$
$$x \longmapsto t$$
$$y \longmapsto t^{۲}$$

پوشا و هستهٔ آن صفر است و لذا یک یکریختی جبری است. به روشی دیگر، می‌توان بررسی کرد که نگاشت تصویر بر مؤلفهٔ اول $(t,t^{۲}) \longmapsto t$ معرف ریختپایی وارون است.

مثال اخیر را باید با ریختپایی

$$\mathbb{A}^{۱} \longrightarrow \mathbb{V}(y^{۲}-x^{۳}) \subset \mathbb{A}^{۲}$$
$$t \longmapsto (t^{۲},t^{۳})$$

مقایسه کرد که دوسویی است ولی یکریختی نیست. در این مورد باید $t \in \mathbb{A}^{۱}$ را شیب یک خط $L(t)$ که از مبدأ می‌گذرد، تصور کنیم؛ خط $L(t)$ خم $\mathbb{V}(y^{۲}-x^{۳})$ را در نقطهٔ دیگر $(t^{۲},t^{۳})$ می‌بُرد. شکل ۲.۲ را ببینید.



شکل ۲۰۲ $\mathbb{V}(y^۲ - x^۳)$.

در اینجا پسکشی به صورت

$$\mathbb{C}[x,y]/(y^۲ - x^۳) \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$
$$x \longmapsto t^۲$$
$$y \longmapsto t^۳$$

خواهد بود که یک یکریختی $\mathbb{C}$ـجبری نیست، چون عضو t در نگاره نیست. بنابراین ریختپایی داده‌شده یک یکریختی از چندگوناها نیست. این موضوع معقول به نظر می‌رسد: اگر این ریختپایی یک یکریختی بین چندگوناها بود، وارون آن نیز یک یکریختی بود. در صورتی که، وارون آن $\frac{y}{x} \longrightarrow (x,y)$ به شکل یک چندجمله‌یی نیست.

تمرین ۰۱۰۵۰۲ نشان دهید که پسکشی $\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^{\#}} \mathbb{C}[V]$ یکـبهـیک است اگر و تنها اگر F غالب، یعنی، مجموعه نگارهٔ $F(V)$ در W چگال باشد.

تمرین ۰۲۰۵۰۲ نشان دهید که پسکشی $\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^{\#}} \mathbb{C}[V]$ پوشاست اگر و تنها اگر F معرف یک یکریختی بین V و یک زیرچندگونای جبری W باشد.

تمرین ۰۳۰۵۰۲ اگر $F = (F_۱, \ldots, F_n) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ یک یکریختی باشد نشان دهید که دترمینان ژاکوبی

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_۱}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial F_۱}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

یک چندجمله‌یی ثابت غیر صفر است. اینکه آیا عکس این مطلب نیز درست است یا نیست، معلوم نیست. این یک مسئلهٔ حل‌نشدهٔ معروفی است که حدس ژاکوبی نامیده می‌شود.

۶.۲ طیف یک حلقه

همان گونه که دیده‌ایم، قضیهٔ صفرهای هیلبرت به ما اجازه می‌دهد نقاط هر چندگونای جبری آفین V را با ایدِآلهای ماکسیمال حلقهٔ مختصاتی آن $\mathbb{C}[V]$ یکی بگیریم. حال می‌خواهیم توضیح دهیم که چگونه ایدِآلهای ماکسیمال یک حلقهٔ تعویض‌پذیر دلخواه را می‌توانیم به عنوان یک فضای توپولوژیکی که از جهات زیادی مشابه یک چندگوناست در نظر بگیریم.

طیف ماکسیمال یک حلقهٔ R مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال آن است:

$$\operatorname{maxSpec} R = \{\mathfrak{m} \subset R \mid \text{است } R \text{ یک ایدِآل ماکسیمال } \mathfrak{m}\}$$

یکی گرفتن یک چندگونای جبری آفین V با طیف ماکسیمال حلقهٔ مختصاتی آن $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V]$ عمیق‌تر از یک تناظر نظری‌ـمجموعه‌یی صرف است. می‌توانیم به شرح زیر، توپولوژی زاریسکی بر V را به یک توپولوژی بر $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V]$ منتقل کنیم: نقاط هر مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی $W \subset V$ با مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$، که شامل ایدِآل $\mathbb{I}(W)$ مربوط به W است، متناظرند. به عبارت دیگر، مجموعه‌های بستهٔ توپولوژی زاریسکی بر $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V]$ مجموعه‌هایی از ایدِآلهای ماکسیمال $\mathbb{C}[V]$ هستند که شامل ایدِآل مفروضی در $\mathbb{C}[V]$ باشند. با این نگرش توپولوژی زاریسکی بر $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V]$ بدون مراجعهٔ مستقیم به چندگوناها معین می‌شود.

به همین قیاس، یک ریختپایی $V \xrightarrow{F} W$ از چندگوناهای جبری را به عنوان نگاشت $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V] \xrightarrow{F} \operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[W]$ در نظر می‌گیریم. قضیهٔ صفرهای هیلبرت اجازه می‌دهد که نگاشت F را از پسکشی آن $\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^{\#}} \mathbb{C}[V]$ بازسازی کنیم. در واقع، اگر یک نقطهٔ p از V داده شده باشد آن را به عنوان یک ایدِآل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ در $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[V]$ به حساب می‌آوریم. در این صورت نگارهٔ p تحت تأثیر F به ایدِآل ماکسیمال $(F^{\#})^{-1}(\mathfrak{m})$ در $\operatorname{maxSpec}\mathbb{C}[W]$ نظیر می‌شود، که خواننده باید آن را تحقیق کند. بنابراین، هر همریختی $R \xrightarrow{\sigma} S$ از $\mathbb{C}$ـجبرهای تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد نگاشتی از طیفهای وابسته را به صورت

$$\operatorname{maxSpec}(S) \longrightarrow \max \operatorname{Spec}(R)$$

$$m \longmapsto \sigma^{-1}(\mathfrak{m})$$

القا می‌کند.

موفقیت حاصل از یکی گرفتن یک چندگونای جبری با مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال در یک حلقهٔ مناسب ما را ترغیب می‌کند تا بسط یک نظریهٔ هندسهٔ جبری را بر مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال یک حلقهٔ دلخواه پی‌ریزی کنیم.

به ازای هر حلقهٔ تعویضپذیر R، می‌توانیم طیف ماکسیمال آن $\mathrm{maxSpec}(R)$ را با تعریف مجموعه‌های بسته به صورت

$$\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}(R) | \mathfrak{m} \supset I\}$$

که I ایدِآلی در R است، به توپولوژی زاریسکی مجهز کنیم. بدین ترتیب یک فضای توپولوژیک به دست می‌آید، ولی متأسفانه، دقیقاً این آن چیزی نیست که ما می‌خواهیم. ما دوست داریم که تعمیم ما مشابه حالت فوق از آب درآید. مثلاً اگر $R \xrightarrow{\sigma} S$ یک همریختی حلقه‌یی باشد، انتظار داریم نگاشت

$$\mathrm{maxSpec}S \longrightarrow \mathrm{maxSpec}R$$

$$\mathfrak{m} \longmapsto \sigma^{-1}(\mathfrak{m})$$

نگاشتی خوشتعریف و پیوسته از فضاهای توپولوژیک باشد. اما متأسفانه، نگارهٔ وارون یک ایدِآل ماکسیمال بر اثر یک همریختی دلخواه حلقه‌یی لزوماً یک ایدِآل ماکسیمال نیست. شمول $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ مثالی از این نوع است. نگارهٔ وارون ایدِآل ماکسیمال $\{0\}$ در $\mathbb{Q}$، ایدِآل اول $\{0\}$ در $\mathbb{Z}$ است، که ماکسیمال نیست.

ولی، نگارهٔ وارون هر ایدِآل اول بر اثر یک همریختی دلخواه حلقه‌یی، یک ایدِآل اول است، واقعیت ساده‌ای که به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. این مطلب ما را به این فکر می‌اندازد که به جای پرداختن به مجموعهٔ ایدِآلهای ماکسیمال R، توجه خود را به مجموعهٔ بزرگتری شامل همهٔ ایدِآلهای اول معطوف کنیم.

تعریف: طیف یک حلقهٔ تعویضپذیر R، $\mathrm{Spec}R$، مجموعهٔ همهٔ ایدِآلهای اول آن است. طیف $\mathrm{Spec}R$ را با بیان مجموعه‌های بسته به صورت $\mathbb{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R | \mathfrak{p} \supset I\}$، که I ایدِآلی از R است، به یک توپولوژی (زاریسکی) مجهز می‌کنیم. به این ترتیب، طیف حلقه به صورت یک فضای توپولوژیک درمی‌آید که طیف ماکسیمال را به عنوان یک زیرفضای توپولوژیک در بر دارد.

طیف یک حلقه، وقتی به توپولوژی زاریسکی خود مجهز شده باشد، چیزی است که گروتندیک[1]

1. Grothendieck

آن را یک طرح آفین[۱] می‌خواند. نظریهٔ طرحها انقلابی در هندسهٔ جبری به وجود آورد، و گروتندیک به علت این مجموعهٔ عظیم کار، در سال ۱۹۶۶ به دریافت جایزه فیلدز نائل شد. دانشجویان جدی هندسهٔ جبری در نهایت باید با مجلات حجیم «اصول هندسهٔ جبری»[۲] که با عبارت سادهٔ «EGA» شناخته شده، و در آن نظریهٔ طرحها توسعه یافته است دست‌وپنجه نرم کنند.

یکی از اولین و طبیعی‌ترین طرحها، از در نظر گرفتن فضای ایدِآلهای ماکسیمال یک $\mathbb{C}$-جبر متناهی مولد، ولی بدون فرض تحویل‌یافتگی، حاصل می‌شود. حتی وقتی اساساً می‌خواهیم چندگوناها را مطالعه کنیم غالباً به بررسی طرحهایی، حداقل از نوع ویژهٔ اخیر، کشانیده می‌شویم. در این کتاب، به منظور هماهنگی با فرهنگ ریاضی، گاه به گاه، اشاره‌ای به طرحهایی از این قبیل خواهیم کرد، ولو ممکن است موضوع اصلی بحث ما نباشد.

در نظریهٔ جبری اعداد، مفهوم طرح را می‌توان در مطالعهٔ حلقه‌هایی مانند $R = \mathbb{Z}[x, y, z]/(x^n + y^n - z^n)$ به کار برد. بررسی $\mathrm{Spec}R$ ما را به مطالعه هندسهٔ حسابی، و در نهایت، به برهان تحسین‌برانگیز وایلز برای آخرین قضیهٔ فرما هدایت می‌کند. این امر که هندسهٔ جبری با داشتن نقشی اساسی در مطالعهٔ رویه‌های ریمانی، در مسائل حسابی نیز کاربرد دارد، دستاورد بزرگی در یکپارچگی ریاضیات است.

تمرین ۲.۶.۰۱ ثابت کنید که با گرفتن مجموعه‌های بسته به شکل $\mathbb{V}(I)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}R | \mathfrak{p}\supset I\}$، که I ایدِآلی در حلقهٔ R است، می‌توان به طیف یک حلقهٔ تعویضپذیر $\mathrm{Spec}R$ یک ساختار فضای توپولوژیک داد.

تمرین ۲.۶.۰۲ ثابت کنید که یک نقطه در $\mathrm{Spec}R$ بسته است اگر و تنها اگر یک ایدِآل ماکسیمال باشد.

تمرین ۲.۶.۰۳ ثابت کنید که طیف ماکسیمال حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ دقیقاً از ایدِآلهای تولیدشده از اعداد اول تشکیل شده است $\mathrm{maxSpec}(\mathbb{Z}) = \{(۲), (۳), (۵), (۷), \ldots\}$.
ثابت کنید که تنها ایدِآل اول دیگر $\{۰\} = (۰)$، یک نقطهٔ چگال $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ است، یعنی، مشمول در هر مجموعهٔ باز ناتهی است. (البته مجموعهٔ منفردهٔ $\{(۰)\}$ فشرده است، ولی حال شما ثابت کرده‌اید به جای اینکه بسته باشد، در واقع چگال است.)

تمرین ۲.۶.۰۴ فرض می‌کنیم R حلقهٔ خارج قسمت $\mathbb{C}[x, y]/(x^۲)$ باشد. ثابت کنید که فضای

---

۱. به معنای دقیق کلمه، یک طرح آفین مجهز به «بافهٔ حلقه‌ها»ست (پیوست را ببینید)، ولی چون این داده‌های اضافی توسط حلقه به طور کامل معین می‌شود، نادیده گرفتن این مطلب، لغزش چندانی در اصطلاحات نیست.

2. Eléments de Géométrie Algébrique

توپولوژیک $\mathrm{maxSpec}R$ با $\mathbb{A}^1$ همسانریخت است. این مثال ویژگی یک طرح را آشکار می‌کند: لازم است $\mathrm{maxSpec}R$ را به صورت $\mathbb{V}(x^2) \subset \mathbb{A}^2$، محور yها که «دو بار به حساب می‌آید»، تصور کرد، زیرا به جای ایدِآل رادیکال تولیدشده از x، توسط x^2 تعیین شده است.

تمرین ۲.۶.۵.۰ عدد مختلط $t \in \mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. طرح $\mathrm{Spec}\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(x(x-t))}$ را شرح دهید. این طرح چگونه با t تغییر می‌کند؟ وقتی t به صفر میل می‌کند چه پیش می‌آید؟

۳

چندگوناهای تصویری

۱۰۳ فضای تصویری

فضای آفین $\mathbb{A}^n$ یک توسیع فشردهٔ طبیعی دارد که همان فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ است که با افزودن یک نقطهٔ بینهایت دور در هر جهت، به دست می‌آید. هدف این فصل معرفی فضای تصویری و چندگوناهای تصویری و تعبیر آنها به صورت توسیع فشردهٔ طبیعی چندگوناهای آفین است.

تعریف: فضای تصویری n بعدی، که با $\mathbb{P}^n$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای یک‌بعدی فضای برداری $\mathbb{C}^{n+1}$ است. یعنی، $\mathbb{P}^n$ مجموعهٔ همهٔ خطوط مختلط گذرنده از مبدأ در $\mathbb{C}^{n+1}$ است.

البته، فضای n بعدی تصویری را می‌توان روی هر میدان $\mathbb{K}$ به صورت مجموعهٔ زیرفضاهای یک‌بعدی فضای برداری $\mathbb{K}^{n+1}$ تعریف کرد. اگرچه فضاهای تصویری روی میدانهای غیر از $\mathbb{C}$ در هندسهٔ جبری حائز اهمیت هستند، حتی اگر هدف مطالعهٔ چندگوناهای مختلط باشد، ولی برای عینیت‌بخشی به مطلب توجه خود را به حالتی معطوف خواهیم کرد که میدان زمینه میدان اعداد مختلط است.

فضای تصویری n بعدی را می‌توان به صورت مجموعهٔ خارج قسمت

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

تعبیر کرد که $\sim$ معرف رابطهٔ هم‌ارزی نقاط واقع بر یک خط گذرنده از مبدأ است:

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$$

اگر و تنها اگر یک عدد مختلط و غیر صفر λ وجود داشته باشد به طوری که

$$(y_0, \ldots, y_n) = (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$$

هر نقطه در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ را می‌توان به صورت ردهٔ هم‌ارزی

$$[(x_0, \ldots, x_n)] = \{(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) | \lambda \in \mathbb{C}\}$$

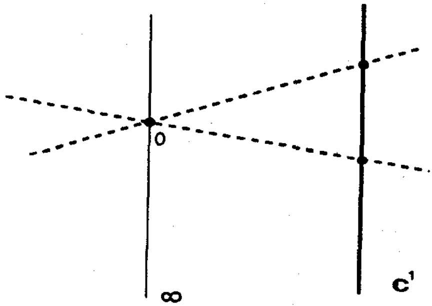
تلقی کرد که در این نمادگذاری باید حداقل یکی از مختصات $x_0, \ldots, x_n$ ناصفر باشد. همانند هر ردهٔ هم‌ارزی، یک نقطهٔ $p \in \mathbb{P}^n$ معمولاً با یکی از نماینده‌هایش نمایش داده می‌شود. برای تمیز یک ردهٔ هم‌ارزی از نمایندهٔ آن رده، از گذاردن علامت (:) بین مختصات نقطهٔ نماینده استفاده می‌کنیم و آنها را مختصات همگن نقطه در فضای تصویری می‌نامیم. همچنین در نوشتن ردهٔ هم‌ارزی، به جای پرانتز، از کروشه استفاده می‌کنیم،

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$$

این نمادگذاری مؤید این است که مختصات همگن با تقریب یک مضرب عددی غیر صفر تعریف شده‌اند.

می‌توانیم فضای تصویری را به صورت فضای آفین n بعدی مختلط معمولی همراه با «یک نقطهٔ بینهایت دور در هر جهت» تصور کنیم. این موضوع در مثالهای زیر نشان داده شده است.

مثال: فضای تصویری یک‌بعدی $\mathbb{P}^1$ از همهٔ خطوط گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{C}^2$ تشکیل شده است. با تثبیت یک خط مرجع—خطی مختلط که از مبدأ نگذرد—می‌توانیم یک نماینده برای هر نقطهٔ p در $\mathbb{P}^1$ انتخاب کنیم، که همان نقطه یکتایی است که از تقاطع خط مرجع با خط معرف p گذرنده از مبدأ به دست می‌آید. تنها یک نقطه در $\mathbb{P}^1$ چنین نماینده‌ای نخواهد داشت، که همان نقطهٔ فضای تصویری متناظر با تنها خط گذرنده بر مبدأ و موازی با خط مرجع ماست. طبیعی است



شکل ۱.۳ خط تصویری $\mathbb{P}^1$.

که این نقطهٔ اضافی در فضای تصویری را نقطهٔ بینهایت بنامیم. با این قرارداد $\mathbb{P}^1$ با کرهٔ ریمانی یکی گرفته می‌شود:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

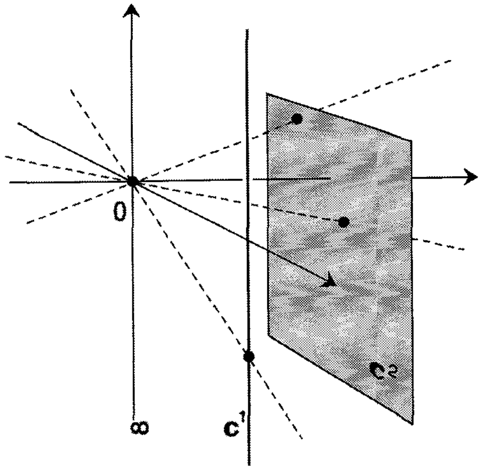
$$[x_0 : x_1] \longmapsto \begin{cases} x_1/x_0, & \text{اگر } x_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{اگر } x_0 = 0 \end{cases}$$

در شکل ۱.۳، دو نقطهٔ متمایز از $\mathbb{P}^1$ با خطهای نقطه‌چین مشخص شده‌اند؛ این نقطه‌ها را می‌توان با دو نقطهٔ تقاطع علامتگذاری‌شده بر خط سیاه ثابت $\mathbb{C}^1$ نیز نشان داد. خطی که با نماد ∞ مشخص شده نیز نقطه‌ای در $\mathbb{P}^1$ است، که آن را به صورت «نقطهٔ بینهایت» بر خط مختلط $\mathbb{C}^1$ قلمداد می‌کنیم.

عین همین کار را می‌توانیم برای صفحهٔ تصویری انجام دهیم. شکل ۲.۳ را ببینید. باز، با تثبیت یک صفحهٔ مرجع که از مبدأ نمی‌گذرد، یک نقطهٔ عادی در $\mathbb{P}^2$ نمایندهٔ یکتایی در صفحهٔ مرجع خواهد داشت. موارد استثنائی مربوط به خطوطی در $\mathbb{C}^3$ می‌شوند که از مبدأ می‌گذرند و در صفحهٔ موازی با صفحهٔ ثابت مرجع واقع‌اند. این نقاط بینهایت رونوشت دیگری از $\mathbb{P}^1$ می‌سازند. بنابراین $\mathbb{P}^2$ را می‌توانیم به صورت یک صفحهٔ مختلط معمولی همراه با یک رونوشت $\mathbb{P}^1$ در بینهایت تصور کنیم. یعنی،

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

مثلاً، اگر مختصات x_0، x_1، ...، x_n را برای $\mathbb{C}^{n+1}$ طوری در نظر بگیریم که صفحهٔ $x_0 = 1$ صفحه مرجع باشد، این کار نقطهٔ $[x_0 : x_1 : x_2]$ را به نقطهٔ $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ از صفحهٔ مختلط می‌برد، وقتی $x_0 \neq 0$، و به نقطهٔ $[x_1 : x_2]$ از خط تصویری می‌برد وقتی که $x_0 = 0$.



شکل ۲۰۳ صفحه تصویری $\mathbb{P}^۲$.

با تعمیم این مفهوم به بعد دلخواه، خواهیم داشت

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-۱}$$

$$[x_۰ : x_۱ : \ldots : x_n] \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{x_۱}{x_۰}, \ldots, \frac{x_n}{x_۰}\right), & x_۰ \neq ۰ \text{ اگر } \\ [x_۱ : \ldots : x_n], & x_۰ = ۰ \text{ اگر } \end{cases}$$

در این نگاشت، مجموعهٔ $U_۰$ در $\mathbb{P}^n$ متشکل از نقاطی را که مختص $x_۰$ آنها ناصفر است، با ابرصفحهٔ $x_۰ = ۱$ در $\mathbb{C}^{n+۱}$ یکی می‌گیریم، یعنی:

$$[x_۰ : x_۱ : \ldots : x_n] = \left[۱ : \frac{x_۱}{x_۰} : \ldots : \frac{x_n}{x_۰}\right] \longmapsto \left(۱, \frac{x_۱}{x_۰}, \ldots, \frac{x_n}{x_۰}\right)$$

که البته می‌توان آن را با $\mathbb{C}^n$ یکی گرفت این رونوشت $\mathbb{C}^n$ را می‌توان بخش «متناهی» $\mathbb{P}^n$ تصور کرد. در این صورت، نقاط باقیمانده، که در آنها $x_۰ = ۰$، «نقاط بینهایت» نامیده می‌شود؛ این نقاط خطوط گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{C}^{n+۱}$ هستند که با ابرصفحهٔ مرجع $x_۰ = ۱$ موازی‌اند؛ در نتیجه، این نقاط به طور طبیعی یک فضای تصویری $(n-۱)$بعدی $\mathbb{P}^{n-۱}$ تشکیل می‌دهند.

انتخاب $x_۰$ در بالا اختیاری بوده است: می‌توانستیم همین کار را در مورد هر یک از مختصات همگن x_i، یا حتی در مورد هر ترکیب خطی از x_iها اعمال کنیم. به عبارت دیگر، آنچه «متناهی» و آنچه «نامتناهی» است، دقیقاً موضوع تصویر منظری است. در واقع، اگر U_i را زیرمجموعه‌ای

از $\mathbb{P}^n$ که برای آن مختص x_i ناصفر است بگیریم، یک پوشش مفید برای $\mathbb{P}^n$ به دست می‌آوریم شامل $n+۱$ رونوشت $\mathbb{C}^n$. یعنی،

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=\circ}^{n} U_j$$

که:

$$U_j = \{[x_\circ : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n | x_j \neq \circ\} = \{[x_\circ : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n | x_j = ۱\}$$

را می‌توانیم با $\mathbb{C}^n$ یکی بگیریم (یا اگر بخواهیم می‌توانیم نماد $\mathbb{A}^n$ را به‌کار بریم، زیرا این فضای nبعدی مختلط مبدأ از پیش تعیین‌شده‌ای ندارد). واقعیت این است که برای تعریف پوشش $\{U_i\}$ نیازی به استفاده از مکملهای ابرصفحه‌های x_i نداریم. برای هر مجموعه از $n+۱$ ابرصفحهٔ «مستقل خطی» که از مبدأ نمی‌گذرند، خطوط گذرنده از مبدأ در $\mathbb{C}^{n+۱}$ که ابرصفحهٔ iـام را قطع می‌کنند، مجموعه‌ای مانند U_i تشکیل می‌دهند که می‌توان آن را با $\mathbb{C}^n$ یکی گرفت، و این مجموعه‌ها با هم یک پوشش $\mathbb{P}^n$ به دست می‌دهند که تفاوت آن با $\mathbb{P}^n$ای که ابتدا بیان کردیم تنها در یک تعویض مختصات در $\mathbb{C}^{n+۱}$ است.

باید توجه داشت که به دلیل این واقعیت که $\mathbb{P}^n$ یک فضای خارج قسمت $\mathbb{C}^{n+۱} - \{\circ\}$ است یک توپولوژی القایی اقلیدسی طبیعی بر $\mathbb{P}^n$ وجود دارد. به‌ویژه دو نقطهٔ $\mathbb{P}^n$ به هم نزدیک‌اند اگر زاویهٔ بین خطوط متناظر در $\mathbb{C}^{n+۱}$ خیلی کوچک باشد. در این توپولوژی اقلیدسی بر $\mathbb{P}^n$، هر یک از مجموعه‌های U_i باز است، و یکی گرفتن U_i با $\mathbb{C}^n$ که در بالا بیان شد، یک همسانریختی از فضاهای توپولوژیک است وقتی که $\mathbb{C}^n$ با توپولوژی اقلیدسی‌اش در نظر گرفته شود. یادآوری می‌کنیم که هر U_i در $\mathbb{P}^n$ چگال است، و در واقع، مکمل آن فضایی از بعد کمتر (یعنی $\mathbb{P}^{n-۱}$) است. اشتراک U_i و U_j برای $i \neq j$ نیز چگال است.

پوشش باز $\{U_i\}$ برای $\mathbb{P}^n$ معرف اطلسی است که فضای تصویری را به یک خمینهٔ nبعدی مختلط تبدیل می‌کند. نگاشتهای مختصاتی $U_j \xrightarrow{\psi_j} \mathbb{C}^n$ اساساً مختصات همگن نرمال‌شده‌اند

$$\psi_\circ : [x_\circ : \ldots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_۱}{x_\circ}, \ldots, \frac{x_n}{x_\circ}\right)$$

$$\psi_۱ : [x_\circ : \ldots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_\circ}{x_۱}, \frac{x_۲}{x_۱}, \ldots, \frac{x_n}{x_۱}\right)$$

$$\vdots$$

$$\psi_n : [x_\circ : \ldots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_\circ}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-۱}}{x_n}\right)$$

برای آنکه اطمینان حاصل کنیم که این مختصات، فضای تصویری را به یک خمینهٔ مختلط بدل می‌کنند کافی است نشان دهیم که تعویضهای مختصات $\psi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\psi_j \circ \psi_i^{-۱}} \psi_j(U_i \cap U_j)$ نگاشتهایی تمام‌ریخت‌اند. در واقع این نگاشتها، ویژگی بیشتری دارند: اینها توابعی گویا هستند. برای مثال

$$\psi_n \circ \psi_\circ^{-۱}(a_۱, \ldots, a_n) = \psi_n([۱ : a_۱ : \ldots : a_n]) = \left(\frac{۱}{a_n}, \frac{a_۱}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-۱}}{a_n}\right)$$

بنابراین فضای $\mathbb{P}^n$ را می‌توان یک خمینهٔ مختلطی تصور کرد که از به هم چسبانیدن $n+۱$ رونوشت فضای nبعدی مختلط حاصل شده است. در واقع، چون می‌توان به جای توپولوژی معمولی توپولوژی زاریسکی $\mathbb{C}^n$ را در نظر گرفت، و «نگاشتهای چسبانیدن» نگاشتهای گویا هستند، با روشی مشابه روش بالا، می‌توان بر فضای تصویری، ساختار یک «چندگونای جبری مجرد» بنا کرد. در قسمت پیوست، بخش الف.۱، مفهوم چندگونای جبری مجرد را به طور دقیق تعریف می‌کنیم، شیئی که خیلی شباهت به یک خمینه دارد. یک چندگونای جبری مجرد، اساساً فضایی است توپولوژیک که پوشش بازی از چند گوناهای جبری آفین دارد که با ریختپاییهای چندگوناهای جبری آفین به همدیگر چسبانیده شده‌اند. به جای پرداختن به این مطلب در اینجا، در عوض در بخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه می‌توانیم به روشی کاملاً عینی، توپولوژی زاریسکی را بر فضای تصویری تعریف کنیم.

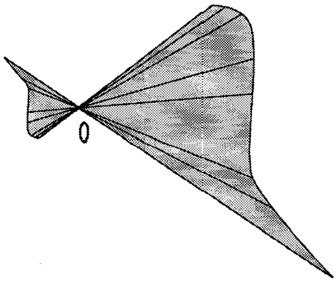
تمرین **۳.۱.۱۰** نشان دهید که خمینهٔ مختلط $\mathbb{P}^n$ فشرده است.

۲.۳ چندگوناهای تصویری

پیش از عرضهٔ هر تعریف، به خوانندگان یادآوری می‌کنیم که بر کرهٔ ریمانی $\mathbb{P}^۱$، هیچ تابع تحلیلی ناثابتی وجود ندارد. به‌ویژه، نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که بر $\mathbb{P}^۱$ یا فضاهای تصویری از بعد بالاتر، توابع چندجمله‌یی غیر نمایانی پیدا کنیم. بنابراین نمی‌توانیم امیدوار باشیم که یک چندگونای تصویری را به صورت مجموعهٔ صفر مشترک گردایه‌ای از توابع چندجمله‌یی بر $\mathbb{P}^n$ تعریف کنیم.

در عوض با بررسی نوع معینی از توابع چندجمله‌یی بر $\mathbb{C}^{n+۱}$، می‌توانیم بر این مسئله فائق آییم. چندجمله‌یی $F \in \mathbb{C}[x_\circ, \ldots, x_n]$ همگن نامیده می‌شود هر گاه همهٔ جمله‌های آن یک درجه داشته باشند. مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی همگن در فضای تصویری خوشتعریف است. برای درک این موضوع، توجه می‌کنیم که اگر $F \in \mathbb{C}[x_\circ, \ldots, x_n]$ چندجمله‌یی همگن از درجهٔ d باشد، آنگاه

$$F(\lambda x_\circ, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_\circ, \ldots, x_n)$$



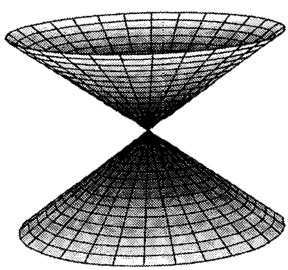
شکل ۳.۳ مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی همگن.

حال، اگر نقطهٔ $(x_\circ, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ در مجموعهٔ صفر F باشد، هر نقطه به صورت $(\lambda x_\circ, \ldots, \lambda x_n)$ نیز، که λ ثابتی در $\mathbb{C}$ است، در مجموعهٔ صفر F واقع است. لذا مجموعهٔ صفرهای یک چندجمله‌یی همگن در $\mathbb{C}^{n+1}$، اجتماع خطوط مختلط گذرنده از مبدأ است. بنابراین اگرچه یک چندجمله‌یی همگن از $n+1$ متغیر معرف تابعی بر $\mathbb{P}^n$ نیست، ولی صحبت از مجموعهٔ صفر آن در $\mathbb{P}^n$ منطقی است.

تعریف: یک چندگونای جبری تصویری در $\mathbb{P}^n$ مجموعهٔ صفر مشترک گردایه‌ای دلخواه از چندجمله‌ییهای همگن $n+1$ متغیره است: $V = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \subset \mathbb{P}^n$.

مثال: چندگونای تصویری $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{P}^2$ یک خم مخروطی خوانده می‌شود این خم مخروطی اجتماع قطعه‌های مختصاتی خود است:

$$V = (V \cap U_x) \cup (V \cap U_y) \cup (V \cap U_z)$$



شکل ۴.۳ $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{P}^2$.

در قطعهٔ مختصاتی U_z که با $z \neq ۰$ تعریف می‌شود، خم مخروطی به یک دایرهٔ مختلط شباهت دارد: با یکی گرفتن U_z با $\mathbb{C}^۲$، خم مزبور در U_z با صفر قرار دادن $x^۲ + y^۲ - ۱$ معین می‌شود. در قطعه‌های مختصاتی که x یا y صفر نیست، همین چندگونا با معادله‌هایی تعیین می‌شوند که بیشتر مشابه یک هذلولی[1] هستند، یعنی به ترتیب $۱ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x^۲ + ۱ - z^۲ = ۰$. در تمرینها خواهیم دید که هر مقطع مخروطی مختلط را می‌توان به صورت یک قطعهٔ مختصاتی آفین این چندگونا در نظر گرفت.

همانند مثال بالا، اشتراک یک چندگونای تصویری V با هریک از قطعه‌های مختصاتی آفینِ $\mathbb{P}^n$، یک چندگونای جبری آفین است. مثلاً، فرض می‌کنیم U_i زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{P}^n$ است که برای آنها مختص x_i ناصفر است، یادآوری می‌کنیم که U_i را می‌توان با فضای آفین $\mathbb{A}^n$ یکی گرفت. در این صورت با قرار دادن ۱ به جای متغیر x_i در چندجمله‌ییهای معرف V، مجموعهٔ چندجمله‌ییهای معرف $V \cap U_i$ حاصل می‌شود. بنابراین، مشابه مورد خودِ فضای تصویری، می‌توانیم چنین تصور کنیم که یک چندگونای تصویری با قطعه‌های مختصاتی آفین پوشانیده شده است:

$$V = (V \cap U_۰) \cup (V \cap U_۱) \cup \ldots \cup (V \cap U_n)$$

$$V \cap U_i \subset U_i \cong \mathbb{A}^n$$

یک روش دیگر برای تجسم یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ این است که یک چندگونای آفین مخروطی‌شکل را در $\mathbb{C}^{n+۱}$ مجسم کنیم ولی همهٔ نقاط واقع بر یک خط گذرنده بر مبدأ را یکی بگیریم. چندگونای واقع در $\mathbb{C}^{n+۱}$ که توسط گردایه‌ای از چندجمله‌ییهای همگن برحسب $x_۰, \ldots, x_n$ تعریف می‌شوند مخروط آفین روی چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ نامیده می‌شود که با همان چندجمله‌ییهای همگن تعریف شده است. در نوشتن نماد $\mathbb{V}(F_۱, \ldots, F_r)$ برای نشان دادن یک چندگونا که با چندجمله‌ییهای همگن در $\mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n]$ تعریف شده، لازم است دقیق باشیم، زیرا این نماد برحسب آنکه مجموعهٔ صفر در $\mathbb{C}^{n+۱}$ یا در $\mathbb{P}^n$ گرفته شود، دو معنی مختلف پیدا می‌کند. برای تمایز این دو حالت، ما اصطلاحات «چندگونای آفین» یا «چندگونای تصویری» را به کار خواهیم برد که توسط F_iها تعریف شده‌اند.

تعریف: فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری باشد. ایدِآل چندجمله‌ییهای $n + ۱$ متغیره‌ای که بر V صفر می‌شوند،

$$\mathbb{I}(V) = \{F \in \mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n] | F(p) = ۰ ، \text{برای هر } p \in V\}$$

ایدِآل همگن چندگونای تصویری V خوانده می‌شود.

۱. معمولاً واژه‌های «هذلولی» و «سهمی» را برای معرفی چندگوناها به کار می‌بریم، ولی در واقع این واژه‌ها فقط مجموعهٔ نقاط حقیقی آنها را بیان می‌کنند.

به‌آسانی می‌توان نشان داد که $\mathbb{I}(V)$ یک ایدِآل رادیکال است، و از قضیهٔ پایهٔ هیلبرت نتیجه می‌شود که $\mathbb{I}(V)$ توسط تعدادی متناهی از چندجمله‌ییها تولید می‌شود. به‌علاوه، می‌توان ثابت کرد که اگر یک چندجمله‌یی F در $\mathbb{I}(V)$ باشد، آنگاه هریک از مؤلفه‌های همگنِ F_i آن نیز در $\mathbb{I}(V)$ خواهد بود، لذا مولدهای $\mathbb{I}(V)$ را می‌توان چندجلمه‌ییهای همگن فرض کرد. با در نظر گرفتن مخروط آفین روی یک چندگونای تصویری، اثبات شکل زیر از تناظر هیلبرت در مورد چندگوناهای تصویری آسان است.

قضیهٔ صفرهای چندجمله‌ییهای همگن: بین زیرچندگوناهای تصویری $\mathbb{P}^n$ و ایدِآلهای رادیکال حلقهٔ $\mathbb{C}[x_\circ, \ldots, x_n]$ که یک مجموعه از مولدهای همگن غیر از مولد $(x_\circ, \ldots, x_n)$، (که معرف مبدأ در فضای $\mathbb{C}^{n+1}$ است)، می‌پذیرند یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک وجود دارد.

این مطلب انگیزه‌ای است برای تعریف حلقهٔ مختصاتی همگن یک چندگونای تصویری $V \subset \mathbb{P}^n$ به صورت حلقهٔ

$$\frac{\mathbb{C}[x_\circ, \ldots, x_n]}{\mathbb{I}(V)}$$

حلقهٔ مختصاتی همگن هر چندگونای تصویری $V \subseteq \mathbb{P}^n$ با حلقهٔ مختصاتی مخروط آفین روی V در $\mathbb{A}^{n+1}$ یکی است. ولی، نمی‌توانیم عناصر این حلقه را به عنوان توابعی بر V در نظر بگیریم.

درست مشابه حالت آفین، هر اجتماع متناهی از چندگوناهای تصویری در $\mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری است، و هر اشتراک دلخواه چندگوناهای تصویری در $\mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری است. بنابراین، چندگوناهای تصویری در $\mathbb{P}^n$ مجموعه‌های بستهٔ یک توپولوژی را تشکیل می‌دهند که توپولوژی زاریسکی بر $\mathbb{P}^n$ خوانده می‌شود. همین طور، هر چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ را می‌توان به توپولوژی زیرفضا مجهزکرد. مجموعه‌های بستهٔ این توپولوژی زاریسکی بر یک چندگونای تصویری زیرچندگوناهای تصویری آن هستند.

اگر V یک چندگونای تصویری باشد، بر هر یک از مجموعه‌های آفین $V \cap U_i$ که V را می‌سازند، یک توپولوژی زیرفضایی القایی وجود دارد. خوشبختانه، این توپولوژی القایی با توپولوژی زاریسکی بر چندگونای آفین $V \cap U_i$ یکی است، که خواننده این موضوع را در تمرین ۲.۲.۳ در ذیل بررسی خواهد کرد.

تمرین ۳.۲.۱۰ نشان دهید که هر چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ نسبت به توپولوژی اقلیدسی القایی فشرده است. ثابت کنید که چند گوناهای تصویری، فشرده‌سازی چندگوناهای آفین هستند، هم نسبت به توپولوژی زاریسکی و هم نسبت به توپولوژی اقلیدسی که چشمگیرتر است.[۱]

۱. یک فشرده‌سازی فضای توپولوژیک توسیعی است فشرده از فضای اولیه که فضای اولیه در این توسیع چگال است.

تمرین ۳.۲.۲۰ بین مجموعهٔ چندجمله‌ییهای همگن سه‌متغیره از درجهٔ d و مجموعهٔ چندجمله‌ییهای دومتغیره از درجهٔ حداکثر d، یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک پیدا کنید. (راهنمایی: یکی از متغیرها را مساوی ۱ قرار دهید.) با بهره‌گیری از این موضوع، ثابت کنید توپولوژی زیرفضایی القایی از توپولوژی زاریسکی در چندگونای $V \subset \mathbb{P}^2$ بر هر قطعهٔ آفین $V \cap \mathbb{A}^2$، با توپولوژی زاریسکی چندگونای آفین $V \cap \mathbb{A}^2$ یکی است. این موضوع را برای بُعد دلخواه تعمیم دهید.

۳.۳ بستار تصویری یک چندگونای آفین

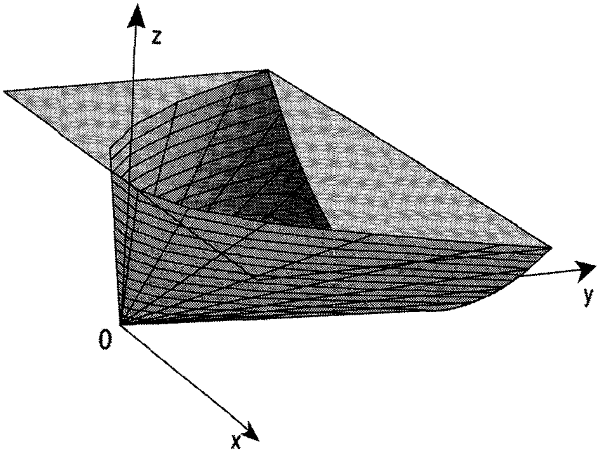
چندگونای جبری آفین V را در $\mathbb{A}^n$ در نظر می‌گیریم. می‌توانیم $\mathbb{A}^n$ را به صورت یکی از قطعه‌های آفین $\mathbb{P}^n$، و بنابراین، به طور طبیعی به صورت یک زیرمجموعه باز و چگال از $\mathbb{P}^n$ تصور کنیم. بدین ترتیب، $\mathbb{P}^n$ یک «فشرده‌سازی» یا «تکمیل» طبیعی $\mathbb{A}^n$ است. لذا، V را نیز می‌توانیم یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{P}^n$ تصور کنیم.

تعریف: فرض می‌کنیم V یک چندگونای آفین است که به صورت نشانیدنهای ثابت $V \subseteq \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ در نظر گرفته شده است. بستار تصویری V، که با $\overline{V}$ نمایش داده می‌شود، بستار V در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ است. این بستار را می‌توان برحسب توپولوژی زاریسکی بر $\mathbb{P}^n$، یا برحسب توپولوژی اقلیدسی بر $\mathbb{P}^n$ محاسبه کرد؛ نتیجه یکی است، و هر دو به تصور شهودی ما از یک بستار مربوط می‌شوند.

ساختن بستار تصویری یک چندگونای آفین روشی طبیعی برای فشرده‌سازی هر چندگونای جبری آفین نسبت به توپولوژی اقلیدسی به دست می‌دهد. از طرف دیگر، پی بردن به این مطلب حائز اهمیت است که بستار تصویری به نشانیدن V در $\mathbb{P}^n$ بستگی دارد. به‌ویژه، چندگوناهای یکریخت می‌توانند بستارهای تصویری نایکریخت داشته باشند (تمرین ۴.۴.۳ را ببینید).

مثال: سهمی $V = \mathbb{V}(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ را که در شکل ۵.۳ نمایش داده شده در نظر می‌گیریم. متغیرهای x و y مختصات آفین نقاط V یعنی مختصات در $\mathbb{A}^2$ هستند. در صفحهٔ تصویری مختصات همگن x، y و z را به کار می‌بریم، که $\mathbb{A}^2$ را به صورت مجموعهٔ باز U_z که در آن z ناصفر است تصور می‌کنیم (در شکل، $\mathbb{A}^2$ با صفحهٔ $z = 1$ در $\mathbb{C}^3$ یکی گرفته شده است).

یک سهمی را در فضای تصویری $\mathbb{P}^2$ در نظر مجسم کنید: نقاط آن خطوطی در $\mathbb{C}^3$ هستند که مبدأ را به نقاط سهمی در صفحهٔ $z = 1$ وصل می‌کنند. روشن است که خطی از مخروط روی سهمی «ناپیدا»ست، که خط $x = z = 0$، یعنی محور yهاست، که دو شاخهٔ سهمی بر آن به هم نزدیک می‌شوند. به عنوان یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^2$، این سهمی باید با معادلهٔ



شکل ۵.۳ بستار تصویری سهمی در $\mathbb{P}^۲$.

$zy - x^۲ = ۰$ تعریف شود. یادآوری می‌کنیم که این سهمی از سهمی اولیهٔ $y - x^۲ = ۰$ در مجموعهٔ باز U_z، به علاوهٔ یک نقطهٔ «بینهایت دور» $[۰ : ۱ : ۰]$ تشکیل شده است.

اگر ایدِآل یک چندگونای آفین در $\mathbb{A}^n$ را داشته باشیم، به دست آوردن ایدِآل بستار تصویری آن مشکل نیست. حال این کار را که همگن‌سازی نامیده می‌شود توضیح می‌دهیم.

چندجمله‌یی $zy - x^۲$ همگن‌شدهٔ چندجمله‌یی $y - x^۲$ است. در حالت کلی، یک چندجمله‌یی n متغیرهٔ F از درجهٔ d به روش زیر همگن می‌شود تا به یک چندجمله‌یی $n + ۱$ متغیرهٔ همگن $\tilde{F}$ از درجهٔ d تبدیل شود: F را به مجموع مؤلفه‌های همگن آن از درجه‌های مختلف تجزیه می‌کنیم، $F = G_۰ + G_۱ + \cdots + G_d$، که G_i از درجهٔ i است و برخی از G_iها صفرند (ولی $G_d \neq ۰$). اکنون چندجمله‌یی G_d همگن از درجهٔ d است. چندجمله‌یی $G_{d-۱} \in \mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ همگن از درجهٔ $d - ۱$ است. از ضرب آن در متغیر جدید $x_۰$ چندجمله‌یی درجهٔ d همگن $x_۰ G_{d-۱} \in \mathbb{C}[x_۰, x_۱, \ldots, x_n]$ حاصل می‌شود. هر مؤلفهٔ G_i را می‌توان از ضرب در $x_۰^{d-i}$ همگن ساخت. مجموع این جملات تبدیل‌شده، همگن‌شدهٔ F است. که یک چندجمله‌یی درجهٔ d است:

$$\tilde{F} = x_۰^d G_۰ + x_۰^{d-۱} G_۱ + \cdots + G_d$$

روشن است تحدید $\tilde{F}$ به ابرصفحهٔ $x_۰ = ۱$ چندجمله‌یی اولیهٔ F را به دست می‌دهد.

طبیعی است که حدس بزنیم اگر $V = \mathbb{V}(F_۱, \ldots, F_r) \subset \mathbb{A}^n$ یک چندگونای جبری باشد، می‌توان بستار تصویری آن $\overline{V}$ را در $\mathbb{P}^n$ توسط ایدِآل حاصل از جایگزینی هر یک از

چندجمله‌ییهای F_i با همگن‌شدهٔ آن $\tilde{F}_i$ تعریف کرد. مثلاً این موضوع در مورد سهمی تعریف شده با $x^2 - y = 0$ که بستار تصویری آن با $x^2 - yz = 0$ تعریف می‌شود درست است. متأسفانه در حالت کلی وضعیت این گونه ساده نیست.

برای مثال، فرض می‌کنیم V زیرچندگونای $\mathbb{A}^3$ تعریف‌شده با دو چندجمله‌یی $y - x^2$ و $z - xy$ باشد. به‌آسانی دیده می‌شود که V از سه‌تاییهای $\{(\lambda, \lambda^2, \lambda^3)\}$ تشکیل شده است، یعنی، V خم تابدار درجه سومی است که قبلاً دیدیم (تمرین ۳.۲.۱ را ببینید). از این گذشته، ایدِآل تولیدشده توسط $y - x^2$ و $z - xy$ ایدِآل رادیکال همهٔ چندجمله‌ییهایی است که بر V صفر می‌شوند. همگن‌شدهٔ این چندجمله‌ییها، چندجمله‌ییهای $wy - x^2$ و $wz - xy$ هستند. ولی خوانندگان می‌توانند تحقیق کنند که زیرچندگونایی که توسط این دو چندجمله‌یی در $\mathbb{P}^2$ تعریف‌شده دو مؤلفه دارد: بستار تصویری خم تابدار درجهٔ سوم $\overline{V}$، و خط حاصل از صفر گذاردن w و x. این خط اضافی نسبت به قطعهٔ آفین U_w «در بینهایت» قرار دارد، و به همین دلیل است که قبلاً این خط را ندیدیم. این مثال نشان می‌دهد که $\overline{V}$ بستار V در $\mathbb{P}^3$، می‌تواند چندگونای تعریف‌شده با همگن‌شده‌های یک مجموعه مولد ایدِآل $\mathbb{I}(V)$ نباشد. با این حال، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه: فرض می‌کنیم $V \subseteq \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ یک چندگونای جبری آفین و $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ایدِآل رادیکال همهٔ چندجمله‌ییهایی باشد که بر V صفر می‌شوند. در این صورت، ایدِآل $\tilde{I}$ در $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ که از همگن‌سازی همهٔ عناصر I تولید می‌شود، ایدِآل همگن رادیکال چندجمله‌ییهایی است که بر بستار تصویری $\overline{V}$ در $\mathbb{P}^n$ صفر می‌شوند. ایدِآل $\tilde{I}$ همگن‌شدهٔ ایدِآل I خوانده می‌شود.

البته، چون $\tilde{I}$ متناهی مولد است، می‌دانیم I مجموعه مولدهایی دارد که از همگن کردن آنها $\tilde{I}$ تولید می‌شود، ولی مثال قبل نشان می‌دهد که باید در انتخاب مولدها محتاط باشیم.

برهان قضیه: فرض می‌کنیم I ایدِآل رادیکال معرف V در $\mathbb{A}^n$ و $\tilde{I}$ همگن‌شدهٔ I باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $\overline{V} = \mathbb{V}(\tilde{I}) \subset \mathbb{P}^n$.

برای اثبات $\overline{V} \subset \mathbb{V}(\tilde{I})$، کافی است نشان دهیم که هر چندجمله‌یی G در $\tilde{I}$ بر $\overline{V}$ صفر می‌شود. برای این کار، توجه می‌کنیم که با قرار دادن $x_0 = 1$، G به یک چندجمله‌یی g در ایدِآل I تبدیل می‌شود. بنابراین روی مجموعه باز U_0 که مختص همگن x_0 ناصفر است و قطعهٔ آفین $\mathbb{P}^n$ شامل V است، G به g تحدید می‌شود. این بدین معنی است که G روی $V = \overline{V} \cap U_0$ صفر می‌شود. درنتیجه V، و همین طور بستار آن $\overline{V}$، در مجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{V}(\tilde{I})$ قرار دارد.

برای اثبات عکس مطلب، لازم است نشان دهیم که هر چندجمله‌یی که بر $\overline{V}$ صفر می‌شود به

$\tilde{I}$ متعلق است. اگر G چندجمله‌یی همگنی باشد که بر $\overline{V}$ صفر می‌شود، آنگاه G بر $\overline{V} \cap U_۰$ صفر می‌شود. بنابراین چندجمله‌یی $G(۱, x_۱, \ldots, x_n) = g(x_۱, \ldots, x_n)$ بر V صفر می‌شود و g متعلق است به I. طبق تعریف، همگن‌شدهٔ g یعنی $\tilde{g}$ به $\tilde{I}$ تعلق دارد. به‌آسانی می‌توان دید که برای یک t مناسب، $\tilde{g}x_۰^t = G$. لذا G نیز به $\tilde{I}$ تعلق دارد. بررسی این موضوع را که $\tilde{I}$ یک ایدِآل رادیکال است، در تمرین ۳.۳.۳ در ذیل به خواننده واگذار می‌کنیم. □

تمرین ۱.۳.۳. نشان دهید اگر V یک چندگونای آفین تحویلناپذیر باشد، بستار تصویری آن $\overline{V}$ نیز تحویلناپذیر است.

تمرین ۲.۳.۳. نشان دهید که خم درجهٔ سوم تابدار V در $\mathbb{A}^۳$ را می‌توان توسط چندجمله‌ییهای $y - x^۲$ و $z^۲ - ۲xyz + y^۳$ نیز تعریف کرد. ثابت کنید دو چندجمله‌یی حاصل از همگن‌سازی این دو چندجمله‌یی، بستار تصویری $\overline{V}$ در $\mathbb{P}^۳$ را تعریف می‌کنند. ولی ایدِآلی که آنها تولید می‌کنند رادیکال نیست.

تمرین ۳.۳.۳. نشان دهید که همگن‌شدهٔ یک ایدِآل رادیکال، رادیکال است. (راهنمایی: کافی است نشان دهیم که اگر توانی از یک چندجمله‌یی همگن در همگن‌شدهٔ ایدِآل واقع باشد، خود آن چندجمله‌یی نیز در همگن‌شدهٔ ایدِآل قرار دارد.)

۴.۳ ریختپاییهای چندگوناهای تصویری

با شروع از یک مثال، به مطالعهٔ ریختپاییهای بین چندگوناهای تصویری می‌پردازیم.

نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{P}^۱ \longrightarrow \mathbb{P}^۲$$

$$[s : t] \longmapsto [s^۲ : st : t^۲]$$

این نگاشت خوشتعریف است. زیرا، اگر $[s : t] \in \mathbb{P}^۱$، برای هر ثابت ناصفر λ داریم:

$$[s : t] = [\lambda s : \lambda t] \longmapsto [\lambda^۲ s^۲ : \lambda^۲ st : \lambda^۲ t^۲] = [s^۲ : st : t^۲]$$

در نتیجه این نگاشت به نمایش انتخابی یک نقطه در $\mathbb{P}^۱$ بستگی ندارد. همچنین، حداقل یکی از مختصات $s^۲$ یا $t^۲$ از نگاره، ناصفر است.

