ژان دیو دونه

مبانی آنالیز مدرن

برگردان : محمد علی غیرتمند

J. Dieudonné

Foundations of Modern Analysis

J. Dieudonné

Foundations of Modern Analysis

Translated from Russian (and English) to Persian by:

Mohammad Ali Gheiratmand

Shabahang Publications

Tehran – Iran 2009

ژان دیودونه

مبانی آنالیز مدرن

برگردان:
محمدعلی غیرتمند

پیشگفتار مترجم

ژان دیودونه عضو سابق گروه بورباکی یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌دان‌های قرن بیستم بوده است، و با وجود اینکه، چند دهه از چاپ نخست کتاب مشهور او « **مبانی آنالیز مدرن**[1] » می‌گذرد، هنوز از این اثر پرمحتوا به عنوان یکی از بهترین مراجع در درس‌های آنالیز ریاضی ۱، ۲ و ۳، آنالیز حقیقی، آنالیز مختلط، تئوری معادلات دیفرانسیل، و آنالیز تابعی استفاده می‌شود. ریاضی‌دان‌های روسیه نیز از کتاب ژان دیودونه به عنوان کتابی مناسب برای کسانی که می‌خواهند معلومات خود را در آنالیز ریاضی عمق بخشند، یاد کرده، کتاب او را به زبان روسی برگردانده، و مطالعه آن را به دانش‌جویان سال‌های بالای دوره کارشناسی و آسپیرانت‌ها توصیه نموده‌اند.

در برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان فارسی، مترجم همزمان از چاپ اول متن روسی، و چاپ دوم متن انگلیسی آن استفاده نموده است، اما، محور اصلی کار خود را چاپ دوم کتاب قرار داده، سعی نموده است در پاورقی‌های متن فارسی کتاب، به برخی اختلاف‌های نسبتاً مهمی که بین چاپ اول متن روسی و چاپ دوم متن انگلیسی آن وجود دارد، اشاره نماید.

اختلاف سلیقه‌هایی در انتخاب موضوعات مناسب برای دانش‌جویان، نحوه بیان مفاهیم، و اثبات قضیه‌های ریاضی در کار ژان دیودونه و برخی ریاضی‌دان‌های دیگر وجود داشته است، که آشنایی با آنها برای خواننده کتاب نیز می‌تواند مفید واقع شود. به عنوان مثال، با وجود اینکه، در این کتاب بسیاری از موضوعاتی که ماهیتاً به آنالیز تابعی مربوط می‌شده‌اند، با جزئیات و به طور مفصل مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند، به مفاهیمی مانند تئوری اندازه و انتگرال لبگ و برخی فضاهای تابعی مهم اشاره‌ای نشده است، اما، چنین موضوعاتی را با شیوه‌ای متفاوت از روشی که ژان دیودونه در کتاب خود دنبال کرده است، می‌توان در بیشتر کتاب‌های آنالیز تابعی، از جمله، کتاب:

---

۱. کتاب حاضر، در واقع، جلد اول از یک مجموعه کتاب چهار جلدی از همین مؤلف است، که جلدهای بعدی آن تحت عنوان :

Treatise on Analysis

چاپ و منتشر شده‌اند. چاپ دوم کتاب :

Foundations of Modern Analysis

فقط شامل ۱۱ فصل است، و موضوعاتی که به فصل‌های ۱۲ به بعد مربوط می‌شوند، باید در جلدهای بعدی کتاب یا در مراجعی که در پاورقی‌های کتاب به آنها اشاره شده است، جستجو نمود.

آنالیز تابعی

تألیف: ولادیلن الکساندرُویچ ترینوگین

ترجمه: محمدعلی غیرتمند

یافت. کتاب فوق می‌تواند بسیاری از خلاءهای کتاب ژان دیودونه را پر نموده، خواننده را با بسیاری از موضوعات جدید آنالیز ریاضی و کاربردهای آنها در مسائل فیزیک و مهندسی آشنا نماید[1].

مترجم امیدوار است، با وجود همه خطاها و کاستی‌هایی که ممکن است در کار ترجمه و حروف‌نگاری کتاب حاضر پیش آمده باشد، این کتاب بتواند به درک بهتر دانش‌جویان کشور ما از بسیاری از مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی که در کلاس‌های درس کمتر مطرح می‌شوند، کمک نموده، نظرات، پیشنهادها، و انتقادهای علمی آن‌ها و دیگر دانش دوستان بتواند زمینه چاپ و انتشار کتاب‌های به مراتب بهتر و پرمحتواتری را فراهم نماید.

به بهانهٔ انتشار این کتاب وظیفه خود می‌دانم یاد و خاطرهٔ مادرم «شریعه خاکسار» را گرامی داشته؛ به این نکته اشاره کنم که، بدون کمک‌های معنوی و محبت‌های او، کار دشوار برگردان این کتاب نمی‌توانست به سرانجام برسد.

در پایان لازم می‌دانم مراتب قدردانی خود را از آقای احمدزاده مدیر انتشارات شباهنگ که مسئولیت چاپ و انتشار کتاب حاضر را پذیرفته‌اند، همچنین، از کلیه کسانی که هر یک به نحوی در حروف‌نگاری، صفحه‌آرایی، چاپ، صحافی و پخش آن مشارکت نموده‌اند، ابراز نمایم.

محمدعلی غیرتمند

تهران ــ پاییز ۱۳۸۸

---

۱. این کتاب احتمالاً در سال ۱۳۸۸ از طرف انتشارات شباهنگ چاپ و منتشر خواهد شد.

پیشگفتار چاپ روسی

مؤلف این کتاب، ژان دیودونه[1]، تحلیلگر فرانسوی، یکی از اعضای فعال و یکی از مشوقان گروه مشهور بورباکی[2] است.

به طور فرمال، خواننده تنها به معلوماتی در حد «اصول و قواعد اولیه منطق ریاضی» و جبر خطی مقدماتی نیاز دارد، اما، در واقع، کتاب برای کسانی در نظر گرفته شده است، که با مبانی آنالیز ریاضی آشنا هستند، و می‌خواهند با نقطه نظری جدید به حقایق مشهور نگاه کنند.

خصلت ویژه این کتاب اسلوب دقیق اکسیوماتیک آن، و استفاده سیستماتیک از مفهوم فضای برداری است. مؤلف عمداً از تصاویر استفاده نکرده است، اما، بیان او به حد اعلا هندسی است.

سعی شده است، که کتاب یک‌پارچه و مناسب برای آموزش در حدود یک سال تحصیلی باشد. دیودونه خیلی دقیق موضوعات را انتخاب کرده است. ضمناً، شیوه او متمایز از شیوه‌ای است، که ما پذیرفته‌ایم. چون، او مفهوم اندازه و انتگرال لبگ را روشن نکرده است، اما، در عوض، حقایق کلی تئوری توابع یک و چند متغیره مختلط را شرح داده است. در کتاب مسائل جالب و گوناگونی با سلیقه انتخاب شده‌اند.

مطالعه این کتاب بکر و خود ویژه نه تنها برای دانشجویان سال‌های بالا و آسپیرانت‌ها[3] (که کتاب به طور طبیعی، مستقیماً و بلاواسطه برای آنها در نظر گرفته شده است)، بلکه، برای همه کسانی که می‌خواهند معلومات خود را در موضوعات آنالیز ریاضی مدرن عمق بخشند، مفید است.

هیئت تحریریه نشریات علوم ریاضی

---

1 . Жан Дьёдонне

2 . Бурбаки

۳. در روسیه آسپیرانت (аспирант) به دانشجوی دوره آسپیرانتور (نامزدی علوم) که دوره‌ای معمولاً چهارساله بعد از اتمام دوره پنج ساله تحصیلات دانشگاهی است، و در برخی منابع فارسی به اشتباه دانشجوی دوره فوق لیسانس ترجمه شده است، گفته می‌شود. مترجم.

پیشگفتار مؤلف

این کتاب حاصل تکمیل دوره‌ای است، که برای دانشجویان سال اول دوره کارشناسی ارشد یا دانشجویان بسیار پیشرفته سال‌های سوم و چهارم دوره کارشناسی در نظر گرفته شده است.[1] این دوره (که در سال‌های ۱۹۵۷ — ۱۹۵۶ در دانشگاه نورث وسترن تدریس می‌شد) هدفی دو جانبه داشت :

(a) آماده کردن زمینه مقدماتی لازم از همه شاخه‌های ریاضی وابسته به «آنالیز» (که در واقع، به معنی همه موضوعات ریاضی با استثناءهایی احتمالی از منطق و جبر محض می‌باشد.)

(b) آموزش به کارگیری ابزار ریاضی اساسی دوران ما ـ روش اکسیوماتیک ـ به دانشجو (که با آن در طول تحصیلات دوره کارشناسی یا اصلاً مواجه نشده است، یا تماس خیلی کمی داشته است).

برای خواننده کاملاً آشکار خواهد شد، که ما در همه‌جا روی جنبه ادراکی هر مفهوم بیش از جنبه محاسباتی آن‌که عمدتاً به آنالیز کلاسیک مربوط بوده است، تأکید کرده‌ایم. این نکته نه تنها در مورد متن، بلکه، در بیشتر مسائل نیز صدق می‌کند. تعداد زیاد مسائل کتاب هم برای تکمیل متن، و هم برای نشان دادن بسط و توسعه‌های جالب‌تر آنها است. در عین حال، مسائل به دانشجو این فرصت را می‌دهد، که درک خود را از موضوعات ارائه شده آزمایش کند.

اگرچه این کتاب شامل موضوعات زیادی است، که عموماً در دوره‌هایی مقدماتی‌تر (از جمله آن‌چه که معمولاً «حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته» نامیده می‌شود) مورد بررسی قرار می‌گیرند، دیدگاه توجه به این موضوعات، کاملاً متفاوت از شیوه‌های مرسومی است، که در این دوره‌ها به کار گرفته می‌شوند. مفاهیم اساسی تئوری توابع و حساب دیفرانسیل و انتگرال که در چهارچوب یک تئوری به حد کافی عمومی در این کتاب معرفی شده است، وسعت، توان، و ماهیت درست این مفاهیم را خیلی بهتر از وقتی که تحت محدودیت‌های «آنالیز کلاسیک» قرار می‌گیرند، آشکار می‌کند. نیازی به تأکید بر « صرفه‌جویی

---

۱. به دلیل تفاوت‌های بین سیستم‌های آموزشی در دانشگاه‌های امریکا و روسیه ، در ترجمه روسی کتاب به جای واژه انگلیسی Graduate student (دانشجوی دوره فوق لیسانس) از واژه روسی Студент старших курсов (دانشجوی دوره‌های پیشرفته) و به جای واژه Undergraduate student (دانشجوی دوره‌های ماقبل فوق لیسانس) از واژه روسی Студент младщих курсов استفاده شده است. ژان دیودونه در ادامه کار خود ۳ جلد کتاب دیگر در زمینه آنالیز ریاضی تحت عنوان، «Treatise on Analysis» نوشته شده است، و در آنها بسیاری از مباحث آنالیز را به شکلی عمیق مورد بحث و بررسی قرار داده است. مترجم.

در تفکر» معروف که از چنین نظریه‌ای کلی حاصل می‌شود، نیست، اما، می‌توان اشاره کرد که، یک « صرفه‌جویی در علائم» متناظری وجود دارد، که توده اندیس‌ها را محو می‌کند، بیشتر به همان روشی که جبر برداری هندسه تحلیلی کلاسیک را ساده می‌کند. اما، چنین برخوردی، باعث لزوم رعایت دقیق روش‌های اکسیوماتیک، بدون استناد به « شهود هندسی» حداقل در اثبات‌های فرمال هم می‌شود: ضرورتی که ما با امتناع عمدی و سنجیده از معرفی هر دیاگرام و تصویر در این کتاب روی آن تأکید کرده‌ایم. به عقیده من، دانشجوی امروزی دوره کارشناسی ارشد، اگر بنا باشد زمانی آن‌چه را که در حال حاضر در تحقیقات ریاضی در جریان است، بفهمد، باید هرچه سریعتر آموزش کامل و دقیقی در این مسیر مجرد و آکسیوماتیک طرز تفکر کسب نماید. هدف این کتاب کمک کردن به دانشجو در بوجود آوردن این « شهود مجرد» است، که در تفکر یک ریاضی‌دان امروزی بسیار اساسی است.

واضح است که، دانشجو قبل از شروع این دوره باید اطلاعات عملی خوبی از آنالیز کلاسیک داشته باشد. اما، از نقطه نظر صرفاً منطقی، بیان مطالب متکی به هیچ نوع اطلاعات قبلی، به جز استثناءهای زیر نیست :

۱. اولین قواعد منطق ریاضی، استقراء ریاضی، و خواص اساسی اعداد صحیح (مثبت یا منفی).

۲. جبر خطی مقدماتی (روی یک هیأت)، که خواننده می‌تواند با آن از طریق کتاب‌های هالموس [14]، جیکوبسون [13]، یا بورباکی [4] آشنا شود[1]، هر چند، این کتاب‌ها شامل موضوعاتی بیش از آن‌چه که واقعاً مورد نیاز ما است، می‌باشند (به عنوان مثال، ما از تئوری دوگان استفاده نخواهیم کرد، و اگر خواننده با مفاهیم زیرفضای برداری، ابرصفحه، مجموع مستقیم، نگاشت خطی، فرم خطی، بعد و همبعد آشنا باشد، کافی است).

در اثبات هر قضیه، ما منحصراً بر اصول و قضیه‌هایی که قبلاً در متن درس ثابت شده‌اند، تکیه کرده‌ایم، به جز دو استثنایی که اکنون به آنها اشاره شد. این توالی دقیق و سختگیرانه گام‌های منطقی، در مثال‌ها و مسائلی که در آن‌ها غالباً تعریف‌ها و نتایجی به کار خواهند رفت، که در متن هنوز ثابت نشده‌اند (یا حتی هرگز اثبات نخواهند شد)، تا حدودی مورد مسامحه قرار گرفته است.

قطعاً جا برای اختلاف عقیده وسیع در این خصوص که دانشجو کدام‌یک از قسمت‌های آنالیز را باید در اولین سال دوره کارشناسی ارشد بیاموزد، وجود دارد. از آنجا که ما می‌خواسته‌ایم محتوای این کتاب را در محدوده مطالبی نگه داریم، که اساساً بتوان در طول یک سال آکادمیک آموخت، برخی از موضوعات حذف شده‌اند. پاره‌ای از مطالب به دلیل خیلی تخصصی بودن از شمول کتاب خارج شده‌اند، موضوعات دیگری یا به این خاطر آن‌که به باریک‌بینی و بلوغ ریاضی بیشتری از آن‌چه که معمولاً از یک دانشجوی سال اول دوره کارشناسی ارشد انتظار می‌رود، نیاز دارد، یا به دلیل اینکه، آن مطالب بدون شک جزء دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال بوده‌اند، حذف گردیده‌اند. اگر قرار بود که ما یک برنامه عمومی برای

---

۱. شماره کتاب جیکوبسون در مرجع روسی کتاب [16] است. مترجم.

آموزش دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی پیشنهاد کنیم، توصیه می‌کردیم، که هر دانشجوی دوره فوق لیسانس در هر زمینه‌ای که بخواهد در آینده کار کند و تخصص بگیرد، با مضمون و مندرجات این کتاب آشنا شود.

مایلم سپاسگزاری خود را نسبت به ریاضی‌دان‌هایی که در آماده نمودن این درس‌ها به من کمک کرده‌اند، به‌ویژه، به آ. کارتان و ن. بورباکی، که به من اجازه دادند به یادداشت‌های درسی منتشر نشده و دست‌نویس‌هایی دسترسی پیدا کنم، که در فرم نهایی کتاب تأثیر گذاشتند، ابراز دارم. همچنین، از همکارانم در بخش ریاضی دانشگاه نورث‌وسترن بسیار سپاسگزارم، که برای من این امکان را فراهم نمودند، که این درس را در جهتی که برای آن برنامه‌ریزی کرده بودم، تدریس نمایم، و از تشویق‌های فراوان و انتقادهای سودمندشان برخوردار شوم.

ژان. دیودونه
آوریل ۱۹۶۰

پیشگفتار چاپ تصحیح شده و گسترش یافته مؤلف[1]

این کتاب اولین جلد از رساله‌ای است، که سرانجام شامل چهار جلد خواهد بود. کتاب، همچنین، چاپ تصحیح شده و بسط یافته اساساً بدون تغییری از کتاب «مبانی آنالیز مدرن» من است، که در سال ۱۹۶۰ منتشر شده است. تعداد زیادی از خوانندگان، همکاران و دوستان به من اصرار کرده‌اند، که دنباله‌ای بر آن کتاب بنویسم، و سرانجام، من متقاعد شدم، جایی برای طرح رئوس آنالیز مدرن وجود دارد، جایی بین « مینیمم ابزار کار» با سرشتی مقدماتی که من قصد داشتم بنویسم، و رساله‌های تخصصی که تا مرزهای تحقیق پیش روند. تجربه تدریسم نیز مرا متقاعد کرده است که نوآموز ریاضی پس از برداشتن اولین گام « مبانی» نیاز به راهنمایی بیشتر و نوعی دید کلی از موضوعش دارد، قبل از اینکه در اقیانوس آثار و نوشتجات ریاضی غوطه‌ور شود، یا در مسیر باریک موضوع مورد تحقیقش پیش رود.

به این ترتیب، در نهایت، من تمایل یافتم، کتابی برای ریاضی‌دان‌های سال ۱۹۷۰ بنویسم، که معادل «دوره آنالیز» جُردن، پیکار، و گورسا باشد، که برای دانشجویان سال‌های بین ۱۸۸۰ تا ۱۹۲۰ نوشته شده بودند.

تلاش برای پوشش انسکلوپدیک، آشکارا، تلاشی غیرممکن و غیرعملی است، و یقیناً ، دوباره‌نویسی آثار بورباکی عملی زاید است. بنابراین، من مجبور بوده‌ام، برای باقی ماندن در چارچوب رساله‌های کلاسیک بسیاری از مباحث را حذف کنم. من روی عرض بیش از عمق تأکید کرده‌ام، چون معتقدم، بهتر است، به خواننده مبادی و اصول شاخه‌های زیادی از آنالیز ریاضی جدید را نشان داد، تا به بیان کامل و با جزئیات تعداد کمی از موضوعات پرداخت.

تجربه نشان داده است، که دانشجو معمولاً در اولین قرائت تئوری جدید را به سختی درک می‌کند. او نیاز دارد چندین بار به مطلب برگردد، قبل از آنکه واقعاً با آن آشنا شود، و بتواند برای خود تشخیص دهد، که ایده‌های اساسی کدامند و کدام نتایج کم‌اهمیت‌ترند، و تنها آن وقت است که، او قادر خواهد بود از آنها هوشمندانه استفاده کند، بنابراین، فصل‌های این رساله بیشتر نمونه‌اند، تا تئوری‌های کامل. در واقع، من به‌طور سیستماتیک سعی کرده‌ام، که همه شمول نباشند. آثار ذکر شده در کتابشناسی همیشه خواننده

---

[1] . این قسمت در چاپ اول ترجمه روسی کتاب ژان دیودونه وجود ندارد. مترجم.

را قادر می‌سازد تا با عمق بیشتری دنبال هر تئوری خاصی برود.

به‌هر حال، من از مغشوش کردن و به‌هم ریختن ایده‌های اصلی آنالیز با ارائه آنها به شکل خیلی تخصصی، و از این طریق ایجاد ابهام در توان و کلیت آنها، امتناع کرده‌ام، به عنوان مثال، اگر هندسه دیفرانسیل به دو یا سه بعد محدود شود، یا تئوری انتگراسیون به اندازه لبگ محدود شود، به این بهانه که، این موضوعات شهودی‌تر یا قابل حصول‌تر شوند، نمود کاذبی ارائه می‌شود.

از طرف دیگر، من اعتقاد ندارم، که محتوای اصلی ایده‌های مورد بحث در اولین بررسی و مطالعه با تحدید توجه به فضاهای توپولوژیک جدایی‌پذیر گم می‌شود. ریاضی‌دان‌های هم‌نسل من یقیناً حق داشتند، هر جا که لازم نداشتند، فرض‌های شمارش‌پذیری را دور کنند، این تنها راه برای رسیدن به درکی روشن بود، اما، اکنون وضعیت به خوبی درک می‌شود: مرکزی‌ترین و اصلی‌ترین بخش‌های آنالیز (بگذارید بگویم، موضوعاتی که می‌توان آنها را تبدیل به مفهوم یک منیفلد با بعد متناهی کرد) در اکثریت عمده کاربردها، فقط شامل فضاهای جدایی‌پذیر متریک‌پذیرند. به‌علاوه، تکنیکی عمومی برای عبور از یک اثبات مبتنی بر فرضیات شمارش‌پذیری به یک اثبات کلی وجود دارد، که مؤثر و معمولاً استفاده از آن آسان است، به بیان کلی، دستورالعمل این است که «فیلترها جایگزین دنباله‌ها شوند». این کار غالباً اثبات اصلی را زیباتر و ظریفانه‌تر می‌کند. بنابراین، من با پذیرش خطر بدنامی مرتجع بودن، شعار خود را انتخاب کرده‌ام « در بی‌پایانی فقط شمارش‌پذیری وجود دارد». من اعتقاد دارم، که مبتدی توجهش را بهتر به مشکلات واقعی مورد بحث در منیفلدهای دیفرانسیلی و انتگراسیون تمرکز خواهد داد، بدون اینکه همزمان در رابطه با مسائل درجه دوم توپولوژیکی که در عمل با آنها به ندرت برخورد خواهد کرد[1]، نگران شود.

در این کتاب، همه ساختمان آنالیز از پایه و اساس بنا شده است. تنها چیزهایی که در آغاز کار عاریت گرفته شده‌اند، عبارتند از: قوانین منطق و خواص معمولی اعداد طبیعی، و با این دو استثناء، همه اثبات‌های ارائه شده در کتاب، متکی بر اصول و قضیه‌هایی هستند، که قبلاً اثبات شده‌اند.[2] با وجود این، کتاب حاضر (شامل جلد اول) برای دانشجویانی که هنوز دو سال اول دوره لیسانس در ریاضیات را طی نکرده‌اند، مناسب نیست.

یک ویژگی برجسته قسمت‌های مقدماتی آنالیز مقدار کم جبر مورد نیاز آنها است. عملاً، همه آن‌چه مورد نیاز است، محدود می‌شود به مختصری جبر خطی مقدماتی (که برای راحتی خواننده در یکی از ضمائم جلد اول بیان شده است). اما، نقشی که جبر خطی در جلدهای بعدی بازی می‌کند، بیشتر می‌شود،

---

۱. با روحی مشابه، من از به کارگیری استقراء ترانسفینی در فضاهای متریک پذیر نیز امتناع کرده‌ام (بعضی اوقات به بهای طولانی‌تر شدن کلام)، نه به خاطر تردیدهای فلسفی که اصلاً ربطی به موضوع ندارد، بلکه، به این دلیل که، به نظر من غیراخلاقی است، که با یک دست شمارش‌ناپذیری را تحریم نماییم، در حالی که به طور نهانی با دست دیگر از آن استفاده می‌کنیم.

۲. این ترتیب منطقی در نتیجه‌گیری‌ها، در مسائل و بعضی مثال‌ها، که شامل تعریف‌ها و نتایجی هستند که تا آن مرحله ظاهر نشده‌اند یا اصلاً ظاهر نخواهند شد، این‌قدر سختگیرانه دنبال نشده است.

و بالاخره، ما خواننده را در نقطه‌ای رها می‌کنیم، که این نقش با ورود جبر جابجایی پیشرفته و جبر همولوژیک به طور قابل ملاحظه‌ای مهم‌تر می‌شود. به عنوان کتاب‌های مرجع در جبر ما « جبر مجرد» ر. گودمان[1]، و «جبر» س. آ. لانگ[2] را انتخاب کرده‌ایم، که مطالبی از آنها را در جهات معینی در حد امکان به کمک پیوست‌ها بسط و گسترش داده‌ایم.

در جریان تهیه این اثر همانند جلد اول از دسترسی به دستنویس‌های چاپ نشده متعدد ن . بورباکی بهره‌مند شده‌ام، و از همکاری و توحید مساعی آنها استفاده کرده‌ام. در ارائه و معرفی بعضی از موضوعات بکر و مبتکرانه تنها به آنها مدیون هستم.

ژان. دیودونه
نیس، فرانسه
آوریل ۱۹۶۹

۱. ر. گودمان، «جبر مجرد» ، هوکتون ــ میفلین، نیویورک، ۱۹۶۸ (اصل فرانسوی کتاب در سال ۱۹۶۳ در پاریس توسط انتشارات هرمان چاپ شده است).
۲. س. آ. لانگ «جبر» ، ادیسون ــ وسلی، ریدینگ ماساچوست، ۱۹۶۵.

فهرست مطالب

نمادها

در تعریف‌های زیر، اولین رقم به شماره فصلی که نماد در آن ظاهر شده است، اشاره می‌کند، و دومین شماره به پاراگراف (بند - بخش) مربوط به آن فصل.

$=$	مساوی، منطبق بودن، تطابق داشتن؛ ۱. ۱
$\neq$	مخالف، متفاوت است از؛ ۱. ۱
$\in$	عنصری است از، متعلق است به؛ ۱. ۱
$\notin$	عنصری نیست از، متعلق نیست به؛ ۱. ۱
$\subset$	زیرمجموعه‌ای است از، مشمول؛ ۱. ۱
$\supset$	شامل؛ ۱. ۱
$\not\subset$	واقع نیست در؛ ۱. ۱
$\{x \in X \mid P(x)\}$	مجموعه عناصری از X که دارای خاصیت P هستند؛ ۱. ۱
$\varnothing$	مجموعه تهی ؛ ۱. ۱
$\{a\}$	مجموعه شامل عنصر a به عنوان تنها عنصر؛ ۱. ۱
$\mathfrak{B}(X)$	مجموعه زیرمجموعه‌های X ؛ ۱. ۱
$\complement Y$ ، $\complement_X Y$ ، $X - Y$	تفاضل بین مجموعه‌های X و Y ، مکمل (متمم) مجموعه Y نسبت به X ، ۱. ۲
$\cup$	اجتماع ؛ ۱. ۲
$\cap$	اشتراک ؛ ۱. ۲
$\{x, y\}$	اجتماع مجموعه‌های $\{x\}$ و $\{y\}$؛
(a, b)	زوج مرتب؛ ۱. ۳
$\mathrm{pr}_1 c$, $\mathrm{pr}_2 c$	اولین و دومین تصویر زوج c ؛ ۱. ۳
$G^{-1}(y)$ ، $G(x)$	مقطع (برش) عرضی $G \subset X \times Y$؛ ۱. ۳
$X \times Y$	حاصلضرب دو مجموعه ؛ ۱. ۳
$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$	حاصلضرب n مجموعه ؛ ۱. ۳

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	عنصر حاصلضرب n مجموعه ؛ ۳. ۱
$\mathrm{pr}_i\, z$	i اُمین تصویر ؛ ۳. ۱
$\mathrm{pr}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(z)$	تصویر جزئی ؛ ۳ . ۱
X^n	حاصل‌ضرب n مجموعه مساوی X ؛ ۳. ۱
$F(x)$	مقدار نگاشت F در x ؛ ۴. ۱
$\mathscr{F}(X, Y)$ ، Y^X	مجموعه نگاشت‌های از X به Y ؛ ۴. ۱
1_X	نگاشت همانی روی X ؛ ۴. ۱
$x \to T(x)$	نگاشت ؛ ۴ . ۱
$F(A)$	تصویر مستقیم ؛ ۵ . ۱
$F^{-1}(A')$	تصویر معکوس ؛ ۵ . ۱
$F^{-1}(y)$	تصویر معکوس مجموعه تک‌عنصری $\{y\}$ ؛ ۵ . ۱
$F(x, .)$ ، $F(., y)$	نگاشت‌های جزئی نگاشت F از $A \subset X \times Y$ به Z ؛ ۵ . ۱
j_A	نگاشت یک به یک طبیعی، نگاشت یک‌به یک متعارف؛ ۶ . ۱
F^{-1}	نگاشت معکوس یک نگاشت دوسویی؛ ۶ . ۱
$G \circ F$	نگاشت مرکب، ترکیب دو نگاشت؛ ۷ . ۱
$(x_\lambda)_{\lambda \in L}$	خانواده ؛ ۸ . ۱
$\mathbf{N}$	مجموعه اعداد صحیح طبیعی ؛ ۸ . ۱
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	مجموعه عناصر یک دنباله با پایان ؛ ۸ . ۱
$\bigcup_\lambda A_\lambda$, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$	اجتماع خانواده‌ای از مجموعه‌ها ؛ ۸ . ۱
$\bigcap_\lambda A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$	اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌ها ؛ ۸ . ۱
$X/\mathbf{R}$	مجموعه خارج‌قسمت مجموعه X به‌واسطه رابطه هم‌ارزی $\mathbf{R}$ ؛ ۸. ۱
$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$	حاصل‌ضرب یک خانواده از مجموعه‌ها ؛ ۸ . ۱
pr_j	تصویر روی حاصل‌ضربی جزیی ؛ ۸ . ۱
(u_λ)	نگاشت به حاصل‌ضربی از مجموعه‌ها ؛ ۸ . ۱
$\mathbf{R}$	مجموعه اعداد حقیقی ؛ ۱. ۲
$x + y$	مجموعه دو عدد حقیقی؛ ۱. ۲
$x y$	حاصلضرب دو عدد حقیقی ؛ ۱. ۲
0	صفر؛ عنصر $\mathbf{R}$ ؛ ۱. ۲
$-x$	قرنیه یک عدد حقیقی ؛ ۱. ۲
1	واحد، عنصر $\mathbf{R}$ ؛ ۱. ۲

$1/x\ ,\ x^{-1}$	معکوس در R ؛ ۲.۱
$y \ge x\ ,\ x \le y$	رابطه ترتیبی در R ؛ ۲.۱
$y > x\ ,\ x < y$	رابطه در R؛ ۲.۱
$]a\,,b]\,,\ [a\,,b[\ ,\ [a\,,b]\,,\ ]a\,,b[$	فواصل در R؛ ۲.۱
$\mathbf{R}_+^*$ و $\mathbf{R}_+$	مجموعه اعداد حقیقی ≥ 0 (به ترتیب > 0) ؛ ۲.۲
x^- ، x^+ ، $\lvert x \rvert$	قدرمطلق ، قسمت مثبت و منفی یک عدد حقیقی ؛ ۲.۲
$\mathbf{Q}$	مجموعه اعداد گویا؛ ۲.۲
$\mathbf{Z}$	مجموعه اعداد صحیح مثبت یا منفی؛ ۲.۲
$\sup X$ ، $\text{l.u.b.}X$	کوچکترین کران بالای یک مجموعه؛ ۲.۳
$\inf X$ ، $\text{g.l.b.}X$	بزرگترین کران پایین یک مجموعه؛ ۲.۳
$\inf\limits_{x\in A} f(x)$ ، $\sup\limits_{x\in A} f(x)$	سوپرموم و اینفیموم f روی A ؛ ۲.۳
$d(x,y)$	فاصله بین عناصر x و y ؛ ۳.۱
$\mathbf{R}^3\ ,\ \mathbf{R}^2$	صفحه حقیقی، فضای اقلیدسی؛ ۳.۲
$\mathfrak{B}(A)$	مجموعه نگاشت‌های کراندار از مجموعه A به R ؛ ۳.۲
$\overline{\mathbf{R}}$	خط حقیقی توسعه یافته ؛ ۳.۳
$-\infty\ ,+\infty$	نقاط بی‌نهایت $\overline{\mathbf{R}}$ ؛ ۳.۳
$y \ge x$ ، $x \le y$	رابطه ترتیب در $\overline{\mathbf{R}}$ ؛ ۳.۳
$d(A,B)$	فاصله دو مجموعه ؛ ۳.۴
$S(a,r)$ ، $B'(a,r)$ ، $B(a\,,r)$	گوی باز ، گوی بسته، کره به مرکز a و شعاع r ؛ ۳.۴
$\delta(A)$	قطر، قطر مجموعه A ؛ ۳.۴
$\mathring{A}$	داخل، اینتریور، درون، درون مجموعه A ؛ ۳.۷
$\overline{A}$	بستار، بستار مجموعه A ؛ ۳.۸
$Fr(A)$	مرز، مرز مجموعه A ؛ ۳.۷
$\lim\limits_{x\to a\ ,\ x\in A} f(x)$	حد یک تابع ؛ ۳.۱۳
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	حد یک دنباله ؛ ۳.۱۳
$\Omega\ (a\,,f)$	نوسان یک تابع ؛ ۳.۱۴
$\log_a x$	لگاریتم یک عدد حقیقی ؛ ۴.۳
a^x	a به توان عدد حقیقی x ؛ ۴.۳
$\mathbf{C}$	مجموعه اعداد مختلط ؛ ۴.۳
zz' ، $z+z'$	مجموع و حاصل‌ضرب اعداد مختلط ؛ ۴.۴

0 ، 1 ، i	عناصر C ؛ ۴. ۴
$\Re z$ ، $\Im z$	قسمت‌های حقیقی و مختلط ؛ ۴. ۴
$\bar{z}$	مزدوج یک عدد مختلط ؛ ۴. ۴
$\lvert z \rvert$	قدرمطلق یک عدد مختلط ؛ ۴. ۴
$x+y$ ، λx ، $x\lambda$	مجموع و ضرب در یک اسکالر در یک فضای برداری ؛ ۱. ۵
0	عنصر صفر یک در یک فضای برداری ؛ ۱. ۵
$\lVert x \rVert$	نرم ؛ ۱. ۵
$\mathscr{C}_{R}(I)$	مجموعه کلیه توابع حقیقی پیوسته روی I ؛ ۱. ۵
$A+B$	حاصل‌جمع دو مجموعه در فضای برداری؛ مجموع مستقیم ؛۱. ۵، مسأله ۲، ۴. ۵
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	مجموع یک سری، سری ؛ ۲. ۵
$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$	مجموع یک خانواده مطلقاً جمع‌پذیر : ۳. ۵
(c_0)	فضای دنباله‌های همگرا به صفر ؛ ۳. ۵ ، مسأله ۵
$\mathscr{L}(E ; F)$	فضای نگاشت‌های خطی پیوسته ؛ ۷. ۵
$\lVert u \rVert$	نرم یک نگاشت خطی پیوسته ؛ ۷. ۵
$\mathscr{L}(E_1 , \cdots , E_n ; F)$	فضای نگاشت‌های چند خطی پیوسته ؛ ۷. ۵
l^1	فضای سری‌های مطلقاً پیوسته ؛ ۷. ۵ ؛ مسأله ۱
l^∞	فضای دنباله‌های کراندار ؛ ۷. ۵ ؛ مسأله ۱
$(x \mid y)$	حاصل‌ضرب اسکالر (داخلی) ؛ ۲. ۶
P_F	تصویر متعامد؛ ۳. ۶
l^2 , l^2_R , l^2_C	فضای هیلبرت دنباله‌ها ؛ ۵ . ۶
$\mathscr{C}_C(I)$	مجموعه کلیه توابع پیوسته مختلط روی I ؛ ۵ . ۶
$\mathscr{B}_F(A)$ ، $\mathscr{B}_R(A)$ ، $\mathscr{B}_C(A)$	فضای نگاشت‌های کراندار ؛ ۲. ۷
$\mathscr{C}_F(E)$	فضای نگاشت‌های پیوسته ؛ ۲. ۷
$\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$	فضای نگاشت‌های پیوسته کراندار ؛ ۲. ۷
$f(x+)$ ، $f(x-)$	حدود راست، چپ ؛ ۶ . ۷
sign x	تابع علامت ؛ ۶. ۷
$f'(x_0)$ ، $Df(x_0)$	مشتق (تام – کلی) در نقطه x_0 ؛ ۱. ۸
Df , f'	مشتق (به عنوان تابع) ؛ ۱. ۸

$D_+ f(\alpha)$ ، $f'_d(\alpha)$	مشتق راست ؛ ۸.۴
$D_- f(\beta)$ ، $f'_g(\beta)$	مشتق چپ ؛ ۸.۴
$u \cdot t$	عنصر $\mathscr{L}(E\,;F)$ ؛ ۸.۱
$\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi$	انتگرال ؛ ۸.۷
e	عدد ؛ ۸.۸
$\log x$ ، $\exp(x)$ ، e	(x حقیقی است) ، توابع نمایی و لگاریتمی با متغیر حقیقی ؛ ۸.۸
، $D_1 f(a_1, a_2)$ $D_2 f(a_1, a_2)$	مشتقات جزئی ؛ ۸.۹
، $f'_{\xi_i}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ $\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$	مشتقات جزئی ؛ ۸.۱۰
، $\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)}$ $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_n)}$	ژاکوبین: ۸.۱۰
$D^2 f(x_0)$ ، $f''(x_0)$ $D^p f(x_0)$ ، $f^{(p)}(x_0)$	مشتقات مرتبه بالاتر ؛ ۸.۱۲
$f * \rho$	منظم‌سازی ؛ ۸.۱۲ ، مسأله ۲
$\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$	فضای نگاشت‌های p بار پیوسته ــ مشتق‌پذیر از A به F با مشتقات کراندار ؛ ۸.۱۲
$\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$	فضای نگاشت‌های p بار پیوسته ــ مشتق‌پذیر ؛ ۸.۱۳
D_{M_α} ، D^α ، M_α ، $\|\alpha\|$	نمادهایی که در آنها α اندیس مرکب است ؛ ۸.۱۳
$\exp(z)$ ، e^z	(z مختلط) ؛ ۹.۵
$\cos z$ ، $\sin z$	سینوس و کسینوس ؛ ۹.۵
π	عدد پی ؛ ۹.۵
$(1+z)^t$ ، $\binom{t}{n}$ ، $am(z)$ ، $\log z$	(z و t اعداد مختلط هستند) ؛ ۹.۵ مسأله ۸
U	دایره واحد در C ؛ ۹.۵ ؛ arg z آرگومان عدد مختلط **z** ؛ ۹.۵ مسأله ۸
$\mathbf{R}_-$	نیمه منفی محور اعداد حقیقی ؛ ۹.۵ ، مسأله ۸
γ^0	مسیر با سوی مخالف ؛ ۹.۶
$\gamma_1 \vee \gamma_2$	پهلوی هم‌گذاری مسیرها ، هم‌جواری مسیرها ؛ ۹.۶
$\int_\gamma f(z)dz$	انتگرال در طول یک راه ؛ ۹.۶
$j(a, \gamma)$	شاخص مربوط به یک مدار ؛ ۹.۸

$E(z, p)$	عامل اولیه ؛ ۱۲. ۹، مسأله ۱
$\Gamma(z)$	تابع گاما ؛ ۱۲. ۹ مسأله ۲
γ	ثابت اویلر ۱۲. ۹ ؛ مسأله ۲
$\int_\gamma f(z)dz$	انتگرال در طول یک راه بی‌انتها ؛ ۱۲. ۹، مسأله ۳
$\omega(a)$, $\omega(a; f)$	مرتبه یک تابع در یک نقطه ؛ ۱۵. ۹
$C(t, s)$	رزولونت (حلال) معادله دیفرانسیل خطی
$\mathscr{L}(E)$	جبر عملگرها ؛ ۱. ۱۱
uv	عملگرمرکب ؛ ترکیب عملگرها ؛ ۱. ۱۱
1	عملگر همانی ؛ ۱. ۱۱
$sp(u)$	اسپکتروم ، طیف عملگر u؛ ۱. ۱۱
$E(\zeta; u)$ ، $E(\zeta)$	فضای ویژه (مشخصه) عملگر u متناظر با مقدار ویژه (مشخصه) ζ؛ ۱. ۱۱
$\tilde{u}$	گسترش (توسیع ـ تمدید) پیوسته ؛ ۲. ۱۱
$N(\lambda; u)$ ، $N(\lambda)$،	
$F(\lambda; u)$ ، $F(\lambda)$	زیرفضاهای وابسته به یک مقدار ویژه از یک عملگر فشرده ؛ ۴. ۱۱
$k(\lambda, u)$ ، $k(\lambda)$	مرتبه یک مقدار ویژه ؛ ۴. ۱۱
u^*	عملگر الحاقی ؛ ۵. ۱۱

فصل I

اصول تئوری مجموعه‌ها

در این فصل ما سعی نخواهیم کرد تئوری مجموعه‌ها را بر پایه آکسیوماتیک مطرح کنیم؛ هر چند این کار را می‌توان انجام داد، و ما خوانندهٔ علاقه‌مند را برای شرح کامل آکسیوماتیک این نظریه به کتاب‌های کلی[1] [15] و بورباکی[2] [3] ارجاع می‌دهیم[3]. گزاره‌های ظاهر شده در این فصل و آنها که با یک اثبات یا تعریف همراهی نشده‌اند، را می‌توان به‌عنوان اصول مربوط به اصطلاح‌های تعریف نشده در نظر گرفت.

این فصل با برخی تعریف‌های مقدماتی و فرمول‌هایی درباره مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ها و حاصلضرب مجموعه‌ها (بخش‌های ۱. ۱ تا ۳. ۱) شروع می‌شود، قسمت عمده مطالب آن به مفهوم اساسی **نگاشت** اختصاص یافته، که گسترش و تعمیمی مدرن از مفهوم کلاسیک **تابع** (عددی) یک یا چند «متغیره» است. دو نکته مربوط به این مفهوم شایسته قدری تفسیر است :

۱. مهم‌ترین خاصیت (و مشخصه) یک نگاشت در این است که به هر « مقدار» از متغیر عنصری **یگانه** مربوط می‌کند، به‌عبارت دیگر، چیزی به‌عنوان تابع چند مقداری وجود ندارد (هر چند در بسیاری از کتاب‌ها از این مفهوم استفاده شده است). البته، این کاملاً قانونی است، که نگاشتی تعریف شود که مقادیرش زیر مجموعه‌های مجموعه معینی باشند، که ممکن است بیش از یک عنصر داشته باشد، اما، چنین تعریف‌هایی در عمل بی‌فایده هستند (حداقل در آنالیز مقدماتی)، زیرا، ممکن نیست به روشی معقول **عملیات جبری** روی «مقادیر» چنین توابعی تعریف کرد. ما در فصل نهم به این موضوع برمی‌گردیم.

۲. دانشجو باید هر چه زودتر با این ایده که f شئی یکتایی است، که ممکن است خود «متغیر» و به‌طور کلی اندیشه‌ای از « نقطه» در مقیاس بزرگ «فضای تابعی» باشد، آشنا و مأنوس شود. در واقع، می‌توان گفت، که یکی از اختلاف‌های اصلی بین مفاهیم کلاسیک و مدرن آنالیز این است که، اگر در

---

1. Kelly = Келли

2. Bourbaky = Бурбаки

۳ . در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی شماره کتاب کِلی (Келли) در کتابنامه [18] است.

ریاضیات کلاسیک، می‌نویسند $f(x)$ ، آنگاه f به‌عنوان چیزی مرئی و واقعی، «تثبیت شده» و مشخص، و x به‌عنوان «متغیر» مورد بررسی قرار می‌گیرد، در صورتی‌که، در زمان ما هم f و هم x به‌عنوان «متغیر» مورد بررسی قرار می‌گیرند (و بعضی اوقات این x است که ثابت نگه‌داشته می‌شود، و f شئی «متغیر» می‌شود).

در انتهای پاراگراف بخش ۱.۹ اصلی‌ترین خواص مقدماتی مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر (شمارا) بیان شده، که شروعی برای تئوری گسترده «اعداد کاردینال» است که توسط کانتور و پیروانش توسعه داده شده است. در رابطه با این موضوعات خواننده علاقه‌مند می‌تواند از کتاب بورباکی ([3] فصل ۳) یا (برای جزئیات بیشتر) از کتاب باچ‌من [2] استفاده کند.[1] اما، معلوم شده است که، به استثنای نتیجه منفی مربوط به شمارش‌پذیری اعداد حقیقی ((۱۷. ۲. ۲) را ببینید) ، در کاربردهای تئوری مجموعه‌ها در آنالیز، به‌ندرت پیش می‌آید که به‌چیزی بیش از این خواص مقدماتی نیاز پیدا شود.

۱. عناصر و مجموعه‌ها

ما از اشیایی (موضوعاتی) بحث خواهیم کرد، که بعضی از آنها **مجموعه** نامیده می‌شوند. اشیاء می‌توانند دارای **خواص**، یا **روابطی** با یکدیگر باشند. اشیاء با **علائم** (عمدتاً حروف)، و خواص یا روابط به‌وسیله ترکیباتی از علائم اشیائی که درگیر آن هستند و برخی علائم دیگر مشخصه خاصیت یا رابطه مورد نظر، نشان داده می‌شوند. رابطه $x = y$ به معنی این است که اشیاء نشان داده شده با علائم x و y یکسان هستند. نفی آن به‌صورت $x \neq y$ نوشته می‌شود.

اگر X یک مجموعه باشد، رابطه $x \in X$ به معنی این است که x **عنصری** از مجموعه X است، یا x به X **تعلق** دارد. نفی این رابطه به‌صورت $x \notin X$ یا $x \,\bar{\in}\, X$ نوشته می‌شود.

اگر X و Y دو مجموعه باشند، رابطه $X \subset Y$ به این معنی است که، هر عنصر X یک عنصر Y است، (به بیان دیگر، مطلب فوق هم ارز رابطه $(\forall x)\,(x \in X \Rightarrow x \in Y)$ می‌باشد). داریم $X \subset X$ و از رابطه $(X \subset Y\,,\ Y \subset Z)$ نتیجه می‌شود $X \subset Z$. اگر $X \subset Y$ و $Y \subset X$ ، آنگاه ، $X = Y$ ، به عبارت دیگر، دو مجموعه با هم برابرند، اگر و تنها اگر عناصر یکسانی داشته باشند. اگر $X \subset Y$ ، گوئیم X **مشمول** Y است، یا Y **شامل** X است، یا X **زیر مجموعه‌ای** از Y است، همچنین، می‌نویسیم $Y \supset X$. نفی $X \subset Y$ به‌صورت $X \not\subset Y$ نوشته می‌شود.

اگر مجموعه X و خاصیت P داده شده باشند، زیر مجموعه یکتایی از X موجود است که برای هر عنصر $x \in X$ از آن $P(x)$ درست است، این زیر مجموعه به‌صورت $\{x \in X \mid P(x)\}$ نوشته می‌شود.

---

۱. در برگرد ان روسی کتاب ژان دیودونه، مطا لعه کتاب : Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М., 1937 (تئوری مجموعه‌ها، تألیف : ف. هاسدروف، مسکو، ۱۹۳۷) نیز توصیه شده است. مترجم.

رابطــه $\{x\in X\mid P(x)\}\subset\{x\in X\mid Q(x)\}$ هِــم‌ارز رابطــه $(\forall x\in X)(P(x)\Rightarrow Q(x))$، و رابطــه $\{x\in X\mid P(x)\}=\{x\in X\mid Q(x)\}$ هم‌ارز رابطه $(\forall x\in X)(P(x)\Leftrightarrow Q(x))$ می‌باشد. به‌عنوان مثال، داریم $X=\{x\in X\mid x=x\}$ و $X=\{x\in X\mid x\in X\}$. مجموعــه $\varnothing_X=\{x\in X\mid x\neq x\}$ **مجموعــه تهی** X نامیده می‌شود؛ این مجموعه شامل هـیچ عنـصری نیـست. اگـر P یـک خاصـیت باشـد، رابطـه $x\in\varnothing_X\Rightarrow P(x)$ برای هر x درست است، چون نفی $x\in\varnothing_X$ بـرای هـر x درسـت اسـت (بـه یـاد بیاورید که $Q\Rightarrow P$ به معنی «نه Q یـا P» مـی‌باشـد[1]). بنـابراین، اگـر X و Y دو مجموعـه باشـند، از $x\in\varnothing_X$ نتیجه می‌شود $x\in\varnothing_Y$، به‌عبارت دیگر $\varnothing_X\subset\varnothing_Y$، بـه طریـق مشـابه $\varnothing_Y\subset\varnothing_X$، بـنابـراین $\varnothing_X=\varnothing_Y$، همه مجموعه‌های تهی برابرند، از این رو به $\varnothing$ نشان داده می‌شوند.

اگر a یک شئی باشد، مجموعه شامل a به‌عنوان یگانه عنصر آن به $\{a\}$ نشان داده می‌شود.

اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ای (یکتا) موجود است که عناصر آن کلیه زیر مجموعه‌هـای X هستند، این مجموعه را به $\mathfrak{B}(X)$ نشان می‌دهند. داریم $\varnothing\in\mathfrak{B}(X)$، $X\in\mathfrak{B}(X)$، روابط $x\in X$، $\{x\}\in\mathfrak{B}(X)$ هم‌ارز هستند، روابط $Y\subset X$، $Y\in\mathfrak{B}(X)$ نیز هم‌ارز هستند.

مسئله

نشان دهید که، مجموعه همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه متناهی شامل n عنصر ($n\geq 0$) مجموعه‌ای متناهی شامل 2^n عضو است.

۲. جبر بولی

اگر X و Y دو مجموعه باشند، به‌طوری که $Y\subset X$، مجموعه $\{x\in X\mid x\notin Y\}$ زیرمجموعه‌ای از X است که **تفاضل** X و Y یا **مکمل** Y نسبت به X نامیده می‌شود و به‌صورت $X-Y$ یا $\complement_X Y$ (یا $\complement Y$ وقتی احتمال اشتباه وجود نداشته باشد) نشان داده می‌شود.

اگر X و Y دو مجموعه معلوم باشند، مجموعه‌ای وجود دارد که عناصر آن هم به X و هم به Y تعلق دارند، یعنی $\{x\in X\mid x\in Y\}$، این مجموعه را **اشتراک** دو مجموعه X و Y نامیده، به علامت $X\cap Y$ نشان می‌دهند. همچنین، مجموعه‌ای وجود دارد که عناصر آن عضو لااقل یکی از دو مجموعه X، Y هستند، این مجموعه را **اجتماع** X و Y نامیده، به علامت $X\cup Y$ نشان می‌دهیم.

گزاره‌های زیر نتیجه فوری تعریف‌ها هستند :

---

۱. در واقع، به‌طور سمبولیک منظور این است که : $(Q\Rightarrow P)\equiv\sim Q\vee P$. مترجم.

(۱. ۲. ۱) $X - X = \varnothing, \qquad X - \varnothing = X.$

(۱. ۲. ۲) $X \cup X = X, \qquad X \cap X = X.$

(۱. ۲. ۳) $X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X.$

(۱. ۲. ۴) رابطه‌های $X \subset Y$ ، $X \cup Y = Y$ ، $X \cap Y = X$ هم ارز هستند.

(۱. ۲. ۵) $X \subset X \cup Y, \qquad X \cap Y \subset X$

(۱. ۲. ۶) رابطه « $Y \subset Z$ و $X \subset Z$ » هم ارز رابطه $X \cup Y \subset Z$ می‌باشد.

رابطه « $Z \subset Y$ و $Z \subset X$ » هم‌ارز رابطه $Z \subset X \cap Y$ است.

(۱. ۲. ۷) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

این اجتماع با نماد $X \cup Y \cup Z$ نشان داده می‌شود؛

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

این اشتراک با نماد $X \cap Y \cap Z$ نشان داده می‌شود؛

(۱. ۲. ۸) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(شرکت‌پذیری) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

(۱. ۲. ۹) برای زیر مجموعه‌های X ، Y از مجموعه E (به جای $\complement_E$ می‌نویسیم $\complement$) داریم:

$$\complement(\complement X) = X;$$

$$\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y), \quad \complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y).$$

رابطه‌های $X \subset Y$ ، $\complement X \supset \complement Y$ معادلند، رابطه‌های $X \cap Y = \varnothing$ ، $X \subset \complement Y$ ، $Y \subset \complement X$ معادلند، روابط $X \cup Y = E$ ، $\complement X \subset Y$ ، $\complement Y \subset X$ معادلند.

اجتماع $\{x\} \cup \{y\}$ را با نماد $\{x, y\}$ نشان می‌دهند، به‌طریقی مشابه $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ به صورت $\{x, y, z\}$ نوشته می‌شود، و غیره.

۳. حاصلضرب دو مجموعه

برای هر دو شئی a و b یک شئی جدید ـ (a, b) زوج مرتب آنها ـ متناظر می‌شود ؛ رابطه $(a, b) = (a', b')$ هم‌ارز « $a = a'$ و $b = b'$ » می‌باشد؛ در حالت خاص $(a,b) = (b,a)$ اگر و تنها اگر $a = b$. اولین (به ترتیب دومین) عنصر زوج مرتب $c = (a, b)$ را اولین (به ترتیب دومین) تصویر c نامیده، می‌نویسیم $a = \mathrm{pr}_1 c$ (به ترتیب $b = \mathrm{pr}_2 c$).

برای دو مجموعه دلخواه داده شده X ، Y (متمایز یا غیرمتمایز) ، مجموعه‌ای (یکتا) از عناصر همه زوج‌های مرتب (x, y) به‌طوری که $x \in X$ و $y \in Y$ موجود است، که به‌علامت $X \times Y$ نشان داده، و

آن را **حاصل‌ضرب دکارتی** (یا به‌طور ساده **حاصل‌ضرب**) X و Y می‌نامند.

به یک رابطه $R(x, y)$ بین $x \in X$ و $y \in Y$ خاصیت $R(pr_1 z, pr_2 z)$ از $z \in X \times Y$ مربوط می‌شود، زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ که شامل عناصری است که برای آنها این خاصیت برقرار است، مجموعه همه زوج‌های مرتبی است که برای آنها $R(x, y)$ درست است، این مجموعه **گراف** رابطه R نامیده می‌شود. هر زیر مجموعه G از $X \times Y$ گرافی از یک رابطه است، یعنی، رابطه $(x, y) \in G$. اگر $X' \subset X$ ، $Y' \subset Y$، آنگاه، گراف رابطه « $x \in X'$ و $y \in Y'$ » ، $X' \times Y'$ است.

برای هر $x \in X$، $G(x)$ مجموعه همه عناصر $y \in Y$ است، به‌طوری که $(x, y) \in G$ و برای هر عنصر $y \in Y$ ، $G^{-1}(y)$ مجموعه همه عناصر $x \in X$ است، به‌طوری که $(x, y) \in G$ ، $G(x)$ و $G^{-1}(y)$ را **بُرش‌های عرضی**[1] G در x و y می‌نامند.

گزاره‌های زیر نتیجه فوری تعریف‌ها هستند :

(۱.۳.۱) رابطه $X \times Y = \varnothing$ هم‌ارز « $Y = \varnothing$ یا $X = \varnothing$ » می‌باشد.

(۱.۳.۲) اگر $X \times Y \neq \varnothing$ (که به معنی غیرتهی بودن X و Y می‌باشد) ، آنگاه، رابطه $X' \times Y' \subset X \times Y$ هم‌ارز رابطه زیر است :

$$« X' \subset X \quad \text{و} \quad Y' \subset Y »$$

(۱.۳.۳) $(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y$.

(۱.۳.۴) $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

حاصل‌ضرب سه مجموعه X و Y و Z به‌صورت $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$ ، تعریف می‌شود و حاصل‌ضرب n مجموعه به‌طریق مشابه با استقراء تعریف می‌شود:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

عنصر z از $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ به صورت $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ به جای

$$((\cdots(x_1, x_2), x_3), \cdots, x_{n-1}), x_n)$$

نوشته می‌شود، x_i را i امین **تصویر** (افکنش i ام[2]) z نامیده، برای $1 \leq i \leq n$ می‌نویسیم $x_i = pr_i z$. به شکلی کلی‌تر، اگر i_1 ، i_2 ، ... ، i_k اندیس‌های متمایزی متعلق به $\{1, 2, \cdots, n\}$ باشند، می‌نویسیم :

$$pr_{i_1 i_2 \cdots i_k}(z) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) \in X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_k}$$

اگر $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ ، به جای $X \times X \times \cdots \times X$ (n بار) می‌نویسیم X^n.

---

1 . Cross sections = Поперечное сечение , поперечный разрез, сечение

در چاپ اول برگردان روسی کتاب ژان دیودونه بُرش‌های عرضی G در x و y تعریف نشده‌اند، و این مفاهیم در چاپ دوم برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان انگلیسی به آن اضافه شده است. مترجم.

2 . i th Projection = i - я Проекция

۴. نگاشت‌ها

فرض کنیم X ، Y دو مجموعه باشند، و $R(x,y)$ رابطه‌ای بین $x \in X$ و $y \in Y$ باشد. گوئیم R **فونکسیونلی** نسبت به y است، اگر، برای هر $x \in X$ ، یک و تنها یک $y \in Y$ موجود باشد، به‌طوری که $R(x,y)$ درست باشد. گراف چنین رابطه‌ای **گراف تابعی**[1] در $X \times Y$ می‌نامند. بنابراین، F چنین زیر مجموعه‌ای از $X \times Y$، به این ترتیب مشخص می‌شود که، برای هر $x \in X$ یک و تنها یک $y \in Y$ موجود است، به طوری که $(x,y) \in F$ ، این عنصر y را **مقدار** F در x نامیده و به علامت $F(x)$ نشان می‌دهیم. گراف تابعی در $X \times Y$ را نیز **نگاشت** از X به Y یا **تابع** تعریف شده روی X ، که مقادیرش در Y می‌گیرد، می‌نامند. معمولاً، به‌خصوص در کلام، درباره نگاشت و گراف تابعی به‌عنوان دو شئی متفاوت که در تناظری یک به یک هستند، سخن گفته می‌شود، و به همین علت از اصطلاح «گراف نگاشت» استفاده می‌شود. اما، این صرفاً تفاوت پسیکولوژیک است (برحسب اینکه شخص به F به صورت «هندسی» می‌نگرد یا «تحلیلی»). در هر حالت، آن‌چه در ریاضیات جدید اساسی است، بررسی نگاشت به‌عنوان شئی تک، یگانه و منفرد، شبیه یک نقطه یا یک عدد، و ایجاد تمایزی روشن بین نگاشت F و $F(x)$ هر یک از مقادیر آن است ، اولی عنصری از $\mathfrak{B}(X \times Y)$ و دومی عنصری از Y است و $F = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$.

زیر مجموعه‌هایی از $X \times Y$ که می‌توانند گراف‌های تابعی باشند، زیر مجموعه‌ای از $\mathfrak{B}(X \times Y)$ تشکیل می‌دهند، که **مجموعه نگاشت‌های** از X **به** Y نامیده، و به علامت Y^X یا $\mathscr{F}(X,Y)$ نشان می‌دهند.

مثال‌هایی از نگاشت‌ها

(۱. ۴. ۱) اگر b عنصری از Y باشد، آنگاه $X \times \{b\}$ یک گراف تابعی است، موسوم به **نگاشت ثابت** از X به Y ، با مقدار b ، مهم است که آن را از عنصر b از مجموعه Y متفاوت گرفت.

(۲. ۴. ۱) برای $Y = X$ ، رابطه $y = x$ فونکسیونالی است برحسب y؛ گراف آن مجموعه همه زوج‌های (x,x) است، و قطر $X \times X$، یا **نگاشت همانی**[2] از X به X نامیده شده، به‌صورت 1_X نشان می‌دهند.

اگر، برای هر $x \in X$ ، یک شئی مانند $T(x)$ متعلق به Y ساخته شود، آنگاه، رابطه $y = T(x)$ فونکسیونالی برحسب y است، نگاشت متناظر آن به‌صورت $x \to T(x)$ نوشته می‌شود. این، البته، تعریف

---
1. Functional graph = функциональный граф
2. Indentity mapping = Тождественное отображение

معمول یک نگاشت است، که ذاتاً منطبق بر تعریف قبلی است، برای اینکه، اگر F یک گراف تابعی باشد، آنگاه این نگاشت $x \to \mathrm{F}(x)$ است. مثال‌های (۱. ۴. ۱) و (۲. ۴. ۱) را می‌توان به ترتیب به‌صورت $x \to b$ و $x \to x$ نوشت. مثال‌های دیگر :

(۳. ۴. ۱) $\mathrm{Z} \to \mathrm{X} - \mathrm{Z}$ نگاشتی است از $\mathfrak{B}(\mathrm{X})$ به خودش.

(۴. ۴. ۱) $z \to \mathrm{pr}_1\, z$ نگاشتی از $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ به X؛ و $z \to \mathrm{pr}_2\, z$ نگاشتی از $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ به Y است، که به **ترتیب اولین و دومین تصویر** در $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ می‌نامند؛

$$\mathrm{pr}_1(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{X}\ ,\ \ \mathrm{pr}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{Y}.$$

از تعریف تساوی مجموعه‌ها (بخش ۱ . ۱) نتیجه می‌شود که، رابطه $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ بین دو نگاشت از X به Y ، هم‌ارز رابطه « $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$ برای هر $x \in \mathrm{X}$ » می‌باشد.

اگر A **زیر مجموعه‌ای** از X ، و F نگاشتی از X به Y باشد، آنگاه مجموعه $\mathrm{F} \cap (\mathrm{A} \times \mathrm{Y})$ گرافی تابعی در $\mathrm{A} \times \mathrm{Y}$ است، که به‌عنوان یک نگاشت، **تحدید** F به A نامیده می‌شود. وقتی F و G دارای تحدیدی برابر نسبت به A باشند (یعنی، وقتی برای هر $x \in \mathrm{A}$ ، $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$) گوئیم F و G **روی A بر هم منطبق‌اند.** نگاشتی مانند F از X به Y که دارای تحدید F' روی A باشد، یک **گسترش (تمدید - توسیع)** از F' روی X می‌نامند، در حالت کلی تعداد زیادی گسترش (توسیع - تمدید) متفاوت از F' وجود دارد.

به عنوان یک اصل، **(اصل انتخاب)** گزاره زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

(۵ . ۴ . ۱) اگر F نگاشتی از X به $\mathfrak{B}(\mathrm{Y})$ باشد، به‌طوری که برای هر $x \in \mathrm{X}$ ، $\mathrm{F}(x) \neq \varnothing$ آنگاه، نگاشتی مانند f از X به Y موجود است، به‌طوری که برای هر $x \in \mathrm{X}$ ، $f(x) \in \mathrm{F}(x)$.

بعضی اوقات می‌توان نشان داد، که قضیه‌ای که به کمک اصل انتخاب ثابت شده، می‌توان بدون استفاده از این اصل نیز ثابت نمود. ما هرگز به سمت چنین مسائلی که کاملاً به منطق ریاضی تعلق دارند، نمی‌رویم.

۵. تصاویر مستقیم و معکوس[1]

فرض کنیم F نگاشتی از X به Y باشد. برای هر زیر مجموعه A از X ، زیر مجموعه‌ای از Y که با خاصیت « $x \in \mathrm{A}$ ئی موجود است، به‌طوری که $y = \mathrm{F}(x)$ » تعریف شده است، **تصویر (یا تصویر مستقیم)** A به‌وسیله (تحت) F نامیده، با نماد $\mathrm{F(A)}$ نشان می‌دهیم.

گزاره‌ها زیر برقرار هستند:

1. Direct and Inverse Images = Образы и прообразы

(۱.۵.۱) $F(A)=\mathrm{pr}_2(F\cap(A\times Y)).$

(۱.۵.۲) رابطه $A\neq\varnothing$ ، هم‌ارز رابطه $F(A)\neq\varnothing$ می‌باشد.

(۱.۵.۳) برای هر $x\in X$ ، $F(\{x\})=\{F(x)\}$.

(۱.۵.۴) از رابطه $A\subset B$ نتیجه می‌شود $F(A)\subset F(B)$.

(۱.۵.۵) $F(A\cap B)\subset F(A)\cap F(B).$

(۱.۵.۶) $F(A\cup B)=F(A)\cup F(B).$

در واقع، از (۱.۵.۴) داریم $F(A)\subset F(A\cup B)$ و $F(B)\subset F(A\cup B)$. از طرف دیگر، اگر $y\in F(A\cup B)$ ، یک $x\in A\cup B$ موجود است، به‌طوری که $y=F(x)$. از اینکه $x\in A$ یا $x\in B$ است، نتیجه می‌شود: $y\in F(A)$ یا $y\in F(B)$.

مثال‌هایی که در آنها $F(A\cap B)\neq F(A)\cap F(B)$ بی‌درنگ به‌دست می‌آیند (به‌عنوان مثال، F را می‌توان اولین تصویر pr_1 از یک حاصلضرب گرفت).

برای هر زیر مجموعه A' از Y زیر مجموعه‌ای از X که با خاصیت $F(x)\in A'$ تعریف شده است، تصویر معکوس A' به‌وسیله (تحت) F نامیده، به علامت $F^{-1}(A')$ نشان می‌دهند. داریم:

(۱.۵.۷) $F^{-1}(A')=\mathrm{pr}_1(F\cap(X\times A')).$

(۱.۵.۸) $F^{-1}(A')=F^{-1}(A'\cap F(X))$

زیرا، برای هر $x\in X$ ، داریم $F(x)\in F(X)$.

(۱.۵.۹) $F^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ (اما، ممکن است برای یک مجموعه غیر تهی $A'\subset Y$ ، $F^{-1}(A')=\varnothing$ ، همانا، برای A'هایی که $A'\cap F(X)=\varnothing$).

(۱.۵.۱۰) از رابطه $A'\subset B'$ نتیجه می‌شود $F^{-1}(A')\subset F^{-1}(B')$.

(۱.۵.۱۱) $F^{-1}(A'\cap B')=F^{-1}(A')\cap F^{-1}(B').$

(۱.۵.۱۲) $F^{-1}(A'\cup B')=F^{-1}(A')\cup F^{-1}(B').$

(۱.۵.۱۳) اگر $A'\supset B'$ ، آنگاه $F^{-1}(A'-B')=F^{-1}(A')-F^{-1}(B')$.

به اختلاف بین (۱.۵.۱۱) و (۱.۵.۵) توجه کنید. اگر $B\subset A\subset X$ ، از (۱.۵.۶) داریم :

$$F(A)=F(B)\cup F(A-B).$$

بنابراین، $F(A-B)\supset F(A)-F(B)$ ، اما، رابطه‌ای بین $F(X-A)$ و $Y-F(A)$ وجود ندارد.[1]

مجموعه $F^{-1}(\{y\})$ همان مقطع عرضی $F^{-1}(y)$ است که در بخش ۱.۳ تعریف شده است، این مجموعه را نیز با علامت $F^{-1}(y)$ نشان می‌دهند، به این ترتیب ، $F(x)=y$ ، هم‌ارز $x\in F^{-1}(y)$ است.

داریم :

---

۱. واضح است که، شمول $Y\setminus F(A)\subset(Y\setminus F(X))\cup F(X\setminus A)$ برقرار است. (از پاورقی متن روسی کتاب).

(۱۴. ۵. ۱) برای $A' \subset Y$ ، $F(F^{-1}(A')) = A' \cap F(X)$.

(۱۵. ۵. ۱) برای $A \subset X$ ، $F^{-1}(F(A)) \supset A$.

بالاخره، رابطه‌های ویژه‌ای که در حاصل‌ضرب‌ها برقرار است، خاطر نشان می‌کنیم :

(۱۶. ۵. ۱) برای هر $A \subset X$ ، $\mathrm{pr}_1^{-1}(A) = A \times Y$ ؛

برای هر $A' \subset Y$ ، $\mathrm{pr}_2^{-1}(A') = X \times A'$.

(۱۷. ۵. ۱) برای هر $Z \subset X \times Y$ ، $Z \subset \mathrm{pr}_1(Z) \times \mathrm{pr}_2(Z)$.

فرض کنیم X ، Y و Z سه مجموعه و A زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ باشد. برای هر نگاشت F از A به Z و هر $x \in \mathrm{pr}_1(A)$ (به ترتیب، هر $y \in \mathrm{pr}_2(A)$) خواهیم نوشت :
$F(x, .)$ که نگاشت $y \to F(x, y)$ از مقطع عرضی $A(x)$ به Z است. (به ترتیب $F(., y)$ نگاشت $x \to F(x, y)$ از مقطع عرضی $A^{-1}(y)$ به Z است). این نگاشت‌ها را **نگاشت‌های جزئی** F می‌نامند.[۱]

مسائل

۱. مثالی از دو زیر مجموعه $A \supset B$ از مجموعه X و یک نگاشت F ارائه دهید که :
$$F(A - B) \neq F(A) - F(B)$$

۲. مثال‌هایی از نگاشت‌های $F : X \to Y$ و زیر مجموعه‌های $A \subset X$ ارائه دهید که :

(a) $F(X - A) \subset Y - F(A)$ ،

(b) $F(X - A) \supset Y - F(A)$ ،

(c) هیچ یک از دو مجموعه $F(X - A)$ و $Y - F(A)$ در مجموعه دیگر واقع نباشد (به‌عنوان مثال، می‌توان X و Y را مجموعه‌هایی متناهی انتخاب کرد).

۳. برای هر زیر مجموعه G از حاصلضرب $X \times Y$ ، هر زیرمجموعه $A \subset X$ ، و هر زیر مجموعه $A' \subset Y$ ، می‌نویسیم $G(A) = \mathrm{pr}_2(G \cap (A \times Y))$ و $G^{-1}(A') = \mathrm{pr}_1(G \cap (X \times A'))$. برای $x \in X$ ، $y \in Y$ به جای $G(\{x\})$ می‌نویسیم $G(x)$ و به جای $G^{-1}(\{y\})$ می‌نویسیم $G^{-1}(y)$. ثابت کنید که چهار خاصیت هم ارزند :

(a) G گراف یک نگاشت از یک زیر مجموعه X به Y است؛

(b) برای هر زیر مجموعه A' از Y ، $G(G^{-1}(A')) \subset A'$؛

(c) برای هر زوج A' ، B' از زیر مجموعه‌های Y ، داریم : $G^{-1}(A' \cap B') = G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B')$ ،

(d) برای هر زوج A' ، B' از زیرمجموعه‌های Y که $A' \cap B' = \varnothing$ ، داریم :
$$G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B') = \varnothing .$$
[راهنمایی : نشان دهید که وقتی (a) برقرار نیست، (b)، (c) و (d) نقض می‌شوند.]

---

۱. این قسمت در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

۶. نگاشت‌های سورژکتیو (پوشا)، اینژکتیو (یک به یک) و بیژکتیو (دو سوئی)

فرض کنیم F نگاشتی از X به Y باشد، F را **سورژکتیو**[1] **(پوشا یا به‌رو)** یا یک **سورژکسیون** نامیم، اگر $F(X) = Y$ باشد، یعنی، اگربرای هر $y \in Y$ لااقل یک $x \in X$ موجود باشد، به‌طوری که $y = F(x)$. نگاشت F را **اینژکتیو**[2] (یا **یک به یک**) یا یک اینژکسیون نامیم، اگر از رابطه $F(x)= F(x')$ نتیجه شود $x = x'$. نگاشت F را بیژکتیو[3] (یا یک **بیژکسیون** یا یک **نگاشت دوسوئی**) نامیم، هرگاه F هم یک به یک باشد و هم پوشا. هر تحدید یک نگاشت دوسوئی یک نگاشت دوسوئی است.

هر نگاشت F از X به Y نیز می‌تواند به‌عنوان نگاشتی از X به $F(X)$ مورد بررسی قرار گیرد. این نگاشت پوشا است، و اگر یک به یک باشد (به‌عنوان نگاشتی از X به Y) ، نگاشتی دوسوئی از X به $F(X)$ خواهد بود.

مثال‌ها

(۱ . ۶ . ۱) اگر A زیرمجموعه دلخواهی از X باشد، تحدید نگاشت همانی $x \to x$ به A یک نگاشت یک به یک j_A است که **نگاشت یک به یک طبیعی**[4] **(متعارف)** از A به X نامیده می‌شود، برای هر زیر مجموعه B از X، $j_A^{-1}(B) = B \cap A$.

(۱ . ۶ . ۲) اگر F نگاشتی از X به Y باشد، نگاشت $x \to (x , F(x))$ یک اینژکسیون (نگاشت یک به یک) از X به $X \times Y$ است.

(۱ . ۶ . ۳) تصویرهای pr_1 و pr_2 نگاشت‌هایی پوشا از $X \times Y$ به ترتیب به X و Y هستند.

(۱ . ۶ . ۴) نگاشت همانی هر مجموعه نگاشتی دوسوئی است.

(۱ . ۶ . ۵) نگاشت $Z \to X - Z$ از $\mathfrak{B}(X)$ به خودش نگاشتی دوسوئی است.

(۱ . ۶ . ۶) اگر $Y = \{b\}$ مجموعه‌ای تک عنصری باشد، نگاشت $x \to (x ,b)$ از X به $X \times \{b\}$ نگاشتی دوسوئی است.

(۱ . ۶ . ۷) نگاشت $(x ,y) \to (y ,x)$ از $X \times Y$ به $Y \times X$ نگاشتی دوسوئی است.

اگر F نگاشتی یک به یک باشد، آنگاه، برای هر $A \subset X$، $F^{-1}(F(A)) = A$ ، و اگر F پوشا

---
1 . Surjective = Сюръективный = Накрытие
2 . Injective = One – to – one = Инъективный = Взаимно однозначный = Вложение
3 . *Bijective* = *Биективный* = *Наложение*
4 . Natural injection = Canonical injection = Естественное вложение

باشد، آنگاه برای هر $A' \subset Y$ ، $F(F^{-1}(A')) = A'$.

اگر F نگاشتی **دو سوئی** باشد، آنگاه ، رابطه $y = F(x)$ طبق تعریف رابطه‌ای تابعی نسبت به x است. نگاشت متناظر از Y به X را **نگاشت معکوس** F نامیده، به علامت $\overset{-1}{F}$ یا F^{-1} نشان می‌دهند (اگر F دوسوئی نباشد، این نگاشت قابل تعریف نیست!). به این ترتیب، روابط $y = F(x)$ و $x = F^{-1}(y)$ هم‌ارز هستند، F^{-1} خود دوسوئی است و $(F^{-1})^{-1} = F$. برای هر زیر مجموعه A' از Y ، تصویر مستقیم A' تحت F^{-1} منطبق بر تصویر معکوس A' تحت F است، بنابراین، نمادها سازگار هستند.

مسئله

فرض کنیم $F: X \to Y$ یک نگاشت باشد. نشان دهید که، خواص زیر هم‌ارز هستند :

(a) F یک به یک است،

(b) برای هر زیر مجموعه A از X ؛ $F^{-1}(F(A)) = A$ ؛

(c) برای هر زوج A ، B از زیر مجموعه‌های X ، $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$؛

(d) برای هر زوج A ، B از زیر مجموعه‌های X که $A \cap B = \varnothing$ ، $F(A) \cap F(B) = \varnothing$؛

(e) برای هر زوج A ، B از زیر مجموعه‌های X به‌طوری که $B \subset A$ ،

$F(A - B) = F(A) - F(B)$.

۷. ترکیب نگاشت‌ها [1]

فرض کنیم X ، Y ، Z سه مجموعه ، F نگاشتی از X به Y ، و G نگاشتی از Y به Z باشد. در این‌صورت $x \to G(F(x))$ نگاشتی از X به Z است، که **ترکیب** نگاشت G و F (به همین ترتیب) نامیده، و به علامت $H = G \circ F$ نشان داده می‌شود.

روابط زیر برقرار هستند:

(۱. ۷. ۱) **برای هر** $A \subset X$ ، $H(A) = G(F(A))$

(۲. ۷. ۱) **برای هر** $A'' \subset Z$ ، $H^{-1}(A'') = F^{-1}(G^{-1}(A''))$

اگر F و G هر دو یک به یک (به ترتیب پوشا، دوسوئی) باشند، آنگاه $H = G \circ F$ یک به یک (به ترتیب پوشا، دوسوئی) خواهد بود. اگر F و G هر دو دو سوئی باشند، آنگاه $H^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. اگر F دوسوئی باشد، آنگاه $F^{-1} \circ F$ نگاشت همانی مجموعه X ، و $F \circ \overset{-1}{F}$ نگاشت همانی مجموعه Y است.

به‌عکس، اگر F نگاشتی از X به Y ، و G نگاشتی از Y به X باشد، به‌طوری که $G \circ F = 1_X$ و $F \circ G = 1_Y$ ، آنگاه F و G هر دو دوسوئی و معکوس یکدیگرند. برای برقرار بودن اولین رابطه لازم است که F یک به یک و G پوشا باشد، و برای برقرار بودن دومین رابطه لازم است که G یک به یک و

1 . Composition of mappings = Композиця отображений

F پوشا باشد.[۱]

فرض کنیم T یک مجموعه، F_1 نگاشتی از X به Y ، F_2 نگاشتی از Y به Z ، و F_3 نگاشتی از Z به T باشد. در این‌صورت $F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$. طرفین این تساوی که نگاشت‌هایی از X به T هستند، به‌صورت $F_3 \circ F_2 \circ F_1$ نیز نوشته می‌شود. ترکیب هر تعداد متناهی از نگاشت‌ها با روشی مشابه تعریف می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم A ، B ، C و D چهار مجموعه ، f نگاشتی از A به B ، g نگاشتی از B به C ، و h نگاشتی از C به D باشد. نشان دهید که، اگر $g \circ f$ و $h \circ g$ دوسوئی باشند، آنگاه f و g و h هر سه دوسوئی خواهند بود.

۲. فرض کنیم A ، B ، C سه مجموعه، f نگاشتی از A به B ، و g نگاشتی از B به C ، h نگاشتی از C به A باشد. نشان دهید که، اگر در میان نگاشت‌های $h \circ g \circ f$ ، $g \circ f \circ h$ ، $f \circ h \circ g$ دو تا پوشا و سومی یک به یک باشد، یا دو تا از آنها یک به یک و سومی پوشا باشد، آنگاه هر سه نگاشت f و g و h دوسوئی خواهند بود.

۳. فرض کنیم F زیر مجموعه‌ای از $X \times Y$ ، و G زیر مجموعه‌ای از $Y \times X$ باشد. با نمادهای مسئله ۳ بخش ۱.۵ ، فرض کنیم که، برای هر $x \in X$ ، $G(F(x)) = \{x\}$ و برای هر $y \in Y$ ، $F(G(y)) = \{y\}$. نشان دهید که، F گراف یک بیژکسیون از X به Y و G گراف معکوس F است.

۴. فرض کنیم X ، Y دو مجموعه، f یک اینژکسیون از X به Y ، و g اینژکسیونی از Y به X باشد. نشان دهید که، دو زیر مجموعه A ، B از X موجود هستند، به‌طوری که $B = X - A$ ، و دو زیر مجموعه A' ، B' از Y موجود هستند، به‌طوری که $B' = Y - A'$ ، و $A' = f(A)$ و $B = g(B')$. [قرار دهید $R = X - g(Y)$ ، و $h = g \circ f$ ؛ برای A اشتراک همه زیر مجموعه‌های M از X انتخاب کنید که $M \supset R \cup h(M)$.]

۸ . خانواده‌های عناصر[۲]، اجتماع، اشتراک و حاصلضرب خانواده‌هایی از مجموعه‌ها، روابط هم‌ارزی

فرض کنیم L و X دو مجموعه باشند. یک نگاشت از L به X گاهی اوقات **خانواده عناصر مجموعه** X که دارای مجموعه **اندیس‌گذار** L است، نیز نامیده، و با نماد $\lambda \to x_\lambda$، یا $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$، یا وقتی اشتباهی رخ ندهد، با نماد (x_λ) نشان داده می‌شود. عمده مثال‌های مهم با **دنباله‌هایی** (با پایان یا بی‌پایان) داده می‌شوند، که متناظر با حالاتی هستند که L زیر مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی از N مجموعه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر است.

باید متوجه تمایز بین **خانواده** $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ از عناصر مجموعه X ، از **زیر مجموعه‌ای** از مجموعه X که از عناصر این خانواده تشکیل شده است، بود. این زیر مجموعه تصویر مجموعه L تحت نگاشت $\lambda \to x_\lambda$ است، و کاملاً می‌تواند شامل تنها یک عنصر باشد. به این ترتیب، خانواده‌های مختلف ممکن

---

۱. مطالب این پاراگراف در متن روسی برگردان چاپ اول کتاب ژان دیودونه وجود ندارد، و از متن انگلیسی چاپ دوم آن ترجمه شده است. مترجم.

2 . Families of elements = Семейства элементов

است دارای مجموعه عناصر یکسانی باشند.

برای هر زیر مجموعه $M \subset L$ ، **تحدید** نگاشت $\lambda \to x_\lambda$ به M ، **زیر خانواده**[1] $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ با مجموعه اندیس‌گذار M نامیده، به‌علامت $(x_\lambda)_{\lambda \in M}$ نشان می‌دهیم.

برای یک دنباله با پایان $(x_i)_{1 \le i \le n}$ مجموعه عناصر دنباله به‌صورت $\{x_1 , x_2 , \cdots , x_n\}$ نوشته می‌شود؛ نمادهایی مشابه ممکن است برای مجموعه عناصر هر دنباله متناهی یا نا متناهی مورد استفاده قرار گیرد.

اگر $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه X باشد[2]، مجموعه عناصر $x \in X$ به‌طوری که $\lambda \in L$ ئی موجود باشد، به‌طوری که $x \in A_\lambda$ ، **اجتماع** خانواده $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ نامیده، به علامت $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ یا $\bigcup_{\lambda} A_\lambda$ نشان می‌دهند. مجموعه عناصر $x \in X$ به‌طوری که برای هر $\lambda \in L$ ، $x \in A_\lambda$ **اشتراک** خانواده $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ نامیده، و به علامت $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ یا $\bigcap_{\lambda} A_\lambda$ نشان می‌دهند. وقتی $L = \{1 , 2\}$ باشد، اجتماع و اشتراک به ترتیب $A_1 \cup A_2$ و $A_1 \cap A_2$ هستند.

به سادگی می‌توان گزاره‌های زیر را ثابت نمود :

$$\complement \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} (\complement A_\lambda) \qquad (۱ . ۸ .۱)$$

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\gamma \in M} B_\gamma \right) = \bigcup_{(\lambda , \gamma) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\gamma) \qquad (۱ . ۸ .۲)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\gamma \in M} B_\gamma \right) = \bigcap_{(\lambda , \gamma) \in L \times M} (A_\lambda \cup B\gamma) \qquad (۱ . ۸ .۳)$$

(۱ . ۸ .۴) اگر F یک نگاشت از X به Y ، و $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه $F\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} F(A_\lambda)$.

اگر F نگاشتی از X به Y ، و $(A'_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Y باشد، آنگاه:

$$F^{-1} \left(\bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda) \qquad (۱ . ۸ .۵)$$

$$F^{-1} \left(\bigcap_{\lambda \in L} A'_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda) \qquad (۱ . ۸ .۶)$$

اگر B زیرمجموعه‌ای از X باشد، یک **پوشش** برای B خانواده‌ای مانند $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ از زیر مجموعه‌های X است ، به‌طوری که $B \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

یک **افراز** X خانواده‌ای مانند $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ از زیر مجموعه‌های X است، به‌طوری که پوششی برای X

---

1 . Subfamily = Подсемемейство

۲. این خانواده نگاشتی از L به مجموعه $\mathfrak{B}(X)$ است. (از پاورقی چاپ اول متن روسی کتاب).

بوده (یعنی $X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$) و برای هر $\lambda \neq \mu$ ، $A_\lambda \cap A_\mu = \varnothing$.

یک **رابطه هم ارزی** روی مجموعه X رابطه‌ای است مانند $R(x, y)$ بین دو عنصر x ، y از X ، که در شرایط زیر صدق می‌کند[1] :

۱. برای هر $x \in X$ ، $R(x, x)$ (**خاصیت انعکاسی**) ؛

۲. روابط $R(x, y)$ و $R(y, x)$ هم‌ارز باشند (**خاصیت تقارنی**) ؛

۳. از روابط $R(x, y)$ و $R(y, z)$ (برای x و y و z در X) نتیجه شود $R(x, z)$ (**خاصیت انتقالی**).

فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ **افرازی** از X باشد، در این‌صورت، واضح است که ، رابطه :

« $\lambda \in L$ ئی موجود است، به‌طوری که $x \in A_\lambda$ و $y \in A_\lambda$ »

یک **رابطه هم‌ارزی** بین x و y است.

به‌عکس، فرض کنیم R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد، و $G \subset X \times X$ **گراف** آن باشد (بخش ۳ . ۱ را ببینید)، برای هر $x \in X$ ، **مقطع عرضی** $G(x)$ (به بخش ۳ . ۱ مراجعه کنید) را **کلاس** (یا **کلاس هم‌ارزی**) x نسبت به R (یا «mod R») می‌نامیم. مجموعه همه زیرمجموعه‌های X که می‌توان برای $x \in X$ ئی به‌صورت $G(x)$ نوشت، زیر مجموعه‌ای از $\mathfrak{B}(X)$ است، که **مجموعه خارج قسمت** X نسبت به R نامیده، و به‌علامت X/R نشان داده می‌شود. نگاشت $x \to G(x)$ را **نگاشت کانونیک (متعارف یا طبیعی)** از X به X/R می‌نامند. این نگاشت طبق تعریفش پوشا است. خانواده زیر مجموعه‌های X که به‌وسیله نگاشت یک به یک طبیعی (اینژکسیون طبیعی) از X/R به $\mathfrak{B}(X)$ تعریف شده، **افرازی** است از X ، که عناصر آن کلاس‌های mod R هستند. در واقع، اگر $z \in G(x) \cap G(y)$ باشد، هر دو رابطه $R(x, z)$ و $R(y, z)$ برقرار خواهند بود. بنابراین، به‌دلیل تقارن، $R(z, y)$ ، و به‌دلیل خاصیت انتقالی رابطه هم‌ارزی ، $R(x, y)$ نیز برقرار خواهد بود، که رابطه $y \in G(x)$ را ثابت می‌کند، در نتیجه، به‌دلیل خاصیت انتقالی، $G(y) \subset G(x)$ و با تعویض x و y ، $G(x) \subset G(y)$ ، بنابراین $G(x) = G(y)$، به‌علاوه، چون برای هر $x \in X$، $x \in G(x)$ (خاصیت انعکاسی)، ادعای ما ثابت می‌شود.

برای هر نگاشت f از X به Y ، رابطه $f(x) = f(x')$ رابطه‌ای هم‌ارزی بین x و x' است.

فرض کنیم $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Y باشد، و برای هر $\lambda \in L$، قرار می‌دهیم $X'_\lambda = \{\lambda\} \times X_\lambda$ (زیر مجموعه $L \times Y$). واضح است که، **تحدید دومین تصویر** $pr_2 : L \times Y \to Y$ به X'_λ ، **بیژکسیون** p_λ از X'_λ به روی X_λ است. زیرمجموعه $S = \bigcup_{\lambda \in L} X'_\lambda \subset L \times Y$ را **مجموع** خانواده (X_λ) (با **اجتماع** این خانواده اشتباه نشود) می‌نامند؛ واضح است که (X'_λ) **افرازی** از S است. معمولاً

---

۱. این قسمت در برگردان روسی چاپ اول کتاب ژان دیودونه وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

X_λ و X'_λ را بواسطه بیژکسیون طبیعی p_λ یکسان می‌گیریم. اگر برای هر $\lambda \in L$، u_λ نگاشتی از X'_λ به یک مجموعه T باشد، یک و تنها یک نگاشت u از S به T وجود دارد که در هر X'_λ منطبق بر u_λ است.

با نمادهایی مشابه، زیر مجموعه‌ای از Y^L (بخش ۴ . ۱ را ببینید.) را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که از همه نگاشت‌های $\lambda \to x_\lambda$ از L به Y تشکیل شده است، به‌طوری که، برای هر $\lambda \in L$، داشته باشیم $x_\lambda \in X_\lambda$. این زیرمجموعه را **حاصلضرب** خانواده $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ نامیده، به علامت $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ نشان می‌دهیم. برای هر $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$، و هر اندیس $\mu \in L$ می‌نویسیم: $x_\mu = \mathrm{pr}_\mu(x)$، به شکلی کلی‌تر، برای هر زیر مجموعه غیرتهی J از L، می‌نویسیم: $\mathrm{pr}_J(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in J}$ (زیر خانواده $x = (x_\lambda)_{\lambda \in J}$). از اصل انتخاب (۱ . ۴ . ۵) نتیجه می‌شود که، اگر برای هر $\lambda \in L$، داشته باشیم، $X_\lambda \neq \varnothing$، آنگاه $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda \neq \varnothing$ و هر یک از نگاشت‌های pr_J **پوشا است**. به‌علاوه، اگر J و $L - J$ هر دو غیر تهی باشند، آنگاه، نگاشت $x \to (\mathrm{pr}_J(x), \mathrm{pr}_{L-J}(x))$ یک **بیژکسیون** از $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$، به روی حاصلضرب $(\prod_{\lambda \in L} X_\lambda) \times (\prod_{\lambda \in L-J} X_\lambda)$ است. اگر برای هر $\lambda \in L$، u_λ نگاشتی از یک مجموعه T به X_λ باشد، نگاشت یکتای u از T به $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ موجود است، به‌طوری که، برای هر $\lambda \in L$، $\mathrm{pr}_\lambda \circ u = u_\lambda$: به هر $t \in T$، عنصر $u(t) = (u_\lambda(t)) \in \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ مربوط می‌شود. نگاشت u معمولاً به‌صورت (u_λ) نوشته می‌شود.

مسئله

فرض کنیم $(X_i)_{1 \le i \le n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد. برای هر زیر مجموعه H از اعداد طبیعی فاصله $[1, n]$، قرار می‌دهیم. $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$ و $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. فرض کنیم $\mathfrak{I}_k$ مجموعه همه زیر مجموعه‌هایی از $[1, n]$ باشد، که دارای k عنصر هستند. نشان دهید که:

اگر $2k \le n+1$، $\bigcup_{H \in \mathfrak{I}_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in \mathfrak{I}_k} P_H$

اگر $2k \ge n+1$، $\bigcup_{H \in \mathfrak{I}_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in \mathfrak{I}_k} P_H$

۹. مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر (شمارا)[1]

مجموعه X را **هم‌توان** با مجموعه Y نامیم، هرگاه نگاشتی دوسوئی از X به Y وجود داشته باشد.

۱. در کتاب‌های ریاضی دانشگاهی به زبان فارسی در ترجمه واژه انگلیسی Denumberable sets که برگردان روسی آن واژه Счётные множества می‌باشد، از واژه‌های «مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر»، «مجموعه‌های شمارا»، «مجموعه‌های شمارای نامتناهی» و ... استفاده شده است. مترجم.

واضح است که، X هم‌توان با X است؛ اگر X هم‌توان با Y باشد، Y نیز هم‌توان با X خواهد بود؛ اگر X و Y هر دو هم‌توان با Z باشند، X هم‌توان با Y خواهد بود. یک مجموعه را **نامتناهی شمارش‌پذیر (شمارا ـ شمارای نامتناهی)** نامیم، هرگاه هم‌توان با N مجموعه اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

(۱. ۹. ۱) هر زیرمجموعه از N مجموعه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر، متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر است.

فرض کنیم $A \subset N$ نامتناهی باشد. نگاشت $n \to x_n$ را از N به A با پروسه استقرائی زیر تعریف می‌کنیم. x_0 را به عنوان کوچک‌ترین عنصر A در نظر گرفته ، x_n را کوچک‌ترین عنصر مجموعه $A - \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$ می‌گیریم، که طبق فرض غیرتهی است. این نخست ثابت می‌کند که، برای $i < n$ ، $x_i \neq x_n$. بنابراین ، نگاشت $n \to x_n$ یک به یک است. در ادامه ، ثابت می‌کنیم ، به ازای $i < n$ ، $x_i < x_n$. استقراء را روی i وقتی n ثابت نگه داشته شده باشد به‌کار می‌گیریم : طبق تعریف x_n ، داریم $x_0 < x_n$ ، و اگر برای $j < i$ ثابت شده باشد که $x_j < x_n$ ، آنگاه ، طبق تعریف x_i ، داریم $x_i \leq x_n$ ، و چون $x_i \neq x_n$ ، پس $x_i < x_n$. سپس، با استفاده از استقراء روی n ، از رابطه $x_i < x_n$ برای $i < n$ ، فوراً نتیجه می‌شود که، برای هر n ، $n \leq x_n$. بنابراین، اگر $a \in A$ ، خواهیم داشت $a \leq x_a$. حال ، فرض کنیم $a > x_0$ و m بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از a باشد، به‌طوری که $x_m < a$. اگر عددی صحیح مانند $b \in A$ موجود باشد ، به‌طوری که $x_m < b < a$ ، آنگاه ، باید طبق تعریف داشته باشیم $x_{m+1} \leq b < a$ ، که با تعریف m در تناقض است. بنابراین، a کوچک‌ترین عنصر $A - \{x_0, \cdots, x_m\}$ است ؛ به عبارت دیگر، $a = x_{m+1}$ ، و نگاشت $n \to x_n$ پوشا خواهد بود، و این همان چیزی است که باید ثابت می‌شد.

از (۱ . ۹ . ۱) نتیجه می‌شود که، هر زیرمجموعه از یک مجموعه نامتناهی شمارش‌پذیر یا متناهی است یا نامتناهی شمارش‌پذیر؛ چنین مجموعه‌ای را نیز **مجموعه حداکثر شمارش‌پذیر** می‌نامند.

(۲ . ۹ . ۱) اگر A یک مجموعه نامتناهی شمارش‌پذیر، و f نگاشتی پوشا از A به مجموعه B باشد، آنگاه B مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر خواهد بود.

فرض کنیم $n \to a_n$ یک نگاشت دوسوئی از N به A باشد. در این‌صورت $n \to f(a_n)$ نگاشتی از N به B خواهد بود، و بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $A = N$. برای هر $b \in B$ ، مجموعه $f^{-1}(b)$ طبق فرض تهی نیست؛ فرض کنیم $m(b)$ کوچک‌ترین عنصر آن باشد. در این صورت، $f(m(b)) = b$ ، که فوراً از آن نتیجه می‌شود که m نگاشتی یک به یک از B به N است. m را می‌توان به‌عنوان یک بیژکسیون از B به روی $m(B) \subset N$ مورد بررسی قرار داد، و از (۱ . ۹. ۱) نتیجه می‌شود که، $m(B)$ حداکثر شمارش‌پذیر است، و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

خاطرنشان می‌کنیم که، اگر مجموعه A حداکثر شمارش‌پذیر باشد، همواره یک نگاشت **پوشا** از N بر

روی A وجود دارد. این مطلب اگر A نامتناهی باشد واضح است؛ در غیر این‌صورت، یک نگاشت دوسوئی f از یک فاصله[۱] $0 \le i \le m$ به روی A وجود دارد، و با گسترش f به g به‌صورت $g(n) = f(m)$ برای $n > m$، نگاشت پوشای مطلوب به‌دست می‌آید.

(۱.۹.۳) مجموعه $\mathrm{N} \times \mathrm{N} = \mathrm{N}^2$ نامتناهی شمارش‌پذیر است.

نگاشت یک به یک f را از $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ به N به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

(« شمارش‌گذاری قطری » . حتی ثابت می‌شود f دو سوئی است. اما، ما به این نتیجه نیازی نداریم). در واقع، اگر $x + y = a$ ، آنگاه $(a+1)(a+2)/2 = a+1+a(a+1)/2$ ؛ بنابراین، اگر $x + y < x' + y'$ ، آنگاه، با توجه به اینکه $y \le a$ ، خواهیم داشت :

$$f(x, y) \le a + a(a+1)/2 < f(x', y')$$

و اگر $x + y = x' + y'$ و $y' < y$ ، آنگاه $f(x, y) - f(x', y') = y - y'$. به این ترتیب، از رابطه $(x, y) \ne (x', y')$ نتیجه می‌شود $f(x, y) \ne f(x', y')$. حال، با استفاده از (۱ . ۹ . ۱) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

گوئیم، خانواده $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ **نامتناهی شمارش‌پذیر (به ترتیب حداکثر شمارش‌پذیر)** است، هرگاه مجموعه اندیس‌گذار L نامتناهی شمارش‌پذیر (به ترتیب حداکثر شمارش‌پذیر) باشد.

(۱ . ۹ . ۴) اجتماع خانواده نامتناهی شمارش‌پذیری از مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر، مجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر است.

فرض کنیم $(\mathrm{A}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ خانواده‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر باشد. در این صورت ، یک نگاشت دوسوئی $n \to \lambda_n$ از N به روی L ، و برای هر $\lambda \in \mathrm{L}$ ، یک بیژکسیون $n \to f_\lambda(n)$ از N بر روی A_λ موجود خواهد بود. فرض کنیم $\mathrm{A} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{A}_\lambda$ و نگاشت $(m, n) \to f_{\lambda_n}(m)$ از $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ به A را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نگاشت پوشا است. در واقع، اگر $x \in \mathrm{A}_\mu$ ، آنگاه یک n موجود خواهد بود، به‌طوری که $\mu = \lambda_n$ ، و m ی وجود دارد، به‌طوری که $x = f_\mu(m) = f_{\lambda_n}(m)$. اکنون نتیجه مطلوب از (۱ . ۹ . ۳) و (۱ . ۹ . ۲) و از اینکه A نامتناهی است، حاصل می‌شود.

نتیجه (۱ . ۹ . ۴) معتبر باقی خواهد ماند، اگر همه جا به‌جای واژه **« نامتناهی شمارش‌پذیر»**

---

۱ . i و m اعدادی طبیعی فرض شده اند، و منظور از فاصله $[0, m]$ نقاط صحیح این فاصله است. مترجم.

واژه «**حداکثر شمارش‌پذیر**» گذاشته شود. فقط باید، در اثبات از تبصره بعد از گزاره (۲. ۹. ۱) استفاده نموده، به جای نگاشت‌های دوسویی، نگاشت‌های پوشا گذاشت.

بالاخره، ما نتیجه زیر را به‌عنوان یک اصل مورد مطالعه قرار خواهیم داد:

(۵ . ۹ . ۱) هر مجموعه نامتناهی دارای زیرمجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر است.

مسائل

۱. ثابت کنید که $\mathfrak{F}(\mathrm{N})$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های متناهی N نامتناهی شمارش‌پذیر است (آن را به صورت اجتماع نامتناهی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر بنویسید).

۲. نشان دهید که، مجموعه همه دنباله‌های متناهی از عناصر N نامتناهی شمارش‌پذیر است. (از مسئله ۱ استفاده نموده؛ تفاوت بین یک دنباله و مجموعه عناصر این دنباله را در نظر بگیرید!)

۳. نتیجه مسئله ۴ بخش ۷ . ۱ را با روش زیر ثابت کنید : فرض کنیم $u = g \circ f$ ، $v = f \circ g$ ، و u_n و v_n را با استقراء به‌صورت $u_n = u_{n-1} \circ u$ و $v_n = v_{n-1} \circ v$ تعریف کنید، سپس، روی X (به ترتیب روی Y) دنباله نزولی $u_n(\mathrm{X})$ (به ترتیب $v_n(\mathrm{Y})$) از مجموعه‌ها و تصاویر آنها تحت f (به ترتیب تحت g) در Y (به ترتیب در X) را مورد بررسی قرار دهید.

۴. ثابت کنید که، برای اینکه مجموعه‌ای مانند X بی‌پایان باشد، شرط زیر لازم و کافی است:
برای هر نگاشت $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ ، زیر مجموعه غیرتهی A از X موجود است، به‌طوری که $\mathrm{A} \neq \mathrm{X}$ و $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ (اگر f دارای این خاصیت نباشد و X نامتناهی باشد، نخست نشان دهید که، X باید نامتناهی شمارش‌پذیر باشد، و می‌توان فرض کرد که $\mathrm{X}=\mathrm{N}$ و برای $n \geq 0$ ، $f(n) > n$ ؛ نشان دهید که، این مطلب منجر به یک تناقض می‌شود) .

۵. فرض کنیم E یک مجموعه نامتناهی، و D یک زیر مجموعه حداکثر شمارش‌پذیر از E باشد، به‌طوری که $\mathrm{E} - \mathrm{D}$ نامتناهی باشد. نشان دهید که $\mathrm{E} - \mathrm{D}$ هم توان E است. (با استفاده از (۴ . ۹ . ۱) و (۵ . ۹ . ۱) نگاشتی دوسوئی بین E و $\mathrm{E} - \mathrm{D}$ تعریف کنید).

فصل II

اعداد حقیقی

مطالب این فصل کاملاً کلاسیک است. تفاوت عمده آنها با بیشتر شرح و روایت‌ها از تئوری اعداد حقیقی در این است که، در اینجا خواص آنها از تعداد معینی از گزاره‌ها که به‌عنوان اصول گرفته شده‌اند، ناشی شده است، در صورتی‌که، در واقع، این گزاره‌ها می‌توانند به‌عنوان نتایجی از اصول تئوری مجموعه‌ها (یا از اصول تئوری اعداد طبیعی، همراه با قسمت‌هایی از تئوری مجموعه‌ها، که امکان می‌دهد، ساختمان کلاسیک « بریدگی‌های ددکیند» یا « دنباله‌های اساسی کانتور» به‌کار گرفته شوند) ثابت شوند. این اثبات‌ها فایده منطقی زیادی دارند و از نظر تاریخی به روشن شدن مفهوم کلاسیک (و تا اندازه‌ای تیره و مبهم) « پیوستار» کمک زیادی کرده‌اند، اما، آنها هیچ‌گونه رابطه‌ای با آنالیز ندارند و لازم نیست به فکر تحمیل آنها به دانشجو بود. خواننده علاقه‌مند می‌تواند آنها را عملاً در هر کتاب آنالیز ببینند. برای بیان تفصیلی و روشن و مرتب این مطالب، به کتاب لانداو[1] [۱۶] مراجعه نمائید.

۱. اصول اعداد حقیقی

هیأت اعداد حقیقی مجموعه $\mathbf{R}$ است که روی آن :

(۱) دو نگاشت $(x, y) \to x+y$ و $(x, y) \to xy$ از $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$؛

(۲) رابطه $x \le y$ (همچنین، می‌نویسیم $y \ge x$) بین عناصر $\mathbf{R}$ که در چهارگروه اصول زیر صدق می‌کنند، تعریف شده باشد :

(I) مجموعه $\mathbf{R}$ یک هیات است. به‌عبارت دیگر :

(I . ۱) $x+(y+z)=(x+y)+z$ ؛

(I . ۲) $x+y=y+x$ ؛

(I . ۳) عنصری مانند $0 \in \mathbf{R}$ ، موجود است، به‌طوری که برای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $0+x=x$؛

---

۱. شماره کتاب لانداو (Landau = Ландау) در کتابنامه ترجمه روسی چاپ اول کتاب ژان دیودونه [19] است. مترجم

(I . ۴) برای هر عنصر $x \in \mathbf{R}$ ، عنصری مانند $-x \in \mathbf{R}$ موجود است، به‌طوری که $x + (-x) = 0$ ؛

(I . ۵) $x(yz) = (xy)z$ ؛

(I . ۶) $xy = yx$ ؛

(I . ۷) عنصری مانند $1 \neq 0$ در $\mathbf{R}$ موجود است ، به‌طوری که برای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $1 . x = x$ ؛

(I . ۸) برای هر عنصر $x \neq 0$ در $\mathbf{R}$ ، عنصری مانند $x^{-1} \in \mathbf{R}$ (که به‌صورت $1/x$ نیز می‌نویسیم) موجود است، به‌طوری $xx^{-1} = 1$ ؛

(I . ۹) $x(y + z) = xy + xz$.

ما نتایج مقدماتی این اصول (« نظریه عمومی هیات‌ها ») را دانسته شده فرض خواهیم کرد[1].

(II) مجموعه $\mathbf{R}$ **یک هیات مرتب** است. به این معنی که، اصول زیر برقرار است:

(II . ۱) از روابط $x \leq y$ و $y \leq z$ نتیجه می‌شود $x \leq z$ ؛

(II . ۲) رابطه « $x \leq y$ و $y \leq x$ » هم‌ارز رابطه $x = y$ است ؛

(II . ۳) برای هر دو عنصر x و y از $\mathbf{R}$ ، یا $x \leq y$ یا $y \leq x$ ؛

(II . ۴) از رابطه $x \leq y$ نتیجه می‌شود $x + z \leq y + z$ ؛

(II . ۵) از روابط $0 \leq x$ و $0 \leq y$ نتیجه می‌شود $0 \leq xy$.

رابطه « $x \leq y$ و $x \neq y$ » به‌صورت $x < y$ ، یا $y > x$ نوشته می‌شود. برای هر زوج a و b از عناصر $\mathbf{R}$ به‌طوری که $a < b$ ، مجموعه اعداد حقیقی x که در روابط $a < x < b$ صدق می‌کنند، **فاصله باز با نقطه آغاز** a و **نقطه انتهای** b نامیده، و به‌صورت] a , b [نشان می‌دهند؛ مجموعه اعداد حقیقی x به‌طوری که $a \leq x \leq b$ ، **فاصله بسته با نقطه آغاز** a و **نقطه انتهای** b نامیده و به علامت [a , b] نشان می‌دهند (برای $a = b$ نماد $[a , b]$ به معنی مجموعه تک نقطه‌ای $\{a\}$ است) ؛ مجموعه اعداد حقیقی x به‌طوری که $a < x \leq b$ (به ترتیب $a \leq x < b$) **فاصله نیم‌باز با نقطه شروع** a و **نقطه انتهای** b ، باز در a (به ترتیب در b) ، بسته در b (به ترتیب در a) می‌نامند و به علامت] a , b] (به ترتیب [a , b [ ) نشان می‌دهند. نقطه شروع و نقطه انتهای یک فاصله را « **نقاط انتهایی**» آن فاصله می‌نامند.

(III) $\mathbf{R}$ **یک هیات مرتب ارشمیدسی**[2] است، یعنی، در آن **اصل ارشمیدس** برقرار است: برای هر زوج x و y از اعداد حقیقی که $x > 0$ ، $y \geq 0$ ، عددی صحیح مانند n موجود است، به‌طوری که $y \leq n . x$.

---

۱. در چاپ اول برگردان روسی کتاب ژان دیودونه به خواننده توصیه شده است مرجع :

А.Г.Курош, Лекции по общей алгебре, физматгиз, 1962

(آ . گ . کوروش، درس‌هایی در جبر عمومی) را ببینند. مترجم.

2. Archimedean ordered field = Архимедово упорядоченное поле

(IV) R در **اصل بازه‌های تودرتو صدق**[1] می‌کند : اگر $([a_n , b_n])$ دنباله‌ای از فواصل بسته باشد، به‌طوری که برای هر n، $a_n \le a_{n+1}$ و $b_{n+1} \le b_n$ ، آنگاه اشتراک این دنباله از فواصل غیرتهی خواهد بود.

۲. خواص ترتیبی اعداد حقیقی

رابطه $x \le y$ هم‌ارز رابطه « $x < y$ **یا** $x = y$ » می‌باشد.

(۲ . ۲ . ۱) برای هر زوج x ، y از اعداد حقیقی یک و تنها یکی از سه رابطه $x < y$, $x = y$ و $x > y$ برقرار است.

مطلب فوق نتیجه (۳ . II) و (۲ . II) است. زیرا، اگر $x \neq y$ باشد، آنگاه طبق (۲ . II)، روابط $x < y$ و $x > y$ تواماً نمی‌توانند برقرار باشند.

(۲ . ۲ . ۲) از هر یک از روابط « $x \le y$ و $y < z$ » و « $x < y$ و $y \le z$ » رابطه $x < z$ نتیجه می‌شود.

زیرا، طبق (۱ . II)، از آنها رابطه $x \le z$ نتیجه می‌شود، و اگر $x = z$ باشد، باید داشته باشیم $x \le y$ و $y < x$ (یا $x < y$ و $y \le x$) که محال است.

(۲ . ۲ . ۳) اگر A زیر مجموعه‌ای متناهی از R باشد، A دارای یک بزرگ‌ترین عنصر b و یک کوچک‌ترین عنصر a است. (یعنی، برای هر $x \in \mathrm{A}$ ، داریم $a \le x \le b$).

از استقراء روی n تعداد عناصر A استفاده می‌کنیم. خاصیت فوق برای $n = 1$ واضح است. فرض کنیم c عنصری از A باشد، و $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \{c\}$. چون B دارای $n - 1$ عنصر است، پس، B دارای یک کوچک‌ترین عنصر a' و یک بزرگ‌ترین عنصر b' است. اگر $a' \le c \le b'$ ، آنگاه a' کوچک‌ترین و b' بزرگ‌ترین عنصر A خواهد بود. اگر $b' \le c$ باشد، آنگاه c بزرگ‌ترین و a' کوچک‌ترین عنصر A ، و اگر $c \le a'$ باشد، آنگاه c کوچک‌ترین و b' بزرگ‌ترین عنصر A خواهد بود.

(۲ . ۲ . ۴) اگر A زیر مجموعه‌ای متناهی از R باشد که دارای n عضو است، آنگاه یک نگاشت دوسوئی یکتای f از مجموعه I_n مجموعه اعداد صحیحی که در شرط $1 \le i \le n$ صدق می‌کنند، بر روی A وجود دارد، به‌طوری که برای $i < j$ ، $f(i) < f(j)$ (نگاشت f را ترتیب طبیعی مجموعه A می‌نامند.)

---

1 . Axiom of nested intervals = Аксиома о вложенных промежутках

از استقراء روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$ نتیجه واضح است. فرض کنیم b بزرگ‌ترین عنصر A باشد، که طبق (۳ . ۲ . ۲) وجود دارد، و $B = A - \{b\}$ ، و فرض کنیم g ترتیب طبیعی مجموعه B باشد. هر نگاشت f از I_n به روی A دارای خاصیت شرح داده شده در بالا باید چنان باشد که $f(n) = b$ ، بنابراین $f(I_{n-1}) = B$ ، و از این رو f باید روی I_{n-1} با ترتیب طبیعی g از مجموعه B برابر باشد، که نشان می‌دهد f یکتا است. به‌عکس، با تعریف f به‌عنوان نگاشتی برابر g روی I_{n-1} و به‌طوری که $f(n) = b$ ، فوراً دیده می‌شود که، f دارای خواص مطلوب است.

(۵ . ۲ . ۲) اگر (x_i) و (y_i) دو دنباله متناهی از n عدد حقیقی باشند $(1 \le i \le n)$ ، به‌طوری که برای هر i ، $x_i \le y_i$ آنگاه :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

اگر علاوه بر آن، برای لااقل یک اندیس i داشته باشیم $x_i < y_i$ ، آنگاه :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

برای $n = 2$ ، از فرض، طبق (۴ . II) ، به‌طور متوالی نتیجه می‌شود:

$$x_1 + x_2 \le y_1 + x_2 \le y_1 + y_2$$

بنابراین، نخستین قسمت حکم در این حالت حاصل می‌شود. علاوه بر آن، اگر $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ؛ آنگاه $x_1 + x_2 = x_1 + y_2 = y_1 + y_2$ ، و در نتیجه $x_2 = y_2$ و $x_1 = y_1$ که از آن دومین قسمت حکم نیز در حالت $n = 2$ ثابت می‌شود. با به‌کار بردن استقراء روی n ، و استفاده از نتیجه به‌دست آمده کنونی برای حالت $n = 2$ ، اثبات به پایان می‌رسد.

(۶ . ۲ . ۲) رابطه $x \le y$ هم‌ارز رابطه $x + z \le y + z$ است؛ نتیجه‌ای مشابه وقتی به‌جای $\le$ ، علامت $<$ گذاشته شود، برقرار است.

طبق (۴ . II) ، می‌دانیم، از رابطه $x \le y$ نتیجه می‌شود $x + z \le y + z$. به‌عکس، از رابطه $x + z \le y + z$ نتیجه می‌شود $x + z + (-z) \le y + z + (-z)$ ، و یا $x \le y$. از طرف دیگر، $x + z = y + z$ معادل رابطه $x = y$ می‌باشد.

(۷ . ۲ . ۲) روابط $x \le y$ ، $0 \le y - x$ ، $x - y \le 0$ و $-y \le -x$ هم‌ارزند : نتیجه مشابهی با تعویض $\le$ به $<$ برقرار است.

مطلب فوق نتیجه (۶ . ۲ . ۲) است؛ وقتی به‌طور متوالی $z = -x$ ، $z = -y$ و $z = -x - y$ انتخاب شود.

اعداد حقیقی که در شرط $x \geq 0$ (به ترتیب $x > 0$) صدق می‌کنند، **مثبت** (به ترتیب **اکیداً مثبت**) نامیده می‌شوند. اعداد حقیقی که $x \leq 0$ (به ترتیب $x < 0$) **منفی** (به ترتیب **اکیداً منفی**) نامیده می‌شوند. مجموعه اعداد مثبت (به ترتیب اکیداً مثبت) را به علامت $\mathbf{R}_+$ (به ترتیب $\mathbf{R}_+^*$) نشان می‌دهند.[1]

(۲ . ۲ . ۸) اگر x_1، ...، x_n مثبت باشند، آنگاه $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ نیز مثبت خواهد بود، به‌علاوه $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$ ، مگر اینکه $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ باشد.

مطلب فوق حالت خاصی از (۲ . ۲ . ۵) است.

در حالت خاص، رابطه $x \geq 0$ (به ترتیب $x > 0$) هم ارز رابطه $n . x \geq 0$ (به ترتیب $n . x > 0$) برای هر عدد صحیح $n > 0$ است.

برای یک فاصله با نقطه شروع a و نقطه انتهای b، عدد مثبت $b - a$ را **طول** این فاصله می‌نامند.

برای هر عدد حقیقی x، $|x|$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:[2]

$|x| = x$ اگر $x \geq 0$، و $|x| = -x$ اگر $x \leq 0$ ، بنابراین $|-x| = |x|$ ؛ $|x|$ را **قدر مطلق** x می‌نامند. $|x| = 0$ هم‌ارز $x = 0$ می‌باشد. می‌نویسیم $x^+ = \dfrac{x + |x|}{2}$ (**قسمت مثبت** x) و $x^- = \dfrac{|x| - x}{2}$ (**قسمت منفی** x). بنابراین، اگر $x \geq 0$ ، $x^+ = x$ ؛ اگر $x \leq 0$ ، $x^+ = 0$ ؛ اگر $x \geq 0$ ، $x^- = 0$ و اگر $x \leq 0$ ، $x^- = -x$ ؛ و $x = x^+ - x^-$ ، $|x| = x^+ + x^-$.

(۲ . ۲ . ۹) اگر $a > 0$ ، آنگاه رابطه $|x| \leq a$ هم‌ارز رابطه $-a \leq x \leq a$ و رابطه $|x| < a$ هم‌ارز رابطه $-a < x < a$ است.

زیرا، اگر $x \geq 0$ باشد، رابطه $x > -a$ همواره برقرار خواهد بود، و رابطه $|x| \leq a$ (به ترتیب $|x| < a$) هم ارز رابطه $x \leq a$ (به ترتیب $x < a$) می‌باشد، و اگر $x \leq 0$ ، $x < a$ همواره برقرار خواهد بود و رابطه $|x| \leq a$ (به ترتیب $|x| < a$) هم ارز رابطه $-x \leq a$ (به ترتیب $-x < a$) می‌باشد.

(۲ . ۲ . ۱۰) برای هر زوج x، y از اعداد حقیقی :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad , \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| .$$

اولین رابطه وقتی x، y هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند، طبق تعریف و (۲ . ۲ . ۸) واضح است. اگر

---

۱. با اینکه اصطلاحات به‌کار برده شده در این قسمت از کتاب دیودونه متفاوت از بیشتر کتاب‌های ریاضی است (در واقع، در بیشتر کتاب‌های ریاضی، اگر $x \geq 0$ باشد، x را عددی غیرمنفی، و اگر $x \leq 0$ باشد، x را عددی غیر مثبت نامیده‌اند) ، در ترجمه فارسی کتاب اجباراً از اصطلاحات به‌کار گرفته شده توسط مؤلف استفاده شده است. مترجم.

۲. نحوه ترتیب بیان مطالب مربوط به $|x|$ ، x^+ و x^- در چاپ اول متن روسی کتاب کمی متفاوت از چاپ دوم متن انگلیسی آن است. مترجم.

مثلاً $y \leq 0 \leq x$ باشد، آنگاه $x + y \leq y \leq y + |x| = |y| + |x|$ و

$$x + y \geq x \geq x - |y| = -|x| - |y|.$$

از اولین نامساوی نتیجه می‌شود :

$$|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| \quad \text{و} \quad |x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|$$

بنابراین $|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|-$.

از (۲. ۲. ۱۰) با روش استقراء ریاضی نتیجه می‌شود که :

$$|x_1 + x_2 + \cdots x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

(۲. ۲. ۱۱) اگر $z \geq 0$ ، آنگاه، از رابطه $x \leq y$ نتیجه می‌شود $xz \leq yz$.

در واقع، طبق (۲. ۲. ۷) ، از رابطه $x \leq y$ نتیجه می‌شود $0 \leq y - x$ ، بنابراین، طبق (II. ۵) ، $0 \leq z(y - x) = zy - zx$.

(۲. ۲. ۱۲) از روابط $0 \leq x$ و $y \geq 0$ نتیجه می‌شود $xy \leq 0$ ، و از روابط $0 \leq x$ و $y \leq 0$ نتیجه می‌شود $xy \geq 0$. نتایج مشابهی وقتی به‌جای $\leq$ ، $>$ گذاشته شود، برقرار است. در حالت خاص، برای هر عدد حقیقی x ، $x^2 \geq 0$ ، و اگر $x \neq 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$.

اولین گزاره از (II. ۵) و از روابط $(-x)(-y) = xy$, $(-x)y = -(xy)$ نتیجه می‌شود، از طرف دیگر، اگر $xy = 0$ ، آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$.

از (۲. ۲. ۱۲) نتیجه می‌شود، برای هر زوج x ، y از اعداد حقیقی:

$$|xy| = |x|.|y|$$

از (۲. ۲. ۱۲) و (۱. ۷) نتیجه می‌شود که $1 = 1^2 \geq 0$ ؛ بنابراین، طبق (۲. ۲. ۸) ، عدد حقیقی $n.1$ (1 ، n بار جمع شود) برای هر $n > 0$ اکیداً مثبت خواهد بود. این نشان می‌دهد که نگاشت $n \to n.1$ از مجموعه اعداد طبیعی به $\mathbf{R}$ یک به یک، و حافظ روابط ترتیب، جمع و ضرب است. بنابراین، اعداد صحیح طبیعی به کمک این نگاشت با اعداد حقیقی متناظرشان **یکسان** گرفته می‌شوند.

(۲. ۲. ۱۳) اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^{-1} > 0$. برای $z > 0$ ، رابطه $x \leq y$ (به ترتیب $x < y$) هم‌ارز $xz \leq yz$ (به ترتیب $xz < yz$) می‌باشد. رابطه $0 < x < y$ هم‌ارز $0 < y^{-1} < x^{-1}$ و $0 < x^n < y^n$ برای هر عدد صحیح n است.

اولین گزاره از این حقیقت ناشی می‌شود که $xx^{-1} = 1 > 0$ ، بنابراین، طبق (۲. ۲. ۱۲) ، $x^{-1} > 0$ ، دومین گزاره نتیجه اولین گزاره و (۲. ۲. ۱۱) و رابطه $x = (xz)z^{-1}$ می‌باشد. سومین گزاره به وضوح

نتیجه دومین گزاره است. آخرین گزاره با استقراء روی $n > 0$ از روابط $x^n < x^{n-1}y < y^n$ نتیجه می‌شود.

تبصره . یک فاصله باز $]a, b[$ از $\mathbf{R}$ (با $a < b$) غیرتهی است. زیرا، از رابطه $b - a > 0$ ، طبق (۱۳. ۲. ۲) ، نتیجه می‌شود $(b-a)/2 > 0$ ؛ بنابراین $a < (a+b)/2 < b$.

از این تبصره نتیجه زیر به‌دست می‌آید :

(۱۴. ۲. ۲) فرض کنیم J_1 ، ... ، J_n ، n فاصله باز باشند، که دو به دو نقطه مشترکی نداشته باشند، و فرض کنیم I فاصله‌ای شامل $\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{J}_k$ باشد. در این‌صورت، اگر l_k طول J_k $(1 \le k \le n)$ باشد، آنگاه l طول I در رابطه $l_1 + l_2 + \cdots l_n \le l$ صدق می‌کند.[1]

فرض کنیم $\mathrm{I} =]a, b[$ ، $\mathrm{J}_k =]c_k, d_k[$. برای هر $k \neq 1$ ، داریم $c_k < d_k \le c_1$ یا ،

$$d_1 \le c_k < d_k$$

زیرا، در غیر این‌صورت $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_k$ تهی نخواهد بود. برای $n = 1$ ، خاصیت مطلوب فوراً ثابت می‌شود، زیرا $a \le c_1 < d_1 \le b$ ، بنابراین $-c_1 \le -a$ و $d_1 - c_1 \le b - a$. با استفاده از استقراء روی n ، فرض کنیم J_{i_1}، ... ، J_{i_p} فاصله‌های واقع در $]a, c_1[$ ، و J_{j_1} ، ... ، $\mathrm{J}_{j_{n-1-p}}$ فاصله‌های واقع در $]d_1, b[$ باشند ؛ در این‌صورت، طبق استقراء $\sum_{h=1}^{p} l_{i_h} \le c_1 - a$ ، $\sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k} \le b - d_1$ ، و

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = l_1 + \sum_h l_{i_h} + \sum_k l_{j_k} \le d_1 - c_1 + c_1 - a + b - d_1 = b - a .$$

اعداد حقیقی به شکل $\pm r/s$ ، که در آن r و s اعداد طبیعی صحیح هستند و $s \neq 0$ ، **اعداد گویا** نامیده می‌شوند. برای $s = 1$ این اعداد را **اعداد صحیح** (مثبت یا منفی[2]) نامیده، مجموعه همه اعداد صحیح را با حرف $\mathbf{Z}$ ، و مجموعه همه اعداد گویا را با حرف $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهند.

(۱۵. ۲. ۲) $\mathbf{Q}$ مجموعه اعداد گویا نامتناهی شمارش‌پذیر است.

از آنجا که $\mathbf{Q}$ اجتماع دو مجموعه $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ و $\mathbf{Q} \cap (-\mathbf{R}_+)$ است، کافی است ثابت کنیم $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ نامتناهی شمارش‌پذیر است. اما، نگاشت پوشای $(m, n) \to m/n$ از زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شامل زوج‌هایی که $n \neq ۰$ ، بر روی $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ موجود است، و بنابراین، نتیجه مطلوب از (۲. ۹. ۱) ، (۳. ۹. ۱) و (۴. ۹. ۱) حاصل می‌شود.

---

۱. این قضیه با شماره (۹. ۲. ۲) در متن روسی کتاب در جایی متفاوت از متن انگلیسی آن نوشته شده است. مترجم.

۲. لازم به یادآوری است که، ژان دیودونه عدد حقیقی x را اکیداً مثبت نامیده هر گاه $x > 0$ و آن را مثبت نامیده هر گاه $x \ge 0$ و به همین ترتیب، اگر $x \le 0$ ، عدد x را منفی و اگر $x < 0$ ، عدد x را اکیداً منفی نامیده است. مترجم.

(۲.۲.۱۶) هر فاصله باز $\mathbf{R}$ شامل مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد گویا است.

کافی است ثابت کنیم که $]a\,,\,b[$ شامل یک عدد گویای c است؛ چون، در این‌صورت، $]a\,,\,c[$ شامل عددی گویا خواهد بود، و نتیجه نهایی با استقراء ثابت می‌شود. فرض کنیم $x = b - a > 0$ ؛ از (III) نتیجه می‌شود که، عددی صحیح مانند n موجود است، به‌طوری که $n > \frac{1}{x}$ ، بنابراین، طبق (۲.۲.۱۳) ، $\frac{1}{n} < x$. می‌توان فرض کرد $b > 0$ (در غیر این‌صورت، فاصله $]-b\,,\,-a[$ با $-a > 0$ مورد بررسی قرار می‌دهیم). طبق (III) ، عددی صحیح مانند $k > 0$ موجود است به‌طوری که $b \leq \frac{k}{n}$ ؛ فرض کنیم h کوچک‌ترین عدد صحیح باشد، به‌طوری که $b \leq h/n$. در این‌صورت $(h-1)/n < b$؛ حال، نشان می‌دهیم که $(h-1)/n > a$. اگر چنین نباشد، طبق (۲.۲.۱۴) باید داشته باشیم :

$$b - a = x \leq \frac{1}{n}$$

و این رابطه با تعریف n در تناقض است.

(۲.۲.۱۷) مجموعه اعداد حقیقی شمارش پذیر نیست.[۱]

قضیه را از طریق تناقض ثابت می‌کنیم. فرض کنیم بیژکسیون $n \to x_n$ از $\mathbf{N}$ به روی $\mathbf{R}$ موجود باشد. زیر دنباله $n \to p(n)$ از اعداد صحیح را با استقراء طبق روش زیر تعریف می‌کنیم :

قرار می‌دهیم: $p(0) = 0$ و $p(1)$ را کوچک‌ترین مقدار n می‌گیریم، به‌طوری که $x_n > x_0$. فرض کنیم که $p(n)$ برای $n \leq 2m - 1$ تعریف شده باشد، و $x_{p(2m-2)} \leq x_{p(2m-1)}$. در این‌صورت، مجموعه $]x_{p(2m-2)}$ و $x_{p(2m-1)}[$ طبق (۲.۲.۱۶) نامتناهی است. حال $p(2m)$ را کوچک‌ترین عدد صحیح $k > p(2m-1)$ می‌گیریم که $x_{p(2m-2)} < x_k < x_{p(2m-1)}$، و سپس $p(2m+1)$ را به عنوان کوچک‌ترین عدد صحیحی $k > p(2m)$ که $x_{p(2m)} < x_k < x_{p(2m-1)}$ تعریف می‌کنیم. از این مطلب فوراً نتیجه می‌شود، که دنباله $(p(n))$ اکیداً صعودی است، بنابراین، برای همه n ها ، $p(n) \geq n$. از طرف دیگر، از ساختمان $p(n)$ نتیجه می‌شود که فاصله بسته $[x_{p(2m)}\,,\,x_{p(2m+1)}]$ در فاصله باز $]x_{p(2m-2)}\,,\,x_{p(2m-1)}[$ قرار گرفته است. طبق (IV) ، عددی حقیقی مانند y موجود است، به طوری که در همه فواصل بسته $[x_{p(2m)}\,,\,x_{p(2m+1)}]$ قرار گرفته است و y نمی‌تواند منطبق بر هیچ یک از نقاط انتهایی فاصله‌های فوق باشد، زیرا، نقاط انتهایی هر چنین فاصله‌ای نمی‌تواند متعلق به فاصله بعدی باشد. فرض کنیم عدد صحیح q چنان باشد که $y = x_q$، و n بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد

---

۱. اثباتی ساده‌تر از قضیه فوق را می‌توانید در صفحات ۳۵ و ۳۶ کتاب : دوره مختصر تئوری توابع یا متغیر حقیقی، تألیف : بوریس زاخارُویچ وولیخ، ترجمه : محمدعلی غیرتمند ، تهران ، انتشارات شباهنگ ، چاپ اول ۱۳۸۴ ملاحظه نمایید.

که $p(n) \leq q$، بنابراین $q < p(n+1)$. ابتدا فرض کنیم $n = 2m$ ، در این صورت، نامساوی‌های $x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m+1)} < x_{p(2m-1)}$ با تعریف $p(2m+1)$ در تناقض است. اگر به عکس $n = 2m - 1$ باشد ، آنگاه نامساوی‌های :

$$x_{p(2m-2)} < x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m-1)}$$

با تعریف $p(2m)$ در تناقض است. با این مطلب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

مسائل

۱. فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر از اعداد حقیقی باشد، که دارای خواص زیر است:
برای هر زوج x ، y از عناصر A که $x<y$، عناصر u ، v ، w از A موجود باشند، به‌طوری که $u < x < v < y < w$.
ثابت کنید که بیژکسیونی مانند f از A به روی $\mathbf{Q}$ مجموعه اعداد گویا وجود دارد، به‌طوری که از $x<y$ نتیجه می‌شود $f(x) < f(y)$. (فرض کنید $n \to a_n$ و $n \to b_n$ بیژکسیون‌هایی از $\mathbf{N}$ به روی A و $\mathbf{Q}$ باشند. با استقراء روی n نشان دهید که، زیرمجموعه‌های متناهی $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}$ ، $\mathrm{B}_n \subset \mathbf{Q}$، و بیژکسیون f_n از A_n به‌روی B_n موجود هستند، به‌طوری که :

(1) برای $i \leq n$، a_i متعلق به A_n است؛

(2) برای $i \leq n$، b_i متعلق به B_n است؛

(3) اگر در A_n ، $x<y$ باشد، آنگاه $f_n(x) < f_n(y)$ ؛

(4) $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ و f_n تحدید f_{n+1} است روی A_n).

۲. نشان دهید که $\mathbf{I}$ مجموعه اعداد اصم هم توان با $\mathbf{R}$ است (به بخش ۱.۹ ، مسئله ۵ مراجعه کنید).

۳. کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین

عدد حقیقی b را یک **کران بالا**[1] (به ترتیب **کران پایین**[2]) زیر مجموعه‌ای مانند X از اعداد حقیقی نامیم، هرگاه برای هر $x \in \mathrm{X}$ ، $x \leq b$ (به ترتیب $b \leq x$). مجموعه $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}$ را **از طرف بالا کراندار** یا **از طرف بالا محدود** (به ترتیب **از طرف پایین کراندار** یا **از طرف پایین محدود**) نامیم، هرگاه مجموعه کران‌های بالای X (به ترتیب مجموعه کران‌های پایین X) غیر تهی باشد. اگر X از طرف بالا کراندار باشد، آنگاه X – (مجموعه $x-$ هایی که $x \in \mathrm{X}$) از طرف پایین کراندار خواهد بود، و اگر b کران بالایی از X باشد، $b-$ کران پایینی از X– خواهد بود و برعکس. مجموعه‌ای که هم از طرف بالا و هم از طرف پایین کراندار باشد، **کراندار** نامیده می‌شود.

(۱. ۳. ۲) برای اینکه مجموعه $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}$ کراندار باشد، لازم و کافی است که عددی صحیح مانند n موجود

1 . Majorant = Мажоранта
2 . Minorant = Миноранта

باشد، به‌طوری که برای هر $x \in X$ ، $|x| \leq n$.

زیرا، طبق (III) ، اگر a کرانی پایین و b کرانی بالا از X باشد، آنگاه، اعداد صحیحی مانند p و q موجود خواهند بود ؛ به‌طوری که $-p < a$ و $b < q$ ، با انتخاب $n = p + q$ برای هر $x \in X$ خواهیم داشت $|x| \leq n$. عکس مطلب فوق نیز واضح است.

(۲. ۳. ۲) اگر مجموعه غیر تهی X از R از طرف بالا کراندار باشد، آنگاه M مجموعه کران‌های بالای X شامل کوچک‌ترین عضو است.

فرض کنیم $a \in X$ ، $b \in M$. طبق (III) ، برای هر عدد صحیح n ، عددی صحیح مانند m موجود است، به‌طوری که $b \leq a + m.2^{-n}$. از طرف دیگر، اگر c یک کران بالای X باشد، آنگاه هر $y \geq c$ نیز کران بالایی از X خواهد بود. پس، کوچک‌ترین عدد صحیح p_n موجود است، به‌طوری که $a + p_n 2^{-n}$ کران بالایی از X است. در نتیجه، اگر $I_n = [a + (p_n - 1)2^{-n} , a + p_n 2^{-n}]$ ، $I_n \cap X$ غیر تهی خواهد بود. از آنجا که $p_n 2^{-n} = (2p_n)2^{-n-1}$ و عدد $a + (2p_n - 2)2^{-n-1}$ یک کران بالا نیست، لازم است که داشته باشیم $p_{n+1} = 2p_n$ یا $p_{n+1} = 2p_n - 1$. به عبارت دیگر $I_{n+1} \subset I_n$. از (IV) نتیجه می‌شود که J اشتراک فواصل I_n غیرتهی است. اگر J شامل لااقل دو عنصر متمایز $\alpha < \beta$ باشد، آنگاه فاصله $[\alpha , \beta]$ باید مشمول هر یک فواصل I_n باشد، و بنابراین، طبق (۲. ۲. ۱۴) ، باید برای هر n داشته باشیم $2^{-n} \geq \beta - \alpha$ یا $1 \geq 2^n(\beta - \alpha)$ که با اصل (III) در تناقض است[1] (یادآوری می‌کنیم که $2^n \geq n$ ، که به وضوح از استقراء نتیجه می‌شود). بنابراین $J = \{\gamma\}$. نخست نشان می‌دهیم که γ کران بالایی از X است. در غیر این‌صورت، باید یک $x \in X$ موجود باشد، به‌طوری که $x > \gamma$ ، اما، در این صورت، n ئی موجود خواهد بود، به‌طوری که $2^{-n} < x - \gamma$ و چون $\gamma \in I_n$ ، پس باید داشته باشیم $a + p_n 2^{-n} < x$ که با تعریف p_n در تناقض است. از طرف دیگر، برای هر $y \in M$ ، $y \geq \gamma$ ، در غیر این‌صورت، یک n موجود خواهد بود، به‌طوری که $2^{-n} < \gamma - y$ ، و چون $\gamma \in I_n$ باید داشته باشیم $a + (p_n - 1)2^{-n} > y$ ، و عدد $a + (p_n - 1)2^{-n}$ کران بالایی از X خواهد بود، که دوباره با تعریف p_n در تناقض است. بنابراین، γ کوچک‌ترین عنصر M است، که آن را **کوچک‌ترین کران بالا یا سوپرمُم** X می‌نامند، و به علامت l.u.b.X یا sup X نشان می‌دهند.

(۲. ۳. ۳) اگر مجموعه غیرتهی X از R از طرف پایین کراندار باشد، آنگاه M' مجموعه کران‌های پایین X دارای بزرگ‌ترین عنصر است.

---

۱. منظور از اصل (III) اصل ارشمیدس در هیات مرتب اعداد حقیقی است. مترجم.

با به کار بردن (۲. ۳. ۲) برای مجموعه $X-$ نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

بزرگ‌ترین عنصر M' را **بزرگ‌ترین کران پایین** یا **اینفیمُم** X نامیده، به علامت $g.l.b.X$ یا $\inf X$ نشان می‌دهند. برای یک مجموعه غیر تهی کراندار X ، هم $\inf X$ و هم $\sup X$ هر دو موجودند و $\inf X \leq \sup X$.

(۲ . ۳ . ۴) l.u.b مجموعه از طرف بالا کراندار X عددی حقیقی مانند γ است ؛ که با دو خاصیت زیر مشخص می‌شود :

(۱) γ کران بالایی از X است ؛

(۲) برای هر عدد صحیح $n > 0$ ، عنصری مانند $x \in X$ موجود است ، به‌طوری که $\gamma - 1/n < x \leq \gamma$.

هر دو خاصیت $\gamma = \sup X$ از تعریف نتیجه می‌شود، زیرا، دومین خاصیت بیان این حقیقت است که $\gamma - 1/n$ یک کران بالای X نیست. به‌عکس، اگر خواص فوق برقرار باشند، رابطه $\sup X = \beta < \gamma$ نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا، در این‌صورت، عددی مانند n موجود خواهد بود، به‌طوری که $1/n < \gamma - \beta$، و بنابراین $\beta < \gamma - 1/n$ ، و عدد $\gamma - 1/n$ باید کران بالایی از X باشد، که با خاصیت (۲) در تناقض است.

با به‌کارگیری (۴. ۳. ۲) برای مجموعه $X-$، و با توجه به اینکه $\inf X = -\sup(-X)$ قضیه مشابهی برای $\inf X$ برقرار خواهد بود.

اگر یک مجموعه $X \subset \mathbf{R}$ دارای **بزرگ‌ترین** عنصر b (به ترتیب **کوچک‌ترین** عنصر a) باشد، آنگاه $b = \sup X$ (به ترتیب $a = \inf X$) و ما به جای $\sup X$ (به ترتیب $\inf X$) می‌نویسیم $\max X$ (به ترتیب $\min X$). با استفاده از (۳. ۲. ۲) مطلب فوق را می‌توان در حالت خاص برای مجموعه‌های متناهی مورد استفاده قرار داد. اما l.u.b و g.l.b یک مجموعه کراندار نامتناهی X لازم نیست که حتماً به X متعلق باشد. به‌عنوان مثال، اگر X مجموعه همه اعداد به فرم $1/n$ باشد که n همه اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی یک را طی می‌کند، آنگاه g.l.b مجموعه X برابر 0 است، و $\min X$ وجود ندارد.

(۲ .۳ .۵) اگر $A \subset \mathbf{R}$ از طرف بالا کراندار باشد و $B \subset A$ ، آنگاه B نیز از طرف بالا کراندار خواهد بود و $\sup B \leq \sup A$.

مطلب فوق نتیجه‌ای است از تعریف‌ها.

(۲ . ۳ .۶) فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های غیرتهی از طرف بالا کراندار $\mathbf{R}$ باشد، و $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ ، و فرض کنیم B مجموعه اعداد $\sup A_\lambda$ باشد. در این‌صورت، برای اینکه A از طرف بالا کراندار باشد، لازم و کافی است که B از طرف بالا کراندار باشد، و در چنین صورتی $\sup A = \sup B$.

از تعریف فوراً نتیجه می‌شود که، هر کران بالای مجموعه A کران بالایی از مجموعه B نیز هست، و برعکس، و از این مطلب نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

فرض کنیم f نگاشتی از یک مجموعه A به مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد؛ گوییم f روی A **از طرف بالا کراندار (به ترتیب از طرف پایین کراندار، کراندار)** است، هرگاه زیرمجموعه $f(A)$ از $\mathbf{R}$ از طرف بالا کراندار (به ترتیب از طرف پایین کراندار، کراندار) باشد ؛ و می‌نویسیم $\sup f(A) = \sup\limits_{x\in A} f(x)$ ، $\inf f(A) = \inf\limits_{x\in A} f(x)$ وقتی این اعداد تعریف شده باشند (سوپرمُم و اینفیمُم f روی A). اگر f از طرف بالا کراندار باشد، آنگاه $-f$ از طرف پایین کراندار خواهد بود، و

$$\inf_{x\in A}(-f(x)) = -\sup_{x\in A} f(x)$$

(۲.۳.۷) فرض کنیم f نگاشتی از $A_1 \times A_2$ به $\mathbf{R}$ باشد. اگر f از طرف بالا کراندار باشد ، آنگاه:

$$\sup_{(x_1,\, x_2)\in A_1\times A_2} f(x_1,\, x_2) = \sup_{x_1\in A_1}\left(\sup_{x_2\in A_2} f(x_1,\, x_2)\right)$$

در واقع ، $f(A_1 \times A_2)$ را می‌توان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های $f(\{x_1\}\times A_2)$ وقتی x_1 مجموعه A_1 را طی می‌کند ، نوشت ، و سپس ، از (۲.۳.۶) استفاده نمود.

(۲.۳.۸) فرض کنیم f ، g دو نگاشت از A به $\mathbf{R}$ باشند، به‌طوری که برای هر $x\in A$ ، $f(x) \le g(x)$ ؛ در این‌صورت، اگر g از طرف بالا کراندار باشد، آنگاه f نیز از طرف بالا کراندار خواهد بود، و $\sup\limits_{x\in A} f(x) \le \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

مطلب فوق فوراً از تعریف‌ها نتیجه می‌شود.

(۲.۳.۹) فرض کنیم f ، g دو نگاشت از A به $\mathbf{R}$ باشند، اگر f و g هر دو از طرف بالا کراندار باشند، آنگاه $f+g$ (یعنی، نگاشت $x \to f(x) + g(x)$) نیز از طرف بالا کراندار خواهد بود ، و

$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x)) \le \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

اگر علاوه بر آن g از طرف پایین نیز کراندار باشد ، آنگاه :

$$\sup_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \le \sup(f(x)+g(x)).$$

فرض کنیم $a = \sup\limits_{x\in A} f(x)$، $b = \sup\limits_{x\in A} g(x)$. در این‌صورت، برای هر $x\in A$ ، $f(x) \le a$ و $g(x) \le b$ بنابراین $f(x) + g(x) \le a + b$ ، و اولین نامساوی ثابت می‌شود. فرض کنیم $c = \inf\limits_{x\in A} g(x)$. در این صورت، برای هر $x\in A$،

$$f(x) + c \le f(x) + g(x) \le d = \sup_{x\in A}(f(x)+g(x))$$

اما، از این رابطه نتیجه می‌شود، برای هر $x \in \mathrm{A}$ ، $f(x) \leq d - c$، بنابراین $a \leq d - c$ و یا $a + c \leq d$ ، که با این مطلب دومین نامساوی نیز ثابت می‌شود.

(۲. ۳. ۱۰) فرض کنیم f نگاشتی از طرف بالا کراندار از A به R باشد. در این صورت، برای هر عدد حقیقی c ، $\sup_{x \in \mathrm{A}} f(x) + c$ $= \sup_{x \in \mathrm{A}} (f(x) + c)$.

با انتخاب تابع ثابت $g = c$ در (۲. ۳. ۹) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۲. ۳. ۱۱) فرض کنیم f_1 (به ترتیب f_2) نگاشتی از طرف بالا کراندار از A_1 (به ترتیب A_2) به R باشد. در این‌صورت ، نگاشت $(x_1, x_2) \to f_1(x_1) + f_2(x_2)$ از طرف بالا کراندار خواهد بود، و

$$\sup_{(x_1, x_2) \in \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) = \sup_{x_1 \in \mathrm{A}_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in \mathrm{A}_2} f_2(x_2)$$

با استفاده از (۲. ۳. ۷) و (۲. ۳. ۱۰) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

ما فرمول‌بندی خواصی مشابه برای inf (علائم sup و inf همه‌جا عوض می‌شوند) را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مسئله

فرض کنیم $x \to \mathrm{I}(x)$ نگاشتی از مجموعه R به مجموعه‌ای از فواصل باز R باشد، به‌طوری که $\mathrm{I}(x)$ فاصله‌ای باز به مرکز x و طولی کوچکتر یا مساوی c باشد (c عدد مثبت داده شده‌ای است). نشان دهید که، برای هر فاصله بسته $[a, b]$ از R تعدادی متناهی نقاط x_i از $[a, b]$ موجود است، به‌طوری که :

(۱) فواصل $\mathrm{I}(x_i)$ تشکیل پوششی باز از $[a, b]$ می‌دهند؛

(۲) مجموع طول‌های فواصل $\mathrm{I}(x_i)$ از $c + 2(b - a)$ تجاوز نمی‌کند. (ثابت کنید که اگر قضیه برای هر فاصله $[a , x]$ که $a \leq x < u < b$ ، برقرار باشد، آنگاه v ئی موجود است. به‌طوری که $u < v < b$ و قضیه هنوز برای هر فاصله $[a , y]$ به‌طوری که $a \leq y < v$ درست است. سپس l.u.b همه اعداد $u < b$ را مورد بررسی قرار دهید، که قضیه برای هر فاصله $[a , x]$ به‌طوری که $a \leq x < u$ ، درست است.) با ارائه یک مثال نشان دهید که ، کران بالایی فوق بهترین ارزیابی ممکن است.

فصل III

فضاهای متریک

این فصل، به اضافه فصل ۵ ، مغز و هسته مرکزی جلد اول این کتاب را تشکیل می‌دهد: در آنها زبان هندسی گسترش یافته است، که در زمان حاضر نتایج آنالیز به کمک آن بیان می‌شود و امکان تعمیم کامل دادن به این نتایج، و نیز، تأمین ساده‌ترین و واضح‌ترین اثبات‌ها برای آنها را فراهم می‌سازد. بیشتر مفاهیم معرفی شده در این فصل، وقتی به فضای سه‌بعدی « معمولی» اختصاص یابند، دارای معانی کاملاً شهودی و قابل درکی هستند. پس از کسب مقداری تجربه در استفاده از آنها، هم در مسائل و هم در فصل‌های بعدی، دانشجو باید بتواند قانع شود، که با قید احتیاط، این شهود هندسی روی هم رفته راهنمایی معتبر است، و حیف است که آن را به حوزه کاربردهای کلاسیک محدود نمود.

در این فصل تقریباً هیچ قضیه اصل و خالصی وجود ندارد؛ بیشتر نتایج به طریقی ساده از تعریف‌ها به دست می‌آیند، و آنهایی که به تلاش بیشتری نیاز دارند، هرگز خیلی در عمق نمی‌مانند. بخش‌های ۱ . ۳ تا ۱۳ . ۳ اساساً مربوط به پایه‌گذاری اصطلاح شناسی (ترمینولوژی) است. خواننده غیر آماده ممکن است تصور کند که، به‌ویژه، در بخش‌های ۵ . ۳ تا ۸ . ۳ ، چندین بار، بحث‌های زیادی، تنها با روش‌هایی مختلف، از چیزهایی مشابه شده است، دلیل این حشو و زوائد صوری کلام را باید در کاربردها جستجو کرد : کنار گذاشتن آن (که در تئوری ممکن است) اغلب به بیان‌هایی مشکل‌ساز و خسته‌کننده منجر می‌شود، و در عمل ثابت شده است که، تحمیل چند اصطلاح اضافی به حافظه، برای رسیدن به وضوح بیشتر، به زحمتش می‌ارزد.

مهم‌ترین مفاهیمی که در این فصل مطرح شده‌اند، عبارتند از : **تمامیت** (بخش ۱۴ . ۳) ، **فشردگی** (بخش‌های ۱۶ . ۳ تا ۱۸ . ۳) و **همبندی** (بخش ۱۹ . ۳) ، که بعداً به‌طور مکرر از آنها استفاده خواهد شد، و دانشجو باید سعی کند قبل از گام نهادن به پیش تمام این مفاهیم را درک نماید.

فضاهای متریک تنها از یک نوع خاص « فضاهای توپولوژیک» تشکیل شده‌اند، و بنابراین، این فصل را می‌توان به‌عنوان مقدمه‌ای برای آموزش «توپولوژی عمومی» که به‌عنوان مثال در کتاب‌های کلی[1] [15]

---

۱. شماره کتاب Kelly = Келли درمتن روسی کتاب [18] است. مترجم.

و بورباکی[1] [5] گسترش یافته‌اند، تصور نمود. راه به‌سوی این تعمیم‌ها، در تفسیرها و ملاحظات بخش (۱۲. ۳)، وقتی که درک شود، در اغلب مسائل فاصله تعریف کننده فضای متریک تنها نقش کمکی بازی می‌کند، و می‌تواند با فاصله‌های «هم‌ارز» آن جایگزین شود، بدون آن که اخلال قابل توجهی بر پدیده مورد مطالعه وارد سازد، آشکار می‌گردد. در فصل XII ، ما مفاهیم توپولوژی عمومی را که در فصل‌های بعدی نیاز داریم، بیان خواهیم کرد.

۱. فاصله‌ها و فضاهای متریک

فرض کنیم E یک مجموعه باشد. یک **فاصله** روی E نگاشتی مانند d از $E \times E$ به $\mathbf{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است، که در خواص زیر صدق می‌کند :

(I) برای هر زوج x، y از عناصر مجموعه E، $d(x, y) \geq 0$.

(II) رابطه $d(x, y) = 0$ معادل رابطه $x = y$ است.

(III) برای هر زوج از عناصر E ، $d(x, y) = d(y, x)$.

(IV) برای هر سه عنصر x ، y، z از مجموعه E،

(**«نامساوی مثلثی»**) $d(x , z) \leq d(x , y) + d(y ,z)$

از **(IV)** با استفاده از استقراء ریاضی نتیجه می‌شود، برای هر $n \geq 2$:

$$d(x_1 , x_n) \leq d(x_1 , x_2) + d(x_2 , x_3) + \cdots + d(x_{n-1} , x_n)$$

(۱. ۱. ۳) **اگر d فاصله‌ای روی E باشد، آنگاه برای هر سه عنصر x، y ، z از E:**

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

در واقع، از (III) و (IV) نتیجه می‌شود :

$$d(x , z) \leq d(y , z) + d (x, y)$$

و

$$d(y , z) \leq d(y , x) + d(x , z) = d(x, y) + d(x , z)$$

بنابراین،

$$-d(x , y) \leq d(x ,z) - d(y , z) \leq d(x , y)$$

یک **فضای متریک** مجموعه‌ای مانند E است همراه با یک فاصله داده شده روی E . در بحث‌های عمومی این فصل، به هنگام معرفی فضاهای متریک E ، E′ ، E″، از d ، d' ، d'' به‌عنوان فاصله‌های روی E ، E′ ، E″، استفاده خواهیم کرد.

1 . Bourbaki = Бурбаки

۲. مثال‌هایی از فاصله‌ها

(۱. ۲. ۳) تابع $|x - y| \to (x, y)$ فاصله‌ای روی مجموعه اعداد حقیقی است. این مطلب فوراً از (۱۰. ۲. ۲) نتیجه می‌شود. فضای متریک متناظر با فاصله فوق را **خط حقیقی** می‌نامند. وقتی $\mathbf{R}$ به‌عنوان فضایی متریک مورد بررسی قرار می‌گیرد، بدون اینکه به فاصله روی آن صریحاً اشاره شود، منظور از فاصله روی $\mathbf{R}$ همان فاصله‌ای است که اکنون تعریف شد.

(۲. ۲. ۳) در فضای سه‌بعدی معمولی $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ، « فاصله اقلیدسی » معمولی تعریف شده با رابطه:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

برای دو عنصر $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ ، در اصول (I) و (II) و (III) به وضوح صدق می‌کند؛ با محاسبه مستقیم اصل (IV) نیز ثابت می‌شود.

(۳. ۲. ۳) در «صفحه حقیقی» $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ، $d(x, y)$ را به‌صورت :

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

برای هر دو عنصر دلخواه $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ تعریف می‌کنیم. دوباره اصول (I) و (II) و (III) به وضوح برقرار هستند؛ و اصل (IV) از (۱۰. ۲. ۲) نتیجه می‌شود.

(۴ . ۲. ۳) فرض کنیم A یک مجموعه دلخواه، و $\mathrm{E} = \mathfrak{B}(\mathrm{A})$ **مجموعه نگاشت های کراندار** از A به $\mathbf{R}$ باشد (بخش ۲.۳ را ببینید)، در این صورت، برای هر دو تابع f و g متعلق به E ، $f - g$ نیز به E متعلق خواهد بود، و عدد :

$$d(f, g) = \sup_{t \in \mathrm{A}} |f(t) - g(t)|$$

معین است. نگاشت $(f, g) \to d(f, g)$ فاصله‌ای روی E است، زیرا، اصول (I) و (III) به وضوح برقرار هستند، و اصل (IV) فوراً از (۹. ۳ . ۲) و (۸ . ۳. ۲) نتیجه می‌شود؛ از طرف دیگر، اگر $d(f, g) = 0$ ، آنگاه برای همه $t \in \mathrm{A}$ ها ، $f(t) - g(t) = 0$ ، که به معنی $f = g$ می‌باشد. (بخش ۴ .۱ را ببینید). بنابراین، اصل (II) نیز برقرار است.

(۵ . ۲. ۳) فرض کنیم E یک مجموعه دلخواه باشد، و فرض کنیم $d(x, y)$ به‌صورت زیر تعریف شده

باشد: $d(x,y)=1$ اگر $x \neq y$ ، و $d(x,x)=0$. در این صورت، اصول (I) و (II) و (III) برقرار هستند، اگر دو عنصر از سه عنصر x ، y ، z برابر باشند، اصل (IV) فوراً ثابت می‌شود، در غیر این‌صورت، داریم $d(x, z)=1$ ، $d(x,y)+d(y,z)=2$ ، و بنابراین، اصل (IV) نیز در همه حالت‌ها برقرار است. فضای متریک متناظر تعریف شده روی E را **فضای متریک دیسکرت** (گسسته)[1] می‌نامند.

(۳ . ۲ . ۶) فرض کنیم p عددی اول باشد، برای هر عدد طبیعی $n>0$ ، $v_p(n)$ را به‌عنوان توان p در نمایش n به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول تعریف می‌کنیم. از تعریف فوراً نتیجه می‌شود که، برای هر زوج n و n' از اعداد صحیح اکیداً مثبت :

$$v_p(nn')=v_p(n)+v_p(n') \qquad (۳.۲.۶.۱)$$

در ادامه، فرض کنیم $x=\pm r/s$ یک عدد گویای دلخواه مخالف صفر باشد، که r و s اعداد صحیح اکیداً مثبتی هستند. تعریف می‌کنیم $v_p(x)=v_p(r)-v_p(s)$. از رابطه (۳ . ۲ . ۶ . ۱) فوراً نتیجه می‌شود که، این عدد وابسته به‌طرز نمایش عدد x به‌عنوان یک کسر نیست. برای هر زوج x و y از اعداد گویای ناصفر نیز رابطه مشابه :

$$v_p(xy)=v_p(x)+v_p(y) \qquad (۳.۲.۶.۲)$$

برقرار است. حال، اگر x و y اعداد گویای دلخواهی باشند، قرار می‌دهیم $d(x,y)=p^{-v_p(x-y)}$، اگر $x \neq y$ باشد، و $d(x,x)=0$. ثابت خواهیم کرد که d یک فاصله روی $\mathbf{Q}$ مجموعه اعداد گویا است (که **فاصله p ئی**[2] نامیده می‌شود). اصول (I) و (II) و (III) فوراً از تعریف نتیجه می‌شوند؛ علاوه بر آن، ما شکلی قوی‌تر از اصل (IV) را ثابت می‌کنیم:

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y),\ d(y,z)) \qquad (۳.۲.۶.۳)$$

اگر دو عنصر از سه عنصر x و y و z مساوی باشند، نامساوی فوق به وضوح برقرار است، فرض کنیم x و y و z متمایز باشند. در این‌صورت، ثابت می‌کنیم برای هر جفت x و y از اعداد گویای ناصفر که $x-y \neq 0$ است، داریم :

$$v_p(x-y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)) \qquad (۳.۲.۶.۴)$$

می‌توانیم فرض کنیم $v_p(x) \geq v_p(y)$ ؛ با استفاده از (۳ . ۲ . ۶ . ۲) رابطه‌ای که باید ثابت کنیم، به‌صورت :

$$v_p(z-1) \geq 0 \qquad (۳.۲.۶.۵)$$

1. Discrete metric space = Дискретное метрическое пространство
2 . p-adic distance = p– адическое расстояние

درمی‌آید، که در آن z عددی گویا است، به‌طوری که $z \neq 0$ ، $z \neq 1$ و $v_p(z) \geq 0$. اما، در این‌صورت، طبق تعریف $z = \pm\, p^h\, r/s$ ، که $h \geq 0$ ، و r و s بر p بخش‌پذیر نیستند.[1] چون $z - 1$ دارای مخرجی است که بر p بخش‌پذیر نیست، نامساوی (۵ . ۶ . ۲ . ۳) از تعریف v_p نتیجه می‌شود.

مثال‌های دیگری با جزئیات در فصل های ۵ و ۶ و ۷ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۳. ایزومتری‌ها[2]

فرض کنیم E ، ′E دو فضای متریک، و d ، d' فواصل روی E ، ′E باشند. یک بیژکسیون f از E به روی ′E را یک **ایزومتری** نامیم، هرگاه برای هر زوج x و y از عناصر E ،

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \qquad (۳ .۳ .۱)$$

در این‌صورت، نگاشت معکوس f^{-1} یک ایزومتری از ′E به روی E خواهد بود. دو فضای متریک E ، ′E را **ایزومتریک** نامیم، هرگاه یک ایزومتری از E به روی ′E موجود باشد. از هر قضیه‌ای در فضای E که تنها فاصله‌های بین عناصر E را مورد بحث قرار داده باشد، فوراً قضیه‌ای متناظر با آن در هر فضای ′E که با E ایزومتر است، در رابطه با عناصری که تصاویر عناصر E تحت نگاشت f هستند، نتیجه می‌شود.

اکنون فرض کنیم که E یک فضای متریک، d فاصله‌ای روی E ، و f بیژکسیونی از E به روی مجموعه ′E باشد (لازم نیست روی ′E فاصله‌ای تعریف شده باشد)، در این‌صورت، می‌توان روی ′E فاصله‌ای مانند d' با فرمول (۱. ۳. ۳) تعریف کرد، به‌طوری که f یک ایزومتری از E به ′E باشد. فاصله d' را فاصله **انتقال یافته** از E به ′E تحت نگاشت f می‌نامیم.

مثال

(۲. ۳. ۳) **خط حقیقی گسترش یافته $\overline{\mathbf{R}}$** . تابع f که روی $\mathbf{R}$ با رابطه $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ تعریف شده است، یک بیژکسیون از $\mathbf{R}$ به روی فاصله باز $]-1, +1[$ است، نگاشت g که برای $|x| < 1$ با رابطه $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ تعریف می‌شود، وارون f است. فرض کنیم J فاصله بسته $[-1, 1]$ و $\overline{\mathbf{R}}$ مجموعه‌ای باشد که از اجتماع $\mathbf{R}$ با دو عنصر جدید که به‌صورت $+\infty$ و $-\infty$ (نقاط بی‌نهایت) نوشته می‌شوند، تشکیل شده باشد. f را به بیژکسیونی از $\overline{\mathbf{R}}$ به J ، با قرار دادن $f(+\infty) = +1$ و $f(-\infty) = -1$

---

۱. رابطه $z = \pm\, p^h\, r/s$ در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌صورت $z = p \pm^h r/s$ نوشته شده است، که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

2 . Isometries = Изометрия

گسترش داده و دوباره نماد g را به‌عنوان نگاشت معکوس f به‌کار می‌گیریم. از آنجا که J با فاصله‌ای به‌صورت $|x-y|$ یک فضای متریک است، با به‌کارگیری پروسه توصیف شده در بالا $\overline{\mathbf{R}}$ را می‌توان به‌عنوان فضایی متریک با متر $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ تعریف کرد. با این فاصله (که در بررسی عناصر $\mathbf{R}$ **متفاوت** از فاصله‌ای است که در (۱. ۲. ۳) تعریف شده است)، فضای متریک $\overline{\mathbf{R}}$ را **خط حقیقی گسترش یافته** می‌نامند. لازم به توضیح است که، برای $x \geq 0$ ، $d(+\infty, x)=\frac{1}{1+|x|}$ ، و برای $x \leq 0$ ، $d(-\infty, x)=\frac{1}{1+|x|}$.

می‌توان روی $\overline{\mathbf{R}}$ یک **رابطه ترتیبی** $x \leq y$ تعریف کرد، وقتی این رابطه هم‌ارز رابطه $f(x) \leq f(y)$ در نظر گرفته شود. به آسانی می‌توان ثابت کرد که، اگر x و y عناصری از $\mathbf{R}$ باشند، رابطه $x \leq y$ در $\overline{\mathbf{R}}$ معادل رابطه $x \leq y$ در $\mathbf{R}$ می‌باشد، که قبلاً تعریف شده است. علاوه بر این، برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم $-\infty < x < +\infty$. اعداد حقیقی را **عناصر متناهی** فضای $\overline{\mathbf{R}}$ نیز می‌نامند. همه خواص و تعریف‌های بیان شده در فصل دوم، که **فقط** با رابطه ترتیبی در ارتباط هستند (به استثنای مواردی که به عملیات جبری مربوط می‌شوند) ، می‌توان فوراً تحت نگاشت g به $\overline{\mathbf{R}}$ «انتقال» داد. مجموعه غیرتهی A از $\overline{\mathbf{R}}$ با رابطه ترتیبی فوق همیشه **کراندار** است، و بنابراین $\sup \mathrm{A}$ و $\inf \mathrm{A}$ تعریف شده‌اند، اما، ممکن است $+\infty$ یا $-\infty$ یا عددی حقیقی باشند. تعریف $\sup\limits_{x \in \mathrm{A}} u(x)$ و $\inf\limits_{x \in \mathrm{A}} u(x)$ (برای هر نگاشت u از مجموعه‌ای مانند A به $\overline{\mathbf{R}}$) با روشی شبیه قبل بیان می‌شود، و به‌ویژه، خواص (۵ . ۳. ۲) ، (۶ . ۳. ۲) ، (۷ . ۳. ۲) و (۸ . ۳. ۲) بدون تغییر برقرار هستند.

۴. گوی‌ها[1] ، کره‌ها[2] ، قطر[3]

در تئوری فضاهای متریک، به‌کارگیری زبان هندسی الهام گرفته شده از هندسه کلاسیک بسیار مناسب است. از این رو عناصر فضای متریک را معمولاً **نقاط** می‌نامند. فرض کنیم E یک فضای متریک، d فاصله‌ای روی آن، $a \in \mathrm{E}$ نقطه‌ای از E و $r>0$ یک عدد حقیقی باشد. **گوی باز (به ترتیب گوی بسته، کره) به مرکز** a **و شعاع** r مجموعه $\mathrm{B}(a\,;r)=\{x \in \mathrm{E} \mid d(a,x)<r\}$ (به ترتیب $\mathrm{B}'(a,r)=\{x \in \mathrm{E} \mid d(a,x) \leq r\}$ ، $\mathrm{S}(a\,,r)=\{x \in \mathrm{E} \mid (a\,,x)=r\}$) است. گوی باز و بسته به مرکز a همیشه شامل نقطه a است، اما، کره به مرکز a ممکن است تهی باشد (مثال‌هایی از خواص «عجیبی» که گوی‌ها در یک فضای کلی متریک ممکن است داشته باشند، می‌توانید در مسئله ۴ بخش ۸ . ۳ ببینید).

---
1. Balls = ШарЫ
2. Spheres = СферЫ
3. Diameter = Диаметр

مثال‌ها

روی خط حقیقی، گوی باز (به ترتیب بسته) به مرکز a و شعاع r، فاصله $]a-r, a+r[$ (به ترتیب $[a-r, a+r]$)، و کره به مرکز a و شعاع r، از دو نقطه $a-r$ و $a+r$ تشکیل شده است. روی خط گسترش یافته $\overline{\mathrm{R}}$، گوی باز به مرکز $+\infty$ و شعاع $r<1$، فاصله $]\frac{1-r}{r}, +\infty]$ می‌باشد. در فضای دیسکرت (گسسته) E، گوی (باز یا بسته) به مرکز a و شعاع $r<1$ به a تقلیل می‌یابد، و کره به مرکز a و شعاع $r<1$ تهی است. برعکس، اگر $r \geq 1$، آنگاه $\mathrm{B}(a\,;r)=\mathrm{B}'(a\,;r)=\mathrm{E}$ و اگر $r>1$، آنگاه $\mathrm{S}(a\,;r)=\varnothing$؛ و اگر $r=1$، آنگاه $\mathrm{S}(a\,;r)=\mathrm{E}-\{a\}$.

فرض کنیم A، B دو زیر مجموعه غیر تهی از E باشند. فاصله A تا B عددی است غیر منفی که با رابطه $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=\inf_{x\in \mathrm{A},\, y\in \mathrm{B}} d(x,y)$ تعریف می‌شود. وقتی A به نقطه x تقلیل یابد، $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ را به‌صورت $d(x,\mathrm{B})$ نیز می‌نویسند. طبق (۷. ۳. ۲)، داریم:

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=\inf_{x\in \mathrm{A}} d(x,\mathrm{B}).$$

اگر $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\varnothing$ باشد، $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=0$، اما، عکس این مطلب لازم نیست که درست باشد. به بیانی کلی‌تر، اگر $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=a$، لازم نیست که نقاطی مانند $x\in\mathrm{A}$ و $y\in\mathrm{B}$ موجود باشند، به‌طوری که $d(x,y)=a$. به‌عنوان مثال، روی خط حقیقی $\mathbf{R}$، اگر A برابر مجموعه همه اعداد صحیح ناکمتر از یک، و B مجموعه همه اعداد به‌صورت $n-\frac{1}{n}$ باشد، وقتی $n\geq 2$ عددی طبیعی است، A و B نقطه مشترکی ندارند، اما $d(n, n-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ می‌تواند به‌دلخواه کوچک شود، بنابراین $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=0$ (بخش ۱۷. ۳، مسئله ۲ را ببینید).

(۱. ۴. ۳) اگر x نقطه‌ای از گوی $\mathrm{B}(a\,;r)$ (به ترتیب $\mathrm{B}'(a\,;r)$) نباشد، آنگاه:

$$d(x,\mathrm{B}(a,r))\geq d(a,x)-r$$

(به ترتیب $d(x,\mathrm{B}'(a,r))\geq d(a,x)-r$).

در واقع، از فرض نتیجه می‌شود $d(a,x)\geq r$. برای هر $y\in\mathrm{B}(a\,;r)$ (به ترتیب $y\in\mathrm{B}'(a,r)$) طبق نامساوی مثلثی:

$$d(x,y)\geq d(a,x)-d(a,y)\geq d(a,x)-r.$$

(۲. ۴. ۳) اگر A زیر مجموعه‌ای غیرتهی از E، و x، y دو نقطه از E باشد، آنگاه:

$$|d(x,\mathrm{A})-d(y,\mathrm{A})|\leq d(x,y).$$

برای هر $z\in\mathrm{A}$، داریم $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$. بنابراین، طبق (۸. ۳. ۲) و (۱۰. ۳. ۲):

$$d(x\,,A)=\inf_{z\in A} d(x,z)\le \inf_{z\in A}(d(x,y)+d(y\,,z)) = d(x\,,y)+\inf_{z\in A} d(y\,,z)$$
$$= d(x,y)+d(y\,,A)$$

به روشی مشابه $d(y\,,A)\le d(x\,,y)+d(x,A)$.

برای هر مجموعه غیر تهی A از E ، **قطر** مجموعه A با رابطه $\delta(A)=\sup\limits_{x\in A,\, y\in A} d(x,y)$ تعریف می‌شود. $\delta(A)$ عددی غیرمنفی یا $+\infty$ است. از رابطه $A\subset B$ نتیجه می‌شود $\delta(A)\le\delta(B)$. رابطه $\delta(A)=0$ تنها و تنها زمانی برقرار است که A فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد.

(۳. ۴. ۳) برای هر گوی $\delta(B'(a\,,r))\le 2r$.

زیرا، اگر $d(a,x)\le r$ ، $d(a\,,y)\le r$، آنگاه ، طبق نامساوی مثلثی $d(x\,,y)\le 2r$.

منظور از یک **مجموعه کراندار**[1] در E مجموعه‌ای غیرتهی است که قطر آن متناهی است. هر گوی کراندار است. کل فضای E می‌تواند کراندار باشد، به‌عنوان مثال $\overline{\mathbf{R}}$ خط حقیقی توسعه یافته کراندار است. هر زیر مجموعه غیر تهی از یک مجموعه کراندار، کراندار است.

(۳. ۴. ۴) اجتماع دو مجموعه کراندار A و B مجموعه‌ای کراندار است.

زیرا، اگر $a\in A$ ، $b\in B$ ، آنگاه، اگر x ، y دو نقطه دلخواه در $A\cup B$ باشند، یا x و y هر دو در A هستند، که در این‌صورت $d(x\,,y)\le\delta(A)$ ، یا هر دو در B هستند، که در این صورت $d(x\,,y)\le\delta(B)$ ، یا مثلاً $x\in A$ و $y\in B$ ، که در این‌صورت، طبق نامساوی مثلثی :

$$d(x\,,y)\le d(x\,,a)+d(a\,,b)+d(b\,,y)$$

بنابراین :

$$\delta(A\cup B)\le d(a\,,b)+\delta(A)+\delta(B)$$

رابطه فوق برای هر $a\in A$ ، $b\in B$ درست است، در نتیجه، طبق تعریف $d(A\,,B)$ خواهیم داشت :

$$\delta(A\cup B)\le d(A\,,B)+\delta(A)+\delta(B)$$

از مطالب فوق نتیجه می‌شود، که اگر A کراندار باشد، آنگاه برای هر $x_0\in E$، A در گوی بسته به مرکز x_0 و شعاع $d(x_0\,,A)+\delta(A)$ قرار می‌گیرد.

۵. مجموعه‌های باز

در یک فضای متریک E ، با فاصله d ، گوئیم زیر مجموعه A از E **مجموعه‌ای باز** است، هرگاه دارای خاصیت زیر باشد:

1 . Bounded set = Ограниченное множество

برای هر $x \in A$، $r > 0$ ئی موجود باشد، به‌طوری که $B(x\,;r) \subset A$.
مجموعه تهی باز است (بخش ۱ . ۱) را ببینید) ، کل فضای E نیز باز است.

(۱. ۵ . ۳) هر گوی باز یک مجموعه باز است.

زیرا، اگر $x \in B(a\,, r)$ ، آنگاه طبق تعریف $d(a\,, x) < r$ ؛ بنابراین، از رابطه :

$$d(x\,, y) < r - d(a\,, x)$$

نتیجه می‌شود $d(a\,,y) \leq d(a\,, x) + d(x, y) < r$ ، و با این رابطه شمول $B(x\,, r - d(a, x)) \subset B(a\,, r)$ ثابت می‌شود.

(۲. ۵ . ۳) اجتماع هر خانواده $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است.

در واقع، اگر برای یک $\mu \in L$ ، $x \in A_\mu$ باشد، آنگاه $r > 0$ ئی موجود خواهد بود، به‌طوری که: $B(x\,; r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\mu$.

به عنوان مثال، روی خط حقیقی $\mathbf{R}$ ، فاصله باز $]a\,, +\infty[$ مجموعه‌ای است باز، که از اجتماع مجموعه‌های باز $]a\,, x[$ برای همه $x > a$ها تشکیل شده است. به‌طور مشابه، فاصله باز $]-\infty\,, a[$ نیز مجموعه‌ای باز است.

(۳. ۵ . ۳) اشتراک تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است.

کافی است ثابت کنیم که اشتراک دو مجموعه باز A_1، A_2 مجموعه‌ای باز است، و سپس، حکم را با استقراء ثابت کنیم. اگر $x \in A_1 \cap A_2$ ، آنگاه اعداد مثبت $r_1 > \circ$ و $r_2 > \circ$ موجود خواهند بود، به طوری‌که $B(x\,; r_1) \subset A_1$ ، $B(x\,; r_2) \subset A_2$ واضح است که، اگر $r = \min(r_1\,, r_2)$ ، آنگاه $B(x\,, r) \subset A_1 \cap A_2$.

در حالت کلی، اشتراک تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های باز ممکن است باز نباشد. به‌عنوان مثال، اشتراک فاصله‌های باز $]-\frac{1}{n}\,, \frac{1}{n}[$ در $\mathbf{R}$ مجموعه تک نقطه‌ای $\{0\}$ است، که طبق (۱۶. ۲ . ۲) باز نیست. با وجود این :

(۴ . ۵ . ۳) در یک فضای دیسکرت (گسسته) هر مجموعه دلخواه، مجموعه‌ای باز است.

زیرا، طبق (۲. ۵ . ۳) ، کافی است ثابت کنیم مجموعه تک نقطه‌ای $\{a\}$ باز است. اما، طبق تعریف، $\{a\} = B(a\,, \frac{1}{2})$ ، و نتیجه مطلوب از (۱. ۵ . ۳) حاصل می‌شود.

۶. همسایگی‌ها[1]

اگر A یک زیرمجموعه غیرتهی از فضای متریک E باشد، منظور از **یک همسایگی باز مجموعه** A ، مجموعه‌ای باز است که شامل A باشد. هر مجموعه شامل یک همسایگی باز مجموعه A را یک **همسایگی** A می‌نامند. وقتی $A = \{x\}$ باشد، به جای مجموعه $\{x\}$ از همسایگی نقطه x صحبت خواهیم کرد.

(۳ . ۶ . ۱) برای هر مجموعه غیرتهی $A \subset E$ ، و هر $r > 0$ ، مجموعه :

$$V_r(A) = \{ x \in E \mid d(x, A) < r \}$$

یک همسایگی باز مجموعه A است .

زیرا ، اگر $d(x, A) < r$ ، $d(x, y) < r - d(x, A)$ باشد، آنگاه از (۲ . ۴ . ۳) نتیجه می‌شود که : $d(y, A) < d(x, A) + r - d(x, A) = r$. بنابراین $V_r(A)$ باز است ، و به وضوح شامل A نیز هست.

وقتی $A = \{a\}$ باشد ، $V_r(A)$ گوی باز $B(a; r)$ خواهد بود.

گوئیم خانواده (U_λ) از همسایگی A **یک سیستم اساسی از همسایگی‌های** A است، هرگاه هر همسایگی A شامل یکی از مجموعه‌های U_λ باشد. برای مجموعه دلخواه A ، مجموعه‌های $V_r(A)$ $(r > 0)$، در حالت کلی، یک سیستم اساسی از همسایگی‌های A تشکیل نمی‌دهند. (اما (۱۱. ۷. ۳) را ببینید). از تعریف نتیجه می‌شود که :

(۳ . ۶ . ۲) گوی‌های $B(a, \frac{1}{n})$ ($n > 0$ عددی صحیح است) یک سیستم اساسی از همسایگی‌های نقطه a تشکیل می‌دهند.

(۳ . ۶ . ۳) اشتراک تعدادی متناهی از همسایگی‌های A یک همسایگی A است.

مطلب فوق از (۳ . ۵ . ۳) نتیجه می‌شود.

(۳ . ۶ . ۴) برای اینکه مجموعه A همسایگی هر یک از نقاطش باشد، لازم و کافی است که A باز باشد.

کافی بودن شرط فوق واضح است. به عکس، اگر A همسایگی هر نقطه $x \in A$ باشد، برای هر $x \in A$ ،

---

1 . Neighborhoods = Окрестности

مجموعه‌ای باز مانند $U_x \subset A$ شامل x موجود خواهد بود. از روابط $x \in U_x \subset A$ ، نتیجه می‌شود $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$ ، بنابراین، طبق (۲ . ۵ . ۳) ، $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ مجموعه‌ای باز خواهد بود.

مسئله

نشان دهید که ، روی خط حقیقی، $\mathbf{N}$ مجموعه همه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر دارای یک سیستم شمارای اساسی از همسایگی‌ها نیست (از تناقض و از مطلب زیر استفاده کنید : اگر (a_{mn}) دنباله‌ای دوگانه از اعداد اکیداً مثبت باشد، آنگاه دنباله (b_n) که در آن $b_n = a_{nn}/2$ دارای این خاصیت است که، برای هیچ عدد صحیح m نامساوی $b_n \geq a_{mn}$ نمی‌تواند برای همه اعداد صحیح n برقرار باشد).

۷. درون یک مجموعه[1]

نقطه x را یک **نقطه درونی** مجموعه A نامیم، هرگاه A یک همسایگی از نقطه x باشد. مجموعه همه نقاط درونی A را **درون** مجموعه A نامیده، و به علامت $\mathring{A}$ نشان می‌دهند.

به‌عنوان مثال، روی خط حقیقی $\mathbf{R}$ ، درون هر فاصله با نقطه شروع a و نقطه انتهای b $(a < b)$ فاصله باز $]a, b[$ است، و نه a نه b هیچ‌یک نمی‌توانند نقاط درونی فاصله‌های $[a, b]$ ، $[a, b[$ و $]a, b]$ باشند؛ زیرا، هیچ فاصله‌ای به مرکز a یا b نمی‌تواند زیر مجموعه‌ای از این سه فاصله باشد.

(۱. ۷. ۳) برای هر مجموعه A ، $\mathring{A}$ بزرگ‌ترین مجموعه باز مشمول A است.

در واقع، اگر $x \in \mathring{A}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ای باز مانند $U_x \subset A$ شامل x موجود خواهد بود. برای هر $y \in U_x$ ، طبق تعریف، A یک همسایگی y خواهد بود، بنابراین $y \in \mathring{A}$ ، و در نتیجه $U_x \subset \mathring{A}$ ، که طبق (۴. ۶ . ۳) ثابت می‌کند که $\mathring{A}$ باز است. به‌عکس، اگر $B \subset A$ باز باشد، آنگاه، طبق تعریف، واضح است که $B \subset \mathring{A}$. به این ترتیب، مجموعه‌های باز با رابطه $A = \mathring{A}$ مشخص می‌شوند.

(۲. ۷. ۳) اگر $A \subset B$ ، آنگاه $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

مطلب فوق فوراً از (۱. ۷ . ۳) نتیجه می‌شود.

(۳. ۷. ۳) برای زوج مجموعه‌های A و B رابطه $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ برقرار است.

---

1 . Interior of a set = Внутренность множества

شمول $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ از (۲. ۷. ۳) نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$ طبق (۳. ۵. ۳) و (۱. ۷. ۳) باز و مشمول $A \cap B$ است، بنابراین، طبق (۱. ۷. ۳)، $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$.

درون یک مجموعه غیرتهی می‌تواند مجموعه‌ای تهی باشد. به‌عنوان مثال، درون مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای $\mathbf{R}$ تهی هستند.

یک نقطه درونی مجموعه $E - A$ را **نقطه‌ای برونی** از A ، و درون مجموعه $E - A$ را **برون مجموعه** A می‌نامند.

(۴. ۷. ۳) برای اینکه نقطه $x \in A$ نقطه‌ای برونی از A باشد، لازم و کافی است که شرط $d(x, A) > 0$ برقرار باشد.

در واقع، از شرط قضیه نتیجه می‌شود که $B(x, d(x, A)) \subset E - A$. بنابراین، x نقطه ای درونی از $E - A$ خواهد بود. به‌عکس، اگر x نقطه برونی A باشد، آنگاه یک گوی $B(x,r)\ (r > 0)$ مشمول $E - A$ موجود خواهد بود. بنابراین، برای هر $y \in A$ ، خواهیم داشت $d(x, y) \geq r$ ، و در نتیجه $d(x, A) \geq r$.

۸. مجموعه‌های بسته، نقاط چسبیدگی، بستار یک مجموعه

در فضای متریک E ، یک **مجموعه بسته**، طبق تعریف، مجموعه‌ای است که مکمل آن باز باشد. مجموعه تهی، و کل فضای E مجموعه‌هایی بسته هستند. روی خط حقیقی، فاصله‌های $[a, +\infty)$ و $]-\infty, a]$ مجموعه‌هایی بسته هستند، همین‌طور، Z ، مجموعه اعداد صحیح، مجموعه‌ای بسته است. فاصله‌های $]a, b]$ و $[a, b[$ مجموعه‌هایی هستند نه باز و نه بسته.

(۱. ۸. ۳) یک گوی بسته مجموعه‌ای بسته، و یک کره مجموعه‌ای بسته است.

در واقع، اگر $x \notin B'(a, r)$ ، آنگاه طبق (۱. ۴. ۳)، $d(x, B'(a, r)) \geq d(a, x) - r > 0$، و بنابراین، گوی باز به مرکز x و شعاع $d(a, x) - r$ در مکمل $B'(a, r)$ قرار می‌گیرد، که باز بودن مکمل $B'(a, r)$ را ثابت می‌کند. مکمل کره $S(a, r)$ اجتماع گوی $B(a, r)$ و مکمل گوی $B'(a, r)$ است، که طبق (۲. ۵. ۳) ، مجموعه‌ای باز است.

(۲. ۸. ۳) اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

(۳. ۸ . ۳) اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

مطالب فوق فوراً با بررسی مکمل‌ها به ترتیب از (۲. ۵ . ۳) و (۳. ۵ . ۳) نتیجه می‌شوند (فرمول‌های (۹. ۲. ۱) و (۱. ۸ . ۱) را ببینید).

در حالت خاص، مجموعه تک نقطه‌ای $\{x\}$ به‌عنوان اشتراک گوی‌های $B'(x, r)$ ، $r > 0$ مجموعه‌ای بسته است.

(۴. ۸ . ۳) در یک فضای دیسکرت (گسسته) هر مجموعه دلخواه، مجموعه‌ای بسته است.

مطلب فوق فوراً از (۴ . ۵ . ۳) نتیجه می‌شود.

نقطه $x \in E$ را یک **نقطه چسبیدگی**[1] (خوشه‌ای) زیر مجموعه A از E نامیم، هرگاه هر همسایگی x اشتراکی غیرتهی با A داشته باشد. مجموعه همه نقاط چسبیدگی A را **بستار**[2] A نامیده، به علامت $\bar{A}$ نشان می‌دهند. می‌توان گفت، x نقطه چسبیدگی A نیست، هرگاه x نقطه داخلی $E - A$ باشد، به‌عبارت دیگر :

(۵ . ۸ . ۳) بستار مجموعه A ، مکمل برون مجموعه A است.

بستار گوی باز $B(a;r)$ مشمول گوی بسته $B'(a;r)$ است، اما، می‌تواند منطبق بر آن نباشد. اگر زیرمجموعه A از خط حقیقی از طرف بالا (به ترتیب از طرف پایین) کراندار باشد، آنگاه، به عنوان نتیجه‌ای از (۴. ۳. ۲)، sup A (به ترتیب Inf A) یک نقطه چسبیدگی مجموعه A خواهد بود.

با توجه به (۵ . ۸ . ۳) ، از خواص نقاط داخلی و درون مجموعه‌ها، که در بخش ۷ . ۳ ثابت شده‌اند، و با استفاده از فرمول‌های جبر بول، چهار خاصیت زیر به‌عنوان خواص نقاط چسبیدگی و بستار مجموعه‌ها به‌دست می‌آید:

(۶ . ۸ . ۳) برای هر مجموعه A ، $\bar{A}$ کوچک‌ترین مجموعه بسته شامل A می‌باشد.

به ویژه، مجموعه‌های بسته با رابطه $A = \bar{A}$ مشخص می‌شوند.

(۷. ۸ . ۳) اگر $A \subset B$ ، آنگاه $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(۸ . ۸ . ۳) برای هر زوج A ، B از مجموعه‌ها، داریم $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

---

1 . Cluster point = Точка прикосновения

2 . Closure = Замыкание

(۳.۸.۹) برای اینکه x یک نقطه چسبیدگی A باشد، لازم و کافی که $d(x, \mathrm{A}) = 0$.

(۳.۸.۱۰) بستار مجموعه A اشتراک همه همسایگی‌های $\mathrm{V}_r(\mathrm{A})$ از مجموعه A است.

مطلب فوق بیانی دیگر از (۳.۸.۹) است.

(۳.۸.۱۱) در فضای متریک E ، هر مجموعه بسته اشتراکی است از دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های باز، و هر مجموعه باز اجتماعی از دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های بسته است.

اولین گزاره با بررسی مجموعه‌های باز $\mathrm{V}_{\frac{1}{n}}(\mathrm{A})$ ثابت می‌شود، و دومین گزاره از اولین گزاره و با بررسی مکمل‌ها نتیجه می‌شود.

(۳.۸.۱۲) اگر x نقطه چسبیدگی مجموعه A به A تعلق نداشته باشد، برای هر همسایگی V از x مجموعه $\mathrm{V} \cap \mathrm{A}$ نامتناهی خواهد بود.

فرض کنیم چنین نباشد و $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} = \{y_1, \cdots, y_n\}$. طبق فرض $r_k = d(x, y_k) > 0$. عدد $r > 0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{V}$ و $r < \min(r_1, \cdots r_n)$. در این‌صورت، اشتراک A و $\mathrm{B}(x, r)$ تهی خواهد بود، که مخالف فرض است.

گوییم، نقطه $x \in \mathrm{E}$ یک **نقطه مرزی**[1] مجموعه A است، اگر x هم نقطه چسبیدگی A باشد و هم نقطه چسبیدگی $\complement \mathrm{A}$. مجموعه همه نقاط مرزی A را مرز[2] **مجموعه** A نامیده، به علامت $\mathrm{Fr}(\mathrm{A})$ نشان می‌دهیم. واضح است که ، $\mathrm{Fr}(\mathrm{A}) = \bar{\mathrm{A}} \cap \overline{\complement \mathrm{A}} = \mathrm{Fr}(\complement \mathrm{A})$. طبق (۳.۸.۶)، $\mathrm{Fr}(\mathrm{A})$ مجموعه‌ای است بسته، که ممکن است تهی باشد (۳.۱۹.۹ را ببینید). نقطه مرزی x از A با این خاصیت مشخص می‌شود، که هر همسایگی x شامل لااقل نقطه‌ای از A و نقطه‌ای از $\complement \mathrm{A}$ است. کل فضای E اجتماع درون A ، برون A ، و مرز A است. زیرا ، اگر یک همسایگی x نه مشمول A و نه مشمول $\complement \mathrm{A}$ باشد، آنگاه باید شامل نقاطی از هر دوی آنها باشد. هر دو مجموعه از این سه مجموعه نقطه مشترکی ندارند.

مرز هر فاصله با نقطه شروع a و نقطه انتهای b در $\mathbf{R}$ ، مجموعه $\{a, b\}$ می‌باشد. مرز Q مجموعه اعداد گویای $\mathbf{R}$ ، خود مجموعه $\mathbf{R}$ است.

---

1 . Frontier point = Граничная точка

2 . Frontier = Граница

مرز مجموعه A در چاپ اول متن روسی کتاب با علامت $Fr(\mathrm{A})$ و در چاپ دوم متن انگلیسی آن با علامت $\mathrm{fr}(\mathrm{A})$ نشان داده شده است. در برخی از منابع به جای اصطلاح "Frontier point" از واژه "Boundary point" و به جای نمادهای $Fr(\mathrm{A})$ یا $\mathrm{fr}(\mathrm{A})$ از نمادهای $b(\mathrm{A})$ یا $\partial(\mathrm{A})$ استفاده شده است. مترجم.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم A یک مجموعه باز در یک فضای متریک E باشد. نشان دهید که، برای هر زیر مجموعه B از E ،

$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(b) با ارائه مثالی روی خط حقیقی، دو مجموعه باز A و B را طوری انتخاب کنید که مجموعه‌های $A \cap \overline{B}$ ، $B \cap \overline{A}$ ، $\overline{A \cap B}$ ، $\overline{A} \cap \overline{B}$ همگی متفاوت از هم باشند.

(c) مثالی از دو فاصله A و B از خط حقیقی ارائه دهید، که $A \cap \overline{B}$ مشمول $\overline{A \cap B}$ نباشند.

۲. برای هر زیر مجموعه A از فضای متریک E ، فرض کنیم $\beta(A) = \mathring{\overline{A}}$ و $\alpha(A) = \overline{\mathring{A}}$.

(a) نشان دهید که اگر A باز باشد، آنگاه $A \subset \alpha(A)$ ، و اگر A بسته باشد، آنگاه $A \supset \beta(A)$.

(b) نشان دهید که ، برای هر زیر مجموعه A از E ، $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ و $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ (از (a) استفاده کنید) .

(c) مثالی روی خط حقیقی از یک مجموعه A ارائه دهید که هفت مجموعه

$$A, \mathring{A}, \overline{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(\mathring{A}), \beta(\overline{A})$$

همگی متمایز باشند و روابط شمول دیگری به جز روابط زیر نداشته باشند :

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A} \ , \ \mathring{A} \subset \alpha(\mathring{A}) \subset \beta(\overline{A}) \subset \overline{A} \ , \ \mathring{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(A) \subset \overline{A}$$

۳. فرض کنیم E یک فضای متریک باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر زیر مجموعه A از E ، روابط شمول $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ ، $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ ، برقرار هستند ، و مثال‌هایی روی خط حقیقی ارائه دهید که این سه مجموعه متمایز باشند.

(b) فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از فضای E باشند. نشان دهید $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$، و مثالی روی خط حقیقی ارائه دهید که این مجموعه‌ها متمایز باشند. اگر $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ باشد، نشان دهید که :

$$\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$$

(c) اگر A و B باز باشند، نشان دهید که :

$$(A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \subset \mathrm{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \mathrm{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathrm{Fr}(A)) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B))$$

و مثالی (روی خط حقیقی) ارائه دهید که این سه مجموعه با هم برابر نباشند.

۴. فرض کنیم d فاصله‌ای روی مجموعه E باشد، که در **نامساوی فرامتریک**[1] :

$$d(x, z) \le \max(d(x, y), d(y, z))$$

برای هر x و y و z از E صدق می‌کند (مثال ۶ . ۲ . ۳) را ببینید).

(a) نشان دهید که اگر $d(x, y) \neq d(y, z)$ ، آنگاه $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$.

(b) نشان دهید که، در چنین فضایی هر گوی باز $B(x; r)$ همزمان هم مجموعه‌ای است باز و هم بسته، و برای هر $y \in B(x; r)$ ، $B(y; r) = B(x; r)$.

(c) نشان دهید که، در چنین فضایی هر گوی بسته $B'(x; r)$ همزمان هم مجموعه‌ای است باز و هم بسته، و برای هر $y \in B'(x; r)$ ، $B'(y; r) = B'(x; r)$.

(d) نشان دهید که، اگر دو گوی در E نقطه مشترکی داشته باشند، یکی از آنها مشمول دیگری است.

(e) نشان دهید که، فاصله دو گوی باز متمایز به شعاع r ، واقع در گویی بسته به شعاع r ، برابر r است.

1. Ultrametric inequality = Ультраметрическое неравенство

۹. زیر مجموعه‌های چگال، فضاهای جدایی‌پذیر

در فضای متریک E ، گوییم مجموعه A نسبت به مجموعه (در مجموعه) B **چگال**[1] است، هرگاه هر نقطه B یک نقطه چسبیدگی A باشد، به‌عبارت دیگر، هرگاه $B \subset \bar{A}$ (یا، با بیانی هم‌ارز، هرگاه برای هر $x \in B$، هر همسایگی x شامل نقطه‌ای از A باشد).

(۳. ۹. ۱) اگر A در B چگال باشد، و B در C چگال باشد، آنگاه A در C چگال خواهد بود.

زیرا، از رابطه شمول $B \subset \bar{A}$ طبق (۳ . ۸ . ۶) نتیجه می‌شود $\bar{B} \subset \bar{A}$، و طبق فرض $C \subset \bar{B}$ ، بنابراین $C \subset \bar{A}$.

اگر مجموعه A در فضای متریک E چگال باشد، گوییم A **همه جا چگال** است، یا به‌طور ساده گفته می‌شود A در E **چگال** است. چنین مجموعه‌هایی با رابطه $\bar{A} = E$ مشخص می‌شوند. مطلب فوق هم‌ارز این است، که بگوییم، هر مجموعه باز غیر تهی از فضای E شامل نقطه‌ای از A است. یک فضای متریک E را **جدایی‌پذیر** نامند، هرگاه در E مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر مانند A وجود داشته باشد، به‌طوری که در E چگال باشد.

(۳. ۹. ۲) خط حقیقی R جدایی‌پذیر است.

در واقع، طبق (۲. ۲. ۱۶) ، Q مجموعه اعداد گویا در R چگال است، و Q ، طبق (۲. ۲. ۱۵) ، نامتناهی شمارش‌پذیر است.

خانواده $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ از مجموعه‌های باز غیرتهی را یک **پایه**[2] برای مجموعه‌های باز فضای متریک E نامند، هرگاه هر مجموعه باز غیر تهی از E اجتماع زیر خانواده‌ای از خانواده (G_λ) باشد.

(۳. ۹. ۳) برای اینکه خانواده $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ یک پایه برای مجموعه‌های باز فضای متریک E باشد، لازم و کافی است که، برای هر $x \in E$ و هر همسایگی V از x ، اندیسی مانند $\lambda \in L$ موجود باشد، به‌طوری که $x \in G_\lambda \subset V$.

---
1. Dense = Плотно
2. Basis = База

شرط قضیه لازم است. زیرا ، طبق تعریف، یک همسایگی باز $W \subset V$ از x موجود است، و چون W اجتماعی است از مجموعه‌های G_λ، لااقل یک اندیس $\mu \in L$ موجود است، به‌طوری که $x \in G_\mu$. شرط قضیه کافی است. زیرا، در صورت برقرار بودن آن، اگر U یک مجموعه باز دلخواه باشد، برای هر $x \in U$ ، طبق (۱ . ۴ . ۵) ، اندیسی مانند $\mu(x)$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $x \in G_{\mu(x)} \subset U$ ، بنابراین $U \subset \bigcup_{x \in U} G_{\mu(x)} \subset U$.

(۴. ۹. ۳) برای اینکه فضای متریک E جدائی‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، برای مجموعه‌های باز E پایه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر وجود داشته باشد.

شرط قضیه شرطی کافی است. زیرا ، اگر (G_n) پایه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر برای مجموعه‌های باز E ، و a_n نقطه‌ای از G_n باشد، آنگاه هر مجموعه غیرتهی باز E اجتماعی از تعدادی از G_nها است، و بنابراین، اشتراک هر مجموعه باز E با مجموعه حداکثر شمارش‌پذیری که از نقاط a_n تشکیل شده است، غیر تهی خواهد بود. به‌عکس، فرض کنیم، دنباله‌ای حداکثر شمارش‌پذیر مانند (a_n) از نقاط E موجود باشد، به‌طوری که در E چگال باشد. در این‌صورت، خانواده گوی‌های باز $B(a_n , \frac{1}{m})$ که طبق (۱ .۹ .۳) و (۱ . ۹ .۲) مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است، پایه‌ای برای مجموعه‌های باز فضای E خواهد بود. در واقع، برای هر $x \in E$ و هر $r > 0$ ، اندیسی مانند m موجود است. به‌طوری که $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$ ، و نیز اندیسی مانند n موجود است، به‌طوری که $a_n \in B(x ; \frac{1}{m})$ ، و در نتیجه $x \in B(a_n ; \frac{1}{m})$ ، از طرف دیگر، اگر $y \in B(a_n ; \frac{1}{m})$ ، آنگاه $d(x , y) \le d(x , a_n) + d(a_n , y) \le \frac{2}{m} < r$ ، بنابراین $B(a_n ; \frac{1}{m}) \subset B(x ; r)$ ، و طبق (۳ .۹ .۳) ، اثبات به پایان می‌رسد.

مسائل

۱. نشان دهید که در فضای متریک E ، اجتماع یک زیر مجموعه باز و برون آن، مجموعه‌ای همه جا چگال است.

۲. فرض کنیم A مجموعه‌ای در فضای متریک E باشد. نقطه $x \in A$ را یک نقطه **ایزوله** A نامیم، هرگاه یک همسایگی از x مانند V موجود باشد، به‌طوری که $V \cap A$ تنها از نقطه x تشکیل شده باشد.[۱]

(a) نشان دهید که، مجموعه کلیه نقاط ایزوله یک فضای متریک جدائی‌پذیر E مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است.

(b) نشان دهید که در یک فضای متریک جدائی‌پذیر E ، هر خانواده $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ از مجموعه‌های غیرتهی باز به‌طوری که برای هر $\lambda \neq \mu$ ، $U_\lambda \cap U_\mu = \varnothing$ مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است.

۳. فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای غیر تهی از خط حقیقی، و B مجموعه‌ای از نقاط $x \in \bar{A}$ باشد، به‌طوری که فاصله‌ای باز مانند $]x , y[$ با $y > x$ موجود باشد که اشتراک آن با A تهی باشد. نشان دهید که، B حداکثر شمارش‌پذیر است

---

۱. مسئله ۲ از متن روسی کتاب که به نحو کامل‌تری نوشته شده است، ترجمه شده است. مترجم.

(ثابت کنید که B هم‌توان با مجموعه‌ای از فواصل باز است، که دو فاصله متمایز از آنها نقطه مشترکی ندارند).

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک جدایی‌پذیر باشد. نقطه $x \in E$ را یک **نقطه انقباض** (نقطه تکاثف ـ نقطه چگالش ـ نقطه تراکم)[1] مجموعه $A \subset E$ می‌نامند، هرگاه در هر همسایگی نقطه x تعداد شمارش‌ناپذیری از نقاط A وجود داشته باشد، ثابت کنید که :

(a) اگر مجموعه A نقطه انقباض نداشته باشد، آنگاه حداکثر شمارش‌پذیر خواهد بود (نقاط مشترک A را با مجموعه‌هایی که تشکیل یک پایه باز برای E می‌دهند، مورد بررسی قرار دهید).

(b) اگر B مجموعه نقاط انقباض مجموعه A باشد، نشان دهید که هر نقطه B یک نقطه انقباض B است، و مجموعه $A \cap (\complement B)$ حداکثر شمارش‌پذیر است. (نشان دهید که B بسته است، و از (a) استفاده کنید.)

۵. نشان دهید که از هر پوشش باز یک فضای متریک جدائی‌پذیر، می‌توان پوششی حداکثر شمارش‌پذیر استخراج نمود.

۶. فرض کنیم E یک فضای متریک جدائی‌پذیر، و f نگاشتی دلخواه از E به R باشد. گوییم، f در نقطه‌ای مانند $x_\circ \in E$ به **ماکسیمم نسبی (به ترتیب ماکسیمم نسبی اکید)** می‌رسد، اگر یک همسایگی V از $x_\circ$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر نقطه $x \in V$ متمایز از $x_\circ$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_\circ)$ (به ترتیب $f(x) < f(x_\circ)$). نشان دهید که M مجموعه نقاط $x \in E$ که در آن نقاط f ماکسیمم نسبی اکید خود را کسب می‌کند، مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است. (اگر (U_n) پایه‌ای برای مجموعه‌های باز E باشد، مقادیری از n که برای آنها نقطه یکتائی مانند $x \in U_n$ موجود است، به‌طوری‌که $f(x)$ برابر کوچکترین کران بالای f روی U_n است، مورد بررسی قرار دهید.)

۱۰. زیر فضاهای یک فضای متریک

فرض کنیم F زیر مجموعه‌ای غیر تهی از فضای متریک E باشد. تحدید نگاشت $(x, y) \to d(x, y)$ به $F \times F$ به وضوح فاصله‌ای روی F است، که آن را **فاصله القاء شده**[2] روی F به‌وسیله فاصله فضای E می‌نامند. فضای متریکی که به‌وسیله این فاصله القائی ایجاد شده، **زیر فضای** F از فضای متریک E نامیده می‌شود.

(۳ .۱۰ .۱) برای اینکه مجموعه $B \subset F$ در زیر فضای F باز باشد، لازم و کافی است که مجموعه‌ای باز مانند A در E موجود باشد، به‌طوری که $B = A \cap F$.

اگر $a \in F$، آنگاه $F \cap B(a, r)$ گویی باز به مرکز a و شعاع r در زیر فضای F است. اگر A در E باز باشد و $x \in A \cap F$، آنگاه $r > 0$ یی موجود خواهد بود، به‌طوری که $B(x, r) \subset A$. بنابراین $x \in F \cap B(x, r) \subset A \cap F$، که نشان می‌دهد $A \cap F$ در F باز است. به‌عکس، اگر B در زیر فضای F باز باشد، آنگاه برای هر $x \in B$، عددی مانند $r(x) > 0$ موجود خواهد بود، به طوری که $F \cap B(x, r(x)) \subset B$. بنابراین $B = \bigcup_{x \in B} (F \cap B(x, r(x)) = F \cap A$، که در آن $A = \bigcup_{x \in B} B(x, r(x))$، و طبق (۳ .۵ .۱) و (۳ .۵ .۲) A در E باز است.

1. Condensation point = Точка конденсации
2. Induced = Индуцированный

(۲. ۱۰. ۳) برای اینکه هر زیر مجموعه $B \subset F$ ، که در F باز است، در E نیز باز باشد، لازم و کافی است که F در E باز باشد.

با قرار دادن $B = F$ دیده می‌شود، که شرط قضیه شرطی لازم است. با استفاده از (۱. ۱۰. ۳) و (۳ . ۵ . ۳) کفایت شرط قضیه نیز ثابت می‌شود.

(۳. ۱۰. ۳) اگر $x \in F$ ، آنگاه، برای اینکه زیر مجموعه W از F یک همسایگی x در فضای F باشد، لازم و کافی است که $W = V \cap F$ ، که در آن V یک همسایگی x در E است.

(۴ . ۱۰. ۳) برای اینکه هر همسایگی در F از نقطه $x \in F$ ، یک همسایگی از x در E باشد، لازم و کافی است که F یک همسایگی x در E باشد.

این خواص فوراً از (۱. ۱۰. ۳) و تعریف همسایگی نتیجه می‌شوند.

(۵ . ۱۰. ۳) برای اینکه مجموعه $B \subset F$ در زیر فضای F بسته باشد، لازم و کافی است که، مجموعه‌ای بسته در E مانند A موجود باشد، به‌طوری که $B = A \cap F$.

بسته بودن B در F به‌معنی باز بودن $F - B$ در F ، و بنابراین، طبق (۱. ۱۰. ۳) ، هم‌ارز این است که بگوییم، مجموعه‌ای باز مانند C در E موجود است، به‌طوری که $F - B = C \cap F$ ، و رابطه فوق، طبق (۱۳. ۵ . ۱) ، هم‌ارز $B = F \cap (E - C)$ می‌باشد، که از آن نتیجه مطلوب حاصل شود.

(۶ . ۱۰. ۳) برای اینکه هر زیر مجموعه $B \subset F$ که در F بسته است، در E نیز بسته باشد، لازم و کافی است که F در E بسته باشد.

با استفاده از (۵ . ۱۰. ۳) و (۲ . ۸ . ۳) با اثباتی مشابه (۲ . ۱۰ . ۳) حکم ثابت می‌شود.

(۷ . ۱۰ . ۳) اگر $B \subset F$ باشد، بستار مجموعه B نسبت به F ، برابر $\bar{B} \cap F$ است، که در آن $\bar{B}$ بستار B در E است.

در واقع، برای هر همسایگی V از $x \in F$ در E ، داریم $V \cap B = (V \cap F) \cap B$ ، و نتیجه مطلوب از (۳ . ۱۰. ۳) و تعریف نقطه چسبیدگی حاصل می‌شود.

(۸ . ۱۰. ۳) فرض کنیم F زیر مجموعه‌ای چگال در فضای E باشد، برای هر نقطه $x \in F$ و هر همسایگی W از x در F ، $\bar{W}$ بستار W در E یک همسایگی نقطه x در E خواهد بود.

طبق تعریف، همسایگی باز U از نقطه x در E وجود دارد، به‌طوری که $U \cap F \subset W$. کافی است ثابت کنیم که $U \subset \bar{W}$. اما، اگر $y \in U$ ، و V یک همسایگی دلخواه y در E باشد، آنگاه، $U \cap V$ یک همسایگی y در E خواهد بود. بنابراین $F \cap (U \cap V)$ غیر تهی است، که به معنی غیر تهی بودن $(F \cap U) \cap V$ ، و یا $y \in \overline{F \cap U} \subset \bar{W}$ می‌باشد.

(۹. ۱۰. ۳) هر زیر فضا از یک فضای متریک جدائی‌پذیر، جدائی‌پذیر است.

در واقع، اگر (G_n) یک پایه حداکثر شمارش‌پذیر برای مجموعه‌های باز E باشد، آنگاه مجموعه‌های به فرم $G_n \cap F$ با توجه به (۱. ۱۰. ۳) و (۲. ۸. ۱) پایه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر برای زیر مجموعه‌های باز زیر فضای $F \subset E$ خواهد بود. به این ترتیب ، با توجه به (۴. ۹. ۳) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۱۰. ۱۰. ۳)[۱] فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از فضای متریک E باشد. نقطه $x_0 \in A$ را یک نقطه **ایزوله** A نامند، هرگاه یک همسایگی V از نقطه x_0 در E موجود باشد، به‌طوری که $V \cap A = \{x_0\}$. می‌توان گفت، ایزوله بودن همه نقاط مجموعه A ، به این معنی است که، در زیر فضای A هر مجموعه مجموعه‌ای است باز (به‌عبارت دیگر، زیر فضای A با یک فضای **دیسکرت (گسسته)** هومیومورف است : بخش ۱۲ . ۳ را ببینید). در یک فضای متریک **جدایی‌پذیر**، هر زیر مجموعه که همه نقاط آن نقاط ایزوله (تنها) باشند، طبق (۴. ۳. ۹) ، مجموعه‌ای **حداکثر شمارش‌پذیر** خواهد بود.

مسائل

۱. فرض کنیم B و B' دو زیر مجموعه غیرتهی از فضای متریک E ، و A زیر مجموعه‌ای از $B \cap B'$ باشد، که هم نسبت به B و هم نسبت به B' باز (به ترتیب بسته) است. نشان دهید که، A نسبت به $B \cup B'$ باز (به ترتیب بسته) است.

۲. فر ض کنیم (U_α) پوششی از فضای متریک E باشد، که از زیر مجموعه‌های باز E تشکیل شده است. برای اینکه زیر مجموعه A از E در E بسته باشد، لازم و کافی است که، هر مجموعه $A \cap U_\alpha$ نسبت به U_α بسته باشد.

۳. در فضای متریک E ، زیر مجموعه $A \subset E$ را به‌طور **موضعی بسته**[۲] نامیم، هرگاه برای هر $x \in A$ ، یک همسایگی V از x موجود باشد، به‌طوری که $A \cap V$ نسبت به V بسته باشد. نشان دهید که، زیر مجموعه‌های به‌طور موضعی بسته در فضای E به شکل $U \cap F$ می‌باشند، که در آن U در E باز، و F در E بسته است. (برای اثبات اینکه، یک مجموعه به‌طور موضعی بسته چنین فرمی دارد، از مسئله ۲ استفاده کنید.)

۴. در صفحه R^2 مثالی از زیر فضایی مانند E ارائه دهید، که در E گویی **باز** وجود داشته باشد، که مجموعه‌ای بسته باشد، اما، یک گوی بسته نباشد، و در E گویی **بسته** وجود داشته باشد، که مجموعه‌ای باز باشد، اما، یک گوی باز نباشد. (E را متشکل از دو نقطه $(0 , 1)$ و $(0 , -1)$ و زیر مجموعه‌ای مناسب از محور x ها انتخاب کنید.)

۵. اثباتی برای گزاره (۹. ۱۰. ۳) بدون استفاده از مفهوم پایه ارائه دهید (به عبارت دیگر، زیر مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر ارائه نمایید که در زیر فضای مورد نظر گزاره (۹. ۱۰. ۳) چگال باشد).

---

۱ . این مطالب در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، اما، مضمون آن در مسئله ۲ قسمت قبل منعکس شده است. مترجم.

2. Locally closed = Локалвно замкнутое

۱۱. نگاشت‌های پیوسته

فرض کنیم E و E' دو فضای متریک، و d و d' فاصله‌های روی E و E' باشند. نگاشت f از E به E' را در نقطه $x_0 \in E$ **پیوسته** نامیم، هرگاه برای هر همسایگی V' از نقطه $f(x_0)$ در فضای E' یک همسایگی V از نقطه x_0 در E موجود باشد، به‌طوری که $f(V) \subset V'$. نگاشت f را روی E **پیوسته** (یا برای اختصار «پیوسته») نامیم، هرگاه در هر نقطه از فضای E پیوسته باشد.

اگر موافقت کنیم که، مفهوم همسایگی مطابق ایده شهودی « نزدیکی» است، در این‌صورت، می‌توانیم تعریف قبلی را با روشی شهودی‌تر بیان کنیم : نگاشت $f : E \to E'$ در نقطه $x_0 \in E$ پیوسته است، هر گاه ، $f(x)$ **به‌طور دلخواه به $f(x_0)$ نزدیک شود، وقتی x به حد کافی به x_0 نزدیک می‌شود.**

(۱. ۱۱. ۳) برای اینکه نگاشت f در نقطه $x_0 \in E$ پیوسته باشد، لازم و کافی است که، برای هر همسایگی V' از $f(x_0)$ در E' ، $f^{-1}(V')$ یک همسایگی نقطه x_0 در E باشد.

(۲. ۱۱. ۳) برای اینکه f در نقطه $x_0 \in E$ پیوسته باشد، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه ، $\delta > 0$ یی موجود باشد، به‌طوری که، از رابطه $d(x_0 , x) < \delta$ نتیجه شود $d'(f(x_0) , f(x)) < \varepsilon$.

گزاره‌های فوق صرفاً بیان‌هایی دیگر از تعریف پیوستگی هستند.

اگر F زیر فضایی از E باشد، اینژکسیون طبیعی $j_F : F \to E$ که در (۱. ۶. ۱) تعریف شده، نگاشتی پیوسته است. هر نگاشت ثابت پیوسته است.

(۳. ۱۱. ۳) اگر $x_0 \in E$ یک نقطه چسبیدگی مجموعه $A \subset E$ باشد، و نگاشت f در نقطه x_0 پیوسته باشد، آنگاه $f(x_0)$ یک نقطه چسبیدگی $f(A)$ خواهد بود.

در واقع، اگر V' یک همسایگی از $f(x_0)$ در E' باشد، آنگاه $f^{-1}(V')$ یک همسایگی از x_0 در E خواهد بود. بنابراین $A \cap f^{-1}(V')$ غیر تهی، و مثلاً $y \in A \cap f^{-1}(V')$ ، و در این صورت $f(y) \in f(A) \cap V'$.

(۴. ۱۱. ۳) فرض کنیم f نگاشتی از E به E' باشد. در این‌صورت، خواص زیر هم‌ارزند :

(a) f پیوسته است ؛

(b) برای هر مجموعه باز A' در E' ، $f^{-1}(A')$ مجموعه‌ای باز در E است؛

(c) برای هر مجموعه بسته A' در E' ، $f^{-1}(A')$ مجموعه‌ای بسته در E است؛

(d) **برای هر مجموعه A در E ،** $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

با توجه به (۳. ۱۱. ۳) ، داریم $(a) \Rightarrow (d)$. نشان می‌دهیم که $(d) \Rightarrow (c)$. اگر A' بسته، و $A = f^{-1}(A')$ باشد، آنگاه $f(\bar{A}) \subset \bar{A'} = A'$ ؛ بنابراین $\bar{A} \subset f^{-1}(A') = A$ ، و چون $A \subset \bar{A}$ ، پس A بسته خواهد بود. گزاره $(c) \Rightarrow (b)$ از تعریف مجموعه‌های بسته و فرمول (۱۳. ۵ . ۱) نتیجه می‌شود. بالاخره، $b \Rightarrow a$ ، زیرا ، اگر V' یک همسایگی نقطه $f(x_0)$ باشد، آنگاه یک همسایگی باز $W' \subset V'$ از نقطه $f(x_0)$ موجود خواهد بود. $f^{-1}(W')$ یک مجموعه باز شامل x_0 و مشمول $f^{-1}(V')$ است. بنابراین، طبق (۱. ۱۱. ۳) ، نگاشت f در هر نقطه x_0 پیوسته خواهد بود.

لازم است اشاره شود که، تصویر مستقیم یک مجموعه باز (به ترتیب یک مجموعه بسته) تحت یک نگاشت پیوسته در حالت کلی ممکن است باز (به ترتیب بسته) نباشد. به‌عنوان مثال، نگاشت $x \to x^2$ روی $\mathbf{R}$ پیوسته است، اما تصویر مستقیم مجموعه باز $]-1 , +1[$ تحت نگاشت فوق فاصله $[0 , 1[$ است که باز نیست. نگاشت $x \to \frac{1}{x}$ روی زیر فضای $E = [1 , +\infty[$ از R پیوسته است، اما، تصویر مستقیم مجموعه E فاصله $]0 , 1]$ است که در R بسته نیست. (با وجود این، (۹. ۱۷. ۳) و (۳. ۲۰. ۱۳) را ببینید).

(۵ . ۱۱. ۳) فرض کنیم f نگاشتی از فضای متریک E به فضای متریک E' ، و g نگاشتی از فضای متریک E' به فضای متریک E'' باشد. اگر f در نقطه x_0 ، و g در نقطه $f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $h = g \circ f$ در x_0 پیوسته خواهد بود. اگر f روی E و g روی E' پیوسته باشد، آنگاه h روی E پیوسته است.

دومین قسمت گزاره به‌وضوح از قسمت اول آن نتیجه می‌شود. فرض کنیم W'' یک همسایگی از نقطه $h(x_0) = g(f(x_0))$ باشد. در این‌صورت، طبق (۱. ۱۱. ۳) و طبق فرض $g^{-1}(W'')$ یک همسایگی از نقطه $f(x_0)$ در E'، و $f^{-1}(g^{-1}(W''))$ یک همسایگی از x_0 در E خواهد بود. اما $f^{-1}(g^{-1}(W'')) = h^{-1}(W'')$. در حالت خاص:

(۶ . ۱۱. ۳) اگر f نگاشتی از E به E'، پیوسته در نقطه x_0 ، و F زیر فضائی از E شامل x_0 باشد، آنگاه تحدید f به F در نقطه x_0 پیوسته خواهد بود.

در واقع، تحدید f به F ، نگاشت $f \circ j_F$ است، که در آن j_F نگاشت یک به یک طبیعی از زیر فضای F به E ، نگاشتی پیوسته است.

توجه به این نکته ضروری است که، ممکن است تابع $f : E \to E'$ در هیچ نقطه‌ای از E پیوسته نباشد، اما، تحدید f به زیر فضای F در هر نقطه‌ای از F پیوسته باشد. به‌عنوان مثال، تحدید تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که روی $\mathbf{Q}$ مجموعه اعداد گویا برابر ۱ و روی اعداد اصم برابر صفر است **(تابع دیریکله)** روی $\mathbf{Q}$ تابع ثابت

۱ است، که تابعی پیوسته است.

نگاشت $f: \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ را روی E **به‌طور یکنواخت پیوسته**[1] نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ یی موجود باشد، به‌طوری که ، از رابطه $d(x , y) < \delta$ نتیجه شود $d'(f x) , f(y)) < \varepsilon$. از این تعریف و (۲. ۱۱. ۳) نتیجه می‌شود:

(۷. ۱۱. ۳) یک نگاشت به‌طور یکنواخت پیوسته، نگاشتی پیوسته است.

عکس مطلب فوق در حالت کلی درست نیست. به‌عنوان مثال، تابع $x \to x^2$ روی R به‌طور یکنواخت پیوسته نیست، زیرا، برای $\alpha > 0$ داده شده، اختلاف $(x+\alpha)^2 - x^2 = \alpha(2x+\alpha)$ می‌تواند به‌طور دلخواه بزرگ انتخاب شود (با وجود این ، (۵. ۱۶. ۳) را ببینید).

در مثال‌های فوق، نگاشت ثابت و نگاشت یک به یک طبیعی، به‌طور یکنواخت پیوسته هستند.

(۸. ۱۱. ۳) برای هر مجموعه غیرتهی A از E ، نگاشت $x \to d(x , \mathrm{A})$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

مطلب فوق از تعریف پیوستگی یکنواخت و گزاره (۲. ۴. ۳) نتیجه می‌شود.

(۹. ۱۱. ۳) اگر f نگاشتی به‌طور یکنواخت پیوسته از E به E' ، و g نگاشتی به‌طور یکنواخت پیوسته از E' به E'' باشد، آنگاه $h = g \circ f$ نگاشتی به‌طور یکنواخت پیوسته از E به E'' خواهد بود.

در واقع، برای $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده، $\delta > 0$ ئی موجود است، به‌طوری که، از رابطه $d'(x' , y') < \delta$ نتیجه می‌شود $d''(g(x') , g(y')) < \varepsilon$ ، سپس $\eta > 0$ ئی یافت خواهد شد ، به‌طوری که ، از رابطه $d(x , y) < \eta$ نتیجه می‌شود $d'(f(x) , f(y)) < \delta$. بنابراین، از رابطه $d(x , y) < \eta$ ، نتیجه می‌شود $d''(h(x) , h(y)) < \varepsilon$.

مسائل

۱. فرض کنیم f نگاشتی از فضای متریک E به فضای متریک E' باشد. نشان دهید که، خواص زیر هم ارز هستند:
(a) f پیوسته است:

(b) برای هر زیر مجموعه A' از E'، $f^{-1}(\mathring{\mathrm{A}}') \subset (f^{-1}(\mathrm{A}'))^{\circ}$؛

(c) برای هر زیر مجموعه A' از E' ، $\overline{f^{-1}(\mathrm{A}')} \subset f^{-1}(\bar{\mathrm{A}}')$.

مثالی از یک نگاشت پیوسته f و یک زیر مجموعه $\mathrm{A}' \subset \mathrm{E}'$ ارائه دهید که $f^{-1}(\bar{\mathrm{A}}')$ بستار $f^{-1}(\mathrm{A}')$ نباشد.

۲. نشان دهید که، برای هر فضای متریک E ، هر عدد مثبت $r > 0$ و هر زیر مجموعه A از E مجموعه

1 . Uniformly continuous = Равномерно непрерывное

$V'_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) \le r\}$ مجموعه‌ای بسته در E است. (از (۸ . ۱۱. ۳) استفاده کنید).

۳. در فضای متریک E ، فرض کنیم A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، به‌طوری که $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \varnothing$. نشان دهید که، مجموعه باز $U \supset A$ و مجموعه باز $V \supset B$ وجود دارند، به‌طوری که $U \cap V = \varnothing$.
(تابع $x \to d(x, A) - d(x, B)$ را مورد بررسی قرار دهید).

۴. [1] فرض کنیم $f: R \to R$ نگاشتی پیوسته است.

(a) نشان دهید که اگر f روی R به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، دو عدد حقیقی $\alpha \ge 0$ و $\beta \ge 0$ وجود دارند، به‌طوری که، برای هر $x \in R$، $|f(x)| \le \alpha |x| + \beta$.

(b) نشان دهید که اگر f روی R یکنوا و کراندار نیز باشد، آنگاه f روی R به‌طور یکنواخت پیوسته خواهدبود.

۱۲. هومیومورفیسم‌ها ، فاصله‌های هم‌ارز

نگاشت f از فضای متریک E به فضای متریک E' را یک **هومیومورفیسم**[2] نامند، هرگاه :

(۱) f یک بیژکسیون از E به روی E' باشد ؛

(۲) هم نگاشت f و هم f^{-1} نگاشت وارون f هر دو پیوسته باشند.

چنین نگاشتی نگاشت از **دو سو پیوسته** نیز می‌نامند. نگاشت معکوس f^{-1} نیز در چنین حالتی یک هومیومورفیسم از E' به روی E خواهد بود. اگر f یک هومیومورفیسم از E به روی E' و g یک هومیومورفیسم از E' به روی E'' باشد، طبق (۵. ۱۱. ۳) نگاشت $g \circ f$ یک هومیومورفیسم از E به E'' خواهد بود. یک هومیومورفیسم ممکن است به‌طور یکنواخت پیوسته نباشد. (به‌عنوان مثال، هومیومورفیسم $x \to x^3$ از R به R). دو فضای E ، E' را **هومیومورفیک**[3] (هومیومورف) نامند، هرگاه هومیومورفیسمی از E به روی E' موجود باشد. دو فضای هومیومورفیک با یک فضای سوم خود هومیومورفیک هستند. با بد استفاده کردن از زبان، یک فضای هومیومورفیک (همسان ریخت) با فضای متریک دیسکرت (گسسته) توصیف شده در (۵ . ۲. ۳) را فضائی **دیسکرت (گسسته)** می‌نامند، حتی، اگر فاصله تعریف شده روی آن شبیه فاصله تعریف شده در (۵ . ۲. ۳) نباشد.[4]

یک ایزومتری طبق تعریفش همیشه پیوسته یکنواخت، و بنابراین، یک هومیومورفیسم است. به‌عنوان مثال، خط حقیقی گسترش یافته $\bar{R}$، طبق تعریفش، با زیر فضای $[-1, 1]$ از R هومیومورفیک است.

---

۱. این مسئله در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ژان دیودونه ترجمه شده است. مترجم.

۲. چنین نگاشتی را یک نگاشت توپولوژیک یا یک همسانی یا یک همسان ریختی نیز می‌نامند. مترجم.

۳ . به این واژه همسان ریخت نیز می‌گویند. مترجم.

