ایان استیوارت، دیوید تال

مبانی ریاضیات

ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مبانی ریاضیات

ایان استیوارت، دیوید تال

ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی

مرکز نشر دانشگاهی

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۲۴

مرکز نشر دانشگاهی
۲۵۳

The Foundations of Mathematics
Ian Stewart and David Tall
Oxford Universityt Press 1977

مبانی ریاضیات
تألیف ایان استیوارت، دیوید تال
ترجمهٔ دکتر محمدمهدی ابراهیمی
ویراستهٔ دکتر مهدی بهزاد

ناظر چاپ: حمیدرضا دمیرچی‌لو
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۵
چاپ هشتم ۱۳۸۸
تعداد ۲۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: معراج
۴۲۰۰ تومان

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

استوارت، ایان Stewart, Ian
مبانی ریاضیات / ایان استیوارت، دیوید تال؛ ترجمه محمدمهدی ابراهیمی. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.
هفت، ۳۲۰ ص. : مصور، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۵۳: ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۲۴)
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: The Foundations of mathematics.
واژه‌نامه.
کتابنامه: ص. [۲۹۲].
نمایه
چاپ هشتم: ۱۳۸۸.
ISBN 978-964-01-0253-4
۱. منطق ریاضی. الف. تال، دیوید ارم Tall, David Orme ب. ابراهیمی، محمدمهدی، ۱۳۲۶ ـ ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
QA۹/ ۲م۵الف ۵۱۱/۳
۱۳۶۵
کتابخانهٔ ملی ایران ۹ـ۶۶م**

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه
حلقه و میدان	۲۴۹
فضای برداری	۲۴۹
راه آینده	۲۵۵
تمرین	۲۵۶
۱۲. عدد اصلی	۲۵۹
قضیهٔ شرودر برنشتاین	۲۶۹
حساب اعداد اصلی	۲۷۲
ترتیب اعداد اصلی	۲۷۶
تمرین	۲۷۸
قسمت IV : تحکیم مبانی	۲۸۱
۱۳. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها	۲۸۳
برخی از مشکلات	۲۸۴
مجموعه و کلاس	۲۸۵
خود اصول موضوع	۲۸۶
اصل موضوع انتخاب	۲۸۸
سازگاری	۲۸۹
تمرین	۲۹۰
منابع	۲۹۲
اسامی خاص	۲۹۳
فهرست نمادها	۲۹۵
واژه‌نامه انگلیسی به‌فارسی	۲۹۹
واژه‌نامه فارسی به‌انگلیسی	۳۰۷
فهرست راهنما	۳۱۵

پیشگفتار مؤلف

این کتاب جهت خوانندگانی نوشته شده است که در مرحلهٔ گذار از ریاضیات دبیرستانی به نوع کاملاً پخته‌ای از تفکر که خاص ریاضیدانان حرفه‌ای است، هستند: برای دانشجویان سال اول دانشگاهها، پلی‌تکنیکها، وکالجها مفید است، و نیز برای دیپلمه‌های دبیرستان که قصد ادامهٔ تحصیل در ریاضیات را دارند. برای گروه وسیعتر شامل آنهایی که پایه‌ای در ریاضیات مقدماتی (در سطح دبیرستان) دارند و طالب بصیرت در موضوعات بنیادی و روندهای فکری ریاضی هستند هم جالب است.

اصطلاح «مبانی»، که در این کتاب به‌کار می‌رود، دارای معنایی وسیعتر ازمعنایش در حرفهٔ بنایی است. نه فقط ریاضیات را برپایهٔ این مبانی قرار می‌دهیم؛ بلکه، مانند سیمان که ساختمان را سرپا نگه‌می‌دارد و درحقیقت ازآن ساخته می‌شود، این مبانی هم درتمام سطوح حضور دارند. مبانی ریاضیات، با این تعبیر، غالباً به صورت تمرینی اضافی در زمینهٔ صورتگرایی ریاضی-منطق صوری ریاضی، نظریهٔ صوری مجموعه‌ها، توصیف اصل موضوعی دستگاههای اعداد، وساختن تکنیکیشان- به‌دانشجویان ارائه می‌شود؛ وهمهٔ اینها با نمادگذاری ساختگی و استادانه‌ای عرضه می‌شوند. گاهی، به این دلیل که صورتگرایی محض برای دانشجویان تازه‌کار بسیار مشکل است، ایده‌ها را به طور «غیرصوری» ارائه می‌کنیم. در سایر موارد هم عمدتاً این امر صحت دارد، ولی با دلیلی کاملاً متفاوت.

روش صوری محض، حتی با شهودگرایی سطحی، ازنظر روانی برای مبتدیان مناسب نیست، زیرا این روش واقعیتهای روند یادگیری را در نظر نمی‌گیرد. تمرکز روی نکات فنی، بـه قیمت بها ندادن بـه نحوهٔ تشکل ایده‌هـا، تنها یك روی سکه را نشان می‌دهد. ریاضیدان حرفه‌ای صرفاً در قالب نمادپردازی، خشك وکلیشه‌ای نمی‌اندیشد: برعکس، افکارش متوجهٔ قسمتهایی از یك مسئله می‌شودکـه تجربه‌اش آنها را منابع اصلی اشکال کار می‌داند. هنگامی که با مسئله‌ای درگیراست، دقت منطقی دردرجهٔ دوم اهمیت قرارمی‌گیرد: تنها پس از اینکه مسئله، با هرقصد و منظوری، بـه طور شهودی حل شد، آنگاه ایده‌های مربوط، اثبات صوری را به‌وجود می‌آورند. طبیعتاً، این‌قاعده استثناهایی‌هم دارد: قسمتی ازمسئله‌ای را می‌توان قبل ازحتی‌درك شهودی بقیهٔ قسمتها صوری کرد؛ و راستی مثل اینکه

برخی از ریاضیدانان باکمك نماد فکر می‌کنند. بـا این وجود ، این گفته هنوز هم عمدتاً معتبر است.

هدف این کتاب آشنا ساختن دانشجویان با طرز تلقی ریاضیدانان حرفه‌ای با مسائلشان است. این امر مطالب «بنیادی» استانده را هم مطرح می‌سازد؛ ولی هدف ما عرضهٔ روند صوری، بـه عنوان محصول طبیعی الگوی زمینه‌ای ایده‌هاست. یك دیپلمه قواعـد ریاضی بسیاری را می‌داند، هدف ما استفاده از این دانش است جهت تبدیل مشهودات ریـاضی او به ابزاری مؤثر که بتواند قلب مسائل را بشکافد. دیدگاه ما کاملاً متضاد دیدگاهی است که (اغلب) به دانشجو گفته می‌شود «تمام چیزهایی راکه تا به حال آموخته‌ای فراموش کن، آنها نادرست هستند، ما از ابتدا شروع می کنیم، ولی این بار آن را درست انجام می‌دهیم». نه تنها چنین حرفی بر اعتماد دانشجو صدمه می‌زند، نادرست هم هست. به علاوه، این حرف بسیار گمراه کننده است: دانشجویی که حقیقتاً چیزهایی راکه تاکنون آموخته است به دست فراموشی می‌سپارد خود را در وضع تأسف باری می‌یابد.

معرفت روند یادگیری قیـود بسیاری بر روشهای ممکن آموزش یك مفهوم ریاضی تحمیل می‌کند. اغلب صرفاً مناسب نیست که با تعریفی دقیق آغاز کنیم، زیرا محتوای تعریف بدون توضیح بیشتر و ارائهٔ مثالهای مناسب، قابل درك نیست.

این کتاب به چهار قسمت تقسیم شده است تـا طرز تفکر موردنیاز در هرمرحله را مشخص سازد. قسمت I در سطحی غیرصوری، جهت آماده کردن صحنه است. فصل اول با آزمایش خود روند یادگیری، فلسفهٔ زمینهٔ کتاب را عرضه می کند. این راه مستقیم وصاف نیست؛ ضرورتاً راهی است ناهموار و سنگلاخی، با راههای فرعی وکوچه‌های بن‌بست. دانشجویی که این امر را درك کند بهتر می‌تواند با مشکلات روبرو بشود. فصل دوم مفهوم شهودی اعداد حقیقی را بـه عنوان نقاط روی خط اعـداد تحلیل می کند، آن را با ایدهٔ اعشاری بی‌پایان پیوند، و اهمیت خاصیت کمال اعداد حقیقی را توضیح می‌دهد.

در قسمت II نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق لازم جهت هدف مورد نظرعرضه می‌شود، و به ویژه روابط (وبه‌خصوص روابط هم‌ارزی و روابط ترتیبی) و توابع مورد توجه قرار می گیرد. پس‌ازقدری منطق نمادی بنیادی، «اثبات» را مورد بحث قرار می‌دهیم، وتعریفی صوری برایش ارائه می‌کنیم. پس از آن به تحلیل یك اثبات واقعی می پردازیم تا درحد روشنتر کردن جریان کلی اثبات نشان دهیم چطور سبك ریاضی معمول مراحل عادی را در واقع به‌زمینهٔ ضمنی منتقل می کند. هم مزایا و هم خطرات این شیوه نیز مورد بررسی قرار می گیرد.

قسمت III در مورد ساخت صوری دستگاههای اعـداد ومفاهیم مربوط است. بـا بررسی اثباتهای استقرایی کـه به اصول پئانو مربوط به اعداد طبیعی منجر می‌شود آغاز می کنیم ونشان می‌دهیم که ازاینها وبا تکنیکهای نظریهٔ مجموعه‌ها چطور می‌توانیم اعداد صحیح، اعدادگویا، و اعداد حقیقی را بسازیم. درفصل بعد نشان می‌دهیم با صوری کردن اعداد حقیقی به عنوان یك میدان مرتب کامل، چگونه می‌توانیم این روند را وارونه کنیم.

ثابت می کنیم که ساختهای به دست آمده اساساً یکتا هستند، و ارتباط بین‌ساختهای صوری و همتاهای شهودیشان از قسمت I را هم به‌دست می‌دهیم. سپس به بررسی اعداد مختلط، چهارگانها، و ساختهای عمومی‌جبری و ریاضی می‌پردازیم، وبا این ترتیب منظرهٔ‌کاملی‌از ریاضیات پیش پایمان گذاشته می‌شود. بحثی از اعداد اصلی نامتناهی،که از ایدهٔ شمارش منشاء می گیرد، ما را درمسیر کارهای پیشرفته‌ترقرارمی‌دهد. این مطلب همچنین بیان می کند که هنوزکار صوری‌کردن ایده‌هاکامل‌نشده است.

قسمت IV به‌طور مختصر این مرحلهٔ آخر را بررسی می کند: صورتگرایی نظریهٔ مجموعه‌ها. یك مجموعهٔ ممکن‌ازاصول موضوع را ارائه می کنیم وبه بررسی‌اصل‌موضوع انتخاب، اصل پیوستار، و قضیه‌های‌گودل می‌پردازیم.

در سراسر کتاب علاقهٔ ما بیشتر به ایده‌های پشت نمای صوری است تا به جزئیات داخلی زبان صوری به‌کار رفته. شیوه‌ای‌که برای ریاضیدانان حرفه‌ای مناسب است اغلب برای دانشجویان مناسب نیست. (رشته آزمونهایی‌که توسط یکی از مؤلفین با‌کمك دانشجویان سال اول دانشگاه انجام‌گرفته است عملاً صحت این ادعا را بسیار روشن می‌سازد!) لذا این‌کتاب عرضهٔ منطقی صرف نیست‌که از عناصر منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها فراهم شده باشد (البته درپایان دانشجویان در وضعیتی‌خواهند بودکه ازچگونگی‌دستیابی به این نحوهٔ عمل‌لذت ببرند). ریاضیدانان آن طورکه از ظاهریك‌کتاب صوری پیداست رسمی فکر نمی‌کنند. مغزریاضی‌قدرت خلاقیت دارد و بسیار پیچیده است؛ درنتیجه‌گیری جهش می‌کند و همیشه دنباله‌ای از مراحل منطقی را طی نمی‌نماید. تنها وقتی‌که همه‌چیز درك شد ساخت منطقی‌ظاهرمی‌شود. نشان دادن عمارت‌کامل‌شده ونه نشان دادن داربستهای موردنیاز، محروم‌کردن دانشجوست از ابزاری‌که هنگام ساختن ایده‌های ریاضی خودش به آن نیاز دارد.

ای.اس. و د.ت.
واروپك
اکتبر۱۹۷۶

قسمت I

زمینهٔ شهودی

هدف نهایی این کتاب پروراندن توصیف دقیق و منطقی مفاهیم بنیادی ریاضیات، به‌خصوص دستگاههای گوناگون اعداد و مفهوم اثبات، است. دو فصل اول، شامل بحثی به روشی غیر صوری و شهودی دربارهٔ مطالبی که احتمالاً دانشجویان از آنها آگاهی دارند، آغازگر این مطالب است. داشتن ایده‌ای روشن از آنچه که ما سعی درصوری کردنشان داریم جهت درك خود فرایند صوری بسیار مفید است.

به بیان استعاره: می‌خواهیم یك ساختمان بسازیم. دراین قسمت از کتاب به برآورد زمین می‌پردازیم و تصاویر مقدماتی عمارت موردنظر را رسم می‌کنیم. یا می‌خواهیم گیاهی بکاریم؛ لذا باید مطمئن شویم که دانه و خاکی حاصلخیز برای کشت داریم.

لذا در این دوفصل استفاده از دانش ریاضی خود، همچون عملهای حساب، را بدون اینکه نگران مبنای منطقیشان باشیم مجاز می‌شمریم. هدف ما کشف چند نتیجه است، و بالا بشر، مشهوداتمان برای مطالب بعدی.

۱

تفکر ریاضی

ریاضیات عملی نیست که با کامپیوتر و درخلاء[1] انجام گیرد. یك فعالیت بشری است که در روشنایی قرنها تجربه، وبا استفاده ازمغز بشر، با تمام قدرتها وضعفهایش، انجام می‌پذیرد. ممکن است این را یك منبع الهام‌بخش و شگفتی بدانید، یا نقصی کـه باید هرچه سریعتر اصلاح شود، هرطورکه مایل باشید؛ ولی‌این‌حقیقت باقی می‌ماندکه باید با همین بسازیم.

مشکل این نیست که بشر نمی‌تواند به طور منطقی فکرکند. مشکل مربوط به انواع مختلف ادراك است. یك نـوع ادراك، درك منطقی و مرحله بـه مرحلهٔ یك اثبات صوری ریاضی است. گرچـه هرمرحله را می‌توان بررسی‌کرد ولی این نـوع ادراك ممکن است حاوی ایده‌ای از چگونگی ارتباط این مراحل به هم نباشد؛ ازکل اثبات، و از دلایلی‌که در بدو امر به آن منجر می‌شود، ما را آگاه نسازد.

نوع دیگری از ادراك، درك‌کلیات است که ازآن می‌توانیم، گویی با یك نگاه، به کل برهان پی‌ببریم. این‌امرمستلزم این‌است‌که ایده‌های موردنظر را درقالب‌کلی‌ریاضیات بیاوریم، و آنها را با ایده‌های مشابه از موضوعات دیگر مرتبط سازیم.

دلایل لزوم این درك جامع صرفاً زیبایی‌یا آموزشی نیست. فکربشرتمایلی خطرناك

---

۱. برای مثالی سرگرم‌کننده و آموزنده از یك اثبات مرحله‌ای، که هرمرحله به‌خودی خود منطقی است، ومرحلهٔ آخرنتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد ولی مشخص نمی‌کندکه چرا قضیه صحیح است ویا در ابتدا چه طور به‌فکرخطورکرده است، به‌صفحهٔ ۳۰ کتاب **مطالب‌گوناگون** ریاضیات اثر ج. ا. لیتل‌وود (J. E. Littlewood) رجوع کنید.

و ظاهراً اجتناب ناپذیر به انجام خطا دارد. خطای واقعیت، خطای قضاوت، وخطای تفسیر. در روش مرحله‌ای ممکن است متوجهٔ این واقعیت نشویم که سطری نتیجهٔ منطقی سطرهای قبل نیست. ولی، در قالب کلی اگرخطایی منجر به نتیجه‌ای شود که در تصویر کلی نگنجد، این مغایرت باعث می‌شود که به جستجوی خطا بپردازیم.

مثلاً، اگر بخواهیم ستونی ازصد عدد ده رقمی‌را جمع کنیم (فرض کنیم همهٔ اعداد صحیح و مثبت هستند)، به جای به دست آوردن جواب درست که فرض کنیم ۱۳۷۵۶۸۳۰۴۴۵۲ باشد، به سادگی ممکن است در عملیات خطا کنیم و عدد ۱۳۷۵۶۸۸۰۴۴۵۲ را به دست آوریم. در بازنویسی این جواب ممکن است برای بار دوم مرتکب خطا شویم و بنویسیم ۱۳۳۷۵۶۸۸۰۴۴۵۲ . هردو خطا ممکن است پنهان بمانند. اولی به احتمال خیلی زیاد نیاز به بررسی مرحله به مرحله‌ای محاسبه دارد. ولی، دومی را، به این دلیل که مغایر قالب کلی حساب است، می‌توان پیدا کرد. مجموع ۱۰۰ عدد ده رقمی حداکثر عددی دوازده رقمی است

(زیرا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۰۰ = ۱۰۰ × ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹)

درحالی که جواب پیشنهادی نهایی سیزده رقم دارد.

نه‌تنها دراعمال عددی، بلکه درکلیهٔ جنبه‌های درك بشری، ترکیبی ازدرك مرحله‌ای و درك جامع است که حایز بهترین شانس یافتن خطاست. دانشجویان باید بر هردو روش تسلط یابند تا درك کاملی از مطالب به دست آورند و در کاربرد آنها ورزیده شوند. درك مرحله‌ای نسبتاً ساده به دست می‌آید؛ در هر زمان صرفاً یك موضوع را در نظر می‌گیریم وآن قدر تمرین می‌کنیم که ایده جا بیفتد. درك جامع بسیار مشکلتراست؛ این روش مستلزم ساختن قالبی یکپارچه از تعداد زیادی اطلاعات جزئی است. از آن بدتر این است که پس از پروردن قالب خاصی که در مرحله‌ای مناسب موضوع است، اطلاعات جدیدی به دست آیدکه مغایرقالب باشد. دراغلب موارد این مطلب به این معنی‌است که اطلاعات جدید غلط است ولی‌گاهی هم دلالت بر ناقص بودن قالب موجود دارد. اطلاعات جدید هرچه اساسی‌تر باشد، احتمال مناسب نبودن قالب بیشتر است، و لذا دیدگاه‌کلی موجود باید اصلاح شود.

دانشجویان باید انتظار بروز این‌امررا داشته‌باشند. درصورت بروز، فرایند یادگیری همواره با احساس سردرگمی و ازدست دادن اعتماد همراه است. هدف ازدرك ریاضیات جدید این‌است که اعتماد خود را تا رفع سردرگمی از دست ندهیم. برای انجام این‌امر، توانایی تشخیص موقعیت درهنگام وقوع به‌ما کمك می‌کند. وموضوع این فصل‌هم همین‌است.

تشکل مفهوم

همهٔ ریاضیدانان وقتی‌متولد می‌شدند بسیارجوان بودند. این‌سخن بدیهی‌تعبیری غیربدیهی دارد: حتی خبره‌ترین ریاضیدانان هم فرایند پیچیدهٔ فراگیری مفاهیم ریاضی را پشت سر گذاشته‌اند. ریاضیدان وقتی‌برای اولین‌بار با مسئله‌ای یا مفهوم جدیدی مواجه می‌شود آنها

را به ذهن خود می‌سپارد و به تجربیات خود رجوع می‌کند تا ببیند آیا چیزی نظیر آن را قبلاً دیده است. این مرحلهٔ کاوش گرایانه و خلاق ریاضیات هرچیزی جز مرحلهٔ منطقی می‌تواند باشد. تنها وقتی که اجزاء شروع به‌مرتبط شدن می‌کنند و ریاضیدان «احساسی» برای مفهوم، یا مسئله، پیدا می‌کند سیمای نظم هم واردکار می‌شود. سرانجام مرحلهٔ جلا دادن فرا می‌رسد که حقایق اساسی به صورت اثباتی تمیز وجمع وجور مرتب می‌شوند.