چون $s^۲t^۲ = (st)^۲$، نگارهٔ این نگاشت بر خم $C = \mathbb{V}(xz - y^۲)$ در $\mathbb{P}^۲$ قرار دارد، لذا این نگاشت معرف نگاشتی از $\mathbb{P}^۱$ برخم C است.

در قطعهٔ آفین $\mathbb{A}^1 \cong U_t = \{[s:t] | t \neq 0\}$، با نشان دادن مختص $\frac{s}{t}$ توسط حرف u، نگاشت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \cong U_z = \{[x:y:z] | z \neq 0\} \\ u &\longmapsto (u^2, u) \longmapsto [u^2 : u : 1] \end{aligned}$$

نگارهٔ این نگاشت سهمی $\mathbb{V}(x - y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ است. به همین قیاس، در قطعهٔ آفین دیگر، $\mathbb{A}^1 \cong U_s = \{[s:t] | s \neq 0\}$، نگاشت به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \cong U_x = \{[x:y:z] | x \neq 0\} \\ v &\longmapsto (v, v^2) \longmapsto [1 : v : v^2] \end{aligned}$$

که $\frac{t}{s} = v$. باز هم، این نگارهٔ یک سهمی در صفحه است.

بدین ترتیب، نگاشت $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$، وقتی به قطعه‌های مختصاتی تحدید شود، به طور موضعی، یک ریختپایی از چندگوناهای جبری آفین به مفهوم تعریف‌شده در فصل ۱ است. این موضوع انگیزهٔ ما برای تعریف زیر است.

تعریف: فرض می‌کنیم $V \subseteq \mathbb{P}^n$ و $W \subseteq \mathbb{P}^m$ چندگوناهای جبری تصویری باشند، و فرض می‌کنیم

$$V \xrightarrow{F} W$$

نگاشتی از مجموعهٔ V بر مجموعهٔ W است. F را یک ریختپایی از چندگوناهای تصویری گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند: برای هر نقطهٔ $p \in V$، چندجمله‌ییهای همگنی چون $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ وجود داشته باشند به طوری که در یک همسایگی باز و ناتهی $U \subseteq V$ از نقطهٔ p، نگاشت $U \xrightarrow{F|_U} W$ با نگاشت چندجمله‌یی

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{P}^m \\ q &\longmapsto [F_0(q) : F_1(q) : \ldots : F_m(q)] \end{aligned}$$

برابر باشد.

البته این موضوع تلویحاً در تعریف مستتر است که چندجمله‌ییهای همگن $F_0, \ldots, F_m$ همه از یک درجه‌اند. در غیر این صورت، معرف یک نگاشت خوشتعریف در $\mathbb{P}^m$ نخواهند بود. به علاوه، F_iها نباید در نقطه‌ای از همسایگی باز U از نقطهٔ p به طور همزمان صفر باشند. نکتهٔ

حائز اهمیت این است که به ازای نقاط مختلف p، ممکن است انتخاب چندجمله‌ییهایی متفاوت (و همسایگیهایی مختلف) لازم باشد، تا ببینیم F به طور موضعی یک نگاشت چندجمله‌یی است یا نیست (در ذیل مثالی خواهیم داد). این تعریف تضمین می‌کند که وقتی یک ریختپایی از چندگوناهای تصویری را به قطعه‌های مختصاتی تحدید می‌کنیم، یک ریختپایی از چندگوناهای جبری آفین را تعریف می‌کنیم.

طبق قرارداد، وقتی در تعریف بالا از «همسایگی باز» صحبت می‌کنیم، منظور یک همسایگی باز زاریسکی است. ولی آنهایی که با آنالیز مختلط آشنایی دارند بلافاصله درمی‌یابند که هیچ تفاوتی نمی‌کند که همسایگیهای باز زاریسکی را به کار بریم یا همسایگیهای باز نسبت به توپولوژی اقلیدسی را. مزیت اصلی توپولوژی زاریسکی این است که همواره در دسترس است حتی وقتی که توپولوژی اقلیدسی را نداشته باشیم، مثلاً وقتی سروکار ما با چندگوناهای جبری در فضای تصویری روی میدانی غیر از $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ است.

مثال: فرض می‌کنیم $C = \mathbb{V}(zx - y^۲) \subseteq \mathbb{P}^۲$ یک مقطع مخروطی در صفحهٔ تصویری باشد. نگاشت

$$C \longrightarrow \mathbb{P}^۱$$

$$[x : y : z] \longmapsto \begin{cases} [x : y] \ , \ x \neq ۰ & \text{اگر} \\ [y : z] \ , \ z \neq ۰ & \text{اگر} \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این نگاشت درکلیهٔ نقاط C تعریف شده است: به ازای هر نقطهٔ دادهشدهٔ C، مختص x یا z آن ناصفر است، زیرا اگر هر دو مختص فوق صفر باشند، طبق رابطهٔ $y^۲ = xz$ مختص y نیز صفر خواهد بود. برای اینکه خوشتعریف بودن این نگاشت را ببینیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر $[x : y : z]$ نقطه‌ای بر C باشد که هر دو مختص x و z مربوط به آن (و در نتیجه مختص y) ناصفر باشند، آنگاه چون نقاط C در رابطهٔ $xz = y^۲$ صدق می‌کنند، ملاحظه می‌کنیم که

$$[x : y] = [yx : y^۲] = [xy : xz] = [y : z]$$

این مثال ماهیت موضعی مهم ریختپاییهای چندگوناهای تصویری را آشکار می‌سازد: نگاشت $C \longrightarrow \mathbb{P}^۱$ از لحاظ موضعی چندجمله‌یی است، ولی هیچ انتخاب منفردی از چندجمله‌ییها برای همهٔ نقاط C جوابگو نخواهد بود.

در قطعهٔ مختصاتی $U_x \cap C$، ریختپایی $C \longrightarrow \mathbb{P}^۱$ به نگاشت تصویر سهمی

$$(u, u^۲) \longmapsto u$$

بر خط آفین تحدید می‌شود. این نگاشت همان تصویر گنجنگاشتی معمولی از خم مخروطی C بر خط $\mathbb{P}^1$ است. انتخاب مختصات آفین به قسمی که C مانند یک سهمی به نظر آید، مرکز تصویر را در بینهایت قرار می‌دهد. مثلاً، وقتی قطعهٔ مختصاتی آفین U_x را در نظر می‌گیریم، نقطهٔ بینهایت نقطهٔ $[1 : 0 : 0]$ می‌شود.

البته هر وقت ریختپاییها را داشته باشیم، می‌توانیم یکریختیها را هم تعریف کنیم. یک یکریختی بین چندگوناهای تصویری V و W یک ریختپایی است مانند $V \xrightarrow{F} W$ به طوری که یک ریختپایی مانند $W \xrightarrow{G} V$ وجود دارد که وارون F باشد.

مثال: ساده‌ترین مثال از یک یکریختی با یک تعویض مختصات در $\mathbb{P}^n$ داده می‌شود. روشن بگوییم، فرض می‌کنیم $F_0, F_1, \ldots, F_n$ صورتهایی خطی از $n+1$ متغیر مستقل باشند در این صورت ریختپایی زیر را داریم

$$\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$x \longmapsto [F_0(x) : F_1(x) : \ldots : F_n(x)]$$

این نگاشت توسط نگاشت خطی متناظر از فضای برداری $\mathbb{C}^{n+1}$ القا شده، و گاهی مناسب است که آن را با یک ماتریس وارونپذیر $(n+1) \times (n+1)$ نمایش دهیم. ریختپایی وارون $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ توسط ماتریس وارون داده شده است.

مثال: به عنوان یک مثال کمتر نمایان، ملاحظه می‌کنیم که خم مخروطی $C \subset \mathbb{P}^2$ با $\mathbb{P}^1$ یکریخت است. زیرا، به‌آسانی می‌توان دید که ریختپاییهای

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow C$$

$$[s : t] \longmapsto [s^2 : st : t^2]$$

و

$$C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$[x : y : z] \longmapsto \begin{cases} [x : y], & \text{اگر } x \neq 0 \\ [y : z], & \text{اگر } z \neq 0 \end{cases}$$

وارون یکدیگرند.

در اینجا بین نظریه‌های چندگوناهای آفین و تصویری تفاوتی عمده دیده می‌شود. دو چندگونای جبری آفین یکریخت‌اند اگر و تنها اگر حلقه‌های مختصات آنها به عنوان $\mathbb{C}$ـجبر یکریخت باشند.

لیکن، حکم مشابه در مورد چندگوناهای تصویری کاملاً نادرست است. در مثال فوق، C و $\mathbb{P}^1$ یکریخت‌اند، ولی حلقه‌های مختصاتی همگن آنها

$$\mathbb{C}[s,t] \text{ و } \mathbb{C}[x,y,z]/(xz-y^2)$$

به عنوان $\mathbb{C}$ـجبر یکریخت نیستند. زیرا، یک یکریختی از $\mathbb{C}$ـجبرها به یک یکریختی مخروطهای آفین روی C و $\mathbb{P}^1$ مربوط خواهد شد. این دو، چندگوناهای زیرند:

$$\mathbb{V}(xz-y^2) \subset \mathbb{A}^3 \text{ و } \mathbb{A}^2$$

از نظر شهودی روشن است که این دو چندگونا نباید یکریخت باشند، زیرا اولی به مثابهٔ یک مخروط است با یک نقطهٔ تکین در مبدأ، در حالی که صفحهٔ آفین تکینی ندارد.

یک چندگونای تصویری، توسط حلقهٔ مختصاتی همگن خود، با تقریب یکریختی، معین می‌شود ولی نه بالعکس. با این حال، نوع قوی‌تری از یکریختی بین چندگوناهای تصویری وجود دارد که ضامن یکریختی حلقه‌های مختصاتی همگن متناظر است.

تعریف: دو زیرچندگونای $\mathbb{P}^n$ هم‌ارز تصویری خوانده می‌شوند هرگاه یک تعویض مختصات (خطی) بر $\mathbb{P}^n$ وجود داشته باشد که معرف یک یکریختی بین دو زیر چندگونا باشد.

مثلاً، خطوط $\mathbb{V}(x)$ و $\mathbb{V}(y)$ زیر چندگوناهای هم‌ارز تصویری در $\mathbb{P}^2$ هستند. تعویض مختصات لازم چنین است

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$[x:y:z] \longmapsto [y:x:z]$$

تمرین ۳.۴.۱. ماتریسی پیدا کنید که هم‌ارزی تصویری فوق را بیان کند.

تمرین ۳.۴.۲. نشان دهید که حلقه‌های مختصاتی همگن چندگوناهای هم‌ارز تصویری یکریخت‌اند.

تمرین ۳.۴.۳. مثالی از دو خم تصویری مسطح پیدا کنید که یکریخت باشند ولی هم‌ارز تصویری نباشند.

تمرین ۳.۴.۴. نشان دهید که چندگوناهای آفین $\mathbb{V}(x)$ و $\mathbb{V}(x-y^4-z^4)$ در $\mathbb{A}^3$ یکریخت‌اند ولی بستارهای تصویری آنها در $\mathbb{P}^3$ یکریخت نیستند. (راهنمایی: اگر در اثبات دقیق یکریخت نبودن بستارهای تصویری مشکل پیدا کردید، موضوع را پس از مطالعهٔ مفهوم «همواری» در بخش ۶.۲، مجدداً بررسی کنید.)

۵.۳ خودریختیهای فضای تصویری

اکنون همهٔ یکریختیها از $\mathbb{P}^n$ به خودش، یعنی خودریختیهای $\mathbb{P}^n$ را معین می‌کنیم.

اگر اندکی آنالیز مختلط خوانده باشید، می‌دانید که نگاشتهای همدیس از کرهٔ ریمانی به خودش دقیقاً تبدیلات موبیوس هستند، که به تبدیلات خطیِ کسری نیز معروف‌اند. چون هر خودریختی $\mathbb{P}^۱$ موضعاً یک چندجمله‌یی، و لذا یک تابع تمامریخت است، از اینجا نتیجه می‌شود که هر خودریختی چندگونای تصویری $\mathbb{P}^۱$، یک نگاشت همدیس از کرهٔ ریمانی است به خودش. از سوی دیگر، چنانکه در ذیل توضیح خواهیم داد، به‌آسانی دیده می‌شود که هر تبدیل موبیوس یک ریختپایی از چندگونای تصویری $\mathbb{P}^۱$ است. به عبارت دیگر، خودریختیهای خط تصویری دقیقاً تبدیلات موبیوس هستند. این مفهوم برای فضاهای تصویری از بعد دلخواه تعمیم می‌یابد.

یادآوری می‌کنیم که هر ماتریس وارونپذیر $g \in \mathbf{GL}(n+۱, \mathbb{C})$ معرف یک نگاشت از فضاهای برداری

$$\mathbb{C}^{n+۱} \xrightarrow{g} \mathbb{C}^{n+۱}$$

$$[x_۰, \ldots, x_n] \longmapsto g([x_۰, \ldots, x_n])$$

است که یک خودریختی از فضای تصویری به صورت

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{g} \mathbb{P}^n$$

$$[x_۰ : \ldots : x_n] \longmapsto g([x_۰ : \ldots : x_n])$$

را معین می‌کند. این خودریختی چیزی جز یک تعویض مختصات خطی در $\mathbb{P}^n$ نیست، و خودریختی وارون آن توسط ماتریس وارون $g^{-۱}$ داده می‌شود. چون مختصات در $\mathbb{P}^n$ تنها با تقریب یک مضرب عددی تعریف شده است، برای هر عدد غیر صفر λ در $\mathbb{C}$، ماتریسهای g و λg معرف یکریختیهای واحدی هستند. از سوی دیگر، ماتریسهایی که به نحوی دیگر متفاوت‌اند، یکریختیهای متفاوتی تولید می‌کنند.

از اینجا معلوم می‌شود که هر خودریختی از فضای تصویری، شکل بالا را دارد، یعنی، تنها خودریختیهای $\mathbb{P}^n$ تعویضهای خطی مختصات هستند. اثبات این موضوع به کمک محاسبات مقدماتی، کاری خسته‌کننده است، ولی آنهایی که با آنالیز مختلط آشنایی دارند می‌توانند به‌آسانی نشان دهند که هر خودریختی تمامریخت یک‌ـبه‌ـیک از $\mathbb{P}^n$ یک تعویض خطی مختصات است. برهان جبری زیبایی برای آن وجود دارد، ولی به ابزارهایی نیاز دارد که در اینجا عرضه نشده است (رجوع کنید به [۲۰، ص ۱۵۱]).

یک روش متفاوت برای بیان اینکه هر خودریختی $\mathbb{P}^n$ یک تعویض خطی مختصات است این است که بگوییم گروه خودریختیهای $\mathbb{P}^n$ عبارت است از

$$\mathbf{PGL}(n+1, \mathbb{C}) = \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$$

یعنی گروه خارج قسمت ماتریسهای وارونپذیر $(n+1) \times (n+1)$ به پیمانهٔ زیرگروه ماتریسهای اسکالر غیر صفر.

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که این نتیجه، تعمیم حالت یک‌بعدی است که با آن آشنا هستیم، یعنی، $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ که همان گروه تبدیلات موبیوس است. در واقع، هر عضو $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ یک نگاشت

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$[z : w] \longmapsto [az + bw : cz + dw]$$

به عبارت دیگر، یک تبدیل موبیوس

$$[z : 1] \longmapsto \left[\frac{az + bw}{cz + dw} : 1\right]$$

را معین می‌کند، به‌عکس هر تبدیل موبیوس به شکل $z \longmapsto (az + b)/(cz + d)$ خودریختی $\mathbb{P}^n$ به صورت $[z : w] \longmapsto [az + bw : cz + dw]$ را به دست می‌دهد.

حال می‌توانیم تعریف هم‌ارزی تصویری را که در بخش ۴.۳ داده شده بود تا حدی متفاوت بیان کنیم. دو زیرچندگونای فضای تصویری هم‌ارز تصویری‌اند اگر و تنها اگر با یک خودریختی از فضای تصویری فراگیر به هم تبدیل شوند. یعنی رده‌های هم‌ارزی زیرچندگوناهای $\mathbb{P}^n$ که هم‌ارز تصویری‌اند، دقیقاً مدارهای عمل طبیعی $\mathbf{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ روی مجموعهٔ همهٔ زیرچندگوناهای تصویری $\mathbb{P}^n$ هستند.

بحث ما نشان می‌دهد که تفاوتی بین خودریختیهای جبری و خودریختیهای دوسو تمامریخت $\mathbb{P}^n$ وجود ندارد. زیرا، به مفهوم بسیار کلی‌تر زیر، هیچ تفاوتی بین رسته‌های تحلیلی مختلط و جبری وجود ندارد:

قضیهٔ چاو: هر خمینهٔ مختلط فشردهٔ نشانیده در $\mathbb{P}^n$، صفر مشترک چندجمله‌ییهایی همگنی مانند $F_1, \ldots, F_r$ است. بنابراین هر زیرخمینهٔ مختلط فشردهٔ فضای تصویری یک چندگونای تصویری است. به‌علاوه، هر نگاشت تمامریخت بین این خمینه‌ها، یک ریختپایی از چند گوناهاست.

این مطلب را در اینجا ثابت نمی‌کنیم؛ بلکه، خواننده را به [۳۷، فصل ۳] ارجاع می‌دهیم. قضیهٔ چاو بدون فرض فشرده بودن درست نیست. ژ. پ. سِرُ در مقالهٔ معروف خود «GAGA»، قضیهٔ چاو را به طور گسترده تعمیم داده است [۳۶].

در حالت یک‌بعدی، برای قضیهٔ چاو یک عکس جزئی وجود دارد. هر خمینهٔ فشردهٔ یک‌بعدی مختلط (یعنی، هر رویهٔ ریمانی) را می‌توان به صورت یک خمینهٔ مختلط در فضای تصویری نشانید، و لذا توسط معادله‌های چندجمله‌یی تعریف کرد. بنابراین، یک چندگونای یک‌بعدی تصویری هموار[۱] «عیناً نظیر» یک رویهٔ ریمانی فشرده است: تنها یک روش یکتا برای تعریف ساختار مختلط بر یک خم تصویری هموار وجود دارد، و فقط یک روش برای تعریف ساختار یک چندگونای تصویری بر هر رویهٔ ریمانی فشرده وجود دارد.

تمرین ۳۰۵۰۱۰ فرض می‌کنیم $F, G \in \mathbb{C}[x, y, z]$ دو چندجمله‌یی درجهٔ دوم همگن تحویلناپذیر باشند. نشان دهید که یک خودریختی از $\mathbb{P}^2$ وجود دارد که $\mathbb{V}(F)$ را به طور یکریخت بر $\mathbb{V}(G)$ می‌نگارد. این موضوع نشان می‌دهد که با تقریب تعویض خطی مختصات، فقط یک مقطع مخروطی تصویری (ناتباهیده) وجود دارد. (راهنمایی: هر چندجمله‌یی درجهٔ دوم همگن تحویلناپذیر، معرف یک صورت خطی درجهٔ دوم بر $\mathbb{C}^3$ است.)

تمرین ۳۰۵۰۲۰ نشان دهید که با تقریب تعویض مختصات آفین در صفحهٔ آفین، دقیقاً دو منحنی مقطع مخروطی مسطح (ناتباهیدهٔ) غیر یکریخت وجود دارد. یعنی، مجموعهٔ صفر هر چندجمله‌یی درجهٔ دوم تحویلناپذیر $F \in \mathbb{C}[x, y]$ـــبا تقریب یک تعویض مختصات خطی‌ــسهمی $\mathbb{V}(y-x^2)$ یا هذلولی $\mathbb{V}(xy-1)$ است، ولی این سهمی و هذلولی با هم یکریخت نیستند.

توجه: پس از انجام دادن اولین تمرین فوق، ممکن است انتظار داشته باشید که با تقریب یکریختی، تنها یک خم درجهٔ سوم مسطح وجود داشته باشد. لیکن، پیوستاری از خمهای درجهٔ سوم غیریکریخت وجود دارد، خمهای بیضوی، که به وسیلهٔ $\mathbb{A}^1$ با استفاده از مفهوم jـناوردا (رجوع شود به [۲۰، فصل IV، بخش ۴]) پارامتری شده‌اند.

---

۱. همواری یک چندگونای جبری در بخش ۲.۶ به طور دقیق تعریف خواهد شد. در اینجا به تصور شهودی خواننده تکیه شده است.

۴

چندگوناهای شبه‌تصویری

۱.۴ چندگوناهای شبه‌تصویری

در فصلهای پیش نظریه‌های چندگونای آفین و تصویری را جداگانه بررسی کردیم. اکنون مفهوم چندگونای شبه‌تصویری را معرفی خواهیم کرد، مفهومی که هر دو حالت فوق را در بر می‌گیرد. این مفهوم را تنها برای سهولت ذکر نمی‌کنیم، بلکه مفهوم چندگونای شبه‌تصویری سرانجام به ما امکان می‌دهد تا یک چندگونای جبری را به عنوان شیئی ذاتاً هندسی، مستقل از نشانیدن آن در یک فضای آفین یا تصویری خاص، تعریف کنیم.

تعریف: یک چندگونای شبه‌تصویری یک زیرمجموعهٔ موضعاً بسته در $\mathbb{P}^n$ است که با توپولوژی زاریسکی القا شده از $\mathbb{P}^n$ در نظر گرفته می‌شود. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعهٔ موضعاً بسته در هر فضای توپولوژیک، زیرمجموعهٔ بسته‌ای است از یک زیرفضای باز، به عبارت دیگر، اشتراک یک مجموعهٔ باز و یک مجموعهٔ بسته است.

ردهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری، شامل همهٔ چندگوناهای تصویری، همهٔ چندگوناهای آفین، و همهٔ زیرمجموعه‌های باز زاریسکی است. مجموعهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری نسبت به عملِ گرفتن زیرمجموعهٔ باز یا بسته، بسته است. برای اختصار، اغلب به جای چندگونای شبه‌تصویری، واژهٔ «چندگونا» را به کار می‌بریم.

ریختپایی بین چندگوناهای شبه‌تصویری را می‌توان به همان روش تعریف ریختپایی بین چندگوناهای تصویری بیان کرد. به عبارت دقیق‌تر، اگر $V \subseteq \mathbb{P}^n$ و $W \subseteq \mathbb{P}^m$ چندگوناهای شبه‌تصویری باشند، یک ریختپایی $V \xrightarrow{F} W$ نگاشتی است که به ازای هر $p \in V$، چندجمله‌ییهای همگنی چون $F_0, \ldots, F_m$ از $n+1$ متغیر وجود داشته باشند به طوری که نگاشت

$$V \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

$$q \longmapsto [F_0(q) : \ldots : F_m(q)]$$

در نقطهٔ p خوشتعریف و بر یک مجموعهٔ باز ناتهی شامل p، با نگاشت F همخوان باشد.

یک عیب این تعریف این است که آن را به نشانیدن خاص چندگونای شبه‌تصویری در فضای تصویری مقید می‌کند. در بخش ۳.۴ تعریفی ارائه خواهد شد که این مشکل را ندارد.

مثال: فرض می‌کنیم $U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ و $V = \mathbb{V}(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$. U و V هر دو، چندگوناهای شبه‌تصویری هستند و نگاشت خوشتعریف زیر را داریم:

$$U \xrightarrow{F} V$$

$$t \longmapsto \left(t, \frac{1}{t}\right)$$

می‌گوییم که F یک ریختپایی از چندگوناهای شبه‌تصویری است. برای پی بردن به علت آن، U را به کمک نگاشت $t \longmapsto [t : 1]$، با یک زیرمجموعهٔ موضعاً بسته (در واقع، باز) از $\mathbb{P}^1$ یکی می‌گیریم. همچنین، V را از طریق نگاشت $(x, y) \longmapsto [x : y : 1]$ با زیرمجموعهٔ موضعاً بستهٔ $\mathbb{P}^2$ که توسط $xy - z^2 = 0$ و $z \neq 0$ تعریف شده، یکی می‌گیریم. می‌توانیم به‌آسانی بررسی کنیم که نگاشت F بر کلیهٔ نقاط U، با ریختپایی

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{P}^2$$

$$[a : b] \longmapsto [a^2 : b^2 : ab]$$

همخوان است. زیرا، بر U، a و b هر دو ناصفرند و لذا با قرار دادن $t = \frac{a}{b}$، می‌بینیم که $\tilde{F}$ نقطهٔ $[t : ۱]$ را به نقطهٔ

$$[t^۲ : ۱ : t] = \left[t : \frac{۱}{t} : ۱\right]$$

می‌نگارد. نگارهٔ این نگاشت دقیقاً $V \subset \mathbb{P}^۲$ است، و روشن است که، این نگاشت با نگاشت اولیه یعنی F همخوانی دارد.

با گسترش حوزهٔ عمل خود برای در بر گرفتن همهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری، از یک امکان انعطاف برخوردار شده‌ایم. لیکن باید مفهوم چندگونای آفین را مجدداً تعریف کنیم.

تعریف: یک چندگونای شبه‌تصویری را آفین گوییم اگر به عنوان یک چندگونای شبه‌تصویری با یک چندگونای جبری آفین یکریخت باشد. از این به بعد، وقتی بخواهیم به تعریف اولیهٔ «یک چندگونای آفین در $\mathbb{A}^n$» اشاره کنیم، آن را یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی $\mathbb{A}^n$ خواهیم نامید.

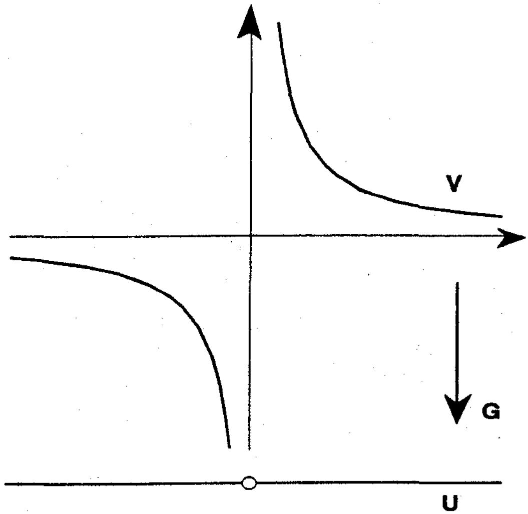
بنابراین، یک چندگونای جبری آفین چندگونایی است که بتوان آن را در یک فضای آفین به عنوان یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی نشانید. با این اصلاح در تعریف چندگونای آفین، به جای تأکید بر ویژگی عارضی نشانیدن آن در یک فضای آفین مشخص طبق بخش ۱.۱، بر ماهیت ذاتی چندگونا تأکید می‌کنیم. این اصلاح تعریف، در واقع، همان گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، به ردهٔ چندگونای آفین وسعت می‌بخشد.

مثال: مجموعهٔ باز $U = \mathbb{A}^۱ \setminus \{۰\}$ در $\mathbb{A}^۱$، یک چندگونای آفین است. نگاشت تصویر $V = \mathbb{V}(xy - ۱) \xrightarrow{G} U$ به صورت $G(x, y) = x$ یک ریختپایی از چندگوناهاست (شکل ۱.۴ را ببینید). اگر F معرف ریختپایی $U \longrightarrow V$ تعریف‌شده در مثال پیش باشد، ملاحظه می‌کنیم که $F \circ G$ نگاشت همانی بر V و $G \circ F$ نگاشت همانی بر U است. بنابراین $\mathbb{A}^۱ \setminus \{۰\}$ یک چندگونای شبه‌تصویری است که با مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی $\mathbb{V}(xy - ۱)$ در $\mathbb{A}^۲$ یکریخت است. از این رو، اکنون $\mathbb{A}^۱ \setminus \{۰\}$ را یک چندگونای آفین می‌نامیم.

حلقهٔ مختصاتی یک چندگونای آفین W، طبق تعریف، حلقهٔ مختصاتی هر زیرچندگونای بستهٔ فضای آفین یکریخت با W است. برای اینکه دقیق باشیم، یک یکریختی چندگوناهای شبه‌تصویری

$$W \xrightarrow{F} V$$

را که V یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در یک فضای آفین است، در نظر می‌گیریم. طبق تعریف، حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[W]$ بر W، حلقه همهٔ توابع $W \longrightarrow \mathbb{C}$ است که پسکشی‌های توابعی مانند f در $\mathbb{C}[V]$ هستند. به آسانی می‌توان بررسی کرد که این مفهوم خوشتعریف است، یعنی به انتخاب



شکل ۱۰۴ یک یکریختی چندگوناهای شبه‌تصویری.

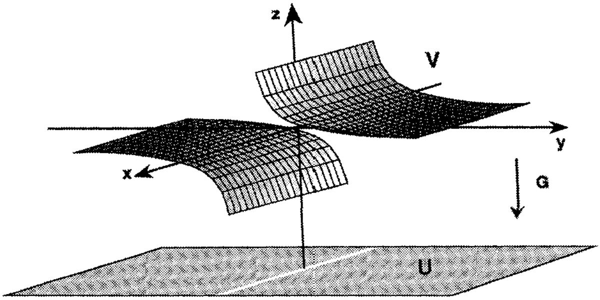
V و یا به انتخاب یکریختی F بین W و V بستگی ندارد. برای بررسی این موضوع، خواننده نیاز خواهد داشت که تحقیق کند اگر دو زیرچندگونای بستهٔ زاریسکی فضاهای آفین به عنوان چندگوناهای شبه‌تصویری یکریخت باشند، به عنوان چندگوناهای آفین، با تعریف بخش ۳.۱، نیز یکریخت‌اند. یعنی، هر یکریختی چندگوناهای شبه‌تصویری که زیرمجموعه‌های بستهٔ زاریسکی فضاهای آفین فراگیر هستند، در واقع تحدید یک نگاشت چندجمله‌یی برفضاهای فراگیر می‌باشند. این واقعیت کاملاً نمایان نیست، ولی پس از مطالعهٔ بخش ۳ در مورد توابع منظم و اثبات مطالب مربوط به آن، قابل فهمتر خواهد شد.

در مثال فوق، حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{A}^{۱} \setminus \{۰\}$ با حلقهٔ

$$\mathbb{C}[V] = \frac{C[x,y]}{(xy-۱)} \cong \mathbb{C}\left[x, \frac{۱}{x}\right]$$

یعنی حلقهٔ چندجمله‌ییهای یک‌متغیرهٔ لوران یکریخت است.

همچنین می‌توانیم تعریف چندگونای تصویری را دوباره به این صورت تعبیر کنیم که یک چندگونای شبه‌تصویری است که، به عنوان چندگونای شبه‌تصویری، با یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی از یک فضای تصویری یکریخت است. برخلاف مورد چندگوناهای آفین، این تعریف ردهٔ چندگوناهای تصویری را وسعت نمی‌بخشد: هر چندگونای شبه‌تصویری در $\mathbb{P}^n$ با یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی از یک فضای $\mathbb{P}^m$ یکریخت است اگر و تنها اگر خود یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی $\mathbb{P}^n$ باشد. از طرف دیگر، تعریف مجدد چندگونای تصویری به صورت اخیر، ما را به



شکل ۲۰۴ مکمل یک خط در $\mathbb{A}^2$ یک چندگونای آفین است.

یک تغییر دیدگاه مهم هدایت می‌کند. یک چندگونای تصویری باید چنین تعبیر شود که چندگونایی است که می‌تواند در یک فضای تصویری نشانیده شود، و نه آنکه پیشاپیش با یک نشانیدن ویژه مجهز شده باشد. این موضوع بیشتر در تلقی جدید از چندگوناهای جبری به عنوان موجوداتی ذاتاً هندسی است، جدا از اطلاعات عارضی حاصل از یک نشانیدن ثابت در فضای تصویری.

تمرین ۲۰۱۰۱۰۴ ثابت کنید که مکمل یک خط در $\mathbb{A}^2$ یک چندگونای آفین است و حلقهٔ مختصاتی آن را معین کنید.

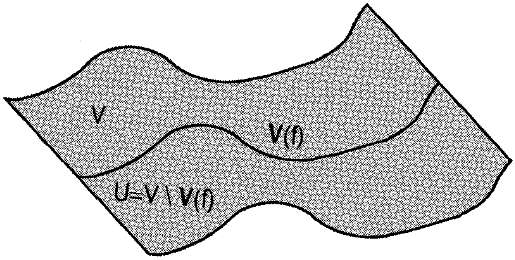
۲۰۴ یک پایه برای توپولوژی زاریسکی

توپولوژی زاریسکی برای هر چندگونای شبه‌تصویری، پایه‌ای از مجموعه‌های باز آفین دارد. این واقعیت مهم به ما امکان می‌دهد که به چندگوناهای شبه‌تصویری به صورت «موضعاً آفین» نگاه کنیم، به همان طریق که هر خمینه را «موضعاً اقلیدسی» تصور می‌کنیم: هر نقطهٔ p در یک چندگونا یک همسایگی باز دارد که یک چندگونای جبری آفین است.

برای روشن شدن این موضوع، ابتدا توجه می‌کنیم که مکمل هر ابررویه در یک چندگونای آفین، خود یک چندگونای آفین است. به عبارت دقیق‌تر، اگر V یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی فضای آفین $\mathbb{A}^n$ باشد، و f تابعی در حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$ روی V فرض شود، مجموعهٔ باز

$$U = V \setminus \mathbb{V}(f)$$

مجدداً یک چندگونای جبری آفین است (ولو اینکه معمولاً یک زیرچندگونای بستهٔ V، و لذا یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی فضای فراگیر $\mathbb{A}^n$ نیست).



شکل ۳۰۴ مکمل یک ابررویه.

زیرا U را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{A}^n$ گرفته و نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$U \xrightarrow{F} \mathbb{A}^{n+1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}\right)$$

چون f بر U صفر نمی‌شود، این نگاشت خوشتعریف است. به‌علاوه، اگر مختصات در $\mathbb{A}^{n+1}$ را با $x_1, \dots, x_n, z$ نمایش دهیم، چندجمله‌ییهای اولیهٔ معرف V در $\mathbb{A}^n$، $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_r(x_1, \dots, x_n)$ همگی مانند چندجمله‌یی $zf(x_1, \dots, x_n) - 1$ در نقاط نگارهٔ F صفر می‌شوند. به عبارت دیگر، نگارهٔ F در زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی $\mathbb{A}^{n+1}$ که به صورت $W = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r, zf - 1)$ تعریف می‌شود، قرار دارد.

خواننده می‌تواند دقیقاً با دنبال کردن همان استدلال در حالت مکمل یک نقطه در $\mathbb{A}^1$، به‌آسانی بررسی کند که این نگاشت از مجموعه‌ها

$$U \longrightarrow \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r, zf - 1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

یک یکریختی بین چندگوناهای شبه‌تصویری است. این مطلب نشان می‌دهد که زیرمجموعهٔ باز U از چندگونای آفین V که به عنوان مکمل مجموعهٔ صفر یک تابع چندجمله‌یی f بر V تعریف شده، خود یک چندگونای آفین است. طبق تعریف، حلقهٔ مختصاتی U با حلقهٔ $\mathbb{C}[W] = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, z]}{(F_1, \dots, F_r, zf-1)}$ یکریخت است. خواننده به‌آسانی تأیید خواهد کرد که $\mathbb{C}[W] \cong \mathbb{C}[V]\left[\frac{1}{f}\right]$.

هشدار: چنین نیست که همهٔ مجموعه‌های باز فضای آفین یا فضای تصویری آفین هستند. زیرا، صفحهٔ سوراخ‌دار، $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$، آفین نیست. در حال حاضر ابزار لازم برای ارائهٔ برهان دقیقی که این مجموعه آفین نیست نداریم، ولی در بخش بعد مجدداً به این مثال برمی‌گردیم.

حال می‌توانیم بفهمیم که چرا هر چندگونای شبه‌تصویری V پایه‌ای از مجموعه‌های باز آفین دارد. چنانکه دیده‌ایم، با در نظر گرفتن V به صورت زیرمجموعه‌ای از فضای تصویری $\mathbb{P}^n$، V اجتماع اشتراک آن با هر یک از قطعه‌های مختصاتی U_i در $\mathbb{P}^n$ است. اما، هر $V \cap U_i$ یک چندگونای شبه‌تصویری در $U_i \cong \mathbb{A}^n$ است، و چون هر زیرمجموعهٔ موضعاً بستهٔ یک فضا را می‌توان به صورت یک زیرمجموعهٔ باز یک مجموعهٔ بسته نوشت، هر $V \cap U_i$ به شکل $\mathbb{V}(F_1, \dots, F_s) \setminus \mathbb{V}(G_1, \dots, G_t)$ خواهد بود، که F_jها و G_jها چندجمله‌ییهایی بر $\mathbb{A}_i^n$ هستند. روشن است که این مجموعه با مجموعه‌های باز $\mathbb{V}(F_1, \dots, F_s) \setminus \mathbb{V}(G_j)$ پوشانده شده‌اند که مکملهای ابررویه‌هایی هستند که با تحدید G_j به مجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{V}(F_1, \dots, F_s)$ تعریف شده‌اند. چون هر یک از این مجموعه‌ها مکمل یک ابررویه در یک چندگونای آفین است، هر کدام یک چندگونای آفین است؛ به‌علاوه هر کدام در V باز است. بنابراین، چندگونای شبه‌تصویری V پوششی از مجموعه‌های آفین باز دارد.

بلافاصله نتیجه می‌شود که توپولوژی زاریسکیِ هر چندگونای شبه‌تصویری پایه‌ای از مجموعه‌های آفین باز دارد، زیرا هر مجموعهٔ باز یک چندگونای شبه‌تصویری خود یک چندگونای شبه‌تصویری است.

تمرین ۴.۲.۰۱ فرض می‌کنیم V یک چندگونای آفین باشد و f تابعی در حلقهٔ مختصاتی آن. نشان دهید که اگر f در هیچ نقطهٔ V صفر نشود، در $\mathbb{C}[V]$ وارونپذیر است.

تمرین ۴.۲.۰۲ یک پوشش آفین باز برای صفحهٔ سوراخ‌دار $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ پیدا کنید.

تمرین ۴.۲.۰۳ نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ متشکل از ماتریسهای $n \times n$ وارونپذیر، ساختار یک چندگونای جبری آفین را دارد (بخش ۱.۱ را ببینید).

۳.۴ توابع منظم

توابع منظم بر یک چندگونای شبه‌تصویری تعمیم طبیعی توابع چندجمله‌یی بر یک چندگونای آفین است.

در ورای تعریف تابع منظم این فکر نهفته است که چندگوناهای شبه‌تصویری، از بسیاری جهات، مانند خمینه‌ها هستند. نظر به اینکه خمینه‌ها به طور موضعی همانند فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ هستند، چندگوناها به طور موضعی همانند چندگوناهای آفین‌اند. وجود پایه‌ای از مجموعه‌های باز آفین بدین معنی است که می‌توانیم یک چندگونا را اجتماع چندگوناهای آفین تصور کنیم، بنابراین تابع منظم را به طور موضعی تعریف کنیم—تحدید آن به هر قطعهٔ آفین باید یک تابع چندجمله‌یی باشد.

ابتدا یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در $\mathbb{A}^n$ مانند V را در نظر می‌گیریم. برای هر دو تابع مفروض f و g در حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$، عبارت گویای $\frac{f}{g}$ را می‌توان یک تابع موضعاً معین قلمداد کرد: $\frac{f}{g}$ بر مجموعهٔ باز $V \setminus \mathbb{V}(g)$ خوشتعریف است. همان گونه که دیده‌ایم، این مجموعهٔ باز با یک چندگونای آفین با حلقهٔ مختصاتی $\frac{\mathbb{C}[V][z]}{(zg-1)}$ یعنی با یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در $\mathbb{A}^{n+1}$ یکریخت است؛ یکریختی متناظر، همانند یک نگاشت قطعه‌ای برای یک خمینه است که هر مجموعهٔ باز در خمینه را به یک مجموعهٔ باز در فضای اقلیدسی می‌فرستد. بر قطعهٔ ما $V \setminus \mathbb{V}(g)$، تابع $\frac{1}{g}$ با تابع چندجمله‌یی z بر $\mathbb{A}^{n+1}$ یکی گرفته می‌شود، و تابع $\frac{f}{g}$ با تابع چندجمله‌یی zf بر $\mathbb{A}^{n+1}$ یکی گرفته می‌شود. به این مفهوم، هر تابع گویا بر V تابعی چندجمله‌یی بر یک زیرمجموعهٔ باز V است.

حال یک تابع منظم را بر یک چندگونای آفین که لزوماً یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{A}^n$ نیست تعریف می‌کنیم.

تعریف: فرض می‌کنیم U مجموعهٔ بازی از یک چندگونای آفین V باشد. تابع مختلط‌ـمقدار $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ در نقطهٔ $p \in U$ منظم است اگر توابعی چون g و h در $\mathbb{C}[V]$ و یک همسایگی باز p مانند $U_p \subset U$ وجود داشته باشند به طوری که h بر U_p ناصفر بوده و تابع f با تابع $\frac{g}{h}$ بر یک همسایگی p همخوان باشد. تابع f بر U منظم است هرگاه در هر نقطهٔ U منظم باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع منظم بر U با $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})$ نمایش داده می‌شود.

اگر V یک زیرمجموعهٔ بسته زاریسکی از $\mathbb{A}^n$ باشد، روشن است که هر عضو $g \in \mathbb{C}[V]$ در حلقهٔ مختصاتی V معرف یک تابع منظم $V \longrightarrow \mathbb{C}$ است. به عبارت دیگر، یک شمول طبیعی $\mathbb{C}[V] \subset \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ وجود دارد. در حقیقت، هم اکنون خواهیم دید که هر تابع منظم $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ می‌بایست تحدید یک تابع چندجمله‌یی بر $\mathbb{A}^n$ به V باشد، یعنی $\mathbb{C}[V] = Q_V(V)$. پیش از ذکر برهان، چند مثال را مورد بحث قرار می‌دهیم.

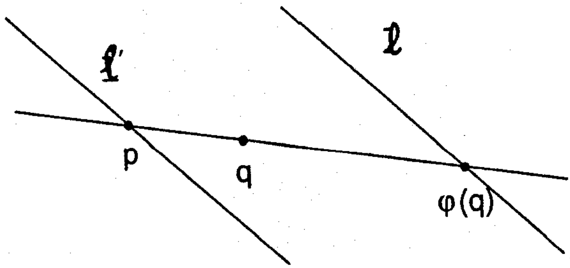
مثالها:

(۱) تابع شیب

$$U = \mathbb{A}^2 \setminus \mathbb{V}(x) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{y}{x}$$

بر مجموعهٔ U منظم است.

(۲) نگاشت تصویر از یک نقطه در صفحه به شرح زیر معرف یک تابع منظم است. نقطهٔ $p \in \mathbb{A}^2$ را اختیار می‌کنیم. خط $\ell \subset \mathbb{A}^2$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از نقطهٔ p نگذرد، و خط



شکل ۴.۴ نگاشت تصویر از یک نقطه.

ℓ را با خط مختلط $\mathbb{A}^1$ یکی می‌گیریم. فرض می‌کنیم ℓ' خطی است موازی با ℓ که از نقطهٔ p گذشته است.

تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{A}^2 \setminus \ell' \xrightarrow{\phi} \ell = \mathbb{C}$$

$$q \longmapsto \overline{qp} \cap \ell \text{ تنها نقطهٔ واقع در}$$

خواننده به‌آسانی خواهد توانست منظم بودن ϕ بر مجموعهٔ باز $\mathbb{A}^2 \setminus \ell'$ را با بیان ϕ به صورت تابعی گویا از مختصات در $\mathbb{A}^2$، اثبات کند؛ تمرین ۲.۳.۴ را ببینید.

قضیه: فرض می‌کنیم V یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در $\mathbb{A}^n$ است. در این صورت هر تابع منظم $V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ تحدید یک تابع چندجمله‌یی $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ به V است. به عبارت دیگر $\mathcal{O}_V[V] = \mathbb{C}[V]$.

برهان: قبلاً دیده‌ایم که $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathcal{O}_V(V)$.

حال فرض می‌کنیم $g \in \mathcal{O}_V(V)$ تابعی منظم بر V است. بنا به تعریف، به ازای هر نقطهٔ $p \in V$، می‌توان یک همسایگی باز U_p از نقطهٔ p را پیدا کرد که بر آن g با تابعی گویا مانند $\frac{h_p}{k_p}$ همخوان باشد، که h_p و k_p عضوهایی از $\mathbb{C}[V]$ هستند و k_p بر U_p ناصفر است.

از آنجا که مجموعه‌های باز آفین از نوع $U_F = V \setminus \mathbb{V}(F)$ برای توپولوژی زاریسکی در V یک پایه می‌سازند، می‌توان فرض کرد که هر یک از مجموعه‌های باز U_p، به ازای چندجمله‌یی مناسب F (که به p بستگی دارد) به شکل U_F است. به علاوه، چون توپولوژی زاریسکی روی V فشرده است، پوشش $\{U_p\}_{p\in V}$ از V زیرپوششی متناهی متشکل از مجموعه‌هایی به شکل

$U_{F_1}, \dots, U_{F_t}$ دارد که تابع g بر $U_{F_i} = V \setminus \mathbb{V}(F_i)$ با $\frac{h_i}{k_i}$ همخوان است. بنابراین

$$g|_{U_{F_i}} = \frac{h_i}{k_i} \qquad (i = 1, \dots, t \text{ برای هر } i)$$

چون مجموعه‌های باز $\{U_{F_i}\}_{i=1}^{t}$ چندگونای V را می‌پوشانند، همهٔ چندجمله‌ییهای k_i نمی‌توانند به طور همزمان روی V صفر شوند. لذا $\mathbb{V}(k_1, \dots, k_t) = \varnothing$، و بنا به قضیهٔ صفرهای هیلبرت ایدِآلی که k_iها تولید می‌کنند باید ایدِآل واحد $\mathbb{C}[V]$ باشد. معنی مطلب اخیر این است که می‌توانیم بنویسیم

$$1 = \sum_{j=1}^{t} \ell_j k_j$$

که ℓ_jها توابعی چندجمله‌یی در $\mathbb{C}[V]$ هستند. لذا بر هر U_{F_i} داریم

$$g = 1 \times g = \sum_{j=1}^{t} \ell_j \, k_j \frac{h_i}{k_i} \in \mathbb{C}[V]$$

قرار می‌دهیم

$$f = \sum_{j=1}^{t} h_j \, \ell_j \ \in \mathbb{C}[V]$$

می‌گوییم که به عنوان توابعی بر V، $g = f$، و بدین ترتیب برهان کامل خواهد شد. برای پی بردن به صحت این ادعا، ابتدا توجه می‌کنیم که چون برای هر i، g بر U_{F_i} به $\frac{h_i}{k_i}$ تحدید شده است، در مجموعهٔ باز و چگال $U_{F_i} \cap U_{F_j}$ از U_{F_i} باید داشته باشیم

$$\frac{h_i}{k_i} = \frac{h_j}{k_j}$$

بنابراین، برای همهٔ زوجهای i و j، چندجمله‌ییهای $h_i k_j$ و $h_j k_i$ به عنوان توابعی بر V همخوان‌اند. لذا بر هر U_{F_i} داریم

$$g = 1 \times g = \left(\sum_{j=1}^{t} \ell_j k_j \right) \left(\frac{h_i}{k_i} \right) = \sum_{j=1}^{t} \ell_j (h_j k_i) \frac{1}{k_i} = \sum_{j=1}^{t} \ell_j h_j = f$$

از آنجا که g و f بر هر مجموعهٔ باز U_{F_i} که پوششی برای V باشد همخوانی دارند، نتیجه می‌گیریم که $g = f \in \mathbb{C}[V]$. □

این قضیه درست است حتی اگر V تحویلپذیر باشد، ولی اثبات در این حالت کلی‌تر، تکنیک جبری بیشتری نیاز دارد.[1] مسئله این است که وقتی تساوی $\frac{h_i}{k_i} = \frac{h_j}{k_j}$ بر $U_{F_i} \cap U_{F_j}$، برقرار باشد مجموعهٔ $U_{F_i} \cap U_{F_j}$ ممکن است چگال باشد یا نباشد. لذا در حالت کلی این امر تساوی $h_i k_j = h_j k_i$ را ایجاب نمی‌کند.

قضیهٔ اخیر از این لحاظ اهمیت دارد که ما را مطمئن می‌سازد که تعریف موضعی تابع منظم بر یک چندگونای آفین، دقیقاً همان توابعی را به دست می‌دهد که قبلاً به طور طبیعی هنگام مطالعهٔ چندگوناهای آفین پذیرفتیم، یعنی آنها را تحدیدهای توابع چندجمله‌یی از فضاهای آفین فراگیر بگیریم. حال می‌توانیم تابع منظم را بر یک چندگونای شبه تصویری دلخواه با اطمینان تعریف کنیم.

تعریف: فرض می‌کنیم U یک زیرمجموعهٔ باز یک چندگونای شبه‌تصویری V است. تابع مختلط‌ـمقدار $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ بر U، در نقطهٔ $p \in U$ منظم است هرگاه مجموعهٔ باز آفین شامل p وجود داشته باشد که f بر آن در p منظم باشد. تابعی بر U منظم است که در هر نقطهٔ U منظم باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع منظم بر U با نماد $\mathcal{O}_V(U)$ نشان داده می‌شود.

اگر چندگونای شبه‌تصویری V آفین باشد، این تعریف با تعریف تابع منظم روی یک چندگونای آفین همخوانی دارد.

چندگونای شبه‌تصویری V را ثابت نگاه می‌داریم و مجموعهٔ $\mathcal{O}_V(U)$ را برای هر یک از مجموعه‌های U در V در نظر می‌گیریم. ماهیت موضعی توابع منظم را می‌توان در ویژگیهای زیر خلاصه کرد.

۱. مجموعهٔ $\mathcal{O}_V(U)$ نسبت به جمع و ضرب نقطه‌ای یک حلقه (در واقع، یک $\mathbb{C}$ـجبر) است.

۲. اگر تابعی بر U منظم باشد، بر هر زیرمجموعهٔ باز U نیز منظم خواهد بود، و اگر $U_۱ \subset U_۲$ زیرمجموعه‌های باز V باشند، عمل تحدید معرف همریختی حلقه‌یی طبیعی $\mathcal{O}_V(U_۲) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U_۱)$ است.

۳. اگر دو تابع منظم $f_۱$ و $f_۲$ که به ترتیب بر $U_۱ \subset V$ و $U_۲ \subset V$ تعریف شده‌اند، بر اشتراک $U_۱ \cap U_۲$ همخوان باشند این دو تابع تابعی مانند f را به صورتی یکتا، بر اجتماع $U_۱ \cup U_۲$ تعریف می‌کنند. تابع f بر این اجتماع منظم است و $f_۱$ و $f_۲$ تحدیدهای f به مجموعه‌های اولیه هستند. این حکم را می‌توان برای بیش از دو تابع، و در واقع، برای تعدادی نامتناهی از توابع تعمیم داد به شرط اینکه توابع f_i بر همهٔ اشتراکهای دوـبه‌ـدو مجموعه‌های U_i همخوانی داشته باشند.

۴. منظم بودن توابع بر اثر پسکشی نسبت به ریختپاییها محفوظ می‌ماند. به عبارت دقیق‌تر،

---

۱. رجوع شود به [۲۰، قضیهٔ ۲.۲، ص ۷۱].

اگر $V \xrightarrow{F} W$ یک ریختپایی چندگوناهای شبه‌تصویری، و $U \subset W$ مجموعه‌ای باز باشد، آنگاه برای هر $f \in \mathcal{O}_W(U)$ داریم:

$$f \circ F \in \mathcal{O}_V(F^{-1}(V))$$

یک روش رسمی برای بیان سه ویژگی اول فوق این است که هر چندگونای شبه‌تصویری به یک بافه طبیعی از $\mathbb{C}$ـ جبرها به نام بافهٔ ساختاری V مجهز است که با $\mathcal{O}_V$ نمایش داده می‌شود. ویژگی ۴ بیان می‌کند که هر ریختپایی از چندگوناهای جبری یک ریختپایی طبیعی بین بافه‌های متناظر از توابع منظم القا می‌کند. بخش پیوست شامل مطالب بیشتری در زمینهٔ بافه‌ها و به‌کارگیری آنها برای تعریف طرحها و چندگوناهای جبری مجرد است.

با استفاده از توابع منظم، می‌توان ریختپایی چندگوناهای شبه‌تصویری را به صورت موضعی به بیان دیگر نیز تعریف کرد.

تعریف: نگاشت $V \xrightarrow{\phi} W$ از چندگوناهای شبه‌تصویری یک ریختپایی است هرگاه به ازای هر $p \in V$، همسایگیهای باز U برای p و U' برای $\phi(p)$ وجود داشته باشند به طوری که $\phi(U) \subseteq U'$، و $\phi|_U$ با یک نگاشت چندگوناهای آفین مطابق آنچه در بخش ۳.۱ تعریف شد، همخوان باشد، یعنی $\phi|_U$ توسط مجموعه‌ای از توابع منظم در حلقهٔ مختصاتی U داده شود.