۴ . برای کسانی که به مفاهیم بسیار مقدماتی توپولوژی عمومی آشنایی کافی داشته باشند، روشن است که، اگر E یک مجموعه غیرتهی دلخواه باشد $P(E)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های E یک فضای توپولوژیک موسوم به فضای دیسکرت (گسسته) است. در این فضا هر زیر مجموعه $A \subset E$ همزمان هم باز است و هم بسته. علاوه بر این، چنین فضایی متریک‌پذیر نیز هست. به‌عنوان مثال، می‌توان روی آن متر مبتذل تعریف شده در (۵ . ۲. ۳) در نظر گرفت، واضح است که، فضاهای همسان ریخت با یک فضای دیسکرت، خود ماهیتاً فضاهایی دیسکرت هستند، جدا از اینکه متر روی آنها چگونه تعریف شده باشد. مترجم.

فرض کنیم d_1 ، d_2 دو فاصله روی مجموعه E باشند. این فاصله‌ها دو فضای متریک را روی E تعریف می‌کنند، که باید به‌عنوان فضاهای متمایز مورد بررسی قرار گیرند. (اگرچه « مجموعه زیر بنای[۱] » یکسان دارند). فرض کنیم E_1 ، E_2 این فضاها باشند. اگر نگاشت همانی $x \to x$ از E_1 به روی E_2 یک هومیومورفیسم باشد، آنگاه d_1 ، d_2 را فاصله‌های **هم‌ارز** (یا **فاصله‌های به‌طور توپولوژیک هم‌ارز**) روی E می‌نامند. از (۴. ۱۱. ۳) دیده می‌شود که، در این حالت، **خانواده مجموعه‌های باز** در E_1 و در E_2 برهم منطبق می‌شوند. خانواده مجموعه‌های باز فضای متریک E را اغلب **توپولوژی فضای** E می‌نامند. (مقایسه کنید با بخش ۱. ۱۲). به‌این ترتیب، فاصله‌های هم‌ارز توپولوژی‌های یکسانی ایجاد می‌کنند.

می‌توان ثابت کرد که، تعریف **همسایگی‌ها، مجموعه‌های بسته، نقطه چسبیدگی، بستار، درون، برون، مجموعه‌های چگال، مرز، توابع پیوسته**، تنها به توپولوژی‌های روی فضاهای مورد بررسی وابسته هستند. اینها **مفاهیم توپولوژیکی** هستند. از طرف دیگر، مفاهیم مربوط به **گوی‌ها، کره‌ها، قطر، مجموعه کراندار، توابع به‌طور یکنواخت پیوسته** مفاهیم توپولوژیکی نیستند. **خواص توپولوژیک یک فضای متریک تحت هومیومورفیسم‌ها پایا (تغییرناپذیر ـ ناوردا - اینواریانت)[۲] باقی می‌مانند.**

با نمادهای قبلی، ممکن است این اتفاق بیفتد که، نگاشت همانی $x \to x$ از فضای E_1 به فضای E_2 پیوسته باشد، اما، از دو سو پیوسته نباشد. به‌عنوان مثال، می‌توان $E = \mathbf{R}$ ، $d_2(x, y) = |x - y|$ و d_1 را به‌عنوان فاصله تعریف شده در (۵ . ۲. ۳) که تنها مقادیر 0 و 1 را می‌گیرد، انتخاب نمود. در یک چنین حالتی، فاصله d_1 (به ترتیب توپولوژی فضای E_1) را **ظریف‌تر**[۳] از فاصله d_2 (به ترتیب توپولوژی فضای E_2) می‌نامند.

مسائل

۱. فرض کنیم $a > 0$ یک عدد اصم باشد. برای هر عدد گویای $x > 0$ ، فرض کنیم $f_a(x)$ عدد حقیقی یکتای معینی باشد، به‌طوری که $0 < f_a(x) < a$ و $x - f_a(x)$ مضرب صحیحی از a باشد. نشان دهید که f_a یک نگاشت یک به یک پیوسته از فضای Q_+^* متشکل از اعداد گویای اکیداً مثبت به فاصله $]0, a[$ از R است، و $f_a(Q_+^*)$ در $]0, a[$ چگال است. از این نتیجه و از مسئله ۱ بخش ۲ . ۲ نتیجه بگیرید که، یک نگاشت پیوسته دوسوئی از Q به خودش وجود دارد، که از دو طرف پیوسته نیست (مقایسه کنید با (۲. ۲. ۴)) .

۲. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از فضای متریک E به فضای متریک F باشد.

(a) فرض کنیم (V_λ) پوششی باز برای F باشد. نشان دهید که، اگر برای هر λ ، تحدید f به $f^{-1}(V_\lambda)$ یک هومیومورفیسم از زیر فضای $f^{-1}(V_\lambda)$ از E به زیر فضای V_λ از F باشد، f یک هومیومورفیسم از E به F خواهد بود.

(b) مثالی از نگاشتی مانند f، و پوششی از مجموعه‌های باز مانند (U_α) از فضای E ارائه دهید، که f یک‌به‌یک نباشد، و

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای اصطلاح «مجموعه زیربنا» که معادلی برای واژه انگلیسی "Underlying set" است، از اصطلاح «مجموعه نقاط» که برگردانی از واژه روسی «Множество точек» است، استفاده شده است. مترجم.

2 . Invariant = Инвариант , Инвариантный

۳. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای اصطلاح «ظریف‌تر» از واژه «قوی‌تر» استفاده شده است. مترجم.

تحدید f به هر یک از U_αها هومیومورفیسمی از زیر فضای $U_\alpha \subset E$ به روی زیر فضای $f(U_\alpha) \subset F$ باشد. (می‌توان هم E و هم F را دیسکرت گرفت).

۳. فرض کنیم E و F و G سه فضای متریک، f نگاشتی پیوسته از E به F، و g نگاشتی پیوسته از F به G باشد. نشان دهید که، اگر f پوشا و $g \circ f$ یک هومیومورفیسم از E به روی G باشد، آنگاه f یک هومیومورفیسم از E به روی F و g یک هومیومورفیسم از F به روی G است.

۱۳. حدود[1]

فرض کنیم E یک فضای متریک، A زیر مجموعه‌ای از E، و a یک نقطه چسبیدگی A باشد، و ابتدا فرض کنیم a متعلق به A نباشد. در این‌صورت، اگر f نگاشتی از A به فضای متریک E' باشد، گوئیم، وقتی $x \in A$ به سمت a میل می‌کند، $f(x)$ دارای حد $a' \in E'$ است (یا a' حد نگاشت f در نقطه $a \in \bar{A}$ نسبت به مجموعه A است)، هرگاه نگاشت g از زیرفضای $A \cup \{a\}$ به E' که با روابط: $g(x) = f(x)$، برای $x \in A$، $g(a) = a'$ تعریف می‌شود، در نقطه a پیوسته باشد. در این حالت می‌نویسیم $a' = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$. اگر $a \in A$ باشد، آنگاه از همان اصطلاحات و نمادهایی استفاده می‌کنیم، که برای نگاشت پیوسته f در نقطه a استفاده کردیم، ضمناً $a' = f(a)$.

(۱. ۱۳. ۳) برای اینکه $f(x)$، وقتی $x \in A$ به سمت a میل می‌کند، حد $a' \in E'$ باشد، لازم و کافی است که، برای هر همسایگی V' از a' در E'، همسایگی V از a در E موجود باشد، به‌طوری که $f(V \cap A) \subset V'$.

(۲. ۱۳. ۳) برای اینکه $f(x)$، وقتی $x \in A$ به سمت a میل می‌کند، حد $a' \in E'$ باشد، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ی موجود باشد، به‌طوری که از رابطه‌های $x \in A$ و $d(x, a) < \delta$، نتیجه شود $d'(a', f(x)) < \varepsilon$.

این ملاک‌ها صرفاً بیان‌های دیگری از تعریف‌ها هستند.

(۳. ۱۳. ۳) یک نگاشت f می‌تواند تنها یک حد نسبت به مجموعه A در نقطه داده شده $a \in \bar{A}$ باشد.

در واقع، اگر a' و b' حدود f در نقطه a باشند، از (۲. ۱۳. ۳) و نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود، که برای هر $\varepsilon > 0$، باید داشته باشیم $d'(a', b') \le 2\varepsilon$، که برای $a' \neq b'$ غیرممکن است.

---

[1] تعریفی که از حد در این کتاب ارائه شده است، با تعریف‌های رایج این مفهوم در بسیاری از کتاب‌های دیگر متفاوت است و خواننده کتاب در دنبال کردن مطالب باید به این نکته توجه نماید. مترجم.

(۴ . ۱۳. ۳) فرض کنیم f نگاشتی از E به E' باشد. برای اینکه f در نقطه $x_0 \in E$، که x_0 یک نقطه چسبیدگی $E - \{x_0\}$ است (به این معنی که، طبق (۱۰ . ۱۰ . ۳) ، x_0 نقطه ایزوله E نیست) پیوسته باشد، لازم و کافی است که $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0,\, x \in E - \{x_0\}} f(x)$.

مطلب فوق بیان دیگری از تعاریف است.

(۵ . ۱۳. ۳) فرض کنیم $a' = \lim\limits_{x \to a,\, x \in A} f(x)$. در این‌صورت، برای هر زیر مجموعه $B \subset A$، به‌طوری که $a \in \bar{B}$، نقطه a' حد f در نقطه a ، نسبت به B نیز هست. این مطلب به‌ویژه وقتیV یک همسایگی از a باشد، برای $B = V \cap A$ قابل استفاده است.

مطلب فوق نتیجه واضح تعریف و (۶ . ۱۱. ۳) است.

(۶ . ۱۳. ۳) فرض کنیم f دارای حد a' در نقطه $a \in \bar{A}$ نسبت به مجموعه A باشد. اگر g نگاشتی از E' به E'' باشد، که در نقطه a' پیوسته است،آنگاه $g(a') = \lim\limits_{x \to a,\, x \in A} g(f(x))$.

مطلب فوق فوراً از (۵ . ۱۱. ۳) نتیجه می‌شود.

(۷. ۱۳. ۳) اگر $a' = \lim\limits_{x \to a,\, x \in A} f(x)$ ، آنگاه $a' \in \overline{f(A)}$.

در واقع، طبق (۱. ۱۳. ۳) ، برای هر همسایگی V' از a' ، اشتراک $V' \cap f(A)$ شامل $f(V \cap A)$ است، که غیرتهی است، چون $a \in \bar{A}$.

یک حالت مهم، حدود دنباله‌ها است : روی خط گسترش یافته حقیقی، نقطه $+\infty$ را که نقطه چسبیدگی N مجموعه اعداد صحیح مثبت است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک نگاشت از N به فضای متریک E ، دنباله‌ای مانند $n \to x_n$ از نقاط E است. گوئیم $a \in E$ حد دنباله (x_n) است (یا دنباله (x_n) به a همگرا است) ، هرگاه a حد نگاشت فوق در $+\infty$ نسبت به N باشد، و می‌نویسیم $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. محک‌های (۱. ۱۳. ۳) و (۲. ۱۳. ۳) در رابطه با دنباله‌ها به صورت‌های زیر در می‌آیند:

(۸ . ۱۳. ۳) برای اینکه $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$، لازم و کافی است که، برای هر همسایگیV از a ، عددی صحیح مانند n_0 موجود باشد، به‌طوری که، از رابطه $n \ge n_0$ نتیجه شود $x_n \in V$ (به عبارت دیگر، V شامل همه x_nها به استثنای تعدادی متناهی از آنها است).

(۹. ۱۳. ۳) برای اینکه $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی صحیح مانند n_0 موجود باشد، به‌طوری که، از رابطه $n \ge n_0$ نتیجه شود $d(a, x_n) < \varepsilon$.

ملاک اخیر را می‌توان به‌صورت $\lim_{n \to \infty} d(a , x_n) = 0$ نیز نوشت.

یک **زیر دنباله** از دنباله بی‌پایان (x_n) دنباله $k \to x_{n_k}$ است، که در آن $k \to n_k$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر است. از (۳.۱۳.۵) فوراً نتیجه می‌شود که:

(۳.۱۳.۱۰) **اگر** $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ ، **آنگاه برای هر زیر دنباله** (x_{n_k}) **از** x_n ، $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

فرض کنیم (x_n) یک دنباله بی‌پایان از نقاط فضای متریک E باشد. یک نقطه $b \in \mathrm{E}$ را یک **نقطه حدی**[1] دنباله (x_n) می‌نامیم، هرگاه، زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) موجود باشد، به‌طوری که $b = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$.

یک نقطه حدی زیر دنباله (x_{n_k}) از دنباله (x_n) یک نقطه حدی دنباله (x_n) نیز هست. اگر a حد دنباله (x_n) باشد، از (۳.۱۳.۱۰) نتیجه می‌شود که a **یکتا** نقطه حدی دنباله (x_n) است، عکس مطلب فوق درست نیست، دنباله (x_n) از اعداد حقیقی به‌طوری که $x_{2n} = \frac{1}{n}$ ، $x_{2n+1} = n$ $(n \geq 1)$ دارای یکتا نقطه حدی 0 است، اما، همگرا به صفر نیست. (با این وجود (۳.۱۶.۴) را ببینید).

(۳.۱۳.۱۱) برای اینکه $b \in \mathrm{E}$ یک نقطه حدی دنباله (x_n) باشد، لازم و کافی است که، برای هر همسایگی V از b و هر عدد طبیعی m ، عددی طبیعی مانند $n \geq m$ موجود باشد، به‌طوری که $x_n \in \mathrm{V}$.

لازم بودن شرط قضیه واضح است. به‌عکس، فرض کنیم شرط قضیه برقرار باشد. زیر دنباله (x_{n_k}) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$n_0 = 1$ ، و n_k را کوچک‌ترین عدد طبیعی $n_k > n_{k-1}$ می‌گیریم که $d(b , x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. چون برای هر $k \geq h$ ، $d(x_{n_k} , b) < \frac{1}{h}$ ، زیر دنباله (x_{n_k}) به b همگرا است.

(۳.۱۳.۱۲) اگر b یک نقطه حدی دنباله (x_n) در E باشد، و اگر نگاشت g از E به E' در نقطه b پیوسته باشد، آنگاه $g(b)$ یک نقطه حدی دنباله $(g(x_n))$ خواهد بود.

مطلب فوق با توجه به تعریف و (۳.۱۳.۶) واضح است.

از (۳.۱۳.۷) نتیجه می‌شود، که اگر b یک نقطه حدی (و به‌ویژه حد) دنباله نقاط x_n باشد، و نقاط x_n متعلق به زیر مجموعه $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ باشند، آنگاه $b \in \bar{\mathrm{A}}$. به‌عکس:

---

1 . Cluster value = Пределbная точка

با اینکه می‌شد "Cluster value" را به معنی «مقدار خوشه‌ای» ترجمه کرد، به‌علت اینکه در متن روسی کتاب این واژه به صورت «Пределbная точка» به معنی «نقطه حدی» ترجمه شده است، و در زبان فارسی نیز برای دنباله‌ها از همین اصطلاح یا «نقطه انباشتگی» استفاده می‌شود، مترجم ترجیح داد، به جای اصطلاح «مقدار خوشه‌ای» از واژه « نقطه حدی» استفاده نماید.

(۱۳. ۱۳. ۳) برای هر نقطه $a \in \bar{\mathrm{A}}$ ، دنباله‌ای مانند (x_n) از نقاط A موجود است، به‌طوری که $a = \lim_{n \to \infty} x_n$.

زیرا، طبق فرض، مجموعه $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}(a, \frac{1}{n})$ غیر تهی است. بنابراین (طبق اصل انتخاب (۵. ۴. ۱))، برای هر n ، یک $x_n \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}(a, \frac{1}{n})$ موجود است، و دنباله (x_n) طبق (۹. ۱۳. ۳) به a همگرا است.

(۱۴. ۱۳. ۳) فرض کنیم f نگاشتی از $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ به فضای متریک E' باشد، و $a \in \bar{\mathrm{A}}$. برای اینکه f در نقطه a نسبت به A دارای حد $a' \in \mathrm{E}'$ باشد، لازم و کافی است که، برای هر دنباله (x_n) از نقاط A به‌طوری که $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ ، داشته باشیم $a' = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

لزوم از تعریف‌ها و (۶. ۱۳. ۳) نتیجه می‌شود. به‌عکس، فرض کنیم شرایط قضیه برقرار باشد، ولی a' حد f در نقطه a نسبت به A نباشد. در این‌صورت، طبق (۲. ۱۳. ۳) و (۵. ۴. ۱)، $\alpha > 0$ئی موجود خواهد بود، به‌طوری که، برای هر عدد طبیعی n ، $x_n \in \mathrm{A}$یی موجود است که در دو شرط $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ و $d(a', f(x_n)) \geq \alpha$ صدق می‌کند. به این ترتیب، دنباله (x_n) به a همگرا است، اما $(f(x_n))$ به a' همگرا نیست، که با فرض قضیه در تناقض است.

مسائل

۱. فرض کنیم (u_n) دنباله‌ای از اعداد مثبت (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد[۱] ، به‌طوری که $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. نشان دهید که، تعداد نامتناهی اندیس n موجود است، به‌طوری که برای هر $m \geq n$ ، $u_n \geq u_m$.

۲. (a) فرض کنیم (x_n) یک دنباله در فضای متریک E باشد. نشان دهید که، اگر سه زیر دنباله (x_{2n}) ، (x_{2n+1}) و (x_{3n}) همگرا باشند، (x_n) نیز همگرا خواهد بود.

(b) مثالی از دنباله‌ای مانند (x_n) از اعداد حقیقی ارائه نمایید، که همگرا نباشد، اما، طوری باشد که، برای هر $k \geq 2$ زیر دنباله (x_{kn}) همگرا باشد (زیر دنباله (x_{p_k}) ، که در آن (p_k) دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد اول است، مورد بررسی قرار دهید).

۳. فرض کنیم E یک فضای متریک جدائی‌پذیر و f یک نگاشت دلخواه از E به $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که، مجموعه نقاط $a \in \mathrm{E}$ که $\lim_{x \to a, x \neq a} f(x)$ موجود، و متمایز از $f(a)$ است، مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است. (برای هر زوج p و q از اعداد گویا که $p < q$ ، مجموعه نقاط $a \in \mathrm{E}$ را مورد بررسی قرار دهید که:

$$f(a) \leq p < q \leq \lim_{x \to a, x \neq a} f(x)$$

و با استفاده از مسئله (a) ۲ از بخش ۹. ۳ ، ثابت کنید که ، این مجموعه حداکثر شمارش‌پذیر است. به طریق

---

۱. منظور این است که ، طبق اصطلاحات رایج در کتاب های درسی ما ، برای هر عدد طبیعی n ، $u_n \geq 0$. (در فصل دوم، ژان دیودونه اگر $x > 0$ باشد، x را اکیداً مثبت و اگر $x \geq 0$ باشد ، x را مثبت (و نه غیرمنفی) نامیده است) . مترجم.

مشابه، مجموعه همه نقاط $a \in \mathrm{E}$ را مورد بررسی قرار دهید که:

$$\lim_{x\to a, x\neq a} f(x) \leq p < q \leq f(a)).$$

۱۴. دنباله‌های کوشی، فضاهای تام

در فضای متریک E ، یک **دنباله کوشی**[1] دنباله‌ای بی‌پایان مانند (x_n) است ، به‌طوری که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک عدد طبیعی n_0 موجود باشد، به‌طوری که از روابط $p \geq n_0$ و $q \geq n_0$ نتیجه شود $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(۱. ۱۴. ۳) هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است.

در واقع، اگر $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ ، آنگاه، برای هر $\varepsilon > 0$ ، n_0ی موجود است، به‌طوری که برای هر $n \geq n_0$ نامساوی $d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ برقرار است. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که، اگر $p \geq n_0$ و $q \geq n_0$ ، آنگاه $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

(۲. ۱۴. ۳) اگر (x_n) یک دنباله کوشی باشد، آنگاه هر نقطه حدی (x_n) ، حد دنباله (x_n) است.

در واقع، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، عددی طبیعی مانند n_0 موجود خواهد بود، به‌طوری که، از $p \geq n_0$ و $q \geq n_0$ نتیجه می‌شود $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$ ، و اگر b نقطه حدی دنباله (x_n) باشد، آنگاه، طبق (۱۱. ۱۳. ۳) ، عددی طبیعی مانند $p_0 \geq n_0$ موجود است، به‌طوری که $d(b, x_{p_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که ، برای هر $n \geq n_0$ ، $d(b, x_n) \leq \varepsilon$.

فضای متریک E را تام[2] نامیم، هرگاه هر دنباله کوشی در E همگرا باشد. (البته، به‌نقطه‌ای از E).

(۳. ۱۴. ۳) خط حقیقی R یک فضای متریک تام است.

فرض کنیم (x_n) یک دنباله کوشی از اعداد حقیقی باشد. دنباله (n_k) از اعداد طبیعی را با استقراء به روش زیر تعریف می‌کنیم : $n_0 = 1$ و n_{k+1} را کوچک‌ترین عدد طبیعی $n_{k+1} > n_k$ می‌گیریم که ، برای $p \geq n_{k+1}$ و $q \geq n_{k+1}$ نامساوی $|x_p - x_q| < \frac{1}{2^{k+2}}$ برقرار باشد. چنین امکانی از این واقعیت ناشی می‌شود که، (x_n) یک دنباله کوشی است. فرض کنیم I_k فاصله بسته $[x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$

1 . Cauchy sequence = Последовательность Коши

2 . Complete = Полный

باشد. داریم $\mathrm{I}_{k+1} \subset \mathrm{I}_k$ ، زیرا $| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} | < 2^{-k-1}$. از طرف دیگر، برای $m \geq n_k$ ، طبق تعریف $x_m \in \mathrm{I}_k$. اکنون از اصل (IV) (بخش ۱ .۲) نتیجه می‌شود که، فاصله‌های بسته تو در توی I_k دارای اشتراکی غیر تهی خواهند بود. فرض کنیم a نقطه مشترک همه I_k ها باشد. در این‌صورت، واضح است که، برای هر $m \geq n_k$ داریم $|a - x_m| \leq 2^{-k+1}$ ، بنابراین $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(۴ .۱۴ .۳) اگر زیرفضای F از فضای متریک E تام باشد، آنگاه F در E بسته خواهد بود.

در واقع، طبق (۱۳ .۱۳ .۳)، هر نقطه $a \in \overline{\mathrm{F}}$ حد دنباله‌ای از نقاط F مانند (x_n) است. طبق (۱ .۱۴ .۳)، دنباله (x_n) یک دنباله کوشی است. بنابراین، طبق فرض، همگرا به نقطه‌ای مانند b در F است. اما، طبق (۳ .۱۳ .۳) ، داریم $b = a$. بنابراین $a \in \mathrm{F}$ و در نتیجه $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$ و حکم ثابت می‌شود.

(۵ .۱۴ .۳) در یک فضای متریک تام E ، هر زیر فضای بسته F یک زیر فضای تام است.

زیرا، دنباله کوشی (x_n) از نقاط F ، طبق فرض ، به نقطه‌ای مانند $a \in \mathrm{E}$ همگرا است، و چون x_n متعلق به F است، پس ، طبق (۷ .۱۳ .۳) ، $a \in \overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$.

قضیه‌های (۴ .۱۴ .۳) و (۵ . ۱۴ .۳) فوراً ما را قادر می‌سازد که مثال‌هایی هم از فضاهای تام و هم از فضاهای غیرتام ارائه دهیم. این کار را می‌توان با استفاده از این حقیقت که خط حقیقی تام است ، شروع کرد.

اهمیت اساسی فضاهای تام در این حقیقت است که، در چنین فضاهایی برای اثبات این که یک دنباله همگرا است، کافی است ثابت کنیم، آن دنباله یک دنباله کوشی است (همچنین، برای چنین دنباله‌ای گوییم **محک کوشی** برقرار است). تفاوت اساسی بین آزمایش این محک و بررسی همگرایی یک دنباله، در این است که، در **محک کوشی لازم نیست از قبل مقدار حد را بدانیم.**

اکنون باید یادآور شد که، روی یک مجموعه یکسان E ، دو فاصله d_1 ، d_2 ممکن به‌طور توپولوژیک هم‌ارز باشند، اما، نگاشت همانی از فضای E_1 به فضای E_2 (E_1 ، E_2 فضاهای متریک متناظر با d_1 ، d_2 هستند) به‌طور یکنواخت پیوسته نباشند. به‌عنوان مثال، اگر فرض کنیم $\mathrm{E} = \mathbf{R}$ ، $d_2(x, y) = |x - y|$ و $d_1(x, y)$ را تحدید فاصله روی خط حقیقی گسترش یافته به $\mathbf{R}$ فرض کنیم[1]، آنگاه E_2 تام است، اما، E_1 تام نیست، زیرا E_1 در $\overline{\mathbf{R}}$ بسته نیست. وقتی دو فاصله d_1 ، d_2 چنان باشند که، نگاشت همانی از E_1 به E_2 و معکوس آن به‌طور یکنواخت پیوسته باشند، آنگاه، گوییم فاصله‌های d_1 و d_2 **به‌طور**

---

۱. منظور فاصله $d_1(x, y) = | f(x) - f(y) |$ است، که در آن برای $x \in \mathrm{R}$ ، $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ ، و در نقاط بی‌نهایت $f(+\infty) = 1$ و $f(-\infty) = -1$. مترجم.

یکنواخت هم‌ارز هستند. در چنین صورتی، هر دنباله کوشی نسبت به یکی از فاصله‌ها، نسبت به فاصله دیگر نیز دنباله‌ای کوشی خواهد بود. به‌عنوان مثال، اگر دو عدد حقیقی $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ موجود باشند، به‌طوری که برای هر زوج x ، y از نقاط E ، $\alpha d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le \beta d_1(x, y)$؛ آنگاه فاصله‌های d_1 و d_2 به‌طور یکنواخت هم‌ارز خواهند بود.

فرض کنیم E ، E' دو فضای متریک، A یک زیرمجموعه E ، و f یک نگاشت از A به E' باشد. **نوسان f روی A** برحسب تعریف برابر قطر $\delta(f(A))$ است (که ممکن است $+\infty$ باشد). فرض کنیم a یک نقطه چسبیدگی A باشد، **نوسان f در نقطه a نسبت به مجموعه A** با رابطه $\Omega(a\,;\,f) = \inf\limits_{V} \delta(f(V \cap A))$ تعریف می‌شود. که در آن inf روی مجموعه همسایگی‌های نقطه a (یا فقط یک سیستم اساسی از همسایگی‌های a) گرفته می‌شود.

(۳ .۱۴ .۶) فرض کنیم E' یک فضای متریک تام باشد. برای اینکه $\lim\limits_{x \to a,\, x \in A} f(x)$ موجود باشد. لازم و کافی است که ، نوسان f در نقطه a ، نسبت به A ، برابر صفر باشد.

طبق (۳ .۱۳ .۲) ، شرط قضیه لازم است. برعکس، فرض کنیم شرط قضیه برقرار باشد، و (x_n) دنباله‌ای از نقاط A باشد، که به a همگرا است. در این‌صورت، طبق فرض، $(f(x_n))$ یک دنباله کوشی در E' خواهد بود. در واقع، به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده، همسایگی V از a موجود خواهد بود، به‌طوری که، برای هر دو نقطه x ، y در $V \cap A$ ، $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. اما، به استثنای تعدادی متناهی اندیس، داریم $x_n \in V \cap A$ ، پس، دنباله $(f(x_n))$ دارای حدی مانند a' خواهد بود. علاوه بر این، برای هر دنباله (y_n) از نقاط A ، که به a همگرا است، حدود $(f(x_n))$ و $(f(y_n))$ برابرند. زیرا، به‌محض اینکه x_n و y_n در $V \cap A$ قرار گیرند، خواهیم داشت $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. بنابراین ، از تعریف حد و از (۳ .۱۳ .۱۴) نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{x \to a,\, x \in A} f(x) = a'$.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم E یک **فضای فرامتریک**[1] باشد (بخش ۳.۸ ، مسئله ۴ را ببینید). ثابت کنید، برای اینکه دنباله (x_n) در E یک دنباله کوشی باشد، لازم و کافی است که $\lim\limits_{x \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

(b) فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه، و E مجموعه همه دنباله‌های بی‌پایان $x = (x_n)$ از عناصر مجموعه X باشد. برای هر دو عنصر $x = (x_n)$ ، $y = (y_n)$ از E ، فرض کنیم $k(x, y)$ کوچک‌ترین عدد صحیح n باشد، به‌طوری که $x_n \ne y_n$. قرار می‌دهیم $d(x, y) = \dfrac{1}{k(x, y)}$ ، اگر $x \ne y$ باشد، و $d(x, x) = 0$. ثابت کنید که، d یک فاصله فرامتریک روی E است، و فضای متریک E که با متر d تعریف شده است، یک فضای تام است.

---

1 . Ultrametric space = Ультраметрическое пространство

۲. فرض کنیم φ یک تابع حقیقی صعودی ، تعریف شده روی فاصله $0 \le u < +\infty$ باشد، به‌طوری‌که $\varphi(0) = 0$، برای $u > 0$ ، $\varphi(u) > 0$ ، و $\varphi(u+v) \le \varphi(u) + \varphi(v)$. فرض کنیم $d(x, y)$ یک فاصله روی مجموعه E باشد. در این صورت، $d_1(x, y) = \varphi(d(x, y))$ فاصله دیگری روی E خواهد بود.

(a) نشان دهید که، اگر φ در نقطه $u = 0$ پیوسته باشد، آنگاه فاصله‌های d و d_1 به‌طور یکنواخت هم‌ارز خواهند بود. برعکس، اگر، برای فاصله d ، نقطه‌ای مانند $x_0 \in E$ موجود باشد به‌طوری که نقطه ایزوله E نباشد ((۱۰ . ۱۰. ۳) را ببینید) ، و d و d_1 به طور توپولوژیک هم‌ارز باشند ، آنگاه φ در نقطه $u = 0$ پیوسته خواهد بود.

(b) ثابت کنید که، توابع :

$$u^r (0 < r < 1) \ , \ \log(1+u) \ , \ u/(1+u) \ , \ \inf(1, u)$$

در شرطی که در قسمت قبل بیان شد، صدق می‌کنند. با استفاده از دو تابع آخر، دیده می‌شود که، برای هر فاصله روی E ، فاصله‌ای به‌طور یکنواخت هم‌ارز آن وجود داد که کراندار است.

۳. روی خط حقیقی، قرار می‌دهیم $d(x, y) = |x - y|$ که فاصله معمولی است، و $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$ نشان دهید که، این دو فاصله به‌طور توپولوژیک هم ارز هستند، و هر دنباله کوشی نسبت به یکی از این دو فضا در فضای دیگر نیز یک دنباله کوشی است، اما، فاصله‌های فوق به طور یکنواخت هم ارز نیستند.

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک تام ، d فاصله روی E ، و A اشتراک دنباله‌ای مانند (U_n) از زیر مجموعه‌های باز E باشد. قرار می‌دهیم $F_n = E - U_n$ ، و برای هر زوج x و y از نقاط A ، تعریف می‌کنیم :

$$f_n(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| \quad ,$$

$$d_n(x, y) = \frac{f_n(x, y)}{1 + f_n(x, y)}$$

و

$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x, y)/2^n$$

ثابت کنید که، روی زیر فضای A از E ، d'، فاصله‌ای است که به‌طور توپولوژیک با d هم ارز است، و نسبت به فاصله d' ، A یک فضای تام است (توجه داشته باشید که، یک دنباله کوشی نسبت به فاصله d' ، دنباله‌ای کوشی نسبت به d نیز هست ، اما، حد آن در E ممکن است به هیچ یک از F_nها متعلق نباشد). مطلب فوق را برای زیر فضای I از **R** که از همه اعداد اصم تشکیل شده است مورد استفاده قرار دهید.

۱۵. قضیه‌های مقدماتی گسترش[1] (توسیع ـ تمدید)

(۱. ۱۵. ۳) فرض کنیم f و g دو نگاشت پیوسته از فضای متریک E به فضای متریک E' باشد. در این صورت، اگر مجموعه A از نقاطی مانند $x \in A$ تشکیل شده باشد که $f(x) = g(x)$ ، آنگاه A در E بسته خواهد بود.

مطلب فوق هم‌ارز این است که ثابت کنیم مجموعه $E - A$ باز است. فرض کنیم $a \in E - A$. در این صورت $f(a) \neq g(a)$. قرار می‌دهیم $d'(f(a), g(a)) = \alpha > 0$. از پیوستگی f و g در a و از

1 . Extension = Продолжение

(۳ . ۶ . ۳) نتیجه می‌شود، یک همسایگی V از a در E موجود است، به‌طوری که برای $x \in V$ ، $d'(f(a), f(x)) < \frac{\alpha}{2}$ و $d'(g(a), g(x)) < \frac{\alpha}{2}$. در این صورت، برای $x \in V$ ، خواهیم داشت $f(x) \neq g(x)$. زیرا، در حالت مخالف، از نامساوی مثلثی به دست می‌آید $d'(f(a), g(a)) < \alpha$ که با تعریف α در تناقض است.

(۲. ۱۵ . ۳) (اصل گسترش تساوی‌های)[1] فرض کنیم f و g دو نگاشت پیوسته از فضای متریک E به فضای متریک E' باشند. اگر A زیر مجموعه‌ای چگال در E باشد و برای هر نقطه $x \in A$ ، $f(x) = g(x)$، آنگاه روی E ، $f = g$.

در واقع، مجموعه نقاط x که $f(x) = g(x)$ ، طبق (۱. ۱۵. ۳) ، در E بسته است، و طبق فرض، این مجموعه شامل A است.

(۳. ۱۵. ۳) فرض کنیم f و g دو نگاشت پیوسته از فضای متریک E به $\bar{R}$ خط گسترش یافته حقیقی باشند. در این‌صورت، P مجموعه نقاط $x \in E$ که $f(x) \leq g(x)$، در E بسته است.

دوباره ثابت می‌کنیم که $E - P$ باز است. فرض کنیم $f(a) > g(a)$ ، و $\beta \in \bar{R}$ چنان انتخاب شده باشد که $f(a) > \beta > g(a)$ (مقایسه کنید با (۱۶. ۲. ۲) و تعریف $\bar{R}$ در بخش ۳. ۳). طبق (۱. ۱۱. ۳) ، V تصویر معکوس فاصله باز $]\beta, +\infty[$ تحت f یک همسایگی نقطه a ، و همین‌طور، W تصویر معکوس فاصله باز $]-\infty, \beta[$ تحت g نیز یک همسایگی شامل a است. بنابراین، طبق (۳. ۶ . ۳) ، مجموعه $V \cap W$ یک همسایگی شامل a است، و برای $x \in V \cap W$ ، داریم $f(x) > \beta > g(x)$ ، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

(۴. ۱۵. ۳) (اصل گسترش نامساوی‌ها)[2] فرض کنیم f ، g دو نگاشت پیوسته از فضای متریک E به $\bar{R}$ خط گسترش یافته حقیقی باشند. اگر A مجموعه‌ای چگال در E باشد، و برای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه برای هر $x \in E$ ، $f(x) \leq g(x)$.

حکم از (۳. ۱۵. ۳) نتیجه می‌شود، شبیه به اینکه اثبات (۲. ۱۵. ۳) از (۱. ۱۵. ۳) به‌دست آمد.

(۵ . ۱۵. ۳) فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای چگال در فضای متریک E ، و f نگاشتی از A به فضای متریک E' باشد. برای اینکه نگاشتی پیوسته مانند $\bar{f}$ از فضای E به E' موجود باشد، به‌طوری که، روی A برابر f باشد،

---

1 . Principle of extension of indetities = Принцип продолжения тождеств
2 . Principle of extension of inequalities = Принцип продолжения неравнств

لازم و کافی است که، برای هر $x \in E$ ، حد $\lim_{y \to x,\ y \in A} f(y)$ در E' موجود باشد، و در این صورت، نگاشت $\overline{f}$ یکتا خواهد بود.

چون هر نقطه $x \in E$ عضو $\overline{A}$ است، طبق (۱۵. ۱۳. ۳)، باید داشته باشیم $\overline{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in A} \overline{f}(y)$ و بنابراین $\overline{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in A} f(y)$. این مطلب لزوم شرط قضیه و این حقیقت که، اگر نگاشت پیوسته $\overline{f}$ موجود باشد، یکتا است، ثابت می‌کند (مطلب اخیر از (۲. ۱۵. ۳) نیز نتیجه می‌شود). به‌عکس، فرض کنیم شرط قضیه برقرار باشد. ثابت می‌کنیم، نگاشت $\overline{f}$ که با رابطه $\overline{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in A} f(y)$ تعریف می‌شود، جواب مسئله در رابطه با توسیع f است. قبل از هر چیز، اگر $x \in A$ باشد، آنگاه از وجود حد طبق تعریف، رابطه $\overline{f}(x) = f(x)$ نتیجه می‌شود، بنابراین $\overline{f}$ گسترشی از f است. آن‌چه که باقی می‌ماند، این است که ثابت کنیم $\overline{f}$ پیوسته است. فرض کنیم $x \in E$ ، و V' یک همسایگی از $\overline{f}(x)$ در E' باشد. گوئی بسته مانند B' با مرکز $\overline{f}(x)$ موجود است که در V' قرار گرفته است. طبق فرض، و طبق (۱. ۱۳. ۳)، همسایگی باز V از x در E موجود است، به‌طوری که $f(V \cap A) \subset B'$ برای هر $y \in V$ ، $\overline{f}(y)$ حد f در نقطه y نسبت مجموعه A ، و بنابراین، طبق (۵. ۱۳. ۳)، نسبت به مجموعه $V \cap A$ نیز هست. در نتیجه، طبق (۷. ۱۳. ۳)، $\overline{f}(y) \in \overline{f(V \cap A)}$، و بنابراین $\overline{f}(y) \in B'$، زیرا، گوی B' بسته است، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۶. ۱۵. ۳) فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای چگال در فضای متریک E ، و f نگاشتی به‌طور یکنواخت پیوسته از مجموعه A به فضای متریک تام E' باشد. در این صورت، نگاشتی پیوسته مانند $\overline{f}$ از E به E' موجود است که روی A بر f منطبق است. علاوه بر این، $\overline{f}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

برای اثبات وجود $\overline{f}$ ، از (۵. ۱۵. ۳) و (۶. ۱۴. ۳) نتیجه می‌شود که، فقط باید نشان دهیم، نوسان f در هر نقطه $x \in E$ ، نسبت به A ، برابر صفر است. حال، برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ ی موجود است، به‌طوری که از $d(y, z) < \delta$ نتیجه می‌شود $d'(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (y ، z در A هستند). بنابراین، قطر مجموعه $f(A \cap B(x, \delta/2))$ حداکثر $\varepsilon/3$ است، که ادعای ما را ثابت می‌کند. اکنون دو نقطه دلخواه s و t در فضای E را که برای آنها $d(s, t) < \delta/2$ ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک $y \in A$ وجود دارد، به‌طوری که $d(s, y) < \delta/4$ و $d'(\overline{f}(s), f(y)) < \varepsilon/3$ ، و یک نقطه $z \in A$ وجود دارد، به‌طوری که $d(t, z) < \delta/4$ و $d'(\overline{f}(t), f(z)) < \varepsilon/3$. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که $d(y, z) < \delta$ ، و چون y و z در A هستند، $d'(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$. بنابراین، طبق نامساوی مثلثی $d'(\overline{f}(s), \overline{f}(t)) < \varepsilon$ ، و با این رابطه پیوستگی یکنواخت $\overline{f}$ ثابت می‌شود.

مسئله

فرض کنیم $n \to r_n$ نگاشتی دوسوئی از N بر روی A مجموعه همه اعداد گویای x باشد، که در نامساوی $0 \le x \le 1$ صدق می کنند ((۱۵. ۲. ۲) را ببینید) . تابع f را روی $E = [0 , 1]$ با رابطه $f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}$، تعریف می‌کنیم، که در آن حاصل جمع نامتناهی فقط برای n هائی توسعه می‌یابد که برای آنها $r_n < x$. اگر B مجموعه همه اعداد اصم فاصله $x \in [0, 1]$ باشد، نشان دهید که، تحدید f به B پیوسته است ، اما، نمی‌توان آن را به یک تابع پیوسته روی E گسترش داد.

۱۶. فضاهای فشرده

فضای متریک E را فشرده نامند، اگر در شرط زیر (اصل بورل ـ لبگ[1]) صدق کند:

برای هر پوشش $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ فضای E از مجموعه‌های باز (پوشش باز) زیر خانواده‌ای متناهی مانند $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ ($H \subset L$، و H متناهی است) موجود باشد، که پوششی برای E باشد.

فضای متریک E را پیش فشرده[2] نامند، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

برای هر $\varepsilon > 0$ ، پوششی متناهی از E با مجموعه‌هایی که قطر آنها از ε کمتر است، وجود داشته باشد.

خاصیت فوق، به وضوح هم‌ارز خاصیت زیر است:

برای هر $\varepsilon > 0$ ، زیر مجموعه‌ای متناهی مانند F از E موجود است، به‌طوری که، برای هر $x \in E$ ، $d(x , F) < \varepsilon$.

در تئوری فضاهای متریک، این مفاهیم جانشینی برای مفهوم «متناهی بودن» در تئوری خالص (ناب ـ محض) مجموعه‌ها است، که بیان می‌کنند، فضائی متریک، اگر بتوان چنین چیزی گفت؛ «به طور تقریبی متناهی» است. توجه به این نکته ضروری است که، از تعریف نتیجه می‌شود، فشردگی یک مفهوم توپولوژیک است، اما، **پیش‌فشردگی** (کاملاً کرانداری) یک مفهوم توپولوژیک نیست (تبصره بعد از (۶. ۱۷. ۳) را ببینید).

(۱. ۱۶. ۳) برای فضای متریک E ، شرایط زیر هم‌ارز هستند :

(a) E فشرده است؛

(b) هر دنباله نامتناهی از E دارای لااقل یک نقطه حدی است؛

(c) E پیش‌فشرده و تام است.

---

1 . Borel-Lebesgue axion = Аксиома Бореля–Лебега

2 . Precompact = Предкомпакт = Totally bounded = Вполне ограниченный

فضاهای پیش‌فشرده را فضاهای کلاً (کاملاً) کراندار نیز می‌نامند. مترجم.

$(a) \Rightarrow (b)$: فرض کنیم (x_n) یک دنباله بی‌پایان در فضای فشرده E ، و F_n بستار مجموعه $\{x_n , x_{n+1} , \cdots , x_{n+P} , \cdots\}$ باشد. ثابت می‌کنیم که نقطه‌ای موجود است، به‌طوری که عضو همه F_n ها است. در غیر این صورت ، مجموعه‌های $U_n = E - F_n$ پوششی باز برای E خواهد بود، و در نتیجه، تعدادی متناهی از آنها مانند U_{n_1} ، ... ، U_{n_k} مجموعه E را خواهند پوشاند، و مطلب فوق به این معنی است که $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_k} = \varnothing$. اما، این رابطه محال است، زیرا ؛ اگر n بزرگ‌تر از $\max(n_1 , \cdots , n_k)$ باشد ، آنگاه F_n (که طبق تعریفش غیرتهی است) مشمول همه F_{n_i}ها با $1 \leq i \leq k$ خواهد بود. در نتیجه، اشتراک $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ شامل لااقل یک نقطه مانند a است. طبق (۱۱. ۱۳. ۳) و تعریف نقطه حدی یک دنباله، a نقطه حدی دنباله (x_n) است.

$(b) \Rightarrow (c)$: اولاً، هر دنباله کوشی در E دارای یک نقطه حدی، و بنابراین، طبق (۲. ۱۴. ۳)، همگرا است، و در نتیجه E تام است. حال، فرض کنیم E پیش فشرده نباشد، یعنی، عددی مانند $0 < \alpha$ موجود باشد، به‌طوری که E دارای پوششی متناهی از گوی‌های به شعاع α نباشد. در این‌صورت، دنباله (x_n) را با استقراء به روش زیر تعریف می‌کنیم : x_1 را یک نقطه دلخواه از E فرض می‌کنیم. فرض کنیم برای هر $i \neq j$ ، $1 \leq i \leq n-1$ ، $1 \leq j \leq n-1$ ، $d(x_i , x_j) \geq \alpha$ ، اجتماع گوی‌های به مرکزهای x_i $(1 \leq i \leq n-1)$ و شعاع α برابر کل فضا نخواهد بود. بنابراین، نقطه‌ای مانند x_n موجود خواهد بود. به‌طوری که، برای هر $i < n$ ، $d(x_i , x_n) \geq \alpha$. دنباله (x_n) دارای نقطه حدی نخواهد بود، زیرا، اگر a چنین نقطه حدی باشد، آنگاه زیردنباله‌ای مانند (x_{n_k}) همگرا به a موجود خواهد بود، و در این‌صورت، عدد طبیعی مانند k_0 موجود خواهد بود، به‌طوری که، برای هر $k \geq k_0$ ، $d(a , x_{n_k}) < \frac{\alpha}{2}$ ، و بنابراین، برای هر $h \geq k_0$ ، $k \geq k_0$ ، $h \neq k$ ، خواهیم داشت $d(x_{n_h} , x_{n_k}) < \alpha$ ، که با تعریف (x_n) در تناقض است.

$(c) \Rightarrow (a)$: فرض کنیم پوششی باز مانند $(U_\lambda)_{\lambda \in E}$ از E موجود باشد، به‌طوری که دارای هیچ زیر پوشش متناهی برای E نباشد. با ا ستقراء دنباله (B_n) از گوی‌ها را به روش زیر تعریف می‌کنیم:

طبق فرض E دارای قطر متناهی است، و با ضرب فاصله روی E در یک عدد ثابت، می‌توان فرض کرد $\delta(E) < \frac{1}{2}$. بنابراین ، E گوئی مانند B_0 به شعاع 1 است. فرض کنیم B_k برای $0 \leq k \leq n-1$ تعریف شده باشد، و برای این مقادیر k ، B_k دارای شعاعی برابر $\frac{1}{2^k}$ باشد، و زیر خانواده‌ای متناهی از $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ موجود نباشد که B_k را بپوشاند. در این‌صورت، به بررسی پوشش متناهی $(V_k)_{1 \leq k \leq m}$ از E به‌وسیله گوی‌های به شعاع $1/2^n$ می‌پردازیم. در بین گوی‌های V_k که اشتراکی ناتهی با B_{n-1} دارند، لااقل یک گوی مانند B_n موجود است، به‌طوری که با هیچ زیر خانواده متناهی از خانواده (U_λ) پوشیده نمی‌شود. در واقع، در غیر این‌صورت، چون گوی‌های V_k پوششی برای گوی B_{n-1} تشکیل می‌دهند، باید

زیر خانواده‌های متناهی از خانواده (U_λ) یافت شود، که B_{n-1} را بپوشاند. به‌این ترتیب، استقراء می‌تواند به‌طور نامتناهی ادامه یابد. فرض کنیم x_n مرکز B_n باشد. چون B_n و B_{n-1} نقطه‌ای مشترک دارند، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود :

$$d(x_{n-1}, x_n) \le \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^{n-2}}$$

بنابراین، اگر $n \le p < q$ ، خواهیم داشت :

$$d(x_p, x_q) \le d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \le \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{q-2}} \le \frac{1}{2^{n-2}}$$

مطلب فوق ثابت می‌کند که، (x_n) یک دنباله کوشی در E ، و بنابراین، همگرا به نقطه‌ای مانند a است. فرض کنیم λ_0 اندیسی باشد، که $a \in U_{\lambda_0}$. یک $\alpha > 0$ موجود است، به‌طوری که $B(a, \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. از تعریف a نتیجه می‌شود که، عددی صحیح مانند n یافت می‌شود، به‌طوری که $d(a, x_n) < \frac{\alpha}{2}$ ، و $\frac{1}{2^n} < \frac{\alpha}{2}$. در این‌صورت، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که $B_n \subset B(a ; \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. اما، این یک تناقض است. زیرا، فرض کرده بودیم که، هیچ زیر خانواده متناهی از خانواده (U_λ) گوی B_n را نمی‌پوشاند.

(۳.۱۶.۲) هر فضای متریک پیش فشرده (کاملاً کراندار)[1] جدائی‌پذیر است.

اگر E فضائی پیش فشرده باشد، آنگاه، برای هر n ، طبق تعریف، یک زیر مجموعه متناهی مانند A_n موجود است، به‌طوری که، برای هر $x \in E$ ، $d(x, A_n) < \frac{1}{n}$. فرض کنیم $A = \bigcup_n A_n$. مجموعه A حداکثر شمارش‌پذیر است، و برای هر $x \in E$ و هر n داریم:

$$d(x, A) \le d(x, A_n) < \frac{1}{n}$$

بنابراین $d(x, A) = 0$ و $E = \bar{A}$.

(۳.۱۶.۳) فرض کنیم E یک فضای متریک باشد. از هر دو خاصیت از خواص زیر خاصیت سوم نتیجه می‌شود :

(a) E فشرده است؛

(b) E گسسته است (با دقتی بیشتر، هومیومورف با یک فضای گسسته است)؛

(c) E متناهی است.

از (a) و (b) ، (c) نتیجه می‌شود. زیرا، در این حالت، هر مجموعه تک نقطه‌ای $\{x\}$ باز است، و خانواده مجموعه‌های $\{x\}$ پوششی باز برای E است، و یک زیرخانواده متناهی از این خانواده که طبق

1 . Precompact = Totally bounded = Вполне ограниченное

خاصیت فشردگی E باید E را بپوشاند، تنها می‌تواند متناهی باشد. از طرف دیگر، از (c) هم(a) و هم (b) نتیجه می‌شود. زیرا، در این حالت، هر مجموعه تک نقطه‌ای بسته است، در نتیجه، هر زیر مجموعه از مجموعه متناهی E به‌عنوان اجتماعی متناهی از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته خواهد بود، و بنابراین، هر زیر مجموعه E باز است، و در نتیجه E هومیومورف با یک فضای گسسته است. بالاخره، چون تنها تعدادی متناهی مجموعه باز وجود دارد (زیرا E متناهی فرض شده است) ، E فشرده خواهد بود.

(۴ . ۱۶ . ۳) در یک فضای متریک فشرده E ، هر دنباله نامتناهی (x_n) که تنها دارای یک نقطه حدی a باشد، همگرا به a خواهد بود.

فرض کنیم a حد (x_n) نباشد. در این‌صورت، عددی مانند $\alpha > 0$ موجود است، به‌طوری که، زیر دنباله‌ای نامتناهی مانند (x_{n_k}) از (x_n) موجود خواهد بود، به‌طوری که، نقاط آن متعلق به مجموعه $E - B(a\,;\alpha)$ هستند. طبق فرض، این زیر دنباله دارای یک نقطه حدی b است، و چون مجموعه $E - B(a\,;\alpha)$ بسته است، طبق (۷. ۱۳. ۳) ، b عضو $E - B(a\,;\alpha)$ خواهد بود. بنابراین، دنباله (x_n) دارای دو نقطه حدی متمایز خواهد بود، که با فرض در تناقض است.

(۵ . ۱۶ . ۳) هر نگاشت پیوسته از فضای متریک فشرده E به فضای متریک E' به طور یکنواخت پیوسته است.

فرض کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت، عددی مانند $\alpha > 0$ و دو دنباله (x_n) و (y_n) از نقاط E موجود خواهند بود. به‌طوری که $d(x_n\,,\,y_n) < \frac{1}{n}$ و $d'(f(x_n),f(y_n)) \geq \alpha$. می‌توان زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) از (x_n) پیدا کرد، به‌طوری که (x_{n_k}) همگرا به نقطه‌ای مانند a باشد، و چون $d(x_{n_k}\,,\,y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ ، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود، که دنباله (y_{n_k}) نیز به a همگرا خواهد بود. اما ، f در نقطه a پیوسته است ، بنابراین ، $\delta > 0$ ی موجود خواهد بود، به‌طوری که برای $d(a\,,\,x) < \delta$ ، $d'(f(a)\,,\,f(x)) < \frac{\alpha}{2}$. حال k را آنقدر بزرگ انتخاب می‌کنیم ، که $d(a\,,x_{n_k}) < \delta$ ، $d(a\,,\,y_{n_k}) < \delta$. در این‌صورت ، $d'(f(x_{n_k})\,,\,f(y_{n_k})) < \alpha$ ، که با تعریف دنباله‌های (x_n) و (y_n) در تناقض است.

(۶ . ۱۶. ۳)[۱] فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده و $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ یک پوشش باز برای E باشد. در این صورت، عددی مانند $\alpha > 0$ موجود خواهد بود، به‌طوری که، هر گوی باز به شعاع α مشمول (زیرمجموعه) لااقل یکی از مجموعه‌های U_λ است (خاصیت لبگ)[2].

---

۱ . این قضیه، در برگردان روسی کتاب، در قسمت (a) اولین مسئله بعد از قضیه (۵ . ۱۶ . ۳) ، منعکس شده است. مترجم.

2 . Lebesgue’s property = Свойство Лебега

برای هر $x \in E$ ، گوئی مانند $B(x, r_x)$ موجود خواهد بود، به‌طوری که، در یکی از مجموعه‌های U_λ واقع شود. چون گوی‌های $B(x, \frac{1}{2}r_x)$ تشکیل پوششی باز برای E می‌دهند، تعدادی متناهی از نقاط $x_i \in E$ موجود خواهد بود، به‌طوری که، گوی‌های $B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$ پوششی باز برای E تشکیل دهند. اگر $\alpha > 0$ کوچک‌ترین عدد از اعداد $\frac{r_{x_i}}{2}$ باشد ، α در خاصیت مورد نیاز قضیه صدق خواهد کرد. در واقع، هر $x \in E$ عضوی از گوئی مانند $B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$ ، برای اندیسی از i است. بنابراین ، $B(x, \alpha)$ در $B(x_i, r_{x_i})$ قرار می‌گیرد. زیرا $\alpha \le r_{x_i}/2$. اما ، طبق ساختمان $B(x_i, r_{x_i})$ ، این مجموعه در یکی از مجموعه‌های U_λ واقع شده است.

مسائل

۱. مثالی از یک فضای پیش‌فشرده ارائه نمائید ، که در آن نتیجه (۶ . ۱۶. ۳) برقرار نباشد.[۱]

۲. برای فضای متریک E ، نشان دهید که خواص زیر هم‌ارزند :

(a) E فشرده است ؛

(b) هر پوشش نامتناهی شمارش‌پذیر از E شامل یک زیر پوشش متناهی است ؛

(c) هر دنباله نزولی (F_n) از مجموعه‌های بسته غیرتهی فضای E دارای اشتراکی غیرتهی است ؛

(d) برای هر پوشش باز نامتناهی $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ از فضای E ، زیر مجموعه‌ای مانند $H \subset L$ متمایز از L موجود است، به‌طوری که $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ هنوز پوششی برای E است ؛

(e) **هر پوشش باز متناهی نقطه‌وار**[۲] $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ از فضای E (یعنی، پوششی که برای هر $x \in E$ ، رابطه $x \in U_\lambda$ فقط برای تعدادی متناهی از اندیس‌ها برقرار باشد) شامل زیر پوششی متناهی است؛

(f) هر زیر فضای نامتناهی از فضای E که گسسته است، بسته نیست.

(با استفاده از (۱. ۶ . ۳)، نشان دهید که ، از (f) ، (a) ؛ و از (d) و (e) گزاره (f) نتیجه می‌شود.)

۳. فرض کنیم E یک فضای متریک ، d فاصله روی E ، و $\mathfrak{F}(E) \subset \mathfrak{B}(E)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های بسته غیر تهی E باشد. فرض کنیم که d فاصله روی فضای E کراندار است (بخش ۳.۱۴ ، مسئله ۲ را ببینید). برای هر دو عنصر A ، B از $\mathfrak{F}(E)$ قرار می‌دهیم $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$ ، $h(A, B) = \sup(\rho(A, B)$ و $\rho(B, A))$.

(a) نشان دهید که ، روی $\mathfrak{F}(E)$ ، h یک فاصله است (فاصله هاسدورف)[۳].

(b) نشان دهید که ، برای چهار عنصر A ، B ، C و D از $\mathfrak{F}(E)$ داریم :

$$h(A \cup B, C \cup D) \le \max(h(A, C), h(B, D)).$$

(c) نشان دهید که اگر فضای E تام باشد، آنگاه $\mathfrak{F}(E)$ نیز تام خواهد بود (فرض کنید (X_n) یک دنباله کوشی در $\mathfrak{F}(E)$ باشد، برای هر n ، فرض کنید Y_n بستار اجتماع مجموعه‌های (X_{n+p}) برای $p \ge 0$ باشد، اشتراک دنباله نزولی (Y_n) را در E مورد بررسی قرار دهید.) ؛

---

۱. در متن روسی کتاب، مسئله ۱ شامل دو قسمت است، که قسمت (a) آن، صورت قضیه (۶ . ۱۶. ۳) با راهنمایی‌های لازم برای اثبات آن است. مترجم.

2 . Pointwise finite open covering = Точено конечное открытое покытие

3. Hausdorff distance = Хаусдорво расстояие

(d) نشان دهید که، اگر فضای E پیش‌فشرده باشد، آنگاه $\mathfrak{F}(E)$ نیز پیش‌فشرده خواهد بود (از مسئله بخش ۱ .۱ استفاده کنید)، بنابراین اگر E فشرده باشد، آنگاه $\mathfrak{F}(E)$ نیز فشرده خواهد بود.[۱]

۴ . [۲] فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ ، گیریم $N_\varepsilon(E)$ کوچک‌ترین عدد صحیح n باشد، به طوری که، پوششی برای E به‌وسیله n مجموعه با قطر کوچک‌تر یا مساوی 2ε موجود باشد. فرض کنیم $M_\varepsilon(E)$ بزرگ‌ترین عدد صحیح m باشد، به‌طوری که دنباله‌ای متناهی از m نقطه E موجود باشد، به طوری که، فاصله هر دو نقطه متمایز از نقاط آن بزرگ‌تر از ε باشد. عدد $H_\varepsilon(E) = \log N_\varepsilon(E)$ را εـ **آنتروپی**[۳] مجموعه E ، و عدد $C_\varepsilon(E) = \log M_\varepsilon(E)$ را εـ **کاپاسیتی**[۴] مجموعه E می‌نامند.

(a) نشان دهید که $M_{2\varepsilon}(E) \le N_\varepsilon(E) \le M_\varepsilon(E)$، بنابراین $C_{2\varepsilon}(E) \le H_\varepsilon(E) \le C_\varepsilon(E)$.

(b) نشان دهید که $N_\varepsilon(E)$ و $M_\varepsilon(E)$ به‌عنوان توابعی از ε، برای $\varepsilon > 0$ توابعی معین، نزولی، و از طرف راست پیوسته هستند. (برای اثبات پیوستگی از سمت راست $N_\varepsilon(E)$، از تناقض استفاده نموده، و مسئله (d) ۳ را مورد استفاده قرار دهید.)

(c) اگر A و B دو زیر مجموعه بسته غیر تهی E باشند، نشان دهید که:

$$N_\varepsilon(A \cup B) \le N_\varepsilon(A) + N_\varepsilon(B)\ ,\ \ M_\varepsilon(A \cup B) \le M_\varepsilon(A) + M_\varepsilon(B)$$
$$H_\varepsilon(A \cup B) \le H_\varepsilon(A) + H_\varepsilon(B)\ ,\ \ C_\varepsilon(A \cup B) \le C_\varepsilon(A) + C_\varepsilon(B)$$

(d) اگر E یک فاصله بسته از $\mathbf{R}$ با طول l باشد، نشان دهید که $N_\varepsilon(E) = M_{2\varepsilon}(E) = \dfrac{l}{2\varepsilon}$، اگر $\dfrac{l}{2\varepsilon}$ عددی صحیح باشد، و $N_\varepsilon(E) = M_{2\varepsilon}(E) = [\dfrac{l}{2\varepsilon}]+1$ ، اگر $\dfrac{l}{2\varepsilon}$ عدد صحیح نباشد ($[t]$ برای $t > 0$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی t است).

۱۷. مجموعه‌های فشرده

یک مجموعه **فشرده** (به‌ترتیب **پیش‌فشرده**) در فضای متریک E زیر مجموعه‌ای مانند A است، به‌طوری که **زیر فضای** A از E فشرده (به ترتیب پیش‌فشرده) باشد.

(۱. ۱۷. ۳) هر مجموعه پیش‌فشرده کراندار است.

مطلب فوق از این حقیقت ناشی می‌شود که، اجتماعی متناهی از مجموعه‌های کراندار، طبق (۴. ۴. ۳) ، مجموعه‌ای کراندار است.

عکس (۱. ۱۷ . ۳) در حالت کلی درست نیست. زیرا، هر **فاصله** هم‌ارز یک فاصله کراندار است (بخش

۱. قسمت (b) این مسئله در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲ . این مسئله در چاپ اول برگردان روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

3. ε – Entropy = ε - Энтропия

4 . ε - Capacity = ε - Ёмкость

۱۴. ۳. مسئله ۲) (اما (۶ . ۱۷. ۳) را ببینید) .

(۲. ۱۷. ۳) هر مجموعه فشرده در یک فضای متریک مجموعه‌ای بسته است.

در واقع، چنین زیر فضایی طبق (۱. ۱۶. ۳) تام است، و نیاز ما تنها با استفاده از (۴. ۱۴. ۳) تأمین می‌شود.

(۳. ۱۷. ۳) در یک فضای فشرده E ، هر زیر مجموعه بسته فشرده است.

زیرا، چنین مجموعه‌ای به وضوح پیش‌فشرده، و طبق (۵ . ۱۴. ۳) ، یک زیرفضای تام است.

زیر مجموعه A از فضای متریک E را **به‌طور نسبی فشرده**[1] نامیم، هرگاه بستار $\bar{A}$ فشرده باشد.

(۴ . ۱۷. ۳) هر زیر مجموعه از یک مجموعه به طور نسبی فشرده (به ترتیب پیش‌فشرده) به طور نسبی فشرده (به ترتیب پیش فشرده) است.

مطلب فوق نتیجه فوری تعریف‌ها و (۳. ۱۷. ۳) است.

(۵ . ۱۷. ۳) یک مجموعه به طور نسبی فشرده پیش فشرده است. در یک فضای تام، یک مجموعه پیش‌فشرده به طور نسبی فشرده است.

نخستین ادعا نتیجه مستقیم (۴. ۱۷. ۳) است. برای اثبات قسمت دوم حکم، فرض کنیم E یک فضای تام و $A \subset E$ مجموعه‌ای پیش‌فشرده باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه A به‌وسیله تعدادی متناهی از مجموعه‌های $C_k \subset A$ با قطر کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ پوشیده می‌شود. هر C_k مشمول یک گوی بسته D_k (در E) با شعاع $\frac{\varepsilon}{2}$ است. بنابراین، داریم $\bar{A} \subset \bigcup_k D_k$ ، ضمناً، مجموعه $\bigcup_k D_k$ بسته است، و هر یک از D_kها قطری کوچک‌تر یا مساوی ε دارد. از طرف دیگر، $\bar{A}$ طبق (۵ . ۱۴. ۳) زیر فضایی تام است، و از این مطلب نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

یک فضای پیش‌فشرده (کاملاً کراندار) E که تام نیست، مثالی از یک مجموعه پیش‌فشرده (کاملاً کراندار) است که در E به‌طور نسبی فشرده نیست.

(۶ . ۱۷. ۳) (قضیه بورل ـ لبگ)[2] برای اینکه یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی به‌طور نسبی فشرده باشد، لازم و کافی است که آن مجموعه کراندار باشد.

نظر به (۱. ۱۷. ۳) ، (۴. ۱۷. ۳) و (۵ . ۱۷. ۳) ، کل کاری که ما باید انجام دهیم، این است که،

---

1 . Relatively compact set = Относительно компактное множество

2 . Borel-Lebesgue theorem = Теорема Бореля–Лебега

ثابت کنیم ، هر فاصله بسته $[a\ ,\ b]$ پیش‌فشرده است. برای هر عدد صحیح $n > 0$ ، قرار می‌دهیم $x_k = a + k(b-a)/n$ $(0 \le k \le n)$. در این‌صورت، فاصله‌های باز با مرکزهای x_k و طول $2(b-a)/n$ تشکیل پوششی باز برای $[a\ ,\ b]$ می‌دهند،[1] و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

تبصره. اگر، روی خط حقیقی دو فاصله d_1 و d_2 را که در بخش ۳.۱۴ تعریف شده‌اند، مورد بررسی قرار دهیم، آنگاه از (۱ . ۱۷ . ۳) نتیجه می‌شود که، E_2 پیش‌فشرده نیست، در صورتی‌که E_1 پیش‌فشرده است، زیرا، خط حقیقی گسترش یافته $\bar{R}$ با فاصله بسته $[-1\ ,+1]$ از فضای $\mathbf{R}$ (۳.۱۲) **هومیومورفیک (هومیومورف ـ همسان ریخت)** است، و این فاصله طبق (۶ . ۳.۱۷) فشرده است.

(۷ . ۳.۱۷) شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعه A از فضای متریک E به‌طور نسبی فشرده باشد، این است که، هر دنباله از نقاط A دارای یک نقطه حدی در E باشد.

طبق (۱. ۳.۱۶) ، لازم بودن شرط قضیه واضح است. به‌عکس، فرض کنیم شرط قضیه برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که، هر دنباله (x_n) از نقاط $\bar{A}$ دارای یک نقطه حدی در E است (که در این‌صورت، طبق (۷. ۳.۱۳) این نقطه متعلق به $\bar{A}$ خواهد بود) ؛ و بنابراین، $\bar{A}$ طبق (۱. ۳.۱۶) فشرده خواهد بود. طبق تعریف بستار، برای هر عدد طبیعی n ، نقطه‌ای مانند $y_n \in A$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $d(x_n\ ,\ y_n) \le \frac{1}{n}$. طبق فرض، زیر دنباله‌ای مانند (y_{n_k}) از دنباله (y_n) موجود است که همگرا به نقطه‌ای مانند a است. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود، که (x_{n_k}) همگرا به a است، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۸ . ۳.۱۷) اجتماع دو مجموعه به‌طور نسبی فشرده، مجموعه‌ای به‌طور نسبی فشرده است.

از (۸ . ۳.۸) نتیجه می‌شود که، کافی است ثابت کنیم، اجتماع دو مجموعه فشرده A ، B مجموعه‌ای فشرده است. فرض کنیم $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ پوششی باز برای زیر فضای $A \cup B$ باشد، هر U_λ را طبق (۱ . ۳.۱۰) می‌توان به‌صورت $(A \cup B) \cap V_k$ نوشت، که در آن V_k مجموعه‌ای باز در E است. طبق فرض، زیر مجموعه‌ای متناهی مانند H (به ترتیب K) از L موجود است، به‌طوری که زیر خانواده $(A \cap V_k)_{\lambda \in H}$ (به ترتیب $(B \cap V_k)_{\lambda \in K}$) پوششی برای A (به ترتیب B) است. واضح است که، در این‌صورت، خانواده $(A \cup B) \cap V_\lambda)_{\lambda \in H \cup K}$ پوششی برای $A \cup B$ خواهد بود.

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب، برعکس چاپ اول متن روسی آن، طول فاصله‌ها به جای $2(b-a)/n$ به اشتباه $\frac{2}{n}$ نوشته شده است، که قاعدتاً باید به‌عنوان اشتباه چاپی به‌حساب آورد. مترجم.

(۳ .۱۷ .۹) فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از فضای متریک E به فضای متریک E' باشد. در این‌صورت، برای هر زیر مجموعه فشرده (به ترتیب به‌طور نسبی فشرده) A از E، $f(A)$ در E' فشرده و بنابراین، در E' بسته (به ترتیب در E' به‌طور نسبی فشرده) است.

کافی است ثابت کنیم، اگر A فشرده باشد، آنگاه $f(A)$ نیز فشرده خواهد بود. فرض کنیم $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ پوششی باز برای زیر فضای $f(A)$ از E' باشد. در این صورت، مجموعه‌های $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$، طبق (۳ .۱۱ .۴) ، تشکیل پوششی باز برای زیر فضای A خواهند داد. طبق فرض، زیر مجموعه متناهی H از L موجود است، به‌طوری که مجموعه‌های $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$ برای $\lambda \in H$ هنوز پوششی برای A است، در این صورت، مجموعه‌های $U_\lambda = f(A \cap f^{-1}(U_\lambda))$ برای $\lambda \in H$ پوششی برای $f(A)$ تشکیل خواهند داد، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۳ .۱۷ .۱۰) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده و f یک نگاشت پیوسته از فضای E به R باشد. در این‌صورت، $f(E)$ کراندار خواهد بود، و دو نقطه a و b در E وجود دارند، به‌طوری که :

$$f(a) = \inf_{x\in E} f(x) \text{ و } f(b) = \sup_{x\in E} f(x) .$$

نخستین قسمت حکم از (۳ .۱۷ .۹) و (۳ .۱۷ .۱) نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، $f(E)$ طبق (۳ .۱۷ .۲) در R بسته است، و بنابراین، $\sup f(E)$ و $\inf f(E)$ که نقاط چسبیدگی مجموعه $f(E)$ هستند، اعضاء $f(E)$ خواهند بود.

(۳ .۱۷ .۱۱) فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای فشرده از فضای متریک E باشد. در این‌صورت، مجموعه‌های $V_r(A)$ (بخش ۳ . ۶ را ببینید) یک سیستم اساسی از همسایگی‌های A تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم U یک همسایگی مجموعه A باشد. تابع حقیقی $x \to d(x, E - U)$ روی A اکیداً مثبت، و طبق (۳ . ۱۱ . ۸) ، پیوسته است. بنابراین، طبق (۳ . ۱۷ . ۱۰) ، نقطه‌ای مانند $x_0 \in A$ موجود است، به‌طوری که $d(x_0, E - U) = \inf_{x\in A} d(x, E - U)$ ، اما $d(x_0, E - U) = r > 0$ بنابراین $V_r(A) \subset U$.

(۳ .۱۷ .۱۲) اگر E یک فضای متریک فشرده، و f نگاشتی پیوسته و یک به یک از فضای E به فضای متریک E' باشد ، آنگاه f هومیومورفیسمی از E به روی $f(E)$ خواهد بود.

طبق (۳ .۱۱ .۴) ، کافی است ثابت کنیم، برای هر مجموعه بسته $A \subset E$ ، مجموعه $f(A)$ در $f(E)$ بسته است. اما، این مطلب از (۳ .۱۷ .۳) و (۳ .۱۷ .۹) نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم f یک نگاشت به‌طور یکنواخت پیوسته از فضای متریک E به‌فضای متریک E' باشد. نشان دهید که، برای هر زیر مجموعه پیش‌فشرده A از E، مجموعه $f(A)$ پیش‌فشرده خواهد بود.

۲. در فضای متریک E، فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای فشرده، و B زیر مجموعه‌ای بسته باشد، به‌طوری‌که $A\cap B=\varnothing$، نشان دهید که $d(A, B)>0$.

۳. فرض کنیم E یک فضای فرامتریک فشرده (بخش ۸. ۳ مسئله ۴ را ببینید.) و d فاصله روی E باشد. ثابت کنید که، برای هر $x_0\in E$، تصویر فضای E تحت نگاشت $x\to d(x_0, x)$ یک زیر مجموعه حداکثر شمارش‌پذیر از فاصله $[0, +\infty[$ خواهد بود، که هر نقطه آن (به استثنای احتمالاً نقطه 0) نقطه‌ای ایزوله است ((۱۰. ۱۰. ۳) را ببینید). (برای هر $r=d(x_0,x)>0$، کوچک‌ترین کران بالای تابع $d(x_0, y)$ را روی مجموعه نقاط y به‌طوری که $d(x_0, y)<r$، و بزرگترین کران پایین تابع $d(x_0, z)$ روی مجموعه نقاط z به‌طوری که $d(x_0, z)>r$، مورد بررسی قرار دهید. از تمرین ۴ بخش ۸. ۳ استفاده کنید).

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده، d فاصله روی E و f نگاشتی از E به E باشد، به‌طوری که برای هر زوج (x, y) از نقاط E، $d(f(x), f(y))\geq d(x, y)$. نشان دهید که، f یک ایزومتری از E به روی E خواهد بود. (فرض کنیم a، b دو نقطه دلخواه از E باشد. قرار می‌دهیم $f_n=f_{n-1}\circ f$، $a_n=f_n(a)$، $b_n=f_n(b)$. نشان دهید که، برای هر $\varepsilon>0$ اندیسی مانند k موجود است، به‌طوری که $d(a, a_k)\leq\varepsilon$ و $d(b, b_k)\leq\varepsilon$ (نقطه‌ای حدی از دنباله (a_n) را مورد بررسی قرار دهید)، و نتیجه بگیرید که $f(E)$ در E چگال است و $d(f(a), f(b))=d(a, b)$.

۵. فرض کنیم E، E' دو فضای متریک، و f نگاشتی از E به E' باشد. نشان دهید که، اگر تحدید f به هر زیرفضای فشرده از فضای E پیوسته باشد، آنگاه f روی E پیوسته است. (از ۱۴. ۱۳. ۳ استفاده کنید).

۶. [1] فرض کنیم E، E' دو فضای متریک، و f نگاشتی پیوسته از E به E'، و K زیر مجموعه‌ای فشرده از E باشد. فرض کنیم تحدید $f|K$ از f یک به یک باشد، و برای هر $x\in K$، همسایگی V_x از x در E موجود باشد، به‌طوری که تحدید $f|V_x$ از f یک به یک باشد. نشان دهید که، یک همسایگی U از K در E موجود است، به‌طوری که $f|U$ یک به یک است. (از تناقض و (۱۱. ۱۷. ۳) استفاده کنید).

۱۸. فضاهای به‌طور موضعی فشرده[2]

فضای متریک E را **به‌طور موضعی فشرده** نامیم، هرگاه برای هر $x\in E$، یک همسایگی فشرده از x در E موجود باشد. هر فضای دیسکرت به‌طور موضعی فشرده است، اما، اگر نامتناهی باشد، فشرده نیست. ((۳. ۱۶. ۳) را ببینید).

(۱. ۱۸. ۳) خط حقیقی R به‌طور موضعی فشرده است، اما فشرده نیست.

مطلب فوق نتیجه مستقیم قضیه بورل ـ لبگ (۶. ۱۷. ۳) است.

---

۱. مسئله ۶ در چاپ اول برگردان روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

2 . Locally compact spaces = Локально компактные пространства

(۳.۱۸.۲) فرض کنیم A یک مجموعه فشرده در فضای متریک به‌طور موضعی فشرده E باشد. در این صورت، عددی مانند $r > 0$ موجود است، به‌طوری که $V_r(A)$ (بخش ۳.۶ را ببینید) در E به‌طور نسبی فشرده است.

برای هر نقطه $x \in A$، یک همسایگی فشرده V_x از x موجود است. مجموعه‌های $\mathring{V}_x$ تشکیل پوششی باز برای A می‌دهند. بنابراین، یک زیر مجموعه متناهی $\{x_1, \cdots, x_n\}$ از نقاط A موجود خواهد بود، به‌طوری که، مجموعه‌های $\mathring{V}_{x_i}$ $(1 \le i \le n)$ تشکیل پوششی باز برای مجموعه A می‌دهند. مجموعه $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ طبق (۳.۱۷.۸) فشرده است. علاوه بر آن، U یک همسایگی از مجموعه A است. با استفاده از این مطلب و با استفاده از (۳.۱۷.۱۱) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۳.۱۸.۳) فرض کنیم E یک فضای به‌طور موضعی فشرده باشد. در این‌صورت، خواص زیر هم‌ارز خواهند بود:

(a) دنباله صعودی (U_n) از مجموعه‌های باز به‌طور نسبی فشرده در E موجود است، به‌طوری که برای هر عدد طبیعی n، $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$، و $E = \bigcup_n U_n$؛

(b) E اجتماعی نامتناهی ـ شمارش‌پذیر از زیر مجموعه‌های فشرده است؛

(c) E جدائی‌پذیر است.

واضح است که، از (a)، (b) نتیجه می‌شود. زیرا $\overline{U}_n$ فشرده است. اگر E اجتماع یک دنباله (K_n) از مجموعه‌های فشرده باشد، طبق (۳.۱۶.۲)، هر یک از زیر فضاهای K_n جدائی‌پذیر است. اگر $D_n \subset K_n$ مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر باشد، که در K_n چگال است، در این‌صورت، $D = \bigcup_n D_n$ مجموعه‌ای است حداکثر شمارش‌پذیر و چگال در E، زیرا $E = \bigcup_n K_n \subset \bigcup_n \overline{D}_n \subset \overline{D}$. بنابراین، از (b)، (c) نتیجه می‌شود. بالاخره، فرض کنیم E جدائی‌پذیر باشد، و (T_n) پایه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر برای مجموعه‌های باز E باشد. ((۳.۹.۴) را ببینید). برای هر نقطه $x \in E$، یک همسایگی فشرده مانند W_x از x موجود است. بنابراین، طبق (۳.۹.۳)، اندیسی مانند $n(x)$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $x \in T_{n(x)} \subset W_x$. در نتیجه، همه این T_n ها که به‌طور نسبی فشرده هستند، اکنون تشکیل یک پایه برای مجموعه‌های باز فضای E می‌دهند. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که همه T_nها به‌طور نسبی فشرده هستند. حال، U_nها را با استقراء به روش زیر تعریف می‌کنیم: $U_1 = T_1$، و U_{n+1} را برابر اجتماع T_{n+1} و $V_r(\overline{U}_n)$ فرض می‌کنیم، که در آن $r > 0$ طوری انتخاب شده است که $V_r(\overline{U}_n)$ به‌طور نسبی فشرده باشد (چنین انتخابی طبق (۳.۱۸.۲) امکان‌پذیر است). در این‌صورت، واضح است، که، دنباله (U_n) در خاصیت (a) صدق می‌کند.

(۴. ۱۸. ۳) در یک فضای به‌طور موضعی فشرده E ، هر زیر فضای باز و هر زیر فضای بسته به‌طور موضعی فشرده است.

فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در E باشد. طبق تعریف یک فضای به‌طور موضعی فشرده و (۳. ۱۷. ۳) ، برای هر نقطه $a \in A$ در E گوئی بسته مانند $B'(a , r)$ وجود دارد که فشرده است. از طرف دیگر، یک $r' \leq r$ موجود است، به‌طوری که $B'(a , r')$ در A قرار گیرد. از آنجا که طبق (۳. ۱۷. ۳) این گوی بسته فشرده است، A به‌طور موضعی فشرده خواهد بود.

فرض کنیم A در E بسته باشد، و $a \in A$. در این صورت، اگر V یک همسایگی فشرده a در E باشد، اشتراک $V \cap A$ طبق (۴. ۱۰. ۳) یک همسایگی a در A خواهد بود، و طبق (۳. ۱۷. ۳) فشرده است. با این مطلب ثابت می‌شود که، A به‌طور موضعی فشرده است.

مسائل

۱. اگر A یک زیر فضای به‌طور موضعی فشرده از فضای متریک E باشد، نشان دهید که، A به‌طور موضعی در E بسته است (بخش ۱۰. ۳ مسئله ۳ را ببینید) . اگر E به طور موضعی فشرده باشد، عکس مطلب فوق نیز درست است. (از (۴ . ۱۸ . ۳) استفاده نمایید).

۲. (a) نشان دهید که، در یک فضای متریک به‌طور موضعی فشرده، اشتراک دو زیر فضای به‌طور موضعی فشرده، زیر فضایی به‌طور موضعی فشرده است (مقایسه کنید با مسئله ۱) .
(b) روی خط حقیقی، مثالی از دو زیرفضای به‌طور موضعی فشرده بزنید، که اجتماع آنها به طور موضعی فشرده نباشد، همچنین، مثالی از یک زیرفضای به‌طور موضعی فشرده ارائه نمایید، که مکمل آن به‌طور موضعی فشرده نباشد.

۳. (a) مثالی از یک فضای متریک به‌طور موضعی فشرده ارائه نمایید، که تام نباشد.
(b) فرض کنیم E یک فضای متریک باشد، که برای آن عددی مانند $r > 0$ یافت شود، به‌طوری که، هر گوی بسته $B'(x , r)$ $(x \in E)$ فشرده باشد. ثابت کنید که، E تام است، و برای هر زیر مجموعه به‌طور نسبی فشرده A از E ، مجموعه $V'_{r/2}(A)$ که از نقاطی مانند $x \in E$ تشکیل شده است که $d(x , A) \leq \frac{r}{2}$، فشرده است.

۱۹. فضاهای همبند و مجموعه‌های همبند

فضای متریک E را همبند[1] نامیم، هرگاه تنها زیر مجموعه‌های E که هم باز و هم بسته باشند، مجموعه $\varnothing$ و خود مجموعه E باشند. یک فرمول‌بندی هم‌ارز تعریف فوق، این است که، بگوییم، دو زیر مجموعه غیرتهی باز A و B از فضای E موجود نباشد، به‌طوری که $A \cup B = E$ و $A \cap B = \varnothing$. فضای تولید شده از یک مجموعه تک نقطه‌ای یک فضای همبند است.

1 . Connected = Связный

زیر مجموعه F از فضای متریک E همبند است، هرگاه **زیر فضای** F از E همبند باشد.

فضای متریک E را **به‌طور موضعی همبند**[1] نامیم، هرگاه، برای هر $x \in E$، یک سیستم اساسی از همسایگی‌های **همبند** x موجود باشد.

(۱. ۱۹. ۳) برای اینکه زیر مجموعه A از خط حقیقی R همبند باشد، لازم و کافی است که A یک فاصله (کراندار یا بی‌کران) باشد. خط حقیقی فضایی همبند و به‌طور موضعی همبند است.

دومین قسمت حکم به وضوح از قسمت اول آن نتیجه می‌شود. فرض کنیم A همبند باشد. اگر A تنها از یک نقطه تشکیل شده باشد، آنگاه A یک فاصله خواهد بود. فرض کنیم A شامل دو نقطه متمایز $a < b$ باشد. ثابت می‌کنیم که، هر نقطه x به‌طوری که $a < x < b$ عضوی از A است. زیرا، در غیراین صورت، A اجتماع مجموعه‌های غیرتهی $B = A \cap]-\infty, x[$ و $C = A \cap]x, +\infty[$ خواهد بود، که هر دو در A باز هستند و $B \cap C = \varnothing$. از این خاصیت، نتیجه می‌گیریم که، لازم است A یک فاصله باشد. در واقع، فرض کنیم $c \in A$، p و q به ترتیب g.l.b و l.u.b مجموعه A در $\overline{\mathbf{R}}$ باشند. اگر $p = -\infty$، در این صورت، برای هر $x < c$، یک نقطه $y < x$ یافت می‌شود، به‌طوری که $y \in A$، بنابراین $x \in A$، و در نتیجه، فاصله $]-\infty, c]$ مشمول A است. اگر p متناهی باشد، و $p < c$، آنگاه برای هر x که $p < x < c$ یک $y \in A$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $p < y < x$، و در نتیجه، دوباره $x \in A$ و A شامل فاصله $]p, c]$ است. به‌طریق مشابه، می‌توان نشان داد که، اگر $q > c$ باشد، آنگاه A شامل فاصله $[c, q[$ است. در نتیجه، در هر حالت A شامل فاصله $]p, q[$ است، و بنابراین، باید به‌صورت یکی از چهار فاصله‌ای در $\overline{\mathbf{R}}$ باشد، که نقاط انتهایی آن p و q هستند (البته، اگر $p = -\infty$ (به ترتیب $q = +\infty$)، p (به ترتیب q) متعلق به A نخواهد بود).

به‌عکس، فرض کنیم A یک فاصله غیرتهی با نقاط انتهایی a و b در $\overline{\mathbf{R}}$ باشد. (امکان‌های $a = -\infty$، $a \notin A$، $b = +\infty$، $b \notin A$ نیز در نظر گرفته شده است). فرض کنیم $A = B \cup C$، که در آن B و C مجموعه‌هایی باز و غیرتهی A هستند و $B \cap C = \varnothing$. به‌عنوان مثال، فرض کنیم $x \in B$، $y \in C$، $x < y$، و z را برابر l.u.b مجموعه کراندار $B \cap [x, y]$ فرض می‌کنیم. اگر $z \in B$، در این صورت $z < y$ و طبق فرض، فاصله‌ای مانند $]z, z+h[$ در $[x, y]$ و در B قرار خواهد گرفت، که با تعریف z در تناقض است. از طرف دیگر، اگر $z \in C$، آنگاه $x < z$ و به‌طور مشابه فاصله‌ای مانند $]z-h, z] \subset C \cap [x, y]$ موجود خواهد بود، که دوباره با تعریف z در تناقض است ((۲. ۳. ۴) را ببینید). بنابراین، z نه متعلق به B است و نه C، که این نیز محال است، زیرا مجموعه بسته $[x, y]$ در A قرار گرفته است. بنابراین، A همبند است.

---

1. Locally connected = Локально связно

(۲. ۱۹. ۳) اگر A مجموعه‌ای همبند در فضای متریک E باشد، آنگاه، هر مجموعه B که $A \subset B \subset \overline{A}$ ، همبند خواهد بود.

در واقع، فرض کنیم X و Y دو مجموعه باز غیر تهی در B باشند، به‌طوری که $X \cup Y = B$ و $X \cap Y = \varnothing$. چون A در B چگال است، پس $X \cap A$ و $Y \cap A$ دو مجموعه غیر تهی و در A باز هستند. علاوه بر آن، $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$ ، $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \varnothing$ ، که با همبند بودن مجموعه A در تناقض است.

(۳. ۱۹. ۳) در یک فضای متریک E ، فرض کنیم $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند باشد، که اشتراک آنها غیر تهی است. در این صورت $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ نیز همبند خواهد بود.

فرض کنیم a نقطه‌ای از $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ باشد، و فرض کنیم $A = B \cup C$، که در آن B و C دو مجموعه باز غیر تهی در A هستند، به‌طوری که $B \cap C = \varnothing$. به‌عنوان مثال، فرض کنیم $a \in B$. طبق فرض، لااقل یک $\lambda \in L$ موجود است. به‌طوری که $C \cap A_\lambda \neq \varnothing$. بنابراین، چون $B \cap A_\lambda \neq \varnothing$، مجموعه‌های $B \cap A_\lambda$ و $C \cap A_\lambda$ غیر تهی و در A_λ باز هستند و $(B \cap A_\lambda) \cup (C \cap A_\lambda) = A_\lambda$، $(B \cap A_\lambda) \cap (C \cap A_\lambda) = \varnothing$، که با همبند بودن A_λ در تناقض است.

(۴. ۱۹. ۳) فرض کنیم $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ یک دنباله از مجموعه‌های همبند باشد، به‌طوری که برای $1 \leq i \leq n-1$، $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$. در این صورت، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ همبند خواهد بود.

با استفاده از استقراء ریاضی روی n ، مطلب فوق فوراً از (۳. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود.

از (۳. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود که $C(x)$ اجتماع همه زیر مجموعه‌های همبند E که شامل نقطه $x \in E$ است، مجموعه‌ای همبند است، این بزرگ‌ترین مجموعه همبند شامل x را **مؤلفه همبند**[1] x در E می‌نامند. واضح است که، برای هر $y \in C(x)$ ، داریم $C(y) = C(x)$ و اگر $y \notin C(x)$ ، آنگاه $C(x) \cap C(y) = \varnothing$ ، به‌علاوه، از (۲. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود که ، $C(x)$ در E **بسته** است.

برای هر زیر مجموعه A از E مؤلفه‌های همبند نقاط زیر فضای A **مؤلفه‌های همبند مجموعه A** نامیده می‌شود. اگر هر مؤلفه همبند A از یک نقطه تشکیل شده باشد، A را **کاملاً ناهمبند**[2] می‌نامند.

یک فضای دیسکرت کاملاً ناهمبند است. مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد گنگ، طبق (۱۶. ۲. ۲) و (۱. ۱۹. ۳) ، کاملاً ناهمبند هستند.

---

1 . Connected component of x = Компонента связности точки x
2 . Totally disconnected = Вполне несвязный

(۵ . ۱۹. ۳) برای اینکه فضای متریک E به‌طور موضعی همبند باشد، لازم و کافی است که، مؤلفه‌های همبند مجموعه‌های باز فضای E باز باشند.

شرط قضیه کافی است. زیرا، اگر V یک همسایگی باز دلخواه از نقطه $x \in \mathrm{E}$ باشد، آنگاه، مؤلفه همبند x در زیر فضای V یک همسایگی همبند x در V است. بنابراین، E به‌طور موضعی همبند است. شرط قضیه لازم نیز هست. زیرا، اگر E به‌طور موضعی همبند، و A مجموعه‌ای باز در E ، و B یک مؤلفه همبند مجموعه A باشد، آنگاه، برای هر نقطه $x \in \mathrm{B}$ ، طبق فرض، همسایگی همبند V از x موجود است، که در A واقع است. بنابراین، طبق تعریف B ، $\mathrm{V} \subset \mathrm{B}$ ، و در نتیجه، B یک همسایگی از هر یک از نقاطش است، و بنابراین، یک مجموعه باز است.

(۶ . ۱۹. ۳) هر مجموعه باز روی خط حقیقی R اجتماع یک خانواده حداکثر شمارش‌پذیر از فاصله‌های باز است، که هیچ دو فاصله باز متمایزی از این خانواده نقطه مشترکی ندارند.

از (۱. ۹. ۳) و (۵. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود که، مؤلفه‌های همبند A فواصل و مجموعه‌های باز، و بنابراین، فاصله‌های باز هستند. $\mathrm{A} \cap \mathbf{Q}$ اشتراک A با $\mathbf{Q}$ مجموعه اعداد گویا، طبق (۱۶. ۲ . ۲) ، مجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر است، و هر مؤلفه مجموعه A طبق (۱۶. ۲ . ۲) شامل نقاطی از $\mathrm{A} \cap \mathbf{Q}$ است. به این ترتیب، نگاشت $r \to \mathrm{C}(r)$ از $\mathrm{A} \cap \mathbf{Q}$ به مجموعه $\mathfrak{C}$ مؤلفه‌های همبند مجموعه A پوشا ، و بنابراین، طبق (۲. ۹. ۱) ، $\mathfrak{C}$ حداکثر شمارش‌پذیر خواهد بود.

(۷. ۱۹. ۳) فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از E به E' باشد. برای هر زیر مجموعه همبند A از فضای E ، $f(\mathrm{A})$ همبند است.

فرض کنیم $f(\mathrm{A}) = \mathrm{M} \cup \mathbf{N}$ ، که در آن M و $\mathbf{N}$ زیر مجموعه‌هایی غیر تهی از $f(\mathrm{A})$ و در $f(\mathrm{A})$ باز هستند و $\mathrm{M} \cap \mathbf{N} = \varnothing$. بنابراین ، طبق (۴. ۱۱. ۳) ، اشتراک‌های $\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{M})$ و $\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathbf{N})$ مجموعه‌هایی غیر تهی، و در A باز هستند، و

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{M})) \cup (\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathbf{N})) \quad \text{و} \quad (\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{M})) \cap (\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathbf{N})) = \varnothing$$

و این با فرض همبند بودن A در تناقض است.

(۸ . ۱۹. ۳) (قضیه بولتزانو)[1] فرض کنیم E یک فضای همبند، f نگاشتی پیوسته از E به خط حقیقی $\mathbf{R}$ ، و a و b نقاطی از $f(\mathrm{E})$ باشند، و $a < b$. در این صورت، برای هر عدد حقیقی c که در شرط $a < c < b$ صدق می‌کند، نقطه‌ای مانند $x \in \mathrm{E}$ موجود است، به‌طوری که $f(x) = c$.

1 . Bolzano’s theorem = Теорема Больцано

زیرا، طبق (۷. ۱۹. ۳) ، مجموعه $f(\mathrm{E})$ در $\mathbf{R}$ همبند است. بنابراین، طبق (۱. ۱۹. ۳) ، این مجموعه یک فاصله خواهد بود.

(۹ . ۱۹. ۳) فرض کنیم A یک زیر مجموعه از فضای متریک E باشد. اگر B زیر مجموعه‌ای همبند از E باشد، به‌طوری که هر دو مجموعه $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ و $(\mathrm{E}-\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$ غیر تهی باشند. در این صورت، اشتراک $(\mathrm{Fr}(\mathrm{A})) \cap \mathrm{B}$ غیر تهی خواهد بود. در حالت خاص، اگر E همبند باشد، هر زیر مجموعه A از E که متمایز از $\varnothing$ و E باشد، حداقل دارای یک نقطه مرزی است.

فرض کنیم $(\mathrm{Fr}(\mathrm{A})) \cap \mathrm{B}=\varnothing$. قرار می‌دهیم $\mathrm{A}'=\mathrm{E}-\mathrm{A}$. چون E اجتماع سه مجموعه $\mathring{\mathrm{A}}$، $\mathring{\mathrm{A}}'$ و $\mathrm{Fr}(\mathrm{A})$ است، B باید برابر اجتماع $\mathrm{U}=\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ و $\mathrm{V}=\mathring{\mathrm{A}}' \cap \mathrm{B}$ باشد، که هر دو در B باز، و طبق فرض، هر دو غیر تهی هستند (زیرا، هر نقطه از $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ باید عضو $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ باشد، چون $\mathrm{Fr}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}=\varnothing$ ، و به طریقی مشابه می‌توان برای $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}$ عمل کرد[1]). چون $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}=\varnothing$ است،[2] مطلب فوق با همبند بودن B در تناقض است.

تبصره . اگر توافق کنیم که «**خم**»[3] به‌عنوان تصویر یک فاصله از $\mathbf{R}$ به‌وسیله نگاشتی پیوسته فرض شود (بخش ۲. ۴. مسئله ۵ را ببینید)، از (۷. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود که یک «خم» مجموعه‌ای همبند است، و از (۹. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود که، یک « خم» که نقطه‌ای از مجموعه A را به نقطه‌ای از مجموعه $\mathrm{E}-\mathrm{A}$ وصل می‌کند با $\mathrm{Fr}(\mathrm{A})$ تلاقی می‌کند، و این مطابق با ایده شهودی « همبندی» است (مسئله ۳ در زیر همین قسمت، و مسئله ۴ از بخش ۱. ۵ را ببینید) .

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای متریک همبند باشد، که فاصله روی آن کراندار نیست. نشان دهید که در E هر کره غیر تهی است.

۲. (a) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده باشد، به‌طوری که در E ، بستار هر گوی باز $\mathrm{B}(a,r)$ گوی بسته $\mathrm{B}'(a,r)$ باشد. نشان دهید که، در E هر گوی باز $\mathrm{B}(a,r)$ همبند است (فرض کنید که $\mathrm{B}(a,r)$ برابر $\mathrm{C} \cup \mathrm{D}$ اجتماع دو مجموعه غیرتهی باشد، که در $\mathrm{B}(a,r)$ باز هستند و $\mathrm{C} \cap \mathrm{D}=\varnothing$. اگر $a \in \mathrm{C}$ ، با استفاده از (۱۰. ۱۷. ۳) ؛ نقطه $x \in \mathrm{D}$ را مورد بررسی قرار دهید که $d(a, x)$ مینیمم است).

---

۱. در واقع، از رابطه $\mathrm{B} \cap Fr(\mathrm{A})=\varnothing$ ، نتیجه می‌شود $\mathrm{B} \subset \mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{A}}'$ ، و از این رابطه نتیجه می‌شود $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ و $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B} \subset \mathring{\mathrm{A}}' \cap \mathrm{B}$. مترجم.

۲. رابطه $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}=\varnothing$ در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌صورت $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \varnothing=$ نوشته شده است، که باید آن را اشتباه چاپی به‌حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

3 . Curve = Кривая

(b) مثالی از یک فضای متریک کاملاً ناهمبند بزنید، که در آن بستار هر گوی باز $B(a,r)$ گوی بسته $B'(a,r)$ باشد.

(c) در صفحه $\mathbf{R}^2$ با فاصله $d(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ ، فرض کنیم E زیر فضای فشرده تشکیل شده از نقاط (x_1 , x_2) باشد، به‌طوری که $x_1 = 0$ و $1 \le x_2 \le 0$ یا $x_2 = 0$ و $1 \le x_1 \le 0$. نشان دهید که، در E هر گوی همبند است، اما، بستار گوی باز $B(a,r)$ لزوماً گوی بسته $B'(a,r)$ نیست.

۳. در صفحه $\mathbf{R}^2$، فرض کنیم E زیر فضای تشکیل شده از نقاط (x,y) باشد، به‌طوری که یا x گنگ باشد و $1 \le y \le 0$، یا x گویا باشد و $-1 \le y < 0$.

(a) نشان دهید که، E همبند است، ولی به‌طور موضعی همبند نیست. (از (۱. ۱۹. ۳) و (۶. ۱۹. ۳) برای بررسی ساختمان یک زیر مجموعه از E که هم باز باشد و هم بسته استفاده کنید).

(b) فرض کنیم $t \to (f(t), g(t))$ یک نگاشت پیوسته از فاصله $[0 , 1]$ به E باشد (f و g پیوسته هستند). نشان دهید که، تابع f ثابت است. (اگر نقطه‌ای مانند $t_0 \in [0 ,1]$ موجود باشد، به‌طوری که $g(t_0) < 0$، زیر مجموعه باز $U \subset [0 , 1]$ را مورد بررسی قرار دهید که از نقاطی مانند t تشکیل شده است، که $g(t) < 0$ ، و از (۶. ۱۹. ۳) استفاده کنید). به‌عبارت دیگر، زوج‌هایی از نقاط متمایز E موجود هستند، به‌طوری که « نمی‌توان آنها را به‌وسیله یک خم در E به‌هم وصل نمود.[۱] »

۴. در فضای متریک E ، فرض کنیم A و B دو مجموعه همبند باشند، به‌طوری که $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$. نشان دهید که $A \cup B$ همبند است.

۵. فرض کنیم A و B دو مجموعه غیرتهی در فضای متریک E باشند. نشان دهید که، اگر A و B بسته، و $A \cup B$ و $A \cap B$ همبند باشند، آنگاه A و B هر دو همبند خواهند بود. با یک مثال نشان دهید که، روی خط حقیقی، فرض بسته بودن A و B را نمی‌توان حذف نمود.

۶. **فرض کنیم E یک فضای متریک همبند باشد که شامل حداقل دو نقطه است.**

(a) فرض کنیم A یک زیر مجموعه همبند E ، و B زیر مجموعه‌ای از $\complement A$ باشد[۲]، که همزمان نسبت به $\complement A$ هم‌باز است و هم بسته. نشان دهید که $A \cup B$ همبند است (از مسئله ۱ بخش ۱۰ . ۳ برای دو مجموعه $A \cup B$ و $\complement A$ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم A یک زیر مجموعه همبند از E ، و B یک مؤلفه همبند از $\complement A$ باشد. نشان دهید که، $\complement B$ همبند است (با به‌کارگیری قسمت (a) ، از یک اثبات غیرمستقیم استفاده کنید).

(c) نشان دهید که، در E دو زیر مجموعه همبند غیر تهی M و N موجود هستند، به‌طوری که $M \cup N = E$، $M \cap N = \varnothing$ (از (b) استفاده کنید).

۷. در یک فضای متریک نامتناهی شمارش‌پذیر E ، نشان دهید که، هر نقطه دارای یک سیستم اساسی از همسایگی‌ها است، که همزمان هم باز هستند و هم بسته.

۸. (a) نشان دهید که، در یک فضای متریک E مؤلفه همبند نقطه‌ای مانند x ، همزمان در هر مجموعه بسته و باز شامل x قرار گرفته است.

(b) در صفحه $\mathbf{R}^2$، فرض کنیم A_n مجموعه زوج‌های $(\frac{1}{n} , y)$ باشد که $-1 \le y \le 1$ ، B مجموعه زوج‌های $(0 , y)$ باشد که $0 < y \le 1$، و C مجموعه همه زوج‌های $(0 , y)$ باشد که $-1 \le y < 0$. فرض کنیم E زیر فضایی از $\mathbf{R}^2$ باشد، که اجتماع B و C و A_nها برای $n \ge 1$ است. نشان دهید که، E زیر فضایی به‌طور موضعی فشرده از $\mathbf{R}^2$ است، اما، به‌طور موضعی همبند نیست. مؤلفه‌های همبند مجموعه E مجموعه‌های B و C و A_nها $(n \ge 1)$ هستند، اما، اشتراک همه مجموعه‌های به‌طور همزمان باز و بسته،که شامل یک نقطه از B هستند، مجموعه $B \cup C$ است.

۹. فرض کنیم E یک فضای متریک به‌طور موضعی فشرده باشد.

---

۱. این تعبیر در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

۲. منظور از $\complement A$ مجموعه $E - A$ مکمل مجموعه A است. مترجم.

(a) فرض کنیم C یک مؤلفه همبند E باشد که فشرده است. نشان دهید که، C اشتراک همه همسایگی‌های به‌طور همزمان باز و بسته C است. (با استفاده از (۲. ۱۸. ۳) ، مسئله را به حالتی تبدیل کنید که، E فشرده است. فرض کنید که B اشتراک همه همسایگی‌های به‌طور همزمان باز و بسته C باشد، که متمایز از C هستند. در این صورت، B اجتماع دو مجموعه بسته $M \supset C$ و N است که نقطه مشترکی ندارند. در E دو مجموعه باز $U \supset M$ و $V \supset N$ که نقطه مشترکی ندارند (بخش ۱۱ . ۳ ، مسئله ۳ را ببینید)، با در نظر گرفتن اشتراک مجموعه $E-(M \cup N)$ با مکمل‌های مجموعه‌های به‌طور همزمان باز و بسته همسایگی‌های C ، مورد بررسی قرار دهید).

(b) فرض کنیم E یک مجموعه همبند، و A یک مجموعه باز به‌طور نسبی فشرده از E باشد. نشان دهید که، هر مؤلفه همبند A حداقل یک نقطه چسبیدگی در $\complement A$ دارد (فرض کنید، مطلب فوق درست نباشد، با به‌کارگیری (a) نسبت به چنین مؤلفه‌ای، یک تناقض به‌دست آورید).

(c) از (b) نتیجه بگیرید که، برای هر زیر مجموعه فشرده K از E ، اشتراک مؤلفه‌ای همبند از K با $\overline{E-K}$ غیر تهی خواهد بود.

۲۰. حاصلضرب دو فضای متریک[1]

فرض کنیم E_1 ، E_2 دو فضای متریک و d_1 ، d_2 فاصله‌های روی E_1 و E_2 باشند. برای هر زوج از نقاط $x=(x_1, x_2)$ ، $y=(y_1, y_2)$ در $E=E_1 \times E_2$ قرار می‌دهیم :

$$d(x, y)=\max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

مستقیماً می‌توان تحقیق نمود که، تابع $d(x, y)$ در اصول (I) تا (IV) بخش ۱. ۳ صدق می‌کند، به‌عبارت دیگر، d یک **فاصله** روی E است. فضای متریکی که با انتخاب فاصله d روی E به‌دست می‌آید، **حاصلضرب** دو فضای متریک E_1 و E_2 نامیده می‌شود. نگاشت $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ از فضای $E_1 \times E_2$ به روی $E_2 \times E_1$ یک ایزومتری است.

به سادگی ثابت می‌شود که ، دو تابع d' و d'' که با فرمول‌های :

$$d'(x, y)=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2)$$

$$d''(x, y)=(((d_1(x_1, y_1))^2+(d_2(x_2, y_2))^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌شوند، نیز فاصله‌هایی روی E هستند. همچنین، به‌سادگی می‌توان نشان داد که، این **فاصله‌ها به‌طور یکنواخت** با d هم‌ارز هستند (بخش ۳.۱۴ را ببینید). زیرا ، داریم :

$$d(x, y) \leq d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq 2d(x, y)$$

بنابراین، در بررسی مسائل مربوط به خواص توپولوژیک (یا در بررسی دنباله‌های کوشی و توابع به‌طور یکنواخت پیوسته) انتخاب یکی از فواصل d و d' و d'' هم‌ارز انتخاب بقیه فواصل است. وقتی چیز خلاقی گفته نشود، ما روی E فاصله d را مورد بررسی قرار خواهیم داد. گوی‌های باز (به ترتیب گوی‌های

1 . Product of two metric spaces = Произведение двух метрических пространств

بسته) مربوط به فاصله‌های d و d_1 و d_2 را، به‌جای نوتاسیون‌های یک شکل B (به ترتیب B') که تا به حال مورد استفاده قرار داده‌ایم. به ترتیب، به B ، B_1 ، B_2 (به ترتیب B'، B'_1 ، B'_2) نشان خواهیم داد.

(۱. ۲۰. ۳) برای هر نقطه $a = (a_1, a_2) \in E$ و هر $r > 0$ ، داریم :

$$B(a,r) = B_1(a_1, r) \times B_2(a_2, r), \; B'(a,r) = B'_1(a_1, r) \times B'_2(a_2, r) .$$

روابط فوق فوراً از تعریف d نتیجه می‌شود.

(۲. ۲۰. ۳) اگر A_1 مجموعه بازی در E_1 و A_2 مجموعه بازی در E_2 باشد ، آنگاه $A_1 \times A_2$ مجموعه بازی در $E_1 \times E_2$ خواهد بود.

زیرا ، اگر $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ ، آنگاه ، یک $r_1 > 0$ و یک $r_2 > 0$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $B_1(a_1, r_1) \subset A_1$ ، $B_2(a_2, r_2) \subset A_2$. با انتخاب $r = \min(r_1, r_2)$ ، طبق (۱. ۲۰. ۳) ، به‌دست می‌آوریم $B(a, r) \subset A_1 \times A_2$.

(۳. ۲۰. ۳) برای هر زوج از مجموعه‌های $A_1 \subset E_1$ ، $A_2 \subset E_2$ ، داریم $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$. به‌ویژه، برای اینکه $A_1 \times A_2$ در E بسته باشد، لازم وکافی است که A_1 در E_1 و A_2 در E_2 بسته باشد.[1]

در واقع، اگر $a = (a_1, a_2) \in \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$ ، آنگاه، برای هر $\varepsilon > 0$ ، طبق فرض، یک $x_1 \in A_1$ و یک $x_2 \in A_2$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $d_1(a_1, x_1) < \varepsilon$ و $d_2(a_2, x_2) < \varepsilon$. بنابراین، اگر $x = (x_1, x_2)$ ، آنگاه $d(a, x) < \varepsilon$. از طرف دیگر، اگر $(a_1, a_2) \notin \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$ ، آنگاه یا $a_1 \notin \overline{A}_1$ یا $a_2 \notin \overline{A}_2$. در حالت اول، مجموعه $(E - \overline{A}_1) \times E_2$ طبق (۲. ۲۰. ۳) در E باز ، و شامل a است، و اشتراکی تهی با $A_1 \times A_2$ دارد ، بنابراین $a \notin \overline{A_1 \times A_2}$ ؛ در حالت دوم نیز می‌توان دقیقاً به طریق مشابه عمل کرد.

(۴. ۲۰. ۳) فرض کنیم $z \to f(z) \to (f_1(z), f_2(z))$ نگاشتی از فضای متریک F به فضای $E = E_1 \times E_2$ باشد. برای اینکه f در نقطه z_0 پیوسته باشد، لازم و کافی است که هم f_1 و هم f_2 در نقطه z_0 پیوسته باشند.

فرض کنیم $x_0 = (f_1(z_0), f_2(z_0))$. در این صورت ، طبق (۱. ۲۰. ۳) ، خواهیم داشت :

---

۱. اگر $A_1 = \varnothing$ (به ترتیب $A_2 = \varnothing$) و A_2 (به ترتیب A_1) یک مجموعه غیر بسته دلخواه در E_2 (به ترتیب در E_1) باشد، آنگاه، مجموعه $A_1 \times A_2 = \varnothing$ در $E_1 \times E_2$ بسته خواهد بود، بدون اینکه A_2 (به ترتیب A_1) در E_2 (به ترتیب در E_1) بسته باشد. مؤلف در اصل کتاب به این حالت خاص اشاره نکرده است. مترجم.

$$f^{-1}(\mathrm{B}(x_0, r)) = f^{-1}(\mathrm{B}_1(f_1(z_0), r)) \cap f_2^{-1}(\mathrm{B}_2(z_0), r))$$

و از (۱. ۱۱. ۳) و (۳. ۶. ۳) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۵. ۲۰. ۳) فرض کنیم $f = (f_1, f_2)$ نگاشتی از زیر فضای A از فضای متریک F به $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ باشد، و $a \in \overline{\mathrm{A}}$. برای اینکه f در نقطه a نسبت به مجموعه A دارای حد باشد، لازم و کافی است که هر دو حد $b_1 = \lim_{z \to a, z \in \mathrm{A}} f_1(z)$ ، $b_2 = \lim_{z \to a, z \in \mathrm{A}} f_2(z)$ موجود باشند، و در این صورت، حد f برابر $b = (b_1, b_2)$ است.

مطلب فوق نتیجه فوری (۴. ۲۰. ۳) و تعریف حد است.

در حالت خاص :

(۶. ۲۰. ۳) برای اینکه دنباله نقاط $z_n = (x_n, y_n)$ در $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ همگرا باشد، لازم و کافی است که هر دو حد $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ و $b = \lim_{n \to \infty} y_n$ موجود باشند، و در این‌صورت $\lim_{n\to\infty} z_n = (a,b)$.

توجه به این نکته ضروری است که، اگر (a, b) یک نقطه حدی دنباله $((x_n, y_n))$ باشد، آنگاه طبق (۶. ۲۰. ۳) و تعریف نقطه حدی یک دنباله، a یک نقطه حدی دنباله (x_n) و b یک نقطه حدی دنباله (y_n) خواهد بود. اما، ممکن است که، هم (x_n) و هم (y_n) نقاط حدی داشته باشند، ولی دنباله $((x_n, y_n))$ نقاط حدی نداشته باشد. به‌عنوان مثال، در فضای $\mathbf{R}^2$ ، کافی است فرض کنیم $x_{2n} = \frac{1}{n}$ ، $y_{2n} = n$ ، $x_{2n+1} = n$ ، $y_{2n+1} = \frac{1}{n}$. در این‌صورت $((x_n, y_n))$ دارای نقطه حدی نیست، در حالی‌که، هم x_n و هم y_n دارای نطقه حدی می‌باشند. اما، اگر دنباله (x_n) دارای حد a و b یک نقطه حدی دنباله (y_n) باشد، آنگاه، از (۶. ۲۰. ۳) نتیجه می‌شود که (a, b) یک نقطه حدی دنباله (x_n, y_n) است.

(۷. ۲۰. ۳) برای اینکه دنباله نقاط $z_n = (x_n, y_n)$ در $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ یک دنباله کوشی باشد، لازم و کافی است که هر یک از دنباله‌های x_n و y_n یک دنباله کوشی باشد.

مطلب فوق نتیجه فوری تعریف فاصله روی $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ و تعریف یک دنباله کوشی است.

(۸. ۲۰. ۳) فرض کنیم $z \to f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ نگاشتی از فضای متریک F به $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ باشد. برای اینکه f به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، لازم و کافی است که، هم f_1 و هم f_2 به‌طور یکنواخت پیوسته باشند.

مطلب فوق نتیجه مستقیم تعریف‌ها می‌باشد.

(۳.۲۰.۹) اگر E یک فضای متریک و d فاصله روی E باشد، آنگاه نگاشت d از $E \times E$ به $\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

زیرا، طبق نامساوی مثلثی، داریم: $|d(x, y)-d(x', y')| \leq d(x, x')+d(y, y')$.

(۳.۲۰.۱۰) پروژکشن‌های (افکنش‌های ـ تصاویر) pr_1 و pr_2 روی $E=E_1 \times E_2$ به‌طور یکنواخت پیوسته هستند.

با به‌کارگیری (۳.۲۰.۸) برای نگاشت همانی روی E نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۳.۲۰.۱۱) برای هر $a_2 \in E_2$ (به ترتیب $a_1 \in E_1$)، نگاشت $x_1 \to (x_1, a_2)$ (به ترتیب $x_2 \to (a_1, x_2)$) یک ایزومتری از E_1 (به ترتیب از E_2) به زیر فضای بسته $E_1 \times \{a_2\}$ (به ترتیب $\{a_1\} \times E_2$) از فضای $E_1 \times E_2$ است.

مطلب فوق نتیجه‌ای واضح از تعریف فاصله روی $E_1 \times E_2$، و (۳.۲۰.۳) می‌باشد.

(۳.۲۰.۱۲) برای هر مجموعه باز (به ترتیب بسته) A از فضای $E_1 \times E_2$، و هر نقطه $a_1 \in E_1$، مقطع عرضی $A(a_1) = pr_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ در فضای E_2 باز (به ترتیب بسته) است.

طبق (۳.۲۰.۱۱)، کافی است ثابت کنیم که، مجموعه $A \cap (\{a_1\} \times E_2)$ در $\{a_1\} \times E_2$ باز (به ترتیب بسته) است، که این مطلب نیز از (۳.۱۰.۱) و (۳.۱۰.۵) نتیجه می‌شود.

(۳.۲۰.۱۳) برای هر مجموعه باز A در $E_1 \times E_2$، مجموعه $pr_1(A)$ (به ترتیب $pr_2(A)$) در E_1 (به ترتیب در E_2) باز است.

در واقع، می‌توان نوشت $pr_2(A) = \bigcup_{x_1 \in E_1} A(x_1)$، و نتیجه مطلوب از (۳.۲۰.۱۲) و (۳.۵.۲) نتیجه می‌شود.

توجه به این نکته ضروری است که، ممکن است A در $E_1 \times E_2$ بسته باشد، ولی $pr_1(A)$ در E_1 بسته نباشد. به‌عنوان مثال، در فضای $\mathbf{R}^2$، هذلولی به معادله $xy=1$ یک مجموعه بسته است، اما، افکنش‌های آن هر دو برابر مکمل $\{0\}$ در $\mathbf{R}$ هستند، که بسته نیستند.

(۳.۲۰.۱۴) فرض کنیم f نگاشتی از فضای $E=E_1 \times E_2$ به فضای متریک F باشد. اگر f در نقطه‌ای مانند (a_1, a_2) پیوسته (به ترتیب به‌طور یکنواخت پیوسته) باشد، آنگاه نگاشت $x_1 \to f(x_1, a_2)$ که به $f(., a_2)$ نشان داده می‌شود، در نقطه a_1 پیوسته (به ترتیب به‌طور یکنواخت پیوسته) است.

نگاشت فوق را می‌توان به‌صورت $x_1 \to (x_1, a_2) \to f(x_1, a_2)$ نوشت، و از (۱۱. ۲۰. ۳) و از (۵. ۱۱. ۳) و (۹. ۱۱. ۳) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

عکس (۱۴. ۲۰. ۳) در حالت کلی برقرار نیست. یک مثال نقض کلاسیک در این رابطه، تابع f روی $\mathbf{R}^2$ است، که به‌صورت $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$، اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، و $f(0, 0) = 0$ تعریف شده است. تابع f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست، زیرا، برای $x \neq 0$ ، $f(x, x) = \frac{1}{2}$.

(۱۵. ۲۰. ۳) فرض کنیم E_1 ، E_2 ، F_1 ، F_2 چهار فضای متریک، و f_1 (به ترتیب f_2) نگاشتی از E_1 به F_1 (به ترتیب از E_2 به F_2) باشد. برای اینکه نگاشت $f: (x_1, x_2) \to (f_1(x_1), f_2(x_2))$ از $E_1 \times E_2$ به $F_1 \times F_2$ در نقطه‌ای مانند (a_1, a_2) پیوسته (به ترتیب به‌طور یکنواخت پیوسته) باشد، لازم و کافی است که، f_1 در نقطه a_1 و f_2 در نقطه a_2 پیوسته (به ترتیب f_1 در a_1 و f_2 در a_2 به‌طور یکنواخت پیوسته) باشند.

نگاشت $(x_1, x_2) \to f_1(x_1)$ را می‌توان به‌صورت $f_1 \circ \mathrm{pr}_1$. نوشت. بنابراین، کفایت شرط قضیه از (۴. ۲۰. ۳) ، (۸. ۲۰. ۳) ، و (۱۰. ۲۰. ۳) نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، نگاشت f_1 را می‌توان به‌صورت $x_1 \to \mathrm{pr}_1(f(x_1, a_2))$ نوشت، و لزوم شرط قضیه از (۱۴. ۲۰. ۳) و (۱۰. ۲۰. ۳) نتیجه می‌شود.

(۱۶. ۲۰. ۳) فرض کنیم E_1 ، E_2 دو فضای متریک غیرتهی باشند. برای اینکه فضای $E = E_1 \times E_2$ به شکل یکی از فضاهای :

(۱) دیسکرت (گسسته) ؛

(۲) کراندار ؛

(۳) جدایی‌پذیر ؛

(۴) تام ؛

(۵) فشرده ؛

(۶) پیش‌فشرده (کلاً (کاملاً) کراندار) ؛

(۷) به‌طور موضعی فشرده ؛

(۸) همبند ؛

(۹) به‌طور موضعی همبند

باشد، لازم و کافی است که هم E_1 و هم E_2 به‌همان شکل باشند.

قسمت لزوم در اثبات‌ها از یک مدل کلی برای خواص (۱) تا (۷) ناشی می‌شود: از (۱۱. ۲۰. ۳) نتیجه می‌شود که، E_1 و E_2 با زیرفضاهای بسته‌ای از $E_1 \times E_2$ ایزومتر (طول پای) هستند، و بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که، خواص (۱) تا (۷) به‌وسیله زیر فضاهای بسته « به ارث می‌رسند» (برای (۱) و (۲) این مطلب

واضح است، و برای خواص (۳) تا (۷)، در (۹. ۱۰. ۳)، (۵. ۱۴. ۳)، (۳. ۱۷. ۳)، (۴. ۱۷. ۳)، (۴. ۱۸. ۳) ثابت شده‌اند). برای خاصیت ۸، لزوم از قضیه (۷. ۱۹. ۳) با استفاده از افکنش‌های pr_1 و pr_2 نتیجه می‌شود. به‌طریق مشابه، اگر E به‌طور موضعی همبند باشد، آنگاه برای هر $(a_1 , a_2) \in E$ و هر همسایگی V_1 از نقطه a_1 در E_1، مجموعه $V_1 \times E_2$ یک همسایگی نقطه (a_1 , a_2) است، و بنابراین، شامل یک همسایگی همبند W از (a_1 , a_2) است. اما، در این‌صورت، طبق (۷. ۱۹. ۳) و (۱۳. ۲۰. ۳)، $pr_1 W$ یک همسایگی همبند a_1 است که در V_1 واقع شده است.

کفایت شرط قضیه برای (۱) و (۲) به وضوح نتیجه تعریف فاصله روی $E_1 \times E_2$ است. برای (۳)، اگر D_1 و D_2 مجموعه‌هایی حداکثر شمارش‌پذیر باشند، که به ترتیب در E_1 و E_2 چگال هستند، آنگاه، $D_1 \times D_2$ طبق (۳. ۹. ۱) مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر خواهد بود، و طبق (۳. ۲۰. ۳) در E چگال است. برای (۴)، اگر (z_n) دنباله‌ای کوشی در E باشد، آنگاه $(pr_1 z_n)$ و $(pr_2 z_n)$ طبق (۷. ۲۰. ۳) به ترتیب دنباله‌هایی کوشی در E_1 و E_2 خواهند بود، بنابراین، به ترتیب، همگرا به a_1، a_2، و در نتیجه، (z_n) طبق (۶. ۲۰. ۳) همگرا به (a_1 , a_2) خواهد بود. برای (۶)، اگر (A_i) (به ترتیب (B_j)) پوششی متناهی برای E_1 (به ترتیب E_2) به‌وسیله مجموعه‌هایی با قطر کمتر از ε باشد، آنگاه $(A_i \times B_j)$ پوششی متناهی برای $E_1 \times E_2$ به‌وسیله مجموعه‌های با قطر کمتر از ε خواهد بود، و طبق (۱. ۱۶. ۳)، کفایت شرط برای (۴) و (۶)، آن را برای (۵) نیز ثابت می‌کند. اثبات برای (۵)، با به خاطر آوردن تعریف همسایگی در $E_1 \times E_2$، اثباتی برای (۷) نیز به بار خواهد آورد. برای (۸)، فرض کنیم (a_1 , a_2) و (b_1 , b_2) دو نقطه دلخواه از فضای E باشند. طبق (۱۱. ۲۰. ۳) و فرض، مجموعه‌های $\{a_1\} \times E_2$ و $E_1 \times \{b_2\}$ همبند هستند و دارای نقطه مشترک (a_1 , b_2) می‌باشند. بنابراین، اجتماع آنها، طبق (۳. ۱۹. ۳)، همبند است، و شامل هر دو نقطه (a_1 , a_2) و (b_1 , b_2) می‌باشد. در نتیجه، مؤلفه همبند (a_1 , a_2) در E برابر با خود E است. با دلیلی مشابه، و با به یاد آوردن تعریف همسایگی‌ها در E، کفایت شرط قضیه برای (۹) نیز ثابت می‌شود.

(۱۷. ۲۰. ۳) برای اینکه زیر مجموعه A از $E_1 \times E_2$ به‌طور نسبی فشرده باشد، لازم و کافی است که $pr_1 A$ و $pr_2 A$ به ترتیب در E_1 و E_2 به‌طور نسبی فشرده باشند.

لزوم شرط قضیه از (۹. ۱۷. ۳) با بکارگیری آن نسبت به pr_1 و pr_2 نتیجه می‌شود. کفایت شرط قضیه از (۱۶. ۲۰. ۳)، (۳. ۲۰. ۳) و (۴. ۱۷. ۳) نتیجه می‌شود.

همه تعریف‌ها و قضیه‌هایی که در این بخش بیان شده‌اند، فوراً می‌توان برای حاصلضرب تعدادی متناهی از فضاهای متریک تعمیم داد.

مسائل

۱. فرض کنیم E و F دو فضای متریک، A زیر مجموعه‌ای از E ، و B زیر مجموعه‌ای از F باشد، نشان دهید که $\mathrm{Fr}(A\times B)=(\mathrm{Fr}(A)\times \overline{B})\cup(\overline{A}\times \mathrm{Fr}(B))$.

۲. فرض کنیم E ، F دو فضای متریک همبند، $A\neq E$ زیر مجموعه‌ای از E ، و $B\neq F$ زیر مجموعه‌ای از F باشد. نشان دهید که در $E\times F$ مکمل $A\times B$ همبند است.

۳. (a) فرض کنیم E و F دو فضای متریک، و A (به ترتیب B) یک زیر مجموعه فشرده E (به ترتیب F) باشد. اگر W یک همسایگی دلخواه مجموعه $A\times B$ در $E\times F$ باشد، نشان دهید که، همسایگی U از A در E و همسایگی V از B در F موجود است، به‌طوری که $U\times V\subset W$ (ابتدا حالتی را مورد بررسی قرار دهید که B فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد).
(b) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده، F یک فضای متریک، و A یک زیر مجموعه بسته در $E\times F$ باشد. نشان دهید که، افکنش (تصویر) مجموعه A روی F یک مجموعه بسته است (با استفاده از (a) ، ثابت کنید که، مکمل $\mathrm{pr}_2 A$ باز است).
(c) به‌عکس، فرض کنیم E یک فضای متریک باشد، به‌طوری که، برای هر فضای متریک F و هر زیر مجموعه بسته A از $E\times F$ ، افکنش (تصویر) A روی F در F بسته باشد. نشان دهید که E فشرده است. (در غیر این صورت، دنباله‌ای مانند (x_n) در E بدون نقطه حدی موجود خواهد بود. برای F زیر فضایی از $\mathbf{R}$ را در نظر بگیرید که از 0 و نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ تشکیل شده باشد ($n\geq 1$ عددی طبیعی است) و در $E\times F$ مجموعه نقاط $(x_n , \frac{1}{n})$ را مورد بررسی قرار دهید.)

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده ، F یک فضای متریک ، A زیر مجموعه‌ای بسته از $E\times F$ ، و B افکنش (بسته) از مجموعه A به F باشد. فرض کنیم $y_0\in B$ و C برش عرضی $A^{-1}(y_0)=\{x\in E\,|\,(x,y_0)\in A\}$ باشد. نشان دهید که، برای هر همسایگی V از C در E ، همسایگی W از y_0 در F موجود است، به‌طوری که از رابطه $y\in W$ نتیجه می‌شود $A^{-1}(y)\subset V$ (پیوستگی«ریشه‌ها » از یک معادله وابسته به پارامتر) . (از مسئله (a) ۳ استفاده کنید.)

۵. (a) فرض کنیم f نگاشتی از فضای متریک E به فضای متریک F ، و G گراف نگاشت f در فضای $E\times F$ باشد. نشان دهید که، اگر f پیوسته باشد، آنگاه G در $E\times F$ بسته، و تحدید pr_1 به G یک هومیومورفیسم از G به روی E است.
(b) به‌عکس، اگر F فشرده و G در $E\times F$ بسته باشد، آنگاه f پیوسته خواهد بود. (از مسئله (b) ۳ استفاده کنید).
(c) فرض کنیم F یک فضای متریک باشد، به‌طوری که برای هر فضای متریک E ، هر نگاشت از E به F که گراف آن در $E\times F$ بسته است، پیوسته باشد. نشان دهید که، F فشرده است (از ساختمان مسئله (c) ۳ استفاده کنید).

۶. فرض کنیم E ، F ، G سه فضای متریک، A زیر مجموعه‌ای از $E\times F$ ، B زیر مجموعه‌ای از $F\times G$ و

$$C=B\circ A=\{(x,z)\in E\times G\mid \exists y\in F,\ s.t\,(x,y)\in A,(y,z)\in B\}$$

باشد.[1] فرض کنیم A و B هر دو بسته وافکنش مجموعه A روی F به‌طوری نسبی فشرده باشد. نشان دهید که C در $E\times G$ بسته است (از مسئله (b) ۳ استفاده کنید).

۷. فرض کنیم (E_n) $(n\geq 1)$ یک دنباله نامتناهی از فضاهای غیر تهی متریک باشد، و فرض کنیم برای هر n ، فاصله d_n روی E_n چنان باشد که، قطر E_n کوچک‌تر یا مساوی یک باشد (بخش ۳.۱۴ ، مسئله (b) ۲ را ببینید). فرض کنیم E حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}E_n$ ، یعنی، مجموعه همه دنباله‌های $x=(x_n)$ باشد، به‌طوری که برای هر عدد طبیعی n ، داشته باشیم $x_n\in E_n$.

(a) نشان دهید که روی E تابع $d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}d_n(x_n,y_n)/2^n$ یک فاصله است.

---

۱. از s.t به‌عنوان نمادی اختصاری برای واژه انگلیسی Such that (به‌طوری‌که) استفاده شده است. مترجم.

(b) برای هر $x=(x_n)\in \mathrm{E}$ ، هر عدد صحیح $m \geq 1$، هر عدد $r>0$ ، فرض کنیم $\mathrm{V}_m\,(x,r)$ مجموعه همه نقاط $y=(y_n)\in \mathrm{E}$ باشد، به‌طوری که برای $k \leq m$ ، $d_k(x_k\,,y_k) < r$. نشان دهید که، مجموعه‌های $\mathrm{V}_m\,(x,r)$ (برای همه m ها و r ها) تشکیل سیستمی اساسی از همسایگی‌های x در E می‌دهند.

(c) فرض کنیم $(x^{(m)})$ یک دنباله از نقاط $x^{(m)}=(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ از فضای E باشد. نشان دهید که، برای اینکه $(x^{(m)})$ به $a=(a_n)$ در E همگرا باشد (به ترتیب، یک دنباله کوشی در E باشد)، لازم و کافی است که، برای هر n ، دنباله $(x_n^{(m)})_{m\geq 1}$ در E_n به a_n همگرا باشد (به ترتیب، یک دنباله کوشی در E_n باشد). برای اینکه E یک فضای تام باشد، لازم و کافی است که هر یک از E_nها تام باشد.

(d) برای هر n، فرض کنیم A_n زیر مجموعه‌ای از E_n باشد. نشان دهید که، بستار مجموعه $\mathrm{A}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n$ برابر $\prod_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{A}}_n$ است.

(e) برای اینکه E پیش فشرده (به ترتیب فشرده) باشد، لازم و کافی است که هر یک از E_nها پیش فشرده (به ترتیب فشرده) باشد.

(f) برای اینکه E به‌طور موضعی فشرده باشد، لازم و کافی است که هر یک از E_nها به‌طور موضعی فشرده باشد و همه E_nها، به استثنای حداکثر تعدادی متناهی از آنها، فشرده باشند.

(g) برای اینکه E همبند باشد، لازم و کافی است که هر یک از E_nها همبند باشد.

(h) برای اینکه E به‌طور موضعی همبند باشد، لازم و کافی است که، هر یک از E_nها به‌طور موضعی همبند باشد و همه آنها به استثنای حداکثر تعدادی متناهی از آنها همبند باشند.

فصل IV

خواص بیشتری[1] از خط حقیقی

بسیاری از خواص خط حقیقی که در فصل ۳ بیان شده است، در رابطه با مفاهیم گوناگون توپولوژیکی طرح شده در آن فصل است. خواص گردآوری شده در این فصل، که اغلب مقدماتی و کلاسیک هستند، چندان ارتباط مستقیمی ندارند، و در واقع، خواصی هستند که به خط حقیقی در میان فضاهای کلیتر وضعیت یکتا و بی‌مانندی می‌دهد.

توابع لگاریتمی و نمائی به‌طریقی معرفی شده‌اند که اندکی غیر رسمی است. شروع با لگاریتم به‌جای تابع نمائی، از نظر تکنیکی دارای این فایده است، که لازم نیست، ابتدا $a^{m/n}$ ($m , n > 0$، اعدادی طبیعی هستند) تعریف کرد، تا جای پائی جداگانه برای حرکت به‌سوی تعریف a^x وقتی x عددی دلخواه است، ایجاد شود.

قضیه تیتز ـ اوریسون (بخش ۴ . ۵) در حال حاضر هم در آنالیز تابعی و هم در توپولوژی جبری جای بسیار مهمی اشغال کرده است. این قضیه می‌تواند به‌عنوان نخستین گام در آموزش مسائل کلی **گسترش (توسیع)** یک نگاشت پیوسته از یک زیر مجموعه بسته A از فضای E به فضای F ، به نگاشتی پیوسته از همه فضای E به فضای F ، مورد مطالعه قرار گیرد. این مسئله کلی به‌طور طبیعی منجر به بررسی مسائلی به مراتب مهم‌تر و جدی‌تر در توپولوژی جبری مدرن می‌شود.[2]

۱. پیوستگی عملگرهای جبری

(۴ .۱ .۱) نگاشت $(x, y) \to x + y$ از $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

مطلب فوق نتیجه فوری نامساوی :

---

۱ . از بین معانی واژه انگلیسی "Additional" (اضافی، تکمیلی، بیشتر، دیگر، و ...) و واژه روسی«Дополнительный » (اضافی، متمم، علاوه، تکمیلی و ...) با توجه به محتوای این فصل، مترجم ترجیح داد از واژه «بیشتر» استفاده نماید.

۲ . در این رابطه، در برگردان روسی کتاب ژان دیودونه، مطالعه کتاب استینرود با شماره [22] به خواننده توصیه شده است. مترجم.

$$|(x' + y') - (x + y)| \leq |x' - x| + |y' - y|$$

و تعریف‌ها می‌باشد.

(۴. ۱. ۲) نگاشت $(x, y) \to xy$ از $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ پیوسته است، برای هر $a \in \mathbf{R}$ نگاشت $x \to ax$ از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

پیوستگی xy در نقطه $(x_0\ ,\ y_0)$ از تساوی :

$$xy - x_0 y_0 = x_0 (y - y_0) + (x - x_0) y_0 + (x - x_0)(y - y_0)$$

نتیجه می‌شود. برای $0 < \varepsilon$ دلخواه داده شده، $0 < \delta < 1$ را چنان انتخاب می‌کنیم که : $\delta(|x_0| + |y_0| + 1) < \varepsilon$. در این‌صورت، از روابط $|x - x_0| < \delta$ ، $|y - y_0| < \delta$ نتیجه می‌شود $|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$. پیوستگی یکنواخت نگاشت $x \to ax$ نتیجه مستقیم رابطه $|ax' - ax| = |a|\,|x' - x|$ می‌باشد.

(۴. ۱. ۳) هر نگاشت پیوسته f از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ ، که برای هر x ، $y \in \mathbf{R}$ در خاصیت $f(x + y) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند، به‌صورت $x \to cx$ ، برای یک $c \in \mathbf{R}$ ، می‌باشد.

در واقع، برای هر عدد صحیح $n > 0$ ، با استفاده از استقراء ریاضی روی n ، به‌دست می‌آوریم $f(nx) = nf(x)$. از طرف دیگر، $f(0 + x) = f(0) + f(x)$. بنابراین :

$$f(0) = 0$$

و $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ ، و در نتیجه $f(-x) = -f(x)$.

از روابط فوق نتیجه می‌شود که، برای هر عدد صحیح $n > 0$ ، $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n} f(x)$ ، بنابراین، برای هر زوج p و q از اعداد صحیح که $q > 0$ ، $f(\frac{p}{q} x) = \frac{p}{q} f(x)$، به عبارت دیگر، برای هر عدد گویای r ، $f(rx) = rf(x)$. اما، هر عدد حقیقی t حد دنباله‌ای مانند (r_n) از اعداد گویا است (طبق (۲. ۲. ۱۶) و (۳. ۱۳. ۱۳)). بنابراین، طبق فرضی که در رابطه با f کرده‌ایم و (۴. ۱. ۲) خواهیم داشت :

$$f(tx) = f(\lim_{n \to \infty} r_n x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n x) = \lim_{n \to \infty} r_n f(x) = f(x) . \lim_{n \to \infty} r_n = t f(x)$$

با قرار دادن $c = f(1)$ ، برای هر $x \in \mathbf{R}$ خواهیم داشت $f(x) = cx$.

(۴. ۱. ۴) نگاشت $x \to \frac{1}{x}$ در هر نقطه $x_0 \neq 0$ از $\mathbf{R}$ پیوسته است.

در واقع، اگر $0 < \varepsilon$ دلخواه داده شده باشد، $0 < \delta$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\delta < \min(\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2})$.

در این صورت، از رابطه $|x - x_0| < \delta$ ، نخست نتیجه می‌شود که $|x| > |x_0| - \delta > \frac{|x_0|}{2}$ و سپس :

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{|x||x_0|} \leq \frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2} < \varepsilon$$

(۴.۱.۵) هر تابع گویای $(x_1, \cdots, x_n) \to P(x_1, \cdots, x_n) / Q(x_1, \cdots, x_n)$ که در آن P و Q کثیرالجمله‌هایی با ضرائب حقیقی هستند، در هر نقطه $(a_1, \cdots, a_n)$ از R^n که $Q(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ ، پیوسته است.

پیوستگی یک تک جمله‌ای در $\mathbf{R}^n$ با روش استقراء ریاضی روی درجه آن تک‌جمله‌ای از (۴.۱.۲) ثابت می‌شود. سپس، پیوستگی P و Q با استقراء ریاضی روی تعداد جملات آنها از (۴.۱.۱) اثبات می‌شود، و بالاخره، از (۴.۱.۴) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۴.۱.۶) نگاشت‌های $(x, y) \to \sup(x, y)$ و $(x, y) \to \inf(x, y)$ روی $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته هستند.

با توجه به اینکه :

$$\sup(x, y) = (x+y+|x-y|)/2 \quad \text{و} \quad \inf(x, y) = (x+y-|x-y|)/2$$

نتیجه مطلوب از (۴.۱.۱) و (۳.۲۰.۹) حاصل می‌شود.

(۴.۱.۷) همه فاصله‌های باز در $\mathbf{R}$ با $\mathbf{R}$ هومیومورف (همسان‌ریخت) هستند.

از (۴.۱.۱) و (۴.۱.۲) نتیجه می‌شود که، هر تابع خطی $x \to ax+b$ ، با $a \neq 0$ هومیومورفیسمی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ است. زیرا، نگاشت معکوس آن $x \to a^{-1}x - a^{-1}b$ از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ نیز پیوسته است.

هر دو فاصله باز $]\alpha, \beta[$ و $]\gamma, \delta[$ تحت نگاشتی مانند $x \to ax+b$ تصاویر یکدیگرند، بنابراین، هومیومورف هستند. اکنون، نگاشت $x \to x/(1+|x|)$ از $\mathbf{R}$ بر روی $]-1, +1[$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. معکوس این نگاشت، نگاشت $x \to x/(1-|x|)$ می‌باشد، و هر دو نگاشت فوق پیوسته هستند، زیرا، نگاشت $x \to |x|$ پیوسته است. این مطلب ثابت می‌کند $\mathbf{R}$ با هر فاصله باز کراندار هومیومورف است. بالاخره، تحت هومیومورفیسم قبلی از $\mathbf{R}$ به $]-1, +1[$ هر فاصله باز نامحدود $]a, +\infty[$ یا $]-\infty, a[$ به فاصله باز کرانداری در $]-1, +1[$ نگاشته می‌شود. بنابراین، این فاصله‌ها نیز با $\mathbf{R}$ هومیومورف هستند.

(۴.۱.۸) تابع $(x, y) \to x+y$ در هر نقطه (a, b) از فضای $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ ، نسبت به مجموعه $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ، به استثنای نقاط $(+\infty, -\infty)$ و $(-\infty, +\infty)$ ، دارای حد است و این حد برابر $+\infty$ (به ترتیب $-\infty$) است، اگر لااقل یکی از مختصات a ، b برابر $+\infty$ (به ترتیب $-\infty$) باشد.

به‌عنوان مثال، ثابت می‌کنیم، اگر $a \neq -\infty$ باشد، $x+y$ در نقطه $(a,+\infty)$ دارای حدی برابر $+\infty$ است. برای $c \in \mathbf{R}$ داده شده، از روابط $x > b$ ، $y > c-b$ نتیجه می‌شود $x+y > c$ ، و اگر b متناهی و کوچک‌تر از a باشد، فاصله‌های $]b,+\infty]$ و $]c-b,+\infty]$ به ترتیب همسایگی‌هائی از a و $+\infty$ هستند. بنابراین، حکم در این حالت ثابت می‌شود. در بقیه حالات نیز می‌توان به‌طریق مشابه بحث نمود.

(۴. ۱. ۹) تابع xy $\to (x,y)$ در هر نقطه (a,b) از فضای $\overline{\mathbf{R}}\times\overline{\mathbf{R}}$ به استثنای نقاط $(0,+\infty)$، $(-\infty,0)$ ، $(0,-\infty)$ ، $(+\infty,0)$ و $(0,-\infty)$، نسبت به مجموعه $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ دارای حد است ؛ و این حد برابر $+\infty$ (به ترتیب $-\infty$) است، اگر لااقل یکی از مختصات a و b نامتناهی، و علامت‌های آنها مشابه (به ترتیب مختلف) باشد.

به‌عنوان مثال، اگر $a > 0$ باشد، نشان می‌دهیم که xy در نقطه $(a,+\infty)$ دارای حدی برابر $+\infty$ است. برای $c \in \mathbf{R}$ داده شده و $b > 0$، از نامساوی‌های $x > b$ ، $y > \frac{c}{b}$ ، نتیجه می‌شود $xy > c$ و اگر b متناهی و کوچک‌تر از a باشد، فاصله‌های $]b,+\infty]$ و $]\frac{c}{b},+\infty]$ همسایگی‌هایی از نقاط a و $+\infty$ هستند. اثبات در بقیه حالات نیز مشابه است.

ما اثبات خواص زیر را حذف کرده‌ایم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\quad \lim_{x\to 0,\,x>0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0,\,x<0}\frac{1}{x}=-\infty \qquad (۴.۱.۱۰)$$

(۴. ۱. ۱۱) نگاشت‌های $(x,y)\to\sup(x,y)$ ، $(x,y)\to\inf(x,y)$ روی $\overline{\mathbf{R}}\times\overline{\mathbf{R}}$ پیوسته هستند.

۲. توابع یکنوا

فرض کنیم E یک زیر مجموعه غیر تهی از خط حقیقی گسترش یافته $\overline{\mathbf{R}}$ باشد. نگاشت f از E به $\overline{\mathbf{R}}$ را صعودی (به ترتیب اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی) می‌نامند، هرگاه، از رابطه $x < y$ (روی E) نتیجه شود $f(x) \le f(y)$ (به ترتیب $f(x) < f(y)$ ، $f(x) \ge f(y)$ ، $f(x) > f(y)$). تابعی که صعودی یا نزولی (به ترتیب اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد، تابع یکنوا (به ترتیب به‌طور اکید (اکیداً) یکنوا) می‌نامند. یک نگاشت اکیداً یکنوا، یک به یک است. اگر f صعودی (به ترتیب اکیداً صعودی) باشد، $-f$ نزولی (به ترتیب اکیداً نزولی) خواهد بود. اگر f ، g صعودی باشند، و $f+g$ معین باشد، $f+g$ صعودی خواهد بود. اگر علاوه بر این f و g هر دو متناهی و یکی از آنها اکیداً صعودی باشد، آنگاه $f+g$ اکیداً صعودی خواهد بود.

(۱. ۲. ۴) فرض کنیم E یک زیرمجموعه غیر تهی از $\overline{\mathbf{R}}$ باشد، و $a = \sup \mathrm{E}$. اگر $a \notin \mathrm{E}$ ، آنگاه برای هر نگاشت یکنوای f از E به $\overline{\mathbf{R}}$ ، $\lim\limits_{x \to a, x \in \mathrm{E}} f(x)$ موجود بوده، برابر با $\sup\limits_{x \in \mathrm{E}} f(x)$ است اگر f صعودی باشد، و مساوی $\inf\limits_{x \in \mathrm{E}} f(x)$ است هرگاه f نزولی باشد (قضیه حد توابع یکنوا).

فرض کنیم، به‌عنوان مثال، f صعودی باشد، و $c = \sup\limits_{x \in \mathrm{E}} f(x)$. اگر $c = -\infty$ ، آنگاه f روی E ثابت (و برابر $-\infty$) خواهد بود، و نتیجه بدیهی است. اگر $c > -\infty$ باشد، آنگاه برای هر $b < c$ ، یک $x \in \mathrm{E}$ موجود خواهد بود ، به طوری که $b < f(x) \le c$. بنابراین، برای $y \in \mathrm{E}$ و $x \le y < a$ ، طبق فرض، خواهیم داشت $b < f(x) \le f(y) \le c$ و از این رابطه نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۲ . ۲. ۴) فرض کنیم I فاصله‌ای در $\overline{\mathbf{R}}$ باشد. هر نگاشت پیوسته یک به یک از I به $\overline{\mathbf{R}}$ اکیداً یکنوا است. هر نگاشت پیوسته اکیداً یکنوا از I به $\overline{\mathbf{R}}$ یک هومیومورفیسم از I به روی فاصله $f(\mathrm{I})$ است.

۱. فرض کنیم f پیوسته و یک به یک باشد، و فرض کنیم a و b دو نقطه از I باشند، به‌طوری که $a < b$ ، و مثلاً $f(a) < f(b)$. در این‌صورت ، برای $a < c < b$ ، باید داشته باشیم $f(a) < f(c) < f(b)$. زیرا ، طبق فرض، باید داشته باشیم $f(c) \ne f(b)$ و $f(c) \ne f(a)$ ، و اگر مثلاً داشته باشیم $f(c) > f(b)$ ، در این‌صورت، طبق قضیه بولتزانو (۸ .۱۹ .۳) باید یک $a < x < c$ موجود باشد، به‌طوری که $f(x) = f(b)$، که با فرض ما در تناقض است. به‌طریق مشابه، رابطه $f(c) < f(a)$ نیز غیر ممکن خواهد بود. حال، اگر $c > b$ باشد، آنگاه باید داشته باشیم $f(b) < f(c)$، زیرا، به‌همان دلیلی که اشاره شد، $f(b)$ باید در فاصله‌ای با نقاط انتهایی $f(a)$ و $f(c)$ قرار گیرد. به‌طریق مشابه، اگر $c < a$، آنگاه $f(c) < f(a)$. بالاخره، اگر x و y دو نقطه دلخواه I باشند، به‌طوری که $x < y$، آنگاه با تکرار دلیل قبلی روی a ، x ، y به‌جای a ، b ، c خواهیم داشت $f(x) < f(y)$، و اولین ادعای قضیه ثابت می‌شود.

۲. اگر f پیوسته و به‌طور اکید یکنوا باشد، آنگاه f یک تناظر دوسوئی بین I و $f(\mathrm{I})$ بوده ، و $f(\mathrm{I})$ همبند خواهد بود، و طبق (۱. ۱۹. ۳) ، (۷ . ۱۹ . ۳) باید یک فاصله باشد. برای هر نقطه $x \in \mathrm{I}$، تصویر هر فاصله J ، که شامل x است و در I واقع شده ، فاصله‌ای شامل $f(x)$ و مشمول $f(\mathrm{I})$ است و $f(x)$ تنها وقتی می‌تواند یک نقطه انتهایی $f(\mathrm{J})$ باشد که x یک نقطه انتهایی J باشد. مطلب فوق ثابت می‌کند که، تصویر هر همسایگی x در I تحت نگاشت f یک همسایگی از $f(x)$ در $f(\mathrm{I})$ خواهد بود. بنابراین، f یک هومیومورفیسم است ((۱. ۱۱. ۳) را ببینید).

مسائل

۱. فرض کنیم f نگاشتی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد، به‌طوری که $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(a) نشان دهید که، اگر روی یک فاصله $]a , b[$، f از طرف بالا کراندار باشد، آنگاه f روی $]a , b[$ از طرف پایین نیز کراندار خواهد بود. (اگر c نقطه‌ای ثابت در فاصله $]a , b[$ باشد، زوج‌های x ، y را در این فاصله مورد بررسی قرار دهید که $x<c<y$، و $(y-c)/(c-x)$ گویا است) .

(b) تحت فرضی مشابه، f روی هر فاصله فشرده کراندار است، و روی R پیوسته است، و بنابراین، به شکل $f(x) = cx$ می‌باشد (با همان روش).

(می‌توان با استفاده از اصل انتخاب ثابت نمود که، جواب‌هایی از معادله $f(x+y) = f(x) + f(y)$ وجود دارند، که روی هر فاصله غیر کراندار هستند).

۲. فرض کنیم b یک عدد صحیح بزرگ‌تر از یک باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر دنباله نامتناهی (c_n) از اعداد صحیح به‌طوری که $0 \le c_n \le b-1$ ، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n / b^n$ همگرا به یک عدد $x \in [\text{o}, 1]$ است. به عکس، برای هر $x \in [\text{o}, 1]$ دنباله‌ای مانند (c_n) موجود است، به‌طوری که، برای هر عدد طبیعی n، $0 \le c_n \le b-1$ و $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n / b^n$، این دنباله یکتا است، اگر x به‌صورت $\frac{k}{b^m}$ نباشد (k و m اعداد طبیعی[1] هستند) ، در غیر این‌صورت، دقیقاً دو دنباله (c_n) وجود دارند، که دارای خواص فوق هستند. (از این حقیقت استفاده کنید که، برای هر عدد صحیح $m \ge \text{o}$ ، و هر $x \in [0 , 1]$، عدد صحیح یکتایی مانند k موجود است، به‌طوری که $k/b^m \le x < (k+۱)/b^m$).

(b) با استفاده از حالت $b = 2$ قسمت (a) ، و مسئله ۵ بخش ۹ . ۱، نشان دهید که، مجموعه $[0 , 1]$ (و بنابراین، طبق (۴ .۱ .۷) ، خود R) هم توان با مجموعه $\mathfrak{P}(\mathrm{N})$ است.

(c) فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای از $[0 , 1]$ باشد، که شامل همه اعداد به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$ با $c_n = 0$ یا $c_n = 2$ است (**مجموعه سه سهٔی کانتور**). نشان دهید که، K فشرده است، و مکمل آن نسبت به فاصله $[0 , 1]$ اجتماع شمارش‌پذیری از فواصل بازی است که نقطه مشترکی با یکدیگر نداوند ((۶ . ۱۹ . ۳) را ببینید) . این فواصل را توصیف نموده، نشان دهید که، حاصل‌جمع (نامتناهی) طول‌های آنها برابر با 1 می‌باشد.

(d) برای هر $x \in \mathrm{K}$ ، با $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n / 3^n$ ، فرض کنیم $f(x)$ عدد حقیقی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ باشد، که در آن $b_n = c_{n/2}$ (نشان دهید که، وقتی x را بتوان به دو صورت متفاوت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n / 3^n$ نمایش داد، آنگاه، دو عدد متناظر با آنها $\sum_{n=0}^{\infty} b_n / 2^n$ با هم برابر خواهند بود). ثابت کنید که، f یک نگاشت پوشای پیوسته از K به فاصله $[0 , 1]$ از **R** است، و نشان دهید که K و R هم‌توان هستند. علاوه بر این، می‌توان f را به یک نگاشت پیوسته از $\mathrm{I} = [0 , 1]$ به $[0 , 1]$ گسترش داد، به‌طوری که روی هر یک از مؤلفه‌های همبندی $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ ((۶ . ۱۹ . ۳) را ببینید) ثابت باشد.

۳. (a) فرض کنیم E یک فضای متریک باشد، که در شرط زیر صدق می‌کند: برای هر دنباله متناهی $s = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le n}$ که جملات آن برابر صفر یا یک هستند، زیر مجموعه‌ای ناتهی مانند A_s موجود است، به‌طوری که:

(i) E اجتماع دو زیر مجموعه $\mathrm{A}_{(0)}$ ، $\mathrm{A}_{(1)}$ بوده ، و برای هر دنباله متناهی s که شامل n جمله است، اگر s' ، s'' دو دنباله شامل $n+1$ جمله باشند که n جمله اول آنها جملات s است، داشته باشیم $\mathrm{A}_s = \mathrm{A}_{s'} \cup \mathrm{A}_{s''}$؛

(ii) برای هر دنباله نامتناهی $\{(\varepsilon_i)_{i \ge 1}\}$ که جملات آن برابر 0 یا 1 است، اگر $s_n = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le n}$ ، وقتی n به سمت $+\infty$ میل می‌کند، قطر مجموعه A_{s_n} به سمت صفر میل کند، و اشتراک A_{s_n} ها غیر تهی باشد.

تحت این شرایط، نشان دهید که، نگاشتی پیوسته از مجموعه سه سهٔی کانتور K (مسئله ۲) به روی E وجود دارد، و به‌ویژه، E فشرده است.

---

[1] . در اینجا منظور از اعداد طبیعی اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد. مترجم.

(b) به عکس، فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده دلخواه باشد. نشان دهید که، نگاشتی پیوسته از K بر روی E موجود است. (از روش (a) ، و از تعریف فضای پیش‌فشرده (بخش ۳.۱۶) استفاده نموده، توجه کنید که، از خواص (i) و (ii) نتیجه نمی‌شود که، دو مجموعه $A_{s'}$ و $A_{s''}$ باید برای همه دنباله‌های s متفاوت از A_s باشند.)

(c) اگر علاوه بر این E کاملاً ناهمبند باشد، و نقطه ایزوله نداشته باشد ((۱۰ . ۱۰ . ۳) را ببینید) آنگاه E با K هومیومورف است. (ابتدا ثابت کنید که، برای هر $\varepsilon > 0$ پوششی از فضای E به‌وسیله تعدادی متناهی از مجموعه‌های A_i موجود خواهد بود، به‌طوری که A_i ها همزمان هم باز هستند و هم بسته و قطر آنها کوچک‌تر یا مساوی ε است، برای این هدف، از مسئله (a) ۹ بخش ۳.۱۹ استفاده نموده، سپس، روش (a) را به‌کار گیرید.)

۴. (a) فرض کنیم E (به ترتیب F) مجموعه اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر زوج (به ترتیب فرد) باشد. اگر به هر زیر مجموعه X از N زوج $(X \cap E , X \cap F)$ مربوط شود، نشان دهید که، با این رابطه یک تناظر دوسوئی از $\mathfrak{B}(N)$ بر روی $\mathfrak{B}(E) \times \mathfrak{B}(F)$ ایجاد می‌شود.

(b) از (a) و از مسئله (b) ۲ نتیجه بگیرید که ، برای هر $n > 1$ ، R^n و R هم‌توان هستند (اما، مسئله ۶ بخش ۱ . ۵ را ببینید).

۵. فرض کنیم I فاصله $[0 , 1]$ در R باشد. نشان دهید که، نگاشتی **پیوسته** مانند f از I **به روی مربع** $I \times I$ (خم پئانو[1]) موجود است. (ابتدا نشان دهید که نگاشتی پیوسته از مجموعه کانتور K بر روی $I \times I$ موجود است (مسئله ۳) ، و سپس، این نگاشت را به‌طور خطی نسبت به مؤلفه‌های همبند مکمل K در I گسترش دهید.)

۶. فرض کنیم g نگاشتی از فاصله $]0 , 1]$ به فاصله $[-1 , 1]$ باشد، و فرض کنیم $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} g(x) = 0$. نشان دهید که نگاشتی پیوسته و نزولی مانند g_1 و نگاشتی پیوسته و صعودی مانند g_2 از $[0 , 1]$ به $[-1 , 1]$ موجود است، به‌طوری که $g_1(0) = g_2(0) = 0$ ، و برای $0 < x \le 1$ ، $g_1(x) \le g(x) \le g_2(x)$. (برای هر عدد طبیعی n ، $\text{g.l.b.}\, x_n$ ، از مجموعه نقاطی مانند x که $g(x) \ge \frac{1}{n}$ ، مورد بررسی قرار دهید.)

۳. لگاریتم‌ها و توابع نمائی

(۱. ۳. ۴) برای هر عدد $a > 1$ ، نگاشت یکتای صعودی f از $R_+^* =]0 , +\infty[$ به R موجود است، به‌طوری که $f(xy) = f(x) + f(y)$ و $f(a) = 1$ ، به‌علاوه، f یک هومیومورفیسم از R_+^* بر روی R است.

ابتدا یک لم ثابت می‌کنیم :

(۱. ۱. ۳. ۴) برای هر $x > 0$ ، عددی صحیح (نامنفی یا منفی) مانند m موجود است، به‌طوری که $a^m \le x \le a^{m+1}$.

ابتدا فرض کنیم $x \ge 1$. دنباله (a^n) اکیداً صعودی است[2]. اگر برای همه اعداد صحیح $n > 0$ داشته باشیم $a^n \le x$، آنگاه، طبق (۱ . ۲ . ۴) و (۴ . ۱۵ . ۳)، $b = \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \sup\limits_n a^n$ باید عددی متناهی بزرگ‌تر از یک و کوچک‌تر یا مساوی x باشد. اما، طبق (۲. ۱. ۴) ، می‌توان نوشت $b = \lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = a.\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ ،

---

1 . Peano curve = Кривая Пеано

۲. لازم به یادآوری است که $a > 1$ فرض شده است. مترجم.

بنابراین $b = ab$ ، که با فرض $a > 1$ در تناقض است. در نتیجه، عددی صحیح مانند n موجود خواهد بود، به‌طوری که $x < a^n$. با انتخاب $m + 1$ به‌عنوان کوچک‌ترین عدد طبیعی با خاصیت فوق، نتیجه مطلوب در حالت $x \geq 1$ حاصل می‌شود. اگر $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $x^{-1} > 1$ ، و اگر $a^m \leq x^{-1} \leq a^{m+1}$ ، آنگاه، طبق (۱۳. ۲. ۲) ، خواهیم داشت $a^{-(m+1)} \leq x \leq a^{-(m+1)+1}$.

حال، به (۱ .۳. ۴) برمی‌گردیم، فرض کنیم تابعی مانند f با خواص اشاره شده در (۱ . ۳ . ۴) موجود باشد. در این‌صورت، f یک هومیومورفیسم از گروه ضربی $\mathbf{R}_+^*$ به گروه جمعی $\mathbf{R}$ خواهد بود، و بنابراین، باید داشته باشیم $f(1) = 0$، و برای هر $x > 0$ و هر عدد صحیح n (مثبت یا نامثبت) $f(x^n) = nf(x)$ ، به‌خصوص $f(a^n) = n$. به علاوه ، اگر $a^m \leq x^n \leq a^{m+1}$ ، باید داشته باشیم $f(a^m) \leq f(x^n) \leq f(a^{m+1})$ ، به‌عبارت دیگر $m \leq nf(x) \leq m+1$ ، بنابراین $m/n \leq f(x)$ و $|f(x) - m/n| \leq \frac{1}{n}$. این مطلب نشان می‌دهد که، اگر A_x مجموعه اعداد گویای m/n باشد (m مثبت یا غیرمثبت است و $n \geq 1$) که $a^m \leq x^n$ (توجه کنید که، اگر $q > 0$ عددی صحیح باشد، طبق (۱۳. ۲. ۲)، روابط $a^m \leq x^n$ و $a^{mq} \leq x^{nq}$ هم‌ارز هستند)، آنگاه باید داشته باشیم $f(x) = \sup \mathrm{A}_x$، که نشان می‌دهد f یکتا است.

برای اثبات وجود f، آن چه که باقی می‌ماند، این است که ثابت کنیم، نگاشت $f: x \to \sup \mathrm{A}_x$ در شرایط مورد نظر ما صدق می‌کند. فرض کنیم x و y دو عنصر دلخواه از $\mathbf{R}_+^*$ باشند. برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، فرض کنیم m ، m' چنان اعداد صحیحی باشند که $a^m \leq x^n \leq a^{m+1}$ و $a^{m'} \leq y^n \leq a^{m'+1}$. از این روابط نتیجه می‌شود که $a^{m+m'} \leq (xy)^n \leq a^{m+m'+2}$. بنابراین ، خواهیم داشت:

$$\frac{m}{n} \leq f(x) \leq \frac{m+1}{n} \quad , \quad \frac{m'}{n} \leq f(y) \leq \frac{m'+1}{n} \,,$$

$$\frac{m+m'}{n} \leq f(xy) \leq \frac{m+m'+2}{n}$$

همچنین :

$$\frac{m+m'}{n} \leq f(x) + f(y) \leq \frac{m+m'+2}{n}$$

در نتیجه، خواهیم داشت :

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq 2/n$$

و چون n دلخواه است :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

از (۱. ۱. ۳. ۴) نتیجه می‌شود که، برای هر $z > 1$ یک عدد صحیح $n \geq 1$ موجود است، به‌طوری که $a < z^n$. بنابراین $f(z) \geq \frac{1}{n} > 0$ ، که از آن نتیجه می‌شود، f **اکیداً صعودی** است. زیرا ، اگر $x < y$ ،

آنگاه $y = zx$ با $z > 1$ ، و $f(y) = f(x) + f(z) > f(x)$. از طرف دیگر، لم زیر را خواهیم داشت :

(۲. ۱. ۳. ۴)[1] برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، عددی مانند $z > 1$ موجود است، به‌طوری که $z^n \leq a$.

با توجه به اینکه x ی موجود است، به‌طوری که $1 < x < a$ ، به‌دست می‌آید $a = xy$ که در آن $y > 1$. اگر $z_1 = \min(x, y)$ ، آنگاه، خواهیم داشت $z_1^2 \leq xy = a$ و $z_1 > 1$. با استقراء ریاضی $z_n > 1$ را طوری تعریف می‌کنیم که[2] $z_n^2 < z_{n-1}$ ، در این‌صورت $z_n^{2^n} \leq a$ ، و به‌ویژه $z_n^n \leq a$.

لم نشان می‌دهد که $0 < f(z) \leq \frac{1}{n}$. برای هر $x \in \mathbf{R}_+^*$ ، δ را چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$\frac{x+\delta}{x} < z \quad , \quad \frac{x-\delta}{x} > \frac{1}{z}$$

در این‌صورت، برای $|y - x| \leq \delta$ ، $|f(y) - f(x)| \leq f(z) \leq \frac{1}{n}$ ، که ثابت می‌کند f پیوسته است. بنابراین، طبق (۲. ۲. ۴) ، f یک هومیومورفیسم از $\mathbf{R}_+^*$ به روی یک فاصله I از $\mathbf{R}$ است. اما، این فاصله لزوماً باید خود $\mathbf{R}$ باشد، زیرا ، $f(a^n) = n$ یک عدد صحیح است که به‌طور دلخواه می‌تواند بزرگ باشد.

(۲. ۳. ۴) برای هر عدد $a > 0$ که $a \neq 1$ ، یک و تنها یک نگاشت پیوسته از $\mathbf{R}_+^*$ به $\mathbf{R}$ وجود دارد، به‌طوری که $f(xy) = f(x) + f(y)$ و $f(a) = 1$.

فرض کنیم $b > 1$. طبق (۱. ۳. ۴) ، یک هومیومورفیسم f_0 از $\mathbf{R}_+^*$ به روی $\mathbf{R}$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $f_0(xy) = f_0(x) + f_0(y)$ و $f_0(b) = 1$. فرض کنیم g_0 معکوس هومیومورفیسم فوق باشد، پس $g_0(1) = b$ ، $g_0(x+y) = g_0(x)\, g_0(y)$. اگر f در شرایط قضیه (۲. ۳. ۴) صدق کند، آنگاه $h = f \circ g_0$ نگاشتی پیوسته از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ خواهد بود، به‌طوری که $h(x+y) = h(x) + h(y)$. طبق (۳. ۱. ۴) ، داریم $h(x) = cx$. و بنابراین $f(x) = cf_0(x)$، و تنها یک مقدار c موجود است، به‌طوری $f(a) = 1$؛ این مقدار $c = 1/f_0(a)$ می‌باشد (چون $a \neq 1$ ، خواهیم داشت $f_0(a) \neq 0 = f_0(1)$).

نگاشتی که در (۲. ۳. ۴) مشخص شده است، **لگاریتم در پایه** a نامیده می‌شود، و $f(x)$ را به صورت $\log_a x$ نشان می‌دهند. از اثبات (۲. ۳. ۴) فوراً نتیجه می‌شود که، اگر $a > 0$ و $b > 0$ ، اعدادی مخالف 1 باشند، آنگاه $\log_a x$ و $\log_b x$ متناسب خواهند بود. بنابراین، با قرار دادن $x = a$ نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$\log_b x = \log_b a \,.\, \log_a x \qquad (۴. ۳. ۳)$$

---

۱. در این لم نیز مثل قبل $a > 1$ فرض شده است. مترجم.

۲. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای روابط $z_n^2 \leq z_{n-1}$ و $z_n^{2^n} \leq a$ و $z_n^n \leq a$ نوشته شده است $z_1^2 \leq z_{n-1}$ و $z_1^{2^n} \leq a$ و $z_1^n \leq a$ که باید آنها را اشتباه چاپی به حساب آورد (به‌جای z_n نوشته شده است z_1). این اشتباهات در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

از (۴.۳.۱) و (۴.۲.۱) نتیجه می‌شود که، اگر $a > 1$ باشد، $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$: اگر $a < 1$ باشد، $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$. برای هر $a > 0$ که $a \neq 1$، معکوس نگاشت $x \to \log_a x$ را **تابع نمائی با پایه** a نامیده، و آن را به‌صورت $x \to a^x$ نشان می‌دهند (این نماد، نمادی منطقی است، زیرا $\log_a (a^n) = n$ ، و بنابراین، برای مقادیر صحیح x ، این نماد جدید دارای همان معنی قبلی جبریش می‌باشد). علاوه بر این، برای هر عدد حقیقیx ، 1^x را برابر 1 تعریف می‌کنیم. در این صورت، برای $a > 0$ ، وقتی x ، y اعداد حقیقی دلخواهی باشند، طبق تعریف تابع نمائی، خواهیم داشت:

$$a^{x+y} = a^x a^y , a^{-x} = 1/a^x , \ a^0 = 1$$

اگر در (۴.۳.۳) به جای x ، b^x بگذاریم با تعویض جای a و b ، به‌دست می‌آید[1] :

(۴.۳.۴) $\log_a(b^x) = x\log_a b$ ($b > 0$ ، و x عددی حقیقی است).

و اگر در همین فرمول به جای b ، a^y قرار دهیم، به‌دست می‌آید :

(۴.۳.۵) $(a^x)^y = a^{xy}$ (x ، y اعدادی حقیقی، و $a > 0$ است).

برای $a > 1$ ، نگاشت $x \to a^x$ اکیداً صعودی است و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

برای $a < 1$ ، نگاشت $x \to a^x$ اکیداً نزولی است و $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

(۴.۳.۶) نگاشت $(x , y) \to x^y$ روی $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ پیوسته است، و در هر نقطه از فضای $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}}$ که در بستار مجموعه $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ واقع شده باشد و متمایز از نقاط $(0 , 0)$ ، $(0, +\infty)$ ، $(+\infty, 0)$ ، $(1 , +\infty)$ و $(1, -\infty)$ باشد، دارای حد است.

از (۴.۳.۴) به دست می‌آید $x^y = a^{y \cdot \log_a x}$ ($a > 1$ عددی ثابت است)، از این رابطه و از (۴.۱.۲) و (۴.۱.۹) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۴.۳.۷) هر نگاشت پیوسته g از $\mathbf{R}_+^*$ به $\mathbf{R}_+^*$ که در معادله $g(xy) = g(x)g(y)$ صدق کند، به‌صورت $x \to x^a$ می‌باشد، که در آن a عددی حقیقی است.

در واقع، اگر $b > 1$ باشد، آنگاه نگاشت $f(x) = \log_b g(b^x)$ در معادله :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به تعویض جای a و b در رابطه (۴.۳.۳) که به رابطه $\log_a x = \log_a b \,.\, \log_b x$ و سپس با تعویض x به b^x به رابطه $\log_a (b^x) = x \log_a b$ منجر می‌شود اشاره شده است، اما، به این مطلب در چاپ دوم متن انگلیسی اشاره‌ای نشده است. مترجم.

برای اعداد حقیقی دلخواه x ، y صدق می‌کند، علاوه بر این ، f پیوسته است. بنابراین، طبق (۳. ۱. ۴) ، $f(x) = cx$ ، و در نتیجه :

$$g(b^x) = b^{cx} = (b^x)^c$$

که با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

از آنجا که $\log_b(x^a) = a.\log_b x$ ، مشاهده می‌شود که ، اگر $a > 0$ باشد ، آنگاه نگاشت $x \to x^a$ اکیداً صعودی است، و اگر $a < 0$ باشد، آنگاه نگاشت فوق اکیداً نزولی است، به‌علاوه، اگر $a > 0$ باشد: $\lim_{x\to 0} x^a = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ ؛ و اگر $a < 0$ باشد ، $\lim_{x\to 0} x^a = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^a = 0$. بنابراین، برای $a \neq 0$ ، طبق (۲. ۲. ۴) ، نگاشت $x \to x^a$ یک هومیومورفیسم از $\mathbf{R}_+^*$ به روی $\mathbf{R}_+^*$ است. وارون این هومیومورفیسم نگاشت $x \to x^{1/a}$ است.

مسئله

فرض کنیم f نگاشتی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد، که در شرایط $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(xy) = f(x).f(y)$ صدق می‌کند. نشان دهید که، یا برای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = 0$ ، یا برای هر $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = x$. (اگر $f(1) \neq 0$ ، آنگاه $f(1) = 1$. در حالت دوم، نشان دهید که، برای عدد گویای x داریم $f(x) = x$ ، و از این حقیقت استفاده کنید که، هر عدد حقیقی $z > 0$ به‌صورت یک توان دوم است، نشان دهید که f اکیداً صعودی است)

۴ . اعداد مختلط

دو نگاشت از مجموعه $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ با فرمول‌های زیر تعریف می‌کنیم :

$$((x, y), (x', y')) \to (x + x', y + y')$$

$$((x, y), (x', y')) \to (xx' - yy', xy' + yx')$$

این نگاشت‌ها را به ترتیب **جمع** و **ضرب** نامیده، می‌نویسیم:

$$(z, z') \to z + z' \quad , (z, z') \to zz'$$

برای این دو نگاشت اصول (I) (بخش ۱. ۲) هیأت، با قرار دادن $0 = (0, 0)$ ، $1 = (1, 0)$ برقرار هستند، و اگر $z = (x, y) \neq 0$ (که طبق (۸. ۲. ۲) و (۱۲. ۲. ۲) ، باید $x^2 + y^2 \neq 0$) ، آنگاه :

$$z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2} \ , \ \frac{-y}{x^2 + y^2})$$

هیأتی که به‌صورت فوق تعریف شده باشد، **هیأت اعداد مختلط** نامیده و به علامت $\mathbf{C}$ نشان می‌دهند. اعضاء $\mathbf{C}$ را **اعداد مختلط** می‌نامند. نگاشت $x \to (x, 0)$ از فضای $\mathbf{R}$ به $\mathbf{C}$ یک به یک است، و اعمال جمع و ضرب را حفظ می‌کند. بنابراین، ما $\mathbf{R}$ را با زیر هیأتی از $\mathbf{C}$ که از عناصر $(x, 0)$ تشکیل شده است، یکسان فرض می‌کنیم. عنصر $i = (0, 1)$ چنان است که $i^2 = (-1, 0) = -1$ ، و برای هر $(x, y) \in \mathbf{C}$

می‌توان نوشت $(x, y) = x + iy$.

اگر $z = x + iy$ ، که در آن x و y اعدادی حقیقی هستند، آنگاه x را به $\Re z$ و y را به علامت $\mathscr{I} z$ نشان داده، آنها را به ترتیب **قسمت حقیقی** و **قسمت موهومی** z می‌نامند.

(۱. ۴ . ۴) هر تابع گویای $(z_1, \cdots, z_n) \to P(z_1, \cdots z_n)/Q(z_1, \cdots z_n)$ که در آن P و Q کثیرالجمله‌هایی با ضرایب مختلط هستند، در هر نقطه $(a_1, \cdots, a_n)$ از C^n که $Q(a_1, \cdots a_n) \neq 0$ ، پیوسته است.

مطلب فوق را می‌توان دقیقاً با همان روشی که در (۵ . ۱. ۴) مورد استفاده قرار گرفت، به کمک گزاره‌هایی مشابه (۱. ۱. ۴) و (۲. ۱. ۴) و (۴. ۱. ۴) برای مجموع، حاصل‌ضرب، معکوس در هیأت اعداد مختلط ثابت کرد، و از (۴. ۲۰. ۳) و (۵ . ۱. ۴) استفاده نمود.

برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ ، عدد $\bar{z} = x - iy$ را **مزدوج** z می‌نامند. داریم : $\bar{\bar{z}} = z$ ، $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ، $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ ، به‌عبارت دیگر، نگاشت $z \to \bar{z}$ یک **اتومورفیسم** روی هیأت C است، که طبق (۴ . ۲۰. ۳) و (۲. ۱. ۴) از دو طرف پیوسته است. **اعداد حقیقی** با رابطه $\bar{z} = z$ مشخص می‌شوند. اعداد به شکل ix (اعداد به این شکل را که در آنها x عددی حقیقی است، اعداد **موهومی خالص** می‌نامند) با رابطه $\bar{z} = -z$ مشخص می‌شوند. اگر $z = x + iy$ ، آنگاه $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$.

عدد حقیقی مثبت[1] $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ را **قدر مطلق (مودول)** z می‌نامند. وقتی z عددی حقیقی باشد. این تعریف با تعریف بخش ۲. ۲ یکی خواهد بود. رابطه $|z| = 0$ هم‌ارز رابطه $z = 0$ می‌باشد. علاوه بر این، داریم $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2$ ، بنابراین $|zz'| = |z||z'|$، که از آن وقتی $z \neq 0$ باشد، نتیجه می‌شود $|1/z| = 1/|z|$.

بالاخره، با محاسبه مستقیم، می‌توان نامساوی مثلثی :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

را ثابت نمود، که نشان می‌دهد، رابطه $d(z, z') = |z - z'|$ یک فاصله روی $C = R \times R$ تعریف می‌کند، که به‌طور یکنواخت هم‌ارز فاصله‌ای است که در بخش (۲۰. ۳) توصیف شده است. گوی‌ها برای این فاصله، **دیسک‌ها** نامیده می‌شوند.

هر عدد مختلط $z \neq 0$ را می‌توان به یک و تنها یک روش به‌صورت حاصل‌ضرب $r\zeta$ نوشت، که در آن $r > 0$ و $|\zeta| = 1$ ، همانا باید قرار دهیم $r = |z|$ و $\zeta = \frac{z}{|z|}$.

---

۱. در اینجا، منظور از عدد حقیقی مثبت r ، صفر یا عدد حقیقی اکیداً مثبت $r > 0$ است. مترجم.

مسئله

فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از C به C باشد، به‌طوری که $f(z+z') = f(z) + f(z')$ و $f(zz') = f(z)\,f(z')$. نشان دهید که، یا برای هر $z \in \mathrm{C}$ ، $f(z) = 0$ ، یا f یکی از نگاشت‌های $z \to z$ ، $z \to \bar{z}$ است (از (۳. ۱. ۴) استفاده کنید). (با استفاده از اصل انتخاب،[1] می‌توان ثابت نمود که، نگاشت‌هایی مانند f از C به C موجودند که یک به یک، غیر پوشا و غیر پیوسته هستند و در معادلات $f(z+z') = f(z) + f(z')$ و $f(zz') = f(z)f(z')$ صدق می‌کنند. مسئله فوق را با مسئله بخش ۲. ۴ مقایسه کنید).

۵ . قضیه گسترش تیتز ـ اوریسون[2]

(۱. ۵. ۴) (قضیه گسترش تیتز ـ اوریسون) فرض کنیم E یک فضای متریک، A یک زیر مجموعه بسته از E ، و f یک نگاشت پیوسته کراندار از A به R باشد. در این‌صورت، نگاشتی پیوسته مانند g از E به R موجود است، که روی A بر f منطبق است و علاوه بر آن،

$$\sup_{x\in \mathrm{E}} g(x) = \sup_{y\in \mathrm{E}} f(y) \quad , \quad \inf_{x\in \mathrm{E}} g(x) = \inf_{y\in \mathrm{E}} f(y)$$

با تعویض f به نگاشتی به‌صورت $y \to \alpha f + \beta$ ، $\alpha \neq 0$ ، می‌توان فرض کرد که:

$$\sup_{y\in \mathrm{A}} f(y) = 2 \ ، \ \inf_{y\in \mathrm{A}} f(y) = 1$$

(در حالتی که f ثابت است ، قضیه واضح است). نگاشت $g(x)$ را روی A برابر $f(x)$ و روی نقاط $x \in \mathrm{E} - \mathrm{A}$ با فرمول :

$$g(x) = (\inf_{y\in \mathrm{A}} (f(y)\, d(x , y)) / d(x , \mathrm{A})$$

تعریف می‌کنیم. از نامساوی‌های $1 \le f(y) \le 2$ برای $y \in \mathrm{A}$ و تعریف $d(x , \mathrm{A})$ نتیجه می‌شود که، برای $x \in \mathrm{E} - \mathrm{A}$ ، $1 \le g(x) \le 2$. بنابراین ، فقط باید ثابت کنیم که g در هر نقطه $x \in \mathrm{E}$ پیوسته است. اگر $x \in \mathring{\mathrm{A}}$ ، آنگاه پیوستگی g در نقطه x از فرضی که درباره f کرده‌ایم ناشی می‌شود. روی مجموعه باز $\mathrm{E} - \mathrm{A}$ ، می‌توان نوشت $g(x) = h(x)/d(x , \mathrm{A})$ ، که در آن $h(x) = \inf_{y\in \mathrm{A}} (f(y)\, d(x , y))$ و چون طبق (۹. ۸. ۳) ، (۸. ۱۱. ۳) ، $d(x , \mathrm{A})$ پیوسته و روی $\mathrm{E} - \mathrm{A}$ مخالف صفر است، طبق (۲. ۱. ۴) و (۴. ۱. ۴) ، پیوستگی h در هر نقطه $x \in \mathrm{E} - \mathrm{A}$ ، کل آن مطلبی است که باید ثابت کنیم.

فرض کنیم $r = d(x, \mathrm{A})$. برای $d(x , x') \le \varepsilon < r$ ، داریم $d(x , y) \le d(x' , y) + \varepsilon$. بنابراین $h(x) \le h(x') + 2\varepsilon$ (زیرا $f(y) \le 2$) ، و به طریق مشابه $h(x') \le h(x) + 2\varepsilon$ ، که پیوستگی نگاشت h را ثابت می‌کند. بالاخره، فرض کنیم x یک نقطه مرزی A ، $0 < \varepsilon$ معلوم، و $r > 0$ چنان باشد که، برای $y \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}(x , r)$ ، $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon$. فرض کنیم $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}(x , r)$ ، $\mathrm{D} = \mathrm{A} - \mathrm{C}$.

---

۱. این قسمت در برگردان روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

2 . The Tietze - Urysohn extension theorm = Теорема Титце – Урысона о продолжении

اگر $x' \in E - A$ و $d(x, x') \leq \frac{r}{4}$ ، آنگاه برای هر $y \in D$ خواهیم داشت :

$$d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq \frac{3r}{4}.$$

بنابراین :

$$\inf_{y \in D} (f(y)\, d(x', y)) \geq \frac{3r}{4}$$

از طرف دیگر، $f(x)\, d(x', x) \leq 2d(x', x) \leq \frac{r}{2}$ ، و بنابراین:

$$\inf_{y \in A} (f(y)\, d(x', y)) = \inf_{y \in C} f(f(y)\, d(x', y))$$

اما ، چون برای $y \in C$ نامساوی‌های :

$$\inf_{y \in C} d(x', y) = d(x', A) \quad \text{و} \quad f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$$

برقرار هستند، خواهیم داشت :

$$(f(x) - \varepsilon)\, d(x', A) \leq \inf_{y \in A} (f(y)\, d(x', y)) \leq (f(x) + \varepsilon)\, d(x', A)$$

که ثابت می‌کند ، برای $x' \in E - A$ و $d(x, x') \leq \frac{r}{4}$ ، $|g(x') - f(x)| \leq \varepsilon$. از طرف دیگر، اگر $x' \in A$ و $d(x, x') \leq r/4$، آنگاه $|g(x') - f(x)| = |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon$ ، و این اثبات قضیه را به پایان می‌رساند.

(۴ . ۵ . ۴) فرض کنیم A ، B دو مجموعه غیر تهی بسته در فضای متریک E باشند، به‌طوری‌که $A \cap B = \varnothing$. در این صورت، تابعی پیوسته مانند f موجود است، به‌طوری که روی E تعریف شده، و مقادیر آن در $[0, 1]$ قرار می‌گیرد ، به‌علاوه ، روی A ، $f(x) = 1$ ، و روی B ، $f(x) = 0$ است.

با به‌کارگیری (۴ . ۵ . ۱) برای نگاشتی از $A \cup B$ به $\mathbf{R}$ ، که روی B برابر 0 و روی A برابر 1، و روی $A \cup B$ پیوسته است[1] ، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

---

[1]. به دلیل اینکه A و B دو مجموعه غیرتهی بسته، و $A \cap B = \varnothing$ است، نگاشت $h : A \cup B \to R$ که روی B برابر 0 و روی A برابر 1 است، روی $A \cup B$ پیوسته خواهد بود، و چون $A \cup B$ مجموعه‌ای بسته، و نگاشت فوق روی $A \cup B$ کراندار است، طبق قضیه گسترش تیتز - اوریسون، تابعی پیوسته مانند f موجود است که روی E تعریف شده و روی $A \cup B$ منطبق بر h است و

$$\sup_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in A \cup B} h(x) = 1 \ , \quad \inf_{x \in E} f(x) = \inf_{x \in A \cup B} h(x) = 0$$

از این مطالب نتجیه مطلوب حاصل می‌شود. اما، می‌شد قضیه فوق را به طریقی ساده‌تر و بدون استفاده از قضیه گسترش تیتز - اوریسون با تعریف $f : E \to R$ به صورت:

$$f(x) = \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

نیز ثابت نمود. مترجم.

مسائل

۱. در فضای متریک E ، فرض کنیم (F_n) دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته، و A اجتماع F_n ها باشد. اگر $x \notin A$ ، نشان دهید که، یک تابع کراندار پیوسته $f \geq 0$ موجود است. به‌طوری که روی E تعریف شده، $f(x) = 0$ ، و برای هر $y \in A$ ، $f(y) > 0$. (از (۲. ۵. ۴) و (۱. ۲. ۷) استفاده کنید.)

۲. (a) فرض کنیم E یک فضای متریک باشد، به‌طوری که هر مجموعه کراندار در E به‌طور نسبی فشرده باشد. نشان دهید که، E به‌طور موضعی فشرده ، و جدائی‌پذیر است (از (۲. ۱۶. ۳) استفاده کنید.)

(b) به‌عکس، فرض کنیم E یک فضای متریک به‌طور موضعی فشرده، اما، غیر فشرده و جدائی‌پذیر، و d فاصله روی E باشد، و فرض کنیم (U_n) دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های باز به‌طور نسبی فشرده در E باشد، به‌طوری که $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ ، و E اجتماع دنباله (U_n) باشد ((۳. ۱۸. ۳) را ببینید) . نشان دهید که، یک تابع پیوسته f با مقادیر حقیقی روی E موجود است، به‌طوری که برای $x \in \overline{U}_n$ ، $f(x) \leq n$ ، و برای $x \in E - \overline{U}_n$ ، $f(x) \geq n$ (از (۲. ۵. ۴) استفاده کنید) : بنابراین، فاصله $d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ به‌طور توپولوژیک هم‌ارز d است، و برای فاصله d' هر مجموعه کراندار به‌طور نسبی فشرده است.

فصل V

فضاهای نرم‌دار[1]

زبان توصیف شده در فصل ۳ ، با آن بخش از خواص هندسی اشیاء مربوط می‌شود ، که طبق حس درونی ما، تحت « تغییر شکل‌ها[2] » بدون تغییر باقی می‌مانند. در این فصل به هندسه کلاسیک بسیار نزدیک‌تر می‌شویم، چون در اینجا خطوط، صفحات و غیره با دیدگاهی توپولوژیکی مورد بررسی قرار می‌گیرند، (یادآوری می‌کنیم که، از نقطه‌نظر صرفاً جبری، این مفاهیم به جبر خطی متعلق هستند ، که ما فرض کرده‌ایم خواننده با آن آشنا است.)

در این زمینه است که ، **سری** مفهوم طبیعی خود را پیدا می‌کند. به‌ویژه، بر این حقیقت تأکید کرده‌ایم ، که برای مهم‌ترین نوع سری‌های همگرا (بخش ۳. ۵) قوانین معمولی جابه‌جا پذیری و شرکت‌پذیری مجموع‌های متناهی ، معتبر باقی می‌مانند ، مطلبی که به‌طور طبیعی به این نتیجه منجر می‌شود که، برای چنین سری‌هائی ، ترتیب جملات ، در مجموع سری اصلاً تأثیری ندارد. این مسئله، به‌عنوان مثال، به ما امکان می‌دهد که ، با روشی معقول و مناسب قضیه حاصل‌ضرب دو سری از اعداد حقیقی را فرمول‌بندی کنیم ((۳. ۵ . ۵) را ببینید)، مطلبی که هنوز در بعضی از کتاب‌های درسی به اشتباه تحت عنوان «حاصل‌ضرب کوشی» آموزش داده می‌شود، که به جز برای سری‌های توانی یک متغیره دارای معنی نیست.

نتایج اساسی این فصل محک پیوستگی (۱. ۵ . ۵) و قضیه ف. ریس است، که فضاهای یا بعد متناهی را مشخص می‌کند (۴. ۹. ۵) ، و کلید تئوری مقدماتی طیفی است ، که در فصل XI توسعه یافته و مورد بهره‌برداری قرار گرفته است.

البته، این بخش فقط مقدمه‌ای بر تئوری **فضاهای باناخ** و **فضاهای توپولوژیک خطی** است ، که در فصل XII توسعه بیشتری خواهد یافت[3]، و برای آنالیز تابعی جدید موضوعی اساسی است.

---

1 . Normed spaces = Нормированные проства нства

2 . Deformation = Деформация

۳. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به‌جای اشاره نمودن به فصل دوازده کتاب دیگری از ژان دیودونه، که باید آن را ادامه همین کتاب به‌حساب آورد، برای آشنایی بیشتر با تئوری فضاهای باناخ و فضاهای توپولوژیک خطی به کتاب‌های Тейлор و Бурбаки اشاره شده است، که در آنها مفاهیمی همچون «کاتگوری بئز» و نظریه دوگان که در اثبات بیشتر نتایج عمیق آنالیز تابعی نقش‌هایی اساسی بازی می‌کنند، و در اینجا به آنها اشاره‌ای نشده است، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مترجم.

۱. فضاهای نرم‌دار و فضاهای باناخ

در این فصل و در فصل‌های بعدی، وقتی از **فضای‌برداری** صحبت می‌کنیم، همیشه منظورمان یک فضای برداری (با **بُعد** متناهی یا نامتناهی) روی هیأت اعداد حقیقی یا روی هیأت اعداد مختلط است (چنین فضایی را به ترتیب فضای‌برداری **حقیقی** و فضای برداری **مختلط** می‌نامند). وقتی هیأت اسکالرها مشخص نشده باشد ، منظور این خواهد بود که ، تعریف‌ها و نتایج در هر دو حالت معتبر هستند[۱]. وقتی در یک گزاره چند فضای‌برداری مداخله کرده باشند، منظور این خواهد بود ، که همه آنها هیأت اسکالرهای یکسانی دارند (مگر اینکه خلاف آن گفته شده باشد). یک فضای‌برداری مختلط E را نیز می‌توان به‌عنوان یک فضای برداری حقیقی با تحدید اسکالرهای آن به $\mathbf{R}$ مورد بررسی قرار داد ، وقتی لازم باشد تمایزی بین این فضاها ایجاد نمود، می‌گوییم فضای‌برداری حقیقی E_0 **زیربنا**[۲] و زمینه فضای‌برداری مختلط E است. اگر E روی C دارای بعد متناهی n باشد، آنگاه E_0 روی $\mathbf{R}$ دارای بعد $2n$ خواهد بود.

یک **نرم** روی فضای برداری E نگاشتی است از E به $\mathbf{R}$ مجموعه اعداد حقیقی (معمولاً می‌نویسند $\|x\| \to x$ ، ضمناً ، اگر لازم باشد ، علامت $\|..\|$ با اندیس‌هایی همراهی می‌شود) که دارای خواص زیر است :

(I) برای هر $x \in E$ ، $\|x\| \geq 0$.

(II) رابطه $\|x\| = 0$ هم ارز رابطه $x = 0$ باشد.

(III) برای هر $x \in E$ و هر اسکالر λ، $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(IV) برای هر زوج از عناصر فضای E ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**نامساوی مثلثی**) .

(۱. ۱. ۵) اگر $x \to \|x\|$ یک نرم روی فضای برداری E باشد ، آنگاه $d(x, y) = \|x-y\|$ فاصله‌ای روی E خواهد بود ، به‌طوری که $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ و برای هر اسکالر λ ،

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x, y) .$$

اثبات برقرار بودن اصول بخش ۱. ۳ ساده است.

یک **فضای نرم‌دار** یک فضای برداری E است که روی آن یک نرم تعریف شده باشد ، به‌طوری که چنین فضایی همیشه به‌عنوان فضایی متریک با فاصله $d(x, y) = \|x-y\|$ مورد بررسی قرار گیرد. یک **فضای باناخ** فضای نرم داری است که تام باشد.

اگر E یک فضای برداری مختلط نرم‌دار باشد، آنگاه $x \to \|x\|$ یک نرم روی فضای برداری حقیقی

---

۱. حاصل‌ضرب یک اسکالر λ و یک بردار x بدون تفاوت به صورت‌های λx یا $x\lambda$ نوشته می‌شود. O عنصر خنثی گروه‌جمعی فضای برداری است.

2 . Underlying = Базисный

زیر بنای E_0 نیز خواهد بود، و فضاهای متریک E و E_0 همسان هستند.[۱] بنابراین، اگر E یک فضای باناخ باشد، آنگاه E_0 نیز یک فضای باناخ خواهد بود.

مثال‌هایی از نرم‌ها

(۲. ۱. ۵) مثال‌هایی که در (۱. ۲. ۳) ، (۲. ۲. ۳) ، (۳. ۲. ۳) ، و (۴. ۲. ۳) داده شده‌اند، فضاهای برداری حقیقی هستند، و فاصله‌های معرفی شده روی آنها حاصل نرم‌هایی هستند، که در ۱. ۱. ۵ توصیف شده است. طبق (۱۶. ۲۰. ۳) و (۳. ۱۴. ۳)، فضاهای نرم‌دار تعریف شده در مثال‌های (۱. ۲. ۳) تا (۳. ۲. ۳) تام هستند، و بنابراین، فضاهای باناخ می‌باشند. مثال (۴. ۲. ۳) به‌عنوان موضوعی خاص در فصل ۷ مورد بررسی قرار خواهد گرفت، و خواهیم دید که، آن مثال نیز یک فضای باناخ است.

(۳. ۱. ۵) با تغییر اعداد حقیقی به اعداد مختلط (و در مثال ۲. ۲. ۳ ، با تغییر عبارت $(x_i - y_i)^2$ به $|x_i - y_i|^2$) مثال‌های متناظر حاصل شده در مسئله قبل فضاهایی باناخ هستند.

(۴ . ۱. ۵) فرض کنیم $I = [a, b]$ یک فاصله بسته کراندار در $\mathbf{R}$ ، و $E = \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ مجموعه همه توابع حقیقی پیوسته روی I باشد. E یک فضای‌برداری است ($f + g$ و λf به ترتیب نگاشت‌های $t \to f(t) + g(t)$ و $t \to \lambda f(t)$ می‌باشند) . اگر بنویسیم :

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

آنگاه $\|f\|_1$ یک نرم روی E خواهد بود. تنها اصلی که بررسی درست بودن آن چندان بدیهی نیست اصل (II) است ، که از قضیه مقدار میانگین (فصل VIII را ببینید) نتیجه می‌شود. می‌توان ثابت کرد که، E تام نیست (مسئله ۱ را ببینید).

برای دیدن مثال‌های مهم دیگری از نرم‌ها ، بخش ۷. ۵ و فصل ۶ را ببینید.

(۵ . ۱. ۵) اگر E یک فضای نرم‌دار حقیقی (به ترتیب مختلط) باشد، آنگاه نگاشت $(x , y) \to x + y$ روی $E \times E$ به‌طور یکنواخت پیوسته است، نگاشت $(\lambda , x) \to \lambda x$ روی $\mathbf{R} \times E$ (به ترتیب روی $\mathbf{C} \times E$) پیوسته است، نگاشت $x \to \lambda x$ به‌طور یکنواخت روی E پیوسته است.

الگوی اثبات‌ها شبیه اثبات‌های (۱. ۱. ۴) و (۲. ۱. ۴) می‌باشد. به‌عنوان مثال، برای اثبات پیوستگی

---

۱. متأسفانه ، مترجم در واژه‌نامه ریاضی و آمار ، گردآورنده : انجمن ریاضی ایران ، تهران ، مرکز نشر دانشگاهی ، چاپ دوم ، ۱۳۷۶، برگردانی از واژه انگلیسی Indentical که معادل واژه روسی Тождественный است ، نیافت، و اجباراً از بین معادل‌های فارسی واژه روسی Тождественный که به معانی «همسان» ، «همانند» ، «یکسان» «عیناً یکی» ترجمه شده است، واژه «همسان» را انتخاب نمود.

$\lambda x \rightarrow (\lambda, x)$ در یک نقطه (λ_0, x_0) ، می‌توان از فرمول :

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\| \leq$$
$$|\lambda_0| . \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| . \|x_0\| + |\lambda - \lambda_0| . \|x - x_0\|$$

استفاده نمود.

از (۵ . ۱ . ۵) نتیجه می‌شود که، هر **انتقال** $x \rightarrow a + x$ و هر **نگاشت تجانس** $x \rightarrow \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$ یک **هومیومورفیسم** از E به روی E می‌باشد زیرا ، نگاشت معکوس آنها دوباره یک انتقال (به ترتیب یک تجانس) است.

مسائل

۱. فرض کنیم $I = [0, 1]$ ، و E فضای نرم‌دار تعریف شده در (۴ . ۱ . ۵) باشد.

(a) برای هر $n \geq 3$ ، فرض کنیم f_n تابعی پیوسته تعریف شده روی I باشد ، به‌طوری که برای $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ، $f_n(t) = 1$ ، و برای $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1$ ، $f_n(t) = 0$ ، و روی فاصله $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1/n]$ ، $f_n(t)$ به صورت $\alpha_n t + \beta_n$ باشد (ثابت‌های α_n و β_n را می‌توان تعیین کرد). نشان دهید که ، روی E ، (f_n) یک دنباله کوشی است که همگرا نیست (اگر g حد (f_n) در فضای E باشد، نشان دهید که، لازم است برای $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ، $g(t) = 1$ ، و برای $\frac{1}{2} < t \leq 1$ ، $g(t) = 0$ ، که با پیوستگی g در تناقض است).

(b) نشان دهید که، فاصله تعریف شده در (۴ . ۱ . ۵) به‌طور توپولوژیک هم ارز فاصله تعریف شده در (۴ . ۲ . ۳) نیست. (مثالی از یک دنباله در E ارائه دهید که، نسبت به فاصله $\|f - g\|_1$ همگرا به صفر باشد، اما، نسبت به فاصله تعریف شده در (۴ . ۲ . ۳) دارای حد نباشد).

۲. اگر A و B دو زیر مجموعه از فضای نرم‌دار E باشند ، منظور از A + B مجموعه همه عناصر به شکل $a + b$ خواهد بود ، که $a \in A$ و $b \in B$.

(a) نشان دهید که، اگر یکی از دو مجموعه A و B باز باشد، آنگاه A + B نیز باز خواهد بود.

(b) نشان دهید که، اگر A و B هر دو فشرده باشند، آنگاه A + B نیز فشرده خواهد بود (از (۹ . ۱۷ . ۳) و (۱۶ . ۲۰ . ۳) استفاده کنید).

(c) نشان دهید که، اگر A فشرده و B بسته باشد، آنگاه A + B بسته خواهد بود.

(d) مثالی از دو زیر مجموعه بسته A و B در R ارائه نمائید، که A + B بسته نباشد (مقایسه کنید با مثالی که قبل از (۱ . ۴ . ۳) بیان شده است.)

۳. فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار باشد.

(a) نشان دهید که، در E بستار هر گوی باز یک گوی بسته با همان مرکز و همان شعاع است ، داخل هر گوی بسته یک گوی باز با همان مرکز و همان شعاع است ، مرز هر گوی باز (یا هر گوی بسته) کره‌ای با همان مرکز و همان شعاع است (با بخش ۸ . ۳ ، مسئله ۴ مقایسه کنید).

(b) نشان دهید که، گوی باز $B(0, r)$ با E هومیومورف است (نگاشت $x \rightarrow \frac{r x}{1 + \|x\|}$ را مورد بررسی قرار دهید).

۴. در یک فضای نرم‌دار E ، اگر $a \in E$ و $b \in E$ باشد ، تصویر فاصله $[0, 1]$ از R تحت نگاشت پیوسته $t \rightarrow t a + (1 - t) b$ را **یک پاره‌خط با نقاط انتهایی** a و b می‌نامند. یک پاره‌خط مجموعه‌ای فشرده و همبند است. یک

خط شکسته[1] در E زیر مجموعه‌ای مانند L از E است ، به‌طوری که ، دنباله‌ای متناهی مانند $(x_i)_{0 \le i \le n}$ از نقاط E موجود باشد، به‌طوری که اگر S_i پاره‌خطی با نقاط انتهایی x_i و x_{i+1} باشد $(0 \le i \le n-1)$ ، L اجتماع S_iها باشد. دنباله (x_i) را **شناسه خط شکسته** L می‌نامند (در حالت کلی، یک خط شکسته ممکن است با تعدادی نامتناهی دنباله متناهی تعریف کرد). اگر A زیر مجموعه‌ای از E و a و b دو نقطه از A باشد، آنگاه گوییم a و b را می‌توان با یک خط شکسته در A به هم وصل کرد، اگر دنباله‌ای مانند $(x_i)_{0 \le i \le n}$ موجود باشد ، به‌طوری که $a = x_0$ ، $b = x_n$ و خط شکسته L که با دنباله $(x_i)_{0 \le i \le n}$ تعریف می‌شود ، در A قرار گیرد.

اگر هر دو نقطه مجموعه A را بتوان با خطی شکسته در A به‌هم وصل کرد ، آنگاه A همبند خواهد بود. به‌عکس، اگر $A \subset E$ یک مجموعه همبند باز باشد، نشان دهید که، هر دو نقطه A را می‌توان با خطی شکسته در A به هم وصل نمود (ثابت کنید که ، مجموعه نقاط $y \in A$ که می‌توان آنها را با یک خط شکسته در A به نقطه داده شده $a \in A$ وصل نمود، در A هم باز است و هم بسته).

۵. در یک فضای‌برداری حقیقی E ، یک **واریته خطی**[2] V مجموعه‌ای به فرم $a + M$ است، که در آن M یک زیر فضای خطی E است. بُعد (به ترتیب **همبُعد**[3]) V ، طبق تعریف ، بُعد M (به ترتیب همبُعد M) می باشد. اگر $b \notin V$ و V دارای بُعد متناهی p (به ترتیب همبعد q) باشد ، آنگاه کوچک‌ترین واریته W که شامل b و V است ، دارای بُعد متناهی $p+1$ (به ترتیب همبُعد متناهی $q-1$) است.

فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز همبند از یک فضای نرم‌دار حقیقی E ، و (V_n) یک دنباله نامتناهی شمارش‌پذیر از واریته‌های (چند گوناهای) خطی در E باشد، که بعد هر یک از آنها بزرگ‌تر یا مساوی دو است. نشان دهید که ، اگر B اجتماع V_n ها باشد ، آنگاه مجموعه $A \cap (E - B)$ همبند است.

(**راهنمایی** : از مسئله (۴) استفاده کنید ؛ اگر L خط شکسته‌ای در A باشد ، که دو نقطه a و b از مجموعه $A \cap (E - B)$ را به‌هم وصل می‌کند، ثابت کنید که، یک خط شکسته L' « نزدیک» به L در $A \cap (E - B)$ موجود است. برای این کار، توجه کنید که، طبق (۱۷. ۲. ۲) ، برای هر نقطه $x \in E - B$ ، مجموعه همه نقاط $y \in E$ به‌طوری که پاره‌خط با نقاط انتهائی x و y با هیچ‌یک از V_n ها تلاقی ندارد ، در E چگال است.)

در حالت خاص ، اگر بعد E بزرگ‌تر یا مساوی دو باشد ، و D زیر مجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر از E باشد، آنگاه مجموعه $A \cap (E - D)$ همبند است.

۶. اگر E یک فضای نرم‌دار حقیقی با بعد بزرگ‌تر یا مساوی دو باشد ، نشان دهید که ، هیچ زیر مجموعه باز ناتهی از E ، نمی‌تواند با زیر مجموعه‌ای از خط حقیقی R هومیومورف باشد (از مسئله ۵ استفاده کنید).

۷. (a) نشان دهید که ، در یک فضای نرم‌دار E ، هیچ‌گوئی نمی‌تواند حاوی یک واریته خطی (مسئله ۵ را ببینید) با بعد بزرگ‌تر از صفر باشد.

(b) اگر (E_n) یک دنباله نامتناهی از فضاهای نرم‌دار باشد ، که ابعاد هر یک از آنها بزرگ‌تر از صفر است ، نشان دهید که ، در فضای متریک $E = \prod_{n=0}^{\infty} E_n$ ، نرمی وجود ندارد که فاصله $\|x - y\|$ به‌طور توپولوژیک هم‌ارز فاصله تعریف شده در مسئله ۷ بخش ۲۰ . ۳ باشد (که در آن d_n به‌عنوان یک فاصله کراندار هم‌ارز با فاصله‌ای که روی E_n به‌وسیله نرم آن تعریف شده است، در نظر گرفته شده است.) (از (a) استفاده کنید.)

---

1 . Broken line = Ломаная линия

۲. واریته خطی که به آن چند گونای خطی نیز گفته می‌شود ، برگردانی از واژه انگلیسی Linear variety و واژه روسی Линейное многообразие است. مترجم.

۳. همبُعد برگردانی است از واژه انگلیسی Codimension و واژه روسی Коразмерность . منظور از همبُعد بعد زیر فضای مکمل جبری زیر فضای M در E است. در رابطه با این مفهوم می‌توانید به‌عنوان مثال به کتاب :

Д.А.Райков, Векторные пространств, Физматгиз, Москва, 1962

مراجعه نمایید.

۲. سری‌ها در فضای نرم‌دار

فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار باشد. یک زوج از دنباله‌های $(x_n)_{n\geq 0}$ ، $(s_n)_{n\geq 0}$ یک **سری** نامیده می‌شود، هرگاه عناصر x_n، s_n برای هر عدد طبیعی n با روابط $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ یا به‌طور هم‌ارز با روابط $x_0 = s_0$ ، $x_n = s_n - s_{n-1}$ $(n \geq 1)$ با هم ارتباط برقرار کرده باشند ، x_n را n اُمین **جمله سری** و s_n را n اُمین **مجموع جزئی** سری می‌نامند. اغلب چنین سری را سری یا **جمله عمومی** x_n ، یا به طور ساده **سری** (x_n) و حتی گاهی اوقات ، باید استعمال کردن زبان ، سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ می‌نامند .

سری (x_n) را **همگرا** به s می‌نامند ، هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ ، s را **مجموع** سری نامیده ، می‌نویسیم :

$$s = x_0 + \cdots + x_n + \cdots$$

یا $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ، کمیت $r_n = s - s_n$ را n امین **باقیمانده** سری می‌نامند ، r_n مجموع سری است که جمله k ام آن به‌صورت x_{n+k} می‌باشد ؛ از تعریف نتیجه می‌شود $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

(۵ .۲ .۱) (محک کوشی) اگر سری یا جمله عمومی x_n همگرا باشد ، آنگاه ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 موجود است ، به‌طوری که برای $n \geq n_\circ$ و $p \geq 0$ ،

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon$$

به‌عکس ، اگر شرط فوق برقرار باشد و فضای E تام باشد ، آنگاه سری با جمله عمومی x_n همگرا خواهد بود.

محک فوق صرفاً کاربردی از محک کوشی برای دنباله (s_n) است. (بخش ۳ .۱۴ را ببینید).

گزاره زیر به‌عنوان نتیجه‌ای بدیهی از (۵ .۲ .۱) می‌باشد :

اگر سری با جمله عمومی x_n همگرا باشد ، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$. اما، شرط فوق شرطی لازم برای همگرائی سری است ، و نه شرطی کافی.

(۵ .۲ .۲) اگر سری‌های (x_n) و (x'_n) همگرا و دارای مجموع‌های s و s' باشند ، آنگاه ، سری $(x_n + x'_n)$ همگرا به مجموع $s + s'$ ، و سری (λx_n) برای هر اسکالر λ به λs همگرا است.

مطلب فوق از تعریف و از (۵ .۱ .۵) نتیجه می‌شود.

(۵ .۲ .۳) اگر (x_n) و (x'_n) دو سری باشند ، به‌طوری که ، برای هر n به استثنای تعدادی متناهی اندیس داشته باشیم $x'_n = x_n$، آنگاه هر دو سری همگرا یا هر دو واگرا خواهند بود.

در واقع، سری $(x'_n - x_n)$ همگرا است ، چون همه جملات آن به استثنای تعدادی متناهی از آنها

برابر صفر می‌باشد.

(۴ . ۲. ۵) فرض کنیم (k_n) دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح $k_n \geq 0$ با $k_0 = 0$ باشد. اگر سری (x_n) همگرا به s باشد، و اگر $y_n = \sum_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} x_p$ ، آنگاه، سری (y_n) نیز همگرا به s خواهد بود.

مطلب فوق فوراً از تساوی $\sum_{i=0}^{n} y_i = \sum_{j=0}^{k_{n+1}-1} x_j$ و از (۰ ۱. ۱۳. ۳) نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم (a_n) یک دنباله دلخواه در فضای نرم‌دار E باشد. نشان دهید که، یک دنباله (x_n) از نقاط E موجود است، به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ، و یک دنباله اکیداً صعودی (k_n) از اعداد صحیح موجود است، به‌طوری که، برای هر عدد طبیعی n ، $a_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k_n}$.

۲. فرض کنیم σ یک بیژیکسیون (نگاشت دوسوئی) از N بر روی N باشد، و برای هر n ، $\varphi(n)$ کوچک‌ترین تعداد از فاصله‌هائی مانند $[a , b]$ در N باشد، به‌طوری که اجتماع این فاصله‌ها برابر $\sigma([0 , n])$ باشد.

(a) فرض کنیم φ روی N کراندار، و (x_n) یک سری همگرا در فضای نرم‌دار E باشد. نشان دهید که، سری $(x_{\sigma(n)})$ در E همگرا است و $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

(b) فرض کنیم φ روی N غیر کراندار باشد. یک سری مانند (x_n) از اعداد حقیقی طوری تعریف کنید که همگرا باشد، اما، سری $(x_{\sigma(n)})$ در R همگرا نباشد. (با استقراء روی k دنباله اکیداً صعودی (m_k) از اعداد طبیعی را با خواص زیر تعریف کنید:

(۱) اگر n_k بزرگ‌ترین عنصر از $\sigma([0 , m_k])$ باشد، آنگاه $[0, n_k]$ در $\sigma([0 , m_{k+1}])$ واقع شود.

(۲) $\varphi(m_k) \geq k+1$.

سپس x_n را برای $n_k < n \leq n_{k+1}$ طوری تعریف کنید که، به استثنای $2k$ مقدار مناسب انتخاب شده از n ، که در هر یک از آنها به‌طور متناوب x_n برابر $\frac{1}{k}$ یا $-\frac{1}{k}$ است، $x_n = 0$ باشد.)

۳. فرض کنیم (x_n) یک سری همگرا در فضای نرم‌دار E، و σ یک بیژکسیون (نگاشت دو.سوئی) از N به روی N، و

$$r(n) = |\sigma(n) - n| . \sup_{m\geq n} \|x_m\|$$

باشد. نشان دهید که، اگر $\lim_{n\to\infty} r(n) = 0$ ، آنگاه، سری $(x_{\sigma(n)})$ در E همگرا است و $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

(تفاضل $\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} x_k$ را برای مقادیر بزرگ n ارزیابی کنید.)

۴. فرض کنیم $(x_{mn})(m \geq 0 ، n \geq 0)$ یک دنباله دوگانه از نقاط فضای نرم‌دار E باشد، و فرض کنیم که:

(۱) برای هر $m \geq 0$ ، سری $x_{m0} + x_{m1} + \cdots + x_{mn} + \cdots$ در E همگرا باشد؛ و y_m مجموع آن باشد، و

$$r_{mn} = x_{mn} + x_{m,n+1} + \cdots$$

(۲) برای هر $n \geq 0$ سری $r_{0n} + r_{1n} + \cdots + r_{mn} + \cdots$ در E همگرا، و مجموع آن برابر t_n باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر $n \geq 0$ سری $x_{0n} + x_{1n} + \cdots + x_{mn} + \cdots$ همگرا است؛ فرض کنیم z_n مجموع این سری باشد.

(b) برای اینکه داشته باشیم $\sum_{m=0}^{\infty} y_m = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ، لازم و کافی است که $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

۵. (a) نشان دهید که سری $\sum_{n\ge 1,\, n\ne m} \frac{1}{m^2-n^2}$ ، که در آن m یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است ، همگرا است ، و مجموع آن برابر $-3/4m^2$ است (کسر گویای $1/(m^2-x^2)$ را تجزیه کنید).

(b) فرض کنیم $u_{mn} = \frac{1}{m^2-n^2}$ اگر $m \ne n$ ، و $u_{nn} = 0$. نشان دهید که :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} \right) \ne 0$$

۶. اگر f یک تابع تعریف شده روی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ با مقادیری در یک فضای متریک باشد ، منظور از $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} f(m,n)$ حد تابع f است (اگر موجود باشد) در نقطه $(+\infty, +\infty)$ از فضای $\overline{\mathbf{R}}\times\overline{\mathbf{R}}$ ، نسبت به زیر فضای $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ (بخش (۳ .۱۳) را ببینید). فرض کنیم (x_{mn}) یک دنباله دوگانه از اعداد حقیقی باشد، و $s_{mn} = \sum_{h\le m,\, k\le n} x_{hk}$.

(a) اگر $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} s_{mn}$ موجود باشد ، آنگاه $\lim_{m\to\infty, n\to\infty} x_{mn} = 0$. مثالی ارائه کنید که در آن $x_{nm} = x_{mn}$ ، و برای $m \ge 2n+1$ ، $x_{m,2n} = -x_{m,2n+1} = -x_{m+1,2n}$ ، $x_{2n\;,2n} = 0$ ، و حد $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} s_{mn} = 0$ باشد، و هیچ یک از سری‌های $\cdots + x_{mn} + \cdots + x_{m1} + x_{m0}$ ، $\cdots + x_{mn} + \cdots + x_{1n} + x_{0n}$ همگرا نباشد.

(b) مثالی ارائه کنید که برای همه m و n ها $x_{mn} = 0$ مگر اینکه $m = n+1$ ، $m = n$ ، $n = m+1$ باشد (بنابراین ، همه سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$ ، $\sum_{m=0}^{\infty} x_{mn}$ همگرا هستند) ، برای همه اندیس‌های m ، n $\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} = 0$ ، اما حد $\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} s_{mn}$ موجود نباشد.

۳. سری‌های مطلقاً همگرا

(۵ .۳ .۱) برای اینکه سری (x_n) از اعداد مثبت همگرا باشد، لازم و کافی است که برای هر دنباله اکیداً صعودی (k_n) از اعداد صحیح $k_n \ge 0$ ، دنباله (s_{k_n}) از مجموع‌های جزئی سری از طرف بالا کراندار باشد ، و در این صورت ، مجموع $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ برابر با $\sup_n s_{k_n}$ است.

فرض $x_n \ge 0$ هم ارز $s_{n-1} \le s_n$ می‌باشد، و بنابراین ، از (۴ .۲ .۱) فوراً نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

در یک فضای باناخ E ، سری با جمله عمومی x_n را **مطلقاً همگرا** نامند ، هرگاه سری با جمله عمومی $\|x_n\|$ همگرا باشد.

(۵ .۳ .۲) در یک فضای باناخ E ، هر سری مطلقاً همگرای (x_n) ، همگرا است ، و $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

طبق فرض ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 موجود است ، به‌طوری که ، برای $n \ge n_0$ و هر $p \ge 0$ ، $\|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| \le \varepsilon$ ؛ بنابراین :

$$\|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \le \varepsilon .$$

که از آن طبق (۱. ۲. ۵) همگرائی سری (x_n) نتیجه می‌شود. علاوه بر این ، برای هر عدد طبیعی n داریم $\|x_0 + \cdots + x_n\| \le \|x_0\| + \cdots + \|x_n\|$ ، که از اصل گسترش نامساوی‌ها (۴. ۱۵. ۳) ، نامساوی $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|$ حاصل می‌شود.

(۳. ۳. ۵) اگر (x_n) یک سری مطلقاً همگرا و σ یک بیژکسیون از N به N باشد ، آنگاه ، سری (y_n) ، با $y_n = x_{\sigma(n)}$ ، یک سری مطلقاً همگرا خواهد بود، و $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ «خاصیت جابه‌جاپذیری» سری‌های مطلقاً همگرا) .

فرض کنیم برای هر عدد طبیعی n ، $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ ، $s'_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ ، و فرض کنیم m بزرگ‌ترین عدد طبیعی در مجموعه $\sigma([0 , n])$ باشد. در این صورت ، طبق تعریف $\sum_{k=0}^{n}\|y_k\| \le \sum_{i=0}^{m}\|x_i\|$ و از (۱. ۳. ۵) نتیجه می‌شود که، سری (y_n) مطلقاً همگرا است. علاوه بر این، برای هر $\varepsilon > 0$، فرض کنیم n_0 چنان انتخاب شده باشد که برای $n \ge n_0$ و $p \ge 0$ ، $\|x_{n-1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| \le \varepsilon$ ، در این‌صورت ، اگر m_0 بزرگ‌ترین عدد صحیح در $\sigma^{-1}([0 , n_0])$ باشد، آنگاه ، برای $n \ge m_0$ و $p \ge 0$ خواهیم داشت $\|y_{n+1}\| + \cdots + \|y_{n+p}\| \le \varepsilon$ ، علاوه بر این ، تفاضل $s'_{m_0} - s_{n_0}$ برابر مجموع جملاتی از x_j با $j > n_0$ است ، بنابراین $\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| \le \varepsilon$ ، و در نتیجه، برای $n \ge n_0$ و $n \ge m_0$ ، نامساوی $\|s'_n - s_n\| \le 3\varepsilon$ برقرار است ، و این نامساوی ثابت می‌کند که $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_n$.

فرض کنیم A یک مجموعه نامتناهی ـ شمارش‌پذیر باشد. گوئیم خانواده $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ از عناصر فضای باناخ E **به‌طور مطلق جمع‌پذیر**[1] است ، هرگاه ، برای یک بیژکسیون φ از N به روی A ، سری $(x_{\varphi(n)})$ به‌طور مطلق همگرا باشد. از (۳. ۳. ۵) نتیجه می‌شود که ، این خاصیت مستقل از انتخاب بیژکسیون خاص φ است ، و می‌توانیم **مجموع** خانواده $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ را به‌عنوان $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ تعریف نموده ، به صورت $\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$ نیز بنویسیم. چون هر مجموعه نامتناهی ـ شمارش‌پذیر $S \subset E$ را می‌توان به‌عنوان یک خانواده (با S به عنوان مجموعه اندیس‌ها) مورد بررسی قرار داد ، پس ما می‌توانیم از یک زیر مجموعه (نامتناهی ـ شمارش‌پذیر) **مطلقاً جمع‌پذیر** در فضای E و مجموع آن نیز صحبت کنیم.

---

1 . Absolutely summable = Абсолютно суммируемо

(۴ . ۳. ۵) برای اینکه خانواده نامتناهی ـ شمارش‌پذیر $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ از عناصر فضای باناخ E به طور مطلق جمع‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، مجموع‌های متناهی $\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\|$ ($J\subset A$ و متناهی است) کراندار باشد. در این‌صورت، برای هر $\varepsilon>0$، یک زیر مجموعه متناهی H از A موجود خواهد بود، به‌طوری که، برای هر زیر مجموعه متناهی K از A که در رابطه $H\cap K=\varnothing$ صدق می‌کند، $\sum_{\alpha\in K}\|x_\alpha\|\le\varepsilon$، و برای هر زیر مجموعه متناهی $L\supset H$ از A، $\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\|\le 2\varepsilon$.

دو حکم اول فوراً از تعریف و از (۱. ۳ . ۵) نتیجه می‌شود. در ادامه، برای هر زیر مجموعه متناهی $L\supset H$ از مجموعه A می‌توان نوشت $L=H\cup K$، که در آن $H\cap K=\varnothing$، بنابراین:

$$\|\sum_{\alpha\in L}x_\alpha-\sum_{\alpha\in H}x_\alpha\|\le\varepsilon\ .$$

از تعریف مجموع $\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$ نتیجه می‌شود که (بعد از مرتب کردن A به‌وسیله یک بیژکسیون دلخواه از N به روی A) $\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in H}x_\alpha\|\le\varepsilon$، و بنابراین $\|\sum_{\alpha\in A}x_\alpha-\sum_{\alpha\in L}x_\alpha\|\le 2\varepsilon$.

(۵ . ۳. ۵) فرض کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک خانواده به‌طور مطلق جمع‌پذیر از عناصر فضای باناخ E باشد. در این‌صورت، برای هر زیر مجموعه B از A، خانواده $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ به‌طور مطلق جمع‌پذیر است و $\|\sum_{\alpha\in B}x_\alpha\|\le\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$.

اگر B متناهی باشد، آنگاه از تعریف مستقیماً نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. اگر B نامتناهی باشد، در این صورت، برای هر زیر مجموعه متناهی J از B، $\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\|\le\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$، و نتیجه مطلوب از (۴. ۳. ۵) به‌دست می‌آید.

(۶ . ۳. ۵) فرض کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک خانواده مطلقاً جمع‌پذیر از عناصر فضای باناخ E؛ و (B_n) یک دنباله نامتناهی از زیر مجموعه‌های غیرتهی A باشد، به‌طوری که $A=\bigcup_n B_n$، و برای هر $p\ne q$، $B_p\cap B_q=\varnothing$. در این‌صورت، اگر $z_n=\sum_{\alpha\in B_n}x_\alpha$، آنگاه سری (z_n) به‌طور مطلق همگرا خواهد بود، و $\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{\alpha\in A}x_\alpha$ («خاصیت شرکت‌پذیری» سری‌های مطلقاً همگرا).

برای هر $\varepsilon>0$ و هر عدد صحیح $n\ge 0$، طبق (۲ . ۳ . ۵)، برای هر $k\le n$ زیر مجموعه‌ای متناهی مانند J_k از B_k موجود است، به‌طوری که $\|z_k\|\le\sum_{\alpha\in J_k}\|x_\alpha\|+\varepsilon/(n+1)$. بنابراین، اگر $J=\bigcup_{k=0}^{n}J_k$،

خواهیم داشت $\sum_{k=0}^{n}\|z_k\| \le \sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\| + \varepsilon \le \sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\| + \varepsilon$ ، و از (۱. ۳. ۵) نتیجه می‌شود که ، سری (z_n) به‌طور مطلق همگرا است. علاوه بر این ، فرض کنیم H زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد ، به طوری که ، برای هر زیر مجموعه متناهی K از A ، که $H \cap K = \varnothing$ ، داشته باشیم $\|\sum_{\alpha\in K} x_\alpha\| \le \varepsilon$ ، در این‌صورت ، برای هر زیر مجموعه متناهی L از A که شامل H است ، $\|\sum_{\alpha\in A} x_\alpha - \sum_{\alpha\in L} x_\alpha\| \le 2\varepsilon$ ((۴. ۳. ۵) را ببینید). فرض کنیم n_0 بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد ، به‌طوری که $H \cap B_{n_0} \neq \varnothing$ ، و فرض کنیم $n \ge n_0$ یک عدد صحیح دلخواه باشد. برای هر $k \le n$ ، فرض کنیم J_k یک زیر مجموعه متناهی از B_k باشد که شامل $H \cap B_k$ است، و برای هر زیر مجموعه متناهی L_k از B_k که شامل J_k است، نامساوی $\|z_k - \sum_{\alpha\in L_k} x_\alpha\| \le \varepsilon/(n+1)$ برقرار است ((۴. ۳. ۵) را ببینید) . در این‌صورت ،

اگر $L = \bigcup_{k=0}^{n} L_k$ ، خواهیم داشت $\|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{\alpha\in L} x_\alpha\| \le \varepsilon$ ، و چون $L \supset H$ ، از تعریف H نتیجه می‌شود که $\|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{\alpha\in A} x_\alpha\| \le 3\varepsilon$ و با این رابطه اثبات به پایان می‌رسد.

