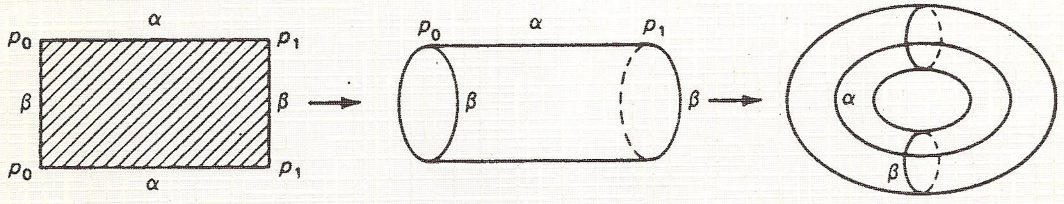
سال پیامبر اعظم محمد (ص)

مبانی توپولوژی

انتشارات
دانشگاه اصفهان
۳۸۶

ب.ت.سیمز



ترجمه :
جعفر زعفرانی

پیشگفتار مؤلف

هدف من از نوشتن کتاب حاضر این بوده است که بررسی جامعی از مفاهیم اساسی دوتوپولوژی مجموعه‌ای و جبری را در دسترس دانشجویان دوره کارشناسی قرار دهم. علیرغم اینکه برخی از کتب توپولوژی مقدماتی فصلی در نظریهٔ هموتوپی دارند ولی در واقع کتابی با خصوصیات فوق وجود ندارد. در سطح کارشناسی ارشد کتب توپولوژی هاکنیگ و یانک و توپولوژی شوبرت چنین بررسی‌های جامعی را تأمین می‌کنند. متأسفانه ، این کتابها برای دانشجویان کارشناسی ابداً مناسب نیستند. امیدوارم که این کتاب شرحی مختصر ("بررسی اجمالی ") از مبانی توپولوژی را برای دانشجوی کارشناسی و نیز دانشجوی تازه‌کار کارشناسی ارشد تدارک دیده ، مشوق مطالعهٔ بیشتری در این زمینه گردیده و آنها را سریعاً برای رسیدن به مرزهای جدید تحقیق ریاضی آماده کند.

در آغاز چند کلمه در مورد محتویات کتاب سخن بگوئیم. بعضی از بخشهای کتاب ستاره‌دار هستند که نشانگر اختیاری بودن آنهاست. بقیهٔ بخشها که بی‌ستاره‌اند به‌نظر من تشکیل‌دهندهٔ هستهٔ اصلی این متن می‌باشند. در عمل نشان داده شده است که این هستهٔ اصلی را می‌توان بخوبی در یک نیمسال و یا در دو ثلث به دانشجویان کارشناسی درس داد. در یک درس یک ثلثی لازم است که فصل ۸ حذف شود. به دانشجویان بااستعداد کارشناسی و شاگردان سال اول کارشناسی ارشد می‌توان در یک نیمسال یا در دو ثلث هم هستهٔ اصلی و هم برخی از مباحث اختیاری نظیر فضاهای یکنواخت ، پیر افشردگی ، فضاهای گستردنی و غیره را تدریس کرد. در صورتی که یک سال تحصیلی تمام در اختیار باشد می‌توان همهٔ کتاب را درس داد و حتی از طریق

مطالعهٔ مقالات تحقیقی خاصی که از کتابنامه انتخاب می‌شوند آن را کاملتر کرد.

سپس مایلم بر اهمیت مثالها و تمرینهای این کتاب تأکید کنم. آشنایی با تعداد زیادی مثال و مثالهای ناقض برای ریاضی‌دان بطور اعم و برای دست‌اندرکاران توپولوژی بطور اخص از واجبات است. همچنین ، تمرینها باید به‌عنوان جزء لاینفکی از کتاب درنظر گرفته شوند ، چراکه از دانشجو می‌خواهند تا در ارائه مفاهیم بیشتر توپولوژیکی و به‌دست آوردن تعمیمهای بامعنایی از مفاهیم عرضه شده در کتاب ، تشریک مساعی کند. بدین ترتیب ، دانشجو تجربهٔ خلاق یادگیری ریاضیات را به‌وسیلهٔ تمرین در آن به‌دست می‌آورد ، روشی که از سوی استاد فقید ر.ل.مور بشدت حمایت می‌شد.

مؤلف از مؤلفین منابع بسیاری که اندیشه‌های این روش خاص ارائه توپولوژی را فراهم آورده‌اند و در کتابنامه فهرست شده‌اند سپاسگزار است. همچنین مراتب امتنان خاص خود را نسبت به د.ا. ساندرسون و آن دسته از دانشجویانم که برای تصحیح نسخهٔ دستنویس نظرات زیادی ابراز داشتند و نیز نسبت به خانم کاترین ری ، خانم دوریس فولن و خانم آن‌بیهل به‌خاطر تایپ ماهرانهٔ دستنویس ، ابراز می‌دارم. علاوه بر این ، مؤلف همکاری دائم و مساعدت ویراستاران و کارکنان شرکت مک‌میلان را ارج می‌گذارد. آخر از همه ، اما نه کمتر از همه ، به خانواده‌ام به‌خاطر آنکه بیداری دیرهنگام و غیبت مدام مرا در حین تهیهٔ این کتاب ناچاراً تحمل کرده‌اند ، دستهٔ گل‌رزی تقدیم می‌کنم.

چنئی ، واشینگتن ب ـ ت ـ س

پیشگفتار مترجم

اگرچه بسیاری از مطالب کتاب حاضر از عمق کافی برخوردار نیست ولی بنظر اینجانب برای بسیاری از دانشجویان کارشناسی که علاقه‌مند به فراگیری مطالب جامعی از جنبه‌های مختلف توپولوژی هستند می‌تواند کتاب مناسبی باشد.

با استفاده از تجربهٔ کلاسهای درسی‌ام و برنامه فعلی توپولوژی دوره‌های کارشناسی می‌توان مطالعه مطالب فصل صفر را بعهدهٔ دانشجویان گذاشت. مطالب فصلهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶ به جزء قسمتهای ستاره‌دار آن را می‌توان تقریباً تدریس نمود. البته اگر دانشجویان قوی‌تر داشته باشیم مطالب ستاره‌دار این کتاب و فصلهای ۷ و ۸ را نیز می‌توان به مطالب فوق اضافه کرد. در ترجمهٔ این کتاب از اظهار نظر بسیاری از دوستان و همکاران سود برده‌ام که لازم می‌دانم از کلیه آنها و بویژه از دوست و همکار ارجمند جناب آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور که فصلهائی از ترجمه کتاب را مطالعه فرمودند و نظریات اصلاحی ارزنده‌ای ابراز داشته‌اند تشکر نمایم. همچنین از اعضای محترم شورای انتشارات دانشگاه اصفهان که با دقت خاص خود اجازه انتشار این کتاب را در مجموعه انتشارات دانشگاه اصفهان داده‌اند، مؤسسهٔ فرهنگی پیام که تایپ کامپیوتری این کتاب را از طرف دانشگاه عهده‌دار بوده، و بالاخره کارکنان چاپخانه دانشگاه اصفهان سپاسگزاری می‌نمایم.

فهرست

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه

فصل ۰

مقدّمه

۰ـ ۱ منطق

در این فصل ، باختصار چند مفهوم اساسی ریاضی را که در دنبالهٔ بحث ما در باب بنیادهای توپولوژی مورد استفاده خواهند بود ، مطرح می‌کنیم. این مفاهیم شامل مجموعه ، رابطه ، تابع ، ترتیب ، شبکه ، گروه ، همریختی ، و اصل موضوع انتخاب می‌باشند. در این بخش ، برخی از مبادی منطق مقدماتی را باختصار بیان می‌کنیم.

منظور از *گزاره* جمله‌ای است با معنی که می‌توان درست یا غلط بودن آن را محقق ساخت؛ مثلاً "امروز باران می‌بارد" و "حسن تلویزیون تماشا می‌کند" گزاره هستند. جملات نظیر "پنجره را باز کن" و "x عددی حقیقی است" گزاره نیستند. گزاره‌ها را با حرف p ، q ، r ، ... نشان خواهیم داد. با استفاده از ***رابطهای منطقی*** می‌توانیم از گزارهٔ ساده p,q گزاره‌های مرکبی به‌صورت زیر به‌دست آوریم.

(۱) *نفی*: "چنین نیست که p" یا "p غلط است". $(\sim p)$

(۲) *فصل*: "p یا q درست است". $(p \vee q)$

(۳) *عطف*: "هر دوی p و q درست هستند". $(p \wedge q)$

(۴) *استلزام*: "هرگاه p درست باشد ، آنگاه q درست است". $(p \rightarrow q)$

(۵) *هم‌ارزی*: "p درست است اگر وفقط اگر q درست باشد". ($p \equiv q$ یا $p \leftrightarrow q$)

ساختن "جدولهای ارزش" پنج گزارهٔ مرکبی که در بالا با استفاده از رابطها بدست آمدند، تمرین مفیدی است. این جدولها با جایگزینی ترکیبات ممکن ارزشهای T و F به‌ازای p و q در هریک از این گزاره‌های مرکب، به‌دست می‌آیند.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q\ [(p \to q) \wedge (q \to p)]$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

لازم است خواننده با ساختن جدولهای ارزش، تحقیق کند که استلزام $p \to q$ همان ارزشهای درستی عکس نقیض‌اش، یعنی $\sim q \to \sim p$ را دارد، و در نتیجه منطقاً هم‌ارز آن است. این مطلب صحت اثبات "به روش برهان خلف" در ریاضیات را ثابت می‌کند. یعنی روشی که در آن نشان می‌دهیم نفی نتیجهٔ مطلوب (حکم) یعنی q، مستلزم نفی فرض ما یعنی p است.

در ریاضیات کراراً گزاره‌هایی را درنظر می‌گیریم که بالفطره "عمومی" یا "وجودی" اند، از قبیل "به‌ازای تمام اعداد حقیقی x و y، $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$" و "اعدادی حقیقی مانند a و b وجود دارند به قسمی که $a^2+b^2=25$". سور "به‌ازای همه (هر)" را با نماد $\forall$ و سور "وجود دارد" را با نماد $\exists$ نشان می‌دهند.

تمرین

۰-۱ . با استفاده از "روش جدول ارزش" هم‌ارزیهای زیرراثابت کنید:

(الف) $\sim\sim p \equiv p$ (ب) $(\sim p \vee q) \equiv p \to q$

(پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ (ت) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

۰ـ۲. $q \to p$ را **عکس** گزارهٔ $p \to q$، و $\sim q \to \sim p$ را **وارون** آن می‌نامیم. نشان دهید که عکس و وارون یک گزاره دارای یک ارزش‌اند و در نتیجه هم‌ارزند.

۰ـ۳. با استفاده از نتایج تمرین ۰ـ۱، نشان دهید که $\sim(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \vee p)$. در منطق ارسطویی گزارهٔ سمت چپ به قانون عدم تناقض و گزاره سمت راست به "قانون نفی شق ثالث" موسوم‌اند.

۰ـ۴. گزارهٔ مرکبی را که قطع نظر از ارزشهای درستی گزاره‌های سادهٔ تشکیل‌دهنده‌اش همواره درست باشد **درستگو** می‌نامند.

نشان دهید که $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ یک درستگو می‌باشد. یعنی استلزام، ترایا است.

۰ـ۵. نشان دهید که اصول استنتاج معتبر زیر درستگو هستند:

(الف) $[(p \to q) \wedge p] \to q$. قیاس استثنائی

(ب) $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$. برهان رفعی

۰ـ۲ مجموعه، رابطه و تابع

منظور ما از "مجموعه" یک گردآیهٔ S از عناصر، موسوم به "نقاط"، می‌باشد که عضویت (ترکیب) آنها خوش تعریف است. با این حال، ما "مجموعه"، یا "نقطه" را دقیقاً تعریف نمی‌کنیم. در هر بحث مشخص، U، مجموعهٔ تمام نقاط مورد نظر، **مجموعهٔ مرجع** آن بحث را تشکیل می‌دهد. اگر p عنصری از S باشد، برای نمایش این منظور، علامت "$p \in S$" را به‌کار می‌بریم؛ و چنانچه p عنصری از S نباشد، از علامت "$p \notin S$" استفاده خواهیم کرد. برای تعریف عضویت در مجموعهٔ S، "علامت مجموعه‌ساز $S=\{x:p(x)\}$" را مفید می‌دانیم؛ این علامت به این معنی است که S

مجموعهٔ تمام عناصر $x\in U$ است که به‌ازای آنها $p(x)$ درست است. به‌عنوان مثال ، هرگاه U مجموعهٔ اعداد صحیح باشد و $S=\{x$: x بر دو قابل قسمت است$\}$، آنگاه S مجموعهٔ اعداد صحیح زوج خواهد بود.

تعریف ۰ـ۱ . $\varnothing=\{x:x\neq x\}$، **مجموعهٔ *تهی (خالی)*** نامیده می‌شود.

تعریف ۰ـ۲ .

(۱) A یک زیرمجموعهٔ B است $(A\subset B)$ اگر و فقط اگر هر عنصر A یک عنصر B نیز باشد.

(۲) $A=B$ اگر و فقط اگر $A\subset B$ و $B\subset A$.

(۳) A یک زیرمجموعهٔ سرهٔ B است $(A\subsetneq B)$ اگر و فقط اگر $A\subset B$ و $A\neq B$.

تعریف ۰ـ۳ . فرض کنیم B,A زیرمجموعه‌هایی از U باشند.

(۱) ***اجتماع*** B,A، مجموعهٔ $A\cup B=\{x:x\in B$ یا $x\in A\}$ است.

(۲) ***مقطع*** A و B، مجموعهٔ $A\cap B=\{x:x\in B$ و $x\in A\}$ است.

(۳) ***ضرب دکارتی*** B,A، مجموعهٔ $A\times B=\{(x,y):x\in A,y\in B\}$ متشکل از تمام جفتهای مرتب به‌صورت (x,y) است.

مفاهیم ذکر شده در تعریفهای ۰ـ۲ و ۰ـ۳ در شکلهای ۰ـ۱ تا ۰ـ۴ با استفاده از "نمودارهای ون" نمایش داده شده‌اند.

مثال ۰ـ۱ . فرض کنید: $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ ، $A=\{۱,۳,۵,۷\}$ ، $B=\{۱,۵,۹\}$ ، و $C=\{۵,۷\}$. در این صورت

(۱) $C\subseteq A$.

(۲) $A\cup B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$.

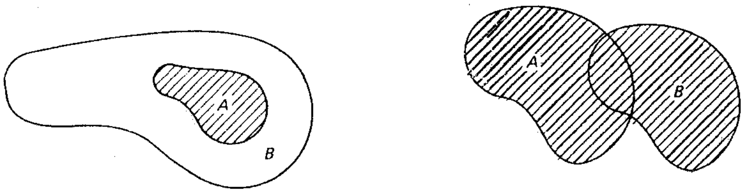
(۳) $B\cup C=\{۱,۵,۷,۹\}$.

(۴) $A\cap B=\{۱,۵\}$.

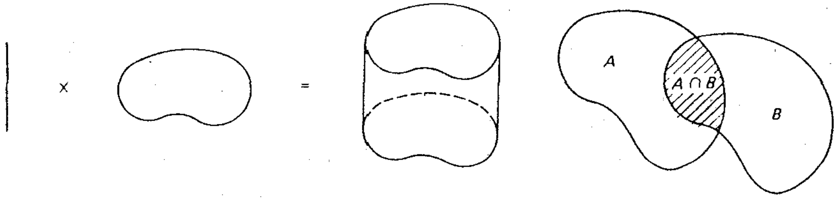
(۵) $A\cap C=\{۵,۷\}$.

(۶) $A\times B=\{(۱,۱),(۱,۵),(۱,۹),(۳,۱),(۳,۵),(۳,۹),(۵,۱),(۵,۵),(۵,۹),(۷,۱),(۷,۵),(۷,۹)\}$

(۷) $B\times A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۱,۷),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵),(۵,۷),(۹,۱),(۹,۳),(۹,۵),(۹,۷)\}$



شکل ۰−۱ و شکل ۰−۲



شکل ۰−۳ و شکل ۰−۴

تعریف ۰ـ۴. هرگاه A و B زیرمجموعه‌هایی از U باشند، آنگاه A و B **مجزا** هستند اگر و فقط اگر $A\cap B=\varnothing$.

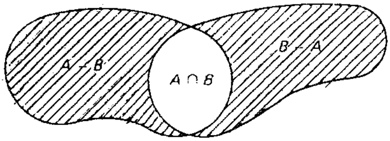
تعریف ۰ـ۵. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از U باشند.

(۱) متمم A مجموعهٔ $U-A=\{x:x\notin A\}$ است.

(۲) متمم نسبی B در A مجموعهٔ $A-B=\{x\in A:x\notin B\}$ است.

در مثال ۰ ـ ۱ متمم A مجموعهٔ $U-A=\{۲,۴,۶,۸,۹,۱۰\}$، و متمم نسبی B در A مجموعهٔ $A-B=\{۳,۷\}$ است.

تذکر: شکل ۰ ـ ۵ نشان می‌دهد که $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$. **مجموعهٔ** $(A-B)\cup(B-A)$ موسوم به ***تفاضل متقارن*** است و با $A\Delta B$ نشان داده می‌شود. بنابراین ، $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$.



شکل ۰ ـ ۵ $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

نظیر آنالیز ، توابع نقش مهمی در توپولوژی ایفا می‌کنند. توابع ، از آنجا که روابطی تک مقداری‌اند ، نوع خاصی از مجموعه‌هایی هستند که در دو تعریف زیر بیان شده‌اند.

تعریف ۰ ـ ۶. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از U باشند.

(۱) $R\subset A\times B$ یک رابطه از A به B است اگر و فقط اگر برای هر $a\in A$ عضوی مانند $b\in B$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $(a,b)\in R$. ***دامنهٔ*** R مجموعهٔ A و **برد** R مجموعه $\{b\in B:(a,b)\in R.a\in A$ به‌ازای یک$\}$ است. هر رابطهٔ از A به A ، یک رابطه در A نامیده می‌شود.

(۲) $R\subset A\times B$ یک رابطه از A ***بروی*** B ***(پوشا)*** است اگر و فقط اگر R رابطه‌ای از A به B باشد به‌قسمی که برد R مجموعهٔ B باشد.

(۳) هرگاه R رابطه‌ای از A به B باشد ، آنگاه وارون R مجموعهٔ $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$ است.

مثال ۰ ـ ۲. فرض کنید I^+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد و $R=\{(m,n):m-n\in I^+\}$ واضح است که R یک رابطه در I^+ است که اعداد صحیح مثبت را بر حسب بزرگی آنها مرتب می‌کند.

تعریف ۰ ـ ۷. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از U باشند.

(۱) $f:A\to B$ یک ***تابع*** از A به B است اگر و فقط اگر f رابطه‌ای از A به B باشد به‌قسمی

که برای هر $a\in A$، عنصر یکتایی مانند $b\in B$ با شرط $(a,b)\in f$ موجود باشد.

(۳) $f:A\to B$ یک تابع از A **بروی** B *(پوشا)* است اگر و فقط اگر f تابعی از A به B باشد به‌قسمی که برد f یعنی $f(A)$، برابر B گردد.

(۳) هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد، آنگاه f **یک به یک** است اگر و فقط اگر $(a,b),(c,b)\in f$ ایجاب کند که $a=c$، و f **دوسویی** است اگر و فقط اگر f یک به یک و پوشا باشد.

(۴) هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد و $C\subset A$، آنگاه **تحدید** f به C $(f|C)$ به‌صورت، $(f|C)(x)=f(x)$ برای هر $x\in C$، و تابع ***شمولی*** $i:C\to A$ به‌صورت، $i(x)=x$ برای هر $x\in C$ تعریف می‌شوند.

(۵) هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد و $C\subset B$، آنگاه مجموعهٔ $f^{-1}(C)=\{x\in A:\exists y\in C, f(x)=y\}$ ***پیشنگارهٔ*** C تحت f نامیده می‌شود.

مثال ۰ ـ ۳. فرض کنیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3\}$، ملاحظه می‌کنیم که $R_1=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ یک تابع ثابت است، $R_2=\{(a,2),(b,3),(c,1)\}$ یک تابع دوسویی است، و $R_3=\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,3),(c,1)\}$ رابطه‌ای از A بروی B می‌باشد که تابع نیست. خواننده می‌تواند زیرمجموعه‌های دیگری از $A\times B$ را بررسی کند و مشخص نماید که کدامیک از آنها تابع (معمولی، پوشا، یک به یک، دوسویی) است، و کدامیک صرفاً رابطه است و بالاخره کدامیک هیچکدام از اینها نیست.

تعریف ۰ ـ ۸. هرگاه $f:A\to B$ و $g:B\to C$ دو تابع باشند، آنگاه **ترکیب** ***(تابع مرکب)*** $g\circ f:A\to C$ تابعی است که به‌صورت $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ برای هر $x\in A$ تعریف شده است.

در مورد گردآیهٔ مفروض از اشیاء اغلب "صف کردن" یا "اندیس گذاری" اشیاء این گردآیه مناسب است. تعریف بعدی ما، بیان سوری این عمل می باشد.

تعریف ۰ ـ ۹. فرض کنیم Λ یک مجموعهٔ ناتهی، و φ تابع تعریف شده توسط معادلهٔ

$\varphi(\alpha)=S_\alpha\subset U$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ باشد. در این صورت گفته می‌شود که گردآیهٔ $\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ توسط **مجموعهٔ *اندیس*** Λ و با استفاده از ***تابع اندیس*** φ اندیس‌دار شده است.

تابعی که دامنهٔ آن I^+، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد، دنباله نامیده می‌شود.

تعریف ۰ـ۱۰.

(۱) یک ***دنباله*** در S تابعی به‌صورت $x:I^+\rightarrow S$ است، و ما از علامت $\{x_n\}_{n\in I^+}$ بجای $\{x(n):n\in I^+\}$ برای نمایش برد x استفاده می‌کنیم.

(۲) هرگاه $x:I^+\rightarrow S$ دنباله‌ای در S باشد، یک ***زیردنبالهٔ*** x تابع مرکبی به‌صورت $x\circ y$ است، که در آن $y:I^+\rightarrow I^+$ و $y(i)>y(j)$ اگر و فقط اگر $i>j$.

مثال ۰ـ۴ فرض کنیم $x:I^+\rightarrow\mathbb{R}$، که در آن $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است، به‌صورت $x_n=x(n)=1/n$ داده شده باشد. آنگاه x یک دنباله است که ما آن را با $\{1/n\}_{n\in I^+}$ بجای صورت صحیح و دقیق $\{<n,1/n>:n\in I^+\}$ نمایش می‌دهیم. هرگاه تابع $y:I^+\rightarrow I^+$ را به‌صورت $y(n)=2n$ برای هر $n\in I^+$ درنظر گیریم، آنگاه تابع مرکب $x\circ y:I^+\rightarrow\mathbb{R}$ زیر دنباله‌ای از x است که آن را به‌صورت $\{1/2n\}_{n\in I}$ نشان می‌دهیم.

ما تابع را به‌عنوان رابطه‌ای تک مقداری از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعریف کردیم. نوع مهم دیگری از رابطه در یک مجموعهٔ S، "رابطهٔ هم‌ارزی" است. یک رابطهٔ هم‌ارزی در S، افرازی از S را، به‌صورت گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های مجزای موسوم به "رده‌های هم‌ارزی"، مشخص می‌کند.

تعریف ۰ـ۱۱. یک ***رابطهٔ هم‌ارزی*** R در یک مجموعهٔ $S\neq\varnothing$ رابطه‌ای در S است به‌قسمی که خواص زیر را دارا باشد:

(۱) ***بازتابی:*** $(x,x)\in R$ برای هر $x\in S$.

(۲) ***متقارن:*** $(x,y)\in R$ ایجاب می‌کند که $(y,x)\in R$ برای هر $x,y\in S$.

(۳) ***ترایایی:*** (x,y) و $(y,z)\in R$ ایجاب می‌کند که $(x,z)\in R$ برای هر $x,y,z\in S$.

به‌ازای هر $x\in S$ مجموعهٔ $\{y\in S:(x,y)\in R\}$ را رده R ـ هم‌ارزی x نامیده و آن را به‌صورت $[x]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۰ـ ۱۲. یک گردآیهٔ $\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S ، یک افراز S است اگر و فقط اگر $S=\cup\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ و $P_\alpha=P_\beta$ یا $P_\alpha\cap P_\beta=\varnothing$ برای هر $P_\alpha,P_\beta\in\mathcal{P}$

قضیهٔ ۰ـ ۱ . هرگاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی در S باشد، $P_x=[x]$ برای هر $x\in S$ ،آنگاه گردآیهٔ $\mathcal{P}=\{P_x:x\in S\}$ یک افراز برای S است.

برهان: چون $\langle x,x\rangle\in R$ لذا برای هر $x\in S$ ، $x\in P_x$. بنابراین $\cup\{P_x:x\in S\}=S$ ، علاوه بر این هرگاه $z\in P_x\cap P_y$ ، آنگاه $\langle x,z\rangle,\langle y,z\rangle\in R$. ولی چون R متقارن است ، لذا $\langle z,y\rangle\in R$. حال ترایائی R ایجاب می‌کند که $\langle x,y\rangle\in R$ و بنابراین $P_x=P_y$. ■

مثال ۰ ـ ۵. فرض کنیم I مجموعهٔ اعداد صحیح ، و $n(\mathrm{mod} p)$ نشانگر باقیماندهٔ تقسیم $n\in I$ بر $p\in I^+$ باشد. برای $m,n\in I^+$ قرار دهیم $\langle m,n\rangle\in R$ اگر و فقط اگر $m(\mathrm{mod}\ p)=n(\mathrm{mod}\ p)$. به‌سهولت می‌توان تحقیق کرد که R یک رابطهٔ هم‌ارزی در I است که به "همنهشتی به پیمانهٔ p " موسوم است. رابطهٔ R مجموعهٔ I را به گردآیهٔ $\{[۰],[۱],...,[p-۱]\}$ از رده‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌کند.

اگر چه سطح پیشرفته‌ای از نظریهٔ اعداد اصلی ترا یا پایان و مطلبی در مورد "توان یک مجموعه " در اینجا ارائه نمی‌شود ، ولی ما احتیاج به تمایز بین مجموعه‌های باپایان و بی‌پایان و همچنین بین مجموعه‌های شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر داریم. تعریف بعدی ما محکهای لازم را در این مورد فراهم می‌کند.

تعریف ۰ـ ۱۳.

(۱) مجموعهٔ S ***باپایان*** است اگر و فقط اگر $S=\varnothing$ و یا برای یک $n\in I^+$ تابعی پوشا به‌صورت $f:\{۱,۲,...,n\}\to S$ موجود باشد. در غیراین صورت ، S ***بی‌پایان*** است.

(۲) مجموعهٔ S ***شمارش‌پذیر بی‌پایان*** است اگر و فقط اگر یک تابع یک به یک و پوشای

$f{:}I^+ \to S$ موجود باشد. عدد اصلی هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر بی پایان را با $\aleph_\circ$ نشان می‌دهیم.

(۳) مجموعهٔ S **شمارش پذیر** است اگر و فقط اگر S باپایان و یا شمارش‌پذیر بی‌پایان باشد. در غیراین صورت S شمارش‌ناپذیر است.

مثال ۰ ـ ۶. مجموعهٔ I^+ شمارش‌پذیر است ، زیرا که تابع همانی $i{:}I^+ \to I^+$ که به‌صورت $i(n)=n$ برای هر $n\in I^+$ تعریف شده ، یک به یک و پوشاست. ولی $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی ، شمارش‌ناپذیر است. در حقیقت زیر مجموعهٔ $S=\{x\in\mathbb{R}\ 0\leq x\leq ۱\}$ شمارش‌ناپذیر است ، زیرا که اگر S شمارش‌پذیر باشد ، می‌توان آن را به‌صورت $S=\{x_۱,x_۲,\ldots,x_n,\ldots\}$ نمایش داد ، که در آن هرکدام از x_n ها دارای بسط دهدهی (بی‌پایان) یکتا به‌صورت $\circ/a_{n۱}a_{n۲}a_{n۳}\ldots a_{nn}\ldots$ است. برای مثال ، بجای بسط دهدهی باپایان ۰/۲۵ از بسط دهدهی بی‌پایان ...۰/۲۴۹۹۹ استفاده می‌کنیم. حال عدد دهدهی بی‌پایان $\circ/a_{۱۱}\ a_{۲۲}\ldots a_{nn}\ldots$ را در نظر می‌گیریم و عدد دهدهی $y=\circ/b_۱\ b_۲\ldots b_n\ldots$ را با شرط $b_n\neq a_{nn}, b_n\neq\circ$ برای هر $n\in I^+$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه با توجه به حذف صفرها و روشی که ما برای ساختن y به‌کار بردیم ، y دارای یک نمایش دهدهی بی‌پایان متمایز از تمام اعضای S است. لذا فرض شمارش‌پذیری S باید غلط باشد. عدد اصلی هر مجموعه‌ای که اعضایش را بتوان در تناظر یک به یک با اعضای S قرارداد ، به c نمایش داده می‌شود. بدین‌ترتیب ، عدد اصلی $\mathbb{R}$ برابر c است. علاوه بر این "فرض پیوستار " معروف مدعی است که هیچ عدد اصلی بین $\aleph_\circ$ و c موجود نیست.

تمرین

۰ـ۶. فرض کنید $\{C_\alpha{:}\alpha\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد. برابریهای زیر را که به قانونهای دمورگن موسوم‌اند ، ثابت کنید:

(الف) $S-\cup\{C_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\cap\{S-C_\alpha{:}\alpha\in\Lambda\}$.

(ب) $S - \cap\{C_\alpha : \alpha\in\Lambda\} = \cup\{S-C_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$.

۰ـ۷. فرض کنید $f:A \to B$ یک تابع و $\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای از زیر مجموعه‌های A باشد. نشان دهید که

(الف) $f(\cup\{A_\alpha : \alpha\in\Lambda\}) = \cup\{f(A_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$.

(ب) $f(\cap\{A_\alpha : \alpha\in\Lambda\}) \subset \cap\{f(A_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$.

۰ـ۸. فرض کنید I^+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت و R یک رابطه در I^+ با خواص زیر باشد.

(الف) هرگاه n زوج و m فرد باشد، آنگاه $<n,m>\notin R$.

(ب) هرگاه m,n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، آنگاه $<n,m>\in R$.

آیا R یک رابطهٔ هم‌ارزی در I^+ است؟ اگر چنین باشد، رده‌های هم‌ارزی را بیان کنید.

۰ـ۹. فرض کنید $\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ افرازی از یک مجموعهٔ S باشد. برای هر $x,y\in S$ قرار دهیم $<x,y>\in R$ اگر و فقط اگر $x,y\in P_\alpha$ برای یک $\alpha\in\Lambda$. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. رده‌های هم‌ارزی آن را بیان کنید.

۰ـ۱۰. فرض کنید $f:A \to B$ پوشا است. نشان دهید که هرگاه A با پایان باشد، آنگاه B با پایان است و هرگاه A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه B نیز شمارش‌پذیر است.

۰ـ۱۱. مجموعهٔ $R^{\#}=\{<p,q>:p,q\in I,\ q\neq 0\}$، با این قرارداد که $<p_1,q_1>=<p_2,q_2>$ اگر و فقط اگر $p_1q_2 = p_2q_1$ به مجموعهٔ اعدادگویا موسوم است. $R^{\#}$ بی‌پایان است، چرا که شامل زیرمجموعهٔ بی‌پایان $I^+=\{<p,1>:\ p\in I^+\}$ است. با نشان دادن اینکه $R^{\#}$ مجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان است، شمارش‌پذیری این مجموعه راثابت کنید.

۰ـ۳ ترتیب، شبکه، و زنجیر

در این بخش، مفاهیم ترتیب جزئی، ترتیب کلی، و خوش ترتیبی را ارائه می‌کنیم که بر اساس آنها دو نوع ساختار جبری، یعنی شبکه و زنجیر، تعریف می‌شوند. سپس، جبر

بولی را به‌صورت شبکه‌ای تعریف می‌کنیم که هم متمم‌دار و هم توزیعپذیر باشد.

تعریف ۰ - ۱۴ . یک ترتیب جزئی $>$ در $S\neq\varnothing$ رابطه‌ای در S است به‌قسمی که دارای خواص زیر باشد :

(۱) ***بازتابی*** : $x\leq x$ برای $x\in S$.

(۲) ***پادمتقارن*** : $x<y$ و $y<x$ ایجاب می‌کند که $x=y$ برای هر $x,y\in S$.

(۳) ***ترایایی*** : $x<y$ و $y<z$ ایجاب می‌کند که $x<z$ برای هر $x,y,z\in S$.

جملهٔ "$x<y$" به‌صورت "x مقدم بر y است" خوانده می‌شود . علاوه بر این می‌نویسیم "$x>y$" یعنی "x مؤخر بر y است" اگر و فقط اگر $y>x$.

مجموعه S با یک ترتیب جزئی را یک مجموعه **جزئاً مرتب** گوئیم .

حال به تعریف مفاهیم عناصر بیشین و کمین ، و کوچکترین و بزرگترین عنصر در یک مجموعهٔ جزئاً مرتب می‌پردازیم .

تعریف ۰ - ۱۵ . فرض کنیم $S\neq\varnothing$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب بوسیله $>$ باشد ، آنگاه

۱) m یک ***عنصر بیشین*** S است اگر و فقط اگر $\nexists x\in S-\{m\}$ به‌قسمی که $m<x$.

۲) m یک ***عنصرکمین*** S است اگر و فقط اگر $\nexists x\in S-\{m\}$ به‌قسمی که $m>x$.

۳) m یک ***بزرگترین عنصر*** S است اگر و فقط اگر $m>x$ برای هر $x\in S$.

۴) m یک ***کوچکترین عنصر*** S است اگر و فقط اگر $m<x$ برای هر $x\in S$.

تذکر . تحقیق کنید که بزرگترین عنصر ، یک عنصر بیشین است وکوچکترین عنصر ، یک عنصر کمین است . همچنین بزرگترین عنصر وکوچکترین عنصر ، در صورت وجود ، یکتا می‌باشند .

مثال ۰ - ۷ . فرض کنیم L مجموعهٔ تمام توابع از $[۰,۱]$ به $[۰,۱]$ باشد ، هرگاه $f,g\in L$ ، آنگاه $f<g$ اگر و فقط اگر $f(x)\leq g(x)$ برای هر $x\in[۰,۱]$. تابع $f(x)\equiv ۰$ کوچکترین عنصر و تابع $f(x)\equiv ۱$ بزرگترین عنصر L است . بعلاوه ، این دو تابع تنها عنصرهای

بیشین و کمین L هستند.

برخی از مجموعه‌های جزئاً مرتب $<L, <>$ دارای ساختاری موسوم به "شبکه" هستند. ولی قبل از تعریف "شبکه"، به تعریف کران‌های بالا و پائین و کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین می‌پردازیم.

تعریف ۰-۱۶. فرض کنیم $<L, <>$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد و $\emptyset \neq A \subset L$.

۱) $b \in L$ یک ***کران بالای*** A است اگر و فقط اگر $a < b$ برای هر $a \in A$.

۲) $b \in L$ یک ***کران پائین*** A است اگر و فقط اگر $b < a$ برای هر $a \in A$.

۳) یک کران بالای A، مانند b، ***کوچکترین کران بالای*** A("sup") است اگر برای هر کران بالای A مانند c، داشته باشیم $b < c$.

۴) یک کران پائین A، مانند b، ***بزرگترین کران پائین*** A("inf") است اگر و فقط اگر برای هر کران پائین A مانند c داشته باشیم $c < b$.

تعریف ۰-۱۷. یک مجموعهٔ جزئاً مرتب $<L, <>$ را شبکه گوئیم اگر و فقط اگر برای هر $a,b \in L$، مجموعهٔ $\{a,b\}$ دارای یک بزرگترین کران پائین به‌صورت $a \wedge b \in L$ و یک کوچکترین کران بالا به‌صورت $a \vee b \in L$ باشد. مجموعهٔ جزئاً مرتب شکل ۰-۶ (ب) یک شبکه است. و حال آنکه مجموعهٔ جزئاً مرتب شکل ۰-۶ (الف) یک شبکه نیست.

(ب) (الف)

(شکل ۰-۶)

مثال ۰-۸. فرض کنیم L مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. هرگاه $a,b \in L$، آنگاه بنابه

تعریف، $a \prec b$ اگر و فقط اگر a یک مقسوم علیه b باشد. برای هر $a,b \in L$ قرار می‌دهیم:

$a \wedge b = \inf\{a,b\} =$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک b,a .

$a \vee b = \sup\{a,b\} =$ کوچکترین مضرب مشترک b,a .

در این صورت، $\langle L, \prec \rangle$ یک شبکه با کوچکترین عنصر ۱ است که دارای بزرگترین عنصر نیست.

حال به تعریف مفهوم "ترتیب کلی" می‌پردازیم و با استفاده از آن دومین ساختار جبری را که به "زنجیر" موسوم است، تعریف می‌کنیم. همچنین، در اینجا مفهوم "خوش ترتیبی" را ارائه می‌کنیم که در بخش بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۰-۱۸. یک ترتیب جزئی $\prec$ در مجموعهٔ S ***ترتیب کلی (کامل، ساده)*** است اگر و فقط اگر $a \prec b$ یا $b \prec a$ برای هر $a,b \in S$.

مجموعهٔ S را با یک ترتیب کلی، یک **مجموعهٔ کلاً مرتب** گوئیم.

تعریف ۰-۱۹. فرض کنیم $\langle S, \prec \rangle$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد و $\varnothing \neq A \subset S$. آنگاه $\langle A, \prec_{|A} \rangle$ یک زنجیر در $\langle S, \prec \rangle$ است اگر و فقط اگر $\prec_{|A}$ یک ترتیب کلی در A باشد.

تذکر. در مثال ۰-۸ زیرمجموعهٔ $A = \{۲^n : n \in I^+\}$ توسط $\prec_{|A}$ کلاً مرتب است. بنابراین، $\langle A, \prec_{|A} \rangle$ یک زنجیر در $\langle L, \prec \rangle$ است.

تعریف ۰-۲۰. یک ترتیب کلی $\prec$ در S، یک خوش ترتیبی در S است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی A از S دارای یک کوچکترین عنصر نسبت به $\prec_{|A}$ باشد. (مثلاً: I^+، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، به‌وسیلهٔ رابطهٔ ترتیبی "کوچکتربودن"، که در مثال ۰-۲ تعریف شده خوش ترتیب است).

این بخش را با تعریف شبکهٔ متمم‌دار و شبکهٔ توزیعپذیر به پایان می‌رسانیم. سپس ***جبر بولی*** رابه‌صورت شبکهٔ متمم‌داری که توزیعپذیر است تعریف می‌کنیم.

تعریف ۰ - ۲۱ . فرض کنید $<L,<>$ یک شبکه با کوچکترین عنصر ۰ و بزرگترین عنصر ۱ باشد . در این صورت $<L,<>$ **متمم‌دار** است اگر و فقط اگر برای هر $a\in L$، $x\in L$ای وجود داشته باشد به‌قسمی که $a\vee x=1$ و $a\wedge x=0$. این عنصر x به **متمم** a موسوم است.

تعریف ۰ - ۲۲ . شبکهٔ $<L,<>$ **توزیعپذیر** است اگر و فقط اگر $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$ برای هر $a,b,c\in L$.

تذکر : شبکهٔ $<L,<>$ در مثال ۰ - ۸ توزیعپذیر است ولی متمم‌دار نیست ، چراکه دارای بزرگترین عنصر نیست . همچنین ، هرگاه تابع $f\wedge g$ را به‌صورت $(f\wedge g)(x)=\inf\{f(x),g(z)\}$ و تابع $f\vee g$ را به‌صورت $(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ برای هر $x\in[0\ ,\ 1]$ در نظر گیریم ، آنگاه $<L,<>$ در مثال ۰ - ۷ یک شبکهٔ توزیعپذیراست که دارای یک بزرگترین عنصر و یک کوچکترین عنصر است . با این حال، خواننده می‌تواند بسادگی ثابت کند که این شبکه نیز متمم‌دار نیست .

تمرین

۰ - ۱۲ . هرگاه $<L,<>$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد و $\varnothing\neq A\subset L$، نشان دهید که $<A,<_{|A}>$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است .

۰ - ۱۳ . هرگاه $<L,<>$ یک شبکه و A یک زیرمجموعه با پایان از L باشد ، آنگاه نشان دهید که A در L دارای یک کوچکترین کران بالا و یک بزرگترین کران پائین است .

۰ - ۱۴ . فرض کنید $S\neq\varnothing$ و $<L,<>$ گردآیهٔ تمام زیرمجموعه‌های S باشد که به‌وسیلهٔ رابطهٔ شمولی مجموعه‌ها ، بطور جزئی مرتب شده‌اند . هرگاه $A,B\in L$ ، آنگاه $A\wedge B=A\cap B$ و $A\vee B=A\cup B$. نشان دهید که $<L,<>$ یک جبر بولی است .

۰ - ۱۵ . فرض کنید L ردهٔ تمام گزاره‌های تصمیم‌پذیر باشد که در آن $p<q$ برای هر

$p,q\in L$ اگر و فقط اگر $p\to q$. علاوه بر این، گزاره‌های $p\vee q, p\wedge q$ را بترتیب بزرگترین کران پائین و کوچکترین کران بالا q,p در نظر می‌گیریم. نشان دهید که $<L,<>$ یک شبکهٔ توزیعپذیر است (در حقیقت، این شبکه یا یک جبر بولی متشکل از دو عنصر $\{1, 0\}$ یکریخت است، و منشأ نام "منطق دو ارزشی" از اینجاست).

۰ - ۴ هم ارزهای اصل انتخاب

در ۱۹۶۳، پ. ج. کوهن نشان داد که هم "اصل انتخاب" و هم "فرض پیوستار"، از اصول نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو- فرانکل مستقل هستند. بنابراین ما آنها را به عنوان دو اصل موضوع اضافی می‌پذیریم، زیرا که در اثبات برخی از قضایای توپولوژی از آنها استفاده می‌شود. در حقیقت، قضیهٔ تیخونف که بنابر آن حاصلضرب هر تعداد از فضاهای توپولوژیک فشرده، فشرده است با اصل انتخاب هم‌ارز است. دو هم‌ارز دیگر اصل انتخاب عبارتند از لم زرن و اصل خوش ترتیبی که ذیلاً بیان می‌شوند. اصل خوش ترتیبی در ساختن اعداد اردینال مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل انتخاب: ***هرگاه $\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیهٔ غیرتهی از مجموعه‌های غیرتهی باشد، آنگاه تابعی مانند $c:\Lambda\to\cup\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $c(\alpha)\in S_\alpha$ برای هر $\alpha\in\Lambda$.***

لم زرن: ***هرگاه $<S,<>$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد به‌قسمی که هر زنجیر در $<S,<>$ دارای یک کران بالا در S باشد، آنگاه S دارای یک عنصر بیشین است.***

اصل خوش ترتیبی: ***هر مجموعه را می‌توان خوش ترتیب کرد.***

قضیهٔ ۰ - ۲. ***اصل انتخاب، لم زرن و اصل خوش ترتیب هم‌ارزند.***

برهان. اثبات این امر که اصل انتخاب، لم زرن را ایجاب می‌کند طولانی است و در اینجا ارائه نمی‌شود. البته می‌توان این اثبات را در کتابهای زیادی، از جمله در کتاب ***توپولوژی مقدماتی*** هال و اسپنسر و یا کتاب ***نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها*** اثر هالموس پیدا

کرد . اثبات این امر که اصل خوش ترتیبی ، اصل انتخاب را ایجاب می‌کند به عنوان تمرین ساده به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود . در زیر ما به اجمال ثابت می‌کنیم که لم تسورن اصل خوش ترتیبی را ایجاب می‌کند .

فرض کنیم که $\varnothing\neq A\subset S$ و $W(A)$ مجموعه تمام خوش ترتیبها در A باشد . اگر قرار دهیم $\mathcal{A}=\{\langle A,w(A)\rangle:A\subset S,w(A)\in W(A)\}$ ، آنگاه می‌توان یک ترتیب جزئی $\prec$ در $\mathcal{A}$ به‌صورت زیر تعریف کرد: برای $\langle A,w(A)\rangle,\langle B,w(B)\rangle\in\mathcal{A}$ ، گوئیم $\langle A,w(A)\rangle\prec\langle B,w(B)\rangle$ اگر و فقط اگر $A\subset B$ ، $w(A)=w(B)|A$ ، و $x\in A$ و $y\in B-A$ ایجاب کند که $\langle x,y\rangle\in w(B)$. ابتدا ملاحظه می‌کنیم $\mathcal{A}\neq\varnothing$ ، زیرا هر ترتیب کلی از یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان A از S یک خوش ترتیبی در A است . هرگاه $\mathcal{C}=\{\langle A_\alpha,w(A_\alpha)\rangle:\alpha\in\Lambda\}$ زنجیر دلخواهی در $\langle A,\prec\rangle$ باشد ، آنگاه قرار می‌دهیم $C=\cup\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ و سپس یک ترتیب جزئی $\prec_C$ در C به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x,y\in C$ ایجاب می‌کند که $\beta,\gamma\in\Lambda$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in A_\beta$ و $y\in A_\gamma$، که در آن $A_\beta\subset A_\gamma$ و $w(A_\beta)=w(A_\gamma)|A_\beta$. اینک قرار می‌دهیم $x\prec_C y$ اگر وفقط اگر $\langle x,y\rangle\in w(A_\gamma)$. ترتیب $\prec_C$ یک خوش‌ترتیبی در C نیز می‌باشد . چراکه $\varnothing\neq D\subset C$ ایجاب می‌کند که به ازای یک α، $D\cap A_\alpha\neq\varnothing$ و کوچکترین عنصر $D\cap A_\alpha$ کوچکترین عنصر D است . از آنجا که $\langle A_\alpha,w(A_\alpha)\rangle\prec\langle C,\prec_C\rangle$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ ، لذا $\langle C,\prec_C\rangle$ یک کران بالای $\mathcal{C}$ است و لم تسورن ایجاب می‌کند که $\mathcal{A}$ دارای یک عضو بیشین $\langle M,w(M)\rangle$ است . حال فرض می‌کنیم $x\in S-M$ وجود دارد و قرار می‌دهیم $N=M\cup\{x\}$. آنگاه یک خوش ترتیبی $w(N)$ در N به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\langle x,y\rangle\in w(N)$ ، برای هر $y\in M$ و $w(N)|M=w(M)$. بنابراین $\langle N,w(N)\rangle\in\mathcal{A}$ و $\langle M,w(M)\rangle\prec\langle N,w(N)\rangle$ ، که متناقض با بیشین بودن $\langle M,w(M)\rangle$ است ، لذا

$.M=S$ ■

تذکر. اگرچه اصل خوش ترتیبی تضمین‌کنندهٔ **وجود** یک خوش ترتیبی برای هر مجموعه است. ولی باید خاطر نشان کرد که تاکنون کسی نتوانسته است یک خوش ترتیبی در اعداد حقیقی **بسازد**.

در مثال ۰ - ۹ از اصل خوش ترتیبی برای ساختن $\mho$، مجموعهٔ اردینالهای شمارش‌پذیر و مجموعهٔ $\mho^* = \mho \cup \{\Omega\}$ استفاده می‌کنیم، که در آن Ω اولین اردینال شمارش‌ناپذیر است.

مثال ۰ - ۹. اصل خوش‌ترتیبی تضمین‌کنندهٔ وجود یک خوش‌ترتیبی $<$ در $\mathbb{R}-\mathrm{I}^+$ است. فرض کنید $\alpha\notin\mathbb{R}$ یک شئی دلخواه ولی ثابت باشد. حال $<$ را به‌صورت زیر به یک خوش ترتیبی در $\mathbb{R}\cup\{\alpha\}$ گسترش می‌دهیم:

(۱) $1<2<3<\ldots<n<\ldots$ برای هر $n\in\mathrm{I}^+$

(۲) به ازای هر $n\in\mathrm{I}^+$، $n<x$ برای هر $x\in\mathbb{R}-\mathrm{I}^+$

(۳) $x<\alpha$ برای هر x در $\mathbb{R}$.

از شرط (۳) نتیجه می‌شود که α دارای تعداد شمارش‌ناپذیری مقدم است. فرض کنیم Ω کوچکترین عنصر $\mathbb{R}\cup\{\alpha\}$ با تعداد شمارش‌پذیری مقدم باشد. مجموعهٔ تمام مقدمهای Ω را به $\mho$ و مجموعهٔ $\mho\cup\{\Omega\}$ را به $\mho^*$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنیم ω کوچکترین عنصر $\mho$ و مؤخر بر هر $n\in\mathrm{I}^+$ باشد. در نتیجه هر عنصر $\mho$ دارای فقط تعداد شمارش‌پذیری مقدم است، ω اولین اردینال بی‌پایان و Ω اولین اردینال شمارش‌ناپذیر است.

این بخش را با قضیه‌ای دربارهٔ اردینالها، که بعداً مورد استفاده قرار می‌گیرد، به پایان می‌رسانیم.

قضیهٔ ۰ - ۳ . هرگاه $A\subset\mho$ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $(\sup A)\in\mho$.

برهان . از آنجا که Ω یک کران بالای A است ، لذا A دارای یک کوچکترین کران بالا مانند b است . فرض کنیم $B=\{x\in\mho : x$ مقدم بر برخی از عنصرهای A باشد یا $x\in A\}$. در این صورت ، B شمارش‌پذیر است چراکه A شمارش‌پذیر است و هر کدام از عناصرش فقط تعداد شمارش‌پذیری مقدم دارد . همچنین ، b یک کران بالای B می‌باشد و هر یک از مقدمهای b در B قرار دارد. اما چون B شمارش‌پذیر است ، لذا $b<\Omega$ و در نتیجه $b\in\mho$. ■

تمرین

۰ - ۱۶ . ثابت کنید که اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود .

۰ - ۱۷ . نشان دهید که مجموعهٔ S بی‌پایان است اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ $\{p_n\}_{n\in I^+}$ از نقاط متمایز S موجود باشد .

۰ - ۵ . گروه ، همریختی و یکریختی

در این آخرین بخش از مقدمه ، چندین مفهوم جبری مورد استفاده در فصلهای ۷ و ۸ راکه در آنها مقدمهٔ کوتاهی بر توپولوژی جبری عرضه می‌شود ، مورد بحث قرار می‌دهیم . این مفاهیم عبارتند از: گروه ، زیرگروه ، همریختی ، یکریختی و گروه خارج‌قسمتها.

تعریف ۰ - ۲۳ . $<G , \circ>$ یک **گروه** است اگر و فقط اگر G یک مجموعهٔ غیرتهی و $\circ: G\times G\to G$ یک تابع باشد به قسمی که:

(۱) $\circ$ شرکتپذیرباشد: $a\circ(a\circ c) = (a\circ b)\circ c$ برای هر $a,b,c\in G$.

(۲) G شامل یک عنصر همانی نسبت به $\circ$ باشد: عنصری مانند $e\in G$ وجود داشته باشد

به قسمی که $a \circ e = e \circ a = a$ برای هر $a \in G$.

(۳) هر $a \in G$ نسبت به $\circ$ دارای یک عنصر وارون در G باشد: برای هر $a \in G$ عنصری مانند $a^{-1} \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

تعریف ۰-۲۴. گروه G را *آبلی (جابجایی)* گوئیم اگر و فقط اگر $a \circ b = b \circ a$ برای هر $a,b \in G$.

تعریف ۰-۲۵. هرگاه $\langle G, \circ \rangle$ یک گروه باشد، $\varnothing \neq H \subset G$، و $\circ|H \times H = *$، آنگاه $\langle H,* \rangle$ یک **زیرگروه** $\langle G, \circ \rangle$ است اگر و فقط اگر $\langle H,* \rangle$ یک گروه باشد. همچنین $\langle H,* \rangle$ یک **زیرگروه سرهٔ** $\langle G, \circ \rangle$ است اگر و فقط اگر $\langle H,* \rangle$ یک زیرگروه $\langle G, \circ \rangle$ باشد و $H \neq \{e\},G$.

قضیهٔ ۰-۴. *هرگاه $\langle G, \circ \rangle$ یک گروه باشد، $\varnothing \neq H \subset G$، و $\circ|H \times H = *$، آنگاه $\langle H,* \rangle$ یک زیرگروه $\langle G,\circ \rangle$ است اگر و فقط اگر $a*b^{-1} \in H$ برای $a,b \in H$.*

برهان. لزوم شرط با توجه به تعریف ۰-۲۳ بدیهی است. اکنون فرض کنیم $a*b^{-1} = H$ برای هر $a,b \in H$. نشان می‌دهیم که $\langle H,* \rangle$ یک گروه، و در نتیجه یک زیر گروه $\langle G, \circ \rangle$ است، آشکار است که $*$ شرکتپذیر است زیرا که $\circ$ شرکتپذیر است. چون $H \neq \varnothing$، لذا عنصری مانند $a \in H$ وجود دارد. بنابراین بنا به فرض $e*a^{-1} = a^{-1}$. چون $\langle H,* \rangle$ در شرایط تعریف ۰-۲۳ صدق می‌کند، در نتیجه یک گروه است. ■

مثال ۰-۱۰. هرگاه $G = I$ (مجموعهٔ اعداد صحیح) و $\circ = +$ (عمل جمع معمولی)، آنگاه $\langle I,+ \rangle$ یک گروه آبلی است. توجه کنید که $e = \circ$ و $n^{-1} = -n$ برای هر $n \in I$. هرگاه $H = E$ (مجموعهٔ اعداد صحیح زوج)، آنگاه $\langle E,+ \rangle$ یک زیرگروه سرهٔ $\langle I,+ \rangle$ است.

مثال ۰-۱۱. اگر G مجموعه اعداد مثبت گویا باشد و $\circ = \circ$ (قانون ضرب معمولی)، آنگاه $\langle G, \circ \rangle$ یک گروه آبلی است، که در آن $e = ۱$ و $(p/q)^{-1} = q/p$ به ازای هر عدد گویای p/q.

تعریف ۰-۲۶.

۱) هرگاه $<G, \circ>$ و $<H, *>$ دو گروه باشند، و $f: G \to H$ یک تابع باشد، آنگاه f یک **همریختی** است اگر و فقط اگر $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ برای هر $a, b \in G$.

۲) هرگاه $<G, \circ>$ و $<H, *>$ دو گروه باشند، e^* عنصر همانی $<H, *>$، و $f: G \to H$ یک **همریختی** باشد، آنگاه $<f(G), * | f(G) \times f(G)>$ یک زیرگروه $<H, *>$ موسوم به **نگارهٔ** $<G, \circ>$ تحت f می‌باشد و $<f^{-1}(e^*), \circ | f^{-1}(e^*) \times f^{-1}(e^*)>$ یک زیرگروه $<G, \circ>$، موسوم به **هستهٔ** $<G, \circ>$ تحت f است.

۳) هرگاه $<G, \circ>$ و $<H, *>$ دو گروه باشند، آنگاه $<G, \circ>$ و $<H, *>$ **یکریخت‌اند** (یعنی $<G, \circ> \cong <H, *>$) اگر و فقط اگر یک همریختی یک به یک $f: G \to H$ پوشا موجود باشد. این چنین همریختی را **یکریختی** گوئیم.

تذکر: به‌عنوان تمرینی ساده می‌توان نشان داد که یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک همریختی $f: G \to H$ پوشا یک یکریختی باشد، این است که هستهٔ G تحت f (که آن را به‌صورت اختصاری "kerf" نشان می‌دهیم) مجموعهٔ تک عضوی $\{e\}$ باشد که در آن e عنصر همانی $<G, \circ>$ است.

تعریف ۰-۲۷.

۱) هرگاه $<G, \circ>$ یک گروه، $\varnothing \neq K \subset G$ به قسمی باشد که هر عنصر G را بتوان به‌صورت یک "$\circ$- ضربی" از عناصر K و وارونهای آنها نوشت، آنگاه K را یک **مجموعهٔ مولدهای** $<G, \circ>$ گوئیم. یک گروه که تنها یک مولد داشته باشد به **گروه دوری** موسوم است. (برای مثال، مجموعهٔ اعداد صحیح با عمل جمع یک گروه دوری است که عدد یک، مولد آن است).

۲) هرگاه K یک مجموعه از مولدهای برای یک گروه آبلی $<G, \circ>$ باشد به‌قسمی که از میان "$\circ$- ضربهای" عناصر K و وارونهایشان، تنها عناصری به‌صورت $x \circ x^{-1}$ برابر

عنصر همانی باشند ، آنگاه $<G , \circ>$ یک ***گروه آبلی آزاد*** است . [برای مثال ، هرگاه Z نشانگر گروه آبلی جمعی اعداد صحیح باشد ، آنگاه مجموع مستقیم $Z\oplus Z$ (تعریف ۰ - ۲۸) یک گروه آبلی آزاد با دو مولد است .

تذکر : هرگاه K یک مجموعه از مولدهای ، یک گروه آزاد $<G,\circ>$ بوده و $<H,*>$ یک گروه دلخواه باشد ، آنگاه یک همریختی $f:G\rightarrow H$ توسط مقادیر f در K کاملاً مشخص می‌گردد. در نتیجه هرگاه $<G , \circ>$ یک گروه آبلی آزاد و $<H,*>$ یک گروه آبلی دلخواه باشد و f به هر عضو K عضوی دلخواه (ولی ثابت) از H را نسبت دهد ، آنگاه f را می‌توان به یک همریختی از G در H گسترش داد .

تعریف ۰ - ۲۸ . هرگاه $<G,+>$ یک گروه آبلی جمعی و $<H_i,+|H_i\times H_i>$ برای هر $i\in\Lambda$ (Λ شمارش‌پذیر است)یک زیرگروه $<G,+>$ باشد به‌قسمی که هر عنصر G را بتوان بطریق یکتا به‌صورت یک مجموع از عناصر H_iها نوشت ، بدین ترتیب که از هر کدام از H_i ها فقط یک عنصر انتخاب شده باشد و تنها تعداد باپایانی از آنها مخالف با صفر (عنصر همانی $<G,+>$) باشند، آنگاه G را **مجموع مستقیم H_i ها** گوئیم و آن را به‌صورت $G=H_1\oplus H_2\oplus ...$ نشان می‌دهیم .

بالاخره بحث مختصر خود را در مورد مفاهیم جبری با تعریف گروه خارج‌قسمتها و بیان قضیهٔ بنیادی یکریختی برای گروهها به پایان آوریم .

تعریف ۰ - ۲۹ . فرض کنیم $<G,+>$ یک گروه آبلی جمعی و $<H,+|H\times H>$ یک زیرگروه $<G,+>$ باشد . G را می‌توان به‌صورت یک خانوادهٔ $\{a+H:a\in G\}$ از زیرمجموعه‌های موسوم به **هم مجموعه‌ها** تجزیه کرد، که در آن برای هر $a\in G$ ، $a+H=\{a+b:b\in H\}$. هرگاه $a+H$ و $b+H$ هم‌مجموعه‌های از G باشند ، آنگاه $(a+H)\oplus(b+H)=(a+b)+H$.تحت جمع هم مجموعه‌ها ، خانوادهٔ هم‌مجموعه‌های H در G تشکیل یک‌گروه G/H می‌دهند که به ***گروه خارج‌قسمتها*** G بر H موسوم است.

قضیهٔ ۰ - ۵ . هرگاه $<G,+>$ **و** $<G',*>$ **دوگروه آبلی جمعی باشند و** $f:G\to G'$ **یک همریختی پوشا باشد و** $kerf=H$**، آنگاه** $G/H\cong G'$.

برهان . تابع $g=G/H\to G'$ را به‌صورت $g(a+H)=f(a)$ برای هر $a\in G$ تعریف می‌کنیم. واضح است که g پوشاست ، چراکه بنابه فرض f پوشاست . همچنین

$$g(b+H)=f(b),g(a+H)=f(a),g[(a+H)\oplus(b+H)]=g[(a+b)+H]=f(a+b)$$

اما از آنجا که f یک همریختی است ، داریم $f(a+b)=f(a)*f(b)$. بنابراین g یک همریختی پوشاست . بعلاوه $kerg=\{a+H:g(a+H)=f(a)=e'\}=kerf=H=e+H$ ($e+H$ هم‌مجموعهٔ همانی است) . در نتیجه ، بنابر تذکر قبلی ، g یکریختی است . ■

تمرین

۰ - **۱۸** . هرگاه $G=\{0,1,2,3,4,5\}$ و $\oplus$ جمع به پیمانهٔ ۶ باشد ، نشان دهید که $<G,\oplus>$ یک گروه است . تمام زیرگروههای سرهٔ آن را مشخص کنید .

۰ - **۱۹** . نشان دهید که یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک همریختی $f:<G,\circ>\to<H,*>$ یکریختی باشد . این است که $kerf=\{e\}$ که در آن e عنصر همانی $<G,\circ>$ است .

۰ - **۲۰** . نشان دهید که هرگاه G یک گروه آبلی جمعی ، و H یک زیرگروه G باشد ، آنگاه یک $a\in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $x,y\in(a+H)$ اگر و فقط اگر $x-y\in H$. با استفاده از آن نشان دهید که $\{a+H=a\in G\}$ یک افراز G است و در نتیجه یک رابطهٔ هم‌ارزی در G مشخص می‌کند .

۰ - **۲۱** . با ذکر تمام جزئیات ، نشان دهید که G/H با عمل جمع هم‌مجموعه‌هایک گروه است (تعریف ۰ - ۲۹ را ملاحظه کنید) .

فصل اول

فضاهای توپولوژیک

۱-۱ توپولوژی

توپولوژی دان ، بشوخی اغلب به‌صورت فردی توصیف می‌شود که قادر به تمیزدادن بین یک نان شیرینی دونات و یک فنجان قهوه نیست ، چراکه این دو شئی از لحاظ توپولوژیکی هم‌ارزند . با یک روش مبهم‌تر (ولی کمتر شهودی) ، می‌توان توپولوژی را به‌عنوان مطالعهٔ خواص توپولوژیک فضاهای توپولوژیک تعریف کرد . ولی برای آنکه این تعریف با معنی باشد ، لازم است که ما قبلاً دو مفهوم " فضای‌توپولوژیک " و " خواص توپولوژیک " را تعریف کنیم . در این فصل این کار را انجام می‌دهیم و از آن فراتر نیز می‌رویم . ما روشهای مختلفی راکه به‌وسیلهٔ آنها یک مجموعه می‌تواند "توپولوژی‌دار " شود (یعنی ، به آن ساختاری ریاضی موسوم به "توپولوژی " نسبت داده شود) ، بیان خواهیم کرد . خواص توپولوژیک و ارثی بودنشان توسط زیر فضاها و فضاهای حاصلضرب مورد بررسی قرار می‌گیرند . علاوه بر این ، چندین نوع خاص از فضاهای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم و باختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم ، از آن جمله‌اند فضاهای متریک ، فضاهای یکنواخت ، فضاهای نزدیکمند و فضاهای

خارج قسمتها .

در این بخش روشهای مختلفی برای "توپولوژی‌دارشدن "یک مجموعهٔ غیرتهی S بیان می‌کنیم . نشان خواهیم داد که $\mathcal{L}$، گردآیهٔ همهٔ توپولوژیهای در یک مجموعهٔ S توسط رابطهٔ شمولی جزئاً مرتب است که کوچکترین عنصر آن $\{\varnothing,S\}$ و بزرگترین عنصر آن $۲^S=\{G:G\subset S\}$ (مجموعهٔ توانی S) است. به‌عنوان تمرین خواننده می‌تواند نشان دهد که $\mathcal{L}$ در حقیقت یک شبکه است ، در صورتی‌که جمع و ضرب شبکه‌ای به‌طور مناسبی تعریف شوند .

تعریف ۱ - ۱ . فرض کنیم $S\neq\varnothing$ و $\tau\subset ۲^S$ (که در آن ۲^S گردآیهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S است) به قسمی باشد که سه اصل زیر برقرار باشند:

(ب ۱) $\varnothing\in\tau$ و $S\in\tau$.

(ب ۲) هرگاه $G_\alpha\in\tau$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ آنگاه $\cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\in\tau$.

(ب ۳) هرگاه $G_i\in\tau$ (به ازای $i=۱,۲,\cdots,n$) ، آنگاه $\bigcap_{i=۱}^{n} G_i\in\tau$

در این صورت τ یک ***توپولوژی*** در S است ، عناصر τ به "مجموعه‌های باز" موسوم‌اند و جفت مرتب $\langle S,\tau\rangle$ را یک ***فضای توپولوژیک*** نامیم .

مثال ۱ - ۱ . فرض کنیم $S=\{a,b,c\}$. خواننده می‌تواند بسهولت تحقیق کند که

$\tau_۱=\{\varnothing,S\}$ ، $\tau_۲=\{\varnothing,\{a\},S\}$ ، $\tau_۳=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},S\}$ ،

$\tau_۴=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},S\}$ ، و $\tau_۵=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},S\}=۲^S$

در اصول (ب ۱)- (ب ۳) صدق می‌کند و بنابراین هر کدام یک توپولوژی در S است . یافتن بقیهٔ زیر گردآیه‌های ۲^S را که در S توپولوژی باشند ، به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم . در S می‌توان ۲۹ توپولوژی تعریف کرد .

تعریف ۱ - ۲ . فرض کنیم $S\neq\varnothing$. کوچکترین توپولوژی در S (یعنی توپولوژی با کمترین عنصر) عبارت است از $\{\varnothing,S\}$ که به ***توپولوژی ناگسسته*** موسوم است . بزرگترین

توپولوژی در S (یعنی توپولوژی با بیشترین عنصر) عبارت است از 2^S که به **توپولوژی گسسته** موسوم است. در مثال ۱ - ۱، τ_1 توپولوژی ناگسسته و τ_5 توپولوژی گسسته (در $S=\{a,b,c\}$) می‌باشند.

قضیهٔ ۱ - ۱. *فرض کنیم $\mathscr{L}$ گردآیهٔ همه توپولوژیهای در $S\neq\varnothing$ و $\subset$ رابطهٔ شمولیت مجموعه‌ها باشد، آنگاه $<\mathscr{L},\subset>$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب با کوچکترین عنصر $\{\varnothing,S\}$ و بزرگترین عنصر 2^S است.*

برهان. چون هر توپولوژی در S یک زیر گردآیهٔ خودش می‌باشد، لذا $\subset$ بازتابی است. همچنین، $\subset$ پادمتقارن است، چون برای هر τ_1 و $\tau_2\in\mathscr{L}$، $\tau_1\subset\tau_2$ و $\tau_2\subset\tau_1$ اگر و فقط اگر $\tau_1=\tau_2$. علاوه بر این، $\subset$ ترایایی است، چون برای هر $\tau_1,\tau_2,\tau_3\in\mathscr{L}$، $\tau_1\subset\tau_2$ و $\tau_2\subset\tau_3$ ایجاب می‌کند که $\tau_1\subset\tau_3$. بالاخره بنابر تعریف ۱ - ۱ برای هر $\tau\in\mathscr{L}$ داریم $\{\varnothing,S\}\subset\tau\subset 2^S$. ■

تعریف ۱ - ۳. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$. آنگاه A را بسته گوئیم اگر و فقط اگر $S-A\in\tau$.

قضیهٔ ۱ - ۲. *فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه*

(س ۱) $\varnothing$ و S بسته‌اند.

(س ۲) هرگاه $A_\alpha\subset S$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ بسته باشد، آنگاه $\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ بسته است.

(س ۳) هرگاه $A_i\subset S$ (به ازای $i=1,2,\dots,n$) بسته باشد، آنگاه $\cup_{i=1}^{n} A_i$ بسته است.

برهان. (س ۱): مجموعه‌های $S,\varnothing$ بسته‌اند، چراکه متممهای نظیرشان، بترتیب S و $\varnothing$ باز (یعنی عناصر τ) هستند.

(س ۲) فرض کنیم $A_\alpha\subset S$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ بسته باشد. در نتیجه $S-A_\alpha\in\tau$ برای هر $\alpha\in\Lambda$. همچنین، بنابر قانون دمورگن (تمرین ۰ - ۶ (ب)) داریم

$S-\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\cup\{S-A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. حال چون $S-A_\alpha\in\tau$ برای هر $\alpha\in\Lambda$، لذا طبق

اصل (ب ۲) داریم $\cup\{S-A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\in\tau$. در نتیجه ، بنابر تعریف ۱ - ۳ مجموعهٔ $\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ بسته است .

(س ۳) فرض کنیم $A_i\subset S$ (برای $i=1,2,\dots,n$) بسته باشد . این امر ایجاب می‌کند که $S-A_i\in\tau$ ، برای $i=1,2,\dots,n$. همچنین بنابر قانون دمورگن (تمرین ۰ - ۶ (الف)) داریم $S-\cup_{i=1}^{n} A_i=\cap_{i=1}^{n} (S-A_i)$.چون $S-A_i\in\tau$ (به ازای $i=1,2,\dots,n$)،لذاطبق‌اصل (ب ۳)داریم $\cap_{i=1}^{n} (S-A_i)\in\tau$ در نتیجه ، $\cup_{i=1}^{n} A_i$ بنابر تعریف ۱ - ۳ بسته است. ■

تذکر. قضیهٔ ۱ - ۲ در حقیقت روش دومی برای تعریف یک توپولوژی در یک مجموعهٔ غیرتهی S به‌دست می‌دهد . بدین طریق که ما با یک گردآیهٔ $\mathcal{F}\subset 2^S$ که در شرایط (س ۱)- (س ۳) از قضیهٔ ۱-۲ صدق می‌کند و عناصرش به "مجموعه‌های بسته" موسوم‌اند، آغاز می‌کنیم . هر گردآیهٔ $\mathcal{F}$ از این نوع ، یک توپولوژی یکتا به‌صورت $\tau=\{G\subset S:S-G\in\mathcal{F}\}$ در S مشخص می‌کند .

تعریف ۱ - ۴. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$. **بستار** A عبارت است از مجموعهٔ $\overline{A}=\cap\{F\subset S:$ بسته است $F,A\subset F\}$.

قضیهٔ ۱ - ۳. *فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$. آنگاه $x\in\overline{A}$ اگر و فقط اگر $x\in G\in\tau$ ایجاب کند که $G\cap A\neq\varnothing$.*

برهان . فرض کنیم $x\in A$ و $x\in G\in\tau$. فرض کنیم $G\cap A=\varnothing$. در نتیجه $A\subset S-G$ و $S-G$ بسته است . بنابراین ، $x\in S-G$ که یک تناقض است . بعکس ، فرض کنیم $x\in G\in\tau$ ایجاب کند $G\cap A\neq\varnothing$. فرض کنیم $x\notin\overline{A}$. در این صورت یک زیرمجموعهٔ بستهٔ F از S موجود است به‌قسمی که $F\supset A$ و $x\notin F$. بنابراین $x\in S-F\in\tau$ و $(S-F)\cap A=\varnothing$ ، که یک تناقض است . ■

نقاط $\overline{A}$ به "نقاط چسبیدهٔ" A موسوم‌اند . آشکار است که $A\subset\overline{A}$ و هرگاه A بسته باشد ، آنگاه $A=\overline{A}$. در غیر این صورت ، $S-A$ شامل حداقل یک نقطهٔ چسبیدهٔ A

است . این چنین نقاطی بعداً مورد بحث قرار می‌گیرند . برخی از خواص "عملگربستار" در قضیه زیر که از کوراتفسکی است ، آورده شده‌اند .

قضیهٔ ۱ - ۴. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $A,B\in 2^S$. آنگاه گزاره‌های زیر درست می‌باشند:

(ک ۱) $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

(ک ۲) $A\subset \overline{A}$.

(ک ۳) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

(ک ۴) $\overline{A\cup B}= \overline{A}\cup \overline{B}$.

برهان. (ک ۱) $\overline{\varnothing}=\cap\{F\subset S:$ و F بسته است: $\varnothing\subset F\}=\varnothing$، چون $\varnothing$ بسته است .

(ک ۲) چون $A\subset\cap\{F\subset S:$ و F بسته است: $A\subset F\}$، لذا $A\subset \overline{A}$.

(ک ۳) بنابر (س ۲) مجموعهٔ $\overline{A}=\cap\{F\subset S:$ و F بسته است: $A\subset F\}$ بسته است و $\overline{A}\subset \overline{A}$. بنابراین $\overline{A}=\cap\{F\subset S:$ و F بسته است: $\overline{A}\subset F\}=\overline{(\overline{A})}$.

(ک ۴) چون بنابر (ک ۲) داریم $A\subset \overline{A}$ و $B\subset \overline{B}$، لذا $A\cup B\subset \overline{A}\cup \overline{B}$. ولی چون بنابر (س ۳) مجموعهٔ $\overline{A}\cup \overline{B}$ بسته است ، لذا $\overline{A\cup B}\subset \overline{A}\cup \overline{B}$. همچنین ، $\overline{A}\cup\overline{B}$ یک مجموعهٔ بسته شامل A و B می‌باشد . بنابر این $\overline{A\cup B}\supset \overline{A}$ و $\overline{A\cup B}\supset \overline{B}$ ، که ایجاب می‌کند که $\overline{A\cup B}\supset \overline{A}\cup \overline{B}$ در نتیجه $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ ■

تذکر. قضیهٔ کوراتفسکی روش سومی برای تعریف توپولوژی در یک مجموعهٔ غیرتهی S به‌دست می‌دهد . برای این منظور فرض کنیم $c:2^S\to 2^S$ عملگربستاری باشد که به هر $A\in 2^S$ یک زیرمجموعهٔ $c(A)=\overline{A}$ از S رانظیر می‌کند به‌قسمی که شرایط (ک ۱) - (ک ۴) برقرارند . یک زیرمجموعهٔ A از S را بسته گوئیم اگر و فقط اگر $c(A)=A$. هر عملگربستاری از این نوع یک توپولوژی یکتا به‌صورت $\tau=\{G\subset S:$ بسته باشد: $S-G\}$ در S مشخص می‌کند .

تمرین

۱ - ۱ . فرض کنید $S\neq\emptyset$ و $<\mathcal{L},\subset>$ مجموعهٔ جزئاً مرتب تمام توپولوژیهای S به‌وسیلهٔ رابطهٔ شمولی مجموعه‌ها باشد . هرگاه $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{L}$ ، آنگاه ضرب شبکه‌ای $\tau_1\wedge\tau_2$ را به‌صورت $\tau_1\cap\tau_2$ و جمع شبکه‌ای $\tau_1\vee\tau_2$ را به‌صورت کوچکترین توپولوژی شامل $\tau_1\cup\tau_2$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که تحت این تعاریف جمع و ضرب شبکه‌ای، مجموعهٔ $<\mathcal{L},\subset>$ یک شبکه است .

۱ - ۲ . $\mathcal{L}$ مجموعهٔ تمام توپولوژیها در $S=\{a,b,c\}$ را در نظر می‌گیریم . آیا شبکهٔ حاصل ، $<\mathcal{L},\subset>$ متمم‌دار است؟ آیا توزیعپذیر است؟

۱ - ۳. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A_\alpha\in 2^S$ برای هر $\alpha\in\Lambda$. نشان دهید که (الف) $\overline{\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}}\subset\cap\{\overline{A}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$.

(ب) $\overline{\cup\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}}\supset\cup\{\overline{A}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. با ذکر مثالهائی نشان دهید که بجای رابطهٔ شمولی در (الف) و (ب) ، در حالت کلی نمی‌توان برابری گذاشت .

۱ - ۴ . فرض کنید S یک مجموعهٔ بی‌پایان باشد و
$\tau=\{G\subset S: \text{با پایان است } S-G\}\cup\{\emptyset\}$. نشان دهید که τ یک توپولوژی در S است .
این توپولوژی به "توپولوژی متمم با پایان" S موسوم است .

۱ - ۵ . **عملگر درونی** در S را به‌صورت تابع $i:2^S\to 2^S$ که در شرایط زیر صدق می‌کند ، تعریف می‌کنیم:

(الف) $i(S)=S$ ، (ب) $i(A)\subset A$ برای هر $A\in 2^S$ ، (پ) $i(i(A))=i(A)$ برای هر $A\in 2^S$ و (ت) $i(A\cap B)=i(A)\cap i(B)$. قرار می‌دهیم $\tau=\{A\subset S:i(A)=A\}$. نشان دهید که τ یک توپولوژی در S است .

۱ - ۲ پایه و زیرپایه

در این بخش ، دو نوع ساختار ، یعنی پایه‌ها و زیرپایه‌ها که یک توپولوژی بر

اساس آنها بنا می‌شود تعریف شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس محکهائی برای هم‌ارزی پایه‌ها و هم ارزی زیرپایه‌ها ارائه می‌گردند. بالاخره ، دو توپولوژی استاندار در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف می‌شوند .

تعریف ۱ - ۵. فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathscr{B}\subset 2^S$. $\mathscr{B}$ را یک **پایه** برای τ گوئیم اگر و فقط اگر گردآیهٔ متشکل از مجموعهٔ تهی و همهٔ زیرمجموعه‌های S که به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ هستند ، برابر τ باشد .

قضیهٔ بعدی شرط لازم و کافی برای آنکه یک زیرگردآیهٔ $\mathscr{B}$ از 2^S یک پایه برای یک توپولوژی τ در S باشد ، ارائه می‌کند .

قضیهٔ ۱ - ۵. ***فرض کنیم $S\neq\varnothing$ و $\mathscr{B}\subset 2^S$. $\mathscr{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی τ در S است اگر و فقط اگر***

(۱) $S=\cup\{B:B\subset\mathscr{B}\}$.

(۲) برای هر $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ و $x\in B_1\cap B_2$ عنصری مانند $B_3\in\mathscr{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{B}$ یک‌پایه برای یک‌توپولوژی τ در S باشد. چون بنابر(ب ۱)، $S\in\tau$ ، لذا $S=\cup\{B:B\in\mathscr{B}\}$. هرگاه $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ و $x\in B_1\cap B_2$ ، آنگاه $B_1,B_2\in\tau$ و بنابر (ب ۳) $B_1\cap B_2\in\tau$. در نتیجه $B_1\cap B_2$ به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ بیان می‌شود که لااقل یکی از آنها باید شامل x باشد . بنابراین (۱) و (۲) لازم می‌باشند .

فرض کنیم ، (۱) و (۲) برقرار باشند . فرض کنیم τ گردآیه‌ای باشد شامل $\varnothing$ و تمام زیرمجموعه‌هائی از S که به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ قابل بیان‌اند . در این صورت $\varnothing\in\tau$ و بنابر (۱) ، $S\in\tau$. در نتیجه (ب ۱) برقرار است . هرگاه $G_\alpha\in\tau$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ و $x\in\cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ ، آنگاه یک $\alpha\in\Lambda$ وجود دارد به قسمی که $x\in G_\alpha$. چون هر G_α اجتماعی از عناصر $\mathscr{B}$ است ، لذا عنصری مانند $B\in\mathscr{B}$ وجود دارد به‌قسمی که

$x\in B\subset G_\alpha \subset \cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. چون هر G_α اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ است ، لذا عنصری مانند $B\in\mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $x\in B\subset G_\alpha \subset \cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. بنابراین $\cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ بیان می‌گردد و لذا متعلق به τ است . بدین‌ترتیب اصل (ب ۲) برقرار است . برای نشان دادن اینکه τ تحت مقطع باپایان بسته است [اصل (ب ۳)] ، تنها کافی است نشان دهیم که مقطع هر دو عنصر از τ به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ بیان می‌گردد . فرض کنیم G_1 و $G_2\in\tau$ و $x\in G_1\cap G_2$. آنگاه عناصری مانند B_1 و $B_2\in\mathcal{B}$ وجود دارند به‌طوری که $x\in B_1\subset G_1$ و $x\in B_2\subset G_2$. در نتیجه $x\in B_1\cap B_2\subset G_1\cap G_2$. شرط (۲) ایجاب می‌کند عنصری مانند $B_3\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_3\subset B_1\cap B_2\subset G_1\cap G_2$. بنابراین $G_1\cap G_2$ را می‌توان به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}$ نوشت و در نتیجه عنصری از τ است . ■

مثال ۱ - ۲. فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $\mathcal{B}_1=\{(a,b):a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$ که در آن $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$. $\mathcal{B}_1$ یک پایه برای یک توپولوژی ξ در $\mathbb{R}$ است که به "توپولوژی بازه‌ای (اقلیدسی)" موسوم است. فرض کنیم $\mathcal{B}_2=\{[a,b):a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$، که در آن $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$. $\mathcal{B}_2$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{L}$ در $\mathbb{R}$ است که به "توپولوژی حد پائین" موسوم است. بطریق مشابه هرگاه $\mathcal{B}_3=\{(a,b]:a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$ را در نظر بگیریم که در آن $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}$، آنگاه $\mathcal{B}_3$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{U}$ در $\mathbb{R}$ است که به "توپولوژی حد بالا" موسوم است . چون $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ و $\langle\mathbb{R},\mathcal{U}\rangle$ دارای خواص توپولوژیک جالب یکسانی هستند ، لذا ما تنها به بررسی خواص $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ خواهیم پرداخت . ولی $\langle\mathbb{R},\xi\rangle$ و $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ ، همانطورکه بعداً خواهیم دید دارای خواص توپولوژیک متفاوت‌اند .

تعریف ۱ - ٦ . فرض کنیم $\mathcal{B}_1\subset 2^S$ و $\mathcal{B}_2\subset 2^S$. آنگاه $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ دو پایهٔ هم‌ارز می‌باشند اگر و فقط اگر هر دوی آنها پایه‌های یک توپولوژی در S باشند . محکی برای

آنکه دو زیرگردآیهٔ 2^S پایه‌های هم‌ارز باشند ، در قضیه بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد .
قضیهٔ ۱ - ۶ . فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}_1$ یک پایهٔ τ باشد، و $\mathcal{B}_2 \subset 2^S$. هرگاه

(۱) $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ ایجاب کند که عنصری مانند $B_2 \in \mathcal{B}_2$ وجود دارد به‌قسمی که $x \in B_2 \subset B_1$، و

(۲) $x \in B_2 \in \mathcal{B}_2$ ایجاب کند که عنصری مانند $B_1 \in \mathcal{B}_1$ وجود دارد به‌قسمی که $x \in B_1 \subset B_2$،

آنگاه $\mathcal{B}_2$ نیز یک پایهٔ τ است و در نتیجه $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ هم‌ارزند .

برهان . فرض کنیم $\varnothing \neq G \in \tau$. بنابراین G بر طبق تعریف ۱ - ۵ ، اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_1$ است . شرط (۱) ایجاب می‌کند که هر عضو $\mathcal{B}_1$ به صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_2$ باشد . بنابراین G اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_2$ است . اکنون فرض کنیم G اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_1$ باشد . شرط (۲) ایجاب می‌کند که هر عنصر $\mathcal{B}_2$ به‌صورت اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_1$ باشد . بنابراین ، G اجتماعی از عناصر $\mathcal{B}_1$ است و در نتیجه $G \in \tau$. پس $\mathcal{B}_2$ یک پایهٔ τ است . ■

مثال ۱ - ۳ . فرض کنیم $S=\{<x,y>: \text{y,x اعداد حقیقی هستند}\}$. دوری بین دو نقطهٔ $<x_1,y_1>$ و $<x_2,y_2>$ در S به‌صورت $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ داده شده است . برای هر $<x_0 , y_0>$ و هر $\varepsilon>0$، فرض کنیم
$S(<x_0 , y_0>;\varepsilon)=\{<x,y>\in S: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\}$. گردآیهٔ
$\mathcal{B}_1=\{S(<x_0 , y_0>;\varepsilon):<x_0 , y_0>\in S, \varepsilon>0\}$ یک پایهٔ توپولوژی ξ^2 در S است که توپولوژی اقلیدسی نامیده می‌شود . از لحاظ هندسی ، $\mathcal{B}_1$ گردآیهٔ تمام قرصهای باز مستدیر در صفحه است . یک پایهٔ هم‌ارز با آن عبارت است از
$\mathcal{B}_2=\{<x,y>\in S: a<x<b, c<y<d: a,b,c,d\in \mathbb{R}\}$ که گردآیهٔ تمام مستطیلهای باز

صفحه است .

تعریف ۱ - ۷ . فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{S}\subset 2^S$. هرگاه $\mathcal{B}$ برابر با گردآیهٔ همه مقاطع با پایان عناصر $\mathcal{S}$ باشد . آنگاه $\mathcal{S}$ را یک **زیرپایهٔ** τ گوئیم اگر و فقط اگر $\mathcal{B}$ یک پایهٔ τ باشد .

قضیهٔ ۱ - ۷ . هرگاه $\mathcal{S}\subset 2^S$ و $\cup\{G:G\in\mathcal{S}\}=S$ ، ***آنگاه*** $\mathcal{S}$ ***زیرپایه‌ای برای یک توپولوژی یکتا در*** S ***است .***

برهان . فرض کنید $\mathcal{B}$ گردآیهٔ همه مقاطع با پایان عناصر $\mathcal{S}$ باشند ، در نتیجه $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}$. فرض کنیم $x\in S$ دلخواه باشد . از آنجا که $\cup\{G:G\in\mathcal{S}\}=S$ ، لذا عنصری مانند $G\in\mathcal{S}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in G$. بنابراین شرط (۱) از قضیه ۱ - ۵ برقرار است . اکنون فرض کنیم B_1 و B_2 دو عضو $\mathcal{B}$ باشند و $x\in B_1\cap B_2$. از آنجا که B_1 و B_2 برابر با مقاطع باپایانی از عناصر $\mathcal{S}$ است و در نتیجه متعلق به $\mathcal{B}$ است . بنابراین شرط (۲) از قضیه ۱-۵ برقرار است ، و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ ، یک توپولوژی یکتا τ در S است . حال با استفاده از تعریف ۱-۷ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{S}$ یک زیرپایهٔ τ است . ■

مثال ۱ - ۴ . فرض کنید $\mathcal{S}=\{(\infty,b):b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$. چون $\mathcal{B}=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},a<b\}\cup\mathcal{S}$ یک پایهٔ توپولوژی بازه‌ای ξ در $\mathbb{R}$ است ، لذا بر طبق تعریف ۱ - ۷ ، $\mathcal{S}$ یک زیرپایهٔ ξ است .

تمرین

۱ - ٦ . ثابت کنید که گردآیه‌های $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ در مثال ۱ - ۲ زیرپایه‌های توپولوژیهایی در $\mathbb{R}$ ، مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشند .

۱ - ۷ . ثابت کنید که گردآیه‌های $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ در مثال ۱ - ۳ دو پایه هم‌ارزند .

۱ - ۸ . فرض کنید $\mathcal{S}_1\subset 2^S$ و $\mathcal{S}_2\subset 2^S$ به‌طوری‌که

$\cup\{G_1 : G_1 \in \mathcal{S}_1\} = S = \cup\{G_2 : G_2 \in \mathcal{S}_2\}$. هرگاه (۱) $x \in G_1 \in \mathcal{S}_1$ ایجاب کند که عنصری مانند $G_2 \in \mathcal{S}_2$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in G_2 \subset G_1$، و (۲) $x \in G_2 \in \mathcal{S}_2$ ایجاب کند که عنصری مانند $G_1 \in \mathcal{S}_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in G_1 \subset G_2$، آنگاه $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ دو زیرپایهٔ هم‌ارزند (یعنی هر دو زیرپایه‌های یک توپولوژی در S می‌باشند) .

۱ - ۳. نقطهٔ حدی، نقطهٔ مرزی و حد دنباله‌ای

در بخش ۱ - ۱ ، مجموعهٔ $\overline{A}$ را هم به‌عنوان بستار A و هم به‌عنوان مجموعهٔ نقاط چسبیدهٔ A در نظر گرفتیم . در این بخش ما سه نوع خاص از نقاط چسبیده یعنی نقاط حدی ، نقاط مرزی و حدهای دنباله‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم .

تعریف ۱ - ۸. فرض کنید $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت $x \in S$ یک ***نقطهٔ حدی*** $A \subset S$ است اگر و فقط اگر $x \in G \in \tau$ ایجاب کند که $(G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.
مجموعهٔ نقاط حدی A ، **مجموعهٔ مشتق** A نامیده می‌شود و آن را به A' نشان می‌دهیم .

تعریف ۱ - ۹. فرض کنید $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد . در این صورت $x \in S$ یک ***نقطهٔ مرزی*** $A \subset S$ است اگر و فقط اگر $x \in G \in \tau$ ایجاب کند که $G \cap A \neq \varnothing$ و $G \cap (S - A) \neq \varnothing$. مجموعهٔ نقاط مرزی A ، **مرز** A نامیده می‌شود و آن را به $B(A)$ نشان می‌دهیم .

قضیهٔ ۱ - ۸. *هرگاه $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset S$، آنگاه*
$\overline{A} = A \cup A' = A \cup B(A)$.

برهان. هرگاه $x \notin \overline{A}$ ، آنگاه عنصری مانند $G \in \tau$ وجود دارد به قسمی که $x \in G$ و $G \cap A = \varnothing$. بنابراین $x \notin A$ و $x \notin A'$ (یعنی $x \notin A \cup A'$) . در نتیجه $A \cup A' \subset \overline{A}$. از طرف دیگر ، $x \notin A \cup A'$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $G \in \tau$ وجود دارد به قسمی که $x \in G$ و $G \cap A = \varnothing$. بنابراین $x \notin \overline{A}$. در نتیجه $\overline{A} \subset A \cup A'$. لذا بر طبق تعریف ۰ - ۲

داریم $\overline{A}=A\cup A'$. خواننده می‌تواند استدلال مشابهی برای نشان دادن برابری $\overline{A}=A\cup B(A)$ بیاورد. ■

مثال ۱ - ۵. این مثال نشان می‌دهد که اگرچه بنا بر قضیهٔ ۱ - ۸، $A\cup A'=A\cup B(A)$ ولی، در حالت کلی $A'\not\subset B(A)$ و $B(A)\not\subset A'$. فرض کنیم $<\mathbb{R},\xi>$ خط حقیقی با توپولوژی بازه‌ای باشد و $A=(\circ,1)\cup\{2\}$. آنگاه $\overline{A}=[\circ,1]\cup\{2\}$ ، $A'=[\circ,1]$ و $B(A)=\{\circ,1,2\}$. $B(A)\not\subset A'$، چراکه $2\notin A'$؛ و $A'\not\subset B(A)$ چراکه هیچ نقطهٔ بازهٔ باز (۱ و ۰) در $B(A)$ قرار ندارد.