خواننده می‌تواند بررسی کند که تعریف بالا با تعریف قبلی ما برای یک ریختپایی چندگوناهای شبه‌تصویری هم‌ارز است. مزیت این تعریف جدید این است که ما را ملزم نمی‌کند تا برای تعریف ریختپایی، ابتدا چندگونای شبه‌تصویری را در یک فضای تصویری بنشانیم.

تمرین ۴.۳.۱. نشان دهید که نگاشت تصویری مذکور در مثال تابعی است منظم. (راهنمایی: مختصات را در صفحه طوری انتخاب (یا تعویض) کنید که نقطهٔ p مبدأ، ℓ' محور yها و ℓ خط $x = ۱$ باشد).

تمرین ۴.۳.۲. نشان دهید که $\mathcal{O}_V(U)$، حلقهٔ توابع منظم بر صفحهٔ سوراخ‌دار $\mathbb{A}^۲ \setminus \{(۰,۰)\}$، حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x,y]$ است. نتیجه بگیرید که این چندگونای شبه‌تصویری $\mathbb{A}^۲ \setminus \{(۰,۰)\}$ آفین نیست.

۵

ساختمانهای معروف

۱۰۵ نگاشتهای وِرونِزِه

نگاشتهای وِرونِزِه مثال مهمی از ریختپاییهای چندگوناهای شبه‌تصویری را به ما می‌دهند. یک نگاشت ورونزه، به روشی غیر نمایان، یک فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ را به صورت زیرچندگونایی در یک فضای تصویری با بعد بیشتر می‌نشاند.

مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ییهای همگن از درجهٔ ثابت d را در حلقهٔ چندجمله‌ییهای $\mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n]$ در نظر می‌گیریم. این مجموعه یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ است، و تعداد $\binom{d+n}{d}$ تک‌جمله‌یی به شکل $x_۰^{d_۰} \ldots x_n^{dn}$ با $\sum d_i = d$، یک پایه برای آن تشکیل می‌دهند.

تعریف: dـامین نگاشت ورونزه از $\mathbb{P}^n$، ریختپایی

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^m$$
$$[x_۰ : \ldots : x_n] \longmapsto \underbrace{[x_۰^d : x_۰^{d-۱}x_۱ : \ldots : x_n^d]}_{d \text{ همهٔ تک جمله‌ییهای درجهٔ }}$$

است که $m = \binom{d+n}{d} - ۱$.

این نگاشت یک ریختپایی خوشتعریف از چندگوناهای تصویری است، زیرا چندجمله‌ییهای معرف، همه از یک درجه‌اند و همزمان در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{P}^n$ صفر نمی‌شوند.

قضیه: نگاشت ورونزهٔ ν_d معرف یک یکریختی از $\mathbb{P}^n$ بر نگارهٔ خود است. به عبارت دیگر، نگاشت ورونزه یک نشانیدن چندگوناهای جبری است.

برهان: نگاشت وارون را شرح می‌دهیم. فرض می‌کنیم $W \subseteq \mathbb{P}^m$ نگارهٔ ν_d باشد. با توجه به اینکه مختصات همگن $\mathbb{P}^m$ با تک‌جمله‌ییهای درجهٔ d از $n+۱$ متغیر نمایه‌گذاری شده‌اند؛ می‌توانیم این مختصات را به صورت z_I بنویسیم که $I=(i_۰,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^{n+۱}$ و $i_۰+\cdots+i_n=d$.

در هر نقطهٔ W، باید حداقل یکی از مختصاتی که توسط تک‌جمله‌ییهای $x_۰^d,\ldots,x_n^d$ نمایه‌گذاری شده‌اند، ناصفر باشد. فرض می‌کنیم $U_i \subset W$ زیرمجموعه‌ای از W باشد که مختص نمایه‌گذاری‌شده‌اش به وسیلهٔ x_i^d ناصفر است. مجموعه‌های $U_۰,\ldots,U_n$ مجموعهٔ W را می‌پوشانند و می‌توانیم نگاشت

$$\begin{aligned} U_i &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ z &\longmapsto [z_{(۱,۰,\ldots,d-۱,۰,\ldots,۰)} : z_{(۰,۱,۰,\ldots,d-۱,۰\ldots,۰)} : \ldots : z_{(۰,\ldots,d-۱,۰,\ldots,۱)}] \end{aligned}$$

را برای $z\in U_i$ تعریف کنیم. یعنی، هر z را به یک $(n+۱)$تایی از مختصاتش که با $x_۰x_i^{d-۱},\ldots,x_nx_i^{d-۱}$ نمایه‌گذاری شده‌اند، می‌فرستیم. این نگاشتها در همپوشیهای $U_i\cap U_j$ همخوانی دارند و در نتیجه این نگاشتها به هم وصله می‌شوند تا معرف نگاشت $W\longrightarrow\mathbb{P}^n$ باشند. نگاشت ترکیب $\mathbb{P}^n\longrightarrow W\longrightarrow\mathbb{P}^n$ به صورت $[x_۰:\ldots:x_n]\longmapsto\nu_d(x)\longmapsto[x_۰x_i^{d-۱}:\ldots:x_nx_i^{d-۱}]=[x_۰:\ldots:x_n]$ خواهد بود که نگاشت همانی است. به همین سادگی، می‌توانیم ببینیم که نگاشت ترکیب $W\longrightarrow\mathbb{P}^n\longrightarrow W$ نیز نگاشت همانی بر W است، و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. □

ساده‌ترین راه پی بردن به نگاشتهای ورونزه ملاحظهٔ مثالهای غیرنمایان در کمترین ابعاد است.

مثال: با حالت $n=۱$ و $d=۲$ شروع می‌کنیم. در این حالت نگاشت ورونزه چنین است:

$$\begin{gathered} \mathbb{P}^۱ \xrightarrow{\nu_۲} \mathbb{P}^۲ \\ [s:t]\longmapsto[s^۲:st:t^۲] \end{gathered}$$

نگارهٔ آن مقطع مخروطی $\mathbb{V}(xz-y^{۲})$ در $\mathbb{P}^{۲}$ است. قبلاً در بخش ۴.۳ دیده‌ایم که این نگاشت معرف یک یکریختی بر نگارهٔ خود است. بنابراین، نگاشت ورونزهٔ $\nu_۲$ یک یکریختی بین $\mathbb{P}^{۱}$ و یک مقطع مخروطی در $\mathbb{P}^{۲}$ القا می‌کند.

مثال: نگاشت ورونزهٔ

$$\mathbb{P}^{۱} \xrightarrow{\nu_۳} \mathbb{P}^{۳}$$

$$[s:t] \longmapsto [\underbrace{s^{۳}}_{x} : \underbrace{s^{۲}t}_{y} : \underbrace{st^{۲}}_{z} : \underbrace{t^{۳}}_{w}]$$

نیز یک یکریختی بر نگارهٔ خود است. نگارهٔ آن خم نرمال گویای درجهٔ ۳ نامیده می‌شود. این خم بستار تصویری خم درجهٔ سوم تابدار است که در بخش ۳.۳ دیدیم. (چون معمولاً معنی مورد نظر از متن روشن است، ما در هر دو حالت آفین و تصویری، از نام خم درجهٔ سوم تابدار استفاده خواهیم کرد.) می‌توانیم بررسی کنیم که نگارهٔ $\nu_۳$ چندگونای تصویری است که با چندجمله‌ییهای $xw-yz$، $y^{۲}-xz$ و $wy-z^{۲}$ تعریف شده است که x، y، z و w مختصات همگن بر $\mathbb{P}^{۳}$ است.

سایر نگاشتهای ورونزه نشانیدنهای مشابهی را به دست می‌دهند. در حالت کلی، نگارهٔ نگاشت ورونزه $\mathbb{P}^{n} \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^{m}$ زیرچندگونای $\mathbb{P}^{m}$ است که به وسیلهٔ چندجمله‌ییهای

$$\{z_I z_J - z_K z_L | I, J, K, L \in \mathbb{N}^{n+۱}, I+J = K+L\}$$

تعریف شده است که z_Iها مختصات همگن در $\mathbb{P}^{m}$ با نماد چندنمایه‌یی هستند که در برهان قضیهٔ قبل ذکر کردیم. این مطلب را می‌توان با ملاحظاتی مشابه آنچه در مثال $\mathbb{P}^{۱} \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^{۲}$ آمده است، ثابت کرد.

مثال: نگارهٔ نگاشت ورونزهٔ $\mathbb{P}^{۱} \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}^{d}$ خمی در $\mathbb{P}^{d}$ است که به عنوان یک چندگونای شبه‌تصویری با $\mathbb{P}^{۱}$ یکریخت است. این خم، خم نرمال گویای درجهٔ d خوانده می‌شوند. توضیح بالا تضمین می‌کند که معادلات معرف خم نرمال گویا در $\mathbb{P}^{d}$ زیردترمینانهای ۲ × ۲ از ماتریس $d \times ۲$ در زیرند

$$\begin{bmatrix} z_{۰,d} & z_{۱,d-۱} & \cdots & z_{d-۱,۱} \\ z_{۱,d-۱} & z_{۲,d-۲} & \cdots & z_{d,۰} \end{bmatrix}$$

نگاشتهای ورونزهٔ ν_d را می‌توان برای هر چندگونای شبه‌تصویری V تعریف کرد. کافی است V را به صورت زیرمجموعه‌ای از یک فضای تصویری $\mathbb{P}^{n}$ در نظر گرفت و نگاشت ورونزهٔ بر V

را تحدید نگاشت ورونزه بر $\mathbb{P}^n$ به V تعریف کرد. همان برهان قبلی نشان می‌دهد که ν_d معرف یک یکریختی بین V و نگارهٔ خود است.

از آنجا که نگاشتهای ورونزه معرف یکریختیهای غیر نمایان (یعنی، متفاوت با تعویض مختصات صرف) چندگوناهای شبه‌تصویری هستند، منبع مفیدی برای مثالهایی هستند که نشان می‌دهند بعضی از ویژگیهای چندگوناهای تصویری ممکن است بر اثر یکریختی حفظ نشوند. یک مثال از این پدیده را در بخش ۵.۵، که درجهٔ یک چندگونای تصویری را مورد بحث قرار می‌دهیم، خواهیم دید.

تمرین ۵.۱.۱۰ نگاشت ورونزهٔ $\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathbb{P}^3$ را در نظر می‌گیریم. نگارهٔ آن را رویهٔ ورونزه می‌نامیم. نگاره‌های خطهای واقع در $\mathbb{P}^2$ را بر رویهٔ ورونزه شرح دهید.

۵.۲ هر مقطع مخروطی با پنج نقطه مشخص می‌شود

قضیهٔ زیر مثال ساده‌ای از هندسهٔ جبری شمارشی است. این نوع هندسهٔ جبری در سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم، به‌ویژه در مکتب ایتالیایی پرطرفدار بود و اینک در حال حاضر از تجدید حیاتی برخوردار شده است. نمونه‌ای از اهداف هندسهٔ جبری شمارشی یافتن تعداد چندگوناهایی با ویژگیهای معین است؛ برای مثال، تعداد خطوطی که در فضای سه‌بعدی چهار خط داده‌شده را قطع کنند[1] یا تعداد مقطعهای مخروطی که از چهار نقطهٔ داده‌شده بگذرند و بر خط داده‌شده‌ای مماس باشند. معمولاً این گونه مسائل را می‌توان به مسئلهٔ شمارش تعداد نقاط مشترک چندگوناهای مختلف تبدیل کرد. همچنین ممکن است بخواهند، مثلاً، تعداد خطوط واقع بر یک رویهٔ درجه سوم را بشمارند[2]. یک سؤال پیچیده‌تر در این راستا، شمارش تعداد خمهای واقع بر یک رویهٔ معین است که با $\mathbb{P}^1$ یکریخت باشند. «شمارش خمهای» واقع بر چندگوناهای جبری روشی برای رده‌بندی چندگوناها با تقریب یکریختی است، مسئله‌ای که در کانون توجه تحقیقات امروزی قرار دارد.

قضیهٔ زیر پاسخی است به این سؤال شمارشی مقدماتی که چند مقطع مخروطی (شاید تباهیده) از پنج نقطهٔ عام در صفحه می‌گذرند؟

قضیه: اگر پنج نقطه در $\mathbb{P}^2$ داده شده باشند یک مقطع مخروطی وجود دارد که بر همهٔ این نقطه‌ها می‌گذرد. این مقطع مخروطی یکتاست مگر اینکه چهارتا از این نقطه‌ها همخط باشند، و ناتباهیده است مگر اینکه سه تا از این نقطه‌ها همخط باشند.

۱. برای پاسخ مشروح‌تر به این مسئلهٔ سرگرم کننده به [۲۵] رجوع کنید.

۲. ضمناً، جواب، ۲۷ است؛ رجوع شود به [۲۰، فصل V، بخش ۴].

منظور ما از یک مقطع مخروطی تباهیده یک مقطع مخروطی است که از اجتماع دو خط در $\mathbb{P}^2$، یا دو «خط منطبق برهم» حاصل شده است. یا با عبارتی هم‌ارز با آن یک مقطع مخروطی زمانی تباهیده است که معادلهٔ آن به حاصلضرب عاملهای خطی تجزیه شود، که حالت «دو خط منطبق بر هم» به حالتی نظیر می‌شود که این عاملها متمایز نیستند.

برهان: یک مقطع مخروطی در فضای تصویری، مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی همگن درجهٔ دوم است:

$$\mathbb{V}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz) \subset \mathbb{P}^2$$

که در اینجا ضرایب $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ همه همزمان با هم صفر نیستند. اگر ضرایب a و b و c و d و e و f در یک عامل مشترک λ ضرب شوند چندجمله‌یی درجهٔ دوم دیگری به دست می‌آید، لیکن این چندجمله‌یی باز همان مقطع مخروطی را در $\mathbb{P}^2$ مشخص می‌کند. یعنی هر خط گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{C}^6$ که توسط $[a : b : c : d : e : f]$ نمایش داده می‌شود، معرف یک مقطع مخروطی در $\mathbb{P}^2$ است. به علاوه، هیچ دو خط متمایز در $\mathbb{C}^6$ مقطع مخروطی واحدی را مشخص نمی‌کنند. بنابراین، می‌توان به طور طبیعی، مجموعهٔ مقطعهای مخروطی (شاید تباهیده) در $\mathbb{P}^2$ را با فضای تصویری $\mathbb{P}^5$ یکی گرفت. اصطلاحاً می‌گویند $\mathbb{P}^5$ مقطعهای مخروطی در $\mathbb{P}^2$ را پارامتری می‌کند.

مقطعهای مخروطی گذرنده از یک نقطهٔ ثابت $[\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2$ یک ابررویهٔ H در $\mathbb{P}^5$ را تشکیل می‌دهند. این مطلب به‌آسانی دیده می‌شود وقتی که در معادلهٔ مقطع مخروطی $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$ به جای $[x : y : z]$ قرار دهیم $[\alpha : \beta : \gamma]$، به یک معادلهٔ خطی که $[a : b : c : d : e : f]$ در آن صدق می‌کند بدل می‌شود. در نتیجه مقطعهای مخروطی گذرنده بر نقاط P_1، P_2، P_3، P_4 و P_5 اشتراک ابرصفحه‌های $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5 \subset \mathbb{P}^5$ را تشکیل می‌دهند. بر اثر هر یک از اشتراکهای متوالی، بعد اشتراک یکی کم می‌شود (مگر اینکه صورت خطی ترکیبی خطی از صورتهای ماقبل خود باشد، که در این صورت بعد اشتراک تغییر نمی‌کند)، بنابراین اشتراک ناتهی است. نقاط $\mathbb{P}^5$ واقع در این اشتراک با مقطعهای مخروطی گذرنده از نقاط $P_1, \ldots, P_5$ متناظرند. اگر ابرصفحه‌ها مستقل خطی باشند اشتراک $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$ دقیقاً شامل یک نقطه است، بنابراین دقیقاً یک مقطع مخروطی وجود دارد که از این پنج نقطه می‌گذرد. تحقیق حالت تباهیدگی که در آن ابرصفحه‌ها به طور خطی مستقل نیستند به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. □

دقیقاً این نوع حالتهای ویژهٔ تباهیده بود که در آستانهٔ قرن جدید منجر به بروز مشکلاتی در بعضی از برهانها در هندسهٔ جبری شد. در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ زاریسکی و وِیل و دیگران مبانی هندسهٔ جبری را مورد بازنگری قرار دادند تا این گونه قضایای شمارشی را بر پایهٔ استواری مبتنی سازند.

با اینکه علاقه به هندسهٔ شمارشی در سدهٔ بیستم رنگ باخته بود، ولی از دههٔ گذشته فعالیتهایی در این حوزه به طور ناگهانی شروع شده است. علت این امر ارتباط عمیقی است که بین هندسهٔ جبری شمارشی و فیزیک نظری پیدا شده است (رجوع کنید به [۱۸]). ادوارد ویتن و ماکسیم کنتسِویچ، به ترتیب فیزیکدان و ریاضیدان معاصر، هر دو به دلیل کارهای تحقیقاتی خود در این زمینه به دریافت مدال فیلدز نایل شدند.

تمرین ۰۱۰۲۰۵ ثابت کنید که اگر پنج نقطه در صفحهٔ $\mathbb{P}^2$، مثل بالا، داده شده باشند دقیقاً یک مقطع مخروطی وجود دارد که از این نقاط می‌گذرد مگر اینکه چهار نقطه از این پنج نقطه، بر یک خط قرار گیرند. نشان دهید این مقطع مخروطی ناتباهیده است مگر اینکه سه نقطه از این نقاط همخط باشند.

تمرین ۰۲۰۲۰۵ نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ مقطعهای مخروطی ناتباهیدهٔ یک مجموعهٔ ناتهی باز زاریسکی از فضای پارامتر همهٔ مقطعهای مخروطی، $\mathbb{P}^5$، تشکیل می‌دهند. همچنین، نشان دهید که مجموعهٔ مقطعهای خطوط منطبق بر هم یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی از $\mathbb{P}^5$ تشکیل می‌دهند که با رویهٔ ورونزه یکریخت است (نگارهٔ نگاشت ورونزهٔ $\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathbb{P}^5$).

تمرین ۰۳۰۲۰۵ اگر چهار نقطه و یک خط در $\mathbb{P}^2$ داده شده باشند نشان دهید که معمولاً دو مقطع مخروطی وجود دارند که از این چهار نقطه می‌گذرند و بر این خط مماس‌اند. در چه شرایط ویژه از وضع نقاط و خط، به دست آوردن دقیقاً دو مقطع مخروطی عملی نیست؟ (راهنمایی: چنانکه در بخش ۱.۶ مشروحاً بحث خواهیم کرد، یک خط زمانی بر یک مقطع مخروطی مماس است که معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل از تقاطع خط و معادلهٔ مقطع مخروطی ریشهٔ مضاعف داشته باشد؛ از سوی دیگر، یک چندجمله‌یی درجهٔ دوم زمانی ریشهٔ مضاعف دارد که مبین آن، که یک چندجمله‌یی درجهٔ دوم برحسب ضرایب است، صفر شود.)

تمرین ۰۴۰۲۰۵ انتظار داریم چند مقطع مخروطی در $\mathbb{P}^2$ از سه نقطهٔ داده‌شده بگذرد و بر دو خط داده‌شده مماس باشد؟ همچنین مقطعهای مخروطی که از دو نقطه بگذرند و بر سه خط مماس باشند؟ یا بر پنج خط مماس باشند؟

۳۰۵ نگاشت سِگره و حاصلضربهای چندگوناها

نگاشت سگره ابزار مهمی است که به ما امکان می‌دهد، ساختار یک چندگونای شبه‌تصویری را برای حاصلضرب دکارتی دو چندگونای شبه‌تصویری V و W، به نحو طبیعی تعریف کنیم. لازم به یادآوری است که روش ابتدایی کارساز نیست: توپولوژی حاصلضرب القا شده بر $\mathbb{A}^۱ \times \mathbb{A}^۱$ با توپولوژی زاریسکی بر $\mathbb{A}^۲$ یکی نیست (تمرین ۲.۲.۱ را ببینید). نگاشت سگره، مجموعهٔ $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ را به صورت یک زیرمجموعهٔ بسته، در یک فضای تصویری از بعد بالاتر، به شیوه‌ای طبیعی خواهد نشانید، و به ما امکان خواهد داد تا از ضرب $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ به عنوان یک چندگونای تصویری صحبت کنیم.

بیاییم مطلب را با یک مثال در ابعاد پایین، شروع کنیم.

مثال: نگاشت زیر نگاشت سگرهٔ $\sum_{۱,۱}$ است

$$\mathbb{P}^۱ \times \mathbb{P}^۱ \xrightarrow{\sum_{۱,۱}} \mathbb{P}^۳$$

$$([s:t],[u:v]) \longmapsto [\underbrace{su}_{x} : \underbrace{sv}_{y} : \underbrace{tu}_{z} : \underbrace{tv}_{w}]$$

این نگاشت خوشتعریف است زیرا مختصات نگاره به طور همزمان صفر نمی‌شوند، و همچنین، به انتخاب نماینده‌های $[s:t]$ و $[u:v]$ برای عناصر $\mathbb{P}^۱ \times \mathbb{P}^۱$ بستگی ندارد.

اگر مختصات همگن در $\mathbb{P}^۳$ را با x، y، z و w نمایش دهیم، به‌آسانی می‌توان دید که نگارهٔ نگاشت سگره $\sum_{۱,۱}$، رویهٔ درجهٔ دوم $\mathbb{V}(xw, yz) \subset \mathbb{P}^۳$ است.

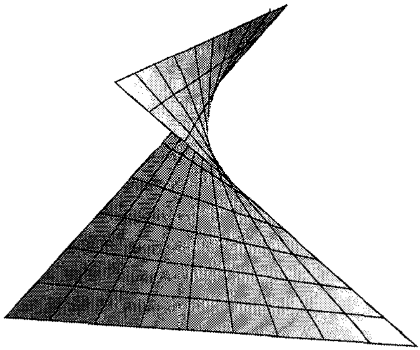
با استفاده از مختصات آفین موضعی، نگاشت $\sum_{۱,۱}$ به شکل زیر در می‌آید

$$([s:۱],[u:۱]) \longmapsto [su : s : u : ۱]$$

یعنی،

$$(s,u) \longmapsto (su, s, u)$$

از اینجا می‌بینیم که این نگاره رویه‌ای است خط‌دار، یعنی، رویه‌ای که می‌تواند با خانواده‌ای از خطوط جدا از هم پوشانیده شود. برای پی بردن به این مطلب، ابتدا s را ثابت می‌گیریم تا نگاشت $u \longmapsto [su : s : u : ۱]$ صورت پارامتری خطی را در رویهٔ نگاره به دست دهد بعد s را تغییر می‌دهیم تا خانوادهٔ خطوط جدا از هم را ببینیم. تعویض نقشهای s و u، رویهٔ درجهٔ دوم را به صورت اجتماع خانوادهٔ دیگری از خطوط جدا از هم نمایش می‌دهد. رویهٔ درجهٔ دوم $\mathbb{V}(xw - yz)$ را



شکل ۱۰۵ رویهٔ خط‌دار $\mathbb{V}(xw-yz)$.

می‌توان به دو شیوهٔ متفاوت، به صورت اجتماع خطوط جدا از هم نوشت، که دقیقاً چیزی است که از حاصلضرب دو خط انتظار داریم.

تعریف: در حالت کلی، نگاشت سگرهٔ $\sum_{m,n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\sum_{m,n}} \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

$$([x_\circ : \ldots : x_m], [y_\circ : \ldots : y_n]) \longmapsto [\underbrace{x_\circ y_\circ}_{z_{\circ\circ}} : \underbrace{x_\circ y_1}_{z_{\circ 1}} : \ldots : \underbrace{x_i y_j}_{z_{ij}} : \ldots : \underbrace{x_m y_n}_{z_{mn}}]$$

به خاطر سپردن چگونگی تعریف این نگاشت آسان است: مختصات همگن در $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ را با z_{ij} نمایش می‌دهیم، که $\circ \le i \le m$ ، $\circ \le j \le n$. حال توجه می‌کنیم که نگارهٔ $\sum_{m,n}$ به صورت زیر داده شده است

$$\begin{bmatrix} z_{\circ\circ} & \ldots & z_{\circ n} \\ \vdots & & \\ z_{m\circ} & \ldots & z_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\circ \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} [y_\circ : \ldots : y_n]$$

قضیه: نگارهٔ نگاشت سگرهٔ $\sum_{m,n}$ یک چندگونای تصویری است که توسط کهادهای 2×2 از ماتریس

$$\{(z_{ij})\}$$

تعریف شده است، که در آن z_{ij}ها مختصات همگن فضای تصویری $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ هستند که به صورت دوتایی نمایه‌گذاری و در یک ماتریس مرتب شده‌اند. به علاوه، نگاشت سگره یک‌ـبه‌ـیک

است، و نگاشت تصویری که (z_{ij}) را به هر یک از ستونهای ناصفر $[z_{\circ j} : z_{1j} : \ldots : z_{mj}]$ می‌فرستد یک ریختپایی از نگارهٔ نگاشت سگره بر $\mathbb{P}^m$ القا می‌کند. همچنین، نگاشت تصویر که (z_{ij}) را به یکی از سطرهای ناصفر $[z_{i\circ} : z_{i1} : \ldots : z_{in}]$ می‌فرستد یک ریختپایی از نگاره نگاشت سگره را بر $\mathbb{P}^n$ القا می‌کند.

برهان: نگارهٔ نگاشت سگره متشکل است از ماتریسهای $(n+1) \times (m+1)$ که از ضرب ماتریسهایی به صورت

$$\begin{bmatrix} x_\circ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_\circ, \ldots, y_n]$$

حاصل می‌شوند. به‌ویژه، هر ستون این ماتریس حاصلضرب، مضربی از هر ستون دیگر است، به عبارت دیگر، ماتریس حاصلضرب از رتبهٔ ۱ است. البته، زیردترمینانهای 2×2 در هر ماتریس رتبهٔ ۱ باید صفر باشند، لذا نگارهٔ نگاشت سگره در مجموعه‌ای که با کهادهای 2×2ی ماتریس (z_{ij}) تعریف شده قرار دارد.

از سوی دیگر، فرض می‌کنیم نقطه‌ای در $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ به ازای همهٔ زیرنمایه‌های i، j، k، l، $\circ \leq i, k \leq m$ و $\circ \leq j, l \leq n$، در معادلات $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = \circ$ صدق کند. اگر به صورت ماتریسی مرتب کنیم، مختصات این نقطه ماتریسی تشکیل می‌دهند که همهٔ کهادهای 2×2ی آن صفرند. این مطلب هم‌ارز با این شرط است که رتبهٔ ماتریس (z_{ij}) حداکثر یک است. لیکن در جبر خطی دیده‌ایم که هر ماتریس $(n+1) \times (m+1)$ از رتبهٔ k به حاصلضرب یک ماتریس $k \times (m+1)$ در یک ماتریس $(n+1) \times k$ تجزیه می‌شود. به‌ویژه، به ازای انتخاب مناسب بردارهای $[x_\circ, \ldots, x_m]$ و $[y_\circ, \ldots, y_n]$، که با تقریب یک مضرب اسکالر تعیین می‌شوند، داریم

$$(z_{ij}) = \begin{bmatrix} x_\circ \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} [y_\circ \ldots y_n]$$

چون (z_{ij}) ماتریس صفر نیست، نه ماتریس (x_i) صفر است و نه ماتریس (y_j). بنابراین، (z_{ij}) به نگارهٔ نگاشت سگره متعلق است.

حال نگاشتهای تصویر از نگارهٔ نگاشت سگره را بر $\mathbb{P}^m$ و $\mathbb{P}^n$ در نظر می‌گیریم. مجدداً، مختصات $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ را به صورت درایه‌های یک ماتریس $(n+1) \times (m+1)$ تلقی می‌کنیم. چون نگارهٔ $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ فقط از ماتریسهای رتبهٔ یک تشکیل شده است، همهٔ ستونهای

ماتریس (z_{ij}) که یک نقطه را در $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ نمایش می‌دهند، مضارب یکدیگرند. نگاشت تصویر

$$\sum(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^m$$

$$(z_{ij}) \longmapsto [z_{0j} : \ldots : z_{mj}]$$

با نگاشتن (z_{ij}) به هر ستون غیرصفر آن تعریف می‌شود. چون این ستونها تنها با تقریب یک ضریب اسکالر با هم تفاوت دارند، این نگاشت خوشتعریف است. نگاشت تصویر $\mathbb{P}^n \xrightarrow{\pi_2} \sum(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n)$ با استفاده از سطرها به جای ستونها، به طور مشابه تعریف می‌شود. □

برای دو چندگونای شبه‌تصویری داده‌شدهٔ $X \subset \mathbb{P}^m$ و $Y \subset \mathbb{P}^n$، نگاشت سگره این امکان را می‌دهد که ساختار یک چندگونای شبه‌تصویری را بر حاصلضرب $X \times Y$ تعریف کنیم: تنها کافی است که نگاشت سگره را به زیرمجموعهٔ $X \times Y$ تحدید کنیم (تمرین ۲.۳.۵ را ببینید). وقتی از حاصلضرب سِگره یا به طور خلاصه از حاصلضرب دو چندگونای شبه‌تصویری X و Y صحبت می‌کنیم، همواره منظور ما همین چندگونای شبه‌تصویری در $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ است. اغلب نگارهٔ سگره را با $X \times Y$ نمایش می‌دهیم. نگاشتهای تصویر

$$X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$$

و

$$X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$

تحدیدهای همان نگاشتهای تصویری هستند که در قضیهٔ فوق تعریف شده‌اند.

تمرین ۱.۳.۵ نقطهٔ دلخواه $p = [\lambda_0 : \ldots : \lambda_n] \in \mathbb{P}^n$ را ثابت بگیرید. ثابت کنید که نگاشت ترکیب

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{P}^{mn+m+n} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^m$$

$$x \longmapsto \sum(x,p) \longmapsto \pi_1(x,p)$$

معرف نگاشت همانی بر $\mathbb{P}^m$ است.

تمرین ۲.۳.۵ اگر X و Y چندگوناهای تصویری باشند، با بیان معادلات معرف حاصلضرب سگرهٔ $X \times Y$ برحسب معادلات X و Y، نشان دهید که این حاصلضرب نیز یک چندگونای تصویری است. ثابت کنید حاصلضرب دو چندگونای شبه‌تصویری یک چندگونای شبه‌تصویری است.

تمرین ۳.۳.۵. نشان دهید که حاصلضرب دو چندگونای آفین یک چندگونای آفین است. توجه کنید که حتی در حالت آفین، در تعریف ما از حاصلضرب، با تلقی چندگوناهای آفین به صورت چندگوناهای شبه‌تصویری در فضاهای تصویری مناسبی، نگاشت سگره به کار می‌رود.

تمرین ۴.۳.۵. نشان دهید که توپولوژی تعریف‌شده بر حاصلضرب مذکور در بالا، با توپولوژی حاصلضرب یکی نیست، مگر وقتی که یکی از چندگوناها درست مجموعه‌ای متناهی از نقاط باشد.

تمرین ۵.۳.۵. ثابت کنید که زیرمجموعهٔ متشکل از همهٔ مقاطع مخروطی تباهیده، به طور طبیعی، یک زیرمجموعهٔ بسته در $\mathbb{P}^5$ از بعد چهار است، که با نگارهٔ $\sum_{۲۲}$ در نگاشت تصویر از $\mathbb{P}^8$ برابر است، که در آن $\sum_{۲۲}$ نگارهٔ $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ در نگاشت سگره است.

تمرین ۶.۳.۵. فرض می‌کنیم X و Y چندگوناهای شبه‌تصویری و $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ و $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ نگاشتهای تصویر باشند که در این بخش تعریف شده‌اند، ثابت کنید حاصلضرب سگرهٔ $X \times Y$ از ویژگی خاص حاصلضربها برخوردار است؛ بدین معنی که به ازای هر چندگونای شبه‌تصویری Z و ریختپاییهای $p_1 : Z \longrightarrow X$ و $p_2 : Z \longrightarrow Y$، ریختپایی یکتای $\nu : Z \longrightarrow X \times Y$ موجود است که ترکیبهای $\pi_i \circ \nu$ با p_i همخوان‌اند.

۴.۵ گراسمانیها

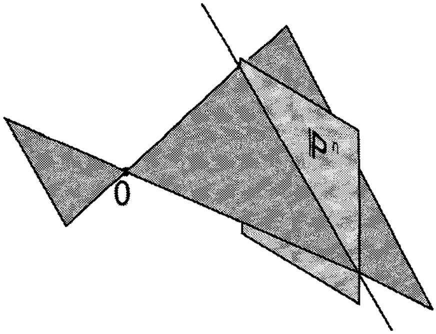
گراسمانیها تعمیم طبیعی فضاهای تصویری هستند، و در بسیاری از ویژگیها با آنها اشتراک دارند.

تعریف: گراسمانی $\mathbf{Gr}(k,n)$ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای k بعدیِ $\mathbb{C}^n$ است.

ساده‌ترین مثال از یک گراسمانی مجموعهٔ زیرفضاهای یک‌بعدی در $\mathbb{C}^{n+1}$، یعنی فضای تصویری $\mathbf{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}^n$ است.

گراسمانیها را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زیرچندگوناهای خطی یک فضای تصویری تصورکرد. یک زیرچندگونای خطی از $\mathbb{P}^n$ زیرچندگونایی بسته از $\mathbb{P}^n$ است که توسط چندجمله‌ییهای همگن خطی تعریف می‌شود. یک زیرچندگونای خطی mبعدی از $\mathbb{P}^n$، یک زیرچندگونای تصویری است که توسط یک زیرفضای برداری $(m+1)$ بعدی از فضای برداری $\mathbb{C}^{n+1}$ معین می‌شود. البته، بستار تصویری یک زیرچندگونای خطی در $\mathbb{A}^n$، یک زیرچندگونای خطی در $\mathbb{P}^n$ است.

از آنجا که در اصل یک زیرفضای k بعدی از $\mathbb{C}^{n+1}$ با یک زیرچندگونای خطی $(k-1)$ بعدی در $\mathbb{P}^n$ یکی است، می‌توان گراسمانی $\mathbf{Gr}(k,n)$ را به صورت مجموعهٔ همهٔ زیرچندگونای خطی $(k-1)$ بعدی از فضای تصویری $\mathbb{P}^{n-1}$ تصورکرد. این امر مشابه تصور $\mathbb{P}^n$ به صورت



شکل ۲.۵ یک خط در $\mathbb{P}^n$ یک زیرفضای دوبعدی از $\mathbb{C}^{n+1}$ است.

مجموعهٔ نقاط $\mathbb{P}^n$، یا به صورت مجموعهٔ خطوط $\mathbb{C}^{n+1}$ است. به این دلیل، بعضی از ریاضیدانان نماد $\mathbf{Gr}(k-1, n-1)$ را به جای نماد $\mathbf{Gr}(k,n)$، به کار می‌برند.

گراسمانیها خود چندگوناهای تصویری‌اند. این واقعیت از قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیه: گراسمانی $\mathbf{Gr}(k,n)$ را می‌توان به صورت یک زیرخمینهٔ مختلط، در $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ نشانید.

برهان: فرض می‌کنیم $\Lambda \in \mathbf{Gr}(k,n)$ یک زیرفضای برداری kبعدی $\mathbb{C}^n$ است. پایه‌ای برای Λ متشکل از بردارهای $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$، $j = 1, \ldots, k$ انتخاب کرده، ماتریسی را که بردارهای پایهٔ سطرهای آن باشند تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

این ماتریس رتبهٔ کامل دارد زیرا سطرهای آن به طور خطی مستقل‌اند. دو ماتریس با رتبهٔ کامل (a_{ij}) و (b_{ij}) یک زیرفضا پدید می‌آورند اگر و تنها اگر ماتریسی مانند g،

$$g \in \mathbf{GL}(k) = \{k \times k \text{ ماتریسهای وارونپذیر}\}$$

وجود داشته باشد به طوری که $(a_{ij}) = g(b_{ij})$. بنابراین می‌توان مجموعهٔ $\mathbf{Gr}(k,n)$ را با مجموعهٔ خارج قسمت

$$G = \{k \text{ ماتریسهای } k \times n \text{ از رتبهٔ }\}/\mathbf{GL}(k) \text{ عمل گروه}$$

یکی گرفت. زیردترمینان $k \times k$ از ماتریس (a_{ij}) حاصله از ستونهای $n \geq i_k > \ldots > \ldots > i_1 \geq 1$ را با $\Delta_{(i_1,\ldots,i_k)}$ نمایش می‌دهیم. نگاشت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \longmapsto [\Delta_{(1,\ldots,k)} : \ldots : \Delta_{(i_1,\ldots,i_k)} : \ldots : \Delta_{(n-k+1,\ldots,n)}]$$

از مجموعهٔ خارج قسمت G یک نگاشت خوشتعریف است. برای روشن شدن این موضوع، توجه دارید که دو ماتریس هم‌ارز (a_{ij}) و $g(a_{ij})$ به یک نقطه نگاشته می‌شوند، زیرا عمل g بر دترمینانها دقیقاً ضرب در ثابت ناصفر $\det g$ است. همچنین، چون ماتریس (a_{ij}) دارای رتبهٔ کامل است، حداقل یکی از دترمینانهای فوق ناصفر است. لذا یک نگاشت خوشتعریف $\mathbf{Gr}(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ در دست است. به علاوه، به‌آسانی دیده می‌شود که این نگاشت یک‌ـبه‌ـیک است و به نشانیدن پلوکر معروف است.

با این یکی گرفتن، $\mathbf{Gr}(k,n)$ حداقل یک زیرمجموعه از فضای تصویری است. حال می‌خواهیم ساختار یک خمینهٔ مختلط به آن بدهیم. به گفتهٔ دیگر، می‌خواهیم آن را با یک اطلس مجهز کنیم. این امر ما را مجاز خواهد ساخت که $\mathbf{Gr}(k,n)$ را هم به عنوان یک خمینهٔ مختلط تصور کنیم، و هم بنابر قضیهٔ چاو، به عنوان یک چندگونای تصویری.

یک زیرفضای Λ را که برای ماتریس متناظر آن (a_{ij}) شرط $\Delta_{(1,\ldots,k)} \neq 0$ برقرار است، در نظر می‌گیریم. چنین زیرفضایی به ماتریس یکتایی به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_{k\,k+1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

نظیر می‌شود، که این موضوع را می‌توانیم از ضرب (a_{ij}) در ماتریس $g \in \mathbf{GL}(k)$، وارون ماتریس $k \times k$ حاصل از k ستون اول معرف Λ، ملاحظه کنیم. هر ماتریس از این نوع نیز یک زیرفضای یکتایی $\Lambda \in \mathbf{Gr}(k,n)$ را معین می‌کند. بنابراین یک نگاشت دوسویی به صورت

$$U_{(1,\ldots,k)} = \{\Lambda \in \mathbf{Gr}(k,n) | \Delta_{(1,\ldots,k)} \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}$$

به دست می‌آید. از آنجا که مجموعه‌های باز $U_{(i_1,\ldots,i_k)}$ که در آنها $\Delta_{(i_1,\ldots,i_k)} \neq 0$، مجموعهٔ $\mathbf{Gr}(k,n)$ را می‌پوشانند، نگاشتهای بالا یک اطلس از $\mathbf{Gr}(k,n)$ را می‌پوشانند، نگاشتهای بالا یک اطلس از $\mathbf{Gr}(k,n)$ تشکیل می‌دهند. می‌توانیم با همان روشی که برای اثبات خمینهٔ

مختلط بودن $\mathbb{P}^n$، به کار بردیم، نشان دهیم که تعویضهای قطعهٔ مختصاتی از ضرب در توابع گویای Δ_I/Δ_J داده می‌شوند، بنابراین تعویضهای قطعهٔ مختصاتی آشکارا تحلیلی هستند. همچنین، چون نشانیدن پلوکر با نگاشتهای تمامریخت (در واقع، گویا) بر نگاره‌های مختصاتی داده شده است، معلوم می‌شود که $\mathbf{Gr}(k,n)$ مشخصات یک زیرخمینهٔ مختلط فضای تصویری را داراست. □

قضیه: $\mathbf{Gr}(k,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ یک چندگونای جبری تصویری است.

قبلاً دیدیم که گراسمانی $\mathbf{Gr}(k,n)$، به طور انتزاعی، یک خمینهٔ مختلط است و به صورت یک خمینهٔ مختلط در $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ نشانیده می‌شود. حال می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ چاو نتیجه بگیریم که $\mathbf{Gr}(k,n)$ یک چندگونای تصویری است: توجه داریم که گراسمانی با صفر قرار دادن گردایه‌ای از چندجمله‌ییهای همگن از $\binom{n}{k}$ متغیر تعریف می‌شود. در واقع، چون تبدیلهای قطعه‌ها توسط توابع منظم بر چندگوناهای جبری $\mathbb{A}^{k(n-k)}$ داده شده‌اند، مشابه با یک خمینه، باید انتظار داشته باشیم که گراسمانی، یک «چندگونای جبری مجرد» باشد. در اینجا این دیدگاه را دنبال نمی‌کنیم و ترجیح می‌دهیم خوانندهٔ علاقه‌مند را به مطالعهٔ پیوست ارجاع دهیم.

راه دیگر این است که با پیداکردن چندجمله‌ییهای همگنی که دقیقاً بر نگارهٔ نگاشت پلوکر صفر می‌شوند به‌آسانی ثابت کنیم که نگارهٔ این نگاشت یک چندگونای تصویری است (رجوع شود به [۱۷، ص ۶۵]). به دست آوردن **ایدآل** رادیکال همهٔ چندجمله‌ییهایی که روی $\mathbf{Gr}(k,n) \subseteq \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ صفر می‌شوند، تا حدی پیچیده‌تر است. اجازه دهید به ذکر این مطلب اکتفا کنیم که مولدهای این ایدآل چندجمله‌ییهای درجهٔ دومی هستند که روابط پلوکر نامیده می‌شوند. این روابط به کمک اتحادهای ساده‌ای دربارهٔ دترمینانها به دست می‌آیند. (رجوع شود به [۱۳، ص ۱۳۲]).

به جای وارد شدن در جزئیات، روش دیگری را برای نگرش به چندگوناهای گراسمانی معرفی می‌کنیم. این نگرش بر مبنای حاصلضربهای خارجی استوار است.[۱] فرض می‌کنیم $\wedge^k V \subset \wedge^k(\mathbb{C}^n)$، kـامین توان خارجی فضای برداری k بعدی $V \subset \mathbb{C}^n$ باشد. نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\mathbf{Gr}(k,n) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

$$V \longmapsto \wedge^k V$$

۱. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد ویژگیهای اصلی جبرهای خارجی، به یک کتاب جبر خطی مانند [۲۴] مراجعه کنید.

اگر بردارهای $v_1,\dots,v_k$ پایه‌ای برای $V \subset \mathbb{C}^n$ باشند، $\wedge^k V$ زیرفضای برداری یک‌بعدی $\wedge^k\mathbb{C}^n$ است که به وسیلهٔ $v_1\wedge,\dots,\wedge v_k$ پدید آمده است. به عنوان یک نگاشت در فضای تصویری، φ خوشتعریف است زیرا زیرفضای V، شکل حجمی آن $\varphi(V)$ را به صورت یکتایی با تقریب یک مضرب اسکالر معین می‌کند.

تحقیق این امر که φ یک یکریختی بر مجموعهٔ نگارهٔ خود است نیاز به محاسباتی دارد که از آن می‌گذریم (رجوع شود به [۱۷، ص ۶۳]).

تمرین ۰۱۰۴۰۵ یک مقطع مخروطی تحویلناپذیر C را در $\mathbb{P}^n$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید که مجموعهٔ خطوطی در $\mathbb{P}^2$ که این مقطع مخروطی را دقیقاً در دو نقطهٔ متمایز قطع نمی‌کنند، یک زیرچندگونای بستهٔ گراسمانی از همهٔ خطوط در $\mathbb{P}^2$، یعنی $\mathbf{Gr}(2,3)$، است.

۵۰۵ درجه

رده‌بندی همهٔ چندگوناهای تصویری تا حد هم‌ارزی تصویری (یعنی تا حد تعویض مختصات)، تقریباً امری است نا ممکن. با این حال، هندسهٔ جبری‌دانان سدهٔ اخیر تلاش خود را به این امر اختصاص دادند که این مسئلهٔ رده‌بندی را سروسامان بدهند. این رده‌بندی، قبل از همه، کمکی است به شناسایی ناورداهای چندگوناهای تصویری: اعداد (یا انواع داده‌های دیگر)ی که گردایهٔ زیرچندگوناهای تصویری $\mathbb{P}^n$ را افراز می‌کنند. یکی از این ناورداهای عددی «درجه» است.

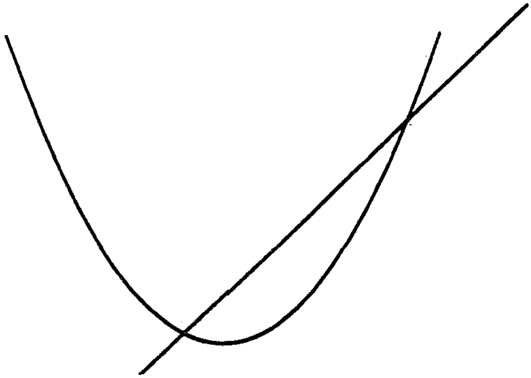
درجهٔ یک چندگونا از قطع چندگونا با یک زیرچندگونای خطی از بعدی مناسب و شمارش تعداد نقاط تقاطع تعریف می‌شود.

تعریف: درجهٔ چندگونای تصویری V در $\mathbb{P}^n$ بیشترین تعداد متناهی ممکن نقاط تقاطع V با یک زیرچندگونای خطی $L \subset \mathbb{P}^n$ است که بعد آن با متمم بعد V مساوی باشد:

$$\deg V = \max\{\#(V\cap L) < \infty \mid \dim V + \dim L = n \text{، } L \text{ زیرفضای خطی } \mathbb{P}^n\}$$

در واقع، بیشترین تعداد نقاط تقاطع تقریباً همواره به دست می‌آید: درجهٔ V تعداد نقاط مشترک V و یک زیرچندگونای خطی عام[1]، از بعد متمم بعد V است. در اینجا باید کلمهٔ «عام» را به معنی مفهوم شهودی آن، یعنی یک زیرچندگونای خطی نوعی، نمونه، یا «به قدر کافی کلی» تعبیر کرد. برای بیان دقیق این مفهوم، خواننده باید ثابت کند که زیرمجموعه‌ای باز و چگال مانند U از گراسمانی همهٔ زیرفضاهای $\mathbb{P}^n$ از بعد متمم بعد V وجود دارد به طوری که به ازای هر Λ

1. generic



شکل ۳.۵ تقاطع یک خط عام با یک مقطع مخروطی.

در این مجموعهٔ باز، $V \cap \Lambda$ دقیقاً از $d = \deg \mathrm{V}$ نقطه تشکیل می‌شود. در این صورت، کلمهٔ «عام»، صرفاً، به معنی «عضو U» خواهد بود.

چند مثال مفهوم درجه را روشن خواهند کرد.

مثال: درجهٔ مقطع مخروطی $\mathbb{V}(yz - x^{۲}) \subseteq \mathbb{P}^{۲}$ برابر ۲ است، زیرا هر خط عام مقطع مخروطی را در دو نقطه قطع می‌کند. مقطع مخروطی رسم‌شده در شکل ۳.۵ یک سهمی در قطعهٔ آفین $\mathbb{A}^{۲}$ است که $z \neq ۰$، و نشان داده شده که یک خط عام سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. هرچند در یک شکل حقیقی ممکن است خط سهمی را قطع نکند، در حالت مختلط یک خط همواره یک مقطع مخروطی را حداقل در یک نقطه، ولی اغلب در دو نقطه، قطع می‌کند. برای هر خط موازی با محور yها، یکی از نقاط تقاطع «در بینهایت» واقع است، که در این صورت، انتخاب دیگر قطعهٔ آفین، دو نقطهٔ تقاطع را روشن خواهد کرد. تنها حالت ممکن دیگر این است که خط به مقطع مخروطی مماس باشد، که در این صورت، تنها یک نقطهٔ تقاطع وجود دارد. در این مثال مشاهده می‌کنیم که تعداد عام نقاط تقاطع، با ماکسیمم تعداد نقاط تقاطع، یعنی دو، برابر است.

توضیحات فوق در مورد سهمی، به ابررویه‌های دلخواه تعمیم پیدا می‌کند.

قضیه: اگر F یک چندجمله‌یی همگن تحویلناپذیر از درجهٔ d باشد، درجهٔ ابررویهٔ $\mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$ نیز d است.

دلیل فرض تحویلناپذیری F در قضیهٔ فوق این است که F ایدِآل همهٔ چندجمله‌ییهایی را

که بر ابررویهٔ $\mathbb{V}(F)$ صفر می‌شوند، تولید کند. مثلاً، چندجمله‌ییهای F و $F^{۲}$ معرف یک ابررویه هستند، ولی درجهٔ $F^{۲}$ دو برابر درجهٔ F است. در واقع، آنچه در این قضیه مورد نیاز است این است که F عامل تکراری نداشته باشد.

برهان: برای خط دلخواه دادهشدهٔ L، نقاط تقاطع V و L را می‌توان با صفرهای تابع چندجمله‌یی روی L، حاصل از تحدید F به L یکی گرفت. از تحدید F به L یک چندجمله‌یی درجهٔ d بر $L \cong \mathbb{C}$ حاصل می‌شود؛ که طبق قضیهٔ اساسی جبر، d ریشه دارد. به ازای انتخاب عام خط L این ریشه‌ها متمایزند و با d نقطهٔ تقاطع V با L متناظرند. □

در اینجا، می‌توانیم ارزیابی مفهوم یک طرح را آغاز کنیم. نظریهٔ طرحها به ما امکان می‌دهد که، مثلاً، نقاط تقاطع یک خط و یک مقطع مخروطی را دو نقطه تلقی کنیم حتی وقتی که خط مزبور مماس بر خم باشد. فقط کافی است نقطهٔ تماس را نقطه‌ای با بستایی دو بشماریم. نقاط تقاطع خط L با ابررویهٔ $\mathbb{V}(F)$ همواره گردایه‌ای است دقیقاً از d نقطه، مشروط بر اینکه این نقاط با بستایی مناسبی شمرده شوند.

برای توضیح بیشتر، تابع $F|_L$ را به صورت یک چندجمله‌یی درجهٔ d از یک متغیر t، که به شکل

$$F(t) = (t - a_{۱})^{m_{۱}} \dots (t - a_r)^{m_r}$$

تجزیه می‌شود، در نظر می‌گیریم. چندگونایی که این چندجمله‌یی در $\mathbb{A}^{۱}$ تعیین می‌کند اساساً گردایه‌ای از r نقطه است، ولی روشن است که این، راه درستی برای در نظرگرفتن شیء هندسی متناظر به $F(t)$ نیست. ما باید آن را، به صورت مجموعه‌ای از نقاط $\{a_{۱}, \dots, a_r\}$ با بستاییهایشان، تصور کنیم، که به هر نقطهٔ a_i بستایی m_i نسبت داده شده است. این مجموعه نقاط با بستایی، مثالی از یک زیر طرح $\mathbb{A}^{۱}$ است. حلقهٔ مختصاتی وابسته به آن حلقهٔ خارج قسمت

$$\frac{\mathbb{C}[t]}{(F(t))}$$

است؛ ایدآلی که $F(t)$ پدید می‌آورد از توابعی تشکیل می‌شود که در a_i با مرتبهٔ m_i؛ $i = ۱, \dots, r$ صفر می‌شوند. این حلقه با حلقهٔ مختصاتی یک چندگونا این تفاوت را دارد که ممکن است عناصر پوچتوان داشته باشد. شیء هندسی وابسته به این حلقهٔ مختصاتی ساده‌ترین مثال از یک طرح است.

طرحها ذاتاً از تباهیدنهای چندگوناها پدید می‌آیند. در اینجا چندگونایی که d نقطهٔ متمایز دارد وقتی به یک طرح تباهیده می‌شود که بعضی از این نقاط بر هم منطبق شوند. از اینجا به نظر

می‌رسد که شاید مجبور به در نظر گرفتن طرحها باشیم، حتی اگر چندگوناها اولویت مورد علاقهٔ ما باشند. همان گونه که زیرچندگوناهای $\mathbb{A}^n$ با ایدِآلهای رادیکال حلقهٔ $\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ متناظرند، زیرطرحهای $\mathbb{A}^n$ با ایدِآلهای دلخواه حلقهٔ $\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ متناظر خواهند بود.

اینک به ادامهٔ بحث دربارهٔ درجه برمی‌گردیم. مفهوم درجه از آنجا اهمیت دارد که کمک می‌کند تا زیرچندگوناهای $\mathbb{P}^n$ را به رده‌هایی افراز و هم‌ارز تصویری بودن آنها را با هم در هر یک از این رده‌ها بررسی کنیم.

قضیه: درجهٔ یک چندگونای تصویری یک ناوردای تصویری است: یعنی اگر $\mathbb{P}^n \xrightarrow{T} \mathbb{P}^n$ یک خودریختی باشد، چندگوناهای $V \subset \mathbb{P}^n$ و $T(V) \subset \mathbb{P}^n$ یک درجه دارند.