وقتی A به‌صورت تعدادی **متناهی** زیر مجموعه B_k $(1 \le k \le n)$ قابل نمایش باشد ، نتیجه‌ای مشابه (و به مراتب ساده‌تر) وجود دارد. به‌علاوه ، در این حالت ، (۶. ۳. ۵) دارای عکسی نیز هست ، به این ترتیب که ، اگر هر یک از خانواده‌های $(x_\alpha)_{\alpha\in B_k}$ به طور مطلق جمع‌پذیر باشد، آنگاه خانواده $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ نیز به‌طور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود. اثبات با استقراء روی n ، از محک (۴. ۳. ۵) نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم (d_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی $d_n \ge 0$ باشد ، به‌طوری که سری (d_n) همگرا نباشد (یعنی ، $\lim \sum_{k=0}^{n} d_k = +\infty$). درباره همگرایی سری‌های زیر چه می‌توان گفت[1] :

$$\frac{d_n}{1+d_n},\quad \frac{d_n}{1+nd_n},\quad \frac{d_n}{1+n^2 d_n},\quad \frac{d_n}{1+d_n^2}\ ?$$

۲. فرض کنیم (u_n) یک سری همگرا از اعداد حقیقی باشد ، که به‌طور مطلق همگرا نیست ، و فرض کنیم $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. نشان دهید که ، برای هر عدد $s' \ge s$ بیژکسیونی (نگاشتی دو سوئی) مانند σ از $\mathbf{N}$ بر روی $\mathbf{N}$ موجود است ، به‌طوری که ، برای هر n که $u_n \ge 0$ ، $\sigma(n) = n$ ، و $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = s'$ (با استقراء نشان دهید که برای هر n بیژکسیونی مانند σ_n

---

۱. با شیوه‌ای که مؤلف کتاب در معرفی سری‌ها به‌کار گرفته است ، منظور بررسی همگرایی سری‌هایی با جمله‌های عمومی داده شده می‌باشد. مترجم.

از N بروی N موجود است، به‌طوری‌که برای هر k که $u_k \ge 0$ ، $\sigma_n(k)=k$ و اگر $u_k^{(n)} = u_{\sigma_n(k)}$ ، اندیسی مانند p_n با این خاصیت وجود دارد که ، برای $k \ge p_n$ ،

$$|s' - \sum_{i=0}^{k} u_i^{(n)}| \le \frac{1}{n}$$

علاوه بر این ، نگاشت دوسوئی σ_{n+1} چنان است که ، برای همه k هائی که $\sigma_n(k) < p_n$ ، و برای همه k هائی که $u_k \le -\frac{1}{n}$ ، $\sigma_{n+1}(k) = \sigma_n(k)$.)

۳. نشان دهید که، برای هر خانواده متناهی $(x_i)_{i\in I}$ از نقاط فضای حاصل‌ضربی $\mathbf{R}^n$ (با نرم $\|x\| = \sup|\xi_k|$ ، برای $x = (\xi_k)_{1\le k\le n}$) ، داریم $\sum_{i\in I}\|x_i\| \le 2n \sup_{J\subset I}\|\sum_{i\in J} x_i\|$ (ابتدا حالت $n=1$ را مورد بررسی قرار دهید) .

۴. در فضای نرم‌دار E ، یک سری (x_n) را **به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا** نامند، هرگاه، برای هر بیژکسیون σ از N بر روی N ، سری $(x_{\sigma(n)})$ همگرا باشد.

(a) نشان دهید که ، برای اینکه سری همگرای (x_n) به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا باشد ، لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon > 0$ ، زیر مجموعه‌ای متناهی مانند J از N موجود باشد. به‌طوری که هر زیر مجموعه $H \subset N$ که $J \cap H = \varnothing$ ، داشته باشیم $\|\sum_{n\in H} x_n\| \le \varepsilon$. وقتی این شرط برقرار باشد، آنگاه مجموع $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ مستقل از σ خواهد بود. (برای اثبات آخرین حکم ، و کفایت شرط ، شبیه (۳. ۳. ۵) عمل کنید. برای نشان دادن اینکه ، شرط بیان شده لازم است ، از تناقض استفاده کنید : باید یک $\alpha > 0$ و تعدادی نامتناهی زیر مجموعه H_k $(k = 1, 2, \cdots)$ از N که هیچ دوتایی از آنها نقطه مشترکی با هم ندارند موجود باشد، به‌طوری که ، برای هر k ، $\|\sum_{n\in H_k} x_n\| \ge \alpha$. با شروع کردن از وجود این زیر مجموعه‌ها، σئی تعریف کنید که برای آن سری $(x_{\sigma(n)})$ همگرا نیست.)

(b) فرض کنیم سری (x_n)چنان باشد که ، برای هر دنباله اکیداً صعودی (n_k) از اعداد صحیح $n_k \ge 0$ سری (x_{n_k}) همگرا باشد. نشان دهید که ، سری (x_n) به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا است (از دلیلی مشابه در (a) استفاده کنید). عکس مطلب فوق را وقتی E یک فضای تام باشد ثابت کنید (از محک ثابت شده در (a) استفاده کنید).

(c) اگر $E = \mathbf{R}^n$ ، نشان دهید که ، هر سری به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا در E به‌طور مطلق همگرا است (از مسئله (۳) و محک (a) استفاده کنید).

(d) خاصیت شرکت‌پذیری (۶ . ۳ . ۵) را برای سری‌های به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا تعمیم دهید.

۵. فرض کنیم E یک فضای‌برداری حقیقی باشد ، که از همه دنباله‌های نامتناهی $x = (\xi_n)_{n\ge 0}$ اعداد حقیقی که در شرط $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ صدق می‌کنند، تشکیل شده باشد. برای هر $x \in E$، فرض کنیم $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$.

(a) نشان دهید که، $\|x\|$ یک نرم روی E است ، و E با این نرم یک فضای باناخ است (**فضای (c_0) باناخ**[1]) .

(b) فرض کنیم e_m دنباله $(\delta_{mn})_{n\ge 0}$ با $\delta_{mn} = 0$ برای $m \ne n$ و $\delta_{mm} = 1$ باشد. نشان دهید که ، برای هر نقطه $x = (\xi_n) \in E$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ در E به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا است ، و مجموع آن برابر x می‌باشد. مثالی ارائه دهید که در آن سری به‌طور مطلق همگرا نباشد.

۶. [2] (a) فرض کنیم (s_n) دنباله‌ای صعودی از اعداد اکیداً مثبت باشد که به سمت $+\infty$ میل می‌کند. نشان دهید که، سری با جمله عمومی $(s_n - s_{n-1})/s_n$ دارای مجموعی نامتناهی است. برای هر عدد $\rho > 0$، نشان دهید که، سری با جمله عمومی $(s_n - s_{n-1})/s_n s_{n-1}^{\rho}$ همگرا است؛ مقایسه کنید با سری که جمله عمومی آن به‌صورت زیر باشد :

---

1 . The space (c_0) of Banch = Пространство (c_0) Банаха

۲. مسئله ۶ در برگردان چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد . مترجم.

$$\frac{1}{s_{n-1}^{\rho}} - \frac{1}{s_n^{\rho}}$$

(b) فرض کنیم $(u_n)_{n\ge 0}$ دنباله‌ای از اعداد $u_n \ge 0$ باشد، به‌طوری که $u_0 > 0$ ، و فرض کنیم برای هر $n \ge 0$ ، $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ، نشان دهید که ، شرط لازم و کافی برای اینکه سری با جلمه عمومی u_n همگرا باشد، این است که ، سری با جمله عمومی u_n / s_n همگرا باشد[۱] (از (a) استفاده کنید).

۷. [۲] فرض کنیم (u_n) یک سری همگرا از اعداد $u_n \ge 0$ باشد. نشان دهید که، دنباله‌ای صعودی مانند (c_n) از اعداد $c_n > 0$ موجود است، به‌طوری $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ ، و سری $(c_n u_n)$ همگرا است.

۸. [۲] فرض کنیم (u_n) یک سری همگرا از اعداد $u_n \ge 0$ باشد. نشان دهید که :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n} = 0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

(بنویسید $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$) .

۴. زیر فضاها و حاصلضرب‌های متناهی فضاهای نرم‌دار

فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار، و F یک **زیر فضای برداری**[۳] از E باشد (یعنی، زیر مجموعه‌ای از E به‌طوری که، اگر α و β دو اسکالر دلخواه و $x \in F$ و $y \in F$ دو عنصر دلخواه از F باشند، داشته باشیم $\alpha x + \beta y \in F$). واضح است که، تحدید نرم فضای E به F نرمی روی F خواهد بود که، روی F فاصله و توپولوژی القاء شده از فضای E را تعریف می‌کند. وقتی صحبت از یک « زیر فضای» E است، در حالت کلی، منظورمان یک زیر فضای برداری با نرم القاء شده است. وقتی E یک فضای باناخ باشد، هر زیر فضای بسته F از E طبق (۵ . ۱۴ .۳) یک فضای باناخ خواهد بود. به‌عکس، اگر زیر فضای F از فضای نرم‌دار E یک فضای باناخ باشد، طبق (۴. ۱۴. ۳) ، F در E بسته خواهد بود.

(۱. ۴. ۵) اگر F یک زیرفضای برداری از فضای نرم‌دار E باشد ، آنگاه $\bar{F}$ بستار آن در E یک زیر فضای برداری خواهد بود.

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ نوشته شده است $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد. مترجم.

۲. مسائل ۷ و ۸ در برگردان چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارند . مترجم.

3 . Vector subspace = Векторное подпространство

طبق فرض، نگاشت $(x, y) \to x + y$ از $E \times E$ به E، $F \times F$ را به F می‌نگارد. بنابراین، طبق (۴ . ۱۱. ۳)، نگاشت فوق $\overline{F \times F}$ را به $\overline{F}$ می‌نگارد. زیرا، طبق (۳. ۲۰. ۳)، $\overline{F \times F} = \overline{F} \times \overline{F}$ ؛ و از روابط $x \in \overline{F}$ و $y \in \overline{F}$ نتیجه می‌شود $x + y \in \overline{F}$. با استفاده از پیوستگی نگاشت $(\lambda, x) \to \lambda x$ به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم که، اگر λ یک اسکالر دلخواه و $x \in \overline{F}$ باشد، آنگاه $\lambda x \in \overline{F}$.

گوییم زیر مجموعه A از فضای نرم‌دار E یک زیر مجموعه **جامع** (**کلی ـ تام ـ تمام**)[1] است، هرگاه ترکیب‌های خطی (متناهی) بردارهای A یک زیر فضای **چگال** در E تشکیل دهند. خانواده (x_α) را جامع (**کلی ـ تام ـ تمام**) نامند، هرگاه مجموعه عناصر آن یک زیر مجموعه جامع (کلی ـ تام ـ تمام) از فضای نرم‌دار E باشد.

فرض کنیم E_1 ، E_2 دو فضای نرم‌دار باشند. فضای برداری حاصلضرب $E = E_1 \times E_2$ (با $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ و $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مستقیماً می‌توان تحقیق نمود که، نگاشت $(x_1, x_2) \to \sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$ یک نرم روی E است، که روی E فاصله‌ای مطابق با فاصله‌های روی E_1، E_2 تعریف می‌کند، و بنابراین، توپولوژی ناشی از این نرم روی فضای $E_1 \times E_2$ مانند توپولوژی تعریف شده در بخش ۳. ۲۰ خواهد بود. اینژکسیون‌های «طبیعی» $x_1 \to (x_1, 0)$, $x_2 \to (0, x_2)$ ایزومتری‌هایی خطی از فضاهای E_1 ، E_2 به ترتیب بر روی زیر فضاهای بسته $E'_1 = E_1 \times \{0\}$ ، $E'_2 = \{0\} \times E_2$ از فضای E می‌باشند ((۱۱. ۲۰. ۳) را ببینید)، و E برابر مجموع مستقیم زیر فضاهای E'_1 و E'_2 ، که اغلب آن‌ها را به ترتیب با E_1 ، E_2 یکی می‌گیرند، می‌باشد.

به عکس، فرض کنیم فضای نرم‌دار E **مجموع مستقیم**[2] دو زیر فضای برداری F_1 و F_2 باشد. هر عنصر $x \in E$ را می‌توان با روشی یکتا به صورت $x = p_1(x) + p_2(x)$ ، با $p_1(x) \in F_1$ ، $p_2(x) \in F_2$ نوشت، و p_1 و p_2 به ترتیب نگاشت‌هایی خطی از فضای E به F_1 و F_2 هستند («تصاویر» فضای E بر روی F_1 و F_2). نگاشت «طبیعی» $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$ یک بیژکسیون خطی از فضای حاصلضرب $F_1 \times F_2$ بر روی E است، که طبق (۵. ۱. ۵) پیوسته می‌باشد، اما، لزوماً از دو طرف پیوسته نیست (نگاه کنید به بخش ۵ . ۶، مسئله ۲).

(۲. ۴. ۵) برای اینکه نگاشت $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$ یک هومیومورفیسم از $F_1 \times F_2$ بر روی E باشد، لازم و کافی است که، یکی از نگاشت‌های خطی p_1 ، p_2 پیوسته باشد.

---

۱. واژه‌های جامع، کلی، تام، تمام به‌عنوان برگردان‌هایی از واژه انگلیسی Total و واژه روسی Тотально انتخاب شده است. مترجم.

2 . Direct sum = Прямая сума

از رابطه $x = p_1(x) + p_2(x)$ دیده می‌شود که ، اگر یکی از نگاشت‌های p_1 ، p_2 پیوسته باشد، دیگری نیز پیوسته خواهد بود. نگاشت $x \to (p_1(x), p_2(x))$ از E بر روی $F_1 \times F_2$ دارای نگاشت معکوس $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$ می‌باشد، و از (۴ . ۲۰. ۳) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

وقتی شرط گزاره (۲. ۴ . ۵) برقرار باشد ، E را **مجموع مستقیم توپولوژیک**[1] فضاهای F_1 و F_2 می‌نامند. یک زیر فضای F از E که برای آن زیر فضای دیگری مانند G وجود داشته باشد ، به‌طوری که E مجموع مستقیم توپولوژیک F و G باشد، **سازه (جمعوند) مستقیم توپولوژیک**[2] E می‌نامند، و هر زیر فضای G که دارای خاصیت فوق باشد، **مکمل توپولوژیک**[3] F نامیده می‌شود. طبق ، (۱۱. ۲۰. ۳) ، هر سازه (جمعوند) مستقیم توپولوژیک لزوماً بسته است، اما، ممکن است زیر فضاهای بسته‌ای وجود داشته باشند، که سازه (جمعوند) مستقیم توپولوژیک نباشند (اگرچه هر زیر فضا همیشه دارای **مکمل جبری**[4] در E است). برای دیدن مثال‌هایی از چنین فضاهایی مراجعه کنید به کتاب بورباکی [6] فصل IV ، صفحه 119 تمرین 5c و صفحه 122 تمرین 17b.

با استقراء روی n ، تعریف‌ها و نتایج مربوط به حاصلضرب دو فضای نرم‌دار را می‌توان مستقیماً به حاصلضرب تعدادی متناهی از فضاهای نرم‌دار تعمیم داد.

۵. شرط پیوستگی یک نگاشت چند خطی

(۵ . ۵ . ۱) فرض کنیم E_1 ، ... ، E_n ، n فضای نرم‌دار، F یک فضای نرم‌دار، و u یک نگاشت چند خطی از $E_1 \times \cdots \times E_n$ به F باشد. برای اینکه u پیوسته باشد، لازم و کافی است که یک عدد $a > 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ،

$$\| u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \le a . \|x_1\| . \|x_2\| \cdots \|x_n\| .$$

ما گزاره فوق را برای $n = 2$ ثابت می‌کنیم.

۱. **کفایت.** برای اثبات اینکه u در هر نقطه (c_1, c_2) پیوسته است، می‌نویسیم :

$$u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2) = u(x_1 - c_1, x_2) + u(c_1, x_2 - c_2) .$$

بنابراین :

$$\| u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \le a (\| x_1 - c_1\| . \| x_2 \| + \| c_1\| \ \| x_2 - c_2 \|).$$

برای هر δ که $0 < \delta < 1$ ، فرض کنیم ، $\|x_1 - c_1\| \le \delta$ ، $\|x_2 - c_2\| \le \delta$ ، در این‌صورت :

$$\|x_2\| \le \|c_2\| + 1$$

1 . Topological direct sum = Топологическая прямая сумма
2 . Topological direct summand = Топлогическое прямое слагаемое
3 . Topological supplement = Тополгическое дополнение
4 . Algebraic supplement = Алгебаичеекое дополнение

و بنابراین، خواهیم داشت :

$$\| u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\| \leq a\ (\| c_1\| + \| c_2\| + 1)\ \delta$$

که با کوچک کردن δ می‌توان عبارت سمت چپ را به‌طور دلخواه کوچک نمود.

۲. **لزوم.** اگر u در نقطه $(0\ ,\ 0)$ پیوسته باشد ، آنگاه گویی مانند B به‌صورت $\sup(\|x_1\|\ ,\ \|x_2\|) \leq r$ در $E_1 \times E_2$ موجود خواهد بود، به‌طوری که ، از رابطه $(x_1\ ,\ x_2) \in B$ نتیجه می‌شود $\| u\ (x_1\ ,\ x_2)\ \| \leq 1$.
اکنون فرض کنیم $(x_1\ ,\ x_2)$ یک نقطه دلخواه باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ باشد ، در این صورت ، اگر $z_1 = r x_1 / \| x_1 \|$ ، $z_2 = r x_2 / \| x_2 \|$ ، خواهیم داشت : $\| z_1\| = \| z_2\| = r$ ، بنابراین $\|u(z_1\ ,\ z_2)\ \| \leq 1$. اما :

$$u(z_1, z_2) = r^2 u(x_1, x_2)/\|x_1\| . \|x_2\|$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود $\|u(x_1\ ,\ x_2)\ \| \leq a\ \|x_1\|\ .\ \|x_2\|$ که در آن $a = 1/r^2$. اگر $x_1 = 0$ یا $x_2 = 0$ ، $u(x_1\ ,\ x_2) = 0$ ، بنابراین ، نامساوی فوق در این حالت نیز برقرار است.

(۵ . ۵ . ۲) فرض کنیم u یک نگاشت خطی پیوسته از فضای باناخ E به فضای باناخ F باشد. اگر (x_n) یک سری همگرا (به ترتیب مطلقاً همگرا) در E باشد ، آنگاه $(u\ (x_n))$ یک سری همگرا (به ترتیب مطلقاً همگرا) در F خواهد بود، و $\sum\limits_n u(x_n) = u\ (\sum\limits_n x_n)$.

همگرایی سری $(u(x_n))$ و تساوی $\sum\limits_n u(x_n) = u\ (\sum\limits_n x_n)$ فوراً از تعریف پیوستگی یک نگاشت خطی نتیجه می‌شود ((۴ . ۱۳ . ۳) را ببینید). از (۱. ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که ، ثابتی مانند $a > 0$ موجود است به‌طوری که برای هر n ، $\| u(x_n)\| \leq a \| x_n \|$. بنابراین، طبق (۱. ۳. ۵)، اگر سری (x_n) به‌طور مطلق همگرا باشد، سری $(u(x_n))$ نیز به‌طور مطلق همگرا خواهد بود.

(۵ . ۵ . ۳) فرض کنیم E ، F و G سه فضای باناخ ، و u یک نگاشت پیوسته دو خطی از $E \times F$ به G باشد. اگر (x_n) یک سری مطلقاً همگرا در E ، و (y_n) یک سری مطلقاً همگرا در F باشد ، آنگاه خانواده $(u(x_m\ ,\ y_n))$ به‌طور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود و

$$\sum_{m,n} u\ (x_m\ ,\ y_n) = u\ (\sum_n\ x_n\ , \sum_n y_n)$$

با استفاده از محک (۴ . ۳ . ۵) ، باید ثابت کنیم که ، برای هر عدد طبیعی p ، مجموع‌های $\sum\limits_{m \leq p\ ,n \leq p} \| u(x_m\ ,\ y_n)\|$ کراندار هستند.[1] اما ، طبق (۱. ۵ . ۵) ، ثابتی مانند $a > 0$ موجود است،

---

۱. منظور این است که ، عددی ثابت مانند M مستقل از p وجود دارد ، به‌طوری که ، برای هر عدد طبیعی p، نامساوی $\sum\limits_{m \leq p\ ,n \leq p} \| u(x_m\ ,\ y_n)\| \leq M$ برقرار است. مترجم

به‌طوری که $\| u(x_m , y_n) \| \le a \| x_m \| . \| y_n \|$. بنابراین، سمت چپ نامساوی :

$$\sum_{m \le p, n \le p} \| u(x_m , y_m) \| \le a \sum_{m \le p, n \le p} \|x_m\| . \|y_n\| = a \left(\sum_{n=0}^{p} \| x_n \|\right) \left(\sum_{n=0}^{p} \| y_n \|\right)$$

طبق فرض‌هایی که در رابطه با سری‌های (x_n) و (y_n) کرده‌ایم، کراندار خواهد بود. علاوه بر این، از (۶ . ۳ . ۵) و (۲. ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که، اگر $s = \sum_n x_n$ ، $s' = \sum_n y_n$ ، آنگاه :

$$\sum_{m , n} u(x_m , y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} u(x_m , y_n)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} u(x_m , s') = u(s , s')$$

(۴ . ۵ . ۵) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار ، F یک فضای باناخ ، G یک زیرفضای چگال در E ، و f یک نگاشت خطی پیوسته از G به F باشد. در این‌صورت ، نگاشت یکتای خطی پیوسته $\overline{f}$ از E به F موجود خواهد بود که گسترشی (توسیعی) از نگاشت f است.

از (۱ . ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که ، f روی G به‌طور یکنواخت پیوسته است. زیرا :

$$\| f(x) - f(y) \| = \| f(x - y) \| \le a . \| x - y \| .$$

بنابراین، طبق (۶ . ۱۵ . ۳) ، یک گسترش (توسیع) پیوسته یکتای $\overline{f}$ از f روی E موجود خواهد بود. خطی بودن $\overline{f}$ از (۱۵ . ۱ . ۵) و اصل گسترش تساوی‌ها (۲. ۱۵ . ۳) نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم u نگاشتی از فضای نرم‌دار E به فضای نرم‌دار F باشد، به‌طوری که ، برای هر زوج x ، y از نقاط E ، $u(x+y) = u(x) + u(y)$ و u روی گوی $B(0,1)$ از فضای E کراندار باشد. نشان دهید که u خطی و پیوسته است. (ملاحظه کنید که، برای هر عدد گویای r ، $u(rx) = ru(x)$ ، و برای هر $y \in B(0,1)$ و هر عدد صحیح $n \ge 1$ ، $\| u(x + \frac{1}{n} y) - u(x) \| \le \frac{1}{n} \| u(y) \|$ ، با انتخاب $y = n(r - \lambda)x$ وقتی r عددی گویا باشد، نتیجه بگیرید، برای هر عدد حقیقی[1] λ ، $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.)

۲. فرض کنیم E ، F دو فضای نرم‌دار، و u نگاشتی خطی از E به F باشد. نشان دهید که اگر برای هر دنباله (x_n) در E که $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ ، دنباله $(u(x_n))$ در F کراندار باشد، آنگاه u پیوسته خواهد بود. (اثباتی غیرمستقیم (با برهان خلف) ارائه دهید.)

۳. (a) فرض کنیم a ، b دو نقطه در فضای نرم‌دار E باشد. فرض کنیم B_1 مجموعه همه نقاط $x \in E$ باشد، که $\|x - a\| = \| x - b \| = \| a - b \| / 2$. برای $n > 1$ ، فرض کنیم B_n مجموعه $x \in B_{n-1}$هائی باشد که برای همه

---

۱. طرز بیان مطالب فوق در چاپ اول متن روسی کتاب کمی متفاوت از چاپ دوم متن انگلیسی آن است که در این مسئله مورد استفاده قرار گرفته است ، و از خواننده خواسته شده است ، ابتدا روابط :

$$\| u(x+y) \| \le \| u(x) \| + \| u(y) \| , u(rx) = ru(x)$$

را وقتی r عددی گویا باشد ، ثابت نموده ، و برای اثبات رابطه :

$$u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

وقتی λ یک عدد حقیقی دلخواه است ، از بحثی که در مسأله ۱ بند ۲ . ۴ مطرح شده ، استفاده نماید. مترجم.

$y \in B_{n-1}$ها، $\| x - y \| \le \delta(B_{n-1})/2$ ($\delta(A)$ قطر مجموعه A است). نشان دهید که $\delta(B_n) \le \delta(B_{n-1})/2$ و اشتراک همه B_nها به نقطه $(a+b)/2$ تقلیل می‌یابد.

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، اگر f یک ایزومتری از فضای نرم‌دار حقیقی E بر روی فضای نرم‌دار حقیقی F باشد، آنگاه $f(x) = u(x) + c$ ، که در آن u یک ایزومتری خطی و $c \in F$ است.

۴. حاصلضرب دو فاصله از N را یک **مستطیل** در $N \times N$ می‌نامیم. برای هر زیر مجموعه متناهی H از $N \times N$، فرض کنیم $\psi(H)$ کوچک‌ترین تعداد مستطیل‌هایی باشد که اجتماع آنها H است، و فرض کنیم (H_n) یک دنباله صعودی از زیر مجموعه‌های متناهی $N \times N$ باشد، که اجتماع آنها برابر $N \times N$ است، و $(\psi(H_n))$ کراندار است، و نیز فرض کنیم E ، F و G سه فضای نرم‌دار ، (x_n) (به ترتیب (y_n)) یک سری همگرا در E (به ترتیب در F) و f یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به G باشد. نشان دهید که :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(h,k)\in H_n} f(x_h , y_k) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n , \sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) \qquad (*)$$

۵. فرض کنیم (H_n) دنباله‌ای صعودی از زیر مجموعه‌های متناهی $N \times N$ باشد ، که اجتماع آنها $N \times N$ است. برای هر $j \in N$ و هر $n \in N$ ، فرض کنیم $\varphi(j, n)$ کوچک‌ترین عده فاصله‌های N باشد که اجتماع آنها مجموعه $H_n^{-1}(j)$ از همه اعداد صحیحی مانند i تشکیل شده است که $(i, j) \in H_n$. فرض کنیم $\varphi(j, n)$ روی $N \times N$ **کراندار باشد**، و (x_n) یک سری همگرا در فضای نرم‌دار E ، (y_n) یک سری مطلقاً همگرا در فضای نرم‌دار F و u یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به فضای نرم‌دار G باشد. نشان دهید که ، فرمول (*) مسئله (۴) باز هم معتبر است. (از (۱. ۵. ۵) ، استفاده نموده، ملاحظه کنید که، مجموع‌های $\sum_{(i, j) \in H_n} x_i$ برای همه jها و n ها در E کراندار می‌باشد).

۶. [1] فرض کنیم E ، F دو فضای حقیقی نرم‌دار باشند، نگاشت f از E به F را **در یک همسایگی صفر خطی** نامند ، هرگاه یک $\delta > 0$ موجود باشد، به‌طوری که : (۱) از روابط $\| x \| \le \delta$ ، $\| x' \| < \delta$ ، $\| x + x' \| \le \delta$ در E نتیجه شود $f(x + x') = f(x) + f(x')$ ، (۲) از روابط $\| x \| \le \delta$ ، $\| \lambda x \| \le \delta$ (با $\lambda \in R$) در E نتیجه شود $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

(a) نشان دهید که ، اگر f در شرط (۱) صدق کند ؛ و در نقطه 0 پیوسته باشد ، آنگاه f در یک همسایگی صفر پیوسته و در یک همسایگی صفر خطی خواهد بود (مقایسه کنید با مسئله ۱) .

(b) فرض کنیم g نگاشتی از E به F باشد. برای اینکه g در نقطه 0 پیوسته و در یک همسایگی 0 خطی باشد، لازم و کافی است که ، برای هر سری همگرای (x_n) در E ، مجموع‌های جزئی سری $(g(x_n))$ در F کراندار باشد. (برای اثبات کردن کفایت شرط ، ابتدا ملاحظه کنید که باید داشته باشیم $g(0) = 0$ ؛ اگر برای هر n، سه عنصر u_n ، v_n ، w_n از E موجود باشد ، به‌طوری که $\|u_n\| \le 2^{-n}$ ، $\|v_n\| \le 2^{-n}$ ، $\|w_n\| \le 2^{-n}$ ، $u_n + v_n + w_n = 0$ و :

$$g(u_n) + g(v_n) + g(w_n) \neq 0,$$

یک سری (x_n) بسازید که با فرض در تناقض باشد. اگر چنین دنباله‌های u_n ، v_n ، w_n موجود نباشند ، g در شرط (۱) صدق می‌کند ؛ نشان دهید که ، این لزوماً پیوستگی در نقطه 0 است.)

۶ . نرم‌های هم‌ارز

فرض کنیم E یک فضای برداری (روی هیأت اعداد حقیقی یا مختلط) و $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ دو نرم روی E باشد. گوییم نرم $\|x\|_1$ از نرم $\|x\|_2$ **ظریف‌تر (قوی‌تر)**[2] است، هرگاه، توپولوژی تعریف شده به‌وسیله

---

۱. مسئله ۶ در چاپ نخست برگردان روسی کتاب وجود ندارد ، اما ، در چاپ دوم متن انگلیسی آن وجود دارد. مترجم.

2 . Finer = Сильнее

در برگردان روسی کتاب به جای واژه انگلیسی Finer (ظریف‌تر) از واژه Сильнее (قوی‌تر) استفاده شده است. مترجم.

$\|x\|_1$ ظریفتر (قوی‌تر) از توپولوژی تعریف شده به‌وسیله $\|x\|_2$ باشد. (بخش ۱۲ . ۳ را ببینید). اگر E_1 (به ترتیب E_2) فضای نرم‌دار ناشی از $\|x\|_1$ (به ترتیب $\|x\|_2$) باشد ، آنگاه ، معنی مطلب فوق این است که ، نگاشت همانی $x \to x$ از E_1 به E_2 پیوسته است. بنابراین ، طبق (۱. ۵ . ۵) ، شرط فوق هم‌ارز این است که ، عددی مانند $a > 0$ موجود خواهد بود ، به‌طوری که $\|x\|_2 \leq a\|x\|_1$. گوییم ، دو نرم $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ هم‌ارز هستند، اگر این نرم‌ها توپولوژی یکسانی روی E تعریف کنند. از نکته اخیر فوراً نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

(۱. ۶ . ۵) برای اینکه دو نرم $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ روی فضای برداری E هم‌ارز باشند ، لازم و کافی است که دو عدد ثابت $a > 0$ و $b > 0$ موجود باشند ، به‌طوری‌که ، برای هر نقطه $x \in E$ ،

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

در چنین حالتی ، فاصله‌های متناظر با این نرم‌ها **به‌طور یکنواخت هم‌ارز** هستند (بخش ۱۴. ۳ را ببینید).

به‌عنوان مثال ، روی $E_1 \times E_2$ حاصلضرب دو فضای نرم‌دار E_1 و E_2 ، نرم‌های $\sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$ ، $\|x_1\| + \|x_2\|$ ، $(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{1/2}$ هم‌ارز هستند. روی فضای $E = \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathbf{I})$ ، نُرم $\|f\|_1$ که در (۴. ۱. ۵) تعریف شده است ، هم ارز نرم $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{I}} |f(t)|$ نیست. (بخش ۱. ۵ ، مسئله ۱ را ببینید).

۷. فضاهای نگاشت‌های چند خطی پیوسته

فرض کنیم E ، F دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعه $\mathscr{L}(E ; F)$ تشکیل شده از همه نگاشت‌های خطی پیوسته از E به F یک فضای برداری است. این مطلب از (۵ . ۱. ۵) ، (۴ . ۲۰. ۳) و (۵ . ۱۱. ۳) نتیجه می‌شود.

برای هر $u \in \mathscr{L}(E ; F)$، فرض کنیم $\|u\|$ بزرگ‌ترین کران پایین (g.l.b) همه ثابت‌های $a > 0$ باشد که برای همه x ها در رابطه $\|u(x)\| \leq a\|x\|$ صدق می‌کنند (۱. ۵ . ۵ را ببینید). همچنین، می‌توان نوشت :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \qquad (۵ .۷ .۱)$$

زیرا ، طبق تعریف ، برای هر $a > \|u\|$ ، و $\|x\| \leq 1$ ، داریم $\|u(x)\| \leq a$ ، بنابراین $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \|u\|$ مطلب فوق رابطه (۱. ۷ . ۵) را در حالتی که $\|u\| = 0$ است، ثابت می‌کند. اگر $\|u\| > 0$ باشد ، آنگاه برای هر $0 < b < \|u\|$ ، نقطه‌ای مانند $x \in E$ موجود است ، به‌طوری که $\|u(x)\| > b\|x\|$. از این رابطه

نتیجه می‌شود $x \neq 0$. بنابراین ، اگر $z = x/\|x\|$ ، باز هم خواهیم داشت $b = \|z\| b < \|u(z)\|$ ، و چون $\|z\| = 1$ است ، از مطلب فوق نتیجه می‌شود که $\|u(x)\| \sup_{\|x\| \leq 1} \leq b$. بنابراین $\|u\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ ، و (۱. ۷. ۵) ثابت می‌شود. همچنین ، با دلیلی مشابه می‌توان نشان داد که ، اگر $E \neq \{0\}$ باشد ، آنگاه :

$$\|u\| = \sup_{\|z\| = 1} \|u(z)\| \qquad (۵.۷.۲)$$

اکنون نشان می‌دهیم که ، $\|u\|$ یک نرم روی فضای برداری $\mathscr{L}(E ; F)$ است. در واقع ، اگر $u = 0$ ، آنگاه ، طبق (۱. ۷. ۵)، $\|u\| = 0$ ، و برعکس ، اگر $\|u\| = 0$ ، آنگاه برای هر $\|x\| \leq 1$, $u(x) = 0$. بنابراین ، برای هر $x \neq 0$ در E ، $u(x) = \|x\| u(\frac{x}{\|x\|}) = 0$. همچنین ، از (۱. ۷. ۵) نتیجه می‌شود که $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ بالاخره ، اگر $w = u + v$ ، خواهیم داشت $\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$ ، و بنابراین ، طبق (۱. ۷. ۵) ، $\|w\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(۳. ۷. ۵) اگر F یک فضای تام باشد ، آنگاه $\mathscr{L}(E ; F)$ نیز فضایی تام خواهد بود.

در واقع، اگر (u_n) یک دنباله کوشی در $\mathscr{L}(E ; F)$ باشد؛ برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی n_0 موجود خواهد بود، به‌طوری که برای $m \geq n_0$ ، $n \geq n_0$ ، رابطه $\|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$ برقرار است. طبق (۱. ۷. ۵) ، برای هر x که $\|x\| \leq 1$ ، رابطه $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$ برای $m \geq n_0$ ، $n \geq n_0$ برقرار است. مطلب فوق نشان می‌دهد که ، $(u_n(x))$ یک دنباله کوشی در F است. بنابراین ، به عنصری مانند $v(x) \in F$ همگرا خواهد بود. این مطلب برای هر $x \in E$ نیز درست است، زیرا، می‌توان نوشت $x = \lambda z$ ، که در آن $\|z\| \leq 1$. بنابراین $u_n(x) = \lambda u_n(z)$ به سمت حد $v(x) = \lambda v(z)$ میل خواهد کرد. از رابطه $u_n(x + y) = u_n(x) + u_n(y)$ و از (۵. ۱. ۵) نتیجه می‌شود $v(x + y) = v(x) + v(y)$، و به طریق مشابه، می‌توان نشان داد که $v(\lambda x) = \lambda v(x)$ ، به عبارت دیگر ، v نگاشتی خطی است. بالاخره ، برای $m \geq n_0$ ، $n \geq n_0$ ، و $\|x\| \leq 1$ از رابطه $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$ نتیجه می‌شود که ، برای $n \geq n_0$ و $\|x\| \leq 1$ ، $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$ و بنابراین $\|v(x)\| \leq \|u_n\| + \varepsilon$ ، که طبق (۱. ۵. ۵) ، از آن نتیجه می‌شود v پیوسته، و بنابراین ، عضوی از $\mathscr{L}(E ; F)$ خواهد بود. علاوه بر این، طبق (۱. ۷. ۵) ، برای $n \geq n_0$، $\|v - u_n\| \leq \varepsilon$ ، که ثابت می‌کند دنباله (u_n) به v همگرا است.

از تعریف نتیجه می‌شود که، برای هر $x \in E$ و هر $u \in \mathscr{L}(E ; F)$ ،

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\| \qquad (۵.۷.۴)$$

که ثابت می‌کند ، نگاشت دو خطی $(x, u) \to u(x)$ از $E \times \mathscr{L}(E ; F)$ به F ، طبق (۱. ۵. ۵) ، پیوسته است.

تعریف نرم در $\mathscr{L}(E ; F)$ وابسته به نرم‌های روی E و F است. اما، به سادگی دیده می‌شود که،

وقتی نرم‌های روی E و F با نرم‌هایی هم‌ارز آنها (بخش ۶ . ۵ را ببینید) تعویض شوند ، نرم جدید روی $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\,\mathrm{F})$ با نرم قدیم هم‌ارز خواهد بود.

(۵ . ۷ . ۵) فرض کنیم u یک نگاشت خطی پیوسته از فضای نرم‌دار E به فضای نرم‌دار F ، و v یک نگاشت خطی پیوسته از F به فضای نرم‌دار G باشد. در این‌صورت $\|v\circ u\| \le \|v\| \,.\, \|u\|$.

در واقع ، اگر $\|x\| \le 1$ ، آنگاه ، طبق (۴. ۷. ۵) ، $\|v(u(x))\| \le \|v\| \,.\, \|u(x)\| \le \|v\| \,.\, \|u\|$ و از (۱. ۷. ۵) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۶ . ۷. ۵) اگر F یک فضای نرم‌دار حقیقی (به ترتیب مختلط) باشد، نگاشتی که به هر عنصر $a \in \mathrm{F}$ عنصر $\theta_a : \xi \to \xi a$ از $\mathscr{L}(\mathbf{R}\,,\,\mathrm{F})$ (به ترتیب $\mathscr{L}(\mathbf{C}\,,\,\mathrm{F})$) مربوط می‌کند، یک ایزومتری خطی از فضای F بر روی $\mathscr{L}(\mathbf{R}\,,\,\mathrm{F})$ (به ترتیب $\mathscr{L}(\mathbf{C}\,,\,\mathrm{F})$) است.

نگاشت $a \to \theta_a$ به وضوح خطی است. این نگاشت پوشا است. زیرا ، هر نگاشت خطی f از $\mathbf{R}$ (به ترتیب $\mathbf{C}$) به F به شکل $f(\xi) = f(\xi\,.1) = \xi f(1) = \xi a$ است. که در آن $a = f(1)$. بالاخره ، طبق اصل (III) بخش ۱. ۵ ، $\|\theta_a\| = \sup\limits_{|\xi|\le 1} \|\xi a\| = \|a\|$.

اکنون فرض کنیم E_1 ، $\cdots$ ، E_n ، F ؛ $n+1$ فضای نرم‌دار باشند. $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1\,,\cdots,\,\mathrm{E}_n\,;\,\mathrm{F})$ را به‌عنوان فضای برداری همه نگاشت‌های چند خطی پیوسته از فضای $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ به F تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، برای $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_1\,,\cdots,\,\mathrm{E}_n\,;\,\mathrm{F})$ ، با همان دلیلی که فوقاً بیان شد، می‌توان نشان داد ، $\|u\|$ که برابر g.l.b همه ثابت‌های $a > 0$ است که :

$$\|u(x_1\,,\cdots,\,x_n)\| \le a\,\|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

از رابطه :

$$\|u\| = \sup_{\|x_1\|\le 1\,,\cdots,\,\|x_n\|\le 1} \|u\,(x_1,\cdots,\,x_n)\|. \qquad (۵ .۷ .۷)$$

نیز حاصل می‌شود. همچنین، دیده می‌شود که $\|u\|$ یک نرم روی $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1\,,\cdots,\,\mathrm{E}_n\,;\,\mathrm{F})$ است. اما، در واقع، این‌گونه فضاهای برداری را می‌توان به فضاهای $\mathscr{L}(\mathrm{X}\,;\,\mathrm{Y})$ تبدیل کرد.

(۵ .۷ .۸) برای هر $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\,\mathrm{F}\,;\,\mathrm{G})$ و هر $x \in \mathrm{E}$ ، فرض کنیم u_x نگاشت خطی $y \to u(x,y)$ باشد. در این‌صورت $\tilde{u} : x \to u_x$ یک نگاشت خطی پیوسته از E به $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\,\mathrm{G})$ خواهد بود، و نگاشت $u \to \tilde{u}$ یک ایزومتری خطی از $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,,\,\mathrm{F}\,;\,\mathrm{G})$ بر روی $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\,\mathscr{L}(\mathrm{F}\,,\,\mathrm{G}))$ است.

داریم $\|u_x(y)\| = \|u(x\,,\,y)\| \le \|u\| \,.\, \|x\| \,.\, \|y\|$. بنابراین، طبق (۱. ۵ . ۵) ، نگاشت u_x پیوسته است، به‌علاوه $\|u_x\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1} \|u(x,\,y)\|$. در نتیجه ، طبق (۷ . ۳ . ۲) ،

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|u_x\| = \sup_{\|x\|\le 1,\, \|y\|\le 1} \|u(x, y)\| = \|u\|$$

که ثابت می‌کند ، نگاشت $x \to u_x$ (که به وضوح خطی است) پیوسته است ، و نگاشت $u \to \tilde{u}$ یک **ایزومتری** از $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \mathrm{G})$ به $\mathscr{L}(\mathrm{E}; \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{G}))$ است. بالاخره ، $u \to \tilde{u}$ پوشا است ، زیرا ، اگر $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}; \mathscr{L}(\mathrm{F}; \mathrm{G}))$ ، آنگاه نگاشت $u : (x, y) \to (v(x))(y)$ به وضوح دو خطی و چون طبق (۴ . ۷ . ۵)، $\|(v(x))(y)\| \le \|v(x)\| . \|y\| \le \|v\| . \|x\| . \|y\|$ ، u پیوسته است ، و $v(x) = u_x$ ، که اثبات را به پایان می‌رساند.

با استقراء ریاضی روی n ، نتیجه می‌شود که فضای $\mathscr{L}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_n; \mathrm{F})$ را می‌توان به‌طور طبیعی با :

$$\mathscr{L}(\mathrm{E}_1; \mathscr{L}(\mathrm{E}_2, \cdots, \mathscr{L}(\mathrm{E}_n, \mathrm{F})) \cdots)$$

یکسان گرفت (با حفظ نرم).

مسائل

۱ . (a) فرض کنیم E فضای باناخ (c_0) باشد، که در بخش ۳. ۵ ، مسئله ۵ ، تعریف شده است. ما نمادهای آن مسئله را حفظ می‌کنیم. فرض کنیم u یک نگاشت خطی پیوسته از E به $\mathbf{R}$ باشد ، و $u(e_n) = \eta_n$. نشان دهید که، سری $\sum_n \eta_n$ به‌طور مطلق همگرا است ، و در فضای باناخ $\mathrm{E}' = \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ ، $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|$ (از (۱. ۵ . ۵) برای مقادیر مناسب $x \in \mathrm{E}$ استفاده کنید). به‌عکس، برای هر سری به‌طور مطلق همگرای (η_n) از اعداد حقیقی، یک و تنها یک نگاشت خطی پیوسته u از E به $\mathbf{R}$ موجود است، به‌طوری که ، برای هر n ، $u(e_n) = \eta_n$ ، و اگر $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n \in \mathrm{E}$ ، آنگاه $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \xi_n$ (فضای E' ، با نرم تعریف شده فوق « **فضای** l^1 » باناخ است).

(b) به‌عنوان یک فضای برداری (بدون نرم) E' می‌تواند شبیه زیر فضایی از E مورد بررسی قرار گیرد. نشان دهید که، نرم روی E' اکیداً ظریف‌تر (قوی‌تر) (بخش ۶ . ۵ را ببینید) از نرم ناشی از تحدید نرم روی E به E' است.

(c) نشان دهید که ، فضای $\mathrm{E}'' = \mathscr{L}(\mathrm{E}', \mathbf{R})$ تشکیل شده از نگاشت‌های خطی پیوسته از E' به $\mathbf{R}$ را می‌توان با فضای همه دنباله‌های کراندار $x = (\zeta_n)$ از اعداد حقیقی ، با نرم $\|x\| = \sup_n |\zeta_n|$ یکسان[1] فرض کرد (**فضای** l^∞ **باناخ**). (از همان روش اشاره شده در (a) استفاده کنید). E را می‌توان به‌عنوان زیر فضای بسته‌ای از E'' مورد بررسی قرار داد.

(d) در فضای E' ، فرض کنیم P زیر مجموعه‌ای باشد که از همه سری‌های مطلقاً همگرای $u = (\eta_n)$ با جملات $\eta_n \ge 0$ تشکیل شده است. هر عنصر E' را می‌توان به‌صورت $u - v$ نوشت ، که در آن u و v هر دو در P هستند. با وجود این ، نشان دهید که ، داخل مجموعه P تهی است.

۲ . (a) فرض کنیم E فضای باناخ (c_0) ، و U یک نگاشت خطی پیوسته از E به E باشد. با نمادهای مسئله ۱ ، فرض کنیم $\mathrm{U}(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$. نشان دهید که :

---

۱. متأسفانه ، مترجم در واژه‌نامه ریاضی و آمار ، انجمن ریاضی ایران ، تهران ، مرکز نشر دانشگاهی ، چاپ دوم ، ۱۳۷۶ در مقابل واژه انگلیسی indentify که معادل واژه روسی отождествить به معانی یکی دانستن ، یکسان گرفتن ، همگون ساختن می‌باشد ، معادل فارسی نیافت.

(۱) $\lim_{m \to \infty} \alpha_{mn} = 0$ ؛

(۲) برای هر m سری $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ همگرا است ؛

(۳) $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ متناهی است (با همان روش بیان شده در مسئله ۱ قسمت (a)) . عکس مطلب فوق را ثابت کنید و نشان دهید که ، فضای باناخ $\mathscr{L}(E ; E)$ را می‌توان با فضای دنباله‌های دوگانه $U = (\alpha_{mn})$ که در شرایط قبلی صدق می‌کند ، با نرم $\|U\| = \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ یکسان فرض کرد.

(b) فرض کنیم E' فضای باناخ l^1 مسئله ۱ باشد. به طریق مشابه ، نشان دهید که ، فضای باناخ $\mathscr{L}(E' ; E')$ را می‌توان با فضای دنباله‌های دوگانه $U = (\alpha_{mn})$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند ، یکسان فرض کرد :

(۱) سری $\sum_m |\alpha_{mn}|$ برای هر n همگرا است ؛

(۲) $\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ متناهی است ، در این‌صورت ، نرم U برابر $\|U\| = \sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|$ خواهد بود.

۳ . فرض کنیم $E \neq \{0\}$ یک فضای نرم‌دار باشد. نشان دهید که ، ممکن نیست دو نگاشت خطی پیوسته u و v از E به E موجود باشد به طوری که $u \circ v - v \circ u = 1_E$ (ثابت کنید که ، از رابطه فوق نتیجه می‌شود :

$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1) v^n$$

و از این رابطه نامساوی $(n+1) \| v^n \| \leq 2 \|u\| . \|v\| . \|v^n\|$ به‌دست می‌آید ، که از آن برای مقادیر به حد کافی بزرگ n نتیجه می‌شود $v^n = 0$ ، و بنابراین $v = 0$ ، که یک تناقض است.)

۸. هایپرپلین‌های (ابر صفحه‌های) بسته[1] و فرم‌های خطی پیوسته

یادآوری می‌کنیم که، یک **فرم خطی**[2] روی فضای برداری حقیقی (به ترتیب مختلط) E نگاشتی خطی مانند f از E به **R** (به ترتیب به **C**) است. بنابراین، **هسته** این فرم خطی $H = f^{-1}(0)$ یک زیر فضای برداری است ، به‌طوری که برای هر $a \notin H$ ، E مجموع مستقیم جبری H و $\mathbf{R}a$ (به ترتیب $\mathbf{C}a$) است. یک زیرفضا که دارای خاصیت اخیر باشد، یک **هایپرپلین (ابر صفحه)** نامیده می‌شود. اگر H یک هایپرپلین ، $a \notin H$ ، و اگر برای هر $x \in E$ بنویسیم $x = f(x)a + y$ که در آن $f(x)$ یک اسکالر و $y \in H$ است ، آنگاه ، f یک فرم خطی خواهد بود ، و $H = f^{-1}(0)$. رابطه $f(x) = 0$ را **معادله هایپرپلین** H می‌نامند. اگر f_1 یک فرم خطی دیگر باشد ، به‌طوری‌که $H = f_1^{-1}(0)$ آنگاه $f_1 = \alpha f$ (α یک اسکالر است). همچنین، یادآوری می‌کنیم که، یک هایپرپلین **ماگزیمال** است : هر زیر فضای برداری از E که شامل هایپرپلین H باشد ، یا برابر H است ، یا برابر خود E .

(۱. ۸. ۵) در فضای حقیقی (به ترتیب مختلط) نرم‌دار E ، فرض کنیم H یک هایپرپلین به معادله $f(x) = 0$ باشد. برای اینکه H در E بسته باشد، لازم و کافی است که f پیوسته باشد. در این‌صورت ، برای هر $b \notin H$ ،

1 . Closed hyperplanes = Замкнутые гиперплоскости
2 . Linear form = Линейная форма

E حاصل‌جمع مستقیم توپولوژیک (بخش ۴. ۵ را ببینید) H و زیر فضای یک بعدی $D = \mathbf{R}b$ (به ترتیب $D = \mathbf{C}b$) خواهد بود.

واضح است که ، اگر f پیوسته باشد ، آنگاه $H = f^{-1}(0)$ بسته خواهد بود ((۱. ۱۵. ۳) را ببینید). برای اثبات عکس آن ، فرض کنیم $a \notin H$ چنان باشد که $f(a) = 1$. چون H بسته است ، طبق (۵. ۱. ۵) ، $a + H$ نیز بسته خواهد بود، و چون $0 \notin a + H$ ، گویی مانند V به معادله $\|x\| \leq r$ موجود است ، به طوری که با $a + H$ تلاقی ندارد. بنابراین ، از $x \in V$ نتیجه می‌شود $f(x) \neq 1$. ثابت می‌کنیم که ، از رابطه $x \in V$ نتیجه می‌شود $|f(x)| \leq 1$. فرض کنیم چنین نباشد ، و $\alpha = f(x)$ ، با $|\alpha| > 1$. در این صورت ، $\|\frac{x}{\alpha}\| = \frac{1}{|\alpha|}\|x\| < r$ ، و $f(\frac{x}{\alpha}) = 1$ ، که با تعریف V در تناقض است. از همگنی و (۱. ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که f پیوسته است. اگر $b \notin H$ ، آنگاه ، برای هر $x \in E$ خواهیم داشت $x = g(x)\, b + y$ ، که در آن $y \in H$ ، و $g(x) = 0$ معادله دیگری از H است. بنابراین ، g پیوسته است ، و در نتیجه ، نگاشت $x \to g(x)\, b$ از E به $D = \mathbf{R}b$ (به ترتیب $\mathbf{C}b$) پیوسته می‌باشد ، که طبق (۲. ۴ . ۵) آخرین قسمت گزاره (۱. ۸ . ۵) نیز ثابت می‌شود.

(۲. ۸ . ۵) در فضای نرم‌دار E ، یک هایپرپلین H یا بسته است یا در E چگال است.

در واقع، طبق (۱. ۴. ۵) ، $\overline{H}$ یک زیر فضای برداری است، که تنها می‌تواند یا برابر E باشد یا H .

مسائل

۱. فرض کنیم E یک زیرفضای (غیرتام) از فضای باناخ (c_0) باشد، که از دنباله‌هایی مانند $x = (\xi_n)$ از اعداد حقیقی تشکیل شده باشد، که تنها تعدادی **متناهی** از جملات آنها مخالف صفر است. برای هر دنباله (α_n) از اعداد حقیقی، نگاشت $x \to u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ یک فرم خطی روی E است ، و همه فرم‌های خطی روی E از این راه به‌دست می‌آیند. کدام یک از آنها پیوسته هستند؟ ((۴ . ۵ . ۵) و مسئله ۱ بخش ۷. ۵ را ببینید.)

۲. (a) در یک فضای نرم‌دار E ، فرض کنیم H یک هایپرپلین (ابرصفحه) بسته به معادله $u(x) = 0$ باشد ، که در آن u یک فرم خطی پیوسته است. نشان دهید که ، برای هر نقطه $a \in E$ ، فاصله a از ابر صفحه H از رابطه $d(a, H) = |u(a)| / \|u\|$ به دست می‌آید.[۱]

(b) در فضای باناخ (c_0)، فرض کنیم H هایپرپلینی (ابرصفحه‌ای) بسته به معادله $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \xi_n = 0$ باشد. اگر $a \notin H$، نشان دهید که، نقطه‌ای مانند $b \in H$ موجود نیست ، به‌طوری که $d(a, H) = d(a, b)$.

۳. در یک فضای برداری حقیقی E ، واریته خطی با همبعد 1 (بخش ۱. ۵ ، مسئله ۵ را ببینید.) دوباره هایپرپلین (ابر صفحه) نامیده می‌شود. این‌گونه هایپرپلین‌ها با معادله به شکل $u(x) = \alpha$ تعریف می‌شوند ، که در آن u یک فرم خطی و α یک

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ژان دیودونه در فرمول $d(a, H)$ به جای H ، Σ نوشته شده است ، که قاعدتاً باید آن را به‌عنوان اشتباه چاپی به‌حساب آورد. این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

عدد حقیقی است. هایپرپلین‌های بررسی شده در متن درس شامل 0 بوده و **هایپرپلین‌های همگن** نامیده می‌شوند. هر هایپرپلین که با معادله $u(x)=\alpha$ تعریف شده باشد، **موازی هایپرپلین همگن** تعریف شده با معادله $u(x)=0$ می‌نامند. اگر A زیر مجموعه‌ای غیرتهی از E باشد، **هایپرپلین تکیه‌گاه**[1] مجموعه A هایپرپلینی مانند H است، که با معادله‌ای مانند $u(x)=\alpha$ تعریف می‌شود، به‌طوری که، برای هر $x\in A$، $u(x)-\alpha\geq 0$ یا برای هر $x\in A$، $u(x)-\alpha\leq 0$، و برای لااقل یک نقطه $x_0\in A$، $u(x_0)=\alpha$.

(a) در یک فضای حقیقی نرم‌دار E، هایپرپلینی که تکیه‌گاه مجموعه‌ای شامل لااقل یک نقطه داخلی باشد، مجموعه‌ای بسته خواهد بود ((۲. ۸. ۵) را ببینید).

(b) فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای فشرده از یک فضای نرم‌دار حقیقی E باشد. نشان دهید که، برای هر هایپرپلین بسته همگن H_0 که با معادله $u(x)=0$ تعریف شده است، دو هایپرپلین که تکیه‌گاه A هستند وجود دارند، به‌طوری که با معادلاتی به فرم $u(x_0)=\alpha$ که در حالت کلی ممکن است بر هم منطبق باشند، تعریف می‌شوند. فاصله بین این هایپرپلین‌ها نمی‌تواند از قطر مجموعه A بیشتر باشد.

(c) در فضای باناخ (c_0)، فرم خطی پیوسته $x\to u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\xi_n$ را مورد بررسی قرار داده، نشان دهید که، گوی بسته $B'(0,1)$ دارای هایپرپلین تکیه‌گاهی با معادله‌ای به فرم $u(x)=\alpha$ نیست (مقایسه کنید با مسئله ۲ قسمت (b)).

۹. فضاهای نرم‌دار با بعد متناهی

(۱. ۹. ۵) فرض کنیم E یک فضای برداری n بعدی حقیقی (به ترتیب مختلط) نرم‌دار باشد. اگر $(a_1,\cdots,a_n)$ یک پایه برای E باشد، آنگاه نگاشت :

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\to\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n$$

از $\mathbf{R}^n$ (به ترتیب $\mathbf{C}^n$) بر روی E از دو طرف پیوسته خواهد بود.

از استقراء روی n استفاده نموده، ابتدا نتیجه را برای $n=1$ ثابت می‌کنیم. طبق (۵. ۱. ۵)، می‌دانیم که نگاشت $\xi\to\xi a_1$ پیوسته است. چون $a_1\neq 0$، و $\|\xi a_1\|=\|a_1\|.|\xi|$، خواهیم داشت :

$$|\xi|\leq(1/\|a_1\|).\|\xi a_1\|$$

که طبق (۱. ۵. ۵)، پیوستگی نگاشت $\xi a_1\to\xi$ نیز ثابت می‌شود.

فرض کنیم قضیه برای $(n-1)$ ثابت شده باشد، و H هایپرپلین تولید شده به‌وسیله a_1، ...، a_{n-1} در E باشد. از فرض استقراء نتیجه می‌شود که، نرم روی H (القاء شده از نرم روی E) هم‌ارز نرم $\sup_{1\leq i\leq n-1}|\xi_i|$ می‌باشد. بنابراین، H تام است (برای هر دو نرم) و در نتیجه، طبق (۴. ۱۴. ۳)، در E بسته می‌باشد. از (۱. ۸. ۵) نتیجه می‌شود که نگاشت $(\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n)\to\xi_n$ پیوسته است، و این مطلب به اضافه استقراء، اثبات را به پایان می‌رساند (طبق (۴. ۲۰. ۳) و (۲. ۴. ۵)).

(۲. ۹. ۵) فرض کنیم V یک زیر فضای بسته و W یک زیر فضای با بعد متناهی از فضای نرم‌دار E باشند، در این‌صورت، V + W در E بسته خواهد بود. در حالت خاص، هر زیر فضای با بعد متناهی در E بسته است.

---

1 . Hyperplane of support = Опорная гиперплоскость

می‌توان از استقراء روی n بعد W استفاده کرد ، و به این ترتیب ، اثبات را به حالت $n = 1$ تبدیل کرد. فرض کنیم $W = \mathbf{R}a$ (به ترتیب $W = \mathbf{C}a$). اگر $a \in V$ ، آنگاه $V + W = V$ و چیزی برای اثبات کردن باقی نمی‌ماند. اگر $a \notin V$ ، آنگاه هر عنصر $x \in V + W$ را می‌توان به‌صورت $x = f(x)\, a + y$ با $y \in V$ نوشت ، و چون V یک هاپیرپلین بسته در $V + W$ است ، طبق (۵ . ۸ . ۱) ، f روی $V + W$ پیوسته است. فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای از نقاط $V + W$ باشد که به سمت یک نقطه چسبیدگی $V + W$ مانند b میل می‌کند ((۳ .۱۳ .۱۳) را ببینید). می‌نویسیم $x_n = f(x_n)\, a + y_n$. طبق (۵ . ۵ . ۱) ، $(f(x_n))$ یک دنباله کوشی $\mathbf{R}$ (به ترتیب در $\mathbf{C}$) است. بنابراین ، به سمت حدی مانند λ میل خواهد کرد ، و در نتیجه ، $y_n = x_n - f(x_n)a$ به سمت $b - \lambda a$ میل می‌کند. اما، چون V بسته است، حد دنباله (y_n) متعلق به V خواهد بود، بنابراین $b \in V + W$ ، و حکم ثابت می‌شود. (بخش ۵ . ۶ ، مسئله ۲ را ببینید.)

(۵ . ۹ . ۳) در فضای نرم‌دار E ، فرض کنیم V یک زیرفضای بسته با همبعد متناهی باشد (یعنی ، دارای یک مکمل جبری با بعد متناهی باشد). در این‌صورت ، هر مکمل جبری V یک مکمل توپولوژیک نیز هست.

فرض کنیم W یک مکمل جبری V در E باشد. از استقراء روی n بعد W استفاده می‌کنیم. در (۵ . ۸ . ۱) نتیجه برای $n = 1$ ثابت شده است. می‌توانیم بنویسیم $W = D + U$ ، که در آن D یک بعدی و U ، $(n - 1)$ بعدی است (مجموع مستقیم). طبق (۵ . ۹ . ۲) ، $V + D$ در E بسته است. بنابراین، طبق فرض استقراء ، U یک مکمل توپولوژیک برای $V + D$ است. به‌عبارت دیگر ، E به‌طور طبیعی با $(V + D) \times U$ هومیومورف است. طبق (۵ . ۸ . ۱) ، $V + D$ به‌طور طبیعی با $V \times D$ هومیومورف است. بنابراین ، E به‌طور طبیعی با $V \times D \times U$ هومیومورف است. بالاخره ، چون $D \times U$ به‌طور طبیعی با W هومیومورف است ، E به‌طور طبیعی با $V \times W$ هومیومورف خواهد بود ، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۵ . ۹ . ۴) (قضیه ف. ریس) یک فضای نرم‌دار به‌طور موضعی فشرده E دارای بعد متناهی است.

با تعویض نرم به نرمی هم‌ارز ، می‌توان فرض کرد گوی B به معادله $\|x\| \leq 1$ فشرده است. بنابراین ، طبق (۳ .۱۶ .۱) ، دنباله‌ای متناهی از نقاط a_i $(1 \leq i \leq n)$ موجود است ، به‌طوری که B در اجتماع گوی‌های با مراکز a_i و شعاع‌های $1/2$ قرار می‌گیرد. فرض کنیم V زیر فضای متناهی‌البعد تولید شده از a_iها $(1 \leq i \leq n)$ باشد. با استفاده از تناقض ، ثابت می‌کنیم که $V = E$. فرض کنیم ، واقعاً یک $x \in E$ موجود باشد ، به‌طوری که متعلق به V نباشد. چون V طبق (۵ . ۹ . ۲) بسته است ، $d(x, V) = \alpha > 0$. طبق تعریف فاصله $d(x, V)$ ، نقطه‌ای مانند y در V یافت می‌شود ، به‌طوری که $\alpha \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2}\alpha$. فرض کنیم $z = (x - y) / \|x - y\|$. داریم $\|z\| = 1$. بنابراین ، یک اندیس i

موجود است ، به‌طوری که $\|z-a_i\| \le 1/2$. می‌توان نوشت :

$$x = y + \|x-y\| z = y + \|x-y\| a_i + \|x-y\| (z-a_i)$$

و در نظر داشته باشید که $y + \|x-y\| a_i \in \mathrm{V}$. در این‌صورت ، طبق تعریف $d(x, \mathrm{V})$ ، خواهیم داشت $\|z-a_i\| \ge \alpha$. $\|x-y\|$. بنابراین $\|x-y\| \ge 2\alpha$ ، که با انتخاب y در تناقض است ، زیرا $\alpha \neq 0$.

مسائل

۱. نشان دهید که ، اگر E یک فضای نرم‌دار با بعد متناهی باشد، هر نگاشت خطی از E به یک فضای نرم‌دار F پیوسته است. (از (۱. ۹. ۵) و (۵ . ۱. ۵) استفاده کنید.)

۲. یادآوری می‌کنیم که ، یک **پایه**برداری از فضای برداری E ، خانواده‌ای مانند $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ است که ، هر عنصر E را بتوان به شکل **یکتایی** برحسب ترکیب خطی تعدادی متناهی از عناصر a_λ نوشت. از مطلب فوق ، در حالت خاص ، نتیجه می‌شود که ، عناصر a_λ به‌طور خطی مستقل از یکدیگرند.

(a) فرض کنیم (a_n) یک دنباله از عناصر مستقل خطی در فضای باناخ E باشد. به‌طور استقرایی یک دنباله $\mu_n > 0$ از اعداد حقیقی به روش زیر تعریف می‌کنیم :

اگر d_n فاصله نقطه $\mu_n a_n$ از زیر فضای V_{n-1} تولید شده به‌وسیله عناصر a_1 ، $\cdots$ ، a_{n-1} باشد (توجه کنید که ، طبق (۲. ۹. ۵)، $d_n > 0$) ، μ_{n+1} را چنان انتخاب می‌کنیم که $|\mu_{n+1}| . \|a_{n+1}\| \le d_n/3$. نشان دهید که ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n a_n$ به‌طور مطلق همگرا است ، و x مجموع آن متعلق به هیچ یک از زیرفضاهای V_n نیست.

(b) از قسمت (a) نتیجه بگیرید که ، یک فضای باناخ با بعد نامتناهی نمی‌تواند یک پایه‌برداری شمارای نامتناهی داشته باشد.

۳. نشان دهید که ، یک فضای نرم‌دار که در آن یک کره فشرده وجود داشته باشد ، دارای بعد متناهی خواهد بود. (ملاحظه کنید که ، مجموعه نقاطی که در یک فضای نرم‌دار E در نامساوی‌های $a \le \|x\| \le b$ (با $a > 0$) صدق می‌کنند ، با فضای حاصلضرب فاصله $[a, b]$ و کره $\mathrm{S}: \|x\| = 1$ هومیومورف است ؛ از قضیه (۴. ۹. ۵) ریس استفاده کنید.)

۴. [۱] فرض کنیم E یک فضایی نرم‌دار حقیقی با بعد متناهی n ، و A یک زیر مجموعه فشرده از E باشد. با نمادهای بخش ۱۶. ۳ ، مسئله ۴ ، نشان دهید که ، ثابتی مانند $a > 0$ موجود است ، به‌طوری که $\mathbf{N}_\varepsilon(\mathrm{A}) \le a.(1/\varepsilon)^n$. اگر علاوه بر این A دارای یک نقطه داخلی باشد ، نشان دهید که ، ثابتی مانند $b > 0$ موجود است ، به‌طوری که $\mathrm{M}_{2\varepsilon}(\mathrm{A}) \ge b.(1/\varepsilon)^n$. در این حالت داریم $\mathrm{H}_\varepsilon(\mathrm{A}) \sim \mathbf{C}_\varepsilon(\mathrm{A}) \sim n \log 1/\varepsilon$

۵. [۱] فرض کنیم E یک فضای حقیقی نرم‌دار با بعد نامتناهی ، و (E_n) دنباله‌ای اکیداً صعودی از زیرفضاهای برداری E با بعد متناهی باشد. نشان دهید که ، دنباله‌ای مانند (x_n) از نقاط E موجود است ، به‌طوری که $x_n \in \mathrm{E}$ ، $\|x_n\| = 1$ و $d(x_n, \mathrm{E}_{n-1}) = 1$. فرض کنیم $\varphi > 0$ تابعی باشد که روی $t \ge 1$ تعریف شده و اکیداً نزولی باشد ، و علاوه بر این $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$ ، و فرض کنیم $z_n = 2\varphi(n) x_n$. اگر K زیر مجموعه‌ای فشرده از E باشد که از 0 و z_n تشکیل شده است ، نشان دهید که $\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{K}) \ge \psi(\varepsilon)$ ، که در آن ψ وارون تابع φ است (که در یک همسایگی 0 تعریف شده است). به این ترتیب ، وقتی $1/\varepsilon$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند ، $\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{K})$ می‌تواند با سرعتی دلخواه صعود کند.

---

۱. مسائل ۴ و ۵ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده‌اند. مترجم.

۱۰. فضاهای نرم‌دار جدائی‌پذیر

(۱. ۱۰. ۵) اگر در فضای نرم‌دار E یک دنباله جامع[1] (کلی ـ تام - تمام) [بخش ۴. ۵ را ببینید] وجود داشته باشد ، آنگاه ، E جدائی‌پذیر خواهد بود. به‌عکس ، در هر فضای نرم‌دار جدائی‌پذیر E ، یک دنباله جامع (کلی ـ تام - تمام) وجود دارد ، که از بردارهای به‌طور خطی مستقل تشکیل شده است.

فرض کنیم (a_n) یک دنباله جامع (کلی ـ تام - تمام) و D مجموعه همه ترکیب‌های خطی متناهی $r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$ با ضرائب گویا باشد (وقتی E یک فضای برداری مختلط است ، منظور از اسکالر « گویا » عددی مختلط به‌صورت $\alpha + i\beta$ می‌باشد ، که در آن α و β هر دو گویا هستند). طبق (۳. ۹. ۱) و (۴. ۹. ۱) ، D مجموعه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر است. چون طبق تعریف L مجموعه همه ترکیب‌های خطی بردارهای a_n در E چگال است ، همه آن چه که باید ثابت کنیم ، این است که ، D در L چگال است ، و چون ،

$$\|(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) - (r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - r_j| . \| a_j \|$$

چگال بودن D در L از (۱۶. ۲. ۲) نتیجه می‌شود.

به‌عکس ، فرض کنیم E جدایی‌پذیر باشد. البته، می‌توان فرض کرد که ، E دارای بعد نامتناهی است (در غیر این‌صورت ، هر پایه از فضای E یک زیرمجموعه جامع (کلی ـ تام - تمام) متناهی خواهد بود.) فرض کنیم (a_n) یک دنباله نامتناهی از عناصر E و چگال در E باشد. با استقراء یک زیردنباله (a_{k_n}) می‌سازیم که دارای این خاصیت است که ، از بردارهای مستقل خطی تشکیل شده است و برای هر $m \leq k_n$ ، a_m ترکیب خطی a_{k_1} ، ... ، a_{k_n} است. برای این کار ، k_1 را اولین اندیسی انتخاب می‌کنیم که برای آن $a_n \neq 0$ ، و k_{n+1} را کوچک‌ترین اندیس $m > k_n$ می‌گیریم که a_m در V_n زیر فضای تولید شده به وسیله a_{k_1} ، ... ، a_{k_n} قرار نگیرد. چنین اندیسی وجود دارد ، چون ، در غیر این‌صورت ، V_n (که طبق (۲. ۹. ۵) مجموعه‌ای بسته است) باید شامل E بستار مجموعه همه a_n ها باشد ، که با فرض در تناقض است. بنابراین ، واضح است که ، (a_{k_n}) دارای خواص مورد نیاز است ، و با توجه به ساختمان آن یک دنباله جامع (تام ـ کلی - تمام) است.

مسئله

نشان دهید که ، فضاهای باناخ (c_0) و l^1 (بخش ۳. ۵ ، مسئله ۵ ، و بخش ۷ . ۵ ، مسئله ۱) جدائی‌پذیر هستند ، اما ، فضای l^∞ (بخش ۷. ۵ ، مسئله ۱) جدائی‌پذیر نیست. (نشان دهید که ، در l^∞ یک خانواده شمارش‌ناپذیر (x_λ) از نقاط وجود دارد ، به‌طوری که برای هر $\lambda \neq \mu$ ، $\|x_\lambda - x_\mu\| = 1$. از مسئله ۲ قسمت (b) از بخش ۲. ۴ ، و (۱۷. ۲. ۲) استفاده کنید.)

---

1 . Total sequence = Тотальня последовательноть

فصل VI

فضاهای هیلبرت

در حال حاضر، فضاهای هیلبرت مهم‌ترین مثال‌های فضای باناخ را تشکیل می‌دهند، نه فقط به این دلیل که ، آنها طبیعی‌ترین و نزدیک‌ترین تعمیم در حوزه « فضاهایی با بعد نامتناهی» از هندسه اقلیدسی کلاسیک هستند، بلکه ، به‌خصوص ، به خاطر این حقیقت که آنها تاکنون مفیدترین **فضاها** در کاربردهای آنالیز تابعی بوده‌اند. به جز مورد (۱. ۳. ۶) ، همه نتایج این فصل به سادگی از تعریف‌ها و از نامساوی اساسی کوشی ـ شوارتز (۴. ۲. ۶) به‌دست می‌آیند.

۱. فرم‌های هرمیتی

برای هر عدد حقیقی یا مختلط λ ، منظور از $\bar{\lambda}$ مزدوج مختلط λ می‌باشد (اگر λ حقیقی باشد $\bar{\lambda} = \lambda$) . یک **فرم هرمیتی** روی یک فضای برداری حقیقی (به ترتیب مختلط) E نگاشتی مانند f از $E \times E$ به $\mathbf{R}$ (به ترتیب $\mathbf{C}$) است ، که دارای خواص زیر است :

(I) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$,

(II) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$,

(III) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$,

(IV) $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$,

(V) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$,

(دیده می‌شود که (II) و (IV) از بقیه تساوی‌ها نتیجه می‌شوند ؛ و از (V) نتیجه می‌شود که $f(x, x)$ **عددی حقیقی** است) . وقتی E یک **فضای برداری حقیقی** باشد، شرط‌های (I) تا (IV) بیانی از **دو خطی** بودن f، و شرط (V) به‌صورت $f(x, y) = f(y, x)$ خلاصه می‌شود ، که بیانی از **تقارن** f است. برای سیستم‌های متناهی دلخواه (x_i) ، (y_j) ، (α_i) ، (β_j) با روش استقراء ریاضی روی تعداد عناصر

این سیستم‌ها می‌توان نشان داد که[1] :

$$f(\sum_i \alpha_i x_i , \sum_j \beta_j y_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j f(x_i , y_j) \qquad (۶ .۱ .۱)$$

از (۱. ۱. ۶) نتیجه می‌شود که ، اگر E یک فضای با بعد متناهی و (a_i) یک پایه برای E باشد ، آنگاه فرم f به‌طور کامل با مقادیرش $\alpha_{ij} = f(a_i , a_j)$ که طبق (V) در روابط :

$$\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \qquad (۶ .۱ .۲)$$

صدق می‌کنند ، تعیین می‌شود. در واقع ، برای $x = \sum_i \xi_i a_i$ و $y = \sum_j \eta_j a_j$ داریم :

$$f(x , y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \bar{\eta}_j \qquad (۶ .۱ .۳)$$

به‌عکس، برای هر سیستم (α_{ij}) از اعداد حقیقی (به ترتیب اعداد مختلط) که در روابط (۲. ۱. ۶) صدق می‌کنند ، سمت راست تساوی (۳. ۱. ۶) روی فضای برداری حقیقی (به ترتیب مختلط) متناهی البعد E یک فرم هرمیتی را تعریف می‌کند.

مثال

(۴ . ۱. ۶) فرض کنیم D یک مجموعه باز به‌طور نسبی فشرده در $\mathbf{R}^2$ و E فضای برداری حقیقی (به ترتیب مختلط) متشکل از همه توابع پیوسته کراندار با مقادیر حقیقی (به ترتیب مختلط) روی D باشد، که دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته و کراندار روی D هستند. در این صورت، نگاشت :

$$(f , g) \to \varphi(f , g) = \iint_D \left(a(x , y) f(x,y)\overline{g(x , y)} + b(x , y) \frac{\partial f}{\partial x} \overline{\frac{\partial g}{\partial x}} + c(x ,y) \frac{\partial f}{\partial y} \overline{\frac{\partial g}{\partial y}}\right) dx dy$$

(که در آن a و b و c توابعی پیوسته و کراندار و دارای مقادیر حقیقی روی D هستند) یک فرم هرمیتی روی E است.

زوج بردارهای x و y از فضای برداری E را **نسبت به فرم هرمیتی** f روی E **اُرتوگونال (متعامد)** نامیم ، هرگاه $f(x , y) = 0$ (از (V) نتیجه می‌شود که، رابطه تعامد نسبت به x و y متقارن است). یک بردار که بر خودش عمود باشد ، (یعنی $f(x , x) = 0$) نسبت به f **ایزوترپ**[2] می‌نامند. برای هر زیر مجموعه M از E مجموعه همه بردارهای y که بر هر بردار $x \in M$ عمود هستند ، یک زیرفضای برداری E خواهد بود ، که به آن زیر فضای **عمود بر مجموعه** M (نسبت به f) می‌نامند. ممکن است این اتفاق بیفتد

---

۱. x_iها و y_jها عناصر فضای E ، و α_iها و β_jها اعدادی حقیقی یا مختلط می‌باشند ، برحسب اینکه فضای E حقیقی یا مختلط باشد. مترجم.

2 . Isotropic = Изотропный

که برداری مانند $a \neq 0$ موجود باشد، به‌طوی که بر همه فضای E عمود باشد. در این حالت گوییم، فرم f **تبهگون**[1] است. روی یک فضای با بعد متناهی E ، در بین فرم‌های هرمیتی f که با رابطه (۳. ۱. ۶) تعریف شده‌اند، فرم‌هایی غیرتبهگون هستند که برای آنها ماتریس‌های (α_{ij}) وارون‌پذیر می‌باشند.

مسائل

۱. فرض کنیم f یک فرم هرمیتی روی فضای برداری E باشد.

(a) نشان دهید که ، اگر E یک فضای‌برداری حقیقی باشد ، آنگاه :

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y)$$

و اگر E یک فضای برداری مختلط باشد ، آنگاه :

$$4f(x, y) = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy).$$

(b) از (a) نتیجه بگیرید که ، اگر برای هر بردار x واقع در زیر فضای M از E داشته باشیم $f(x, x) = 0$ آنگاه، برای هر زوج x، y از بردارهای M خواهیم داشت $f(x, y) = 0$.

(c) بدون استفاده از اتحادهای ثابت شده در قسمت (a) ، اثباتی برای (b) ارائه دهید. (برای هر λ دلخواه ، بنویسید $f(x+\lambda y, x+\lambda y) = 0$).

۲. [2] فرض کنیم E یک فضای برداری مختلط باشد. نشان دهید که ، اگر f نگاشتی از $E \times E$ به C باشد ، که در شرایط (I) ، (II) ، (III) ، (IV) صدق نموده ، برای هر $x \in E$ ، $f(x, x) \in \mathbf{R}$ باشد ، آنگاه f یک فرم هرمیتی روی E خواهد بود.

۲. فرم‌های هرمیتی مثبت

گوئیم فرم هرمیتی f روی فضای برداری E مثبت[3] است ، هرگاه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $f(x, x) \geq 0$.

به‌عنوان مثال ، اگر در D داشته باشیم $a, b, c \geq 0$ ، آنگاه فرم φ که در مثال (۱۴. ۶) تعریف شده است ، فرمی مثبت است.

(۱. ۲. ۶) (نامساوی کوشی ـ شوارتز) اگر f یک فرم هرمیتی مثبت باشد ، آنگاه برای هر زوج x ، y از بردارهای E :

$$|f(x,y)|^2 \leq f(x, x)\, f(y, y)$$

قرار می‌دهیم $a = f(x, x)$ ، $b = f(x, y)$ ، $c = f(y, y)$ ، یادآوری می‌کنیم که a و c اعداد حقیقی

1 . Degenerate = Вырожденный , Вырождаться

۲ . مسئله ۲ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است ، مترجم.

۳. چنین فرمی در بسیاری از کتاب‌های ریاضی غیرمنفی نامیده شده است. مترجم.

بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشند. ابتدا فرض کنیم $c \neq 0$. برای هر اسکالر λ داریم $f(x+\lambda y\,,\, x+\lambda y) \geq 0$. از رابطه فوق نتیجه می‌شود $a + b\bar{\lambda} + \bar{b}\lambda + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0$. با قرار دادن $\lambda = -b/c$ در این نامساوی، نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود. از دلیل مشابهی، وقتی $c = 0$، $a \neq 0$ باشد، می‌توان استفاده نمود. بالاخره، اگر $a = c = 0$ باشد، با قرار دادن $\lambda = -b$ به‌دست می‌آید $-2b\bar{b} \geq 0$ و یا $b = 0$.

(۶. ۲. ۲) برای اینکه یک فرم هرمیتی مثبت f روی E غیرتبهگون باشد، لازم و کافی است که، بردار ایزوتروپیکی به جز 0 برای f وجود نداشته باشد، یعنی، برای هر $x \neq 0$ در E نامساوی $f(x\,,\,x) > 0$ برقرار باشد.

در واقع، از رابطه $f(x\,,\,x) = 0$، طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز، نتیجه می‌شود که، برای هر $y \in \mathrm{E}$، $f(x\,,\,y) = 0$.

(۶. ۲. ۳) (نامساوی مینکوسکی)[1] اگر f یک فرم مثبت هرمیتی باشد، آنگاه برای هر زوج x، y از بردارهای E:

$$\sqrt{f(x+y\,,\,x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y\,,\,y)}$$

چون $f(x+y\,,\,x+y) = f(x\,,\,x) + f(x\,,\,y) + \overline{f(x\,,\,y)} + f(y\,,\,y)$، نامساوی مینوکوسکی هم‌ارز نامساوی:

$$2\mathscr{R} f(x\,,\,y) = f(x\,,\,y) + \overline{f(x\,,\,y)} \leq 2\sqrt{f(x\,,\,x)\, f(y\,,\,y)}$$

می‌باشد، که این نامساوی نیز، از نامساوی کوشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود.

تابع $x \to (f(x\,,\,x))^{1/2}$، طبق مطالب فوق، در شرایط (I)، (III) و (IV) بخش ۵. ۱ صدق می‌کند. طبق (۶. ۲. ۲)، شرط (II) بخش ۵. ۱، هم‌ارز این است که f یک فرم هرمیتی مثبت ناتبهگون است. بنابراین، وقتی f یک فرم هرمیتی مثبت ناتبهگون باشد (چنین فرمی را، **فرم معین مثبت** نیز می‌نامند)، $x \to (f(x\,,\,x))^{1/2}$ یک **نرم** روی E خواهد بود. یک **فضای پیش هیلبرتی**[2] فضائی برداری مانند E، همراه با یک فرم هرمیتی مثبت ناتبهگون روی E است. وقتی اشتباه رخ ندهد، چنین فرمی را به صورت $(x \mid y)$ نوشته، مقدار آن را **حاصل‌ضرب اسکالر**[3] بردارهای x، y می‌نامند. ما همیشه یک فضای پیش‌هیلبرتی E را به‌عنوان فضایی نرم‌دار با نرم $\|x\| = (x \mid x)^{1/2}$ مورد بررسی قرار داده، و البته، چنین فضایی همیشه به‌عنوان یک فضای متریک که فاصله روی آن به‌صورت $\|x-y\|$ تعریف شده است، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با نمادهای فوق، نامساوی **کوشی ـ شوارتز** به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| . \|y\| \tag{۶.۲.۴}$$

---

1 . Minkowski inequality = Неравенство Минковского
2 . Prehibert space = Предгильбертово пространство
3 . Scalar product = Скалярное произведение

و از این رابطه ، طبق (۱. ۵ . ۵) ، ثابت می‌شود که ، برای فضای پیش هیلبرتی حقیقی E ، نگاشت $(x, y) \to (x | y)$ یک فرم دو خطی **پیوسته** روی $E \times E$ است. (همچنین ، از (۱ . ۵ . ۵) می‌توان وقتی E یک فضای پیش هیلبرتی مختلط است، استفاده نمود، و دوباره پیوستگی $(x, y) \to (x | y)$ را ثابت کرد ، اگرچه این دیگر یک فرم دو خطی نیست). ما ، همچنین ، گزاره زیر را به‌عنوان یک حالت خاص از (۱. ۱. ۶) خواهیم داشت :

(۵ . ۲ . ۶) (قضیه فیثاغورث)[1] در فضای پیش‌هیلبرتی E ، اگر بردارهای x و y برهم عمود باشند ، آنگاه:

$$\| x + y\|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

یک **ایزُمورفیسم** از فضای پیش هیلبرتی E بر روی فضای پیش هیلبرتی E' ، یک بیژکسیون خطی از E بر روی E' است ، به‌طوری که ، برای هر زوج x ، y از بردارهای E ، $(f(x) | f(y)) = (x | y)$. واضح است که ، یک ایزُومورفیسم یک ایزومتری خطی از E بر روی E' است.

فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی باشد. در این‌صورت ، روی هر زیر فضای برداری F از E ، تحدید حاصلضرب داخلی یک فرم هرمیتی غیرتبهگون مثبت است. وقتی که F به‌عنوان یک فضای پیش‌هیلبرتی مورد بررسی قرار می‌گیرد ، همیشه منظورمان همین حاصلضرب داخلی است، مگر اینکه خلاف آن گفته شود.

یک **فضای هیلبرت**[2] یک فضای پیش هیلبرتی است که تام باشد. طبق (۱. ۹. ۵) ، هر فضای با بعد متناهی پیش هیلبرتی یک فضای هیلبرت است. مثال‌های دیگری از فضاهای هیلبرتی در بخش ۴. ۶ ساخته خواهند شد.

اگر در مثال (۴. ۱. ۶) ، $a > 0$ ، $b \geq 0$ و $c \geq 0$ انتخاب شود ، می‌توان نشان داد که ، فضای پیش‌هیلبرتی که به این ترتیب تعریف می‌شود ، **تام نیست**.

مسائل

۱. گزاره اخیر را در حالتی که $a = 1$ ، $b = c = 0$ باشد ، ثابت کنید (بخش ۱. ۵ ، مسئله ۱ را ببینید).

۲. (a) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار حقیقی باشد ، به‌طوری برای هر دو نقطه x ، y از E ،

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\|x\|^2 + \| y \|^2)$$

نشان دهید که $f(x, y) = \| x + y\|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2$ یک فرم هرمیتی غیر تبهگون مثبت روی E است. (برای اثبات $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$ ، از مسئله ۱ بخش ۵ . ۵ استفاده کنید.[3])

(b) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار مختلط ، و E_0 فضای برداری حقیقی زیربنا باشد ، و فرض کنیم روی E_0 یک فرم

---

1 . Pythagoras 'theorem = Теорема Пифагора

2 . Hilbert space = Гилбертово пространство

۳. راهنمایی فوق و قسمت‌های (b) و (c) در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

دو خطی متقارن مانند $f(x, y)$ موجود باشد ، به‌طوری که برای هر $x \in E_0$ ، $f(x, x) = \| x \|^2$. نشان دهید که ، یک فرم هرمیتی $g(x, y)$ روی E موجود است ، به‌طوری که $f(x, y) = \mathscr{R} g(x, y)$ ، بنابراین ، برای $x \in E$ ، $g(x, x) = \| x \|^2$. (از اولین فرمول مسئله ۱ بخش ۱. ۶ استفاده نموده ، ثابت کنید که $f(ix, y) = -f(x, iy)$).

(c) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار مختلط باشد ، به‌طوری که برای هر زوج x ، y نقاط E ،

$$\| x - y \|^2 + \| x + y \|^2 \leq 2 (\|x\|^2 + \| y \|^2)$$

نشان دهید که ، یک فرم هرمیتی مثبت غیر تبهگون $f(x, y)$ روی E موجود است ، به‌طوری $f(x, x) = \| x \|^2$ (از (a) و (b) استفاده کنید[۱]).

۳. فرض کنیم f یک فرم هرمیتی مثبت غیرتبهگون باشد. برای اینکه هر دو طرف نامساوی (۱. ۲. ۶) با هم برابر باشند ، لازم و کافی است که ، x و y وابستگی خطی داشته باشند. برای اینکه طرفین نامساوی (۳. ۲. ۶) با هم برابر باشند ، لازم و کافی است که x و y به‌طور خطی به یکدیگر وابسته باشند، و اگر هر دوی آنها مخالف صفر باشند ، آنگاه $y = \lambda x$ ، که در آن $\lambda \geq 0$.

۴. فرض کنیم a ، b ، c و d چهار نقطه در فضای پیش هیلبرتی E باشند ، نشان دهید که :

$$\| a-c \| . \| b - d \| \leq \| a - b \| . \| c - d \| + \| b - c \| . \| a - d \|$$

(مسئله را به حالت $a = 0$ تبدیل نموده ، و در فضای E ترانسفورماتورماسیون $x \to x / \|x\|^2$ را که برای $x \neq 0$ تعریف شده است، مورد بررسی قرار دهید). چه موقع طرفین این نامساوی با هم برابر خواهند بود[۲]؟

۵. [۱] فرض کنیم $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ یک دنباله متناهی از نقاط فضای پیش هیلبرتی E باشد. نشان دهید که :

$$\sum_{i < j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2$$

اگر برای $i \neq j$ ، $\|x_i - x_j\| \geq 2$ باشد ، نشان دهید که ، گویی که شامل همه نقاط x_i است ، دارای شعاعی بزرگ‌تر یا مساوی $(2(n-1)/n)^{1/2}$ می‌باشد.[۳]

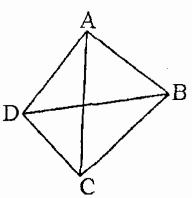
۳. تصویر (افکنش) متعامد[۴] (تصویر قائم) روی یک زیرفضای تام

(۱. ۳. ۶) فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی، و F یک زیرفضای برداری تام از فضای E باشد. (یعنی، F یک فضای هیلبرت باشد). برای هر $x \in E$ ، یک و تنها یک نقطه $y = P_F(x) \in F$ موجود است، به‌طوری که $\| x - y \| = d(x, F)$. نقطه $y = P_F(x)$ تنها نقطه $z \in F$ نیز هست که $x - z$ بر F عمود است. نگاشت $x \to P_F(x)$ از فضای E بر روی F خطی، پیوسته، و اگر $F \neq \{0\}$ باشد، دارای نرم 1 است. هسته

---

۱ . قسمت‌های (b) و (c) مسئله ۲ و مسأله ۵ در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

۲ . در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^2$ ، اگر D, C, B, A چهار نقطه دلخواه در صفحه باشند ، آنگاه :



$$AC \times BD \leq AB \times CD + BC \times AD$$

(حاصلضرب دو قطر چهارضلعی ABCD ، کوچکتر یا مساوی مجموع حاصلضرب‌های اضلاع مقابل آن است) و شرط لازم و کافی ، برای اینکه طرفین نامساوی فوق با هم برابر باشند، این است که ، چهار نقطه D, C, B, A روی یک دایره واقع باشند (تساوی بطلمیوس) . نامساوی زیبایی که در مسأله ۴ مطرح شده است ، تعمیمی از نامساوی فوق در فضاهای پیش هیلبرتی است. مترجم .

۳. مسأله ۵ در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

4 . Orthogonal projection = Ортогональная проекция

آن $F' = P_F^{-1}(0)$ زیرفضایی عمود بر F است ، و E مجموع مستقیم توپولوژیک (بخش ۴. ۵ را ببینید) F و 'F است. بالاخره ، F زیرفضایی عمود بر 'F است.

فرض کنیم $\alpha = d(x, F)$ ، طبق تعریف ، دنباله‌ای مانند (y_n) از نقاط F موجود است ، به‌طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \alpha$. ثابت می‌کنیم که ، (y_n) یک **دنباله کوشی** است. در واقع، برای هر دو نقطه u و v از E از (۱. ۱. ۶) نتیجه می‌شود که :

$$\| u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad (۱.۱.۳.۶)$$

بنابراین $\|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\|^2$. اما $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in F$ ، و بنابراین ، $\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\|^2 \ge \alpha^2$ ، در نتیجه اگر n_0 طوری انتخاب شده باشد که برای $n \ge n_0$ ، $\|x - y_n\|^2 \le \alpha^2 + \varepsilon$ ، آنگاه برای $m \ge n_0$ و $n \ge n_0$ ، خواهیم داشت $\|y_m - y_n\| \le 4\varepsilon$ ، و از این رابطه کوشی بودن دنباله (y_n) ثابت می‌شود. چون F تام فرض شده ، دنباله (y_n) به سمت حدی مانند $y \in F$ میل می‌کند ، و برای نقطه y تساوی $\|x - y\| = d(x, F)$ برقرار خواهد بود. فرض کنیم $y' \in F$ نیز نقطه دیگری باشد که $\| x - y' \| = d(x, F)$. با استفاده مجدد از رابطه[1] (۱. ۱. ۳. ۶) ، به‌دست می‌آید : $\| y - y'\|^2 = 4\alpha^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2$ ، و چون $\frac{1}{2}(y + y') \in F$ از این رابطه نتیجه می‌شود $\| y - y'\|^2 \le 0$ ، و یا $y = y'$. اکنون فرض کنیم $z \neq 0$ نقطه‌ای دلخواه از زیر فضای F باشد. برای هر اسکالر دلخواه حقیقی $\lambda \neq 0$ ، نامساوی $\|x - (y + \lambda z)\|^2 > \alpha^2$ برقرار است ، که از آن ، طبق (۱. ۱. ۶) ، نتیجه می‌شود :

$$2\lambda \mathscr{R}(x - y \mid z) + \lambda^2 \| z \|^2 > 0$$

اگر $\mathscr{R}(x - y \mid z) \neq 0$ باشد ، رابطه فوق با انتخاب مناسب λ به تناقض منجر می‌شود. بنابراین ، $\mathscr{R}(x - y \mid z) = 0$ ، و با تغییر z به iz ، (اگر E یک فضای هیلبرتی مختلط باشد) ، می‌توان نشان داد که $\mathscr{T}(x - y \mid z) = 0$. بنابراین ، در هر حالت $(x - y \mid z) = 0$ ، به‌عبارت دیگر $x - y$ بر F عمود است. فرض کنیم $y' \in F$ چنان باشد که $x - y'$ بر F عمود باشد. در این صورت ، برای هر $z \neq 0$ در F ، طبق قضیه فیثاغورث ، خواهیم داشت :

$$\| x - (y' + z) \|^2 = \|x - y'\|^2 + \| z \|^2$$

و از این رابطه با توجه به خصوصیت قبلی y نتیجه می‌شود $y' = y$.

ویژگی اخیر $y = P_F(x)$ ثابت می‌کند که ، P_F خطی است ، زیرا ، اگر $x - y$ و $x' - y'$ بر F عمود باشند ، آنگاه $\lambda x - \lambda y$ ، و همین‌طور $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$ بر F عمود

---

۱. رابطه ۱ . ۱ . ۳ . ۶ در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌صورت ۱۱ . ۳ . ۶ نوشته شده است که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

خواهند بود. چون $y + y' \in \mathrm{F}$ و $\lambda y \in \mathrm{F}$ ، از مطالب فوق نتیجه می‌شود که : $y + y' = \mathrm{P_F}(x + x')$ و $\lambda y = \mathrm{P_F}(\lambda x)$. طبق قضیه فیثاغورث ، داریم :

$$\|x\|^2 = \|\mathrm{P_F}(x)\|^2 + \|x - \mathrm{P_F}(x)\|^2 \qquad (۶.۳.۱.۲)$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود که $\|\mathrm{P_F}(x)\| \le \|x\|$. بنابراین، طبق (۱. ۵. ۵) ، P_F پیوسته است، و دارای نرمی کوچک‌تر یا مساوی یک می‌باشد. اما، چون برای هر $x \in \mathrm{F}$ ، $P_\mathrm{F}(x) = x$ ، اگر $\mathrm{F} \neq \{0\}$ باشد، خواهیم داشت $\|P_\mathrm{F}\| = 1$. از تعریف P_F نتیجه می‌شود که ، هسته $\mathrm{F}' = P_\mathrm{F}^{-1}(0)$ از بردارهایی مانند x عمود بر F تشکیل شده است ، چون $x = P_\mathrm{F}(x) + (x - P_\mathrm{F}(x))$ ، و برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $x - P_\mathrm{F}(x) \in \mathrm{F}'$ ، خواهیم داشت : $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{F}'$. علاوه بر این ، اگر $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}'$ ، x ایزوتروپیک خواهد بود ، بنابراین $x = 0$ ، و در نتیجه $\mathrm{F} + \mathrm{F}'$ مجموع مستقیم زیر فضاهای F و F' است. افزون بر این ، چون نگاشت $x \to P_\mathrm{F}(x)$ پیوسته است، طبق (۲. ۴. ۵) ، E **مجموع مستقیم توپولوژیک** F و F' است. بالاخره ، اگر $x \in \mathrm{F}$ عمود بر F' باشد ، آنگاه ، به ویژه خواهیم داشت $(x \mid x - P_\mathrm{F}(x)) = 0$ ، اما ، علاوه بر این ، داریم :

$$(P_\mathrm{F}(x) \mid x - P_\mathrm{F}(x)) = 0$$

بنابراین $\|x - P_\mathrm{F}(x)\|^2 = 0$ و یا $x = P_\mathrm{F}(x)$ ، که با این رابطه اثبات به پایان می‌رسد.

نگاشت خطی P_F را **تصویر قائم**[1] فضای E روی F ، و F' هسته آن را **مکمل عمودی**[2] F در E می‌نامند. طبق (۵. ۱۴. ۳) ، قضیه (۶.۳.۱) را می‌توان برای هر زیر فضای بسته F از یک **فضای هیلبرت E** ، یا طبق (۵.۹.۱) ، برای هر زیر فضای با بعد متناهی F از یک فضای پیش هیلبرتی ، مورد استفاده قرار داد.

(۶.۳.۲) فرض کنیم E یک فضای پیش‌هیلبرتی باشد. در این‌صورت ، برای هر $a \in \mathrm{E}$ ، نگاشت $x \to (x \mid a)$ یک فرم خطی پیوسته با نرم $\|a\|$ می‌باشد. به‌عکس ، اگر E یک فضای هیلبرتی باشد ، برای هر فرم خطی پیوسته u روی E ، برداری یکتا مانند $a \in \mathrm{E}$ موجود است ، به‌طوری که برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $u(x) = (x \mid a)$.

طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز $|(x \mid a)| \le \|a\| . \|x\|$ ، که طبق (۱. ۵. ۵) نشان می‌دهد ، نگاشت $x \to (x \mid a)$ پیوسته و دارای نرمی کوچک‌تر یا مساوی $\|a\|$ است، از طرف دیگر ، اگر $a \neq 0$ ، آنگاه برای $x_0 = a/\|a\|$ ، خواهیم داشت $(x_0 \mid a) = \|a\|$. چون $\|x_0\| = 1$ ، از رابطه فوق نتیجه می‌شود که نرم نگاشت $x \to (x \mid a)$ حداقل برابر $\|a\|$ است. اکنون فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی باشد. وجود بردار $a = 0$ وقتی $u = 0$ باشد ، بدیهی است. بنابراین ، فرض می‌کنیم که $u \neq 0$. در این‌صورت ، $\mathrm{H} = u^{-1}(0)$ یک هایپرپلین بسته در E است. H' مکمل عمودی H زیر فضایی یک بعدی است.

---

1 . Orthogonal projection = Ортогональная проекция
2 . Orthogonal supplement = Ортогональное дополнение

فرض کنیم $b \neq 0$ نقطه‌ای از H' باشد. در این‌صورت ، طبق (۱. ۳. ۶) ، هایپرپلین H بر b عمود است ، به عبارت دیگر ، برای هر بردار $x \in \mathrm{H}$ داریم $(x \mid b) = 0$. اما، هر دو معادله از یک هایپرپلین متناسب هستند ، بنابراین ، یک اسکالر λ موجود است ، به‌طوری که ، برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $u(x) = \lambda(x \mid b) = (x \mid a)$ که در آن $a = \bar{\lambda} b$ (ضمیمه را ببینید). یکتایی a از این حقیقت ناشی می‌شود که ، فرم $(x \mid y)$ غیر تبهگون است.

مسائل

۱. فرض کنیم B گویی بسته با مرکز 0 و شعاع 1 در فضای پیش هیلبرتی E باشد. نشان دهید که ، برای هر نقطه x از کره به مرکز 0 و شعاع 1 ، یک هایپرپلین یکتا موجود است که شامل x می‌باشد و تکیه‌گاه گوی B است. (مسئله ۳ بخش ۸ . ۵ را ببینید) .

۲. فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی ، A یک زیر مجموعه فشرد ه از E ، و δ قطر آن باشد. نشان دهید که ، دو نقطه a و b از A موجود هستند، به‌طوری که $\|a - b\| = \delta$ و دو هایپرپلین موازی وجود دارند ، که به ترتیب شامل a و b بوده ، تکیه‌گاه A هستند (بخش ۸ . ۵ ، مسئله ۳ را ببینید) ، و فاصله بین آنها برابر δ است. (گوی به مرکز a و شعاع δ را مورد بررسی قرار داده ، و از نتیجه مسئله ۱ استفاده کنید.)

۳. فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی ، و F یک زیر فضای خطی چگال در E باشد که متمایز از E است (بخش ۵.۹ مسئله ۲ را ببینید). نشان دهید که در فضای پیش هیلبرتی F هایپرپلینی بسته مانند H موجود است، به‌طوری که ، برداری غیر صفر در F موجود نیست که بر H عمود باشد.

۴. [1] فرض کنیم X یک مجموعه ، و E یک زیرفضای برداری از $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ باشد ، که روی آن ساختمان یک فضای هیلبرت مختلط داده شده است. نگاشت $(x , y) \to \mathrm{K}(x , y)$ از $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ به $\mathbf{C}$ را یک **تابع هسته**[2] برای E نامند ، هر گاه در دو شرط زیر صدق کند :

(۱) برای هر $y \in \mathrm{X}$ ، تابع $\mathrm{K}(. , y) : x \to \mathrm{K}(x , y)$ به E تعلق داشته باشد ؛

(۲) برای هرتابع $f \in \mathrm{E}$ ، و هر $y \in \mathrm{X}$ ، $f(y) = (f \mid \mathrm{K}(. , y))$.

(a) نشان دهید که ، K **نگاشتی از نوع مثبت** از $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ به $\mathbf{C}$ است ، به این معنی که ، برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ و هر دنباله متناهی $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ از نقاط X ، نگاشت :

$$((\lambda_i) , (\mu_i)) \to \sum_{i,j} \mathrm{K}(x_i , x_j) \lambda_i \cdot \bar{\mu}_j$$

از $\mathbf{C}^{2n}$ به C یک فرم **هرمیتی مثبت** است. از این مطلب به‌ویژه نتیجه می‌شود که، برای هر $x \in \mathrm{X}$ ، $\mathrm{K}(x , x) \geq 0$ ؛ و برای هر x ، y در X ، $\mathrm{K}(y , x) = \overline{\mathrm{K}(x , y)}$ و $|\mathrm{K}(x , y)|^2 \leq \mathrm{K}(x , x)\mathrm{K}(y , y)$. نشان دهید که ، برای $f \in \mathrm{E}$ و برای $y \in \mathrm{X}$ داریم $|f(y)| \leq \| f \| . (\mathrm{K}(y , y))^{1/2}$.

(b) نشان دهید که ، اگر (f_n) یک دنباله از توابع E باشد، که به $f \in \mathrm{E}$ همگرا است (برای ساختمان فضای هیلبرت) ، آنگاه ، برای هر $x \in \mathrm{X}$ ، دنباله $(f_n(x))$ در $\mathbf{C}$ به $f(x)$ همگرا است. روی هر زیر مجموعه X که در آن تابع $x \to \mathrm{K}(x , x)$ کراندار است ، همگرایی یکنواخت است.

(c) فرض کنیم $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ یک دنباله متناهی از نقاط X و $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ دنباله‌ای شامل n عدد مختلط

---

۱ . مسائل ۴ و ۵ در نخستین چاپ برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبـان فارسـی ترجمه شده‌اند. مترجم.

۲ . واژه تابع هسته برگردانی است از واژه Reproducing kernel = Kernel function در واژه‌نامه ریاضی و آمار ، انجمن ریاضی ایران ، تهـران ، مرکز نشر دانشگاهی ، چاپ دوم ، ۱۳۷۶.

باشد. فرض کنیم $\det(\mathrm{K}(x_i\,,\,x_j)) \neq 0$، بنابراین، دستگاه معادلات خطی $a_i = \sum_{j=1}^{n} c_i \mathrm{K}(x_i, x_j)$ $(1 \leq i \leq n)$ دارای جواب یکتای (c_j) است. نشان دهید که، در بین توابع $f \in \mathrm{E}$ به‌طوری که برای $1 \leq i \leq n$، $f(x_i) = a_i$، تابع $f_0 = \sum_{j=1}^{n} c_i \mathrm{K}(.\,,\,x_j)$ دارای کوچک‌ترین نرم است. به‌خصوص، در بین همه توابع $f \in \mathrm{E}$ که برای یک نقطه $x \in \mathrm{E}$، $f(x) = 1$ و $\mathrm{K}(x\,,\,x) \neq 0$، تابع $\mathrm{K}(\cdot\,,\,x)\,/\,\mathrm{K}(x\,,\,x)$ دارای کوچک‌ترین نرم است.

(d) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و اگر همه توابع $f \in \mathrm{E}$ روی فضای X **پیوسته** باشند، آنگاه، توابع $\mathrm{K}(\cdot\,,\,x)$ (که x همه مقادیر X، یا یک زیر مجموعه چگال در X را می‌گیرد) تشکیل یک زیر مجموعه **جامع (تام ـ کلی - تمام)** E می‌دهند (نشان دهید که عنصری مانند $h \neq 0$ در E موجود نیست، به‌طوری که عمود بر همه عناصر $\mathrm{K}(\cdot\,,\,x)$ باشد). در حالت خاص، اگر X یک فضای متریک جدائی‌پذیر باشد، E یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر خواهد بود.

۵. (a) با نمادهای مسئله ۴، برای اینکه یک تابع هسته برای E موجود باشد، لازم و کافی است که، برای هر $x \in \mathrm{E}$، فرم خطی $f \to f(x)$ در E پیوسته باشد. در این‌صورت، تابع هسته یکتا خواهد بود.

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، اگر یک تابع هسته برای E وجود داشته باشد، آنگاه، برای هر زیر فضای برداری بسته E_1 از E نیز یک تابع هسته وجود خواهد داشت. اگر K_1 تابع هسته برای E_1 باشد. نشان دهید که، برای هر تابع $f \in \mathrm{E}$، تابع $y \to (f \mid \mathrm{K}_1(.\,,\,y))$ تصویر متعامد f روی E_1 است. اگر E_2 مکمل عمودی E_1 و K_2 تابع هسته برای E_2 باشد، آنگاه $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ تابع هسته برای E خواهد بود.

۶. [۱] فرض کنیم X یک مجموعه، و E یک زیرفضای برداری از $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ باشد، که روی آن ساختمان یک فضای پیش هیلبرتی مختلط داده شده باشد. برای اینکه یک فضای هیلبرتی $\hat{\mathrm{E}} \subset \mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ شامل E موجود باشد، که حاصلضرب اسکالر روی E تحدید حاصلضرب اسکالر روی $\hat{\mathrm{E}}$ باشد، و یک تابع هسته برای $\hat{\mathrm{E}}$ موجود باشد، لازم و کافی است که، E در شرایط زیر صدق کند: (۱) برای هر $x \in \mathrm{X}$، فرم خطی $f \to f(x)$ در E پیوسته باشد؛ (۲) برای هر دنباله کوشی (f_n) در E به‌طوری که برای هر $x \in \mathrm{X}$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$، داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$. (برای اثبات اینکه شرایط کافی هستند، زیر فضای $\hat{\mathrm{E}}$ از $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ که عناصر آن توابعی مانند f هستند که برای آنها دنباله‌ای کوشی مانند (f_n) در E موجود است، به‌طوری برای هر $x \in \mathrm{X}$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ مورد بررسی قرار دهید. نشان دهید که، برای همه دنباله‌های کوشی (f_n) که دارای خواص فوق هستند، $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ یکسان است، و اگر $\|f\|$ برابر این عدد باشد، این نرم روی $\hat{\mathrm{E}}$ ساختمان یک فضای نرم‌دار را تعریف می‌کند، که از ساختمان یک فضای پیش‌هیلبرتی به‌دست می‌آید که ساختمان فضای پیش هیلبرتی داده شده روی E را القاء می‌کند، بالاخره، نشان دهید که، E در $\hat{\mathrm{E}}$ چگال، و $\hat{\mathrm{E}}$ تام است، و بنابراین، یک فضای هیلبرتی است و مسئله ۵ قسمت (a) را برای $\hat{\mathrm{E}}$ مورد استفاده قرار دهید.)

۷. [۱] فرض کنیم X یک مجموعه، و f نگاشتی از X به فضای پیش هیلبرتی H باشد. نشان دهید که، نگاشت $(x\,,\,y) \to (f(x) \mid f(y))$ از $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ به $\mathbf{C}$ از نوع مثبت است (مسئله ۴ قسمت (a) را ببینید).

۸. [۱] فرض کنیم X یک مجموعه، و K نگاشتی از نوع مثبت از $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ به $\mathbf{C}$ باشد (مسئله ۴ قسمت (a) را ببینید).

(a) فرض کنیم E مجموعه نگاشت‌های $u : \mathrm{X} \to \mathbf{C}$ باشد، به‌طوری که عددی حقیقی مانند $a \geq 0$ دارای این خاصیت موجود باشد که نگاشت:

$$(x\,,\,y) \to a\mathrm{K}(x\,,\,y) - u(x)\overline{u(y)}$$

از نوع مثبت باشد. فرض کنیم $m(u)$ کوچک‌ترین عدد حقیقی $a \geq 0$ با خاصیت فوق باشد. نشان دهید که $m(u)$ کوچکترین عدد c نیز هست، که برای هر دنباله متناهی (x_i) از عناصر X نامساوی:

$$\sum_{i,j} \mathrm{K}(x_i\,,\,x_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j + c\mu\bar{\mu} + \sum_i (u(x_i)\lambda_i\bar{\mu} + \overline{u(x_i)\lambda_i}\,\mu) \geq 0$$

برای همه اعداد مختلط λ_i، μ برقرار است (از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده کنید). برای هر $x \in \mathrm{X}$، نشان دهید

---

۱ . مسائل ۶، ۷ و ۸ در نخستین چاپ برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده‌اند. مترجم.

که $|u(x)|^2 \leq K(x, x)\, m(u)$.

(b) نشان دهید که ، E یک زیر فضای برداری از C^X است که ، $(m(u))^{1/2}$ یک نرم روی E است و ،

$m(u+v) + m(u-v) \geq 2(m(u) + m(v))$.

نتیجه بگیرید که ، یک فرم هرمیتی غیرتبهگون مثبت $g(u, v)$ روی $E \times E$ موجود است ، به‌طوری که $g(u, u) = m(u)$ ، و برای این فرم E یک فضای هیلبرت است که می‌توان نوشت $g(u, v) = (u \mid v)$. (از مسئله ۲ قسمت (c) بخش ۲. ۶ استفاده نموده ، وجود g را ثابت کنید ، برای نشان دادن اینکه E تام است ، از آخرین نامساوی ثابت شده در قسمت (a) استفاده کنید).

(c) برای هر $x \in X$ ، نشان دهید که ، تابع $K(., x)$ به E تعلق دارد ، و برای هر $(x, y) \in X \times X$ ،

$$(K(., x) \mid K(., y)) = K(x, y)$$

(از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده کنید). ثابت کنید که ، اگر X یک فضای توپولوژیک باشد ، و اگر K روی $X \times X$ پیوسته باشد ، نگاشت $x \to K(., x)$ از X به E پیوسته است.

(d) از (a) نتیجه بگیرید که ، فضای هیلبرت E که در قسمت (b) تعریف شده است ، دارای یک تابع هسته است ، و اگر F یک زیرفضای بسته از E باشد که به‌وسیله توابع $K(., x)$ تولید شده است ، تابع هسته برای F (مسئله ۵ قسمت (b) را ببینید) برابر K است.

۹. [۱] فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی ، N یک زیر فضای با بعد متناهی از E و M یک زیرفضای برداری از E با بعد نامتناهی ، یا بعد متناهی بیشتر از $\dim(N)$ باشد. نشان دهید که ، نقطه‌ای مانند $x \neq 0$ در M موجود است ، به‌طوری که $\|x\| = d(x, N)$. (اشتراک M و مکمل عمودی N را مورد بررسی قرار دهید.)

۴. مجموع هیلبرتی فضاهای هیلبرتی

فرض کنیم (E_n) یک دنباله از فضاهای هیلبرتی باشد ، که روی هر یک از E_n ها حاصلضرب اسکالر به‌صورت $(x_n \mid y_n)$ نشان داده شده باشد ، و E مجموعه همه دنباله‌های $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ باشد، که برای هر n ، $x_n \in E_n$ ، و سری $(\|x_n\|^2)$ **همگرا** است. ما ابتدا روی E ساختمان یک فضای برداری را تعریف می‌کنیم . واضح است که ، اگر $x = (x_n) \in E$ ، آنگاه دنباله $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n, \cdots)$ نیز متعلق به E خواهد بود. از طرف دیگر، اگر $y = (y_n)$ نیز دنباله‌ای متعلق به E باشد ، آنگاه، طبق (۱. ۱. ۳. ۶) ، $\|x_n + y_n\|^2 \leq 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2)$ ، بنابراین ، طبق (۱. ۳. ۵) ، سری $(\|x_n + y_n\|^2)$ همگرا است ، و در نتیجه ، دنباله $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$ متعلق به E خواهد بود. تعریف می‌کنیم $x + y = (x_n + y_n)$ ، $\lambda x = (\lambda x_n)$. اثبات اصول فضای برداری ساده است. از طرف دیگر ، طبق نامساوی کوشی شوارتز ، داریم :

$$|(x_n \mid y_n)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n\| \leq \frac{1}{2}(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2)$$

بنابراین ، اگر (x_n) و (y_n) دنباله‌هایی متعلق به E باشند ، آنگاه ، سری $((x_n \mid y_n))$ (از اعداد حقیقی یا مختلط) به‌طور مطلق همگرا خواهد بود. برای $x = (x_n)$ ، $y = (x_n)$ در E ، تعریف می‌کنیم

---

۱. مسئله ۹ در نخستین چاپ برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

$(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \mid y_n)$. مستقیماً می‌توان ثابت کرد که، نگاشت $(x \mid y) \to (x , y)$ یک فرم هرمیتی روی E است. علاوه بر این، داریم، $(x \mid x) = \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$. بنابراین، $(x \mid y)$ یک فرم هرمیتی مثبت ناتبه‌گون است، و روی E ساختمان یک فضای پیش هیلبرتی را تعریف می‌کند.

بالاخره، ثابت می‌کنیم که، E در حقیقت یک فضای هیلبرت است، به‌عبارت دیگر، **تام** است. در واقع، فرض کنیم $(x^{(m)})$ که در آن $x^{(m)} = (x_n^{(m)})$، یک دنباله کوشی در E باشد. مطلب فوق به این معنی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ یک m_0 موجود است، به‌طوری که برای $p \geq m_0$ و $q \geq m_0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)} \|^2 \leq \varepsilon \qquad (۶.۴.۱)$$

برای هر مقدار ثابت n، از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\| \leq \varepsilon$. بنابراین، دنباله $(x_n^{(m)})_{m=1,2,\ldots}$ یک دنباله کوشی در E_n است، و در نتیجه به حدی مانند y_n همگرا خواهد بود. از (۶ . ۴ . ۱) نتیجه می‌گیریم که، برای عدد طبیعی دلخواه داده شده N، به ازای $p \geq m_0$ و $q \geq m_0$،

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)} \|^2 \leq \varepsilon$$

بنابراین، از پیوستگی نرم نتیجه می‌شود که، برای $p \geq m_0$، $\sum_{n=1}^{N} \|x_n^{(p)} - y_n \|^2 \leq \varepsilon$، و از اینکه این رابطه برای هر عدد طبیعی N برقرار است، خواهیم داشت $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(p)} - y_n \|^2 \leq \varepsilon$. رابطه فوق ثابت می‌کند که، دنباله $(x_n^{(p)} - y_n)$ به E تعلق دارد، و بنابراین، (y_n) نیز به E تعلق خواهد داشت. علاوه بر این، برای $p \geq m_0$، $\|x^{(p)} - y\|^2 \leq \varepsilon$، که نشان می‌دهد دنباله $(x^{(m)})$ در E به y همگرا است و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

E فضای هیلبرتی که به‌صورت فوق تعریف شده باشد، **مجموع هیلبرتی**[1] دنباله فضاهای هیلبرتی (E_n) می‌نامند. خاطرنشان می‌کنیم که، می‌توان هر یک از فضاهای E_n را با مربوط کردن هر عنصر $x_n \in E_n$ به دنباله $j_n(x_n) \in E$ که برابر $(0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots)$ است (همه جملات، به جز جمله n ام که برابر x_n است، برابر صفر می‌باشد) به E نگاشت. به سادگی می‌توان ثابت نمود که، j_n یک ایزومورفیسم از E_n بروی یک زیرفضای (لزوماً بسته) E'_n از فضای E می‌باشد. j_n را **اینژکسیون طبیعی**[2] از E_n به E می‌نامند. از تعریف حاصلضرب اسکالر در E، **نتیجه می‌شود** که، برای $m \neq n$، هر بردار در E'_m بر هر بردار در E'_n عمود است. علاوه بر این، از تعریف نرم در E، نتیجه می‌شود که، برای هر $x = (x_n) \in E$، سری $(j_n(x_n))$ در E همگرا است، و $x = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(x_n)$ (خاطرنشان می‌کنیم که، در

---

1 . Hilbert sum = Гилбертова сумма
2 . Natural injection = Естесвенное вложение

حالت کلی ، سری $(j_n(x_n))$ همگرای مطلق نیست). مطلب فوق ثابت می‌کند که ، مجموع (جبری) زیر فضاهای E'_n از E (که به وضوح مجموع مستقیم می‌باشد) در E **چگال** است ، به‌عبارت دیگر ، کوچک‌ترین زیر فضای برداری بسته که شامل همه E'_n ها باشد ، خود E است. به‌عکس :

(۶.۴.۲) فرض کنیم F یک فضای هیلبرت ، و (F_n) یک دنباله از زیر فضاهای بسته آن باشد ؛ به‌طوری که : (۱) برای $m \neq n$ ، هر بردار از F_m بر هر بردار از F_n عمود باشد ، (۲) H مجموع جبری زیر فضاهای F_n در F چگال باشد. در این صورت ، اگر E مجموع هیلبرتی F_n ها باشد ، یک ایزومورفیسم یکتا از F بر روی E وجود دارد ، به‌طوری که روی هر یک از F_n ها بر اینژکسیون طبیعی j_n از F_n به E منطبق است.

فرض کنیم $F'_n = j_n(F_n)$ ، و h_n نگاشت وارون j_n از F'_n به روی F_n باشد ، و فرض کنیم G مجموع جبری زیرفضاهای F'_n در E باشد ، که چون مجموعی مستقیم است، می‌توان یک نگاشت خطی h از G به F را طوری تعریف کرد ، که روی هر یک از F'_n ها منطبق بر h_n باشد. ثابت می‌کنیم که ، h یک ایزومورفیسم از G به روی فضای پیش هیلبرتی H است (این، ضمناً، ثابت خواهد کرد، که مجموع (جبری) زیر فضاهای F_n مجموعی مستقیم در F است). با در نظر گرفتن تعریف حاصلضرب اسکالر در E ، باید برای $x_k \in F_k$ ، $y_k \in F_k$ ، رابطه :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mid \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (j_k(x_k) \mid j_k(y_k))$$

را مورد بررسی قرار دهیم. اما ، طبق فرض ، برای $h \neq k$ ، داریم $(x_h \mid y_k) = 0$ ، و نتیجه مطلوب از این حقیقت ناشی می‌شود که ، هر یک از j_k ها یک ایزومورفیسم است. اکنون ، طبق (۴. ۵. ۵) ، یک گسترش **(توسیع ـ تمدید)**[1] پیوسته یکتای $\bar{h}$ از h موجود است ، که نگاشتی خطی از $\bar{G} = E$ به $\bar{H} = F$ است. از اصل گسترش (توسیع ـ تمدید) تساوی‌ها (۲. ۱۵. ۳) و پیوستگی حاصلضرب اسکالر نتیجه می‌شود که ، $\bar{h}$ یک ایزومورفیسم از فضای E بر روی زیر فضایی از فضای F است، که به‌علت تام و چگال بودن آن ، باید منطبق بر خود F باشد. وارون ایزومورفیسم $\bar{h}$ در شرایط بیان شده در (۲. ۴. ۶) صدق می‌کند. یکتایی چنین ایزومورفیسمی از این حقیقت ناشی می‌شود که ، این ایزومورفیسم کاملاً روی H تعریف می‌شود و روی F پیوسته است ((۲. ۱۵. ۳) را ببینید) . تحت شرایط اشاره شده در (۲. ۴. ۶) ، فضای هیلبرت F اغلب با حاصلجمع هیلبرتی زیر فضاهای F_n آن یکسان گرفته می‌شود.

تبصره

(۳. ۴. ۶) می‌توان (۲. ۴. ۶) را به این طریق نیز اثبات کرد که ، ابتدا ثابت کنیم ، مجموع زیرفضاهای F_n

1 . Extension = Продолжение

مجموعی **مستقیم** است. در واقع ، اگر $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ با $x_i \in F_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ، آنگاه ، برای هر $j \leq n$ خواهیم داشت $(x_j \mid \sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$ ، و چون برای $i \neq j$ ، $(x_j \mid x_i) = 0$ ، رابطه فوق به‌صورت $\|x_j\|^2 = 0$ خلاصه می‌شود ، و از این رابطه ، برای $1 \leq j \leq n$ ، نتیجه می‌شود $x_j = 0$. سپس ، نگاشت g وارون نگاشت h را با این شرط که روی هر یک از F_n ها منطبق بر j_n باشد ، تعریف می‌کنیم. شبیه بالا ، فوراً ثابت می‌کنیم که ، g یک ایزومورفیسم از H بروی G است، و سپس ، (۴. ۵. ۵) را با راهی دقیقاً مشابه قبل به‌کار می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که این دلیل وقتی F یک فضای **پیش هیلبرتی** و F_nها زیر فضاهای **تام** F باشند ، اعتبار خود را حفظ می‌کند. این وجود یک ایزومورفیسم از F بر روی زیر فضایی که **چگال** در E حاصل‌جمع هیلبرتی زیر فضاهای F_n است که روی هر یک از F_n ها منطبق بر j_n می‌باشد ، ثابت می‌کند.

مسئله[1]

فرض کنیم X یک مجموعه و E_1 ، E_2 دو زیر فضای برداری از C^X باشند ، که دارای تابع‌های هسته K_1 ، K_2 باشند (بخش ۳. ۶ ، مسئله ۴ را ببینید.) فرض کنیم $E = E_1 + E_2 \subset C^X$ ، و F مجموع هیلبرتی فضاهای هیلبرت E_1 ، E_2 باشد. هسته نگاشت پوشای $u:(f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ از F به E زیر فضایی مانند N از F متشکل از زوج‌های $(f, -f)$ است که $f \in E_1 \cap E_2$. نشان دهید که ، N در F بسته است. اگر H مکمل عمودی N در F باشد ، v تحدید نگاشت u به H یک بیژکسیون از H بر روی E است. با انتقال ساختمان فضای هیلبرت H به‌وسیله نگاشت v ، E به‌عنوان یک فضای هیلبرتی تعریف می‌شود. نشان دهید که برای این ساختمان فضای هیلبرت ، E دارای تابع هسته‌ای برابر $K_1 + K_2$ است. نرم $\|f\|$ روی E برابر $\inf(\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2)^{1/2}$ می‌باشد ، که در آن (f_1, f_2) همه مقادیری از F را می‌گیرد که $f = f_1 + f_2$ ($\|f_1\|_1$ و $\|f_2\|_2$ به ترتیب نرم‌های روی E_1 , E_2 می‌باشند).

۵. سیستم‌های اورتونرمال (یکا متعامد)

اگر (با نمادهای بخش ۴. ۶) هر یک از فضاهای E_n را **فضای یک بعدی** (که با هیات اسکالرها با حاصلضرب داخلی $(\xi \mid \eta) = \xi\bar{\eta}$ یکسان گرفته شده است) انتخاب کنیم ، آنگاه مجموع هیلبرتی آنها مثالی از یک فضای با بعد نامتناهی هیلبرتی E است ، که معمولاً با نماد l^2 نشان داده می‌شود (با اندیس R یا C ، در صورتی که اشاره کردن به اسکالرهای فضا لازم باشد). بنابراین ، فضای l_R^2 (به ترتیب l_C^2) از همه **دنباله‌های اعداد حقیقی** (به ترتیب مختلط) $x = (\xi_n)$ تشکیل شده است که سری $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ همگرا

---

۱. این مسئله در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه وجود ندارد و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

است ، و روی آن حاصلضرب اسکالر به‌صورت $(x\,|\,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n$ تعریف شده است.

در فضای l^2 ، فرض کنیم e_n دنباله‌ای باشد که همه جملات آن برابر صفر باشد به جز جمله n ام آن که برابر یک است. در این‌صورت ، برای $m\neq n$ ، داریم $(e_m\,|\,e_n)=0$ ، برای هر عدد طبیعی n ، $\|e_n\|=1$ ، در بخش ۴. ۶ دیده‌ایم که برای هر عنصر $x=(\xi_n)$ از فضای l^2 می‌توان نوشت $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$ ، که سری سمت راست در l^2 **همگرا** است. این مطلب ثابت می‌کند که ، دنباله (e_n) در l^2 یک **دنباله جامع**[1] **(کلی ـ تام - تمام)** است، و بنابراین ، طبق (۱. ۱۰. ۵) ، l^2 **جدایی‌پذیر** است.

اکنون یک فضای پیش هیلبرتی دلخواه F را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گوییم، دنباله (متناهی یا نامتناهی) (a_n) در F یک **سیستم اُرتوگونال (متعامد)** است ، هرگاه برای هر $m\neq n$ ، $(a_m\,|\,a_n)=0$ ، و برای هر n ، $a_n\neq 0$. اگر علاوه بر مطالب فوق ، برای هر n ، $\|a_n\|=1$ باشد، سیستم را **اُرتونرمال (یکا متعامد)** می‌نامند. از هر سیستم اُرتوگونال (a_n) با « نرمال کردن» (a_n) ، یعنی ، با قرار دادن دنباله $b_n=a_n/\|a_n\|$ ، فوراً می‌توان یک سیستم اُرتونرمال استخراج نمود ما اندکی پیش مثالی از یک سیستم اُرتونرمال در l^2 دیدیم، یک مثال اساسی دیگر در زیر بیان شده است :

(۱. ۵ . ۶) فرض کنیم I فاصله $[-1\,,1]$ از خط حقیقی R و $F=\mathscr{C}_c(I)$ فضای برداری همه توابع با مقادیر مختلط باشد که روی I تعریف شده‌اند. با رابطه :

$$(f\,|\,g)=\int_{-1}^{1}f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

روی F یک حاصلضرب اسکالر تعریف می‌کنیم (این حقیقت که حاصلضرب اسکالر فوق یک فرم هرمیتی مثبت ناتبهگون است ، به سادگی قابل اثبات است). برای هر عدد صحیح مثبت یا منفی n ، قرار می‌دهیم :

$$\varphi_n(t)=e^{\pi int}$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که $(\varphi_n/\sqrt{2})$ یک سیستم اُرتونرمال در F است ، که آن را سیستم مثلثاتی می‌نامند.

اکنون فرض کنیم (a_n) یک سیستم اُرتونرمال دلخواه در فضای هیلبرت F باشد. برای هر $x\in F$ ، عدد $c_n(x)=(x\,|\,a_n)$ را n **اُمین ضریب** (n **اُمین مختصات**) x نسبت به سیستم اُرتونرمال (a_n) (n اُمین **ضریب فوریه** x برای سیستم (۱. ۵ . ۶)) می‌نامند.

(۲. ۵ . ۶) در فضای هیلبرت F ، فرض کنیم (a_n) یک سیستم اُرتونرمال و V یک زیرفضای بسته از F

1 . Total sequence = Тотальная последовательность

باشد که به‌وسیله a_n ها تولید شده است. در این‌صورت، برای هر $x \in F$:

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid a_n)|^2$ همگرا است، و داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid a_n)|^2 = \|P_V(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(نامساوی بسل)}^1$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x \mid a_n)\overline{(y \mid a_n)} = (P_V(x) \mid P_V(y))$$

(۲) سری با جمله عمومی $(x \mid a_n)\, a_n$ در F همگرا است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x \mid a_n) a_n = P_V(x) .$$

به‌عکس، فرض کنیم (λ_n) دنباله‌ای از اسکالرها باشد، به‌طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ همگرا باشد. در این‌صورت، بردار یکتای $y \in V$ موجود خواهد بود، به‌طوری که برای هر عدد طبیعی n، $(y \mid a_n) = \lambda_n$. هر بردار دیگر $x \in F$ که برای هر عدد طبیعی n در رابطه $(x \mid a_n) = \lambda_n$ صدق کند، می‌توان به‌صورت $x = y + z$ نوشت، که در آن z بر V عمود است، و برعکس.

برای هر $x \in F$، می‌توان نوشت $x = P_V(x) + z$، که در آن، طبق (۱. ۳. ۶)، z بر V عمود است، و به این ترتیب، خواهیم داشت $(x \mid a_n) = (P_V(x) \mid a_n)$. بنابراین، برای اثبات کردن قضیه، می‌توانیم فرض کنیم V = F. اما، در این‌صورت، F_nها زیرفضاهای یک بعدی تولید شده به‌وسیله بردارهای a_n در فرض‌های قضیه (۲. ۴. ۶) صدق می‌کنند، و نتایج مورد نظر صرفاً بیان دوباره‌ای از قضیه (۲. ۴. ۶) برای این حالت خاص می‌باشند. (با در نظر گرفتن تعریف حاصلجمع هیلبرتی).

جالب‌ترین حالت، حالتی است که V = F باشد، یعنی، سیستم اورتوگونال (a_n) **تام (کامل ـ تمام)**[۲] باشد. در این صورت، (a_n) را یک **پایه هیلبرتی** برای F می‌نامند. (e_n) چنین پایه‌ای برای l^2 است. در (۳. ۴. ۷) ثابت خواهد شد که، سیستم مثلثاتی (۱. ۵. ۶) تام (کامل) است. برای یک فضای هیلبرت F و سیستم **اُورتونرمال تام (کامل ـ تمام)** (a_n) می‌توانیم در (۲. ۵. ۶) همه جا به‌جای P_V نگاشت همانی بگذاریم. در این صورت، تساوی‌های :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid a_n)|^2 = \|x\|^2$$

---

1 . Besel's inequality = Неравенство Бесселя

۲. واژه تام (کامل ـ تمام) برگردانی است از واژه انگلیسی Total و واژه روسی معادل آن Тотальный، که در بسیاری از کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی از آن استفاده شده است. مترجم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x \mid a_n)\overline{(y \mid a_n)} = (x \mid y)$$

را **اتحادهای (تساوی‌های) پارسوال**[1] می‌نامند. از (۲. ۵ . ۶) فوراً نتیجه می‌شود که ، این تساوی‌ها نه فقط شرطی لازم ، بلکه ، شرطی **کافی** برای این هستند که (a_n) یک سیستم تام (کامل) در یک فضای هیلبرت باشد.

(۳. ۵ . ۶) در فضای هیلبرت F ، شرط لازم و کافی برای اینکه سیستم اُرتوگونال (a_n) تام (کامل_ تمام) باشد، لازم و کافی است که، اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $(x \mid a_n) = 0$ آنگاه $x = 0$.

در واقع ، طبق (۲. ۵ . ۶) ، معنی مطلب فوق این است که ، از رابطه $P_V(x) = 0$ نتیجه می‌شود $x = 0$ و این مطلب هم‌ارز رابطه $V = F$ می‌باشد، زیرا $P_V(x - P_V(x)) = 0$.

تبصره

(۴ . ۵ . ۶) فرض کنیم E یک فضای **پیش هیلبرتی** ، و سیستم اُرتونرمال (a_n) در E **تام (کامل _ تمام)** باشد. در این صورت ، نتایج (۱) و (۲) از (۲. ۵ . ۶) با تعویض $P_V(x)$ به x معتبر باقی می‌مانند. مطلب فوق ، با استفاده از تبصره (۳. ۴ . ۶) ، با دلیلی مشابه آن چه که در (۲. ۵ . ۶) بیان شده است ، ثابت می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت با پایه[2] هیلبرتی $(e_n)_{n\geq 1}$ ، و A زیر مجموعه‌ای از E باشد که از همه ترکیبات خطی $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (1 - \frac{1}{k}) e_k$ با $\lambda_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ تشکیل شده باشد.[3] (n اختیاری است).

(a) نشان دهید که ، بستار $\overline{A}$ برابر مجموعه همه مجموع‌های سری‌های $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (1 - \frac{1}{n}) e_n$ است ، که $\lambda_n \geq 0$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ همگرا است و مجموع آن برابر 1 است.

(b) ثابت کنید که ، قطر $\overline{A}$ برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد ، اما ، زوجی مانند a ، b از نقاط $\overline{A}$ موجود نیست ، به‌طوری که $\|a - b\| = \sqrt{2}$ (مقایسه کنید با بخش ۳. ۶ ، مسئله ۲).

---

1 . Parseval's indentities = Равенства Парсеваля

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب پایه $(e_n)_{n\geq 1}$ یکا متعامد (ارتونرمال) فرض شده است. مترجم.

۳. رابطه $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (1 - \frac{1}{k}) e_k$ در چاپ اول متن روسی به همین صورت، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی آن بـه صـورت $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - \frac{1}{k}) e_k$ نوشته شده است، که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد. مترجم.

۲. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت با پایه هیلبرتی ارتونرمال $(e_n)_{n\geq 0}$ باشد و برای هر $n \geq 0$ ، $a_n = e_{2n}$ و $b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1} e_{2n+1}$، و فرض کنیم A (به ترتیب B) زیر فضای برداری بسته‌ای از E باشد که به‌وسیله a_n ها (به ترتیب b_n ها) تولید شده باشد ، نشان دهید که :

(a) $A \cap B = \{0\}$ ، بنابراین مجموع $A + B$، مجموعی مستقیم (جبری) است.

(b) مجموع مستقیم $A + B$ مجموع مستقیم توپولوژیک نیست (در این زیر فضا دنباله نقاط $b_n - a_n$ را مورد بررسی قرار داده ، و از (۲. ۴. ۵) استفاده کنید).

(c) زیرفضای $A + B$ در E چگال است ، اما در E بسته نیست (نشان دهید که ، نقطه $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n)$ به $A + B$ تعلق ندارد).

۳. نشان دهید که ، فضای باناخ $\mathscr{L}(l^1, l^2)$ را می‌توان با فضای دنباله‌های دوگانه $U = (\alpha_{mn})$ که : (۱) برای هر n سری $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ همگرا است ، (۲) $\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ متناهی است، یکسان فرض نمود. در این‌صورت ، نرم U برابر $\|U\| = \sup_n (\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2)^{1/2}$ خواهد بود. (از همان روشی که در بخش ۷ . ۵ ، مسئله ۲ قسمت (b) بیان شده است ، استفاده کنید.)

۴. (a) فرض کنیم u یک نگاشت خطی پیوسته از l^2 به l^2 ، و $u(e_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$ باشد. نشان دهید که، سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ و $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2$ برای همه مقادیر m و n همگرا هستند ، و مجموع‌های آنها کوچک‌تر یا مساوی $\|u\|^2$ می‌باشد. (ملاحظه کنید که ، نگاشت $x \to (u(x) \mid e_m)$ یک فرم خطی پیوسته روی E است و از (۲ . ۳ . ۶) استفاده کنید.)

(b) مثالی از یک دنباله دوگانه (α_{mn}) ارائه دهید که ، برای همه مقادیر m و n ، $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leq 1$ و $\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{mn}|^2 \leq 1$ باشد ، اما ، نگاشت خطی پیوسته‌ای مانند u از l^2 به l^2 موجود نباشد ، به‌طوری که برای همه زوج‌های (m, n) در روابط $(u(e_n) \mid e_m) = \alpha_{mn}$ صدق کند. (اگر V زیر فضایی از l^2 باشد که به‌وسیله بردارهایی مانند e_n با $n \in H$ تشکیل شده باشد ، که در آن H مجموعه‌ای است که از $p \geq 0$ عدد صحیح تشکیل شده است. نشان دهید که ، نگاشتی خطی مانند u_p از V به V موجود است ، به‌طوری که برای همه اندیس‌های m ، n از مجموعه H ، $(u_p(e_n) \mid e_m) = 1/\sqrt{p}$ ، اما $\|u_p\| \geq \sqrt{p}$).

۶. اُرتونرمالیزاسیون (یکا متعامدسازی)[1]

(۱ . ۶ . ۶) فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی جدایی‌پذیر، (b_n) یک دنباله تام (کلی ـ جامع ـ تمام کامل[2]) از بردارهای مستقل خطی در E ((۱ . ۱۰ . ۵) را ببینید) ، و V_n زیر فضایی n بعدی از E باشد، که به وسیله بردارهای b_1 ، ... ، b_n تولید شده است. در این‌صورت ، اگر تعریف کنیم $c_n = b_n - P_{V_{n-1}}(b_n)$ ، آنگاه (c_n) یک سیستم اُرتوگونال تام (کامل ـ تمام ـ جامع ـ کلی[3]) خواهد بود ، به‌طوری که ، برای هر n ، بردارهای c_1 ، ... ، c_n فضای V_n را پدید می‌آورند.

---

1 . Orthonormalization = Ортонормализация
2 . Total sequence = Тотальная последовательность
3 . Total orthogonal system = Тотальная ортогональная система

از استقرار روی n استفاده می‌کنیم. فرض کنیم c_1 ، ... ، c_{n-1} سیستمی اورتوگونال باشد که V_{n-1} را تولید می‌کند. در این‌صورت ، طبق تعریف تصویر $p_{V_{n-1}}$ (۶.۳.۱) را ببینید)، c_n بر V_{n-1} عمود خواهد بود ، که ثابت می‌کند ، برای $1 \le i < j \le n$ ، $(c_i \mid c_j) = 0$. علاوه بر این ، چون طبق فرض $b_n \notin V_{n-1}$ ، پس $c_n \neq 0$ ، و بنابراین c_1 ، ... ، c_{n-1} ، c_n یک سیستم اُرتوگونال است. علاوه بر این $b_n - c_n \in V_{n-1}$ ، در نتیجه c_1 ، ... ، c_n همان زیرفضایی را تولید می‌کنند که اجتماع V_{n-1} و $\{b_n\}$ ، یعنی ، زیرفضای V_n ، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

اگر سیستم (c_n) را با قرار دادن $a_n = c_n / \|c_n\|$ نرمال کنیم ، سیستم (a_n) را سیستم ناشی از **پروسه اُرتونرمالیزاسیون (یکامتعامد سازی)**[1] از سیستم (b_n) می‌نامند. به‌عنوان مثال ، در فضای $\mathscr{C}_C(I)$ که در (۶.۵.۱) مورد بررسی قرار گرفته است ، دنباله (t^n) تام (کامل ــ تمام ــ جامع ــ کلی[2]) است (که در (۷.۴.۱) ثابت خواهد شد) و به وضوح از بردارهای مستقل خطی تشکیل شده است. اگر سیستم به‌دست آمده از پروسه اُرتونرمالیزاسیون روی سیستم (t^n) را به (Q_n) نشان دهیم ، واضح است که $Q_n(t) = a_n t^n + \cdots$ کثیرالجمله‌ای از درجه n است با $a_n \neq 0$ و ضرائب حقیقی . Q_nها (با دقتی در حد یک ضریب ثابت) **چند جمله‌ای‌های لژاندار** می‌باشند (بخش ۸.۱۴ ، مسئله ۱ را ببینید).

(۶.۶.۲) هر فضای پیش هیلبرتی (به ترتیب هیلبرتی) جدایی‌پذیر با یک زیرفضای چگال در l^2 (به ترتیب فضای l^2) ایزومورف است.

چون در یک فضای پیش هیبلرتی جدایی‌پذیر ، طبق (۶.۶.۱) ، یک سیستم اُرتونرمال تام (کامل) وجود دارد ، نتیجه مطلوب فوراً از (۶.۵.۲) به‌دست می‌آید.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی غیرتام جدائی‌پذیر باشد. نشان دهید که، در E یک سیستم اُرتونرمال وجود دارد که تام (کامل ـ تمام) نیست ، اما ، جزئی سره از هیچ سیستم اُورتونرمال نیست (E را به‌عنوان یک زیرفضای چگال در یک فضای هیلبرت جا دهید و از مسئله ۳ بخش ۶.۳ استفاده کنید.)

۲. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی و V یک زیرفضای برداری بسته از E باشد. نشان دهید که، اگر بعد V نامتناهی باشد ، آنگاه یک ایزومتری از E بر روی V موجود خواهد بود (E را به‌صورت مجموع مستقیم V و V′ مکمل عمودی آن نوشته و پایه‌های هیلبرتی در V و V′ انتخاب کنید).

۳. فرض کنیم $(x_i)_{1 \le i \le n}$ یک دنباله متناهی از نقاط فضای پیش هیلبرتی E باشد. **دترمینان گرام** این دنباله دترمینان $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \det((x_i \mid x_j))$ می‌باشد.

---

1 . Orthonormalization process = Процесс ортонормализации
2 . Total sequence = Тотальная последовательность

(a) نشان دهید که $G(x_1, \cdots, x_n) \geq 0$ و $G(x_1, \cdots, x_n) = 0$ اگر و تنها اگر x_iها به‌طور خطی وابسته باشند. (یک پایه اُرتونرمال از زیر فضای تولید شده به‌وسیله بردارهای x_i را مورد بررسی قرار داده، و x_i را به‌عنوان ترکیب خطی عناصر این پایه بیان کنید.)

(b) فرض کنیم x_iها به‌طور خطی مستقل باشند و V زیرفضای n بعدی تولید شده از آنها باشد. نشان دهید که، فاصله یک نقطه x تا V برابر است با :

$$(G(x, x_1, \cdots, x_n) / G(x_1, \cdots, x_n))^{1/2}$$

(تصویر x را روی V با نوشتن x به‌عنوان ترکیبی خطی از x_iها پیدا کنید) .

۴. [۱] فرض کنیم M یک زیرمجموعه فشرده از فضای هیلبرت E باشد. اگر E_1 کوچک‌ترین زیرفضای برداری بسته از E باشد که شامل M است ، نشان دهید که E_1 جدایی‌پذیر است.

۵. [۱] فرض کنیم $E \subset C^X$ یک فضای هیلبرت **جدایی‌پذیر** باشد ، که دارای یک تابع هسته است (بخش ۳. ۶، مسئله ۴ را ببینید).

(a) فرض کنیم f_n یک پایه هیلبرتی برای E باشد. نشان دهید که ، برای هر $(x, y) \in X \times X$ داریم $K(x, y) = \sum_n f_n(x) \overline{f_n(y)}$ ، که در آن سری در C همگرا است. برای هر تابع $g \in E$ ، اگر $c_n = (g \mid f_n)$ ، برای هر $x \in X$ ، داریم $g(x) = \sum_n c_n f_n(x)$ ، که در آن سری در C همگرا است. به‌علاوه ، این سری روی هر زیرمجموعه X که $K(x, x)$ کراندار است ، به‌طور یکنواخت همگرا است.

(b) به‌عکس، فرض کنیم (f_n) یک دنباله از توابع مختلط باشد ، که روی یک مجموعه X تعریف شده است ، به‌طوری که برای هر $x \in X$ ، $\sum_n |f_n(x)|^2 < +\infty$. در این صورت ، برای هر دنباله $(c_n) \in l^2_C$ سری $\sum_n c_n f_n(x)$ در هر نقطه $x \in X$ به حدی در C همگرا است. توابعی که مجموع چنین سری‌هایی هستند ، تشکیل یک زیرفضای $E \subset C^X$ می‌دهند، که دارای ساختمان یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است ، وقتی روی آن برای $u = \sum_n c_n f_n$ ، $v = \sum_n d_n f_n$ حاصلضرب اسکالر به‌صورت $(u \mid v) = \sum_n c_n \overline{d}_n$ تعریف شده باشد. این فضا دارای یک تابع هسته $K(x, y) = \sum_n f_n(x) \overline{f_n(y)}$ است.

---

۱. مسائل ۴ و ۵ در چاپ اول برگردان کتاب ژان‌دیودونه به زبان روسی وجود ندارند و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده‌اند. مترجم.

فصل VII

فضاهای توابع پیوسته

از نظر درجه اهمیت در آنالیز تابعی ، فضاهای توابع پیوسته در جایگاهی بعد از فضاهای هیلبرت قرار می‌گیرند. تعریف آنها این امکان را فراهم می‌آورد که معنی به مراتب شهودی‌تر و عینی‌تری از مفهوم کلاسیک **همگرایی یکنواخت** ارائه شود. مهم‌ترین نتایج این فصل عبارتند از :

۱. قضیه تقریب استون ـ ویراشتراس (۷ . ۳ . ۱) ، که ابزاری نیرومند برای اثبات نتایج کلی مربوط به توابع پیوسته است. این‌گونه نتایج ابتدا برای توابعی که از نوعی ویژه هستند، ثابت می‌شوند، و سپس با دلائل و بحث‌های مربوط به چگال بودن ، برای همه توابع پیوسته توسعه داده می‌شوند.

۲. قضیه آسکولی (۷ . ۵ . ۷) ، که پایه و اساس بیشتر اثبات‌های مربوط به فشردگی در فضاهای تابعی است ، و همراه با قضیه (۷ . ۵ . ۶) انگیزه‌ای برای معرفی مفهوم **همپیوستگی** می‌دهد.

در آخرین قسمت این فصل ، به‌عنوان یک ابزار تکنیکی مفید در پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال ، به معرفی یک رشته از توابع پرداخته‌ایم ، که با دیدگاهی کلاسیک به‌عنوان « توابع با ناپیوستگی‌های از نوع اول » توصیف شده‌اند ، در کوششی در جهت اختصار بیشتر و پرهیز از تکرار واژه مبتذل « *regular* » (регулярный) نویسنده به‌طور آزمایشی واژه جدید « *regulated functions* » (مطابق با واژه فرانسوی *fonctions re'gle'es*) را پیشنهاد نموده است ، که امیدوار است ، برای خوانندگان انگلیسی زبان خیلی زمخت و غیر مصطلح به نظر نیاید.[۱]

---

۱. در چاپ اول ترجمه کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به‌جای واژه انگلیسی Regulated functions از واژه روسی Простые функции (**توابع ساده**) استفاده شده است. اما، چون در کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی **توابع ساده** به‌عنوان توابعی با برد متناهی تعریف شده‌اند ، و تا مرحله پایان حروف‌نگاری کتاب در واژه‌نامه‌های ریاضی چاپ شده در کشورمان از جمله در واژه‌نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، (چاپ دوم ۱۳۷۶) ، همچون بسیاری از واژه‌های ریاضی انگلیسی مورد نیاز دیگر، معادلی به زبان فارسی برای واژه انگلیسی Regulated function وجود نداشت و معادل‌هایی از قبیل «توابع تنظیم شده» یا «توابع منظم» برای واژه فوق چندان مناسب به‌نظر نمی‌رسید ، مترجم ترجیح داد ، تا زمانی که واژه مناسبی به زبان فارسی در مقابل واژه فرانسوی Fonctions re'gle'es انتخاب نشده است، به‌جای این واژه از واژه نیمه فارسی نیمه فرانسوی «**توابع رگله**» استفاده نماید.

۱. فضاهای توابع کراندار

فرض کنیم A یک مجموعه دلخواه ، و F یک فضای نرم‌دار حقیقی (به ترتیب مختلط) باشد. نگاشت f از A به F را **کراندار** نامند. هرگاه مجموعه $f(\mathrm{A})$ در F کراندار باشد ، یا به‌طور معادل ، اگر $\sup_{t\in \mathrm{A}} \|f(t)\|$ متناهی باشد. مجموعه $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ که از همه **نگاشت‌های کراندار از مجموعه** A به F تشکیل شده است ، یک فضای برداری حقیقی (به ترتیب مختلط) است ، زیرا :

$$\|f(t)+g(t)\| \le \|f(t)\|+\|g(t)\|$$

علاوه بر این، به سادگی می‌توان ثابت کرد که ، روی این فضا

$$\|f\| = \sup_{t\in \mathrm{A}} \|f(t)\| \qquad (۷.۱.۱)$$

یک نرم است. اگر F دارای بعد متناهی باشد ، و $(a_i)_{1\le i\le n}$ یک پایه برای F باشد ، به‌طوری که $\|a_i\|=1$ ، آنگاه هر نگاشت از A به F را می‌توان به یک و تنها یک طریق به‌صورت :

$$t \to f(t) \to f_1(t)a_1+\cdots+f_n(t)a_n \qquad (۷.۱.۱.۱)$$

نوشت و f کراندار است ، اگر و تنها اگر، نگاشت‌های اسکالر f_i $(1\le i\le n)$ کراندار باشند. علاوه بر این ، نرم نگاشت $t\to f_i(t)a_i$ برابر $\|f_i\|=\|f_i\|.\|a_i\|$ است (نرم f_i در $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})$ ، یا به ترتیب در $\mathscr{B}_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})$، گرفته می‌شود). از (۵ .۹ .۱) ، (۵ .۴ .۲) و (۵ .۵ .۱) نتیجه می‌شود که ، ثابتی مانند c موجود است ، به‌طوری که برای هر $t\in \mathrm{A}$ ، $|f_i(t)\le c\|f(t)\|$. بنابراین $\|f_i\|\le c\|f\|$. فرض کنیم L_i زیر فضایی از $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ باشد ، که از همه نگاشت‌های کراندار به شکل $t\to f(t)a_i$ (f اسکالر است) تشکیل شده است. در این‌صورت ، با استفاده مجدد از (۵ .۴ .۲) و (۵ .۵ .۱) ، تذکرات قبلی ثابت می‌کنند که :

(۷ .۱ .۲) اگر F دارای بعد متناهی باشد ، آنگاه $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ مجموع مستقیم توپولوژیکی L_i ها است ، که هر یک از آنها با $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})$ (به ترتیب $\mathscr{B}_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})$) ایزومتر می‌باشد.

در حالت خاص، اگر فضای برداری حقیقی نرم‌دار زیربنای $\mathscr{B}_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})$ مورد بررسی قرار گیرد ، مشاهده می‌شود که ، این فضا مجموع مستقیم توپولوژیک $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})+i\mathscr{B}_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})$ است.

(۷ .۱ .۳) اگر F یک فضای باناخ باشد ، آنگاه $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ نیز یک فضای باناخ خواهد بود.

فرض کنیم (f_n) یک دنباله کوشی در $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ باشد. در این‌صورت ، برای هر $\varepsilon>0$ ، n_0 ئی موجود خواهد بود ، به‌طوری که برای $m\ge n_0$ ، $n\ge n_0$ ، $\|f_m-f_n\|\le\varepsilon$. از (۷ .۱ .۱) نتیجه می‌شود که ، برای $m\ge n_0$ ، $n\ge n_0$ ، برای هر $t\in \mathrm{A}$ ، داریم $\|f_m(t)-f_n(t)\|\le\varepsilon$. بنابراین ، چون F تام است، دنباله $(f_n(t))$ به عنصری مانند $g(t)\in \mathrm{F}$ همگرا خواهد بود. علاوه بر این ، طبق اصل گسترش

نامساوی‌ها ، برای هر $t \in A$ و هر $m \geq n_0$ ، داریم $\|f_m(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$ از این رابطه ، ابتدا نتیجه می‌گیریم که ، برای هر $t \in A$ ، $\|g(t)\| \leq \|f_m\| + \varepsilon$ و بنابراین g کراندار است. علاوه بر این ، برای هر $m \geq n_0$ ، داریم $\|f_m - g\| \leq \varepsilon$ و معنی رابطه فوق این است که ، دنباله (f_n) در فضای $\mathscr{B}_F(A)$ به g همگرا است.

در حالت کلی ، اگر (f_n) دنباله‌ای از نگاشت‌ها از مجموعه A به فضای متریک F باشد ، گوییم ، دنباله (f_n) روی A **به‌طور ساده همگرا** به نگاشت g از A به F است ، اگر برای هر $t \in A$ ، دنباله $(f_n(t))$ در F به $g(t)$ همگرا باشد. گوییم دنباله (f_n) **به‌طور یکنواخت** روی A به g همگرا است ، هرگاه دنباله اعداد $\sup_{t \in A} d(f_n(t), g(t))$ به سمت صفر میل کند. واضح است که ، یک دنباله به‌طور یکنواخت همگرا لزوماً به طور ساده نیز همگرا است ، اما ، عکس مطلب فوق درست نیست. بنابراین ، اگر F یک فضای نرم‌دار باشد ، همگرایی یک دنباله از عناصر فضای $\mathscr{B}_F(A)$ ، طبق تعریف ، به این معنی است که ، این دنباله روی A **به‌طور یکنواخت همگرا** است. به طریق مشابه، دیده می‌شود که ، یک سری (u_n) که در $\mathscr{B}_F(A)$ به حاصلجمع s همگرا است ، روی A به‌طور یکنواخت به حاصل‌جمع s همگرا است. اگر F یک فضای باناخ باشد ، از (۳. ۱. ۷) نتیجه می‌شود که ، برای اینکه سری (u_n) در $\mathscr{B}_F(A)$ به‌طور یکنواخت همگر باشد ، لازم و کافی است که ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 موجود باشد ، به‌طوری که ، برای $n \geq n_0$ ، $p \geq 0$ و هر $t \in A$ ، داشته باشیم :

$$\|u_n(t) + u_{n+1}(t) + \cdots + u_{n+p}(t)\| \leq \varepsilon$$

از (۳. ۱. ۷) و (۲. ۳. ۵) نتیجه می‌شود که ، اگر F یک فضای باناخ باشد ، و اگر سری (u_n) از توابع کراندار چنان باشد که سری $(\|u_n\|)$ در $\mathbf{R}$ همگرا باشد ، آنگاه سری (u_n) به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود . علاوه بر این ، در این حالت ، چون برای هر $t \in A$ ، داریم $\|u_n(t)\| \leq \|u_n\|$ ، سری $(u_n(t))$ برای هر $t \in A$ به‌طور مطلق همگرا است. اما، عکس مطلب درست نیست، و از دو شرط اخیر نتیجه نمی‌شود که سری $(\|u_n\|)$ همگرا است. بنابراین ، برای اجتناب از بدفهمی‌ها ، گوییم سری (u_n) به‌طور نرمال در $\mathscr{B}_F(A)$ همگرا است ، هرگاه سری $(\|u_n\|)$ همگرا باشد. به طریق مشابه ، یک خانواده به‌طور نرمال جمع‌پذیر $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ در $\mathscr{B}_F(A)$ تعریف می‌شود (L نامتناهی ـ شمارش‌پذیر است. با بخش ۳. ۵ مقایسه کنید).

مسائل

۱. فرض کنیم u_n تابعی متعلق به فضای $\mathscr{B}_R(\mathbf{R})$ باشد، که برای $n \leq t < n+1$ برابر $\frac{1}{n}$ ، و برای بقیه مقادیر t برابر 0 است. نشان دهید که ، سری (u_n) به‌طور یکنواخت و به‌طور جابه‌جاپذیر همگرا است (بخش ۳ . ۵ ، مسئله ۴ را ببینید) و برای هر $t \in \mathbf{R}$ ، سری $(u_n(t))$ به‌طور مطلق همگرا است ، اما ، باوجود این، (u_n) به‌طور نرمال همگرا نیست.

۲. فرض کنیم A یک مجموعه دلخواه باشد. نشان دهید که ، نگاشت $u \to \sup_{t \in A} u(t)$ از فضای $\mathscr{B}_R(A)$ به $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۳. فرض کنیم E یک فضای متریک و F یک فضای نرم‌دار باشد. نشان دهید که ، مجموعه همه نگاشت‌های $f \in \mathscr{B}_F(E)$ که نوسان آنها (بخش ۱۴. ۳ را ببینید) در هر نقطه از E حداکثر برابر عدد معلوم $\alpha > 0$ است (از عدد معلوم $\alpha > 0$ تجاوز نمی‌کند)، مجموعه‌ای بسته در $\mathscr{B}_F(E)$ است.

۲. فضاهای توابع کراندار پیوسته

اکنون فرض کنیم E یک فضای متریک باشد. فضای برداری همه نگاشت‌های پیوسته از E به فضای نرم‌دار F را به $\mathscr{C}_F(E)$ ، و مجموعه همه توابع **کراندار پیوسته** از E به F را به $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$، نشان می‌دهیم. طبق (۱۰. ۱۷. ۳) ، اگر E فشرده باشد ، $\mathscr{C}_F^{\infty}(E) = \mathscr{C}_F(E)$. در حالت کلی ، داریم :

$$\mathscr{C}_F^{\infty}(E) = \mathscr{C}_F(E) \cap \mathscr{B}_F(E).$$

ما $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ را به‌عنوان یک زیرفضای نرم‌دار از $\mathscr{B}_F(E)$ مورد بررسی قرار خواهیم داد ، مگر اینکه خلاف آن بیان شده باشد. اگر F دارای بعد متناهی باشد، آنگاه ، در نمایش (۱. ۲. ۱. ۷) ، f پیوسته است اگر و تنها اگر ، هر یک از f_i ها پیوسته باشند ((۴ . ۲۰ . ۳۰) و (۲ . ۴ . ۵) را ببینید). به این ترتیب ، نکات قبل از (۲. ۱. ۷) نشان می‌دهند که ، در چنین حالتی ، $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ مجموع مستقیم توپولوژیک تعدادی متناهی از زیرفضاهائی است، که هر یک از آنها با $\mathscr{C}_R^{\infty}(E)$ (به ترتیب $\mathscr{C}_C^{\infty}(E)$) ایزومتر است. در حالت خاص ، زیرفضای حقیقی نرم‌دار زیربنای $\mathscr{C}_C^{\infty}(E)$ مجموع مستقیم توپولوژیک $\mathscr{C}_R^{\infty}(E) + i\mathscr{C}_R^{\infty}(E)$ می‌باشد.

(۱. ۲. ۷) زیرفضای $\mathscr{C}_F^{\infty}(E)$ در $\mathscr{B}_F(E)$ بسته است ، به‌عبارت دیگر ، حد یکنواخت دنباله‌ای همگرا از توابع پیوسته کراندار، تابعی پیوسته است.

در واقع ، فرض کنیم (f_n) یک دنباله از نگاشت‌های کراندار پیوسته از E به F باشد ، که در $\mathscr{B}_F(E)$ به g همگرا باشد. در این صورت ، برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی n_0 موجود است ، به‌طوری که برای $n \geq n_0$ ، $\|f_n - g\| \leq \varepsilon/3$. برای نقطه دلخواه $t_0 \in E$ ، فرض کنیم V یک همسایگی از t_0 باشد ، به طوری که برای هر $t \in V$، $\|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)\| \leq \varepsilon/3$. در این صورت ، چون برای هر $t \in E$ ، داریم $\|f_{n_0}(t) - g(t)\| \leq \varepsilon/3$ ، برای هر $t \in V$ ، خواهیم داشت $\|g(t) - g(t_0)\| \leq \varepsilon$ ، که پیوستگی g را ثابت می‌کند.

مثال‌هایی مشهور (مثلاً ، توابع $x \to x^n$ روی $[0, 1]$) نشان می‌دهد که ، حد یک دنباله **به‌طور ساده همگرا** از توابع پیوسته لازم نیست که حتماً پیوسته باشد. از طرف دیگر ، به آسانی می‌توان دنباله‌هایی از توابع پیوسته مثال زد ، که به‌طور **غیریکنواخت** به تابعی پیوسته همگرا هستند (مسئله ۲ را ببینید). اما (۶ . ۵ . ۷) را نیز ببینید) :

(۲. ۲. ۷) (قضیه دینی)[1] فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده باشد. اگر دنباله‌ای صعودی (به ترتیب نزولی) مانند (f_n) از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی به‌طور ساده به تابع پیوسته g همگرا باشد ، آنگاه این دنباله به‌طور یکنواخت به g همگرا خواهد بود.

فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای صعودی باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $t \in E$ ، اندیسی مانند $n(t)$ موجود است ، به‌طوری که برای $m \geq n(t)$ ، $g(t) - f_m(t) \leq \varepsilon/3$. چون g و $f_{n(t)}$ پیوسته هستند ، همسایگی $V(t)$ از t موجود است ، به‌طوری‌که از رابطه $t' \in V(t)$ نتیجه می‌شود $|g(t) - g(t')| \leq \varepsilon/3$ و $|f_{n(t)}(t) - f_{n(t)}(t')| \leq \varepsilon/3$. بنابراین ، برای هر $t' \in V(t)$ ، داریم $g(t') - f_{n(t)}(t') \leq \varepsilon/3$. حال ، تعدادی متناهی از نقاط t_i در E را طوری انتخاب می‌کنیم که همسایگی‌های $V(t_i)$ مجموعه E را بپوشانند ، و n_0 را برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح از $n(t_i)$ ها می‌گیریم. در این صورت ، برای هر نقطه $t \in E$ ، t متعلق به یکی از $V(t_i)$ خواهد بود، و بنابراین ، برای هر $n \geq n_0$ خواهیم داشت :

$$g(t) - f_n(t) \leq g(t) - f_{n_0}(t) \leq g(t) - f_{n(t_i)}(t) \leq \varepsilon$$

و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای متریک ، F یک فضای نرم‌دار و (u_n) یک دنباله از توابع کراندار پیوسته از E به F باشد ، به‌طوری که روی E به طور ساده به تابع کراندار v همگرا باشد.

(a) برای اینکه v در نقطه $x_0 \in E$ پیوسته باشد ، لازم و کافی است که ، برای هر $\varepsilon > 0$ و هر عدد طبیعی m ، یک همسایگی مانند V از x_0 و اندیسی مانند $n > m$ موجود است ، به‌طوری که ، برای هر $x \in V$ ، $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon$.

(b) فرض کنیم علاوه بر این E فشرده باشد. در این‌صورت ، برای اینکه v روی E پیوسته باشد ، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ و هر عدد طبیعی m ، تعداد متناهی از اندیسی‌های $n_i > m$ موجود باشد ، به‌طوری که ، برای هر $x \in E$ ، حداقل یک اندیس i موجود باشد که برای آن $\|v(x) - u_{n_i}(x)\| \leq \varepsilon$ (از (a) و از اصل بورل ـ لبگ استفاده کنید).

۲. برای هر عدد طبیعی $n > 0$ ، فرض کنیم g_n تابعی پیوسته باشد که روی **R** با شرایط زیر تعریف شده است :

$g_n(t) = 0$ برای $t \leq 0$ ، $t \geq \frac{2}{n}$ و $g_n(\frac{1}{n}) = 1$ ، و روی هر یک از فاصله‌های $[0, \frac{1}{n}]$ ، $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ ، $g_n(t)$ به‌صورت $\alpha t + \beta$ است ، که در آن α و β ثابت‌هایی مناسب هستند. نشان دهید که ، دنباله (g_n) روی **R** به‌طور ساده به 0 همگرا است ، اما ، این همگرایی روی هیچ فاصله بازی که شامل 0 باشد یکنواخت نیست.

فرض کنیم $m \to r_m$ یک بیژکسیون از **N** بر روی **Q** مجموعه اعداد گویا باشد و $f_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} g_n(t - r_m)$. توابع $f_n(t)$ طبق (۱. ۲ . ۷) پیوسته هستند ، و دنباله (f_n) به‌طور ساده روی **R** به 0 همگرا است ، اما ، همگرایی روی هیچ فاصله‌ای از **R** یکنواخت نیست.

۳. فرض کنیم I یک فاصله فشرده از **R** و (f_n) دنباله‌ای از توابع یکنوای حقیقی باشد که روی I تعریف شده، و روی I به‌طور ساده به تابع پیوسته f همگرا است. نشان دهید که ، f یکنوا است ، و دنباله (f_n) روی I به‌طور یکنواخت به f همگرا است.

---

1 . Dini's theorem = Теорема Дини

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک، F یک فضای باناخ ، A یک زیرمجموعه چگال در E و (f_n) یک دنباله از نگاشت‌های پیوسته کراندار از E به F باشد ، به‌طوری که تحدید توابع f_n به A تشکیل دنباله‌ای به‌طور یکنواخت همگرا بدهند. نشان دهید که (f_n) روی E به‌طور یکنواخت همگرا است.

۵. فرض کنیم E یک فضای متریک و F یک فضای نرم‌دار باشد. نشان دهید که ، نگاشت $(x, u) \to u(x)$ از $E \times \mathscr{C}_F^\infty(E)$ به F پیوسته است.

۶. فرض کنیم E ، E' دو فضای متریک و F یک فضای نرم‌دار باشد. برای هر نگاشت f از $E \times E'$ به F و هر نقطه $y \in E'$ ، فرض کنیم f_y نگاشت $x \to f(x, y)$ از E به F باشد.

(a) نشان دهید که ، اگر f کراندار باشد و هر یک از f_yها روی E پیوسته باشد ، و اگر نگاشت $y \to f_y$ از فضای E' به $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ پیوسته باشد ، آنگاه f پیوسته خواهد بود. اگر علاوه بر اینها ، E فشرده باشد ، عکس مطلب فوق را ثابت کنید (از مسئله ۳ قسمت (a) ، بخش ۳.۲۰ استفاده کنید).

(b) با انتخاب $E = E' = F = \mathbf{R}$ و با فرض $f(x, y) = \sin xy$ که روی $E \times E'$ پیوسته و کراندار است ، نشان دهید که، نگاشت $y \to f_y$ از فضای E' به $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ در هیچ نقطه‌ای از E' پیوسته نیست.

(c) فرض کنیم E و E' هر دو فشرده باشند ، و برای هر $f \in \mathscr{C}_F(E \times E')$ فرض کنیم $\tilde{f}$ نگاشت $y \to f_y$ از E' به $\mathscr{C}_F(E)$ باشد. نشان دهید که ، نگاشت $f \to \tilde{f}$ یک ایزومتری خطی از $\mathscr{C}_F(E \times E')$ بر روی $\mathscr{C}_{\mathscr{C}_F(E)}(E')$ است.

۷. فرض کنیم E یک فضای متریک ، و F یک فضای نرم‌دار باشد. برای هر نگاشت کراندار پیوسته f از E به F ، فرض کنیم $G(f)$ گراف f در فضای $E \times F$ باشد.

(a) نشان دهید که $f \to G(f)$ یک نگاشت به‌طور یکنواخت پیوسته یک به یک از فضای نرم‌دار $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ به فضای $\mathfrak{I}(E \times F)$ است ، که از مجموعه‌های بسته فضای $E \times F$ تشکیل شده است ، که به‌عنوان فضایی متریک روی آن فاصله هاسدورف در نظر گرفته شده است (بخش ۳.۱۶ ، مسئله ۳ را ببینید).

(b) فرض کنیم Γ تصویر $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ تحت نگاشت $f \to G(f)$ باشد. نشان دهید که ، اگر E فشرده باشد، نگاشت وارون G^{-1} از Γ بر روی $\mathscr{C}_F^\infty(E)$ پیوسته است. (اثباتی غیرمستقیم « با استفاده از برهان خلف » ارائه نمایید).

(c) نشان دهید که ، اگر $E = [0,1]$ و $F = \mathbf{R}$ ، G^{-1} به‌طور یکنواخت پیوسته نیست.

۸. فرض کنیم E یک فضای متریک با فاصله کراندار d باشد. برای هر $x \in E$ ، فرض کنیم d_x نگاشت کراندار پیوسته $y \to d(x, y)$ از E به $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که ، $x \to d_x$ یک ایزومتری از E بر روی زیرفضایی از فضای باناخ $\mathscr{C}_\mathbf{R}^\infty(E)$ است.

۳. قضیه تقریب استون ـ ویراشتراس

برای هر فضای متریک E ، فضای برداری $\mathscr{C}_\mathbf{R}^\infty(E)$ (به ترتیب $\mathscr{C}_\mathbf{C}^\infty(E)$) یک **جبر** روی هیأت اعداد حقیقی (به ترتیب مختلط) است. از (۱. ۱. ۷) نتیجه می‌شود که ، در این جبر داریم $\|f g\| \le \|f\| . \|g\|$ ، بنابراین ، طبق (۱. ۱. ۵) ، نگاشت دو خطی $(f , g) \to f g$ پیوسته است. از همین مطلب به‌سادگی نتیجه می‌شود که ، برای هر زیر جبر A از $\mathscr{C}_\mathbf{R}^\infty(E)$ (به ترتیب $\mathscr{C}_\mathbf{C}^\infty(E)$) ، بستار $\overline{A}$ از A در $\mathscr{C}_\mathbf{R}^\infty(E)$ (به ترتیب $\mathscr{C}_\mathbf{C}^\infty(E)$) دوباره یک زیر جبر است (اثبات قضیه (۱. ۴ . ۵) را ببینید.)

گوییم ، زیر مجموعه A از $\mathscr{B}_\mathbf{R}(E)$ (به ترتیب $\mathscr{B}_\mathbf{C}(E)$) **نقاط E را جدا می‌کند** ، هرگاه برای هر زوج x و y از نقاط متمایز E ، تابعی مانند $f \in A$ موجود باشد ، به‌طوری که $f(x) \neq f(y)$.

(۱. ۳. ۷) (قضیه استون ـ ویراشتراس)[1] فرض کنیم E یک فضای فشرده متریک باشد . اگر زیر جبر A از $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ شامل توابع ثابت باشد، و نقاط E را از یکدیگر جدا نماید ، آنگاه A در فضای باناخ $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ چگال خواهد بود.

به‌عبارت دیگر ، اگر S زیر مجموعه‌ای از $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ باشد که نقاط را از یکدیگر جدا می‌کند ، آنگاه ، برای هر تابع پیوسته حقیقی f روی E ، دنباله‌ای مانند (g_n) از توابع موجود است که **به‌طور یکنواخت** به f همگرا است ، و هر یک از g_n ها را می‌توان به‌عنوان **کثیرالجمله‌ای** از توابع S ، با ضرائب حقیقی بیان نمود.

اثبات را با تقسیم آن به چند گام به سرانجام می‌رسانیم.

(۱. ۱. ۳. ۷) دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌های حقیقی مانند (u_n) موجود است ، به‌طوری که ، روی $[0\,,1]$ صعودی بوده و به‌طور یکنواخت به $\sqrt{t}$ همگرا است.

u_n را با استقراء و با در نظر گرفتن $u_1 = 0$ ، برای $n \geq 1$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \qquad (۷ . ۳ . ۱ . ۲)$$

با استقراء ثابت می‌کنیم که ، روی فاصله $[0\,,1]$ ، $u_{n+1} \geq u_n$ و $u_n(t) \leq \sqrt{t}$.

از (۲. ۱. ۳. ۷) دیده می‌شود که ، اولین نتیجه از دومی ناشی می‌شود. از طرف دیگر :

$$\sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(t - u_n^2(t))$$

$$= (\sqrt{t} - u_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t))$$

و از $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$. به این ترتیب، برای هر $t \in [0\,,1]$ ، دنباله $(u_n(t))$ صعودی و کراندار است، و بنابراین ، طبق (۱. ۲. ۴) ، به حدی مانند $v(t)$ همگرا است. اما ، از (۲. ۱. ۳. ۷) نتیجه می‌شود که $t - v^2(t) = 0$ و چون $v(t) \geq 0$ ، پس $v(t) = \sqrt{t}$. از اینکه v پیوسته و دنباله (u_n) صعودی است ، طبق قضیه دینی (۲. ۲. ۷) ، ثابت می‌شود که ، (u_n) به‌طور یکنواخت به v همگرا است.

(۳. ۱. ۳. ۷) برای هر تابع $f \in \mathrm{A}$ ، $|f|$ متعلق به $\overline{\mathrm{A}}$ بستار A در $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ می‌باشد.

فرض کنیم $a = \|f\|$. طبق (۱. ۱. ۳. ۷) ، دنباله توابع $u_n(f^2/a^2)$ ، که متعلق به A می‌باشد (طبق تعریف جبر) ، به‌طور یکنواخت به $(f^2/a^2)^{1/2} = |f|/a$ در E همگرا است.

---

1 . Stone - Weierstass theorem = Теорема Стоуна-Вейерштрасса

(۷ . ۳ . ۱ . ۴) برای هر زوج از توابع f ، g واقع در $\overline{A}$ ، $\inf(f, g)$ و $\sup(f, g)$ متعلق به $\overline{A}$ خواهند بود.

زیرا ، می‌توان نوشت :

$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ و $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ ، بنابراین ، نتیجه مطلوب از به‌کارگیری (۷ . ۳ . ۱ . ۳) نسبت به جبر $\overline{A}$ حاصل می‌شود.

(۷ . ۳ . ۱ . ۵) برای هر زوج x ، y از نقاط متمایز واقع در E ، و هر زوج α ، β از اعداد حقیقی ، تابعی مانند $f \in \overline{A}$ موجود است به‌طوری که $f(x) = \alpha$ و $f(y) = \beta$.

طبق فرض ، تابعی مانند $g \in A$ موجود است ، به‌طوری که $g(x) \neq g(y)$. از آنجا که A شامل توابع ثابت است ، قرار می‌دهیم $f = \alpha + (\beta - \alpha)(g - \gamma)/(\delta - \gamma)$ ، که در آن $\gamma = g(x)$ و $\delta = g(y)$.

(۷ . ۳ . ۱ . ۶) برای هر تابع $f \in \mathscr{C}_{R}(E)$، هر نقطه $x \in E$ ، و هر $\varepsilon > 0$ ، تابعی مانند $g \in \overline{A}$ موجود است ، به‌طوری که $g(x) = f(x)$ و برای هر $y \in E$ ، $g(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

برای هر نقطه $z \in E$ ، فرض کنیم h_z تابعی از $\overline{A}$ باشد که $h_z(x) = f(x)$ و $h_z(z) \leq f(z) + \frac{\varepsilon}{2}$. وجود چنین تابعی برای $z = x$ واضح است ، و برای $z \neq x$ از (۷ . ۳ . ۱ . ۵) نتیجه می‌شود . به علت پیوستگی f و h_z ، همسایگی $V(z)$ از z موجود است ، به طوری که ، برای $y \in V(z)$ ، $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$. مجموعه E را با تعدادی متناهی از همسایگی‌های $V(z_i)$ می‌پوشانیم. در این صورت ، طبق (۷ . ۳ . ۱ . ۴) ، تابع $g = \inf_i(h_{z_i})$ عضوی از $\overline{A}$ است و در شرایط مورد نیاز قضیه صدق می‌کند ، زیرا ، هر $y \in E$ متعلق به یکی از همسایگی‌های $V(z_i)$ است.

(۷ . ۳ . ۱ . ۷) $\overline{A} = \mathscr{C}_{R}(E)$

فرض کنیم f تابعی دلخواه متعلق به $\mathscr{C}_{R}(E)$ باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in E$ ، فرض کنیم $g_x \in \overline{A}$ چنان باشد که ، طبق (۷ . ۳ . ۱ . ۶) ، $g_x(x) = f(x)$ و برای هر $y \in E$ ، $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$. در این صورت ، به علت پیوستگی f و g_x ، همسایگی $U(x)$ از x موجود خواهد بود ، به‌طوری که برای $y \in U(x)$ ، $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$. E را با تعدادی متناهی از همسایگی‌های $U(x_i)$ می‌پوشانیم. در این صورت ، طبق (۷ . ۳ . ۱ . ۴) ، تابع $\varphi = \sup_i(g_{x_i})$ متعلق به $\overline{A}$ است ، و چنان است که ، برای هر $y \in E$ ، $f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon$ (چون هر $y \in E$ متعلق به یکی از $U(x_i)$ ها است) ، به عبارت دیگر ، $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ و این نشان می‌دهد که ، f متعلق به بستار مجموعه $\overline{A}$ ، یعنی متعلق به خود مجموعه $\overline{A}$ است.

قضیه متناظر با قضیه فوق ، برای $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ نادرست است (فصل نهم را ببینید) ، تنها نتیجه‌ای ضعیف‌تر وجود دارد :

(۲. ۳. ۷) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده باشد. اگر یک زیر جبر A از $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ شامل توابع ثابت باشد ، نقاط E را از یکدیگر جدا نماید ، و چنان باشد که برای هر $f \in \mathrm{A}$ ، تابع مزدوج $\overline{f}$ نیز متعلق به A باشد ، آنگاه A در $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ چگال خواهد بود.

متذکر می‌شویم که، برای هر $f \in \mathrm{A}$ ، $\mathscr{R} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ و $\mathscr{I} f = (f - \overline{f})/2i$ نیز عناصری از A هستند. بنابراین ، اگر A_0 یک زیر جبر حقیقی از A باشد که از توابع حقیقی تشکیل شده است ، فوراً از تعریف نتیجه می‌شود که A_0 نقاط E را از یکدیگر جدا می‌کند و شامل توابع ثابت (حقیقی) می‌باشد. بنابراین A_0 در $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ چگال است ، و چگال بودن A در :

$$\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = \mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E}) + i\,\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})$$

فوراً از $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + i\mathrm{A}_0$ نتیجه می‌شود.

۴. کاربردها

در قضیه استون ـ ویراشتراس ، برای E هر زیرمجموعه فشرده از $\mathbf{R}^n$ و برای A جبر تحدید **چندجمله‌ای‌های n متغیره** به E انتخاب می‌کنیم. شرط جداسازی برقرار است. زیرا ، برای هر دو نقطه متمایز E ، حداقل یکی از مختصات آنها مقادیر متمایز دارد. بنابراین ، قضیه اصلی (کلاسیک) تقریب ویراشتراس را خواهیم داشت :

(۱. ۴ . ۷) هر تابع پیوسته با مقادیر حقیقی روی یک زیر مجموعه فشرده E از $\mathbf{R}^n$ حد یک دنباله از چندجمله‌ای‌ها است ، که روی E به‌طور یکنواخت همگرا است.

اکنون E را دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ در $\mathbf{R}^2$ انتخاب می‌کنیم ، که با زاویه πt پارامتریزه شده باشد ، به‌طوری که توابع پیوسته روی E را بتوان با توابع پیوسته روی $\mathbf{R}$ که دارای پریود 2 هستند یکسان گرفت (فصل نهم را ببینید). برای A جبر (مختلط) تولید شده به‌وسیله ثابت‌ها و توابع $e^{\pi i t}$ و $e^{-\pi i t}$ انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب ، عناصر A چند جمله‌ای‌های مثلثاتی $\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n e^{\pi n i t}$ خواهند بود. چون تابع $e^{\pi i t}$ نقاط E را جدا می‌کند ، همه شرایط قضیه (۲. ۳. ۷) برقرار است ، بنابراین:

(۲. ۴ . ۷) هر تابع پیوسته با مقادیر مختلط روی $\mathbf{R}$ که پریود یک با پریود 2 باشد، حد یک دنباله از

چندجمله‌ای‌های مثلثاتی است ، که روی R به‌طور یکنواخت همگرا است.

این آخرین نتیجه ما را قادر می‌سازد که اثباتی از حقیقت زیر ارائه دهیم، که در بخش ۵ . ۶ بیان شده است.

(۳ . ۴ . ۷) سیستم مثلثاتی در فضای پیش هیلبرتی $F = \mathscr{C}_C(I)$ کامل (تام ـ تمام) است.

(این فضا در (۱. ۵ . ۶) تعریف شده است ؛ توجه داشته باشید که ، در اینجا ما روی $\mathscr{C}_C(I)$ نرم (۱. ۱. ۷) را نمی‌گذاریم).

در واقع ، برای هر $f \in \mathscr{C}_C(I)$ و هر عدد صحیح $n > 0$ ، فرض کنیم g تابعی باشد که برای $-1 + 1/n \le t \le 1$ برابر f ، برای $t = -1$ برابر $f(1)$ و بین -1 و $-1 + 1/n$ خطی باشد. در این صورت ، اگر $t \ge -1 + 1/n$ ، آنگاه $f(t) - g(t) = 0$ و برای بقیه مقادیر t ،

$$|f(t) - g(t)| \le 4\,\|f\|_\infty$$

($\|\,..\,\|_\infty$ را برای نرم تعریف شده در (۱. ۱. ۷) و $\|\,..\,\|_2$ را برای نرم پیش هیلبرتی مورد استفاده قرار داده‌ایم). بنابراین ، داریم :

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|^2 \, dt \le 16\,\|f\|_\infty^2 / n$$

به‌عبارت دیگر ، $\|f - g\|_2$ را می‌توان به‌طور دلخواه کوچک کرد. از آنجا که g پیوسته است ، و $g(1) = g(-1)$ ، g را می‌توان به تابعی پریودیک با پریود 2 گسترش داد. بنابراین، طبق (۲. ۴. ۷) ، یک چندجمله‌ای مثلثاتی مانند h موجود است ، به‌طوری که $\|g - h\|_2 \le \sqrt{2}\,\|g - h\|_\infty$ به‌طور دلخواه کوچک باشد، و این مطلب اثبات را به پایان می‌رساند.

(۴ . ۴ . ۷) اگر E یک فضای متریک فشرده باشد ، آنگاه فضاهای $\mathscr{C}_R(E)$ و $\mathscr{C}_C(E)$ جدائی‌پذیر خواهند بود.

چون $\mathscr{C}_C(E)$ مجموع مستقیم توپولوژیک فضاهای $\mathscr{C}_R(E)$ و $i\mathscr{C}_R(E)$ است ، ما تنها لازم است که اثبات را برای $\mathscr{C}_R(E)$ ارائه دهیم. طبق (۲. ۱۶. ۳) ، فرض کنیم (U_n) یک پایه نامتناهی ـ شمارش‌پذیر (از مجموعه‌های باز) برای توپولوژی E باشد ، و فرض کنیم $g_n(t) = d(t, E - U_n)$. تک جمله‌ای‌های $g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n}$ از g_n ها نیز مجموعه‌ای نامتناهی ـ شمارش‌پذیر مانند (h_n) تشکیل می‌دهند (طبق(۳. ۹. ۱) و (۴. ۹. ۱)) و فضای برداری A که به‌وسیله h_n ها تولید شده ، زیر جبری از $\mathscr{C}_R(E)$ است که به وسیله g_n ها تولید شده است. اگر ما ثابت کنیم که A در $\mathscr{C}_R(E)$ چگال است ، اثبات ما ، طبق (۱. ۱۰. ۵) ، کامل خواهد شد. اما ، تنها باید قضیه استون ـ ویراشتراس را به‌کار برده ، و بنابراین ، به بررسی این مطلب پرداخت که خانواده (g_n) نقاط E را جدا می‌کند. اگر $x \ne y$ ، یک U_n موجود خواهد بود ، به‌طوری

که $x \in U_n$ ، $y \notin U_n$. بنابراین ، طبق تعریف $g_n(x) \neq 0$ ، $g_n(y) = 0$ ، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

مسائل

۱. فرض کنیم E و F دو فضای متریک فشرده ، و f نگاشتی پیوسته از $E \times F$ به R باشد. نشان دهید که ، برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک سیستم متناهی $(u_i)_{1 \le i \le n}$ از نگاشت‌های پیوسته از E به R و یک سیستم متناهی $(v_i)_{1 \le i \le n}$ از نگاشت‌های پیوسته از F به R موجود است ، به‌طوری که برای هر $(x, y) \in E \times F$ ، $\left| f(x, y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \right| \le \varepsilon$. (قضیه استون ـ ویراشتراس را برای جبر تولید شده به‌وسیله نگاشت‌های پیوسته $(x, y) \to u(x)$ و $(x, y) \to v(y)$ که $u \in \mathscr{C}_R(E)$ و $v \in \mathscr{C}_R(F)$ مورد استفاده قرار دهید) .

۲. فرض کنیم $n \to r_n$ یک بیژکسیون از N بر روی مجموعه اعداد گویای واقع در فاصله $I = [0, 1]$ باشد. با استقراء ، یک دنباله I_n از فواصل بسته واقع در I تعریف می‌کنیم که : (۱) مرکز I_n ، r_{k_n} باشد ، به‌طوری که k_n کوچک‌ترین اندیس p است که r_p در اجتماع فاصله‌های I_h با $h < n$ واقع نیست ؛ (۲) طول I_n کوچک‌تر یا مساوی $1/4^n$ باشد ، و I_n با هیچ یک از I_h ها که $h < n$ است ، تلاقی نداشته باشد. در فضای حاصلضرب $I \times R$ ، یک تابع حقیقی کراندار پیوسته u با خواص زیر تعریف می‌کنیم :

(۱) برای هر عدد صحیح $n \ge 0$ ، نگاشت $x \to u(x, n)$ در $x = r_{k_n}$ برابر 1 باشد ، و برای $x \notin I_n$ برابر 0 باشد ، و برای هر $x \in I$ ، $0 \le u(x, n) \le 1$.

(۲) برای هر $x \in I$ ، تابع $y \to u(x, y)$ روی هر یک از فواصل $]-\infty, 0]$ و $[n, n+1]$ $(n \in N)$ به‌صورت $\alpha y + \beta$ باشد. نشان دهید که ، سیستمی متناهی از توابع $v_i \in \mathscr{C}_R(I)$ ، $w_i \in \mathscr{C}_R(R)$ $(1 \le i \le n)$ موجود نیست[1] ، به‌طوری که روی $I \times R$ ، $\left| u(x, y) - \sum_{i=1}^{n} v_i(x) w_i(y) \right| \le 1/4$ (فرض کنید چنین نباشد ؛ توابع $u_n : x \to u(x, n)$ را در $\mathscr{C}_R(I)$ مورد بررسی قرار داده ، ملاحظه کنید که $\|u_n\| = 1$ و برای $m \neq n$ ، $\|u_n - u_m\| = 1$. اگر زیر فضایی متناهی‌البعد مانند E از $\mathscr{C}_R(I)$ موجود باشد ، به‌طوری که برای هر n ، $d(u_n, E) \le 1/4$ ، آنگاه باید در E دنباله‌ای نامتناهی مانند (h_n) موجود باشد ، به‌طوری که $\|h_n\| = 2$ و برای $m \neq n$ ، $\|h_n - h_m\| \ge 1/2$ ، که با (۱. ۱۰. ۵) در تناقض است) .

۳. فرض کنیم E فاصله $[0, 1]$ از R باشد.

(a) نشان دهید که ، اگر a_k $(1 \le k \le n)$ ، n نقطه متمایز از E باشد ، آنگاه توابع $x \to |x - a_k|$ در $\mathscr{C}_R(E)$ به‌طور خطی مستقل هستند.

(b) از (a) نتیجه بگیرید که ، تابع $(x, y) \to |x - y|$ را نمی‌توان روی $E \times E$ به‌صورت مجموعی متناهی مانند $\sum_{i=1}^{n} v_i(x) w_i(y)$ نوشت ، که در آن v_iها و w_iها روی E پیوسته هستند.

۴. نشان دهید که ، فضای باناخ $\mathscr{C}_R^{\infty}(R)$ جدائی‌پذیر نیست (از روشی مشابه روشی استفاده کنید که در مسئله بخش ۵. ۱۰ استفاده شده است) .

---

۱. رابطه $w_i \in \mathscr{C}_R(R)$ در چاپ اول متن روسی کتاب به‌صورت $w_i \in \mathscr{C}^{\infty}(R)$ نوشته شده است، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌همین صورت $w_i \in \mathscr{C}_R(R)$ است. مترجم.

۵. مجموعه‌های همپیوسته[1]

فرض کنیم H یک زیر مجموعه از فضای $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ باشد (E یک فضای متریک و F یک فضای نرم‌دار است). گوییم H در یک نقطه $x_0 \in \mathrm{E}$ همپیوسته است ، هرگاه، برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ موجود باشد ، به‌طوری که از رابطه $d(x_0, x) \leq \delta$ ، برای هر $f \in \mathrm{H}$ نتیجه شود $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$ (مهم‌ترین چیز در اینجا استقلال δ از f است). در ادامه، گوییم H همپیوسته است، هرگاه در هر نقطه از E همپیوسته باشد.

مثال‌ها

(۷ . ۵ . ۱) فرض کنیم دو ثابت $c, \alpha > 0$ موجود باشند ، به‌طوری که برای هر $f \in \mathrm{H}$ و هر زوج x و y از نقاط E ، $\|f(x) - f(y)\| \leq c.(d(x, y))^{\alpha}$ ، در این‌صورت ، H همپیوسته است.

(۷ . ۵ . ۲) هر مجموعه متناهی از توابع که در یک نقطه x_0 (به ترتیب روی E) پیوسته باشند ، در نقطه x_0 همپیوسته (به ترتیب روی E همپیوسته) است. کمی کلی‌تر، هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های توابعی که در نقطه x_0 (به ترتیب روی E) همپیوسته هستند ، در نقطه x_0 (به ترتیب روی E) همپیوسته است.

(۷ . ۵ . ۳) فرض کنیم (f_n) یک دنباله از توابع در $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ باشد که به‌طور ساده به تابع g همگرا است ، و در نقطه x_0 (به ترتیب روی E) همپیوسته است. در این‌صورت ، g در نقطه x_0 (به ترتیب روی E) پیوسته است.

در واقع ، فرض کنیم ، برای هر x که $d(x, x_0) \leq \delta$ و برای هر n ، $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$. در این‌صورت ، طبق اصل گسترش نامساوی‌ها ، برای هر x که $d(x, x_0) \leq \delta$ ، خواهیم داشت $\|g(x_0) - g(x)\| \leq \varepsilon$ و این همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

(۷ . ۵ . ۴) در فضای $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ ، بستار هر زیر مجموعه همپیوسته ، همپیوسته است.

مطلب فوق، فوراً از (۳ . ۱۳ . ۱۳) و از اثبات (۷ . ۵ . ۳) نتیجه می‌شود.

(۷ . ۵ . ۵) فرض کنیم F یک فضای باناخ ، (f_n) یک دنباله همپیوسته در $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ و برای هر نقطه x از زیر مجموعه D که در E چگال است ، دنباله $(f_n(x))$ در F همگرا باشد. در این‌صورت ، دنباله (f_n)

---

1 . Equicontinuous sets = Равностепенно непрерывные множества

به‌طور ساده به تابعی (پیوسته) مانند g همگرا خواهد بود.

چون F تام است ، باید ثابت کنیم برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $(f_n(x))$ یک دنباله کوشی در F است. برای $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ موجود است ، به‌طوری که ، از رابطه $d(x , y) \leq \delta$ نتیجه می‌شود ، برای هر عدد طبیعی n ، $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ، از طرف دیگر، نقطه‌ای مانند $y \in \mathrm{D}$ موجوداست به‌طوری که $d(x , y) \leq \delta$ و طبق فرض ، عددی طبیعی مانند n_0 موجود است ، به‌طوری که برای $m \geq n_0$ ، $n \geq n_0$ ، $\|f_m(y) - f_n(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. از این مطلب نتیجه می‌شود که ، برای $m \geq n_0$ ، $n \geq n_0$ ، $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$ ، و این همان چیزی است که باید می‌کردیم.

(۶ . ۵ . ۷) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده ، و (f_n) یک دنباله همپیوسته در $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ باشد. اگر (f_n) روی E به‌طور ساده به g همگرا باشد ، آنگاه این همگرایی روی E یکنواخت خواهد بود.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. برای هر $x \in \mathrm{E}$ یک همسایگی $\mathrm{V}(x)$ موجود است ، به‌طوری که ، از رابطه $y \in \mathrm{V}(x)$ ، برای هر عدد طبیعی n ، نتیجه می‌شود $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. مجموعه E را با تعدادی متناهی از همسایگی‌های $\mathrm{V}(x_i)$ می‌پوشانیم. عددی طبیعی مانند n_0 وجود خواهد داشت به طوری که ، برای هر $n \geq n_0$ و هر اندیس i ، $\|g(x_i) - f_n(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. اما ، برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، x در یکی از $\mathrm{V}(x_i)$ ها قرار خواهد گرفت. بنابراین، برای همه n ها خواهیم داشت $\|f_n(x) - f_n(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. از این رابطه وقتی n به سمت $+\infty$ میل کند ، نتیجه می‌شود $\|g(x) - g(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. بنابراین ، برای هر $n \geq n_0$ و هر $x \in \mathrm{E}$ ، خواهیم داشت $\|g(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$ ، و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

(۷ . ۵ . ۷) (قضیه آسکولی)[1] فرض کنیم F یک فضای باناخ و E یک فضای متریک فشرده باشد. برای اینکه زیر مجموعه H از فضای باناخ $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ به‌طور نسبی فشرده باشد ، لازم و کافی است که، H همپیوسته باشد و برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، مجموعه $\mathrm{H}(x)$ که از همه $f(x)$ هایی تشکیل شده که $f \in \mathrm{H}$ ، در F به‌طور نسبی فشرده باشد.

(a) **لزوم** . اگر H به‌طور نسبی فشرده باشد ، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، تعدادی متناهی از توابع $f_i \in \mathrm{H}$ موجود خواهد بود ، به‌طوری که برای هر $f \in \mathrm{H}$ ، طبق (۵. ۱۷. ۳) ، اندیسی مانند i موجود است ، به‌طوری که $\|f - f_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. از این مطلب نتیجه می‌شود که ، برای هر $x \in \mathrm{E}$ داریم $\|f(x) - f_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ، و چون F تام است ، طبق (۵ . ۱۷. ۳) از مطلب فوق نتیجه می‌گیریم که ، $\mathrm{H}(x)$ به‌طور نسبی فشرده

1. Ascoli's theorem = Теорема Асколи

است. از طرف دیگر، فرض کنیم V یک همسایگی از x باشد به‌طوری که از رابطه $y \in \mathrm{V}$ برای هر اندیس i ، نتیجه شود $\|f_i(y) - f_i(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. در این صورت ، برای هر $f \in \mathrm{H}$ ، از $y \in \mathrm{V}$ نتیجه می‌شود $\|f(y) - f(x)\| \leq \varepsilon$ که ثابت می‌کند H همپیوسته است.

(b) **کفایت.** چون فضای $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ طبق (۳. ۱. ۷) و (۱. ۲. ۷) تام است ، تنها لازم است ثابت کنیم که H پیش‌فشرده (کاملاً کراندار) است ((۵ . ۱۷. ۳) را ببینید). برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده ، و هر $x \in \mathrm{E}$ ، فرض کنیم $\mathrm{V}(x)$ یک همسایگی از x باشد ، به‌طوری که ، از رابطه $y \in \mathrm{V}(x)$ ، برای هر $f \in \mathrm{H}$ ، نتیجه شود $\|f(y) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. مجموعه E را با تعدادی متناهی از همسایگی‌های $\mathrm{V}(x_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ می‌پوشانیم. طبق فرض ، هر یک از مجموعه‌های $\mathrm{H}(x_i)$ در F به‌طور نسبی فشرده می‌باشد ، بنابراین ، K اجتماع آنها نیز چنین است. فرض کنیم $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ زیر مجموعه‌ای متناهی از K باشد ، به‌طوری که هر نقطه K در گویی به مرکز یکی از c_j ها و شعاع $\varepsilon/4$ قرار گیرد. اکنون فرض کنیم Φ مجموعه (متناهی) تشکیل شده از همه نگاشت‌های $i \to \varphi(i)$ از $[1, m]$ به $[1, n]$ (فاصله‌هایی در N) باشد. برای هر $\varphi \in \Phi$ مجموعه همه توابع $f \in \mathrm{H}$ که برای هر اندیس i در $[1, m]$ داشته باشیم

$$\|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \varepsilon/4$$

به L_φ نشان می‌دهیم. بعضی از L_φها ممکن است تهی باشند ، اما، از تعریف c_j ها نتیجه می‌شود که H به‌وسیله اجتماع L_φ ها پوشیده می‌شود. برای به پایان رساندن اثبات ، ما تنها باید نشان دهیم که ، قطر هر یک از L_φها کوچک‌تر یا مساوی ε است. حال ، اگر f ، g هر دو در L_φ باشند ، برای هر $y \in \mathrm{E}$ ، i ئی موجود خواهد بود ، به‌طوری که $y \in \mathrm{V}(x_i)$. بنابراین ، $\|f(y) - f(x_i)\| \leq \varepsilon/4$ و

$$\|g(y) - g(x_i)\| \leq \varepsilon/4 \;.$$

چون طبق تعریف L_φ داریم $\|f(x_i)-g(x_i)\| \leq \varepsilon/2$ ، برای هر $y \in \mathrm{E}$ خواهیم داشت :

$$\|f(y) - g(y)\| \leq \varepsilon$$

و یا $\|f - g\| \leq \varepsilon$ و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای متریک، F یک فضای نرم‌دار و H یک زیر مجموعه کراندار از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد. برای هر نقطه $x \in \mathrm{E}$ ، فرض کنیم $\tilde{x}$ نگاشت $u \to u(x)$ از H به F باشد ، که پیوسته و کراندار است. نشان دهید که ، برای اینکه H در نقطه x_0 همپیوسته باشد ، لازم و کافی است که ، نگاشت $x \to \tilde{x}$ از E به $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{H})$ در نقطه x_0 پیوسته باشد.

۲. فرض کنیم E یک فضای متریک ، F یک فضای نرم‌دار و (f_n) یک دنباله همپیوسته در $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد. نشان دهید که مجموعه نقاط $x \in \mathrm{E}$ که $(f_n(x))$ یک دنباله کوشی در F است ، در E بسته است.[1]

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای «در E بسته است» نوشته شده است «در F بسته است» ، یعنی، به جای E ، F نوشته شده است، که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۳. فرض کنیم E فاصله $]0, +\infty[$ در $\mathbf{R}$ باشد ، و برای هر عدد طبیعی n، فرض کنیم روی E :

$$f_n(t) = \sin\sqrt{t + 4n^2\pi^2}$$

نشان دهید که ، دنباله (f_n) روی E همپیوسته است و روی E به‌طور ساده به 0 همگرا است، اما، **به‌طور نسبی** در فضای $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(\mathrm{E})$ فشرده نیست (نشان دهید که ، اگر چنین باشد (به‌طور نسبی فشرده باشد) ، آنگاه باید **به طور یکنواخت** به صفر همگرا باشد) .

۴. فرض کنیم E یک فضای متریک ، F یک فضای نرم‌دار ، و (f_n) یک دنباله از توابع در $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد ، که در نقطه $a \in \mathrm{E}$ همپیوسته است. نشان دهید که ، اگر دنباله $(f_n(a))$ به $b \in \mathrm{F}$ همگرا باشد ، آنگاه برای هر دنباله (x_n) در E که $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ، دنباله $(f_n(x_n))$ در F به b همگرا خواهد بود.

۵. فرض کنیم E یک فضای متریک و F یک فضای نرم‌دار باشد. گوییم ، زیر مجموعه H از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ **به‌طور یکنواخت همپیوسته** است ، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ موجود باشد ، به‌طوری که ، از رابطه $d(x, y) \le \delta$ ، برای هر $f \in \mathrm{H}$ ، نتیجه شود $\|f(x) - f(y)\| \le \varepsilon$. هر تابع $f \in \mathrm{H}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است ؛ به‌عکس ، یک مجموعه متناهی از توابع به‌طور یکنواخت پیوسته ، به‌طور یکنواخت همپیوسته است. نشان دهید که ، برای یک زیر مجموعه کراندار H از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ ، خواص زیر هم‌ارز هستند :

(a) H به‌طور یکنواخت همپیوسته است.

(b) نگاشت $x \to \tilde{x}$ از E به $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ (مسئله ۱) به‌طور یکنواخت پیوسته است.

(c) نگاشت $(u, x) \to u(x)$ از $\mathrm{H} \times \mathrm{E}$ به F (H به‌عنوان زیرفضایی از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ مورد بررسی قرار می‌گیرد) به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۶. فرض کنیم E یک فضای متریک ، F یک فضای نرم‌دار ، و H یک زیر مجموعه به‌طور یکنواخت همپیوسته از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد (مسئله ۵ را ببینید) . نشان دهید که ، بستار H در $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{E})$ به‌طور یکنواخت همپیوسته است.

۷. فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده ، و F یک فضای نرم‌دار باشد ، نشان دهید که ، هر زیر مجموعه همپیوسته از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ به‌طور یکنواخت همپیوسته است.

۸. فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده ، و F یک فضای باناخ باشد. نشان دهید که ، اگر زیر مجموعه H از $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ به‌طور نسبی فشرده باشد ، آنگاه اجتماع همه مجموعه‌های $\mathrm{H}(x)$ وقتی $x \in \mathrm{E}$ ، در F به‌طور نسبی فشرده است. (از مسئله ۵ بخش ۲. ۷ استفاده کنید.)

۹. نشان دهید که ، نتیجه قضیه آسکولی (۷. ۵. ۷) معتبر باقی می‌ماند ، اگر به‌جای فرض به‌طور نسبی فشرده بودن $\mathrm{H}(x)$ در F برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، فقط فرض کنیم $\mathrm{H}(x)$ برای هر $x \in \mathrm{D}$ ، که در آن D یک زیر مجموعه چگال در E است ، به‌طور نسبی فشرده باشد.

۱۰. فرض کنیم E یک فضای متریک ، و H یک زیر مجموعه همپیوسته از $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد. نشان دهید که ، A مجموعه نقاط $x \in \mathrm{E}$ که $\mathrm{H}(x)$ در $\mathbf{R}$ کراندار است، در E هم باز و هم بسته است. اگر E فشرده و همبند باشد و اگر برای یک نقطه $x_0 \in \mathrm{E}$ ، $\mathrm{H}(x_0)$ در $\mathbf{R}$ کراندار باشد، آنگاه H به‌طور نسبی در $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{E})$ فشرده خواهد بود.

۱۱. فرض کنیم E یک فضای متریک ، و H یک زیر مجموعه همپیوسته از $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}^{\infty}(\mathrm{E})$ باشد. برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، فرض کنیم $v(x) = \sup_{f\in \mathrm{H}} f(x)$ ، $w(x) = \inf_{f\in\mathrm{H}} f(x)$. نشان دهید که ، اگر v (به ترتیب w) در یک نقطه x_0 متناهی باشد ، در یک همسایگی x_0 متناهی و پیوسته خواهد بود ، اگر $v(x_0) = +\infty$ (به ترتیب $w(x_0) = -\infty$) ، آنگاه در یک همسایگی x_0 ، $v(x) = +\infty$ (به ترتیب $w(x) = -\infty$). نتیجه بگیرید که ، مجموعه نقاط $x \in \mathrm{E}$ که برای آنها $v(x)$ (به ترتیب $w(x)$) متناهی است ، در E هم باز و هم بسته است.

۱۲. [1] فرض کنیم $I = [a, b]$ یک فاصله فشرده در $\mathbf{R}$ باشد. تابع $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ را لیپشیتزی با ثابت $k > 0$ نامیم ، هرگاه ، برای هر زوج x ، x' از نقاط I ، $|f(x) - f(x')| \leq k|x' - x|$. فرض کنیم $\mathbf{K}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$ باشد که از همه توابع لیپشیتزی f با ثابت k که در رابطه $f(a) = 0$ صدق می‌کنند، تشکیل شده باشد. نشان دهید که ε- آنتروپی $H_\varepsilon(K)$ و ε- کاپاسیتی $C_\varepsilon(K)$ (بخش ۱۶. ۳ ، مسئله ۴ را ببینید) با فرمول‌های زیر تعیین می‌شوند:

$$H_\varepsilon(K) = C_{2\varepsilon}(K) = (\frac{k(b-a)}{\varepsilon} - 1)\log 2 \qquad \text{اگر } \frac{k(b-a)}{\varepsilon} \text{ عددی صحیح باشد}$$

$$H_\varepsilon(K) = C_{2\varepsilon}(K) = [\frac{k(b-a)}{\varepsilon}]\log 2 \qquad \text{اگر } \frac{k(b-a)}{\varepsilon} \text{ عددی صحیح نباشد}$$

($[t]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی t است). (با یک تبدیل خطی مناسب ، می‌توان فرض کرد $k = 1$. فرض کنیم $b - a = n\varepsilon$ ، که در آن n یک عدد صحیح است. مجموعه M_{n-1} که از 2^{n-1} تابع $g \in K$ تشکیل شده است که روی هر یک از فاصله‌های

$$]a + h\frac{b-a}{n-1}, a + (h+1)\frac{b-a}{n-1}[\qquad (0 \leq h \leq n-2)$$

مستوی (آفین) هستند ، و روی هر یک از چنین فواصلی دارای مشتقی برابر 1+ یا 1- هستند ، مورد بررسی قرار دهید. ثابت کنید که ، فاصله هر دو نقطه متمایز از عناصر M_{n-1} ، بزرگ‌تر یا مساوی $2/(n-1)$ می‌باشد. به‌طریق مشابه ، زیرمجموعه M'_n از M_n که از 2^{n-1} تابعی از M_n تشکیل شده است که روی فاصله $[a, a + (b-a)/n]$ برابر $x - a$ می‌باشند، مورد بررسی قرار داده ، و برای هر تابع $g \in M'_n$ ، به بررسی مجموعه همه توابع $f \in K$ بپردازید که برای هر $x \in I$ ، $g(x) - (2/n) \leq f(x) \leq g(x)$. از یک ساختمان مشابه وقتی $(b-a)/\varepsilon$ عددی صحیح نباشد ، استفاده نمایید).

۶. توابع رِگلِه[2]

فرض کنیم I فاصله‌ای در $\mathbf{R}$ با نقطه شروع a و نقطه انتهایی b (a یا b یا هر دوی آنها ممکن است نامتناهی باشند) و F یک فضای باناخ باشد. گوییم، نگاشت f از I به F یک **تابع پله‌ای**[3] است ، هرگاه یک دنباله متناهی صعودی مانند $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ از نقاط $\bar{I}$ (بستار I در $\overline{\mathbf{R}}$) موجود باشد ، به‌طوری که $x_0 = a$ ، $x_n = b$ ، و f روی هر یک از فاصله‌های باز $]x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$ **ثابت** باشد.

---

۱. مسئله ۱۲ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

۲. چنانکه قبلاً نیز اشاره شده است ، در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه به‌جای واژه فرانسوی Fonctions re'gle'es (توابع رِگلِه) از واژه روسی Простые функции (توابع ساده) استفاده شده است ، که چون این واژه در کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی برای توابع با برد متناهی استفاده شده است ، مترجم ترجیح داد، به جای استفاده از واژه انگلیسی Regulated functions یا واژه روسی Простые функции تا زمانی که واژه مناسبی به زبان فارسی در مقابل واژه فرانسوی fonctions re'gle'es انتخاب نشده است، از واژه نیمه فارسی نیمه فرانسوی «توابع رِگلِه» استفاده نماید.

3 . Step - function = Ступенчатая функция

برای هر نگاشت f از I به F و هر نقطه $x \in \mathrm{I}$ که متمایز از b است. گوییم f در نقطه x **از طرف راست دارای حد** است ، هرگاه $\lim\limits_{\substack{y \in \mathrm{I},\, y>x \\ y \to x}} f(y)$ موجود باشد، در این‌صورت ، این حد را با علامت $f(x+)$ نشان می‌دهیم. به‌طریق مشابه ، برای هر نقطه $x \in \mathrm{I}$ که متمایز از a است، حد f در نقطه x از **طرف چپ** که به علامت $f(x-)$ نشان داده می‌شود، تعریف می‌شود. این حدود را **حدود یک طرفه** f نیز می‌نامند. نگاشت f از I به F را یک **تابع رگله** نامیم ، هرگاه حدود یک طرفه f در هر نقطه I موجود باشد ، واضح است که ، هر تابع پله‌ای تابعی رگله است.

(۱. ۶. ۷) برای اینکه نگاشت f از فاصله فشرده $\mathrm{I} = [a\,,\,b]$ به F رگله باشد ، لازم و کافی است که f حد یک دنباله به‌طور یکنواخت همگرا از توابع پله‌ای باشد.

(a) **لزوم.** برای هر عدد طبیعی $n > 0$ ، و هر $x \in \mathrm{I}$ ، فاصله‌ای باز مانند $\mathrm{V}(x) =]\,y(x)\,,\,z(x)\,[$ شامل x موجود است ، به‌طوری که ، اگر s و t هر دو در $\mathrm{I} \cap]\,y(x)\,,\,x\,[$ یا هر دو $\mathrm{I} \cap]\,x\,,\,z(x)\,[$ باشند ، آنگاه $\|f(s) - f(t)\| \leq \frac{1}{n}$. I را با تعدادی متناهی از فاصله‌های $\mathrm{V}(x_i)$ می‌پوشانیم ، و فرض می‌کنیم $(c_j)_{0 \leq j \leq m}$ دنباله‌ی اکیداً صعودی باشد که از نقاط a ، b ، x_i ، $y(x_i)$ و $z(x_i)$ تشکیل شده است. چون هر یک از c_j ها در یکی از $\mathrm{V}(x_i)$ ها قرار دارد، c_{j+1} یا در همان $\mathrm{V}(x_i)$ است یا برای $j \leq m-1$ باید داشته باشیم $c_{j+1} = z(x_i)$ ، به‌عبارت دیگر ، اگر s و t هر دو در یک فاصله یکسان $]\,c_j$ و $c_{j+1}\,[$ باشند ، آنگاه $\|f(s) - f(t)\| \leq 1/n$. اکنون تابع g_n را به‌عنوان تابعی پله‌ای که در نقاط c_j و در نقاط وسط فاصله‌های $]\,c_j$ و $c_{j+1}\,[$ برابر f و در هر یک از این فاصله‌ها ثابت است ، تعریف می‌کنیم. واضح است که $\|f - g_n\| \leq 1/n$.

(b) **کفایت.** فرض کنیم f حد یکنواخت دنباله (f_n) از توابع پله‌ای باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n موجود است ، به‌طوری که $\|f - f_n\| \leq \varepsilon/3$. حال ، برای هر $x \in \mathrm{I}$، فاصله‌ای مانند $]\,c\,,\,d\,[$ شامل x موجود است ، به‌طوری که ، اگر s و t هر دو در $]\,c\,,\,x\,[$ یا هر دو در $]\,x\,,\,d\,[$ باشند $\|f_n(s) - f_n(t)\| \leq \varepsilon/3$. بنابراین ، تحت همین فرض خواهیم داشت $\|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon$ و این مطلب با توجه به تام بودن F و (۳. ۱۴. ۶) وجود حدود یک طرفه f در نقطه x را ثابت می‌کند.

یک روش دیگر برای فرمولبندی کردن (۷ . ۶ . ۱) این است که بگوییم ، مجموعه توابع رگله در $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{E})$ **بسته** است ، و مجموعه توابع پله‌ای در مجموعه توابع رگله **چگال** است.

(۷ . ۶ . ۲) هر نگاشت پیوسته از یک فاصله $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ به یک فضای باناخ ، رگله است ، همین‌طور، هر نگاشت یکنوا از فاصله I به R نیز رگله است.

با در نظر گرفتن (۳ .۱۶. ۵) و (۴ .۲. ۱) ، مطلب فوق از تعریف نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم f یک نگاشت رگله از فاصله‌ای مانند $I \subset R$ به فضای باناخ F باشد. نشان دهید که ، برای هر زیر مجموعه فشرده H از I ، $f(H)$ در F به‌طور نسبی فشرده است. مثالی ارائه نمائید که نشان دهد $f(H)$ لازم نیست که در F بسته باشد.

۲. تابع $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ ، و $f(0) = 0$ پیوسته است. بنابراین ، روی $I = [0, 1]$ رگله است ، و تابع $g(x) = \operatorname{sgn} x$ ($g(x) = 1$ اگر $x > 0$ ، $g(0) = 0$ ، $g(x) = -1$ اگر $x < 0$) روی R رگله است ، اما $g o f$ ترکیب آنها روی I رگله نیست.

۳. فرض کنیم $I = [a, b]$ یک فاصله فشرده در R باشد. یک **تابع با تغییر محدود**[1] روی I نگاشتی مانند f از I به فضای باناخ F است ، که در خاصیت زیر صدق می‌کند :

عددی مانند $V \geq 0$ موجود است ، به‌طوری که برای هر دنباله متناهی اکیداً صعودی $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ از نقاط I ، نامساوی

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \leq V$$ برقرار است.

(a) نشان دهید که $f(I)$ در F به‌طور نسبی فشرده است. (با اثباتی غیر مستقیم، ثابت کنید که ، $f(I)$ پیش فشرده (کاملاً کراندار) است).

(b) نشان دهید که f روی I رگله است. (از (a) و (۳ .۱۶ .۴) استفاده کنید.)

(c) تابع g که روی $[0, 1]$ برای $x \neq 0$ برابر $x^2 \sin(1/x^2)$ و برای $x = 0$ برابر 0 است ، با تغییر محدود نیست ، اگرچه در هر نقطه از I دارای مشتق است.

1 . Function of bounded variation = функция ограниченой вариации

فصل VIII

حساب دیفرانسیل

موضوع این فصل چیزی به غیر از قضیه‌های مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست ، اما ، به روشی ارائه شده‌اند که ، احتمالاً برای بیشتر دانشجویان تازگی دارد. این طرز معرفی قضایا، که از همه جهت به چشم‌انداز کلی « هندسی» ما اکیداً وابسته است ، این هدف را دنبال می‌کند که، تا آنجا که ممکن است ، نزدیکی خود را با ایده اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، یعنی ، تقریب « موضعی» توابع به وسیله توابع **خطی** ، حفظ کند. در تعلیمات کلاسیک حساب دیفرانسیل و انتگرال این ایده بی‌درنگ به وسیله این حقیقت تصادفی که ، روی یک فضای برداری یک بعدی ، تناظری یک به یک بین فرم‌های خطی و اعداد وجود دارد ، به‌صورتی مبهم و تاریک در می‌آید ، و بنابراین ، مشتق در یک نقطه به جای یک **فرم خطی** به‌عنوان یک عدد تعریف می‌شود. چنین تفسیر عددی کم‌ارزشی از مشتق به‌هنگام بررسی توابع چند متغیره ناکارآمد از آب در می‌آید. به‌عنوان مثال ، در فرمول کلاسیک (۲. ۹. ۸) ، مشتقات جزئی یک تابع مرکب ارائه شده است ، که هر نوع اثری از یک معنی شهودی را از دست داده است ، در حالی‌که ، البته ، گزاره‌ای طبیعی از قضیه ، این است ، که مشتق (کل) از یک تابع مرکب ، ترکیب مشتق‌های آنها است (۱. ۲. ۸) ، که یک فرمول‌بندی معقولانه است ، وقتی شخص به جملات تقریب‌های خطی می‌اندیشد.

این فرمول‌بندی ، « ذاتی» حساب دیفرانسیل و انتگرال ، که در نتیجه « تجرید» بیشتر آن و به‌ویژه این حقیقت که دوباره و دوباره ، باید فضاهای اولیه را ترک کرد و به بالاتر و بالاتر به « **فضاهای تابعی**» صعود کرد (به‌ویژه ، وقتی بحث تئوری مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر مطرح است) ، یقیناً ، به تلاش‌هایی ذهنی احتیاج دارد ، که در تقابل با فرمول‌های راحت و عادی کلاسیک است. اما ، ما اعتقاد داریم که ، نتیجه کار ارزشمند است. به‌طوری که ، دانشجو برای درک ایده‌های به مراتب کلی‌تر حساب دیفرانسیل و انتگرال روی یک **منیفلد دیفرانسیل‌پذیر** ، که ما آن را در فصل‌های XVI تا XX بیان کرده‌ایم ، آماده خواهد شد.[1] البته ، او مشاهده خواهد کرد ، که در این کاربردها ، همه فضاهای برداری که مداخله می‌کنند ،

---

۱. در چاپ اول ترجمه کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به علت اینکه فصل‌های XVI تا XX به این جلد کتاب مربوط نمی‌شوند ، به‌خواننده علاقه‌مند توصیه شده است ، که برای آشنا شدن با ایده‌های فوق به کتاب‌های [9] Шевалле و [12] де Рама مراجعه نماید. مترجم.

دارای بعد **متناهی** هستند ، اگر این امر به او احساس امنیت بیشتری می‌دهد ، البته ، می‌تواند ، این فرض را به همه قضیه‌های این فصل اضافه کند. اما او به ناگزیر خواهد فهمید که ، این کار اثبات‌ها را به‌وسیله یک خط تنها کوتاه‌تر یا ساده‌تر نخواهد کرد ، به‌عبارت دیگر، فرض متناهی بودن بعد ، اصلاً ربطی به موضوعاتی که در زیر بیان شده است ، ندارد. بنابراین ، ما فکر کردیم که ، بهترین کار این است که به کلی آن را حذف کنیم ، اگرچه کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال که حالت متناهی‌البعد را مورد بررسی قرار می‌دهد ، هنوز نسبت به دیگر حالت‌ها ، از نظر تعداد و اهمیت به مراتب بیشتر است.

بعد از ارائه قانون‌های صوری حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش‌های ۱. ۸ تا ۴. ۸ ، بقیه بخش‌های این فصل کاربردهای مختلف موضوعی است که احتمالاً مفیدترین قضیه در آنالیز ریاضی است ، قضیه مقدار میانگین که در بخش ۵ . ۸ ثابت شده است. خواننده مشاهده خواهد کرد که ، فرمول‌بندی این قضیه ، که البته برای توابع برداری ارائه شده است ، متفاوت از فرم کلاسیک نمایش قضیه میانگین (برای توابع حقیقی) است، که معمولاً به صورت تساوی $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ نوشته می‌شود. مشکل این فرمول کلاسیک آن است که : (۱) وقتی f مقادیر برداری داشته باشد ، یا وقتی f' در تعداد متناهی از نقاط فاصله (a , b) تعریف نشده باشد ، فرمولی مشابه فرمول فوق وجود نخواهد داشت ، (۲) این حقیقت کاملاً پنهان نگه داشته شده که هیچ چیز درباره عدد c قابل شناخت نیست ، جز اینکه بین a و b قرار گرفته است ، و برای بیشتر اهداف ، همه آن چه که یک فرد نیاز دارد ، این است که ، $f'(c)$ بین g.l.b و l.u.b تابع f' روی فاصله $[a , b]$ قرار گرفته است (و نه حقیقتی که واقعاً یک مقدار از f' است). به‌عبارت دیگر ، طبیعت واقعی قضیه مقدار میانگین ، در نوشتن آن به‌صورت یک **نامساوی** نشان داده می‌شود ، و نه یک تساوی.

بالاخره ، خواننده احتمالاً فقدان محسوس موضوع به لحاظ تاریخی مهم « **انتگرال ریمان**» در دوره‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال را ملاحظه خواهد کرد. مطمئناً اگر به خاطر نفوذ و اعتبار نام ریمان نبود ، این مبحث مدت‌ها پیش از دروس آنالیز ریاضی حذف شده بود ، زیرا ، برای هر کسی که روی موضوعات ریاضی کار می‌کند (با همه احترامی که به نبوغ ریمان می‌گذارد) ، کاملاً واضح است که ، در دوران ما ، این تئوری تنها می‌تواند به‌عنوان تمرینی نه چندان جالب در تئوری عمومی انتگرال و اندازه مطرح شود (بخش ۹. ۱۳ ، مسئله ۷ را ببینید). تنها محافظه‌کاری رسوم موروثی آکادمیک می‌تواند آن را مدت زیادی بعد از آن که بیش از اهمیت تاریخیش عمر کرده باشد ، در بخش منظم و مقرری از دوره تحصیلات منجمد کند. البته ، این کاملاً عملی است که پروسه انتگرال‌گیری را به یک طبقه از توابع که برای همه اهداف آنالیز مقدماتی (در سطح این اولین جلد) به حد کافی وسیع ، اما ، به قدر کافی به توابع پیوسته نزدیک هستند ، با حذف هر نوع بررسی که به تئوری اندازه کشیده شود ، محدود کرد ، این همان کاری

است ، که ما با تعریف انتگرال توابع رگله[۱] (بعضی اوقات « **انتگرال کوشی** » نامیده می‌شود) انجام داده‌ایم. وقتی فرد به ابزار قوی‌تری احتیاج دارد ، توقف در نیمه راه هیچ معنایی ندارد و تئوری عمومی انتگرال‌گیری (« لبگ») (فصل XIII) تنها جواب معقول است.

۱. مشتق یک نگاشت پیوسته

فرض کنیم E ، F فضاهای باناخ (هر دو حقیقی یا هر دو مختلط) ، A یک زیرمجموعه باز E ، و f ، g دو نگاشت پیوسته از A به F باشند. گوییم f و g در نقطه $x_0 \in A$ **مماس** هستند ، هر گاه $\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \|f(x)-g(x)\| / \|x-x_0\| = 0$. واضح است که ، از این رابطه نتیجه می‌شود $f(x_0)=g(x_0)$. توجه به این نکته ضروری است که ، این تعریف فقط وابسته به توپولوژی‌های روی E و F است. زیرا ، اگر f ، g برای نرم‌های داده شده روی E و F مماس باشند ، برای نرم‌های هم‌ارز با این نرم‌ها (بخش ۶ . ۵ را ببینید) نیز مماس خواهند بود. اگر f ، g در نقطه x_0 و g ، h در نقطه x_0 مماس باشند ، آنگاه f، h در نقطه x_0 مماس خواهند بود. این مطلب از نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\|f(x)-h(x)\| \le \|f(x)-g(x)\| + \|g(x)-h(x)\| .$$

در بین همه توابعی که در نقطه x_0 بر تابع f مماس هستند ، **حداکثر یک** نگاشت به‌صورت $x \to f(x_0) + u(x-x_0)$ موجود است ، که در آن u **خطی** است. زیرا ، اگر دو چنین تابع $x \to f(x_0)+u_1(x-x_0)$ ، $x \to f(x_0)+u_2(x-x_0)$ در نقطه x_0 بر f مماس باشند ، در این صورت ، برای نگاشت خطی $v = u_1 - u_2$ ، خواهیم داشت $\lim_{y\to 0,\, y\neq 0} \|v(y)\| / \|y\| = 0$. اما ، از این رابطه نتیجه می‌شود $v=0$ ، زیرا ، برای $\varepsilon > 0$ داده شده ، $r > 0$ ئی موجود است ، به‌طوری که ، از رابطه $\|y\| \le r$ ، نتیجه شود $\|v(y)\| \le \varepsilon \|y\|$. برای $x \neq 0$ دلخواه ، با قرار دادن $y = rx/\|x\|$ ، به‌دست می‌آید $\|v(x)\| \le \varepsilon \|x\|$ ، و چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است ، از این رابطه نتیجه می‌شود ، برای هر x ، $v(x)=0$.