تعریف ۱ - ۱۰. هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A,B\in 2^S$، آنگاه A در B چگال است اگر و فقط اگر $B\subset\overline{A}$. در نتیجه $A\subset S$ در S چگال است اگر و فقط اگر $G\cap\overline{A}\neq\emptyset$ برای هر $G\in\tau-\{\emptyset\}$.

تعریف ۱ - ۱۱. هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$، آنگاه A در S ***هیچ‌جاچگال*** است اگر و فقط اگر $\overline{A}$ شامل هیچ عضو $\tau-\{\emptyset\}$ نباشد.

مثال ۱ - ۶. فرض کنید $<\mathbb{R},\xi>$ خط حقیقی با توپولوژی بازه‌ای باشد. مجموعهٔ اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگال است، چراکه هر بازهٔ باز شامل تعداد بی‌پایانی از اعداد گویاست. مجموعهٔ اعداد صحیح در $\mathbb{R}$ هیچ جا چگال است، چراکه شامل هیچ بازهٔ باز و در نتیجه هیچ عنصر $\xi-\{\emptyset\}$ نیست. توجه کنید که هر عدد گویا (و هر عدد حقیقی) یک نقطهٔ حدی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. در حقیقت چون $\mathbb{R}$ بسته است، داریم $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}=\mathbb{R}'$.

تعریف ۱ - ۱۲. هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$، آنگاه A را ***بی‌کاست*** گوئیم اگر و فقط اگر A بسته باشد و $A\subset A'$ (یعنی $\overline{A}=A=A'$).

تعریف ۱ - ۱۳. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله در S باشد، و $x\in S$. گوئیم $\{x_n\}_{n\in I^+}$ ***همگرا*** به x است و می‌نویسیم $x_n\to x$ اگر و فقط اگر $x\in G\in\tau$ ایجاب کند که عضوی مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $x_n\in G$ برای هر

$n\geq N$. دراینصورت x را **حد دنباله** گوئیم و آن را با "$\lim_{n\to\infty}x_n$" نمایش می‌دهیم.
یک دنباله ممکن است برحسب توپولوژی مورد نظر، بدون حد، دارای یک حد یکتا و یا دارای چندین حد باشد. اکنون به ذکر دنباله‌ای که دارای تعداد بی‌پایانی حد است می‌پردازیم.

مثال ۱ - ۷. فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و τ توپولوژی متمم باپایان (تمرین ۱-۴) در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنیم $x_n=n$ برای هر $n\in I^+$. هرگاه $x\in\mathbb{R}$ و $x\in G\in\tau$، آنگاه $\mathbb{R}-G$ باپایان است و در نتیجه عنصری مانند $N\in I^+$ موجود است به قسمی که $x_n\in G$ برای هر $n>N$. در نتیجه $x_n\to x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$.

قضیهٔ زیر نشانگر نحوهٔ ارتباط حدهای دنباله‌ای با نقاط چسبیده و نقاط حدی است.

قضیهٔ ۱ - ۹. *فرض کنیم* $<S,\tau>$ *یک فضای توپولوژیک باشد،* $A\subset S$ و $x\in S$.

(۱) هرگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ ***دنباله‌ای در*** A ***باشد به قسمی که*** $x_n\to x$، ***آنگاه*** $x\in\bar{A}$.

(۲) هرگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ ***دنباله‌ای از نقاط متمایز در*** A ***باشد به‌قسمی که*** $x_n\to x$، ***آنگاه*** $x\in A'$.

برهان.

(۱) فرض کنید $\{x_n\}_{n\in I^+}$ دنباله‌ای در A همگرا به x باشد و $x\in G\in\tau$. بر طبق تعریف ۱ - ۱۳، عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به قسمی که $x_n\in A$ برای هر $n\geq N$. چون $x_n\in A$ برای هر $n\in I^+$، لذا $G\cap A\neq\varnothing$ و بنابر قضیه ۱ - ۳، $x\in\bar{A}$.

برهان (۲) به‌عنوان تمرین به‌عهده خواننده است. ■

در حالت کلی، لازم نیست که حدهای دنباله‌ای نقاط حدی باشند و نقاط حدی نیز لازم نیست که حدهای دنباله‌ای باشند. مثال زیر نشانگر این مطلب است.

مثال ۱ - ۸. فرض کنیم $S=\{a,b,c\}$ و $\tau=\{\varnothing,\{a\},\{c\},S\}$. فرض کنیم $x_1=a$ و $x_2=b$ و $x_n=c$ برای هر $n\geq 3$. واضح است که $x_n\to c$، ولی $c\notin\{a,b,c\}'$، چراکه $c\in\{c\}\in\tau$ و

$\varnothing=\{a,b,c\}\cap(\{c\}-\{c\})$. علاوه‌بر این بنابر تعریف ۱ - ۸ ، $a,b\in\{a,b,c\}'$ ولی $x_n \to a$ و $x_n \to b$ ، چرا که $a,b\in\{a,b\}\in\tau$ و ، $x_n\notin\{a,b\}$ برای $n\geq ۳$.

تمرین

۱ - ۹. فرض کنید $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset S$. نشان دهید که A بسته است اگر و فقط اگر $A'\subset A$.

۱ - ۱۰. فرض کنید $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subset B\subset S$. نشان دهید که $A'\subset B'$.

۱ - ۱۱. قضیهٔ ۱ - ۹ (۲) را ثابت کنید.

۱ - ۱۲. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $\tau=\{\varnothing\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\}$. ثابت کنید که τ یک توپولوژی در $\mathbb{R}$ است و در هر یک از حالات زیر، همگرایی و واگرایی دنبالهٔ داده شده را در $\langle\mathbb{R},\tau\rangle$ را تحقیق کنید:

(الف) هرگاه $x_n=n$ برای هر $n\in I^+$، آنگاه $x_n\to x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$.

(ب) هرگاه $x_n=-n$ برای هر $n\in I^+$، آنگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ در $\mathbb{R}$ همگرا نیست.

(پ) هرگاه $x_n=(-۱)^n$ برای هر $n\in I^+$، آنگاه $x_n\to x$ برای هر $x\leq -۱$.

۱ - ۱۳. هرگاه $p\geq ۲$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه یک "عدد گویای $p-p$ ای" عددی حقیقی به‌صورت $r=k.p^{-n}$ است که در آن k یک عدد صحیح غیرمنفی و n عدد صحیح مثبتی است. نشان دهید که مجموعهٔ همه اعداد گویای $p-p$ ای $I^۱=[\,۰\,,\,۱]$ در $I^۱$ چگال است.

۱ - ۱۴. مجموعهٔ سه سه‌ای کانتور K عبارت است از مجموعهٔ تمام $x\in[\,۰\,,\,۱]$ با بسط سه سه‌ای به‌صورت $x=t_۱ ۳^{-۱}+t_۲ ۳^{-۲}+t_n ۳^{-n}+\dots$ که در آن $t_n\neq ۱$ برای هر $n\in I^+$.
بدین‌ترتیب K را می‌توان به‌صورت زیرمجموعه‌ای از $[\,۰\,,\,۱]$ تصور کرد که از حذف

پیایی تمامی بازه‌های باز میانی در تقسیم هر بازه به سه بخش برابر به‌دست می‌آید. شکل ۱ - ۱ نشانگر دو مرحلهٔ اول ساختن هندسی K است. نشان دهید که K شمارش‌ناپذیر بی‌کاست و در [۱ , ۰] هیچ جا چگال است.

شکل ۱-۱

۱ - ۴. پیوستگی، همانریختی و خواص توپولوژیک

در این بخش پیوستگی یک تابع از یک فضای توپولوژیک به یک فضای دیگر را مورد بحث قرار می‌دهیم. همانریختی (یا نگاشت توپولوژیک) را به‌صورت یک تابع پیوستهٔ یک به یک که وارون آن نیز پیوسته است، تعریف می‌کنیم. خواص فضاهای توپولوژیک که تحت همانریختها پایا (پایدار) می‌باشند به‌عنوان خواص توپولوژیک شناخته می‌شوند و این امر از موضوعهای مورد توجه ما در بقیه این کتاب است.

تعریف ۱ - ۱۴. تابع $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_1>$ در $x\in S$ **پیوسته** است اگر و فقط اگر $f(x)\in U\in\tau_2$ ایجاب کند که عنصری مانند $G\in\tau_1$ وجود دارد به قسمی که $x\in G$ و $f(G)\subset U$. تابع f **پیوسته** است اگر و فقط اگر f در هر نقطه $x\in S$ پیوسته باشد. یک تابع پیوسته را یک ***نگاشت*** نیز گوئیم.

قضیهٔ ۱ - ۱۰. *هرگاه* $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ *یک تابع پوشا باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

(۱) *برای هر مجموعهٔ بسته C در T مجموعه* $f^{-1}(C)$ *در S بسته است.*

(۲) $f^{-1}(U)\in\tau_1$ *برای هر* $U\in\tau_2$.

(۳) f *پیوسته است.*

(۴) $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ *برای هر* $A\subset S$.

برهان. هم‌ارزی بالا رابا برقراری دور استلزام: ۱→(۴)→(۳)→(۲)→(۱) نشان می‌دهیم.

(۲)→(۱). فرض کنید $U\in\tau_2$. در این صورت $T-U$ بسته است و در نتیجه $f^{-1}(T-U)$ بسته می‌باشد. چون $f^{-1}(T-U)=f^{-1}(T)-f^{-1}(U)=S-f^{-1}(U)$، لذا داریم $f^{-1}(U)\in\tau_1$.

(۳)→(۲). فرض کنید $x\in S$ و $f(x)\in U\in\tau_2$. آنگاه $x\in f^{-1}(U)\in\tau_1$، و از آنجا که $f(f^{-1}(U)\subset U$، لذا تابع f در نقطهٔ x پیوسته است و چون x دلخواه بود، f پیوسته است.

(۴)→(۳). فرض کنید $A\subset S$. هرگاه $y\in f(\bar{A})$ و $y\in U\in\tau_2$، آنگاه یک $x\in\bar{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که $y=f(x)$. از آنجا که f پیوسته است، لذا عنصری مانند $V\in\tau_1$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in V$ و $f(V)\subset U$. همچنین $x\in\bar{A}$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $p\in V\cap A$ وجود دارد. در نتیجه $f(p)\in f(V)\cap f(A)\subset U\cap f(A)$. بنابراین $y\in\overline{f(A)}$ و داریم $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.

(۱)→(۴). فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ بسته T باشد، آنگاه $f(\overline{f^{-1}(C)})\subset\overline{f(f^{-1}(C))}\subset\bar{C}=C$. این امر ایجاب می‌کند که $\overline{f^{-1}(C)}\subset f^{-1}(C)$ و بنابراین $f^{-1}(C)$ بسته است. ■

قضیهٔ فوق توابع پیوسته را به‌صورت توابعی مشخص می‌کند که به‌وسیلهٔ آنها نگاره‌های وارون مجموعه‌های باز، باز و نگاره‌های وارون مجموعه‌های بسته، بسته‌اند. با این حال توابع پیوسته الزاماً مجموعه‌های باز را بر روی مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته را بر روی مجموعه‌های بسته *نمی‌نگارند*. مثال زیر گویای این مطلب است:

مثال ۱ - ۹. فرض‌کنیم $S=T=\{a,b,c\}$، $\tau_1=\{\varnothing,\{a\},S\}$، و $\tau_2=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},T\}$. برای هر $x\in S$ قرار می‌دهیم $f(x)=b$. تابع f پیوسته است و داریم

$f^{-1}(\varnothing)=f^{-1}(\{a\})=\varnothing\in\tau_1$ و $f^{-1}(\{b,c\})=f^{-1}(T)=S\in\tau_1$. با این حال $\{a\}\in\tau_1$ و $f(\{a\})=\{b\}\notin\tau_2$. همچنین $\{b,c\}$ در S بسته است ولی $f(\{b,c\})=\{b\}$ در T بسته نیست.

تعریف ۱ - ۱۵. فرض کنید $f:\langle S,\tau_1\rangle\to\langle T,\tau_2\rangle$ یک تابع باشد، آنگاه

(۱) f **باز** است اگر و فقط اگر $G\in\tau_1$ ایجاب کند که $f(G)\in\tau_2$.

(۲) f **بسته** است اگر و فقط اگر بسته‌بودن C در S ایجاب کند که $f(C)$ در T بسته باشد.

قضیهٔ بعد بیان می‌کند که توابع پیوسته همگرایی دنباله‌ها را حفظ می‌کنند. اگرچه مثالی که بلافاصله پس از این قضیه می‌آید نشان می‌دهد که عکس این قضیه همیشه درست نیست، ولی بعداً عکس این قضیه را در مورد فضاهای "شمارش‌پذیر نوع اول" ارائه خواهیم کرد.

قضیهٔ ۱ - ۱۱. *هرگاه* $f:\langle S,\tau_1\rangle\to\langle T,\tau_2\rangle$ *پیوسته باشد و* $x_n\to x$ *در* S*، آنگاه* $f(x_n)\to f(x)$ *در* T.

برهان. فرض کنیم $f(x)\in U\in\tau_2$. آنگاه بنابر قضیهٔ ۱ - ۹ داریم $x\in f^{-1}(U)\in\tau_1$. در نتیجه بنابر تعریف ۱ - ۱۳، عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به قسمی که $x_n\in f^{-1}(U)$ برای هر $n\geq N$. لذا $f(x_n)\in U$ برای هر $n\geq N$ و بنابراین $f(x_n)\to f(x)$. ■

مثال ۱ - ۱۰. فرض کنیم S مجموعه اعداد حقیقی باشد و

$$\tau_1=\{\varnothing\}\cup\{G\subset S:\text{شمارش‌پذیر است } S-G\}.$$

τ_1 یک توپولوژی در S است و "توپولوژی متمم شمارش‌پذیر" نامیده می‌شود. فرض کنیم $T=[0,1]$ و $\tau_2=\{G\cap[0,1]:G\in\tau_1\}$. آنگاه τ_2 یک توپولوژی در T است و "توپولوژی زیرفضائی" القاء شده در T به‌وسیلهٔ τ_1 نامیده می‌شود. حال تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{هرگاه } x\in[0,1] \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم . این تابع پیوسته نیست ، چراکه $(\circ,1)\in\tau_2$ ولی $f^{-1}[(\circ,1)]=(\circ,1)\notin\tau_1$ ، زیراکه $\mathbb{R}-(\circ,1)$ شمارش‌ناپذیر است . با این حال ، $x_n\to x$ در S اگر و فقط اگر یک $N\in I^+$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_n=x$ برای هر $n\geq N$. در نتیجه $f(x_n)=f(x)$ برای هر $n\geq N$ و این هم‌ارز است با $f(x_n)\to f(x)$.

تعریف ۱ - ۱۶ . یک تابع پوشای $h:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ یک **همانریختی (نگاشت توپولوژیک)** است اگر و فقط اگر h یک به یک و h و h^{-1} پیوسته باشند .

تعریف ۱ - ۱۷ . یک خاصیت P از یک فضای توپولوژیک را یک **خاصیت توپولوژیک** گوئیم اگر و فقط اگر P تحت همانریختیها پایا (پایدار) باشد .

قضیهٔ ۱ - ۱۲ . *هرگاه تابع پوشای $h:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ یک به یک باشد ، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

(۱) h یک همانریختی است .

(۲) h باز و پیوسته است .

(۳) h بسته و پیوسته است .

(۴) $h(\bar{A})=\overline{h(A)}$ برای هر $A\subset S$.

برهان . به‌عنوان یک تمرین به‌عهده خواننده است . ■

تذکر . رابطهٔ "$<S,\tau_1>$ همانریخت با $<T,\tau_2>$ است" یک رابطهٔ هم‌ارزی در گردآیهٔ تمام فضاهای توپولوژیک است . در حالت خاص ، نان شیرینی دونات و فنجان قهوه به یک ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارند .

تمرین

۱ - ۱۵ . فرض کنید $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ و $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ بترتیب پایه‌هائی برای τ_1 و τ_2

باشند. نشان دهید که تابع f در $x\in S$ پیوسته است اگر و فقط اگر $f(x)\in B_2\in\mathcal{B}_2$ ایجاب کند که عنصری مانند $B_1\in\mathcal{B}_1$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_1$ و $f(B_1)\subset B_2$.

۱ - ۱۶. هرگاه $f_1:\langle S_1,\tau_1\rangle\to\langle S_2,\tau_2\rangle$ و $f_2:\langle S_2,\tau_2\rangle\to\langle S_3,\tau_3\rangle$ پیوسته باشند. نشان دهید که $f_2 o f_1:\langle S_1,\tau_1\rangle\to\langle S_3,\tau_3\rangle$ نیز پیوسته است.

۱ - ۱۷. قضیهٔ ۱ - ۱۲ را ثابت کنید.

۱ - ۱۸. نشان دهید که گردآیهٔ تمام همانریختها از یک فضای توپولوژیک $\langle S,\tau\rangle$ به خودش، تحت "ترکیب همانریختیها" یک گروه است.

۱ - ۱۹. به ازای هر $p\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $f(p)=L_p=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:y=px\}$ و $S=\{L_p:p\in\mathbb{R}\}$.

(الف) نشان دهید که $f:\mathbb{R}\to S$ یک تابع یک به یک پوشاست.

(ب) فرض کنید $(L_a,L_b)=\{L_p\in S:a<p<b\}$. نمودارهای (L_{-1},L_1) و $f^{-1}[(L_{-1},L_1)]$ را رسم کنید.

(پ) فرض کنید $\tau=\{G\subset S:f^{-1}(G)\in\xi\}$ (ξ توپولوژی بازه‌ای $\mathbb{R}$). نشان دهید که τ یک توپولوژی در S می‌باشد.

(ت) نشان دهید $\langle\mathbb{R},\xi\rangle$ و $\langle S,\tau\rangle$ همانریخت هستند.

۱ - ۵ زیرفضا و فضای حاصلضرب

در این بخش مفاهیم "زیرفضا و فضای حاصلضرب" را ارائه خواهیم داد که "خاصیت ارثی" و "خاصیت ضربی" مربوط به این دو مفهوم می‌باشند. همچنین "نگاشتهای تصویری" از یک فضای حاصلضرب در فضاهای عامل آن تعریف می‌شوند و نشان داده می‌شود که این توابع پیوسته و باز هستند.

تعریف ۱ - ۱۸. فرض کنید $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\varnothing\neq A\subset S$.

توپولوژی زیرفضائی (نسبی) در A عبارت است از $\tau|A=\{A\cap G:G\in\tau\}$. $\langle A,\tau|A\rangle$ رایک **زیرفضای** $\langle S,\tau\rangle$ نامیم.

خواننده باید با نشان‌دادن اینکه اصول (ب ۱)–(ب ۳) از تعریف ۱ - ۱ صادق می‌باشند ثابت کند که $\tau|A$ یک توپولوژی بر روی A می‌باشد. برهان قضیهٔ زیر نیز به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. این قضیه بیان می‌کند که هرگاه $\mathcal{B}$ یک پایهٔ τ باشد، آنگاه $\mathcal{B}|A$ یک پایهٔ توپولوژی زیرفضائی $\tau|A$ در $A\subset S$ است.

قضیهٔ ۱ - ۱۳. فرض کنید $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ τ باشد. هرگاه $\varnothing\neq A\subset S$، آنگاه $\mathcal{B}|A=\{A\cap B:B\in\mathcal{B}\}$ یک پایهٔ $\tau|A$ است.

مثال ۱ - ۱۱. خط حقیقی $E^1=\langle \mathbb{R},\xi\rangle$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $A=[0,1]$ و $\langle A,\xi|A\rangle=I^1$. یک پایهٔ $\xi|A$، گردآیهٔ $\{[0,c):0<c\leq 1\}\cup\{(d,1]:0\leq d<1\}$ است. هر نگارهٔ همانریخت I^1 را یک **کمان** یا یک **حجره یک بعدی** (بسته) گوئیم.

تعریف ۱ - ۱۹. یک خاصیت توپولوژیک P را **ارثی** گوئیم اگر و فقط اگر هرگاه که فضای دلخواهی دارای خاصیت P باشد، آنگاه هر زیرفضای آن نیز خاصیت P را داشته باشد.

اکنون به تعریف "فضای حاصلضرب" برای یک گردآیهٔ $\{\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle:\alpha\in\Lambda\}$ از فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم. برای این منظور در آغاز حاصلضرب دکارتی کلی $\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ و "نگاشتهای تصویری $\pi_\alpha:\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\to S_\alpha$" را تعریف می‌کنیم. آنگاه "توپولوژی حاصلضربی تیخونف" را در $\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱ - ۲۰. فرض کنید $S_\alpha\neq\varnothing$ برای هر $\alpha\in\Lambda$.

(۱) **حاصلضرب دکارتی** $\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ عبارت‌است ازتمام‌توابع $x:\Lambda\to\cup\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ به‌قسمی که $x(\alpha)\in S_\alpha$ برای هر $\alpha\in\Lambda$.

(۲) **نگاشت تصویری** $\pi_\alpha:\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\to S_\alpha$ برای‌هر $\alpha\in\Lambda$ به‌صورت $\pi_\alpha(x)=x(\alpha)$ برای هر $x\in\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱ - ۲۱. فرض کنید $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ یک فضای توپولوژیک باشد و $S=\Pi\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. قرارمی‌دهیم $\mathcal{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha):G_\alpha\in\tau_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda\}$؛ $\mathcal{S}$ یک زیرپایهٔ **توپولوژی حاصلضرب تیخونف** τ روی S است. فضای $<S,\tau>$ را **فضای حاصلضرب** $\Pi\{<S_\alpha,\tau_\alpha>:\alpha\in\Lambda\}$ و $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ فضای α **امین عامل (مختص)** آن گوئیم.

مثال ۱ - ۱۲. فرض کنید $S_1=S_2=\{a,b,c\}$، $\tau_1=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},S_1\}$ و $\tau_2=\{\varnothing,\{a,b\},\{c\},S_2\}$. در این صورت

$$S_1\times S_2=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>\}$$

توپولوژی حاصلضرب $\tau_1\times\tau_2$ در $S_1\times S_2$ بر طبق تعریف ۱ - ۲۱ دارای زیرپایه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{S}=\{\pi_1^{-1}(\{a\})\text{ و }\pi_1^{-1}(\{b,c\})\text{ و }\pi_2^{-1}(\{a,b\})\text{ و }\pi_2^{-1}(\{c\})\text{ و }S_1\times S_2\}$$

$$=\{\{<a,a>,<a,b>,<a,c>\},\{<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>\},$$
$$\{<a,a>,<b,a>,<c,a>,<a,b>,<b,b>,<c,b>\},$$
$$\{<a,c>,<b,c>,<c,c>\},S_1\times S_2\},$$

یک پایهٔ $\tau_1\times\tau_2$ به‌صورت

$$\mathcal{B}=\mathcal{S}\cup\{\{<a,a>,<a,b>\},\{<a,c>\},\{<b,a>,<b,b>,<c,a>,<c,b>\},$$
$$\{<b,c>,<c,c>\}\}$$

است. تعیین عناصر $\tau_1\times\tau_2$، به‌عنوان یک تمرین به‌عهده خواننده است که البته منظور از $\tau_1\times\tau_2$ حاصلضرب دکارتی این دو نیست.

قضیهٔ ۱ - ۱۴. توابع تصویری یک فضای حاصلضرب بروی فضاهای عامل پیوسته و باز می‌باشند.

برهان. فرض کنید $<S,\tau>=\Pi\{<S_\alpha,\tau_\alpha>:\alpha\in\Lambda\}$ و $\pi_\alpha:S\to S_\alpha$. چون $\mathcal{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha):G_\alpha\in\tau_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ یک زیرپایهٔ τ است، لذا $G_\alpha\in\tau_\alpha$ ایجاب می‌کند که

$\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)\in\mathcal{S}\subset\tau$، و در نتیجه π_α پیوسته است . فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایهٔ τ متشکل از همه مقاطع با پایان عناصر $\mathcal{S}$ باشد . برای نشان‌دادن بازبودن π_α کافی است نشان دهیم که $\pi_\alpha(B)\in\tau_\alpha$ برای هر $B\in\mathcal{B}$. فرض کنیم

$B=\cap\{\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})\,|\,G_{\alpha_i}\in\tau_{\alpha_i}, i=1,2,\dots,n\}\in\mathcal{B}$. هرگاه $\alpha\in\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$، آنگاه $\pi_\alpha(B)=G_\alpha$ و هرگاه $\alpha\notin\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$، آنگاه $\pi_\alpha(B)=S_\alpha$. در هر حالت $\pi_\alpha(B)\in\tau_\alpha$ و بنابراین π_α باز است . ■

مثال ۱ - ۱۳ . هرگاه $\langle S_i,\tau_i\rangle=E^1=\langle \mathbb{R},\xi\rangle$ برای $i=1,2,\dots,n$، آنگاه فضای حاصلضرب $\langle S,\tau\rangle=\Pi\{\langle S_i,\tau_i\rangle : i=1,2,\dots,n\}$ را با E^n نشان می‌دهیم و آن را "فضای اقلیدسی n ـ بعدی" نامیم . این فضا دارای یک زیرفضای بسیار مهم $I^n=\langle A,\tau|A\rangle=\Pi\{\langle A_i,\tau|A_i\rangle : i=1,2,\dots,n\}$ است که در آن $\langle A_i,\tau|A_i\rangle=I^1=\langle[0\,,\,1],\xi|[0\,,\,1]\rangle$ برای هر $i=1,2,\dots,n$. I^n مکعب n بعدی یکه نامیده می‌شود و هر نگارهٔ همانریخت آن به یک **حجرهٔ n بعدی** (بسته) موسوم است .

مثال ۱ - ۱۴ . در مثال ۱ - ۳ توپولوژی اقلیدسی را در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ توصیف کردیم . هرگاه قرار دهیم $\mathcal{B}=\{[a,b)\times[c,d) : a,b,c,d\in\mathbb{R}, c<d, a<b\}$، آنگاه $\mathcal{B}$ پایه برای توپولوژی $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ در $\mathbb{R}$ می‌باشد که به ***توپولوژی جعبه‌ای چپ پائین*** نامیده می‌شود . بعداً خواهیم دید که $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ با $\xi\times\xi$ اختلاف اساسی دارد .

تعریف ۱ - ۲۲ . یک خاصیت توپولوژیک P را ***ضربی*** گوئیم اگر و فقط اگر هنگامی که $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ دارای خاصیت P باشد، آنگاه $\Pi\{\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle : \alpha\in\Lambda\}$ نیز خاصیت P را داشته باشد .

تمرین :

۱ - ۲۰ . هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\varnothing \neq A \subset S$، آنگاه ثابت کنید که $\tau|A=\{A\cap G: G\in\tau\}$ یک توپولوژی در A است .

۱ - ۲۱ . قضیه ۱ - ۱۳ را ثابت کنید .

۱ - ۲۲ . فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\varnothing \neq F \subset S$. زیرمجموعهٔ $A \subset F$ را در F بسته گوئیم اگر و فقط اگر $F-A \in \tau|F$. نشان دهید که A در F بسته است اگر و فقط اگر یک زیرمجموعه بسته C از S موجود باشد به قسمی که $A=C\cap F$. همچنین نشان دهید که هرگاه F بسته باشد ، آنگاه A در F بسته است اگر و فقط اگر A بسته باشد .

۱ - ۲۳ . فرض کنید $f:<S,\tau_1>\rightarrow<T,\tau_2>$ پیوسته باشد . نشان دهید که $f|A:<A,\tau_1|A>\rightarrow<T,\tau_2>$ برای هر $A\subset S$ پیوسته است .

۱ - ۲۴ . فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\varnothing \neq C \subset A\cup B \subset S$، نشان دهید که اگر $C\in\tau|A\cup B$ ، آنگاه $C\cap A\in\tau|A$ و $C\cap B\in\tau|B$.

۱ - ۲۵ . نشان دهید که یک تابع $f:<T,\tau>\rightarrow\Pi\{<S_\alpha,\tau_\alpha>\alpha\in\Lambda\}$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\pi_\alpha \circ f:<T,\tau>\rightarrow<S_\alpha,\tau_\alpha>$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ پیوسته باشد .

۱ - ۲۶ . مجموعهٔ $S=\{a,b,c\}$ را با توپولوژی $\tau_1=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},S\}$ و مجموعه $T=\{1,2\}$ را با توپولوژی $\tau_2=\{\varnothing,\{1\},T\}$ در نظر می‌گیریم . یک زیرپایهٔ $\mathcal{S}$ و یک پایهٔ $\mathcal{B}$ برای توپولوژی حاصلضرب $\tau_1\times\tau_2$ را در $S\times T$ تعیین کنید .

۱ - ۲۷ . فرض کنید $<S,\tau>=\Pi\{<S_\alpha,\tau_\alpha>:\alpha\in\Lambda\}$ و $\mathcal{B}_\alpha$ یک پایهٔ τ_α برای هر $\alpha\in\Lambda$ باشد . نشان دهید که $\mathcal{S}^*=\{\pi_\alpha^{-1}(B_\alpha):B_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ یک زیرپایهٔ τ است .

۱ - ۲۸ . هرگاه $<S_i,\tau_i>$ برای $i=1,2,\ldots,n$ یک فضای توپولوژیک باشد ، آنگاه $\mathcal{S}^*=\{G_1\times G_2\times\ldots\times G_n:G_i\in\tau_i,i=1,2,\ldots,n\}$ ، بنابه تعریف یک پایهٔ "توپولوژی

جعبه‌ای" در $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ است . ثابت کنید که توپولوژی حاصلضربی تیخونف و "توپولوژی جعبه‌ای" در حالت حاصلضربهای با پایان بر هم منطبق‌اند .

۱ - ۲۹ . هرگاه $\mathcal{B}_1$ یک پایهٔ یک توپولوژی در S_1 و $\mathcal{B}_2$ یک پایهٔ یک توپولوژی در S_2 باشد . نشان دهید که $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ یک پایهٔ توپولوژی حاصلضرب (جعبه‌ای) در $S_1 \times S_2$ است .

۱ - ٦ . فضاهای تفکیک‌پذیر

فضاهائی که شامل زیرفضاهای شمارش‌پذیر چگال باشند "فضاهای تفکیک‌پذیر" نامیده می‌شوند . برای مثال $<\mathbb{R},\mathcal{E}>$ تفکیک‌پذیر است ، چراکه مجموعهٔ اعداد گویا شمارش‌پذیر است و در مجموعهٔ اعداد حقیقی نسبت به توپولوژی بازه‌ای چگال است. چون همانریختیها یک به یک می‌باشند و تحت آنها نقاط چسبیده پایدار می‌مانند، لذا خاصیت "تفکیک‌پذیری" یک خاصیت توپولوژیک است .

تعریف ۱ - ۲۳ . فضای $<S,\tau>$ تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر شامل یک زیرمجموعه شمارش‌پذیر D باشد که در S چگال است (یعنی $\overline{D}=S$) .

مجموعه اعداد حقیقی تحت توپولوژی گسسته ، تفکیک‌پذیر نیست. چراکه هیچ زیرفضای سرهٔ آن چگال نیست ، لذا تفکیک‌پذیری در درجه اول به توپولوژی τ بستگی دارد تا به مجموعه S. با ذکر مثالی نشان خواهیم داد که تفکیک‌پذیری ارثی نیست . اگرچه تفکیک‌پذیری ضربی هم نیست ولی نشان خواهیم داد که حاصلضرب یک تعداد شمارش‌پذیری از فضاهای تفکیک‌پذیر ، تفکیک‌پذیر است .

مثال ۱ - ۱۵ . مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را با "توپولوژی جعبه‌ای چپ پائین" که در مثال ۱ - ۱۴ توصیف شد ، در نظر می‌گیریم . از آنجاکه $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ تفکیک‌پذیر است (کافی است D را برابر مجموعهٔ اعداد گویا قرار دهیم) ، لذا بنابر قضیه ۱ - ۱۶ که بعداً ثابت می‌شود ،

فضای $<\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}>$ نیز تفکیک‌پذیر است. اکنون زیرمجموعهٔ $L=\{<x,-x>:x\in\mathbb{R}\}$ را با توپولوژی زیرفضائی در نظر می‌گیریم. چون این توپولوژی زیرفضائی در L گسسته است، لذا زیرفضای L تفکیک‌پذیر نیست.

قضیهٔ ۱ - ۱۵ . *هر زیرفضای باز یک فضای تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر است.*

برهان. به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

قضیهٔ ۱ - ۱۶ . *هرگاه به ازای هر $n\in I^+$، $<S_n,\tau_n>$ تفکیک‌پذیر باشد، آنگاه $\Pi\{<S_n,\tau_n>:n\in I^+\}$ نیز تفکیک‌پذیر است.*

برهان. هرگاه برای هر $n\in I^+$، فرض کنیم $D_n=\{x_j^n:j\in I^+\cup\{0\}\}$ یک زیرمجموعهٔ چگال در S_n باشد. مجموعهٔ تمام توابع از زیرمجموعه‌های باپایان I^+ به $I^+\cup\{0\}$ را با F نشان می‌دهیم. برای هر $f\in F$ و $n\in I^+$ فرض کنیم

$$x_f(n)=\begin{cases} x^n_{f(n)} & \text{هرگاه n در دامنه f باشد} \\ x_0^n & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

بنابراین $x_f:I^+\to\cup\{S_n:n\in I^+\}$، و در نتیجه $D=\{x_f:f\in F\}$ یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر $\Pi\{S_n:n\in I^+\}$ است. فرض کنیم

$B=\cap\{\pi_{n_j}^{-1}(G_{n_j}):G_{n_j}\in\tau_{n_j},j=1,2,\dots,k\}$ عنصر دلخواهی از پایه تعریف‌شده برای توپولوژی حاصلضرب در $\Pi\{S_n:n\in I^+\}$ باشد. حال برای $j=1,2,\dots,k$، فرض کنیم $m_j\in I^+\cup\{0\}$ به‌قسمی باشد که $x_{m_j}^{n_j}\in G_{n_j}$. در این صورت برای $j=1,2,\dots,k$ قرار می‌دهیم $f(n_j)=m_j$. درنتیجه $x_f\in D$ و $x_f\in B$، چراکه $x_f(n_j)=x_{m_j}^{n_j}$ برای $j=1,2,\dots,k$، لذا $B\cap D\neq\varnothing$ و D در $\Pi\{S_n:n\in I^+\}$ چگال است. ■

قضیهٔ ۱ - ۱۷ . *هرگاه $<S,\tau_1>$ تفکیک‌پذیر، و $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته و پوشا باشد، آنگاه $<T,\tau_2>$ تفکیک‌پذیر است.*

برهان. به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

تمرین:

۱ - ۳۰. قضیهٔ ۱ - ۱۵ را ثابت کنید.

۱ - ۳۱. قضیهٔ ۱ - ۱۷ را ثابت کنید.

۱ - ۷ فضاهای شمارش‌پذیر نوع اول و نوع دوم

در این بخش ما دو نوع فضاهای توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم: (۱) آن دسته از فضاهای $<S,\tau>$ به‌قسمی که τ دارای یک پایهٔ شمارش‌پذیر است که آنها را فضاهای "شمارش‌پذیر نوع دوم" نامیم؛ و (۲) آن دسته از فضاهای $<S,\tau>$ به قسمی که τ دارای یک پایهٔ موضعی شمارش‌پذیر در هر نقطهٔ $p\in S$ است که آنها را فضاهای "شمارش‌پذیر نوع اول" گوئیم. آشکار است که هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، شمارش‌پذیر نوع اول نیز هست. علاوه‌بر این، یک فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، تفکیک‌پذیر ارثی است، ولی یک فضای تفکیک‌پذیر ارثی الزاماً یک فضای شمارش‌پذیر نوع دوم نیست. این دو مفهوم در یک فضای متریک که در بخش بعد تعریف خواهیم کرد، هم‌ارزند.

تعریف ۱ - ۲۴. فضای $<S,\tau>$ **شمارش‌پذیر نوع دوم** است اگر و فقط اگر τ دارای یک پایهٔ شمارش‌پذیر $\mathcal{B}=\{B_n:n\in I^+\}$ باشد.

مثال ۱ - ۱۶. فضای $<\mathbb{R},\xi>$ شمارش‌پذیر نوع دوم است، چراکه $\mathcal{B}=\{(r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n}) :$ گویا r و $n\in I^+\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر ξ است. با این حال، $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ و مجموعهٔ اعداد حقیقی تحت توپولوژی گسسته شمارش‌پذیر نوع دوم نیستند، ولی هر دوی آنها شمارش‌پذیر نوع اول‌اند.

تعریف ۱ - ۲۵. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $p\in S$. $\mathcal{B}_p\subset\tau$ یک ***پایهٔ موضعی*** در p است اگر و فقط اگر $p\in G\in\tau$ ایجاب کند که عنصری مانند $B\in\mathcal{B}_p$ وجود دارد به قسمی که $p\in B\subset G$.

تعریف ۱ - ۲۶. فضای $<S,\tau>$ ***شمارش‌پذیر نوع اول*** است اگر و فقط اگر در هر نقطهٔ $p\in S$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر $\mathcal{B}_p$ داشته باشد.

قضیهٔ ۱ - ۱۸. ***هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم $<S,\tau>$ تفکیک‌پذیر است.***

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{B_n:n\in I^+\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر باشد. به ازای هر $n\in I^+$ فرض کنیم $x_n\in B_n$، و $D=\{x_n:n\in I^+\}$. مجموعهٔ D یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر S است که چگال‌بودن آن را در S نشان خواهیم داد. فرض کنیم $x\in S$ و $x\in G\in\tau$. آنگاه عنصری مانند $B_n\in\mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $x\in B_n\subset G$. از آنجا که $B_n\cap D\neq\varnothing$ ایجاب می‌کند $G\cap D\neq\varnothing$، لذا $x\in\bar{D}$ و در نتیجه D در S چگال است. ■

قضیهٔ ۱ - ۱۹. ***فرض کنید $<S,\tau>$ شمارش‌پذیر نوع اول باشد، $A\subset S$، و $x\in S$. آنگاه $x\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند x_n در A وجود داشته باشد به‌قسمی که $x_n\to x$.***

برهان. هرگاه $x_n\in A$ و $x_n\to x$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۱ - ۹ (۱) $x\in\bar{A}$. اکنون فرض کنید که $x\in\bar{A}$. فرض کنیم $x_n\in B_n$، که در آن $\{B_n:n\in I^+\}$ یک پایهٔ موضعی شمارش‌پذیر در x باشد با شرط آنکه $B_{n+1}\subset B_n$ به ازای هر $n\in I^+$. (تمرین ۱ - ۳۵ تضمین‌کنندهٔ وجود این چنین پایهٔ موضعی "تو در تو" در x است). هرگاه $x\in G\in\tau$، آنگاه بنابر تعریف ۱ - ۲۵ عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به قسمی که $x\in B_N\subset G$. این امر ایجاب می‌کند که $x_n\in G$، به ازای هر $n\geq N$ و در نتیجه $x_n\to x$. ■

قضیهٔ ۱ - ۲۰. ***هرگاه $<S,\tau_1>$ شمارش‌پذیر نوع اول باشد، $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$، و برای هر دنبالهٔ $x_n\to x$ در S ایجاب کند که $f(x_n)\to f(x)$ در T، آنگاه f پیوسته است.***

برهان. به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

قضیهٔ ۱ - ۲۱. *هرگاه $<S_n,\tau_n>$ به ازای هر $n\in I^+$ شمارش‌پذیر نوع اول باشد، آنگاه $\Pi\{<S_n,\tau_n>,n\in I^+\}$ نیز شمارش‌پذیر نوع اول است.*

برهان. فرض کنیم $x\in\Pi\{S_n:n\in I^+\}$ و $\{B_j^n \ :j\in I^+\}$ برای هر $n\in I^+$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر در $\pi_n(x)$ باشد. گردآیهٔ تمام مقاطع با پایان مجموعه‌هائی به‌صورت $\pi_n^{-1}(B_j^n)$ برای $n,j\in I^+$ را به $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. ردهٔ $\mathcal{B}$ شمارش‌پذیر است، عناصرش اعضای توپولوژی حاصلضرب می‌باشند و همگی شامل x می‌باشند. هرگاه $x\in B=\cap\{\pi_n(G_n):G_n\in\tau_n,n=1,2,\ldots,k\}$، آنگاه $\pi_n(x)\in G_n$ برای $n=1,2,\ldots,k$. بنابراین عنصری مانند $j_n\in I^+$ وجود دارد به قسمی که $\pi_n(x)\in B_{j_n}^n\subset G_n$ برای $n=1,2,\ldots,k$. این امر ایجاب می‌کند که $x\in\cap\{\pi_n^{-1}(B_{j_n}^n):n=1,2,\ldots,k\}\in\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ موضعی در x است. ■

چون مجموعه‌های باز تحت همانریختیها پایدار می‌باشند، لذا ملاحظه می‌شود که ویژگیهای شمارش‌پذیر نوع اول و نوع دوم خواص توپولوژیک هستند. ولی با این حال، این خواص (مانند تفکیک‌پذیری) تحت پیوستگی پایدار نیستند. مثال زیر گویای این حقیقت است.

مثال ۱ - ۱۷. فضای $<\mathbb{R},\xi>$ شمارش‌پذیر نوع دوم است. فضای $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ شمارش‌پذیر نوع اول نیست، چراکه متمم هر مجموعه باپایان باز است و هر پایهٔ موضعی شامل تعداد شمارش ناپذیری از این چنین مجموعه‌هاست. تابع $f:<\mathbb{R},\xi>\to<\mathbb{R}$ متمم باپایان$>$ تعریف شده به‌صورت $f(x)=x$ پیوسته است.

تمرین

۱ - ۳۲. نشان دهید که شمارش‌پذیری نوع اول و نوع دوم خواص ارثی هستند.

۱ - ۳۳. نشان دهید که هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، تفکیک‌پذیر ارثی است.

۱ - ۳۴. ثابت کنید که حاصلضرب تعداد شمارش‌پذیری از فضاهای شمارش‌پذیر نوع دوم شمارش‌پذیر نوع دوم است.

۱ - ۳۵. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $\mathscr{B}$ یک پایهٔ τ باشد. نشان دهید که $<S,\tau>$ شمارش‌پذیر نوع اول است اگر و فقط اگر به ازای هر $x\in S$، یک دنبالهٔ "تو در تو" $\{B_n\}_{n\in I^+}$ از عناصر $\mathscr{B}$ شامل x موجود باشد به‌قسمی که $x\in G\in\tau$ ایجاب کند که عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به قسمی که $B_n\subset G$ به ازای هر $n\geq N$. مفهوم "تو در تو بودن" بدین معنی است که $B_{n+1}\subset B_n$ به ازای هر $n\in I^+$.

۱ - ۳۶. قضیه ۱ - ۲۰ را ثابت کنید.

۱ - ۸ فضاهای دورمند، یکنواخت و نزدیکمند

در بخش ۱ - ۱ تعریف توپولوژی در یک مجموعه را با مشخص کردن "مجموعه‌های باز" یا با مشخص کردن "مجموعه‌های بسته" یا با استفاده از عملگر بستاری یا عملگر درونی مورد بحث قرار دادیم. در این بخش سه روش دیگر برای توپولوژی‌دارشدن یک مجموعه را مورد بحث قرار می‌دهیم: (۱) با استفاده از تابع دوری، (۲) با استفاده از یکنواختی، و (۳) با استفاده از نزدیکی. این روشها در ارتباط با یکدیگرند، چراکه (۲) و (۳) را می‌توان به‌عنوان تعمیم (۱) در نظر گرفت.

تعریف ۱ - ۲۷. فرض کنید $S\neq\varnothing$ و $\rho:S\times S\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(م۱) $\rho(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ به ازای هر $x,y\in S$.

(م۲) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (یعنی ρ متقارن است) به ازای هر $x,y\in S$.

(م۳) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (یعنی ρ در نابرابری مثلثی صدق می‌کند) به ازای هر $x,y,z\in S$.

در این صورت ρ یک متریک در S است و $<S,\rho>$ یک **فضای متریک** است.

هرگاه ρ در شرایط (م۱) و (م۲) صدق کند، آنگاه ρ یک **نیم متریک** در S است.

هرگاه ρ در شرایط (م۱) و (م۳) صدق کند، آنگاه ρ یک **متریک گون** در S است.

هرگاه ρ در شرایط (م۲) و (م۳) صدق کند و $\rho(x,x)=0$ به ازای هر $x\in S$، آنگاه ρ یک **شبه متریک** در S است.

نشان خواهیم داد که هر متریک در S یک توپولوژی در S موسوم به "توپولوژی متریک" القا می‌کند. لذا هر مجموعهٔ متریک یک فضای متریک است. با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که یک نیم متریک در یک مجموعه الزاماً یک توپولوژی در آن مجموعه القا نمی‌کند.

قضیهٔ ۱ - ۲۲. ***هرگاه $<S,\rho>$ یک مجموعهٔ متریک باشد، آنگاه ρ یک توپولوژی در S با پایه‌ای به‌صورت $\mathcal{B}=\{S_\rho(p;r):p\in S,r>0\}$ القا می‌کند که در آن*** $S_\rho(p;r)=\{x\in S:\rho(p,x)<r\}$.

برهان. هرگاه $p\in S$، آنگاه به ازای هر $r>0$ $p\in S_\rho(p;r)$ و شرط (۱) از قضیه ۱ - ۵ صادق است. اکنون فرض کنیم $x\in S_\rho(p_1;r_1)\cap S_\rho(p_2;r_2)$، $r=\min\{r_1-\rho(p_1,x),r_2-\rho(p_2,x)\}$. هرگاه $y\in S_\rho(x;r)$، آنگاه $\rho(x,y)<r\le r_1-\rho(p_1,x)$ و $\rho(x,y)<r\le r_2-\rho(p_2,x)$. در نتیجه بنابر نابرابری مثلثی $\rho(p_1,y)<r_1$ و $\rho(p_2,y)<r_2$، که ایجاب می‌کند $y\in S_\rho(p_1;r_1)\cap S_\rho(p_2;r_2)$. لذا $S_\rho(x;r)\subset S_\rho(p_1;r_1)\cap S_\rho(p_2;r_2)$ و شرط (۲) صادق است. در نتیجه $\mathcal{B}$ یک پایهٔ یک توپولوژی در S است. ■

مثال ۱ - ۱۸. فرض کنید $\rho(x,y)=|x-y|$ به‌ازای هر $x,y\in S$. آشکار است که $|x-y|=0$ اگر و فقط اگر $x-y=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ و $|x-y|=|y-x|$، در نتیجه (م۱) و (م۲) برقرارند. همچنین $x-y=(x-z)+(z-y)$ ایجاب می‌کند که

$|x-y|=|(x-z)+(z-y)|\le|x-z|+|z-y|$ و (م۳) برقرار است. درنتیجه $<\mathbb{R},\rho>$ یک فضای متریک است. اثبات اینکه توپولوژی ρمتریک در $\mathbb{R}$ همان توپولوژی $\mathscr{E}$ است، به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

مثال ۱ - ۱۹. هرگاه y,x هر دو گویا یا هر دو اصم باشند، فرض کنیم $\rho(x-y)=|x-y|$ و در غیر این صورت، $\rho(x,y)=|x-y|^{-1}$. آشکار است که $\rho(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$، و $\rho(x,y)=\rho(y,x)$. بنابراین ρ یک نیم متریک در $\mathbb{R}$ است ولی ρ یک متریک نیست، چراکه (م۳) برقرار نیست. برای نشان‌دادن این موضوع قرار می‌دهیم $x=5$، $y=6$ و $z=\sqrt{2}$، در این صورت

$$\rho(5,\sqrt{2})+\rho(\sqrt{2},6)=(5-\sqrt{2})^{-1}+(6-\sqrt{2})^{-1}=(11-2\sqrt{2})(32-11\sqrt{2})^{-1}<1=\rho(5,6)$$

کنیم $0<\varepsilon<1$، آنگاه $S_\rho(0;\varepsilon)$ شامل تمام اعداد گویا در $(-\varepsilon,\varepsilon)$ و تمام اعداد اصم در $(-\infty,\frac{-1}{\varepsilon})\cup(\frac{1}{\varepsilon},\infty)$ است. اگر x نقطهٔ اصم دلخواهی در $S_\rho(0;\varepsilon)$ باشد، هیچ همسایگی کروی $S_\rho(x;\delta)$ در حول x (گوی به مرکز x و شعاع δ) موجود نیست به‌قسمی که در $S_\rho(0;\varepsilon)$ واقع شود. بنابراین $\mathscr{B}=\{S_\rho(x;r):x\in\mathbb{R},r>0\}$ نمی‌تواند یک پایهٔ یک توپولوژی در $\mathbb{R}$ باشد.

اکنون به مفهوم یک "فضای یکنواخت" که تعمیم یک فضای متریک است، می‌پردازیم. در کتابهای ***توپولوژی عمومی*** نوشتهٔ، کلی و ***بنیادهای توپولوژی عمومی*** نوشتهٔ پروین بررسیهای عالی‌ای در مورد فضاهای یکنواخت وجود دارد. (به کتابنامه رجوع کنید)

تعریف ۱ - ۲۸. فرض کنید $S\neq\varnothing$ و $\mathcal{U}\subset 2^{S\times S}$ در اصول زیر صدق کنند:

(ی۱) به ازای هر $U\in\mathcal{U}$، $\Delta=\{<x,x>:x\in S\}\subset U$.

(ی۲) هرگاه $U\in\mathcal{U}$ و $U\subset V$، آنگاه $V\in\mathcal{U}$.

(ی۳) هرگاه $V\in\mathcal{U}$ و U، آنگاه $U\cap V\in\mathcal{U}$.

(ی۴) به ازای هر $U\in\mathcal{U}$ عنصری مانند $V\in\mathcal{U}$ وجود دارد به قسمی که $V\circ V\subset U$. (که در آن $V\circ V=\{(x,z):\exists y\in S;(x,y)\in V\&(y,z)\in V\}$).

(ی۵) $U\in\mathcal{U}$ ایجاب کند که $U^{-1}\in\mathcal{U}$ که در آن $U^{-1}=\{<x,y>:<y,x>\in U\}$. آنگاه $\mathcal{U}$ را یک **یکنواختی برای** S گوئیم که در این صورت $<S,\mathcal{U}>$ **یک فضای یکنواخت** است. هرگاه $\mathcal{U}$ در شرایط (ی۱)- (ی۴) صدق کند ، آنگاه $\mathcal{U}$ **یک شبه یکنواختی** برای S است ، در هر کدام از این حالات پایهٔ $\mathcal{U}$ عبارت است از هر زیرگردآوردهٔ $\mathcal{B}$ از $\mathcal{U}$ با این خاصیت که هر عضو $\mathcal{U}$ شامل عضوی از $\mathcal{B}$ باشد .

شرایط (ی۱) ، (ی۴) و (ی۵) در مورد یکنواختی بترتیب کم و بیش نظیر (م۱) ، (م۳) و (م۲) در مورد متریک می‌باشند . در زیر نشان خواهیم داد که هر فضای متریک یک فضای یکنواخت است و "توپولوژی یکنواخت $\tau_{\mathcal{U}}$" را که به‌وسیلهٔ یک یکنواختی $\mathcal{U}$ برای S در مجموعهٔ S القا می‌شود، تعریف می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ - ۲۳ . *هر فضای متریک $<M,\rho>$ یک فضای یکنواخت است .*

برهان . برای هر $\varepsilon>0$، فرض کنیم $B_\varepsilon=\{<x,y>\in M\times M:\rho(x,y)<\varepsilon\}$ و $\mathcal{U}=\{U\subset M\times M:U\supset B_\varepsilon,\varepsilon>0$ برای یک$\}$. به‌ازای هر $U\in\mathcal{U}$، $\Delta\subset U$، چرا که برای هر $\varepsilon>0$، $\Delta\subset B_\varepsilon$ و در نتیجه (ی۱) صادق است . هرگاه $U\in\mathcal{U}$ و $U\subset V$، آنگاه عددی مانند $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $B_\varepsilon\subset U\subset V$، در نتیجه $V\in\mathcal{U}$ و (ی۲) صادق است . هرگاه $U,V\in\mathcal{U}$ ، آنگاه $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ وجود دارند به‌طوری‌که $B_{\varepsilon_1}\subset U$ و $B_{\varepsilon_2}\subset V$. فرض کنید $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. بدیهی است که $B_\varepsilon\subset U\cap V$ و بنابراین $U\cap V\in\mathcal{U}$. لذا (ی۳) برقرار است . برای نشان دادن برقراری (ی۴) فرض کنیم $B_\varepsilon\subset U\in\mathcal{U}$ و $V=B_{\varepsilon/2}$ آنگاه

$$B_{\varepsilon/2}\circ B_{\varepsilon/2}=\{<x,y>\in M\times M:\rho(z,y)<\varepsilon/2,\rho(x,z)<\varepsilon/2\ \text{به‌قسمی که}\ \exists z\in M\}$$
$$\subset B_\varepsilon\subset U.$$

بالاخره از آنجا که ρ متقارن است ، هرگاه $B_\varepsilon\subset U\in\mathcal{U}$، آنگاه $B_\varepsilon\subset U^{-1}$. در

نتیجه $U\in\mathcal{U}$ ایجاب می‌کند که $U^{-1}\in\mathcal{U}$ و (ی۵) برقرار است. بدین ترتیب، بنابر تعریف ۱-۲۸، $\mathcal{U}$ یک یکنواختی برای M است. ■

گاه مفید است که این ساختار در فضای توپولوژیک $\langle S,\tau\rangle$ برحسب "دستگاههای همسایگی" بیان شود. گوئیم $A\subset S$ یک **همسایگی** $x\in S$ است اگر و فقط اگر عضوی مانند $G\in\tau$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $x\in G\subset A$. خانوادهٔ $\mathcal{N}_x$ متشکل از همه اینگونه همسایگیهای x **دستگاه همسایگی** x نامیده می‌شود. یک **پایهٔ همسایگی** $\mathcal{N}_x$ یک زیرگردآیهٔ $\mathcal{B}_x$ از $\mathcal{N}_x$ است به‌قسمی که هر $A\in\mathcal{N}_x$ شامل یک $B\in\mathcal{B}_x$ باشد.

تعریف ۱ - ۲۹. فرض کنید $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ یک فضای یکنواخت باشد. برای هر $x\in S$ و هر $U\in\mathcal{U}$ قرار می‌دهیم $U[x]=\{y\in S:\langle x,y\rangle\in U\}$. برای هر $x\in S$ گردآیهٔ $\mathcal{B}_x=\{U[x]:U\in\mathcal{U}\}$ یک پایهٔ همسایگی یک توپولوژی $\tau_{\mathcal{U}}$ در S است و **توپولوژی یکنواخت** القا شده به‌وسیلهٔ یکنواختی $\mathcal{U}$ نامیده می‌شود.

تذکر. باید توجه داشت که ممکن است دو متریک متفاوت در S به روش ذکرشده در قضیهٔ ۱ - ۲۳ یکنواختی یکسانی را پدید آورند. همچنین ممکن است توپولوژیهای یکنواخت دو یکنواختی متفاوت در مجموعهٔ S برابر باشند. برای مثال متریکهای $d(x,y)=|x-y|$ و $\rho(x,y)=۲|x-y|$ یکنواختی یکسانی در مجموعهٔ اعداد حقیقی تولید می‌کند. همچنین یکنواختی گسسته و یکنواختی‌ای که ردهٔ $\mathcal{B}=\{\{\Delta\cup\{\langle x,y\rangle:x>r,y>r\}\}:r\in\mathbb{R}\}$ یک پایهٔ آن است، هر دو توپولوژی گسسته را در $\mathbb{R}$ القا می‌کنند.

مثال ۱ - ۲۰. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد و $\rho(x,y)=\max\{x-y,۰\}$ برای هر $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، آشکار است که $\rho(x,x)=۰$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و ρ روی $\mathbb{R}$ در شرط (م۳) صدق می‌کند. حال برای‌هر $\varepsilon>۰$، فرض کنیم

$B_\varepsilon=\{<x,y>\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\rho(x,y)<\varepsilon\}$. گردآیهٔ $\mathcal{B}=\{B_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ یک پایهٔ یک شبه یکنواختی $\mathcal{U}$ در $\mathbb{R}$ است ،که در اینجا پایه یک شبه یکنواختی به روشی مشابه روش قضیه ۱ - ۲۳ در مورد فضای متریک و پایهٔ یک یکنواختی تعریف می‌شود. $\mathcal{U}$ یک یکنواختی نیست ، چراکه (ی۵) برقرار نیست و ρ در (م۲) صدق نمی‌کند . ولی از آنجا که برای هر $\varepsilon>0$ داریم $B_\varepsilon=\{<x,y>\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:y>x-\varepsilon\}$ ، لذا خواننده می‌تواند بسهولت ثابت کند که توپولوژی شبه یکنواخت القا شده در $\mathbb{R}$ به‌وسیلهٔ $\mathcal{U}$ عبارت است از $\tau_{\mathcal{U}}=\{\varnothing\}\cup\{\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$. این توپولوژی در مجموعهٔ اعداد حقیقی قبلاً در تمرین ۱ - ۱۲ مورد بررسی قرار گرفته است .

این بخش را با ذکر مختصری از فضاهای نزدیکمند که تعمیم دیگری از فضاهای متریک است به پایان می‌رسانیم . فضاهای توپولوژیک حاصل از فضاهای نزدیکمند دقیقاً همان فضاهای یکنواخت‌پذیر می‌باشند . اطلاعات بیشتر در مورد این فضاها را می‌توان در کتاب *بنیادهای توپولوژی عمومی* نوشتهٔ پروین و مراجع آن کتاب یافت .

تعریف ۱ - ۳۰. $<S,\delta>$ یک ***فضای نزدیکمند*** است اگر و فقط اگر $S\neq\varnothing$ و δ رابطه‌ای در 2^S باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(ن۱) $<A,\varnothing>\notin\delta$ به ازای هر $A\in 2^S$.

(ن۲) $<\{x\},\{x\}>\in\delta$ به ازای هر $x\in S$.

(ن۳) $<C,A\cup B>\in\delta$ اگروفقط اگر $<C,A>\in\delta$ یا $<C,B>\in\delta$ برای هر $A,B,C\in 2^S$.

(ن۴) هرگاه $<A,B>\notin\delta$ ، آنگاه عنصری مانند $C\in 2^S$ وجود دارد به‌قسمی که $<A,C>\notin\delta$ و $<S-C,B>\notin\delta$.

(ن۵) $<A,B>\in\delta$ اگر و فقط اگر $<B,A>\in\delta$.

رابطه δ یک **نزدیکی** در S نامیده می‌شود و "$<A,B>\in\delta$" به‌صورت "A نزدیک B است" خوانده می‌شود .

مثال ۱ - ۲۱. فرض کنید $<S, \rho>$ یک فضای شبه متریک باشد. هرگاه $A,B\in 2^S$، آنگاه قرار می‌دهیم $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y):x\in A,y\in B\}$. $<A,B>\in\delta$ اگر وفقط اگر $\rho(A,B)=0$. $\rho(A,\varnothing)=\infty$ به‌ازای هر $A\in 2^S$ ایجاب می‌کند که $<A,\varnothing>\notin\delta$ و (ن۱) برقرار است. چون $\rho(x,x)=0$، لذا $<\{x\},\{x\}>\in\delta$ به ازای هر $x\in S$ و (ن۲) صادق است. چون $\rho(C,A\cup B)\leq\rho(C,A)$ و $\rho(C,A\cup B)\leq\rho(C,B)$، لذا $\rho(C,A\cup B)=0$ اگر و فقط اگر $\rho(C,A)=0$ یا $\rho(C,B)=0$. در نتیجه $<C,A\cup B>\in\delta$ اگر و فقط اگر $<C,A>\in\delta$ یا $<C,B>\in\delta$، و بدین ترتیب (ن۳) برقرار است. هرگاه $<A,B>\notin\delta$، آنگاه $\rho(A,B)=r>0$. حال قرار می‌دهیم $C=\{x\in S:\rho(\{x\},B)\leq r/2\}$. در نتیجه $\rho(A,C)\geq r/2>0$ و $\rho(S-C,B)\geq r/2>0$ که ایجاب می‌کند که $<A,C>\notin\delta$ و $<S-C,B>\notin\delta$. بنابراین (ن۴) برقرار است. بالاخره، $\rho(A,B)=\rho(B,A)$ ایجاب می‌کند که $<A,B>\in\delta$ اگر و فقط اگر $<B,A>\in\delta$ و (ن۵) برقرار است. لذا ρ یک نزدیکی برای S است.

قضیهٔ ۱ - ۲۴. ***هر فضای نزدیکمند $<S,\delta>$ یک فضای توپولوژیک است.***

برهان. به‌ازای هر $A\in 2^S$ فرض کنیم $c(A)=\{x\in S:<\{x\},A>\in\delta\}$. بسهولت می‌توان ثابت کرد که c در شرایط (ک۱) - (ک۴) از قضیهٔ ۱ - ۴ صدق می‌کند و در نتیجه یک عملگر بستاری در 2^S است. توپولوژی بستاری بدین صورت به‌دست می‌آید که $A\in 2^S$ را بسته تعریف می‌کنیم اگر و فقط اگر $c(A)=A$ و $A\in 2^S$ را باز گوئیم (یعنی یک عضو توپولوژی) اگر و فقط اگر $S-A$ بسته باشد. ■

قضیهٔ ۱ - ۲۵. ***فضاهای توپولوژیکی پدید آمده توسط فضاهای نزدیکمند دقیقاً فضاهای یکنواخت‌پذیرند. فضای توپولوژیک S را یکنواخت‌پذیر گوئیم هرگاه توپولوژی آن توسط یک یکنواختی پدید آمده باشد.***

برهان. فرض کنید $<S, \mathcal{U}>$ یک فضای یکنواخت باشد. هرگاه $A,B\in 2^S$، قرار

می‌دهیم $<A,B>\in\delta$ اگر و فقط اگر به ازای هر $U\in\mathcal{U}$ عناصر $x\in A$ و $y\in B$ موجود باشند به قسمی که $<x,y>\in U$ آنگاه δ یک نزدیکی برای S است . از طرف دیگر ، هرگاه $<S,\delta>$ یک فضای نزدیکمند باشد ، آنگاه به ازای هر $A,B\in 2^S$ قرار می‌دهیم $U(A,B)=S\times S-[(A\times B)\cup(B\times A)]$. در این صورت گردآیهٔ $\mathcal{S}=\{U(A,B):<A,B>\notin\delta\}$ یک زیرپایهٔ یک یکنواختی برای S است که با δ سازگار می‌باشد . ■

تمرین

۱ - ۳۷ فرض کنید $\mathcal{C}[0,1]$ گردآیهٔ تمام توابع حقیقی پیوسته در $I^1=[0,1]$ باشد . معین کنید که هر یک از توابع زیر متریکی در $\mathcal{C}[0,1]$ هست یا نه؟

(الف) $\rho(f,g)=\text{Sup}\{|f(x)-g(x)|:x\in I^1\}$.

(ب) $\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$.

۱ - ۳۸. هرگاه $<S,\rho>$ یک فضای متریک باشد ، ثابت کنید که $\rho:S\times S\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ پیوسته است .

۱ - ۳۹. فرض کنید $<S,\rho>$ یک فضای متریک باشد . برای $A,B\in 2^S$ تعریف می‌کنیم $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y):x\in A,y\in B\}$. در این صورت نشان دهید که $x\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر $\rho(\{x\},A)=0$.

۱ - ۴۰. نشان دهید که هر فضای متریک، شمارش‌پذیر نوع اول است . علاوه‌بر این نشان دهید که یک فضای متریک ، شمارش‌پذیر نوع دوم است اگر و فقط اگر تفکیک‌پذیر باشد .

۱ - ۴۱. هرگاه $<S,\rho>$ یک فضای متریک باشد ، نشان دهید که $x_n\to x$ در S اگر و فقط اگر $\rho(x_n,x)\to 0$.

۱ - ۴۲. فرض کنیم $<S, \rho>$ یک فضای متریک باشد و $\emptyset \neq A \subset S$. قطر A را به‌صورت $\delta(A) = \operatorname{Sup}\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$ تعریف می‌کنیم. مجموعه A را کراندار گوئیم اگر و فقط اگر $\delta(A) < \infty$. فرض کنیم $\rho^*(x,y) = \rho(x,y)(1+\rho(x,y))^{-1}$ به ازای هر $x,y \in S$. نشان دهید که ρ^* یک متریک کراندار در S است و توپولوژی القاشده توسط ρ^* با توپولوژی القا شده توسط ρ در S برابر است.

۱ - ۴۳. فرض کنیم $<S, \tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset S$. مجموعه A را یک "G_δ" گوئیم اگر و فقط اگر A را بتوان به‌صورت مقطع تعداد شمارش‌پذیری از مجموعه‌های باز (یعنی اعضای τ) نوشت. همچنین A را یک F_σ گوئیم اگر و فقط اگر A را بتوان به‌صورت اجتماع تعداد شمارش‌پذیری از مجموعه‌های بسته نوشت. اگر $<S, \rho>$ یک فضای متریک باشد، نشان دهید که هر زیرفضای بسته یک G_δ و هر زیرفضای بازیک F_δ است.

۱ - ۴۴. فرض کنید $<S, \mathcal{U}>$ یک فضای یکنواخت باشد و $U \in \mathcal{U}$. نشان دهید که یک مجموعهٔ متقارن $V \in \mathcal{U}$ موجود است به قسمی که $V \circ V \subset U$.

۱ - ۴۵. فرض کنید $<S, \delta>$ یک فضای نزدیکمند باشد و $A, B \in 2^S$. نشان دهید که $<A, B> \in \delta$ اگر و فقط اگر $<\overline{A}, \overline{B}> \in \delta$.

* ۱ - ۹ فضای توابع و فضای خارج‌قسمتها

بالاخره فصل اول را با بحث مختصری در مورد فضاهای توابع و فضاهای خارج‌قسمتها به پایان می‌رسانیم. برای گردآورده‌های توابع از یک مجموعه در مجموعهٔ دیگر دو توپولوژی مفید زیر را تعریف می‌کنیم.

(۱) توپولوژی همگرایی نقطه‌ای (یا توپولوژی نقطه ـ باز).

(۲) توپولوژی همگرایی یکنواخت.

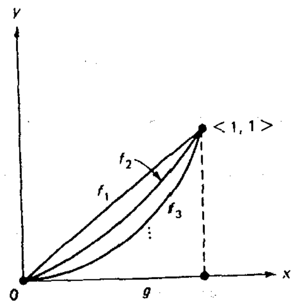
در فصل ۳ توپولوژی همگرایی فشرده‌ای (یا توپولوژی فشرده ـ باز) را تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱ - ۳۱. فرض کنید $S\neq\varnothing$ یک مجموعه و $<T,\tau_1>$ فضای توپولوژیک باشد. گردآیهٔ $\mathcal{F}(S,T)$ از تمام توابع از S در T را در نظر می‌گیریم. گردآیهٔ $\mathcal{S}=\{f\in\mathcal{F}(S,T):f(x_\circ)\in G,x_\circ\in S,G\in\tau_1\}$ یک زیرپایهٔ ***توپولوژی همگرایی نقطه‌ای (یا توپولوژی نقطه ـ باز)*** τ_2 در $\mathcal{F}(S,T)$ است.

مثال ۱ - ۲۲. فرض کنیم $S=[\circ,1]$، $<T,\tau_1>=<\mathbb{R},\xi>$، و τ_2 توپولوژی نقطه ـ باز در $\mathcal{F}(S,T)$ باشد. فرض کنیم $f_n(x)=x^n$ به ازای هر $n\in I^+$. آنگاه $\{f_n\}_{n\in I^+}$ همگرای نقطه‌ای به تابع $g:[\circ,1]\to\mathbb{R}$ است که

$$g(x)=\begin{cases}\circ & \text{به‌ازای } \circ\leq x<1\\ 1 & \text{به‌ازای } x=1.\end{cases}$$

(شکل ۱ - ۲). توجه دارید که g پیوسته نیست، اگرچه همه f_nها پیوسته‌اند. این مطلب انگیزه‌ای است برای تعریف توپولوژی همگرایی یکنواخت، چراکه حد یکنواخت یک دنباله از توابع پیوسته، پیوسته است.



شکل ۱ - ۲

تعریف ۱ - ۳۲. فرض کنیم $S\neq\varnothing$ یک مجموعه و $<T,d>$ یک فضای متریک باشد. گردآیهٔ تمام توابع کرانداراز S به T رابه $\mathcal{B}(S,T)$ نشان می‌دهیم. برای هر $f,g\in\mathcal{B}(S,T)$ فرض کنیم $\rho(f,g)=\mathrm{Sup}\{d(f(x),g(x)) : x\in S\}$. در این صورت ρیک متریک است که در $\mathcal{B}(S,T)$ ***توپولوژی همگرایی یکنواخت*** را القا می‌کند، این توپولوژی دارای پایه‌ای به‌صورت $\{S_\rho(f;\varepsilon):f\in\mathcal{B}(S,T),\varepsilon>0\}$ است که در آن

$$S_\rho\{f;\varepsilon) = \{g\in\mathcal{B}(S,T) : \rho(f,g)<\varepsilon\} .$$

مثال ۱ - ۲۳. فرض کنید $S=T=[0,1]$ و $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y\in T$. همچنین فرض کنید $\mathcal{B}(S,T)$ مجهز به توپولوژی همگرایی یکنواخت القاشده توسط متریک ρ باشد که مطابق تعریف ۱ - ۲۳ به‌صورت $\rho(f,g)=\mathrm{Sup}\{|f(x)-g(x)|:x\in[0,1]\}$ تعریف شده است. دنبالهٔ $f_n:S\to T$ از توابع پیوسته و کراندار را به‌صورت

$$f_n(x)=\begin{cases} x & \text{هرگاه } 0\leq x\leq \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{هرگاه } \dfrac{n}{n+1}<x\leq 1 \end{cases} \qquad n\in I^+$$

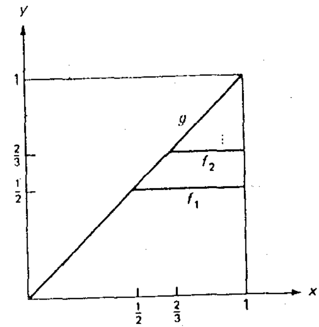
در نظر می‌گیریم. فرض کنید $g:S\to T$ تابع همانی تعریف شده به‌صورت $g(x)=x$ برای هر $x\in S$ باشد. نمودارهای این توابع در شکل ۱ - ۳ نشان داده شده‌اند چون:

$$\rho(f_n,g)=\mathrm{Sup}\{|\frac{n}{n+1}-x|:\frac{n}{n+1}\leq x\leq 1\}\leq 1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$ درنتیجه $\{f_n\}_{n\in I^+}$ همگرای یکنواخت به تابع پیوسته و کراندار g است.

حال به مفهوم "توپولوژی خارج‌قسمتها" می‌پردازیم. رابطهٔ هم‌ارزی $\mathbb{R}$ در مجموعهٔ S یک مجموعهٔ خارج‌قسمتها S/R را مشخص می‌کند که هرگاه مجهز به توپولوژی خارج‌قسمتها باشد به "فضای خارج‌قسمتها" نامیده می‌شود.

تعریف ۱ - ۳۳. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک، $T\neq\varnothing$ یک مجموعه باشد، و $f(S)=T$. در این صورت ***توپولوژی خارج‌قسمتها*** $\mathcal{G}$ بزرگترین توپولوژی در T است

به‌قسمی که f پیوسته باشد .



شکل ۱ - ۳

تعریف ۱ - ۳۴. فرض کنید $S\neq\varnothing$ یک فضای توپولوژیک و R یک رابطهٔ هم‌ارزی در S باشد . گردآیهٔ همه رده‌های R ـ هم‌ارزی در S را با S/R و نگاشت متعارف از S به S/R تعریف شده توسط ضابطه $\varphi(x)=[x]$ را با φ نمایش می‌دهیم . هرگاه $\mathscr{G}$ توپولوژی خارج‌قسمتها در S/R معین‌شده توسط φ باشد ، آنگاه $\langle S/R,\mathscr{G}\rangle$ یک فضای خارج‌قسمتها است .

مثال ۱ - ۲۴. فرض کنید $S=[0,1]$ و قرار می‌دهیم $\langle x,y\rangle\in R$ اگر و فقط اگر y,x هر دو گویا یا هر دو اصم باشند . در این صورت R یک رابطه هم‌ارزی در S است و فضای خارج‌قسمتهای S/R فضای ناگسستهٔ دو نقطه‌ای است .

مثال ۱ - ۲۵. فرض کنید $S=[0,1]$ و $R=\{\langle x,x\rangle:x\in S\}\cup\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}$.
در این صورت R یک رابطه هم‌ارزی در S است که دو نقطه انتهائی را یکی می‌نماید . در نتیجه ، فضای خارج‌قسمتهای S/R همانریخت با دایرهٔ یکهٔ S^1 است . برای ملاحظه این مطلب ، فرض کنیم $\varphi:S\to S/R$ نگاشت متعارف از S روی S/R باشد . چون S/R دارای

توپولوژی خارج‌قسمتها است ، لذا φ پیوسته است . هرگاه $f:[0,1]\to S^1$ تابع پیوسته تعریف شده به‌صورت $f(x)=e^{2\pi ix}$ به ازای هر $x\in[0,1]$ باشد ، آنگاه خواننده بسهولت می‌تواند ثابت کند که تابع $f\circ\varphi^{-1}:S/R\to S^1$ دوسویی پیوسته و باز (و بنابراین همانریختی) است .

همانطور که در مثال ۱ − ۲۵ بیان شد ، نگاشت متعارف $\varphi:S\to S/R$ همیشه پیوسته است ، زیراکه S/R به توپولوژی خارج‌قسمتها مجهز است . با استفاده از این موضوع قضیه جالب زیر را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ - ۲۶ . ***فرض کنید $\langle S,\tau_1\rangle$ و $\langle T,\tau_2\rangle$ دو فضای توپولوژیک بترتیب با رابطه‌های هم‌ارزی R_1 و R_2 باشند . هرگاه $f:\langle S,\tau_1\rangle\to\langle T,\tau_2\rangle$ پیوسته و حافظ رابطه باشد، آنگاه تابع $f_*:S/R_1\to T/R_2$ که بصورت $f_*([x])=[f(x)]$ (که در آن $[f(x)]=\{y'\in T:\langle f(x),y'\rangle\in R_2\},[x]=\{x'\in S:\langle x,x'\rangle\in R_1\}$) تعریف می‌شود، پیوسته است .***

برهان چون نمودار زیر جابجائی است:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ S/R_1 & \xrightarrow[f_*]{} & T/R_2 \end{array}$$

لذا داریم $\varphi_2\circ f=f_*\circ\varphi_1$. بعلاوه پیوستگی $\varphi_2\circ f$ و φ_2 ، پیوستگی $f_*\circ\varphi_1$ و f_* را ایجاب می‌کند . ■

در یک فضای شبه متریک ، با یکی گرفتن همه نقاطی که دوریشان از یکدیگر صفر است یک فضای خارج‌قسمتها به‌دست می‌آید که متریک‌پذیر است .

قضیهٔ ۱ - ۲۷ . ***فرض کنید $\langle S,\rho\rangle$ یک فضای شبه متریک باشد و $\langle x,y\rangle\in R$ اگر و فقط اگر $\rho(x,y)=0$ به ازای هر $x,y\in S$. در این صورت R یک رابطهٔ هم‌ارزی در S است***

و $\langle S/R,\mathscr{G}\rangle$ ***متریک‌پذیر است .***

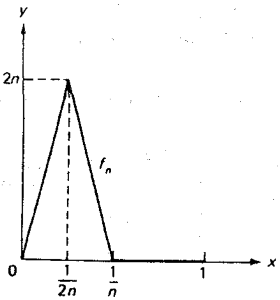
برهان . $\langle x,x\rangle\in R$ به‌ازای هر $x\in S$ چرا که $\rho(x,x)=0$. همچنین $\langle x,y\rangle\in R$ ایجاب می‌کند که $\langle y,x\rangle\in R$ چرا که $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ به‌ازای هر $x,y\in S$. بالاخره هرگاه $\langle x,y\rangle\in R$ و $\langle y,z\rangle\in R$ ، آنگاه $\rho(x,y)=\rho(y,z)=0$، بنابراین $0\le\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)=0$ ایجاب می‌کند که $\rho(x,z)=0$ و در نتیجه $\langle x,z\rangle\in R$. پس R یک رابطهٔ هم‌ارزی در S است . حال فرض کنیم به ازای هر $[x],[y]\in S/R$ ، $\rho^*([x]),[y])=\rho(x,y)$ که در آن $x\in[x]$ و $y\in[y]$. در این صورت ρ^*ـ یک متریک در S/R است. علاوه‌براین، توپولوژی ρ^* متریک در S/R برابر توپولوژی خارج‌قسمتها $\mathscr{G}$ است. ■

تمرین

۱ - ۴۶ . فرض کنید $\mathcal{F}(I^1,R)$ دارای توپولوژی همگرایی نقطه‌ای باشد و تعریف می‌کنیم (شکل ۱ - ۴)

$$f_n(x)=\begin{cases} 4n^2x & 0\le x\le 1/2n \text{ هرگاه} \\ -4n^2x+4n & 1/2n\le x\le 1/n \quad , \quad n\in N \\ 0 & 1/n\le x\le 1/2n \;. \end{cases}$$

نشان دهید که دنباله $\{f_n\}_{n\in I^+}$ در I^1 همگرای نقطه‌ای به $g(x)=0$ است .



۱ - ۴۷. فرض کنید $<S,\tau>$ و $<T,\tau>$ دو فضای توپولوژیک باشند. هرگاه $\{f_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله از توابع در $\mathcal{F}(S,T)$ با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای باشد، آنگاه نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} f_n=g$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$ به‌ازای هر $x\in S$.

۱ - ۴۸. نشان دهید که هرگاه $f: S\to T$ و $G\subset T$، آنگاه $G\in\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ توپولوژی خارج‌قسمتها در T) اگر و فقط $f^{-1}(G)\in\tau$ (τ توپولوژی مفروض در S است.) همچنین $C\subset T$ بسته است اگر و فقط اگر $f^{-1}(C)$ بسته باشد.

۱ - ۴۹. هرگاه $f:<S,\tau>_1 \to <T,\tau_2>$ پوشا و پیوسته بوده و به علاوه باز یا بسته باشد، آنگاه نشان دهید که τ_2 الزاماً توپولوژی خارج‌قسمتها در T است.

۱ - ۵۰. ثابت کنید که نگاشت $f:S/R\to T$ پیوسته است اگر و فقط اگر $f\circ\varphi:S\to T$ پیوسته باشد.

۱ - ۵۱. نشان دهید که اگر A یک فضای خارج‌قسمتهای S و B یک فضای خارج‌قسمتهای A باشد، آنگاه B همانریخت با یک فضای خارج‌قسمتهای S است.

فصل دوم

اصول جداسازی

۲ - ۱. فضاهای T_0 ، T_1 ، T_2 و $T_{5/2}$

بطورکلی خواص توپولوژیک فضای $<S,\tau>$ اساساً بستگی به τ گردآیهٔ "مجموعه‌های باز" دارد. برای مثال عدد اصلی τ برای یک فضای $<S,\tau>$ تفکیک‌پذیر و یا شمارش‌پذیر نوع اول یا دوم باید به اندازه کافی کوچک باشد. از طرف دیگر هرگاه عدد اصلی τ_1 بزرگ باشد، تابع $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ با احتمال بیشتری پیوسته است. در این فصل در مورد اصول جداسازی T_i ، منسوب به آلکساندرف و هوف که مربوط به نحوه توزیع مجموعه‌های باز در S می‌باشند، بحث می‌کنیم. فضاهای متریک در همه اصول T_i ها صدق می‌کنند. در این بخش ما به بررسی اصولی می‌پردازیم که مربوط به جداسازی دو نقطه متمایز توسط مجموعه‌های باز می‌شوند.

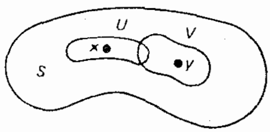
تعریف ۲ - ۱. فضای $<S,\tau>$ یک ***فضای*** T_0 است اگر و فقط اگر $x,y\in S$ و $x\neq y$ ایجاب کند عنصری مانند $U\in\tau$ وجود دارد به قسمی که یا $x\in U$ و $y\in S-U$، یا $y\in U$ و $x\in S-U$ (شکل ۲ - ۱).

شکل ۲ - ۱

اکنون مثالی از دو توپولوژی در $S=\{a,b,c\}$ می‌آوریم که یکی از این دو، فضای T_0 است. چون اصل T_0 ضعیف‌ترین خاصیت جداسازی است که مورد بحث قرار می‌دهیم ، می‌توان از این مثال نتیجه گرفت که تعداد مجموعه‌های باز بعضی از فضاهای توپولوژیک کمتر از آن است که عملاً بتوانند مفید واقع شوند .

مثال ۲ - ۱ . فرض کنید $S=\{a,b,c\}$ و $\tau_1=\{\varnothing\{a\},\{b\},\{a,b\},S\}$. در این صورت $<S,\tau_1>$ یک فضای T_0 است ، چراکه $c\notin\{a\}$ و $c\notin\{b\}$. فرض کنیم $\tau_2=\{\varnothing,S\}$. فضای $<S,\tau_2>$ فضای T_0 نیست . چراکه $a,b,c\in S$.

تعریف ۲ - ۲ . فضای $<S,\tau>$ *یک فضای* T_1 است اگر و فقط اگر $x,y\in S$ و $x\neq y$ ایجاب کند که $U,V\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی‌که $x\in U$ ، $y\in S-U$ و $y\in V$ ، $x\in S-V$ (شکل ۲-۲) .



شکل ۲ - ۲

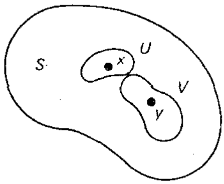
فضای $<S,\tau_1>$ مثال ۲ - ۱ یک فضای T_0 است ولی T_1 نیست ، چراکه هر مجموعه باز شامل c، شامل a و b نیز هست . ولی هرگاه S را با توپولوژی گسسته در نظر گیریم ، آنگاه S یک فضای T_1 است . به‌عنوان تمرین خواننده می‌تواند ثابت کند که هر فضای T_1 یک فضای T_0 است . تعریف ۲ - ۲ هم‌ارز با بسته‌بودن تمامی مجموعه‌های تک عضوی است .

قضیهٔ ۲ - ۱ . *فضای* $<S,\tau>$ *یک فضای* T_1 *است اگر و فقط اگر* $\overline{\{x\}}=\{x\}$ *به ازای هر* $x\in S$.

برهان . فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای T_1 باشد و $x\in S$. هرگاه $y\in S-\{x\}$ ، آنگاه

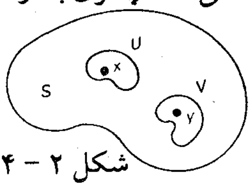
عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $y\in V$ و $x\in S-V$. بنابراین $y\notin\overline{\{x\}}$ و لذا $\{x\}=\overline{\{x\}}$. به عکس، فرض کنیم $\{x\}=\overline{\{x\}}$ به ازای هر $x\in S$. فرض کنیم $y,z\in S$ و $y\neq z$. آنگاه $\{y\}=\overline{\{y\}}$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $z\in V$ و $y\in S-V$. همچنین $\{z\}=\overline{\{z\}}$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $U\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $y\in U$ و $z\in S-U$. در نتیجه $<S,\tau>$ بنابر تعریف ۲ - ۲ یک فضای T_1 است.

تعریف ۲ - ۳. فضای $<S,\tau>$ ***یک فضای*** T_2 است اگر و فقط اگر $x,y\in S$ و $x\neq y$ ایجاب کند که $U,V\in\tau$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $x\in U$، $y\in V$ به‌قسمی که $U\cap V=\varnothing$. یک فضای T_2 فضای هاوسدرف نیز نامیده می‌شود (شکل ۲ - ۳).



شکل ۲ - ۳

تعریف ۲ - ۴. $<S,\tau>$ یک فضای $T_{5/2}$ می‌باشد اگر و فقط اگر $x,y\in S$ و $x\neq y$ ایجاب کند که $U,V\in\tau$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $x\in U$، $y\in V$ و $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$. (شکل ۲-۴) (و.ج ثرون اینگونه فضاها را ***فضاهای اوریسون*** نامیده است، ولی استین و سیباخ "فضاهای اوریسون" را به معنی محدودتری بکار می‌برند).



شکل ۲ - ۴

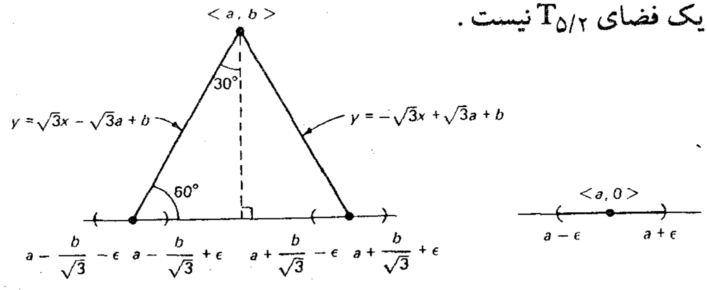
خواننده بسهولت می‌تواند تحقیق کند که یک مجموعه بی‌پایان S با "با توپولوژی متمم باپایان" یک فضای T_1 است که هاوسدرف نیست. اکنون یک فضای T_2 را شرح

می دهیم که اوریسون نیست . این مثال از بینگ است . همچنین مثالی از یک فضای $T_{5/2}$ از مور بیان خواهیم کرد .

مثال ۲ - ۲. فرض کنیم $S=\{<x,y>: y\geq 0$ و y,x گویا هستند$\}$. هرگاه $<a,b>\in S$ و $\varepsilon>0$ آنگاه مجموعهٔ

$$\{<r,0>: |r-(a+b/\sqrt{3})|<\varepsilon \text{ یا } |r-(a-b/\sqrt{3})|<\varepsilon\}\cup\{<a,b>\}$$

یک εـ همسایگی از $<a,b>$ است . از دید هندسی در حالت $b>0$ چنین همسایگی متشکل از $<a,b>$ همه اعداد گویا در فاصله‌های $(a-b/\sqrt{3}-\varepsilon, a-b/\sqrt{3}+\varepsilon)$ و $(a+b/\sqrt{3}-\varepsilon, a+b/\sqrt{3}+\varepsilon)$ به مرکز پای رئوس قاعده‌های مثلث متساوی الاضلاعی که رأس آن نقطه $<a,b>$ است و قاعده آن روی محور xها قرار دارد . هرگاه $b=0$ ، آنگاه ε− همسایگی $<a,0>$ شامل همه اعدادگویا در فاصله $(a-\varepsilon, a-\varepsilon)$ است . شکل ۲ − ۵ را ملاحظه نمائید . گردآیهٔ همه این چنین همسایگیها پایه‌ای برای یک T_2ـتوپولوژی τ در S است به‌طوری‌که مقطع بستارهای هر دو عضو $\tau-\{\varnothing\}$ غیرتهی است . در نتیجه $<S,\tau>$ یک فضای $T_{5/2}$ نیست .



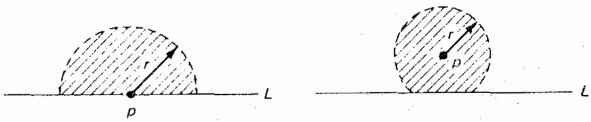
شکل ۲ − ۵

مثال ۲ - ۳. فرض کنیم $S=\{<x,y>: y\geq 0$ و y,x حقیقی هستند$\}$ و $L=\{<x,0>: x$ حقیقی است$\}$. فرض کنیم d متریک معمولی در E^2 بوده و $S_d(p;r)$ عبارت از d کرهٔ باز به مرکز p و شعاع $r>0$ باشد . برای هر $p\in S$ و $r>0$ ، یک همسایگی $N_r(p)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $N_r(p)=S_d(p;r)\cap S$ اگر $p\in S-L$،

(۲) $N_r(p)=[S_d(p;r)\cap(S-L)]\cup\{p\}$ اگر $p\in L$.

به بیان هندسی ، $N_r(p)$ در حالتی که $p\in L$، نیم قرص مستدیر به شعاع r و به مرکز p است و در حالتی که $p\in S-L$، مقطع S با قرص مستدیر به شعاع r و به مرکز p می‌باشد (شکل ۲ - ۶). واضح است که گردآیهٔ $\{N_r(p):p\in S, r>0\}$ یک پایهٔ یک توپولوژی τ در S است . فرض کنیم $p,q\in S$ و $p\neq q$، در این صورت $r>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(p,q)=|p-q|=3r$. چون $r=\frac{1}{3}d(p,q)$، لذا $\overline{N_r(p)}\cap\overline{N_r(q)}=\varnothing$ و در نتیجه $<S,\tau>$ یک فضای $T_{5/2}$ است .