برهان: هر یکریختی $\mathbb{P}^n$ چیزی نیست جز یک تعویض خطی مختصات (بخش ۳ـ۵ را ببینید)، و تعویضهای خطی مختصات زیرفضاهای خطی را حفظ می‌کنند. □

در پرداختن به درجه باید اندکی احتیاط کرد. درجهٔ یک ناوردای ردهٔ یکریختی یک چندگونای تصویری نیست: زیرچندگوناهای یکریخت $\mathbb{P}^n$ به‌راحتی می‌توانند درجه‌های متفاوت داشته باشند. خمهای نرمالِ گویا مثالی از این پدیده هستند.

مثال: یادآوری می‌کنیم که نگاشت ورونزهٔ

$$\mathbb{P}^۱ \xrightarrow{\nu_d} \nu_d(\mathbb{P}^۱) \subset \mathbb{P}^d$$

$$[s : t] \longmapsto [s^d : s^{d-۱}t : \ldots : t^d]$$

یک یکریختی بر روی مجموعهٔ نگارهٔ این نگاشت است. این نگاره خم نرمال گویای درجهٔ d نامیده می‌شود زیرا که درجهٔ آن به عنوان یک زیرچندگونای $\mathbb{P}^d$ برابر d است. خواننده باید درستی این موضوع را با قطع خم با یک ابرصفحهٔ عام در $\mathbb{P}^d$ (یعنی، زیرفضایی خطی که توسط یک چندجمله‌یی خطی $\lambda_۰ x_۰ + \cdots + \lambda_d x_d = ۰$ تعیین می‌شود)، بررسی کند. از سوی دیگر، نشانیدن خطی

$$\mathbb{P}^۱ \longrightarrow \mathbb{P}^۱ \subset \mathbb{P}^d$$

$$[s : t] \longmapsto [s : t : ۰ : \ldots : ۰]$$

$\mathbb{P}^۱$ را به یک خم درجهٔ یک (یک خط) در $\mathbb{P}^d$ بدل می‌کند، زیرا این خط هر ابرصفحه را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند (مگر در حالت «غیر طبیعی» که نگاره در ابرصفحه واقع است). بنابراین، هرچند خم نرمال گویا در $\mathbb{P}^d$ و خط تصویری در $\mathbb{P}^d$ به عنوان چندگوناهای تصویری یکریخت‌اند

(چون هر دو با $\mathbb{P}^۱$ یکریخت‌اند)، ولی به عنوان زیرچندگوناهای $\mathbb{P}^d$ درجه‌های متفاوت دارند و در نتیجه هم‌ارز تصویری نیستند.

این ادعاهای مربوط به درجهٔ خمهای نرمال گویا را می‌توان از طریق شکل تحقیق کرد.

قبلاً در شکل ۳.۵ دیده‌ایم که فصل مشترک یک خط و یک مقطع مخروطی معمولاً یک مجموعهٔ دو نقطه‌یی است. همچنین در مثال ۱.۵ بررسی کردیم که خم نرمال گویای درجهٔ دو همان مقطع مخروطی $\mathbb{V}(xz - y^۲) \subset \mathbb{P}^۲$ است. در نتیجه درجهٔ خم نرمال گویا در $\mathbb{P}^۲$ برابر دو است.

خم نرمال گویای درجهٔ سه مجموعهٔ نگارهٔ نگاشت ورونزه در زیر است

$$\mathbb{P}^۱ \xrightarrow{\nu_۳} \mathbb{P}^۳$$

$$[s : t] \longmapsto [s^۳ : s^۲t : st^۲ : t^۳]$$

در قطعهٔ مختصاتی اول، این نگاشت چنین است

$$[s : ۱] \longmapsto [s^۳ : s^۲ : s : ۱]$$

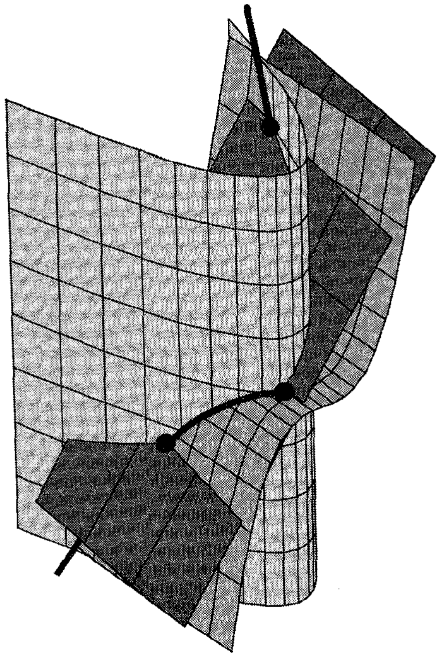
بنابراین در قطعهٔ مختصاتی اول، به $V = \{(s^۳, s^۲, s) \in \mathbb{A}^۳ | s \in \mathbb{C}\}$ نگاشته می‌شود که آن را به صورت خم درجهٔ سوم تابدار می‌شناسیم. همان گونه که در بخش ۳.۳ بحث کردیم، خم درجهٔ سوم تابدار فصل مشترک دورویهٔ $\mathbb{V}(z^۲ - y)$ و $\mathbb{V}(z^۳ - x)$ است، که در شکل ۴.۵ نشان داده شده است. این شکل فصل مشترک یک صفحهٔ عام را با خم درجهٔ سوم تابدار نیز نشان می‌دهد. همان گونه که می‌بینیم، یک صفحهٔ عام این خم را در سه نقطه قطع می‌کند، یعنی درجهٔ خم نرمال گویا در $\mathbb{P}^۳$ برابر سه است.

آیا راه ساده‌تری برای تعیین درجهٔ یک چندگونای تصویری دلخواه وجود دارد؟ برای ابررویه‌ها این امری است ساده: درجهٔ چندجمله‌یی معرف، همان درجهٔ ابررویه است. شاید این موضوع ما را به این حدس هدایت کند که فرمول زیر ممکن است یک فرمول کلی باشد:

$$\deg\mathbb{V}(F_۱, \ldots, F_c) = \deg F_۱ . \deg F_۲ \ldots \deg F_c$$

به نظر می‌رسد این فرمول دست کم در مورد فصل مشترک هر تعدادی ابرصفحه با یک ابررویه از درجهٔ دلخواه، برقرار است.

متأسفانه، در حالت کلی، وضعیت به این سادگی نیست. برای مثال، خم درجهٔ سوم تابدار در $\mathbb{P}^۳$ را نمی‌توان به صورت $\mathbb{V}(F_۱, \ldots, F_c)$ با تساوی $\deg F_۱ . \deg F_۲ \ldots \deg F_c = ۳$ نوشت. اگر چنین عملی شدنی بود، یکی از چندجمله‌ییهای همگن F_i از درجهٔ سه، و بقیه از درجهٔ یک



شکل ۴.۵ درجهٔ خم درجه سوم تابدار برابر سه است.

می‌شدند. لیکن به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که هیچ صورت خطی ناصفر بر خم درجهٔ سوم تابدار صفر نمی‌شود. زیرا، اگر صورت خطی $ax + by + cz + dw$ بر خم درجهٔ سوم تابدار صفر شود، آنگاه برای هر مقدار ناصفر $s \in \mathbb{C}$، تساوی $as^۳ + bs^۲ + cs + d = ۰$، برقرار و در نتیجه $a = b = c = d = ۰$. لذا تنها حالت ممکن این است که خم درجهٔ سوم تابدار به صورت $\mathbb{V}(F_۱)$، ابررویه‌یی در $\mathbb{P}^۳$ باشد. این مطلب علناً نادرست است، زیرا بعد یک ابررویه در فضای سه بعدی برابر دو است، در حالی که بعد خم درجهٔ سوم تابدار، در فضای سه‌بعدی برابر یک است.

هرچند خم درجهٔ سوم تابدار V در $\mathbb{P}^۳$ فصل مشترک دورویهٔ تعریف‌شده توسط $yw = x^۲$ و $z^۲w = ۲xyz - y^۳$ است (تمرین ۲.۳.۲ را ببینید)، ایدآل همگن رادیکال V نمی‌تواند توسط دو عضو تولید شود. با این حال، این ایدِآل را می‌توان با سه چندجمله‌یی زیر تولید کرد:

$$\mathbb{I}(V) = (x^۲ - wy, y^۲ - xz, zw - xy) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$$

می‌توان بررسی کرد که هیچ دو تا از این چندجمله‌ییها برای تولید $\mathbb{I}(V)$ کفایت نمی‌کنند: هر دوتای آنها همدیگر را در یک چندگونای تحویلپذیر متشکل از خود خم درجهٔ سوم تابدار، به‌علاوهٔ یک خط قطع می‌کنند.

مسئله در مورد خم درجهٔ سوم تابدار در $\mathbb{P}^۳$ این است که هرچند این خم دارای متمم بعد ۲ است، ایدِآل همگن رادیکال آن به بیش از دو مولد نیازدارد. خم درجهٔ سوم تابدار یک «مقطع کامل» از دورویه نیست.

تعریف: یک چندگونای تصویری V در $\mathbb{P}^n$ زمانی یک مقطع کامل خوانده می‌شود که ایدِآل همگن رادیکال $\mathbb{I}(V)$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ییها که بر V صفر می‌شوند، بتواند دقیقاً با چندجمله‌ییهای به تعداد متمم بعد V تولید شود.

هر مقطع کامل V، فصل مشترک ابررویه‌هایی به تعداد متمم بعد V است، ابررویه‌هایی که معادله‌های آنها ایدِآل رادیکال V را تولید می‌کنند. ولی، خم درجهٔ سوم تابدار به ما یادآوری می‌کند که هر چندگونایی یک مقطع کامل نیست حتی اگر آن چندگونا مقطع ابررویه‌هایی به تعداد متمم بعد V باشد. خم درجهٔ سوم تابدار به ردهٔ نسبتاً وسیعتری از چندگوناها متعلق است که از جنبهٔ «مجموعه‌ای» در حکم مقطع کامل هستند.

تعریف: چندگونای تصویری V با متمم بعد c در $\mathbb{P}^n$ یک «مقطع کامل مجموعه‌یی» خوانده می‌شود هرگاه V مقطع c ابررویه باشد.

البته هر مقطع کامل یک مقطع کامل مجموعه‌یی است. تفاوت در این است که وقتی یک مقطع کامل مجموعه‌یی توسط ایده‌الی که با c عضو تولیدشده تعریف می‌شود، نیازی به رادیکال بودن این ایدِآل نیست.

یک مسئلهٔ حل‌نشده: مطالب زیادی دربارهٔ مقطعهای کامل شناخته شده است، لیکن مسئلهٔ مشکلی که باقی مانده مشخص کردن آنهاست. در واقع، حتی نمی‌دانیم چگونه می‌توانیم مشخص کنیم که یک چندگونای تصویری داده‌شده با یک مقطع کامل یکریخت است یا نیست. در مورد مقطعهای کامل مجموعه‌یی نیز تعدادی سؤال جالب مطرح است. مثلاً: آیا هر خم تحویلناپذیر در فضای تصویری سه‌بعدی، فصل مشترک دورویه است؟ جای شگفتی است. که این مسئله علی‌رغم بالاترین تلاشهای عده‌ای از ریاضیدانان هنوز حل نشده است.

از بسیاری جهات کار با مقطعهای کامل در مقایسه با چندگوناهای دلخواه ساده‌تر است. برای مثال:

قضیه: اگر $V = \mathbb{V}(F_۱, \ldots, F_c)$ یک مقطع کامل باشد، آنگاه

$$\deg V = \deg F_۱ . \deg F_۲ \ldots \deg F_c$$

که $c = \operatorname{codim}(V)$.

برهان این قضیه چندان دشوار نیست، ولی به بسط مبادی «نظریهٔ تقاطع» نیاز دارد. در اینجا به جای پرداختن به آن، خواننده را به [۳۷، ص ۱۹۸] ارجاع می‌دهیم.

به عنوان موردی ویژه از این قضیه، مورد دو خم را در صفحهٔ تصویری در نظر می‌گیریم. این مورد همان قضیه کلاسیک بزو است.

قضیهٔ بزو: دو خم در صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^2$ را که به ترتیب با چندجمله‌ییهای درجهٔ d و e معین شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر این دو خم مؤلفه‌های مشترکی نداشته باشند، همدیگر را در de نقطه قطع می‌کنند. این de نقطه متمایزند به شرط اینکه این دو خم در هیچ یک از نقاط تقاطع، بریکدیگر مماس نباشند.

در حالت عام، دو خم در هیچ نقطه‌ای بر همدیگر مماس نیستند، و دقیقاً de نقطهٔ تقاطع دارند. در حالت کلی، برای تعبیر دقیقاً de نقطهٔ تقاطع، لازم است این نقاط با «بستایی»شان شمرده شوند. ساده‌ترین مثال از قضیهٔ بزو وقتی است که تقاطع خم تحویلناپذیر عام C (که توسط یک چندجمله‌یی تحویلناپذیر از درجهٔ d معین شده است) با یک خط عام L (که توسط یک چندجمله‌یی خطی معین می‌شود)، مطرح باشد. قبلاً دیدیم که $C \cap L$ متشکل از d نقطهٔ متمایز است. اگر خط در وضعیتی ویژه نسبت به C قرار گیرد، یعنی در یک یا چند نقطه بر C مماس باشد، تعداد نقاط تقاطع C و L باز d نقطه است به شرط اینکه این نقاط با بستایی‌شان شمرده شوند. در حالت کلی، تعیین بستاییهای نقاط تقاطع تا اندازه‌ای دشوارتر است؛ و ما در بخش ۱.۶ به اختصار به این موضوع باز می‌گردیم. برای برهانی برای قضیهٔ بزو به [۱۴، ص ۱۱۲] یا [۲۰، ص ۵۴] مراجعه کنید.

به طور کلی، هندسهٔ جبری‌دانان فصل مشترک چندگوناهای از بعد بالاتر را در $\mathbb{P}^n$ یا در فضای فراگیر دیگری، مورد مطالعه قرار می‌دهند. اگر چندگوناها متمم بعد مکمل داشته باشند، انتظار ما این است که تعداد نقاط تقاطع متناهی باشد و علاقه‌مندیم دستور یا روشی برای محاسبهٔ این عدد تقاطعی داشته باشیم. این مطلب آغاز مبحث زیبا ولی دشوار نظریهٔ تقاطع است، که هنوز زمینهٔ تحقیقاتی فعال امروزه است.

یکی از موارد که محاسبهٔ تعداد نقاط تقاطع در آن ساده است مورد چندگوناهای خطی در فضای تصویری است. این موضوع مفهوم «تغییر شکل» یک چندگونا در $\mathbb{P}^n$ را به یک زیرچندگونای خطی، به بیان دقیق‌تر، تبدیل چندگونا را به یک ترکیب صوری از زیرچندگوناهای خطی با بستاییهای معین پیش می‌کشد که مبحث زیبا و کلاسیک «حسابان شوبرت» است که می‌توان به مقالهٔ بسیار خواندنی کلایمن و لاکسوف در *American Mathematical Monthly* رجوع کرد [۲۵]. برای بررسی پیشرفته‌تر ولی باز مقدماتی موضوع، به [۱۱] مراجعه کنید و جهت مطالعهٔ کامل نظریهٔ تقاطع به [۱۲].

تمرین ۰۱.۵.۵ نشان دهید که درجهٔ یک زیرچندگونای $\mathbb{P}^n$ یک است اگر و تنها اگر یک زیرچندگونای خطی باشد.

تمرین ۰۲.۵.۵ مثالی از دو خم مسطح بیابید که چندگوناهای شبه‌تصویری یکریخت باشند ولی درجه‌های متفاوت داشته باشند. آیا این دو خم هم‌ارز تصویری‌اند؟

تمرین ۰۳.۵.۵ مثالی از دو خم در $\mathbb{P}^۲$ پیدا کنید که درجه‌های آنها یکی باشند ولی یکریخت نباشند.

۶.۵ تابع هیلبرت

درجه، ناوردای مفیدی برای افراز مجموعهٔ چندگوناهای تصویری در یک فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ به رده‌های مناسب است. یک ناوردا از این نوع، ولی بسیار پیچیده‌تر، چندجمله‌یی هیلبرت است.

فرض می‌کنیم V یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ باشد و $\mathbb{C}[V]$ حلقهٔ مختصاتی همگن آن. مجموعهٔ همه چندجمله‌ییهای همگن در $\mathbb{C}[V]$ از درجهٔ ثابت i، یک زیرفضای برداری متناهی بعد R_i از این جبر را تشکیل می‌دهد. جبر $\mathbb{C}[V]$ جمع مستقیم همهٔ این زیرفضاهاست:

$$\mathbb{C}[V] = R_۰ \oplus R_۱ \oplus R_۲ \oplus \dots$$

که $R_۰ = \mathbb{C}$ و $R_i.R_j = R_{i+j}$. به عبارت دیگر، حلقهٔ مختصاتی همگن یک چند گونای جبری یک حلقهٔ مدرج است.

تعریف: تابع هیلبرت چندگونای تصویری $V \subset \mathbb{P}^n$، تابع $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ است که توسط $m \longmapsto \dim R_m$ داده شده است.

قضیه: به ازای مقادیر بزرگ m، تابع هیلبرت با یک چندجمله‌یی

$$P(m) = e_۰ m^d + e_۱ m^{d-۱} + \dots + e_d$$

که چندجمله‌یی هیلبرت نامیده می‌شود، همخوان است، که درجهٔ آن $d = \dim V$ و ضریب جملهٔ پیشرو آن $e_۰ = \frac{\deg V}{d!}$.

برهان این قضیه تقریباً در اغلب کتابهای هندسهٔ جبری یا جبر تعویض‌پذیر یافت می‌شود؛ برای مثال، رجوع کنید به [۲۰، ص ۵۱] یا [۹، ص ۴۳].

هر ضریب چندجمله‌یی هیلبرت یک ناوردای تصویری از چندگونای $V \subset \mathbb{P}^n$ است، بدین معنی که هر خودریختی از $\mathbb{P}^n$ چندگونای V را به زیرچندگونای V' با همان چندجمله‌یی هیلبرت

می‌نگارد. بدین ترتیب، ناورداهای تصویری جدید زیادی از یک چندگونای تصویری به دست می‌آیند که درجه یکی از آنهاست. در حالتی که چندگونای $V \subset \mathbb{P}^n$ هموار[1] باشد، چندجمله‌یی هیلبرت اساساً روشی است فشرده برای ضبط اطلاعات حاصل از فرمول معروف ریمان-رُخ. فرمول ریمان-رخ می‌گوید که چگونه می‌توان ضرایب چندجمله‌یی هیلبرت را برحسب اعداد تقاطع (یا اعداد چرن) مربوط به کلافهای برداری صورتهای دیفرانسیل بر V و کلافهای طبیعی دیگر بر V بیان کرد. رجوع شود به [۲۰، پیوست].

با اینکه چندجمله‌یی هیلبرت بر اثر تعویض مختصات تغییر نمی‌کند، ولی یک ناوردای ردهٔ یکریختی چندگوناهای تصویری نیست-در حالت کلی، بر اثر یکریختی چندگوناهای تصویری ثابت نمی‌ماند. برای مثال، تابع هیلبرت چندگونای $\mathbb{P}^1$ عبارت است از

$$m \longmapsto \dim\left(\mathbb{C}[x,y]\right)_m = m+1$$

ولی تابع هیلبرت خم درجهٔ سوم تابدار $\nu_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$، که به عنوان یک چندگونای تصویری با $\mathbb{P}^1$ یکریخت است، به صورت

$$m \longmapsto \dim\left(\mathbb{C}[x,y]\right)_{3m} = 3m+1$$

است. دو خم یکریخت $\mathbb{P}^1$ و $\nu_3(\mathbb{P}^1)$ چندجمله‌ییهای هیلبرت متفاوت دارند، که $h_1(m) = m+1$ و $h_2(m) = 3m+1$. ولی، این چندجمله‌ییها یک درجه دارند؛ همان چیزی که انتظار داشتیم، زیرا درجهٔ چندجمله‌یی هیلبرت برابر بعد چندگوناست و بعد، ناوردای ردهٔ یکریختی هر چندگوناست. ضرایب پیشرو این چندجمله‌ییها تأیید می‌کند که درجهٔ $\mathbb{P}^1$ و خم درجهٔ سوم تابدار به‌ترتیب، یک و سه هستند، چنانکه قبلاً دیده‌ایم.

چندجمله‌ییهای هیلبرت یک بخش اساسی از نظریهٔ نوین رده‌بندی چندگوناهای جبری هستند. در واقع، برای یک چندجمله‌یی دلخواه معین P، می‌توان سؤال کرد که چه زیرچندگوناهایی از $\mathbb{P}^n$ دارای چندجمله‌یی هیلبرت P هستند؟ معلوم می‌شود که مجموعهٔ همهٔ زیرچندگوناها با چندجمله‌یی هیلبرت P، به روالی طبیعی، یک چندگونای شبه‌تصویری ـــ یا دقیق‌تر بگوییم یک طرح ـــ به نام طرح هیلبرت تشکیل می‌دهند. بنابراین، طرح هیلبرت یک فضای پارامتر برای زیرچندگوناهای $\mathbb{P}^n$ است، و درک ساختار آن به دریافت چگونگی ارتباط زیرچندگوناهای $\mathbb{P}^n$ با هم کمک می‌کند. سؤالات جالب فراوانی وجود دارد: بعد این چندگونای شبه‌تصویری چند است؟ مقصود ما از اینکه

۱. مفهوم همواری را بعداً به طور مشروحتر مورد بحث قرار خواهیم داد. در حال حاضر، می‌توان چندگونای هموار را صرفاً یک خمینهٔ مختلط تصور کرد.

در طرح هیلبرت مسیری از یک نقطه به نقطهٔ دیگر وجود دارد چیست؟ چه تعبیر هندسی به مؤلفه‌های مختلف طرح هیلبرت می‌توانیم بدهیم؟ امروزه مطالعهٔ طرحهای هیلبرت زمینهٔ فعالی در عرصهٔ تحقیقات در هندسهٔ جبری است.

برای اینکه یک تصورکلی از چگونگی ساخت طرح هیلبرت داشته باشیم، ابتدا یادآوری می‌کنیم که هر چندگونا در $\mathbb{P}^n$ توسط ایدآل همگن رادیکال خود I در حلقهٔ چندجمله‌ییهای $n+۱$ متغیرهٔ S، به طور یکتا معین می‌شود. وقتی r بزرگ باشد، می‌توان ملاحظه کرد که I توسط عنصرهای درجهٔ r خود مشخص می‌شود. مثلاً اگر I آن ایدآل اصلی فرض شود که توسط چندجمله‌یی همگن F تولید شده است، آنگاه عضوهای درجهٔ r در I به عنوان فضای برداری روی k، توسط عضوهایی به صورت $x_۰^{a_۰} x_۱^{a_۱} \ldots x_n^{a_n} F$ پدید می‌آیند که در آن $\deg F + \sum a_i = r$. و از آنجا می‌توان F و در نتیجه I را به دست آورد. گروتندیک نشان داده است ــ اگرچه به هیچ وجه واضح نیست ــ که برای یک چندجمله‌یی ثابت P، یک عدد r وجود دارد که در هر مورد، برای هر ایدآل I جوابگوست. معنی سخن گروتندیک این است، عددی مانند r (وابسته به P) وجود دارد به طوری که برای هر ایدآل I چندگونایی را معین می‌کند که چندجمله‌یی هیلبرت آن P است، I رادیکال زیرایدآلی است که توسط عضوهای درجهٔ r آن تولید شده است. بنابراین، معرفی یک چندگونا با چندجمله‌یی هیلبرت P، با مشخص کردن یک زیرفضای برداری I_r از فضای برداری $\binom{n+r}{r}$ بعدی S_r که از همهٔ چندجمله‌ییهای همگن درجهٔ r تشکیل شده، هم‌ارز است. همهٔ این زیرفضاهای برداری I_r دارای یک بعدند که برابر است با $\dim S_r - \dim (S/I)_r = \binom{n+r}{r} - P(r)$. که ما آن را با d_r نشان می‌دهیم. لذا معرفی یک چندگونا با چندجمله‌یی هیلبرت P، چیزی نیست جز مشخص کردن نقطه‌ای در گراسمانی زیرفضاهای d_rبعدی در فضای برداری $\binom{r+n}{r}$بعدی S_r. بدین طریق، هر چندگونا در $\mathbb{P}^n$ با چندجمله‌یی هیلبرت P به نقطهٔ یکتایی در این گراسمانی متناظر می‌شود. از طرف دیگر، هر نقطه‌ای در این گراسمانی، به ایدآل یک چندگونا (در واقع، یک طرح) با چندجمله‌یی هیلبرت P متناظر نمی‌شود: ثابت می‌شود، نقاطی که این ویژگی را دارند در یک زیرچندگونای بستهٔ این گراسمانی قرار دارند که توسط معادله‌های دترمینانی تعریف می‌شوند. انجام مفصل این ساختمان، تا اندازه‌ای تکنیک قوی لازم دارد ولی فرایندی است مفید؛ رجوع شود به [۱۹].

در راستای مطالعهٔ این مباحث، طبیعی است که به دنبال یافتن یک فضای پارامتر برای چندگوناهای تصویری با تقریب هم‌ارزی تصویری باشیم. طرحهای هیلبرت به درد این منظور نمی‌خورند: دو چندگونای متمایز ولی هم‌ارز تصویری، دو نقطهٔ متمایز از طرح هیلبرت را معین می‌کنند. لیکن، گروه خودریختیهای $\mathbb{P}^n$ یعنی $\mathbf{PGL}(n+۱)$، بر مجموعهٔ چندگوناهای $\mathbb{P}^n$

با چندجمله‌یی هیلبرت داده‌شده عمل می‌کند، که بر هر طرح هیلبرت یک عمل طبیعی القا می‌کند. بنابراین خارج قسمت طرح هیلبرت بر این عملِ $\mathbf{PGL}(n+۱)$ باید، حداقل وقتی همهٔ چندجمله‌ییهای هیلبرت ممکن را در نظر بگیریم، یک فضای پارامتر برای چندگوناهای تصویری با تقریب هم‌ارزی تصویری به دست بدهد. متأسفانه در حالت کلی، تعریف ساختار یک چندگونای جبری در این مجموعهٔ خارج قسمت کار ساده‌ای نیست. این مطلب، موضوع مورد بحث نظریهٔ ناورداهای هندسی است که مبحثی دشوار ولی زیباست، و توسط دیوید مامفُرد برندهٔ جایزهٔ فیلدز، در تحقیقاتش روی فضای مدولی چندگوناهای جبری توسعه یافته است [۱۶].

تمرین ۰۱۰۶۰۵ فرض می‌کنیم $P(n)$ چندجمله‌یی هیلبرت چندگونای $V\subset\mathbb{P}^n$ است. چندجمله‌یی هیلبرت چندگونای نگارهٔ نگاشت ورونزه $\nu_d(V)\subset\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-۱}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۰۲۰۶۰۵ چندجمله‌یی هیلبرت یک زیرچندگونای خطی kبعدی $\mathbb{P}^n$ را به دست آورید و آن را P بگیرید. طرح هیلبرت چندگوناهای $\mathbb{P}^n$ با چندجمله‌یی هیلبرت P را شرح دهید.

تمرین ۰۳۰۶۰۵ چندجمله‌یی هیلبرت یک ابررویهٔ درجهٔ d در $\mathbb{P}^n$ را بیابید. طرح هیلبرت چندگوناهای $\mathbb{P}^n$ با این چندجمله‌یی هیلبرت چیست؟

۶

همواری

۱.۶ فضای مماس در یک نقطه

فضای مماس بر یک چندگونای جبری در یک نقطه را می‌توان به گونهٔ کاملاً جبری چنان تعریف کرد که با مفهوم آشنا برای دانشجویان درس حسابان سازگار باشد. این تعریف تعمیم این مشاهده است که تماس محور xها با سهمی به معادلهٔ $y = x^۲$ را می‌توان با این معیار مشخص کرد که تابع چندجمله‌یی $f(x) = x^۲$ در $x = ۰$ یک ریشهٔ «دوگانه» دارد.

از آنجا که تماس مفهومی موضعی است، در ابتدا فضاهای مماس را تنها در حالت آفین بررسی و فرض می‌کنیم که در یک $\mathbb{A}^n$ ثابت، چندگونای مورد نظر ما، V، یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی است. به علاوه، از نظر فضای مماس بر V در نقطهٔ p، ابتدا دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که نقطهٔ p مبدأ مختصات باشد.

مطلب را با درنظرگرفتن یک خط دلخواه ℓ در $\mathbb{A}^n$ که از مبدأ و نقطهٔ معین $q = (a_۱, \ldots, a_n)$

می‌گذرد، شروع می‌کنیم. این خط را می‌توان به صورت $\ell = \{(ta_1, \ldots, ta_n) | t \in \mathbb{C}\}$ پارامتری کرد. ببینیم این خط کی در مبدأ بر V مماس است؟

اگر $F_1, \ldots, F_r$ مولدهای ایدآل رادیکال $\mathbb{I}(V)$، تعریف‌کنندهٔ $V \subset \mathbb{A}^n$، باشند، آنگاه نقاط تقاطع V با ℓ از حل دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} F_1(ta_1, \ldots, ta_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_r(ta_1, \ldots, ta_n) &= 0 \end{aligned}$$

نسبت به t حاصل می‌شوند. این تقاطع (احتمالاً) متشکل از چند نقطه بر ℓ است، لیکن چون بنا به فرض مبدأ مختصات هم بر V و هم بر ℓ قرار دارد، می‌دانیم دستگاه بالا حداقل یک جواب $t = 0$ دارد.

چون نقطهٔ $q = (a_1, \ldots, a_n)$ معین است هر یک از عبارتهای $F_i(ta_1, \ldots, ta_n)$ یک چندجمله‌یی یک‌متغیره برحسب t است، و لذا به طور کامل به حاصلضرب عوامل خطی تجزیه می‌شود. نقاط اشتراک $V \cap \ell$ متناظر با ریشه‌های مشترک این عبارت‌اند. ممکن است بعضی از این نقاط مشترک «با بستایی» ظاهر شوند که با ریشه‌های مکرر همزمان r چندجمله‌یی $F_i(ta_1, \ldots, ta_n)$ نسبت به t متناظرند. به‌ویژه، بستایی $V \cap \ell$ در مبدأ مختصات نمای بالاترین توان t است که همهٔ چندجمله‌ییهای $f_i(t) = F_i(ta_1, \ldots, ta_n)$ را می‌شمارد. این موضوع ما را به تعاریف زیر هدایت می‌کند.

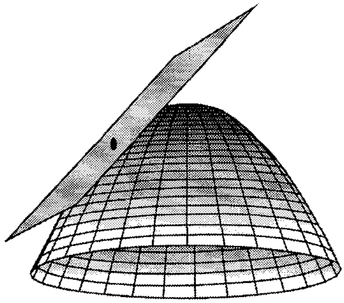
تعریف: خط ℓ در نقطهٔ p بر V مماس است اگر بستایی $\ell \cap V$ در p بیشتر از یک باشد. به علاوه، گوییم «ℓ یک مماس مرتبهٔ n» بر V است اگر این بستایی مساوی $n + 1$ باشد. فضای مماس بر V در نقطهٔ p اجتماع همهٔ نقاط واقع بر خطوط مماس بر V در p است که با T_pV نمایش داده می‌شود. در حالت تباهیده، که p یک نقطهٔ منفرد چندگونای V است، فضای مماس T_pV به صورت فضای برداری صفربعدی متشکل از تنها نقطهٔ p تعریف می‌شود.

برای اطمینان از اینکه تعاریف فوق معنی‌دار هستند، لازم است نشان دهیم که این تعاریف به انتخاب مولدهای F_i برای $\mathbb{I}(V)$ بستگی ندارند. همچنین می‌خواهیم مطمئن شویم که اجتماع همهٔ نقاط واقع بر خطوط مماس حقیقتاً یک چندگونای خطی در $\mathbb{A}^n$ تشکیل می‌دهند.

قبل از هر چیز، چند مثال می‌تواند به روشن شدن تعریف فوق کمک کند.

مثالها:

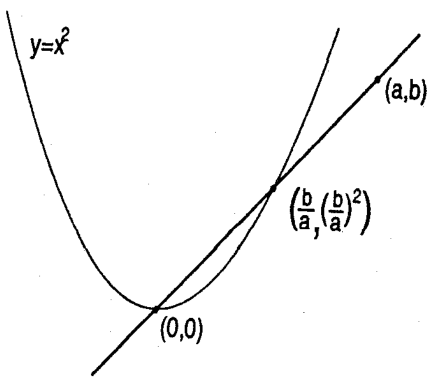
(۱) چندگونای $V \subseteq \mathbb{A}^2$ که با معادلهٔ $y = x^2$ تعریف شده، خط ℓ با معادلهٔ پارامتری به صورت



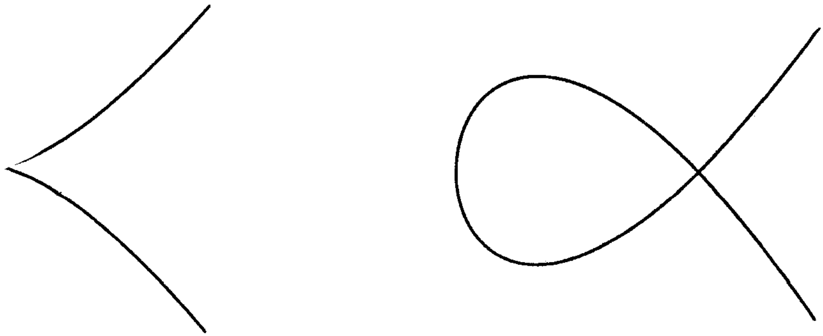
شکل ۱۰۶ فضای مماس بر یک چندگونای جبری.

$\{(ta,tb)|t\in\mathbb{A}^1\}$ را در زیرمجموعه‌ای از ℓ حاصل از جوابهای معادلهٔ $tb-t^2a^2=0$ قطع می‌ک‌ .. یعنی، فصل مشترک متشکل از دو نقطه است، مبدأ مختصات (که با جواب $t=0$ متناظر اس ٠ ‌،) و نقطهٔ $\left(\frac{b}{a},\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$. لیکن به‌ازای $b=0$، این دو نقطه بر هم منطبق می‌شوند و خط ℓ چندگونای V را در مبدأ مختصات با بستایی ۲ قطع می‌کند. بنابراین، تنها خط مماس بر V در مبدأ خطی است که از مبدأ و نقطه‌ای به صورت $(a,0)$ می‌گذرد. همان طور که انتظار می‌رفت، فضای مماس بر سهمی در مبدأ محور xهاست.

(۲) خم «گره‌دار» $V=\mathbb{V}(y^2-x^2-x^3)\subset\mathbb{A}^2$ خود را در مبدأ قطع می‌کند. خط گذرنده بر مبدأ و نقطهٔ (a,b) در مبدأ بر خم V مماس است اگر و تنها اگر $t=0$ ریشهٔ چندگانهٔ چندجمله‌یی $(tb)^2-(ta)^2-(ta)^3$ باشد. چون برای هرمقدار a و b، $t=0$ یک ریشهٔ دوگانه است، می‌بینیم که هر خط گذرنده از مبدأ بر V مماس است.



شکل ۲۰۶ تنها به ازای $b=0$ خط بر V مماس است.



شکل ۳.۶ فضای مماس در نقاط گره یا تیزه کل صفحه است.

(۳) چنانکه می‌توانیم به آسانی بررسی کنیم فضای مماس بر خم «تیزه‌ای» $V = \mathbb{V}(y^2 - x^3)$ در مبدأ مختصات کل صفحهٔ آفین است. این نیز به سبب یک نقطهٔ «تکین» در مبدأ است.

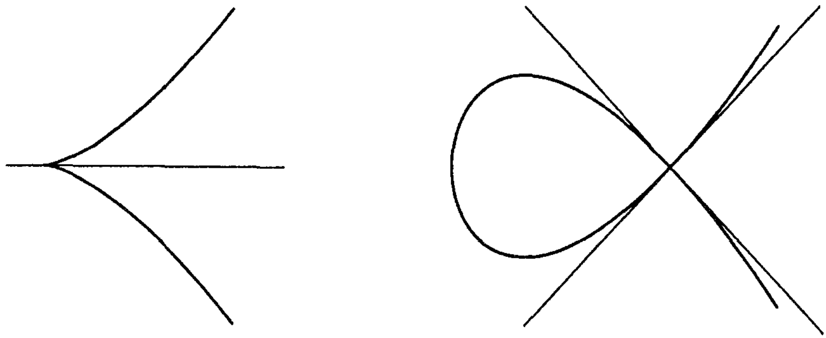
در بدو امر ممکن است اشتباه به نظر برسد که فضای مماس در مبدأ در مثال (۳) کل صفحهٔ $\mathbb{A}^2$ است و نه صرفاً محور xها. لذا ضروری است که تعریف را دنبال و خود را قانع کنیم که فضای مماس واقعاً $\mathbb{A}^2$ است.

برای یک خم مسطح با معادلهٔ $F(x,y) = 0$، مفهوم مرتبط دیگری وجود دارد که مخروط مماس در مبدأ نام دارد و آن چندگونایی است که با جمعوند همگن F از کوچکترین درجه تعریف می‌شود. بنابراین در مثال (۲)، مخروط مماس در مبدأ عبارت است از $\mathbb{V}(x^2 - y^2) = \mathbb{V}(x-y) \cup \mathbb{V}(x+y)$، در حالی که در مثال (۳) مخروط مماس $\mathbb{V}(y^2)$ است، که معرف محور xها است. به عبارت دقیق‌تر، مخروط مماس در مثال (۳) با $y^2 = 0$ تعریف می‌شود، که باید آن را با «محور xها که دوبار شمرده می‌شود» تعبیر کرد. زبان نظریهٔ طرحها به ما امکان می‌دهد که چنین مفاهیمی را به طور دقیق بیان کنیم، لیکن این امر موضوع یک درس پیشرفته‌تر در هندسهٔ جبری است.[1]

همان گونه که در حسابان دیده‌ایم، می‌خواهیم فضای مماس را با استفاده از مشتق تعریف کنیم. مشتق‌گیری از چندجمله‌ییها یک عمل جبری محض روی هر میدان است، زیرا می‌توانیم مشتق چندجمله‌ییها را با استفاده از فرمول معروف مربوط به چندجمله‌ییها حساب کنیم، بدون آنکه مفهوم حد را به کار ببریم.

دیفرانسیل یک چندجمله‌یی $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ در مبدأ قسمت خطی آن است، یعنی مجموع جملات همگن از درجهٔ یک در F. دیفرانسیل F در هر نقطهٔ p را می‌توان با انتخاب مختصات مناسب به طوری که p مبدأ باشد، تعریف کرد. تعریف زیر بیان دقیق این مطلب است.

۱. مثلاً، رجوع کنید به [۳۷، ص ۸۰ـ۷۹]



شکل ۴۰۶ مخروط مماس بر خم گره‌دار و تیزه‌ای در نقاط تیزه و گره.

تعریف: دیفرانسیل چندجمله‌یی F در نقطهٔ دلخواه $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$، که با $dF|_p$ نمایش داده می‌شود، قسمت خطی بسط تیلور F در p است. یعنی، F به طور یکتا به صورت

$$F(x) = F(p) + L(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) + G(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$$

نوشته می‌شود که L قسمت خطی و G یک چندجمله‌یی بدون جمله‌های خطی یا جملهٔ ثابت است، دیفرانسیل F در p قسمت خطی $L(x-p)$ است. ضریب جملهٔ خطی $(x_j - p_j)$ مقدار مشتق جزئی F نسبت به x_j در نقطهٔ p است. به بیان نمادی، داریم

$$L(x-p) = dF|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)(x_i - p_j)$$

بنابر آنچه در حسابان دیده‌ایم، وقتی $F(p) = 0$، $L(x-p)$ تابعی خطی است که بهترین تقریب $F(x)$ در همسایگی p است.

با استفاده از مفهوم دیفرانسیل، معادلات فضای مماس بر یک چندگونا در یک نقطه را می‌توان به طور صریح بیان کرد.

قضیه: فرض می‌کنیم V یک چندگونای جبری آفین در $\mathbb{A}^n$ باشد که مکان صفر چندجمله‌ییهای $F_1, \ldots, F_r$ است که مولدهای ایدآل رادیکال V فرض می‌شوند. فرض می‌کنیم p نقطه‌ای در V است. در این صورت فضای مماس بر V در نقطهٔ p چندگونای خطی

$$T_pV = \mathbb{V}(dF_1|_p, \ldots, dF_r|_p) \subset \mathbb{A}^n$$

است. به علاوه، فضای مماس مستقل از انتخاب مولدهای F_i است.

به علت خطی بودن این فضا، فضای مماس T_pV را می‌توان و باید به عنوان یک فضای برداری به مبدأ p قلمداد کرد.

برهان: با انتخاب مختصات مناسب، می‌توان p را مبدأ مختصات گرفت. خط ℓ را که از مبدأ و نقطهٔ ثابت $(x_۱, \ldots, x_n)$ می‌گذرد در نظر می‌گیریم که به صورت $\{(tx_۱, \ldots, tx_n) | t \in \mathbb{C}\}$ پارامتری شده است. چون p (مبدأ) بر V است، داریم $F(۰) = ۰$، بنابراین،

$$F_i(tx_۱, \ldots, tx_n) = L_i(tx_۱, \ldots, tx_n) + G_i(tx_۱, \ldots, tx_n)$$

که

$$L_i(tx_۱, \ldots, tx_n) = tL_i(x_۱, \ldots, x_n)$$

و چندجمله‌یی $G_i(tx_۱, \ldots, tx_n)$ بر $t^۲$ بخشپذیر است. لذا فصل مشترک ℓ و V در p بستایی حداقل دو دارد اگر و تنها اگر

$$L_۱(x_۱, \ldots, x_n) = \ldots = L_r(x_۱, \ldots, x_n) = ۰$$

لذا می‌بینیم نقطهٔ $(x_۱, \ldots, x_n)$ بر یک خط مماس بر V واقع است اگر و تنها اگر در این معادلات خطی صدق کند. چون فضای مماس بر V در نقطهٔ p اجتماع همهٔ نقاط واقع بر همهٔ خطوط مماس است، مشاهده می‌کنیم که فضای مماس دقیقاً چندگونای خطی $\mathbb{V}(L_۱, \ldots, L_r) \subset \mathbb{A}^n$ است.

حال باید صحت نابستگی به انتخاب مولدها را تحقیق کنیم. فرض می‌کنیم $\tilde{F}_۱, \ldots, \tilde{F}_s$ مجموعهٔ دیگری از مولدها برای $\mathbb{I}(V)$ باشد. در این صورت

$$F_i = H_{i۱}\tilde{F}_۱ + \cdots + H_{is}\tilde{F}_s$$

که H_{ij}ها چندجمله‌ییهایی در $\mathbb{C}[x_۱, \ldots, x_n]$ هستند، بنابراین

$$dF_i = (dH_{i۱})\tilde{F}_۱ + \cdots + (dH_{is})\tilde{F}_s + H_{i۱}d\tilde{F}_۱ + \cdots + H_{is}d\tilde{F}_s$$

به‌ویژه، چون $\tilde{F}_i$ در نقطهٔ $p \in V$ صفر است، داریم

$$dF_i|_p = H_{i۱}(p)d\tilde{F}_۱|_p + \cdots + H_{is}(p)d\tilde{F}_s|_p$$

لذا $\mathbb{V}(dF_۱|_p, \ldots, dF_r|_p) \supset \mathbb{V}(d\tilde{F}_۱|_p, \ldots, d\tilde{F}_s|_p)$، و شمول عکس بر اثر تقارن نتیجه می‌شود.

بالاخره، چون همهٔ معادله‌های معرف، $dF_i|_p$، خطی هستند، چندگونای T_pV یک زیرچندگونای خطی $\mathbb{A}^n$ است. □

برای استفاده از این مطلب جهت تعریف فضای مماس بر یک چندگونای شبه‌تصویری V در یک نقطهٔ p، باید V را به صورت یک زیرمجموعهٔ باز در یک زیرچندگونای بستهٔ W از یک فضای تصویری معین تصور کنیم. در این صورت می‌توانیم یک قطعهٔ مختصاتی آفین $\mathbb{A}^n$ که شامل p است انتخاب کنیم و فضای مماس بر چندگونای آفین $W \cap \mathbb{A}^n$ را در نظر بگیریم. این فضای مماس یک زیرفضای خطی قطعهٔ مختصاتی آفین $\mathbb{A}^n$ خواهد بود. لیکن، این تعریف تا حدی رضایت‌بخش نیست، زیرا انتخاب دیگر قطعهٔ مختصاتی آفین، قطعاً فضای خطی دیگری ایجاد خواهد کرد. از طرف دیگر، هر دو انتخاب از این نوع، بستار تصویری واحدی در $\mathbb{P}^n$ خواهند داشت. لذا منطقی خواهد بود اگر در این حالت فضای مماس تصویری بر V در نقطهٔ p را در نظر بگیریم، که به صورت بستار تصویری یکی از فضاهای مماس بر V در نقطهٔ p در هر قطعهٔ مختصاتی آفین تعریف می‌شود. این فضای مماس تصویری بر V در نقطهٔ p مستقل از انتخاب قطعهٔ مختصاتی آفین است.

یک راه دیگر برای تعریف فضای مماس تصویری بر یک چندگونای شبه‌تصویری به شرح ذیل است. ابتدا با توجه به اینکه هر چندگونای شبه‌تصویری زیرمجموعهٔ بازی از یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{P}^n$ است، کافی است فضای مماس تصویری در یک نقطهٔ p از یک چندگونای تصویری V در $\mathbb{P}^n$ تعریف شود. فرض می‌کنیم $\tilde{V}$ مخروط آفین روی V در $\mathbb{A}^{n+1}$، و $\tilde{p}$ نقطهٔ دلخواهی از $\tilde{V}$ نظیر به نقطهٔ p روی V باشد. فضای مماس $T_{\tilde{p}}\tilde{V}$ در $\mathbb{A}^{n+1}$ را در نظر می‌گیریم. چون خط گذرنده بر مبدأ و نقطهٔ $\tilde{p}$ در $\tilde{V}$ واقع است، این خط در $T_{\tilde{p}}\tilde{V}$ نیز قرار دارد. و این بدین معنی است که زیرچندگونای خطی $T_{\tilde{p}}\tilde{V}$ی $\mathbb{A}^{n+1}$ از مبدأ $\mathbb{A}^{n+1}$ می‌گذرد و بنابراین یک زیرچندگونای تصویری خطی یکتایی (با یک بعد کمتر) در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ به دست می‌دهد. به علاوه، خواننده می‌تواند به‌سهولت بررسی کند که فضای مماس بر $\tilde{V}$ در هر نقطهٔ $\tilde{p}$ واقع بر یک خط گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{A}^{n+1}$ یکی است، بنابراین یک چندگونای تصویری خطی را به دست می‌دهند. این چندگونای تصویری خطی همان فضای مماس تصویری بر V در نقطهٔ p است.

با این همه، تعریف فضای مماس تصویری هنوز راضی‌کننده نیست، زیرا چنانکه گفتیم، وقتی چندگونای V را در فضاهای تصویری مختلفی بنشانیم، راه خوبی برای مقایسهٔ فضاهای مماس حاصل‌شده وجود ندارد. با اتخاذ نگرشی جبری‌تر و مجردتر می‌توان بر این دشواری نیز فائق آمد، لیکن در اینجا این دیدگاه را پیگیری نخواهیم کرد (رجوع شود به [۳۷، فصل II، بخش ۳.۱]).

از بحث فوق روشن می‌شود که برای یک چندگونای شبه‌تصویری، حداقل، بعد فضای مماس T_pV معنی‌دار و مستقل از روش معرفی V به صورت زیرمجموعه‌ای از یک فضای تصویری است. این بعد همواره بزرگتر از بعد V در p یا مساوی با آن است. البته، این موضوع روشن نیست، زیرا ممکن است V توسط معادلاتی به تعداد بیشتر از متمم بعد خود تعریف شده باشد، و همین موضوع در مورد T_pV نیز صحت دارد. برای یک برهان، کتاب شافارویچ را ببینید [۳۷. فصل II، بخش ۴.۱].

تمرین ۱.۱.۶.۰ با استفاده از قضیه‌ای که معادلات معرف T_pV را برحسب معادلات V بیان می‌کند، فضاهای مماس هر یک از خمهای مثالهای (۱)، (۲) و (۳) را در مبدأ محاسبه کنید.

تمرین ۲.۱.۶.۰ نشان دهید که دو راه مختلف تعریف فضای مماس تصویری بر یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ به یک فضا منجر می‌شوند.

تمرین ۳.۱.۶.۰ فرض می‌کنیم V یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^n$ باشد که ایدِآل رادیکال همگن آن توسط چندجمله‌ییهای همگن $F_1, \ldots, F_m$ تولید شده است. نشان دهید که فضای مماس تصویری بر V در نقطهٔ p توسط چندجمله‌ییهای خطی همگن $dF_1|_p, \ldots, dF_m|_p$ معین می‌شود. (راهنمایی: مخروط آفین روی V را در نظر بگیرید و قضیهٔ متناظر برای چندگوناهای آفین را به‌کار ببرید.)

تمرین ۴.۱.۶.۰ فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{P}^n$ ابررویه‌ای باشد که توسط چندجمله‌یی همگن تحویلناپذیر F تعریف شده است. بیان صریحی برای فضای مماس بر V در p پیدا کنید. چه شرایطی در p تضمین می‌کند که بعد فضای مماس بر V در p برابر $n - 1$ باشد؟

۲.۶ نقاط هموار

سرانجام می‌توانیم منظور خود از همواری یک چندگونا را تعریف کنیم، مفهوم مهمی که احتمالاً تاکنون خواننده دریافتی از آن داشته است. می‌گوییم که یک چندگونا در یک نقطهٔ p هموار است هرگاه فضای مماس در p بعد پیش‌بینی‌شده را داشته است.

تعریف: یک نقطهٔ p بر یک چندگونای شبه‌تصویری V نقطه‌ای هموار است اگر

$$\dim T_pV = \dim_p V$$

در غیر این صورت، $p \in V$ یک نقطهٔ تکین است.

چون بعد فضای مماس بر چندگونای V در نقطهٔ p مستقل از انتخاب نشانیدن V در فضای تصویری است و به همسایگی آفین p نیز که برای یافتن فضای مماس به کار می‌رود بستگی ندارد،

مفهوم نقطهٔ هموار از V برای V ذاتی است، یعنی، همواری بر اثر یکریختی ناورداست و به جنبه‌های عارضی مانند نشانیدن خاص V به صورت یک زیرمجموعهٔ موضعاً بستهٔ $\mathbb{P}^n$ بستگی ندارد.

بجاست اشاره کنیم که تعریف هموار‌ی کاملاً جبری است—یعنی برای چندگوناهایی که بر میدان دلخواه تعریف شده‌اند معنی‌دار است.

مثالها:
فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ در هر نقطه‌ای هموار است، زیرا $\mathbb{P}^n$ پوششی از مجموعه‌های بازآفین $\mathbb{A}^n$ دارد. فضای مماس در هر نقطهٔ $\mathbb{A}^n$ همهٔ $\mathbb{A}^n$ است، لذا برای هر نقطهٔ $p \in \mathbb{P}^n$ داریم $\dim T_p\mathbb{P}^n = n = \dim \mathbb{P}^n$. همچنین، رویه‌های ورونزه و خمهای نرمال گویا (بخش ۱.۵) در هر نقطه هموارند. زیرا به عنوان چندگوناهای جبری به‌ترتیب با $\mathbb{P}^۲$ و $\mathbb{P}^۱$ یکریخت‌اند، و هموار‌ی براثر یکریختی پایاست. همچنین، چندگونای حاصلضرب $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ هموار است، زیرا هر نقطهٔ آن یک همسایگی یکریخت با $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$ دارد، که هموار است.

به‌آسانی می‌توان مجموعهٔ نقاط تکین یک چندگونا را به طور صریح بیان کرد. این مکان تکین یک زیرمجموعهٔ بسته و سرهٔ چندگوناست. بنابراین، مکان هموار، یعنی، مجموعهٔ نقاط هموار یک چندگونای جبری V، یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی زاریسکی در V است، و لذا یک زیرمجموعهٔ خیلی بزرگی از V است.

قضیه: مکان هندسی نقاط تکین یک چندگونای شبه‌تصویری V یک زیرمجموعهٔ بستهٔ سرهٔ V را تشکیل می‌دهند. به طور صریح، اگر V یک چندگونای آفین تحویلناپذیر در $\mathbb{A}^n$ با بعد d باشد که ایدآل رادیکال آن $\mathbb{I}(V)$ توسط $F_۱, \dots, F_r$ تولید شده است، آنگاه مکان تکین V مجموعهٔ صفر مشترک چندجمله‌ییهای حاصل از کهادهای $(n-d) \times (n-d)$ از ماتریس ژاکوبی

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_۱}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial F_۱}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

در V است.