گوییم، نگاشت پیوسته f از A به F در نقطه $x_0 \in A$ **مشتق‌پذیر** است ، اگر نگاشتی خطی مانند u از E به F وجود داشته باشد ، به‌طوری که نگاشت $x \to f(x_0)+u(x-x_0)$ در نقطه x_0 بر f مماس باشد. اکنون خواهیم دید که ، این نگاشت **یکتا** است ، و آن را **مشتق (مشتق کلی)** f در نقطه x_0 نامیده ، به علامت $f'(x_0)$ یا $Df(x_0)$ نشان می‌دهند.

(۱. ۱. ۸) اگر نگاشت پیوسته f از A به F در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه مشتق $f'(x_0)$ یک نگاشت

---

۱. در متن روسی کتاب به جای واژه توابع رگله از اصطلاح « توابع ساده» (Простые функции) استفاده شده است. اما ، چون در کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی ، اصطلاح « تابع ساده» برای تابعی به‌کار برده شده است، که برد آن مجموعه‌ای متناهی است ، مترجم ترجیح داد ، به جای واژه فرانسوی Fonctions re'gle'es از واژه نیمه فارسی نیمه فرانسوی « توابع رگله» استفاده نماید.

خطی پیوسته از E به F خواهد بود.

فرض کنیم $u = f'(x_0)$. برای $\varepsilon > 0$ داده شده، r ئی موجود است، به‌طوری که $0 < r < 1$، و از رابطه $\|t\| \le r$ نتیجه می‌شود $\|f(x_0+t) - f(x_0)\| \le \varepsilon/2$ و $\|f(x_0+t) - f(x_0) - u(t)\| \le \varepsilon \|t\| / 2$.
بنابراین، $\|t\| \le r$ مستلزم $\|u(t)\| \le \varepsilon$ است، که طبق (۱. ۵. ۵)، ثابت می‌شود که u پیوسته است.

مشتق نگاشت پیوسته f از A به F، در نقطه x_0 (اگر وجود داشته باشد)، **عنصری از فضای باناخ** $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ است (بخش ۵.۷ را ببینید) و نه عنصری از فضای F. در زیر برای هر نگاشت $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ و نقطه $t \in \mathrm{E}$، به‌جای $u(t)$ خواهیم نوشت $u.t$. یادآوری می‌کنیم که $\|u.t\| \le \|u\|.\|t\|$ (بخش ۵.۷ را ببینید) و $\|u\| = \sup\limits_{\|t\| \le 1} \|u.t\|$.

وقتی E دارای بعد متناهی n و F دارای بعد متناهی m باشد، $f'(x_0)$ را می‌توان با یک ماتریس شامل m سطر و n ستون یکی گرفت، این ماتریس در بخش ۸.۱۰ تعیین خواهد شد.

مثال‌ها

(۸.۱.۲) یک تابع ثابت در هر نقطه A مشتق‌پذر است و مشتق آن برابر عنصر 0 فضای $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ است.

(۸.۱.۳) مشتق نگاشت خطی پیوسته u از E به F در هر نقطه $x \in \mathrm{E}$ موجود است و $\mathrm{D}u(x) = u$.

زیرا، طبق تعریف $u(x_0) + u(x - x_0) = u(x)$.

(۸.۱.۴) فرض کنیم E، F و G سه فضای باناخ، و $(x, y) \to [x.y]$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ به G باشد. در این‌صورت، این نگاشت در هر نقطه $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن نگاشت خطی $(s, t) \to [x.t] + [s.y]$ است.

زیرا، داریم:

$$[(x+s).(y+t)] - [x.y] - [x.t] - [s.y] = [s.t]$$

و طبق فرض، ثابتی مانند $c > 0$ موجود است، به‌طوری که $\|[s.t]\| \le c\|s\|.\|t\|$ ((۱. ۵. ۵) را ببینید). بنابراین، برای $\varepsilon > 0$، از رابطه $\sup(\|s\|, \|t\|) = \|(s, t)\| \le \varepsilon / c$ نتیجه می‌شود:

$$\|[(x+s).(y+t)] - [x.y] - [x.t] - [s.y]\| \le \varepsilon \|(s.t)\|$$

و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

نتیجه فوق را به سادگی می‌توان برای یک تابع پیوسته چند خطی تعمیم داد.

(۸.۱.۵) فرض کنیم $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \cdots \times \mathrm{F}_m$ حاصلضربی از فضاهای باناخ، و $f = (f_1, \cdots, f_m)$ یک

نگاشت پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از فضای E به فضای F باشد. برای اینکه f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، لازم و کافی است که هر یک از f_iها در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، و در این صورت :

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \cdots, f_m'(x_0))$$

(وقتی $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ با حاصلضرب فضاهای $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F_i})$ یکی گرفته شود).

در واقع، هر نگاشت خطی u از E به F را می‌توان به طریقی یکتا به‌صورت $u = (u_1, \cdots, u_n)$ نوشت، که در آن u_i یک نگاشت خطی از E به F_i است، و طبق تعریف، داریم :

$$\|u(x)\| = \sup(\|u_1(x)\|, \cdots, \|u_m(x)\|)$$

که از این رابطه (طبق (۱. ۵. ۷) و (۷. ۳. ۲) نتیجه می‌شود $\|u\| = \sup(\|u_1\|, \cdots, \|u_m\|)$، و این امکان می‌دهد $\mathscr{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$ را با حاصلضرب $\prod_{i=1}^{m} \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}_i)$ یکی بگیریم. از تعریف، فوراً نتیجه می‌شود که u مشتق f در نقطه x_0 است، اگر و تنها اگر u_i برای $1 \leq i \leq m$ مشتق f_i در نقطه x_0 باشد.

تبصره . فرض کنیم E ، F فضاهای باناخ **مختلط**، و E_0 و F_0 فضاهای باناخ **حقیقی** زیربنای[1] آنها باشد. در این‌صورت ، اگر نگاشت f از زیر مجموعه باز A از E به F در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه، وقتی f به‌عنوان نگاشتی از A به F_0 مورد بررسی قرار گیرد، در نقطه x_0 با همان مشتق، مشتق‌پذیر خواهد بود (یک نگاشت خطی از E به F به‌عنوان یک نگاشت از E_0 به F_0 نیز خطی است)، اما، عکس مطلب فوق **درست نیست**، به‌عنوان مثال، در بررسی نگاشت $z \to \bar{z}$ ($\bar{z}$ مزدوج مختلط z است) از C به C فوراً به این نتیجه می‌رسیم، که نگاشت $u : z \to \bar{z}$ به‌عنوان نگاشتی از R^2 به R^2 (که می‌توان آن را به‌صورت $(x, y) \to (x, -y)$ نوشت) طبق (۳. ۱. ۸)، در هر نقطه دارای مشتقی است که برابر u می‌باشد، اما، u یک نگاشت خطی **مختلط** نیست، و دارای مشتقی برابر u نیست، که از آن ادعای ما ثابت می‌شود. ما در فصل نهم (۱. ۱۰. ۹) به این مسئله برخواهیم گشت.

گوییم نگاشت f از A به F روی A **مشتق‌پذیر** است، هرگاه در هر نقطه از A مشتق پذیر باشد. نگاشت $x \to f'(x) = \mathrm{D}f(x)$ از A به $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ به صورت f' یا $\mathrm{D}f$ نوشته می‌شود، و به آن **مشتق نگاشت** f **روی مجموعه** A می‌گویند.

۲. قوانین صوری مشتق‌گیری

(۱. ۲. ۸) فرض کنیم E ، F و G سه فضای باناخ، A یک همسایگی باز نقطه $x_0 \in \mathrm{E}$ ، f یک نگاشت پیوسته از A به F ، $y_0 = f(x_0)$ ، B یک همسایگی باز نقطه y_0 در F ، و g یک نگاشت پیوسته از B به G باشد. در این‌صورت ، اگر f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر، و g در نقطه y_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه، نگاشت

1 . Underlying = Базисный

$h = g\circ f$ (که در یک همسایگی x_0 معین و پیوسته است) در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است، و داریم :

$$h'(x_0) = g'(y_0)\circ f'(x_0)$$

طبق فرض، برای ε داده شده‌ای که $0 < \varepsilon < 1$ است ، یک $r > 0$ موجود است ، به‌طوری که ، برای $\|s\| \le r$ و $\|t\| \le r$ ، می‌توان نوشت :

$$f(x_0 + s) = f(x_0) + f'(x_0) . s + o_1(s)$$

$$g(y_0 + t) = g(y_0) + g'(y_0) . t + o_2(t)$$

با $\|o_1(s)\| \le \varepsilon \|s\|$ و $\|o_2(t)\| \le \varepsilon \|t\|$. از طرف دیگر ، طبق (۸ .۱ .۱) و (۵ .۵ .۱) ، ثابت‌های a ، b موجود هستند ، به‌طوری که برای هر s و t ،

$$\|f'(x_0) . s\| \le a\|s\| \quad \text{و} \quad \|g'(y_0) . t\| \le b\|t\|$$

بنابراین ، برای $\|s\| \le r$ ،

$$\|f'(x_0) . s + o_1(s)\| \le \|(a+1)\|s\|.$$

در نتیجه ، برای $\|s\| \le r/(a+1)$ ، خواهیم داشت :

$$\|o_2(f'(x_0) . s + o_1(s))\| \le (a+1)\varepsilon\|s\|$$

و

$$\|g'(y_0) . o_1(s)\| \le b\,\varepsilon\,\|s\|.$$

بنابراین ، می‌توان نوشت :

$$h(x_0 + s) = g(y_0 + f'(x_0) . s + o_1(s)) = g(y_0) + g'(y_0) . (f'(x_0) . s) + o_3(s)$$

که در آن :

$$\|o_3(s)\| \le (a+b+1)\varepsilon\|s\|$$

و با این رابطه قضیه ثابت می‌شود.

گزاره (۸ .۲ .۱) دارای کاربردهای فراوانی است، که ما در زیر به یکی از آنها اشاره می‌کنیم :

(۸ .۲ .۲) فرض کنیم f ، g دو نگاشت پیوسته از زیر مجموعه باز A از فضای E به F باشند. اگر f و g در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشند ، آنگاه $f + g$ و αf (α یک اسکالر است) نیز در نقطه x_0 مشتق‌پذیر خواهند بود ، و $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ و $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

نگاشت $f + g$ ترکیب نگاشت $(u, v) \to u + v$ از $F \times F$ به F و نگاشت $x \to (f(x), g(x))$ از A به $F \times F$ است ، که هر دو طبق (۸ .۱ .۳) و (۸ .۱ .۵) مشتق‌پذیر می‌باشند ، و بنابراین ، طبق (۸ .۲ .۱) ، $f + g$ در نقطه x_0 مشتق پذیر خواهد بود. با دلیلی به مراتب ساده‌تر ، و با استفاده از این حقیقت که ، طبق (۸ .۱ .۳) ، نگاشت $u \to \alpha u$ از F به F مشتق‌پذیر است ، رابطه $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ ثابت می‌شود. البته ، گزاره (۸ .۲ .۲) را می‌توان خیلی ساده‌تر با بحثی مستقیم نیز ثابت نمود.

فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ ، A یک زیر مجموعه باز E ، و B یک زیر مجموعه باز F باشد. اگر A و B هومیومورف باشند ، و یک **هومیومورفیسم مشتق‌پذیر** از A بر روی B مانند f موجود باشد ، آنگاه از مطالب فوق نمی‌توان نتیجه گرفت که ، برای هر $x_0 \in A$ ، $f'(x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بر روی F است (به عنوان مثال ، نگاشت $\xi \to \xi^3$ را از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ مورد بررسی قرار دهید).

(۸ .۲ .۳) فرض کنیم f یک هومیومورفیسم از زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E به روی زیر مجموعه باز B از فضای باناخ F و g هومیومورفیسم وارون f باشد، و فرض کنیم f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بر روی F باشد. در این‌صورت g در نقطه $y_0 = f(x_0)$ مشتق‌پذیر خواهد بود و $g'(y_0)$ وارون نگاشت $f'(x_0)$ می‌باشد (مقایسه کنید با (۵ .۲ .۱۰)).

طبق فرض، نگاشت $s \to f(x_0 + s) - f(x_0)$ یک هومیومورفیسم از یک همسایگی V از 0 در E به یک همسایگی W از 0 در F است ، و نگاشت $t \to g(y_0+t) - g(t_0)$ هومیومورفیسم وارون است. طبق فرض ، نگاشت خطی $f'(x_0)$ از E بر روی F دارای وارونی مانند u است که پیوسته است ، و بنابراین ، طبق (۵ .۵ .۱) ، یک $c > 0$ موجود است ، به‌طوری که برای هر $t \in F$ ، $\| u(t) \| \le c \| t \|$. برای $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده که $0 < \varepsilon \le 1/2c$، یک $r > 0$ موجود است ، به‌طوری که اگر بنویسیم $f(x_0 + s) - f(x_0) = f'(x_0) . s + o_1(s)$ ، آنگاه از رابطه $\| s \| \le r$ ، نتیجه می‌شود $\| o_1(s) \| \le \varepsilon \| s \|$. حال فرض کنیم ، عدد r' طوری انتخاب شده باشد که گوی $\| t \| \le r'$ در W قرار گیرد و تصویر آن تحت نگاشت $t \to g(y_0+t) - g(y_0)$ در گوی $\| s \| \le r$ واقع شود. فرض کنیم $z = g(y_0 + t) - g(y_0)$. طبق تعریف ، برای $\| t \| \le r'$ ، از معادله فوق نتیجه می‌شود $t = f(x_0 + z) - f(x_0)$ و از اینکه $\| z \| \le r$ است ، می‌توان نوشت $t = f'(x_0) . z + o_1(z)$ که در آن $\| o_1(z) \| \le \varepsilon \| z \|$. از این رابطه ، طبق تعریف u ، خواهیم داشت :

$$u.t = u.(f'(x_0) . z) + u . o_1(z) = z + u . o_1(z)$$

علاوه بر آن $\| u . o_1(z) \| \le c \| o_1(z) \| \le c\varepsilon \| z \| \le \| z \| / 2$ ، بنابراین :

$$\| u.t \| \ge \| z \| - \frac{1}{2} \| z \| = \frac{1}{2} \| z \|$$

در نتیجه :

$$\| z \| \le 2 \| u . t \| \le 2c \| t \|$$

و بالاخره $\| u . o_1(z) \| \le c\varepsilon \| z \| \le 2c^2 \varepsilon \| t \|$. به این ترتیب، ما ثابت کرده‌ایم که ، از رابطه $\| t \| \le r'$ نتیجه می‌شود $\| g(y_0 + t) - g(y_0) - u . t \| \le 2c^2 \varepsilon \| t \|$ و چون ε دلخواه است ، اثبات کامل می‌شود.

قضیه (۸ .۲ .۳) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت (تحت شرایطی مشابه) :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1} \qquad (۸ .۲ .۳ .۱)$$

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی حقیقی باشد. نشان دهید که ، در E نگاشت $x \to \|x\|$ از E به R در هر نقطه $x \neq 0$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در چنین نقطه‌ای نگاشت خطی $s \to \frac{(s|x)}{\|x\|}$ می‌باشد.

۲. (a) در فضای باناخ c_0 (بخش ۳. ۵، مسئله ۵). نشان دهید که ، نرم $x \to \|x\|$ در نقطه $x = (\xi_n)$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر ، اندیسی مانند n_0 موجود باشد ، به‌طوری که برای هر $n > n_0$ ، $|\xi_{n_0}| > |\xi_n|$. مشتق را حساب کنید.

(b) در فضای باناخ l^1 (بخش ۷ . ۵ ، مسئله ۱ را ببینید) ، نشان دهید که، نرم $x \to \|x\|$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست (از (۱. ۱. ۸) و مسئله ۱ قسمت (c) از بخش ۷. ۵ استفاده کنید.)

۳. [1] نشان دهید که ، در فضای $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{I})$ ، که در آن $\mathrm{I} = [0, 1]$ ، نرم $x \to \|x\|$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

۴. [1] فرض کنیم f یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر باشد که روی مجموعه باز A از فضای باناخ E تعریف شده است.

(a) نشان دهید که ، اگر در نقطه $x_0 \in \mathrm{A}$ ، f به ماکزیمم نسبی خود برسد (بخش ۹. ۳ ، مسئله ۶ را ببینید) ، آنگاه $\mathrm{D}f(x_0) = 0$.

(b) فرض کنیم E یک فضای متناهی‌البعد، A به‌طور نسبی فشرده ، f روی $\overline{\mathrm{A}}$ معین و پیوسته، و روی مرز A برابر صفر باشد. نشان دهید که ، نقطه‌ای مانند $x_0 \in \mathrm{A}$ موجود است، به‌طوری که $\mathrm{D}f(x_0) = 0$ (« قضیه رُل» از (a) و (۳. ۱۷. ۱۰) استفاده کنید).

۳. مشتق‌ها در فضاهای توابع خطی پیوسته

(۸ . ۳ .۱) فرض کنیم E ، F ، G سه فضای باناخ باشند. در این‌صورت، نگاشت $(u, v) \to v \circ u$ (که به‌صورت vu نیز نوشته می‌شود) از $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \times \mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ به $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در نقطه (u_0, v_0) نگاشت :

$$(s, t) \to v_0 \circ s + t \circ u_0$$

می‌باشد.

با توجه به اینکه ، طبق (۵ . ۷. ۵) ، نگاشت $(u, v) \to v \circ u$ دو خطی و پیوسته است ، نتیجه فوق حالت خاصی از قضیه (۴ . ۱. ۸) است.

(۸ .۳ .۲) فرض کنیم E و F دو فضای باناخ باشند، به‌طوری لااقل یک هومیومورفیسم خطی از E بر روی F وجود داشته باشد. در این‌صورت ، $\mathscr{H}$ مجموعه تشکیل شده از چنین هومیومورفسیم‌های خطی در $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ باز است. نگاشت $u \to u^{-1}$ از $\mathscr{H}$ بر روی $\mathscr{H}^{-1}$ مجموعه هومیومورفیسم‌های خطی از F بر روی E پیوسته و مشتق‌پذیر است ، و مشتق نگاشت $u \to u^{-1}$ در نقطه u_0 نگاشت خطی $s \to u_0^{-1} \circ s \circ u_0^{-1}$ (از $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ به $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$) می‌باشد.

---

۱. مسائل ۳ و ۴ هر دو درچاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی ، وجود دارند ، اما ، مسئله ۳ در چاپ دوم برگردان انگلیسی کتاب حذف شده است ، و مسئله ۴ دارای شماره ۳ است. مترجم.

۱. ابتدا حالت $F = E$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از نماد 1_E برای نگاشت همانی روی E استفاده خواهیم کرد. در این‌صورت :

(۱. ۲. ۳. ۸) اگر در $\mathscr{L}(E ; E)$ ، $\|w\| < 1$ باشد ، آنگاه نگاشت خطی $1_E + w$ یک هومیومورفیسم است، وارون آن $(1_E + w)^{-1}$ برابر مجموع سری مطلقاً همگرای $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ می‌باشد ، و

$$\|(1_E + w)^{-1} - 1_E + w\| \le \|w\|^2 / (1 - \|w\|) \qquad (۸ .۳ .۲ .۲)$$

داریم $\sum_{n=0}^{N}\|w\|^n = (1 - \|w\|^{N+1}) / (1 - \|w\|) \le 1 / (1 - \|w\|)$ ، بنابراین، طبق (۵ . ۷ . ۵) ، (۱. ۳. ۵)، (۲. ۳. ۵) و (۳. ۷. ۵) سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ در $\mathscr{L}(E ; E)$ به‌طور مطلق همگرا است. علاوه بر این ، داریم :

$$(1_E + w)(1_E - w + w^2 - \cdots + (-1)^N w^N) = (1 - w + w^2 - \cdots + (-1)^N w^N)(1_E + w)$$
$$= 1 - (-1)^{N+1} w^{N+1} \qquad (*)$$

و چون وقتی $N \to \infty$ ، $w^{N+1} \to 0$ طبق تعریف و طبق (۵ . ۷ . ۵) ، برای عنصر $v = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ از فضای $\mathscr{L}(E ; E)$ خواهیم داشت $(1_E + w)v = v(1_E + w) = 1_E$ ، که دو قسمت اول گزاره فوق را ثابت می‌کند. نامساوی (۲. ۲. ۳. ۸) از رابطه :

$$(1_E + w)^{-1} - 1_E + w = w^2(1_E - w + w^2 - \cdots)$$

و از (۵ .۷ . ۵) و (۲ . ۳ . ۵) نتیجه می‌شود.

۲. اکنون حالت کلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم $s \in \mathscr{L}(E ; F)$ چنان باشد که $\|u_0^{-1}\| . \|s\| < 1$ ؛ در این‌صورت ، عنصر $1_E + u_0^{-1}s$ که متعلق به $\mathscr{L}(E ; E)$ است ، طبق (۵ . ۷ . ۵) و (۱. ۲. ۳. ۸) دارای وارون است ، و چون می‌توان نوشت $u_0 + s = u_0(1_E + u_0^{-1}s)$، پس $u_0 + s$ نیز دارای وارونی به‌صورت $(1_E + u_0^{-1}s)^{-1}u_0^{-1}$ خواهد بود ، و می‌توان نوشت :

$$(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} = ((1_E + u_0^{-1}s)^{-1} - 1_E)\,u_0^{-1}$$

با استفاده از (۲. ۲. ۳. ۸) و با قرار دادن $w = u_0^{-1}s$، برای $\|s\| < 1/\|u_0^{-1}\|$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}s\,u_0^{-1}\| \le \|u_0^{-1}\|^3 . \|s\|^2 / (1 - \|u_0^{-1}\| . \|s\|)$$

بنابراین، با انتخاب $\|s\| \le 1/2\,\|u_0^{-1}\|$ ، خواهیم داشت :

$$\|(u_0 + s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}s\,u_0^{-1}\| \le c\,\|s\|^2$$

که در آن $c = 2\,\|u_0^{-1}\|^3$ ، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

---

* در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به جای $(-1)^{N+1} w^{N+1}$ مقدار w^{N+1} گذاشته شده است که باید آنرا اشتباه چاپی به‌حساب آورد، این اشتباه در چاپ دوم متن انگلیسی وجود ندارد. مترجم.

۴. مشتقات توابع یک متغیره

وقتی E را به یک فضای برداری **یک بعدی** اختصاص دهیم (یکسان با $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$)، می‌دانیم که $\mathscr{L}(E\,;F)$ به‌طور طبیعی با خود فضای F یکسان خواهد بود، و بردار $b \in F$ را می‌توان با نگاشت خطی $\xi \to b\xi$ از E به F یکسان گرفت (۶. ۷. ۵ را ببینید). اگر f یک نگاشت مشتق‌پذیر از مجموعه باز $A \subset E$ به F باشد، مشتق آن $Df(\xi_0)$ در نقطه $\xi_0 \in A$ با یک بردار از F یکسان خواهد بود، و نگاشت Df با نگاشتی از A به F یکسان خواهد بود. اگر F خود فضایی یک بعدی باشد (یکسان با $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$)، به حالت کلاسیک مشتق (در یک نقطه) به‌عنوان یک **عدد** خواهیم رسید. نتایج کلی که فوقاً به‌دست آمد، در حالت قبل، به فرمول‌های کلاسیک حساب دیفرانسیل و انتگرال تبدیل می‌شود. به‌عنوان مثال، (۲. ۳. ۸)، وقتی E و F فضاهای یک بعدی باشند، به فرمول مشتق‌گیری از $1/\xi$ برای $\xi \neq 0$ تبدیل خواهد شد، که برابر $-1/\xi^2$ می‌باشد. ما صریحاً نتیجه زیر را از قضیه (۱. ۲. ۸) فرمولبندی می‌کنیم:

(۱. ۴. ۸) فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ حقیقی (به ترتیب مختلط)، f یک نگاشت مشتق‌پذیر از زیر مجموعه باز A از فضای E به F ، و g یک نگاشت مشتق‌پذیر از زیر مجموعه باز I از $\mathbf{R}$ (به ترتیب $\mathbf{C}$) به A باشد. در این‌صورت، مشتق نگاشت $h = f \circ g$ از I به F ، در هر نقطه $\xi \in I$ برداری است از F که برابر $D(f(g(\xi)))\,.\,g'(\xi)$ می‌باشد. (به یاد بیاورید که $g'(\xi)$ در E و $Df(g(\xi))$ در $\mathscr{L}(E\,;F)$ واقع است.)

تبصره . فرض کنیم F یک فضای باناخ **مختلط** ، و f یک نگاشت مشتق‌پذیر از زیر مجموعه‌ای باز مانند $A \subset C$ به F باشد. در این‌صورت، مشتق f در نقطه $z \in A$ با برداری از F یکسان خواهد بود. اکنون فرض کنیم g نگاشتی مشتق‌پذیر از یک زیر مجموعه باز I از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{C}$ باشد (که به‌عنوان فضای برداری حقیقی دو بعدی زیر بنا مورد بررسی قرار می‌گیرد)؛ در این‌صورت $f \circ g$ نگاشتی مشتق‌پذیر از I به F_0 فضای باناخ حقیقی زیر بنای فضای F خواهد بود، و (۱. ۴. ۸) نشان می‌دهد که مشتق در نقطه‌ای مانند $\xi \in I$ برابر $g'(\xi)\,(Df(g(\xi)))$ است (به یاد بیاورید که، در اینجا $g'(\xi)$ یک عدد مختلط است).

وقتی $E = \mathbf{R}$ و F یک فضای باناخ **حقیقی** باشد، مفهوم مشتق را می‌توان به شکل گسترده‌ای تعمیم داد: برای هر زیر مجموعه $J \subset \mathbf{R}$ و هر نقطه $\xi_0 \in J$ که ξ_0 نقطه چسبیدگی $J - \{\xi_0\}$ است، برای نگاشت f از J به F ، می‌توان مشتق در نقطه ξ_0 (نسبت به J) را به‌عنوان حد:

$$\lim_{\xi \to \xi_0,\ \xi \in J - \{\xi_0\}} (f(\xi) - f(\xi_0))/(\xi - \xi_0)$$

(در صورت وجود) تعریف کرد. وقتی حد فوق موجود باشد، گوییم **f در نقطه ξ_0 نسبت به J مشتق‌پذیر**

است. ما تنها حالتی را مورد بررسی قرارخواهیم داد که J یک **فاصله** از $\mathbf{R}$ باشد. در این‌صورت، در نقاط داخلی J ، مشتق نسبت به J (وقتی وجود داشته باشد) با مشتق معمولی یکی خواهد بود. در نقطه شروع α (به ترتیب نقطه انتهای β) از فاصله J ، وقتی α (به ترتیب β) متعلق به J باشد، مشتق f نسبت به J را **مشتق راست** (به ترتیب، **مشتق چپ**) f در نقطه α (به ترتیب β) می‌نامند و با علامت $f'_d(\alpha)$ یا $D_+f(\alpha)$ (به ترتیب، $f'_g(\beta)$ یا $D_-f(\beta)$) نشان می‌دهند. قضیه (۱. ۴. ۸) باز هم معتبر باقی می‌ماند، وقتی فرض کنیم I یک فاصله و g در ξ نسبت به I دارای مشتق باشد، در این‌صورت، اگر f روی A مشتق‌پذیر باشد ، $f\circ g$ در ξ نسبت I دارای مشتقی خواهد بود که با فرمولی مشابه داده می‌شود. ($g'(\xi)$ با مشتق g نسبت به I تعویض می‌شود) اثبات با اصلاحات و تغییراتی واضح شبیه (۱. ۲ . ۸) است. ما عمده نتایج معمولی این قضیه را ، از قبیل نتیجه‌ای مطابق با (۲. ۲. ۸) حذف کرده‌ایم.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از یک فاصله $I\subset \mathbf{R}$ به فضای باناخ E باشد. برای اینکه f در یک نقطه داخلی x_0 از فاصله I مشتق‌پذیر باشد، لازم وکافی است که نسبت $(f(x_0+h)-f(x_0-k))/(h+k)$ در E وقتی (h,k) روی مجموعه زوج‌هایی که $h>0$ ، $k>0$ به سمت $(0,0)$ میل می‌کند ، دارای حد باشد.

(b) تابع حقیقی f که برای $x\neq 0$ مساوی $x^2\sin(1/x)$ و برای $x=0$ برابر 0 است، روی $\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر است، اما $(f(x)-f(y))/(x-y)$ وقتی (x,y) به سمت $(0,0)$ میل می‌کند، روی مجموعه زوج‌هایی که $x>0$ ، $y>0$ ، $x\neq y$ است، دارای حد نیست.

(c) روی فاصله $I=[0,1]$ ، دنباله توابع پیوسته f_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$f_0(t)=t$ ، برای هر $n\geq 1$ ، f_n به‌صورت $\alpha t+\beta$ روی هر یک از 3^n فاصله :

$$\frac{k}{3^n}\leq t\leq \frac{k+1}{3^n}\qquad (0\leq k\leq 3^n-1)$$

می‌باشد ، علاوه بر این :

$$f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right),\quad f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right),$$
$$f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right)=f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\right)$$

نشان دهید که، دنباله (f_n) روی I به‌طور یکنواخت به سمت تابعی پیوسته میل می‌کند که در هیچ نقطه‌ای از I دارای مشتق نیست. (از (a) استفاده کنید.)

۲. فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از یک فاصله باز $I\subset\mathbf{R}$ به فضای باناخ E باشد، که در هر نقطه $t\in I$ دارای مشتق چپ $f'_g(t)$ و مشتق راست $f'_d(t)$ است.

(a) فرض کنیم U یک زیر مجموعه باز غیر تهی E ، و A مجموعه نقاط $t\in I$ باشد ، به‌طوری که $f'_d(t)\in U$. برای هر $\alpha>0$ ، فرض کنیم B_α زیر مجموعه‌ای از I باشد ، که از نقاطی مانند t تشکیل شده است ، به‌طوری که حداقل یک نقطه $s\in I$ موجود است که برای آن $t-\alpha\leq s<t$ و $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}\in U$. نشان دهید که B_α باز است و $A\cap \complement B_\alpha$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است. براساس این نتیجه ، ثابت کنید که ، مجموعه نقاط $t\in A$ که $f'_g(t)\notin\overline{U}$ مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است. (از مسئله ۳ بخش ۹ . ۳ استفاده کنید.)

(b) از قسمت (a) نتیجه بگیرید که مجموعه نقاط $t \in I$ به‌طوری که $f'_g(t) \neq f'_d(t)$ حداکثر شمارش‌پذیر است. (ابتدا ملاحظه کنید که $f(I)$ اجتماع شمارائی از فضاهای متریک فشرده است ، و با بررسی زیر فضای برداری بسته E که به‌وسیله $f(I)$ تولید شده است ، مسئله را به حالتی که در آن توپولوژی E دارای یک پایه شمارای (U_n) از مجموعه‌های باز است تبدیل نموده ، سپس ، ملاحظه کنید که ، برای هر زوج متمایز a ، b از نقاط E زوجی از مجموعه‌های U_p ، U_q موجود است ، به‌طوری که $a \in U_p$ ، $b \in U_q$ و $U_p \cap U_q = \varnothing$.)

۳. (a) فرض کنیم f روی R^2 با شرایط زیر تعریف شده باشد :

$$f(x) = \frac{\xi_1 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \ x = (\xi_1 \xi_2) \neq (0,0) \text{ برای } ; \ f(0) = 0$$

نشان دهید که برای هر $x \in R^2$ و هر $y \in R^2$ ، حد $\lim_{t \to 0,\, t \neq 0} (f(x+ty) - f(x))/t = g(x, y)$ موجود است، اما ، نگاشت $y \to g(0, y)$ خطی نیست (بنابراین، f در نقطه 0 مشتق‌پذیر نیست).

(b) فرض کنیم f روی R^2 با شرایط زیر تعریف شده باشد :

$$f(x) = \frac{\xi_1^3 \xi_2}{\xi_1^4 + \xi_2^2}, \ x = (\xi_1 \xi_2) \neq (0,0) \text{ برای } ; \ f(0) = 0$$

نشان دهید که، حد $g(x, y)$ برای هر x و y موجود است، و نگاشت $y \to g(x, y)$ برای هر $x \in R^2$ خطی است، اما f در نقطه 0 مشتق‌پذیر نیست. (نقاط (ξ_1, ξ_2) را که $\xi_2 = \xi_1^2$ مورد بررسی قرار دهید.)

۴. (a) فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E به فضای باناخ F باشد. گوییم، در نقطه $x_0 \in A$ تابع f **شبه مشتق‌پذیر**[1] است، اگر نگاشتی خطی مانند u از E به F موجود باشد، که در خاصیت زیر صدق کند :

برای هر نگاشت پیوسته g از $I = [0, 1]$ به A به‌طوری که $g(0) = x_0$ ، و مشتق $g'(0)$ در 0 (نسبت به I) موجود باشد، آنگاه نگاشت $t \to f(g(t))$ در نقطه $t = 0$ دارای مشتقی (نسبت به I) برابر با $u(g'(0))$ باشد. در این‌صورت، نگاشت خطی u را شبه مشتق[2] f در نقطه x_0 می‌نامند. نشان دهید که، اگر f در x_0 شبه مشتق‌پذیر باشد، شبه مشتق آن در نقطه x_0 یکتا خواهد بود. خاصیت (۱. ۲. ۸) را به نگاشت‌های شبه مشتق‌پذیر تعمیم دهید.

(b) نشان دهید که، اگر f در نقطه x_0 شبه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه u شبه مشتق آن یک نگاشت خطی پیوسته از E به F است. (فرض کنید که $x_0 = 0$ ، $f(x_0) = 0$. از برهان خلف استفاده کنید : اگر u روی گوی $B(0, 1)$ کراندار نباشد، آنگاه دنباله‌ای مانند (a_n) از بردارهای E موجود خواهد بود، به‌طوری‌که $\|a_n\| = 1$ و دنباله (t_n) از اعداد اکیداً مثبت موجود است، به‌طوری که $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ و $\alpha_n = \|t_n^{-1} f(t_n a_n)\|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند، می‌توان فرض کرد، که دنباله‌های (t_n) و $(\sqrt{\alpha_n}\, t_n)$ نزولی هستند و به سمت 0 میل می‌کنند. نگاشتی پیوسته مانند g از $[0, 1]$ به E تعریف کنید، به طوری که $g(0) = 0$ و $g'(0)$ موجود، و مساوی صفر ، و $g(\sqrt{\alpha_n}\, t_n) = t_n a_n$ باشد.)

۵. (a) فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، f نگاشتی پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از E به F باشد. نشان دهید که، اگر f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در x_0 شبه مشتق‌پذیر نیز خواهد بود و شبه مشتق آن برابر مشتقش می‌باشد.

(b) فرض کنیم E دارای بعد متناهی باشد. نشان دهید که ، اگر f در نقطه $x_0 \in A$ شبه مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر خواهد بود. (از تناقض استفاده کنید : فرض کنیم u شبه مشتق f در نقطه x_0 باشد و فرض کنیم یک عدد $\alpha > 0$ و یک دنباله (x_n) از نقاط A ، که به سمت x_0 میل می‌کند، موجود باشد، به‌طوری که $\|f(x_n) - f(x_0) - u.(x_n - x_0)\| \geq \alpha \|x_n - x_0\|$ با استفاده از فشردگی موضعی E ، نشان دهید که ، می‌توان فرض کرد دنباله $(\|x_n - x_0\|)$ نزولی است، و دنباله بردارهای $z_n = (x_n - x_0)/\|x_n - x_0\|$ به سمت حدی در E میل

1. Quasi-differentiable = Квазидифференцируемая
2. Quasi-derivative = Квазипроизводная

می‌کند، سپس، نگاشت پیوسته g از $[0,1]$ به E را طوری تعریف کنید که $g(0) = x_0$ و $g'(0)$ موجود باشد ، اما $u(g'(0))$ مشتق $t \to f(g(t))$ در $t = 0$ نباشد.)

۶. فرض کنیم $\mathrm{I} = [0,1]$، و فرض کنیم E فضای باناخ $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{I})$ باشد. برای اینکه نگاشت $x \to \|x\|$ از E به $\mathbf{R}$ در نقطه x_0 شبه مشتق‌پذیر باشد ، لازم و کافی است که، تابع $t \to |x_0(t)|$ ماکزیمم خود را در I در یک نقطه یگانه $t_0 \in \mathrm{I}$ کسب نماید. در این‌صورت، شبه مشتق نگاشت $x \to \|x\|$ در نقطه x_0 نگاشتی خطی مانند u است، به‌طوری که $u(z) = z(t_0)$ اگر $x_0(t_0) > 0$ ، و $u(z) = -z(t_0)$ اگر $x_0(t_0) < 0$ (مقایسه کنید با بخش ۲. ۸ مسئله ۳). (برای اثبات لازم بودن شرط فوق، فرض کنیم $|x_0|$ حداقل در دو نقطه متمایز t_0، t_1 به ماکزیمم خود برسد. فرض کنیم y نگاشتی پیوسته از I به I باشد ، که در نقطه t_0 برابر 1 و در نقطه t_1 برابر 0 است. رفتار $(\|x_0 + \lambda y\| - \|x_0\|) / \lambda$ را وقتی عدد حقیقی $\lambda \neq 0$ به سمت 0 میل می‌کند ، مورد بررسی قرار دهید. برای اثبات این که شرط فوق کافی است ، فرض کنیم $\lambda \to z_\lambda$ نگاشتی پیوسته از I به E باشد ، که در $\lambda = 0$ دارای مشتق $a \in \mathrm{E}$ بوده و چنان باشد که $z_0 = 0$. با ملاحظه اینکه اگر t_λ بزرگ‌ترین عدد در I (یا کوچک‌ترین عدد در I) باشد که تابع $t \to |x_0(t) + z_\lambda(t)|$ به ماکزیمم خود می‌رسد ، آنگاه وقتی λ به سمت 0 میل می‌کند ، t_λ به سمت t_0 خواهد کرد.) از نتیجه فوق نتیجه بگیرید که نگاشت $x \to \|x\|$ از E به $\mathbf{R}$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست[1] (مقایسه کنید با بخش ۲. ۸ ، مسئله ۲).

۷. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E به فضای باناخ F و f تابعی **لیپشیتزی** روی A باشد (بخش ۶. ۷ ، مسئله ۱۲ را ببینید) ، به این معنی که، ثابتی مانند $k > 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر زوج از نقاط A ، $\| f(x_1) - f(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|$. فرض کنیم $x_0 \in \mathrm{A}$ و نگاشتی خطی مانند u از E به F موجود باشد ، به‌طوری که برای هر بردار $a \neq 0$ در E ، حد $(f(x_0 + at) - f(x_0))/t$ وقتی $t \neq 0$ در $\mathbf{R}$ به سمت 0 میل می‌کند ، موجود و برابر $u(a)$ باشد. نشان دهید که f در نقطه x_0 شبه مشتق‌پذیر است.

۸. (a) فرض کنیم a و b دو نقطه در فضای باناخ E باشند. نشان دهید که ، نگاشت $t \to \|a + bt\|$ از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ برای هر $t \in \mathbf{R}$ دارای مشتق راست و مشتق چپ است (ثابت کنید که ، اگر $0 < t < s$ باشد ، آنگاه :

$$(\|a + bt\| - \|a\|)/t \leq (\|a + bs\| - \|a\|)/s$$

و از ۱. ۲. ۴ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم u نگاشتی پیوسته از فاصله $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ به E باشد. نشان دهید که، اگر در نقطه‌ای مانند $t_0 \in \mathrm{I}$ ، u مشتق راست داشته باشد، آنگاه $t \to \|u(t)\|$ در نقطه t_0 دارای مشتق راست خواهد بود و

$$(\mathrm{D}_+ \|u\|)(t_0) \leq \| \mathrm{D}_+ u(t_0) \|$$

(از (a) استفاده کنید).

(c) فرض کنیم U نگاشتی پیوسته از I به $\mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{E})$ باشد. نشان دهید که، اگر در نقطه‌ای مانند $t_0 \in \mathrm{I}$، U دارای مشتق راست باشد و $\mathrm{U}(t_0)$ هومیومورفیسمی خطی از E به روی E باشد، آنگاه نگاشت $t \to \|(\mathrm{U}(t))^{-1}\| = f(t)$، که در یک همسایگی نقطه t_0 تعریف شده است، دارای مشتق راست در نقطه t_0 است، و

$$|\mathrm{D}_+(f^{-1})(t_0)| \leq \|\mathrm{D}_+ U(t_0)\|.$$

۵. قضیه مقدار میانگین

(۸ . ۵ . ۱) فرض کنیم $\mathrm{I} = [\alpha, \beta]$ فاصله‌ای فشرده در $\mathbf{R}$ ، f نگاشتی پیوسته از I به فضای باناخ F و φ نگاشتی پیوسته از I به $\mathbf{R}$ باشد. فرض کنیم زیر مجموعه‌ای شمارا مانند D موجود باشد ، به‌طوری که برای هر $\xi \in \mathrm{I} - \mathrm{D}$ ، f و φ هر دو در ξ نسبت به I دارای مشتق باشند (۴. ۸ را ببینید) ، و $\|f'(\xi)\| \leq \varphi'(\xi)$.

---

[1] این نتیجه‌گیری در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

در این‌صورت $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \le \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

فرض کنیم $n \to \rho_n$ بیژیکسیونی از N به D باشد. برای هر $\varepsilon > 0$ ، ثابت خواهیم کرد که $\| f(\beta) - f(\alpha)\| \le \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha + 2)$. سمت چپ این نامساوی مستقل از ε است، و این مطلب اثبات را کامل می‌کند. A را به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از I تعریف می‌کنیم که از همه نقاطی مانند ξ تشکیل شده است، که برای $\alpha \le \zeta < \xi$ ،

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \le \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}$$

واضح است که $\alpha \in A$. اگر $\xi \in A$ و $\alpha < \eta < \xi$ ، آنگاه با توجه به تعریف A ، خواهیم داشت $\eta \in A$. بنابراین ، اگر $\gamma = \text{l.u.b.}A$ ، آنگاه A باید یا برابر فاصله $]\alpha, \gamma[$ باشد یا فاصله $[\alpha, \gamma]$ ، اما در واقع ، از تعریف A فوراً نتیجه می‌شود که $A = [\alpha, \gamma]$. علاوه بر این، از پیوستگی توابع f و φ نتیجه می‌شود که:

$$\|f(\gamma) - f(\alpha)\| \le \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n} \qquad (۸.۵.۱.۱)$$

و بنابراین، ما تنها باید ثابت کنیم $\gamma = \beta$. فرض کنیم $\gamma < \beta$. اگر $\gamma \notin D$ ، آنگاه از تعریف مشتق نتیجه می‌شود که ، فاصله‌ای مانند $[\gamma, \gamma + \lambda]$ در I موجود است ، به‌طوری که ، برای $\gamma \le \zeta < \gamma + \lambda$ ،

$$\|f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \le (\varepsilon / 2)(\zeta - \gamma)$$

و

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma)| \le (\varepsilon / 2)(\zeta - \gamma)$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\gamma)\| &\le \|f'(\gamma)\|(\zeta - \gamma) + (\varepsilon / 2)(\zeta - \gamma)\\ &\le \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma) + (\varepsilon/2)(\zeta - \gamma) \le \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma)\end{aligned}$$

و از (۸.۵.۱.۱) نتیجه می‌گیریم :

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\le \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n}\\ &\le \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\end{aligned}$$

که با تعریف γ در تناقض است. اگر $\gamma \in D$ ، فرض کنیم $\gamma = \rho_m$. از پیوستگی توابع f و φ نتیجه می‌شود که ، فاصله‌ای مانند $[\gamma, \gamma + \lambda]$ واقع در I موجود است ، به‌طوری که برای $\gamma \le \zeta < \gamma + \lambda$ ،

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \le (\varepsilon/2)2^{-m} \quad , \quad |\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)| \le (\varepsilon/2)\, 2^{-m}$$

بنابراین، از (۸.۵.۱.۱) دوباره نتیجه می‌گیریم :

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\le \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\\ &\le \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\end{aligned}$$

و دوباره به یک تناقض می‌رسیم ، و با این تناقض قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود.

مهم‌ترین حالت، حالتی است که $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$، که در آن $M > 0$ یک مقدار ثابت است.

(۸ . ۵ . ۲) اگر زیر مجموعه‌ای شمارا مانند D از I موجود باشد، به‌طوری که، برای هر $\xi \in I - D$ ، f در ξ دارای مشتقی نسبت به I باشد، به‌طوری که $\|f'(\xi)\| \le M$ ، آنگاه:

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \le M(\beta - \alpha).$$

برای توابع حقیقی، همان استدلالی که در (۸ . ۵ . ۱) بیان شد، قسمت اول گزاره زیر را ثابت می‌کند:

(۸ . ۵ . ۳) فرض کنیم φ نگاشتی پیوسته از I به R باشد، به‌طوری که در هر نقطه $\xi \in I - D$ ، φ نسبت به I دارای مشتق باشد، و $m \le \varphi'(\xi) \le M$. در این‌صورت نامساوی‌های:

$$m(\beta - \alpha) \le \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \le M(\beta - \alpha)$$

و در واقع نامساوی‌های قوی‌تر $m(\beta - \alpha) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < M(\beta - \alpha)$ وقتی برای $\xi \in I$ ،

$$\varphi(\xi) \ne \varphi(\alpha) + M(\xi - \alpha) \text{ و } \varphi(\xi) \ne \varphi(\alpha) + m(\xi - \alpha)$$

باشد، برقرار هستند.[1]

برای اثبات دومین قسمت گزاره فوق، مشاهده می‌کنیم که، طبق قسمت اول، تابع: $\varphi(\xi) - \varphi(\alpha) - m(\xi - \alpha)$ وقتی روی I متحد صفر نباشد صعودی است، بنابراین،

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - m(\beta - \alpha) > 0.$$

نامساوی دیگر نیز با دلیلی مشابه ثابت می‌شود.

در یک فضای نرم‌دار E، **پاره‌خطی** که دو نقطه a و b را به هم وصل می‌کند، به‌عنوان مجموعه نقاطی که به‌صورت $a + \xi(b - a)$ $(0 \le \xi \le 1)$ می‌باشند، تعریف می‌شود.

(۸ . ۵ . ۴) فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، و f نگاشتی پیوسته از یک همسایگی پاره‌خطی مانند S که نقاط x_0 و $x_0 + t$ از E را به هم وصل می‌کند، به F باشد. اگر f در هر نقطه S مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \le \|t\| \sup_{0 \le \xi \le 1} \|f'(x_0 + \xi t)\|$$

نگاشت g از فاصله $I = [0, 1]$ به F که با رابطه $g(\xi) = f(x_0 + \xi t)$ تعریف شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. طبق (۸ . ۴ . ۱)، (۸ . ۲ . ۲) و (۸ . ۱ . ۳)، g در هر نقطه I (نسبت به I) مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $f'(x_0 + \xi t) . t$ می‌باشد. از این مطلب و از (۸ . ۵ . ۲) و (۵ . ۷ . ۴) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب مطلب فوق به این صورت بیان شده است که، در واقع:

$$m(\beta - \alpha) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < M(\beta - \alpha)$$

مگر اینکه، برای $\xi \in I$ ، $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha) + M(\xi - \alpha)$ یا $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha) + m(\xi - \alpha)$. مترجم.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم $I =]a, b[$ فاصله‌ای باز در $\mathbf{R}$، f یک تابع معین حقیقی پیوسته[1] روی I، و نیز یک زیر مجموعه حداکثر شمارش‌پذیر D از I موجود باشد، به‌طوری که، تابع f، برای هر $t \in I - D$ در نقطه t **از طرف راست صعودی** باشد، به این معنی که فاصله‌ای مانند $[t, t+h]$ $(h > 0)$ موجود باشد، به‌طوری که برای $t \leq t' \leq t + h$ ، $f(t) \leq f(t')$. نشان دهید که f، روی I صعودی است (از استدلالی مشابه استدلالی که در (۱. ۵. ۸) به کار گرفتیم ، استفاده کنید). نتیجه‌ای مشابه وقتی f فقط در هر نقطه $t \in I$ از سمت چپ پیوسته باشد (یعنی $f(t-) = f(t)$) ، اما $D = \varnothing$ ، برقرار است.

(b) برای هر عدد $t \in J = [0, 1[$ ، فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / 2^n$ بسط «دو دوئی» یکتای t باشد ، به‌طوری که هر یک از a_n ها برابر 0 یا 1 باشند ، و اندیسی مانند m موجود نباشد که برای همه $n \geq m$ ها ، $a_n = 1$ (بخش ۲. ۴ ، مسئله ۲ را ببینید). فرض کنیم $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / 4^n$. نشان دهید که f در هر نقطه $t \in J$ **از سمت راست پیوسته** است (یا $f(t+) = f(t)$) ، روی هیچ فاصله‌ای از J که شامل بیش از یک نقطه باشد ثابت نیست و در هر نقطه $t \in J$ دارای مشتق راستی برابر 0 است.

۲. نشان دهید که ، نتیجه (۱. ۵. ۸) متعبر باقی می‌ماند، اگر فقط فرض شود که توابع f و φ هر دو در هر نقطه $\xi \in I - D$ (به جز β) از طرف راست مشتق‌پذیر باشند و $\| f'_d(\xi) \| \leq \varphi'_d(\xi)$.

۳. فرض کنیم f تابعی حقیقی و پیوسته باشد که روی فاصله فشرده $[\alpha, \beta]$ تعریف شده باشد، و در هر نقطه از فاصله $]\alpha, \beta[$ دارای مشتق راست باشد ، و فرض کنیم m و M به ترتیب g.l.b و l.u.b تابع f'_d روی $]\alpha, \beta[$ باشد.

(a) نشان دهید که ، اگر f نگاشتی به‌صورت $t \to \lambda t + \mu$ نباشد، آنگاه مجموعه همه اعداد $(f(x) - f(y))/(x - y)$ وقتی x و y دو عدد دلخواه در $[\alpha, \beta]$ باشند، به‌طوری که $x \neq y$ برابر $]m, M[$ می‌باشد (با تعریفی مناسب از تابعی به فرم $t \to \lambda t + \mu$ با نشان دادن اینکه ، اگر برای اعداد γ و δ با $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ ، $f'_d(\gamma)$ $f'_d(\delta) < 0$ ، آنگاه دو نقطه متمایز در $]\gamma, \delta[$ موجود خواهند بود، به‌طوری که f در این نقاط مقادیر یکسانی می‌گیرد، مسئله را به مسئله‌ای ساده‌تر تبدیل کنید.)

(b) نشان دهید که، اگر علاوه بر این، f درهر نقطه از فاصله $]\alpha, \beta[$ دارای مشتق چپ نیز باشد، آنگاه g.l.b (به ترتیب l.u.b) توابع f'_d و f'_g روی $]\alpha, \beta[$ بر هم منطبق خواهند شد.

(c) از (b) نتیجه بگیرید که، اگر f در هر نقطه $]\alpha, \beta[$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تصویر هر فاصله واقع در $]\alpha, \beta[$ تحت نگاشت f' مجموعه‌ای همبند است ((۱. ۱۹. ۳) را ببینید).

۴. روی فاصله $I = [-1, +1]$ از $\mathbf{R}$ ، فرض کنیم f نگاشتی از I به $\mathbf{R}^2$ باشد، که به‌صورت زیر تعریف شده است: اگر $-1 \leq t \leq 0$ ، $f(t) = (0, 0)$؛ اگر $0 < t \leq 1$ ، $f(t) = (t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t})$. نشان دهید که ، f در هر نقطه از فاصله $]-1, +1[$ دارای مشتق است ، اما تصویر این فاصله تحت نگاشت f' همبند نیست.

۵. گزاره (۴. ۵. ۸) را وقتی فقط فرض شود که f در هر نقطه S شبه مشتق‌پذیر است (بخش ۴. ۸ ، مسئله ۴ را ببینید) و به جای f' شبه مشتق گذاشته شود ، تعمیم دهید.

۶. فرض کنیم F یک فضای هیلبرت حقیقی باشد. گزاره (۱. ۵. ۸) را از قضیه مشابهی برای تابع حقیقی g ، و با به‌کارگیری آن برای تابع حقیقی $\xi \to (f(\xi) | a)$ ، که در آن $a \in F$ ، نتیجه بگیرید. (در واقع، این روش می‌تواند در هر فضای باناخ و حتی در کلاس‌های کلی‌تری از فضاهای برداری توپولوژیک مورد استفاده قرار داد ؛ مرجع [6] از کتابنامه را ببینید).[2]

۷. [3]فرض کنیم $I = [a, b]$ یک فاصله فشرده در $\mathbf{R}$ باشد، که تنها از یک نقطه تشکیل نشده باشد و f نگاشتی پیوسته از I

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای پیوستگی تابع f، فرض شده است که، f از سمت چپ پیوسته است. مترجم.

۲. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی علاوه بر مرجع [6] دیدن مرجع [23] نیز به خواننده توصیه شده است. مترجم.

۳. مسائل ۷و ۸ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده‌اند. مترجم.

به فضای باناخ E باشد. فرض کنیم مشتق راست f'_d در هر نقطه $\mathrm{I} - \mathrm{D}$ ، که در آن D زیر مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر از I است که شامل b می‌باشد ، وجود داشته باشد. نشان دهید که، نقطه‌ای مانند $\xi \in \mathrm{I} - \mathrm{D}$ موجود است، به‌طوری که $\| f(b) - f(a) \| \leq \| f'_d(\xi) \| (b-a)$. (می‌توان فرض کرد که $k = \| f(b) - f(a) \| / (b-a)$ صفر نیست. از تناقض استفاده نمایید ، فرض کنیم برای هر $t \in \mathrm{I} - \mathrm{D}$ ، $\| f'_d(t) \| < k$ ؛ در این‌صورت، باید نقطه‌ای مانند $x_0 \in \mathrm{I} - \mathrm{D}$ و یک $h > 0$ موجود باشد ، به‌طوری که $\| f(x_0 + h) - f(x_0) \| < kh$. با استفاده از مسئله ۲ برای هر یک از فواصل $[a, x_0]$ و $[x_0 + h, b]$ تناقضی به‌دست آورید) .

۸. [۱] زیر مجموعه A از فضای برداری حقیقی E را **محدب** می‌نامند، هرگاه برای هر زوج x ، y از نقاط A ، پاره‌خط بسته‌ای که نقاط انتهایی آن x ، y است (مجموعه همه نقاط $\lambda x + (1-\lambda) y$ که $0 \leq \lambda \leq 1$) در A قرار گیرد. برای اینکه A محدب باشد، لازم و کافی است که، اشتراک A و یک خط، تصویر $\mathbf{R}$ تحت نگاشت آفین $\varphi : \xi \to a\xi + b$ (که در آن $a \neq 0$ و b برداری از E است) تصویر یک فاصله از $\mathbf{R}$ تحت φ باشد.

نگاشت f از مجموعه محدب $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ به $\mathbf{R}$ را محدب نامند. هرگاه در فضای برداری $\mathrm{E} \times \mathbf{R}$ مجموعه D_f که از همه زوج‌های (x, ζ) تشکیل شده است که $x \in \mathrm{A}$ و $\zeta \geq f(x)$ ، محدب باشد. مطلب فوق معادل این است که بگوییم، برای هر زوج x ، y از نقاط A و هر عدد λ که $0 \leq \lambda \leq 1$ است ، داشته باشیم :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

برای اینکه f روی A محدب باشد، لازم و کافی است که، برای هر تبدیل آفین $\varphi : \xi \to a\xi + b$ از $\mathbf{R}$ به E (با $a \neq 0$) که $\varphi(\mathbf{R}) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$ ، نگاشت $f \circ \varphi$ روی فاصله $\varphi^{-1}(\mathrm{A}) \subset \mathbf{R}$ محدب باشد.

فرض کنیم $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ یک فاصله، و f تابعی حقیقی باشد که روی I تعریف شده است. برای اینکه f روی I محدب باشد، لازم و کافی است که برای هر $a \in \mathrm{I}$ ، تابع $t \to (f(t) - f(a)) / (t-a)$ روی $\mathrm{I} \cap \complement\{a\}$ صعودی باشد. از مطلب فوق نتیجه بگیرید که در هر نقطه داخلی a از فاصله I ، تابع f پیوسته است و دارای مشتق چپ و راست می‌باشد، علاوه بر این، اگر $a < b$ دو نقطه داخلی از I باشند، آنگاه :

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$$

به‌عکس، اگر I یک فاصله باز باشد، f روی I پیوسته باشد، در هر نقطه دارای مشتق راست باشد، و f'_d روی I صعودی باشد، آنگاه f روی I محدب خواهد بود (از برهان خلف، و مسئله ۲ استفاده کنید).

اگر A مجموعه‌ای محدب در فضای برداری حقیقی E باشد، نگاشت f از A به $\mathbf{R}$ را **اکیداً محدب** نامیم اگر، برای هر زوج متمایز x ، y از نقاط A ، و هر عدد λ که $0 < \lambda < 1$ ، داشته باشیم :

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

اگر $\mathrm{A} = \mathrm{I}$ یک فاصله باز در I باشد ، برای اینکه f روی I اکیداً محدب باشد، لازم و کافی است که f'_d روی I اکیداً صعودی باشد.

۶ . کاربردهای قضیه مقدار میانگین

(۸ . ۶ . ۱) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز همبند در فضای باناخ E ، و f یک نگاشت پیوسته از A به فضای باناخ F باشد. اگر مشتق f در هر نقطه A برابر 0 باشد، آنگاه f روی A ثابت خواهد بود.

فرض کنیم x_0 نقطه‌ای دلخواه از A ، و B مجموعه نقاط $x \in \mathrm{A}$ باشد که $f(x) = f(x_0)$. طبق (۳ . ۱۵ . ۱) ، مجموعه B در A بسته است. از طرف دیگر، اگر $x \in \mathrm{B}$ و U یک گوی باز به مرکز x

---

۱. مسائل ۷ و ۸ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده‌اند. مترجم.

باشد که در A قرار گرفته، آنگاه U شامل هر نقطه از پاره‌خطی خواهد بود که x را به نقطه دلخواه $y \in \mathrm{U}$ وصل می‌کند. بنابراین، طبق (۸.۵.۴)، $f(y) = f(x) = f(x_0)$. این مطلب نشان می‌دهد که B نسبت به A باز نیز هست. در نتیجه، با توجه به همبند بودن A، B مساوی A خواهد بود (بخش ۳.۱۹ را ببینید).

نتایج بهتری به‌دست خواهد آمد، وقتی از (۸.۵.۲) استفاده شود. به‌عنوان مثال، اگر $\mathrm{E} = \mathbf{R}$ و A یک فاصله در $\mathbf{R}$ باشد، در این‌صورت، فقط لازم است که، فرض کنیم، مشتق f موجود است و به جز روی مجموعه‌ای شمارا از نقاط A برابر 0 است.

(۸.۶.۲) فرض کنیم E، F دو فضای باناخ، و f نگاشتی مشتق‌پذیر از یک همسایگی باز $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ از پاره‌خطی مانند S که دو نقطه a و b را به هم وصل می‌کند به F باشد. در این‌صورت، برای هر $x_0 \in \mathrm{A}$، داریم:

$$\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b-a) \| \leq \| b-a \| \sup_{x \in \mathrm{S}} \| f'(x) - f'(x_0) \|$$

با به کارگیری گزاره (۸.۵.۴) برای نگاشت:

$$x \to f(x) - f'(x_0) \,.\, x$$

که مشتق آن طبق (۸.۲.۲) و (۸.۱.۳) برابر $t \to (f'(x) - f'(x_0)) \,.\, t$ است، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۸.۶.۳) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز همبند از فضای باناخ E، و (f_n) یک دنباله از نگاشت‌های مشتق‌پذیر از A به فضای باناخ F باشد، و فرض کنیم که: (۱) نقطه‌ای مانند $x_0 \in \mathrm{A}$ موجود باشد، به‌طوری که دنباله $(f_n(x_0))$ در F همگرا باشد؛ (۲) برای هر نقطه $a \in \mathrm{A}$ گویی مانند $\mathrm{B}(a)$ به مرکز a واقع در A موجود باشد، به‌طوری که روی $\mathrm{B}(a)$ دنباله (f'_n) به‌طور یکنواخت همگرا باشد. در این‌صورت، برای هر $a \in \mathrm{A}$، دنباله (f_n) روی $\mathrm{B}(a)$ به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود، به‌علاوه، اگر برای هر $x \in \mathrm{A}$، $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ و $g(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ آنگاه برای هر $x \in \mathrm{A}$، $g(x) = f'(x)$.

فرض کنیم r شعاع $\mathrm{B}(a)$ باشد، در این‌صورت، طبق (۸.۵.۴)، برای هر نقطه $x \in \mathrm{B}(a)$، خواهیم داشت:

$$\| f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) \| \leq \| x-a \| \,.\, \sup_{z \in \mathrm{B}(a)} \| f'_n(z) - f'_m(z) \|$$

$$\leq r \,.\, \sup_{z \in \mathrm{B}(a)} \| f'_n(z) - f'_m(z) \| \qquad (۸.۶.۳.۱)$$

چون دنباله (f'_n) روی $\mathrm{B}(a)$ به‌طور یکنواخت همگرا است و F فضایی تام است، پس، اگر دنباله

$(f_n(x))$ در یک نقطه $B(a)$ همگرا باشد، آنگاه در هر نقطه $B(a)$ نیز همگرا خواهد بود ، و در واقع، روی $B(a)$ به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود. مطلب فوق نشان می‌دهد که ، U مجموعه نقاطی که دنباله $(f_n(x))$ همگرا است ، در A هم باز و هم بسته است ، و چون طبق فرض این مجموعه غیر تهی و A همبند است، پس $U = A$. در پایان ، ثابت می‌کنیم که g مشتق f است. برای $\varepsilon > 0$ داده شده، طبق فرض ، عددی طبیعی مانند n_0 موجود است ، به‌طوری که برای $n \geq n_0$ ، $m \geq n_0$ و برای هر $z \in B(a)$ ، $\|f_n'(z) - f_m'(z)\| \leq \varepsilon/r$. و علاوه بر این ، $\|g(a) - f_n'(a)\| \leq \varepsilon$. فرض کنیم در (۸ . ۶ . ۳ . ۱) ، m به سمت $+\infty$ میل کند ، در این‌صورت ، برای $n \geq n_0$ و $x \in B(a)$ ، خواهیم داشت :

$$\|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

از طرف دیگر، برای هر $n \geq n_0$، یک $r' \leq r$ موجود است ، به‌طوری که ، برای $\|x - a\| \leq r'$، نامساوی $\|f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$ برقرار است، در خاتمه، با استفاده از (۴. ۷. ۵)، دیده می‌شود که، برای $\|x - a\| \leq r'$ ، داریم :

$$\|f(x) - f(a) - g(a).(x - a)\| \leq 3\varepsilon \|x - a\|$$

که از آن نتیجه می‌شود، $f'(a)$ موجود است و برابر $g(a)$ می‌باشد، و این همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

دوباره می‌توان نتایجی بهتر بیان نمود، وقتی $E = \mathbf{R}$ و A یک فاصله از $\mathbf{R}$ باشد :

(۸ . ۶ . ۴)[1] فرض کنیم (g_n) یک دنباله از نگاشت‌ها از فاصله‌ای مانند $I \subset \mathbf{R}$ به F باشد ، و فرض کنیم که، برای هر n ، $g_n(\xi)$ مشتق تابعی پیوسته مانند f_n در همه نقاط I به جز نقاطی مانند ξ از یک زیر مجموعه شمارای $D_n \subset I$ باشد. علاوه بر این، فرض کنیم که : (۱) نقطه‌ای مانند $\xi_0 \in I$ موجود باشد، به‌طوری که دنباله $(f_n(\xi_0))$ در F همگرا باشد؛ (۲) برای هر نقطه $\zeta \in I$ ، یک همسایگی $B(\zeta)$ در I موجود باشد، به‌طوری که دنباله (g_n) روی $B(\zeta)$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد. در این‌صورت، برای هر $\zeta \in I$ دنباله (f_n) روی $B(\zeta)$ به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود ، و اگر قرار دهیم $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$ و $g(\xi) = \lim_{n\to\infty} g_n(\xi)$ ، آنگاه در هر نقطه‌ای از I که در $\bigcup_n D_n$ واقع نیست ، $f'(\xi) = g(\xi)$.

با استفاده از (۸ . ۵ . ۲) به‌جای (۸ . ۵ . ۴) ، اثبات تکراری از اثبات (۸ . ۶ . ۳) خواهد بود.

از (۸ . ۶ . ۳) در حالت خاص نتیجه می‌شود :

(۸ . ۶ . ۵) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز همبند از فضای باناخ E ، و (u_n) دنباله‌ای از نگاشت‌های

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای $\zeta \in I$ نوشته شده است $\zeta \in A$ و به جای $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$ نوشته شده است $f_n(\xi) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$ که باید آنها را به‌عنوان اشتباهات چاپی به‌حساب آورد، این اشتباهات در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

مشتق‌پذیر از A به فضای باناخ F باشد. اگر برای هر $a \in A$، گویی مانند $B(a)$ به مرکز a واقع در A موجود باشد و سری (u'_n) روی $B(a)$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد، و اگر نقطه‌ای مانند $x_0 \in A$ موجود باشد، به‌طوری که سری $(u_n(x_0))$ همگرا باشد، آنگاه برای هر $a \in A$ ، سری (u_n) روی $B(a)$ به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود، و $s(x)$ مجموع آن در هر نقطه $x \in A$ ، دارای مشتقی برابر $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ است.

مسائل

۱. فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی مشتق‌پذیر معین روی فاصله باز $I \subset \mathbf{R}$ باشند، و فرض کنیم روی I ، $f(t) > 0$ ، $g(t) > 0$ ، $f'(t) > 0$ و $g'(t) > 0$. نشان دهید که ، اگر تابع f'/g' روی I به‌طور اکید صعودی باشد ، آنگاه یا f/g روی I اکیداً صعودی است، یا عنصری مانند $c \in I$ موجود است، به‌طوری که، f/g برای $t \leq c$ اکیداً نزولی، و برای $t \geq c$ اکیداً صعودی است. (ثابت کنید که، اگر $f'(s)/g'(s) < f(s)/g(s)$ ، آنگاه، برای هر $t < s$ ، $f'(t)/g(t) < f(t)/g(t)$). مطلب فوق را برای تابع :

$$\frac{\dfrac{\tan t}{t} - \dfrac{\tan a}{a}}{t \tan t - a \tan a}$$

روی فاصله $]a, \frac{\pi}{2}[$ ، که در آن $a > 0$ مورد استفاده قرار دهید.[1]

۲. (a) فرض کنیم I فاصله‌ای باز در $\mathbf{R}$ ، $x_0 \in \mathbf{R}$ یکی از نقاط انتهایی I و f نگاشتی پیوسته از I به فضای باناخ E باشد. فرض کنیم زیر مجموعه‌ای شمارا مانند D از I موجود باشد، به‌طوری که در هر نقطه $I - D$ ، f دارای مشتق راست باشد. برای اینکه $f'_d(t)$ وقتی t به سمت x_0 در $I - D$ میل می‌کند ، دارای حد باشد ، لازم و کافی است که ، $(f(t) - f(s))/(t-s)$ وقتی زوج (s, t) روی مجموعه‌ای که با $s \neq t$ ، $t \in I$ و $s \in I$ تعریف شده به سمت (x_0, x_0) میل می‌کند، دارای حد باشد. در این‌صورت، هر دو حد با هم برابرخواهند بود. اگر c مقدار مشترک این حدود باشد، نشان دهید که، $f(t)$ وقتی t روی I به سمت x_0 میل می‌کند، در E دارای حد است، و اگر پیوستگی f روی $I \cup \{x_0\}$ گسترش یافته باشد (۵ . ۱۵ . ۳ را ببینید)، $(f(t) - f(x_0))/(t - x_0)$ وقتی t روی I به سمت x_0 میل می‌کند، به سمت c میل خواهد کرد. (از قضیه مقدار میانگین و محک کوشی استفاده کنید.)

(b) نشان دهید که در هر نقطه $t \in I - D$ که f'_d از طرف چپ پیوسته است، f دارای مشتق چپ خواهد بود. اگر در نقطه $t \in I - D$ ، f'_d پیوسته باشد، آنگاه f در نقطه t دارای مشتق خواهد بود. (از (a) استفاده کنید.)

۳. فرض کنیم f نگاشتی مشتق‌پذیر از یک زیر مجموعه باز A از E به F باشد (E ، F فضاهای باناخ هستند). نشان دهید که :

(a) برای اینکه f' در نقطه x_0 پیوسته باشد، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ئی موجود باشد، به‌طوری که، از روابط $\|s\| < \delta$ و $\|t\| < \delta$ نتیجه شود :

$$\|f(x_0 + s) - f(x_0 + t) - f'(x_0).(s-t)\| \leq \varepsilon \|s - t\|.$$

(b) برای اینکه f' روی A به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، لازم و کافی است که ، برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ئی موجود باشد، به‌طوری که ، برای $0 \leq \xi \leq 1$ از روابط $\|s\| \leq \delta$ ، $x \in A$ ، $x + \xi s \in A$ ، نتیجه شود :

$$\|f(x+s) - f(x) - f'(x).s\| \leq \varepsilon \|s\|.$$

شرط فوق شرطی کافی است وقتی A محدب باشد (بخش ۵ . ۸ ، مسئله ۸ را ببینید)[2].

۴. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از فاصله فشرده $I \subset \mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد ، که روی I دارای مشتق پیوسته است ، و فرض کنیم S

---

۱. شرط $a > 0$ در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب جا افتاده است، اما، در چاپ اول متن روسی آن وجود دارد. مترجم.

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب به کافی بودن شرط فوق وقتی A محدب باشد، اشاره‌ای نشده است. مترجم.

مجموعه نقاط $t \in I$ باشد که $f'(t) = 0$. نشان دهید که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، دنباله‌ای مانند (r_n) از اعداد اکیداً مثبت موجود است ، به‌طوری که $\sum_{n=0}^{\infty} r_n \leq \varepsilon$ و $f(S)$ در اجتماع شمارائی از فواصل J_n قرار می‌گیرد ، که $\delta(J_n) \leq r_n$. (برای هر $\alpha > 0$ ، زیر مجموعه U_α از I که از نقاطی از I تشکیل شده که $|f'(t)| < \alpha$ مورد بررسی قرار دهید ؛ از (۱۶. ۱۹. ۳) و قضیه مقدار میانگین استفاده کنید.)

۵. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از فاصله $I \subset \mathbf{R}$ به $\mathbf{C}$ باشد، به‌طوری که روی I ، $f(t) \neq 0$ ، و $f'_d(t)$ روی مکمل یک زیر مجموعه شمارای D از I موجود باشد. نشان دهید که، برای اینکه $|f|$ روی I تابعی صعودی باشد، لازم و کافی است که روی $I - D$ ، $\mathscr{R}(f'_d(t)/f(t)) \geq 0$.

۶. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، A یک زیر مجموعه باز E ، و B یک زیرمجموعه بسته از زیرفضای A باشد، که درون تهی دارد و هر پاره‌خط واقع در E که در B نیست، اشتراکی حداکثر شمارش‌پذیر با B داشته باشد. فرض کنیم f نگاشتی با مشتق پیوسته از $A - B$ به F باشد، و در هر نقطه $b \in B$ ، حد $f'(x)$ نسبت به $A - B$ موجود باشد. نشان دهید که، f را می‌توان طبق پیوستگی آن به یک نگاشت با مشتق پیوسته $\bar{f}$ از A به F گسترش داد (از روشی مشابه قسمت (a) مسئله ۲ استفاده کنید).

۷. پریمیتیوها و انتگرال‌ها

فرض کنیم f نگاشتی از فاصله $I \subset \mathbf{R}$ به فضای باناخ F باشد. گوییم نگاشت پیوسته g از I به F **پریمیتیو**[1] f روی I است، هرگاه مجموعه‌ای شمارا مانند $D \subset I$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $\xi \in I - D$ ، g در ξ مشتق‌پذیر باشد و $g'(\xi) = f(\xi)$.

(۱. ۷. ۸) اگر g_1 ، g_2 دو پریمیتیو از نگاشت f روی I باشند ، آنگاه $g_1 - g_2$ روی I ثابت خواهد بود.

مطلب فوق فوراً از تبصره بعد از گزاره (۱. ۶. ۸) نتیجه می‌شود.

تبصره . هر فاصله I از $\mathbf{R}$ (که از یک نقطه تشکیل نشده باشد) اجتماع دنباله‌ای صعودی از فاصله‌های فشرده J_n است ؛ برای بررسی اینکه تابع f که روی فاصله I تعریف شده است، دارای **پریمیتیو** است، تنها لازم است که این کار برای تحدید f به هر یک از J_n ها مورد بررسی قرار دهیم. زیرا ، اگر ξ_0 یک نقطه داخلی J_1 باشد، و اگر برای هر n ، g_n پریمیتیو تحدید f به J_n باشد، به‌طوری که $g_n(\xi_0) = 0$ (که طبق (۱. ۷. ۸) به‌طور یکتا تعیین می‌شود) ، در این‌صورت ، تحدید g_{n+1} به J_n پریمیتیوی از f روی J_n خواهد بود که در ξ_0 برابر صفر می‌باشد ، و بنابراین، برابر g_n است. به این ترتیب، می‌توان نگاشتی مانند

1 . Primitive = Первообразная

شاید بتوان واژه انگلیسی Primitive of f یا واژه روسی Первообразная отображения f را بـه عنـوان یـک تـابع اولیـه از نگاشـت f ترجمه کرد ، اما ، مترجم ترجیح داد برای آنکه خواننده کتاب در درک درست و علمی آنچه که به‌عنوان تابع اولیه در کتاب‌هـای درسـی مـا و آنچه که به‌عنوان پریمیتیو یک نگاشت در اینجا تعریف شده است ، دچار مشکل نشود ، و تفاوت بین آنهـا را بهتـر درک کنـد ، از واژه فرنگـی به‌کار گرفته شده در متن کتاب ژان‌دیودونه به زبان انگلیسی استفاده نماید.

g از I به F تعریف کرد، به‌طوری که روی هر یک از J_nها برابر g_n باشد، و واضح است که g پریمیتیوی از f روی فاصله I خواهد بود.

(۸.۷.۲) فرض کنیم I فاصله‌ای در R باشد. هر نگاشت از I رگله به فضای باناخ F (بخش ۷.۶ را ببینید) (و در حالت خاص هر نگاشت پیوسته از I به F، یا وقتی F = R است، هر تابع یکنوا) روی I دارای پریمیتیو است.

از مطالبی که بیان شد، نتیجه می‌شود که، می‌توان فرض کرد I فشرده است. در این‌صورت، از (۸.۶.۴) و (۷.۶.۱) نتیجه می‌شود که، باید قضیه را تنها برای توابع پله‌ای ثابت کنیم. فرض کنیم f یک تابع پله‌ای، و $(\lambda_i)_{0 \le i \le n}$ یک دنباله نقاط در $I = [\alpha, \beta]$ باشد به‌طوری که $\lambda_0 = \alpha$، $\lambda_n = \beta$، و $f(\xi)$ روی $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ $(0 \le i \le n-1)$ برابر c_i باشد. در این‌صورت، اگر g را روی هر یک از فاصله‌های $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ $(0 \le i \le n-1)$ طوری تعریف کنیم، که داشته باشیم:

$$g(\xi) = c_i(\xi - \lambda_i) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\text{،}$$

آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که g پریمیتیو f است.

یک پریمیتیو از تابعی پله‌ای نیز یک **تابع به‌طور قطعه‌ای خطی**[1] نامیده می‌شود.

در ادامه مطالب، گزاره زیر را برای توابع پیوسته خواهیم داشت:

(۸.۷.۳) اگر g پریمیتیوی از نگاشت پیوسته f از فاصله I به فضای باناخ F باشد، آنگاه g در هر نقطه $\xi \in I$ نسبت به I دارای مشتقی برابر با $f(\xi)$ است.

در واقع، از (۸.۵.۲) نتیجه می‌شود که، برای هر فاصله $[\xi, \xi + \lambda] \subset I$،

$$\|g(\xi + h) - g(\xi) - f(\xi)h\| \le h \sup_{0 \le \eta \le \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$$

که در آن $0 \le h \le \lambda$ و طبق فرض، $\sup_{0 \le \eta \le \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$ همراه با λ به‌طور دلخواه کوچک می‌شود.

اگر g پریمیتیوی دلخواه از تابع رگله f باشد، آنگاه اختلاف $g(\beta) - g(\alpha)$ برای هر دو نقطه دلخواه از I، با توجه به (۸.۷.۱)، مستقل از انتخاب پریمیتیو خاص g است، که مورد بررسی قرار گرفته است. این اختلاف به‌صورت $\int_\alpha^\beta f(\xi)\,d\xi$ نوشته می‌شود، و آنرا **انتگرال** f از α تا β می‌نامند. هر قانون فرمال از مشتق‌گیری را می‌توان با ترجمه نمادها به فرمولی متناظر از حساب انتگرال تبدیل کرد. ما تنها به سه تا از مهم‌ترین این فرمول‌ها صریحاً اشاره می‌کنیم. برای راحتی، اگر g پریمیتیوی از تابع رگله f باشد، به

1. Piecewise linear function = Кусочно линейная функция

جای f ، g' خواهیم نوشت، اگرچه g در حالت کلی، ممکن است در بعضی از نقاط مشتق نداشته باشد، و وقتی مشتق وجود دارد، ممکن است در مجموعه شمارائی از نقاط برابر با f نباشد :

(۸.۷.۴) (تغییر متغیر) فرض کنیم φ پریمیتیوی با مقادیر حقیقی از تابعی رگله روی فاصله I و f تابعی رگله روی فاصله $J \supset \varphi(I)$ باشد، در این‌صورت، اگر یا f پیوسته باشد، یا φ یکنوا، آنگاه برای هر دو نقطه α و β از I خواهیم داشت :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)d\xi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\zeta)d\zeta$$

تنها مطلبی که باید مورد بررسی قرار گیرد، رگله بودن تابع $f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$ می‌باشد، و این مطلب فوراً از فرض و از تعریف یک تابع رگله (بخش ۷ . ۶) را ببینید) نتیجه می‌شود. حال، اگر g پریمیتیوی از تابع f باشد، هر دو طرف فرمول، بنابر (۱ . ۴ . ۸) ، برابر $g(\varphi(\beta)) - g(\varphi(\alpha))$ می‌باشند.

(۸.۷.۵) (انتگرال‌گیری جزء به جزء) فرض کنیم f ، g پریمیتیوهای توابعی رگله باشند که روی فاصله I تعریف شده‌اند، و مقادیرشان را به ترتیب در دو فضای باناخ E ، F می‌گیرند ، و فرض کنیم $(x, y) \to [x, y]$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به فضای باناخ G باشد. در این‌صورت ، برای هر دو نقطه α ، β از I ،

$$\int_\alpha^\beta [f(\xi).g'(\xi)]d\xi = [f(\beta).g(\beta)] - [f(\alpha).g(\alpha)] - \int_\alpha^\beta [f'(\xi).g(\xi)]d\xi.$$

دوباره، تنها مطلبی که باید مورد بررسی قرار گیرد، این است که $[f.g']$ و $[f'.g]$ توابعی رگله هستند، و در این‌صورت، فرمول فوق از (۴. ۱. ۸) و (۱. ۴. ۸) نتیجه خواهد شد.

(۸.۷.۶) فرض کنیم f نگاشتی رگله از I به فضای باناخ F ، و u یک نگاشت خطی پیوسته از F به فضای باناخ G باشد. در این صورت :

$$\int_\alpha^\beta u(f(\xi))d\xi = u\left(\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\right)$$

مطلب فوق از (۱. ۴. ۸) و (۳. ۱. ۸) نتیجه می‌شود.

با ترجمه به زبان انتگرال‌ها قضیه مقدار میانگین را می‌توان به‌صورت زیر تعبیر نمود :

(۸.۷.۷) برای تابع رگله f روی فاصله فشره $[\alpha, \beta]$ ،

$$\left\|\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi\right\| \le \int_\alpha^\beta \|f(\xi)\|d\xi \le (\beta-\alpha)\sup_{\xi\in I}\|f(\xi)\|$$

در اینجا نیز دوباره ، برای استفاده از (۱. ۵ . ۸) ، ما تنها باید ثابت کنیم، که تابع $\xi \to \|f(\xi)\|$ رگله است.

در خاتمه، برای انتگرال‌ها نتایج متناظر با (۴ . ۶ . ۸) و (۵ . ۶ . ۸) را بیان می‌کنیم :

(۸ . ۷ . ۸) اگر دنباله (g_n) از توابع رگله که روی فاصله فشرده $I = [\alpha , \beta]$ تعریف شده‌اند، روی I به‌طور یکنواخت به g همگرا باشد، آنگاه دنباله $\left(\int_\alpha^\beta g_n(\xi)d\xi \right)$ به $\int_\alpha^\beta g(\xi)d\xi$ همگرا خواهد بود.

به یاد بیاورید که، طبق (۱ . ۶ . ۷) ، تابع g رگله است.

(۹ . ۷ . ۸) اگر سری (u_n) از توابع رگله روی فاصله فشرده $I = [\alpha , \beta]$ به‌طور نرمال همگرا باشد (بخش ۱ . ۷ را ببینید) ، آنگاه اگر $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ، سری با جمله عمومی $\int_\alpha^\beta u_n(\xi)d\xi$ به‌طور مطلق همگرا خواهد بود، و $\int_\alpha^\beta u(\xi)d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta u_n(\xi)d\xi$.

همگرایی مطلق فوراً از فرض و از قضیه مقدار میانگین (۷ . ۷ . ۸) نتیجه می‌شود.

(۱۰ . ۷ . ۸)[1] **تبصره.** از گزاره (۴ . ۶ . ۸) و اثبات گزاره (۱ . ۶ . ۷) ، نتیجه می‌شود که، برای هر تابع رگله f که روی $[\alpha , \beta]$ تعریف شده است، و برای هر $\varepsilon > 0$ ، دنباله‌ای صعودی مانند :

$$\alpha = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq \cdots x_k \leq t_k \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n = \beta$$

موجود است، به‌طوری که:

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \varepsilon$$

اگر f پیوسته باشد، می‌توان (بنابر گزاره (۵ . ۱۶ . ۳)) همه اعداد $x_{k+1} - x_k$ را برابر $(\beta - \alpha)/n$ و $t_k = x_k$ گرفت. (مسئله ۱ را ببینید).

مسائل

۱. فرض کنیم f تابعی رگله باشد که روی فاصله فشرده $I \subset \mathbf{R}$ تعریف شده است. نشان دهید که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ موجود است ، به‌طوری که برای هر دنباله صعودی

$$x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \cdots x_k \leq t_k \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_n$$

از نقاط I که در آن $x_{k+1} - x_k \leq \delta$، نامساوی زیر برقرار است :

$$\left\| \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) \right\| < \varepsilon .$$

(« **مجموع‌های ریمان** »[2] ؛ ابتدا حالتی که f تابعی پله‌ای است مورد بررسی قرار دهید).

۲. (a) فرض کنیم f تابعی رگله باشد ، که روی فاصله فشرده $I = [a , b]$ تعریف شده است. نشان دهید که ، برای هر $\varepsilon > 0$ ، تابعی پیوسته مانند g که روی I تعریف شده است ، موجود است ، به‌طوری‌که :

---

۱. این قسمت در برگردان چاپ اول کتاب ژان‌دیودونه به زبان روسی وجود ندارد و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

2. Riemann sums = Римановы суммы

$$\int_a^b \| f(t) - g(t) \| \, dt < \varepsilon .$$

(b) فرض کنیم f مقادیرش را در E بگیرد ، h تابعی رگله باشد که روی I تعریف شده و مقادیرش را در F بگیرد ، و $[x . y] \to (x , y)$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به G باشد (E ، F و G فضاهای باناخ هستند) . نشان دهید که :

$$\lim_{s \to 0,\, s > 0} \int_a^b [f(t) . h(t+s)] \, dt = \int_a^b [f(t) . h(t)] \, dt$$

(c) نشان دهید که :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \cos nt \, dt = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) |\sin nt| dt = \frac{2}{n} \int_a^b f(t) dt$$

(d) فرض کنیم u پریمیتیو f روی I و $u(\mathrm{I})$ در یک گوی $B \subset E$ واقع شود. نشان دهید که، اگر g تابعی یکنوا روی I باشد، آنگاه عددی مانند $c \in B$ موجود است، به‌طوری که :

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = (u(b) - c) \, g(b) + (c - u(a)) g(a).$$

در حالت خاص، اگر f یک تابع حقیقی رگله باشد، آنگاه یک $s \in \mathrm{I}$ موجود است ، به‌طوری که :

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(a) \int_a^s f(t) \, dt + g(b) \int_s^b f(t) \, dt$$

(« **قضیه دوم مقدار میانگین** ») .

(برای همه این خواص ، از روشی مشابه با روش بیان شده در مسئله ۱ ، استفاده کنید.)

۳ . فرض کنیم f تابعی رگله باشد، که روی فاصله فشرده $\mathrm{I} = [a , b]$ تعریف شده است. برای هر عدد طبیعی $n > 0$ و هر عدد صحیح k که در شرط $0 \le k \le n$ صدق می‌کند، قرار می‌دهیم $x_k = a + k((b-a)/n)$. فرض کنیم :

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(t) \, dt$$

(a) فرض کنیم f روی I دارای مشتق پیوسته باشد. نشان دهید که :

$$\lim_{x \to \infty} n r(n) = \frac{b-a}{2} (f(b) - f(a))$$

(بنویسید $r(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t)) \, dt$ و از قضیه مقدار میانگین و مسئله ۱ استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم f یک تابع صعودی حقیقی روی I باشد. نشان دهید که :

$$0 \le r(n) \le \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

(c) مثالی از یک تابع پیوسته صعودی f روی I ارائه نمائید که، وقتی n به سمت $+\infty$ میل می‌کند، $nr(n)$ به سمت $((b-a)/2) (f(b) - f(a))$ میل نکند (f را برابر حد دنباله‌ای مانند (f_n) از توابع صعودی پیوسته به‌طور قطعه‌ای خطی بگیرید، که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$(b-a) \sum_{k=1}^{2^n} f_n\Big(a + k \frac{b-a}{2^n}\Big) - 2^n \int_a^b f_n(t) \, dt \ge \frac{3}{4} (b-a)(f_n(b) - f_n(a))$$

و برای $0 \le k \le 2^n$ ، $f_{n+1}\Big(a + k \frac{b-a}{2^n}\Big) = f_n\Big(a + k \frac{b-a}{2^n}\Big)$).

۴ . نشان دهید که، وقتی n به سمت $+\infty$ میل می‌کند ، چند جمله‌ای :

$$f_n(x) = \int_0^x (1 - t^2)^n dt \Big/ \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt$$

روی هر فاصله $[-1 , -\varepsilon]$ به‌طور یکنواخت به‌سمت -1 و روی هر فاصله $[\varepsilon , +1]$ به‌طور یکنواخت به‌سمت $+1$ میل می‌کند ($0 < \varepsilon < 1$ عددی دلخواه است. از نامساوی $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \ge \int_0^1 (1-t)^n dt$ استفاده کنید). فرض کنیم

$g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. نشان دهید که، چندجمله‌ایهای $g_n(x)$ روی فاصله $[-1, +1]$ به‌طور یکنواخت به $|x|$ همگرا هستند، به این ترتیب، اثباتی جدید برای گزاره (۳. ۱. ۳. ۷) به‌دست آورید.

۵. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از فاصله $[x_0, +\infty[$ به فضای باناخ E باشد، به‌طوری که برای هر $\lambda > 0$،

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+\lambda) - f(x)) = 0$$

(a) نشان دهید که $f(x+\lambda) - f(x)$ وقتی x به سمت $+\infty$ میل می‌کند، و λ عنصری از فاصله فشرده $K = [a, b] \subset [0, +\infty[$ باشد، به‌طور یکنواخت به سمت 0 میل می‌کند (یعنی، برای هر $\varepsilon > 0$، یک $A > 0$ موجود است، به‌طوری که، برای هر $\lambda \in K$، از $x \geq A$ نتیجه شود $\| f(x+\lambda) - f(x) \| \leq \varepsilon$). (از تناقض استفاده کنید: فرض کنیم دنباله‌ای مانند (x_n) موجود باشد، به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و نیز دنباله‌ای مانند (λ_n) از نقاط K موجود باشد، به‌طوری که برای هر n، $\| f(x_n+\lambda_n) - f(x_n) \| > \alpha > 0$. ملاحظه کنید که، یک همسایگی J_n از λ_n در K موجود است، به‌طوری که برای هر $\lambda \in J_n$،

$$\| f(x_n+\lambda) - f(x_n) \| > \alpha .$$

با استقراء دنباله‌ای نزولی از فواصل بسته $I_k \subset K$، و زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) از (x_n) تعریف کنید، به‌طوری که برای هر $\mu \in I_k$، $\|f(x_{n_k}+\mu) - f(x_{n_k})\| \geq \alpha/3$، با تعریف I_{k+1} وقتی I_k معلوم باشد، ملاحظه کنید که، اگر δ_k طول I_k باشد، و q عددی صحیح باشد به‌طوری $q\delta_k > b - a$، آنگاه وقتی x به حد کافی بزرگ باشد،

$$\| f(x+\delta_k) - f(x_k) \| \leq \alpha/3q .)$$

(b) از (a) نتیجه بگیرید که $\lim_{x\to+\infty} \left(\int_x^{x+1} f(t)dt - f(x) \right) = 0$، و از این رابطه نتیجه بگیرید:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0 .$$

۶. (a) نشان دهید که، تابع حقیقی مشتق‌پذیری مانند f (به ترتیب g) که روی R تعریف شده است، موجود است، به طوری که برای $t \neq 0$، $f'(t) = \sin(1/t)$ (به ترتیب $g'(t) = \cos(1/t)$) و $f'(0) = 0$ (به ترتیب $g'(0) = 0$). (مشتق توابع $t^2 \cos(1/t)$ و $t^2 \sin(1/t)$ را مورد بررسی قرار دهید.) توابع f' و g' رگله نیستند.

(b) فرض کنیم $P(t, u, v)$ یک چند جمله‌ای از u و v باشد، که ضرائب آن توابع حقیقی پیوسته‌ای از t روی فاصله باز شامل صفر $I \subset R$ هستند. نشان دهید که، تابعی مشتق‌پذیر که روی I تعریف شده موجود است، به‌طوری که برای $t \neq 0$، $f'(t) = P(t, \sin(1/t), \cos(1/t))$ (تک جمله‌ای‌های برحسب $\sin(1/t)$ و $\cos(1/t)$ را به‌عنوان ترکیباتی خطی از جملاتی به فرم $\sin(k/t)$ و $\cos(k/t)$ بیان نمائید، و از (a) استفاده کنید). مقدار $f'(0)$ چقدر است؟ نشان دهید که رابطه $f'(0) \neq P(0, 0, 0)$ نیز ممکن است رخ دهد.

(c) نشان دهید که، تابعی مشتق‌پذیر مانند f موجود است که روی $[-1, +1]$ تعریف شده و در هر نقطه $[-1, 1]$ به جز صفر و نقاط $1/n\pi$ ($n \neq 0$ عددی صحیح (مثبت یا منفی است)، $f'(t) = \sin(1/\sin(1/t))$. (در همسایگی نقطه $t = 1/n\pi$ با انتخاب $t = 1/(n\pi + \arcsin u)$ و با استفاده از (b) وجود $f'(1/n\pi)$ را ثابت کنید. علاوه بر این، نشان دهید که، ثابتی مانند $a > 0$، مستقل از n موجود است، به‌طوری که، برای هر عدد صحیح $n > 0$:

$$\left| \int_{2/(2n+1)\pi}^{2/(2n-1)\pi} \sin(1/\sin(1/(t)) dt \right| \leq a/n^3$$

سپس، تابع:

$$g(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^t \sin(1/\sin(1/s))\, ds$$

را برای $t > 0$ مورد بررسی قرار داده، به‌طریقی مشابه، برای $t < 0$، f را تعریف کنید).

۷. فرض کنیم $I = [0, 1[$ و E فضای برداری توابع مختلط رگله باشد که روی I معین، کراندار و از طرف راست پیوسته هستند (یعنی، برای $t \in I$، $f(t+) = f(t)$).

(a) نشان دهید که روی E، $(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(t)\overline{g(t)}dt$ یک فرم هرمیتی مثبت ناتبهگون است ((۳. ۵. ۸) را ببینید). ثابت کنید، فضای پیش هیلبرتی که به این ترتیب تعریف می‌شود، تام نیست (از این حقیقت استفاده کنید که،

تابعی که برای $t > 0$ برابر $\sin(1/t)$ و برای $t = 0$ برابر 0 است ، در E واقع نشده است).

(b) دنباله (f_n) از عناصر E به روش زیر تعریف می‌کنیم :

(۱) f_0 برابر تابع ثابت 1 است ؛

(۲) برای هر عدد صحیح $n > 0$ ، فرض کنیم m بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد که $2^m \le n$ ، و فرض کنیم $n = 2^m + k$ ، f_n را روی $\frac{2k}{2^{m+1}} \le t < \frac{2k+1}{2^{m+1}}$ برابر $2^{m/2}$ و روی $\frac{2k+1}{2^{m+1}} \le t < \frac{2k+2}{2^{m+1}}$ برابر $-2^{m/2}$ و برای بقیه مقادیر t در I ، برابر 0 می‌گیریم.

ثابت کنید که، در فضای پیش‌هیلبرتی E ، (f_n) یک سیستم اُرتونرمال است (**سیستم اُرتونرمال هار**[1])

(c) برای هر $n \ge 0$، فرض کنیم V_n زیر فضایی از E باشد که به‌وسیله f_kها برای اندیس‌های $k \le n$ تولید شده است. نشان دهید که، تجزیه‌ای از I به $n+1$ فاصله از نوع $[\alpha , \beta[$ بدون نقاط مشترک وجود دارد، به‌طوری که، در این فاصله‌ها ، هر تابع متعلق به V_n ثابت است. به عکس ، هر تابع که دارای این خاصیت باشد ، متعلق به V_n است (بعد زیر فضای برداری E که به وسیله این توابع تولید شده است ، مورد بررسی قرار دهید).

(d) فرض کنیم g یک تابع دلخواه از E ، و h تصویر عمودی آن روی V_n باشد (بخش ۳. ۶ را ببینید). نشان دهید که، در هر یک از فواصل $[\alpha , \beta[$ که روی آن همه توابع متعلق به V_n ثابت هستند،

$$h(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta g(u)\, du$$

(e) با استفاده از (d)، نشان دهید که، برای هر تابع $g \in E$ که روی I پیوسته است، سری با جمله عمومی $(g \mid f_n) f_n(t)$ روی I به‌طور یکنواخت همگرا است و مجموع آن برابر $g(t)$ می‌باشد. از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، (f_n) یک سیستم اُرتونرمال کامل (تام)[2] در E است.

۸ . فرض کنیم f یک تابع رگله حقیقی روی فاصله فشرده $I = [a , b]$ باشد و $\int_a^b |f(t)|\, dt = c$. نشان دهید که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، تابع حقیقی پیوسته‌ای مانند g روی I موجود است ، به‌طوری که روی I ، $|g(t)| \le 1$ و $\int_a^b f(t) g(t) \ge c - \varepsilon$.

(مسئله را به حالتی که f یک تابع پله‌ای است ، تبدیل کنید.)

۸ . کاربرد : عدد e

برای هر عدد $a > 0$ ، تابع $x \to a^x$ روی **R** پیوسته است (بخش ۳ . ۴ را ببینید). بنابراین، تابع $g(x) = \int_0^x a^t\, dt$ روی **R** معین و مشتق‌پذیر است، و در هر نقطه **R** ، $g'(x) = a^x$. واضح است که $g(x+1) = \int_0^{x+1} a^t\, dt = \int_0^x a^t\, dt + \int_x^{x+1} a^t\, dt$. اما ، طبق (۸ . ۷ . ۴) ،

$$\int_x^{x+1} a^t\, dt = \int_0^1 a^{x+u}\, du = a^x \int_x^1 a^u\, du$$

از آنجا که برای $0 \le x \le 1$ ، $a^x \ge \inf(a , 1)$ ، پس ، طبق (۳. ۵ . ۸) ، $c = \int_0^1 a^u\, du > 0$ ، به این ترتیب ، می‌توان نوشت :

$$a^x = c^{-1} (g(x+1) - g(x))$$

1. Haar orthonormal system = Ортонормальная система хаара

1. Total orthonormal system = Тотальная ортонормальная система

و بنابراین، a^x روی $\mathbf{R}$ مشتق‌پذیر است، و $D(a^x) = \varphi(a) \,.\, a^x$ ، که در آن، اگر $a \neq 1$ باشد، $\varphi(a) \neq 0$.
فرض کنیم $a \neq 1$ ، و $b > 0$ عدد مثبت دلخواهی باشد. می‌توان نوشت :

$$b^x = a^{x \log_a b}$$

و بنابراین، طبق (۱. ۴. ۸) ،

$$\varphi(b) \,.\, b^x = \log_a b \,.\, \varphi(a) \,.\, b^x$$

به عبارت دیگر :

$$\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b$$

بنابراین ، یک و تنها یک عدد $e > 0$ موجود است ، به‌طوری که $\varphi(e) = 1$ ، به‌این ترتیب ، $e = a^{1/\varphi(a)}$.
چون $D(e^x) = e^x > 0$ ، طبق (۳. ۵ . ۸) ، e^x اکیداً صعودی خواهد بود، و بنابراین $e = e^1 > e^0 = 1$.
تابع e^x نیز به‌صورت $exp(x)$ یا $exp\,x$ نوشته می‌شود. تابع $\log_e x$ به‌صورت $\log x$ می‌نویسند.[1] از (۳. ۲. ۸) و (۲. ۲. ۴) نتیجه می‌شود که برای $x > 0$ ، $D(\log x) = 1/x$. به‌علاوه، $D(a^x) = (\log a).\, a^x$.

مسئله

تغییرات توابع :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+p} ,\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-p} ,\quad \left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} ,\quad \left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}$$

را برای $x > 0$ ، وقتی p یک عدد ثابت مثبت دلخواه است، مورد بررسی قرار دهید. حدود آنها را وقتی x به سمت $+\infty$ میل می‌کند، به‌دست آورید.

۹. مشتقات جزئی

فرض کنیم f یک نگاشت مشتق‌پذیر از یک مجموعه باز A از فضای باناخ E به فضای باناخ F باشد. در این‌صورت، Df نگاشتی از A به فضای $\mathscr{L}(E\,;\,F)$ خواهد بود. گوییم f روی A **پیوسته ـ مشتق‌پذیر**[2] است، هرگاه Df روی A پیوسته باشد.

حال ، فرض کنیم $E = E_1 \times E_2$. برای هر $(a_1\,,\,a_2) \in A$ می‌توان نگاشت‌های جزئی :

$$x_2 \to f(a_1\,,\,x_2) \text{ و } x_1 \to f(x_1\,,\,a_2)$$

---

۱. باید توجه داشت که، در اینجا منظور از نماد $\log x$ لگاریتم طبیعی x و یا $\ln x$ است، و در چاپ اول متن روسی کتاب ، برخلاف چاپ دوم متن انگلیسی آن ، به جای $\log x$ از نماد $\ln x$ استفاده شده است. مترجم.

2 . Continuously differentiable = Непрерывно дифференцируемо

واژه پیوسته ـ مشتق‌پذیر به‌عنوان برگردانی از واژه Continuously differntiable از واژه‌نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم ۱۳۷۶ اقتباس شده است. در برخی از کتاب‌های ریاضی به زبان فارسی، به‌جای این واژه از واژه‌هایی همچون مشتق‌پذیر پیوسته، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، با مشتق پیوسته، دارای مشتق پیوسته و ... نیز استفاده شده است. مترجم.

را به ترتیب از زیر مجموعه‌های بازی از E_1 و E_2 به F مورد بررسی قرار داد. گوییم ، f در نقطه (a_1 , a_2) **نسبت به اولین متغیر (به ترتیب دومین متغیر) مشتق‌پذیر** است ، هرگاه ، نگاشت جزئی $x_1 \to f(x_1 , a_2)$ (به ترتیب $x_2 \to f(a_1 , x_2)$) در نقطه a_1 (به ترتیب a_2) مشتق‌پذیر باشد. مشتق این نگاشت ، که عنصری از $\mathscr{L}(E_1 ; F)$ (به ترتیب ، $\mathscr{L}(E_2 ; F)$) است ، **مشتق جزئی** f در نقطه (a_1 , a_2) نسبت به اولین متغیر (به ترتیب دومین متغیر) نامیده ، و به علامت $D_1 f(a_1 , a_2)$ (به ترتیب $D_2 f(a_1 , a_2)$) نشان داده می‌شود.

(۱. ۹. ۸) فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از $E_1 \times E_2$ به F باشد. برای اینکه f روی A دارای مشتق پیوسته باشد ، لازم و کافی است که f در هر نقطه A نسبت به اولین و دومین متغیر مشتق‌پذیر باشد ، و نگاشت‌های :

$$(x_1 , x_2) \to D_2 f(x_1 , x_2) \text{ ، } (x_1, x_2) \to D_1 f(x_1 , x_2)$$

(به ترتیب از A به $\mathscr{L}(E_1 ; F)$ و $\mathscr{L}(E_2 ; F)$) روی A پیوسته باشند. در این‌صورت، در هر نقطه (x_1 , x_2) از A ، مشتق f با فرمول زیر تعیین می‌شود :

$$Df(x_1 , x_2).(t_1 , t_2) = D_1 f(x_1 , x_2).t_1 + D_2 f(x_1 , x_2).t_2 \qquad (۱. ۱. ۹. ۸)$$

(a) **لزوم.** نگاشت $x_1 \to f(x_1 , a_2)$ از ترکیب نگاشت f و نگاشت $x_1 \to (x_1 , a_2)$ از E_1 به $E_1 \times E_2$ به‌دست می‌آید. طبق (۲. ۱. ۸) ، (۳. ۱. ۸) و (۵ . ۱. ۸) ، مشتق دومین نگاشت $t_1 \to (t_1 ,0)$ می‌باشد. بنابراین، طبق (۱. ۲. ۸) ، نگاشت $x_1 \to f(x_1 , a_2)$ در نقطه (a_1 , a_2) دارای مشتقی برابر $t_1 \to Df(a_1 , a_2).(t_1 , 0)$ است. اگر اینژکسیون طبیعی $t_1 \to (t_1 ,0)$ (به ترتیب $t_2 \to (0 , t_2)$) را به i_1 (به ترتیب i_2) نشان دهیم، این نگاشت عنصری ثابت از $\mathscr{L}(E_1 ; E_1 \times E_2)$ (به ترتیب $\mathscr{L}(E_2 ; E_1 \times E_2)$) است، بنابراین ،

$$D_1 f(a_1 , a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_1$$

و به طریق مشابه $D_2 f(a_1 , a_2) = D(a_1, a_2) \circ i_2$ (همه این روابط معتبر خواهند بود وقتی فقط فرض شود که f روی A **مشتق‌پذیر** است). چون نگاشت $(v , u) \to v \circ u$ از

$$\mathscr{L}(E_1 \times E_2 ; F) \times \mathscr{L}(E_1 ; E_1 \times E_2)$$

به $\mathscr{L}(E_1 ; F)$ پیوسته است ((۱. ۷. ۵) و (۱. ۵ . ۵) را ببینید) ، پیوستگی $D_1 f$ و $D_2 f$ از پیوستگی Df نتیجه می‌شود. بالاخره ، از رابطه

$$(t_1 , t_2) = i_1(t_1) + i_2(t_2)$$

فرمول (۱. ۱. ۹. ۸) به‌دست می‌آید.

(b) **کفایت.** می‌توان نوشت :

$$f(a_1 + t_1 , a_2 + t_2) - f(a_1 , a_2)$$

$$= (f(a_1+t_1 , a_2+t_2) - f(a_1+t_1 , a_2)) + (f(a_1+t_1 , a_2) - f(a_1 , a_2))$$

برای $\varepsilon > 0$ داده شده ، طبق فرض ، یک $r > 0$ موجود است ، به‌طوری که ، برای $\|t_1\| \le r$ ،

$$\|f(a_1+t_1 , a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1 , a_2).t_1\| \le \varepsilon \|t_1\|$$

از طرف دیگر، طبق (۲. ۶. ۸) ، روی یک گوی به مرکز (a_1 , a_2) واقع در A ، داریم :

$$\|f(a_1+t_1 , a_2+t_2) - f(a_1+t_1 , a_2) - D_2 f(a_1+t_1 , a_2).t_2\|$$
$$\le \|t_2\| . \sup_{\|z\| \le \|t_2\|} \|D_2 f(a_1+t_1 , a_2+z) - D_2 f(a_1+t_1 , a_2)\|$$

از پیوستگی $D_2 f$ نتیجه می‌شود که، یک $r' > 0$ موجود است، به‌طوری که، برای $\|t_2\| \le r'$ ، $\|t_1\| \le r'$ ،

$$\|f(a_1+t_1 , a_2+t_2) - f(a_1+t_1 , a_2) - D_2 f(a_1+t_1 , a_2).t_2\| \le \varepsilon \|t_2\|$$

از طرف دیگر :

$$\|D_2 f(a_1+t_1 , a_2) - D_2 f(a_1 , a_2)\| \le \varepsilon$$

بنابراین، طبق (۴. ۷. ۵) ،

$$\|D_2 f(a_1+t_1 , a_2).t_2 - D_2 f(a_1 , a_2).t_2\| \le \varepsilon \|t_2\|.$$

بالاخره، برای $\sup(\|t_1\| , \|t_2\|) \le \inf(r , r')$ ، داریم :

$$\|f(a_1+t_1 , a_2+t_2) - f(a_1 , a_2) - D_1 f(a_1 , a_2).t_1 - D_2 f(a_1 , a_2).t_2\|$$
$$\le 4\varepsilon \sup(\|t_1\| , \|t_2\|)$$

و با این رابطه فرمول (۱. ۱. ۹. ۸) ثابت می‌شود. پیوستگی Df از این حقیقت که فرمول (۱. ۱. ۹. ۸) را می‌توان به‌صورت $Df = D_1 f \circ pr_1 + D_2 f \circ pr_2$ نوشت[1] و از (۵. ۷. ۵) نتیجه می‌شود.

قضیه (۱. ۹. ۸) را می‌توان بی‌درنگ با استقراء روی n به حاصلضرب n فضای باناخ تعمیم داد. اگر این نتیجه را با (۱. ۲. ۸) ترکیب کنیم، نتیجه زیر به‌دست می‌آید :

(۲. ۹. ۸) فرض کنیم نگاشت f از زیر مجموعه باز A از فضای $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ به F دارای مشتق پیوسته روی A باشد، و برای هر i ، فرض کنیم g_i نگاشتی با مشتق پیوسته از یک زیر مجموعه باز B از فضای باناخ G به E_i باشد ، به‌طوری که ، برای هر $z \in B$ ، $(g_1(z), \dots, g_n(z)) \in A$. در این‌صورت، نگاشت مرکب $h = f \circ (g_1 , \dots , g_n)$ روی B دارای مشتق پیوسته می‌باشد ، علاوه بر این ، داریم :

$$Dh(z) = \sum_{k=1}^{n} (D_k f(g_1(z), \cdots , g_n(z))) \circ Dg_k(z).$$

---

[1] . در چاپ اول متن روسی کتاب فرمول فوق به‌صورت $Df = D_1 f \circ i_1 + D_2 f \circ i_2$ نوشته شده است. مترجم.

مسائل

۱. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ و f یک نگاشت پیوسته از زیر مجموعه باز $A \subset E$ به F باشد ، و فرض کنیم برای هر $x \in A$، عنصری مانند $u(x) \in \mathscr{L}(E\,;F)$ موجود باشد ، به‌طوری که، برای هر $y \in E$ ، حد $(f(x+ty)-f(x))/t$ وقتی $t \neq 0$ در $\mathbf{R}$ به‌سمت 0 میل می‌کند، موجود بوده، و برابر $u(x)\,.\,y$ باشد. علاوه بر این، فرض کنیم $x \to u(x)$ نگاشتی پیوسته از A به $\mathscr{L}(E\,;F)$ باشد. نشان دهید که f روی A دارای مشتق پیوسته است و برای هر $x \in A$ ، $u(x) = Df(x)$. (قضیه مقدار میانگین را برای تابع $t \to f(x+ty)$ وقتی $t \in [0,1]$ مورد استفاده قرار دهید).

۲. فرض کنیم E فضای باناخ c_0 (بخش ۳. ۵ ، مسئله ۵) و F فضای باناخ مختلط $(c_0) + i(c_0)$ (تشکیل شده از همه دنباله‌های $z = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ از اعداد مختلط که در شرط $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$ صدق می‌کنند) با نرم $\|z\| = \sup\limits_n |\zeta_n|$ باشد. فضای باناخ حقیقی زیربنای F را به F_0 نشان می‌دهیم. (بخش ۱. ۵ را ببینید). فرض کنیم $I \subset \mathbf{R}$ فاصله بازی باشد که شامل 0 است، و برای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، فرض کنیم f_n نگاشتی پیوسته از I به C باشد، به‌طوری که از رابطه $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ نتیجه شود $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_n) = 0$. این رابطه نگاشتی مانند $f:(\xi_n) \to (f_n(\xi_n))$ از E به F_0 را تعریف می‌کند.

(a) فرض کنیم f در یک همسایگی 0 پیوسته باشد. برای اینکه f در نقطه 0 شبه مشتق‌پذیر باشد (بخش ۴. ۸ مسئله ۴ را ببینید) ، لازم و کافی است که ، برای هر n مشتق $f'_n(0)$ موجود باشد و دو عدد $A > 0$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشند[۱]، به‌طوری که برای هر n ، از رابطه $|t| \leq \delta$ نتیجه شود $|f_n(t) - f_n(0)| \leq A|t|$. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\sup\limits_n |f'_n(0)| < +\infty$.

(b) برای اینکه f در 0 مشتق‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر n، از رابطه $|t| \leq \delta$ نتیجه شود $|f_n(t) - f_n(0) - f'_n(0)t| \leq \varepsilon |t|$.

(c) برای اینکه مشتق f' در یک همسایگی 0 در E موجود بوده، و در نقطه 0 پیوسته باشد، لازم و کافی است که، یک همسایگی $J \subset I$ از 0 در $\mathbf{R}$ موجود باشد، به‌طوری که :

(۱) f'_n ها روی J موجود باشند؛

(۲) $\sup\limits_n |f'_n(0)| < +\infty$ ؛

(۳) دنباله (f'_n) در نقطه 0 همپیوسته باشد. (بخش ۵. ۷ ، و بخش ۶. ۸ مسئله ۳ را ببینید.)

(d) فرض کنیم $f_0(t) = 1$ و برای هر $n \geq 1$ ، $f_n(t) = e^{\text{int}}/n$. نشان دهید که f در هر نقطه $x \in E$ شبه مشتق‌پذیر است. اگر $u(x)$ شبه مشتق f در نقطه x باشد، نشان دهید که نگاشت $(x, y) \to u(x)\,.\,y$ از $E \times F$ به F_0 پیوسته است، اما ، f در هیچ نقطه‌ای از E مشتق‌پذیر نیست.

۳. فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از مجموعه باز A از فضای باناخ E به فضای باناخ F باشد ، و برای هر $x \in A$ و هر $y \in E$ ، $\lim\limits_{t\to 0,\, t\neq 0} (f(x+ty)-f(x))/t = g(x,y)$ در E موجود باشد. اگر برای هر $y_i \in E$ ، $1 \leq i \leq n$ و $x_0 \in A$ ، هر یک از نگاشت‌های $x \to g(x, y_i)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد ، نشان دهید که :

$$g(x_0, y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} g(x_0, y_i)\,.$$

(از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید.)

۴. فرض کنیم E_1، E_2 ، F سه فضای باناخ، و f نگاشتی پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از $E_1 \times E_2$ به F باشد. برای اینکه f در نقطه $(a_1, a_2) \in A$ مشتق‌پذیر باشد، لازم و کافی است که : (۱) $D_1 f(a_1, a_2)$ و $D_2 f(a_1, a_2)$

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب تنها به‌وجود مشتق $f'_n(0)$ برای هر n و رابطه $\sup\limits_n |f'_n(0)| < +\infty$ اشاره شده است، و به وجود دو عدد $A > 0$ و $\delta > 0$ که در شرایط مسأله صدق می‌کنند، اشاره‌ای نشده است. مترجم.

موجود باشند، (۲) برای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ ئی موجود باشد، به‌طوری که از روابط $\|t_1\| \le \delta$، $\|t_2\| \le \delta$، نتیجه شود :

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2 + t_2) + f(a_1, a_2)\| \le \varepsilon(\|t_1\| + \|t_2\|).$$

نشان دهید که، دومین شرط برقرار است اگر $D_1 f(a_1, a_2)$ موجود باشد و یک همسایگی V از (a_1, a_2) در $E_1 \times E_2$ وجود داشته باشد به‌طوری که $D_2 f$ روی V موجود باشد و نگاشت $(x_1, x_2) \to D_2 f(x_1, x_2)$ از V به $\mathscr{L}(E_2; F)$ پیوسته باشد.

۵. فرض کنیم تابع حقیقی f روی $\mathbf{R}^2$ به‌صورت $f(x, y) = (xy/r)\sin(1/r)$ برای $(x, y) \ne (0, 0)$ و $f(0, 0) = 0$ تعریف شده باشد، که در آن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. نشان دهید که $D_1 f$ و $D_2 f$ در هر نقطه $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ موجود هستند، و چهار نگاشت $x \to D_1 f(x, b)$ ، $y \to D_1 f(a, y)$ ، $x \to D_2 f(x, b)$ ، $y \to D_2 f(a, y)$ ، برای هر $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ، روی $\mathbf{R}$ پیوسته هستند ، اما ، f در نقطه $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۶. فرض کنیم I فاصله‌ای در $\mathbf{R}$ و f نگاشتی از I^p به فضای باناخ حقیقی E باشد، به‌طوری که ، برای هر نقطه $(a_1, \cdots, a_p) \in I^p$ ، هر یک از نگاشت‌های $x_j \to f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_p)$ $(1 \le j \le p)$ پیوسته و روی I مشتق‌پذیر باشد ، و علاوه بر این ، p تابع $D_j f$ $(1 \le j \le p)$ روی I^p کراندار باشند. نشان دهید که f روی I^p پیوسته است. (از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید).

۱۰. ژاکوبین‌ها[1]

اکنون نتیجه کلی (۸.۹.۱) را به مهم‌ترین حالت‌ها اختصاص می‌دهیم.

۱. $E = \mathbf{R}^n$ (به ترتیب $E = \mathbf{C}^n$). اگر f نگاشتی مشتق‌پذیر از یک زیر مجموعه باز A از E به F باشد، مشتق جزئی $D_k f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ با برداری از F یکسان خواهد بود (بخش ۸ . ۴ را ببینید) ، و مشتق f نگاشت :

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \to \sum_{k=1}^{n} D_k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\zeta_k$$

خواهد بود. اگر Df پیوسته باشد، آنگاه هر یک از $D_k f$ ها پیوسته خواهند بود. به‌عکس، اگر هر یک از نگاشت‌های $D_k f$ موجود و روی A پیوسته باشند، آنگاه f روی A دارای مشتق پیوسته خواهد بود.

۲. $E = \mathbf{R}^n$ و $F = \mathbf{R}^m$ (به ترتیب $E = \mathbf{C}^n$ و $F = \mathbf{C}^m$). در این‌صورت، می‌توان نوشت $f = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ ، که در آن φ_iها توابعی **اسکالر** هستند که روی E تعریف شده‌اند، و طبق (۸ . ۱ . ۵) ، f دارای مشتق پیوسته است اگر و تنها اگر هر یک از φ_iها دارای مشتق پیوسته باشند. اما ، دوباره ، طبق حالت ۱ ، φ_i دارای مشتق پیوسته است اگر و تنها اگر مشتقات جزئی $D_j \varphi_i$ (که اکنون توابعی اسکالر هستند) موجود دو پیوسته باشند. علاوه بر این ، مشتق (کلی) f نگاشت خطی :

$$(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \to (\eta_1, \cdots \eta_m)$$

با

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j \varphi_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))\zeta_j$$

1 . Jacobians = Якобианы

است. به‌عبارت دیگر، f' ، که نگاشتی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ (به ترتیب، از $\mathbf{C}^n$ به $\mathbf{C}^m$) است، متناظر با ماتریس $(\mathrm{D}_j \varphi_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$ می‌باشد، که آن را **ماتریس ژاکوبی**[1] f (یا φ_1 ، ... ، φ_m) در $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ می‌نامند. وقتی $m = n$ باشد، دترمینان ماتریس (مربعی) ژاکوبی را **ژاکوبین** f (یا φ_1 ، ... ، φ_n) می‌نامند. با اختصاص دادن قضیه (۲. ۹. ۸) به حالت‌های فوق نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

(۱ . ۱۰ . ۸) فرض کنیم φ_jها $(1 \le j \le m)$ m تابع اسکالر باشند ، که روی زیر مجموعه باز A از $\mathbf{R}^n$ (به ترتیب $\mathbf{C}^n$) دارای مشتق پیوسته بوده ، و ψ_iها $(1 \le i \le p)$ p تابع اسکالر دارای مشتق پیوسته روی زیر مجموعه باز B از $\mathbf{R}^m$ (به ترتیب $\mathbf{C}^m$) باشند ، و B شامل تصویر A تحت نگاشت $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ باشد. در این‌صورت، اگر برای $x \in A$ و $1 \le i \le p$ ، $\theta_i(x) = \psi_i(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ ، آنگاه رابطه :

$$(\mathrm{D}_k \theta_i) = (\mathrm{D}_j \psi_i)(\mathrm{D}_k \varphi_j)$$

را بین ماتریس‌های ژاکوبی خواهیم داشت. در حالت خاص ، وقتی $m = n = p$ است ، رابطه :

$$\det(\mathrm{D}_k \theta_i) = \det(\mathrm{D}_j \psi_i) \det(\mathrm{D}_k \varphi_j)$$

بین ژاکوبین‌ها برقرار خواهد بود.

در اینجا لازم به تذکر است که ، نمادهای معمول $f'_{\xi_i}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $\frac{\partial}{\partial \xi_i} f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ برای $\mathrm{D}_i f(\xi_1, \cdots \xi_n)$ ساخته شده‌اند ، که متأسفانه ، وقتی تبدیل و جانشین‌سازی صورت می‌گیرد ، باعث پیچیدگی‌ها و اشتباهاتی چاره‌ناپذیر می‌شوند (معنی $f'_y(y, x)$ یا $f'_x(x, x)$ چیست؟) ؛ همچنین، ژاکوبین $\det(\mathrm{D}_j \varphi_i(\xi_1, \cdots, \xi_n))$ را به‌صورت $\mathrm{D}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)/\mathrm{D}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ یا

$$\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)/\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

می‌نویسند.

۱۱. مشتق یک انتگرال وابسته به پارامتر

(۱. ۱۱. ۸) فرض کنیم $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ یک فاصله فشرده، E و F فضاهای باناخ حقیقی، و f نگاشتی پیوسته از $I \times A$ به F باشد (A زیر مجموعه بازی از E است). در این‌صورت، $g(z) = \int_\alpha^\beta f(\xi, z)\, d\xi$ روی A پیوسته است.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ و $z_0 \in A$ داده شده باشند. برای هر $\xi \in I$ یک همسایگی $V(\xi)$ از ξ در I و عددی مانند $r(\xi) > 0$ موجود است ، به‌طوری که برای $\eta \in V(\xi)$ و $\|z - z_0\| \le r(\xi)$ ، $\|f(\eta, z) - f(\xi, z_0)\| \le \varepsilon$. فاصله فشرده I را با تعدادی متناهی از همسایگی‌های $V(\xi_i)$

---

1 . Jacobian matrix = Матрица Якоби

می‌پوشانیم ، و قرار می‌دهیم $r = \inf(r(\xi_i))$. در این‌صورت ، برای $\|z - z_0\| \le r$ و هر $\xi \in I$ ، $\|f(\xi, z) - f(\xi, z_0)\| \le \varepsilon$. بنابراین ، طبق (۸ . ۷ .۷) ، برای $\|z - z_0\| \le r$ ،

$$\|g(z) - g(z_0)\| \le \varepsilon(\beta - \alpha)$$

و این همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

(۸ .۱۱ .۲) (دستور لایب نیتس[1]). با همان فرضیاتی که در قضیه (۸ .۱۱ .۱) بیان شد و افزون بر آنها، فرض کنیم $D_2 f$ مشتق جزئی نسبت به دومین متغیر موجود بوده ، و روی $I \times A$ پیوسته باشد. در این‌صورت، g روی A دارای مشتق پیوسته خواهد بود، و

$$Dg(z) = \int_\alpha^\beta D_2 f(\xi, z)\, d\xi.$$

(دیده می‌شود که، هر دو طرف این فرمول در $\mathscr{L}(E ; F)$ واقع شده‌اند.)

با استفاده از دلیلی مشابه آن چه که در (۸ .۱۱ .۱) بیان شد ، برای $D_2 f$ ، نتیجه می‌گیریم که ، برای $\varepsilon > 0$ داده شده ، و $z_0 \in A$ ، $r > 0$ ئی موجود است ، به‌طوری که برای $\|z - z_0\| \le r$ و هر $\xi \in I$ ؛ $\|D_2 f(\xi, z) - D_2 f(\xi, z_0)\| \le \varepsilon$. بنابراین، طبق (۸ . ۶ .۲) ، برای هر $\xi \in I$ و هر t که $\|t\| \le r$ ،

$$\|f(\xi, z_0 + t) - f(\xi, z_0) - D_2 f(\xi, z_0).t\| \le \varepsilon \|t\|$$

در نتیجه ، طبق (۸ .۷ .۷) ، خواهیم داشت :

$$\|g(z_0 + t) - g(z_0) - \int_\alpha^\beta (D_2 f(\xi, z_0) . t)\, d\xi\| \le \varepsilon(\beta - \alpha)\|t\|.$$

اما، طبق (۸ .۷ . ۶) و (۵ .۷ . ۴) ، برای هر t داریم:

$$\int_\alpha^\beta (D_2 f(\xi, z_0) . t)\, d\xi = (\int_\alpha^\beta D_2 f(\xi, z_0) d\xi).t$$

و با این رابطه اثبات به پایان می‌رسد.

مسائل

۱. فرض کنیم $J \subset \mathbf{R}$ یک فاصله باز ، E و F دو فضای باناخ، A یک زیر مجموعه باز از E و f یک نگاشت پیوسته از $J \times A$ به F باشد به‌طوری که $D_2 f$ موجود و روی $J \times A$ پیوسته باشد ، و α و β دو نگاشت با مشتق پیوسته از A به J باشند. قرار می‌دهیم:

$$g(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} f(\xi, z) d\xi$$

نشان دهید که g روی A دارای مشتق پیوسته است ، و $g'(z)$ برابر نگاشت خطی :

$$t \to (\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z) d\xi).t + (\beta'(z).t) f(\beta(z), z) - (\alpha'(z).t) f(\alpha(z), z)$$

---

1 . Leibniz's rule = Правило Лейбница

می‌باشد (از (۱. ۹. ۸) و (۲. ۱۱. ۸) استفاده کنید).

۲. فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی رگله روی فاصله فشرده $[a, b]$ باشند ، به‌طوری که f روی $[a, b]$ نزولی باشد و $0 \le g(t) \le 1$. نشان دهید که :

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)dt \le \int_a^b f(t)\, g(t)dt \le \int_a^{a+\lambda} f(t)dt$$

که در آن $\lambda = \int_a^b g(t)dt$. چه موقع تساوی برقرار است؟ (انتگرال‌های $\int_a^y f(t)g(t)dt$ و $\int_a^{a+h(y)} f(t)dt$ ، که در آن $h(y) = \int_a^y g(t)dt$ ، را به‌عنوان توابعی از y مورد بررسی قرار دهید ، و از روشی مشابه برای دومین نامساوی استفاده کنید.)

۳. فرض کنیم فرضیات مسئله ۱ برقرار باشند، به جز اینکه فرض شود α و β صرفاً پیوسته هستند، اما، لزوماً مشتق‌پذیر نیستند ، و علاوه بر این ، فرض کنیم، برای هر $z \in A$ ، $f(\alpha(z), z) = 0$ و $f(\beta(z), z) = 0$. نشان دهید که $g(z)$ روی A دارای مشتق پیوسته است و $g'(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z)d\xi$. (از قضیه بولتزانو (۸. ۱۹. ۳) استفاده نموده، ثابت کنید که، اگر ξ متـعلق به فاصـله‌ای با نقاط انتهایی $\beta(z_0)$ و $\beta(z)$ باشد، یک $z' \in A$ موجود است، به‌طوری که $\|z' - z_0\| \le \|z - z_0\|$ و $\xi = \beta(z')$. اگر M برابر l.u.b نرم $\|D_2 f\|$ روی یک همسایگی از $(\beta(z_0), z_0)$ باشد، با استفاده از قضیه میانگین، نشان دهید که $\|f(\xi, z)\| \le M\|z - z_0\|$).

۴. فرض کنیم $I = [a, b]$، $A = [c, d]$ دو فاصله فشرده در $\mathbf{R}$ ، و f نگاشتی از $I \times A$ به فضای باناخ E باشد ، به‌طوری که : (۱) برای هر $y \in A$، تابع $x \to f(x, y)$ روی I رگله باشد، و برای هر $x \in I$ تابع $y \to f(x, y)$ روی A رگله باشد ؛ (۲) نگاشت f روی $I \times A$ کراندار باشد ؛ (۳) اگر D زیر مجموعه‌ای از $I \times A$ باشد که از نقاطی مانند (x, y) تشکیل شده باشد که در این نقاط f پیوسته نیست ، آنگاه ، برای هر $x_0 \in I$ (به ترتیب ، هر $y_0 \in A$) ، مجموعه نقاط y (به ترتیب x) که $(x_0, y) \in D$ (به ترتیب $(x, y_0) \in D$) متناهی باشد .

(a) نشان دهید که، تابع $g(y) = \int_\alpha^b f(t, y)dt$ روی A پیوسته است . (اگر $\varepsilon > 0$ و $y_0 \in A$ داده شده باشند ، نشان دهید که همسایگی V از y_0 در A و تعدادی متناهی از فواصل $J_k \subset I$ $(1 \le k \le n)$ موجود هستند ، به‌طوری که مجموع طول‌های J_kها کوچک‌تر یا مساوی ε است ، و اگر $W = I - \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ ، f روی $W \times V$ پیوسته است. برای اثبات این نتیجه ، از قضیه بورل ـ لیگ (۶. ۱۷. ۳) استفاده کنید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که :

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

(دو تابع $z \to \int_c^z dy \int_a^b f(x, y)\, dx$ و $z \to \int_a^b dx \int_c^z f(x, y)\, dy$ را برای $z \in A$ مورد بررسی قرار دهید. (با بخش ۲۱ . ۱۳ مقایسه کنید).

(c) از (b) نتیجه بگیرید که، اگر $a = c$ ، $b = d$ ، آنگاه :

$$\int_a^b dy \int_y^b f(t, y)dt = \int_a^b dx \int_a^x f(x, u)du.$$

(تابعی که برای $y \le x$ مساوی $f(x, y)$ ، و برای $y > x$ برابر 0 است ، مورد بررسی قرار دهید[۱]).

۵. (a) فرض کنیم f یک تابع اکیداً صعودی پیوسته روی فاصله $[0, a]$ باشد، به‌طوری که $f(0) = 0$ ، و فرض کنیم g نگاشت وارون f باشد ، که روی فاصله $[0, f(a)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است. نشان دهید که $\int_0^a f(t)dt = \int_0^{f(a)} (a - g(u))du$ (از مسئله ۴ برای تابعی که روی $0 \le x \le a$ ، $0 \le y \le f(x)$ برابر 1 ، و برای $0 \le x \le a$ ، $f(x) < y \le f(a)$ برابر 0 است، استفاده کنید).

(b) نشان دهید که اگر $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le f(a)$ باشد، نامساوی زیر برقرار خواهد بود :

---

۱. قسمت (c) در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است . مترجم.

$$xy \le \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(u)du$$

ضمناً ، دو طرف نامساوی فوق برابر خواهند بود ، اگر و تنها اگر $y = f(x)$ باشد.

(c) از (b) نامساوی‌های زیر را نتیجه بگیرید :

برای $x > 0$ ، $y \in \mathbf{R}$ ، $\qquad xy \le x \,.\, \log x + e^{y-1}$

برای $x \ge 0$ ، $y \ge 0$ ، $p > 1$ ، $q > 1$ ، $\qquad xy \le ax^p + by^q$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، $a > 0$ ، $b > 0$ و $(pa)^q (qb)^p \ge 1$

۱۲ . مشتق‌های مرتبه بالاتر

فرض کنیم f نگاشتی از یک زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E به فضای باناخ F باشد که روی A دارای مشتق پیوسته است. در این‌صورت، $\mathrm{D}f$ نگاشتی پیوسته از A به فضای باناخ $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ خواهد بود. اگر این نگاشت در نقطه $x_0 \in \mathrm{A}$ (به ترتیب، روی A) مشتق‌پذیر باشد، گوئیم f در نقطه x_0 (به ترتیب روی A) **دوبار مشتق‌پذیر (دارای مشتق مرتبه دوم)** است ، و مشتق $\mathrm{D}f$ در نقطه x_0 را **مشتق دوم** f در نقطه x_0 نامیده ، به علامت $f''(x_0)$ یا $\mathrm{D}^2 f(x_0)$ نشان می‌دهند. $\mathrm{D}^2 f(x_0)$ عنصری از $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}))$ است، اما، در (۸ . ۷ . ۵) دیده‌ایم که فضای اخیر به‌طور طبیعی با فضای $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,,\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ (می‌نویسیم $\mathscr{L}_2(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$) نگاشت‌های دو خطی پیوسته از $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ به F یکسان است. یادآوری می‌کنیم که ، مطلب فوق از طریق یکسان گرفتن $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}))$ با نگاشت دو خطی $(s\,,t) \to (u.s).t$ که آن را به علامت $u\,.\,(s\,,t)$ نیز نشان می‌دهند، تحقق می‌یابد.

(۱. ۱۲. ۸) فرض کنیم f در نقطه x_0 دوبار مشتق‌پذیر (دارای مشتق مرتبه دوم) باشد.[۱] در این‌صورت ، برای هر ثابت $t \in \mathrm{E}$ مشتق نگاشت $x \to \mathrm{D}f(x)\,.\,t$ از A به F در نقطه x_0 ، برابر $s \to \mathrm{D}^2 f(x_0)\,.\,(s.t)$ است.

اگر ملاحظه کنیم که ، نگاشت $x \to \mathrm{D}f(x)\,.\,t$ ترکیب نگاشت خطی $u \to u.t$ از $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ به F و نگاشت $x \to \mathrm{D}f(x)$ از E به $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ است ، آنگاه نتیجه مطلوب از (۱. ۲. ۸) و (۳. ۱. ۸) به‌دست می‌آید.

(۲. ۱۲. ۸) اگر f در نقطه x_0 دوبار مشتق‌پذیر (دارای مشتق مرتبه دوم) باشد، آنگاه، نگاشت دو خطی $(s\,,t) \to \mathrm{D}^2 f(x_0)\,.\,(s.t)$ متقارن است ، به‌عبارت دیگر :

---

۱. در این قضیه و در مباحث بعدی، وقتی گفته می‌شود، f در نقطه x_0 دوبار مشتق‌پذیر است، منظور این است که ، f در نقطه x_0 دارای مشتق مرتبه دوم است. مترجم .

$$D^2 f(x_0).(s,t) = D^2 f(x_0).(t,s).$$

تابع با متغیر حقیقی ξ روی فاصله $[0,1]$ که به‌صورت :

$$g(\xi) = f(x_0 + \xi s + t) - f(x_0 + \xi s)$$

تعریف شده است ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در رابطه فوق s ، t چنان هستند که :

$$\| t \| \le \frac{1}{2} r \ , \ \| s \| \le \frac{1}{2} r$$

و گوی به مرکز x_0 و شعاع r مشمول A است. از (۸ . ۶ .۲) نتیجه می‌شود :

$$\| g(1) - g(0) - g'(0) \| \le \sup_{0 \le \xi \le 1} \| g'(\xi) - g'(0) \|$$

حال، طبق (۸ .۴ .۱) ، داریم :

$$g'(\xi) = (f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0 + \xi s)).s$$
$$= ((f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0)) - (f'(x_0 + \xi s) - f'(x_0))).s$$

طبق فرض ، برای $\varepsilon > 0$ یک $r' \le r$ موجود است ، به‌طوری که برای $\| s \| \le \frac{1}{2} r'$ ، $\| t \| \le \frac{1}{2} r'$ ،

$$\| f'(x_0 + \xi s + t) - f'(x_0) - f''(x_0).(\xi s + t) \| \le \varepsilon(\| s \| + \| t \|)$$

و

$$\| f'(x_0 + \xi s) - f'(x_0) - f''(x_0).(\xi s) \| \le \varepsilon \| s \|$$

بنابراین :

$$\| g'(\xi) - (f''(x_0).t).s \| \le 2\varepsilon \| s \| . (\| s \| + \| t \|)$$

و در نتیجه :

$$\| g(1) - g(0) - (f''(x_0).t).s \| \le 6\varepsilon \| s \| (\| s \| + \| t \|).$$

اما ، تفاضل $g(1) - g(0) = f(x_0 + s + t) - f(x_0 + t) - f(x_0 + s) + f(x_0)$ نسبت به x و t متقارن است ، بنابراین ، با تعویض s و t به‌دست می‌آید :

$$\| (f''(x_0).t).s - (f''(x_0).s).t \| \le 6\varepsilon (\| s \| + \| t \|)^2$$

اکنون این نامساوی برای $\| s \| \le \frac{1}{2} r'$ ، $\| t \| \le \frac{1}{2} r'$ برقرار است. اما ، اگر به جای s و t به ترتیب λs و λt قرار دهیم ، دو طرف نامساوی معین خواهند بود ، و در $|\lambda|^2$ ضرب می‌شوند ، بنابراین ، نتیجه به‌دست آمده برای همه s و t های واقع در E ، از جمله برای $\| s \| = \| t \| = 1$ برقرار خواهد بود ، و این مطلب ، طبق (۵ .۷ .۷) ، ثابت می‌کند که ، برای همهٔ s و t ها :

$$\| f''(x_0).(t,s) - f''(x_0).(s,t) \| \le 24\varepsilon \| s \| . \| t \|$$

و چون $\varepsilon > 0$ اختیاری است ، رابطه فوق اثبات را به پایان می‌رساند.

در حالت خاص :

(۳. ۱۲. ۸) فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در R^n (به ترتیب C^n) باشد. اگر نگاشت f از A به فضای باناخ F در نقطه x_0 دوبار مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه مشتقات جزئی $\mathrm{D}_i f$ در نقطه x_0 مشتق‌پذیر خواهند بود، و برای $1 \le i \le n$ ، $1 \le j \le n$ ،

$$\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j\, f(x_0) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i\, f(x_0)\,.$$

باید تنها از (۱. ۱۲. ۸) برای مقادیر خاصی از t استفاده نموده، ملاحظه نمود که ، برای $s = (\xi_i)$ ، $t = (\eta_i)$ ، مقدار :

$$\mathrm{D}^2 f(x_0)\,.\,(s\,,t) = (\mathrm{D}^2 f(x_0)\,.\,s)\,.\,t$$

برابر $\sum_{i,j} (\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j\, f(x_0))\, \xi_i \eta_j$ است (بخش ۱۰. ۸ را ببینید).

اکنون، با استقراء روی p ، یک نگاشت p **بار مشتق‌پذیر (دارای مشتق مرتبه p ام)** f از یک زیر مجموعه باز $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ به F را به‌عنوان نگاشتی که روی A ، $(p-1)$ بار مشتق‌پذیر بوده و علاوه بر آن $\mathrm{D}^{p-1} f$ نیز روی A مشتق‌پذیر است، تعریف می‌کنیم، و $\mathrm{D}(\mathrm{D}^{p-1} f)$ را **مشتق مرتبه p ام** f نامیده، به علامت $\mathrm{D}^p f$ یا $f^{(p)}$ نشان می‌دهیم. عنصر $\mathrm{D}^p f(x_0)$ با عنصری از فضای $\mathscr{L}_p(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ نگاشت‌های p - خطی پیوسته از E^p به F یکسان گرفته می‌شود و ما آن را (نگاشت متناظر) به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(t_1\,, t_2\,, \ldots, t_p) \to \mathrm{D}^p f(x_0)\,(t_1, \ldots, t_p)$$

شبیه آن‌چه که در (۱. ۱۲. ۸) بیان شد، دیده می‌شود که ، نگاشت :

$$t_1 \to \mathrm{D}^p f(x_0)(t_1\,,\, t_2\,,\, \ldots\,, t_p)$$

مشتق نگاشت :

$$x \to \mathrm{D}^{p-1} f(x)\,(t_2\,,\, \ldots\,, t_p)$$

در نقطه x_0 است.

گزاره (۲. ۱۲. ۸) را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد :

(۴. ۱۲. ۸) اگر f روی A ، p بار مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه نگاشت چندخطی $\mathrm{D}^p f(x)$ برای هر $x \in \mathrm{A}$ متقارن است.

مطلب فوق را می‌توان با استقراء روی p ثابت کرد. فرض کنیم t_3 ، ... ، t_p ثابت باشند ، نگاشت $x \to g(x) = \mathrm{D}^{p-2} f(x)\,(t_3\,, \cdots t_p)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از تذکرات قبلی نتیجه می‌شود که، مشتق دوم g در نقطه x برابر :

$$(t_1\,, t_2) \to \mathrm{D}^p f(x)\,.\,(t_1\,, t_2\,, t_3\,, \cdots, t_p)$$

است. بنابراین ، طبق (۲. ۱۲. ۸) ،

$$D^p f(x).(t_2, t_1, t_3, \cdots t_p) = D^p f(x).(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_p). \quad (\text{۸ .۱۲ .۴ .۱})$$

از طرف دیگر، برای هر تبدیل σ از مجموعه اندیس‌های $(2, 3, \cdots, p)$، از فرض استقراء نتیجه می‌شود:

$$D^{p-1} f(x).(t_{\sigma(2)}, t_{\sigma(3)}, \cdots, t_{\sigma(p)}) = D^{p-1} f(x).(t_2, t_3, \cdots, t_p).$$

و با گرفتن مشتق مرتبه اول از طرفین رابطه فوق (وقتی t_i ها ثابت هستند)، به‌دست می‌آوریم:

$$D^p f(x).(t_1, t_{\sigma(2)}, \cdots, t_{\sigma(p)}) = D^p f(x).(t_1, t_2, \cdots, t_p). \quad (\text{۸ .۱۲ .۴ .۲})$$

با مقایسه (۱. ۴. ۱۲. ۸) و (۲. ۴. ۱۲. ۸)، نخست می‌بینیم که $D^p f(x).(t_1, t_2, \cdots, t_p)$ وقتی اندیس 1 با اندیسی دیگر، همچنین، وقتی دو اندیس دلخواه بزرگ‌تر یا مساوی 2 با هم عوض می‌شوند، تغییر نمی‌کند، اما، این جابه‌جاسازی هر جایگشتی از اندیس‌های $1, 2, \cdots, p$ را تولید می‌کند، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

(۵ .۱۲. ۸) اگر f روی A، m بار و $D^m f$ روی A، n بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f روی A، $m+n$ بار مشتق‌پذیر خواهد بود، و $D^{m+n} f = D^n(D^m f)$.

وقتی $n = 1$ است، مطلب فوق تعریف مشتق مرتبه $(m+1)$ ام است، و با استقراء روی n، و استفاده از تعریف، گزاره فوق بلافاصله ثابت می‌شود.

(۶ .۱۲. ۸) فرض کنیم $f = (f_1, \cdots, f_m)$ نگاشتی پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E به $F_1 \times \cdots \times F_m$ حاصلضرب فضاهای باناخ باشد. برای اینکه f روی A، p بار مشتق‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، هر یک از f_i ها روی A، p بار مشتق‌پذیر باشد، و در این‌صورت:

$$D^p f = (D^p f_1, \cdots D^p f_m).$$

با استقراء روی p، مطلب فوق از (۵ .۱ .۸) نتیجه می‌شود.

(۷ .۱۲. ۸) فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در R^n (به ترتیب C^n) باشد. اگر نگاشت f از A به فضای باناخ F، p بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه، برای $t_i = (\xi_{ij})$ $(1 \le i \le p$ ، $1 \le j \le n)$ خواهیم داشت:

$$D^p f(x).(t_1, \cdots, t_p) = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_p)} D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_p} f(x) \xi_{1,j_1} \xi_{2,j_2} \cdots \xi_{p,j_p}$$

مجموع برای همه n^p دنباله متمایز $(j_k)_{1 \le k \le p}$ از اعداد صحیح فاصله $[1, n]$ بسط داده می‌شود.

مطلب فوق فوراً با استقراء روی p ، و با استفاده از بخش ۱۰. ۸ ثابت می‌شود. n^p عنصر $D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_p} f(x)$ را **مشتقات جزئی مرتبه** p**ام** f در نقطه x می‌نامند. طبق (۴. ۱۲. ۸) ، دو تا از چنین مشتقاتی که تفاوت آنها در جایگشت اندیس‌هایشان باشد ، با هم برابرند. گوئیم f روی A ، p بار **پیوسته ـ مشتق‌پذیر**[1] است ، هرگاه روی A ، $D^p f$ موجود ، و پیوسته باشد.

(۸ . ۱۲. ۸) فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ (به ترتیب $\mathbf{C}^n$) ، و f یک نگاشت پیوسته از A به فضای باناخ F باشد. اگر همه n^p مشتق جزئی مرتبه pام f روی A موجود و پیوسته باشند، آنگاه f روی A ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود.

برای $p = 1$ ، مطلب فوق همان (۱. ۹ . ۸) است (گسترش یافته به حاصلضرب n فضا) . در حالت کلی، باید فقط از استقراء روی p و از فرمول (۷. ۱۲. ۸) استفاده نمود.

گوئیم f روی A **بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر**[2] است ، هرگاه برای هر عدد طبیعی p ، f روی A ، p بار مشتق‌پذیر باشد ، در این‌صورت ، همه مشتق‌های $D^p f$ روی A به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر خواهند بود.

مثال

(۹. ۱۲. ۸) هر نگاشت دو خطی پیوسته بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و مشتق مرتبه pام آن برای $p \geq 3$ برابر صفر می‌باشد.

از (۴. ۱. ۸) نتیجه می‌شود که ، مشتق یک نگاشت دو خطی پیوسته در نقطه (x , y) برابر است با $(s . t) \to [x . t] + [s . y]$، این نگاشت خطی را به $g(x , y) \in \mathscr{L}(\mathrm{E} \times \mathrm{F} ; \mathrm{G})$ نشان می‌دهیم. طبق فرض و (۱. ۵. ۵) ، یک $c > 0$ موجود است ، به‌طوری که در $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ ، $\|[x . y]\| \leq c \|x\| . \|y\|$.
طبق تعریف نرم در فضای $\mathscr{L}(\mathrm{E} \times \mathrm{F} ; \mathrm{G})$ (۱. ۷. ۵ را ببینید) ، داریم:

$$\|g(x , y)\| \leq c (\|x\| + \|y\|) \leq 2c \sup (\|x\|, \|y\|)$$

بنابراین g یک نگاشت خطی پیوسته از فضای $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ به $\mathscr{L}(\mathrm{E} \times \mathrm{F} ; \mathrm{G})$ است ، و در نتیجه $(x , y) \to [x . y]$ دو بار مشتق‌پذیر خواهد بود و مشتق دوم آن در (x , y) ، طبق (۳. ۱. ۸) و (۱. ۱۲. ۸) ، از رابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$((s_1 , t_1) , (s_2 , t_2)) \to [s_1 . t_2] + [s_2 . t_1]$$

---

۱. واژه Continuosly differentiable در واژه‌نامه ریاضی و آمار ، انجمن ریاضی ایران، تهران، چاپ دوم ۱۳۷۶، پیوسته ـ مشتق‌پذیر ترجمه شده است ، اما ، چنانکه قبلاً نیز اشاره شده است، از این واژه در برخی از کتاب‌های ریاضی، در موارد مختلف به صورت‌های مشتق‌پذیر پیوسته و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، با مشتق پیوسته، دارای مشتق پیوسته و ... نیز استفاده شده است. مترجم.

2 . Indefinitely differntiable = Бесконечно дифференцируемо

این نگاشت مستقل از (x , y) است ، و از این مطلب نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۸ .۱۲ .۱۰) فرض کنیم E ، F و G سه فضای باناخ ، A زیر مجموعه بازی از E ، و B زیر مجموعه بازی از F باشد. اگر f نگاشتی p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به B ، و g نگاشتی p بار پیوسته - مشتق‌پذیر از B به G باشد ، آنگاه $h = g \circ f$ نگاشتی p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به G خواهد بود.

برای $p = 1$، از (۸ .۲ .۱) و از این حقیقت که طبق (۵ .۷ .۵) ، $(u , v) \to v \circ u$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $\mathscr{L}(E ; F) \times \mathscr{L}(F ; G)$ به $\mathscr{L}(E ; G)$ است ، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. حال، از استقراء روی p استفاده می‌کنیم. از اینکه $h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ و f' و g' ، $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر هستند ، طبق فرض استقراء ، نتیجه می‌گیریم که $g' \circ f'$ ، $(p - 1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود. از (۸ .۱۲ .۶) و (۸ .۱۲ .۹) نتیجه می‌شود که h' ، $(p - 1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر پیوسته است ، بنابراین ، طبق (۸ .۱۲ .۵) ، h ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود.

مثال

(۸ .۱۲ .۱۱) فرض کنیم هومیومورفیسمی خطی از فضای باناخ E به فضای باناخ F موجود باشد، و فرض کنیم $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E ; F)$ مجموعه باز تشکیل شده از این هومیومورفیسم‌ها در $\mathscr{L}(E ; F)$ باشد ((۸ .۳ .۲) را ببینید). در این‌صورت ، نگاشت $u \to u^{-1}$ از $\mathscr{H}$ بر روی $\mathscr{H}^{-1}$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

با استقراء روی p ثابت می‌کنیم که ، نگاشت $u \to u^{-1}$ ، p بار مشتق‌پذیر است. طبق (۸ .۳ .۲) ، برای $p = 1$ خاصیت فوق برقرار است. برای v و w داده شده در فضای $\mathscr{L}(F ; E) = M$ ، فرض کنیم $f(v , w)$ نگاشت خطی $t \to -v \circ t \circ w$ از $L = \mathscr{L}(E ; F)$ به M باشد.[1] واضح است که ، f نگاشتی **دوخطی** است و $M \times M$ را به $\mathscr{L}(L ; M)$ می‌نگارد و از (۵ .۷ .۵) نتیجه می‌شود $\|f(v , w)\| \leq \|v\| . \|w\|$ ؛ به این ترتیب ، f پیوسته است، و بنابراین، طبق (۸ .۱۲ .۹) ، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر خواهد بود. چون مشتق اول $u \to u^{-1}$ ، طبق (۸ .۳ .۲) ، نگاشت $u \to f(u^{-1}, u^{-1})$ است ، طبق (۸ .۱۲ .۶) و (۸ .۱۲ .۱۰) ، نتیجه می‌گیریم که ، اگر $u \to u^{-1}$ ، p بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $u \to f(u^{-1} , u^{-1})$ نیز p بار مشتق‌پذیر خواهد بود و بنابراین ، طبق (۸ .۱۲ .۵) ، $u \to u^{-1}$، $(p + 1)$ بار مشتق‌پذیر است.

تبصره. وقتی f نگاشتی از **فاصله** $J \subset R$ به فضای باناخ حقیقی F باشد. ما قبلاً در بخش ۸ .۴ مفهوم مشتق f در نقطه $\xi_0 \in J$ نسبت به J را تعریف کرده‌ایم. با استقراء روی p ، مشتق مرتبه p ام f در ξ_0 نسبت به J را ، به‌عنوان مشتق در ξ_0 (نسبت به J) از مشتق مرتبه $(p - 1)$ام f (که بنابراین، فرض شده

---

۱. علامت منفی در رابطه $-v \circ t \circ w$ در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی آن وجود دارد. مترجم.

است در یک همسایگی ξ_0 در J وجود دارد) تعریف می‌کنیم. این مشتق عنصری از F خواهد بود، که دوباره به‌صورت $D^p f(\xi_0)$ یا $f^{(p)}(\xi_0)$ نوشته می‌شود. اگر ξ_0 یک نقطه داخلی J باشد، مشتق مرتبه p ام f، شبیه آن چه برای نگاشت‌های کلی تعریف شده است، منطبق بر نگاشت چند خطی $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \to f^{(p)}(\xi_0)\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n$ از R^p به F است.

مسائل

۱. فرض کنیم f نگاشتی n بار مشتق‌پذیر از یک فاصله باز $I \subset R$ به فضای باناخ E باشد. نشان دهید که، برای هر $x \in I$ به‌طوری که $\frac{1}{x} \in I$، داریم:

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n D^n\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

(از استقراء روی n استفاده کنید).

۲. (a) فرض کنیم ρ تابعی باشد که روی R با شرایط زیر تعریف شده است:

برای $-1 < t < 1$، $\rho(t) = \exp\left(-\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2}\right)$

برای $t \geq 1$ یا $t \leq -1$، $\rho(t) = 0$

نشان دهید که، تابع ρ روی R بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است. (از رابطه $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x}$ وقتی $n > 0$ است، استفاده کنید.)

(b) در این مسئله، قرار می‌گذاریم که، هر تابع رگله f که روی فاصله فشرده $[a, b]$ از R تعریف شده، با برابر 0 گرفتن f برای $t < a$ و $t > b$ به همه R گسترش دهیم. در این‌صورت، نماد $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ را برای انتگرال $\int_a^b f(t)dt$، که مساوی $\int_c^d f(t)dt$ برای $c \leq a$ و $d \geq b$ نیز هست، مورد استفاده قرار خواهیم داد.

برای هر چنین تابع f، قرار می‌دهیم:

$$f_n(t) = nc\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\rho(n(t-s))ds = nc\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\rho(ns)ds$$

که در آن $1/c = \int_{-1}^{+1}\rho(t)dt$ («منظم‌سازی»[1] تابع f به‌وسیله ρ؛ می‌نویسیم $\rho_n(t) = nc\rho(nt)$ و $f_n = f * \rho_n$). نشان دهید که، f_n بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و روی مکمل یک فاصله فشرده صفر می‌شود (از (۸. ۱۱. ۲) استفاده کنید). اگر f روی $[a, b]$ تابعی حقیقی و صعودی (به ترتیب اکیداً صعودی، به ترتیب محدب[2]) باشد، آنگاه f_n روی $[a + 1/n, b - 1/n]$ صعودی (به ترتیب اکیداً صعودی، به ترتیب محدب[2]) خواهد بود. اگر f (که به R گسترش یافته است) p بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} D^p f_n(t) &= nc\int_{-\infty}^{+\infty}(D^p f(s))\rho(n(t-s))\,ds \\ &= nc\int_{-\infty}^{+\infty}(D^p f(t-s))\,\rho(ns)\,ds \end{aligned}$$

(c) نشا ن دهید که برای هر n، $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

(d) اگر f (که به R گسترش یافته است) پیوسته (به ترتیب p با ر پیوسته ـ مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه دنباله (f_n) (به ترتیب $(D^p f_n)$) روی R به‌طور یکنواخت به f (به ترتیب $D^p f$) همگرا خواهد بود.

(e) وقتی فقط فرض شود که f روی $[a, b]$ رگله است، $f_n(t_0)$ $(t_0 \in R)$ به چه حدی میل خواهد کرد؟ (ابتدا حالتی که f یک تابع پله‌ای است، مورد بررسی قرار دهید، سپس از (۷ .۶ .۱) استفاده کنید.)

---

1. Regularization = Регуляризация

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب به شرط محدب بودن f روی فاصله $[a, b]$ اشاره‌ای نشده است. مترجم.

(f) نشان دهید که، برای هر تابع رگله f روی $[a, b]$ ،

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\, dt = 0 .$$

۳. فرض کنیم f یک تابع حقیقی n بار مشتق‌پذیر روی $]-1, 1[$ باشد، به‌طوری که روی این فاصله $|f(t)| \le 1$.

(a) فرض کنیم $m_k(\mathrm{J})$ کوچک‌ترین مقدار $|f^{(k)}(t)|$ روی فاصله‌ای مانند J باشد که در $]-1, 1[$ واقع شده است. نشان دهید که ، اگر J به سه فاصله متوالی J_1 ، J_2 و J_3 تجزیه شود، و اگر J_2 دارای طول μ باشد ، آنگاه برای $k \le n$ ،

$$m_k(\mathrm{J}) \le \frac{1}{\mu}(m_{k-1}(\mathrm{J}_1) + m_{k-1}(\mathrm{J}_3))$$

(از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید). از این نامساوی نتیجه بگیرید که ، اگر J دارای طول λ باشد، آنگاه :

$$m_k(\mathrm{J}) \le \frac{2^{k(k+1)/2} k^k}{\lambda^k}$$

(از استقراء روی k استفاده کنید).

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، عددی مانند α_n وابسته به تنها n موجود است، به‌طوری که، اگر $|f'(0)| \ge \alpha_n$ ، آنگاه معادله $f^{(n)}(t) = 0$ حداقل $n-1$ ریشه متمایز در $]-1, 1[$ دارد. (با استقراء روی k ، نشان دهید که ، دنباله اکیداً صعودی $x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,k}$ از نقاط $]-1, 1[$ موجود است ، به‌طوری که برای $1 \le i \le k-1$ ،

$$f^{(k)}(x_{k,i}) f^{(k)}(x_{k,i+1}) < 0$$

از قضیه رُل استفاده کنید) .

۴. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ ، A یک زیر مجموعه باز E ، و f یک نگاشت n بار مشتق‌پذیر از A به F باشد. فرض کنیم $x_0 \in \mathrm{A}$ و $h_i \in \mathrm{E}$ $(1 \le i \le n)$ چنان باشند که برای $0 \le \xi_i \le 1$ ، $1 \le i \le n$ ، داشته باشیم $x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i \in \mathrm{A}$. با استقراء روی k $(1 \le k \le n)$ تعریف می‌کنیم :

$$\Delta^1 f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0)$$
$$\Delta^k f(x_0; h_1, \cdots, h_k) = \Delta^{k-1} g_k(x_0; h_1, \cdots, h_{k-1})$$

که در آن

$$g_k(x) = f(x + h_k) - f(x)$$

(a) نشان دهید که :

$$\|\Delta^n f(x_0; h_1, \cdots h_n)\| \le \|h_1\| . \|h_2\| \cdots \|h_n\| \sup_{z \in \mathrm{P}} \|\mathrm{D}^n f(z)\|$$

که در آن P مجموعه همه نقاط به‌صورت $x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i$ ، $0 \le \xi_i \le 1$ است. (از استقراء روی n استفاده کنید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که :

$$\begin{aligned} &\|\Delta^n f(x_0; h_1, \cdots h_n) - \mathrm{D}^n f(x_0).(h_1, \cdots h_n)\| \\ &\le \|h_1\| . \|h_2\| \cdots \|h_n\| \sup_{z \in \mathrm{P}} \|\mathrm{D}^n f(z) - \mathrm{D}^n f(x_0)\| \end{aligned}$$

۵. فرض کنیم f یک نگاشت با مشتق پیوسته از یک زیر مجموعه باز A از فضای $\mathbf{R}^2$ به فضای باناخ E باشد، و فرض کنیم در یک همسایگی V از $(a, b) \in \mathrm{A}$ مشتق $\mathrm{D}_2(\mathrm{D}_1 f)$ موجود و پیوسته باشد.

(a) اگر $(x, y) \in \mathrm{V}$، نشان دهید که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ئی موجود است، به‌طوری که از روابط $|h| \le \delta$ ، $|k| \le \delta$ ، نتیجه می‌شود[1] :

---

۱. در زیرنویس چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه به فرمول زیر که در قسمت (a) خواننده به آن نیاز دارد نیز اشاره شده است. مترجم.

$$\Delta^2 f(x, y, h, k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

$$\| \Delta^2 f(x, y; h, k) - D_2 D_1 f(x, y) hk \| \leq \varepsilon |hk|$$

(قضیه مقدار میانگین را برای تابع :

$$g(t) = f(x+t, y+k) - f(x+t, y) - D_2 D_1 f(x, y) tk$$

به کار برده، و از (۲. ۶. ۸) استفاده نمائید.)

(b) ثابت کنید که $D_1(D_2 f)$ روی V موجود است و برابر $D_2(D_1 f)$ می‌باشد. (از (a) استفاده کنید.)

(c) مثالی از یک تابع f ارائه نمائید، که فرض‌های قبلی درباره آن برقرار باشد، اما $D_1(D_1 f)$ و $D_2(D_2 f)$ در هیچ‌جا موجود نباشند (مسئله ۱ بخش ۴. ۸ را ببینید).

۶. فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد،که روی $\mathbf{R}^2$ با شرایط زیر تعریف شده باشد :
$f(0, 0) = 0$ و برای $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. نشان دهید که، همه چهار مشتق $D_1(D_1 f)$ ، $D_1(D_2 f)$ ، $D_2(D_1 f)$ و $D_2(D_2 f)$ در همه نقاط $\mathbf{R}^2$ موجود هستند ، اما ، در نقطه $(0, 0)$:
$D_1(D_2 f) \neq D_2(D_1 f)$.

۷. نمادهای مورد استفاده در این مسئله همان نمادهای مسئله ۲ از بخش ۹ . ۸ می‌باشند. فرض کنیم $g_n(t) = \dfrac{t}{1+n|t|}$
و برای هر $t \in \mathbf{R}$ ، $f_n(t) = \int_0^t g_n(u)\,du$. نشان دهید که ، تابع $f: (\xi_n) \to (f_n(\xi_n))$ روی E دارای مشتق پیوسته است، و برای هر نقطه $y = (\eta_n) \in E$ ، نگاشت $x \to f'(x).y$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است، اما ، f' در این نقطه مشتق‌پذیر نیست (مقایسه کنید با (۱. ۱۲. ۸)) .

۸. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ ، A یک زیر مجموعه باز از E ، و $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ فضای برداری نگاشت‌های p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به F باشد ، به‌طوری که f و همه مشتقات آن $D^k f$ $(1 \leq k \leq p)$ روی A کراندار باشند. برای هر $f \in \mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ ، قرار می‌دهیم :

$$\| f \|_p = \sup_{x \in A} (\| f(x) \| + \| Df(x) \| + \cdots + \| D^p f(x) \|) .$$

نشان دهید که $\| f \|_p$ یک نرم روی $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ است، و با این نرم فضای $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود (از (۳. ۶. ۸) استفاده کنید). نگاشت $f \to Df$ یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ به $\mathscr{D}_{\mathscr{L}(E, F)}^{(p-1)}(A)$ (به ترتیب به $\mathscr{C}_{\mathscr{L}(E, F)}^{\infty}(A)$ برای $p = 1$) است.

۹. فرض کنیم E ، F و G سه فضای باناخ باشند ، و L ، M و N به ترتیب فضاهای باناخ $\mathscr{D}_F^{(p)}(E)$ ، $\mathscr{D}_G^{(p)}(F)$ ، $\mathscr{D}_G^{(p)}(E)$ باشند ، برای $f \in L$ ، $g \in M$ ، قرار می‌دهیم $\Phi(f, g) = g \circ f \in N$.

(a) فرض کنیم $(f_0, g_0) \in L \times M$. نشان دهید که، اگر $D^p g_0$ روی F به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه نگاشت Φ در (f_0, g_0) پیوسته خواهد بود (از استقراء روی p استفاده کنید). اگر E ، F ، G متناهی‌البعد باشند، آنگاه Φ روی $L \times M$ پیوسته خواهد بود. (از (۵. ۱۶. ۳) استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم برای $1 \leq k \leq p$ ، $N_k = \mathscr{D}_G^{(p-k)}(E)$ با $\mathscr{D}_G^{(0)}(E) = \mathscr{C}_G^{(\infty)}(E)$. نشان دهید که، به‌عنوان نگاشتی از $L \times M$ به N_1، Φ در هر نقطه‌ای پیوسته است. برای اینکه Φ (به‌عنوان نگاشتی از $L \times M$ به N_1) در (f_0, g_0) مشتق‌پذیر باشد، کافی است که $D^p g_0$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، و $D\Phi$ مشتق آن نگاشت خطی زیر است :

$$(u, v) \to ((Dg_0) \circ f).u + v \circ f_0$$

(c) فرض کنیم U_f نگاشت خطی $g \to g \circ f$ از M به N باشد. نشان دهید که ، U_f پیوسته است. برای هر $k \leq p$ ، می‌توان U_f را به‌عنوان عنصری از $\mathscr{L}(M; N_k)$ نیز مورد بررسی قرار داد. نشان دهید که، نگاشت $f \to U_f$ از L به $\mathscr{L}(M; N_1)$ پیوسته است ، و نگاشت $f \to U_f$ از L به $\mathscr{L}(M; N_2)$ مشتق‌پذیر است ، ضمناً ، عنصر $DU_f \in \mathscr{L}(L; \mathscr{L}(M, N_2))$ نگاشت دو خطی $(u, v) \to ((Dv) \circ f).u$ است.

(d) از (b) و (c) نتیجه بگیرید که به‌عنوان نگاشتی از $L \times M$ به N_k نگاشت Φ، $(k-1)$ بار مشتق‌پذیر است.

۱۰. فرض کنیم f تابع حقیقی دو بار مشتق‌پذیری باشد که روی زیر مجموعه باز A از فضای باناخ E تعریف شده است.

(a) فرض کنیم که ، یک نقطه $x_0 \in E$ و ثابتی مانند $c > 0$ موجود باشند ، به طوری که $Df(x_0) = 0$ و برای هر $t \in E$ ، $D^2 f(x_0).(t, t) \leq -c\|t\|^2$. نشان دهید که f در نقطه x_0 به ماکزیمم نسبی اکید خود می‌رسد (بخش ۹. ۳ ، مسئله ۶ را ببینید). اگر E دارای بعد متناهی باشد ، آنگاه شرط قبلی را می‌توان با شرط $D^2 f(x_0).(t, t) < 0$ برای هر $t \neq 0$ در E عوض نمود. (از فشردگی کره $\|t\| = 1$ در E استفاده کنید.)

[1](b) فرض کنیم A یک گوی باز ، f روی A از طرف بالا کراندار ، و عددی حقیقی مانند a موجود باشد به‌طوری که F مجموعه نقاط $x \in A$ که $f(x) \geq a$ است ، یک مجموعه بسته غیرتهی در E (و بنابراین ، یک زیر فضای تام) باشد ، و بالاخره ، برای هر $x \in A$ و $t \in E$ ، $D^2 f(x).(t, t) \leq -c\|t\|^2$. نشان دهید که ، تحت این شرایط f ماکزیمم خود را روی A در نقطه‌ای یگانه (منحصر به‌فرد) کسب خواهد کرد. (فرض کنیم $m = \sup f(x)$ ، که عددی متناهی است. برای هر $\varepsilon > 0$ که $a \leq m - \varepsilon < m$ ، فرض کنیم $F_\varepsilon \subset F$ مجموعه نقاط $x \in A$ باشد که $f(x) \geq m - \varepsilon$. ثابت کنید که، قطر F_ε همراه با ε به سمت 0 میل می‌کند. برای این‌کار ، ابتدا لم زیر را ثابت کنید : اگر h یک تابع حقیقی دو بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر روی $[0, 1]$ باشد و روی $[0, 1]$ ، $h''(t) \leq b$ در این‌صورت $h(0) - 2h(\frac{1}{2}) + h(1) \leq b/4$. لم را برای تابع $t \to f(x + t\xi)$ برای x و $x + \xi$ در A مورد استفاده قرار دهید).

۱۱. (a) فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد ، که روی فاصله باز $I \subset \mathbf{R}$ تعریف شده و روی I مشتق‌پذیر است ، و فرض کنیم $[a, b] \subset I$ و f'' روی فاصله باز $]a, b[$ موجود باشد ، اما ، لزوماً فرض نشده است که f' در نقاط a و b پیوسته است (مقایسه کنید ، با بخش ۷ . ۸ مسئله ۶). نشان دهید که ، یک $c \in]a, b[$ موجود است به‌طوری که $f'(b) - f'(a) = (b - a) f''(c)$. (از مسئله ۳ بخش ۵ . ۸ استفاده کنید.)

(b) خاصیت متناظر با خاصیت فوق برای توابعی که روی I تعریف شده‌اند و مقادیرشان در یک فضای هیلبرت می‌گیرند، چیست؟ (بخش ۵ . ۸ ، مسئله ۶ را ببینید.)

۱۳. عملگرهای دیفرانسیلی[2]

فرض کنیم A یک مجموعه باز در $\mathbf{R}^n$ (به ترتیب $\mathbf{C}^n$) ، و F یک فضای باناخ حقیقی (به ترتیب مختلط) باشد. مجموعه همه نگاشت‌های p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به F را به $\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ نشان می‌دهیم. طبق (۱۰. ۱۲. ۸) ، واضح است که ، $\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ یک فضای برداری حقیقی (به ترتیب، مختلط) است ، و کمی کلی‌تر ، (۱۰. ۱۲. ۸) نشان می‌دهد که $\mathscr{C}_\mathbf{R}^{(p)}(A)$ (به ترتیب $\mathscr{C}_\mathbf{C}^{(p)}(A)$) یک **حلقه** است ، و $\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ یک **مدول** روی این حلقه . برای هر سیستم $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ از اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی 0 ، با $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq p$ ، قرار می‌دهیم $M_\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$، و D^α یا D_{M_α} را به‌عنوان نگاشت $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$ از فضای $\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ به $\mathscr{C}_F^{(p-|\alpha|)}(A)$ تعریف

---

۱. قسمت (b) مسئله ۱۰ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

2 . Differential operators = Дифференцалные операторы

می‌کنیم. یک **عملگر دیفرانسیلی خطی**[1] ترکیبی خطی مانند $D = \sum_{i=1}^{n} a_\alpha D^\alpha$ است ، که در آن $|\alpha| \leq p$ و a_αها توابع پیوسته اسکالری هستند که روی A تعریف شده‌اند. اگر برای $|\alpha| > k$ ، $a_\alpha = 0$ و هر یک از a_αها $(p-k)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه D به‌طور خطی $\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ را به $\mathscr{C}_F^{(p-k)}(A)$ می‌نگارد.

(۸ .۱۳ .۱) اگر عملگر $\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ متحد 0 باشد ، آنگاه هر یک از توابع a_α روی A متحد 0 خواهد بود.

برای $f(x) = c \,.\, \exp(\lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_n \xi_n)$ ، که در آن $c \neq 0$ عنصری از F ، λ_iها ثابت‌های دلخواه هستند ، می‌نویسیم $Df = 0$. طبق بخش (۸ .۸) و (۸ .۴ .۱) ، روی A به تساوی :

$$c \,.\, \left(\sum_\alpha a_\alpha(x) M_\alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right) \exp(\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n) = 0$$

دست خواهیم یافت ، که برای هر عنصر خاص $x \in A$ ، هم ارز رابطه :

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) M_\alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$$

می‌باشد. چون λ_iها دلخواه هستند، از رابطه فوق نتیجه می‌شود ، برای هر α ، در هر نقطه $x \in A$ ، $a_\alpha(x) = 0$.

به این ترتیب ، ضرائب a_α از یک عملگر دیفرانسیل خطی به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. بالاترین مقدار $|\alpha|$ که $a_\alpha \neq 0$ ، **مرتبه** D نامیده می‌شود.

به هر **چند جمله‌ای** $P = \sum b_\alpha M_\alpha$ از درجه کوچک‌تر یا مساوی p با ضرائب ثابت ، طبق مطالب فوق ، می‌توان یک عملگر خطی $D_P = \sum_\alpha b_\alpha D^\alpha$ از مرتبه کوچک‌تر یا مساوی p مربوط نمود. واضح است که، $D_{P_1+P_2} = D_{P_1} + D_{P_2}$ ، و از (۸ .۱۲ .۳) نتیجه می‌شود که ، اگر $P_1 P_2$ دارای درجه کلی کوچک‌تر یا مساوی p باشد ، آنگاه $D_{P_1 P_2} = D_{P_1} D_{P_2}$. به‌ویژه از (۸ .۱۲ .۷) نتیجه می‌شود که ، برای ثابت‌های ξ_{ij} ، عملگر $f \to Df$ ، که در آن :

$$Df = D^p f(x) \,.\, (t_1, \ldots, t_p)$$

را می‌توان به‌صورت :

$$\prod_{i=1}^{p} (\xi_{i1} D_1 + \cdots + \xi_{in} D_n)$$

نوشت.

---

1 . Linear differential operator = Линейный дифференцальный оператор

(۲. ۱۳. ۸) (فرمول لایبنیتس[1]) فرض کنیم $P(X_1, \ldots, X_n)$ یک چند جمله‌ای از درجه کوچک‌تر یا مساوی p باشد ، و فرض کنیم :

$$P(X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n) = \sum_k \gamma_k M'_k(X_1, \ldots, X_n) M''_k(Y_1, \ldots, Y_n)$$

که در آن M'_kها و M''_kها تک‌جمله‌ای می‌باشند. اگر $(x, y) \to [x . y]$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به G باشد ، آنگاه، برای هر نگاشت $f \in \mathscr{C}_E^{(p)}(A)$ و هر نگاشت $g \in \mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ ، نگاشت $[f . g]$ به $\mathscr{C}_G^{(p)}(A)$ متعلق است ، و داریم :

$$D_P[f . g] = \sum_k \gamma_k [D_{M'_k} f . D_{M''_k} g]$$

کافی است که فرمول فوق را وقتی P برابر یک تک جمله‌ای M است ثابت کنیم. از استقراء روی درجه کلی P استفاده می‌کنیم. می‌توان فرض کرد $P = X_i M$. بنابراین ، $D_P = D_i D_M$. طبق فرض ، داریم :

$$D_M[f . g] = \sum_k \gamma_k [D_{M'_k} f . D_{M''_k} g]$$

بنابراین، طبق (۴. ۱. ۸) ،

$$D_P[f . g] = \sum_k \gamma_k ([D_i D_{M'_k} f . D_{M''_k} g] + [D_{M'_k} f D_i D_{M''_k} g])$$

سمت راست را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\sum_h \gamma'_h [D_{N'_h} f . D_{N''_h} g]$$

جمع‌بندی روی همه زوج‌هایی از تک جمله‌ای‌های:

$$(N'_h(X_1, \cdots, X_n) \ , \ N''_h(Y_1, \ldots, Y_n))$$

گسترش می‌یابد، که یا برای یک اندیس k ، $N'_h = X_i M'_k$ و $N''_h = M''_k$ ، یا برای یک اندیس k ، $N'_h = M'_k$ و $N''_h = Y_i M''_k$. دقیقاً یک چنین اندیس k ئی برای هر اندیس مناسب h وجود دارد ، و داریم $\gamma'_h = \gamma_k$. بعد از این مطلب، نتیجه واضح خواهد بود.

مسائل

۱. فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز از R^n ، E ، F و G سه فضای باناخ، و $(x, y) \to [x, y]$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $E \times F$ به G باشد. نشان دهید که، نگاشت $(f, g) \to [f, g]$ از $\mathscr{D}_E^{(p)}(A) \times \mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ به $\mathscr{D}_G^{(p)}(A)$ (بخش ۱۲. ۸ ، مسئله ۸ را ببینید) پیوسته است.

۲. فرض کنیم I فاصله‌ای فشرده از R و J یک همسایگی باز از I باشد. نشان دهید که ، یک نگاشت بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر f از R به $[0, 1]$ موجود است، به‌طوری که ، روی I برابر 1 و روی مکمل J برابر 0 است. (تابع $g * \rho_n$ (بخش ۱۲. ۸ ، مسئله ۲) را وقتی g برابر 1 روی فاصله‌ای فشرده مانند K است به‌طوری که $I \subset K \subset J$ و برابر 0 روی $R - K$ است، مورد بررسی قرار دهید). اگر u نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از R به فضای باناخ E باشد، نشان دهید که، نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر مانند v از R به فضای باناخ E موجود است ، به‌طوری‌که ، روی I ، $v(t) = u(t)$ و روی $R - J$ ، $v(t) = 0$.

---

1 . Leibniz's formula = формула Лейбница

۱۴. فرمول تیلور[1]

(۱. ۱۴. ۸) فرض کنیم I یک فاصله باز در R ، f و g دو تابع به ترتیب متعلق به $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}^{(p)}(\mathrm{I})$ و $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{(p)}(\mathrm{I})$، و $(x, y) \to [x, y]$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ به G باشد. در این‌صورت:

$$[f \,.\, \mathrm{D}^{p} g] - (-1)^{p} [\mathrm{D}^{p} f \,.\, g]$$
$$= \mathrm{D}([f \,.\, \mathrm{D}^{p-1} g] - [\mathrm{D} f \,.\, \mathrm{D}^{p-2} g] + \cdots + (-1)^{p-1} [\mathrm{D}^{p-1} f \,.\, g])$$

مطلب فوق را می‌توان مستقیماً با استفاده از (۴. ۱. ۸) ثابت نمود.

(۲. ۱۴. ۸) فرض کنیم I فاصله‌ای باز در R ، و f تابعی متعلق به $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}^{(p)}(\mathrm{I})$ باشد. در این‌صورت، برای هر زوج α ، ξ واقع در I ، داریم :

$$f(\xi) = f(\alpha) + \frac{\xi - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(\xi - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \cdots + \frac{(\xi - \alpha)^n}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\alpha)$$
$$+ \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(\xi - \zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\zeta)\, d\zeta$$

با استفاده از (۱. ۱۴. ۸) برای نگاشت دو خطی $(\lambda , x) \to \lambda x$ و تابع :

$$g(\zeta) = (\xi - \zeta)^{p-1} / (p-1)!$$

و با انتگرالگیری از طرفین تساوی در فاصله α تا ξ نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۳. ۱۴. ۸) فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ ، A یک زیر مجموعه باز از E ، و f نگاشتی p بار پیوسته - مشتق‌پذیر[2] از A به F باشد. در این‌صورت ، اگر پاره‌خطی که x را به $x + t$ وصل می‌کند ، در A قرار گیرد، آنگاه خواهیم داشت :

$$f(x + t) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \,.\, t + \frac{1}{2!} f''(x) \,.\, t^{(2)} + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) \,.\, t^{(p-1)}$$
$$+ \left(\int_0^1 \frac{(1 - \zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x + \zeta t)\, d\zeta \right) . \, t^{(p)}$$

که در آن $t^{(k)}$ به جای $(t , t , \cdots , t)$ (k بار) قرار داده شده است. در حالت خاص، برای هر $\varepsilon > 0$ ، $r > 0$ یی موجود است ، به‌طوری که برای $\| t \| \le r$ ،

$$\| f(x+t) - f(x) - \frac{1}{1!} f'(x) \,.\, t - \frac{1}{2!} f''(x) \,.\, t^{(2)} - \cdots - \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \,.\, t^{(p)} \| \le \varepsilon \| t \|^{p} .$$

---

1 . Taylor's formula = формула Тейлора

۲. چنانکه قبلاً نیز اشاره شده است، واژه پیوسته ـ مشتق‌پذیر برگردانی است از واژه انگلیسی Continuously differntiable که در برخی از کتاب‌های ریاضی به صورت‌های «مشتق‌پذیر پیوسته» و «به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر» و ... نیز از آن استفاده شده است. مترجم.

برای به‌دست آوردن اولین فرمول، گزاره (۲. ۱۴. ۸) را در رابطه با تابع $g(\xi) = f(x + \xi t)$ در فاصله $[0, 1]$ مورد استفاده قرار می‌دهیم. طبق (۱۰. ۱۲. ۸)، g، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، و با استفاده از استقراء روی k و به‌کارگیری (۱. ۴. ۸) و (۳. ۱. ۸) فوراً دیده می‌شود که $g^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(x + \xi t) . t^{(k)}$. برای به‌دست آوردن دومین فرمول، مشاهده می‌شود که، با توجه به پیوستگی $f^{(p)}$، عدد r را می‌توان چنان انتخاب نمود که، برای $0 \le \zeta \le 1$ و $\| t \| \le r$،

$$\| f^{(p)}(x + \zeta t) - f^{(p)}(x) \| \le p\,!\,\varepsilon \ .$$

در این‌صورت، از قضیه مقدار میانگین (۷. ۷. ۸) نتیجه می‌شود:

$$\| \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x + \zeta t)\, d\zeta - \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \| \le \varepsilon$$

و حکم قضیه از (۱ . ۵ . ۵) نتیجه می‌شود.[۱]

مسائل

۱. چند جمله‌ای لژاندار مرتبه n ام به‌صورت:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} D^n((t^2 - 1)^n)$$

تعریف می‌شود.

(a) نشان دهید که با تقریبی در حد یک ضریب مثبت، P_n، n امین جمله از دنباله‌ای است که در فضای پیش هیلبرتی $\mathscr{C}_C(I)$، با $I = [-1, +1]$، از یکامتعامدسازی[۲] (اُرتونرمالیزاسیون) دنباله (t^n) به‌دست می‌آید. (بخش ۶ . ۶ را ببینید).
(با استفاده از (۱. ۱۴. ۸)، ثابت کنید که، حاصلضرب اسکالر $P_n(t)$ و t^m برای $m < n$ برابر 0 است).

(b) نشان دهید که $P_n(1) = 1$، $P_n(-1) = (-1)^n$. (از (۲. ۱۳. ۸) استفاده کنید.)

(c) نشان دهید که، بین سه چند جمله‌ای متوالی لژاندار رابطه برگشتی زیر برقرار است:

$$n P_n(t) - (2n-1) t P_{n-1}(t) + (n-1) P_{n-2}(t) = 0$$

(ملاحظه کنید که، اگر c_n چنان انتخاب شود که $P_n(t) - c_n t P_{n-1}(t)$ از درجه کوچک‌تر یا مساوی $n-1$ باشد، آنگاه این چندجمله‌ای بر t^k، برای $k \le n-3$ عمود خواهد بود، و بنابراین، باید ترکیبی خطی از P_{n-2} و P_{n-1} باشد، از قسمت (b) نیز استفاده کنید.)

(d) نشان دهید که، همه ریشه‌های P_n حقیقی و ساده هستند و در فاصله $]-1, 1[$ واقع می‌باشند، (اگر P_n فقط در $k \le n-1$ نقطه از فاصله $]-1, 1[$ تغییر علامت دهد، آنگاه یک چند جمله‌ای مانند $g(t) = (t - t_1) \cdots (t - t_k)$ موجود خواهد بود، به‌طوری که برای $-1 \le t \le 1$، $P_n(t) g(t) \ge 0$، و نشان دهید که، مطلب فوق با این حقیقت که $P_n(t)$ بر t^h برای $h < n$ عمود است، در تناقض است.)

(e) نشان دهید که، P_n در معادله دیفرانسیل:

$$(1 - t^2) P''_n(t) - 2t P'_n(t) + n(n+1) P_n(t) = 0$$

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای (۱ . ۵ . ۵) نوشته شده است (۷ . ۵ . ۵)، اما، گزاره‌ای با شماره (۷ . ۵ .۵) در بخش ۵ از فصل ۵ کتاب وجود ندارد، و در چاپ اول متن روسی کتاب، در نتیجه‌گیری نهایی، شماره گزاره‌ای که مورد استفاده قرار گرفته است، یعنـی، گـزاره (۱ . ۵ . ۵)، به شکل درست آن نوشته شده است. مترجم.

2 . Orthonormalization = Ортонормализация

صدق می‌کند. (نشان دهید که $D((1-t^2)P'_n(t))$ برای $k<n$ بر t^k عمود است.)

۲. [۱] (a) فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد که روی فاصله $I \subset \mathbf{R}$ به طول a ، k بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد ، و فرض کنیم روی I ، $|f^{(k)}(t)| \geq c > 0$. با استقراء روی p ، نشان دهید که ، برای $0 < p \leq k$ ، فاصله‌ای مانند $I_p \subset I$ به طول $a/4^n$ موجود است ، به‌طوری که روی I_p ، نامساوی $|f^{(k-p)}(t)| \geq ca^p/4^p$ برقرار است.

(b) فرض کنیم f یک تابع حقیقی ، k بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که روی فاصله‌ای مانند $I \subset \mathbf{R}$ به طول a تعریف شده باشد، و برای $0 \leq p \leq k$ ، فرض کنیم $M_p = \sup_{t \in I} |f^{(p)}(t)|$. نشان دهید که :

$$M_{k-1} \leq \frac{8^{k-1}}{a^{k-1}} M_0 + \frac{a}{2} M_k$$

(از (a) استفاده کنید) .

(c) با همان مفروضاتی که در (b) بیان شد، و افزون بر آنها ، فرض کنیم $k=2$ و $I=[-a/2, a/2]$. نشان دهید که، برای هر $t \in I$ ،

$$|f'(t)| \leq \frac{2}{a} M_0 + \frac{4t^2+a^2}{4a} M_2$$

(از فرمول تیلور برای بیان $f(a/2)-f(t)$ و $f(-a/2)-f(t)$ استفاده کنید). از نامساوی فوق نتیجه بگیرید که، اگر $a \geq 2(M_0/M_2)^{1/2}$ ، آنگاه $M_1 \leq 2(M_0 M_2)^{1/2}$. نشان دهید که، در این نامساوی به‌جای 2 نمی‌توان عددی کوچک‌تر جایگزین نمود. (اگر فقط فرض شود که f' دارای مشتق راست f''_d است ، دو طرف این نامساوی می‌توانند با هم برابر شوند هرگاه f' به‌طور قطعه‌ای خطی باشد ، سپس ، از مسئله ۲ ، قسمت (d) ، بخش ۸.۱۲ ، استفاده کنید.)

(d) فرض کنیم f یک تابع حقیقی دوبار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که روی $\mathbf{R}$ تعریف شده است، و $M_0 = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ و $M_2 = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f''(t)|$ متناهی باشند. نشان دهید که، در این‌صورت، $M_1 = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f'(t)|$ نیز متناهی خواهد بود و $M_1 \leq (2M_0M_2)^{1/2}$ (از (c) استفاده کنید). در این نامساوی نمی‌توان به جای $\sqrt{2}$ عددی کوچک‌تر جایگزین نمود. (از روشی مشابه قسمت (c) استفاده کنید).

(e) نشان دهید که، اگر f یک تابع حقیقی k بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد که روی $\mathbf{R}$ تعریف شده است، و اگر $M_0 = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ و $M_k = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f^{(k)}(t)|$ متناهی باشند، آنگاه برای $1 \leq p \leq k-1$ ، اعداد $M_p = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f^{(p)}(t)|$ همگی متناهی خواهند بود، و داریم :

$$M_p \leq 2^{p(k-p)} M_0^{1-(p/k)} M_k^{p/k}$$

(نخست با استفاده از از قسمت (b) نشان دهید که M_{k-1} متناهی است، سپس، از استقراء روی $k \geq 2$ و از قسمت (d) استفاده کنید.)

۳. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ و A یک گوی باز در E (یا همه فضای E) باشد، نشان دهید که، در فضای $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ نرم :

$$\sup_{x \in A} (\|f(x)\| + \|D^p f(x)\|)$$

هم‌ارز (بخش ۶ . ۵ را ببینید) نرم $\|f\|_p$ است که در تمرین ۸ بخش ۸.۱۲ تعریف شده است. (از نتیجه قسمت (c) مسئله ۲ استفاده کنید.)

---

۲. به‌علت تفاوت اندکی که بین صورت برخی از مسائل (از جمله همین مسأله ۲) در برگردان چاپ اول کتاب ژان دیودونه به زبان روسی و چاپ دوم آن به زبان انگلیسی وجود داشت ، همچنین ، به دلیل اضافه شدن برخی مطالب و مسائل و اصلاحاتی که در چاپ دوم کتاب نسبت به چاپ اول آن پدید آمده بود، مترجم ترجیح داد که محور اصلی کار خود را در ترجمهٔ این گونه مسائل چاپ دوم کتاب ژان دیودونه به زبان انگلیسی قرار دهد.

۴ . [۱] فرض کنیم E یک فضای باناخ، و (c_n) یک دنباله دلخواه از عناصر E باشد.

(a) فرض کنیم f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از R به $[0,1]$ باشد ، که روی $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ برابر 1 و روی مکمل $[-1,1]$ برابر 0 است (بخش ۱۳. ۸ ، مسئله ۲ را ببینید). سری :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x/t_n)\frac{x^n}{n!}c_n$$

را مورد بررسی قرار داده، نشان دهید که، برای یک انتخاب مناسب از دنباله اعداد $t_n > 0$ ، سری فوق برای هر $x \in \mathrm{R}$ همگرا است ، و برای هر عدد صحیح $m \geq 1$ ، سری از m امین مشتق‌های

$$\mathrm{D}^m(f(x/t_n)\frac{x^n}{n!})c_n$$

روی R به‌طور یکنواخت همگرا است (می‌توان $t_n = 1/2$ اگر $\|c_n\| \leq 1$ ، و $t_n = 1/2\|c_n\|$ اگر $\|c_n\| > 1$ ، گرفت ، و از فرمول لایپنیتس برای کران بالای جملات سری استفاده نمود). نتیجه بگیرید که ، u روی R بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، و برای هر $m \geq 0$ ، داریم $\mathrm{D}^m u(0) = c_m$ (« قضیه ا. بورل»).

(b) با روشی مشابه، ثابت کنید که، اگر (c_α) خانواده‌ای دلخواه از عناصر E باشد. که در آن $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ همه سیستم‌های متشکل از p عدد صحیح $\alpha_i \geq 0$ را طی می‌کند ، یک نگاشت بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از R^p به E موجود است، به‌طوری که برای هر α ، $\mathrm{D}^\alpha f(0) = c_\alpha$.

(c) از (a) نتیجه بگیرید که ، اگر g نگاشتی بی‌نهایت باز مشتق‌پذیر از فاصله بسته $\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$ به E ، و J یک فاصله باز شامل I باشد ، آنگاه یک نگاشت بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر f از R به E موجود است ، به‌طوری که روی I بر g منطبق است ، و روی $\mathrm{R} - \mathrm{J}$ برابر 0 است.

۵ . فرض کنیم f نگاشتی از فاصله $\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$ به فضای باناخ E باشد ، و فرض کنیم f در نقطه‌ای مانند $\alpha \in \mathrm{I}$ ، n بار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که :

$$\lim_{\xi\to\alpha,\,\xi\neq\alpha,\,\xi\in I}\left(f(\xi)-f(\alpha)-f'(\alpha)\frac{\xi-\alpha}{1!}-\cdots-f^{(n)}(\alpha)\frac{(\xi-\alpha)^n}{n!}\right)/(\xi-\alpha)^n=0$$

(از استقراء روی n و (۱. ۵. ۸) با $\varphi(\xi) = (\xi - \alpha)^{n-1}$ استفاده کنید).

۶ . فرض کنیم $\mathrm{I} \subset \mathrm{R}$ یک فاصله باز شامل 0 و f نگاشتی $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر از I به فضای باناخ E باشد. می‌نویسیم :

$$f(t) = f(0) + f'(0)\frac{t}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(t)t^n$$

که در آن f_n روی $\mathrm{I} - \{0\}$ تعریف شده است.

(a) نشان دهید که ، اگر f ، $n+p$ بار در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه f_n را می‌توان به‌طور پیوسته روی I گسترش داد و به تابعی تبدیل نمود که $n+p-1$ بار در همه نقاط $t \neq 0$ در یک همسایگی V از 0 واقع در I پیوسته ـ مشتق‌پذیر، و p بار در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر است ، علاوه بر این ، برای $0 \leq k \leq p$ ، $f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{(n+k)!}f^{(n+k)}(0)$ و برای $1 \leq k \leq n-1$ ، $\lim_{t\to 0,\,t\neq 0,\,t\in \mathrm{V}} f_n^{(p+k)}(t)t^k = 0$. (مشتقات f_n را به کمک بسط‌های تیلور (مسئله ۵) مشتق‌های f بیان نموده و از مسئله ۲ بخش ۶ . ۸ استفاده کنید.)

(b) به‌عکس ، فرض کنیم g نگاشتی $n+p-1$ بار مشتق‌پذیر از $\mathrm{I} - \{0\}$ به E باشد ، به‌طوری که برای $0 \leq k \leq n-1$ ، $\lim_{t\to 0,\,t\neq 0,\,t\in \mathrm{I}} g^{(p+k)}(t)t^k$ موجود باشد. نشان دهید که ، g را می‌توان به یک نگاشت $p-1$ بار مشتق‌پذیر از I به E گسترش داد و نیز نگاشت $g(t)t^n$ روی I ، $n+p-1$ بار مشتق‌پذیر است ، اگر علاوه بر این $g^{(n)}(0)$ موجود باشد ،

---

۱. صورت مسأله ۴ در چاپ اول متن روسی کتاب کمی متفاوت از صورت آن در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب است. مترجم.

آنگاه $g(t)t^n$ ، $n+p$ بار در 0 مشتق‌پذیر خواهد بود.

(c) فرض کنیم $\mathrm{I} =]-1,1[$ ، و فرض کنیم f روی I زوج باشد ، یعنی $f(t) = f(-t)$. با استفاده از (a) و (b) ، نشان دهید که ، اگر f ، $(2n)$ بار روی I مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نگاشتی n بار مشتق‌پذیر مانند h از I به E موجود است به‌طوری که $f(t) = h(t^2)$.

۷ . (a) فرض کنیم f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از $\mathbf{R}^n$ به فضای باناخ E باشد. نشان دهید که :

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(0,\dots,0) + x_1 f_1(x_1,\dots,x_n) + x_2 f_2(x_2,\dots,x_n) + \cdots + x_n f_n(x_n)$$

که در آن f_k نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر روی $\mathbf{R}^{n-k+1}$ $(1 \le k \le n)$ است.

(بنویسید $f(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_n) - f(0,x_2,\cdots,x_n) + f(0,x_2,\cdots,x_n)$ و از (۲. ۱۴. ۸) برای اولین جمعوند، که به‌عنوان تابعی از x_1 مورد بررسی قرار می‌گیرد، استفاده نمائید، با یک مقدار مناسب p (وابسته به k) ، ثابت می‌شود که $(f(x_1,\dots,x_n) - f(0,x_2,\dots,x_n))/x_1$، در نقطه $(0,\dots,0)$، k بار مشتق‌پذیر است، در خاتمه ، از استقراء روی n استفاده کنید).

(b) از (a) نتیجه بگیرید که ، برای هر $p > 0$ ،

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le p} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} f_\alpha(x)$$

که در آن همه f_α ها بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر هستند و $f_0(x) = f(0,\cdots,0)$.

(c)[1] فرض کنیم f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}$ باشد، و فرض کنیم $f(0) = 0$ و برای $1 \le i \le n$ ، $\mathrm{D}_i f(0) = 0$ ، و فرم کوادراتیک[2] :

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n) \to \sum_{i,j} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(0)\xi_i\xi_j$$

غیرتبهگون[3] باشد. نشان دهید که ، با استفاده از یک ترانسفورماسیون خطی در $\mathbf{R}^n$ ، می‌توان فرض کرد، برای $i \ne j$ ، $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(0) = 0$ و برای $1 \le i \le n$ ، $a_i = D_i^2 f(0) \ne 0$. ثابت کنید که ، یک همسایگی U از 0 و n تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر g_i که روی U تعریف شده‌اند، وجود دارند، به‌طوری که روی U ،

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i g_i(x))^2$$

و برای $1 \le i \le n$، $g_i(0) = 1$. (دوباره از (a) استفاده نموده و با به‌کارگیری آن در رابطه با هر یک از توابع f_i که در (a) تعریف شده‌اند ، و سپس ، با استفاده از روش معمول تبدیل یک فرم کوادراتیک به فرمی که دارای ماتریس قطری است، نتیجه مطلوب به‌دست آورید.)

۸ . (a) فرض کنیم S یک فضای متریک ، A ، B دو زیر مجموعه‌غیر تهی از S ، M یک زیر فضای برداری از $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{S})$ فضای توابع حقیقی پیوسته روی S ، $\mathbf{N}$ یک زیر فضای برداری از $\mathbf{M}$ ، و $u \to \mathrm{L}(u)$ یک نگاشت خطی از M به $\mathbf{R}^{\mathrm{A}}$ فضای همه نگاشت‌های از A به $\mathbf{R}$ باشد ، و فرض کنیم که : (۱) تابعی مانند $u_0 \in \mathbf{N}$ موجود باشد ، به‌طوری که $\mathrm{L}(u_0)$ روی A برابر مقدار ثابت 1 باشد ، (۲) اگر $u \in \mathrm{N}$ و یک $t \in \mathrm{B}$ موجود باشد به‌طوری که $u(t) = 0$ ، آنگاه $x \in \mathrm{A}$ ئی موجود باشد ، به‌طوری که $(\mathrm{L}(u))(x) = 0$. فرض کنیم $v \in \mathrm{M}$ چنان باشد که $\mathrm{L}(v) = 0$. نشان دهید که ، برای هر تابع $u \in \mathrm{M}$ به‌طوری $u - v \in \mathbf{N}$ و برای هر $t \in \mathrm{B}$ یک $\theta \in \mathrm{A}$ (وابسته به t) موجود است به‌طوری که $u(t) = v(t) + u_0(t)(\mathrm{L}(u))(\theta)$. (ملاحظه کنید که $u_0(t) \ne 0$ ، و بنابراین ، یک ثابت c (وابسته به t) موجود است ، به‌طوری که $u(t) - v(t) - cu_0(t) = 0$.)

(b) فرض کنیم S فشرده ، A همبند و چگال در S ، و همه توابع $u \in \mathrm{N}$ روی $\mathrm{S-B}$ صفر باشند، و فرض کنیم $\mathrm{L}(u)$ برای هر $u \in \mathrm{M}$ روی A پیوسته باشد ، و اگر یک تابع $u \in \mathrm{N}$ چنان باشد که برای هر $t \in \mathrm{A}$ ، $(\mathrm{L}(u))(t) > 0$ ،

---

۱. قسمت (c) مسئله ۷ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

1. Quadratic form = Квадратичная форма

2. Nodegenerate = Невырожденный

در این صورت u ماکزیمم اکید روی B نداشته باشد. نشان دهید که ، در چنین حالتی شرط (۲) از قسمت (a) نیز برقرار خواهد بود.

۹. (a) فرض کنیم f یک تابع حقیقی n بار مشتق‌پذیر روی فاصله I ، $x_i < x_2 < \cdots < x_p$ نقاطی از I ، و n_i $(1 \le i \le p)$ اعداد صحیح اکیداً مثبتی باشند به‌طوری که $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ ، و فرض کنیم در هر یک از نقاط x_i برای $0 \le k \le n_i - 1$ ، $f^{(k)}(x_i) = 0$ باشد. نشان دهید که، نقطه‌ای مانند ξ در فاصله $]x_i , x_p[$ موجود است، به طوری که $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ (به‌طور مکرر از قضیه رُل استفاده کنید).

(b) فرض کنیم g یک تابع حقیقی n بار مشتق‌پذیر باشد که روی I تعریف شده است، و فرض کنیم P یک چندجمله‌ای از درجه $(n-1)$ باشد ، به‌طوری که برای $0 \le k \le n_i - 1$ ، $1 \le i \le p$ ، $g^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_i)$. نشان دهید که، برای هر $x \in$ I ، در داخل کوچک‌ترین فاصله شامل x و نقاط x_i $(1 \le i \le p)$ نقطه‌ای مانند ξ موجود است، به‌طوری که:

$$g(x) = \mathrm{P}(x) + \frac{(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_p)^{n_p}}{n!} g^{(n)}(\xi)$$

(از قسمت (a) مسئله ۸ استفاده کنید، یا اثباتی مستقیم ارائه نمائید؛ در هر دو حالت از (a) استفاده کنید.)

۱۰. فرض کنیم f یک تابع حقیقی فرد باشد ، که روی یک همسایگی متقارن از 0 مانند I تعریف شده و روی این فاصله 5 بار مشتق‌پذیر است. نشان دهید که ، برای هر $x \in$ I ،

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

که در آن ξ عددی متعلق به فاصله‌ای باز با نقاط انتهایی 0 و x است.

از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، اگر f یک تابع حقیقی باشد، که روی فاصله $[a , b]$ تعریف شده و 5 بار مشتق‌پذیر است، آنگاه :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$$

که در آن $a < \xi < b$ (فرمول سیمپسون[1]).

۱۱. فرض کنیم $\mathrm{I} = [a , b]$ یک فاصله فشرده ، و M_0 فضای برداری توابع حقیقی پیوسته‌ای مانند f باشد که روی I تعریف شده‌اند ، و برای هر $t \in]a, b[$ ، حد

$$(\mathrm{L}(f))(t) = \lim_{h \to 0 ,\, h \ne 0} (f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)) / h^2$$

در R موجود باشد. نشان دهید که ، همه توابع حقیقی که روی I دوبار مشتق‌پذیر هستند به M_0 متعلق می‌باشند.

(a) فرض کنیم M زیر فضائی برداری از M_0 باشد که از توابعی مانند f تشکیل شده است که روی $]a, b[$ ، $\mathrm{L}(f)$ پیوسته است. نشان دهید که ، هر تابع $f \in \mathrm{M}$ روی $]a , b[$ دوبار مشتق‌پذیر است و $\mathrm{L}(f) = f''$. (با انتخاب $\mathrm{S} = \mathrm{I}$ ، $\mathrm{A} = \mathrm{B} =]a , b[$ ، و برای N زیر فضای M که از توابعی مانند f تشکیل شده است که $f(a) = f(b) = 0$ ، از قسمت‌های (a) و (b) مسئله ۸ استفاده کنید.)

(b) نشان دهید که ، تابع : $f(t) = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t} , & t \ne 0 \text{ اگر } \\ 0 , & t = 0 \text{ اگر } \end{cases}$ به M_0 متعلق است ، اگرچه در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۲. چه خواصی از توابع با مقادیری در یک فضای هیلبرت ، متناظر با خواصی از توابع حقیقی است که در مسئله ۹ قسمت (b) ، مسئله ۱۰ و مسئله ۱۱، بیان شده است؟ (مقایسه کنید با بخش ۵ . ۸ ، مسئله ۶ .)

---

1. Simpson's formula = Формула Симпсона

۱۳. [۱] فرض کنیم f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از فاصله فشرده $I=[a,b]\subset \mathbf{R}$ (با $a\geq 0$) به یک فضای باناخ باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر دو عدد صحیح p ، q به‌طوری $0<p<q$ ، داریم :

$$\sum_{n=p}^{q-1} \| f^{(n)}(a)\| \frac{a^n}{n!} \leq \sum_{n=p}^{q-1} \| f^{(n)}(b)\| \frac{b^n}{n!} + \int_a^b \| f^{(q)}(x)\| \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} dx$$

(برای $p\leq n<q$ از فرمول تیلور در نقطه b برای بیان $f^{(n)}(a)$ استفاده کنید.)

(b) تحت شرایطی مشابه ، نشان دهید که :

$$\int_a^b \| f^{(p)}(x)\| \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} dx \leq \int_a^b \| f^{(q)}(x)\| \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} dx + \sum_{n=p}^{q-1} \| f^{(n)}(b)\| \frac{f^{(n)}}{n!}$$

(از فرمول تیلور برای $f^{(p)}$ و قسمت (c) مسأله ۴ از بخش ۱۱ . ۸ ، استفاده نمایید) .

(c) فرض کنیم f روی فاصله $[a,+\infty[$ با $a\geq 0$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد ، و برای هر عدد صحیح $n\geq 0$ عدد متناهی M_n موجود باشد ، به‌طوری که برای هر $x\geq a$ ، $\| f^{(n)}(x)\| x^n / n! \leq M_n$. نشان دهید که ، برای $b>a$ و $n<q$ ،

$$f^{(n)}(b) = - \int_b^{+\infty} f^{(q)}(x) \frac{(b-x)^{q-n-1}}{(q-n-1)!} dx$$

و برای $a\leq x\leq b$ ،

$$f^{(q)}(x) = \sum_{m=q}^{\infty} f^{(m)}(b) \frac{(x-b)^{m-q}}{(m-q)!}$$

که در آن سری و انتگرال همگرا هستند (از فرمول تیلور استفاده کنید). از مطالب فوق نتیجه بگیرید که :

$$\sum_{n=p}^{q-1} \| f^{(n)}(b)\| \frac{b^n}{n!} \leq \int_b^{+\infty} \| f^{(q)}(x)\| \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} dx$$

و

$$\int_a^b \| f^{(p)}(x)\| \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} \| f^{(n)}(b)\| \frac{b^n}{n!}$$

(d) نشان دهید که، تحت فرضیات (c) ، تابع :

$$S_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \| f^{(n)}(x)\| \frac{x^n}{n!}$$

(که مقادیر آن متناهی و بزرگ‌تر یا مساوی 0 ، یا برابر $+\infty$ است) روی فاصله $[a,+\infty[$ صعودی است.

(e) فرض کنیم f بی‌نهایت بار روی $[a,+\infty[$ مشتق‌پذیر ، و برای هر $n\geq 0$ ، داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0 .$$

ثابت کنید که، دنباله اعداد :

$$J_n = \int_a^{+\infty} \| f^{(n)}(x)\| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \qquad (n\geq 1)$$

(متناهی و بزرگ‌تر یا مساوی 0 ، یا برابر $+\infty$) صعودی است. (وقتی این اعداد همگی متناهی هستند ، بنویسید:

$$f^{(n)}(x) = - \int_x^{+\infty} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

و از قسمت (c) مسئله ۴ از بخش ۱۱. ۸ استفاده کنید.)

(f) فرض کنیم f بی‌نهایت بار روی $[a,+\infty[$ مشتق‌پذیر باشد و انتگرال‌های :

---

۱. مسائل ۱۳ و ۱۴ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده‌اند. مترجم.

$$J_n = \int_a^{+\infty} \|f^{(n)}(x)\| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \quad , \quad J_{n+1} = \int_a^{+\infty} \|f^{(n+1)}(x)\| \frac{x^n}{n!} dx$$

متناهی باشند. نشان دهید که ، برای $x \geq a$ ،

$$\|f^{(n)}(x)\| \frac{x^n}{n!} \leq \|f^{(n)}(a)\| \frac{a^n}{n!} + J_n + J_{n+1}$$

۱۴. [۱] فرض کنیم f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از فاصله $[a, +\infty[$ با $a \geq 0$ ، به یک فضای باناخ باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر $p > 0$ ،

$$\sup_{x \geq a} \sum_{n=p}^{\infty} \|f^{(n)}(x)\| \frac{x^n}{n!} = \sup_{n \geq p} \int_a^{+\infty} \|f^{(n)}(x)\| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \qquad (*)$$

که در آن هر دو طرف ممکن است برابر $+\infty$ باشند. نشان دهید که، اگر هر دو طرف متناهی باشند، آنها برابر دو حد زیر نیز خواهند بود :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \|f^{(n)}(x)\| \frac{x^n}{n!} \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^{+\infty} \|f^{(n)}(x)\| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \qquad (**)$$

(از مسئله ۱۳ استفاده کنید).

(b) اگر f در فرضیات قسمت (c) مسئله ۱۳ صدق کند، آنگاه حدود $(**)$ همواره وجود خواهند داشت و برابر طرفین رابطه $(*)$ خواهند بود.

---

۱. مسائل ۱۳ و ۱۴ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند ، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده‌اند. مترجم.

فصل IX

توابع تحلیلی

در این فصل، سعی کرده‌ایم کلی‌ترین حقایق مربوط به تئوری توابع تحلیلی را مورد تأکید قرار داده، و به‌ویژه، در حدی که ممکن بوده است، به بیان هر چه بیشتر نتایج برای **توابع تحلیلی چند متغیره** بپردازیم. تا بخش ۱۳. ۹ از قضیه‌هایی که فقط به توابع یک متغیره مربوط می‌شوند، به‌عنوان وسیله‌ای برای بیان قضیه‌های کلی استفاده شده است. تنها در بخش‌های ۱۴ . ۹ تا ۱۷ . ۹ ، و در بسیاری از مسائل این فصل و فصل بعد، واقعاً، خواص ویژه توابع تحلیلی یک متغیره مورد بررسی قرارگرفته است. به‌علاوه، به‌طور هم‌زمان، تا آنجا که ممکن بوده است (تا بخش ۵ . ۹) ، توابع تحلیلی با متغیرهای حقیقی و متغیرهای مختلط مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بالاخره، از نقطه شروع، طبق معمول، روی توابع **برداری** بحث شده است. با این کار، لازم نیست، در اثبات‌ها تغییری داده شود، و خواننده در فصل یازده خواهد دید که بررسی چنین توابعی چقدر می‌تواند مفید واقع شود.

البته، در اینجا می‌توان انتظار دیدن ابتدایی‌ترین بخش تئوری بسیار گسترده توابع تحلیلی را داشت. تعریف تابع تحلیلی از طریق وجود موضعی سری توانی که نمایشی از آن تابع است، ارائه شده است، و در (۵ . ۳. ۹) با استفاده از فنون سری‌های توانی خواص مشتق توابع تحلیلی را به‌دست آورده‌ایم (تعریف معمول توابع تحلیلی از طریق وجود و پیوستگی مشتقات آنها، تنها برای توابع با متغیرهای مختلط مورد استفاده قرار می‌گیرد، و بررسی این خصیصه تا بخش ۱۰ . ۹ به تعویق افتاده است).نتایج اساسی در رابطه باسری‌های توانی عبارتند از، **لم آبل** (۲ . ۱. ۹) که در آن امکان جایگذاری یک سری توانی در سری توانی دیگر را فراهم می‌نماید، و **اصل صفرهای ایزوله** (۵ .۱ . ۹) که نتیجه مهم آن اصل ادامه تحلیلی (۲ .۴ . ۹) می‌باشد، که «وحدت» بین مقادیر یک تابع تحلیلی را در نقاط مختلف دامنه تعریف آن بیان می‌نماید.

از این جا به بعد، باید فرض کنیم که، متغیرها مختلط هستند؛ به استثناء اصل ماکزیمم (۹ . ۵ . ۹)، همه خواص اضافی توابع تحلیلی با متغیرهای مختلط تنها با استفاده از ایده «**انتگراسیون مختلط**» و با استفاده از نتیجه اساسی آن : قضیه کوشی (۳. ۶ . ۹) ، فرمول کوشی (۱. ۹. ۹) و **تعمیم** آن، قضیه ماندهها (۱. ۱۶ . ۹) به دست آمده است. صورتی از قضیه کوشی که دراینجا ارائه شده است، بهترین شکل بیان آن نیست. زیرا، انتگرال در طول یک مدار را به عنوان ناوردائی از کلاس هوموتوپی آن مدار بیان می‌کند، در

حالی‌که، در واقع، ناوردایی از کلاس هومولوژی آن است. به‌هر حال، در اکثر کاربردها این مسئله هیچ نوع مشکلی ایجاد نمی‌نماید، در این رابطه، با اینکه اثبات شکل ضعیف قضیه کوشی تقریباً به موضوعات توپولوژیکی خاصی نیاز ندارد، برای اثبات کامل آن به مباحث پیشرفته‌ای از توپولوژی جبری نیاز داریم، که از سطح کتاب حاضر بالاتر است. خواننده علاقه‌مند می‌تواند اثبات کامل قضیه کوشی را همراه با پیش‌نیازهای آن در کتاب‌های: آهفلرس [1] ، کارتان [8] ، و اسپرینگر [17] بیابد. ما در فصل بیست و چهار مجدداً این موضوع را مورد بررسی قرار خواهیم داد. به جای استفاده از نتایج توپولوژی جبری، برای این که چنین ظرافت کاری‌هایی را به‌دست آوریم، فکر کرده‌ایم، برخی از خوانندگان علاقه‌مند هستند، که ببینند، چطور با طرح خیلی ساده اس . ایلنبرگ، می‌توان اطلاعات کاملاً عمیقی از توپولوژی صفحه حقیقی (از جمله قضیه خم جردن)، تنها با استفاده از مقدماتی‌ترین حقایق درباره انتگراسیون توابع مختلط، به‌دست آورد. این طرح در ضمیمه (از مسیری که می‌توان آن را گذرگاه فرعی بی‌دردسری به حساب آورد، که در فصل‌های بعدی از آن استفاده نشده) مورد بررسی قرار گرفته است.

همان‌طور که در فصل اول اشاره کردیم، در این فصل خواننده ذکری از توابع «چند مقداری» نخواهد دید. البته، این آزار دهنده است که نتوانیم روی هیأت C تابعی موثق و خالص و پیوسته مانند $\sqrt{z}$ تعریف کنیم، که در رابطه $z=\left(\sqrt{z}\right)^2$ صدق کند، اما، حل این مشکل مطمئناً نباید از طریق تحریف مفهوم کلی نگاشت، به مفهومی نامتداول از «تابع» منجر شود، که برای هر $z\neq 0$، دو مقدار می‌گیرد. چنین کار نامعقولی باعث می‌شود، که حتی در رابطه با ساده‌ترین اعمال جبری روی این گونه توابع، با مشکل مواجه شویم. به عنوان مثال، رابطه $2\sqrt{z}=\sqrt{z}+\sqrt{z}$ یقیناً درست نیست، زیرا، ما، طبق «تعریف» برای هر $z\neq 0$ دو مقدار به $\sqrt{z}$ نسبت داده‌ایم، در حالی‌که برای همین $z\neq 0$ سه مقدار متمایز برای $\sqrt{z}+\sqrt{z}$ به‌دست می‌آید. خوشبختانه، راه حلی معقول برای حل این مشکل وجود دارد، که حدود بیش از صدسال پیش به‌وسیله ریمان کشف شده است، در این راه حل با «دوبلینگ» دامنه متغیر z ، به جای اینکه به یک مقدار z دو مقدار به $\sqrt{z}$ نسبت داده شود، دو مقدار متمایز $\sqrt{z}$ به دو نقطه متمایز مربوط می‌شوند، و به این ترتیب، با دوبلینگ دامنه متغیر z مقداری یکتا برای $\sqrt{z}$ در نظر گرفته می‌شود. برخورد نبوغ آمیز ریمان به این گونه مسائل پایه‌های تئوری **سطوح ریمان**، و تعمیم‌های امروزی آن **منیفلدهای مختلط** که در فصل شانزدهم مورد بررسی قرار گرفته است، را بنا نمود. دانشجویی که بخواهد با این گونه نظریه‌های زیبا و جدی آشنا شود، می‌تواند از اثر کلاسیک ویل [19]، و کاری جدیدتر از اسپرینگر در رابطه با سطوح ریمان [17]، و سمینارهای ارائه شده توسط هـ .کارتان [7] و کتاب جدید ویل [18] در رابطه منیفلدهای مختلط، استفاده نماید.[1]

---

۱. شماره کتاب‌های ویل، اسپرینگر، کارتان و کتاب جدید ویل در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به ترتیب [25]، [21] ، [8]و [24] است. مترجم.

۱. سری‌های توانی

در مباحث بعدی K به عنوان **R** هیات اعداد حقیقی، یا C هیات اعداد مختلط تلقی خواهد شد، و عناصر K را **اسکالرها** خواهیم نامید. در فضای برداری $\mathbf{K}^p$ که روی هیات K بنا شده است، یک **چند قرصی (پولیدیسک ـ پولی‌سیلندر**[1]) **باز** (به ترتیب **بسته**) حاصلضرب p گوی باز (به‌ترتیب بسته) است. به عبارت دیگر، مجموعه‌ای مانند S است که در شرایط $|z_i - a_i| < r_i$ (به ترتیب $|z_i - a_i| \leq r_i$)، $1 \leq i \leq p$، وقتی $z = (z_1, \dots, z_p)$ و $r_i > 0$ $(1 \leq i \leq p)$ باشد، صدق می‌کند. نقطه $a = (a_1, \dots, a_p)$ را **مرکز** S، و r_1، ...، r_p را **شعاع‌های** S می‌نامند. (به این ترتیب، یک گوی یک **چند قرصی (پولیدیسک ـ پولی‌سیلندر)** است که شعاع‌های آن با هم برابرند).

(۱. ۱. ۹) فرض کنیم P و Q دو چند قرصی باز در $\mathbf{K}^p$ باشند، به‌طوری‌که $P \cap Q \neq \varnothing$. اگر x و y دو نقطه دلخواه در $P \cap Q$ باشند، پاره‌خطی که x را به y وصل می‌کند (بخش ۵ . ۸ را ببینید) در $P \cap Q$ واقع خواهد بود، به‌ویژه ، $P \cap Q$ مجموعه‌ای همبند است.

در واقع، اگر $|x_i - a_i| < r_i$ ، $|y_i - a_i| < r_i$ ، آنگاه ، برای هر $0 \leq t \leq 1$ ، خواهیم داشت :

$$|t x_i + (1-t) y_i - a_i| \leq t|x_i - a_i| + (1-t)|y_i - a_i| < r_i$$

و حکم از این واقعیت که یک پاره‌خط مجموعه‌ای همبند است (طبق (۱ . ۱۹ . ۳) و (۷ . ۱۹ . ۳)) و از (۳ . ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود.

نماد زیر را معرفی می‌کنیم :

برای هر عنصر $\nu = (n_1, \dots, n_p)$ در $\mathbf{N}^p$ ($n_i \geq 0$ اعدادی صحیح هستند) و برای هر بردار $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{K}^p$، می‌نویسیم $z^\nu = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_p^{n_p}$ ، و $|\nu| = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$. اگر E یک فضای باناخ (روی K) و $(c_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}^p}$ یک خانواده از عناصر E با مجموعه $\mathbf{N}^p$ به عنوان مجموعه اندیس‌ها باشد، خانواده $(c_\nu z^\nu)_{\nu \in \mathbf{N}^p}$ از عناصر E را یک **سری توانی** p **متغیره** با متغیرهای z_i $(1 \leq i \leq p)$ و ضرایب c_ν می‌نامیم.

(۲. ۱. ۹) (لم آبل) فرض می‌کنیم $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbf{K}^p$ چنان باشد که برای هر $1 \leq i \leq p$ ، $b_i \neq 0$ و خانواده $(c_\nu b^\nu)$ در E کراندار باشد. در این صورت، برای هر سیستم (r_i) از شعاع‌ها که :

$$0 < r_i < |b_i| \quad (1 \leq i \leq p)$$

---

1 . Polydisk = Полицилиндр

در متن روسی کتاب به جای واژه پولی دیسک از واژه پولی سیلندر استفاده شده است. مترجم.

سری توانی $(c_\nu z^\nu)$ روی هرچند قرصی به مرکز 0 و شعاع‌های r_i به‌طور نرمال جمع‌پذیر[1] است.

در واقع، اگر برای هر $\nu \in \mathbf{N}^p$ ، $\| c_\nu b^\nu \| \le \mathrm{A}$ ، آن‌گاه ، از تعریف نرم در K^p نتیجه می‌شود که، برای $|z_i| \le r_i < |b_i|$ $(1 \le i \le p)$ ، خواهیم داشت $\| c_\nu z^\nu \| \le \mathrm{A} q^\nu$ ، که در آن $q=(q_1,...,q_p)$ ، $q_i = r_i / |b_i| < 1$. از (۳ . ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که، خانواده $(q^\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$ از اعداد مثبت به‌طور مطلق جمع‌پذیر است، و از (۱ . ۳ . ۵) حکم ثابت می‌شود.

(۳. ۱. ۹) تحت فرضیات گزاره (۲. ۱. ۹) مجموع سری توانی $(c_\nu z^\nu)$ روی چند قرصی باز به مرکز 0 و شعاع‌های $|b_i|$ پیوسته است.

چون، هر نقطه از این چند قرصی نقطه داخلی یک چند قرصی بسته با شعاع‌های $0 < r_i < |b_i|$ است، از (۱ . ۲ . ۷) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

فرض‌کنیم q عددی صحیح باشد، به‌طوری که $1 \le q \le p$. برای هر $\nu = (n_1,..., n_p)$ ، می‌نویسیم $\nu' = (n_1 , ... , n_q)$ ، $\nu'' = (n_{q+1} ,..., n_p)$ ، و $\mathbf{K}^p$ را با حاصل‌ضرب $\mathrm{K}^q \times \mathrm{K}^{p-q}$ یکی می‌گیریم، و برای $z = (z_1 , ..., z_p) \in \mathbf{K}^p$ ، می‌نویسیم $z' = (z_1 , ..., z_q)$ ، $z'' = (z_{q+1} , ..., z_p)$. با این نمادها گزاره زیر برقرار است :

(۴. ۱. ۹) فرض کنیم سری توانی $(c_\nu z^\nu)$ روی چندقرصی P با مرکز 0 در $\mathbf{K}^p$ و شعاع‌های r_i به‌طور مطلق جمع‌پذیر باشد. در این صورت، برای هر $\nu'' \in \mathbf{N}^{p-q}$ سری $(c_{(\nu',\nu'')} z'^{\nu'})$ روی چند قرصی $\mathbf{P}'$ که تصویرP روی $\mathbf{K}^q$ است، به طور مطلق جمع‌پذیر است. فرض کنیم $g_{\nu''}(z')$ مجموع آن باشد. در این صورت، برای هر نقطه $z' \in \mathrm{P}'$ ، سری توانی $(g_{\nu''}(z') z''^{\nu''})$ روی چند قرصی $\mathbf{P}''$ که تصویرP روی K^{p-q} است، به‌طور مطلق جمع‌پذیر است، و مجموع آن برابر مجموع سری $(c_\nu z^\nu)$ است.

با توجه به رابطه $z^\nu = z'^{\nu'} z''^{\nu''}$ ، این حقیقت که، هر یک از سری‌های $(c_{(\nu',\nu'')} z'^{\nu'} z''^{\nu''})$ (ν'' ثابت است) به‌طور مطلق جمع می‌باشد، و $\sum_{\nu''} g_{\nu''}(z') z''^{\nu''} = \sum_\nu c_\nu z^\nu$ ، از (۵ . ۳ . ۵) و قضیه انجمنی (۶ . ۳ . ۵) برای خانواده‌های مطلقاً جمع‌پذیر، نتیجه می‌شود. اگر $z'' \in \mathrm{P}''$ را طوری انتخاب کنیم که برای $q+1 \le i \le p$ ، $z_i \neq 0$ ، به جمع‌پذیری مطلق سری $(c_{(\nu',\nu'')} z'^{\nu'})$ خواهیم رسید.