شکل ۲ - ۶

از تعریفهای ۲ - ۳ و ۲ - ۴ فوراً نتیجه می‌شود که هر فضای $T_{5/2}$ یک فضای T_2 است و هر فضای T_2 یک فضای T_1 است . خواننده می‌تواند بسهولت تحقیق کند که یک فضای متریک نیز $T_{5/2}$ است . اکنون نشان می‌دهیم که خاصیت $T_{5/2}$ بودن یک فضا هَم‌ارثی و هم‌ضربی است و سپس این بخش را با نتیجهٔ بسیار مهمی که حاکی از یکتابودن حدهای دنباله‌ای درفضاهای هاوسدرف می‌باشد به پایان می‌رسانیم .

قضیهٔ ۲ - ۲. هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای $T_{5/2}$ باشد ، آنگاه هر زیرفضا از $<S,\tau>$ نیز یک فضای $T_{5/2}$ است .

برهان. فرض کنیم $\varnothing\neq A\subset S$ و $p,q\in A$ و $p\neq q$. از آنجا که $p,q\in S$، لذا عناصری مانند $U,V\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $p\in V$، $q\in U$ و $\bar{V}\cap\bar{U}=\varnothing$. در نتیجه $p\in A\cap U$، و $q\in A\cap V$ و داریم $(\overline{A\cap U}\cap A)\cap(\overline{A\cap V}\cap A)=\varnothing$، چراکه $\bar{V}\cap\bar{U}=\varnothing$. بنابراین

$\langle A,\tau|A\rangle$ یک فضای $T_{5/2}$ است . ■

قضیهٔ ۲ - ۳ . هرگاه $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ یک فضای $T_{5/2}$ باشد ، آنگاه فضای حاصلضرب $\langle S,\tau\rangle=\langle \pi_\Lambda S_\alpha,\pi_\Lambda \tau_\alpha\rangle$ نیز یک فضای $T_{5/2}$ است .

برهان . فرض کنیم $p,q\in S$ و $p\neq q$. درنتیجه یک $\alpha\in\Lambda$ وجود دارد به‌طوری‌که $p_\alpha\neq q_\alpha$. از آنجا که $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ یک فضای $T_{5/2}$ است ، لذا $U_\alpha,V_\alpha\in\tau_\alpha$ وجود دارد به‌قسمی که $q\in V_\alpha$ ، $p_\alpha\in U_\alpha$ و $U_\alpha\cap V_\alpha=\varnothing$. در نتیجه $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)\in\tau$ ، $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\in\tau$ و $p\in\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ ، $q\in\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$. از آنجا که توابع تصویر π_α همگی بازند ، لذا $\overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)}\subset\pi_\alpha^{-1}(\overline{U}_\alpha)$ و $\overline{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)}\subset\pi_\alpha^{-1}(\overline{V}_\alpha)$. همچنین

$\pi_\alpha^{-1}(\overline{U}_\alpha)\cap\pi_\alpha^{-1}(\overline{V}_\alpha)=\varnothing$ چراکه $\overline{U}_\alpha\cap\overline{V}_\alpha=\varnothing$. درنتیجه $\overline{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)}\cap\overline{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)}=\varnothing$ و لذا $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای $T_{5/2}$ است . ■

قضیهٔ ۲ - ۴ . حدهای دنباله‌ای در یک فضای هاوسدرف یکتا هستند .

برهان . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای هاوسدرف باشد . فرض کنیم $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله در S با دو حد دنباله‌ای L_1 و L_2 باشد . در این صورت $U,V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $L_1\in U$ ، $L_2\in V$ و $U\cap V=\varnothing$. در نتیجه $N_2\in I^+$ و N_1 وجود دارند به‌قسمی که $x_n\in U$ به ازای هر $n\geq N_1$ و $x_n\in V$ به ازای هر $n\geq N_2$. این امر ایجاب می‌کند که $x_n\in U\cap V$ به ازای هر $n\geq\max\{N_1,N_2\}$ که یک تناقض است . ■

تمرین

۲ - ۱ . نشان دهید که خاصیت فضای T_i- بودن $(i=0,1,2,\frac{5}{2})$ یک خاصیت توپولوژیک است که هم‌ارثی و هم ضربی است .

۲ - ۲ . نشان دهید که $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای T_0 است اگر و فقط اگر به ازای هر $x,y\in S$ و $x\neq y$ ایجاب کند که $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

۲ - ۳. نشان دهید که توپولوژی گسسته تنها توپولوژی T_1 در یک مجموعهٔ باپایان S است.

۲ - ۴. نشان دهید که هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای T_1 باشد و $x\in S$ و $A\subset S$، آنگاه x یک نقطه حدی A است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ باز شامل x، شامل تعداد بی‌پایانی نقاط متمایز A باشد.

۲ - ۵. نشان دهید که هر زیرفضای باپایان از یک فضای T_1 بسته است.

۲ - ٦. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای T_1 شمارش‌پذیر نوع اول باشد. هرگاه $x\in S$ و $A\subset S$، نشان دهید که x یک نقطهٔ حدی A است اگر و فقط اگر دنباله‌ای از نقاط متمایز A همگرا به x موجود باشد.

۲ - ۷. فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای شمارش‌پذیر نوع اول باشد به‌قسمی که حدهای دنباله‌ای یکتا باشند. نشان دهید که $<S,\tau>$ هاوسدرف است.

۲ - ۸. نشان دهید که $<S,\tau>$ هاوسدرف است اگر و فقط اگر قطر $\Delta=\{<x,x>:x\in S\}$ یک زیرفضای بسته فضای حاصلضرب $<S\times S,\tau\times\tau>$ باشد.

۲ - ۹. فرض کنید $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ یک تابع دوسویی و f^{-1} پیوسته باشد. هرگاه $<S,\tau_1>$ هاوسدرف باشد. نشان دهید که $<T,\tau_2>$ نیز هاوسدرف است.

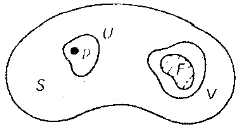
۲ - ۱۰. فرض کنید $f:<S,\tau>\to<T,\tau_2>$ یک تابع پوشای بسته و $<S,\tau_1>$ یک فضای T_1 باشد. نشان دهید که $<T,\tau_2>$ نیز یک فضای T_1 است.

۲ - ۱۱. گوئیم S یک "فضای T_D" اگر و فقط اگر به ازای هر $x\in S$، $\{x\}'$ بسته باشد. نشان دهید که خاصیت فضای T_D بودن یک خاصیت توپولوژیک ارثی است که T_0 بودن را ایجاب می‌کند و از T_1 بودن نتیجه می‌شود.

۲ - ۲ فضاهای منظم ($T_۳$) و کاملاً منظم ($T_{۷/۲}$)

در این بخش اصول مربوط به جداسازی یک نقطه از یک مجموعه بسته را که شامل آن نقطه نیست ، در نظر می‌گیریم . چون دو اصل "منظم‌بودن" و "کاملاً منظم‌بودن" $T_{۵/۲}$ را ایجاب نمی‌کند ، لذا مفهوم "فضای $T_۳$" (فضای $T_۲$ و منظم) و مفهوم "فضای تیخونف یا $T_{۷/۲}$" (فضای $T_۲$ کاملاً منظم) را تعریف می‌کنیم . نتیجه می‌شود که اصل $T_{۷/۲}$ ، اصل $T_۳$ ، و اصل $T_۳$ ، اصل $T_{۵/۲}$ را ایجاب می‌کند .

تعریف ۲ - ۵ . $<S,\tau>$ **منظم** است اگر و فقط اگر $p\in S$ و $F\subset S-\{p\}$ که در آن F بسته است ایجاب کند که عناصری مانند $U,V\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $p\in U$ ، $F\subset V$ و $V\cap U=\varnothing$. فضای $<S,\tau>$ را $T_۳$ گوئیم اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ یک فضای $T_۱$ منظم باشد (شکل ۲ - ۷) .

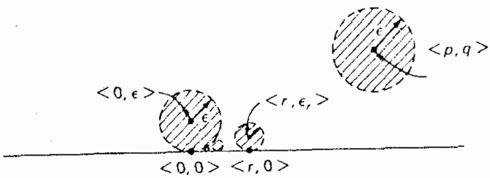


شکل ۲ - ۷

فضای $<S,\tau>$ ، مثال ۲ - ۳ یک فضای $T_{۵/۲}$ است ولی $T_۳$ نیست . برای اثبات این موضوع فرض کنیم $p=<\circ,\circ>$ و $F=L-<p>$. مجموعهٔ F بسته است ولی هیچ دو مجموعهٔ باز مجزای U ، V بترتیب شامل F و p موجود ندارند . حال به تعریف یک فضای منظم ($T_۳$) می‌پردازیم و آنگاه منظم‌بودن را به روش دیگری مشخص می‌کنیم .

مثال ۲ - ۴ . فرض کنیم $S=\{<x,y>\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:y\geq\circ\}$. اگر $<p,q>\in S$ و $q>\circ$ ، قرار می‌دهیم $N_\varepsilon(p,q)=\{<x,y>\in S:(x-p)^۲+(y-q)^۲<\varepsilon^۲\}$ ، و برای $<p,\circ>\in S$ قرار می‌دهیم $N_\varepsilon(p,\circ)=\{<x,y>\in S:(x-p)^۲+(y-\varepsilon)^۲<\varepsilon^۲\}\cup\{<p,\circ>\}$ (شکل ۲ - ۸) . فرض کنیم $\mathscr{B}=\{N\varepsilon(p,q):<p,q>\in S,\varepsilon>\circ\}$. خواننده می‌تواند ثابت کند که $\mathscr{B}$ یک پایهٔ یک توپولوژی در S است . فرض کنیم $L=\{<p,\circ>:p\in R\}$. توجه کنید که

$\tau|L$ توپولوژی گسسته، و $\tau|S-L$ توپولوژی اقلیدسی است. مانند مثال ۲ - ۳ مشکل تنها در جداسازی نقطه $p=\langle 0,0\rangle$ از مجموعهٔ بسته $F=L-\{p\}$ ظاهر می‌شود. با این حال، این مشکل صرفاً ظاهری است. فرض‌کنیم $\varepsilon>0$, $U=N_\varepsilon(0,0)$. برای هر $\langle r,0\rangle\in F$، عددی مانند $\varepsilon_r>0$ وجود دارد به‌قسمی که $N_{\varepsilon_r}(r,0)\cap N_\varepsilon(0,0)=\varnothing$ که درآن $\varepsilon_r\to 0$ هنگامی که $r\to 0$. آشکار است که $V=\bigcup\{N_\varepsilon(r,0):r\in R-\{0\}\}\supset F$ و $V\cap U=\varnothing$. در نتیجه $\langle S,\tau\rangle$ منظم است.



شکل ۲-۸

قضیهٔ ۲ - ۵. *فضای $\langle S,\tau\rangle$ منظم است اگر و فقط اگر $p\in U\in\tau$ ایجاب کند عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $p\in V\subset \bar{V}\subset U$.*

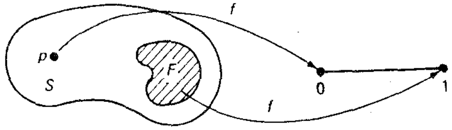
برهان. فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ منظم و $p\in U\in\tau$. در این صورت $S-U$ بسته است و عناصری‌مانند $G_1,G_2\in\tau$ وجوددارد به‌قسمی که $p\in G_1$، $S-U\subset G_2$ و $G_1\cap G_2=\varnothing$. در نتیجه $p\in G_1\subset S-G_2\subset U$. همچنین $\bar{G}_1\subset S-G_2$، چون $S-G_2$ بسته است قرار می‌دهیم $V=G_1$.

اکنون فرض می‌کنیم $p\in U\in\tau$ ایجاب کند عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $p\in V\subset\bar{V}\subset U$. فرض کنیم $p\in S$ و $F\subset S-\{p\}$ بسته باشد. در این صورت $p\in S-F\in\tau$. بنابراین عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $p\in V\subset \bar{V}\subset S-F$. این امر ایجاب می‌کند که $F\subset S-\bar{V}\in\tau$ و $(S-\bar{V})\cap V=\varnothing$. در نتیجه $\langle S,\tau\rangle$ منظم است. ■

اکنون به جداسازی یک نقطهٔ p و یک مجموعه بستهٔ $F\subset S-\{p\}$ توسط یک تابع

پیوستهٔ حقیقی می‌پردازیم . بدین ترتیب ردهٔ فضاهای کاملاً منظم که بر ردهٔ فضاهای یکنواخت و نزدیکمند منطبق است ، به‌دست می‌آید .

تعریف ۲ - ٦ . فضای $\langle S,\tau\rangle$ ***کاملاً منظم*** است اگر و فقط اگر برای $p\in S$ و $F\subset S-\{p\}$ بسته یک تابع پیوستهٔ $f:S\to I^1$ با شرط $f(p)=0$ و $f(F)=\{1\}$ موجود باشد . فضای $\langle S,\tau\rangle$ را ***تیخونف یا فضای*** $T_{7/2}$ گوئیم اگر و فقط اگر $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای T_1 کاملاً منظم باشد (شکل ۲ - ۹) .



شکل ۲ - ۹

بیشتر مثالهای فضاهای منظم ، کاملاً منظم نیز هستند . آر-اف-آرنز با چسباندن تعداد بی‌پایانی نسخه از یک فضای توپولوژیک و الحاق دو نقطهٔ اضافی مثالی از یک فضای منظم که کاملاً منظم نیست ساخته است . جزئیات این ساختار را می‌توان در صفحه‌های ۷۷ - ۷۹ کتاب ***نظریه و مثالهائی از توپولوژی مجموعه نقاط*** نوشتهٔ گریور یافت . فضاهای کاملاً منظم دارای خاصیت مهم "یکنواخت‌پذیری" می‌باشند . یعنی در یک فضای کاملاً منظم $\langle S,\tau\rangle$ یک یکنواختی $\mathcal{U}$ تعریف می‌شود به‌قسمی که توپولوژی یکنواخت $\tau_{\mathcal{U}}$ همان توپولوژی τ است .

قضیهٔ ۲ - ٦ . *هر فضای کاملاً منظم یکنواخت‌پذیر است .*

برهان . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ کاملاً منظم باشد . هرگاه $f:S\to I^1$ پیوسته باشد و $\varepsilon>0$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $B_{f,\varepsilon}=\{\langle x,y\rangle\in S\times S:|f(x)-f(y)|<\varepsilon\}$. ملاحظه می‌شود که مقطع هر دو مجموعه $B_{f,\varepsilon}$ غیرتهی است . گردآیهٔ همه مقاطع باپایان مجموعه‌های $B_{f,\varepsilon}$ را به $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم $\mathcal{U}=\{U\subset S\times S:U\supset B, B\in\mathcal{B}$ برای یک$\}$.
نشان می‌دهیم که $\mathcal{U}$ یک یکنواختی است . (ی ۱) برقرار است ؛ چراکه

$\varepsilon >$ ۰ $= |f(x)-f(x)|$ ایجاب می‌کند که $<x,x>\in B_{f,\varepsilon}$ به ازای هر $x\in S$. واضح است که (ی۲) برقرار است، چراکه $U\in\mathcal{U}$ و $U\subset V$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $B\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $B\subset U\subset V$ و لذا $V\in\mathcal{U}$. هرگاه $V\in\mathcal{U}$ و U، آنگاه عناصری مانند $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ وجود دارند به‌قسمی که $U\supset B_1$ و $V\supset B_2$. این امر ایجاب می‌کند که $\emptyset\neq B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$ و $U\cap V\supset B_1\cap B_2$. در نتیجه $U\cap V\in\mathcal{U}$ و (ی۳) برقرار است. نابرابری مثلثی ایجاب می‌کند که $B_{f,\varepsilon/2}\circ B_{f,\varepsilon/2}\subseteq B_{f,\varepsilon}$. هرگاه $U\in\mathcal{U}$، آنگاه عنصری مانند $B=\cap\{B_{f_i,\varepsilon_i}:i=1,2,\dots,n\}\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $B\subset U$. علاوه‌بر این،

$\cap\{B_{f_i,\varepsilon_i/2}:i=1,2,\dots,n\}\circ\{B_{f_i,\varepsilon_i/2}:i=1,2,\dots,n\}\subset\cap\{B_{f_i,\varepsilon_i}:i=1,2,\dots,n\}=B$.

در نتیجه (ی۴) برقرار است. بالاخره (ی۵) صادق است، چراکه $B_{f,\varepsilon}{}^{-1}=B_{f,\varepsilon}$ ایجاب می‌کند که $B^{-1}=B$ به ازای هر $B\in\mathcal{B}$. همچنین، ملاحظه می‌شود که $\tau_{\mathcal{U}}=\tau$. ■

عکس قضیهٔ ۲ - ۶ نیز درست است: هر فضای یکنواخت کاملاً منظم است. اثبات این قضیه در صفحه‌های ۱۷۹ تا ۱۸۱ کتاب بنیادهای توپولوژی عمومی نوشته پروین یافت می‌شود. در نتیجه ردهٔ فضاهای کاملاً منظم بر رده فضاهای یکنواخت و نزدیکمند منطبق است.

تمرین

۲ - ۱۲ نشان دهید که خاصیت فضای T_i بودن ($i=3,\frac{7}{2}$) یک خاصیت توپولوژیک است که هم‌ارثی است و هم‌ضربی.

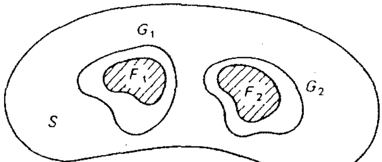
۲ - ۱۳ نشان دهید که هر فضای $T_{7/2}$ یک فضای T_3 است و هر فضای T_3 نیز یک فضای $T_{5/2}$ است.

۲ - ۱۴ ثابت کنید که یک فضای T_0 منظم یک فضای T_3 است.

۲ - ۳ فضاهای نرمال ($T_۴$) و کاملاً نرمال ($T_۵$)

حال به بررسی اصول مربوط به جداسازی یک جفت از مجموعه‌های بسته مجزا یا "مجموعه‌های جداشده" توسط مجموعه‌های باز مجزا می‌پردازیم. چون هیچیک از این خاصیتها، نرمال بودن و نرمال کامل‌بودن، منظم‌بودن را ایجاب نمی‌کند، لذا مفاهیم "فضای $T_۴$" (فضای $T_۱$ نرمال) و "فضای $T_۵$" (فضای $T_۱$ کاملاً‌نرمال) را تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب خواننده بسادگی می‌تواند ثابت کند که خاصیت $T_۵$ خاصیت $T_۴$ و خاصیت $T_۴$ خاصیت $T_{۷/۲}$ را ایجاب می‌کند. دو قضیهٔ مهم از اوریسون و تیزه را ثابت می‌کنیم که مشخصه‌های دیگری برای نرمال‌بودن به‌دست می‌دهند. همچنین نشان می دهیم که کاملاً نرمال بودن هم‌ارز با نرمال‌بودن ارثی است.

تعریف ۲ - ۷. فضای $<S,\tau>$ ***نرمال*** است اگر و فقط اگر برای هر جفت از زیرمجموعه‌های مجزای بسته $F_۱$ و $F_۲$ از S، عناصری مانند $G_۱,G_۲\in\tau$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $F_۱\subset G$، $F_۲\subset G_۲$ و $G_۱\cap G_۲\neq\varnothing$. فضای $<S,\tau>$ یک فضای $T_۴$ است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ یک فضای نرمال $T_۱$ باشد (شکل ۲ - ۱۰).



شکل ۲ - ۱۰

فضای توپولوژیک مثال ۲ - ۴ یک فضای $T_{۷/۲}$ است که نرمال نیست. فرض کنیم $F_۱=\{<۰,r>: r$ گویااست$\}$ و $F_۲=\{<r,۰>: r$ اصم است$\}$. واضح است که $F_۱$ و $F_۲$ هر دو بسته‌اند و $F_۱\cap F_۲=\varnothing$. با این حال، دو مجموعهٔ باز مجزای $G_۱$ و $G_۲$ بترتیب شامل $F_۱$ و $F_۲$ وجود ندارند، چراکه یک قرص مماس در یک نقطه اصم (از $F_۲$) باید

قرصهای مماس در بینهایت نقطه گویا (از F_1) را قطع کند.

قضیهٔ ۲ - ۷. ***(لم اوریسون) فضای $\langle S,\tau \rangle$ نرمال است اگر و فقط اگر برای هر جفت F_1 و F_2 از مجموعه‌های مجزای بسته S نگاشت پیوسته‌ای مانند $f:S\to[a,b]$ موجود باشد به‌قسمی که $f(F_1)=\{a\}$ و $f(F_2)=\{b\}$.***

برهان. هرگاه این چنین نگاشتی مانند $f:S\to[a,b]$ موجود باشد، آنگاه $F_1\subset f^{-1}([a,\frac{a+b}{2}))=G_1\in\tau$ و $F_2\subset f^{-1}((\frac{a+b}{2},b])=G_2\in\tau$ و $G_1\cap G_2=\varnothing$. در نتیجه $\langle S,\tau \rangle$ نرمال است. به عکس فرض کنیم $\langle S,\tau \rangle$ نرمال باشد و F_1 و F_2 یک جفت از زیرمجموعه‌های مجزای بسته S باشند. هرگاه Q نشانگر مجموعهٔ اعداد گویا باشد، آنگاه گردآیهٔ $\{G_r:r\in Q\}$ از عناصر $G_r\in\tau$ را به‌صورت زیر به‌قسمی تعریف می‌کنیم که $\overline{G}_r\subset G_s$ به ازای هر $s>r$:

(۱) هرگاه $r<0$، فرض می‌کنیم $G_r=\varnothing$.

(۲) هرگاه $r>1$، فرض می‌کنیم $G_r=S$.

(۳) فرض کنیم $\{r_n\}_{n\in I^+}$ شمارش همهٔ اعداد گویا در $[0,1]$ باشد $r_1=0$ و $r_2=1$. فرض کنیم $G_1=S-F_2\supset F_1$. بنابر تمرین ۲ - ۱۵ نرمال‌بودن $\langle S,\tau \rangle$ ایجاب می‌کند که عنصری مانند $G_0\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی‌که $G_0\supset F_1$ و $\overline{G}_0\subset G_1$. برای هر عدد گویای $0<r_n<1$، فرض کنیم r_i بزرگترین عدد گویا در $[0,1]$ و r_j کوچکترین عددگویا در $[0,1]$ باشد به‌قسمی که $i,j<n$ و $r_i<r_n<r_j$. بنابه‌تمرین ۲ - ۱۵ عنصری مانند $G_{r_n}\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $\overline{G}_{r_i}\subset G_{r_n}\subset \overline{G}_{r_n}\subset G_{r_j}$. حال فرض کنیم $g(x)=\inf\{r\in Q:x\in G_r\}$ به ازای هر $x\in S$. در این صورت $g(F_1)=\{0\}$ و $g(F_2)=\{1\}$. علاوه بر این، g پیوسته است، چراکه

$$g^{-1}((p,q))=\{x:g(x)>p\}\cap\{x:g(x)<q\}=(\cup\{S-\overline{G}_r:r>p\})\cap(\cup\{G_r:r<q\})\in\tau.$$

تابع $h:[0,1]\to[a,b]$ تعریف شده به‌صورت $h(x)=(b-a)x+a$ به ازای هر $x\in[0,1]$

یک همانریختی است. در نتیجه $f=h\circ g:S\to[a,b]$ یک تابع پیوسته است به‌قسمی که $f(F_1)=\{a\}$ و $f(F_2)=\{b\}$. ■

قضیهٔ ۲ - ۸. ***(قضیه گسترش تیتسه) فضای $<S,\tau>$ نرمال است اگر و فقط اگر هر نگاشت $f:F\to[a,b]$ که در آن $F\subset S$ بسته است، دارای یک «گسترش» پیوسته مانند $f^*:S\to[a,b]$ باشد [یعنی $f^*(x)=f(x)$ به ازای هر $x\in F$].***

برهان. تابع $h:[a,b]\to[-1,1]$ که با ضابطهٔ $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$ به ازای هر $x\in[a,b]$ تعریف شده است، یک همانریختی است. در نتیجه $g=h\circ f:F\to[-1,1]$ پیوسته است. نشان می‌دهیم که در صورتی که $<S,\tau>$ نرمال باشد، آنگاه g دارای یک گسترش پیوسته g^* در S است. در این صورت $h^{-1}\circ g^*$ همان f^* یعنی تابع گسترش پیوسته f در S خواهد بود. فرض کنیم $A_1=\{x\in F:g(x)\geq\frac{1}{3}\}$ و $B_1=\{x\in F:g(x)\leq\frac{-1}{3}\}$ چون g پیوسته است، لذا A_1 و B_1 بسته مجزا هستند. بنابر قضیه ۲ - ۷ یک نگاشت $g_1:S\to[\frac{-1}{3},\frac{1}{3}]$ موجود است به‌قسمی که $g_1(A_1)=\{\frac{1}{3}\}$ و $g_1(B_1)=\{\frac{-1}{3}\}$. در نتیجه $|g(x)-g_1(x)|\leq\frac{2}{3}$ به‌ازای هر $x\in F$. سپس فرض کنیم $A_2=\{x\in F:g(x)-g_1(x)\geq\frac{2}{9}\}$ و $B_2=\{x\in F:g(x)-g_1(x)\leq\frac{-2}{9}\}$. واضح است که A_2 و B_2 مجموعه‌های بسته مجزا هستند. لذا بنابر قضیه ۲ - ۷، یک نگاشت $g_2:S\to[\frac{-2}{9},\frac{2}{9}]$ موجود است به‌قسمی که $g_2(A_2)=\{\frac{2}{9}\}$ و $g_2(B_2)=\{\frac{-2}{9}\}$. درنتیجه $|g(x)-(g_1(x)+g_2(x)|\leq\frac{4}{9}$ به ازای هر $x\in F$. با ادامه این روش به طریق استقرا، یک دنباله از نگاشتهای $g_n:S\to[-2^{n-1}/3^n,2^{n-1}/3^n]$ به دست می‌آوریم به‌قسمی که $|g(x)-\Sigma_{k=1}^{n}g_k(x)|\leq(2/3)^n$. ولی چون $\Sigma_{n=1}^{\infty}2^{n-1}/3^n=1$، لذا M ـ آزمون وایرشتراس ایجاب می‌کند که

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}g_k$$

همگرای یکنواخت به یک تابع پیوسته $g^*:S\to E^1$ است به‌قسمی که $|g^*(x)|\leq1$ به‌ازای

هر $x\in S$. ولی از آنجاکه $g(x)-g^*(x)=0$ به ازای هر $x\in F$، لذا g^* گسترش مورد نظر برای g است.

به عکس، فرض کنید $<S,\tau>$ دارای "خاصیت گسترش پیوسته" باشد و فرض کنید F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های غیرتهی بستهٔ مجزا در S باشند. اکنون تابع $f:F_1\cup F_2\to[a,b]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} a & x\in F_1 \\ b & x\in F_2. \end{cases}$$

تابع f پیوسته است و بنا به فرض دارای یک گسترش پیوسته مانند f^* در S می‌باشد. در نتیجه، بنا بر لم اوریسون (قضیه ۲ - ۷)، فضای $<S,\tau>$ نرمال است. ■

حال به بحث در مورد "نرمال کامل‌بودن" می‌پردازیم که مربوط به جداسازی جفتهائی از "مجموعه‌های جداشده" توسط مجموعه‌های باز مجزا می‌شود. نشان خواهیم داد که کاملاً نرمال هم‌ارز با نرمال ارثی است و همچنین هر فضای متریک، کاملاً نرمال است.

تعریف ۲ - ۸. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A,B\subset S$. مجموعه‌های A و B را ***جداشده*** گوئیم اگر و فقط اگر $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$.

تعریف ۲ - ۹. فضای $<S,\tau>$ را ***کاملاً نرمال*** گوئیم اگر و فقط اگر برای هر جفت B و A از زیرمجموعه‌های جداشدهٔ S مجموعه‌های باز مجزای U و V با شرایط $A\subset U$ و $B\subset V$ موجود باشند. فضای $<S,\tau>$ را فضای T_5 گوئیم اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ یک فضای کاملاً نرمال T_1 باشد.

قضیهٔ ۲ - ۹. فضای $<S,\tau>$ کاملاً نرمال است اگر و فقط اگر فضای نرمال ارثی باشد (یعنی، هر زیرفضای $<S,\tau>$ نرمال باشد).

برهان. فرض کنیم $<S,\tau>$ کاملاً نرمال و $<A,\tau|A>$ یک زیرفضای دلخواه $<S,\tau>$

باشد . اگر C_1 و C_2 زیرمجموعه‌های مجزا و بسته A باشند ، آنگاه زیرمجموعه‌های بستهٔ F_1 و F_2 از S موجودند به‌قسمی که $C_1=A\cap F_1$ و $C_2=A\cap F_2$. در نتیجه $\overline{C}_1\subset F_1$ و $\overline{C}_2\subset F_2$. لذا $\overline{C}_1\cap C_2=C_1\cap \overline{C}_2=\varnothing$ و C_1 و C_2 جدا شده‌اند. خاصیت کاملاً نرمال‌بودن $<S,\tau>$ ایجاب می‌کند که عناصری مانند $G_1G_2\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $C_1\subset G_1$ ، $C_2\subset G_2$ و $G_1\cap G_2=\varnothing$. بالاخره $C_1\subset A\cap G_1\in\tau|A$ و $C_2\subset A\cap G_2\in\tau|A$ به‌قسمی که $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$. بدین ترتیب خاصیت نرمال‌بودن $<A,\tau|A>$ برقرار می‌باشد. به عکس ، فرض می‌کنیم هر زیرفضای $<S,\tau>$ نرمال باشد و فرض می‌کنیم C_1 و C_2 در S جدا شده باشند . اگر $A=S-\{(\overline{C}_1-C)\cup(\overline{C}_2-C)\}$ دارای توپولوژی نسبی $\tau|A$ باشد ، آنگاه C_1 و C_2 در A بسته هستند . خاصیت نرمال‌بودن $<A,\tau|A>$ ایجاب می‌کند که عناصری مانند $A\cap G_2\in\tau|A$ و $A\cap G_1$ وجود دارند به‌قسمی که $C_1\subset A\cap G_1$ ، $C_2\subset A\cap G_2$ و $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$. این امرایجاب می‌کند که

$G_1\cap G_2\subset(\overline{C}_1-C_1)\cup(\overline{C}_2-C_2)$. فرض کنیم $U_1=G_1\cap(S-\overline{C}_2)\in\tau$ و $U_2=G_2\cap(S-\overline{C}_1)\in\tau$. واضح است که $C_1\subset U_1$ و $C_2\subset U_2$ با این شرط که $U_1\cap U_2=\varnothing$. بدین ترتیب $<S,\tau>$ دارای خاصیت کاملاً نرمال‌بودن می‌باشد . ■

قضیهٔ ۲ - ۱۰ . *هر فضای متریک کاملاً نرمال است .*

برهان . فرض کنیم $<S,\rho>$ یک فضای متریک و B و A زیرمجموعه‌های جداشدهٔ S باشند . فرض کنیم $U=\{x\in S:\rho(\{x\},A)<\rho(\{x\},B)\}$ و $V=\{x\in S:\rho(\{x\},A)>\rho(\{x\},B)\}$. چون $\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\varnothing$ ، واضح است که $A\subset U$ و $B\subset V$ با این شرط که $U\cap V=\varnothing$. باید نشان دهیم که $U,V\in\tau_\rho$. برای این منظور فرض می‌کنیم $x\in U$ و $y\in S_\rho(x;\varepsilon)$ که در آن $\varepsilon=\frac{1}{3}(\rho(\{x\},B)-\rho(\{x\},A))$.

$$\rho(\{y\},A)=\inf\{\rho(y,z):z\in A\}\le\inf\{\rho(y,x)+\rho(x,z):z\in A\}$$

$$\leq \varepsilon + \inf\{\rho(x,z) : z \in A\} = \varepsilon + \rho(\{x\},A) = \rho(\{x\},B) - ۲\varepsilon$$

$$= \inf\{\rho(x,z) : z \in B\} - ۲\varepsilon \leq \inf\{\rho(x,y) + \rho(y,z) : z \in B\} - ۲\varepsilon$$

$$\leq \inf\{\rho(y,z) : z \in B\} - \varepsilon = \rho(\{y\},B) - \varepsilon < \rho(\{y\},B) \ .$$

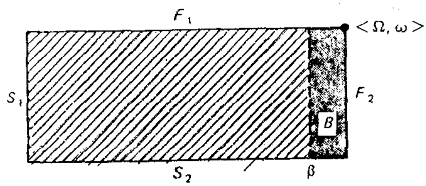
در نتیجه $S_\rho(x;\varepsilon) \subset U$ که ایجاب می‌کند $U \in \tau_\rho$. با استدلال مشابهی می‌توان نشان داد که $V \in \tau_\rho$. بدین ترتیب، خاصیت کاملاً نرمال‌بودن $<S, \rho>$ ثابت می‌شود. ■

این قسمت را با چند مثال به پایان می‌رسانیم. اولین مثال از فضای نرمالی است که T_0 نیست. دومین مثال (از تیخونوف) از فضای نرمالی است که کاملاً نرمال نیست. سومین مثال نشان می‌دهد که نرمال‌بودن و کاملاً نرمال‌بودن هیچکدام ضربی نمی‌باشند. مثال آخر نشان می‌دهد که هیچیک از خواص جداسازی T_i تحت پیوستگی پایدار نمی‌باشند.

مثال ۲ - ۵. فرض کنیم $S = \{a,b,c\}$ و $\tau = \{\varnothing,\{a\},\{b,c\},S\}$. $<S,\tau>$ یک فضای T_0 نیست، چون هر عضو τ شامل b باشد، شامل c نیز می‌باشد. ولی با این حال بسهولت دیده می‌شود که $<S,\tau>$ منظم، کاملاً منظم و کاملاً نرمال است، چراکه هر عضو τ بسته نیز می‌باشد.

مثال ۲ - ۶. این مثال صورت اندک تغییریافته‌ای است از آنچه که در متون ریاضی به "تختهٔ تیخونوف" موسوم است. این مثالی است از یک فضای نرمال که کاملاً نرمال نمی‌باشد. اگر $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه $\mathbb{R}-\{۱\}$ بنابر اصل خوش ترتیبی دارای یک خوش ترتیبی مانند $<$ است. اگر $x,y \in \mathbb{R}-\{۱\}$ قرار می‌دهیم $x <^* y$ اگر و فقط اگر $x < y$. همچنین برای هر $x \in \mathbb{R}-\{۱\}$ قرار می‌دهیم $x <^* ۱$. بدین ترتیب $<^*$ یک خوش‌ترتیبی در $\mathbb{R}$ است. حال کوچکترین عنصر $\mathbb{R}$ را که دارای تعداد شمارش‌پذیر بی‌پایانی مقدم باشد به ω و کوچکترین عنصر $\mathbb{R}$ را که دارای تعداد شمارش‌ناپذیری مقدم در $\mathbb{R}$ باشد به Ω نشان می‌دهیم. حال قرار می‌دهیم $S_1 = \{y \in \mathbb{R} : y <^* \omega\} \cup \{\omega\}$ و

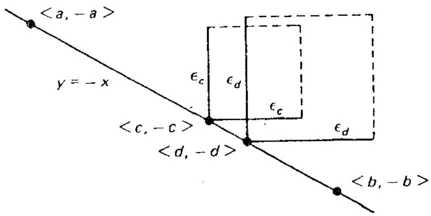
$S_2=\{y\in \mathbb{R}: y<^*_\Omega\}\cup\{\Omega\}$ و قرار می‌دهیم $<^*_1=<^*|S_1$ و $<^*_2=<^*|S_2$. اکنون فرض کنیم τ_1 آن توپولوژی در S_1 باشد که گردآیهٔ $\mathcal{S}_1=\{L^1_p:p\in S_1\}\cup\{R^1_p:p\in S_1\}$ یک زیرپایهٔ آن است که در آن $L^1_p=\{x\in S_1: x<^*_1 p\}$ و $R^1_p=\{x\in S_1: p<^*_1 x\}$ به‌طریق مشابه، فرض کنید τ_2 آن توپولوژی در S_2 باشد که گردآیهٔ $\mathcal{S}_2=\{L^2_p:p\in S_2\}\cup\{R^2_p:p\in S_2\}$ یک زیر پایه آن است که در آن $L^2_p=\{x\in S_2: x<^*_2 p\}$ و $R^2_p=\{x\in S_2: p<^*_2 x\}$ اگر $\langle S,\tau\rangle$ نشانگر فضای حاصلضرب $\langle S_1\times S_2,\tau_1\times\tau_2\rangle$ باشد، آنگاه $\langle S,\tau\rangle$ نرمال است. ولی با این حال، زیرفضای $\langle T,\tau|T\rangle=\langle S-\langle\Omega,\omega\rangle,\tau|S-\langle\Omega,\omega\rangle\rangle$ نرمال نیست. برای نشان‌دادن این مطلب، مجموعه‌های $F_1=(S_2-\{\Omega\})\times\{\omega\}$ و $F_2=\{\Omega\}\times(S_1-\{\omega\})$ را در نظر می‌گیریم. F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی و مجزای T می‌باشند. اگر $G\in\tau|T$ به‌قسمی باشد که $F_2\subset G$، آنگاه G شامل یک همسایگی هر یک از نقاط خودش می‌باشد. در نتیجه عنصری مانند $\beta\in S_2-\{\varnothing\}$ وجود دارد به‌قسمی که $B=\{\langle x,y\rangle\in T:\beta<^*_2 x, y<^*_1 \omega\}\subset G$. لذا $\bar{G}\cap F\neq\varnothing$ و $\langle T,\tau|T\rangle$ نرمال نیست. این امر ایجاب می‌کند که $\langle S,\tau\rangle$ کاملاً نرمال نیست.



شکل ۲ - ۱۱

مثال ۲ - ۷. این مثالی از یک فضای T_5 است که حاصلضرب آن باخودش نرمال نیست. در مثال ۱ - ۲ "توپولوژی حد پائین" $\mathcal{L}$ را بر روی $\mathbb{R}$ بیان کردیم. فضای $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ که به "خط سُر جنفری" معروف است، یک فضای T_5 می‌باشد. اثبات این موضوع به‌عنوان

تمرین به‌عهدهٔ خواننده است . چون خاصیت منظم‌بودن ضربی است ، لذا $<\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}>$ منظم است (در حقیقت "تیخونوف" می‌باشد) . حال نشان می‌دهیم که این فضا نرمال نیست . مجموعه‌های $A=\{<x,-x>: x$ گویا است$\}$ و $B=\{<x,-x>: x$ اصم است$\}$ زیرمجموعه‌های بسته و مجزای $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ می‌باشند . فرض کنید که $U,V\in\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ به‌قسمی باشند که $A\subset U$ و $B\subset V$. به ازای هر $r\in\mathbb{R}$ و $\varepsilon>0$ ، مجموعهٔ $B(r;\varepsilon)=\{<x,y>\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: r\le x<r+\varepsilon, -r\le y<-r+\varepsilon\}$ را در نظر می‌گیریم . برای هر $<r,-r>\in V$ عددی مانند $\varepsilon_r>0$ وجود دارد به‌قسمی که $B(r;\varepsilon_r)\subset V$. حال $\varepsilon>0$ و $a,b\in\mathbb{R}$ با شرط $a<b$ وجود دارند به‌قسمی که در فضای $<\mathbb{R},\xi>$ مجموعهٔ $\{x: x$ گویا$, \varepsilon_x\ge\varepsilon\}$ در (a,b) چگال است . حال اگر c عدد گویائی باشد که $a<c<b$ و $B(c;\varepsilon_c)\subset U$ با شرط $\varepsilon_c<\varepsilon$. آنگاه عددی مانند d وجود دارد به‌قسمی که $c<d<b$ ، $\varepsilon_d\ge\varepsilon$ و $d-c<\varepsilon_c$. در نتیجه $B(c;\varepsilon_c)\cap B(d;\varepsilon_d)\neq\varnothing$ و بنابراین $U\cap V\neq\varnothing$ (شکل ۲ - ۱۲) .



شکل ۲ - ۱۲

مثال ۲ - ۸ . این مثالی از یک فضای T_5 است که نگارهٔ پیوسته آن حتی یک فضای T_0 نیست . فرض کنیم $S=T=\{a,b,c\}$ ، τ_1 توپولوژی گسسته در S و $\tau_2=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},T\}$. چون $<S,\tau_1>$ یک فضای متریک‌پذیر ، به‌صورت $d(x,y)=1$ برای $x\neq y$ و ۰ در غیر این صورت ، می‌باشد ، لذا بنابر قضیهٔ ۲ - ۱۰ یک فضای T_5

است. فضای $<T,\tau_2>$ یک فضای T_0 نیست، چراکه هر مجموعهٔ باز که شامل b باشد، شامل c نیز هست و به عکس. تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ به ازای هر $x\in S$ آشکارا در $<S,\tau_1>$ پیوسته است، چراکه همه توابع صورت $g:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ هنگامی که τ_1 توپولوژی گسسته است، پیوسته می‌باشند.

تمرین

۲ - ۱۵. نشان دهید که $<S,\tau>$ نرمال است اگر و فقط اگر هنگامی که F یک زیرمجموعهٔ بسته S بوده و $F\subset U\in\tau$، آنگاه عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌طوری‌که $F\subset V\subset \overline{V}\subset U$.

۲ - ۱۶. نشان دهید که $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ یک فضای T_5 است.

۲ - ۱۷. اگر $<S,\tau>$ نرمال و F یک زیرمجموعهٔ بسته S و $f:F\to I^n$ پیوسته باشد، آنگاه نشان دهید که f دارای یک گسترش پیوسته f^* به تمام S می‌باشد (در اینجا $I^n=I^1\times...\times I^1$ مکعب یکه n− بعدی است).

۲ - ۱۸. فرض کنیم تابع پوشای $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته و بسته باشد. نشان دهید که اگر $<S,\tau_1>$ نرمال (کاملاً نرمال) باشد، آنگاه $<T,\tau_2>$ نرمال (کاملاً نرمال) است.

* ۲ - ۴ نرمال گردآیه‌ای

بحث خود را در مورد خواص جداسازی با مختصری از ویژگی "نرمال‌بودن گردآیه‌ای" به انجام می‌رسانیم. این خاصیت توسط آر. اچ. بینگ در مقاله‌ای در مجلهٔ ریاضی کانادا در سال ۱۹۵۱ ارائه شده و مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله او نشان داد که هر فضای متریک، نرمال گردآیه‌ای است و هر فضای نرمال گردآیه‌ای

"فضای مور"(که در قسمت ۳ - ۶ تعریف می‌گردد) متریک‌پذیر است. او همچنین مثالی از یک فضای نرمال آورده است که نرمال گردآیه‌ای نمی‌باشد.

تعریف ۲ - ۱۰. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک گردآیهٔ $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های S **گسسته** است اگر و فقط اگر عنصری مانند $G\in\tau$ به ازای هر $x\in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $x\in G$ و G حداکثر یک عضو از $\mathcal{C}$ را قطع کند. $\mathcal{C}$ را σ**-گسسته** گوئیم اگر و فقط اگر $\mathcal{C}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$ که در آن هر یک از $\mathcal{C}_n$ ها گسسته است.

تعریف ۲ - ۱۱. $<S,\tau>$ را ***نرمال گردآیه‌ای*** گوئیم اگر و فقط اگر برای هر گردآیهٔ گسستهٔ $\mathcal{F}=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ از زیرمجموعه‌های S یک ردهٔ $\mathcal{G}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ از مجموعه‌های باز دو بدو مجزا موجود باشد به‌قسمی که $F_\alpha\subset G_\alpha$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$.

چون که هر جفت $\{F_1,F_2\}$ از مجموعه‌های بسته مجزا یک گردآیهٔ گسسته است، در نتیجه نرمال گردآیه‌ای بودن، نرمال‌بودن را ایجاب می‌کند. از آنجا که اصطلاحاتی اضافی و نتایجی مقدماتی مورد نیاز می‌باشد، اثبات نرمال گردآیه‌ای بودن هر فضای متریک را تا قسمت ۳ - ۶ به تعویق می‌اندازیم.

تمرین

۲ - ۱۹. نشان دهید که ویژگی نرمال گردآیه‌ای یک خاصیت توپولوژیک است.

۲ - ۲۰. ویژگی نرمال گردآیه‌ای ارثی است؟

۲ - ۲۱. فرض کنیم $<S,\tau_1>$ نرمال گردآیه‌ای و تابع پوشای $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ پیوسته باشد. آیا $<T,\tau_2>$ الزاماً نرمال گردآیه‌ای است؟

فصل سوم

خواص پوششی

۳ - ۱ فشردگی

در این فصل به بررسی آن رده از خواص پوششی می‌پردازیم که اساساً یک "پوشش" دلخواه فضا توسط مجموعه‌های باز دارای انواع مشخصی از "تظریفها" باشد. در آغاز مفهوم "فشردگی" را ارائه کنیم که قوی‌ترین خاصیت پوششی مورد مطالعه ما است. در حالت خاص نشان خواهیم داد که یک زیرفضای $E^1 = <\mathbb{R},\xi>$ فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد (قضیه هاینه ـ بورل ـ لبگ). در E^1، فشردگی عبارت است از آنچه که باعث عملی‌شدن پیوستگی یکنواخت می‌شود و وجود بیشینه و کمینه را تضمین می‌کند. با استفاده از اصل انتخاب (به‌صورت لم‌زرن) ثابت می‌کنیم که فشردگی، ضربی است (قضیه تیخونوف). ج ـ ال ـ کلی نشان داده است که قضیه تیخونوف در حقیقت هم‌ارز با اصل انتخاب است.

تعریف ۳ - ۱. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{C}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset 2^S$. گردآیهٔ $\mathcal{C}$ یک **پوشش** برای $<S,\tau>$ است اگر و فقط اگر $S\subset\cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. یک پوشش $\mathcal{C}$ برای $<S,\tau>$ یک **پوشش باز** است اگر و فقط اگر

$G_\alpha \in \tau$ به ازای هر $\alpha \in \Lambda$. یک پوشش $\mathcal{C}$ از $<S,\tau>$ را یک **پوشش بسته** گوئیم اگر و فقط اگر G_α به ازای هر $\alpha \in \Lambda$ بسته باشد.

تعریف ۳ - ۲. فرض کنیم $\mathcal{C}=\{G:\alpha \in \Lambda\}$ یک پوشش برای فضای توپولوژیک $<S,\tau>$ و $\mathcal{U}=\{U_\beta : \beta \in \Gamma\}$ پوشش دیگری برای $<S,\tau>$ باشد. در این صورت $\mathcal{U}$ یک **زیرپوشش** $\mathcal{C}$ برای $<S,\tau>$ است اگر و فقط اگر $U_\beta \in \mathcal{C}$ به ازای هر $\beta \in \Gamma$. در حالت کلی‌تر، $\mathcal{U}$ **یک تظریف** $\mathcal{C}$ است اگر و فقط اگر عنصری مانند $\alpha(\beta) \in \Lambda$ به ازای هر $\beta \in \Gamma$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $U_\beta \subset G_{\alpha(\beta)}$.

تعریف ۳ - ۳. $<S,\tau>$ ***فشرده است*** اگر و فقط اگر هر پوشش باز $<S,\tau>$ شامل یک زیرپوشش ***باپایان*** (باز) باشد.

قبل از بررسی خاصیت "فشردگی" باید توجه داشته باشیم که فشرده‌بودن $<S,\tau>$ تقریباً بستگی تمام به توپولوژی τ دارد و نه به مجموعهٔ S ـ استثنا فقط در حالتی است که S یک مجموعه باپایان باشد، که در این صورت $<S,\tau>$ به‌ازای همه توپولوژیهای ممکن τ فشرده است. چرا؟ مثال ۳ - ۱ مسئله مربوط به فشردگی مجموعهٔ اعداد حقیقی، تحت توپولوژیهای مختلف را مورد بررسی قرار می‌دهد.

مثال ۳ - ۱. فضای $<\mathbb{R},\xi>$ فشرده نیست، چراکه پوشش باز $\mathcal{C}=\{(-n,n):n \in I^+\}$ برای $<\mathbb{R},\xi>$ شامل هیچ زیرپوشش باپایان **نیست**. همچنین $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ **فشرده نیست**، چراکه پوشش باز $\mathcal{C}=\{[-n,n):n \in I^+\}$ برای $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ شامل هیچ زیرپوشش باپایان نمی‌باشد. علاوه‌بر این، $<\mathbb{R},$ گسسته$> = <\mathbb{R},2^{\mathbb{R}}>$ فشرده **نیست**، چراکه پوشش باز $\{\{r\}:r \in \mathbb{R}\}$ برای $<\mathbb{R},2^{\mathbb{R}}>$ تحویل‌ناپذیر است. ولی با این حال، $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ فشرده است، چراکه اگر G_α عضو دلخواهی از یک پوشش باز $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ باشد، آنگاه $\mathbb{R}-G_\alpha$ باپایان است و در نتیجه در اجتماع باپایانی از دیگر اعضای پوشش قرار دارد. به طریق مشابه، هر زیرفضای $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ فشرده است.

اگر a,b اعداد حقیقی با شرط $a<b$ باشند ، آنگاه به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه هاینه بورل ـ لبگ، که بزودی ثابت می‌شود، فاصلهٔ $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ $<\mathbb{R},\xi>$ است.

ولی با این حال ، $[a,b)$ فشرده **نیست** ، چرا که $\{[a,b-\frac{b-a}{2^n}):n\in I^+\}$ یک پوشش باز $[a,b)$ است که شامل هیچ زیرپوشش باپایان نیست . در نتیجه فشردگی ارثی نیست . نشان خواهیم داد که زیرفضاهای بستهٔ فضاهای فشرده نیز فشرده می‌باشند و زیرفضاهای فشردهٔ یک فضای هاوسدرف (T_2) بسته‌اند .

قضیهٔ ۳ - ۱ . هرگاه $<S,\tau>$ فشرده و $A\subset S$ بسته باشد ، *آنگاه* $<A,\tau|A>$ فشرده *است* .

برهان . فرض کنیم $\mathcal{C}_A=\{G_\alpha\cap A:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز (نسبی) برای $<A,\tau|A>$ باشد ، آنگاه $\mathcal{C}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\cup\{S-A\}$ یک پوشش باز $<S,\tau>$ می‌باشد . چون $<S,\tau>$ فشرده است ، لذا $\mathcal{C}$ شامل یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{C}'=\{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\dots,G_{\alpha_n}\}$ برای $<S,\tau>$ است . آشکار است که $\{G_{\alpha_i}\cap A:i=1,2,\dots,n\}$ یک زیرپوشش باپایان برای $<A,\tau|A>$ است . ■

قضیهٔ ۳ - ۲ . هرگاه $<S,\tau>$ هاوسدرف و $<A,\tau|A>$ *زیرفضای فشرده دلخواهی از* $<S,\tau>$ *باشد ، آنگاه* A *بسته است* .

برهان . فرض کنیم $q\in S-A$. چون $<S,\tau>$ هاوسدرف است ، برای هر $p\in A$ مجموعه‌های باز مجزای U_p و V_p موجودند به‌قسمی که $p\in U_p$ و $q\in V_p$. در این صورت $\mathcal{C}=\{U_p:p\in A\}$ یک پوشش باز A است و شامل یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{C}'=\{U_{p_i}:i=1,2,\dots,n\}$ برای A می‌باشد، زیرا $<A,\tau|A>$ فشرده است. درنتیجه $q\in\cap\{V_{p_i}:i=1,2,\dots,n\}\in\tau$ و $A\cap(\cap\{V_{p_i}:i=1,2,\dots,n\})=\varnothing$ بنابراین A بسته است . ■

مثال ۳ - ۲. فضای $<\mathbb{R}$, متمم باپایان$>$ فشردهٔ ارثی است . در نتیجه برای هر $r\in\mathbb{R}$، زیرفضای $\mathbb{R}-\{r\}$ نابسته ولی فشرده است . این مثال نشان می‌دهد که در قضیه ۳ - ۲ نمی‌توان به جای شرط هاوسدرف‌بودن ، شرط ضعیفتر T_1بودن را قرار داد .

قضیهٔ ۳ - ۳. *هرگاه تابع پوشای* $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ ***پیوسته و*** $<S,\tau_1>$ ***فشرده باشد . آنگاه فضای*** $<T,\tau_2>$ ***نیز فشرده است .***

برهان . به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است . ■

قبل از اثبات قضیه هاینه ـ بورل ـ لبگ که مشخص‌کنندهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ E^1 است ، با استفاده از دستورهای دمورگان صورت هم‌ارزی از فشردگی را به‌دست می‌آوریم که گهگاه بسیار مفید واقع می‌شوند .

تعریف ۳ - ۴. گردآیه‌ای مانند $\mathcal{C}$ از مجموعه‌ها دارای **خاصیت مقطع باپایان** است اگر و فقط اگر هر زیرگردآیهٔ باپایان غیرتهی $\mathcal{C}$ دارای مقطع غیرتهی باشد .

قضیهٔ ۳ - ۴. *فضای* $<S,\tau>$ ***فشرده است اگر و فقط اگر برای هرگردآیهٔ*** $\mathcal{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ***از زیرمجموعه‌های بسته*** S ***که دارای خاصیت مقطع باپایان است ، داشته باشیم*** $\cap\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\neq\varnothing$.

برهان . فرض کنیم $<S,\tau>$ فشرده و $\mathcal{F}=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های بسته S با خاصیت مقطع باپایان باشد. فرض کنید $\cap\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\varnothing$. در این صورت $S=S-\cap\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\cup\{S-F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. در نتیجه $\mathcal{C}=\{S-F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز برای $<S,\tau>$ است و می‌باید یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{C}'=\{S-F_{\alpha_i}:i=1,2,\dots,n\}$ برای $<S,\tau>$ داشته باشد . بنابراین $S=\cup\{S-F_{\alpha_i}:i=1,\dots,n\}=S-\cap\{F_{\alpha_i}:i=1,\dots,n\}$ که ایجاب می‌کند $\cap\{F_{\alpha_i}:i=1,\dots,n\}=\varnothing$. این امر متناقض با این فرض است که $\mathcal{F}$ دارای خاصیت مقطع باپایان است .

به عکس ، فرض کنیم $\cap\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\neq\varnothing$ که در آن $\mathcal{F}=\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های بستهٔ S با خاصیت مقطع باپایان باشد . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ فشرده نباشد ، در این صورت یک پوشش باز $\mathcal{C}=[G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ برای $\langle S,\tau\rangle$ موجود است که شامل هیچ زیرپوشش باپایان $\langle S,\tau\rangle$ نیست . در نتیجه برای هر زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{C}$ داریم

$S-\cup\{G_{\alpha_i}:i=1,...,n\}=\cap\{S-G_{\alpha_i}:i=1,...,n\}\neq\varnothing$ ، یعنی $\mathcal{F}=\{S-G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ S است که دارای خاصیت مقطع باپایان است . بنابراین ، $\cap\{S-G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=S-\cup\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\neq\varnothing$ که متناقض با این مطلب است، که $\mathcal{C}$ یک پوشش برای $\langle S,\tau\rangle$ است .

یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه حقیقی کراندار است اگر و فقط اگر این مجموعه هم یک کران بالا و هم یک کران پائین داشته باشد . در نتیجه یک زیرمجموعهٔ A از E^1 کراندار است اگر و فقط اگر اعداد حقیقی a و b با شرط $a<b$ موجود باشند به‌قسمی که $A\subset(a,b)$. حال نشان خواهیم داد که $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ E^1 است و با استفاده از آن قضیه هاینه ـ بورل ـ لبگ را ثابت می‌کنیم .

لم. هرگاه $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ ، *آنگاه* $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ E^1*است* .

برهان . فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک پوشش باز $[a,b]$ و

$A=\{x\in[a,b]:$ است $[a,x]$ شامل یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{C}\}$. واضح است که $a\in A$ و b یک کران بالای A است . در نتیجه A بنابر خاصیت کمال E^1 دارای یک کوچکترین کران بالا مانند c می‌باشد و $a\leq c\leq b$. چون $\mathcal{C}$ فاصلهٔ $[a,c]$ را می‌پوشاند ، لذا یک $G\in\mathcal{C}$ موجود است به‌قسمی که $c\in G$. هرگاه $d\in(a,c)\cap G$ ، آنگاه $\mathcal{C}$ شامل یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{C}'$ برای $[a,d]$ است و درنتیجه $\mathcal{C}'\cup\{G\}$ فاصلهٔ $[a,c]$ رامی‌پوشاند. هرگاه $c<b$، آنگاه یک $e\in G$ موجود است به‌قسمی که $[c,e]\subset G$ و $\mathcal{C}'\cup\{G\}$ فاصلهٔ $[a,e]$ را

می‌پوشاند . این امر ایجاب می‌کند که $e\in A$ و $e>c$ که متناقض با تعریف c به‌عنوان کوچکترین کران بالای A است ، لذا $c=b$ و $[a,b]$ فشرده است . ■

قضیهٔ ۳ - ۵ . (*هاینه ـ بورل ـ لبگ*) ***$<A,\xi|A>$ یک زیرفضای فشردهٔ $E^1=<\mathbb{R},\xi>$ است اگر و فقط اگر A بسته و کراندار باشد .***

برهان. فرض کنیم $<A,\xi|A>$ یک زیر فضای فشردهٔ دلخواه E^1 باشد . بنابر قضیهٔ ۳ - ۲ مجموعهٔ A بسته است ، زیرا E^1 هاوسدرف است . هرگاه A کراندار نباشد ، آنگاه به ازای هر $n\in I^+$ ، $A\not\subset(-n,n)$ ولی $A\subset\cup\{(-n,n):n\in I^+\}$. در نتیجه پوشش باز $\{(-n,n):n\in I^+\}$ برای $<A,\xi|A>$ نمی‌تواند شامل هیچ زیرپوشش باپایان $<A,\xi|A>$ باشد ، که متناقض با شرط فشردگی $<A,\xi|A>$ است . به عکس ، فرض کنید A بسته و کراندار باشد ، آنگاه برای یک $n\in I^+$ داریم $A\subset(-n,n)$ و در نتیجه A زیرفضای بسته ای از $[-n,n]$ است که بنابر لم فوق فشرده است . بدین ترتیب بنابر قضیه ۳ - ۱ فضای $<A,\xi|A>$ نیز فشرده است . ■

باید توجه داشت که مشخصهٔ بالا ویژهٔ زیرفضاهای فشردهٔ E^1 با توپولوژی بازه‌ای (اقلیدسی) روی $\mathbb{R}$ است . خواننده می‌تواند بسهولت ثابت کند که $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ $<\mathbb{R},\mathscr{L}>$ نیست ، اگرچه بسته و کراندار است. با توجه به قضیهٔ ۳ - ۱ ، $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ $<\mathbb{R},\mathscr{L}>$ نیست .

اکنون برای اثبات قضیهٔ اساسی این بخش ، یعنی قضیهٔ حاصلضرب تیخونوف آماده می‌باشیم . روش اثبات ما در اینجا همان روش ج ـ ال ـ کلی است که با استفاده از قضیه زیر ، موسوم به قضیه س ـ آلکساندر به‌دست می‌آید .

قضیهٔ ۳ - ٦ . (*آلکساندر*): ***فضای $<S,\tau>$ فشرده است اگر و فقط اگر τ دارای یک زیرپایهٔ $\mathscr{S}$ می‌باشد به‌قسمی که هرگاه $\mathscr{C}\subset\mathscr{S}$ یک پوشش دلخواه برای $<S,\tau>$ باشد ، آنگاه $\mathscr{C}$ شامل یک زیرپوشش باپایان برای $<S,\tau>$ باشد .***

برهان. هرگاه $<S,\tau>$ فشرده باشد نتیجه بدیهی است. به عکس، فرض کنیم $\mathcal{S}$ یک زیرپایهٔ τ باشد که در فرض قضیه صدق می‌کند و فرض کنیم $\mathcal{A}\subset\tau$ دارای این خاصیت است که هیچ زیرگردآیهٔ باپایان از $\mathcal{A}$ فضای $<S,\tau>$ را نمی‌پوشاند. با نشان دادن اینکه $\mathcal{A}$ فضای $<S,\tau>$ را نمی‌پوشاند، نشان دهیم که $<S,\tau>$ فشرده است. برای این منظور، فرض کنیم

$\mathcal{C}=\{\mathcal{A}'\subset\tau:$ و هیچ زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{A}'$ فضای $<S,\tau>$ رانمی‌پوشاند $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}'\}$.

آشکار است که $\mathcal{A}\in\mathcal{C}$ بوده و $\mathcal{C}$ توسط رابطهٔ شمولی به‌طور جزئی مرتب است. فرض کنید $\mathcal{D}=\{\mathcal{D}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک زنجیر دلخواه در $<\mathcal{C},\subset>$ باشد و قرار دهید $\mathcal{U}=\{D:D\in\mathcal{D}_\alpha,\exists\alpha\in\Lambda\}$. در این صورت $\mathcal{U}$ یک کران بالای $\mathcal{D}$ است و $\mathcal{U}\in\mathcal{C}$. درنتیجه $\mathcal{C}$ بنابر لم زرن دارای یک عنصربیشین $\mathcal{M}$ است. چون $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$، فقط کافی است نشان دهیم که $\mathcal{M}$ فضای $<S,\tau>$ را نمی‌پوشاند که بدین ترتیب قضیه ثابت می‌گردد. فرض کنیم $x\in M\in\mathcal{M}$. چون $\mathcal{S}$ یک زیر پایهٔ τ است، لذا زیرگردآیه‌ای مانند $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}\subset\mathcal{S}\subset\tau$ موجود است به‌قسمی که $x\in\cap\{S_i:i=1,\ldots,n\}\subset M$. فرض کنید $S_i\notin\mathcal{M}$ به ازای $i=1,2,\ldots,n$. از آنجا که $\mathcal{M}$ یک عنصر بیشین $\mathcal{S}$ است، لذا به ازای هر $i=1,\ldots,n$، یک زیرگردآیهٔ باپایان مانند $\mathcal{M}_i\cup\{S_i\}$ از $\mathcal{M}\cup\{S_i\}$ باید $<S,\tau>$ راپبوشاند. ولی چون $\cap\{S_i:\ i=\ 1,\ldots,n\}\subset M$ لذا $\{M\}\cup\mathcal{M}_1\cup\ldots\cup\mathcal{M}_n$ فضای $<S,\tau>$ را می‌پوشاند. در نتیجه $M\notin\mathcal{M}$. اما هیچ زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{M}$ فضای $<S,\tau>$ را نمی‌پوشاند و این تناقض است. بنابراین یک $i\in\{1,\ldots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x\in S_i\in\mathcal{M}$ و

$\cup\{M:M\in\mathcal{M}\}\subset\cup\{S_\alpha\cap M:S_\alpha\in\mathcal{S},M\in\mathcal{M}\}$. اگر $\mathcal{M}$ یک پوشش $<S,\tau>$ می‌بود، آنگاه $\{S_\alpha\cap M:S_\alpha\in\mathcal{S},M\in\mathcal{M}\}$ نیز می‌بایست $<S,\tau>$ را بپوشاند. لذا بنا به فرض، یک زیرگردآیهٔ باپایان $\{S_\alpha\cap M:S_\alpha\in\mathcal{S},M\in\mathcal{M}\}$ نیز می‌بایست $<S,\tau>$ را

بپوشاند . این امر ایجاب می‌کند که یک زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{M}$ می‌بایست $\langle S,\tau \rangle$ را بپوشاند که تناقض است . ■

قضیهٔ ۳ - ۷ (*تیخونوف*): *هرگاه* $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ *به ازای هر* $\alpha\in\Lambda$ *فشرده باشد ، آنگاه* $\langle \Pi_\Lambda S_\alpha,\Pi_\Lambda \tau_\alpha\rangle$ *نیز فشرده است .*

برهان. بنابر تعریف ۱ - ۲۱ ، گردآیهٔ $\mathcal{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha):G_\alpha\in\tau_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ یک زیرپایهٔ $\Pi_\Lambda\tau_\alpha$ است . فرض کنید $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}$ و هیچ زیرگردآیهٔ باپایان از $\mathcal{A}$ فضای $\langle \Pi_\Lambda S,\Pi_\Lambda \alpha\rangle$ رانپوشاند . به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ فرض کنیم $\mathcal{C}_\alpha = \{G_\alpha\in\tau_\alpha\ \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)\in\mathcal{A}\}$. هیچ زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{C}_\alpha$ فضای $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ را نمی‌پوشاند ، چون در غیر این صورت یک زیرگردآیهٔ باپایان $\mathcal{A}$ فضای $\langle \Pi_\Lambda S_\alpha,\Pi_\Lambda \tau_\alpha\rangle$ را خواهد پوشاند . علاوه‌بر این ، چون به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ ، فضای $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ فشرده است ، لذا $\mathcal{C}_\alpha$ یک پوشش برای $\langle S_\alpha,\tau_\alpha\rangle$ نیست . بنابراین به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ ، عنصری مانند $x_\alpha\in S_\alpha-\cup\{G_\alpha:G_\alpha\in\mathcal{C}_\alpha\}$ وجود دارد . در نتیجه تابع $x:\Lambda\to\cup\{S_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ که با ضابطهٔ $x(\alpha)=x_\alpha$ تعریف شده در $\Pi_\Lambda S_\alpha$ می‌باشد ولی در $\cup\{A:A\in\mathcal{A}\}$ واقع نیست . لذا بنابر قضیه ۳ - ۶ فضای $\langle \Pi_\Lambda S_\alpha,\Pi_\Lambda \tau_\alpha\rangle$ فشرده است زیرا $\mathcal{A}$ آنرا نمی‌پوشاند . ■

تمرین

۳ - ۱ . قضیهٔ ۳ - ۳ را ثابت کنید .

۳ - ۲ . نشان دهید که اجتماع تعداد باپایانی از زیرفضاهای فشردهٔ یک فضا، فشرده است .

۳ - ۳ . فرض کنیم $\langle S,\tau_1\rangle$ فشرده و $\langle T,\tau_2\rangle$ هاوسدرف باشد . نشان دهید که تابع پوشای $f:\langle S,\tau_1\rangle \to \langle T,\tau_2\rangle$ یک همانریختی است اگر و فقط اگر f یک به‌یک و

پیوسته باشد .

۳ - ۴ . هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای هاوسدرف و P و Q زیرفضاهای فشردهٔ مجزای $<S,\tau>$ باشد ، آنگاه ثابت کنید که مجموعه‌های باز مجزای U و V موجودند به‌قسمی که $P\subset U$ و $Q\subset V$.

۳ - ۵ . ثابت کنید که هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای هاوسدرف فشرده باشد ، آنگاه $<S,\tau>$ نرمال (و در نتیجه T_4) است .

۳ - ٦ . فضای $<S,\tau>$ **شبه فشرده** است اگر و فقط اگر هر تابع پیوستهٔ $f:<S,\tau>\to E^1$ کراندار باشد (یعنی عددی مانند $M>0$ وجود دارد به‌قسمی که $|f(x)|\leq M$ به ازای هر $x\in S$) . نشان دهید که فشرده‌بودن ، شبه فشرده‌بودن را ایجاب می‌کند و با ذکر یک مثال ناقض ، نشان دهید که عکس آن نادرست است .

۳ - ۷ . فضای $<S,\tau>$ **موضعاً فشرده** است اگر و فقط اگر به ازای هر $p\in S$ عنصری مانند $G_p\in\tau$ و یک زیرفضای فشردهٔ K_p از $<S,\tau>$ موجود باشند به‌قسمی که $p\in G_p\subset K_p$. درستی گزاره‌های زیر را در مورد فضاهای موضعاً فشرده تحقیق کنید:

(الف) یک زیرفضای بستهٔ یک فضای موضعاً فشرده ، موضعاً فشرده است .

(ب) فشردگی ، موضعاً فشردگی را ایجاب می‌کند (مثالی از یک فضای موضعاً فشرده بیاورید که فشرده نباشد) .

(پ) هرگاه هر نقطهٔ $p\in S$ در یک مجموعهٔ باز G_p واقع شود به‌قسمی که $\overline{G}_p$ فشرده باشد ، آنگاه $<S,\tau>$ موضعاً فشرده است . آیا عکس این مطلب درست است؟

(ت) هرگاه تابع پوشای $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته و $<S,\tau_1>$ موضعاً فشرده باشد ، آنگاه $<T,\tau_2>$ نیز موضعاً فشرده است .

(ث) حاصلضرب هر تعداد باپایان از فضاهای موضعاً فشرده ، موضعاً فشرده است .

۳ - ۸. فرض کنید $\mathcal{F}(S,T)$ گردآیهٔ تمام توابع (پیوسته) از $<S,\tau_1>$ به $<T,\tau_2>$ باشد. به ازای هر زیرفضای فشردهٔ $K\subset S$ و هر $G\in\tau_2$ قرار می‌دهیم
$N_{K,G}=\{f\in\mathcal{F}(S,T):f(K)\subset G\}$. نشان دهید که
$\mathcal{S}=\{N_{K,G}:G\in\tau_2$ و $K\subset S$ فشرده$\}$ یک زیرپایهٔ توپولوژی‌ای روی $\mathcal{F}(S,T)$ است که آن را ***توپولوژی فشرده ـ باز*** یا ***توپولوژی همگرایی فشرده*** می‌نامیم. این توپولوژی را در فصل هفتم به هنگام مطالعهٔ نظریهٔ هموتوپی به‌کار خواهیم گرفت.

۳ - ۲ فضاهای لیندلف

در این بخش به خاصیت پوششی ضعیف‌تری از فشردگی موسوم به "خاصیت لیندلف" می‌پردازیم. خاصیت لیندلف نیز از شمارش‌پذیری نوع دوم ایجاب می‌گردد و همچنین در فضاهای متریک هم‌ارز با خاصیت شمارش‌پذیری نوع دوم و تفکیک‌پذیر است.

تعریف ۳ - ۵. $<S,\tau>$ ***لیندلف*** است اگر و فقط اگر هر پوشش باز $<S,\tau>$ شامل یک زیرپوشش شمارش‌پذیر (باز) برای $<S,\tau>$ باشد.

آشکار است که فشردگی، خاصیت لیندلف را ایجاب می‌کند. اکنون توپولوژیهای اساسی روی $\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم تا ملاحظه کنیم کدامیک از آنها دارای خاصیت لیندلف می‌باشند.

مثال ۳ - ۳. $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ فشرده (در نتیجه لیندلف) است. $E^1=<\mathbb{R},\mathcal{E}>$ لیندلف ارثی است، چون که شمارش‌پذیر نوع دوم است. همچنین $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ لیندلف ارثی است، اگر چه تنها شمارش‌پذیر نوع اول است. $<\mathbb{R},$ گسسته$>$ لیندلف نیست، زیرا پوشش باز $<\mathbb{R},$گسسته$>$ متشکل از مجموعه‌های تک عضوی تحویل‌ناپذیر است. قرار می‌دهیم $\tau=\{G\subset\mathbb{R}:\mathbb{R}-\{1,2\}\subset G$ یا $0\notin G\}$. آنگاه هر پوشش باز $<\mathbb{R},\tau>$

شامل یک زیرپوشش باپایان $<\mathbb{R},\tau>$ است . بنابراین ، $<\mathbb{R},\tau>$ فشرده (در نتیجه لیندلف) است . فضای $<\mathbb{R}-\{0\},\tau|\mathbb{R}-\{0\}>$ یک زیرفضای شمارش‌پذیر $<\mathbb{R},\tau>$ است که لیندلف نیست ، زیرا پوشش باز $\{\{r\}:r\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ تحویل‌ناپذیر است . این مثال نشان می‌دهد که خاصیت لیندلف‌بودن ارثی نیست .

قضیهٔ ۳ - ۸ . هرگاه $<S,\tau>$ ***لیندلف و*** $A\subset S$ **بسته باشد ، *آنگاه زیرفضای*** $<A,\tau|A>$ ***لیندلف است .***

برهان . به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است . ■

قضیهٔ ۳ - ۹ . هرگاه $<S,\tau>$ ***لیندلف و تابع پوشای*** $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ **پیوسته باشد، *آنگاه*** $<T,\tau_2>$ ***لیندلف است .***

برهان . به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است . ■

اکنون مثالی از یک فضای لیندلف می‌آوریم که حاصلضرب آن با خودش لیندلف نیست . در نتیجه خاصیت لیندلف حتی ضربی باپایان نیز نیست .

مثال ۳ - ۴ . همانطوری که قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم ، فضای $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ شمارش‌پذیر نوع اول ، تفکیک‌پذیر و لیندلف است ولی شمارش‌پذیر نوع دوم نمی‌باشد . فضای $<\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}>$ شمارش‌پذیر نوع اول و تفکیک‌پذیر است ولی لیندلف نمی‌باشد . فرض کنید $Y=\{<x,-x>:x\in\mathbb{R}\}$ و برای هر $p\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، N_p را یک جعبه چپ پائینی به رأس p در نظر بگیرید . جعبه مذکور Y را وقتی و فقط وقتی قطع می‌کند که $p\in Y$. آنگاه $\mathcal{C}=\{N_p:p\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ یک پوشش باز برای $<\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}>$ می‌باشد با این خاصیت که هر زیرپوشش $\mathcal{C}$ برای $<\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}>$ باید شامل تعداد شمارش‌پذیری عضو باشد تا زیرفضای شمارش‌ناپذیر Y را بپوشاند .

اکنون رابطهٔ بین خاصیت‌های لیندلف ، تفکیک‌پذیری و شمارش‌پذیری نوع‌های اول و دوم را بررسی می‌کنیم .

قضیهٔ ۳ - ۱۰ . هرگاه $<S,\tau>$ شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، *آنگاه* $<S,\tau>$ *لیندلف است.*

برهان . فرض کنید $\mathcal{B}=\{B_n:n\in I^+\}$ یک‌پایه شمارش‌پذیر برای τ و $\mathcal{C}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز از $<S,\tau>$ باشد . به ازای هر $p\in S$ عنصری مانند $G_\alpha\in\mathcal{C}$ وجود دارد به‌قسمی که $p\in G_\alpha$. بنابراین عنصری مانند $B_n\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $p\in B_n\subset G_\alpha$. این چنین G_α را برای هر $p\in S$ انتخاب می‌کنیم . گردآیهٔ حاصل از این چنین G_αها الزاماً یک زیرپوشش شمارش‌پذیر از $<S,\tau>$ می‌باشد ، چراکه $\mathcal{B}$ یک پوشش شمارش‌پذیر از $<S,\tau>$ می‌باشد . ■

مثال ۳ - ۵ . $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ تفکیک‌پذیر و فشرده ارثی (در نتیجه لیندلف ارثی) است ولی شمارش‌پذیر نوع اول نیست . بدین منظور فرض می‌کنیم که $\{G_n:n\in I^+\}$ یک پایه شمارش‌پذیر موضعی در $x\in\mathbb{R}$ باشد . چون $\mathbb{R}-G_n$ به ازای هر $n\in I^+$ باپایان است، لذا $\cup\{\mathbb{R}-G_n:n\in I^+\}$ شمارش‌پذیر است . در نتیجه هرگاه $x\in G\in\tau$ ، آنگاه عنصری مانند G_n وجود دارد به‌قسمی که $x\in G_n\subset G$ ، در نتیجه $\mathbb{R}-G\subset\mathbb{R}-G_n$ ، یعنی هر زیرمجموعه باپایان از $\mathbb{R}$ که شامل x نیست یک زیرمجموعه از $\cup\{\mathbb{R}-G_n:n\in I^+\}$ می‌باشد. بدین ترتیب $\cup\{\mathbb{R}-G_n:n\in I^+\}$ باید شمارش‌ناپذیر باشد ، که تناقض است .

مثال ۳ - ٦ . فضای $<\mathbb{R},\tau>$ در مثال ۳ - ۳ فشرده (در نتیجه لیندلف) و شمارش‌پذیر نوع اول است ولی تفکیک‌پذیر نمی‌باشد . هرگاه $x\neq 0$ ، فرض کنید $\mathcal{B}_x=\{\{x\}\}$ و هرگاه $x=0$ ، گیریم $\mathcal{B}_x=\{\mathbb{R}-\{1,2\}\}$. آنگاه $\mathcal{B}_x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ یک پایه موضعی شمارش‌پذیر در x می‌باشد . فضای $<\mathbb{R},\tau>$ تفکیک‌پذیر نیست ، چراکه $\mathbb{R}-\{0\}$ دارای توپولوژی (زیرفضای) گسسته است و شمارش‌پذیر نمی‌باشد .

نتیجه آخر ما در این بخش گویای این مطلب است که خاصیت لیندلف‌بودن در

حقیقت یک وسیله ارتباط بین منظم‌بودن و نرمال‌بودن است.

قضیهٔ ۳ - ۱۱ . *هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای منظم لیندلف باشد، آنگاه $<S,\tau>$ نرمال است.*

برهان. فرض کنید F_1 و F_2 دو زیرمجموعه بسته مجزا از S باشند، آنگاه بنابر قضیهٔ ۳-۸ فضاهای $<F_1,|\tau F_1>$ و $<F_2,\tau|F_2>$ لیندلف هستند. بنا بر منظم‌بودن فضا به ازای هر $p\in F_1$ مجموعهٔ بازی مانند $G_1(p)$ وجوددارد به‌قسمی‌که $p\in G_1(p)\subset\overline{G_1(p)}\subset S-F_2$. گردآیهٔ $\{G_1(p):p\in F_1\}$ یک پوشش باز برای F_1 می‌باشد و باید شامل یک زیرپوشش شمارش‌پذیر $\{G_1^n:n\in I^+\}$ باشد و بطریق مشابه به ازای هر $q\in F_2$ عنصری مانند $G_2(q)\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $q\in G_2(q)\subset G_2(q)\subset S-F_1$. گردآیهٔ $\{G_2(q):q\in F_2\}$ یک پوشش باز برای F_2 است و باید شامل یک زیرپوشش شمارش‌پذیر $\{G_2^n:n\in I^+\}$ باشد. حال فرض کنید

$G_1=\cup\{G_1^n-\cup\{\overline{G}_2^i:i=1,\dots,n\}:n\in I^+\}$ و

$G_2=\cup\{G_2^n-\cup\{\overline{G}_1^i:i=1,\dots,n\}:n\in I^+\}$. بسهولت می‌توان ملاحظه نمود که G_1 و G_2 دو مجموعهٔ باز مجزا هستند. خواننده می‌تواند بسهولت ثابت کند که $F_1\subset G_1$ و $F_2\subset G_2$ که همان ویژگی نرمال‌بودن است. ■

تمرین

۳ - ۹ . قضیهٔ ۳ - ۸ را ثابت کنید.

۳ - ۱۰ . قضیهٔ ۳ - ۹ را ثابت کنید.

۳ - ۱۱ . نشان دهید که یک فضای متریک $<M,d>$ شمارش‌پذیر نوع دوم است اگر و فقط اگر لیندلف باشد.

۳ - ۳ فشردگی شمارشی

خاصیت پوششی‌ای که اکنون مورد بررسی قرار می‌گیرد ، فشردگی شمارشی است که ضعیف‌تر از فشردگی می‌باشد ، زیرا این خاصیت ایجاب می‌کند که تنها پوششهای باز شمارش‌پذیر فضای $<S,\tau>$ شامل زیرپوششهای باپایان باشند . ولی با این حال فشردگی شمارشی دارای خصوصیات توپولوژیک بسیاری شبیه فشردگی است. در حقیقت ، در فضای متریک یا حتی در فضای لیندلف ، فشردگی شمارشی هم‌ارز فشردگی است .

تعریف ۳ - ۶ . $<S,\tau>$ ***فشردهٔ شمارشی*** است اگر و فقط اگر هر پوشش باز شمارش‌پذیر $<S,\tau>$ شامل یک زیرپوشش باپایان $<S,\tau>$ باشد .

برحسب خاصیت مقطع باپایان که در تعریف ۳ - ۴ ارائه شد ، فشردگی شمارشی دارای صورت هم‌ارز زیر است . اثبات آن شبیه به قضیه ۳ - ۴ می‌باشد و به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است .

قضیهٔ ۳ - ۱۲ . $<S,\tau>$ ***فشردهٔ شمارشی است اگر و فقط اگر برای هر گردآیهٔ شمارش‌پذیر*** $\mathcal{F}=\{F_n:n\in I^+\}$ ***از زیرمجموعه‌های بسته*** S ***با خاصیت مقطع باپایان داشته باشیم*** $\cap\{F_n:n\in I^+\}\neq\varnothing$.

از تعریف فشردگی شمارشی آشکارا نتیجه می‌شود که فشردگی ، فشردگی شمارشی را ایجاب می‌کند . اکنون مثالی از یک فضای فشردهٔ شمارشی می‌سازیم که فشرده نیست . برای این منظور احتیاج به تعریف زیر از توپولوژی ترتیبی روی یک مجموعهٔ کلاً مرتب $<S,<>$ داریم .

تعریف ۳ - ۷ . فرض کنیم $<S,<>$ یک مجموعه کلاً مرتب باشد . برای هر $p\in S$ ، قرار می‌دهیم $R_p=\{x\in S:p<x\}$ و $L_p=\{x\in S:x<p\}$. گیریم $\mathcal{S}=\{L_p:p\in S\}\cup\{R_p:p\in S\}$. در این صورت $\mathcal{S}$ یک زیرپایهٔ ***توپولوژی ترتیبی*** روی

S است .

مثال ۳ - ۷. مانند مثال ۰ - ۹ ، فرض کنیم $\mathcal{O}$ مجموعهٔ همه اردینالهائی باشد که بر Ω مقدم‌اند . گیریم $\mathcal{W}$ نمایشگر توپولوژی ترتیبی روی $\mathcal{O}$ باشد . در این صورت $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ فشردهٔ شمارشی است که لیندلف (و در نتیجه فشرده) نیست . در اینجا ما فشردگی شمارشی $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ را ثابت نمی‌کنیم ، چراکه بعداً در این فصل نشان خواهیم داد که $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ دارای خاصیت پوششی قوی‌تری موسوم به فشردگی دنباله‌ای است .

مثال ۳ - ۸. $<\mathbb{R},\mathcal{E}>$ و $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ فشردهٔ شمارشی نیستند ، چون بترتیب دارای پوششهای باز شمارش‌پذیر $\{(-n,n):n\in I^+\}$ و $\{[-n,n):n\in I^+\}$ می‌باشند که شامل زیرپوششهای باپایان نیستند . همچنین ، $[a,b]$ یک زیرفضای فشردهٔ $<\mathbb{R},\mathcal{E}>$ است و در نتیجه فشردهٔ شمارشی است . با این حال (a,b) فشردهٔ شمارشی نیست ، چراکه پوشش باز شمارش‌پذیر $\{(a,b-\frac{b-a}{2^n}) : n\in I^+\}$ شامل یک زیرپوشش باپایان (a,b) نیست .

اگرچه فشردگی شمارشی ، ارثی نیست ، لیکن زیرفضاهای بستهٔ فضاهای فشردهٔ شمارشی نیز فشردهٔ شمارشی می‌باشند . همچنین ، فشردگی شمارشی تحت پیوستگی پایدار است . اثبات این دو قضیه به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است .

قضیهٔ ۳ - ۱۳ . *هرگاه $<S,\tau>$ فشرده شمارشی و $A\subset S$ بسته باشد ، آنگاه زیرفضای $<A,\tau|A>$ فشرده شمارشی است .*

قضیهٔ ۳ - ۱۴ . *هرگاه $<S,\tau_1>$ فشرده شمارشی و تابع پوشای $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ پیوسته باشد ، آنگاه $<T,\tau_2>$ فشرده شمارشی است .*

با استفاده از نحوهٔ دیگر مشخص‌کردن فشردگی شمارشی که در قضیهٔ ۳ - ۱۲ ارائه شد ، اثباتی ساده از قضیهٔ معروف مقطع کانتور در مورد مقطع دنباله‌ای از زیرفضاهای بسته تو در توی یک فضای فشردهٔ شمارشی به‌دست می‌آوریم .

قضیهٔ ۳ - ۱۵ . *فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $<C_1,\tau|C_1>$ یک زیرفضای فشردهٔ شمارشی $<S,\tau>$ باشد . هرگاه $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی S باشد ، آنگاه $\cap\{C_n : n \in I^+\} \neq \varnothing$.*

برهان . چون $\{C_n : n \in I^+\}$ یک "دنباله تو در تو" از زیرمجموعه‌های بسته غیرتهی $<C_1,\tau|C_1>$ است ، لذا دارای خاصیت مقطع باپایان است . در نتیجه بنابر قضیهٔ ۳-۱۲ $\cap\{C_n : n \in I^+\} \neq \varnothing$ ، چراکه $<C_1,\tau|C_1>$ فشردهٔ شمارشی است . ■

صورت هم‌ارز دیگر فشردگی شمارشی متضمن مفهوم "نقطهٔ انباشتگی" یک دنباله است که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرد .

تعریف ۳ - ۸ . $x \in S$ یک *نقطه انباشتگی* دنباله $\{x_n\}_{n \in I^+}$ در $<S,\tau>$ است اگر و فقط اگر هنگامی که $x \in G \in \tau$ ، به ازای هر $N \in I^+$ داشته باشیم $G \cap \{x_n : n \geq N\} \neq \varnothing$.

قضیهٔ ۳ - ۱۶ . *$<S,\tau>$ فشردهٔ شمارشی است اگر و فقط اگر هر دنباله در $<S,\tau>$ دارای یک نقطهٔ انباشتگی در S باشد .*

برهان . فرض کنید $\{x_n\}_{n \in I^+}$ دنباله‌ای در $<S,\tau>$ بدون هیچ نقطهٔ انباشتگی باشد . در این صورت به ازای هر $x \in S$ یک مجموعهٔ $G_x \in \tau$ یک عدد $N \in I^+$ موجود است به‌قسمی که $x \in G_x$ و $G_x \cap \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} = \varnothing$. برای هر $n \in I^+$ قرار می‌دهیم $U_n = \cup\{G_x : G_x \cap \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \varnothing\}$. لذا $\{U_n : n \in I^+\}$ یک پوشش باز شمارش‌پذیر برای $<S,\tau>$ است که دارای هیچ زیرپوشش باپایان نیست . در نتیجه $<S,\tau>$ فشرده شمارشی نیست . به عکس ، فرض می‌کنیم $<S,\tau>$ فشرده شمارشی نیست . در این صورت پوشش باز شمارش‌پذیری مانند $\{U_n : n \in I^+\}$ برای $<S,\tau>$ وجود دارد که شامل هیچ زیرپوشش باپایان برای $<S,\tau>$ نیست . حال قرار می‌دهیم $V_1 = U_1$ و $x_1 \in V_1$. هرگاه $n > 1$ ، آنگاه V_n را برابر اولین U_i که مشمول $\cup\{V_i : i = 1, \ldots, n-1\}$ نباشد قرارمی‌دهیم و فرض می‌کنیم

$x_n \in V_n - \cup\{V_i : i=1,\ldots,n-1\}$ در نتیجه هرگاه $x \in S$، آنگاه یک عدد $N \in I^+$ موجود است به‌قسمی که $x \in V_N$ و $V_N \cap \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} = \varnothing$، یعنی x یک نقطهٔ انباشتگی S نیست. ■

نواک و تراساکا مثالهائی را ارائه داده‌اند که نشان می‌دهد که حاصلضرب دو فضای فشردهٔ شمارشی لازم نیست فشردهٔ شمارشی باشد. در نتیجه، برخلاف خاصیت فشردگی که ضربی است، فشردگی شمارشی حتی ضربی باپایان هم نیست. این قسمت را با بیان خصوصیت دیگری از فضای فشرده شمارشی که مورد توجه خاص دست‌اندرکاران آنالیز می‌باشد به پایان می‌رسانیم. اثبات آن به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

قضیهٔ ۳ - ۱۷ . *هرگاه $<S,\tau>$ فشرده شمارشی و $f:<S,\tau> \to E^1$ پیوسته باشد، آنگاه f یک مقدار بیشینه (همچنین یک مقدار کمینه) روی S اختیار می‌کند.*

تمرین

۳ - ۱۲ . نشان دهید که $<S,\tau>$ فشرده است اگر و فقط اگر فشردهٔ شمارشی و لیندلف باشد.

۳ - ۱۳ . قضیهٔ ۳ - ۱۲ را ثابت کنید.

۳ - ۱۴ . قضیهٔ ۳ - ۱۳ را ثابت کنید.

۳ - ۱۵ . قضیهٔ ۳ - ۱۴ را ثابت کنید.

۳ - ۱۶ . قضیهٔ ۳ - ۱۷ را ثابت کنید.

۳ - ۱۷ . نشان دهید که هرگاه $<S,\tau_1>$ فشرده و $<T,\tau_2>$ فشردهٔ شمارشی باشد، آنگاه $<S\times T,\tau_1\times\tau_2>$ فشردهٔ شمارشی است.

۳ - ۴ فشردگی دنباله‌ای

حال به بررسی خاصیتی می‌پردازیم که از فشردگی شمارشی قویتر و در ردهٔ فضاهای شمارش‌پذیر نوع دوم هم‌ارز آن است. ولی با این حال، این خاصیت نه فشردگی را ایجاب می‌کند و نه بوسیلهٔ آن ایجاب می‌شود. این خاصیت را "فشردگی دنباله‌ای" گوئیم، زیرا بجای آنکه برحسب پوششهای باز تعریف شود، برحسب شرایط معینی از دنباله‌های فضا تعریف می‌شود.

تعریف ۳ - ۹. $\langle S,\tau\rangle$ ***فشرده دنباله‌ای*** است اگر و فقط اگر هر دنباله $\langle S,\tau\rangle$ دارای زیردنباله‌ای باشد که همگرا به یک نقطهٔ S است.