به عنوان مثالی علمی، مفهوم «رنگ» را درنظر می گیریم. تعریف لغوی این مفهوم چیزی شبیه این است: احساس حاصل از پرتوهای نور تجزیه شده در چشم. هیچ کس سعی نمی‌کند که مفهوم رنگ را با ارائهٔ این تعریف به‌کودك بیاموزد. («خوب، علی، بگو ببینم چه احساسی از تابش تجزیهٔ نوراین آب نبات چوبی درچشمانت پدید می‌آید...؟») ابتدا به او مفهوم «آبی» را می‌آموزیم. برای این کاریك توپ آبی، یك در آبی، یك صندلی آبی،... را به او نشان می‌دهیم و همراه هریك کلمهٔ «آبی» را هم بیان می‌کنیم. این عمل را با «قرمز» ، «زرد» ، «سبز» ،... تکرار می‌کنیم ، بعد از مدتی او شروع به درك مفهوم می‌کند: به شیئی که قبلاً آن را ندیده است اشاره می‌کنیم و اومی‌گوید «آبی». حال تظریف این امر به «آبی پررنگ»، «آبی کم رنگ»، و غیره‌کار نسبتاً ساده‌ای است. پس از تمرین‌زیاد، برای تثبیت مفهوم رنگهای مختلف دوباره شروع می‌کنیم. «رنگ آن در آبی است. رنگ آن خوك قرمز است. آن‌گل آلاله چه رنگی دارد؟» اگر بگوید «زرد» در این‌صورت دارد مفهوم «رنگ» را درك می‌کند. هنگامی که‌کودك رشد می‌کند ومفاهیم علمی را می‌آموزد سرانجام می‌توان طیف نوری راکه ازمنشور می‌گذرد به اونشان داد. او طول موج نور را می‌آموزد، و به عنوان دانشمندی‌کامل، قادر است به دقت طول موج نور متناظر با هر رنگ آبی خاصی را تعیین‌کند. اکنون درك او از مفهوم «رنگ» خیلی بیشرفت‌کرده است؛ البته این نیز برای توضیح رنگ «آبی» به‌کودك کمك نمی‌کند. وجود تعریفی‌دقیق وخالی‌ازابهام برای «آبی» برحسب طول‌موج، درمرحلهٔ شکل گیری مفهوم هیچ استفاده‌ای ندارد.

در مورد مفاهیم ریاضی نیز همین‌طور است. خوانندهٔ این‌کتاب تعداد زیادی مفهوم ریاضی‌را درذهنش‌پرورانده است: می‌داند چطوریك معادلهٔ درجهٔ دوم را حل‌کند، چطور نمودار رسم‌کند، چطوریك تصاعد هندسی‌راجمع‌کند. مهارت زیادی درمحاسبات حسابی دارد. قصد ما پروردن این اندوخته از ادراك ریاضی است وبسط این مفاهیم به سطحی کاملتر. برای این امر باید از مثالهایی که ازتجربهٔ خواننده به دست می‌آیند استفاده کنیم، وبراساس این مثالها مفاهیم جدید را معرفی نماییم. وقتی این مفاهیم تثبیت شدند، خود جزئی از تجربهٔ غنی‌تر در می‌آیند که بر روی آنها می‌توانیم در سطوح بازهم بالاترکارکنیم. اگرچه مسلماً می‌توانیم همهٔ ریاضیات را با روشهای صوری برمبنای مجموعهٔ تهی، وبدون استفاده ازهیچ‌اطلاع دیگری، بپرورانیم؛ ولی‌این‌کار برای کسانی که درك قبلی‌از ریاضیات مورد بحث ندارندکاملاً نامفهوم است. یك متخصص با دیدن دستگاهی منطقی که دریك کتاب نوشته شده است می‌تواند بگوید «حدس می‌زنم منظور از آن شیء «صفر» است ، پس‌آن شیء «یك» است، آن یکی «دو» است،... وکل‌این‌اشیاء باید اعداد صحیح باشند،...

آن یکی چیست؟ آهان فکر کنم فهمیدم: باید «جمع» باشد...». یك غیرمتخصص خود را در مقابل توده‌ای از نمادهای رمزی می‌بیند. هرگز کافی نیست که یك مفهوم جدید را تعریف کنیم ولی مثالهایی وافی که آن را توصیف کند و به ما بگوید چه می‌توان با آن مفهوم انجام داد، ارائه ننماییم. (البته یك متخصص غالباً در مقامی هست که مثالهایی از خودش ارائه کند، و ممکن است به کمك زیادی احتیاج نداشته باشد.)

طرح

پس، هرمفهوم ریاضی قالبی منظم متشکل از ایده‌هایی است که به طریقی به یکدیگرمرتبط هستند، و از تجربهٔ مفاهیمی که قبلاً تثبیت شده‌اند ناشی می‌شود. روانشناسان چنین قالبهای منظم متشکل از ایده‌ها را «طرح» می‌نامند. مثلاً، یك کودك ممکن است یاد بگیرد که بشمارد («یك، دو، سه، زنگ مدرسه...») وایده‌هایی نظیر «دو شیرینی»، «سه سگ»، . . . را نیز فرا می‌گیرد و سرانجام پی می‌بردکه دو شیرینی، دو گوسفند، دو گاو در چیزی مشترکند، و آن چیز«دو» است. اوطرحی برای مفهوم «دو» می‌سازد. واین طرح تجربه‌اش: که دو دست دارد، دو پا دارد، هفتهٔ قبل دو گوسفند در مزرعه دیده است، قافیهٔ زنگ مدرسه «یك، دو،...» است و الی آخر، را دربرمی‌گیرد. این واقعاً بسیار شگفت‌آور است که مغز چه اندازه اطلاعات را روی هم می‌ریزد تا این مفهوم، یا طرح، را تشکیل بدهد. کودك محاسبات ساده را هم یاد می‌گیرد («اگر پنج سیب داشته باشید و دوتای آن را به کسی بدهید، چندتا برایتان می‌ماند؟») و سرانجام طرحی می‌سازدکه مسئلهٔ «پنج منهای دو چند است؟» را حل کند.

حال اگر از او بپرسید «پنج منهای شش چند است؟» جواب او «نمی‌توان انجام داد» خواهد بود، یا شاید صرفاً خنده‌ای تمسخرآمیزکه انسانی بالغ و چنین سؤال احمقانه‌ای! این امر به‌این دلیل است که این سؤال درطرحی که کودك برای تفریق ساخته است نمی‌گنجد: او به «پنج سیب داریم و شش‌تای آن را به دیگری می‌دهیم» رجوع می‌کند و نتیجه می‌گیردکه این عمل امکان‌پذیر نیست. در مرحله‌ای بسیار دورتر مفهوم اعداد منفی را فرا می‌گیرد، و جواب این سؤال را «منهای یك» می‌دهد. چه شده است؟ طرح اولیهٔ او برای «تفریق» چنان اصلاح شده است که ایده‌های جدید را دربرمی‌گیرد — احتمالاً با گرماسنج، یا حساب بانکداری، یا چیزی دیگر درك او از این مفهوم تغییر یافته است. طی‌فرایند این تغییر، با مسائل گیج کننده‌ای روبرومی‌شود (منهای یك سیب چه شکلی دارد؟) و سرانجام خود را قانع می‌کندکه (شمردن سیب مانند خواندن گرماسنج نیست).

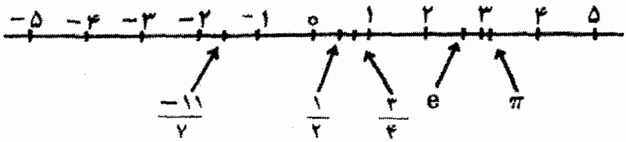
قسمت بزرگی ازفرایند یادگیری این است که طرحهای موجود چنان اصلاح شوند که پذیرای ایده‌های جدید هم باشند. همان‌طورکه گفتیم این فرایند با دورهٔ سردرگمی همراه است. اگر امکان داشت ریاضیات را بدون مواجههٔ با این مسئله آموخت، زندگی بسیار شیرین می‌شد. متأسفانه، فکر بشر ظاهراً این‌طور عمل نمی‌کند («جاده‌ای سلطنتی

به‌هندسه وجود ندارد»)[1] و بهترین کار این است که نه فقط سردرگمیها را پیدا کنیم، بلکه علت آنها را نیزدریابیم. در خواندن این کتاب خواننده به دفعات دچارسردرگمی‌خواهد شد. بی‌شك، گاهی علت آن بی‌دقتی مؤلفین هست؛ ولی اغلب علت آن فرایندکار است. این امر را باید نشانهٔ پیشرفت تلقی کرد- مگراینکه برای مدتی طولانی ادامه یابد!

مثال

این فرایند را می‌توان با نگاهی به توسعهٔ تاریخی مفاهیم ریاضی مجسم کرد، که خودش یك فرایند یادگیری است؛ البته، در این امر به جای یك نفر، نفرهای متعددی درکارند. وقتی که ابتدا اعداد منفی معرفی شدند مخالفتهای زیادی با آنها می‌شد («نمی‌توانیم کمترازهیچ داشته باشیم») ولی امروز، دراین‌دنیای مالی بدهکار وبستانکار، اعداد منفی جزئی از زندگی روزمره شده‌اند. جالبتر از آن عرضهٔ اعداد مختلط است. لایبنیتز[2] می‌دانست که مربع هرعدد مثبت یا هرعدد منفی‌همیشه باید مثبت باشد. اگر i ریشهٔ دوم منهای یك باشد، آنگاه $i^2 = -1$، پس i نمی‌تواند عددی مثبت یامنفی باشد. لایبنیتز معتقد بودکه i را باید عددی بسیارمرموز تلقی کرد: عددی غیرصفرکه نه‌کوچکتر ازصفر است و نه بزرگتر از صفر. این امر به سردرگمی بسیاری منجرشد، و اعداد مختلط را با سوءظن همراه‌کرد- این سوءظن هنوز هم درگوشه وکنار دیده می‌شود. اعداد مختلط به‌آسانی در طرح بسیاری ازمردم در مورد «عدد» نمی‌گنجد، ودانشجویان غالباً دراولین مواجهه مفهوم را رد می‌کنند. ریاضیدانان جدید این‌مورد را باکمك طرح تعمیم یافته‌ای که در آن این حقایق با معنی هستند بررسی می‌کنند.

تصور کنیم که اعداد حقیقی‌را طبق معمول روی یك خط علامت‌گذاری کرده باشیم:



اعداد منفی اعدادی هستندکه در سمت چپ صفر قرار دارند واعداد مثبت آنهایی که در سمت راست صفر. i درکجا قراردارد؟ نه درسمت چپ می‌تواند قرارگیرد، ونه درسمت راست. کسانی که در طرحشان اعداد مختلط نمی‌گنجد باید چنین استدلال کنند: این مطلب به این معنی است که i در هیچ‌کجای این خط قرار نمی‌گیرد. روی این خط جایی برای i وجود ندارد، پس i یك عدد نیست. ازآنجاکه i یك عدد نیست، مسلماً با استفاده از آن نمی‌توان حساب یا جبر هم انجام داد.

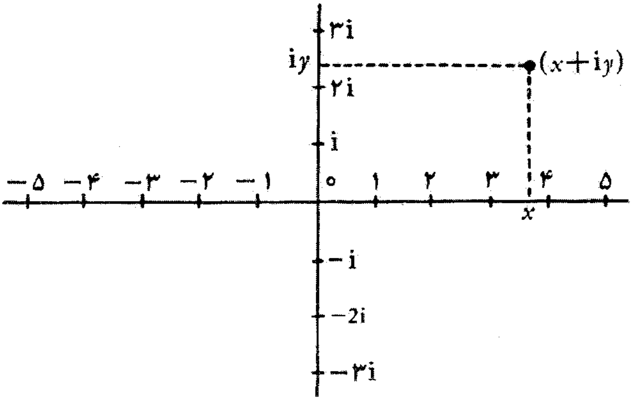
اما، اعداد مختلط رامی‌توان به‌عنوان نقاط یك صفحه مجسم کرد. اعداد حقیقی‌روی «محور xها» قرار می‌گیرند، i به‌فاصلهٔ یك واحد ازمبدأ روی «محور yها» واقع می‌شود،

---

۱. گویا گفتهٔ اقلیدس است به بطلمیوس.

2. Leibniz

و عدد $x+iy$ به فاصلهٔ x واحد ازمحور yها و y واحد از خـط حقیقی قرار می‌گیرد (به‌ازای x یـا y منفی‌جهت عوض می‌شود). با این ایراد به i («کـه درهیچ‌کجای خط نمی‌تواند قرارگیرد») چنین‌مقابله می‌کنیم که البته i روی خط قرارندارد، بلکه به اندازهٔ یك واحد بالای آن است. این‌طرح تعمیم یافته می‌تواند بدون هیچ مشکلی‌حقایق مضطرب‌کننده را دربرگیـرد. بنابراین این حقایق دیگـر مضطرب کننده نیستند و راه بـرای درك چگونگی استفاده از اعداد مختلط در مسائل ریاضی باز است.



خلاصه

مشاهدات فوق در زمینهٔ روانشناسی‌انسانها[1]، تاحد زیادی، ساخت این‌کتاب راتعیین‌کرده است. همیشه میسر نیست که تعریفی لغوی ودقیق برای هرمفهومی‌که با آن مواجه می‌شویم ارائه دهیم. ممکن‌است بگوییم کـه مجموعه «دستهٔ معینی از اشیاء» است، ولی با این‌کار جنجال برمی‌انگیزیم زیرا «دسته» همان معنی «مجموعه» را دارد.

در مطالعهٔ مبانی ریاضیات باید آماده باشیم‌که با ایده‌های جدید بـه تدریج آشنا شویم، نه اینکه با تعریفی جزم شروع کنیم‌که فوراً درك هم نشود. با ادامه دادن راهمان ، درك مـا از یك ایده دقیقتر می‌شود. گاهی به مرحله‌ای می‌رسیم کـه تعریف مبهم اولیهٔ را می‌توانیم بـه طور دقیقتری فرمول بندی‌کنیم («زرد رنگ نوری است کـه طول موجش $5500\ \text{Å}$ است»). تعریف جدید، که ظاهراً از ایده‌های مبهمی‌که به فرمول‌بندی‌آن منجر شد بهتراست، فریبندگی گمراه‌کننده‌ای دارد. آیا بهترنیست‌که با این تعریف زیبا ومنطقی شروع‌کنیم؟ پاسخ‌کوتاه «نه» است. ارزش‌این‌تعریف جدید را بدون درك مفاهیم مربوط، مفاهیمی‌که براساس همان ایده‌های مبهم اصلی شکل می‌گیرند، نمی‌توانیم دریابیم. روش کامـلاً صوری در ریاضیـات ممکن است برای یك متخصص منطق ریاضی‌بسیار مناسب باشد. ولی برای دانشجویان اصلاً مناسب نیست. بـه جای آن باید معلومات ودرك قابل

---

۱. به‌کتاب اسکمپ [۱۳] رجوع شود.

ملاحظهٔ قبلی دانشجویان از ریاضیات را طوری بازسازی کرد که برای تفکر پیشرفتهٔ ریاضی مناسب باشد. در این صورت (و این مرحله‌ای است که امیدواریم در آخر کتاب به آن برسیم) تعاریف صوری معانی حقیقی به خود می‌گیرند.

تمرین

غرض ازمثالهای زیر برانگیختن خواننده است جهت بررسی فرایند افکار خودش ودیدگاه فعلی ریاضیش. بسیاری از این مثالها جواب «صحیحی» ندارند، ولی بسیار آموزنده‌است که خواننده حل آنها را بنویسد و در جای امنی نگهداری کند و ببیند در طول مطالعهٔ کتاب چطور عقایدش ممکن است تغییر کنند. آخرین تمرین این کتاب بررسی مجدد این پرسشهاست.

۱. فکر کنید که دربارهٔ ریاضیات چطور فکر می‌کنید. اگر با مسئلهٔ جدیدی روبرو شوید که درقالبی که با آن آشنا هستید می‌گنجد، پاسختان ممکن‌است ازیك منطق قوی برخوردار باشد و درغیراین صورت پاسخ اولیه‌تان می‌تواند متضمن هرچیزی جزمنطق باشد. درحل سه مسئلهٔ زیر بکوشید، و حداکثر تلاش خود را در یادداشت‌کردن مراحلی‌که به جواب منتهی می‌شوند اعمال کنید.

(الف) سن پدر علی سه برابر سن علی است. ده سال بعد سن او دو برابر سن علی می‌شود. اکنون علی چند ساله است؟

(ب) به یك قرص مسطح و یك کره با قطرهای یکسان، با فاصله‌های مساوی چنان نگاه می‌کنیم که صفحهٔ قرص برخط دید عمود باشد. کدام بزرگتر به نظرمی‌رسد؟

(پ) دویست سرباز در آرایشی مستطیلی، در ده سطر وبیست ستون، ایستاده‌اند. بلندترین شخص هرسطر را انتخاب می‌کنیم، و بین این ده نفر، سرباز S کوتاهترین است. به همین‌نحو کوتاهترین‌فرد هرستون را انتخاب می‌کنیم و T بلندترین این‌بیست نفراست. آیا S و T یك شخص هستند؟ اگر نیستند، درموردانداز‌ه‌های S و T چه می‌توانید بگویید؟

طریقهٔ حل این سه مسئله وهمچنین‌جواب نهایی را، اگر به آن رسیده‌اید، یادداشت کنید.

۲. دو مسئلهٔ زیر را درنظر بگیرید:

(الف) می‌خواهیم نه مترمربع پارچه را بین پنج خیاط به طور مساوی تقسیم کنیم؛ به هریك چقدر پارچه می‌رسد؟

(ب) می‌خواهیم نه بچه را بین پنج زوج به طور مساوی به فرزند خواندگی تقسیم کنیم؛ به هر زوج چند بچه داده می‌شود؟

بیان ریاضی هردو مسئله به صورت زیر است:

«x را چنان پیدا کنید که $5x = 9$»

آیا جواب هردو مسئله یکی است ؟ فرمول‌بندی ریاضی چطور می‌تواند بین این دو مورد تمایز قایل‌شود؟

۳. فرض کنید می‌خواهید اعداد منفی را به‌کسی که با این مفهوم آشنا نیست توضیح دهید، و با این جمله روبرو می‌شوید:

«اعداد منفی نمی‌توانند وجود داشته باشند زیرا نمی‌توان کمتر ازهیچ داشت.» چه پاسخی می‌دهید؟

۴. منظور از اینکه بسط اعشاری «عود» می‌کند چیست؟ کسرنظیرعدد اعشاری ...۳۳۳ر۰ چیست؟ نظیرعدد اعشاری ...۹۹۹ر۰ چطور؟

۵. استفادهٔ ریاضی از زبان‌گاهی با زبان محاوره‌ای تفاوت می‌کند. در مورد هریك از احکام زیر، یادداشت کنیدکه آیافکرمی کنیدآنها صحیح هستند یاغلط. جواب خود رابرای مقایسهٔ با آنچه‌که در فصل ۶ می‌خوانید نگهدارید.

(الف) همهٔ اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول هستند.

(ب) هریك از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول است.

(پ) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول هستند.

(ت) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ زوج هستند.

(ث) همهٔ اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ زوج هستند.

(ج) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ فرد هستند.

۶. «اگرخوك بال داشت، پرواز می‌کرد.»
آیا این یك استنتاج منطقی است؟

۷. «مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵،... و غیره نامتناهی است.» توضیح دهیدکه کلمهٔ «نامتناهی» در این مورد چه معنایی دارد.