(۵ . ۱. ۹) («اصل صفرهای تنها») فرض‌کنیم $(c_n z^n)$ یک سری توانی یک متغیره باشد، که روی گوی باز P

---

[1] در چاپ نخست برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به جای اصطلاح «به طور نرمال جمع‌پذیر» (Normally summable) از اصطلاح «به طور نرمال همگرا» (Нормально сходится) استفاده شده است. مترجم .

به شعاع r همگرا است، و $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. در این صورت، یک $r'<r$ موجود است، به طوری‌که، به جز حالتی که همه c_nها برابر صفر هستند، برای هر $0<|z|<r'$ ، $f(z)\neq 0$.

فرض کنیم h کوچکترین عدد صحیحی باشد که $c_h \neq 0$. در این صورت، می‌توان نوشت :

$$f(z)=z^h(c_h+c_{h+1}z+\dots+c_{h+m}z^m+\dots)$$

و سری $(c_{h+m}z^m)$روی P همگرا است. اگر قرار دهیم $g(z)=c_h+c_{h+1}z+\dots c_{h+m}z^m+\dots$ ، در این صورت، طبق (۳. ۱. ۹) ، g روی P پیوسته است، و چون $g(0)=c_h\neq 0$ ، یک $r'>0$ موجود است، به طوری‌که ، برای $|z|<r'$ ، $g(z)\neq 0$ ، و با این مطلب نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۶ . ۱. ۹) فرض کنیم دو سری توانی $(c_\nu z^\nu)$ و $(b_\nu z^\nu)$ روی چند قرصی P به طور مطلق جمع‌پذیر باشند و مجموع آنها روی P با هم برابر باشند. در این‌صورت، برای هر $\nu\in \mathrm{N}^p$ ، $a_\nu=b_\nu$.

از استقراء روی p استفاده می‌کنیم. برای $p=1$ از (۵ . ۱. ۹) فوراً نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. با انتخاب تفاضل دو سری توانی، می‌توان فرض کرد که، برای هر ν ، $b_\nu=0$. با به‌کارگیری گزاره (۴ . ۱. ۹) برای $q=p-1$ ، خواهیم داشت $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z')z_p^n=0$ ، بنابراین، برای هر n و هر z' در P' تصویر P روی K^{p-1} ، $g_n(z')=0$. با به کارگیری فرض استقراء برای هر یک از g_nها، نتیجه می‌گیریم که برای هر ν ، $a_\nu=0$.

مسائل

۱ . فرض کنیم $(c_\nu z^\nu)$ یک سری توانی با p متغیر z_i $(1\leq i\leq p)$ باشد، و $a=(a_1,\dots,a_p)\in \mathrm{K}^p$. برای اینکه یک عدد حقیقی $r>0$ چنان باشد که، برای $t\in \mathrm{K}$ ، که $|t|<r$، سری $(c_\nu(ta_1)^{n_1}\dots(ta_p)^{n_p})$ به‌طور مطلق جمع‌پذیر باشد، لازم و کافی است که نامساوی[1] :

$$\log r+\frac{1}{|\nu|}\log\|c_\nu\|+\sum_{i=1}^{p} n_i \log|a_i|\leq 0$$

برای همه اندیس‌های $\nu=(n_1,\dots,n_p)$ به جز تعدادی متناهی از آنها برقرار باشد. (از (۲. ۱. ۹) استفاده کنید.)

---

۱. این نامساوی در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به همین صورت، اما، در چاپ اول متن روسی کتاب به‌صورت :

$$\ln r+\frac{1}{|\nu|}\left(\ln\|c_\nu\|+\sum_{i=1}^{p} n_i \ln|a_i|\right)\leq 0$$

نوشته شده است. مترجم.

در حالت خاص، برای $p = 1$، یک بزرگترین عدد $\mathbf{R} \geq 0$ « شعاع همگرایی[1] » (که می‌تواند برابر $+\infty$ باشد) موجود است، به‌طوری که سری $(c_n z^n)$ به ازاء $|z| < \mathbf{R}$ همگرا است، و عدد $\mathbf{R}$ با رابطه $1 / \mathbf{R} = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k \geq 0} (\| c_{n+k} \|^{1/(n+k)}))$ تعیین می‌شود، که می‌توان آن را به‌صورت $\limsup_{n \to \infty} \| c_n \|^{1/n}$ نیز نوشت (مقایسه کنید، با بخش ۷ . ۱۲) . به‌ویژه، اگر $\lim_{n\to\infty} \| c_n \|^{1/n}$ موجود باشد، برابر با $1 / \mathbf{R}$ خواهد بود.

۲ . مثال‌هایی از سری‌های توانی یک متغیره مختلط ارائه نمایید، که دارای شعاع همگرایی $\mathbf{R} = 1$ باشند (مسأله ۱ را ببینید) و چنان باشند که :

(۱) سری برای $|z| = \mathbf{R}$ به طور نرمال همگرا باشد؛

(۲) سری در برخی از نقاط دایره $|z| = \mathbf{R}$ همگرا باشد، اما، در نقاط دیگر دایره $|z| = \mathbf{R}$ همگرا نباشد؛

(۳) سری در هیچ نقطه‌ای از $|z| = \mathbf{R}$ همگرا نباشد.

۳ . مثالی از یک سری توانی دو متغیره ارائه نمایید، که در دو نقطه (a_1 , a_2) ، (b_1 , b_2) به‌طور مطلق جمع‌پذیر باشد، اما، در نقطه $(\frac{a_1 + b_1}{2} , \frac{a_2 + b_2}{2})$ به‌طور مطلق جمع‌پذیر نباشد. (z را در یک سری توانی یک متغیره به $z_1 z_2$ تبدیل کنید).

۴ . فرض کنیم $(c_n z^n)$, $(d_n z^n)$ دو سری توانی یک متغیره با ضرایب اسکالر باشند. اگر شعاع همگرایی آنها برابر با $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}'$ باشد (مسئله ۱ را ببینید)، و نه $\mathbf{R}$، نه $\mathbf{R}'$ برابر صفر نباشند، آنگاه $\mathbf{R}''$ شعاع همگرایی سری $(c_n d_n z^n)$ حداقل برابر $\mathbf{R}\mathbf{R}'$ است (این حاصلضرب برابر $+\infty$ گرفته می‌شود، اگر $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{R}'$ برابر $+\infty$ باشد). مثالی ارائه کنید که $\mathbf{R}'' > \mathbf{R}\mathbf{R}'$.

۲. جایگذاری یک سری توانی در یک سری توانی دیگر

فرض کنیم Q یک چند قرصی به مرکز 0 در $\mathbf{K}^q$ باشد، و p سری توانی q متغیره $(b_\mu^{(k)} u^\mu)$ با ضرایب اسکالر روی Q مطلقاً جمع‌پذیر باشند (در سری‌های فوق $\mu = (m_1 , \dots , m_q)$ ، $u = (u_1 , \dots , u_q)$ ، و $(u^\mu = u_1^{m_1} \dots u_q^{m_q}$. می‌نویسیم $g_k(u) = \sum_\mu b_\mu^{(q)} u^\mu$ ، $\mathrm{G}_k(u) = \sum_\mu | b_\mu^{(q)} | u^\mu$. از طرف دیگر، فرض کنیم $(a_\nu z^\nu)$ یک سری توانی p متغیره با ضرایبی در E باشد، که روی چند قرصی P از K^p ، با مرکز 0 و شعاع‌های r_k $(1 \leq k \leq p)$ به‌طور مطلق جمع پذیر است. اگر در تک‌جمله‌ای $z^\nu = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$ ، «به‌طور فرمال» به جای هر یک از z_kها سری‌های توانی $g_k(u)$ قرار دهیم، در این صورت، به «حاصلضرب» فرمال $n_1 + n_2 + \dots + n_p$ سری می‌رسیم. یعنی، با انتخاب جمله‌ای در هر یک از این $n_1 + \cdots + n_p$ عامل ، حاصلضرب آنها ، و سپس، «مجموع» همه این جملات را به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب، برای هر $\nu = (n_1 , n_2 , \dots , n_p)$ ، باید به بررسی مجموعه A_ν پرداخت که از همه خانواده‌های متناهی $\rho = (\mu_{kj})$ تشکیل شده است که $\mu_{kj} \in \mathbf{N}^q$ ، و k از 1 تا p تغییر می‌کند، و برای هر k ، j از 1 تا n_k تغییر می‌کند. به چنین ρ ای عنصر $t_\rho(u) = a_\nu \prod_{k=1}^{p} \prod_{j=1}^{n_k} b_{\mu_{kj}}^{(k)} u^{\mu_{kj}}$ مربوط می‌کنیم. با این نمادها قضیه

---

1 . Convergence radius (Radius of convergence) = Радиус сходимости

زیر برقرار است :

(۱. ۲. ۹) فرض می‌کنیم s_1 ، ... ، s_q، q عدد اکیداً بزرگتر از صفر باشند، که برای هر $1 \le k \le p$ ، در شرایط $G_k(s_1,...,s_q) < r_k$ صدق می‌کنند. در این صورت، برای هر u متعلق به چند قرصی باز $S \subset K^q$ به مرکز 0 و شعاع‌های s_i $(1 \le i \le q)$، خانواده $(t_\rho(u))$ (که در آن ρ مجموعه شمارش پذیر اندیس‌های $A = \bigcup_{\nu \in N^p} A_\nu$ را طی می‌کند) به طور مطلق جمع‌پذیر است ، و اگر $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ ، مجموع آن برابر $f(g_1(u), g_2(u), ..., g_p(u))$ می‌باشد.

به عبارت دیگر، تحت شرایط $G_k(s_1,..., s_q) < r_k$ $(1 \le k \le p)$ ، با «جایگذاری» سری‌های $g_k(u)$ به جای z_k $(1 \le k \le p)$ در سری f به خانواده‌ای مطلقاً جمع‌پذیر می‌رسیم ، حتی، اگر از قبل همه جملات $t_p(u)$ که نسبت به u_1 ، ... ، u_q دارای درجات یکسانی هستند، با هم جمع شده باشند.

برای اثبات (۱. ۲. ۹) ، تنها باید ثابت کنیم که خانواده $(t_\rho(u))$ مطلقاً جمع‌پذیر است، اثبات این‌که مجموع آن برابر $f(g_1(u),..., g_p(u))$ است، از به کارگیری قضیه پخشی (۶ . ۳. ۵) برای زیر مجموعه‌های A_ν از A ، و استفاده از قضیه (۳. ۵ . ۵) که نشان می‌دهد $\sum_{\rho \in A_\nu} t_\rho(u)$ برابر $a_\nu (g_1(u)^{n_1} ... (g_p(u))^{n_p}$ است، نتیجه می‌شود. برای اثبات اینکه خانواده $(t_\rho(u))$ $(\rho \in A)$ مطلقاً جمع‌پذیر است، از (۴. ۳. ۵) استفاده می‌کنیم. طبق (۵ . ۳ . ۵) و (۳. ۵ . ۵) ، برای هر زیر مجموعه متناهی B از A ، داریم :

$$\sum_{\rho \in B \cap A_\nu} \| t_\rho(u) \| \le \| a_\nu \| . (G_1(s_1,...,s_q))^{n_1} ... \ (G_p(s_1, ..., s_q))^{n_p}$$

و طبق فرض، سمت راست نامساوی فوق عنصری با اندیس ν از یک خانواده مطلقاً جمع پذیر است، و با این مطلب نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

می‌نویسیم $t_\rho(u) = c_\rho u^\lambda$ ، که در آن $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_q)$ ، $\lambda_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} m_{kji}$ (اگر داشته باشیم $(\mu_{kj} = (m_{kj1}, ..., m_{kjq}))$. از (۱. ۲. ۹) و (۵ . ۳. ۵) (با در نظر گرفتن همه u_i های مخالف صفری که $u \in S$) نتیجه می‌شود که، برای هر λ ، خانواده همه c_ρ ها، وقتی ρ همه عناصر A که با همان λ متناظر است، طی می‌کند، در E مطلقاً جمع‌پذیر است. اگر d_λ مجموع آن باشد، آنگاه، طبق قضیه پخشی (۶ . ۳ . ۵) ، می‌بینیم که :

$$f(g_1(u), ..., g_p(u)) = \sum_\lambda d_\lambda u^\lambda \qquad (۱. ۱ . ۲. ۹)$$

سری سمت راست روی چند قرصی S مطلقاً جمع پذیر است. طبق تعریف، این سری توانی، **سری توانی به‌دست آمده از جایگذاری سری توانی $g_k(u)$ به‌جای z_k ، برای $1 \leq k \leq p$ ، در سری توانی $(a_\nu z^\nu)$** نامیده می‌شود.

(۲. ۲. ۹) اگر نقطه $(g_1(0), \ldots, g_p(0))$ در فضای K^p متعلق به چندقرصی P باشد، آنگاه، در K^q یک چند قرصی باز S موجود است ، به‌طوری‌که، برای $u \in \mathrm{S}$ ، سری‌های $g_k(u)$ را می‌توان به‌جای $z_k(1 \leq k \leq p)$ در سری توانی $(a_\nu z^\nu)$ قرار داد.

طبق تعریف ، دیده می‌شود که ، برای $1 \leq k \leq p$ ، $\mathrm{G}_k(0) = |g_k(0)|$. چون توابع $\mathrm{G_k}$ طبق (۳. ۱. ۹) در 0 پیوسته هستند، وجود اعدادی مانند $0 < s_i$ $(1 \leq i \leq q)$ به‌طوری‌که برای $1 \leq k \leq p$ ، $\mathrm{G}_k(s_1, \ldots, s_q) < r_k$، فوراً از فرض نتیجه می‌شود.

۳. توابع تحلیلی

فرض کنیم D زیر مجموعه‌ای باز از K^p باشد. نگاشت f از D به فضای باناخ E روی هیات K را **تحلیلی** نامند، هرگاه، برای هر نقطه $a \in \mathrm{D}$، یک چند قرصی باز $\mathrm{P} \subset \mathrm{D}$ با مرکز a موجود باشد، به‌طوری که $f(z)$ روی P برابر مجموع یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر با p متغیر $z_k - a_k$ $(1 \leq k \leq p)$ باشد (این سری طبق (۶ . ۱. ۹) **یکتا** است). فرض کنیم $\mathrm{K} = \mathrm{C}$، و b نقطه‌ای از D، و B تصویر معکوس D تحت نگاشت $x \to b + x$ از R^p به C^p باشد. در این صورت، فوراً ، از تعریف‌های فوق نتیجه می‌شود که، نگاشت $x \to f(b + x)$ روی زیر مجموعه باز B از R^p تحلیلی است.

(۱. ۳ . ۹) فرض کنیم $(a_\nu z^\nu)$ یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر روی چند قرصی باز $\mathrm{P} \subset \mathrm{K}^p$ باشد. در این صورت ، $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ روی P تحلیلی است، دقیق‌تر این‌که، اگر $r_i(1 \leq i \leq p)$ شعاع‌های چند قرصی P باشند، آنگاه برای هر نقطه $b = (b_i) \in \mathrm{P}$ ، $f(z)$ برابر مجموع یک سری توانی مطلقاً جمع پذیر با متغیرهای $z_k - b_k$ روی چند قرصی باز به مرکز b و شعاع‌های $r_i - |b_i|$ $(1 \leq i \leq p)$ است.

مطلب فوق فوراً از قضیه (۱. ۲. ۹) با به‌کارگیری حالت $q = p$ ، $g_k(u) = b_k + u_k$ نتیجه می‌شود. در این حالت، داریم $\mathrm{G}_k(u) = |b_k| + u_k$ ، و شرایط $\mathrm{G}_k(s_1, \ldots, s_p) < r_k$ $(1 \leq k \leq p)$ را می‌توان به صورت $s_k < r_k - |b_k|$ $(1 \leq k \leq p)$ مختصر کرد.

یک **تابع تام** p متغیره نگاشتی مانند f از K^p به E است که برابر با مجموع یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر روی سرتاسر فضای K^p است ((۶ . ۹. ۹) را ببینید). بنابراین، طبق (۱. ۳. ۹) ، برای هر $b \in \mathrm{K}^p$ ، $f(z)$ برابر مجموع یک سری توانی با متغیرهای $z_k - b_k$ است، که روی کل فضای K^p به طور مطلق جمع پذیر است.

(۲ . ۳ . ۹) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز از K^p ، B یک زیر مجموعه باز از K^q ، و g_k $(1 \le k \le p)$ ، p تابع اسکالر تعریف شده و تحلیلی روی B ، و تصویر B تحت $(g_1 , \dots , g_p)$ در زیر مجموعه‌ای از A واقع باشد. در این صورت، برای هر نگاشت تحلیلی f از A به E نگاشت $f(g_1,\dots,g_p)$ روی B تحلیلی است.

مطلب فوق نتیجه فوری تعریف و (۲ . ۲ . ۹) است. در حالت خاص، اگر f روی $\mathrm{A} \subset \mathrm{K}^p$ تحلیلی باشد، آنگاه، برای هرسیستم $(a_{q+1} , \dots , a_p)$ تشکیل شده از $p-q$ اسکالر، نگاشت :

$$(z_1,\dots , z_q) \to f(z_1, \dots , z_q , a_{q+1} , \dots, a_p)$$

روی مجموعه باز $\mathrm{A}(a_{q+1},\dots,a_p)$ از فضای K^q (۱۲. ۲۰. ۳ را ببینید) تحلیلی است.

(۳ . ۳ . ۹) برای این‌که نگاشت $f = (f_1,\dots, f_q)$ از مجموعه باز $\mathrm{A} \subset \mathrm{K}^p$ به K^q روی A تحلیلی باشد ، لازم و کافی است که هر یک از توابع اسکالر f_i $(1 \le i , \le q)$ روی A تحلیلی باشد.

مطلب فوق نتیجه واضحی از تعریف است.

(۴ . ۳ . ۹) فرض کنیم $z_k = x_k + i y_k$ برای $1 \le k \le p$ ، که در آن x_k و y_k اعدادی حقیقی هستند. اگر نگاشت f روی مجموعه باز $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}^p$ تحلیلی باشد ، آن‌گاه، تابع :

$$(x_1 , y_1 , \dots , x_p , y_p) \to f(x_1 + i y_1,\dots, x_p + i y_p)$$

روی A به عنوان زیر مجموعه بازی از فضای R^{2p} تحلیلی است.

در واقع، طبق (۲. ۳. ۹) ، تابع فوق روی زیر مجموعه باز $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}^{2p}$ که تصویر معکوس A تحت نگاشت $(u_1, v_1,\dots, u_p , v_p) \to (u_1 + i v_1 , \dots, u_p + i v_p)$ از C^{2p} به C^p است، تحلیلی می‌باشد، و بنابراین، روی $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cap \mathrm{R}^{2p}$ وقتی A به عنوان زیر مجموعه‌ای از R^{2p} مورد بررسی قرار گیرد، تحلیلی است.

(۵ . ۳ . ۹) فرض کنیم $(c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p})$ یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر روی چند قرصی باز P به مرکز 0 ، و $f(z)$ مجموع آن باشد. در این‌صورت، سری توانی :

$$(n_k c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k - 1} \ldots z_p^{n_p})$$

روی P مطلقاً جمع‌پذیر است ، و مجموع آن برابر $D_k f (= \dfrac{\partial f}{\partial z_k})$ می‌باشد.

برای هر $z \in P$ ، می‌توان در سری به‌جای z_i برای $i \neq k$ خودش و به جای z_k ، $z_k + u_k$ قرار داد. به این ترتیب، یک سری توانی $p+1$ متغیره با متغیرهای z_1 ، ... ، z_p ، u_k به‌دست می‌آوریم، که طبق (۹. ۲. ۱) ، برای $|z_i| < r_i$ $(i \neq k)$ و $|z_k| + |u_k| < r_k$ مطلقاً جمع‌پذیر است (اگر r_1 ، ... ، r_p شعاع‌های P باشند). بنابراین ، طبق (۹ . ۱ . ۴) ، می‌توان نوشت :

$$f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) = f(z) + u_k f_1(z) + \ldots + u_k^n f_n(z) + \ldots$$

که در آن هر یک از $f_n(z)$ها یک سری توانی مطلقاً جمع پذیر روی P می‌باشد، و سمت راست ، برای هر $z \in P$ ، یک سری توانی بر حسب u_k است، که روی یک گوی باز B (وابسته به z) به مرکز 0 مطلقاً جمع‌پذیر است. علاوه بر این ، از قضیه دو جمله‌ای نتیجه می‌شود :

$$f_1(z) = \sum_{\nu} n_k c_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k - 1} \ldots z_p^{n_p}$$

و چـون سـری $(f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) - f(z)) / u_k = f_1(z) + \cdots + u_k^{n_k - 1} f_n(z) + \cdots$ طبق (۹. ۱. ۴) ، روی B یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر نسبت به u_k است (برای z ثابت نگه داشته شده)، از (۹. ۱. ۳) نتیجه می‌گیریم که، برای هر $z \in P$ ، $f_1(z) = D_k f(z)$. از این نتیجه و از (۹ . ۱ . ۳) مقادیر c_p بر حسب مشتقات نگاشت f به دست می‌آید، به این ترتیب :

$$\nu ! c_\nu = D^\nu f(0) \qquad (۹. ۳. ۵. ۱)$$

که در آن $D^\nu = D_1^{n_1} \ldots D_p^{n_p}$ و $\nu ! = n_1 ! n_2 ! \ldots n_p !$. مطلب فوق را می‌توان فوراً و بی‌واسطه با استقراء روی $|\nu| = n_1 + \ldots + n_p$ ثابت نمود.

(۹ . ۳ . ۶) یک تابع تحلیلی روی مجموعه باز $A \subset K^p$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، و مشتق‌های آن روی A تحلیلی هستند.

مطلب فوق نتیجه واضح (۹. ۳. ۵) و (۸. ۱۲. ۸) می‌باشد.

برای $p = 1$ ، یک «عکس» برای (۹. ۳. ۵) وجود دارد :

(۹. ۳. ۷) فرض کنیم $(c_n z^n)$ یک سری توانی همگرا روی گوی $P = \{z \in K \mid |z| < r\}$ واقع در K باشد، و فرض کنیم روی P ، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. در این‌صورت، سری توانی $(\dfrac{1}{n+1} c_n z^{n+1})$ روی P همگرا است، و مجموع آن یک پریمیتیو (تابع اولیه) نگاشت f است.

با توجه به (۵ . ۳. ۹) تنها باید همگرایی سری $(\frac{1}{n+1}c_n z^{n+1})$ را مورد بررسی قرار دهیم، که این هم فوراً از نامساوی :

$$\| \frac{1}{n+1} c_n z^{n+1} \| \leq \| c_n \| . |z|^{n+1}$$

و از (۲. ۱. ۹) نتیجه می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم $(a_n z^n)$ ، $(b_n z^n)$ دو سری توانی یک متغیره باشند که ضرایب آنها در شرایط $b_n > 0$ $(n \in \mathbf{N}$ و $b_n \in \mathbf{R})$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$ صدق می‌کنند.

(a) فرض کنیم سری $(b_n z^n)$ برای $|z| < 1$ همگرا باشد، اما، به ازاء $z = 1$ واگرا باشد (که به این معنی است که، اگر $c_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ ، $\lim_{k\to\infty} c_k = +\infty$). نشان دهید که، سری $(a_n z^n)$ برای $|z| < 1$ مطلقاً همگرا است، و اگر $\mathrm{I} = [0\,,1[$ ،

$$\lim_{z\to 1,\, z\in \mathrm{I}} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) / (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = s\,.$$

(ملاحظه کنید که، برای هر عدد طبیعی k ، $\lim_{z\to 1,\, z\in \mathrm{I}} (\sum_{n\geq k}^{\infty} b_n z^n) = +\infty$.)

(b) فرض کنیم سری $(b_n z^n)$ برای هر z همگرا باشد. نشان دهید که، سری $(a_n z^n)$ برای هر z به‌طور مطلق همگرا است، و اگر J فاصله $[0\,, +\infty[$ در $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه :

$$\lim_{z\to +\infty,\, z\in \mathrm{J}} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) / (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = s$$

(با همان روش) .

(c) نشان دهید که، اگر سری (a_n) همگرا باشد و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ ، آنگاه سری $(a_n z^n)$ برای $|z| < 1$ به‌طور مطلق همگرا است، و $\lim_{z\to 1,\, z\in \mathrm{I}} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) = s$ (از (a) با قرار دادن $b_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ استفاده کنید. مطلب فوق **« قضیه آبل»** می‌باشد) .

(d) سری توانی $((-1)^n z^n)$ دارای شعاع همگرایی 1 است، و مجموع آن $\frac{1}{1+z}$ وقتی z در I به سمت یک میل می‌کند دارای حد است، اما، سری $((-1)^n)$ همگرا نیست. (مسأله ۲ را ببینید).

۲. فرض کنیم $(a_n z^n)$ یک سری توانی یک متغیره با شعاع همگرایی 1 باشد، و فرض کنیم مجموع آن $f(z)$ باشد و $f(1-)$ موجود باشد. اگر علاوه بر اینها، $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ باشد، ثابت کنید که، سری (a_n) همگرا است و مجموع آن برابر $f(1-)$ می‌باشد («قضیه تاوبر» : ملاحظه کنید که، اگر برای $n \geq k$ ، $|n a_n| \leq \varepsilon$ ، آنگاه، برای هر $k > \mathbf{N}$ و $0 \leq x < 1$ ،

$$\|\sum_{n=k}^{N} a_n (1-x^n)\| \leq \varepsilon N (1-x)$$

و

$$\|\sum_{n \geq N} a_n x^n\| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}).$$

۳. فرض کنیم $(a_n z^n)$ یک سری توانی یک متغیره با شعاع همگرایی $r > 0$ ، و (b_n) یک دنباله از اسکالرهای مخالف صفر باشد، به‌طوری که حد $q = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$ موجود باشد، و $|q| < r$. نشان دهید که، اگر :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n}$ موجود است و برابر $f(q)$ می‌باشد.

۴ . فرض کنیم $(p_n z^n)$ و $(q_n z^n)$ دو سری توانی با ضرایب مختلط باشند و شعاع همگرایی آنها مخالف صفر باشد، و فرض کنیم در یک همسایگی U از 0 که هر دو سری به طور مطلق همگرا هستند و $f(z) = \sum_n p_n z^n$ ، $g(z) = \sum_n q_n z^n$ ، $q_0 = g(0) \neq 0$. در این صورت، یک سری توانی $\sum_n c_n z^n$ موجود است، که در یک همسایگی $V \subset U$ از 0 مطلقاً همگرا است، و مجموع آن روی V برابر $f(z) / g(z)$ است (ملاحظه کنید که، سری (z^n) برای $|z| < 1$ همگرا است، و از (۲. ۲. ۹) استفاده کنید). نشان دهید که، اگر همه q_n ها اکیداً مثبت باشند، دنباله (q_{n+1}/q_n) صعودی باشد، و اگر p_n ها حقیقی و چنان باشند که (p_n / q_n) صعودی (به ترتیب نزولی) باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$ ، $c_n \geq 0$ (به ترتیب $c_n \leq 0$).

(تفاضل :

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

را به عنوان عبارتی بر حسب q_k و c_k بنویسید، و از استقراء روی n استفاده کنید).

از مطالب فوق نتیجه بگیرید که، همه مشتقات $x / \log (1-x)$ برای $0 < x < 1$ اکیداً مثبت[1] می‌باشند.

۵ . فرض کنیم $g_k (1 \leq k \leq p)$ p تابع اسکالر تام باشند که روی $\mathbf{K}^q$ تعریف شده‌اند. اگر f تابعی تام روی $\mathbf{K}^p$ باشد، آن گاه $f(g_1, \ldots, g_n)$ یک تابع تام روی $\mathbf{K}^q$ است.

۶. [2] فرض کنیم P دیسک $|z| \leq r$ در C باشد. نشان دهید که، برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ،

$$\iint_P z^n \, dx \, dy = 0$$

(از این حقیقت که اندازه لبگ در $\mathbf{R}^2$ تحت دوران پایا است استفاده کنید (مقایسه کنید با (۹. ۳. ۱۴) را ببینید).

از رابطه فوق نتیجه بگیرید، برای هر تابع f که روی یک مجموعه باز $A \subset C$ شامل P تحلیلی است، داریم :

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب نوشته شده است که کلیه مشتقات تابع $\frac{x}{ln(1-x)}$ برای $0 < x < 1$ اکیداً مثبت هستند (با استفاده از علامت < 0) در صورتی که در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب علامت < 0 به صورت > 0 نوشته شده است که به نظر می‌رسد، اشتباهی چاپی رخ داده باشد و به جای علامت < 0 از علامت > 0 استفاده شده است. در واقع، کلیه مشتقات تابع $f(x) = \frac{x}{ln(1-x)}$ برای $0 < x < 1$ اکیداً مثبت هستند. مترجم.

۲. مسأله ۶ در برگردان چاپ اول کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، و از متن انگلیسی چاپ دوم آن به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

$$\iint_P f(z)\,dx\,dy = \pi r^2 f(0)$$

به طریقی مشابه، نشان دهید که، اگر $m \neq n$ ، آن‌گاه :

$$\iint_P z^n \bar{z}^m\,dx\,dy = 0$$

$$\iint_P |z|^{2n}\,dx\,dy = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}$$

۴. اصل ادامه تحلیلی

(۱. ۴ . ۹) فرض کنیم P و Q دو چند قرصی باز با مراکز a و b در $\mathbf{K}^p$ باشند، به‌طوری که $P \cap Q \neq \varnothing$ ، و فرض کنیم سری توانی $\left(c_{n_1 \dots n_p}(x_1-a_1)^{n_1} \dots (x_p-a_p)^{n_p}\right)$ نسبت به $x_i - a_i$ها روی P مطلقاً جمع‌پذیر و مجموع آن برابر $f(x)$ باشد، و سری توانی $\left(d_{n_1 \dots n_p}(x_1-b_1)^{n_1} \dots (x_p-b_p)^{n_p}\right)$ نسبت به $x_i - b_i$ها روی Q مطلقاً جمع پذیر و مجموع آن برابر $g(x)$ باشد. اگر یک زیر مجموعه باز غیرتهی U از $P \cap Q$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x \in U$ ، $f(x) = g(x)$، در این صورت، برای هر $x \in P \cap Q$ ، $f(x) = g(x)$.

فرض کنیم $u \in U$ ، و v یک نقطه دلخواه از $P \cap Q$ باشد. در این‌صورت، طبق (۱. ۱. ۹) ، پاره‌خطی که u را به v وصل می‌کند، در $P \cap Q$ قرار خواهد گرفت. فرض کنیم :

$$h(t) = f(u + t(v-u)) - g(u + t(v-u))$$

که در آن t عددی حقیقی است. طبق (۲. ۳. ۹) ، $h(t)$ تابعی است تحلیلی از t ، روی فاصله‌ای باز مانند I ، که شامل $[0,1]$ است. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای بسته از فاصله $[0,1]$ باشد که از t هایی تشکیل شده است که برای $0 \leq s \leq t$ ، $h(s) = 0$. طبق فرض، یک همسایگی باز 0 در $[0,1]$ وجود دارد که مشمول A است، و بنابراین، $\rho = \text{l.u.b. } A$ مسلماً در شرط $\rho > 0$ صدق خواهد کرد. ثابت می‌کنیم $\rho = 1$ که در این صورت (۱. ۴ . ۹) نیز ثابت خواهد شد. نخست یادآوری می‌کنیم که، برای $0 \leq t < \rho$ ، $h(t) = 0$ ، و بنابراین، طبق خاصیت پیوستگی $h(\rho) = 0$. چون h در نقطه ρ تحلیلی است، یک سری توانی بر حسب $t - \rho$ موجود است، به‌طوری که برای $|t-\rho| < \alpha$ ، با $\alpha > 0$ ، همگرا است، و مجموع آن برای $|t-\rho| < \alpha$ برابر $h(t)$ است. اما، طبق فرض، برای $0 \leq t \leq \rho$ ، $h(t) = 0$. از اصل صفرهای تنها (قضیه (۵ . ۱. ۹) را ببینید). نتیجه می‌شود، برای $|t-\rho| < \alpha$ ، $h(t) = 0$ ، که اگر $\rho < 1$ باشد، با تعریف ρ در تناقض است.

(۲. ۴. ۹) («اصل ادامه تحلیلی»[1]) فرض کنیم $A \subset K^p$ یک مجموعه باز همبند، و f و g دو تابع تحلیلی از A به E باشند. اگر زیر مجموعه‌ای غیرتهی و باز مانند U از A وجود داشته باشد، به‌طوری که روی U ، $f(x) = g(x)$، آنگاه برای هر $x \in A$ ، $f(x) = g(x)$.

فرض کنیم B درون مجموعه نقاط $x \in A$ باشد که $f(x) = g(x)$. واضح است که B باز و طبق فرض غیرتهی است. ثابت می‌کنیم که B در A بسته نیز هست، و چون A همبند است، بنابراین $B = A$ خواهد بود (بخش (۱۹. ۳) را ببینید). فرض کنیم $a \in A$ یک نقطه چسبیدگی B باشد. چون توابع f ، g تحلیلی هستند، یک چند قرصی باز P با مرکز a واقع در A موجود است، به‌طوری که روی P ، $f(x)$ و $g(x)$ برابر با مجموع سری‌های توانی مطلقاً جمع‌پذیری بر حسب $x_i - a_i$ $(1 \le i \le p)$ هستند. اما، طبق تعریف، $P \cap B$ شامل یک چند قرصی باز U است، به طوری‌که روی U , $f(x) = g(x)$. با به کارگیری قضیه (۱. ۴. ۹) نسبت به $P = Q$ نتیجه می‌گیریم روی P ، $f(x) = g(x)$، به عبارت دیگر $P \subset B$، و به ویژه $a \in B$ ، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

برای $p = 1$ قضیه (۲. ۴. ۹) را می‌توان به شکل قوی‌تر زیر درآورد:

(۳. ۴. ۹) فرض کنیم $A \subset K$ زیرمجموعه باز همبندی از K باشد، و f و g دو تابع تحلیلی از A به E باشند. اگر زیر مجموعه فشرده‌ای مانند H از A موجود باشد، به‌طوری‌که مجموعه نقاط $x \in H$ که $f(x) = g(x)$ است، مجموعه‌ای نامتناهی مانند M باشد، آن‌گاه، برای هر $x \in A$ ، $f(x) = g(x)$.

فرض کنیم (z_n) دنباله‌ای نامتناهی از نقاط متمایز M باشد. چون H فشرده است، دنباله (z_n) دارای نقطه‌ای حدی مانند $b \in H$ است. بنابراین، هرگوی P به مرکز b واقع در A ، شامل تعدادی نامتناهی از نقاط M است. اما، می‌توان فرض کرد که f و g برابر سری‌های توانی همگرایی بر حسب $z - b$ روی گوئی مانند $P \subset A$ به مرکز b هستند. از اصل صفرهای تنهای[2] (۵ . ۱. ۹) نتیجه می‌شود که، روی P ، $f(x) = g(x)$ ، و با به کارگیری (۲. ۴. ۹) حکم ثابت می‌شود.

برای $K = C$ می توان قضیه (۲. ۴. ۹) را نیز به شکل قوی‌تر زیر درآورد :

(۴. ۴. ۹) فرض کنیم $A \subset C^p$ یک مجموعه باز همبند باشد، و f و g دو تابع تحلیلی از A به فضای مختلط باناخ E باشند. اگر U زیرمجموعه بازی از A ، و b نقطه‌ای از U باشد، و روی مجموعه $U \cap (b + R^p)$ ، $f(x) = g(x)$ باشد، آن‌گاه، برای هر $x \in A$ ، $f(x) = g(x)$.

---

1 . Principle of analytic continuation = Принцип аналитического продолжения

۲. شماره اصل صفرهای تنها (۵ . ۱ . ۹) است، که در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به اشتباه (۶ . ۱ . ۹) نوشته شده است، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

با یک انتقال، می‌توان فرض کرد، $b=0$. فرض کنیم $h=f-g$ و P یک چند قرصی در C^p، با مرکز ۰ ، و واقع در U باشد، و چنان باشد که، رویP ، $h(z)$ برابر مجموع یک سری توانی مطلقاً جمع‌پذیر مانند $(c_\nu z^\nu)$ باشد. اکنون مجموعه $\mathrm{P}\cap\mathbf{R}^p$ یک چند قرصی در $\mathbf{R}^p$ است، و روی $\mathrm{P}\cap\mathbf{R}^p$ ، $h(x)=0$. از این مطلب طبق (۶ . ۱. ۹) نتیجه می‌شود، برای هر ν ، $c_\nu=0$ ، و بنابراین، روی P ، $h(z)=0$، و با به کارگیری قضیه (۲. ۴. ۹) حکم ثابت می‌شود.

فرض کنیم $\mathrm{A}\subset\mathbf{K}^p$ یک مجموعه باز همبند باشد. گوییم، زیر مجموعه $\mathrm{M}\subset\mathrm{A}$ یک **مجموعه یکتایی**[1] (U- مجموعه) است. اگر هر دو تابع تحلیلی و معین روی A که روی M بر هم منطبق هستند، روی A بر هم منطبق باشند. قضیه‌های (۲. ۴. ۹) ، (۳. ۴. ۹) و (۴. ۴. ۹) نشان می‌دهند که، زیر مجموعه غیرتهی باز U از A ، یا اشتراک $\mathrm{U}\cap(b+\mathbf{R}^p)$ (اگر غیرتهی باشد)، یا برای $p=1$ یک زیرمجموعه فشرده نامتناهی از A مجموعه‌های یکتایی هستند. در بخش ۹. ۹ برای $\mathrm{K}=\mathrm{C}$ با مثالی دیگر از U- مجموعه‌ها برخورد خواهیم کرد.

قضیه قبلی نشان می‌دهد که، اگر یک زیرمجموعه باز همبند $\mathrm{A}\subset\mathbf{C}^p$ چنان باشد که $\mathbf{A}\cap\mathbf{R}^p\neq\varnothing$، آن‌گاه، هر تابع تحلیلی f روی A توسط مقادیرش در $\mathrm{A}\cap\mathbf{R}^p$ کاملاً مشخص می‌شود. تحدید تابع f به $\mathrm{A}\cap\mathbf{R}^p$ تابعی تحلیلی است، اما، در حالت کلی، یک تابع تحلیلی روی $\mathrm{A}\cap\mathbf{R}^p$ را نمی‌توان به تابعی تحلیلی روی A گسترش داد. با همه اینها، نتیجه ضعیف‌تر زیر برقرار است :

(۵. ۴. ۹) فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط، A یک زیر مجموعه باز R^p ، و f یک نگاشت تحلیلی از A به E باشد. در این صورت، یک مجموعه باز $\mathrm{B}\subset\mathrm{C}^p$ موجود است، به‌طوری که $\mathrm{B}\cap\mathrm{R}^p=\mathrm{A}$، و نیز نگاشتی تحلیلی مانند g از B به E موجود است، به طوری‌که g گسترشی از f است.

در واقع، برای هر نقطه $a=(a_1,\dots,a_p)\in\mathrm{A}$ ، یک چند قرصی باز $\mathbf{P}_a$ در $\mathbf{R}^p$ موجود است، که با روابط $|x_i-a_i|<r_i$ $(1\le i\le p)$ تعریف شده، در A واقع است، و چنان است که، روی P_a ، $f(x)$ برابر مجموع یک سری توانی مطلقاً جمع پذیر به صورت :

$$\left(c_{n_1\dots n_p}(x-a_1)^{n_1}\dots(x_p-a_p)^{n_p}\right)$$

است. فرض می‌کنیم Q_a یک چند قرصی باز در C^p با مرکز a و شعاع‌های r_i باشد. در این صورت، طبق (۲. ۱. ۹) ، سری توانی $\left(c_{n_1\dots n_p}(z_1-a_1)^{n_1}\dots(z_p-a_p)^{n_p}\right)$ روی Q_a مطلقاً جمع‌پذیر است. فرض کنیم $g_a(z)$ مجموع آن باشد. اگر a و b دو نقطه A باشند، به‌طوری که $\mathrm{Q}_a\cap\mathrm{Q}_b\neq\varnothing$، در این صورت، $\mathrm{P}_a\cap\mathrm{P}_b=(\mathrm{Q}_d\cap\mathrm{Q}_b)\cap\mathbf{R}^p$ غیرتهی است، و روی $\mathrm{P}_a\cap\mathrm{P}_b$ ، داریم :

1 . Set of uniqueness = Множество единственности

$$g_a(x) = g_b(x) = f(x).$$

علاوه بر این، طبق (۱. ۱. ۹) ، مجموعه $Q_a \cap Q_b$ همبند است، و در نتیجه، طبق (۴. ۴. ۹) ، روی $Q_a \cap Q_b$، $g_a(z) = g_b(z)$. اکنون، با انتخاب $B = \bigcup_{a \in A} Q_a$، و با تعریف $g(z)$ روی $Q_a (a \in A)$ به‌صورت $g(z) = g_a(z)$ ، تحلیلی بودن g از (۱. ۳. ۹) نتیجه می‌شود.

اثبات قضیه (۵ . ۴. ۹) نشان می‌دهد که، وقتی f یک تابع **تام** روی $\mathbf{R}^p$ باشد، آن‌گاه، می‌توان f را به یک **تام** روی $\mathbf{C}^p$ گسترش داد ، و چنین تابعی طبق (۴. ۴. ۹) یکتا است.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم $P(u_1, ..., u_{r+1})$ یک چند جمله‌ای با ضرایبی در K باشد، و α_1 ، ... ، α_r عناصری از K باشند که برای $1 \le i \le r$ در رابطه $|\alpha_i| < 1$ صدق می‌کنند، و فرض کنیم گویی مانند B در K با مرکز 0، و یک تابع اسکالر تحلیلی روی B مانند f موجود باشند، به‌طوری که برای هر $z \in B$ ، $f(z) = P(z, f(\alpha_1 z), ..., f(\alpha_r z))$. نشان دهید که f را می‌توان به یک تابع تحلیلی مانند g روی سرتاسر مجموعه K گسترش داد، که روی K در معادله تابعی مشابهی صدق می‌کند. (از (۲. ۴. ۹) استفاده کنید).

(b) فرض کنیم $K = C$ ، و عددی حقیقی مانند β و تابعی اسکالر مانند f که روی مجموعه $\mathscr{R}(z) > \beta$ تحلیلی است، موجود باشد، به‌طوری که f روی مجموعه $\mathscr{R}(z) > \beta$ در معادله $f(z) = P(z, f(z+a_1), ..., f(z+a_r))$ ، که در آن a_i ها اعدادی مختلط با $\mathscr{R}(a_i) > 0$ می‌باشند، صدق کند. نشان دهید که، f را می‌توان به تابعی تحلیلی روی C مانند g گسترش داد، که در معادله تابعی مشابهی صدق می‌کند.

(c) نتایج قبل را برای توابع با هر تعداد دلخواه از متغیرها تعمیم دهید.

۲. فرض کنیم D یک مجموعه باز همبند در $\mathbf{C}^p$، و D' تصویر D تحت نگاشت :

$$(z_1, ..., z_p) \to (\bar{z}_1, ..., \bar{z}_p)$$

باشد؛ و فرض کنیم f یک تابع مختلط تحلیلی روی D ، و $D \cap R^p$ مجموعه‌ای غیرتهی ، $D \cap D'$ مجموعه‌ای همبند،[۱] و f روی $D \cap R^p$ مقادیر حقیقی بگیرد. نشان دهید که f را می‌توان به یک تابع تحلیلی g روی $D \cup D'$ گسترش داد. (تابع $(z_1, ..., z_p) \to f(\bar{z}_1, ..., \bar{z}_p)$ را روی D' مورد بررسی قرار داده، و از (۴. ۴. ۹) استفاده کنید).

۵. مثال‌هایی از توابع تحلیلی ؛ تابع نمایی ؛ عدد π

(۱. ۵ . ۹) فرض کنیم $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله‌ای در K^p باشند، به طوری‌که Q متحد صفر نباشد. در این صورت، $P(z) / Q(z)$ روی مجموعه (باز) تشکیل شده از نقاطی که $Q(z) \neq 0$ (یا، مجموعه‌ای نقاطی

---

۱. به شرط همبند بودن $D \cap D'$ در چاپ اول متن روسی کتاب اشاره‌ای نشده است، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب این شرط جـزء شرایط مسئله است. مترجم.

که تابع $P(z)/Q(z)$ روی آن تعریف شده است)، تحلیلی است.

واضح است که، هر چند جمله‌ای یک تابع تام است. طبق (۲. ۳. ۹) ، تنها باید نشان دهیم که $\frac{1}{z}$ برای $z \neq 0$ تحلیلی است. اما، اگر $z_0 \neq 0$ ، آن‌گاه ، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0(1+\frac{z-z_0}{z_0})} = \frac{1}{z_0} - \frac{z-z_0}{z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{z_0^2} + \ldots + (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{z_0^{n+1}} + \ldots$$

که در آن سری توانی سمت راست به ازاء $|z-z_0| < |z_0|$ مطلقاً جمع پذیر است، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

اکنون تابع e^x را وقتی x متغیری **حقیقی** است، مورد بررسی قرار داده، ثابت می‌کنیم که e^x تابعی تام است. از فرمول تیلور (۳. ۱۴. ۸) ، برای هر عدد طبیعی n ، با استفاده از بخش (۸ . ۸) ، به نتیجه زیر می‌رسیم :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

از آنجا که طبق (۳. ۵ . ۸) تابع e^x صعودی است ، برای $|t| \leq |x|$ ، داریم $|e^t| \leq e^{|x|}$. بنابراین[1] :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

اما، اگر n_0 عددی صحیح باشد، که در رابطه $|x| < n_0$ صدق می‌کند، آن‌گاه، برای $n_0 < n$ ، خواهیم داشت :

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{x}{n_0}\right|^{n-n_0} \frac{|x|^{n_0}}{n_0!}$$

بنابراین، برای هر $x \in \mathbf{R}$ ،

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

و طبق (۲. ۱. ۹) ، سری فوق روی هر فاصله فشرده به‌طور نرمال همگرا است.

با استفاده از تبصره بعد از اثبات قضیه (۵ . ۴ . ۹) ، می‌توان روی C تابعی تام مانند e^z (که آن را به صورت $\exp z$ نیز می‌نویسند) **تعریف** کرد که برابر مجموع سری توانی $(z^n/n!)$ باشد. داریم :

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب در رابطه $\frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$ به جای $(n+1)!$ نوشته شده است $(n-1)!$ که باید آن را اشتباه چاپی بـه حساب آورد، این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \tag{۹ . ۵ .۲}$$

زیرا، هر دو طرف تساوی فوق توابعی تام روی $\mathbf{C}^2$ هستند، که روی $\mathbf{R}^2$ بر هم منطبق هستند، و با به کارگیری (۴ . ۴ . ۹) نتیجه می‌گیریم که، تساوی فوق روی $\mathbf{C}^2$ نیز برقرار است.

برای عدد حقیـقی x ، e^{-ix} مزدوج مختلط e^{ix} است، زیرا $(-ix)^n$ مزدوج مختلط $(ix)^n$ است از (۲. ۵ . ۹) نتیجه می‌شود که $|e^{ix}| = 1$. برای عدد حقیقی x ، تعریف می‌کنیم :

$$\sin x = \mathscr{I}(e^{ix}) \ , \cos x = \mathscr{R}(e^{ix}).$$

طبق (۳. ۳. ۹) ، توابع $\sin x$ ، $\cos x$ توابعی تام از متغیر حقیقی x هستند، و رابطه $|e^{ix}| = 1$ هم ارز رابطه $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ می‌باشد، که از آن برای هر عدد حقیقی x نتیجه می‌شود $|\cos x| \leq 1$ ، $|\sin x| \leq 1$.
به علاوه، داریم:

$$\mathrm{D}(e^z) = e^z \tag{۹ . ۵ .۳}$$

زیرا، طرفین تساوی فوق (طبق (۵ . ۳. ۹)) توابعی تام روی C هستند، که روی $\mathbf{R}$ برهم منطبق‌اند. به‌ویژه، با توجه به تبصره بعد از گزاره (۱. ۴. ۸) ، برای هر عدد حقیقی x ، $\mathrm{D}(e^{ix}) = ie^{ix}$ ، و بنابراین :

$$\mathrm{D}(\cos x) = -\sin x \quad , \quad \mathrm{D}(\sin x) = \cos x \tag{۹ . ۵ .۴}$$

از تعریف $\sin x$ ، $\cos x$ وقتی x عددی حقیقی باشد، نتیجه می‌شود $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ و $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. از این فرمول‌ها می‌توان برای تعریف $\cos z$ و $\sin z$ وقتی z **عددی مختلط** باشد، با تبدیل x به z درسمت راست تساوی‌های فوق، استفاده نمود. با این تعریف‌ها، فرمول‌های (۴ . ۵ . ۹) برای مقادیر مختلط x باز معتبر باقی می‌مانند.

(۵ . ۵ . ۹) عددی مانند $\pi > 0$ موجود است، به‌طوری‌که ، جواب‌های معادله $e^z = 1$ اعداد $2n\pi i$ هستند (n عددی صحیح مثبت[1] یا منفی است).

اگر $z = x + iy$ آن‌گاه $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$ ، بنابراین، از رابطه $e^z = 1$ نتیجه می‌شود $x = 0$ و یا $z = iy$. ابتدا ثابت می‌کنیم که :

(۱. ۵ . ۵ . ۹) مجموعه نقاط $x \geq 0$ که $\cos x = 0$ ، غیرتهی است.

---

۱. یادآوری می‌کنیم که، در این کتاب ژان دیودنه عدد x را اکیداً مثبت نامیده است هرگاه $x > 0$ و آن را مثبت نامیـده هرگـاه $x \geq 0$ ایـن تعریف کمی متفاوت از تعریف‌های رایج در بسیاری از کتاب‌های دیگر است، و در قضیه فوق $n = 0$ نیز می‌تواند باشد. مترجم.

داریم :

$$1-\cos 2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!}\,(1-\frac{4}{(4k+3)(4k+4)})$$

و واضح است که کلیه جملات سری همگرای سمت راست تساوی فوق غیرمنفی است ، بنابراین :

$$1-\cos 2\geq(1-\frac{1}{3})\frac{2^2}{2!}=\frac{4}{3}>1$$

به عبارت دیگر $\cos 2<0$. در نتیجه، طبق (۸ . ۱۹ . ۳) ، تابع پیوسته $\cos x$ در نقطه‌ای از فاصله باز $]0,2[$ برابر صفر خواهد شد.[1]

چون $\cos x$ تابعی پیوسته است، D مجموعه ریشه‌های معادله $\cos x=0$ که در شرط $x\geq 0$ صدق می‌کنند، طبق (۱. ۱۵ .۳) مجموعه‌ای بسته است، که شامل 0 نیست. بنابراین، D شامل کوچک‌ترین عنصری است، که آن را به $\frac{\pi}{2}$ نشان خواهیم داد. داریم $\sin^2\frac{\pi}{2}=1$، و چون $\sin x$ برای $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ صعودی است، $\sin\frac{\pi}{2}=1$ ، و $e^{i\pi/2}=i$. از این رابطه نتیجه می‌شود $e^{2\pi i}=1$ ، و بنابراین برای هر عدد صحیح n، $e^{2\pi ni}=1$ ، و طبق (۲. ۵ . ۹) ،

$$e^{z+2n\pi i}=e^{z} \tag{۹ . ۵ . ۶}$$

برای به پایان رساندن اثبات (۵ . ۵ . ۹) تنها باید نشان دهیم که معادله $e^{ix}=1$ در فاصله $]0,2\pi[$ ریشه‌ای ندارد. اما، از (۲. ۵ . ۹) رابطه $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$ به‌دست می‌آید، در نتیجه برای $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$ ، $\cos x\leq 0$، و چون $\cos(x+\pi)=-\cos x$، برای $0<x<2\pi$ ، $\cos x<1$، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

(۹ . ۵ .۷) نگاشت $x\to e^{ix}$ یک بیژکسیون پیوسته از هر فاصله $[a,a+2\pi[$ به روی «دایره واحد» U به

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، قضیه فوق به‌صورت زیر اثبات شده است :

فرض کنیم حکم برقرار نباشد. در این‌صورت، چون $\cos 0=1$ ، برای هر $x\geq 0$ باید داشته باشیم $\cos x>0$. بنابراین، طبق (۴. ۵ . ۹) و (۳. ۵ . ۸) ، تابع $\sin x$ باید اکیداً صعودی باشد، در نتیجه، برای هر $x>0$ باید اکیداً مثبت باشد، و طبق (۴. ۵ . ۹) و (۳. ۵ . ۸) ، تابع $\cos x$ به ازاء $x\geq 0$ باید اکیداً نزولی باشد. قبل از هر چیز، خاطرنشان می‌کنیم که، ممکن نیست که برای هر $x\geq 0$ نامساوی $\cos x\geq 1/2$ برقرار باشد. در واقع در این‌صورت، از قضیه مقدار میانگین (۳. ۵ . ۸) نتیجه می‌شود که، برای هر $x\geq 0$ ، $\sin x\geq x/2$ ، و این نامساوی برای $|x|>2$ با نامساوی $|\sin x|\leq 1$ در تناقض است. بنابراین، فرض کنیم که $\cos a<1/2$. در این‌صورت، برای $x\geq a$ نیز $\cos x<1/2$ ، و در نتیجه، به ازاء $x\geq a$ ، $\sin x\geq 1/2$. اما، از این مطلب با استفاده مجدد از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود : $\cos x-\cos a\leq-\frac{x-a}{2}$. از نامساوی فوق برای مقادیر به حد کافی بزرگ x نتیجه می‌شود $\cos x\leq 0$ و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

معادله $|z| = 1$ در C ، و یک هومیومورفیسم از فاصله باز $]a , a + 2\pi[$ به روی مکمل نقطه e^{ia} در U است.

نگاشت $x \to e^{ix}$ به وضوح پیوسته، و طبق (۲. ۵. ۹) و (۵. ۵. ۹) یک‌به‌یک است. برای اثبات پوشا بودن این نگاشت روی فاصله $]a , a+2\pi[$ ، به وضوح، می‌توان فرض کرد $a = 0$ زیرا، اگر $\zeta \in U$، آنگاه ζe^{-ia} نیز متعلق به U خواهد بود. فرض کنیم $\zeta = \alpha + i\beta$ ، $\alpha^2+\beta^2=1$. چون $|\alpha| \leq 1$ و روی فاصله $[0 , \pi]$ ، $\cos x$ پیوسته است، و $\cos 0 = 1$ ، $\cos \pi = -1$، طبق قضیه بولتزانو (۸. ۱۹. ۳) ، یک $y \in [0, \pi]$ موجود است ، به‌طوری‌که $\cos y = \alpha$. بنابراین $\sin y = \pm \beta$. اگر $\sin y = \beta$ به نتیجه مطلوب رسیده‌ایم ، در غیر این‌صورت ، داریم :

$$\cos (2\pi-y)=\cos y=\alpha \quad و \quad \sin(2\pi-y)=-\sin y=\beta \ .$$

فرض کنیم V مکمل e^{ia} درU باشد، و $\zeta_0=e^{ib} \in V$ که در آن $a < b < a+2\pi$. اگر نگاشت وارون تحدید $x \to e^{ix}$ به $]a, a+2\pi[$ ، در نقطه ζ_0 پیوسته نباشد، آنگاه ، دنباله‌ای مانند (x_n) در $]a , a + 2\pi[$ وجود خواهد داشت، که عناصر آن متعلق به مکمل یک همسایگی b می‌باشند، و چنان هستند که $\lim\limits_{n\to\infty} e^{ix_n}=\zeta_0$ ؛ اما، در این‌صورت، طبق (۱. ۱۶. ۳) ، زیردنباله‌ای مانند (x_{n_K}) در مجموعه فشرده $[a , a+2\pi]$ موجود خواهد بود که به سمت حدی مانند $c \neq b$ میل می‌کند، و چون $e^{ic} \neq e^{ib}$ به یک تناقض می‌رسیم. (اثبات دیگری در گزاره (۱. ۳. ۱۰) بیان شده است).

(۸. ۵. ۹) دایره واحد U همبند است.

مطلب فوق از (۷. ۵. ۹) ، (۱. ۱۹. ۳) و (۷. ۱۹. ۳) نتیجه می‌شود.

(۹. ۵. ۹) («اصل ماگزیمم»)[1] فرض کنیم $(c_\nu z^\nu)$ یک سری توانی با ضرایب مختلط باشد، که روی چند قرصی باز $P \subset C^p$ با مرکز 0 مطلقاً جمع پذیر، و مجموع آن برابر$f(z)$ است، و فرض کنیم یک گوی باز $B \subset P$ به مرکز 0 موجود باشد، به طوری‌که برای هر $z \in B$ ، $|f(z)| \leq |f(0)|$. در این صورت، برای هر اندیس $\nu \neq (0,\dots,0)$ ، $c_\nu = 0$. به عبارت دیگر، تابع f ثابت است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که، اگر قضیه برای $p=1$ درست باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی p درست خواهد بود. در واقع، برای هر $z=(z_1,\dots,z_p) \in P$ تابع یک متغیره مختلط، $g(t)=f(tz_1,\dots,tz_p)$ که برای $|t| < 1+\varepsilon$ وقتی ε به حد کافی کوچک باشد، تحلیلی است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون برای مقادیر به حد کافی کوچک t ، $|g(t)| \leq |g(0)|$ ، پس ، طبق فرض، خواهیم داشت $g(t)=g(0)$

1 . Principle of maximum = Принцип максимума

و به‌ویژه $f(0) = g(1) = f(z_1, \dots, z_p)$. برای $p=1$ می‌توان فرض کرد $c_0 \neq 0$ ، چون، در غیر این صورت، طبق (۶ . ۱ . ۹) ، نتیجه واضح خواهد بود. فرض کنیم اندیس‌هایی مانند $n > 0$ موجود باشند، به‌طوری که برای آنها $c_n \neq 0$ ، و m کوچک‌ترین چنین اندیس‌هایی باشد. می‌توان نوشت :

$$f(z) = c_0(1 + b_m z^m + z^m h(z))$$

که در آن $b_m \neq 0$ ، h روی P تحلیلی است و $h(0) = 0$. فرض کنیم $r > 0$ چنان باشد که گوی $|z| \leq r$ در B واقع باشد و برای $|z| \leq r$ ، $|h(z)| \leq \frac{1}{2}|b_m|$ (۳. ۱. ۹ را ببینید). می‌توان نوشت $b_m = |b_m|\zeta$ ، که در آن $|\zeta| = 1$. طبق (۷. ۵ . ۹) ، عددی حقیقی مانند t موجود است، به‌طوری که $e^{mit} = \zeta^{-1}$. بنابراین، برای $z = re^{it}$ ، خواهیم داشت :

$$|1 + b_m z^m + z^m h(z)| = |1 + |b_m| r^m + z^m h(z)| \geq 1 + \frac{1}{2}|b_m| r^m$$

که در تناقض با این فرض است که، روی B ، $|f(z)| \leq c_0$.

اگر به‌جای $\mathbf{C}^p$ ، $\mathbf{R}^p$ گذاشته شود، قضیه (۹ . ۵ . ۹) درست نخواهد بود، این مطلب را می‌توان در سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$ (برای $|z| \leq 1$) ثابت نمود.

(۱۰. ۵ . ۹) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی مختلط باشد، که روی زیر مجموعه باز $A \subset \mathbf{C}^p$ تعریف شده، و روی هیچ مؤلفه همبند A ثابت نیست. برای هر زیر مجموعه فشرده $H \subset A$، مجموعه نقاط $z \in H$ که $|f(z)| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ (طبق (۱۰. ۱۷. ۳)، مجموعه چنین نقاطی غیرتهی است.) نقاطی از مرز H هستند.

مطلب فوق نتیجه فوری (۹. ۵ . ۹) و اصل ادامه تحلیلی (۲ . ۴. ۹) است.[1]

مسائل

۱. نشان دهید که، اگر $\mathscr{R}(z) \leq 0$ ، آنگاه برای هر عدد طبیعی $n > 0$ ،

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z^n}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}\right)\right| \leq \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

(فرمول تیلور (۲ . ۱۴ . ۸) را برای نگاشت $t \to e^{zt}$ به‌کار برید).

---

۱. شماره «اصل ادامه تحلیلی» (۲ . ۴ . ۹) است، که در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب اشتباهاً (۱ . ۴ . ۹) نوشته شده است، این اشتباه چـاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲ . ثابت کنید، که برای هر عدد حقیقی x،

$$|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!})| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

و علامت تفاضل داخل قدرمطلق سمت چپ با علامت $(-1)^{n+1}$ یکی است. به طریق مشابه :

$$|\sin x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!})| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

و علامت تفاضل داخل قدر مطلق سمت چپ با علامت $(-1)^n x$ یکی است. (از استقراء روی n استفاده کنید).

۳ . (a) فرض کنیم U یک زیر مجموعه باز به‌طور نسبی فشرده از $\mathbf{C}^p$ ، و f یک تابع مختلط تحلیلی روی U باشد، که روی هیچ مؤلفه همبند U ثابت نیست، و فرض کنیم یک عدد $M > 0$ موجود باشد، به طوری که برای هر نقطه مرزی x از U ، و هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی V از x موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $z \in U \cap V$ ، $|f(z)| \le M + \varepsilon$. نشان دهید که، برای هر $z \in U$ ، $|f(z)| \le M$ ، و تساوی در هیچ نقطه‌ای از U حاصل نمی‌شود. (از (۹ . ۵ . ۱۰) و فشردگی مرز U استفاده کنید) .

(b) فرض کنیم U مجموعه‌ای باز روی C باشد، که با شرایط زیر تعریف شده است :

$$\mathscr{R}(z) > 0 \ , -\pi/2 < \mathscr{I}(z) < \pi/2$$

نشان دهید که، تابع تام $\exp(\exp z)$ روی مرز U کراندار است، اما، روی U کراندار نیست.

۴ . (a) فرض کنیم E فضای باناخ $\mathbf{C}^2$ با نرم $\|(z_1, z_2)\| = \sup(|z_1|, |z_2|)$ باشد. تابع $z \to f(z) = (1, 0) + (0, 1) z$ نگاشتی تحلیلی از C به $\mathbf{C}^2$ است، که برای $|z| < 1$ ، $\|f(z)\|$ ثابت است.

(b) قضیه (۹ . ۵ . ۱۰) را برای تابع تعریف شده روی یک مجموعه باز $A \subset \mathbf{C}^p$ ، که مقادیر آن عناصری از یک فضای هیلبرت مختلط است گسترش دهید. (اگر $\|f(z)\|$ به ماکزیممی در $z_0 \in A$ دست یابد، تابع مختلط $z \to (f(z) | f(z_0))$ را مورد بررسی قرار دهید؛ مقایسه کنید با (a).)

۵ . فرض کنیم U یک مجموعه باز در $\mathbf{C}^p$، P یک چند قرصی بسته در U با مرکز $a = (a_1, \dots, a_p)$ و شعاع‌های r_k $(1 \le k \le p)$ و f یک تابع مختلط تحلیلی روی U باشد، و فرض کنیم روی مجموعه $S = \{(z_i) | |z_i - a_i| = r_i , 1 \le i \le p\}$ (یعنی، روی حاصل‌ضرب دو ایر $|z_i - a_i| = r_i$ $((1 \le i \le p))$ ، $|f(z)| \le M$. نشان دهید که ، برای هر $z \in P$ ، $|f(z)| \le M$.

(از استقراء روی p با بررسی تابع $(z_2, \dots, z_p) \to f(b_1, z_2, \dots, z_p)$ برای $|b_1 - a_1| = r_1$ استفاده کنید).

۶ . فرض کنیم $P(x, y)$ یک چندجمله‌ای دو متغیره مختلط، با ضرایب مختلط، و بالاترین درجه m نسبت به x، و بالاترین درجه n نسبت به y باشد، و فرض کنیم برای مقادیر حقیقی x ، y که $-1 \le x \le 1$ ، $-1 \le y \le 1$ ، $|P(x, y)| \le M$. نشان دهید که، برای مقادیر حقیقی x ، y که $|x| \ge 1$ ، $|y| \ge 1$ ، $|P(x, y)| \le M(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^m (|y| + \sqrt{y^2 - 1})^n$.

(از مسأله ۵ برای تابع $s^m t^n P(\frac{1}{2}(s + \frac{1}{s}), \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}))$ وقتی $|s| < 1$ ، $|t| < 1$ باشد، استفاده کنید).

مطلب فوق را برای کثیرالجمله‌های با هر تعداد دلخواه متغیر تعمیم دهید.

۷ . (a) فرض کنیم $f(z)$ یک تابع تحلیلی یک متغیره مختلط روی دیسک B به معادله $|z| < 1$ باشد، و فرض کنیم روی B ، $|f(z)| < M$ و $f(0) = 0$. نشان دهید که روی B ، $|f(z)| \le M|z|$ (لم شوارتز)[1] چه موقع تساوی برقرار است؟

---

1 . Schwarz's lemma = Лемма Шварца

(تابع $f(z)/z$ را که روی B تحلیلی است، مورد بررسی قرار دهید).

(b) روی $\mathbf{C}^p$ نرم $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_p|^2)^{1/2}$ را وقتی $z = (z_1, \dots, z_p)$ باشد (چنین نرمی را «**نرم هرمیتی**» می‌نامند) ، مورد بررسی قرار دهید. فرض کنیم B گوی $\|z\| < 1$ برای این نرم باشد، و f یک تابع تحلیلی مختلط روی B باشد، به‌طوری که $f(0) = 0$ و روی B، $|f(z)| \le M$. نشان دهید که، روی B ، $|f(z)| \le M \|z\|$. (با استفاده از (a) تابع یک متغیر مختلط $t \to f(z_1 t, \dots, z_p t)$ را مورد بررسی قرار دهید).

۸ . (a) روی میدان اعداد مختلط، فرض کنیم R_- («**نیم‌خط منفی**») مجموعه‌ای باشد که با روابط $\mathscr{I}(z) = 0$ ، $\mathscr{R}(z) \le 0$ تعریف شده است، و فرض کنیم F مکمل R_- در C باشد. از طرف دیگر، فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد که با رابطه $-\pi < \mathscr{I}(z) < \pi$ تعریف شده است. نشان دهید که، نگاشت $z \to e^z$ یک **هومیومورفیسم** از S به روی F است. (از (۷ . ۵ . ۹) استفاده کنید). وارون این نگاشت به‌صورت $z \to \log z$ نوشته می‌شود، و «**مقدار اصلی لگاریتم z**» نامیده می‌شود. داریم $\log z = \log|z| + i\,am(z)$ ، که در آن $am(z)$ یکتا عددی مانند θ است که $-\pi < \theta < \pi$ و $z = |z| e^{i\theta}$ (**آرگومان z**). اگر z ، z' ، zz' همگی در F باشند، نشان دهید که، تفاضل $\log(zz') - \log z - \log z'$ برابر $2\pi i$ یا $-2\pi i$ است.

(b) روی گوی B به معادله $|z| < 1$ سری توانی $((-1)^n z^n / n)_{n \ge 1}$ مطلقاً همگرا است. اگر $f(z)$ مجموع آن باشد، نشان دهید که ، $f(z) = \log(1+z)$ ، و نتیجه بگیرید که $\log z$ روی F تحلیلی است. (ملاحظه کنید که، اگر $z \in B$ ، آنگاه $1 + z \in F$. نشان دهید که، $f'(z) = 1/(1+z)$ و نتیجه بگیرید که، وقتی z عددی حقیقی و $-1 < z < 1$ باشد $f(z) = \log(1+z)$. بالاخره، تابع تحلیلی $e^{f(z)}$ را مورد بررسی قرار داده و از (۴ . ۴ . ۹) استفاده کنید[1]).

(c) برای هر عدد مختلط t و هر عدد صحیح $n > 0$، فرض کنیم :

$$\binom{t}{n} = t(t-1)\dots(t-n+1)/n! = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} t^k$$

که در آن c_{kn}ها اعدادی گویا هستند (قرار می‌دهیم $\binom{t}{0} = 1$). نشان دهید که، سری توانی $c_{kn} z^n t^k$ روی $\overset{0}{B} \times C$ مطلقاً جمع‌پذیر است. (ملاحظه کنید که، برای هر عدد $r > 0$ ،

$$(1 + \frac{r}{1})(1 + \frac{r}{2}) \dots (1 + \frac{r}{n}) \le \exp(r(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})) \le a.n^r$$

که در آن a عددی ثابت است). ثابت کنید که، مجموع این سری برابر $\exp(t \log(1+z))$ است. (ابتدا حالتی که z و t حقیقی هستند مورد بررسی قرار داده، از فرمول تیلور (۲ . ۱۴ . ۸) برای تابع $z \to (1+z)^t$ استفاده نموده، سپس ، از (۴ . ۴ . ۹) استفاده کنید). تابع $\exp(t \log(1+z))$ را به‌صورت $(1+z)^t$ نیز می‌توان نوشت. نشان دهید که، اگر t عددی حقیقی باشد $|(1+z)^t| = |1+z|^t$.

(d) اگر $t > 0$ ، نشان دهید که، نگاشت $z \to (1+z)^t$ را می‌توان با پیوستگی روی گوی بسته $|z| \le 1$ گسترش داد. (از یک کران بالا برای $\left|\binom{t}{n}\right|$ مشابه آنچه که در قسمت (c) به دست آوردیم، با توجه به اینکه برای $s > 0$ ،

---

[1] . در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای (۴ . ۴ . ۹) به اشتباه نوشته شده است (۴ . ۹ . ۹) که باید آن را اشتباه چاپی بـه حساب آورد، زیرا، گزاره (۴ . ۹ . ۹) مربوط به قسمت‌های بعدی است و ربطی به موضوع ندارد، این اشتباه، و نتیجه‌گیری انتهای قسمت (b) در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

$1 - s < e^{-s}$ ، استفاده کنید).

۹ . (a) فرض کنیم f_{jk} ($1 \le k \le n$ ، $1 \le j \le m$) توابع اسکالر تحلیلی تعریف شده روی زیر مجموعه باز همبند A از C^p باشند، و α_{jk}ها اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی باشند. نشان دهید که، تابع پیوسته :

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} |f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} |f_{2k}(z)|^{\alpha_{2k}} \dots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$$

نمی‌تواند ماکسیمم نسبی خود را در نقطه‌ای از A به‌دست آورد، مگر این‌که هر یک از حاصل‌ضرب‌های :

$$|f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} \dots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}} \quad (1 \le k \le n)$$

روی A ثابت باشد. (ملاحظه کنید که، اگر $f(z)$ روی A تحلیلی و $f(z_0) \neq 0$ باشد، آنگاه، برای هر عدد حقیقی λ، تابعی مانند $g_\lambda(z)$ که در یک همسایگی z_0 تحلیلی است، موجود است، به طوری که در این همسایگی $|g_\lambda(z)| = |f(z)|^\lambda$؛ برای اثبات از مسأله ۸(c) استفاده کنید).

نتیجه را برای حالتی که α_{jk}ها اعداد حقیقی دلخواه باشند، و هیچ‌یک از توابع f_{jk} روی A برابر 0 نباشد، تعمیم دهید.

(b) نتیجه مسأله ۳(a) را برای تابع $u(z)$ تعمیم دهید.

۱۰ . فرض کنیم $f(z)$ یک تابع تحلیلی یک متغیره مختلط روی مجموعه باز A باشد که با روابط $R_1 < |z| < R_2$ تعریف شده است ($0 \le R_1 \le R_2$). برای هر r که $R_1 < r < R_2$ فرض کنیم $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. نشان دهید که، اگر $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$ ، آنگاه :

$$\log M(r_2) \le \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_3) + \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1)$$

(قضیه سه دایره آدامار)[1] چه موقع تساوی رخ می‌دهد؟ (مسأله ۹ را برای تابع $|f(z)| . |z|^\alpha$ وقتی عدد حقیقی α به نحو مناسبی انتخاب شده مورد استفاده قرار داده، تابع $|f(z)| . |z|^\alpha$ را روی مجموعه $r_1 < |z| < r_3$ مورد بررسی قرار دهید).

۱۱ . روی فضاهای C^p و C^q نرم‌های هرمیتی می‌گذاریم (مسأله ۷ را ببینید). فرض کنیم f یک نگاشت تحلیلی از گوی B به معادله $\|z\| < 1$ در C^p، به C^q باشد. داریم $f = (f_1, \dots, f_q)$ ، که در آن f_kها توابع مختلط تحلیلی روی B هستند. فرض کنیم $f(0) = 0$ ، نشان دهید که، اگر برای هر $z \in B$ ، $\|f(z)\| \le M$ ، آنگاه، برای هر $z \in B$ ، $\|f(z)\| \le M\|z\|$. (برای هر $z \in B$ ، تابع $t \to f_k(tz)/t$ را مورد بررسی قرار داده، از مسائل ۹ و ۳ استفاده کنید). چه موقع تساوی رخ می‌دهد؟

۱۲ . روی C^p نرم هرمیتی قرار می‌دهیم (مسأله ۷ را ببینید). فرض کنیم F و G دو نگاشت تحلیلی از گوی B به معادله $\|z\| < 1$ به C^p باشند، که به‌ترتیب هومیومورفیسم‌هایی از B به روی مجموعه‌های باز $U = F(B)$ و $V = G(B)$ هستند، و فرض کنیم ، نگاشت‌های وارون آنها به ترتیب روی $F(B)$ و $G(B)$ تحلیلی باشند (آخرین شرط در حقیقت از بقیه شرایط نتیجه می‌شود ؛ بخش ۳ . ۱۰ ، مسأله ۲ را ببینید). برای هر r که $0 < r < 1$ ، فرض کنیم B_r گوی $\|z\| < r$ ، و $U_r = F(B_r)$ و $V_r = G(B_r)$ باشد، که به ترتیب زیر مجموعه‌هایی باز از U و V هستند. نشان دهید که، اگر یک نگاشت تحلیلی u از U به V چنان باشد که $u(F(0)) = G(0)$ ، آنگاه برای هر r که $0 < r < 1$ ، $u(U_r) \subset V_r$. (از مسأله ۱۱ استفاده کنید).

1 . Hadamard's three circles theorem = Теорема Адамара о трёх окружностях

۱۳. فرض f یک تابع یک متغیره مختلط روی گوی B به معادله $|z| < \mathbf{R}$ باشد. برای هر r که $0 \leq r < \mathbf{R}$، قرار می‌دهیم

$$A(r) = \sup_{|z| \leq r} \Re(f(z)).$$

(a) نشان دهید که، نگاشت $r \to A(r)$ اگر تابع f ثابت نباشد، اکیداً صعودی است. (تابع $\exp(f(z))$ را مورد بررسی قرار دهید).

(b) نشان دهید که، اگر $A(\mathbf{R}-) < +\infty$ باشد، آنگاه:

$$A(r) \leq \frac{R-r}{R+r} A(0) + \frac{2r}{R+r} A(R-)$$

(از مسأله ۱۲، با $F(z) = Rz$، و $G(z)$ به شکل $(az+b)/(cz+d)$، وقتی ثابت‌های a، b، c، d چنان انتخاب شده باشند که $G(B)$ نیم‌صفحه تعریف شده به‌وسیله $\mathscr{R}(z) < A(R-)$ باشد، استفاده کنید).

۱۴. (a) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز به‌طور نسبی فشرده از $\mathbf{C}^p$، و E یک زیر مجموعه بسته از مرز A باشد، و فرض کنیم یک تابع مختلط g موجود باشد که، در یک همسایگی $\bar{A}$ تحلیلی است، و روی E برابر 0 است، و روی هیچ مؤلفه همبند A متحد 0 نیست. گیریم f یک تابع مختلط تحلیلی روی A باشد که روی A کراندار است، و فرض کنیم عددی مانند M موجود باشد به طوری که، برای هر نقطه مرزی $x \notin E$ از A، و هر $\varepsilon > 0$، یک همسایگی V از x در C^p موجود باشد، به طوری که برای $z \in A \cap V$، $|f(z)| \leq M + \varepsilon$. نشان دهید که، برای هر $z \in A$، $|f(z)| \leq M$ (می‌توان فرض کرد برای $z \in A$، $|g(z)| \leq 1$. (تابع $|f(z)|.|g(z)|^{\alpha}$، که در آن $\alpha > 0$ عددی دلخواه است، مورد بررسی قرار داده، نتیجه مسأله ۹(b) را برای این تابع مورد استفاده قرار دهید).

(b) نشان دهید که، نتیجه (a)، اگر فرض کراندار بودن f روی A حذف شود، درست نخواهد بود (تابع $\exp(\exp(1-z)/z)$ را مورد بررسی قرار داده، و از مسأله ۳(b) استفاده کنید).

۱۵. فرض کنیم $\omega(x)$ یک تابع حقیقی باشد که روی فاصله $]0, +\infty[$ تعریف شده، و در شرایط:

$$\omega(x) > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \omega(x) = +\infty$$

صدق می‌کند. نشان دهید که، اگر تابع مختلط f روی یک همسایگی از نیم‌صفحه بسته A به معادله $\mathscr{R}(z) \geq 0$ تحلیلی باشد، آنگاه، حداقل یک نقطه $\zeta \in A$ موجود است، به‌طوری که $|f(\zeta)| < \exp(\omega(|\zeta|)|\zeta|)$.

(از تناقض استفاده کنید: اگر نتیجه برقرار نباشد، ثابت کنید که، تابع $|e^{z}|^{-\varepsilon}.|f(z)|$ روی A برای هر مقدار $\varepsilon > 0$ باید کوچک‌تر یا مساوی 1 باشد، از مسأله ۹(a) استفاده کنید).

۱۶. فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز به‌طور نسبی فشرده در $\mathbf{C}^p$، و f یک تابع مختلط تحلیلی روی A باشد، و فرض کنیم عددی مانند $M > 0$ و تابعی مختلط و تحلیلی روی A مانند g موجود باشند، به طوری‌که برای هر $z \in A$، $g(z) \neq 0$، و خاصیت زیر برقرار باشد:

برای هر نقطه x از مرز A، و هر $\varepsilon > 0$، یک همسایگی V از x موجود باشد، به طوری که برای هر $z \in A \cap V$، $|f(z)| \leq M|g(z)|^{\varepsilon}$. نشان دهید که، روی A، $|f(z)| \leq M$ (**(اصل فراگمن ـ لیندلف**[1]). از مسأله ۹(b) استفاده کنید).

۱۷. فرض کنیم U مجموعه بازی باشد که در مسأله ۳(b) تعریف شده، و فرض کنیم f یک تابع تحلیلی مختلط روی یک همسایگی A از $\bar{U}$ باشد، که دارای خواص زیر است:

(۱) روی مرز U، $|f(z)| \leq 1$؛

1. Phragman _ Lindelof 's principle = Прнцип Фрагмена - Линделёфа

(۲) ثابتی مانند a موجود است، به طوری که $0 < a < 1$ و برای هر $z \in \mathrm{U}$ ، $|f(z)| \leq \exp(\exp(a\,\mathscr{R}(z)))$. ثابت کنید که، روی U ، $|f(z)| \leq 1$. (ملاحظه کنید که، نگاشت :

$$z \to \frac{1}{z+1}$$

U را به توی یک مجموعه به‌طور نسبی فشرده می‌نگارد، و از اصل فراگمن ـ لیندلف (مسأله ۱۶) با $g(z)$ به فرم $\exp(\exp(bz))$ استفاده کنید).

۶. انتگرال‌گیری روی (در امتداد) یک راه[1]

یک مسیر[2] در C نگاشتی پیوسته مانند γ از فاصله فشرده $\mathrm{I} = [a, b] \subset \mathbf{R}$ با بیش از یک نقطه، به C است. اگر $\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$، گوییم γ یک مسیر در A است. $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ را به‌ترتیب **مبدأ** و **منتهای** مسیر، و هر دوی این نقاط را **نقاط انتهایی** γ می‌نامند. اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، γ را یک **لوپ**[3] **(طوقه)** ، و اگر γ روی I ثابت باشد، گوییم مسیر γ به یک **نقطه** تقلیل یافته است. مسیر γ^0 از I به C که با رابطه $\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$ تعریف شده است، مسیر **خلاف** γ می‌نامند.

فرض کنیم $\mathrm{I}_1 = [b, c]$ یک فاصله فشرده در $\mathbf{R}$ باشد که مبدأ آن منتهای I است، و فرض کنیم $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I} \cup \mathrm{I}_1 = [a, c]$. اگر γ_1 مسیری باشد که روی I_1 تعریف شده، و $\gamma_1(b) = \gamma(b)$ ، و اگر γ_2 را روی I طوری تعریف کنیم که، روی I مساوی γ ، و روی I_1 مساوی γ_1 باشد، آنگاه γ_2 مسیری است که با علامت $\gamma \vee \gamma_1$ نشان داده می‌شود، و به آن **پهلوی هم‌گذاری**[4] مسیرهای γ و γ_1 می‌نامند.

مسیر γ را که روی $\mathrm{I} = [a, b] \subset \mathbf{R}$ تعریف شده است، یک **راه**[5] نامند، هر گاه γ پریمیتیو یک تابع رگله باشد ((۲. ۷. ۸) را ببینید)، اگر علاوه بر این $\gamma(a) = \gamma(b)$ باشد، گوییم γ یک **مدار**[6] (کنتور) است.

واضح است که، مسیر مخالف یک راه، یک راه است، و از پهلوی هم گذاری دو راه یک راه به دست می‌آید. فرض کنیم γ ، γ_1 دو راه باشند، که به‌ترتیب روی فاصله‌های I و I_1 تعریف شده‌اند. گوییم γ و γ_1 هم ارز هستند، هر گاه یک بیژکسیون φ از I به‌روی I_1 موجود باشد، به طوری‌که φ و φ^{-1} پریمیتیوهای

---

1 . Integration along a road = Интегрирование вдоль пути
2. Path = Троектория
3 . Loop = Петля
4 . Juxtaposition = Соединение
5 . Road = Путь

متأسفانه، مترجم در واژه‌نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، چاپ دوم ۱۳۷۶، برگردانی برای واژه انگلیسی "road" به عنوان یک اصطلاح ریاضی نیافت، و به همین دلیل، از بین برگردان‌های مختلف واژه روسی « путь » به زبان فارسی، واژه « راه » را به عنوان مناسب‌ترین آنها انتخاب نمود.

6 . Circuit = Контур

«مدار» برگردانی است از واژه انگلیسی "Circuit" و «کنتور» که به صورت «کانتور» نیز نوشته می‌شود، برگردانی است از واژه روسی «Контур» کـه در زبان انگلیسی به صورت‌های "Contour" و "Cricuit" ترجمه شده است. مترجم.

توابعی رگله باشند، و $\gamma = \gamma_1 0 \varphi$ (بنابراین $\gamma_1 = \gamma 0 \varphi^{-1}$). از (۱. ۴. ۸) نتیجه می‌شود که، در واقع، رابطه هم‌ارزی بین راه‌ها، یک رابطه هم ارزی است.

اگر راه γ روی فاصله $I = [a, b]$ تعریف شده باشد، روی هر فاصله دلخواه دیگر مانند $J = [c\ ,\ d]$، می‌توان راهی مانند γ_1 هم ارز γ تعریف کرد. زیرا، یک بیژکسیون خطی $t \to \varphi(t) = \alpha t + \beta$ از J بروی I موجود است، و راه $\gamma_1 = \gamma\ 0\ \varphi$ دارای خواص مورد نیاز است.

فرض کنیم γ راهی باشد که روی فاصله $I = [a, b]$ تعریف شده است، و فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از مجموعه فشرده $\gamma(I)$ به فضای باناخ E باشد. در این صورت، تابع $t \to f(\gamma(t))$ روی I پیوسته‌است، و بنابراین $t \to f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ تابعی رگله است. انتگرال $\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ را **انتگرال نگاشت f در امتداد راه γ** نامیده ، به علامت $\int_\gamma f(z)\,dz$ نشان می‌دهند. از (۴ . ۷. ۸) فوراً نتیجه می‌شود که ، اگر γ_1 راهی هم‌ارز γ باشد، آنگاه $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$. علاوه بر این، مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود که :

$$\int_{\gamma^0} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \tag{۹ . ۶ .۱}$$

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{۹ . ۶ .۲}$$

وقتی پهلوی هم گذاری $\gamma_1 \vee \gamma_2$ تعریف شده باشد.

فرض کنیم γ **مداری** باشد، که روی $I = [a\ ,\ b]$ تعریف شده است. برای هر $c \in I$ ، نگاشت γ_1 که روی فاصله $J = [c\ ,\ c+b-a]$ به صورت :

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t) & ,\ c \le t \le b \quad \text{اگر} \\ \gamma(t-b+a) & ,\ b \le t \le c+b-a \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. مستقیماً می‌توان نشان داد که γ_1 مداری است که در رابطه با $\gamma_1(J) = \gamma(I)$ صدق می‌کند، و برای هر نگاشت پیوسته f از $\gamma(I)$ به E ،

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\ .$$

به عبارت دیگر، **انتگرال f در امتداد مدار، وابسته به مبدأ مدار نیست.**

فرض کنیم γ_0 ، γ_1 دو مسیر باشند، که روی فاصله یکسان I تعریف شده‌اند، و فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در C باشد، به‌طوری‌که $\gamma_0(I) \subset A$ و $\gamma_1(I) \subset A$. یک **هوموتوپی**[1] از γ_0 به γ_1 در A نگاشتی پیوسته مانند φ از $I \times [\alpha , \beta]$ (با $\alpha < \beta$ در $\mathbf{R}$) به A است به‌طوری که در I ، $\varphi(t , \alpha) = \gamma_0(t)$ ، $\varphi(t , \beta) = \gamma_1(t)$. اگر یک هوموتوپی از γ_0 به γ_1 در A موجود باشد، گوییم γ_0 و γ_1 در A **هوموتوپیک** هستند. واضح است که، برای هر $\xi \in [\alpha , \beta]$، نگاشت $t \to \varphi(t , \xi)$ یک مسیر در A است. وقتی γ_0 و γ_1 دو طوقه (لوپ) باشند، گوییم φ یک **هوموتوپی طوقه‌ای**[2] از γ_0 به γ_1 در A است، اگر برای هر $\xi \in [\alpha , \beta]$، $t \to \varphi(t , \xi)$ یک طوقه (لوپ) باشد. وقتی می‌گوییم که دو طوقه γ_0 و γ_1 در A هوموتوپیک هستند، منظورمان این است که، یک هوموتوپی **طوقه‌ای** (و نه فقط هوموتوپی) از γ_0 به γ_1 در A موجود باشد.

اگر φ یک هوموتوپی از γ_0 به γ_1 در A باشد، که روی $I \times [\alpha , \beta]$ تعریف شده، آنگاه، نگاشت $(t , \xi) \to \varphi(t , \alpha + \beta - \xi)$ یک هوموتوپی از γ_1 به γ_0 در A است. از طرف دیگر، اگر ψ یک هوموتوپی از γ_1 به γ_2 در A باشد، که روی $I \times [\alpha' , \beta']$ تعریف شده است، آنگاه می‌توان یک هوموتوپی θ از γ_0 به γ_2 در A به صورت زیر تعریف کرد: روی $I \times [\alpha , \beta]$ ، قرار می‌دهیم $\theta = \varphi$ و روی $I \times [\beta , \beta'']$ که در آن $\beta'' = \beta' + \beta - \alpha'$ ، قرار می‌دهیم $\theta(t , \xi) = \psi(t , \xi + \alpha' - \beta)$. از این تعریف‌ها طبق فرض نتیجه می‌شود $\theta(t , \beta) = \gamma_1(t)$، و مستقیماً می‌توان ثابت کرد که θ روی $I \times [\alpha , \beta'']$ پیوسته است، و مقادیرش در A می‌گیرد، و چنان است که $\theta(t , \alpha) = \gamma_0(t)$ ، $\theta(t , \beta'') = \gamma_2(t)$. مطالب فوق نشان می‌دهد که، رابطه « γ_1 در A با γ_0 هوموتوپیک است». یک **رابطه هم ارزی** بین مسیرها در A ، و نیز یک رابطه هم ارزی بین طوقه‌ها در A است. زیرا، وقتی φ و ψ هوموتوپی‌های طوقه‌ای باشند، تعریف‌های قبلی به هوموتوپی‌های طوقه‌ای منجر خواهند شد.

(۹ . ۶ . ۳) (قضیه کوشی) فرض کنیم $A \subset C$ یک مجموعه باز، و f یک نگاشت تحلیلی از A به فضای باناخ مختلط E باشد. اگر Γ_1 , Γ_2 دو مدار در A باشند که در A هوموتوپیک (همجا) هستند، آنگاه :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz .$$

فرض کنیم Γ_1 ، Γ_2 روی $I = [a , b]$ تعریف شده‌اند، و فرض کنیم φ یک هوموتوپی از Γ_1 به Γ_2 در A باشد، که روی $I \times [\alpha , \beta]$ تعریف شده است (فرض نشده است که برای $\xi \neq \alpha , \beta$ طوقه $t \to \varphi(t , \xi)$ یک مدار است). چون φ پیوسته است، $L = \varphi(I \times [\alpha , \beta])$ یک مجموعه فشرده در A است. طبق تعریف و اصل بورل ـ لبگ، تعدادی متناهی نقطه مانند a_k $(1 \leq k \leq m)$ در L ، و برای هر k گوی باز

1. Homotopy = Гомотопия
2. Loop homotopy = петельная Гомотопия

$P_k \subset A$ به مرکز a_k موجود است، به‌طوری‌که: (۱) گوی‌های P_k $(1 \le k \le m)$ مجموعه L را می‌پوشانند، (۲) روی هر P_k، $f(z)$ برابر مجموع یک سری توانی بر حسب قوای $(z-a_k)$ است که روی P_k همگرا است. عددی مانند $\rho > 0$ موجود است، به‌طوری که برای هر $x \in L$ ، گویی باز به مرکز x و شعاع ρ مشمول لااقل یکی از P_kها است (۶. ۱۶. ۳ را ببینید)[۱]. از (۱. ۳. ۹) نتیجه می‌شود که، برای هر $x \in L$ ، $f(z)$ روی گوی $B(x, \rho)$ برابر یک سری توانی همگرا بر حسب قوای $z-x$ است.

چون φ روی $I \times [\alpha, \beta]$ به طور یکنواخت پیوسته است (۵. ۱۶. ۳ را ببینید)، عددی مانند $\varepsilon > 0$ موجود است به‌طوری که، از $|t-t'| \le \varepsilon$ ، $|\xi - \xi'| \le \varepsilon$ نتیجه می‌شود:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| \le \frac{\rho}{4}.$$

فرض کنیم $(t_i)_{0 \le i \le r}$ یک دنباله صعودی در I باشد، به‌طوری که $t_0 = a$ ، $t_r = b$ و برای $0 \le i \le r-1$ ، $t_{i+1} - t_i \le \varepsilon$ ، و $(\xi_j)_{0 \le j \le s}$ دنباله‌ای صعودی در $[\alpha, \beta]$ باشد، به طوری‌که[۲] $\xi_0 = \alpha$ ، $\xi_s = \beta$ و برای $0 \le j \le s-1$ ، $\xi_{j+1} - \xi_j \le \varepsilon$. برای $t_i \le t \le t_{i+1}$ ، $0 \le i \le r-1$ ، $1 \le j \le s-1$ توابع γ_j را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\gamma_j(t) = \varphi(t_i, \xi_j) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (\varphi(t_{i+1}, \xi_j) - \varphi(t_i, \xi_j))$$

علاوه بر اینها، فرض می‌کنیم $\gamma_0 = \Gamma_1$ ، $\gamma_s = \Gamma_2$. در این صورت، برای $0 \le j \le s$ ، γ_j یک **مدار** در A است. اکنون، کل کاری که باید انجام دهیم، این است که، ثابت کنیم، برای $0 \le j \le s-1$ ،

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\gamma_{j+1}} f(z) dz .$$

با توجه به انتخاب t_i ها و ξ_j ها، همه نقاط $\gamma_j(t)$ و $\gamma_{j+1}(t)$، که درآن $t_i \le t \le t_{i+1}$، به گوی باز Q_{ij} با مرکز $\varphi(t_i, \xi_j)$ و شعاع ρ تعلق دارند، طبق (۷. ۳. ۹) و (۱. ۳. ۹) ، تابعی تحلیلی روی Q_{ij} مانند g_{ij} موجود است، به‌طوری که روی Q_{ij} ، $g'_{ij}(z) = f(z)$. چون مجموعه $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ غیرتهی و طبق (۱. ۱. ۹) همبند است، تفاضل $g_{i-1,j} - g_{ij}$ ، طبق (۱. ۶. ۸) ، روی $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ ، **ثابت** است. اکنون،

---

۱. در چاپ اول برگردان روسی کتاب ژان دیودونه، چون قضیه (۶. ۱۶. ۳) در قسمت (a) اولین مسأله فصل ۳ بند ۱۶ مطرح شده، مطلب فوق به صورت زیر ثابت شده است :

فرض کنیم چنین نباشد. از L دنباله همگرای (x_n) استخراج می‌کنیم که از نقاطی تشکیل شده است که گوی (B_n) به مرکز (x_n) و شعاع $\frac{1}{n}$ مشمول هیچ یک از P_kها نباشد. چون x حد دنباله (x_n) متعلق به گویی از P_k ها است، پس گویی مانند $B \subset P_k$ با مرکز x و شعاع r موجود خواهد بود. اما، در این صورت، اگر نقطه (x_n) چنان انتخاب شده باشد، که $|x_n - x| + 1/n < r$ ، گوی B_n در P_k واقع خواهد شد ، که مخالف فرض است.

۲. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ژان دیودونه در نوشتن ξ_s اندیس s جا افتاده است، که باید آن را به عنوان اشتباه چاپی به حساب آورد. (این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد). مترجم .

طبق تعریف ، داریم :

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma_j(t))\,\gamma'_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g'_{ij}(\gamma_j(t))\,\gamma'_j(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)))$$

بنابراین، اثبات به رابطه :

$$\sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) = \sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)))$$

که می‌توان آن را به‌صورت :

$$\sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) + g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))) = 0$$

نیز نوشت، تقلیل می‌یابد. اما، برای $1 \le i \le r$ ، $\gamma_j(t_i)$ ، $\gamma_{j+1}(t_i)$ هر دو متعلق به $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ هستند، بنابراین، طبق آنچه در فوق بیان شد :

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i)) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) = g_{i-1,j}(\gamma_j(t_i)) - g_{i-1,j}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

در نتیجه، سمت چپ (۱. ۳. ۶ . ۹) تبدیل می‌شود به :

$$g_{r-1,j}(\gamma_j(t_r)) - g_{r-1,j}(\gamma_{j+1}(t_r)) - g_{0j}(\gamma_j(t_0)) + g_{0j}(\gamma_{j+1}(t_0))$$

اما، چون γ_j و γ_{j+1} مدار هستند، داریم $\gamma_j(t_0) = \gamma_j(t_r)$ ، $\gamma_{j+1}(t_0) = \gamma_{j+1}(t_r)$. علاوه بر این، این دو نقطه به $Q_{0j} \cap Q_{r-1,j}$ متعلق هستند که همبند است، و بنابراین، طبق (۱. ۶ . ۸) ، تفاضل $g_{r-1,j} - g_{0j}$ روی این مجموعه ثابت است، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

(۴ . ۶ . ۹) فرض کنیم γ_1 و γ_2 دو راه در مجموعه باز $A \subset C$ باشند، که دارای نقطه مبداء یکسان u و نقطه منتهای یکسان v باشند، به علاوه، فرض کنیم یک هوموتوپی φ از γ_1 به γ_2 در A موجود باشد، به طوری که u و v را ثابت نگه دارد (یعنی، اگر φ روی $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ تعریف شده باشد، برای هر $\xi \in [\alpha, \beta]$ ، $\varphi(a, \xi) = u$ ، $\varphi(b, \xi) = v$). در این صورت، برای هر تابع f که روی A تحلیلی است، $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

فرض کنیم γ_1^0 راهی مخالف γ_1 باشد، و فرض کنیم برای $b \le t \le 2b - a$ ، $\gamma_3(t) = \gamma_1^0(t - b + a)$ ؛ γ_3 راهی هم ارز γ_1^0 است. طبق تعریف، $\gamma_1 \vee \gamma_3$ و $\gamma_2 \vee \gamma_3$ دو مدار هستند. به‌علاوه، این مدارها در A هوموتوپیک هستند. زیرا ، اگر $\psi(t, \xi)$ را به صورت :

$$\psi(t,\xi)=\begin{cases}\varphi(t,\xi)\ ,\ a\le t\le b & \text{برای}\\ \gamma_3(t)\ ,\ b\le t\le 2b-a & \text{برای}\end{cases}$$

تعریف کنیم ، ψ یک هوموتوپی طوقه‌ای در A است. با به کارگیری (۳. ۶ . ۹) نتیجه می‌گیریم $\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz$ ، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

۷. پریمتیو یک تابع تحلیلی در یک ناحیه همبند ساده

یک **ناحیه همبند ساده**[1] $A\subset C$ یک مجموعه همبند است به‌طوری که، هر طوقه در A ، با طوقه‌ای که به یک نقطه کاهش یافته است هوموتوپیک باشد. واضح است که، هر مجموعه باز در C که با A هوموتوپیک باشد، یک ناحیه همبند ساده خواهد بود.

مثال

(۱. ۷. ۹) یک **میدان ستاره‌گون** $A\subset C$ نسبت به نقطه $a\in A$ ، مجموعه‌ای باز است به‌طوری که برای هر $z\in A$ ، پاره‌خطی که نقاط a و z را به هم وصل می‌کند در A قرارگیرد. چنین مجموعه‌ای طبق (۱. ۱۹. ۳) و (۳. ۱۹. ۳) به وضوح همبند است. اگر γ یک طوقه دلخواه در A باشد، برای $0\le\xi\le 1$ ، می‌نویسیم $\varphi(t,\xi)=a+(1-\xi)(\gamma(t)-a)$. در این‌صورت φ یک هوموتوپی طوقه‌ای است از γ به طوقه تقلیل یافته به نقطه a . یک گوی باز، یک میدان ستاره‌گون نسبت به هر یک از نقاطش است.

(۲. ۷. ۹) اگر $A\subset C$ یک مجموعه باز همبند باشد، برای هر دو نقطه دلخواه u و v از A ، راهی با مبدأ u و منتهای v در A وجود دارد.

فقط باید ثابت کنیم زیرمجموعه $B\subset A$ تشکیل شده از نقاط انتهایی همه راه‌هایی که مبدأ آنها نقطه u است، در A هم باز است و هم بسته (بخش ۳. ۱۹ را ببینید). اگر $x\in A\cap\bar{B}$ ، آنگاه گویی مانند S به مرکز x مشمول A موجود است، و طبق فرض، S شامل v نقطه انتهایی راهی مانند γ با مبدأ u است. پاره‌خط با نقاط انتهایی v و x در S واقع است، و اگر راه γ روی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه راه γ_1 که روی $[a,b]$ برابر γ، و روی $[b,b+1]$ ، برابر $\gamma_1(t)=v+(t-b)(x-v)$ است، در A واقع است، و دارای مبدأ u ، و منتهای x می‌باشد. بنابراین $x\in B$. از طرف دیگر، اگر $y\in B$ ، آنگاه گویی مانند S به مرکز y واقع در A موجود است. برای هر $v\in S$ پاره‌خطی که نقاط انتهایی y و v را به هم وصل

---
1 . Simply connected domain = Односвязная область

می‌کند، در S واقع است، و با روشی مشابه راهی با مبدأ u و منتهی v تعریف می‌کنیم، که در A واقع است. بنابراین $S \subset B$ ، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

(۳. ۷ . ۹) اگر $A \subset C$ یک میدان همبند ساده باشد، آنگاه هرتابع تحلیلی f روی A ، دارای پریمیتیوی است که روی A تحلیلی است.

فرض کنیم a ، z دو نقطه در A و γ_1 ، γ_2 دو راه در A با مبدأ a و منتهی z باشند. در این صورت، $\int_{\gamma_1} f(x)dx = \int_{\gamma_2} f(x)dx$. در واقع، در صورتی که لازم باشد، با تعویض γ_2 به راهی هم ارز، می‌توان فرض کرد که γ_1 روی $[b, c]$ ، و γ_2 روی $[c, d]$ تعریف شده باشند. دراین صورت، پهلوی هم گذاری $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2^0$ یک مدار در A است، که به این ترتیب، هموتوپیک با یک نقطه در A است. در نتیجه، طبق قضیه کوشی $\int_\gamma f(x)dx = 0$ ، و این حکم را ثابت می‌کند. بنابراین، می‌توان $g(z)$ را به عنوان مقدار انتگرال $\int_\gamma f(x)dx$ روی هر راهی مانند γ در A که مبدأ آن a و منتهی آن z است، تعریف نمود، و در این صورت، طبق (۲. ۷. ۹) ، تابع g روی A تعریف شده است. اکنون برای هر $z_0 \in A$ ، گویی باز مانند $B \subset A$ با مرکز z_0 موجود است، به‌طوری که روی آن $f(z)$ برابر مجموع یک سری توانی همگرا بر حسب $z - z_0$ است. بنابراین، طبق (۷. ۳. ۹) ، یک پریمیتیو h از تابع f روی B موجود است، که تحلیلی است، و چنان است که $h(z_0) = g(z_0)$. در نتیجه، برای $z \in B$ داریم :

$$h(z) - h(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt$$

اما، طرف راست این تساوی طبق تعریف برابر $\int_\sigma f(x)dx$ است، که در آن σ راه $t \to z_0 + t(z - z_0)$ تعریف شده روی فاصله $[0, 1]$ است. چون این راه در $B \subset A$ واقع است، طبق تعریف g داریم $g(z) - g(z_0) = \int_\sigma f(x)dx$ ، و بنابراین، در B , $g(z) = h(z)$ ، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

۸. شاخص یک نقطه نسبت به یک مدار

(۱. ۸ . ۹) هر مسیر γ که روی فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، و چنان باشد که مشمول دایره واحد $U = \{z \in C \mid |z| = 1\}$ باشد، به فرم $t \to e^{i\psi(t)}$ است، که در آن ψ نگاشتی پیوسته از I به R است. اگر γ یک راه باشد، آنگاه ψ پریمیتیو یک تابع رگله خواهد بود.

چون γ روی I به‌طور یکنواخت پیوسته است، دنباله‌ای صعودی از نقاط t_k $(0 \le k \le p)$ در I موجود خواهد بود، به‌طوری که $t_0 = a$ ، $t_p = b$ و نوسان γ (بخش ۳. ۱۴ را ببینید) روی هر یک از فواصل

$I_k = [t_k , t_{k+1}]$ $(0 \le k \le p-1)$ کوچک‌تر یا مساوی 1 است. از مطلب فوق نتیجه می‌شود که، $\gamma(I_k) \neq U$. اگر $\theta_k \in R$ چنان باشد که $e^{i\theta_k} \notin \gamma(I_k)$ (۷. ۵. ۹ را ببینید) ، آنگاه $x \to e^{i(x+\theta_k)}$ یک هومیومورفیسم از فاصله $]0 , 2\pi[$ به مکمل $e^{i\theta_k}$ در U خواهد بود (۷. ۵. ۹ را ببینید). اگر φ_k وارون این هومیومورفیسم باشد، آنگاه برای $t \in I_k$ ، می‌توانیم بنویسیم $\gamma(t) = e^{i\psi_k(t)}$ ، که در آن $\psi_k(t) = \varphi_k(\gamma(t)) + \theta_k$ روی I_k پیوسته است. طبق (۵ . ۵ . ۹) ، داریم :

$$\psi_{k+1}(t_{k+1}) = \psi_k(t_{k+1}) + 2n_k\pi$$

که در آن n_k یک عدد صحیح است $(0 \le k \le p-2)$. حال، ψ را روی I به روش زیر تعریف می‌کنیم : برای $t \in I_0$ قرار می‌دهیم $\psi(t) = \psi_0(t)$ ، با استقراء روی k برای $t_k < t \le t_{k+1}$ قرار می‌دهیم $\psi(t) = \psi_k(t) + \psi_k(t_k) - \psi_k(t_k)$. با استقراء روی k فوراً دیده می‌شود که $\psi(t_k) - \psi_k(t_k)$ برای $0 \le k \le p-1$ مضرب صحیحی از 2π است. بنابراین، برای $t \in I$ ، $\gamma(t) = e^{i\psi(t)}$ ، و ψ به وضوح روی I پیوسته است. به علاوه، اگر $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ ، آنگاه خواهیم داشت :

$$\alpha(t) = \cos\psi(t) \ , \ \beta(t) = \sin\psi(t)$$

و یکی از اعداد $\cos\psi(t)$ ، $\sin\psi(t)$ صفر نیست. از (۴ . ۵ . ۹) و (۳. ۲. ۸) ، با به کارگیری آنها نسبت به یکی از دو تابع $\cos x$ ، $\sin x$ در نقطه‌ای که مشتق مخالف صفر دارد، نتیجه می‌گیریم که ، اگر γ در نقطه‌ای مانند t دارای مشتق باشد، آنگاه ψ نیز در این نقطه دارای مشتق خواهد بود، و $i\psi'(t) = \gamma'(t) / \gamma(t)$ و با این مطلب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

(۲. ۸ . ۹) برای هر نقطه $a \in C$ ، و هر مدار γ که در $C - \{a\}$ واقع باشد، $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ به فرم $2n\pi i$ می‌باشد، که در آن n عددی صحیح (مثبت یا نامثبت) است.

با یک انتقال، می‌توان فرض کرد $a = 0$. حال، فرض کنیم γ روی $I = [b , c]$ تعریف شده باشد. تابع $\varphi(t , \xi) = \xi \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + (1-\xi)\gamma(t)$ روی $I \times [0,1]$ پیوسته است و یک هوموتوپی طوقه‌ای (در $C^* = C - \{0\}$) از مدار γ به مدار $\gamma_1(t) = \gamma(t) / |\gamma(t)|$ است که در شرط $\gamma_1(I) \subset U$ صدق می‌کند. چون $\frac{1}{z}$ روی C^* تحلیلی است، از قضیه کوشی (۳. ۶ . ۹) نتیجه می‌شود $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$. اما، طبق (۱. ۸ . ۹) ، $\gamma_1(t) = e^{i\psi(t)}$ ، که در آن ψ پریمیتیو یک تابع رگله است. بنابراین، طبق تعریف $\gamma_1(b) = \gamma_1(c)$ ، چون ، طبق تعریف ، $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = i\int_b^c \psi'(t)\,dt = i(\psi(c) - \psi(b))$ ، نتیجه مطلوب از (۵ . ۵ . ۹) حاصل می‌شود.

تبصره. اثباتی ساده‌تر از (۲. ۸ . ۹) ، که در آن از (۱. ۸ . ۹) استفاده نشده است، به شکل زیر است (اثبات ل . آلفرس[1]) :

فرض کنیم $h(t)=\int_b^t \frac{\gamma'(s)\,ds}{\gamma(s)-a}$. در این صورت، تابع $h(t)$ در همه نقاط I به جز در زیر مجموعه‌ای حداکثر شمارش پذیر از آن دارای مشتق $h'(t)=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$ است. بنابراین، اگر $g(t)=e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$ ، آنگاه، به جز در زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر از I ، $g'(t)=0$. از (۱. ۶ . ۸) نتیجه می‌شود که g ثابت است، و بنابراین $e^{h(t)}=\frac{\gamma(t)-a}{\gamma(b)-a}$. اما، داریم $\gamma(c)=\gamma(b)$ ، و بنابراین $e^{h(c)}=1$ ، که از آن نتیجه می‌شود $h(c)=2n\pi i$ ، که در آن طبق (۵. ۵ . ۹) ، n عددی صحیح است.

عدد n را شاخص نقطه a نسبت به مدار[2] **γ (یاشاخص مدار γ نسبت به نقطه a)** نامیده، به علامت $n=j(a,\gamma)$ نشان می‌دهند. از قضیه کوشی نتیجه می‌شود که، اگر γ_1 و γ_2 دو مدار در $C-\{a\}$ باشند، که در این مجموعه هوموتوپیک هستند، آنگاه γ_1 و γ_2 دارای شاخص یکسانی نسبت به a خواهند بود.

(۳. ۸ . ۹) شاخص $j(x,\gamma)$ در هر مؤلفه همبند مجموعه A ، مکمل مجموعه فشرده $\gamma(I)$ ، ثابت است.

در واقع، نکته در این است که، نگاشت $x\to j(x,\gamma)$ روی مجموعه باز A **پیوسته** است، زیرا، طبق تعریف، شاخص نقطه $x+h$ نسبت به مدار γ (اگر $x+h\notin\gamma(I)$) برابر شاخص نقطه x نسبت به مدار $\gamma_1: t\to\gamma(t)-h$ می‌باشد. اما، اگر B گویی به مرکز x و شعاع r واقع در A باشد، آنگاه، نگاشت $\varphi(t,\xi)=\gamma(t)-\xi h$ (φروی $I\times[0,I]$ تعریف شده است)، وقتی $|h|<r$ باشد، یک هوموتوپی طوقه‌ای در $C-\{x\}$، از مدار γ به مدار γ_1 است، و بنابراین، طبق قضیه کوشی $j(x+h,\gamma)=j(x,\gamma)$. چون مجموعه اعداد صحیح Z یک فضای گسسته است ، از (۳. ۱۹. ۷) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

مثال

(۴. ۸ . ۹) فرض کنیم ε_n مدار $t\to e^{nit}$ باشد، که روی $I=[0,2\pi]$ تعریف شده است، و n عددی صحیح است. داریم $\varepsilon_n(I)=U$ ؛ مدار ε_n را «**دایره واحد n بار طی شده**» می‌نامند. دیده می‌شود که، مجموعه باز $C-U$ دارای دو مؤلفه همبندی است، که عبارتند از، گوی B به معادله $|z|<1$ ، و E برون گوی B که با رابطه $|z|>1$ تعریف می‌شود. در واقع، B به عنوان یک میدان ستاره‌گون، طبق (۱. ۷. ۹) ،

---

1 . L . Ahlfors = Л.Альфорс

2 . Index of a with respect to γ = Индекс точки a относительно контура γ

همبند است، و طبق بخش (۴. ۴) و (۷. ۵. ۹) ، E تصویر $]1, +\infty[\times [0, 2\pi]$ تحت نگاشت پیوسته $(x, t) \to xe^{it}$ می‌باشد، و به این ترتیب، نتیجه مورد نظر از (۱. ۱۹. ۳) ، (۱۶. ۲۰. ۳) ، و (۷. ۱۹. ۳) حاصل می‌شود (دقیقاً با بحثی مشابه نیز می‌توان همبند بودن B و $B - \{0\}$ را ثابت نمود). بالاخره، در $C - U$ ، B و E همزمان باز و بسته هستند، زیرا B در C باز است و $B = (C - U) \cap \bar{B}$ ، $B \cap E = \varnothing$. از تعریف و از (۳. ۵. ۹) نتیجه می‌شود که $j(0, \varepsilon_n) = n$. بنابراین، برای هر z در B ، $j(z, \varepsilon_n) = n$. نشان می‌دهیم که، برای هر z در E ، $j(z, \varepsilon_n) = 0$، و به صورتی کلی‌تر، گزاره زیر برقرار است:

(۵ . ۸ . ۹) اگر مدار γ مشمول گوی بسته D به معادله $|z - a| \leq r$ باشد، آنگاه برای هر z در برون D ، $j(z, \gamma) = 0$.

در واقع، فرض کنیم که مدار γ روی یک فاصله $I = [b, c]$ تعریف شده باشد، و روی I ، $|\gamma'(t)| \leq M$. طبق تعریف، برای $|z - a| > r$ ، داریم:

$$2\pi i\, j(z, \gamma) = \int_\gamma \frac{dx}{x - z} = \int_b^c \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t) - z}$$

اما، چون $|\gamma(t) - a| \leq r$ ، برای هر $t \in I$ ، داریم $|\gamma(t) - z| \geq |z - a| - r$ ، و بنابراین، طبق قضیه میانگین:

$$2\pi\, |j(z, \gamma)| \leq \frac{M(c - b)}{|z - a| - r}$$

وقتی $|z - a|$ به حد کافی بزرگ باشد، سمت راست نامساوی فوق از 2π کوچک‌تر است، و چون $j(z, \gamma)$ عددی صحیح است، رابطه فوق تنها زمانی می‌تواند برقرار باشد، که $j(z, \gamma) = 0$. اما، چنان که فوقاً دیده شد، برون D همبند است، و بنابراین، از (۳. ۸. ۹) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۶ . ۸ . ۹) برای هر مدار γ در C ، که روی I تعریف شده است، مجموعه نقاط $x \in C - \gamma(I)$ که $j(x, \gamma) \neq 0$ ، در C به‌طور نسبی فشرده است.

زیرا، طبق (۵ . ۸ . ۹) ، این مجموعه مشمول هر گوی بسته‌ای است که شامل $\gamma(I)$ باشد.

(۷ . ۸ . ۹) فرض کنیم $A \subset C$ یک میدان همبند ساده، و γ یک مدار در A باشد. در این صورت، برای هر نقطه x از $C - A$ ، $j(x, \gamma) = 0$.

طبق فرض، در A ، یک هوموتوپی طوقه‌ای φ که روی $I \times J$ تعریف شده، از مدار γ به مداری که به یک نقطه تقلیل یافته، موجود است. چون $x \notin \varphi(I \times J)$ ، قضیه کوشی نشان می‌دهد که $\int_\gamma \frac{dz}{z - x} = 0$.

۹. فرمول کوشی

(۱. ۹. ۹) فرض کنیم $A \subset C$ یک میدان همبند ساده (بخش ۷. ۹ را ببینید) ، و f یک نگاشت تحلیلی از A به فضای باناخ E باشد. برای هر مدار γ در A که روی I تعریف شده، و برای هر $x \in A - \gamma(I)$ ، داریم:

$$j(x,\gamma) f(x) = \frac{1}{2\gamma i} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$ (فرمول کوشی[1]).

تابع $g(z)$ که روی A به صورت :

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} & , z \neq x \quad \text{اگر} \\ f'(x) & , z = x \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم. g روی A تحلیلی است. زیرا ، طبق (۲. ۳. ۹) و (۱. ۵ . ۹) ، g به وضوح روی $A - \{x\}$ تحلیلی است. از طرف دیگر، گویی مانند $B \subset A$ به مرکز x موجود است، به‌طوری که، برای $z \in B$ ، ... + $f(z) = f(x) + (z-x) f'(x) + \ldots + (z-x)^n f^{(n)}(x) / n! + \ldots$. سری سمت راست برای هر z در B همگرا است، و در نتیجه، برای هر $z \in B$ ، $g(z)$ برابر مجموع سری همگرای :

$$f'(x) + \frac{1}{2}(z-x) f''(x) + \ldots + (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x)/n! + \cdots$$

است. بنابراین ، $g(z)$ در نقطه x تحلیلی است. از قضیه کوشی (۳. ۶ . ۹) داریم $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ ، و می‌توانیم بنویسیم :

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-x} - f(x)\frac{1}{z-x}$$

و از تعریف شاخص ، نتیجه (۱. ۹. ۹) حاصل می‌شود.

به عکس :

(۲. ۹. ۹) فرض کنیم γ یک راه در C باشد، که روی فاصله $I = [b, c]$ تعریف شده، و فرض کنیم g یک نگاشت پیوسته از $\gamma(I)$ به فضای مختلط باناخ E باشد. در این صورت تابع :

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(x)\,dx}{x-z}$$

روی مکمل $\gamma(I)$ تعریف شده و تحلیلی است، به عبارت دقیق‌تر، برای هر $a \in C - \gamma(I)$ ، اگر بنویسیم :

$$c_k = \int_\gamma \frac{g(x)\,dx}{(x-z)^{k+1}}$$

---

1 . Cauchy’s formula = формула Коши

سری توانی $(c_n(z-a)^n)$ روی هرگوی باز B به مرکز a واقع در $C-\gamma(I)$ ، همگرا است، و مجموع آن روی B برابر $f(z)$ است.

در واقع، فرض کنیم $|z-a| \le q \,.\, d(a,\gamma(1))$ که در آن $0<q<1$. در این صورت، برای هر $x \in \gamma(I)$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a)(1-\frac{z-a}{x-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} \quad (*)$$

با

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{\delta} q^n$$

که در آن $\delta = d(a,\gamma(I))$. اگر روی $\gamma(I)$ ، $\|g(x)\| \le M$ و روی I ، $|\gamma'(t)| \le m$ باشد، آنگاه برای هر $t \in I$ خواهیم داشت :

$$\left\| \frac{\gamma'(t) g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right\| \le \frac{Mm}{\delta} q^n$$

بنابراین، سری با جمله عمومی :

$$\frac{\gamma'(t) g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

روی I به‌طور نرمال همگرا است. از (۹. ۷ . ۸) نتیجه می‌شود که، سری $(c_n(z-a)^n)$ روی گوی $|z-a| \le q \,.\, \delta$ همگرا است، و مجموع آن روی این گوی برابر $f(z)$ می‌باشد.

(۳. ۹. ۹) تحت شرایط قضیه (۱. ۹. ۹) ، برای هر نقطه $x \in A-\gamma(I)$ و هر عدد صحیح $k>0$ داریم :

$$j(x,\gamma) f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi!} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-x)^{k+1}} .$$

مطلب فوق نتیجه فوری فرمول کوشی، یکتایی ضرایب یک سری توانی با مجموعی معلوم ((۶ . ۱. ۹) را ببینید) ، روابط (۵ . ۳. ۹) بین این ضرایب و مشتقات، و بالاخره گزاره (۲. ۹. ۹) می‌باشد.

(۴. ۹. ۹) فرض کنیم $A \subset C^p$ یک مجموعه باز، و f یک نگاشت پیوسته از A به فضای مختلط باناخ E باشد، به طوری‌که، برای $1 \le k \le p$ ، و برای هر نقطه دلخواه $(a_k) \in C^p$ ، نگاشت :

---

*. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ژان دیودونه در رابطه :

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

توان n در $(z-a)^n$ جا افتاده است، که باید آن‌را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب نیز وجود دارد. مترجم.

$$z_k \to f((a_1, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$$

روی زیرمجموعه باز $A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_p) \subset C$ وقتی این مجموعه غیرتهی است، تحلیلی باشد (با نماد (۱۲. ۲۰. ۳))، دراین صورت، f روی A تحلیلی است. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنیم $a = (a_k)$ یک نقطه A و P یک چندقرصی بسته به مرکز a و شعاع‌های r_k $(1 \le k \le p)$ مشمول A باشد. برای هر k، فرض کنیم γ_k مدار $t \to a_k + r_k e^{it}$ در C باشد $(0 \le t \le 2\pi)$، و فرض کنیم :

$$c_{n_1 n_2 \dots n_p} = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma_1} dx_1 \int_{\gamma_2} dx_2 \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p)\, dx_p}{(x_1 - a_1)^{n_1+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}}$$

در این صورت، سری توانی $(c_\nu (z-a)^\nu)$ روی $\overset{0}{P}$ به‌طور مطلق جمع‌پذیر است، و مجموع آن برابر $f(z)$ است.

با استفاده از فرمول کوشی، و با استفاده از این حقیقت که $j(0, \varepsilon_1) = 1$ ((۴. ۸ . ۹) را ببینید). طبق فرض و با استقراء روی $p - k$ ، برای $|x_j - a_j| = r_j$ $(1 \le j \le k)$ و $|z_j - a_j| < r_j$ $(k+1 \le j \le p)$ خواهیم داشت :

(۹ .۹ .۴ .۱)

$$f(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_p) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{p-k}} \int_{\gamma_{k+1}} dx_{k+1} \int_{\gamma_{k+2}} dx_{k+2} \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p)\, dx_p}{(x_{k+1} - z_{k+1}) \dots (x_p - z_p)}$$

از طرف دیگر، برای $|z_k - a_k| < r_k$ $(1 \le k \le p)$ ، و $|x_k - a_k| = r_k$ ، می‌توان نوشت :

$$\frac{1}{(x_1 - z_1) \dots (x_p - z_p)} = \sum \frac{(z_1 - a_1)^{n_1} \dots (z_p - a_p)^{n_p}}{(x_1 - a_1)^{n_1+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}}$$

طبق (۳. ۵ . ۵) ، سری توانی سمت راست تساوی فوق روی مجموعه F که با روابط :

$$|x_k - a_k| = r_k \quad (1 \le k \le p)$$

تعریف شده، به‌طور نرمال جمع‌پذیر است. با استقراء روی $p - k$ ، اگر بنویسیم :

$$g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi i)^{p-k}} \int_{\gamma_{k+1}} dx_{k+1} \dots \int_{\gamma_p} \frac{f(x_1, \dots, x_p)\, dx_p}{(x_{k+1} - a_{k+1})^{n_{k+1}+1} \dots (x_p - a_p)^{n_p+1}}$$

طبق قضیه میانگین، اگر روی F ، $\| f(x_1, \dots, x_p) \| \le M$ ، خواهیم داشت :

(۹ .۹ .۴ .۲)

$$\| g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k) \| \le \frac{M}{r_{k+1}^{n_{k+1}} \dots r_p^{n_p}}$$

در نتیجه، سری توانی $(g_{n_{k+1} \dots n_p}(x_1, \dots, x_k)(z_{k+1} - a_{k+1})^{n_{k+1}} \dots (z_p - a_p)^{n_p})$ روی $\overset{0}{P}$ نسبت به $z_j - a_j$ ها

یک سری توانی مطلقاً جمع پذیر است. با استفاده از استقراء روی $p-k$ ، و با به کارگیری (۵ . ۳. ۵) و (۹ . ۷. ۸) ، می‌بینیم که، مجموع این سری برابر $f(x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_p)$ است. نتیجه مطلوب با گرفتن $k=0$ حاصل می‌شود. علاوه براین، نامساوی (۲. ۴. ۹. ۹) ، برای $k=0$ ، ثابت می‌کند که، با فرض‌هایی مشابه و با نمادهای (۴ . ۹ . ۹) ،

اگر روی حاصل ضرب دوایر $|x_k - a_k| = r_k$ $(1 \le k \le p)$ داشته باشیم $\| f(x) \| \le M$ ، آنگاه :

$$\| c_{n_1 n_2 \dots n_p} \| \le M / r_1^{n_1} \dots r_p^{n_p} \qquad (۹ . ۹ . ۵)$$

(نامساوی‌های کوشی[1]).

اگر در (۴. ۹. ۹) ، $A = C^p$ بگیریم، نتیجه زیر به‌دست می‌آید :

(۶ . ۹. ۹) یک نگاشت تحلیلی از C^p به یک فضای باناخ مختلط، تابعی تام است.

ملاحظه می‌شود که، نتیجه اخیر برای توابع تحلیلی با متغیرهای **حقیقی** برقرار نیست ($\frac{1}{1+x^2}$ یک مثال نقض است). همچنین، یک تابع پیوسته دو متغیره $f(x, y)$ با متغیرهای **حقیقی** x و y ممکن است نسبت به هر یک از متغیرهایش تحلیلی باشد، بدون اینکه روی $\mathbf{R}^2$ تحلیلی باشد. تابع :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \quad \text{اگر} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \quad \text{اگر} \end{cases}$$

مثالی از این نوع است.

تبصره. از (۴. ۹. ۹) نتیجه می‌شود که، مجموعه F حاصل‌ضرب دوایر $|x_k - a_k| = r_k$ $(1 \le k \le p)$ یک **مجموعه یکتایی** (U ـ مجموعه) در A است (وقتی A همبند باشد). زیرا ، سری توانی $(c_\nu (z-a)^\nu)$ ، کاملاً به‌وسیله مقادیر f روی F ، تعیین می‌شود. بنابراین، اگر دو تابع تحلیلی روی A ، روی F بر هم منطبق باشند، آنگاه، روی P بر هم منطبق خواهند بود، و نتیجه مطلوب از (۲. ۴. ۹) ناشی می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم A یک مجموعه به‌طور نسبی فشرده باز و همبند در C ، و φ نگاشتی پیوسته از $[a, b] \times [0, 1]$ به $\bar{A}$ باشد،

---

1 . Cauchy's inequalities = Неравенства Коши

به طوری‌که برای هر $0 < \xi \leq 1$ ، $t \to \varphi(t, \xi) = \gamma_\xi(t)$ یک مدار واقع در A ، و $t \to \gamma_0(t) = \varphi(t, 0)$ یک مدار واقع در $\bar{A}$ باشد (که ممکن است شامل نقاط مرزی A باشد). علاوه بر اینها، فرض کنیم که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ی موجود باشد، به‌طوری‌که، برای $t \in [a, b] - D$ ، از رابطه $|\lambda - \mu| \leq \delta$ ، نتیجه شود $|\gamma'_\lambda(t) - \gamma'_\mu(t)| \leq \varepsilon$ ، که در آن D یک زیرمجموعه شمارش‌پذیر است.

اکنون فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از $\bar{A}$ به فضای باناخ مختلط E باشد، به‌طوری که تحدید f روی A تحلیلی باشد. نشان دهید که، قضیه کوشی $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ باز معتبر است. (از (۸ . ۷. ۸) استفاده کنید).

۲. فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز C ، و f نگاشتی پیوسته از A به فضای مختلط باناخ E باشد، به‌طوری که f روی $A \cap D_+$ ، و $A \cap D_-$ ، که در آن D_+ (به ترتیب D_-) با رابطه $\mathscr{I}(z) > 0$ (به ترتیب $\mathscr{I}(z) < 0$) تعریف شده است، تحلیلی باشد. نشان دهید که ، f روی A تحلیلی است. (فرض کنید دیسک $|z| \leq r$ مشمول A باشد، و γ_+ (به ترتیب γ_-) مداری باشد که روی $[-1 , +1]$ با رابطه :

$$\gamma_+(t) = \begin{cases} (2t+1)r & , -1 \leq t \leq 0 \quad \text{برای} \\ re^{\pi i t} & , 0 \leq t \leq 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

(به ترتیب :

$$(\gamma_-(t) = \begin{cases} re^{\pi i t} & , -1 \leq t \leq 0 \quad \text{برای} \\ (1-2t)r & , 0 \leq t \leq 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

تعریف شده است. با استفاده از مسأله ۱ ، نشان دهید که، اگر $|z| < r$ و $\mathscr{I}(z) > 0$ ، آنگاه :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{f(x)dx}{x - z} \ , \ 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \frac{f(x)dx}{x - z} \ .$$

بنابراین، اگر γ مدار $t \to re^{it}$ روی $[-1 , +1]$ باشد، آنگاه :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(x)dx}{x - z}$$

سپس از (۲. ۹. ۹) استفاده کنید).

۳ . نشان دهید، که نتیجه قضیه (۴. ۹. ۹) وقتی فقط فرض شود که f روی هر چند قرصی کراندار مشمول A کراندار است، اما، لزوماً پیوسته نیست، باز هم درست خواهد بود. (از مسأله ۶ بخش ۹. ۸ استفاده کنید. در واقع، قضیه‌ای عمیق از هارتوگس[1] نشان می‌دهد که حتی این فرض‌های ضعیف لازم نیست. به‌عبارت دیگر، یک تابع که به‌طور جداگانه نسبت به هر p متغیر مختلطش z_i $(1 \leq i \leq p)$ تحلیلی است، روی A تحلیلی خواهد بود).

۴ . فرض کنیم $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تابع تحلیلی مختلط روی دایره $|z| < \mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که، برای $0 \leq r < \mathbf{R}$ ،

$$\mathrm{M}_2^2(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

از نتیجه فوق اثبات دیگری برای نامساوی کوشی ارائه نمایید.

---

1 . Hartogs = Хартогс

۵. فرض کنیم $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تابع تحلیلی روی $|z|<\mathbf{R}$ باشد، و

$$\mathrm{M}_1(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\| r^n$$

همچنین، فرض کنیم $\mathrm{M}(r,f)=\sup_{|z|=r}\|f(z)\|$.

(a) نشان دهید که، برای $0\le r<r+\delta<\mathbf{R}$،

$$\mathrm{M}(r,f)\le \mathrm{M}_1(r,f)\le \frac{r+\delta}{\delta}\,\mathrm{M}(r+\delta,f)$$

(از نامساوی‌های کوشی استفاده کنید).

(b) اگر علاوه بر این، f تابعی مختلط باشد، با نمادهای مسأله ۴، نشان دهید که :

$$\frac{(\delta(2r+\delta))^{1/2}}{r+\delta}\,\mathrm{M}_1(r,f)\le \mathrm{M}_2(r+\delta,f)\le \mathrm{M}(r+\delta,f)$$

(از نامساوی کوشی ـ شوارتز (۱. ۲. ۶) استفاده کنید).

(c) تحت فرضی مشابه، نشان دهید که :

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{M}_1(r,f^n))^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{M}_2(r,f^n))^{1/n}=\mathrm{M}(r,f)$$

(از نامساوی‌های ثابت شده در (a) و (b)، و این حقیقت که $\mathrm{M}(r,f^n)=(\mathrm{M}(r,f))^n$، و از پیوستگی نگاشت $r\to \mathrm{M}(r,f)$ استفاده کنید).

۶. فرض کنیم سری توانی یک متغیره مختلط $(c_n z^n)$، باضرایب مختلط، روی $|z|<\mathbf{R}$ همگرا باشد ؛ و فرض کنیم $f(z)=\sum_n c_n z^n$، و برای هر r که $0<r<\mathbf{R}$، $\mathrm{A}(r)=\sup_{|z|=r}\mathscr{R}(f(z))$. نشان دهید که، برای هر $n\ge 0$،

$$|c_n|r^n+2\,\mathscr{R}(f(0))\le \sup(4\mathrm{A}(r),0)$$

(ثابت کنید که، برای هر $n>0$،

$$|c_n|r^n=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}(\mathscr{R}(f(re^{i\theta}))e^{-ni\theta})\,d\theta\right|).$$

۷. (a) فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز $\mathbf{K}^p$، و f نگاشتی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر از A به فضای باناخ E باشد. برای اینکه f روی A تحلیلی باشد، لازم و کافی‌است که، برای هر زیرمجموعه فشرده L از A، عددی صحیح مانند $r\ge 0$ و عددی مانند $a>0$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر اندیس $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$، $\sup_{x\in \mathrm{L}}\|\mathrm{D}^{\alpha}f(x)\|\le a(|\alpha|+r)!$. (برای اثبات لازم بودن شرط وقتی $\mathrm{K}=\mathrm{C}$ باشد، از نامساوی‌های کوشی برای گوی‌های با شعاع‌های ثابت که در A واقع شده‌اند و مراکزی در L دارند استفاده نموده، وقتی $\mathrm{K}=\mathbf{R}$ باشد، از (۵. ۴. ۹) استفاده کنید. برای اثبات کافی بودن شرط، از فرمول تیلور (۳. ۱۴. ۸) استفاده نموده و ثابت کنید که، آخرین جمله این فرمول روی هر گوی بسته مشمول A و با مرکز x به طور یکنواخت به سمت 0 میل می‌کند).

(b) مثالی از یک تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر روی $\mathbf{R}$ ارائه دهید که تحلیلی نباشد (مقایسه کنید با مسئله ۲ بخش ۱۲. ۸).

(c) فرض کنیم f یک تابع حقیقی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر روی فاصله‌ای باز مانند $\mathrm{I}\subset\mathbf{R}$ باشد. علاوه بر این، فرض کنیم عددی صحیح مانند $p\ge 0$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $n>0$، $f^{(n)}$ در بیش از p نقطه از I صفر نباشد. نشان دهید که f روی I تحلیلی است. (از (a)، و مسأله (b) ۳ بخش ۱۲ . ۸ استفاده کنید).

۱۰. مشخصه توابع تحلیلی با متغیرهای مختلط

(۱. ۱۰. ۹) یک نگاشت f با مشتق پیوسته از یک زیرمجموعه باز A از C^p به یک فضای مختلط باناخ تحلیلی است.

با به کارگیری (۴. ۹. ۹)، می‌توان قضیه را به حالت $p=1$ تبدیل کرد. برای اثبات تحلیلی بودن f در نقطه‌ای مانند $a \in A$ ، می‌توان، با انتقال و نگاشت تجانس ، فرض کرد که $a=0$ ، و A شامل گوی واحد B به معادله $|z| \le 1$ است. برای هر $z \in \mathring{B}$ ، و هر λ که $0 \le \lambda \le 1$، با توجه به اینکه $|(1-\lambda)z+\lambda e^{it}| \le 1-\lambda+\lambda=1$ ، به بررسی انتگرال :

$$g(\lambda)=\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(e^{it}-z))-f(z)}{e^{it}-z} e^{it} dt \qquad (۱. ۱. ۱۰. ۹)$$

می‌پردازیم. طبق (۱. ۱۱. ۸) و قانون لیبنیتز (۱۲. ۱۱. ۸) ، g روی $[0,1]$ پیوسته است، و در هر نقطه $]0,1[$ دارای مشتقی برابر $g'(\lambda)=\int_0^{2\pi} f'(z+\lambda(e^{it}-z))e^{it}dt$ است (تبصره بعد از (۱. ۴. ۸) را ببینید). اما ، $i\lambda f'(z+\lambda(e^{it}-z))e^{it}$ مشتق نگاشت $t \to f(z+\lambda(e^{it}-z))$ است، بنابراین، برای $\lambda \ne 0$ ، $g'(\lambda)=0$ ، و در نتیجه، g روی $[0,1]$ **ثابت** است (تبصره بعد از (۱. ۶ . ۸) را ببینید). اما، چون $g(0)=0$ ، برای $0 \le \lambda \le 1$ ، $g(\lambda)=0$. به‌ویژه، از مطلب فوق به ازاء $\lambda=1$ نتیجه می‌شود، که برای هر $z \in \mathring{B}$ (طبق (۴. ۸ . ۹)) :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_1} \frac{f(x)\,dx}{x-z}$$

و از (۲. ۹. ۹) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۲ . ۱۰. ۹) (شرایط کوشی ـ ریمان[1]) فرض کنیم f نگاشتی با مشتق پیوسته از مجموعه باز $A \subset R^{2p}$ به یک فضای باناخ مختلط باشد. برای اینکه تابع g که روی A (به عنوان زیر مجموعه‌ای از C^p) به‌صورت :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)=g(x_1+iy_1, \dots, x_p+iy_p)$$

تعریف شده است، روی A تحلیلی باشد، لازم و کافی است که شرایط :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+i\frac{\partial f}{\partial y_k}=0$$

روی A برای هر $1 \le k \le p$ برقرار باشد.

---

1 . Riemann - Cauchy conditions = Условия Коши-Римана

باز هم، طبق (۱. ۹. ۸)، می‌توان فوراً قضیه را به حالت $p=1$ تبدیل نمود. فرض کنیم (x , y) نقطه‌ای در A باشد. قرار می‌دهیم $a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x , y)$, $b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x , y)$. با بیان اینکه حدود :

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+iy+h)-g(x+iy)}{h} \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+iy+ih)-g(x+iy)}{ih}$$

با هم برابرند (h عددی حقیقی و مخالف صفر است)، به‌دست می‌آوریم $a+ib=0$. به عکس، اگر شرایط بیان شده در قضیه برقرار باشد، آن‌گاه ، طبق (۱ . ۱ . ۹ . ۸) ، برای هر $\varepsilon>0$ ، $r>0$ ی موجود است، به طوری که، اگر $(h^2+k^2)^{1/2}\le r$ ،

$$\| g(x+iy+h+ik)-g(x+iy)-a(h+ik)\| \le \varepsilon(h^2+k^2)^{1/2}$$

و از مطلب فوق نتیجه می‌شود که نگاشت $z\to g(z)$ در نقطه $z=x+iy$ دارای مشتقی برابر a است، و به این ترتیب، از (۱. ۱۰. ۹) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مسائل

۱. نشان دهید که، یک نگاشت مشتق پذیر f از یک زیرمجموعه باز A از $\mathbf{C}^p$ به یک فضای باناخ مختلط روی A تحلیلی است. («قضیه گورسا» ؛ فرض نشده است که f' پیوسته است). (با نمادهای قضیه (۱. ۱۰. ۹) ثابت کنید که، برای هر λ در $]0 , 1[$ ، $g'(\lambda)$ وجود دارد، و برابر 0 است. ابتدا نشان دهید که، برای $\varepsilon>0$ داده شده، نقاطی مانند $0=t_0<t_1<\dots<t_m=2\pi$ و عددی مانند $\rho>0$ ، و در هر فاصله $[t_k , t_{k+1}]$ نقطه‌ای مانند θ_k وجود دارند، به‌طوری که، اگر $\zeta_k=z+\lambda(e^{i\theta_k}-z)$ و $\zeta_k+x=z+(\lambda+h)(e^{it}-z)$ ، آنگاه :

$$|f(\zeta_k+x)-f(\zeta_k)-f'(\zeta_k)x|\le\varepsilon|x|$$

اگر $|h|\le\rho$ ، $t_k\le t\le t_{k+1}$ باشد. (این مطلب را با برهان خلف ثابت کنید، با استفاده از فشردگی فاصله $[0 , 2\pi]$ و وجود مشتق f' در هر نقطه). سپس، هر یک از انتگرال‌های :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{f(z+(\lambda+h)(e^{it}-z))-f(z+\lambda(e^{it}-z))}{e^{it}-z}e^{it}\,dt$$

را برای $|h|\le\rho$ ، با عبارت :

$$\frac{h}{i\lambda}\left(f(z+\lambda(e^{it_{k+1}}-z))-f(z+\lambda(e^{it_k}-z))\right)$$

مقایسه کنید.)

۲ . فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند ساده از C باشد. اگر f نگاشتی پیوسته از A به فضای مختلط باناخ E باشد، به طوری که برای هر مدار γ در A، $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ ، نشان دهید که، نگاشت f روی A تحلیلی است **(قضیه موررا[1])**. (نشان دهید که، f روی A یک پریمیتیو دارد).

---
1 . Morera theorem = Теорема Морера

۳ . فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbf{C}^p$ ، γ راهی تعریف شده روی $I=[a,b]$، و f نگاشتی پیوسته از $\gamma(I)\times A$ به فضای باناخ مختلط E باشد، و فرض کنیم برای هر $x\in\gamma(I)$ تابع $(z_1,\dots,z_p)\to f(x,z_1,\dots,z_p)$ روی A تحلیلی باشد، و هر یک از توابع $\frac{\partial f}{\partial z_k}(x,z_1,\dots,z_p)$ روی $\gamma(I)\times A$ پیوسته باشند ($1\le k\le p$). نشان دهید که، تحت این شرایط، تابع $g(z_1,\dots,z_p)=\int_\gamma f(x,z_1,\dots,z_p)dx$ روی A تحلیلی است. (از (۲. ۱۰. ۹) استفاده کنید. چون $\gamma'(t)$ صرفاً یک تابع رگله است، و ممکن است پیوسته نباشد، قانون لیبنیتز (۲. ۱۱. ۸) مستقیماً قابل استفاده نیست، اما، اثبات (۲. ۱۱. ۸) با تغییراتی اندک می‌تواند معتبر و مناسب باشد).

۴ . فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند از $\mathbf{R}^p$ $(p\ge 2)$، و f یک نگاشت تحلیلی از A به فضای باناخ مختلط E باشد، و فرض کنیم یک چند قرصی باز $P\subset A$ ، با مرکز $b=(b_k)_{1\le k\le p}$ و شعاع‌های r_k $(1\le k\le p)$ موجود باشد، به طوری که برای هر نقطه (c_k) از P، عددی مانند $\rho<\inf(r_1,r_2)$ موجود باشد، به طوری که تابع $x_1+ix_2\to f(x_1,x_2,c_3,\dots,c_p)$ روی زیرمجموعه باز $|x_1+ix_2-(c_1+ic_2)|<\rho$ از C (یکسان با $\mathbf{R}^2$) تحلیلی باشد. نشان دهید که، خاصیتی مشابه برای هر نقطه $(c_k)\in A$ برقرار است. (از (۲. ۱۰. ۹) و (۲. ۴. ۹) استفاده کنید).

۵ . فرض کنیم S یک «قشر کروی»[1] در $\mathbf{R}^p$ $(p\ge 3)$ باشد، که با رابطه :

$$(\mathbf{R}-\varepsilon)^2<x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2<(\mathbf{R}+\varepsilon)^2 \qquad (0<\varepsilon<\mathbf{R})$$

تعریف شده است.و فرض کنیم f یک نگاشت تحلیلی از S به فضای مختلط باناخ E باشد، و برای هر $u=(x_3,\dots,x_p)$ ، نگاشت $x_1+ix_2\to f(x_1,x_2,u)$ روی یک همسایگی (در C) از هر نقطه مقطع عرضی $S(u)$ (اگر $S(u)$ غیرتهی باشد) تحلیلی باشد.

(a) برای هر $u=(x_3,\dots,x_p)$ به طوری که $\|u\|^2=x_3^2+\dots+x_p^2<\mathbf{R}^2$، فرض کنیم $\gamma(u)$ راهی در C باشد، که برای $-\pi\le t\le\pi$ با رابطه $t\to(\mathbf{R}^2-\|u\|^2)^{1/2}e^{it}$ تعریف شده است. فرض کنیم :

$$g(z,u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(u)}\frac{f(y,u)dy}{y-z}$$

که در آن $y=x_1+ix_2$ ، و $f(y,u)=f(x_1,x_2,u)$، و g روی $|z|^2+\|u\|^2<\mathbf{R}^2$ تعریف شده است، و نگاشت $z\to g(z,u)$ برای $|z|<(\mathbf{R}^2-\|u\|^2)^{1/2}$ تحلیلی است. از طرف دیگر، برای هر $v=(x'_3,\dots,x'_p)$ به طوری که $\|v\|<\mathbf{R}$ ، فرض کنیم :

$$h_v(z,u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(v)}\frac{f(y,u)dy}{y-z}.$$

نشان دهید که، برای $\|v\|<\|u\|<\|v\|+\varepsilon$ و $|z|<(\mathbf{R}^2-\|v\|^2)^{1/2}$ ، $h_v(z,u)=g(z,u)$. (از قضیه کوشی (۳. ۶. ۹) استفاده کنید). از طرف دیگر، نشان دهید که، برای $\mathbf{R}-\varepsilon<\|u\|<\mathbf{R}$ و $|z|<(\mathbf{R}^2-\|u\|^2)^{1/2}$، داریم :

$$g(z,u)=f(z,u)$$

و نتیجه بگیرید که، f را می‌توان به یک تابع $\tilde{f}$ گسترش داد، که روی همه گوی B به معادله $x_1^2+\dots+x_p^2<(\mathbf{R}+\varepsilon)^2$ تحلیلی است (از (۲. ۴. ۹) و مسأله ۳ استفاده کنید). آیا قضیه برای $p=2$ نیز درست است؟

---

1 . Shell = Шаровой слой

(b) وقتی $E = C$ باشد، نشان دهید که $\tilde{f}(B) \subset f(S)$. (نتیجه (a) را برای تابع $1/(f-c)$، وقتی $c \notin f(S)$ به کار برید). در حالت خاص، اگر نگاشت f روی S کراندار باشد، آنگاه نگاشت $\tilde{f}$ روی B کراندار خواهد بود. خاصیت اخیر را برای حالتی که E یک فضای هیلبرت مختلط است تعمیم دهید. (از روش مسأله ۶ بخش ۵ . ۸ استفاده کنید).

۱۱. قضیه لیوویل

(۱. ۱۱. ۹) (قضیه لیوویل[1]) فرض کنیم f یک تابع تام روی $\mathbf{C}^p$، با مقادیری در فضای مختلط باناخ E باشد، و فرض کنیم دو عدد $a > 0$ ، $N > 0$ موجود باشند، به‌طوری‌که روی $\mathbf{C}^p$ ،

$$\|f(z)\| \leq a\,(1 + (\sup|z_j|)^{N}) .$$

در این‌صورت ، $f(z)$ برابر مجموع تعدادی متناهی از «تک‌جمله‌ای‌های» $c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$ با ضرایب $c_{n_1 \dots n_p} \in E$ ، و $n_1 + n_2 + \dots + n_p \leq N$ می‌باشد[2].

فرض کنیم روی $\mathbf{C}^p$ ، $f(z) = \sum_{\nu} c_\nu z^\nu$، که در آن سری توانی سمت راست روی $\mathbf{C}^p$ به طور مطلق همگرا است. با به کارگیری نامساوی کوشی (۵ . ۹. ۹) روی چند قرصی $|z_j| \leq \mathbf{R}$ $(1 \leq j \leq p)$ نتیجه می‌گیریم، که برای هر $\nu = (n_1, \dots, n_p)$ ،

$$\|c_{n_1 \dots n_p}\| \leq a(1+\mathrm{R})^{N} \mathrm{R}^{-(n_1 + \dots + n_p)}$$

و از رابطه فوق، وقتی $\mathbf{R} \to +\infty$ ، نتیجه می‌شود، به جز در حالتی که $n_1 + \dots + n_p \leq \mathbf{N}$ ، $c_{n_1 \dots n_p} = 0$.

(۲. ۱۱. ۹) (قضیه اساسی جبر) هر چند جمله‌ای $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ $(n \geq 1 ، a_0 \neq 0)$ با ضرایب مختلط لااقل دارای یک ریشه در C است.

اگر $f(z)$ دارای هیچ ریشه‌ای در C نباشد، طبق (۲. ۳. ۹) ، $\frac{1}{f}$ در C تحلیلی خواهد بود، و در

---

1. Liouville's theorem = Теорема Лиувилля

۲. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، فرض شده است که، p عدد صحیح m_k $(1 \leq k \leq p)$ و عدد $a > 0$ موجود باشد، به‌طوری‌که، برای هر نقطه $z \in \mathrm{C}^p$ نامساوی : $\|f(z)\| \leq a\,|z_1|^{m_1} |z_2|^{m_2} \dots |z_p|^{m_p}$ برقرار باشد. در این صورت $f(z)$ به صورت مجموع تعدادی متناهی از «تک‌جمله‌ای‌های» $c_{n_1 n_2 \dots n_p} z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$ است، که در آن برای $1 \leq k \leq p$ ، $n_k \leq m_k$.

برای اثبات این مطلب نیز شبیه اثبات فوق فرض شده است که روی C^p ، $f(z) = \sum_{\nu} c_\nu z^\nu$ که در آن سری سمت راست روی C^p به‌طور مطلق همگرا است. با به کارگیری نامساوی کوشی (۵ . ۹. ۹) روی چند قرصی به مرکز O و شعاع‌های r_k $(1 \leq k \leq p)$، برای هر اندیس $\nu = (n_1, \dots, n_p)$ خواهیم داشت : $\|c_{n_1 \dots n_p}\| \leq a r_1^{m_1 - n_1} \dots r_p^{m_p - n_p}$ ، و چون شعاع های r_k دلخواه هستند، از رابطه فوق نتیجه می‌شود، که اگر $n_k > m_k$ $(1 \leq k \leq p)$ آنگاه $c_{n_1, \dots, n_p} = 0$. مترجم.

نتیجه، طبق (۶ . ۹. ۹) باید $\frac{1}{f}$ تابعی تام باشد. فرض کنیم r عددی حقیقی باشد، به طوری که برای $1 \le k \le n$ ، $r^k \ge (n+1)\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$. در این صورت ، برای $|z| \ge r$ ،

$$f(z) = |a_0 z^n| . \left|1+\frac{a_1}{a_0 z} + \dots + \frac{a_n}{a_0 z^n}\right| \ge$$

$$\ge |a_0 z^n| \left(1-\frac{n}{n+1}\right) \ge |a_0| r^n / (n+1)$$

به عبارت دیگر، برای $|z| \ge r$ ، $\frac{1}{f}$ کراندار است. از طرف دیگر، $\frac{1}{f}$ روی مجموعه فشرده $|z| \le r$ پیوسته است، در نتیجه ، روی این مجموعه طبق (۱۰. ۱۷. ۳) باید کراندار باشد. بنابراین، $\frac{1}{f}$ روی C کراندار است. در نتیجه، طبق قضیه لیوویل ، $\frac{1}{f}$ باید ثابت باشد، و در این صورت ، f نیز ثابت خواهد بود، که با فرض در تناقض است، زیرا ، برای $|z| \ge r$ ، $|f(z)| \ge |a_0| . |z^n| / (n+1)$.

مسائل

۱. اگر $p \ge 2$ باشد، نشان دهید که، یک تابع که روی مکمل یک زیرمجموعه فشرده از C^p تحلیلی است، تابعی تام است. بنابراین، اگر علاوه بر این، تابع روی مکمل یک زیر مجموعه فشرده از C^p کراندار نیز باشد، آنگاه ثابت خواهد بود. (از (۱. ۱۱. ۹) و مسائل ۴ و ۵ بخش ۱۰. ۹ استفاده کنید). آیا نتیجه فوق برای $p = 1$ هم درست است؟

۲. فرض کنیم f یک تابع تام مختلط روی C^p باشد. نشان دهید که، نتیجه قضیه (۱. ۱۱. ۹) معتبر باقی خواهد ماند، اگر فرض شود که، برا ی هر z واقع در برون یک چند قرصی[1] از C^p ، $\mathcal{R}(f(z)) \le a . (\sup_j(1, |z_j|)^m)$.

(از مسأله ۶ بخش ۹. ۹ استفاده کنید).

۳. فرض کنیم $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تابع تام غیرثابت باشد. برای هر $r > 0$ ، فرض کنیم $\mu(r) = \sup_n \|a_n\| r^n$ ،

$$M(r) = \sup_{\|z\| = r} \|f(z)\|$$

بنابراین[2] $\mu(r) \le M(r)$؛ طبق قضیه لیوویل ، $\lim_{r\to\infty} \mu(r) = +\infty$. فرض کنیم دو ثابت $a > 0$ ، $\alpha > 0$ موجود باشند، به طوری‌که $\mu(r) \le a . \exp(r^\alpha)$. نشان دهید که، ثابت‌هایی مثبت مانند b و c موجود هستند، به طوری که $M(r) \le b r^\alpha \mu(r) + c$. (ملاحظه کنید که $\|a_n\| \le a(e\alpha/n)^{n/\alpha}$.)

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به‌جای برای هر z واقع در برون یک چندقرصی، فرض شده است که برا ی هر نقطه $z \in C^p$ ، و به‌جای رابطه $\mathcal{R}(f(z)) \le a . (\sup_j(1, |z_j|)^m)$ ، فرض شده است که، رابطه $\mathcal{R}(f(z)) \le a |z_1|^{m_1} \dots |z_p|^{m_p}$ برای هر $z \in C^p$ برقرار باشد. مترجم.

۲. در واقع، طبق نامساوی‌های کوشی (۵ . ۹ . ۹) ، برای هر عدد طبیعی n ، داریم $\|a_n\| \le \frac{M(r)}{r^n}$ ، بنابراین $\mu(r) = \sup_n \|a_n\| r^n \le M(r)$ ، و این همان رابطه‌ای است که در مسأله به آن اشاره شده است. مترجم.

۱۲. دنباله‌های همگرا از توابع تحلیلی

(۱. ۱۲. ۹) فرض کنیم (f_n) یک دنباله از نگاشت‌های تحلیلی از مجموعه باز $A \subset C^p$ به فضای مختلط باناخ E باشد، و فرض کنیم برای هر $z \in A$ ، دنباله $(f_n(z))$ به سمت حد $g(z)$ میل کند، و همگرایی روی هر زیرمجموعه فشرده از A یکنواخت باشد. دراین صورت، g روی A تحلیلی است، و برای هر $\nu = (n_1, \dots, n_p) \in N^p$ ، دنباله $(D^\nu f_n(z))$ هر نقطه $z \in A$ به $D^\nu g(z)$ همگرا است، و همگرایی روی هر زیر مجموعه فشرده A یکنواخت است.

چون g روی A پیوسته است ((۱. ۲. ۷) را ببینید)، برای اثبات اینکه g روی A تحلیلی است، طبق (۴. ۹. ۹)، تنها باید ثابت کنیم که، هر یک از نگاشت‌های $z_k \to g(a_1, \dots, z_k, \dots, a_p)$ روی $A(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1} \dots, a_p)$ تحلیلی است. به عبارت دیگر، قضیه به حالت $p=1$ تبدیل می‌شود. برای هر $a \in A \subset C$ ، فرض کنیم B یک گوی بسته به مرکز a و شعاع r مشمول A باشد، و فرض کنیم γ مدار $t \to a + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ باشد. در این صورت، برای هر $z \in \overset{0}{B}$ و هر n، طبق فرمول کوشی، داریم :

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(x)}{x-z} dx$$

اما، طبق فرض، دنباله $(f_n(x))$ روی $|x-a| = r$ به‌طور یکنواخت به $g(x)$ همگرا است، و چون $|z-x| \ge r - |z|$ ، دنباله $\frac{f_n(x)}{x-z}$ (z ثابت است) نیز روی $|x-a| = r$ به‌طور یکنواخت به $\frac{g(x)}{x-z}$ همگرا است. بنابراین، طبق (۸. ۷. ۸)،

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(x)\,dx}{x-z}$$

از فرمول فوق، طبق (۲. ۹. ۹) نتیجه می‌شود که g روی $\overset{0}{B}$ تحلیلی است. علاوه بر این، چون، طبق (۳. ۹. ۹)،

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(x)\,dx}{(x-z)^2}$$

با دلیلی مشابه (و با به‌کارگیری قضیه (۳. ۹. ۹) برای g) می‌توان نشان داد که، دنباله $f'_n(z)$ برای هر نقطه $z \in \overset{0}{B}$ همگرا به $g'(z)$ است. افزون بر این، طبق قضیه میانگین :

$$\| g'(a) - f'_n(a) \| \le \frac{1}{r} \sup_{|x-a|=r} \| g(x) - f_n(x) \|. \qquad (۱. ۱. ۱۲. ۹)$$

به حالت کلی برمی‌گردیم (p اختیاری است). اکنون نشان می‌دهیم که، دنباله $(\mathrm{D}_k\, f_n(z))$ روی هر مجموعه فشرده $\mathrm{M} \subset \mathrm{A}$ به‌طور یکنواخت به $\mathrm{D}_k\, g(z)$ همگرا است. عددی مانند $r > 0$ و یک همسایگی فشرده V از M موجود است، به‌طوری که $\mathrm{V} \subset \mathrm{A}$، و V شامل همه نقاطی از A است که فاصله‌ای کوچکتر یا مساوی r از M دارند (۲. ۱۸. ۳ را ببینید). برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، فرض کنیم n_0 چنان انتخاب شده باشد که، برای $n \geq n_0$ و هر $z \in \mathrm{V}$ ، $\|g(z) - f_n(z)\| \leq \varepsilon$. در این صورت، با به کارگیری (۱. ۱. ۱۲. ۹) برای دنباله توابع $z_k \to f_n(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_p)$ به ازاء هر $z \in \mathrm{M}$ ، وقتی $n \geq n_0$ باشد، نتیجه می‌گیریم $\|\mathrm{D}_k\, g(z) - \mathrm{D}_k\, f_n(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{r}$. مطلب فوق اثبات قضیه را در حالتی که $n_1 + \ldots + n_p = 1$ باشد، به پایان می‌رساند، در حالت کلی قضیه را می‌توان با استقراء روی $n_1 + \ldots + n_p$ ثابت کرد.

در اینجا نیز دوباره دیده می‌شود که، قضیه برای توابع تحلیلی با متغیرهای حقیقی درست نیست. زیرا، طبق قضیه تقریب ویراشتراس (۱. ۴. ۷) ، دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها روی یک مجموعه فشرده می‌تواند به سمت یک تابع پیوسته **دلخواه** (مثلاً ، تابعی مشتق ناپذیر) میل کند.

مسائل

۱. (a) فرض کنیم $(a_k)_{1 \leq k \leq p}$ دنباله‌ای متناهی از اعداد مختلط باشد، به طوری که $\sum_{k=1}^{p} |a_k| = \alpha < 1$. نشان دهید که :

$$\left|\prod_{k=1}^{p} (1 + a_k) - 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k\right| \leq \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}$$

(b) توابع تام :

$$\mathrm{E}(z, 0) = 1 - z \quad , \quad \mathrm{E}(z, p) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$$

را **عوامل اولیه**[1] می‌نامند. نشان دهید که، برای $|z| \leq 1/2$ ،

$$|\mathrm{E}(z, p) - 1| \leq 4|z|^{p+1}$$

(ملاحظه کنید که، برای $|z| \leq 1/2$ ،

$$\left|\log(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right| \leq 2|z|^{p+1}/(p + 1)$$

و برای $|z| \leq 1$ ، $|e^z - 1| \leq 2|z|$.)

(c) فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط ناصفر باشد، به‌طوری‌که، دنباله $(|a_n|)$ صعودی باشد و $\lim_{n \to \infty} |a_n| = +\infty$. نشان دهید که، برای هر $z \in \mathrm{C}$ ، سری با جمله عمومی $\left(\frac{z}{a_n}\right)^n$ به طور مطلق همگرا است.

1. Primary factors = Первичные множители

(d) از (a) ، (b) و (c) نتیجه بگیرید که، دنباله توابع تام :

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_k}, k-1\right)$$

روی هر زیر مجموعه فشرده از C به طور یکنواخت همگرا است (از محک کوشی استفاده نموده، و تفاضل $1 - \frac{p_m(z)}{p_n(z)}$ را برای $m > n$ ، با استفاده از (a) و (b) ارزیابی نموده ، سپس ، از (c) استفاده کنید. بنابراین، $f(z)$ حد دنباله $(p_n(z))$ یک تابع تام است، که به صورت :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_n}, n-1\right)$$

نوشته می‌شود. نشان دهید که، تنها نقاطی که در آنها $f(z) = 0$ ، نقاط (a_n) می‌باشد (از برآورد قبلی استفاده کنید).

(e) فرض کنیم که، عددی صحیح مانند $p > 0$ موجود است، به طوری که سری با جمله عمومی $|a_n|^{-p}$ همگرا است. به طریقی مشابه، نشان دهید که دنباله توابع تام :

$$q_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_k}, p-1\right)$$

روی هر زیرمجموعه فشرده از C به‌طور یکنواخت همگرا است. حد آن را دوباره به صورت :

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_n}, p-1\right)$$

می‌نویسیم. ثابت کنید که، ثابتی مانند $c > 0$ موجود است، به طوری که :

$$|g(z)| \leq \exp(c|z|^p)$$

(برای هر z داده شده، حاصل‌ضرب عواملی که برای آنها $|a_n| \geq 2|z|$ است، و بقیه عوامل را به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار داده، با استفاده از (b) کران بالایی برای اولین حاصل‌ضرب به‌دست آورده از طرف دیگر، ثابت کنید که ثابتی مانند b موجود است، به طوری که برای $z \in \mathrm{C}$ ، $|\mathrm{E}(z, p-1)| \leq \exp(b|z|)^{p-1}$.)

۲ . نشان دهید که، دنباله توابع تام :

$$f_n(z) = z(z+1)\dots(z+n) / n^z n! \tag{۱}$$

(که در آن طبق تعریف $n^z = \exp(z \log n)$) روی هر زیرمجموعه فشرده C به‌طور یکنواخت به تابع تام :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{۲}$$

همگرا است، که در آن $\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ **(ثابت اویلر**[1]**)**. (از نتیجه قسمت (e) مسأله ۱ استفاده نموده، از رابطه $\log n = \sum_{k=2}^{n} \log(k/(k-1))$ برای مقایسه (۱) و (۲) ، و از قضیه میانگین برای به‌دست آوردن کران بالایی برای $\left|\frac{1}{k} - \log\frac{k}{k-1}\right|$ استفاده کنید).

ثابت کنید که، $\Gamma(z)$ در معادله تابعی :

1 . Euler’s constant = Постоянная Эйлера

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

وقتی z عددی صحیح مانند $-n \le 0$ نیست، صدق می‌کند، و وقتی $n > 0$ عددی صحیح باشد $\Gamma(n) = (n-1)!$.

۳ . یک راه بی‌انتها[1] در یک زیرمجموعه باز $A \subset C$ نگاشتی پیوسته مانند γ از $\mathbf{R}$ به A است به‌طوری که، در هر فاصله فشرده $I \subset R$، γ پریمیتیو یک تابع رگله باشد. اگر f نگاشتی پیوسته از $\gamma(\mathbf{R})$ به فضای باناخ مختلط E باشد، گوییم f **به‌طور ناسره در امتداد راه γ انتگرال‌پذیر** است، هرگاه **انتگرال ناسره** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ موجود باشد (یعنی، اگر هر دو حد $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ و $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ در E موجود باشند). مقدار این انتگرال را **انتگرال f** در امتداد راه γ نامیده، به علامت $\int_\gamma f(z)\,dz$ نشان می‌دهند.

فرض کنیم B یک زیر مجموعه باز از C^p، و g یک نگاشت پیوسته از $\gamma(\mathbf{R}) \times B$ به E باشد، و فرض کنیم، برای هر $x \in \gamma(\mathbf{R})$، تابع $(z_1, \dots, z_p) \to g(x, z_1, \dots, z_p)$ روی B تحلیلی باشد، و هر یک از توابع $\frac{\partial g}{\partial z_k}(x, z_1, \dots, z_p)$ روی $\gamma(\mathbf{R}) \times B$ پیوسته باشد، و بالاخره، فرض کنیم، برای هر $(z_1,\dots,z_p) \in B$، نگاشت $x \to g(x, z_1, \dots, z_p)$ در امتداد γ به‌طور ناسره انتگرال‌پذیر باشد، و $\int_{-n}^{n} g(\gamma(t), z_1, \dots, z_p)\gamma'(t)\,dt$ به‌طور یکنواخت به سمت $\int_\gamma g(x, z_1, \dots, z_p)dx$ میل کند، وقتی $(z_1, \dots, z_p)$ متعلق به یک زیرمجموعه فشرده از B باشد و n به سمت $+\infty$ میل کند. تحت این شرایط، نشان دهید که، تابع $(z_1,\dots, z_p) \to \int_\gamma g(x, z_1,\dots, z_p)dx$ روی B تحلیلی است (با (۶ . ۸ . ۱۳) مقایسه کنید).

۴ . نتیجه مسأله ۲ از بخش (۹ . ۹) را به توابع p متغیره مختلط تعمیم دهید، D_+ (به ترتیب D_-) با رابطه $\mathscr{I}(z_p) > 0$ (به ترتیب $\mathscr{I}(z_p) < 0$) تعریف می‌شود. (ملاحظه کنید که، طبق (۱. ۱۲. ۹) ؛ برای هر z_p که $\mathscr{I}(z_p) = 0$ و اشتراک مجموعه $B \subset A$ با $C^{p-1} \times \{z_p\}$ غیر تهی است، تابع $(z_1, \dots, z_{p-1}) \to f(z_1, \dots, z_{p-1}, z_p)$ روی B تحلیلی است.)

۵ . در صفحه C، فرض کنیم Q مربع به مرکز 0 باشد، که با روابط $|\mathscr{R}(z)| < 1$ ، $|\mathscr{I}(z)| < 1$ تعریف شده است، و فرض کنیم Q_0 ، Q_1، Q_2، Q_3 تصویرهای مربع Q تحت نگاشت‌های :

$$z \to \frac{1+i}{2} + \frac{z}{2}\ ,\ z \to \frac{-1+i}{2} + \frac{z}{2}\ ,\ z \to \frac{-1-i}{2} + \frac{z}{2}\ ,\ z \to \frac{1-i}{2} + \frac{z}{2}$$

باشد، و فرض کنیم $m_0 = 0$، و برای $h \ge 1$، $m_h = 4 + 4^2 + \dots + 4^h$. اگر $n = m_h + 4k + j$ ، با $h \ge 1$،

$$0 \le k \le 4^h - 1\ ,\ 0 \le j \le 3$$

مربع Q_n را با استقراء به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

فرض کنیم $n_1 = m_{h-1} + k$ ، و z_{n_1} مرکز مربع Q_{n_1} باشد. در این صورت، قرار می‌دهیم: $\varphi_{n_1}(z) = z_{n_1} + z/2^h$ و $Q_n = \varphi_{n_1}(Q)$.

(a) فرض کنیم B دیسک واحد $|z| \le 1$ ، و U دایره واحد $|z| = 1$ باشد. با استقراء روی n نشان دهید که، سه دنباله (α_n) ، (c_n) و (t_n) از اعداد موجود هستند، به‌طوری که برای $n \ge 4$ تعریف شده‌اند، و دارای خواص زیر می‌باشند :

$$0 < \alpha_n < 1\ ,\ |t_n| = 1\ ,\ c_n \in C \qquad (1)$$

---

1 . Endless road = Бесконечный путь

(۲) اگر برای $z \in B$ ، $g_n(z) = c_n(1-(1-\frac{z}{t_n})^{\alpha_n})$ (تعریف بخش ۵ . ۹ ، مسأله ۸ را ببینید)، و $f_n(z) = z + \sum_{q=4}^{n} g_q(z)$ ،
آنگاه، برای $k \le n$ ، $f_n(B) \subset \bar{Q}$ و $f_n(t_k) \in Q_k$.

(۳) سری $\sum_n |c_n|$ همگرا است.

(ملاحظه کنید که $g_n(t_n) = c_n$ ، اما ، برای همسایگی داده شده V_n از t_n در B ، می‌توان α_n را آنقدر کوچک گرفت که $g_n(z)$ در $B - V_n$ به دلخواه کوچک باشد. t_n را نزدیک به t_{n_1} انتخاب نموده (با نمادهایی که فوقاً معرفی شدند) ، به طوری که همه t_nها متمایز باشند، و V_n را طوری انتخاب کنید که شامل هیچ یک از t_k ها با $k < n$ نباشد).

(b) تحت شرایط قبل، برای هر $z \in B$ ، $f(z)$ حد دنباله $(f_n(z))$ موجود است، نگاشت f روی B پیوسته، و روی $\overset{0}{B}$ تحلیلی است ، و $F(U) = Q$ («خم پئانو[1]» ، مقایسه کنید با بخش ۲. ۴ ، مسأله ۵).

۱۳. مجموعه‌های همپیوسته[2] از توابع تحلیلی

(۱. ۱۳. ۹) فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در C^p ، و Φ مجموعه‌ای از نگاشت‌های تحلیلی از A به فضای باناخ مختلط E باشد، و فرض کنیم برای هر زیرمجموعه فشرده L از A ، ثابتی مانند $m_L > 0$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $f \in \Phi$ و هر $z \in L$ ، $\|f(z)\| \le m_L$. در این صورت، Φ روی A همپیوسته است. (بخش ۵ . ۷ را ببینید) ؛ اگر علاوه براین، فضای باناخ E دارای بعد متناهی باشد، آنگاه، برای هر زیر مجموعه فشرده L از A ، مجموعه Φ_L که از تحدید توابع $f \in \Phi$ به L تشکیل شده است، در فضای $\mathscr{C}_E(L)$ به‌طور نسبی فشرده است (بخش ۲. ۷ را ببینید) .

فرض کنیم $a \in A$. گویی بسته مانند $P \subset A$ با مرکز a و شعاع r موجود است ؛ و چون P فشرده است، برای هر $z \in P$ و هر $f \in \Phi$ ، $\|f(z)\| \le m_p$. فرض کنیم Q گویی بسته به مرکز a و شعاع $r/2$ باشد.
برای هر $z \in Q$ و $f \in \Phi$ می‌توان نوشت :

$$f(z) - f(a) = \sum_{k=1}^{p} (f(z_1, \dots, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p) - f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_p))$$

حال :

$$(f(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_p) - f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_p)) =$$
$$= \int_0^1 D_k f(z_1, \dots, z_{k-1}, a_k + t(z_k - a_k), a_{k+1}, \dots, a_p)(z_k - a_k)\,dt .$$

می‌نویسیم $g_k(u) = f(z_1, \dots, z_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_p)$. نگاشت g_k روی یک مجموعه باز از C شامل گوی $|u - a_k| \le r$ ، تحلیلی است ، و روی این گوی $\|g_k(u)\| \le m_p$. با به‌کارگیری (۳. ۹. ۹) برای g_k و

---

1 . Peano curve = Кривая Пеано
2 . Equicontinuous sets = Равностепенно непрерывные множества

مدار $t \to a_k + re^{it}$ که روی $[0\,,2\pi]$ تعریف شده، برای $|u-a_k| \le \frac{r}{2}$ ، به دست می‌آوریم :

$$\| g'_k(u) \| \le \frac{4m_{\mathrm{P}}}{r}$$

بنابراین، برای هر $z \in \mathrm{Q}$ ، و هر $f \in \Phi$ داریم :

$$\| f(z) - f(a) \| \le \frac{4pm_{\mathrm{P}}}{r} \, |z-a|$$

که نشان می‌دهد Φ در نقطه a همپیوسته است. آخرین حکم قضیه (۱. ۱۳. ۹) از این حقیقت که، هر مجموعه کراندار در یک فضای با بعد متناهی به‌طور نسبی فشرده است ((۶ . ۱۷. ۳) و (۱۷. ۲۰. ۳) را ببینید) ، و از قضیه آسکولی (۷. ۵. ۷) نتیجه می‌شود.

(۲. ۱۳. ۹) فرض کنیم A یک مجموعه باز همبند در C^p ، و Φ یک مجموعه از نگاشت‌های تحلیلی از A به فضای مختلط باناخ E باشد، و فرض کنیم برای هر زیرمجموعه فشرده L از A ، مجموعه Φ_{L} از تحدید توابعی مانند $f \in \Phi$ به L تشکیل شده باشد، که به‌طور نسبی در $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L})$ فشرده است. اگر M یک مجموعه یکتایی (U– مجموعه) در A باشد (بخش ۴. ۹ را ببینید) ، و اگر دنباله (f_n) از توابع Φ به‌طور ساده روی M همگرا باشد، آنگاه (f_n) روی هر زیرمجموعه فشرده از A به‌طور یکنواخت به یک تابع تحلیلی همگرا است.

از (۴. ۱۶. ۳) نتیجه می‌شود که، تنها باید ثابت کنیم، برای هر مجموعه فشرده $\mathrm{L} \subset \mathrm{A}$ دنباله تحدید توابع (f_n) به L **فقط دارای یک نقطه حدی (مقدار خوشه‌ای**[1]**)** در $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L})$ است. فرض کنیم چنین نباشد، و (g_n) و (h_n) دو زیردنباله از (f_n) باشند، که هر یک از آنها روی L به‌طور یکنواخت همگرا است، و حدود آنها متمایز هستند. چون، طبق (۴. ۱۸. ۳) ، A به‌طور موضعی فشرده، و جدایی‌پذیر است، دنباله‌ای صعودی مانند (U_n) از زیرمجموعه‌های باز A موجود است، به‌طوری که $\bar{\mathrm{U}}_n$ (بستار U_n در C^p) فشرده است، و مشمول U_{n+1} می‌باشد ، و $\mathrm{A} = \bigcup_n \mathrm{U}_n$ ((۳. ۱۸. ۳) را ببینید). با استقراء روی k دنباله $(g_{kn})_{n=1,2,\dots}$ را طوری تعریف می‌کنیم که (g_{kn}) زیردنباله‌ای از $(g_{k-1,n})$، با $(g_{on}) = g_n$ باشد و (g_{kn}) روی $\bar{\mathrm{U}}_k$ به طور یکنواخت همگرا باشد، که این با توجه به فرضیات مربوط به Φ امکان‌پذیر است. در این صورت، زیردنباله «قطری» (g_{nn}) روی هر یک از U_nها به‌طور یکنواخت همگرا است، و بنابراین، طبق (۱. ۱۲. ۹) ، g حد آن روی A تحلیلی است. با روشی مشابه، می‌توان از (h_n) زیر دنباله‌ای مانند (h_{nn}) استخراج نمود که، روی A به تابعی تحلیلی مانند h همگرا باشد. اما، طبق فرض، برای هر $z \in \mathrm{M}$ ، $g(z) = h(z)$ ، و طبق تعریف، باید داشته باشیم $g = h$ ، که با تعریف زیر دنباله‌های (g_n) ، (h_n) در تناقض است، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه به جای واژه انگلیسی Cluster value (مقدار خوشه‌ای) از واژه روسی Предльная точка (نقطه حدی) استفاده شده است. مترجم.

مسأله[۱]

۱. فرض کنیم A یک مجموعه باز در C باشد، و E مجموعه همه توابع مختلط f باشد که روی A تحلیلی هستند و انتگرال $\iint_A |f(z)|^2 dxdy$ متناهی است.

(a) نشان دهید که، E یک فضای برداری مختلط است، که برای هر زوج f، g از توابع در E، انتگرال $\iint_A f(z)\overline{g}(z)dxdy$ متناهی است و نگاشت $(f, g) \to \iint_A f(z)\overline{g}(z)dxdy$ روی E ساختمان یک فضای پیش هیلبرتی تعریف می‌کند که نرم روی آن را به صورت $\|f\|$ می‌نویسیم.

(b) نشان دهید که، برای هر زیرمجموعه فشرده $L \subset A$ ، عددی مانند a_L موجود است، به طوری که ، برای هر $f \in E$ و $t \in L$ ، $|f(t)| \leq a_L \|f\|$ (از بخش ۳. ۹، مسئله ۶ استفاده کنید). نتیجه بگیرید که، E یک فضای **هیلبرت** است.

(c) از (b) و از مسأله ۵ بخش ۳ . ۶ نتیجه بگیرید که، در E یک **تابع هسته** که آن را **هسته برگمن** A می‌نامند، موجود است . ثابت کنید که، اگر A دیسک واحد $|z| < 1$ باشد، هسته برگمن A برابر :

$$K_B(s, t) = \frac{1}{\pi(1 - s\overline{t})^2}$$

می‌باشد (از مسأله ۶ ، بخش ۳. ۹ استفاده کنید). به طریقی مشابه هسته برگمن حلقه $r < |z| < 1$ را به‌دست آورید.

(d) مطالب فوق را به یک زیرمجموعه باز A از C^n تعمیم دهید.

۱۴ . سری لوران[۲]

(۱. ۱۴. ۹) فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز از C، و r_0 و r_1 دو عدد مثبت باشند ، به‌طوری که $0 < r_0 < r_1$ ، و فرض کنیم «حلقه باز» S که با روابط $r_0 < |r| < r_1$ تعریف شده است[۳]، چنان باشد که $\overline{S}$ بستار S در C (یعنی، «حلقه بسته» $r_0 \leq |z| \leq r_1$) مشمول A باشد. برای هر نگاشت تحلیلی f از A به فضای مختلط باناخ E ، برای هر $x \in S$ ، داریم :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(z)dz}{z - x}$$

که در آن γ_0 (به ترتیب γ_1) مدار $t \to r_0 e^{it}$ (به ترتیب $t \to r_1 e^{it}$) با $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

---

۱. مسأله فوق در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

2 . Laurent series = Ряд Лорана

۳. در چاپ اول متن روسی کتاب برخلاف چاپ دوم متن انگلیسی آن روابط فوق به‌صورت $r_0 < |z| < r_1$ نوشته شده است، یعنی، به‌جای r ، z گذاشته شده است، که مناسب‌تر نیز به‌نظر می‌آید. مترجم.

مانند اثبات (۱. ۹. ۹) ، ابتدا می‌بینیم که، تابع :

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} & , z \in A \quad z \neq x \text{ برای} \\ f'(x) & , z = x \text{ برای} \end{cases}$$

روی A تحلیلی است. اکنون ، نگاشت :

$$\varphi(t, \xi) = \xi r_0 e^{it} + (1 - \xi) r_1 e^{it} \quad (0 \leq \xi \leq 1 , 0 \leq t \leq 2\pi)$$

یک هوموتوپی طوقه‌ای در A از γ_0 به γ_1 است ، بنابراین ، طبق قضیه کوشی (۳. ۶. ۹) ،

$$\int_{\gamma_0} g(z) dz = \int_{\gamma_1} g(z) dz$$

اما، برای $r_0 < |x| < r_1$ ، داریم $j(x, \gamma_0) = 0$ و $j(x, \gamma_1) = 1$ ((۴. ۸. ۹) و (۵. ۸. ۹) را ببینید) ، که از این‌ها نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۲. ۱۴. ۹) تحت شرایطی مشابه آنچه که در (۱. ۱۴. ۹) بیان شد، یک سری توانی $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ، وجود دارد که به ازاء $|z| < r_1$ همگرا است، و یک سری توانی بر حسب $\frac{1}{z}$ بدون جمله ثابت به صورت $g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$ وجود دارد، که برای $|z| > r_0$ همگرا است و روی S ، $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$. (سری لوران نگاشت f) ، علاوه بر این، سری‌های توانی g_1 ، g_2 با خواص فوق یکتا می‌باشند ؛ و برای هر مدار γ در $\bar{S}$، داریم :

$$j(0,\gamma)\, c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(x)\, dx}{x^{n+1}} , \; j(0, \gamma) d_n = \int_\gamma x^{n-1} f(x) dx$$

طبق (۴. ۹. ۹) ، برای $|z| < r_1$ ، داریم :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x) dx}{x - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

که در آن $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x) dx}{x^{n+1}}$ ، و سری سمت راست به ازاء $|z| < r_1$ همگرا است. از طرف دیگر، برای $|z| > r_0$ و $|x| = r_0$ ، داریم :

$$\frac{1}{z - x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^n}$$

که در آن سری سمت راست برای $|x| = r_0$ (z ثابت است) به‌طور نرمال همگرا است، طبق قضیه (۹ . ۷ . ۸) ، به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(x)dx}{x-z}=\sum_{n=1}^{\infty}d_n z^{-n}$$

که در آن $d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}x^{n-1}f(x)dx$ و سری سمت راست به ازاء $|z|>r_0$ همگرا است. این مطلب اولین قسمت قضیه (۲. ۱۴. ۹) را ثابت می‌کند. حال، فرض کنیم روی S،

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{-n} \qquad (۱. ۲. ۱۴. ۹)$$

که در آن هر دو سری روی S همگرا می‌باشند. ابتدا فرض کنیم γ مداری در S باشد، که روی I تعریف شده است. نقاط t و t' در I موجودند، به‌طوری که $\gamma(t)=\inf_{s\in I}\gamma(s)=r$ ، و $\gamma(t')=\sup_{s\in I}\gamma(s)=r'$ (۱۰. ۱۷. ۳ را ببینید). بنابراین، برای هر $s\in I$ ، $r_0<r\le\gamma(s)\le r'<r_1$. اما، برای $r\le|z|\le r'$ ، در رابطه (۱. ۲. ۱۴. ۹) هر دو سری به‌طور نرمال همگرا هستند. ((۲. ۱. ۹) را ببینید) ، بنابراین، طبق (۹. ۷. ۸) ، برای هر عدد صحیح m ، $\int_\gamma z^{m-1}f(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_\gamma z^{n+m-1}dz+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_\gamma z^{m-n-1}dz$. چون برای $k\neq-1$ ، $\frac{z^{k+1}}{k+1}$ پریمیتیو (تابع اولیه) z^k است، برای هر مدار σ داریم $\int_\sigma z^k\,dz=0$ ، و بنابراین ، فرمول‌های قضیه (۲. ۱۴. ۹) از تعریف شاخص نتیجه می‌شوند.

اکنون ، اگر γ در $\bar{S}$ باشد، آنگاه ، با توجه به اینکه یک حلقه باز S_1 به معادله $(1-\varepsilon)\,r_0<|z|<(1+\varepsilon)\,r_1$ مشمول A است ((۱۱. ۱۷. ۳) را ببینید) ، دوباره به حالت قبل برمی‌گردیم.

۱۵. نقاط تکین ایزوله؛ قطب‌ها؛ صفرها؛ مانده‌ها

(۱. ۱۵. ۹) [۱] **فرض کنیم A زیر مجموعه بازی از C ، a نقطه‌ای ایزوله از $C-A$ ((۱۰. ۱۰. ۳) را ببینید)، و $r>0$ عددی اکیداً مثبت باشد که همه نقاط گوی $|z-a|\le r$ به جز a متعلق به A باشند. اگر f نگاشتی تحلیلی از A به فضای باناخ مختلط E باشد، آنگاه برای هر $0<|z-a|<r$ ، داریم :**

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی قبل از بیان قضیه (۱. ۱۵. ۹) ، ابتدا نقطه ایزوله مجموعه‌ای مانند F از یک فضای متریک به‌صورت زیر تعریف شده است، و سپس، قضیه (۱. ۱۵. ۹) بیان و اثبات شده است.

فرض کنیم F یک مجموعه در فضای متریک E باشد. نقطه $x_0\in F$ را یک نقطه ایزوله مجموعه F می‌نامند هرگاه یک همسایگی V از نقطه x_0 موجود باشد به‌طوری‌که $V\cap F=\{x_0\}$. اگر هر نقطه مجموعه F نقطه‌ای ایزوله باشد، آنگاه توپولوژی زیرفضای F دیسکرت (گسسته) خواهد بود (یعنی، بر توپولوژی فضای متریکی که فاصله روی آن در (۵ . ۲. ۳) تعریف شده است، منطبق است)، و به عکس، زیرا، مطلب فوق به این معنی است که، هر مجموعه تک نقطه‌ای $\{x\}$ در F باز است.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-a)^{-n}$$

که در آن هر دو سری سمت راست تساوی فوق برای $0<|z-a|<r$ همگرا می‌باشند ، و :

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x)dx}{(x-a)^{n+1}}\ ,\ d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (x-a)^{n-1}f(x)dx$$

γ مدار $t\to a+re^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ می‌باشد.

مطلب فوق فوراً از قضیه (۲. ۱۴. ۹) با به‌کارگیری حلقه $\rho\le|z-a|\le r$ وقتی ρ به‌طور دلخواه کوچک باشد، نتیجه می‌شود.

ملاحظه می‌شود که، سری $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ تابعی **تام** است که $u(0)=0$. تابع $u(\frac{1}{z-a})$ را **جزء تکین**[1] **(قسمت اصلی)** f در همسایگی a (یا در نقطه a) می‌نامند. وقتی $u=0$ باشد، f در یک همسایگی U به معادله $0<|z-a|<r$ منطبق بر تابع $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ است، که برای $|z-a|<r$ تحلیلی است. به‌عکس، اگر تحدید f به U تابعی تحلیلی مانند f_1 باشد، که روی $|z-a|<r$ تعریف شده است، آنگاه طبق (۴. ۹. ۹) و (۱. ۱۵. ۹) ، $f_1=g$ ، و بنابراین $u=0$. وقتی $u\neq 0$ ، گوییم a یک **نقطه تکین تنهای**[2] f است. اگر u یک چند جمله‌ای از درجه $n\geq 1$ باشد، گوییم a یک **قطب مرتبه** n ام f است، در غیر این‌صورت، یعنی، اگر برای تعداد نامتناهی از مقادیر m ، $d_m\neq 0$ باشد، گوییم a یک **نقطه منفرد اساسی**[3] (یا **تکینی اساسی**) f است. در حالت کلی، **رتبه** $\omega(a, f)$ یا $\omega(a)$ تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می‌شود :

اگر a یک نقطه تکین اساسی باشد $\omega(a)=-\infty$؛

اگر a یک قطب مرتبه n م $(n\geq 1)$ باشد $\omega(a)=-n$؛

اگر $f\neq 0$ ، $u=0$ ، و سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ روی $0<|z-a|<r$ برابر $f(z)$ باشد، و m کوچکترین عدد صحیحی باشد که $c_m\neq 0$ ، $\omega(a)=m$، و بالاخره $\omega(a, 0)=+\infty$. وقتی $\omega(a, f)=m>0$، گوییم a **صفر مرتبه** m اُم تابع f است. ملاحظه می‌شود که، اگر هر دو تابع f ، و g روی مجموعه باز U به معادله $0<|z-a|<r$ تحلیلی باشند و مقادیر آنها در یک فضای یکسان باشد، آنگاه :

$$\omega(a, f+g)\geq \min(\omega(a,f), \omega(a,g))\ .$$

اگر یکی از توابع f ، g مختلط باشد، آنگاه، وقتی یکی از اعداد $\omega(a, f)$ ، $\omega(a, g)$ متناهی باشد،

---

1 . Singular part = Главная часть
2 . Isolated singular Point = Изолированная особая точка
3. Essential singularity = Существенная особенность

خواهیم داشت $\omega(a, fg) = \omega(a, f) + \omega(a, g)$. هر تابع تحلیلی روی U و با رتبه متناهی n (مثبت یا منفی) را می‌توان به‌صورت یکتای $(z-a)^n f_1$ نوشت، که در آن f_1 تابعی تحلیلی روی U است و در نقطه a دارای رتبه 0 است. بالاخره، اگر f با مقادیر مختلط روی U تحلیلی، و دارای رتبه متناهی m باشد، آنگاه، از اصل صفرهای تنها و از (۲. ۳. ۹) نتیجه می‌شود که، عددی مانند r' موجود است، به‌طوری که $0 < r' < r$ و $\frac{1}{f}$ روی مجموعه باز $0 < |z-a| < r'$ تحلیلی است، و در این حالت داریم:

$$\omega(a, \frac{1}{f}) = -\omega(a, f).$$

(۲ . ۱۵ . ۹) فرض کنیم f روی مجموعه باز $U = \{z \in C \mid 0 < |z-a| < r\}$ تحلیلی باشد. برای اینکه $\omega(a, f) \geq n$ باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت[1] یا منفی است، لازم و کافی است که، یک همسایگی V از a در C موجود باشد، به طوری که تابع $(z-a)^{-n} f(z)$ روی $V \cap U$ کراندار باشد.

شرط بیان شده در قضیه به وضوح لازم است، زیرا، یک تابع با رتبه بزرگتر یا مساوی 0 در نقطه a، تحدید یک تابع تحلیلی روی گوی $|z-a| < r$ است. به عکس، با بررسی تابع $(z-a)^{-n} f(z)$ می‌توانیم فرض کنیم $n = 0$. در این‌صورت، از (۱. ۱۵. ۹) و قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود که، اگر روی U، $\|f(z)\| \leq M$، آنگاه، برای هر ρ که در شرط $0 < \rho < r$ صدق کند، برای هر عدد طبیعی $m \geq 1$، نامساوی $\|d_m\| \leq M\rho^m$ برقرار خواهد بود. چون ρ دلخواه است، از مطلب فوق نتیجه می‌شود که، برای هر $m \geq 1$، $d_m = 0$، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

ضریب d_1 در (۱. ۱۵. ۹) را **مانده**[2] نگاشت f در نقطه a می‌نامند.

مسائل

۱. نشان دهید که، هیچ نقطه تکین تنهایی برای توابع تحلیلی $p \geq 2$ متغیره مختلط وجود ندارد (به عبارت دیگر، اگر A یک زیرمجموعه باز C^p، $a \in A$، و نگاشت f از $A - \{a\}$ به فضای باناخ مختلط E تحلیلی باشد، آنگاه f تحدید نگاشتی تحلیلی از A به E است. (از مسأله ۵ بخش ۱۰. ۹ استفاده کنید).

۲. فرض کنیم f یک تابع تحلیلی یک متغیره مختلط، دارای یک نقطه تکین اساسی $a \in C$ باشد. نشان دهید که، برای هر عدد مختلط λ، ممکن نیست که تابع $\frac{1}{f-\lambda}$ روی یک همسایگی باز به شکل $V - \{a\}$، که در آن V یک همسایگی باز است، معین و کراندار باشد. (از (۲. ۱۵. ۹) استفاده کنید).

---

۱. یادآوری می‌کنیم که ژان دیودونه در این کتاب عدد حقیقی x را اکیداً مثبت نامیده هرگاه $x > 0$ باشد، و آن را مثبت نامیده هرگاه $x \geq 0$ باشد. با این تعریف در قضیه فوق عدد صحیح n می‌تواند برابر 0 نیز باشد. مترجم.

2 . Residue = Вычет

از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، برای هر همسایگی V از نقطه a که f روی $V-\{a\}$ تحلیلی است، مجموعه $f(V-\{a\})$ در C چگال است. (« **قضیه ویراشتراس**»؛ بخش ۳. ۱۰ مسأله ۸ را ببینید).

۳. یک تابع تام که چند جمله‌ای نباشد، یک **تابع تام متعالی**[1] می‌نامند. فرض کنیم f یک تابع مختلط تام متعالی یک متغیره مختلط باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر عدد صحیح $n>0$ زیرمجموعه باز $D(n)$ از C که از نقاط $z\in C$ تشکیل شده است که $|f(z)|>n$، ناتهی است و نمی‌تواند شامل برون هیچ‌گویی باشد. (مسأله ۲ را برای تابع $f(\frac{1}{z})$ مورد استفاده قرار دهید.)

(b) فرض کنیم $K(n)$ یک مؤلفه همبندی از $D(n)$ باشد ((۵. ۱۹. ۳) را ببینید). نشان دهید که $K(n)$ کراندار نیست و تابع $|f(z)|$ روی $K(n)$ کراندار نیست. (اگر $a\notin K(n)$، تابع $f(\frac{1}{z-a})$ را مورد بررسی قرار داده، از مسأله ۱۴ بخش ۵. ۹ استفاده کنید).

(c) نشان دهید که، نگاشتی پیوسته مانند γ از $]0,+\infty]$ به C موجود است، به‌طوری که روی هر فاصله $[0,\alpha]$، γ پریمیتیو یک تابع رگله است، و $\lim_{t\to+\infty}|\gamma(t)|=+\infty$ و $\lim_{t\to+\infty}|f(\gamma(t))|=+\infty$. (دنباله زیر مجموعه‌های باز $L_n\subset C$ را مورد بررسی قرار دهید که L_n یک مؤلفه همبندی از $D(n)$ است، و برای هر عدد طبیعی n، $L_{n+1}\subset L_n$؛ وجود چنین دنباله‌ای از (b) نتیجه می‌شود. سپس، از (۲. ۷. ۹) استفاده کنید).

(d) نتایج قبل را برای توابع تام متعالی با تعدادی متغیر دلخواه تعمیم دهید. (اگر $f(z_1,\dots,z_p)=\sum a_{n_1\dots n_p}z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p}$، آنگاه حداقل یک اندیس k وجود دارد، به طوری که، تعدادی نامتناهی تک‌جمله‌ای با ضرایب غیرصفر $a_{n_1\dots n_p}$، و n_kهای به دلخواه بزرگ وجود دارند. از طرف دیگر، ثابت کنید که، اگر (g_m) خانواده‌ای شمارا از توابع تام p متغیره مختلط باشد، که هیچ یک از آنها متحد 0 نیست، آنگاه، نقاط $(c_1,\dots,c_p)$ موجود هستند، به‌طوری که، برای هر m، $g_m(c_1,\dots,c_p)\neq 0$. برای این‌کار، از استقراء روی p، و از این حقیقت که، برای یک تابع یک متغیر مختلط $h(z)$ که روی $A\subset C$ تحلیلی و متحد 0 نیست، مجموعه جواب‌های z معادله $h(z)=0$، مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است استفاده کنید. ((۵. ۱. ۹) را ببینید).

۴. فرض کنیم $\varphi(x)$ یک تابع حقیقی صعودی مثبت دلخواه باشد، که روی $]0,+\infty]$ تعریف شده است، و فرض کنیم (k_n) دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح باشد، به‌طوری که $k_1=1$، و برای[2] $n>1$، $(\frac{n}{n-1})^{k_n}>\varphi(n+1)$. نشان دهید که، سری توانی:

$$f(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z}{n-1}\right)^{k_n}$$

برای هر $z\in C$ همگرا است، و برای هر عدد حقیقی $x\geq 2$، $f(x)\geq\varphi(x)$ (به عبارت دیگر، توابعی تام وجود دارند که «سریعتر» از هر تابع حقیقی داده شده به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند).

۵. برای اعداد حقیقی دلخواه α، β به‌طوری که، $\beta>0$، فرض کنیم $L_{\alpha,\beta}$ راهی بی‌پایان باشد (بخش ۱۲. ۹، مسأله ۳ را

---

1. Transendental entire function = Целая трансцендентая функция

۲. رابطه $(\frac{n}{n-1})^{k_n}>\varphi(n+1)$ در چاپ اول متن روسی کتاب به همین صورت، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی آن به‌صورت $(n(n-1))^{k_n}>\varphi(n+1)$ نوشته شده است. مترجم.

ببینید) که به صورت زیر تعریف شده است :
برای $t \le -1$ ، $L_{\alpha,\beta}(t) = \alpha - i\beta - t - 1$ ؛ برای $-1 \le t \le 1$ ، $L_{\alpha,\beta}(t) = \alpha + i\beta t$ ، و برای $t \ge 1$ ، $L_{\alpha,\beta}(t) = \alpha + i\beta + t - 1$. فرض کنیم $G_{\alpha,\beta} = L_{\alpha,\beta}(\mathbf{R})$.

(a) نشان دهید که، اگر $\pi/2 < \beta < 3\pi/2$ ، و اگر $x \notin G_{\alpha,\beta}$ ، تابع $z \to (\exp(\exp z))/(z - x)$ در امتداد $L_{\alpha,\beta}$ انتگرال ناسره دارد. علاوه بر این، اگر β_1 ، β_2 ، چنان باشند که $|\mathscr{I}(x)| < \beta_1 < \beta_2$ یا $|\mathscr{I}(x)| > \beta_2 > \beta_1$ ، یا $\mathscr{R}(x) < \alpha$ ، آنگاه انتگرال‌ها در امتداد L_{α,β_1} و L_{α,β_2} یکی هستند. به طریق مشابه، اگر $\mathscr{R}(x) < \alpha_1 < \alpha_2$ یا $\alpha_1 < \alpha_2 < \mathscr{R}(x)$ یا $|\mathscr{I}(x)| > \beta$ ، آنگاه، انتگرال‌ها در امتداد $L_{\alpha_2,\beta}$ و $L_{\alpha_1,\beta}$ یکی هستند (از قضیه کوشی استفاده کنید).

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، اگر $L = L_{0,\pi}$ ، آنگاه ، تابع :

$$E(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(\exp z)}{z - x}\, dz$$

را می‌توان به یک تابع تام گسترش داد.

(c) نشان دهید که :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(\exp z)\, dz = 1$$

(ثابت کنید که، انتگرال $\exp(\exp z)$ در امتداد $L_{\alpha,\beta}$ مستقل از α و β است، اگر $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$.)

(d) نشان دهید که، اگر x متعلق به مجموعه باز A باشد، که با روابط $\mathscr{R}(x) < 0$ یا $|\mathscr{I}(x)| > \pi$ تعریف شده است ، آنگاه :

$$E(x) = -\frac{1}{x} + \frac{F(x)}{x^2}$$

که در آن $F(x)$ روی A کراندار است. ($F(x)$ را با یک انتگرال در امتداد $L_{\alpha,\beta}$ با $\beta > \pi$ بیان نموده، از (a) و (c) استفاده کنید.)

(e) نشان دهید که، اگر نقطه x متعلق به مجموعه باز B باشد، که را روابط $\mathscr{R}(x) > 0$ و $|\mathscr{I}(x)| < \pi$ تعریف شده است، آنگاه :

$$E(x) = \exp(\exp x) - \frac{1}{x} + \frac{G(x)}{x^2}$$

که در آن $G(x)$ روی B کراندار است. (با استفاده از فرمول کوشی، ابتدا ثابت کنید که، اگر $-1 < \mathscr{R}(x) < 0$ و $|\mathscr{I}(x)| < \pi$ ، آنگاه :

$$E(x) = \exp(\exp x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\exp(\exp z)}{z - x}\, dz$$

که در آن $L' = L_{-1,\pi}$. سپس، با استفاده از (۹ . ۴ . ۲) نشان دهید که، فرمول فوق برای $x \in B$ نیز معتبر باقی می‌ماند، و $G(x)$ را بر حسب یک انتگرال در امتداد $L_{-1,\beta}$ با $\beta > \pi$ بیان نمایید.)

(f) فرض کنیم $H(x) = E(x)e^{-E(x)}$. نشان دهید که، H یک تابع تام متعالی است، که برای هر عدد حقیقی θ ، $\lim_{r \to +\infty} H(re^{i\theta}) = 0$. (از (d) و (e) استفاده نمایید. مقایسه کنید با نتیجه مسأله ۳.)

۶. فرض کنیم f یک تابع تام $p \ge 2$ متغیره مختلط باشد. نشان دهید که، اگر $f(a_1, \ldots, a_p) = b$ ؛ آنگاه، برای هر $r > 0$ ، $z = (z_1, \ldots, z_p)$ یی موجود است، به طوری که $\sum_k |z_k - a_k|^2 = r^2$ و $f(z_1, \ldots, z_p) = b$ (از مسأله (b) ۵ بخش ۹.۱۰

استفاده کنید.)

۷. فرض کنیم f نگاشتی تحلیلی از یک زیرمجموعه باز $A \subset C^p$ به فضای باناخ مختلط E باشد. نقطه مرزی z_0 از مجموعه A را **نقطه‌ای منظم**[1] برای f می‌نامند، اگر همسایگی باز V از z_0 و نگاشتی تحلیلی از $A \cup V$ به E موجود باشد که روی A منطبق بر f باشد. یک نقطه مرزی A را **نقطه تکین**[2] A نامند، هرگاه نقطه‌ای منظم نباشد.

(a) فرض کنیم $R < +\infty$ شعاع همگرایی سری توانی یک متغیره مختلط $f(z) = \sum_n a_n z^n$ باشد. (بخش ۱. ۹، مسئله ۱ را ببینید). حداقل یک نقطه z_0 موجود است، به طوری که $|z_0| = R$ و z_0 نقطه‌ای تکین برای f است. (در غیر این صورت، می‌توان دایره $|z| = R$ را با تعدادی متناهی گوی باز B_k که مراکز آنها b_k روی دایره واقع است، و طوری هستند که، روی هر یک از مجموعه‌های باز $B(0, R) \cup B_k$ تابعی تحلیلی مانند f_k موجود است، به طوری که روی $B(0, R)$ منطبق بر f است، پوشاند. با استفاده از (۲. ۴. ۹)، نشان دهید، که برای هر دو اندیس h، k با $B_h \cap B_k \neq \varnothing$، f_h، f_k روی $B_h \cap B_k$ برهم منطبق هستند، و از (۱. ۹. ۹) و (۲. ۹. ۹) نتیجه بگیرید که، شعاع همگرایی سری $\sum_n a_n z^n$ باید بزرگ‌تر از R باشد.)

(b) با نمادهای (a)، فرض کنیم برای هر n، $a_n \geq 0$. نشان دهید که، نقطه $z = R$ برای تابع f نقطه‌ای تکین است. (می‌توان فرض کرد $R = 1$. فرض کنیم $e^{i\alpha}$ نقطه‌ای تکین برای f باشد، در این صورت، برای $0 < r < 1$ شعاع همگرایی سری توانی $\sum_n f^{(n)}(re^{i\alpha})\frac{z^n}{n!}$ دقیقاً $1 - r$ است ((۱. ۹. ۹) را ببینید). ملاحظه کنید که $|f^{(n)}(re^{i\alpha})| \leq f^{(n)}(r)$، و از (۲. ۱. ۹) استفاده کنید.)

(c) با نمادهای (a)، فرض کنیم $R = 1$، و فرض کنیم b و c دو حقیقی باشند، به طوری که $0 < b < 1$، $c = 1 - b$، و $p \geq 1$ یک عدد صحیح باشد. برای اینکه نقطه $z = 1$ یک نقطه تکین برای تابع f باشد، لازم است که، سری تیلور $\sum_n g^{(n)}(0)\frac{u^n}{n!}$ برای تابع $g(u) = f(bu^p + cu^{p+1})$ دارای شعاع همگرایی 1 باشد. (ملاحظه کنید که، اگر $|u| \leq 1$، $|bu^p + cu^{p+1}| \leq 1$، و دو طرف نامساوی اخیر فقط به ازاء $u = 1$ می‌توانند با هم برابر باشند. برای اثبات لزوم شرط از (۵. ۲. ۱۰) استفاده نموده، نشان دهید که، در همسایگی $z = 1$، یک تابع تحلیلی $h(z)$ موجود است، به طوری که در این همسایگی $z = g(h(z))$.)

(d) با نمادهای (a)، فرض کنیم که، برای هر n به جز یک دنباله (n_k) از اعداد صحیح به طوری که برای هر k، $n_{k+1} > (1 + \theta) n_k$ ($\theta > 0$ عددی ثابت است)، داشته باشیم $a_n = 0$. نشان دهید که، هر نقطه z_0 از دایره $|z| = R$ نقطه‌ای تکین برای f است (« **قضیه شکاف آدامار**[3]» دایره $|z| = R$ را **مرز طبیعی**[4] برای f می‌نامند). (می‌توان فرض کرد $R = 1$. از محک (c)، با گرفتن $p > \frac{1}{\theta}$ استفاده نموده، فرض کنید $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u^n$ بسط تیلور g در نقطه $u = 0$ باشد. طبق فرض، برای $\varepsilon > 0$ داده شده، دنباله‌ای مانند (m_j) از اعداد صحیح موجود است، به طوری که $\|a_{m_j}\| \geq (1 - \varepsilon)^{m_j}$ (بخش ۱. ۹، مسأله ۱ را ببینید). از طرف دیگر، تابع $F(u) = \sum_j (bu^p + cu^{p+1})^{m_j} = \sum_n e_n u^n$، طبق (b)، دارای

---

1. Regular point = правильная точка
2. Singular point = Особая точка
3. Hadamard's gap theorem = Теорема Адамара о лакурнах
4. Natural boundary = Естественная граница

نقطه تکین $u = 1$ است. بنابراین، دنباله‌ای مانند (q_l) از اعداد صحیح موجود است، به طوری که $|e_{q_l}| \geq (1-\varepsilon)^{q_l}$. ثابت کنید که $\|d_{q_l}\| \geq (1-\varepsilon)^{2q_l}$.)

۱۶. قضیه مانده‌ها

ابتدا یادآوری می‌کنیم که، هر زیرمجموعه $S \subset C$ که از نقاطی که همه آنها نقاط **ایزوله** هستند، تشکیل شده است، زیرمجموعه‌ای **حداکثر شمارش‌پذیر** از C است. در واقع، زیرمجموعه S از C در این حالت دیسکرت و جدایی‌پذیر است (طبق (۲. ۹. ۳) ، (۶.۱۶.۲۰. ۳) ، و (۹. ۱۰. ۳)) و بنابراین، S تنها زیرمجموعه چگال در S است ((۱۰ . ۱۰ . ۳) را ببینید).

(۱. ۱۶. ۹) (قضیه مانده‌ها) فرض کنیم $A \subset C$ یک ناحیه همبند ساده، (a_n) دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) از نقاط متمایز A ، و S مجموعه نقاط این دنباله باشد، که همه نقاط آن در S ایزوله هستند، و فرض کنیم f نگاشتی تحلیلی از A - S به فضای باناخ مختلط E ، و γ مداری در $A - S$ باشد. در این‌صورت، خواهیم داشت :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_n j(a_n, \gamma)\,\mathbf{R}(a_n)$$

که در آن $\mathbf{R}(a_n)$ مانده f در نقطه a_n است، و فقط تعدادی متناهی از جملات در سمت راست مخالف صفر هستند.

به وضوح می‌توان فرض کرد که هر یک از a_nها یک نقطه تکین برای نگاشت f است. در واقع، می‌توان f را با استفاده از پیوستگی آن در نقاط غیرتکین a_n طوری گسترش داد که در طرفین فرمول فوق تغییری حاصل نشود (زیرا ، اگر a_n نقطه تکین نباشد $\mathbf{R}(a_n) = 0$). تحت این شرط، برای هر مجموعه فشرده $L \subset A$ ، اشتراک $L \cap S$ مجموعه‌ای **متناهی** است. در واقع ، $L \cap S$ در L **بسته** است، چون، طبق تعریف $A - S$ در C باز است. بنابراین ، $L \cap S$ که فشرده و گسسته است، طبق (۳. ۱۶. ۳)، متناهی است. فرض کنیم I فاصله‌ای باشد که مدار γ روی آن تعریف شده است، و P مجموعه نقاط $x \in \overline{A}$ باشد، که $j(x, \gamma) \neq 0$. اکنون، طبق (۶ . ۸ . ۹) ، می‌دانیم که $\overline{P}$ بستار P در C فشرده است، و $\overline{P}$ شامل هیچ نقطه مرزی از A نیست. زیرا، چنین نقطه‌ای نه می‌تواند متعلق به $\gamma(I)$ باشد، نه نسبت به γ شاخص مخالف صفر دارد [طبق (۷. ۸ . ۹)]. چون مجموعه نقاط $x \in C - \gamma(I)$ که شاخص $j(x, \gamma)$ مقدار معلومی می‌گیرد باز است ((۳. ۸ . ۹) را ببینید) ، هر نقطه در $\overline{P}$ که متعلق به $\gamma(I)$ نیست، در P است، و بنابراین، $\overline{P} \subset A$.
از طرف دیگر، فرض کنیم $\varphi(t, \xi)$ یک هوموتوپی طوقه‌ای در A از مدار γ به مداری تک نقطه‌ای باشد

$(t \in I$ ، $\xi \in J$ ، که در آن J فاصله‌ای فشرده است). در این صورت ، $M = \varphi(I \times J)$ زیرمجموعه‌ای فشرده از A است. فرض کنیم $H \subset N$ مجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح n باشد. به طوری‌که برای هر $n \in H$ ، $a_n \in M \cup \bar{P}$ ، و فرض کنیم برای هر $n \in H$ ، $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ جزء تکین f در نقطه a_n باشد، و B مکمل مجموعه نقاطی از a_nها در A باشد، که $n \notin H$. در این صورت، مجموعه B **باز** است. زیرا، هر همسایگی فشرده از هر نقطه دلخواه B ، که در A واقع شده، اشتراکی متناهی با S دارد.

طبق تعریف جزء تکین، تابعی مانند g موجود است ، که روی B تحلیلی است ، و در هر نقطه $(n \in H) z \neq a_n$ برابر $f(z) - \sum_{n \in H} u_n(\frac{1}{z-a_n})$ می‌باشد. چون، طبق تعریف $M \subset B$ ، مدار γ در B با یک مدار تک نقطه‌ای هوموتوپیک است؛ بنابراین، طبق قضیه کوشی $\int_\gamma g(z)dz = 0$ ، به عبارت دیگر:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n \in H} \int_\gamma u_n(\frac{1}{z-a_n})dz$$

به‌این ترتیب، با به‌کارگیری (۲. ۱۴. ۹) برای هر یک از توابع $u_n(\frac{1}{z-a_n})$ روی یک «حلقه» باز به مرکز a_n ، که شامل $\gamma(I)$ است، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۱۷. توابع مرومورفیک[1] (برخه ریخت)

فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز C ، و S زیرمجموعه‌ای از A باشد، که همه نقاط آن نقاط ایزوله باشند. نگاشت f از $A - S$ به فضای باناخ مختلط E را روی A **مرومورفیک** نامند (با بد استفاده کردن از زبان)، اگر f روی $A - S$ تحلیلی بوده، و در هر یک از نقاط S دارای رتبه‌ای بزرگتر $-\infty$ باشد. با سوء استفاده از زبان، ما همیشه f را با گسترش پیوستگی آن به همه نقاط S که قطب‌های f نیستند، یکی می‌گیریم. بحث بیان شده در اثبات قضیه (۱. ۱۶. ۹) نشان می‌دهد که، می‌توان همیشه فرض کرد که، برای هر زیرمجموعه **فشرده** L از A ، اشتراک $L \cap S$ **متناهی** است. اگر f و g دو تابع مرومورفیک روی A باشند، که مقادیرشان را در فضای یکسانی گرفته، و مجموعه قطب‌های آنها روی A به ترتیب S و S' باشند، آنگاه طبق تبصره قبلی همه نقاط اجتماع $S \cup S'$ در $S \cup S'$ نقاط ایزوله هستند. تابع $f + g$ روی مجموعه $A - (S \cup S')$ تعریف شده و تحلیلی است، و دارای رتبه‌ای بزرگ‌تر از $-\infty$ در هر یک از نقاط $S \cup S'$ است. بنابراین، روی A مرومورفیک است. (توجه داشته باشید که ، بعضی نقاط اجتماع $S \cup S'$ ممکن است برای $f + g$ نقاط تکین نباشند.) به‌طریق مشابه، اگر f ، g روی A مرومورفیک باشند، و g دارای مقادیری مختلط باشد، آنگاه fg روی A مرومورفیک است. اگر f روی A مرومورفیک بوده، S

1 . Meromorphic functions = Мероморфные функции

مجموعه قطب‌های آن، و T مجموعه صفرهای آن باشد، آنگاه همه نقاط مجموعه $S \cup T$ نقاط ایزوله هستند. زیرا ، اگر $a \in A$ و $\omega(a) = h$، آنگاه، روی مجموعه‌ای مانند $0 < |z-a| < r$ ، $f(z) = (z-a)^h f_1(z)$ ، که در آن f_1 روی $|z-a| < r$ تحلیلی است و $f_1(a) \neq 0$. از اصل صفرهای تنها (۵ . ۱. ۹ را ببینید) نتیجه می‌شود که، عددی مانند r' موجود است، به‌طوری‌که $0 < r' < r$ ، و برای $0 < |z-a| < r'$ ، $f(z) \neq 0$. این مطلب حکم ما را ثابت نموده، و علاوه برآن، نشان می‌دهد که، برای هر زیرمجموعه فشرده L از A ، اشتراک $L \cap (S \cup T)$ متناهی است (با بحثی مشابه آن‌چه در (۱. ۱۶. ۹) بیان شد). به‌ویژه، اگر f تابعی با مقادیر مختلط باشد، $\frac{1}{f}$ روی A مرومورفیک است، S مجموعه صفرهای آن و T مجموعه قطب‌هایش می‌باشد. علاوه بر این، با نمادهای فوق ، برای $0 < |z-a| < r$ ، داریم :

$$f'(z) = h(z-a)^{k-1} f_1(z) + (z-a)^k f_1'(z)$$

بنابراین، $\frac{f'}{f}$ که روی $0 < |z-a| < r'$ تحلیلی است، در نقطه a دارای رتبه 0 است اگر $h = 0$ باشد، و دارای رتبه -1 و مانده h در نقطه a است اگر $h \neq 0$ باشد.

(۱. ۱۷. ۹) فرض کنیم A یک میدان همبند ساده در C ، f یک تابع مختلط مرومورفیک روی A ، S (به ترتیب T) مجموعه قطب‌ها (به ترتیب صفرهای) f، و g تابعی تحلیلی روی A باشد. در این صورت، برای هر مدار γ در $A-(S \cup T)$ ، داریم :

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cup T} j(a,\gamma)\, g(a)\, \omega(a,f)$$

ضمناً، در سمت راست تساوی فوق تنها تعدادی متناهی از جملات ناصفر هستند.

این قضیه نتیجه فوری قضیه مانده‌ها می‌باشد، زیرا، مانده $\frac{gf'}{f}$ در نقطه‌ای مانند $a \in S \cup T$ برابر حاصل‌ضرب $g(a)$ در مانده $\frac{f'}{f}$ در نقطه a می‌باشد.

(۲. ۱۷. ۹) با فرضیات گزاره (۱. ۱۷. ۹) ، فرض کنیم $t \to \gamma(t)\,(t \in I)$ مداری در $A-(S \cup T)$ باشد. اگر Γ مدار $t \to f(\gamma(t))$، باشد، آنگاه :

$$j(0,\Gamma) = \sum_{a \in S \cup T} j(a,\gamma)\,\omega(a,f)\,.$$

زیرا، از (۴ . ۷. ۸) فوراً نتیجه می‌شود :

$$\int_\Gamma \frac{du}{u} = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

و بنابراین، به عنوان یک حالت خاص از قضیه (۱. ۱۷. ۹) برای $g = 1$ ، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۹ .۱۷ .۳) (قضیه روشه[1]) فرض کنیم $A \subset C$ یک میدان همبند ساده، و f، g دو تابع تحلیلی مختلط روی A باشند، و فرض کنیم T مجموعه (حداکثر شمارش‌پذیر) صفرهای f، و T' مجموعه صفرهای $f+g$ روی A ، و γ مداری در $A-T$ باشد، که روی فاصله‌ای مانند I تعریف شده است. در این صورت، اگر روی $\gamma(I)$ ، $|g(z)| < |f(z)|$ ، آنگاه، تابع $f+g$ روی $\gamma(I)$ صفری ندارد، و

$$\sum_{a \in T} j(a, \gamma)\, \omega(a, f) = \sum_{b \in T'} j(b, \gamma)\, \omega(b, f+g)$$

اولین موضوع واضح است. زیرا، از $f(z)+g(z)=0$ نتیجه می‌شود $|f(z)|=|g(z)|$. تابع $h=\frac{f+g}{f}$ روی $A-T$ معین، و روی A مروفورفیک است، و روی $A-(T \cup T')$ داریم :

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}$$

با استفاده از (۹ .۱۷ .۲) ، همه آنچه که باید ثابت کنیم، این است که، شاخص نقطه 0 نسبت به مدار $\Gamma : t \to h(\gamma(t))$ برابر 0 است. از آنجا که تابع $\frac{g}{f}$ روی مجموعه فشرده $\gamma(I)$ پیوسته و متناهی است، از (۳ .۱۷ .۱۰) و فرض نتیجه می‌شود که $r = \sup_{z \in \gamma(I)} |\frac{g(t)}{f(t)}| < 1$. به عبارت دیگر، مدار Γ در گوی $|z-1| < r$ واقع شده، و چون 0 نقطه خارجی این گوی است، از (۹ .۸ .۵) نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

(۹ .۱۷ .۴) (پیوستگی ریشه‌های یک معادله به عنوان تابعی از پارامترها). فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در C ، و F یک فضای متریک، و f تابع پیوسته مختلطی روی $A \times F$ باشد، به‌طوری که ، برای هر $\alpha \in F$، تابع $z \to f(z,\alpha)$ روی A تحلیلی باشد، و فرض کنیم B زیرمجموعه‌ای باز از A باشد، به‌طوری که $\bar{B}$ بستار آن در C فشرده و مشمول A باشد، و $\alpha_0 \in F$ چنان باشد که، هیچ صفری از $f(z, \alpha_0)$ روی مرز B قرار نگیرد. در این‌صورت، همسایگی W از α_0 در F موجود است، به طوری که :

(۱) برای هر $\alpha \in W$ ، $f(z,\alpha)$ هیچ صفری روی مرز B ندارد ؛

(۲) برای هر $\alpha \in W$ ، مجموع رتبه‌های صفرهای $f(z,\alpha)$ که متعلق به B هستند، مستقل از α است.

تعداد صفرهای متمایز $f(z,\alpha_0)$ در B متناهی است. فرض کنیم نقاط a_1 ، ... ، a_n این صفرها باشند. برای هر نقطه مرزی x از B ، یک همسایگی فشرده U_x از x موجود است، به‌طوری که $U_x \subset A$ و $f(z, \alpha_0)$ صفری در U_x ندارد (۹ .۱ .۵ را ببینید). اگر مرز (فشرده) B را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های U_{x_j} بپوشانیم، آنگاه U اجتماع $\bar{B}$ و U_{x_j}ها یک همسایگی فشرده از $\bar{B}$ است که مشمول A

1 . Rouche's theorem = Теорема Руше

است و تابع $f(z, \alpha_0)$ صفری در $U \cap (A - \bar{B})$ ندارد. فرض کنیم r مینیمم اعداد $|a_i - a_j|$ $(i \neq j)$ باشد، و برای هر i $(1 \leq i \leq n)$، فرض کنیم D_i گوی باز $|z - a_i| < r_i$ با شعاع $r_i < \frac{r}{2}$ باشد که مشمول B است، در این صورت، اگر $i \neq j$ ، $D_i \cap D_j = \varnothing$. فرض کنیم $H = U - \bigcup_i D_i$. مجموعه H مجموعه‌ای فشرده است. فرض کنیم m کوچکترین مقدار تابع $|f(z, \alpha_0)|$ روی H باشد. طبق (۱۰. ۱۷. ۳)، داریم $m > 0$. اکنون، برای هر $x \in \bar{B}$ ، یک همسایگی V_x از x مشمول A و یک همسایگی W_x از α_0 مشمول F موجود است، به‌طوری که برای $y \in V_x$ و $\alpha \in W_x$ ، $|f(y,\alpha) - f(x, \alpha_0)| < \frac{m}{2}$.
چون $\bar{B}$ فشرده است، می‌توان آن را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های V_{x_k} $(1 \leq k \leq p)$ پوشاند. فرض کنیم $W = \bigcap_k W_{x_k}$. مجموعه W یک همسایگی از α_0 در F است، و طبق تعریف، برای هر $\alpha \in W$ و هر $y \in \bar{B}$ ، داریم $|f(y, \alpha) - f(y, \alpha_0)| < m$. به عنوان اولین نتیجه، از مطلب فوق برای $y \in H$ و $\alpha \in W$ ، به‌دست می‌آید $f(y, \alpha) \neq 0$. از طرف دیگر، چون روی H ،

$$|f(z, \alpha) - f(z, \alpha_0)| < |f(z,\alpha_0)|$$

با به کارگیری قضیه روشه، برای هر یک از مدارهای $t \to a_i + r_i e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ نتیجه می‌شود که، مجموع رتبه‌های صفرهای $f(z, \alpha)$ روی D_i مستقل از $\alpha \in W$ است، و با این مطلب قضیه ثابت می‌شود.

مسائل

۱. فرض کنیم $A \subset C$ یک مجموعه باز همبند ساده، و f یک تابع مرومورفیک مختلط روی A باشد، به طوری که هر قطب f ساده، و مانده f در هر یک از این قطب‌ها عددی صحیح (مثبت یا نامثبت) باشد. نشان دهید که، تابعی مرومورفیک مانند g روی A موجود است، به طوری که $f = \frac{g'}{g}$. (اگر z_0 قطب f نباشد، نشان دهید که، برای هر نقطه $z_1 \in A$ که یک قطب f نیست، و برای هر راه γ در A، که روی $I \subset \mathbf{R}$ تعریف شده و مبدأ آن z_0 و منتهای آن z_1 است و $\gamma(I)$ شامل هیچ قطب f نیست، عدد $\exp\left(\int_\gamma f(x)\,dx\right)$ تنها به z_0 و z_1 وابسته است و به مسیر γ که در شرایط قبلی صدق می‌کند وابسته نیست. (از قضیه مانده‌ها استفاده کنید.))

۲. فرض کنیم f یک تابع تام یک متغیره مختلط باشد، که برای هر x و y حقیقی $|f(x + iy)| \leq e^{|y|}$. نشان دهید که، برای هر z متمایز از $n\pi$ (مضارب صحیح π)،

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\sin z}\right) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n f(n\pi)}{(z - n\pi)^2}$$

که در آن سری سمت راست روی هر زیرمجموعه فشرده از C که شامل هیچ یک از نقاط $n\pi$ نیست (n عددی صحیح است) به‌طور نرمال همگرا است. (انتگرال $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{f(x)}{\sin x}\frac{dx}{(x-z)^2}$ که در آن γ_n مدار $t \to (n + \frac{1}{2})\pi e^{it}$ برای $-\pi \leq t \leq \pi$ است، مورد بررسی قرار دهید. ملاحظه کنید که، برای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $c(\varepsilon) > 0$ موجود است،

به طوری که، برای هر عدد صحیح $n \in Z$ که $|z - n\pi| \geq \varepsilon$ ، داریم $|\sin z| \geq c(\varepsilon)\, e^{|\mathscr{I}(z)|}$، و از قضیه مانده‌ها استفاده کنید.)