با توجه به قضیهٔ ۳ - ۱۶، فشردگی دنباله‌ای فشردگی شمارشی راایجاب می‌کند، زیرا حد یک زیردنبالهٔ همگرا بوضوح یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ اصلی است. اکنون به بیان فضائی می‌پردازیم که فشرده (در نتیجه فشردهٔ شمارشی و لیندلف) است ولی فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

مثال ۳ - ۹. فرض کنیم $I^1=\langle[0,1],\xi|[0,1]\rangle$ و فضای $\langle S,\tau\rangle$ به‌صورت حاصلضرب تعداد شمارش‌ناپذیری نسخه از I^1 باشد. مجموعهٔ تمام زیردنباله‌های دنبالهٔ $1,2,\ldots,n,\ldots$ را به T نشان می‌دهیم. در این صورت نگاشتی دو سوئی مانند $f:\mathbb{R}\to T$ موجود است. فرض کنیم $r\in\mathbb{R}$ و $f(r)$ زیردنبالهٔ $n^r_1,n^r_2,\ldots$ باشد. هرگاه $n=n^r_i$ و i فرد باشد، قرار می‌دهیم $x_n(r)=0$ و در غیر این صورت $x_n(r)=1$. به این ترتیب $x_n:\mathbb{R}\to I^1$ یک تابع است و $\{x_n\}_{n\in I^+}$ دنباله‌ای در $\langle S,\tau\rangle$ می‌باشد. فرض کنید $\{x_{n_i}\}_{i\in I^+}$ یک زیردنبالهٔ همگرای آن باشد. هرگاه $r=f^{-1}(n_1,n_2,\ldots,n_i,\ldots)$، آنگاه دنبالهٔ $\{x_{n_i}(r)\}_{i\in I^+}$ همگرا به یک نقطهٔ I^1 است، یعنی دنبالهٔ $0,1,0,1,\ldots$ در I^1 همگراست که متناقض با هاوسدرف‌بودن I^1 است. در نتیجه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا نیست و $\langle S,\tau\rangle$ نمی‌تواند فشردهٔ دنباله‌ای باشد. ولی با این حال،

$<S,\tau>$ بنابر قضیه تیخونوف فشرده است، چراکه I^1 فشرده است.

قضیهٔ ۳ - ۱۸. هرگاه $<S,\tau>$ فشرده شمارشی و شمارش‌پذیر نوع اول باشد، *آنگاه* $<S,\tau>$ *فشردهٔ دنباله‌ای است*.

برهان. به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

فشردگی دنباله‌ای نیز همانند فشردگی، فشردگی شمارشی و خاصیت لیندلف ارثی نیست. ولی با این حال، زیرفضاهای بستهٔ فضاهای فشردهٔ دنباله‌ای، فشردهٔ دنباله‌ای می‌باشند. همچنین، فشردگی دنباله‌ای تحت پیوستگی پایدار است. اثبات این نتایج به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

قضیهٔ ۳ - ۱۹. هرگاه $<S,\tau>$ *فشردهٔ دنباله‌ای و* $A\subset S$ بسته باشد، *آنگاه زیرفضای* $<A,\tau|A>$ *فشردهٔ دنباله‌ای است*.

قضیهٔ ۳ - ۲۰. هرگاه $<S,\tau>$ *فشردهٔ دنباله‌ای و تابع پوشای* $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ پیوسته باشد، *آنگاه* $<T,\tau_2>$ *فشردهٔ دنباله‌ای است*.

اکنون به دو مثال دیگر می‌پردازیم که در فهم تفاوت فشردگی دنباله‌ای با فشردگی شمارشی و فشردگی به ما کمک می‌کند.

مثال ۳ - ۱۰. فرض کنیم $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ فضای اردینالهای شمارش‌پذیر با توپولوژی ترتیبی و $<S,\tau>$ فضای ذکرشده در مثال ۳ - ۹ باشد. در این صورت $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ فشردهٔ شمارشی (در حقیقت فشردهٔ دنباله‌ای) و هاوسدرف است. فضای $<S,\tau>$ فشرده و هاوسدرف می‌باشد. بنابراین $<\mathcal{O}\times S,\mathcal{W}\times\tau>$ هاوسدرف است و بنابر تمرین ۳ - ۱۷ فشردهٔ شمارشی است. از آنجا که $\pi_1(\mathcal{O}\times S)=\mathcal{O}$ و $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ فشرده (و لیندلف) نیست، لذا $<\mathcal{O}\times S,\mathcal{W}\times\tau>$ نیز فشرده (و لیندلف) نمی‌باشد. همچنین، چون $\pi_2(\mathcal{O}\times S)=S$ و $<S,\tau>$ فشردهٔ دنباله‌ای نیست، لذا $<\mathcal{O}\times S,\mathcal{W}\times\tau>$ نیز فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

مثال ۳ - ۱۱. فرض کنیم $\mathcal{O}^*=\mathcal{O}\cup\{\Omega\}$ و $\mathcal{W}^*$ توپولوژی ترتیبی روی $\mathcal{O}^*$ باشد. در این صورت $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ یک فضای هاوسدرف فشرده و فشردهٔ دنباله‌ای است که $\langle\mathcal{O},\mathcal{W}\rangle$ را به‌عنوان یک زیرفضای فشردهٔ دنباله‌ای **غیربسته** در بردارد. زیرا فرض کنید $\mathcal{U}$ یک پوشش باز $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ باشد. در این صورت به ازای یک $G\in\mathcal{U}$ داریم $\Omega\in G$. هرگاه $p\in G-\{\Omega\}$، آنگاه p فقط دارای تعداد شمارش‌پذیری مقدم در $\mathcal{O}^*$ است. این امر ایجاب می‌کند که $\mathcal{U}$ شامل زیرپوششی شمارش‌پذیری برای $\mathcal{O}^*$ دارد و در نتیجه $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ لیندلف است. همچنین، $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ فشرده دنباله‌ای و هاوسدرف است زیرا $\langle\mathcal{O},\mathcal{W}\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای و هاوسدرف می‌باشد. بنابراین $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ فشرده است. آشکارا، Ω یک نقطهٔ حدی $\mathcal{O}$ در $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ است که ایجاب می‌کند $\langle\mathcal{O},\mathcal{W}\rangle$ در $\langle\mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ بسته نمی‌باشد.

بالاخره، فشردگی دنباله‌ای را در فضای متریک در نظر می‌گیریم. مفهوم "فضای متریک کراندار کلی" را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر فضای متریک فشردهٔ دنباله‌ای لزوماً کراندار کلی (و بنابراین تفکیک‌پذیر) است.

تعریف ۳ - ۱۰. فرض کنیم $\langle M,d\rangle$ یک فضای متریک باشد و $\varepsilon>0$. یک **εـ تور** برای $\langle M,d\rangle$ یک زیرمجموعهٔ باپایان F از M است به‌قسمی که به ازای هر $x\in M$ یک $y\in F$ با شرط $d(x,y)<\varepsilon$ موجود باشد.

تعریف ۳ - ۱۱. فضای متریک $\langle M,d\rangle$ ***کراندار کلی یا پیش‌فشرده*** است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>0$، یک εـ تور برای $\langle M,d\rangle$ موجود باشد.

قضیهٔ ۳ - ۲۱. *هرگاه $\langle M,d\rangle$ یک فضای متریک فشردهٔ دنباله‌ای باشند، آنگاه $\langle M,d\rangle$ کراندار کلی است.*

برهان. هرگاه $\langle M,d\rangle$ کراندار کلی نباشد، آنگاه یک $\varepsilon>0$ ثابت موجود است به‌قسمی که $\langle M,d\rangle$ هیچ $\varepsilon-$ تور ندارد. گیریم $x_1\in M$. چون $\{x_1\}$ یک $\varepsilon-$ تور برای

$\langle M,d\rangle$ نیست ، لذا عنصری مانند $x_2 \in M$ وجود دارد به‌قسمی که $d(x_1,x_2)\geq\varepsilon$. ولی از آنجا که $\{x_1,x_2\}$ یک ε– تور برای $\langle M,d\rangle$ نیست ، لذا عنصری مانند $x_3\in M$ وجود دارد به‌قسمی که $d(x_1,x_2)\geq\varepsilon$ و $d(x_2,x_3)\geq\varepsilon$. حال اگر $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset M$ قبلاً تعریف شده باشد به‌قسمی که $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ به ازای هر $i\neq j$ ، آنگاه $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ یک ε– تور برای $\langle M,d\rangle$ نیست . لذا عنصری مانند $x_{n+1}\in M$ وجود دارد به‌قسمی که $d(x_i,x_{n+1})\geq\varepsilon$ به ازای $i=1,2,\dots,n$. در نتیجه یک دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in I^+}$ در $\langle M,d\rangle$ به طریق استقرا تعریف شده است به‌قسمی که $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ به ازای هر $i\neq j$. این امر ایجاب می‌کند که هیچ زیردنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in I^+}$ نمی‌تواند در $\langle M,d\rangle$ همگرا باشد و $\langle M,d\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای نیست که یک تناقض است . ■

نتیجه . *هر فضای متریک فشردهٔ دنباله‌ای ، تفکیک‌پذیر است .*

برهان . فرض کنید $\langle M,d\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای است . بنابر قضیهٔ ۳ - ۲۱ ، $\langle M,d\rangle$ کراندار کلی است، به ازای هر $n\in I^+$، اگر F_n یک $1/n$– تور برای $\langle M,d\rangle$ باشد. در این‌صورت مجموعهٔ $F=\cup\{F_n:n\in I^+\}$ شمارش‌پذیر و در $\langle M,d\rangle$ چگال است. ■

تمرین

۳ـ۱۸ . قضیهٔ ۳ ـ ۱۸ را ثابت کنید .

۳ـ۱۹ . قضیهٔ ۳ ـ ۱۹ را ثابت کنید .

۳ـ۲۰ . قضیهٔ ۳ ـ ۲۰ را ثابت کنید .

۳ ـ ۲۱ . نشان دهید که یک فضای متریک $\langle M,d\rangle$ فشرده است اگر و فقط اگر $\langle M,d\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای باشد اگر و فقط اگر $\langle M,d\rangle$ فشردهٔ شمارشی باشد .

۳ ـ ۲۲ . نشان دهید که هرگاه $\langle S,\tau_1\rangle$ و $\langle T,\tau_2\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای باشند ، آنگاه $\langle S\times T,\tau_1\times\tau_2\rangle$ فشردهٔ دنباله‌ای است .

۳ ـ ۲۳ . فضای متریک $\langle M,d\rangle$ کراندار است اگر و فقط اگر عنصری مانند $b\in\mathbb{R}^+$ موجود باشد به‌قسمی که $d(x,y)\leq b$ به ازای هر $x,y\in M$. نشان دهید که هرگاه $\langle M,d\rangle$ یک فضای متریک دلخواه باشد ، آنگاه یک متریک ρ روی M موجود است به‌قسمی که $\langle M,\rho\rangle$ کراندار است و توپولوژی متریک ρ روی M و توپولوژی متریک d روی M یکی می‌باشند .

۳ ـ ۲۴ . ثابت کنید که هر فضای متریک کراندار کلی ، کراندار است .

۳ ـ ۵ . خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس

در این بخش به بررسی خاصیتی می‌پردازیم که از فشردگی شمارشی ضعیفتر ، و در ردهٔ فضاهای T_1 هم‌ارز آن است . این خاصیت به "خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس" معروف است و برطبق آن هر زیرفضای بی‌پایان از یک چنین فضائی یک نقطه حدی در آن فضا دارد . برای ردهٔ فضاهای متریک خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس هم‌ارز فشردگی ، فشردگی شمارشی و فشردگی دنباله‌ای است .

تعریف ۳ ـ ۱۲ . $\langle S,\tau\rangle$ دارای ***خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس*** است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان S دارای یک نقطهٔ حدی در S باشد .

در آغاز نشان می‌دهیم که فشردگی شمارشی خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس را ایجاب می‌کند . سپس مثالی از یک فضا ارائه می‌دهیم که دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است ولی فشردهٔ شمارشی نیست .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۲ . *هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ فشردهٔ شمارشی باشد ، آنگاه $\langle S,\tau\rangle$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است .*

برهان . فرض کنید $A\subset S$ بی‌پایان است و دارای هیچ نقطهٔ حدی در S نیست . فرض کنیم $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله از نقاط متمایز A باشد . حال قرار می‌دهیم $A_n=\{x_n,x_{n+1},\dots\}$ و

$B_n=S-A_n$. هرگاه $x\in S$، آنگاه عنصری مانند $G_x\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in G_x$ و $G_x\cap A$ شامل حداکثر یک نقطه است. در نتیجه به ازای حداکثر یک مقدار n، $x_n\in G_x$. این امر ایجاب می‌کند که $G_x\cap A_n=\varnothing$ و به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n، $G_x\subset B_n$. به ازای هر $n\in I^+$، فرض کنیم U_n نشانگر درون B_n باشد. در این صورت $\{U_n:n\in I^+\}$ یک پوشش باز شمارش‌پذیر $<S,\tau>$ است و لذا یک زیرگردآیهٔ باپایان $\{U_1,\dots,U_m\}$ نیز باید $<S,\tau>$ را بپوشاند. چراکه $<S,\tau>$ فشردهٔ شمارشی است. به ازای $i=1,\dots,m+1$ داریم $x_{m+1}\in A_i$ و در نتیجه $x_{m+1}\notin B_i$. بنابر این $x_{m+1}\notin\cup\{U_i:i=1,\dots,m\}=S$، که یک تناقض است. لذا A باید دارای یک نقطهٔ حدی در S باشد. ■

مثال ۳ـ۱۲. فرض کنیم I^+ طبق معمول نشانگر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد و قرار می‌دهیم $B_n=\{2n-1,2n\}$ به ازای هر $n\in I^+$. هرگاه $\mathscr{B}=\{B_n:n\in I^+\}$، آنگاه $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی τ روی I^+ است. چون $\mathscr{B}$ شمارش‌پذیر است، لذا $<I^+,\tau>$ شمارش‌پذیر نوع دوم (بنابراین تفکیک‌پذیر و لیندلف) است. با این حال $<I^+\tau>$ فشردهٔ شمارشی نیست، چراکه $\mathscr{B}$ یک پوشش باز شمارش‌پذیر $<I^+,\tau>$ می‌باشد که تحویل‌ناپذیر است. ولی $<S,\tau>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس می‌باشد. زیرا فرض کنیم $A\subset I^+$ بی‌پایان باشد و $n\in A$. در این صورت هرگاه n فرد باشد، آنگاه $n+1\in A'$ و هرگاه n زوج باشد، آنگاه $n-1\in A'$.

قضیهٔ ۳ـ۲۳. *هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای T_1 با خاصیت بولزانو - وایرشتراس باشد، آنگاه $<S,\tau>$ فشردهٔ شمارشی است.*

برهان. به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

$I^1=<[0,1],\xi|[0,1]>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است، زیراکه فشرده است. با این حال، زیرفضای $<\{1/n:n\in I^+\},\xi|\{1/n:n\in I^+\}>$ دارای خاصیت

بولزانو ـ وایرشتراس نیست ، چراکه مجموعهٔ باپایان $\{1/n:n\in I^+\}$ شامل هیچ نقطهٔ حدی خودش نمی‌باشد . در نتیجه خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس ارثی نیست . با این حال، زیرفضاهای بستهٔ یک فضا باخاصیت بولزانو ـ وایرشتراس دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس می‌باشد . برخلاف خواص پوششی بحث‌شده در بخشهای قبلی ، آنچنان که توسط مثال نقض نشان می‌دهیم خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس تحت پیوستگی پایا نیست .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۴ . *هرگاه $<S,\tau>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس باشد و $A\subset S$ بسته باشد ، آنگاه $<A,\tau|A>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است .*

برهان . به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است . ■

مثال ۳ ـ ۱۳ . فرض کنیم $<I^+,\tau>$ فضای بیان‌شده در مثال ۳ ـ ۱۲ باشد و تابع پوشای $f:<I^+,\tau> \to <I^+,$ گسسته$>$ به‌صورت $f(2n-1)=f(2n)=n$ به ازای هر $n\in I^+$ داده شده باشد . از آنجا که به ازای هر $n\in I^+$ داریم $f^{-1}(\{n\})=\{2n-1,2n\}\in\tau$ ، لذا f پیوسته است . همانطور که در مثال ۳ ـ ۱۲ خاطر نشان کردیم ، فضای $<I^+,\tau>$ شمارش‌پذیر نوع دوم با خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است ، ولی فضای T_0 نیست . فضای نگارهٔ $<I^+,$ گسسته$>$ یک فضای T_5 می‌باشد که لیندلف است ولی دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس نیست .

مثال ۳ ـ ۱۴ . فرض کنیم $<\mathbb{R},\tau>$ فضای بیان‌شده در مثال ۳ ـ ۳ باشد . یادآوری می‌کنیم که $\tau=\{G\subset\mathbb{R}:\mathbb{R}-\{1,2\}\subset G$ و یا $0\notin G\}$. فضای $<\mathbb{R},\tau>$ فشرده است و $<\mathbb{R}-\{0\},\tau|\mathbb{R}-\{0\}>$ یک زیرفضای آن است که لیندلف نیست، چراکه $\tau|\mathbb{R}-\{0\}$ توپولوژی گسسته است . همچنین ، $\mathbb{R}-\{0\}$ دارای هیچ نقطهٔ حدی در $\mathbb{R}-\{0\}$ نیست ، چون توپولوژی زیرفضائی آن گسسته است . در نتیجه

$<\mathbb{R}-\{0\},\tau|\mathbb{R}-\{0\}>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس نیست . فرض کنیم

$\{x_n\}_{n\in I^+}$ دنباله دلخواهی در $<\mathbb{R},\tau>$ باشد. هرگاه x به ازای حداکثر تعداد باپایانی از مقادیر n برابر ۱ یا ۲ باشد، آنگاه $x_n \to 0$. هرگاه برای تعداد بی‌پایانی از مقادیر n داشته باشیم $x_n=1$ (یا $x_n=2$)، آنگاه یک زیردنباله $\{x_n\}_{n\in I^+}$ به ۱ (یا به ۲) همگراست. با همه اینها، فضای $<\mathbb{R},\tau>$ فشردهٔ دنباله‌ای است.

اکنون به فضای اردینالی $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ که قبلاً در مثال ۳ـ۷ مورد بحث قرار گرفت، باز می‌گردیم. نشان می‌دهیم که $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ شمارش‌پذیر نوع اول هاوسدرف و فشردهٔ دنباله‌ای است ولی فضای لیندلف نیست.

مثال ۳ـ۱۵. یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{W}$ توپولوژی ترتیبی روی $\mathcal{O}$، مجموعهٔ اردینالهای مقدم بر Ω است. فرض کنیم $x\in\mathcal{O}$ و y کوچکترین عنصر $\mathcal{O}$ باشد به‌قسمی که $x<y$. از آنجا که $x\in\mathcal{O}$، لذا x فقط دارای تعداد شمارش‌پذیری مقدم، مثلاً $\{x_n:n\in I^+\}$ است. گردآیهٔ $\{\{z\in\mathcal{O}:x_n<z<y\}:n\in I^+\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر موضعی در نقطه x برای $\mathcal{W}$ است. بنابراین $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ شمارش‌پذیر نوع اول است. برای ملاحظه این امر که $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ هاوسدرف است، فرض کنیم $x,y\in\mathcal{O}$ و $x<y$. هرگاه عنصری مانند $z\in\mathcal{O}$ موجود باشد به‌قسمی که $x<z<y$، آنگاه قرار می‌دهیم $U_x=\{w\in\mathcal{O}:w<z\}$ و $V_y=\{w\in\mathcal{O}:z<w\}$. هرگاه این چنین z ای موجود نباشد، قرار می‌دهیم $U_x=\{w\in\mathcal{O}:w<y\}$ و $V_y=\{w\in\mathcal{O}:x<w\}$. در این صورت U_x و V_y مجموعه‌های باز مجزائی هستند که بترتیب شامل x و y می‌باشند. برای ملاحظه این امر که $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ لنیدلف نیست، فرض کنیم به ازای هر $x\in\mathcal{O}$، G_x مجموعهٔ باز شمارش‌پذیر $\{w\in\mathcal{O}:w<x\}$ باشد. هرگاه $\mathcal{C}=\{G_x:x\in\mathcal{O}\}$، آنگاه $\mathcal{C}$ یک پوشش باز $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ است. هرگاه $\mathcal{U}\subset\mathcal{C}$ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $\cup\{G_x:G_x\in\mathcal{U}\}$ شمارش‌پذیر است و نمی‌تواند شامل $\mathcal{O}$ که شمارش‌ناپذیر است باشد. چون $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ یک فضای T_1 و شمارش‌پذیر نوع اول است، لذا برای اثبات فشردگی

دنباله‌ای آن کافی است نشان دهیم که $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است . فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان $\mathcal{O}$ و D یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان A باشد . بنابر قضیهٔ ۳ − ۰ داریم $\sup D\in\mathcal{O}$. کوچکترین عنصر $\mathcal{O}$ راکه دارای تعداد بی‌پایانی مقدم در D است به b نشان می‌دهیم . هرگاه $b\notin D'$ ، آنگاه عناصری مانند $c,d\in\mathcal{O}$ وجود دارند به‌قسمی که $\{x\in\mathcal{O}:c<x<d\}\cap(D-\{b\})=\varnothing, c<b<d$. این امر ایجاب می‌کند که c دارای تعداد بی‌پایانی مقدم در D باشد که متناقض با تعریف b است . در نتیجه $b\in D'\subset A'$ و $<\mathcal{O},\mathcal{W}>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است .

تمرین

۳ ـ ۲۵ . قضیهٔ ۳ − ۲۳ را ثابت کنید .

۳ ـ ۲۶ . قضیهٔ ۳ − ۲۴ را ثابت کنید .

۳ ـ ۲۷ . فرض کنید $E^1=<\mathbb{R},\xi>$ و $A\subset\mathbb{R}$. نشان دهید که $<A,\xi|A>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است اگر و فقط اگر A بسته و کراندار باشد (این همان قضیه کلاسیک بولزانو ـ وایرشتراس در آنالیز ریاضی است) .

۳ ـ ۲۸ . هرگاه $<S,\tau_1>$ و $<T,\tau_2>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس باشند ، آنگاه آیا $<S\times T,\tau_1\times\tau_2>$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایرشتراس است ؟ چرا ؟

* ۳ ـ ۶ فضاهای گستردنی

در این مرحله ، کمی از بررسی خود پیرامون "خواص پوششی" منحرف می‌شویم تا یک ردهٔ بسیار مهم از فضاهای توپولوژیک موسوم به "فضاهای گستردنی" را مورد بررسی قرار دهیم که ساختار توپولوژیکیشان از دنباله‌های تو در توی پوششهای بازی است که در شرایط معینی صدق می‌کنند . فضاهای متریک زیر ردهٔ خاصی از فضاهای

گستردنی که زیر ردهٔ خاصی از فضاهای نیم‌متریک هستند ، می‌باشند . ردهٔ فضاهای گستردنی توسط ر .ل . مور و شاگردانش مورد مطالعه قرارگرفته‌اند . در حقیقت ، معمولاً فضای گستردنی منظم را "فضای مور" می‌نامند . ر . هـ . بینگ نشان داده است که هر فضای نرمال گردآیه‌ای مور ، متریک‌پذیر است . یک حدس مشهور در توپولوژی بیان می‌کند که هر فضای مور نرمال ، نرمال گردآیه‌ای است . در جهان ساختنی گودل ، این حدس با نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است . علاوه‌بر این ، هرگاه اصل مارتین را قبول و فرض پیوستار را نفی کنیم ، آنگاه فضاهای مور نرمالی وجود دارند که نرمال گردآیه‌ای نیستند .

تعریف ۳ ـ ۱۳ . فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{D}=\{\mathcal{G}_n:n\in I^+\}$ دنباله‌ای از پوششهای باز تو در توی $<S,\tau>$ باشد ، یعنی $\mathcal{G}_n$ فضای $<S,\tau>$ را می‌پوشاند وبه ازای هر $n\in I^+$ ، پوشش $\mathcal{G}_{n+1}$ یک تظریف $\mathcal{G}_n$ است .آنگاه $\mathcal{D}$ یک **گستردهٔ** $<S,\tau>$ است اگر و فقط اگر $p\in U\in\tau$ ایجاب کند که عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $\mathcal{G}^*_N(p)=\cup\{G_N\in\mathcal{G}_N:p\in G_N\}\subset U$. مجموعهٔ $\mathcal{G}^*_N(p)$ به **ستارهٔ پوشش** $\mathcal{G}_N$ **نسبت به** p موسوم است .

تعریف ۳ ـ ۱۴ . $<S,\tau>$ یک ***فضای گستردنی*** است اگر و فقط اگر یک گسترده برای $<S,\tau>$ موجود باشد . $<S,\tau>$ یک ***فضای مور*** است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ یک فضای T_1 منظم گستردنی باشد .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۵ . *هر فضای متریک $<M,d>$ یک فضای مور است .*

برهان . $<M,d>$ بنابر قضیه ۲ ـ ۱۰ فضای T_5 است . به ازای هر $n\in I^+$ قرار می‌دهیم $\mathcal{G}_n=\{S_d(x;1/n):x\in M\}$. در این صورت $\mathcal{D}=\{\mathcal{G}_n:n\in I^+\}$ یک دنبالهٔ تو در تو از پوششهای باز $<M,d>$ است . هرگاه $x\in U\in\tau_d$ ، آنگاه عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in S_d(x;1/N)\subset U$. در نتیجه ، هرگاه $x\in S_d(y;1/2N)$ و

$z\in S_d(y;1/2N)$ ، آنگاه $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<1/2N+1/2N=1/N$. لذا $S_d(y;1/2N)\subset S_d(x;1/N)\subset U$ هرگاه $x\in S_d(y;1/N)\in\mathcal{G}_N$، یعنی $\mathcal{G}^*_{2N}(x)\subset S_d(x;1/N)\subset U$. این امر نشان می‌دهد که $\mathcal{D}$ یک گستردهٔ $<M,d>$ است. ■

اکنون به مثالی از یک فضای مور می‌پردازیم که فضای متریک نیست چون نرمال نیست. این مثال همان فضای مثال ۲ ـ ۴ است.

مثال ۳ـ۱۶. $S=\{<x,y>\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:y\ge 0\}$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $<p,q>\in S$ و $q>0$، آنگاه قرار می‌دهیم $N_\varepsilon(p,q)=\{<x,y>\in S:(x-p)^2+(y-q)^2<\varepsilon^2\}$ و هرگاه $<p,0>\in S$، آنگاه $N_\varepsilon(p,0)=\{<x,y>\in S:(x-p)^2+(y-\varepsilon)^2<\varepsilon^2\}\cup\{<p,0>\}$. حال $\mathcal{B}=\{N_\varepsilon(p,q):<p,q>\in S,\varepsilon>0\}$ تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی τ روی S می‌دهد. همانطور که در فصل ۲ دیده شده، $<S,\tau>$ یک فضای T_3 است ولی فضای T_4 نیست. حال به ازای هر $n\in I^+$ پوشش $\mathcal{G}_n=\{N_{1/n}(p,q):<p,q>\in S\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathcal{D}=\{\mathcal{G}_n:n\in I^+\}$ یک دنبالهٔ تو در تو از پوششهای باز برای $<S,\tau>$ است، برای اثبات اینکه $\mathcal{D}$ در حقیقت یک گستردهٔ $<S,\tau>$ است. می‌توان مانند قضیهٔ ۳ ـ ۲۵ عمل کرد. بیان جزئیات آن به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

همانطور که در بخش ۲ ـ ۴ قول دادیم، اکنون اثبات بینگ را در این مورد که هر فضای متریک نرمال گردآیه‌ای است، به اختصار شرح می‌دهیم. بدین منظور احتیاج به مفاهیم "قویاً غربال‌پذیر" و "کاملاً غربال‌پذیر" داریم.

تعریف ۳ ـ ۱۵. $<S,\tau>$ *غربال‌پذیر* است اگر و فقط اگر برای هر پوشش باز $\mathcal{G}$ از $<S,\tau>$ یک خانواده $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in I^+}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\mathcal{G}_n$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های باز دو بدو مجزاست به ازای هر $n\in I^+$ و $\cup\{\mathcal{G}_n:n\in I^+\}=\{G_n:G_n\in\mathcal{G}_n,n\in I^+\}$ یک پوشش $<S,\tau>$ و تظریفی از $\mathcal{G}$ است.

$<S,\tau>$ را **قویاً غربال‌پذیر** گوئیم اگر و فقط اگر یک گردآیهٔ $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in I^+}$ با شرایط فوق موجود باشد به‌قسمی که به ازای هر $n\in I^+$، $\mathscr{G}_n$ گسسته باشد.

تعریف ۳ـ۱۶. $<S,\tau>$ **کاملاً غربال‌پذیر** است اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in I^+}$ از گردآیه‌های گسسته $\mathscr{G}_n$ متشکل از مجموعه‌های باز موجود باشد به‌قسمی که هرگاه $p\in U\in\tau$، آنگاه عنصری مانند $n(p,U)\in I^+$ و عنصری مانند $G_n\in\mathscr{G}_{n(p,U)}$ با شرط $p\in G_n\subset U$ وجود داشته باشند.

مثال ۳ـ۱۷. فرض کنیم $E^1=<\mathbb{R},\xi>$ و $\mathscr{G}$ یک پوشش باز E^1 باشد. در این صورت $\mathscr{G}$ دارای یک تظریف شمارش‌پذیر $\mathscr{U}=\{B_n:n\in I^+\}$ است که در آن B_nها بازه‌های باز به مرکز نقاط گویا با شعاعهای گویا می‌باشند به‌قسمی که B_n به‌ازای هر $n\in I^+$ زیرمجموعهٔ یک $G\in\mathscr{G}$ است. برای هر $n\in I^+$ قرار می‌دهیم $\mathscr{G}_n=\{B_n\}$. در این صورت $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in I^+}$ دارای خواص ذکرشده در تعریف ۳ـ۱۵ است و در نتیجه E^1 قویاً غربال‌پذیر است. برای ملاحظه این امر که E^1 کاملاً غربال‌پذیر نیز می‌باشد، قرار می‌دهیم $\mathscr{C}_m=\{(r-1/m,r+1/m):r\text{گویا}\}$ به‌ازای هر $m\in I^+$. چون E^1 قویاً غربال‌پذیر است، لذا برای هر پوشش $\mathscr{C}_m$، گردآیهٔ $\{\mathscr{G}_n^m:n\in I^+\}$ وجود دارد به‌قسمی که $\mathscr{G}_n^m$ به‌ازای هر $n\in I^+$ یک گردآیهٔ گسسته از مجموعه‌های باز دو بدو مجزا است و $\cup\{\mathscr{G}_n^m:n\in I^+\}$ یک پوشش E^1 است که یک تظریف $\mathscr{C}_m$ می‌باشد. در این صورت $\{\mathscr{G}_n^m:n,m\in I^+\}$ یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر از گردآیه‌های گسسته مجموعه‌های باز است. حال اگر این گردآیه را به صورت $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2,\ldots,\mathscr{G}_k,\ldots$ اندیسگذاری مجدد کنیم. خواننده بسهولت می‌تواند ثابت کند که $\{\mathscr{G}_k\}_{k\in I^+}$ درشرایط تعریف ۳ـ۱۶ صدق می‌کند.

لم (استون). هر فضای متریک $<M,D>$ دارای این خاصیت است که به ازای هر $\varepsilon>0$، یک دنباله $\{\mathscr{F}_{\varepsilon,n}\}_{n\in I^+}$ از گردآیه های گستهٔ $\mathscr{F}_{\varepsilon,n}$ از زیر مجموعه های بستهٔ M وجود

دارد به قسمی که قطر هر کدام از آنها از ε کمتر است و $\cup\{\mathcal{F}_{\varepsilon,n}:n\in I^+\}$ فضای M را می پوشاند.

برهان. به مقاله "پیرافشردگی" و فضاهای حاصلضرب نوشته استون در بولتن انجمن ریاضی آمریکا شماره ۵۴ سال ۱۹۴۸ صفحات ۹۷۷ تا ۹۸۲ مراجعه شود. ■

قضیهٔ ۳-۲۶. *هر فضای متریک $<M,d>$ منظم و کاملاً غربال پذیر است.*

برهان. بنابر لم قبل، به ازای هر $\varepsilon>0$ دنبالهٔ $\{\mathcal{F}_{\varepsilon,n}\}_{n\in I^+}$ وجود دارد که در آن $\mathcal{F}_{n,\varepsilon}$ یک گردآیهٔ گسسته از زیرمجموعه های بسته M است که قطر هریک از آن مجموعه ها از ε کمتر است. به ازای هر $F\in\mathcal{F}_{n,\varepsilon}$، فرض کنیم G_F مجموعهٔ بازی شامل F باشد به قسمی که $\delta(G_F)<\varepsilon$ و هر نقطهٔ G_F نسبت به هر مجموعهٔ دیگر در $\mathcal{F}_{\varepsilon,n}$ دوبار نزدیکتر به F باشد. گردآیهٔ $\{G_F:F\in\mathcal{F}_{n,\varepsilon}\}$ را به ازای هر $n\in I^+$ و به ازای هر $\varepsilon>0$ به $\mathcal{G}_{\varepsilon,n}$ نمایش می دهیم. گردآیهٔ $\{\mathcal{G}_{1/m}:m\in I^+ , n\in I^+\}$ یک خانوادهٔ شمارش پذیر از گردآیه های گسستهٔ مجموعه های باز است. هر گاه این گردآیه را به صورت $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2,\ldots,\mathcal{G}_k,\ldots$ اندیسگذاری مجدد کنیم، آنگاه $\{\mathcal{G}_k\}_{k\in I^+}$ در شرایط تعریف ۳-۱۶ صدق می کند. بنابراین $<M,d>$ کاملاً غربال پذیر است. ■

قضیهٔ ۳-۲۷. *هر فضای کاملاً غربال پذیر قویاً غربال پذیر است.*

برهان. فرض کنیم $<S,\tau>$ کاملاً غربال پذیر و $\mathcal{C}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز دلخواه $<S,\tau>$ باشد. در این صورت یک دنبالهٔ $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in I^+}$ وجود دارد، که در آن $\mathcal{G}_n$ به ازای هر $n\in I^+$ گردآیه ای گسسته از مجموعه های باز است به قسمی که اگر $p\in U\in\tau$، آنگاه یک $n(p,U)\in I^+$ و یک $G_n\in\mathcal{G}_{n(p,U)}$ وجود داشته باشد به طوری که $p\in G_n\subset U$. در حالت خاص اگر $p\in U_\alpha\in\mathcal{C}$، آنگاه یک $n(p,U_\alpha)\in I^+$ ویک $G_n\in\mathcal{G}_{n(p,U_\alpha)}$ وجود دارند به قسمی که $p\in G_n\subset U_\alpha$ به ازای هر $n\in I^+$، قرار می‌دهیم

$\mathcal{G}'_n=\{G_n\in\mathcal{G}_{n(p,U_\alpha)}:p\in G_n\subset U_\alpha$ آنگاه $p\in U_\alpha\in\mathcal{C}$ اگر $\alpha\in\Lambda$ به ازای هر$\}$.

بسهولت می‌توان دید که $\mathscr{G}'_n \subset \mathscr{G}_n$ ودرنتیجه به ازای هر $n\in I^+$ گسسته است. همچنین،

$\{\mathscr{G}'_n\}_{n\in I^+}$ در شرایط تعریف ۳ ـ ۱۵ صدق می‌نماید . در نتیجه $<S,\tau>$ قویاً غربال‌پذیر است . ■

نتیجه . هر فضای متریک ، منظم و قویاً غربال‌پذیر است .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۸ . هرگاه $<S,\tau>$ منظم و قویاً غربال‌پذیر باشد ، آنگاه $<S,\tau>$ نرمال گردآیه‌ای است .

برهان . فرض کنیم $\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ گردآیهٔ گسسته دلخواهی از زیرمجموعه‌های بسته S باشد . همچنین ، فرض کنیم $\mathscr{C}$ یک پوشش باز دلخواه $<S,\tau>$ باشد به‌قسمی که بستار هیچ عنصر $\mathscr{C}$ دو عنصر از $\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ را قطع نکند . چون $<S,\tau>$ قویاً غربال‌پذیر است، لذا دنباله‌ای مانند $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in I^+}$ موجود است به‌قسمی که $\mathscr{G}_n$ یک گردآیهٔ گسسته از مجموعه‌های باز می‌باشد و $\cup\{\mathscr{G}_n:n\in I^+\}$ یک پوشش برای $<S,\tau>$ و یک تظریف $\mathscr{C}$ است . به ازای هر $\beta\in\Lambda$ و $n\in I^+$ ، فرض کنیم

$U_{n,\beta}=\cup\{G_n\in\mathscr{G}_n:G_n\cap F_\beta\neq\varnothing\}$ و

$V_{n,\beta}=\cup\{G_n\in\mathscr{G}_n:G_n\cap F_\alpha\neq\varnothing,\alpha\in\Lambda-\{\beta\}$ برای یک $\}$. اگر به ازای هر $\beta\in\Lambda$ قرار دهیم :

$W_\beta=U_{1,\beta}\cup(U_{2,\beta}-\bar{V}_{1,\beta})\cup\ldots\cup(U_{n,\beta}-\cup\{\bar{V}_{i,\beta}:i=1,\ldots,n-1\})\cup\ldots$ ، آنگاه $\{W_\beta:\beta\in\Lambda\}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های باز دو بدو مجزاست به‌قسمی که $F_\beta\subset W_\beta$ به ازای هر $\beta\in\Lambda$. بنابراین $<S,\tau>$ نرمال گردآیه‌ای است . ■

نتیجه . هر فضای متریک ، نرمال گردآیه‌ای است .

تمرین

۳ـ۲۹. ثابت کنید که گردآیهٔ $\mathcal{D}$ در مثال ۳ـ۱۶ در حقیقت یک گستردهٔ $\langle S,\tau \rangle$ است .

۳ـ۳۰ . نشان دهید که هرگاه $\langle S,\tau \rangle$ گستردنی باشد ، آنگاه $\langle S,\tau \rangle$ شمارش‌پذیر نوع اول است .

۳ـ۳۱. نشان دهید که خاصیت گستردنی‌بودن ارثی است .

۳ـ۳۲. هرگاه $\langle S , \tau_1 \rangle$ و $\langle T , \tau_1 \rangle$ گستردنی باشد، آنگاه ثابت کنید که $\langle S\times T,\tau_1\times\tau_2 \rangle$ نیز گستردنی است . آیا خاصیت گستردنی بودن ضربی شمارش‌پذیر است ؟ چرا ؟

۳ـ۳۳. نشان دهید که یک فضای گستردنی که دارای خاصیت لیندلف باشد ، شمارش‌پذیر نوع دوم است .

۳ـ۳۴. نشان دهید که هرگاه $\langle S,\tau \rangle$ فشرده باشد ، آنگاه $\langle S,\tau \rangle$ شمارش‌پذیر نوع دوم است اگر و فقط اگر گستردنی باشد .

۳ـ۳۵. ثابت کنید که یک فضای گستردنی که هم تفکیک‌پذیر و هم غربال‌پذیر باشد ، شمارش‌پذیر نوع دوم است .

۳ـ۳۶. هرگاه یک فضای گستردنی قویاً غربال‌پذیر باشد ، آیا شمارش‌پذیر نوع دوم است ؟ چرا ؟

* ۳ـ۷ پیرافشردگی

اکنون به بحث پیرامون خاصیت "پیرافشردگی" می‌پردازیم که آخرین خاصیت پوششی مورد بررسی ماست . ا . هـ . استون نشان داده است که هر فضای متریک ، پیرافشرده است . در ضمن ، هر فضای لیندلف منظم ، پیرافشرده است .ای . ا. مایکل نشان داده است که برای رده فضاهای منظم پیرافشردگی هم‌ارز "تماماً نرمال بودن" است از آنجا که

ر . هـ. بینگ نشان داده است که تماماً نرمال بودن ، نرمال بـودن گـردآیه‌ای را ایجـاب می‌کند ، لذا قادریم نتیجه بگیریم که هر فضای منظم پیرافشرده ، نرمال گردآیه‌ای است . در حالت خاص ، هر فضای مور پیرافشرده ، متریک‌پذیر است . قضیهٔ متریکسازی بینگ نشان می‌دهد که در هر فضای مور ، نرمال گردآیه‌ای ، پیرافشردگی را ایجـاب مـی‌کند (بنابراین هم‌ارزند) . دیودونه ثابت کرده که فضای هاوسدرف پیرافشـرده ، فضـای T_4 است .

تعریف ۳ـ۱۷ . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{G}\subset 2^S$. گردآیهٔ $\mathcal{G}$ را *موضعاً باپایان* گوئیم اگر و فقط اگر به ازای هر $x\in S$ عنصری مانند $G\in\tau$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $x\in G$ و G تنها تعداد باپایانی از عناصر $\mathcal{G}$ را قطع کند . گردآیهٔ $\mathcal{G}$ را σـ موضعاً باپایان گوئیم اگر و فقط اگر $\mathcal{G}$ اجتماع شمارش‌پذیری از خانواده‌های موضعاً باپایان باشد .

تعریف ۳ـ۱۸ . $\langle S,\tau\rangle$ *پیرافشرده* است اگر و فقط اگر هر پوشش باز $\langle S,\tau\rangle$ دارای یک تظریف موضعاً باپایان باشد .

مثال ۳ـ۱۸ . فضای $\langle\mathbb{R},$ گسسته$\rangle$ یک فضای هاوسدرف پیرافشـرده است کـه نـه فشردهٔ شمارشی و نه لیندلف است . $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ نیز پیرافشرده است ، چراکه هرگاه $\mathcal{C}$ یک پوشش باز دلخواه $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ باشد ، آنگاه به ازای هر $r\in\mathbb{R}$ عنصری مانند $b_r\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌قسمی که $r<b_r$ و $[r,b_r)$ دقیقاً در یک عضو $\mathcal{C}$ قرار دارد . در نتیجه گـردآیهٔ $\mathcal{G}$ متشکل از این مجموعه‌های باز پایه‌ای $[r,b_r)$ یک پوشش $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ و یک تـظریف $\mathcal{C}$ است . چون $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ یک فضای لیندلف است ، لذا $\mathcal{G}$ بـاید شـامل یک زیـرپوشش شمارش‌پذیر $\{[r_n,b_{r_n}):n\in I^+\}$ برای $\langle\mathbb{R},\mathcal{L}\rangle=\mathcal{G}$ باشد . فرض کنیم $U_1=[r_1,b_{r_1})$ و $U_n=[r_n,b_{r_n})-\cup\{[r_i,b_{r_i}):i=1,\dots,n-1\}$ بـه ازای $n>1$. در ایـن صـورت

$\mathcal{U}=\{U_n:n\in I^+\}$ یک تظریف باز موضعاً باپایان $\mathcal{C}$ است . با این حال $\langle \mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}\rangle$ پیرافشرده نیست ، چراکه بنابر قضیهٔ دیودونه یک فضای هاوسدرف پیرافشرده ، نرمال است و ما قبلاً نشان داده‌ایم که $\langle \mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{L}\times\mathcal{L}\rangle$ نرمال نیست ولی هاوسدرف است ، در نتیجه پیرافشردگی ضربی باپایان نیست .

چون هر زیرپوشش باپایان ، یک تظریف موضعاً باپایان است، آشکار است که فشردگی، پیرافشردگی را ایجاب می‌کند . در نتیجه $\langle \mathcal{O}^*,\mathcal{W}^*\rangle$ پیرافشرده است ولی زیرفضای $\langle \mathcal{O},\mathcal{W}\rangle$ پیرافشرده نیست . با این حال ، در این مورد ، مشابه قضیهٔ ۳ ـ ۱ را داریم که اثبات آن به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۹ . ***هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ پیرافشرده و $A\subset S$ بسته باشد ، آنگاه $\langle A,\tau|A\rangle$ پیرافشرده است .***

تعریف "فضای تماماً نرمال"که در زیر آمده از توکی است. قضایای ای. آ. مایکل و ا. هـ. استون ایجاب می‌کند که تماماً نرمال بودن و پیرافشردگی هم‌ارزند . چون اثبات آن نسبتاً طولانی است در اینجا به ذکر آن نمی‌پردازیم .

تعریف ۳ ـ ۱۹ . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\tau\subset ۲^S$. در این صورت $\mathcal{U}\subset ۲^S$ یک ***تظریف ستاره‌ای*** $\mathcal{C}$ است اگر و فقط اگر $\{\mathcal{U}^*(p):p\in S\}$ یک تظریف $\mathcal{C}$ باشد ، که در آن به ازای هر $p\in S$ ، $\mathcal{U}^*(p)=\cup\{U\in\mathcal{U}:p\in U\}$ ستارهٔ $\mathcal{U}$ نسبت به p نامیده می‌شود . $\langle S,\tau\rangle$ ***تماماً نرمال*** است اگر و فقط اگر هر پوشش باز $\langle S,\tau\rangle$ دارای تک تظریف ستاره‌ای باز باشد .

اکنون نشان خواهیم داد که فضای لیندلف منظم ، پیرافشرده است (قضیه موریتا) و فضای هاوسدرف پیرافشرده ، نرمال است (دیودونه) .

قضیهٔ ۳ ـ ۳۰ .(موریتا) ***هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای لیندلف منظم باشد ، آنگاه $\langle S,\tau\rangle$ پیرافشرده است .***

برهان. فرض کنیم $\mathcal{C}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز دلخواه $<S,\tau>$ باشد. بنابر منظم‌بودن، به ازای هر $x\in S$، یک $\alpha\in\Lambda$ و $U_x,V_x\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $x\in U_x\subset\bar{U}_x\subset V_x\subset\bar{V}_x\subset G_\alpha$. در نتیجه $\{U_x:x\in S\}$ یک پوشش باز $<S,\tau>$ و یک تظریف $\mathcal{C}$ است. چون $<S,\tau>$ لیندلف است، لذا یک زیرپوشش شمارش‌پذیر $\{U_{x_n}:n\in I^+\}$ برای $<S,\tau>$ موجود است. حال قرار می‌دهیم $W_1=V_{x_1}$ و به ازای هر $n>1$ قرار می‌دهیم $W_n=V_{x_n}-\cup\{\bar{U}_{x_i}:i=1,\dots,n-1\}$. اگر $x\in S-\cup\{W_n:n\in I^+\}$، فرض می‌کنیم n اولین عدد صحیح مثبتی باشد که به ازای آن $x\in V_{x_n}$. در این صورت $x\notin\cup\{V_x:i=1,\dots,n-1\}$، که ایجاب می‌کند $x\notin\cup\{\bar{U}_x:i=1,\dots,n-1\}$ و بنابراین $x\in W_n$، که تناقض است. در نتیجه $\{W_n:n\in I^+\}$ یک پوشش $<S,\tau>$ و یک تظریف باز $\mathcal{C}$ است. هرگاه $x\in S$، آنگاه عنصری مانند $k\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in U_{x_k}$ و $U_{x_k}\cap W_n=\varnothing$ اگر $n>k$. بنابراین $\{W_n:n\in I^+\}$ نیز موضعاً باپایان است. ■

قضیهٔ ۳ـ۳۱. (دیودونه) *هر فضای هاوسدرف پیرافشرده، نرمال است.*

برهان. فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای هاوسدرف پیرافشرده و $F_1,F_2\subset S$ دو مجموعه بسته و مجزا باشند. در این صورت بنابر قضیه ۳ـ۲۹ $<F_1,\tau|F_1>$ و $<F_2,\tau|F_2>$ پیرافشرده‌اند. فرض کنیم $p\in F_1$ نقطه‌ای دلخواه ولی ثابت باشد. چون $<S,\tau>$ هاوسدرف است، لذابرای هر $q\in F_2$ عناصری مانند $U_q,V_q\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $p\in U_q$، $q\in V_q$ و $U_q\cap V_q=\varnothing$. در این صورت $\mathcal{C}=\{V_q:q\in F_2\}\cup\{S-F_2\}$ یک پوشش باز $<S,\tau>$ است. چون $<S,\tau>$ پیرافشرده است، لذا $\mathcal{C}$ دارای یک تظریف باز موضعاً باپایان $\mathcal{C}'$ است. فرض کنیم $V_p=\cup\{V'\in\mathcal{C}':V'\cap F_2\neq\varnothing\}$ و U'_p یک مجموعهٔ باز شامل p باشد که تنها تعداد باپایانی از اعضای $\mathcal{C}'$، مثلاً $V'_1,\dots,V'_n$ را قطع می‌کند. به ازای $i=1,\dots,n$، فرض کنیم $V_{q_i}\in\mathcal{C}$ به‌قسمی باشد که $V'_i\subset V_{q_i}$ و قرار

و $F_2\subset V_p$ ، $p\in U_p$ درایـــن‌صورت $U_p=U'_p\cap U_{q_1}\cap\ldots\cap U_{q_n}$ مـــی‌دهیم . $U_p\cap V_p=\varnothing$. این امر نشان می‌دهد که $<S,\tau>$ منظم است . اکنون فرض کنیم $\mathscr{G}$ پوشش باز $\{U_p:p\in F_1\}\cup\{S-F_1\}$ باشد . در این صورت $\mathscr{G}$ دارای یک تظریف باز موضعاً باپایان $\mathscr{G}'$ است . حال قرار می‌دهیم $U=\cup\{U'\in\mathscr{G}':U'\cap F_1\neq\varnothing\}$. در این صورت $F_1\subset U\in\tau$. برای هر $q\in F_2$ عنصری مانند $W_q'\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که W_q' تنها تعداد باپایانی از اعضای $\mathscr{G}'$ مثلاً $U_1',\ldots,U_m'$ را قطع می‌کند . به ازای هر $i=1,\ldots,m$ ، فرض کنیم $U_{p_i}\in\mathscr{G}$ به‌قسمی باشد که $U_i'\subset U_{p_i}$ و قرار می‌دهیم $W_q=W_q'\cap V_{p_1}\cap\ldots\cap V_{p_m}$. حـــال اگـــر $V=\cup\{W_q:q\in F_2\}$ ، آنگـــاه $V\in\tau$ و $U\cap V=\varnothing$ ، که بدین ترتیب نرمال بودن $<S,\tau>$ ثابت می‌گردد . ■

در پایان به اثبات قضیهٔ استون می‌پردازیم که پیرافشردگی هر فضای متریک را بیان می‌کنیم. این اثبات از اسمیرنوف است که در کتاب ***بنیادهای توپولوژی*** نوشته پروین در صفحه‌های ۱۶۲ تا ۱۶۳ ارائه شده است .

قضیهٔ ۳ ـ ۲۳ . (استون) ***هر فضای متریک $<M,d>$ پیرافشرده است .***

برهان . فرض کنیم $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز دلخواه $<M,d>$ و $>$ رابطه‌ای خوش‌ترتیب روی Λ باشد . فرض کنیم $A\subset M$ و $S_n(A)=\{x\in M:d(x,A)<2^{-n}\}$ به‌ازای هر $n\in I^+$. در این صورت $A\subset S_n(A)\in\tau_d$ و $S_n(\{x\})=S_d(x;2^{-n})$ به ازای هر $n\in I^+$. قرار می‌دهیم $C_n(A)=\{x\in M:S_n(\{x\})\subset A\}$. در این صورت $C_n(A)=M-S_n(M-A)\subset A$ و $C_n(A)$ بسته است . بنابر استقراء ترا باپایان ، به ازای هر $n\in I^+$ یک گردآیهٔ $\{E_\alpha^n:\alpha\in\Lambda\}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ M را تعریف می‌کنیم که $E_\alpha^n=C_n(U_\alpha-\cup\{E_\beta^n:\beta<\alpha\})$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$.

(۱) $\{E_\alpha^n:,\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ فضـــای M را می‌پوشـــاند . فـــرض کـــنیم $x\in M$ و λ کوچکترین عنصر Λ باشد به‌قسمی که $x\in U_\lambda$. در این صورت عددی مانند $n\in I^+$

وجود دارد به‌قسمی که $x\in S_n(\{x\})=S_d(x;2^{-n})\subset U_\lambda$. هرگاه $x\notin E_\lambda^n$، آنگاه $S_n(\{x\})\not\subset U_\lambda-\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\lambda\}$. در نتیجه $S_n(\{x\})\cap(\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\lambda\})\neq\varnothing$، که ایجاب می‌کند به ازای یک $\lambda>\gamma$، $S_n(\{x\})\cap E_\gamma^n\neq\varnothing$. بنابراین

$$x\in S_n(E_\gamma^n) = S_n[C_n(U_\gamma-\cup\{E_\alpha^n : \alpha<\gamma\})]\subset U_\gamma-\cup\{E_\alpha^n : \alpha<\gamma\}\subset U_\gamma$$

که یک تناقض است. در نتیجه $x\in E_\lambda^n$ و $\{E_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ فضای M را می‌پوشاند.

برای هر $n\in I^+$ و $\alpha\in\Lambda$ قرار می‌دهیم $F_\alpha^n=\overline{S_{n+3}(E_\alpha^n)}$ و $G_\alpha^n=S_{n+2}(E_\alpha^n)$، آنگاه $F_\alpha^n\subset G_\alpha^n$. هرگاه $\alpha<\beta$، آنگاه

$$S_n(E_\beta^n) = S_n[C_n(U_\beta-\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\beta\})]\subset U_\beta-\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\beta\}\subset M-E_\alpha^n.$$

بنابراین $S_n(E_\beta^n)\cap E_\alpha^n=\varnothing$ که در نتیجه $d(E_\alpha^n,E_\beta^n)\geq 2^{-n}$ هرگاه $\alpha\neq\beta$. این امر ایجاب می‌کند که

$$d(F_\alpha^n,F_\beta^n)\geq 2^{-n}-(2^{-(n+3)}+2^{-(n+3)})=2^{-n}-2^{-(n+2)}>2^{-(n+1)}$$

در نتیجه $\{F_\alpha^n:\alpha\in\Lambda\}$ گسسته است و $F^n=\cup\{F_\alpha^n:\alpha\in\Lambda\}$ به ازای هر $n\in I^+$ بسته است. به ازای هر $n\in I^+$ و $\alpha\in\Lambda$ قرار می‌دهیم $V_\alpha^n=G_\alpha-\cup\{F^i:i<n\}$. در این صورت V_α^n به ازای هر $n\in I^+$ و به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ باز است.

(۲) $\{V_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ فضای M را می‌پوشاند و یک تظریف $\mathcal{U}$ است. از آنجاکه $\{E_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ فضای M را می‌پوشاند، لذا $\{F_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ نیز فضای M را می‌پوشاند. هرگاه $x\in M$، حداقل یک $k\in I^+$ موجود است به‌قسمی که $x\in F_\lambda^k$ برای یک $\lambda\in\Lambda$. در نتیجه

$$x\in F_\gamma^k-\cup\{\cup\{F_\alpha^i:\alpha\in\Lambda\}:i<k\}=F_\gamma^k-\cup\{F^i:i<k\}\subset G_\gamma^k-\cup\{F^i:i<k\}=V_\gamma^k.$$

از آنجاکه

$$V_\beta^n\subset G_\beta^n=S_{n+2}(E_\beta^n)\subset S_n(E_\beta^n)=S_n[C_n(U_\beta-\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\beta\})]\subset U_\beta-\cup\{E_\alpha^n:\alpha<\beta\}$$
$$\subset U_\beta,$$

لذا $\{V_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ یک تظریف $\mathcal{U}$ است .

(۳) $\{V_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ موضعاً باپایان است . هرگاه $x\in M$، آنگاه به ازای یک $\lambda\in\Lambda$ و یک $k\in I^+$ داریم $x\in E_\lambda^k$. لذا $S_{k+3}(\{x\})\subset S_{k+3}(E_\lambda^k)\subset S_{k+3}(\overline{E_\lambda^k})=F_\lambda^k\subset F^k$، که ایجاب می‌کند به ازای هر $n>k$ و هر $\alpha\in\Lambda$، $S_{k+3}(\{x\})\cap V_\alpha^n=\varnothing$. هرگاه $n\le k$، آنگاه $d(F_\alpha^n,F_\gamma^n)\ge 2^{-(k+1)}$ که ایجاب می‌کند $d(E_\alpha^n,E_\gamma^n)>2^{-(k+1)}$. ولی $\sup\{d(y,z):y,z\in S_{k+3}(\{x\})\}\le 2^{-(k+2)}<2^{-(k+1)}$. در نتیجه $S_{k+3}(\{x\})$ یک مجموعهٔ باز شامل x است که به‌ازای هر $n\le k$ حداکثر یکی از اعضای $\{E_\alpha^n:\alpha\in\Lambda\}$ را قطع می‌کند . بنابراین $S_{k+3}(\{x\})$ حداکثر k عضو از $\{E_\alpha:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ و در نتیجه حداکثر k عضو از $\{V_\alpha^n:\alpha\in\Lambda,n\in I^+\}$ را قطع می‌کند . ■

تمرین

۳ ـ ۳۷ . قضیهٔ ۳ ـ ۲۹ را ثابت کنید .

۳ ـ ۳۸ . $\langle S,\tau\rangle$ *پیرافشردهٔ شمارشی* است اگر و فقط اگر هر پوشش باز شمارش‌پذیر $\langle S,\tau\rangle$ دارای یک تظریف باز موضعاً باپایان باشد . نشان دهید که هر زیرفضای بستهٔ یک فضای پیرافشرده شمارشی نیز پیرافشردهٔ شمارشی است .

۳ ـ ۳۹ . نشان دهید که اگر هر زیرفضای باز یک فضای پیرافشرده ، پیرافشرده باشد ، آنگاه فضا پیرافشردهٔ ارثی است .

۳ ـ ۴۰ . ثابت کنید که هرگاه $\langle S,\tau_1\rangle$ پیرافشرده $\langle T,\tau_2\rangle$ فشرده باشد ، آنگاه $\langle S\times T,\tau_1\times\tau_2\rangle$ پیرافشرده است .

۳ ـ ۴۱ . فرض کنیم $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{F}\subset 2^S$ موضعاً باپایان (گسسته) باشد . نشان دهید که $\bar{\mathcal{F}}=\{\bar F:F\in\mathcal{F}\}$ نیز موضعاً باپایان (گسسته) است و داریم $\overline{\cup\{F:F\in\mathcal{F}\}}=\cup\{\bar F:F\in\mathcal{F}\}$.

۳ـ۴۲. $\langle S,\tau \rangle$ σ ـفشرده است اگر و فقط اگر $\langle S,\tau \rangle$ اجتماع شمارش‌پذیری از زیرفضاهای فشرده باشد. ثابت کنید که هر فضای σـ فشرده دارای خاصیت لیندلف است.

۳ـ۴۳. نشان دهید که هر زیرفضای F_σ از یک فضای پیرافشرده، پیرافشرده است.

✲ ۳ - ۸ فشرده‌سازی

این فصل را با بحث مختصری پیرامون روشهائی که توسط آنها می‌توانیم فضائی غیرفشرده را تحت شرایط معینی در یک فضای فشرده بطور توپولوژیک بنشانیم خاتمه می‌دهیم. در اینجا فقط به دو فشرده‌سازی مشهور، فشرده‌سازی تک نقطهٔ آلکساندروف و فشرده‌سازی استون ـ چک می‌پردازیم. اولین روش در مورد ردهٔ فضاهای موضعاً فشرده و دومین روش در مورد ردهٔ فضاهای کاملاً منظم به‌کار می‌رود.

تعریف ۳ـ۲۰. یک فشرده شده فضای هاوسدرف $\langle S,\tau \rangle$ جفت $\langle h, \langle \hat{S},\hat{\tau} \rangle\rangle$ است که در آن $\langle \hat{S},\hat{\tau} \rangle$ یک فضای فشرده هاوسدرف و h یک همانریختی از $\langle S,\tau \rangle$ روی یک زیرفضای چگال $\langle \hat{S},\hat{\tau} \rangle$ است.

تعریف ۳ـ۲۱. فرض کنیم $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای هاوسدرف غیرفشردهٔ موضعاً فشرده باشد و $p \notin S$. فرض کنیم $\hat{S}=S\cup\{p\}$ و $\hat{\tau}=\tau\cup\{G\subset\hat{S}:$ $\hat{S}-G\}$ زیرمجموعه فشرده‌ای از S است. در این صورت $\langle \hat{S},\hat{\tau} \rangle$ هاوسدرف فشرده است. هرگاه h همانریختی همانی از $\langle S,\tau \rangle$ در خودش باشد، آنگاه $\langle \langle \hat{S},\hat{\tau} \rangle,h \rangle$ فشرده شده *تک نقطهٔ (آلکساندرف)* $\langle S,\tau \rangle$ است.

مثال ۳ـ۱۹. فشرده‌شدهٔ تک نقطهٔ $E^1=\langle \mathbb{R},\xi \rangle$ (که موضعاً فشرده است) عبارت است از $\langle$نگاشت همانی، $\langle \mathbb{R}\cup\{\infty\},\xi \rangle\rangle$ که در آن $\xi=\xi\cup\{G\subset\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ فشرده است $\mathbb{R}\cup\{\infty\}-G\subset\mathbb{R}\}$. درنتیجه

$G=\{x\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}: x<a$ یا $x>b\}$ یک مجموعهٔ باز شامل ∞ است . فشرده شدهٔ تک نقطهٔ $<(\circ,\text{۱})|\xi:[\text{۱},\circ)>$ عبارت‌است‌از <نگاشت همگانی ، $<[\text{۱},\circ]|\xi:[\text{۱}:[\circ]>$.

قضیهٔ ۳ ـ ۳۳. (الکساندروف) *هر فضای هاوسدرف غیرفشردهٔ موضعاً فشرده $<S,\tau>$ را می‌توان بطریقی یکتا در یک فضای هاوسدرف فشردهٔ $<\hat{S},\hat{\tau}>$ نشاند به‌قسمی‌که $\hat{S}-S$ یک مجموعهٔ تک عضوی است .*

برهان. فرض کنیم $p\notin S$ و $\hat{S}=S\cup\{p\}$. فرض کنیم $\hat{\tau}=\tau\cup\{G\subset\hat{S}:$ است S یک زیرمجموعهٔ فشرده $\hat{S}-G\}$. خواننده بسهولت می‌تواند بررسی کند که $\hat{\tau}$ یک توپولوژی روی $\hat{S}$ است ، چراکه در اصول (ب۱)ـ(ب۳) صدق می‌کند . آشکارا ، همانریختی همانی ، فضای $<S,\tau>$ را روی یک زیرفضای چگال $<\hat{S},\hat{\tau}>$ می‌نگارد . بر طبق ساختار ، $\hat{S}$ ، $\hat{S}-S$ تک عضوی است. در نتیجه کافی است نشان دهیم که $<\hat{S},\hat{\tau}>$ فشرده، هاوسدرف و یکتاست. فرض کنیم $x\in S$. از آنجا که $<S,\tau>$ موضعاً فشرده و هاوسدرف است ، لذا یک $G\in\tau$ و یک $K\subset S$ فشرده موجود است به‌قسمی که $x\in G\subset\bar{G}\subset K$. بنابراین $\bar{G}$ فشرده است ،که در نتیجه $p\in S-\hat{G}\in\hat{\tau}$. واضح است که $G\cap(S-\bar{G})=\varnothing$ و $<\hat{S},\hat{\tau}>$ هاوسدرف است . برای ملاحظهٔ فشرده‌بودن $<\hat{S},\hat{\tau}>$ ، فرض کنیم $\mathcal{U}=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ یک پوشش باز دلخواه $<\hat{S},\hat{\tau}>$ باشد ، آنگاه به ازای یک $\beta\in\Lambda$ ، $p\in G_\beta$. بنابراین $\hat{S}-G_\beta\subset S$ و فشرده است . لذا $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda-\{\beta\}\}$ یک پوشش باز $\hat{S}-G_\beta$ است و یک زیرگردآیهٔ باپایان آن مانند $\{G_{\alpha_i}:i=\text{۱},\ldots,n\}$ مجموعهٔ $\hat{S}-G_\beta$ را می‌پوشاند . بدین ترتیب $\{G_{\alpha_i}:i=\text{۱},\ldots,n\}\cup\{G_\beta\}$ یک زیرپوشش باپایان $\mathcal{U}$ برای $<\hat{S},\hat{\tau}>$ است . فرض کنید $<\hat{T},\hat{\sigma}>$ نیز یک فشرده‌شدهٔ تک نقطهٔ $<S,\tau>$ باشد ، یعنی $\hat{T}-S=\{q\}$ که در آن $q\notin S$ و $\hat{\sigma}|S=\tau$. اگر تابع $f:<\hat{S},\hat{\tau}>\to<\hat{T},\hat{\sigma}>$ را به‌صورت $f(x)=x$ برای $x\in S$ و $f(p)=q$ تعریف می‌کنیم ، آنگاه f دوسوئی است . هرگاه $G\in\tau$ ، آنگاه $f(G)=G\in\hat{\sigma}$. همچنین ،

هرگاه $p\in\hat{S}-C\in\hat{\tau}$ ، آنگاه $C=f(C)\subset S$ فشرده است و $q=f(p)\in f(\hat{S}-C)=\hat{T}-C\in\hat{\sigma}$. در نتیجه f باز است . استدلال مشابهی نشان می‌دهد که f^{-1} باز است و بنابراین f یک همانریختی است . ■

تعریف ۳ـ ۲۲ . فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای هاوسدرف کاملاً منظم باشد . هرگاه $I^S=\{f:S\to I^1$ کراندار و پیوسته $f\}$ و به ازای هر $f\in I^S$ قرار می‌دهیم $I_f=I^1$ ، آنگاه $\Pi\{I_f:f\in I^S\}$ یک فضای تیخونوف فشرده است و نگاشت تعیین مقدار $e:S\to\Pi\{I_f:f\in I^S\}$ که به‌صورت $[e(x)]f=f(x)$ تعریف شده یک نشاندن است . **فشرده‌شدهٔ استون ـ چک** $<S,\tau>$ عبارت است از $<\beta(S),e>$ که در آن $\beta(S)=\overline{e(S)}$.

مثال ۳ـ ۲۰ . $[\circ ,۱]$ فشرده‌شدهٔ استون ـ چک $(\circ ,۱]$ نیست ، چراکه تابع پیوسته $f(x)=\sin(۱/x)$ در $(\circ ,۱]$ دارای گسترشی پیوسته در $[\circ ,۱]$ نیست . به طریق مشابه $[-۱,۱]$ فشرده‌شدهٔ استون ـ چک $(-۱,۱)$ نیست . علاوه‌بر این ، دایره یکه S^1 فشرده‌شدهٔ استون ـ چک E^1 نیست ، چراکه تابع پیوستهٔ $f(x)=\arctan x$ در E^1 را نمی‌توان بطور پیوسته روی S^1 گسترانید . ولی با این حال ، هرگاه P نشانگر صفحه تیخونف (مثال ۲ـ ۶) باشد ، آنگاه P فشرده‌شدهٔ استون ـ چک $P-\{<\Omega,\omega>\}$ است ، چون هر تابع در $P-\{<\Omega,\omega>\}$ را می‌توان روی P گسترانید . برای جزئیات بیشتر خواننده می‌تواند به کتاب *توپولوژی* نوشته دوگونجی و یا *توپولوژی عمومی* نوشتهٔ ویلارد مراجعه کند .

قضیهٔ ۳ـ ۳۴ (استون ـ چک)

(۱) هرگاه $<T,\tau_2>$ فشرده و $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته باشد ، آنگاه یک تابع پیوستهٔ یکتا $F:\beta(S)\to T$ وجود دارد به‌قسمی که $f=F\circ e$.

(۲) هر فشرده‌شدهٔ $<<\hat{S},\hat{\tau}>,h>$ از $<S,\tau_1>$ که خاصیت (۱) را داشته باشد ، همانریخت با $\beta(S)$ است .

(۳) $\beta(S)$ "بزرگترین" فشرده‌شدهٔ $<S,\tau_1>$ می‌باشد ، یعنی هرگاه $<\hat{S},\hat{\tau}_1>$ هر فشرده‌شده دیگر $<S,\tau_1>$ باشد ، *آنگاه* $<\hat{S},\hat{\tau}_1>$ *یک فضای خارج‌قسمتی* $\beta(S)$ می‌باشد .

برهان .

(۱) نمودار زیر جابجائی است :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & T \arrow[d, "e_0"] \\ \beta(S) \arrow[r, "\varphi"'] & \beta(T) \end{tikzcd}$$

چون $<T,\tau_2>$ فشرده است ، لذا $\beta(T)$ همانریخت با T است . فرض کنیم $F=e_0^{-1}\circ\varphi$. در این صورت $F:\beta(S)\to T$ پیوسته است و داریم $f=e_0^{-1}\circ\varphi\circ e=F\circ e$. علاوه‌بر این F یکتاست ، چون $<S,\tau>$ توسط e بطور چگال در $\beta(S)$ نشانده شده است .

(۲) S را می‌توان به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ $\hat{S}$ و همچنین $\beta(S)$ در نظر گرفت . فرض کنیم $i:S\to S$ نگاشت همانی باشد ، آنگاه (۱) ایجاب می‌کند که یک تابع یکتای $F:\beta(S)\to\hat{S}$ موجود است به‌قسمی که $F|S=i$ و یک تابع یکتای $G:\hat{S}\to\beta(S)$ وجود دارد به‌قسمی که $G|S=i^{-1}$. در نتیجه $F\circ G|S=i$ و $G\circ F|S=i$ و S یک زیرفضای چگال $\hat{S}$ و همچنین $\beta(S)$ است . بنابراین $F\circ G$ نگاشت همانی روی $\hat{S}$ است و $G\circ F$ نگاشت همانی روی $\beta(S)$ است . در نتیجه F و G همانریختی‌اند .

(۳) نگاشت همانی $i:S\to S$ بنابر (۱) دارای یک گسترش پیوسته $F:\beta(S)\to\hat{S}$ است . از آنجا که $\beta(S)$ فشرده است ، لذا $F[\beta(S)]$ فشرده و در نتیجه یک زیرفضای بستهٔ شامل زیرمجموعهٔ چگال S از $\hat{S}$ است . این امر ایجاب می‌کند که F پوشاست . چون F

بسته نیز می‌باشد ، S همانریخت با $\beta(S)/K(F)$ است ، که در آن رابطهٔ هم‌ارزی $K(F)$ روی $\beta(S)$ به این صورت است : $<x,y> \in K(F)$ اگر و فقط اگر $F(x)=F(y)$. ■

تمرین

۳ـ۴۴ . فشرده‌شدهٔ تک نقطهٔ $E^2=E^1\times E^1$ را بیان کنید .

۳ - ۴۵ . ثابت کنید که فضای موضعاً فشردهٔ هاوسدرف ، کاملاً منظم است .

۳ـ۴۶ . فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای هاوسدرف موضعاً فشرده و $C\subset S$ فشرده باشد. هرگاه $C\subset G\in\tau$ ، نشان دهید که یک تابع پیوسته $f:S\to[0,1]$ وجود دارد به‌قسمی که $f(C)=\{1\}$ و $f(S-G)=\{0\}$.

فصل چهارم

خواص همبندی

۴ ـ ۱ همبندی

در مقابل با اصول جداسازی ، اکنون "خواص همبندی" را مورد بررسی قرار می‌دهیم . بطور شهودی یک فضا همبند است اگر و فقط اگر نسبت به آن توپولوژی یک تکه (یک مؤلفه‌ای) باشد . همچنین ، یک فضای S مسیری (کمانی) ـ همبند است اگر و فقط اگر دو نقطه از فضا را بتوان توسط یک مسیر (کمان) در S به هم متصل کرد . همبندی E^1 تضمین‌کنندهٔ کمال آن است .

تعریف ۴ ـ ۱ . $\langle S,\tau\rangle$ **همبند** است اگر و فقط اگر $S\neq G_1\cup G_2$ که در آن $G_1,G_2\in\tau-\{\varnothing\}$ و $G_1\cap G_2=\varnothing$. فضای $\langle S,\tau\rangle$ **ناهمبند** است . اگر و فقط اگر $\langle S,\tau\rangle$ همبند نباشد .

تعریف بالا ایجاب می‌کند که $\langle S,\tau\rangle$ همبند است اگر و فقط اگر هیچ زیرمجموعه سرهٔ S هم باز و هم بسته نباشد . علاوه‌بر این ، هرگاه $\langle C,\tau|C\rangle$ یک زیرفضای همبند $\langle S , \tau\rangle$ باشد و C در اجتماع دو مجموعهٔ باز مجزا قرار داده شده باشد، آنگاه این مجموعه در یکی از این دو قرار دارد .

مثال ۴ ـ ۱ . هر زیرفضا از <ناگسسته ,S> همبند است .

مثال ۴ ـ ۲ . <گسسته ,S> کلاً ناهمبند است ، یعنی مجموعه‌های تک عضوی بزرگترین زیرفضاهای همبند آن است .

مثال ۴ ـ ۳ . $<\mathbb{R},\xi>$ و < متمم باپایان ,$\mathbb{R}$> همبند می‌باشند . ولی $<\mathbb{R},\mathscr{L}>$ کلاً ناهمبند است زیرا

$$.\ [a,b)=[a,\frac{a+b}{۲})\cup[\frac{a+b}{۲},b)\quad \forall a,b\in\mathbb{R}\ .$$

بسهولت ملاحظه می‌گردد که همبندی ، ارثی نیست ، چراکه با برداشتن نقطهٔ میانی از بازهٔ (a,b) در $E^۱$ (که یک مجموعه همبند است)، آن را به‌دو بازهٔ زیرجدا می‌سازیم:

$$(\frac{a+b}{۲},b)\ ,\ (a,\frac{a+b}{۲})\ .$$

ولی با این حال ، همبندی دارای یک خاصیت مهم "درونیابی" است که در قضیه زیر بیان شده است . بخصوص ، بستار یک زیرفضای همبند ، همبند است .

قضیهٔ ۴ ـ ۱ . *فرض کنیم $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک و $<C,\tau|C>$ یک زیرفضای همبند آن باشد . هرگاه $C\subset D\subset\bar{C}$ ، آنگاه $<D,\tau|D>$ همبند است .*

برهان . فرض کنید $<D,\tau|D>$ همبند نباشد ، آنگاه $D\cap G_۱$ و $D\cap G_۲$ در $\tau|D-\{\varnothing\}$ موجودند به‌قسمی که $D=(D\cap G_۱)\cup(D\cap G_۲)=D\cap(G_۱\cup G_۲)$ و $D\cap G_۱\cap G_۲=\varnothing$. از آنجا که $C\subset D$ و $<C,\tau|C>$ همبند است ، یا $C\subset D\cap G_۱$ و یا $C\subset D\cap G_۲$. هرگاه $C\subset D\cap G_۱$ ، آنگاه $\varnothing\neq D\cap G_۲\subset C'$. این امر ایجاب می‌کند که $(D\cap G_۲)\cap C\neq\varnothing$ و $D\cap G_۱\cap G_۲\neq\varnothing$ که یک تناقض است . حالت $C\subset D\cap G_۲$ نیز به همین تناقض منجر می‌گردد . در نتیجه $<D,\tau|D>$ همبند است . ■

قضیهٔ ۴ ـ ۲ . *فرض کنید $<C_\alpha,\tau_\alpha>$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ یک زیرفضای همبند $<S,\tau>$ باشد و $C_\beta\cap C_\gamma\neq\varnothing$ به ازای هر $\beta,\gamma\in\Lambda$. هرگاه $C=\cup\{C_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ ، آنگاه $<C,\tau|C>$ همبند است .*

برهان. فرض کنید $<C,\tau|C>$ همبند نباشد، آنگاه $C\cap G_1$ و $C\cap G_2$ در $\tau|C-\{\varnothing\}$ موجودند به‌قسمی که $C=(C\cap G_1)\cup(C\cap G_2)$ و $C\cap G_1\cap G_2=\varnothing$. چون $<C_\alpha,\tau_\alpha>$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ همبند است و $C_\beta\cap C_\gamma\neq\varnothing$ به ازای هر $\beta,\gamma\in\Lambda$، لذا باید یا $C_\alpha\subset C\cap G_1$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ و یا $C_\alpha\subset C\cap G_2$ به ازای هر $\alpha\in\Lambda$. این امر ایجاب می‌کند که یا $C\subset C\cap G_1$ (بنابراین $C\cap G_2=\varnothing$) و یا $C\subset C\cap G_2$ (که بنابراین $C\cap G_1=\varnothing$). در هر حال یک تناقض به‌دست می‌آید. درنتیجه $<C,\tau|C>$ همبند است. ■

اکنون نشان می‌دهیم که همبندی تحت پیوستگی پایدار است و نمودار یک تابع پیوسته با دامنهٔ همبند، همبند است.

قضیهٔ ۴ ـ ۳. *هرگاه تابع پوشای $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته و $<S,\tau_1>$ همبندباشد، آنگاه $<T,\tau_2>$ همبند است.*

برهان. فرض کنید $<T,\tau_2>$ همبند نباشد، آنگاه G_1 و G_2 در $\tau_2-\{\varnothing\}$ موجودند به‌قسمی که $G_1\cap G_2=\varnothing$ و $T=G_1\cup G_2$. از آنجا که f پیوسته است، لذا $f^{-1}(G_1),f^{-1}(G_2)\in\tau_1-\{\varnothing\}$. همچنین $S=f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)$ و $f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)=\varnothing$. بنابراین $<S,\tau_1>$ همبند نیست که یک تناقض است. ■

قضیهٔ ۴ ـ ۴. *هرگاه $<S,\tau_1>$ همبند و $f:<S,\tau_1>\to<T,\tau_2>$ پیوسته باشد، آنگاه نمودار f نسبت به توپولوژی حاصلضرب همبند است.*

برهان. فرض کنیم G نشانگر نمودار f باشد و فرض می‌کنیم که $<G,\tau_1\times\tau_2|G>$ ناهمبند باشد، آنگاه یک زیرمجموعهٔ سره غیر تهی از G مانند A وجود دارد به‌قسمی که $A,G-A\in\tau_1\times\tau_2|G$. چون تابع تصویری $\pi_1:S\times T\to S$ پوشا، پیوسته و باز می‌باشد، لذا $\pi_1\mid G:G\to S$ نیز پوشا و باز است. در نتیجه $[\pi_1\mid G]\,(A)\in\tau_1-\{\varnothing\}$ و $[\pi_1\mid G]\,(G-A)\in\tau_1-\{\varnothing\}$. همچنین

$S = [\pi_1 \mid G](A) \cup [\pi_1 \mid G](G - A)$ و $[\pi_1|G](A)\cap[\pi_1|G](G-A)=\varnothing$.

در نتیجه $<S, \tau_1>$ همبند نیست که یک تناقض است. ■

در فصل سوم قضیه هاینهٔ ـ بورل ـ لبگ را که مشخص‌کنندهٔ زیرفضاهای فشردهٔ E^1 است، ثابت کردیم. اکنون یک روش جهت مشخص‌سازیِ زیرفضاهای همبند E^1 با استفاده از لم زیر به‌دست می‌آوریم.

لم. یک زیرفضای $<A,\xi|A>$ از E^1 همبند است اگر و فقط اگر هنگامی که $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a,b\in A$ و $a<c<b$، آنگاه داشته باشیم $c\in A$.

برهان. فرض کنیم $<A,\xi|A>$ همبند باشد و $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a,b\in A$ و $a<c<b$. فرض کنید $c\notin A$، آنگاه $G_1=\{x\in A:x<c\}$ و $G_2=\{x\in A:c<x\}$ غیرتهی، مجزا و باز (نسبی) هستند که اجتماع آنها A است. این امر ایجاب می‌کند که $<A,\xi|A>$ همبند نیست که یک تناقض است. بعکس فرض کنیدکه $<A,\xi|A>$ یک زیرفضای E^1 باشد که در شرط قضیه صدق کند ولی $<A,\xi|A>$ ناهمبند باشد، آنگاه G_1,G_2 در $\xi|A-\{\varnothing\}$ موجودند به‌قسمی که $G_1\cap G_2=\varnothing$ و $A=G_1\cup G_2$. بی‌آنکه در کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد $a\in G_1$ و $b\in G_2$ وجود دارند به‌قسمی که $a<b$. فرض کنید $G_1^*=\{x\in\mathbb{R}:[a,x]\cap G_2=\varnothing\}$. بنابر خاصیت کمال E^1 مجموعهٔ G_1^* دارای یک کوچکترین کران بالا مانند c می‌باشد، زیرا دارای یک کران بالای b است. ولی چون $a\le c\le b$، یا $c\in G_1$ و یا $c\in G_2$. هرگاه $c\in G_1$، آنگاه یک بازهٔ باز شامل c موجود است که دارای مقطع غیرتهی با G_2 می‌باشد. این امر با این فرض که c کوچکترین کران بالای G_1^* است متناقض است. در نتیجه $c\in G_2$ و یک بازه باز در حول c موجود است که دارای مقطع تهی با G_1 می‌باشد. این امر ایجاب می‌کند که $d\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $a<d<c\le b$، $d\notin G_1$ و $d\in A=G_1\cup G_2$. همچنین $d\notin G_2$، زیرا بنابر تعریف c به‌عنوان کوچکترین کران بالای G_1^* عنصری مانند $e\in G_1^*$ وجود دارد به‌قسمی

که $d<e<c$ و در نتیجه $[a,d]\cap G_2=\varnothing$، زیرا $[a,e]\cap G_2=\varnothing$ که یک تناقض است. ■

قضیهٔ ۴ ـ ۵. ***یک زیرفضای*** $E^1=<\mathbb{R},\xi>$ ***همبند است اگر و فقط اگر یکی از انواع زیر باشد.***

(۱) $\varnothing$ یا $\mathbb{R}$.

(۲) $\{x\}$ ***که در آن*** $x\in\mathbb{R}$.

(۳) (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ ***یا*** $[a,b]$ ***که در آن*** $a,b\in\mathbb{R}$ ***و*** $a<b$.

(۴) $\{x:x<a\}$، $\{x:x\leq a\}$، $\{x:x>a\}$ ***یا*** $\{x:x\geq a\}$ ***که در آن*** $a\in\mathbb{R}$.

برهان. این قضیه از لم بالا نتیجه می‌گردد. اثبات جزئیات آن به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

یکی از نتایج مهم قضیهٔ ۴-۵ "قضیهٔ مقدار میانی" معروف زیر می‌باشد. اثبات آن به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

قضیهٔ ۴ ـ ٦. ***هرگاه*** $f:<[a,b],\xi|[a,b]>\to E^1$ ***پیوسته باشد و*** $f(a)<\gamma<f(b)$، ***آنگاه عددی مانند*** c ***با شرط*** $a<c<b$ ***وجود دارد به‌قسمی که*** $f(c)=\gamma$.

این قسمت را با یک اثبات از این مطلب که همبندی یک خاصیت ضربی است بپایان می‌رسانیم. به‌عنوان یک نتیجه از آن E^n و I^n همبند می‌باشند.

لم. ***فرض کنید*** $x^\circ\in\Pi_\Lambda S_\alpha$ ***که در آن*** $\Pi_\Lambda S_\alpha$ ***دارای توپولوژی حاصلضرب تیخونوف*** $\Pi_\Lambda\tau_\alpha$ ***می‌باشد. هرگاه***

$D=\{x\in\Pi_\Lambda S_\alpha:x(\alpha)\neq x^\circ(\alpha)$، $\alpha\in\Lambda$ ***فقط برای تعداد باپایانی***$\}$، ***آنگاه*** D ***در*** $\Pi_\Lambda S_\alpha$ ***چگال است.***

برهان. فرض کنید $B=\cap\{\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}):i=1,\dots,n\}$ یک مجموعه باز پایه‌ای دلخواه در $\Pi_\Lambda S_\alpha$ باشد. آنگاه عنصری مانند $y\in B$ وجود دارد به‌قسمی که $y(\alpha)=x^\circ(\alpha)$ برای هر $\alpha\in\Lambda-\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. در نتیجه $y\in D$ و D در $\Pi_\Lambda S_\alpha$ چگال است. ■

قضیهٔ ۴ ـ ۷ . هرگاه $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ همبند باشد ، آنگاه $<\Pi_\Lambda S_\alpha,\Pi_\Lambda \tau_\alpha>$ همبند است .

برهان . به روش استقراء نشان می‌دهیم که هرگاه $x^\circ_n(\alpha)\neq x^\circ(\alpha)$ برای حداکثر n مقدار از $\alpha\in\Lambda$ ، آنگاه $x^\circ_{(n)}$ و x° در یک زیرمجموعه همبند از $\Pi_\Lambda S_\alpha$ قرار دارند . این امر برای حالت $n=1$ درست است ، چراکه هرگاه $x^\circ_1(\alpha)\neq x^\circ(\alpha)$، برش فضای حاصلضرب از x° موازی با $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ همانریخت با $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ می‌باشد و در نتیجه یک زیرفضای همبند شامل $x^\circ_{(1)}$ و x° است . فرض کنید که گزاره برای همه $x^\circ_{(n-1)}\in\Pi_\Lambda S_\alpha$ درست باشد . برای یک $x^\circ_{(n)}\in\Pi_\Lambda S_\alpha$ دلخواه ، فرض کنید $x^\circ_{(n-1)}$ نقطه‌ای باشد که با $x^\circ_{(n)}$ تنها در یک مختص متفاوت باشد . حال یک زیرمجموعهٔ همبند C_1 شامل $x^\circ_{(n)}$ و $x^\circ_{(n-1)}$ وجود دارد و بنابر فرض استقرائی ما یک زیرمجموعهٔ همبند C_2 شامل $x^\circ_{(n-1)}$ و x° وجود دارد ، لذا $C_1\cup C_2$ یک زیرمجموعه همبند شامل $x_{(n)}$ و x° می‌باشد . مجموعهٔ C اجتماع تمام زیرمجموعه‌های همبند از $\Pi_\Lambda S_\alpha$ شامل x° را در نظر می‌گیریم . بنابر قضیهٔ ۴ - ۲ مجموعهٔ C همبند است و شامل مجموعه D می‌باشد که بنابر لم قبلی در $\Pi_\Lambda S_\alpha$ چگال می‌باشد. درنتیجه $D\subset\bar{D}=\Pi_\Lambda S_\alpha\subset C\subset\Pi_\Lambda S_\alpha$ که ایجاب می‌نماید $\Pi_\Lambda S_\alpha=C$. ■

تمرین

۴ ـ ۱ . نشان دهید که $<S,\tau>$ همبند است اگر و فقط اگر هیچ زیرمجموعه سره از S هم باز و هم بسته نباشد .

۴ ـ ۲ . فرض کنید $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A,B\in 2^S$. A و B را ***جداشده*** در $<S,\tau>$ هستند اگر و فقط اگر $\bar{A}\cap B=\varnothing=A\cap\bar{B}$. ثابت کنید که $<S,\tau>$ همبند است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ اجتماع دو مجموعه غیرتهی جداشده در $<S,\tau>$ نباشد .

۴ ـ ۳ . قضیهٔ ۴ - ۵ را ثابت کنید .

۴ ـ ۴. قضیهٔ ۴ - ۶ را ثابت کنید.

۴ ـ ۵. نشان دهید که $E^n-\{p\}$ برای هر $p\in E^n$ (با شرط $n>1$) همبند است. با استفاده از آن نشان دهید که مجموعه E^n-F برای هر زیرمجموعه باپایان F از E^n همبند است.

۴ ـ ۶. ثابت کنید که هرگاه $f:I^1\to I^1$ پیوسته باشد، آنگاه عنصری مانند $x\in I^1$ وجود دارد به‌قسمی که $f(x)=x$ (این چنین نقطهٔ x موسوم به یک ***نقطهٔ ثابت*** است).

۴ ـ ۷. نشان دهید که هرگاه $\langle M,d\rangle$ یک فضای متریک همبند شامل بیش از یک نقطه باشد، آنگاه M شمارش‌ناپذیر است.

۴ ـ ۸. $\langle S,\tau\rangle$ ***قویا همبند*** (بمفهوم *استین و سی‌باخ*) است اگر و فقط اگر هیچ نگاشت پیوسته غیرثابت $f:\langle S,\tau\rangle\to E^1$ وجود نداشته باشد. نشان دهید که هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ قویاً همبند (بمفهوم استین و سی‌باخ) باشد، آنگاه فضای $\langle S,\tau\rangle$ همبند است. مثالی از یک فضای همبند بزنید که قویاً همبند (بمفهوم استین و سی‌باخ) نباشد.

۴ ـ ۹. $\langle S,\tau\rangle$ ***قویاً همبند*** (بمفهوم *لوین*) می‌باشد اگر و فقط اگر وقتی که $S\subset G_1\cup G_2$ با شرط $G_1,G_2\in\tau$، آنگاه یا $S\subset G_1$ و یا $S\subset G_2$. نشان دهید که هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ قویاً همبند (بمفهوم لوین) باشد، آنگاه $\langle S,\tau\rangle$ قویاً همبند (بمفهوم استین و سی‌باخ) می‌باشد. مثالی از یک فضای قویاً همبند (بمفهوم استین و سی‌باخ) بزنید که قویاً همبند (بمفهوم لوین) ***نباشد***.

۴ ـ ۲ مؤلفه‌ها و پیوستارها

در این بخش دو نوع از زیرفضاهای همبند از یک فضای توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اولین نوع موسوم به یک "مؤلفه" است که یک زیرفضای همبند بیشین است. دومین نوع آن یک زیرفضای فشرده و همبند موسوم به یک "پیوستار" می‌باشد.

تعریف ۴ ـ ۲. $<C,\tau|C>$ یک **مؤلفهٔ** $<S,\tau>$ می‌باشد اگر و فقط اگر $<C,\tau|C>$ همبند باشد و زیرفضای سره از هیچ زیرفضای همبند دیگری از $<S,\tau>$ نباشد.

تعریف ۴ ـ ۳. فرض کنید $[x]$ زیرمجموعه S به‌صورت زیر باشد:

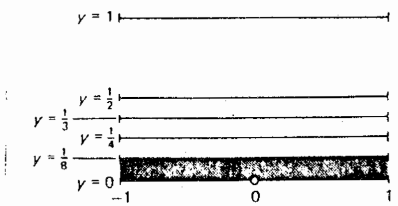
$[x]=\{y\in S$: باشد y و دیگری شامل x اجتماع دو مجموعه باز مجزا نیست که یکی شامل S $\}$

آنگاه $\{[x]:x\in S\}$ گردآیهٔ **شبه مؤلفه‌های** $<S,\tau>$ می‌باشد.