خلاصهٔ برهان: چون هر چندگونای شبه‌تصویری پایه‌ای از زیرچندگوناهای باز آفین دارد، کافی است ثابت شود که مکان تکین هر چندگونای آفین یک زیرمجموعهٔ بستهٔ سره است. فرض می‌کنیم p نقطه‌ای است از چندگونای آفین V در $\mathbb{A}^n$. فضای مماس در $p = (p_۱, \dots, p_n)$ مجموعهٔ صفر r چندجمله‌یی خطی $dF_۱|_p, \dots, dF_r|_p$ تعریف می‌شود، که آن را می‌توان از حاصلضرب

ماتریسی

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}|_p & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}|_p \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}|_p & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n}|_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix}$$

به دست آورد. بنابراین، فضای مماس را می‌توان به صورت هستهٔ نگاشت خطی داده‌شده توسط ماتریس ژاکوبی تصور کرد. اما، $p \in V$ تکین است اگر و تنها اگر بعد فضای مماس بیشتر از d باشد. این امر فقط و فقط وقتی پیش می‌آید که رتبهٔ ماتریس ژاکوبی در نقطهٔ p اکیداً از $n-d$ کمتر باشد. این رتبه از $n-d$ کمتر است اگر و تنها اگر همهٔ کهادهای $(n-d) \times (n-d)$ صفر شوند. بنابراین مکان تکین به صورت مجموعهٔ صفر مشترک کهادهای مورد نظر ماتریس ژاکوبی تعریف می‌شود که حکم قضیه بود. بدین ترتیب نشان داده شد که مکان تکین یک زیرچندگونای بستهٔ V است.

برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم که مکان تکین یک زیرچندگونای سرهٔ V است، یعنی، ممکن نیست که هر نقطهٔ V یک نقطهٔ تکین باشد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که V یک ابررویه است، که با یک چندجمله‌یی تعریف شده است، یعنی، $V = \mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^n$، که در آن F یک چندجمله‌یی n متغیره است. در این حالت، $\operatorname{Sing}(V) = \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \cap V$. اگر هر نقطهٔ V یک نقطهٔ تکین باشد، هر $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ باید همه جا در V صفر شود. این بدان معنی است که $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ در ایدآل $\mathbb{I}(V) = (F)$ که معرف V است قرار دارد. ولی چون درجهٔ $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ اکیداً از درجهٔ F کمتر است، این امر ناممکن است (به شرط آنکه x_i در F ظاهر شود، ولی می‌دانیم که x_iهایی در F ظاهر می‌شوند).

برهان زمانی کامل می‌شود که نشان دهیم که هر چندگونای تحویلناپذیر آفین زیرمجموعه‌ای باز و چگال دارد که با یک ابررویه یکریخت است. این امر با نگاشتهای تصویر متوالی چندگونا بر فضاهای با بعد کمتر امکانپذیر است. این کار دشواری نیست، لیکن جزئیات آن را تا بخش ۵.۷ به تعویق می‌اندازیم. □

در این قضیه نیازی به تحویلناپذیری V نیست. هر گاه V متساوی‌البعد باشد، یعنی همهٔ مؤلفه‌های تحویلناپذیر آن یک بعد داشته باشند، حکم قضیه برقرار است.

این قضیه بیان می‌کند که هر چندگونای آفین V «تقریباً در همه جا هموار» است یا «به طور عام هموار است». چون هر چندگونای شبه‌تصویری شامل یک زیرچندگونای آفین باز چگال است، این نیز درست است که بگوییم هر چندگونای شبه‌تصویری به طور عام هموار است.

در برهان این قضیه، برای اولین بار، از این مطلب که مشخصهٔ میدان اعداد مختلط صفر است، استفاده شده است. در واقع، این حکم که اگر x_i در F ظاهر شود $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ نمی‌تواند به ایدِآل تولیدشده توسط F متعلق باشد، برای مشخصهٔ $p > ۰$ درست نیست. مثلاً، اگر $F(x, y, z) = x^p + yz$، آنگاه $\frac{\partial F}{\partial x} = px^{p-۱} = ۰$ که در ایدِآلی که توسط F تولید می‌شود واقع است. با این حال، قضیه همچنان بر هر میدان دلخواه جبری بسته درست است، گرچه تکنیکهای جبری بیشتری برای برهان در حالت مشخصهٔ غیرصفر مورد نیاز است.[۱]

همچنین می‌توان نقاط تکین یک چندگونای تصویری و در نتیجه نقاط تکین یک چندگونای شبه‌تصویری را، برحسب معادلات همگن معرف آنها بیان کرد. یک چندگونای تصویری متساوی‌البعد $V \subset \mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم که توسط چندجمله‌ییهای همگن $F_۱, \ldots, F_r \in \mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n]$ که یک ایدِآل رادیکال تولید می‌کنند، تعریف شده باشد. خواننده می‌تواند نشان دهد که از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود

$$\operatorname{Sing}(V) = \mathbb{V}\left(\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right] \text{ زیردترمینانهای } c \times c \text{ ی ماتریس}\right) \cap V \subset \mathbb{P}^n$$

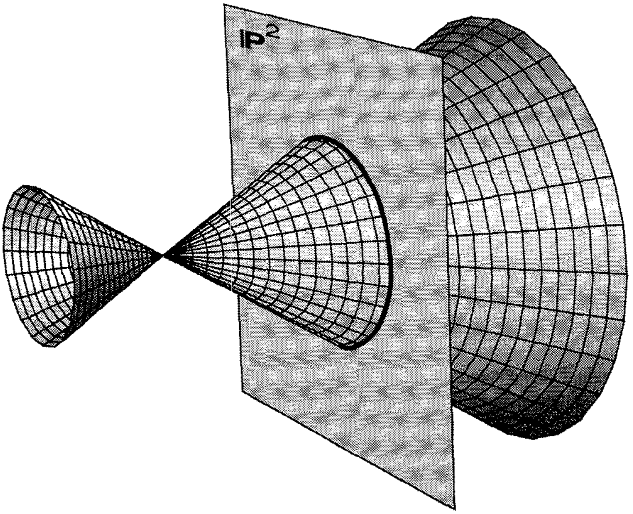
که c متمم بعد V در $\mathbb{P}^n$ است. بنابراین، یک چندگونای تصویری هموار است اگر و تنها اگر چندگونای آفین مخروطی‌شکل متناظر آن با یک بعد بیشتر، در بدترین وضع ممکن، یک تکینی منفرد داشته باشد ــــ رأس مخروط در مبدأ در $\mathbb{A}^{n+۱}$.

مثال: خم مخروطی را که با چندجمله‌یی همگن $x^۲ + y^۲ - z^۲$ در $\mathbb{P}^۲$ تعریف شده در نظر می‌گیریم. هم این خم مسطح تصویری و هم مخروط آفین روی آن هر دو در فضای فراگیر متناظر دارای متمم بعد یک هستند، زیرا هر دو آنها از صفر قرار دادن تنها چندجمله‌یی $x^۲ + y^۲ - z^۲$ به ترتیب در $\mathbb{P}^۲$ و $\mathbb{A}^۳$ به دست می‌آیند. بنابراین مکان تکین خم تصویری و مخروط آفین روی آن، هر دو از صفر قرار دادن کهادهای ۱ × ۱ از ماتریس ژاکوبی

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x} \;\; \frac{\partial F}{\partial y} \;\; \frac{\partial F}{\partial z}\right] = [۲x \;\; ۲y \;\; ۲z]$$

به دست می‌آیند. در نتیجه، مکان تکین مقطع مخروطی تصویری، زیرچندگونای $\mathbb{V}(۲x, ۲y, -۲z)$ در $\mathbb{P}^۲$، یعنی، مجموعهٔ تهی است. همچنین، مکان تکین مخروط آفین، زیرچندگونای $\mathbb{V}(۲x, ۲y, -۲z)$ در $\mathbb{A}^۳$، یعنی مبدأ است. بالأخص، مخروط آفین روی یک چندگونای تصویری هموار می‌تواند یک نقطهٔ تکین در رأس داشته باشد.

۱. رجوع شود به [۳۷، فصل II، بخش ۴.۱].



شکل ۵.۶ یک مخروط تکین روی یک چندگونای تصویری هموار.

مشابه شاخه‌های دیگر هندسه، می توان برای هر چندگونای آفین هموارِ $V \subset \mathbb{A}^n$ از بعد d، یک کلاف مماس کلی تعریف کرد. به ازای هر نقطهٔ $p \in V$، فرض می‌کنیم $T_pV \subset \mathbb{A}^n$ فضای مماس بر V باشد. حال مجموعهٔ

$$TV = \{(p, y) | y \in T_pV\} \subseteq V \times \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

را در نظر می‌گیریم. بررسی این مطلب را که TV یک زیرچندگونای بستهٔ $V \times \mathbb{A}^n$ است، به عنوان یک تمرین ساده، به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. به‌علاوه، نگاشت تصویر طبیعیِ $TV \longrightarrow V$ ساختار یک کلاف برداری از رتبهٔ d بر TV ایجاد می‌کند: تارِ روی هر نقطهٔ $p \in V$، چندگونای T_pV است. چندگونای T_pV را می‌توان با یک فضای آفین d بعدی یکی گرفت که با یک نقطهٔ مشخص p همراه است، و این فضای آفین را نیز می‌توان به صورت یک فضای برداری d بعدی تصور کرد (p متناظر با مبدأ است). چندگونای TV کلاف مماس بر V نامیده می‌شود. کلافهای برداری با تفصیل بیشتر در فصل آخر مورد بحث قرار خواهند گرفت.

اگر $V \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری هموار باشد، می‌توان کلاف مماس کلی را نیز به صورت یک کلاف فضای تصویری روی V ساخت که عبارت است از زیرچندگونای $V \times \mathbb{P}^n$ متشکل از زوجهای (p, T_pV)، که در آن T_pV نمایش فضای مماس تصویری بر V در p است.

از این دیدگاه معلوم نیست که چندگونای TV مستقل از انتخاب نشانیدن V در فضای آفین (یا تصویری) باشد. ولی این موضوع درست است. همچنین می‌توان کلاف مماس TV بر یک

چندگونای شبه‌تصویری دلخواه را به شیوه‌ای مجردتر و جبری‌تر تعریف کرد، که نگرانیهای اخیر را برطرف سازد.

تمرین ۶.۲.۱۰ معادله‌های معرف کلاف مماس کلی یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در $\mathbb{A}^n$ را برحسب معادله‌های معرف خود مجموعه بیان کنید. برای یک چندگونای تصویری، نشان دهید که کلاف مماس تصویری کلی یک چندگونای تصویری است.

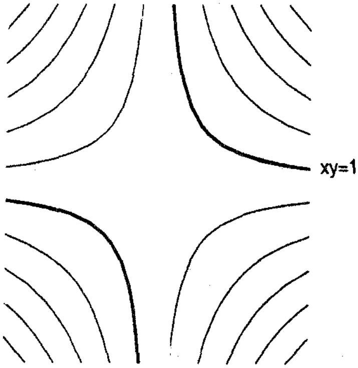
۳.۶ همواری در خانواده‌ها

در مثالهای متعدد دیده‌ایم که یک خانواده از چندگوناها به طور طبیعی با یک چندگونای جبری دیگر پارامتری می‌شود. مثلاً، در بخش ۲.۵، دیدیم که خانوادهٔ مقطعهای مخروطی مسطح به طور طبیعی توسط $\mathbb{P}^5$ پارامتری می‌شود، و در بخش ۴.۵ ملاحظه کردیم که خانوادهٔ همهٔ زیرچندگوناهای خطی d بعدیِ $\mathbb{P}^n$ به طور طبیعی توسط یک چندگونا به نام گراسمانی، پارامتری می‌شود. این گرایش یک خانواده از چندگوناهای جبری به خودش در تشکیل یک چندگونای جبری به طور طبیعی، یکی از زیباترین و نیرومندترین جنبه‌های هندسهٔ جبری است. چون فضاهای پارامترِ اشیایی که می‌خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم خود چندگوناها هستند، باز هم همهٔ ابزارهای هندسهٔ جبری را برای فهم آنها در اختیار داریم.

یک اصل کلی مفیدی که در مورد اکثر خانواده‌های چندگوناهای جبری مصداق پیدا می‌کند این است که هر عضو عمومی (یا «نوعیِ») خانواده هموار خواهد بود. زیرا، اگر خانواده‌ای از چندگوناها توسط یک چندگونای تحویلناپذیر V پارامتری شود، می‌توانیم هموار عضو عمومی V را از هموار تنها یک عضو آن نتیجه‌گیری کنیم. دلیل آن این است که عضوهای هموار یک زیرمجموعهٔ باز از فضای پارامتر را تشکیل می‌دهند. مانند همهٔ مجموعه‌های بازِ یک چندگونای تحویلناپذیر، این زیرمجموعه از عضوهای هموار چگال است، مشروط بر آنکه تهی نباشد.

ما این اصل کلی را که «ویژگی هموار عام» نامیده می‌شود، ثابت نخواهیم کرد. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند برای جزئیات و برهان به [۲۰، فصل III، بخش ۱۰] رجوع کند. در عوض، این اصل را با یک مثال روشن می‌کنیم.

مثال: خانوادهٔ یک پارامتری از هذلولیها را در صفحهٔ آفین $\mathbb{A}^2$ به صورت $\{\mathbb{V}(xy-t)|t\in\mathbb{C}\}$ در نظر می‌گیریم. این خانواده از هذلولیها به طور طبیعی توسط نقاط چندگونای $\mathbb{A}^1$ پارامتری می‌شود. این پارامتری‌سازی را می‌توان به صورت یک نگاشت π از یک چندگونای V در $\mathbb{A}^1$ که اعضای خانواده تارهای نگاشت π هستند، بهتر درک کرد. به بیان دقیق‌تر، فرض می‌کنیم V زیرچندگونایی از $\mathbb{A}^3$ باشد که از صفر قرار دادن $xy-z$ حاصل شده است، و فرض می‌کنیم π

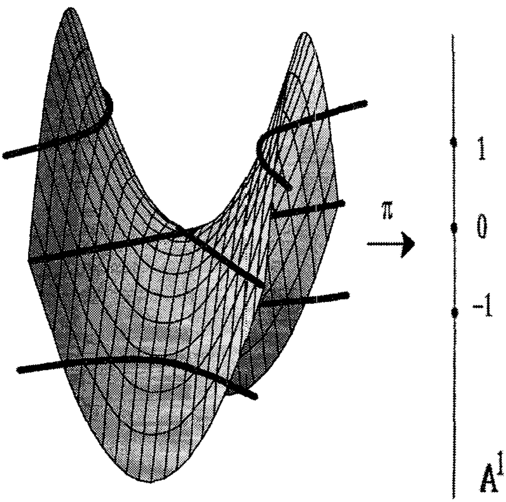


شکل ۶.۶ یک خانوادهٔ یک‌پارامتری از هذلولیها.

نگاشت تصویر معمولی (تحدیدشده به V) بر محور zها باشد. پارامتری‌سازی $t \longmapsto \mathbb{V}(xy-t)$ به هر نقطهٔ ثابت t در $\mathbb{A}^1$ تار $\pi^{-1}(t)$ را نظیر می‌کند، که هذلولی $\mathbb{V}(xy-t)$ در صفحهٔ $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{V}(z-t) \subset \mathbb{A}^3$ است.

بنابراین، اعضای این خانواده در چندگونای جبری V با هم به‌خوبی جور می‌شوند، و ریختپایی پوشای π این پارامتری‌سازی را معین می‌کند.

توجه کنید که تار هر نقطهٔ ناصفر از $\mathbb{A}^1$ یک هذلولی ناتباهیده (هموار) به شکل $\mathbb{V}(xy-t)$ است. فقط تار روی مبدأ استثنایی است: این عضو خانواده، هذلولی تباهیدهٔ $\mathbb{V}(xy) \subset \mathbb{A}^2$ یعنی اجتماع دو خط است.



شکل ۷.۶ خانوادهٔ هذلولیها یک چندگونای $\mathbb{V}(xy-z)$ تشکیل می‌دهند.

می‌بینیم که عضو عام (یا نوعی) از این خانواده هموار است. مجموعهٔ بازِ چگالِ $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ از فضای پارامتر $\mathbb{A}^1$، اعضای هموار خانواده را پارامتری می‌کند.

کلی‌تر بگوییم، وقتی یک هندسهٔ جبری‌دان از خانواده‌ای از چندگوناهای جبری صحبت می‌کند، چیزی که منظور اوست صرفاً یک ریختپایی پوشای $X \xrightarrow{\pi} B$ از چندگوناهاست. پایهٔ این خانواده چندگونای B است و اعضای خانواده تارهای این ریختپایی هستند.

قضیهٔ همواری عامِ خانواده‌ها حاکی از این است که به شرط اینکه عضوی از خانواده هموار باشد، تقریباً همهٔ اعضای خانواده هموار خواهند بود. به بیانی دقیق‌تر، یک زیرمجموعهٔ باز زاریسکی $U \subset B$ از فضای پایه وجود دارد که به ازای هر $p \in U$ تارِ $X_p = \pi^{-1}(p)$ یک چندگونای جبری هموار است. بنابراین وقتی فضای پارامتر B تحویلناپذیر است، مجموعهٔ اعضای هموار خانواده چگال است، به شرط آنکه تهی نباشد.

از انواع خانواده‌های خیلی مفید خانواده‌هایی هستند که یکدست[1] نامیده می‌شوند. به بیانی عاری از دقت، یک خانوادهٔ یکدست (یا یک ریختپایی یکدستِ $B \longrightarrow X : \pi$) خانواده‌ای است که تغییر اعضای آن (تارهای π) پیوسته باشد، نظیر آنچه در مثال خانوادهٔ هذلولیها پیش می‌آید. به‌ویژه، همهٔ اعضای یک خانوادهٔ یکدست (روی یک پایهٔ تحویلناپذیر B) یک بعد دارند و هر ناوردای عددی دیگر باید در یک خانوادهٔ یکدست موضعاً ثابت باشد. برای مثال، اگر $X \xrightarrow{\pi} B$ یک خانوادهٔ یکدست از چندگوناهای تصویری باشد، بدین معنی که هر تار یک چندگونای تصویری باشد، همهٔ اعضا یک درجه و حتی یک چندجمله‌یی هیلبرت دارند. در واقع، می‌توان نشان داد که یک خانواده از چندگوناهای تصویری روی یک پایهٔ تحویلناپذیر B یکدست است اگر و تنها اگر همهٔ اعضا یک چندجمله‌یی هیلبرت داشته باشند. البته، مثالهای مهمی از ریختپاییهای پوشا وجود دارند که یکدست نیستند. در بخش ۱.۷ فراگستری‌ها را معرفی خواهیم کرد—ریختپاییهای پوشایی که تار تقریباً روی هر نقطهٔ آن صرفاً یک نقطه است، ولی تار روی بعضی نقاط ویژه یک چندگونای تصویری بزرگ و پیچیده است. چون تارها خیلی حساب‌نشده تغییر می‌کنند، فراگستری‌ها اساساً هیچ‌وقت یکدست نیستند. برای مطالب بیشتر دربارهٔ یکدستی رجوع کنید به [۲۰، فصل III، بخش ۹].

مثال قبل از یک خانوادهٔ هذلولیها، به زبان نظریهٔ طرحها، تعبیر زیبایی دارد. همریختی حلقه‌یی متناظر بین حلقه‌های مختصاتی، نگاشت

$$\mathbb{C}[t] \xrightarrow{\pi^\#} \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{(xy-z)}$$

$$t \longmapsto z$$

1. flat

است. همریختی حلقه‌یی $\pi^{\#}$ معرف نگاشتی است از طرحها به صورت

$$\mathrm{Spec}\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{(xy-z)} \longrightarrow \mathrm{Spec}\mathbb{C}[t]$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto (\pi^{\#})^{-1}(\mathfrak{p})$$

که از تحدید آن به ایدِآلهای ماکسیمال، همان نگاشت تصویر اولیهٔ π حاصل می‌شود.

عناصر $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[t]$ ایدِآلهای اول حلقهٔ $\mathbb{C}[t]$ هستند که عبارت‌اند از ایدِآل صفر (0) به‌علاوهٔ همهٔ ایدِآلهای ماکسیمال که می‌توانند با اعداد مختلط یکی گرفته شوند. قبلاً در تمرینها به یک ویژگی شگفت‌انگیز ایدِآل اول غیرماکسیمال (0) در حلقهٔ $\mathbb{C}[t]$ برخورده‌ایم: این نقطه یک نقطهٔ چگال در فضای توپولوژیک $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[t]$ است.

تارهایِ روی نقاط متناظر با اعدادِ مختلط، هذلولیهای اولیه هستند از جمله هذلولی تباهیده روی صفر. از اینجا معلوم می‌شود که تار روی نقطهٔ چگال، $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}(z)[x,y]/(xy-z))$ است، که $\mathbb{C}(z)$ میدان توابع گویای مختلط ــ میدان کسری $\mathbb{C}[z]$ است. در اینجا باید با متغیر z به عنوان یک ثابت در میدان زمینه برخورد کرد.

بنابراین نقطهٔ چگال نیز معرف هذلولی $\mathbb{V}(xy-z)$ در صفحهٔ $\mathbb{A}^2$ با مختصات x و y است، ولی در اینجا میدان زمینه، $\mathbb{C}(z)$، میدان توابع گویای یک‌متغیره است. این هذلولیِ «عام» هموار است (که این موضوع را می‌توان با استفاده از ملاک ژاکوبی برای هموار‌ی که در بخش پیش تشریح شد، بررسی کرد)، و این مطلب می‌رساند که مجموعهٔ تارهای هموار ناتهی است، و لزوماً چگال نیز هست، زیرا به هر حال، این عضو یکی از اعضای خانواده است که متناظر با نقطهٔ چگال فضای پارامتر است.

۴.۶ قضیهٔ برتینی

این مفهوم که «عضو عمومی» یک خانواده از چندگوناها باید هموار باشد در قضیهٔ برتینی نیز منعکس شده است.

قبل از بیان قضیهٔ برتینی خاطرنشان می‌سازیم که یک ابرصفحه در $\mathbb{P}^n$ مجموعهٔ صفر یک تابعک خطی $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ در $\mathbb{C}^{n+1}$ است. این ابرصفحه تابعک خطی را با تقریب یک مضرب ثابت ناصفر معین می‌کند، در نتیجه این ابرصفحه را می‌توان با یک نقطهٔ $[a_0 : \ldots : a_n]$ در $\mathbb{P}^n$ یکی گرفت. بنابراین، طبیعی است که مجموعهٔ ابررویه‌های $\mathbb{P}^n$ را به صورت نقاط فضای تصویری دوگان $(\mathbb{P}^n)^\vee$ تصور کنیم.

قضیهٔ برتینی: فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری تحویلناپذیر هموار باشد. مجموعهٔ

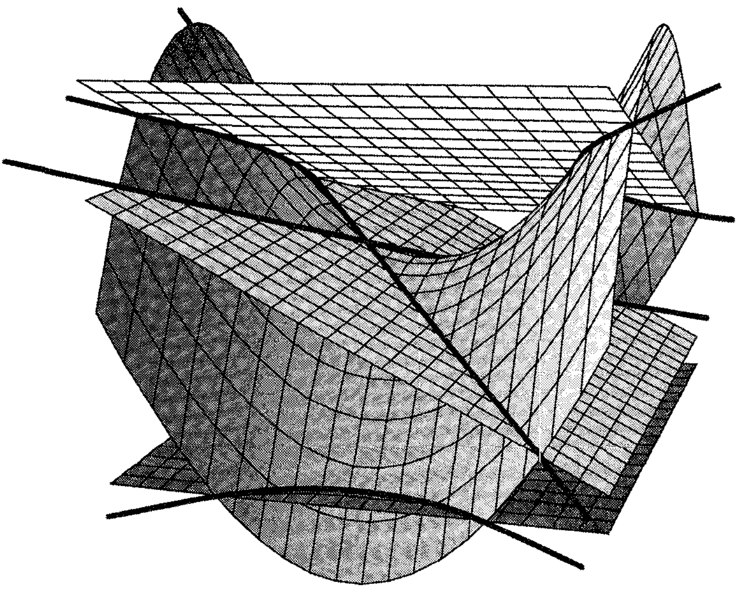
$$W = \{H \in (\mathbb{P}^n)^\vee | \text{یک چندگونای هموار است} H \cap V\}$$

یعنی مجموعهٔ همهٔ ابرصفحه‌ها در $\mathbb{P}^n$ را که V را در یک چندگونای هموار قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم، W یک زیرچندگونای باز $(\mathbb{P}^n)^\vee$ است. یعنی، مجموعهٔ ابرصفحه‌هایی که با V مقطع تکین دارند، یک زیرمجموعهٔ بستهٔ زاریسکی از $(\mathbb{P}^n)^\vee$ است.

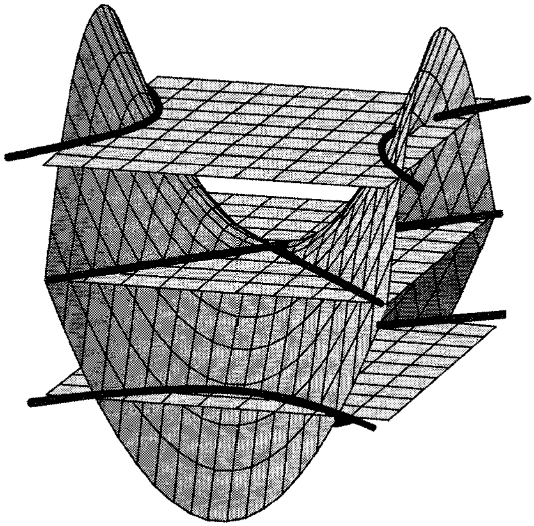
با تغییر H در فضای دوگان $(\mathbb{P}^n)^\vee$، فصل مشترکهای $H \cap V$ خانواده‌ای از چندگوناها تشکیل می‌دهند که توسط $(\mathbb{P}^n)^\vee$ پارامتری می‌شوند. این خانواده را مقاطع ابرصفحه‌ییِ V گویند.

به بیانی عاری از دقت، قضیهٔ برتینی می‌گوید که «مقطع ابرصفحه‌ییِ عام V هموار است». مثلاً، شکل ۸.۶ چند مقطع ابرصفحه‌ییِ یک چندگونای هموار را نشان می‌دهد. به موجب قضیهٔ برتینی، هر مقطع ابرصفحه‌ییِ نوعی لزوماً هموار است، و تجسم اینکه واقعاً چنین است، در این مثال آسان است. زیرا، یک مقطع ابرصفحه‌یی هموار نیست اگر و تنها اگر ابرصفحه در نقطه‌ای بر چندگونا مماس باشد. برای ملاحظهٔ برهانی برای قضیهٔ برتینی، مثلاً، رجوع کنید به [۲۰، ص ۱۷۹].

قضیهٔ برتینی نمایانگر این اصل کلی است که یک عضوِ عام هر خانواده از چندگوناهای جبری هموار است به شرط آنکه عضوی از آن هموار باشد. توجه داشته باشید که ممکن است هیچ عضوِ



شکل ۸.۶ هر مقطع ابرصفحه‌ای عمومی هموار است.



شکل ۹.۶ یک زیرخانوادهٔ یک‌بعدی از خانوادهٔ همهٔ مقاطع ابرصفحه‌یی.

خانواده‌ای از چندگوناهای جبری هموار نباشد. اگرچه مجموعهٔ اعضای هموار خانواده باید یک زیرمجموعهٔ باز از چندگونای پارامتری‌ساز باشد، این مجموعهٔ باز ممکن است تهی باشد. برای مثال، خانوادهٔ همهٔ مقاطع ابرصفحه‌یی مماس بر یک چندگونای هموار ثابت را در نظر بگیرید. اثبات هموار نبودن هر عضو این خانواده چندان دشوار نیست.

صورتهای زیادی از قضیهٔ برتینی وجود دارند. برای مثال شکل ۹.۶ یک زیرخانوادهٔ «خطی» یک‌بعدی از خانوادهٔ همهٔ مقاطع ابرصفحه‌یی یک چندگونا را نشان می‌دهد، که عبارت است از خانوادهٔ مقاطع ابرصفحه‌یی حاصل از قطع چندگونا با صفحاتی موازی با یک صفحهٔ داده‌شده. چون یک چنین مقطع ابرصفحه‌یی در این خانوادهٔ یک پارامتری هموار است، عضو عام این خانواده باید هموار باشد.

توجه می‌کنید که شکل ۹.۶ تعبیر دیگری از خانوادهٔ هذلولیهای مورد بحث در بخش قبل را بیان می‌کند. به جای اینکه اعضای خانوادهٔ هذلولیها را به صورت تارهای یک نگاشت تصور کنیم، می‌توانیم آنها را به صورت مقاطع ابرصفحه‌یی چندگونای ثابت در $\mathbb{A}^3$، حاصل از صفر قرار دادن $z - xy$، تجسم کنیم. البته تنها مقاطع این چندگونا را با خانوادهٔ یک‌پارامتری $z = \lambda$ که λ متغیر است، در نظر می‌گیریم. صورتهای پیراستهٔ قضیهٔ برتینی به ما می‌گوید که برای λیِ عام، عضو متناظر خانوادهٔ هذلولیها یک چندگونای هموار است. برای مطالعهٔ جامع پیشرفتهای معاصر در قضیه‌های نوع برتینی رجوع کنید به [۲۹].

تمرین ۰۱۰۴۰۶ فرض می‌کنیم V ابررویه‌ای در $\mathbb{A}^3$ باشد که توسط $z - xy = 0$ تعریف شده است. نشان دهید که صفحهٔ H در $\mathbb{A}^3$ بر V مماس است اگر و تنها اگر مقطع $V \cap H$ تکین باشد.

۵.۶ نگاشت گاوس

با بهره‌گیری از این واقعیت که گراسمانی یک چندگونای جبری تصویری است، می‌توانیم نشانیدنهای مفیدی از چندگوناهای شبه‌تصویری در فضای تصویری ابداع کنیم. یک مثال مهم از این موارد نگاشت گاوس است.

فرض می‌کنیم V یک چندگونای شبه‌تصویری تحویلناپذیر dبعدی هموار باشد که در یک فضای تصویری ثابت $\mathbb{P}^n$ نشانیده شده است. چون $\mathbf{V}$ هموار و بعد آن d است فضای مماس در هر نقطهٔ $p \in V$ دارای بعد d است. و از آنجا که V را یک زیرچندگونای فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ گرفته‌ایم، فضای مماس تصویری $T_pV \subset \mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $p \in V$، T_pV یک زیرفضای خطی dبعدی از $\mathbb{P}^n$، یعنی عضوی است از $\mathbf{Gr}(d+1, n+1)$، گراسمانی زیرفضاهای خطی d بعدی $\mathbb{P}^n$. به عبارت دیگر، نگاشت خوشتعریف

$$V \longrightarrow \mathbf{Gr}(d+1, n+1)$$

$$p \longmapsto T_pV = p \text{ فضای مماس تصویری بر } V \text{ در نقطهٔ }$$

را خواهیم داشت. این نگاشت را نگاشت گاوسِ V گویند.

قضیه: اگر $V \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای شبه‌تصویری تحویلناپذیر dبعدی هموار باشد، نگاشت گاوسِ

$$V \longrightarrow \mathbf{Gr}(d+1, n+1)$$

$$p \longmapsto T_pV = p \text{ فضای مماس تصویری بر } V \text{ در نقطهٔ }$$

یک ریختپایی از چندگوناهای جبری است. اگر V تصویری باشد، آنگاه نگارهٔ نگاشت گاوس یک زیرچندگونای بستهٔ گراسمانی، و لذا تصویری نیز هست.

به عنوان یک مثال نمایان از نگاشت گاوس، فرض می‌کنیم V یک زیرچندگونای خطی از $\mathbb{P}^n$ باشد. در این صورت به ازای هر p در V، فضای مماس تصویری بر V در نقطهٔ p، خود V است. (به هر حال، فضای مماس زیرچندگونایی خطی است که V را به بهترین وجه تقریب می‌زند.) بنابراین، نگاشت گاوس به ازای هر نقطهٔ $p \in V$ نقطهٔ متناظر به خودِ V در گراسمانی را نظیر

می‌کند. به عبارت دیگر، نگارهٔ نگاشت گاوس برای یک چندگونای خطی یک نقطهٔ منفرد است. لیکن، حالت زیرچندگونای خطی، همان گونه که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد، حالتی کاملاً استثنایی است.

قضیه: نگارهٔ نگاشت گاوس یک چندگونای شبه‌تصویری است با همان بعد چندگونای اصلی، مگر اینکه چندگونای اصلی یک زیرچندگونای خطی از فضای تصویری باشد (که در این حالت بعد نگارهٔ نگاشت گاوس صفر است).

هریس در [۱۷، ص. ۱۸۸] اطلاعات بیشتری دربارهٔ نگاشت گاوس به ما می‌دهد. جهت ملاحظهٔ برهانی برای قضیهٔ فوق رجوع کنید به [۱۵].

در سدهٔ نوزدهم یک حالت ویژه، حالتی که چندگونا یک خم مسطح است، به‌تفصیل مورد مطالعه واقع شده است.

اگر $C \subseteq \mathbb{P}^۲$ یک خم مسطح هموار باشد، فضای مماس بر C در هر نقطهٔ آن خطی در $\mathbb{P}^۲$ خواهد بود. از سوی دیگر، خطوط واقع در $\mathbb{P}^۲$ را می‌توان با رونوشتی از $\mathbb{P}^۲$ به نام صفحهٔ تصویری دوگان با $(\mathbb{P}^۲)^\vee$ نمایش داده می‌شود، یکی گرفت. تناظر مورد بحث ساده است. هر خط در $\mathbb{P}^۲$ مجموعهٔ صفر یک چندجمله‌یی خطی $a_۰x_۰ + a_۱x_۱ + a_۲x_۲$ است، که $a_۰$، $a_۱$ و $a_۲$ اعداد مختلطی هستند که هر سه با هم صفر نیستند. دو سه‌تایی $(a_۱, a_۲, a_۳)$ و $(b_۱, b_۲, b_۳)$ از این نوع، یک خط را معین می‌کنند اگر و تنها اگر مضرب یکدیگر باشند، که مثل این است که بگوییم خط $\mathbb{V}(a_۰x_۰ + a_۱x_۱ + a_۲x_۲)$ در $\mathbb{P}^۲$ به طور یکتا به نقطهٔ $[a_۰ : a_۱ : a_۲] \in \mathbb{P}^۲$ نظیر می‌شود که توسط ضرایب معادلهٔ معرف خط تعیین می‌شود. بنابراین، مجموعهٔ خطوط در $\mathbb{P}^۲$، $\mathbf{Gr}(۲, ۳)$، با صفحهٔ تصویری دوگان $(\mathbb{P}^۲)^\vee$ یکی گرفته می‌شود.

اما، نگاشت گاوس را می‌توان به صورت نگاشت

$$C \longrightarrow (\mathbb{P}^۲)^\vee$$

$$x \longmapsto (\text{ضرایب معادلهٔ معرف خط مماس در نقطهٔ } x)$$

بیان کرد. بنابر قضیهٔ فوق، نگارهٔ این نگاشت باز هم خمی در $(\mathbb{P}^۲)^\vee$ خواهد بود که خم دوگانِ C نامیده می‌شود. مطالعهٔ خم دوگان گاهی ممکن است ویژگیهای جالبی از خم اصلیِ C را آشکار کند.

تمرین ۰.۵.۰۱ اطمینان حاصل کنید که نگارهٔ نگاشت گاوس وقتی خم مسطح باشد، در واقع خمی در $(\mathbb{P}^۲)^\vee$ است.

تمرین ۶.۵.۲. نگاشت گاوسِ خم مسطحی را که توسط $y = x^{3}$ داده شده مطالعه کنید. کدام مشخصهٔ هندسی این خم سبب ایجاد تکینی در خم دوگان می‌شود؟

تمرین ۶.۵.۳. فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{P}^{2}$ خمی باشد که توسط معادلهٔ $x^d + y^d + z^d = 0$ با $d \geq 2$ تعریف شده است. نگاشت گاوس $V \longrightarrow (\mathbb{P}^{2})^{\vee}$ را به طور صریح بیان کنید (راهنمایی: برای یافتن خط مماس بر V از روش معمول در حسابان استفاده کنید[1]). معادلهٔ معرف خم دوگان را در حالتهای $d = 2$ و $d = 3$ پیدا کنید آیا این خم دوگان در حالت کلی هموار است؟

تمرین ۶.۵.۴. از مقایسهٔ نگاشت گاوسِ یک خط و یک مقطع مخروطی در صفحهٔ تصویری، نشان دهید که نگاشت گاوس برای یک چندگونای تصویری V، به انتخاب نشانیدن V در فضای تصویری بستگی دارد.

تمرین ۶.۵.۵. ثابت کنید مجموعهٔ ابرصفحه‌های $\mathbb{P}^n$ با نقاط رونوشت دیگری از $\mathbb{P}^n$، به نام فضای تصویری دوگان آنکه با $(\mathbb{P}^n)^{\vee}$ نمایش داده می‌شود یک‌ـبه‌ـیک متناظرند. به‌طور کلی‌تر ثابت کنید مجموعهٔ ابررویه‌های درجهٔ d در $\mathbb{P}^n$ با نقاط فضای تصویری از بعد $\binom{n+d}{d} - 1$ یک‌ـبه‌ـیک متناظرند. (راهنمایی: بخش ۲.۵ در مورد مقطعهای مخروطی را ببینید.)

تمرین ۶.۵.۶. با استفاده از تمرین ۶.۵.۳، ثابت کنید دقیقاً چهار خط (با احتساب بستایی) بر دو مقطع مخروطی ناتباهیدهٔ متمایز مماس‌اند. در این مورد معنی هندسیِ «بستایی» چیست؟

---

۱. جواب: $[x : y : z] \longmapsto [x^{d-1} : y^{d-1} : z^{d-1}]$

۷

هندسهٔ دوسوگویا

۱.۷ تکین‌زدایی

در سال ۱۹۶۴، هِیسوکه هیروناکا یک قضیهٔ اساسی را ثابت کرد: هر چندگونای شبه‌تصویری را می‌توان تکین‌زدایی کرد، یا به عبارت دیگر، هر چندگونا با یک چندگونای هموار «هم‌ارز دوسوگویا» است. پیش از آنکه به بیان این قضیه بپردازیم، به معرفی چند مفهوم جدید نیاز داریم.

تعریف: یک ریختپایی $X \xrightarrow{\pi} V$ از چندگوناها ریختپایی تصویری[1] خوانده می‌شود اگر X یک زیرچندگونای بستهٔ یک چندگونای حاصلضرب $V \times \mathbb{P}^n$ بوده و $X \xrightarrow{\pi} V$ تحدید نگاشت تصویر بر روی نخستین عامل باشد.

ریختپاییهای تصویری این ویژگی را دارند که پیشنگارهٔ هر نقطه یک چندگونای تصویری است. هر ریختپایی تصویری یک نگاشت اختصاصی در توپولوژی اقلیدسی است، یعنی، پیشنگارهٔ هر مجموعهٔ فشرده در توپولوژی اقلیدسی، مجموعه‌ای فشرده در این توپولوژی است.

۱. مفهوم ریختپایی تصویری را با ریختپایی چندگوناهای تصویری اشتباه نکنید.

تعریف: ریختپایی $V \xrightarrow{\pi} X$ از چندگوناهای شبه‌تصویری یک ریختپایی دوسوگویا خوانده می‌شود اگر تحدید آن به یک زیرمجموعهٔ باز چگال $U \subset X$، یک یکریختی بر روی زیرمجموعهٔ باز و چگالی مانند $U' \subset V$ باشد.

یک ریختپایی دوسوگویا لازم نیست که یک‌ـبه‌ـیک باشد یا پوشا.

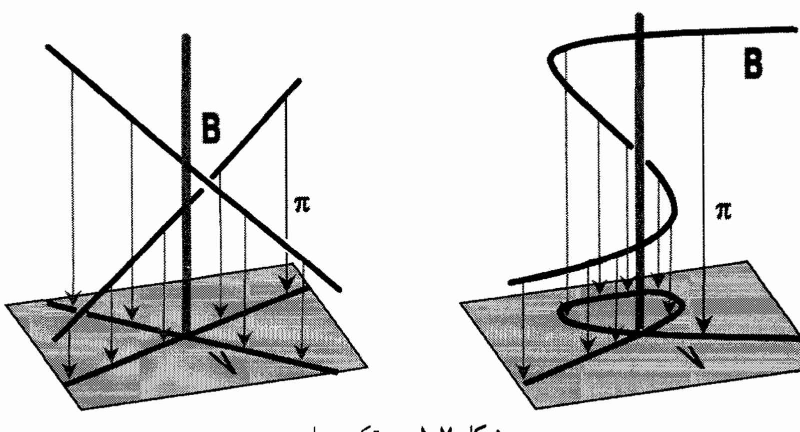
قضیه تکین‌زدایی هیروناکا: برای هر چندگونای شبه‌تصویری V، یک چندگونای شبه‌تصویری هموار X و یک ریختپایی دوسوگویای تصویری $V \xrightarrow{\pi} X$ وجود دارد. به‌علاوه، π را می‌توان یک یکریختی بر مکان هموار V گرفت، و اگر V چندگونای تصویری باشد، X نیز چندگونای تصویری است.

این قضیه بیان می‌کند که هر چندگونای شبه‌تصویری V، با هر نوع نقطهٔ تکین، یک تکین‌زدایی X می‌پذیرد، که چندگونای هموار‌ی است که بر V تصویر می‌شود و همه جا عیناً مانند V است مگر در نقاط تکین V. وقتی می‌گوییم π یک یکریختی بر مکان هموار V است منظور این است که π به یک یکریختیِ چندگوناها از مجموعه‌های باز چگال به صورت

$$X \setminus \pi^{-1}(\operatorname{Sing} V) \xrightarrow{\pi} V \setminus \operatorname{Sing}(V)$$

تحدید می‌شود.

دربارهٔ برهان: در حالتی که V یک‌بعدی، یعنی یک خم باشد، برهان نسبتاً ساده است و به هیچ شرطی دربارهٔ میدان زمینه نیاز نیست. اثبات از فرایندی جبری به‌نام «نرمالسازی» نتیجه می‌شود. (رجوع شود به [۳۷، فصل II، بخش ۴.۵]). حالت رویه‌ها توسط هندسهٔ جبری‌دانان مکتب ایتالیایی در اوایل سدهٔ بیستم، بررسی شده و برای دانشجویان هندسهٔ جبری، بدون دشواری



شکل ۱۰۷ دو تکین‌زدایی.

خیلی زیاد، قابل فهم است (رجوع شود به [۲]). لیکن، طبق موازین جدید، می‌توان گفت که ایتالیاییها برای حالت کلی قضیهٔ هیروناکا در مورد رویه‌های جبری مجرد، واقعاً برهانی نداشته‌اند. در دههٔ چهل، زاریسکی یک برهان «کاملاً جبری» برای تکین‌زدایی رویه‌های جبری یا چندگوناهای سه‌بعدیِ تعریف‌شده روی اعداد مختلط، یا روی هر میدان با مشخصهٔ صفر، عرضه کرد. بعدها آبیانکار مسئلهٔ تکین‌زدایی را برای رویه‌ها و چندگوناهای سه‌بعدی روی میدان با مشخصهٔ غیرصفر حل کرد.

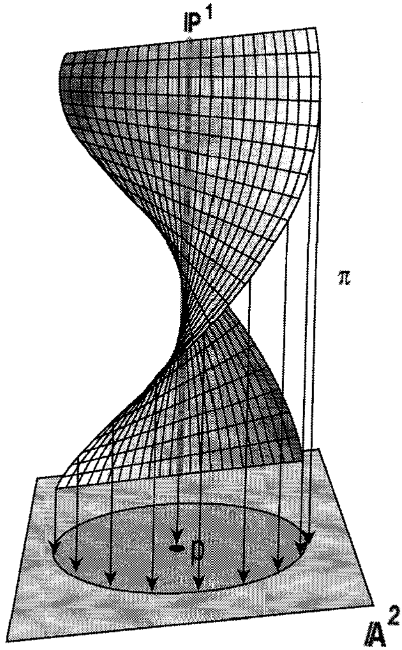
برهان هیروناکا برای بعدهای بالا، بسیار دشوار است و دو شمارهٔ *Annals of Mathematics* [۲۱] را به خود اختصاص داده است، و تنها برای چندگوناهایی که روی میدان با مشخصهٔ صفر تعریف شده‌اند، معتبر است. این کار بنیادی و زیبا در سال ۱۹۷۰ با اعطای جایزهٔ فیلدز مورد قدردانی قرارگرفت. هرچند می‌توان گفت که برهان قضیهٔ هیروناکا الگوریتمی است، لیکن در عمل تقریباً به‌کارگیری آن برای تکین‌زدایی یک چندگونای داده‌شده امکانپذیر نیست. اخیراً، ویلامایور در [۳۹] و، مستقلاً، بیرستون و میلمن در [۳]، فرایند را در مشخصهٔ صفر روشن کرده‌اند، و ماهیت الگوریتمی فرایند تکین‌زدایی را به طور صریح بیان نموده‌اند. نقد لیپمن بر مقالهٔ بیرستون و میلن [۳۱]، مروری است بر این تاریخچه و شرحِ پیشرفتهای اخیر در مسئلهٔ تکین‌زدایی و در ضمن معرفی مراجع متعددی در این زمینه.

اخیراً یافته‌های عمیق یوهان دِ یونگ سبب پیشرفتهای هیجان‌انگیزی در این زمینه شده است. او ثابت کرده که در موارد بسیار کلی‌تر نگاشتهایی تصویری وجود دارند که برای بسیاری از مقاصد عیناً مانند تکین‌زداییها عمل می‌کنند. با به کارگیری یافته‌های دِ یونگ، دِ یونگ و آبراموویچ در [۱]، و بوگومولوف و پانتف در [۴]، برهانهای ساده‌تری برای قضیهٔ هیروناکا به دست داده‌اند. □

قضیه هیروناکا بر اساس ساختمان بسیار ملموسی که فراگستری نامیده می‌شود، استوار است. اجازه دهید مثالهایی از فراگستری را ببینیم. در ابتدا، تکینیها را فراموش کرده و تنها روش فراگستری یک نقطه را در فضای آفین تشریح خواهیم کرد.

هدف اصلی در فراگستری یک نقطهٔ p در $\mathbb{A}^n$ این است که $\mathbb{A}^n$ را بدون تغییر نگه داریم مگر در نقطهٔ p، که به جای آن مجموعهٔ کلیهٔ خطوط گذرنده بر p، یعنی رونوشتی از $\mathbb{P}^{n-1}$، را می‌گذاریم. برای دقیق‌تر کردن موضوع، دستگاه مختصات مناسبی برای $\mathbb{A}^n$ انتخاب می‌کنیم به طوری که نقطهٔ p را بتوانیم «مبدأ» بگیریم. فرض می‌کنیم B مجموعهٔ همهٔ زوجهای (x,ℓ) است، که $x \in \mathbb{A}^n$ و $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}$ خطی است در $\mathbb{A}^n$ که از مبدأ و نقطهٔ x می‌گذرد. یعنی،

$$B = \{(x,\ell) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} | x \in \ell\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$



شکل ۲۰۷ فراکستری یک نقطه در صفحه.

طبق تعریف، فراگستری $\mathbb{A}^n$ در p نگاشت تصویر طبیعی بر عامل آفین است یعنی

$$B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$$

$$(x, \ell) \longmapsto x$$

اجازه دهید با در نظر گرفتن تارهای این نگاشت نشان دهیم که فراگستری $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ ویژگیهای مطلوب را دارد. تار π روی هر نقطهٔ x بجز مبدأ، صرفاً نقطهٔ تنهای (x, ℓ) است که ℓ خط یکتای گذرنده بر x و مبدأ است. لیکن، تار روی مبدأ p یک رونوشت کامل از $\mathbb{P}^{n-۱}$ است، یعنی $\{(p, \mathbb{P}^{n-۱})\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-۱}$، زیرا مبدأ بر هر خط گذرنده بر مبدأ قرار دارد. ریختپایی فراگستری $B \longrightarrow \mathbb{A}^n$ نقاط این $\mathbb{P}^{n-۱}$ را به یک نقطه فرو می‌ریزد ولی در بقیهٔ نقاط دوسویی است. شکل ۲.۷ را ببینید.

می‌گوییم که B یک چندگونای شبه‌تصویری است. زیرا، اگر $(x_۱, \ldots, x_n)$ مختصات در $\mathbb{A}^n$ باشند و $[y_۱ : \ldots : y_n]$ مختصات در $\mathbb{P}^{n-۱}$، آنگاه $(x_۱, \ldots, x_n; y_۱ : \ldots : y_n)$ مختصاتی برای $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-۱}$ خواهند بود. اما نقطهٔ $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ بر خط ℓ که توسط

$[y_1 : \ldots : y_n]$ نمایش داده شده، در $\mathbb{P}^{n-1}$ واقع است اگر و تنها اگر بردار $(x_1, \ldots, x_n)$ مضربی (شاید مضرب صفر) از بردار $(y_1, \ldots, y_n)$ باشد. یعنی، x بر ℓ واقع است اگر و تنها اگر ماتریس

$$\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}$$

از رتبهٔ کوچکتر از ۱ یا مساوی با ۱ باشد. این امر دقیقاً وقتی برقرار است که همهٔ کهادهای 2×2 این ماتریس صفر باشند. یعنی، نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ بر خط $\ell = [y_1 : \ldots : y_n]$ قرار دارد اگر و تنها اگر مختصات $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots : y_n)$ به ازای جمیع مقادیر i و j در معادله‌های چندجمله‌یی $x_i y_j - x_j y_i = 0$ صدق کنند. بنابراین

$$B = \mathbb{V}(x_i y_j - x_j y_i | 0 \leq i < j \leq n) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

خوانندگان بی‌آنکه به مشکلی برخورد کنند می‌توانند تحقیق کنند که چنین مجموعه‌ای در واقع یک چندگونای شبه‌تصویری است (هرچند، B نه چندگونای آفین است و نه تصویری!). در واقع، B یک زیرمجموعهٔ بستهٔ چندگونای شبه‌تصویریِ $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ است.

روشن است که ریختپایی فراگستری $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$، یک ریختپایی تصویری و دوسوگویاست. در واقع، چون B یک زیرچندگونای بستهٔ $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ است و π تحدید نگاشت تصویر طبیعی روی $\mathbb{A}^n$، بنا به تعریف نگاشت π تصویری است. به‌علاوه، به‌آسانی دیده می‌شود که نگاشت

$$\mathbb{A}^n \setminus \{p\} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n; x_1, : \ldots : x_n)$$

یک ریختپایی چندگوناهای شبه‌تصویری و وارون π بر زیرمجموعهٔ باز و چگال $\mathbb{A}^n \setminus \{p\}$ است.

گاهی، چندگونای B را همراه با نگاشت تصویر طبیعی‌اش $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$، فراگستری یک‌نقطه‌ای $\mathbb{A}^n$ می‌نامند. همچنین فضای B را با $B_p(\mathbb{A}^n)$ نمایش می‌دهند. می‌توان چنین تصور کرد که این چندگونا از برداشتن مبدأ از $\mathbb{A}^n$ و جایگزینی آن با مجموعهٔ خطوط گذرنده بر p در $\mathbb{A}^n$ به‌دست آمده است.

در فصلهای بعد نگاشت تصویر بر عامل دیگر یعنی

$$B \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}^{n-1}$$

$$(x, \ell) \longmapsto \ell$$

را نیز مطالعه خواهیم کرد که B را به یک کلاف خطی روی فضای تصویری $\mathbb{P}^{n-1}$ بدل می‌سازد که آن را کلاف خطی آشکار روی $\mathbb{P}^{n-1}$ می‌نامند.

مفهوم فراگستری فضای آفین در یک نقطه را می‌توان از چند جهت تعمیم داد. می‌توانیم به جای فراگستری $\mathbb{A}^n$ در یک نقطه، فراگستری آن را در طول یک زیرچندگونای بزرگتری از $\mathbb{A}^n$ انجام دهیم. یا می‌توانیم فراگستری چندگونای شبه‌تصویری کلی‌تری را در یک نقطه عملی کنیم. سرانجام، می‌خواهیم یک چندگونای شبه‌تصویری دلخواه را در طول یک زیرچندگونای بستهٔ دلخواه آن (و حتی یک طرح را در طول یک زیرطرح بستهٔ دلخواه!) فراگستری کنیم. حال به مطالعهٔ فراگستری یک چندگونای آفین دلخواه در یک نقطه می‌پردازیم.

تعریف: فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{A}^n$ یک چندگونای جبری آفین و p نقطه‌ای از V باشد. فراگستری V در p عبارت است از بستارِ زاریسکی پیشنگارهٔ

$$\pi^{-1}(V \setminus \{p\})$$

در چندگونای B حاصل از فراگستری p در $\mathbb{A}^n$، همراه با نگاشت تصویر طبیعی π بر V. فراگستری V در نقطهٔ p را با $B_p(V)$ نشان می‌دهیم.