۸. تعریف صوری عدد ۴ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

ابتدا توجه کنیدکه هرمجموعه با نوشتن‌اعضایش دریك آکولاد { } مشخص‌می‌شود و مجموعهٔ بدون عضو با $\varnothing$ نمایش داده می‌شود. آنگاه تعریف می‌کنیم که

$$۴ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}.$$

آیا می‌توانید این تعریف را درك کنید؟ آیا تصورمی‌کنیدکه این تعریف برای مبتدیان مناسب است؟

۹. به نظرشما،کدام یك از عبارات زیر بهترین توضیح برای برابری

$$(-۱)\times(-۱)=+۱$$

است؟

(الف) واقعیتی است علمی که با تجربه کشف شده است،

(ب) تعریفی‌است فرمول‌بندی شده توسط ریاضیدانان بــه عنوان تنهـا راه معقول به دردخور کردن عملیات حساب،

(پ) استنتاجی است منطقی از اصول موضوع مناسب،

(ت) دارای توضیحی است دیگر.

برای انتخاب خود دلیل ارائه دهید و آن را برای بررسیهای بعدی محفوظ نگهدارید.

۱۰. درضرب دوعدد در یکدیگر، ترتیب مهم نیست، $xy=yx$. آیا می‌توانید این‌نتیجه را در موارد زیر:

(الف) هرگاه x و y هردو عدد صحیح باشند،

(ب) هرگاه x و y اعدادی حقیقی باشند،

(پ) هرگاه x و y اعداد دلخواهی باشند،

توجیه کنید؟

۲

دستگاههای اعداد

خوانندگان درك منظمی از حساب دستگاههای گوناگون اعداد ــ اعداد شمارشی، اعداد منفی، و غیره ــ دارند. ولی ممکن است فرایند حساب را با دقت منطقی بررسی نکرده باشند. بعداً در این کتاب می‌خواهیم دستگاههای اعداد را در یك قالب اصل‌موضوعی‌دقیق قراردهیم. در این فصل راه احتمالی پرورش ایده‌های خوانندگان از این دستگاهها را به‌اختصار مرور خواهیم کرد. گرچه استفادهٔ مداوم از این ایده‌ها بسیاری از مشکلاتی را که هنگام شکل گرفتن مفاهیم بروز می‌کردند برطرف کرده است، این مشکلات در بررسی صوری نیز ممکن است دوباره ظاهرشوند و باید مجدداً مورد توجه قرار گیرند. بنابراین بسیار شایسته است قبل از اینکه گرفتار اصولی‌کردن مطالب شویم اندکی از وقت خود را هم صرف یادآوری نحوهٔ پرورش آنها کنیم. خوانندگان مجرب ممکن است به‌علت پایین بودن سطح مطالب موردبحث وسوسه شوندکه ازمطالعهٔ این فصل صرف‌نظر کنند. لطفاً این کاررا نکنید. ایده‌های افراد بالغ همه براساس مطالب ابتدایی‌نهاده شده‌اند. اگر بخواهیم مبانی ریاضیات را درك کنیم، آگاهی از نحوهٔ پیدایش فرایند فکری‌ریاضی خودمان با اهمیت است.

عدد طبیعی

اعداد طبیعی همان اعداد شمارشی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، . . . هستند. کودکان نام این اعداد، و

ترتیب آنها را برحسب عادت می‌آموزند. کودکان در اثر تماس با بزرگسالان به‌معنایی که بزرگسالان برای عباراتی نظیر «دوشیرینی»، «چهارمهره» قایل می‌شوند پی‌می‌برند. استفاده از کلمهٔ «صفر» ومفهوم «هیچ شیرینی» قدری مشکلتراست وکمی بعد از آن حاصل می‌شود.
برای شمارش اشیا، صرفاً به‌نوبت به آنها اشاره می‌کنیم و می‌گوییم «یك، دو، سه، . . .» تا زمانی که به‌همهٔ اشیا، هرکدام یکبار، اشاره کرده باشیم.
سپس حساب اعداد طبیعی راکه با جمع آغاز می‌شود، می‌آموزیم. در این مرحله «قوانین» بنیادی جمع (کـه به‌طور جبری به‌عنوان قانون جا به‌جایی $a+b=b+a$، و قانون شرکت‌پذیری $a+(b+c)=(a+b)+c$ بیان می‌شوند) بسته به‌روشی که به‌کار می‌بریم ممکن‌است «واضح» باشند یا واضح نباشند. اگرجمع را برحسب روی هم‌ریختن عملی دسته‌های اشیا وسپس شمارش نتیجه معرفی کنیم، این دوقانون تنها به‌این فرض‌ضمنی وابسته می‌شوندکـه تعویض ترتیب اشیا دریك دسته تعداد اشیا را تغییرنمی‌دهد. همچنین یك روش جدید استفاده از چوبهای رنگی که طولشان نمایشگر اعداد است (وبا دنبال‌هم قراردادنشان بـا هم جمـع می‌شوند) «نامفهومهای» جا به‌جایی وشرکت‌پذیری را چنان بدیهی می‌سازدکـه حتی اشاره به آنها تـا حدی سبب گمراهی است. ولی، اگر جمع را به‌کودکان بـا «ادامهٔ شمارش» بیاموزیم وضع کاملاً فرق می‌کند. برای محاسبهٔ ۴+۳ او از ۳ شروع می‌کند وبه‌شمارش چهارتای دیگر ادامه می‌دهد: ۴، ۵، ۶، ۷. وبرای محاسبهٔ ۳+۴ از ۴ شروع می‌کند وسه‌تای دیگر را هم می‌شمارد: ۵، ۶، ۷. حال دلیل اینکه در هردومورد جواب یکی است بسیارپوشیده‌تر است. درواقع برای کودکانی که این روش‌را می‌آموزند اغلب محاسبهٔ عباراتی‌چون ۱۷+۱ مشکل است، ولی محاسبهٔ ۱+۱۷ بدیهی است!

اکنون به‌بررسی‌مفهوم ارزش‌مکانی‌ارقام می‌پردازیم. عدد ۳۳ شامل دو تا سه است، ولی آنها به‌یك معنی نیستند. باید تأکیدکنیم کـه این امر صرفـاً به‌علامت‌گذاری مربوط می‌شود، وبه‌خود اعداد ارتباطی ندارد. ولی این‌علامت‌گذاری بسیارمفید و با اهمیت است. با این علامت‌گذاری (اصولاً) می‌توانیم اعداد به‌دلخواه بزرگ را بنویسیم، و محاسبات را راحت‌انجام دهیم. ولی، توصیف ریاضی‌ودقیق فرایندهای کلی‌حساب درعلامت‌گذاری مکانی هندی‌ـعربی بسیار پیچیده است (به‌همین‌علت است کـه کودکان وقت زیادی صرف یادگیری کلی‌آن می‌کنند) و، مثلاً، خیلی مناسب اثبات قانون جا به‌جایی نیست. گاهی‌یك دستگاه ابتدایی‌تر برتریهایی هم دارد. مثلاً، مصریان قدیم نماد | را برای نمایش ۱، ∩ را برای نمایش ۱۰، 𓍢 را برای ۱۰۰، ونمادهای دیگری را برای ۱۰۰۰، وغیره به‌کار می‌بردند. هرعدد با تکرار این نمادها نوشته می‌شد: مثلاً ۲۴۷ را به‌صورت

𓍢𓍢∩∩∩∩|||||||

می‌نوشتند. جمع کردن در دستگاه مصری آسان است: تنها باید نمادها راکنارهم قرارداد. اکنون نیز قوانین جا به‌جایی وشرکت‌پذیری واضح هستند. ولی این علامت‌گذاری برای محاسبه چندان مناسب نیست. برای بازیافتن‌علامت‌گذاری مکانی از علامت‌گذاری مصری

تنها باید برخی از «قواعد انتقالی»، مانند $\cap = ||||||||||$، را پذیرفت وهیچ گاه نمادی را بیش از ۹ بار به‌کار نبرد.

قبل از ادامهٔ بحث، به‌معرفی چند نماد می‌پردازیم. مجموعهٔ اعداد طبیعی را با $\mathcal{N}$ نمایش می‌دهیم. نماد $\in$ «عضوی است از» یا «متعلق است به» معنی می‌دهد. پس نماد

$$۲\in\mathcal{N}$$

را «۲ متعلق است به‌مجموعهٔ اعداد طبیعی»، یا به‌زبان معمولیتر، «۲ عددی طبیعی است» می‌خوانیم.

کسر

کسرها را برای امکان عمل تقسیم معرفی می‌کنیم. تقسیم ۱۲ به ۳ قسمت آسان است: ۱۲ = ۴ + ۴ + ۴. تقسیم، مثلاً، ۱۱ به ۳ قسمت مساوی که هرقسمت عددی طبیعی باشد امکان‌پذیر نیست. ازاین‌رو به‌تعریف کسر m/n که $m, n \in \mathcal{N}$ و $n \neq ۰$ رهنمون می‌شویم. عملهای جمع وضرب در $\mathcal{F}$، مجموعهٔ کسرها، را هم می‌توانیم تعریف کنیم: این اعمال به‌صورت جبری عبارتند از

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

این‌نمادگذاری یك نقص دارد وآن اینکه دوکسر به‌ظاهرمتفاوت ممکن است برابرباشند. مثلاً، ۲/۳ = ۴/۶. این نقص با مجاز دانستن «حذف» عوامل مشترك، وتحویل کسر به «ساده‌ترین صورت» برطرف می‌شود.

عدد صحیح

همان‌کاری که کسرها درتقسیم می‌کنند، اعداد صحیح درتفریق انجام می‌دهند. تفریقی نظیر ؟ = ۷ − ۲ جوابی در $\mathcal{N}$ ندارد. باید اعداد منفی را معرفی کنیم. اعداد منفی اغلب برحسب «خط اعداد» به‌کودکان معرفی می‌شوند. خطی مستقیم می‌کشیم وآن را به‌فواصل مساوی قسمت می‌کنیم. یکی‌ازاین‌علامتها را ۰ می‌نامیم، سپس اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... را به‌دنبال هم درطرف راست، و اعداد منفی ۱−، ۲−، ۳−، ... را در طرف چپ صفرعلامت‌گذاری می‌کنیم.

این امر دستگاه تعمیم یافته‌ای از اعداد به‌نام «اعداد صحیح» را به‌دست می‌دهد. هر عدد صحیح یا برابرعددی طبیعی چون n است، یا نمادی است مانند $n-$ که در آن n یك عدد طبیعی‌است، یا ۰. حرف $\mathcal{Z}$ را برای نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح به‌کارمی‌بریم. (Z نخستین حرف کلمهٔ آلمانی «Zahlen» به‌معنای عدد صحیح است.)

توصیف محاسبه‌در $\mathcal{Z}$ قدری پیچیده است. غالباً برای توصیف اعداد منفی از مفهوم بدهی استفاده می‌کنیم. درضرب اعداد منفی باید این نکته را درنظربگیریم که «منفی درمنفی مثبت می‌شود».

از یکی دیگر از نمادهای نظریهٔ مجموعه‌ها هم استفادهٔ زودرس می‌کنیم، نماد $\subseteq$ «زیرمجموعه‌ای است از» معنی دارد. پس داریم

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$$

زیرا هرعدد طبیعی عددی صحیح نیزهست. همچنین داریم

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}.$$

گروهی از ریاضیدانان درقیاس با «اعداد صحیح منفی» ۱—، ۲—، ۳—، ...، «اعداد صحیح مثبت» را با ۱+، ۲+، ۳+، و غیره نمایش می‌دهند. جهت دقت، آنها بین اعداد طبیعی که برای شمارش به‌کار می‌روند، و اعداد مثبت فرق می‌گذارند. منصفانه نیست که این افراد را برای قایل‌شدن تمایزی که ممکن است غیرلازم به‌نظرآید مجازات کنیم، زیرا گاهی این امر از لحاظ تکنیکی مفید است. زمانی یك دانشمند یونانی مدعی شدکه ادیسه[1] اثر همر[2] نیست بلکه اثر شخص دیگری همنام اوست. اگردلیل خوبی برای تمایزاین‌دو داشته باشیم (با توجه به‌اینکه به‌هرحال تقریباً هیچ چیزی از همر نمی‌دانیم) این‌امرکاملاً موجه است؛ ولی‌دربیشتر هدفهای عادی این تمایزکاملا بی‌معنی است. همین مطالب را می‌توان درمورد اعداد طبیعی واعداد صحیح مثبت هم بیان‌کرد.

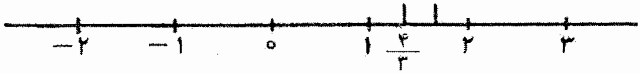
عددگویا

دستگاه $\mathcal{Z}$ برای امکان عمل‌تفریق درهرموردی تعبیه شده است؛ و دستگاه $\mathcal{F}$ برای امکان عمل تقسیم (به‌استثنای تقسیم برصفر). ولی، درهیچ‌یك از این دو دستگاه انجام هردو عمل همیشه ممکن نیست. برای امکان‌پذیر ساختن هردو عمل یکجا، دستگاه «اعدادگویا» با نماد $\mathcal{Q}$ (حرف‌تحریری Q، برای«خارج‌قسمت»[3]) را درنظرمی‌گیریم. بسیارشبیه روشی‌که $\mathcal{Z}$ را از$\mathcal{N}$ به‌دست‌آوردیم، این‌دستگاه را هم با معرفی«کسرهای منفی» از $\mathcal{F}$ به‌دست می‌آوریم.

هنوزهم‌می‌توان$\mathcal{Q}$را روی «خط اعداد» بـا علامت‌گذاری کسرها درنقاط‌مناسب‌بین اعداد صحیح، منفی‌ها در طرف چپ و مثبتها در طرف راست آن، نمایش داد. مثلاً، طبق شکل، ۴/۳ دریك سوم فاصلهٔ بین ۱ و۲ قراردارد:

---

1. Odyssey 2. Homer 3. quotient



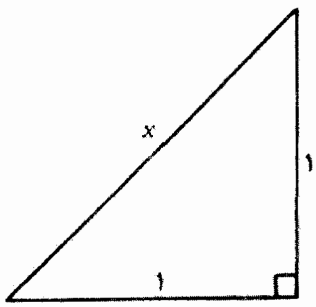
قواعد جمع وضرب اعداد گویا همان قواعد جمع وضرب کسرها هستند، ولی حال m، n، p، و q می‌توانند اعدادی صحیح باشند، و نه صرفاً اعدادی طبیعی.

هر دو مجموعه‌های $\mathscr{Z}$ و $\mathscr{F}$ زیرمجموعهٔ $\mathscr{Q}$ هستند. روابط بین چهار دستگاه اعدادی را که تاکنون دیده‌ایم می‌توانیم با شکل زیر نمایش دهیم:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F} \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\ \mathscr{N} \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & \mathscr{Q} \\ & \mathscr{Z} \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

عدد حقیقی

از اعداد می‌توانیم برای اندازه‌گیری طول، یا کمیتهای دیگر فیزیکی استفاده کنیم، ولی یونانیان می‌دانستند پاره خطهایی هم وجود دارند که طول آنها را نمی‌توان، در تئوری، دقیقاً با اعداد گویا اندازه گرفت. آنها هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده ولی عمیقشان قضیهٔ فیثاغورث[1] بود. با اعمال این قضیه بر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول اضلاع کوچکترش ۱ باشد، نتیجه می‌گیریم که طول وترش x است، و $۲=۱^{۲}+۱^{۲}=x^{۲}$. حال: عدد گویایی چون m/n وجود ندارد که $(m/n)^{۲}=۲$. برای اثبات این امر از این قضیه



استفاده می‌کنیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌طور یکتا به‌عوامل اول تجزیه کرد. مثلاً، می‌توان نوشت

$$۳۶۰=۲\times۲\times۲\times۳\times۳\times۵$$

1. pythagoras

یا

$$۳۶۰ = ۵ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲$$

ولی به‌هرصورتی که این عوامل را بنویسیم همواره یك ۵، دوتا ۳ وسه‌تا ۲ داریم. با استفاده از علامت‌گذاری توانی می‌نویسیم

$$۳۶۰ = ۲^{۳} . ۳^{۲} . ۵ \; .$$

این قضیهٔ تجزیه به‌عوامل یکتا را به‌طور صوری درفصل۸ اثبات می‌کنیم، ولی فعلاً صحت آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

اگرعددی طبیعی را به‌عوامل اول تجزیه‌کنیم وسپس آن را به‌توان دوبرسانیم، هر عامل اول به‌تعدادی ذوج ظاهرمی‌شود. مثلاً،

$$(۳۶۰)^{۲} = (۲^{۳} . ۳^{۲} . ۵)^{۲} = ۲^{۶} . ۳^{۴} . ۵^{۲},$$

و توانهای ۶، ۴، و ۲ همه زوج هستند. اثبات کلی این مطلب چندان مشکل نیست.

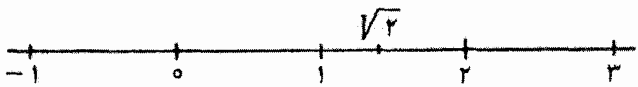
حال عددگویای دلخواه m/n را در نظرمی‌گیریم و آن را به‌توان دو می‌رسانیم. (از آنجاکه مربع m/n همان مربع $-m/n$ است، می‌توان فرض‌کردکه m و n مثبت هستند.) $m^{۲}$ و $n^{۲}$ را تجزیه و درصورت امکان عوامل مشترك صورت ومخرج را حذف می‌کنیم. اگرعدد اولی‌چون p حذف شود، آنگاه چون توان هرعدد اول زوج است پس $p^{۲}$ حذف می‌شود. ازاین‌رو پس‌از حذف نیزتوان اعداد اول باقیمانده زوج هستند. ولی $(m/n)^{۲}$ باید برابر ۲ گردد، که شامل یك عدد اول (همان۲) است،که تنها یکبار ظاهر می‌شود (و توانی فرد دارد).

نتیجه می‌گیریم که مربع هیچ عددگویایی نمی‌تواند برابر ۲ باشد، ولذا طول وتر مثلث مفروض‌عددی‌گویا نیست.

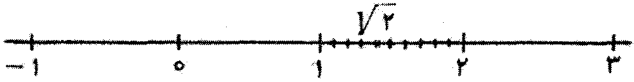
با استفاده از قدری بیشترنمادگرایی جبری می‌توانیم فرم صوری این اثبات را هم عرضه‌کنیم؛ ولی‌اثبات فوق برای مقصود ما کافی‌است. همین برهان نشان می‌دهدکه اعدادی چون ۳، ۳/۴، یا ۵/۷ هم جذرگویا ندارند.

اگربخواهیم صحبت از طولهایی‌مانند $\sqrt{۲}$ بکنیم باید دستگاه‌اعداد رابازهم تعمیم بدهیم. نه‌تنها به‌اعدادگویا نیازمندیم، بلکه به «اعدادگنگ» نیزنیاز داریم.