مثال ۴ ـ ۴. مؤلفه‌های $<\mathbb{R},$ گسسته$>$ و $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ مجموعه‌های تک عضوی می‌باشند. در نتیجه هر دو فضا کلاً ناهمبند می‌باشند. $<\mathbb{R},\xi>$، $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ و $<\mathbb{R},$ ناگسسته$>$ همبند می‌باشند. در نتیجه هر کدام دارای یک مؤلفه (خودشان) می‌باشند.

مثال ۴ ـ ۵. فرض کنیم $S=I^+$ و τ به‌قسمی باشد که گردآیهٔ مجموعه‌های $B_n=\{۲n-۱,۲n\}$ به ازای هر $n\in I^+$ یک پایه آن باشد. آنگاه مؤلفه‌های $<S,\tau>$ مجموعه‌های دو عضوی B_n برای $n\in I^+$ می‌باشد.

مثال ۴ ـ ٦. فرض کنیم $<S,\tau>$ زیرفضای $E^۲$ نشان داده شده در شکل ۴ - ۱ باشد. مؤلفه‌های $<S,\tau>$ قطعه خطهای $y=۱/n$ $(|x|\leq ۱)$ به ازای هر $n\in I^+$ و بازه‌های $[-۱,۰)$ و $(۰,۱]$ از مجموعه $Q=\{<x,۰>: ۰<|x|\leq ۱\}$ می‌باشند. مجموعهٔ Q مجموعهٔ حدی دنبالهٔ مؤلفه‌های $y=۱/n$ $(|x|\leq ۱)$ در $<S,\tau>$ می‌باشد. Q یک شبه مؤلفه می‌باشد ولی یک مؤلفه نیست، چونکه Q همبند نیست.



شکل ۴ - ۱

این مثال نشان می‌دهد که یک شبه مؤلفه ممکن است که یک مؤلفه نباشد. ولی با این حال نشان می‌دهیم که هر مؤلفه از یک فضا در یک شبه مؤلفهٔ فضا قرار دارد. مؤلفه‌ها و شبه مؤلفه‌ها بسته‌اند و مؤلفه‌های یک فضا تشکیل یک افراز برای آن فضا می‌دهد.

قضیهٔ ۴ـ۸. هرگاه $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای توپولوژیک باشد و $x\in S$، *آنگاه یک مؤلفه* C و یک شبه مؤلفه Q از S وجود دارد به‌قسمی که $x\in C\subset Q$.

برهان. فرض کنید $C=\{y\in S:$ $\{x,y\}$ در یک زیرفضای همبند $\langle S,\tau\rangle$ قرار دارند$\}$. مجموعه C بنابر قضیه ۴ - ۲ همبند است و برحسب ساختار آن بیشین است. در نتیجه C یک مؤلفه شامل x می‌باشد. اگر

$$Q=\{y\in S : S\neq_{1}\cup G_2, G_1,G_2\in\tau-\{\emptyset\}, G_1\cap G_2=\emptyset, x\in G_1 \& y\in G_2\}.$$

بنابر تعریف ۴ - ۱ داریم $C\subset Q$ و لذا طبق تعریف ۴ - ۳، Q یک شبه مؤلفه است. ■

قضیهٔ ۴ـ۹. هر مؤلفه و شبه مؤلفهٔ $\langle S,\tau\rangle$ بسته می‌باشند.

برهان. فرض کنید $\langle C,\tau|C\rangle$ یک مؤلفه دلخواه $\langle S,\tau\rangle$ باشد، آنگاه $\langle \bar{C},\tau|\bar{C}\rangle$ همبند است، چراکه $\langle C,\tau|C\rangle$ همبند می‌باشد. بنابر بیشینه بودن $\langle C,\tau|C\rangle$ باید داشته باشیم $\bar{C}=C$. بنابراین C بسته است. اکنون اگر $\langle Q,\tau|Q\rangle$ یک شبه مؤلفه دلخواه $\langle S,\tau\rangle$ باشد و $p\in Q'$. هرگاه $S=G_1\cup G_2$ که در آن $G_1G_2\in\tau$ و $G_1\cap G_2=\emptyset$، آنگاه $p\in G_1$ یا $p\in G_2$ (و نه هر دو). حال اگر $p\in G_1$، آنگاه عنصری مانند $x\in Q\cap G_1$ وجود دارد به‌قسمی که $x\neq p$. این امر ایجاب می‌کند که $Q\subset G_1$ و در نتیجه $p\in Q$. برای حالت $p\in G_2$، استدلال کاملاً شبیه به حالت قبل است. بنابراین $Q'\subset Q$ و Q بسته است. ■

قضیهٔ ۴ـ۱۰. *مؤلفه‌های* $\langle S,\tau\rangle$ تشکیل یک *افراز از* $\langle S,\tau\rangle$ می‌دهند.

برهان. بنابر قضیهٔ ۴ - ۸ هر نقطهٔ x از S در مؤلفه‌ای قرار دارد که اجتماع همه زیرمجموعه‌های همبند S شامل x می‌باشد. اکنون فرض کنید که $\langle C_1,\tau|C_1\rangle$ و

$<C_2,\tau|C_2>$ مؤلفه‌های $<S,\tau>$ باشند و $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. آنگاه عنصری مانند $p \in C_1 \cap C_2$ وجود دارد. چون C_2 یک زیرمجموعه همبند شامل $p \in C_1$ می‌باشد، لذا $C_2 \subset C_1$. همچنین C_1 یک مجموعه همبند شامل $p \in C_1$ می‌باشد که بنابر بیشینه بودن C_2 ایجاب می‌گردد که $C_1 \subset C_2$ ، لذا $C_1 = C_2$ و مؤلفه‌ها تشکیل یک افراز از $<S,\tau>$ می‌دهند.

اکنون به ارائه مفهوم یک "پیوستار" می‌پردازیم که یک فضای فشرده و همبند است. فضای $<\mathbb{R},$ متمم باپایان$>$ و $<\mathbb{R},$ ناگسسته$>$ پیوستار می‌باشند. ولی با این حال، $<\mathbb{R},\xi>$ $<\mathbb{R},\mathscr{L}>$ و $<\mathbb{R},$ گسسته$>$ پیوستار نیستند، چراکه آنها فشرده نمی‌باشند و فضاهای $<\mathbb{R},\mathscr{L}>$ و $<\mathbb{R},$ گسسته$>$ حتی همبند نمی‌باشند. همچنین، فضای بیان شده در مثالهای ۴ - ۵ و ۴ - ۶ پیوستار نیستند، چونکه آنها نه فشرده و نه همبندانند. زیرفضای I^1 از E^1 و همچنین هر نگارهٔ همانریخت با I^1 (موسوم به یک "کمان") یک پیوستار می‌باشند.

تعریف ۴ ـ ۴. $<S,\tau>$ یک **پیوستار** است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ فشرده و همبند باشد.

تعریف ۴ ـ ۵. هرگاه $<S,\tau>$ همبند باشد و $p \in S$، آنگاه p یک ***نقطه بریدگی*** S می‌باشد اگر و فقط اگر $<S-\{p\},\tau|(S-\{p\})>$ ناهمبند باشد. در غیر اینصورت، p یک ***نقطهٔ غیربریدگی*** S می‌باشند.

برطبق تعریفهای بالا اینک مشخصه‌های "کمان" و "خم بسته ساده" را بدون ذکر اثبات آنها بیان می‌نمائیم. یک فضای متریک پیوستار $<M,d>$ یک کمان می‌باشد اگر و فقط اگر M دقیقاً دارای دو نقطه غیربریدگی باشد. یک فضای متریک پیوستار $<M,d>$ یک خم سادهٔ بسته (ژردان) است اگر و فقط اگر برای هر دو نقطه $x,y \in M$، زیرفضای $<M-\{x,y\},d>$ ناهمبند باشد.

تمرین

۴ـ۱۰ . فرض کنید $<x,y> \in R$ اگر و فقط اگر y,x در یک زیرفضای همبند از $<S,\tau>$ قرار داشته باشد . نشان دهید که R یک رابطه هم‌ارزی بر روی S می‌باشد . رده‌های هم‌ارزی را مشخص نمائید .

۴ـ۱۱ . هرگاه $<C,\tau|C>$ یک زیرفضای همبند از $<S,\tau>$ و C هم باز و هم بسته باشد. نشان دهید که $<C,\tau|C>$ یک مؤلفهٔ $<S,\tau>$ است .

۴ـ۱۲ . آیا خاصیت مؤلفه بودن تحت پیوستگی پایدار است ؟ چرا ؟

۴ـ۱۳ . هرگاه $<C_1,\tau_1|C_1>$ یک مؤلفهٔ $<S,\tau_1>$ و $<C_2,\tau_2|C_2>$ یک مؤلفهٔ $<T,\tau_2>$ باشد ، آنگاه آیا $<C_1\times C_2,\tau_1\times\tau_2|C_1\times C_2>$ یک مؤلفهٔ $<S\times T,\tau_1\times\tau_2>$ می‌باشد ؟ چرا ؟

۴ـ۱۴ . ثابت کنید که شبه مؤلفهٔ $<S,\tau>$ شامل $x\in S$ عبارتست از مقطع تمام زیرفضاهای S شامل x که هم باز و هم بسته است .

۴ـ۱۵ . آیا خاصیت پیوستاربودن تحت پیوستگی پایدار است ؟ چرا ؟

۴ـ۱۶ . آیا خاصیت پیوستاربودن ضربی است ؟ چرا ؟

۴ـ۱۷ . آیا خاصیت نقطهٔ بریدگی (یا غیربریدگی) بودن تحت پیوستگی پایدار است ؟ در هر حالت چرا ؟

۴ـ۱۸ . فرض کنید تابع پوشای $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ پیوسته و $<T,\tau_2>$ همبند باشد . هرگاه p یک نقطه بریدگی از $<T,\tau_2>$ باشد ، آنگاه نشان دهید که $S-\{f^{-1}(p)\}$ ناهمبند است .

۴ - ۳ موضعاً همبندی

بطریق مشابهی که ما قبلاً موضعاً فشردگی را در تمرین ۳-۷ مورد بررسی قرار دادیم، می‌توان "موضعاً همبندی" را مورد بررسی قرارداد. در این بخش خاصیت اینکه یک فضای $<S,\tau>$ "موضعاً همبند در $p\in S$" باشد و یک خاصیت ضعیف‌تر برای $<S,\tau>$ یعنی "جزئاً همبند در $p\in S$" را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

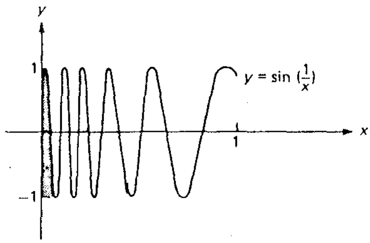
تعریف ۴ - ٦. $<S,\tau>$ **موضعاً همبند در** $p\in S$ می‌باشد اگر و فقط اگر هرگاه $p\in U\in\tau$ در این صورت یک مجموعه همبند $V\in\tau$ موجود باشد به‌قسمی که $p\in V\subset U$. $<S,\tau>$ **موضعاً همبند** است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ در هر نقطهٔ p آن موضعاً همبند باشد.

همانطوریکه قبلاً دیده شده، هر فضای فشرده نیز موضعاً فشرده است. در مقابل، یک فضای همبند لازم نیست که موضعاً همبند باشد. همچنین، همانطوری‌که مثال زیر نشان می‌دهد، یک فضا ممکن است در تمام نقاطش بجز در یک نقطه موضعاً همبند باشد ولی همبند نباشد.

مثال ۴ - ۷. فرض کنید G نشانگر نمودار تابع $y=\sin(1/x)$ برای $0<x\le 1$ با توپولوژی اقلیدسی زیرفضا یعنی $\xi\times\xi|G$ باشد (ر.ک. شکل ۴-۲). $<G,\xi\times\xi|G>$ بنابر قضیهٔ ۴-۴ همبند است و چنانچه بسهولت دیده می‌شود. موضعاً همبند نیز می‌باشد. فرض کنید $S=G\cup\{<0,0>\}$. آنگاه $<S,\xi\times\xi|S>$ بنابر قضیهٔ ۴-۱ همبند است ولی در $<0,0>$ موضعاً همبند نمی‌باشد. اگر $T=G\cup\{<0,y>:-1\le y\le 1\}$. آنگاه $<T,\xi\times\xi|S>$ یک پیوستار (موسوم به خم سینوسی توپولوژی دانها) می‌باشد که در نقاط $<0,y>$ به‌ازای هر $y\in[-1,1]$ موضعاً همبند نیست.

مثال ۴ - ۸. E^1 موضعاً همبند می‌باشد، همچنین $<\mathbb{R}،$ناگسسته$>$ و $<\mathbb{R},$متمم باپایان$>$ نیز همبند می‌باشند. ولی با اینحال، $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ موضعاً همبند در هیچ نقطه نیست، چراکه هیچ مجموعه پایه‌ای $[a,b)$ همبند نمی‌باشد. همچنین، هرگاه Q

نشانگر مجموعه اعداد گویا باشد، آنگاه زیرفضای $<Q,\xi|Q>$ از E^1 موضعاً همبند نیست، چرا که هیچ عضو $\xi|Q-\{\varnothing\}$ همبند نیست. این امر نشان می‌دهد که خاصیت موضعاً همبند بودن ارثی نمی‌باشد.



شکل ۴ − ۲

زیرفضاهای باز یک فضای موضعاً همبند نیز موضعاً همبند می‌باشند و همبندی موضعی تحت نگاشت‌های پیوستهٔ باز پایدار می‌باشند که خواننده بسهولت می‌تواند آن را ثابت نماید. اکنون، با ارائهٔ مثالی نشان می‌دهیم که همبندی موضعی تحت پیوستگی پایدار نیست و یک مشخصه از یک فضای موضعاً همبند بر حسب مؤلفه‌ها به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۴ − ۱۱ . ***هرگاه $<S,\tau>$ موضعاً همبند باشد و $A\in\tau$، آنگاه $<A,\xi|A>$ موضعاً همبند است.***

برهان . به‌عنوان یک تمرین به عهدهٔ خواننده است. ■

قضیهٔ ۴ − ۱۲ . ***هرگاه تابع پوشای $f:<S,\tau_1> \to <T,\tau_2>$ پیوسته و باز باشد و هرگاه $<S,\tau_1>$ موضعاً همبند باشد، آنگاه $<S,\tau_2>$ موضعاً همبند است.***

برهان . به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است. ■

مثال ۴ − ۹ . فرض کنید $S=I^+\cup\{0\}$ دارای توپولوژی گسسته باشد . اگر $T=\{1/n:n\in I^+\}\cup\{0\}$ دارای توپولوژی زیر فضای اقلیدسی $\xi|T$ باشد . آنگاه $<S,$ گسسته$>$ موضعاً همبند است ولی $<T,\xi|T>$ موضعاً همبند نیست . با اینحال تابع

$f: S \to T$ داده شده به‌صورت $f(\circ)=\circ$ و $f(n)=\text{۱}/n$ یک دوسویی پیوسته است.

قضیهٔ ۴ - ۱۳. $<S,\tau>$ **موضعاً همبند است *اگر هر مؤلفه از یک زیرمجموعهٔ باز* S، *باز باشد*.**

برهان. فرض کنیم $<S,\tau>$ موضعاً همبند باشد و $A\in\tau-\{\varnothing\}$. هرگاه $<C,\tau|C>$ مؤلفهٔ دلخواهی از $<A,\tau|A>$ باشد، آنگاه برای هر $x\in C$ یک مجموعهٔ همبند $U_x\in\tau$ وجود دارد که به‌قسمی که $x\in U_x\subset A$، زیرا که بنابر قضیهٔ ۴ - ۱۱ $<A,\tau|A>$ موضعاً همبند است. بنابر این $C\cup U_x$ یک زیرمجموعهٔ همبند از A شامل x است که بنابر بیشینه بودن C داریم $U_x\subset C$. این امر ایجاب می‌کند که $C=\cup\{U_x:x\in C\}$ و درنتیجه باز است. بعکس، فرض کنید که هر مؤلفه از هر زیر مجموعهٔ باز S باز باشد اگر $x\in S$ و $x\in U\in\tau$، آنگاه $<U,\tau|U>$ یک زیرفضای باز $<S,\tau>$ می‌باشد. هر نقطهٔ $y\in U$ در یک مؤلفهٔ C_y از U قرار دارد و C_y بنا به به فرض باز است. در حالت خاص، $x\in C_x\subset U$ و درنتیجه $<S,\tau>$ موضعاً همبند می‌باشد. ■

نتیجه. *هر مؤلفه از یک فضای موضعاً همبند هم باز و هم بسته است*.

اکنون با ارائه مثالی نشان می‌دهیم که موضعاً همبندی یک خاصیت ضربی نیست. آنگاه به‌عنوان یک تمرین از خواننده خواسته شده است که نشان دهد حاصلضرب دو (درنتیجه تعداد باپایانی) فضای موضعاً همبند نیز موضعاً همبند است.

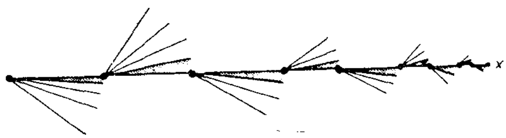
مثال ۴ - ۱۰. فرض کنید $<S_n,\tau_n>$ به‌ازای هر $n\in I^+$ فضای $<$گسسته، $\{\circ,\text{۱}\}>$ باشد و $<S,\tau>=<\Pi_{I^+}S_n\ ,\ \Pi_{I^+}\tau_n>$. هرگاه $x(n)=\circ$ به‌ازای هر $n\in I^+$، آنگاه $x\in S$ ولی هیچ عنصر τ شامل x همبند نمی‌باشد. بنابراین $<S,\tau>$ در x موضعاً همبند نمی‌باشد.

حال به اختصار، به بررسی خاصیت "جزئاً همبندی در p" می‌پردازیم که کمی ضعیف‌تر از خاصیت "موضعاً همبندی p" می‌باشد. این مطلب را با یک مثال نشان خواهیم داد.

همچنین، ثابت می‌کنیم که یک فضا که جزئاً همبند در هر نقطه باشد، موضعاً همبند می‌باشد.

تعریف ۴ - ۷. $<S,\tau>$ **جزئاً همبند** در $x\in S$ می‌باشد اگر و فقط اگر هرگاه $x\in U\in\tau$، آنگاه عنصری مانند $V\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in V\subset U$ و به‌ازای هر $y\in V$ یک زیرمجموعه همبند از U شامل $\{x,y\}$ موجود باشد. $<S,\tau>$ **جزئاً همبند** است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ جزئاً همبند در هر نقطه $x\in$ باشد.

مثال ۴ - ۱۱. فضای نشان داده شده در شکل ۴-۳ جزئاً همبند در x می‌باشد ولی موضعاً همبند در x نمی‌باشد.



شکل ۴ - ۳

قضیهٔ ۴ - ۱۴. *هرگاه $<S,\tau>$ جزئاً همبند باشد، آنگاه این فضا موضعاً همبند است.*

برهان. فرض کنید $U\in\tau - \{\varnothing\}$ و $<C,\tau|C>$ یک مؤلفهٔ دلخواه $<U,\tau|U>$ باشد. هرگاه $x\in C$، آنگاه عنصری مانند $V_x\in\tau$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in V_x\subset U$ و هرگاه $y\in V_x$، آنگاه یک زیرمجموعه همبند C_y از U وجود دارد به‌قسمی که $\{x,y\}\subset C_y\subset C$. این امر ایجاب می‌کند که $V_x\subset C$ و بنابراین $C=\cup\{V_x:x\in C\}$. درنتیجه $C\in\tau$ و بنابر قضیهٔ ۴-۱۳ فضای $<S,\tau>$ موضعاً همبند می‌باشد. ■

تمرین

۴ - ۱۹. نشان دهید که $<S\ ,\ \tau>$ موضعاً همبند است اگر و فقط اگر τ دارای یک پایه

متشکل از مجموعه‌های باز همبند باشد.

۴ - ۲۰ . قضیهٔ ۴ - ۱۱ را ثابت کنید.

۴ - ۲۱ . قضیهٔ ۴ - ۱۲ را ثابت کنید.

۴ - ۲۲ . نشان دهید که هرگاه $<S , \tau_1>$ و $<T , \tau_2>$ موضعاً همبند باشند ، آنگاه $<S\times T , \tau_1\times\tau_2>$ نیز موضعاً همبند است.

۴ - ۲۳ . نشان دهید که $<\Pi_\Lambda S_\alpha \; \Pi_\Lambda \tau_\alpha>$ موضعاً همبند است اگر و فقط اگر $<S_\alpha , \tau_\alpha>$ به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ موضعاً همبند باشد و $<S_\alpha,\tau_\alpha>$ بجز برای تعداد باپایانی از $\alpha\in\Lambda$ همبند باشد.

۴ - ۲۴ . نشان دهید که هرگاه تابع پوشای $f:<S , \tau_1> \to <T , \tau_2>$ پیوسته و باز باشد و هرگاه $<S , \tau_1>$ جزئاً همبند باشد، آنگاه $<T , \tau_2>$ جزئاً همبند می‌باشد.

۴ - ۲۵ . هرگاه $<S , \tau_1>$ و $<T , \tau_2>$ به‌ترتیب جزئاً همبند در $p\in S$ و $q\in T$ باشد، در اینصورت آیا $<S\times T , \tau_1\times\tau_2>$ در $<p,q>$ جزئاً همبند می‌باشد؟

۴ - ۲۶ . یک فضای متریک $<M,d>$ دارای **خاصیت** S است اگر و فقط اگر M اجتماع تعداد با پایانی از مجموعه‌های همبند به قطر کمتر از ε برای هر $\varepsilon>0$ باشد. ثابت کنید که هرگاه $<M,d>$ دارای خاصیت S باشد، آنگاه $<M,d>$ جزئاً همبند می‌باشد و درنتیجه موضعاً همبند است.

۴ - ۲۷ . ثابت کنید هرگاه یک فضای متریک $<M,d>$ فشرده و موضعاً همبند باشد، آنگاه $<M,d>$ دارای خاصیت S می‌باشد.

✻ ۴ - ۴ مسیری ـ همبند

منظور از یک "خم" در یک فضای $<S,\tau>$ یک زیرفضای دلخواه از آن فضا است که نگاره I[1] تحت یک نگاشت پیوسته باشد. نگاشت f موسوم به یک "مسیر" در $<S,\tau>$

از $f(\circ)$ به $f(۱)$ می‌باشد. فضای $\langle S , \tau \rangle$ را "مسیری ـ همبند"گوئیم اگر و فقط اگر هردو نقطهٔ S را بتوان توسط یک مسیر در $\langle S , \tau \rangle$ بهم متصل نمود. در این بخش ما خاصیت مسیری ـ همبند را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بطور گسترده‌ای در بررسی ما از نظریهٔ هموتوپی (در فصل ۷) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۴ - ۸. هرگاه $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای توپولوژ یک باشد و $p,q \in S$ ، آنگاه یک مسیر از p به q در $\langle S , \tau \rangle$ یک تابع پیوسته مانند $f : I^{۱} \to \langle S , \tau \rangle$ می‌باشد به قسمی که $f(\circ)=p$ و $f(۱)=q$.

تعریف ۴ - ۹. $\langle S , \tau \rangle$ **مسیری ـ همبند** است اگر و فقط اگر هر دو نقطهٔ S را بتوان توسط یک مسیر در $\langle S,\tau \rangle$ بهم متصل نمود.

مثال ۴ - ۱۲ . <ناگسسته، S> همواره مسیری ـ همبند است، ولی <گسسته، S> هرگز مسیری ـ همبند نیست اگر S شامل دو یا بیش از دو نقطه باشد.

مثال ۴ - ۱۳ . فرض کنید $S=\{\circ , ۱\}$ و $\tau=\{\varnothing,\{\circ\},S\}$. آنگاه $\langle S , \tau \rangle$ موسوم به "فضای سیرپینسکی" می‌باشد. این فضا مسیری ـ همبند است، چراکه تابع $f : I^{۱} \to \langle S , \tau \rangle$ تعریف شده به صورت

$$f(t) = \begin{cases} \circ & t \in [\circ , ۱[\\ ۱ & t = ۱ \end{cases}$$

پیوسته است و در نتیجه یک مسیر واصل بین ∘ و ۱ می‌باشد.

مثال ۴ - ۱۴ . مجموعهٔ $S^n = \{\langle x_۱ , x_۲ , \dots , x_{n+۱} \rangle \in E^{n+۱} : \sum_{k=۱}^{n+۱} x_k^۲ = ۱\}$ موسوم به $n-$ کره می‌باشد و پوستهٔ گوی یکه $B^{n+۱} = \{\langle x_۱ , x_۲ , \dots , x_{n+۱} \rangle \in E^{n+۱} : \sum_{k=۱}^{n+۱} x_k^۲ \leq ۱\}$ در $E^{n+۱}$ است.

خواننده بسهولت ملاحظه می‌نماید که هم E^n و هم S^n (برای $n \geq ۱$) مسیری همبنداند ،

چراکه در هرکدام از آنها هردو نقطه دلخواه نقاط انتهائی یک خم (نسخهٔ توپولوژیک I^1) در آن فضا می‌باشند، که یک مسیر است و حتی همانریخت با آن می‌باشد.

اکنون مشخصهٔ دیگری از مسیری ـ همبند را به‌دست می‌آوریم که در بررسی بعدی ما در نظریه هموتوپی مفید خواهد بود.

قضیهٔ ۴ - ۱۵ . فرض کنیم $x_0 \in S$. آنگاه $<S , \tau>$ مسیری ـ همبند است اگر و فقط اگر هر $x \in S$ را بتوان توسط یک مسیر در $<S , \tau>$ به x_0 متصل نمود. (در این حالت گوئیم که x_0 یک "نقطهٔ پایه‌ای" برای گردآیهٔ مسیرها در $<S , \tau>$ است.)

برهان. لزوم شرط از تعریف ۴-۹ آشکار است . بعکس ، فرض کنید که x_0 یک نقطهٔ پایه‌ای برای گردآیهٔ مسیرها در $<S , \tau>$ باشد. هرگاه $x_1, x_2 \in S$ ، آنگاه توابعی مانند $f_1 : I^1 \to <S , \tau>$ و $f_2 : I^1 \to <S , \tau>$ وجود دارند. به‌قسمی که $f_1(0) = x_1$ و $f_1(1) = x_0 = f_2(0)$ و $f_2(1) = x_2$. تابع $g : I^1 \to <S, \tau>$ تعریف شده به‌صورت

$$g(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{اگر } t \in [0 , 1/2] \\ f_2(2t-1) & \text{اگر } t \in [1/2 , 1] \end{cases}$$

پیوسته است (چرا؟)، و $g(0) = f_1(0) = x_1$ و $g(1) = f_2(1) = x_2$. بنابراین g یک مسیر از x_1 به x_2 در $<S,\tau>$ می‌باشد و درنتیجه $<S,\tau>$ مسیری ـ همبند است. ■

مسیری ـ همبند، همبندی را ایجاب می‌کند، ولی یک فضای همبند ممکن است که مسیری ـ همبند نباشد. این امر توسط خم سینوسی توپولوژی‌دانها (مثال ۴-۷) نشان داده می‌شود که همبند است، موضعاً همبند نیست، و بالاخره مسیری ـ همبند نمی‌باشد (چرا؟).

قضیهٔ ۴ - ۱۶ . هرگاه $<S , \tau>$ مسیری ـ همبند می‌باشد، آنگاه $<S , \tau>$ همبند است.

برهان. از قضایای ۴-۱۵ و ۴-۲ نتیجه می‌شود، جزئیات آن به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ

خواننده است. ■

نمودار $y = \sin(1/x)$ برای $0 < x \leq 1$، آشکارا مسیری ـ همبند است. ولی با اینحال، همانطوری که در بالا گفته شده، بستارش که موسوم به خم سینوسی توپولوژی‌دانها می‌باشد، مسیری ـ همبند نیست. از خواننده خواسته می‌گردد که نشان دهد مسیری ـ همبند تحت پیوستگی پایدار می‌باشد و اجتماع هر خانوادهٔ دلخواه از فضاهای مسیری ـ همبند با یک نقطهٔ مشترک نیز مسیری ـ همبند است.

قضیهٔ ۴ - ۱۷ . *هرگاه تابع پوشای* $f : \langle S , \tau \rangle \to \langle T , \tau \rangle$ پیوسته و $\langle S , \tau_1 \rangle$ مسیری ـ همبند باشد، *آنگاه* $\langle S , \tau_2 \rangle$ مسیری ـ همبند *است.*

قضیهٔ ۴ - ۱۸ . هرگاه $\langle A_\alpha , \tau_\alpha \rangle$ *به ازای هر* $\alpha \in \Lambda$ یک زیر فضای مسیری ـ همبند $\langle S , \tau \rangle$ باشد و $\cap \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \neq \varnothing$، *آنگاه* $A = \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *با توپولوژی القایی یعنی* $\langle A , \tau | A \rangle$ مسیری ـ همبند *است.*

تعریف ۴ - ۱۰ . *مؤلفه‌های مسیری* $\langle S , \tau \rangle$ زیرفضاهای مسیری ـ همبند بیشین $\langle S,\tau \rangle$ می‌باشند .

تحقیق کنید که مؤلفه‌های مسیری $\langle S , \tau \rangle$ تشکیل یک افراز برای $\langle S,\tau \rangle$ می‌دهند ولی یک مؤلفهٔ مسیری الزاماً بسته نیست. بویژه، نمودار $y=\sin(1/x)$ برای $0 < x \leq 1$ یک مؤلفه مسیری از خم سینوسی توپولوژی‌دانها می‌باشد که بسته نیست.

این سؤال مطرح است که چه شرط توپولوژیک باید به همبندی افزود تا مسیری ـ همبند به‌دست آید. به این سؤال با نتایجی که در پایان این بخش آمده، جواب خواهیم داد.

قضیهٔ ۴ - ۱۹ . *هر مؤلفه مسیری* $\langle S,\tau \rangle$ *باز (و بنابراین بسته نیز) است اگر و فقط اگر برای هر* $x \in S$ *عنصری مانند* $G_x \in \tau$ *وجود داشته باشد به‌قسمی که* $x \in G_x$ و $\langle G_x , \tau \mid G_x \rangle$ مسیری ـ همبند باشد.

برهان. هرگاه هر مؤلفهٔ مسیری باز باشد. آنگاه کافی است G را مؤلفه مسیری شامل x برای هر $x \in S$ انتخاب نمود. بعکس، فرض کنید که هر $x \in S$ در یک مجموعهٔ باز مسیری ـ همبند G_x قرار داشته باشد و C یک مؤلفهٔ مسیری دلخواه $<S,\tau>$ باشد. چونکه C یک مجموعهٔ مسیری ـ همبند بیشین شامل x برای هر $x \in C$ می‌باشد، لذا داریم $x \in G_x \subset C$ و این امر ایجاب می‌کند که $C = \cup\{G_x : x \in C\}$ باز است. چون $S-C$ نیز اجتماع مؤلفه‌های مسیری دیگر می‌باشد، درنتیجه باز است و لذا C بسته نیز می‌باشد. ■

قضیهٔ ۴ ـ ۲۰. *$<S,\tau>$ مسیری ـ همبند است اگر و فقط اگر $<S,\tau>$ همبند باشد و برای هر $x \in S$ عنصری مانند $G_x \in \tau$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $<G_x , \tau|G_x>$ مسیری ـ همبند باشد.*

برهان. هرگاه $<S , \tau>$ مسیری ـ همبند باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۴-۱۶ فضای $<S , \tau>$ همبند است. بعکس، فرض کنید که $<S , \tau>$ همبند باشد و هر $x \in S$ در یک زیرفضای مسیری ـ همبند باز $<S , \tau>$ قرار دارد. بنابر قضیهٔ ۴-۱۹ هر مؤلفهٔ مسیری $<S,\tau>$ در $<S , \tau>$ هم باز و هم بسته است. چونکه $<S , \tau>$ همبند است، لذا هیچ زیرمجموعه سره از S هم باز و هم بسته نیست. بنابراین $<S , \tau>$ باید فقط دارای یک مؤلفهٔ مسیری (خودش) باشد و بنابراین مسیری ـ همبند است.

نتیجه. *هر زیرفضای باز E^n (یا S^n) همبند است اگر و فقط اگر مسیری ـ همبند باشد.*

تمرین

۴-۲۸ نشان دهید که هرگاه $f : I^1 \rightarrow <S,\tau>$ یک مسیر از x به y در $<S , \tau>$ باشد، آنگاه تابع $g : I^1 \rightarrow <S , \tau>$ ارائه شده به‌صورت $g(t)=f(1-t)$ یک مسیر از y به x در $<S , \tau>$ می‌باشد.

۴-۲۹ جزئیات اثبات قضیهٔ ۴-۱۶ را بیان کنید.

۴-۳۰ قضیهٔ ۴-۱۷ را ثابت کنید.

۴-۳۱ قضیهٔ ۴-۱۸ را ثابت کنید.

۴-۳۲ ثابت کنید که مؤلفه‌های مسیری $<S , \tau>$ تشکیل یک افراز در $<S , \tau>$ می‌دهند.

۴-۳۳ نشان دهید در صورتی که شرط قضیهٔ ۴-۱۹ برقرار باشد، آنگاه مؤلفه‌های مسیری $<S , \tau>$ با مؤلفه‌های $<S , \tau>$ یکسانند.

۴-۳۴ نشان دهید که $<\Pi_\Lambda S_\alpha , \Pi_\Lambda \tau_\alpha>$ مسیری ـ همبند است اگر و فقط اگر $<S_\alpha , \tau_\alpha>$ برای هر $\alpha \in \Lambda$ مسیری ـ همبند باشد.

* ۴ - ۵ کمانی ـ همبند

یک "کمان" در $<S , \tau>$ هر زیر فضای دلخواه آن فضا است که همانریخت با I^1 باشد. گوئیم $<S , \tau>$ "کمانی ـ همبند" است هرگاه هر دو نقطه S را بتوان توسط یک کمان در $<S , \tau>$ بهم متصل نمود. در این بخش، خاصیت کمانی ـ همبند بودن یک فضا و مفهوم وابسته به آن یعنی "فضای په‌آنو" که در واقع یک فضای پیوستار متریک موضعاً همبند است مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف ۴ - ۱۱ . یک زیر فضای $<A,\tau|A>$ از $<S , \tau>$ را یک **کمان** در $<S , \tau>$ گوئیم اگر و فقط اگر $<A,\tau|A>$ همانریخت با I^1 باشد.

نحوهٔ مشخص نمودن کمان، ارائه شده در بخش ۴-۲ را بخاطر آورید. یک کمان یک پیوستار متریک، دقیقاً با دو نقطهٔ غیربریدگی می‌باشد.

تعریف ۴ - ۱۲ . $<S,\tau>$ **همنبد ـ کمانی** است اگر و فقط اگر هر دو نقطهٔ S را بتوان توسط یک کمان در $<S,\tau>$ بهم متصل نمود.

اکنون نشان می‌دهیم که هر فضای کمانی ـ همبند ، همبند است. همچنین، بذکر یک مثال

از یک فضای همبند می‌پردازیم که کمانی ـ همبند نیست.

مثال ۴-۱۵. $<\mathbb{R}>$گسسته، و $<\mathbb{R},\mathcal{L}>$ نمی‌توانند موضعاً همبند باشند، چراکه آنهاکلاً ناهمبند می‌باشند، ولی با اینحال، $E^1=<\mathbb{R},\xi>$ کمانی ـ همبند است.

مثال ۴-۱۶. فضای $<G,\xi\times\xi|G>$ بیان شده در مثال ۴-۷ کمانی ـ همبند است. ولی با اینحال فضاهای همبند دیگر $<S,\xi\times\xi|S>$ و $<T,\xi\times\xi|T>$ بیان شده در همان مثال که $<G,\xi\times\xi|G>$ را به‌عنوان یک فضای سره دارند، کمانی ـ همبند نیستند.

قضیهٔ ۴-۲۱. ***هرگاه $<S,\tau>$ کمانی ـ همبند باشد، آنگاه $<S,\tau>$ مسیری ـ همبند است.***

برهان. فرض کنید $x,y\in S$. در این صورت یک کمان $<A,\tau|A>$ و اصل بین y,x در $<S,\tau>$ وجود دارد. بنابراین یک همانریختی و پوشا مانند $h:I^1\to A$ وجود دارد به‌قسمی که $h(0)=x$ و $h(1)=y$. بنابر تعریف ۴-۸، تابع h یک مسیر واصل yوx می‌باشد. درنتیجه $<S,\tau>$ مسیری ـ همبند است. ■

نتیجه. ***هرگاه $<S,\tau>$ کمانی ـ همبند باشد، آنگاه $<S,\tau>$ همبند است.***

برهان. نتیجهٔ مستقیمی از قضایای ۴-۲۱ و ۴-۱۶ می‌باشد. ■

بالاخره مفهوم یک "فضای په‌آنو" را تعریف می‌نمائیم که نوع خاصی از فضای کمانی ـ همبند متریک است.

تعریف ۴-۱۳. یک فضای متریک $<M,d>$ یک ***فضای په‌آنو*** می‌باشد اگر و فقط اگر $<M,d>$ پیوستار موضعاً همبند باشد.

قضیهٔ ۴-۲۲. ***هر فضای په‌آنو $<M,d>$ کمانی ـ همبند است.***

برهان. (به اختصار، برای جزئیات اثبات به کتاب ***توپولوژی*** هاکینگ و یانگ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۷ مراجعه شود). فرض کنید $a,b\in M$ با شرط $a\neq b$. یک دنبالهٔ "تو در تو" $\{K_n\}_{n\in I^+}$ از پیوستارها در $<M,d>$ وجود دارد به قسمی که $\{a,b\}\subset K_n$ و

$K_{n+1} \subset K_n$ برای هر $n \in I^+$. حال $K = \cap\{K_n : n \in I^+\}$ قرار می‌دهیم. می‌توان نشان داد که هرگاه $x \in K - \{a,b\}$، آنگاه x یک نقطه بریدگی K می‌باشد. اینک با استفاده از مشخصه ما از کمان، نتیجه می‌گیریم که K یک کمان و اصل بین b,a می‌باشد، چراکه b,a تنها دو نقطهٔ غیربریدگی می‌باشند. درنتیجه $<M,d>$ کمانی ـ همبند است. ■

تمرین

۴ - ۳۵. آیا کمانی ـ همبند تحت پیوستگی پایدار است؟ چرا؟

۴ - ۳۶. آیا حاصلضرب دو فضای کمانی ـ همبند، کمانی ـ همبند است؟ چرا؟

۴ - ۳۷. ***مؤلفه‌های کمانی*** $<S, \tau>$ زیرفضاهای کمانی ـ همبند بیشین $<S, \tau>$ می‌باشند. آیا مؤلفه‌های کمانی $<S, \tau>$ بسته‌اند؟ آیا مؤلفه‌های کمانی $<S, \tau>$ تشکیل یک افراز در $<S, \tau>$ می‌دهند؟ چرا؟ همچنین، نشان دهید که به‌ازای هر $x \in S$ مؤلفهٔ کمانی شامل x یک زیرفضا از مؤلفهٔ مسیری شامل x است که خود آن یک زیرفضا از مؤلفهٔ شامل x می‌باشد.

۴ - ۳۸. آیا خاصیت په‌آنو بودن یک فضا تحت پیوستگی پایدار است؟ چرا؟

۴ - ۳۹. آیا حاصلضرب دو فضای په‌آنو، یک فضای په‌آنو است؟ چرا؟

۴ - ۴۰. تمرین‌های ۴-۳۵ ، ۴-۳۶ ، و ۴-۳۷ را در صورتی‌که تمام فضاهای مورد بحث هاوسدرف باشند. دوباره مورد بررسی قرار دهید.

فصل پنجم

متریکسازی

۵ - ۱ متریک پذیری

یکی از مسائل کلاسیک توپولوژی یافتن شرایطی بر روی یک فضای توپولوژیک $<S, \tau>$ می‌باشد به‌قسمی که بتوان یک متریک d روی $S \times S$ تعریف نمود به‌طوری‌که توپولوژی متریک τ_d القاء شده روی S توسط d همان τ باشد. مسئله بطریق جزئی توسط اوریسون در ۱۹۲۴ و بطور کامل و مستقلاً توسط ناگاتا، اسمیرنوف و بینگ در سال ۱۹۵۰ حل شده است. این نتایج در این بخش ارائه می‌شوند. دو تعمیم از متریک‌پذیری یعنی نیم متریک‌پذیری و a− متریک‌پذیری در این فصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین فضاهای یکنواخت وگروههای توپولوژیکی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

تعریف ۵ - ۱ . یک فضای توپولوژیک $<S, \tau>$ متریک‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک متریک d روی S موجود باشد به‌قسمی که $\tau_d = \tau$.

از تعریف ۵ - ۱ نتیجه می‌گردد که $<S, \tau>$ متریک‌پذیری است اگر و فقط اگر یک متریک d روی S موجود باشد به‌قسمی که $\{S_d(x;r) : r > 0\}$ یک پایهٔ موضعی در x برای هر $x \in S$ باشد. جزئیات آن به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

اولین نتیجه، قضیه متریکسازی اوریسون می‌باشد که بیانگر این مطلب است که هر فضای T_3 شمارش‌پذیر نوع دوم، متریک‌پذیر است. اثبات این قضیه شامل نشاندن توپولوژیکی این چنین فضائی در مکعب هیلبرت I^ω می‌باشد که هم‌اکنون به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۵ - ۲ . مکعب *هیلبرت* I^ω فضای متریک $\langle S,d \rangle$ می‌باشد. که در آن $S=\Pi\{[0,\frac{1}{n}]:n\in I^+\}$ و

$$d[(x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots)]=[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$$

قضیهٔ ۵ - ۱ *(اوریسون) . هرگاه $\langle S,\tau \rangle$ یک فضای T_3 شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، آنگاه $\langle S,\tau \rangle$ متریک‌پذیر است.*

برهان . فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_n : n\in I^+\}$ یک پایه شمارش‌پذیر دلخواه برای τ باشد. به‌ازای هر $j\in I^+$، عناصری مانند $x\in B_j$ و $G\in\tau$ وجود دارند به‌قسمی که $x\in G\subset \overline{G}\subset B_j$ چراکه $\langle S , \tau \rangle$ منظم است . حال چونکه $\mathcal{B}$ یک پایه برای τ می‌باشد ، لذا عنصری مانند $i\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_i\subset G\subset \overline{G}\subset B_j$ ، و این امر ایجاب می‌نماید که $x\in B_i\subset \overline{B_i}\subset B_j$. گردآیهٔ جفت‌های $\langle B_i,B_j \rangle$ با خاصیت مذکور شمارش‌پذیر است و درنتیجه می‌توان آنرا در تناظر ۱-۱ با I^+ قرارداد. فرض کنید $\langle B_i,B_j \rangle$ n امین جفت باشد. بنابر قضیهٔ ۳-۱۱ $\langle S , \tau \rangle$ نرمال (T_4) می‌باشد، چراکه منظم (T_3) و لیندولف است. ولی چون $\overline{B_i}$ و $S-B_j$ مجموعه‌های بسته مجزا هستند، لذا بنابر لم اوریسون (قضیهٔ ۲-۷) تابع پیوسته‌ای مانند $f_n :\langle S,\tau \rangle\to I^1$ وجود دارد به قسمی‌که

$f_n(\overline{B_i})=\{0\}$ و $f_n(S-B_j)=\{1\}$. اکنون نگاشت $f : \langle S,\tau \rangle\to I^\omega$ را به صورت $f(x) = \langle \frac{1}{2}f_1(x), \frac{1}{2^2}f_2(x),\dots,\frac{1}{2^n}f_n(x),\dots \rangle$ تعریف می‌کنیم. بقیه اثبات مربوط به نشان دادن همانریختی بودن f بر روی f(S) می‌گردد.

اگر $x,y\in S$ با شرط $x\neq y$. آنگاه چون $<S\ ,\ \tau>$ یک فضای T_1 می‌باشد، در این صورت عنصری مانند $B_j\in\mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $x\in B_j$ و $y\in S - B_j$. لذا عنصری مانند $B_i\in\mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $x\in B_i\subset \overline{B}_i\subset B_j$. n امین مختص $f(x)$ بدین ترتیب $\cdot = ۲^{-n}f_n(x)$ می‌باشد، چونکه $x\in \overline{B}_i$. بهمین‌ترتیب n امین مختص $f(y)$ برابربا $\cdot \neq ۲^{-n}f_n(y)=۲^{-n}$، چرا که $y\in S-B_j$. این امر نشان دهد که f یک‌به‌یک است، زیرا که $f(x)\neq f(y)$.

اکنون فرض کنید $x_\circ\in S$ و $\varepsilon > \circ$، آنگاه عنصری مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $\sum_{n=N+۱}^{\infty} ۲^{-۲n}<\varepsilon^۲/۲$. به‌ازای هر n با شرط $۱\leq n\leq N$،تابع f_n پیوسته است و درنتیجه عنصری مانند $B_n\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x_\circ\in B_n$ و

$|f_n(x_\circ) - f_n(x)| <\varepsilon/\sqrt{۲N}$ برای هر $x\in B_n$. بدین ترتیب

$B = \cap\ \{B_n : ۱ \leq n \leq N\}\in\tau$ و شامل $x_\circ$ می‌باشد. حال اگر $x\in B$، آنگاه $x\in B_n$ به‌ازای هر n با شرط $۱ \leq n \leq N$، و درنتیجه

$$\begin{aligned}
d(f(x_\circ),f(x_۱)) &= [\textstyle\sum_{n=۱}^{\infty} [۲^{-n}f_n(x_\circ)-۲^{-n}f_n(x)]^۲]^{۱/۲}\\
&= [\textstyle\sum_{n=۱}^{N} ۲^{-۲n}\ |f_n(x_\circ)-f_n(x)|^۲+\sum_{n=N+۱}^{\infty} ۲^{-۲n}\ |f_n(x_\circ)-f_n(x)|^۲]^{۱/۲}\\
&\leq [\textstyle\sum_{n=۱}^{N}[f_n(x_\circ)-f_n(x)]^۲+\sum_{n=N+۱}^{\infty} ۲^{-۲n}]^{۱/۲}\\
&< [N\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{۲N}}\right)^۲ + \frac{\varepsilon^۲}{۲}]^{۱/۲} = \varepsilon
\end{aligned}$$

این امر نشان می‌دهد که f در $x_\circ$، و بنابراین بر روی S پیوسته است، چرا که $x_\circ$ دلخواه می‌باشد.

کافی است نشان دهیم که f باز است. اگر $G\in\tau$ و $y=<y_۱,y_۲,\ldots>\in f(G)$. آنگاه عنصری مانند $x\in G$ وجود دارد به‌قسمی‌که $y=f(x)$. همچنین، به‌ازای یک $n\in I^+$، جفت n ام $<B_i,B_j>$ دارای خاصیت $x\in B_i\subset \overline{B}_i\subset B_j\subset G$ می‌باشد. درنتیجه $f_n(x)=\circ$ و $f_n(S-G)=\{۱\}$. هرگاه $p\in S-G$، آنگاه $d(f(x)\ ,\ f(p)\geq ۲^{-n}$، که ایجاب می‌نماید

$\varnothing = (f(x_0), 2^{-n})_d S \cap f(S-G)$. بنابراین $y \in S_d(y; 2^{-n}) \cap f(S) \subset f(G)$، که این امر ایجاب می‌نماید که $f(G)$ در $f(S)$ باز است. ■

نتایج بعدی ما قضایای متریکسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف و بینگ می‌باشند. قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف گویای این مطلب است که یک فضای $\langle S,\tau \rangle$ متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر یک فضای T_3 با یک پایه σ ـ موضعاً باپایان باشد. اثبات این نتیجه شامل نشاندن توپولوژیکی چنین فضائی در فضای هیلبرت تعمیم داده شده H^α با وزن α می‌باشد. در ابتدا به تعریف H^α می‌پردازیم و پیش از اثبات قضیهٔ اصلی، چندین لم را ثابت خواهیم نمود.

تعریف ۵ - ۳. فرض کنید Λ یک مجموعه شاخص با عدد اصلی بی‌پایان α باشد. هرگاه H^α مجموعهٔ تمام نگاشت‌های حقیقی f تعریف شده بر روی Λ باشد به‌قسمی که هریک از نگاشتها متحد با صفر باشد بجز مگر بر روی یک زیرمجموعه شمارش‌پذیر از Λ که در آن $\sum_{\lambda\in\Lambda} [f(\lambda)]^2 < \infty$ و d^α یک متریک روی H^α ارائه شده به‌صورت $d^\alpha(f,g) = [\sum_{\lambda\in\Lambda}[f(\lambda)-g(\lambda)]^2]^{1/2}$ باشد. آنگاه $\langle H^\alpha, d^\alpha \rangle$ ***فضای هیلبرت تعمیم داده شده با وزن*** α است.

لم ۵ - ۱. هرگاه $\langle S, \tau \rangle$ یک فضای T_3 با یک پایه σ - موضعاً باپایان باشد، آنگاه هر یک از اعضای τ یک مجموعه F_σ می‌باشد.

برهان. فرض کنید $\mathcal{B} = \{B_{n\lambda} : \lambda\in\Lambda_n\ ,\ n\in I^+\}$ یک پایه σ - موضعاً باپایان برای τ باشد و $G\in\tau$. بنابر منظم بودن فضا عنصری مانند $B_{n(x)}\ ,\ \lambda(x) \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_{n(x)}\ ,\ \lambda(x) \subset \overline{B}_{n(x)}\ ,\ \lambda(x) \subset G$ به‌ازای هر $x\in G$. اکنون $B_n = \cup\ \{B_{n(x)}\ ,\ \lambda(x) : x\in G\}$ قرار می‌دهیم. آنگاه بنابر موضعاً باپایانی و تمرین ۳-۴۱ داریم $\overline{B}_n = \cup\ \{\overline{B}_{n(x)}\ ,\ \lambda(x) : x\in G\} \subset G$. این امر ایجاب می‌کند که $G = \cup\{\overline{B}_n : n\in I^+\}$ و درنتیجه یک F_σ می‌باشد. ■

لم ۵ - ۲. هرگاه $\langle S , \tau\rangle$ یک فضای T_3 با یک پایه σ- موضعاً باپایان باشد، آنگاه $\langle S,\tau\rangle$ نرمال است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{B} = \{B_{n\lambda} : \lambda\in\Lambda , n\in I^+\}$ یک پایه σ- موضعاً باپایان برای τ باشد و F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزای S باشند. بنابر منظم بودن فضا برای هر $x\in F_1$، عنصری مانند $B_{n(x) , \lambda(x)} \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_{n(x) , \lambda(x)} \subset \overline{B}_{n(x) , \lambda(x)} \subset S - F_2$. بطریق مشابه، برای هر $y\in F_2$ عنصری مانند $B_{n(y) , \lambda(y)} \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $y\in B_{n(y) , \lambda(y)} \subset \overline{B}_{n(y) , \lambda(y)} \subset S - F_1$. اکنون $B_{n,F_1} = \cup \{B_{n , \lambda(x)} : x\in F_1\}$ و $B_{n,F_2} = \cup \{B_{n , \lambda(y)} : y\in F_2\}$ قرار می‌دهیم. آنگاه بنابر موضعاً باپایانی و تمرین ۳-۴۱ داریم

$\overline{B}_{n,F_1} = \cup\{ \overline{B}_{n,\lambda(x)}:x\in F_1\}\subset S-F_2$ و $\overline{B}_{n,F_2} = \cup\{ \overline{B}_{n\lambda(y)}:y\in F_2\}\subset S-F_1$.

مجموعه‌های $G_{n,F_1} = B_{n,F_1} - \cup \{ \overline{B}_{k,F_2} : k\leq n\}$ و $G_{n,F_2} = B_{n,F_2} - \cup \{ \overline{B}_{k,F_1} : k\leq n\}$ باز می‌باشند. علاوه بر این G_{n,F_1} شامل هر $x\in F_1$ می‌باشد که برای آن $n(x)=n$ و G_{n,F_2} شامل هر $y\in F_2$ می‌باشد که برای آن $n(y)=n$. اکنون $G_{F_1} = \cup \{G_{n,F_1} : n\in I^+\}$ و $G_{F_2} = \cup \{G_{n,F_2} : n\in I^+\}$ قرار می‌دهیم. آنگاه $G_{F_1}\in\tau$ ، G_{F_2} ، و $G_{F_1}\cap G_{F_2}=\varnothing$ ، $F_1\subset G_{F_1}$ و $F_2\subset G_{F_2}$. ■

قضیهٔ ۵ - ۲. (ناگاتا ـ اسمیرنوف). *$\langle S,\tau\rangle$ متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر این فضا T_3 با یک پایه σ- موضعاً باپایان باشد.*

برهان. لزوم شرط، به‌ازای هر $n\in I^+$ گردآیهٔ گوی‌های باز به شعاع $1/n$ در حول هر نقطهٔ S یک پوشش باز $\mathcal{B}_n$ می‌باشد که بنابر پیرافشردگی دارای یک تظریف موضعاً باپایان باز $\mathcal{B}'_n$ می‌باشد. گردآیهٔ $\cup\{\mathcal{B}'_n : n\in I^+\}$ آشکارا یک پایه σ- موضعاً باپایان برای τ می‌باشد، که بدین ترتیب لزوم شرط نشان داده می‌شود.

کافی بودن شرط. فرض کنید که $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای T_3 و دارای یک پایه σ- موضعاً باپایان $\mathscr{B} = \{B_{n\lambda} : \lambda\in\Lambda_n\ ,\ n\in I^+\}$ باشد. فرض کنید $\Lambda = \{\langle n\lambda\rangle : n \in I^+\ ,\lambda \in \Lambda_n\}$ و فرض کنید که عدد اصلی Λ برابر با α باشد. بنابر لم ۵-۲ ، فضای $\langle S,\tau\rangle$ نرمال می‌باشد. همچنین طبق لم ۵-۱ ، هر زیرمجموعهٔ باز یک F_σ می‌باشد. درنتیجه، بنابر تمرین ۵-۲ ، به‌ازای هر $\langle n\lambda\rangle\in\Lambda$ یک تابع پیوسته مانند $f_{n\lambda} : \langle S,\tau\rangle \to I^1$ وجود دارد به‌قسمی که $f_{n\lambda}(x)>0$ اگر و فقط اگر $x\in B_{n\lambda}$. به‌ازای هر $n\in I^+$ گردآیهٔ $\{B_{n\lambda} : \lambda\in\Lambda_n\}$ موضعاً باپایان است. درنتیجه برای هر $x\in S$ و تنها برای تعداد باپایانی λ داریم $f_{n\lambda}(x)\neq 0$. بنابراین

$$1+\sum_{\lambda\in\Lambda_n} f^2_{n\lambda}(x)\geq 1$$

و یک تابع پیوسته بر روی S تعریف می‌کند. فرض کنید $g_{n\lambda} : \langle S,\tau\rangle\to I^1$ به صورت

$$g_{n\lambda}(x) = f_{n\lambda}(x)\ [1+\sum_{\beta\in\Lambda_n} f_{n,\beta}(x)]^{-1/2}$$

تعریف شده باشد. آنگاه $g_{n\lambda}(x)>0$ اگر و فقط اگر $x\in B_{n\lambda}$. به‌ازای $n\in I^+$ ثابت و $x\in S$ ثابت و برای تنها تعداد باپایانی λ داریم $g_{n\lambda}(x)\neq 0$. علاوه‌براین

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_n} g^2_{n\lambda}(x) < 1 \qquad \text{و} \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda_n} [g_{n\lambda}(x) - g_{n\lambda}(y)]^2 < 2, \forall x,y\in S\ .$$

اکنون $h_{n\lambda}(x)=2^{-n/2}g_{n\lambda}(x)$ قرار می‌دهیم. آنگاه

$$\sum_{\langle n\lambda\rangle\in\Lambda} h^2_{n\lambda}(x) = \sum_{n\in I^+} 2^{-n} \sum_{\lambda\in\Lambda_n} g^2_{n\lambda}(x) < \sum_{n\in I^+} 2^{-n} = 1\ .$$

بدین ترتیب به‌ازای هر $x\in S$، نقطهٔ $f(x) = h_{n\lambda}(x)\in H^\alpha$ نظیر می‌شود. نشان می‌دهیم که f یک همانریختی روی $f(S)$ می‌باشد.

هرگاه $x,y\in S$ با شرط $x\neq y$، آنگاه چونکه $\langle S,\tau\rangle$ یک فضای T_1 می‌باشد عنصری مانند $B_{n\lambda} \in \mathscr{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in B_{n\lambda}$ و $y\in S - B_{n\lambda}$. درنتیجه $h_{n\lambda}(x)>0$ و $h_{n\lambda}(y)=0$، که بدین ترتیب ایجاب می‌گردد $f(x)\neq f(y)$. بنابراین f یک‌به‌یک می‌باشد.

فرض کنید $x_\circ \in S$ و $\varepsilon > \circ$. آنگاه عددی مانند $N \in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $۲^{-N} < \varepsilon^۲/۴$. بنابر موضعاً باپایانی بودن، عنصری مانند $G \in \tau$ وجود دارد به‌قسمی که $x_\circ \in G$ و G تنها تعداد باپایانی از مجموعه‌های $B_{n\lambda}$ با شرط $n \leq N$ را قطع می‌نماید. این مجموعه‌ها را به‌صورت $B_{n_n\lambda_i}$ $(n_i \leq N)$ برای $i = ۱, \ldots, K$ نمایش می‌دهیم. چون هر یک از توابع $h_{n\lambda}$ پیوسته‌اند، لذا برای هر $<n\lambda> \in \Lambda$ عنصری مانند $B_{n\lambda} \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $x_\circ \in B_{n\lambda}$ و

$$| h_{n\lambda}(x_\circ) - h_{n\lambda}(x) | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{۲K}} , \ \forall x \in B_{n\lambda} .$$

فرض کنید $\hat{G} = G \cap_{i=۱}^{K} B_{n_i\lambda_i}$. آنگاه $\hat{G} \in \tau$ و شامل $x_\circ$ می‌باشد. حال هرگاه $<n\lambda> \in \Lambda - \{<n_i\lambda_i> : \lambda_i = i = ۱, \ldots, K\}$، آنگاه $h_{n\lambda}(x_\circ) = h_{n\lambda}(x) = \circ$ برای هر $x \in \hat{G}$. درنتیجه برای $x \in \hat{G}$ داریم

$$\sum_{n \leq N \lambda \in \Lambda_n} [h_{n\lambda}(x_\circ) - h_{n\lambda}(x)]^۲ < K \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{۲K}} \right)^۲ = \frac{\varepsilon^۲}{۲}$$

و

$$\sum_{n >, N \lambda \in \Lambda_n} [h_{n\lambda}(x_\circ) - h_{n\lambda}(x)]^۲ = \sum_{n > N} ۲^{-n} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} [g_{n\lambda}(x_\circ) - g_{n\lambda}(x)]^۲$$
$$\leq ۲ \sum_{n > N} ۲^{-n} = ۲(۲^{-N}) < ۲ \left(\frac{\varepsilon^۲}{۴} \right) = \frac{\varepsilon^۲}{۲} .$$

درنتیجه

$$d^\alpha(f(x_\circ), f(x)) = [\sum_{<n\lambda> \in \Lambda} [h_{n\lambda}(x_\circ) - h_{n\lambda}(x)]^۲]^{۱/۲} < \varepsilon \quad \forall x \in \hat{G} .$$

این امر ایجاب می‌کند که f در نقطه $x_\circ$ پیوسته و درنتیجه بر روی S پیوسته است، چرا که $x_\circ$ دلخواه می‌باشد.

تنها نشان دادن باز بودن f باقیمانده است. فرض کنیم $G \in \tau$ و $x \in G$. آنگاه عنصری مانند $B_{n\lambda} \in \mathcal{B}$ وجود دارد به قسمی که $x \in B_{n\lambda} \subset G$: بنابراین $h_{n\lambda}(x) = \delta > \circ$. هرگاه $f(y) \in f(S)$ به‌قسمی باشد که $d^\alpha(f(x), f(y)) < \delta$، آنگاه $h_{n\lambda}(y) > \circ$ و $y \in B_{n\lambda}$. بنابراین $f^{-۱}(S_{d^\alpha}(f(x); \delta)) \subset G$، که این امر ایجاب می‌نماید که f(G) باز است. ■

با استفاده از یک روش مشابه با اثبات قضیه استون که هر فضای متریک پیر افشرده است، می‌توان نشان داد که هر پوشش باز از یک فضای متریک دارای یک تظریف باز σ-گسسته می‌باشد . درنتیجه یک فضای متریک ، یک فضای T_3 با یک پایه σ-گسسته می‌باشد. همچنین ، هر گردآیهٔ گسسته ، موضعاً باپایان است . از این تذکرها قضیه متریکسازی آر-اچ-بینگ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۵ - ۳. (بینگ). ***$<S,\tau>$ متریک پذیر است اگر و فقط اگر این فضا T_3 با یک پایه δ-گسسته باشد.***

تمرین

۵ - ۱ . فرض کنیم $d(x,y)=0$ هرگاه $x=y$ و $d(x,y)=1$ هرگاه $x\neq y$، که در آن $x,y\in S$ و S دارای توپولوژی گسسته 2^S می‌باشد. نشان دهید که d فضای $<S,2^S>$ را متریک‌پذیر می‌نماید، یعنی نشان دهید که τ_d توپولوژی گسسته 2^S می‌باشد.

۵ - ۲ . نشان دهید که هرگاه $<S,\tau>$ نرمال و $G\in\tau$ یک مجموعه F_σ باشد. آنگاه یک تابع پیوسته مانند $f:<S,\tau>\to I^1$ وجود دارد به‌قسمی که $f(x)>0$ اگر و فقط اگر $x\in G$. درنتیجه $f^{-1}\{0\}=S-G$.

۵ - ۳ . ثابت کنید که یک فضای هاوسدرف فشرده متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر شمارش‌پذیر نوع دوم باشد. (این قضیه موسوم به متریکسازی دوم اوریسون است.)

۵ - ۴ . نشان دهید که قضایای متریکسازی اوریسون از نتایج قضیه متریکسازی بنیگ می‌باشند.

۵ - ۵ . $<S,\tau>$ موضعاً متریک پذیر است اگر و فقط اگر هر نقطهٔ S در یک زیر فضای متریک‌پذیر باز $<S,\tau>$ قرار داشته باشد. نشان دهید که هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای نرمال باشد که اجتماع یک خانواده موضعاً باپایان از زیرفضاهای متریک‌پذیر باشد، آنگاه

$<S,\tau>$ متریک‌پذیر است.

۵ - ٦. نشان دهید که یک فضای هاوسدرف موضعاً متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر این فضا پیرافشرده باشد. (این نتیجه منسوب به اسمیرنوف می‌باشد.)

۵ - ۷. نشان دهید که حاصلضرب دو فضای متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است.

* ۵ - ۲ . فضاهای نیم متریک‌پذیر و a - متریک‌پذیر

در این بخش دو تعمیم از متریک‌پذیری یعنی نیم متریک‌پذیری و a- متریک‌پذیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در آغاز یک مشخصه از نیم متریک‌پذیری فضاهارا بر حسب "همسایگی‌های اندیس دار" ارائه می‌دهیم. همچنین، نشان می‌دهیم که ردهٔ فضاهای نیم متریک‌پذیر و a- متریک‌پذیر در مورد فضاهای T_1 یکسانند.

تعریف ۵ - ۴. یک فضای توپولوژیک $<S,\tau>$ **نیم‌متریک‌پذیر** است اگر و فقط اگر یک نیم‌متریک ρ روی S موجود باشد به‌قسمی‌که برای هر $x\in S$، گردآیهٔ $\{S_\rho(x,r);r>0\}$ یک پایهٔ موضعی در x برای τ باشد، یعنی توپولوژی نیم‌متریک τ_ρ که بوسیله ρ روی S القاء می‌گردد با τ یکسان باشد، این چنین نیم‌متریک ρ روی $<S,\tau>$ **مجاز** نامیده می‌شود.

هر فضای گستردنی T_1، نیم متریک‌پذیر است. جزئیات آن به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌باشد. جهت نیم‌متریکسازی احتیاج به لم زیر بر روی دستگاههای همسایگی اندیس دار در مورد یک فضای توپولوژیک $<S,\tau>$ داریم. فرض کنیم $\{N_i:i\in I^+\}$ یک خانواده از توابع، اندیس دار توسط مجموعه I^+ از اعداد صحیح مثبت باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $x\in S$ یک زیرمجموعه $N_i(x)$ از S را با خواص زیر نظیر نماید:

۱- به‌ازای هر $x\in S$ مجموعهٔ $\{N_i(x):i\in I^+\}$ یک پایه موضعی در x است.

۲- به‌ازای هر $i\in I^+$، $x\in N_i(y)$ ایجاب می‌نماید که $y\in N_i(x)$.
۳- به‌ازای هر $m,n\in I^+$، عنصری مانند $k\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $x\in S$ داریم $N_k(x)\subset N_m(x)\cap N_n(x)$.
′۳- به‌ازای هر $x\in S$ و $m,n\in I^+$ داریم $N_m(x)\subset N_n(x)$ هرگاه $m>n$.

لم ۵ - ۳. ***شرط ۳ شرط ′۳ را ایجاب می‌کند و هرگاه یک خانواده $\{N_i:i\in I^+\}$ در شرایط ۱ تا ۳ صدق نماید، آنگاه یک خانواده $\{N_i:i\in I^+\}$ موجود است که در شرایط ۱، ۲ و ′۳ صدق می‌کند.***

برهان. برای قسمت اول کافی است k را بزرگتر از n,m انتخاب نمود. قسمت دوم با قرار دادن $N_1{}'=N_1$ و $N'_{i+1}=N_k$ (برای $i\in I^+$) که در آن k اولین عدد صحیح مثبت می‌باشد به‌قسمی که $N_k(x)\subset N'_i(x)\cap N_{i+1}(x)$ برای تمام $x\in S$، حاصل می‌شود. ■

قضیهٔ ۵ - ۴. ***یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک فضای T_1 $<S,\tau>$ نیم‌متریک‌پذیر باشد این است که یک گردآیهٔ $\{N_i:i\in I^+\}$ از توابع موجود باشد که به‌ازای هر $x\in S$ یک زیرمجموعه $N_i(x)$ از S را نظیر نماید به‌قسمی که در شرایط ۱-۳ صدق کند.***

برهان. لزوم شرط. فرض کنید ρ یک نیم‌متریک مجاز روی $<S,\tau>$ باشد و $N_i(x)=S_\rho(x,\frac{1}{i})$ برای هر $i\in I^+$ و برای هر $x\in S$ درنظر می‌گیریم. آنگاه $\{N_i:i\in I^+\}$ در شرایط ۱، ۲، ′۳ صدق می‌نماید و بنابر لم ۵-۳ خانوادهٔ $\{N_i:i\in I^+\}$ نیز در شرط ۳ صدق می‌کند.

کفایت شرط. فرض کنید $\{N_i:i\in I^+\}$ یک خانواده دلخواه از توابع باشد که در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌نماید. بنابر لم ۵-۳، یک خانواده $\{N'_i:i\in I^+\}$ موجود است که در شرایط ۱، ۲ و ′۳ صدق می‌نماید. آنگاه $\cap\{N'_i(x):i\in I^+\}=\{x\}$. اکنون یک نیم‌متریک ρ روی S بصورت زیر تعریف می‌نمائیم :

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \circ & x=y \text{ هرگاه} \\ \sup\{1/i : y\notin N_i'(x), i\in I^+\} & x\neq y \text{ هرگاه} . \end{cases}$$

به ازای هر $x\in S$ و هر $i\in I^+$، $S_\rho(x, \frac{1}{i})=N_i'(x)$ قرار می‌دهیم و درنتیجه $<S,\tau>$ نیم‌متریک‌پذیر است، چراکه $\{N'_i(x):i\in I^+\}$ یک پایه موضعی در x می‌باشد. ■

امکان وجود یک نیم‌متریک بر اساس یک مجموعه شمارش‌پذیر از دوریها، همانند آنچه که هم‌اکنون ساخته شده است، می‌تواند در اثبات‌هائی با ساختار استقرائی در یک فضای نیم‌متریک‌پذیر مفید باشد. با اینحال با ارائه این‌چنین نیم‌متریکی بر روی یک فضایی که کلاً ناهمند نیست پیوستگی نیم‌متریک را در هر صورت از دست خواهیم داد.

اکنون به بیان مثال زیر می‌پردازیم که باعث تعریف a- متریک‌پذیری می‌شود.

مثال ۵ - ۱ . فرض کنید S نیم صفحه بسته بالائی در E^2 و L نمایشگر محور xها باشد. به‌ازای هر $p\in S$ و هر $r>\circ$، یک همسایگی $N_\rho(p)$ را بصورت زیر تعریف می‌نمائیم:

۱) $N_r(p) = S(p;r)\cap S$ هرگاه $p\in S-L$.

۲) $N_r(p) = [S_d(p,r) \cap (S-L)]\cup\{p\}$ هرگاه $p\in L$.

در اینجا d متریک معمولی روی E^2 می‌باشد و $S_d(p;r) = \{x\in E^2:d(p,x)<r\}$. آنگاه یک توپولوژی τ توسط گردآیهٔ $\{N_r(p):p\in S , r>\circ\}$ روی S تولید می‌شود. فضای $<S,\tau>$ هاوسدرف است ولی منظم نمی‌باشد، شمارش‌پذیر نوع اول است ولی شمارش‌پذیر نوع دوم نمی‌باشد. تفکیک‌پذیر است ولی تفکیک‌پذیر ارثی نمی‌باشد.

اکنون یک متریک ρ را به‌صورت زیر روی S تعریف می‌نمائیم:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \circ & x=y \\ d(x,y)+1/2 & x\notin L \text{ یا } y\notin L \\ d(x,y)+1 & x,y\in L . \end{cases}$$

به‌ازای هر $p\in S$ و با شرط $1/2 \le r \le 1$ داریم $S_\rho(p;r) = N_{r-1/2}(p)$. درنتیجه اگرچه ρ

فضای $<S,\tau>$ رامتریک نمی‌کند ولی مشاهده خواهیم نمود که به‌ازای هر $p\in S$ ، گردآیهٔ $\{S_\rho(p;r):r> ۱/۲\}$ یک پایهٔ موضعی در p برای τ می‌باشد. با مجرد نمودن این مثال، یک دستوربندی طبیعی از "a ـ متریک‌پذیری" را به‌دست می آوریم.

تعریف ۵ - ۵. فرض کنید $a\geq ۰$. فضای $<S,\tau>$ a ـ متریک پذیر است اگر و فقط اگر یک متریک ρ روی S وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $p\in S$ گردآیهٔ $\{S_\rho(p;r):r>a\}$ یک پایهٔ موضعی در p برای τ باشد. متریک ρ را یک a ـ **متریک مجاز** روی S گوئیم.

بر طبق تعریف ۵ ـ ۱ و تذکراتی که بدنبال آن آمد، ملاحظه می‌کنیم که ردهٔ فضاهای متریک‌پذیر دقیقاً رده فضاهای ۰ ـ متریک‌پذیر می‌باشد. بسهولت می‌توان نشان داد که a- متریک‌پذیری یک خاصیت توپولوژیک ارثی است. قضیه و مثالی که در اینجا ذکر خواهد شد،نشان می‌دهد که a ـ متریک‌پذیری یک تعمیم از نیم‌متریک‌پذیری برای فضاهای توپولوژیک می‌باشد که هیچ یک ازخواص T_i ـ جداسازی را ندارد باشد. درحقیقت، رده فضاهای a ـ متریک‌پذیر یک وضعیت اکیداً بینی را در مورد رده فضاهای نیم‌متریک‌پذیر و رده فضاهای شمارش‌پذیر نوع اول دارد.

قضیهٔ ۵ - ۵. ***یک شرط لازم وکافی برای اینکه $<S,\tau>$ نیم‌متریک پذیر باشد این است که فضا a ـ متریک پذیر و $T_۰$ باشد.***

برهان.کفایت شرط. فرض کنید ρ یک a ـ متریک مجاز روی $<S,\tau>$ باشد. برای $x,y\in S$ قرار می‌دهیم : (۱) $d(x,y)=۰$ اگر $x=y$ و (۲) $d(x,y)=\rho(y,x)-a$ اگر $x\neq y$. چونکه $<S,\tau>$ یک فضای $T_۰$ است، لذا $\rho(x,y)>a$ و بنابراین $d(x,y)>۰$ برای $x\neq y$. ولی چونکه $S_d(p;r-a)=S_\rho(p;r)$ برای $r>a$ و هر $p\in S$ ، لذا d یک نیم‌متریک مجاز روی $<S,\tau>$ می‌باشد.

لزوم شرط. فرض کنید d یک نیم‌متریک مجاز و کراندار روی $<S,\tau>$ باشد و

$$a = \sup\{d(x,y) - d(x,z) - d(z,y) : x,y,z \in S\}$$

قرار می‌دهیم. برای $x,y \in S$ فرض کنید (۱) $\rho(x,y) = 0$ اگر $x=y$ و (۲) $\rho(x,y) = d(x,y) + a$ اگر $x \neq y$. آنگاه ρ یک متریک روی S می‌باشد ولی چونکه $S_\rho(p;r+a) = S_\delta(p;r)$ برای $r>0$ و هر $p \in S$، لذا ρ یک aـ متریک مجاز برای $<S,\tau>$ می‌باشد.

مثال ۵ - ۲. فرض کنید $S = \{b,c,d\}$ و $\tau = \{\varnothing,\{b\},\{c,d\},S\}$. فضای $<S,\tau>$ نیم‌متریک‌پذیر نیست. چرا که یک فضای T_0 نمی‌باشد. اگر قرار دهیم $\rho(c,d) = \rho(d,c) = 1$ و $\rho(b,c) = \rho(c,b) = \rho(b,d) = \rho(d,b) = 2$ و $\rho(x,y) = 0$ برای هر $x,y \in S$ با شرط $x=y$. در صورتی که $1 \leq r \leq 2$، آنگاه $S_\rho(b;r) = \{b\}$ و $S_\rho(c;r) \equiv S_\rho(d;r) = \{c,d\}$. بنابراین $<S,\tau>$ ۱ـ متریک‌پذیر است. در ساختمان یک aـ متریک ρ از نیم‌متریک d در اثبات قضیهٔ ۵-۵ مقدار a را برابر

$$a = \sup\{d(x,y) - d(x,z) - d(z,y) : x,y,z \in S\}$$

گرفتیم، ولی این مقدار a یکتا نیست. در حقیقت، هرگاه ρ یک aـ متریک مجاز روی $<S,\tau>$ باشد و $b>0$، اگر $\rho'(x,y) = \rho(x,y) + b$ برای $x \neq y$ و $\rho'(x,x) = 0$ برای هر $x \in S$ قرار دهیم، آنگاه ρ' یک $(a+b)$ـ متریک مجاز روی $<S,\tau>$ می‌باشد. یعنی اگرچه ρ' توپولوژی گسسته روی S القاء می‌کند ولی گردآیهٔ تمام ρ'ـکره‌ها به شعاع بیش‌از $a+b$ یک پایه برای τ تشکیل می‌دهد. از طرف دیگر، عدد a را نمی‌توان به مقداری کمتر از آنچه که در اثبات قضیهٔ ۵-۵ بکار رفته شده است تقلیل داد، ولی می‌توان "مقیاس" آن را کمتر نمود، یعنی

$$\rho_k(x,y) = \frac{\rho'(x,y)}{k(\rho'(x,y)+1)}$$

را برای هر $k \in I^+$ تعریف کرد. بدین ترتیب یک a_kـ متریک مجاز برای $<S,\tau>$ با شرط

$$a_k = \frac{a+b}{k(a+b+1)}$$

را می‌توان هرقدر که مایل باشیم کوچک نمائیم ، و درنتیجه نیم متریک وابسته دارای کسری کوچکتری در نابرابری مثلثی می‌باشد. با اینحال این امر تعجبی ندارد، چراکه در اینصورت تمام دوری‌ها کوچک می‌شوند. تحقیق کنید که تابع حد (نقطه‌ای) $\rho=\lim_{k\to\infty}\rho_k$ یک شبه متریک می‌باشد که روی S توپولوژی ناگسسته را القاء می‌نماید.

تمرین

۵ - ۸. نشان دهید که فضای T_1 گستردنی نیم متریک‌پذیر است.

۵ - ۹. ثابت کنید که فضای $<S,\tau>$ بیان شده در مثال ۵-۱ دارای خواص توپولوژیکی ذکرشده می‌باشد.

۵ - ۱۰. نشان دهید که هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای a- متریک‌پذیر T_0 باشد. آنگاه این فضا T_1 است.

۵ - ۱۱. ثابت کنید که هرگاه $<S,\tau>$ یک a- متریک‌پذیر باشد، آنگاه این فضا شمارش‌پذیر نوع اول است.

۵ - ۱۲. نشان دهید که هر فضای a- متریک‌پذیر دارای یک a- متریک مجاز کراندار می‌باشد.

* ۵ - ۳ فضاهای یکنواخت

در بخش ۲-۲ نشان داده شده است که هر فضای کاملاً منظم یکنواخت‌پذیر است. همچنین، در آنجا خاطرنشان شده که هر فضای یکنواخت کاملاً منظم است. در بخش ۱-۸ نشان داده شده است که رده فضاهای توپولوژیکی یکنواخت‌پذیر با ردهٔ فضاهای نزدیکمند یکسانند و شامل ردهٔ فضاهای متریک به‌عنوان یک زیر ردهٔ خاص می‌باشند. درنتیجه طبیعی است که جویای شرایطی باشیم که تحت آن یک فضای یکنواخت

متریک‌پذیر باشد. به این سؤال در این بخش جواب داده خواهد شد.

تعریف ۵ - ٦. یک فضای یکنواخت $<S , \mathcal{U}>$ شبه متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر یک شبه متریک d روی S وجود داشته باشد به‌قسمی که $\tau_d=\tau_{\mathcal{U}}$.

قضیهٔ ۵ - ٦. ***یک فضای یکنواخت $<S , \mathcal{U}>$ شبه‌متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathcal{U}$ دارای یک پایهٔ شمارش‌پذیر باشد.***

برهان. هرگاه ρ یک شبه متریک مجاز روی $<S , \mathcal{U}>$ باشد. آنگاه در صورتی که برای $n\in I^+$، $W_n = \{<x,y>\in S\times S\ \rho(x,y):< \frac{1}{n}\}$، گردآیهٔ $\mathcal{B} = \{W_n : n \in I^+\}$ یک پایه شمارش‌پذیر برای $\mathcal{U}$ می‌باشد. بعکس، فرض کنید که $<S,\mathcal{U}>$ یک فضای یکنواخت و $\mathcal{B} = \{V_n : n \in I^+\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای $\mathcal{U}$ باشد. با استفاده از اصول (ی۴) و (ی۵) یکنواختی، می‌توانیم به طریق استقراء یک پایهٔ $\mathcal{B}' = \{U_n : n \in I^+\}$ برای $\mathcal{U}$ به‌قسمی تعریف کنیم که $U_n^{-1}=U_n$، $U_n\subset V_n$، و $U_n \circ U_n \circ U_n \subset U_{n-1}$ برای هر $n\in I^+$. اکنون یک نگاشت $\varphi:S \times S\to\mathbb{R}$ را به‌صورت $\varphi(x,y) = \inf\{2^{-n} : <x,y>\in U_n , n\in I^+\}$ تعریف می‌نمائیم و قرار می‌دهیم

$\rho(x,y)=\inf\{\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i):$

$<x_0,\dots,x_k>$ هر دنبالهٔ باپایان دلخواه از نقاط در S با شرط $x_0=x$, $x_k=y$ باشد.$\}$

خواننده بسهولت می‌تواند نشان دهد که ρ یک شبه متریک روی S می‌باشد. کافی است نشان دهیم که $\tau_\rho=\tau_{\mathcal{U}}$. فرض کنید $\varepsilon>0$ و $N\in I^+$ به قسمی باشد $2^{-N}<\varepsilon$ هرگاه $<x,y>\in U_N$، آنگاه $\rho(x,y)\le\varphi(x,y)\le 2^{-N}<\varepsilon$ که این امر ایجاب می‌کند $<x,y>\in W_\varepsilon$. بنابراین $U_N\subset W_\varepsilon$ و $\tau_\rho\subset\tau_{\mathcal{U}}$. آشکارا $\varphi(x_0 ,x_1)\le 2\varphi(x_0 ,x_1)$. حال فرض کنید که برای تمام اعداد صحیح مثبت کمتر از k داشته باشیم $\varphi(x_0 ,x_k)\le 2\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i)$. درصورتی که $S=\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i)$ و j بزرگترین عدد صحیح باشد که برای آن $\sum_{i=1}^{j}\varphi(x_{i-1},x_i)\le S/2$ آنگاه $\sum_{i=j+1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i)\ge S/2$ و $\varphi(x_j,x_{j+1})\le S$ بنابر فرض

استقراء داریم $S=(\frac{S}{2})2\leq(x_0, x_j)\varphi$ و همچنین $\varphi(x_{j+1},x_k)\leq S$. اکنون فرض کنیم n کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به‌قسمی که $2^S\leq 2^n$، آنگاه $<x_0, x_j>$ ، $<x_j,x_{j+1}>$ و $<x_{j+1},x_k>$ هر سه در U_{n+1} قرار دارند، که ایجاب می‌نماید که $<x_0, x_k>\in U_n$. در نتیجه $\varphi(x_0, x_k)\leq 2^{-n}\leq 2S=2\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i)$ که بدین ترتیب نابرابری آخری برای تمام $k\in I^+$ برقرار است. فرض کنید که $<x,y>\in W_{2^{-(n+1)}}$ برای یک $n\in I^+$ ثابت، آنگاه $\rho(x, y)<2^{-(n+1)}$. درنتیجه $\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1}, x_i) <2^{-(n+1)}$ برای یک دنبالهٔ باپایان $<x_0, ..., x_k>$ به قسمی که $x_0=x$ و $x_k=y$. آنگاه $\varphi(x_0, x_k)\leq 2\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_{i-1},x_i)<2\times 2^{-(n+1)}=2^{-n}$. بنابراین $<x,y>\in U_n$ که ایجاب می‌نماید که $W_{2^{(n+1)}}\subset U_n$ و $\tau_{\mathcal{U}}\subset\tau_\rho$. درنتیجه $\tau_\rho=\tau_{\mathcal{U}}$. ■

نتیجه. ***یک فضای هاوسدرف یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathcal{U}$ دارای یک پایه شمارش‌پذیر باشد.***

برهان. اثبات این مطلب یک نتیجهٔ فوری از قضیهٔ ۵-۶ می‌باشد چرا که شبه متریک ρ درحقیقت یک متریک است هرگاه فضای $<S,\mathcal{U}>$ هاوسدرف باشد. ■

یک نگاشت f از یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ به یک فضای یکنواخت $<T,\mathcal{V}>$ ***پیوستهٔ یکنواخت*** است اگر و فقط اگر برای هر $V\in\mathcal{V}$ عنصری مانند $U\in\mathcal{U}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $<f(x),f(y)>\in V$ برای $<x,y>\in U$. هرگاه f یک دوسوئی باشد به‌قسمی که f و f^{-1} هر دو پیوستهٔ یکنواخت باشند، آنگاه f یک ***یکریختی یکنواخت*** است. خواصی از فضاهای یکنواخت که تحت یکریختی‌های یکنواخت پایدار می‌مانند موسوم به ***پایاهای یکنواختی*** می‌باشند.

هرگاه $<S_\alpha,\mathcal{U}_\alpha>$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ یک فضای یکنواخت باشد، آنگاه

$\Pi_\Lambda<S_\alpha,\mathcal{U}_\alpha>$ یک فضای یکنواخت است که در آن $\Pi_\Lambda S_\alpha$ **یکنواختی حاصلضرب** می‌باشد، و آن عبارتست از کوچکترین یکنواختی که برای آن π_α ها به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ پیوسته یکنواختند. خواننده باید اثبات کند که توپولوژی القاء شده توسط یکنواختی حاصلضرب روی $\Pi_\Lambda S_\alpha$ دقیقاً همان توپولوژی حاصلضرب تیخونف $\Pi_\Lambda \tau_{\mathcal{U}_\alpha}$ می‌باشد.

هرگاه ρ یک شبه متریک روی یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ باشد، آنگاه **یکنواختی شبه متریک** القاء شده توسط ρ کوچکترین یکنواختی است که ρ را روی $<S\times S,\mathcal{U}\times\mathcal{U}>$ پیوسته یکنواخت سازد. این یکنواختی یک زیر پایه، متشکل از تمام مجموعه‌هائی به صورت $W_\varepsilon=\{<x,y>\in S\times S:\rho(y,x)<\varepsilon\}$ برای هر $\varepsilon>0$ را دارد.

آخرین نتیجه ما در این بخش بیان کننده این مطلب است که یکنواختی $\mathcal{U}$ از یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ توسط خانوادهٔ $\{\rho_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ *از تمام* شبه متریک‌هایی تولید شده است که روی $<S\times S,\mathcal{U}\times\mathcal{U}>$ پیوسته یکنواختند. درنتیجه باید به‌عنوان یک زیرپایه گردآیهٔ تمام مجموعه‌هائی به‌صورت $W_{\varepsilon,\alpha}=\{<x,y>\in S\times S:\rho_\alpha(x,y)<\varepsilon\}$ برای هر $\varepsilon>0$ و هر $\in\Lambda$ را داشته باشد. این خانواده از شبه‌متریک هاموسوم به یک خانواده از **پیمانه‌ها** برای $<S,\mathcal{U}>$ می‌باشد.

لم ۵ - ۴. هرگاه ρ یک شبه متریک روی $<S,\mathcal{U}>$ باشد، آنگاه ρ روی $S\times S$ پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر $W_\varepsilon=\{<x,y>\in S\times S:\rho(x,y)<\varepsilon\}\in\mathcal{U}$ برای هر $\varepsilon>0$

برهان. به کتاب *بنیادهای توپولوژی عمومی* نوشتهٔ پروین صفحات ۱۸۶ - ۱۸۷ مراجعه شود. ■

قضیهٔ ۵ - ۷. مرگاه $<S,\mathcal{U}>$ یک فضای یکنواخت باشد، آنگاه یکنواختی $\mathcal{U}$ توسط

خانوادهٔ تمام شبه متریک‌هائی تولید می‌شوند که روی $S\times S$ پیوسته یکنواخت می‌باشند.

برهان. فرض کنید $\{\rho_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ خانوادهٔ تمام شبه‌متریک‌ها روی $<S,\mathcal{U}>$ باشد به‌قسمی که ρ_α برای هر $\alpha\in\Lambda$ روی $S\times S$ پیوسته یکنواخت باشد. به‌ازای هر $\alpha\in\Lambda$ و هر $\varepsilon>0$، قرار می‌دهیم $W_{\varepsilon,\alpha}=\{<x,y>\in S\times S:\rho_\alpha(x,y)<\varepsilon\}$. آنگاه بنابر لم ۵-۴ برای هر $\alpha\in\Lambda$ و برای هر $\varepsilon>0$ داریم $W_{\varepsilon,\alpha}\in\mathcal{U}$. اکنون اگر $U\in\mathcal{U}$، آنگاه بنابر قضیهٔ ۵-۶ یک شبه متریک ρ_α روی $<S,\mathcal{U}>$ وجود دارد به‌قسمی که $W_{\varepsilon,\alpha}\subset U$ برای یک $\varepsilon>0$. ولی چونکه ρ_α نسبت به یکنواختی که تولید می‌نماید و درنتیجه نسبت بهر یکنواختی دلخواه بزرگتر (مانند $\mathcal{U}$) پیوسته یکنواخت است، لذا یکنواختی تولیدشده $\{\rho_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ شامل $\mathcal{U}$ می‌باشد. ■

تمرین

۵ - ۱۳. ثابت کنید که هر فضای توپولوژیک $<S,\tau>$ شبه یکنواخت‌پذیر است. (راهنمائی: به‌ازای هر $G\in\tau$، مجموعهٔ $S_G=(G\times G)\cup[(S-G)\times S]$ را درنظر بگیرید. آنگاه نشان دهید که $\mathcal{S}=\{S_G:G\in\tau\}$ یک زیرپایه برای یک شبه‌یکنواختی است که توپولوژی τ را روی S القاء می‌کند.)

۵ - ۱۴. نشان دهید که نگاشت ρ تعریف شده در اثبات قضیهٔ ۵-۶ یک شبه‌متریک است.

۵ - ۱۵. نشان دهید که یکنواختی تولیدشده توسط یک خانواده $\mathcal{P}=\{\rho_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ از

شبه متریک‌ها روی S کوچکترین یکنواختی است که نگاشت همانی از S در $<S, \rho_\alpha>$ برای هر $\alpha \in \Lambda$ پیوسته یکنواخت است.

✻ ۵ - ۴ گروههای توپولوژیک

در این بخش مفهوم یک "گروه توپولوژیک" را ارائه می‌نمائیم. با تعریف یک یکنواختی برای گروه توپولوژیک که همان توپولوژی را تولید می‌نماید، نشان خواهیم داد که یک گروه توپولوژیک یکنواخت‌پذیر (و بنابراین کاملاً منظم) است. آنگاه نشان می‌دهیم که این یکنواختی توسط خانواده تمام شبه متریک‌های پایائی تولید می‌شود که روی گروه توپولوژیک پیوسته یکنواخت می‌باشند.

تعریف ۵ - ۷. یک سه تایی $<G, \circ, \tau>$ یک ***گروه توپولوژیک*** است اگر و فقط اگر $<G, \circ>$ یک گروه باشد، $<G, \tau>$ یک فضای توپولوژیکی باشد، و تابع $h: G \times G \to G$ داده شده به‌صورت $h(x,y) = x \circ y^{-1}$ پیوسته نسبت به توپولوژی حاصلضرب روی $S \times S$ باشد.