از آنجا که تحدید نگاشت $B_p(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ به مجموعهٔ باز $B_p(\mathbb{A}^n) \setminus \pi^{-1}(p)$ یک یکریختی است، تحدید π بر $B_p(V) \setminus \pi^{-1}(p)$ نیز یک یکریختی بر روی $V \setminus \{p\}$ خواهد بود. مثالی از چنین فراگستری در شکل ۳.۷ نشان داده شده است.

مثال: بیاییم مخروط $\mathbb{V}(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{A}^3$ را در مبدأ فراگستری کنیم. همان گونه که در شکل ۴.۷ نشان داده شده است، مخروط همانند اجتماع خطوطی است، که در مبدأ به هم بسته شده‌اند.

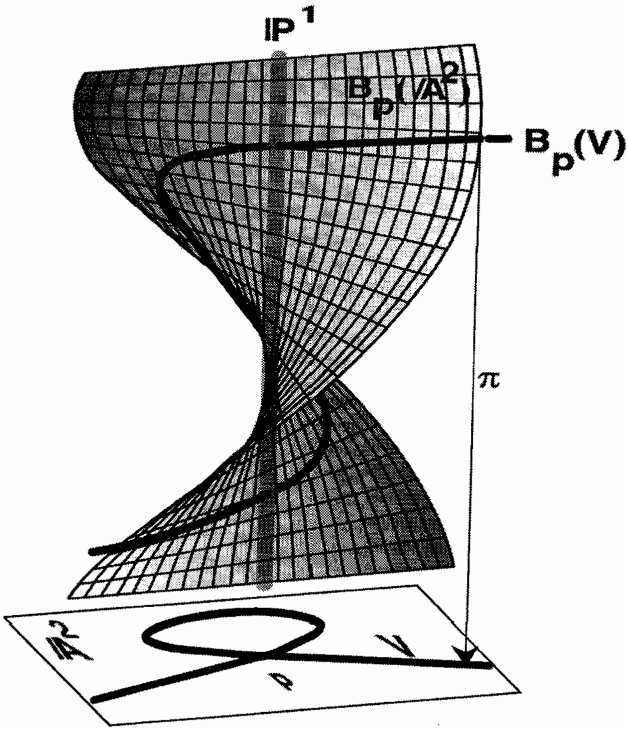
تکینی مخروط نتیجه‌ای از این به‌هم‌بستگی خطوط است. برای تکین‌زدایی مخروط، باید این خطوط را از هم جدا کنیم. از لحاظ شهودی، تکین‌زدایی مخروط اجتماع جدا از هم این خطوط، یعنی یک استوانه است. فرایند تکین‌زدایی در شکل ۵.۷ نشان داده شده است.

در این مثال، «مبدأهای» خطوط از هم جدا شده‌اند و با یک دایره در روی استوانه متناظر شده‌اند.

حال این تکیه‌زدایی را به طور صریح از راه فراگستری پیدا می‌کنیم. نگاشت فراگستری چنین است

$$B = \{(x,\ell) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 | x \in \ell\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^3$$

$$(x,\ell) \longmapsto x$$



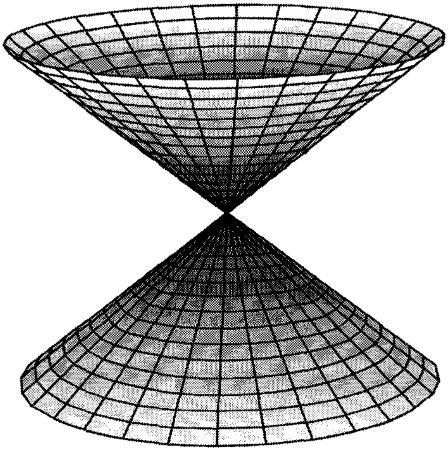
شکل ۳.۷ فراگستری یک خم گره‌دار در یک گره.

چون فضای تصویری $\mathbb{P}^۲$ را می‌توان با سه قطعهٔ مختصاتی استانده‌اش به شکل

$$\mathbb{P}^۲ = \mathbb{A}^۲_x \cup \mathbb{A}^۲_y \cup \mathbb{A}^۲_z$$

پوشانید، فراگستری نیز با سه قطعهٔ مختصاتی پوشانده می‌شود: اشتراک با هر یک از قطعه‌های مختصاتی در

$$\begin{array}{l} B \subset \mathbb{A}^۳ \times \mathbb{P}^۲ \cong (\mathbb{A}^۳ \times \mathbb{A}^۲_x) \cup (\mathbb{A}^۳ \times \mathbb{A}^۲_y) \cup (\mathbb{A}^۳ \times \mathbb{A}^۲_z) \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{A}^۳ \end{array}$$



شکل ۴۰۷ خطوط به هم بسته در مبدأ یک مخروط ساخته‌اند.

با پیش‌نگارهٔ مخروط به‌آسانی پیدا می‌شود. مثلاً اشتراک با قطعهٔ مختصاتی آخر چنین است

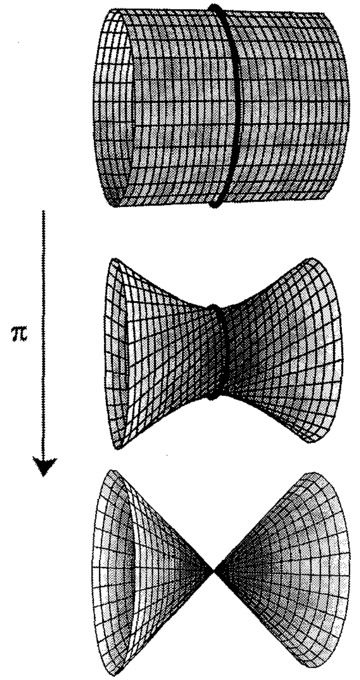
$$\begin{aligned} V &= \pi^{-۱}(\mathbb{V}(x^۲+y^۲-z^۲)) \cap (\mathbb{A}^۳ \times \mathbb{A}^۲_z) \\ &= \{((x,y,z),(x:y:z)) | x^۲+y^۲=z^۲\} \\ &\cong \{(x,y,z,u,v) | x=uz, y=vz, u^۲+v^۲=۱\} \subset \mathbb{A}^۵ \end{aligned}$$

از تصویر کردن $\mathbb{A}^۵$ به فضای سه‌بعدی $\mathbb{A}^۳$، با مختصات z، u و v، مجموعهٔ نگارهٔ V

$$\{(z,u,v) | u^۲+v^۲=۱\}$$

به دست می‌آید که چندگونایی یکریخت با V است. این چندگونا استوانه‌ای در $\mathbb{A}^۳$ است. پس با فراگستریِ مخروط $\mathbb{V}(x^۲+y^۲-z^۲) \subset \mathbb{A}^۳$ در رأس این مخروط، چندگونای $B \subset \mathbb{A}^۳ \times \mathbb{P}^۲$ به دست می‌آید که شامل یک مجموعهٔ باز چگال یکریخت با یک استوانه است. با این یکی گیریها، پیش‌نگارهٔ رأسِ $(۰,۰,۰) \in \mathbb{V}(x^۲+y^۲-z^۲) \subset \mathbb{A}^۳$، دایرهٔ $\{z=۰, u^۲+v^۲=۱\}$ بر استوانه است.

برای تکین‌زدایی چندگوناهای پیچیده‌تر، به فراگستری در طول زیرچندگوناهای کلی‌تری نیاز است: تنها فراگستری در نقطه‌ها کافی نیست. پس از مطالعهٔ نگاشتهایِ گویا که مفهوم فراگستری کلی بر آن استوار است، به این مسئله باز می‌گردیم.



شکل ۵۰۷ تکین‌زدایی مخروط.

۲۰۷ نگاشتهای گویا

درمتن قضیهٔ هیروناکا، بیان کردیم که منظوراز یک ریختپایی دوسوگویا چیست. ریختپاییهای دوسوگویا در همه نقاط خوشتعریف نیستند، ولی هر چیز جالب، بر یک مجموعهٔ بازِ ناتهی زاریسکی، یعنی، «تقریباً همه جا» اتفاق می‌افتد. تعریف نگاشت گویا به این اندیشهٔ «تقریباً همه جا» رسمیت می‌بخشد.

نخستین چیزی که باید در مورد نگاشت گویا، از یک چندگونای X بر آن تأکید کرد این است که در واقع، نگاشت گویا، به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ها، یک نگاشت نیست. بلکه، یک ردهٔ هم‌ارزی از نگاشتهایی است که تنها بر زیرمجموعهٔ بازی از X تعریف شده‌اند.

تعریف: فرض می‌کنیم X یک چندگونای شبه‌تصویری و U و U' زیرمجموعه‌های بازِ چگال آن باشند. فرض می‌کنیم دو ریختپایی $U \xrightarrow{\varphi} Y$ و $U' \xrightarrow{\varphi'} Y$ از چندگوناهای شبه‌تصویری داده شده‌اند. (U,φ) و (U',φ') را هم‌ارز گوییم هرگاه نگاشتهای φ و φ' بر اشتراک $U \cap U'$ بر هم منطبق باشند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این یک رابطهٔ هم‌ارزی تشکیل می‌دهد.

تعریف: یک نگاشت گویای $X -\,\to Y$ یک ردهٔ همارزی از ریختپاییهای تعریف‌شده بر زیرمجموعه‌های بازِ چگالِ X است نسبت به رابطهٔ همارزی بالا.

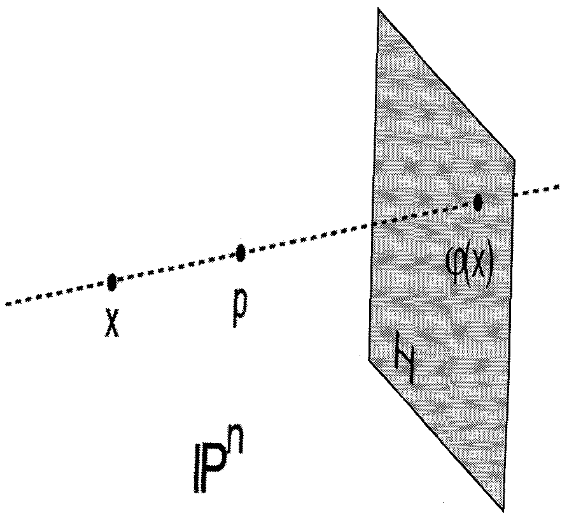
یک نگاشت گویا را به مثابهٔ یک ریختپایی می‌انگاریم که فقط بر یک مجموعهٔ بازِ چگال تعریف شده است، بی‌آنکه به مجموعهٔ بازِ ویژه‌ای که ریختپایی بر آن تعریف شده، پایبند باشیم. ولی، هر نگاشت گویا یک حوزهٔ تعریف اکسترمال یکتا دارد. از آنجا که حوزهٔ تعریف هر نمایندهٔ یک نگاشت گویا چگال است، جستجوی حوزهٔ تعریف نگاشت گویا غالباً ضروری نیست. در حوزهٔ تعریف (که معلوم می‌شود مجموعه‌ای است باز)، نگاشت گویا یک ریختپایی از چندگوناهاست. بنابراین، هر نگاشت گویا یک «ریختپاییِ تقریباً همه جا تعریف‌شده» است.

یک نگاشت گویا، برخلاف نامش، یک نگاشت واقعی نیست، و به این دلیل است که برای نمایش آن از پیکان خط‌چین استفاده می‌کنیم. این نکته می‌تواند، مثلاً وقتی که دو نگاشت گویا با هم ترکیب می‌شوند، مشکلاتی ایجاد کند. باید توجه داشت که برای امکان تعریف ترکیب

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Y \xrightarrow{\varphi_2} Z$$

نگارهٔ (یک نمایندهٔ) φ_1 باید در Y چگال باشد.

مثال: نگاشت تصویر از یک نقطه در فضای تصویری مثالی از یک نگاشت گویاست. فرض می‌کنیم $H \subset \mathbb{P}^n$ ابرصفحه‌ای ثابت در $\mathbb{P}^n$ و $p \in \mathbb{P}^n$ نقطه‌ای است که در H نیست. نگاشت



شکل ۶۰۷ نگاشت تصویر از p بر H.

تصویر از نقطهٔ p بر ابرصفحهٔ H نگاشت گویای

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\varphi} H = \mathbb{P}^{n-1}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \overline{xp} \text{ با خط } H \text{ نقطهٔ تقاطع یکتای }$$

است. این نگاشت گویا همه جا بجز p یک ریختپایی خوشتعریف است.

در مختصات همگن، اگر مبدأ مختصات و محورها را طوری بگیریم که $p = [0 : \ldots : 0 : 1]$ و $H = \mathbb{V}(x_n) \subset \mathbb{P}^n$ با رونوشتی از $\mathbb{P}^{n-1}$ یکی گرفته شود، نگاشت تصویر به ساده‌ترین شکل بیان خواهد شد. در این صورت نگاشت تصویر از p به شکل ذیل خواهد بود:

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^{n-1}$$

$$[x_0 : \ldots : x_n] \longmapsto [x_0 : \ldots : x_{n-1}] = \varphi(x)$$

۳.۷ هم‌ارزی دوسوگویا

تعریف: فرض می‌کنیم X و Y دو چندگونای جبری تحویلناپذیر باشند. این دو چندگونا را هم‌ارز دوسوگویا گوییم اگر نگاشتهای گویای $X \xrightarrow{F} Y$ و $Y \xrightarrow{G} X$ وجود داشته باشند که وارون همدیگر باشند. به این معنی که هر دو ترکیب $F \circ G$ و $G \circ F$ تعریف شده‌اند و هریک با نگاشت گویای همانی مساوی است، یعنی، $F \circ G$ و $G \circ F$ به عنوان ریختپاییهای چندگوناهای جبری در مجموعه‌های بازِ چگالی که این ترکیبها تعریف شده‌اند با نگاشت همانی برابرند.

اساساً، X و Y هم‌ارز دوسوگویا هستند اگر بر یک مجموعهٔ باز (چگال) یکریخت باشند. یعنی، پس از کنار گذاشتن یک زیرچندگونای بسته از X و یک زیرچندگونای بسته از Y، مجموعه‌های باز به‌جامانده به عنوان چندگوناهای شبه‌تصویری یکریخت باشند. به‌ویژه، هم‌ارزی دوسوگویا بُعد و بعضی دیگر از ناورداهای یک چندگونا را حفظ می‌کند.

مثال: هر یکریختی چندگوناها یک هم‌ارزی دوسوگویاست. همچنین باید توجه کرد که هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی از یک چندگونای تحویلناپذیرِ V هم‌ارز دوسوگویا با V است. هر چندگونای شبه‌تصویری با هر بستار تصویری‌اش هم‌ارز دوسوگویاست. همچنین، هر چندگونای V با هر یک از فراگستریهای خودش هم‌ارز دوسوگویاست.

تعریف: نمودار نگاشت گویای $X \overset{F}{\dashrightarrow} Y$، بستار نمودارِ هر نمایندهٔ $U \overset{\varphi}{\longrightarrow} Y$ از آن، از دید نظریهٔ مجموعه‌هاست:

$$\Gamma_F = \overline{\{(x, \varphi(x)) | x \in U\}} \subset X \times Y$$

این بستار در توپولوژی زاریسکی چندگونای حاصلضرب $X \times Y$ اختیار شده است، ولی اگر این بستار در توپولوژی اقلیدسی بر حاصلضرب $X \times Y$ اختیار شود نیز همان نتیجه را می‌دهد. بر خواننده است که نشان دهد این بستار خوشتعریف است: نمودارهای نماینده‌های مختلف همگی یک بستار دارند.

تمرین ۰.۱.۳.۷ فرض می‌کنیم Γ نمودار نگاشت گویای $X \dashrightarrow Y$ باشد. ثابت کنید نگاشت تصویر $\Gamma \longrightarrow X$، یک هم‌ارزی دوسوگویاست.

تمرین ۰.۲.۳.۷ میدان تابعی یک چندگونای آفین تحویلناپذیر به صورت میدان کسری حلقهٔ مختصاتی آن تعریف می‌شود. به طور کلی، میدان تابعی هر چندگونای تحویلناپذیر غیرآفین به صورت میدان تابعی هر زیرمجموعهٔ باز آفین ناتهی آن تعریف می‌شود. نشان دهید که این تعریف مستقل از انتخاب مجموعهٔ باز آفین است.

تمرین ۰.۳.۳.۷ ثابت کنید که دو چندگونای تحویلناپذیر X و Y هم‌ارز دوسوگویا هستند اگر و تنها اگر میدانهای تابعی آنها $\mathbb{C}(X)$ و $\mathbb{C}(Y)$ به عنوان $\mathbb{C}$ـجبر یکریخت باشند.

تمرین ۰.۴.۳.۷ ثابت کنید که $\mathbb{P}^2$ و $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ هم‌ارز دوسوگویا هستند لیکن یکریخت نیستند.

تمرین ۰.۵.۳.۷ معادلهٔ معرف نمودار نگاشت گویای $\mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ را که (x, y) را به $\frac{y}{x}$ بدل می‌کند، به عنوان یک زیرچندگونای $\mathbb{A}^3$، پیدا کنید.

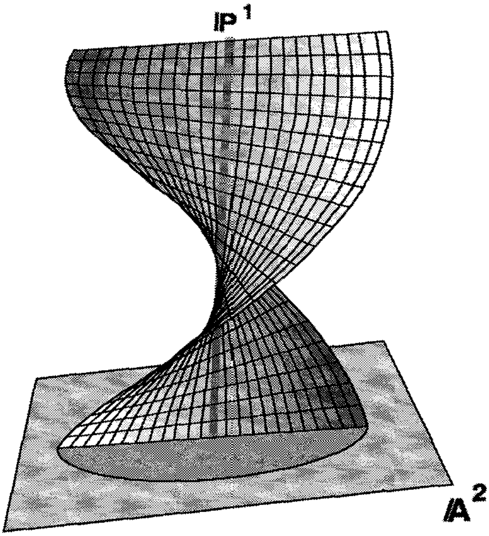
۴.۷ فراگستری در طول یک ایدِآل

حال می‌توانیم فراگستری در طول زیرچندگوناهای کلی‌تر را تعریف کنیم. برای تسهیل درک خود، تعبیر دیگری را برای فراگستری $\mathbb{A}^n$ در یک نقطه معرفی می‌کنیم.

نگاشت

$$\mathbb{A}^n \setminus \{0\} \overset{\ell}{\longrightarrow} \mathbb{P}^{n-1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \ell(x) = [x_1 : \ldots : x_n]$$



شکل ۷۰۷ نمودار نگاشت گویای $\mathbb{A}^{۲} \dashrightarrow \mathbb{P}^{۱}$ در $\mathbb{A}^{۲} \times \mathbb{P}^{۱}$.

راکه به هر نقطهٔ $x \in \mathbb{A}^n \setminus \{\circ\}$ خط $\ell(x)$ گذرنده بر $\circ$ و x را مربوط می‌کند در نظر می‌گیریم.
به عنوان یک مجموعه، نمودار این نگاشت چنین است:

$$\{(x, \ell(x)) \in (\mathbb{A}^n \setminus \{\circ\}) \times \mathbb{P}^{n-۱}\}$$

به‌آسانی می‌توان دیدکه فراگستری $B_p(\mathbb{A}^n)$ بستار این نمودار در چندگونای حاصلضرب $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-۱}$ است. لذا، فراگستری $\mathbb{A}^n$ در مبدأ را می‌توان با نمودار نگاشت گویای

$$\mathbb{A}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-۱}$$

$$(x_۱, \ldots, x_n) \longmapsto [x_۱ : \ldots, x_n]$$

یکی گرفت. از این مطلب برای فراگستری یک چندگونای X در طول یک زیرچندگونای دلخواه Y استفاده می‌کنیم.

تعریف: فرض می‌کنیم $F_۱, \ldots, F_r$ توابعی در $\mathbb{C}[X]$ یعنی در حلقهٔ مختصاتی چندگونای جبریِ آفین و تحویلناپذیر X باشند و I ایدِآل تولیدشده توسط آنها باشد. فرض می‌کنیم I ایدِآل سرهٔ ناصفر از $\mathbb{C}[X]$ است. فراگستری چندگونای X در طول ایدِآل I، نمودار B مربوط به نگاشت

گویای

$$X \overset{F}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^{r-1}$$
$$x \longmapsto [F_1(x) : \ldots : F_r(x)]$$

است همراه با نگاشت تصویر طبیعی $B \subset X \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow{\pi} X$. فراگستری X در طول I با $B_I(X)$ نشان داده می‌شود.

نگاشت تصویر

$$B_I(X) \xrightarrow{\pi} X$$
$$(x, F(x)) \longmapsto x$$

معرف یکریختی چندگوناهای شبه‌تصویری بین مجموعه‌های باز به صورت

$$B_I(X) \smallsetminus \pi^{-1}(Y) \longrightarrow X \smallsetminus Y$$

است، که Y زیرمجموعهٔ بسته در X است که از صفر قرار دادن $F_1, \ldots, F_r$ حاصل می‌شود. در واقع، ریختپایی وارون را می‌توان به صورت

$$X \smallsetminus Y \longrightarrow B_I(X) \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$$
$$x \longmapsto (x, [F_1(x) : \ldots : F_r(x)])$$

تعریف کرد که نگاشتی خوشتعریف بر $X \smallsetminus Y$ است زیرا توابع $F_1, \ldots, F_r$ همزمان بر $X \smallsetminus Y$ صفر نمی‌شوند. به عبارت دیگر، نگاشت گویای

$$X \dashrightarrow B_I(X)$$
$$x \longmapsto (x, [F(x)])$$

وارونی برای نگاشت فراگستری $B_I(X) \xrightarrow{\pi} X$ است، که نشان می‌دهد X و $B_I(X)$ چندگوناهای هم‌ارز دوسوگویا هستند.

هرچند این موضوع واضح نیست، ولی باید دانست ردهٔ یکریختی فراگستری $B_I(X)$ فقط به ایدِآل I بستگی دارد، نه به انتخاب خاص مولدها. وانگهی، اگر I ایدِآل ماکسیمال متناظر یک نقطهٔ $x \in X$ باشد، آنگاه فراگستری $B_I(X)$ با فراگستری X در نقطهٔ x که در بخش ۱.۷

تعریف شد، همخوانی دارد. برای آگاهی بیشتر از مفهوم فراگستری از این دیدگاه، رجوع شود به [۱۰، بخش IV. ۲].

در تعاریف فوق هیچ فرضی مبنی بر رادیکال بودن یا نبودن ایدِآل نکردیم. ایدِآلهای متفاوت ممکن است فراگستریهای متفاوت داشته باشند حتی اگر هر دو یک رادیکال داشته باشند، یعنی، حتی اگر این ایدِآلها معرف یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X باشند. این موضوع بدین معنی است که فراگستری در واقع در طول یک ایدِآل صورت می‌گیرد و نه صرفاً در طول زیرچندگونایی که توسط آن ایدِآل تعریف شده است. به‌علاوه، این فرض که X تحویلناپذیر باشد، واقعاً ضروری نیست؛ اگر X چند مؤلفه داشته باشد، برای درستی بحث بالا لازم است فرض شود که چندجمله‌ییهای F_i همزمان روی هیچ یک از مؤلفه‌ها صفر نمی‌شوند.

تعریف: فرض می‌کنیم Y زیرچندگونای تحویلناپذیر یک چندگونای جبری آفین X باشد. فراگستری X در طول Y عبارت است از فراگستری در طول ایدِآل رادیکال $\mathbb{I}(Y)$. این فراگستری را با $B_Y(X)$ نمایش می‌دهیم.

تاکنون، ما فقط چندگوناهای آفین را در نظر گرفتیم، ولی این محدودیت الزامی نیست. بحث اخیر در مورد هر شبه چندگونای تصویری $X \subset \mathbb{P}^N$ نیز بامعنی است. برای مثال، می‌توانیم ایدِآل همگنی را که توسط چندجمله‌ییهای همگن و هم‌درجهٔ $F_۱, \dots, F_r$ تولید شده در نظر بگیریم. نگاشت گویای F به صورت

$$X \xrightarrow{F} \mathbb{P}^{r-۱}$$

$$x \longmapsto [F_۱(x) : \dots : F_r(x)]$$

را در نظر می‌گیریم. نمودار نگاشت گویای F (همراه با نگاشت تصویر آن بر X)، فراگستری X در طول ایدِآل $(F_۱, \dots, F_r)$ در X است. فراگستری در طول یک ایدِآل دلخواه که لزوماً رادیکال نیست، فراگستری در طول زیرطرح تعریف‌شده توسط ایدِآل I نیز خوانده می‌شود.

چنانکه خوانندگان ممکن است حدس بزنند، در واقع، فراگستری در طول هر زیرچندگونا (یا زیرطرح) در هر چندگونا امکانپذیر است. برای انجام صحیح این کار، لازم است مفهوم یک‌بافهٔ ایدِآلی $\mathcal{I}$ در بافهٔ ساختار $\mathcal{O}_X$ بر یک چندگونا را معرفی، و فراگستری X در طول بافهٔ $\mathcal{I}$ را به کمک به هم چسباندن فراگستریهای قطعه‌های مختصاتی آفین X تعریف کرد (رجوع شود به [۲۰، فصل II، بخش ۷].

همان گونه که دیده‌ایم، هر ریختپایی فراگستری $\tilde{X} \longrightarrow X$ یک نگاشت دوسوگویای تصویری است. در واقع، اگرچه واضح نیست ولی عکس این حکم نیز درست است: هر نگاشت دوسوگویای

تصویری $\tilde{X} \longrightarrow X$ از چندگوناهای شبه‌تصویری، یک فراگستریِ X در طول بافه‌ای از ایدِآلهاست (رجوع شود به [۲۰، قضیهٔ II. ۱۷.۷].

حال به قضیه تکین‌زداییِ هیروناکا باز می‌گردیم. فرض می‌کنیم V یک چندگونای آفین، مثلاً یک مجموعهٔ بستهٔ زاریسکی در $\mathbb{A}^n$ است. قضیهٔ هیروناکا گویای این است که مجموعه‌ای از چندجمله‌ییهای n متغیره مانند $F_1, \ldots, F_r$ وجود دارند به طوری که نمودار نگاشت گویای

$$V \dashrightarrow \mathbb{P}^r$$

$$x \longmapsto [F_0(x) : \ldots : F_r(x)]$$

یک تکین‌زدایی از V است. اگر این نمودار را با X نشان دهیم، می‌دانیم که X یک زیرچندگونای بسته از $V \times \mathbb{P}^r$ است، و نگاشت تصویر طبیعتی $X \xrightarrow{\pi} V$ روی عامل اول، یک هم‌ارزی دوسوگویاست، که آن را فراگستری V در طول ایدِآل $(F_0, \ldots, F_r)$ گوییم.

نکتهٔ قابل ملاحظه‌ای که هیروناکا ثابت کرده این است که F_iها می‌توانند طوری انتخاب شوند که چندگونای X هموار باشد. به‌علاوه، قضیهٔ هیروناکا تضمین می‌کند که F_iها می‌توانند طوری انتخاب شوند که زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbb{V}(F_1, \ldots, F_r) \subseteq V$ که نگاشت روی آن یکریختی نیست، دقیقاً مکان تکین V باشد. چون نگاشت تصویر $X \longrightarrow V$ بر مجموعهٔ باز چگالِ مکمل مکان تکین، یک یکریختی است، می‌بینیم که X «درست مانند V» است مگر بر مکان تکین V.

پی بردن به این نکته حائز اهمیت است که ممکن است ایدِآل $(F_0, \ldots, F_r)$ با ایدِآل ژاکوبی که در بخش ۲.۶ تعریف شده، یکی نباشد، با اینکه هر دو ایدِآل معرف مکان تکین V هستند. این امر که هر دو ایدِآل معرف یک زیرمجموعهٔ بسته در V هستند تنها بدین معناست که این دو ایدِآل باید رادیکالهای مساوی داشته باشند. در واقع، با اینکه می‌دانیم ایدِآل تکین‌زدایی وجود دارد، مشخص کردن صریح آن امری دشوار است.

حکم قضیهٔ هیروناکا را می‌توان به شکل دقیق‌تر ذیل بیان کرد. به جای فراگستری در طول یک ایدِآل غیررادیکال $(F_0, \ldots, F_r)$، یک چندگونا را می‌توان با فراگستریهای متوالی در طول ایدِآلهایی رادیکال که معرف زیرچندگوناهایی هموار از مکان تکین هستند، تکین‌زدایی کرد. اغلب در عمل این کار مفیدتر است، زیرا فراگستری در طول یک زیرچندگونای هموار تعبیری هندسی مشابه با تعبیر هندسی فراگستری در یک نقطه دارد. در اینجا به جای جایگزینی یک نقطه با همهٔ خطوط گذرنده بر آن نقطه، فراگستری در طول Y، Y را با همهٔ امتدادهای عمود بر Y جایگزین می‌کند. برای بیان دقیق این مطلب ابزاری فراتر از آنچه در این کتاب آمده مورد نیاز است؛ رجوع شود به [۳۷، کتاب II، فصل VI، بخش ۲].

قضیهٔ هیروناکا مدعی یکتا بودن یا به نحوی متعارف بودن تکین‌زدایی نیست. هر چندگونا (با بعد بیش از یک) تکین‌زداییهای غیریکریخت زیادی دارد. در بخش ۶.۷ از تحقیقات انجام‌شده در مسئلهٔ وجود یا عدم وجود نوعی چندگونای تصویریِ هموارِ متعارف یا «مینیمال» که با چندگونای داده‌شده در یک مجموعهٔ باز چگال یکریخت باشد، بحث خواهیم کرد.

تمرین ۱.۴.۷ نشان دهید که چندگونای حاصل از فراگستری یک چندگونای آفین در طول یک ایدِآل ماکسیمال با چندگونای حاصل از فراگستری در طول هر توان آن ایدِآل یکی است. (راهنمایی: از نشانیدن ورونزه استفاده کنید.)

تمرین ۲.۴.۷ فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ مخروط آفین روی یک چندگونای تصویری هموار باشد. نشان دهید که می‌توان مخروط X را با فراگستری در رأس آن تکین‌زدایی کرد. تار نگاشت تکین‌زدایی روی رأس مخروط چیست؟

۵.۷ ابررویه‌ها

هدف ما در این بخش توضیح این مطلب است که چرا هر چندگونای تصویری تحویلناپذیر با یک ابررویه هم‌ارز دوسوگویاست. به عبارت دیگر، برای هر چندگونای تصویری تحویلناپذیر V با بعد d، ابررویه‌ای مانند

$$X = \mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$$

وجود دارد به طوری که V و X شامل مجموعه‌های بازِ چگالِ یکریخت هستند. ساده‌ترین راه اثبات این مطلب استفاده از استدلال کاملاً جبری در نظریهٔ میدانهاست؛ رجوع شود به [۲۰، صفحهٔ ۲۷]. لیکن، می‌خواهیم استدلال هندسی شهودی‌تری را طرح‌ریزی کنیم. این راه برهان ناتهی بودن مکان هموار یک چندگونا را که در بخش ۲.۶ وعده داده بودیم، کامل خواهد کرد.

خلاصهٔ برهان: فرض می‌کنیم $V \subseteq \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری تحویلناپذیر است. ابتدا این مطلب را ثابت می‌کنیم که اگر بعد V برابر $n-1$ باشد، V باید با یک معادلهٔ تنها مشخص شود؛ یعنی، هر زیرچندگونای تحویلناپذیر $\mathbb{P}^n$ با متمم بعد یک، یک ابررویه است.

برای اثبات این موضوع، ابتدا توجه می‌کنیم که ایدِآل $\mathbb{I}(V)$ی توابعی که روی V صفر می‌شوند، باید شامل یک چندجمله‌یی همگن تحویلناپذیر F باشد زیرا، چندجمله‌یی دلخواه F را در $\mathbb{I}(V)$ در نظر می‌گیریم. اگر F به صورت GH تجزیه شود، چون $\mathbb{I}(V)$ یک ایدِآل اول است، لذا G یا H باید در $\mathbb{I}(V)$ باشد.

با استقرا بر درجه، بالاخره $\mathbb{I}(V)$ شامل یک چندجمله‌یی تحویلناپذیر همگن خواهد بود. با استفاده از این واقعیت که هر چندجمله‌یی به طور یکتا (با تقریب یک مضرب عددی) به حاصلضرب چندجمله‌ییهای تحویلناپذیر تجزیه می‌شود، به‌آسانی نتیجه می‌شود که ایدِآل حاصل از یک چندجمله‌یی تحویلناپذیر اول است، لذا شمولی از ایدِآلهای اول به صورت

$$(F) \subset \mathbb{I}(V) \subsetneq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$$

به دست می‌آید. اگر $(F) \neq \mathbb{I}(V)$، آنگاه V یک زیرچندگونای سرهٔ یک زیرچندگونای تحویلناپذیر $\mathbb{V}(F)$ با متمم بعد یک خواهد بود. درنتیجه متمم بعد V حداقل باید دو باشد. این تناقض ایجاب می‌کند که $\mathbb{I}(V) = (F)$، و لذا $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}(F)$. بنابراین هر زیرچندگونای تحویلناپذیر $\mathbb{P}^n$ با متمم بعد یک، یک ابررویه است.

حال برهان قضیه را می‌توان با استقرا بر متمم بعد V در $\mathbb{P}^n$ کامل کرد. ما اکنون حالت متمم بعد یک را اثبات کرده‌ایم.

فرض می‌کنیم $\operatorname{codim}(V) > 1$. نقطهٔ ثابت $p \in \mathbb{P}^n \setminus V$ و ابرصفحهٔ $H \subseteq \mathbb{P}^n$ را که شامل p نباشد در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم π نگاشت تصویر از p روی H باشد:

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\pi} H \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

$$x \longmapsto \pi(x)$$

چنانکه در بخش ۲.۷ تعریف شده است. فرض می‌کنیم $V' \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ نگارهٔ V تحت این نگاشت است. به‌آسانی می‌توان دید که p و H را می‌توان طوری انتخاب کرد که نگاشت تصویر

$$V \xrightarrow{\pi} V'$$

بر یک زیرمجموعهٔ باز چگال یک‌ـبه‌ـیک باشد. بنابراین یک نگاشت وارون بر یک زیرمجموعهٔ بازِ چگال می‌توان ساخت و به‌آسانی بررسی کرد که این عمل یک نگاشت دوسوگویا مشخص می‌کند. چون متمم بعد V' در $\mathbb{P}^{n-1}$ از متمم بعد V در $\mathbb{P}^n$ یکی کمتر است، برهان بر اساس استقرا بر متمم بعد کامل می‌شود. □

با اینکه از نظر شهودی واضح است که برای انتخاب عام p و H نگاشت تصویر $V \xrightarrow{\pi} V'$ یک هم‌ارزی دوسوگویاست، ممکن است یافتن یک برهان هندسیِ دقیق برای خواننده دشوار باشد. این موضوع کمک می‌کند تا به ارزش برهان جبری ساده که درکتاب هارتشورن داده شده پی ببریم، که فهم آن، البته، نیازمند قدری از نظریهٔ میدانهاست.

تمرین ۰۱۰۵۰۷ چندگونای جبری V را گویا می‌نامند هرگاه با یک فضای تصویری (از بعدی مناسب) هم‌ارز دوسوگویا باشد. نشان دهید که خم گره‌دار مسطح که با معادلهٔ $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ تعریف می‌شود، گویاست. (راهنمایی: از نگاشت تصویر به مرکز گره استفاده کنید.)

۶۰۷ مسئله‌های رده‌بندی

این بخش را با ذکر چند مسئلهٔ کلیدی که انگیزهٔ بخش اعظم تحقیقات در هندسه جبری هستند، شروع می‌کنیم. در اغلب موارد، پاسخ عمومی به این مسائل تا حد نومیدکننده‌ای دشوار است، لیکن پیشرفت در جهت حل آنها را می‌توان ارزیابی کرد.

- رده‌بندی همهٔ چندگوناها با تقریب یکریختی.
- رده‌بندی همهٔ چندگوناهای تصویری هموار با تقریب هم‌ارزی دوسوگویا.

توجه می‌کنید که حل این مسئله، رده‌بندی دوسوگویای همهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری را به دست خواهد داد، زیرا هر چندگونای شبه‌تصویری با یک چندگونای تصویری هم‌ارز دوسوگویاست، و بنا به قضیهٔ هیروناکا، هر چندگونای تصویری با یک چندگونای تصویری هموار هم‌ارز دوسوگویاست. این مسئله با مسئلهٔ جبری محضِ رده‌بندیِ توسیعهای میدانیِ متناهی مولد $\mathbb{C}$ با تقریب یکریختی، هم‌ارز است.

- رده‌بندی چندگوناها در هر ردهٔ هم‌ارزیِ دوسوگویا با تقریب یکریختی.
- انتخاب یک نمایندهٔ متعارف در هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا.

در مورد خمها (چندگوناهای یک‌بعدی)، همهٔ این سؤالها، جوابهای رضایت‌بخشی دارند، که در خلال سده‌های مختلفِ توسعهٔ ریاضیات، آشکار شده‌اند.

نظریهٔ خمها را، بدون اشاره به برهانها، خلاصه می‌کنیم. اولاً تا حدی به‌آسانی ثابت می‌شود که هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا یک الگوی تصویری هموار یکتا دارد ([۲۰، ص ۴۵] را ببینید). به‌علاوه، هر نگاشت گویا بین خمهای تصویری هموار به شکل یکنواختی به یک ریختپایی خوشتعریف قابل توسیع است؛ بنابراین، نگاشتهای دوسوگویا و یکریختیها، در خمهای تصویری هموار، یکی هستند. از آنجا که خمهای تصویری مختلط هموار، رویه‌های ریمانی هستند، رده‌بندی خمهای مختلط هموار به همتای جبری نظریهٔ تایشمولر منجر می‌شود، که به مطالعهٔ فضاهای پیمانه‌ای رویه‌های ریمانی، با تقریب یکریختی همدیس، می‌پردازد. از دیدگاه هندسهٔ جبری نتایج مهم دربارهٔ خمهای تصویری هموار به شرح زیرند:

- تنها یک خم تصویری هموار از گونای صفر، با تقریب یکریختی، وجود دارد، یعنی $\mathbb{P}^1$.

- یک خانوادهٔ یک‌پارامتری از رده‌های یکریختی خمهای تصویری هموار با گونای یک وجود دارد که همان خمهای بیضوی هستند. این خانواده با jـناوردا نمایه‌گذاری شده که j پارامتری است که روی $\mathbb{A}^1$ تغییر می‌کند (رجوع شود به [۲۰، فصل IV، بخش ۴]).

- خمهای هموار با گونای بزرگتر از یک توسط فضاهای پیمانه‌ای $\mathfrak{m}_g$ پارامتری می‌شوند. این فضاهای پیمانه‌ای ابتدا به عنوان چندگوناهای $(3g - 3)$ بعدی مجرد[1]، توسط دیوید مامفرد ساخته شدند [۳۳]، لیکن اندکی بعد دلینی[2] و مامفرد[3] نشان دادند که این چندگوناها، در واقع، چندگوناهای شبه‌تصویری تحویلناپذیرند [۸]. ساختار این فضاهای پیمانه‌ای و تعمیم آنها، به‌ویژه از وقتی که ارتباطهای جالب این فضاها با فیزیک نظری در دههٔ گذشته توسط ویتن[4] وکنتسویچ[5] و دیگران کشف شد، یک زمینهٔ فعال تحقیقاتی شده است؛ رجوع شود به [۱۸].

چنانکه خلاصهٔ فوق نشان می‌دهد، دانستنیهای زیادی از رده‌بندی خمها روشن شده است. مع‌هذا، هنوز مسائل باقیمانده زیادند. مثلاً گرچه در بخش بعد ثابت خواهیم کرد که هر خم تصویری هموار را می‌توان در فضای تصویری سه‌بعدی نشانید، لیکن هنوز این مسئله که آیا می‌توان چنین خمی را به صورت فصل مشترک دورویه نوشت یا نه، حل نشده است.

یکی از فعالترین زمینه‌های تحقیقاتی امروزی در هندسهٔ جبری، جستجوی یک نمایندهٔ مشخص برای هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا از چندگوناهای تصویری هموار است. برای خمها، همان‌طور که متذکر شدیم هر رده، توسط یک خم تصویری هموار نمایش داده می‌شود و این نماینده با تقریب یکریختی یکتاست. به‌عکس، نمی‌توان نمایندهٔ یکتایی برای رویه‌ها (چندگوناهای دوبعدی) پیدا کرد. هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا از رویه‌ها شامل تعدادی نامتناهی از «الگوهای» هموار غیریکریخت است، یعنی چندگوناهای تصویری هموراری که معرف رده هستند. مثلاً، اثبات این مطلب چندان مشکل نیست که با فراگستری n نقطه در $\mathbb{P}^2$، یک چندگونای تصویری هموار که با $\mathbb{P}^2$ هم‌ارز دوسوگویاست، به‌دست می‌آید، لیکن برای مقادیر مختلف n، این چندگوناها یکریخت نیستند.

یک واقعیت زیبا از هندسهٔ جبری کلاسیک این است که جز موارد استثنائی قابل ذکر، هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویای رویه‌ها یک الگوی مینیمال یکتا دارد. یک الگوی مینیمال چندگونایی است مانند V که به ازای هر چندگونای هم‌ارز دوسوگویا با V، یک ریختپایی منظم دوسوگویا (یعنی نگاشت دوسوگویا همه جا تعریف‌شده) از V به این چندگونا وجود داشته باشد. بنابراین الگوی

---

۱. چندگوناهای مجرد در پیوست تعریف شده‌اند.

2. Deligne 3. Mumford 4. Witten 5. Kontsevich

مینیمال یک نمایندهٔ مشخص از ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویاست. موارد استثنائی عبارت‌اند از رده‌های هم‌ارزی دوسوگویای رویه‌های خط‌دار—رویه‌هایی که با $\mathbb{P}^1 \times C$ هم‌ارز دوسوگویا هستند، که C یک خم است. برای مثال، $\mathbb{P}^2$ با رویهٔ خط‌دار $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ هم‌ارز دوسوگویاست. هر دو الگو، به تعبیری ضعیف‌تر «مینیمال»اند: هیچ ریختپایی دوسوگویای غیرنمایان از یکی از این دو چندگونا به دیگری در این ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا وجود ندارد. لیکن، چون هیچ ریختپایی دوسوگویا از $\mathbb{P}^2$ به $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$، یا از $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ به $\mathbb{P}^2$ وجود ندارد، این رده یک الگوی مینیمال (یکتا) ندارد. یک گزارش خوشمزه دربارهٔ این موضوع را می‌توان در مقاله‌ای از مایلز رید مطالعه کرد [۳۴].

نظریهٔ مشابهی در مورد چندگوناهای جبری سه‌بعدی وجود دارد، موضوع جذابی که جایزه فیلدز ۱۹۹۰ را نصیب موری کرد. در اینجا هم، به استثنای مواردی قابل ذکر، هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا از چندگوناهای جبری سه‌بعدی یک «الگوی مینیمال» می‌پذیرد، هرچند کاملاً یکتا نیست و باید تکینیهای خفیفی را که «تکینیهای پایانی» نامیده می‌شوند مجاز بدانیم. به علاوه، باز هم به استثنای برخی موارد، هر ردهٔ هم‌ارزی دوسوگویا شامل یک «الگوی متعارف» است که همهٔ عضوهای دیگر رده به آن نگاشته می‌شوند، هرچند تکینیهای این الگو تا اندازه‌ای پیچیده‌ترند.

این نظریه در ابعاد بالاتر موضوع تحقیقات امروزی است. یک مقدمهٔ دلچسب و کاملاً خواندنی در این زمینه را می‌توان در مقالهٔ کولار پیدا کرد [۲۶].

۸

در باب نگاشتها به فضای تصویری

یکی از هدفهای اصلی هندسهٔ جبری درک ماهیت هندسهٔ چندگوناهای تصویری هموار است. به‌عنوان مثال، برای رویهٔ تصویری هموار داده‌شدهٔ X، سؤالات فراوانی را می‌توان مطرح کرد که پاسخ دادن به آنها می‌تواند به تشریح هندسهٔ X کمک کند. این رویه شامل چه نوع خمهایی است؟ آیا با خمهای گویا، یعنی، خمهایی که با $\mathbb{P}^1$ هم‌ارز دوسوگویا هستند، پوشانده شده است؟ اگر چنین نیست، چه تعداد خم گویا روی آن واقع است، و این خمها همدیگر را چگونه قطع می‌کنند؟ یا اینکه طبیعی‌تر است این رویه را به صورت خانواده‌ای از خمهای بیضوی (رویه‌های ریمانی با گونای یک) یا خانواده‌ای دیگر تصور کنیم؟ آیا این رویه با $\mathbb{P}^2$ یا یک چندگونای آشنای دیگر روی یک مجموعهٔ چگال یکریخت است؟ چه رویه‌های دیگری با X هم‌ارز دوسوگویا هستند؟ این رویه چه نوع خودریختیهایی دارد؟ با چه نوع خانواده‌هایی از رویه‌ها که به طور پیوسته تغییر می‌کنند جور است؟

در تلاش برای درک ماهیت یک چندگونای X، ممکن است سعی کنیم X را هر چه بیشتر به صورت ملموسی درآوریم. ترجیحاً ممکن است لازم باشد بدانیم چگونه می‌توان X را در یک

فضای تصویری مشخص نشانید. حتی بهتر خواهد بود، در صورت امکان، با نشانیدن X در فضاهای تصویری با ابعاد مختلف و به روشهای مختلف، از چند منظر متفاوت به مشاهدهٔ X بپردازیم. به طور کلی، شاید این مطلب سودمند باشد که بدانیم آیا نگاشتی از این چندگونا به یک فضای تصویری دیگر وجود دارد یا نه.

اساساً می‌خواهیم به همهٔ نگاشتهای ممکن یک چندگونا به فضای تصویری پی ببریم. هدف این فصل این است که بگوییم چگونه می‌توان از کلافهای خطی برای تشریح کامل این نگاشتها استفاده کرد. بسط جامع این مبحث یک نیمسال کامل از یک درس پیشرفته در هندسهٔ جبری را می‌طلبد. امیدواریم نحوهٔ کار موجز ما در این فصل، ادراک خوبی از این مبحث مهم به خواننده بدهد.

قبل از مطالعهٔ کلافهای خطی، مبحث مقدماتی‌تر نشانیدن یک خم هموار را در $\mathbb{P}^3$ بررسی می‌کنیم.

۱۰۸ نشانیدن یک خم هموار در فضای سه‌بعدی

فرض می‌کنیم که چندگونای تصویری هموارى داده شده است. فضای تصویری با کمترین بعد ممکن که بتوان این چندگونا را در آن نشانید کدام است؟ قضیهٔ زیر جوابی به این سؤال در حالت یک‌بعدی است.

قضیه: هر خم تصویری هموار را می‌توان در $\mathbb{P}^3$ نشانید.

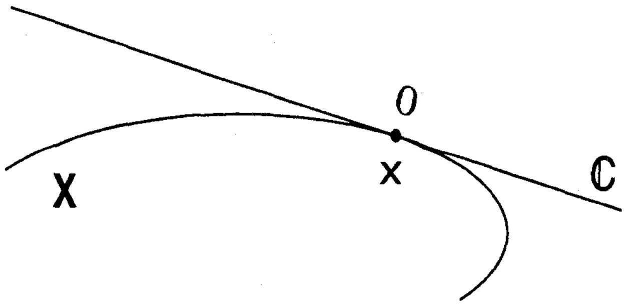
قبل از بیان طرح اصلی اثبات، به ذکر تعاریفی می‌پردازیم.

تعریف: فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری هموار باشد. چندگونای مماس X و چندگونای قاطع X به صورت مجموعه‌های زیر تعریف می‌شوند

$$\mathrm{Tan}\ X = \{p \in \mathbb{P}^n | \text{بر یک خط مماس بر } X \text{ واقع است } p\} \subset \mathbb{P}^n$$

$$\mathrm{Sec}\ X = \{p \in \mathbb{P}^n | \text{بر یک خط قاطع } X \text{ واقع است } p\} \subset \mathbb{P}^n$$

که در اینجا خط قاطع X خطی است که چندگونا را در حداقل دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند. اثبات اینکه $\mathrm{Tan}\ X$ و $\mathrm{Sec}\ X$ چندگوناهای شبه تصویری هستند، دشوار نیست (رجوع شود به [۲۰، ص ۳۱۰]). در حالی که $\mathrm{Tan}\ X$ برای چندگونای تصویری هموار X، بسته است، چندگونای $\mathrm{Sec}\ X$ عملاً هیچ وقت بسته نیست؛ زیرا، خطوط مماس را می‌توان حد خطوط قاطع تصور کرد، بنابراین، $\mathrm{Tan}\ X$ در بستار تصویری $\mathrm{Sec}\ X$ واقع است.



شکل ۱۰۸ پارامتری کردن خط مماس بر یک خم.

اگر X خم هموراری در $\mathbb{P}^n$ باشد، در هر نقطه فقط یک خط مماس دارد. بیاییم خط مماس در x را با $\mathbb{P}^1$ پارامتری کنیم:

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^n$$

$$\lambda \longmapsto \varphi_x(\lambda)$$

که $\varphi_x(\lambda)$ نقطه‌ای است بر خط مماس بر خم در نقطهٔ x، متناظر با λ تحت پارامتری‌سازی φ_x. چندگونای مماسِ یک خم هموار X، $\operatorname{Tan} X$، مجموعهٔ نگارهٔ نگاشت

$$X \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x, \lambda) \longmapsto \varphi_x(\lambda)$$

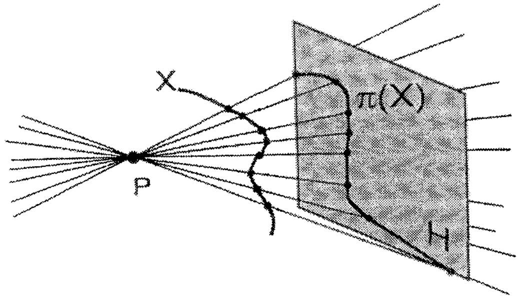
است، چون $X \times \mathbb{P}^1$ دوبعدی است، چندگونای نگاره، یعنی $\operatorname{Tan} X$، حداکثر دوبعدی خواهد بود.

همچنین هر خط قاطعِ خم توسط دو نقطه بر X مشخص و توسط $\mathbb{P}^1$ پارامتری می‌شود. بدین ترتیب نگاشت گویای

$$X \times X \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$(x, y, \lambda) \longmapsto \varphi_{x,y}(\lambda)$$

قابل تعریف است که $\varphi_{x,y}(\lambda)$ نقطه‌ای است بر خط قاطع گذرنده از x و y، متناظر با $\lambda \in \mathbb{P}^1$ تحت پارامتری‌سازی $\varphi_{x,y}$. این نگاشت یک ریختپایی است از مجموعهٔ بازی متشکل از سه‌تاییهای



شکل ۲.۸ تصویر خم X بر H.

(x, y, λ)، با x و yی متمایز، و نگارهٔ این ریختپایی چندگونای قاطع است. بنابراین چندگونای قاطع حداکثر سه‌بعدی است.

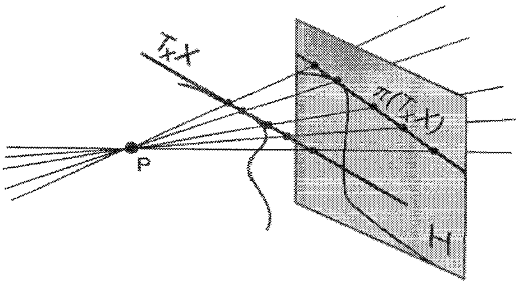
خلاصهٔ برهان قضیه: فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^n$ خمی است هموار. چون می‌خواهیم X را در فضای تصویری $\mathbb{P}^3$ بنشانیم، جز حالتی که n حداقل چهار باشد، مطلبی برای اثبات باقی نمی‌ماند. ابرصفحه‌یی مانند $H \subset \mathbb{P}^n$ انتخاب می‌کنیم. همچنین نقطه‌ای مانند $p \in \mathbb{P}^n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که خارج X و H باشد. فرض می‌کنیم $\mathbb{P}^n \overset{\pi}{\dashrightarrow} H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ نگاشت تصویر به مرکز p بر H باشد. از تحدید π به خم X ریختپاییِ خوشتعریف $X \longrightarrow H$ حاصل می‌شود، زیرا تنها نقطه‌ای که π در آن تعریف نشده نقطهٔ p است و p بر X نیست. نشان می‌دهیم که وقتی n بزرگتر از سه است، انتخابی برای p وجود دارد (در واقع، تقریباً هر انتخابی)، به طوری که نگاشت $\pi|_X$ یک نشانیدن است، که در این صورت برهان با استقرا بر n کامل می‌شود.

روشن است که اگر p بر هیچ خط قاطعِ X واقع نباشد، π بر X یک‌ـبه‌ـیک است. اگر $\pi|_X$ یک‌ـبه‌ـیک باشد احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) π یک یکریختی $X \longrightarrow \pi(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ را القا می‌کند.

(ب) هر نگاشت القاشده توسط π بر فضاهای مماسِ $T_xX \xrightarrow{\pi} T_{\pi(x)}(\pi(X))$ یک‌ـبه‌ـیک است.