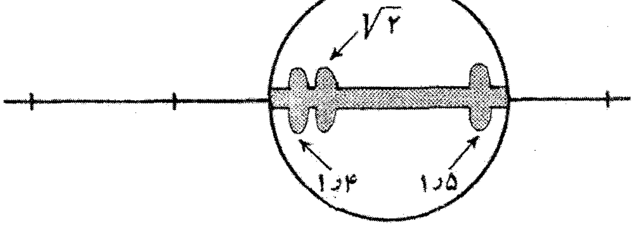
با استفاده ازعلامت‌گذاری هندی‌ـ‌عربی پس ازمعرفی بسط اعشاری می‌توانیم این امر را انجام بدهیم. مثلث قائم‌الزاویه‌ای راکه طول هرضلعش واحد است می‌سازیم، وبا ابزار رسم طول وتر آن را به‌خط اعداد منتقل می‌کنیم. آنگاه نقطهٔ مشخصی روی خط اعداد به‌دست می‌آوریم که آن را $\sqrt{۲}$ می‌نامیم. این نقطه بین ۱ و ۲ قرار می‌گیرد،و اگر



طول واحد از ۱ تا ۲ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم‌کنیم می‌بینیم‌که $\sqrt{۲}$ بین ۴ر۱ و ۵ر۱ واقع است. با تقسیم مجدد فاصلهٔ بین ۴ر۱ و ۵ر۱ به‌ده قسمت مساوی ممکن است تقریب



بهتری برای $\sqrt{۲}$ پیداکرد. درعمل داریم به‌حد دقت ترسیم نزدیك می‌شویم. ممکن است تصور کنیم که دریك شکل دقیق با نگاهی تیزتر و یا با بزرگتر کردن شکل، می‌توانیم رقم اعشار بعدی را هم پیدا کنیم. اگر به‌تصویر واقعی در زیر ذره‌بین نگاه کنیم، نه‌تنها طول



خطوط ترسیم شده بزرگ می‌شوند، بلکه ضخامت آنها نیز بزرگ می‌شوند. این روش برای رسیدن به‌تقریبی بهتر برای $\sqrt{۲}$ چندان رضایتبخش نیست.

دقت ترسیم عملی‌درواقع بسیارمحدود است. یك مداد رسم ظریف خطی به‌ضخامت ۰ر۱ میلیمتر رسم می کند. حتی‌اگرخطی به‌طول ۱ متر را به‌عنوان طول واحد به‌کار ببریم، چون ۰ر۱ میلیمتر برابر ۰ر۰۰۰۱ متر است، نمی‌توانیم به‌دقتی بیش از چهار رقم‌اعشار امید داشته باشیم. حتی اگر کاغذی بسیار بزرگتر و ابزاری بسیار دقیقتر هم به‌کار برده شود باکمال تعجب پیشرفت چندانی در دقت برحسب تعداد ارقام اعشاری که می‌توانیم پیدا کنیم حاصل نمی‌شود. سال نوری تقریباً $۹ر۵ \times ۱۰^{۱۵}$ متراست. به‌عنوان حالتی‌فرین، فرض‌کنیم طول واحد برابر با $۱۰^{۱۸}$ متردرنظرگرفته شود. اگرشعاع نوری از یك طرف شروع به‌تابش کند و همزمان با آن درطرف دیگراین طول واحدکودکی به‌دنیا آید، این کودك باید بیش از ۱۰۰ سال عمرکند تا بتواند این شعاع نور را ببیند. در فرین پایین قدرت دید، طول موج نورقرمز تقریباً ۷×۱۰^{-۷} متر است، پس طولی که اندازهٔ آن $۱۰^{-۷}$ مترباشدکوچکتر از طول موج نورقابل رؤیت است. از این‌رو با میکروسکوپهای معمولی نمی‌توان نقاطی راکه $۱۰^{-۷}$ متر ازیکدیگرفاصله دارند از هم تمیزداد. در روی خطی با طول واحد $۱۰^{۱۸}$ متر، تمیز اعدادی که کمتر از $۱۰^{-۷}/۱۰^{۱۸} = ۱۰^{-۲۵}$ متر از یکدیگرفاصله داشته باشند ممکن نیست. و این بدین معناست که با ترسیم نمی‌توان به‌دقتی معادل ۲۵ رقم اعشار دست یافت، حتی این نیزدرعمل مبالغهٔ محض است، وسه رقم‌اعشار بهترین تقریبی است که در واقع می‌توان به‌آن امیدوار بود.

محاسبهٔ غیردقیق درترسیم عملی

بی‌دقتی ذاتی‌کار به مسائلی درمحاسبه منجرمی‌شود. اگر دو عدد غیر دقیق را با هم جمع

کنیم،خطاها نیز با هم جمع می‌شوند. اگر نتوانیم خطاهای کمتر از مقداری‌چون e راتمیز دهیم، آنگاه، در عمل، نخواهیم توانست تفاوت بین a و $a+۳e/۴$ و بین b و $b+۳e/۴$ را تعیین کنیم. ولی با جمع کردن آنها، می‌توانیم $a+b$ را از $a+b+۳e/۲$ تمیز دهیم. درمورد ضرب، خطاها می‌توانند بسیار بیشتر از این هم بزرگ بشوند. کلاً نمی‌توان امیدوار بود که جوابها با همان درجه از دقت اعداد به‌کار گرفته شدهٔ درمحاسبه باشند.

اگرمحاسبات را انجام دهیم وکلیهٔ جوابها را تا چند رقم اعشارمعینی‌محاسبه کنیم، خطاهای مربوط، به‌نتایج مضطرب کننده‌ای منجرمی‌شوند. مثلاً، فرض کنیم محاسبات را تا دو رقم اعشار انجام می‌دهیم (اگر رقم سوم ۵ یا بیشتر از ۵ باشد به «بالا گرد می کنیم» و اگرکمترباشد به‌پایین). دو عدد حقیقی a و b را درنظر می گیریم، و حاصلضرب آنها تا دو رقم اعشار را با $a \otimes b$ نمایش می‌دهیم. مثلاً، $۳٫۰۵ \otimes ۴٫۲۶ = ۱۲٫۹۹$ زیرا $۳٫۰۵ \times ۴٫۲۶ = ۱۲٫۹۹۳$. با استفاده از این قانون ضرب، داریم

$$(۱٫۰۱ \otimes ۰٫۵) \otimes ۱۰ \neq ۱٫۰۱ \otimes (۰٫۵ \otimes ۱۰).$$

طرف چپ بـه $۰٫۵۱ \otimes ۱۰ = ۵٫۱$ تحویل می‌یابد، در حالی‌کـه طرف راست برابر $۱٫۰۱ \otimes ۵ = ۵٫۰۵$ است. این مثال به‌هیچ‌وجه منحصر به‌فرد نیست، و نشان می‌دهد کـه قانون شرکت‌پذیری در مورد $\otimes$ صدق نمی کند.

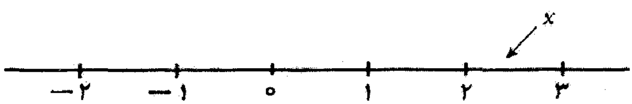
علاوه براین اگر $a \oplus b$ را مجموع تا دو رقم اعشار تعریف کنیم ، قوانین دیگری هم در این مورد صادق نخواهند بود، از جمله قانون پخشی

$$a \otimes (b \oplus c) \overset{?}{=} (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

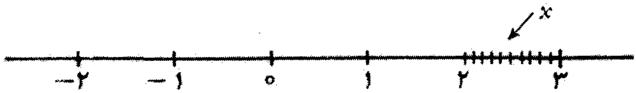
الگویی نظری برای خط حقیقی

هم اکنون ملاحظه کردیم کـه اگر اندازه‌گیری اعداد دقیق نباشد، آنگاه برخی از قوانین حساب بهم می‌خورند. برای اجتناب از این امر باید مفهوم دقیق اعداد حقیقی را در نظر بگیریم.

فرض کنیم عدد حقیقی x روی خط نظری اعداد حقیقی داده شده است، ومی‌خواهیم آن را به‌صورت بسط اعشاری بنویسیم. ابتدا می بینیم که x بین دوعدد

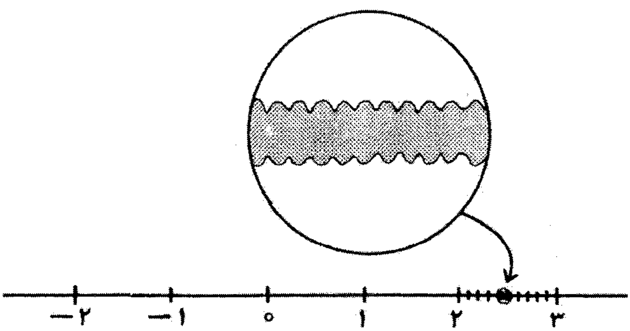


صحیح واقع می‌شود. درمثال فوق x بین ۲ و ۳ است، پس x برابر است با «۲ وخرده‌ای». سپس فاصلهٔ بین ۲ و ۳ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم می کنیم. بازهم، x دریکی از زیر-فاصله‌ها واقع می‌شود. در تصویر x بین ۲٫۴ و ۲٫۵ قرارداد،

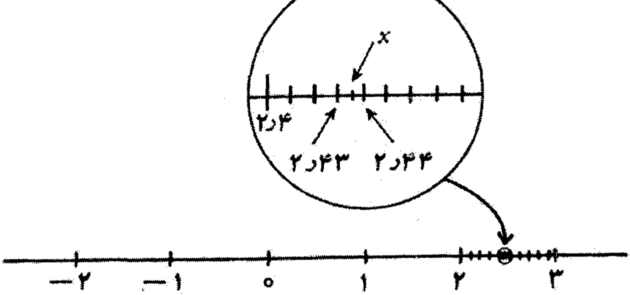


پس x برابر است با «۲٫۴ و خرده‌ای». برای کسب ایده‌ای بهتر، فاصلهٔ بین ۲٫۴ و ۲٫۵ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم، وفرایند فوق را برای یافتن‌رقم بعدی بسط اعشاری تکرار می‌کنیم. هم‌اکنون، دریك وضع عملی، داریم به‌حد دقت ترسیم نزدیك می‌شویم.

در تصویرنظری باید تصورکنیم که می‌توانیم به‌شکل با دقت‌کافی نگاه‌کنیم، یا آن را بزرگ نماییم، و رقم اعشار بعدی را بخوانیم. اگر به‌تصویر واقعی زیرذره‌بین نگاه کنیم، نه‌فقط درازای خطوط بزرگ می‌شوند بلکه ضخامت آنها نیز بزرگ می‌شوند. این روش برای به‌دست‌آوردن تقریب بهتر چندان رضایتبخش نیست. در حالت نظری، باید فرض‌کنیم که خط هیچ ضخامتی ندارد، و لذا وقتی تصویر بزرگ می‌شود خط پهن‌تر



نمی‌گردد. این تصویر را می‌توان با ترسیم خطوط بزرگ شده با همان ابزار رسم قبلی، و نازکترکردن آنها تا حد امکان، به‌عنوان تصویرعملی درنظرگرفت. در این صورت x بین ۲٫۴۳ و ۲٫۴۴ قرار می‌گیرد، پس x برابر است با «۲٫۴۳ و خرده‌ای». با استفاده



ازاین روش می‌توانیم، به‌طورنظری، هرعدد حقیقی را به‌صورت بسط اعشاری تا هرتعداد رقم اعشارکه لازم بدانیم نمایش دهیم. دوعدد متفاوتند اگر، با محاسبهٔ تعدادکافی رقم اعشاری، سرانجام دریك رقم اعشار به دو جواب متفاوت دست یابیم.

این روش نظری را می‌توان با اصطلاحات دقیقتر ریاضی به‌صورت زیر بیان کرد:

(یك) اگرعدد حقیقی x مفروض باشد، عددی صحیح چون a_0 پیدا کنید که

$$a_0 \leqslant x < a_0 + 1.$$

(دو) عددی صحیح چون a_1 بین ۰ و ۹ شمولی پیدا کنید که

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

(سه) پس از پیدا کردن a_0، a_1، . . . ، a_{n-1}، با فرض اینکه a_1، . . . ، a_{n-1} اعداد صحیح بین ۰ و ۹ شمولی باشند، عدد صحیح a_nی بین ۰ و ۹ شمولی پیدا کنید که

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

به‌این‌ترتیب فرایندی استقرایی به‌دست می‌آید که درمرحلهٔ n م x را تا n رقم اعشار تعیین می‌کند:

$$a_0.a_1a_2 \cdots a_n \leqslant x < a_0.a_1a_2 \cdots a_n + 1/10^n.$$

برای نمایش دقیق نظری عدد x، به‌بسطی اعشاری چون

$$a_0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \cdots$$

نیاز داریم که الی‌غیرالنهایه ادامه داشته باشد. (البته، اگر a_nها از جایی به‌بعد برابرصفر باشند، درنماد عادی آن صفرها را حذف می‌کنیم: به‌جای ... ۱۰۶۶ر۳۱۷۰۰۰۰۰۰۰۰ می‌نویسیم ۱۰۶۶ر۳۱۷ .) هرعدد با بسط اعشاری نامتناهی را یك عدد حقیقی می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را با $\mathcal{R}$ نمایش می‌دهیم.

در بیشتر موارد عملی تنها به‌چند رقم اعشار نیاز داریم. مشاهدات بخش اول این فصل نشان می‌دهد که ۲۵ رقم اعشار برای اندازهٔ طولهایی که بشر قادر به‌دیدن آنهاست کافی‌است. البته این تخمین بسیار بالایی‌است، ومعمولاً دو یا سه رقم اعشار برای کارهای عملی کاملاً کافی است.

بسطهای اعشاری متفاوت برای اعداد متفاوت

اگر مانند بالا عدد x را به یك عدد اعشاری بی‌پایان بسط دهیم، می‌گوییم که $a_0.a_1a_2 \ldots a_n$ بسط x است تا n رقم اعشار (بدون «گرد کردن»). اگر بسطهای اعشاری دو عدد حقیقی x و y تا n رقم اعشار برابر باشند، آنگاه

$$a_0.a_1a_2 \cdots a_n \leqslant x < a_0.a_1a_2 \cdots a_n + 1/10^n,$$
$$a_0.a_1a_2 \cdots a_n \leqslant y < a_0.a_1a_2 \cdots a_n + 1/10^n.$$

نامساوی دوم را می‌توانیم به‌صورت زیرهم بنویسیم

$$-a_0.a_1 \cdots a_n - 1/10^n < -y \leqslant -a_0.a_1 \cdots a_n.$$

با جمع کردن این نامساوی و نامساوی اول، داریم

$$-1/10^n < x-y < 1/10^n .$$

به‌عبارت دیگر اگر بسطهای اعشاری دو عدد حقیقی تا n رقم اعشار برابر باشند، آنگاه تفاوت آنها حداکثر $1/10^n$ است.

اگر x و y دو عدد متفاوت روی خط حقیقی باشند و بخواهیم بین آنها فرق قایل شویم، تنها باید n ی پیدا کنیم که $1/10^n$ از تفاضل آنها کوچکتر باشد: آنگاه بسطهایشان تا n رقم اعشار متفاوت خواهند بود. بازهم، وقتی x و y آن‌قدر به‌هم نزدیك باشند که قابل تشخیص نباشند، نارساییهای ترسیم عملی آشکار می‌گردد. برحسب مفهوم نظری خط حقیقی، این تمایز باید همیشه میسر باشد. این امر چنان با اهمیت است که خوب است نامی به‌آن داده شود. ریاضیدان بزرگ یونانی، ارشمیدس[1]، خاصیتی را بیان می‌کند که معادل چیزی است که ما لازم داریم، و لذا شرط خود را به‌او نسبت می‌دهیم:

شرط ارشمیدس: به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت ε، عدد صحیحی چون n وجوددارد که $1/10^n < \varepsilon$.

عددگویا و عددگنگ

همان‌طور که دیدیم، عدد حقیقی $\sqrt{2}$ گنگ است: بسیاری ازاعداد دیگر هم گنگ هستند. اثبات گنگ بودن یك عدد همیشه ساده نیست. (برای e نسبتاً ساده است، وبرای π مشکلتر؛ اعداد جالب بسیاری هم وجود دارند که قرنهاست ریاضیدانان به‌گنگ بودنشان متقاعد هستند، ولی هرگز به‌اثباتشان دست نیافته‌اند.) ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{2}$ گنگ است نتیجه می‌گیریم که بین‌هردوعددگویا اعدادی گنگ وجود دارند. ابتدا به‌لم زیر نیازداریم.

لم ۱. اگر m/n و r/s گویا باشند،و $r/s \neq 0$، آنگاه $m/n+(r/s)\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $m/n+(r/s)\sqrt{2}$ عددی گویا و برابر با p/q باشد که p و q اعدادی صحیح هستند. آنگاه با حل معادله برای $\sqrt{2}$ داریم

$$\sqrt{2} = (pn-mq)s/qnr,$$

که گویاست، ومتناقض گنگ بودن $\sqrt{2}$. □

قضیهٔ ۲. بین هردو عددگویای متمایز عددی گنگ وجود دارد.

1. Archimedes

اثبات. فرض کنیم اعـداد گویای مفروض، m/n و r/s باشند، و $m/n < r/s$. آنگاه

$$m/n < m/n + \frac{\sqrt{2}}{2}(r/s - m/n) < r/s$$

(زیـرا $1 > 2/\sqrt{2}$)، و عدد میانی بنا به‌لم قبل گنگ است. □

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیهٔ متناظری به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۳. بین هردو عدد گنگ متمایز عددی گویا وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گنگ مفروض a و b باشند و $a < b$. بسط اعشاری آنها را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم n مین رقم اعشار اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است. آنگاه

$$a = a_0 / a_1 \cdots a_{n-1} a_n \cdots ,$$
$$b = a_0 / a_1 \cdots a_{n-1} b_n \cdots ,$$

و $a_n \neq b_n$. فرض کنیـم $x = a_0 / a_1 \ldots a_{n-1} b_n$. آنگـاه x گویاست، و باید داشته باشیـم $a < x < b$. (واضح است کـه $a < x \leqslant b$، ولـی چون b گنـگ است، $x \neq b$.) □

در واقع تمرینات آخر این فصل نشان می‌دهند که اعداد گویا و گنگ به‌طور بسیار پیچیده‌ای درهم آمیخته‌اند. نباید به‌اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی، «متناوب» هستند.

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست کـه بسط اعشاریشان به‌فواصل منظم تکرار می‌شوند (از اثبات این مطلب صرفنظر می‌کنیم). بـا بیان دقیقتر، گوییم یك بسط اعشاری تکراری است هرگاه، از رقمی به‌بعد، دنبالـهٔ ثابتی از ارقام به‌طور نامتناهی تکرار شود. مثلاً، ...۱٫۵۴۳۲۱۷۴۱۷۴۱۷۴۱۷۴ یك بسط اعشاری تکـراری‌است. این عدد را، باگذاشتن نقطه روی دورقم اول‌و آخرقسمتی که تکرار می‌شود، به‌صورت ۱٫۵۴۳۲۱۷۴ می‌نویسیم.

نیاز به‌اعداد حقیقی

ملاحظه‌کردیم اعتقاد یونانیان (جزئی ازفلسفهٔ مرموز مقلدین فیثاغورث) مبنی براینکه همهٔ اعداد گویا هستند آنها را به‌بن‌بست کشاند. اگـر اعداد حقیقی را به‌عنوان اعداد اعشاری نامتناهی درنظر بگیریم می‌توانیم براین بن‌بست روانی فایق آییم، زیرا واضح است کـه

اعداد گویا، یعنی اعدادی که بسطشان تکرار می‌شود، همهٔ اعداد را در برنمی‌گیرند.

ولی، دیدیم که برای مقاصد عملی نیازی به‌اعداد اعشاری نامتناهی، یا حتی متناهی ولی خیلی طولانی، نداریم. پس چرا این همه مشکلات را پذیرا شویم؟ یك دلیل این‌امر را قبلاً ذکر کردیم: حساب اعداد اعشاری به‌طول محدود از قوانین آشنایی که اعداد صحیح یا گویا از آنها پیروی می‌کنند تبعیت نمی‌کند. شاید دلیلی جدی‌تر، در رابطهٔ با آنالیز باشد.