مثال ۵ - ۳. هر گروه با توپولوژی گسسته یا ناگسسته یک گروه توپولوژیک می‌باشد.

مثال ۵ - ۴. فضای اقلیدسی $n-$ بعدی با توپولوژی معمولی و عمل جمع برداری یک گروه توپولوژیک می‌باشد.

مثال ۵ - ۵. دایرهٔ یکه در صفحهٔ مختلط با توپولوژی نسبی و عمل ضرب مختلط یک گروه توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۵ - ۸. فرض کنید $<G, \circ, \tau>$ یک گروه توپولوژیکی باشد و $X, Y \in 2^G$. آنگاه

$X\circ Y=\{z\in G:\exists x\in X,\exists y\in Y:z=x\circ y\}$ و $Y^{-1}=\{x\in G:x^{-1}\in Y\}$.

تعریف ۵ - ۹. به‌ازای هر $a\in G$، فرض کنیم $L_a(x)=a\circ x$ و $R_a(x)=x\circ a$ که در آن $<G,\circ,\tau>$ گروه توپولوژیک است. بسهولت می‌توان ملاحظه کرد که به‌ازای هر $a\in G$، L_a و R_a همانریختی می‌باشند.

تعریف ۵ - ۱۰. فرض کنیم $<G,\circ,\tau>$ یک گروه توپولوژیک و $\mathscr{V}_e$ دستگاه همسایگی عنصر همانی e باشد. به‌ازای هر $U\in\mathscr{V}_e$، قرار می‌دهیم $U_L=\{<x,y>:x^{-1}\circ y\in U\}$ و $U_R=\{<x,y>:x\circ y^{-1}\in U\}$. گردآیه‌های $\{U_L:U\in\mathscr{V}_e\}$ و $\{U_R:U\in\mathscr{V}_e\}$ به‌ترتیب پایه‌های ***یکنواختی چپ*** $\mathscr{L}$ و ***یکنواختی راست*** $\mathscr{R}$ برای G می‌باشند. همچنین، G دارای ***یکنواختی دوطرفه*** $\mathscr{U}$ می‌باشد، که $\mathscr{L}\cup\mathscr{R}$ را به‌عنوان یک زیرپایه دارد. در صورتی که $<G,\circ,\tau>$ آبلی باشد، آنگاه $\mathscr{R}$، $\mathscr{L}$ و $\mathscr{U}$ منطبق‌اند.

قضیهٔ ۵ - ۸. ***هرگاه $<G,\circ,\tau>$ یک گروه توپولوژیک و یکنواختی‌های $\mathscr{L}$، $\mathscr{R}$ و $\mathscr{U}$ همانند تعریف ۵ - ۱۰ باشند، آنگاه τ توپولوژی القاء شده روی S برای هرکدام از آنهاست.***

برهان. فرض کنید $\mathscr{V}_e$ دستگاه همسایگی عنصر همانی e باشد. نشان می‌دهیم که $\mathscr{B}=\{U_L:U\in\mathscr{V}_e\}$ یک پایه برای یکنواختی $\mathscr{L}$ می‌باشد. استدلال کاملاً مشابهی در مورد $\mathscr{R}$ برقرار است. هر عضو $U_L\in\mathscr{B}$ شامل قطر Δ از $G\times G$ می‌باشد. چرا که $x\circ x^{-1}=e\in U$. هرگاه $U_L\in\mathscr{B}$، آنگاه

$U_{L^{-1}}=\{<y,x>:<x,y>\in U_L\}=\{<y,x>:y^{-1}\circ x\in U^{-1}\}\in\mathscr{B}$، چرا که $U_L\in\mathscr{V}_e^{1}$.

برای $U_L\in\mathscr{B}$ عنصری مانند $V\in\mathscr{V}_e$ وجود دارد به‌قسمی که $V\circ V\subset U$. هرگاه

$<x,z>\in V_L$ و $<z,y>\in V_L$، آنگاه $x^{-1}\circ z$ و $z^{-1}\circ y$ در V می‌باشند. بنابر این $x^{-1}\circ y\in U$ و $<x,y>\in U_L$. درنتیجه، $V_L\circ V_L\subset U_L$. فرض کنید U_L و U'_L در $\mathcal{B}$ باشند، آنگاه $U_L\cap U'_L\in\mathcal{B}$، زیرا که $U\cap U'\in\mathcal{V}_e$.

کافی است نشان دهیم که $\tau_{\mathcal{L}}=\tau$. فرض کنید که $U\in\tau$ و $x\in U$. آنگاه $L_{x^{-1}}(U)=V$ یک همسایگی باز e می‌باشد. علاوه بر این،

$V_L[x]=\{y:x^{-1}\circ y\in V\}=\{y:y\in xV\}=L_x(L_{x^{-1}}(U))$ یعنی $U\in\tau_{\mathcal{L}}$. فرض کنید که $U\in\tau_{\mathcal{L}}$. به‌ازای هر $x\in U$، یک $V_L[x]=L_x(V)\subset U$ موجود است. بنابراین $U\in\tau$ و $\tau_{\mathcal{L}}=\tau$. علاوه بر این به‌ازای هر $U\in\mathcal{L}\dot{\cup}\mathcal{R}$ داریم (۱) $\Delta\subset U$، (۲) $U^{-1}\in\mathcal{L}\dot{\cup}\mathcal{R}$ و (۳) عنصری مانند $V\in\mathcal{L}\cup\mathcal{R}$ وجود دارد به‌قسمی که $V\circ V\subset U$، چرا که عناصر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ (به‌طور جداگانه) دارای این خواص می‌باشند. درنتیجه $\mathcal{L}\cup\mathcal{R}$ یک زیرپایه برای یک یکنواختی $\mathcal{U}$ می‌باشد، که از آن همانند قبل نتیجه می‌گردد که $\tau=\tau_{\mathcal{U}}$. ■

تعریف ۵ - ۱۱. فرض کنید $<G,\circ,\tau>$ یک گروه توپولوژیکی باشد.

(۱) یک شبه‌متریک ρ روی G **پایای چپ *(پایای راست)*** می‌باشد اگر و فقط اگر $\rho(x,y)=\rho(g\circ x,g\circ y)$ $(\rho(x,y)=\rho(x\circ g,y\circ g))$ برای تمام $<x,y>\in G\times G$ و تمام $g\in G$. گوئیم که ρ **پایا** است اگر و فقط اگر ρ هم پایای چپ و هم پایای راست باشد.

(۲) فرض کنیم $\mathcal{V}_x$ دستگاه همسایگی از $x\in G$ باشد و $V\circ V\in\mathcal{V}_x$ را **پایا** گوئیم اگر فقط اگر $g^{-1}\circ V\circ g=V$ برای تمام $g\in G$.

قضیهٔ ۵ - ۹. یکنواختی $\mathcal{L}$ *(به‌ترتیب $\mathcal{R}$)* توسط خانوادهٔ تمام شبه متریک‌های پایای چپ *(به‌ترتیب پایای راست)* تولید می‌شود که روی $G\times G$ پیوسته یکنواختند.

برهان . فرض کنید $\mathcal{P}$ خانوادهٔ تمام شبه‌متریک‌های پایای چپ باشد که روی $G\times G$ پیوسته یکنواخت باشد و $\rho\in\mathcal{P}$. آنگاه

$$V_{\rho,\alpha}=\{z\in G: z=x^{-1}\circ y, x,y\in G \text{ و } \rho(x,y)=\rho(e,x^{-1}\circ y)<\alpha\}\in\mathcal{V}_e .$$

بنابراین $\{<x,y>: x^{-1}\circ y\in V_{\rho,\alpha}\}=(V_{\rho,\alpha})_L$ و $\{(V_{\rho,\alpha})_L : \rho\in\mathcal{P}, \alpha>0\}$ گردآیهٔ $\mathcal{L}$ را تولید می‌نماید . یک استدلال مشابه در حالت $\mathcal{R}$ برقرار است. ■

قضیهٔ ۵ ـ ۱۰ . فرض کنید $\mathcal{J}$ خانوادهٔ تمام همسایگی‌های عنصر همانی e باشد که پایا هستند . آنگاه $\mathcal{J}$ یک پایه برای دستگاه همسایگی e می‌باشد اگر و فقط اگر خانوادهٔ تمام شبه متریک‌های پایا که روی $G\times G$ پیوسته یکنواخت هستند یک یکنواختی تولید نماید که توپولوژی القائیش τ باشد .

برهان فرض کنید $\mathcal{P}$ یک خانواده از شبه متریک‌های پایا باشد که روی $G\times G$ پیوسته یکنواخت هستند به قسمی که $\mathcal{P}$ توپولوژی τ را تولید نماید . آنگاه

$$\{y: \rho(x,y)<\alpha , \alpha>0\}=V_{\rho,\alpha}\in\tau , \forall\rho\in\mathcal{P} .$$

اگر $x\in V_\alpha$، آنگاه $g^{-1}\circ x\circ g\in V_{\rho,\alpha}$ برای هر $g\in G$، چراکه $\rho(e,x)=\rho(e,g^{-1}\circ x\circ g)$، درنتیجه $V_{\rho,\alpha}\in\mathcal{J}$. بعکس ، فرض کنید که U یک همسایگی پایا از عنصر همانی e باشد. آنگاه $g^{-1}\circ U\circ g=U$ برای هر $g\in G$ و بنابراین $g\circ U=U\circ g$. این امر ایجاب می‌کند که $U_L=U_R$ و هر دو در گردآیهٔ $\mathcal{L}\cup\mathcal{R}$ می‌باشند ، که بنابر قضیهٔ ۵ ـ ۹ توسط خانوادهٔ تمام شبه متریک‌های پایائی که روی $G\times G$ پیوسته یکنواخت هستند تولید می‌شود . اکنون بنابر قضیهٔ ۵ ـ ۸ ، $\mathcal{L}\cup\mathcal{R}$ یک یکنواختی روی $\mathcal{U}$ تولید می‌نماید به‌قسمی که $\tau_{\mathcal{U}}=\tau$. ■

تمرین

۵ـ۱۶. نشان دهید که نگاشت‌های L_a و $R\text{-}a$ بیان شده در تعریف ۵ ـ ۹ همانریختی می‌باشند.

فصل ششم

همگرائی و کامل بودن

۶ ـ ۱ دنباله‌ها و پالایه‌ها

در این فصل همگرائی دنباله‌ها در فضاهای متریک و همگرائی پالایه‌ها در فضاهای یکنواخت مورد بحث قرار می‌گیرند. مفهوم "کامل بودن" تعریف و مشخص شده است. همچنین روشی برای نشاندن توپولوژیک یک فضای متریک دلخواه (بطور چگال) در یک فضای متریک کامل رابیان خواهیم کرد. به عنوان یک کاربرد آن قضیه معروف نگاشت انقباضی منسوب به باناخ را ثابت می‌نمائیم.

بخاطر داریم که یک دنباله $\{x_n\}_{n\in I^+}$ در یک فضای متریک $<M,d>$ یک تابع به‌صورت $x:I^+\to M$ می‌باشد به‌قسمی که $x(n)=x_n$ برای هر $n\in I^+$. همچنین دنباله $\{x_n\}_{n\in I^+}$ همگرا به $x_\circ\in M$ می‌باشد (که به‌صورت نمادی $x_n\to x_\circ$ نشان داده می‌شود) اگر و فقط اگر $\lim d(x_n,x_\circ)=\circ$، یعنی برای هر $\varepsilon>\circ$ عدد طبیعی مانند $N\in I^+$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $d(x_n,x_\circ)<\varepsilon$ برای هر $n\geq N$. دنباله‌های همگرا در یک فضای متریک دارای خاصیت مهم زیر می‌باشند که توسط ریاضی‌دان فرانسوی کوشی ابداع گردیده است.

تعریف ۶ ـ ۱. یک دنباله $\{x_n\}_{n\in I^+}$ در یک فضای متریک $<M,d>$ یک **دنباله کوشی** است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon>\circ$، عددی طبیعی مانند $N\in I^+$ وجود داشته باشد

به‌قسمی که $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ برای هر $m,n\geq N$.

قضیهٔ ۶ ـ ۱ . ***هر دنبالهٔ همگرا در یک فضای متریک $\langle M,d\rangle$ یک دنبالهٔ کوشی است .***

برهان . فرض کنید $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ دلخواه همگرا در $\langle M,d\rangle$ به $x_\circ\in M$ باشد . هرگاه $\varepsilon>\circ$، آنگاه عددی طبیعی مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $d(x_k,x_\circ)<\varepsilon/۲$ برای هر $k\geq N$. در نتیجه

$$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x_\circ)+d(x_\circ,x_n)<\varepsilon\ ,\ \forall m,n\geq N\ .$$

بنابراین دنباله $\{x_n\}_{n\in I^+}$ کوشی است . ■

عکس قضیه ۶ ـ ۱ همانطوری که مثال زیر نشان می‌دهد درست نیست . یعنی یک دنبالهٔ کوشی در یک فضای متریک دلخواه لازم نیست همگرا باشد .

مثال ۶ ـ ۱ . فرض کنید $M=\{$اعداد گویا$\}$، $d(x,y)=|x-y|$ برای $x,y\in M$. آنگاه $\langle M,d\rangle$ زیرفضائی از $E^۱$ متشکل از اعداد گویا با توپولوژی زیرفضای اقلیدسی می‌باشد . فرض کنید $x_n=(۱+۱/n)^n$ برای هر $n\in I^+$. آنگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی در $E^۱$ (بنابراین در $\langle M,d\rangle$) است ، چراکه همگرا به $e\in\mathbb{R}$ می‌باشد . ولی با این حال $\{x_n\}_{n\in I^+}$ در $\langle M,d\rangle$ همگرا نیست ، چراکه e گویا نمی‌باشد .

برای فضاهائی که شمارش‌پذیر نوع اول نیستند ، دنباله‌ها برای بحث در مورد همگرائی کافی نمی‌باشند ، چراکه در یک چنین فضای $\langle S,\tau\rangle$ یک دنباله $x:I^+\to S$ ممکن است $x_\circ\in S$ را به عنوان یک نقطه حدی از $x(I^+)=\{x_n:n\in I^+\}$ داشته باشد ، ولی دارای هیچ زیردنباله همگرا به $x_\circ$ نباشد . برای جلوگیری از این اشکال در این چنین فضاها و به ویژه در فضاهای یکنواخت ، همگرائی را بر حسب پالایه‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم .

تعریف ۶ ـ ۲ . فرض کنید $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ یک فضای یکنواخت باشد ، یک **پایهٔ پالایه** در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ یک خانواده $\mathcal{B}=\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ از زیرمجموعه‌های غیرتهی S می‌باشد به‌قسمی که برای هر $\alpha,\beta\in\Lambda$ عنصری مانند $\gamma\in\Lambda$ وجود داشته باشد به طوری که

$A_\gamma\subset A_\alpha\cap A_\beta$. هرگاه $\mathcal{B}$ یک پایهٔ پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ باشد و $\mathcal{F}(\mathcal{B})=\mathcal{B}\cup\{A\subset S: A\supset A_\alpha, \alpha\in\Lambda$ برای یک $\}$ ، آنگاه $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ **پالایه تولید شده** توسط $\mathcal{B}$ می‌باشد.

خواننده می‌تواند (به عنوان یک تمرین ساده) ثابت نماید که یک پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ یک گردآیهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های غیرتهی S می‌باشد که تحت مقطع با پایان بسته است و شامل هر زبرمجموعه از هر عضو گردآیه می‌باشد. ما بعداً مفاهیم "حد یک پالایه"، "نقطهٔ چسبیدهٔ یک پالایه"، "پالایهٔ کوشی" و "فرا پالایه" را ارائه خواهیم کرد.

تعریف ٦ ـ ٣. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک پالایه در یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ باشد. آنگاه $\mathcal{F}$ ***همگرا*** به $x\in S$ می‌باشد اگر و فقط اگر $U[x]\in\mathcal{F}$ برای هر $U\in\mathcal{U}$. در این صورت گوئیم x یک ***نقطهٔ حدی*** از پالایهٔ $\mathcal{F}$ می‌باشد. علاوه‌بر این، یک نقطهٔ $x\in S$ یک ***نقطهٔ چسبیدهٔ*** پالایه $\mathcal{F}$ می‌باشد اگر و فقط اگر $x\in\overline{F}$ برای هر $F\in\mathcal{F}$، در این حالت گوئیم که پالایه $\mathcal{F}$ در x ***انباشته*** می‌گردد.

تعریف ٦ ـ ۴. یک پالایهٔ $\mathcal{F}$ در یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ **پالایهٔ کوشی** است اگر و فقط اگر به ازای هر $U\in\mathcal{U}$ عنصری مانند $F\in\mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $F\times F\subset U$.

تعریف ٦ ـ ۵. یک ***فراپالایه*** در $<S,\mathcal{U}>$ یک پالایهٔ $\mathcal{F}$ در $<S,\mathcal{U}>$ می‌باشد که در گردآیهٔ تمام پالایه‌های در $<S,\mathcal{U}>$ که توسط رابطه شمولی جزئاً مرتب است، بیشین باشد، یعنی یک پالایهٔ که به طور سره در هیچ پالایهٔ دلخواه دیگر در $<S,\mathcal{U}>$ قرار ندارد.

مثال ٦ ـ ۲. فرض کنید $<S,\mathcal{U}>$ یک فضای یکنواخت و $x_0\in S$ یک نقطهٔ دلخواه ولی ثابت باشد. آنگاه $\mathcal{F}=\{F\subset S: x_0\in F\}$ یک فرا پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ می‌باشد که همگرا به x_0 است و در نتیجه یک پالایه کوشی نیز می‌باشد.

قضیهٔ ٦ ـ ۲ . هر پالایه در یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ در یک فرا پالایه قرار دارد .

برهان . فرض کنید $\mathcal{F}$ یک پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ و $\mathcal{C}$ گردآیهٔ تمام پالایه‌های شامل $\mathcal{F}$ باشد ، آنگاه $\mathcal{C}$ غیرتهی و توسط رابطهٔ شمولی جزئاً مرتب می‌باشد . فرض کنید $\mathcal{D}$ یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{C}$ و $\mathcal{E}$ گردآیهٔ تمام مجموعه‌ها در پالایه‌های متعلق به $\mathcal{D}$ باشد . آنگاه $\mathcal{E}$ یک پالایه شامل تمام پالایه‌های در $\mathcal{D}$ است و در نتیجه یک کران بالای $\mathcal{D}$ می‌باشد . در نتیجه بنابر لم زرن ، $\mathcal{C}$ دارای یک عنصر بیشین $\mathcal{M}$ می‌باشد که فرا پالایه شامل $\mathcal{F}$ است . ■

قضیهٔ ٦ ـ ۳ . هرگاه $\mathcal{F}$ یک پالایه در یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ و $\mathcal{F}$ همگرا به $x_0 \in S$ باشد ، آنگاه $\mathcal{F}$ در x_0 انباشته می‌گردد .

برهان . فرض کنید $U \in \mathcal{U}$ و $U[x_0]$ همسایگی یکنواخت نظیر برای x_0 باشد. چون $\mathcal{F}$ همگرا به x_0 می‌باشد ، لذا $U[x_0] \in \mathcal{F}$. این امر ایجاب می‌کند که $U[x_0] \cap F \neq \varnothing$ به ازای هر $F \in \mathcal{F}$ ، زیراکه $\mathcal{F}$ یک پالایه است . در نتیجه $x \in \overline{F}$ برای هر $F \in \mathcal{F}$ و لذا x یک نقطهٔ چسبیدهٔ $\mathcal{F}$ می‌باشد . ■

قضیهٔ ٦ ـ ۴ . در یک فضای یکنواخت ، هر پالایهٔ همگرا یک پالایهٔ کوشی است و هر پالایهٔ کوشی همگرا به هر یک از نقاط چسبیده‌اش است .

برهان . فرض کنید $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ دلخواه در فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ باشد که به یک نقطهٔ $x_0 \in S$ همگرا است و $U \in \mathcal{U}$. یک عنصر متقارن $V \in \mathcal{U}$ وجود دارد به‌قسمی که $V \circ V \subset U$. ولی چونکه $\mathcal{F}$ همگرا به x_0 می‌باشد ، لذا $V[x_0] \in \mathcal{F}$. هرگاه $<p,q> \in V[x_0] \times V[x_0]$ ، آنگاه $<x_0,p> \in V$ و $<x_0,q> \in V$. این امر ایجاب می‌کند که $<p,q> \in V \circ V^{-1} = V \circ V \subset U$. بنابراین $V[x_0] \times V[x_0] \subset U$ و $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ کوشی است .

بعکس ، فرض کنید که $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ کوشی در فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ باشد

و $x_\circ$ یک نقطه چسبیدهٔ $\mathcal{F}$ باشد. هرگاه $U[x_\circ]$ یک همسایگی یکنواخت دلخواه از $x_\circ$ باشد، آنگاه عنصری مانند $V\in\mathcal{U}$ وجود دارد به‌قسمی که $V\circ V\subset U$. همچنین، چون $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ کوشی است، لذا عنصری مانند $F\in\mathcal{F}$ وجود دارد به‌قسمی که $F\times F\subset V$. ولی چونکه $x_\circ\in\bar{F}$ برای هر $F\in\mathcal{F}$. لذا عنصری مانند $y\in V[x_\circ]\cap F$ وجود دارد که در نتیجه $<x_\circ,y>\in V$. همچنین، $y\in F$ و هرگاه $z\in F$، آنگاه $<y,z>\in F\times F\subset V$. بنابراین $<x_\circ,z>\in V\circ V\subset U$ که این امر ایجاب می‌نماید که $F\subset U[x_\circ]$ و $U[x_\circ]\in\mathcal{F}$. در نتیجه $\mathcal{F}$ همگرا به $x_\circ$ می‌باشد.

قضیهٔ ٦ ـ ۵. ***فرض کنید $\mathcal{M}$ یک فرا پالایه در فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ باشد، آنگاه $\mathcal{M}$ همگرا به $x_\circ\in S$ می‌باشد اگر و فقط اگر $\mathcal{M}$ در $x_\circ$ انباشته گردد.***

برهان. هرگاه $\mathcal{M}$ همگرا به $x_\circ$ باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۳ $\mathcal{M}$ در $x_\circ$ انباشته می‌گردد. بعکس، فرض کنید که $\mathcal{M}$ در $x_\circ$ انباشته گردد. فرض کنید $U[x_\circ]$ یک همسایگی یکنواخت دلخواه $x_\circ$ باشد. بنابر تمرین ۶ ـ ۳ عنصری مانند $M\in\mathcal{M}$ وجود دارد به‌قسمی که $M\subset U[x_\circ]$ و یا $M\subset S-U[x_\circ]$. چونکه $\mathcal{M}$ در $x_\circ$ انباشته شده است، لذا $U[x_\circ]\cap M\neq\varnothing$ برای هر $M\in\mathcal{M}$. بنابراین $M\subset U[x_\circ]$ که این امر ایجاب می‌نماید که $U[x_\circ]\in\mathcal{M}$. در نتیجه $\mathcal{M}$ همگرا به $x_\circ$ می‌باشد. ■

پیوستگی نگاشت‌ها از فضاهای یکنواخت در فضاهای یکنواخت دارای یک مشخصه بر حسب پایهٔ پالایه می‌باشد که شبیه به آنچه می‌باشد که درقبلاً مورد دنباله‌ها ارائه شده است. اثبات این مطلب که نگارهٔ یک پایهٔ پالایه یک پایهٔ پالایه است به عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است.

قضیهٔ ٦ ـ ٦. ***فرض کنید $<S,\mathcal{U}>$ و $<T,\mathcal{V}>$ فضاهای یکنواخت باشند. آنگاه $f:<S,\mathcal{U}>\to<T,\mathcal{V}>$ در $x_\circ\in S$ پیوسته است اگر و فقط اگر پایه پالایهٔ $f(\mathcal{U}[x_\circ])$ همگرا به $f(x_\circ)$ باشد که در آن $\mathcal{U}[x_\circ]=\{U[x_\circ]:U\in\mathcal{U}\}$.***

برهان. f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $V[f(x_0)]$ عنصری مانند $U[x_0]$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $f(U[x_0])\subset V[f(x_0)]$. این رابطه دقیقاً گویای این مطلب است که $f(\mathcal{U}[x_0])$ همگرا به $f(x_0)$ می‌باشد. ■

نتیجه. $f:\langle S,\mathcal{U}\rangle\to\langle T,\mathcal{V}\rangle$ *پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر* $x\in S$ و هر پایهٔ پالایهٔ $\mathcal{B}$ در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ که *همگرا به* x *است پایه پالایهٔ* $f(\mathcal{B})$ *همگرا به* $f(x)$ *باشد.*

برهان. فرض کنید f پیوسته و $\mathcal{B}$ یک پایه پالایهٔ دلخواه در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ همگرا به x باشد. آنگاه برای هر همسایگی یکنواخت $U[x]$ عنصری مانند $B\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌قسمی که $B\subset U[x]$. در نتیجه $f(B)\subset f(U[x])$ ولی چونکه $f(\mathcal{U}[x])$ همگرا به $f(x)$ می‌باشد، لذا $f(\mathcal{B})$ نیز همگرا به $f(x)$ می‌باشد. بعکس، فرض کنید که شرط همگرائی نتیجه برقرار باشد و $A\subset S$. هرگاه $x\in\bar{A}$، آنگاه یک پایه پالایهٔ مانند $\mathcal{B}$ روی A وجود دارد به‌قسمی که $\mathcal{B}$ همگرا به x می‌باشد. در نتیجه پایه پالایهٔ $f(\mathcal{B})$ همگرا به $f(x)$ می‌باشد، که ایجاب می‌کند که $f(x)\in\overline{f(A)}$. ولی چونکه $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ برای هر $A\subset S$، لذا f پیوسته است. ■

تمرین

۶ـ۱. فرض کنید $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله در یک فضای توپولوژیک $\langle S,\tau\rangle$ باشد. به ازای هر $n\in I^+$ قرار می‌دهیم $B_n=\{x_k:k\geq n\}$. نشان دهید که خانوادهٔ $\{B_n:n\in I^+\}$ یک پایه برای یک پالایه در $\langle S,\tau\rangle$ می‌باشد که موسوم به پالایهٔ فرشه وابسته به $\{x_n\}_{n\in I^+}$ است.

۶ـ۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک فراپالایهٔ در یک فضای یکنواخت $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ باشد. نشان دهید که $\cap\{F:F\in\mathcal{F}\}$ شامل حداکثر یک نقطهٔ $x\in S$ می‌باشد، و هرگاه $\cap\{F:F\in\mathcal{F}\}=\{x\}$، نشان دهید که $\mathcal{F}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های S می‌باشد که

شامل x است (یعنی فراپالایه ثابت است).

٦ـ۳. نشان دهید که پالایهٔ $\mathcal{F}$ در یک فضای یکنواخت $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ یک فراپالایه می‌باشد اگر و فقط اگر وقتی که $A\subset S$ یا $A\in\mathcal{F}$ و یا $S-A\in\mathcal{F}$.

٦ـ۴. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ در یک فضای یکنواخت $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ باشد، ثابت کنید که $\mathcal{F}$ در $x\in S$ انباشته می‌گردد اگر و فقط اگر یک پالایهٔ شامل $\mathcal{F}$ همگرا به x وجود داشته باشد.

٦ـ۵. فرض کنید $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ یک فضای یکنواخت باشد و $A\subset S$. نشان دهیدکه $x\in\overline{A}$ اگر و فقط اگر یک پایه پالایهٔ مانند $\mathcal{B}$ روی A همگرا به x موجود باشد.

٦ـ٦. نشان دهید که $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ هاوسدرف است اگر و فقط اگر هر پالایهٔ همگرا در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ دارای یک حد یکتا باشد.

٦ـ۷. مشخصه‌های زیر از فشردگی را در یک فضای یکنواخت $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ ثابت کنید:

(الف) $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ فشرده است اگر و فقط اگر هر پالایه در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ دارای یک نقطهٔ چسبیده باشد.

(ب) $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ فشرده است اگر و فقط اگر هر فراپالایه در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ همگرا باشد.

٦ـ۸. ثابت کنید که هرگاه $f:\langle S,\mathcal{U}\rangle\to\langle T,\mathcal{V}\rangle$ پیوسته یکنواخت باشد و $\mathcal{B}$ یک پایه پالایهٔ کوشی در $\langle S,\mathcal{U}\rangle$ باشد، آنگاه $f(\mathcal{B})=\{f(B):B\in\mathcal{B}\}$ یک پایه پالایهٔ کوشی در $\langle T,\mathcal{V}\rangle$ می‌باشد.

٦ـ۲ کامل بودن

اکنون مفاهیم "دنبالهٔ کوشی" و "پالایهٔ کوشی" بحث شده در بخش ۶ـ۱ را به ترتیب بمنظور تعریف مفهوم "کامل بودن" برای فضاهای متریک و فضاهای یکنواخت بکار می‌بریم. آنگاه فضاهای فشرده متریک (یکنواخت) را به عنوان فضاهائی که کامل و

کراندار کلی می‌باشند، مشخص می‌نمائیم. همچنین، نشان خواهیم داد که هر زیرفضای G_δ در یک فضای متریک کامل، "کامل توپولوژیک" می‌باشد.

تعریف ۶ـ۶. یک فضای متریک $\langle M,d\rangle$ ***کامل*** است اگر و فقط اگر هر دنبالهٔ کوشی در $\langle M,d\rangle$ همگرا به یک نقطه در M باشد.

متأسفانه، خاصیت کامل بودن تحت همانریختی‌ها حفظ نمی‌گردد، چراکه خاصیت کوشی بودن یک دنباله یک خاصیت توپولوژیک نیست، وبستگی به متریک خاص مورد استفاده دارد. این مطلب در مثال زیر نشان داده شده است و موجب تعریف مفهوم "کامل بودن توپولوژیک" می‌گردد.

مثال ۶ـ۳. $E^1=\langle \mathbb{R},d\rangle$، که در آن $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ یک فضای کامل است. علاوه‌بر این، E^1 همانریخت با $\langle \mathbb{R}\,,\rho\rangle$ می‌باشد که در آن $\rho(x,y)=|x(1+|x|)^{-1}-y(1+|y|)^{-1}|$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$. چونکه

$$\rho(m,n)=\left|\frac{m}{m+1}-\frac{n}{n+1}\right|=\left|\frac{1}{1+(1/m)}-\frac{1}{1+(1/n)}\right|$$

$$=\frac{|1/n-1/m|}{[1+(1/m)][1+(1/n)]}<\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\le\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\le\frac{2}{N}<\varepsilon$$
$$\forall m\,,\, n\ge N>\frac{2}{\varepsilon},$$

لذا $\{n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\langle\mathbb{R},\rho\rangle$ می‌باشد که همگرا نیست. بنابراین $\langle\mathbb{R},\rho\rangle$ کامل نیست. همچنین، دنبالهٔ $\{n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\langle\mathbb{R},d\rangle$ نمی‌باشد.

تعریف ۶ـ۷. $\langle M,d\rangle$ ***کامل توپولوژیک*** است اگر و فقط اگر یک متریک ρ روی M موجود باشد به‌قسمی که $\langle M\,,\rho\rangle$ کامل و $\langle M\,,\rho\rangle$ همانریخت با $\langle M,d\rangle$ باشد.

کامل بودن یک خاصیت ارثی نیست، چراکه $E^1=\langle\mathbb{R},d\rangle$ با متریک $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ کامل است ولی زیرفضای $\mathbb{R}-\{0\}$ آن کامل نیست (دنبالهٔ $\{1/n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbb{R}-\{0\}$ می‌باشد که در آن همگرا نیست). از خواننده خواسته

می‌شود که نشان دهد که یک زیرفضا از یک فضای متریک کامل، کامل است اگر و فقط اگر بسته باشد. یک قضیهٔ کلی‌تر از این نتیجه را بعد از به دست آوردن مشخصه کامل بودن منسوب به کانتور ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ٦ـ٧ (کانتور). $<M,d>$ ***کامل است اگر و فقط اگر وقتی که*** $\{A_n\}_{n\in I^+}$ ***یک دنباله تو در توی نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ*** M ***باشد به قسمی که*** $\lim_{n\to\infty}\delta(A_n)=0$، ***آنگاه*** $\cap\{A_n:n\in I^+\}$ ***یک مجموعهٔ تک عضوی است.***

برهان. فرض کنید که $<M,d>$ کامل و $\{A_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ تودرتوی نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ M باشد به‌قسمی که $\lim_{n\to\infty}\delta(A_n)=0$. اگر $x_n\in A_n$ برای هر $n\in I^+$ و $\varepsilon>0$ دلخواه باشد، آنگاه عددی طبیعی مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $\delta(A_n)<\varepsilon/2$ برای هر $n>N$، در نتیجه $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ برای هر $m,n\geq N+1$. لذا $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی است و باید همگرا به یک عنصر $x\in M$ باشد. همچنین، زیردنبالهٔ $\{x_{n+k}\}_{k\in I^+\cup\{0\}}$ باید همگرا به x باشد و برای هر $n\in I^+$ در A_n قرار دارد. بنابراین $x\in \bar{A}_n=A_n$ برای‌هر $n\in I^+$، چراکه A_n بسته است.لذا $x\in\cap\{A_n:n\in I^+\}$. هرگاه یک عنصر $y\in\cap\{A_n:n\in I^+\}$ موجود باشد به‌قسمی که $y\neq x$، آنگاه $\delta(\cap\{A_n:n\in I^+\})>0$ که متناقض با فرض ما یعنی $\lim_{n\to\infty}\delta(A_n)=0$ می‌باشد.

بعکس، فرض کنید که هر دنبالهٔ تو در توی نزولی دلخواه از زیرمجموعه‌های بسته با قطرهائی که به سمت صفر میل می‌کند مقطع تک عضوی داشته باشد. فرض کنید $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی دلخواه در $<M,d>$ باشد. به ازای هر $n\in I^+$، $B_n=\{x_k:k\geq n\}$ و $A_n=\bar{B}_n$ قرار می‌دهیم. آنگاه $\{A_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله تو در توی نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ M می‌باشد که قطر آنها به صفر میل می‌کند. در نتیجه $\cap\{A_n:n\in I^+\}=\{x\}$ برای یک $x\in M$ برای $\varepsilon>0$ دلخواه عددی مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $\delta(B_n)<\varepsilon$ و در نتیجه $\delta(A_n)<\varepsilon$ برای هر $n\geq N$. این امر ایجاب

می‌نماید که $d(x_n,x)<\varepsilon$ برای هر $n\geq N$ وبنابراین $x_n\to x$ درنتیجه $<M,d>$ کامل است. ■

قضیهٔ ٦ ـ ٨. *هر زیرفضای G_δ از یک فضای متریک کامل $<M,d>$ کامل توپولوژیک است.*

برهان. فرض کنید $A=\cap\{G_n:n\in I^+\}$ یک زیرفضای G_δ باشد، که در آن $G_n\in\tau_d$ برای هر $n\in I^+$. به ازای هر $n\in I^+$، تابع $f_n:G_n\to E^1$ را به صورت

$$f_n(x)=\frac{1}{d(x,M-G_n)}$$

تعریف می‌نمائیم. آنگاه برای هر $<x,y>\in G_n\times G_n$، تابع $\sigma_n(x,y)$ را به‌صورت

$$\sigma_n(x,y)=\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|}$$

تعریف می‌کنیم. چون $\sigma_n(x,y)=0$ ایجاب نمی‌کند که $x=y$، لذا σ_n الزاماً یک متریک نیست. ولی برای تمام $x,y,z\in G_n$ داریم $\sigma_n(x,y)+\sigma_n(y,z)\geq\sigma_n(x,z)$. اکنون متریک ρ را روی A به‌صورت

$$\rho(x,y)=d(x,y)+\Sigma_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sigma_n(x,y)\ ,\ \forall<x,y>\in A\times A$$

تعریف می‌نمائیم. هرگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی در $<A\ ,\ \rho>$ باشد، آنگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ نیز یک دنباله در $<M,d>$ می‌باشد و در نتیجه نسبت به متریک d باید همگرابه یک $x\in M$ باشد. هرگاه $x\in A$، آنگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ نسبت به متریک ρ نیز همگرا به x می‌باشد. در نتیجه $<A,d>$ کامل توپولوژیک می‌باشد، چراکه $\tau_d=\tau_\rho$. هرگاه $x\notin A$، آنگاه عددی مانند $N\in I^+$ وجود دارد به‌قسمی که $x\in M-G_n$ برای هر $n>N$. عنصر $k\in I^+$ را ثابت می‌گیریم و آنگاه $\sigma_n(x_k\ ,\ x_{k+1})$ را برای تمام $n>N$ در نظر می‌گیریم. چون $x_{k+j}\to x$ لذا $\sigma_n(x_k\ ,\ x_{k+j})\to 1$ وقتی که $j\to\infty$، که ایجاب می‌نماید $d(x_{k+j}\ ,M-G_n)\to 0$ وقتی که $j\to\infty$. لذا

$$\lim_{j\to\infty}\rho(x_k , x_{k+j})\geq\sum_{n=N}^{\infty} ۲^{-n}=۲^{-(N-۱)} .$$

بدین ترتیب $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله کوشی در $<A, \rho>$ نیست، که یک تناقض می‌باشد. ■

اکنون نشان می‌دهیم که حاصلضرب یک گردآیه از فضاهای متریک کامل تحت شرایط معینی یک فضای متریک کامل می‌باشد. این قضیه دارای یک نتیجه مهم یعنی کامل بودن E^n برای هر $n\in I^+$ می‌باشد.

قضیهٔ ٦ ـ ٩. ***فرض کنید $<M_\alpha,d_\alpha>$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ یک فضای متریک کامل باشد و $<M,\tau>=<\Pi\ M_\alpha, \Pi\ \tau_d>$. هرگاه $<M,\tau>$ متریک‌پذیر توسط متریک ρ باشد به‌قسمی که $\rho(x,y)\geq d_\alpha(\pi_\alpha(x) , \pi_\alpha(y))$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ و برای هر $x,y\in M$، آنگاه $<M,\rho>$ یک فضای متریک کامل است.***

برهان. فرض کنید $\{A_n\}_{n\in I^+}$ یک دنباله تو در توی نزولی دلخواه از زیرمجموعه‌های بستهٔ غیرتهی M باشد به‌قسمی که $\lim_{n\to\infty}\delta(A_n)=۰$. به ازای هر $\alpha\in\Lambda$ $\{\pi_\alpha(A_n)\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ تو در توی نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ غیرتهی M_α می‌باشد به‌قسمی که $\lim_{n\to\infty}\delta(\pi_\alpha(A_n))=۰$. لذا بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۷، مجموعهٔ $\cap\{\pi_\alpha(A_n):n\in I^+\}$ مجموعهٔ تک عضوی $\{x_\alpha\}$ برای هر $\alpha\in\Lambda$ می‌باشد. در نتیجه $\cap\{A_n:n\in I^+\}=\{x\}$ که در آن $\pi_\alpha(x)=x_\alpha$ برای هر $\alpha\in\Lambda$. آنگاه مجدداً بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۷ فضای $<M, \rho>$ کامل است. ■

نتیجه. ***فضاهای I^ω و I^n و E^n برای هر $n\in I^+$ کامل می‌باشند.***

قضیهٔ بعد فضاهای متریک فشرده را بر حسب کامل بودن و کراندار کلی بودن مشخص می‌نماید.

قضیهٔ ٦ ـ ١٠. ***یک فضای متریک $<M,d>$ فشرده است اگر و فقط اگر کامل و کراندار کلی باشد.***

برهان. فرض کنید که $<M,d>$ فشرده باشد. آنگاه بنابر قضیهٔ ۳ ـ ۲۱ فضای $<M,d>$ کامل و کراندار کلی است، چراکه $<M,d>$ نیز فشرده دنباله‌ای است. بعکس، فرض کنید که $<M,d>$ کامل و کراندار کلی باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک پوشش باز با پایان $\mathcal{U}_\varepsilon$ از M توسط مجموعه‌هائی با قطری کمتر از ε وجود دارد. اگر $\{x_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ دلخواه در M باشد. هرگاه یک عنصر از دنباله بینهایت تکرار شود، آنگاه $\{x_n\}_{n\in I^+}$ شامل یک زیر دنبالهٔ ثابت همگرا می‌باشد. در غیر اینصورت، برای هر $\varepsilon > 0$، یک عنصر $U_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$ شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط متمایز از مجموعهٔ $\{x_n : n\in I^+\}$ می‌باشد. فرض کنید x_{n_1} اولین عنصر از دنباله در U_1 و x_{n_j} اولین عنصر از $\{x_k : k > n_{j-1}\}$ واقع در $U_{1/j}$ برای هر $j \in I^+$ باشد. آنگاه $\{x_{n_j}\}_{j\in I^+}$ یک زیردنبالهٔ کوشی از دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in I^+}$ می‌باشد و باید همگرا به یک $x \in M$ باشد، چراکه $<M,d>$ کامل است. بنابراین $<M,d>$ فشردهٔ دنباله‌ای است که در نتیجه فشرده است. ■

این بخش را با تعریف مفهوم کامل بودن برای فضاهای یکنواخت و مشابه قضیهٔ ۶ ـ ۱۰ در مورد فضاهای یکنواخت به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۶ ـ ۸. یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ ***کامل*** است اگر و فقط اگر هر پالایهٔ کوشی در $<S,\mathcal{U}>$ همگرا به نقطه ای از S باشد.

تعریف ۶ ـ ۹. یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ ***کراندار کلی (پیش فشرده)*** است اگر و فقط اگر برای هر $U\in\mathcal{U}$ یک مجموعه با پایان $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subset S$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $S=\cup\{U[x_i]: i=1,\ldots,n\}$.

قضیهٔ ۶ ـ ۱۱. یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ کراندار کلی است اگر و فقط اگر هر پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ در یک پالایهٔ کوشی در $<S,\mathcal{U}>$ واقع باشد.

برهان. فرض کنید $<S,\mathcal{U}>$ کراندار کلی و $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ دلخواه در $<S,\mathcal{U}>$ باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۲ پالایهٔ $\mathcal{F}$ در یک فراپالایه $\mathcal{M}$ قرار دارد. اکنون فرض کنید $U\in\mathcal{U}$.

در این صورت یک مجموعه متقارن $V\in\mathcal{U}$ وجود دارد به‌قسمی که $V\circ V\subset U$. چون $<S,\mathcal{U}>$ کراندار کلی است، لذا یک مجموعهٔ با پایان $\{x_۱,\ldots,x_n\}\subset S$ وجود دارد به‌قسمی که $S=\cup\{V[x_i]:i=۱,\ldots,n\}$. هرگاه به ازای هر $i=۱,\ldots,n$ عنصری مانند $M_i\in\mathcal{M}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $V[x_i]\cap M_i=\varnothing$، آنگاه $M=\cap\{M_i:i=۱,\ldots,n\}\in\mathcal{M}$ و

$$M\cap S = M\cap(\cup\{V[x_i] : i = ۱, \ldots, n\})=\cup\{M\cap V[x_i] : i = ۱, \ldots, n\}$$
$$\subset\cup\{M_i\cap V[x_i] : i = ۱, \ldots, n\}=\varnothing$$

که این امر ایجاب می‌نماید $M=\varnothing$ و یک تناقض است. در نتیجه برای یک i، $V[x_i]\cap M\neq\varnothing$ برای هر $M\in\mathcal{M}$. چون M یک فراپالایه است، لذا $V[x_i]\in\mathcal{M}$. بنابراین $\mathcal{M}$ یک پالایهٔ کوشی می‌باشد، چراکه $V[x_i]\times V[x_i]\subset U$.

بعکس، فرض کنید که هر پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ در یک پالایهٔ کوشی قرار دارد و $U\in\mathcal{U}$. برای هر زیرمجموعه با پایان A از S، فرض کنید که $U[A]=\cup\{U[x]:x\in A\}\neq S$. آنگاه $\{S-U[A]:$با پایان$A\subset S\}$ یک پالایه در $<S,\mathcal{U}>$ می‌باشد که در یک پالایهٔ کوشی $\mathcal{G}$ قرار دارد. این امرایجاب می‌نماید که عنصری مانند $F\in\mathcal{G}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $F\times F\subset U$. آنگاه $F\subset U[x]$ برای یک $x\in F$ خاص و بنابراین $U[x]\in\mathcal{G}$. چون $\{x\}$ با پایان است، لذا $S-U[x]\in\mathcal{G}$. این یک تناقض است، چراکه $U[x]\cap(S-U[x])=\varnothing\notin\mathcal{G}$. بنابراین یک زیرمجموعه با پایان A از S وجود دارد به‌قسمی که $U[A]=S$ و $<S,\mathcal{U}>$ کراندار کلی است. ■

قضیهٔ ۶ ـ ۱۲. *یک فضای یکنواخت $<S,\mathcal{U}>$ فشرده است اگر و فقط اگر کامل و کراندار کلی باشد.*

برهان. فرض کنید $<S,\mathcal{U}>$ فشرده باشد و $U\in\mathcal{U}$. آنگاه $\{U[x]:x\in S\}$ یک پوشش باز S می‌باشد و باید شامل یک زیرپوشش با پایان باشد. در نتیجه $<S,\mathcal{U}>$ کراندار

کلی است . هرگاه $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ کوشی دلخواه در $<S,\mathcal{U}>$ باشد ، آنگاه بنابر تمرین ۶ ـ ۷ $\mathcal{F}$ دارای یک نقطهٔ چسبیدهٔ x می‌باشد .بنابراین طبق قضیهٔ ۶ـ۴ $\mathcal{F}$ همگرا به x است و $<S,\mathcal{U}>$ کامل می باشد بعکس ، فرض کنید که $<S,\mathcal{U}>$ کامل و کراندار کلی باشد. هرگاه $\mathcal{F}$ یک پالایهٔ دلخواه در $<S,\mathcal{U}>$ باشد ، آنگاه بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۱۱ در یک پالایهٔ کوشی $\mathcal{G}$ قرار دارد . چون $<S,\mathcal{U}>$ کامل است ، لذا $\mathcal{G}$ باید همگرا به یک نقطهٔ $x\in S$ باشد . بنابر تمرین ۶ ـ ۴ ، x یک نقطه چسبیدهٔ $\mathcal{F}$ می‌باشد ، که در نتیجه بنابر تمرین ۶ ـ ۷ $<S,\mathcal{U}>$ فشرده است . ■

تمرین

٦ ـ ٩ . ثابت کنید که یک زیرفضای $<A,d>$ از یک فضای متریک کامل $<M,d>$ کامل است اگر و فقط اگر A بسته باشد . نشان دهید که اعداد اصم یک زیرفضای کامل E^1 نمی‌باشد .

٦ ـ ١٠ . نشان دهید که یک فضای متریک $<M,d>$ کراندار کلی است اگر و فقط اگر هر دنباله در $<M,d>$ دارای یک زیر دنبالهٔ کوشی باشد .

٦ ـ ١١ . مثالی از یک فضای متریک کامل بزنید که کراندار باشد ولی کراندار کلی و در نتیجه فشرده نباشد .

٦ ـ ١٢ . نشان دهید که هر فضای متریک گسسته $<M,d>$ کامل توپولوژیک است . ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد اصم کامل توپولوژیک می‌باشد .

٦ ـ ١٣ . فرض کنید $<M,\sigma>$ و $<N,\rho>$ فضاهای متریک باشند به‌قسمی که $<N,\rho>$ کامل و کراندار باشد . هرگاه N^M مجموعهٔ تمام توابع پیوسته از M در N باشد و $d(f,g)=\sup\{\rho(f(x),g(x)):x\in M\}$ برای هر $f,g\in N^M$. نشان دهید که $<N^M,d>$ یک فضای متریک کامل است .

۶ ـ ۱۴ . نشان دهید که هر زیرفضای بسته از یک فضای کامل یکنواخت کامل است و هر زیرفضای کامل از یک فضای هاوسدرف یکنواخت بسته است .

* ۶ ـ ۳ کامل سازی فضاهای متریک و یکنواخت

هرگاه یک فضای متریک $\langle M,d\rangle$ کامل نباشد ، آنگاه حداقل یک دنباله کوشی در $\langle M,d\rangle$ وجود دارد که نسبت به d همگرا نمی‌باشد . در ساختن مجموعهٔ اعداد حقیقی از مجموعهٔ اعداد گویا ، روشی معمول استفاده از رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های کوشی گویا می‌باشد . اکنون به بیان یک روش مشابه برای "کامل نمودن" یک فضای متریک یا فضای یکنواخت دلخواه می‌پردازیم .

فرض کنید $\langle M,d\rangle$ یک فضای متریک و $\mathcal{C}^*(M)$ نشانگر مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته و کراندار تعریف شده بر روی $\langle M,d\rangle$ باشد . گیریم $\rho(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|x\in M\}$ برای هر $f,g\in\mathcal{C}^*(M)$. اینکه ρ یک متریک روی $\mathcal{C}^*(M)$ می‌باشد ، به عنوان یک تمرین به عهدهٔ خواننده است. ثابت می‌کنیم که $\langle\mathcal{C}^*(M),\rho\rangle$ کامل است و می‌توان $\langle M,d\rangle$ را بطور یکریخت به عنوان یک زیرفضای چگال در $\langle\mathcal{C}^*(M),\rho\rangle$ نشاند .

قضیهٔ ۶ ـ ۱۳ . *$\langle\mathcal{C}^*(M),\rho\rangle$ کامل است .*

برهان . فرض کنید $\{f_n\}_{n\in I^+}$ یک دنبالهٔ کوشی دلخواه در $\langle\mathcal{C}^*(M),\rho\rangle$ باشد و $\varepsilon>0$. آنگاه عددی مانند $N\in I^+$ وجود دارد بقسمی که $|f_m(x)-f_n(x)|\leq\rho(f_m,f_n)<\varepsilon$ برای هر $m,n\geq N$ و برای هر $x\in M$. بنابراین $\{f_n(x)\}_{n\in I^+}$ برای هر $x\in M$ یک دنبالهٔ کوشی در E^1 می‌باشد و باید همگرا به یک عدد حقیقی $f(x)$ باشد . اکنون برای هر $m,n\geq N$ و هر $x\in M$ داریم $-\varepsilon<f_m(x)-f_n(x)<\varepsilon$ که هم‌ارز با $f_n(x)-\varepsilon<f_m(x)<f_n(x)+\varepsilon$ می‌باشد . با انتخاب n

و x ثابت وقتی که $m\to\infty$، نتیجه می‌گیریم که $f_n(x)-\varepsilon\le f(x)\le f_n(x)+\varepsilon$ یا $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ برای هر $n\ge N$ و برای هر $x\in M$. این امر ایجاب می‌کند که برای هر $n\ge N$ داریم

$\rho(f_n,f)=\sup\{|f_n(x)-f(x)|x\in M\}\le\varepsilon$. بنابراین $f_n\to f$ و چونکه همگرائی یکنواخت است و f_n برای هر $n\in I^+$ پیوسته و کراندار می‌باشد، لذا داریم $f\in\mathcal{C}^*(M)$. در نتیجه $<\mathcal{C}^*(M),\rho>$ کامل است. ■

تعریف ۶ـ ۱۰. دو فضای متریک $<M,\sigma>$ و $<N,\rho>$ ***طولپای*** می‌باشند اگر و فقط اگر یک همانریختی h از $<M,\sigma>$ روی $<N,\rho>$ موجود باشد به‌قسمی که $\sigma(x,y)=\rho(h(x),h(y))$ برای هر $x,y\in M$. همانریختی h موسوم به یک ***طولپایی*** می‌باشد.

قضیهٔ ۶ـ ۱۴. هر فضای متریک $<M,d>$ با یک زیرفضای چگال *از* یک زیرفضای متریک کامل $<\mathcal{C}^*(M),\rho>$ *طولپای* می‌باشد.

برهان. فرض کنید $x_0\in M$ دلخواه ولی ثابت باشد. به ازای هر $x\in M$، تابع حقیقی $f(x)$ را به صورت $[f(x)](t)=d(t,x)-d(t,x_0)$ تعریف می‌کنیم. چونکه d پیوسته است. لذا $f(x)$ نیز پیوسته می‌باشد. اکنون به عنوان نتیجه‌ای از نابرابری مثلثی داریم $|[f(x)(t)|\le d(x,x_0)$ برای هر $t\in M$. در نتیجه $f(x)$ برای هر $x\in M$ کراندار است، یعنی $f(x)\in\mathcal{C}^*(M)$. علاوه‌بر این

$$\rho(f(x),f(y)) = \sup\{|[f(x)](t)-[f(y)](t)| : t\in M\} =$$

$$\sup\{|d(t,x)-d(t,y)| : t\in M\}\ge|d(t,x)-d(t,y)| \ , \forall t\in M.$$

که برای $t=y$ این نابرابری به‌صورت $\rho(f(x),f(y))\ge d(y,x)=d(x,y)$ در می‌آید. هرگاه

$d(t,x)-d(t,y)>d(x,y)$ برای یک $t\in M$ ، آنگاه $d(t,x)>d(t,y)+d(x,y)\geq d(t,x)$ که یک تناقض می‌باشد . همچنین هرگاه $d(t,x)-d(t,y)<-d(x,y)$ برای یک $t\in M$ ، آنگاه $d(t,y)\leq d(x,y)+d(t,x)<d(t,y)$ ، که یک تناقض می‌باشد . بنابراین برای هر $t\in M$ داریم $|d(t,x)-d(t,y)|\leq d(x,y)$ که ایجاب می‌نماید $\rho(f(x),f(y))\leq d(x,y)$. در نتیجه $\rho(f(x),f(y))=d(x,y)$، که نشان می‌دهد $\langle M,d\rangle$ طولپای با زیرفضای $f(M)$ می‌باشد ، که چگال در زیرفضای کامل $\overline{f(M)}$ از $\langle \mathcal{C}^*(M),\rho\rangle$ است . ■

اثبات ساختنی قضیهٔ ۶ ـ ۱۴ را می‌توان به‌صورت زیر نیز عمل نمود . دو دنبالهٔ کوشی $\{x_n\}_{n\in I^+}$ و $\{y_n\}_{n\in I^+}$ در $\langle M,d\rangle$ "هم‌ارز" می‌باشند اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$. این رابطهٔ هم‌ارزی گردآیهٔ تمام دنباله‌های کوشی در $\langle M,d\rangle$ را به رده‌های هم‌ارز مجزا افراز می‌نماید که ما آنها را نقاط یک فضای جدید M^* با یک متریک d^* ارائه شده به‌صورت $d^*(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$ در نظر می‌گیریم ، که در آن $\{x_n\}_{n\in I^+}$ و $\{y_n\}_{n\in I^+}$ به ترتیب نمایندگان رده‌های هم‌ارزی x^* و y^* از دنباله‌های کوشی در $\langle M,d\rangle$ می‌باشند . حال نگاشت f از $\langle M,d\rangle$ در $\langle M^*,d^*\rangle$ را برای هر $x\in M$ برابر با $f(x)$ و به صورت ردهٔ هم‌ارزی از تمام دنباله‌های کوشی در $\langle M,d\rangle$ که x را به عنوان حد دارد تعریف می‌نمائیم . در این صورت می‌توان نشان داد که f یک طولپایی از $\langle M,d\rangle$ بر روی $\langle f(M),d^*\rangle$ می‌باشد و $\langle f(M),d^*\rangle$ یک زیرفضای چگال از $\langle M^*,d^*\rangle$ است . جزئیات اثبات آن به عنوان یک تمرین به عهدهٔ خواننده است . ولی می‌توان آن رادر کتاب ***بنیادهای توپولوژی عمومی*** نوشتهٔ پروین صفحات ۱۲۳-۱۲۴ یافت .

به‌علت دوگانگی موجود بین مفهوم یک دنبالهٔ کوشی در یک فضای متریک و یک

پالایهٔ کوشی در یک فضای یکنواخت ، ساختار مشابهی با آنچه که در بالا گفته شده می‌توان جهت "کامل نمودن" یک فضای دلخواه یکنواخت بکار برد . جزئیات روش ساختار آن را می‌توان در کتاب ***اصول ریاضیات*** (قسمت ۱) نوشتهٔ بورباکی در صفحات ۱۹۱ ـ ۱۹۳ پیدا نمود . به عنوان یک نتیجه ، قضیهٔ مشابه ۶ـ۱۴ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم .

قضیهٔ ٦ ـ ١٥ . *هر فضای یکنواخت به‌طور یکنواخت یکریخت با یک زیرفضای چگال از یک فضای یکنواخت کامل است .*

تمرین

٦ ـ ١٥ . نشان دهید که $<\mathcal{C}^*(M), \rho>$ یک فضای متریک است .

٦ ـ ١٦ . نشان دهید که رابطهٔ "$\sim$" داده شده بـه‌صورت $\{x_n\}_{n\in I^+} \sim \{y_n\}_{n\in I^+}$ یک رابطه هم‌ارزی بر روی گردآیهٔ تمام دنباله‌های کوشی در یک فضای متریک $<M,d>$ می‌باشد .

٦ ـ ١٧* . جزئیات اثبات اینکه $<M,d>$ یکریخت با $<f(M),d^*>$ است و $<f(M),d^*>$ چگال در $<M^*,d^*>$ می‌باشد ، بیان نمائید .

* ٦ ـ ۴ کاربردهای کامل بودن

بحث خود را در مورد کامل بودن با اثبات دو قضیهٔ مهم در مورد فضاهای متریک کامل به پایان می‌رسانیم . یکی از آنها قضیهٔ رسته بئر و دیگری قضیهٔ نگاشت انقباضی باناخ می‌باشد . اثبات قضیهٔ رستهٔ بئر را پس از یک بحث مختصر در مورد "فضاهای بئر"

آغاز می‌نمائیم .

تعریف ۶ ـ ۱۱ . یک فضای توپولوژیک $<S,\tau>$ یک **فضای بئر** است اگر و فقط اگر مقطع هر خانوادهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال در S، چگال در S باشد .

قضیهٔ ۶ ـ ۱۶. ***فرض کنید*** $<S,\tau>$ ***یک فضای بئر باشد . هرگاه*** $\mathcal{F}=\{F_n:n\in I^+\}$ ***یک پوشش بستهٔ شمارش‌پذیر دلخواه از S باشد ، آنگاه یک عضو*** $F_n\in\mathcal{F}$ ***باید شامل عضوی از*** $\tau-\{\varnothing\}$ ***باشد ، یعنی برای یک*** $n\in I^+$ ***درون*** F_n ***غیرتهی است .***

برهان . چون $S=\cup\{F_n:n\in I^+\}$ ، لذا $\varnothing=\cap\{S-F_n:n\in I^+\}$. علاوه‌بر این ، چونکه $<S,\tau>$ یک فضای بئر است ، لذا لااقل یک $S-F_n$ موجود می‌باشد که در S نمی‌تواند چگال باشد ، یعنی $\overline{S-F_n}\neq S$، که این امر ایجاب می‌نماید که برای یک $n\in I^+$ درون F_n (یعنی $S-\overline{S-F_n}$) غیرتهی است . ■

هرگاه $<S,\tau>$ یک فضای توپولوژیکی دلخواه باشد و $A\subset S$ ، بخاطر داریم که بنابر تعریف ۱ ـ ۱۱ مجموعهٔ A **هیچ جاچگال** در S می‌باشد اگر و فقط اگر درون $\overline{A}$ تهی باشد، یعنی $S-\overline{S-\overline{A}}=\varnothing$ یا $S-\overline{A}$ در S چگال است .

تعریف ۶ ـ ۱۲ . $A\subset S$ ***رستهٔ اول (لاغر)*** است اگر و فقط اگر A اجتماع تعداد شمارش‌پذیری از زیرمجموعه‌های هیچ جاچگال در S باشد . در غیر این صورت ، A **رستهٔ دوم** می‌باشد .

مثال ۶ ـ ۴ . در E^1 مجموعهٔ اعداد گویا رستهٔ اول می‌باشد ، چراکه شمارش‌پذیر و مجموعه‌های تک عضوی در E^1 هیچ جاچگال می‌باشند . همچنین ، مکمل مجموعه اعداد گویا رستهٔ دوم می‌باشد .

قضیهٔ ۶ ـ ۱۷ . ***فرض کنید*** $<S,\tau>$ ***یک فضای بئر و*** $A\subset S$ ***رستهٔ اول باشد . آنگاه*** A

دارای درون تهی است .

برهان . فرض کنید $A=\cup\{A_n:n\in I^+\}$، که در آن A_n ها برای هر $n\in I^+$ هیچ جاچگال در S است و فرض کنید $G\in\tau$ به قسمی باشد که
$G\subset A=\cup\{A_n:n\in I^+\}\subset\cup\{\overline{A}_n:n\in I^+\}$. آنگاه $\cap\{S-\overline{A}_n:n\in I^+\}\subset S-G$.
چون برای هر $n\in I^+$ ، $S-\overline{A}_n\in\tau$ و چگال در S می‌باشد ، لذا $S-G$ نیز در S چگال است . در نتیجه $\overline{S-G}=S-G=S$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که $G=\varnothing$، بنابراین A دارای درون تهی می‌باشد . ■

قضیهٔ ۶ ـ ۱۸ *(قضیهٔ رستهٔ بئر) . هر فضای متریک کامل $\langle M,d\rangle$ یک فضای بئر است و در نتیجه دارای خواص ذکرشده در قضایای ۶ ـ ۱۶ و ۶ ـ ۱۷ می‌باشد .*

برهان . فرض کنید $\{G_n:n\in I^+\}$ یک خانوادهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال در M باشد ، و $U\in\tau-\{\varnothing\}$. چونکه G_1 چگال است ، لذا $U\cap G_1\neq\varnothing$. بنابراین یک گوی باز $\langle M,d\rangle$ مانند B_1 با شرط $\delta(B_1)\leq 1$ وجود دارد به قسمی که $\overline{B}_1\subset U\cap G_1$. به روش استقراء یک دنبالهٔ $\{B_n\}_{n\in I^+}$ از گوی‌های باز $\langle M,d\rangle$ با شرایط $\delta(B_n)\leq 1/n$ و $\overline{B}_n\subset B_{n-1}\cap G_n$ به ازای هر $n>1$ به‌دست می‌آید . چونکه $\langle M,d\rangle$ کامل است و $\{\overline{B}_n:n\in I^+\}$ یک دنبالهٔ تو در توی نزولی از مجموعه‌های بسته با شرط $\lim_{n\to\infty}\delta(B_n)=0$ می‌باشد ، لذا بنابر قضیهٔ ۶ ـ ۷ داریم $\cap\{\overline{B}_n:n\in I^+\}=\{x\}$ برای یک $x\in M$. این امر ایجاب می‌کند که $\cap\{G_n:n\in I^+\}\neq\varnothing$ و $\langle M,d\rangle$ یک فضای بئر است . ■

به عنوان کاربرد دومی از کامل بودن، نگاشت انقباضی را تعریف می‌نمائیم و نشان می‌دهیم که هر نگاشت انقباضی بر روی یک فضای متریک کامل دارای یک نقطهٔ

ثابت یکتا است . این نتیجه مشهور به قضیهٔ نگاشت انقباضی باناخ می‌باشد و در سالهای اخیر به روش‌های مختلف تعمیم داده شده است .

تعریف ٦ ـ ۱۳ . فرض کنید $<M,d>$ یک فضای متریک و $f:<M,d>\to<M,d>$ یک تابع دلخواه باشد ، آنگاه $x_\circ \in M$ را یک ***نقطهٔ ثابت*** f گوئیم اگر و فقط اگر $f(x_\circ)=x_\circ$.

مثال ٦ ـ ۵ . تابع $f:E^1\to E^1$ داده شده بصورت $f(x)=x$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ هر نقطه $\mathbb{R}$ را ثابت نگه می‌دارد . ولی تابع $g:E^1\to E^1$ ارائه شده به‌صورت $g(x)=x+1$ هیچ نقطهٔ $\mathbb{R}$ را ثابت نگه نمی‌دارد . بین این دو حد نهائی ، تابع $h(x)=-x$ دقیقاً فقط یک عدد حقیقی (صفر) را ثابت نگه می‌دارد .

تعریف ٦ ـ ۱۴ . فرض کنید $<M,d>$ یک فضای متریک باشد ، آنگاه تابع $f:<M,d>\to<M,d>$ ***انقباضی*** (نسبت به d) می‌باشد اگر و فقط اگر عددی مانند $\alpha<1$ وجود داشته باشد به قسمی که $d(f(x),f(y))\leq\alpha d(x,y)$ برای هر $x,y\in M$.

قضیهٔ ٦ ـ ۱۹ (باناخ) . ***فرض کنید $<M,d>$ یک فضای متریک کامل و تابع $f:<M,d>\to<M,d>$ انقباضی (نسبت به d) باشد ، آنگاه f دارای یک نقطهٔ ثابت یکتا است .***

برهان .

یکتابودن . هرگاه $f(x_\circ)=x_\circ$ و $f(y_\circ)=y_\circ$ ، آنگاه $d(x_\circ,y_\circ)=d(f(x_\circ),f(y_\circ))\leq\alpha d(x_\circ,y_\circ)<d(x_\circ,y_\circ)$ ، که این یک تناقض است .

وجود . فرض کنید $x\in M$ دلخواه باشد . دنبالهٔ $\{x,f(x),f(f(x))=f^2(x),\ldots,f^n(x),\ldots\}$ توسط تکرار f را در نظر می‌گیریم . بدین ترتیب داریم

$$d(f(x),f^2(x))\leq\alpha d(x,f(x))$$

$$d(f^2(x),f^3(x))\le\alpha d(f(x),f^2(x))\le\alpha^2 d(x,f(x))$$

و بنابر استقراء داریم $d(f^n(x),f^{n+1}(x))\le\alpha^n d(x,f(x))$. آنگاه برای هر عدد خاص $n\in I^+$ و برای هر $m>n$ داریم

$$\begin{aligned} d(f^n(x)\ ,\ f^m(x)) &\le d(f^n(x)\ ,\ f^{n+1}(x))+\ldots+d(f^{m-1}(x)\ ,\ f^m(x)) \\ &\le(\alpha^n+\alpha^{n+1}++\alpha^{m-1})d(x,f(x)) \\ &=(1+\alpha++\alpha^{m-n-1})\alpha^n d(x,f(x)) \\ &<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x,f(x)), \end{aligned}$$

چراکه $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k$ یک سری هندسی با نسبت $\alpha<1$ می‌باشد. ولی چون وقتی که $n\to\infty$ داریم $\alpha^n\to 0$، لذا $\{f^n(x)\}_{n\in I^+\cup\{0\}}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\langle M,d\rangle$ است و بنابراین باید همگرا به یک $x_0\in M$ باشد. علاوه‌بر این، $f^n(x)\to x_0$ وقتی که $n\to\infty$، لذا این مطلب ایجاب می‌کند که $f(f^n(x))=f^{n+1}(x)\to x_0$، زیراکه f نیز پیوسته است (چرا؟)، در نتیجه $f^{n+1}(x)\to f(x_0)$ وقتی که $n\to\infty$. بالاخره، چون حدهای دنباله‌ای در هر فضای هاوسدرف دلخواه یکتا است، لذا داریم $f(x_0)=x_0$. ■

تمرین

۶ـ۱۸ . ثابت کنید که یک زیرفضای باز دلخواه از یک فضای بئر نیز یک فضای بئر است.

۶ـ۱۹ . نشان دهید که خاصیت بئر بودن یک فضا تحت توابع پیوستهٔ باز و پوشا پایدار است.

۶ـ۲۰ . نشان دهید که $\langle \mathbb{R},\mathcal{L}\rangle$ یک فضای بئر است.

۶ـ۲۱. ثابت کنید که هر فضای هاوسدرف موضعاً فشرده یک فضای بئر است .

۶ـ۲۲. نشان دهید که یک انقباض $f:\langle M,d\rangle \to \langle M,d\rangle$ الزاماً پیوسته است .

۶ـ۲۳. ثابت کنید که هرگاه $f:\langle M,d\rangle \to \langle M,d\rangle$ یک انقباض بر روی یک فضای a ـ متریک کامل $\langle M,d\rangle$ باشد ، آنگاه f دارای یک نقطهٔ ثابت یکتا است . (حالت $a=0$ دقیقاً قضیهٔ نگاشت انقباضی باناخ می‌باشد که در بالا ثابت شده است.)

فصل هفتم

نظریهٔ هموتوپی

۷ ـ ۱ درون‌برها

در فصل‌های ۷ و ۸ توجه خود را از توپولوژی "مجموعه ـ نقطه" دور نگه داشته و به فضاهای توپولوژیک بر حسب گروههای جبری معین وابسته به آنها می‌پردازیم . این گروهها پایاهای توپولوژیک می‌باشند ، بدین معنی که فضاهای همانریخت دارای گروههای نظیر یکریخت می‌باشند . در این فصل مفهوم نگاشت‌های هموتوپیک را ارائه می‌کنیم و گروههای هموتوپی وابسته به یک فضای توپولوژیک را تعریف و بررسی می‌کنیم . در فصل ۸ ما یک دنباله از گروههای شناخته شدهٔ دیگربه عنوان گروههای همولوژی تکین را تعریف و بررسی می‌کنیم و اثبات‌های ساده‌ای از قضیهٔ بنیادی جبر و قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور را با استفاده از هموتوپی و همولوژی به‌دست می‌آوریم . بحث خود در مورد نظریهٔ هموتوپی را با تذکراتی در مورد "درون‌برها" شروع می‌نمائیم . در اینجا "نگاشت" بمفهوم یک تابع پیوسته است .

تعریف ۷ ـ ۱ .

(۱) $A\subset S$ یک *درون‌بر* S می‌باشد اگر و فقط اگر یک نگاشت مانند $r:S\to A$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $r(x)=x$ به‌ازای هر $x\in A$ ، یعنی نگاشت همانی بر روی A را بتوان به‌طور پیوسته بر S گسترانید . نگاشت r موسوم به یک *درون‌بری* می‌باشد .

(۲) $A\subset S$ یک *درون‌بر همسایگی* S می‌باشد اگر و فقط اگر $U\supset A$ وجود داشته باشد

به‌قسمی که $U \subset S$ باز و A یک درون‌بر U باشد. یعنی نگاشت همانی روی A را می‌توان به‌طور پیوسته روی U گسترانید.

تعریف ۷ - ۲.

(۱) A یک *درون‌برمطلق* است اگر و فقط اگر هرگاه یک فضای نرمال داده شده S دارای یک زیرفضای بسته A' همانریخت با A باشد، آنگاه A' یک درون‌بر S باشد.

(۲) A یک *درون‌بر همسایگی مطلق* است اگر و فقط اگر هرگاه یک فضای نرمال داده شده S دارای یک زیرفضای A' همانریخت با A باشد، آنگاه A' یک درون‌بر همسایگی S باشد.

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ گسترش تیتسه، میتوان نشان داد که I^n یک درون‌بر مطلق است و S^n یک درون‌بر همسایگی مطلق می‌باشد.

قضیهٔ ۷ - ۱. *I^n یک درون‌بر مطلق است.*

برهان. فرض کنیم $h(I^n)=A'$، که در آن h یک همانریختی از I^n در یک فضای نرمال S است. چونکه A' بسته است، لذا قضیهٔ گسترش تیتسه ایجاب می‌کند که نگاشت $h^{-1}:A' \to I^n$ دارای یک گسترش پیوستهٔ $g:S \to I^n$ می‌باشد. درنتیجه $hg|A'$ روی A' همانی است و A' یک درون‌بر S می‌باشد. ■

قضیهٔ ۷ - ۲. *هرگاه $f: A \to S^n$ پیوسته باشد، که در آن A یک زیرفضای بسته از یک فضای نرمال باشد، آنگاه یک همسایگی باز $U \supset A$ در S و یک گسترش $f^*: U \to S^n$ از f بر U موجود است.*

برهان. چونکه S^n همانریخت با مرز I^{n+1} می‌باشد، لذا قضیهٔ گسترش تیتسه ایجاب می‌نماید که نگاشت $f: A \to S^n$ دارای یک گسترش پیوسته به‌صورت $g:S \to I^{n+1}$ می‌باشد. فرض کنید $p \in I^{n+1}$ به‌قسمی باشد که هر مختص آن برابر با ۱/۲ است. تابع تصویری شعاعی از p یک درون‌بر r از $I^{n+1}-\{p\}$ روی مرز I^{n+1} می‌باشد. علاوه بر

این $g^{-1}(I^{n+1}-\{p\})=S-g^{-1}(\{p\})=U\supset A$ ، و U در S باز است . بالاخره ، هرگاه قرار دهیم $f^*=rg$ ، آنگاه $f^*(x)=rg(x)=rf(x)=f(x)$ به‌ازای هر $x\in A$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که f^* یک گسترش f بر U می‌باشد . ■

تمرین

۷ - ۱ . نشان دهید که S^n یک درون‌بر همسایگی مطلق می‌باشد .

۷ - ۲ . هرگاه A یک درون‌بر S و $f: A\to T$ یک نگاشت باشد ، آنگاه نشان دهید که f را می‌توان بر تمام S گسترانید .

۷ - ۲ نگاشت‌های هموتوپیک

در این بخش مفهوم "نگاشت‌های هموتوپیک" را ارائه می‌نمائیم و نشان می‌دهیم که "هموتوپی" یک رابطهٔ هم‌ارزی روی فضای تابع T^S از تمام نگاشت‌ها از یک فضای توپولوژیک S در یک فضای توپولوژیک T می‌باشد . رده‌های هم‌ارزی حاصل موسوم به "رده‌های هموتوپی" می‌باشد و یک تجزیه از T^S را تشکیل می‌دهند. رده‌های هموتوپی از T^S را می‌توان به‌صورت مؤلفه‌های کمانی ـ همبند مشخص نمود .

تعریف ۷ - ۳. فرض کنید S و T فضاهای توپولوژیک باشند . هرگاه f و g نگاشت‌هائی از S در T باشند ، آنگاه f و g را **هموتوپیک** $(f\simeq g)$ گوئیم اگر و فقط اگر یک نگاشت مانند $h:S\times I^1\to T$ موجود باشد به‌قسمی‌که $h(x,1)=g(x),h(x,0)=f(x)$ برای تمام $x\in S$. نگاشت h موسوم به یک **هموتوپی** بین f و g می‌باشد .

قضیهٔ ۷ - ۳. *هموتوپی یک رابطه هم‌ارزی روی فضای تابع T^S از تمام نگاشت‌های از S در T می‌باشد .*

برهان.

(۱) $\simeq$ بازتابی است. هرگاه $f\in T^S$، به‌ازای هر $t\in I^+$ و برای تمام $x\in S$ قرار می‌دهیم $h(x,t)=f(x)$، درنتیجه $h(x,0)=f(x)=h(x,1)$ و $f\simeq f$.

(۲) $\simeq$ متقارن است. هرگاه $f\simeq g$، آنگاه یک هموتوپی مانند $h:S\times I^1\to T$ با شرایط $h(x,0)=f(x)$ و $h(x,1)=g(x)$ برای تمام $x\in S$ موجود است. اگر $h^*(x,t)=h(x,1-t)$، آنگاه $h^*(x,0)=h(x,1)=g(x)$ و $h^*(x,1)=h(x,0)=f(x)$ برای تمام $x\in S$ درنتیجه $g\simeq f$.

(۳) $\simeq$ ترایا است. هرگاه $f\simeq g$ و $g\simeq k$، آنگاه هموتوپی‌های $h_1,h_2:S\times I^1\to T$ با شرایط $h_1(x,0)=f(x)$، $h_1(x,1)=g(x)=h_2(x,0)$، و $h_2(x,1)=k(x)$ برای تمام $x\in S$ موجود می‌باشند. قرار می‌دهیم $h(x,t)=h_1(x,2t)$ هرگاه $0\le t\le 1/2$ و $h(x,t)=h_2(x,2t-1)$ هرگاه $1/2\le t\le 1$. بسهولت می‌توان تحقیق نمود که h پیوسته است و $h(x,0)=h_1(x,0)=f(x)$ و $h(x,1)=h_2(x,1)=k(x)$ برای تمام $x\in S$ درنتیجه $f\simeq k$. ■

تعریف ۷ - ۴. رده‌های هم‌ارزی $[f]$ مشخص شده توسط رابطه هموتوپی بر روی فضای تابع T^S از تمام نگاشت‌های $f:S\to T$ موسوم به **رده‌های هموتوپی** T^S می‌باشند.

لم ۷ - ۱. *فرض کنید S یک فضای نرمال، A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ S، و $U\supset A$ یک زیرمجموعهٔ باز S باشد. هرگاه $f:(U\times I^1)\cup(S\times\{0\})\to T$ پیوسته باشد، آنگاه f دارای یک گسترش f^* بر $S\times I^1$ می‌باشد به‌قسمی که $f^*(x,t)=f(x,t)$ برای تمام $\langle x,t\rangle\in(A\times I^1)\cup(S\times\{0\})$.*

برهان. لم اوریسون وجود یک نگاشت مانند $\varphi:S\to I^1$ با شرایط $\varphi(A)=1$ و $\varphi(S-U)=0$ را ایجاب می‌کند. گیریم $f^*(x,t)=f(x,t.\varphi(x))$. نگاشت f^* پیوسته است، چراکه f و φ پیوسته می‌باشند. هرگاه $x\in A$، آنگاه $f^*(x,t)=f(x,t)$ و اگر $x\in S$، آنگاه $f^*(x,0)=f(x,0)$ ■

قضیهٔ ۷ - ۴ . (بورسوک) . *فرض کنید* $f\simeq g:A \to S^n$ *که در آن A یک زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای متریک تفکیک‌پذیر M می‌باشد . هرگاه f دارای یک گسترش* f^* *بر M باشد . آنگاه g نیز دارای یک گسترش* g^* *بر M می‌باشد به‌قسمی که* $f^*\simeq g^*$.

برهان . چون‌که $f\simeq g$ ، لذا یک هموتوپی $h:A\times I^1 \to S^n$ با شرایط $h(x,0)=f(x)$ و $h(x,1)=g(x)$ برای تمام $x\in A$ موجود است . فرض کنید
$C=(A\times I^1)\cup(M\times\{0\})\subset M\times I^1$، و توجه داشته باشید که C بسته است. قرار می‌دهیم $F(x,0)=f^*(x)$ هرگاه $x\in M$ و $F(x,t)=h(x,t)$ هرگاه $\langle x,t\rangle\in A\times I^1$. تابع F پیوسته است، چراکه h,f پیوسته می‌باشند و $h(x,0)=f(x)=f^*(x)$ برای تمام $x\in A$. قضیهٔ ۷ - ۲ تضمین‌کننده وجود یک زیرمجموعهٔ باز U از $M\times I^1$ می‌باشد به‌قسمی که $U\supset C$ و وجود یک گسترش F^* از F بر U می‌باشد . اکنون یک زیرمجموعه باز V از M وجود دارد به‌قسمی که $A\subset V$ و $V\times I^1\subset U$. درنتیجه لم ۷ - ۱ وجود یک نگاشت $h^*:M\times I^1\to S^n$ را ایجاب می‌کند به‌قسمی که $h^*(x,t)=F^*(x,t)$ برای تمام $\langle x,t\rangle\in C$.
اکنون $g^*(x)=h^*(x,1)$ قرار می‌دهیم . درنتیجه $g^*(x)=F^*(x,1)=h(x,1)=g(x)$ برای تمام $x\in A$، که این امر ایجاب می‌نماید که g^* یک گسترش g بر M می‌باشد و h^* یک هموتوپی بین f^*,g^* می‌باشد. ■

نتیجهٔ ۷ - ۱ . *هرگاه f یک نگاشت از یک زیرمجموعهٔ بسته A از یک فضای متریک تفکیک‌پذیر M در* S^n *باشد و f هموتوپیک با یک نگاشت ثابت باشد ، آنگاه f دارای یک گسترش* f^* *بر M می‌باشد که هموتوپیک با یک نگاشت ثابت است .*

برهان . از قضیهٔ ۷ - ۴ نتیجه می‌گردد ، چراکه یک نگاشت ثابت دارای گسترش ثابت بدیهی است . ■

تمرین

۷ - ۳. نشان دهید که هر دو مسیر دلخواه $f,g:I^1 \to S$ بر روی یک فضای توپولوژیک کمانی ـ همبند S هموتوپیک می‌باشند.

۷ - ۴. نشان دهید که رده‌های هموتوپی T^S (با توپولوژی فشرده ـ باز) مؤلفه‌های کمانی ـ همبند هستند.

۷ - ۳ فضاهای انقباض پذیر و ستاره گون

آیا هموتوپیک بودن دو نگاشت $f,g:S \to T$ علاوه‌بر خود نگاشتها بستگی به فضاهای T,S نیز دارد. برخی فضاهای T دارای این خاصیت می‌باشند که تمام نگاشت‌ها از یک فضای دلخواه S در T هموتوپیک هستند. این‌چنین رده از فضاها، یعنی گردآیهٔ فضاهای "انقباض‌پذیر" همراه با زیرگردآیهٔ مهم آن یعنی فضاهای متریک "ستاره گون" در بحثی که بدنبال می‌آید، مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

تعریف ۷ - ۵. فضای T *انقباض‌پذیر* است اگر و فقط اگر یک نقطه مانند $p \in T$ موجود داشته باشد به‌قسمی که نگاشت همانی i روی T هموتوپیک با نگاشت ثابت $c:T \to \{p\}$ باشد.

تعریف ۷ - ٦. یک فضای متریک $\langle M,d \rangle$ **ستاره گون** است اگر و فقط اگر یک نقطه $p \in M$ با این خاصیت موجود باشد که هر نقطهٔ $x \in M-\{p\}$ را بتوان به نقطهٔ p توسط یک کمان یکتای همنهشت با یک بازه وصل نمود. خاصیت ستاره گون بودن توپولوژیک نیست. چرا که وابسته به متریک d می‌باشد.

قضیهٔ ۷ - ۵. *هرگاه $\langle M,d \rangle$ ستاره گون باشد، آنگاه $\langle M,d \rangle$ انقباض‌پذیر است.*

برهان. چون $\langle M,d \rangle$ ستاره گون می‌باشد، لذا یک نقطهٔ $p \in M$ با این خاصیت وجود دارد که هر نقطهٔ $x \in M-\{p\}$ را می‌توان توسط یک کمان یکتای px همنهشت با یک بازه

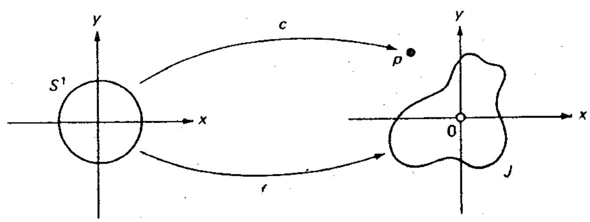
به p وصل نمود. فرض کنید $h(x,t)=y\in px$ به‌قسمی باشد که $d(p,y)=t.d(p,x)$ برای هر $t\in I^1$ و تمام $x\in M$. اکنون $h(x,0)=p$ و $h(x,1)=x$ برای هر $x\in M$ و به‌طور شهودی h تمام کمان‌های px را به‌طور شعاعی به p کاهش می‌دهد. درنتیجه $<M,d>$ انقباض‌پذیر است. ■

قضیهٔ ۷ - ٦. هرگاه T *انقباض‌پذیر باشد، آنگاه هر نگاشت* $f:S\to T$ هموتوپیک *با یک نگاشت ثابت* $cf:S\to\{p\}$ *می‌باشد و* T^S *دارای فقط یک ردهٔ هموتوپی* $[cf]$ *می‌باشد.*

برهان. فرض کنید $f:S\to T$ و i نگاشت همانی روی T باشد. چونکه T انقباض‌پذیر است، لذا $i\simeq c:T\to\{p\}$ و $cf:S\to\{p\}$. درنتیجه یک هموتوپی $h:T\times I^1\to T$ با شرایط $h(y,0)=y$ و $h(y,1)=p$ برای هر $y\in T$ وجود دارد. فرض کنید $\tilde{h}(x,t)=h(f(x),t)$ برای $<x,t>\in S\times I^1$. چون $h\circ f$ پیوسته‌اند، لذا $\tilde{h}$ پیوسته است. علاوه براین، $\tilde{h}(x,0)=h(f(x),0)=f(x)$ و $\tilde{h}(x,1)=h(f(x),1)=p$ و $f\simeq cf$.

مثال ۷ - ۱. I^n و I^ω ستاره‌گون می‌باشند بنابراین انقباض‌پذیرند. درنتیجه بنابر قضیهٔ ۷ - ۶ هر نگاشت دلخواه $f:S\to I^n$ (یا I^ω) هموتوپیک با یک نگاشت ثابت می‌باشد. علاوه بر این، هر نگاشت f از یک فضای فشرده S در E^n (یا H) هموتوپیک با یک نگاشت ثابت است.

مثال ۷ - ۲. $E^2-\{0\}$ انقباض‌پذیر نیست. برای این منظور، فرض کنید $c:S^1\to\{p\}$،



شکل ۷-۱

که در آن $\{o\}-p\in E^2$ یک نقطهٔ دلخواه است و تابع $f: S^1 \to J$ که در آن J یک خم ژردان در حول مبداء (o) باشد در نظر می‌گیریم . (ر.ک. شکل ۷ - ۱) . واضح است که f,c هموتوپیک نیستند، چراکه J را نمی‌توان در $E^2-\{o\}$ به $\{p\}$ کاهش داد . درنتیجه عکس نقیض قضیهٔ ۷ - ۶ ، انقباض‌ناپذیری $E^2-\{o\}$ را به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۷ - ۷ . *هرگاه A یک درون‌بر یک فضای انقباض‌پذیر S باشد ، آنگاه A انقباض‌پذیر است .*

برهان . فرض کنید $r:S\to A$ یک درون‌بر باشد . چون‌که S انقباض‌پذیر است، لذا نگاشت همانی i روی S هموتوپیک با نگاشت ثابت $c:S\to\{p\}$ برای یک $p\in S$ می‌باشد . یعنی یک نگاشت $h:S\times I^1\to S$ با شرایط $h(x,o)=x$ و $h(x,1)=p$ برای هر $x\in S$، وجود دارد . اکنون قرار می‌دهیم $\bar{h}(x,t)=r[h(x,t)]$ برای $<x,t>\in A\times I^1$. چونکه r,h پیوسته هستند، لذا $\bar{h}$ پیوسته است . علاوه بر این ، $\bar{h}(x,o)=r[h(x,o)]=r(x)=x$ و $h(x,1)=r[h(x,1)]=r(p)$ به‌ازای هر $x\in A$. درنتیجه نگاشت $r|A$ همانی و هموتوپیک با نگاشت $\bar{c}:A\to r(p)$ است ، و لذا A انقباض‌پذیر است . ■

تمرین

۷ - ۵ . فرض‌کنید $i:S^2\to E^3$ نگاشت شمولی و $j(x)=o$ (o مبداء در E^3 است) برای‌هر $x\in S^2$. نشان دهید که $i\simeq j$.

۷ - ٦ . فرض کنید S طوق در E^2 مشخص شده توسط نابرابریهای $a\le x_1^2+x_2^2\le b$ باشد . اگر i نگاشت همانی روی S باشد و به‌ازای هر $x=<x_1,x_2>\in S$، قرار می‌دهیم $j(x)=x'$، که در آن x' نقطهٔ تلاقی قطعه خط ox و مرز داخلی S باشد ، آنگاه نشان دهید که $i\simeq j$.

۷ - ۷ . نشان دهید که یک فضای متریک فشردهٔ دلخواه که یک درون‌بر مطلق است ،

انقباض‌پذیر می‌باشد.

۷ - ۸. هرگاه $f:S\to S^n$ یک نگاشت باشد و $S^n-f(S)\neq\varnothing$. نشان دهید که f هموتوپیک با یک نگاشت ثابت $c:S\to\{p\}$ است که در آن $p\in S^n$.

۷ - ۴ فضاهای هم ارز هموتوپیکی

اینک، مفهوم اینکه دو فضا "هم ارز هموتوپیک" هستند، ارائه می‌کنیم. هر دو فضای همانریخت هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند، ولی فضاهای هم‌ارز هموتوپیک لازم نیست همانریخت باشند. همچنین، مفاهیم "استوانهٔ نگاشت" و "درون‌بر تغییر شکل" را ارائه می‌نمائیم و نشان می‌دهیم که استوانهٔ نگاشت T_f از $f:S\to T$ هم‌ارز هموتوپیک با T است و T یک درون‌بر تغییر شکل T_f می‌باشد.

تعریف ۷ - ۷. دو فضای توپولوژیکی T,S ***هم‌ارز هموتوپیک*** هستند اگر و فقط اگر نگاشت‌هائی مانند $f:S\to T$ و $g:T\to S$ موجود باشند به‌قسمی که $fg\simeq i_T$ و $gf\simeq i_S$.

تعریف ۷ - ۸. فرض کنید $f:S\to T$ یک نگاشت باشد و روی مجموعهٔ $(S\times I^1)\cup T$ نگاشت π را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$\pi(y)=y$، به‌ازای هر $y\in T$، $\pi(x,t)=<x,t>$ برای $x\in S$ و برای $0\leq t<1$، و بالاخره $\pi(x,1)=f(x)$ به‌ازای هر $x\in S$

قرار می‌دهیم $T_f=\pi[(S\times I^1)\cup T]$ و $G\subset T_f$ باز گوئیم اگر و فقط اگر $\pi^{-1}(G)$ در $S\times I^1$ باز باشد. فضای توپولوژیک حاصل T_f موسوم به ***استوانهٔ نگاشت*** f می‌باشد.

تعریف ۷ - ۹. $D\subset S$ یک ***درون‌بر تغییر شکل*** S می‌باشد اگر و فقط اگر یک درون‌بر r از S روی D و یک هموتوپی $h:S\times I^1\to S$ با شرایط $h(x,0)=x$ و $h(x,1)=r(x)$ برای تمام $x\in S$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $h(x,t)=x$ برای تمام $x\in D$ و $t\in I^1$.