به صورتی دقیق‌تر، نگاشت القاشده بر فضاهای مماس را باید با $d_x\pi$ نمایش داد، لیکن در این حالت $d_x\pi$ با تحدید π به چندگونای خطی T_xX در $\mathbb{P}^n$ یکی است چون π یک نگاشت تصویر است. برهان هم‌ارزی (الف) و (ب) کاملاً نمایان نیست، با اینکه برای آنهایی که هندسهٔ مختلط یا هندسهٔ دیفرانسیل خوانده‌اند، باید باورکردنی باشد، زیرا مشابه این حکم در آن زمینه‌ها درست است. برهان بر لم ناکایاما استوار است، که قضیه‌ای است استانده در هر کتاب جبر تعویض‌پذیر.



شکل ۳.۸ تصویر فضای مماس.

برهان هم‌ارزی احکام (الف) و (ب) را می‌توان مثلاً در صفحهٔ ۱۵۲ مرجع [۲۰] پیدا کرد.

اجازه دهید به بقیهٔ برهان بپردازیم. احکام (الف) و (ب) با این حکم نیز که p بر هیچ خط مماس بر X واقع نیست هم‌ارزند. برای اثبات این موضوع باید توجه کرد که بردار مماس در X تحت π بر صفر نگاشته می‌شود اگر و تنها اگر این بردار بر خط گذرنده بر X و p واقع باشد. بنابراین، π یک یکریختی بر X القا می‌کند اگر و تنها اگر π هیچ خط مماس بر X را به یک نقطه فرو نریزد، به عبارت دیگر، هیچ خط مماس بر X از نقطهٔ p نگذرد.

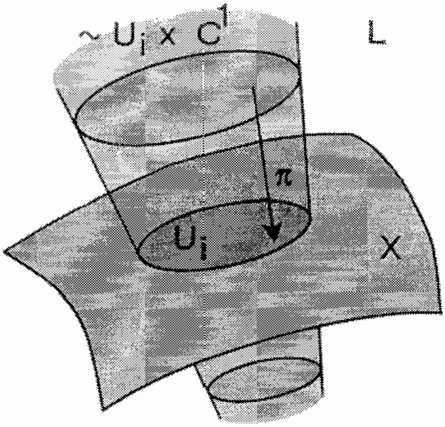
مطالب فوق را خلاصه می‌کنیم: نشان دادیم که وقتی n حداقل چهار باشد، نگاشت تصویر یک یکریختی از خم X بر یک خم در فضایی تصویری با بعد کمتر القا می‌کند، به شرط آنکه مرکز تصویر p نه بر $\operatorname{Tan} X$ واقع باشد و نه بر $\operatorname{Sec} X$. البته، جای زیادی برای انتخاب x با شرایط فوق وجود دارد، چرا که بعد زیرچندگونای $\operatorname{Tan} X \cup \operatorname{Sec} X$ حداکثر برابر سه است و هرگز نمی‌تواند تمامی $\mathbb{P}^n$ را، وقتی n بزرگتر از سه است، پر کند. □

تمرین ۰.۱.۰۸ با استفاده از همین تکنیک نشان دهید که هر چندگونای شبه‌تصویری هموار از بعد d را می‌توان در $\mathbb{P}^{2d+1}$ نشانید.

۲.۸ کلافهای برداری و کلافهای خطی

نگاشتهای یک چندگونای X به فضای تصویری توسط کلافهای خطی بر X صورت می‌گیرد. هر کلاف خطی، نمونهٔ یک‌بعدی یک کلاف برداری است.

به طور کلی، یک کلاف برداری بر X یک ریختپایی $E \longrightarrow X$ از چندگوناهاست که E از لحاظ موضعی حاصلضرب X در $\mathbb{C}^n$ است و نگاشت $E \longrightarrow X$ از لحاظ موضعی نگاشت تصویر طبیعی $X \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ است. تعریف دقیق به شرح ذیل است.



شکل ۴.۸ یک کلاف بردای L از رتبهٔ یک.

تعریف: یک کلاف برداریِ رتبهٔ n بر چندگونای جبری X یک چندگونای جبری E است همراه با یک ریختپایی $E \xrightarrow{\pi} X$ به نام نگاشت تصویر به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- پوشش بازی مانند $\cup U_i$ از X وجود داشته باشد به قسمی که $\pi^{-1}(U_i)$ تحت نگاشتهای حافظ تار با حاصلضرب $U_i \times \mathbb{C}^n$ یکریخت باشد. دقیق‌تر بگوییم، یکریختیهای $\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times \mathbb{C}^n$ موجود باشند به طوری که نمودار

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times \mathbb{C}^n \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & U_i & \end{array}$$

تعویضپذیر باشد، که در اینجا $U_i \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U_i$ نگاشت تصویر طبیعی بر عامل اول است.

- یکریختیهای φ_i به معنای زیرسازگاری خطی داشته باشند: در $U_i \cap U_j$، ترکیب

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$$
$$(x, v) \longmapsto (x, (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$$

برای هر نقطهٔ ثابت x یک نگاشت خطی از $\mathbb{C}^n$ باشد.

چندگونای E فضای کلِ کلاف برداری خوانده می‌شود، ولی ما اغلب تمامی کلاف برداری را با نماد فضای کلِ آن نمایش می‌دهیم. کلافهای برداریِ رتبهٔ ۱ را کلاف خطی گویند.

فرض می‌کنیم $X \xrightarrow{\pi} E$ یک کلاف برداریِ رتبهٔ n بر X، و $x \in X$ نقطه‌ای دلخواه باشد. تار π روی x زیرچندگونای بستهٔ $\pi^{-۱}(x)$ است که با E_x نشان داده می‌شود. با تثبیت یک U_iی شامل x، یکریختی φ_i یک یکریختی از چندگوناها بین E_x و $\mathbb{C}^n$ القا می‌کند. با استفاده از این یکریختی می‌توان ساختار فضای برداری $\mathbb{C}^n$ را به یک ساختار فضای برداری بر E_x منتقل کرد. با استفاده از شرط سازگاری خطیِ فوق، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این ساختار فضای برداری بر E_x به انتخاب مجموعهٔ بازِ U_i و یکریختی φ_i بستگی ندارد. بنابراین، می‌توان کلاف برداری $X \longrightarrow E$ را به صورت خانوادهٔ پیوسته‌ای از فضاهای nبعدی E_x تصور کرد که توسط نقاط X پارامتری شده‌اند.

هر کلاف برداری یک برش صفر یکتا می‌پذیرد. زیرا، به‌آسانی می‌توان دید که نگاشت $E \xrightarrow{s} X$ که با

$$x \longmapsto \varphi_i^{-۱}(x, \circ)$$

تعریف می‌شود، که در آن U_i یک مجموعهٔ باز شامل x است و $\circ$ عضو صفرِ $\mathbb{C}^n$، یک ریختپایی خوشتعریف از چندگوناهای جبری است. این ریختپایی برش صفر کلاف خوانده می‌شود زیرا یک نقطهٔ مشخص $s(x)$ از هر تار E_x، یعنی، عضو صفر فضای برداری را برای ما انتخاب می‌کند. باید توجه کرد که $\pi \circ s$ نگاشت همانی بر X است، و لذا می‌توان این نگاشت را همانند نشانیدن X در E تعبیر کرد. از این رو هر کلاف برداری را می‌توان به مثابهٔ راهی برای الصاق پیوستهٔ یک فضای برداری nبعدی توسط مبدأ آن به هر نقطهٔ X تصور کرد.

پوشش باز U_i همراه با انتخاب یکریختی φ_i، یک نمایان‌سازی موضعی کلاف نامیده می‌شود. پوشش باز و نگاشتها به هیچ روی یکتا نیستند، و نباید بخشی از ساختار کلاف برداری به حساب بیایند. ولی ساختار فضای برداری القاشده بر هر E_x یکتاست، بدین معنی که، مستقل از انتخاب نمایان‌سازی موضعی است، که بررسی این مطلب با خواننده است.

برای هر نگاشت مفروض چندگوناهای جبری مانند $X \xrightarrow{f} Y$ و هر کلاف بردای $E \xrightarrow{\pi} Y$ بر Y، یک روش طبیعی برای ساختن کلاف پسکشی f^*E بر X وجود دارد. برای آنکه تصوری از چگونگی ساختن کلاف پسکشی داشته باشیم، ابتدا مفهوم حاصلضرب تاری مجموعه‌ها را به یاد می‌آوریم. اگر $X \xrightarrow{f} Y$ و $E \xrightarrow{\pi} Y$ دو نگاشت از مجموعه‌ها باشند، حاصلضرب تاری عبارت است از مجموعهٔ

$$X \times_Y E = \{(x, v) | f(x) = \pi(v)\} \subset X \times E$$

همراه با نگاشتهای تصویر طبیعی $X \times_Y E \xrightarrow{\pi'} X$ و $X \times_Y E \longrightarrow E$. اگر $X \xrightarrow{f} Y$ و

$Y \xrightarrow{\pi} E$ هر دو ریختپاییهایی از چندگوناهای جبری باشند، حاصلضرب تاری $X \times_Y E$ دارای ساختار یک چندگونای جبری است، و نگاشتهای تصویر ریختپاییهایی از چندگوناها هستند. اگر $E \xrightarrow{\pi} Y$ یک کلاف برداریِ رتبهٔ n روی Y باشد، می‌توان بررسی کرد که $X \times_Y E \xrightarrow{\pi'} X$ یک کلاف برداری بر X است که رتبهٔ آن نیز n است. در واقع، برای هر $x \in X$، تارِ π' روی x فضای برداری $\{(x,v)|v \in \pi^{-1}(f(x))\}$ است، که با تار $E \xrightarrow{\pi} Y$ روی نقطهٔ $f(x)$ یکی گرفته می‌شود و بنابراین با $\mathbb{C}^n$ یکریخت است. بررسی دقیق ویژگیهای این کلاف برداری را به خواننده واگذار می‌کنیم. کلاف برداری $X \times_Y E \longrightarrow X$ را معمولاً با f^*E نمایش می‌دهند.

به‌ویژه، اگر X و Y چندگونای جبری یکریخت باشند، هر کلاف خطی (برداری) بر X با یک کلاف خطی (برداری) یکتا بر Y متناظر می‌شود، که همان پسکشی آن تحت یکریختی مورد نظر است. بنابراین، مجموعهٔ همهٔ کلافهای خطی بر یک چندگونای جبری یک ناوردای آن چندگوناست.

تمرین ۸.۲.۱۰ اگر $\{U_i\}$ یک نمایان‌سازی موضعی از یک کلاف برداری E بر Y و $X \xrightarrow{f} Y$ یک ریختپایی از چندگوناهای جبری باشد، نشان دهید $\{f^{-1}(U_i)\}$ یک نمایان‌سازی موضعی از f^*E است.

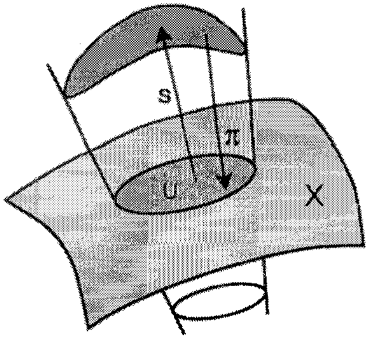
۸.۳ برشهای یک کلاف برداری

در هندسهٔ جبری معمولاً دیدگاه متفاوتی از کلافهای برداری اختیار می‌شود، که به جای تعریف فوق، بر داده‌هایی هم‌ارز از بافهٔ برشها تأکید دارد.

تعریف: فرض می‌کنیم $E \xrightarrow{\pi} X$ یک کلاف برداری، و $U \subset X$ یک مجموعهٔ باز باشد. یک برش این کلاف برداری روی مجموعهٔ U عبارت است از یک ریختپایی $U \xrightarrow{s} E$ به قسمی که $\pi \circ s$ نگاشت همانی بر U باشد. مجموعهٔ همهٔ برشهای E روی U با $\mathcal{E}(U)$ نشان داده می‌شود.

البته با تعریفی که ما از کلاف برداری داریم، پیشاپیش می‌دانیم که هر کلاف برداری روی هر مجموعهٔ باز حداقل یک برش می‌پذیرد که همانا برش صفر است، که به هر نقطهٔ x عضو صفر تار E_x را تخصیص می‌دهد.

اگر $s_1, s_2 \in \mathcal{E}(U)$ دو برش روی U از کلاف برداری E روی X باشند، $s_1 + s_2$ نیز یک برش روی U است. به علاوه، برای هر تابع منظم $f \in \mathcal{O}_X(U)$، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که حاصلضرب fs برشی است از $\mathcal{E}(U)$: نگاشت $U \xrightarrow{fs} \pi^{-1}(U)$ به صورت $x \longmapsto f(x).s(x)$ تعریف می‌شود، که در آن صرفاً، $f(x) \in \mathbb{C}$ بر بردار $s(x)$ در فضای برداری $\pi^{-1}(x)$ از راه ضرب عمل می‌کند.



شکل ۵.۸ برش یک کلاف خطی.

برشهای یک کلاف برداری مثال دیگری از یک بافه هستند. خوانندهٔ آشنا با تعریف بافه (رجوع شود به پیوست، بخش الف.۱)، به‌آسانی می‌تواند ثابت کند که $\mathcal{E}$ یک بافهٔ مدولها روی بافهٔ حلقه‌های $\mathcal{O}_X$ است: برای هر مجموعهٔ باز $U \subset X$، $\mathcal{E}(U)$ یک مدول روی حلقهٔ $\mathcal{O}_X(U)$، از توابع منظم بر U است. با بررسی دقیقتر آشکار می‌شود که چون E موضعاً با $U \times \mathbb{C}^n$ مشابه است، $\mathcal{E}$ یک بافهٔ موضعاً آزاد از $\mathcal{O}_X$ـمدولها از رتبهٔ n است. یعنی، بر مجموعه‌های باز به قدر کافی کوچک

$$\mathcal{E}(U) \cong \underbrace{\mathcal{O}_X(U) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X(U)}_{n \text{ رونوشت}}$$

در واقع، برای چنین مجموعهٔ باز U، هر برش یک ریختپایی است به صورت

$$U \longmapsto \pi^{-۱}(U) \cong U \times \mathbb{C}^n$$

$$x \longmapsto (x_۱, f_۱(x), \ldots, f_n(x))$$

که هریک از f_iها یک تابع منظم از U به $\mathbb{C}$ است.

یک نمادگذاری نادرست ولی رایج در هندسهٔ جبری استفاده از یک نماد برای نشان دادن کلاف برداری و بافهٔ برشهای آن است، لیکن ما سعی خواهیم کرد در بحث خود بر این تفاوت تأکید کنیم. بافهٔ برشهای یک کلاف برداری، مثالی است از آنچه هندسهٔ جبری‌دانان یک بافهٔ منسجم بر X گویند. نظریهٔ بافه‌های منسجم که در آن بافه‌های $\mathcal{O}_X$ـمدولهای کلی‌تر از بافه‌های موضعاً آزاد مطالعه می‌شوند، بخشی اساسی از هندسهٔ جبری است، لیکن ما وارد این مقوله نخواهیم شد (رجوع شود به [۲۰، فصل II]).

برشهای سراسری یک کلاف برداری چیزی نیست جز برشهای $\mathcal{E}(X)$ از E بر کل چندگونای X. بعضی از مؤلفان برشهای سراسری را با نماد $\Gamma(X, \mathcal{E})$ یا با $H^\circ(X, \mathcal{E})$ نمایش می‌دهند. نظیر برشها بر هر مجموعهٔ باز، مجموعهٔ برشهای سراسری به طور طبیعی یک فضای برداری تشکیل می‌دهند.

معلوم می‌شود که اگر X یک چندگونای تصویری باشد، مجموعهٔ برشهای سراسری $\mathcal{E}(X)$ یک فضای برداری مختلط متناهی بعد خواهد بود. خوانندهٔ آشنا با هندسهٔ مختلط، حداقل وقتی X هموار است، مشکلی در قبول این مطلب نخواهد داشت، زیرا در این حالت X یک خمینهٔ مختلط فشرده است. برای ملاحظهٔ یک برهان جبری دقیق از نتایج خیلی کلی‌تر، رجوع شود به [۲۰، ص ۱۲۲، قضیه ۱۹.۵].

تمرین ۱۰.۳.۸ فرض می‌کنیم $\mathcal{E}$ بافهٔ برشهای کلاف برداری $Y \longrightarrow E$ باشد و فرض می‌کنیم $Y \xrightarrow{f} X$ یک ریختپایی از چندگوناهای جبری است. بافهٔ برشهای کلاف پسکششی f^*E را شرح دهید.

۴.۸ مثالهایی از کلافهای برداری

فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری باشد.

کلاف نمایان: کلاف خطی نمایان روی X عبارت است از

$$X \times \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} X$$

$$(p, \lambda) \longmapsto p$$

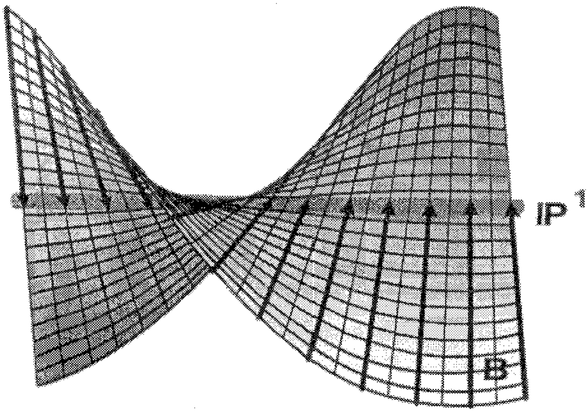
برشها ریختپاییهای $p \longmapsto (p, f(p))$ هستند، لذا دادن یک برش از کلاف نمایان روی مجموعهٔ باز U با دادن یک تابع منظم $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ یکی است. بنابراین، بافهٔ برشهای کلاف خطی نمایان روی X را می‌توان با بافهٔ ساختار $\mathcal{O}_X$ از چندگونای X یکی گرفت. اگر فرض کنیم X همبند و تصویری است، هیچ برش سراسری جز ثابتهای $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$ برای بافهٔ ساختاری وجود ندارد.

همچنین، کلاف برداری نمایان روی X، چندگونای $X \times \mathbb{C}^n$ است همراه با نگاشت تصویر طبیعی. بافهٔ برشهای آن با

$$\underbrace{\mathcal{O}_X \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_X}_{n \text{ رونوشت}}$$

یکریخت است.

کلاف خطی آشکار: هر چندگونای تصویری که در $\mathbb{P}^n$ نشانیده شده باشد یک کلاف خطی طبیعی به نام کلاف آشکار دارد که بر اثر نشانیدن به وجود آمده است. در واقع، چون نقاط $\mathbb{P}^n$



شکل ۶.۸ کلاف آشکار روی $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

دقیقاً خطوط گذرنده بر مبدأ در $\mathbb{C}^{n+1}$ هستند، به هر نقطهٔ $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ می‌توان خط $L := \{(tx_0, \ldots, tx_n) | t \in \mathbb{C}\}$ متناظر با آن در $\mathbb{C}^{n+1}$ را مربوط کرد. با تحدید به هر زیرچندگونای X از $\mathbb{P}^n$، همچنین به هر نقطه از X یک خط مربوط می‌کنیم.

به بیان دقیق‌تر، کلاف آشکار روی $\mathbb{P}^n$ به شرح زیر ساخته می‌شود. تناظر واقع شدن نقاط $\mathbb{C}^{n+1}$ بر خطوط مار بر مبدأ، یعنی

$$B = \{(x, \ell) | x \in \ell\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$$

را همراه با نگاشت تصویر طبیعی $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$، در نظر می‌گیریم. (همین مجموعهٔ B، همراه با نگاشت تصویر دیگرِ $B \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$، معرف فراگستریِ $\mathbb{A}^{n+1}$ در مبدأ است.) تار هر نقطهٔ معین $\ell \in \mathbb{P}^n$، مجموعهٔ $\{(x, \ell) | x \in \ell\}$، از نقاط x بر ℓ است. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که نگاشت تصویر $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$ در تعریف یک کلاف خطی صدق می‌کند.

کلاف آشکار روی چندگونای تصویری $X \subset \mathbb{P}^n$ صرفاً از تحدید تناظر بالا به نقاط X به دست می‌آید:

$$B = \{(x, \ell) | \ell \in X, x \in \ell\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times X \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$$

پی بردن به این موضوع حائز اهمیت است که کلاف آشکار برای X ذاتی نیست: این کلاف به انتخاب نشانیدن X در یک فضای تصویری خاص بستگی دارد. به عبارت دیگر، پسکشی کلاف

آشکار تحت یک یکریختی می‌تواند برای نشانیدنی متفاوت، کلاف آشکار نباشد. تمرین انتهای این بخش را به عنوان مثالی از این پدیده، ملاحظه کنید.

کلافهای خطی آشکار هیچ برش سراسری غیرصفر ندارند. برای درک این مطلب که چرا چنین چیزی درست است، در نظر گرفتن حالت خط تصویری در وهلهٔ اول کمک مؤثری است. یک برش سراسری کلاف آشکار $\mathbb{P}^1$، به ازای هر نقطهٔ p بر $\mathbb{P}^1$، یک نقطهٔ $(a(p), b(p)) \in \mathbb{C}^2$ را بر خط گذرنده از مبدأ متناظر با p تعیین می‌کند. چون تخصیص

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$p \longmapsto (a(p), b(p))$$

می‌بایست یک ریختپایی از چندگوناهای جبری باشد، می‌بینیم که با نگاشت تصویر بر هریک از عوامل، ریختپاییهای (توابع منظمِ)

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$p \longmapsto a(p)$$

و

$$p \longmapsto b(p)$$

را به دست خواهیم آورد. ولی از آنجا که $\mathbb{P}^1$ تابع منظم غیرثابتی ندارد، هر دو تابع منظم a و b باید تابعهای ثابت باشند. ولی در این صورت هر دو تابع، تابع صفرند: فرض شده است که نقطهٔ $(a(p), b(p))$ بر خط واقع در $\mathbb{C}^2$ متناظر به p قرار دارد، و تنها نقطهٔ $\mathbb{C}^2$ که بر همهٔ خطهای گذرنده بر مبدأ واقع است خود $(0, 0)$ است. بنابراین، کلاف آشکار روی $\mathbb{P}^1$ تنها برش صفر را می‌پذیرد. تعمیم واضح این استدلال نشان می‌دهد که کلاف خطی آشکار روی هر چندگونای تصویری (که صرفاً یک مجموعهٔ متناهی از نقاط نباشد)، هیچ برش سراسری ناصفر ندارد.

بافهٔ برشهای کلاف خطی آشکار بر X را معمولاً با $\mathcal{O}_X(-1)$ نمایش می‌دهند. در چنین نمادی وجود یک نشانیدن ویژهٔ X در $\mathbb{P}^n$ مستتر است.

کلاف ابرصفحه‌یی: کلاف ابرصفحه‌یی H بر یک چندگونای شبه‌تصویری، بنا به تعریف، دوگان کلاف خطی آشکار است: تار $\pi^{-1}(p)$ روی نقطه $p \in X \subset \mathbb{P}^n$ فضای برداری (یک‌بعدی) تابعکهای خطی روی خط $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$ است که نقطهٔ p را در $\mathbb{P}^n$ معین می‌کند. ساختمان صوریِ H به عنوان یک زیرچندگونای $(\mathbb{C}^{n+1})^* \times \mathbb{P}^n$ با ساختمان مربوط برای کلاف آشکار مشابه است.

این کلاف خطی برشهای سراسری متعددی دارد. زیرا، فرض می‌کنیم $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ تابعکی خطی بر $\mathbb{C}^{n+1}$ باشد. به ازای هر نقطهٔ $p = [\lambda_0 : \lambda_1 : \ldots : \lambda_n] \in X$، این تابعک را می‌توان به خط $\ell = \{(t\lambda_0, t\lambda_1, \ldots, t\lambda_n) | t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ که متناظر با نقطهٔ p است، تحدید کرد. بدین ترتیب یک برش سراسری خوشتعریف به صورت

$$X \longrightarrow H$$

$$p \longmapsto (p, \sum_{i=0}^{n} a_i x_i|_l)$$

از کلاف ابرصفحه‌یی به‌دست می‌آید. در واقع، می‌توان دید که برشهای سراسری کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ دقیقاً چندجمله‌ییهای خطی در $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ هستند.

بافهٔ برشهای کلاف ابرصفحه‌یی بر یک زیرچندگونای X از $\mathbb{P}^n$ معمولاً با $\mathcal{O}_X(1)$ نشان داده می‌شود. باز در این نمادگذاری نشانیدن خاص X در $\mathbb{P}^n$ مستتر است. برای یک نشانیدن دیگر، ممکن است یک کلاف خطی متفاوت به کلاف ابرصفحه‌یی بدل شود.

مجذور کلاف ابرصفحه‌یی: مجذور کلاف ابرصفحه‌یی بر یک زیرچندگونای تصویری X از $\mathbb{P}^n$ که با H^2 نمایش داده می‌شود، به هر نقطهٔ $p \in X$ از فضای برداری همهٔ چندجمله‌ییهای همگن درجهٔ دوم بر خط $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$ را، که نقطهٔ $p \in \mathbb{P}^n$ را مشخص می‌کنند، مربوط می‌سازد. بافهٔ برشهای مجذور کلاف ابرصفحه‌یی با $\mathcal{O}_X(2)$ نمایش داده می‌شود. مثلاً، برشهای سراسریِ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)$ دقیقاً چندجمله‌ییهای همگن از درجهٔ ۲ در $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ هستند. مشابه کلافهای آشکار و ابرصفحه‌یی، H^2 نیز به نشانیدن خاص X در $\mathbb{P}^n$ بستگی دارد.

دوگانها و حاصلضربها در حالت کلی: همهٔ ساختمانهای معمولی جبر خطی برای فضاهای برداری، برای کلافهای برداری نیز صادق‌اند. مثلاً، اگر $E \longrightarrow X$ یک کلاف برداری و E_p تاری روی p باشد، آنگاه کلافهای برداری مانند

$$E^* \longrightarrow X$$

وجود دارند که تارهای آنها فضاهای دوگان $(E_p)^*$ هستند، و

$$\bigwedge^i E \longrightarrow X$$

که تارهای آن حاصلضربهای خارجی $(\bigwedge^i E_p)$ هستند. اگر $F \longrightarrow X$ کلاف برداری دیگری

روی X باشد، آنگاه یک کلاف برداری

$$E \otimes F \longrightarrow X$$

وجود دارد که تارهای آن $(E_p \otimes F_p)$ هستند و کلاف برداری

$$E \oplus F \longrightarrow X$$

که تارهای آن $E_p \oplus F_p$ هستند. ساختن دقیق این کلافها، به عنوان تمرینی آموزنده، به عهدهٔ خواننده گذارده می‌شود.

کلاف خطی $H^{۲}$، تعریف‌شده در فوق، حاصلضرب تانسوری $H \otimes H$ است که H کلاف ابرصفحه‌یی بر X است. به طور کلی، توان rـام هر کلاف برداری E، $E^{\otimes r}$، حاصلضرب تانسوری E در خود E است به تعداد r بار. بر $\mathbb{P}^n$، توان rـام کلاف ابرصفحه‌یی، که بافهٔ برشهای آن با $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ نمایش داده می‌شود، تارهایی به شرح زیر دارد: تار روی نقطهٔ $\ell \in \mathbb{P}^n$ مشتمل است بر همهٔ چندجمله‌ییهای همگن درجهٔ r بر یک فضای برداری یک‌بعدی متناظر به ℓ در $\mathbb{C}^{n+۱}$. هر چندجمله‌یی همگن r در $\mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n]$ وقتی به هر خطی در $\mathbb{C}^{n+۱}$ تحدید شود، یک چنین تابعی را معین می‌کند و بنابراین، یک برش سراسری به دست می‌دهد. زیرا، فضای برشهای سراسریِ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ را می‌توان با فضای چندجمله‌ییهای همگن درجه r در $\mathbb{C}[x_۰, \ldots, x_n]$ یکی گرفت.

به خواننده هشدار می‌دهیم که در اینجا $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ به معنی حاصلضرب تانسوری $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(۱)$ در خودش به تعداد r بار است، ولی هندسهٔ جبری‌دانان، برای یک کلاف برداری (یا خطی) E، $E(r)$ را به معنی حاصلضرب تانسوری E در خودش به تعداد r بار نمی‌گیرند، بلکه مراد آنها از نماد $E(r)$، کلاف $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ است.

کلاف مماس و کلافهای وابسته به آن: فرض می‌کنیم X یک چندگونای شبه‌تصویری هموار تحویلناپذیر از بعد n است. وابسته به آن، چندین کلاف برداری طبیعی و کلاف خطی هستند که از فضای مماس بر X ناشی می‌شوند.

کلاف مماس یک کلاف برداری $TX \longrightarrow X$ از رتبهٔ n است، به طوری که تار روی هر نقطهٔ $p \in X$، فضای برداری مماس T_pX است. فضای کلیِ کلاف مماس در بخش ۲.۶ معرفی شده بود. کلاف کتانژانت $T^*X \longrightarrow X$ دوگان آن است: تار روی هر نقطهٔ $p \in X$، فضای کتانژانت $(T_pX)^*$ است. برشهای کلاف کتانژانت را یک‌ـصورتهای دیفرانسیل گویند. بافهٔ برشهای کلاف مماس را اغلب با Θ_X نمایش می‌دهند و Ω_X را اغلب برای نمایش بافهٔ برشهای کلاف کتانژانت به‌کار می‌برند.

برخلاف کلافهای آشکار و ابرصفحه‌یی، کلاف مماس و دوگان آن مستقل از نشانیدن X در فضای تصویری هستند، هرچند این موضوع از شرحی که ما از آنها دادیم، روشن نیست. به عبارت

دیگر، اگر $Y \xrightarrow{f} X$ یک یکریختی باشد، آنگاه کلاف مماس بر Y به کلاف مماس بر X پسکشی می‌شود، و مشابه همین موضوع در مورد کلاف کتانژانت برقرار است. بنابراین، کلافهای مماس و کتانژانت مفاهیمی هستند وابسته به X که به طور ذاتی تعریف شده‌اند.

اگر یک نمایان‌سازی موضعی ثابتی از کلاف مماس را در نظر بگیریم، به طوری که روی یک مجموعهٔ باز $U \subset X$، کلاف مماس با $U \times \mathbb{C}^n$ یکریخت باشد، آنگاه «تابعکهای خطی»

$$\{p\} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(p, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \longmapsto \lambda_i$$

را می‌توانیم با $d_p x_i$ نمایش دهیم. وقتی p همهٔ نقاط U را می‌پیماید، یک برش dx_i از کلاف کتانژانت روی U به دست می‌آید زیرا $U \xrightarrow{dx_i} U \times \mathbb{C}^{n^*}$ نگاشتی است منظم و به ازای $p \in U$ معرف تابعک خطی $T_pX = \mathbb{C}^n \xrightarrow{d_p x_i} \mathbb{C}$ است. چون این تابعکهای خطی یک پایه برای $(T_pX)^*$ تشکیل می‌دهند، هر برش کلاف کتانژانت را می‌توان، به طور موضعی بر U، به صورت

$$f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

نوشت که $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$ها توابعی منظم هستند و dx_i بر هر بردار λ از فضای مماس در p توسط $d_p(x_i)(\lambda)$ عمل می‌کند. در هندسه‌های جبری، دیفرانسیل و مختلط، صورتهای دیفرانسیل بیانهای موضعی مشابهی دارند. f_iها در هندسهٔ جبری، توابعی منظم (چندجمله‌یی)، در هندسهٔ مختلط، توابعی تمامریخت، و در هندسهٔ دیفرانسیل، توابعی هموارند.

کلاف خطی متعارف: کلافی خطی که کراراً بیش از سایر کلافها (به استثنای کلاف نمایان $\mathcal{O}_X$)، در هندسهٔ جبری با آن برخورد می‌کنیم، کلاف متعارف است. اگر X چندگونای تحویلناپذیر هموار از بعد n باشد، آنگاه کلاف خطیِ متعارف بالاترین توانِ خارجیِ کلافِ کتانژانت آن است، یعنی

$$\bigwedge^n T^* X$$

بافهٔ برشهای کلاف متعارف را با ω_X نمایش می‌دهند. مشابه مثال قبل، برشهای ω_X روی یک مجموعهٔ بازِ به قدر کافی کوچکِ U را می‌توان به صورت

$$f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

نوشت که f تابعی است منظم بر U. کلاف متعارف از این نظر اهمیت دارد که این کلاف و توانهای آن تنها کلافهای خطی بر یک چندگونای جبری هستند که به طور ذاتی تعریف شده‌اند.

تمرین ۰۱۰۴۰۸ فرض می‌کنیم $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_n} \mathbb{P}^n$ نشانیدن ورونزه $\mathbb{P}^1$ به صورت خم درجهٔ n نرمال گویای C_n در $\mathbb{P}^n$ باشد. ثابت کنید که کلاف آشکار بر C_n، بر اثر ν_n، به توان nامِ کلافِ آشکار در $\mathbb{P}^1$ پسکشی می‌شود. این مثال نشان می‌دهد که «کلاف آشکار» به نشانیدن در فضای تصویری بستگی دارد.

۵۰۸ کلافهای خطی و نگاشتهای گویا

هدف دیگر ما این است که نشان دهیم چگونه کلافهای خطی و برشهای سراسری آنها همهٔ نگاشتهای گویا از چندگوناها در $\mathbb{P}^n$ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. شناخت همهٔ راههای ممکن که یک چندگونا می‌تواند در فضاهای تصویری نگاشته شود، در حکم شناخت کاملِ همهٔ کلافهای خطی بر آن چندگوناست.

فرض می‌کنیم X یک چندگونای شبه‌تصویری و $L \xrightarrow{\pi} X$ یک کلاف خطی روی X باشد. فرض می‌کنیم مجموعهٔ $\{s_0, \ldots, s_n\}$ از برشهای مستقل خطی از فضای برداری مختلط، برشهای سراسری این کلاف را انتخاب کرده‌ایم. فضای برداری پدیدآمده توسط این برشها یک دستگاه خطی بر X نامیده می‌شود؛ اگر این فضای برداری متشکل از همهٔ برشهای سراسری L باشد، آن را یک دستگاه خطی کامل می‌نامیم. یک دستگاه خطی کامل اغلب با $|L|$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از این برشها، نگاشت گویای

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$x \longmapsto [s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$$

را تعریف می‌کنیم.

پیش از آنکه معنی این نگاشت را روشن کنیم، به ذکر مثالی می‌پردازیم.

مثال: کلاف ابرصفحه‌یی H بر $\mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم. $x_0, \ldots, x_n$ یک پایه برای برشهای سراسری آن تشکیل می‌دهند، که x_iها مختصات همگن در $\mathbb{P}^n$ هستند. دستگاه خطی (ناکامل) پدیدآمده توسط $x_0, \ldots, x_{n-1}$ را نیز در نظر می‌گیریم. نگاشت گویای وابسته به آن نگاشت

$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

$$[x_0 : \ldots : x_n] \longmapsto [x_0 : \ldots : x_{n-1}]$$

خواهند بود. این نگاشت در کلیهٔ نقاط جز نقطهٔ $p = [0 : 0 : \ldots : 0 : 1]$ تعریف شده است. چنانکه قبلاً دیده‌ایم، این نگاشت درست همان نگاشت تصویر از نقطهٔ p بر ابرصفحهٔ $\mathbb{V}(x_n) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ در $\mathbb{P}^n$ است.

حال معنی عبارت $[s_0 : \ldots : s_n]$ را که در آن s_iها برشهای یک کلاف خطی هستند، به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم. پیش از هر مطلب دیگر باید بگوییم که برشهای s_i تابع نیستند، لذا $s_i(x)$ باید طوری تعبیر شود که $(n+1)$ـتایی $[s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$ یک نقطهٔ واقعی در $\mathbb{P}^n$ باشد. با انتخاب یک نمایان‌سازی موضعی برای $L \xrightarrow{\pi} X$، در یک همسایگی x مانند U، می‌توان $\pi^{-1}(U) \subseteq L$ را با $U \times \mathbb{C}$ یکی گرفت. بدین ترتیب مجاز خواهیم بود تا برش

$$U \xrightarrow{s_i} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto s_i(x) \longmapsto (x, \tilde{s_i}(x))$$

را با تابع منظم $U \longrightarrow \mathbb{C}$ که x را به $\tilde{s_i}(x)$ می‌برد یکی بگیریم. وقتی یک $(n+1)$ـتایی را به شکل $[s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$ می‌نویسیم، در واقع منظور ما $(n+1)$ـتایی $[\tilde{s_0}(x) : \ldots : \tilde{s_n}(x)]$ از اعداد مختلط است. حال، چگونه می‌توانیم بفهمیم که این $(n+1)$ـتایی به انتخاب نمایان‌سازی موضعی ما بستگی ندارد؟ این موضوع را نمی‌دانیم، و در واقع حکم درستی نیست: انتخاب متفاوت نمایان‌سازی موضعی بردار متفاوتی ایجاد می‌کند. ولی چون نمایان‌سازیهای موضعی یک کلاف خطی با تعویض مختصات خطی سازگارند، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که با تقریب یک مضرب عددی غیرصفر، بردار $[s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$ خوشتعریف است. یعنی، اگر یک نمایان‌سازی موضعی $(n+1)$ـتایی $[\tilde{s_0}(x) : \ldots : \tilde{s_n}(x)]$ از اعداد مختلط را ایجاد کند و نمایان‌سازی موضعی دیگر $[\tilde{\tilde{s_0}}(x) : \ldots : \tilde{\tilde{s_n}}(x)]$ را، آنگاه تابع منظمی مانند λ در یک همسایگی x وجود دارد که $\lambda(x)$ عدد مختلط ناصفری بوده و برای هر i داریم

$$\tilde{s_i}(x) = \lambda(x)\tilde{\tilde{s_i}}(x)$$

یعنی

$$[\tilde{s_0} : \ldots : \tilde{s_n}] = [\tilde{\tilde{s_0}} : \ldots : \tilde{\tilde{s_n}}]$$

و نماد $[s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$ نمایش نقطهٔ خوشتعریفی در $\mathbb{P}^n$ است.

تنها مسئله‌ای که پیش می‌آید وقتی است که همهٔ برشهای s_i در نقطهٔ x صفر می‌شوند، به طوری که $[s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$، $(n+1)$ـتایی صفر می‌شود. متأسفانه، برای جلوگیری از

صفر شدن همزمان s_iها، کاری نمی‌توان کرد، و به همین دلیل است که نگاشت

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$x \longmapsto [s_0(x) : \ldots : s_n(x)]$$

تنها یک نگاشت گویاست و نه یک ریختپایی همه‌جا تعریف‌شدهٔ چندگوناها. این نگاشتِ گویا بر زیرمجموعهٔ بازِ X که مکمل مجموعهٔ صفر مشترک برشهای s_i است، تعریف شده است.

نگاشت گویای $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ به انتخاب پایهٔ $\{s_0, \ldots, s_n\}$ برای دستگاه خطی بستگی دارد، ولی خواننده به‌سرعت خواهد توانست بررسی کند که پایه‌های مختلف نگاشتهایی را ایجاد می‌کنند که می‌توانند با یک خودریختی $\mathbb{P}^n$ به همدیگر تبدیل شوند.

ساختمان فوق می‌تواند در جهت عکس صورت گیرد، هر نگاشت گویای $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ با یک دستگاه خطی از یک کلاف خطی روی X معین می‌شود. زیرا، کلاف خطی بر X پسکشیِ کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$، و برشهای s_i، پسکشیهای تابعکهای مختصاتی x_i بر $\mathbb{P}^n$ خواهند بود. اثبات این مطلب را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجموعهٔ صفر مشترک یک مجموعه از برشهای سراسری $\{s_i\}$ از یک کلاف خطی، یک زیرچندگونای بستهٔ X است، که آن را مکان پایهٔ دستگاه خطی پدید آمده توسط s_iها گوییم. مثلاً، مکان پایهٔ نگاشت تصویر مورد بحث در مثال قبل منفردهٔ $\{p\}$ است. اگر با یک دستگاه خطی کامل کار کنیم، این مجموعهٔ صفر را مکان پایهٔ کلاف خطی L گوییم. در بهترین وضعیت ممکن، مکان پایه تهی است، و نگاشت گویای حاصل یک ریختپایی است. یک همچون دستگاه خطی را آزاد از نقطهٔ پایه گویند، و کلاف خطی مربوط به آن را کلاف سراسری تولیدشده نامند. از آنجا که کلافهای خطیِ سراسری تولیدشده ریختپاییهایی از فضای تصویری معین می‌کنند، مشخص کردن کلافهایِ خطیِ سراسری تولیدشده یک زمینهٔ مهم تحقیقاتی است.

مثال: توان nـام کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^1$، یعنی $H^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ را در نظر می‌گیریم. تار روی نقطهٔ $x = [\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ییهای همگن درجهٔ n بر خط $\ell = \{(\lambda_0 t, \lambda_1 t) | t \in \mathbb{C}\}$ در $\mathbb{C}^2$ است. برای فهم این موضوع، ابتدا باید توجه کنیم که بافهٔ برشهای $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ همان حاصلضرب تانسوری nـتاییِ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$، که $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ بافهٔ برشهای کلاف ابررویه‌یی است. یادآوری می‌کنیم که برشهای سراسری $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ توسط پایهٔ $\{x_0, x_1\}$ پدید می‌آیند، یعنی، تابعکهای خطی به صورت $a_0 x_0 + a_1 x_1$ هستند. همچنین، برشهای سراسریِ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ حاصلضربهای تانسوری nتایی این تابعکها هستند، که همهٔ آنها چندجمله‌ییهای درجهٔ n دومتغیره‌اند. در نتیجه تک جمله‌ییهای x_0^n، $x_0^{n-1}x_1$، $\ldots$، x_1^n یک

پایه برای فضای برشهای سراسری توان nـام کلاف ابرصفحه‌یی تشکیل می‌دهند. مثلاً، به ازای $n = ۲$، نگاشت گویای مربوط به آن، نگاشت

$$\mathbb{P}^{۱} \dashrightarrow \mathbb{P}^{۲}$$

$$[x_{۰} : x_{۱}] \longmapsto [x_{۰}^{۲} : x_{۰}x_{۱} : x_{۱}^{۲}]$$

است که دومین نگاشت ورونزه از $\mathbb{P}^{۱}$ در $\mathbb{P}^{۲}$ است. در حالت کلی، نگاشت گویایی که توسط یک دستگاه کامل خطیِ توان nـام کلاف ابرصفحه‌یی بر یک چندگونای دلخواه X داده می‌شود، همان نگاشت ورونزهٔ ν_n است. چون برشهای $x_{۰}^{n}$ و $x_{۱}^{n}$ همزمان صفر نمی‌شوند، کلاف خطی H^n سراسری تولید شده است، و چنانکه قبلاً دیده‌ایم، نگاشت گویایی که این کلاف تعریف می‌کند یک ریختپایی همه‌جا تعریف‌شده از چندگوناهای جبری، یعنی نگاشت ورونزه است.

مثال: نشانیدن هر خم تصویری هموار در فضای تصویری سه‌بعدی که در بخش ۱.۸ ساخته شد، در این وضعیت می‌تواند بهتر فهمیده شود. فرض می‌کنیم X خم همواری در $\mathbb{P}^n$ باشد، که $n \geq ۴$ و p نقطه‌ای است در $\mathbb{P}^n$ که بر چندگونای مماس یا قاطع واقع نیست. با انتخاب n تابعک خطی $s_{۱}, \ldots, s_n$ که همزمان دقیقاً در p صفر می‌شوند، نگاشت گویای

$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-۱}$$

$$x \longmapsto [s_{۱}(x) : \ldots : s_n(x)]$$

را به دست می‌آوریم که با دستگاه خطی $\{s_{۱}, \ldots, s_n\}$ از کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ متناظر است. با تحدید به X، یک دستگاه خطی خواهیم داشت که بر X، آزاد از نقطهٔ پایه است (چون $p \notin X$)، و لذا یک ریختپاییِ

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-۱}$$

$$x \longmapsto [s_{۱}(x) : \ldots : s_n(x)]$$

را معین می‌کند. با تکرار این روش، سرانجام به یک نگاشت گویای $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{۳}$ می‌رسیم که توسط دستگاه خطی‌ که با چهار برش سراسری $s_{۰}$، $s_{۱}$، $s_{۲}$ و $s_{۳}$ از کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ پدیدآمده معین شده است و پس از تحدید به X آزاد از نقطهٔ پایه می‌شود. بنابراین نگاشت تحدید متناظر $X \longrightarrow \mathbb{P}^{۳}$ یک ریختپایی است.

بحث فوق اهمیت مجموعه‌های صفر برشهای کلافهای خطی را روشن می‌کند.

تعریف: مجموعهٔ صفر یک برش سراسریِ ناصفر یک کلافِ خطی، یک مقسوم علیهِ این کلاف خطی نامیده می‌شود.

با تثبیت یک نمایان‌سازی موضعی، یک برش از یک کلاف خطی را می‌توان از لحاظ موضعی با یک تابع منظم بر چندگونا یکی گرفت. بنابراین هر مقسوم علیه یک کلاف خطی، به طور موضعی، با یک معادلهٔ تنها تعریف می‌شود، یعنی، موضعاً اصلی است، و در نتیجه متمم بعد آن در چندگونای فراگیر برابر یک است. البته دو برش سراسری ناصفر مختلف از یک کلاف خطی، معمولاً مجموعه‌های صفر متفاوت خواهند داشت، لذا مقسوم علیه یک کلاف خطی یکتا نیست.

مثالها:

کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم. برشهای سراسری آن صورتهای خطی $a_\circ x_\circ + \cdots + a_n x_n$ هستند. لذا مقسوم علیه‌های آن، مجموعه‌های صفر این صورتهای خطی، یعنی، ابرصفحه‌ها، در $\mathbb{P}^n$ هستند. مجموعهٔ همهٔ مقسوم علیه‌های کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ با مجموعهٔ همهٔ ابرصفحه‌ها در $\mathbb{P}^n$ یکی است.

مجذور کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم. برشهای سراسری آن صورتهای درجه دوم $\sum a_{ij} x_i x_j$ هستند. لذا مقسوم علیه‌های آن، مجموعه‌های صفر این صورتها، یعنی ابررویه‌های درجه دوم در $\mathbb{P}^n$ هستند. مثلاً، خاطرنشان می‌کنیم که مقسوم علیه وابسته به برش $x_\circ^۲$ را باید به عنوان «ابرصفحهٔ مضاعفِ» $۲H$ در نظر گرفت، که H ابرصفحهٔ $x_\circ = \circ$ است.

چنانکه مثال اخیر نشان می‌دهد، یک مقسوم علیه را در واقع باید به صورت یک مجموعهٔ صفر با بستایی در نظر گرفت که می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی صوری از زیرچندگوناهای تحویلناپذیر از متمم بعد یک و با ضرایب صحیح نشان داد. مثلاً، توان چهارم کلاف ابرصفحه‌یی بر $\mathbb{P}^n$ را در نظر می‌گیریم، که برشهای سراسری آن صورتهای همگن درجهٔ چهار از $n + ۱$ متغیر هستند. مقسوم علیه‌های وابسته به آن ابررویه‌های تحویلناپذیر درجهٔ چهار در $\mathbb{P}^n$ هستند ولی مجموعه‌های صفر چندجمله‌ییهایی مانند $F_۳ x_\circ$، که $F_۳$ یک چندجمله‌یی درجهٔ سوم تحویلناپذیر است، نیز مقسوم علیه‌اند. مجموعهٔ صفر $F_۳ x_\circ$ اجتماع ابررویهٔ درجه سوم تحویلناپذیر C است که توسط $F_۳$ تعریف شده و ابرصفحهٔ H که توسط $x_\circ$ تعریف شده است. این مقسوم علیه را می‌توان با نماد جمعی به صورت $C + H$ نوشت. همچنین، مجموعهٔ صفرِ برشِ $x_\circ^۲ x_۱^۲$ را می‌توان به صورت $۲H + ۲H'$ نوشت که H و H'، به ترتیب، ابرصفحه‌هایی هستند که توسط $x_\circ = \circ$ و $x_۱ = \circ$ تعریف شده‌اند.

تعریف مقسوم علیه‌های وابسته به کلافهای خطی که برشهای سراسری ندارند، با در نظر گرفتن «صفرها و قطبهای یک برش گویا» امکانپذیر است. مثلاً، از آنجا که کلاف آشکار بر $\mathbb{P}^n$ دوگان کلاف

ابرصفحه‌یی است، می‌توان استدلال کرد که مقسوم علیه‌های آن باید به صورت H– فرض شوند، که H ابرصفحه‌یی در $\mathbb{P}^n$ است. در نوشته‌های قدیمی‌تر، این مقسوم علیه‌ها «مقسوم علیه‌های مجازی» نامگذاری شده‌اند.

اگر یک مقسوم علیه از یک کلاف خطی داده شده باشد، می‌توان خود کلاف خطی را، با تقریب یکریختی، بازسازی کرد. دو مقسوم علیه به طور خطی هم‌ارزند اگر وابسته به یک کلاف خطی باشند، و ردهٔ هم‌ارزی همهٔ مقسوم علیه‌های وابسته به یک کلاف خطی معین ردهٔ مقسوم علیه یا ردهٔ چرنِ مربوط به آن کلاف خطی نامیده می‌شود. بنابراین، نظریهٔ کلافهای خطی (با تقریب یکریختی) با نظریهٔ مقسوم علیه‌ها (با تقریب هم‌ارزی خطی) هم‌ارز است. ردهٔ چرنِ کلافِ متعارف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و ردهٔ متعارف چندگونا نامیده شده است.

اگرچه درک کامل کلافهای خطی نیازمند فهم دقیق مقسوم علیه‌هاست، ولی ادامهٔ این مبحث مهم از اهداف این بخش نیست. برای مطالعهٔ مبانی نظریهٔ مقسوم علیه‌ها و کلافهای خطی، رجوع کنید به [۳۷، فصل III، بخش ۱] یا [۲۰، فصل II، بخش ۷].

تمرین ۸.۵.۱ فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^2$ یک خم درجهٔ سوم تصویری هموار و H کلاف ابرصفحه‌یی بر X باشد. نشان دهید که هر مجموعهٔ متشکل از سه نقطهٔ همخط بر X یک مقسوم علیه وابسته به H را معین می‌کند. عکس این موضوع تا چه اندازه درست است؟

تمرین ۸.۵.۲ فرض می‌کنیم خم درجه سوم تصویری هموار $X \subset \mathbb{P}^2$ با معادله‌ای به صورت $zy^2 = f(x, z)$ داده شده است که f یک چندجمله‌یی همگن درجهٔ سوم از x و z است. نشان دهید که نگاشت $X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$ به صورت $[x : y : z] \longmapsto [x : z]$ یک ریختپایی است و یک پوشش دو‌ـبه‌ـیک از $\mathbb{P}^1$ است مگر در سه نقطه از $\mathbb{P}^1$ (که نقاط انشعاب f نامیده می‌شوند). دستگاه خطی که این نگاشت را مشخص می‌کند، چیست؟

تمرین ۸.۵.۳ فرض می‌کنیم $X \subset \mathbb{P}^n$ یک چندگونای تصویری تحویلناپذیر است. مقسوم علیه‌های وابسته به کلاف ابرصفحه‌یی بر X را شرح دهید.

۸.۶ کلافهای خطی پردامنه

کلافهای خطی نگاشتهای گویا را بر فضای تصویری معین می‌کنند و کلافهای خطیِ پردامنه نشانیدنها در فضای تصویری را. فرض می‌کنیم X یک چندگونای تصویری است.

تعریف: کلاف خطی $L \longrightarrow X$ را پردامنه گویند اگر نگاشت گویایی که با دستگاه خطی کامل $|L|$، $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$، معین می‌شود، یک ریختپایی همه‌جا تعریف‌شده و یک یکریختی بر نگارهٔ خود باشد.

فرض می‌کنیم $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ نشانیدن X در فضایی تصویری باشد که توسط پایهٔ $s_\circ, \ldots, s_n$ از برشهای سراسری یک کلاف خطی L بر X تعیین شده است. در این ریختپایی، برشهای s_i به توابع مختصاتی x_i تبدیل می‌شوند. بنابراین، پس از نشانیدن X در $\mathbb{P}^n$ با این شیوه، کلاف خطی L به صورت کلاف ابرصفحه‌یی بر $X \subset \mathbb{P}^n$ در می‌آید. لذا کلاف پردامنه را می‌توان کلافی تصورکرد که برای یک نشانیدن X در فضای تصویری، به صورت کلاف ابرصفحه‌یی بر X درمی‌آید. اصطلاح «پردامنه» مؤید این است که کلاف خطی برشهای سراسری خیلی زیادی دارد. یادآوری می‌کنیم که برای آنکه نگاشت داده‌شده توسط $|L|$ یک ریختپایی همه‌جا تعریف‌شده باشد، کلاف خطی L باید سراسری تولید شده باشد ــ L باید پذیرای برشهای سراسری کافی باشد تا اینکه برای هر نقطه از X، یک برش سراسری L وجود داشته باشد که در آن نقطه صفر نشود. لیکن حتی در این حالت ریختپایی حاصل معمولاً یک یکریختی بر نگارهٔ خود نیست. حتی یک‌ـبه‌ـیک هم نیست. برای آنکه نگاشت داده‌شده توسط $|L|$ یک‌ـبه‌ـیک باشد، برشهای باز هم بیشتری مورد نیاز است: برای هر دو نقطه از X یک برش سراسری از L باید باشد که در یکی از دو نقطه صفر باشد ولی در نقطهٔ دیگر صفر نباشد (L باید «نقاط را از هم جدا کند»). ولی یک کلاف خطیِ پردامنه باز هم برشهای سراسری بیشتری لازم دارد، زیرا هر ریختپایی یک‌ـبه‌ـیک لزوماً یک نشانیدن نیست؛ مثال ارائه‌شده در بخش ۵.۲ را ببینید. برای پردامنه بودن، کلاف خطی باید «بردارهای مماس را نیز از هم جدا کند».