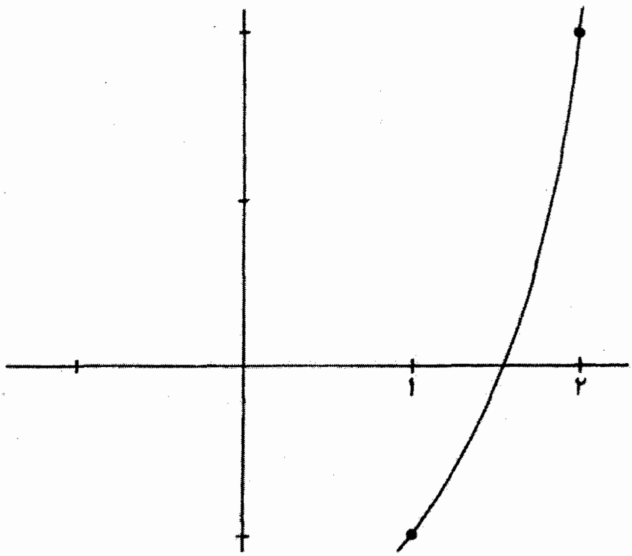
تابع زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x^{۲}-۲ \quad (x\in\mathcal{R}).$$

این تابع در $x=۱$ منفی است و در $x=۲$ مثبت. بین این دو عدد، در $x=\sqrt{۲}$، تابع برابر صفر است. ولی اگر x را به‌اعداد گویا محدود کنیم، تابع

$$f(x)=x^{۲}-۲ \quad (x\in\mathcal{Q})$$

نیز در $x=۱$ منفی است و در $x=۲$ مثبت است، ولی در هیچ عدد گویای x بین این دو عدد صفر نمی‌شود، زیرا $x^{۲}=۲$ جواب گویا ندارد. این مطلب ایجاد مشکل می‌کند.



قضیه‌ای اساسی در آنالیز حکم می‌کند که اگر تابع پیوسته‌ای در نقطه‌ای منفی و درنقطهٔ دیگری مثبت باشد، آنگاه باید بین این دونقطه صفرشود. این قضیه برای توابع روی‌اعداد حقیقی صادق است، ولی برای توابع روی اعداد گویا صادق نیست. تمدنی چون تمدن یونان باستان، بدون روش رضایتبخشی برای استفاده از اعداد گنگ، نمی‌توانست نظریهٔ حد

را بسازد، یا حساب دیفرانسیل و انتگرال را ابداع کند.

حساب اعداد اعشاری

ایدهٔ نمایش اعداد حقیقی با اعداد اعشاری نامتناهی ایدهٔ مفیدی است، ولی برای محاسبات عددی، و همچنین برای بررسیهای نظری در یك سطح بالاتر از سطح مقدماتی، چندان مناسب نیست. برای جمع دو عدد اعشاری متناهی از اولین رقم سمت راست شروع می‌کنیم: ولی در اعداد اعشاری نامتناهی اولین رقم سمت راست وجود ندارد و از هیچ جا نمی‌توانیم شروع کنیم.

در عوض می‌توانیم از سمت چپ شروع کنیم، و اولین ارقام اعشاری دو عدد را جمع کنیم، سپس دو رقم اول را، و بعد سه رقم اول را، و همین‌طور الی آخر. برای مثال دو عدد ۰ر۶̇ = ۲/۳ و ۰ر۲̇۸۵۷۱۴̇ = ۲/۷ را با این روش جمع می‌کنیم:

۰ر۶ + ۰ر۲ = ۰ر۸

۰ر۶۶ + ۰ر۲۸ = ۰ر۹۴

۰ر۶۶۶ + ۰ر۲۸۵ = ۰ر۹۵۱

۰ر۶۶۶۶ + ۰ر۲۸۵۷ = ۰ر۹۵۲۳

۰ر۶۶۶۶۶ + ۰ر۲۸۵۷۱ = ۰ر۹۵۲۳۷

۰ر۶۶۶۶۶۶ + ۰ر۲۸۵۷۱۴ = ۰ر۹۵۲۳۸۰ .

جواب واقعی برابر با ۲/۳ + ۲/۷ = ۲۰/۲۱ = ۰ر۹̇۵۲۳۸۰̇ است. ملاحظه می‌کنیم که مجموع اولین رقمهای اعشار، اولین رقم اعشار جواب را به‌دست نمی‌دهد، و همچنین مجموع دو رقم اول نیز برابر با دو رقم اعشار جواب نیست. این امر دقیقاً به‌این دلیل است که ارقام «انتقالی» [ده بریکها] از مکانهای قبلی ممکن است در مکانهای بعدی اثر بگذارند.

در این مثال، جملات متوالی بزرگ می‌شوند و به‌جواب واقعی نزدیك و نزدیکتر. دنبالهٔ اعداد ۰ر۸، ۰ر۹۴، ۰ر۹۵۱، ۰ر۹۵۲۳، ... دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی است و به ۲۰/۲۱ «میل می‌کند»، به‌این‌معنی که با محاسبهٔ ارقام اعشار به‌تعداد کافی می‌توانیم خطا را به هر اندازه که مایل باشیم کوچك کنیم.

در چند بخش بعد به‌بررسی جزئیات ایده‌های لازم جهت بیان دقیق این مفهوم می‌پردازیم. برای مقاصد نظری غالباً آسانتر است که از دنباله‌های صعودی (تقریبهای یك عدد حقیقی) استفاده کنیم تا از بسطهای اعشاری.

دنباله

هر دنباله از اعداد حقیقی‌را می‌توان فهرست بی‌پایانی چون

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \cdots , a_n , \cdots$$

پنداشت که در آن هر a_n عددی حقیقی باشد. (در فصل ۵ با استفاده‌از نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف صوری‌تری ارائه خواهد شد). مثلاً،

(۱) دنبالهٔ مجذورات: $1, 4, 9, 16, \ldots$، با $a_n = n^2$.

(۲) دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$: $1.4, 1.41, 1.414, \ldots$، با ($\sqrt{2}$ تا n رقم اعشار) $= a_n$.

(۳) دنبالهٔ: $1 , 1\frac{1}{2} , 1\frac{5}{6} , \ldots$، با $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(۴) دنبالهٔ: $3 , 1 , 4 , 1 , 5 , 9 , \ldots$، با ($n$مین رقم بسط اعشاری π) $= a_n$.

نماد اختصاری دنبالهٔ $a_1 , a_2 , \ldots$ که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$(a_n)$$

است که جملهٔ nم دنباله بین دو پرانتز قرار داده شده است. پس مثال ۱ را می‌توان (n^2) هم نوشت.

ملاحظه می‌کنیم که مفهوم دنباله بسیار کلی‌است. هر فهرست بی‌پایانی از اعداد را می‌توان درنظر گرفت. لزومی ندارد که جملهٔ nم با «فرمول خوبی» تعریف بشود، همین قدر کافی است که مقادیر a_n مشخص باشند.

دنباله‌هارا می‌توان جمع، تفریق، یاضرب کرد. بایداین عملهارا تعریف کنیم: ساده‌ترین راه، انجام این عملها روی هرزوج ازجملات درمکانهای‌متناظراست. به‌عبارت دیگر، جمع کردن دنباله‌های

$$a_1 , a_2 , \cdots$$

و

$$b_1 , b_2 , \cdots$$

به‌معنای تشکیل دنبالهٔ

$$a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , \cdots$$

است. مثلاً، اگر $a_n = n^2$ و $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$، آنگاه جملهٔ nم $(a_n) + (b_n)$ برابراست با

$$n^2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot$$

ازآنجاکه جملهٔ nم دنبالهٔ $(a_n) + (b_n)$ برابراست با $a_n + b_n$، قاعده برای جمع را

می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n).$$

به‌همین نحو قواعد تفریق و ضرب عبارتند از:

$$(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n),$$
$$(a_n)(b_n)=(a_nb_n).$$

درمورد تقسیم، می‌نویسیم

$$(a_n)/(b_n)=(a_n/b_n),$$

ولی توجه داریم که این تقسیم را تنها وقتی می‌توانیم انجام دهیم که همهٔ جملات b_n غیر صفر باشند.

مثال. اگر $a_n=$ (تا n رقم اعشار $\sqrt{۲}$)، و $b_n=$ (nامین رقم بسط اعشاری π)، آنگاه چند جملهٔ اول $(a_n)(b_n)$ برابرند با:

$$۱٫۴\times۳=۴٫۲$$
$$۱٫۴۱\times۱=۱٫۴۱$$
$$۱٫۴۱۴\times۴=۵٫۶۵۶$$
$$۱٫۴۱۴۲\times۱=۱٫۴۱۴۲.$$

اگردنبالهٔ ۴٫۲، ۱٫۴۱، ۵٫۶۵۶، ۱٫۴۱۴۲ داده شود، آیا می‌توانید قاعدهٔ جملهٔ nام آن را حدس بزنید؟ این مثال گویای این مطلب است که برای مشخص کردن هردنباله باید اصولاً بدانیم که همهٔ جملات آن چگونه محاسبه می‌شوند. به‌طورکلی نوشتن چند جمله‌از یك دنباله وسپس گذاشتن چند نقطه کافی نیست. دنبالهٔ ... , ۹ , ۵ , ۱ , ۴ , ۱ , ۳، یقیناً به‌نظرمی‌رسد که متشکل از ارقام π باشد. ولی، این دنباله می‌تواند دنبالهٔ ارقام عدد ۳۵۵/۱۱۳ هم باشد، که به همان صورت شروع می‌شود. به‌این دلیل است که، در مثال (۴)، قاعدهٔ کلی پیداکردن جملهٔ nام را هم مشخص کردیم.

با این وجود، اغلب مشاهده می‌کنیم که ریاضیدانان چیزی چون

$$۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , ۳۲ , \ldots$$

را می‌نویسند وانتظار دارند نتیجه بگیریم که جملهٔ nام آن ۲^n است. یك‌جنبهٔ آموزش ریاضیات درك این مطلب است که ریاضیدانان در واقع چطور عمل می‌کنند، و سبك تفکر آنها چیست: به‌شرطی که ایده ازفحوای کلام مشخص باشد، بایدآمادگی‌پذیرش تفاوتهایی جزئی درنمادگذاری را داشته باشیم.

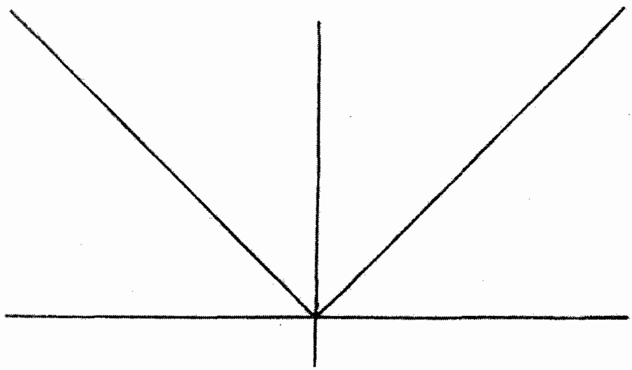
خواص ترتیب وقدرمطلق

ازموضوع منحرف می‌شویم ومفهوم مهمی‌راکه عنقریب‌استفاده شایانی‌خواهد داشت معرفی

می‌کنیم. اگر x عددی حقیقی باشد، پیمانه یا قدر مطلق x را با

$$|x|=\begin{cases} x & \text{اگر } x\geqslant 0 \\ -x & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. نمودار $|x|$ به‌ازای x به صورت زیر است:



مقدار $|x|$ بیان می‌کند که x بدون‌در نظر گرفتن مثبت یامنفی بودنش چه‌اندازه بزرگ یاچه اندازه کوچك است. شاید مفیدترین حکم درمورد قدر مطلق همان نامساوی مثلثی باشد؛ وجه تسمیه آن این‌است که تعمیمش به اعداد مختلط این حقیقت‌را بیان می‌کندکه هرضلع مثلث کوتاهتر است از روی هم دوضلع دیگرآن. چنین است:

قضیهٔ ۴. (نامساوی مثلثی). اگر x و y دوعدد حقیقی باشند، آنگاه

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

اثبات. ایده این است کــه $|x+y|$ بیانگر فاصلهٔ $x+y$ از مبدأ است؛ این فاصله حداکثر برابربا مجموع فاصله‌های $|x|$ و $|y|$ اعداد x و y ازمبدأ است،واز مجموع کمتر است هرگاه x و y مختلف‌العلامه باشند. (بارسم یك تصویر این مطلب را بررسی کنید.) ساده‌ترین راه اثبات این است کــه برحسب علامت و اندازه‌های نسبی x و y، چند حالت درنظر بگیریم.

(یك) $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$. آنگاه $x+y\geqslant 0$، پس داریم

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|.$$

(دو) $x\geqslant 0$ و $y<0$. اگر $x+y\geqslant 0$ آنگاه

$$|x+y|=x+y<x-y=|x|+|y|.$$

ازطرف دیگر، اگر $x+y<0$ آنگاه

$$|x+y|=-(x+y)=-x-y<|x|+|y|.$$

(سه) حالت $x<0$ و $y\geqslant 0$ نظیرحالت (دو) باتعویض x و y است.

(چهار) $x<0$ و $y<0$. آنگاه $x+y<0$، پس داریم

$$|x+y|=-x-y=|x|+|y|.$$

به این نحو اثبات درهمهٔ حالات کامل می‌شود. □

می‌توانیم درپی نامساویهای دیگری چون

$$|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|$$

هم باشیم که صادق است زیرا $x-z=(x-y)+(y-z)$، و در نتیجه $|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|$.

قدرمطلق بیشتر برای بیان اختصاری برخی از نامساویها به‌کار می‌رود. مثلاً،

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

را می‌توان به‌صورت

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$$

هم نوشت که قابل تبدیل به

$$|x-a|<\varepsilon$$

است.

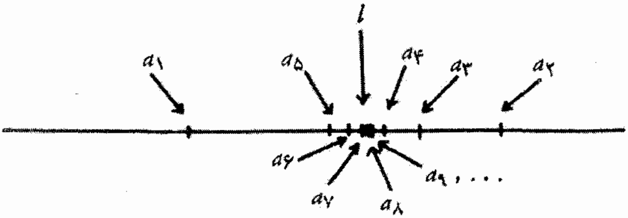
همگرایی

اکنون آماده‌ایم به بررسی مفهوم کلی نمایش هرعدد حقیقی، به عنوان «حد» یك دنباله و نه صرفاً به عنوان بسط اعشاری خاصی، بپردازیم. به عنوان تمرین، ازخواننده می‌خواهیم که، باهرواحد بزرگ دلخواه وبا نهایت دقت اعداد ۱٫۴، ۱٫۴۱، ۱٫۴۱۴، ۱٫۴۱۴۲، $\sqrt{2}$، را درفاصلهٔ بین ۱ و ۲ مشخص کند.

ملاحظه می‌کنیم که درصورت دقت درترسیم، اعداد ۱٫۴ ، ۱٫۴۱ ، ۱٫۴۱۴ ، ۱٫۴۱۴۲ ، به یکدیگر نزدیك ونزدیکترمی‌شوند، تااینکه دیگر ازیکدیگرواز $\sqrt{2}$ قابل تمیز نباشند. بارسم تصویری دقیقتر، باید درمسیر دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$ به‌پیش برویم تا این موضوع حادث بشود. پس اگر بادقت 10^{-8} عمل کنیم، از جملهٔ هشتم به‌بعد همهٔ نقاط این دنباله از $\sqrt{2}$ غیرقابل تشخیص خواهند بود.

این مشاهده انگیزه‌ای است برای مفهوم نظری همگرایی. فرض کنیم ε هرعددحقیقی

مثبتی باشد (ε حرف یونانی نظیر «e» است ومی‌توان آن را حرف اول کلمهٔ «error» [به معنی خطا] پنداشت). برای همگرایی عملی دنبالهٔ (a_n) به حدی چون l، اگر بادقت ε کار کنیم، لازم است عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد که هرگاه $n > N$، تفاضل بین a_n و l کمتراز ε باشد. به عبارت دیگر، $|a_n - l| < \varepsilon$. درشکل زیر نقاط با فاصلهٔ کمتراز ε از یکدیگر را نمی‌توانیم ازهم تمیز بدهیم: در این مورد $N = ۷$ و a_n، در صورتی که $n > ۷$، غیرقابل تمیز از l است.



درهمگرایی نظری لازم است که همین پدیده به‌ازای همهٔ ε های مثبت رخ بدهد. این امر با توجه به‌این درك ضمنی است که به‌ازای ε های کوچکتر ممکن است N های بزرگتری لازم باشند. ازاین لحاظ، N وابسته به ε است. پس داریم:

تعریف. دنباله‌ای چون (a_n) از اعداد حقیقی به حد l میل می‌کند اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد که به‌ازای هر $n > N$،

$$|a_n - l| < \varepsilon .$$

ریاضیدانان برای بیان این مفهوم از نمادهای اختصاری گوناگونی استفاده می‌کنند. برای بیان اینکه «دنبالهٔ (a_n) به حد l میل می‌کند» می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

یا

$$a_n \to l \text{ ، هرگاه } n \to \infty .$$

نماد مرکب «$n \to \infty$» به‌منزلهٔ تذکر این مطلب است که رفتار a_n به‌ازای n های بزرگ (مثلاً $n > N$) مورد علاقهٔ ماست. برای نماد «∞» به تنهایی هیچ معنایی قایل نیستیم. این نماد عددی «بسیار بزرگ»، یاچیزی ازاین نوع نیست: این حتی یك عدد نیست. در واقع غالباً بهتراست کلاً ازاین نماد صرفنظر کنیم، وفقط بنویسیم

$$\lim a_n = l,$$

ولی باید درنظر داشته باشیم که ریاضیدانان انواع دیگری از حد را درمباحث دیگرهم

به‌کار می‌برند که ممکن است با این یکی اشتباه بشود.

مثال. دنبالهٔ ... , ۱٫۰۰۰۱ , ۱٫۰۰۱ , ۱٫۰۱ , ۱٫۱، که در آن $a_n = ۱ + ۱۰^{-n}$ است، هرگاه $n \to \infty$ به حد ۱ میل می‌کند. زیرا، به‌ازای $\varepsilon > ۰$، باید N مناسبی پیدا کنیم که

$$\text{به‌ازای } n > N \text{،} \quad |۱ + ۱۰^{-n} - ۱| < \varepsilon.$$

ولی این امر از شرط ارشمیدس نتیجه می‌شود: اگر Nی پیدا کنیم که $\varepsilon > ۱۰^{-N}$، آنگاه به‌ازای هر $n > N$ داریم $\varepsilon > ۱۰^{-N} > ۱۰^{-n}$. (در صورت آشنایی با نظریهٔ لگاریتم تنها کافی است $N > \log_{۱۰}(۱/\varepsilon)$ اختیار شود.)

دنباله‌ای چون (a_n) را که به یك حد l میل می‌کند همگرا می‌نامیم. اگر حدی وجود نداشته باشد، دنباله واگرا نام دارد.

لازم به تذکر است که هر دنبالهٔ همگرا تنها می‌تواند به یك حد میل کند. زیرا فرض کنیم $a_n \to l$ و $a_n \to m$ و $l \neq m$. فرض کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}|l - m|$. به‌ازای n به قدر کافی بزرگ، داریم

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$
$$|a_n - m| < \varepsilon.$$

پس، بنا به نامساوی مثلثی، داریم $|l - m| < ۲\varepsilon = |l - m|$، که صحیح نیست.

به عبارت دیگر، اگر ازجایی به‌بعد همهٔ جملات a_n باید به l بسیار نزدیك باشند دیگر نمی‌توانند به m نیز خیلی نزدیك باشند، زیرا این امر مستلزم این است که a_n ها به طور همزمان در دومحل مختلف باشند.

کمال

دنباله‌ای چون (a_n) صعودی است اگرهر $a_n \leqslant a_{n+۱}$، یعنی

$$a_۱ \leqslant a_۲ \leqslant a_۳ \leqslant \cdots$$

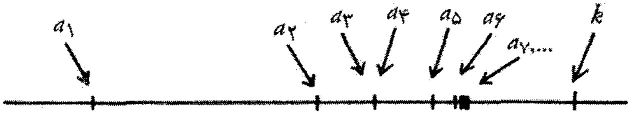
فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای صعودی باشد. یا جملات a_n بدون حد صعود می‌کنند، وسرانجام هراندازه که بخواهیم بزرگ می‌شوند، یا اینکه باید عددی حقیقی چون k وجود داشته باشد که به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$. مثالی از دنبالهٔ نوع اول ... , ۲۵ , ۱۶ , ۹ , ۴ , ۱ است؛ ومثالی ازنوع دوم دنبالهٔ تقریبهای اعشاری e است:

$$۲٫۷ \,,\, ۲٫۷۱ \,,\, ۲٫۷۱۸ \,,\, ۲٫۷۱۸۲ \,,\, \ldots$$

که هرجملهٔ آن کوچکتر از ۳ است.