۳ . (a) نشان دهید که، برای $z \neq n\pi$ (n عددی صحیح است) ، داریم :

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

که در آن سری سمت راست روی هر زیرمجموعه فشرده از C که شامل نقاط $n\pi$ نیست (n عددی صحیح است) به طور نرمال همگرا است. (از مسأله ۲ و از رابطه $\lim_{z \to 0} (\cot z - \frac{1}{z}) = 0$ استفاده کنید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که :

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

که در آن حاصل‌ضرب به عنوان حد $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ تعریف شده است. همگرایی روی هر زیرمجموعه فشرده C یکنواخت است (تابع تام $f(z) = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{-\frac{z}{n\pi}}$ مورد بررسی قرار داده (بخش ۱۲. ۹ ، مسأله ۱ را ببینید)، و با استفاده از (a) ثابت کنید که، تابع $\frac{\sin z}{z f(z)}$ ثابت است.)

(c) از (b) اتحاد :

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} \sin \pi z$$

را نتیجه بگیرید (بخش ۱۲. ۹ ، مسأله ۲ را ببینید).

۴ . فرض کنیم f یک تابع مختلط تحلیلی روی یک همسایگی باز نقطه 0 در C^p مانند A باشد. برای راحتی به جای z_p می‌نویسیم w و به جای $(z_1, \ldots, z_{p-1})$ می‌نویسیم z. فرض کنیم $f(0, 0) = 0$ و $f(0, w)$ که در یک همسایگی از $w = 0$ در C تحلیلی است، متحد صفر نباشد. در این‌صورت، عددی صحیح مانند $r > 0$ ، و r تابع $h_j(z)$ ($1 \leq j \leq r$) که در یک همسایگی 0 از C^{p-1} تحلیلی هستند، و یک تابع $g(z, w)$ که روی یک همسایگی $B \subset A$ از نقطه 0 در C^p تحلیلی و روی این همسایگی ناصفر است، موجود هستند، به‌طوری که روی یک همسایگی 0 در C^p ،

$$f(z, w) = (w^r + h_1(z)\, w^{r-1} + \ldots + h_r(z))\, g(z, w)$$

(قضیه آماده سازی (مقدماتی) ویراشتراس[1]). (اگر $f(0, w)$ دارای صفر مرتبه r ی در نقطه $w = 0$ باشد، از (۴. ۱۷. ۹) استفاده نموده، ثابت کنید که، عددی مانند $\varepsilon > 0$ و یک همسایگی از نقطه 0 در C^{p-1} مانند V موجود هستند، به طوری که برای هر $z \in V$ ، تابع $w \to f(z, w)$ دقیقاً دارای r صفر روی دیسک $|w| < \varepsilon$ است، و هیچ صفری روی دایره $|w| = \varepsilon$ ندارد. فرض کنیم γ مدار $t \to \varepsilon e^{it}$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) باشد. با استفاده از قضیه مانده‌ها، نشان دهید که، توابعی مانند $h_j(z)$ ($1 \leq j \leq r$) موجود هستند ، به طوری که ، روی V تحلیلی هستند، و چنان هستند که، چند جمله‌ای $F(z, w) = w^r + h_1(z) w^{r-1} + \ldots + h_r(z)$ برای $z \in V$ و $\varepsilon < |w|$ در اتحاد :

1 . Weierstrass preparation theorem = Подготовительная теорема Вейерштрасса

$$\frac{F'_w(z,w)}{F(z,w)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'_u(z,u)}{f(z,u)}\,\frac{1}{w-u}\,du$$

صدق می‌کند).

۵ . فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع مختلط تحلیلی روی یک زیرمجموعه همبند باز A از C باشد، و فرض کنیم برای هر $z \in A$، دنباله $(f_n(z))$ به سمت حدی مانند $g(z)$ میل کند، و همگرایی روی هر زیرمجموعه فشرده از A یکنواخت باشد. در ادامه، فرض کنیم هر یک از نگاشت‌های $z \to f_n(z)$ از A به C یک‌به‌یک باشد. نشان دهید که، نگاشت g یا روی A ثابت است یا g یک‌به‌یک است. (برای هر $z_0 \in A$ ، دنباله $(f_n(z) - f_n(z_0))$ را مورد بررسی قرار داده و از (۴. ۱۷. ۹) و اصل صفرهای تنها استفاده کنید) .

۶ . فرض کنیم φ یک تابع حقیقی دارای مشتق مرتبه دوم روی فاصله $[0, 1]$ باشد، و فرض کنیم $|\varphi(1)| < |\varphi(0)|$، و x_0 یکی از صفرهای معادله $\varphi(0) - \varphi(1)\cos x = 0$ در فاصله $]-\pi, \pi]$ باشد. نشان دهید که، تابع تام :

$$F(z) = \int_0^1 \varphi(t)\sin zt\,dt$$

دارای مجموعه‌ای شمارا صفر است. علاوه براین، می‌توان نگاشتی پوشا مانند $n \to z_n$ از مجموعه Z به روی مجموعه صفرهای تابع $zF(z)$ تعریف کرد، به طوری که، در هر صفر به اندازه مرتبه آن عدد صحیح نگاشته شود، و

$$\lim_{n\to\pm\infty}(z_{2n} - x_0 - 2n\pi) = \lim_{n\to\pm\infty}(z_{2n+1} + x_0 - 2n\pi) = 0$$

(با دو بار انتگرال‌گیری جزء جزء، نشان دهید که، می‌توان نوشت :

$$zF(z) = \varphi(0) - \varphi(1)\cos z + G(z)$$

که در آن $|G(z)| \le ae^{|\mathcal{I}(z)|}/|z|$ ، کران پایین $|\varphi(0) - \varphi(1)\cos z|$ بیرون دوایر با مراکز صفرهای این تابع ، شبیه آن‌چه که در مسأله ۲ برای $|\sin z|$ بیان شد، برآورد کرده، از قضیه روشه با روشی مناسب استفاده کنید.). به طریقی مشابه، حالت‌هایی که در آنها $|\varphi(1)| > |\varphi(0)|$ یا $|\varphi(1)| = |\varphi(0)|$، مورد بررسی قرار دهید.

ضمیمه فصل IX

کاربرد توابع تحلیلی در توپولوژی صفحه (روش ایلنبرگ[1])

۱. شاخص یک نقطه نسبت به یک طوقه

(۱. ۱ .AP) اگر $t \to \gamma(t)$ $(a \le t \le b)$ **یک مسیر در زیرمجموعه بازی از C مانند A باشد، آنگاه در A یک هوموتوپی** φ **از** γ **به مسیری مانند** γ_1 **موجود است، به طوری که نگاشت** φ **روی** $[a , b] \times [0 , 1]$ **تعریف شده و برای هر** $\xi \in [0 , 1]$ **،** $\varphi(a, \xi) = \gamma(a)$ **و** $\varphi(b, \xi) = \gamma(b)$ **.**

فرض کنیم $I = [0 , b]$. چون مجموعه $\gamma(I)$ فشرده است، طبق (۱۱. ۱۷. ۳)،

$$d(\gamma(I) , C - A) = \rho > 0 .$$

از آنجا که γ روی I به‌طور یکنواخت پیوسته است ((۵. ۱۶. ۳) را ببینید)، دنباله‌ای اکیداً صعودی مانند $(t_k)_{0 \le k \le m}$ از نقاط I موجود است، به طوری که، $t_0 = a$ ، $t_m = b$ ، و نوسان γ (بخش ۳ .۱۴ را ببینید) روی هر یک از فواصل $[t_k , t_{k+1}]$ $(0 \le k \le m-1)$ کمتر از ρ است. روی I ، γ_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $t_k \le t \le t_{k+1}$ ، قرار می‌دهیم $\gamma_1(t) = \gamma(t_k) + \dfrac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))$ $(0 \le k \le m-1)$. واضح است که γ_1 یک راه است، با $\gamma_1(a) = \gamma(a)$ ، $\gamma_1(b) = \gamma(b)$ ، و $\gamma_1(I)$ مشمول A است، زیرا ، $\gamma_1([t_k , t_{k+1}])$ مشمول گویی باز با مرکز $\gamma(t_k)$ و شعاع ρ است. اکنون $\varphi(t , \xi)$ را به‌صورت :

$$\varphi(t, \xi) = \xi\gamma_1(t) + (1 - \xi)\gamma(t)$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد کـه $\varphi(t , \xi)$ بـرای $t_k \le t \le t_{k+1}$ $(0 \le k \le m-1)$ و $0 \le \xi \le 1$ در گوی بازی به مرکز $\gamma(t_k)$ و شعاع ρ قرار دارد. بنـابراین φ در شـرایط مـورد نظـر صـدق

1 . Eilenberg's method = Метод Эйленберга

می‌کند.

در حالت خاص، اگر γ یک طوقه باشد، آنگاه دیده می‌شود که، φ یک **هوموتوپی طوقه‌ای** در A از طوقه γ به مدار γ_1 است.

اکنون طوقه دلخواه γ در C که روی I تعریف شده، و نقطه دلخواه $a \notin \gamma(I)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون، طبق (۱. ۱. AP)، مداری مانند γ_1 موجود است که با γ در $C-\{a\}$ هوموتوپیک است، می‌توان **شاخص** $j(a,\gamma)$ را برای هر مدار γ_1 هوموتوپیک با γ در $C-\{a\}$ برابر $j(a,\gamma_1)$ تعریف کرد. طبق قضیه کوشی (۳. ۶ . ۹) ، این شاخص مستقل از مدار خاص γ_1 است که در $C-\{a\}$ با γ هوموتوپیک است.

با استفاده از (۱. ۱. AP) به سادگی می‌توان ثابت کرد که، شاخص یک نقطه نسبت به یک طوقه وابسته به مبداء آن طوقه نیست (بخش ۶ . ۹ را ببینید) ، و خواص (۳. ۸ . ۹) ، (۵ . ۸ . ۹) ، (۶ . ۸ . ۹) ، (۷. ۸ . ۹) وقتی به جای «مدار» در فرمول‌بندی‌های آنها «طوقه» گذاشته شود، باز هم معتبر باقی می‌مانند.

۲. نگاشت‌های اساسی به دایره واحد

فرض کنیم E یک فضای متریک باشد. گوییم، نگاشت پیوسته f ز E به دایره واحد U به معادله $|z|=1$ ، **غیراساسی**[1] است ، اگر نگاشتی پیوسته مانند g از E به $\mathbf{R}$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $x \in E$ ، $f(x)=e^{ig(x)}$. نگاشت پیوسته f از فضای E به U **اساسی**[2] نامیم، هر گاه غیراساسی نباشد.

(۱. ۲. AP) **اگر f_1 ، f_2 دو نگاشت غیراساسی از E به U باشند، آنگاه $f_1 f_2$ و $1/f_1=\overline{f}_1$ نگاشت‌های غیراساسی خواهند بود. اگر f_1 نگاشتی اساسی و f_2 نگاشتی غیراساسی باشد، آنگاه $f_1 f_2$ و $\dfrac{f_1}{f_2}$ نگاشت‌های اساسی خواهند بود.**

(۲. ۲. AP) **اگر f نگاشتی غیراساسی از E به U و g نگاشتی پیوسته از فضای متریک F به E باشد، آنگاه $f \circ g$ نگاشتی غیراساسی خواهد بود.**

خواص فوق نتایج واضح تعریف می‌باشند.

(۳. ۲. AP) **هر نگاشت پیوسته f از فضای متریک E به U به‌طوری که $f(E) \neq U$ ، غیراساسی است.**

---

1 . Inessential = Несущественно
2 . Essential = Существенный

فرض کنیم $\zeta_0 \in \mathrm{U} - f(\mathrm{E})$. یک $\alpha \in \mathbf{R}$ موجود است، به‌طوری که $\zeta_0 = e^{i\alpha}$ ، و تحدید نگاشت $t \to e^{it}$ به فاصله باز $]\alpha\,,\ \alpha + 2\pi[$ یک هومیومورفیسم از این فاصله بر روی $\mathrm{U} - \{\zeta_0\}$ است ((۷. ۵. ۹) را ببینید). اگر ψ وارون این هومیومورفیسم باشد، آنگاه برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $f(x) = e^{i\psi(f(x))}$، و با این رابطه حکم ثابت می‌شود.

(۴. ۲. AP) اگر f_1 ، f_2 دو نگاشت پیوسته از فضای متریک E به U باشند، به‌طوری‌که برای هر نقطه $x \in \mathrm{E}$ ، $f_1(x) \neq -f_2(x)$، و اگر f_1 نگاشتی اساسی (به ترتیب غیراساسی) باشد، آنگاه f_2 نیز نگاشتی اساسی (به ترتیب غیراساسی) است.

زیرا ، $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ نگاشتی پیوسته از E به U است ، که مقدار -1 را نمی‌گیرد، در نتیجه، طبق (۳. ۲. AP) ، f نگاشتی غیراساسی است.

(۵ . ۲. AP) فرض کنیم E یک فضای متریک فشرده ، $\mathrm{I} = [0, 1]$ ، و f نگاشتی پیوسته از $\mathrm{E} \times \mathrm{I}$ به U باشد. اگر نگاشت $x \to f(x\,,\,0)$ اساسی (به ترتیب غیراساسی) باشد، آنگاه، نگاشت $x \to f(x\,,1)$ نیز اساسی (به ترتیب غیراساسی) خواهد بود.

چون f روی $\mathrm{E} \times \mathrm{I}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است ((۵. ۱۶. ۳) را ببینید)، عددی صحیح مانند $n \geq 1$ موجود است، به‌طوری که، برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، از رابطه $|s-t| \leq \dfrac{1}{n}$ نتیجه می‌شود $|f(x\,,s) - f(x\,,t)| \leq 1$. فرض کنیم برای $0 \leq k \leq n$ ، $f_k(x) = f(x, \dfrac{k}{n})$. بنابراین، برای هر $x \in \mathrm{E}$ و $0 \leq k \leq n-1$ ، داریم $|f_k(x) - f_{k+1}(x)| \leq 1$ ، و چون برای هر نقطه $x \in \mathrm{E}$ ، $|f_k(x)| = |f_{k+1}(x)| = 1$ ، برای $x \in \mathrm{E}$ داریم $f_k(x) \neq -f_{k+1}(x)$. از مطلب فوق طبق (۴. ۲. AP) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۶ . ۲. AP) هر نگاشت پیوسته f از یک گوی بسته (در $\mathbf{R}^n$) به U غیراساسی است.

فرض کنیم E گوی $d(x\,,a) \leq r$ باشد. تعریف می‌کنیم $g(x\,,t) = f(a + t(x-a))$. در این صورت g روی $\mathrm{E} \times [0\,,1]$ پیوسته است، و $g(x\,,1) = f(x)$ و $g(x, 0) = f(a)$. چون نگاشت $x \to g(x,0)$ غیراساسی است ((۳. ۲. AP را ببینید) ، بنابراین ، طبق (۵ . ۲. AP) ، f نیز نگاشتی غیراساسی است.

(۷. ۲. AP) فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه بسته از فضای متریک E باشند، به طوری که $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ و $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ همبند باشد، و فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از E به U باشد. اگر تحدید f به A و به B غیراساسی باشند، f نیز غیراساسی خواهد بود.

طبق فرض، نگاشت‌های پیوسته‌ای مانند g و h از A و B به $\mathbf{R}$ یافت می‌شوند، به طوری که روی A ، $f(x)=e^{ig(x)}$ ، و روی B ، $f(x)=e^{ih(x)}$. بنابراین، برای $x\in A\cap B$ ، داریم $e^{ih(x)}=e^{ig(x)}$. در نتیجه، طبق (۵ . ۵ . ۹) ، $(g(x)-h(x))/2\pi$ عددی صحیح است. اما، $g-h$ روی مجموعه همبند $A\cap B$ پیوسته است، در نتیجه، طبق (۷. ۱۹. ۳) ، $g-h$ روی $A\cap B$ ثابتی به فرم $2n\pi$ خواهد بود. اکنون فرض کنیم روی A ، $u(x)=g(x)$ ، و روی B ، $u(x)=h(x)+2n\pi$. واضح است که، روی E ، $f(x)=e^{iu(x)}$ ، و چون g و $h+2n\pi$ روی $A\cap B$ بر هم منطبق هستند، پس، نگاشت u روی E پیوسته است ، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود .

(AP . ۲ . ۸) برای اینکه نگاشت پیوسته f از U به U اساسی باشد، لازم و کافی است که، برای طوقه $\gamma: t\to f(e^{it})$ $(0\le t\le 2\pi)$ ، $j(0,\gamma)\neq 0$.

طبق (۹ . ۸ . ۱) ، می‌توان نوشت $f(e^{it})=e^{i\psi(t)}$ ، که در آن ψ روی $[0,2\pi]$ پیوسته است، و طبق (۹ . ۵ . ۵) ، $\psi(2\pi)-\psi(0)=2n\pi$ ، که آن n شاخص $j(0,\gamma)$ است. فرض کنیم :

$$\omega(t,\xi)=\psi(t)+\xi(nt+\psi(0)-\psi(t)).$$

اگر برای $\zeta=e^{it}$ $(0<t<2\pi)$ و برای $0\le\xi\le 1$ ، قرار دهیم $g(\zeta,\xi)=e^{i\omega(t,\xi)}$ ، آنگاه، طبق (۹ .۵ .۷) ، g روی $(U-\{1\})\times[0,1]$ **پیوسته** خواهد بود، و چون برای هر ξ ، $e^{i\omega(2\pi,\xi)}=e^{i\omega(0,\xi)}=f(1)$ ، g را طبق خاصیت پیوستگی روی $U\times[0,1]$ می‌توان گسترش داد. بنابراین، طبق (AP. ۲. ۵)، اثبات قضیه به نگاشت $f:\zeta\to\zeta^n$ تقلیل می‌یابد. واضح است که، برای $n=0$ ، f غیراساسی است. فرض کنیم $n\neq 0$ ، و با برهان خلف ثابت می‌کنیم که، نگاشت f نمی‌تواند غیراساسی باشد. در غیر این صورت، نگاشت غیر ثابت پیوسته‌ای مانند h از U به $\mathbf{R}$ موجود است، به‌طوری‌که روی U , $\zeta^n=e^{ih(\zeta)}$. چون، طبق (۹. ۱۷. ۳) ، $h(U)$ فشرده، و زیرمجموعه‌ای همبند از $\mathbf{R}$ است ((۸ . ۵ . ۹) و (۷. ۱۹. ۳) را ببینید)، $h(U)$ فاصله‌ای فشرده مانند $[a,b]$ با $a<b$ است. ((۱ . ۱۹ . ۳) را ببینید). فرض کنیم $\zeta_0\in U$ چنان انتخاب شده باشد که $h(\zeta_0)=a$. بنابراین، داریم $\zeta_0^n=e^{ia}$ ، همسایگی V از ζ_0 در U موجود است، به‌طوری‌که نوسان h (بخش ۳. ۱۴ را ببینید) روی V کمتر از π است. از طرف دیگر، با به کارگیری قضیه (۷ . ۵ . ۹) برای فاصله $]a-\frac{\pi}{n}, a+\frac{\pi}{n}[$ ، ثابت می‌شود که، نقطه‌ای مانند $\zeta\in V$ موجود است، به طوری که، $\zeta^n=e^{i(a-\varepsilon)}$، که در آن $\varepsilon>0$ به حد کافی کوچک است . طبق (۵ . ۵ . ۹) ، $h(\zeta)-(a-\varepsilon)$ ، مضربی از 2π است، و با توجه به انتخاب V این مضرب تنها می‌تواند 0 باشد وقتی که $\varepsilon<\pi$ است. اما،

این با تعریف a در تناقض است.

(۹. ۲. AP) نگاشت همانی $\zeta \to \zeta$ از U به روی خودش اساسی است.

۳. برش‌های صفحه[۱]

در فضای متریک E ، گوییم، زیرمجموعه A از E نقاط x ، y از مجموعه $E-A$ را از یکدیگر **جدا** می‌کند، اگر مؤلفه‌های همبندی x و y در $E-A$ (بخش ۱۹. ۳ را ببینید) متمایز باشند. گوییم ، A فضای E را برش می‌زند (یا A برشی از E است)، اگر $E-A$ همبند نباشد.

برای هر دو نقطه a و b از C به‌طوری‌که $a \neq b$ ، فرض کنیم $s_{a,b}(z)$ تابع $z \to \frac{z-a}{z-b}$ باشد، که روی $C-\{b\}$ تعریف شده است. به سادگی می‌توان نشان داد که، $s_{a,b}$ یک هومیومورفیسم از $C-\{b\}$ به روی $C-\{1\}$ است.

(۱ . ۳ . AP) (محک ایلنبرگ[۲]) فرض کنیم H زیرمجموعه‌ای فشرده از C باشد. برای اینکه H دو نقطه متمایز a و b از $C-H$ را از یکدیگر جدا کند، لازم و کافی است که، نگاشت $z \to \frac{s_{a,b}(z)}{|s_{a,b}(z)|}$ از H به U اساسی باشد.

(a) **کفایت.** فرض کنیم a و b در مؤلفه همبندی یکسان A از $C-H$ قرار گرفته باشند. چون $C-H$ در C باز و C به‌طور موضعی همبند است ((۱. ۱۹. ۳) و (۱۶. ۲۰. ۳) را ببینید)، پس A در C باز خواهد بود ((۵ . ۱۹. ۳) را ببینید). طبق (۲. ۷. ۹) ، مسیری مانند $t \to \gamma(t)$ در A وجود دارد، که روی فاصله $I=[0,1]$ تعریف شده است، و چنان است که $\gamma(0) = a$ ، $\gamma(1) = b$. چون برای هر مقدار t ، $\gamma(t) \notin H$ ، پس نگاشت $(z,t) \to f(z,t) = \frac{s_{a,\gamma(t)}(z)}{|s_{a,\gamma(t)}(z)|}$ روی $H \times I$ پیوسته است ، و $f(z,0) = 1$ ، $f(z,1) = \frac{s_{a,b}(z)}{|s_{a,b}(z)|}$ ، نتیجه مطلوب از (۵ . ۲. AP) حاصل می‌شود.

(b) **لزوم.** فرض کنیم A مؤلفه همبندی از $C-H$ باشد که شامل a است. مجموعه A در C باز است، و همه نقاط مرزی آن در H واقع است (این نقاط نمی‌توانند در مؤلفه همبندی دیگری از $C-H$ باشند، زیرا، در این صورت، A باید نقاط مشترکی با این مؤلفه باز داشته باشد (بخش ۸ . ۳ را ببینید)). بنابراین، $A \cup H$ در C بسته است، و چون $b \notin A \cup H$ ، خواهیم داشت $d(b, A \cup H) > 0$. فرض کنیم A' و H'

---

1 . Cuts of the plane = Разрезы плоскости
2 . Eilenberg's criterion = Критерий Эйленберга

تصاویر A و H تحت هومیومورفیسم $z \to s_{a,b}(z)$ از $C-\{b\}$ به روی $C-\{1\}$ باشند. H' فشرده، و A' زیرمجموعه‌ای باز و همبند از $C-H'$ است که **کراندار و شامل** 0 است. علاوه بر این، نقاط مرزی A' در C نقاطی از مجموعه H' و (احتمالاً) 1 هستند. بنابراین، مجموعه $\overline{A}'$ و نیز مجموعه $\overline{A}' \cup H'$ فشرده هستند. افزون بر این، اگر 1 متعلق به مرز A' باشد، آنگاه A غیر کراندار، و در نتیجه، دارای نقاط مشترک با برون گویی شامل H خواهد بود. اما، چون، این برون همبند است ((۴. ۸. ۹) را ببینید)، طبق تعریف مؤلفه همبند (بخش ۱۹. ۳ را ببینید)، مشمول A خواهد بود. این مطلب نشان می‌دهد که، گویی مانند V به مرکز 1 موجود است، به طوری که $V-\{1\} \subset A'$. بنابراین، 1 نقطه مرزی $C-\overline{A}'$ نیست، که ثابت می‌کند، مرز $C-\overline{A}'$ همیشه مشمول H' است. باید ثابت کنیم که، نگاشت $u \to \dfrac{u}{|u|}$ از H' به U اساسی است ((۲. ۲. AP) را ببینید). فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت ، باید نگاشتی پیوسته مانند f از H' به **R** موجود باشد، به طوری که، برای $u \in H'$ ، $\dfrac{u}{|u|} = e^{if(u)}$. طبق قضیه تیتز- اوریسون (۱. ۵. ۴) ، f قابل گسترش به نگاشتی پیوسته مانند g از $\overline{A}' \cup H'$ به **R** است. نگاشت h را از C به U ، به صورت : $h(u) = \dfrac{u}{|u|}$ اگر $u \in C - \overline{A}'$ ، $h(u) = e^{ig(u)}$ اگر $u \in \overline{A}'$ تعریف می‌کنیم. از تعریف g فوراً نتیجه می‌شود که، h روی C **پیوسته** است. فرض کنیم $r > 0$ چنان انتخاب شده باشد که، $\overline{A}'$ مشمول گوی B به معادله $|z| \le r$ باشد. تحدید نگاشت h به B غیراساسی است ((۶. ۲. AP) را ببینید). بنابراین، تحدید h به دایره S به معادله $|z| = r$ نیز غیراساسی خواهد بود. اما، نگاشت همانی $\zeta \to \zeta$ از U به روی U را می‌توان به صورت $h_1 \circ g_1$ نوشت، که در آن h_1 نگاشت $z \to \dfrac{z}{|z|}$ از S به‌روی U ، و g_1 نگاشت $\zeta \to r\zeta$ از U به‌روی S می‌باشد. اما، h_1 تحدید h به S است، بنابراین، نگاشتی غیراساسی است، و در نتیجه $h_1 \circ g_1$ نیز باید نگاشتی غیراساسی باشد ((۲. ۲. AP) را ببینید) ، که با (۹. ۲. AP) در تناقض است.

(۲. ۳. AP) (قضیه یانیشفسکی[1]). فرض کنیم A ، B دو زیرمجموعه فشرده از C ، و a ، b دو نقطه متمایز از $C-(A \cup B)$ باشند. اگر نه مجموعه A ، و نه مجموعه B ، a و b را از هم جدا نکنند، و اگر $A \cap B$ همبند باشد، آنگاه $A \cup B$ نیز a و b را از هم جدا نمی‌کند.

از فرض و از (۱. ۳. AP) نتیجه می‌شود که، تحدید $z \to \dfrac{s_{a,b}(z)}{|s_{a,b}(z)|}$ به A و به B غیراساسی می‌باشند. طبق (۷ . ۲ . AP) ، تحدید نگاشت فوق به $A \cup B$ نیز غیراساسی است. بنابراین، از (۱. ۳. AP) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

1 . Janiszewski's theorem = Теорема Янишевского

۴. قوس‌های ساده و منحنی‌های بسته ساده

یک مسیر **یک‌به‌یک** $t \to \gamma(t)$ در C ، که روی فاصله $I = [\alpha, \beta]$ تعریف شده، یک **مسیر ساده**[1] نیز می‌نامند. یک زیرمجموعه از C را یک **قوس ساده**[2] نامند ، اگر برابر مجموعه نقاط $\gamma(I)$ از یک مسیر ساده باشد. یک طوقه γ که روی I تعریف شده است، یک **طوقه ساده**[3] نامند، هرگاه برای هر زوج از نقاط متمایز (s,t) از فاصله I ، که حداقل یکی از آنها نقطه انتهایی I نیست، $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. یک زیرمجموعه از C را یک **خم ساده بسته**[4] نامند، اگر برابر مجموعه نقاط یک طوقه ساده باشد، تعریف‌های معادل چنین هستند: یک **قوس ساده** زیرمجموعه‌ای از C است که با $[0, 1]$ هومیومورفیک است، و یک **خم بسته ساده** زیرمجموعه‌ای از C است که با دایره واحد U هومیومورفیک است ((۷. ۵. ۹) را ببینید).

(۱. ۴. AP) مکمل یک قوس ساده در C همبند است (به عبارت دیگر، یک قوس ساده صفحه را برش نمی‌زند).

فرض کنیم γ یک مسیر ساده باشد، که روی I تعریف شده است، و فرض کنیم نگاشت پیوسته f از $\gamma(I)$ بروی I وارون نگاشت γ باشد، و a ، b دو نقطه متمایز $C-\gamma(I)$ باشند. طبق (۱. ۳. AP)، باید ثابت کنیم که، φ تحدید نگاشت $z \to \frac{s_{a,b}(z)}{|s_{a,b}(z)|}$ به $\gamma(I)$ غیر اساسی است. اما، می‌توان نوشت $\varphi = (\varphi \circ \gamma) \circ f$. نگاشت پیوسته $\varphi \circ \gamma$ از I به U غیراساسی است ((۶. ۲. AP) را ببینید) ، و بنابراین، طبق (۲. ۲. AP) ، φ نیز غیراساسی خواهد بود.

(۲. ۴. AP) (قضیه خم جردن) . فرض کنیم H یک خم بسته ساده در C باشد. در این‌صورت :

(a) مجموعه $C-H$ دقیقاً دو مؤلفه همبند دارد، یکی از آنها کراندار است، و دیگری بیکران.

(b) مرز هر یک از مؤلفه‌های $C-H$ مجموعه H است.

(c) اگر γ یک طوقه ساده باشد که روی I تعریف شده و $\gamma(I) = H$، در این‌صورت، اگر x در مؤلفه همبند بیکران $C-H$ واقع شود، $j(x, \gamma) = 0$؛ و اگر x در مؤلفه همبند کراندار $C-H$ قرار گیرد $j(x,\gamma) = \pm 1$.

اثبات در چند مرحله انجام می‌شود.

(۱. ۲. ۴. AP) ابتدا (b) را بدون هیچ فرضی روی تعداد مؤلفه‌های $C-H$ ثابت می‌کنیم.

---

1 . Simpie path = Простая траектория
2 . Simple arc = Простая дуга
3 . *Simple loop* = *Простая петля*
4 . Simple closed curve = Простая замкнутая кривая

فرض کنیم A یک مؤلفه همبند C − H باشد. چون C − H باز است. شبیه (۱. ۳ . AP) ، دیده می‌شود که، مرز A مشمول H است. فرض کنیم $z \in H$ ، و فرض کنیم f یک هومیومورفیسم از U برروی H باشد، و $\zeta = e^{i\theta} \in U$ چنان انتخاب شده باشد که $f(\zeta) = z$. فرض کنیم W یک همسایگی باز دلخواه از z در C ، و $V \subset W$ یک گوی بسته به مرکز z باشد. در این صورت، عددی مانند ω موجود است ، به طوری که $0 < \omega < \pi$ و برای $\theta - \omega < t < \theta + \omega$ ، $f(e^{it}) \in V$. اگر J تصویر این فاصله تحت نگاشت $t \to f(e^{it})$ باشد، در این صورت، L مکمل J در H تصویر فاصله فشرده $[\theta + \omega - 2\pi , \theta - \omega]$ تحت نگاشت $t \to f(e^{it})$ است ((۷. ۵ . ۹) را ببینید)، و طبق (۷. ۵ . ۹) ، قوسی ساده است. از (۱. ۴. AP) نتیجه می‌شود که، مجموعه باز $C - L \supset C - H$ **همبند** است. بنابراین، طبق (۲. ۷. ۹) ، برای هر $x \in A \subset C - L$ ، مسیری مانند γ در C − L موجود است، به طوری که روی $I = [a , b]$ تعریف شده، و $\gamma(a) = x$ ، $\gamma(b) = z$. مجموعه $\gamma(I) \cap \bar{J}$ فشرده و مشمول V است. فرض کنیم M تصویر معکوس آن تحت γ باشد. در این صورت ، M زیرمجموعه‌ای فشرده از فاصله I است، و $a \notin M$. فرض کنیم $c = \inf M > a$. در این صورت، تصویر فاصله $]a , c[$ تحت γ مجموعه‌ای همبند مانند P است ((۷ . ۱۹ . ۳) و (۱. ۱۹ . ۳) را ببینید) ، که نه با J تلاقی دارد و نه با L ، در نتیجه مشمول $C - (J \cup L) = C - H$ است. چون P شامل x است، P ، طبق تعریف مؤلفه همبند در A واقع خواهد بود. اما، وقتی $t < c$ به سمت c میل می‌کند، نقطه $\gamma(t) \in A$ به سمت $\gamma(c) \in V$ میل خواهد کرد. بنابراین، مادام که $c - t$ به حد کافی کوچک است، $\gamma(t) \in W$. این مطلب نشان می‌دهد که $z \in \bar{A}$ ، و حکم ثابت می‌شود.

(۲. ۲. ۴. AP) اکنون قضیه را تحت این شرط اضافی که H شامل یک پاره‌خط S با نقاط انتهایی متمایز است، ثابت می‌کنیم.

با به‌کارگیری هومیومورفیسمی مانند $z \to \lambda z + \mu$ روی C ، می‌توان فرض کرد که S فاصله‌ای به صورت $[-a , a]$ از خط حقیقی **R** است. فرض کنیم $\rho = d(0 , H - S) \le a$ ، و گوی باز $D = \{z \in C \mid |z| < r\}$ ، با $r < \rho$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. داریم $D \cap (C - H) = D \cap (C - S)$ ، و واضح است که $D \cap (C - S)$ ، اجتماع دو مجموعه $D_1 = \{z \in C \mid |z| < r , \mathscr{I} z > 0\}$ و

$$D_2 = \{z \in C \mid |z| < r , \mathscr{I} z < 0\}$$

است، که نقطه مشترکی ندارند. مستقیماً می‌توان ثابت کرد که، پاره‌خطی که دو نقطه D_1 (به ترتیب D_2) را به هم وصل می‌کند، در D_1 (به ترتیب D_2) واقع است. بنابراین، طبق (۳. ۱۹. ۳) ، D_1 ، D_2 همبند

هستند. از طرف دیگر، در (۱. ۲. ۴. AP) دیده‌ایم که، هر مؤلفه همبند $C-H$ با D تلاقی دارد، بنابراین، با D_1 یا D_2 تلاقی خواهد داشت. اما، اگر دو مؤلفه همبند $C-H$ با D_1 (به ترتیب D_2) تلاقی داشته باشند، آنگاه آنها لزوماً یکی خواهند بود، زیرا D_1 (به ترتیب D_2) همبند و مشمول $C-H$ است ((۴. ۱۹. ۳) را ببینید). این مطلب ثابت می‌کند که، **مجموعه $C-H$ حداکثر دو مؤلفه همبند دارد.**

اکنون ثابت می‌کنیم که $C-H$ **همبند نیست**، و بنابراین، **دقیقاً دو مؤلفه** دارد. فرض کنیم چنین نباشد، و $x \in D_1$ ، $y \in D_2$. چون گوی D همبند است، $C-D$ ، x و y را از یکدیگر جدا نمی‌کند. از طرف دیگر، اگر $C-H$ همبند باشد، آنگاه H نقاط x و y را از یکدیگر جدا نمی‌کند. اما، $H \cap (C-D)$ مکمل فاصله باز $]-r,r[$ در H است. طبق (۷. ۵. ۹) ، این مکمل قوسی ساده، و بنابراین، همبند است. طبق قضیه یانیشفسکی (۲. ۳. AP) ، اجتماع $H \cup (C-D)$ نقاط x و y را از یکدیگر جدا نمی‌کند، اما، این غیرممکن است، زیرا، مکمل $H \cup (C-D)$ در C مجموعه $D_1 \cup D_2$ است، و D_1 ، D_2 مجموعه‌هایی باز بدون نقطه مشترک می‌باشند، بنابراین، $D_1 \cup D_2$ همبند نیست.

چون H فشرده است، در گویی به مرکز 0 قرار می‌گیرد، که مکمل آن در C همبند است، و بنابراین، مشمول یک مؤلفه همبندی $C-H$ است. این مطلب نشان می‌دهد که، یکی از مؤلفه‌های آن A بیکران است، و B مؤلفه دیگر آن کراندار است. علاوه براین، واضح است که، وقتی $x \in A$ باشد، $j(x,\gamma)=0$ ((۵ . ۸ . ۹) را ببینید). از طرف دیگر، D_1 مشمول یکی از مؤلفه‌های مجموعه $C-H$ ، و D_2 مشمول مؤلفه دیگر است. بنابراین، کل مطلبی که ما باید ثابت کنیم، این است که، برای یک نقطه $x_1 \in D_1$ ، و یک نقطه $x_2 \in D_2$ ، $j(x_1 , \gamma) - j(x_2 , \gamma) = \pm 1$ ((۳ . ۸ . ۹) را ببینید). فرض کنیم نقطه مبدأ γ ، نقطه $a \in \overset{0}{S}$ باشد، و $J \subset I$ تصویر معکوس $H - \overset{0}{S}$ تحت γ باشد که یک فاصله فشرده $[\alpha , \beta]$ است، و فرض کنیم γ_1 مسیر $t \to \gamma(t)$ باشد که روی J تعریف شده و نقاط انتهایی آن $-a$ و a است. طبق (۱. ۱. AP)، یک هموتوپی φ_1 در $C-\bar{D}$ از γ_1 به مسیر γ_2 موجود است، به‌طوری که φ_1 روی $J \times [0,1]$ تعریف شده، و برای هر ξ ، $\varphi_1(\alpha ,\xi) = \gamma(\alpha)$ ، $\varphi_1(\beta , \xi) = \gamma(\beta)$. نگاشت φ را روی $I \times [0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم : اگر $(t, \xi) \in J \times [0,1]$ باشد φ را برابر φ_1 می‌گیریم ، و اگر $(t , \xi) \in (I-J) \times [0,1]$ باشد ، φ_1 را برابر $\gamma(t)$ می‌گیریم. در این صورت، برای هر $x_1 \in D_1$ (به ترتیب $x_2 \in D_2$) ، φ یک هموتوپی طوقه‌ای در $C-\{x_1\}$ (به ترتیب $C-\{x_2\}$) از طوقه γ به مداری مانند γ_3 است. بنابراین، می‌توانیم خودمان را محدود کنیم به اثبات این‌که، $j(x_1 , \gamma) - j(x_2, \gamma) = \pm 1$ ، وقتی γ **مداری** باشد که روی I تعریف شده و دارای خواص زیر باشد:

(۱) $S \subset \gamma(I)$ و اگر T تصویر معکوس $\gamma^{-1}(S)$ باشد ، آنگاه T زیر فاصله‌ای از I است و تحدید γ به T یک هومیومورفیسم از T برروی S است؛

(۲) $\gamma(I-T)$ مشمول $C-\bar{D}$ است (توجه کنید که، ممکن است که این مدار جدید γ یک طوقه ساده نباشد).

در این صورت، تصویر معکوس فاصله $[-r, r]$ تحت نگاشت γ زیر فاصله‌ای مانند $[\lambda, \mu]$ از T است. فرض کنیم، به عنوان مثال $\gamma(\lambda) = -r$ و $\gamma(\mu) = r$. می‌توان فرض کرد که (با تعویض γ به مداری هم ارز آن) $\lambda = -\pi$ و $\mu = 0$، و علاوه بر این $-r$ مبدأ γ است، به طوری که $I = [-\pi, \omega]$ با $\omega > 0$. با انتخاب $x_1 = i\xi$، $x_2 = -i\xi$ که در آن $0 < \xi < r$ است، فرض کنیم σ راه $t \to \gamma(t)$، $-\pi \le t \le 0$ و δ_2 راه $t \to re^{it}$، $-\pi \le t \le 0$ و δ_1 راه $t \to re^{-it}$، $-\pi \le t \le 0$ باشد. در این صورت، با به کارگیری قضیه کوشی برای نیم صفحه $\mathscr{I}(z) > -\xi$ (به ترتیب $\mathscr{I}(z) < \xi$) که ناحیه‌ای ستاره‌گون است ((۱. ۷. ۹) را ببینید) نتیجه می‌گیریم:

$$\int_\sigma \frac{dz}{z-i\xi} = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z-i\xi} \quad \text{و} \quad \int_\sigma \frac{dz}{z+i\xi} = \int_{\delta_1} \frac{dz}{z+i\xi}$$

بنابراین:

$$2\pi i\,(j(x_1, \gamma) - j(x_2, \gamma)) = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z-i\xi} - \int_{\delta_1} \frac{dz}{z+i\xi} + \int_0^\omega \frac{2i\xi\gamma'(t)dt}{((\gamma(t))^2 + \xi^2}$$

حال، سمت چپ تساوی فوق مستقل از ξ است، و با استفاده از این حقیقت که، برای $0 \le t \le \omega$ داریم $|\gamma(t)| \ge r$ و نیز با استفاده قضیه مقدار میانگین (برای ارزیابی کران بالای آخرین انتگرال)، و قضیه (۱. ۱۱. ۸)، دیده می‌شود که، وقتی ξ به سمت 0 میل می‌کند، سمت راست این تساوی به سمت $2\pi i$ میل می‌کند.

(۳. ۲. ۴. AP) اکنون به حالتی برمی‌گردیم که H شامل پاره‌خطی با نقاط انتهایی متمایز نیست.

فرض کنیم a و b دو نقطه متمایز از H، و S پاره‌خطی با نقاط انتهایی a و b باشد. دوباره، می‌توان فرض کرد که، S فاصله‌ای بسته در $\mathbf{R}$ است. طبق فرض، لااقل یک نقطه $x \in S \cap (C-H)$ موجود است. فرض کنیم J مؤلفه همبند نقطه x در $S \cap (C-H)$ باشد، که فاصله بازی است مانند $]y, z[$، زیرا $S \cap (C-H)$ در $\mathbf{R}$ باز است ((۱. ۱۹. ۳) و (۵. ۱۹. ۳) را ببینید). علاوه بر این، نقاط انتهایی آن y، z در H هستند. فرض کنیم g هومیومورفیسمی از H به دایره واحد U باشد، و فرض کنیم $g(y) = e^{ic}$ و $g(z) = e^{id}$، که در آن می‌توان فرض کرد $c < d < c + 2\pi$ ((۷. ۵. ۹) را ببینید). فرض کنیم U_1 و U_2 قوس‌هایی ساده باشند که تصاویر $t \to e^{it}$، $c \le t \le d$، و $t \to e^{it}$، $d \le t \le c+2\pi$ هستند و فرض کنیم H_1 و H_2 تصویرهای آنها تحت هومیومورفیسم f از U برروی H، و وارون g باشند. با استفاده از (۷. ۵. ۹)، مستقیماً دیده می‌شود که، یک هومیومورفیسم f_1 (به ترتیب f_2) از U_1 (به ترتیب U_2) بر روی

فاصله بسته $\bar{J}=[y,z]$ موجود است، به طوری که $f_1(e^{ic})=f_2(e^{ic})=y$ و $f_1(e^{id})=f_2(e^{id})=z$. فرض کنیم h_1 (به ترتیب h_2) نگاشتی از U به C باشد، که روی U_1 (به ترتیب روی U_2) برابر f ، و روی U_2 (به ترتیب روی U_1) برابر f_2 (به ترتیب برابر f_1) است. از تعریف J نتیجه می‌شود که h_1 ، h_2 هومیومورفیسم‌هایی از U بر روی دو **خم بسته ساده** $G_1=H_1\cup J$ ، $G_2=H_2\cup J$ هستند، که هر یک از آنها شامل پاره‌خط $\bar{J}$ می‌باشد. فرض کنیم $w\in H_1$ ، متمایز از z و y باشد. گویی باز مانند D به مرکز w موجود است ، که با مجموعه فشرده G_2 تلاقی ندارد. طبق (۱. ۲. ۴. AP) ، هر مؤلفه همبند $C-G_1$ نقاطی در D دارد. علاوه بر این، اگر w' ، w'' دو نقطه از گوی D در یک مؤلفه همبند $C-G_1$ واقع باشند ، w' ، w'' به‌وسیله G_1 از یکدیگر جدا نمی‌شوند، و به‌وسیله G_2 نیز از یکدیگر جدا نمی‌شوند، زیرا، آنها متعلق به $D\subset C-G_2$ هستند، که همبند است. اما $G_1\cap G_2=\bar{J}$ همبند است. بنابراین، طبق قضیه یانیشفسکی (۲ . ۳ . AP) ، w' و w'' نه به وسیله $G_1\cup G_2$ از یکدیگر جدا می‌شوند، و نه البته به وسیله $H\subset G_1\cup G_2$. به عبارت دیگر، w' ، w'' متعلق به مؤلفه همبند یکسانی از $C-H$ هستند. اما، چون مجموعه $C-G_1$ دقیقاً دو مؤلفه همبند دارد، و هر مؤلفه همبند $C-H$ طبق (۱. ۲. AP.۴) نقاطی در D دارد، نتیجه می‌گیریم که $C-H$ **حداکثر دو مؤلفه همبند** دارد. از طرف دیگر، از (۲. ۲. ۴. AP) نتیجه می‌شود که، دو نقطه w' ، w'' در D وجود دارند، که به‌وسیله G_1 از یکدیگر جدا می‌شوند. نشان می‌دهیم که، این نقاط به‌وسیله H نیز از یکدیگر جدا می‌شوند. در غیر این صورت، چون، آنها به‌وسیله G_2 از یکدیگر جدا نمی‌شوند، و $G_2\cap H=H_2$ همبند است، این نقاط نمی‌توانند به‌وسیله $G_2\cup H\supset G_1$ از یکدیگر جدا شوند ((۲. ۳. AP) را ببینید.) و این با فرض در تناقض است. بنابراین، ما نشان داده‌ایم که، $C-H$ دقیقاً دو مؤلفه همبندی دارد. با استدلالی مشابه آن‌چه که در (۲. ۲. ۴. AP) بیان شد، ثابت می‌شود که، یکی از این مؤلفه‌ها، A ، بیکران و دیگری ، B ، کراندار است.

بالاخره ، می‌توان فرض کرد که y مبدأ طوقه γ است، و اگر $I=[\alpha,\beta]$ ، آنگاه $H_1=\gamma([\alpha,\lambda])$، $H_2=\gamma([\lambda,\beta])$. طوقه‌های γ_1 ، γ_2 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

برای $\alpha-1\le t\le\alpha$ ، $\gamma_1(t)=(t-\alpha+1)(y-z)+z$ ، و برای $\alpha\le t\le\lambda$ ، $\gamma_1(t)=\gamma(t)$ ؛

برای $\lambda\le t\le\beta$ ، $\gamma_2(t)=\gamma(t)$ ، و برای $\beta\le t\le\beta+1$ ، $\gamma_2(t)=y+(t-\beta)(z-y)$.

با استفاده از (۱. ۱. AP) ، مستقیماً می‌توان ثابت کرد که، برای هر نقطه $x\notin G_1\cup G_2$ ،

$$j(x,\gamma)=j(x,\gamma_1)+j(x,\gamma_2).$$

با مفهومی مشابه فوق برای D ، دوباره فرض کنیم w' ، w'' دو نقطه از D باشند که به‌وسیله G_1 از یکدیگر جدا می‌شوند. در این‌صورت، داریم $j(w',\gamma_2)=j(w'',\gamma_2)$، زیرا w' ، w'' به‌وسیله G_2 از یکدیگر جدا نمی‌شوند ((۳. ۸ . ۹) را ببینید)، و طبق (۲. ۲. ۴. AP) ، $j(w',\gamma_1)-j(w'',\gamma_1)=\pm 1$. از این مطلب

نتیجه می‌شود که $j(w', \gamma) - j(w'', \gamma) = \pm 1$، و با این رابطه اثبات به پایان می‌رسد.

(۳. ۴. AP) فرض کنیم H یک خم بسته ساده در C ، و D مؤلفه همبند کراندار C - H باشد. در این صورت، برای هر طوقه γ در D، به ازای هر $x \in H$ ، $j(x, \gamma) = 0$.

فرض کنیم U گویی باز به مرکز x باشد، که هیچ نقطه مشترکی با مجموعه $\gamma(I)$ از نقاط طوقه γ نداشته باشد. در U نقطه‌ای مانند $z \in C - (D \cup H) = C - \bar{D}$ موجود است ((۲ . ۴ . AP) را ببینید) ، و چون U همبند است $j(x, \gamma) = j(z, \gamma)$ ((۳. ۸ . ۹) را ببینید). اما، برای همه نقاط y در مؤلفه همبند بیکران $C - \bar{D}$ از[1] مجموعه C - H ، $j(z, \gamma) = j(y, \gamma)$ ((۳. ۸ . ۹) را ببینید)، و در این مؤلفه نقاطی مانند $y \in C - \bar{D}$ موجود هستند که، برون یک گوی بسته شامل $\gamma(I)$ می‌باشند؛ برای چنین نقاطی $j(y, \gamma) = 0$ ((۵ . ۸ . ۹) را ببینید) ، که از آن نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مسائل

۱ . فرض کنیم A یک زیرمجموعه همبند باز C باشد. نشان دهید که، برای هر دو نقطه a، b از A ، **مسیری ساده** مانند γ در A وجود دارد، که a و b نقاط انتهایی آن هستند، و مجموعه نقاط این مسیر خطی شکسته تشکیل می‌دهند (بخش ۱. ۵ ، مسأله ۴، را ببینید. به این ترتیب، می‌توان گفت، نگاشت γ به‌طور قطعه‌ای خطی است). (از استدلالی مشابه آن‌چه که در (۲. ۷. ۹) بیان شد، استفاده کنید. اگر «مربع» $Q = I \times I \subset A$ (I فاصله‌ای بسته با درون غیرتهی در **R** است) چنان باشد که $a \notin Q$، و اگر مسیری ساده مانند $t \to \gamma_1(t)$ در A ، روی $J \subset \mathbf{R}$ ، با مبدأ a و منتهای $c \in Q$ تعریف شده باشد، کوچکترین مقدار $t_0 \in J$ را مورد بررسی قرار دهید که $\gamma_1(t_0) \in Q$ ، و ملاحظه کنید که، پاره‌خطی که نقاط انتهایی آن $\gamma_1(t_0)$ و یک نقطه دلخواه از Q است، در Q واقع می‌شود.)

۲ . آیا قضیه یانیشفسکی وقتی فقط فرض شود که A و B زیرمجموعه‌های بسته‌ای از C هستند، حتی اگر $A \cap B$ فشرده (و همبند) باشد، درست است؟ نشان دهید که، حکم قضیه در دو حالت زیر درست باقی می‌ماند :

(۱) A و B دو مجموعه بسته هستند ، که یکی از آنها فشرده است ؛

(۲) A و B دو مجموعه بسته هستند، که نقطه مشترکی ندارند. (اگر c نقطه‌ای به حد کافی نزدیک به a باشد، نگاشت $z \to \frac{1}{z-c}$ ، و تصاویر a، b، A و B را تحت این نگاشت مورد بررسی قرار دهید.)

۳ . برای هر خم ساده بسته H در C، مؤلفه همبند کراندار C − H را به $\beta(H)$ نشان می‌دهیم.

(a) فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند از C ، و H یک خم بسته ساده واقع در A باشد. نشان دهید که ، A − H دقیقاً دو مؤلفه همبند دارد، که تقاطع A و مؤلفه‌های همبند C − H می‌باشند (از مسأله ۲ استفاده کنید).

(b) به شکلی کلی‌تر، اگر H_i $(1 \le i \le r)$ r خم بسته ساده باشند که در A واقع شده‌اند، و هیچ دوتایی از این خم‌ها نقطه مشترک نداشته باشند، آنگاه، مکمل $\bigcup_i H_i$ در A دقیقاً $r + 1$ مؤلفه همبند دارد. (از استقراء روی r استفاده کنید.)

---

[1] در چاپ اول متن روسی کتاب به‌جای «مؤلفه بیکران $C - \bar{D}$ از H » که در چاپ دوم متن انگلیسی آن مورد استفاده قرار گرفته است و با توجه به تعریف H باید آن را اشتباهی چاپی به حساب آورد، نوشته شده است «مؤلفه بیکران $C - \bar{D}$ از مجموعه C − H» . مترجم.

(c) اگر H ، H' دو خم بسته ساده در C باشند که نقطه مشترکی ندارند، نشان دهید که یا $\beta(H) \cap \beta(H') = \varnothing$، یا بستار یکی از مجموعه‌های $\beta(H)$، $\beta(H')$ در مجموعه دیگر واقع است. (با استفاده از (۹. ۱۹. ۳) ، نشان دهید که ، اگر $H \subset \beta(H')$، آنگاه مؤلفه همبند بیکران مجموعه $C - H'$ نقطه مشترکی با $\beta(H)$ ندارد.)

(d) فرض کنیم زیرمجموعه باز و همبند T از C دارای مرزی باشد که اجتماع r خم بسته ساده H_i $(1 \le i \le r)$ است که هیچ دوتایی از آنها نقطه مشترکی با هم نداشته باشند. نشان دهید که، تنها دو امکان وجود دارد:

(۱) T بیکران است و هیچ دوتایی از مجموعه‌های $\beta(H_i)$ نقاطی مشترک ندارند، و اجتماع آنها مکمل $\bar{T}$ است ؛

(۲) یکی از H_iها که آن را به H_r نشان می‌دهیم وجود دارد، به‌طوری که برای $1 \le i \le r-1$ ، $\overline{\beta(H_i)}$ها در $\beta(H_r)$ واقع‌اند، و هیچ دوتایی از $\overline{\beta(H_i)}$ها (برای $1 \le i \le r-1$) نقاط مشترکی ندارند، و T مکمل اجتماع $\overline{\beta(H_i)}$ها $(1 \le i \le r-1)$ در $\beta(H_r)$ است. (اگر γ_i یک طوقه ساده باشد که مجموعه نقاط آن H_i $(1 \le i \le r)$ است، آنگاه، ملاحظه کنید که، شاخص‌های $j(x, \gamma_i)$ برای $x \in T$ ثابت هستند، و حداکثر یکی از آنها می‌تواند مخالف صفر باشد، در غیر این صورت، با استفاده از (c) ، نشان دهید که، حداقل یکی از H_iها مشمول مرز T نیست.)

۴ . [۱] فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند کراندار از C باشد، به طوری که برای هر طوقه γ در A و هر نقطه $z \in C - A$ ، $j(z, \gamma) = 0$.

(a) نشان دهید که، برای هر خم بسته ساده $H \subset A$، مؤلفه همبند کراندار $\beta(H)$ مشمول A است (ملاحظه کنید که، در غیر این صورت، چنین مؤلفه‌ای شامل نقاطی از $C - A$ خواهد بود. از (۹. ۱۹. ۳) و قسمت (b) قضیه خم جردن استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم $(z \mid z')$ حاصلضرب اسکالر اقلیدسی $xx' + yy'$ در صفحه $C = \mathbf{R}^2$ باشد (با $z = x + iy$ ، $z' = x' + iy'$) ، و فرض کنیم P_0 **شش ضلعی باز** تعریف شده با روابط :

$$|(z \mid 1)| < \frac{1}{2} \ , \ |(z \mid e^{i\pi/3})| < \frac{1}{2} \ , \ |(z \mid e^{-i\pi/3})| < \frac{1}{2}$$

باشد. برای هر عدد $\alpha > 0$ ، مجموعه همه شش ضلعی‌های αP_{mn} که از αP_0 با همه انتقال‌های به شکل $\alpha(me^{i\pi/3} + n)$، که در آن n ، m اعداد صحیح دلخواهی در Z هستند، به‌دست می‌آیند، یک **تور مسدسی با پهنای** α می‌نامند. مجموعه‌های αP_{mn} (به ترتیب $\alpha \bar{P}_{mn}$) را سوراخ‌های (شبکه‌های) باز (به ترتیب بسته) تور می‌نامند. مرز αP_{mn} اجتماع ۶ پاره‌خط است (اضلاع αP_{mn}) ، که نقاط انتهایی آنها را **رئوس** αP_{mn} می‌نامند. **گره‌های** شبکه‌های شش ضلعی کلیه رئوس شبکه‌ها هستند. هر گره یک رأس از سه شبکه (سوراخ) است، و بقیه نقاط انتهایی سه ضلع صادر شده از این گره را **گره‌های همسایه** می‌نامند. فرض کنیم B اجتماع تعدادی متناهی از شبکه‌های (سوراخ‌های) بسته از یک تور مسدسی باشد. نشان دهید که، اگر یک گره متعلق به $fr(B)$ باشد، دقیقاً دو گره همسایه وجود دارد که متعلق به $fr(B)$ نیز هستند. نتیجه بگیرید که، $fr(B)$ اجتماع تعدادی متناهی از خم‌های بسته ساده است، که هر یک از آنها اجتماعی از اضلاع شبکه‌های (سوراخ‌های) تور است. (با دو گره همسایه a_1 ، a_2 در $fr(B)$ شروع کرده، نشان دهید که می‌توان با استقراء دنباله‌ای متناهی مانند (a_n) از گره‌های متعلق به $fr(B)$ تعریف کرد، به‌طوری که، برای هر n ، a_n و a_{n+1} گره‌های همسایه باشند.)

---

۱. به علت تفاوت‌هایی که در صورت مسئله ۴ در چاپ اول کتاب ژان دیودونه به زبان روسی و چاپ دوم آن به زبان انگلیسی وجود داشت، مترجم ترجیح داد، صورت این مسئله را ابتدا از متن انگلیسی کتاب و سپس از متن روسی آن ترجمه نماید.

(c) فرض کنیم B اجتماع تعدادی متناهی از شبکه‌های (سوراخ‌های) بسته از یک تور مسدسی با پهنای α باشد، به‌طوری که $fr(B)$ یک خم بسته ساده باشد (اجتماع اضلاع شبکه‌های (سوراخ‌های) تور)؛ و فرض کنیم a ، b دو گره همسایه روی $fr(B)$ باشند؛ ثابت کنید که، نگاشتی پیوسته مانند $(z,t) \to \varphi(z,t)$ از $B \times [0,1]$ به B موجود است، به‌طوری که : (۱) برای هر z در B، $\varphi(z,0) = z$ ؛ (۲) برای هر $t \in [0,1]$ و هر z روی پاره‌خط S با نقاط انتهایی a و b ، $\varphi(z,t) = z$ ؛ (۳) برای هر $z \in B$ ، $\varphi(z,1) \subset S$. (از استقراء روی N تعداد شبکه‌های (سوراخ‌های) مشمول B استفاده نموده، یک طرف نقاط انتهایی d ، c را مورد بررسی قرار دهید، که مشمول $fr(B)$ بوده، و c و d مختصات اولشان یکسان، و برابر با سوپرموم $pr_1(B)$ است، و d دارای بزرگترین مختصات دوم در بین همه گره‌های واقع در $fr(B)$ است، که دارای آن سوپرموم به‌عنوان اولین مختصات است، نشان دهید که، اگر $N > 1$ ، $B = B_1 \cup P$ ، که در آن P شبکه (سوراخ) یکتایی در B است، که c و d به عنوان رئوس آن هستند، B_1 اجتماع $n-1$ شبکه (سوراخ) است، و با P یک، دو یا سه ضلع مشترک دارد، امکان‌های مختلف را بررسی کنید). ثابت کنید که درون B **همبند ساده** است.

(d) فرض کنیم B اجتماع همه شبکه‌های (سوراخ‌های) بسته از یک تور مسدسی به پهنای α باشد، که مشمول A هستند. α را به حد کافی کوچک می‌گیریم برای اینکه B غیرتهی باشد. فرض کنیم D یکی از مؤلفه‌های همبند (باز) $\overset{0}{B}$ باشد. نشان دهید که $fr(D)$ یک خم بسته ساده است. (از (a) و مسأله (d)۳ استفاده نموده، ثابت کنید که، اگر $fr(D)$ اجتماع بیش از یک خم بسته ساده باشد، باید یک طوقه ساده γ در A و نقاطی مانند $z \in fr(A)$ موجود باشند، به‌طوری که $j(z,\gamma) = 1$.)

(e) نتیجه بگیرید که A همبند ساده است، و اجتماع یک دنباله صعودی (D_n) از زیرمجموعه‌های باز همبند ساده است، که هر یک از آنها مؤلفه‌ای کراندار از مکمل یک خم بسته ساده است (از (c) و (d) استفاده کنید). به عکس، چنین اجتماعی همیشه همبند ساده است.

(f) نتیجه (e) را برای زیرمجموعه‌های همبند ساده باز دلخواه C تعمیم دهید (برای هر n ، شش ضلعی‌های بسته از تور مسدسی به عرض $\frac{1}{n}$ که در اشتراک A و گوی $B(0,n)$ واقع شده‌اند، مورد بررسی قرار دهید.)

(g) فرض کنیم A یک زیرمجموعه همبند باز از C باشد، به‌طوری که $C - A$ مؤلفه همبند کرانداری نداشته باشد. نشان دهید که، A همبند ساده است (از (۵ . ۸ . ۹) استفاده کنید).

(h) ثابت کنید که هر مؤلفه همبند از اشتراک تعدادی متناهی از مجموعه‌های همبند ساده باز در C ، همبند ساده است.

۴.[1] فرض کنیم A یک مجموعه باز کراندار همبند در C باشد ، به طوری که برای هر طوقه γ در A و هر نقطه $z \in C - A$ ، $j(z,\gamma) = 0$.

(a) نشان دهید که، برای هر خم بسته ساده $H \subset A$ ، مؤلفه همبند کراندار $\beta(H)$ مشمول A است (با استفاده از (۹. ۱۹. ۳) و قسمت (b) قضیه خم جردن، نشان دهید که ، در غیر این صورت، این خم باید شامل نقطه‌ای از $C - A$ باشد.)

(b) شبکه[2] با گام[3] $\alpha > 0$ در C به مجموعه نقاط به شکل $(m+in)\alpha$ گفته می‌شود که در آن m و n اعداد صحیح دلخواهی هستند؛ این نقاط را **راس[4]های** شبکه می‌نامند. برای هر رأس $\alpha(m+in)$، چهار رأس $\alpha((m \pm 1) + i(n \pm 1))$ را رئوس همسایه با رأس $(m+in)\alpha$ می‌نامند. مجموعه Q_{mn} تشکیل شده از نقاط $x + iy$ که در آن $m\alpha < x < (m+1)\alpha$ ،

---

۱. این مسأله از چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

2 . Рёшетка = Lattice
3 . Шаг = Mesh width , step
4 . Вершина = Vertex

$n\alpha < y < (n+1)\alpha$ مربع باز شبکه با شاخص‌های m و n، و $\bar{Q}_{mn}$ بستار Q_{mn} را مربع بسته شبکه با شاخص‌های m و n می‌نامند. مرز مربع Q_{mn} شامل چهار رأس بوده، اجتماع پاره‌خطهایی است، که از این رئوس آنهایی را به‌هم وصل می‌کند، که همسایه هستند (اضلاع مربع Q_{mn} یا مربع $\bar{Q}_{mn}$).

فرض کنیم B اجتماع تعدادی متناهی از مربع‌های بسته شبکه باشد. نشان دهید که، اگر رأسی از شبکه متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ باشد، آنگاه تعداد رئوس همسایه با این رأس که متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ هستند، برابر 2 یا 4 است. ثابت کنید که، اگر رأسی از شبکه متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ نباشد، و چنان باشد که چهار رأس همسایه با این رأس متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ باشند، آنگاه $\mathrm{fr}(B)$ اجتماع تعدادی متناهی خم‌های بسته ساده دو به دو مجزا (غیرمتقاطع) از یکدیگر است، که هر یک از آنها اجتماع اضلاع مربع‌های شبکه است. (با یکی از دو رأس همسایه a_1 و a_2 از شبکه که متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ هستند، شروع کنید. ثابت کنید که، با استقراء می‌توان دنباله‌ای مانند (a_n) از رئوس شبکه تعریف کرد، که متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ بوده، و چنان باشند که a_n و a_{n+1} رئوس همسایه‌ها باشند.)

(c) فرض کنیم B اجتماع تعدادی متناهی از مربع‌های بسته شبکه با گام α باشد به‌طوری‌که در مرز $\mathrm{fr}(B)$ رأسی نباشدکه همه چهار رأس همسایه با آن متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ باشند، و $\mathrm{fr}(B)$ یک خم بسته ساده باشد (اجتماع اضلاع مربع‌های شبکه). فرض کنیم a و b دو رأس همسایه باشند که متعلق به $\mathrm{fr}(B)$ هستند. ثابت کنید که، نگاشتی پیوسته مانند $(z,t) \to \varphi(z,t)$ از $B \times [0,1]$ به B موجود است، به طوری که :

(۱) برای هر z در B، $\varphi(z,0) = z$ ؛

(۲) برای هر نقطه $t \in [0,1]$ و هر نقطه z از پاره‌خط S با نقاط انتهایی a و b، $\varphi(z,t) = z$ ؛

(۳) برای هر نقطه $z \in B$، $\varphi(z,1) \in S$. (از استقراء روی N تعداد مربع‌هایی که اجتماع آنها B است، استفاده کنید. فرض کنیم m بزرگترین عدد صحیحی باشد که برای آن $Q_{mn} \subset B$ ئی وجود دارد، و برای این m فرض کنیم n بزرگترین عدد صحیحی باشد که برای آن $Q_{mn} \subset B$. برحسب اینکه نقطه $(m+in)\alpha$ به مرز $\mathrm{fr}(B)$ متعلق است یا نه، دو حالت متمایز ممکن است رخ دهد، و در هر یک از این حالت‌ها لازم است که B را به عنوان اجتماع دو مجموعه مشابه که هر یک از آنها اجتماع کمتر از N مربع شبکه است، مورد بررسی قرار داد.) از مطالب فوق نتیجه بگیرید که، درون مجموعه B همبند ساده است.

(d) فرض کنیم B اجتماع همه مربع‌های بسته شبکه با گام α باشد که در A واقع شده‌اند؛ فرض می‌شود که، عدد α آن‌قدر کوچک است که، مجموعه B غیرتهی باشد. اگر D یکی از مؤلفه‌های (باز) همبند مجموعه $\overset{0}{B}$ باشد، نشان دهید که، در $\mathrm{fr}(D)$ هیچ رأسی از شبکه نیست که همه چهار رأس همسایه با آن متعلق به $\mathrm{fr}(D)$ باشند. [فرض کنیم که چنین نباشد و برای سهولت فرض کنیم که این رأس 0 باشد. در چنین حالتی، به عنوان مثال، $Q_{0,0}$ و $Q_{-1,-1}$ در D جا گرفته‌اند، و نقاطی مانند $z_1 \in \bar{Q}_{-1,0}$ و $z_2 \in \bar{Q}_{0,-1}$ وجود دارند، که متعلق به $\mathrm{fr}(A)$ هستند. با کمک مسأله ۱ نشان دهید که، طوقه ساده‌ای مانند Γ یافت می‌شود، به طوری که، مشمول $D \cup \{0\}$ بوده، و شامل پاره‌خط با نقاط انتهایی $(1+i)\alpha/2$ و $-(1+i)\alpha/2$ است. با بحثی مشابه با آن‌چه که در (۲. ۲. ۴. AP) بیان شد، نشان دهید که، شاخص‌های $j(z_1,\Gamma)$ و $j(z_2,\Gamma)$ نمی‌توانند با هم برابر باشند، و با این مطلب تناقضی به‌دست آورید.]

(e) با نمادهای قسمت (d) ، نشان دهید که، مرز $fr(D)$ یک خم ساده بسته است. (با استفاده از (b) و قسمت (d) مسأله ۳ ، نشان دهید که، اگر مرز $fr(D)$ اجتماع بیش از یک خم بسته ساده باشد، آنگاه طوقه‌ای ساده مانند γ در A و نقطه‌ای مانند $z \in fr(A)$ یافت خواهد شد، به طوری که $j(z, \gamma) = 1$).

(f) از اثبات نتیجه بگیرید که ، A همبند ساده است و اجتماع دنباله‌ای صعودی مانند (D_n) از مجموعه‌های باز همبند ساده است، به‌طوری که هر یک از آنها مؤلفه کرانداری از مکمل یک خم بسته ساده است. (از (c) و (e) استفاده کنید). به عکس، چنین اجتماعی همیشه همبند ساده است.

(g) حکم قسمت (f) را برای یک مجموعه باز همبند ساده دلخواه C تعمیم دهید. (برای هر n ، مربع‌های بسته شبکه با گام $1/n$ را که در اشتراک مجموعه A با گوی $B(0, n)$ واقع شده‌اند، مورد بررسی قرار دهید.)

(h) فرض کنیم A یک مجموعه همبند باز در C باشد، به‌طوری که $C - A$ مکمل A مؤلفه همبند کرانداری نداشته باشد. نشان دهید که، در این حالت مجموعه A همبند ساده است. (از (۵ . ۸ . ۹) استفاده کنید.)

۵ . نشان دهید که، زیرمجموعه‌های باز زیر از مجموعه C همبند ساده هستند، ولی مرز آنها یک خم بسته ساده نیست.

(۱) A_1 مجموعه نقاطی به‌صورت $x + iy$ ، که در آن $0 < x < 1$ ، $-2 < y < \sin \frac{1}{x}$.

(۲) A_2 مجموعه نقاطی به‌صورت $x + iy$ ، که در آن $-1 < x < 0$ و $-1 < y < 1$ ، یا $0 \le x < 1$ و $0 < |y| < 1$.

(در هر دو حالت، یک دنباله صعودی از مؤلفه‌های کراندار $\beta(H_n)$ تعریف کنید، که H_n یک خم بسته ساده باشد، به طوری که اجتماع $\beta(H_n)$ ها مجموعه باز معلومی باشد. برای اثبات اینکه مرز $fr(A_1)$ با U هومیومورفیک نیست، با استفاده از (۱. ۱۹. ۳) ، نشان دهید که، $fr(A_1)$ به‌طور موضعی همبند نیست. برای اثبات خاصیت مشابهی برای $fr(A_2)$ ، مکمل نقطه $z = 1$ را در این مرز مورد بررسی قرار دهید.) آیا مجموعه‌های $fr(A_1)$ و $fr(A_2)$ هومومورفیک هستند؟

۶ . فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند ساده از C باشد که متمایز از C است. نشان دهید که، مرز A شامل حداقل دو نقطه متمایز است. (نشان دهید که، در غیر این‌صورت، باید داشته باشیم $A = C - \{a\}$. با استفاده از (۹. ۱۹. ۳) و این حقیقت که $C - \{a\}$ همبند است، ثابت کنید که، A نقطه برونی ندارد ، و با به کارگیری (۴. ۸ . ۹) و (۷. ۸ . ۹) نتیجه مطلوب را به‌دست آورید).

۷. فرض کنیم γ یک طوقه ساده باشد که روی $I = [0, 2]$ تعریف شده است، و $H = \gamma(I)$ خم بسته ساده متناظر با آن باشد، و فرض کنیم α مسیری ساده باشد که روی $I_2 = [1, 2]$ تعریف شده است، و در خواص :

(۱) $\alpha(1) = \gamma(1)$ ، $\alpha(2) = \gamma(2) = \gamma(0)$ ،

(۲) برای هر $t \in]1, 2[$ ، $\alpha(t) \in \beta(H)$ ،

صدق می‌کند ، و فرض کنیم $L = \alpha(I_2)$. طوقه‌های ساده γ_1 ، γ_2 را روی I به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t) \ , & 0 \le t \le 1 \quad \text{برای} \\ \alpha(t) \ , & 1 \le t \le 2 \quad \text{برای} \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} \alpha(2-t) \ , & 0 \le t \le 1 \quad \text{برای} \\ \gamma(t) \ , & 1 \le t \le 2 \quad \text{برای} \end{cases}$$

فرض کنیم $H_1 = \gamma_1(I)$ ، $H_2 = \gamma_2(I)$.

(a) نشان دهید که، برای هر $z \in C$ که متعلق به $H_1 \cup H_2$ نیست $j(z, \gamma) = j(z, \gamma_1) + j(z, \gamma_2)$. (از (۱. ۱. AP) استفاده کنید.)

(b) ثابت کنید، نقطه‌ای مانند $z_1 \in \beta(H)$ موجود است ، به‌طوری‌که $j(z_1, \gamma_1) = 0$ ، و نقطه‌ای مانند $z_2 \in \beta(H)$ وجود دارد، به‌طوری که $j(z_2, \gamma_2) = 0$. (از قسمت (b) قضیه خم جردن (۲. ۴. AP) استفاده کنید.)

(c) از (a) و (b) نتیجه بگیرید که، $\beta(H)$، اجتماع $\beta(H_1)$، $\beta(H_2)$ و $L \cap \beta(H)$ است، و هیچ دوتایی از این مجموعه‌ها نقطه مشترک ندارند.

۸. (a) فرض کنیم H یک خم بسته ساده، و L_k $(1 \le n \le k)$ n قوس ساده باشند که نقاط انتهایی آنها در H بوده، و بقیه نقاط متمایز از نقاط انتهایی آنها در $\beta(H)$ باشند. علاوه براین، فرض کنیم هیچ دوتایی از L_kها نقطه مشترکی متعلق به $\beta(H)$ نداشته باشند. دراین‌صورت، درون مکمل مجموعه $\bigcup_{k=1}^{n} L_k$ در $\overline{\beta(H)}$ دارای $(n+1)$ مؤلفه همبندی است، که هر یک از آنها، مؤلفه کرانداری از مکمل یک خم بسته ساده در C است. (از استقراء روی n، و مسأله ۷ استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم H_1، H_2 دو خم بسته ساده در C باشند، به طوری که $H_1 \cap H_2$ متناهی باشد. نشان دهید که، هر مؤلفه همبند $\beta(H_1) \cap \beta(H_2)$ مؤلفه‌ای کراندار از مکمل یک خم بسته ساده در C است. (از (a) استفاده کنید.)

۹. فرض کنیم γ یک طوقه ساده در C باشد که روی $I = [-1, 1]$ تعریف شده است، و $H = \gamma(I)$، و برای سهولت فرض کنیم که $\gamma(0) = 0$ و قطر H از 2 بیشتر باشد. دو دنباله نزولی (α_n) و (ρ_n) از اعداد را که به سمت 0 میل می‌کنند با استقراء طوری تعریف می‌کنیم که $\rho_1 = 1$ و α_n بزرگترین عدد اکیداً مثبتی باشد که نامساوی $\rho_n > |\gamma(t)|$، وقتی $|t| < \alpha_n$ است و $\rho_{n+1} = \inf(\frac{1}{n+1}, \delta_n)$، که در آن δ_n فاصله 0 از مجموعه نقاطی از $\gamma(t)$ است که $|t| \ge \alpha_n$، برقرار باشد.

(a) ثابت کنید که، اگر z، z' دو نقطه از مؤلفه $\beta(H)$ باشند، به طوری که $|z| < \rho_{n+1}$ و $|z'| < \rho_{n+1}$، آنگاه یک مسیر با نقاط انتهایی z، z' موجود است، که در اشتراک $\beta(H)$ و دیسکی بسته به مرکز 0 و شعاع ρ_n واقع شده است. (فرض کنید L یک خط شکسته ساده با نقاط انتهایی z، z' باشد، که در $\beta(H)$ واقع شده است (مسأله ۱ را ببینید)، و ابتدا فرض کنید که، پاره‌خط S با نقاط انتهایی z، z' نقطه مشترکی متمایز از z، z' با L نداشته باشد. در این صورت $R = L \cup S$ یک خم بسته ساده است. ثابت کنید که، اگر $t \in I$ چنان باشد که $\gamma(t) \in \beta(R)$، آنگاه $|t| < \alpha_n$. ملاحظه کنید که، اشتراک $R \cap H$ مشمول S است، و نشان دهید که، اگر یک $t \in I$ موجود باشد، به‌طوری که $\gamma(t) \in \beta(R)$ و $|t| \ge \alpha_n$، آنگاه باید یک $t' \in I$ دیگر موجود باشد، به‌طوری که $\gamma(t') \in S$ و $|t'| \ge \alpha_n$، که با تعریف ρ_{n+1} در تناقض است. در این حالت، با انتخاب مؤلفه همبند اشتراک $\beta(R)$ و دیسک باز به مرکز 0 و شعاع ρ_n، که شامل نقاط به‌طور دلخواه نزدیک به S باشد، و با استفاده از مسأله ۸(b) برای مرز این مؤلفه اثبات را به پایان برسانید. در حالت کلی که L و S بیش از دو نقطه مشترک داشته باشند، از استقراء ریاضی روی تعداد این نقاط استفاده کنید.)

(b) ثابت کنید که، برای هر نقطه $x \in \beta(H)$ یک قوس ساده با نقاط انتهایی 0 و x وجود دارد، به‌طوری که نقاط ناصفر آن در $\beta(H)$ قرار دارند (**قضیه شونِ فلیس**[1]). (یک دنباله (z_n) از نقاط $\beta(H)$ را مورد بررسی قرار دهید، که $|z_n| < \rho_{n+1}$، و از (a) برای دو نقطه متوالی این دنباله استفاده کنید.)

1. Schoenflies's theorem = Теорема Шёнфлиса

فصل x

قضیه‌های وجود

در آنالیز با انواع زیادی از قضایای وجود برخورد می‌کنیم، اما، در این فصل تنها یک نوع از آنها که با مفهوم **تمامیت** در رابطه است، مورد بررسی قرار گرفته است. قطع نظر از جزئیات، عمده نتایج شهودی (۳ . ۱. ۱۰) بیان این مطلب است که، در یک فضای باناخ وقتی در همسایگی یک نقطه با «تغییری جزئی» جمله‌ای به نگاشت همانی اضافه شود، نگاشت به‌دست آمده در همسایگی این نقطه به‌صورت یک هومیومورفیسم باقی می‌ماند. واژه «تغییر جزئی» باید به روشی درست و دقیق درک شود، که معنایی بیش از صرف «کوچکی» تابع آشفتگی دارد (بخش ۲. ۱۰، مسأله ۲ را ببینید)، و باید با محدودیت‌هایی روی نرخ تغییرات آن تابع که معمولاً به عنوان یک شرط لیپشتیزی به آن اشاره می‌شود، عمل کند. به عنوان یک نتیجه، حوزه طبیعی کاربرد قضیه‌های از این نوع، عبارت است از، معادلاتی که در آنها برخی محدودیت‌ها روی **مشتقات توابعی معین** معلوم و شناخته شده است. علاوه براین، قضیه‌های وجود از طریقی به‌دست می‌آیند که طبیعتی **موضعی** دارند. در فصل بعد، با قضیه‌های وجودی نوعاً متفاوتی برخورد خواهیم کرد، که در مسائل **سرتاسری** می‌توان از آنها استفاده نمود.

کاربردهای اصلی قضیه‌های وجود از بخش ۱. ۱۰ عبارتند از: (۱) قضیه تابع ضمنی (۱. ۲. ۱۰) همراه با نتیجه آن، قضیه رتبه (۱. ۳. ۱۰) که به‌طور موضعی نگاشت‌های با مشتق پیوسته که رتبه ثابتی در فضاهای با بعد متناهی دارند، به فرمی متعارف تبدیل می‌کند؛ (۲) قضیه وجود کوشی برای معادلات دیفرانسیل معمولی (۵ . ۴. ۱۰) همراه با انواع اصلاحات و نتایج آن. هر دو قضیه از مفیدترین ابزارهای آنالیز کلاسیک و مدرن می‌باشند. البته، آن‌چه که در این فصل و فصل بعد معادلات دیفرانسیل نامیده شده، تنها بخش کوچکی از این تئوری گسترده است. قسمت‌های دیگر آن در فصل‌های XXIII و XXV مورد بررسی قرار گرفته‌اند. خواننده‌ای که می‌خواهد در این جهت اطلاعات بیشتری کسب کند، می‌تواند به کتاب‌های کودینگتن ـ لوینسون [9] ، اینس [12] ، و کامکه[14] مراجعه نماید[1].

---

۱. شماره کتاب‌های کودینگتون ـ لوینسون، اینس، و کامکه در برگردان چاپ اول کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به‌ترتیب [10] ، [15] و [17] می‌باشد. مترجم.

به عنوان آخرین کاربرد، اثباتی از قضیه فروبنیوس (۱۰.۹.۴) ارائه شده است، که بیان آن طوری است که به عنوان تعمیمی از قضیه وجود کوشی برای توابع چند متغیره به نظر می‌آید. این کار معمولاً با روشی هندسی‌تر، به عنوان قضیه وجود منیفلدهایی که در هر نقطه داده شده «فضای مماس» معلومی دارند، فرموله می‌شود. ما این فرمول‌بندی را در فصل XVIII مورد بررسی قرار خواهیم داد.[۱]

لازم به ذکر نیست که، طبق معمول، همه نتایج را برای توابع برداری بیان کرده‌ایم، بنابراین، به عنوان مثال، ما عملاً هرگز از «سیستم» معادلات صحبت نکرده‌ایم. یکی از خواص «روش‌های فضای برداری» این است که، حداقل برای اثبات قضیه‌های عمومی، به بررسی بیش از یک معادله نیاز نیست.

۱. روش تقریبات متوالی

شبیه فصل ۹، هیأت اعداد حقیقی یا مختلط را به K نشان خواهیم داد، و هر جا که گزاره‌ای درباره فضاهای باناخ بدون مشخص نمودن K بیان شده، فرض شده است که، همه فضاهای باناخ مورد بحث، روی هیأت یکسانی در نظر گرفته شده‌اند.

(۱۰.۱.۱). فرض کنیم E و F دو فضای باناخ ، و U (به ترتیب V) گویی باز در E (به ترتیب F) با مرکز 0 و شعاع α (به ترتیب β) باشد، و فرض کنیم v نگاشتی پیوسته از $U \times V$ به F باشد، به‌طوری که برای هر $x \in U$ ، $y_1 \in V$ ، $y_2 \in V$ داشته باشیم :

$$\| v(x, y_1) - v(x, y_2) \| \leq k \, \| y_1 - y_2 \|$$

که در آن k عددی ثابت است به طوری که $0 \leq k < 1$. در این صورت ، اگر برای هر $x \in U$ ، $\| v(x, 0) \| < \beta(1-k)$، آنگاه ، نگاشتی یکتا مانند f از U به V موجود است، به طوری که ، برای هر $x \in U$ ،

$$f(x) = v(x, f(x)) \qquad (۱۰.۱.۱.۱)$$

و f روی U پیوسته است.

برای هر $x \in U$ ، نشان می‌دهیم که، دنباله‌ای مانند (y_n) از نقاط گوی V موجود است، به‌طوری که $y_0 = 0$ ، و برای هر $n \geq 1$ ، $y_n = v(x, y_{n-1})$. باید ثابت کنیم که، اگر برای $1 \leq p \leq n$ ، y_p تعریف شده باشد و در V قرار گیرد، آنگاه $v(x, y_n) \in V$. اما، در این صورت، برای $2 \leq p \leq n$ داریم $y_p - y_{p-1} = v(x, y_{p-1}) - v(x, y_{p-2})$ ، بنابراین :

---

۱. در چاپ اول ترجمه روسی کتاب، به علت اینکه فصل XVIII نه به این جلد از کتاب، بلکه، به کتاب Treatise on Analysis ژان دیودونه مربوط می‌شده است، استفاده از مراجع Шевалле [9] , Э. Картан [7] برای آشنا شدن خواننده با این فرمول‌بندی توصیه شده است. مترجم .

$$\| y_p - y_{p-1} \| \leq k \, \| y_{p-1} - y_{p-2} \|$$

و با استقراء روی p، نتیجه می‌گیریم $\| y_p - y_{p-1} \| \leq k^{p-1} \| y_1 \|$. بنابراین:

(۲. ۱. ۱. ۱۰) $\quad \| y_p \| \leq (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \| y_1 \| \leq \| y_1 \| / (1 - k) < \beta$

که ادعای ما را ثابت می‌کند. علاوه براین، با استقراء روی n، می‌توان نوشت $y_n = f_n(x)$، که در آن f_n نگاشتی پیوسته از U به V است ((۵. ۱۱. ۳) را ببینید). افزون بر این، برای هر $x \in \mathrm{U}$، داریم $\| f_n(x) - f_{n-1}(x) \| \leq k^{n-1} \beta (1-k)$، بنابراین، سری $(f_n - f_{n-1})$ **به‌طور نرمال** (بخش ۱. ۷ را ببینید) در $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(\mathrm{U})$ همگرا است. چون F تام است، سری $(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ برای هر $x \in \mathrm{U}$ همگرا است، و اگر $f(x)$ مجموع آن باشد، f روی U پیوسته است ((۱. ۲. ۷) را ببینید). علاوه بر این، طبق اصل گسترش نامساوی‌ها، از ((۲. ۱. ۱. ۱۰) نتیجه می‌شود، برای هر $x \in \mathrm{U}$، $\| f(x) \| \leq \| v(x, 0) \| / (1-k) < \beta$. بنابراین f نگاشتی از U به V است. از رابطه $f_n(x) = v(x, f_{n-1}(x))$ با انتقال حدی، برای هر $x \in \mathrm{U}$، رابطه (۱. ۱. ۱. ۱۰) حاصل می‌شود. بالاخره، فرض کنیم g نگاشت دیگری از U به V باشد، به طوری که برای هر $x \in \mathrm{U}$، $g(x) = v(x, g(x))$. در این صورت، از این رابطه و از رابطه (۱. ۱. ۱. ۱۰) به‌دست می‌آید:

$$\| g(x) - f(x) \| = \| v(x, g(x)) - v(x, f(x)) \| \leq k \, \| g(x) - f(x) \|$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود $g(x) = f(x)$، زیرا $k < 1$.

(۲. ۱. ۱۰) (قضیه نقطه ثابت[1]). فرض کنیم F یک فضای باناخ، و V یک گوی باز در F به مرکز y_0 و شعاع β باشد، و فرض کنیم v یک نگاشت از V به F باشد، به طوری که برای هر زوج y_1، y_2 از نقاط V، $\| v(y_1) - v(y_2) \| \leq k . \| y_1 - y_2 \|$، که در آن k عددی ثابت است که در رابطه $0 \leq k < 1$ صدق می‌کند. در این صورت، اگر $\| v(y_0) - y_0 \| < \beta(1-k)$، آنگاه یک و تنها یک نقطه $z \in \mathrm{V}$ موجود است، به طوری که $z = v(z)$.

دیده می‌شود که v، روی V پیوسته است، و با به کارگیری قضیه (۱. ۱. ۱۰) برای نگاشت $(x, y) \to v(y + y_0) - y_0$، که مستقل از x است، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۳. ۱. ۱۰) فرض کنیم F یک فضای باناخ، و V یک گوی باز در F با مرکز 0 و شعاع β باشد، و فرض کنیم w نگاشتی از V به F باشد، به‌طوری‌که برای هر زوج y_1، y_2 از نقاط V،

$$\| w(y_1) - w(y_2) \| \leq k \, \| y_1 - y_2 \|$$

---

1 . Fixed point theorem = Теорема о неподвиженой точке

که در آن k عددی ثابت است که در شرط $0 \le k < 1$ صدق می‌کند. دراین‌صورت، اگر $\|w(0)\| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$، آنگاه یک همسایگی باز $W \subset V$ از 0 موجود است، به طوری که تحدید نگاشت : $y \to g(y) = y + w(y)$ به W یک هومیومورفیسم از W به روی یک همسایگی باز 0 در F است.

از قضیه (۱. ۱. ۱۰) برای $E = F$ ، گوی باز U به مرکز 0 و شعاع[۱] $\alpha = \beta(1-k) - \|w(0)\|$، و نگاشت $(x, y) \to v(x, y) = x - w(y)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت، شرایط قضیه (۱. ۱. ۱۰) برقرار است. بنابراین، نگاشتی پیوسته مانند f از U به V موجود است، به طوری که $f(x) = x - w(f(x))$. به عبارت دیگر، برای $x \in U$ ، $g(f(x)) = x$. برای اثبات اینکه f یک هومیومورفیسم از U به روی $f(U)$ است، فقط باید نشان دهیم که g یک نگاشت یک‌به‌یک از V به $g(V)$ است (زیرا f به وضوح روی U یک‌به‌یک است). اما، از رابطه $g(y_1) = g(y_2)$ نتیجه می‌شود :

$$\| y_1 - y_2 \| = \| w(y_1) - w(y_2) \| \le k \| y_1 - y_2 \|.$$

بنابراین $y_1 = y_2$ ، زیرا $k < 1$. به این ترتیب g یک هومیومورفیسم از $W = f(U)$ به‌روی U بوده، وارون نگاشت f است. علاوه بر این، $W = g^{-1}(U)$ در F باز است ((۴ . ۱۱. ۳) را ببینید)، و بالاخره، داریم $0 \in W$، زیرا ، این شرط معادل شرط $\| w(0) \| < \frac{1}{2}\beta(1-k)$ می‌باشد.

مسائل

۱ . فرض کنیم A یک فضای متریک فشرده، d فاصله روی A ، و v نگاشتی از A به A باشد، به‌طوری که برای هر زوج (x, y) از نقاط متمایز A داشته باشیم $d(v(x), v(y)) < d(x, y)$. نشان دهید که، نقطه‌ای مانند $z \in A$ موجود است، به طوری که $v(z) = z$. (با بررسی عدد $c = \inf_{x \in A} d(x, v(x))$ و اثبات اینکه نقطه‌ای مانند $y \in A$ موجود است، به طوری که $d(y, v(y)) = c$، از برهان خلف استفاده کنید.)

۲ . فرض کنیم B گوی $\| x \| < 1$ در فضای باناخ (c_0) باشد (بخش ۳. ۵ ، مسأله ۵ را ببینید) ، و فرض کنیم u نگاشت خطی پیوسته‌ای از (c_0) به (c_0) باشد که با رابطه : $u(e_n) = (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) e_{n+1}$ $(n \ge 0)$ تعریف شده است، و $v(x) = \frac{1}{2}(1 + \| x \|) e_0 + u(x)$. نشان دهید که ، v نگاشتی پیوسته از B به B است، به طوری که هر زوج (x, y) از نقاط متمایز B، $\| v(x) - v(y) \| < \| x - y \|$ ، اما، نقطه‌ای مانند $z \in B$ موجود نیست، به طوری که $u(z) = z$ (از نامساوی $\prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ برای $0 \le \alpha_i \le 1$ استفاده کنید).

۳ . فرض کنیم E و F دو فضای برداری نرم‌دار، و u یک هومیومورفیسم خطی از E به‌روی زیرفضای $u(E)$ از فضای F

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب $\alpha = \frac{1}{2}\beta(1-k)$ اما، در چاپ دوم متن انگلیسی آن، α برابر مقدار فوق فرض شده است. مترجم.

باشد، و فرض کنیم $v : u(\mathrm{E}) \to \mathrm{E}$ معکوس نگاشت u باشد ، و $m = \| v \|$.

(a) فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز در E ، و w نگاشتی از A به F باشد، به طوری که برای هر x_1 ، x_2 در A داشته باشیم $\| w(x_1) - w(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|$. نشان دهید که، اگر ثابت k چنان باشد که، $km < 1$ ، آنگاه نگاشت $x \to f(x) = u(x) + w(x)$ یک هومیومورفیسم از A برروی $f(\mathrm{A})$ است. اگر، علاوه بر این، E و F فضاهای باناخ باشند، و $u(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$ ، نشان دهید که، $f(\mathrm{A})$ یک زیرمجموعه باز F است. (از (۳. ۱. ۱۰) استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم w یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، به‌طوری که $\|w\| < \frac{1}{m}$. نشان دهید که، در این صورت ، f یک هومیومورفیسم خطی از E بر روی $f(\mathrm{E})$ است. علاوه بر این، برای هر $y_0 \in u(\mathrm{E})$ که $\| y_0 \| = 1$، نشان دهید که، یک $y \in f(\mathrm{E})$ موجود است، به طوری‌که $\| y - y_0 \| \leq m \| w \|$ ، به‌عکس، برای هر $y \in f(\mathrm{E})$ که $\| y \| = 1$، نشان دهید که، یک $y_0 \in u(\mathrm{E})$ موجود است، به‌طوری که $\| y - y_0 \| \leq \frac{m\|w\|}{1 - m\|w\|}$.

۴ . فرض کنیم E و F دو فضای نرم‌دار، و u یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، به طوری که $\mathrm{N} = u^{-1}(0)$ زیرفضایی با بعد متناهی باشد، در این‌صورت، یک مکمل بسته توپولوژیکی M از N (بخش ۴. ۵ را ببینید) وجود دارد[1]، به‌طوری‌که تحدید نگاشت u به M یک هومیومورفیسم از M بر روی $u(\mathrm{M}) = u(\mathrm{E})$ است.(مرجع [6] را ببینید). فرض کنیم w یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد. نشان دهید که، اگر $\| w \|$ به حد کافی کوچک باشد، و $f = u + w$ ، آنگاه $f^{-1}(0)$ دارای بعدی متناهی است که حداکثر برابر بعد $u^{-1}(0)$ است، و یک مکمل بسته توپولوژیک P از $f^{-1}(0)$ موجود است، به طوری‌که تحدید f به P یک هومیومورفیسم از P برروی $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{E})$ است (از مسأله ۳(b) استفاده کنید).

۵ . فرض کنیم E یک فضای باناخ، F یک فضای نرم‌دار، و u یک هومیومورفیسم خطی از E بروی $u(\mathrm{E})$ باشد، به طوری‌که یک مکمل توپولوژیک Q از $u(\mathrm{E})$ در F موجود باشد. نشان دهید که، اگر w یک نگاشت خطی پیوسته از E به F با نرم به حد کافی کوچک $\| w \|$ باشد، و $f = u + w$ ، آنگاه Q باز هم یک مکمل توپولوژیک $f(\mathrm{E})$ در F است. (نشان دهید که، تصویر فضای F بروی $u(\mathrm{E})$ ، محدود شده به $f(\mathrm{E})$ ، یک هومیومورفیسم خطی بروی $u(\mathrm{E})$ است وقتی $\| w \|$ به حد کافی کوچک باشد. از مسأله ۳ استفاده کنید.)

۶ . فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، و u یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، به‌طوری‌که $\mathrm{N} = u^{-1}(0)$ دارای بعد متناهی p باشد. در این صورت، N دارای یک مکمل توپولوژیک M است، به‌طوری که تحدید u به M یک هومیومورفیسم از M به $u(\mathrm{M}) = u(\mathrm{E})$ است. علاوه بر این، فرض کنیم $u(\mathrm{E})$ دارای همبعد متناهی q در F باشد، و w یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد. نشان دهید که، اگر $\| w \|$ به حد کافی باشد، آنگاه نگاشت $f = u + w$ چنان است که، بعد $f^{-1}(0)$ r در نامساوی‌های $p - q \leq r \leq p$ صدق می‌کند، و همبعد $f(\mathrm{E})$ در F برابر $q - p + r$ است. (از مسائل ۴ و ۵ ، و نیز از (۳. ۹. ۵) استفاده کنید.)

۷ . فرض کنیم $\mathrm{I} = [0, 1]$ و P زیر فضایی از فضای باناخ $\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(\mathrm{I})$ باشد (بخش ۲. ۷ را ببینید) ، که از **تحدید کثیرالجمله‌هایی** مانند $x(t)$ با ضرایب حقیقی به I تشکیل شده است. در فضای نرم‌دار P ، فرض کنیم u نگاشت همانی $x \to x$ ، و w نگاشتی خطی باشد، که به هر کثیرالجمله $x(t)$ (با دامنه تعریف I) تحدید چند جمله‌ای $x(t^2)$ به I نسبت دهد. برای

---

[1] ۱. می‌توان ثابت کرد که شرط اخیر نتیجه بقیه شرایط است (مراجعه کنید به کتاب H . Бурбаки [6]) (از پاورقی متن روسی چاپ اول کتاب ژان دیودونه) .

هر ε که $0 < \varepsilon < 1$ ، نگاشت خطی $f = u + \varepsilon w$ یک هومیومورفیسم خطی از P بر روی زیرفضای $f(\mathrm{P})$ است، اما، همبعد $f(\mathrm{P})$ در P نامتناهی است (با مسأله ۶ مقایسه کنید).

۸ . فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، و u یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، به طوری که $u(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$. در این صورت، عددی مانند $m > 0$ موجود است، به طوری که برای هر $y \in \mathrm{F}$ ، یک $x \in \mathrm{E}$ موجود است که در شرایط $u(x) = y$ ، $\|x\| \leq m\|y\|$ صدق می‌کند ((۱۰ .۱۶ .۱۲) را ببینید[1]). فرض کنیم w نگاشتی پیوسته از یک گوی باز $\mathrm{U} = \mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{E}$ به F باشد، به‌طوری که، برای هر x_1 ، x_2 در U ، $\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$. ثابت کنید که، اگر k و $\|w(a)\|$ به حد کافی کوچک باشند، آنگاه نگاشت پیوسته $x \to f(x) = u(x) + w(x)$ چنان است که $f(\mathrm{U})$ شامل یک گوی باز به مرکز $u(a)$ است. (از روشی که در قضیه (۱. ۱. ۱۰) به‌کار برده شده است، استفاده کنید.)

۹ . فرض کنیم E ، F ، U ، V و v در مفروضات قضیه (۱. ۱. ۱۰) صدق کنند. علاوه بر این، فرض کنیم φ نگاشتی پیوسته از U به U باشد، به طوری که برای هر $x \in \mathrm{U}$ ، $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. نشان دهید که (تحت شرط $\|v(x, 0)\| < \beta(1 - k)$ برای $x \in \mathrm{U}$) نگاشتی یکتا مانند f از U به V موجود است به طوری که $f(x) = v(x, f(\varphi(x)))$ و f روی U پیوسته است.

مطلب فوق را برای معادلات به فرم $f(x) = v(x, f(\varphi_1(x)), \ldots, f(\varphi_p(x)))$ تعمیم دهید.

۱۰ . فرض کنیم E ، F ، U ، V همان معانی داشته باشند که در قضیه (۱. ۱. ۱۰) بیان شده است، و فرض کنیم v نگاشتی پیوسته از $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ به F باشد، که در شرایط زیر صدق می‌کند :

$$\|v(x, y_1) - v(x, y_2)\| \leq c(\|x\|^{2n} + \|y_1\|^{2n} + \|y_2\|^{2n})\|y_1 - y_2\| \quad ; \qquad (۱)$$

$$\|v(x, 0)\| \leq c\|x\|^{1+2\mu} \quad ، \qquad (۲)$$

که در آن $c > 0$ و $\mu > 0$ اعداد ثابت اکیداً مثبتی هستند. فرض کنیم λ عنصری از K باشد، به طوری که $|\lambda| > 1$، و بالاخره، فرض کنیم $x \to \mathrm{L}(x)$ یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، و $x \to \varphi(x)$ یک نگاشت پیوسته از U به U باشد، به‌طوری که $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. نشان دهید که، نگاشتی مانند f از یک همسایگی $\mathrm{W} \subset \mathrm{U}$ نقطه 0 به V موجود است، که دارای خواص زیر می‌باشد :

(۱) f روی W در معادله : $f(x) - \lambda f(\frac{x}{\lambda}) = v(x, f(\varphi(x)))$ صدق می‌کند؛

$$\lim_{x \to 0,\, x \neq 0} \frac{f(x) - \mathrm{L}(x)}{\|x\|} = 0 \,. \qquad (۲)$$

علاوه بر این، هر دو نگاشتی که دارای این خواص باشند، روی یک همسایگی 0 بر هم منطبق خواهند بود. (مسأله را به حالتی تبدیل کنید، که در آن $\mathrm{L}(x) = 0$. ملاحظه کنید که، اگر f در شرایطی قبلی صدق کند، آنگاه در یک همسایگی 0 باید داشته باشیم :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v\left(\frac{x}{\lambda^n}, f\left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda^n}\right)\right)\right) \qquad (*)$$

که در آن سری سمت راست تساوی فوق در یک همسایگی 0 به‌طور نرمال همگرا است. سپس، با استفاده از روشی که در قضیه (۱. ۱. ۱۰) به کار بردیم، ثابت کنید که، جوابی برای (*) در یک همسایگی به حد کافی کوچک 0 وجود دارد. با استقراء روی n ، نشان دهید که، یک $r > 0$ موجود است، به‌طوری که برای $\|x\| \leq r$ ، $\|f_n(x)\| \leq \|x\|^{1+\mu}$ و

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، با اشاره نمودن به این‌که، شرط اخیر نتیجه بقیه شرایط است، و بـه علـت اینکـه بخش (۱۰ . ۱۶ . ۱۲) به این جلد از کتاب مربوط نمی‌شود، به خواننده توصیه شده است، مرجع [6] را ببینند. مترجم.

($\| f_n(x) - f_{n-1}(x) \| \le \| x \|^{1+n\mu}$.)

۱۱. (a) فرض کنیم $F(x_1, \dots, x_p, y)$ یک تابع تام روی K^{p+1} باشد، به طوری که در سری توانی مساوی $F(x_1, \dots, x_p, y)$ همه تک‌جمله‌ای‌ها دارای درجه کامل بزرگتر یا مساوی 2 باشند، و فرض کنیم φ یک نگاشت خطی از K^p به K^p باشد، به طوری که برای هر نقطه $x = (x_1, \dots, x_p, y) \in K^p$، $\| \varphi(x) \| \le \| x \|$، و بالاخره، فرض کنیم $L(x)$ یک فرم خطی دلخواه روی K^p باشد. نشان دهید که، جواب یکتایی مانند f برای معادله :

$$f(x) - \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = F(x, f(\varphi(x))) \qquad (|\lambda| > 1)$$

وجود دارد، که در یک همسایگی 0 تعریف شده است و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - L(x)}{\| x \|} = 0$. به‌علاوه، این جواب تابعی تام روی K^p است. (از مسأله ۱۰ در یک همسایگی 0 استفاده نموده، مسأله را به حالت $K = C$ تبدیل کنید، و از (۲. ۴. ۹) و (۱. ۱۲. ۹) برای اثبات اینکه f یک تابع تام است، استفاده کنید.)

(b) نشان دهید که، جوابی برای معادله $f(x) - \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = x$ $(\lambda > 1)$ وجود ندارد که در یک همسایگی 0 در $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد و $\frac{f(x)}{x}$ در یک همسایگی 0 کراندار باشد.

۱۲. فرض کنیم $I = [0, a]$، $H = [-b, b]$، و فرض کنیم f یک تابع حقیقی پیوسته روی $I \times H$ باشد. قرار می‌دهیم $M = \sup\limits_{(x,y) \in I \times H} |f(x, y)|$، $J = [0, \inf(a, \frac{b}{M})]$.

(a) برای هر $x \in J$، فرض کنیم $E(x)$ مجموعه مقادیر $y \in H$ باشد به طوری که $y = x f(x, y)$. نشان دهید که، $E(x)$ یک مجموعه بسته غیرتهی است. اگر $g_1(x) = \inf(E(x))$، $g_2(x) = \sup(E(x))$، نشان دهید که $g_1(0) = g_2(0) = 0$، و $\lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} \frac{g_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0,\, x > 0} \frac{g_2(x)}{x} = f(0,0)$ اگر روی J، $g_1 = g_2 = g$ آنگاه g پیوسته است (مقایسه کنید با بخش ۳.۲۰، مسأله ۵).

(b) فرض کنیم $a = b = 1$ و E اجتماع خانواده پاره‌خط‌های S_n به معادله $x = \frac{1}{2^n}$، $\frac{1}{4^{n+1}} \le y \le \frac{1}{4^n}$ $(n \ge 0)$، پاره‌خط‌های S'_n به معادله[۱] $y = \frac{1}{4^n}$، $\frac{1}{2^n} \le x \le \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n \ge 1)$ و نقطه $(0, 0)$ باشد. تابع $f(x, y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$f(0, y) = 0$،

برای $\frac{1}{2^n} < x \le \frac{1}{2^{n-1}}$ و $y \le \frac{1}{4^n}$، قرار می‌دهیم $f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + d((x, y), E)\right)^+$؛

برای $\frac{1}{2^n} < x \le \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\frac{1}{4^n} \le y \le x^2$ قرار می‌دهیم $f(x, y) = \frac{y}{x} - d((x, y), E)$؛

و بالاخره[۲]، برای $\frac{1}{2^n} < x \le \frac{1}{2^{n-1}}$ و $y \ge x^2$ قرار می‌دهیم $f(x, y) = x - d((x, x^2), E)$ $(n \ge 1)$.

---

۱ و ۲. در چاپ اول متن روسی کتاب به‌جای $y = \frac{1}{4}$ نوشته شده است $y = \frac{1}{4^n}$، و به‌جای $y \le x^2$ نوشته شده است $y \ge x^2$ اما، در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب $y = \frac{1}{4}$ و $y \le x^2$ فرض شده است، که با توجه به تفاوت آنها، اشتباهات چاپی هستند. مترجم.

نشان دهید که، f پیوسته است، اما، تابع پیوسته‌ای مانند g در یک همسایگی 0 در I وجود ندارد، به طوری که در این همسایگی $g(x) = x\, f(x, g(x))$.

(c) فرض کنیم u_0 نگاشتی پیوسته از J به H باشد. برای $n \geq 1$، توابع $u_n(x)$ را با استقراء به صورت $u_n(x) = x\, f(x, u_{n-1}(x))$ تعریف می‌کنیم. توابع u_n نگاشت‌هایی پیوسته از J به H می‌باشند. با نمادهایی که در (a) به‌کار برده شد، فرض کنیم که، روی یک فاصله $[0, c] \subset J$، برای هر x، $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) = 0$، و $g_1(x) = g_2(x)$. نشان دهید که، برای $0 \leq x \leq c$، $\lim\limits_{x\to\infty} u_n(x) = g_1(x)$. از این محک برای دو حالت زیر استفاده کنید:

(۱) عددی مانند $k > 0$ موجود است به طوری که برای $x \in I$، و z_1، z_2 در H،

$$| f(x, z_1) - f(x, z_2) | \leq k\, | z_1 - z_2 |$$

(مقایسه کنید با (۱. ۱. ۱۰))؛

(۲) برای $0 < x \leq \gamma \leq a$ و z_1، z_2 در H،

$$| f(x, z_1) - f(x, z_2) | < | z_1 - z_2 | / x$$

(d) اگر تابع f شبیه (b) تعریف شده باشد، آنگاه دنباله $(u_n(x))$ برای هر $x \in I$ همگرا به حدی است که پیوسته نیست.

(e) فرض کنیم $a = b = 1$ و $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ برای $0 < x \leq 1$، $|y| \leq x^2$، و $f(x, y) = x$ برای $0 \leq x \leq 1$، $y \geq x^2$، و $f(x, y) = -x$ برای $0 \leq x \leq 1$، $y \leq -x^2$. هر تابع پیوسته g روی I به طوری که $|g(x)| \leq x^2$ جواب معادله $g(x) = x\, f(x, g(x))$ است، اگرچه برای $0 < x \leq 1$، و z_1، z_2 در H، نامساوی:

$$| f(x, z_1) - f(x, z_2) | \leq | z_1 - z_2 | / x$$

برقرار است. برای هر انتخاب u_0 دنباله (u_n) به‌طور یکنواخت به چنین جوابی همگرا است.

(f) تابع f را شبیه قسمت (e) تعریف می‌کنیم، و فرض می‌کنیم $f_1(x, y) = -f(x, y)$. تابع 0 تنها جواب $g(x) = x\, f_1(x, g(x))$ است، اما، توابع پیوسته‌ای مانند u_0 وجود دارند، به‌طوری که برای آنها، دنباله $(u_n(x))$ برای هیچ نقطه $x \neq 0$ همگرا نیست، با اینکه برای $0 < x \leq 1$، z_1، z_2 در H، $| f_1(x, z_1) - f_1(x, z_2) | \leq | z_1 - z_2 | / x$.

۱۳. نتایج مسائل (a) ۱۲ و (c) ۱۲ را وقتی به‌جای H دیسکی به مرکز $(0, 0)$ در R^2 گذاشته شود، تعمیم دهید. (از نتیجه مسأله ۳ بخش ۲. ۱۰ استفاده کنید.)

۲. توابع ضمنی

(۱. ۲. ۱۰) (قضیه تابع ضمنی[1]). فرض کنیم E، F، G سه فضای باناخ، و f یک نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر[2] (بخش ۹. ۸ را ببینید) از یک زیرمجموعه باز A از $E \times F$ به G باشد، و فرض کنیم (x_0, y_0) یک نقطه از A باشد به‌طوری‌که $f(x_0, y_0) = 0$ و مشتق جزئی $D_2 f(x_0, y_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از F بر روی G باشد. در این صورت، یک همسایگی باز U_0 از x_0 در E موجود است، به‌طوری‌که، برای هر همسایگی باز

1. The implicit function theorem = Теорема о неявной функции
2 . Continuously differentiable = Непереывно дифференцируемо

همبند U از x_0 که در U_0 واقع است ، نگاشت پیوسته یکتایی مانند u از U به F موجود است ، به‌طوری که $u(x_0)=y_0$ ، برای هر $x \in U$ ، $(x, u(x)) \in A$ و $f(x, u(x))=0$. علاوه براین، u روی U پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، و مشتق آن از فرمول :

$$u'(x) = -(D_2 f(x, u(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, u(x)) \qquad (۱. ۱. ۲. ۱۰)$$

به‌دست می‌آید.

فرض کنیم T_0 هومیومورفیسم خطی $D_2 f(x_0, y_0)$ از F بر روی G ، و T_0^{-1} وارون این هومیومورفیسم خطی باشد. رابطه $f(x, y)$ را به‌صورت هم‌ارز :

$$y = y - T_0^{-1} . f(x, y) \qquad (۲. ۱. ۲. ۱۰)$$

می‌نویسیم، و سمت راست (۲. ۱. ۲. ۱۰) را به $g(x, y)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که می‌توان از (۱. ۱. ۱۰) برای نگاشت :

$$(x', y') \to g(x_0+x', y_0+y') - y_0$$

از $E \times F$ به F در یک همسایگی به حد کافی کوچک $(0, 0)$ استفاده نمود. چون، طبق تعریف $T_0^{-1} \circ T_0 = I$ ، پس ، برای هر (x, y_1) و (x, y_2) در A ، می‌توان نوشت :

$$g(x, y_1) - g(x, y_2) = T_0^{-1}.(D_2 f(x_0, y_0).(y_1-y_2) - f(x, y_1) - f(x, y_2))).$$

فرض کنیم[1] $\varepsilon > 0$ چنان انتخاب شده باشد که $\varepsilon \| T_0^{-1} \| \leq \frac{1}{2}$. چون f روی A پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، از (۲. ۶. ۸) و (۱. ۹. ۸) نتیجه می‌شود که گویی مانند U_0 (به ترتیب V_0) با مرکز x_0 (به ترتیب y_0) و شعاع α (به ترتیب β) در E (به ترتیب F) موجود است، به‌طوری که برای $x \in U_0$ ، $y_1 \in V_0$ ، $y_2 \in V_0$ ، نامساوی زیر برقرار است :

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) - D_2 f(x_0, y_0).(y_1 - y_2) \| \leq \varepsilon \| y_1 - y_2 \|$$

از این نامساوی برای هر $x \in U_0$ ، $y_1 \in V_0$ ، $y_2 \in V_0$ نتیجه می‌شود :

$$\| g(x, y_1) - g(x, y_2) \| \leq \varepsilon \| T_0^{-1} \| . \| y_1 - y_2 \| \leq \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \|$$

از طرف دیگر $g(x, y_0) - y_0 = -T_0^{-1}.f(x, y_0)$ ، و چون $f(x_0, y_0) = 0$ و f پیوسته است ، می‌توان[2] α را آنقدر کوچک گرفت که، برای $x \in U_0$ ، $\| g(x, y_0) - y_0 \| \leq \frac{\beta}{2}$. سپس، با استفاده از

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای ε نوشته شده است ε' که باید آن را اشتباه چاپی به‌حساب آورد، این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌جای α نوشته شده است ε که با توجه به تعریف U_0 باید آن را اشتباه چاپی به‌حساب آورد، این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

(۱. ۱. ۱۰) ، وجود و یکتایی نگاشت u از U_0 به V_0 ، به طوری که برای هر $x \in \mathrm{U}_0$ ، $f(x, u(x)) = 0$ ، ثابت می‌شود ؛ به‌خصوص، چون $f(x_0, y_0) = 0$ خواهیم داشت $u(x_0) = y_0$ ، و بالاخره ، u روی U_0 پیوسته است.

اکنون ثابت می‌کنیم که، اگر $\mathrm{U} \subset \mathrm{U}_0$ یک همسایگی باز **همبند** از x_0 باشد، آنگاه u یکتا نگاشت **پیوسته‌ای** از U به F است، که $u(x_0) = y_0$ ، $(x, u(x)) \in \mathrm{A}$ و $f(x, u(x)) = 0$. فرض کنیم v نگاشت دیگری باشد، که در شرایط فوق صدق می‌کند. زیر مجموعه $\mathrm{M} \subset \mathrm{U}$ تشکیل شده از نقاطی مانند x به طوری که $u(x) = v(x)$ ، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مجموعه طبق تعریف شامل x_0 ، و طبق (۱. ۱۵. ۳) ، بسته است. بنابراین، تنها باید ثابت کنیم که M باز است ((بخش ۱۹. ۳ را ببینید). اما، طبق فرض، نگاشت $x \to \mathrm{D}_2 f(x, u(x))$ روی U_0 پیوسته است، بنابراین، طبق (۲. ۳. ۸) (در صورت لزوم، با تعویض U_0 به یک همسایگی کوچکتر) ، می‌توان فرض کرد که، برای هر $x \in \mathrm{U}_0$ ، $\mathrm{D}_2 f(x, u(x))$ یک **هومیومورفیسم خطی** از F به روی G است. فرض کنیم $a \in \mathrm{M}$. قسمت اول اثبات نشان می‌دهد که یک همسایگی باز $\mathrm{U}_a \subset \mathrm{U}$ از a و یک همسایگی باز $\mathrm{V}_a \subset \mathrm{V}$ از $b = \mathrm{U}(a)$ موجود است، به‌طوری که ، برای هر $x \in \mathrm{U}_a$ ، $u(x)$ ، تنها جواب y از معادله $f(x, y) = 0$ است، به طوری که $y \in \mathrm{V}_a$. اما، چون v در نقطه a پیوسته است و $v(a)=u(a)$ ، یک همسایگی W از a موجود است که مشمول U_a است و برای $x \in \mathrm{W}$ ، $v(x) \in \mathrm{V}_a$. از نکته فوق نتیجه می‌شود که، برای $x \in \mathrm{W}$ ، $v(x) = u(x)$، و این مطلب ثابت می‌کند که M باز است، بنابراین، روی U ، $u = v$.

بالاخره، نشان می‌دهیم که، u روی U_0 پیوسته ـ مشتق پذیر است، وقتی α به حد کافی کوچک انتخاب شده باشد.[1] برای x ، $x + s$ در U_0، می‌نویسیم $t = u(x+s) - u(x)$. طبق فرض $f(x+s, u(x)+t) = 0$ و t به سمت 0 میل می‌کند، وقتی s به سمت 0 میل می‌کند. بنابراین، برای یک $x \in \mathrm{U}_0$ داده شده، و برای هر $\delta > 0$ ، یک $r > 0$ موجود است، به‌طوری که ، از رابطه $\| s \| \le r$ ، نتیجه می‌شود :

$$\| f(x+s, u(x)+t) - f(x, u(x)) - \mathrm{S}(x) . s - \mathrm{T}(x) . t \| \le \delta (\| s \| + \| t \|)$$

که در آن $\mathrm{S}(x) = \mathrm{D}_1 f(x, u(x))$ و $\mathrm{T}(x) = \mathrm{D}_2 f(x, u(x))$ ((۱. ۹ . ۸) را ببینید). مطلب فوق طبق تعریف هم‌ارز نامساوی :

$$\| \mathrm{S}(x) . s + \mathrm{T}(x) . t \| \le \delta (\| s \| + \| t \|)$$

است، و چون $\mathrm{T}(x)$ یک هومیومورفیسم خطی از F بروی G است، از رابطه قبل نتیجه می‌شود :

$$\| (\mathrm{T}^{-1}(x) \circ \mathrm{S}(x)) . s + t \| \le \delta \| \mathrm{T}^{-1}(x) \| (\| s \| + \| t \|) \qquad (۱۰ . ۲ . ۱ . ۳)$$

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب برخلاف چاپ اول روسی آن به‌جای α نوشته شده است ε. مترجم.

فرض کنیم δ چنان انتخاب شده باشد که $\delta \,\| \mathrm{T}^{-1}(x) \| \leq \frac{1}{2}$. در این صورت، اگر قرار دهیم $a = 2 \,\| \mathrm{T}^{-1}(x) \circ S(x) \| + 1$ ، از (۳. ۱. ۲. ۱۰) نتیجه می‌گیریم :

$$\| t \| - \frac{a-1}{2} \, \| s \| \leq \frac{1}{2} \, (\| t \| + \| s \|)$$

یا $\| t \| \leq a \| s \|$ ، و بنابراین ، برای $\| s \| \leq r$ ،

$$\| t + (\mathrm{T}^{-1}(x) \circ \mathrm{S}(x)) \, . \, s \| \leq \delta \, (a+1) \, \| \mathrm{T}^{-1}(x) \| \, . \, \| s \|$$

طبق تعریف t ، از رابطه فوق نتیجه می‌شود که u در نقطه x مشتق‌پذیر است و مشتق آن از رابطه (۱. ۱. ۲. ۱۰) به‌دست می‌آید. سپس ، با استفاده از (۲. ۳. ۸) و (۱. ۳. ۸) ، و فرمول (۱. ۱. ۲. ۱۰) ، ثابت می‌شود که u روی U_0 پیوسته ـ مشتق‌پذیر است.

در اینجا مهم‌ترین حالت قضیه تابع ضمنی (۱. ۲. ۱۰) ، یعنی، حالتی که $\mathrm{E} = \mathrm{K}^m$ ، $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{K}^n$ فضاهای با بعد متناهی باشند، فرمول‌بندی می‌کنیم.

(۲. ۲. ۱۰) فرض کنیم f_i ها n تابع اسکالر باشند که روی یک همسایگی $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ از نقطه $(a_1 , \ldots , a_m , b_1 , \ldots , b_n)$ واقع در $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ معین و پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند، و برای اعداد طبیعی $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $f_i (a_1 , \ldots , a_m , b_1 , \ldots , b_n) = 0$ و ژاکوبین $\dfrac{\partial (f_1 , \ldots , f_n)}{\partial (y_1 , \ldots , y_n)}$ در نقطه $(a_1 , \ldots , a_m , b_1 , \ldots , b_n)$ مخالف 0 باشد. در این صورت، یک همسایگی باز $\mathrm{W}_0 \subset \mathrm{U}$ از نقطه $(a_1 , \ldots , a_m)$ موجود است، به طوری که، برای هر همسایگی باز همبند $\mathrm{W} \subset \mathrm{W}_0$ از $(a_1 , \ldots , a_m)$، سیستمی یکتا از n تابع اسکالر g_i $(1 \leq i \leq n)$ موجود است، به‌طوری که روی W معین (تعریف شده) و پیوسته هستند، و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $g_i (a_1 , \ldots , a_m) = b_i$ ، و برای هر $(x_1 , \ldots , x_m) \in \mathrm{W}$ و $1 \leq i \leq n$ ،

$$f_i (x_1 , \ldots , x_m , g_1 (x_1 , \ldots , x_m) , \ldots , g_n (x_1 , \ldots , x_m)) = 0$$

علاوه بر این، توابع g_i روی W پیوسته ـ مشتق‌پذیر هستند، و ماتریس ژاکوبی $(\mathrm{D}_j \, g_i (x))$ برابر $-\mathrm{B}^{-1} \mathrm{A}$ است، که در آن A (به ترتیب B) با تعویض y_i به‌وسیله $g_i (x_1 , \ldots , x_m)$ $(1 \leq i \leq n)$ در ماتریس ژاکوبی $(\frac{\partial f_i}{\partial x_k})$ (به ترتیب $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j})$) به‌دست می‌آید.

(۳. ۲. ۱۰) اگر فرضیات قضیه (۱. ۲. ۱۰) برقرار باشند، و علاوه بر این f، p بار روی یک همسایگی (x_0 , y_0) پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه u روی یک همسایگی x_0 ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر خواهد بود.

با استقراء روی k ثابت می‌کنیم که، برای $1 \leq k \leq p$ ، u ، k بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. برای $k = 1$ مطلب فوق از (۱. ۲. ۱۰) نتیجه می‌شود، و علاوه بر این $u'(x) = \mathrm{F} (x , u(x))$ ، که در آن

نگاشت $F(x, y) = -(D_2 f(x, y))^{-1} \circ (D_1 f(x, y))$ طبق (۹. ۱۲. ۸)، (۱۱. ۱۲. ۸) و (۱۰. ۱۲. ۸) $p-1$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. بنابراین، طبق (۱۰. ۱۲. ۸)، u'، $k-1$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است (برای $k \leq p$) و طبق (۵ . ۱۲. ۸)، مطلب فوق به این معنی است که، نگاشت u، k بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است.

(۴. ۲. ۱۰) فرض کنیم E ، F ، G دارای بعد متناهی باشند، و f روی A تحلیلی باشد، در این صورت، u روی یک همسایگی x_0 تحلیلی خواهد بود.

اگر هیأت اسکالرهای K برابر C باشد، نتیجه از (۱. ۲. ۱۰)، و از (۱. ۱۰. ۹) که توابع تحلیلی را به عنوان توابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر مشخص می‌کند، حاصل می‌شود. اکنون فرض کنیم $K = \mathbf{R}$ ، $E = R^m$ ، $F = G = R^n$. در این صورت، مجموعه‌ای باز مانند $B \subset C^{m+n}$ موجود است، به‌طوری که، $A = B \cap \mathbf{R}^{m+n}$ و نگاشتی تحلیلی مانند g از B به $\mathbf{C}^n$ وجود دارد، که گسترشی از f است ((۵. ۴. ۹) را ببینید). با یکسان گرفتن $D_2 f$ و $D_2 g$ با ماتریس‌های ژاکوبی آنها، ثابت می‌شود که $D_2 g(x_0, y_0)$ پایه‌ای از فضای $\mathbf{R}^n$ روی $\mathbf{R}$ را به پایه‌ای از $\mathbf{R}^n$ تبدیل می‌کند، و این پایه‌ها پایه‌هایی از $\mathbf{C}^n$ روی C نیز خواهند بود. بنابراین، $D_2 g(x_0, y_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از $\mathbf{C}^n$ برروی $\mathbf{C}^n$ خواهد بود. به‌این ترتیب، می‌توان قضیه (۱. ۲. ۱۰) را در مورد g به کار برد، که وجود یک نگاشت تحلیلی v روی یک همسایگی نقطه x_0 مانند W مشمول $\mathbf{C}^m$، به‌طوری که $g(z, v(z)) = 0$ و $v(x_0) = y_0$ ، را ثابت می‌کند. علاوه بر این، از فرمول (۱. ۱. ۲. ۱۰) با استقراء روی $|\nu|$ نتیجه می‌شود که، همه مشتق‌های $D^\nu v$ در نقطه x_0 ، فضای $\mathbf{R}^m$ را به $\mathbf{R}^n$ می‌نگارند (زیرا، همه مشتقات نگاشت g در (x_0, y_0) برابر مشتقات متناظر f می‌باشند). بنابراین، طبق (۱. ۵ . ۳. ۹)، v یک همسایگی x_0 در $\mathbf{R}^m$ را به فضای $\mathbf{R}^n$ می‌نگارد، و از قسمت یکتایی قضیه (۱. ۲. ۱۰) نتیجه می‌شود که ، تحدید نگاشت v به $W \cap \mathbf{R}^m$ با u یکی است، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۵ . ۲. ۱۰) فرض کنیم E، F دو فضای باناخ، و f یک نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر از یک همسایگی V از نقطه $x_0 \in E$ به F باشد. اگر $f'(x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بروی F باشد، آنگاه یک همسایگی $U \subset V$ از x_0 موجود است، به طوری که تحدید f به U یک هومیومورفیسم از U بروی یک همسایگی باز نقطه $y_0 = f(x_0)$ در F است. علاوه بر این، اگر f، p بار روی U پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب تحلیلی روی U ، و E و F با بعد متناهی) باشد، نگاشت وارون g از $f(U)$ بروی U ، p بار روی $f(U)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب تحلیلی) است.

با به‌کارگیری قضیه (۱. ۲. ۱۰) برای تابع $h(x, y) = f(x) - y$، و با تعویض نقش‌های x و y، چون $D_1 h(x_0, y_0) = f'(x_0)$، نتیجه می‌گیریم که گویی باز مانند W به مرکز y_0 در F و نگاشتی پیوسته مانند g از W به E موجود است، به طوری که $g(W) \subset U$، و روی W، $f(g(y)) = y$ و $g(y_0) = x_0$. علاوه بر این، طبق (۳. ۲. ۱۰) (به ترتیب ۴. ۲. ۱۰)، اگر f، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب تحلیلی) باشد، آنگاه g نیز p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب تحلیلی) خواهد بود. از تساوی $f(g(y)) = y$ نتیجه می‌شود که g روی W یک‌به‌یک است، بنابراین، g یک نگاشت پیوسته دو سویی از W بروی $V = g(W) \subset U$ است. علاوه بر این، $g(W) = f^{-1}(W)$ در E باز است، و f یک هومیومورفیسم از $V = g(W)$ بروی W است، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

مسائل

۱. فرض کنیم E، F دو فضای باناخ، A یک همسایگی باز از نقطه $x_0 \in E$، و f یک نگاشت پیوسته از A به F باشد، که در نقطه x_0 (اما، نه لزوماً در نقاط دیگر A) مشتق‌پذیر است، و فرض کنیم $f'(x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بروی تصویر آن در F باشد. نشان دهید که، یک همسایگی $U \subset A$ از نقطه x_0 موجود است، به‌طوری که برای هر $x \in U$ که $x \neq x_0$، $f(x) \neq f(x_0)$. (ملاحظه کنید که، از فرض نتیجه می‌شود، ثابتی مانند $c > 0$ موجود است، به‌طوری که برای هر $s \in E$، $\| f'(x_0) . s \| \geq c \| s \|$ ((۱. ۵. ۵) را ببینید.)

۲. فرض کنیم $f = (f_1, f_2)$ نگاشتی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ باشد، که با روابط : $f_1(x_1, x_2) = x_1$، $f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ برای $x_1^2 \leq x_2$، $f_2(x_1, x_2) = (x_2^2 - x_1^2 x_2) / x_1^2$ برای $0 \leq x_2 \leq x_1^2$ و بالاخره $f_2(x_1, -x_2) = -f_2(x_1, x_2)$ برای $x_2 \geq 0$، تعریف شده باشد. نشان دهید که، f در هر نقطه $\mathbf{R}^2$ مشتق‌پذیر است، در نقطه $(0, 0)$، Df نگاشت همانی از $\mathbf{R}^2$ به‌روی $\mathbf{R}^2$ است، اما، Df پیوسته نیست. نشان دهید که، در هر همسایگی $(0, 0)$، نقاط متمایزی مانند x' , x'' موجود هستند، به‌طوری که $f(x') = f(x'')$ (مقایسه کنید با (۵. ۲. ۱۰)).

۳. فرض کنیم B دیسک واحد $|z| \leq 1$ در $\mathbf{R}^2$ باشد، و $z \to f(z) = z + g(z)$ یک نگاشت پیوسته از B به $\mathbf{R}^2$ باشد، به‌طوری که برای هر z که $|z| = 1$، $|g(z)| < |z|$. نشان دهید که $f(B)$ یک همسایگی 0 در $\mathbf{R}^2$ است («قضیه براوئر[1]» برای صفحه، مقایسه کنید با فصل XXIV[2]). (فرض کنید γ طوقه $t \to f(e^{it})$ باشد، که روی $[0, 2\pi]$ تعریف شده، نشان دهید که، برای همه نقاط x در یک همسایگی V از 0، $j(x, \gamma) = 1$ (اثبات (۳. ۸. ۹) را ببینید). با استفاده از این حقیقت که در B، طوقه γ با 0 هوموتوپیک است، نتیجه بگیرید که، نقطه‌ای در V وجود ندارد که متعلق به مکمل

---

1. Brouwer 's theorem = Теорема Бреуэра

۲. در پاورقی چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به این مطلب اشاره شده است که، می‌توان ثابت کرد که، نتیجه فوق در هر فضای R^n نیز درست است، و اگر B گوی $\| x \| \leq 1$ در فضای اقلیدسی R^n باشد، و تابع $g : B \to R^n$ برای $\| x \| = 1$ در شرط $\| g(x) \| < \| x \|$ صدق کند، $f(B)$ یک همسایگی 0 در R^n خواهد بود. و به فصل XXIV که به این جلد از کتاب مربوط نمی‌شود، اشاره‌ای نشده است. مترجم.

$f(B)$ باشد.)

۴. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، و B گوی واحد باز $\|x\| \leq 1$ در E باشد، و فرض کنیم u_0 یک هومیومورفیسم پیوسته ـ مشتق‌پذیر از B بروی یک همسایگی 0 در F باشد، به طوری‌که $u_0(0) = 0$ ، و u_0^{-1} روی گوی V_0 ، به معادله $\|y\| < r$ واقع در $u_0(B)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد، و Du_0 روی B و Du_0^{-1} روی V_0 کراندار باشند. فرض کنیم V گوی $\|y\| < \beta$ با $\beta < r$ باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر $\alpha < 1$ ، یک همسایگی H از u_0 در فضای $\mathscr{D}_F^{(1)}(B)$ (بخش ۱۲. ۸ مسأله ۸ را ببینید) موجود است، به طوری که برای هر $u \in H$ ، تحدید u به گوی باز U به معادله $\|x\| < \alpha$ ، یک هومیومورفیسم از U بروی یک مجموعه باز شامل V از فضای F است، به طوری که تحدید u^{-1} به V نگاشتی پیوسته ـ دیفرانسیل‌پذیر مانند $\Phi(u)$ از V به E است. (از (۱. ۱. ۱۰) استفاده کنید.)

(b) نشان دهید که، نگاشت $u \to \Phi(u)$ از H به $\mathscr{D}_E^{(1)}(V)$ در نقطه u_0 مشتق‌پذیر است، و مشتق آن در نقطه u_0 نگاشت خطی $s \to (u_0' \circ \Phi(u_0))^{-1} . (s \circ \Phi(u_0))$ می‌باشد.

۵. فرض کنیم E و F دو فضای باناخ، و f نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از یک همسایگی V نقطه $x_0 \in E$ به F باشد، و فرض کنیم دو عدد $\beta > 0$ ، $\lambda > 0$ موجود باشند، به طوری‌که :

(۱) $\|f(x_0)\| < \dfrac{\beta}{2\lambda}$ ،

(۲) روی گوی $U = \{x \in E : \|x - x_0\| < \beta\}$ نوسان f' کوچک‌تر یا مساوی $\dfrac{1}{2\lambda}$ باشد،

(۳) برای هر $x \in U$ ، $f'(x)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بروی F باشد، به طوری که $\|(f'(x))^{-1}\| \leq \lambda$. فرض کنیم (z_n) دنباله‌ای دلخواه از نقاط U باشد. نشان دهید که، دنباله‌ای مانند $(x_n)_{n \geq 0}$ از نقاط U موجود است، به‌طوری که برای $n \geq 0$ ، $x_{n+1} = x_n - (f'(z_n))^{-1} . f(x_n)$. ثابت کنید که، دنباله (x_n) به نقطه‌ای مانند $y \in U$ همگرا است، به‌طوری که y تنها جواب معادله $f(x) = 0$ در U است. («روش تقریب نیوتون[1]»). با استقراء روی n و با استفاده از (۲. ۶. ۸)، نشان دهید که $\|x_n - x_{n-1}\| < 2^{-n} \beta$ و $\|f(x_n)\| < \beta / 2^{n+1} \lambda$.)

۶. فرض کنیم E و F دو فضای برداری متناهی‌البعد روی هیأت K ، A یک زیرمجموعه باز همبند E ، و f یک نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر از $A \times F$ به F باشد، و فرض کنیم Γ مجموعه زوج‌هایی $(x, y) \in A \times F$ که $f(x, y) = 0$ است، غیرتهی بوده، و برای هر $(x, y) \in \Gamma$ ، $D_2 f(x, y)$ نگاشت خطی وارون‌پذیری از F بروی F باشد.

(a) نشان دهید که، برای هر نقطه $(x_0, y_0) \in \Gamma$ یک همسایگی باز V از این نقطه در Γ موجود است، به طوری‌که تحدید تصویر pr_1 به V یک هومیومورفیسم از V بروی یک گوی باز U به مرکز x_0 واقع در A است. (از این حقیقت استفاده کنید که، یک گوی باز U به مرکز x_0 در A و یک گوی باز W به مرکز y_0 در F موجود است، به طوری که برای هر $x \in U$ ، معادله $f(x, y) = 0$ دارای جواب یکتایی مانند $y \in W$ است، و از (۱. ۲. ۱۰) استفاده کنید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید، که هر مؤلفه همبند G از Γ (بخش ۱۹. ۳ را ببینید) در Γ باز است، و $pr_1(G)$ در A باز است. لازم نیست که $pr_1(\Gamma) = A$ (به عنوان مثال از $A = E = F = R$ ، $f(x, y) = xy^2 - 1$ استفاده کنید). همچنین، لازم

1. Newton method of approximation = Метод приближений Ньютона

نیست حتماً در حالتی که $pr_1(\Gamma) = A$ است، برای هر مؤلفه همبند G از Γ، $pr_1(G) = A$ باشد (مثال $A = E = F = R$ ، $f(x, y) = xy^2 - y$ این مطلب را نشان می‌دهد). ثابت کنید، که اگر مجموعه $pr_2(\Gamma)$ در F کراندار باشد، آنگاه برای هر مؤلفه همبند G از Γ، $pr_1(G) = A$. (اگر x_0 یک نقطه چسبیدگی[1] مجموعه $pr_1(G)$ در A باشد، نشان دهید که، دنباله‌ای مانند (x_n, y_n) از نقاط G موجود است، به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ و $\lim_{n\to\infty} y_n$ در F موجود است؛ سپس از (a) استفاده کنید.)

(c) مفاهیم مسیر، **طوقه**، **هوموتوپی**، **هوموتوپی طوقه‌ای** در A با تعویض C به E شبیه بخش ۶ . ۹ تعریف می‌شوند. فرض کنیم یک مؤلفه همبند G از Γ موجود است، به طوری که $pr_1(G) = A$. اگر γ یک مسیر در A باشد، که روی $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ تعریف شده است، نشان دهید که، نگاشتی پیوسته مانند u از نقاط I به G موجود است، به طوری که برای هر $t \in I$ ، $pr_1(u(t)) = \gamma(t)$. (c ، l.u.b در I از نقاط ξ به طوری‌که نگاشتی پیوسته مانند u_ξ از $[a, \xi]$ به G موجود باشد، به طوری که برای $a \le t \le \xi$ ، $pr_1(u_\xi(t)) = \gamma(t)$ را مورد بررسی قرار داده، و از (a) استفاده کنید.) آیا این نگاشت همیشه یکتا است؟ (حالت $E = F = C$ ، $A = C - \{0\}$ ، $f(x, y) = y^2 - x$ را بررسی کنید.)

نشان دهید که، اگر دو نگاشت پیوسته u و v از I به G چنان باشند که برای هر $t \in I$ ، $pr_1(u(t)) = pr_1(v(t)) = \gamma(t)$ و اگر آنها برای یک مقدار $t \in I$ برابر باشند، آنگاه $u = v$. (از روشی مشابه استفاده کنید.)

(d) تحت فرضیاتی مشابه (c) ، فرض کنیم φ نگاشتی پیوسته از $I \times J$ به A باشد، که در آن $J = [c, d] \subset \mathbf{R}$، و فرض کنیم v نگاشتی پیوسته از J به G باشد، به‌طوری که برای هر $\xi \in J$ ، $pr_1(v(\xi)) = \varphi(a, \xi)$ و برای هر $\xi \in J$ ، فرض کنیم u_ξ نگاشت پیوسته یکتایی از I به G باشد، به طوری‌که، برای $t \in I$ و $u_\xi(a) = v(\xi)$ ، $pr_1(u_\xi(t)) = \varphi(t, \xi)$.

نشان دهید که، نگاشت $(t, \xi) \to u_\xi(t)$ روی $I \times J$ پیوسته است. (برای $\zeta \in J$ داده شده، عددی مانند $r > 0$ موجود است، به‌طوری که برای هر $t \in I$ ، اشتراک V_t از Γ با گوی بسته‌ای در $E \times F$ به مرکز $u_\zeta(t)$ و شعاع r، در G واقع شده است، و چنان است که pr_1 هومیومورفیسمی از V_t بروی گوی بسته‌ای در E به مرکز $\gamma(t)$ و شعاع r است. اگر $L = u_\zeta(I)$ ، فرض کنیم M سوپرموم $\|(D_2 f(x, y))^{-1} \circ (D_1 f(x, y))\|$ برای همه نقاط $(x, y) \in G$ با فاصله‌ای کوچکتر یا مساوی r از L باشد، و فرض کنیم $\varepsilon > 0$ چنان انتخاب شده باشد که $\varepsilon < \frac{r}{4}$ و $\varepsilon M < \frac{r}{4}$. نشان دهید که ، اگر δ چنان باشد که، از رابطه $|\xi - \zeta| \le \delta$ نتیجه شود، برای $t \in I$ ، $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \zeta)\| \le \varepsilon$ ، آنگاه از رابطه $|\xi - \zeta| \le \delta$ ، برای $t \in I$ ، نتیجه می‌شود $\|u_\xi(t) - u_\zeta(t)\| \le \frac{r}{4}$. این مطلب را با بررسی I . u . b $t \in I$ هایی که برای آن‌ها این نامساوی برقرار است، اثبات نموده، و از (۱۰ . ۲ . ۱) استفاده کنید.)

(e) از (d) نتیجه بگیرید که، اگر طوقه γ که روی $I = [a, b]$ تعریف شده، با نقطه‌ای در A ، هوموتوپیک طوقه‌ای باشد، آنگاه، هر نگاشت پیوسته u از I به G به‌طوری که برای هر $t \in I$ ، $pr_1(u(t)) = \gamma(t)$ ، چنان است که $u(b) = u(a)$.

به‌ویژه، اگر A **همبند ساده باشد** (یعنی، اگر هر طوقه در A با یک نقطه در A هوموتوپ باشد)، آنگاه pr_1 یک هومیومورفیسم از G به‌روی A است، یعنی، نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر یکتایی مانند g از A به F موجود است، به‌طوری که روی A ، $f(x, g(x)) = 0$ ، و حداقل برای یک نقطه $x \in A$ ، $(x, g(x))$ متعلق به G است. (مقایسه کنید[2] با (۱۶ .۲۸ .۷).)

---

1. Cluster point = Точка прикосновения

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب به این مقایسه که به این جلد از کتاب مربوط نمی‌شود، اشاره‌ای نشده است. مترجم.

۷ . با نمادهای مسأله ۶ ، نشان دهید که، شرط $pr_1(\mathrm{G}) = \mathrm{A}$ برای هر مؤلفه همبند G از Γ در هر یک از حالات زیر برقرار است :

(۱) $f(x,y) = f_1(y) - f_2(x,y)$ ، و اعدادی مانند $\mathrm{R} > 0$ ، $k > 0$ ، $h > 0$ و تابع مثبت پیوسته $x \to \mathrm{H}(x)$ روی A موجود هستند، به‌طوری که برای $\|y\| \geq \mathrm{R}$ ، $\|f_1(y)\| \geq \|y\|^k$ و $\|f_2(x,y)\| \leq \mathrm{H}(x)\|y\|^{k-h}$.

(۲) $\mathrm{F} = \mathrm{C}$ ، E یک فضای برداری روی C ، و $f(x,y) = e^y - g(x)$ ، که در آن g تابعی تحلیلی روی A است و روی A ، $g(x) \neq 0$ (شرط اخیر اکنون از $pr_1(\Gamma) = \mathrm{A}$ تأمین می‌شود. ملاحظه کنید که، از رابطه $f(x,y) = f(x,y')$ نتیجه می‌شود که، $y' - y$ مضربی از $2\pi i$ است، بنابراین، برای هر $x \in \mathrm{A}$ گوی بازی مانند U به مرکز x واقع در A موجود است ، به طوری که ، برای هر مؤلفه همبند V از $pr_1^{-1}(\mathrm{U}) \cap \Gamma$ ، pr_1 هومیومورفیسمی از V به‌روی U است. اگر x یک نقطه چسبیدگی مجموعه $pr_1(\mathrm{G})$ باشد، آنگاه G باید نقطه مشترکی با یکی از این مؤلفه‌های V داشته باشد، بنابراین، شامل V است).

۸ . (a) اگر f یک تابع مختلط تام روی C^p باشد، به طوری‌که برای هر $x \in \mathrm{C}^p$ ، $f(x) \neq 0$ ، نشان دهید که، یک تابع تام مختلط مانند g روی C^p موجود است، به طوری که $f(x) = e^{g(x)}$ (از مسأله ۷ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم f یک تابع تام دلخواه روی C باشد، که متحد صفر نیست. دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی مانند (a_n) (با $n \geq 1$) از اعداد مختلط (که ممکن است تهی باشد) موجود است، به طوری‌که $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ ، $f(a_n) = 0$ ، و برای هر $c \in \mathrm{C}$ که $f(c) = 0$ ، تعداد اندیس‌هایی از n که $a_n = c$ ، برابر مرتبه $\omega(c, f)$ است، وقتی دنباله (a_n) نامتناهی باشد $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ ((۵ . ۱ . ۹) را ببینید)، نشان دهید که (با نمادهای بخش ۱۲. ۹ ، مسأله ۱) ، تابعی تام مانند g موجود است، به طوری که :

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{z}{a_n}, n-1\right).$$
(«نمایش ویراشتراس »)

۹ . فرض کنیم A و B دو همسایگی باز صفر در $\mathrm{E} = \mathrm{C}^p$ ، و A همبند باشد، و فرض کنیم $(x,y) \to \mathrm{U}(x,y)$ نگاشتی تحلیلی از $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ به $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ باشد (که با فضای ماتریس‌های $p \times p$ با عناصر مختلط یکسان است).

(a) فرض کنیم دنباله‌ای مانند (u_n) از نگاشت‌های تحلیلی از A به B موجود باشد، به‌طوری که روی A ، $u_0(x) = 0$ و برای هر $n \geq 1$ روی A ، $u_n(x) = \mathrm{U}(x, u_{n-1}(x)).x$ ، و فرض کنیم، علاوه بر این، برای هر زیرمجموعه فشرده L از A ، تحدید نگاشت‌های u_n به L تشکیل زیرمجموعه‌ای به‌طور نسبی فشرده از $\mathscr{C}_\mathrm{E}(\mathrm{L})$ بدهند. ثابت کنید که، دنباله (u_n) روی هر زیرمجموعه فشرده از A به‌طور یکنواخت به نگاشتی تحلیلی مانند v از A به B همگرا است، به طوری که روی A ، $v(x) = \mathrm{U}(x, v(x)).x$ ، و علاوه بر این v یکتا نگاشتی است که در این معادله صدق می‌کند. (از (۱. ۲. ۱۰) و (۲. ۱۳. ۹) استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم در E ، A و B گوی‌هایی باز به مرکز 0 و شعاع‌های a و b باشند، و φ نگاشتی پیوسته از $[0, a[\times [0, b[$ به $\mathbf{R}$ باشد، به طوری که تابع $\eta \to \varphi(\xi, \eta)$ روی $[0, b[$ برای هر $\xi \in [0, a[$ صعودی باشد، و روی $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ، $\|\mathrm{U}(x,y)\| \leq \varphi(\|x\|, \|y\|)$ ، علاوه بر این، فرض کنیم، نگاشتی پیوسته مانند θ از $[0, a[$ به $[0, b[$ موجود باشد، به‌طوری‌که روی $[0, a[$ ، $\theta(\xi) = \varphi(\xi, \theta(\xi)).\xi$ ثابت کنید که، تحت این شرایط نگاشت تحلیلی یکتایی مانند

v از A به B موجود است،به‌طوری‌که روی A ، x . $v(x) = U(x, v(x))$ ، و روی A[1] ، $\|v(x)\| \le \theta(\|x\|)$. (از (a) استفاده نموده، وجود نگاشت‌های u_n را با استقراء روی n ثابت کنید.)

(c) فرض کنیم A و B شبیه (b) تعریف شده باشند، و $\psi(\eta)$ ، l.u.b کلیه $\|U(x, y)\|$ برای $\|x\| < a$ ، $\|y\| < \eta$ باشد، به‌طوری که $\eta > 0$ ، با در نظر گرفتن $\psi(0) = \psi(0+)$ ، فرض کنیم $\psi(0) > 0$ و تابع $\eta \to \frac{\eta}{\psi(\eta)}$ روی فاصله‌ای مانند $[0, \gamma]$ ، که در آن $\gamma \le b$ و $\le a$ $\frac{\gamma}{\psi(\gamma-)}$ ، صعودی باشد. در این صورت، نگاشت تحلیلی یکتایی مانند v از گوی باز P به مرکز 0 و شعاع $\frac{\gamma}{\psi(\gamma-)}$ به B موجود است، به طوری که روی P ، x . $v(x) = U(x, v(x))$.

۱۰ . فرض کنیم f ، g دو تابع تحلیلی مختلط باشند، که روی یک همسایگی از چند قرصی $P \subset C^2$ به مرکز $(0, 0)$ و شعاع‌های a ، b تعریف شده‌اند، و فرض کنیم M (به ترتیب N) ، l.u.b تابع $|f(x, y)|$ (به ترتیب $|g(x, y)|$) برای $|x| = a$ ، $|y| \le b$ (به‌ترتیب $|x| \le a$ ، $|y| = b$) باشد. در این صورت، دو تابع $u(s, t)$ ، $v(s, t)$ که به‌طور یکتایی تعیین می‌شوند، و برای $|s| < \frac{a}{M}$ ، $|t| < \frac{b}{M}$ تحلیلی هستند، موجودند، به‌طوری‌که برای (s, t)های واقع در چندقرصی Q که با نامساوی‌های قبلی تعریف شده‌اند، $(u(s, t), v(s, t)) \in P$ ، و در Q ،

$$u(s,t) - s f(u(s,t), v(s,t)) = 0 \quad , \quad v(s,t) - t g(u(s,t), v(s,t)) = 0$$

علاوه بر این، فرض کنیم :

$$\Delta(x, y, s, t) = \begin{vmatrix} 1 - s\frac{\partial f}{\partial x} & -s\frac{\partial f}{\partial x} \\ -t\frac{\partial g}{\partial x} & 1 - t\frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

و فرض کنیم $h(x, y, s, t)$ یک تابع تحلیلی دلخواه روی $P \times Q$ باشد. نشان دهید که، برای $(s, t) \in Q$ ،

$$\frac{h(u(s,t), v(s,t), s, t)}{\Delta(u(s,t), v(s,t), s, t)} = \sum_{m \ge 0,\, n \ge 0} c_{mn} s^m t^n$$

که در آن c_{mn} مقدار تابع :

$$\frac{1}{m!\,n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [h(x, y, s, t)(f(x, y))^m (g(x, y))^n]$$

به ازاء $x = y = 0$ می‌باشد، و سری سمت راست تساوی روی Q همگرا است. توجه کنید که، ضرایب c_{mn} وابسته به s و t هستند، اگر h وابسته به s و t باشد. («فرمول وارونش لاگرانژ»[2]). ابتدا از قضیه روشه (۳. ۱۷. ۹) برای تابع $x - s f(x, y)$ که به عنوان تابعی از x مورد بررسی قرار می‌گیرد، استفاده نموده، طبق (۴ . ۲. ۱۰) ، این کار تابعی تحلیلی مانند $w(x, y)$ تعریف می‌کند، به طوری که $w(s, y) - s f(w(s, y), y) = 0$ ، سپس، به طریقی مشابه از قضیه روشه برای $y - t g(w(s, y), y)$ به عنوان تابعی از y ، استفاده کنید. بالاخره، فرض کنیم γ ، δ دو مدار $\theta \to a e^{i\theta}$ ،

---

۱. رابطه $\|v(x)\| \le \theta(\|x\|)$ در چاپ اول متن روسی کتاب به همین صورت، اما، در چاپ دوم متن انگلیسی آن به صورت $\|v(x)\| \ge \theta(\|x\|)$ نوشته شده است. مترجم.

2 . Lagrange's inversion formula = Формула обращения Лагранжа

$\theta \to be^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ در C باشند. انتگرال مکرر[1] :

$$\int_\delta dy \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)\,dx}{(x-sf(x,y))(y-tg(x,y))}$$

را مورد بررسی قرار دهید. از یک طرف، مقدار این انتگرال را با تکرار استفاده از قضیه مانده‌ها ((۱. ۱۶. ۹) را ببینید) پیدا کرده، و از طرف دیگر، سری توانی بسط تابع $(1-\xi)^{-1}(1-\eta)^{-1}$ را که در آن به جای ξ ، $sf(x,y)/x$ ، به جای η ، $tg(x,y)/y$ قرار داده شده است، مورد بررسی قرار دهید.)

مطالب فوق را برای هر تعداد از متغیرهای مختلط تعمیم دهید. از فرمول وارونش برای یک متغیر، فرمول :

$$h(u(s)) = h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} D^{n-1}(h'(0)(f(0))^n)$$

را نتیجه بگیرید، که در آن $u(s) - sf(u(s)) = 0$ و $|s| < \frac{a}{M}$ ، با $M = \sup_{|x| \le a} |f(x)|$ ، و تابع h برای $|x| < a$ تحلیلی است.

۳. قضیه رتبه

فرض کنیم E ، F دو فضای برداری **متناهی‌البعد** با ابعاد n و m ، A یک زیرمجموعه باز از E ، و f نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به F باشد. **رتبه**[2] نگاشت خطی $f'(x)$ در نقطه‌ای مانند $x \in A$ ، بزرگترین عدد p است که لااقل یک مینور مرتبه p ناصفر از ماتریس نگاشت $f'(x)$ نسبت به دو پایه از فضاهای E ، F وجود داشته باشد ((۳. ۷. A) را ببینید). چون این مینورها توابعی پیوسته نسبت به x هستند، پس اگر رتبه $f'(x_0)$ برابر p باشد، یک همسایگی x_0 وجود دارد، به طوری‌که در این همسایگی رتبه $f'(x)$ **حداقل** برابر p است. اما، این رتبه می‌تواند در هر نقطه $x \neq x_0$ از این همسایگی بیشتر از p باشد، به عنوان مثال ، نگاشت $(x, y) \to (x^2 - y^2, xy)$ در نقطه $(0,0)$ دارای چنین خاصیتی است.

(۱. ۳. ۱۰) (قضیه رتبه) فرض کنیم E یک فضای n بعدی، F یک فضای m بعدی، A یک همسایگی باز نقطه $a \in E$ و f یک نگاشت پیوسته - مشتق‌پذیر (به ترتیب نگاشتی q بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) از A به F باشد، به‌طوری‌که، روی A ، رتبه $f'(x)$ عدد ثابت p باشد. در این صورت :

(۱) یک همسایگی باز $U \subset A$ از a ، و یک هومیومورفیسم u از U به روی گوی واحد I^m :

$$|x_i| < 1 \quad (1 \le i \le n)$$

در K^n وجود دارد، به‌طوری‌که همراه با وارون آن پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب q بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر،

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب، احتمالاً به دلیل اشتباه چاپی، مسیر انتگرال‌گیری در هر دو انتگرال مدار δ است و از مدار γ عملاً استفاده‌ای نشده است، اما در چاپ اول متن روسی کتاب انتگرال‌ها به همین صورت روی مدارهای γ و δ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مترجم.

2 . Rank = Ранг

بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) است.

(۲) یک همسایگی باز $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ از نقطه $b = f(a)$ و یک هومیومورفیسم v از گوی واحد I^m :

$$|y_i| < 1 \quad (1 \le i \le m)$$

از فضای K^m به V وجود دارد، به طوری که همراه با وارون آن پیوسته ـ مشتق‌پذیر (q بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) است، و $f = v \circ f_0 \circ u$ ، که در آن f_0 نگاشت :

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

از I^n به I^m است.

ما قضیه را برای نگاشت‌های پیوسته ـ مشتق‌پذیر ثابت می‌کنیم، با تغییر شکل و اصلاحات لازم بقیه حالات واضح خواهند بود.

با تعویض f به نگاشت $x \to f(a+x) - b$، می‌توان فرض کرد $a = 0$ ، $b = 0$. فرض کنیم M هسته نگاشت خطی $f'(0)$ باشد، که یک زیر فضای $(n-p)$ بعدی از E است، و فرض کنیم N یک مکمل جبری(pبعدی) از M در E باشد. با انتخاب سیستمی مانند $(c_i)_{1 \le i \le n}$ از n بردار، به‌طوری که c_1 ، ... ، c_p پایه‌ای برای N و c_{p+1}، ... ، c_n پایه‌ای برای M باشد، برای هر $x \in \mathrm{E}$، می‌توان نوشت $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, c_i$ ، که در آن φ_i ها فرم‌های خطی هستند. اگر e_1 ، ... ، e_n پایه متعارف K^n باشد، نگاشت خطی $x \to \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ از E بروی زیر فضای $\mathbf{K}^{n-p}$ از $\mathbf{K}^n$ ، که از بردارهای e_{p+1} ، ... ، e_n تولید شده است، به $x \to \mathrm{G}(x)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم P تصویر E (و زیرفضای N) تحت نگاشت خطی $f'(0)$ باشد. P زیر فضایی p بعدی از F است، که شامل عناصر $d_i = f'(0)\,.\,c_i$ $(1 \le i \le p)$ به عنوان یک پایه است. پایه $(d_j)_{1 \le j \le m}$ از F را که پایه قبلی P ، p عنصر نخست آن را تشکیل می‌دهد، انتخاب نموده، برای هر $y \in \mathrm{F}$ می‌نویسیم $y = \sum_{j=1}^{m} \psi_j(y)\, d_j$ ، ψ_jها فرم‌های خطی هستند. نگاشت خطی $y = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(y)\, e_j$ از F بروی زیر فضای $\mathbf{K}^p$ از $\mathbf{K}^n$ ، که از بردارهای e_1 ، ... ، e_p تولید شده است، به $y \to \mathrm{H}(y)$ نشان می‌دهیم.

اکنون نگاشت $x \to g(x) = \mathrm{H}(f(x)) + \mathrm{G}(x)$ از A به K^n را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. علاوه بر این ، طبق (۳. ۱. ۸) و (۱. ۲. ۸) ، برای هر $s \in \mathrm{E}$ داریم :

$$g'(x)\,.\,s = \mathrm{H}(f'(x)\,.\,s) + \mathrm{G}(s)$$

بنابراین، برای $1 \le i \le n$ ، داریم $g'(0)\,.\,c_i = e_i$ (یعنی ، $g'(0)$ نسبت به پایه‌های (c_i) و (e_i) به صورت ماتریس واحد قابل نمایش است). با استفاده از (۵ . ۲. ۱۰) ، نتیجه می‌گیریم که، یک همسایگی باز

$U_0 \subset A$ از 0 موجود است، به‌طوری که، تحدید g به U_0 یک هومیومورفیسم از U_0 بروی یک همسایگی باز 0 در K^n است، و g^{-1} وارون این هومیومورفیسم روی $g(U_0)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. فرض کنیم $r > 0$ چنان باشد که گوی $|x_i| < r$ $(1 \le i \le n)$ در $g(U_0)$ واقع باشد، و فرض کنیم U تصویر معکوس این گوی تحت هومیومورفیسم g باشد، که یک همسایگی باز از نقطه 0 است، نگاشت u ما تحدید نگاشت $x \to \frac{1}{r} g(x)$ به U خواهد بود.

تا به حال از فرض **ثابت** بودن رتبه $f'(x)$ روی A استفاده نکرده‌ایم. از این فرض نتیجه می‌شود که، برای هر $x \in A$ ، تصویر P_x از فضای E تحت نگاشت $f'(x)$ دارای بعد p است. اکنون می‌توانیم فرض کنیم که U_0 آنقدر کوچک انتخاب شده است که، برای $x \in U_0$ ، $g'(x)$ یک **بیژکسیون** خطی از E به روی K^n است ((۲. ۳. ۸) را ببینید) . از آنجا که برای $s \in N$ داریم $g'(x) . s = H(f'(x) . s)$ ، تحدید $f'(x)$ به N باید **بیژکسیونی** از این فضای p بعدی به روی P_x باشد، و تحدید H به P_x **بیژکسیونی** از P_x بروی K^p است. بیژکسیون از K^p بروی P_x را به L_x نشان می‌دهیم ، که وارون نگاشت قبلی است، در این‌صورت، می‌توانیم بنویسیم $f'(x) = L_x \circ H \circ f'(x)$.

اکنون K^n را به عنوان حاصل‌ضرب $E_1 \times E_2$ با $E_1 = K^p$ ، $E_2 = K^{n-p}$ مورد بررسی قرار داده، ثابت می‌کنیم که، نگاشت $(z_1 , z_2) \to f_1(z_1, z_2) = f(u^{-1}(z_1, z_2))$ از گوی I^n به F **وابسته** به z_2 نیست، یعنی، روی I^n ، $D_2 f(z_1 , z_2) = 0$ ((۱. ۶. ۸) را ببینید). طبق تعریف، می‌توان نوشت :

$$f(x) = f_1(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x))$$

بنابراین، طبق (۲. ۹. ۸) ، برای هر $t \in E$ ،

$$r f'(x) . t = D_1 f_1 (\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)) . H(f'(x). t) + D_2 f_1 (\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)) . G(t)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$D_2 f_1(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)) . G(t) = S_x . H(f'(x) . t) \qquad (۱ . ۱ . ۳ . ۱۰)[1]$$

که در آن $S_x = r L_x - D_1 f_1(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x))$ نگاشتی خطی از $K^p = E_1$ به F است. ثابت می‌کنیم که، برای هر $x \in U_0$ ، $S_x = 0$. در واقع، اگر $t \in N$ ، آنگاه، طبق تعریف $G(t) = 0$ ، بنابراین، طبق (۱. ۱. ۳. ۱۰) ، $S_x . H(f'(x). t) = 0$ ، اما ، برای $x \in U_0$ ، $t \to H(f'(x). t) = g'(x). t$ یک

---

۱. رابطه (۱ . ۱ . ۳ . ۱۰) در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به‌صورت (۱۱ . ۳ . ۱۰) نوشته شده است که باید آن را اشتباه چاپی به حساب، آورد. این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

بیژکسیون از N به روی E_1 است ، و این ثابت می‌کند $S_x = 0$. بنابراین ، از (۱. ۱. ۳ . ۱۰) ، برای هر $t \in E$ ، به‌دست می‌آید :

$$D_2 f_1(\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x)) . G(t) = 0$$

اما، G فضای E را **به روی** E_2 می‌نگارد، بنابراین، طبق تعریف :

$$D_2 f_1 (\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x))$$

که نگاشتی خطی از E_2 به F است، برای هر $x \in U_0$ برابر 0 است. به این ترتیب، رابطه $D_2 f(z_1, z_2) = 0$ روی I^n از این حقیقت نتیجه می‌شود که، نگاشت :

$$x \to (\frac{1}{r} H(f(x)), \frac{1}{r} G(x))$$

یک هومیومورفیسم از U_0 به روی مجموعه‌ای باز است که شامل I^n است.

اکنون می‌توان به‌جای $f_1(z_1, z_2)$ نوشت $f_1(z_1)$ و f_1 را به عنوان نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از $E_1 = K^p$ به F مورد بررسی قرار داد. در این صورت، برای $x \in U$ خواهیم داشت :

$$f(x) = f_1(\frac{1}{r} H(f(x)))$$

به‌عبارت دیگر، برای $y \in f(U)$ ، $y = f_1(\frac{1}{r} H(f(y)))$. مطلب فوق، ثابت می‌کند که، نگاشت $y \to \frac{1}{r} H(y)$ هومیومورفیسمی از $f(U)$ به روی $I^p \subset E_1$ ، و $z_1 \to f_1(z_1)$ وارون این هومیومورفیسم است.

اکنون K^m را به عنوان حاصل‌ضرب $E_1 \times E_3$ با $E_3 = K^{m-p}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم T بیژکسیونی خطی از E_3 به روی Q مکمل P در F ، تولید شده به وسیله d_{p+1} ، ... ، d_n باشد، که پایه متعارف K^{m-p} را به عناصر d_{p+1} ، ... ، d_n می‌نگارد. برای $z_1 \in I^p$ ، $z_3 \in I^{m-p}$ تعریف می‌کنیم $v(z_1, z_3) = f_1(z_1) + T(z_3)$. واضح است که، این نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. ((۱ . ۹ . ۸) را ببینید). طبق تعریف، داریم $H(v(z_1, z_3)) = H(f_1(z_1)) = r z_1$. بنابراین، از رابطه $v(z_1, z_3) = v(z'_1, z'_3)$ نتیجه می‌شود $z'_1 = z_1$ ، که از آن رابطه $T(z_3) = T(z'_3)$، و یا $z_3 = z'_3$ به‌دست می‌آید. بنابراین ، v **یک به یک** است. رابطه $S_x = 0$ که در بالا ثابت شد، نشان می‌دهد که، برای هر $z_1 \in I^P$ ، $f'_1(z_1) = r L_x$ ، که در آن x نقطه‌ای دلخواه در U است به طوری‌که $f(x) = f_1(z_1)$. بنابراین، مشتق v در نقطه (z_1, z_3) نگاشت خطی $(t_1, t_3) \to r L_x . t_1 + T(t_3)$ است ((۱. ۹. ۸) و (۳. ۱. ۸) را ببینید). اما ، چون تحدید H به P_x یک به یک است ، P_x مکملی جبری از Q در F است، بنابراین، $v'(z_1, z_3)$ یک **هومیومورفیسم خطی** از K^m به روی F است. به این ترتیب، طبق (۵ . ۲. ۱۰) ، برای هر نقطه $(z_1, z_3) \in I^m$، یک همسایگی باز W از این نقطه در I^m موجود است، به‌طوری که تحدید v به W یک هومیومورفیسم از W بروی یک

زیرمجموعه باز $\nu(\mathrm{W})$ از F است. علاوه براین، چون نگاشت ν یک به یک است، ν یک هومیومورفیسم از I^m بروی زیرمجموعه باز $\mathrm{V}=\nu(\mathrm{I}^m)$ است، که وارون آن روی V پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. بنابراین، رابطه $f=\nu\circ f_0\circ u$ از تعریف‌ها نتیجه می‌شود.

(۱۰.۳.۲)[1] اگر رتبه $f'(a)$ برابر n (به ترتیب m) باشد، آنگاه، نتیجه (۱۰ . ۳ .۱) با $p=n$ (به ترتیب $p=m$) برقرار خواهد بود.

در واقع، در شروع این بخش، دیده‌ایم که، در این‌صورت، یک همسایگی از a وجود دارد، که در این همسایگی رتبه $f'(x)$ بزرگتر یا مساوی n (به ترتیب بزرگتر یا مساوی m) ، و بنابراین، مساوی n (به ترتیب m) خواهد بود، زیرا، این مقدار می‌تواند حداکثر برابر $\inf(m\,,n)$ باشد (۱۸. ۴. A را ببینید).

مسائل

۱ . فرض کنیم E و F دو فضای باناخ ، A یک همسایگی باز نقطه $x_0\in\mathrm{E}$ ، و f یک نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر از A به F باشد.

(a) فرض کنیم $f'(x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی از E بروی تصویر آن در F باشد. نشان دهید که، یک همسایگی $\mathrm{U}\subset\mathrm{A}$ از نقطه x_0 موجود است، به‌طوری که f هومیومورفیسمی از U بروی $f(\mathrm{U})$ است (از مسأله بخش ۱. ۱۰ استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم $f'(x_0)$ پوشا باشد. در این صورت، عددی مانند $a>0$ با خاصیت زیر موجود است :

اگر N هسته $f'(x_0)$ باشد، برای هر $s\in\mathrm{E}$ داریم $\|f'(x_0)\,.\,s\|\ \geq\ a\ \inf\limits_{t\in\mathrm{N}}\|t+s\|$. ((۱۲. ۱۶. ۱۲) را ببینید[2]). نشان دهید که، یک همسایگی $\mathrm{V}\subset\mathrm{A}$ از x_0 موجود است، به‌طوری که $f(\mathrm{V})$ یک همسایگی $f(x_0)$ در F است. (از مسأله ۸ بخش ۱. ۱۰ استفاده کنید.)

۲ . فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز در C^p، و f یک نگاشت تحلیلی از A به C^p باشد. نشان دهید که، اگر f نگاشتی یک به یک باشد، در این صورت، برای هر $x\in\mathrm{A}$، رتبه $\mathrm{D}f(x)$ برابر p است. (از برهان خلف، و استقراء روی p استفاده کنید. برای $p=1$ از قضیه روشه (۳. ۱۷. ۹) استفاده کنید. فرض کنیم $\mathrm{D}f(a)$ برای یک $a\in\mathrm{A}$ دارای رتبه کمتر از p باشد. ابتدا نشان دهید که (در صورت لزوم با اعمال یک تبدیل خطی در F) می‌توان فرض کرد، اگر $f(z)=(f_1(z),\ldots,f_p(z))$، آنگاه $\mathrm{D}_1f_1(a)=0$، و اگر $g(z)=(f_2(z),\ldots,f_p(z))$ رتبه $\mathrm{D}g(a)$ دقیقاً برابر $p-1$ است. سپس، نشان دهید که یک همسایگی $\mathrm{U}\subset\mathrm{A}$ از a موجود است، به‌طوری که $\mathrm{D}g(x)$ برای $x\in\mathrm{U}$ رتبه $p-1$ دارد. از قضیه رتبه (۱۰ .۳ .۱) استفاده نموده، اثبات را به حالتی که در آن $a=0$، و برای $k\leq 2\leq p$ ، $f_k(z)=z_k$

---

۱. این قضیه در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، و از چاپ دوم متن آن به زبان انگلیسی ترجمه شده است. مترجم.

۲. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به جای رابطه $\|f'(x_0)\,.\,s\|\ \geq\ a.\ \inf\limits_{t\in\mathrm{N}}\|t+s\|$ ، نوشته شده است $\|f'(x_0)\,.\,s\|\ \geq\ a\|s\|$ ، اما، به خواننده توصیه شده است، برای دیدن اثبات این حقیقت که خاصیت فوق نتیجه پیوستگی و پوشا بودن نگاشت $f'(x_0)$ است، به کتاب نیکلای بورباکی Н . Бурбаки که شماره آن در فهرست مراجع [6] است، مراجعه نماید . مترجم.

است، تبدیل کنید). آیا نتیجه وقتی که به‌جای C، R گذاشته شود، باز هم درست است؟

۳. (a) فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند ساده از C باشد، که متمایز از C است، و فرض کنیم a، b دو نقطه متمایز از $Fr(A)$ باشند (ضمیمه فصل ۹، مسأله ۶ را ببینید). نشان دهید که، یک تابع تحلیلی مختلط مانند h روی A موجود است، به‌طوری که $(h(z))^2 = (z-a)/(z-b)$ (بخش ۲. ۱۰، مسأله ۷ را ببینید). h هومیومورفیسمی تحلیلی از A به روی یک زیرمجموعه باز همبند ساده B از C است (مسأله ۲ و (۱. ۳. ۱۰) را ببینید)، به علاوه، $B \cap (-B) = \varnothing$، بنابراین، نقاطی از C موجودند، که نقاط خارجی B هستند.

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، یک هومیومورفیسم تحلیلی از A بر روی یک زیرمجموعه باز همبند ساده از C موجود است که در دیسک واحد $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ واقع شده، و شامل نقطه 0 می‌باشد.

۴. (a) فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند ساده از C باشد که در U گوی واحد $|z| < 1$ واقع شده، و شامل 0 است، و فرض کنیم H مجموعه همه توابع تحلیلی مختلط g روی A باشد، به‌طوری که g یک نگاشت یک‌به‌یک از A به C، و $|g(z)| < 1$، $g(0) = 0$، و $g'(0)$ یک عدد حقیقی اکیداً مثبت باشد. برای هر زیرمجموعه فشرده L از A، مجموعه H_L تحدید توابع عضو H به L در $\mathscr{C}_C(L)$ به‌طور نسبی فشرده است ((۲. ۱۳. ۹) را ببینید). نشان دهید که، مجموعه اعداد حقیقی $g'(0)$ (برای $g \in H$) کراندار است (مقایسه کنید با اثبات (۱. ۱۳. ۹)). فرض کنید λ برابر l.u.b این مجموعه باشد. نشان دهید که، تابعی مانند $g_0 \in H$ موجود است، به طوری که[1] $g_0'(0) = \lambda$ (از نتیجه بخش ۹. ۱۷، مسأله ۵ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم $g \in H$ چنان باشد که $g(A) \neq U$، و $c \in U - g(A)$. با تعویض g با g_1 که با رابطه:

$$g_1(z) = e^{-i\theta} g(ze^{i\theta})$$

تعریف شده، می‌توان فرض کرد، با انتخاب مناسب θ، c فوق حقیقی و اکیداً مثبت است. تابعی مانند h وجود دارد، به طوری که روی A تحلیلی است و

$$(h(z))^2 = (c - g(z) / (1 - c\,g(z))$$

و $h(0) = \sqrt{c} > 0$. (از استدلالی مشابه مسأله ۳ (a) استفاده کنید.)

نشان دهید که، تابع g_2 که با رابطه:

$$h(z) = (\sqrt{c} - g_2(z)) / (1 - \sqrt{c}\, g_2(z))$$

تعریف شده، متعلق به H است، و $g_2'(0) > g'(0)$.

(c) از (a) و (b) نتیجه بگیرید که، تابع g_0 که در (a) تعریف شده است، یک هومیومورفیسم تحلیلی از A بروی U است، با استفاده از مسأله ۳ (b) از این مطلب نتیجه می‌شود که، برای هر زیرمجموعه باز همبند ساده D از C که متمایز از C است، یک هومیومورفیسم تحلیلی از D بروی U وجود دارد. (**قضیه نگاشت همدیس ریمان**[2]).

۵. (a) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی مختلط روی گوی واحد $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ باشد، به‌طوری که $f(0) = 1$ و روی U، $|f(z)| < M$. نشان دهید که، برای $|z| \le \frac{1}{M}$، $|f(z) - 1| \le M|z|$. (از لم شوارتز (بخش ۹. ۵، مسأله ۷) برای تابع $g(z) = \dfrac{M(f(z)-1)}{M^2 - f(z)}$ استفاده کنید.)

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب رابطه $g'_0(0) = \lambda$ به صورت $g_0(0) = \lambda$ نوشته شده است، که با توجه به تعریف مجموعه H باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

2 . Riemann's conformal mapping theorem = Теорема о конформном отображении

(b) فرض کنیم f یک تابع مختلط تحلیلی روی U باشد، به‌طوری که $f(0)=0$ ، $f'(0)=1$ ، و روی U ، $|f'(z)| \le M$.
نشان دهید که، برای $|z| \le \frac{1}{M}$ ، $|f(z)-z| \le M|z|^2/2$. (از (a) برای f' استفاده کنید.)

(c) نشان دهید که، تحت فرض‌های (b)، تحدید f به دیسک $B(0, 1/M)$ یک هومیومورفیسم تحلیلی از این دیسک بروی یک زیرمجموعه باز شامل دیسک $B(0, \frac{1}{2M})$ است. (با استفاده از نتیجه (b)، از قضیه روشه (۳. ۱۷. ۹) استفاده کنید.)

(d) برای هر عدد مختلط مانند $a \in U$ ، فرض کنیم $u(z)=\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. برای هر تابع مختلط تحلیلی روی U مانند f ، نشان دهید که، اگر $g(z)=f(u(z))$ ، آنگاه، برای هر $z \in U$ ، $|g'(z)|(1-|z|^2)=|f'(u(z))|(1-|u(z)|^2)$.

(e) نشان دهید که، یک عدد حقیقی («ثابت بلوخ[1]») $b > \frac{1}{3\sqrt{3}}$ با خاصیت زیر موجود است:

برای هر تابع مختلط تحلیلی روی U، به طوری‌که $f'(0)=1$ ، یک $z_0 \in U$ موجود است، به‌طوری که، اگر $x_0=f(z_0)$ ، دیسک باز B به مرکز x_0 و شعاع b در $f(U)$ واقع است، و تابعی تحلیلی روی U مانند g موجود است، به‌طوری که $f(B) \subset U$ و برای $z \in B$ ، $f(g(z))=z$. (ابتدا حالتی که در آن f روی یک همسایگی $\bar{U}$ تحلیلی است، مورد بررسی قرار داده، z_0 را طوری انتخاب کنید که در آن تابع $|f'(z)|(1-|z|^2)$ به ماکزیمم خود برسد، سپس، با استفاده از (d)، مسأله را به حالتی که در آن $z_0=0$ است، تبدیل نموده، و در این حالت از نتیجه (c) برای تابعی به فرم $a+f(Rz)$، که در آن a و R اعداد مختلط مناسبی هستند، استفاده کنید. در حالت کلی، تابع $f((1-\varepsilon)z)/(1-\varepsilon)$ را که در آن $\varepsilon > 0$ به دلخواه کوچک است، مورد بررسی قرار دهید.)

۶. فرض کنیم $\mathfrak{M}$ مجموعه همه توابع مختلط مانند f باشد، که روی دیسک واحد $U=\{z \in C : |z|<1\}$ تحلیلی هستند و $f(U)$ شامل 0 و 1 نیست. برای هر تابع $f \in \mathfrak{M}$ ، تابع تحلیلی یکتایی مانند g روی U موجود است، به‌طوری که روی U، $\exp(2\pi i g(z))=f(z)$ و $|\mathscr{I}(g(0))| < \pi$ (بخش ۲. ۱۰ مسأله ۷ را ببینید). $g(U)$ شامل هیچ عدد مثبت یا منفی صحیح نیست. علاوه بر این (همان مرجع) تابعی تحلیلی مانند h روی U موجود است، به‌طوری که $g(z)/(g(z)-1)=(1+h(z))/(1-h(z))^2$ ، $h(U)$ شامل هیچ یک از نقاط 0 ، 1 ، $c'_n=(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2$ و $c''_n=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2$ نیست. (n عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی 1 می‌باشد.) بالاخره، تابعی تحلیلی مانند φ روی U موجود است، به‌طوری که $\exp(\varphi(z))=h(z)$ ، و $\varphi(U)$ شامل هیچ نقطه‌ای به صورت $\log c'_n + 2k\pi i$ ، $\log c''_n + 2k\pi i$ نیست (k عددی صحیح و $n \ge 1$ است).

نشان دهید که، هیچ دیسکی با شعاع بزرگتر از 4 نمی‌تواند در $\varphi(U)$ واقع باشد. با استفاده از مسأله (e) ۵ از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، برای $|x|<1$ ،

$$|\varphi'(x)| \le 4/b(1-|x|)$$

(با انتخاب مناسب ثابت c ، تابع $t \to c\varphi(x+(1-|x|)t)$ را مورد بررسی قرار دهید)، و تابعی مانند $F(u,v)$ که روی $(C-\{0,1\}) \times [0,1[$ متناهی و پیوسته است، موجود می‌باشد، به‌طوری‌که برای هر تابع $f \in \mathfrak{M}$ و هر $|z| \le r < 1$، نامساوی $\log|f(z)| \le F(f(0), r)$ برقرار است.

(b) فرض کنیم $f \in \mathfrak{M}$ چنان باشد که یا $|f(0)| < \frac{1}{2}$ یا $|f(0)-1| < \frac{1}{2}$. برای عدد معلوم $0 \le r < 1$ نشان دهید که، یا برای $|z| \le r$ ، $|f(z)| \le 5/2$ یا نقطه‌ای مانند x موجود است، به‌طوری‌که $|x| < r$ ، $|f(x)| \ge \frac{1}{2}$ ،

1 . Bloch 's constnat = Постоянная Блоха

$$|f(x)-1| \geq \frac{1}{2} \text{ و } |1/f(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

با به‌کارگیری نتیجه (a) برای تابع $f((z-x)/(\bar{x}z-1))$ نتیجه بگیرید که، تابعی مانند $F_1(u,v)$ موجود است، به طوری که روی $]0,1[\times[0,+\infty[$ متناهی و پیوسته است و برای هر تابع $f\in\mathfrak{M}$، از روابط $|f(0)|\leq s$ و $|z|\leq r$ نتیجه می‌شود $|f(z)|\leq F_1(s,r)$ (قضیه شوتکی[1]).

۷. فرض کنیم A یک زیرمجموعه باز همبند C، و (f_n) یک دنباله از توابع مجموعه $\mathfrak{M}$ مسأله ۶ باشد. نشان دهید که، برای هر زیرمجموعه فشرده L از A، زیردنباله‌ای مانند (f_{n_k}) موجود است، به‌طوری‌که یا این زیردنباله در L به‌طور یکنواخت همگرا است، یا دنباله $(1/f_{n_k})$ در L به‌طور یکنواخت به 0 همگرا است. (از قضیه شوتکی استفاده نموده، ثابت کند که، مجموعه نقاط $x\in A$ به‌طوری که $\lim_{n\to\infty}(1/f_n(x))=0$، تشکیل یک زیرمجموعه باز و بسته از A می‌دهند، و بنابراین، یا تهی است یا برابر A می‌باشد. در دومین حالت، با استفاده از فشردگی L، نشان دهید که، زیردنباله‌ای از (f_n) موجود است، که روی یک همسایگی فشرده L کراندار است، و از (۱. ۱۳. ۹) استفاده کنید. در اولین حالت، به طریقی مشابه، از (۱. ۱۳. ۹) برای دنباله $(\frac{1}{f_n})$ استفاده کنید.)

۸. (a) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی مختلط روی مجموعه باز $V=\{z\in C:0<|z-a|<r\}$ باشد، و فرض کنیم a یک نقطه تکین اساسی f باشد (بخش ۱۵. ۹ را ببینید). نشان دهید که، $C-f(V)$ یا تهی است، یا از یک نقطه تشکیل شده است (قضیه پیکار[2]). (فرض کنید W زیرمجموعه‌ای باز از V باشد که با رابطه $r/2<|z-a|<r$ تعریف شده است، و روی W خانواده توابع تحلیلی $f_n(z)=f(z/2^n)$ را مورد بررسی قرار داده، اگر $C-f(V)$ شامل حداقل دو نقطه متمایز باشد، از مسأله ۷ برای دنباله (f_n) استفاده نموده، و با استفاده از (۲. ۱۵. ۹) تناقضی با مسأله ۲ بخش ۱۵. ۹ به‌دست آورید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، اگر g یک تابع تام روی C باشد که برابر مقداری ثابت نیست، آنگاه $C-g(C)$ یا تهی است، یا از یک نقطه تشکیل شده است. ($g(\frac{1}{z})$ را روی $C-\{0\}$ مورد بررسی قرار دهید.)

۹. (a) نشان دهید که، تابع تام $f(x,y)$ روی C^2 موجود است، که در اتحاد:

$$f(4x,4y)-4f(x,y)=-5(f(2x,-2y))^2+2(f(2x,-2y))^2$$

صدق می‌کند، و چنان است که جملات از درجه کوچکتر یا مساوی 1 در بسط تیلور f در نقطه $(0,0)$ برابر $x+y$ می‌باشد. (بخش ۱. ۱۰، مسأله ۱۱ را ببینید).

(b) فرض کنیم $g(x,y)=f(2x,-2y)$، و فرض کنیم $J(x,y)=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$. نشان دهید که، $J(2x,-2y)=J(x,y)$، و نتیجه بگیرید که، روی C^2، $J(x,y)=-4$. ($f(x,y)$ و $g(x,y)$ را بر حسب جملاتی از $f(2x,-2y)$، $g(2x,-2y)$ بنویسید). ثابت کنید که، نگاشت تحلیلی:

$$u:(x,y)\to(f(x,y),g(x,y))$$

از C^2 به C^2 یک به یک است. (اگر چنین نباشد، آنگاه از عبارت قبلی نتیجه می‌شود، روی یک همسایگی $(0,0)$ نیز یک‌به‌یک نیست.)

1 .Schottky's theorm = Теорема Шоттки
2 . Picard's theorem = Теорема Пикара

(c) نشان دهید که، یک همسایگی $(1,1)$ موجود است، که مشمول $u(C^2)$ نیست. (ملاحظه کنید که، یک $0 < \varepsilon < 1$ موجود است، به طوری که از روابط $|f(2x, -2y)-1| \le \varepsilon$ و $|g(2x, -2y)-1| \le \varepsilon$ نتیجه می‌شود $|f(x, y)-1| \le \varepsilon$ و $|g(x, y)-1| \le \varepsilon$، سپس، نتیجه بگیرید که، از روابط $|f(x, y)-1| \le \varepsilon$ و $|g(x, y)-1| \le \varepsilon$، نتیجه می‌شود $|f(0, 0)-1| \le \varepsilon$ و $|g(0, 0)-1| \le \varepsilon$، که یک تناقض است) (با مسأله ۸(b) مقایسه کنید.)

۴. معادلات دیفرانسیل

فرض کنیم E یک فضای باناخ، I یک مجموعه باز در هیات K، H یک زیرمجموعه باز E، و f یک نگاشت **پیوسته ـ مشتق‌پذیر**[1] از $I \times H$ به E باشد. یک نگاشت مشتق‌پذیر u از یک گوی باز $J \subset I$ به H را یک **جواب معادله دیفرانسیل** :

$$x' = f(t, x) \tag{۱۰.۴.۱}$$

می‌نامند، اگر برای هر $t \in J$، داشته باشیم:

$$u'(t) = f(t, u(t)) \tag{۱۰.۴.۲}$$

از (۱۰.۴.۲) فوراً نتیجه می‌شود که، u روی J **پیوسته ـ مشتق‌پذیر** است (و بنابراین، طبق (۹.۱۰.۱)، اگر $K = C$ باشد، تحلیلی است).

(۱۰.۴.۳) برای اینکه روی گوی $J \subset I$ به مرکز t_0، نگاشت u از J به H یک جواب معادله (۱۰.۴.۱) باشد، به‌طوری که $u(t_0) = x_0 \in H$، لازم و کافی است که، اگر $K = R$ (به ترتیب $K = C$)، u روی J پیوسته (به ترتیب تحلیلی) باشد، و علاوه بر این u چنان باشد که :

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \tag{۱۰.۴.۴}$$

(که در آن، اگر $K = C$ باشد، انتگرال در طول مسیر خطی $\xi \to t_0 + \xi(t - t_0)$، $0 \le \xi \le 1$ گرفته شده است).

مطلب فوق از تعریف پریمیتیو (تابع اولیه) نتیجه می‌شود، زیرا (وقتی $K = C$ باشد)، اگر f پیوسته ـ مشتق‌پذیر و u تحلیلی باشد، آنگاه نگاشت $s \to f(s, u(s))$ نیز تحلیلی خواهد بود ((۹.۱۰.۱) را ببینید).

(۱۰.۴.۵) (قضیه وجود کوشی) اگر f نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر روی $I \times H$ باشد، برای هر $t_0 \in I$ و هر $x_0 \in H$ یک گوی باز $J \subset I$ با مرکز t_0 موجود است، به‌طوری‌که، روی J، معادله (۱۰.۴.۱) دارای

---
1. Continuously differentiable = Непрерывно дифференцируемое

جوابی[1] است که در شرط $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند.

ابتدا یک لم ثابت می‌کنیم :

(۱. ۵. ۴. ۱۰) فرض کنیم A یک فضای متریک فشرده، F یک فضای متریک، B یک زیرمجموعه فشرده F ، و g یک نگاشت پیوسته از $A \times F$ به فضای متریک E باشد. در این‌صورت، یک همسایگی V از B در F موجود است، به طوری‌که $g(A \times V)$ در E کراندار است.

برای هر $t \in A$ و هر $z \in B$ ، یک گوی $S_{t,z}$ با مرکز t در A و یک گوی $U_{t,z}$ به مرکز z در B موجود است، به طوری که $g(S_{t,z} \times U_{t,z})$ کراندار است، زیرا ، g پیوسته است. برای هر $z \in B$ ، A را با تعداد محدودی از گوی‌های $S_{t_i,z}$ می‌پوشانیم، و فرض می‌کنیم V_z گوی $U_{t_i,z}$ با کمترین شعاع باشد. در این صورت، مجموعه $g(A \times V_z)$ کراندار است ((۴. ۴. ۳) را ببینید). اکنون B را با تعداد متناهی از گوی‌های V_{z_j} می‌پوشانیم. V اجتماع این V_{z_j}ها در شرایط قضیه صدق می‌کند ((۴. ۴. ۳) را ببینید).

اکنون قضیه (۵ . ۴ . ۱۰) را ثابت می‌کنیم.

(a) ابتدا فرض کنیم $K = R$ ، و فرض کنیم J_a گویی فشرده به مرکز t_0 و شعاع a واقع در I باشد. طبق (۱. ۵ . ۴. ۱۰) ، یک گوی باز B به مرکز x_0 و شعاع b واقع در H موجود است، به طوری که $M = \sup_{(t,x) \in J_a \times B} \| f(t,x) \|$ و $k = \sup_{(t,x) \in J_a \times B} \| D_2 f(t,x) \|$ متناهی هستند. فرض کنیم J_r برای $r < a$ گوی بسته به مرکز t_0 و شعاع r ، و F_r فضای نگاشت‌های پیوسته y از J_r به E باشد، که با نرم $\| y \| = \sup_{t \in J_r} \| y(t) \|$ یک فضای باناخ است ((۱. ۲. ۷) را ببینید) ، و فرض کنیم V_r گوی بازی در F_r با مرکز x_0 (که با نگاشت ثابت $t \to x_0$ یکی گرفته می‌شود) و شعاع b باشد. برای هر $y \in V_r$ نگاشت :

$$t \to x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

روی J_r معین و پیوسته است، زیرا، طبق تعریف، برای $y \in V_r$ ، داریم $y(s) \in B$. فرض کنیم $g(y)$ این نگاشت باشد. بنابراین، g نگاشتی از V_r به F_r است. ثابت می‌کنیم g برای r به حد کافی کوچک، در شرایط قضیه (۲. ۱. ۱۰) صدق می‌کند. با به‌کارگیری آن قضیه و قضیه (۳. ۴ . ۱۰) اثبات را برای $J = \mathring{J}_r$ به پایان می‌رسانیم.

اکنون، برای هر دو نقطه y_1 , y_2 در V_r ، طبق (۴. ۵ . ۸) ، برای هر $s \in J_r$ ، داریم :

$$\| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \| \le k \| y_1(s) - y_2(s) \| \le k \| y_1 - y_2 \|$$

---

[1] در چاپ اول متن روسی کتاب به یکتایی این جواب نیز اشاره شده است. مترجم.

بنابراین، طبق (۷. ۷. ۸) ، برای هر $t \in J_r$ ،

$$\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\, ds \| \leq kr \| y_1 - y_2 \|$$

در نتیجه $\| g(y_1) - g(y_2) \| \leq kr \| y_1 - y_2 \|$. از طرف دیگر، برای هر $y \in V_r$ ، و هر $s \in J_r$ ، $\| f(s, y(s)) \| \leq M$ ، بنابراین، طبق (۷ . ۷ . ۸)، $\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \| \leq Mr$، و در نتیجه $\| g(x_0) - x_0 \| \leq Mr$. به این ترتیب ، می‌بینیم که، برای اینکه بتوانیم از (۲. ۱. ۱۰) استفاده کنیم، باید داشته باشیم $kr < 1$ و $Mr < b(1 - kr)$ ، و هر دو نامساوی‌ها وقتی $r < b/(M + kb)$ باشد، برقرار هستند.

(b) حال فرض کنیم $K = C$ باشد. J_a ، J_r ، B ، M ، و k را شبیه فوق تعریف می‌کنیم، و فرض می‌کنیم F_r فضای نگاشت‌های y از J_r به E باشد، که روی J_r پیوسته و روی $\mathring{J}_r$ تحلیلی هستند. این فضا دوباره با نرم $\| y \| = \sup_{t \in J_r} \| y(t) \|$ ، طبق (۷. ۲. ۱) و (۹. ۱۲. ۱) ، یک فضای باناخ است. برای $y \in V_r$ ، نگاشت $t \to x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ دوباره متعلق به F_r است. زیرا ، این نگاشت روی $\mathring{J}_r$ تحلیلی است، چون نگاشت $s \to f(s, y(s))$ روی $\mathring{J}$ تحلیلی است ((۹. ۷. ۳) را ببینید) ، و پیوستگی آن روی J_r فوراً از (۸. ۱۱. ۱) نتیجه می‌شود. بنابراین ، ما یک نگاشت g از گوی V_r به F_r تعریف کرده‌ایم، و اثبات شبیه حالت قبل به پایان می‌رسد.

(۱۰. ۴. ۶) **تبصره.** اثبات قضیه (۱۰. ۴. ۵) نشان می‌دهد که، نتیجه وقتی $K = \mathbf{R}$ باشد، و وقتی f در فرض‌های ضعیف‌تر زیر صدق کند، باز هم معتبر باقی می‌ماند:

(a) برای هر نگاشت پیوسته $t \to w(t)$ از I به H ، نگاشت $t \to f(t, w(t))$ تابعی **رگله** روی I باشد (بخش ۷ . ۶ را ببینید) ؛

(b) برای هر نقطه $(t, x) \in I \times H$ گویی مانند J به مرکز t در I و گویی مانند B به مرکز x در H موجود باشد، به طوری‌که f روی $J \times B$ کراندار باشد، و ثابتی مانند $k \geq 0$ (وابسته به J و B) موجود باشد، به‌طوری که برای هر $s \in J$ ، y_1 ، y_2 در B ، $\| f(s, y_1) - f(s, y_2) \| \leq k \| y_1 - y_2 \|$. چنین تابع f یی را روی $I \times H$ **به‌طور موضعی لیپشیتزی**[1] می‌نامند. در این حالت، معادله (۱۰. ۴. ۲) به عنوان معادله‌ای که تنها روی مکمل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش‌پذیر از J برقرار است، درک می‌شود.

تبصره اخیر ما را قادر می‌سازد که فواصل باز I و J را با هر نوع فاصله‌ای از $\mathbf{R}$ عوض کنیم.

---

1 . Locally lipschitzian = Локально липшицевская

۵. مقایسه جواب‌های معادلات دیفرانسیل

گوییم نگاشت دیفرانسیل‌پذیر u از یک گوی باز $J \subset I$ به H یک **جواب تقریبی معادله (۱. ۴. ۱۰)** با تقریب ε (یا، به اختصار ، ε - جواب) است، اگر برای هر $t \in J$ داشته باشیم :

$$\| u'(t) - f(t\ ,\ u(t)) \| \leq \varepsilon$$

(۱. ۵. ۱۰) فرض کنیم روی $I \times H$ ، $\| D_2 f(t\ ,\ x) \| \leq k$. اگر u ، v دو جواب تقریبی معادله (۱. ۴. ۱۰) روی یک گوی باز J به مرکز t_0 ، و با تقریب‌های ε_1 و ε_2 باشند، آنگاه، برای هر $t \in J$ ، داریم :

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \| u(t_0) - v(t_0) \| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \qquad (۱۰ . ۵ . ۱ . ۱)$$

(برای $k = 0$ ، به‌جای $(e^{k|t-t_0|} - 1) / k$ ، $| t - t_0 |$ قرار داده می‌شود.)

با قرار دادن $t = t_0 + a\xi$ ، $|a| = 1$ ، $\xi \geq 0$ ، می‌توان قضیه را مستقیماً به حالت $K = R$ ، $t_0 = 0$ ، و $t \geq 0$ تبدیل نمود. در واقع ، در این صورت، اگر $u_1(\xi) = u(t_0 + a\xi)$ و $v_1(\xi) = v(t_0 + a\xi)$ ، آنگاه u_1 و v_1 جواب‌های تقریبی معادله $x' = a f(t_0 + a\xi\ , x / a)$ خواهند بود. از نامساوی $\| u'(s) - f(s\ , u(s)) \| \leq \varepsilon_1$ روی فاصله $0 \leq s \leq t$ ، طبق (۸. ۷. ۷) ، به‌دست می‌آوریم :

$$\| u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s))\, ds \| \leq \varepsilon_1 t$$

و به طریقی مشابه :

$$\| v(t) - v(0) - \int_0^t f(s, v(s))\, ds \| \leq \varepsilon_2 t$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود :

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \| u(0) - v(0) \| + \| \int_0^t (f(s\ , u(s)) - f(s, v(s)))\, ds \| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_1)\, t.$$

طبق فرضی که در رابطه با $D_2 f$ کرده‌ایم، و از (۸. ۵. ۴) و (۸. ۷. ۷) به‌دست می‌آوریم :

$$w(t) \leq w(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, t + k \int_0^t w(s)\, ds \qquad (۱۰ . ۵ . ۱ . ۲)$$

که در آن $w(t) = \| u(t) - v(t) \|$. در این‌صورت، قضیه (۱۰ . ۵ . ۱) نتیجه لم زیر است:

(۱۰ . ۵ . ۱ . ۳) (لم گرونوال[1]). اگر روی فاصله $[0\ ,\ c]$، φ و ψ دو تابع رگله بزرگتر یا مساوی صفر باشند، آنگاه، برای هر تابع رگله $w \geq 0$ که روی فاصله $[0\ , c]$ در نامساوی :

1 . Gronwall's lemma = Лемма Гронуолла

در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودنه به زبان روسی نام «لم گرونوال» از گزاره فوق حذف شده است. مترجم.

(۱۰.۵.۱.۴) $$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)\, w(s)\, ds$$

صدق می‌کند، رابطه :

(۱۰.۵.۱.۵) $$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\xi)\, d\xi\right) ds$$

روی فاصله $[0 , c]$ برقرار خواهد بود.

قرار می‌دهیم $y(t) = \int_0^t \psi(s)\, w(s)\, ds$. تابع y پیوسته است، و از (۱۰.۵.۱.۴) نتیجه می‌شود که، روی مکمل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش‌پذیر از $[0 , c]$، طبق (۸.۷.۸)، داریم :

(۱۰.۵.۱.۶) $$y'(t) - \psi(t)\, y(t) \leq \varphi(t)\, \psi(t)$$

قرار می‌دهیم $z(t) = y(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s)\, ds\right)$. نامساوی (۱۰.۵.۱.۶) معادل نامساوی :

$$z'(t) \leq \varphi(t)\, \psi(t) \exp\left(-\int_0^t \psi(s)\, ds\right)$$

می‌باشد. طبق (۸.۵.۳) و با استفاده از این حقیقت که $z(0) = 0$، برای $t \in [0 , c]$ به‌دست می‌آوریم :

$$z(t) \leq \int_0^t \varphi(s) \psi(s) \exp\left(-\int_0^s \psi(\xi)\, d\xi\right) ds$$

که از آن طبق تعریف $z(t)$ نتیجه می‌شود :

$$y(t) \leq \int_0^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\xi)\, d\xi\right) ds$$

اکنون، از رابطه $w(t) \leq \varphi(t) + y(t)$، رابطه (۱۰.۵.۱.۵) نتیجه می‌شود.

(۱۰.۵.۲) فرض کنیم f روی $I \times H$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد. اگر u، v دو جواب معادله (۱۰.۴.۱) باشند، که روی یک گوی باز J به مرکز t_0 تعریف شده باشند، و چنان باشند که $u(t_0) = v(t_0)$، آنگاه روی J، $u = v$.

کافی است ثابت کنیم که، u و v روی هر گوی فشرده L به مرکز t_0 واقع در J برهم منطبق هستند. این مطلب از به کارگیری قضیه (۱۰.۵.۱) در رابطه با u و v، اگر فقط بدانیم که $D_2 f$ روی مجموعه‌ای مانند $L \times H'$، که در آن H' یک زیرمجموعه باز H است که شامل هم $u(L)$ و هم $v(L)$ است، کراندار است، نتیجه می‌شود. اما، وجود چنین مجموعه‌ای فوراً از (۱۰.۴.۵.۱) نتیجه می‌شود.

(۱۰.۵.۳) فرض کنیم فضای E دارای بعد متناهی و f روی $I \times H$ تحلیلی باشد. در این‌صورت، هر جواب معادله (۱۰.۴.۱) روی هر گوی باز $J \subset I$ تحلیلی است.

مطلب فوق در حالتی که $K = C$ باشد، نتیجه تعریف است. فرض کنیم $K = R$، $E = R^m$. در این صورت، برای هر نقطه $(t_0 , x_0) \in I \times H$، یک گوی $L_0 \subset C$ با مرکز t_0، و یک گوی $P \subset C^m$ با مرکز

x_0 موجود است، به‌طوری که $L_0 \cap R \subset I$ و $P \cap R^m \subset H$ ، و یک نگاشت تحلیلی g از $L_0 \times P$ به C^m موجود است، که تحدید آن نسبت به $(L_0 \cap R) \times (P \cap R^m)$ منطبق بر f است ((۵. ۴. ۹) را ببینید). طبق (۵ . ۴. ۱۰) ، یک گوی باز $L \subset L_0$ به مرکز t_0 در C موجود است، به‌طوری که، معادله دیفرانسیل $z'(t) = g(t, z)$ دارای جوابی یکتا مانند v است، که در نقطه t_0 مقدار x_0 می‌گیرد، و v روی L تحلیلی است. با استفاده از رابطه $v'(t) = g(t, v(t))$ و تعریف g و v، می‌توان مستقیماً با استقراء روی n ثابت کرد که، همه مشتقات $\overset{(n)}{v}(t_0)$ متعلق به $\mathbf{R}^m$ هستند، بنابراین، برای $t \in L \cap \mathbf{R}$ ، $v(t)$ متعلق به $\mathbf{R}^m$ است ((۱. ۵. ۳. ۹) را ببینید). این مطلب ثابت می‌کند که، u تحدید v به $L \cap \mathbf{R}$ جوابی از معادله (۱. ۴. ۱۰) است (تبصره‌های بخش ۴. ۸ را ببینید) که در رابطه $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند. اما، طبق (۲. ۵. ۱۰)، هر جواب w از معادله (۱. ۴. ۱۰) روی گویی مانند M به مرکز t_0 که در شرط $w(t_0) = x_0$ صدق می‌کند، روی $L \cap M$ منطبق بر u است، و بنابراین، در نقطه t_0 تحلیلی است، و این همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

(۴. ۵. ۱۰) **تبصره.** وقتی $K = \mathbf{R}$ باشد، اثبات قضیه (۱. ۵. ۱۰) نشان می‌دهد که، نامساوی (۱. ۱. ۵. ۱۰) وقتی f با ثابتی مانند $k \geq 0$ روی $I \times H$ **لیپشیتزی** باشد، یعنی، شرط (a) از (۶. ۴. ۱۰) برقرار باشد و برای هر $t \in I$ ، و x_1 ، x_2 در H ، $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \|$ ، معتبر است. در این صورت، J را می‌توان به‌عنوان یک فاصله با مبداء (منتهای) t_0 که شامل t_0 است، گرفت و u و v پریمیتیوهای توابعی رگله روی J هستند ، و می‌توان فرض کرد که ، نامساوی‌های $\| u'(t) - f(t, u(t)) \| \leq \varepsilon_1$ ، $\| v'(t) - f(t, v(t)) \| \leq \varepsilon_2$ فقط روی مکمل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش پذیر از J برقرار هستند. قضیه یکتایی (۲. ۵. ۱۰) به‌طور مشابهی (وقتی $K = \mathbf{R}$ است) تنها تحت این فرض که نگاشت f **به‌طور موضعی روی** $I \times H$ **لیپشیتزی** باشد ((۶. ۴. ۱۰) را ببینید) وقتی J را فاصله‌ای شامل t_0 به عنوان مبداء یا منتها بگیریم، و برقراری روابط $u'(t) = f(t, u(t))$ ، $v'(t) = g(t, v(t))$ روی مکمل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش پذیر از J مورد نظر باشد، درست است.

(۵. ۵. ۱۰) فرض کنیم، اگر $K = C$ باشد f روی $I \times H$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر، و اگر $K = \mathbf{R}$ باشد f روی $I \times H$ به‌طور موضعی لیپشیتزی باشد، و فرض کنیم v جوابی از معادله (۱. ۴. ۱۰) باشد، که روی گوی $J = \{t \in R : |t - t_0| < r\}$ تعریف شده است و $\bar{J} \subset I$ ، $\overline{v(J)} \subset H$ و $t \to f(t, v(t))$ روی J کراندار باشد. در این صورت، گویی مانند $J' = \{t \in R : |t - t_0| < r'\}$ مشمول I ، با $r' > r$ ، و یک جواب از معادله (۱. ۴. ۱۰) که روی J' تعریف شده، موجود است، که روی J بر v منطبق است.

(a) $K=R$. طبق فرض، برای $t \in J$ ، داریم $\| f(t, v(t)) \| \le M$ ، بنابراین، روی مکمل یک زیرمجموعه حداکثر شمارش پذیر از J ، $\| v'(t) \| \le M$. از این رابطه، طبق قضیه میانگین (۲. ۵. ۸) ، نتیجه می‌شود، که ، برای هر s ، t در J ، $\| v(s) - v(t) \| \le M | s - t |$. از محک همگرایی کوشی ((۶. ۱۴. ۳) را ببینید) نتیجه می‌گیریم که حدود $v((t_0 - r)+)$ و $v((t_0 + r)-)$ موجود هستند، و متعلق به $\overline{v(J)} \subset H$ می‌باشند. طبق (۶ . ۴. ۱۰) ، جوابی مانند w_1 (به ترتیب w_2) از معادله $x' = f(t, x)$ موجود است، که روی یک گوی باز U_1 (به ترتیب U_2) با مرکز $t_0 + r$ (به ترتیب $t_0 - r$) واقع در I تعریف شده است، و در این نقطه مقدار $v((t_0 + r) -)$ (به ترتیب $v((t_0 - r) +)$) می‌گیرد. علاوه بر این، از (۴. ۵ . ۱۰) نتیجه می‌شود که، w_1 (به ترتیب w_2) روی $U_1 \cap J$ (به ترتیب $U_2 \cap J$) بر v منطبق است، و بنابراین، اثبات در این حالت به پایان می‌رسد. (ملاحظه می‌شود که، لازم نبوده است که، وجود مشتقات راست یا چپ برای v (گسترش یافته به‌وسیله پیوستگی) و w_1 و w_2 را در نقاط $t_0 - r$ و $t_0 + r$ مورد بررسی قرار داد.)

(b) $K=C$. برای هر عدد مختلط ζ که $|\zeta| = 1$ ، قرار می‌دهیم $t = t_0 + \zeta s$ ، که در آن $s \ge 0$ ، و $v_\zeta(s) = v(t_0 + \zeta s)$. در این‌صورت، با استدلالی مشابه قسمت (a) ، ثابت می‌شود که $v_\zeta(r-)$ موجود است، و در H واقع است. بنابراین، جوابی مانند w_ζ از معادله $x' = f(t, x)$ موجود است، که روی یک گوی باز V_ζ با مرکز $t_0 + \zeta r$ واقع در J تعریف شده، و $w_\zeta(t_0 + \zeta r) = v_\zeta(r-)$. از (۴. ۵. ۱۰) نتیجه می‌شود که، w_ζ و v روی اشتراک $J \cap V_\zeta$ با پاره‌خطی با نقاط انتهایی t_0 ، $t_0 + \zeta r$ بر هم منطبق هستند. چون این توابع روی $J \cap V_\zeta$ تحلیلی هستند، طبق (۴. ۴. ۹)، روی $J \cap V_\zeta$ بر هم منطبق می‌باشند. اکنون، مجموعه فشرده $|t - t_0| = r$ با تعدادی متناهی از گوی‌های V_{ζ_i} $(1 \le i \le m)$ می‌پوشانیم. اگر $V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j} \ne \varnothing$ ، آنگاه، توابع w_{ζ_j} و w_{ζ_i} روی $V_{\zeta_j} \cap V_{\zeta_i}$ بر هم منطبق خواهند بود. زیرا، آنها هر دو روی مجموعه باز غیرتهی $J \cap V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j}$ با v برابر هستند، و فقط باید از (۲. ۴. ۹) استفاده کنیم (برای نشان دادن اینکه اشتراک قبلی تهی نیست، یادآوری می‌کنیم که، از فرض نتیجه می‌شود $r|\zeta_i - \zeta_j| < \rho_i + \rho_j$، که در آن ρ_i و ρ_j شعاع‌های V_{ζ_i} و V_{ζ_j} هستند. بنابراین، عددی مانند $\lambda \in]0, 1[$ موجود است، به طوری که، $r\lambda |\zeta_i - \zeta_j| < \rho_i$ و $r(1-\lambda)(\zeta_i - \zeta_j) < \rho_j$. در نتیجه، نقطه $t_0 + r((1-\lambda)\zeta_i + \lambda \zeta_j)$ متعلق به $J \cap V_{\zeta_i} \cap V_{\zeta_j}$ است). به این ترتیب، یک جواب از معادله $x' = f(t, x)$ وجود دارد که روی J برابر با v است، و روی هر یک از V_{ζ_i}ها برابر با w_{ζ_i} است، و یک گوی باز با مرکز t_0 و شعاع $r' > r$ یافت می‌شود، که در اجتماع این مجموعه‌ها واقع است ((۳. ۱۷. ۱۱) را ببینید)، و این مطلب اثبات را به پایان می‌رساند.

[1] (۱۰.۵.۵.۱) از (۱۰.۵.۵) نتیجه می‌شود که، اگر r_0 برابر l.u.b همه rهایی باشد که $\bar{\mathrm{J}} \subset \mathrm{I}$ و $\overline{v(\mathrm{J})} \subset \mathrm{H}$، آنگاه یا $r_0 = +\infty$، یا اگر J_0 گوی باز $|t-t_0| < r$ باشد، یکی از دو رابطه $\bar{\mathrm{J}}_0 \not\subset \mathrm{I}$، $\overline{v(\mathrm{J}_0)} \not\subset \mathrm{H}$ برقرار است.

(۱۰.۵.۶) فرض کنیم f، g دو نگاشت پیوسته ـ مشتق‌پذیر از $\mathrm{I}\times\mathrm{H}$ به E باشند، و روی $\mathrm{I}\times\mathrm{E}$ داشته باشیم $\| f(t,x)-g(t,x)\| \leq \alpha$، $\|\mathrm{D}_2 g(t,x)\| \leq k$، و فرض کنیم (t_0, x_0) نقطه‌ای از $\mathrm{I}\times\mathrm{H}$، و $\mu > 0$، $\beta > 0$ دو عدد اکیداً مثبت ثابت باشند، و برای $\xi \geq 0$، $\varphi(\xi) = \mu e^{k\xi} + (\alpha+\beta)\dfrac{e^{k\xi}-1}{k}$. اگر u یک جواب تقریبی معادله $x' = g(t, x)$ با تقریب β باشد، که روی یک گوی باز $\mathrm{J} = \{t \in \mathbb{R} : |t-t_0| < b\}$ واقع در I تعریف شده است و $u(t_0) = x_0$، و برای هر $t \in \mathrm{J}$، گوی بسته با مرکز $u(t)$ و شعاع $\varphi(|t-t_0|)$ در H واقع باشد، آنگاه، برای هر $y \in \mathrm{H}$ که $\| y - x_0\| \leq \mu$ باشد، معادله $x' = f(t, x)$ دارای جواب یکتایی مانند v است، که روی J تعریف شده، و مقادیر آن در H واقع شده است و $v(t_0) = y$، و علاوه بر این، برای هر $t \in \mathrm{J}$، $\|u(t) - v(t)\| \leq \varphi(|t-t_0|)$.

فرض کنیم A مجموعه اعدادی مانند r باشد، به‌طوری که $0 < r \leq b$ و جوابی مانند v_r برای معادله $x' = f(t, x)$ وجود داشته باشد که مقادیر آن در H واقع باشند، روی گوی $\mathrm{J}_r = \{t \in \mathbb{R} : |t-t_0| < r\}$ تعریف شده باشد، و در شرط $v_r(t_0) = y$ صدق کند. طبق قضیه وجود کوشی (۱۰.۴.۵)، A تهی نیست. علاوه بر این، روی J_r، داریم $\|v'_r(t) - g(t, v_r(t))\| \leq \alpha$، به عبارت دیگر، v_r یک جواب تقریبی معادله $x' = g(t, x)$ با تقریب α است، و طبق (۱۰.۵.۱.۱)، نتیجه می‌گیریم که، روی J_r، $\| u(t) - v_r(t)\| \leq \varphi(|t-t_0|)$. اگر r و r' در A، و $r < r'$ باشد، آنگاه v_r و $v_{r'}$، طبق (۱۰.۵.۲) و (۱۰.۵.۴)، روی J_r برهم منطبق‌اند.

فرض کنیم $\mathrm{c} = \mathrm{l.u.b.A}$. باید ثابت کنیم $c = b$. فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت، معادله $x' = f(t, x)$ روی J_c دارای جواب یکتایی مانند v است، که روی هر یک از گوی‌های J_r با $r < c$ برابر v_r است، مقادیرش در H واقع است، و چنان است که روی J_c، $\|u(t) - v(t)\| \leq \varphi(|t-t_0|)$. بنابراین، روی J_c داریم :

$$\|g(t, v(t))\| \leq \| g(t, u(t))\| + k\varphi(|t-t_0|)$$

و چون نگاشت $t \to g(t, u(t))$ روی $\bar{\mathrm{J}}_c$ پیوسته است، این نگاشت روی گوی فشرده $\bar{\mathrm{J}}_c$ کراندار است، که از آن نتیجه می‌شود، نگاشت $t \to g(t, v(t))$ روی J_c **کراندار** است. از طرف دیگر، هر نقطه

---

۱. مطلب فوق در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

چسبیدگی[1] z از $\nu(\mathrm{J}_c)$ حد دنباله‌ای مانند $(\nu(t_n))$ است ، که در آن $t_n \in \mathrm{J}_c$ ، t_n به سمت $t_0 + c\zeta$ با $|\zeta| \le 1$ میل می‌کند. طبق خاصیت پیوستگی، داریم : $\| z - u(t_0 + c\zeta) \| \le \varphi(c|\zeta|)$ ، بنابراین، طبق فرض $z \in \mathrm{H}$. به این ترتیب، می‌توانیم از (۱۰ . ۵ . ۵) استفاده نموده، و جوابی از معادله $x' = f(t, x)$ به‌دست آوریم، که روی یک گوی $\mathrm{J}_{r'}$ با $r' > c$ تعریف شده است، و در نقطه t_0 مقدار y را می‌گیرد، و این مطلب با تعریف c در تناقض است.

وقتی $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ باشد، می‌توان در گزاره (۱۰ . ۵ . ۶)، به‌جای J یک فاصله باز $]c, d[$ که شامل t_0 باشد، گذاشت.

(۱۰ . ۵ . ۶ . ۱) مجدداً یادآوری می‌کنیم که، اگر $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ باشد، می‌توانیم در گزاره (۱۰ . ۵ . ۶) از فرضیات روی f و g بکاهیم، و صرفاً فرض کنیم که g برای ثابتی مانند k لیپشیتزی، و f روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H}$ به‌طور موضعی لیپشتزی است.

مسائل

۱ . فرض کنیم $f(t, x)$ یک تابع حقیقی پیوسته باشد، که روی مجموعه $|t| \le a$ ، $|x| \le b$ در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده باشد، و چنان باشد که، برای $tx > 0$ ، $f(t, x) < 0$ ، و برای $tx < 0$ ، $f(t, x) > 0$. نشان دهید که، $x = 0$ یکتا جواب معادله دیفرانسیل $x' = f(t, x)$ است، که روی یک همسایگی 0 تعریف شده، و در شرایط اولیه $x(0) = 0$ صدق می‌کند (از برهان خلف استفاده نموده، و روی یک فاصله فشرده شامل 0، نقاطی که یک جواب به ماکزیمم یا مینیمم خود می‌رسد، مورد بررسی قرار دهید).

۲ . فرض کنیم $f(t, x)$ تابع حقیقی پیوسته‌ای باشد، که روی $\mathbf{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف شده است :
برای $x \ge t^2$ ، $f(t, x) = -2t$ ، برای $|x| < t^2$ ، $f(t, x) = -2x / t$ و برای $x \le -t^2$ ، $f(t, x) = 2t$. فرض کنیم (y_n) دنباله‌ای از توابع باشد، که با روابط :

$$y_0(t) = t^2 \ , \ y_n(t) = \int_0^t f(t \ , \ y_{n-1}(u))\, du \qquad (n \ge 1)$$

تعریف شده‌اند. نشان دهید که، دنباله توابع $(y_n(t))$ در هیچ نقطه‌ای از $t \in \mathrm{R}$ که $t \neq 0$ همگرا نیست، اگرچه، معادله دیفرانسیل $x' = f(t, x)$ جواب یکتایی دارد که در شرط اولیه $x(0) = 0$ صدق می‌کند (مسأله ۱ را ببینید).

۳ . برای هر زوج $\alpha < 0$ ، $\beta > 0$ از اعداد حقیقی، تابعی که برای $t < \alpha$ برابر $-(t-\alpha)^2$، برای $\alpha \le t \le \beta$ برابر 0 ، و برای $t > \beta$ برابر $(t-\beta)^2$ است، جوابی از معادله دیفرانسیل $x' = 2|x|^{\frac{1}{2}}$ با شرط اولیه $x(0) = 0$ است. فرض کنیم u_0 یک تابع پیوسته دلخواه باشد، که روی یک فاصله فشرده $[a, b]$ تعریف شده، و $u_n(t)$ روی $[a, b]$ به شکل استقرایی $u_n(t) = 2\int_0^t |u_{n-1}(s)|^{1/2} ds$ تعریف شده باشد. نشان که ، اگر γ بزرگترین عددی در $[a, b]$ باشد، که روی

1 . Cluster point = Точка прикосновения

$[a\ ,\ \gamma]$، $u_0(t)=0$ ، آنگاه دنباله (u_n) به‌طور یکنواخت روی $[a\ ,b]$ به جوابی از معادله $x' = 2\,|\,x\,|^{\frac{1}{2}}$ همگرا است، که برای $a \le t \le \gamma$ برابر 0، و برای $\gamma \le t \le b$، برابر $(t-\gamma)^2$ است. (ابتدا، حالتی که برای $t \le \gamma$ ، $u_0(t)=0$ و برای $\gamma \le t \le b$ ، $u_0(t)=k\,(t-\gamma)^2$ است، مورد بررسی قرار دهید. سپس، ملاحظه کنید که، در صورت لزوم با تعویض u_0 به u_1 می‌توان فرض کرد که u_0 روی $[a\ ,b]$ صعودی است. ثابت کنید که، برای هر $\varepsilon > 0$، دو ثابت $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ موجود هستند، به‌طوری که روی $[a\ ,\ b]$،

$$k_1 v_0(t-\gamma-\varepsilon) \le u_0(t) \le k_2 v_0(t-\gamma+\varepsilon)$$

که در آن $v_0(t)=0$ اگر $t \le 0$ ، و $v_0(t)=t^2$ اگر $t \ge 0$.)

۴ . با نمادهای بخش ۴ . ۱۰ ، فرض کنیم $K = R$ ، f روی $I \times H$ پیوسته و کراندار باشد و $M = \sup\limits_{(t,x)\in I\times H} \| f(t\ ,x)\|$ ، و فرض کنیم x_0 نقطه‌ای از H، و S یک گوی باز با مرکز x_0 و شعاع r باشد که در H واقع شده است.

(a) علاوه بر مطالب فوق ، فرض کنیم f روی $I \times S$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد (شرطی که خود به خود وقتی E متناهی البعد و I مشمول یک فاصله فشرده I_0 باشد، به‌طوری‌که f روی $I_0 \times H$ پیوسته باشد، برقرار است). ثابت کنید که، برای هر $\varepsilon > 0$ ، و هر فاصله فشرده $[t_0\ ,\ t_0+h]$ (به ترتیب $[t_0-h\ ,\ t_0]$) واقع در I به‌طوری که $h < r\,/\,(M+\varepsilon)$، معادله $x' = f\,(t\ ,x)$ روی این فاصله دارای یک جواب تقریبی با تقریب ε است، که به ازاء $t = t_0$ مقدار x_0 می‌گیرد. (فرض کنید $\delta > 0$ چنان باشد که از روابط $|\,t_1 - t_2\,| \le \delta$ ، $\|x_1 - x_2\| \le \delta$ نتیجه شود $\| f\,(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \le \varepsilon$. با شروع از نقطه t_0 و با تقسیم فاصله $[t_0\ ,\ t_0+h]$ به فواصلی که طول آنها از $\inf(\delta\ ,\ \delta\,/\,M)$ تجاوز نکند، به‌طور متوالی جواب تقریبی روی هر یک از این فاصله‌های کوچک را تعریف نموده، آنها را مورد بررسی قرار دهید.)

(b) فرض کنیم فضای E متناهی‌البعد و $I = \,]t_0-a\ ,\ t_0+a[$ باشد. ثابت کنید که، جوابی از معادله $x' = f\,(t\ ,\ x)$ موجود است، که روی فاصله $[t_0\ ,t_0+c]$ (به ترتیب $[t_0-c\ ,\ t_0]$) ، با $c = \inf\left(a\ ,\dfrac{r}{M}\right)$، تعریف شده، و مقادیرش در S می‌گیرد، و به ازاء $t = t_0$ برابر x_0 است. (« **قضیه پئانو**»[1]: برای هر n، فرض کنیم u_n جوابی تقریبی با تقریب $\dfrac{1}{n}$ باشد، که روی $J_n = [\,t_0\ ,\ t_0+c-\dfrac{1}{n}\,]$ تعریف شده است، وجود این جواب در قسمت (a) ثابت شده است. ملاحظه کنید که، برای هر m، تحدید توابع u_n (برای $n \ge m$) به J_m تشکیل زیرمجموعه‌ای به‌طور نسبی فشرده از فضای نرم‌دار $\mathscr{C}_E(J_m)$ می‌دهند ((۷. ۵. ۷) را ببینید)، از «فرایند قطری» شبیه اثبات (۲. ۱۳. ۹) استفاده کنید، و بالاخره (۳. ۴. ۱۰) و (۸. ۷. ۸) را به کار گیرد.)

۵ . فرض کنیم f نگاشتی از فضای باناخ (c_0) (بخش ۳. ۵، مسأله ۵ را ببینید) به (c_0) باشد، به‌طوری که، برای $x = (x_n)$ ، $f(x) = y_n$ ، که در آن $y_n = |x_n|^{1/2} + \dfrac{1}{n+1}$. نشان دهید که، f روی (c_0) پیوسته است، اما، جوابی از معادله دیفرانسیل $x' = f\,(x)$ وجود ندارد، که روی یک همسایگی 0 در $\mathbf{R}$ تعریف شده باشد، مقادیرش در (c_0) بگیرد، و در $t = 0$ برابر 0 باشد. (اگر یک چنین جواب $u(t) = (u_n(t))$ وجود داشته باشد، با یک انتگرال‌گیری ساده مقدار هر یک از توابع $u_n(t)$ را محاسبه نموده، و نشان دهید که، دنباله $(u_n(t))_{n\ge 0}$ برای $t \ne 0$ به سمت 0 میل نمی‌کند.)