قضیهٔ ۷ - ۸. هرگاه $f:S\to T$ پیوسته باشد. آنگاه T_f هم‌ارز هموتوپیکی با T می‌باشد.

برهان . فرض کنید $g(x,t)=f(x)$ هرگاه $<x,t>\in S\times I^1$ و $g(y)=y$ هرگاه $y\in T$. چون f پیوسته است، لذا g یک تابع پیوسته از T_f روی T می‌باشد . فرض کنید $i:T\to T_f$ نگاشت شمولی باشد ، بنابراین $gi(y)=g(y)=y$ و $gi=i_T$. علاوه بر این ، $ig(y)=i(y)=y$ به‌ازای هر $y\in T$ و $ig(x,t)=i(f(x))=f(x)$ برای $<x,t>\in S\times I^1$. اینک قرار می‌دهیم $h(y,s)=y$ هرگاه $y\in T$ و $s\in I^1$ ، و $h(<x,t>,s)=<x,(1-s)t+s>$ هرگاه $<x,t>\in S\times I^1$ و $s\in I^1$. درنتیجه h یک نگاشت پیوسته از $T_f\times I^1$ روی T_f می‌باشد . هممچنین ، $h(y,0)=y$ و $h(<x,t>,0)=<x,t>$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که $h(z,0)=z$ به‌ازای هر $z\in T_f$ و بالاخره $h(y,1)=y$ و $h(<x,t>,1)=<x,1>=f(x)$ که ایجاب می‌نماید که $h(z,1)=ig(z)$ به‌ازای هر $z\in T_f$. بنابراین $ig\simeq i_{T_f}$. ■

نتیجهٔ ۷ - ۲ . *هرگاه $f:S\to T$ پیوسته باشد ، آنگاه T یک درون‌بر تغییر شکل T_f می‌باشد.*

برهان . فرض کنید $g:T_f\to T$ و $h:T_f\times I^1\to T_f$ همانند در اثبات قضیهٔ ۷ - ۸ باشند . چون $g(y)=y$ برای تمام $y\in T$ ، لذا g یک درون‌بری T_f روی T می‌باشد . نگاشت h یک هموتوپی بین i_{T_f} و g می‌باشد . علاوه بر این ، $h(y,s)=y$ به‌ازای هر $y\in T$ ، بنابراین T یک درون‌بر تغییر شکل T_f می‌باشد . ■

تمرین

۷ - ۹ . نشان دهید که S^1 و $S^1\times I^1$ هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند .

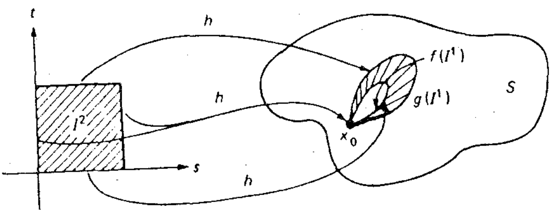
۷ - ۵ .گروه بنیادی

در این بخش رابطهٔ "هموتوپی به پیمانه x" را در گردآیهٔ $C(S,x_0)$ از تمام مسیرهای بستهٔ S در پایه $x_0\in S$ ارائه می‌دهیم . نشان داده می‌شود که این یک رابطهٔ هم‌ارزی روی

$C(S,x_0)$ می‌باشد و رده‌های هم‌ارزی (هموتوپی) حاصل تشکیل یک گروه $\Pi_1(S,x_0)$ موسوم به گروه بنیادی S به پیمانه x_0 می‌دهد. هرگاه S کمانی ـ همبند باشد، آنگاه نشان داده می‌شود که $\Pi_1(S,x_0)$ مستقل از نقطهٔ پایه x_0 می‌باشد. همچنین، نشان داده خواهد شد که هرگاه $<S,\{x_0\}>$ و $<T,\{y_0\}>$ هم‌ارز هموتوپیک باشند، آنگاه $\Pi_1(S,x_0)\simeq\Pi_1(T,y_0)$. از این امر نتیجه می‌گردد که هر دو فضای همانریخت دارای گروههای بنیادی یکریخت می‌باشند.

تعریف ۷ - ۱۰. هرگاه $f:I^1\to S$ پیوسته باشد، آنگاه f یک **مسیر بسته روی** S ***(طوقه)*** به پایه $x_0\in S$ می‌باشد اگر و فقط اگر $f(0)=f(1)=x_0$. به‌ازای هر $x_0\in S$، گردآیهٔ تمام مسیرهای بسته روی S در پایه x_0 با توپولوژی فشرده ـ باز رابه $C(S,x_0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷ - ۱۱. هرگاه $f,g\in C(S,x_0)$، آنگاه f **هموتوپیک با** g **به پیمانه** x_0 $(f \overset{\sim}{x_0} g)x_0$ می‌باشد اگر و فقط اگر یک نگاشت $h:I^2\to S$ موجود باشد به‌قسمی که $h(s,0)=f(s)$ و $h(s,1)=g(s)$ برای تمام $s\in I^1$، و $h(0,t)=h(1,t)=x_0$ برای تمام $t\in I^1$ (ر.ک.شکل ۷-۲).



شکل ۷ - ۲

قضیهٔ ۷ - ۹. ***هموتوپی به پیمانه x_0 یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $C(S,x_0)$ می‌باشد.***

برهان.

(۱) $\overset{\sim}{x_0}$ بازتابی است. هرگاه $f\in C(S,x_0)$، به‌ازای هر $t\in I^1$ و هر $s\in I^1$ قرار می‌دهیم

$h(s,t)=f(s)$. در نتیجه $h(s,1)=f(s)=h(s,0)$ برای هر $s\in I^1$ و $h(1,t)=f(1)=x_0=f(0)=h(0,t)$ برای هر $t\in I^1$. بنابراین $f \underset{x_0}{\simeq} f$.

(۲) $\underset{x_0}{\simeq}$ متقارن است. $f \underset{x_0}{\simeq} g$ وجود یک هموتوپی مانند $h:I^2\to S$ را با شرایط $h(s,0)=f(s)$ و $h(s,1)=g(s)$ برای هر $s\in I^1$ و $h(0,t)=h(1,t)=x_0$ برای هر $t\in I^1$ را ایجاب می‌نماید. اکنون $h^*(s,t)=h(s,1-t)$ قرار می‌دهیم. چون
$h^*(s,0)=h(s,1)=g(s)$ و $h^*(s,1)=h(s,0)=f(s)$ برای هر $s\in I^1$، و
$h^*(1,t)=x_0=h(1,1-t)=x_0=h(0,1-t)=h^*(0,t)$ برای هر $t\in I^1$، لذا
$g \underset{x_0}{\simeq} f$.

(۳) $\underset{x_0}{\simeq}$ ترایا است. $f \underset{x_0}{\simeq} g$ و $g \underset{x_0}{\simeq} k$ وجود هموتوپی‌های $h_1, h_2: I^2 \to S$ با شرایط $h_1(s,0)=f(s)$، $h_1(s,1)=g(s)=h_2(s,0)$، و $h_2(s,1)=k(s)$ را برای هر $s\in I^1$ و $h_2(1,t)=h_2(0,t)=x_0=h_1(1,t)=h_1(0,t)$ را برای هر $t\in I^1$ ایجاب می‌نماید. اکنون قرار می‌دهیم $h(s,t)=h_1(s,2t)$، $0\le t\le 1/2$ و
$h(s,t)=h_2(s,2t-1)$ هرگاه $1/2\le t\le 1$. تابع h پیوسته است، چراکه h_1 و h_2 پیوسته هستند. علاوه بر این، $h(s,0)=h_1(s,0)=f(s)$ و $h(s,1)=h_2(s,1)=k(s)$ برای هر $s\in I^1$ و $h(0,t)=h(1,t)=x_0$ برای هر $t\in I^1$. درنتیجه $f \underset{x_0}{\simeq} k$.

تعریف ۷ - ۱۲. رده‌های هم‌ارزی $[f]$ مشخص شده توسط هموتوپی به پیمانه x_0 روی گردآیهٔ $C(S,x_0)$ از تمام مسیرهای بسته f روی S به پایهٔ $x_0\in S$ موسوم به **رده‌های هموتوپی** از $C(S,x_0)$ می‌باشد. گردآیهٔ این رده‌های هموتوپی را به $\Pi_1(S,x_0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷ - ۱۳.

(۱) هرگاه $f,g\in C(S,x_0)$ آنگاه **پهلوی هم‌نهادن** $f*g$ از f و g را بصورت

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(۲s) & ۰ \le s \le ۱/۲ \\ g(۲s-۱) & ۱/۲ \le s \le ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌نمائیم. درنتیجه $f*g \in C(S,x_0)$ و $*$ یک عمل دوتایی روی $C(S,x_0)$ می‌باشد.
(۲) هرگاه $[f],[g] \in \Pi_1(S,x_0)$ ، آنگاه $[f] \circ [g]=[f*g]$ قرار می‌دهیم. (ر.ک. تمرین ۷-۱۰).

قضیهٔ ۷ - ۱۰. $\Pi_1(S,x_0)$ یک گروه نسبت به عمل " $\circ$ " می‌باشد.

برهان.

(۱) " $\circ$ " شرکتپذیر است، بر طبق تعریف ۷ - ۱۳ (۲) تنها باید نشان دهیم که $f*(g*k) \;\overset{\simeq}{x_0}\; (f*g)*k$ برای $f,g,k \in C(S,x_0)$. بنابر تعریف ۷ - ۱۳ (۱) داریم

$$[(f * g) * k](s) = \begin{cases} f(۴s) & ۰ \le s \le ۱/۴ \\ g(۴s-۱) & ۱/۴ \le s \le ۱/۲ \\ k(۲s-۱) & ۱/۲ \le s \le ۱ \end{cases}$$

$$[f * (g * k)](s) = \begin{cases} f(۲s) & ۰ \le s \le ۱/۲ \\ g(۴s-۲) & ۱/۲ \le s \le ۳/۴ \\ k(۴s-۳) & ۳/۴ \le s \le ۱ . \end{cases}$$

اکنون یک هموتوپی بین $(f*g)*k$ و $f*(g*k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$h(s,t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{۴s}{۱+t}\right) & \langle s,t \rangle \in I^۲ \text{ و } t \ge ۴s-۱ \\ g(۴s-t-۱) & \langle s,t \rangle \in I^۲ \text{ و } ۴s-۱ \ge t \ge ۴s-۲ \\ k\left(\dfrac{۴s-t-۲}{۲-t}\right) & \langle s,t \rangle \in I^۲ \text{ و } ۴s-۲ \ge t \end{cases}$$

شکل ۷ – ۳ این وضعیت را نشان می‌دهد . بسهولت می‌توان ثابت نمود که $h:I^{۲} \to S$ پیوسته است ، چراکه g ، f و k پیوسته می‌باشند . علاوه بر این ، شرایط زیر برقرارند :

$$h(s,۰) = \begin{cases} f(۴s) & (۰ \le s \le ۱/۴ \text{ یعنی }) ۰ \ge ۴s-۱ \\ g(۴s-۱) & (۱/۴ \le s \le ۱/۲ \text{ یعنی }) ۴s-۱ \ge ۰ \ge ۴s-۲ \\ k(۲s-۱) & (۱/۲ \le s \le ۱ \text{ یعنی }) ۰ \le ۴s-۲ \end{cases}$$

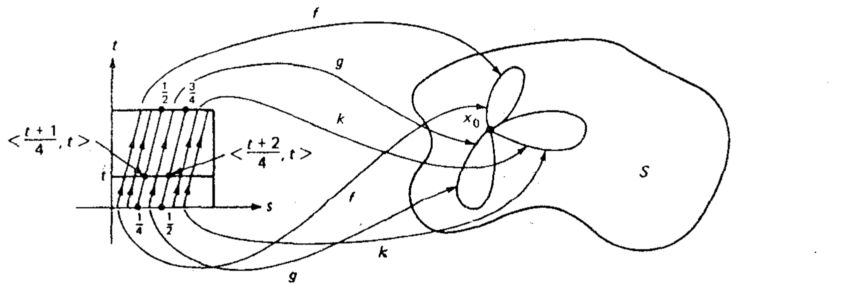
و

$$h(s,۱=) \begin{cases} f(۲s) & (۰ \le s \le ۱/۴ \text{ یعنی }) ۱ \ge ۴s-۱ \\ g(۴s-۲) & (۱/۲ \le s \le ۳/۴ \text{ یعنی }) ۴s-۲ \ge ۱ \ge ۴s-۱ \\ k(۴s-۳) & (۳/۴ \le s \le ۱ \text{ یعنی }) ۱ \le ۴s-۲ . \end{cases}$$

در نتیجه $h(s,۰)=[(f*g)*k](s)$ و $h(s,۱)=[f*(g*k)](s)$ برای هر $s\in I^{۱}$. همچنین ، $h(۰,t)=f(۰)=x_۰=k(۱)=h(۱,t)$ برای هر $t\in I^{۱}$. بنابراین $(f*g)*k \; \overset{=}{\widetilde{x_۰}} \; f*(g*k)$.

(۲) نشان می‌دهیم که نگاشت ثابت $c : I^{۱} \to \{x_۰\}$ به قسمی است که $[c]$ عنصر همانی $\Pi_۱(S,x_۰)$ نسبت به " ۰ " می‌باشد . درنتیجه باید نشان دهیم که $f*c \; \overset{=}{\widetilde{x_۰}} \; f$ برای هر $f\in C(S,x_۰)$. فرض کنید $h:I^{۲} \to S$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد :

$$h(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{۲s}{۱+t}\right) & \langle s,t\rangle \in I^{۲} \text{ و } t \ge ۲s-۱ \\ x_۰ & \langle s,t\rangle \in I^{۲} \text{ و } ۲s-۱ \ge t . \end{cases}$$



شکل ۷ – ۳

شکل ۷ - ۴. این وضعیت را نشان می‌دهد. چون f پیوسته است، لذا h نیز پیوسته است و داریم

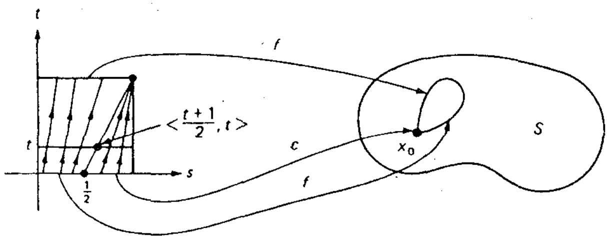
$$h(s,\circ) = \begin{cases} f(\text{۲}s) & (\circ \le s \le \text{۱/۲ یعنی } \circ \ge \text{۲}s-\text{۱}) \\ x_\circ & (\text{۱/۲} \le s \le \text{۱ یعنی } \circ \le \text{۲}s-\text{۱}) \end{cases}$$

و

$$h(s,\text{۱})=f(s)\ (\circ \le s \le \text{۱ یعنی } \text{۱} \ge \text{۲}s-\text{۱}).$$

در نتیجه $h(s,\circ)=(f*c)(s)$ و $h(s,\text{۱})=f(s)$ برای هر $s\in I^{\text{۱}}$. علاوه بر این، برای هر $t\in I^{\text{۱}}$ داریم $h(\circ,t)=f(\circ)=x_\circ=f(\text{۱})=h(\text{۱},t)$. بنابراین $f\ \underset{x_\circ}{\approx}\ f*c$.

(۳) بالاخره، باید نشان دهیم که هر ردهٔ هموتوپی $[f]\in\Pi_{\text{۱}}(S,x_\circ)$ دارای یک عنصر وارون مانند $[g]\in\Pi_{\text{۱}}(S,x_\circ)$ می‌باشد به‌قسمی که $[f]\circ[g]=[c]$. درنتیجه باید نشان دهیم که هرگاه $f\in C(S,x_\circ)$، یک عنصر مانند $g\in C(S,x_\circ)$ وجوددارد به‌قسمی‌که $f*g\ \underset{x_\circ}{\approx}\ c$ قرارمی‌دهیم $g(s)=f(\text{۱}-s)$ برای هر $s\in I^{\text{۱}}$. چونکه $g(\circ)=f(\text{۱})=f(\circ)=x_\circ=g(\text{۱})$، لذا $g\in C(S,x_\circ)$. بنابر تعریف ۷ - ۱۳ (۱) داریم



شکل ۷ - ۴

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(۲s) & ۰ \leq s \leq ۱/۲ \\ g(۲s-۱) = f(۲-۲s) & ۱/۲ \leq s \leq ۱ . \end{cases}$$

اکنون یک هموتوپی h بین $f*g$ و c به‌صورت زیر تعریف می‌نمائیم :

$$h(s, t) = \begin{cases} x_۰ & ۰ \leq s \leq t/۲ \\ f(۲s-۱) & t/۲ \leq s \leq ۱/۲ \\ g(۲s+t-۱) & ۱/۲ \leq s \leq ۱-t/۲ \\ x_۰ & ۱-t/۲ \leq s \leq ۱ . \end{cases}$$

شکل ۷ – ۵ این وضعیت را نشان می‌دهد . چونکه f و g پیوسته‌اند ، لذا h پیوسته است و داریم

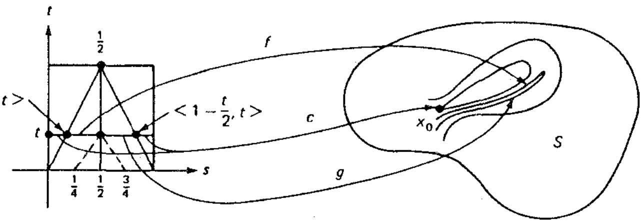
$$h(s, ۰) = \begin{cases} f(۲s) & ۰ \leq s \leq ۱/۲ \\ g(۲s-۱) & ۱/۲ \leq s \leq ۱ \end{cases}$$

و

$$h(s,۱)=x_۰ \qquad ۰ \leq s \leq ۱ .$$

درنتیجه $h(s,۰)=(f*g)(s)$ و $h(s,۱)=c(s)=x_۰$ برای هر $s \in I^۱$. علاوه‌براین برای $t \in I^۱$ داریم $h(۰,t)=x_۰=h_۰(۱,t)$. بنابراین $f*g \ \bar{x}_۰ \, c$. ■

در حالت کلی $\Pi_۱ S,x_۰$) بستگی به $x_۰$ دارد . با اینحال ، در حالتی که فضای S کمانی ـ همبند باشد ، می‌توان نشان داد که $\Pi_۱ S,x_۰$) مستقل از $x_۰$ است . درنتیجه گروه بنیادی یک فضای کمانی ـ همبند S را فقط به‌صورت $\Pi_۱(S)$ نمایش می‌دهیم . همچنین ، $\Pi_۱ S,x_۰$) در حالت کلی آبلی نیست ، حتی اگر S کمانی ـ همبند باشد . با اینحال ، هرگاه S نوع خاصی از فضای کمانی ـ همبند باشد (یعنی یک "فضای هاف" باشد) ، آنگاه $\Pi_۱(S)$



شکل ۷ − ۵

آبلی است . برای جزئیات آن به کتاب **توپولوژی** نوشتهٔ هاکنیگ و یانگ صفحات ۱۶۷−۱۶۹ مراجعه نمائید .

قضیهٔ ۷ - ۱۱ . هرگاه S کمانی ـ همبند باشد و $x_0, x_1 \in S$، *آنگاه* $\Pi_1(S,x_0)\cong\Pi_1(S,x_1)$

برهان. چون S کمانی ـ همبند می‌باشد ، لذا یک همانریختی مانند $f : I^1 \to S$ با شرایط $f(0)=x_0$ و $f(1)=x_1$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $g(s)=f(1-s)$. بنابراین $g(0)=f(1)=x_1$ و $g(1)=f(0)=x_0$. در نتیجه $f*g \underset{x_0}{\simeq} c:I^1\to\{x_0\}$ و $g*f \underset{x_1}{\simeq} c_1:I^1\to\{x_1\}$ یعنی $[f*g]=[c_0]$ و $[g*f]=[c_1]$ به‌ترتیب عناصر همانی در $\Pi_1(S,x_0)$ و $\Pi_1(S,x_1)$ می‌باشند . اگر $[k]\in\Pi_1(S,x_0)$، قرار می‌دهیم $\varphi([k])=([g*k*f])\in\Pi_1(S,x_1)$. تحقیق می‌کنیم که φ یک نگاشت ۱-۱ می‌باشد ، چرا که $k \underset{x_0}{\simeq} l$ اگر و فقط اگر $g*k*f \underset{x_1}{\simeq} g*l*f$ برای $k,l\in C(S,x_0)$. تابع φ پوشاست است ، چرا که $[k]\in\Pi_1(S,x_1)$ ایجاب می‌نماید که $[k]=\varphi([f*k*g])$ ، که در آن $f*k*g\in C(S,x_0)$. بالاخره φ یک یکریختی می‌باشد ، چرا که $\varphi([k]\circ[l])=\varphi([k])\circ\varphi([l])$ برای $[k],[l]\in\Pi_1(S,x_0)$. ■

مثال ۷ - ۳ . گروههای بنیادی فضاهای زیر دقیقاً شامل عنصر همانی است : یک فضای انقباض‌پذیر ، S^n(برای $n>1$) ، و $E^3-\{p\}$.

مثال ۷ - ۴ . گروههای بنیادی فضاهای زیر دوری بی‌پایان می‌باشند : S^1، $E^2-\{p\}$ ،

یک طوق در E^2، و $E^3 - \{L \text{ یک خط}\}$.

مثال ۷ - ۵. هرگاه T چنبره باشد، آنگاه $\Pi_1(T)\cong Z\oplus Z$. هرگاه $S=E^2-\{p_1,p_2\}$، آنگاه $\Pi_1(S)$ یک گروه آزاد با دو مولد می‌باشد.

تعریف ۷ - ۱۴. $f:\langle S,A\rangle\to\langle T,B\rangle$ یک **نگاشت جفتی** است اگر و فقط اگر $A\subset S$ و $B\subset S$ بسته باشند و $f: S\to T$ یک نگاشت با شرط $f(A)\subset B$ باشد.

قضیهٔ ۷ - ۱۲. *هرگاه $f:\langle S,\{x_0\}\rangle\to\langle T,\{y_0\}\rangle$ یک نگاشت جفتی باشد، آنگاه f یک همریختی $f_*:\Pi_1(S,x_0)\to\Pi_1(T,y_0)$ را القاء می‌نماید.*

برهان. فرض کنید $f_1:C(S,x_0)\to C(T,y_0)$ به‌صورت $(f_1 l)s=f(l(s))$ به‌ازای هر $l\in C(S,x_0)$ و هر $s\in I^1$ تعریف شده باشد. هرگاه $l_0\in C(S,x_0)$ و $f_1 l_0\in U$، که در آن U یک عضو از پایهٔ توپولوژی فشرده - باز روی $C(T,y_0)$ باشد، آنگاه U شامل آن مسیرهای بسته روی T در پایه y_0 می‌باشد که یک مجموعهٔ فشرده $K\subset I^1$ را به یک مجموعهٔ باز $G\subset T$ می‌نگارد. درنتیجه U^{-1} شامل آن مسیرهای بسته روی S در پایه x_0 می‌باشد که K را در مجموعهٔ باز $f^{-1}(G)\subset S$ می‌نگارد و $l_0\in U^{-1}$. هرگاه $g\in U^{-1}$، آنگاه $g(K)\subset f^{-1}(G)$ و $(f_1 g)(K)=f(g(K))\subset G$. درنتیجه $f_1(U^{-1})\subset U$، بنابراین f_1 پیوسته است و مؤلفه‌های کمانی - همبند $C(S,x_0)$ را بر مؤلفه‌های کمانی - همبند $C(T,y_0)$ می‌نگارد. اکنون برای $[l]\in\Pi_1(S,x_0)$، $f_*([l])=[f_1 l]$ قرار می‌دهیم. باید نشان داد که $f_*([l]\circ[g])=f_*([l])\circ f_*([g])$، که این امر درست است اگر و فقط اگر $f_1(l_* g)=(f_1 l)_*(f_1 g)$. بسهولت می‌توان تحقیق نمود که

$$(f_1\,(l*g))(s) = \begin{cases} f\,(l(2s))=(f_1 l)(2s) & 1\le s\le 1/2 \\ f\,(g(2s-1))=(f_1 g)(2s-1) & 1/2\le s\le 1\,. \end{cases}$$

درنتیجه $f_1(l*g)=(f_1 l)*(f_1 g)$ و f_* یک همریختی می‌باشد. ■

قضیهٔ ۷ - ۱۳ . هرگاه $f \simeq g : <S\{x_0\}> \to <T, \{y_0\}>$، *آنگاه* $f_* = g_* : \Pi_1(S,x_0) \to \Pi_1(T,y_0)$.

برهان. هرگاه $k \in C(S,x_0)$، آنگاه $f(k) \;\tilde{\tilde{y}}_*\; g(k)$, بنابراین $f_1 k \;\tilde{\tilde{y}}_0\; g_1 k$ و $f_* = g_*$. ■

قضیهٔ ۷ - ۱۴ . هرگاه $f : <S, \{x_0\}> \to <T, \{y_0\}>$ و $g : <T, \{y_0\}> \to <V, \{z_0\}>$ ، *آنگاه* $(gf)_* = g_* f_*$.

برهان . هرگاه $k \in C(S,x_0)$ ، آنگاه

$$((gf)_1 k)(s) = (gf)(k(s)) = g(f(k(s))) = g_1(f(k(s)))$$
$$= g_1(f_1(k(s))) = (g_1 f_1)(k(s))) .$$

درنتیجه $(gf)_1 = g_1 f_1$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که $(gf)_* = g_* f_*$. ■

نتیجهٔ ۷ - ۳ . هرگاه $<S, \{x_0\}>$ و $<T, \{y_0\}>$ ***به‌طور هم‌ارز هموتوپیک باشند ، آنگاه*** $\Pi_1(S,x_0) \cong \Pi_1(T,y_0)$.

برهان . چونکه $<S, \{x_0\}>$ و $<T, \{y_0\}>$ به‌طور هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند ، لذا نگاشت‌های $f : <S, \{x_0\}> \to <T, \{y_0\}>$ و $g : <T, \{y_0\}> \to <S, \{x_0\}>$ وجود دارند به‌قسمی که $gf \simeq i_S$ ، $fg \simeq i_T$. درنتیجه $(fg)_* = f_* g_*$ و $(gf)_* = g_* f_*$ یکریختی‌های پوشا می‌باشند و این امر ایجاب می‌نماید که f_* و g_* یکریختی پوشا می‌باشند. ■

نتیجهٔ ۷ - ۴ . هر دو فضای همانریخت گروههای بنیادی یکریخت دارند .

برهان . فرض کنید $h : S \to T$ یک همانریختی پوشا باشد و $x \in S$. درنتیجه $<S, \{x_0\}>$ و $<T, h\{x_0\}>$ هم‌ارز هموتوپیک‌اند . بنابراین ، بنابر نتیجه ۷ - ۳ داریم $\Pi_1(T,h(x_0)) \cong \Pi_1(S,x_0)$. ■

تمرین

تمرین

۷ - ۱۰ . نشان دهید که هرگاه $f_1 \overset{\approx}{x_0} f_0$ و $g_1 \overset{\approx}{x_0} g_2$ ، آنگاه $f_2 * g_2$, $\overset{\approx}{x_0}$ $f_1 * g_1$ برای $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C(S, x_0)$.

۷ - ۱۱ . جزئیات اثبات اینکه تابع φ تعریف شده در اثبات قضیهٔ ۷ - ۱۱ یک همریختی ۱ - ۱ پوشا می‌باشد (و درنتیجه یک یکریختی است) ذکر نمائید .

۷ - ۱۲ . گروه بنیادی I^n حجرهٔ n ـ بعدی بسته چیست ؟

✻ ۷ - ٦ گروههای هموتوپی بالاتر

در این بخش آخر از این فصل ، گروههای هموتوپی بالاتر $\Pi_n(S, x_0)$ برای $n > 1$ را تعریف می‌نمائیم و خاطرنشان می‌سازیم که آنها آبلی می‌باشند .

تعریف ۷ - ۱۵ . هرگاه $f : I^n \to S$ پیوسته باشد ، آنگاه f را **روی S یک مسیر بسته در پایه** $x_0 \in S$ گوئیم اگر وفقط اگر مرز ∂I^n از I^n را روی $\{x_0\}$ بنگارد. به‌ازای هر $x_0 \in S$ ، گردآیهٔ تمام مسیرهای بسته روی S در پایهٔ x_0 مجهز به توپولوژی فشرده ـ باز را به $C_n(S, x_0)$ نمایش می‌دهیم .

تعریف ۷ - ١٦ . هرگاه $f, g \in C_n(S, x_0)$ ، آنگاه f و g **هموتوپیک به پیمانهٔ** x_0 $(f \overset{\approx}{x_0} g)$ می‌باشند اگر و فقط اگر یک نگاشت پیوسته مانند $h : I^{n+1} \to S$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $h(\bar{s}, 0) = f(\bar{s})$ و $h(\bar{s}, 1) = g(\bar{s})$ برای هر $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in I^n$ و $h(\partial I^n, t) = x_0$ برای هر $t \in I^1$.

مانند قبل ، هموتوپی به پیمانهٔ x_0 یک رابطه هم‌ارزی روی $C_n(S, x_0)$ می‌باشد و گردآیهٔ حاصل از رده‌های هم‌ارزی (هموتوپی) را به $\Pi_n(S, x_0)$ نشان می‌دهیم .

تعریف ۷ - ۱۷ .

(۱) هرگاه $f, g \in C_n(S, x_0)$ ، آنگاه **پهلوی هم نهادن** $f * g$ از f و g به‌صورت زیر تعریف

می‌شود :

$$(f*g)\ (s_۱ , \dots , s_n) = \begin{cases} f\ (s_۱ , s_۲ , \dots , s_n) & ۱ \leq s \leq ۱/۲ \\ g\ (۲s_۱-۱ , s_۲ , \dots , s_n) & ۱/۲ \leq s \leq ۱. \end{cases}$$

(۲) هرگاه $[f],[g]\in\Pi_n(S,x_\circ)$ ، آنگاه مانند قبل $[f] \circ [g]=[f*g]$ تعریف می‌نمائیم .

قضیهٔ ۷ - ۱۵ . ***$\Pi_n(S,x_\circ)$ یک گروه آبلی نسبت به $\circ$ برای $n>۱$ می‌باشد .***

تمرین

۷ - ۱۳ . نشان دهید که هموتوپی به پیمانه $x_\circ$ یک رابطه هم‌ارزی روی $C_n(S,x_\circ)$ می‌باشد .

۷ - ۱۴ . نشان دهید که هرگاه $f_۱ \ \overline{\overline{x_\circ}}\ f_۲$ و $g_۱ \ \overline{\overline{x_\circ}}\ g_۲$ ، آنگاه $f_۱*g_۱ \ \overline{\overline{x_\circ}}\ f_۲*g_۲$ برای $f_۱,f_۲,g_۱,g_۲\in C_n(S,x_\circ)$.

فصل هشتم

نظریهٔ همولوژی تکین

۸ ـ ۱ سادکها و مجتمعها

در این فصل خواننده را با نظریهٔ همولوژی آشنا می‌سازیم . در اینجا گروههای همولوژی صحیح (تکین) وابسته به یک جفت توپولوژیکی $<S,A>$ را که در آن S فضای توپولوژیک و A یک زیرفضای S است ، تعریف می‌نمائیم . در حالتی که $A=\varnothing$ ، بجای گروههای همولوژی جفت توپولوژیک $<S,\varnothing>$ تنها به ذکر گروههای همولوژی S اکتفا می‌کنیم . همچنین از آن دسته از خواص نظریهٔ همولوژی تکین بحث می‌کنیم که "اصول موضوعهٔ الینبرگ ـ استینرد" معمول برای یک نظریهٔ همولوژی را تشکیل می‌دهند . دنبالهٔ همولوژی تکین برای یک زوج توپولوژیک $<S,A>$ را تعریف می‌نمائیم و نشان می‌دهیم که این دنباله دقیق است . آنگاه به‌عنوان کاربرد این مطالب چند نمونه از محاسبهٔ گروههای همولوژی و چندین قضیهٔ معروف و از آنجمله قضیهٔ نقطه ثابت براور و قضیهٔ بنیادی جبر را ارائه می‌کنیم . از آنجاکه هدف این کتاب فقط ارائهٔ مقدماتی نظریهٔ همولوژی است ، لذا تنها به شرح جنبهٔ نظری ولی ساده نظریهٔ همولوژی تکین پرداخته‌ایم تا به جنبهٔ شهودی نظریهٔ سادکها . همچنین مطالب مربوط به همولوژی و کهمولوژی چک حذف شده‌اند ، چراکه در واقع این مطالب در سطح یک درس توپولوژی جبری کارشناسی ارشد می‌باشند .

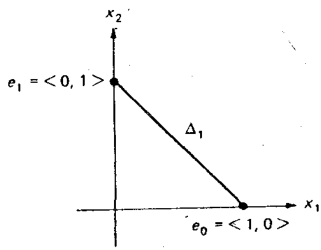
در این بخش ما مفاهیم سادکها و مجتمعهای تکین را ارائه می‌نمائیم . این مفاهیم بعدها در تعریف زنجیرها ، دورها و مرزهای تکین بکار می‌روند . در حقیقت مطالب این بخش مقدمه‌ای برای تعریف گروههای همولوژی صحیح (تکین) از یک جفت توپولوژیک $<S,A>$ در بخش ۸ - ۳ می‌باشد .

تعریف ۸ـ۱ . مجموعهٔ

$$\Delta_n=[e_0 ,e_1,...,e_n]=\{<x_0 ,x_1,...x_n>\in E^{n+1}:x_i\geq 0 \ (i=0,1,...,n)\Sigma_{i=0}^{\infty}x_i=1\}$$

nـ***سادک استاندارد*** نامیده می‌شود . نقطه $e_{i-1}\in\Delta_n$ که مختص i امش یعنی x_{i-1} برابر با یک و سایر مختصاتش صفر است به رأس i ام Δ_n موسوم است $(i=1,2,...,n+1)$. زیرمجموعهٔ $\Delta_n^{(i)}=\{<x_0 ,...,x_i,...,x_n>\in\Delta_n: x_i=0\}$ را یک **وجه مرتبه** $(n-1)$ و متقابل به رأس e_i (برای $i=0,1,...,n$) از Δ_n گوئیم .

مثال ۸ـ۱ . همان‌طور که در شکل ۸ ـ ۱ نشان داده شده است ، سادک استاندارد Δ_1 از مرتبهٔ ۱ دارای دو وجه از مرتبه صفر است که عبارتند از $\{e_1\}$ و $\{e_2\}$. بهمین ترتیب همانطور که در شکل ۸ ـ ۲ نشان داده شده است سادک استاندارد Δ_2 از مرتبهٔ ۲ دارای سه وجه از مرتبهٔ یک یعنی $[e_2,e_0]$ و $[e_1,e_2]$ و $[e_0 ,e_1]$ و سه وجه از مرتبهٔ صفر یعنی $\{e_2\}$ و $\{e_1\}$ و $\{e_0\}$ می‌باشد .

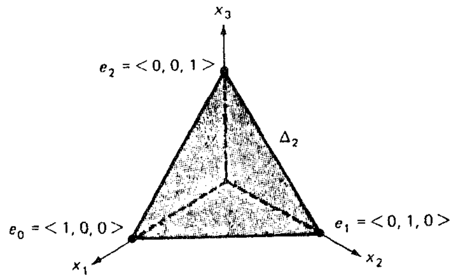


شکل ۸-۱

هرگاه $n\in I^+$، برای هر $i=0,1,\ldots,n$ همانریختی $\nu_i:\Delta_{n-1}\to\Delta_n^{(i)}$ را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nu_i(<x_0, x_1,\ldots,x_{n-1}>)=<x_0,\ldots,x_{i-1}, 0, x_i,\ldots,x_{n-1}>$$

که در آن $<x_0,\ldots,x_{n-1}>\in\Delta_{n-1}$. اگر $\nu_i:\Delta_{n-2}\longrightarrow\Delta_{n-1}$ و $\nu_j:\Delta_{n-1}\longrightarrow\Delta_n$ دو همانریختی از این نوع با شرط $n\in I^+$ و $0\leq i<j\leq n$ باشند، نتیجه می‌گردد که $\nu_j\circ\nu_i=\nu_i\circ\nu_{j-1}$ یک همانریختی از Δ_{n-2} در Δ_n می‌باشد. جزئیات آنرا به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.



شکل ۸-۲

اکنون زمینه برای تعریف مفهوم "سادک تکین از مرتبهٔ n" که زیربنائی برای توسعهٔ نظریهٔ همولوژی تکین است، مهیاست. در اینجا بار دیگر بخواننده این نکته را یادآور می‌کنیم که برای ما واژهٔ "نگاشت" یک تابع پیوسته می‌باشد و تا آخر این فصل این معنی حفظ می‌گردد.

تعریف ۸ـ۲. هرگاه S یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه یک ***سادک تکین از مرتبه n*** در S نگاشتی به‌صورت $\sigma:\Delta_n\to S$ می‌باشد. واژهٔ "تکین" در اینجا بدان معنی است که لازم نیست σ یک همانریختی باشد، بلکه صرفاً پیوسته است.

تعریف ۸ـ۳. هرگاه S یک فضای توپولوژیک و $n\geq 0$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه

$\mathcal{S}_n(S)$ نشانگر گردآیهٔ تمام سادکهای از مرتبه n در S می‌باشد. علاوه‌بر این، **مجتمع تکین** S مجموعهٔ $\mathcal{S}(S)=\cup\{\mathcal{S}_n(S):n\geq ۰\}$ با عملگرهای وجهی بیان شده در تعریف ۸ - ۴ می‌باشد.

مثال ۸ ـ ۲. فرض کنید S یک فضای توپولوژیک باشد. چونکه نگاشت f تعریف شده توسط قاعدهٔ $f(t)=<۱-t,t>$ برای هر $t\in I^+$ یک همانریختی از $I^۱$ روی $\Delta_۱$ می‌باشد، لذا هر سادک تکین σ از مرتبهٔ ۱ در S را می‌توان به عنوان یک مسیر $\sigma\circ f:I^۱\to S$ از $\sigma(e_۰)$ به $\sigma(e_۱)$ در S نظر گرفت. بنابراین گردآیهٔ $\mathcal{S}_۱(S)$ از تمام سادکهای تکین از مرتبهٔ ۱ در S با گردآیهٔ تمام مسیرهای در S یکسان است.

تعریف ۸ ـ ۴. هرگاه $n\in I^+$ و $\sigma\in\mathcal{S}_n(S)$، آنگاه ترکیب $\sigma\circ\nu_i:\Delta_{n-۱}\to S$ یک سادک تکین از مرتبهٔ $(n-۱)$ در S می‌باشد که آنرا i ـ**امین وجه** σ می‌نامیم و آن را به‌صورت $\sigma^{(i)}$ (برای $i=۰,...,n$) نشان می‌دهیم. بدین ترتیب به ازای هر $i=۰,۱,...,n$ یک تابع $d_i:\mathcal{S}_n(S)\to\mathcal{S}_{n-۱}(S)$ داده شده به‌صورت $d_i(\sigma)=\sigma^i$ برای هر $\sigma\in\mathcal{S}_n(S)$ معین می‌گردد که آنرا i*امین عملگر وجهی* روی $\mathcal{S}(S)$ نامیم.

تعریف ۸ ـ ۵. هرگاه A یک زیرفضا از فضای توپولوژیک S باشد و $\sigma\in\mathcal{S}_n(A)$، آنگاه σ را می‌توان به‌عنوان یک سادک تکین از مرتبه n به‌صورت $i\circ\sigma:\Delta_n\longrightarrow S$ در نظر گرفت که در آن i نگاشت شمولی A در S می‌باشد. بنابراین $\mathcal{S}_n(A)\subset\mathcal{S}_n(S)$ و $\mathcal{S}(A)\subset\mathcal{S}(S)$، یعنی $\mathcal{S}(A)$ یک **زیرمجتمع** از $\mathcal{S}(S)$ می‌باشد.

تمرین

۸ ـ ۱. هرگاه S یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد، گردآیهٔ $\mathcal{S}_۰(S)$ متشکل از سادک‌ها تکین از مرتبهٔ ۰ در S را بیان کنید.

۸ ـ ۲. ثابت کنید که برای هر عدد صحیح $i=۰,۱,...,n$ نگاشت $\nu_i:\Delta_{n-۱}\longrightarrow\Delta_n$ تعریف

شده در این بخش یک همانریختی پوشا می‌باشد.

۸ ـ ۳. جزئیات لازم برای نشان دادن برابری $\nu_{j-1} \circ \nu_i = \nu_i \circ \nu_j$ را بیان کنید که در آن $\nu_i : \Delta_{n-2} \longrightarrow \Delta_{n-1}$، $\nu_j : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ ($0 \leq i < j \leq n$) دو همانریختی بیان شده در این بخش می‌باشند.

۸ ـ ۴. هرگاه $\sigma \in {}_n(S)$ با شرط $n > 1$ و هرگاه $0 \leq i < j \leq n$، نشان دهید که $[\sigma^{(j)}]^{(i)} = [\sigma^{(i)}]^{(j-1)}$. (راهنمائی: از تمرین ۸ – ۳ استفاده کنید.)

۸ ـ ۲ زنجیرهای تکین

در این بخش به ازای هر عدد صحیح n، زنجیری ـ گروه‌تکین n ـ بعدی $\mathcal{C}_n(S,A)$ از یک زوج توپولوژیک $\langle S,A \rangle$ را تعریف می‌نمائیم. سپس عملگر مرزی $d: \mathcal{C}_n(S,A) \to \mathcal{C}_{n-1}(S,A)$ که به‌ازای هر $n \in I^+$ یک همریختی است، تعریف می‌نمائیم. برای جلوگیری ازهرگونه ابهام برای عملگر مرزی در $\mathcal{C}_m(S,A)$ از نماد d^m و برای عملگر مرزی در $\mathcal{C}_n(S,A)$ از نماد d^n استفاده می‌کنیم، بویژه هنگامی که هر دو در یک بحث با هم مورد بررسی باشند. با استفاده از این نامگذاری دنبالهٔ

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(S,A) \xrightarrow{d^{n+1}} \mathcal{C}_n(S,A) \xrightarrow{d^n} \mathcal{C}_{n-1}(S,A) \longrightarrow \cdots$$

را به‌عنوان مجتمع زنجیر تکین صحیح از $\langle S,A \rangle$ تعریف می‌کنیم. همچنین به ازای هر عدد صحیح n، همریختی زنجیری ـ گروه $f_n: \mathcal{C}_n(S,A) \longrightarrow \mathcal{C}_n(T,B)$ را تعریف می‌کنیم که بوسیلهٔ نگاشت جفتی $f: \langle S,A \rangle \longrightarrow \langle T,B \rangle$ القاء می‌گردد. به‌عنوان اولین قدم برای این توسعه حالت $A = \varnothing$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت بجای $\langle S,\varnothing \rangle$ از S استفاده می‌کنیم، چراکه $\mathcal{S}_n(\varnothing) = \varnothing$ ایجاب می‌کند که $\mathcal{C}_n(S,\varnothing) = \mathcal{C}_n(S)$.

تعریف ۸ ـ ٦. به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$، **زنجیری ـ گروه تکین n ـ بعدی** از S گروه آبلی جمعی $\mathcal{C}_n(S)$ تولیدشده توسط مجموعه $\mathcal{S}_n(S)$ از سادکهای تکین از مرتبه n در S

می‌باشد که در آن از گروه جمعی اعداد صحیح Z به‌عنوان ضرایب گروه مورد نظر استفاده شده است. بنابراین عناصر $\mathcal{C}_n(S)$ (یعنی : **زنجیرهای تکین *از* مرتبه n**) به‌صورت

$$\alpha = m_۱\sigma_۱ + m_۲\sigma_۲ + \ldots + m_k\sigma_k,$$

می‌باشند که در آن $m_i \in Z, \sigma_i \in \mathcal{S}_n(S)$ (برای $i=۱,۲,\ldots,k$) و $k \in I^+$. به ازای هر عدد صحیح $n < ۰$، فرض کنید $\mathcal{C}_n(S) = \{۰\}$ گروه بدیهی شامل فقط عنصر همانی جمع باشد.

تعریف ۸ ـ ۷. به ازای هر عدد صحیح $n > ۰$، **عملگر مرزی** $d: \mathcal{C}_n(S) \to \mathcal{C}_{n-۱}(S)$ همریختی تعریف شده به‌صورت زیر است :

(۱) هرگاه $\sigma \in \mathcal{S}_n(S)$، آنگاه $d\sigma = \Sigma_{i=۰}^{n} (-۱)^i d_i \sigma = \Sigma_{i=۰}^{n} (-۱)^i \sigma^{(i)} \in \mathcal{C}_{n-۱}(S)$.

(۲) هرگاه $\alpha = \Sigma_{i=۱}^{k} m_i \sigma_i \in \mathcal{C}_n(S)$، آنگاه $d\alpha = \Sigma_{i=۱}^{k} m_i d\sigma_i \in \mathcal{C}_{n-۱}(S)$ و موسوم به مرز α می‌باشد.

به ازای هر عدد صحیح $n < ۰$، $d: \mathcal{C}_n(S) \to \mathcal{C}_{n-۱}(S)$ را همریختی بدیهی می‌گیریم، چراکه در این حالت $\mathcal{C}_{n-۱}(S) = \{۰\}$.

از تعریف بالا، واضح است که مرز یک زنجیر n ـ بعدی در S یک زنجیر (n−۱) ـ بعدی در S می‌باشد. هرگاه عملگر مرزی را دوبار بکار بریم، نتیجه حاصل عضو همانی جمع یعنی "صفر" $\mathcal{C}_{n-۲}(S)$ می‌باشد، بدین معنی که ترکیب عملگر مرزی با خودش همریختی بدیهی است.

قضیهٔ ۸ ـ ۱ . هرگاه $d^n: \mathcal{C}_n(S) \to \mathcal{C}_{n-۱}(S)$ و $d^{n-۱}: \mathcal{C}_{n-۱}(S) \to \mathcal{C}_{n-۲}(S)$ عملگرهای مرزی باشند، *آنگاه برای تمام* n *ها* $d^{n-۱} \circ d^n: \mathcal{C}_n(S) \to \mathcal{C}_{n-۲}(S)$ همریختی بدیهی می‌باشد [یعنی نگارهٔ $\mathcal{C}_n(S)$ تحت $d^{n-۱} \circ d_n$ مجموعهٔ $\{۰\}$ می‌باشد].

برهان . فرض می‌کنیم که $n \geq ۲$، چونکه در غیر اینصورت $\mathcal{C}_{n-۲}(S) = \{۰\}$ و نتیجه

آشکار است . هرگاه $\sigma\in\mathcal{S}_n(S)$، آنگاه

$$d^{n-1}\circ d^n(\sigma)=d^{n-1}[d^n\sigma]=d^{n-1}[\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma^{(i)}] \qquad \text{(تعریف ۸ ـ ۷)}$$
$$=\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i d^{n-1}\sigma^{(i)}=\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i\Sigma_{j=0}^{n-1}(-1)^j[\sigma^{(i)}]^{(j)} \qquad \text{(تعریف ۸ ـ ۷)}$$
$$=\Sigma_{0\leq j<i\leq n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(j)}+\Sigma_{0\leq i\leq j<n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(j)}$$
$$=\Sigma_{0\leq j<i\leq n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(i-1)}+\Sigma_{0\leq i\leq j<n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(j)} \qquad \text{(مثال ۸ ـ ۴)}$$
$$=(-1)\Sigma_{0\leq i\leq j<n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(j)}+\Sigma_{0\leq i\leq j<n}(-1)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(j)}=0$$

به عنوان حاصل آنکه j را با i و (i-۱) را با j در مجموع اول عوض نمائیم . هرگاه $\alpha=\Sigma_{i=1}^{k}m_i\sigma_i\in\mathcal{C}_n(S)$، آنگاه $d^{n-1}\circ d^n(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{k}m_i d^{n-1}\circ d^n(\sigma_i)=0$، چراکه نشان دادیم $d^{n-1}\circ d^n(\sigma_i)=0$ برای $(i=1,\ldots,k)$. ■

تعریف ۸ ـ ۸. برای هر فضای توپولوژیک S دلخواه ، دنبالهٔ

$$\cdots\longrightarrow\mathcal{C}_{n+1}(S)\xrightarrow{d^{n+1}}\mathcal{C}_n(S)\xrightarrow{d^n}\mathcal{C}_{n-1}(S)\longrightarrow\cdots$$

را ***مجتمع زنجیری تکین صحیح*** S نامیم .

هر نگاشت از یک فضای توپولوژیک S در یک فضای توپولوژیک T یک همریختی از $\mathcal{C}_n(S)$ در $\mathcal{C}_n(T)$ به ازای هر عدد صحیح n ، به‌صورت زیر القاء می‌نماید .

تعریف ۸ ـ ۹ . فرض کنید S و T فضاهای توپولوژیک و $f:S\to T$ پیوسته باشند . هرگاه $\sigma\in\mathcal{S}_n(S)$، آنگاه $f_n(\sigma)=f\circ\sigma\in\mathcal{S}_n(T)$. علاوه‌بر این، برای $\alpha=\Sigma_{i=1}^{k}m_i\sigma_i\in\mathcal{C}_n(S)$ ، قرار می‌دهیم $f_n(\alpha)=\Sigma_{i=1}^{k}m_i f_n(\sigma_i)\in\mathcal{C}_n(T)$. به ازای هر عدد صحیح n ، نگاشت $f_n:\mathcal{C}_n(S)\to\mathcal{C}_n(T)$ که بدین ترتیب تعریف می‌گردد ***همریختی زنجیری ـ گروه القاء شده توسط*** f می‌باشد .

تذکر. به روش طبیعی می‌توان بحث بالا را در حالت کلی برای یک جفت توپولوژیک <S,A> گسترش داد که در آن A یک زیرفضای دلخواه S می‌باشد .

(۱) به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$، **زنجیری ـگروه تکین n ـ بعدی** $\mathcal{C}_n(S,A)$ از جفت توپولوژیک $\langle S,A \rangle$، گروه خارج‌قسمتی $\mathcal{C}_n(S)/\mathcal{C}_n(A)$ می‌باشد، که در آن $\mathcal{C}_n(A)$ توسط $\mathcal{S}_n(A)$ تولید شده است. عناصر $\mathcal{C}_n(S,A)$ موسوم به **زنجیرهای تکین از مرتبهٔ n جفت** $\langle S,A \rangle$ یا **زنجیرهای تکین از مرتبهٔ n فضای S به پیمانهٔ A** می‌باشد. گروه $\mathcal{C}_n(S,A)$ یکریخت با زیرگروهی از $\mathcal{C}_n(S)$ می‌باشد که توسط $\mathcal{S}_n(S)-\mathcal{S}_n(A)$ تولید می‌گردد. به ازای هر عدد صحیح $n < ۰$، قرار می‌دهیم $\mathcal{C}_n(S,A)=\{۰\}$ یعنی زیرگروه بدیهی $\mathcal{C}_n(S)$ که شامل فقط عنصر همانی جمعی است.

(۲) هرگاه $d:\mathcal{C}_n(S) \longrightarrow \mathcal{C}_{n-۱}(S)$ عملگر مرزی باشد، آنگاه تحدید $d|\mathcal{C}_n(A)$ گروه $\mathcal{C}_n(A)$ را در $\mathcal{C}_{n-۱}(A)$ می‌نگارد. بنابراین d یک همریختی از گروه خارج‌قسمتی $\mathcal{C}_n(S,A)$ در گروه خارج‌قسمتی $\mathcal{C}_{n-۱}(S,A)$ القاء می‌نماید که ما آنرا نیز به d یا d^n نشان می‌دهیم. البته گاه برای جلوگیری از هرگونه ابهامی بین عملگرهای مرزی بر روی زنجیر-گروههای با بعدهای متفاوت n، آنرا به d^n نمایش می‌دهیم. خواننده باید ثابت کند که قضیهٔ ۸ـ۱ برای همریختی مرزی القاء شده $d:\mathcal{C}_n(S,A) \longrightarrow \mathcal{C}_{n-۱}(S,A)$ نیز معتبر است.

(۳) دنبالهٔ

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_{n+۱}(S,A) \xrightarrow{d^{n+۱}} \mathcal{C}_n(S,A) \xrightarrow{d^n} \mathcal{C}_{n-۱}(S,A) \longrightarrow \cdots$$

موسوم به **مجتمع زنجیری تکین صحیح** $\langle S,A \rangle$ می‌باشد.

(۴) هرگاه $f:\langle S,A \rangle \to \langle T,B \rangle$ یک نگاشت جفتی باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح n نگاشت f یک همریختی $f_n:\mathcal{C}_n(S,A) \longrightarrow \mathcal{C}_n(T,B)$ موسوم به **همریختی زنجیری ـگروه** القاء می‌کند. هرگاه $\sigma \in \mathcal{S}_n(S)$، آنگاه $f_n(\sigma)=f \circ \sigma \in \mathcal{S}_n(T)$، و هرگاه $\sigma \in \mathcal{S}_n(A)$، آنگاه $f_n(\sigma)=f \circ \sigma \in \mathcal{S}_n(B)$. آشکار است که f_n به یک همریختی از $\mathcal{C}_n(S)$ در $\mathcal{C}_n(T)$ گسترش می‌یابد که $\mathcal{C}_n(A)$ را در $\mathcal{C}_n(B)$ می‌نگارد. همریختی

مطلوب ، همریختی جفتی $f_n:<\mathcal{C}_n(S),\mathcal{C}_n(A)>\to<\mathcal{C}_n(T),\mathcal{C}_n(B)>$ می باشد .

تمرین

۸ـ۵. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح n داریم $\mathcal{C}_n(S,\varnothing)=\mathcal{C}_n(S)$.

۸ـ۶. نشان دهید که هرگاه $d^n:\mathcal{C}_n(S,A)\longrightarrow\mathcal{C}_{n-1}(S,A)$ و $d^{n-1}:\mathcal{C}_{n-1}(S,A)\longrightarrow\mathcal{C}_{n-2}(S,A)$ عملگرهای مرزی تحدید شده باشند، آنگاه $d^{n-1}\circ d^n:\mathcal{C}_n(S,A)\longrightarrow\mathcal{C}_{n-2}(S,A)$ همریختی بدیهی است .

۸ـ۷. فرض کنید $f:<S,A>\to<T,B>$ و $g:<T,B>\to<W,C>$ نگاشت‌های جفتی باشند . هرگاه به ازای هر $n\geq 0$ توابع $f_n:\mathcal{C}_n(S,A)\to\mathcal{C}_n(T,B)$ ، $g_n:\mathcal{C}_n(T,B)\to\mathcal{C}_n(W,C)$ و $(g\circ f)_n:\mathcal{C}_n(S,A)\to\mathcal{C}_n(W,C)$ به ترتیب همریختی های گروه زنجیری القاء شده باشند ، نشان دهید که $(g\circ f)_n=g_n\circ f_n$.

۸ـ۸. فرض کنید $f:<S,A>\to<T,B>$ یک نگاشت جفتی باشد . ثابت کنید که عملگر مرزی با همریختی زنجیری ـگروه القاء شده جابجائی می‌باشد : یعنی نشان دهید که $f_n\circ d=d\circ f_{n+1}$.

۸ ـ ۳ گروههای همولوژی تکین

زنجیری ـگروه تکین nـ بعدی $\mathcal{C}_n(S,A)$ از جفت توپولوژیک $<S,A>$ شامل دو زیرگروه مهم می‌باشد . این گروهها به ترتیب عبارتند از گروه $\mathcal{Z}_n(S,A)$ متشکل از "nـ دورهای" تکین در S به پیمانه A و گروه $\mathcal{B}_n(S,A)$ متشکل از "nـ مرزهای" تکین در S به پیمانه A . این گروهها در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند و بمنظور تعریف گروه همولوژی‌تکین $H_n(S,A)$ به ازای هر عدد صحیح n برای جفت $<S,A>$ بکار می‌روند .

تعریف ۸ـ ۱۰ . هرگاه $\alpha\in\mathcal{C}_n(S,A)$، آنگاه α یک nـدور در S به پیمانه A می‌باشد اگر

و فقط اگر $d\alpha=0$. در نتیجه گردآیهٔ $\mathcal{Z}_n(S,A)$ از تمام n ـ دورهای در S به پیمانه A دقیقاً هستهٔ عملگر مرزی $d:\mathcal{C}_n(S,A)\to\mathcal{C}_{n-1}(S,A)$ است و در نتیجه یک زیرگروه از $\mathcal{C}_n(S,A)$ می‌باشد.

تعریف ۸ ـ ۱۱. هرگاه $\alpha\in\mathcal{C}_n(S,A)$، آنگاه α یک n ـ مرز در S به پیمانه A می‌باشد اگر و فقط اگر یک $\gamma\in\mathcal{C}_{n+1}(S,A)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\alpha=d\gamma$. در نتیجه گردآیهٔ $\mathcal{B}_n(S,A)$ از تمام n ـ مرزهای در S به پیمانه A نگارهٔ عملگر مرزی $d:\mathcal{C}_{n+1}(S,A)\to\mathcal{C}_n(S,A)$ است و یک زیرگروه از $\mathcal{C}_n(S,A)$ می‌باشد.

با استفاده از مثال ۸ ـ ۶، خواننده بسهولت می‌تواند ثابت کند که $\mathcal{B}_n(S,A)$ در حقیقت یک زیرگروه از $\mathcal{Z}_n(S,A)$ می‌باشد. اکنون به ازای هر عدد صحیح n، گروه همولوژی تکین مرتبه n یعنی $H_n(S,A)$ را به‌صورت گروه خارج‌قسمتی $\mathcal{Z}_n(S,A)/\mathcal{B}_n(S,A)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸ ـ ۱۲. گروه همولوژی تکین n ـ بعدی جفت $<S,A>$ گروه خارج‌قسمتی $H_n(S,A)=\mathcal{Z}_n(S,A)/\mathcal{B}_n(S,A)$ می‌باشد. عناصر $H_n(S,A)$ **رده‌های همولوژی** هستند و همرده‌ها به‌صورت $[\alpha]=\alpha+\mathcal{B}_n(S,A)$ می‌باشند که در آن $\alpha\in\mathcal{Z}_n(S,A)$. در نتیجه هرگاه $\alpha,\beta\in\mathcal{Z}_n(S,A)$، آنگاه α و β **همولوگوس به پیمانه** A می‌باشند و یا هر دو متعلق به ردهٔ همولوژی ($\alpha\sim\beta \bmod A$) هستند اگر و فقط اگر $\alpha-\beta\in\mathcal{B}_n(S,A)$.

تذکر در حالت خاصی که $A=\varnothing$، داریم $\mathcal{C}_n(S,\varnothing)=\mathcal{C}_n(S)$، $\mathcal{Z}_n(S,\varnothing)=\mathcal{Z}_n(S)$، $\mathcal{B}_n(S,\varnothing)=\mathcal{B}_n(S)$ و $H_n(S,\varnothing)=H_n(S)=\mathcal{Z}_n(S)/\mathcal{B}_n(S)$.

چون هر سادک تکین دلخواه از مرتبهٔ صفر یک نگاشت ثابت از Δ_0 به یک نقطهٔ $x_0\in S$ می‌باشد، در نتیجه می‌توان آن را با x_0 یکی گرفت، لذا $\mathcal{S}_0(S)=S$. بنابر این زنجیری‌ـگروه ۰ ـ بعدی در S

$$\mathcal{C}_0(S)=\{\Sigma_{i=1}^{k} m_i x_i : m_i\in Z, x_i\in S, k\in I^+\}$$

می‌باشد. همچنین $\mathcal{C}_{-1}(S)=\{0\}$، که این امر ایجاب می‌نماید که
$\mathcal{Z}_0(S)=((\operatorname{Ker} d:\mathcal{C}_0(S)\longrightarrow \mathcal{C}_{-1}(S))=\mathcal{C}_0(S)$. هرگاه $\mathcal{P}(S)$ نشانگر گروه جمعی آبلی تولیدشده توسط گردآیهٔ مؤلفه‌های مسیری S باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که یک همریختی پوشا و یکتای

$$h:\mathcal{Z}_0(S)\longrightarrow \mathcal{P}(S)$$

موجود است، چراکه $\mathcal{Z}_0(S)=\mathcal{C}_0(S)$ و $\mathcal{C}_0(S)$ گروه جمعی آبلی تولید شده توسط S می‌باشد. علاوه‌بر این، می‌توان نشان داد که هستهٔ h برابر با $\mathcal{B}_0(S)$ می‌باشد. در نتیجه، بنابر قضیهٔ بنیادی یکریختی (قضیه ۰ ـ ۵) یک یکریختی از $H_0(S)=\mathcal{Z}_0(S)/\mathcal{B}_0(S)$ روی $\mathcal{P}(S)$ وجود دارد. این مطلب چکیده‌ای از اثبات قضیهٔ ۸ ـ ۲ می‌باشد که به عنوان یک نتیجهٔ مهم این حقیقت را دربردارد که $H_0(S)$ بی‌پایان دوری است اگر و فقط اگر S مسیری ـ همبند باشد. جزئیات آنرا می‌توان در صفحات ۲۱۴ ـ ۲۱۸ کتاب *نظریه همولوژی* نوشتهٔ هو یافت.

قضیهٔ ۸ ـ ۲. ***$H_0(S)$ یکریخت با گروه جمعی آبلی $\mathcal{P}(S)$ تولید شده توسط گردآیهٔ مؤلفه‌های مسیری ـ همبند S می‌باشد.***

تمرین

۸ ـ ۹. ثابت کنید که $\mathcal{B}_n(S,A)$ یک زیرگروه از $\mathcal{Z}_n(S,A)$ می‌باشد. علاوه‌بر این، هرگاه $\alpha\in\mathcal{C}_n(S)$، نشان دهید که (الف) $\alpha\in\mathcal{Z}_n(S,A)$ اگر و فقط اگر $d\alpha\in\mathcal{C}_{n-1}(A)$ و (ب) $\alpha\in\mathcal{B}_n(S,A)$ اگر و فقط اگر عناصری مانند $\gamma\in\mathcal{C}_{n+1}(S,A)$ و $\beta\in\mathcal{C}_n(A)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\alpha=d\gamma+\beta$.

۸ ـ ۱۰. به ازای هر عدد صحیح $n<0$، گروه $H_n(S,A)$ را معین کنید.

۸ ـ ۱۱. مشابه قضیهٔ ۸ ـ ۲ را در مورد جفت توپولوژیک $\langle S,A\rangle$ بیان نمائید و به

جزئیات اثبات آن اشاره نمائید .

۸ ـ ۱۲ . با استفاده از قضیهٔ ۸ ـ ۲ و تمرین ۸ ـ ۱۱ نشان دهید که $H_0(S)$ یک گروه بی‌پایان دوری است و در حالتی که S مسیری ـ همبند است و $\varnothing \neq A \subset S$، گروه $H_0(S,A)$ بدیهی می‌باشد .

۸ ـ ۱۳ . هرگاه S یک مجموعهٔ تک عضوی باشد . نشان دهید که $H_0(S)$ گروه دوری بی‌پایان است و $H_n(S)$ برای $n \neq 0$ بدیهی است .

۸ ـ ۱۴ . هرگاه S فضای گسستهٔ $\{x_1,...,x_n\}$ باشد ، نشان دهید که $H_0(S)$ گروه آبلی آزاد با n مولد می‌باشد و $H_m(S)$ برای $m \neq 0$ بدیهی است .

۸ ـ ۱۵ . ثابت کنید که رابطهٔ "α و β همولوگوس در S به پیمانه A می‌باشند" یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathcal{Z}_n(S,A)$ می‌باشد . رده‌های هم‌ارزی حاصل (هم مجموعه ها) رده‌های همولوژی بیان شده در تعریف ۸ ـ ۱۲ می‌باشند .

۸ ـ ۴ خواص همولوژی تکین

در این بخش ثابت می‌کنیم که یک نگاشت جفتی $f:\langle S,A\rangle \to \langle T,B\rangle$ یک همریختی f_* از $H_n(S,A)$ در $H_n(T,B)$ القاء می‌کند ، بدین ترتیب که نشان می‌دهیم که همریختی زنجیری ـ گروه القاء شده

$$f_n:\mathcal{C}_n(S,A)\to\mathcal{C}_n(T,B)$$

n ـ دورهای همولوگوس در S به پیمانه A را بر روی n ـ دورهای همولوگوس در T به پیمانه B می‌نگارد . نشان خواهیم داد که گروههای همولوژی پایاهای توپولوژیک هستند و فضاهای هم‌ارز هموتوپیکی دارای گروههای همولوژی یکریخت می‌باشند . در نتیجه، همولوژی یک خاصیت توپولوژی ضعیف‌تر از هموتوپی می‌باشد ، چراکه فضاهائی هستند که دارای گروههای همولوژی یکسان می‌باشند ولی هم‌ارز هموتوپیک نیستند .

[برای مثال H_n (چنبرهٔ) $\cong H_n$ (چنبرهٔ "سوده") برای هر $n \neq ۲$، ولیکن چنبره و چنبرهٔ "سوده" هم‌ارز هموتوپیک نیستند]. این بخش را با بیانی از "قضیه برش" به آخر می‌رسانیم که بعداً در محاسبهٔ گروههای همولوژی تکین مورد استفاده قرار می‌گیرند (بخش‌های ۸ـ۵ و ۸ـ۶).

قضیهٔ ۸ـ۳. *هرگاه $f:\langle S,A\rangle \longrightarrow \langle T,B\rangle$ یک نگاشت جفتی باشد، آنگاه*

(۱) $f_n(\mathcal{Z}_n(S,A)) \subset \mathcal{Z}_n(T,B)$.

(۲) $f_n(\mathcal{B}_n(S,A)) \subset \mathcal{B}_n(T,B)$.

(۳) *$f_*:H_n(S,A) \to H_n(T,B)$ یک همریختی می‌باشد، که در آن $f_*([\alpha])=[f_n(\alpha)]$ به‌ازای هر $[\alpha]\in H_n(S,A)$.*

برهان.

(۱) هرگاه $\alpha\in\mathcal{Z}_n(S,A)$، آنگاه $d\alpha=۰$ و این امر ایجاب می‌نماید که $df_n(\alpha)=f_{n-۱}(d\alpha)=f_{n-۱}(۰)=۰$، چراکه d با f_n جابجا می‌شود و f_n یک همریختی است. در نتیجه $f_n(\alpha)\in\mathcal{Z}_n(T,B)$.

(۲) هرگاه $\alpha\in\mathcal{B}_n(S,A)$، آنگاه عنصری مانند $\gamma\in\mathcal{C}_n(S,A)$ وجود دارد به‌قسمی که $\alpha=d\gamma$. این امر ایجاب می‌کند که $f_n(\alpha)=f_n(d\alpha)=df_{n+۱}(\gamma)$، که در آن $f_{n+۱}(\gamma)\in\mathcal{C}_{n+۱}(T,B)$. لذا $f_n(\alpha)\in\mathcal{B}_n(T,B)$.

(۳) هرگاه $\alpha'\in[\alpha]\in H_n(S,A)$، آنگاه $\alpha-\alpha'\in\mathcal{B}_n(S,A)$. در نتیجه بنابر (۲) $f_n(\alpha-\alpha')=f_n(\alpha)-f_n(\alpha')\in\mathcal{B}_n(T,B)$، لذا $f_*([\alpha])=[f_n(\alpha)]=[f_n(\alpha')]=f_*([\alpha'])$، که این امر ایجاب می‌نماید که f_* خوش تعریف است (یعنی مستقل از نمایندهٔ انتخابی از هر ردهٔ همولوژی دلخواه است).

بالاخره داریم

$$f_*([\alpha]+[\beta])=f_*([\alpha+\beta])=[f_n(\alpha+\beta)]=[f_n(\alpha)+f_n(\beta)]=[f_n(\alpha)]+[f_n(\beta)]$$

$$=f_*([\alpha])+f_*([\beta]),$$

که بنابراین f_* یک همریختی می‌باشد. ■

قضیهٔ ۸ ـ ۴. هرگاه $f:\langle A,S\rangle \to \langle T,B\rangle$ **و** $g:\langle T,B\rangle \to \langle W,C\rangle$ ***نگاشت‌های جفتی باشند، آنگاه*** $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.

برهان. هرگاه $[\alpha]\in H_n(S,A)$، آنگاه

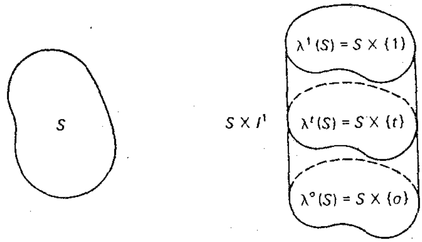
$$(g\circ f)_*([\alpha])=[(g\circ f)_n(\alpha)]=[g_n\circ f_n(\alpha)]=g_*([f_n(\alpha)])=g_*\circ f_*([\alpha]).$$

با استفاده از قضیهٔ ۸ ـ ۴، با شرط $\langle W,C\rangle=\langle S,A\rangle$ و $g=f^{-1}$، می‌توان نشان داد که گروههای همولوژی از $\langle S,A\rangle$ پایاهای توپولوژیک می‌باشند. ■

قضیهٔ ۸ ـ ۵. گروههای همولوژی تکین $\langle S,A\rangle$ پایاهای توپولوژیکی هستند.

برهان. فرض کنید نگاشت پوشای $f:S\to T$ یک همانریختی باشد و $A\subset S$. آنگاه $f:\langle S,A\rangle\to\langle T,f(A)\rangle$ و $g=f^{-1}:\langle T,f(A)\rangle\to\langle S,A\rangle$ نگاشتهای جفتی پوشا می‌باشند، یعنی $g\circ f$ نگاشت همانی روی $\langle S,A\rangle$ و $f\circ g$ نگاشت همانی روی $\langle T,f(A)\rangle$ می‌باشد. بنابراین $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ نگاشت همانی روی $H_n(S,A)$ است و $(f\circ g)_*=f_*\circ g_*$ نگاشت همانی روی $H_n(T,f(A))$ می‌باشد و در نتیجه $H_n(S,A)\cong H_n(T,f(A))$. ■

انتظار این که دو نگاشت جفتی هموتوپیک باید همریختی یکسان بین گروههای همولوژی تکین را القاء نماید بنظر قابل قبول می‌رسد. این نتیجه در نظریهٔ همولوژی به عنوان "قضیهٔ هموتوپی" شناخته شده است. برای اثبات آن در آغاز مفهوم یک "نگاشت بالابرنده" را ارائه می‌دهیم و به‌صورت یک لم، یک خاصیت بنیادی از نگاشت‌های بالابرنده را بیان می‌کنیم. اثباتی از این لم را می‌توان در صفحات ۱۲۸ ـ ۱۲۹ کتاب مقدمه‌ای بر **توپولوژی جبری** نوشتهٔ والاس یافت.

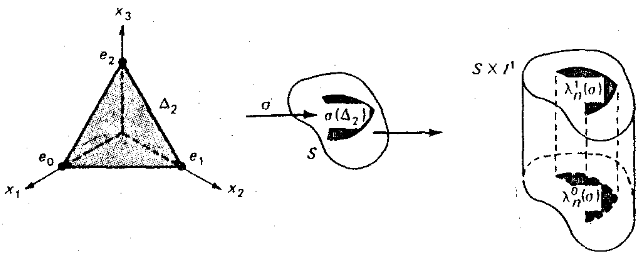


شکل ۸–۳

تعریف ۸ـ۱۳. فرض کنید S یک فضای توپولوژیک و $\lambda^t: S\to S\times I^1$ یک نگاشت تعریف شده به‌صورت $\lambda^t(x)=\langle x,t\rangle$ به ازای هر $x\in S$ باشد. به ازای هر $t\in I^1$، نگاشت λ^t موسوم به ***نگاشت بالابرنده*** می‌باشد. ر.ک. شکل ۸ـ۳.

لم. هرگاه $\alpha\in\mathcal{Z}_n(S,A)$، *آنگاه* $\lambda^1_n(\alpha)\sim\lambda^0_n(\alpha)$ **به پیمانه** $A\times I^1$.

در حالتی که $\alpha=\sigma$ یک سادک تکین از مرتبه ۲ روی S باشد، لم بالا ایجاب می‌نماید که سادکهای تکین که نگاره‌هایشان در رویه‌های جانبی استوانهٔ $S\times I^1$ (شکل ۸ـ۴) قرار دارند باید یکدیگر را بی‌اثر نمایند.



شکل ۸–۴

قضیهٔ ۸ـ۶. هرگاه $A\subset S$، *آنگاه* $\mathcal{L}_*=\lambda^1_*: H_n(S,A)\to H_n(S\times I^1, A\times I^1)$.

برهان هرگاه $[\alpha]\in H_n(S,A)$ ، آنگاه بنابر تعریف ۸ ـ ۱۲ و لم بالا داریم

$$\lambda^{\circ}_*([\alpha])=[\lambda^{\circ}_n(\alpha)]=[\lambda^{1}_n(\alpha)]=\lambda^{1}_*([\alpha]) .\ \blacksquare$$

قضیهٔ ۸ ـ ۷ (هموتوپی) . هرگاه $f\cong g:<S,A> \longrightarrow <T,B>$ ، *آنگاه* $f_*=g_*:H_n(S,A)\to H_n(T,B)$.

برهان. فرض کنید h یک هموتوپی بین f و g باشد . این امر ایجاب می‌کند که $f=h\circ\lambda^{\circ}$ و $g=f\circ\lambda^{1}$. بنابراین ، برطبق قضیهٔ ۸ ـ ۶ داریم

$$f_*=(h\circ\lambda^{\circ})_*=h_*\circ\lambda^{\circ}_*=h_*\circ\lambda^{1}_*=(h\circ\lambda^{1})_*=g_* .\quad \blacksquare$$

قضیهٔ بعدی ما نتیجه‌ای از قضیهٔ هموتوپی است . در حالت خاص ، نشان می‌دهیم که جفت‌های توپولوژیک هم‌ارز هموتوپیک دارای گروههای همولوژی تکین یکریخت می‌باشند . این نتیجه ایجاب می‌نماید که هر درون‌بر تغییرشکل دلخواه از یک فضای S دارای گروههای همولوژی تکین یکریخت با گروههای همولوژی تکین S می‌باشد .

قضیهٔ ۸ ـ ۸ . هرگاه $<S,A>$ و $<T,B>$ *توسط توابع* f و g *هم‌ارز هموتوپیک باشند ، آنگاه* $f_*:H_n(S,A)\to H_n(T,B)$ *یک یکریختی پوشا می‌باشد .*

برهان. فرض کنید i و i' به ترتیب نگاشتهای همانی $<S,A>$ و $<T,B>$ باشند . آنگاه $g\circ f\cong i$ و $f\circ g\cong i'$ ، که این امر با توجه به قضیهٔ ۸ ـ ۷ ایجاب می‌نماید که $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*=i_*$ و $f_*\circ g_*=(f\circ g)_*=i'_*$. بنابراین f_* و g_* یکریختی‌های پوشا می‌باشند. $\blacksquare$

قضیهٔ ۸ ـ ۹ . هرگاه D *یک درون‌بر تغییرشکل از* S *باشد ، آنگاه* $H_n(D)\cong H_n(S)$.

برهان. چون D یک درون‌بر تغییرشکل از S می‌باشد ، لذا D و S هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند.بابکاربردن قضیهٔ ۸ـ۸ با شرط $A=B=\varnothing$ و $T=D$ داریم $H_n(D)\cong H_n(S)$ $\blacksquare$

قضیهٔ ۸ ـ ۱۰ . فرض کنید $B\subset A\subset S$ *فضاهای توپولوژیک باشند و* $g:<S,B>\longrightarrow <S,A>$ *نگاشت جفتی شمولی باشد . هرگاه* $f:<S,A>\longrightarrow <S,B>$

یک نگاشت جفتی باشد به‌قسمی که $f(A)\subset B$ ***و*** $h:S\times I^1 \longrightarrow S$ ***یک هموتوپی بین*** f ***و نگاشت همانی روی*** $\langle S,A\rangle$ ***باشد به‌قسمی که*** $h(B\times I^1)\subset B$***، آنگاه*** $g_*:H_n(S,B)\longrightarrow H_n(S,A)$ ***یک یکریختی پوشا می‌باشد.***

برهان. نگاشت $h|\langle S\times I^1,B\times I^1\rangle$ یک هموتوپی بین $f|\langle S,B\rangle$ و نگاشت همانی $\langle S,B\rangle$ می‌باشد. علاوه‌بر این، $f\circ g=f|\langle S,B\rangle$ و $g\circ f=f$، که این امر ایجاب می‌کند که $f:\langle S,A\rangle\longrightarrow\langle S,B\rangle$ و $g:\langle S,B\rangle\longrightarrow\langle S,A\rangle$ وارون‌های هموتوپیک می‌باشند. در نتیجه، از قضیهٔ ۸ ـ ۸ نتیجه می‌گردد که $g_*:H_n(S,B)\longrightarrow H_n(S,A)$ یک یکریختی پوشا می‌باشد. ■

بالاخره ما به بیان نتیجهٔ بسیار مهّم "قضیهٔ برش" می‌پردازیم که آنرا یکی از مفیدترین ابزارها در محاسبهٔ گروههای همولوژی تکین در دو بخش آینده می‌دانیم. در اینجا به اثبات این قضیه نمی‌پردازیم، چراکه احتیاج به معرفی چندین مفهوم و ایدهٔ جدید دارد که در این کتاب از اولویت برخوردار نیستند. با مطالعهٔ دقیق فصل هفتم کتاب *مقدمه‌ای بر توپولوژی جبری* نوشتهٔ والاس، خوانندهٔ علاقمند می‌تواند اثبات آن را با تمام جزئیات بیابد.

قضیهٔ ۸ ـ ۱۱. (برش) ***هرگاه*** $\overline{G}\subset U\subset A\subset S$ ***، که در آن*** U ***باز و*** $f:\langle S-G,A-G\rangle\longrightarrow\langle S,A\rangle$ ***نگاشت جفتی شمولی باشد، آنگاه*** $f_*:H_n(S-G,A-G)\longrightarrow H_n(S,A)$ ***یک یکریختی پوشا به ازای هر عدد صحیح*** n ***می‌باشد.***

تمرین

۸ـ۱۶. برای تمام اعداد صحیح $m\geq 0$ در هر یک از حالات زیر $H_m(S)$ را معین کنید.

(الف) $S=B^n$ (گوی یکهٔ n ـ بعدی).

(ب) $S=I^n$ (مکعب یکهٔ n ـ بعدی).

(ج) $S=E^n$ (فضای اقلیدسی n ـ بعدی).

۸ـ۱۷. نشان دهید که چنبره، یک طوق، و یک دایره دارای گروههای همولوژی تکین یکسان می‌باشند.

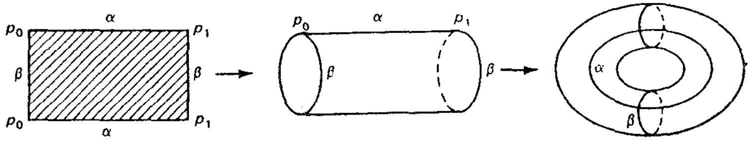
۸ـ۱۸. فرض کنید $B=\{x\in E^n:|x|\leq ۲\}$، $C=\{x\in E^n:۱\leq|x|\leq ۲\}$ و $S=\{x\in E^n:|x|=۲\}$. در نتیجه C یک "قلاده" برای مرز S از گوی n ـ بعدی B می‌باشد. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح m، $H_m(B,C)\cong H_m(B,S)$.

۸ـ۱۹. فرض کنید

$$S^n=\{<x_۱,\ldots,x_i,\ldots,x_{n+۱}>\in E^{n+۱}:\Sigma_{i=۱}^{n+۱}x_i^۲=۱\}$$

کره‌یکه در $E^{n+۱}$، $A\subset S^n$ نیمکره‌ای باشد که برای آن $x_{n+۱}\geq ۰$، $A'\subset S^n$ زیرمجموعه‌ای باشد که برای آن $x_{n+۱}\leq ۱/۲$، $S^{n-۱}\subset S^n$ زیرمجموعه باشد که برای آن $x_{n+۱}=۰$ و $B=A\cap A'$. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح m داریم $H_m(S^n,A')\cong H_m(A,B)\cong H_m(A,S^{n-۱})$.

۸ـ۲۰. فرض کنید S نوار مستطیلی (شکل ۸ـ۵) با مرز A باشد و T چنبرهٔ حاصل از یکی گرفتن اضلاع متقابل باشد. هرگاه $B=\alpha\cup\beta$، نشان دهید که $H_n(S,A)\cong H_n(T,B)$.



شکل ۸ـ۵

۸ ـ ۵ دنبالهٔ همولوژی

در این بخش دنبالهٔ همولوژی تکین برای یک جفت توپولوژیک $<S,A>$ را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که "دقیق" است . "دقیق‌بودن" دنبالهٔ همولوژی یکی از مفیدترین ابزارها در محاسبه گروههای همولوژی تکین می‌باشد. بحث در این مورد را با پیشگفتاری از تعاریف همریختی‌های تک گزین ، تصویری و مرزی آغاز می‌نمائیم .

تعریف ۸ ـ ۱۴ .

(۱) ***همریختی تک گزین*** $i_*:H_n(A) \longrightarrow H_n(S)$ القاء شده توسط نگاشت شمولی $i:A\to S$ می‌باشد . در نتیجه $i_*([\alpha])=[i_n(\alpha)]\in H_n(S)$ به ازای هر $[\alpha]\in H_n(A)$.

(۲) ***همریختی تصویری*** $j_*:H_n(S)\longrightarrow H_n(S,A)$ القاء شده توسط نگاشت جفتی شمولی $j:<S,\varnothing> \longrightarrow <S,A>$ می‌باشد . در نتیجه $j_*([\alpha])=[j_n(\alpha)]\in H_n(S,A)$ به ازای هر $[\alpha]\in H_n(S)$.

(۳) ***همریختی مرزی*** $\delta:H_n(S,A)\to H_{n-1}(A)$ توسط قانون $\delta([\alpha])=[d\alpha]\in H_{n-1}(A)$ به ازای هر $[\alpha]\in H_n(S,A)$ تعریف شده است (نشان دهید که δ خوش تعریف است) .

تذکر . بمنظور جلوگیری از هرگونه ابهامی ، مادامی که دو همریختی تک گزین در یک بحث مورد بررسی قرار گیرند ، از نمادهای $i^n_*:H_n(S)\to H_n(S), i^m_*:H_m(S)\to H_m(S)$ استفاده می‌کنیم . به طریق مشابه برای جلوگیری از هرگونه ابهام در مورد دو همریختی تصویری از نمادهای اندیس بالای j^m_* و j^n_* و در مورد دو همریختی مرزی از نمادهای اندیس بالای δ^m و δ^n استفاده می‌کنیم .

تعریف ۸ ـ ۱۵ . *دنباله همولوژی تکین* از جفت توپولوژیک $<S,A>$ دنباله گروهها و همریختی‌های زیر می‌باشد :

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i^n_*} H_n(S) \xrightarrow{j^n_*} H_n(S,A) \xrightarrow{\delta^n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i^{n-1}_*} H_{n-1}(S) \xrightarrow{j^{n-1}_*} \cdots$$

$$\xrightarrow{\delta^1} H_0(A) \xrightarrow{i_*^0} H_0(S) \xrightarrow{j_*^0} H_0(S,A) \xrightarrow{\delta^0} \{0\}$$

تعریف ۸ـ۱۶ . دنباله تعریف شده در تعریف ۸ـ۱۵ **دقیق** است اگر و فقط اگر نگارهٔ هر همریختی هستهٔ همریختی بعدی باشد . در اینجا از نماد "img" برای نگاره و از "ker" برای هسته استفاده می‌کنیم .

قضیهٔ ۸ـ۱۲ . *دنباله همولوژی تکین دقیق است .*

برهان .

(۱) $\text{img } i_* = \ker j_*$. هرگاه $[\alpha] \in H_n(S) \cap \text{img} i_*^n$ ، آنگاه $\alpha \in \mathcal{Z}_n(A)$. فرض کنید $\beta = -\alpha \in \mathcal{C}_n(A)$ و $\gamma = 0$. آنگاه $\alpha + \beta = d\gamma = 0$ و $\alpha \sim 0$ modulo A ، یعنی $j_*^n([\alpha]) = 0$ این امر ایجاب می‌نماید که $\text{img } i_*^n \subset \ker j_*^n$. از طرف دیگر $[\alpha] \in H_n(S)$ و $j_*^n([\alpha]) = 0$ ایجاب می‌نماید که $\alpha = d\gamma + \beta$ برای یک $\beta \in \mathcal{C}_n(A)$ و یک $\gamma \in \mathcal{C}_{n+1}(S)$. در نتیجه $d\beta = d\alpha = 0$ ، که این امر نشان می‌دهد که $\beta \in \mathcal{Z}_n(A)$ و $[\beta] = [\alpha] \in \text{img } i_*^n$. بدین‌ترتیب $\ker j_*^n \subset \text{img } i_*^n$ و در نتیجه $\text{img } i_*^n = \ker j_*^n$.

(۲) $\text{img } j_*^n = \ker \delta^n$. هرگاه $[\alpha] \in H_n(S,A) \cap \text{img } j_*^n$ ،آنگاه $\alpha \in \mathcal{Z}_n(S)$ و $\delta^n([\alpha]) = 0$. در نتیجه $\text{img } j_*^n \subset \ker \delta^n$. از طرف دیگر ، هرگاه $[\alpha] \in H_n(S,A)$ و $\delta^n([\alpha]) = 0$ ، آنگاه $[d\alpha] = 0 \in H_{n-1}(A)$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که $d\alpha \sim 0$ modulo A . در نتیجه $\beta \in \mathcal{C}_n(A)$ وجود دارد به‌قسمی که $d\alpha = d\beta$ ، که این امر ایجاب می‌نماید که $\alpha - \beta \in \mathcal{Z}_n(S)$ و $\alpha - \beta \sim \alpha$ modulo A . بنابراین $j_*^n([\alpha - \beta]) = [\alpha]$ و $\ker \delta^n \subset \text{img } j_*^n$. این امر نشان می‌دهد که $\text{img } j_*^n = \ker \delta^n$.

(۳) $\text{img } \delta^n = \ker i_*^{n-1}$. هرگاه $[\alpha] \in H_{n-1}(A) \cap \text{img} \delta^n$ ، آنگاه $\alpha = d\beta$ برای یک $\beta \in \mathcal{Z}_n(S,A)$. این امر ایجاب می‌نماید که $\alpha \sim 0$ و $i_*^{n-1}([\alpha]) = 0$. درنتیجه $[\alpha] \in \ker i_*^{n-1}$ و $\text{img} \delta^n \subset \ker i_*^{n-1}$. ازطرف دیگر، هرگاه $[\alpha] \in H_{n-1}(A)$ و $i_*^{n-1}([\alpha]) = 0$ ، آنگاه $\alpha \sim 0$

این امر ایجاب می‌نماید که $\alpha=d\beta$ برای یک $\beta\in\mathcal{C}_n(S)$. چون $\alpha\in\mathcal{C}_{n-1}(A)$، لذا داریم $\beta\in\mathcal{Z}_n(S,A)$ و $\delta^n([\beta])=[d\beta]=[\alpha]$، که این امر ایجاب می‌نماید که $[\alpha]\in\mathrm{img}\,\delta^n$. در نتیجه $\ker i_*^{n-1}\subset\mathrm{img}\,\delta^n$، بنابراین $\mathrm{img}\,\delta^n=\ker i_*^{n-1}$. ■

قضیهٔ ۸ ـ ۱۳. هرگاه $f:\langle S,A\rangle\to\langle T,B\rangle$ یک نگاشت جفتی باشد، آنگاه $\delta\circ f_*=(f|A)_*\circ\delta$.

برهان. هرگاه $[\alpha]\in H_n(S,A)$، آنگاه

$$\delta\circ f_*([\alpha])=\delta[f_n(\alpha)]=[df_n(\alpha)]=[f_{n-1}(d\alpha)]$$
$$=(f|A)_*([d\alpha])=(f|A)_*\circ\delta([\alpha])\,.\quad ■$$

این بخش را با چندین مثال که از مفیدبودن قضیهٔ برش و "دقیق‌بودن" دنباله همولوژی در محاسبهٔ گروههای همولوژی تکین استفاده می‌گردد، به‌پایان می‌رسانیم.

مثال ۸ ـ ۳. فرض کنید S نشانگر دایرهٔ یکه با نقاط انتخابی p_1p_2,q_1q_2,r_1r_2 مانند شکل ۸ ـ ۶ باشد. هرگاه A نشانگر خم $p_1q_1r_1$ و B نشانگر خم $p_2q_2r_2$ باشد، آنگاه $A\cup B=S$. اگر $C=A\cap B$، که اجتماع خم p_2p_1 و خم r_2r_1 می‌باشد. بنابر قضیهٔ برش به ازای هر عدد صحیح n داریم $H_n(S,A)\cong H_n(B,C)$. علاوه‌بر این، یک هموتوپی بین نگاشت جفتی همانی روی $\langle B,C\rangle$ و نگاشت جفتی $\langle B,C\rangle$ در خودش به‌قسمی که خم p_2p_1 را روی $\{p_2\}$ و خم r_2r_1 را روی $\{r_2\}$ می‌نگارد وجود دارد. بنابر قضیهٔ هموتوپی (۸ ـ ۷) داریم

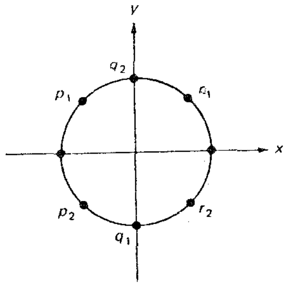
$$H_n(S,A)\cong H_n(B,C)\cong H_n(B\{p_2,r_2\})\,.$$

طبق تمرین ۸ ـ ۲۳ داریم $H_n(B,\{p_2,r_2\})=\{0\}$ هرگاه $n\neq 1$ و $H_1(B,\{p_2,r_2\})\cong Z$.