اگر عدد حقیقی k وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$ آنگاه (a_n) را کراندار می‌خوانیم.

اگر بخواهیم نقاط یك دنبالهٔ صعودی وکراندار را روی خط حقیقی رسم کنیم تنها لازم است فاصلهٔ بین a_1 و k را رسم کنیم، زیرا همهٔ نقاط دیگر دنباله دراین فاصله قرار دارند. پس یك تصویر نوعی به صورت



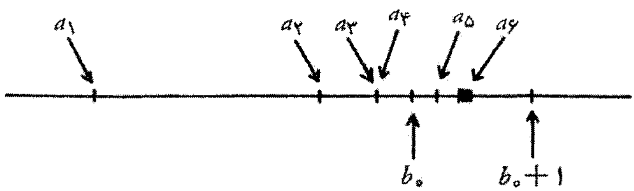
است. به طور شهودی واضح است که جملات این دنباله کم کم به‌یکدیگر نزدیك می‌شوند، و به‌حدی چون l، $l \leqslant k$، میل می‌کنند. این مشاهده برای دنباله‌های اعداد حقیقی وحدود حقیقی درست است، ولی برای دنباله‌های اعدادگویا وحدود گویا درست نیست. مثلاً دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد گویاست که هیچ عددگویایی حدش نیست.

این واقعیت که هر دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی به حدی حقیقی میل می کند خاصیت‌کمال اعدادحقیقی‌نامیده می‌شود. (با توجه به‌این نام، مجموعهٔ اعداد گویا «ناکامل» است‌زیرا «فاقد» اعدادی چون $\sqrt{2}$ است).

خاصیت‌کمال اعداد حقیقی را می‌توانیم با استفاده از ایدهٔ اعشاری به‌خوبی توجیه کنیم. فرض‌کنیم (a_n) دنباله‌ای صعودی ازاعداد حقیقی باشد، و به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$.

حال مجموعهٔ اعداد صحیح بین $a_1 - 1$ و k متناهی است، پس بزرگترین عدد صحیحی چون b_0 وجود داردکه جمله‌ای مانند a_{n_0} ازاین دنباله‌کمتراز b_0 نباشد.

آنگاه همهٔ جملات a_n کوچکتراز $b_0 + 1$ هستند.



فاصلهٔ از b_0 تا $b_0 + 1$ را به‌ده قسمت تقسیم، و b_1ی پیدامی‌کنیم که جمله‌ای مانند $a_{n_1} \geqslant b_0 + b_1/10$، ولی هیچ جملهٔ $a_n \geqslant b_0 + (b_1 + 1)/10$ نباشد. باادامهٔ این‌روش دنباله‌ای از اعداد اعشاری چون

$$b_0\,,\ b_0{\cdot}b_1\,,\ b_0{\cdot}b_1b_2\,,\ \ldots$$

به دست می‌آوریم که به ازای $n > n_r$ جملهٔ a_n بین $b_0{\cdot}b_1\ldots b_r$ و $b_0{\cdot}b_1\ldots b_r + 1/10^r$ قرار داشته باشد. آنگاه عدد حقیقی

$$l = b_0{\cdot}b_1b_2\ldots$$

دارای این خاصیت است که به‌ازای $n > n_r$ ، $|a_n - l| < 1/10^r$. ازاین‌رو $a_n \to l$ هرگاه $n \to \infty$.

به‌آسانی بررسی می‌شود که l از k بزرگتر نیست.

دنبالهٔ نزولی

لزومی ندارد خودرا به دنباله‌های صعودی محدود کنیم. دنباله‌ای چون (a_n) نزولی است اگر بــه ازای هر n، $a_n \geqslant a_{n+1}$. اگــر به‌ازای هــر n، $a_n \geqslant k$ آنگاه k را یك کران پایین دنباله و دنباله را ازپایین کراندار می‌گوییم. (برای پرهیز از اشتباه، ازاین پس در مورد دنباله‌های‌صعودی به‌جای «کراندار» می‌توانیم بگوییم ازبالا کراندار.) قضیهٔ مشابهی در مورد دنباله‌های نزولی هــم هست، ولی به جای رونویس‌کردن مجدد اثبات وتعویض نامساویها، لمی‌را به‌کار می‌بریم . اگر (a_n) نزولی باشد، آنگاه $(-a_n)$ صعودی است. اگر بــه‌ازای هر n، $a_n \geqslant k$ آنگاه بــه‌ازای هر n، $-a_n \leqslant -k$ ، پس $(-a_n)$ ازبالا کراندار است، ولذا به‌حدی چون l میل می‌کند. به‌آسانی نتیجه می‌شود که $a_n \to -l$. بنابراین هر دنبالــهٔ نزولی از اعداد حقیقی کــه ازپایین بــه k محدود شود به‌حدی چون $-l$ ، $-l \geqslant k$ ، میل می‌کند.

بسطهای اعشاری متفاوت برای یك عدد حقیقی

قبلاً عددی حقیقی چون x را با استفاده از نامساویهای

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

که در آن a_0 عــددی صحیح است و a_n، به‌ازای $n \geqslant 1$، عددی صحیح از ۰ تا ۹، بــه صورت یك عــدد اعشاری نامتناهی، $a_0/a_1a_2\ldots$، بسط دادیــم. این شرط‌را می‌توانیم به‌صورت

$$a_0/a_1a_2\ldots a_n \leqslant x < a_0/a_1a_2\ldots a_n + \frac{1}{10^n} \qquad (*)$$

نیز بنویسیم. اگراین عبارت‌را متوالیاً به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ به‌کاربیریم برای هرعدد حقیقی بسط اعشاری یکتایی به‌دست می‌آوریم، و اعداد حقیقی متفاوت، بسطهای اعشاری متفاوتی خواهند داشت. ولی، این کل موضوع نیست زیرا با به‌کاربردن شرط (*) برخی از بسطهای اعشاری به‌دست نمی‌آیند. مثلاً، بسط ...۰٫۹۹۹۹۹۹ که درآن $a_0 = 0$ و به‌ازای هر $n \geqslant 1$ ، $a_n = 9$، حاصل نمی‌شود.

حال ببینیم که چرا این مطلب درست است. فرض کنیم بسط اعشاری عدد حقیقی x برابر ...۰٫۹۹۹۹۹۹ باشد. آنگاه، برطبق (*)، باید داشته باشیم

$$۰٫۹۹۹\ldots۹ \leqslant x < ۰٫۹۹۹\ldots۹ + ۱/۱۰^n,$$

که درهرطرف آن n تا ۹ وجود دارد. پس به‌ازای هر $n \in \mathcal{N}$

$$۱-(۱/۱۰^n) \leqslant x < ۱$$

یا

$$۰ < ۱-x \leqslant ۱/۱۰^n.$$

بنا به شرط ارشمیدس این امر غیرممکن است، زیرا چون $۰ < x - ۱$ باید n ی وجود داشته باشد که $۱/۱۰^n < ۱ - x$.

دلیل اینکه این دنباله از ۹ها نمی‌تواند به‌دست آید مربوط به‌انتخاب نامساویهای (*) است. اگر به‌جای (*) از

$$a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n < x \leqslant a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n + ۱/۱۰^n \qquad (**)$$

استفاده کنیم آنگاه تعریف مفید دیگری برای بسط اعشاری به دست می‌آوریم، و به‌آسانی می‌بینیم که بسط عدد $x = ۱$ به صورت $۰٫۹۹۹۹۹۹\ldots$ درمی‌آید.

ولی، قاعدهٔ دوم (**) هیچ‌گاه بسط $۱٫۰۰۰۰۰۰\ldots$ را به‌دست نخواهد داد.

بامقایسهٔ (*) و (**)، می‌بینیم که برای x هردو، بسط اعشاری یکسان به‌دست‌می‌دهند، البته به‌شرطی که تساوی درهیچ یك از آنها وجــود نداشته باشد. حال برابری فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که x به‌صورت $a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n$ باشد. (ممکن است چنین به‌نظر آید که $a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n + ۱/۱۰^n$ فــرامــوش شده است، ولــی این عــدد بــرابــر است بــا $a_۰٫a_۱a_۲\ldots(a_n+۱)$ اگر $a_n \neq ۹$؛ و برابر است با حاصل نهایــی هرگاه $a_n = ۹$، ولذا نتیجه همان است.) دراین‌حالت این دو روش نتایج متفاوت به‌دست می‌دهند. مثلاً اگر $x = ۱\frac{۵۷}{۱۰۰}$، آنگاه بسط اعشاری‌حاصل‌از روش اول برابراست با $۱٫۵۷۰۰۰\ldots$ وحاصل ازروش دوم برابراست با $۱٫۵۶۹۹۹\ldots$. به‌طور کلی،اگر x بسط اعشاری باپایانی‌چون $x = a_۰٫a_۱\ldots a_n$ داشته‌باشد که $a_n \neq ۰$، آنگاه باروش‌اول $a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n۰۰۰\ldots$ به دست می‌آید، وباروش دوم $a_۰٫a_۱a_۲\ldots(a_n-۱)۹۹۹\ldots$.

بهترین راه برخورد بااین مسئله این‌است‌که هردو حالت‌را مجاز بدانیم. صرفاً فرض می‌کنیم $s_n = a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n$ آن قسمت ازبسط اعشاری تا n رقم اعشار (بدون گــرد کردن) باشد. آنگاه l، حد دنبالهٔ (s_n)، را با

$$l = a_۰٫a_۱a_۲\ldots a_n\ldots$$

نمایش می‌دهیم. دراین صورت ممکن است دو دنبالهٔ متفاوت دارای حــدود برابر باشند، واین تنها وقتی اتفاق می‌افتدکه همان گونه‌که دیدیم یکی عــدد اعشاری با پایانی باشد و دیگری به‌دنباله‌ای از ۹ ختم شود. مثلاً اگر $s_n = ۰٫a_۱a_۲\ldots a_n$ و هر $a_r = ۹$، آنگاه دنبالهٔ (s_n) حدی داردکه با $۰٫۹۹\ldots۹\ldots$ نمایش داده می‌شود. این حد دقیقاً همان ۱ است؛ پس

$$۱٫۰۰ \ldots ۰ \ldots = ۰٫۹۹ \ldots ۹ \ldots$$

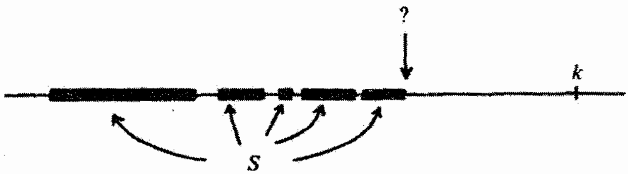
این نکته مهم است که ... ۹ ... ۰٫۹۹ را عددی «بسیار جزئی کوچکتر» از ۱ تصور نکنیم، این دوصرفاً دوراه مختلف نوشتن یك عدد حقیقی هستند.

بهتر و آسانتر است که هردو نماد گذاری را مجاز بدانیم زیرا تحت شرایط خاصی درمحاسبه‌ای ممکن است دنبالهٔ نامتناهی از ۹ها به دست آید. این امر بااستفاده ازدوروشی که قبلاً برای پیداکردن بسط اعشاری حد دنباله‌های صعودی کراندار بیان کردیم اتفاق می‌افتد.

مثال. فرض کنیم $a_۱ = ۱$ و به طور کلی $a_{n+۱} = a_n + (\frac{۱}{۲})^n$، آنگاه بدیهی است که (a_n) صعودی است و با محاسبه به دست می‌آید که $a_n = ۲ - (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$، پس این دنباله از بالا به ۲ محدود می‌شود. با استفاده از روش صفحهٔ ۳۷، درمی‌یابیم که دنبالهٔ (a_n) برابر است با $b_۰٫b_۱b_۲ \ldots b_n \ldots = ۱٫۹۹ \ldots ۹ \ldots$.

مجموعهٔ کراندار

بارسم تصویریك دنبالهٔ صعودی کراندار در واقع می‌توان فرایند حد را عملاً مشاهده کرد، که جملات آخر دنباله در فواصلی سریعاً نزولی به یکدیگر می‌پیوندند. اکنون نه فقط یك دنباله، بلکه زیرمجموعهٔ دلخواهی چون S از $\mathcal{R}$ راکه از بالا به وسیلهٔ k محدود می‌شود بررسی می‌کنیم. ولذا به‌ازای هر $s \in S$، داریم $s \leqslant k$. آیا مفهومی شبیه به مفهوم حد وجود دارد؟



طبیعی‌ترین چیزی را که می‌توان انتظار داشت این است که S دارای یك بزرگترین عضو باشد، یعنی عددی چون $s_۰ \in S$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $s \in S$، $s_۰ \geqslant s$. متأسفانه، این مطلب کاملاً درست نیست. مثلاً، اگر S مجموعهٔ همهٔ اعضایی باشد که اکیداً از ۱ کوچکتر هستند، آنگاه بااینکه یقیناً S از بالا کراندار است (مثلاً به $k = ۱$) عضوی در S نیست که بزرگتراز همهٔ اعضای S باشد. زیرا فرض کنیم که y بزرگترین عضو آن باشد. آنگاه $y \in S$ پس $y < ۱$، وآنگاه داریم

$$y < \frac{۱}{۲}(y + ۱) < ۱.$$

پس $\frac{1}{2}(y+1)\in S$ که بزرگتر است از بزرگترین عضو فرضی y.

ولی همه چیز از دست نرفته است: صرفاً باید دقیقتر باشیم. دراین مثال مجموعهٔ S کرانهای بالای بسیاری دارد: در واقع هر $k\geqslant 1$ یك کران بالای S است. حال مجموعهٔ همهٔ کرانهای بالا حتماً یك کوچکترین عضو دارد. در واقع دراین مثال آن عضو ۱ است. به عبارت دیگر، نه تنها ۱ یك کران بالاست، بلکه هر کران بالای دیگر از ۱ بزرگتراست.

قبل از فرمول‌بندی این مطلب، باید کاملاً مطمئن شویم که این مفاهیم را درك می‌کنیم. یك زیرمجموعهٔ غیرتهی چون $S\subseteq\mathcal{R}$ ازبالا کراندار به $k\in\mathcal{R}$ نامیده می‌شوداگر به‌ازای هر $s\in S$ ، $s\leqslant k$. عدد k را یك کران بالای S می‌نامیم.

زیرمجموعه‌ای چون $S\subseteq\mathcal{R}$ کوچکترین کران بالایی مانند λ دارد اگر:

(یك) λ یك کران بالای S باشد،

(دو) اگر k هر کران بالایی برای S باشد، آنگاه $\lambda\leqslant k$.

گرچه کرانهای بالای بسیاری می‌توانند وجود داشته باشند ولی کوچکترین کران بالا باید یکتا باشد. زیرا اگر λ و μ هردو کوچکترین کران بالای S باشند، آنگاه با به‌کاربردن (دو) برای هریك ازاین‌دو داریم $\lambda\leqslant\mu$ و $\mu\leqslant\lambda$، ولذا $\lambda=\mu$.

مثال

(۱) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح باشد، آنگاه S هیچ کران بالا ندارد و لذا یقیناً کوچکترین کران بالا نیز ندارد.

(۲) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نابیشتراز ۴۹ باشد، آنگاه ۴۹ کوچکترین کران بالای S است.

(۳) اگر S مجموعهٔ همهٔ تقریبهای اعشاری ... , ۱٫۴۱۴ , ۱٫۴۱ , ۱٫۴، ۱، برای $\sqrt{2}$، باشد آنگاه کوچکترین کران بالای S برابر $\sqrt{2}$ است.

(۴) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای r باشد که $r^2<2$، آنگاه $\sqrt{2}$ کوچکترین کران بالای S است.

درمثال ۲ کوچکترین کران بالا عضوی از S است، ولی درمثالهای ۳ و ۴ چنین نیست. لذا حتی اگر کوچکترین کران بالا وجود داشته باشد، ممکن است عضو مجموعهٔ مفروض نباشد.

باز هم مفاهیم دیگری نظیر مفاهیم فوق وجود دارند. زیرمجموعه‌ای چون S را از پایین کراندار می‌گوییم اگر kی در $\mathcal{R}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $s\in S$ ، $k\leqslant s$، ودراین صورت k را یك کران پایین می‌نامیم. عدد $\mu\in\mathcal{R}$ یك بزرگترین کران پایین S نامیده می‌شود اگر

(یك) μ یك کران پایین S باشد،

(دو) اگر k کران پایینی برای S باشد، آنگاه $\mu\geqslant k$.

با لمی مشابه آنکه در مورد دنباله‌های نزولی به‌کار بردیم می‌توانیم همهٔ مسائل مربوط به‌بزرگترین کران پایین‌را به کوچکترین کران بالا تبدیل کنیم. درواقع همهٔ خواص بنیادی کرانهای بالا برای کرانهای پایین نیز برقرارند، البته به‌شرطی‌که $\leqslant$ را با $\geqslant$ عوض کنیم.

خاصیت کمال اعداد حقیقی‌را می‌توانیم به‌صورت کلی‌تری هم فرمول‌بندی کنیم:

قضیهٔ ۵. هرزیرمجموعهٔ غیرتهی از $\mathcal{R}$ که ازبالاکراندار باشدکوچکترین کران بالا هم دارد.

«غیرتهی» بودن الزامی‌است زیرا همهٔ اعدادکران بالای مجموعه بدون عضوهستند. بااستفاده ازبسطهای اعشاری، به همان نحوی‌که در مورد دنباله‌های صعودی انجام دادیم، می‌توانیم قضیهٔ فوق‌را اثبات کنیم. درواقع آسانتراست‌که ابتدا قضیه‌را برای کرانهای پایین اثبات وسپس بااستفاده از لم، آن‌را به‌کرانهای بالا تبدیل کنیم. لذا قضیهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

قضیهٔ ۶. هرزیرمجموعهٔ غیرتهی از $\mathcal{R}$ که ازپایین‌کراندار باشد بزرگترین کران پایین‌هم دارد.

اثبات. فرض‌کنیم a_0 بزرگترین عدد صحیحی باشدکه یك‌کران پایین‌است. فرض کنیم a_1 بزرگترین عدد صحیح از ۰ تا ۹ باشدکه a_0/a_1 یك‌کران پایین است. حال، به طور کلی، فرض‌کنیم a_n بزرگترین عدد صحیح از ۰ تا ۹ باشدکه $a_0/a_1a_2\dots a_n$ یك کران پایین است. آنگاه می‌توان نشان دادکه

$$a_0/a_1a_2\dots$$

بزرگترین کران پایین است. □

متذکرشدیم‌امکان‌پذیرنیست‌که تصویرچنان دقیقی رسم‌کنیم‌که بتوانیم اعدادگویارا ازاعداد غیرگویا تمیزدهیم. ولی مفاهیم‌کرانهای بالا و کرانهای پایین یك تفاوت نظری اساسی بین اعداد حقیقی وگویا فراهم می‌آورند. مثالهای (۳) و (۴) فوق مجموعه‌های کرانداری ازاعدادگویاهستندکه هیچ‌کوچکترین‌کران بالای گویا ندارند. به‌عبارت‌دیگر: $\mathcal{R}$ کامل است ولی $\mathcal{Q}$ کامل نیست. واین همان خاصیتی است که وقتی بعداً دراین‌کتاب اعداد حقیقی را به‌طور صوری تعریف می‌کنیم نقشی اساسی خواهد داشت.