۶ . (a) با نمادهای بخش ۴ . ۱۰ ، فرض کنیم، اگر $K = C$ ، f روی $I \times H$ تحلیلی باشد، و اگر $K = \mathbf{R}$ ، f روی $I \times H$ به

1 . Peano’s theorem = Теорема Пеано

طور موضعی لیپشیتیزی باشد، و فرض کنیم I_0 گویی باز با مرکز t_0 و شعاع a واقع در I، و S گویی باز با مرکز x_0 و شعاع r واقع در H باشد، و $h(s, z)$ یک تابع پیوسته باشد، که روی $[0, a[\times [0, r[\subset R^2$ تعریف شده است، $h(s, z) \geq 0$ و برای هر $s \in [0, a[$، تابع $z \to h(s, z)$ روی $[0, r[$ صعودی باشد. فرض کنیم:

(۱) روی $I_0 \times S$، $\|f(t, x)\| \leq h(|t - t_0|, \|x - x_0\|)$؛

(۲) فاصله‌ای مانند $[0, \alpha]$ با $\alpha < a$، و تابعی مانند φ که پریمیتیو یک تابع رگله φ' روی $[0, \alpha]$ است، موجود باشند، به‌طوری که $\varphi(0) = 0$، و روی فاصله $[0, \alpha]$، با استثناء کردن مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر از مقادیر s، $\varphi(s) \in [0, r[$ و $\varphi'(s) > h(s, \varphi(s))$. نشان دهید که، جوابی مانند u از معادله $x' = f(t, x)$ وجود دارد، که روی گوی باز J به مرکز t_0 و شعاع α تعریف شده و مقادیرش را در S می‌گیرد، و در شرط $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند. علاوه بر این، روی J، $\|u(t) - x_0\| \leq \varphi(|t - t_0|)$. (از (۵ . ۵ . ۱۰) استفاده نموده، ثابت کنید که، بزرگترین گوی باز مانند J_0 با مرکز t_0 واقع در I_0 یافت می‌شود، که روی آن معادله $x' = f(t, x)$ دارای جوابی مانند v است، که مقادیرش در S می‌گیرد، و روی J_0، $\|v(t) - x_0\| \leq \varphi(|t - t_0|)$، و به‌علاوه، این جواب یکتا است. سپس، از قضیه میانگین استفاده نموده، با استفاده از تناقض، ثابت کنید که $J \subset J_0$.)

(b) فرض کنیم که $H = E$، و تابعی مانند $h(z) > 0$ موجود باشد، که روی فاصله $[0, +\infty[$ معین، پیوسته و صعودی است، و $\int_0^{+\infty} \frac{dz}{h(z)} = +\infty$، و روی $I_0 \times E$، $\|f(t, x)\| \leq h(\|x\|)$. نشان دهید که، هر جواب معادله $x' = f(t, x)$ که روی یک همسایگی t_0 تعریف شده باشد، روی I_0 معین است. (از (a) استفاده کنید.)

(c) اگر روی $I_0 \times S$، $\|f(t, x)\| \leq M$ آنگاه معادله $x' = f(t, x)$ دارای جوابی مانند u روی گوی J با مرکز t_0 و شعاع $c = \inf(a, \frac{r}{M})$ است، که مقادیرش را در S می‌گیرد، و در شرط $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند. (بگیرید $h(s, z) = M$). فرض کنیم $K = E = C$ و $a \geq \frac{r}{M}$. نشان دهید که، اگر نگاشت f ثابت نباشد، آنگاه یک گوی باز $J' \supset \bar{J}$ موجود است، که روی آن u می‌تواند به یک جواب معادله $x' = f(t, x)$ که مقادیرش را در S می‌گیرد، گسترش یابد. (ملاحظه کنید که، براساس اصل ماکزیمم (۹ . ۵ . ۹)، روی $t \in J$، $|u'(t)| < M$. برای هر ζ که $|\zeta| = 1$، تابع $u_\zeta(s) = u(t_0 + \zeta s)$ را مورد بررسی قرار داده، و با بحثی مشابه آن‌چه که در (۵ . ۵ . ۱۰) بیان شد، ثابت کنید که، فرض‌های قضیه (۵ . ۵ . ۱۰) برقرار هستند.) ممکن نیست، برای شعاع J' عددی تنها وابسته به a، r و M، و نه به خود f انتخاب نمود، به عنوان مثال $f(t, x) = ((1 + x)/2)^{1/n}$ (بخش ۵ . ۹، مسأله ۸)، با $t_0 = x_0 = 0$، $a = r = M = 1$ مطلب فوق را ثابت می‌کند ($n > 1$ یک عدد صحیح دلخواه است).

۷. فرض کنیم f یک تابع حقیقی کراندار پیوسته روی P چند قرصی $|t - t_0| < a$، $|x - x_0| < b$ واقع در R^2 باشد، و $M = \sup_{(t,x) \in P} |f(t, x)|$، $r = \inf(a, \frac{b}{M})$، و $I =]t_0 - r, t_0 + r[$، و فرض کنیم Φ مجموعه همه جواب‌های u از معادله $x' = f(t, x)$ باشد، که روی I تعریف شده‌اند، مقادیرشان را در یک فاصله باز $]x_0 - b, x_0 + b[$ می‌گیرند، و به ازاء $t = t_0$ برابر x_0 هستند. مجموعه Φ غیرتهی است (مسأله ۴(b) را ببینید). برای هر $t \in I$، فرض کنیم $v(t, t_0, x_0) = \inf_{u \in \Phi} u(t)$، $w(t, t_0, w_0) = \sup_{u \in \Phi} u(t)$. نشان دهید که v و w متعلق به Φ هستند (بخش ۵ . ۷،

مسأله ۱۱ را ببینید) ؛ v (به ترتیب w) را جواب مینیمال[1] (به ترتیب جواب ماکسیمال[2]) معادله $x' = f(t, x)$ روی I متناظر با نقطه (t_0, x_0) می‌نامند.

برای هر $\tau \in I$، فرض کنیم $\xi = v(\tau, t_0, x_0)$. نشان دهید که، روی یک فاصله به شکل $]\tau, \tau + h[$ اگر $\tau > t_0$، و به شکل $]\tau - h, \tau[$ اگر $\tau < t_0$ (با $h > 0$) ، داریم $v(t, \tau, \xi) = v(t, t_0, x_0)$. نتیجه بگیرید که، یک بزرگترین فاصله باز $]t_1, t_2[$ واقع در $]t_0 - a, t_0 + a[$ و شامل t_0 موجود است، به‌طوری که $v(t, t_0, x_0)$ می‌تواند به یک تابع پیوسته g که روی $]t_1, t_2[$ تعریف شده، و مقادیرش در $]x_0 - b, x_0 + b[$ می‌گیرد، و چنان است که، برای هر $t \in]t_1, t_2[$ ، $g(s) = v(s, t, g(t))$ روی فاصله‌ای به شکل $]t, t+h[$ اگر $t > t_0$ ، و به شکل $]t - h, t[$ اگر $t < t_0$ ، (با $h > 0$) ، گسترش داد. (نشان دهید که، اگر g_1 گسترش مشابه دیگری از $v(t, t_0, x_0)$ روی فاصله‌ای مانند $]t_1', t_2'[$ باشد، آنگاه g و g_1 روی اشتراک فاصله‌های $]t_1, t_2[$ و $]t_1', t_2'[$ بر هم منطبق خواهند بود. برای این کار، l.u.b (به ترتیب g.l.b) مجموعه نقاط s از این اشتراک که برای آنها g و g_1 روی فاصله $]t_0, S[$ (به ترتیب $]S, t_0[$) بر هم منطبق هستند، مورد بررسی قرار دهید). علاوه بر این، نشان دهید که یا $t_1 = t_0 - a$ (به ترتیب $t_2 = t_0 + a$)، یا $g(t_1 +) = x_0 \pm b$ (به ترتیب $g(t_2 -) = x_0 \pm b$).

۸ . (a)[3] لم گرونوال (۳. ۱. ۵ . ۱۰) را به نامساوی‌های :

$$w(t) \le \varphi(t) + \theta(t) \int_0^t \psi(s)\, w(s)\, ds ,$$

$$w(t) \le \varphi(t) + \theta_1(t) \int_0^t \psi_1(s)\, w(s)\, ds + \theta_2(t) \int_0^t \psi_2(s)\, w(s)\, ds$$

و غیره ، که در آن φ ، ψ_1 ، ψ_2 ، θ_1 و θ_2 توابع رگله بزرگتر یا مساوی صفر هستند، تعمیم دهید. (از استقراء روی تعداد انتگرال‌های سمت راست استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم $K(t, s)$ یک تابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر بزرگتر یا مساوی صفر باشد که روی $[0, c] \times [0, c]$ تعریف شده است، و فرض کنیم دو تابع رگله g ، h موجود باشند، به‌طوری که روی $[0, c]$ معین و بزرگتر یا مساوی صفر بوده ، و $\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \le g(t) h(s)$. نشان دهید که ، از نامساوی :

$$w(t) \le \varphi(t) + \int_0^t K(t, s)\, w(s)\, ds,$$

برای یک تابع رگله $w \ge 0$ ، نتیجه می‌شود :

$$w(t) \le \varphi_1(t) + \theta_1(t) \int_0^s h(s)\, w(s)\, ds$$

که در آن φ_1 و θ_1 توابعی هستند، که می‌توان آنها را صریحاً وقتی توابع φ ، g و $r(t) = K(t, t)$ معلوم باشند، محاسبه نمود (تابع $y(t) = \int_0^s K(t, s)\, w(s)\, ds$ و کران بالای مشتق آن را مورد بررسی قرار دهید).

(c) . (a) یا (b) را برای نامساوی :

---

1 . Minimal solution = Минимальное решение

2 . Maximal solution = Максимальное решение

۳. مسائل ۸ و ۹ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن به زبان فارسی ترجمه شده‌اند. مترجم.

$$w(t) \leq t+\lambda^2 t \int_0^t e^{-\lambda s} w(s)\,ds+\int_0^t w(s)\,ds$$

وقتی $\lambda > 0$ باشد، به کار گیرید.

۹ . [1] فرض کنیم w یک تابع حقیقی باشد، که روی فاصله‌ای باز مانند $I \subset \mathbf{R}$ تعریف شده است، و فرض کنیم w پریمیتیو یک تابع رگله w' باشد که نقاط ناپیوستگی آن در I نقاطی ایزوله بوده، در رابطه $w'(t+) > w'(t-)$ صدق می‌کنند؛ علاوه بر این، فرض کنیم، اگر E مجموعه نقاط ناپیوستگی w' باشد، مشتق دوم w'' روی $I - E$ موجود بوده، و روی $I - E$، $w''(x) \geq w(x)$ باشد.

(a) نشان دهید که، اگر a و b دو نقطه از I باشند، به‌طوری که $w(a) = w(b) = 0$ آنگاه، برای $a < x < b$، $w(x) \leq 0$ (از تناقض استفاده کنید). نشان دهید که، برای هر سه نقطه $x_1 < x < x_2$ واقع در I، داریم:

$$w(x) \leq \frac{w(x_1)\sin h\,(x_2 - x) + w(x_2)\sin h\,(x - x_1)}{\sin h(x_2 - x_1)}$$

(تفاضل $w(x) - u(x)$، که در آن u جوابی از معادله $u''(x) - u(x) = 0$ است، که در نقاط x_1، x_2 همان مقادیری می‌گیرد، که w در این نقاط می‌گیرد، مورد بررسی قرار دهید).

۶. معادلات دیفرانسیل خطی

قضیه وجودی (۵ . ۴ . ۱۰) را می‌توان در حالت‌های خاص به شکل بهتری درآورد:

(۱. ۶ . ۱۰) فرض کنیم $I \subset K$ گویی باز با مرکز t_0، و شعاع r باشد، و فرض کنیم f روی $I \times E$ پیوسته باشد اگر $K = R$؛ و روی $I \times E$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد اگر $K = C$؛ و برای هر $t \in I$، x_1، x_2 در E داشته باشیم $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k(|t - t_0|)\,\|x_1 - x_2\|$، که در آن $\xi \to k(\xi)$ تابعی رگله روی فاصله $[0, r[$ است. در این صورت، برای هر $x_0 \in E$، معادله دیفرانسیل $x' = f(t, x)$ دارای جوابی یکتا مانند u است که روی I تعریف شده است، و در شرط اولیه $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند.

فرض کنیم c برابر l.u.b اعدادی مانند ρ باشد که $0 < \rho < r$ و معادله $x' = f(t, x)$ دارای جوابی است که روی $|t - t_0| < \rho$ تعریف شده و در t_0 مقدار x_0 می‌گیرد. تنها باید ثابت کنیم (طبق (۴ . ۵ . ۱۰))، که $c = r$ است. فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت، طبق (۴. ۵ . ۱۰)، معادله $x' = f(t, x)$ دارای جوابی مانند v است، که روی فاصله $J = \{t \in \mathbf{R} : |t - t_0| < c\}$ تعریف شده، و در شرط اولیه $v(t_0) = x_0$ صدق می‌کند. نشان می‌دهیم که، شرایط قضیه (۵ . ۵ . ۱۰) برقرار هستند. در این صورت، با به کارگیری (۵ . ۵ . ۱۰) به یک تناقض می‌رسیم، و اثبات به پایان می‌رسد.

---

[1] مسائل ۸ و ۹ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارند، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده‌اند. مترجم.

چون در اینجا $H = E$ ، شرط $\overline{v(J)} \subset H$ به وضوح برقرار است. به این ترتیب، تنها باید **کراندار** بودن نگاشت $t \to f(t, v(t))$ روی J را مورد بررسی قرار دهیم. اما، روی فاصله فشرده $[0, c]$ ، تابع k کراندار است. همچنین، تابع پیوسته $t \to \|f(t, x_0)\|$ روی مجموعه فشرده $\bar{J}$ کراندار است. بنابراین، دو عدد $m > 0$ و $h > 0$ موجود هستند، به طوری که برای هر $t \in J$ و $x \in E$ ،

$$\|f(t, x)\| \le m \|x\| + h .$$

از این رابطه، نتیجه می‌شود که، برای هر $t \in J$ ، $\|v'(t)\| \le m\|v(t)\| + h$. اگر قرار دهیم $w(\xi) = \|v(t_0 + \lambda\xi)\|$ با $|\lambda| = 1$ ، آنگاه از قضیه میانگین نتیجه می‌شود که :

$$w(\xi) \le \|x_0\| + hc + m \int_0^{\xi} w(\zeta) d\zeta .$$

بنابراین، می‌توانیم از لم گرونوال (۳. ۱. ۵. ۱۰) استفاده کنیم. از این لم نتیجه می‌شود که، روی J ، $\|v(t)\| \le a e^{m|t - t_0|} + b$ (a و b اعدادی ثابت هستند)، بنابراین ، v روی J کراندار است، و در نتیجه $\|f(t, v(t))\| \le m\|v(t)\| + h$ نیز چنین است.

(۱. ۱. ۶. ۱۰) در اینجا، دوباره ، وقتی $K = \mathbf{R}$ باشد، شرط پیوستگی روی f می‌تواند به شرط (a) تبصره (۶. ۴. ۱۰) تقلیل یابد.

شکل خاصی از معادله دیفرانسیل (۱. ۴. ۱۰) که به صورت :

$$x' = A(t) . x + b(t) \qquad (۱۰.۶.۲)$$

(با $f(t, x) = A(t) . x + b(t)$) باشد، **معادله دیفرانسیل خطی** نامیده می‌شود. در معادله فوق A یک نگاشت از I به $\mathscr{L}(E, E)$ فضای باناخ نگاشت‌های خطی پیوسته از E به E است (بخش ۷. ۵ را ببینید) ، و b نگاشتی از I به E می‌باشد. در اینجا، داریم $H = E$ ، و طبق (۴. ۷. ۵) ، برای هر $t \in I$ ، و x_1 ، x_2 در E ،

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le \|A(t)\| . \|x_1 - x_2\|$$

بنابراین، با به کارگیری (۱. ۶. ۱۰) و (۱. ۱. ۶. ۱۰) به‌دست می‌آوریم :

(۳. ۶. ۱۰) فرض کنیم $I \subset K$ یک گوی باز به مرکز t_0 باشد، و A و b توابعی رگله روی I باشند اگر $K = \mathbf{R}$ و توابعی تحلیلی روی I باشند اگر $K = C$. در این صورت، برای هر $x_0 \in E$ ، معادله (۲. ۶. ۱۰) دارای جوابی یکتا مانند u است، که روی I تعریف شده است و در شرط اولیه $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند.

دیده می‌شود که ، اگر $b = 0$ ، و $x_0 = 0$ باشد، آنگاه جواب u از معادله (۲. ۶. ۱۰) برابر 0 است. از (۳. ۶. ۱۰) به سادگی نتیجه به مراتب کلی‌تر زیر به‌دست می‌آید :

(۴ . ۶ . ۱۰) با فرضیاتی مشابه آن‌چه که در (۳ . ۶ . ۱۰) بیان شد، برای هر $s \in \mathrm{I}$ و هر $x_0 \in \mathrm{E}$ جوابی یکتا مانند u از معادله (۲. ۶ . ۱۰) موجود است ، که روی I تعریف شده و در شرط $u(s) = x_0$ صدق می‌کند.

با تعویض t به $t - t_0$ ، می‌توان فرض کرد $t_0 = 0$. فرض کنیم I گویی به شعاع r باشد. نگاشت :

$$t \to r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2}$$

یک هومیومورفیسم تحلیلی از I بروی I است، که s را به 0 می‌نگارد. در واقع ، داریم[۱] :

$$t' = r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2} = \frac{r^2}{\bar{s}} \left(1 - \frac{r^2 - |s|^2}{r^2 - \bar{s}\, t}\right)$$

بنابراین، اگر $r \leq |t|$ ، خواهیم داشت :

$$|r^2 - \bar{s}\, t| \leq r\,(r + |s|)$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$|t'| \leq \frac{r^2}{|s|} \left(1 - \frac{r^2 - |s|^2}{r(r+|s|)}\right) = r$$

ادعای ما از این حقیقت ناشی می‌شود که، برعکس[۲] ،

$$t = r^2 \frac{t' - s}{\bar{s}\, t' - r^2} .$$

اکنون ، اگر

$$\mathrm{A}_1(t) = \frac{(\bar{s}\, t - r^2)^2}{r^2(|s|^2 - r^2)}\, \mathrm{A}\left(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2}\right)$$

و

$$\mathrm{b}_1(t) = \frac{(\bar{s}\, t - r^2)^2}{r^2(|s|^2 - r^2)}\, \mathrm{b}\left(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2}\right)$$

فوراً دیده می‌شود که، اگر v یکتا جواب معادله دیفرانسیل :

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای فرمول $t' = r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2}$ نوشته شده است $t' = r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - 1}$ (یعنی به جای r^2 ، 1 نوشته شده است) که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد، و نحوه بیان مطالب در نتیجه‌گیری‌های سطرهای بعدی آن کمی متفاوت است. مترجم.

۲. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای فرمول $t = r^2 \frac{t'-s}{\bar{s}\, t' - r^2}$ نوشته شده است $t = r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t' - 1}$ (یعنی به جای r^2 ، 1 نوشته شده است) که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد. مترجم.

$$x' = A_1(t) \, . \, x + b_1(t)$$

باشد، که روی I تعریف شده و $v(0) = x_0$ ، آنگاه :

$$u(t) = v(r^2 \frac{t-s}{\bar{s}\, t - r^2})$$

یکتا جواب معادله (۲. ۶. ۱۰) خواهد بود، که روی I تعریف شده و $u(s) = x_0$.

وقتی $E = K^n$ ، $A(t) = (a_{ij}(t))$ یک ماتریس $n \times n$ ، $b(t) = (b_i(t))$ یک بردار، و $a_{ij}(t)$ و $b_i(t)$ توابعی رگله روی I باشند اگر $K = R$ ، و توابعی تحلیلی روی I باشند اگر $K = C$ ، و اگر $x = (x_i)_{1 \le i \le n}$ باشد، آنگاه، معادله (۲. ۶. ۱۰) هم‌ارز **دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی اسکالر** :

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \qquad (1 \le i \le n) \tag{۱۰. ۶. ۵}$$

است.

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام (اسکالر) :

$$D^n x - a_1(t)\, D^{n-1} x - \cdots - a_{n-1}(t)\, D x - a_n(t)\, x = b(t) \tag{۱۰. ۶. ۶}$$

با مرتبه $n > 1$ ، هم‌ارز دستگاهی از نوع (۵ . ۶ . ۱۰) است. در واقع، اگر قرار دهیم $x_1 = x$ و برای $2 \le p \le n$ ، $x_p = D^{p-1} x$ ، معادله (۵ . ۶ . ۱۰) را می‌توان به‌صورت دستگاه هم ارز :

$$\begin{cases} x'_k = x_{k+1} \quad , \; 1 \le k \le n-1 \quad \text{برای} \\ x'_n = a_1(t) x_n + a_2(t) x_{n-1} + \cdots + a_n(t) x_1 + b(t) \end{cases} \tag{۱۰. ۶. ۷}$$

نوشت .

۷. وابستگی جواب به پارامترها

(۱. ۷. ۱۰) فرض کنیم E یک فضای باناخ روی هیأت K ، I یک زیرمجموعه باز K ، H یک زیر مجموعه باز E ، P یک فضای متریک، و f یک نگاشت از $I \times H \times P$ به E باشد، و فرض کنیم که :

(۱) برای هر $z \in P$ ، $(t, x) \to f(t, x, z)$ نگاشتی پیوسته ـ مشتق‌پذیر از $I \times H$ به E باشد.

(۲) f و $D_2 f$ روی $I \times H \times P$ پیوسته باشند.

در این‌صورت ، برای هر نقطه $(t_0, x_0, z_0) \in I \times H \times P$ ، گویی باز مانند $J \subset I$ به مرکز t_0 و گویی باز مانند $T \subset P$ به مرکز z_0 موجود هستند، به‌طوری‌که، برای هر $z \in T$ در J معادله $x' = f(t, x, z)$ دارای یک و

تنها یک جواب $t \to u(t, z)$ است، به‌طوری که $u(t_0, z) = x_0$. علاوه براین، نگاشت $(t, z) \to u(t, z)$ روی $J \times T$ کراندار و پیوسته است.

اثبات شباهت زیادی به اثبات قضیه (۵ . ۴ . ۱۰) دارد. فرض کنیم J_a گویی فشرده به مرکز t_0 و شعاع a واقع در I باشد. طبق (۱. ۵ . ۴. ۱۰) ، گویی باز مانند B به مرکز x_0 و شعاع b واقع در H ، و گویی باز مانند T به مرکز z_0 واقع در P موجود می‌باشد، به طوری که روی $J_a \times B \times T$ ، $\| f(t, x, z) \| \leq M$ و $\| D_2 f(t, x, z) \| \leq k$. برای $r < a$ ، فرض کنیم J_r گوی بسته به مرکز t_0 و شعاع r باشد. اگر $K = R$ ، آنگاه F_r را فضای نگاشت‌های پیوسته کراندار y از $J_r \times T$ به E می‌گیریم، که فضایی باناخ است. اگر $K = C$ ، آنگاه F_r را به عنوان فضای نگاشت‌های y از $J_r \times T$ به E که روی $J_r \times T$ کراندار و پیوسته هستند و برای هر $z \in T$ ، نگاشت $t \to y(t, z)$ روی $\mathring{J}_r$ تحلیلی است، تعریف می‌کنیم. طبق (۱. ۱۲. ۹) ، F_r دوباره فضایی باناخ است. در ادامه، بقیه اثبات (۵ . ۴ . ۱۰) بدون تغییر باقی می‌ماند.

برای معادلات دیفرانسیل خطی، نتیجه بهتری وجود دارد :

(۲. ۷. ۱۰) فرض کنیم $I \subset K$ یک گوی باز به مرکز t_0 باشد، و فرض کنیم A و b روی $I \times P$ پیوسته باشند، و اگر $K = C$ ، برای هر $z \in P$ ، نگاشت‌های $t \to A(t, z)$ ، $t \to b(t, z)$ روی I تحلیلی باشند. برای هر $x \in E$ ، فرض کنیم $t \to u(t, z)$ جواب معادله $x' \to A(t, z).x + b(t, z)$ باشد، که روی I تعریف شده و در شرط $u(t_0, z) = x_0$ صدق می‌کند. در این‌صورت ، u روی $I \times P$ پیوسته است.

فرض کنیم $z_0 \in P$ ، و یک گوی فشرده دلخواه $J \subset I$ به مرکز t_0 و شعاع r را مورد بررسی قرار می‌دهیم. کافی است ثابت کنیم که u در هر نقطه (t, z_0) که در آن $t \in J$ پیوسته است. چون نگاشت $t \to u(t, z_0)$ روی J پیوسته است، روی این مجموعه فشرده کراندار خواهد بود. فرض کنیم روی J ، $\| u(t, z_0) \| \leq M$. طبق (۱. ۵ . ۴. ۱۰) ، یک همسایگی U از z_0 واقع در P موجود است، به‌طوری که برای هر $z \in U$ و $t \in J$ ، $\|A(t, z)\| \leq k$. برای $\varepsilon > 0$ دلخواه داده شده ، نشان می‌دهیم که، یک همسایگی $V \subset U$ از نقطه z_0 در P موجود است، به‌طوری‌که برای $t \in J$ و $z \in V$ ،

$$\| A(t, z) - A(t, z_0) \| \leq \varepsilon \ , \ \| b(t, z) - b(t, z_0) \| \leq \varepsilon$$

فقط باید یادآوری کنیم که، برای هر $s \in J$ یک همسایگی W_s از s در J و یک همسایگی $V_s \subset U$ از z_0 در P موجودند، به طوری‌که نامساوی‌های قبلی روی $W_s \times V_s$ برقرار هستند، سپس، J را با تعداد محدودی از همسایگی‌های W_{s_i} می‌پوشانیم، و V را برابر اشتراک این V_{s_i} ها می‌گیریم. اکنون، می‌توانیم بنویسیم :

$$u'(t, z) - u'(t, z_0) = A(t, z).(u(t, z) - u(t, z_0)) + (A(t, z) - A(t, z_0)).u(t, z_0) + b(t, z) - b(t, z_0)$$

بنابراین، برای $t \in \mathrm{J}$ و $z \in \mathrm{V}$ ،

$$\| u'(t , z) - u'(t , z_0) \| \leq k \| u(t , z) - u(t , z_0) \| + \varepsilon (\mathrm{M}+1)$$

قرار می‌دهیم $t = t_0 + \lambda \xi$ با $| \lambda | = 1$ ، $0 \leq \xi \leq r$ ، و $w(\xi) = \| u(t_0 + \lambda \xi , z) - u(t_0 + \lambda \xi , z_0) \|$.
در این صورت، طبق قضیه میانگین ، برای $0 \leq \xi \leq r$ داریم :

$$w(\xi) \leq \varepsilon (\mathrm{M}+1) r + k \int_0^{\xi} w(\zeta) d\zeta$$

با استفاده از (۳. ۱. ۵. ۱۰) برای $0 \leq \xi \leq r$ به‌دست می‌آوریم :

$$w(\xi) \leq \varepsilon (\mathrm{M}+1) r e^{kr}$$

به‌عبارت دیگر، برای $t \in \mathrm{J}$ و $z \in \mathrm{V}$ ، داریم $\| u(t , z) - u(t , z_0) \| \leq \varepsilon (\mathrm{M}+1) r e^{kr}$. چون $\varepsilon > 0$ به‌طور دلخواه انتخاب شده، مطلب فوق اثبات را به پایان می‌رساند. (زیرا ، نگاشت $t \to u(t , z_0)$ روی J پیوسته است).

(۳. ۷ . ۱۰) علاوه بر فرض‌های (۱. ۷ . ۱۰) ، فرض کنیم P یک زیرمجموعه باز از فضای باناخ G باشد، و (۱) اگر $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ ، f روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H} \times \mathrm{P}$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد، (۲) اگر $\mathrm{K} = \mathrm{C}$ ، f دوبار روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H} \times \mathrm{P}$ پیوسته مشتق‌پذیر باشد (وقتی E و G متناهی‌البعد باشند، مطلب فوق معادل این است که بگوییم، f روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H} \times \mathrm{P}$ تحلیلی است (۱۰. ۹ را ببینید). فرض کنیم $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I}$ یک گوی باز به مرکز t_0 و $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{P}$ یک گوی باز به مرکز z_0 باشد ، به طوری که ، برای هر $z \in \mathrm{T}_1$ ، معادله $x' = f(t , x , z)$ دارای جوابی مانند $t \to u(t , z)$ باشد که روی J_1 تعریف شده و $u(t_0 , z) = x_0$. (طبق (۲ . ۵ . ۱۰) این جواب یکتا نیز هست). در این صورت، برای هر گوی باز J به مرکز t_0 به طوری که $\bar{\mathrm{J}} \subset \mathrm{J}_1$، گویی باز مانند $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_1$ به مرکز z_0 موجود است، به‌طوری که، نگاشت $(t , z) \to u(t , z)$ روی $\mathrm{J} \times \mathrm{T}$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. علاوه براین، برای هر $z \in \mathrm{T}$ ، نگاشت $t \to \mathrm{D}_2 u(t , z)$ روی J برابر با $\mathrm{U}(t , z)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی :

$$U' = A(t , z) \circ U + B(t , z) \tag{۱. ۳. ۷. ۱۰}$$

با $U(t_0, z) = 0$ است، که در آن :

$$A(t , z) = \mathrm{D}_2 f(t , u(t , z) , z) \ , \ B(t , z) = \mathrm{D}_3 f(t , u(t , z) , z)$$

فرض کنیم J یک گوی باز به مرکز t_0 و شعاع r باشد، به‌طوری که $\bar{\mathrm{J}} \subset \mathrm{J}_1$. طبق (۱. ۵ . ۴. ۱۰)، گوی بازی مانند $\mathrm{S} \subset \mathrm{H}$ به مرکز x_0 و گویی باز مانند $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_1$ به مرکز z_0 موجود هستند ، به‌طوری که $\mathrm{D}_2 f$ و $\mathrm{D}_3 f$ روی $\mathrm{J} \times \mathrm{S} \times \mathrm{T}$ کراندار هستند. فرض کنیم $\| \mathrm{D}_2 f(t , x , z) \| \leq a$ و $\| \mathrm{D}_3 f(t , x , z) \| \leq b$.
در این‌صورت، طبق (۲. ۵ . ۸) و (۱. ۹. ۸) ، برای هر $t \in \mathrm{J}$ ، و x_1 ، x_2 در S، و z_1 ، z_2 در T ، داریم :

$$\|f(t, x_1, z_1) - f(t, x_2, z_2)\| \le a\|x_1 - x_2\| + b\|z_1 - z_2\| \qquad (۱۰.۷.۳.۲)$$

با در نظر گرفتن (۱۰.۷.۳.۲)، طبق (۱۰.۵.۱)، برای هر $t \in J$، و z_1 ، z_2 در T، داریم:

$$\|u(t, z_1) - u(t, z_2)\| \le c\|z_1 - z_2\| \qquad (۱۰.۷.۳.۳)$$

که در آن $c = b(e^{ar} - 1)/a$. اکنون ثابت می‌کنیم که، برای $z \in T$ و $\varepsilon > 0$ داده شده، $\rho > 0$یی موجود است، به‌طوری که، برای هر $w \in P$ که $z + w \in T$ و $\|w\| \le \rho$، و برای هر $t \in \bar{J}$، داریم:

$$\|f(t, u(t, z+w), z+w) - f(t, u(t, z), z) - A(t, z).(u(t, z+w) -$$

$$u(t, z)) - B(t, z).w\| \le \varepsilon\|w\| \qquad (۱۰.۷.۳.۴)$$

در واقع، با استفاده از (۸.۶.۲)، (۸.۹.۱)، پیوستگی $D_2 f$ و $D_3 f$ روی $I \times H \times P$، و رابطه (۱۰.۷.۳.۳)، برای هر $s \in \bar{J}$، یک همسایگی W_s از s در J_1 و یک عدد $\rho(s) > 0$ موجود است، به طوری که، رابطه (۱۰.۷.۳.۴) برای $t \in W_s$ و $\|w\| \le \rho(s)$ برقرار است. $\bar{J}$ را با تعدادی متناهی از W_{s_i}ها می‌پوشانیم. اکنون، برای برقراری (۱۰.۷.۳.۴)، می‌توان ρ را برابر کمترین مقدار $\rho(s_i)$ها گرفت.
با توجه به تعریف $u(t, z)$ رابطه (۱۰.۷.۳.۴) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\|D_1 u(t, z+w) - D_1 u(t, z) - A(t, z).(u(t, z+w) - u(t, z))$$

$$-B(t, z).w\| \le \varepsilon\|w\| \qquad (۱۰.۷.۳.۵)$$

اکنون وجود جواب $U(t, z)$ روی $J \times T$ طبق (۱۰.۶.۳) تضمین می‌شود، زیرا، $D_2 f$ و $D_3 f$ وقتی $K = C$ باشد، پیوسته ـ مشتق پذیر هستند. قرار می‌دهیم:

$$v(t, z, w) = u(t, z+w) - u(t, z) - U(t, z).w .$$

این تابع نسبت به t، طبق (۱۰.۷.۳.۱)، دارای مشتقی برابر با:

$$D_1 v(t, z, w) = D_1 u(t, z+w) - D_1 u(t, z) - A(t, z).(U(t, z).w) - B(t, z).w$$

است. بنابراین، رابطه (۱۰.۷.۳.۵) را برای هر $t \in J$ و هر w که $z + w \in T$، $\|w\| \le \rho$، می‌توان به صورت:

$$\|D_1 v(t, z, w) - A(t, z).v(t, z, w)\| \le \varepsilon\|w\|$$

نوشت. به عبارت دیگر، $v(t, z, w)$ یک جواب تقریبی معادله دیفرانسیل خطی:

$$y' = A(t, z).y \qquad (۱۰.۷.۳.۶)$$

با تقریب $\varepsilon\|w\|$ است. علاوه براین، طبق تعریف، داریم $v(t_0, z, w) = 0$. چون روی $J \times T$، $\|A(t, z)\| \le a$، از (۱۰.۵.۱) نتیجه می‌گیریم که، برای هر $t \in J$ و هر w که $z + w \in T$ و $\|w\| \le \rho$،

$$\|v(t, z, w)\| \le c_0 \varepsilon\|w\|$$

که در آن $c_0 = (e^{ar} - 1)/a$ (زیرا 0 یک جواب معادله (۶ . ۳ . ۷ . ۱۰) است). چون $0 < \varepsilon$ دلخواه است، از تعریف مشتق یک تابع نتیجه می‌شود که، u نسبت به z در هر نقطه $(t , z) \in J\times T$ مشتق پذیر است و $D_2 u(t , z) = U(t , z)$.

بالاخره، از فرض‌ها و از (۲. ۷. ۱۰) نتیجه می‌شود که U روی $J \times T$ پیوسته است. از طرف دیگر، $D_1 u(t , z) = f(t , u(t,z),z)$ طبق (۱ . ۷ . ۱۰)، روی $J\times T$ پیوسته است. بنابراین، طبق قضیه (۱. ۹. ۸)، نگاشت u روی $J \times T$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است، و با این مطلب اثبات (۳. ۷. ۱۰) به پایان می‌رسد.

(۴. ۷. ۱۰) فرض کنیم $K = R$، و f روی $I \times H \times P$، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب E و G متناهی‌البعد و f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر[1]) باشد. در این‌صورت، برای هر فاصله باز J به مرکز t_0 که $\bar{J} \subset J_1$، می‌توان گوی T راطوری گرفت که، u روی $J\times T$ ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب بی‌نهایت بار مشتق پذیر) باشد.

اگر $p = 1$، مطلب فوق همان قضیه (۳. ۷. ۱۰) است. با استفاده از استقراء روی p، فرض کنیم، نتیجه را برای نگاشت‌های $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر ثابت کرده باشیم. در این صورت، در سمت راست (۱ . ۳ . ۷ . ۱۰)، A و B نگاشت‌هایی $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر روی $J\times T$ می‌باشند (طبق ۱۰. ۱۲. ۸)). بنابراین، طبق (۳. ۷. ۱۰) (به کار گرفته شده نسبت به $(U(t , z))$، $D_2 u(t , z)$ روی $J \times T$ ، $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است (وقتی T به طور مناسبی انتخاب شده باشد). از طرف دیگر، $D_1 u(t , z) = f(t , u(t , z) , z)$ نیز روی $J\times T$ طبق فرض‌های استقراء و (۱۰. ۱۲. ۸)، $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین، $Du(t , z)$ طبق (۱. ۹. ۸)، (۹. ۱۲. ۸)، و (۱۰. ۱۲. ۸)، روی $J\times T$ ، $(p-1)$ بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. اما، از این مطلب طبق (۵ . ۱۲. ۸) نتیجه می‌شود که، u روی $J\times T$ ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. وقتی E و G متناهی البعد و f بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشد، از (۱۰. ۱۷. ۳) نتیجه می‌شود که، در بحث قبلی می‌توان T را مستقل از p انتخاب نمود، چون همه مشتقات f پیوسته هستند؛ بنابراین، u روی $J\times T$ ، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

ملاحظه می‌شود که، در (۴. ۷. ۱۰) می‌توان J_1 را با هر فاصله باز که شامل نقطه t_0 باشد، و J را با هر فاصله باز که شامل t_0 بوده و $\bar{J} \subset J_1$ ، عوض کرد.

(۵ . ۷ . ۱۰) فرض کنیم فضاهای باناخ E و G متناهی‌البعد باشند، و f روی $I\times H\times P$ تحلیلی باشد. در این صورت، برای هر گوی باز J به مرکز t_0 که $\bar{J} \subset J_1$ ، گوی T را می‌توان طوری انتخاب کرد که u روی $J\times T$ تحلیلی باشد.

---

[1] در چاپ اول متن روسی کتاب به حالتی‌که E و G متناهی‌البعد و f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، اشاره‌ای نشده است. مترجم.

اگر $K = C$ باشد، مطلب فوق فوراً از (۱. ۷ . ۱۰) ، (۳. ۷ . ۱۰) ، (۱. ۱۰. ۹) و (۴. ۹. ۹) نتیجه می‌شود. اگر $K = R$ باشد، از بحثی کاملاً مشابه آنچه که در اثبات قضیه (۳. ۵ . ۱۰) بیان شد استفاده می‌کنیم، که ما از آن صرف‌نظر کرده‌ایم.

(۶ . ۷ . ۱۰) **تبصره.** قضیه قبل واریانت‌ها و بسط و گسترش‌هایی دارد. به عنوان مثال، در قضیه (۳ . ۷ . ۱۰) وقتی $K = R$ باشد، برای اینکه وجود $D_2 u(t , z)$ تضمین شود، وجود $D_1 f$ لازم نیست، و فقط پیوستگی $D_2 f$ و $D_3 f$ به عنوان توابعی از (x , z)، و کرانداری آنها روی $J \times S \times T$ مورد نیاز است، و نیز، این حقیقت که، برای هر تابع پیوسته h روی I، نگاشت $t \to f(t , h(t) , z)$ و به طریق مشابه $D_2 f$ و $D_3 f$ نگاشت‌هایی رگله هستند.[۱]

مسائل

۱ . با نمادهای بخش ۴ . ۱۰، فرض کنیم I یک گوی باز در K به مرکز t_0 و شعاع a ، S یک گوی باز در E به مرکز x_0 و شعاع r، و G فضای نرم‌دار $\mathscr{C}_E^\infty(I \times S)$ باشد (بخش ۲. ۷ را ببینید). برای هر $M > 0$ ، فرض کنیم G_M گوی $\|f\| \leq M$ در G، و L زیرمجموعه‌ای از G تشکیل شده از همه نگاشت‌های پیوسته لیپشیتزی از $I \times S$ به E باشد ((۴ . ۵ . ۱۰) را ببینید). برای هر $M > 0$ ، فرض کنیم J_M گوی باز به مرکز t_0 و شعاع $\inf(a , r / M)$ در K باشد. برای هر تابع $f \in L \cap G_M$ ، معادله $x' = f(t , x)$ دارای جواب یکتایی مانند $u = U(f)$ است، که مقادیرش را در S می‌گیرد، روی J_M تعریف شده و در شرط اولیه $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند (بخش ۵ . ۱۰ ، مسأله (c) ۶ را ببینید).

(a) فرض کنیم (f_n) دنباله‌ای از توابع باشد که متعلق به $L \cap G_M$ هستند، و فرض کنیم f_n روی $I \times S$ به‌طور یکنواخت به تابعی مانند f همگرا باشد. نشان دهید که، در فضای $\mathscr{C}_E^\infty(J_M)$ هر نقطه حدی دنباله توابع $u_n = U(f_n)$ جوابی از معادله $x' = f(t , x)$ است، که مقادیرش را در S می‌گیرد، و در نقطه t_0 برابر x_0 است. (از (۳ . ۴ . ۱۰) و (۸ . ۷. ۸) استفاده کنید). مثالی بزنید که در آن دنباله (u_n) نقطه حدی در $\mathscr{C}_E^\infty(J_M)$ نداشته باشد (بخش ۵ . ۱۰ ، مسأله ۵ را ببینید).

(b) علاوه بر فرضیات فوق، فرض کنیم E **متناهی‌البعد** باشد. با استفاده از نتیجه (a) ، اثباتی جدید از قضیه پئانو ارائه نمایید (بخش ۵ . ۱۰ ، مسأله (b)۴ را ببینید. (از قضیه آسکولی (۷. ۵ . ۷) و قضیه تقریب ویراشتراس (۱. ۴. ۷) استفاده کنید).

۲ . (a) فرض کنیم g و h دو تابع پیوسته حقیقی روی چند قرصی $P = \{(t , x) \in R^2 : |t - t_0| < a , |x - x_0| < b\}$ در R^2 باشند، به‌طوری که روی P ، $g(t , x) < h(t , x)$، و فرض کنیم u (به ترتیب v) جوابی از معادله $x' = g(t , x)$ (به ترتیب $x' = h(t , x)$) باشد، که روی فاصله $[t_0 , t_0 + c[$ تعریف شده، و مقادیرش را در $]x_0 - b , x_0 + b[$ می‌گیرد

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به بررسی حالتی که I یک فاصله باز از R ، E یک فضای باناخ حقیقی، و G یک فضای باناخ مختلط باشد نیز اشاره شده است، که در این صورت، برای هر $t \in J_1$ نگاشت $z \to u(t , z)$ روی T تحلیلی است. مترجم.

و $u(t_0) = x_0$ (به ترتیب $v(t_0) = x_0$). نشان دهید که، برای $t_0 < t < t_0 + c$ ، $u(t) < v(t)$. (l.u.b نقاط s واقع در $[t_0 \ , \ t_0 + c[$ که برای $t_0 < t < s$ ، $u(t) < v(t)$ مورد بررسی قرار دهید.)

(b) فرض کنیم g تابعی حقیقی و پیوسته روی P ، و u جواب ماکسیمال معادله $x' = g(t , x)$ متناظر با (t_0 , x_0) باشد (بخش ۵ . ۱۰ ، مسأله ۷ را ببینید)، و فرض کنیم u حداقل روی یک فاصله $[t_0 , t_0 + c[$ تعریف شده باشد و مقادیرش در $]x_0 - b , x_0 + b[$ بگیرد. نشان دهید که، روی هر فاصله فشرده $[t_0 , t_0 + d]$ واقع در $[t_0 , t_0 + c[$، وقتی $\varepsilon > 0$ به حد کافی کوچک باشد، جواب‌های ماکسیمال و مینیمال $x' = g(t , x) + \varepsilon$ تعریف شده‌اند، و مقادیرشان را در $]x_0 - b , x_0 + b[$ می‌گیرند، و به‌طور یکنواخت به سمت u میل می‌کنند، وقتی ε به سمت 0 میل کند. (برای $\varepsilon_0 > 0$ داده شده، یک $s > t_0$ موجود است، به‌طوری که جواب‌های ماکسیمال و مینیمال همه معادلات $x' = g(t , x) + \varepsilon$ متناظر با $(t_0 \ , \ x_0)$ ، برای $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ ، روی فاصله $[t_0 \ , \ s]$ تعریف شده‌اند، و مقادیرشان را در $]x_0 - b , x_0 + b[$ می‌گیرند. دیده می‌شود که، همه این توابع روی $[t_0 \ , s]$ تشکیل مجموعه‌ای همپیوسته می‌دهند، و با استفاده از نتیجه (a) ، قضیه آسکولی (۷ . ۵ . ۷) ، (۳ . ۴ . ۱۰) ، و (۸ . ۷ . ۸) همگرایی یکنواخت به u را روی $[t_0 \ , \ s]$ ثابت کنید. بالاخره، نشان دهید که، l.u.b اعدادی مانند d که دارای خاصیت اشاره شده فوق هستند، لزوماً برابر c می‌باشد، به‌ویژه، از آخرین گزاره مسأله ۷ بخش ۵ . ۱۰ استفاده کنید).

(c) فرض کنیم، روی چند قرصی P ، g و h دو تابع حقیقی پیوسته باشند که روی P در نامساوی $g(t , x) \le h(t , x)$ صدق می‌کنند، و فرض کنیم $[t_0 , t_0 + c[$ فاصله‌ای باشد که روی آن u جوابی از معادله $x' = g(t , x)$ با شرط اولیه $u(t_0) = x_0$ ، و نیز v جواب ماکسیمال معادله $x' = h(t , x)$ متناظر با نقطه (t_0 , x_0) ، تعریف شده باشند، و u و v مقادیرشان را در $]x_0 - b \ , \ x_0 + b[$ بگیرند. نشان دهید که، برای $t_0 \le t < t_0 + c$ ، $u(t) \le v(t)$ (از (a) و (b) استفاده کنید).

۳ . (a) نشان دهید که، نتایج مسأله (a) ۶ از بخش ۵ . ۱۰ وقتی E متناهی‌البعد باشد، و فرض‌ها به شکل زیر تغییر کنند، باز هم برقرار هستند :

(۱) فرض شود که، نگاشت f روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H}$ پیوسته است (وقتی $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ باشد)، اما، لزوماً به‌طور موضعی لیپشیتزی نیست.

(۲) φ جواب ماکسیمال (بخش ۵ . ۱۰ ، مسأله ۷ را ببینید) معادله $z' = h(s, z)$ روی فاصله $[0 , \alpha[$ متناظر با نقطه $(0 , 0)$ است. (از نتایج مسائل (a)۱ و (b)۲ استفاده نموده، و فرآیند قطری را مانند مسأله (b)۴ بخش ۵ . ۱۰ مورد استفاده قرار دهید).

(b) علاوه بر این، فرض کنیم که، دنباله‌ای مانند $(\mathrm{Y}_n)_{n \ge 0}$ از توابع حقیقی پیوسته روی $[0 , \alpha]$ موجود باشد، به‌طوری که مقادیرش در $[0 \ , \ r]$ واقع باشد، و برای $n \ge 1$ ، و $0 \le s < \alpha$ ، $\mathrm{Y}_n(s) = \int_0^s h(\xi , \mathrm{Y}_{n-1}(\xi))d\xi$، و فرض کنیم y_0 روی J پیوسته باشد اگر $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ ؛ و روی J تحلیلی باشد اگر $\mathrm{K} = \mathrm{C}$ ؛ مقادیر y_0 در S واقع باشد، و روی J ، $\| \mathrm{y}_0(t) - x_0 \| \le \mathrm{Y}_0(|t - t_0|)$. نشان دهید که، دنباله‌ای مانند $(\mathrm{y}_n)_{n \ge 1}$ از نگاشت‌های از J به S موجود است، به طوری که، اگر $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ باشد، پیوسته هستند ؛ و اگر $\mathrm{K} = \mathrm{C}$ باشد، تحلیلی هستند، و $\mathrm{y}_n(t) = x_0 + \int_0^s f(\theta , y_{n-1}(\theta))d\theta$، و برای هر $n \ge 1$ ، روی J ، $\| \mathrm{y}_n(t) - x_0 \| \le \mathrm{Y}_n(|t - t_0|)$. وقتی $\mathrm{K} = \mathrm{C}$ باشد، نتیجه بگیرید که، دنباله (y_n) روی J همگرا (به‌طور یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده J) به u یکتا جواب معادله $x' = f(t , x)$ است. (از (۲. ۱۳. ۹) و

اثبات (۵ . ۴ . ۱۰) استفاده کنید.) آیا گزاره اخیر وقتی $K = \mathbf{R}$ و فرض نشده باشد که f به‌طور موضعی لیپشیتزی است، باز هم درست است؟ (مقایسه کنید با مسأله ۲، بخش ۵ . ۱۰).

۴ . (a) فرض کنیم $I = [t_0 , t_0 + c[\subset \mathbf{R}$، و ω یک تابع حقیقی پیوسته بزرگتر یا مساوی صفر باشد، که روی $I \times \mathbf{R}$ تعریف شده است، و S گویی باز به مرکز x_0 در E، و f نگاشتی پیوسته از $I \times S$ به E باشد، به‌طوری که، برای $t \in I$، $x_1 \in S$، $x_2 \in S$، $\| f(t , x_1) - f(t , x_2) \| \leq \omega(t , \| x_1 - x_2 \|)$، و فرض کنیم u و v دو جواب معادله $x' = f(t , x)$ باشند، که روی I تعریف شده‌اند، مقادیرشان را در S گرفته[1]، و $u(t_0) = x_1$، $v(t_0) = x_2$. فرض کنیم w جواب **ماکسیمال** (بخش ۵ . ۱۰، مسأله ۷ را ببینید) معادله $z' = \omega(t, z)$ متناظر با $(t_0 , \|x_1 - x_2\|)$ باشد، و فرض کنیم w روی I تعریف شده باشد. نشان دهید که، روی I، $\| u(t) - v(t) \| \leq w(t)$ (برای $\varepsilon > 0$ به حد کافی کوچک $w(t , \varepsilon)$ جواب ماکسیمال معادله $z' = \omega(t, z) + \varepsilon$، متناظر با $(t_0 , \|x_1 - x_2\|)$ مورد بررسی قرار دهید که روی $[t_0 , t_0 + d]$ اگر $d < c$ باشد، و ε به حد کافی کوچک باشد، تعریف شده است. (مسأله ۲ را ببینید). با استفاده از تناقض، نشان دهید که، برای $t_0 \leq t \leq t_0 + d$، $\| u(t) - v(t) \| \leq w(t , \varepsilon)$، t_1، g.l.b نقاطی مانند t را مورد بررسی قرار دهید که $\| y(t) \| > w(t , \varepsilon)$، که در آن $y(t) = u(t) - v(t)$ و ملاحظه کنید که، برای $t > t_1$،

$$\| y(t) \| - \| y(t_1) \| \leq \| y(t) - y(t_1) \| \leq \sup_{t_1 < s < t} \| y'(s) \| . (t - t_1) .)$$

(b) فرض کنیم $I' =]t_0 - c , t_0]$، و فرضیات (a) وقتی به جای I، I' گذاشته شود برقرار باشند. حال، فرض کنیم w جواب مینیمال $z' = \omega(t , z)$ متناظر با $(t_0 , \|x_1 - x_2\|)$ باشد، و این جواب روی I' تعریف شده باشد. نشان دهید که، روی I'، $\| u(t) - v(t) \| \geq w(t)$ (با همان روش).

۵ . (a) فرض کنیم I **فاصله باز** $]0 , a[$ در $\mathbf{R}$، و ω تابعی پیوسته روی $I \times [0 , +\infty[$ باشد، به‌طوری که $\omega(t , z) \geq 0$، و برای $t \in I$، $\omega(t , 0) = 0$، تابع ω را می‌توان روی $I \times \mathbf{R}$ طبق شرط $\omega(t , -z) = \omega(t , z)$ برای $z < 0$ گسترش داد. در ادامه، فرض کنیم w جوابی از معادله $z' = \omega(t , z)$ باشد، که روی یک فاصله باز $]0 , \alpha[\subset I$ تعریف شده، به طوری که w بتواند طبق خاصیت پیوستگی به فاصله نیم‌باز $[0 , \alpha[$ گسترش یافته و $w(0) = 0$، فرض کنیم، اگر علاوه بر این، در این حالت $w'(0)$ معین و برابر 0 باشد، آنگاه لزوماً روی $]0 , \alpha[$ اتحاد $w(t) = 0$ برقرار باشد. اکنون، فرض کنیم S یک گوی باز به مرکز x_0 واقع در فضای باناخ حقیقی E، و f نگاشتی پیوسته از $]0 , a[\times S$ به E باشد، به‌طوری که، برای $0 < t < a$ و x_1، x_2 واقع در S، $\| f(t , x_1) - f(t , x_2) \| \leq \omega(t , \| x_1 - x_2 \|)$. نشان دهید که، روی یک فاصله $[0 , \alpha]$ با $\alpha < a$، معادله دیفرانسیل $x' = f(t , x)$ حداکثر یک جواب مانند u دارد، که در شرط اولیه $u(0) = x_0$ صدق می‌کند. (از تناقض استفاده کنید: اگر v جواب دومی از معادله فوق باشد، به‌طوری که $v(0) = x_0$ کران بالای $\| u(t) - v(t) \|$ را روی $]0 , \alpha]$ مورد بررسی قرار داده، از مسأله ۴(b) استفاده کنید).

(b) فرض کنیم $\theta(t)$ تابعی پیوسته باشد، که روی $]0 , \alpha[$ تعریف شده و در نامساوی $\theta(t) \geq 0$ صدق می‌کند. نشان دهید که، اگر انتگرال $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t} dt$ همگرا باشد، آنگاه نتیجه (a) برای تابع $\omega(t , z) = \frac{1 + \theta(t)}{t} z$ قابل استفاده است،

---

[1] در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای $v(t_0) = x_2$ نوشته شده است $v(t , x_0) = x_2$ که باید آن را اشتباه چاپی به‌حساب آورد، این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد و رابطه $v(t_0) = x_0$ به‌همین صورت نوشته شده است. مترجم.

در غیر این صورت، اگر $\int_0^a \frac{\theta(t)}{t} dt = +\infty$ ، مثالی از یک تابع حقیقی پیوسته f روی $]0 , a[\times \mathbf{R}$ ارائه نمایید، به طوری که:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1+\theta(t)}{t} |x_1 - x_2|$$

و معادله دیفرانسیل $x' = f(t, x)$ روی فاصله $]0 , a[$ بی‌نهایت جواب داشته باشد، که در نقطه $t = 0$ برابر 0 هستند. (فرض کنید :

$$\varphi(t) = \exp\left(-\int_t^a \frac{1+\theta(s)}{s} ds\right)$$

و $f(t, x)$ را به عنوان تابعی که برای $|x| \leq \varphi(t)$ برابر $x(1+\theta(t))/t$، و برای $|x| \geq \varphi(t)$ مستقل از x است، تعریف کنید).

۶. فرض کنیم I فاصله‌ای باز در R، H زیرمجموعه‌ای باز از یک فضای باناخ E روی **R** و t_0 نقطه‌ای از I باشد.

(a) فرض کنیم f روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H}$ پیوسته باشد، و عددی مانند $0 < k < 1$ موجود باشد، به طوری که برای هر $t \neq t_0$ ، و هر x_1 ، x_2 دلخواه در H،

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq \frac{k}{|t - t_0|} \| x_1 - x_2 \|$$

در این صورت، معادله $x' = f(t, x)$ حداکثر دارای یک جواب است که در نقطه $t = t_0$ مقدار داده شده $x_0 \in \mathrm{H}$ را می‌گیرد، و در یک همسایگی t_0 تعریف شده است (مسأله ۵ (a) را ببینید). اما، علاوه بر این، اگر u و v دو جواب تقریبی معادله $x' = f(t, x)$ روی یک گوی باز J به مرکز t_0 واقع در I ، با تقریب‌های ε_1 ، ε_2 باشند، که در شرط اولیه $u(t_0) = v(t_0) = x_0$ صدق می‌کنند، آنگاه، برای هر $t \in \mathrm{J}$ ،

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1-k} |t - t_0|$$

(از روشی مشابه آنچه که در (۱. ۵. ۱۰) بیان شد، استفاده کنید).

(b) فرض کنیم $\mathrm{I} =]-1 , 1[$ ، $\mathrm{H} = \mathrm{E} = \mathbf{R}$ ، و Φ مجموعه همه توابع حقیقی f باشد، که روی $\mathrm{I} \times \mathrm{H}$ پیوسته هستند، و برای هر $t \neq 0$ در I ، $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|/|t|$. در این صورت، معادله $x' = f(t, x)$ حداکثر دارای یک جواب است که در نقطه $t = t_0$ مقداری داده شده می‌گیرد و در یک همسایگی t_0 تعریف شده است (مسأله ۵(a) را ببینید). اما، ثابت کنید تابعی مانند $\varphi(t, \varepsilon) \geq 0$ وجود ندارد، به‌طوری که، برای هر زوج (u , v) از جواب‌های تقریبی با تقریب ε از هر معادله $x' = f(t, x)$ با $f \in \Phi$، به‌طوری که u و v روی I تعریف شده باشند و $u(t_0) = v(t_0)$ ، نامساوی $\| u(t) - v(t) \| \leq \varphi(|t|, \varepsilon)$ برای هر $t \in \mathrm{I}$ برقرار باشد. (برای هر $\alpha \in]0 , 1[$، فرض کنیم f تابعی پیوسته باشد که ، برای $|x| \leq \frac{t^2}{\alpha - t}$ ، $0 \leq t < \alpha$ ، و برای $t \geq \alpha$ برابر x/t، و برای بقیه مقادیر (t, x) که $t \geq 0$ است ، $f(t, x)$ مستقل از x باشد. برای $t \leq 0$ ، تعریف می‌کنیم $f(t, x) = f(-t, x)$. فرض کنید $u = 0$ و $v(t) = \varepsilon t$ برای $|t| \leq \alpha$، و برای بقیه مقادیر t ، v را برابر یک جواب معادله $x' = f(t, x) + \varepsilon$ بگیرید[1]).

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به‌جای عبارت « مستقل از x » نوشته شده است «مستقل از t» ، و بـه جـای اینکـه v به عنوان جوابی از معادله $x' = f(t, x) + \varepsilon$ انتخاب شود، v به عنوان جوابی از معادله $x' = f(t, x)$ در نظر گرفته شده است. مترجم.

۷. با نمادهای بخش ۴. ۱۰، فرض کنیم E متناهی‌البعد، f روی $I \times H$ پیوسته، $(t_0\,,\,x_0)$ نقطه‌ای از $I \times H$، J یک گوی باز به مرکز t_0 واقع در I، و S یک گوی باز به مرکز x_0 باشد، به‌طوری که $S \subset H$، و فرض کنیم f روی $J \times S$ کراندار باشد، و شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) معادله $x' = f(t\,,\,x)$ حداکثر یک جواب داشته باشد، که روی یک فاصله باز شامل t_0 واقع در J تعریف شده است، و در نقطه $t = t_0$ مقدار x_0 می‌گیرد.

(۲) دنباله‌ای مانند $(u_n)_{n \geq 0}$ از نگاشت‌های پیوسته از J به S موجود باشد، به‌طوری که برای هر $n \geq 1$ و $t \in J$،

$$u_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x\,,\,u_{n-1}(s))ds$$

(۳) برای هر $t \in J$، وقتی n به سمت $+\infty$ میل می‌کند، دنباله $(u_{n+1}(t) - u_n(t))_{n \geq 0}$ به 0 همگرا باشد.

نشان دهید که روی هر فاصله فشرده $J' \subset J$ که شامل t_0 است، دنباله (u_n) به‌طور یکنواخت به سمت جوابی از معادله $x' = f(t\,,\,x)$ میل می‌کند که به ازاء $t = t_0$ برابر x_0 می‌باشد. (ملاحظه کنید که، (u_n) همپیوسته است، از قضیه اسکولی (۷. ۵. ۷)، و (۴. ۱۶. ۳) و (۸. ۷. ۸) استفاده کنید).

۸. فرض کنیم فضای E متناهی‌البعد باشد، و ω، f در شرایط مسأله ۵(a) صدق کنند، علاوه بر این، برای هر $t \in]0\,,\,a[$، تابع $z \to \omega(t\,,\,z)$ روی $[0\,,\,+\infty[$ صعودی باشد. در این‌صورت، معادله $x' = f(t\,,\,x)$ دارای حداکثر یک جواب است که روی یک فاصله $]0\,,\,\alpha[\subset]0\,,\,a[$ تعریف شده و در نقطه $t = 0$ مقدار x_0 می‌گیرد (مسأله (a) ۵ را ببینید). علاوه بر این، فرض کنیم روی فاصله‌ای مانند $J = [0\,,\,\alpha] \subset [0\,,\,a[$ دنباله‌ای مانند $(u_n)_{n \geq 0}$ از نگاشت‌های پیوسته از J به S موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$ و $t \in J$،

$$u_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s,\,u_{n-1}(s))ds$$

(a) برای هر $t \in J$، فرض کنیم $y_n(t) = \| u_{n+1}(t) - u_n(t) \|$، $z_n(t) = \sup\limits_{k \geq 0} y_{n+k}(t)$، $w(t) = \inf\limits_{n \geq 0} z_n(t)$. نشان دهید که، توابع z_n، w روی J پیوسته هستند (از مسأله ۱۱ بخش ۵ . ۷ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم t، $t-h$ دو نقطه از J باشند $(h > 0)$. نشان دهید که، برای هر $\delta > 0$، عددی طبیعی مانند N موجود است، به طوری که برای $n \geq N$،

$$| y_n(t) - y_n(t-h) | \leq \int_{t-h}^{t} \omega(s,\,w(s)+\delta)ds$$

(از قضیه مقدار میانگین (۸ . ۵ . ۱)، و (۷ . ۵ . ۵) استفاده کنید.)

(c) از (b) نتیجه بگیرید که، برای $n \geq N$،

$$| z_n(t) - z_n(t-h) | \leq \int_{t-h}^{t} \omega(s\,,\,w(s)+\delta)ds$$

(متوالیاً حالت‌های $z_n(t) \leq z_n(t-h)$ و $z_n(t) \geq z_n(t-h)$ را مورد بررسی قرار دهید). بنابراین:

$$| w(t) - w(t-h) | \leq \int_{t-h}^{t} \omega(s,w(s))\,ds$$

(از (۸ . ۷ . ۸) استفاده کنید).

(d) نتیجه بگیرید که، روی J ، $w(t) = 0$ (با بحثی مشابه آنچه که در مسائل (b)۴ و (a)۵ بیان شد)، و با استفاده از مسأله ۷ ، ثابت کنید که، دنباله (u_n) روی J به‌طور یکنواخت به سمت جوابی از معادله $x' = f(t , x)$ همگرا است، که به ازاء $t = 0$ مقدار x_0 می‌گیرد.

۹. با نمادهای بخش ۴ . ۱۰ ، فرض کنیم E **متناهی‌البعد**، و f روی $I \times H$ پیوسته و کراندار باشد، علاوه براین، فرض کنیم معادله $x' = f(t , x)$ دارای **حداکثر یک جواب** باشد، که روی هر فاصله باز $J \subset I$ شامل t_0 تعریف شده باشد و در نقطه $t = t_0$ برابر با $x_0 \in H$ باشد. فرض کنیم که، برای هر عدد صحیح $n > 0$ معادله $x' = f(t , x)$ دارای جوابی تقریبی مانند (u_n) با تقریب $\frac{1}{n}$ باشد که روی I تعریف شده و مقادیرش در H واقع باشد و $u_n(t_0) = x_0$. نشان دهید که، روی هر فاصله فشرده واقع در I ، دنباله (u_n) به‌طور یکنواخت به جوابی از معادله $x' = f(t , x)$ مانند u همگرا است، که مقادیرش را در H می‌گیرد و در شرط اولیه $u(t_0) = x_0$ صدق می‌کند. (از بحثی مشابه آن‌چه که در مسأله ۷ بیان شد، استفاده کنید).

۸. وابستگی جواب به شرایط اولیه

(۱. ۸ . ۱۰) فرض کنیم نگاشت f روی $I \times H$ به طور موضعی لیپشیتزی باشد ((۴. ۵ . ۱۰) را ببینید) اگر $K = R$ ، و روی $I \times H$ تحلیلی باشد اگر $K = C$. در این‌صورت، برای هر نقطه $(a , b) \in I \times H$:

(a) یک گوی باز $J \subset I$ به مرکز a و یک گوی باز $V \subset H$ به مرکز b موجود است، به‌طوری که، برای هر نقطه $(t_0 , x_0) \in J \times V$، معادله (۱. ۴. ۱۰) دارای جواب یکتایی مانند $t \to u(t , t_0 , x_0)$ است، که روی J تعریف شده است، و مقادیرش در H می‌گیرد، و $u(t_0 , t_0 , x_0) = x_0$.

(b) نگاشت $(t , t_0 , x_0) \to u(t , t_0 , x_0)$ روی $J \times J \times V$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

(c) یک گوی باز $W \subset V$ به مرکز b موجود است، به طوری‌که، برای هر نقطه $(t , t_0 , x_0) \in J \times J \times W$، معادله $x_0 = u(t_0 , t , x)$ ، دارای جواب یکتای $x = u(t , t_0 , x_0)$ در V است.

(a) طبق فرض، گویی مانند $J_0 \subset I$ به مرکز a و گویی مانند $B_0 \subset H$ به مرکز b و شعاع r موجود است، به‌طوری که روی $J_0 \times B_0$ ، $\| f(t , x) \| \le M$ و برای هر $t \in J_0$ ، x_1 ، x_2 در B_0 ،

$$\| f(t , x_1) - f(t , x_2) \| \le k \| x_1 - x_2 \| .$$

طبق (۵ . ۴. ۱۰) و (۲. ۵ . ۱۰) ، گویی باز مانند $J_1 \subset J_0$ به مرکز t_0 و جوابی یکتا مانند v از معادله (۱. ۴. ۱۰) موجود است، به‌طوری که روی J_1 تعریف شده، مقادیرش را در H می‌گیرد و $v(a) = b$. نشان می‌دهیم که، گوی باز V به مرکز b و شعاع $\frac{r}{2}$، و گوی باز J به مرکز a و شعاع ρ ، وقتی ρ به حد کافی کوچک باشد، از ویژگی‌های مورد نظر ما برخوردار است. با به کارگیری قضیه (۶ . ۵ . ۱۰) برای حالتی که $\alpha = \beta = 0$ است، نتیجه می‌گیریم که، معادله (۱. ۴. ۱۰) دارای جوابی است که روی J تعریف

شده است، و مقادیرش در B_0 واقع است، و در نقطه $t \in J_0$ مقدار $x_0 \in V$ را می‌گیرد، به شرط اینکه، برای هر $t \in J$ داشته باشیم :

$$\| v(t)-b\| + \| v(t_0) - x_0 \| e^{k|t-t_0|} < r \qquad (۱۰.۸.۱.۱)$$

اما، طبق قضیه میانگین، برای هر $t \in J$ ، داریم $\| v(t)-b \| \leq M\,|t-a| \leq M\rho$. چون ، طبق فرض $\| x_0-b \| \leq \frac{r}{2}$ ، نامساوی (۱۰.۸.۱.۱) ، اگر ρ چنان انتخاب شده باشد که :

$$M\rho+(M\rho+\frac{r}{2})e^{2k\rho} < r \qquad (۱۰.۸.۱.۲)$$

برقرار خواهد بود. نامساوی فوق مطمئناً برای مقادیر به حد کافی کوچک $\rho > 0$ برقرار است، زیرا، وقتی ρ به سمت 0 صفر میل می‌کند، سمت چپ (۱۰.۸.۱.۲) به سمت $\frac{r}{2}$ میل می‌کند.

(b) از قضیه مقدار میانگین، برای t_0 ، t_1 ، t_2 در J ، و x_0 در V ، داریم :

$$\| u(t_1, t_0, x_0)-u(t_2, t_0, x_0)\| \leq M\,|t_2-t_1| \qquad (۱۰.۸.۱.۳)$$

و برای t و t_0 در J ، x_1 ، x_2 در V ، طبق (۱۰.۵.۱) داریم :

$$\| u(t, t_0, x_1)-u(t, t_0, x_2)\| \leq e^{2k\rho}\,|x_2-x_1| \qquad (۱۰.۸.۱.۴)$$

بالاخره، طبق تعریف، از (۱۰.۸.۱.۳) برای $t_0 = t_2$ نتیجه می‌شود :

$$\| u(t_1, t_2, x_0)-x_0 \| \leq M\,|t_2-t_1|$$

و چون نگاشت $t \to u(t, t_2, x_0)$ یکتا جواب معادله (۱۰.۴.۱) روی J است که در نقطه t_1 برابر $u(t_1, t_2, x_0)$ است، طبق (۱۰.۵.۱) ، برای t ، t_1 ، t_2 در J ، و $x_0 \in V$ ، داریم ،

$$\| u(t, t_1, x_0)-u(t, t_2, x_0)\| \leq Me^{2k\rho}\,|t_2-t_1| \qquad (۱۰.۸.۱.۵)$$

سه نامساوی (۱۰.۸.۱.۳) ، (۱۰.۸.۱.۴) ، و (۱۰.۸.۱.۵) ثابت می‌کنند که، u روی $J\times J\times V$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

(c) طبق (۱۰.۸.۱.۳) ، روی $J\times J\times V$ ، داریم $\| u(t, t_0, x_0)-x_0\| \leq M\,|t-t_0| \leq 2M\rho$. فرض کنیم ρ در رابطه (۱۰.۸.۱.۲) صدق کند، و علاوه بر این، نامساوی $2M\rho < \frac{r}{4}$ برقرار باشد. در این صورت، اگر W گویی باز به مرکز b و شعاع $\frac{r}{4}$ باشد، آنگاه برای $t \in J$ ، $t_0 \in J$ و $x_0 \in W$ ، داریم $u(t, t_0, x_0) \in V$. فرض کنیم برای چنین مقادیری از t ، t_0 ، x_0 ، $x = u(t, t_0, x_0)$. در این صورت، نگاشت $s \to u(s, t, x)$ روی J تعریف شده است، و یکتا جواب معادله (۱۰.۴.۱) است، که مقادیرش در H واقع است، و در نقطه t مقدار x را می‌گیرد. اما، چون نگاشت $s \to u(s, t_0, x_0)$ دارای این خواص است، برای $s \in J$ خواهیم داشت $u(s, t, x)=u(s, t_0, x_0)$ ، به خصوص :

$$x_0 = u(t_0 , t_0 , x_0) = u (t_0 , t , x) .$$

حال ، فرض کنیم $y \in V$ چنان باشد که $u (t_0 , t , y) = x_0$. در این صورت، نگاشت $s \to u(s , t , y)$ جوابی از معادله (۱. ۴. ۱۰) است، که روی J تعریف شده، و برای $s = t_0$ مقدار x_0 را می‌گیرد. بنابراین، برای هر $s \in J$ ، $u(s , t , y) = u(s , t_0 , x_0)$ ، و در حالت خاص، برای $s = t$ ، $y = u(t , t_0 , x_0) = x$ ، که با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

(۲. ۸ . ۱۰) با نمادهای قضیه (۱. ۸ . ۱۰) فرض کنیم f روی $I \times H$ ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب E متناهی‌البعد و f بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، E متناهی‌البعد و f تحلیلی) باشد. در این صورت، می‌توان J و V را طوری انتخاب نمود که، تابع $(t , t_0 , x_0) \to u(t , t_0 , x_0)$ روی $J \times J \times V$ ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) باشد.

در واقع، اگر قرار دهیم $v(s , t_0 , x_0) = u(t_0 + s , t_0 , x_0) - x_0$ ، دیده می‌شود که، نگاشت $s \to v(s , t_0 ,x_0)$ جوابی از معادله :

$$z' = f (t_0 + s , \ x_0 + z)$$

است، که در نقطه $s = 0$ مقدار 0 قرار می‌گیرد. به این ترتیب، از (۴. ۷. ۱۰) و (۵ . ۷. ۱۰) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

برای معادلات دیفرانسیل خطی، نتایج به مراتب دقیق‌تری وجود دارد. معادله :

$$x' = A(t) . \ x \qquad (۱۰ . ۸ . ۳)$$

را معادله دیفرانسیل خطی **همگن** وابسته به معادله (۲. ۶ . ۱۰) می‌نامند. تفاضل دو جواب از معادله (۲. ۶ . ۱۰) روی I ، جوابی از معادله (۳. ۸ . ۱۰) روی I است، و جواب‌های (۳. ۸ . ۱۰) روی I تشکیل یک زیرفضای برداری $\mathscr{H}$ از $\mathscr{C}_E (I)$ فضای کلیه نگاشت‌های پیوسته از I به E می‌دهند.

(۴. ۸ . ۱۰) برای هر (s , x_0) ، فرض کنیم تابع $t \to u(t , s , x_0)$ یکتا جواب معادله (۳. ۸ . ۱۰) باشد، که روی I تعریف شده، و $u(s , s , x_0) = x_0$. در این‌صورت :

(۱) برای هر $t \in I$ ، نگاشت $x_0 \to u(t , s , x_0)$ یک هومیومورفیسم خطی $C(t , s) \in \mathscr{L}(E)$ از E به روی E است.

(۲) نگاشت $t \to C (t , s)$ از I به فضای باناخ $\mathscr{L}(E)$ برابر با جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن :

$$U' = A(t) \circ U \qquad (۱۰ . ۸ . ۴ .۱)$$

است، که برای $t = s$ برابر I_E (نگاشت همانی روی فضای E) است.

(۳) برای هر سه نقطه r ، s ، t در I،

$$C(r,t)=C(r,s)\circ C(s,t) \quad , \quad C(s,t)=(C(t,s))^{-1} \qquad (۱۰ . ۸ . ۴ . ۲)$$

واضح است که ، نگاشت $u(t,s,x_1)+u(t,s,x_2)$ (به ترتیب $\lambda u(t,s,x_0)$) جوابی از معادله (۳. ۸ . ۱۰) است، که به ازاء $t=s$ برابر x_1+x_2 (به ترتیب λx_0) است. بنابراین، طبق (۴ . ۶ . ۱۰) ، این جواب روی I برابر $u(t,s,x_1+x_2)$ (به ترتیب $u(t,s,\lambda x_0)$) است، و این مطلب ثابت می‌کند که، نگاشت $x_0 \to u(t,s,x_0)$ که آن را با $C(t,s)$ نشان خواهیم داد، خطی است (ما هنوز ثابت نکرده‌ایم که این نگاشت روی E پیوسته است).

حال ، نگاشت دو خطی $(X,Y) \to X\circ Y$ از $\mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(E)$ به $\mathscr{L}(E)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است ((۴ . ۱ . ۸) را ببینید). نگاشت خطی پیوسته $U \to A(t)\circ U$ از $\mathscr{L}(E)$ به $\mathscr{L}(E)$ را به $\mathbf{R}(t)$ نشان می‌دهیم. از (۵ . ۷. ۵) فوراً نتیجه می‌شود که :

$$\| R(t)-R(t') \| \le \| A(t)-A(t') \|$$

بنابراین، اگر $K=\mathbf{R}$، و نگاشت $t \to A(t)$ رگله باشد، آنگاه نگاشت $t \to \mathbf{R}(t)$ نیز رگله خواهد بـود. از طرف دیگر، اگر نگاشت $t \to A(t)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نگاشت $t \to \mathbf{R}(t)$ نیز چنین خواهد بود، و مشتق آن در نقطـه t (بـا یکـسان گـرفتن آن بـا یـک عنـصر فـضای $\mathscr{L}(E)$ (بخـش ۴. ۸ را ببینیـد)) نگاشـت $U \to A'(t)\circ U$ است ((۳ . ۱. ۸) و (۱. ۲ . ۸) را ببینیـد). بنـابراین، اگـر نگاشـت $t \to A'(t)$ پیوسـته باشد، آنگاه نگاشت $t \to \mathbf{R}'(t)$ نیز چنین خواهد بود.

با همین نحو ، می‌توانیم نتیجه بگیریم که، اگر $K=C$ و نگاشت $t \to A(t)$ روی I تحلیلی باشد، آنگاه نگاشت $t \to \mathbf{R}(t)$ نیز چنین خواهد بود ((۱. ۱۰ . ۹) را ببینید) .

در هر یک از این حالت‌ها، می‌توانیم از قضیه (۴ . ۶ . ۱۰) برای معادله (۱. ۴. ۸ . ۱۰) استفاده کنیم. فرض کنیم $V(t)$ جوابی از این معادله باشد، که به ازاء $t=s$ برابر I_E است. برای هر $t\in I$ ، داریم :

$$D(V(t)\,.\,x_0)=V'(t)\,.\,x_0=A(t).(V(t).\,x_0)$$

((۳ . ۱. ۸) و (۱. ۲. ۸) را ببینید) ، و علاوه بر این، برای $t=s$ ، $V(s)\,.\,x_0=I_E\,.\,x_0=x_0$. بنابراین، با به کارگیری (۴. ۶ . ۱۰) برای معادله (۳. ۸ . ۱۰) نتیجه می‌شود که، برای هر $x_0\in E$ ، $C(t,s)\,.\,x_0=V(t)\,.\,x_0$، بنابراین، برای $t\in I$ ، $C(t,s)=V(t)$. این مطلب ثابت می‌کند که ، $C(t,s)\in\mathscr{L}(E)$، و نگاشت $t\to C(t,s)$ جوابی از معادله (۱. ۴. ۸ . ۱۰) است، که به ازاء $t=s$ برابر I_E است.

بالاخره، تابع $t\to C(t,r)\,.\,x_0$ جوابی از معادله (۳ . ۸ . ۱۰) است ، که به ازاء $t=s$ برابر $C(s,r)\,.\,x_0$ است. بنابراین، طبق تعریف، برای هر $x_0\in E$ ،

$$C(t,r)\,.\,x_0=C(t,s).(C(s,r)\,.\,x_0)=(C(t,s)\circ C(s,r))\,.\,x_0$$

که اولین رابطه (۲. ۴. ۸ . ۱۰) را ثابت می‌کند. چون $\mathrm{C}(t\,,t)=\mathrm{I_E}$ ، از رابطه فوق نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{C}(t\,,s)\circ\mathrm{C}(s\,,t)=\mathrm{I_E}\,.$$

این رابطه نشان می‌دهد که، $\mathrm{C}(s\,,t)$ یک نگاشت خطی **دوسویی** روی E است، که نگاشت وارون آن $\mathrm{C}(t\,,s)$ می‌باشد (در نتیجه متعلق به $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ نیز هست). با این مطلب اثبات گزاره (۴. ۸ . ۱۰) به پایان می‌رسد.

عملگر $\mathrm{C}(t\,,s)$ را **رزولونت**[1] (حلال) معادله (۳. ۸ . ۱۰) (یا (۲. ۶ . ۱۰)) روی I می‌نامند.

(۵ . ۸ . ۱۰) نگاشت $(s\,,t)\to\mathrm{C}(s\,,t)$ از $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ به $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ پیوسته است.

در واقع، می‌توانیم بنویسیم $\mathrm{C}\,(s\,,t)=\mathrm{C}\,(s\,,t_0)\circ(\mathrm{C}(t\,,t_0))^{-1}$، و از (۴ . ۸ . ۱۰) ، (۵ . ۷ . ۵) ، و (۲. ۳ . ۸) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

اطلاعات مربوط به $\mathrm{C}(s,t)$ ما را قادر می‌سازد که بتوانیم جواب صریح معادله (۲. ۶ . ۱۰) که به ازاء $t=t_0$ مقدار x_0 می‌گیرد، به‌دست آوریم :

(۶ . ۸ . ۱۰) تابع :

$$u(t)=\mathrm{C}(t\,,t_0)\,.\,x_0+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{C}(t\,,s)\,.\,b(s))\,ds$$

جوابی از معادله (۲. ۶ . ۱۰) روی I است، که به ازاء $t=t_0$ برابر x_0 است (اگر $\mathrm{K}=\mathrm{C}$ باشد، انتگرال روی پاره‌خطی به مبداء t_0 و منتهی t گرفته می‌شود).

در واقع، طبق (۲. ۴. ۸ . ۱۰) ، با استفاده از (۶ . ۷ . ۸) می‌توان نوشت :

$$\int_{t_0}^{t}(\mathrm{C}(t\,,s)\,.\,b(s))\,ds=\mathrm{C}(t\,,t_0)\,.\,\Big(\int_{t_0}^{t}(\mathrm{C}(t_0,s)\,.\,b(s))\,ds\Big)$$

بنابراین، خواهیم داشت $u(t)=\mathrm{C}(t\,,t_0)\,.\,z(t)$ ، که در آن :

$$z(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{C}(t_0\,,s)\,.\,b(s))\,ds$$

در نتیجه :

$$u'(t)=\mathrm{C}'(t\,,t_0)\,.\,z(t)+\mathrm{C}(t\,,t_0)\,.\,z'(t)$$

((۴. ۱. ۸) و (۱. ۲ . ۸) را ببینید). اما، طبق (۱. ۴. ۸ . ۱۰) ، $\mathrm{C}'(t\,,t_0)=\mathrm{A}(t)\circ\mathrm{C}\,(t\,,t_0)$ ، از طرف دیگر، طبق تعریف، $z'(t)=\mathrm{C}\,(t_0\,,t)\,.\,b\,(t)$ ، بنابراین :

$$u'(t)=\mathrm{A}(t)\,.\,u(t)+b\,(t)$$

و چون $u(t_0)=x_0$ ، اثبات به پایان می‌رسد.

---

1 . Resolvent = Резольвента

وقتی $E = K^n$ باشد، و معادله (۲. ۶. ۱۰) به عنوان دستگاهی از معادلات دیفرانسیل خطی اسکالر نوشته شود ((۵ . ۶ . ۱۰) را ببینید) ، رزولونت[1] (حلال) $C(s, t)$ یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر مانند $(c_{ij}(s, t))$ است، که عناصر آن روی $I \times I$ پیوسته هستند، و تابع $t \to c_{ij}(t, s)$ پریمیتو یک تابع رگله روی I است اگر $K = R$ باشد، و تابعی تحلیلی روی I است اگر $K = C$ باشد.

مسأله

(a) فرض کنیم، در معادله دیفرانسیل خطی (۲ . ۶ . ۱۰) ، A و b توابعی تحلیلی روی زیرمجموعه باز همبند ساده $H \subset C$ باشند. نشان دهید که، برای هر $t_0 \in I$ و هر $x_0 \in E$ ، معادله (۲. ۶. ۱۰) دارای جواب یکتایی مانند u است ، که روی H تعریف شده و $u(t_0) = x_0$. (از همان بحثی استفاده کنید که در (۳. ۶ . ۹) بیان شد. قضیه (۳. ۶ . ۱۰) این امکان را فراهم می‌آورد، که یک جواب از (۲. ۶. ۱۰) در امتداد یک خط شکسته در H تعریف نمود (بخش ۱. ۵ ، مسأله ۴ را ببینید) و استدلال گزاره (۳. ۶ . ۹) ، همراه با یکتایی موضعی، به نتیجه مطلوب منجر می‌شود.)

(b) نشان دهید که، نتیجه (a) برای معادله دیفرانسیل اسکالر $x' = t/x$ درست نیست : برای هر زیرمجموعه باز همبند ساده $H \subset C$، و هر $t_0 \in H$ ، یک $x_0 \in E$ موجود است، به طوری‌که $x_0 \neq 0$ و جوابی از معادله فوق وجود ندارد، که روی H معین باشد و به ازاء $t = t_0$ برابر x_0 باشد.

۹. قضیه فروبنیوس

فرض کنیم F ، E دو فضای باناخ روی هیات K ، A (به ترتیب B) یک زیرمجموعه باز E (به ترتیب F) ، و U نگاشتی از $A \times B$ به **فضای باناخ** $\mathscr{L}(E, F)$ باشد (بخش ۷. ۵ را ببینید). یک نگاشت مشتق‌پذیر u از A به B را یک **جواب معادله دیفرانسیل کامل** :

$$y' = U(x, y) \tag{۱۰.۹.۱}$$

می‌نامیم، هرگاه، برای هر $x \in A$ ، داشته باشیم :

$$u'(x) = U(x, u(x)) \tag{۱۰.۹.۲}$$

وقتی $E = K$ باشد، $\mathscr{L}(E, F)$ با F یکی گرفته می‌شود ((۶ . ۷. ۵) را ببینید) ، و بنابراین، یک معادله دیفرانسیل کامل معادله **معمولی** است ((۱. ۴. ۱۰) را ببینید). وقتی $E = K^n$ متناهی‌البعد باشد، یک نگاشت خطی U از E به F به‌وسیله مقادیرش در هر یک از n بردار پایه E تعیین می‌شود، و بنابراین، طبق تعریف، معادله (۲. ۹. ۱۰) هم ارز **دستگاه n معادله با مشتقات جزئی** :

$$D_i y = f_i(x_i, \ldots, x_n, y) \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{۱۰.۹.۳}$$

است.

---

۱. در این حالت رزولونت را ماتریس اساسی جواب می‌نامند (از پاورقی چاپ اول برگردان روسی کتاب ژان دیودونه).

در حالت کلی، یک چنین دستگاهی به ازاء $n > 1$ ممکن است جواب نداشته باشد، حتی اگر در سمت راست f_i ها توابعی پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشند. گوییم، **معادله (۱. ۹. ۱۰) روی $A \times B$ به‌طور کامل انتگرال‌پذیر**[1] **(کاملاً انتگرال‌پذیر) است، هر گاه، برای هر نقطه $(x_0 , y_0) \in A \times B$، یک همسایگی باز S از نقطه x_0 در A ، موجود باشد، به‌طوری‌که، معادله (۱. ۹. ۱۰) دارای جوابی یکتا مانند u باشد، که روی S تعریف شده باشد، و مقادیرش در B واقع باشند و $u(x_0) = y_0$.**

در همه موارد زیر ما فرض خواهیم کرد که، U روی $A \times B$ **پیوسته ـ مشتق‌پذیر**[2] است؛ برای هر $(x , y) \in A \times B$، $D_1 U(x , y)$ (به ترتیب $D_2 U(x , y)$) عنصری از $\mathscr{L}(E , \mathscr{L}(E , F))$ (به ترتیب $\mathscr{L}(F , \mathscr{L}(E , F))$) است، که می‌توان آن را با نگاشت دو خطی پیوسته :

$$(s_1 , s_2) \to D_1 U(x , y) . s_1) . s_2$$

از $E \times E$ به F که به صورت $(s_1 , s_2) \to D_1 U(x , y) . (s_1 , s_2)$ نوشته می‌شود (به ترتیب با نگاشت دو خطی پیوسته $(t , s) \to D_2 U(x , y) . t) . s$ از $F \times E$ به F که به صورت :

$$(t , s) \to D_2 U(x , y) . (t , s)$$

نوشته می‌شود) یکی گرفت ((۸ . ۷. ۵) را ببینید). علاوه بر این، طبق (۱ . ۲ . ۸) و (۳ . ۱ . ۸) ، نگاشت خطی $s_1 \to (D_1 U(x , y) . s_1) . s_2$ از E به F، برای هر $s_2 \in E$ مشتق نگاشت $x \to U(x , y) . s_2$ از E به F در نقطه (x , y) است. به طریق مشابه، نگاشت خطی $t \to (D_2 U(x , y) . t) . s$ از فضای F به F برای هر $s \in E$ ، مشتق نگاشت $y \to U(x , y) . s$ از F به F در نقطه (x , y) است.

(۴. ۹. ۱۰) (قضیه فروبنیوس[3]**) فرض کنیم U روی $A \times B$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد اگر $K = \mathbf{R}$ ، و دوبار پیوسته ـ مشتق‌پذیر**[4] **باشد اگر $K = C$. برای اینکه معادله (۱. ۹. ۱۰) روی $A \times B$ به‌طور کامل انتگرال‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، برای هر $(x , y) \in A \times B$ رابطه :**

$$D_1 U(x , y) . (s_1 , s_2) + D_2 U(x , y) . (U(x , y) . s_1 , s_2)$$
$$= D_1 U(x , y) . (s_2 , s_1) + D_2 U(x , y) . (U(x , y) . s_2 , s_1) \qquad (۱۰ . ۹ . ۴ . ۱)$$

برای هر زوج (s_1 , s_2) در $E \times E$ برقرار باشد.

---

1 . Completely integrable = Вполне интегрируемо
2 . Continuously differentiable = Непрерывно дифференцируемо
3 . Frobenius' s theorem = Теорема Фробениуса

۴. به حالتی که $K = C$ باشد در چاپ اول متن روسی کتاب اشاره نشده است. در ضمن، چنانکه قبلاً نیز اشاره شده است، واژه‌های «پیوسته ــ مشتق‌پذیر» و «دوبار پیوسته ــ مشتق‌پذیر» به ترتیب به عنوان معادل‌هایی برای واژه‌های انگلیسی "Continuously differntiable" و "Twice continuously differentiable" انتخاب شده‌اند، که می‌توان به جای آنها به ترتیب واژه‌هایی مانند «دارای مشتق پیوسته» و «دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته» گذاشت. مترجم.

(a) **لزوم.** فرض کنیم u یک جواب از معادله (۱. ۹. ۱۰) روی یک گوی باز $S \subset A$ به مرکز x_0 باشد به‌طوری که $y_0 = u(x_0)$. در این صورت، از (۲. ۹. ۱۰) و فرض نتیجه می‌شود که $u'(x)$ روی S مشتق‌پذیر است. علاوه بر این، برای هر $s_2 \in E$ ، مشتق نگاشت $s_2 \cdot (x) \; x \to u'(x)$ در نقطه x_0 ، طبق (۱. ۱۲. ۸) ، نگاشت $s_1 \to u''(x_0).(s_1, s_2)$ است. اما، طبق (۲. ۹. ۱۰) ، این مشتق (با استفاده از (۱. ۲. ۸) ، (۳. ۱. ۸) ، و (۱. ۹. ۸)) برابر نگاشت :

$$s_1 \to (D_1 U(x_0, y_0) . s_1) . s_2 + (D_2(x_0, y_0) . (u'(x_0) . s_1)) . s_2$$

نیز هست. با استفاده مجدد از رابطه (۲. ۹. ۱۰) ، و با بیان اینکه مشتق دوم u در نقطه x_0 یک نگاشت دو خطی **متقارن** است ((۲. ۱۲. ۸) را ببینید)، رابطه (۱. ۴. ۹. ۱۰) در نقطه (x_0, y_0) به‌دست می‌آید. اما، چون (x_0, y_0) در $A \times B$ به‌طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(b) **کفایت.** فرض کنیم $S_0 \subset A$ یک گوی باز به مرکز x_0 و شعاع α ، و $T_0 \subset B$ یک گوی باز به مرکز y_0 و شعاع β باشد، به طوری‌که U روی $S_0 \times T_0$ کراندار باشد. فرض کنیم $M \leq \| U(x, y) \|$. برای یک بردار $z \in E$ ، وقتی $\xi \in K$ باشد، معادله دیفرانسیل معمولی :

$$w' = U(x_0 + \xi z, w) . z = f(\xi, w, z) \qquad (۲. ۴. ۹. ۱۰)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دیده می‌شود که، اگر u در یک همسایگی $\| x - x_0 \| < \rho$ از x_0 ، در شرط (۲. ۹. ۱۰) صدق نموده و به ازاء $x = x_0$ مقدار y_0 بگیرید، آنگاه نگاشت $\xi \to u(x_0 + \xi z)$ برای $\| z \| < \rho$ جوابی از معادله (۲. ۴. ۹. ۱۰) روی گوی $| \xi | < 1$ واقع در K است، که به ازاء $\xi = 0$ مقدار y_0 می‌گیرد (یکتایی u از (۲ . ۵ . ۱۰) نتیجه می‌شود). اکنون ، سمت راست (۲. ۴ . ۹ . ۱۰) ، برای $|\xi| \leq 2$ ، $\| w - y_0 \| < \beta$ ، $\| z \| < \alpha / 2$ پیوسته ــ مشتق‌پذیر است، و برای چنین مقادیری داریم $\| f(\xi, w, z) \| \leq M \| z \|$. با به کارگیری (۶ . ۵ . ۱۰) برای f و $g = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که برای هر $z \in E$ ، که $\| z \| < \frac{\beta}{2M}$ ، معادله (۲. ۴. ۹. ۱۰) دارای جواب یکتایی مانند $\xi \to v(\xi, z)$ است، که برای $| \xi | < 2$ تعریف شده، و مقادیرش را در H می‌گیرد و $v(0, z) = y_0$. ثابت می‌کنیم که، **تابع** $u(x) = v(1, x - x_0)$ **جوابی از معادله (۱. ۹. ۱۰) روی گوی** $\| x - x_0 \| < \frac{\beta}{2M}$ است.

حال ، برای $\| z \| < \frac{\beta}{2M}$ و $| \xi | < 2$ ، از (۳. ۷ . ۱۰) می‌دانیم که v پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. و برای $| \xi | < 2$ ، $\xi \to D_2(\xi, z)$ جوابی از معادله دیفرانسیل خطی :

$$V' = D_2 f(\xi, v(\xi, z), z) \circ V + D_3 f(\xi, v(\xi, z), z)$$

است، که برای $\xi = 0$ مقدار 0 می‌گیرد. برای هر $s_1 \in E$ ، قرار می‌دهیم $g(\xi) = D_2 v(\xi, z) . s_1$. داریم $g'(\xi) = D_2 f(\xi, v(\xi, z), z) . g(\xi) + D_3 f(\xi, v(\xi, z), z) . s_1$ و با توجه به تعریف f ، این

رابطه را می‌توان به صورت :

$$g'(\xi) = \mathrm{A}(\xi).(g(\xi).z) + \mathrm{B}(\xi).s_1 + \xi \mathrm{C}(\xi).(s_1, z)$$

با

$$\mathrm{A}(\xi) = \mathrm{D}_2 \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)) \ , \ \mathrm{B}(\xi) = \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)),$$

$$\mathrm{C}(\xi) = \mathrm{D}_1(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$$

نوشت. لازم است که ثابت کنیم :

$$g(\xi) = \xi \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)).s_1$$

و به همین علت تفاضل $h(\xi) = g(\xi) - \xi \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)).s_1 = g(\xi) - \xi \mathrm{B}(\xi).s_1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از رابطه $\mathrm{D}_1 v(\xi, z) = \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)).z = \mathrm{B}(\xi).z$ ، داریم :

$$h'(\xi) = \mathrm{A}(\xi).(g(\xi), z) + \mathrm{B}(\xi).s_1 + \xi \mathrm{C}(\xi).(s_1, z) - \mathrm{B}(\xi).s_1 -$$

$$- \xi \mathrm{C}(\xi).(z, s_1) - \xi \mathrm{A}(\xi).(\mathrm{B}(\xi).z, s_1)$$

اما، از رابطه (۱. ۴. ۹. ۱۰) به‌ویژه نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{C}(\xi).(z, s_1) + \mathrm{A}(\xi).(\mathrm{B}(\xi).z, s_1) = \mathrm{C}(\xi).(s_1, z) + \mathrm{A}(\xi).(\mathrm{B}(\xi).s_1, z)$$

بنابراین ،

$$h'(\xi) = \mathrm{A}(\xi).(g(\xi) - \xi \mathrm{B}(\xi).s_1, z) = \mathrm{A}(\xi).(h(\xi), z)$$

علاوه براین ، $h(0) = 0$. اما، تنها جواب معادله دیفرانسیل خطی $r' = \mathrm{A}(\xi).(r, z)$ که برای $\xi = 0$ برابر صفر است، $r(\xi) = 0$ می‌باشد ((۳. ۶. ۱۰) را ببینید) ، بنابراین ، برای $|\xi| < 2$ ، $h(\xi) = 0$ ، که رابطه :

$$\mathrm{D}_2 v(\xi, z).s_1 = \xi \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z)).s_1$$

را برای هر $s_1 \in \mathrm{E}$ ثابت می‌کند، یعنی $\mathrm{D}_2 v(\xi, z) = \xi \mathrm{U}(x_0 + \xi z, v(\xi, z))$. این رابطه برای $|\xi| < 2$ و $\| z \| < \frac{\beta}{2\mathrm{M}}$ برقرار است. در حالت خاص، برای $\xi = 1$ ، با قرار دادن $x = x_0 + z$ ، برای $\| x - x_0 \| < \frac{\beta}{2\mathrm{M}}$ ، به‌دست می‌آوریم $u'(x) = \mathrm{U}(x, u(x))$ ، که اثبات را به پایان می‌رساند.

(۵ . ۹. ۱۰) فرض کنیم U روی $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد اگر $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ ، و دوبار پیوسته ـ مشتق‌پذیر باشد اگر $\mathrm{K} = \mathbf{C}$، و در شرط فروبنیوس (۱. ۴. ۹. ۱۰) صدق کند. در این‌صورت، برای $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$، گوی بازی مانند $\mathrm{S} \subset \mathrm{A}$ به مرکز a و گویی باز مانند $\mathrm{T} \subset \mathrm{B}$ به مرکز b با خواص زیر موجود هستند :

(۱) برای هر نقطه $(x_0, y_0) \in \mathrm{S} \times \mathrm{T}$ معادله (۱. ۹. ۱۰) دارای جواب یکتایی مانند $x \to u(x, x_0, y_0)$ است، که روی S تعریف شده است و $u(x_0, x_0, y_0) = y_0$ ؛

(۲) u روی $\mathrm{S} \times \mathrm{S} \times \mathrm{T}$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است.

اگر علاوه براین، E و F متناهی‌البعد باشند، و U روی $A \times B$، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) باشد، آنگاه، u روی $S \times S \times T$ ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر (به ترتیب بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) خواهد بود.

بالاخره، گوی بازی مانند $W \subset T$ به مرکز b موجود است، به‌طوری‌که، برای هر نقطه $(x , x_0 , y_0) \in S \times S \times W$ معادله $y_0 = u(x_0 , x , y)$ دارای جواب یکتای $y = u(x , x_0 , y_0)$ در T است.

فرض کنیم $S_0 \subset A$ گویی باز به مرکز a و شعاع α ، و $T_0 \subset B$ گوئی باز به مرکز b و شعاع β باشد، به‌طوری‌که روی $S_0 \times T_0$ ، $\| U(x , y) \| \leq M$. معادله دیفرانسیل معمولی :

$$w' = U(x_0 + \xi z, y_0 + w) . z = f(\xi , w , z , x_0 , y_0) \qquad (۱۰.۹.۵.۱)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شبیه آنچه که در اثبات (۱۰.۹.۴) بیان شد، این معادله دارای جواب یکتای $\xi \to v(\xi , z , x_0 , y_0)$ است، که برای $|\xi| < 2$ تعریف شده است و $v(0 , z , x_0 , y_0) = 0$ به شرط اینکه $\| x_0 - a \| < \frac{\alpha}{8}$ ، $\| z \| < \inf(\frac{\alpha}{4} , \frac{\beta}{2M})$ ، $\| y_0 - b \| < \beta$. علاوه بر این ، قضیه (۱۰.۷.۳) نشان می‌دهد که ، v برای این مقادیر ξ ، z ، x_0 ، y_0 به شرط اینکه α ، β طوری انتخاب شده باشند که، مشتق U روی $S_0 \times T_0$ کراندار باشد، پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. در این‌صورت، از قضیه (۱۰.۹.۴) نتیجه می‌شود که، نگاشت $u(x , x_0 , y_0) = y_0 + v(1 , x - x_0 , x_0 , y_0)$ یکتا جواب معادله (۱۰.۹.۱) است که روی گوی S به معادله $\| x - a \| < \frac{\alpha}{8}$ تعریف شده و به ازاء $x = x_0$ مقدار y_0 می‌گیرد. بنابراین، نگاشت $(x , x_0 , y_0) \to u(x , x_0 , y_0)$ روی $S \times S \times T_0$ پیوسته ـ مشتق‌پذیر است. اگر E و F متناهی البعد باشند، اثبات اینکه u ، p بار پیوسته ـ مشتق‌پذیر(به ترتیب بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر، تحلیلی) است وقتی U دارای چنین خاصیتی باشد، با روشی مشابه انجام می‌شود، فقط به‌جای قضیه (۱۰.۷.۳) ، باید از قضیه (۱۰.۷.۴) (به ترتیب (۱۰.۷.۵)) استفاده نمود. بالاخره، آخرین گزاره قضیه، با بحثی مشابه آن‌چه در قسمت (c) قضیه (۱۰.۸.۱) بیان شد، ثابت می‌شود.

وقتی $E = K^n$ باشد، شرط فروبنیوس (۱۰.۹.۴.۱) در رابطه با انتگرال‌پذیری کامل، برای سیستم (۱۰.۹.۳) ، هم ارز روابط :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1 , \dots , x_n , y) + \frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1 , \dots , x_n , y) . f_j(x_1 , \dots , x_n , y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1 , \dots , x_n , y) + \frac{\partial}{\partial y} f_j(x_1 , \dots , x_n , y) . f_i(x_1 , \dots , x_n , y) \qquad (۱۰.۹.۶)$$

است (که در آن لازم است به خاطر آورد که، $\frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1 , \dots , x_n , y)$ عنصری از $\mathscr{L}(F , F)$ است (یک ماتریس است، اگر F متناهی‌البعد باشد) ، و $f_j(x_1 , \dots , x_n , y)$ عنصری از F است).

فصل XI

تئوری طیفی مقدماتی

گزینش موضوع این فصل تحت تأثیر دو ملاحظه بوده است: (۱) این اولین گام در یکی از شاخه‌های اصلی آنالیز تابعی مدرن است، که «تئوری طیفی» نامیده می‌شود، (۲) این کار در عمل امکان برداشت از فرمول‌بندی مفاهیم و اثبات قضیه‌های فصل‌های قبلی را فراهم می‌نماید، و بنابراین، می‌توان دانشجو را متقاعد کرد که، بسط « مجرد» مفاهیم آن فصل‌ها تعمیم‌هایی بدون منظور و بی‌فایده نبوده است.

نظریه طیفی عمومی که پیوندی نزدیک با تئوری عمومی انتگرال دارد، از حدود این نخستین جلد کتاب خارج است، و به استثناء اثبات وجود طیف (۳. ۱ . ۱۱) و برخی خواص مقدماتی عملگر الحاقی (بخش ۵ . ۱۱) خواننده هیچ یک از نتایج نظریه طیفی را در این فصل پیدا نخواهد کرد. ما توجه خود را روی تئوری **عملگرهای خطی فشرده**[1] متمرکز کرده‌ایم، که دوباره می‌توانند به عنوان آشفتگی‌های «کوچک» از عملگرهای عمومی مورد بررسی قرار گیرند. اما، در مفهومی کاملاً متفاوت از آن‌چه که در فصل ۱۰ غالب بوده، در این‌جا آن‌چه به عنوان «کوچک» در نظر گرفته شده، چیزی است که در زیرفضاهای با **بعد متناهی** اتفاق می‌افتد، و جوهر و اساس قضیه اصلی (۳. ۳. ۱۱) در رابطه با عملگرهای فشرده این است که، وقتی ما چنین عملگری را به نگاشت همانی اضافه می‌کنیم، آن‌چه که دوباره به‌دست می‌آوریم یک هومیومورفیسم است، به شرط اینکه به یک زیر فضای با **همبعد**[2] **متناهی** محدود شده باشد. **عملگرهای خود الحاق فشرده**[3] در فضای هیلبرت فواید ویژه‌ای دارند، نه تنها به خاطر اینکه می توان اطلاعات به مراتب دقیق‌تری درباره طیف آنها نسبت به عملگرهای عمومی داشت (۷. ۵ . ۱۱) ، بلکه، همچنین، به این خاطر که، تئوری عمومی آنها مستقیماً در معادلات انتگرال فرد هلم با هسته هرمیتی (بخش ۶ . ۱۱) و به‌ویژه در مسائل کلاسیک **استورم ـ لیوویل** که ما به عنوان شرح زیبای خاصی از توان روش‌های آنالیز

---

1. Compact linear operators = Вполне непрерывные операторы

به جای واژه عملگر خطی فشرده در برخی از منابع (به‌خصوص در کتاب‌های ریاضی به زبان روسی) از واژه عملگرخطی کاملاً پیوسته نیز استفاده شده است. مترجم.

۲ . واژه همبعد معادلی است فارسی برای واژه انگلیسی Codimension و واژه روسی Коразмерность . مترجم.

3 . Compact self – adjoint operators = Вполне непрерывные самосопряженные операторы

تابعی انتخاب کرده‌ایم، به کار گرفته می‌شود (بخش ۷. ۱۱).

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره تئوری طیفی، و کاربردهای مؤثر آن، ما قویاً مطالعه اثر کلاسیک کورانت ـ هیلبرت [۱۰] را به خاطر شیوه لذت‌بخش و محتوای غنی آن توصیه می‌کنیم.

تئوری عمومی طیفی را در فصل XV گسترش خواهیم داد، مهمترین کاربردهای آن در فصل XXI (نمایش گروه‌های فشرده)، فصل XXII (آنالیز هارمونیک)، و فصل XXIII (معادلات خطی تابعی) مورد بررسی قرار گرفته است.[۱]

۱. طیف یک عملگر پیوسته

فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار **مختلط** باشد. نگاشت خطی $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ را اغلب یک **اپراتور (عملگر**[۲]) روی E می‌نامند. $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ مجموعه عملگرهای خطی **پیوسته** روی E (که ما برای سهولت محاسبات آن را به‌صورت $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ نشان خواهیم داد) یک فضای نرم‌دار مختلط است (بخش ۷. ۵ را ببینید). $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ یک **جبر** غیرجابجایی روی C نیز هست؛ «ضرب» را که در این جبر با رابطه $(u, v) \to u \circ v$ تعریف می‌شود، به صورت $(u, v) \to uv$ نیز می‌نویسند. نگاشت همانی روی E عنصر واحد $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ است، که به صورت 1_{E} نوشته می‌شود. نگاشت‌های $(u, v) \to u + v$ و $(u, v) \to u \circ v$ روی $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \times \mathscr{L}(\mathrm{E})$ پیوسته هستند ((۵. ۷. ۵) را ببینید).

گوییم عدد مختلط ζ یک **مقدار منظم**[۳] برای عملگر پیوسته u است، هرگاه، $u - \zeta . 1_{\mathrm{E}}$ دارای **وارونی** مانند v_ζ در $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ باشد (یعنی، هرگاه $u - \zeta . 1_{\mathrm{E}}$ یک **هومیومورفیسم** خطی از E بروی E باشد). اگر ζ مقداری منظم برای u نباشد، ζ را یک **مقدار طیفی**[۴] برای u، و مجموعه مقادیر طیفی u را **اسپکتروم** (طیف) u نامیده، به علامت $\mathrm{sp}(u)$ نشان می‌دهیم.[۵]

اگر $\zeta \in \mathrm{C}$ چنان باشد که هسته نگاشت $u - \zeta . 1_{\mathrm{E}}$ به 0 تبدیل نشود، در این صورت، ζ یک مقدار

---

۱. در چاپ اول ترجمه کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به علت اینکه، فصل‌های فوق به جلدهای بعدی کتاب حاضر مربوط می‌شده است، برای کسب اطلاعات بیشتر از این کاربردها، علاوه بر کتاب کورانت - هیلبرت، مطالعه کتابهای:
Н. И. Ахизер , И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве ,
و Тейлор [23] ، Шварц [13] ، Данофорд , Люмис [20] نیز به خواننده توصیه شده است. مترجم.

۲. به این ترتیب در کتاب ژان دیودونه عملگر (اپراتور) به معنی عملگر خطی در نظر گرفته شده است، و این در حالی است که، در برخی از کتاب‌ها عملگرهای خطی و عملگرهای غیرخطی به عنوان دو مفهوم متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرند. مترجم.

3 . Regular value = Регулярное значение

4 . Spectral value = Спектральное значение

۵. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای نماد $\mathrm{sp}(u)$ از نماد $\mathrm{S}(u)$ استفاده شده است. مترجم.

طیفی برای u خواهد بود، چنین مقادیر طیفی را **مقادیر ویژه** u می‌نامند. هر بردار $x \neq 0$ در هسته $u - \zeta \cdot 1_E$، یعنی، هر بردار $x \neq 0$ که $u(x) = \zeta x$، یک **بردار ویژه** u متناظر با مقدار ویژه ζ می‌نامند. این بردارهای ویژه و 0 در فضای E یک زیرفضای برداری بسته تشکیل می‌دهند. هسته $u - \zeta \cdot 1_E$ را نیز **فضای ویژه (مشخصه)**[1] عملگر u متناظر با مقدار ویژه ζ نامیده، به علامت $E(\zeta)$ یا $E(\zeta, u)$ نشان می‌دهند.

وقتی E دارای بعد **متناهی** n باشد، در جبر خطی مقدماتی ثابت می‌شود که، هر مقدار طیفی عملگر u یک مقدار ویژه u است ((۱۹. ۴. A) را ببینید)، طیف u مجموعه‌ای متناهی وحداکثر دارای n عضو است، که ریشه‌های **چندجمله‌ای مشخصه** u، یعنی، ریشه‌های $\det(u - \zeta \cdot 1_E)$ می‌باشد ((۹. ۶. A) را ببینید). اما، اگر فضای E دارای بعد نامتناهی باشد، ممکن است مقادیری طیفی وجود داشته باشند که مقادیر ویژه نباشند.

مثال

(۱. ۱. ۱۱) فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط، و $(a)_{n \geq 1}$ یک سیستم اورتونرمال تام[2] در E باشد ((۱. ۶. ۶) را ببینید). به هر بردار $x = \sum_n \zeta_n a_n$ در E (با $\|x\|^2 = \sum_n |\zeta_n|^2$) بردار $u(x) = \sum_n \zeta_n a_{n+1}$ مربوط می‌کنیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که، عملگر u خطی است و $\|u(x)\| = \|x\|$. در نتیجه u پیوسته است ((۱. ۵. ۵) را ببینید). علاوه بر این، $u(E)$ زیرفضایی از E است که بر a_1 عمود است. بنابراین، u پوشا نیست، و این مطلب نشان می‌دهد که $\zeta = 0$ یک مقدار طیفی برای عملگر u است. اما، از رابطه $u(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $x = 0$، بنابراین، 0 یک مقدار ویژه برای عملگر u نیست.

(۲. ۱. ۱۱) فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط، و u یک عملگر خطی پیوسته روی E باشد. در این صورت، R_u مجموعه عناصر منظم $\zeta \in C$ برای عملگر u، مجموعه‌ای باز در C است، و نگاشت $\zeta \to (u - \zeta \cdot 1_E)^{-1}$ از R_u به $\mathscr{L}(E)$ تحلیلی است.

فرض کنیم $\zeta_0 \in R_u$، و $v_0 = (u - \zeta_0 \cdot 1_E)^{-1}$. برای هر $\zeta \in C$، در $\mathscr{L}(E)$ می‌توان نوشت:

$$u - \zeta \cdot 1_E = u - \zeta_0 \cdot 1_E - (\zeta - \zeta_0) \cdot 1_E = (u - \zeta_0 \cdot 1_E)(1_E - (\zeta - \zeta_0) v_0)$$

اما، طبق (۱. ۲. ۳. ۸)، برای $|\zeta - \zeta_0| < \|v_0\|^{-1}$، عملگر $1_E - (\zeta - \zeta_0) v_0$ دارای وارونی در $\mathscr{L}(E)$ برابر با مجموع سری همگرای مطلق $\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n v_0^n$ است. بنابراین، برای این مقادیر

1 . Eigenspace = Собественное подпространство
2 . Total orthonormal system = Тотальная ортонормальная система

ζ ، عملگر $u-\zeta\,.\,1_E$ در $\mathscr{L}(E)$ وارون‌پذیر است، و وارون آن را که برابر $v_0\,(1_E-(\zeta-\zeta_0)\,v_0)^{-1}$ است، می‌توان به‌صورت $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n\,v_0^{n+1}$ نوشت. ضمناً، سری سمت راست برای $|\zeta-\zeta_0|<\|v_0\|^{-1}$ به‌طور مطلق همگرا است، که این مطلب اثبات را به پایان می‌رساند.

(۳ . ۱ . ۱۱) اگر E یک فضای باناخ مختلط باشد، آنگاه طیف هر عملگر خطی پیوسته u روی E یک زیرمجموعه ناتهی فشرده از C است، که در گوی $|\zeta|\leq\|u\|$ واقع شده است.

نخست ملاحظه می‌شود که، برای $\zeta\neq 0$ ، $u-\zeta\,.\,1_E=-\zeta(1_E-\zeta^{-1}u)$، و بنابراین، $u-\zeta\,.\,1_E$ ، طبق (۱. ۲. ۳. ۸) ، برای $\|u\|<|\zeta|$ ، در $\mathscr{L}(E)$ وارون‌پذیر است. علاوه بر این، برای $|\zeta|>\|u\|$ ،

$$(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}\,u^n$$

که در آن سری سمت راست مطلقاً همگرا است، و

$$\|(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^{-n-1}\|u\|^n=(|\zeta|-\|u\|)^{-1}$$

بنابراین، برای $|\zeta|\geq 2\|u\|$، خواهیم داشت $\|(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}\|\leq\|u\|^{-1}$. حال، اگر داشته باشیم $R_u=C$، آنگاه $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ تابعی تام ((۶ . ۹. ۹) را ببینید)، و روی C کراندار خواهد بود. زیرا، این تابع روی مجموعه فشرده $|\zeta|\leq 2\|u\|$ کراندار است و روی مکمل این مجموعه نیز کراندار است. بنابراین، طبق قضیه لیوویل (۱. ۱۱. ۹) ، عملگر $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ باید ثابت باشد. در نتیجه $u-\zeta\,.\,1_E$ نیز باید ثابت باشد، که غیرممکن است. علاوه بر این، قسمت اول اثبات نشان می‌دهد که، عملگر $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ برای $|\zeta|>\|u\|$ موجود است و تحلیلی است، بنابراین، طیف عملگر u که در C بسته است، فشرده می‌باشد و در گوی $|\zeta|\leq\|u\|$ قرار گرفته است.

می‌توان مثال‌هایی از عملگرهایی خطی ارائه نمود، که طیف آنها یک زیرمجموعه فشرده **دلخواه** از C است (مسأله ۳ را ببینید).

مسائل

۱ . فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط، u یک عنصر از $\mathscr{L}(u)$ ، و $\mathrm{sp}(u)$ اسپکتروم u باشد.

(a) نشان دهید که، اگر عدد مختلط ζ چنان باشد که، برای هر عدد صحیح $p>1$ ، $\|u^p\|<|\zeta|^p$. در این‌صورت، ζ مقداری منظم برای عملگر u است (از (۳. ۱. ۱۱) استفاده کنید، و از همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-np}\,u^{np}$ نتیجه بگیرید که، سری

$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n} u^n$ نیز همگرا است.)

(b) نشان دهید که، عدد $\rho(u) = \inf_n \| u^n \|^{1/n}$ برابر شعاع کوچکترین دیسک به مرکز 0 است که شامل $sp(u)$ است، و علاوه بر این، دنباله $(\| u^n \|^{1/n})$ دارای حدی برابر $\rho(u)$ است. (از (a)، مسأله ۱ بخش ۱. ۹ و قضیه (۴. ۹. ۹) استفاده کنید.) (برای دیدن مثالی که در آن $\| u \| \neq \rho(u)$، به بخش ۴. ۱۱ مسأله ۴ مراجعه نمایید.)

۲. فرض کنیم u ، v دو عنصر از فضای $\mathscr{L}(E)$ باشند، که در آن E یک فضای باناخ مختلط است. نشان دهید که، با نمادهای مسأله ۱، اشتراک‌های $sp(uv)$ و $sp(vu)$ با $C - \{0\}$ شبیه هم هستند. (ملاحظه کنید که، اگر f، g دو عنصر از $\mathscr{L}(E)$ باشند، به‌طوری‌که $1_E - fg$ وارون‌پذیر باشد و $h = (1_E - fg)^{-1}$ ، آنگاه $1_E + ghf$ وارون $1_E - gf$ است.)

۳. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر ، $(e_n)_{n \geq 1}$ یک پایه هیلبرتی برای فضای E ، S یک زیرمجموعه نامتناهی فشرده دلخواه در C ، و (ρ_n) یک مجموعه نامتناهی ـ شمارش‌پذیر از نقاط S باشد، که در S چگال است ((۹. ۱۰. ۳) را ببینید). نشان دهید که، عنصر یکتایی مانند $u \in \mathscr{L}(E)$ موجود است، به‌طوری‌که ، برای هر $n \geq 1$ ، $u(e_n) = \rho_n e_n$. ثابت کنید که، طیف u برابر S است، حال آنکه، مقادیر ویژه عملگر u ، (ρ_n)ها هستند. اگر $\zeta \in S$ ، و ζ برابر با هیچ یک از ρ_nها نباشد، و $v_\zeta = u - \zeta . 1_E$، نشان دهید که، $v_\zeta(E)$ در E چگال است، اما، برابر با E نیست (برای اثبات اولین گزاره از (۳. ۵. ۶) استفاده کنید).

۴. نشان دهید که، طیف عملگر خطی u که در (۱. ۱. ۱۱) تعریف شده است، دیسک $|\zeta| \leq 1$ در C است، و u مقدار ویژه‌ای ندارد. اگر $v_\zeta = u - \zeta . 1_E$، نشان دهید که، برای $|\zeta| < 1$ ، $v_\zeta(E)$ در E چگال نیست، اما، برای $|\zeta| = 1$ ، $v_\zeta(E)$ در E چگال است و متمایز از E است (با (۳. ۵. ۶) مقایسه کنید) .

۵. فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط، و E_0 یک زیرفضای چگال در E باشد. نشان دهید که، برای هر عنصر $u \in \mathscr{L}(E_0)$ ، طیف u شامل طیف $\tilde{u}$ یکتا گسترش پیوسته u به E است ((۴ . ۵ . ۵) را ببینید). مثالی ارائه کنید که در آن این طیف‌ها متمایز باشند و مثالی از یک عملگر $u \in \mathscr{L}(E_0)$، و یک مقدار طیفی ζ از u ارائه کنید که، اگر $v_\zeta = u - \zeta . 1_E$ ، v_ζ یک نگاشت دوسویی از E_0 به روی E_0 باشد (در مسأله ۳، زیرفضای E_0 از E را مورد بررسی قرار دهید، که از همه ترکیب‌های خطی (متناهی) بردارهای e_n تشکیل شده است). توجه کنید که، اگر E_0 یک فضای باناخ باشد، مطلب فوق غیرممکن است، زیرا، در این‌صورت، هر نگاشت خطی دو سویی از E_0 به‌روی E_0، یک هومیومورفیسم است ((۸. ۱۶. ۱۲) را ببینید).

۶. [1] فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر، $(e_n)_{n\geq 1}$ یک پایه هیلبرتی از E ، و u یک عملگر خطی پیوسته روی E باشد، به‌طوری‌که برای هر زوج h، k از اندیس‌ها داشته باشیم $(u(e_h) \mid e_k) \geq 0$.

(a) نشان دهید که، عدد $\rho(u)$ (مسأله ۱(b) را ببینید) متعلق به $sp(u)$ است. (توجه کنید که برای $|\zeta| > \rho(u)$، اگر $v_\zeta = (u - \zeta . 1_E)^{-1}$ ، آنگاه :

$$(v_\zeta(e_h) \mid e_k) = - \sum_{n=0}^{\infty} (u^n(e_h) \mid e_k) \zeta^{-n-1}$$

و از مسأله (b) ۷ بخش ۱۵. ۹ استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم، علاوه بر این ، برای عدد صحیحی مانند $n \geq 1$ ، عددی صحیح مانند $k \geq 1$ موجود باشد، به‌طوری

---

۱. مسأله ۶ و قسمت‌هایی از مسأله ۵ در چاپ او ل برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، و از چاپ دوم متن انگلیسی آن ترجمه شده است. مترجم.

که $(u^n(e_k) \mid e_k) = d > 0$. ثابت کنید که، در این صورت $\rho(u) \geq d^{\frac{1}{n}}$ (ملاحظه کنید که، برای هر عدد صحیح $m \geq 1$، $((u^{nm}(e_k) \mid e_k) \geq d^m$).

(c) فرض کنیم $\rho(u) > 0$ و نقطه $\rho(u)$ یک **قطب** از تابع $\zeta \to v_\zeta$ باشد. ثابت کنید که، در این‌صورت، یک بردار ویژه $x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ از u متناظر با $\rho(u)$ موجود است، به‌طوری‌که، برای هر n، $\xi_n \geq 0$. (فرض کنید N مرتبه قطب $\rho(u)$ از v_ζ باشد، و

$$w_{\mathrm{N}} = \lim_{\zeta \to \rho(u)} (\zeta - \rho(u))^{\mathrm{N}} v_\zeta .$$

نشان دهید که، برای هر زوج h، k، و $w_{\mathrm{N}} \neq 0$، داریم $(w_{\mathrm{N}}(e_h) \mid e_k) \leq 0$، از فرض و این حقیقت که $u w_{\mathrm{N}} = \rho(u) w_{\mathrm{N}}$ استفاده کنید.)

(d) فرض کنیم که، برای هر زوج h، k از اندیس‌ها $(u(e_h) \mid e_k) > 0$ (طبق (b)، از این مطلب نتیجه می‌شود که $\rho(u) > 0$)، علاوه بر این، فرض کنیم $\rho(u)$ قطبی از v_ζ باشد. نشان دهید که، در این صورت $\rho(u)$ یک **قطب ساده** از v_ζ است. (ملاحظه کنید که $\frac{d}{d\zeta} v_\zeta = v_\zeta^2$ و ثابت کنید که، اگر داشته باشیم $\mathrm{N} > 1$، در این‌صورت، باید داشته باشیم $w_{\mathrm{N}}^2 = 0$، و در نتیجه برای هر k، باید داشته باشیم $(w_{\mathrm{N}}(e_k) \mid e_h) = 0$، با استفاده از رابطه $u w_{\mathrm{N}} = \rho(u) w_{\mathrm{N}}$، دیده می‌شود که، اگر برای یک اندیس h، $(w_{\mathrm{N}}(e_k) \mid e_h) = 0$، آنگاه $w_{\mathrm{N}}(e_k) = 0$.) ثابت کنید که، یک بردار ویژه $z = \sum \zeta_n e_n$ از u متناظر با $\rho(u)$ موجود است، به‌طوری که، برای هر n، $\zeta_n > 0$. سپس، نشان دهید که، اگر $y = \sum_n \eta_n e_n$ یک بردار ویژه از ادجوینت u^* متناظر با $\rho(u)$ باشد (مقایسه کنید با بخش ۱۱.۵) برای هر n داریم $\eta_n \geq 0$، یا برای هر n، $\eta_n \leq 0$ (در غیر این‌صورت، با استفاده از یک کران بالا از هر یک از η_nها که از رابطه $\rho(u)\eta_n = \sum_k \eta_k (u(e_k) \mid e_n)$ به‌دست می‌آید، به تناقضی به‌صورت نامساوی $\sum_n \zeta_n |\eta_n| < \sum_n \zeta_n |\eta_n|$ خواهیم رسید). بالاخره، نتیجه بگیرید که، **همه** بردارهای ویژه u که متناظر با $\rho(u)$ هستند، مضارب اسکالری از z می‌باشند (u و u^* را معاوضه کنید). («قضیه فروبنیوس ـ پرون».)

۲. عملگرهای فشرده

فرض کنیم E ، F دو فضای نرم‌دار (حقیقی یا مختلط) باشند. گوییم، نگاشت خطی u از E به F **فشرده** (**کاملاً پیوسته**) است، اگر برای هر زیرفضای **کراندار** B از E ، مجموعه $u(\mathrm{B})$ در F **به‌طور نسبی فشرده** باشد. یک شرط معادل این است که بگوییم، برای هر دنباله کراندار (x_n) در E زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) موجود باشد، به طوری‌که ، دنباله $(u(x_{n_k}))$ در F همگرا باشد. چون هر مجموعه به‌طور نسبی فشرده در F کراندار است ((۱. ۱۷. ۳) را ببینید) ، از (۱. ۵ . ۵) نتیجه می‌شود که، یک نگاشت فشرده **پیوسته** است.

مثال‌ها

(۱. ۲. ۱۱) اگر E یا F دارای بعد متناهی باشند، آنگاه، هر نگاشت خطی پیوسته از E به F عملگری فشرده (کاملاً پیوسته) است (طبق (۱. ۵. ۵)، (۶. ۱۷. ۳)، (۱۶. ۲۰. ۳)، و (۹. ۱۷. ۳)).

(۲. ۲. ۱۱) اگر E یک فضای نرم‌دار با بعد نامتناهی باشد، آنگاه، عملگر همانی روی E، طبق قضیه ریس ((۴. ۵. ۹) را ببینید) عملگری فشرده نیست.

(۳. ۲. ۱۱) فرض کنیم $I = [a\ ,\ b]$ یک فاصله فشرده در $\mathbf{R}$، و $E = \mathscr{C}_C(I)$ فضای باناخ توابع پیوسته مختلط روی I (بخش ۲. ۷ را ببینید)، و $(s\ ,t) \to K(s\ ,t)$ یک تابع مختلط پیوسته روی $I\times I$ باشد. برای هر تابع $f \in E$، نگاشت $t \to \int_a^b K(s\ ,t) f(s) ds$، طبق (۱. ۱۱. ۸)، روی I پیوسته است، این نگاشت را به Uf نشان می‌دهیم. نگاشت $f \to Uf$ از E به E خطی است. ثابت می‌کنیم که، این نگاشت فشرده است. در واقع، اگر $g = Uf$، برای $t_0 \in I$، $t \in I$، می‌توان نوشت:

$$g(t) - g(t_0) = \int_a^b (K(s\ ,t) - K(s\ ,t_0))\ f(s)\ ds \qquad (۱. ۳. ۲. ۱۱)$$

از آنجا که K روی $I\times I$ به‌طور یکنواخت پیوسته است ((۵. ۱۶. ۳) را ببینید)، برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ی موجود خواهد بود، به‌طوری که، از رابطه $|t - t_0| \le \delta$، نتیجه می‌شود، برای هر $s \in I$،

$$|K(s\ ,t) - K(s\ ,t_0)| \le \varepsilon .$$

بنابراین، طبق قضیه میانگین، برای هر f در E،

$$|g(t) - g(t_0)| \le \varepsilon(b-a)\|f\| \qquad (۲. ۳. ۲. ۱۱)$$

این مطلب نشان می‌دهد که، برای هر مجموعه کراندار B در E، $U(B)$ تصویر B تحت U، در هر نقطه $t_0 \in I$ مجموعه‌ای همپیوسته است (بخش ۵. ۷ را ببینید). از طرف دیگر، برای هر $t \in I$، اگر روی $I\times I$، $|K(s\ ,t)| \le \dfrac{k}{b-a}$، آنگاه به طریقی مشابه، خواهیم داشت $|g(t)| \le k\|f\|$. طبق قضیه آسکولی (۷. ۵. ۷)، مجموعه $U(B)$ در E به‌طور نسبی فشرده است.

(۴. ۲. ۱۱) با همان نمادها و همان فرض‌هایی که در رابطه با K در (۳. ۲. ۱۱) بیان شد، اکنون فرض کنیم F فضای توابع مختلط رگله روی I باشد (بخش ۶ . ۷ را ببینید). این فضا اگر به عنوان زیرفضایی از فضای $\mathscr{B}_C(I)$ در نظر گرفته شود، دوباره یک فضای باناخ است. در این حالت، Uf شبیه آنچه که در (۳. ۲. ۱۱) دیدیم، برای هر $f \in F$ تعریف می‌شود، و نامساوی (۲. ۳. ۲. ۱۱) نیز معتبر باقی خواهد ماند، و با همان استدلالی که در (۳. ۲. ۱۱) بیان شد، می‌توان نشان داد که، U نگاشتی فشرده (کاملاً پیوسته) از

F به E است.

(۵ . ۲. ۱۱) اگر u ، v دو نگاشت فشرده (کاملاً پیوسته[1]) از E به F باشند، آنگاه $u+v$ نگاشتی فشرده (کاملاً پیوسته) از E به F خواهد بود.

فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای کراندار در E باشد. طبق فرض، زیر دنباله‌ای مانند (x'_n) از (x_n) موجود است، به‌طوری‌که $(u(x'_n))$ در F همگرا است. چون دنباله (x'_n) در E کراندار است، زیر دنباله‌ای از (x'_n) مانند (x''_n) موجود است، به‌طوری‌که $(v(x''_n))$ در F همگرا است. در این‌صورت، طبق (۱۰. ۱۳. ۳) و (۵ . ۱. ۵) ، دنباله $(u(x''_n)+v(x''_n))$ در F همگرا است، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

(۶ . ۲. ۱۱) فرض کنیم E ، F ، E_1 ، F_1 فضاهایی نرم‌دار، f یک نگاشت خطی پیوسته از E_1 به E ، و g یک نگاشت خطی پیوسته از F به F_1 باشد. در این‌صورت، برای هر نگاشت فشرده u از E به F ، $u_1 = g\circ u\circ f$ نگاشتی فشرده از E_1 به F_1 است.

زیرا، اگر B_1 مجموعه‌ای کراندار در E_1 باشد، طبق (۱. ۵ . ۵) ، $f(B_1)$ در E کراندار است، طبق فرض، $u(f(B_1))$ به‌طور نسبی در F فشرده است، و طبق (۹. ۱۷. ۳) ، $g(u(f(B_1)))$ در F_1 به‌طور نسبی فشرده است.

(۷. ۲ . ۱۱) اگر u یک نگاشت فشرده از E به F باشد، آنگاه تحدید u به هر زیرفضای برداری E_1 از E ، نگاشتی فشرده از E_1 به $\overline{u(E_1)}$ است.

زیرا ، طبق (۶ . ۲. ۱۱) ، تحدید u به E_1 ، نگاشتی فشرده از E_1 به F است. اگر B زیرمجموعه‌ای کراندار از E_1 باشد، در این صورت ، $\overline{u(B)}$ زیرمجموعه‌ای فشرده از F خواهد بود، و چون $\overline{u(B)}\subset\overline{u(E_1)}$ ، مجموعه $u(B)$ به‌طور نسبی در $\overline{u(E_1)}$ فشرده است.

مثال

(۸ . ۲. ۱۱) با همان نمادها و فرض‌هایی که در رابطه با تابع K در (۳. ۲. ۱۱) بیان شده است، حال، فرض

---

۱. لازم به یادآوری است که ، در بعضی از کتاب‌ها به جای اصطلاح «نگاشت فشرده» از اصطلاح «نگاشت کاملاً پیوسته» نیز استفاده شده است. مترجم.

کنیم G یک فضای پیش هیلبرتی باشد، که به‌وسیله حاصل‌ضرب اسکالر[۱] $(f \mid g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ روی مجموعه $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{I})$ ((۱. ۵ . ۶) را ببینید) تعریف شده است. نرم در این فضا را برای فرق گذاشتن با نرم $\| f \| = \sup_{t \in \mathrm{I}} | f(t) |$ ، به‌صورت $\| f \|_2 = (f \mid f)^{1/2}$ نشان می‌دهیم. باز هم فضای $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{I})$ با نرم $\| f \|$ به E نشان می‌دهیم. نگاشت همانی $f \to f$ از E به G پیوسته است، و طبق قضیه مقدار میانگین $\| f \|_2 \le (b-a)^{1/2} \cdot \| f \|$. اما، این نگاشت از دو سو پیوسته نیست، و G یک فضای باناخ نیست. نامساوی کوشی ـ شوارتز (۱. ۲. ۶) در اینجا به‌صورت ،

$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \right|^2 \le \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt \right) \tag{۱۱ .۲ .۸ .۱}$$

نوشته می‌شود.

با همان نمادهای به‌کار گرفته شده در (۳ . ۲ . ۱۱) ، از (۱. ۳ . ۲. ۱۱) و (۱. ۸ . ۲. ۱۱) نتیجه می‌گیریم که، اگر $|t_1 - t_2| \le \delta$ ، آنگاه :

$$| g(t_1) - g(t_2) | \le \varepsilon (b-a)^{1/2} \,.\, \| f \|_2$$

و به طریقی مشابه، برای هر $t \in \mathrm{I}$ ، $|g(t)| \le k(b-a)^{1/2} \,.\, \| f \|_2$. بنابراین، با همان استدلالی که در (۳ . ۲ . ۱۱) بیان شد، $f \to \mathrm{U} f$ نگاشتی فشرده از G به E است، و چون نگاشت همانی از E به G پیوسته است، نگاشت $f \to \mathrm{U} f$ نیز ، طبق (۶. ۲. ۱۱) ، نگاشتی فشرده از G به G است.

(۹. ۲ . ۱۱) فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ ، E_0 (به ترتیب F_0) یک زیرفضای چگال در E (به ترتیب F) ، و u یک نگاشت فشرده از E_0 به F_0 ، و $\tilde{u} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ یکتا گسترش پیوسته نگاشت $u : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{F}_0$ باشد ((۴ . ۵ . ۵) را ببینید). در این صورت، $\tilde{u}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}_0$ ، و $\tilde{u}$ نگاشتی فشرده از E به F_0 است.

مستقیماً می‌توان نشان داد که، هر گوی $\| x \| \le r$ در E ، مشمول بستار هر گوی دلخواه با مرکز 0 و شعاعی بزرگتر از r در E_0 است ((۱۳. ۱۳ .۳) را ببینید)، در نتیجه، هر مجموعه کراندار در E ، مشمول بستار یک مجموعه کراندار B در E_0 است. اما، طبق (۴. ۱۱. ۳) ، مجموعه $\tilde{u}(\overline{\mathrm{B}})$ مشمول بستار مجموعه $\tilde{u}(\mathrm{B}) = u(\mathrm{B})$ واقع در F است. حال، $u(\mathrm{B})$ در F_0 به‌طور نسبی فشرده است، یعنی، بستار آن در F_0 فشرده، و در نتیجه در F بسته، و بنابراین، برابر بستار آن در F است. این مطلب نشان می‌دهد که، $\tilde{u}(\overline{\mathrm{B}})$ در F_0 واقع شده است، و در این فضا به‌طور نسبی فشرده است، و این مطلب همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای $\overline{g(t)}$ نوشته شده است $g(t)$ که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

(۱۰. ۲. ۱۱) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار، F یک فضای باناخ، و (u_n) دنباله‌ای از نگاشت‌ها در $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ باشد (بخش ۷. ۵ را ببینید) که در $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ به u همگرا است. در این صورت، اگر u_nها نگاشت‌هایی فشرده باشند، آنگاه u نیز نگاشتی فشرده است.

فرض کنیم B یک مجموعه کراندار دلخواه در E باشد. چون فضای F تام است، همه آن‌چه که باید انجام دهیم، این است که ثابت کنیم $u(\mathrm{B})$ پیش فشرده است ((۵. ۱۷. ۳) را ببینید). فرض کنیم مجموعه B در گویی مانند $a \le \|x\|$ واقع شده است. برای هر $0 < \varepsilon$ ، عددی طبیعی مانند n_0 موجود است، به طوری که، اگر $n \ge n_0$ ، آنگاه $\frac{\varepsilon}{2a} \le \|u - u_n\|$ ، و بنابراین، (طبق (۴. ۷. ۵)) ، برای هر $x \in \mathrm{B}$ ، $\frac{\varepsilon}{2} \le \|u(x) - u_n(x)\|$. اما، چون $u_{n_0}(\mathrm{B})$ پیش فشرده است، این مجموعه می‌تواند به‌وسیله تعدادی متناهی از گوی‌های به مراکز y_j $(1 \le j \le m)$ و شعاع $\frac{\varepsilon}{2}$ پوشیده شود. بنابراین، برای هر $x \in \mathrm{B}$ ، یک j موجود است به طوری که $\frac{\varepsilon}{2} \le \|u_{n_0}(x) - y_j\|$. در نتیجه $\varepsilon \le \|u(x) - y_j\|$ ، و گوی‌های به مراکز y_j و شعاع ε مجموعه $u(\mathrm{B})$ را می‌پوشانند، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

در حالت خاص، طبق (۱. ۲. ۱۱) و (۱۰. ۲. ۱۱) ، حد هر دنباله از نگاشت‌های با رتبه متناهی واقع در $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ ، نگاشتی فشرده است. آیا برعکس هر نگاشت فشرده برابر با حد چنین دنباله‌ای است؟ این پرسش هنوز ناگشوده در برخی از حالت‌های خاص در مسأله ۴ مطرح شده است.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ، A یک زیرمجموعه باز کراندار از E ، و F یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. نشان دهید که، برای هر $p \ge 1$ ، نگاشت همانی $f \to f$ از فضای باناخ $\mathscr{D}_{\mathrm{F}}^{(p)}(\mathrm{A})$ (بخش ۱۲ . ۸ ، مسأله ۸ را ببینید) به $\mathscr{D}_{\mathrm{F}}^{(p-1)}(\mathrm{A})$ (که برای $p = 1$ باید با $\mathscr{C}_{\mathrm{F}}^{\infty}(\mathrm{A})$ عوض شود) یک عملگر فشرده است. (از قضیه مقدار میانگین و قضیه آسکولی استفاده کنید).

۲. فرض کنیم u یک نگاشت فشرده از یک فضای باناخ نامتناهی‌البعد E به یک فضای نرم‌دار F باشد. نشان دهید که، دنباله‌ای مانند (x_n) در E موجود است، به‌طوری که، برای هر n ، $\|x_n\| = 1$ ، و $\lim_{n \to \infty} u(x_n) = 0$. (ملاحظه کنید که، عددی مانند $\alpha > 0$ و دنباله‌ای مانند (y_n) در E موجود است، به‌طوری که ، $\|y_n\| = 1$ ، و برای هر $m \ne n$ ، $\alpha \le \|y_m - y_n\|$ (بخش ۹. ۵ ، مسأله ۳ ، و (۱. ۱۶. ۳) را ببینید) ، و دنباله $(u(y_n))$ را مورد بررسی قرار دهید).
نتیجه بگیرید که، اگر تصویر گوی S به معادله $\|x\| = 1$ تحت u مجموعه‌ای بسته در F باشد، آنگاه ، این مجموعه شامل 0 خواهد بود.

۳. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، و (e_n) یک پایه هیلبرتی برای E باشد. اگر u نگاشتی فشرده از E به فضای

نرم‌دار F باشد، نشان دهید که $u(e_n)$ به سمت 0 میل می‌کند. (از تناقض استفاده کنید، و نشان دهید که، ممکن نیست که دنباله $(u(e_n))$ دارای حد $b \neq 0$ در F باشد.) اگر، به عکس F، یک فضای باناخ ، و سری با جمله عمومی $\| u(e_n) \|^2$ همگرا باشد، نشان دهید که، u عملگری فشرده است (برای اثبات اینکه تصویر گوی $\| x \| \leq 1$ تحت u پیش فشرده (کاملاً کراندار) است، از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده کنید).

۴ . فرض کنیم F یک فضای نرم‌دار باشد، که دارای خاصیت زیر است :
ثابتی مانند $c > 0$ موجود است، به‌طوری که، برای هر زیرمجموعه متناهی $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ از F، و هر $\varepsilon > 0$ ، تجزیه‌ای از فضای F مانند $F = M + N$ موجود است[۱]، به‌طوری که، F مجموع مستقیم دو زیرفضای بسته M و N است، که در آن M دارای بعد متناهی است، و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $d(a_i , M) \leq \varepsilon$ ، و اگر برای هر $x \in F$ ، $x = p(x) + q(x)$ که در آن $p(x) \in M$ و $q(x) \in N$ ، آنگاه $\| q(x) \| \leq c \, . \, d(x , M)$. نشان دهید که، تحت این فرضیات، هر نگاشت خطی فشرده از یک فضای نرم‌دار E به F حد یک دنباله از نگاشت‌های خطی با رتبه متناهی واقع در $\mathscr{L}(E , F)$ است (از تعریف فضاهای پیش فشرده استفاده کنید). نشان دهید که، هر فضای هیلبرت، همچنین، فضای (c_0) (بخش ۳. ۵ ، مسأله ۵ را ببینید)، و فضای l^1 (بخش ۷. ۵ ، مسأله ۱ را ببینید) در شرط فوق صدق می‌کنند.

۵ . فرض کنیم $I = [a , b]$ یک فاصله فشرده از $\mathbf{R}$ ، و $K(s , t)$ یک تابع مختلط تعریف شده روی $I \times I$ باشد[۲]، که در فرض‌های مسأله ۴ بخش ۱۱. ۸ صدق می‌کند. نشان دهید که، اگر U را به همان صورتی که در (۳ . ۲ . ۱۱) بیان شده است ، تعریف کنیم، آنگاه U باز هم نگاشتی فشرده از فضای $E = \mathscr{C}_C(I)$ به E است.

۳. تئوری ف. ریس

ما مکرراً به لم زیر نیاز خواهیم داشت :

(۱. ۳ . ۱۱) فرض کنیم u یک عملگر پیوسته روی فضای نرم‌دار E ، $v = 1_E - u$ ، و L ، M دو زیرفضای بسته E باشند، به‌طوری که $M \subset L$ ، $M \neq L$ ، $v(L) \subset M$. در این صورت، یک نقطه $a \in L \cap \complement M$ موجود است، به‌طوری که $\| a \| \leq 1$ ، و برای هر $x \in M$ ، $\| u(a) - u(x) \| \geq \frac{1}{2}$.

طبق فرض ، یک $b \in L$ موجود است، به‌طوری‌که $b \notin M$. در نتیجه $d(b , M) = \alpha > 0$. فرض کنیم $y \in M$ چنان انتخاب شده باشد که، $\| b - y \| \leq 2\alpha$. قرار می‌دهیم $a = \dfrac{b - y}{\| b - y \|}$. در این‌صورت $\| a \| = 1$، و برای هر $z \in M$ ، $a - z = (b - y - \| b - y \| z) / \| b - y \|$. اما، چون $y + \| b - y \| z \in M$، خواهیم

---

۱ . در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب، به‌جای $F = M + N$ نوشته شده است $E = M + N$ که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد (به جای F ، E نوشته شده است). این اشتباه در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب فرض شده است که $K(s , t)$ روی $I \times I$ پیوسته است، اما، به این شرط در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب اشاره‌ای نشده است. مترجم.

داشت $\alpha \geq \|b-y-\|b-y\|z\|$ ، و در نتیجه، برای هر $z \in M$ ، $\|a-z\| \geq \frac{1}{2}$. اما، برای $x \in M$ داریم $u(a)-u(x) = a-(x+v(a)-v(x))$ ، و طبق فرض $x+v(a)-v(x) \in M$ ، و با این رابطه نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۲. ۳. ۱۱) فرض کنیم u یک عملگر فشرده روی فضای نرم‌دار E ، و $v = 1_E - u$ باشد. در این‌صورت:

(a) **هسته $v^{-1}(0)$ دارای بعد متناهی است ؛**

(b) **تصویر $v(E)$ در E بسته است ؛**

(c) **$v(E)$ دارای همبعد (متمم بعد) متناهی در E است ،**

(d) **اگر $v^{-1}(0) = \{0\}$ ، در این صورت ، v یک هومیومورفیسم خطی از E بروی $v(E)$ است (مقایسه کنید با (۴. ۳. ۱۱)) .**

(a) برای هر $x \in N = v^{-1}(0)$ ، داریم $u(x) = x$. در نتیجه، تصویر گوی B به معادله $\|x\| \leq 1$ ، تحت نگاشت u در N ، خود گوی B است. طبق فرض، $u(B)$ در E ، و بنابراین، در N ، به‌طور نسبی فشرده است، زیرا N در E بسته است. اما، از این مطلب، طبق قضیه ریس (۴. ۹. ۵) ، نتیجه می‌شود که، N دارای بعد متناهی است.

(b) فرض کنیم $y \in \overline{v(E)}$. در این‌صورت، دنباله‌ای مانند (x_n) در E موجود است، به‌طوری که $y = \lim_{n\to\infty} v(x_n)$ ((۱۳. ۱۳. ۳) را ببینید). ابتدا فرض کنیم که، دنباله $(d(x_n, N))$ غیرکراندار است. در این‌صورت (در صورت لزوم با استخراج یک زیردنباله) می‌توان فرض کرد که $\lim_{n\to\infty} d(x_n, N) = +\infty$. قرار می‌دهیم $z_n = \frac{x_n}{d(x_n, N)}$. در این صورت $d(z_n, N) = 1$ ، و بنابراین، یک $t_n \in N$ موجود است، به‌طوری که $\|z_n - t_n\| \leq 2$. فرض کنیم $s_n = z_n - t_n$. ملاحظه می‌شود که، طبق تعریف، داریم $v(s_n) = v(z_n) = \frac{v(x_n)}{d(x_n, N)}$ ، $d(s_n, N) = 1$. از فرض فوراً نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} v(s_n) = 0$. اما، دنباله (s_n) در E کراندار است، و چون u عملگری فشرده است، زیر دنباله‌ای مانند (s_{n_k}) موجود است، به طوری‌که، $(u(s_{n_k}))$ به نقطه‌ای مانند $a \in E$ همگرا است. از آنجا که $\lim_{n\to\infty}(s_n - u(s_n)) = 0$ ، خواهیم داشت $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = a$ ، و در نتیجه ، چون نگاشت $x \to d(x, N)$ پیوسته است ، $d(a, N) = 1$. اما ، $v(a) = \lim_{k\to\infty} v(s_{n_k}) = 0$ ، و این با تعریف N در تناقض است.

به این ترتیب ، می‌توان فرض کرد که ، دنباله $(d(x_n, N))$ کراندار است و عددی مانند $M - 1$ کران

بالایی برای آن است. در این صورت، دنباله‌ای مانند (x'_n) موجود است، به طوری‌که $x_n - x'_n \in \mathrm{N}$ ، $\| x'_n \| \leq \mathrm{M}$. از آنجا که $\nu(x'_n) = \nu(x_n)$ ، می‌توان فرض کرد که $\| x_n \| \leq \mathrm{M}$. در این‌صورت ، چون عملگر u فشرده است، زیر دنباله‌ای مانند (x_{n_k}) موجود است، به‌طوری‌که $(u(x_{n_k}))$ به نقطه‌ای مانند $b \in \mathrm{E}$ همگرا است. با توجه به اینکه $x_{n_k} - u(x_{n_k}) = \nu(x_{n_k})$ به سمت y میل می‌کند، (x_{n_k}) به سمت $b+y$ میل خواهد کرد، و طبق خاصیت پیوستگی، خواهیم داشت $\nu(b+y) = y$ ، که ثابت می‌کند $y \in \nu(\mathrm{E})$ ، و در نتیجه $\nu(\mathrm{E})$ بسته است.

(c) بیان اینکه $\nu(\mathrm{E})$ دارای یک همبعد (متمم بعد) نامتناهی است، به این معنی است که، دنباله‌ای نامتناهی مانند (a_n) از نقاط E موجود است، به‌طوری‌که، برای هر n ، a_n متعلق به زیرفضای V_{n-1} تولید شده از $\nu(\mathrm{E})$ ، a_1 ، ... ، a_{n-1} نیست. چون زیرفضای $\nu(\mathrm{E})$ بسته است، پس (با توجه به (۲. ۹. ۵)) هر یک از زیرفضاهای V_n نیز بسته است. طبق (۱. ۳. ۱۱) ، با استقراء می‌توان دنباله‌ای مانند (b_n) تعریف کرد، به‌طوری که $b_n \in \mathrm{V}_n$ ، $b_n \notin \mathrm{V}_{n-1}$ ، $\| b_n \| \leq 1$، و برای هر $j \leq n-1$ ، $\| u(b_n) - u(b_j) \| \geq \frac{1}{2}$. از این مطلب نتیجه می‌شود که، دنباله $(u(b_n))$ نقطه حدی ندارد، که با فرض فشرده بودن عملگر u در تناقض است.

(d) برای اینکه ثابت کنیم ν وقتی $\nu^{-1}(0) = \{0\}$ باشد، یک هومیومورفیسم از E بروی $\nu(\mathrm{E})$ است، فقط لازم است که نشان دهیم، برای هر مجموعه بسته $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ ، مجموعه $\nu(\mathrm{A})$ در E (و در نتیجه در $\nu(\mathrm{E})$) بسته است ((۴. ۱۱. ۳) را ببینید). اما، این کار را می‌توان با استدلالی کاملاً مشابه با آنچه که در (b) بیان شد، از طریق تعویض E به A (و N به $\{0\}$) انجام داد.

(۳ . ۳ . ۱۱) تحت فرضیاتی مشابه با آنچه که در (۲. ۳ . ۱۱) بیان شد، زیر فضاهای : $\mathrm{N}_1 = \nu^{-1}(0)$ ، و برای $k > 1$ ، $\mathrm{N}_k = \nu^{-1}(\mathrm{N}_{k-1})$ ؛ $\mathrm{F}_1 = \nu(\mathrm{E})$ و برای $k > 1$ ، $\mathrm{F}_k = \nu(\mathrm{F}_{k-1})$ را به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم. در این صورت :

(a) N_kها دنباله‌ای صعودی از زیرفضاهای با بعد متناهی تشکیل می‌دهند و F_kها دنباله‌ای نزولی از زیرفضاهای بسته با همبعد (متمم بعد) متناهی تشکیل می‌دهند.

(b) یک کوچکترین عدد صحیح مانند n موجود است، به‌طوری که، برای $k \geq n$ ، $\mathrm{N}_{k+1} = \mathrm{N}_k$ ، در این صورت، برای $k \geq n$ ، $\mathrm{F}_{k+1} = \mathrm{F}_k$، فضای E مجموع مستقیم توپولوژیک (بخش ۴. ۵ را ببینید) فضاهای F_n و N_n است، و تحدید ν به F_n یک هومیومورفیسم خطی از F_n بروی F_n است.

(a) با استقراء تعریف می‌کنیم $\nu_1 = \nu$ ، $\nu_k = \nu_{k-1} \circ \nu$. ادعا می‌کنیم که $\nu_k = 1_{\mathrm{E}} - u_k$ ، که در آن u_k عملگری فشرده است. این کار را می‌توان به سادگی با استقراء روی k نشان داد. در واقع

$v_k = (1_E - u_{k-1}) \circ (1_E - u) = 1_E - u_{k-1} - u + u_{k-1} \circ u$ ، و ادعای ما فوراً از فرض‌های استقراء و (۶ . ۲ . ۱۱) و (۵ . ۲ . ۱۱) نتیجه می‌شود. در این صورت، طبق تعریف $N_k = v_k^{-1}(0)$ و $F_k = v_k(E)$ ، و (a) از (۲. ۳. ۱۱) نتیجه می‌شود.

(b) فرض کنیم ، برای هر k ، $N_k \neq N_{k+1}$. برای $k \geq 1$ ، داریم $v(N_{k+1}) \subset N_k$. طبق (۱. ۳. ۱۱) باید دنباله‌ای نامتناهی از نقاط E مانند (x_k) موجود باشد، به‌طوری که برای هر $k > 1$ ، $x_k \in N_k$ ، $x_k \notin N_{k-1}$ ، $\| x_k \| \leq 1$ ، و برای هر $j < k$ ، $\|u(x_k) - u(x_j)\| \geq \frac{1}{2}$. از این مطلب نتیجه می‌شود که ، دنباله $(u(x_k))$ نقطه حدی ندارد، که با فرض فشردگی عملگر u در تناقض است.

به طریقی مشابه، فرض کنیم، برای هر k ، $F_{k+1} \neq F_k$ ، برای $k \geq 1$ ، داریم $v(F_k) \subset F_{k+1}$. طبق (۱. ۳. ۱۱) ، باید دنباله‌ای نامتناهی مانند (x_k) از نقاط E موجود باشد، به‌طوری که، برای هر $k \geq 1$ ، $x_k \in F_k$ ، $x_k \notin F_{k+1}$ ، $\| x_k \| \leq 1$ ، و برای هر $j > k$ ، $\| u(x_k) - u(x_j) \| \geq \frac{1}{2}$. این مطلب نیز دوباره به تناقض منجر می‌شود. در نتیجه، یک کوچکترین عدد صحیح مانند m موجود است، به طوری‌که، برای هر $k \geq m$ ، $F_{k+1} = F_k$.

اکنون ثابت می‌کنیم که $N_n \cap F_n = \{0\}$. اگر $y \in F_n \cap N_n$ ، آنگاه یک $x \in E$ موجود خواهد بود، به‌طوری که $y = v_n(x)$ ، و از طرف دیگر $v_n(y) = 0$. اما، از این مطلب نتیجه می‌شود $v_{2n}(x) = 0$ ، و بنابراین $x \in N_{2n} = N_n$ ، و $y = v_n(x) = 0$.

طبق تعریف، داریم $F_m \subset F_n$ و $v(F_m) = F_m$. ثابت می‌کنیم $F_n = F_m$. در غیر این‌صورت، باید داشته باشیم $m > n$. فرض کنیم z چنان باشد که $z \in F_{m-1} \subset F_n$ و $z \notin F_m$. چون $v(z) \in F_m = v(F_m)$، یک $t \in F_m$ موجود است، به‌طوری که $v(z) = v(t)$ ، یعنی $z - t \in N_1 \subset N_n$. اما، چون $z - t \in F_n$ ، نتیجه می‌گیریم که $z = t$ ، و فرض اولیه ما به تناقض منجر می‌شود.

برای هر $x \in E$ ، داریم $v_n(x) \in F_n = F_m$ ، و چون طبق تعریف m ، $v_n(F_n) = F_n$ ، یک $y \in F_n$ موجود است، به‌طوری‌که $v_n(x) = v_n(y)$. در نتیجه $x - y \in N_n$، و بنابراین، $E = F_n + N_n$. این مجموع، مجموعی مستقیم است، زیرا $F_n \cap N_n = \{0\}$. زیرفضای F_n بسته است، و N_n دارای بعد متناهی است. بنابراین، E مجموع مستقیم توپولوژیک F_n و N_n است ((۳. ۹ . ۵) را ببینید). بالاخره، تحدید v به F_n پوشا است، و هسته آن برابر $F_n \cap N_1 \subset F_n \cap N_n = \{0\}$ است. در نتیجه v یک به یک نیز هست. طبق (d) ۲. ۳. ۱۱)) ، این تحدید v یک هومیومورفیسم خطی از F_n به روی F_n است، و این مطلب اثبات را به پایان می‌رساند.

(۴ . ۳ . ۱۱) تحت همان فرضیاتی که در (۲. ۳. ۱۱) بیان شد، اگر v یک به یک باشد (یعنی، اگر $v^{-1}(0) = \{0\}$) ،

آنگاه، v پوشا نیز هست، و در نتیجه v یک هومیومورفیسم خطی از E بروی E است.

در واقع، از فرض نتیجه می‌شود که، برای هر عدد طبیعی k ، $N_k = \{0\}$. در نتیجه $n = 1$ و N_1 به 0 تبدیل می‌شود، و بنابراین، طبق (۳. ۳. ۱۱) ، $F_1 = E$ ، و از (۳. ۳. ۱۱) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

مسائل

۱. فرض کنیم E ، F دو فضای باناخ، و f یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، به طوری‌که $f(E) = F$. در این صورت، عددی مانند $m > 0$ موجود است، به‌طوری که برای هر $y \in F$ ، یک $x \in E$ موجود است، به‌طوری که $f(x) = y$ و $\| x \| \le m \| y \|$ ((۱۲. ۱۶. ۱۲) را ببینید).[۱]

(a) اگر (y_n) یک دنباله از نقاط F باشد که به نقطه‌ای مانند b همگرا است، نشان دهید که، زیردنباله‌ای مانند (y_{n_k}) ، و دنباله‌ای مانند (x_k) از نقاط E موجود است که به نقطه‌ای مانند a همگرا است، و برای هر k ، $f(x_k) = y_{n_k}$. (دنباله (y_{n_k}) را طوری انتخاب کنید که سری با جمله عمومی $\| y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \|$ همگرا باشد).

(b) فرض کنیم u یک نگاشت فشرده از E به F، و $v = f - u$ باشد. نشان دهید که $v(E)$ در F بسته است و دارای همبعد (متمم بعد) متناهی در F است (با استفاده از (a)، از الگویی مشابه با آنچه که (۲. ۳. ۱۱) بیان شد، پیروی کنید.)

(c) با استقراء تعریف می‌کنیم $F_1 = v(E)$، و برای $k \ge 1$ ، $F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$. نشان دهید که، عددی صحیح مانند n موجود است، به‌طوری که برای $k \ge n$ ، $F_{k+1} = F_k$ (با همان روش).

(d) فرض کنیم $E = F$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، و $(e_n)_{n \ge 1}$ یک پایه هیلبرتی از E باشد. u و f را طوری تعریف می‌کنیم که برای $n \ge 4$ ، $f(e_n) = e_{n-3}$ ، و برای $n \le 3$ ، $f(e_n) = 0$، برای $n \ge 6$ ، $u(e_n) = \frac{e_{n-2}}{n}$، و $u(e_1) = u(e_3) = 0$ ، $u(e_2) = -e_2$ ، $u(e_4) = e_1$ ، $u(e_5) = e_2 + (e_3 / 5)$. با استقراء تعریف می‌کنیم $N_1 = v^{-1}(0)$، و برای $k \ge 1$ ، $N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$. نشان دهید که N_kها متمایز از یکدیگرند، و دارای بعد متناهی هستند.

۲. فرض کنیم E ، F دو فضای نرم‌دار، f یک هومیومورفیسم خطی از E بروی یک زیرفضای بسته $f(E)$ از F، و u یک نگاشت فشرده از E به F باشد، و $v = f - u$.

(a) نشان دهید که $v^{-1}(0)$ دارای بعد متناهی است، و $v(E)$ در F بسته است. علاوه بر این ، اگر، $v^{-1}(0) = \{0\}$، آنگاه v یک هومیومورفیسم خطی از E بروی $v(E)$ است. (از روشی مشابه با آنچه که در (۲. ۳. ۱۱) بیان شده است، پیروی کنید.)

(b) با استقراء تعریف می‌کنیم $N_1 = v^{-1}(0)$ ، و برای $k \ge 1$ ، $N_{k+1} = v^{-1}(f(N_k))$. نشان دهید که ، عددی صحیح مانند n موجود است، به‌طوری که ، برای $k \ge n$، $N_{k+1} = N_k$.

(c) مثالی ارائه نمایید که، وقتی $F_1 = v(E)$، و برای $k \ge 1$ ، $F_{k+1} = v(f^{-1}(F_k))$، F_kها از یکدیگر متمایز باشند (برای $E = F$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، و برای f و u عملگرهای الحاقی (بخش ۵ . ۱۱ را ببینید) مربوط به

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی به علت اینکه فصل ۱۲ به این جلد از کتاب مربوط نمی‌شود، به خواننده توصیه شده است، اثبات مطلب فوق را در مرجع [6] اثر Н. Бурбаки ببینند. مترجم .

f و u یی که در مسأله (d)۱ مورد توجه قرار گرفته‌اند، انتخاب کنید).

۳. فرض کنیم E یک فضای باناخ، و g یک نگاشت خطی پیوسته از E بروی E باشد، به‌طوری که $\|g\| < \frac{1}{2}$. در این صورت، $f = 1_E - g$ یک هومیومورفیسم خطی از E بروی E است ((۱. ۲. ۳. ۸) را ببینید). فرض کنیم u یک عملگر فشرده روی E باشد، و $v = f - u$. در این‌صورت، احکام بیان شده در قضیه‌های (۲. ۳. ۱۱) و (۳. ۳. ۱۱) همگی معتبر هستند. (نخست نتیجه زیر را مطابق با لم (۱. ۳. ۱۱) ثابت کنید: اگر $M \subset L$، $M \neq L$، $v(L) \subset M$، آنگاه عنصری مانند $a \in L \cap \complement M$ موجود است، به طوری که $\|a\| \le 1$ و برای هر $x \in M$ که $\|x\| \le 1$ نامساوی $\|u(a) - u(x)\| \ge (1 - 2\|g\|)/2$ برقرار است.)

۴. در فضای $E = l^1$ (بخش ۷. ۵، مسأله ۱ را ببینید، ما نمادهای آن مسأله را حفظ کرده‌ایم)، فرض کنیم f اتومورفیسمی روی E باشد، به‌طوری که $f(e_{2k}) = e_{2k+2}$ $(k \ge 0)$، $f(e_1) = e_0$، برای $k \ge 1$، $f(e_{2k+1}) = e_{2k-1}$، و فرض کنیم u نگاشتی فشرده باشد، به‌طوری که، برای $n \neq 1$، $u(e_n) = 0$ و $u(e_1) = e_0$. اگر $v = f - u$، و F_k و N_k شبیه (۳. ۳. ۱۱) تعریف شده باشند، نشان دهید که، برای هر k، $N_{k+1} \neq N_k$ و $F_{k+1} \neq F_k$.

۴. طیف یک عملگر فشرده

(۱. ۴. ۱۱) فرض کنیم u یک عملگر فشرده روی فضای مختلط نرم‌دار E باشد. در این‌صورت:

(a) S طیف u یک زیرمجموعه حداکثر شمارش‌پذیر فشرده از C است، که هریک از نقاط آن، به استثنای احتمالاً 0، نقاطی ایزوله هستند، و اگر S نامتناهی‌البعد باشد، آنگاه، صفر متعلق به S است.

(b) هر عدد $\lambda \neq 0$ در طیف u یک مقدار ویژه u است.

(c) برای هر $\lambda \neq 0$ در S، تجزیه یکتایی از E به مجموع مستقیم توپولوژیک دو زیرفضای $F(\lambda)$، $N(\lambda)$ (که به صورت‌های $F(\lambda, u)$، $N(\lambda, u)$ نیز نوشته می‌شوند) وجود دارد، به‌طوری که:

(i) $F(\lambda)$ بسته است، و $N(\lambda)$ دارای بعد متناهی است؛

(ii) $u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$، و تحدید $u - \lambda . 1_E$ به $F(\lambda)$ هومیومورفیسمی خطی از $F(\lambda)$ بروی $F(\lambda)$ است؛

(iii) $u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$، و کوچکترین عدد صحیح $k = k(\lambda)$ موسوم به مرتبه λ (که به صورت $k(\lambda, u)$ نیز نوشته می‌شود) موجود است، به‌طوری که تحدید $(u - \lambda . 1_E)^k$ به $N(\lambda)$ برابر 0 است.

(d) فضای مشخصه $E(\lambda)$ عملگر u مربوط به مقدار مشخصه $\lambda \neq 0$ مشمول $N(\lambda)$ است (و در نتیجه دارای بعد متناهی است).

(e) اگر λ، μ دو نقطه مختلف S، متمایز از 0 باشند، آنگاه $N(\mu) \subset F(\lambda)$.

(f) اگر E یک فضای باناخ باشد، آنگاه، تابع $\zeta \to (u - \zeta . 1_E)^{-1}$، که روی $C - S$ تعریف شده و تحلیلی است، دارای قطبی از مرتبه $k(\lambda)$ در هر نقطه $\lambda \neq 0$ از S است.

فرض کنیم $\lambda \neq 0$ یک عدد مختلط دلخواه باشد. چون $\lambda^{-1}u$ عملگری فشرده است، می‌توانیم از نظریه ریس (بخش ۳. ۱۱) استفاده کنیم. طبق (۴. ۳. ۱۱) ، اگر λ یک مقدار ویژه u نباشد، آنگاه $1_E - \lambda^{-1}u$ هومیومورفیسمی خطی از E بروی E است، همچنین $u - \lambda . 1_E = -\lambda(1_E - \lambda^{-1}u)$ نیز هومیومورفیسمی E به E خواهد بود، یعنی، λ مقداری منظم برای u است، که این (b) را ثابت می‌کند. برعکس، فرض کنیم λ یک مقدار ویژه u باشد، در این‌صورت، وجود تجزیه $F(\lambda) + N(\lambda)$ از E با خواص (i) ، (ii) ، (iii) ، همچون (d) ، از (۳. ۳. ۱۱) نتیجه می‌شود ($E(\lambda)$ هسته‌ای است که در (۳. ۳. ۱۱) به N_1 نشان داده شده است). برای به پایان رساندن اثبات (c)، تنها نیاز داریم که یکتایی $F(\lambda)$ و $N(\lambda)$ را ثابت کنیم. فرض کنیم تجزیه دیگری مانند $E = F' + N'$ با خواصی مشابه وجود داشته باشد. قرار می‌دهیم $v = u - \lambda . 1_E$. در این صورت، هر $x \in N'$ را می‌توان به‌صورت $x = y + z$ نوشت، که در آن $y \in F(\lambda)$ و $z \in N(\lambda)$. طبق فرض، یک $h > 0$ موجود است، به طوری‌که $v^h(x) = 0$ ، در نتیجه $v^h(y) = 0$ ، چون تحدید v^h به $F(\lambda)$ طبق فرض یک هومیومورفیسم است، پس $y = 0$ و $x \in N(\lambda)$. این مطلب ثابت می‌کند که $N' \subset N(\lambda)$ ، و با بحثی مشابه ثابت می‌شود که $N(\lambda) \subset N'$. در ادامه، اگر $x = y + z \in F'$ با $y \in F(\lambda)$ و $z \in N(\lambda)$ ، آنگاه $v^k(x) = v^k(y)$ ، بنابراین $v^k(F') \subset F(\lambda)$ ، اما، چون $v(F') = F'$ ، خواهیم داشت $F' \subset F(\lambda)$ ، و شمول $F(\lambda) \subset F'$ نیز به طریقی مشابه ثابت می‌شود.

تحدیدهای u به $F(\lambda)$ ، $N(\lambda)$ را به ترتیب به u_1 ، u_2 نشان می‌دهیم. از رابطه $(u_2 - \lambda . 1_{N(\lambda)})^k = 0$، طبق مطالب جبر خطی (۱۰. ۶ . A و ۱۲. ۶ . A را ببینید) نتیجه می‌شود که، پایه‌ای از $N(\lambda)$ موجود است، به‌طوری‌که ماتریس $u_2 - \lambda . 1_{N(\lambda)}$ نسبت به این پایه ماتریسی مثلثی با قطر 0 است. بنابراین، اگر $d = \dim(N(\lambda))$ ، آنگاه ، دترمینان $u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)}$ برابر $(\lambda - \zeta)^d$ است. این مطلب ثابت می‌کند که، اگر $\lambda \neq \zeta$ ، آنگاه $u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)}$ وارون‌پذیر است. از طرف دیگر، اکنون ثابت می‌کنیم که، وقتی $\lambda - \zeta$ به حد کافی کوچک باشد، $u_1 - \zeta . 1_{F(\lambda)}$ وارون‌پذیر است. می‌توانیم بنویسیم :

$$u_1 - \zeta . 1_{F(\lambda)} = v_1 + (\lambda - \zeta) . 1_{F(\lambda)}$$

که در آن $v_1 = u_1 - \lambda . 1_{F(\lambda)}$. طبق (c) ، می‌دانیم که v_1 وارون‌پذیر است، بنابراین، طبق (۴. ۷. ۵) ، در $F(\lambda)$ داریم $\| x \| . \| v_1^{-1} \| \le \| v_1^{-1}(x) \|$ ، که می‌توان آن را به صورت $\| v_1(x) \| \ge c . \| x \|$ ، با $c = \| v_1^{-1} \|^{-1}$ نیز نوشت. اکنون، اگر $\zeta \neq 0$ و $u_1 - \zeta . 1_{F(\lambda)}$ وارون‌پذیر نباشد، آنگاه، طبق (b) (به کار گرفته شده نسبت زیرفضای $F(\lambda)$ و عملگر u_1 ، با استفاده از (۷. ۲. ۱۱)) ، باید یک $x \neq 0$ در $F(\lambda)$ موجود باشد، به‌طوری $u_1(x) = \zeta x$ ، بنابراین $| \zeta - \lambda | . \| x \| = \| v_1(x) \| \ge c \| x \|$ ، که اگر $| \zeta - \lambda | < c$ باشد، غیرممکن است. این مطلب نشان می‌دهد که، اگر $\zeta \neq 0$ ، $\zeta \neq \lambda$ ، و $| \zeta - \lambda | < c$ ، آنگاه $u - \zeta . 1_E$

وارون‌پذیر است (زیرا، تحدیدهای آن به $F(\lambda)$ و $N(\lambda)$ وارون‌پذیرند) ؛ یعنی ζ در S واقع نیست. بنابراین، همه نقاط $\lambda \neq 0$ واقع در S ایزوله هستند، و S حداکثر شمارش‌پذیر است. طبق (b)، برای هر $\lambda \neq 0$ در S ، یک $x \neq 0$ در E موجود است، به طوری‌که $u(x) = \lambda x$. در نتیجه، طبق (۴ . ۷ . ۵) ، $\| x \| . | \lambda | \leq \| u \| . \| x \|$ ، و $| \lambda | \leq \| u \|$ ، که ثابت می‌کند S فشرده است. برای به پایان رساندن اثبات (a) ، فرض کنیم E دارای بعد نامتناهی باشد. اگر u یک هومیومورفیسم از E بروی E بود، آنگاه $u(B)$ تصویرگوی B به معادله $\|x\| \leq 1$ باید یک همسایگی 0 در E می‌بود، و چون $u(B)$ در E به‌طور نسبی فشرده است، این مطلب با قضیه ریس (۴. ۹. ۵) در تناقض است.

اگر μ یک نقطه از S باشد که متمایز از 0 ، λ است، و $x \in N(\mu)$ ، آنگاه، می‌توانیم بنویسیم $x = y + z$ ، که در آن $y \in F(\lambda)$ ، $z \in N(\lambda)$. در بالا دیده‌ایم که تحدید عملگر $w = u - \mu . 1_E$ به $N(\lambda)$ یک هومیومورفیسم است. از آنجا که برای مقادیر به حد کافی بزرگ h ، $w^h(x) = 0$، و $w^h(y) \in F(y)$ ، $w^h(z) \in N(\lambda)$ ، پس باید داشته باشیم $w^h(y) = w^h(z) = 0$ ، که گزاره (e) را ثابت می‌کند.

اگر E یک فضای باناخ باشد، آنگاه، تحلیلی بودن $(u - \zeta . 1_E)^{-1}$ در $C - S$ از (۲. ۱. ۱۱) نتیجه می‌شود. با نمادهایی مشابه آن‌چه که در بالا به کار گرفته‌ایم ، λ در طیف عملگر u_1 واقع نیست، بنابراین، طبق (۷. ۲. ۱۱) ، $(u - \zeta . 1_{F(\lambda)})^{-1}$ در یک همسایگی λ تحلیلی است، به‌ویژه، اعدادی مانند $\rho > 0$ و $M > 0$ موجود هستند، به طوری که برای $x \in F(\lambda)$ و $| \zeta - \lambda | \leq \rho$ ، نامساوی :

$$| (u_1 - \zeta . 1_{F(\lambda)})^{-1}(x) | \leq M . \| x \|$$

برقرار است. از طرف دیگر، می‌توان نوشت $u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)} = (\lambda - \zeta) . 1_{N(\lambda)} + v_2$ ، که در آن $v_2 = u_2 - \lambda . 1_{N(\lambda)}$، و می‌دانیم که برای $\lambda \neq \zeta$ عملگر $u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)}$ وارون پذیر است. علاوه براین،

$$(u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)})^{-1} = - \sum_{h=1}^{k} (\zeta - \lambda)^{-h} v_2^{h-1} \qquad (۱۱ .۱ .۴ .۱ .۱)$$

زیرا v_2^k. از مطلب فوق نتیجه می‌شود که، یک عدد $M' > 0$ موجود است، به طوری که برای هر $| \zeta - \lambda | < \rho$، $\zeta \neq \lambda$ ، و برای هر $x \in N(\lambda)$ ، $| \zeta - \lambda |^k . \| (u_2 - \zeta . 1_{N(\lambda)})^{-1}(x) \| \leq M' \| x \|$.

حال ، هر $x \in E$ را می‌توان به‌صورت $x = y + z$ با $y \in F(\lambda)$ ، $z \in N(\lambda)$ نوشت، و ثابتی مانند $a > 0$ موجود است، به‌طوری که $\| y \| \leq a \| x \|$ و $\| z \| \leq a \| x \|$ ((۳. ۹. ۵) را ببینید). بنابراین، می‌بینیم که، برای $| \zeta - \lambda | \leq \rho$ ، $\zeta \neq \lambda$ ، و هر $x \in E$ ، داریم :

$$| \zeta - \lambda |^k . \| (u - \zeta . 1_E)^{-1}(x) \| \leq a (M \rho^k + M') \| x \|$$

به عبارت دیگر، برای $\zeta \neq \lambda$ و $| \zeta - \lambda | \leq \rho$ ،

$$| \zeta - \lambda |^k . \| (u - \zeta . 1_E)^{-1} \| \leq a (M \rho^k + M')$$

طبق (۲. ۱۵. ۹) ، از مطلب فوق نتیجه می‌شود که، λ قطبی از مرتبه کوچکتر یا مساوی k برای $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ است. اما، طبق تعریف، یک $x \in \mathrm{N}(\lambda)$ موجود است، به‌طوری که $v_2^{k-1}(x) \neq 0$. بنابراین $(\zeta-\lambda)^{k-1}((u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}(x))$ وقتی $\lambda \neq \zeta$ به سمت λ میل می‌کند، کراندار نیست، و این مطلب ثابت می‌کند که، λ یک قطب مرتبه k است، و اثبات گزاره (۱. ۴. ۱۱) به پایان می‌رسد.

بعد $\mathrm{N}(\lambda)$ را **چندگانگی جبری**[1] مقدار ویژه λ از عملگر u ، و بعد فضای ویژه $\mathrm{E}(\lambda)$ را **چندگانگی هندسی**[2] آن می‌نامند. آنها تنها وتنها وقتی با هم برابرند که $\mathrm{k}(\lambda)=1$ باشد. وقتی E یک فضای باناخ باشد، مطلب فوق معادل این است که بگوییم، λ یک قطب ساده $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ است.

(۲. ۴ . ۱۱) فرض کنیم E یک فضای باناخ، زیرفضای E_0 در فضای E چگال، u یک عملگر فشرده روی E_0، و $\tilde{u}$ یکتا گسترش پیوسته u روی E باشد. در این صورت، طیف‌های u ، $\tilde{u}$ برهم منطبق‌اند، و برای هر مقدار ویژه $\lambda \neq 0$ از u، $\mathrm{N}(\lambda\,,u)=\mathrm{N}(\lambda\,,\tilde{u})$ ، $\mathrm{E}(\lambda\,,u)=\mathrm{E}(\lambda\,,\tilde{u})$ و $k(\lambda\,,u)=k(\lambda\,,\tilde{u})$.

از (۹ . ۲ . ۱۱) می‌دانیم که، $\tilde{u}$ عملگری فشرده است، و E را به E_0 می‌نگارد. اگر $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه‌ای از $\tilde{u}$ باشد، آنگاه ، هر بردار ویژه x متناظر با λ چنان است که $x=\lambda^{-1}\tilde{u}(x) \in \mathrm{E}_0$ ، بنابراین، λ یک مقدار ویژه u است و $\mathrm{E}(\lambda\,,\tilde{u}) \subset \mathrm{E}(\lambda\,,u)$. از آنجا که شمول عکس واضح است، خواهیم داشت $\mathrm{sp}(\tilde{u})=\mathrm{sp}(u)$ ، و برای هر مقدار ویژه $\lambda \neq 0$ ، $\mathrm{E}(\lambda\,,u)=\mathrm{E}(\lambda\,,\tilde{u}) \subset \mathrm{E}_0$. به طریق مشابه، با بررسی مشابه هسته $(u-\lambda\,.\,1_{E_0})^k$ و گسترش آن $(\tilde{u}-\lambda\,.\,1_E)^k$ می‌بینیم که آنها با هم برابرند. بنابراین $\mathrm{k}(\lambda\,,u)=\mathrm{k}(\lambda\,,\tilde{u})$ و $\mathrm{N}(\lambda\,,u)=\mathrm{N}(\lambda\,,\tilde{u}) \subset \mathrm{E}_0$.

مسائل

۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط، و u عملگری فشرده روی E باشد. نمادهای قضیه (۱. ۴. ۱۱) را حفظ نموده، و علاوه بر این، تصاویر فضای E روی $\mathrm{N}(\lambda)$ و $\mathrm{F}(\lambda)$ را در تجزیه فضای E به مجموع مستقیم $\mathrm{E}=\mathrm{F}(\lambda)+\mathrm{N}(\lambda)$ به p_λ (یا $p_{\lambda,u}$) و $q_\lambda=1_E-p_\lambda$ نشان می‌دهیم.

(a) ثابت کنید که، مانده تابع مرومورفیک $(u-\zeta\,.\,1_E)^{-1}$ در قطب λ، برای هر $\lambda \in sp(u)$ که $\lambda \neq 0$ ، برابر $-p_\lambda$ است.

(b) اگر λ_1 ، ... ، λ_r نقاطی متمایز از طیف $sp(u)$ باشند، نشان دهید که، تصاویر p_{λ_j} $(1 \leq j \leq r)$ جابجا پذیرند، و $p_{\lambda_1}+\ldots+p_{\lambda_r}$ تصویر E بروی $\mathrm{N}(\lambda_1)+\ldots+\mathrm{N}(\lambda_r)$ در تجزیه فضای E به مجموع مستقیم این زیرفضا و زیرفضای $\mathrm{F}(\lambda_1)\cap\mathrm{F}(\lambda_2)\cap,\ldots,\cap\mathrm{F}(\lambda_r)$ است.

---

1 . Algebraic multiplicity = Алгебраическая кратность
2 . Geometric multiplicity = Геометрическая кратность

۲. فرض کنیم E یک فضای باناخ مختلط با بعد نامتناهی، u یک عملگر فشرده روی E، و $(u_n)_{n\geq 1}$ یک دنباله از عملگرهای فشرده روی E باشد، که به عملگر u از فضای باناخ $\mathscr{L}(u)$ همگرا است.

(a) ثابت کنید که، برای هر زیرمجموعه کراندار B از E، اجتماع $\bigcup_n u_n(\mathrm{B})$ در E به‌طور نسبی فشرده است. (نشان دهید که، این مجموعه پیش فشرده است).

(b) اگر $\lambda \in \mathrm{C}$ متعلق به $sp(u)$ نباشد، نشان دهید که، دیسک بازی مانند D به مرکز λ و عددی صحیح مانند n_0 موجود است، به‌طوری که برای $n \geq n_0$، اشتراک $sp(u_n) \cap \mathrm{D}$ برابر $\varnothing$ است (از (۱. ۲. ۳. ۸) استفاده کنید) و برای $\zeta \in \mathrm{D}$، دنباله $(u_n - \zeta\,.\,1_{\mathrm{E}})^{-1}$ به‌طور یکنواخت به $(u - \zeta\,.\,1_{\mathrm{E}})^{-1}$ همگرا است.

(c) فرض کنیم (μ_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد، به‌طوری‌که برای هر n، $\mu_n \in sp(u_n)$؛ چنین دنباله‌ای همیشه کراندار است. اگر λ یک نقطه حدی (μ_n) باشد، نشان دهید که $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$. (می‌توان فرض کرد که $\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_n \neq 0$، در این صورت، یک $x_n \in \mathrm{E}$ موجود است، به‌طوری‌که $\| x_n \| = 1$ و $u_n(x_n) = \lambda_n x_n$، سپس، از (a) استفاده کنید).

(d) به‌عکس، فرض کنیم $\lambda \neq 0$ در $\mathrm{sp}(u)$ واقع باشد. نشان دهید که، برای هر n حداقل یک عدد $\mu_n \in \mathrm{sp}(u_n)$ موجود است، به‌طوری‌که $\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_n$. (در غیراین‌صورت، (با استخراج زیردنباله‌ای مناسب از (u_n))، می‌توان فرض کرد که، یک دیسک باز D به مرکز λ و شعاع r موجود است، به‌طوری که $\mathrm{D} \cap \mathrm{sp}(u) = \{\lambda\}$ و $\mathrm{D} \cap \mathrm{sp}(u_n) = \varnothing$. سپس، فرض کنیم γ راه $t \to \lambda + re^{it}$ باشد که روی $[0\ ,\ 2\pi]$ تعریف شده است. انتگرال[۱]:

$$\int_\gamma (u_n - \zeta\,.\,1_{\mathrm{E}})^{-1}(\zeta - \lambda)^k d\zeta = 0 \qquad , \quad k \geq 0$$

را مورد بررسی قرار داده، با استفاده از (b) یک تناقض به‌دست آورید.)

(e) فرض کنیم $\lambda \neq 0$ در $\mathrm{sp}(u)$ واقع باشد، و فرض کنیم D دیسکی باز به مرکز λ و شعاع r باشد، به‌طوری که $\mathrm{D} \cap \mathrm{sp}(u) = \{\lambda\}$. عددی طبیعی مانند n_0 موجود است، به‌طوری که، برای $n \geq n_0$، اشتراک $\mathrm{sp}(u_n)$ و دایره $|\zeta - \lambda| = r$ تهی است (از (c) استفاده کنید). فرض کنیم μ_1، ...، μ_r نقاط $\mathrm{D} \cap \mathrm{sp}(u_n)$ باشند، قرار می‌دهیم $k_n = \sum_{j=1}^{r} k(\mu_j\ ,u_n)$. نشان دهید که، عددی طبیعی مانند n_1 وجود دارد، به طوری‌که، برای $n \geq n_1$، $k_n \geq k(\lambda\ ,u)$.

(با ضرب نمودن $(u_n - \zeta\,.\,1_{\mathrm{E}})^{-1}$ در یک چند جمله‌ای مناسب از ζ با درجه k_n، از روشی مشابه قسمت (d) استفاده نمایید.) مثالی ارائه نمایید، که در آن، برای هر عدد طبیعی n، $k_n > k(\lambda\ ,u)$.

(f) با نمادهای قسمت (e)، فرض کنیم $p = p_{\lambda,u}$، $p_n = \sum_{j=1}^{r} p_{\mu_j\ ,\ u_n}$. نشان دهید که، در فضای باناخ $\mathscr{L}(\mathrm{E})$، $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ (از (b)، و مسأله ۱ استفاده کنید). از این مطلب نتیجه بگیرید که، عددی طبیعی مانند n_2 موجود است، به‌طوری که، برای $n \geq n_2$، زیرفضای:

$$\mathrm{N_n} = \mathrm{N}(\mu_1\ ,u_n) + \ldots + \mathrm{N}(\mu_r\ ,u_n)$$

مکملی جبری از زیرفضای $\mathrm{F}(\lambda\ ,u)$ در فضای E است. (فرض کنید n چنان باشد که $\| p - p_n \| \leq \frac{1}{2}$. اگر نقطه‌ای مانند $x_n \in \mathrm{F}(\lambda) \cap \mathrm{N}_n$ موجود باشد، به‌طوری که $\| x_n \| = 1$، در این صورت، روابط $p(x_n) = 0$، $p_n(x_n) = x_n$

---

۱. در چاپ اول متن روسی کتاب به جای k در انتگرال 1- گذاشته شده است. مترجم.

با نامساوی قبلی در تناقض است. به طریق مشابه، ثابت کنید که، اشتراک $N(\lambda, u)$ و زیرفضای $F(\mu_1, u_n) \cap \dots \cap F(\mu_r, u_n)$ به 0 منجر می‌شود.)

۳. فرض کنیم u عملگری فشرده روی فضای باناخ مختلط نامتناهی‌البعد E ، و $P(\zeta)$ کثیرالجمله‌ای بدون جمله ثابت باشد. قرار می‌دهیم $v = P(u)$. نشان دهید که طیف $sp(v)$ با مجموعه اعداد $P(\lambda)$ یکی است، که در آن $\lambda \in sp(u)$. علاوه بر این، برای هر $\mu \in sp(v)$ ، $N(\mu, v)$ مجموع مستقیم زیرفضاهای $N(\lambda_k, u)$ است که $P(\lambda_k) = \mu$، و $F(\mu, v)$ اشتراک زیرفضاهای متناظر $F(\lambda_k, u)$ است. (فرض کنیم V زیرفضایی بسته از E باشد، به‌طوری که $u(V) \subset V$ ، و فرض کنیم u_V تحدید u به V باشد. نشان دهید که، ثابتی مانند M مستقل از V و n موجود است، به طوری‌که $\| (P(u_V))^n \| \le M^n \| u_V^n \|$. از این نکته و مسأله ۱ ، بخش ۱. ۱۱ ، با در نظر گرفتن V به‌صورت اشتراکی مناسب از تعدادی متناهی زیرفضاهای به فرم $F(\lambda, u)$، استفاده کنید.)

۴. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، و $(e_n)_{n \ge 0}$ یک پایه اورتونرمال برای E باشد. نشان دهید که، عملگر خطی u که برای هر $n \ge 0$ به‌صورت $u(e_n) = e_{n+1}/(n+1)$ تعریف شده است، عملگری فشرده است، و $sp(u)$ در 0 خلاصه می‌شود (به عبارت دقیق‌تر، u مقدار ویژه ندارد).

۵. فرض کنیم u یک عملگر خطی پیوسته روی فضای باناخ مختلط E باشد. یک **نقطه ریس**[1] برای u نقطه‌ای مانند λ در طیف $sp(u)$ است، به‌طوری که :

(۱) λ نقطه‌ای ایزوله در $sp(u)$ باشد ؛

(۲) E برابر با مجموع مستقیم یک زیرفضای بسته $F(\lambda)$ و یک زیر فضای متناهی‌البعد $N(\lambda)$ باشد، به طوری‌که $u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$ ، $u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$ ، تحدید $u - \lambda . 1_E$ به $F(\lambda)$ یک هومیومورفیسم خطی و تحدید $u - \lambda . 1_E$ به $N(\lambda)$ پوچ توان باشد.

(a) اگر λ و μ دو نقطه متمایز ریس در $sp(u)$ باشند، نشان دهید که $N(\mu) \subset F(\lambda)$ ، و $F(\lambda)$ برابر مجموع مستقیم $N(\mu)$ و $F(\lambda) \cap F(\mu)$ است.

(b) طبق تعریف، u را یک **عملگر ریس**[2] می‌نامند، هرگاه u یک عملگر خطی پیوسته باشد، و همه نقاط ناصفر واقع در $sp(u)$ طیف آن نقاط ریس باشند. در این‌صورت، برای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه نقاط $\lambda \in sp(u)$ به‌طوری‌که $|\lambda| \ge \varepsilon$، مجموعه‌ای است متناهی مانند $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$. فرض کنیم p_i تصویر E بروی $N(\mu_i)$ در تجزیه E به مجموع مستقیم $N(\mu_i) + F(\mu_i)$ $(1 \le i \le r)$ باشد، و فرض کنیم $v = u - \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i$. نشان دهید که، $sp(v)$ در دیسک $|\zeta| \le \varepsilon$ واقع است، و بنابراین $\|v^n\|^{1/n} \le \varepsilon$ (بخش ۱. ۱۱ ، مسأله ۱ را ببینید).

(c) فرض کنیم $\mathscr{K}$ زیرفضایی بسته از فضای باناخ $\mathscr{L}(E)$ باشد، که از همه عملگرهای فشرده تشکیل شده است ((۱۰. ۲. ۱۱) را ببینید). ثابت کنید، برای اینکه $u \in \mathscr{L}(E)$ یک عملگر ریس باشد، لازم و کافی است که $\lim_{n \to \infty} (d(u^n, \mathscr{K}))^{1/n} = 0$. (برای اثبات لزوم شرط، از (b) ، با توجه به اینکه $u^n = v^n + w_n$ ، که در آن w_n عملگری با رتبه متناهی، و در نتیجه فشرده است، استفاده کنید. برای اثبات کفایت شرط، از نتیجه مسأله ۳ بخش ۳. ۱۱ که می‌تواند به‌صورت زیر تعبیر شود، استفاده کنید: اگر $\| g \| < \frac{1}{2}$ ، آنگاه، یا $\lambda = 1$ متعلق به $sp(g + u)$ نیست یا یک نقطه ریس برای $g + u$ است.)

---
1 . Riesz point = Риссовская точка
2 . Riesz operator = Риссовский оператор

۵. عملگرهای فشرده در فضاهای هیلبرت

فرض کنیم E یک فضای پیش‌هیلبرتی، و u عملگری خطی روی E باشد. گوییم u دارای **ادجوینت (عملگر الحاقی)**[1] است، هرگاه عملگری مانند u^* روی E موجود باشد، به‌طوری‌که، برای هر زوج x، y در E،

(۱۱ . ۵ .۱) $$(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

از این مطلب فوراً نتیجه می‌شود که، عملگر الحاقی u^* درصورت وجود یکتا است، و (طبق بخش (V) ۱. ۶) در این‌صورت، $(u^*)^*$ وجود دارد و برابر u است. به طریق مشابه، می‌توان نشان داد که، وقتی عملگرهای u و v دارای عملگرهای الحاقی باشند، آنگاه عملگرهای $u + v$، λu، و uv به ترتیب دارای عملگرهای الحاقی $u^* + v^*$، $\bar{\lambda} u^*$، و $v^* u^*$ خواهند بود.

(۲. ۵ . ۱۱) اگر u پیوسته و دارای عملگر الحاقی باشد، آنگاه u^* پیوسته است و در $\mathscr{L}(E)$، $\| u \| = \| u^* \|$. اگر E یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه، هر عملگر پیوسته روی E دارای یک عملگر الحاقی است.

از (۱. ۵ . ۱۱) و نامساوی کوشی ـ شوارتز (۴ . ۲. ۶) نتیجه می‌گیریم، برای هر زوج x، y در E،

$$| (x \mid u^*(y)) | \leq \| u(x) \| . \| y \| \leq \| u \| . \| x \| . \| y \|$$

با انتخاب $x = u^*(y)$، برای هر $y \in E$، به‌دست می‌آوریم $\| u^*(y) \| \leq \| u \| . \| y \|$، که پیوستگی u^* و نامساوی $\|u^*\| \leq \|u\|$ را ثابت می‌کند. نامساوی عکس $\|u\| \leq \|u^*\|$ با تعویض u به u^* از نامساوی $\| u^* \| \leq \| u \|$ حاصل می‌شود. اگر E یک فضای هیلبرت و u پیوسته باشد، آنگاه، برای هر $y \in E$، فرم خطی $x \to (u(x) \mid y)$ پیوسته است، و طبق (۲. ۳. ۶)، بردار یکتای $u^*(y)$ موجود است، به‌طوری‌که رابطه (۱. ۵ . ۱۱) برقرار است. از یکتایی $u^*(y)$، نتیجه می‌گیریم که نگاشت u^* خطی، و بنابراین، ادجوینت u است. دومین حکم (۲. ۵ . ۱۱) به فضاهای پیش‌هیلبرتی قابل گسترش نیست.

عملگر u در فضای پیش هیلبرتی E را **خود الحاق**[2] **(یا هرمیتی**[3]**)** نامند، اگر دارای عملگر الحاقی باشد و $u^* = u$. اگر u عملگری خودالحاق باشد، آنگاه، نگاشت $(x, y) \to (u(x) \mid y) = \overline{(u(y) \mid x)}$ یک **فرم هرمیتی** روی E است. عملگر خود الحاق u را **مثبت** (به ترتیب **غیرتبهگون**) نامند، اگر فرم هرمیتی متناظر

---

1 . Adjoint operator = Сопряженный оператор

2 . Self – adjoint = Самосопряженный

3 . Hermitian = Эрмитовый

با آن مثبت (به ترتیب غیرتبهگون) باشد، در این‌صورت می نویسیم[۱] $u \geq 0$. برای هر عملگر u که دارای ادجونیت است ، $u+u^*$ و $i(u-u^*)$ عملگرهایی خود الحاق هستند.

(۳. ۵. ۱۱) (i) اگر عملگر پیوسته u در فضای پیش هیلبرتی E دارای عملگر الحاقی باشد، آنگاه u^*u و uu^* عملگرهای خودالحاق مثبتی هستند، و $\| u^*u \| = \| uu^* \| = \| u \|^2 = \| u^* \|^2$. به‌ویژه، اگر u عملگری خود الحاق باشد، آنگاه $\| u^2 \| = \| u \|^2$.

(ii) اگر P افکنشی متعامد از E به روی یک زیر فضای برداری تام F باشد (بخش ۳. ۶ را ببینید)، آنگاه P یک عملگر هرمیتی مثبت است. به عکس، اگر E یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه، هر عملگر پیوسته P روی E که هرمیتی و خودتوان باشد (یعنی $P^2 = P$) افکنشی متعامد از E به‌روی زیرفضای بسته $P(E)$ است (این گونه عملگرها را تصاویر(افکنش‌های) متعامد در $\mathscr{L}(E)$ می‌نامند.)[۲]

(i) این حقیقت که u^*u و uu^* عملگرهایی خود الحاق هستند، از روابط $(u^*)^* = u$ و $(uv)^* = v^*u^*$ نتیجه می‌شود. علاوه بر این، برای هر $x \in E$ ، $(u^*u(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) \geq 0$، و مثبت بودن uu^* به طریق مشابه ثابت می‌شود. در ادامه، رابطه اخیر، طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز، نشان می‌دهد که $\| u(x) \|^2 \leq \| u^*u(x) \| . \| x \|$ ، بنابراین (طبق (۴. ۷. ۵))، $\| u \|^2 \leq \| u^*u \|$. از طرف دیگر، طبق (۵. ۷. ۵) و(۲. ۵. ۱۱) ، $\| u^*u \| \leq \| u^* \| . \| u \| = \| u \|^2$ ، و با این مطلب اثبات (i) به پایان می‌رسد.

(ii) اگر P افکنشی عمودی از E به روی زیرفضای تام F باشد، آنگاه، برای $x \in E$ ، $y \in E$ ، خواهیم داشت $(P . x \mid y - P . y) = 0$، بنابراین $(P . x \mid y) = (P . x \mid P . y) = (x \mid P . y)$، که ثابت می‌کند P هرمیتی است، و P مثبت است؛ زیرا $(P . x \mid x) = (P . x \mid P . x) \geq 0$. به عکس، فرض کنیم E یک فضای هیلبرت باشد، و $P^2 = P = P^*$ ، آنگاه، برای هر x ، y در E ، خواهیم داشت :

$$(P . x \mid y - P . y) = (x \mid P . y - P^2 . y) = 0$$

چون از رابطه $y = P . x$ نتیجه می‌شود $P . y = P^2 . x = P . x = y$، پس $P(E)$ هسته $1_E - P$ و در نتیجه یک زیر فضای برداری بسته است. علاوه بر این، برای هر $y \in E$ ، $y - P . y$ بر هر $P . x$ عمود، و به عبارت دیگر، بر $P(E)$ عمود است، که با این مطلب (ii) ثابت می‌شود.

---

۱. چنین عملگری در بعضی کتاب‌های ریاضی عملگر غیرمنفی نامیده شده است. در چاپ اول متن روسی کتاب به عملگر مثبت و غیرتبهگون با نماد $u > 0$ نیز اشاره شده است، اما، این مطلب در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲. قسمت (ii) قضیه فوق در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود ندارد، اما قبل از قضیه (۳. ۵. ۱۱) ثابت شده است که P ، یک عملگر هرمیتی مثبت است. مترجم.

(۴ . ۵ . ۱۱) اگر E یک فضای هیلبرتی باشد، آنگاه عملگر الحاقی هر عملگر فشرده u در E ، عملگری فشرده است.

چون E فضایی تام است، کافی است ثابت کنیم که تصویر $u^*(\mathrm{B})$ وقتی B گوی $\|y\| \leq 1$ باشد، **پیش فشرده** است. فرض کنیم $\mathrm{F} = \overline{u(\mathrm{B})}$. دراین صورت، F مجموعه‌ای فشرده در E است. در فضای $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{F})$ (بخش ۲. ۷ را ببینید) مجموعه H تحدیدهای نگاشت‌های خطی پیوسته $x \to (x \mid y)$ از E به C ، که در آن $y \in \mathrm{B}$ ، به F مورد بررسی قرار می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که H در $\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{F})$ **به‌طور نسبی فشرده** است. در واقع، طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم $|(x-x' \mid y)| \leq \|x-x'\|$، زیرا $\|y\| \leq 1$. این مطلب نشان می‌دهد که H همپیوسته است. از طرف دیگر، F در گوی $\|x\| \leq \|u\|$ واقع شده است، بنابراین، برای هر نقطه $y \in \mathrm{B}$ و هر $x \in \mathrm{F}$ نامساوی $|(x \mid y)| \leq \|u\|$ برقرار است، و قضیه آسکولی (۷. ۵ . ۷) مجادله ما را ثابت می‌کند. به این ترتیب، برای هر $\varepsilon > 0$ ، تعدادی متناهی از نقاط مانند $y_j\,(1 \leq j \leq m)$ در B وجود دارند، به طوری‌که، برای هر $y \in \mathrm{B}$ ، یک اندیس j موجود است، به طوری که برای هر $x \in \mathrm{B}$ ، $|(u(x) \mid y - y_j)| \leq \varepsilon$. اما ، طبق (۱. ۵ . ۱۱) ، نامساوی اخیر را می‌توان به صورت $|(x \mid u^*(y) - u^*(y_j))| \leq \varepsilon$ نوشت. بنابراین، یا $u^*(y) = u^*(y_j)$ یا می‌توان $x = z / \|z\|$ گرفت، که در آن $z = u^*(y) - u^*(y_j)$. در نتیجه، خواهیم داشت $\|u^*(y) - u^*(y_i)\| \leq \varepsilon$ ، و این مطلب اثبات را به پایان می‌رساند.

خاطر نشان می‌کنیم که، اثبات اینکه $u^*(\mathrm{B})$ پیش فشرده (کاملاً کراندار) است، وقتی E تام نباشد، نیز، دارای اعتبار است، اما، در فضای پیش هیلبرتی E ، ممکن است یک عملگر فشرده دارای ادجونیتی باشد که فشرده نیست.

(۵ . ۵ . ۱۱) فرض کنیم u یک عملگر فشرده در فضای پیش هیلبرتی مختلط E باشد، که دارای یک عملگر الحاقی فشرده u^* است. در این صورت :

(a) **طیف $\mathrm{sp}(u^*)$ تصویر $\mathrm{sp}(u)$ تحت نگاشت $\xi \to \overline{\xi}$ است.**

(b) **برای هر $\lambda \neq 0$ در $\mathrm{sp}(u)$ ، $k(\lambda : u) = k(\overline{\lambda} : u^*)$.**

(c) **اگر $v = u - \lambda \,.\, 1_{\mathrm{E}}$ ، آنگاه ، $v^*(\mathrm{E})$ مکمل عمودی (بخش ۳ . ۶ را ببینید) $v^{-1}(0) = \mathrm{E}(\lambda : u)$ است، و بعدهای $\mathrm{E}(\lambda : u)$ و $\mathrm{E}(\overline{\lambda} : u^*)$ برابرند.**

(d) **زیرفضای $\mathrm{F}(\overline{\lambda} : u^*)$ مکمل عمودی $\mathrm{N}(\lambda : u)$ است، و بعدهای $\mathrm{N}(\lambda : u)$ و $\mathrm{N}(\overline{\lambda} : u^*)$ با هم برابرند.**

داریم $v^* = u^* - \overline{\lambda} \,.\, 1_{\mathrm{E}}$ ، در نتیجه، طبق (۱. ۵ . ۱۱) ، $(v(x) \mid y) = (x \mid v^*(y))$ ، و بنابراین، از

رابطه $v(x)=0$ نتیجه می‌شود که x بر زیرفضای $v^*(\mathrm{E})$ عمود است. حال، بابه کارگیری قضیه (۱. ۴. ۱۱) برای u^*، نتیجه می‌گیریم که $v^*(\mathrm{E})$ مجموع مستقیم توپولوژیک $\mathrm{F}(\bar{\lambda}:u^*)$ و زیرفضای $v^*(\mathrm{N}(\bar{\lambda}:u^*))$ از $\mathrm{N}(\bar{\lambda}:u^*)$ است، و از جبر خطی ((۱۷. ۴. A) را ببینید) نتیجه می‌شود که، همبعد $v^*(\mathrm{E})$ برابر بعد $v^{*-1}(0)=\mathrm{E}(\bar{\lambda}:u^*)$ است، بنابراین $\dim \mathrm{E}(\lambda,u)\le \dim \mathrm{E}(\bar{\lambda},u^*)$. اما $u=(u^*)^*$، در نتیجه $\dim \mathrm{E}(\lambda,u)=\dim \mathrm{E}(\bar{\lambda},u^*)$. علاوه بر این، مکمل عمودی $\mathrm{E}(\lambda,u)$ شامل $v^*(\mathrm{E})$ است و همان همبعد $v^*(\mathrm{E})$ را دارد، یعنی، هر دو با هم برابرند، که این (c) را ثابت می‌کند. همچنین، نشان می‌دهد که، برای هر مقدار ویژه $\lambda\ne 0$ از u، $\bar{\lambda}$ مقداری ویژه از u^* است، و چون عکس آن از تساوی $u=(u^*)^*$ نتیجه می‌شود، ما (a) را نیز ثابت کرده‌ایم.

از دلیلی مشابه، می‌توان برای تکرارهای پی در پی v^h از v استفاده نمود، و نشان داد که تصویر E تحت $(v^*)^h=(v^h)^*$ مکمل عمودی هسته v^h است. با استفاده از (۲. ۳. ۱۱)، (۱. ۴. ۱۱)، و تساوی $u=(u^*)^*$ فوراً (b) و (d) ثابت می‌شود.

قضیه‌های (۱. ۴. ۱۱) و (۵. ۵. ۱۱) را می‌توان به محکی برای حل معادله $u(x)-\lambda x=y$ تبدیل کرد.

(۶. ۵. ۱۱) تحت فرض‌های قضیه (۵. ۵. ۱۱) :

(a) اگر λ در طیف u نباشد، آنگاه، معادله $u(x)-\lambda x=y$ برای هر $y\in \mathrm{E}$ دارای جوابی یکتا در E است.

(b) اگر $\lambda\ne 0$ متعلق به طیف u باشد، آنگاه، شرط لازم و کافی برای اینکه $y\in\mathrm{E}$ چنان باشد که معادله $u(x)-\lambda x=y$ در E دارای جواب باشد، این است که y بر جواب‌های معادله $u^*(x)-\bar{\lambda}x=0$ عمود باشد.

برای یک فضای با بعد متناهی، این محک تبدیل می‌شود به معیاری کلاسیک برای وجود جواب یک دستگاه معادلات خطی اسکالر (عددی).

(۷. ۵. ۱۱) فرض کنیم u یک عملگر فشرده خود الحاق در فضای هیلبرت مختلط E باشد. در این‌صورت :

(a) هر عنصر طیف $\mathrm{sp}(u)$ عددی حقیقی است، و برای هر مقدار ویژه $\lambda\ne 0$ عملگر u، داریم $k(\lambda)=1$.

(b) اگر λ، μ دو مقدار ویژه متمایز u باشند، آنگاه $\mathrm{E}(\lambda)$ و $\mathrm{E}(\mu)$ بر هم عمودند.

(c) فرض کنیم (μ_n) دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) اکیداً نزولی از مقادیر ویژه اکیداً مثبت، و (ν_n) دنباله‌ای (متناهی یا نامتناهی) اکیداً صعودی از مقادیر ویژه اکیداً منفی u باشد. برای هر k که μ_k (به ترتیب ν_k) تعریف شده باشد، فرض کنیم F'_k (به ترتیب F''_k) مکمل عمودی $\mathrm{E}(\mu_1)+\ldots+\mathrm{E}(\mu_{k-1})$ (به ترتیب $\mathrm{E}(\nu_1)+\ldots+\mathrm{E}(\nu_{k-1})$) باشد، در این‌صورت μ_k (به ترتیب ν_k) بزرگترین (به ترتیب کوچکترین) مقدار تابع $x\to(u(x)\mid x)$ روی گوی $\|x\|=1$ در F'_k (به ترتیب F''_k) است، و نقاطی از این گوی که $(u(x)\mid x)=\mu_k$ (به ترتیب $(u(x)\mid x)=\nu_k$)،

نقاطی متعلق به $E(\mu_k)$ (به ترتیب $E(\nu_k)$) هستند. علاوه بر این $\|u\| = \sup(\mu_1, -\nu_1)$.

(d) فضای E مجموع هیلبرتی (بخش ۴. ۶ را ببینید) زیرفضاهای $E(\mu_n)$، $E(\nu_n)$ است، و $E(0) = u^{-1}(0)$.

(ممکن است یا مقادیر μ_n، یا مقادیر ν_n وجود نداشته باشند، اما، از (c) نتیجه می‌شود که، تنها حالتی که مقادیر ویژه مخالف صفر وجود ندارند، حالت $u = 0$ است.)

برای هر مقدار ویژه $\lambda \neq 0$ از عملگر u، و بردار ویژه x که متناظر با مقدار ویژه λ است، داریم $(u(x)|x) = \lambda(x|x)$. اما $(u(x)|x) = (x|u(x)) = \overline{(u(x)|x)}$ برای هر $x \in E$ حقیقی است، در نتیجه، چون $(x|x)$ یک عدد حقیقی ناصفر است، λ عددی حقیقی خواهد بود. بنابراین، اگر $\nu = u - \lambda . 1_E$ آنگاه $\nu^* = \nu$، در نتیجه، طبق (۵. ۵. ۱۱)، $\nu(E)$ مکمل عمودی $E(\lambda) = \nu^{-1}(0)$ است. از این مطلب نتیجه می‌شود که، تحدید ν به $\nu(E)$ یک به یک است. بنابراین، طبق تعریف ((۳. ۳. ۱۱) را ببینید) $N(\lambda) = E(\lambda)$، $F(\lambda) = \nu(E)$ و در نتیجه $k(\lambda) = 1$. این مطلب گزاره (a) را ثابت می‌کند، و چون برای هر مقدار ویژه $\mu \neq \lambda$، طبق (۱. ۴. ۱۱)، $E(\mu) = N(\mu) \subset F(\lambda)$، پس ما (b) را نیز ثابت کرده‌ایم.

ابتدا قسمت آخر گزاره (c) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\rho = \sup(\mu_1, -\nu_1)$. در این صورت، طبق (۲. ۱. ۱۱)، نگاشت $\zeta \to (u - \zeta . 1_E)^{-1}$ برای $|\zeta| > \rho$ تحلیلی است، که از آن فوراً نتیجه می‌شود، نگاشت $\xi \to (1_E - \xi u)^{-1}$ برای $|\xi| < 1/\rho$ تحلیلی است. حال، برای ξ واقع در یک همسایگی به حد کافی کوچک ۰، سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n u^n$ در $\mathscr{L}(E)$ به $(1_E - \xi u)^{-1}$ همگرا است ((۱. ۲. ۳. ۸) را ببینید).

طبق (۴. ۹. ۹)، این سری توانی برای هر ξ که $|\xi| < 1/\rho$ همگرا است. علاوه بر این، برای هر r که $0 < r < 1/\rho$، اگر M ماکسیمم $\|(1_E - \xi u)^{-1}\|$ برای $|\xi| = r$ باشد، از نامساوی‌های کوشی (۵. ۹. ۹) نتیجه می‌شود $\|u^n\| \leq M/r^n \leq M\rho^n$. به‌ویژه، اگر از (۳. ۵. ۱۱) استفاده کنیم، برای هر $n \geq 1$ به‌دست می‌آوریم $\|u\|^{2^n} \leq M\rho^{2^n}$. با گرفتن ریشه 2^nام و با میل دادن n به سمت $+\infty$، طبق بخش ۳. ۴، به‌دست می‌آوریم $\|u\| \leq \rho$. از طرف دیگر، طبق (۳. ۱. ۱۱)، داریم $\|u\| \geq \rho$، در نتیجه $\|u\| = \rho$.

اکنون دنباله اکیداً صعودی قدرمطلق مقادیر ویژه u را به (ρ_n) نشان می‌دهیم، به‌طوری‌که $\rho_1 = \rho = \sup(\mu_1, -\nu_1)$، و فرض کنیم G_n برابر مجموع زیرفضاهای $E(\lambda)$هایی باشد که $|\lambda| = \rho_n$ (البته، تنها یک یا دو چنین مقادیر ویژه λ وجود دارد). در ادامه، فرض کنیم F_n مکمل عمودی $G_1 + \ldots + G_{n-1}$ باشد. طبق (a)، داریم $u(F_n) \subset F_n$، و ثابت می‌کنیم که، u_n تحدید عملگر u به F_n چنان است که $\|u_n\| < \rho_{n-1}$. در غیر این‌صورت، طبق آنچه که هم اکنون ثابت شد (و طبق (۷. ۲. ۱۱)) در F_n بردار ویژه‌ای مانند x پیدا خواهد شد، به‌طوری‌که $u(x) = \lambda x$، که در آن $|\lambda| \geq \rho_{n-1}$. اما، این مطلب با تعریف F_n در تناقض است. اکنون، برای هر $x \in F_n$ می‌نویسیم $x = y + z$ که در آن $y \in F_{n+1}$،

$z \in \mathrm{G}_n$. طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز ، داریم :

$$-\|u_{n+1}\|.\|y\|^2+(u(z)\mid z) \le (u(x)\mid x) \le \|u_{n+1}\|.\|y\|^2+(u(z)\mid z)$$

فرض کنیم $\rho_n = \mu_h = -\nu_k$ ، و مطابق با این رابطه می‌نویسیم $z = z_1 + z_2$ ، که در آن $z_1 \in \mathrm{E}(\mu_h)$ و $z_2 \in \mathrm{E}(\nu_k)$. در نتیجه $(u(z)\mid z) = \rho_n(\|z_1\|^2 - \|z_2\|^2)$. چون ، $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2$ پس، با استفاده از نامساوی قبلی و نامساوی $\rho_n > \|u_{n+1}\|$ فوراً دیده می‌شود، که روی کره $\|x\| = 1$ در F_n ، بیشترین مقدار $(u(x)\mid x)$ برابر ρ_n است و تنها در نقاط زیرفضای $\mathrm{E}(\mu_h)$ کسب می‌شود، و کمترین مقدار آن $\rho_n -$ است و تنها در نقاط زیرفضای $\mathrm{E}(\nu_k)$ کسب می‌شود. وقتی یا k یی وجود نداشته باشد به طوری‌که $\rho_n = -\nu_k$ یا h یی وجود نداشته باشد به‌طوری که $\rho_n = \mu_h$ ، همین نتایج به طریقی مشابه و ساده‌تر به‌دست می‌آیند. بالاخره، اگر ملاحظه کنیم که، وقتی $\mu_h = \rho_n$ و s بزرگترین مقدار k باشد که $\rho_n < -\nu_k$ ، آنگاه $\mathrm{F}'_h = \mathrm{F}_n + \mathrm{E}(\nu_1) + \ldots + \mathrm{E}(\nu_s)$، و به طریقی مشابه، اگر $\nu_k = -\rho_n$ و r بزرگترین مقدار h باشد، به‌طوری که $\rho_n < \mu_h$ ، آنگاه :

$$\mathrm{F}''_k = \mathrm{F}_n + \mathrm{E}(\mu_1) + \ldots + \mathrm{E}(\mu_r)$$

بحثی تقریباً یکسان اثبات (c) را به پایان می‌رساند.

حال، فرض کنیم F_∞ زیرفضای بسته‌ای باشد، که از اشتراک همه F_nها ایجاد شده است. طبق تعریف $u(\mathrm{F}_\infty) \subset \mathrm{F}_\infty$ ، و تحدید u به F_∞ دارای مقدار ویژه‌ای مخالف صفر نخواهد بود. طبق (c) ، از این مطلب نتیجه می‌شود که، روی F_∞ ، $u(x) = 0$. علاوه بر این، اگر برداری مانند $x \in \mathrm{E}$ عمود بر F_∞ و همه $\mathrm{E}(\mu_k)$ و $\mathrm{E}(\nu_k)$ها باشد، آنگاه طبق تعریف، بر همه G_nها عمود خواهد بود، در نتیجه، متعلق به F_∞ است. از آنجا که این بردار بر F_∞ نیز عمود است، باید برابر 0 باشد. این مطلب (طبق (۱. ۳. ۶)) ثابت می‌کند که، مجموع جبری زیرفضاهای $\mathrm{E}(\mu_k)$ و $\mathrm{E}(\nu_k)$ها و F_∞ در E چگال است، و بنابراین، طبق (۲. ۴. ۶) ، E **مجموع هیلبرتی** این زیرفضاها است. به این ترتیب، هر $x \in \mathrm{E}$ را می‌توان به شکل یکتایی به فرم $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ نوشت، که در آن x'_k ، x''_k و x_0 به ترتیب، **افکنش‌های متعامد** x روی $\mathrm{E}(\mu_k)$ ، $\mathrm{E}(\nu_k)$ها و F_∞ هستند، و وقتی مجموعه‌های اندیس‌ها نامتناهی باشند، سری‌ها در E همگرا هستند (**تجزیه کانونیک** x). از مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که :

$$u(x) = \sum_k \mu_k x'_k + \sum_k \nu_k x''_k$$

و با توجه به یکتایی این نمایش، دیده می‌شود که، از رابطه $u(x) = 0$ ، به‌دست می‌آید $x \in \mathrm{F}_\infty$. به عبارت دیگر $\mathrm{F}_\infty = u^{-1}(0)$ ، و با این مطلب اثبات قضیه (۷ . ۵ . ۱۱) به پایان می‌رسد.

تبصره‌ها

(۸ . ۵ . ۱۱) فرض کنیم E_0 یک فضای پیش هیلبرتی باشد، که زیر فضایی چگال از فضای هیلبرت E است (می‌توان ثابت کرد که، برای هر فضای پیش هیلبرتی E_0 فضایی هیلبرتی با خاصیت فوق مانند E وجود دارد. در (۲. ۶ . ۶) حالت خاصی از این قضیه وقتی E_0 جدایی‌پذیر باشد، ثابت شده است)، و فرض کنیم u یک عملگر فشرده خود الحاق روی E_0 باشد، در این صورت، نتایج (a) ، (b) ، و (c) قضیه (۷. ۵ . ۱۱) **بدون تغییر** برای u برقرار خواهند بود.

در واقع، از اصل تمدید تساوی‌ها نتیجه می‌شود که، $\tilde{u}$ یکتا گسترش پیوسته u به E خودالحاق است، و به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\|u\| = \|\tilde{u}\|$. در این‌صورت، ادعای ما از (۲. ۴. ۱۱) و از نکته زیر نتیجه می‌شود : اگر F_0 زیرفضایی متناهی‌البعد از E_0 ، G_0 مکمل عمودی آن در E_0 ، و G مکمل عمودی آن در E باشد، آنگاه G_0 در G چگال است. مطلب فوق نتیجه این حقیقت است که ، اگر در $\mathscr{L}(E)$ ، $v = 1_E - P_{F_0}$ (نمادها را در بخش ۳. ۶ ببینید) ، آنگاه v پیوسته است و $v(E) = G$ ، $v(E_0) = G_0$ ((۳. ۱۱. ۳) را ببینید). راجع به قسمت (d) از (۷. ۵ . ۱۱) ، واضح است که هسته u اشتراک E_0 با هسته $\tilde{u}$ ، و در نتیجه، زیرفضایی از بردارهای E_0 عمود بر همه فضاهای ویژه $E(\lambda)$ با $\lambda \neq 0$ است. اما، اگر تجزیه کانونیک $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ از عنصر $x \in E_0$ را مورد بررسی قرار دهیم، لازم نیست که مجموع‌های سمت راست و عنصر x_0 حتماً متعلق به E_0 باشند.

(۹. ۵ . ۱۱) اگر $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ ، $y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ تجزیه‌های کانونیک دو بردار x ، y از فضای E باشند، آنگاه :

$$(u(x) \mid y) = \sum_k \mu_k (x'_k \mid y'_k) + \sum_k v_k (x''_k \mid y''_k)$$

سری‌های سمت راست به‌طور مطلق همگرا هستند (بخش ۴ . ۶ را ببینید).

از این فرمول فوراً نتیجه می‌شود که، عملگر خود الحاق u مثبت است، اگر و تنها اگر دارای مقادیر ویژه منفی نباشد، و **غیرتبهگون** است، اگر و تنها اگر $u^{-1}(0) = \{0\}$. اگر u غیر تبهگون باشد، و اگر در هر فضای ویژه $E(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ ، پایه هیلبرتی B_λ (شامل تعدادی متناهی بردار) انتخاب کنیم، آنگاه ، اجتماع B_λها مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است، که تشکیل یک پایه هیلبرتی در E می‌دهد (بخش ۵ . ۶ را ببینید).

(۱۰. ۵ . ۱۱) لازم است خاطر نشان کنیم که، تحت فرض‌های (۸ . ۵ . ۱۱) ، ممکن است اتفاق بیفتد که، عملگر خود الحاق فشرده u روی E_0 **غیرتبهگون** ، اما ، $\tilde{u}$ تمدید پیوسته آن به فضای E **تبهگون** باشد (به عبارت دیگر، لازم نیست که هسته u حتماً در هسته $\tilde{u}$ چگال باشد). این مطلب ممکن است حتی اگر u

یک عملگر خود الحاق مثبت باشد اتفاق بیفتد.

برای عملگرهای خود الحاق فشرده در یک فضای هیلبرت E ، از قضیه (۷. ۵ . ۱۱) فرمولی برای جواب‌های معادله $u(x)-\lambda x=y$ به‌دست می‌آید :

(۱۱. ۵ . ۱۱) فرض کنیم $y=\sum_k y'_k+\sum_k y''_k+y_0$ تجزیه کانونیک y در E باشد. در این‌صورت :

(a) اگر λ متعلق به طیف $\mathrm{sp}(u)$ نباشد، آنگاه x یکتا جواب معادله $u(x)-\lambda x=y$ با تجزیه کانونیک آن تعیین می‌شود :

$$x=\sum_k \frac{1}{\mu_k-\lambda}\, y'_k+\sum_k \frac{1}{\nu_k-\lambda}\, y''_k-\frac{1}{\lambda}\, y_0 \qquad (۱. ۱۱. ۵ . ۱۱)$$

(b) اگر λ یکی از مقادیر ویژه μ_k (به ترتیب ν_k) باشد، آنگاه، برای اینکه معادله $u(x)-\lambda x=y$ دارای جواب باشد، لازم و کافی است که $y'_k=0$ ، (به ترتیب $y''_k=0$) . در این حالت، جواب معادله با فرمول (۱. ۱۱ . ۵ . ۱۱) داده می‌شود، که در آن باید به جای جمله مربوط به μ_k (به ترتیب ν_k) یک عنصر دلخواه از $\mathrm{E}(\mu_k)$ (به ترتیب $\mathrm{E}(\nu_k)$) گذاشت.

(c) برای اینکه معادله $u(x)=y$ دارای جواب باشد، لازم و کافی است که $y_0=0$ و سری‌های $\sum_k \frac{1}{\mu_k^2}\|y'_k\|^2$ و $\sum_k \frac{1}{\nu_k^2}\|y''_k\|^2$ همگرا باشند. در این حالت، جواب معادله با فرمول :

$$x=\sum_k \frac{1}{\mu_k}\, y'_k+\sum_k \frac{1}{\nu_k}\, y''_k+x_0 \qquad (۲. ۱۱. ۵ . ۱۱)$$

داده می‌شود، که در آن x_0 عنصری دلخواه در $u^{-1}(0)$ است.

احکام (a) و (b) فوراً از (۷ . ۵ . ۱۱) و (۶ . ۵ . ۱۱) نتیجه می‌شوند، ضمناً، فرمول‌ها با استفاده از یکتایی تجزیه کانونیک به‌دست می‌آیند. با بحثی مشابه ثابت می‌شود که، اگر معادله $u(x)=y$ دارای جواب‌هایی باشد، آنگاه، این جواب‌ها لزوماً با فرمول (۲. ۱۱. ۵ . ۱۱) داده می‌شوند، که از آن لزوم شرایط نتیجه می‌شود، و اگر این شرایط برقرار باشند، آنگاه، سمت راست فرمول (۲. ۱۱. ۵ . ۱۱) عنصری از E است (طبق بخش ۴. ۶) که در معادله $u(x)=y$ صدق می‌کند.

مسائل

۱. فرض کنیم E فضای برداری توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد که روی فاصله $[0,1]$ از **R** تعریف شده‌اند (بخش ۱۲. ۸ را ببینید). با استفاده از فرم هرمیتی:

$$(x\mid y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

E به یک فضای پیش هیلبرتی تبدیل می‌شود. فرض کنیم u نگاشتی خطی از E به E باشد، به‌طوری‌که $u(x) = ix'$. نشان دهید که u خود الحاق است، اما، روی E پیوسته نیست. (دنباله (x_n) که در آن $x_n(t) = (\sin nt)/n$، مورد بررسی قرار دهید.)

۲ . فرض کنیم F یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، (e_n) $(n \geq 1)$ یک پایه هیلبرتی F، و v عملگری فشرده روی F باشد، به طوری که $v(e_n) = (e_1 + e_n)/n$ (بخش ۲. ۱۱، مسأله ۳ را ببینید)، و فرض کنیم $E = v(F)$ ، و u تحدیدی از v به E باشد، که در شرط $u(E) \subset E$ صدق می‌کند. نشان دهید که، در **فضای پیش هیلبرتی** E ، u عملگری فشرده است که ادجوینت (عملگر الحاقی) ندارد.