اکنون دنبالهٔ همولوژی برای جفت $\langle S,A\rangle$ را در نظر می‌گیریم:

$$\to H_n(A)\xrightarrow{i_*^n}H^n(S)\xrightarrow{j_*^n}H^n(S,A)\xrightarrow{\delta^n}H_{n-1}(A)\to\cdots$$
$$\to H_1(A)\xrightarrow{i_*^1}H_1(S)\xrightarrow{j_*^1}H_1(S,A)\xrightarrow{\delta^1}H_0(A)\xrightarrow{i_*^0}H_0(S)\xrightarrow{j_*^0}H_0(S,A).$$

هرگاه $n>1$، $H_n(A)=\{0\}$، که این امر ایجاب می‌نماید که $\mathrm{img}\,i_*^n=\{0\}=\ker j_*^n$.



شکل ۸-۶

در نتیجه $H_n(S)$ یکریخت با یک زیرگروه از $H_n(S,A)$ می‌باشد . از تذکرات بالا برای $n>1$ داریم $H_n(A,S)=\{0\}$ و بنابراین $H_n(S)=\{0\}$. علاوه‌بر این ، $H_1(A)=\{0\}$ ، این امر ایجاب می‌نماید که $\operatorname{img} i_*^0=\{0\}=\ker j_*^0$. در نتیجه $H_1(S)$ یکریخت با یک زیرگروه از گروه دوری بی‌پایان $H_1(A,S)$ می‌باشد . چون $H_0(S,A)=\{0\}$ ، لذا $\operatorname{img} i_*^0=\ker j_*^0=H_0(S)$. چونکه A و S کمانی ـ همبند می‌باشند ، لذا $H_0(A)\cong H_0(S)\cong Z$ و i_*^0 یک یکریختی پوشا می‌باشد . این امر ایجاب می‌نماید که $\operatorname{img}\delta^1=\ker i_*^0=\{0\}$ که در نتیجه $\operatorname{img} j_*^1=\ker\delta^1=H_1(S,A)$. بنابراین j_*^1 پوشا و $H_1(S)$ گروه دوری بی‌پایان می‌باشد . بنابراین نشان دادیم که $H_n(S)=\{0\}$ برای $n>1$ و $H_0(S)\cong H_1(S)\cong Z$.

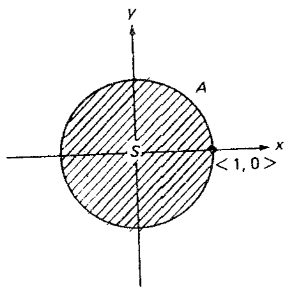
مثال ۸ ـ ۴ . فرض کنید S نشانگر قرص مستدیر یکهٔ بسته با مرز A باشد (ر.ک. شکل ۸ − ۷) . دنباله همولوژی برای جفت <S,A> را در نظر می‌گیریم :

$$H_n(A)\xrightarrow{i_*^n}H_n(S)\xrightarrow{j_*^n}H_n(S,A)\xrightarrow{\delta^n}H_{n-1}(A)\dots H_2(A)\xrightarrow{i_*^2}H_2(S)$$
$$\xrightarrow{j_*^2}H_2(S,A)\xrightarrow{\delta^2}H_1(A)\xrightarrow{i_*^1}H_1(S)\xrightarrow{j_*^1}H_1(S,A)\xrightarrow{\delta^1}H_0(A).$$

برای $n>2$ ، $H_n(S)=\{0\}$ ، و همچنین بنابر مثال ۸ ـ ۳ داریم $H_{n-1}(A)=\{0\}$. در

نتیجه برای $n>2$ داریم $H_n(S,A)=\ker\delta^n=\operatorname{img} j_*^n=\{0\}$. برای $n=2$، داریم $H_2(S)=H_1(S)=\{0\}$، که این امر ایجاب می‌نماید که $H_1(A)=\ker i_*^1=\operatorname{img}\delta^2$ و $\ker\delta^2=\operatorname{img} j_*^2=\{0\}$. در نتیجه $H_2(S,A)\cong H_2(A)$ که بنابر مثال ۸ ـ ۳ یک گروه دوری بی‌پایان است. اینک اگر $\alpha\in Z_1(S,A)$، آنگاه $d\alpha\sim 0$ modulo A، چون $H_0(A)$ یک گروه دوری بی‌پایان است. این امر نشان می‌دهد که $\operatorname{img}\delta^1=\{0\}$، که درنتیجه $H_1(S,A)=\ker\delta^1=\operatorname{img} j_*=\{0\}$، چراکه $H_1(S)=\{0\}$. علاوه‌بر این، بنابر تمرین ۸ ـ ۱۲ داریم $H_0(S,A)=\{0\}$. در نتیجه برای $n\neq 2$، نشان خواهیم داد که $H_n(S,A)$ بدیهی است و $H_2(S,A)$ یک گروه دوری بی‌پایان است.

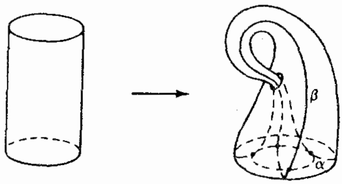
مثال ۸ ـ ۵. فرض کنید T چنبره بیان شده در تمرین ۸ ـ ۲۰ (ر. ک. شکل ۸ ـ ۵) باشد. هرگاه $B=\alpha\cup\beta$، آنگاه $H_n(B)$ برای $n\geq 2$ بدیهی است، $H_0(B)$ یک گروه دوری بی‌پایان است، و $H_1(B)$ بنابر تمرین ۸ ـ ۲۴ یک گروه آبلی آزاد با دو مولد می‌باشد. علاوه‌بر این، بنابر قضیهٔ برش $H_n(T,B)\cong H_n(S,A)$، که در آن S قرص مستدیر یکهٔ بسته با مرز A می‌باشد. بنابر مثال ۸ ـ ۴ برای $n\neq 2$ گروه $H_n(T,B)$ بدیهی است و $H_2(T,B)$ گروه دوری بی‌پایان است. با استفاده از این اطلاعات و "دقیق‌بودن" دنباله



شکل ۸-۷

همولوژی از جفت $<T,B>$ می‌توان نشان داد که برای $n \geq ۳$، گروه $H_n(T)$ بدیهی است، $H_۰(T)$ و $H_۲(T)$ دوری بی‌پایان هستند و $H_۱(T)$ گروه آبلی آزاد دو مولده می‌باشد. جزئیات آن در اینجا حذف شده است.

مثال ۸ـ۶. هرگاه یک استوانهٔ مستدیر باپایان را در نظر گیریم و انتهاهای متقابل آن را

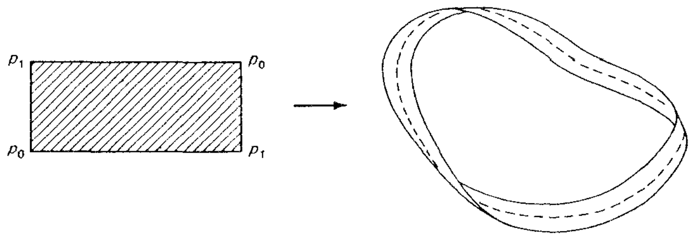


شکل ۸-۸

مادامی که سوی دو دایره را وارونه کرده‌ایم، یکی کنیم. نتیجهٔ حاصل "بطری کلاین" B می‌باشد، که یک رویهٔ یک طرفهٔ سوناپذیر می‌باشد که نمی‌توان در $E^۳$ آن را بنا نمود. ولی با این حال، هرگاه خود مقطعی را مجاز بدانیم، می‌توان بطری کلاین را در $E^۳$ به‌صورت شکل ۸ـ۸ نشان داد. اگرچه جزئیات آن در اینجا نیامده است، ولی می‌توان نشان داد که برای $n \geq ۲$، گروه $H_n(B)$ بدیهی است. با استفاده از روش ساختن بطری و شکل ۸ـ۸، واضح است که به طریق شهودی $H_۱(B)$ دارای دو مولد می‌باشد، یکی دور آزاد عرضی α و دیگری دور طولی "نامسطح" β که یک ۱ـدوری مرزی است هرگاه تعداد زوجی عبور کند و یک ۱ـدور غیرمرزی است هرگاه تعداد فردی عبور نماید. این نحوهٔ استدلال شهودی پیشنهاد می‌نماید که $H_۱(B) \cong Z \oplus Z/۲$ که در آن $Z/۲$ گروه اعداد صحیح به پیمانهٔ ۲ می‌باشد. چون B کمانی ـ همبند است، لذا $H_۰(B)$ یک گروه دوری

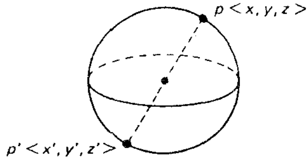
بی‌پایان می‌باشد .

مثال ۸ ـ ۷ . "نوار موبیوس" M از نیم‌پیچیدن یک نوار مستطیلی و سپس یکی‌نمودن انتهاهای مقابل به‌دست می‌آید . نتیجهٔ حاصل ، رویهٔ یک طرفه سوناپذیر در شکل ۸ ـ ۹ می‌باشد . اگرچه ما جزئیات آن را حذف نموده‌ایم ، ولی می‌توان نشان داد که $H_n(M)$ برای $n \geq ۲$ بدیهی است . به طریق شهودی ، هرگاه ما از مسیر میانی M که یک ۱ ـ دور مولد روی M می‌باشد ، عبور کنیم ، در این صورت از یک مسیر که همانریخت S^1 می‌باشد ، عبور نموده‌ایم . در نتیجه $H_1(M)$ گروه دوری بی‌پایان است . چونکه M کمانی ـ همبند است ، لذا $H_0(M)$ نیز گروه دوری بی‌پایان است .



شکل ۸-۹

مثال ۸ ـ ۸ . "صفحهٔ تصویری حقیقی" P^2 از یکی‌نمودن جفت‌های نقاط متقاطر



شکل ۸-۱۰

$S^2=\{<x,y,z>\in E^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ به‌دست می‌آید (ر.ک. شکل ۱۰ - ۸). یا به بیان هم‌ارز

$$P^2=\{<x,y,z>\in E^3 : <x,y,z>\neq<0,0,0>, <x,y,z>=<x',y',z'>$$

اگر و فقط اگر $\exists\lambda\neq 0 : x=\lambda x' \ ,y=\lambda y' \ ,z=\lambda z'\}$.

می‌توان نشان داد که $H_n(P^2)$ برای $n\geq 2$ بدیهی است. $H_0\ (P^2)$ گروه دوری بی‌پایان است و $H_1(P^2)\cong Z/2$. جزئیات آن را می‌توان در صفحهٔ ۱۵۹ کتاب ***مقدمه‌ای بر توپولوژی جبری*** نوشتهٔ والاس یافت.

تمرین

۸ـ ۲۱. ثابت کنید که نگاشت $\delta:H_n(S,A)\to H_{n-1}(A)$ که در تعریف ۸ـ۱۴ به‌صورت $\delta([\alpha])=[d\alpha]$ ارائه شده است در حقیقت یک همریختی است، بدین معنی که $\delta([\alpha]+[\beta])=\delta([\alpha])+\delta([\beta])$ برای تمام $[\alpha],[\beta]\in H_n(S,A)$.

۸ـ ۲۲. هرگاه $A=\{p\}$ با شرط $p\in S$، آنگاه با استفاده از "دقیق‌بودن" دنبالهٔ همولوژی نشان دهید که $H_n(S,A)\cong H_n(S)$ به ازای هر عدد صحیح $n\geq 1$.

۸ـ ۲۳. فرض کنید $S=[0,1]$ و $A=\{0,1\}$. با استفاده از "دقیق‌بودن" دنبالهٔ همولوژی ثابت کنید که $H_n(S,A)=\{0\}$ هرگاه $n\neq 1$ و $H_1(S,A)\cong Z$.

۸ـ ۲۴. هرگاه S یک زیرفضا از E^2 متشکل از دو دایره با دقیقاً یک نقطه مشترک باشد، آنگاه با استفاده از قضیهٔ برش و "دقیق‌بودن" دنبالهٔ همولوژی گروههای $H_n(S)$ را برای تمام اعداد صحیح $n\geq 0$ معین کنید.

۸ـ۶ همولوژی گوی‌ها و کره‌ها

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ برش و "دقیق‌بودن" دنبالهٔ همولوژی برای تمام $m\geq 0$

محاسبهٔ گروههای همولوژی تکین از n ـ کره S^n و همچنین جفت $<B^n,S^{n-1}>$ را محاسبه می‌کنیم. که در آن B^n گوی یکهٔ (بسته) با مرز S^{n-1} است. محاسبهٔ ما متضمن روش مورد استفاده در مثال ۸ـ۳ می‌باشد که اساساً همان روش والاس می‌باشد (ر. ک. صفحات ۱۶۲ ـ ۱۶۶).

مثال ۸ـ۹. قسمت زیر از دنبالهٔ همولوژی برای جفت $<B^n,S^{n-1}>$ که در آن $n,m\geq 2$ را در نظر می‌گیریم:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{m+1}} H_m(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*^m} H_m(B^n) \xrightarrow{j_*^m} H_m(B^n,S^{n-1})$$
$$\xrightarrow{\delta^m} H_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*^{m-1}} H_{m-1}(B^n) \xrightarrow{j_*^{m-1}} \cdots$$

بخاطرداشته باشید که $H_m(B^n)$ و $H_{m-1}(B^n)$ برای $m\geq 2$ بدیهی است (تمرین ۸ـ۱۶). بنابراین $\{0\}=\operatorname{img} j_*^m=\ker\delta^m$, $\operatorname{img}\delta^m=\ker i_*^{m-1}=H_{m-1}(S^{n-1})$. در نتیجه δ^m یک یکریختی پوشا است، یعنی برای $n,m\geq 2$ داریم

$$H_m(B^n,S^{n-1})\cong H_{m-1}(S^{n-1})\,. \qquad (1)$$

برای $n\geq 2$ و $m=1$ قسمت زیر از دنبالهٔ همولوژی $<B^n,S^{n-1}>$ را در نظر می‌گیریم:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^2} H_1(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*^1} H_1(B^n) \xrightarrow{j_*^1} H_1(B^n,S^{n-1}) \xrightarrow{\delta^1} H_0(S^{n-1})$$
$$\xrightarrow{i_*^0} H_0(B^n) \xrightarrow{j_*^0} H_0(B^n,S^{n-1}) \xrightarrow{\delta^0} \{0\}.$$

چونکه S^{n-1} و B^n کمانی ـ همبند هستند، لذا $H_0(S^{n-1})$ و $H_0(B^n)$ $(n\geq 2)$ گروههای دوری بی‌پایان می‌باشند. در نتیجه i_*^0 یک یکریختی پوشا می‌باشد و $\operatorname{img}\delta^1=\ker i_*^0=\{0\}$. این امر ایجاب می‌کند که j_*^1 پوشا است، چراکه $\operatorname{img} j_*^1=\ker\delta^1=H_1(B^n,S^{n-1})$ چونکه $H_1(B^n)=\{0\}$، لذا برای $n\geq 2$ داریم:

$$H_1(B^n,S^{n-1})=\{0\}\,. \qquad (2)$$

از طرف دیگر با توجه به اینکه B^n برای $n\geq 1$ کمانی ـ همبند است و با در نظر گرفتن تمرین ۸ـ۱۲ داریم

$$H_\circ (B^n,S^{n-1})=\{\circ\} . \qquad (۳)$$

اینک روش مورد استفاده در مثال ۸ـ۳ را بکار می‌بریم . مشاهده می‌شود کـه S^n در $A_1^n \cup A_2^n$ قرار دارد که در آن $A_1^n=\{<x_1,...,x_{n+1}>\in S^n : x_{n+1}\geq -\varepsilon\}$ و $A_2^n=\{<x_1,...,x_{n+1}>\geq S^n : x_{n+1}\leq \varepsilon\}$. قرار می‌دهیم $A=A_1^n \cap A_2^n$ ، در این صورت برای $n\geq 1$ و تمام $m\geq \circ$ به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ برش

$$H_m(S^n,A_2)\cong H_m(A_1^n,A) . \qquad (۴)$$

هرگـاه قـرار دهـیم $C=\{<x_1,...,x_{n+1}>\in S^n : x_{n+1}=-\varepsilon\}$ و f یک نگـاشت جـفتی $<A_1^n,A>$ در خودش باشد به قسمی که f هموتوپیک با نگاشت جفتی همانی $<A_1^n,A>$ باشد و $f(A)=C$ ، آنگاه بنابر قضیهٔ ۸ـ۸ داریم $H_m(A_1^n,A)\cong H_m(A_1^n,C)$. چونکه A_1 همانریخت با B^n و C همانریخت با S^{n-1} می‌باشد ، لذا از آن نتیجه می‌گردد که :

$$H_m(A_1^n,A)\cong H_m(B^n,S^{n-1}) . \qquad (۵)$$

به عنوان نتیجه‌ای از (۴) و (۵) برای $n\geq 1$ و برای تمام $m\geq \circ$ داریم :

$$H_m(S^n,A_2^n)\cong H_m(B^n,S^{n-1}) . \qquad (۶)$$

اکنون قسمت زیر از دنبالهٔ همولوژی از $<S^n,A_2^n>$ را برای $n\geq 1$ در نظر می‌گیریم :

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{m+1}} H_m(A_2^n) \xrightarrow{i_*^m} H_m(S^n) \xrightarrow{j_*^m} H_m(S^n,A_2^n)$$
$$\xrightarrow{\partial^m} H_{m-1}(A_2^n) \xrightarrow{i_*^{m-1}} H_{m-1}(S^n) \xrightarrow{j_*^{m-1}} \cdots .$$

از تمرین ۸ـ۱۶ نتیجه می‌گیریم که $H_m(A_2^n)$ و $H_{m-1}(A_2^n)$ برای $m\geq 2$ بدیهی است ، چراکه A_2^n یک n ـگوی بسته می‌باشد. این امر ایجاب می‌نماید که j_*^m یک یکریختی پوشا می‌باشد، چونکه $\ker j_*^m=\operatorname{img} i_*^m=\{\circ\}$ و $\operatorname{img} j_*^m=\ker\partial^m=H_m(S^n,A_2^n)$. علاوه‌بر این، هرگاه $m=1$ ، آنگاه i_*° یک یکریختی پوشا می‌باشد، چراکه $H_\circ(A_2^n)$ و $H_\circ(S^n)$ هر دو گروههای دوری بی‌پایان می‌باشند (A_2^n و S^n کمانی ـ همبند می‌باشند .) این امر

ایجاب می‌نماید که $\ker i_*^0=\operatorname{img}\delta^1=\{0\}$ در نتیجه $\operatorname{img} j_*^1=\ker \delta^1=H_1(S^n,A_2^n)$.
همچنین، $\ker j_*^1=\operatorname{img} i_*^1=\{0\}$، چراکه $H_1(A_2^n)=\{0\}$. در نتیجه j_*^1 یک یکریختی پوشا می‌باشد و برای $n,m\geq 1$ داریم:

$$H_m(S^n)\cong H_m(S^n,A_2^n). \qquad (۷)$$

از ترکیب (۶) و (۷)، برای $n,m\geq 1$ داریم:

$$H_m(S^n)\cong H_m(B^n,S^{n-1}). \qquad (۸)$$

اینک از ترکیب (۱) و (۸) برای $n,m\geq 2$ نتیجه می‌گیریم که:

$$H_m(B^n,S^{n-1})\cong H_{m-1}(B^{n-1},S^{n-2}). \qquad (۹)$$

اکنون برای $m>n$ و با بکاربردن ۱ ـ n بار متوالی (۹) و بنابر تمرین ۸ ـ ۲۳ داریم $H_m(B^n,S^{n-1})\cong H_{m-n+1}(B^1,S^0)=\{0\}$. در حالتی که $m<n$، با بکاربردن ۱ ـ m بار متوالی (۹) و بنابر (۲) داریم $H_m(B^n,S^{n-1})\cong H_1(B^{n-m+1},S^{n-m})=\{0\}$. بالاخره برای $m=n$، با بکاربردن ۱ ـ m بار متوالی (۹) و بنابر تمرین ۸ ـ ۲۳ داریم $H_m(B^n,S^{n-1})\cong H_1(B^1,S^0)\cong Z$.

به اختصار، $H_m(B^n,S^{n-1})=\{0\}$ برای $m\neq n$ و $H_n(B^n,S^{n-1})\cong Z$ برای $n,m\geq 2$. از (۳) برای $n\geq 1$ نتیجه می‌گیریم که $H_0(B^n,S^{n-1})=\{0\}$ و از (۲) برای $n\geq 2$ نتیجه می‌گیریم که $H_1(B^n,S^{n-1})=\{0\}$. واضح است که $H_n(B^1,S^0)=\{0\}$ برای $n\geq 1$ و $H_1(B^1,S^0)\cong Z$. با استفاده از این نتایج و با توجه به (۸)، نتیجه می‌گیریم که $H_m(S^n)=\{0\}$ برای $m\neq n$ و $H_n(S^n)\cong Z$ برای $n,m\geq 1$. چونکه S^n برای $n\geq 1$ کمانی ـ همبند است، لذا $H_0(S^n)\cong Z$. واضح است $H_m(S^0)=\{0\}$ برای $m\geq 1$ و $H_0(S^0)\cong Z\oplus Z$.

تمرین

۸ـ۲۵. جزئیات لازم برای نشان دادن اینکه $H_n(S^{\circ})=\{\circ\}$ برای $m\geq 1$ و $H_{\circ}(S^{\circ})\cong Z\oplus Z$ را بیان کنید.

۸ـ۷ کاربردهای هموتوپی و همولوژی

بحث خود را در مورد توپولوژی جبری با بررسی برخی از کاربردهای زیبای آن که مطمئناً پاداش ارزنده‌ای به خواننده به‌خاطر کوشش‌هایش تا این جا می‌باشد، بپایان می‌رسانیم. در آغاز مفهوم "درجهٔ همولوژیک" یک نگاشت f از یک n-کره به‌یک n کره دیگر راارائه می کنیم .با استفاده از این مفهوم ونتایج آن در نظریهٔ هموتوپی ونظریهٔ همولوژی تکین قادریم که اثبات‌های ساده‌ای از قضیهٔ بنیادی جبر، قضیهٔ نادرون‌بری و قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور بیان کنم که اثبات‌های معمول آنها طولانی و خسته‌کننده می‌باشند.

تعریف ۸ـ۱۷. فرض کنید $n\geq 1$ و $f:S^n\to S^n$ یک نگاشت باشد. آنگاه f یک همریختی $f_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ القاء می‌نماید که در آن $H_n(S^n)$ بنابر مثال ۸ ـ ۹ گروه دوری بی‌پایان می‌باشد. اگر $[\gamma]$ یک مولد $H_n(S^n)$ باشد، آنگاه $f_*([\gamma])\in H_n(S^n)$ و یک عدد صحیح مانند f وجود دارد به قسمی که $f_*([\gamma])=k[\gamma]$. علاوه‌بر این، هرگاه $[\alpha]\in H_n(S^n)$ دلخواه باشد، آنگاه عدد صحیحی مانند m وجود دارد به‌قسمی که $[\alpha]=m[\gamma]$. بنابراین

$$f_*([\alpha])=f_*(m[\gamma])=mf_*([\gamma])=mk[\gamma]=km[\gamma]=k[\alpha].$$

این عدد صحیح یکتای k موسوم به **درجهٔ همولوژیک** f می‌باشد. در نتیجه f از درجهٔ k است اگر و فقط اگر $f_*(x)=kx$ به ازای هر $x\in H_n(S^n)$. در اینجا به اختصار از "$\deg(f)$" برای درجهٔ همولوژیک f استفاده می‌نمائیم.

اگرچه مفهوم "درجهٔ همولوژیک" متفاوت از "درجهٔ چند جمله‌ای" می‌باشد، ولی

سازگاری این دو مفهوم را در مثال و قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم .

مثال ۸ ـ ۱۰ . فرض کنید $n=1$ و تابع $f:S^1\to S^1$ را به صورت $f(z)=c$، یک تابع ثابت در نظر می‌گیریم که در آن z یک عدد مختلط به صورت $<x,y>$ با قدر مطلق $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ می‌باشد . آنگاه $f_*:H_1(S^1)\to H_1(S^1)$ همریختی القائی است و در آن $H_1(S^1)\cong Z$. هرگاه $[\gamma]$ مولد $H_1(S^1)$ باشد ، آنگاه $\gamma=\Sigma_{i=1}^{\ell} m_i\sigma_i$ که در آن $\sigma_i\in\mathcal{S}_n(S^1),m_i\in Z$ (برای $i=1,\dots,\ell$). بنابراین

$$f_*([\gamma])=[f_1(\gamma)]=[\Sigma_{i=1}^{\ell} m_if_1(\sigma_i)]=[c\,\Sigma_{i=1}^{\ell} m_i]=[0]=k[\gamma]$$

اگر و فقط اگر $k=0$.

در نتیجهٔ درجه همولوژیک f برابر با ۰ است ، که درجهٔ چند جمله‌ای f نیز می‌باشد .

اکنون تابع $g:S^1\to S^1$ را به‌صورت $g(z)=z$ به ازای هر عدد مختلط $z=<x,y>$ با قدر مطلق $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ در نظر می‌گیریم، آنگاه

$$g_*([\gamma])=[g_1(\gamma)]=[\Sigma_{i=1}^{\ell} m_ig_1(\sigma_i)]=[\Sigma_{i=1}^{\ell} m_i\sigma_i]=[\gamma]=k[\gamma]$$

اگر و فقط اگر $k=1$.

در نتیجه درجهٔ همولوژیک g همانند درجهٔ چند جمله‌ایش برابر با ۱ است .

قضیهٔ ۸ ـ ۱۴. ***هرگاه $f_n:S^1\to S^1$ نگاشت $f_n(z)=z^n$ به ازای هر عدد مختلط $z\in S^1$ باشد، آنگاه همریختی القاء شده $f_{n*}:H_1(S^1)\to H_1(S^1)$ به‌صورت $f_n(x)=nx$ به ازای هر $x\in H_1(S^1)$ می‌باشد ،در نتیجه f_n دارای درجهٔ همولوژیکی n می‌باشد .***

برهان . این نتیجه قبلاً برای حالت $n=0$ و $n=1$ در مثال ۸ ـ ۱۰ ثابت شده است . اثبات حالت کلی آن بر اساس استقراء می‌باشد و به ویژه در صفحات ۹۷ ـ ۹۸ از کتاب ***نظریهٔ همولوژی*** نوشتهٔ هو یافت می‌شود . فرض کنید که نتیجه برای یک عدد صحیح $k\geq 1$ درست باشد و تابع $f_{k+1}:S^1\to S^1$ به ازای هر عدد مختلط $z\in S^1$ به‌صورت $f_{k+1}(z)=z^{k+1}$ داده شده باشد . نگاشت‌های g و h از S^1 به S^1 را به‌صورت زیر تعریف

می‌نمائیم :

$$g(z) = g(e^{2\pi i\theta}) = \begin{cases} e^{2(k+1)\pi i\theta} & 0 \leq \theta \leq k/k+1 \\ 1 & k/k+1 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$h(z) = h(e^{2\pi i\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq k/k+1 \\ e^{2(k+1)\pi i\theta} & k/k+1 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

نشان داده خواهد شد که $f_{(k+1)_*}=g_*+h_*$ ، که در آن این نگاشت‌ها به ترتیب همریختی‌های از $H_1(S^1)$ در $H_1(S^1)$ القائی توسط h و g و $f_{(k+1)}$ می‌باشند . علاوه‌بر این ، تابع $G:S^1\times I^1\to S^2$ تعریف شده بصورت

$$G(z,t) = G(e^{2\pi i\theta},t) = \begin{cases} e^{2\pi(k+1-t)i\theta} & 0 \leq \theta \leq k/k+1\ ,\ t\in I^1 \\ 1 & k/k+1 \leq \theta \leq 1\ ,\ t\in I^1 \end{cases}$$

یک هموتوپی بین $G(z,0)=g(z)$ و $G(z,1)=z^k=f_k(z)$ می‌باشد . همچنین ، تابع $H:S^1\times I^1\to S^1$ تعریف شده به‌صورت

$$H(z,t) = H(e^{2\pi i\theta},t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq k/k+1\ ,\ t\in I^1 \\ e^{2\pi[t+(k+1)(1-t)]i\theta} & k/k+1 \leq \theta \leq 1\ ,\ t\in I^1 \end{cases}$$

یک هموتوپی بین $H(z,0)=h(z)$ و $H(z,1)=z=f_1(z)$ می‌باشد . در نتیجه بنابر قضیهٔ هموتوپی (۸-۷) ، داریم $f_{(k+1)_*}=g_*+h_*=f_{k_*}+f_{1_*}$. علاوه‌براین، هرگاه $x\in H_1(S^1)$ ، آنگاه

$$.\ f_{(k+1)_*}(x)=f_{k_*}(x)+f_{1_*}(x)=k.\ x+1.\ x=(k+1)\ x\ .$$

در نتیجه ، طبق تعریف ۸ ـ ۱۷ ، درجهٔ همولوژیک f_{k+1} برابر با $k+1$ و همانند با درجهٔ

چند جمله‌ایش می‌باشد. ■

نتیجه. هرگاه $f_n:S^n\to S^n$ ***نگاشت داده شده به‌صورت*** $f_n(z)=z^n$ ***به ازای هر عدد مختلط*** $z\in S^1$ ***باشد آنگاه همریختی القاء شده*** $f_{n*}:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ ***به‌صورت*** $f_n(x)=nx$ ***به ازای هر*** $x\in H_n(S^n)$ ***می باشد و در نتیجه*** f_n ***دارای درجهٔ همولوژیک*** n ***می‌باشد.***

اکنون نشان خواهیم داد که نگاشت‌های هموتوپیک دارای درجهٔ همولوژیک یکسان می‌باشند و ازآن دو نتیجه جالب مربوط به نگاشت‌های بین n ـ کره‌ها را به‌دست می‌آوریم. عکس این مطلب (منسوب به هاف) نیز درست است، اگرچه در اینجا ثابت نمی‌گردد. خوانندهٔ علاقمند یک اثبات نسبتاً زیبا از آن را (با استفاده از "روش تعلیق فرودنتال" از همولوژی سادکی) که در صفحات ۳۵۰ ـ ۳۵۲ کتاب **توپولوژی** نوشتهٔ دوگوندجی آمده می‌تواند بیابد.

قضیهٔ ۸ ـ ۱۵. هرگاه $f\cong g:S^n\to S^n$، ***آنگاه*** $\deg(f)=\deg(g)$.

برهان. اگر $f\cong g$ و فرض می‌کنیم که $\deg(f)=k$. نشان خواهیم داد که $\deg(g)=k$. بدین منظور اگر $f_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ و $g_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ همریختی‌های القاء شده باشند، آنگاه بنابر قضیهٔ هموتوپی (۸ ـ ۷) داریم $f_*=g_*$، یعنی $f_*(x)=g_*(x)$ به ازای هر $x\in H_n(S^n)$. اکنون فرض کنید $[\gamma]$ یک مولد دلخواه از $H_n(S^n)$ باشد، آنگاه $g_*([\gamma])=f_*([\gamma])=k[\gamma]$، چراکه $\deg(f)=k$. بنابراین $\deg(g)=k$. ■

نتیجهٔ ۱. S^n ***انقباض‌پذیر نیست.***

برهان. فرض کنید که S^n انقباض‌پذیر است، آنگاه نگاشت همانی S^n هموتوپیک با یک نگاشت ثابت S^n می‌باشد. ولی با این حال، طبق قضیهٔ ۸ ـ ۱۵ این امر امکان‌پذیر نیست چراکه نگاشت همانی دارای درجه ۱ می‌باشد و یک نگاشت ثابت دارای درجه ۰ است (مثال ۸ ـ ۱۰). ■

نتیجهٔ ۲ . هرگاه $f:S^n\to S^n$ پیوسته باشد و $\deg(f)\neq 0$، آنگاه $f(S^n)=S^n$.

برهان . فرض کنید که $S^n-f(S^n)\neq\varnothing$ و $p\in S^n-f(S^n)$. آنگاه $S^n-\{p\}$ انقباض‌پذیر است یعنی نگاشت همانی بر روی $S^n-\{p\}$ هموتوپیک با یک نگاشت ثابت از $S^n-\{p\}$ می‌باشد . بنابراین f هموتوپیک با یک نگاشت ثابت است ، چراکه $f(S^n)\subset S^n-\{p\}$. این امر ایجاب می‌نماید $\deg(f)=0$، که یک تناقض است . ■

اکنون آماده برای اثبات قضیهٔ بنیادی جبر می‌باشیم . چند جمله‌ای $P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n$ که در آن $n\in I^+$ و a_i ها $(i=0,1,\dots,n-1)$ اعداد مختلط می‌باشند ، یک نگاشت از E^2 در E^2 می‌باشد . هرگاه قرار دهیم $\overline{P}(\infty)=\infty$ و با توجه به اینکه $S^2=E^2\cup\{\infty\}$ (فشرده‌سازی تک ـ نقطهٔ E^2) می‌باشد، در این صورت $\overline{P}$ را می‌توان گسترشی از P بر روی S^2 در نظر گرفت . برای ملاحظه اینکه $\overline{P}$ در ∞ پیوسته است، فرض کنید که $G\subset S^2$ باز و $\infty\in G$ ، آنگاه S^2-G یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ E^2 می‌باشد (در نتیجه بسته و کراندار است). لذا عددی مانند $A>0$ وجود دارد به‌قسمی که $S^2-G\subset\{z:|z|\leq A\}$. چونکه $P(z)$ یک چند جمله‌ایست . عددی مانند $B>0$ وجود دارد به‌قسمی که $|P(z)|>A$ برای تمام $z\in E^2$ به‌قسمی که $|z|>B$. در نتیجه مجموعهٔ $V=\{z\in S^2:|z|>B\}$ یک مجموعهٔ باز شامل ∞ می‌باشد به‌قسمی که $\overline{P}(V)\subset G$ که پیوستگی در ∞ ایجاب می‌گردد . به منظور اثبات قضیهٔ بنیادی جبر به لم زیر احتیاج داریم .

لم . $\overline{P}(z)$ هموتوپیک با $\overline{f_n}(z)$ یعنی گسترش پیوستهٔ $f_n(z)=z^n$ بر S^2 می‌باشد ، که در آن، $\overline{f_n}(\infty)=\infty$ و $\overline{f_n}(z)=f_n(z)$ برای $z\in E^2$.

برهان . فرض کنید $h(z,t)=z^n+(1-t)(a_0+a_1z+\dots+a_{n-1}z^{n-1})$ هرگاه $z\in E^2$ و $h(\infty,t)=\infty$ برای تمام $t\in I^1$. واضح است که h برای تمام $t\in I^1$ و $z\in E^2$ پیوسته است . برای ملاحظهٔ پیوستگی h در $\langle\infty,t\rangle$ برای تمام $t\in I^1$، فرض کنید $A>0$ عددی

دلخواه و $M=\Sigma_{i=1}^{n-1}|a_i|$. در این صورت برای هر $t\in I^1$ و هر $z\in E^2$ به‌قسمی که $|z|>B=\max\{A+M,1\}$ ، داریم

$$\begin{aligned}|h(z,t)| &\geq |z|^n-(1-t)(|a_0|+|a_1||z|+\ldots+|a_{n-1}||z|^{n-1})\\ &\geq |z|^n-M|z|^{n-1}\\ &\geq |z|-M\\ &>(A+M)-M=A\,.\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{z\to\infty}h(z,t)=\infty=h(\infty,t)$ برای هر $t\in I^1$ ، که پیوستگی تابع را در نقطهٔ $<\infty,t>$ ایجاب می‌نماید. علاوه‌بر این ، $h(z,0)=\overline{P}(z)$ و $h(z,1)=z^n=\overline{f_n}(z)$ برای تمام $z\in S^2$. بنابراین h هموتوپی بین $\overline{P}$ و $\overline{f_n}$ می‌باشد. ■

قضیهٔ ۸ ـ ۱۶ . *(قضیهٔ بنیادی جبر) . چند جمله‌ای $\overline{P}(z)$ دارای حداقل یک ریشه مختلط می‌باشد .*

برهان . بنابر لم قبلی و قضیهٔ ۸ ـ ۱۵ توابع $\overline{P}$ و $\overline{f_n}$ دارای درجهٔ همولوژیک یکسانند . به‌عنوان یک نتیجه از قضیه ۸ ـ ۱۴ داریم $\deg(\overline{P})=\deg(\overline{f_n})=n$. علاوه‌بر این ، چونکه $n>0$ ، بنابر نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۸ ـ ۱۵ داریم $\overline{P}(S^2)=S^2$. بنابراین یک عدد $z\in E^2$ وجود دارد به‌قسمی که $\overline{P}(z)=P(z)=0$. ■

یک کاربرد معمولی دیگر از هموتوپی و همولوژی شامل این مطلب می‌باشد که E^m و E^n برای $m\neq n$ $(m,n\in I^+)$ غیرهمانریخت می‌باشند . این امر با برهان خلف انجام داده خواهد شد . در آغاز نشان می‌دهیم که S^m و S^n برای $m\neq n$ هم‌ارز هموتوپیک نیستند . بعد ، نشان خواهیم داد که $E^m-\{0\}$ و $E^n-\{0\}$ به ترتیب هم‌ارز هموتوپیک با S^{m-1} و S^{n-1} می‌باشند. در نتیجه هرگاه E^m و E^n همانریخت باشند ،آنگاه $E^m-\{0\}$ و $E^n-\{0\}$ هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند . این امر ایجاب می‌کند که S^{m-1} و S^{n-1} هم‌ارز هموتوپیک می‌باشند که غیرممکن است ، چراکه $m-1\neq n-1$. جزئیات آن را می‌توان

در صفحات ۱۵۰ ـ ۱۵۲ کتاب **نظریه همولوژی** نوشتهٔ هو یافت.

بحث خود را در مورد کاربردهای هموتوپی و همولوژی با اثبات "قضیهٔ نادرون بری" ادامه می‌دهیم که بیان می‌نماید: هیچ درون بری nـگوی بسته در مرز خودش برای $n>0$ موجود نیست. آنگاه آن را به منظور اثبات "قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور" بکار می‌بریم. در حقیقت، دونتیجه هم‌ارزند.

قضیهٔ ۸ ـ ۱۷ *(قضیهٔ نادرون بری). هیچ درون بری از n ـگوی B^n ($n>0$) بر روی S^{n-1} مرزش وجود ندارد.*

برهان. فرض کنید که r یک درون بری از B^n در S^{n-1} باشد، قرار می‌دهیم $h(x,t)=r[(1-t)x]$ به ازای هر $x\in S^{n-1}$. درنتیجه $h(x,0)=r(x)$ و $h(x,1)=r(0)\in S^{n-1}$. واضح است که h یک هموتوپی بین نگاشت همانی S^{n-1} و نگاشت ثابت $\{r(0)\}$ روی S^{n-1} می‌باشد. این امر ایجاب می‌نماید که S^{n-1} انقباض‌پذیر است که متناقض با نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۸ ـ ۱۵ می‌باشد. ■

تعریف ۸ ـ ۱۸. هرگاه $f:S\to S$ یک نگاشت از S در S باشد، آنگاه $x\in S$ را یک ***نقطهٔ ثابت*** f گوئیم اگر و فقط اگر $f(x)=x$. علاوه‌بر این، یک فضای S دارای ***خاصیت نقطهٔ ثابت*** می‌باشد اگر و فقط اگر هر نگاشت $f:S\to S$ دارای یک نقطهٔ ثابت باشد.

مثال ۸ ـ ۱۱. تابع خطی f ارائه شده به‌صورت $f(x)=mx+b$ به ازای هر عدد حقیقی x با شرط $m\neq 0$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $m\neq 1$، آنگاه f دارای نقطهٔ ثابت یکتای $x_0=b/(1-m)$ می‌باشد. هرگاه $m=1$، آنگاه f در صورتیکه $b\neq 0$ دارای هیچ نقطهٔ ثابت نیست و در صورتیکه $b=0$، هر عدد حقیقی را به عنوان یک نقطهٔ ثابت دارد.

مثال ۸ ـ ۱۲. بازهٔ بستهٔ I^1 دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است. اگر f یک نگاشت از I^1 در خودش باشد و فرض می‌کنیم که $f(x)\neq x$ به ازای هر $x\in I^1$. آنگاه تابع g داده شده به‌صورت $g(x)=f(x)-x$ پیوسته است و در نتیجه $g(I^1)$ باید همبند باشد، چراکه I^1

همبنداست. همچنین، $g(\circ)=f(\circ)>\circ$ و $g(1)=f(1)-1<\circ$. بنابراین طبق قضیهٔ ۴ـ ۶ یک نقطهٔ $x_\circ\in I^1$ وجود است به‌قسمی که $g(x_\circ)=f(x_\circ)-x_\circ=\circ$. این امر ایجاب می‌نماید که $f(x_\circ)=x_\circ$ یک نقطهٔ ثابت است که متناقض با فرض ما می‌باشد که f دارای هیچ نقطهٔ ثابت نیست.

نشان دادن اینکه خاصیت نقطهٔ ثابت یک خاصیت توپولوژیک است، به‌عنوان یک تمرین به‌عهدهٔ خواننده است، ولی با این حال ثابت می‌کنم که خاصیت نقطهٔ ثابت تحت درون بری هاپایدار است، آنگاه این بحث را با بیان و اثبات قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور به‌پایان می‌رسانیم.

قضیهٔ ۸ـ ۱۸. ***خاصیت نقطهٔ ثابت تحت درون بری ها پایدار می‌باشد.***

برهان. فرض کنید که S دارای خاصیت نقطهٔ ثابت باشد و $r:S\to A$ یک درون بری از S روی یک زیرفضای A از S باشد. هرگاه $f:A\to A$ یک نگاشت دلخواه از A در خودش باشد، آنگاه ترکیب $i\circ f\circ r:S\to S$ پیوسته است، که در آن $i:A\to S$ نگاشت شمولی است. درنتیجه یک نقطهٔ $x_\circ\in S$ وجود دارد به‌قسمی که $i\circ f\circ r(x_\circ)=x_\circ$، چراکه S دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است. این امرایجاب می‌نماید که

$i\circ f\circ r(x_\circ)=f[r(x_\circ)]=x_\circ\in A$. بنابراین A دارای خاصیت نقطهٔ‌ثابت می‌باشد. ■

قضیهٔ ۸ـ ۱۹ ***(قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور). n ـگوی بستهٔ B^n دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است.***

برهان. اگر $f:B^n\to B^n$ یک نگاشت از B^n در خودش باشد و $f(x)\neq x$ برای هر $x\in B^n$. به ازای هر $x\in B^n$، آنگاه پرتو مستقیم $f(x)$ به x را به $L(x)$ نشان می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع $L(x)$ و مرز B^n یعنی S^{n-1} را به $r(x)$ نمایش می‌دهیم. این امر یک تابع $r:B^n\to S^{n-1}$ را تعریف می‌نماید به‌قسمی که $r(x)=x$ به ازای هر $x\in S^{n-1}$. این تابع پیوسته است، چراکه f پیوسته می‌باشد. تابع r یک درون بری از B^n روی مرزش S^{n-1} می‌باشد، که

متناقض با قضیهٔ ۸ ـ ۱۷ است. بنابراین یک $x \in B^n$ وجود دارد به‌قسمی که $f(x)=x$، که همان شرط مطلوب می‌باشد. ■

تمرین

۸ ـ ۲۶. هرگاه f و g نگاشت‌هایی از S^n در خودش باشد. نشان دهید که $\deg(f \circ g)=\deg(f).\deg(g)$.

۸ ـ ۲۷. توضیح دهید که چگونه اثبات قضیهٔ بنیادی جبر برای حالتی که به‌جای $P(z)$ از چند جمله‌ای $P(x)$ برای $x \in E^1$ استفاده شود، متوقف می‌ماند.

۸ ـ ۲۸. نشان دهید که خاصیت نقطهٔ ثابت یک خاصیت توپولوژیک است.

۸ ـ ۲۹. ثابت کنید که S^n به ازای هر عدد صحیح $n \geqq 0$ دارای خاصیت نقطهٔ ثابت نیست.

۸ ـ ۳۰. نشان دهید که مکعب یکهٔ I^n و مکعب هیلبرت I^ω هر کدام دارای خاصیت نقطهٔ ثابت می‌باشند.

۸ ـ ۳۱. ثابت کنید که قضیهٔ نقطهٔ ثابت قضیهٔ نادرون بری را ایجاب می‌نماید و در نتیجه هم‌ارز با آن است.

مراجع

کتابها

BING, R.H. Elementary Point Set Topology (Slaught Memorial Paper 8). Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1960.

BIRKHOFF, G. Lattic Theory, rev. ed. (Colloquium Publication 25). Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1948.

BOURBAKI,N. Elements of Mathematics (Parts 1 and 2). Reading, Mass. : Addison - Wesley Publishing Co., Inc., 1966.

COHEN, P.J. Set Theory and the Continuum Hypothesis. Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, Inc., 1966.

COPSON, E.T. Metric Spaces (Cambridge Tracts in Mathematics 57). New York: Cambridge University Press, 1968.

DUGUNDJI, J. Topology. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1968.

EILENBERG, S., and N. STEENROD. Foundations Of Algebraic Topology. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1952.

GEMIGNANI, M. C. Elementary Topology Reading Mass. : Addison- Wesley Publishing Co., Inc,. 1967.

GILLMAN, L., and M. JERISON. Rings of Continuous Function . New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1960.

GREEVER, J. Theory and Examples Of Point-Set Topology. Belmont, Calif.: Brooks/Cole, Belmont, 1967.

HALL, D.W., and G.L. SPENCER. Elementary Topplogy. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1955.

HALMOS, P.R. Naive Set Theory. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1960.

HOCKING, J.G., and G.S. YOUNG. Topology. Reading, Mass.: Addison Wesley Publishing Co., Inc., 1961.

HU, S.T. Elements of General Toplogy. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1964.

______. Homology Theory. San Francisceo: Holden-Day, Inc., 1966.

______. Homotopy Theory. New York: Academic Press, Inc., 1959.

______. Theory of Retracts.Detroit Mich.: Wayne State University Press, 1965.

HUREWICZ, W., and H. WALLMAN. Dimension Theory. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1941.

KELLEY, J.L. General Topology. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1955.

KOLMOGOROV, A.N., and S.V. FOMIN. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Vol.1: Metric and Normed Spaces. Rochester, N.Y.: Graylock Press, 1957.

MASSEY, W.S. Algebraic Topology: An Introduction. New York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1967.

MOORE, R.L. Foundations of Point Set Theory, rev. ed. (Colloquium Publication 13). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1962.

PERVIN, W.J. Foundations of General Topology. New York: Academic Press, Inc., 1964.

SCHUBERT, H. Topology. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1968.

SIERPINSKI, W. General Topology. Toronto: University of Toronto Press, 1952.

STEEN, L.A., and J.A. SEEBACH. Counterexamples in Topology. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.

Summer Institute on Set Theoretic Topology, rev. ed. Madison, Wisc., 1957.

THRON, W.J. Topological Structures. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.

TUKEY, J.W. Convergence and Uniformity in Topology (Annals of Mathematics Studies 2). Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1940.

WALLACE, A.H. An Introduction to Algebraic Topology. Elmsford, N.Y.: Pergamon Press, Inc., 1957.

WHYBURN, G.T. Topological Analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1958.

WILDER, R.L. Topology of Manifolds (Colloquium Publication 32). Providence R.I.: American Mathematical Society, 1949.

WILLARD, S. General Topology. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1970.

مقالات

ALEXANDROFF, P. "Some Results in the Theory of Topological Spaces, Obtained Within the Last Twenty-five Years." Russian Math. Surveys, 15 (1960), 23-83.

ANDERSON, R.D. "Hilbert Space Is Homeomorphic to the Countable Infinite Product of Lines." Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 515-19.

ARENS, R., and J. DUGUNDJI. "Topologies for Function Spaces." Pac. J. Math., 1 (1951), 5-31.

AULL, C.E., and W.J. THRON. "Separation Axioms Between T_o and T_1." Indag. Math., 24 (1963), 26-37.

BARTLE, R.G. "Nets and Filters in Topology." Amer. Math. Manthly, 62 (1955), 551-57.

BELL, H. "On Fixed Point Properties of Plane Continua." Trans. Amer. Math. Soc., 128 (1967), 539-48.

BING, R.H. "A Countable Connected Hausdeorff Space." Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 474.

________. "A Translation of the Normal Moore Space Conjecture." Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 612-19.

________. "Extending a Metric." Duke Math. J., 14 (1947), 511-19.

________. "Metrization of Topological Spaces." Can. J. Math., 3 (1951), 175-86.

________. "The Elusive Fixed-Point Property." Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 119-32.

CECH, E. "On Bicompact Spaces." Ann, Math., 38 (1937), 823-44.

CEDAR, J. "Some Generalizations of Metric Spaces." Pac. J. Math., 11 (1961), 105-25.

CHITTENDEN, E.W. "On the Metrization Problem and Related Problems in the Theory of Abstract Sets." Bull. Amer. Math. Soc., 3 (1927), 13-34.

DAVES, A.S. "Indexed Systems of Neighborhoods for General Topological Spaces." Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 886-93.

DUGUNDJI, J. "An Extension of Tietze's Theorem." Pac. J. Math., 1 (1951), 353-67.

EILENBERG, S. "Singular Homology Theory." Ann. Math., 45 (1944), 407-47.

Fox, R.H. "On Topologies for Function Spaces." Bull. Amer. Math. Soc., 51 (1945), 429-32.

FRINK, A.H. "Distance Functions and the Metrization Problem." Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937), 133-42.

HANNER, O. "Retraction and Extension of Mappings of Metric and Non-metric Spaces." Ark. Math., 2 (1952), 315-60.

HEATH, R.w. "Screenability, Pointwise Paracompactness, and Metrization of Moore Spaces." Can. J. Math., 16 (1964), 763-70.

JONES, F.B. "Concerning Normal and Completely Normal Spaces." Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937), 671-77.

________. "Metization," Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 571-76.

________. "Remarks on the Normal Moore Space Metrization Problem." Proc. of Wisconsin Summer Topology Seminar (1965), Ann. Math. Studies, 60 (1966).

KELLEY, J.L. "Convergence in Topology." Duke math. J., 17 (1950), 277-83.

________. "The Tychonoff Product Theorem Implies the Axiom of Choice." Fund. Math., 37 (1950), 75-76.

KNASTER, B., and C. KURATOWSKI. "A connected and connected Im Kleinen Point Set Which Conatains No Perfect Set." Bull. Amer. math. Soc., 33 (1927), 106-109.

KNIGHT, C.J. "Box Topologies." Quart. J. Math. Oxford, 15 (1964), 41-54.

LEUSCHEN, J.E., and B.T. SIMS. "Stronger Forms of Connectivity." Rend. Circ. Math. Palermo, 21 (1972), 255-66.

LEVINE, N.L. "A Characterization of Compact Metric Spaces." Amer. Math. Monthly, 73 (1961), 657-58.

MANSFIELD, M.J. "Some Generalizations of Full Normality." Trans. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 489-505.

MICHAEL, E. "A Note on Paracompact Spaces." Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 831-38.

______. "Another Note on Paracompact Spaces." Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 822-28.

______. " The Product of a Normal Space and a Metric Space Need Not Be Normal." Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 375-76.

______. "Yet Another Note on Paracompact Spaces." Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 309-14.

MOORE, E.H., and H.L. SMITH. "A General Theory of Limits." Amer. J. Math., 44 (1922), 102-21.

MOORE, R.L. "A Connected and Regular Point Set Which Contains No Arc." Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1926), 331-32.

____. "Concerning Connectedness Im Kleinen and a Related Property." Fund. Math., 3 (1922), 232-37.

____. "Concerning the Cut Points of Continuous Curves and of Other Closed and

Continuous Point Sets." Proc. Nat. Acad. Sci., 9 (1923), 101-106.

MORITA, K. "On the Product of a Normal Space with a Metric Space." Proc. Jap. Acad., 39 (1963), 148-50.

____. "On the Product of Paracompact Spaces." Proc. Jap. Acad., 39 (1963), 559-63.

____. "Star-Finite Coverings and the Star-Finite Property." Math. Jap., 1 (1948), 60-68.

NAGATA, J. "On a Necessary and Sufficient Condition of Metrizability." J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 1 (1950), 93-100.

NOVAK, J. "On the Cartesian Product of Two Compact Spaces." Fund. Math., 40 (1953), 106-12.

PERVIN, W.J. "On Separation and Proximity Spaces." Amer. Math. Monthly, 71 (1964), 158-61.

RIBEIRO, H. "Sur les espaces á metrique faible." Port. Math., 4 (1943), 21-40, 65-68.

ROSS, K.A., and A.J. STONE. "Products of Separable Spaces." Amer. Math. Monthly, 71 (1964), 398-403.

RUDIN, M.E. "A Separable Normal, Non-paracompact Space." Proc. Amer Math. Soc., 7 (1956), 940-41.

SANDERSON, D.E., and S.K. HILDEBRAND. "Connectivity Functions and Retracts." Fund. Math., 57 (1965), 237-45.

___, and B.T. SIMS. "A Characterization and Generalization of Semi-metrizability." Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 361-65.

SCABOROUGH, C.T., and A.H. STONE. "Products of Nearly Compact Spaces." Trans. Amer. Math. Soc., 124 (1966), 131-47.

SIMS, B.T. "Between T_2 and T_3." Math. Mag., 40 (1967), 25-26.

___. " Some Generalizations of the Contraction Mapping Theorem." Rend. Circ. Math. Palermo, 21 (1972), 64-70.

SION, M., and G. ZELMER. "On Quasi-mertrizabillity." Can. J. Math., 19 (1967), 1243-1249.

SMIRNOV, Y.M. "A Necessary and Sufficient Condition for Metrizability of a Topological Space." Dokl. Akad. Nauk SSSR, 77 (1951), 197-200.

___. "On Metrization of Topological Spaces." Amer. Math. Soc. Transl., 91 (1953).

SORGENFREY, R.H. "On the Topological Product of Paracompact Spaces." Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 631-32.

STEINER, A.k. "The Lattice of Topologies: Structure and Complementation." Trans. Amer. Math. Soc., 122 (1966), 379-98.

STONE, A.H. "The Paracompactness and Product Spaces." Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), 977-82.

TAMANO, H. "On Paracompactness." Pac. J. Math., 10 (1960), 1043-1047.

TYCHONOFF, A. "Uber einen Metrisationsatz von P. Urysohn." Math. Ann., 95 (1926), 139-42.

URYSOHN, P. "Uber Metrization der Kompakten Topologischen Raume." Math. Ann., 92 (1924), 275-93.

___. "Zum Metrisationproblem." Math. Ann., 94 (1925), 309-15.

VANROOIJ, A.C.M. "The lattices of All Topologices Is Complemented." Can. J. math., 20 (1968), 805-807.

WALLACE, A.D. "Separation Spaces." Ann. Math., 42 (1941), 6877-97.

WALLMAN, H. "Lattices and Topological Spaces." Ann. Math., 39 (1938), 112-26.

WHYBURN, G.T. "On the Structure of Connected and Connected and Connected Im Kleinen Point Sets." Trans. Amer. Math. Soc., 32 (1930), 926-43.

___. "Open and Closed Mappingts." Duke Math. J., 17 (1950), 69-74.

YOUNG, G.S."The Introduction of Local Connectivity by Change of Topology." Amer. J. Math., 68 (1946), 479-94.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

a-Metrizable	a- متریک‌پذیر
Absolute retract	درون‌بر مطلق
Adherent point	نقطه چسبنده
Admissible	مجاز
Arc	کمان
Arcwise - connected	کمانی - همبند
Axiom of choice	اصل انتخاب
Base	پایه
Baxd at x	به پایهٔ x
Bijective	دو سویی
Boundary	مرز
Bounded	کراندار
Box topology	توپولوژی جعبه‌ای
Cell	حجره
Chain	زنجیر
Chain - group	زنجیری - گروه
Closed	بسته
Closure	بستار
Closter	انباشتگی
Cocountable	متمم شمارش‌پذیر
Cofinite	متمم باپایان
Collectionwise	گردآیه‌ای
Compact	فشرده
Compactification	فشرده‌سازی

Compact - open	فشرده ـ باز
Complemented	متمم‌دار
Complete	کامل
Completely regular	کاملاً منظم
Completion	کامل‌سازی
Component	مؤلفه
Composition	ترکیب
Compound	مرکب
Conjunction	عطف
connected	همبند
Connected im kleinen	جزئاً همبند
Continuous	پیوسته
Continuum	پیوستار
Contractible	انقباض‌پذیر
Contraction	انقباض
Contrapositive	عکس نقیض
Convergence	همگرایی
Converse	عکس، وارون
Coordinate space	فضای مختص
Coset	هم مجموعه
Countable	شمارش‌پذیر
Countably compact	فشردهٔ شمارشی
Countably infinite	شمارش‌پذیر بی‌پایان
Countably paracompact	پیرافشردهٔ شمارشی
Cover	پوشش
Curve	خم
Cut	بریدگی

Cyclic	دوری
Deformation	تغییر شکل
Dense	چگال
Denumerable	شمارش‌پذیر بی‌پایان
Derived set	مجموعهٔ مشتق
Developable	گستردنی
Development	گسترده
Diameter	قطر
Direct sum	مجموعه مستقیم
Disconnected	ناهمبند
Discrete	گسسته
Disjoint .	مجزا
Distributive	توزیعپذیر
Domain	دامنه
Element	عنصر
Empty	تهی
ε − net	ε − تور
Equivalence	هم‌ارزی
Equivalent	هم‌ارز
Exact sequence	دنبالهٔ دقیق
Excision theorem	قضیهٔ برش
Excluded middle	نفی شق ثالث
Existential quantifier	سور وجودی
F_σ − set	مجموعهٔ F_σ
Face	وجه
Factor	عامل
Filter	پالایه

Filterbase	پایه پالایه
Finite	باپایان
First category	رستهٔ اول
First countable	شمارش‌پذیر نوع اول
Fixed point	نقطهٔ ثابت
Free group	گروه آزاد
Fully normal	تماماً نرمال
Fundamental	بنیادی
$G\delta$ – set	مجموعهٔ $G\delta$
Gauge	پیمانه
Generalized Hilbert space	فضای هیلبرت تعمیم داده شده
Generator	مولد
Herediatary	ارثی
Hibert cube	مکعب هیلبرت
Homeomorphism	همانریختی
Homological	درجه همولوژیکی
Homologous modulo A	همولوگوس به پیمانهٔ A
Homology class	ردهٔ همولوژی
Homotopic mappings	نگاشتهای هموتوپیک
Homotopic modulo x_0	هموتوپیک به پیمانه x_0
Homotopy	هموتوپی
Identity	همانی
Image	نگاره
Implication	استلزام
Inclusion	شمولی
Index	اندیس
Indirect Method of proof	روش برهان خلف

Indiscrete	ناگسسته
Infimum	اینفیموم
Infinite	بی‌پایان
Injection	تک گزین
Injective	یک به یک
Interior	درون
Intermediate – value theorem	قضیهٔ مقدار میانی
Intersection	مقطع
Interval topology	توپولوژی بازه‌ای
Invariant	پایا
Inverse	وارون، عکس
Isometric	طولپایی
Isometry	طولپایی
Isomorphism	یکریختی
Juxtaposition	پهلوی هم نهادن
Kernel	هسته
Klein bottle	بطری کلاین
Lattice	شبکه
Least element	کوچکترین عنصر
Least upper bound	کوچکترین کران بالا
Left uniformity	یکنواختی چپ
Left invariant	پایای چپ
Left–lower box topology	توپولوژی جعبه‌ای چپ پائین
Lifting mapping	نگاشت بالابرنده
Limit point	نقطهٔ حدی
Lindelof space	فضای لیندلف
Local base at p	پایه موضعی در p

Locally compact	موضعاً فشرده
Locally connected	موضعاً همبند
Locally finite	موضعاً باپایان
Logical connectives	رابطهای منطقی
Lower limit topology	توپولوژی حد پائین
Mapping	نگاشت
Mapping cylinder	استوانهٔ نگاشت
Maximal element	عنصر بیشین
Meager set	مجموعهٔ لاغر (رستهٔ اول)
Metric	متریک
Metrizable space	فضای متریک‌پذیر
Minimal element	عنصر کمین
Modus Ponens	قیاس استثنایی
Modus Tollens	برهان رفعی
Mobius strip	نوار موبیوس
Morita paracompactness theorem	قضیهٔ پیرافشردگی موریتا
n − cell	حجرهٔ n ـ بعدی
n − sphere	n ـ کره
Negation	نفی
Neighborhood retract	درون‌بر همسایگی
No − Retraction Theorem	قضیهٔ نادرون‌بری
Noncut point	نقطهٔ غیر بریدگی
Normal Moore space conjecture	حدس فضای مورنرمال
Normal space	فضای نرمال
Nowhere dense	هیچ چگال
Null	تهی
One−point compactification	فشرده‌سازی تک ـ نقطه

Order topology	توپولوژی ترتیبی
Ordinal number	عدد اردنیال
Ordinal space	فضای اردنیال
P-adic rational	اعداد گویا p-pای
Pair mapping	نگاشت جفتی
Paracompact	پیرافشرده
Partial ordering	ترتیب جزئی
Partition	افراز
Path	مسیر
Pathwise connected	مسیری ـ همبند
Peano space	فضای په آنو
Perfect set	مجموعهٔ بی‌کاست
Perfectly screenable space	فضای کاملاً غربال‌پذیر
Point-open topology	توپولوژی نقطه ـ باز
Pointwise convergence	همگرایی نقطه‌ای
Preced	مقدم بودن
Precompact	پیش فشرده
Predecessor	مقدم
Preimage	پیشنگاره
Product	حاصلضرب
Productive property	خاصیت ضربی
Projection	تصویر
Projective plane	صفحهٔ تصویری
Proper	سره
Proximity	نزدیکمند
Pseudomentric	شبه متریک
Pseudocompact	شبه فشرده

Quantifier	سور
Quasicomponent	شبه مؤلفه
Quasimetric	متریک گون
Quasiuniformity	شبه یکنواختی
Quotient group	گروه خارج قسمتها
Quotient topology	توپولوژی خارج قسمتها
Range	برد
Refinement	تظریف
Reflexive	بازتابی
Regular	منظم
Relative complement	متمم نسبی
Relative topology	توپولوژی نسبی
Restricted boundary	مرز تحدید شده
Restriction	تحدید
Retact	درون‌بر
Retraction	درون‌بری
Right uniformity	یکنواختی راست
σ − compact	σ ـ فشرده
Screenable space	فضای غربال‌پذیر
Second countable space	فضای شمارش‌پذیر نوع دوم
Semimetric	نیم متریک
Separable space	فضای تفکیک‌پذیر
Separated sets	مجموعه‌های جدا شده
Sequential limit	حد دنباله‌ای
Sequentially compact space	فضای فشردهٔ دنباله‌ای
Set−builder notation	نماد مجموعه‌ساز
Simple ordering	ترتیب ساده

Singular chain complex	مجتمع زنجیری تکین
Singular homology	همولوژی تکین
Star of a cover	ستارهٔ یک پوشش
Starlike metric space	فضای متریک ستاره‌گون
Stone–Čech compactification	فشرده شدهٔ استون ـ چک
Strongly connected	قویاً همبند
Subcomplex	زیر مجتمع
Subcover	زیر پوشش
Symmetric difference	تناقض متقارن
T_0 – space	فضای T_0
T_1 – space	فضای T_1
Tautology	درستگو
Topological group	گروه توپولوژیک
Topological complete	کامل توپولوژیک
Torus	چنبره
Total ordering	ترتیب کلی
Totally bounded	کراندار کلی
Totally disconected	کلاً ناهمبند
Transitive	ترایایی
Truth table	جدول ارزش
Tychonoff plank	تختهٔ تیخونف
Ultrafilter	فراپالایه
Uncountable	شمارش‌ناپذیر
Uniform convergence	همگرایی یکنواخت
Uniform invariants	پایاهای یکنواختی
Uniform topology	توپولوژی یکنواخت
Uniformly continuous	پیوسته یکنواخت

Union	اجتماع
Unit interval	بازهٔ یکه
Universal quantifier	سور عمومی
Universal set	مجموعهٔ مرجع
Upper bound	حد بالا
Well-ordering	خوش ترتیبی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجتماع	Union
ارثی	Herediatary
استلزام	Implication
استوانهٔ نگاشت	Mapping cylinder
اینفیموم	Infimum
اصل انتخاب	Axiom of choice
اعداد گویا p-pای	P-adic rational
افراز	Partition
انباشتگی	Clvster
اندیس	Index
انقباض	Contraction
انقباض‌پذیر	Contractible
a ـ متریك‌پذیر	a-Metrizable
باپایان	Finite
بازتابی	Reflexive
بازهٔ یکه	Unit interval
برد	Range
برهان رفعی	Modus Tollens
بریدگی	Cut
بستار	Closure
بسته	Closed
بطری کلاین	Klein bottle
بنیادی	Fundamental
به پایهٔ x	Baxd at x

بی‌پایان	Infinite
پالایه	Filter
پایا	Invariant
پایاهای یکنواختی	Uniform invariants
پایای چپ	Left invariant
پایه	Base
پایه پالایه	Filterbase
پایه موضعی در p	Local base at p
پوشش	Cover
پهلوی هم نهادن	Juxtaposition
پیرافشرده	Paracompact
پیرافشردهٔ شمارشی	Countably paracompact
پیش فشرده	Precompact
پیشنگاره	Preimage
پیمانه	Gauge
پیوستار	Continuum
پیوسته	Continuous
پیوسته یکنواخت	Uniformly continuous
تحدید	Restriction
تختهٔ تیخونف	Tychonoff plank
ترایایی	Transitive
ترتیب جزئی	Partial ordering
ترتیب ساده	Simple ordering
ترتیب کلی	Total ordering
ترکیب	Composition
تصویر	Projection
تظریف	Refinement

تغییر شکل	Deformation
تک گزین	Injection
تماماً نرمال	Fully normal
تناقض متقارن	Symmetric difference
توپولوژی بازه‌ای	Interval topology
توپولوژی ترتیبی	Order topology
توپولوژی جعبه‌ای	Box topology
توپولوژی جعبه‌ای چپ پائین	Left-lower box topology
توپولوژی حد پائین	Lower limit topology
توپولوژی خارج قسمتها	Quotient topology
توپولوژی نسبی	Relative topology
توپولوژی نقطه ـ باز	Point-open topology
توپولوژی یکنواخت	Uniform topology
ε ـ تور	ε-net
توزیعپذیر	Distributive
تهی	Empty
تهی	Null
جدول ارزش	Truth table
جزئاً همبند	Connected im kleinen
چگال	Dense
چنبره	Torus
حاصلضرب	Product
حجره	Cell
حجرهٔ n ـ بعدی	n-cell
حد بالا	Upper bound
حد دنباله‌ای	Sequential limit
حدس فضای مورنرمال	Normal Moore space conjecture

خاصیت ضربی	Productive property
خم	Curve
خوش ترتیبی	Well-ordering
دامنه	Domain
درجه همولوژیکی	Homological
درستگو	Tautology
درون	Interior
درون‌بر	Retact
درون‌بر مطلق	Absolute retract
درون‌بر همسایگی	Neighborhood retract
درون‌بری	Retraction
دنبالۀ دقیق	Exact sequence
دوری	Cyclic
دو سویی	Bijective
رابطهای منطقی	Logical connectives
ردۀ همولوژی	Homology class
رستۀ اول	First category
روش برهان خلف	Indirect Method of proof
زنجیر	Chain
زنجیری ـ گروه	Chain - group
زیر پوشش	Subcover
زیر مجتمع	Subcomplex
nـ کره	n-sphere
ستارۀ یک پوشش	Star of a cover
سره	Proper
سور	Quantifier
سور عمومی	Universal quantifier

Existential quantifier	سور وجودی
σ-compact	σ ـ فشرده
Lattice	شبکه
Pseudocompact	شبه فشرده
Pseudomentric	شبه متریک
Quasicomponent	شبه مؤلفه
Quasiuniformity	شبه یکنواختی
Countable	شمارش‌پذیر
Uncountable	شمارش‌ناپذیر
Countably infinite	شمارش‌پذیر بی‌پایان
Denumerable	شمارش‌پذیر بی‌پایان
First countable	شمارش‌پذیر نوع اول
Inclusion	شمولی
Projective plane	صفحهٔ تصویری
Isometry	طولپایی
Isometric	طولپای
Factor	عامل
Ordinal number	عدد اردنیال
Conjunction	عطف
Contrapositive	عکس نقیض
Converse	عکس ، وارون
Element	عنصر
Maximal element	عنصر بیشین
Minimal element	عنصر کمین
Ultrafilter	فراپالایه
Compact	فشرده
Compact - open	فشرده ـ باز

فشرده‌سازی	Compactification
فشرده‌سازی تک ـ نقطه	One-point compactification
فشرده شدهٔ استون ـ چک	Stone-Čech compactification
فشردهٔ شمارشی	Countably compact
فضای اردنیال	Ordinal space
فضای په‌آنو	Peano space
فضای تفکیک‌پذیر	Separable space
فضای T_0	T_0-space
فضای T_1	T_1-space
فضای شمارش‌پذیر نوع دوم	Second countable space
فضای غربال‌پذیر	Screenable space
فضای فشردهٔ دنباله‌ای	Sequentially compact space
فضای کاملاً غربال‌پذیر	Perfectly screenable space
فضای لیندلف	Lindelof space
فضای متریک‌پذیر	Metrizable space
فضای متریک ستاره‌گون	Starlike metric space
فضای مختص	Coordinate space
فضای نرمال	Normal space
فضای هیلبرت تعمیم داده شده	Generalized Hilbert space
قضیهٔ برش	Excision theorem
قضیهٔ پیرافشردگی موریتا	Morita paracompactness theorem
قضیهٔ مقدار میانی	Intermediate - value theorem
قضیهٔ نادرون‌بری	No- Retraction Theorem
قطر	Diameter
قویاً همبند	Strongly connected
قیاس استثنایی	Modus Ponens
کامل	Complete

کاملاً منظم	Completely regular
کامل توپولوژیک	Topological complete
کامل‌سازی	Completion
کراندار کلی	Totally bounded
کراندار	Bounded
کلاً ناهمبند	Totally disconected
کمان	Arc
کمانی ـ همبند	Arcwise - connected
کوچکترین عنصر	Least element
کوچکترین کراز بالا	Least upper bound
گردآیه‌ای	Collectionwise
گروه آزاد	Free group
گروه توپولوژیک	Topological group
گروه خارج قسمتها	Quotient group
گستردنی	Developable
گسترده	Development
گسسته	Discrete
متریک	Metric
متریک گون	Quasimetric
متمم باپایان	Cofinite
متمم‌دار	Complemented
متمم شمارش‌پذیر	Cocountable
متمم نسبی	Relative complement
مجاز	Admissible
مجتمع زنجیری تکین	Singular chain complex
مجزا	Disjoint
مجموع مستقیم	Direct sum

مجموعه‌های جدا شده	Separated sets
مجموعهٔ F_σ	F_σ -set
مجموعهٔ G_δ	G_δ -set
مجموعهٔ بی‌کاست	Perfect set
مجموعهٔ لاغر (رستهٔ اول)	Meager set
مجموعهٔ مرجع	Universal set
مجموعهٔ مشتق	Derived set
مرز	Boundary
مرز تحدید شده	Restricted boundary
مرکب	Compound
مسیر	Path
مسیری ـ همبند	Pathwise connected
مقدم	Predecessor
مقدم بودن	Preced
مقطع	Intersection
مکعب هیلبرت	Hibert cube
منظم	Regular
موضعاً باپایان	Locally finite
موضعاً فشرده	Locally compact
موضعاً همبند	Locally connected
مولد	Generator
مؤلفه	Component
ناگسسته	Indiscrete
ناهمبند	Disconnected
نزدیکمیند	Proximity
نفی	Negation
نفی شق ثالث	Excluded middle

نقطهٔ چسبیده	Adherent point
نقطهٔ ثابت	Fixed point
نقطهٔ حدی	Limit point
نقطهٔ غیر بریدگی	Noncut point
نگاره	Image
نگاشت	Mapping
نگاشت بالابرنده	Lifting mapping
نگاشت جفتی	Pair mapping
نگاشهای هموتوپیک	Homotopic mappings
نماد مجموعه‌ساز	Set-builder notation
نوار موبیوس	Mobius strip
نیم متریک	Semimetric
وارون، عکس	Inverse
وجه	Face
هسته	Kernel
هم‌ارز	Equivalent
هم‌ارزی	Equivalence
هم مجموعه	Coset
همانریختی	Homeomorphism
همانی	Identity
همبند	connected
همگرایی	Convergence
همگرایی نقطه‌ای	Pointwise convergence
همگرایی یکنواخت	Uniform convergence
هموتوپی	Homotopy
هموتوپیک به پیمانه x_0	Homotopic modulo x_0
همولوژی تکین	Singular homology

همولوگوس به پیمانهٔ A	Homologous modulo A
هیچ چگال	Nowhere dense
یک به یک	Injective
یکریختی	Isomorphism
یکنواختی چپ	Left uniformity
یکنواختی راست	Right uniformity

فهرست اسامی خاص

Abel	آبل
Alexander	آلکساندر
Alexandroff	آلکساندرف
Stone	استون
Steen	استین
Smirinov	اسمیرنوف
Urysohn	اوریسون
Baire	بئر
Banach	باناخ
Brouwer	براور
Borsuk	بورسوک
Borel	بورل
Bool	بول
Bolzano	بولزانو
Bing	بینگ
Peano	په آنو
Trasaka	تراساکا
Tychonoff	تیخونف
Tietze	تیتسه
Čech	چک
Diendonné	دیودونه
De Morgan	دمورگن
Zorn	زرن
Jordan	ژردان
Sorgenfrey	سرجنفری

سی‌باخ	Seebach
سیرپینسکی	Sierpinski
فرشه	Fréchet
فرودنتال	Freudenthal
کانتور	Cantor
کلاین	Klein
کور اتفسکی	Kauratowski
کوشی	Cauchy
لبگ	Lebesgue
لوین	Levine
لیندلف	Lindelöf
موبیوس	Mobius
مور	Moor
موریتا	Morita
ناگاتا	Nagata
نواک	Novak
ون	Venne
هاف	Hopf
هاوسدرف	Hausdorff
هاینه	Heine
هیلبرت	Hilbert

فهرست راهنما

خواننده گرامی، خواهشمنداست قبل از مطالعه کتاب، موارد زیر را تصحیح فرمائید.

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۷	۳	تسورن	زرن
۱۷	۱۸	تسورن	زرن
۱۸	۹	شیئ	عنصر
۱۸	۱۵	شمارش‌پذیری	شمارش‌ناپذیری
۲۰	۱۲	$a.b^{-۱} = H$	$a.b^{-۱} \in H$
۲۸	۱۶	$x \in A$	$x \in \bar{A}$
۲۹	۱۴	$A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$
۲۹	۱۵	$A \cup B$ یک	$\overline{A \cup B}$ یک
۳۱	۱۱	$\cup\{B : B \subset \mathcal{B}\}$	$\cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$
۳۳	۱۲	عناصر $\mathcal{B}_۱$	عناصر $\mathcal{B}_۲$
۳۷	۱۳	$x \in A$	$x \in A'$
۳۷	۱۶	$x_n \in A$	$x_n \in G$
۳۷	۲۱	$\tau = \{\phi, \{a\}, \{c\} \ldots\}$	$\tau = \{\phi, \{a, b\}, \{c\} \ldots\}$
۳۸	۲	$x_n \rightarrow a$	$x_n \nrightarrow a$
۳۸	۲	$x_n \rightarrow b$	$x_n \nrightarrow b$
۳۹	۱۲	$\rightarrow < T, \tau_۱ >$	$\rightarrow < T, \tau_۲ >$
۴۰	۲	$(۴) \rightarrow ۱$	$(۴) \rightarrow (۱)$
۴۶	۱۶	در $\mathbf{R}$	در $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$
۵۱	۱۷ و ۱۸	۱-۲۵	۱-۲۵
۵۲	۸	$\Pi_n(G_n)$	$\Pi_n^{-۱}(G_n)$
۵۵	۱۰	کنیم	فرض کنیم

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۵۹	۱۱	ρ	δ
۶۱	۱۱	F_δ	F_σ
۶۳	۱۷	هم ارزی $\mathbf{R}$	هم‌ارزی R
۶۵	۱۶	$\varphi_۲$ و $\varphi_۲ o f$	$\varphi_۱$ و $\varphi_۲ o f$
۶۶	۱۵	$\frac{۱}{n} \leq x \leq ۱/۲n$	$\frac{۱}{n} < x \leq ۱$
۷۲	۱۰و۱۱	شکل ۲ـ ۵	شکل ۲ـ۵
۷۴	۶	$U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$	$\bar{U}_\alpha \cap \bar{V}_\alpha = \emptyset$
۷۴	۹	$\Pi_\alpha^{-۱}(U_\alpha) \cap \Pi_\alpha^{-۱}(V_\alpha)$	$\overline{\Pi_\alpha^{-۱}(U_\alpha)} \cap \overline{\Pi_\alpha^{-۱}(V_\alpha)}$
۷۴	۱۸	$i = ۰, ۱, ۲, \frac{۵}{۴}$	$i = ۰, ۱, ۲, \frac{۵}{۲}$
۷۵	۱۶	$f =< S, \tau >\rightarrow$	$f :< S, \tau_۱ >\rightarrow$
۷۶	۳	(فضای $T_۲$ و	(فضای $T_۱$ و
۷۶	۴	(فضای $T_۲$ کاملاً ...	فضای $T_۱$ کاملاً ...
۷۶	۱۸ و ۱۹	(شکل ۲- ۸)	(شکل ۲-۸)
۸۰	۷	اوریسون و تیتزه	اوریسون و تیتسه
۸۰	۱۲	$F_۱ \subset G$	$F_۱ \subset G_۱$
۸۲	۴	نگاشت	نگاشت پیوسته
۸۲	۱۶	$-(g_۱(x) + g_۲(x)$	$-(g_۱(x) + g_۲(x))$
۸۴	۹	$(\bar{C}_۱ - C) \cup (\bar{C}_۲ - C)$	$(\bar{C}_۱ - C_۱) \cup (\bar{C}_۲ - C_۲)$
۸۶	۱۲	$S_۲ - \{\emptyset\}$	$S_۲ - \{\Omega\}$
۸۶	۱۳	$\bar{G} \cap F = \emptyset$	$\bar{G} \cap F_۱ \neq \emptyset$
۸۷	۷	حال	حال بنابر خاصیت بئر
۸۷	۹	$\{x :$ گویا $x\}$	$\{x :$ اصم $x\}$
۸۷	۱۰	عددی مانند d	عدد اصمی مانند d
۸۸	۳	همه توابع صورت	همهٔ توابع به صورت
۹۲	۳	فرض کنیم $\{G : \alpha \in \wedge\}$	فرض کنیم $\{G_\alpha : \alpha \in \wedge\}$

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۹۵	۹	$< S, \tau >$ است	$< S, \tau >$ است □
۹۶	۲۱	زیرپایه S می‌باشد	زیرپایه S باشد
۹۷	۲۰	$\subset \{S_\alpha \cap M : S_\alpha \in$	$= \{M : M \in$
۹۷	۲۱	$\{S_\alpha \cap M : S_\alpha^{\in}$	$\{M : M \in$
۹۷	۲۲	$\{S_\alpha \cap M : S_\alpha \in$	$\{M : M \in$
۹۸	۶	$< \Pi_\wedge S, \Pi_\wedge \alpha >$	$< \Pi_\wedge S, \Pi_\wedge \tau_\alpha >$
۹۹	۱۹	پیوسته و	پیوسته و باز و
۱۰۱	۲	شمارش‌پذیر	شمارش‌ناپذیر
۱۰۱	۸	هرگاه $< S, \tau >$	هرگاه $< S, \tau_1 >$
۱۰۱	۱۶	برای هر $p \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$	برای هر $p \in Y$
۱۰۱	۱۸	$\mathcal{G} = \{N_p : p \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$	$C = \{N_P : p \in Y\}$
۱۰۱	۱۸	باز برای $< \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{L} >$	باز برای Y
۱۰۱	۱۹	درپوش $\mathcal{C}$ برای $< \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{L} >$	زیرپوشش برای Y
۱۰۱	۲۰	زیرفضای شمارش‌ناپذیر	زیرفضای بسته شمارش‌ناپذیر
۱۰۲	۵	بنابراین عنصری مانند ... پوشش شمارش پذیر از $< S, \tau >$ می‌باشد.□	بدین ترتیب زیرردهٔ شمارش‌پذیری از $\mathcal{B}$ به دست می‌آوریم که هر عنصر $p \in S$ متعلق به یکی از آنهاست. اینک نظیر به هر عضو از این زیر رده عضو G_α از $\mathcal{C}$ شامل آن را انتخاب می‌کنیم. □
۱۰۳	۵	فضاهای $< F_1, \mid \tau F_1 >$	$< F_1, \tau \mid F_1 >$
۱۰۳	۱۰	$G_2(q) \subseteq G_2(q)$	$G_2(q) \subseteq \overline{G_2(q)}$
۱۰۶	۲	$C_1 \subset C_2 \subset \dots C_n \subset$	$C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۰۸	۲	نوع دوم	نوع اول
۱۰۹	۱۱	هرگاه $< S, \tau >$	هرگاه $< S, \tau_1 >$
۱۱۳	۱۴	$< I^+ \tau >$	$< I^+, \tau >$
۱۱۳	۱۵	ولی $< S, \tau >$	ولی $< I^+, \tau >$
۱۳۷	۲۰	$\Pi_1 : S \times T \to S$	$\Pi_2 : S \times T \to T$
۱۳۷	۲۱	$\Pi_1 \mid G : G \to S$	$\Pi_2 \mid G : G \to T$
۱۳۷	۲۲	$[\Pi_1 \mid G](A) \in \tau_1$	$V_1 = [\Pi_2 \mid G](A) \in \tau_2$
۱۳۷	۲۲	$[\Pi_1 \mid G](G - A) \in \tau_1$	$V_2 = [\Pi_2 \mid G](G - A) \in \tau_2$
۱۳۷	۲۲	همچنین ...	اگر $U_1 = f^{-1}(V_1)$ و $U_2 = f^{-1}(V_2)$
۱۳۸	۱	- در نتیجه	در اینصورت $U_1, U_2 \in \tau_1$ و $S = U_1 \cup U_2$ و $\emptyset = U_1 \cap U_2$. در نتیجه
۱۳۸	۱۸	دارای مقطع غیرتهی	دارای مقطع تهی
۱۳۸	۲۰	وجود داشته باشد	وجود دارد
۱۴۳	۹	$S \neq {}_1 \cup G_2$	$S \neq G_1 \cup G_2$
۱۴۳	۱۵	$G_1 G_2 \in \tau$	$G_1, G_2 \in \tau$
۱۴۴	۳	$p \in C_1$	$p \in C_2$
۱۴۴	۱۸	یک کمان می‌باشد	یک کمان (یعنی فضای توپولوژیکی همانریخت با $[۰, ۱]$) می‌باشد
۱۴۴	۲۰	خم‌ساده بسته(ژوردان)است	خم‌ساده بسته ژوردان (یعنی فضای توپولوژیکی همانریخت با S^1) است
۱۴۶	۱۲	همبند نباشد	همبند باشد

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۴۶	۲۱	نیز همبند	نیز موضعاً همبند
۱۴۷	۱۲	آنگاه $< A, \xi \mid A >$	آنگاه $< A, \tau \mid A >$
۱۴۷	۱۶	$< S, \tau_۲ >$	$< T, \tau_۲ >$
۱۴۸	۲	اگر هر مؤلفهٔ	اگر و فقط اگر هر مؤلفه
۱۴۹	۶	در هر نقطه $x \in$	در هر نقطه $x \in S$
۱۵۳	۷	$< S, \tau > \to < T, \tau >$	$< S, \tau_۱ > \to < T, \tau_۲ >$
۱۵۵	۱۹	$< S, \tau >$ هبمندـکمانی	$< S, \tau >$ کمانی ـهمبند
۱۶۰	سطرآخر	می‌گردد.	می‌گردد. دراینصورت $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$ یک متریک روی S است که $\tau = \tau_\rho$.
۱۶۱	۱۳	$d(f(x_۰), f(x_۱))$	$d(f(x_۰), f(x))$
۱۶۱	۱	$S_d(f(x_۰), f^{-n})$	$S_d(f(x), ۲^{-n})$
۱۶۵	۸	$\hat{G} = G \cap_{i=۱}^{k} B_{n_i, \lambda_i}$	$\hat{G} = G \cap \cap_{i=۱}^{k} B_{n_i, \lambda_i}$
۱۶۶	سطرآخر	زیرفضاهای متریک‌پذیر	زیرفضاهای موضعاً متریک‌پذیر
۱۵۸	۶	ما بعداً مفاهیم	ما اکنون مفاهیم
۱۸۶	۱۲	در نتیجه $x \in \bar{F}$	در نتیجه $x_۰ \in \bar{F}$
۱۸۶	۱۲	و لذا x	و لذا $x_۰$
۱۸۸	۴	اگر و فقط برای	اگر و فقط اگر برای
۱۹۵	۹	چون M یک فراپالایه	.چون M یک فراپالایه
۲۰۲	۱۷	$\cap\{G_n : n \in I^+\}$	$U \cap \{G_n : n \in I^+\}$
۲۰۸	۷	یک زیرفضای A'	یک زیرفضای بسته A'
۲۱۱	۲	فضای متریک تفکیک‌پذیر M	فضای متریک M
۲۱۱	۱۷	تفکیک‌پذیر M	M

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۱۲	۲	کمانی- همبند	مسیری-همبند
۲۱۲	۳	T^S	$T^{I^{۱}}$
۲۱۲	۳	مؤلفه‌های کمانی	مؤلفه‌های مسیری
۲۲۰	۷	$h(s, ۱ =)$	$h(s, ۱) =$
۲۲۲	۵	$f(۲s - ۱)$	$f(۲s - t)$
۲۲۵	۳	$f(k)\overset{\cong}{\overline{y}}_*, g(k)$	$f(k)\overset{\cong}{\overline{y}}_۰ g(k)$
۲۳۰	۶	$\sum_{i=۰}^{\infty} x_i = ۱$	$\sum_{i=۰}^{n} x_i = ۱$
۲۳۲	۵	برای هر $t \in I^+$	برای هر $t \in I^{۱}$
۲۳۲	سطرآخر	نگاشت $\nu_i \because \Delta_{n-۱} \to \Delta_n$	نگاشت $\nu_i \therefore \Delta_{n-۱} \to \Delta_n^i$
۲۳۳	۳	$\nu \to j : \Delta_{n-۱}\Delta_n$	$\nu_j : \Delta_{n-۱} \to \Delta_n^j$
۲۳۳	۳	$\nu_i : \Delta_{n-۲} \to \Delta_{n-۱}$	$\nu_i : \Delta_{n-۲} \to \Delta_{n-۱}^i$
۲۳۵	۴	$[\sigma^{(i)}]^{(i)}$	$[\sigma^{(i)}]^{(j)}$
۲۳۵	۵	(مثال ۸ـ۴)	(تمرین ۸ـ۴)
۲۳۵	۵	$(-۱)^{i+j}[\sigma^{(i)}]^{(i-۱)}$	$(-۱)^{۱+i+j}[\sigma^{(j)}]^{(i-۱)}$
۲۴۰	۲	نشان دهید که $H_۰(S)$	نشان دهید که در حالتی که S مسیری همبند است $H_۰(S)$
۲۴۰	۳	و در حالتی که S مسیری-همبنداست	و اگر
۲۴۱	۱۵	$f_n(\alpha) = f_n(d\alpha)$	$f_n(\alpha) = f_n(d\gamma)$
۲۴۴	۶	$g = fo\lambda'$	$g = ho\lambda'$
۲۴۵	۱۲	فصل هفتم کتاب	فصل اول کتاب
۲۴۵	۱۵	که در آن U باز	که در آن G و U باز
۲۴۶	۳	چنبره	چنبرهٔ توپر

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۴۹	۲۱	$H^n(S) \xrightarrow{\partial_*^n} H^n(S, A)$	$H_n(S) \xrightarrow{\partial_*^n} H_n(S, A)$
۲۵۰	۲	$H_n(A, S) = \{0\}$	$H_n(S, A) = \{0\}$
۲۵۰	۳	$imgi_*^0 = \{0\} = \ker j_*^0$	$imgi_*^1 = \{0\} = \ker j_*^1$
۲۵۱	۳	$H_2(A)$	$H_1(A)$
۲۵۱	۷	نشان خواهیم داد	نشان دادیم
۲۵۶	۶	$H_m(S^n, A_2)$	$H_m(S^n, A_2^n)$
۲۵۶	۱۰	چونکه A_1	چونکه A_1^n
۲۵۶	۱۹	که A_2^n یک n–گوی	که A_2^n همانریخت با یک n–گوی
۲۶۰	۶	نشان داده خواهد شد	می‌توان نشان داد
۲۶۰	۸	$S^1 \times I^1 \to S^2$	$S^1 \times I^1 \to S^1$
۲۶۰	۹	$0 \leq \theta \leq k/\mathrm{kel}$	$0 \leq \theta \leq (k+t)/k+1$
۲۶۰	۱۰	$k/k+1 \leq \theta \leq 1$	$(k+t)/k+1 \leq G \leq 1$
۲۶۰	۱۳	$0 \leq \theta \leq k/k+1$	$0 \leq \theta \leq k(1+t)/k+1$
۲۶۰	۱۴	$\frac{k}{k+1} \leq \theta \leq 1$	$k(1+t)/k+1 \leq \theta \leq 1$