تمرین

۱. هرمطلبی ازتجزیهٔ اعداد طبیعی به‌عوامل اول راکه لازم دارید دانسته فرض‌کنیدونشان دهیدکه هرعدد گویای مثبت r را می‌توان دقیقاً به یك روش به صورت حاصلضربی چون

$$r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

نوشت. دراینجا $p_1 = ۲$ ، $p_2 = ۳$ ، ... اعداداول به‌ترتیب صعودی هستند وهر α_k عددی صحیح است (مثبت، منفی یاصفر).

اعـدادگویای زیر را به‌این صورت بنویسید: ۱۴/۴۵، ۳/۸، ۲، ۲۰/۴۵. نشان دهید کـه $\sqrt{r}$ دقیقاً وقتی گویاست که α_1، α_2، ... زوج باشند. نتیجه بگیرید که به‌ازای هر عـدد صحیح مثبت n، $\sqrt{n}$ گنگ است اگر وفقط اگر n مربع عددی صحیح نباشد.

۲. باتعمیم نتیجهٔ تمرین ۱ همهٔ اعداد گویای r راکه $\sqrt[3]{r}$ (ریشهٔ‌سوم r) گنگ باشد بیابید. نشان‌دهیدکه $\sqrt[n]{(\frac{۳}{۸})}$ به‌ازای هرعدد طبیعی $n \geqslant ۲$ گنگ است.

۳. کدام یك ازاحکام زیر درست هستند؟

(الف) اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x+y$ گنگ است.

(ب) اگر x و y هردوگویا باشند، آنگاه $x+y$ گویاست.

(پ) اگر x گنگ باشد و y گویا، آنگاه $x+y$ گویاست.

(ت) اگر x و y هردوگنگ باشند، آنگاه $x+y$ گنگ است.

احکام درست‌را اثبات‌کنید ومثالهایی برای رد احکام نادرست بیاورید.

۴. ثابت‌کنیدکه بین هردو عدد حقیقی متمایز بینهایت عددگویا و بینهایت عددگنگ متمایز وجود دارند. (دراینجا منظور از «بینهایت» این است‌که به‌ازای هرعدد طبیعی n، حداقل n عدد باخاصیت مذکور وجود دارند.)

۵. به‌ازای اعداد حقیقی a، r و عدد طبیعی n، فرض‌کنید $s_n = a + ar + \cdots + ar^n$. نشان دهیدکه $rs_n - s_n = a(r^{n+1} - ۱)$ ونتیجه بگیریدکه

$$\text{به‌ازای } r \neq ۱ ،\quad \left| s_n - \frac{a}{۱-r} \right| = \left| \frac{r^{n+1}}{۱-r} \right| .$$

به‌ازای $|r| < ۱$ نتیجه بگیریدکه $s_n \to a/(۱-r)$ هرگاه $n \to \infty$.

۶. ثابت‌کنیدکه عدد اعشاری بی‌پایان $x = a_0 / a_1 a_2 a_3 \cdots$ عددی‌گویاست اگر و فقط اگر«سرانجام دورهٔ‌گردش» داشته باشد یعنی،از a_nی به‌بعد بلوکی از ارقام الی غیرالنهایه تکرار گردد.

$$x = a_0 / a_1 \cdots a_n \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}}\, \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}}\, \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}} \cdots .$$

(راهنمایی: برای یك‌طرف قضیه، تمرین۵ را با $a = a_{n+1} \cdots a_{n+k} / ۱۰^{n+k}$ و $r = ۱/۱۰^k$ به‌کار ببرید.)

۰۷ ثابت کنید عدد

$$y = ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰\ldots$$

(که درفرم اعشاری ارقامش اعداد طبیعی، پشت سرهم، هستند) گنگ است. آیا

$$۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$$

(که در آن هردسته از صفرهای متوالی یك صفر بیشتراز دستهٔ قبلی دارد) عددی گویاست یا گنگ؟

۰۸ بگویید آیا هیچ یك ازدنبالههای (a_n) زیر به حدی میل می‌کند، واگر بــه حدی میل می‌کند آن حد چیست. با استفاده از تعریف $\varepsilon - N$ صحت جواب خودرا ثابت کنید.

(الف) $a_n = n^۲$ ،

(ب) $a_n = ۱/(n^۲+۱)$ ،

(پ) $a_n = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \ldots + (\frac{۱}{۳})^n$ ،

(ت) $a_n = (-۱)^n$ ،

(ث) $a_n = (-\frac{۱}{۲})^n$.

قسمت II

آغاز صورتگرایی

در پنج فصل بعد روشهای لازم جهت قراردادن استدلال ریاضی برپایهٔ منطقی استوارتررا می‌پرورانیم. دراینجا نیزاستفاده از ایده‌های شهودی را مجازمی‌شماریم، ولی‌تنها به‌عنوان انگیزهٔ مفاهیمی که معرفی می‌کنیم، و نه به‌عنوان جزئی از استدلال.

در تشبیه به «ساختمان»، آجر، سیمان، تیرآهن، سفال، لوله، ومواد دیگر را تدارك می‌بینیم؛ وگروهی ازبناها، گچ‌برها، نجارها، ولوله‌کشها را جهت روی هم گذاشتن صحیح این‌موادگرد هم می‌آوریم. درتشبیه به «گیاه»، گلدان، کاردك، چنگك، بیلچه، ومقدارمناسبی حشره‌کش برای از بین بردن حشرات، موردنیاز است.

کار خود را بر روی دو ایدهٔ اصلی متمرکز می‌کنیم: استفاده از نظریـهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان منبع مواد اولیه، و استفاده از منطق برای حصول اطمینان از دقت و اعتبار اثبات قضایا. سه فصل اول را به‌مجموعه‌هـا و موضوعات مربوط به‌آن اختصاص می‌دهیم، و دو فصل بعدی را به‌منطق. هردو ایده را از دیدگاه ریاضیدانی عملی که بیشتر مایل است این مفاهیم را درکارش به‌کارببرد تا در خود این موضوعات، دنبال می‌کنیم.

۳

مجموعه

بنابر عقیده‌ای که در فصل ۱ بیان کردیم، جهت ارائهٔ تعریفی دقیق برای مفهوم «مجموعه» هیچ اقدامی نمی‌کنیم. این امر ما را از توصیف مجموعه باز نمی‌دارد. هر مجموعه دسته‌ای است از چیزهای دلخواه. کلمهٔ «دسته» هیــچ حکمی در مورد تعداد چیزهای در مجموعه نمی‌کند: مجموعه ممکن است متناهی یــا نامتناهی باشد، ممکن است فقط یك شیء در آن باشد، یا حتی هیچ شیئی در آن نباشد. همچنین کلمهٔ «دسته» هیچ حکمی در مورد یکنواختی نوع چیزهای تشکیل‌دهندهٔ مجموعــه نمی‌کند: یك مجموعهٔ کاملاً خوب ممکن است متشکل از سه عدد، دو مثلث، و یك تابــع باشد. بدیهی است که مفهومی بــا این عمومیت، میدان وسیعی برای مثالهای نامأنوس فراهم می‌سازد. ولی، مجموعه‌های مورد توجه ما در ریاضیات لزوماً آنهایی هستند که از اشیاء ریاضی تشکیل می‌شوند. در یك سطح مقدماتی با مجموعه‌های اعداد، مجموعه‌های نقاط در صفحه، مجموعه‌های منحنیهای هندسی، و مجموعه‌های توابع آشنا می‌شویم. در ریاضیات پیشرفته‌تر ، به مجموعــه‌های متنوع فراوانی برمی‌خوریم؛ در واقع تقریباً همهٔ مفاهیم مورد توجه در ریاضیات، از نظریهٔ مجموعه‌ها نشأت می‌گیرند.

امروزه مفهوم «مجموعه» در تمام ریاضیات مفهومی بنیادی تلقی می‌شود ــ حتی بنیادی‌تر از مفهوم «عدد» که در قرون اولیه اساس کار شمرده می‌شد. دلایل زیادی برای این امر وجود دارد. یکی اینکه در حل معادلات معمولاً مجموعه‌ای از جوابها به دست می‌آید و نه صرفاً یك جواب : مثلاً، معادلات درجهٔ دوم معمولاً دو جواب دارند. همچنین ریاضیات جدید تــأکید بــر تعمیم دارد. قضایــای جالب توجه در موارد متعددی بــه‌کار می‌آیند. اهمیت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که در یك مثلث قائم‌الزاویهٔ خاص صدق می‌کند، بلکه بداین

خاطر است که در مورد همهٔ آنهـا صحیح است. و از این‌رو، خاصیتی از مجموعهٔ همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه را بیان می‌کنـد. مفهوم «گروه» (کـه بعداً دراین‌کتـاب شرح داده می‌شود) به‌اشکال متعددی در تمام ریاضیات ظاهر می‌شود. زبان مجموعه‌ها کمك می‌کند که خواص کلی گروه را فرمول‌بندی کنیم، و لذا در تمام مظاهرآن این خواص را به‌کار ببندیم. این قدرت بیان مفاهیم کلی با استفاده از زبان نظریهٔ مجموعه‌هاست که ویژگی خاصی به ریاضیات جدید داده است.

جهت مواجهه با همهٔ مجموعه‌هایی که در ریاضیات مطرح می‌شوند، آسانتراست که نخست خواص عمومی مشترك در همهٔ مجموعه‌ها را بررسی کنیم و سپس آنها را درموارد خاص به‌کار ببریم. در این فصل می‌پردازیم به‌روشهای طبیعی و متعـدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها برای تشکیل مجموعه‌های دیگر. همان‌طور کـه مطالعهٔ سیستماتیك خواص کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و از این قبیل، به‌جبر اعداد می‌انجامد، مطالعهٔ سیستماتیك این روشها نیز به‌نوعی «جبر» مجموعه‌ها منجر می‌شود.

عضو

چیزهایی کـه با هم مجموعهٔ مفروضی را تشکیل می‌دهند، عضوها یا عنصرهای آن مجموعه نامیده می‌شوند. همچنین می‌گوییم این عضوها متعلق به‌مجموعه هستند. برای آنکـه تعلق عضوی چون x به‌مجموعه‌ای چون S را به‌طور نمادی بیان‌کنیم، می‌نویسیم

$$x \in S.$$

اگر x متعلق به S نباشد، می‌نویسیم

$$x \notin S.$$

برای اینکه مجموعهٔ تحت بررسی‌را بشناسیم، بدیهی‌است که باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند. برعکس، اگرموضوع عضویت کاملاً معلوم باشد، می‌دانیم کـه این اعضا چه مجموعه‌ای را تشکیل‌می‌دهند. ملالغطی بودن در این مورد آن‌طورهم که به‌نظرمی‌رسد بیهوده نیست، زیرا اغلب ممکن است یك مجموعه را به‌روشهای مختلف توصیف‌کنیم، و پس ازمشاهدهٔ اعضای‌آن پی‌ببریم که این‌مجموعه‌ها همه یکی‌هستند. مثلاً، اگر A مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ

$$x^۲ - ۶x + ۸ = ۰$$

باشد و B مجموعهٔ اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه A و B هردو دقیقاً دوعضودارند، ۲ و ۴. یعنی مجموعه‌های A و B یکی‌هستند. بنابراین عقلایی است بگوییم که دومجموعه برابرند اگر اعضایشان یکی باشد. برابری دو مجموعهٔ S و T را به‌صورت معمول

$$S = T$$

نمایش می‌دهیم، و اگر S و T برابر نباشند، می‌نویسیم

$$S \neq T.$$

این معیار ظاهراً پیش‌پا افتاده برای برابری مجموعه‌ها، نتایج جالب توجهی هم دارد که هم‌اکنون ملاحظه می‌کنیم.

ساده‌ترین روش مشخص‌کردن یك مجموعه، فهرست‌کردن اعضایش‌است (البته اگر امکان‌پذیر باشد). نماد استاندهٔ این روش‌محصورکردن فهرست درون آکولاد { } است. لذا هرگاه بنویسیم

$$S = \{۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۵,\ ۶\}$$

منظورمان این است که S مجموعه‌ای است‌که اعضایش اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و فقط اینها، هستند. به‌عنوان مثالی دیگر، اگر

$$T = \left\{۷۹,\ \pi^{۲},\ \sqrt{(۵+\sqrt{۷})},\frac{۴}{۵}\right\},$$

آنگاه اعضای T اعداد۷۹، $\pi^{۲}$، $\sqrt{(۵+\sqrt{۷})}$، و ۴/۵ هستند.

در مورد این نماد دو نکته راکه هر دو از مفهوم برابری مجموعه‌ها ناشی می‌شوند باید تأکیدکنیم . اول اینکه ترتیب فهرست‌کردن اعضا بی‌اهمیت است. مجموعهٔ {۱, ۶, ۲, ۳, ۴, ۵} با مجموعهٔ S برابر است ، و همچنین است مجموعهٔ {۴, ۶, ۱, ۲, ۵, ۳}. چرا؟ زیرا درهرسه‌مورد اعضا فرقی ندارند و همان ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ هستند. ترتیب اعضای داخل آکولاد هیچ دلیل ریاضی ندارد، بلکه ناشی از قرارداد نوشتن از چپ به‌راست است. دوم آنکه، تکرار اعضا در فهرست نیز مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً، {۵, ۳, ۱, ۶, ۴, ۳, ۲, ۱} همان دوست قدیمی‌ما جناب S است. دلیلی برای این‌قرارداد ظاهراً نامأنوس هم وجود دارد. ممکن است دو فهرست را ترکیب‌کنیم و مجموعه‌ای مثلاً متشکل از همهٔ مقسوم‌علیه‌های سرهٔ ۱۲، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، و اعداد فردکوچکتر از۶ راکه ۱، ۳، و۵ هستند، به‌دست آوریم. صرفاً با نوشتن یك فهرست بعد از فهرست دیگر دقیقاً همان مجموعه‌ای را به‌دست می‌آوریم‌که نوشتیم . در این مورد، بسیار آسان است‌که فهرست را مرور و تکراریها را حذف‌کنیم؛ ولی، به‌طورکلی ، بهتر است انعطاف‌پذیری نماد را حفظ‌کنیم وتکرار را مجاز بدانیم. با توجه به‌این قرارداد که هرمجموعه با اعضایش مشخص می‌شود، نتیجه می‌گیریم‌که همهٔ نمایشهای گوناگون مجموعهٔ S تنها اعضای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ را دارند ولاغیر.

ممکن‌است تصورشودکه مطالب فوق تنها صفات ویژهٔ نمادگذاری را نشان می‌دهند و ارزش مفهومی چندانی‌ندارند. با این حقیقت آشناییم‌که، مثلاً، در نوشتن‌کسر نمادهای متفاوتی‌برای نمایش یك عدد به‌کارمی‌روند: ... = ۳/۶ = ۲/۴ = ۱/۲. در واقع این امریکی‌ازمتداولترین‌کاربرد علامت برابری است؛ به‌عبارت دیگر، هرگاه بنویسیم $x = y$، منظورمان این است‌که دو نماد طرفین علامت برابری چیزی جز دو نام متفاوت برای یك

چیز نیستند: $۴=۱۶\sqrt{}+=۱-۵=۳\div۱۲=۲+۲$. وقتی برای بیان برابری مجموعه‌ها می‌نویسیم $S=T$، از همین قرارداد استفاده می‌کنیم. حال که این مطلب را درك کردیم، مشکلی اساسی وجود ندارد؛ این چند سؤال را صرفاً به‌این دلیل مطرح کردیم که تکلیف آنها را معلوم کرده باشیم.

در مشخص کردن یك مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعهٔ اعداد اول با همین عبارت بهتر توصیف می‌شود تا با فهرست

$$\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \ldots\}.$$

ذکر چند جمله از یك مجموعهٔ بی‌پایان به‌روش فوق در معرض همان سوء تعبیری است که وقتی چند جملهٔ اول یك دنباله را می‌نویسیم، منتهی کمی‌هم بدتر. برای دنباله نظمی متصور هستیم، ولی برطبق قرارداد درمورد مجموعه‌ها، اعضای داخل آکولاد هیچ ترتیب خاصی ندارند. لذا فهرست فوق را چنین نیز می‌توان نوشت

$$\{۷, ۱۷, ۳۷, ۴۷, ۲, ۱۱, ۳, ۵, \ldots\}.$$

چه کسی می‌تواند از این آشفتگی سردر بیاورد وقسم بخورد که این مجموعه، همان مجموعهٔ همهٔ اعداد اول است؟ حال که این تذکر را بیان کردیم باید اذعان کنیم که ریاضیدانان، نمادگذاری آکولاد برای مجموعه‌های متناهی را در مناسبتهایی به‌کارمی‌برند. ما نیز گاهی چنین می‌کنیم.

در مورد فوق، دقیقتر است اگر بنویسیم

$$P=\{\text{همهٔ اعداد اول}\}$$

که بی‌نیاز از توصیف است. تغییر مختصری که بسیار مفید هم هست، چنین است

$$P=\{p \mid \text{عددی اول باشد } p\}.$$

آکولاد را «مجموعهٔ همهٔ ...» می‌خوانیم، وخط عمودی را «... هایی که»، و لذا کل نماد را به‌صورت «مجموعهٔ همهٔ pهایی که p عددی اول باشد» می‌خوانیم که خود مسلماً به‌معنی «مجموعهٔ همهٔ اعداد اول» است. به‌طورکلی هرتعریف از نوع

$$Q=\{x \mid x \text{ شرطی در مورد}\}$$

به‌این معنی است که Q مجموعهٔ همهٔ xهایی است که در مورد آنها شرط مفروض صادق باشد. برای اینکه ببینیم این نماد چقدر مفید است، فرض کنیم می‌خواهیم S را مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم زیر تعریف کنیم:

$$x^۲-۵x+۶=۰.$$

البته می‌توان معادله را حل کرد ونوشت $S=\{۲, ۳\}$. ولی راه بسیار آسانتر این است که از حل معادله اجتناب کنیم و بنویسیم

$$S=\{x|x^{۲}-۵x+۶=۰\}.$$

به‌این طریق تعریفی دقیق و بدون ابهام برای S به‌دست می‌آید. البته این تعریف به‌حل معادله کمکی نمی‌کند! ولی نکتهٔ اصلی همین است که بدون آنکه در واقع هیچ عملی انجام دهیم می‌توانیم مجموعهٔ S را مشخص کنیم.

در این نمادگذاری نیز ابهامی وجود دارد که باید با آن برخوردی عاقلانه داشته باشیم. اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، آنگاه مجموعهٔ

$$\{x|۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

متشکل است از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵؛ ولی اگر اعداد حقیقی موردنظر باشند، آنگاه همهٔ اعداد حقیقی دیگر بین ۱ و ۵ را نیز شامل می‌شود. بهترین راه‌حل این است که مجموعه‌ای چون Y را نیز که اعضای مجموعهٔ موردنظر می‌بایست از آن انتخاب شوند مشخص کنیم. نماد

$$X=\{x\in Y|x \text{ شرطی در مورد }\}$$

به‌این معنی است که X مجموعهٔ تمام اعضایی مانند x موجود درمجموعهٔ مفروض Y است که به‌ازای آنها شرط مفروض درمورد x برآورده می‌شود. در واقع این‌نماد درست مانند

$$X=\{x|\, x \text{ و شرطی در مورد } x\in Y\}$$

است، ولی ما نماد اول را ترجیح می‌دهیم، زیرا این نماد برنقش Y تأکید دارد.

اگر $\mathscr{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathscr{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آنگاه اعضای مجموعهٔ

$$\{x\in \mathscr{Z}|۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، و۵؛ درحالی‌که هر عدد حقیقی $a\in\mathscr{R}$ که درعبارت $۱\leqslant a\leqslant ۵$ صدق کند عضوی از مجموعهٔ

$$\{x\in\mathscr{R}|\ ۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

است.