مثال: توانهای مثبت کلاف ابرصفحه‌یی بر یک چندگونای تصویری کلافهای خطی پردامنه هستند. زیرا نگاشتهایی که این توانها معین می‌کنند نگاشتهای ورونزه هستند، که در بخش ۱.۵ ثابت کرده‌ایم هر نگاشت ورونزه یک نشانیدن است.

از مثال اخیر نتیجه می‌شود که اگر L یک کلاف خطی پردامنه بر X باشد، هر توان مثبت L نیز پردامنه است. با این حال، کلافهای خطی ناپردامنه‌ای مانند L وجود دارند با این ویژگی که توانی از آن، L^n، پردامنه است؛ مثالی ا ز این مورد را در تمرینها خواهیم آورد. هر کلاف خطی با این ویژگی که توان مثبتی از آن پردامنه باشد، کلاف خطی دامنه‌دار نامیده می‌شود.

هر کلاف خطی دامنه‌دارِ L، این ویژگی مهم را دارد که: برای هر کلاف خطی داده‌شدهٔ M، کلاف $M \otimes L^n$، به ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ پردامنه است. یکی از زمینه‌های تحقیقاتی فعال بررسی این مطلب است که برای تأمین منظور فوق، «به قدر کافی بزرگ» چه قدر بزرگ است، به‌ویژه در مورد آنچه که کلافهای الحاقی نامیده می‌شوند، یعنی کلافهای $\omega \otimes L^n$، که نقشی کلیدی در مسائل رده‌بندی ایفا می‌کنند. به‌ویژه، جالب‌تر از همه پیداکردن یک عدد یکنواخت N است که فقط به X بستگی داشته باشد، و برای هر کلاف خطی دامنه‌دارِ L کارساز باشد.

مسئلهٔ حل‌نشده: فرض می‌کنیم V چندگونای تصویری هموار با کلاف متعارف ω باشد. آیا عدد یکنواختی چون N وجود دارد که برای هر $n > N$ و برای هر کلاف خطی دامنه‌دار L بر V، کلاف $L^n \otimes \omega$ پردامنه باشد؟ بهترین مقدار ممکن این N کدام است؟

حدسیهٔ فوجیتا پیش‌بینی می‌کند که در حالت کلی، بهترین مقدار ممکن برای N عدد $\dim V + ۲$ است. در مورد خمها، درستی حدسیه از قضیهٔ ریمان-رُخ نتیجه می‌شود، و در مورد رویه‌های مختلط، درستی آن توسط ریدر ثابت شده است. پیشرفت کمی در حالت خمینه‌های سه‌بعدی حاصل شده است. این مسئله و سؤالات مربوط به آن، مانند یافتن کرانهایی که $L^n \otimes \omega$ سراسری تولید شده باشد، امروزه، محققان متعددی را به خود مشغول داشته است. برای ملاحظهٔ مروری کامل بر پیشرفتهای اخیر در این مورد رجوع کنید به [۲۹].

نگاشت گویای وابسته به کلاف خطی متعارف، نگاشت متعارف نام دارد. کلاف خطی متعارف و توانهای آن تنها کلافهای خطی ذاتی روی یک چندگونای جبری هستند، و لذا تنها نگاشتهای ذاتی در فضای تصویری را در اختیار ما قرار می‌دهند. یک روش خوب برای مقایسهٔ دو چندگونا این است که آنها را با استفاده از نگاشتهای متعارف به فضای تصویری بنگاریم و سپس نگاره‌ها را با هم مقایسه کنیم. به‌ویژه دانستن اینکه کلاف خطی متعارف ــ یا توان مشخصی از آن ــ پردامنه است یا نه، مفید است. مثلاً، این موضوع در رده‌بندی خمهای جبری سودمند است.

فرض می‌کنیم X یک خم تصویری هموار باشد و کلاف خطی متعارف ω_X بر X متشکل از یک‌-صورتهای دیفرانسیل بر X را در نظر می‌گیریم. نظریهٔ هاج می‌گوید که بعد فضای برشهای سراسری کلاف خطی متعارف ω_X برابر است با

$$\dim(\omega_X(X)) = X \text{گونای} = g$$

که g گونای توپولوژیک X است وقتی آن را به صورت یک رویهٔ ریمانی فشرده در نظر بگیریم (یعنی، بُعدِ $(g = H^۱(X, Q)$). لذا نگاشت متعارف به صورت

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-۱}$$

درمی‌آید.

برای خمهای با گونای صفر، می‌بینیم که ω_X اصلاً هیچ برش سراسری ناصفر ندارد، در نتیجه نگاشت متعارف تعریف نشده است.

برای خمهای با گونای یک، فضای برشهای سراسری ω_X یک‌بعدی است، لذا نگاشت متعارف $X \longrightarrow \mathbb{P}^۰$ صرفاً X را به یک نقطه فرو می‌ریزد.

برای خمهای با گونای دو یا بیشتر، نگاشت متعارف جالب‌تر است. زیرا بر هر خم X با گونای $g \geq ۲$، کلاف متعارف همواره سراسری تولید شده است (رجوع شود به [۲۰، ص ۳۴۱])، در نتیجه نگاشت متعارف

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-۱}$$

یک ریختپایی همه‌جا تعریف‌شده از چندگوناهای جبری است. حال، دو وضعیت امکانپذیر است.

- کلاف متعارف پردامنه است، که در این حالت نگاشت متعارف $X \xrightarrow{|\omega|} \mathbb{P}^{g-۱}$ یک نشانیدن روی مجموعهٔ نگارهٔ خودش است.

یا

- کلاف متعارف پردامنه نیست، که در این حالت $X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-۱}$ یک نشانیدن نیست. لیکن، این حالت استثنایی است. اگر این وضعیت پیش بیاید، مجموعهٔ نگاره با $\mathbb{P}^۱$ یکریخت خواهد بود و نگاشت به طور عام دو_به_یک خواهد بود، بدین معنی که با تعدادی متناهی نقاط استثنا، یا «نقاط انشعاب»، نگاشت دو_به_یک است. در این حالت، خم X را اَبَربیضوی گویند.

هر خم با گونای ۲، ابربیضوی است، زیرا واضح است که نگاشت متعارف $X \longrightarrow \mathbb{P}^۱$ یک نشانیدن نیست. کلی‌تر بگوییم، خمهای ابربیضوی یک زیرچندگونای $(۲g - ۱)$ بعدی در فضای پیمانه‌یی $\mathfrak{M}_g$، فضای همهٔ خمهای تصویری هموار از گونای g، تشکیل می‌دهند، که بعد آن $۳g - ۳$ است. بنابراین یک خم عام از گونای بیشتر از ۲ ناابربیضوی است، و در نتیجه کلاف متعارف آن پردامنه است. در این حالت، خم پذیرای یک نشانیدن متعارف در فضای تصویری است به طوری که کلاف ابرصفحه‌یی کلاف متعارف است.

از آنجا که نشانیدن متعارف هر خم همواره ممکن نیست، ما در جستجوی نشانیدنهای طبیعی دیگری در فضای تصویری هستیم. معلوم می‌شود که، برای هر خم از گونای بیشتر از ۲، مجذور کلاف متعارف همواره پردامنه است. لذا روشی کاملاً ذاتی برای نشانیدن هر چنین خم مجردی در فضای تصویری در دسترس داریم. کلی‌تر بگوییم، می‌توانیم به نگاشتهای متعارف چندگانه، یعنی به نگاشتهایی که توسط دستگاه خطی کامل وابسته به یک توان کلاف متعارف القا می‌شوند، نگاهی بیندازیم.

ماهیت ذاتی نگاشتهای متعارف چندگانه موجب پیدایش ویژگی مهم زیر است. فرض می‌کنیم چندگونای X با یک نشانیدن متعارف k_گانه در $\mathbb{P}^n$ نشانیده شده است. بدین معنی که شمول $X \subset \mathbb{P}^n$ توسط دستگاه خطی کامل وابسته به توان k_ام کلاف متعارف القا شده است، یا به عبارت دیگر، کلاف ابرصفحه‌یی بر X با کلاف $\omega^{\otimes k}$ یکی است. حال، اگر Y چندگونای دیگری باشد که به

طور متعارفِ kـگانه در $\mathbb{P}^n$ نشانیده شده است، X و Y یکریختاند اگر و تنها اگر هم‌ارز تصویری باشند. اثبات این مطلب چندان دشوار نیست، به شرط اینکه توجه کنیم هر یکریختی خمها لزوماً فضای برداری kـصورتهای دیفرانسیل را حفظ می‌کند. در نتیجه هر یکریختی $X \longrightarrow Y$ در واقع یک هم‌ارزی تصویری است، یعنی، صرفاً یک تعویض مختصات در فضای تصویری فراگیر $\mathbb{P}^n$ است.

از این دیدگاه، می‌توان به این تصور که چگونه مامفرد فضاهای مدولی معروف خود را بنا کرده دست یافت. مثلاً ، گونای معین $g \geq ۳$ را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم خلاصهٔ فکر بناکردن $\mathfrak{M}_\mathfrak{g}$ را بیان کنیم. در این حالت، مجذور کلاف متعارف هر خم هموار از گونای g پردامنه است. قضیهٔ کلاسیک ریمان‌ـرُخ دستوری است برای محاسبهٔ فضای برشهای سراسری هر کلاف خطی بر هر خم هموار (رجوع شود به [۲۰، فصل IV، بخش ۱])؛ و در اینجا می‌توانیم با استفاده از آن نشان دهیم که بعد فضای برشهای سراسریِ مجذور کلاف متعارف $۳g - ۳$ است. بنابراین، هر خم هموار از گونای $g \geq ۳$ از راه نگاشتِ به اصطلاح متعارف دوگانه در $\mathbb{P}^{۳g-۴}$ نشانیده می‌شود.

حال، مجدداً با به کاربردن قضیهٔ ریمان‌ـرُخ، می‌توان چندجمله‌یی هیلبرت چنین خمی را در $\mathbb{P}^{۳g-۴}$ محاسبه کرد و نتیجه گرفت که $\mathbb{P}(n) = (۴g - ۴)n - g + ۱$. بنابراین هر خمِ هموار از گونای g، توسط نقطه‌ای در طرحِ هیلبرتِ مربوط به خمهای هموارِ واقع در $\mathbb{P}^{۳g-۴}$ با چندجمله‌یی هیلبرتِ P، نمایش داده می‌شود. به عکس می‌توان نشان داد که هر خم هموار در $\mathbb{P}^{۳g-۴}$ با چندجمله‌یی هیلبرت P خمی است از گونای g. به علاوه، چون این خمها به طور متعارف دوگانه نشانیده شده‌اند، هر دو خم از این نوع یکریخت‌اند اگر و تنها اگر هم‌ارز تصویری باشند. گروه $\mathbf{PGL}(۳g - ۳)$ متشکل از خودریختیهای $\mathbb{P}^{۳g-۴}$ بر طرحِ هیلبرت عمل می‌کند، و نقطهٔ نمایش‌دهندهٔ یک خم X را به خمهای هم‌ارز تصویری (یکریخت) آن می‌برد. به عبارت دیگر، رده‌های یکریختی خمهای هموار از گونای g را می‌توان به صورت مدارهای عمل طبیعی $\mathbf{PGL}(۳g - ۳)$ بر طرحِ هیلبرتِ مربوط به خمهای هموار نشانیده‌شده به طور متعارف دوگانه از گونای g تعبیر کرد. به بیانی دیگر، خارج قسمت طرحِ هیلبرت تحت عمل $\mathbf{PGL}(۳g - ۳)$ باید فضای پارامتر خمهای هموار از گونای g باشد. تنها مشکل باقیمانده تجهیز این خارج قسمت به ساختار یک چندگونای جبری خواهد بود. برای حل این مسئلهٔ دشوار، مامفرد روشی را برای تعریف خارج قسمت در هندسهٔ جبری ابداع کرده، که آن را نظریه ناوردای هندسی (یا «GIT») نام نهاده و از این روش برای بنا کردن فضاهای پیمانه‌یی $\mathfrak{m}_\mathfrak{g}$ استفاده کرده است [۱۶]. آنچه معلوم می‌شود این است که برای پیشبرد مؤثر این برنامه، در نظر گرفتن خمهای نشانیده‌شده به طور متعارف دوگانه کافی نیست ــ بلکه باید خمهای نشانیده‌شده به طور متعارف kـگانه برای kای بسیار بزرگ را مدنظر قرار داد ــ ولی همان روشها کارساز خواهند بود.

بحث فوق تنها نمونهٔ بسیار کوچکی است از اندیشه‌های پربار دربارهٔ چند و چون سودمندی کلافهای خطی و به‌ویژه، کلاف خطی متعارف، در درک چندگوناهای جبری. تک‌نگاشت لازارسفلد [۳۰] منبع خوبی است برای شروع به مطالعهٔ بیشتر در مبحث دستگاههای خطی، در عین حال، کتاب اخیر هریس شرح کامل‌تری از ساختن طرحهای هیلبرت و فضاهای پیمانه‌ای به ما می‌دهد [۱۸]. یک شرح مقدماتی از قضیه ریمان-رُخ را می‌توان درکتاب فولتن [۱۴] مطالعه کرد. نظیر بقیهٔ کتاب حاضر، توضیحات این بخش نیز صرفاً به منظور معرفی ریاضیات عمیق و زیبای هندسهٔ جبری است.

تمرین ۰۱۰۶۰۸ ثابت کنید خمهای نشانیده‌شده به طور متعارف kـگانه یکریخت‌اند اگر و تنها اگر توسط یک خودریختی تصویری (یعنی توسط یک تعویض خطی مختصات) قابل تبدیل به هم باشند. راهنمایی: هر یکریختی بین خمها لزوماً کلاف متعارف را به کلاف متعارف می‌برد.

پیوست الف

بافه‌ها و چندگوناهای جبری مجرد

الف. ۱ بافه‌ها

فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. برای هر مجموعهٔ باز $U \subset X$، مجموعهٔ $\mathcal{F}(U, \mathbb{C})$ شامل همهٔ توابع $\mathbb{C}$ـمقداری بر U را در نظر می‌گیریم. این مجموعه تحت اعمال جمع و ضرب نقطه‌ای توابع به طور طبیعی یک $\mathbb{C}$ـجبر تشکیل می‌دهد.

تعریف: یک بافهٔ $\mathcal{R}$ از توابع $\mathbb{C}$ـمقداری بر X، به هر زیرمجموعهٔ باز $U \subset X$ یک زیرجبر $\mathcal{R}(U) \subset \mathcal{F}(U, \mathbb{C})$ نظیر می‌کند به طوری که این تناظر با «تحدید و چسبانیدنِ سازگار» است، یعنی،

- برای هر دو مجموعهٔ باز $U_۱ \subset U_۲ \subset X$ و $f \in \mathcal{R}(U_۲)$ تحدید f به $U_۱$ در $\mathcal{R}(U_۱)$ واقع است.

- اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوشش بازی برای مجموعهٔ باز $U \subseteq X$ باشد و $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{C})$ طوری باشد که برای هر $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{R}(U_\alpha)$، آنگاه $f \in \mathcal{R}(U)$.

توابع $f \in \mathcal{R}(U)$ برشهای بافهٔ $\mathcal{R}$ روی مجموعهٔ باز $U \subset X$ نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{R}$ بافه‌ای از توابع $\mathbb{C}$ـمقداری باشد و $f \in \mathcal{R}(U_۱ \cup U_۲)$، آنگاه می‌بینیم که $f|_{U_۱}$ و

$f|_{U_2}$ تحدید واحدی بر $U_1 \cap U_2$ دارند، که همان $f|_{U_1\cap U_2}$ است. به‌عکس، اگر $h \in \mathcal{R}(U_1)$ و $g \in \mathcal{R}(U_2)$ چنان باشند که $h|_{U_1\cap U_2} = g|_{U_1\cap U_2}$، آنگاه نگاشت $f \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2, \mathbb{C})$ که به صورت

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{اگر } x \in U_1، \\ g(x) & \text{اگر } x \in U_2، \end{cases}$$

داده می‌شود خوشتعریف است. روشن است که $f|_{U_1} = h$ و $f|_{U_2} = g$. در نتیجه طبق ویژگی دوم بافه‌ها، $f \in \mathcal{R}(U_1 \cup U_2)$. در این صورت گوییم که h و g به همدیگر چسبانیده شده‌اند و f حاصل آنهاست.

به همین طریق، می‌توان بافهٔ توابع $\mathbb{R}$ـمقداری، یا بافهٔ توابعی را که مقادیر آنها در هر حلقه، یا حتی در هر مجموعه است تعریف کرد.

مثالهایی از بافه‌های توابع

- توابع منظم بر یک چندگونای شبه‌تصویری V یک بافهٔ $\mathcal{O}_V$ از توابع $\mathbb{C}$ـمقداری تشکیل می‌دهند. این بافه برای هر مجموعهٔ باز $U \subset V$، $\mathbb{C}$ـجبر $\mathcal{O}_V(U)$ متشکل از توابع منظم بر U را مربوط می‌کند.

- توابع $\mathbb{R}$ـمقداری پیوسته بر یک فضای توپولوژیک، یک بافه از توابع $\mathbb{R}$ـمقداری تشکیل می‌دهند.

- توابع C^∞ بر یک خمینهٔ هموار یک بافه از توابع $\mathbb{R}$ـمقداری تشکیل می‌دهند.

- توابع تمامریخت بر یک رویهٔ ریمانی یک بافه از توابع $\mathbb{C}$ـمقداری تشکیل می‌دهند.

تعریف: بافهٔ $\mathcal{O}_V$، از توابع منظم بر چندگونای شبه‌تصویری V را بافهٔ ساختاری چندگونا گویند.

بافهٔ ساختاری $\mathcal{O}_V$، چندگونای V را، حتی اگر اطلاعات محدودی دربارهٔ $\mathcal{O}_V$ داشته باشیم، (با تقریب یکریختی) معین می‌کند. مثلاً، در بخش ۳.۴، ثابت کردیم که برای یک چندگونای آفین، حلقهٔ برشهای سراسریِ $\mathcal{O}_V$ حلقهٔ مختصاتی $\mathbb{C}[V]$ است، که آن نیز چندگونای آفین را با تقریب یکریختی معین می‌کند. به عبارت دیگر، یک چندگونای آفین با برشهای سراسریِ بافهٔ ساختاری خود معین می‌شود. واقعیت کمی دشوارتر این است که هر چندگونای شبه‌تصویری با حلقه‌های برشهای بافهٔ ساختاری بر هر پوشش آفین، همراه با نگاشتهای تحدید $\mathcal{O}_V(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U_i \cap U_j)$ معین می‌شود که چگونگی به‌هم چسبانیدن این قطعه‌های آفین را بیان می‌کند. بعداً در این پیوست چندگونای مجرد را تعریف خواهیم کرد که با اطلاعات جزئی از بافهٔ ساختاری‌اش، به همین طریق

معین می‌شود. این وضعیت برای هندسهٔ جبری یکتاست: یک خمینه با چنین اطلاعات محدودی از بافهٔ توابع پیوستهٔ (یا دیفرانسیلپذیر، یا تمامریخت مختلطِ) خود معین نمی‌شود.

برای هر زیرمجموعهٔ باز $U \subset X$، یک بافهٔ $\mathcal{R}$ یک تحدید طبیعی $\mathcal{R}|_U$ بر U دارد. برشهای $\mathcal{R}|_U$ بر هر مجموعهٔ باز $U' \subset U$ صرفاً همان برشهای $\mathcal{R}(U')$، یعنی برشهای بافهٔ اولیه بر U' است. اندکی احتیاط در این مورد ضروری است: حلقهٔ برشهای $\mathcal{R}(U)$ و بافهٔ تحدید $\mathcal{R}|_U$ دو چیز متفاوت‌اند؛ $\mathcal{R}(U)$ یک حلقه است، در حالی که $\mathcal{R}|_U$ یک بافه است (که به هر زیرمجموعهٔ باز U یک حلقه تخصیص می‌دهد). برای هر زیرمجموعهٔ بازِ V از یک چندگونای شبه‌تصویری W، بافهٔ ساختاری $\mathcal{O}_V$ با تحدید بافهٔ $\mathcal{O}_W$ به مجموعهٔ باز V برابر است.

هر فضای توپولوژیک، همراه با یک بافهٔ توابع $\mathbb{C}$ـمقداری بر آن، مثالی است از یک فضای حلقه‌یی، سرانجام برای کنترل تعریف یک طرح، درکی از فضاهای حلقه‌یی ضروری است، لذا به تعریفی از آنها می‌پردازیم.

تعریف: یک بافهٔ حلقه‌های $\mathcal{R}$، بر یک فضای توپولوژیک X به هر مجموعهٔ باز $U \subset X$ یک حلقهٔ $\mathcal{R}(U)$ نسبت می‌دهد به طوری که اصلهای موضوع زیر برقرارند:

- اگر $U_1 \subset U_2$، یک همریختی $\mathcal{R}(U_2) \longrightarrow \mathcal{R}(U_1)$ وجود دارد. این نگاشت «نگاشت تحدید از U_2 به U_1» نامیده می‌شود، و نگارهٔ هر عضو $f \in \mathcal{R}(U_2)$ تحت این نگاشت با $f|_{U_1}$ نمایش داده می‌شود.

- اگر $U_1 \subset U_2 \subset U_3$، نگاشت تحدید $\mathcal{R}(U_3) \longrightarrow \mathcal{R}(U_1)$ ترکیب نگاشتهای تحدید $\mathcal{R}(U_3) \longrightarrow \mathcal{R}(U_2) \longrightarrow \mathcal{R}(U_1)$ است.

- اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوشش بازی برای مجموعهٔ باز $U \subset X$ و $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ مجموعه‌ای از عضوهای $g_\alpha \in \mathcal{R}(U_\alpha)$ باشد به طوری که برای هر نمایه α و β داشته باشیم $g_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$، آنگاه عضو یکتای $g \in \mathcal{R}(U)$ وجود دارد به طوری که برای هر α، $g|_{U_\alpha} = g_\alpha$.

فضای توپولوژیک X همراه با یک بافهٔ حلقه‌ها بر آن یک فضای حلقه‌یی نامیده می‌شود.

حلقه‌های $\mathcal{R}(U)$ در تعریف فوق صرفاً حلقه‌های مجردند: این حلقه‌ها لزوماً حلقه‌های توابع بر مجموعهٔ U نیستند. به‌ویژه، واژهٔ «تحدید» در تعریف فوق را نباید تنها به استناد معنی آن، به مفهوم تحدید توابع تلقی کرد.

بافه‌های توابع $\mathbb{C}$ـمقداری که در نظر گرفتیم مثالهایی از بافه‌های حلقه‌ها بر فضاهای مورد ذکرند. در واقع این بافه‌ها، بافه‌های $\mathbb{C}$ـجبرها هستند، زیرا هر حلقهٔ $\mathcal{R}(U)$ در حقیقت یک $\mathbb{C}$ـجبر است. هرچند یک بافهٔ مجرد از حلقه‌ها لزوماً یک بافهٔ توابع نیست، ولی باید هر بافهٔ حلقه‌ها را

چیزی با شباهت زیاد به بافهٔ توابع تصورکرد. اصل موضوع سوم در تعریف بافهٔ حلقه‌ها ــ که اصل موضوع بافه نیز نام دارد ــ تضمین می‌کند که اعضای $\mathcal{R}(U)$ در واقع همانند توابع رفتار کنند: آنها با مقادیرشان بر هر پوشش باز U، به طور یکتا تعریف می‌شوند. بررسی این مطلب که هر بافه از توابع $\mathbb{C}$ـ مقداری یک بافهٔ حلقه‌هاست، آسان است.

به همین طریق می‌توانیم مفاهیم بافهٔ گروههای آبلی، بافهٔ مجموعه‌ها، بافهٔ جبرها، یا حتی بافه‌ای از اشیا تقریباً هر رسته‌ای را تعریف کنیم. کافی است در تعریف بالا هر جا واژهٔ «حلقه» آمده است، با واژهٔ «گروه آبلی»، «مجموعه» یا «جبر» جایگزین کنیم.

یک فضای توپولوژیک ممکن است با چند بافهٔ مختلف از حلقه‌ها یا جبرها مجهز شده باشد. مثلاً، بر $\mathbb{C}^n$ با توپولوژی اقلیدسی معمولی، نه تنها بافهٔ توابع پیوسته، بلکه بافهٔ توابع تمامریخت را نیز داریم. همچنین می‌توانیم $\mathbb{C}^n$ را با توپولوژی زاریسکی مجهز کنیم، که در این صورت بافهٔ توابع منظم را خواهیم داشت.

تعریف: فرض می‌کنیم $\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ دو بافهٔ حلقه‌ها بر فضای توپولوژیک X باشند. یک نگاشت از بافه‌های حلقه‌ها

$$\mathcal{R} \xrightarrow{G} \mathcal{S}$$

متشکل از یک نگاشت حلقه‌یی

$$\mathcal{R}(U) \xrightarrow{G(U)} \mathcal{S}(U)$$

برای هر زیرمجموعهٔ باز $U \subset X$ است، به طوری که اگر $U_۱ \subset U_۲$، نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(U_۲) & \xrightarrow{G(U_۲)} & \mathcal{S}(U_۲) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(U_۱) & \xrightarrow[G(U_۱)]{} & \mathcal{S}(U_۱) \end{array}$$

که در آن نگاشتهای عمودی، نگاشتهای تحدیدند. اگر بافه‌های حلقه‌ها بافه‌های $\mathbb{C}$ـ جبرها باشند، لازم است نگاشتها ساختار $\mathbb{C}$ـ جبری را نیز حفظ کنند، یعنی هر نگاشت

$$\mathcal{R}(U) \xrightarrow{G(U)} \mathcal{S}(U)$$

باید $\mathbb{C}$ـ خطی باشد.

صحبت از نگاشت بین بافه‌ها وقتی این بافه‌ها بر دو فضای توپولوژیک مختلف تعریف شده باشند، بی‌معنی است. با این حال، برای نگاشت پیوستهٔ $X \longrightarrow Y$ از فضاهای توپولوژیک، روشی برای تعریف یک بافهٔ حلقه‌ها بر Y از روی هر بافهٔ حلقه‌ها بر X وجود دارد.

تعریف: برای بافهٔ داده‌شدهٔ $\mathcal{R}$ بر فضای توپولوژیک X و نگاشت پیوستهٔ $X \xrightarrow{f} Y$ از فضاهای توپولوژیک، پیشکشیِ $\mathcal{R}$، یعنی $f_*\mathcal{R}$، بافه‌ای است بر Y که به صورت ذیل تعریف می‌شود. برای هر مجموعهٔ باز $U \subset Y$،

$$f_*\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(f^{-1}(U))$$

اگر $\mathcal{R}$ یک بافهٔ حلقه‌ها بر X باشد، $f_*\mathcal{R}$ یک بافهٔ حلقه‌ها بر Y خواهد بود.

تعریف: منظور از یک نگاشت فضاهای حلقه‌یی $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ یک زوج $(F, F^{\#})$ متشکل از نگاشت پیوستهٔ فضاهای توپولوژیک $X \xrightarrow{F} Y$ و نگاشت بافه‌های حلقه‌ها بر Y است:

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{F^{\#}} F_*\mathcal{O}_X$$

مثال: فرض می‌کنیم $V \xrightarrow{F} W$ نگاشتی از چندگوناهای جبری شبه‌تصویری باشد. یک نگاشت القایی طبیعی از فضاهای حلقه‌یی

$$(V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$$

وجود دارد که $\mathcal{O}_V$ و $\mathcal{O}_W$، به ترتیب، بافه‌های توابع منظم بر V و W هستند. نگاشت از فضاهای توپولوژیک همان F است، و نگاشت $\mathcal{O}_W \longrightarrow F_*\mathcal{O}_V$ از بافه‌های حلقه‌ها، به صورت پسکشی تعریف می‌شود: برای هر مجموعهٔ باز $U \subset W$،

$$\mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(F^{-1}(U))$$

$$g \longmapsto F^{\#}(g) = g \circ F$$

همان گونه که مثال بعد نشان می‌دهد، این فکر در حالت کلی قابل اجراست.

مثال: اگر $X \xrightarrow{F} Y$ نگاشتی پیوسته از فضاهای توپولوژیک باشد، همواره یک ریختپایی از فضاهای حلقه‌یی

$$(X, \mathcal{F}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$$

وجود دارد که در آن $\mathcal{F}_X$ بافهٔ توابع $\mathbb{C}$ـ‌مقداری بر X و $\mathcal{F}_Y$ بافهٔ توابع $\mathbb{C}$ـ‌مقداری بر Y است. در واقع، نگاشت بافه‌های $\mathcal{F}_Y \longrightarrow F_*\mathcal{F}_X$ به صورت پسکششیِ

$$\mathcal{F}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{F}_X(F^{-1}(U))$$

$$g \longmapsto g \circ F$$

تعریف می‌شود. اگر $\mathcal{F}_X$ و $\mathcal{F}_Y$ بافهٔ توابع $\mathbb{C}$ـ‌مقداری پیوسته به ترتیب بر X و Y فرض شوند، آنگاه $(Y, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{F}_X)$ یک ریختپایی از این فضاهای حلقه‌یی خواهد بود. کلی‌تر بگوییم، اگر X و Y به وسیلهٔ بافه‌های توابع $\mathcal{O}_X$ و $\mathcal{O}_Y$ ساختار فضای حلقه‌یی ظریف‌تری پیدا کرده باشند، غالباً امکان تعریف نگاشتی از فضاهای حلقه‌یی به همین روش وجود دارد. همواره یک نگاشت پسکششی

$$\mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{F}_X(F^{-1}(U))$$

وجود دارد که $\mathcal{F}_X$ بافهٔ همهٔ توابع $\mathbb{C}$ـ‌مقداری بر X است. تنها باید قرار داشتن پسکششیِ یک تابع در $\mathcal{O}_Y(U)$ را در زیرحلقهٔ توابع $\mathcal{O}_X(F^{-1}(U)) \subseteq \mathcal{F}_X(F^{-1}(U))$ بررسی کرد. مثلاً، اگر X و Y خمینه‌های هموار و $\mathcal{O}_X$ و $\mathcal{O}_Y$ بافه‌های متناظر از توابع هموار بر X و Y باشند، آنگاه هر نگاشت هموار $X \xrightarrow{F} Y$ یک ریختپایی از فضاهای حلقه‌یی

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(F,F^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

القا می‌کند. در اینجا، $F^\#$ به کمک F، به طور طبیعی، کاملاً معین می‌شود. در مطالعهٔ فضاهای حلقه‌یی مجرد، که بافهٔ حلقه‌ها لزوماً بافه‌ای از توابع بر X نیست، گاهی مطلب پیچیده‌تر می‌شود. علی‌رغم این موضوع، در راستای پی‌ریزی مبانی نظریهٔ طرحها، در نظر گرفتن این دیدگاه مجردتر ضروری است (مثلاً رجوع شود به [۲۰، فصل II، بخشهای ۱ و ۲]).

تعریف: یک ریختپایی از فضاهای حلقه‌یی $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(F,F^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ یک یکریختی است هرگاه وارون داشته باشد. به بیان دقیق‌تر، می‌خواهیم یک ریختپایی فضاهای حلقه‌یی

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{(G,G^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$$

وجود داشته باشد به طوری که $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} X$ نگاشت همانی بر X و

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{G^\#} G_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{F^\#} (G \circ F)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$$

نگاشت همانی بافه‌ها باشد، و همچنین، $Y \xrightarrow{G} X \xrightarrow{F} Y$ و

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{F^\#} F_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{G^\#} (F \circ G)_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y$$

نگاشتهای همانی باشند.

کار با ریختپاییهای فضاهای حلقه‌یی نمادگذاریِ نسبتاً زیادی را می‌طلبد، لیکن واقعاً طبیعی است و با تمرین کافی آسانتر می‌شود. یک شرح مفصل برای مبتدیانی که با این نمادگذاری دست و پنجه نرم می‌کنند، در پایگاه اینترنتی

http://www.math.lsa.umich.edu/~ kesmith/inverse.ps

در دسترس است.

الف. ۲ چندگوناهای جبری مجرد

یک چندگونای جبری مجرد فضایی است توپولوژیک که پوششی باز از مجموعه‌های همسانریخت با چندگوناهای جبری آفین—محتملاً در فضاهای آفین فراگیر از ابعاد مختلف—دارد که توسط توابع عبور که ریختپاییهایی از چندگوناهای جبری آفین هستند، به هم چسبانیده شده‌اند. آسانترین راه برای تدقیق این بیان، استفاده از بافهٔ توابع منظمِ چندگونای آفین است.

تعریف: یک چندگونای جبری مجرد مختلط فضایی است حلقه‌یی مثل $(V, \mathcal{O}_V)$ که پوششی باز مانند $V = \cup U_\lambda$ دارد، که هر $(U_\lambda, \mathcal{O}_V|_{U_\lambda})$ به صورت یک فضای حلقه‌یی، با یک چندگونای جبری آفین $(W_\lambda, \mathcal{O}_{W_\lambda})$ مجهز به بافهٔ ساختار خود $\mathcal{O}_{W_\lambda}$، یکریخت است.

واضح‌تر بگوییم، هر U_λ پذیرای یک همسانریختی $U_\lambda \xrightarrow{H_\lambda} W_\lambda$ با یک چندگونای آفین W_λ است به طوری که نگاشت پسکشی $H_\lambda^\#$، یک یکریختی به صورت

$$\mathcal{O}_{W_\lambda} \xrightarrow{H_\lambda^\#} H_{\lambda *}\mathcal{O}_{U_\lambda}$$

از بافه‌های توابع $\mathbb{C}$ـمقداری بر W_λ القا می‌کند. یعنی، برای هر مجموعهٔ باز $U \subset W_\lambda$، نگاشت

$$\mathcal{O}_{W_\lambda}(U) \xrightarrow{H_\lambda^\#(U)} H_{\lambda *}\mathcal{O}_{U_\lambda}(U) = \mathcal{O}_{U_\lambda}(H_\lambda^{-1}(U))$$

$$g \longmapsto g \circ H_\lambda$$

یک یکریختی از $\mathbb{C}$ـجبرهاست. البته، در این تعریف می‌توان هر میدان جبری بستهٔ k را جایگزین $\mathbb{C}$ کرد که تعریف یک چندگونای جبری مجرد بر k را خواهیم داشت.

بافهٔ $\mathcal{O}_V$ را بافهٔ ساختار چندگونای V می‌نامند، و برشهای آن روی یک مجموعهٔ باز U را توابع منظم روی U می‌گویند. تعریف یک چندگونای مجرد مشابه تعریف اشیای هندسیِ مجرد در رسته‌های دیگر است. مثلاً، یک خمینهٔ هموار را می‌توان به صورت یک فضای حلقه‌یی $(M, \mathcal{C}^\infty)$ تعریف کرد که پوششی باز مانند $\cup U_\lambda$ دارد به طوری که $(U_\lambda, \mathcal{C}^\infty|_{U_\lambda})$ به عنوان یک فضای حلقه‌یی با $(B, \mathcal{C}^\infty_B)$ یکریخت است، که $B \subset \mathbb{R}^n$ یک گوی باز و $\mathcal{C}^\infty_B$ بافهٔ توابع هموار بر B است. به همین طریق، یک خمینهٔ مختلط را می‌توان به صورت یک فضای حلقه‌یی $(M, \mathcal{H})$ تعریف کرد که پوششی باز مانند $\cup U_\lambda$ دارد به طوری که هر $(U_\lambda, \mathcal{H}|_{U_\lambda})$ به عنوان یک فضای حلقه‌یی با $(B, \mathcal{H}_B)$ یکریخت است، که $B \subset \mathbb{C}^n$ یک گوی باز مختلط است و $\mathcal{H}_B$ بافهٔ توابع تمامریخت بر B است.

یک ریختپایی از چندگوناهای مجرد $(V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ صرفاً یک ریختپایی بین فضاهای حلقه‌یی متناظر است که ساختار $\mathbb{C}$ـجبر را حفظ کند. یعنی، یک ریختپایی فضاهای $\mathbb{C}$ـجبری باشد، دقیق‌تر بگوییم، برای هر مجموعهٔ باز U از W، نگاشت متناظر $\mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(F^{-1}(U))$ یک همریختی $\mathbb{C}$ـجبری باشد نه فقط یک همریختی حلقه‌یی. شیوهٔ تعریف یکریختی چندگوناهای مجرد نیز روشن است.

چندگوناهای شبه‌تصویری، همراه با بافه‌های ساختاریشان، مثالهایی از چندگوناهای جبری مجرد هستند. این چندگوناها ردهٔ بزرگی از اشیای جالب را تشکیل می‌دهند، و تنها چندگوناهای مجرد هستند که توسط بسیاری از هندسه جبری‌دانان مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. چندگوناهای جبری مجرد به طور طبیعی در مطالعهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری (یا حتی آفین یا تصویری) مطرح می‌شوند. مثلاً، به صورت فضاهای پیمانه‌یی چندگوناهای شبه‌تصویری، مانند فضای پیمانه‌یی $\mathfrak{M}_g$ خمهای تصویری ازگونای g ظاهر می‌شوند که در بخش ۶.۷ و الف.۱ به آنها اشاره شده است. در این مورد ممکن است دانستن اینکه چندگونایی که به طور مجرد تعریف شده، در واقع شبه‌تصویری هست یا نه، مفید باشد، ولی اغلب شبه‌تصویری بودن یا نبودن چندگونای جبری مجرد چندان اهمیتی ندارد.

معمولاً، یک ویژگی دیگر، به نام ویژگی تفکیک‌پذیری، به عنوان بخشی از تعریف چندگونای جبری مجرد ضمیمه می‌شود. چندگونای جبری مجرد مختلط که به صورت فوق تعریف شده، وقتی تفکیک‌پذیر گفته می‌شود که نسبت به توپولوژی اقلیدسی هاوسدورف باشد. برای چندگوناهایی که روی میدانهایی غیر از $\mathbb{C}$ تعریف شده‌اند، تعریف تفکیک‌پذیری تا حدی تکنیکی‌تر است (رجوع شود به [۲۰، ص ۹۵]). همهٔ چندگوناهای شبه‌تصویری تفکیک‌پذیرند. مثالی از یک چندگونای

تفکیک‌ناپذیر خطی است با مبدأ دوگانه، که به «خط چشم مگسی» نیز معروف است: دو رونوشت از $\mathbb{A}^1$ که در همهٔ نقاط یکی گرفته شده‌اند جز در نقطهٔ ۰. رجوع شود به [۳۷، فصل V، ص ۴۴].

چنانکه دیده‌ایم، طیفِ (یا حداقل مجموعهٔ نقاط بسته در طیفِ) یک $\mathbb{C}$ـجبر تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد را می‌توان با یک چندگونای جبری آفین یکی گرفت. چندگوناهای مجرد صرفاً فضاهای حلقه‌یی هستند که پوششی باز دارند که حلقه‌های وابستهٔ آنها $\mathcal{R}(U)$ها $\mathbb{C}$ـجبرهای تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد هستند. با صرف‌نظر از این شرایط روی حلقه‌های $\mathcal{R}(U)$، مثلاً با مجاز شمردن $\mathcal{R}(U)$ برای داشتن عناصر پوچتوان، یا حتی حذف قید $\mathbb{C}$ـجبر بودن، به تعریف یک طرح می‌رسیم.

هر طرح یک تعمیم طبیعی از چندگونای جبری مجرد است. یک طرح به صورت یک فضای حلقه‌یی نیز تعریف می‌شود، لیکن مجموعه‌های باز پوشش آن، به جای اینکه در چندگوناهای جبری آفین قالب‌ریزی شوند، در طرحهای آفین قالب‌ریزی شده‌اند. ما پیشتر یک طرح آفین را به صورت طیف اول یک حلقهٔ R، $\operatorname{Spec}(R)$، تعریف کردیم، که به صورت یک فضای توپولوژیک با توپولوژی زاریسکی‌اش در نظر گرفته شده است. یک روش طبیعی برای تعریف یک بافهٔ حلقه‌های $\tilde{R}$ بر فضای توپولوژیک $\operatorname{Spec}(R)$ وجود دارد، به طوری که برشهای سراسری این بافه حلقهٔ R را بازسازی می‌کنند. (این کار به اندکی جبر تکنیکی نیاز دارد، لذا در اینجا از توضیح آن چشمپوشی می‌کنیم.) بنابراین تعریف کلی یک طرح را می‌توان بدین صورت بیان کرد: یک طرح یک فضای حلقه‌یی $(X, \mathcal{O}_X)$ است که پوششی باز مانند $\cup U_\lambda$ دارد به طوری که هر $(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ به عنوان یک فضای حلقه‌یی، با یک طرح آفین $\operatorname{Spec}R_\lambda$ همراه با بافهٔ طبیعی حلقه‌هایش $\tilde{R}_\lambda$، یکریخت باشد. حلقه‌های R_λ می‌توانند کاملاً اختیاری باشند: این حلقه‌ها لازم نیست حلقه‌های توابع، یا هر نوع از $\mathbb{C}$ـجبرهای تحویل‌یافتهٔ متناهی مولد باشند، آن گونه که در مورد چندگوناهای جبری بود. برای اینکه این تعریف را دقیق‌تر کنیم، به تعریف مفهوم فضای حلقه‌یی موضعی نیاز خواهیم داشت، که بدین معنی است که اگر روی همهٔ بازهای شامل یک نقطه داده‌شده بر طرح حد بگیریم، حلقهٔ حاصل، به اصطلاح، یک حلقهٔ موضعی است. به جای پرداختن به این موضوع، خواننده را به کتابهای مرجع در این زمینه ارجاع می‌دهیم.

نظریهٔ طرحها مبحثی زیباست و اساسی برای هندسهٔ جبری نوین. برای مطالعهٔ مبانی نظریهٔ طرحها، خواننده را به [۳۷، فصل V]، [۲۰، فصل II]، یا [۱۰] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] Abramovich, D. and de Jong, A. J. *Smoothness, semistability, and toroidal geometry.* J. Algebraic Geom. **6** 1997, no. 4, 789–801.

[2] Beauville, Arnaud. *Complex algebraic surfaces.* Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. Second edition. London Mathematical Society Student Texts **34**. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Biersone, Edward and Milman, Pierre D. *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximal strata of a local invariant.* Invent. Math. **128** 1997, #2, 207–302. Reviewed in Math Reviews, 98e:14010.

[4] Bogomolov, Fedor A. and Pantev, Tony G. *Weak Hironaka theorem.* Math. Res. Lett. **3** 1996, no. 3, 299–307.

[5] Cox, David and Little, John and O'Shea, Donal. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[6] Cox, David and Little, John and O'Shea, Donal. *Using Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **185**. Springer-Verlag, 1998.

[7] de Jong, A. J. *Smoothness, Semi-stability and Alterations.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **83** 1996, 51–93.

[8] Deligne, P. and Mumford, D. *The irreducibility of the space of curves of given genus.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36** 1969, 75–109.

[9] Eisenbud, David. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **150**. Springer-Verlag, 1995.

[10] Eisenbud, David and Harris, Joe. *The Geometry of Schemes.* Graduate Texts in Mathematics **197**. Springer-Verlag, 2000.

[11] Fulton, William. *Introduction to intersection theory in algebraic geometry.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **54**. American Mathematical Society, 1984.

[12] Fulton, William. *Intersection Theory.* Second Edition. Springer-Verlag, 1998.

[13] Fulton, William. *Young Tableau. With applications to representation theory and geometry.* London Mathematical Society Student Texts, **35**. Cambridge University Press, 1997.

[14] Fulton, William. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.* Notes written with the collaboration of Richard Weiss. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[15] Griffiths, Phillip and Harris, Joe. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1978.

[16] Mumford, D. and Fogarty, J. and Kirwan, F. *Geometric invariant theory.* Third edition. Springer-Verlag, 1994.

[17] Harris, Joe. *Algebraic Geometry. A First Course.* Gradute Texts in Mathematics **133**. Springer-Verlag, 1992.

[18] Harris, Joe. *An introduction to the moduli space of curves.* Mathematical Aspects of String Theory (San Diego, CA 1986), 285–312, Adv. Ser. Math. Phys. **1**, World Sci., 1987.

[19] Harris, Joe and Morrison, Ian. *Moduli of curves.* Graduate Texts in Mathematics **187**. Springer-Verlag, 1998.

[20] Hartshorne, Robin. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **52**. Springer-Verlag, 1977.

[21] Hironaka, Heisuke. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.* Ann. of Math **70** 1964, 109–203; **79** 1964, 205–326.

[22] Hilbert, David. *Über die Theorie von algebraischen Formen.* Math. Ann. **36** 1890, 473–534.

[23] Hilbert, David. *Theory of algebraic invariants.* Translated from the German and with a preface by Reinhard C. Laubenbacher. Edited and with an introduction by Bernd Sturmfels. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[24] Hoffman, Kenneth and Ray Kunze. *Linear Algebra.* Second Edition. Prentice–Hall, 1971.

[25] Kleiman, S. L. and Dan Laksov. *Schubert Calculus.* Amer. Math. Monthly **79** 1972, 1061–1082.

[26] Kollár, János. *Sharp Effective Nullstellensatz.* J. Amer. Math. Soc. **1** 1988, #4, 963–975.

[27] Kollár, János. *The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** 1987, #2, 211–273.

[28] Kollár, János. *Real Algebraic Surfaces.* Princeton University Preprint, 2000.

[29] Kollár, János. *Singularities of Pairs,* in Proceedings of the 1995 conference in Algebraic Geometry, Santa Cruz, American Mathematical Society Symposia, 1997.

[30] Lazarsfeld, Robert. *Lectures on Linear Series.* With the assistance of Guilleno Fernández del Busto. IAS/Park City Math Ser. **3**, Complex Algebraic Geometry (Park City, UT 1993), 161–219. Amer. Math. Soc., 1997.

[31] Lipman, J. Review of *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant* by E. Bierstone and P. Milman. Review 98e:14010, Mathematical Reviews, 1998.

[32] Miranda, Rick. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **5**, 1995.

[33] Mumford, David. *Lectures on Curves on an Algebraic Surface.* With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Study **59**. Princeton University Press, 1966.

[34] Reid, Miles. *Chapters on Algebraic Surfaces.* IAS/Park Cirt Math Ser. **3**, Complex Algebraic Geometry (Park City, UT 1993), 3–159. Amer. Math. Soc., 1997.

[35] Reid, Constance. *Hilbert.* Reprint of the 1970 original. Copernicus, New York, 1996.

[36] Serre, Jean–Pierre. *Géometrie algébraique et géometrie analytique (French).* Ann. Inst. Fourier, Grenoble. **6** 1955-1956, 1–42.

[37] Shafarevich, Igor R. *Basic Algebraic Geoemtry.* First Edition. Grundlehren **213**, Springer-Verlag, 1974.

[38] Silhol, Robert. *Real algebraic surfaces.* Lecture Notes in Mathematics **1392**. Springer-Verlag, 1989.

[39] Villamayor, Orlando. *Constructiveness of Hironaka's Resolution.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **22** 1989, #1, 1–32.

واژه‌نامه

Abhyankar	آبیانکار
abstract algebraic variety	چندگونای جبری مجرد
adjoint line bundle	کلاف خطی الحاقی
affine algebraic subvariety	زیرچندگونای جبری آفین
affine algebraic variety	چندگونای جبری آفین
affine cone	مخروط آفین
affine scheme	طرح آفین
ample line bundle	کلاف خطی دامنه‌دار
anti-isomorphic	پادیکریخت
arithmetic geometry	هندسهٔ حسابی
atlas	اطلس
base locus	مکان-پایه
base-point free	آزاد از نقطه-پایه
bi-canonical map	نگاشت متعارف دوگانه
birational equivalence	هم‌ارزی دوسوگویا
blowup	فراگستری
bug-eyed line	خط‌چشم مگسی
canonical bundle	کلاف متعارف
canonical class	ردهٔ متعارف

canonical model	الگوی متعارف
change of coordinates	تعویض مختصات
Chern class	ردهٔ چرن
codimension	متمم بعد
cofinite	متمم متناهی
coherent sheaf	بافهٔ منسجم
compactification	فشرده‌سازی
complete intersection	مقطع کامل
complete linear system	دستگاه خطی کامل
complex manifold	خمینهٔ مختلط
coordinate ring	حلقهٔ مختصاتی
cotangent bundle	کلاف کتانژانت
de Jong	دِیونگ
degenerate conic curve	خم مخروطی تباهیده
Deligne	دلینی
dense point	نقطهٔ چگال
desingularization	تکین‌زدایی
determinantal variety	چندگونای دترمینانی
divisor line bundle	کلاف خطی مقسوم‌علیه
dominant map	نگاشت غالب
dual curve	خم دوگان
enumerative algebraic geometry	هندسی جبری شمارشی
equidimensional	متساوی‌البعد
flat	یکدست
fractional linear transformation	تبدیل خطی کسری
Fujita's conjecture	حدسیهٔ فوجیتا
function field	میدان تابعی
functor	تابعگون
generic linear subvariety	زیرچندگونای خطی عام

geometric invariant theory	نظریهٔ ناورداهای هندسی
global section	برش سراسری
globally generated line bundle	کلاف خطی سراسری تولیدشده
Gordan	گوردان
graph	نمودار
Grassmannian	گراسمانی
Hironaka	هیروناکا
Hodge theory	نظریهٔ هاج
homogenization	همگن‌سازی
hyperelliptic curve	خم ابربیضوی
hyperplane bundle	کلاف ابرصفحه‌یی
hyperplane section	مقطع ابرصفحه‌یی
incidence correspondence	تناظر واقع شدن
intersection number	عدد تقاطعی
j-invariant	jـناوردا
Jacobian conjecture	حدس ژاکوبی
Jacobian criterion	ملاک ژاکوبی
Kollar	کولار
Kontsevich	کنتسِویچ
local trivialization	نمایان‌سازی موضعی
locally closed set	مجموعهٔ موضعاً بسته
locally free sheaf	بافهٔ موضعاً آزاد
locally principal	موضعاً اصلی
maximal spectrum	طیف ماکسیمال
minimal model	الگوی مینیمال
moduli space	فضای پیمانه‌یی
Mori	موری
morphism	ریختپایی
multiplicity	بستایی

Mumford	مامفرد
Nagata	ناگاتا
nonzero characteristic	مشخصهٔ غیر صفر
normalization	نرمالسازی
ploricanonical map	نگاشت متعارف چندگانه
Plucker embedding	نشانیدن پلوکر
point at infinity	نقطهٔ بینهایت
power of vector bundle	توان کلاف‌برداری
Projection	نگاشت تصویر
projective morphism	ریختپایی تصویری
proper map	نگاشت اختصاصی
pullback	پَسکشی
push-forward	پیشکشی
quasi-projective variety	چندگونای شبه‌تصویری
quasicompact	شبه‌فشرده
ramification point	نقطهٔ انشعاب
rational normal curve	خم نرمال گویا
reduced ring	حلقهٔ تحویلیافته
regular morphism	ریختپایی منظم
Reider	ریِدر
restriction	تحدید
Riemann-Roch	ریمان ـ رخ
ringed space	فضای حلقه‌یی
ruled surface	رویهٔ خط‌دار
Scheme	طرح
Schubert calculus	حسابان شوبرت
secant variety	چندگونای قاطع
section	برش
Segre	سگره

separable	تفکیک‌پذیر
Serre	سِر
set-theoretic complete intersection	مقطع کامل مجموعه‌یی
sheaf	بافه
sheaf of sections	بافهٔ برشها
singleton	منفرده
singular	تکین
singular locus	مکان تکین
singularity	تکینی
smooth	هموار
spectrum	طیف
square of the hyperplane bundle	مجذور کلاف ابرصفحه‌یی
structure sheaf	بافهٔ ساختاری
tautological line bundle	کلاف خطی آشکار
Teichmuller theory	نظریهٔ تایشمولر
terminal singularity	تکینی پایانی
total space	فضای کل
trivial ideal	ایدآل نمایان
trivial line bundle	کلاف خطی نمایان
twisted cubic curve	خم درجهٔ سوم تابدار
Veronese	ورونزه
very ample line bundle	کلاف خطی پردامنه
virtual divisor	مقسوم‌علیه مجازی
Weil	وِیل
Witten	ویتن
Zariski	زاریسکی
zero section	برش صفر

نمایه