۳ . (a) فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی مختلط، و f یک فرم هرمیتی پیوسته روی $E \times E$ باشد. نشان دهید، که، ثابتی مانند c موجود است، به‌طوری‌که $|f(x, y)| \leq c\|x\| . \|y\|$ (مقایسه کنید با (۱. ۵ . ۵)). همچنین، نشان دهید که، یک عملگر هرمیتی پیوسته یکتای U روی E موجود است، به‌طوری‌که $f(x, y) = (Ux \mid y)$.

(b) فرض کنیم فضای E جدایی‌پذیر ، $(e_n)_{n \geq 1}$ یک پایه هیلبرتی برای E ، و V عملگر خطی پیوسته‌ای روی E باشد، که به صورت $Ve_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/n$ ، و برای $i > 1$ ، $Ve_i = 0$ تعریف شده است و $W = VV^*$ ، و فرض کنیم E_0 زیرفضایی از E باشد که از ترکیبات خطی (متناهی) از e_nها تشکیل شده است، و f تحدید نگاشت $(x, y) \to (Wx \mid y)$ به $E_0 \times E_0$ باشد. نشان دهید که، f یک فرم هرمیتی پیوسته روی $E_0 \times E_0$ است، اما، عملگری خطی روی E_0 مانند U وجود ندارد، به طوری‌که روی $E_0 \times E_0$ ، $f(x, y) = (Ux \mid y)$.

(c) اگر u عملگری باشد که در مسأله ۱ تعریف شده است، نشان دهید که، فرم هرمیتی $(x, y) \to (ux \mid y)$ روی $E_0 \times E_0$ پیوسته نیست.

۴ . فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط، و u یک عملگر هرمیتی روی E باشد. ثابت کنید که، u لزوماً **پیوسته** است. (فرض کنید چنین نباشد، و نشان دهید که، در این‌صورت، می‌توان با استقراء دنباله‌ای مانند (x_n) از نقاط فضای E که برای هر $n \geq 1$ ، $\|x_n\| = 1$ ، و یک دنباله اورتونرمال (e_n) تعریف کرد، به‌طوری که : (۱) عنصر x_n بر $u(e_1)$ ، ... ، $u(e_{n-1})$ عمود باشد، (۲) اگر y_n افکنش عمودی عنصر $u(x_n)$ به روی زیرفضای V_n باشد، که بر e_1 ، ... ، e_{n-1} عمود است ، آنگاه $\|y_n\| \geq 2n^3$ و $\|y_n\| \geq 2n^2 |(u(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{k^2}) \mid e_n)|$ ، (۳) $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. سپس، نقطه $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/n^2$ را در E مورد بررسی قرار داده، و با نشان دادن اینکه برای هر عدد طبیعی n ، $|(u(x) \mid e_n)| \geq n$ تناقضی به‌دست آورید. برای این کار، x را به صورت $x'_n + (x_n/n^2) + x''_n$ تجزیه کنید، که در آن $x'_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2$ و $x''_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k/k^2$ و همه جا از اتحاد $(u(y) \mid z) = (y \mid u(z))$ استفاده کنید (روش کوهان لغزنده (لغزان[1])). مقایسه کنید با مسأله ۳(c) و با (۷. ۱۶. ۱۲).)

۵ . فرض کنیم E یک فضای پیش هیلبرتی مختلط باشد. اگر U ، V دو عملگر هرمیتی روی E باشند، می‌نویسیم $U \geq V$ اگر عملگر هرمیتی $U - V$ مثبت باشد، یعنی، برای هر $x \in E$ داشته باشیم $(Ux \mid x) \geq (Vx \mid x)$.

(a) فرض کنیم E یک فضای **هیلبرتی** باشد، و عددی مانند $m > 0$ موجود باشد، به طوری‌که $U \geq m . 1_E$. نشان دهید که ،

---

1 . Method of the gliding hump = Метод скользящего горба

متأسفانه مترجم در واژه نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، چاپ دوم ۱۳۷۶ ، به عنوان یکی از معتبرترین واژه‌نامه‌های ریاضی چاپ شده در کشورمان، معادلی فارسی برای اصطلاح فوق نیافت.

U یک هومیوموفیسم خطی از E به روی E است. (ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که، برای هر عنصر $x \in \mathrm{E}$ نامساوی $\| \mathrm{U}x \| \geq m \| x \|$ برقرار است ، و بنابراین U یک هومیومورفیسم از E بروی زیرفضای بسته‌ای مانند M از E است (مسأله ۴ را ببینید)، سپس، ثابت کنید که، اگر $x \in \mathrm{E}$ بر M عمود باشد، آنگاه $x = 0$).

(b) فرض کنیم F زیرفضایی از فضای پیش هیلبرتی E تعریف شده در مسأله ۱ باشد، که از تحدید همه **چندجمله‌ای‌ها** با ضرایب مختلط روی $[0 , 1]$ تشکیل شده، و فرض کنیم U عملگری باشد که به هر چند جمله‌ای $x \in \mathrm{F}$ چندجمله‌ای $(1 + t)\, x(t)$ نسبت می‌دهد. نشان دهید که، U یک عملگر هرمیتی پیوسته روی F است، به‌طوری‌که $\mathrm{U} \geq 1_{\mathrm{E}}$ ، اما، $\mathrm{U(F)}$ در F چگال است و متمایز از F است.

۶ . (a) اگر U یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای پیش هیلبرتی مختلط E باشد، نشان دهید که، برای هر $x \in \mathrm{E}$ ،

$$\| \mathrm{U}x \|^4 \leq (\mathrm{U}x \mid x)(\mathrm{U}^2 x \mid \mathrm{U}x)$$

(فرم هرمیتی مثبت $(x , y) \to (\mathrm{U}x \mid y)$ را مورد بررسی قرار داده و از (۱. ۲. ۶) استفاده کنید).

(b) فرض کنیم ، علاوه بر این ، U پیوسته باشد (مقایسه کنید با مسائل (c) ۳ و ۴) . از (a) نتیجه بگیرید که $\|\mathrm{U}\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} (\mathrm{U}x \mid x)$.

۷ . فرض کنیم G ، F دو فضای هیلبرت مختلط جدایی پذیر، (a_n) (به ترتیب (b_n)) $(n \geq 1)$ یک پایه هیلبرتی برای F (به ترتیب G) ، و L مجموع هیلبرتی (بخش ۴ . ۶ را ببینید) F و G باشد، و فرض کنیم v عملگری پیوسته روی L باشد که به‌صورت $v(a_n) = 0$ ، $v(b_n) = a_n / n$ تعریف شده است، و $\mathrm{E} = v(\mathrm{G}) + v^*(v(\mathrm{G}))$ ، و u تحدید v به E باشد. نشان دهید که، u عملگری فشرده و دارای ادجونیت است، اما، u^* فشرده نیست. (ملاحظه کنید که $v(\mathrm{G})$ در F چگال است، اما، در F بسته نیست . نشان دهید که ، اگر (x_n) دنباله‌ای کراندار از نقاط $v(\mathrm{G})$ باشد، که به نقطه‌ای از F ، اما، نه از $v(\mathrm{G})$ ، همگرا است، آنگاه، دنباله $(u^*(x_n))$ به نقطه‌ای از L که در E نیست، همگرا است، از این حقیقت استفاده کنید که، تحدید v^* به F یک به یک است.)

۸ . با نمادها و فرض‌های بیان شده در (۷. ۵ . ۱۱) ، فرض کنیم (λ_n) دنباله‌ای نزولی از اعداد اکیداً مثبت باشد، به‌طوری‌که برای هر k ، تعداد اندیس‌های n که $\lambda_n = \mu_k$ است، برابر $\dim(\mathrm{E}(\mu_k))$ باشد، و فرض کنیم (a_n) سیستمی اورتونرمال در E باشد، به طوری که، برای اندیس‌های n که برای آنها $\lambda_n = \mu_k$ است، عناصر a_n تشکیل پایه‌ای برای زیرفضای $\mathrm{E}(\mu_k)$ بدهند. در این صورت، گوییم (λ_n) یک **دنباله تمام (کامل ـ پر ـ تام)**[1] از مقادیر ویژه اکیداً مثبت عملگر u است.

(a) نشان دهید که، λ_n مقدار ماکسیمم $(u(x) \mid x)$ است، وقتی x در زیرمجموعه‌ای از E تغییر کند، که با روابط $\|x\| = 1$ و $(x \mid a_k) = 0$ برای $1 \leq k \leq n-1$ تعریف شده است. به‌علاوه، این ماکسیم به ازاء $x = a_n$ کسب می‌شود (از (d) ۷. ۵ . ۱۱ استفاده کنید).

(b) فرض کنیم z_1 ، ... ، z_{n-1} بردارهای دلخواهی در E باشند، و کوچکترین کران بالای $(u(x) \mid x)$ وقتی x در زیر مجموعه‌ای از E که با روابط $\|x\| = 1$ ، $(x \mid z_k) = 0$ برای $1 \leq k \leq n-1$ تعریف شده است، تغییر می‌کند، به $\rho_u(z_1 , \ldots , z_{n-1})$

---

1 . Full sequence = Полная последовательность

متأسفانه، مترجم در واژه نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، چاپ دوم ۱۳۷۶، برای واژه انگلیسی Full sequence معادل فارسی نیافت و از بین معادل‌های فارسی واژه انگلیسی Full (پر ، کامل، تمام، تام و ...) به علت این که از واژه‌های فارسی «کامل» و «تام» در موارد دیگری استفاده شده بود، در اینجا ، با اینکه چندان مناسب نیز به نظر نمی‌رسید، تا انتخاب واژه‌ای مناسب‌تر، از واژه «تمام» استفاده شد. مترجم.

نشان می‌دهیم. ثابت کنید که $\lambda_n = \rho_u(a_1, \dots, a_{n-1}) \le \rho_u(z_1, \dots, z_{n-1})$ («اصل مینیماکس[1]» x را در فضای تولید شده به‌وسیله عناصر a_1، ...، a_n که در روابط $(x \mid z_k) = 0$ برای $1 \le k \le n-1$ صدق می‌کند، بگیرید).

(c) فرض کنیم u'، u'' دو عملگر فشرده خود الحاق باشند، و $u = u' + u''$ و فرض کنیم (λ'_n)، (λ''_n) به ترتیب دنباله‌هایی تمام (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه اکیداً مثبت u'، u''، و (a'_n)، (a''_n) سیستم‌های اورتونرمال متناظر با آنها باشند. نشان دهید که، اگر λ'_q و λ''_q و λ_{p+q-1} تعریف شده باشند، آنگاه $\lambda_{p+q-1} \le \lambda'_q + \lambda''_q$ ($\rho_u(a'_1, \dots, a'_{p-1}, a''_1, \dots, a''_{q-1})$ را مورد بررسی قرار دهید.) اگر دنباله (λ''_n) متناهی و دارای N عنصر باشد، و اگر λ'_p و λ_{p+N} تعریف شده باشند، آنگاه $\lambda_{p+N} \le \lambda'_p$ (با همان روش؛ خاطر نشان می‌کنیم که، اگر برای $1 \le j \le N$، $(x \mid a''_j) = 0$، آنگاه $(u''(x) \mid x) \le 0$).

(d) با فرضیاتی مشابه با آنچه که در (c) بیان شد، نشان دهید که، اگر λ'_p و λ_p تعریف شده باشند، آنگاه $|\lambda_p - \lambda'_p| \le \| u'' \|$ (از رابطه $\lambda_p = \rho_u(a_1, \dots, a_{p-1})$ استفاده کنید). علاوه براین، اگر $u'' \ge 0$ (به ترتیب $u'' \le 0$)، آنگاه $\lambda_p \ge \lambda'_p$ (به ترتیب $\lambda_p \le \lambda'_p$) (با همان روش).

(e) وقتی E دارای بعد متناهی باشد، نتایج (b)، (c) و (d) را برای فرم‌های هرمیتی روی $E \times E$ بیان کنید (مسأله ۳ را ببینید). آنها را در مسأله زیر مورد استفاده قرار دهید: فرض کنیم f_i $(1 \le i \le n)$ توابعی رگله روی فاصله فشرده $I = [a, b]$ باشند، و $I' = [c, d]$ فاصله‌ای در I باشد، و فرض کنیم $\Delta = \det(\int_a^b f_i \bar{f}_j \, dt)$، $\Delta' = \det(\int_c^d f_i \bar{f}_j \, dt)$ دترمینان‌های گرام متناظر با I و I' باشند. با استفاده از بیان دترمینان‌های گرام به عنوان حاصل‌ضرب‌های مقادیر ویژه، نشان دهید که $\Delta' \le \Delta$.

۹. (a) فرض کنیم u یک عملگر فشرده خود الحاق روی فضای هیلبرت مختلط E، H زیرفضایی بسته از E، و p تصویر عمودی E بروی H باشد (بخش ۶.۳ را ببینید). نشان دهید که، v تحدید $p \circ u$ (یا $p \circ u \circ p$) به H یک عملگر خود الحاق فشرده است و برای $y \in H$، $(v(y) \mid y) = (u(y) \mid y)$. (از رابطه $p^* = p$ استفاده کنید). فرض کنیم (λ_n)، (μ_n) به ترتیب دنباله‌هایی تمام (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه اکیداً مثبت عملگرهای u، v باشند. نشان دهید که، اگر λ_n و μ_n تعریف شده باشند، آنگاه $\mu_n \le \lambda_n$، (از مسأله ۸ (b) استفاده کنید.)

(b) علاوه بر این، فرض کنیم u عملگری مثبت باشد. نشان دهید که، برای هر دنباله متناهی $(x_k)_{1 \le k \le n}$ از نقاط E، $\det(u(x_i) \mid x_j) \le \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det(x_i \mid x_j)$ (از (a) برای H زیرفضای تولید شده از x_1، ...، x_n استفاده کنید).

۱۰. (a) فرض کنیم u یک عملگر هرمیتی روی فضای پیش هیلبرتی مختلط E باشد. نشان دهید که، برای هر عدد صحیح $n > 0$، و هر $x \in E$، $\| u^n(x) \|^2 \le \| u^{n-1}(x) \| . \| u^{n+1}(x) \|$ (از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده کنید).

(b) فرض کنیم E یک فضای هیلبرت، و u یک عملگر فشرده خود الحاق باشد. اگر $u(x) \ne 0$، نشان دهید که، برای هر عدد صحیح $n > 0$، $u^n(x) \ne 0$، و دنباله اعداد مثبت $\alpha_n = \| u^{n+1}(x) \| / \| u^n(x) \|$ صعودی[2] است، و به سمت حدی میل می‌کند، که برابر قدرمطلق یکی از مقادیر ویژه u است. این مقدار ویژه را در جملات تجزیه کانونیک x

---

1 . Maximinimal principle = Минимаксный принцип

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب، برخلاف چاپ دوم متن انگلیسی آن، به جای «صعودی» نوشته شده است «نزولی» که باید آن را اشتباه چاپی به‌حساب آورد، زیرا، طبق قسمت (a)، از نامساوی $\| u^n(x) \|^2 \le \| u^{n-1}(x) \| . \| u^{n+1}(x) \|$ نتیجه می‌شود $\alpha_{n-1} \le \alpha_n$ و با این رابطه صعودی بودن دنباله (α_n) ثابت می‌شود. مترجم.

مشخص کنید. چه موقع دنباله بردارهای $u^n(x) / \| u^n(x) \|$ در E دارای حد است (از (۷ . ۵ . ۱۱) استفاده کنید.)

۱۱ . فرض کنیم u یک عملگر فشرده خود الحاق در فضای هیلبرتی مختلط E ، و f تابعی مختلط باشد، که روی $\mathrm{sp}(u)$ معین و پیوسته است. نشان دهید که، عملگر یکتای پیوسته‌ای مانند v موجود است، به‌طوری که (با نمادهای (۷ . ۵ . ۱۱)) ، تحدید v به $\mathrm{E}(\mu_k)$ (به ترتیب به $\mathrm{E}(\nu_k)$ ، به $\mathrm{E}(0)$) نگاشت تجانس $y \to f(\mu_k)y$ (به ترتیب $y \to f(\nu_k)y$ ، $y \to 0$) است. این عملگر با نماد $f(u)$ نشان داده می‌شود. داریم $(f(u))^* = \overline{f}(u)$. اگر g دومین تابع پیوسته روی $\mathrm{sp}(u)$ ، و $h = f + g$ (به ترتیب $h = fg$) ، آنگاه $h(u) = f(u) + g(u)$ (به ترتیب $h(u) = f(u)g(u)$). نشان دهید که، برای اینکه عملگر $f(u)$ خود الحاق (به ترتیب مثبت و خود الحاق) باشد، لازم و کافی است که $f(\xi)$ روی $\mathrm{sp}(u)$ حقیقی باشد (به ترتیب روی $\mathrm{sp}(u)$ در نامساوی $f(\xi) \geq 0$ صدق کند). برای اینکه عملگر $f(u)$ فشرده باشد، لازم و کافی است که $f(0) = 0$.

۱۲ . فرض کنیم u یک عملگر هرمیتی فشرده مثبت روی فضای هیلبرتی مختلط E باشد. نشان دهید که، یک عملگر یکتای فشرده هرمیتی مثبت v روی E موجود است، به‌طوری که $v^2 = u$. عملگر v را ریشه دوم عملگر u می‌نامند.

۱۳ . فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی جدایی پذیر مختلط، $(e_n)_{n\geq 1}$ یک پایه هیلبرتی E ، و u یک عملگر فشرده روی E باشد، که با روابط $u(\mathrm{e}_1) = 0$ ، و برای $n > 1$ ، $u(\mathrm{e_n}) = \mathrm{e_{n-1}}/n$ تعریف شده است. نشان دهید که، هیچ عملگر پیوسته‌ای مانند v روی E وجود ندارد، به‌طوری که $v^2 = u$. (نخست ملاحظه کنید که، $\mathrm{H} = \overline{u^*(\mathrm{E})}$ یک ابر صفحه بسته عمود بر e_1 و واقع در $\mathrm{H}' = \overline{v^*(\mathrm{E})}$ است. چون H' عمود بر $x_1 = v(e_1)$ است، پس، لزوماً باید داشته باشیم $x_1 = 0$. سپس $x_2 = v(e_2)$ را بررسی کرده، ملاحظه کنید که $u(v(e_2)) = 0$ ، بنابراین، لازم است که $x_2 = \lambda e_1$، که در آن λ یک اسکالر است. اما، از این رابطه نتیجه می‌شود $x_2 = 0$، و بنابراین $u(e_2) = 0$ ، که یک تناقض است.)

۱۴ . فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط جدایی پذیر ، $(e_n)_{n\geq 0}$ یک پایه هیلبرتی، و u یک عملگر فشرده هرمیتی مثبت روی E باشد، که با روابط $u(e_0) = 0$، و برای $n \geq 1$ ، $u(e_n) = e_n / n$ تعریف شده باشد. نقطه $a = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n/n)$ متعلق به $u(\mathrm{E})$ نیست. فرض کنیم E_0 زیرفضایی باشد که در E چگال، و برابر مجموع مستقیم $u(\mathrm{E})$ و زیرفضای یک بعدی $\mathrm{C}(e_0 + a)$ باشد. نشان دهید که، v تحدید عملگر u به E_0 یک عملگر فشرده هرمیتی مثبت است که غیرتبهگون می‌باشد، اگرچه $\tilde{v} = u$ تمدید پیوسته آن روی E ، تبه‌گون است. علاوه بر این، نشان دهید که، در تجزیه کانونیک (۸ . ۵ . ۱۱) بردار $e_0 + a \in \mathrm{E}_0$ ، چنین نیست که، جمعوندها (عوامل جمع) همگی متعلق به E_0 هستند.

۱۵ . (a) فرض کنیم U عملگری فشرده روی فضای هیلبرت مختلط E باشد. ریشه‌های دوم (مسأله ۱۲ را ببینید) عملگرهای فشرده هرمیتی مثبت $\mathrm{U^*U}$ ، $\mathrm{UU^*}$ را به ترتیب به **R** و L نشان می‌دهیم. نشان دهید که، عملگر پیوسته یکتایی مانند V روی E موجود است، به‌طوری‌که تحدید آن به $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{R(E)}}$ یک ایزومتری به روی $\overline{\mathrm{U(E)}}$ است، که تحدید آن به F' مکمل عمودی F برابر صفر است ، و چنان است که $\mathrm{U = VR}$ (ملاحظه کنید که، برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $\| \mathrm{R}x \| = \| \mathrm{U}(x) \|$). ثابت کنید که $\mathrm{R = V^*U = RV^*V}$ و $\mathrm{L = VRV^*}$.

(b) فرض کنیم α_{n} دنباله‌ای تمام[1] (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه اکیداً مثبت عملگر **R** ، و (a_{n}) سیستم اورتونرمال متناظر با آن باشد (مسأله ۸ را ببینید). اگر $b_{\mathrm{n}} = \mathrm{V}a_{\mathrm{n}}$ ، نشان دهید که (b_{n}) یک سیستم اورتونرمال است، و برای هر $x \in \mathrm{E}$ ، $\mathrm{U}(x) = \sum_n \alpha_n (x \mid a_n) b_n$ ، که در آن سری سمت راست همگرا است (اگر $\mathrm{R_n}x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x \mid a_k) a_k$ ، با بهره‌گیری

---

1 . Full sequence = Полная последовательность

از اثبات (۷. ۵. ۱۱)، نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \|R - R_n\| = 0$ ، و از (a) استفاده کنید). از این مطلب، نتیجه بگیرید که، (α_n) نیز یک دنباله تمام (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه اکیداً مثبت عملگر L ، و (b_n) سیستمی اورتونرمال متناظر با آن است. دنباله (α_n) را نیز دنباله‌ای تمام (کامل ـ پر ـ تام) از **مقادیر ویژه** U می‌نامند.

(c) فرض کنیم (μ_n) دنباله مقادیر ویژه متمایز از صفر عملگر U باشد، که طبق ترتیب $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$ برای هر عدد طبیعی n که μ_{n+1} تعریف شده باشد، مرتب شده‌اند، و فرض کنیم d_n بعد $N(\mu_n)$ ، و (λ_n) دنباله‌ای باشد که برای هر عدد طبیعی n که λ_{n+1} تعریف شده است در شرایط $\lambda_1 = \mu_1$ ، $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ صدق نموده، و برای هر k که μ_k تعریف شده است، اندیس‌های n که برای آنها $\lambda_n = \mu_k$ فاصله‌ای از N شامل d_k عنصر تشکیل دهند. نشان دهید که، برای هر اندیس n که λ_n و α_n تعریف شده‌اند. $\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$. (فرض کنید V مجموع (مستقیم) زیرفضاهای $N(\mu_k)$ برای $1 \leq k \leq r$ باشد، و U_V تحدید U به V باشد. نشان دهید که، در V یک پایه هیلبرتی $(e_j)_{1 \leq j \leq m}$ موجود است، به‌طوری که، برای $k > j$ ، $(U(e_j) \mid e_k) = 0$. برای $n \leq m$ ، اگر W_n زیرفضایی از V باشد، که شامل e_1 ، ... ، e_n به عنوان یک پایه است، فرض کنیم U_n تحدید U به W_n و P_n تصویر عمودی E روی W_n باشد. نشان دهید که، $\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$ برابر دترمینان عملگر $U_n^* U_n = P_n U^* U P_n$ است، و از مسأله ۹ (a) استفاده کنید.)

(d) فرض کنیم T یک عملگر پیوسته دلخواه روی E، و (γ_n) (به ترتیب (δ_n)) دنباله‌ای تمام (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه عملگر UT (به ترتیب TU) باشد. نشان دهید که، برای همه مقادیر n که α_n ، γ_n و δ_n تعریف شده‌اند $\gamma_n \leq \alpha_n \|T\|$ (به ترتیب $\delta_n \leq \alpha_n \|T\|$) (اگر $S = TU$ ، ملاحظه کنید که $S^*S \leq \|T\|^2 U^* U$ و از مسأله ۸ (d) استفاده کنید).

(e) فرض کنیم T نیز یک عملگر فشرده باشد، و (β_n) دنباله‌ای تمام (کامل ـ پر ـ تام) از مقادیر ویژه آن باشد. نشان دهید که، برای همه مقادیر n که α_n ، β_n ، و γ_n تعریف شده‌اند، داریم $\prod_{j=1}^{n} \gamma_j \leq (\prod_{j=1}^{n} \alpha_j)(\prod_{j=1}^{n} \beta_j)$ از مسأله ۹(b) استفاده کنید).

۱۶. فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی مختلط، (a_n) یک دنباله از نقاط E، و (λ_n) یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. نشان دهید، که اگر سری $u(x) = \sum_n \lambda_n (x \mid a_n) a_n$ برای هر $x \in E$ در E همگرا باشد، u یک عملگر هرمیتی روی E خواهد بود. شرط همگرایی، اگر سری با جمله عمومی $\lambda_n \|a_n\|^2$ مطلقاً همگرا باشد، همیشه برقرار است. اگر، علاوه بر این، (a_n) یک سیستم اورتونرمال باشد، آنگاه شرط همگرایی وقتی (λ_n) دنباله‌ای کراندار باشد، برقرار است، وقتی λ_nها بزرگتر یا مساوی صفر بوده، و شرط همگرایی برقرار باشد، u یک عملگر هرمیتی مثبت خواهد بود.

۱۷. [۱] فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط، E_0 یک زیرفضای برداری چگال در E ، و $(x \mid y)$ و $\|x\|$ ضرب اسکالر و نرم روی E باشند، و فرض کنیم نرم دومی مانند $\|x\|_0$ روی E_0 داده شده باشد، که نسبت به آن E_0 یک فضای باناخ بوده، و چنان باشد، که برای $x \in E_0$ ، رابطه $\|x\|_0 . a \leq \|x\|$ ، که در آن a مقداری ثابت است، برقرار باشد (به عبارت دیگر، نگاشت همانی 1_{E_0} از E_0 با نرم $\|x\|_0$، به E_0 با نرم $\|x\|$ پیوسته باشد).

(a) فرض کنیم U یک عملگر هرمیتی روی E_0 باشد (که از قبل فرض نشده است که پیوسته است). نشان دهید که، اگر

---

۱. مسأله ۱۷ در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی، به شکلی متفاوت بیان شده است، و مسائل ۱۸و ۱۹و ۲۰ در آن وجود ندارند. به جز مسائل ۱۷ که ابتدا از چاپ دوم متن انگلیسی کتاب و سپس از چاپ اول متن روسی آن به زبان فارسی ترجمه شده است، بقیه مسائل فوق از چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ژان دیودونه ترجمه شده‌اند. مترجم.

U نسبت به نرم $\|x\|_0$ پیوسته باشد، نسبت به نرم $\|x\|$ نیز پیوسته خواهد بود. (اگر $\|U\|_0$ نرمی در $\mathscr{L}(E_0)$ باشد، وقتی E_0 با نرم $\|x\|_0$ داده شده باشد، نشان دهید که، برای هر عدد صحیح n، برای هر $x \in E_0$ داریم :

$$\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \left(\frac{a\|x\|_0}{\|x\|}\right)^{2^{-n}} \|U\|_0$$

از نامساوی $\|U^k x\|^2 \leq \|x\| . \|U^{2k}x\|$ استفاده کنید (مسأله (a) ۱۰را ببینید).

(b) فرض کنیم $\tilde{U}$ تمدید پیوسته U به E باشد، که یک عملگر هرمیتی روی E است. نشان دهید که، طیف $\tilde{U}$ مشمول طیف U است (وقتی U به عنوان یک اندومورفیسم از فضای باناخ E_0 نسبت به نرم $\|x\|_0$ مورد بررسی قرار گیرد). (اگر ζ مقداری منظم برای U باشد، ملاحظه کنید که $(U - \zeta . 1_{E_0})^{-1}$ را می‌توان به طور پیوسته به E گسترش داد، از (a) استفاده کنید.)

(c) هر مقدار ویژه λ از U حقیقی است؛ اگر $V = U - \zeta . 1_{E_0}$ ، و اگر $E(\lambda) = V^{-1}(0)$ دارای بعد متناهی در E_0 باشد، $V(E_0)$ در فضای پیش هیلبرتی E_0 مکمل $E(\lambda)$ و عمود بر $E(\lambda)$ است، و علاوه بر این، نسبت به نرم $\|x\|_0$ بسته است؛ از (۸ . ۱۶ . ۱۲) نتیجه می‌شود که، تحدید V به $V(E_0) = F(\lambda)$ یک هومیومورفیسم خطی از $F(\lambda)$ به $F(\lambda)$ نسبت به نرم $\|x\|_0$ است. نشان دهید که ، اگر $\tilde{V} = \tilde{U} - \lambda . 1_E$ ، آنگاه $\tilde{V}^{-1}(0) = E(\lambda)$ و در E ، $\tilde{V}(E) = \overline{F(\lambda)}$ (از (a) برای وارون تحدید V به $F(\lambda)$ استفاده کنید).

(d) از (c) نتیجه بگیرید که، اگر U (یا توانی از U) عملگری فشرده روی E_0 (نسبت به نرم $\|x\|_0$) باشد، آنگاه $\tilde{U}$ عملگری فشرده خواهد بود. (اگر (λ_n) دنباله‌ای از مقادیر ویژه U باشد، از (b) و (c) نتیجه بگیرید که، زیرفضای E ، عمود بر همه زیرفضاهای $E(\lambda_n)$ ، برابر هسته $\tilde{U}$ است.)

۱۷.[۱] فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط با بعد نامتناهی باشد. برای عملگر هرمیتی مثبت T روی فضای E شرایط زیر هم ارز هستند:

(۱) تصویر $T(E)$ در E چگال است ؛

(۲) $T^{-1}(0) = \{0\}$ ؛

(۳) برای هر $x \neq 0$ ، $(Tx \mid x) > 0$ (از نامساوی کوشی ـ شوارتز برای $(Tx \mid y)$ استفاده کنید).

(۴) عملگر T غیرتبهگون (ناتباهیده) است.

عملگر فشرده (کاملاً پیوسته) U را روی فضای E **کوازی هرمیتی** (شبه هرمیتی) نامیم، هر گاه عملگر هرمیتی مثبت ناتبهگونی مانند T موجود باشد، به طوری‌که $TU = U^*T$.

(a) نشان دهید که، اگر $U \neq 0$ ، آنگاه $TU^2 \neq 0$. (توجه کنید که $(TU^2x \mid x) = (TUx \mid Ux)$.)

در ادامه، ثابت کنید که، برای هر عدد صحیح $p > 0$ نامساوی $\|TU^{2p}\|^2 \leq \|TU^{2p-2}\| \, \|TU^{2p+2}\|$ برقرار است. (از نامساوی کوشی ــ شوارتز استفاده کنید). از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، اگر $U \neq 0$ باشد، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n TU^n$ نمی‌تواند برای هر $\zeta \in C$ همگرا باشد، و بنابراین، طیف عمگر U نمی‌تواند به 0 تبدیل شود.

(b) نشان دهید که، اگر λ مقدار ویژه‌ای از عملگر U باشد، آنگاه $T(N(\lambda , U)) \subset N(\lambda , U)$ و

$$T(E(\lambda , U)) \subset E(\lambda , U^*) .$$

---

۱. به دلیل برخی تفاوت‌ها، این مسأله از چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم .

از این شمول‌ها نتیجه بگیرید، که λ عددی حقیقی است و $k(\lambda , U) = 1$ ، بنابراین $N(\lambda , U) = E(\lambda , U)$. (از (۵ . ۵ . ۱۱) و از این حقیقت که از[1] $(Tx \mid x) = 0$ نتیجه می‌شود $x = 0$ استفاده کنید.)

در ادامه، نشان دهید که $T(E(\lambda , U)) = E(\lambda , U)$.

(c) فرض کنیم P افکنش عمودی فضای E بروی $F(\lambda , U)$ باشد. نشان دهید که ، PUP یک عملگر کوازی هرمیتی (شبه هرمیتی) کاملاً پیوسته (فشرده) روی $F(\lambda , U)$ است. (توجه کنید که، روی $F(\lambda , U)$، $PUP = UP$ و PTP یک عملگر غیرتبه‌گون مثبت هرمیتی روی $F(\lambda , U)$ است.)

(d) فرض کنیم (λ_n) دنباله مقادیر ویژه متمایز عملگر U باشد، به‌طوری‌که برای هر n ، $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ و فرض کنیم این دنباله نامتناهی باشد. نشان دهید که، G اشتراک زیرفضاهای بسته $F(\lambda_n , U)$ مساوی $U^{-1}(0)$ است. (توجه کنید که، اگر P افکنش عمودی فضای E بروی G باشد، آنگاه PUP یک عملگر کوازی هرمیتی فشرده روی G است، و از (a) استفاده کنید).

تصویر عمودی فضای E را بروی $F(\lambda_n , U)$ به P_n نشان می‌دهیم. نشان دهید که، E مجموع هیلبرتی G و زیر فضای $E(\lambda_n : P_n U^* P_n)$ است. از این مطلب نتیجه بگیرید که، مجموع G و زیرفضاهای $E(\lambda_n , U)$ (که به مفهوم جبری مستقیم است) در E چگال است. در ادامه، ثابت کنید که، اگر H مجموع زیرفضاهای $E(\lambda_n , V)$ باشد، آنگاه $G \cap \bar{H} = \{0\}$.

(توجه کنید که، زیرفضای فضای E که عمود بر $\bar{H}$ است، هسته $G' = (U^*)^{-1}(0)$ است، و $T(G) \subset G'$، و از این حقیقت استفاده کنید که، از $(Tx \mid x) = 0$ نتیجه می‌شود $x = 0$.)

(e) به عکس، فرض کنیم U عملگری کاملاً پیوسته (فشرده) روی E باشد، به‌طوری که :

(۱) همه مقادیر ویژه ، λ_n از عملگر U حقیقی باشند و برای هر n ، $k(\lambda_n , U) = 1$؛

(۲) اگر H مجموع زیرفضاهای $E(\lambda_n , U)$ باشد، آنگاه مجموع $G' = U^{-1}(0)$ و $\bar{H}$ مجموعی مستقیم و چگال در E باشد.

نشان دهید که در چنین حالتی U و U^* عملگرهای کاملاً پیوسته (فشرده) شبه هرمیتی هستند (و بنابراین، عملگر الحاقی یک عملگر شبیه هرمیتی، شبه هرمیتی است). (چون $G' = (U^*)^{-1}(0)$ زیر فضایی عمود بر $\bar{H}$ است،و H' مجموع زیر فضاهای $E(\lambda_n , U^*)$ چنان است که $\bar{H'}$ زیرفضایی عمود بر G است، پس U^* در شرطی مشابه U صدق می‌کند. T عملگر هرمیتی روی E را مورد بررسی قرار دهید، که به صورت $Tx = \sum_n \alpha_n (x \mid b_n) b_n$ تعریف شده است، که در آن $\alpha_n > 0$ ، و (b_n) یک زیرمجموعه کلی[2] (جامع ـ تام ـ کامل ـ تمام) از فضای E ((۴ . ۵) را ببینید) تشکیل می‌دهند و بردارهای ویژه عملگر U^* هستند؛ مقایسه کنید با مسأله ۱۶ .)

۱۸. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت مختلط با بعد نامتناهی باشد. برای یک عملگر هرمیتی **مثبت** T روی E ، شرایط زیر با هم معادلند : (۱) $T(E)$ در E چگال است ؛ (۲) $T^{-1}(0) = \{0\}$ ؛ (۳) برای هر $x \neq 0$ ، $(Tx \mid x) > 0$ (از نامساوی کوشی ـ شوارتز برای $(Tx \mid y)$ استفاده کنید) ، (۴) T **ناتبهگون** است. گوییم عملگر پیوسته U روی E **کوازی ـ هرمیتی** است، اگر یک عملگر **ناتبهگون** مثبت هرمیتی T موجود باشد، به طوری که $TU = U^*T$.

---

۱. احتمالاً به علت اشتباه چاپی $= 0$ در چاپ اول متن روسی کتاب جا افتاده است. مترجم.

2 . Total subset = Тотальное подмножество

همچون بسیاری از واژه‌های ریاضی دیگر، مترجم برگردانی از واژه انگلیسی Total subset در واژه‌نامه ریاضی و آمار، انجمن ریاضی ایران، چاپ دوم ۱۳۷۶ ، به عنوان یکی از معتبرترین واژه‌نامه‌های ریاضی چاپ شده در کشورمان نیافت، و چون واژه Total در فرهنگ‌های ریاضی به معانی « کلی ، کامل ، تمام ، تام ، جامع و ... » به کار گرفته شده است، تا انتخاب برگردانی مناسب برای این واژه ، مترجم ترجیح داد، در کنار واژه «زیرمجموعه» برخی از معانی واژه Total نیز بیاورد.

(a) نشان دهید که، هر مقدار ویژه U حقیقی است. اگر $V = U - \zeta . 1_{E_0}$ و $V^{-1}(0)$ با بعد متناهی باشد، آنگاه E برابر با مجموع مستقیم توپولوژیکی $V(E)$ و $V^{-1}(0)$ است، و λ یک قطب ساده $(U - \zeta . 1_{E_0})^{-1}$ می‌باشد. (فضای هیلبرتی حاصل شده از کامل سازی E نسبت به حاصل‌ضرب اسکالر $(Tx \mid y)$ را مورد بررسی قرار داده، و از مسأله ۱۷ استفاده کنید.)

(b) فرض کنیم (α_n) یک دنباله نامتناهی از اعداد حقیقی متمایز باشد، به‌طوری که $\sum_n \alpha_n^2 = 1$، و فرض کنیم E مجموع هیلبرتی دنباله‌ای مانند (E_n) از فضاهای هیلبرتی با بعد متناهی باشد، به‌طوری‌که $\dim(E_n) = n$ $(n \geq 1)$، و فرض کنیم $(e_{in})_{1 \leq i \leq n}$ یک پایه هیلبرتی (E_n)، و U_n عملگری روی E_n باشد، به‌طوری که برای $i \leq n-1$، $U_n e_{in} = \alpha_i e_{in} + e_{i+1,n}$ و $U_n e_{nn} = \alpha_n e_{nn}$. ثابت کنید که $\| U_n \| \leq 2$، اما، برای هر عدد مختلط ζ به طوری که $|\zeta| = 1$، $\|(U_n + \zeta . 1_{E_n})^{-1}\| \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$. عملگر پیوسته یکتای U روی E موجود است، به‌طوری که تحدید U به هر یک از E_nها برابر U_n است. نشان دهید که، U کوازی ـ هرمیتی است و α_nها مقادیر ویژه آن هستند، اما، طیف آن شامل دایره $|\zeta| = 1$ است.

(c) فرض کنیم U یک عملگر فشرده کوازی ـ هرمیتی باشد. ثابت کنید که، اگر $U \neq 0$ باشد، طیف U نمی‌تواند به نقطه 0 تقلیل یابد، مقادیر ویژه $\lambda_n \neq 0$ از U قطب‌های ساده $(U - \zeta . 1_{E_0})^{-1}$ هستند و $N(\lambda_n, U)) = E(\lambda_n, U)$ و $T(E(\lambda_n, U)) = E(\lambda_n, U^*)$. علاوه بر این، اشتراک زیرفضاهای $F(\lambda_n, U)$ برابر $U^{-1}(0)$ است، و اشتراک $U^{-1}(0)$ و $U(E)$ به 0 تقلیل می‌یابد (روش (a)).

(d) فرض کنیم فضای E جدایی پذیر، و U یک عملگر فشرده پیوسته روی E با خاصیت زیر باشد: دنباله‌ای مانند (λ_n) از مقادیر ویژه حقیقی U^* موجود است، به طوری‌که، مجموع $E(\lambda_n, U^*)$ در E چگال است. ثابت کنید U کوازی ـ هرمیتی است. (نشان دهید که، در E یک دنباله کلی[1] (جامع ـ تام ـ کامل ـ تمام) (b_n) موجود است، به‌طوری که $U^* b_n = \lambda_{k(n)} b_n$ (برای یک $k(n)$ مناسب)، و T را با $\alpha_n > 0$های مناسب، طوری تعریف کنید که $Tx = \sum_n \alpha_n (x \mid b_n) b_n$ ؛ مقایسه کنید با مسأله ۱۶).

(e) فرض کنیم E جدایی پذیر باشد، و U یک عملگر فشرده روی E باشد، که در شرایط زیر صدق می‌کند : (۱) همه مقادیر ویژه (λ_n) عملگر U حقیقی هستند و برای هر عدد طبیعی n، $k(\lambda_n, U) = 1$ ؛ (۲) اشتراک زیرفضاهای $F(\lambda_n, U)$ برابر $U^{-1}(0)$ است ؛ (۳) اشتراک $U^{-1}(0)$ و $U(E)$ برابر $\{0\}$ است. ثابت کنید که U یک عملگر کوازی ـ هرمیتی است (از (۵ . ۵ . ۱۱) و (d) استفاده کنید).

(f) فرض کنیم E جدایی پذیر باشد، و $(e_n)_{n \geq 0}$ یک پایه هیلبرتی برای E باشد. ثابت کنید که، عملگر U که برای همه $n \geq 0$ها با روابط :

$$Ue_{2n} = 0 \ , \ Ue_{2n+1} = \frac{1}{n+1}(e_{2n} + \frac{1}{n+1} e_{2n+1})$$

تعریف شده است، عملگری فشرده و کوازی ـ هرمیتی است، اما، مجموع $U^{-1}(0) + U(E)$ (که یک مجموع مستقیم جبری است) یک مجموع مستقیم توپولوژیک نیست (مقایسه کنید با مسأله ۲ بخش ۵ . ۶).

(g) با نمادهایی مشابه با آنچه در (f) بیان شده است، فرض کنیم U عملگری باشد که با روابط $Ue_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n / n$ و برای

1 .Total sequence = Тотальная последовательность

$n \geq 1$ ، $Ue_n = e_n / n^2$ تعریف شده است. با استفاده از (e) نشان دهید که U عملگری فشرده و کوازی ـ هرمیتی است، اما، مجموع $U(E) + \overset{-1}{U}(0)$ در E چگال نیست، نتیجه بگیرید که U^* **کوازی ـ هرمیتی نیست.**

۱۹. فرض کنیم E یک فضای هیلبرتی، و U یک عملگر پیوسته روی E باشد، و فرض کنیم عنصری مانند $a \neq 0$ در E موجود باشد، به طوری‌که: (۱) عناصر $a_n = U^n a$ برای $n \geq 0$ (با $U^0 a = a$) دنباله‌ای کلی[1] (جامع - تام - کامل - تمام) در E تشکیل دهند؛ (۲) تصویر E تحت نگاشت عملگر هرمیتی $V = U + U^*$ زیرفضای یک بعدی $D = Ka$ باشد.

فرض کنیم E_0 یک زیر فضای برداری بسته از E باشد که به 0 تقلیل نیافته است و چنان است که $U(E_0) \subset E_0$ ؛ و فرض کنیم U_0 تحدید U به E_0 ، و P_0 تصویر متعامد E بروی E_0 باشد.

(a) نشان دهید که E_0 نمی‌تواند بر D عمود باشد. (ملاحظه کنید که، برای هر y عمود بر D، $Uy = -U^*y$، و نتیجه بگیرید که، اگر E_0 بر D عمود بود، باید برای هر $y \in E_0$ تساوی $U^n y = (-1)^n U^{*n} y$ برقرار می‌شد. نشان دهید که، این مطلب با این فرض که $U^n a$ تشکیل یک دنباله کلی (جامع — تام — کامل - تمام) در E می‌دهد، در تناقض است.)

(b) ثابت کنید که، برای هر $x \in E_0$ ، $U_0^* x = P_0 U_0^* x = P_0 U^* x$.

(c) ثابت کنید که، تصویر E_0 تحت نگاشت $V_0 = U_0 + U_0^*$ به 0 تقلیل نمی‌یابد، در نتیجه، زیرفضای $D_0 = P_0(D)$ با بعد 1 است (از این حقیقت که $P_0 a \neq 0$، و از (b) استفاده کنید).

(d) ثابت کنید که، عناصر $U_0^n(P_0 a)$ تشکیل یک دنباله کلی (جامع ـ تام ـ کامل ـ تمام) در E_0 می‌دهند. (فرض کنید F_0 زیرفضای برداری بسته‌ای از E_0 باشد، که به‌وسیله این دنباله، و F'_0 مکمل عمودی F_0 در E_0 تشکیل شده باشد. ثابت کنید که، F'_0 بر D عمود است و $U_0(F'_0) = U(F'_0) \subset F'_0$ ؛ شبیه (a) نتیجه‌گیری کنید.)

۲۰. فرض کنیم E یک فضای هیلبرت جدایی پذیر، و U یک عملگر فشرده روی E باشد، که طیف آن از 0 و دنباله‌ای نامتناهی مانند (λ_n) از مقادیر ویژه ناصفر متمایز U تشکیل شده باشد به‌طوری‌که $k(\lambda_n) = 1$ و برای هر n ، $E(\lambda_n)$ دارای بعد واحد باشد. فرض کنیم، برای هر n ، a_n بردار ویژه‌ای از U متناظر با λ_n ، و b_n بردار ویژه‌ای از U^* متناظر با $\bar{\lambda}_n$ باشد ((۵ . ۵ . ۱۱) را ببینید)، a_n و b_n با چنان روشی انتخاب شده‌اند که $(a_n \mid b_n) = 1$.

(a) فرض کنیم A و B زیرفضاهای برداری بسته‌ای در E باشند، که به ترتیب به‌وسیله a_nها و b_nها تولید شده باشند، و B' و A' به ترتیب مکمل‌های عمودی B و A باشند. نشان دهید که B' برای U پایدار است، شامل $\overset{-1}{U}(0)$ است و تحدید U به B' دارای طیفی تقلیل یافته به 0 است.

(b) فرض کنیم سری با جمله عمومی $\|b_n\| . \|a_n\| . |\lambda_n|$ همگرا باشد. نشان دهید که، در این صورت ، برای هر $x \in A$ ، $Ux = \sum_n \lambda_n (x \mid b_n) a_n$ که در آن سری روی E همگرا است ؛ در نتیجه $\overset{-1}{U}(0)$ شامل $A \cap B'$ است.

(c) مثالی ارائه نمایید، که در آن $A \cap B'$ دارای بعد نامتناهی باشد، و $U(A \cap B) = A \cap B'$. روش زیر می‌تواند مفید واقع شود : فرض کنیم E مجموع هیلبرتی سه فضای هیلبرتی نامتناهی‌البعد F ، R ، S باشد، که به ترتیب دارای پایه‌های هیلبرتی (f_n) ، (r_n) ، و (s_n) هستند. دنباله (a_n) را در فضای $F + R$ طوری تعریف کنید که، f_n تصویر a_n در F و زیرفضای برداری بسته تولید شده به‌وسیله a_n برابر $F + R$ باشد. برای این کار، ملاحظه کنید که، در یک فضای هیلبرتی H با پایه هیلبرتی $(e_n)_{n \geq 0}$ ، زیر فضای برداری بسته تولید شده به‌وسیله بردارهای $e_0 + e_n$ برای $n \geq 1$ ، برابر H است، و برای $F + R$ مجموع هیلبرتی یک دنباله از فضاهای هیلبرتی که همگی برابر با H هستند بگیرید. U را چنان تعریف کنید

---

1 .Total sequence = Тотальная последовательность

که، برای $n \geq 1$ ، $Ua_n = \lambda_n a_n$ ، $Ur_n = \mu_n r_{n-1}$ ، $Ur_1 = 0$ ، $Us_n = \mu_n s_{n+1}$ ، که در آن دنباله‌های (λ_n) و (μ_n) به شکلی به حد کافی سریع به 0 همگرا هستند. (مقایسه کنید با مسأله ۳ بخش ۲. ۱۱). به این ترتیب، به‌دست می‌آوریم $B = F$ ، $A = F + R$ و $A \cap B' = R$.

۶. معادله انتگرال فردهلم

اکنون از تئوری قبلی برای مثال (۸ . ۲ . ۱۱) استفاده می‌کنیم. در اینجا، فضای پیش هیلبرتی G از توابع مختلط پیوسته روی $I = [a , b]$، با ضرب داخلی $(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$، و عملگر U به‌طوری‌که Uf برابر تابع :

$$t \to \int_a^b K(s , t) f(s) ds$$

باشد، مورد بررسی قرار داده، گوییم، عملگر U به وسیله **تابع هسته** K تعریف شده است.

(۱. ۶. ۱۱) عملگر فشرده U روی G دارای یک عملگر الحاقی فشرده است،که با تابع هسته K^* تعریف می‌شود، به طوری‌که $K^*(s , t) = \overline{K(t , s)}$.

ثابت می‌کنیم، برای $a \leq x \leq b$ اتحاد :

$$\int_a^x \overline{g(t)}\, dt \int_a^b K(s,t) f(s) ds = \int_a^b f(s) ds \overline{\int_a^x \overline{K(s, t)} g(t) dt} \qquad (۱. ۱. ۶. ۱۱)$$

برقرار است، که از آن به ازاء $x = b$ ، مطابق تعریف، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. دو طرف تساوی (۱. ۱. ۶. ۱۱) طبق (۳. ۷. ۸) و قانون لیبنیتز (۲. ۱۱. ۸) ، روی فاصله $[a , b]$ نسبت به x مشتق‌پذیر هستند، و به ازاء $x = a$ برابر صفر می‌شوند، و مشتق‌های آنها، طبق (۳. ۷. ۸) و (۲. ۱۱. ۸) در هر نقطه $x \in [a , b]$ مساوی هستند. بنابراین، آنها در هر نقطه از فاصله $[a , b]$ با هم برابرند ((۱. ۶. ۸) را ببینید).

ما فرمول‌بندی محک (۶ . ۵ . ۱۱) را برای این حالت خاص (**«آلترناتیوفرد هلم**[1]**»**) به خواننده واگذار می‌کنیم.

اگر $\overline{K(t , s)} = K(s , t)$ (در این حالت هسته K **هرمیتی** نامیده می‌شود)، آنگاه ، عملگر فشرده U **خود الحاق** خواهد بود. چون فضای پیش هیلبرتی G جدایی پذیر است ((۳. ۴ . ۷) یا (۴. ۴ . ۷) را ببینید)، پس می‌توان آن را به عنوان زیرفضایی چگال از فضای **هیلبرت** $\hat{G}$ مورد بررسی قرار داد ((۲. ۶ . ۶) را ببینید)، و بنابراین، می‌توان نسبت به عملگر U نتایجی که در (۸ . ۵ . ۱۱) بیان شده است، مورد استفاده

1. Fredholm alternative = Альтернатива Фредгольма

قرار داد. دنباله مقادیر ویژه (مثبت یا منفی[1]) عملگر U را به (λ_n) نشان می‌دهیم ، به‌طوری‌که، هر یک از آنها به اندازه **چندگانگی** آنها تکرار شده، و در رابطه $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ صدق کنند. در ادامه، سیستم اورتونرمالی در G به (φ_n) نشان می‌دهیم، که اگر مقادیر n ، که برای آنها $\lambda_n = \mu_k$ (به ترتیب $\lambda_n = \nu_k$) است، m ، $m+1$ ، ... ، $m+r$ باشند، آنگاه ، φ_m ، φ_{m+1} ، ... ، φ_{m+r} تشکیل یک پایه برای فضای ویژه $E(\mu_k)$ (به ترتیب $E(\nu_k)$) بدهند. بنابراین، برای هر n داریم $U(\varphi_n) = \lambda_n \varphi_n$. توابع φ_n را **توابع ویژه** هسته K می‌نامند.

(۲. ۶. ۱۱) اگر K یک هسته هرمیتی باشد، آنگاه سری $\sum_n \lambda_n^2$ همگرا است و

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds .$$

در واقع، اگر نامساوی بسل (۲. ۵. ۶) برای تابع $s \to K(s, t)$ و پایه اورتونرمال φ_n به کار گیریم، آنگاه ، برای هر عدد طبیعی N به‌دست می‌آوریم :

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_a^b K(s, t)\varphi_n(s) ds \right|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 ds$$

یعنی، برای هر $t \in I$ ،

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 ds \qquad (۱۱ .۶ .۲ .۱)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی فوق روی فاصله I ، و با استفاده از روابط $(\varphi_n | \varphi_n) = 1$ و (۱. ۱. ۶. ۱۱) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

تجزیه کانونیک[2] (متعارف) هر تابع $f \in G$ در $\bar{G}$ ((۷. ۵. ۱۱) را ببینید)، در اینجا می‌تواند به صورت $f = \sum_n c_n \varphi_n + f_0$ نوشته شود، که در آن $c_n = (f | \varphi_n) = \int_a^b f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt$. اما، شبیه آن‌چه که اکنون متذکر شدیم ، f_0 ممکن است متعلق به G نباشد. از طرف دیگر، سری $\sum_n c_n \varphi_n$ در **فضای هیلبرت** $\bar{G}$ همگرا است، اما، در حالت کلی، در فضای باناخ $E = \mathscr{C}_C(I)$ همگرا نیست (به عبارت دیگر، سری $\sum_n c_n \varphi_n(t)$ لازم نیست که حتماً در هر نقطه $t \in I$ همگرا باشد.) با وجود این:

---

۱. لازم به یادآوری است که ، ژان دیودونه، در این کتاب عدد حقیقی r را اکیداً مثبت نامیده است، هرگاه $r > 0$ ، و آن را مثبت نامیده است هرگاه $r \geq 0$ ، و به طریقی مشابه اعداد اکیداً منفی و اعداد منفی تعریف شده‌اند. مترجم.

2 . Canonical decomposition = Каноническое разложение

(۳. ۶. ۱۱) اگر هسته K هرمیتی، و برای تابعی مانند $g \in G$ ، $f = Ug$ (یعنی $f(t) = \int_a^b K(s,t)g(s)ds$)، آنگاه، سری $\sum_n c_n \varphi_n(t)$ به طور مطلق و یکنواخت روی فاصله I به $f(t)$ همگرا است.

ما در $\bar{G}$ تجزیه کانونیک $g = \sum_n d_n \varphi_n + g_0$ را داریم. چون U یک نگاشت خطی پیوسته از G به $E = \mathscr{C}_C(I)$ است (۸. ۲. ۱۱ را ببینید)، U را می‌توان به یک نگاشت خطی پیوسته از $\bar{G}$ به E گسترش داد، و چون $Ug_0 = 0$ ، بنابراین، داریم $f = Ug = \sum_n \lambda_n d_n \varphi_n$، که اکنون همگرایی در E است، یعنی، سری $\sum_n \lambda_n d_n \varphi_n(t)$ روی فاصله I به طور یکنواخت به $f(t)$ همگرا است. چون

$$c_n = (f \mid \varphi_n) = (Ug \mid \varphi_n) = (g \mid U\varphi_n) = \lambda_n (g \mid \varphi_n) = \lambda_n d_n$$

پس، قضیه (۳. ۶. ۱۱) به استثنای گزاره مربوط به همگرایی مطلق ثابت شده است. اما، برای هر عدد صحیح N ، طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز (برای فضاهای با بعد متناهی) ، داریم :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |c_n \varphi_n(t)|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |d_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2\right)$$

و سمت راست این نامساوی، طبق نامساوی بسل (۲. ۵. ۶) و نامساوی (۱. ۲. ۶. ۱۱) ، به‌وسیله عددی مستقل از N کراندار است (محدود شده است).

(۴. ۶. ۱۱) اگر هسته K هرمیتی، و $\lambda \neq 0$ در طیف U واقع نباشد، آنگاه f یکتا جواب معادله $Uf - \lambda f = g$ برای هر $g \in G$ ، برابر تابع :

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) + \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} d_n \varphi_n(t)$$

است، که در آن، سری سمت راست روی I به‌طور مطلق و یکنواخت همگرا است، و $d_n = (g \mid \varphi_n)$.

می‌دانیم که، چون $g \in G$ ، یکتا جواب معادله $Uf - \lambda f = g$ در $\bar{G}$، متعلق به G است ((۶. ۵. ۱۱) را ببینید) ، و طبق (۱۱. ۵. ۱۱) ، داریم $c_n = (f \mid \varphi_n) = 1/(\lambda_n - \lambda)$. به علت این‌که $g + \lambda f = Uf$ ، پس، می‌توانیم از قضیه (۳. ۶. ۱۱) استفاده نماییم، و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

(۵. ۶. ۱۱) تحت همان فرضیاتی که در (۴. ۶. ۱۱) بیان شد، یکتا جواب معادله $Uf - \lambda f = g$ را می‌توان به‌صورت :

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) + \int_a^b R(s,t,\lambda) g(s) ds$$

با[1]

$$R(s,t,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}K(s,t) + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}\overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(t)$$

نوشت، که در آن سری سمت راست برای هر $(s,t) \in I \times I$ به‌طور مطلق و یکنواخت همگرا است.

از اثبات قضیه (۳. ۶. ۱۱) نتیجه می‌شود، که $\sum_n \lambda_n d_n \varphi_n(t) = Ug(t)$، که در آن سری سمت چپ به‌طور مطلق و یکنواخت روی I همگرا است. از آنجا که[2]:

$$\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}$$

از فرمولی که در (۴. ۶. ۱۱) بیان شده است، به‌دست می‌آید[1]:

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda}g(t) - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b K(s,t)\,g(s)\,ds + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}\varphi_n(t)\int_a^b g(s)\,\overline{\varphi_n(s)}\,ds\,.$$

قضیه فوق ثابت خواهد شد، اگر همگرایی یکنواخت سری $\sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$ را ثابت کنیم. در واقع، $\delta > 0$یی موجود است، به طوری‌که، برای هر n ، $|\lambda_n - \lambda| \geq \delta$. بنابراین، طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز :

$$\sum_{n=P}^{q} \frac{\lambda_n^2}{|\lambda|.|\lambda_n-\lambda|}|\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)| \leq \frac{1}{\delta|\lambda|}\sum_{n=P}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)|$$

$$\leq \frac{1}{\delta|\lambda|}\left(\left(\sum_{n=P}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(s)|^2\right)\left(\sum_{n=P}^{q}\lambda_n^2|\varphi_n(t)|^2\right)\right)^{1/2}$$

و این ثابت می‌کند که، سری :

$$\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}\overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(t)$$

به‌طور مطلق و یکنواخت روی $I \times I$ همگرا است، سپس، نتیجه مطلوب از (۸. ۷. ۸) به‌دست می‌آید.

---

۱. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب به جای عبارت $\frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}$ نوشته شده است $\frac{\lambda_n^2}{\lambda^2(\lambda_n-\lambda)}$ ، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

۲. در چاپ دوم متن انگلیسی کتاب در طرف دوم تساوی $\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}$ به جای عبارت $\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}$ ، $\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n^2-\lambda)}$ نوشته شده است، که باید آن را اشتباه چاپی به حساب آورد، این اشتباه چاپی در چاپ اول متن روسی کتاب وجود ندارد. مترجم.

اکنون تابع $H(s, t)=\int_a^b K(u, s)K(t, u)du$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر $t \in I$ ثابت، می‌توان برای تابع $H(s, t)$ قضیه (۳ . ۶ . ۱۱) را مورد استفاده قرار داد. می‌بینیم که $H(s, t)=\sum_n \lambda_n^2 \varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$ ، که در آن سری سمت راست برای هر زوج $(s,t) \in I\times I$ همگرا است. به‌خصوص، برای هر $s \in I$ ، $H(s, s)=\sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$ ، و تابع $H(s, s)$ پیوسته است. طبق قضیه دینی (۲. ۲. ۷) ، سری فوق روی I **به‌طور یکنواخت** همگرا است، و این همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

(۶ . ۶ . ۱۱) اگر هسته K هرمیتی باشد، آنگاه، برای $s \in I$ ، به‌طور یکنواخت :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\varphi_k(s)}\, \varphi_k(t)|^2 dt = 0$$

با نمادهای اثبات قضیه (۵ . ۶ . ۱۱) ، داریم :

$$\lim_{n\to\infty} (H(s, s)-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \overline{\varphi_k(s)}\, \varphi_k(s))=0 \qquad (۱. ۶. ۶. ۱۱)$$

که در آن همگرایی برای $s \in I$ یکنواخت است. اگر انتگرالی که در گزاره (۶ . ۶ . ۱۱) مطرح شده است مورد ارزیابی قرار داده، از این حقیقت استفاده کنیم که φ_kها بردارهای ویژه U بوده ، و بر هم عمودند، آنگاه، به عبارت زیر علامت انتگرال در سمت چپ تساوی (۱. ۶. ۶. ۱۱) می‌رسیم، که از آن حکم نتیجه می‌شود.

در حالت کلی، سری $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)$ برای همه زوج‌های $(s, t) \in I\times I$ **همگرا نخواهد بود،** اما، نتیجه خاص زیر را خواهیم داشت:

(۷ . ۶ . ۱۱) (قضیه مرسر[1]) . فرض کنیم عملگر فشرده U تعریف شده به وسیله هسته هرمیتی $K(s, t)$ مثبت باشد. در این صورت ، داریم : $K(s, t)=\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)$ که در آن سری سمت راست روی $I\times I$ به طور مطلق و یکنواخت همگرا است.

یادآوری می‌کنیم که، در این‌جا، برای هر n ، داریم $\lambda_n > 0$ ((۹ . ۵ . ۱۱) را ببینید). ابتدا ثابت می‌کنیم که، برای هر $s \in I$ ، سری $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ همگرا است. برای هر نقطه $s \in I$ ، داریم $K(s, s) \geq 0$. در واقع، در غیر این صورت، یک همسایگی V از s در I موجود خواهد بود، به طوری‌که، برای $(s, t) \in V\times V$ ، $\mathscr{R}(K(s, t)) \leq -\delta < 0$. فرض کنیم φ نگاشتی پیوسته از I به

1 . Mercer’s theorem = Теорема Мерсера

$[0,1]$ باشد، که در نقطه s برابر 1 ، و روی $\mathrm{I-V}$ برابر 0 است ((۲. ۵ . ۴) را ببینید). در این صورت، طبق (۳. ۵ . ۸) ، داریم :

$$\int_a^b \overline{\varphi(t)}\, dt \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \varphi(s)\, ds \leq -\delta \left(\int_a^b \varphi(t) dt\right)^2 < 0$$

اما، سمت چپ برابر $(\mathrm{U}\varphi \mid \varphi)$ می‌باشد، و نامساوی فوق با این فرض که U عملگری مثبت است، در تناقض می‌باشد.

حال، متذکر می‌شویم که، برای هر تعداد متناهی از مقادیر ویژه $\lambda_k (1 \leq k \leq n)$ ، تابع :

$$\mathrm{K}_n(s, t) = \mathrm{K}(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\varphi_k(s)}\, \varphi_k(t)$$

هسته یک عملگر مثبت $\mathbf{U}_n$ است. در واقع، داریم :

$$(\mathrm{U}_n f \mid f) = (\mathrm{U} f \mid f) - \sum_{n=\mathrm{P}}^{\mathrm{q}} \lambda_k \left| (f \mid \varphi_k) \right|^2$$

اما، سمت راست این تساوی را به سادگی می توان به‌صورت $(\mathrm{U}g|g)$ با $g = f - \sum_{k=1}^{n} (f \mid \varphi_k)\, \varphi_k$ نوشت، و بنابراین، طبق فرض، مثبت است. از اینکه $\mathrm{K}_n(s, s) \geq 0$ ، براساس (۱ . ۳ . ۵) ، نتیجه می‌شود که ، سری $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ همگرا است، و برای هر $s \in \mathrm{I}$ ، داریم $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2 \leq \mathrm{K}(s, s)$.

طبق نامساوی کوشی ـ شوارتز، نتیجه می‌گیریم که ، برای هر $(s, t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}$،

$$\sum_{n=\mathrm{P}}^{\mathrm{q}} \lambda_n \left| \varphi_n(s)\, \varphi_n(t) \right| \leq \left(\left(\sum_{n=\mathrm{P}}^{\mathrm{q}} \lambda_n |\varphi_n(s)|^2\right) \left(\sum_{n=\mathrm{P}}^{\mathrm{q}} \lambda_n |\varphi_n(t)|^2\right) \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\mathrm{K}(t, t) \left(\sum_{n=\mathrm{P}}^{\mathrm{q}} \lambda_n |\varphi_n(s)|^2\right)\right)^{1/2} \qquad (۱۱ . ۶ . ۷ .۱)$$

بنابراین ، چون تابع $\mathrm{K}(t, t)$ روی I کراندار است ، برای هر $s \in \mathrm{I}$ ثابت ، سری $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ روی I **به‌طور یکنواخت** همگرا است. طبق (۶ . ۶ . ۱۱) ، (۸ . ۷ . ۸) ، و (۳. ۵ . ۸) نتیجه می گیریم که، برای هر $(s, t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}$ ، $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t) = \mathrm{K}(s, t)$، زیرا ، تابع :

$$t \to \left|\mathrm{K}(s, t) - \sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)\right|^2$$

روی I پیوسته است، و انتگرال آن روی I برابر 0 است. در حالت خاص، داریم :

$$\mathrm{K}(s, s) = \sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$$

به این ترتیب، طبق قضیه دینی (۲. ۲. ۷) ، سری $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ روی I **به‌طور یکنواخت همگرا** است، و نامساوی (۱. ۷. ۶ . ۱۱) ثابت می‌کند که، سری $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)$ روی $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$ به‌طور مطلق و یکنواخت

همگرا است، و با این مطلب اثبات به پایان می‌رسد.

تبصره‌ها

(۸ . ۶ . ۱۱) قضیه (۷. ۶ . ۱۱) به قوت خود باقی می‌ماند، وقتی که فقط فرض شود U دارای تعدادی **متناهی** مقدار ویژه $0 > \nu_k$ $(1 \le k \le m)$ است. در واقع، از ((c) ۷. ۵ . ۱۱) نتیجه می‌شود که، در این حالت، تحدید عملگر U به زیرفضای F'_{m+1} ، مکمل عمودی زیرفضای $E(\nu_1) + \ldots + E(\nu_m)$ در G ، **مثبت** است. با استفاده از قضیه (۷ . ۶ . ۱۱) نسبت به این عملگر، که به سادگی ثابت می‌شود، متناظر با تابع هسته $K(s,t) - \sum\limits_h \lambda_h \overline{\varphi_h(s)}\, \varphi_h(t)$ است، که در آن h همه اندیس‌هایی را (به تعداد متناهی) را طی می‌کند که $\lambda_h < 0$ ، فوراً نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(۹. ۶ . ۱۱) می‌توان عملگر U را در یک فضای پیش هیلبرتی بزرگتر مورد بررسی قرار داد. همانا F_+ فضای توابع رگله (بخش ۶ . ۷ را ببینید) که از **سمت راست پیوسته** هستند (یعنی، برای $a \le t < b$ ، $(f(t+) = f(t)$ و $f(b) = 0$. برای چنین توابعی از رابطه $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$ نتیجه می‌شود که، در همه نقاط فاصله $I = [a,b]$ ، به استثنای نقاط مجموعه‌ای شمارش پذیر مانند D، $f(t) = 0$ (طبق (۳. ۵ . ۸)) ، و هر نقطه t به‌طوری که $a \le t < b$ حد دنباله‌ای نزولی از نقاط $I - D$ است.

فضای G را می‌توان با تغییر احتمالی مقدار تابع پیوسته $f \in G$ در نقطه b ، با زیرفضایی از F_+ یکسان فرض نمود. به سادگی ثابت می‌شود که (با استفاده از (۱. ۶ . ۷)) ، G در F_+ **چگال** است. در این صورت، بحث بیان شده در (۸ . ۲ . ۱۱) نشان می‌دهد که ، U **نگاشتی فشرده از** F_+ **به فضای باناخ** $E = \mathscr{C}_C(I)$ است (و بیش از این، نگاشتی فشرده از فضای پیش هیلبرتی F_+ به خودش است). همه نتایجی که برای عملگر U روی G ثابت شد (با اثبات‌هایشان) ، وقتی G با F_+ تعویض شود، معتبر باقی می‌مانند.

مسائل

۱ . نتایج بخش ۶ . ۱۱ (به استثنای قضیه (۷. ۶ . ۱۱)) را برای حالتی که $K(s,t)$ در فرض‌های مسأله ۴ بخش ۸.۱۱ صدق می‌کند تعمیم دهید (از آن مسأله، و نیز از مسأله ۵ بخش ۲. ۱۱ استفاده کنید).

۲ . در فضای پیش هیلبرتی G از بخش (۶ . ۱۱) ، فرض کنیم (f_n) یک سیستم اورتونرمال تمام[1] (کامل – تام) باشد (بخش ۵ . ۶ را ببینید) ، و فرض کنیم:

---

1 . Total orthonormal system = Тотальная ортонормальная система

$$K_n(s,t)=\sum_{k=1}^{n} f_k(s)\overline{f_k(t)} \quad , \quad H_n(s)=\int_a^b |K_n(s,t)|\,dt$$

«n امین تابع لبگ» از سیستم اورتونرمال (f_n)). برای هرتابع $g \in G$ ، فرض کنیم $s_n(g)=\sum_{k=1}^{n}(g|f_k)f_k$. بنابراین، برای هر نقطه $x \in I$ ، $s_n(g)(x)=\int_a^b K_n(x,t)g(t)dt$.

(a) ثابت کنید که، اگر، برای هر $x_0 \in I$ ، دنباله $(H_n(x_0))$ **غیرکراندار** باشد، آنگاه، تابعی مانند $g \in G$ موجود است، به طوری‌که، دنباله $(s_n(g)(x_0))$ **غیرکراندار** است. (از تناقض استفاده نموده، نشان دهید که، در این حالت، می‌توان دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی مانند (n_k) و دنباله‌ای مانند (g_k) از توابع G تعریف کرد، که دارای خواص زیر باشد :

(۱) فرض کنیم $c_h=\sup_n |\int_a^b K_n(x_0,t)\,g_n(t)dt|$ (عددی که طبق فرض متناهی است)، $d_k=c_1+c_2+\cdots+c_{k-1}$ و $m_k=\int_a^b |K_{n_k}(x_0,t)|\,dt$، و $q_k=\sup(m_1,\ldots,m_{k-1})$ ؛ در این صورت $m_k \geq 2^{k+1}(q_k+1)(d_k+k)$.

(۲) فرض کنیم φ_k تابع پیوسته‌ای باشد که در شرایط $\varphi_k(a)=\varphi_k(b)=0$ ، روی I ، $|\varphi_k(t)| \leq 1$ ، و $|\int_a^b K_{n_k}(x_0,t)\,\varphi_k(t)dt| \geq \frac{m_k}{2}$ صدق می‌کند (مسأله ۸ بخش ۸.۷ را ببینید) ؛ در این صورت، $g_k=\varphi_k/2^k(q_k+1)$.

سپس، نشان دهید که، تابع $g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ روی I پیوسته است، که با فرض در تناقض است . برای ارزیابی انتگرال $\int_a^b K_{n_k}(x_0,t)\,g(t)dt$ تابع g را به صورت مجموع $\sum_{i<k} g_i+g_k+\sum_{i>k} g_i$ تجزیه نموده، کران پایین دومین انتگرال و کران بالای دو انتگرال دیگر را برآورد کنید (روش کوهان لغزان (لغزنده) «*method of the gliding hump*»[1].)

(b) نشان دهید که، برای سیستم مثلثاتی (۶.۵) روی فاصله $I=[-1,1]$ ، n امین تابع لبگ، ثابت h_n است، و $\lim_{n\to\infty} h_n=+\infty$.

(ملاحظه کنید که، برای $2 \leq k \leq n$، داریم $\int_{(k-1)/n}^{k/n} |\frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t}|\,dt \geq \frac{2}{k\pi}$).

نتیجه بگیرید که، برای هر $x_0 \in I$، تابع پیوسته‌ای مانند g روی I وجود دارد، به‌طوری که $g(-1)=g(1)=0$ و مجموع‌های جزئی $\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2}(\int_{-1}^{1} g(t)e^{-ik\pi t}dt)e^{ik\pi x}$ از « **سری فوریه** » تابع g به ازاء $x=x_0$ **غیرکراندار** است. (مقایسه کنید[2] با مسأله ۲ بخش ۱۳.۱۷).

۳ . فرض کنیم g یک تابع مختلط پیوسته روی فاصله $[-1,1]$ باشد، که در شرایط $g(-1)=g(1)=0$ صدق می‌کند. تابع g را به عنوان یک تابع پیوسته پریودیک با پریود 2 روی R گسترش می‌دهیم. فرض کنیم $K(s,t)$ تحدید تابع $g(s-t)$ روی $I \times I$ باشد. اگر $g(-t)=\overline{g(t)}$ ، آنگاه ، عملگر فشرده U که توسط هسته $K(s,t)$ تعریف شده است ، عملگری خودالحاق است. نشان دهید که، توابع $\varphi_n(t)=e^{\pi i t}/\sqrt{2}$ بردارهای ویژه عملگر U هستند، ضمناً ، مقدار ویژه متناظر با φ_n ، $a_n=\int_{-1}^{1} g(t)e^{-n\pi i t}dt$ « **ضریب فوریه**[3] » تابع g می‌باشد.

با استفاده از این نتیجه و مسأله ۲ ، مثالی از هسته هرمیتی K ارائه کنید، که برای آن سری با جمله عمومی $\lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(t)$

---

1 . Method of the gliding hump = Метод скользящего горба

۲. در چاپ اول متن روسی کتاب، به این مقایسه اشاره‌ای نشده است. مترجم.

3 . Fourier coefficient = Коэффициент фурье

دارای مجموع‌های جزیی غیرکراندار برای برخی از مقادیر s و t باشد، و مثالی از هسته هرمیتی مثبت K بزنید، که برای آن تابعی مانند $f \in G$ وجود داشته باشد، به طوری‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (f\,|\,\varphi_n)\,\varphi_n(t)$ برای برخی از مقادیر t دارای مجموع‌های جزئی غیرکراندار باشد.

۴ . فرض کنیم $I = [-2\pi\,,\,2\pi]$ و هسته $K(s\,,t)$ روی $I \times I$ به ازاء $0 \le s \le 2\pi$ ، $0 \le t \le 2\pi$ برابر مجموع سری مطلقاً همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin ns \sin nt$ ، و برای بقیه مقادیر $(s\,,t) \in I \times I$ برابر 0 باشد. مثالی از یک تابع $f \in G$ ارائه نمایید، به‌طوری که در تجزیه کانونیک f تابع f_0 متعلق به G نباشد. (توابع ویژه هسته K توابعی مانند φ_n هستند، به طوری که، برای $-2\pi \le t \le 0$ ، $\varphi_n(t) = 0$ و برای $0 \le t \le 2\pi$ ، $\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$. تابع f را به عنوان تابعی انتخاب کنید که، روی I پیوسته است و روی فاصله $[0\,,2\pi]$ برابر $2\pi - t$ است، و ثابت کنید که، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (f\,|\,\varphi_n)\,\varphi_n(t)$ در همه نقاط I همگرا است، اما، دارای مجموعی ناپیوسته است.)

۵ . با نمادهای کلی بخش ۶ . ۱۱ ، فرض کنیم K یک هسته هرمیتی تعریف شده روی $I \times I$ ، و U عملگر فشرده خود الحاق متناظر با آن در G باشد. نشان دهید که ، برای هر $h > 0$ ، عملگر U^h متناظر با هسته هرمیتی K_h است ، که به صورت استقرایی $K_1 = K$ و

$$K_h(s\,,t) = \int_a^b K_{h-1}(s,u)\,K(u\,,t)\,du$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید که، برای $h \ge 2$ ، $K_h(s\,,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^h\,\overline{\varphi_n(s)}\,\varphi_n(t)$ ، که در آن سری سمت راست روی $I \times I$ به‌طور مطلق و یکنواخت همگرا است. نشان دهید که، علاوه بر این، $A_h = \int_a^b ds \int_a^b |K_h(s,t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2h}$ و دنباله (A_{h+1}/A_h) صعودی، و دارای حدی برابر $|\lambda_1|^2$ است، که در آن λ_1 مقدار ویژه‌ای از هسته K است، که دارای ماکسیمم قدر مطلق است. (از نامساوی کوشی ـ شوارتز استفاده کنید).

۶ . با نمادهای بخش ۶ . ۱۱ ، فرض کنیم K یک هسته دلخواه پیوسته روی $I \times I$ ، و U عملگر فشرده متناظر با آن در G باشد، و فرض کنیم M یک زیرفضای با بعد متناهی از فضای G باشد، به‌طوری‌که $U(M) \subset M$ ، و $\{\psi_h\}_{1 \le h \le n}$ پایه‌ای اورتونرمال از فضای M باشد. قرار می‌دهیم $U\psi_k = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\,\psi_k$. نشان دهید که :

$$\sum_{h\,,\,k} |a_{hk}|^2 \le \int_a^b dt \int_a^b |K(s\,,t)|^2\,ds\,.$$

(برای هر $t \in I$ ، نامساوی بسل (۲. ۵. ۶) را برای تابع $s \to K(s\,,t)$ و پایه اورتونرمال (ψ_n) در G مورد استفاده قرار دهید.)

فرض کنیم (λ_n) دنباله‌ای باشد، که در مسأله ۱۵(c) بخش ۵ . ۱۱ (برای عملگر U) تعریف شده است. ثابت کنید که، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ همگرا است، و $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \le \int_a^b dt \int_a^b |K(s\,,t)|^2\,ds$. (با نمادهای مسأله ۱۵ (c) ، بخش ۵ . ۱۱ ، از نتیجه قبلی برای هر مجموعی از زیرفضاهای $N(\mu_k)$ استفاده کنید).

۷ . مثالی از یک هسته هرمیتی $K(s\,,t)$ ارائه نمایید، که اگر U عملگر فشرده متناظر با آن در G و V ریشه دوم U^2 باشد (مسأله ۱۲ ، بخش ۵ . ۱۱ را ببینید)، هسته‌ای هرمیتی وجود نداشته باشد، که متناظر با عملگر فشرده V باشد. (اگر چنین هسته‌ای وجود می‌داشت، آنگاه می‌توانستیم از قضیه مرسر (۷ . ۶ . ۱۱) نسبت به آن استفاده کنیم، در این‌صورت، برای K ، هسته اولین مثال در مسأله ۳ انتخاب کنید.)

۸ . [1] نشان دهید که، شرط لازم و کافی برای اینکه عملگر فشرده U که به‌وسیله هسته هرمیتی $K(s\,,\,t)$ تعریف شده است، مثبت باشد، این است که K (روی $I \times I$) یک **تابع از نوع مثبت** باشد (بخش ۳. ۶، مسأله ۴ را ببینید. برای اثبات لزوم شرط فوق، نامساوی :

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,dt \int_a^b K(s\,,t)f(s)\,ds \geq 0$$

را برای تابعی مانند f که در خارج همسایگی‌هایی به دلخواه کوچک از تعدادی متناهی از نقاط x_i از فاصله I $(1 \leq i \leq n)$ برابر 0 است، بنویسید. برای اثبات کافی بودن شرط، از روشی مشابه با آنچه که در مسأله ۱، بخش ۷ . ۸ بیان شده است، استفاده کنید) . از این خاصیت و از مسأله ۸ بخش ۳. ۶ و مسأله ۵ بخش ۶ . ۶، اثبات جدیدی از قضیه مرسر نتیجه بگیرید.

۹ . [2] (a) هسته $K(s\,,\,t)$ که روی فاصله $I \times I$ (با $I = [a\,,\,b]$) تعریف شده است و در فرض‌های مسأله ۴، بخش ۱۱. ۸ صدق می‌کند، یک هسته ولترا[3] می‌نامند، هرگاه ، برای هر $s > t$ ، $K(s\,,\,t) = 0$ فرض کنیم $M = \sup_{(s,t) \in I\times I} |K(s\,,t)|$.

ثابت کنید که، اگر U عملگری فشرده در G متناظر با K باشد (مسأله ۱ را ببینید) ، آنگاه ، عملگر U^n متناظر با هسته ولترای K_n است، که به ازاء $n > 1$ و $s \leq t$ در شرط $|K_n(s\,,t)| \leq M^n(t-s)^{n-1}/(n-1)!$ صدق می‌کند (از استقراء روی n استفاده کنید). از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، طیف U به 0 تقلیل می‌یابد، و برای هر $\zeta \in C$ ، $\|(1_E - \zeta U)^{-1} - 1_E\| \leq M\,|\zeta|\,e^{M(b-a)|\zeta|}$.

(b) فرض کنیم $a = 0$ ، $b = 1$ ، برای $s \leq t$ ، $K(s\,,\,t) = 1$ ، و برای $s > t$ ، $K(s\,,\,t) = 0$. نشان دهید که، برای این هسته، تابع $R\,(s\,,t\,,\,\lambda)$ در (۵ . ۶ . ۱۱) ، برای هر $s \leq t$ برابر $\lambda^{-2}\exp((t-s)/\lambda)$ ، و برای $s > t$ برابر 0 است. (از (۲. ۱۴. ۸) برای محاسبه U^n استفاده کنید).

۱۰ . فرض کنیم F_+ فضای پیش هیلبرتی تعریف شده در (۹. ۶ . ۱۱) برای فاصله $I = [0\,,1]$ ، و U عملگری باشد که در مسأله ۹(b) تعریف شده است، به‌طوری‌که، برای هر تابع $x \in F_+$ ، $y = Ux$ تابع $t \to \int_0^t x(s)\,ds$ است. فضای F_+ زیرفضایی چگال در یک فضای هیلبرت E است ((۲. ۶ . ۶) را ببینید). U را که می‌توان به یک عملگر فشرده روی E بنابه پیوستگی گسترش داد، دوباره به U نشان می‌دهیم ((۹ . ۲ . ۱۱) را ببینید). زیرفضای بسته E_0 از E که متمایز از 0 و E است و در شرط $U(E_0) \subset E_0$ صدق می‌کند، در این مسأله مشخص خواهد شد.

(a) با استفاده از (۱. ۴. ۷) ، نشان دهید که، عملگر U در شرط مسأله ۱۹ ، بخش ۵ . ۱۱ ، وقتی a برابر با تابع ثابت با مقدار 1 روی I باشد، صدق می‌کند. فرض کنیم $a_0 \in E_0$ چنان باشد ، که $P_0 a = s_0 a_0$ با $s_0 > 0$ و $\|a_0\| = 1$ ، پس $0 < s_0 < 1$. برای هر $x \in E_0$ ، $V_0 x = s_0^2\,(x\,|\,a_0)\,a_0$ (با نمادهای مسأله ۱۹ ، بخش ۵ . ۱۱) .

(b) برای هر $\zeta \in C$ به غیر از 0 ، فرض کنیم $f(\zeta) = 1 - s_0^2\,((U_0 - \zeta I)^{-1}\,a_0\,|\,a_0)$. ثابت کنید که، برای $\zeta \neq 0$ ، $f(-\zeta)\overline{f(\bar{\zeta})} = 1$. (برای محاسبه این حاصل‌ضرب، از رابطه :

$$V_0(U_0 + \zeta I)^{-1}a_0 = s_0^2\,((U_0 + \zeta I)^{-1}\,a_0|\,a_0)a_0$$

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی ، مسأله ۸ ، متفاوت از مسأله‌ای است که در اینجا نوشته شده است، و در واقع ، این مسأله قسمت (a) مسأله ۹ از چاپ دوم متن انگلیسی کتاب است ، و قسمت (b) و مسائل ۱۰ و ۱۱ در آن وجود ندارند. مترجم.

۲ . چنانکه اشاره شد، قسمت (a) این مسأله ، در مسأله ۸ چاپ اول متن روسی کتاب ژان دیودونه منعکس شده است ، و مسائل ۹ و ۱۰ و ۱۱ از چاپ دوم متن انگلیسی کتاب ترجمه شده‌اند، و در چاپ اول متن روسی آن وجود ندارند. مترجم.

3 . Volterra kernel = Ядро Вольтерра .

نتیجه شده از (a)، و تبدیل عبارت :

$$(U_0^* - \zeta I)^{-1} (U_0 + U_0^*)(U_0 + \zeta I)^{-1})$$

استفاده کنید). از این رابطه و از مسأله ۹(a) نتیجه بگیرید که، $f(\zeta^{-1})$ یک **تابع تام** است که **هیچ صفری در** C ندارد. با استفاده از ماژوراسیون مسأله ۹(a)، و بخش (۲. ۱۰)، مسأله ۸(c)، نتیجه بگیرید که $f(\zeta) = \exp(s_0^2\, \zeta)$.

(c) از (b) و از مسأله ۹(b) نتیجه بگیرید که، a_0 تابعی برابر با 0 برای $0 \le t < 1 - s_0^2$، و برابر با 1 برای $1 - s_0^2 \le t \le 1$ است، و E_0 بستار زیرفضای تولید شده به وسیله توابع F_+ در E است که روی فاصله $0 \le t < 1 - s_0^2$ برابر 0 هستند.

۱۱ . برای هر دو تابع حقیقی پیوسته f، g که روی $[0, 1]$ تعریف شده‌اند، نماد $f * g$ معرف تابعی مانند h است، که روی فاصله $[0, 1]$ با رابطه $h(x) = \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy$ تعریف شده است. ثابت کنید که، تابع $f * g$ پیوسته است و برابر با $g * f$ می‌باشد. اگر f_1، f_2، f_3 سه تابع پیوسته باشند، که روی فاصله $[0, 1]$ تعریف شده‌اند، ثابت کنید که $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$، که به صورت $f_1 * f_2 * f_3$ نوشته می‌شود. برای هر عدد صحیح $n > 0$ با استقرا تعریف می‌کنیم ($f^{*n} = f * (f^{*(n-1)})$، در این‌صورت $f^{*m} * f^{*n} = f^{*(m+n)}$.

فرض کنیم f روی $[0, 1]$ پیوسته باشد و $f(0) \neq 0$. ثابت کنید که، اگر برای تابعی پیوسته مانند g که روی $[0, 1]$ تعریف شده باشد، داشته باشیم $f * g = 0$، آنگاه $g = 0$ («قضیه تیتچمارش»). ملاحظه کنید که، با نمادهای مسأله ۱۰، $Uf = a * f$، و از مسأله ۱۰ نتیجه بگیرید که، s یی موجود است، به‌طوری‌که $0 \le s \le 1$ و بستار زیرفضای تولید شده توسط f و $U^n f$ برای $n \ge 1$ در E برابر بستار مجموعه توابع پیوسته‌ای نیز هست که روی فاصله $[0, s]$، برابر 0 هستند؛ از فرض $f(0) \neq 0$ نتیجه می‌شود $s = 0$. بالاخره، ملاحظه کنید که، $t \to g(1-t)$ متعلق به E است، و بر هر $U^n f$ برای $n \ge 0$ عمود است.

۷. مسأله استورم ــ لیوویل[1]

روی فاصله فشرده $I = [a, b]$ از R معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم :

$$y'' - q(x)\, y + \lambda\, y = f(x) \qquad (۱. ۷. ۱۱)$$

را که در آن $q(x)$ یک تابع **پیوسته حقیقی** روی I، و $f(x)$ یک تابع **مختلط رگله** روی I است، که به جز در تعدادی متناهی از نقاط داخلی I پیوسته است، و λ یک عدد مختلط است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از یک **جواب** معادله (۱. ۷. ۱۱) تابع مختلط پیوسته ـ مشتق‌پذیری مانند $y(x)$ است، به‌طوری‌که $y'(x)$ **پریمیتیو** یک تابع رگله با تنها تعدادی متناهی نقاط ناپیوستگی باشد، و رابطه:

$$y''(x) - q(x)\, y(x) + \lambda\, y(x) = f(x)$$

روی مکمل (نسبت به $\overset{0}{I}$) یک زیرمجموعه متناهی از $\overset{0}{I}$ برقرار باشد. **مسأله استورم ــ لیوویل** عبارت است از پیدا کردن جوابی که در دو **شرط مرزی** زیر نیز صدق می‌کند:

---

1 . The Sturm – Liouville problem = Задача Штурма – Лиувилля

$$h_1 y(a)+k_1 y'(a)=0 \quad , \quad h_1 y(b)+k_2 y'(b)=0 \tag{۱۱ .۷ .۲}$$

در روابط فوق h_1 ، k_1 ، h_2 و k_2 اعداد حقیقی هستند، و h_i ، $k_i\,(i=1\,,2)$ همزمان صفر نیستند.

در ادامه، تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل خطی (بخش ۸ .۱۰ را ببینید) را دانسته فرض خواهیم کرد. ابتدا معادله **همگن**[1] :

$$y''-q(x)y+\lambda y=0 \tag{۱۱ .۷ .۳}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که از معادله (۱. ۷. ۱۱) به ازاء $f(x)=0$ به دست آمده است. خاطر نشان می‌کنیم که، y'' روی I برای هر جواب معادله (۳. ۷. ۱۱) **پیوسته** است.

(۴ . ۷ . ۱۱) عددی مانند $r>0$ موجود است، به‌طوری‌که، اگر λ عددی حقیقی و کوچکتر یا مساوی $-r$ باشد، آنگاه، یکتا جواب معادله (۳ . ۷ . ۱۱) که در شرایط مرزی (۲ . ۷ . ۱۱) صدق می کند، برابر 0 است.

چون q ، λ و همه h_i و k_iها اعداد حقیقی هستند، واضح است که، اگر جوابی از معادله (۳. ۷. ۱۱) در شرایط (۲. ۷. ۱۱) صدق کند، قسمت‌ها حقیقی و موهومی آن نیز جواب‌هایی خواهند بود که در همان شرایط مرزی صدق خواهند کرد. بنابراین، می‌توانیم خود را به جواب‌های **حقیقی** محدود کنیم. ابتدا، فرض کنیم $k_1 k_2 \neq 0$ ، پس، می‌توانیم فرض کنیم $k_1=k_2=-1$. در این‌صورت، همچنین می‌توان فرض کرد $y(a)\neq 0$ ، چون ، در غیر این‌صورت، باید داشته باشیم $y'(a)=0$ ، و طبق قضیه وجود، قضیه ما ثابت شده خواهد بود. در صورت لزوم، با ضرب y در یک ثابت مناسب، می‌توان فرض کرد که $y(a)=1$ ، $y'(a)=h_1$. توجه کنید که، اگر قرار دهیم $z=\dfrac{y'}{y}$ ، برای $y(x)\neq 0$ ، خواهیم داشت :

$$z'=q(x)-\lambda-z^2 \tag{۱۱ .۷ .۴ .۱}$$

فرض کنیم $\mathrm{M}=\sup\limits_{x\in \mathrm{I}}|q(x)|$ ، و $\lambda\leq -\mathrm{M}-h_1^2-1$، در این‌صورت ، داریم $z'(a)=q(a)-\lambda-h_1^2\geq 1$،

و بنابراین، z در یک همسایگی a در I اکیداً صعودی است. ثابت می‌کنیم که، روی I ، $y(x)\neq 0$، و برای هر $x>a$ ، $z(x)>h_1$. ابتدا فرض کنیم که ، $y(x)$ روی فاصله I به صفر برسد، و x_1 کوچکترین جواب بزرگتر از a آن باشد. در این صورت، برای $a\leq x<x_1$ ، $y(x)>0$ ، و در نتیجه $y'(x_1)<0$ (این مقدار نمی‌تواند برابر 0 باشد، زیرا، در غیر این‌صورت، تابع y باید روی فاصله I متحد 0 باشد)، و از آنجا که، برای هر $x\in\mathrm{I}$ ، $q(x)-\lambda>0$ ، طبق (۳. ۷. ۱۱) ، برای $a\leq x<x_1$ ، $y''(x)>0$ ، بنابراین y' برای $a\leq x<x_1$ صعودی و در نتیجه روی این فاصله منفی است. به این ترتیب، وقتی $x<x_1$ به سمت x_1 میل می‌کند، $z(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند. چون تابع z برای $a\leq x<x_1$ پیوسته است، روی این

1 . Homogeneous equation = Однородное уравнение

فاصله باید یک کوچکترین $x_2 > a$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $z(x_2) = h_1$ و برای $a < x < x_2$ ، $h_1 < z(x)$. از این مطلب نتیجه می‌شود که $z'(x_2) \leq 0$. اما $z'(x_2) = q(x_2) - \lambda - h_1^2 \geq 1$ ، و ما تناقضی به‌دست می‌آوریم، که هر دو حکم ما را ثابت می‌کند. با روشی مشابه، ثابت می‌شود که، اگر داشته باشیم $\lambda \leq -M - h_2^2 - 1$، آنگاه، روی I ، $z(x) \leq h_2$. به این ترتیب، تابع z باید روی فاصله I در شرط $|z(x)| \leq c = Max(|h_1|, |h_2|)$ صدق کند، که در آن c وابسته به λ نیست. اکنون، از (۱. ۴. ۷. ۱۱) به دست می‌آوریم $z'(x) \geq -M - \lambda - c^2 = \mu$ ، در نتیجه، طبق قضیه مقدار میانگین $h_2 - h_1 = z(b) - z(a) \geq \mu(b-a)$. اگر λ را چنان انتخاب کنیم، که :

$$\lambda \leq -M - c^2 - \frac{|h_2 - h_1|}{b-a} - 1$$

آنگاه، به تناقض می‌رسیم، و این تناقض اثبات (۴ . ۷ . ۱۱) را وقتی $k_1 k_2 \neq 0$ باشد به پایان می‌رساند.

حال، فرض کنیم $k_1 = 0$ ، $k_2 \neq 0$ (بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $k_2 = -1$). در این حالت، با ضرب y در یک ثابت مناسب می‌توان فرض کرد $y(a) = 0$ و $y'(a) = 1$. در این صورت، وقتی $x > a$ به سمت a میل می‌کند، z به سمت $+\infty$ میل می‌کند. فرض کنیم $\lambda \leq -M - 2$. قبل از هر چیز، ثابت می‌کنیم که، روی I ، $y'(x) \geq 1$. از آنجا که طبق (۳. ۷. ۱۱) به ازاء $x > a$ در یک همسایگی a نامساوی $y''(x) > 0$ برقرار است، پس، در این همسایگی، برای $x > a$ خواهیم داشت $y'(x) > 1$. فرض کنیم برای یک $x > a$ ، $y'(x) = 1$ ، و x_1 کوچکترین جواب این معادله باشد. در این صورت، برای $a < x \leq x_1$ ، $y'(x) \geq 1$ ، بنابراین، در این فاصله $y(x) > 0$ ، و طبق (۳. ۷. ۱۱)، $y''(x) > 0$ ، اما، از طرف دیگر، باید داشته باشیم $y''(x_1) \leq 0$ ، که یک تناقض است. به این ترتیب، می‌بینیم که، تابع y روی فاصله I اکیداً صعودی است، و بنابراین، تابع z برای $a < x \leq b$ متناهی است.

در ادامه، ثابت می‌کنیم که $z(x) > (-M - \lambda - 1)^{1/2}$. در غیر این‌صورت، یک کوچکترین x_2 موجود است، به‌طوری $z(x_2) = (-M - \lambda - 1)^{1/2}$ ، و در این نقطه باید داشته باشیم $z'(x_2) \leq 0$. اما، از (۱. ۴. ۷. ۱۱) نتیجه می‌شود، که $z'(x_2) \geq -M - \lambda - z^2(x_2) \geq 1$ ، و دوباره به تناقض می‌رسیم. اکنون، اگر فرض کنیم، که λ چنان شده باشد که $h_2^2 < -M - \lambda - 1$ ، آنگاه، به این نتیجه می‌رسیم که، تساوی $z(b) = h_2$ غیر ممکن است. بنابراین، در این حالت نیز قضیه ثابت می‌شود.

حالت $k_2 = 0$ ، $k_1 \neq 0$ به طریقی مشابه بررسی می‌شود. بالاخره، اگر $k_1 = k_2 = 0$ باشد، آنگاه، دوباره می‌توانیم فرض کنیم $y(a) = 0$ ، $y'(a) = 1$ ، و بحث قبلی نشان می‌دهد که، y روی فاصله I ، وقتی که $\lambda \leq -M - 2$ باشد، اکیداً صعودی است. اما، این مطلب در تناقض با شرط $y(b) = 0$ است. قضیه به‌طور کامل ثابت شده است.

در صورت لزوم با تعویض $q(x)$ به $q(x)+r$ و λ به $\lambda+r$ ، از هم اکنون، می‌توانیم فرض کنیم، که به ازاء $\lambda \leq 0$ معادله (۳. ۷. ۱۱) دارای جوابی **غیربدیهی** که در هر دو شرط مرزی (۲. ۷. ۱۱) صدق کند، نیست.

از اتحاد زیر استفاده خواهیم کرد :

$$\int_a^b (u''v - v''u)\,dt = (u'(b)v(b) - u(b)\,v'(b)) - (u'(a)v(a) - u(a)v'(a))$$

که نتیجه فوری فرمول (۱. ۱۴. ۸) در حالت خاص $p=2$ می‌باشد (فرض شده است که u'' ، v'' توابعی رگله روی I هستند).

(۶. ۷. ۱۱) برای هر t که $a < t < b$ ، یک تابع حقیقی پیوسته $x \to \mathrm{K}_t(x)$ وجود دارد، که روی I تعریف شده است، و دارای خواص زیر می‌باشد :

(a) روی هر یک از فاصله‌های $a \leq x < t$ ، $t < x \leq b$ ، تابع K_t دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است و جوابی از معادله $y'' - q(x)y = 0$ است.

(b) K_t در شرایط مرزی (۲. ۷. ۱۱) صدق می‌کند.

(c) در نقطه $x=t$ ، $\mathrm{K}'_t(x)$ از سمت راست و از سمت چپ دارای حد می‌باشد ، و $\mathrm{K}'_t(t+) - \mathrm{K}'_t(t-) = -1$.

طبق تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل خطی، جواب $u_1 \neq 0$ (به ترتیب $u_2 \neq 0$) از معادله $y'' - q(x)y = 0$ موجود است ، که در شرط $h_1 u_1(a) + k_1 u'_1(a) = 0$ (به‌ترتیب $h_2 u_2(b) + k_2 u'_2(b) = 0$)صدق می‌کند، ضمناً u_1 و u_2 متناسب نیستند (در غیر این‌صورت، جوابی غیر بدیهی از معادله (۳. ۷. ۱۱) به ازاء $\lambda = 0$ پیدا خواهد شد، که در هر دو شرط مرزی معادله (۲. ۷. ۱۱) صدق می‌کند) بنابراین، هر جواب معادله $y'' - q(x)y = 0$ را می‌توان با روشی یکتا به فرم $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$ نوشت، که در آن c_1 ، c_2 ضرایب ثابت، و تابع $u_1(x)\,u'_2(x) - u_2(x)u'_1(x)$ ثابتی مانند $d \neq 0$ است (طبق (۱. ۱۴. ۸)) . اکنون فقط باید ثابت‌های c_1 ، c_2 را طوری انتخاب کنیم، که تابع K_t به ازاء $a \leq x \leq t$ برابر $c_1 u_1$ و برای $t \leq x \leq b$ برابر $c_2 u_2$ ، و در نقطه t معین و پیوسته باشد، و در شرط (c) صدق کند، که از آن روابط :

$$c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t) = 0$$

$$c_1 u'_1(x) - c_2 u'_2(x) = 1$$

حاصل می‌شود. بنابراین، به عنوان جواب مسأله ما، می‌توان $c_1 = -u_2(t)/d$ ، $c_2 = -u_1(t)/d$ انتخاب نمود.

گوییم (با بد استفاده کردن از زبان) K_t **جواب مقدماتی (اساسی**[1]**)** معادلـه $y'' - q(x)y = 0$ متنـاظر بـا تکینی t (مقایسه کنید با بخش XXIII) است، تابع $(t, x) \to K_t(x)$ را نیز به $K(t, x)$ نشان داده، آن را **تابع گرین**[2] متناظر با مسأله استورم ـ لیوویل مورد بررسی می‌نامند. این تابع فقط بـرای $a < t < b$ ، $a \leq x \leq b$ تعریف شده اسـت، و بـرای $x \leq t$ برابـر $-u_2(t)\,u_1(x)/d$، و بـرای $x \geq t$ برابـر $-u_1(t)\,u_2(x)\,/d$ می‌باشد، در نتیجه، **پیوسـته** اسـت، و عـلاوه بـر ایـن، مـی‌تـوان آن را بـرای $t = a$ و $t = b$ بـا قـرار دادن $K(a, x) = -u_1(a)u_2(x)\,/\,d$ و $K(b, x) = -u_2(b)u_1(x)\,/d$ به‌طور پیوسته ادامه داد. عـلاوه بـر این، **خاصیت تقارن** :

$$K(t, x) = K(x, t) \tag{۷. ۷. ۱۱}$$

فوراً از فرمول $K(t, x)$ نتیجه می‌شود.

(۸ . ۷ . ۱۱) برای اینکه تابع $y(x)$ جوابی از معادله $y'' - q(x)y = f(x)$ باشد، و در شرایط مرزی (۲. ۷ . ۱۱) صدق کند، لازم و کافی است که $y(x) = -\int_a^b K(t, x)f(t)dt$ (f یک تابع مختلط رگله روی I است، که روی همه I به استثنای تعدادی متناهی از نقاط $\mathring{I}$، پیوسته است).

(a) **کفایت**. چون :

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{d}\int_a^b u_2(t)f(t)dt + \frac{u_2(x)}{d}\int_a^x u_1(t)f(t)dt$$

پس، بررسی این که، تابع y در معادله دیفرانسیل (در نقاطی که f پیوسته است) و شرایط مرزی صدق می‌کند، به محاسبات ساده مشتق‌های y (و استفاده از قضیه (۳. ۷ . ۸)) تبدیل می‌شود.

(b) **لزوم**. از اتحاد (۵ . ۷ . ۱۱) در فاصله‌های $a \leq t \leq x$ و $x \leq t \leq b$ ، با $u(t) = y(t)$ و $v(t) = K_x(t)$ استفاده می‌کنیم. از خواص (۶ . ۷ . ۱۱) تابع گرین فوراً رابطه $y(x) = -\int_a^b K(t, x)f(t)dt$ نتیجه می‌شود.

از (۸ . ۷ . ۱۱) نتیجه می‌شود که، هر جواب مسأله **استورم ـ لیوویل** جوابی از معادله انتگرال فردهلم با **هسته هرمیتی** :

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(t, x)y(t)dt = g(x) \tag{۹. ۷. ۱۱}$$

است، که در آن :

$$g(x) = -\int_a^b K(t, x)f(t)dt$$

---

1 . Elementary solution = Элементарное (фундаментальное) решение
2 . Green function = Функция Грина

و برعکس. اعداد λ_n معکوس‌های مقادیر ویژه ناصفر عملگر U در فضای پیش هیلبرتی G (تعریف شده در (۸ . ۲ . ۱۱)) متناظر با هسته K، مقادیر ویژه مسأله استورم ـ لیوویل می‌نامند.

اکنون، می‌توانیم قضیه زیر را که مسأله استورم ـ لیوویل را در هر حالتی حل می‌کند، فرمول‌بندی کنیم :

(۱۰ . ۷ . ۱۱) برای هر تابع حقیقی پیوسته $q(x)$ روی فاصله فشرده $I=[a\,,b]$:

(a) مسأله استورم ـ لیوویل دارای یک دنباله نامتناهی اکیداً صعودی از مقادیر ویژه (λ_n) است، که اعدادی حقیقی هستند، $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$، و سری $\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2}$ همگرا است.

(b) برای هر مقدار ویژه λ_n ، مسأله استورم ـ لیوویل همگن دارای یک جواب حقیقی $\varphi_n(x)$ است، به طوری‌که $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx=1$ ، و هر جواب دیگر مضرب ثابتی از φ_n است.

(c) دنباله (φ_n) یک سیستم اورتونرمال کامل[1] (تام ـــ تمام) در فضای پیش هیلبرتی G است (نمادهای بخش ۶ . ۱۱ را ببینید).

(d) فرض کنیم w یک تابع مختلط پیوسته روی I باشد، که پریمیتیو یک تابع رگله w' است، به طوری که :

(i) تابع w' روی I به استثنای تعدادی متناهی از نقاط داخلی آن پیوسته باشد ؛

(ii) w' دارای مشتق پیوسته w'' روی هر فاصله‌ای باشد که w' پیوسته است ؛

(iii) w در شرایط مرزی (۲ . ۷ . ۱۱) صدق کند.

در این صورت، اگر $c_n=(w\mid\varphi_n)=\int_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,dt$ ، آنگاه $w(x)=\sum_n c_n\,\varphi_n(x)$، که در آن سری سمت راست به‌طور مطلق و یکنواخت همگرا است.

(e) اگر λ یکی از مقادیر ویژه λ_n نباشد، آنگاه، برای هر تابع رگله f، که روی I به جز تعدای متناهی از نقاط آن پیوسته است، مسأله استورم ـ لیوویل دارای جواب یکتای w است، که ضرایب $c_n=(w|\varphi_n)$ با فرمول $c_n=d_n/(\lambda-\lambda_n)$ داده می‌شوند، که در آن $d_n=\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt$.

(f) برای $\lambda=\lambda_n$ ، شرط لازم و کافی برای اینکه مسأله استورم ـ لیوویل دارای جواب باشد، این است که $\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt=0$. در این حالت، برای هر جواب w ، ضرایب $c_n=(w\mid\varphi_n)$ دلخواه هستند، و برای $m\neq n$ ، c_mها با همان فرمول قسمت (e) تعیین می‌شوند.

مسأله استورم ـ لیوویل همگن نمی‌تواند دو جواب مستقل خطی داشته باشد. زیرا، در غیر این‌صورت، دارای جوابی مانند y خواهد بود، که برای آن $y(a)$ ، $y'(a)$ اختیاری هستند، که ممکن نیست. این مطلب (b) را ثابت می‌کند.

---
1 . Total orthonormal system = Тотальная ортонормальная система

این حقیقت که، همه مقادیر ویژه λ_n حقیقی هستند، از (۷. ۷. ۱۱) و (۵. ۷. ۱۱) نتیجه می‌شود. علاوه بر این، از (۴. ۷. ۱۱) نتیجه می‌شود که، حداکثر تعدادی متناهی از λ_nها منفی هستند. طبق قضیه مرسر ((۷. ۶. ۱۱) و (۸. ۶. ۱۱))، برای تابع گرین داریم :

$$\mathrm{K}(t\,,\,x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\,\varphi_n(t)\varphi_n(x) \qquad (۱۱.۷.۱۰.۱)$$

سری سمت راست به‌طور مطلق و یکنواخت روی $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ همگرا است (فرض شده است که، 0 یکی از λ_nها نیست، و این کار کاملاً قانونی است).

خاطر نشان می‌کنیم که (d) از (۳. ۶. ۱۱) و (۸. ۷. ۱۱) نتیجه می‌شود اگر روی w ، w' این فرض اضافی گذاشته شود که آنها روی I **پیوسته** هستند. برای اثبات (d) در حالت کلی، فرض کنیم $t_i\,(1\le i\le m)$ نقاطی از I باشند، که در آنها w' دارای ناپیوستگی است، و فرض کنیم $\alpha_i = w'(t_i+) - w'(t_i-)$. در این صورت، تابع $v = w + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{K}_{t_i}$ در همه شرایط (d) صدق می‌کند، و علاوه بر این، طبق (۶. ۷. ۱۱)، دارای مشتقی پیوسته است. با استفاده از (۱. ۱۰. ۷. ۱۱) اثبات (d) را نتیجه می‌گیریم.

از این حقیقت که نگاشت همانی از $\mathrm{E} = \mathscr{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{I})$ به G پیوسته است، نتیجه می‌شود، برای تابع w که در شرایط (d) صدق می‌کند، می‌توان نوشت $w = \sum_n c_n\varphi_n(x)$ ، که در آن سری سمت راست در **فضای پیش هیلبرتی** G همگرا است. بنابراین، برای اثبات (c) ، کافی است نشان دهیم که، مجموعه P که از این گونه توابع w تشکیل شده است در G **چگال** است. حال، به منظور رسیدن به این هدف، برای هر تابع $u \in \mathrm{G}$ ، توابع پیوسته w_m که در آن $m>0$ یک عدد صحیح اکیداً مثبت است ، و روی فاصله :

$$[a+\frac{1}{m}\;,\;b-\frac{1}{m}]$$

برابر u و روی فاصله :

$$[a\,,\,a+\frac{1}{2m}] \quad (\text{به ترتیب } [b-\frac{1}{2m}\;,\;b])$$

برابر با یک تابع خطی $x \to \alpha x + \beta$ است، که در اولین (به ترتیب دومین) شرط مرزی (۲. ۷. ۱۱) صدق می‌کند، و روی هر یک از فواصل :

$$[a+\frac{1}{2m}\;,\;a+\frac{1}{m}]\;,\;[b-\frac{1}{m}\;,\;b-\frac{1}{2m}]$$

برابر با یک تابع خطی است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه، می‌توانیم فرض کنیم که، در نقاط a ، b مقدار w_m برابر 0 یا 1 است. در این صورت، واضح است که، روی هر یک از فواصل :

$$[a\;,\,a+\frac{1}{m}]\;,\;[b-\frac{1}{m}\;,\,b]$$

داریم $\| u \| + 1 \geq |u(x) - w_m(x)|$، و بنابراین، طبق قضیه مقدار میانگین $\| u - w_m \|_2$ به دلخواه کوچک است ؛ به علت اینکه w_m در همه شرایط (d) صدق می‌کند، ادعای ما ثابت می‌شود. چون، به این ترتیب، (c) ثابت شده است، واضح است که، دنباله کامل (تام – تمام)[1] (φ_n) باید نامتناهی باشد، و (با به کارگیری (۲. ۶. ۱۱)) ، (a) نیز کاملاً ثابت شده است. بالاخره ، (e) و (f) فوراً از (۱۱. ۵. ۱۱) نتیجه می‌شوند[2].

تبصره. می‌توان اطلاعات به مراتب دقیق‌تری از φ_n و λ_n به‌دست آورد، و به‌ویژه، می‌توان ثابت کرد که، λ_n / n^2 به سمت حدی متناهی میل می‌کند (مسائل ۳ و ۴ را ببینید).

---

1. Total sequence = Тотальная последовательность

۲. به علت تفاوتی جزئی که در بیان مطالب فوق در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی و چاپ دوم متن آن به زبان انگلیسی وجود داشت، مترجم ترجیح داد، مطالب فوق به‌طور جداگانه ابتدا از متن انگلیسی کتاب و سپس از متن روسی آن به زبان فارسی ترجمه شود.

در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی در رابطه با تابع u و نحوه به کارگیری آن چنین نوشته شده است:

بنابراین، برای اثبات (c) ، کافی است ثابت کنیم که، P مجموعه چنین توابع w در G چگال است. برای این هدف، برای تابع دلخواه تابع $u \in G$ ، تابع پیوسته w_m که در آن $m > 0$ یک عدد صحیح اکیداً مثبت است، و روی فاصله :

$$[a+\frac{1}{m}\ , b-\frac{1}{m}]$$

برابر u ، روی فواصل :

$$[a\ , a+\frac{1}{2m}] \text{ و } [b-\frac{1}{2m}\ , b]$$

برابر 0 ، روی هر یک از فاصله‌های :

$$[a+\frac{1}{2m}\ , a+\frac{1}{m}]\ , [b-\frac{1}{m}\ , b-\frac{1}{2m}]$$

خطی است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این صورت، واضح است که، روی فواصل :

$$[a\ , a+\frac{1}{m}] \text{ و } [b-\frac{1}{m}\ , b]$$

نامساوی $|u(x) - w_m(x)| \leq 2 \| u \|$ برقرار است، و در نتیجه، طبق قضیه میانگین، نرم $\| u - w_m \|_2$ به حد کافی کوچک است. علاوه بر این، تابع w_m در شرایط مرزی (۲. ۷. ۱۱) صدق می‌کند. حال، با استفاده از پیوستگی یکنواخت u ، تابع به‌طور قطعه‌ای خطی و روی I پیوسته v را طوری انتخاب می‌کنیم که روی فاصله‌های $[a\ , a+\frac{1}{m}]$ و $[b-\frac{1}{m}\ , b]$ برابر w_m و مدول اختلاف آن از تابع u روی فاصله $[a+\frac{1}{m}\ , b-\frac{1}{m}]$ به حد کافی کوچک باشد، در این صورت ، نرم $\| u - v \|_2$ به دلخواه کوچک خواهد بود، و تابع v در همه شرایط از جمله (d) صدق می‌کند، که این ادعای ما را ثابت می‌کند.

چون، به این ترتیب، (c) ثابت شده است، واضح است که، دنباله کامل (تام – تمام) (φ_n) باید نامتناهی باشد، و (با در نظر گرفتن (۲. ۶. ۱۱)) ، گزاره (a) نیز به طور کامل ثابت شده است.

بالاخره، (e) و (f) فوراً از (۱۱. ۵. ۱۱) نتیجه می‌شوند.

مسائل

۱. فرض کنیم $I=[a,b]$ یک فاصله فشرده در $\mathbf{R}$، و H_0 فضای برداری حقیقی همه توابع پیوسته ـ مشتق‌پذیر روی I باشد. با حاصل‌ضرب داخلی (اسکالر)،

$$(x\mid y)=\int_a^b (x'y'+xy)\,dt$$

فضای H_0 را به یک فضای پیش هیلبرتی حقیقی تبدیل می‌کنیم.

(a) نشان دهید که H_0 جدایی‌پذیر است (مشتق تابع $x\in H_0$ را با چند جمله‌ای‌ها تقریب بزنید (۱. ۴. ۷ را ببینید)). به این ترتیب، H_0 زیرفضایی چگال از یک فضای هیلبرتی جدایی پذیر H است (۲. ۶. ۶ را ببینید).

(b) اگر (x_n) یک دنباله کوشی در فضای پیش هیلبرتی H_0 باشد نشان دهید که، دنباله (x_n) به‌طور یکنواخت به یک تابع پیوسته v روی I همگرا است. و اگر (y_n) دنباله کوشی همگرای دیگری در H_0 باشد، که دارای همان حد در H است، آنگاه (y_n) روی I به‌طور یکنواخت به همان تابع v همگرا است. بنابراین، عناصر H را می‌توان با برخی از توابع پیوسته روی I، که لازم نیست حتماً در هر نقطه از I مشتق‌پذیر باشند، یکسان فرض کرد. (ملاحظه کنید که، برای هر تابع $x\in H_0$، روی I، $|x(t)-x(a)|\le (t-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b x'^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.) نشان دهید که، برای هر تابع $z\in H_0$ که روی I دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است و در شرایط $z'(a)=z'(b)=0$ صدق می‌کند تساوی $(v\mid z)=-\int_a^b vz''\,dt+\int_a^b vz\,dt$ برقرار است.

(c) فرض کنیم α و β دو عدد حقیقی، و q یک تابع پیوسته روی I باشد. نشان دهید که، روی H_0 تابع:

$$x\to\Phi(x)=\int_a^b (x'^2+qx^2)\,dt-\alpha(x(a))^2-\beta(x(b))^2$$

پیوسته است. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از H باشد که از توابعی مانند x تشکیل شده باشد، که در رابطه $\int_a^b x^2\,dt=1$ صدق می‌کنند (ملاحظه کنید که، مجموعه A در فضای هیلبرتی H کراندار نیست). نشان دهید که روی اشتراک $A\cap H_0$، g.l.b تابع $\Phi(x)$ متناهی است. (لازم است که فقط حالت $\alpha>0$، $\beta>0$ مورد بررسی قرار گیرد. فرض کنیم که، در $A\cap H_0$ دنباله‌ای مانند (x_n) یافت شود، به طوری‌که $\lim\Phi(x_n)=-\infty$ و اگر $\gamma_n=\left(\int_a^b x'^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$. دنباله توابع $y_n=x_n/\gamma_n$ را مورد بررسی قرار داده، و از این حقیقت که، از یک طرف $\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n^2\,dt=0$، و از طرف دیگر، فاصله‌ای مانند $[a,c]\subset I$ و عددی مانند $\rho>0$ موجود است، به طوری که، برای هر n و هر نقطه $t\in[a,c]$، $|y_n(t)|\ge\rho$ تناقضی به‌دست آورید.)

(d) فرض کنیم μ_1 برابر با g.l.b تابع $\Phi(x)$ روی $A\cap H_0$ باشد. اگر (x_n) یک دنباله در $A\cap H_0$ باشد، به طوری که $\lim_{n\to\infty}\Phi(x_n)=\mu_1$، نشان دهید که، دنباله (x_n) در H کراندار است. (از همان روشی که در (c) بیان شد، استفاده کنید.) از مطلب فوق نتیجه بگیرید که، با استخراج یک زیر دنباله مناسب، می‌توان فرض کرد، که دنباله (x_n) روی I به‌طور یکنواخت به یک تابع u همگرا است (اما، لازم نیست، که این تابع حتماً از قبل متعلق به H باشد). (از قضیه آسکولی (۷. ۵. ۷) استفاده کنید).

(e) نشان دهید که $\Phi(x)$ یک فرم کوادرانیک روی H_0 است، یعنی، تساوی $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)+2\psi(x,y)$ که در آن ψ تابعی دوخطی می‌باشد، برقرار است. برای هر تابع z که روی I دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد و در شرایط $z'(a)=z'(b)=z(a)=z(b)=0$ صدق کند، داریم $\psi(x,z)=-\int_a^b xz''dt+\int_a^b qxz\,dt$. برای هر تابع پیوسته v روی I ، $\psi(v,z)$ را می‌توان با همین فرمول تعریف کرد. نشان دهید که، برای هر چنین تابع z ی و برای هر عدد حقیقی ξ ، نامساوی :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\Phi(x_n+\xi z)\Big/\int_a^b (x_n+\xi z)^2\,dt\right)\geq \mu_1$$

برقرار است، و از مطلب فوق نتیجه بگیرید که :

$$\int_a^b (uz''-quz+\mu_1 uz)\,dt=0$$

بنابراین، اگر تابع w دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد، به‌طوری‌که $w''=qu-\mu_1 u$ ، آنگاه با کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء به‌دست می‌آوریم $\int_a^b (u-w)z''\,dt=0$. نتیجه بگیرید که، $u-w$ کثیرالجمله‌ای با درجه کوچکتر یا مساوی 1 است. (ملاحظه کنید که اگر از $u-w$ کثیرالجمله‌ای مناسب مانند p با درجه ۱ کم کنیم، آنگاه تابعی مانند z یافت خواهد شد، به طوری‌که $z''=u-w-p$ ، $z(a)=z(b)=z'(a)=z'(b)=0$.) بنابراین، تابع u دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است، در معادله دیفرانسیل :

$$u''-qu+\mu_1 u=0$$

و شرط $\int_a^b u^2\,dt=1$ صدق می‌کند. علاوه بر این، $u'(a)=-\alpha u(a)$ ، و $u'(b)=\beta u(b)$. (برای اثبات گزاره اخیر، از این حقیقت استفاده کنید که، برای هر تابع $z\in H_0$ ، برای هر عدد حقیقی ξ ، $\Phi(u+\xi z)\geq\mu_1\int_a^b (u+\xi z)^2\,dt$.)

۲ . (a) با نمادهای قضیه (۱۰. ۷. ۱۱) ، ابتدا فرض کنیم که $k_1k_2\neq 0$ ، و $\alpha=h_1/k_1$ ، $\beta=-h_2/k_2$. نشان دهید که ، توابع φ_n (تا حد علامت) می‌توانند به‌وسیله شرایط زیر تعریف شوند :

(۱) تابع φ_1 چنان است که، روی کره A به معادله $(y\mid y)=1$ در G، تابع Φ (تعریف شده در مسأله ۱(c)) مینیمم خود را در $y=\varphi_1$ کسب می‌کند و این مینیمم برابر λ_1 است ؛

(۲) برای $n>1$ فرض کنیم A_n اشتراک A و ابر صفحه‌های $(y\mid\varphi_k)=0$ برای $1\leq k\leq n-1$ باشد در این صورت، φ_n چنان است که روی A_n تابع Φ مینیمم خود را به ازاء $y=\varphi_n$ کسب می‌کند، و این مینیمم برابر λ_n است. (این مشخصه تابع φ_1 فوراً از نتایج مسأله 1 ناشی می‌شود، برای توصیف φ_n از بحثی مشابه استفاده کنید.)

(b) اگر $k_1=0$ و $k_2\neq 0$ ، نتایجی مشابه، با تعویض α به 0 در تعریف Φ، ثابت کنید، اما، کره A را نیز با اشتراک آن با ابر صفحه‌ای در G که با رابطه $y(a)=0$ تعریف شده است، عوض کنید. وقتی $k_1\neq 0$ و $k_2=0$ یا وقتی $k_1=k_2=0$ است، با روشی مشابه عمل کنید.

(c) تحت فرض‌های قسمت (a)، گیریم z_1 ، ... ، z_{n-1} ، $n-1$ تابع دلخواه باشند، که روی I دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته هستند، و فرض کنیم $B(z_1,\ldots,z_{n-1})$ اشتراک A و $n-1$ ابر صفحه‌ای $(y\mid z_k)=0$ $(1\leq k\leq n-1)$ باشد. نشان دهید که، روی $B(z_1,\ldots,z_{n-1})$، تابع Φ ، $\rho(z_1,\ldots,z_{n-1})$ مینیمم خود را در نقطه‌ای از $B(z_1,\ldots,z_{n-1})$ کسب می‌کند، و λ_n برابر کوچکترین کران بالای $\rho(z_1,\ldots,z_{n-1})$ است، وقتی z_i ها روی مجموعه توابعی که روی I دارای مشتق مرتبه دوم

پیوسته هستند، تغییر می‌کنند. (**اصل «مینیماکس[1]»**) (با همان روشی که در (a) بیان شد، وجود مینیمم را ثابت کنید؛ نامساوی با همان روشی که در مسأله ۸، بخش ۵ . ۱۱ بیان شده است، ثابت می‌شود). نتیجه را برای حالتی که $k_1 k_2 = 0$ است، توسعه دهید.

۳ . (a) روی فاصله I دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $y'' - q_1 y + \lambda y = 0$ و $y'' - q_2 y + \lambda y = 0$ با شرایط مرزی یکسانی که در (۲. ۷ . ۱۱) بیان شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم $(\lambda_n^{(1)})$ و $(\lambda_n^{(2)})$ دو دنباله اکیداً صعودی از مقادیر ویژه این دو مسأله استورم ـ لیوویل باشند. نشان دهید که، اگر $q_1 \le q_2$ ، آنگاه، برای هر n ، $\lambda_n^{(1)} \le \lambda_n^{(2)}$ ، و اگر روی I ، $|q_1(t) - q_2(t)| \le M$ ، آنگاه برای هر n ، $|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}| \le M$. (از اصل مینیماکس استفاده کنید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، ثابتی مانند c موجود است، به‌طوری‌که برای هر n، با $l = b - a$ ،

$$|\lambda_n - \frac{n^2 \pi^2}{l^2}| \le c$$

(مسأله استورم ـ لیوویل را برای حالت خاصی که تابع q ثابت است، مورد بررسی قرار دهید.)

۴ . (a) فرض کنیم y جوابی دلخواه از معادله (۳. ۷ . ۱۱) روی فاصله $I = [a , b]$ برای $\lambda > 0$ باشد. نشان دهید که، دو ثابت A و ω موجود هستند، به طوری‌که y جوابی از معادله انتگرال :

$$y(t) = \mathrm{A} \sin \sqrt{\lambda}\,(t + \omega) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^t q(s) y(s) \sin \sqrt{\lambda}\,(t - s) ds \qquad (*)$$

است.

نشان دهید که ، ثابتی مانند B مستقل از λ موجود است، به‌طوری که $\mathrm{A}^2 \le \mathrm{B}\,(y \mid y)$. (با کمک نامساوی کوشی ـ شوارتز کران بالایی برای انتگرال سمت راست تساوی (*) به‌دست آورید.)

(b) از (a) نتیجه بگیرید که، اگر در مسأله استورم ـ لیوویل $k_1 k_2 \ne 0$ یا $k_1 = k_2 = 0$ باشد، آنگاه، دو ثابت C_0 و C_1 موجود هستند، به‌طوری‌که، برای هر n ، و هر $t \in \mathrm{I}$ ،

$$|\varphi_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t| \le \frac{\mathrm{C}_0}{n}$$

$$|\varphi'_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t| \le \mathrm{C}_1$$

که در آن $l = b - a$. (از (a) ، و از نتیجه مسأله ۳(b) استفاده کنید.) نتیجه متناظر برای حالتی که فقط یکی ثابت‌های k_1 ، k_2 برابر 0 باشد، چیست؟

1 . Maximinimal principle = Минимаксный прнцип

ضمیمه[۱]

اصول جبر خطی

به جز جبر بولی (بخش ۲. ۱ را ببینید) تئوری جامع‌تر و عمومی‌تری از جبر خطی در ریاضیات وجود ندارد، و به سختی می‌توان نظریه‌ای مقدماتی‌تر و ساده‌تر از جبر خطی پیدا کرد. با وجود این نسلی از استادان و نویسندگان کتاب‌های درسی با محاسبات نامعقول ماتریسی این سادگی را پیچیده کرده‌اند. ما به صورتی خلاصه مفاهیم و نتایج جبر خطی که در این کتاب از آنها استفاده شده است، مورد بررسی قرار داده‌ایم. برای دیدن شرح کامل‌تری از این مطالب خواننده می‌تواند به آثار هالموس [11] ، جیکوبسون [13] ، یا بورباکی [4] مراجعه نماید.

۱. فضاهای برداری

(۱. ۱. A) در سرتاسر این ضمیمه، K یک هیأت ثابت (جابجایی) است، که عناصر آن را **اسکالرها** می‌نامند. یک **فضای برداری روی** K (یا به اختصار، اگر ابهامی در رابطه با K وجود نداشته باشد، یک **فضای برداری**) مجموعه‌ای مانند E است، با ساختمانی که روی آن دو نگاشت :

$(x , y) \to x + y$ از $E \times E$ به E (موسوم به **جمع**)

$(\lambda , x) \to \lambda . x$ از $K \times E$ به E (موسوم به **ضرب اسکالر**)

که دارای خواص زیر هستند، تعریف شده باشد :

(I .1) $\quad x + (y + z) = (x + y) + z \qquad$ (می‌نویسیم $x + y + z$)

(I .2) $\quad x + y = y + x$

(I .3) عنصری مانند $0 \in E$ موجود باشد، به طوری‌که برای هر $x \in E$ ، $x = 0 + x$ [۲]

---

۱. در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی ضمیمه فوق وجود ندارد، و این مطالب از متن انگلیسی چاپ دوم کتاب ژان دیودونه به زبان فارسی ترجمه شده است. مترجم.

۲. تجربه نشان می‌دهد که، برخلاف نظر برخی از مؤلفان، در استفاده از نماد 0 که بر عناصر صفر همه فضاهای برداری (و به‌ویژه K) دلالت می‌کند، بیم اشتباه وجود ندارد.

(I .4) برای هر $x \in \mathrm{E}$ عنصری مانند $-x \in \mathrm{E}$ موجود باشد، به‌طوری‌که $x+(-x)=0$

(II .1) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

(II .2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

(II .3) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

(II .4) $1 . x=x$

(در روابط فوق x ، y ، z عناصر دلخواهی از E، و λ ، μ عناصر دلخواهی از K هستند).

شرط‌های (I .1) تا (I .4) بیان می‌کند که E یک **گروه جابجایی** نسبت به عمل جمع است. از این مطلب نتیجه می‌شود که، اگر $(x_i)_{i\in \mathrm{H}}$ یک خانواده **متناهی** از عناصر E باشد، آنگاه، مجموع $\sum_{i\in \mathrm{H}} x_i$ بدون ابهام تعریف شده است. (بر حسب قرار داد $\sum_{i\in\varnothing} x_i=0$ در نظر می‌گیریم.)

از (I .3) و (II .2) نتیجه می‌گیریم که $\lambda x=\lambda(x+0)=\lambda x+\lambda 0$، و بنابراین، برای هر $\lambda\in \mathrm{K}$ ، $\lambda 0=0$. از (II .1) نتیجه می‌شود که $\lambda x=(\lambda+0)x=\lambda x+0x$، بنابراین، برای هر $x\in \mathrm{E}$ ، $0x=0$. بالاخره، از این دو رابطه و (I .4) ، (II .1) ، (II .2) به‌دست می‌آوریم $\lambda x+\lambda(-x)=\lambda 0=0$ و $\lambda x+(-\lambda)x=0x=0$. بنابراین $(-\lambda)x=\lambda(-x)=-(\lambda x)$.

عناصر E را اغلب **بردارها** می‌نامند.

(۲. ۱. A) یک گروه جمعی که فقط شامل عنصر 0 باشد، یک فضای برداری است، ضرب اسکالر یکتا نگاشت از $\mathrm{K}\times\{0\}$ به $\{0\}$ است. هیأت K یک فضای برداری روی خودش است. ضرب اسکالر، ضرب در هیأت K است. اگر K' یک **زیر هیأت** از K و E یک فضای برداری روی K باشد، آنگاه E یک فضای برداری روی K' نیز هست، اگر ضرب اسکالر تحدید نگاشت $(\lambda , x)\to\lambda x$ به $\mathrm{K}'\times \mathrm{E}$ باشد.

(۳. ۱. A) اگر E یک فضای برداری باشد، **یک زیر فضای برداری (یا به اختصار یک زیر فضای) E** زیرمجموعه‌ای مانند F از E است، به‌طوری‌که، برای هر $x\in \mathrm{F}$ ، $y\in \mathrm{F}$ و اسکالرهای دلخواه λ ، μ داشته باشیم $\lambda x+\mu y\in \mathrm{F}$.

تحدید جمع (به ترتیب ضرب اسکالر) به $\mathrm{F}\times \mathrm{F}$ (به ترتیب $\mathrm{K}\times \mathrm{F}$) در E نگاشتی به F است، و بنابراین، F یک فضای برداری نسبت به این نگاشت‌ها می‌باشد. این مطلب اصطلاح علمی فوق را توجیه می‌کند.

اگر $(x_i)_{1\le i\le n}$ یک خانواده متناهی از بردارها در F ، و $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ یک خانواده از اسکالرها باشد، در این‌صورت، با استقراء روی n دیده می‌شود که $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in \mathrm{F}$. یک بردار به شکل $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ (که در آن

$x_i \in E$ و $\lambda_i \in K$) را یک **ترکیب خطی** از بردارهای x_i می‌نامند. (یک ترکیب خطی همیشه یک مجموع **متناهی** است، حتی اگر E ، به عنوان مثال، یک فضای نرم دار باشد (بخش ۱. ۵ را ببینید) که در آن بعضی از مجموع‌های نامتناهی تعریف شده‌اند (بخش ۳ . ۵ را ببینید).)

در هر فضای برداری E ، $\{0\}$ و E زیرفضاهای برداری (موسوم به **زیرفضاهای بدیهی**) از فضای برداری E هستند. اگر $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای برداری E باشد، اشتراک $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$ نیز یک زیرفضای برداری از فضای E خواهد بود. اگر A یک زیرمجموعه از E باشد، M اشتراک همه زیرفضاهای E که شامل A هستند (چنین زیر فضاهایی وجود دارند، و به عنوان مثال خود E یکی از آنهاست) کوچکترین زیرفضایی است، که شامل A است. زیرفضای M را **زیرفضای تولید شده به‌وسیله A ، و A را یک سیستم از مولدهای M** می‌نامند.

(۴. ۱. A) زیرفضای برداری M تولید شده به‌وسیله A ، مجموعه همه ترکیبات خطی خانواده‌های متناهی از عناصر A است.

در واقع، چنین ترکیباتی خطی متعلق به هر زیرفضای برداری شامل A ، و بنابراین، متعلق به M هستند. به عکس، اگر $x = \sum_i \gamma_i x_i$ و $y = \sum_j \delta_j y_j$ دو ترکیب خطی از عناصر A باشند، آنگاه $\lambda x + \mu y = \sum_i (\lambda \gamma_i) x_i + \sum_j (\mu \delta_j) y_j$ نیز ترکیبی خطی از عناصر A خواهد بود. در نتیجه، مجموعه همه چنین ترکیب‌های خطی یک زیرفضای برداری از E است، که شامل A است (طبق (II .4)، و بنابراین، با M برابر است.

در حالت خاص، اگر A را برابر **اجتماع** خانواده $(N_\beta)_{\beta \in J}$ از زیرفضاهای برداری E بگیریم، در این صورت، هر ترکیب خطی از عناصر A به صورت $x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_m}$ می‌باشد، که در آن $(\beta_j)_{1 \le j \le m}$ یک خانواده دلخواه متناهی از عناصر J است، و برای هر j ، $x_{\beta_j} \in N_{\beta_j}$. بنابراین، مجموعه چنین مجموع‌هایی کوچکترین زیرفضای برداری است که شامل همه N_βها می‌باشد. این مجموعه را **مجموع** N_βها می‌نامند (با اجتماع آنها اشتباه نشود!) و به صورت $\sum_{\beta \in J} N_\beta$ نشان می‌دهند. وقتی $J = \{1, 2\}$، از نماد $N_1 + N_2$ نیز استفاده می‌شود، و برای هر تعداد متناهی از اندیس‌ها از نمادی مشابه استفاده می‌شود. واضح است که، اگر N ، M ، P سه زیرفضای دلخواه از E باشند، آنگاه $M + N = N + M$ ، $M + (N + P) = (M + N) + P$، و رابطه $M \subset N$ هم‌ارز رابطه $M + N = N$ می‌باشد.

برای هر $x \in E$ زیرفضای تولید شده به‌وسیله x را به صورت Kx می‌نویسیم. (و بعضی اوقات، وقتی

$x \neq 0$ باشد، آن را یک «اشعه»[1] یا «خط شعاعی» یا «پرتو» می‌نامند. اگر $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک خانواده از بردارها در E باشد، زیرفضای تولید شده به‌وسیله این خانواده برابر $\sum_{\alpha\in A} K x_\alpha$ خواهد بود.

(A .۱ .۵) فرض کنیم $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک خانواده دلخواه از فضاهای برداری باشد. یک فضای برداری جدید E می‌سازیم، که آنرا **مجموع مستقیم (یا مجموع مستقیم برونی)** خانواده (E_α) نامیده، و به علامت $\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha$ نشان خواهیم داد. عناصر E خانواده‌های $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ هستند، که $x_\alpha \in E_\alpha$ برای هر $\alpha\in I$ و **به جز تعدادی متناهی از اندیس‌ها** $x_\alpha = 0$. بردار x_α را **مؤلفه** αام x (مؤلفه اندیس α در x) می‌نامند. جمع و ضرب اسکالر در E با فرمول‌های زیر تعریف می‌شوند :

$$(x_\alpha) + (y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha)$$
$$\lambda(x_\alpha) = (\lambda x_\alpha)$$

((λx_α) متعلق به E است، زیرا $\lambda 0 = 0$). شرایط (A .۱ .۱) را می‌توان مستقیماً ثابت نمود (عنصر صفر E خانواده‌ای مانند x_α است که برای هر α، $x_\alpha = 0$). وقتی $J=\{1, 2\}$ ، از نماد $E_1 \oplus E_2$ استفاده می‌شود، همین‌طور برای هر مجموعه متناهی از اندیس‌ها از نمادی مشابه استفاده می‌شود. وقتی J متناهی باشد، مجموعه E برابر با مجموعه حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha\in J} E_\alpha$ است. اگر J یک مجموعه دلخواه و H زیر مجموعه‌ای از J متمایز از $\varnothing$ و J باشد، فضای برداری $\bigoplus_{\alpha\in J} E_\alpha$ را می‌توان با روشی واضح با $(\bigoplus_{\alpha\in H} E_\alpha)\oplus(\bigoplus_{\alpha\in J-H} E_\alpha)$ یکی گرفت.

وقتی همه E_αها برابر K باشند، حاصل‌جمع مستقیم آنها را با نماد $K^{(I)}$ نشان می‌دهند. $K^{(I)}$ مجموعه همه نگاشت‌های $\alpha \to \lambda(\alpha)$ از I به K است، به طوری‌که، برای همه اندیس‌های $\alpha\in I$، به جز تعدادی متناهی از آنها $\lambda(\alpha) = 0$.

۲. نگاشت‌های خطی

(A .۲ .۱) فرض کنیم E، F دو فضای برداری روی هیأت **یکسان** K باشند. نگاشت $u: E \to F$ را **خطی** نامیم، هر گاه، برای اسکالرهای دلخواه λ، μ از هیأت K و بردارهای دلخواه x ، y از فضای E داشته باشیم :

---

[1] . واژه‌های خط شعاعی، یا پرتو، اشعه، یا نیم‌خط ، که برخی از آنها ممکن است برای مفهوم زیر فضای تولید شده به وسیله x چندان هم مناسب نباشند، معادل‌هایی برای واژه انگلیسی ray هستند. مترجم .

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)\,. \qquad (\text{۱. ۱. ۲. A})$$

در حالت خاص، داریم $u(0)=0$. با استقراء روی n از (۱. ۱. ۲. A) نتیجه می‌شود :

$$u\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u(x_i) \qquad (\text{۲. ۱. ۲. A})$$

که در آن $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ یک خانواده دلخواه از بردارهای واقع در E ، و $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ یک خانواده از اسکالرها است.

یک نگاشت خطی از E به E را یک **اندومورفیسم** روی E ، و یک نگاشت خطی از E به K را یک **فرم خطی** روی E می‌نامند.

(۲. ۲. A) فرض کنیم $u:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$ یک نگاشت خطی باشد. اگر M زیر فضای دلخواهی از E باشد، مستقیماً می‌توان ثابت کرد که $u(\mathrm{M})$ زیرفضایی از F است. اگر N زیر فضایی از F باشد، تصویر معکوس $u^{-1}(\mathrm{N})$ زیر فضایی از E است. اگر (M_α) خانواده‌ای از زیر فضاهای E باشد ، آنگاه $u(\sum_\alpha \mathrm{M}_\alpha)=\sum_\alpha u(\mathrm{M}_\alpha)$.

در حالت خاص، $u(\mathrm{E})$ (که آن‌را **تصویر** u نامیده، و به علامت $im(u)$ نشان می‌دهند) زیرفضایی از F است، و $u^{-1}(0)$ (که آنرا **هسته** u نامیده وبه علامت $\ker(u)$ نشان می‌دهند) زیر فضایی از E است. نگاشت u **یک به یک** است، اگر و تنها اگر $u^{-1}(0)=\{0\}$ ، زیرا، رابطه $u(x)=u(x')$ هم‌ارز رابطه $u(x-x')=0$ می‌باشد.

اگر u **دوسویی** باشد، u را یک **ایزومورفیسم** از E بروی F می‌نامند. (اگر علاوه بر این $\mathrm{F}=\mathrm{E}$ باشد، آنگاه u را یک **اتومورفیسم** روی E می‌نامند). اگر نگاشت خطی u دوسویی باشد، واضح است که، نگاشت وارون $u^{-1}:\mathrm{F}\rightarrow\mathrm{E}$ خطی است، و بنابراین، یک ایزومورفیسم از F بروی E است. دو زیر فضای E ، F را **ایزومورفیک (یک ریخت)** نامند، هر گاه یک ایزومورفیسم از E بروی F وجود داشته باشد. در این حالت، از هر قضیه‌ای که برای E با به کارگیری بردارها و زیرفضاهای E ثابت شده باشد، بلافاصله، قضیه متناظری برای F با به کارگیری تصویرهای بردارها و زیرفضاهای مربوطه نتیجه می‌شود.

اگر نگاشت خطی $u:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$ یک به یک باشد، u **را** می‌توان به عنوان یک ایزومورفیسم از E بروی تصویرش $u(\mathrm{E})$ مورد بررسی قرار داد.

مثال‌هایی از نگاشت‌های خطی

(۳. ۲. A) نگاشت همانی از فضای برداری E بروی خودش (که اغلب با نمادهای 1_E یا ، I_E ، یا به اختصار 1 یا I نشان داده می‌شود) یک نگاشت خطی است. همچنین، یکتا نگاشت از E به فضایی برداری

که فقط شامل 0 است، یک نگاشت خطی است. نگاشت $h_\lambda(x) = \lambda x$ روی E یک اندومورفیسم است، که آنرا **نگاشت تجانس با نسبت (قوت)** λ می‌نامند. اگر $\lambda = 0$ باشد، تصویر $im(h_\lambda)$ زیر فضای $\{0\}$ از E خواهد بود. اگر $\lambda \neq 0$ باشد، h_λ نگاشتی دو سویی از E به E است، و وارون این اتومورفیسم یک نگاشت تجانس با نسبت λ^{-1} است، زیرا، طبق (II .3) ، داریم $x = \lambda^{-1}(\lambda x)$. برای هر $x_0 \in E$ نگاشت $\xi \to \xi x_0$ از K به E نگاشتی خطی است. تصویر آن، اگر $x_0 = 0$ باشد، برابر $\{0\}$ است، و در غیر این صورت، نگاشت فوق، نگاشتی **یک به یک** است. زیرا، اگر $\xi \neq 0$ ، آنگاه، طبق II . 3 ، II . 4 ، $\xi^{-1}(\xi x_0) = x_0 \neq 0$ ، و بنابراین $\xi x_0 \neq 0$. به این ترتیب، هر «خط شعاعی» Kx_0 در E (وقتی $x_0 \neq 0$) با K یکریخت (ایزومورف) است، و برای هر اسکالر غیر صفر λ برابر $K(\lambda x_0)$ می‌باشد.

اگر F زیر فضای دلخواهی از E باشد، نگاشت **یک به یک متعارف**[1] $j : F \to E$ ((۱. ۶. ۱) را ببینید) یک نگاشت خطی است.

فرض کنیم $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای برداری باشد و $E = \bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$ مجموع مستقیم آنها باشد. برای هر $\alpha \in I$ ، نگاشت خطی $j_\alpha : E_\alpha \to E$ را طبق قانون $j_\alpha(x_\alpha) = (y_\beta)_{\beta \in I}$ که در آن $y_\beta = 0$ اگر $\beta \neq \alpha$ و $y_\alpha = x_\alpha$ ، تعریف می‌کنیم. واضح است که، j_α یک به یک است، و در نتیجه تصویر $j_\alpha(E_\alpha)$ زیر فضایی از E است که با E_α ایزومورف می‌باشد. این زیرفضا را **مؤلفه** زیر فضای αامین اِندیس در E می‌نامند، و اغلب آن را با E_α یکی می‌گیرند. نگاشت خطی $p_\alpha : E \to E_\alpha$ (برای هر $\alpha \in I$) به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر $x = (x_\beta)_{\beta \in I}$ عنصری از E باشد، آنگاه $p_\alpha(x) = x_\alpha$. واضح است که، p_α نگاشتی پوشا از E به E_α است. اگر I متناهی باشد، p_α یک افکنش با اندیس α است (بخش ۳. ۱ را ببینید). برای هر $x \in E$ ، مجموعه H تشکیل شده از اندیس‌هایی مانند $\alpha \in I$ که در رابطه $p_\alpha(x) \neq 0$ صدق می‌کنند، متناهی است، و داریم $x = \sum_{\alpha \in H} j_\alpha(p_\alpha(x))$.

(A .۲ .۴) اگر $u : E \to F$ و $u' : E \to F$ نگاشت‌هایی خطی، و λ یک اسکالر باشد، مستقیماً می‌توان ثابت کرد که، نگاشت‌های :

$$x \to u(x) + u'(x)$$

$$x \to \lambda u(x)$$

نگاشت‌هایی خطی از E به F هستند. این نگاشت‌ها را به ترتیب به $u + u'$ و λu نشان می‌دهند. سپس، به سادگی می‌توان نشان داد که، **مجموعه نگاشت‌های خطی** از E به F (که به علامت $\mathrm{Hom}_K(E, F)$، یا به

---

1 . Canonical injection = Естественное вложение

اختصار $\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ نشان داده می‌شود) یک فضای برداری نسبت به عمل جمع $(u\,,u')\to u+u'$ و ضرب اسکالر $(\lambda\,,u)\to\lambda u$ است، به عبارت دیگر، شرایط هشت‌گانه (۱. ۱. A) برقرار هستند.

فرض کنیم $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ و $v:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ نگاشت‌هایی خطی باشند. در این صورت، **ترکیب** این نگاشت‌ها $v\circ u:\mathrm{E}\to\mathrm{G}$ یک نگاشت خطی است. علاوه بر این، اگر $u':\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ و $v':\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ نگاشت‌هایی خطی و λ یک اسکالر باشد، آنگاه، خواهیم داشت :

$$v\circ(u+u')=v\circ u+v\circ u' \qquad (\text{A .۲ .۴ .۱})$$

$$(v+v')\circ u=v\circ u+v'\circ u \qquad (\text{A .۲ .۴ .۲})$$

$$v\circ(\lambda u)=(\lambda v)\circ u=\lambda(v\circ u) \qquad (\text{A .۲ .۴ .۳})$$

(با توجه به تعریف تساوی نگاشت‌ها (بخش ۴ .۱ را ببینید) ، اثبات روابط فوق ساده است.)

مجموعه $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}\,,\mathrm{E})$ تشکیل شده از اندومورفیسم‌های E را با علائم $\mathrm{End}\,(\mathrm{E})$ یا $\mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ نیز نشان می‌دهند. این مجموعه همراه با عمل جمع $(u\,,v)\to u+v$ و «ضرب» $(u\,,v)\to u\circ v$ یک **حلقه** (در حالت کلی غیر جابه‌جایی) است، که **عنصر واحد** آن 1_{E} می‌باشد. این مطلب از فرمول‌های فوق و بخش ۷. ۱ ناشی می‌شود. خاصیت (۳. ۴. ۲. A) ، که ساختمان حلقه $\mathrm{End}\,(\mathrm{E})$ را به ساختمان فضای برداری ارتباط می‌دهد، می‌توان به این شکل بیان نمود که، $\mathrm{End}\,(\mathrm{E})$ یک **جبر** روی هیات K است.

۳. مجموع مستقیم زیرفضاها

(۱. ۳. A) فرض کنیم $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای برداری، F یک فضای برداری، و برای هر $\alpha\in\mathrm{I}$ نگاشت $u_\alpha:\mathrm{E}_\alpha\to\mathrm{F}$ خطی باشد. در این صورت، یک نگاشت خطی یکتای u از مجموع مستقیم $\mathrm{E}=\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{I}}\mathrm{E}_\alpha$ به F موجود است، به طوری که، برای هر $\alpha\in\mathrm{I}$ ، $u\circ j_\alpha=u_\alpha$ (که در آن $j_\alpha:\mathrm{E}_\alpha\to\mathrm{E}$ نگاشت یک به یک متعارف است که در (۳. ۲. A) تعریف شده است).

برای هر $x\in\mathrm{E}$ داریم $x=\sum_{\alpha\in\mathrm{H}} j_\alpha(\mathrm{p}_\alpha(x))$ ، که در آن H یک زیرمجموعه متناهی از I است که شامل همه $\alpha\in\mathrm{I}$ هایی است که $\mathrm{p}_\alpha(x)\neq 0$. بنابراین، باید داشته باشیم :

$$u(x)=\sum_{\alpha\in\mathrm{H}} u(j_\alpha(\mathrm{p}_\alpha(x)))=\sum_{\alpha\in\mathrm{H}} u_\alpha(\mathrm{p}_\alpha(x))$$

که از آن یکتایی u نتیجه می‌شود. به عکس، اگر u را با این فرمول **تعریف** کنیم، مستقیماً می‌توان ثابت کرد که u خطی است (با استفاده از این حقیقت که، برای عناصر داده شده x و y در E ، می‌توان H را برابر

مجموعه‌ای متناهی شامل همه اندیس‌های $\alpha \in I$ گرفت که برای آنها $p_\alpha(x) \neq 0$ یا $p_\alpha(y) \neq 0$). این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

(A .۳ .۲) حال، فرض کنیم E یک فضای برداری، و $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک خانواده از زیرفضاهای E باشد، و برای هر $\alpha \in I$ ، $f_\alpha : M_\alpha \to E$ نگاشت یک به یک متعارف باشد. طبق (A .۳ .۱) ، نگاشتی خطی مانند f از $M = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ به E موجود است، به طوری‌که برای هر $\alpha \in I$ ، $f \circ j_\alpha = f_\alpha$. تصویر f زیرفضای $M' = \sum_{\alpha\in H} M_\alpha$ از E است. اگر f **یک به یک** باشد، مجموع $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha$ از زیرفضاهای E را **مجموع مستقیم** می‌نامند. بنابراین، مطلب فوق به این معنی است که، هر بردار x که متعلق به $\sum_{\alpha\in H} M_\alpha$ باشد، می‌تواند به شکل **یکتایی** به فرم $\sum_{\alpha\in H} x_\alpha$ نوشته شود، که در آن H زیرمجموعه‌ای متناهی از I است، و $x_\alpha \in E_\alpha$ و برای هر $\alpha \in H$ ، $x_\alpha \neq 0$. (اگر $x = 0$ ، H را برابر $\varnothing$ می‌گیریم.)

به‌وسیله f ، ما معمولاً $\sum_{\alpha\in I} M_\alpha$ و $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ را یکی خواهیم گرفت.

(A .۳ .۳) مجموع خانواده $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ از زیر فضاهای یک فضای برداری مجموعی مستقیم است، اگر و تنها اگر، برای هر $\alpha \in I$ ، $M_\alpha \cap \sum_{\beta\neq\alpha} M_\alpha = \{0\}$.

زیرا، یک به یک نبودن f به مفهومی که در (A .۳ .۲) تعریف شده است، به این معنی است که ، تعدادی متناهی از عناصر غیرصفر $x_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ ، موجود است، به طوری که $\sum_i x_{\alpha_i} = 0$ ((A .۲ .۲) را ببینید). این معادله را می‌توان به صورت $x_{\alpha_1} = \sum_{j>1} (-x_{\alpha_j})$ نوشت ، که از آن نتیجه می‌شود x_{α_1} متعلق به $M_{\alpha_1} \cap \sum_{\beta\neq\alpha_1} M_\alpha$ است، و از این مطلب نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(A .۳ .۴) اگر E برابر مجموع مستقیم زیرفضاهای M و N باشد، گوییم M (به ترتیب N) یک **مکمل** N (به ترتیب M) است یا زیرفضاهای M و N از E **مکمل** یکدیگرند. مطلب فوق به این معنی است که $M + N = E$ و $M \cap N = \{0\}$. در نتیجه، نگاشت‌های $p : E \to M$ و $q : E \to N$ ، «افکنش‌های» از E به‌روی M و N را خواهیم داشت که برای هر $x \in E$ در رابطه $x = p(x) + q(x)$ صدق می‌کنند. هسته p (به ترتیب q) برابر N (به ترتیب M) است، و $p(p(x)) = p(x)$, $q(q(x)) = q(x)$.

نمی‌توان از یک زیرفضای مکمل برای زیرفضای M سخن گفت، زیرا، در حالت کلی، بیش از یک

زیر فضای مکمل برای زیرفضای M وجود دارد، با وجود این، نتیجه زیر برقرار است:

(۵. ۳. A) فرض کنیم M ، N ، N′ زیر فضاهایی از E باشند، به طوری‌که M و N مکمل یکدیگر، و M و N′ مکمل یکدیگر باشند، و فرض کنیم $q : \mathrm{E} \to \mathrm{N}$ افکنش E بروی N ، مطابق با تجزیه مجموع مستقیم $\mathrm{E} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$ باشد. در این‌صورت، $q' : x \to q(x)$ تحدید q به N′ یک ایزومورفیسم از N′ بروی N است.

زیرا، به علت اینکه هسته q برابر M است، هسته q' برابر $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}' = \{0\}$ خواهد بود، و در نتیجه q' نگاشتی یک به یک است. از طرف دیگر، اگر x عنصر دلخواهی از N باشد، آنگاه، عناصری مانند $y \in \mathrm{M}$ و $z \in \mathrm{N}'$ موجود هستند، به طوری‌که $x = y + z$. بنابراین $q(z) = q(x) = x$ ، زیرا $q(y) = 0$، و در نتیجه q' پوشا است.

۴. پایه‌ها. بعد و همبعد[1]

(۱. ۴. A) یک خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ از بردارها در فضای برداری E آزاد نامیده می‌شود، و x_αها را مستقل خطی نامیم، هر گاه، برای هر زیر مجموعه متناهی H از I ، از رابطه $\sum_{\alpha \in \mathrm{H}} \lambda_\alpha x_\alpha = 0$ نتیجه شود، برای هر $\alpha \in \mathrm{H}$ ، $\lambda_\alpha = 0$. از استقلال بردارهای خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ نتیجه می‌شود که، برای هر $\alpha \in \mathrm{I}$ ، $x_\alpha \neq 0$ ، و برای هر $\beta \neq \alpha$ ، $x_\beta \neq x_\alpha$ (در غیر این صورت، باید داشته باشیم $1 . x_\alpha + (-1) x_\beta = 0$ که با تعریف استقلال خطی بردارهای خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ در تناقض است). بنابراین، زیرفضاهای $\mathrm{K} x_\alpha$ «خطوط شعاعی» با K یک‌ریخت (ایزومورف) هستند، و استقلال خطی x_αها را می‌توان به این صورت بیان کرد که، x_αها ناصفر هستند و مجموع خطوط شعاعی $\mathrm{K} x_\alpha$ مجموعی مستقیم است.

(۲. ۴. A) خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ آزاد است ، اگر و تنها اگر، برای هر $\alpha \in \mathrm{I}$ ، بردار x_α متعلق به زیر فضای تولید شده توسط x_βها با $\beta \neq \alpha$ نباشد.

این مطلب نتیجه مطالب فوق و (۲. ۳. A) می‌باشد.

(۳. ۴. A) فرض کنیم $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ یک نگاشت خطی باشد، و $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ یک خانواده آزاد از عناصر $u(\mathrm{E})$ باشد. برای هر $\alpha \in \mathrm{I}$، فرض کنیم $x_\alpha \in \mathrm{E}$ چنان باشد که $u(x_\alpha) = y_\alpha$. در این‌صورت، خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ آزاد

1 . Codimension = Коразмерность

است، و مجموع $\ker(u)$ **و** $\sum_{\alpha\in I} Kx_\alpha$ **مجموعی مستقیم است.**

فرض کنیم، برای زیرمجموعه متناهی H از I ، رابطه‌ای به فرم $\sum_{\alpha\in H} \lambda_\alpha x_\alpha + y = 0$ داشته باشیم، که در آن $y \in \ker(u)$. از این رابطه نتیجه می‌شود $\sum_{\alpha\in H} \lambda_\alpha u(x_\alpha) = 0$ ، زیرا $u(y) = 0$ ، و چون خانواده $(u(x_\alpha))_{\alpha\in H}$ آزاد است، برای همه αها خواهیم داشت $\lambda_\alpha = 0$ ، بنابراین $y = 0$ و حکم ثابت می‌شود.

(A .۴ .۴) خانواده $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ از بردارها در E را یک **پایه** برای E نامیم، هر گاه این خانواده آزاد باشد و فضای E را تولید کند. مطلب فوق هم ارز این است که بگوییم، مجموع $\sum_{\alpha\in I} Kb_\alpha$ **مجموعی مستقیم و برابر** با E است، و باز این مطلب نیز هم ارز این است که بگوییم، برای هر $x \in E$، **یک خانواده یکتای متناهی از اسکالرهای** $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in H}$ موجود است، به‌طوری‌که $H \subset I$ و برای هر $\alpha \in H$ ، $\lambda_\alpha \neq 0$ و $x = \sum_{\alpha\in H} \lambda_\alpha b_\alpha$.

بنابراین، هر خانواده آزاد $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک پایه برای زیرفضای برداری $\sum_{\alpha\in I} Kx_\alpha$ است.

در فضای برداری $K^{(I)}$ ، بردار $(\delta_{\beta\alpha})_{\beta\in I}$ ، که در آن $\delta_{\beta\alpha} = 0$ اگر $\beta \neq \alpha$ ، و $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ ، به e_α نشان می‌دهیم. واضح است که ، $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک **پایه** برای $K^{(I)}$ است. این پایه را **پایه متعارف** $K^{(I)}$ می‌نامند. اگر فضای برداری E دارای پایه‌ای مانند $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ باشد، در این صورت، ایزومورفیسمی یکتا از $K^{(I)}$ بروی E موجود است که برای هر $\alpha \in I$ ، e_α را به b_α می‌نگارد ((A .۳ .۱) را ببینید).

(A . ۴ . ۵) فرض کنیم V یک زیرفضا از فضای برداری E باشد، و E از اجتماع V و مجموعه بردارهای خانواده‌ای متناهی مانند $(x_i)_{1\le i\le n}$ تولید شده باشد. در این صورت، یک زیر خانواده $(x_{i_k})_{1\le k\le r}$ موجود است، به‌طوری‌که، این زیر خانواده پایه‌ای برای یک زیر فضای مکمل V در E است.

فرض کنیم r بزرگترین عدد صحیحی باشد که، برای آن زیرخانواده‌ای مانند $(x_{i_k})_{1\le k\le r}$ از $(x_i)_{1\le i\le n}$ موجود باشد، به‌طوری‌که E' مجموع زیر فضای V و زیر فضاهای Kx_{i_k} مجموعی **مستقیم** باشد. کافی است نشان دهیم که $E' = E$.

فرض کنیم $E' \neq E$ در این‌صورت، اندیسی مانند j موجود است، به‌طوری که $1 \le j \le n$ و $x_j \notin E'$ (در غیر این‌صورت، E' باید شامل V و همه x_iها باشد، و بنابراین، طبق فرض، باید برابر E باشد). در نتیجه، ما به یک تناقض خواهیم رسید، اگر بتوانیم نشان دهیم که مجموع V ، Kx_{i_k} ، Kx_j مجموعی مستقیم است. بنابراین، رابطه $\lambda x_j + \sum_k \mu_k x_{i_k} + y = 0$ ، با $y \in V$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبل از هر

چیز، از این رابطه نتیجه می‌شود $\lambda = 0$ ، (در غیر این‌صورت $x_j = -\sum_k (\lambda^{-1}\mu_k)x_{i_k} - \lambda^{-1}y$ ، که متعلق به E' است). سپس، از تعریف $(x_{i_k})_{1\le i\le r}$ نتیجه می‌شود که، برای همه k ها $\mu_k = 0$ ، و $y = 0$ ، و حکم ثابت می‌شود.

(۶ . ۴ . A) هر فضای برداری که به‌وسیله مجموعه‌ای متناهی از بردارها تولید شده باشد، دارای پایه‌ای از بردارهای متعلق به این مجموعه متناهی است.

با گرفتن $\mathrm{V} = \{0\}$ در گزاره ۵ . ۴. A حکم ثابت می‌شود.

دو نتیجه قبل و بدون قید متناهی بودن نیز معتبر باقی می‌مانند (مرجع [4] را ببینید)، اما، در این کتاب، ما نیازی به استفاده از این تعمیم نخواهیم داشت.

(۷. ۴. A) فرض کنیم E یک فضای برداری با پایه‌ای متناهی مانند $(b_i)_{1\le i\le n}$ باشد. در این‌صورت، هر پایه E دارای دقیقاً n عنصر است.

کافی است نشان دهیم که هر پایه دیگری از E **حداکثر** n عضو دارد، زیرا، در این صورت، ما می‌توانیم نقش‌های این دو پایه را عوض کنیم. با استقراء روی n پیش می‌رویم. نتیجه برای $n = 0$ واضح است. فرض کنیم $(b'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ یک پایه برای E باشد. عنصر b'_γ از این پایه و خط شعاعی $\mathrm{V} = \mathrm{K}b'_\gamma$ از E را مورد بررسی قرار می‌دهیم. زیر فضای $\mathrm{V}' = \sum_{\alpha\ne\gamma} \mathrm{K}b'_\alpha$ مکمل V در E است. از طرف دیگر، E به‌وسیله V و b_i ها تولید می‌شود. بنابراین، یک زیرخانواده $(b_{i_k})_{1\le k\le r}$ از $(b_i)_{1\le i\le n}$ موجود است، به‌طوری که i_k ها متمایز از یکدیگر هستند، و $\mathrm{V}'' = \sum_k \mathrm{K}b_{i_k}$ مکمل V در E است ((۵ . ۴ . A) را ببینید). رابطه $r = n$ ممکن نیست، زیرا، در غیر این صورت، باید داشته باشیم $\mathrm{V}'' = \mathrm{E}$ که محال است. بنابراین، V'' دارای پایه‌ای با حداکثر $r \le n-1$ عضو است، و چون V' با V'' یکریخت (ایزومورف) است، ((۵ . ۳ . A) را ببینید)، پس V' دارای پایه‌ای با $r \le n-1$ عضو است. در نتیجه، فرض استقراء نشان میدهد که $\mathrm{I}-\{\gamma\}$ **حداکثر** دارای $n-1$ عنصر است، و بنابراین، I حداکثر n عضو دارد، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود.

یک فضای برداری که پایه‌ای متناهی داشته باشد، فضای با **بعد متناهی** (متناهی‌البعد) می‌نامند. عدد صحیح n در (۷. ۴. A) ، که تعداد عناصر یک پایه دلخواه از فضای E است، **بعد** فضای E (روی هیات K) نامیده، به علامت $\dim \mathrm{E}$ یا $\dim_\mathrm{K} \mathrm{E}$ نشان می‌دهند. اگر $\dim \mathrm{E} = n$ باشد، E با K^n ایزومورف (یک‌ریخت) است. یک فضای برداری که پایه‌ای متناهی نداشته باشد، **نامتناهی‌البعد** (با بعد نامتناهی) خواهیم نامید. رابطه $\dim \mathrm{E} = 0$ هم ارز رابطه $\mathrm{E} = \{0\}$ می‌باشد.

(A . ۴ . ۸) (*i*) در یک فضای برداری E با بعد متناهی n ، هر سیستم مولد E شامل پایه‌ای از E است و حداقل دارای n عضو می‌باشد. هر سیستمی از مولدها که از n عضو تشکیل شده باشد یک پایه برای E است.
(*ii*) در یک فضای برداری E با بعد متناهی n ، هر سیستم آزاد از بردارها مشمول یک پایه از E است و حداکثر دارای n عضو است. هر سیستم آزاد که از n عنصر تشکیل شده باشد، یک پایه برای E است.

اگر $(x_i)_{1\le i\le m}$ یک سیستم آزاد باشد، با به کارگیری (A . ۴ . ۵) برای $V=\sum_{i=1}^{m} Kx_i$ و پایه‌ای مانند $(b_j)_{1\le j\le n}$ از E نتیجه می‌گیریم که، زیرخانواده‌ای مانند $(b_{j_h})_{1\le h\le r}$ موجود است، به‌طوری‌که x_iها و b_{j_h}ها تشکیل یک پایه برای E می‌دهند. این مطلب (*ii*) را ثابت می‌کند. حکم (*i*) از (A .۴ .۷) و (A .۴ .۶) در حالتی که سیستم مولدها متناهی است، نتیجه می‌شود. در حالت کلی، کافی است نشان دهیم که، یک سیستم S از مولدها، شامل یک سیستم آزاد از n عنصر است. فرض کنیم چنین نباشد، و بزرگترین تعداد عناصری که در یک سیستم آزاد از S بتوان استخراج نمود $m<n$ باشد. اگر $(y_i)_{1\le i\le m}$ چنین سیستم آزادی باشد، آنگاه $V=\sum_{i=1}^{m} K\,y_i$ ، طبق (A .۴ .۷) نمی‌تواند برابر E باشد، و بنابراین، عنصری مانند $z\in S$ موجود است که در V واقع نشده است. در این‌صورت، y_iها و z ، با توجه به (A .۴ . ۵) ، تشکیل یک پایه برای $V+Kz$ ، و در نتیجه، تشکیل خانواده‌ای آزاد شامل $m+1$ عنصر می‌دهند. این تناقض اثبات را کامل می‌نماید.

(A . ۴ . ۹) گوییم زیر فضای V از فضای برداری E دارای **همبعد (متمم بعد)** متناهی است، هر گاه V دارای زیرفضای مکملی در E با بعد متناهی باشد. طبق (A . ۳ . ۵) ، بعد این زیرفضای مکمل مستقل از طریقه انتخاب آن است، و آن را **همبعد**[1] (متمم بعد) V در E نامیده، و به عبارت $\operatorname{codim}_E V$ نشان می‌دهند. اگر V زیرفضای مکمل با بعد متناهی نداشته باشد، آنگاه V را با **همبعد (متمم بعد) نامتناهی** در E می‌نامیم. طبق (A .۴ . ۵) ، V دارای همبعد (متمم بعد) **متناهی** در E است، اگر و تنها اگر، E به وسیله اجتماع V و مجموعه‌ای متناهی از بردارها تشکیل شده باشد.

(A .۴ .۱۰) اگر E یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، هر زیر فضای F از E دارای بعد متناهی، و همبعد (متمم بعد) متناهی در E است، و

$$\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E \qquad (A .۴ .۱۰ .۱)$$

1 . Codimension = Коразмерность

زیرا، با به کارگیری (۵ . ۴. A) برای F و پایه‌ای از E ، نتیجه می‌گیریم که، یک زیرفضای مکمل F' از F در E ، با بعد $\dim F' \leq \dim E$ وجود دارد. با تعویض نقش‌های F و F' ، و با استفاده از (۵ . ۳. A) ، نتیجه می‌گیریم که، F نیز دارای بعد متناهی است. اگر $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ پایه‌ای برای F ، و $(x'_j)_{1 \leq j \leq q}$ پایه‌ای برای F' باشد، واضح است که، x_iها و x'_jها با هم تشکیل پایه‌ای برای E می‌دهند.

(۱۱. ۴. A) فرض کنیم E یک فضای برداری با بعد متناهی، و F زیرفضایی از E باشد. در این‌صورت، اگر $\dim F = \dim E$، آنگاه $F = E$.

مطلب فوق مستقیماً از (۱. ۱۰. ۴. A) نتیجه می‌شود.

(۱۲. ۴. A) فرض کنیم M و N دو زیر فضای با بعد متناهی از فضای برداری E باشند. در این صورت، $M + N$ دارای بعد متناهی است ، و داریم :

$$\dim(M+N) + \dim(M \cap N) = \dim M + \dim N \qquad (A .۴ .۱۲ .۱)$$

مجموعه‌ای که از عناصر یک پایه از M و یک پایه از N تشکیل شده باشد، مولدی برای زیرفضای $M + N$ خواهد بود. بنابراین، این زیرفضا دارای بعد متناهی خواهد بود ((۶ . ۴. A) را ببینید). فرض کنیم P (به ترتیب Q) یک زیر فضای مکمل برای $M \cap N$ در M (به ترتیب در N) باشد. واضح است که، $M + N$ مجموع مستقیم $M \cap N$ ، P ، و Q است ((۳. ۳. A) را ببینید) ، و بنابراین ،

$$.\dim(M+N) = \dim(M \cap N) + \dim P + \dim Q$$

اما، با توجه به (۱۰. ۴. A) داریم $\dim P = \dim M - \dim(M \cap N)$ ، و $\dim Q = \dim N - \dim(M \cap N)$، و با این روابط نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۱۳. ۴. A) فرض کنیم M و N دو زیرفضای برداری با همبُعد (متمم بعد) متناهی در فضای برداری E باشند. در این‌صورت، $M \cap N$ دارای همبعد (متمم بُعد) متناهی در E است، و داریم:

$$\operatorname{codim}(M+N) + \operatorname{codim}(M \cap N) = \operatorname{codim} M + \operatorname{codim} N$$

فرض کنیم V یک زیرفضای مکمل از M در E باشد. در این‌صورت، V دارای بعد متناهی است. فرض کنیم $p: E \to V$ افکنش E بروی V با هسته M باشد ((۴. ۳. A) را ببینید). زیرفضای $p(N)$ دارای بعد متناهی است ((۱۰. ۴. A) را ببینید). فرض کنیم $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ پایه‌ای برای $p(N)$ باشد، و برای هر i فرض کنیم $c_i \in N$ چنان باشد که $p(c_i) = b_i$. در این‌صورت، N به‌وسیله $M \cap N$ و c_i ها تولید می‌شود ((۳. ۴. A) را ببینید)، در نتیجه، $M \cap N$ دارای همبعد متناهی در N ، و بنابراین ، دارای همبعد متناهی

در E است. فرض کنیم P (به ترتیب Q) یک زیرفضای مکمل از $M \cap N$ در M (به ترتیب N)، و R یک زیر فضای مکمل از $M + N$ در E باشد. در این‌صورت، E مجموع مستقیم $M \cap N$، P، Q، و R است، بنابراین، داریم :

$$\operatorname{codim}(M \cap N) = \dim P + \dim Q + \dim R \;,$$
$$\operatorname{codim} M = \dim Q + \dim R \;,$$
$$\operatorname{codim} N = \dim P + \dim R \;,$$
$$\operatorname{codim}(M + N) = \dim R \;.$$

از فرمول‌های فوق بلافاصله نتیجه (A .۴ .۱۳ .۱) حاصل می‌شود.

(A . ۴ . ۱۴) یک زیر فضا با همبعد 1 در یک فضای برداری E یک **هایپرپلین**[1] **(ابر صفحه)** در E نامیده می‌شود. اگر E دارای بعد متناهی n باشد، هر هایپرپلین (ابر صفحه) در E دارای بعد $n-1$ می‌باشد ((A .۴ .۱۰ .۱) را ببینید).

(A .۴ .۱۵) اگر H یک هایپرپلین (ابر صفحه) در E باشد، آنگاه، یک فرم خطی $f \neq 0$ روی E موجود است، به‌طوری‌که $f^{-1}(0) = H$. اگر f' یک فرم خطی دیگر روی E باشد، به‌طوری‌که $f'^{-1}(0) = H$، آنگاه، یک اسکالر $\gamma \neq 0$ موجود است به‌طوری‌که $f' = \gamma f$. به عکس، اگر g یک فرم خطی غیر صفر روی E باشد، آنگاه، $g^{-1}(0)$ یک هایپرپلین (ابر صفحه) در E است.

اگر H یک هایپرپلین (ابر صفحه) باشد، برداری مانند $a \notin H$ موجود است، به طوری‌که، E مجموع مستقیم H و Ka است، و بنابراین، هر $x \in E$ را می‌توان به صورت یکتایی به فرم $x = y + f(x)a$ نوشت، که در آن $f(x) \in K$. از آنجا که نگاشت $x \to f(x).a$ خطی است ((A .۳ .۴) را ببینید)، پس نگاشت $x \to f(x)$ نیز خطی خواهد بود ((A .۲ .۳) را ببینید). بنابراین، f یک فرم خطی است، و H هسته آن است ((A .۳ . ۴) را ببینید). اگر f' نگاشت خطی دیگری باشد که $f'^{-1}(0) = H$، و اگر قرار دهیم $f(a) = \alpha$ و $f'(a) = \beta$، در این‌صورت، خواهیم داشت $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$، و $\alpha f' - \beta f$ یک فرم خطی روی E است، که روی H و در a برابر صفر است. بنابراین، $\alpha f' - \beta f$ روی $E = H + Ka$ متحد صفر می‌باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود $f' = \alpha^{-1} \beta f$. بالاخره، اگر $H' = g^{-1}(0)$، آنگاه، برداری مانند $b \notin H'$ موجود خواهد بود، زیرا $g \neq 0$. فرض کنیم $\gamma = g(b) \neq 0$. در این صورت، برای هر $x \in E$، داریم $g(x - \gamma^{-1} g(x) b) = 0$، بنابراین، یک $y \in H'$ موجود است، به طوری‌که $x = y + \gamma^{-1} g(x) b$. این

---

1 . Hyperplane = Гиперплоскость

مطلب نشان می‌دهد که $E = Kb + H'$، و این مجموع، مجموعی مستقیم است، زیرا $b \notin H'$. در نتیجه H' یک هایپرپلین (ابر صفحه) است.

(A .۴ .۱۶) فرض کنیم $u : E \to F$ یک نگاشت خطی باشد. گوییم u **دارای رتبه متناهی** است، اگر بعد $u(E)$ متناهی باشد. در چنین صورتی بعد $u(E)$ را رتبه u نامیده، به علامت $\operatorname{rank}(u)$ نشان می‌دهند. اگر بعد $u(E)$ نامتناهی باشد، گوییم u **دارای رتبه نامتناهی** است.

(A . ۴ .۱۷) نگاشت u دارای رتبه متناهی است، اگر و تنها اگر، $\ker(u)$ دارای همبعد (متمم بعد) متناهی باشد، و در این‌صورت :

$$\operatorname{rank}(u) = \operatorname{codim}_E(\ker(u)) \qquad (A .۴ .۱۷ .۱)$$

اگر $\ker(u)$ دارای یک زیرفضای مکمل مانند V با بعد متناهی باشد، در این‌صورت، تحدید u به V یک ایزومورفیسم از V به‌روی $u(E)$ است، بنابراین، $u(E)$ دارای بعدی متناهی برابر $\dim V$ است. به عکس، اگر $(b_i)_{1\le i\le n}$ پایه‌ای متناهی برای $u(E)$ باشد، و فرض کنیم a_i برداری در E باشد، که در رابطه $u(a_i) = b_i$ $(1 \le i \le n)$ صدق می‌کند، در این‌صورت، E برابر با مجموع مستقیم $\ker(u)$ و Ka_iها خواهد بود ((A .۴ .۳) را ببینید).

(A .۴ .۱۸) فرض کنیم E ، F فضاهای برداری و $u : E \to F$ یک نگاشت خطی باشد.
(*i*) اگر F دارای بعد متناهی باشد، آنگاه $\operatorname{rank}(u) \le \dim F$ و $\operatorname{rank}(u) = \dim F$ اگر و تنها اگر u پوشا باشد.
(*ii*) اگر E دارای بعد متناهی باشد، آنگاه $\operatorname{rank}(u) \le \dim E$ و $\operatorname{rank}(u) = \dim E$ اگر و تنها اگر u یک به یک باشد.

اولین حکم نتیجه مستقیم تعریف $\operatorname{rank}(u)$ و (A .۴ .۱۱) است. برای اثبات (*ii*)، کافی است توجه کنیم که، اگر $\dim E = n$، در این‌صورت، طبق (A .۴ .۱۷) و (A .۴ .۱۰) ، $u^{-1}(0)$ دارای بعد $n - \operatorname{rank}(u)$ خواهد بود.

(A .۴ .۱۹) فرض کنیم E یک فضای برداری با بعد متناهی، و u یک اندومورفیسم روی E باشد. در این صورت، احکام زیر با هم معادلند :

(*i*) u دوسویی است ؛

(*ii*) u یک به یک است ؛

(*iii*) u پوشا است ؛

(iv) $\operatorname{rank}(u) = \dim E$.

این قضیه مستقیماً از (A .۴ .۱۸) نتیجه می‌شود.

(A .۴ .۲۰) فرض کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K ، و K' یک زیر هیأت K باشد، و فرض کنیم $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک پایه از E روی K ، و $(\rho_\lambda)_{\lambda\in J}$ یک پایه برای K باشد، اگر K به عنوان یک فضای برداری روی K' در نظر گرفته شود. دراین‌صورت، خانواده $(\rho_\lambda b_\alpha)$، که در آن (λ, α) مجموعه $J\times I$ را طی می‌کند، یک **پایه برای E روی** K' خواهد بود.

زیرا، واضح است که، E روی K' به وسیله عناصر خانواده $(\rho_\lambda b_\alpha)$ تولید می‌شود. از طرف دیگر، فرض کنیم، برای اسکالرهای $\xi_{\lambda\alpha} \in K'$ ، داشته باشیم $\sum_{\lambda,\alpha} \xi_{\lambda\alpha}\rho_\lambda b_\alpha = 0$. این رابطه را می‌توان به‌صورت $\sum_{\alpha} (\sum_{\lambda} \xi_{\lambda\alpha}\ \rho_\lambda) b_\alpha = 0$ نوشت. چون b_α ها در فضای E روی هیأت K به طور خطی مستقل هستند، برای هر اندیس $\alpha \in I$ خواهیم داشت $\sum_{\lambda} \xi_{\lambda\alpha}\ \rho_\lambda = 0$، و بنابراین، برای هر $(\lambda, \alpha) \in J\times I$ ، $\xi_{\lambda\alpha} = 0$، زیرا، ρ_λها روی هیأت K' به طور خطی مستقل هستند. در نتیجه $\rho_\lambda b_\alpha$ها روی هیأت K' به طور خطی مستقل هستند، و با این مطلب حکم ثابت می‌شود. در حالت خاص :

(A .۴ .۲۱) اگر فضای برداری E روی هیأت K دارای بعد متناهی، و K روی هیأت K' دارای بعد متناهی باشد، آنگاه فضای برداری E روی هیأت K' دارای بعد متناهی خواهد بود، و

$$\dim_{K'} E = \dim_K E \, . \, \dim_{K'} K \qquad (A\ .۴\ .۲۱\ .۱)$$

۵. ماتریس‌ها

(A .۵ .۱) فرض کنیم E، F فضاهای برداری روی هیأت K باشند، و E دارای بعد متناهی n، و $(a_i)_{1\le i\le n}$ یک پایه برای E باشد. بنابراین، E مجموع مستقیم Ka_iها است. طبق (A .۳ .۱) ، تناظری یک به یک بین نگاشت‌های خطی u از E به F و خانواده‌های $(b_i)_{1\le i\le n}$ از n بردار F وجود دارد. این تناظر با رابطه $(1 \le i \le n) b_i = u(a_i)$ تعریف می‌شود. بنابراین، فضای برداری $\operatorname{Hom}(E, F)$ با F^n ایزومورف (هم ریخت ـ یک‌ریخت ـ ایزومورفیک) است.

(A .۵ .۲) فرض کنیم علاوه بر شرایط فوق، F دارای بعد متناهی m ، و $(b_j)_{1\le j\le m}$ یک پایه برای F باشد. در این‌صورت، تناظری یک به یک بین بردارهای $y \in F$ و خانواده‌های $(\eta_j)_{1\le j\le m}$ از m عنصر K

وجود دارد، که با رابطه $y=\sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j$ تعریف می‌شود. در نتیجه، تناظری یک‌به‌یک بین نگاشت‌های خطی $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ و خانواده‌های «دوگانه» (α_{ji}) (با $1\le j\le m$ ، $1\le i\le n$) از عناصر K وجود دارد، که با روابط :

$$u(a_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}b_j \qquad (1\le i\le n) \qquad (\text{A . ۵ .۲ .۱})$$

تعریف می‌شود.

چنین خانواده‌هایی را **ماتریس‌های شامل** m **سطر و** n **ستون** (یا **ماتریس‌های** $m\times n$) روی هیأت K می‌نامند. این ماتریس‌ها یک فضای برداری روی هیأت K تشکیل می‌دهند، که با K^{mn} همریخت می‌باشد. زیرخانواده $(\alpha_{ji})_{1\le i\le n}$**سطر** j ام، و زیر خانواده $(\alpha_{ji})_{1\le j\le m}$ **ستون** i ام ماتریس $(\alpha_{ji})_{1\le j\le m,\,1\le i\le n}$ است. ماتریس $\mathrm{M}(u)=(\alpha_{ji})$ که با رابطه (A . ۵ .۲ .۱) تعریف شده است، **ماتریس** u **نسبت به پایه‌های** (a_i) و (b_j) می‌نامند. اگر u ، u' دو نگاشت خطی از E به F ، و λ یک اسکالر دلخواه باشد، آنگاه :

$$\mathrm{M}(u+u')=\mathrm{M}(u)+\mathrm{M}(u')$$

$$\mathrm{M}(\lambda u)=\lambda\mathrm{M}(u)$$

ماتریس‌ها در هر یک از حالت‌ها نسبت به پایه‌های یکسان (a_i) از E و (b_j) از F در نظر گرفته شده‌اند.

(A . ۵ .۳) حال ، فرض کنیم G یک فضای برداری دیگر روی هیأت K با بعد متناهی ، $(c_k)_{1\le k\le p}$ یک پایه برای G ، و $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ ، و $v:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ دو نگاشت خطی، و $w=v\circ u:\mathrm{E}\to\mathrm{G}$ ترکیب این دو نگاشت، و $\mathrm{M}(u)$ ماتریس u نسبت به پایه‌های (a_i) و (b_j) ، و $\mathrm{M}(v)$ ماتریس v نسبت به پایه‌های (b_j) و (c_k) باشد. $\mathrm{M}(w)$ ماتریس w را نسبت به پایه‌های (a_i) و (c_k) محاسبه می‌کنیم. اگر $\mathrm{M}(u)=(\alpha_{ji})$ ، $\mathrm{M}(v)=(\beta_{kj})$، $\mathrm{M}(w)=(\gamma_{ki})$، در این صورت، طبق تعریف، داریم :

$$w(a_i)=\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ki}c_k=v\Big(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}b_j\Big)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}v(b_j)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}\Big(\sum_{k=1}^{p}\beta_{kj}c_k\Big)$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$\gamma_{ki}=\sum_{j=1}^{m}\beta_{kj}\alpha_{ji} \qquad (\text{A . ۵ .۳ .۱})$$

ماتریس $p\times n$ ، $\mathrm{M}(w)$ را **حاصل‌ضرب** ماتریس $p\times m$ ، $\mathrm{M}(v)$ در ماتریس $m\times n$ ، $\mathrm{M}(u)$ نامیده و می‌نویسیم :

$$\mathrm{M}(v\circ u)=\mathrm{M}(v)\,\mathrm{M}(u)$$

بنابراین، حاصل‌ضرب دو ماتریس از طریق «ضرب سطرهای اولین ماتریس در ستون‌های دومین ماتریس» به‌دست می‌آید.

با داشتن این تعریف‌ها، البته، می‌توان بیشتر نتایجی که برای نگاشت‌های خطی ثابت کردیم، به زبان ماتریسی ترجمه کرد. ما برای انجام دادن این کار توقف نخواهیم کرد. در واقع، در عمل، این کار تقریباً همیشه وقتی مسأله‌ای از جبر ماتریسی با دوباره فرمول‌بندی کردن آن به زبانی به مراتب مناسب‌تر و قابل انعطاف‌تر از نگاشت‌های خطی، مطرح باشد، سودمند است. به عنوان مثال، به زبان ماتریسی، تعبیری ساده از مفاهیمی اساسی مانند **هسته** و **تصویر** یک نگاشت خطی وجود ندارد.

۶. نگاشت‌های چند خطی ، دترمینان‌ها

(A .۶ .۱) فرض کنیم E_1 ، E_2 ، ... ، E_r و F ، $r+1$ فضای برداری روی هیأت K باشند. نگاشت $u : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r \to F$ را $r-$**خطی** می‌نامند، هر گاه «نسبت به هر یک متغیرهایش خطی باشد» : به عبارت دیگر، اگر برای هر $i = 1 , 2 , \ldots , r$ و هر انتخاب $a_j \in E_j$ $(j \neq i)$ نگاشت جزیی :

$$x_i \to u(a_1 , \ldots , a_{i-1}, x_i , a_{i+1} , \ldots , a_r)$$

از E_i به F **خطی** باشد. از مطلب فوق به‌ویژه نتیجه می‌شود که، برای همه انواع انتخاب‌های a_jها $(j \neq i)$ داریم :

$$u(a_1 , \ldots , a_{i-1} , 0 , a_{i+1}, \ldots , a_r) = 0$$

با استقراء روی n ، از تعریف نتیجه می‌شود :

$$u\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_{1j} x_{1j} , \sum_{j=1}^{n} \xi_{2j} x_{2j} , \ldots , \sum_{j=1}^{n} \xi_{rj} x_{rj}\Big)$$
$$= \sum_{(j_i)} \xi_{1j_1} \xi_{2j_2} \ldots \xi_{rj_r} u(x_{1j_1} , x_{2j_2} , \ldots , x_{rj_r}) \qquad (\text{A .۶ .۱ .۱})$$

که در آن مجموع سمت راست روی همه سیستم‌های $(j_1 , \ldots , j_r)$ که $1 \leq j_1 \leq n$ ، ... ، $1 \leq j_r \leq n$ گرفته شده، و ξ_{ij}ها اسکالرهای متعلق به هیأت K ، و x_{ij}ها عناصر $E_i(1 \leq i \leq r$ ، $1 \leq j \leq n)$ هستند.

یک نگاشت $r-$ خطی از $E_1 \times \ldots \times E_r$ به K را یک **فرم** $r-$ **خطی** می‌نامند.

(A .۶ .۲) فرض کنیم هر یک از فضاهای برداری $E_i(1 \leq i \leq r)$ دارای پایه‌ای متناهی مانند $(b_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ باشد. در این‌صورت، از فرمول (A .۶ .۱ .۱) نتیجه می‌شود که، نگاشت r خطی u از $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r$ به F به صورتی یکتا توسط بردارهای $u(b_{1j_1} , b_{2j_2} , \ldots , b_{rj_r}) \in F$ (برای هر $i = 1 , 2 , \ldots , r$ ، $1 \leq j_i \leq n_i$) تعیین می‌شود. به عکس، اگر سیستمی مانند $(c_{j_1 j_2 \ldots j_r})$ از $n_1 n_2 \ldots n_r$ بردار واقع در F داده شده باشد، آنگاه ، نگاشت r خطی یکتایی مانند u از $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_r$ به F موجود است، به طوری‌که، برای هر سیستم

$u(b_{1j_1}, b_{2j_2}, \dots, b_{rj_r}) = c_{j_1 j_2 \dots j_r}$ از اندیس‌ها $(j_1 , j_2 , \dots , j_r)$. برای اثبات این مطلب، کافی است u را طبق فرمول (A . ۶ . ۱ . ۱) **تعریف** کنیم (در آن فرمول n را بزرگتر از همه n_iها، و x_{ij} را برای $j \le n_i$ برابر $x_{ij} = b_{ij}$، و برای $j > n_i$ برابر $x_{ij} = 0$ می‌گیریم). مستقیماً می‌توان ثابت کرد که، نگاشت u که به این صورت تعریف شده است واقعاً $r-$ خطی است.

(A . ۶ . ۳) حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن همه E_iها برابر فضای برداری E باشند. یک نگاشت $r-$ خطی $u : E^r \to F$ را **متناوب** نامند، اگر، وقتی دو اندیس متمایز $i < j$ وجود داشته باشند به طوری‌که، $x_i = x_j$، داشته باشیم $u(x_1 , x_2 , \dots , x_r) = 0$. از این تعریف نتیجه می‌شود که، برای هر $x_i \in E$،

$$0 = u(x_1 ,\dots , x_{i-1} , x_i + x_j , x_{i+1} , \dots , x_{j-1} , x_i + x_j , x_{j+1} , \dots , x_r)$$
$$= u(x_1 ,\dots ,x_i , \dots , x_j , x_r) + u(x_1 , \dots , x_j , \dots , x_i , \dots , x_r)$$

به عبارت دیگر، اگر در u متغیرهای x_i و x_j به یکدیگر تبدیل شوند، مقدار u **تغییر علامت** می‌دهد. از آنجا که تبدیل σ از مجموعه $(1 , 2 , \dots , r)$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از انتقال‌ها نوشت، به سادگی فرمول زیر نتیجه می‌شود :

$$u(x_{\sigma(1)} , x_{\sigma(2)} , \dots , x_{\sigma(r)}) = \varepsilon_\sigma u(x_1 , x_2 , \dots , x_r) \qquad (A . ۶ . ۳ . ۱)$$

که در آن ε_σ **علامت**[1] تبدیل σ است.

اگر E دارای بعد متناهی، و $(b_j)_{1 \le j \le n}$ پایه‌ای برای E باشد، آنگاه، طبق تعریف، $u(b_{j_1} , b_{j_2} , \dots , b_{j_r})$ وقتی دو تا از اندیس‌های j_1 ، ... ، j_r با هم برابر باشند، مساوی صفر است. با توجه به فرمول (A . ۶ . ۳ . ۱) ، مقادیر $u(b_{j_1} , \dots , b_{j_r})$ برای دنباله‌هایی از اندیس‌های متمایز (j_i) از طریق آنهایی که مطابق با دنباله **صعودی** $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ هستند، تعیین می‌شوند. به عکس، اگر به هر دنباله صعودی $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ یک عنصر دلخواه $c_{j_1 j_2 \dots j_r}$ از F نسبت داده شود، در این‌صورت، یک نگاشت $r-$ خطی متناوب یکتای $u : E^r \to F$ موجود است، به‌طوری‌که، وقتی $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ ، $u(b_{j_1} , b_{j_2} , \dots , b_{j_r}) = c_{j_1 j_2 \dots j_r}$. اثبات این گزاره به خواننده واگذار شده است.

(A . ۶ . ۴) حالت خاصی از **فرم‌های $n-$ خطی متناوب** را روی E^n ، که در آن n برابر **بُعد** E است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. نکات فوق نشان می‌دهد که f یک چنین فرمی کاملاً به وسیله مقادیرش $f(b_1 ,b_2 ,\dots ,b_n)$ ، وقتی b_i یک **پایه** دلخواه از E باشد، و f متحد صفر باشد اگر و تنها اگر $f(b_1 ,\dots ,b_n) = 0$ ، کاملاً تعیین می‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که، اگر f_0 یکی از این فرم‌های ناصفر باشد، آنگاه، **هر فرم ، $n-$ خطی متناوب دیگر روی E^n را می‌توان به صورت λf_0 نوشت، که در آن λ یک اسکالر است.** این فرض‌ها و

---

1 . Signature = Сигнатура

نمادها برای بقیه مطالب این بخش به قوت خود باقی می‌ماند.

(A . ۶ . ۵) فرض کنیم u یک اندومورفیسم روی E باشد. در این‌صورت، یک اسکالر یکتای $\det(u)$ موجود است، به‌طوری‌که، اگر f یک فرم n - خطی متناوب روی E^n باشد، آنگاه، برای هر نوع انتخاب $x_i \in E$ $(1 \le i \le n)$،

$$f(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)) = \det(u).\, f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (A.۶.۵.۱)$$

کافی است مطلب فوق را برای f_0 ثابت کنیم، که در این حالت از (A . ۶ . ۴) و از این حقیقت که $(x_1, \dots, x_n) \to f_0(u(x_1), \dots, u(x_n))$ یک فرم n - خطی متناوب روی E^n است، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

کمیت اسکالر $\det(u)$ را **دترمینان** u می‌نامند. به وضوح داریم :

$$\det(1_E) = 1 \qquad (A.۶.۵.۲)$$

(A . ۶ . ۶) اگر u ، v دو اندومورفیسم روی E باشند، آنگاه :

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) \qquad (A.۶.۶.۱)$$

با به‌کارگیری (A . ۶ . ۵) برای فرم n - خطی متناوب :

$$(x_1, \dots, x_n) \to f_0(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

و اندومورفیسم v، به‌دست می‌آوریم :

$$f_0(u(v(x_1)), \dots, u(v(x_n))) = \det(v)\, f_0(u(x_1), \dots, u(x_n))$$
$$= \det(v)\,\det(u)\, f_0(x_1, \dots, x_n)$$

از آنجا که f_0 ناصفر است، فرمول (A . ۶ . ۶ .۱) اکنون از تعریف $\det(u \circ v)$ نتیجه می‌شود.

(A . ۶ .۷) $\det(u) \neq 0$ اگر و تنها اگر u دو سویی باشد.

اگر u دوسویی باشد، u وارونی مانند u^{-1} دارد، به‌طوری که $u \circ u^{-1} = 1_E$. بنابراین، طبق (A . ۶ . ۶) و (A . ۶ . ۵ .۲) ، داریم $\det(u)\det(u^{-1}) = 1$ ، و در نتیجه $\det(u) \neq 0$. اگر u دوسویی نباشد، در این صورت، u یک به یک نیست ((A .۴ .۱۹) را ببینید)، بنابراین، یک $b_1 \neq 0$ موجود است، به طوری‌که $u(b_1) = 0$. پایه‌ای مانند $(b_i)_{1 \le i \le n}$ از E موجود است که شامل b_1 می‌باشد ((A .۴ . ۵) را ببینید)، و داریم $f_0(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ ، حال آنکه $f_0(u(b_1), \dots, u(b_n)) = 0$. در نتیجه $\det(u) = 0$.

(A . ۶ . ۸) فرض کنیم $(b_i)_{1 \le i \le n}$ یک پایه برای E ، $M(u) = (\alpha_{ji})$ ماتریس u نسبت به دو پایه (b_i)و (b_i)

از E (یا ، طبق آنچه معمولاً گفته می‌شود، ماتریس u نسبت به پایه (b_i)) باشد. چون $f_0(b_1,...,b_n) \neq 0$، از فرمول‌های (A . ۶ . ۱ . ۱) و (A . ۶ . ۵ . ۱) نتیجه می‌شود :

$$\det(u) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \qquad (A . ۶ . ۸ . ۱)$$

که در آن σ گروه متقارن $\mathfrak{S}_n$ تشکیل شده از کلیه **تبدیلات** {1 , 2 ,..., n} را می‌پیماید.

دترمینان ماتریس $M(u)$ ، طبق تعریف، دترمینان u است. این مطلب ارتباط بین تئوری ما و تئوری کلاسیک دترمینان‌ها در فرم اصلی و اولیه آن را فراهم می‌سازد. ما نیازی نداریم که از تئوری کلاسیک دترمینان‌ها استفاده کنیم، و کار رونویسی و استنتاج از طریق مفاهیم کهنه و غیرمتداول را به خوانندگانی که به این نوع محاسبات علاقه‌مند هستند، واگذار می‌کنیم. در عمل همیشه ساده‌تر است که به تعریف (A . ۶ . ۵) مراجعه نمود، چنانکه ما از طریق بررسی **مقادیر ویژه** یک اندومورفیسم، شرح خواهیم داد.

(A . ۶ . ۹) تعریف مقادیر ویژه یک اندومورفیسم u همان است که در (۱. ۱. ۱۱) بیان شده است، به‌جز اینکه هیأت C را اکنون می‌توان با یک هیات دلخواه K عوض کرد. مستقیماً از (A . ۶ .۷) نتیجه می‌شود که، مقادیر ویژه **ریشه‌های** معادله :

$$\det(u - \lambda . 1_E) = 0 \qquad (A . ۶ .۹ .۱)$$

(**موسوم به معادله مشخصه** u) هستند. از فرمول (A . ۶ . ۸ . ۱) بلافاصله نتیجه می‌شود که، سمت چپ این معادله یک **چند جمله‌ای درجه** n نسبت به λ ، با ضریب پیشرو $(-1)^n$ است. در زیر ما فرض خواهیم کرد که هیأت K **به‌طور جبری بسته** است، به‌طوری‌که $\det(u - \lambda 1_E)$ به عوامل **خطی** $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$ تجزیه شود.

(A . ۶ .۱۰) **پایه‌ای مانند** $(b_1, \dots, b_n)$ **از** E **موجود است، به طوری‌که :**

$$u(b_i) = \lambda_i b_i + \alpha_{i,\,i+1} b_{i+1} + \dots + \alpha_{in} b_n \qquad (1 \le i \le n) \qquad (A . ۶ .۱۰ .۱)$$

به عکس، اگر $(b_i)_{1 \le i \le n}$ **پایه‌ای با خاصیت فوق باشد، آنگاه :**

$$\det(u - \lambda . 1_E) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

اثبات را با استقراء روی n به سرانجام می‌رسانیم. طبق فرض، برداری مانند $b_n \neq 0$ در E موجود است، به طوری‌که برداری ویژه برای مقدار ویژه λ_n است. به عبارت دیگر، $u(b_n) = \lambda_n b_n$. فضای E را به صورت مجموع مستقیم $K b_n + V$ تجزیه می‌کنیم. فرض کنیم $p : E \to V$ افکنش متناظر با این تجزیه باشد که در (A .۳ . ۴) به آن اشاره شده است. نگاشت $x \to p(u(x))$ یک اندومورفیسم روی V است، و بنابراین، پایه‌ای مانند $(b_1, \dots, b_{n-1})$ از V موجود است، به‌طوری که :

$$p(u(b_i)) = \mu_i b_i + \alpha_{i,\,i+1} b_{i+1} + \dots + \alpha_{i,\,n-1} b_{n-1} \qquad (1 \le i \le n-1)$$

و در نتیجه برای اسکالرهای مناسب α_{in} ،

$$u(b_i) = \mu_i b_i + \alpha_{i,i+1} b_{i+1} + \ldots + \alpha_{i,n-1} b_{n-1} + \alpha_{i,n} b_n \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

اکنون ، داریم :

$$f_0(u(b_1) - \lambda b_1, \ldots, u(b_n) - \lambda b_n)$$

$$= f_0((\mu_1 - \lambda) b_1 + \ldots + \alpha_{1n} b_n, (\mu_2 - \lambda) b_2 + \ldots + \alpha_{2n} b_n, \ldots,$$

$$\ldots, (\mu_{n-1} - \lambda) b_{n-1} + \alpha_{n-1,n} b_n, (\lambda_n - \lambda) b_n)$$

اگر سمت راست را با توجه به (۱. ۱. ۶ . A) بسط داده، از تعریف یک فرم چند خطی استفاده کنیم، به سادگی خواهیم دید که، تنها جمله‌ای که صفر نیست، جمله :

$$(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda) \ldots (\mu_{n-1} - \lambda)(\lambda_n - \lambda) f_0(b_1, \ldots, b_n)$$

است، و بنابراین، $\det(u - \lambda 1_E) = (\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda) \ldots (\mu_{n-1} - \lambda)(\lambda_n - \lambda)$. این مطلب ثابت می‌کند که μ_iها (به جز احتمالاً ترتیب آنها) اسکالرهای λ_1، ... ، λ_{n-1} هستند، و محاسبات فوق دومین حکم گزاره (۱۰. ۶ . A) را نیز ثابت می‌کند.

ماتریس u نسبت به پایه‌ای که در شرایط (۱۰. ۶ . A) صدق کند، ماتریس **پایین مثلثی** می‌نامند.

(۱۱. ۶ . A) برای هر عدد صحیح $k > 0$ ، داریم :

$$\det(u^k - \lambda . 1_E) = (\lambda_1^k - \lambda)(\lambda_2^k - \lambda) \ldots (\lambda_n^k - \lambda)$$

زیرا ، از فرمول‌های (۱. ۱۰. ۶ . A) نتیجه می‌شود:

$$u^k(b_i) = \lambda_i^k b_i + \alpha_{i,i+1}^{(k)} b_{i+1} + \ldots + \alpha_{in}^{(k)} b_n \qquad (1 \leq i \leq n)$$

و بنابراین، از (۱۰. ۶ . A) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

(۱۲. ۶ . A) اندومورفیسم u عنصری پوچ توان از حلقه $\mathrm{End}(E)$ است، اگر و تنها اگر، همه مقادیر ویژه آن برابر صفر باشند.

اگر u پوچ توان باشد، از (۱۱. ۶ . A) نتیجه می‌شود که، همه مقادیر ویژه u برابر 0 هستند. به عکس، اگر همه λ_iها برابر صفر باشند، با استقراء روی k ، از فرمول (۱. ۱۰. ۶ . A) نتیجه می‌شود که، اگر $k < n$ ، $u^k(E) \subset Kb_{k+1} + Kb_{k+2} + \cdots + Kb_n$ ، و بالاخره $u^n(E) = \{0\}$ ، که به معنی $u^n = 0$ می‌باشد.

۷. مینورهای یک دترمینان

(۱. ۷. A) فرض کنیم E یک فضای برداری با بعد n روی هیأت K ، و $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ یک پایه از E باشد.

برای هر زیر مجموعه I از مجموعه اندیس‌های $\mathrm{A} = \{1, 2, \dots, n\}$، فرض کنیم $\mathrm{E(I)}$ زیرفضایی از E باشد که به‌وسیله b_iها با $i \in \mathrm{I}$ تولید شده باشد. در این‌صورت، E مجموع مستقیم $\mathrm{E(I)}$ و $\mathrm{E(A - I)}$ است. اگر $\mathrm{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ، که در آن $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ ، فرض کنیم j_1 بیژکسیونی از K^r بروی $\mathrm{E(I)}$ باشد ، به طوری که $j_1(e_k) = b_{i_k}$ $(1 \le k \le r)$ که در آن $(e_k)_{1 \le k \le r}$ پایه متعارف K^r است ((۴. ۴. A) را ببینید). همچنین، فرض کنیم p_1 نگاشتی خطی از E بروی K^r باشد، به طوری‌که برای $1 \le k \le r$ ، $p_1(b_{i_k}) = e_k$ ، و $p_1(b_j) = 0$ اگر $j \notin \mathrm{I}$. بنابراین، هسته p_1 برابر $\mathrm{E(A-I)}$ است، و تحدید p_1 به $\mathrm{E(I)}$ **بیژکسیونی** از $\mathrm{E(I)}$ بروی K^r است.

(۲. ۷. A) فرض کنیم u یک اندومورفیسم رویE ، و $\mathrm{M}(u) = (\alpha_{ji})$ ماتریس u نسبت به پایه (b_i) باشد ((۸ . ۶ . A) را ببینید). اگر I و J دو زیرمجموعه از مجموعه اندیس A باشد، که r تعداد عناصر آنها با هم برابر است، اندومورفیسم $u_{\mathrm{JI}} = p_{\mathrm{J}} \circ u \circ j_{\mathrm{I}}$ روی K^r را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ماتریس این اندومورفیسم نسبت به پایه متعارف (e_k) از K^r از آن α_{ji}هایی تشکیل شده است که برای آنها $i \in \mathrm{I}$ و $j \in \mathrm{J}$. دترمینان این ماتریس (که به آن $\det(u_{\mathrm{JI}})$ می‌گویند) را **مینور** $\det(u)$ متناظر با پایه $(b_i)_{1 \le i \le n}$ از E و زیر مجموعه‌های I و J از مجموعه اندیس A می‌نامند.

(۳. ۷. A) یک اندومورفیسم u روی E دارای رتبه r است، اگر و تنها اگر، همه مینورهای $s \times s$ آن در $\det(u)$ نسبت به (b_i) وقتی $s > r$ ، برابر صفر باشند، و لااقل یکی از مینورهای $r \times r$ آن ناصفر باشد.

فرض کنیم رتبه u برابر ρ باشد. با نمادهای (۲. ۷. A) ، داریم $u_{\mathrm{JI}}(\mathrm{K}^r) = p_{\mathrm{J}}(u(\mathrm{E(I)}))$ ، در نتیجه، با توجه به (۱۸. ۴. A) ، $\operatorname{rank}(u_{\mathrm{JI}}) = \dim(u_{\mathrm{JI}}(\mathrm{K}^r)) \le \dim(u(\mathrm{E(I)})) \le \dim u(\mathrm{E}) = \operatorname{rank}(u) = \rho$. اگر $r > \rho$ ، آنگاه ، طبق (۱۹. ۴. A) و (۷. ۶ . A) ، خواهیم داشت $\det(u_{\mathrm{JI}}) = 0$. از طرف دیگر، زیر مجموعه‌ای مانند I_0 از A موجود است، به طوری‌که شامل ρ عنصر بوده، و $\mathrm{E}(\mathrm{I}_0)$ مکمل $\ker(u)$ است، و زیرمجموعه‌ای مانند J_0 از A شامل ρ عنصر موجود است، به‌طوری‌که $\mathrm{E}(\mathrm{A}-\mathrm{J}_0)$ مکمل $u(\mathrm{E})$ است ((۵ . ۴. A) را ببینید) . از این مطلب نتیجه می‌شود که ، تحدید u به $\mathrm{E}(\mathrm{I}_0)$ بیژکسیونی از $\mathrm{E}(\mathrm{I}_0)$ به روی $u(\mathrm{E})$ است (۱۹ . ۴ . A را ببینید) ، و تحدید $\mathrm{P}_{\mathrm{J}_0}$ به $u(\mathrm{E})$ یک بیژکسیون از $u(\mathrm{E})$ به‌روی K^ρ است ((۵ . ۳. A) را ببینید). در نتیجه ، نگاشت $u_{\mathrm{J}_0\mathrm{I}_0}$ دوسویی است ، و بنابراین ، $\det(u_{\mathrm{J}_0\mathrm{I}_0}) \ne 0$ ((۷ . ۶ . A) را ببینید). از این نکات بلافاصله گزاره فوق ثابت می‌شود.

(A .۷ .۴) با نمادهای پیشین، اکنون فرض کنیم $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \{1 , 2, \dots , \mathrm{m}\}$ ، و در نتیجه :

$$\mathrm{A} - \mathrm{I} = \mathrm{A} - \mathrm{J} = \{\mathrm{m} + 1 , \dots , \mathrm{n}\}$$

علاوه بر این، فرض کنیم $u_{\mathrm{A-I}\,,\,\mathrm{I}} = 0$ ، به عبارت دیگر، فرض کنیم ماتریس $\mathrm{M}(u)$ به فرم :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ 0 & \mathrm{Z} \end{pmatrix}$$

باشد، که در آن $\mathrm{X} = \mathrm{M}(u_{\mathrm{II}})$ یک ماتریس $m \times m$ ، $\mathrm{Y} = \mathrm{M}(u_{\mathrm{I},\,\mathrm{A-I}})$ یک ماتریس $m\times(n-m)$ ، و $\mathrm{Z} = \mathrm{M}(u_{\mathrm{A-I}\,,\,\mathrm{A-I}})$ یک ماتریس $(n-m)\times(n-m)$ است (نماد 0 برای ماتریس $(n-m)\times m$ با عناصری برابر 0 در نظر گرفته شده است). در این صورت ، داریم :

$$\det(\mathrm{M}(\mathrm{u})) = \det(\mathrm{X})\det(Z) \qquad (\mathrm{A}\ .۷\ .۴\ .۱)$$

زیرا، اگر v اندومورفیسمی روی $\mathrm{E(I)}$ باشد، که X ماتریس آن نسبت پایه $(b_i)_{1\le i\le n}$است، آنگاه، با نمادهای (A . ۶ .۱۰) خواهیم داشت :

$$f(u(b_1),\dots,u(b_m),u(b_{m+1}),\dots,u(b_n)) = f(v(b_1),\dots,v(b_m),u(b_{m+1}),\dots,u(b_n))$$

اما، نگاشت :

$$(x_1,\dots,x_m) \to f(x_1,\dots,x_m,u(b_{m+1}),\dots,u(b_n))$$

یک فرم m – خطی متناوب روی $(\mathrm{E(I)})^{\mathrm{m}}$ است، بنابراین، طبق (A . ۶ . ۵) ،

$$\begin{aligned} & f(v(b_1),\dots,v(b_m),u(b_{m+1}),\dots,u(b_n)) \\ &= (\det \mathrm{X})(f(b_1,\dots,b_m,u(b_{m+1}),\dots,u(b_n)) \end{aligned}$$

برای هر $j \ge m+1$ ، می‌توان نوشت $u(b_j) = c'_j + c''_j$ ، که در آن $c'_j \in \mathrm{E(I)}$ ، $c''_j \in \mathrm{E(A-I)}$. طبق تعریف یک فرم چند خطی متناوب، داریم :

$$f(b_1,\dots,b_m,u(b_{m+1}),\dots,u(b_n)) = f(b_1,\dots,b_m,c''_{m+1},\dots,c''_n)$$

فرض کنیم w اندومورفیسمی روی $\mathrm{E(A-I)}$ باشد، که ماتریس آن نسبت به $(b_j)_{\mathrm{m}+1\le j\le n}$ برابر Z باشد. طبق تعریف، برای $j \in \mathrm{A-I}$ ، $w(b_j) = c''_j$. نگاشت :

$$(x_{\mathrm{m}+1},\dots,x_n) \to f(b_1,\dots,b_m,x_{m+1},\dots,x_n)$$

یک فرم $(n-m)$ خطی متناوب روی $(\mathrm{E(A-I)})^{n-m}$ است. در نتیجه، با روشی مشابه، به‌دست می‌آوریم :

$$f(b_1,\dots,b_m,w(b_{m+1}),\dots,w(b_n)) = (\det \mathrm{Z})f(b_1,\dots,b_n) = \det \mathrm{Z}$$

که رابطه (A .۷ .۴ .۱) را ثابت می‌کند.

با استقراء روی r ، نتیجه می‌گیریم که، برای هر « ماتریس مثلثی از ماتریس‌ها » مانند :

$$U = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1r} \\ 0 & X_{22} & \dots & X_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & X_{rr} \end{pmatrix}$$

که در آن X_{ij} ماتریسی $m_i \times m_j$ است، داریم :

$$\det U = (\det X_{11})(\det X_{22})\dots(\det X_{rr}) \qquad (A\ .\ ۷\ .\ ۴\ .۲)$$

(«محاسبه بلوکی یک دترمینان»).

فهرست مراجع به زبان‌های انگلیسی*، فرانسه و آلمانی

[1] Ahlfors, L., "Complex Analysis. " McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Bachmann, H., "Transfinite Zahlen" (Ergebnisse der Math., Neue Folge, Heft 1). Springer, Berlin, 1955.

[3] Bourbaki, N., "Eléments de Mathématique, " Livre I, "Théorie des Ensembles" (Actual. Scient. Ind., Chaps. I, II, No. 1212; Chap. III, No. 1243). Hermann, Paris, 1954-1956.

[4] Bourbaki, N., "Eléments de Mathématique," Livre II, "Algèbre, " Chap. II (Actual. Scient. Ind., Nos. 1032, 1236, 2nd ed.). Hermann, Paris, 1955.

[5] Bourbaki, N., "Eléments de Mathématique," Livre III, "Topologie générale" (Actual. Scient. Ind., Chaps. I, II, Nos. 858, 1142, 4th ed.; Chap. IX, No. 1045, 2nd ed.; Chap. X, No. 1084, 2nd ed.). Hermann, Paris, 1949-1958.

[6] Bourbaki, N., "Eléments de Mathématique," Livre V, "Espaces vectoriels topologiques" (Actual. Scient. Ind., Chap. I, II, No. 1189, 2nd ed.; Chaps. III-V, No. 1229). Hermann, Paris, 1953-1955.

[7] Cartan, H., "Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure, 1951-1952: Fonctions analytiques et faisceaux analytiques. "

[8] Cartan, H., "Théorie élémentaire des fonctions analytiques, " Hermann, Paris, 1961.

[9] Coddington, E., and Levinson, N., "Theory of Ordinary Differential Equations, " McGraw-Hill, New York, 1955.

[10] Courant, R., and Hilbert, D., "Methoden der mathematischen Physik," Vol. I, 2nd ed. Springer, Berlin, 1931.

[11] Halmos, P., "Finite Dimensional Vector Spaces," 2nd ed. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1958.

[12] Ince, E., "Ordinary Differential Equations," Dover Publications, New York, 1949.

[13] Jacobson, N., "Lectures in Abstract Algebra, " Vol. II, "Linear Algebra, " Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1953.

[14] Kamke, E., "Differentialgleichungen reeller Funktionen. " Akad. Verlag, Leipzig, 1930.

[15] Kelley, J., "General Topology. " Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

[16] Landau, E., "Foundations of Analysis. " Chelsea, New York, 1951.

[17] Springer, G., "Introduction to Riemann Surfaces. " Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1957.

[18] Weil, A., "Introduction à l'étude des variétés kählériennes" (Actual. Scient. Ind., No. 1267). Hermann, Paris, 1958.

[19] Weyl, H., "Die Idee der Riemannschen Fläche, " 3rd ed. Teubner, Stuttgart, 1955.

* این فهرست دقیقاً همان فهرستی است که در چاپ دوم متن کتاب ژان دیودونه به زبان انگلیسی وجود دارد. مترجم .

فهرست مراجع به زبان‌های روسی*، انگلیسی، آلمانی و فرانسه

[1] Ahlfors, L., Complex Analysis. New York, 1953.

[2] Bachmann, H., Transfinite Zahlen, Berlin, 1955.

[3] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. I, Теория множеств, Мир, М. готовится к изданию.

[4] Бурбаки Н., Элементы математики, кн.II, Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра). Физматгиз, М., 1962.

[5] Бурбаки Н., Элементы математики, кн.III,

- Общая топология (Основные структуры). Физматгиз, М., 1958.
- Общая топология (Числа и связанные с ними группы и пространства). Физматгиз, М., 1959.

[6] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. V, Топологические векторные пространства. ИЛ, М., 1959.

[7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, Изд-во МГУ М., 1962,

[8] Cartan H., Seminaire de lEcole Normale Superieure; 1951-1952. Fonctions analytiques et faisceaux analytiques.

[9] Шевалле К. Теория групп Ли, ИЛ, М. т. 1, 1948, т. 2, 1958, т. 3, 1959.

[10] Коддингтон Э . Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1959.

[11] Курант Р.и Гильберт Д , Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат М–Л , 1951.

[12] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия. И Л, М., 1956.

[13] Данфорд Н.и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория ИЛ. М, 1962.

[14] Халмош П, Конечномерные векторные пространства, Физматтиз. М, 1963.

[15] Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ Харьков, 1939.

[16] Jacobson N:, Lectures in Abstract Algebra: 1I, Linear Algebra. New York, 1953.

[17] Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930

---

* این فهرست دقیقاً شامل همان کتاب‌هایی است که در چاپ اول برگردان کتاب ژان دیودونه به زبان روسی وجود دارد. مترجم.

[18] Kelley J., General Topology, New York, 1955.

[19] Ландау Э , Основы анализа. ИЛ. М, 1948.

[20] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956 .

[21] Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М,1960.

[22] Steenrod N. Colloquiuin Lectures, to appear.

[23] Taylor A., Introduction to Functional Analysis, New York. 1955.

[24] Вейль А., Введение в теорию кэллеровских многообразий, ИЛ.М. 1961.

[25] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Stuttgart, 1955.

[26] Уиттекер Э. Т, Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа. Основные операции анализа, Физмггиз, М, ч. I,1962: ч. II,1963.

نمایه فارسی (فهرست الفبایی - فهرست موضوعی- فهرست راهنما)

در این نمایه، و در نمایه‌های انگلیسی- فارسی و روسی - فارسی، که به منظور دسترسی خوانندگان به اصل فرنگی واژه‌ها به کتاب افزوده شده‌اند، اولین عدد به فصل، و دومین عدد به بندی (بخشی) اشاره می‌کند که در آن می‌توان اصطلاح مورد نظر را یافت.

آ

الف

ب

پ

ت

ث

ج

چ

ح

خ

د

ر

ز

ق

هـ

ی

نمایه انگلیسی ــ فارسی

به دلیل اینکه مترجم نتوانست ترجمه واژه‌ها و اصطلاحاتی همچون :

Regulated function , Road , Total subset , Method of gliding hump , Total sequence , Full sequence of positive eigenvalue , ...

در واژه‌نامه‌های ریاضی انگلیسی ــ فارسی که تا پایان سال ۱۳۸۶ در کشورمان چاپ و منتشر شده بودند (از جمله، واژه‌نامه ریاضی و آمار ، انجمن ریاضی ایران، چاپ دوم ۱۳۷۶ ، به عنوان یکی از معتبرترین آنها) بیابد و نیز به دلیل تفاوت‌هایی که به عنوان مثال بین مفهوم ریاضی واژه انگلیسی Road (راه) و واژه‌های ریاضی دیگری مانند Trajectory (مسیر) و Path (مسیر) وجود دارد ، به منظور رفع برخی ابهام‌ها ، علاوه بر نمایه فارسی ، نمایه‌های انگلیسی‌ــ فارسی و روسی ــ فارسی نیز به کتاب افزوده شدند، تا دسترسی خوانندگان به اصل فرنگی واژه‌ها با راحتی بیشتری صورت پذیرد، و در صورت لزوم به جای برخی واژه‌های خارجی یا واژه‌های فارسی نامناسب، معادل‌های فارسی مناسبتری برای آنها انتخاب شوند.

A

G

H

I

Q

R

S

T

U

V

W

Z

کتاب‌هایی چاپ شده از مترجم این کتاب

۱ . منتخب مسائل آنالیز حقیقی

نویسندگان: **بوریس میخائیلوویچ ماکاروف، ماریاگنادیبونا گُلوزینا،**
آندری آلکساندرُویچ لودکین، آناتولی نااوموویچ پودکُریتُف

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: **۱۳۸۴**

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۲۵۰۰ تومان**

مسائل این کتاب که در ده فصل با عنوان‌های: مقدمه، توابع، سری‌ها، انتگرال، رفتار مجانبی، توابع (ادامه)، اندازه و انتگرال لبگ، دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر، تکرارهای تبدیل فاصله تنظیم شده است، می‌تواند مورد استفاده دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی و نیز دانشجویانی که می‌خواهند خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی دانشجویی یا کنکورهای دوره‌های بعد از لیسانس آماده کنند، قرار گرفته، و به تعمیق دانش ریاضی آنها کمک کند.

۲ . درس‌هائی در تکمیل سرفصل‌های آنالیز ریاضی

تألیف: **ولادیمیر ایوانوویچ سوبولف**

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: **۱۳۸۴**

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۳۰۰۰ تومان**

مباحث این کتاب با سرفصل‌های: اصول کلی تئوری مجموعه‌ها، فضاهای متریک، مجموعه‌ها در فضاهای متریک، مجموعه‌های نقطه‌ای روی خط حقیقی و صفحه، انتگرال‌ها روی مجموعه‌های مجرد، اندازه و انتگرال روی خط حقیقی و صفحه، فضاهای لبگ $L(a,b)$ و $L_2(a,b)$ توابع با تغییرات محدود و توابع مطلقاً پیوسته، انتگرال استیلیس، فضاهای خطی نرم‌دار و عملگرهای خطی، عملگرهای کاملاً پیوسته، می‌تواند هم مورد استفاده دانشجویان رشته ریاضی قرار گیرد، و هم برخی خلاءهای آموزشی دانشجویانی که قصد دارند تحصیلات خود را در یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی ادامه دهند، پرنماید.

۳. دوره مختصر تئوری توابع با متغیر حقیقی

تألیف: **بوریس زاخارُویچ وولیخ**

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: **۱۳۸۴**

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۳۵۰۰ تومان**

مباحث این کتاب که در سیزده فصل با عنوان‌های: اطلاعات عمومی درباره مجموعه‌ها؛ مجموعه‌های نقطه‌ای در فضای اقلیدسی، فضاهای متریک، اندازه روی مجموعه‌های مجرد؛ اندازه لبگ در فضای اقلیدسی، توابع اندازه‌پذیر، انتگرال لبگ توابع کراندار، توابع جمع‌پذیر، توابع با مجذور جمع‌پذیر، فضای L^p، انتگرال رادون، توابع مجموعه‌ای مطلقاً پیوسته، انتگرال نامعین لبگ، تنظیم شده است، می‌تواند هم مورد استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و فیزیک قرار گیرد، هم مورد استفاده آن دسته از دانشجویان رشته‌های مهندسی قرار گیرد که برای رفع نیازهای علمی و عملی خود باید با مفاهیم اساسی درس‌های آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی آشنا شوند.

۴. توابع خاص

تألیف: **ویلیام والاس بل**

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: **۱۳۸۶**

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۴۰۰۰ تومان**

بخش عمده‌ای از مطالب این کتاب به توابعی اختصاص یافته است که دارای کاربردهای فراوانی در مسائل مربوط به فیزیک و مهندسی هستند. کتاب برای کسانی طراحی شده است که، اگرچه مجبورند از ریاضیات استفاده کنند، خودشان ریاضی‌دان نیستند، و ممکن است اطلاعاتی بیش از یک دوره مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال در ریاضیات کسب نکرده باشند. فهرست عنوان‌های فصل‌های ده‌گانه این کتاب از این قرار است: حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌ها، توابع گاما و بتا، چند جمله‌ایها و توابع لژاندر، توابع بسل، چند جمله‌ایهای هرمیت، چند جمله‌ایهای لاگر، چند جمله‌ایهای چبیشف، چند جمله‌ایهای گگنباوئر و ژاکوبی، توابع فوق هندسی، توابع خاص دیگر.