دلیل بازهم جدیتری برای تعیین مجموعه‌ای چون Y که اعضای مجموعهٔ X از آن انتخاب می‌شوند وجود دارد، و آن این است که یقین حاصل شود «شرطی در مورد x» به‌ازای اعضای $x\in Y$ عاری از معنی نیست. آن «شرط در مورد x» باید خاصیتی باشد که به‌ازای هر $x\in Y$ به‌روشنی یا درست باشد یا نادرست، و در این صورت اعضای مجموعهٔ X که با این خاصیت انتخاب می‌شوند دقیقاً تمام اعضایی از Y هستند که این خاصیت در مورد آنها درست است.

دردستورزبان فارسی، هرجمله به‌دو قسمت تقسیم‌می‌شود، مبتدای جمله وبقیهٔ جمله، که چیزی در بارهٔ مبتدا می‌گوید وخبر نام دارد.

ماه یك سیارهٔ زمین است.

مبتدا خبر

چون به‌موج اعتنایی نکرد، شاه‌کانوت پایش خیس شد.

مبتدا

خبر

ریاضیدانان که عادت دارند نمادی چون x را برای نمایش یك مجهول به‌کاربرند، ممکن است موضوع را چنین تحلیل کنند که خبر در جملهٔ نخست عبارت است از:

x یك سیارهٔ زمین است

و خبر در جملهٔ دوم عبارت است از:

چون به‌موج اعتنایی نکرد، x پایش خیس شد.

زیبایی این توصیف این است که مکان مبتدا در جمله مشخص است. برای باز یافتن جملهٔ اصلی، صرفاً مبتدای مناسب را به‌جای x قرار می‌دهیم.

این تحلیل، ایدهٔ یك گزاره‌نما در ریاضیات را توصیف می‌کند. به‌بیان ساده، گزاره‌نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هرگاه عضوی چون $a \in Y$ را به‌جای x قرار دهیم جملهٔ حاصل یا به‌وضوح درست باشد یا به‌وضوح نادرست. اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما «برای مجموعهٔ Y معتبر» است. مثلاً، عبارت

$$۱ \leqslant x \leqslant ۵$$

یك گزاره‌نماست که برای مجموعهٔ $\mathscr{Z}$ معتبر است. برای مجموعهٔ $\mathscr{R}$ هم معتبر است. با قراردادن هر عدد صحیح یا حقیقی به‌جای x جمله‌ای به‌دست می‌آید که یا درست است یا نادرست.

$۱ \leqslant ۳ \leqslant ۵$ درست است،

$۱ \leqslant ۵۷ \leqslant ۵$ نادرست است،

والی آخر.

مجموعهٔ $\{x \in \mathscr{Z} \mid ۱ \leqslant x \leqslant ۵\}$، همان مجموعهٔ همهٔ $x \in \mathscr{Z}$ است که گزاره‌نمای $۱ \leqslant x \leqslant ۵$ درست باشد.

گزاره‌نماها لزوماً به‌مجموعهٔ اعداد منحصر نمی‌شوند. مثلاً، اگر T مجموعهٔ مثلثهای واقع در صفحه باشد، آنگاه عبارت

x قائم‌الزاویه است

گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعهٔ T، و

$$\{x \in T \mid x \text{ مثلثی قائم‌الزاویه باشد}\}$$

صرفاً مجموعهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ واقع درصفحه است.

بازهم می‌توانیم مثالهای فراوانی ازگزاره نماها بیاوریم، ولـی به‌این کار نیازی نداریم زیرا به‌هرتقدیرمثالهای بسیاری درمتن ظاهرخواهندشد. خواننده باید این مطلب‌را در ذهن خودش بپروراند که درنماد

$$\{x \in Y \mid P(x)\}$$

منظور این است که $P(x)$ گزاره نمایی است برحسب x ومعتبر به‌ازای هر $x \in Y$.

زیر مجموعه

در درون هرمجموعهٔ مفروض A مجموعه‌های دیگری وجود دارند، که ازحذف برخی از اعضای A به‌دست می‌آیند. این‌مجموعه‌هارا زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. به‌بیان صوری‌تر، می‌گوییم B یك زیر مجموعه از A است اگر هرعضو B عضوی از A باشد، ومی‌نویسیم

$$B \subseteq A$$

یا

$$A \supseteq B \,.$$

همچنین می‌گوییم که B مشمول، یا جزء، A است. باتوجه به این تعریف بدیهی است کـه $A \subseteq A$. اگر $B \subseteq A$ و $B \neq A$، آنگاه می‌گوییم که B یك زیرمجموعهٔ سره از Aاست، و می‌نویسیم[1]

$$B \subsetneqq A \,.$$

ازمعیار برابری مجموعه‌ها قضیه‌ای بدیهی ولی سودمند حاصل می‌شود:

قضیهٔ ۱. فرض کنیم A و B دومجموعـه باشند. آنگاه $A = B$ اگـر وفقط اگـر $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$.

اثبات. اگر $A = B$ آنگاه، از آنجاکه $A \subseteq A$، نتیجه می‌گیریم کـه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. برعکس، فرض کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. آنگاه هر عضو Aعضوی از B است، و هرعضو B عضوی از A. ازاین‌رو اعضای A و B یکی هستند ولذا $A = B$. $\square$

کاربرد عملی این قضیه این است که غالباً می‌خواهیم برابری دومجموعه را نشان دهیم که

---

۱. بسیاری از ریاضیدانان نماد $\subset$ را بـه‌جای نماد $\subseteq$ که ما به‌کار می‌بریم به‌کار می‌برند وبرخی دیگر $\subset$ را به‌جای $\subsetneqq$ که ما انتخاب کرده‌ایم. خوشبختانـه استفاده از $\subseteq$ کاملاً خالی از ابهام است.

هریك ممكن است برحسب این یا آن گزاره‌نما داده‌شده باشد. برای ساده‌کردن کار، عضوی نوعی از A را (که برحسب گزارهٔ معینی داده شده‌است) در نظر می گیریم ونشان می‌دهیم که این عضو عضوی از B نیز هست. این امر ثابت می کند که $A \subseteq B$، آنگاه با برهانی مناسب وازهمان نوع نشان‌می‌دهیم که $B \subseteq A$. به‌زودی مثالهای فراوانی‌ازاین نوع‌روش اثبات‌را خواهیم دید (مثلاً درقضیه‌های ۳، ۴، و ۵).

یك خاصیت بنیادی زیرمجموعه‌ها این‌است که هرزیرمجموعهٔ یك زیرمجموعه، خود یك زیرمجموعه است:

قضیهٔ ۲ . اگر A، B، و C سه مجموعه باشندکه $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$.

اثبات. هرعضو A عضوی از B است وهرعضو B عضوی‌از C است. بنابراین هر عضو A عضوی از C نیز هست، لذا $A \subseteq C$. □

این مطلب خیلی مهم است‌که زیر مجموعه‌هارا بااعضا اشتباه نگیریم، زیرا که این دو مفهوم‌کاملاً متفاوت‌هستند. اعضای مجموعهٔ $\{۱ , ۲\}$ عبارتنداز ۱ و ۲. زیرمجموعه‌های $\{۱ , ۲\}$ عبارتنداز $\{۱ , ۲\}$، $\{۱\}$، $\{۲\}$، و زیرمجموعهٔ چهارمی که فعلاً بهتراست آن‌را با $\{\ \}$ نمایش دهیم.

به‌علاوه، اگر «$\subseteq$» را بـه «$\in$» تغییر دهیم قضیهٔ ۲ نادرست می‌شود. اعضای اعضا لزومی ندارند عضو باشند. مثلاً، فرض کنیم:

$$A = ۱,\ B = \{۱ , ۲\},\ C = \{\{۱ , ۲\}, \{۳ , ۴\}\}$$

آنگاه $A \in B$ و $B \in C$.ولی‌اعضای C عبارتنداز $\{۱ , ۲\}$, $\{۳ , ۴\}$ لذا $A = ۱$ عضو C نیست.

حال بـه‌سراغ مجموعهٔ $\{\ \}$ می‌رویم. مجموعه‌ای را تهی می گوییم‌که هیچ عضوی نداشته باشد. مثلاً، مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = x + ۱\}$$

تهی است، زیرا معادلـهٔ $x = x + ۱$ جوابی در $\mathbb{Z}$ ندارد. بـه‌واسطهٔ عـدم وجود عضو، مجموعهٔ تهی دارای خواص قابل ملاحظه‌ای (قابل ملاحظه درنگاه اول) است. مثلاً، اگر E مجموعه‌ای تهی و X مجموعه‌ای دلخواه باشد، آنگاه $E \subseteq X$. چرا؟ باید نشان دهیم که هـرعضو E عضوی‌از X نیزهست. تنها وقتی این مطلب نادرست‌است کـه E عضوی چون e داشته باشدکه متعلق به X نباشد. ولی E، چون تهی‌است اصلاً هیچ عضوی‌ندارد، ولذا شامل چنین عضوی نیست.

این برهان (عجیب ولی منطقی) را «برهان به‌انتفای مقدم» می‌نامیم، و نباید اهمیت خاصی برای‌آن قایل شویم.

فرض‌کنیم دومجموعهٔ تهی E و E' داده شده‌اند. بنا به‌مطلب فوق. داریم $E \subseteq E'$ و $E' \subseteq E$. پس‌بنا به‌قضیهٔ ۱، $E = E'$. همهٔ مجموعه‌های تهی برابرند. ازاین‌رو مجموعهٔ

تهی یکتاست. بنابراین نماد خاصی‌را به‌آن اختصاص می‌دهیم: برای نمایش مجموعهٔ تهی می‌نویسیم

$$\varnothing \cdot$$

این‌امر باعث تعجب نیست، درغیبت هرنوع عضوی، به‌هیچ وجه نمی‌توان دو مجموعهٔ تهی‌را از هم تمیزداد. همان طورکه در [۱۵] آمده است «محتوای دو پاکت خالی برابرند».

آیا مجموعه‌ای جامع وجود دارد؟

همان طورکه مجموعهٔ تهی $\varnothing$ وجود داردکه شامل هیچ عضوی نیست، این سؤال پیش می‌آیدکه آیا مجموعهٔ بسیار بزرگی چون Ω وجود داردکه بی‌قید وشرط شامل همه چیز باشد. خواهیم دیدکه چنین چیزی بسیار تخیلی است. چنین مجموعه‌ای باید جوال بسیار بزرگی باشد؛ اگر بخواهد همه چیزرا شامل شود باید شامل همهٔ اعداد، همهٔ اعضای همهٔ مجموعه‌ها، همهٔ مجموعه‌ها، همهٔ مکانهای دنیا، دیوان حافظ، رستم دستان، سال ۱۰۶۶، لطیفه‌های ملانصرالدین،... هم‌باشد. اگرجرأت تصور چنین مجموعهٔ Ω را داشته باشیم، آنگاه خود Ω باید مفهومی قابل قبول باشد و لذا باید آن‌را نیز دردستهٔ همهٔ اشیا قرار دهیم. لذا مجموعه‌ای می‌یابیم باخاصیت $\Omega \in \Omega$! ولی اکثرمجموعه‌های بامعنی به‌خودشان تعلق ندارند، درحقیقت خواننده می‌تواند دقایقی‌ازعمر گرانبهای خودرا صرف پیدا کردن چنین مجموعه‌ای کند. اگر از مجموعهٔ فرضی Ω اشیایی‌را انتخاب کنیم که مجموعه باشند و به‌خودشان تعلق نداشته باشند، مجموعهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$S = \{A \in \Omega | A \notin A\} \cdot$$

حال سؤالی یك میلیون تومانی: آیا $S \in S$ ؟...

اگر $S \in S$، آنگاه باتوجه به‌گزاره‌نمای معرف S، داریم $S \notin S$.

اگر $S \notin S$، آنگاه S درگزاره‌نمای معرف صدق می‌کند، ولذا $S \in S$!

فرض خیالی وجود مجموعهٔ جامع Ω مارا به‌یك پارادوکس رهنمون کرد. لذا یك مجموعهٔ جامع نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ممکن است تصورشودکه اگر اشیای عجیب‌را حذف وتوجه خودرا صرف یافتن مجموعه‌ای جامع درحوزهٔ ریاضیات کنیم، می‌توانیم ازاین پارادوکس رها شویم. این نیز تله‌های خودش‌را دارد. اگر بخواهیم مجموعه‌ای چون Ω_M متشکل ازهمهٔ اشیای ریاضی (به‌هرمعنایی) را تصور کنیم، آنگاه وقتی که زیر مجموعه‌ای از Ω_M متشکل از همهٔ اشیای ریاضی‌راکه متعلق به خودشان نیستند درنظرمی‌گیریم، به همان دام قبلی گرفتار می‌شویم.

برای احتراز ازاین گونه پارادوکسها، ضروراست مجموعه‌هایی‌را درنظربگیریم که تعریف روشنی داشته باشند ودقیقاً بدانیم چه‌اشیایی عضوآن هستند وکدام نیستند.

فقدان یك مجموعهٔ جامع دلیل دیگری است که نماد

$$\{x \in Y | P(x)\} ,$$

که در آن Y مجموعهٔ معلومی است و $P(x)$ یك گزاره‌نما، برنماد

$$\{x | P(x)\}.$$

برتری دارد. با در دست داشتن مجموعهٔ مشخصی چون Y، قبل از اقدام به گزینش اعضایی از Y که به‌ازای آنها گزاره‌نمای $P(x)$ درست است، می‌توانیم گزاره‌نمای $P(x)$ را بررسی ویقین حاصل کنیم که به‌ازای همهٔ اعضای Y معتبراست. چنانچه بدون تبعیض نماد $\{x | P(x)\}$ راکه امتحان عضویت هرشیء x را جایز می‌شمارد، به‌کار ببریم مانند این‌است که $\{x \in \Omega | P(x)\}$ را درنظر بگیریم. ملاحظه کردیم که هیچ مجموعهٔ جامعی وجود ندارد. اگر از ابتدا مجموعه‌ای چون Y را مشخص نکنیم، آنگاه باید بی‌هیچ قید وشرطی همهٔ اشیاء را با گزاره‌نمای $P(x)$ آزمایش کنیم. درآن‌صورت شخص ممکن‌است شیئی‌را امتحان کند که حتی مربوط به بحث نباشد و بازهم به‌پارادوکس برسد. برای روشن شدن مطلب به‌مثال مشخصی می‌پردازیم. اگر $\mathcal{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathcal{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، و T مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در صفحه باشد، آنگاه $\mathcal{Z} \notin \mathcal{Z}$ ، $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ و $T \notin T$. اگر Y مجموعه‌ای باشد که اعضایش $\mathcal{Z}$ ، $\mathcal{R}$، و T باشند، آنگاه

$$\{x \in Y | x \notin x\} = \{\mathcal{Z}, \mathcal{R}, T\} .$$

برای این مجموعهٔ Y، خاصیت $x \notin x$ گزاره‌ای کاملاً قابل قبول است. اگر

$$\{x | x \notin x\}$$

را درنظر بگیریم، آنگاه چون محدودیتی برای x قایل نشده‌ایم، تصور ما می‌تواند حادثه بیافریند و بادرنظر گرفتن خود مجموعهٔ $S = \{x | x \notin x\}$ به‌همان تناقض قبلی، یعنی $S \in S$ اگر وفقط اگر $S \notin S$، برسیم.

نتیجهٔ این بحث خاص این است که نظریهٔ مجموعه‌ها یك دستگاه نمادگذاری است و نه یك دستورالعمل شعبده بازی. ازاین‌رو، خوب یا بد بودن آن بـه نحوهٔ استفاده از آن بستگی دارد. اگرخوب ازآن استفاده شود، خوب هم عمل می‌کند. ولی مانند هر دستگاه دیگر، استفادهٔ غلط ازآن می‌تواند نتایج نامطلوب داشته باشد.

اجتماع و اشتراك

دو روش مهم «ترکیب» مجموعه‌ها به‌اجتماع واشتراك معروف هستند. اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش همان اعضای A است همراه با اعضای B. اگر

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$B = \{۳, ۴, ۵\}$$

آنگاه اجتماع آنهامجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ است. اجتماع A و B را به‌صورت $A\bigcup B$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم

$$A\bigcup B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B \text{ (یا به هردو)}\}.$$

اشتراك A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق داشته باشند. اشتراك مجموعه‌های A و B در فوق، مجموعهٔ $\{۳\}$ است، زیرا فقط ۳ به هر دوی آنها تعلق دارد. نماد نمایش اشتراك $A\bigcap B$ است. یعنی

$$A\bigcap B=\{x|x\in A \text{ و } x\in B\}.$$

توجه داشته باشید که اشتراك را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$A\bigcap B=\{x\in A|x\in B\}$$

ولذا می‌توان آن‌را زیرمجموعه‌ای از A دانست که با استفاده از گزاره‌نمای $x\in B$ انتخاب می‌شود. (به‌عبارت معادل، می‌توان آن‌را زیرمجموعه‌ای از B دانست که در گزاره نمای $x\in A$ صدق می‌کند). ازسوی دیگر، اجتماع مستلزم ساختن مجموعهٔ جدیدی است که (معمولاً) ازهردو مجموعهٔ A و B بزرگتر است؛ لذا مثالی داریم از ساختن یك مجموعه که اعضایش ازمجموعهٔ ازقبل تعیین شده‌ای چون Y انتخاب نمی‌شود.

عملهای اجتماع واشتراك ازقوانین «استانده» معینی پیروی می‌کنند. اکثراین قوانین بدیهی هستند، ولی برای سهولت آنهارا درسه قضیهٔ زیر ذکرمی‌کنیم.

قضیهٔ ۳ . فرض‌کنیم A، B، و C مجموعه‌هایی باشند. آنگاه داریم:

(الف) $A\bigcup\varnothing=A$،

(ب) $A\bigcup A=A$،

(پ) $A\bigcup B=B\bigcup A$،

(ت) $(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$.

اثبات. تنها (ت) قدری مشکل است. فرض کنیم $x\in(A\bigcup B)\bigcup C$. آنگاه $x\in A\bigcup B$ یا $x\in C$. اگر $x\in C$، آنگاه $x\in B\bigcup C$، ولذا $x\in A\bigcup(B\bigcup C)$. در غیراین صورت، $x\in A\bigcup B$ ولذا یا $x\in A$ یا $x\in B$. درهرحال دوباره نتیجه می‌شود که $x\in A\bigcup(B\bigcup C)$. بنابراین ثابت کردیم که اگر $x\in(A\bigcup B)\bigcup C$ آنگاه $x\in A\bigcup(B\bigcup C)$، به‌عبارت دیگر

$$(A\bigcup B)\bigcup C\subseteq A\bigcup(B\bigcup C).$$

برهانی مشابه، باهمان مراحل و باهمان سادگی، نشان می‌دهد که

$$A\bigcup(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcup B)\bigcup C.$$

با استفاده از قضیهٔ ۱، برابری موردنظر حاصل می‌شود. □

خواننده حتماً متوجه شده‌است که این اثبات پیچیده‌تر از آن است که مطلب اقتضا می‌کند، زیرا بدیهی است که $(A\bigcup B)\bigcup C$ مجموعه‌ای است که اعضایش روی‌هم‌اعضای A، اعضای B، و اعضای C است؛ واین همان مجموعه $A\bigcup(B\bigcup C)$ است. حال که این برابری معلوم شد، می‌توان همهٔ پرانتزها‌را حذف کرد وفقط نوشت

$$A\bigcup B\bigcup C.$$

نتایج مشابهی برای اشتراك هم برقرارند.

قضیهٔ ۴.
(الف) $A\bigcap\varnothing=\varnothing$،
(ب) $A\bigcap A=A$،
(پ) $A\bigcap B=B\bigcap A$،
(ت) $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.
اثباتها شبیه اثباتهای قضیهٔ ۳ هستند. □

درپایان، دوتساوی وجود دارندکه اجتماع واشتراك را درهم می‌آمیزند:

قضیهٔ ۵.
(الف) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$،
(ب) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

اثبات. فرض‌کنیم $x\in A\bigcup(B\bigcap C)$. آنگاه $x\in A$ یا $x\in B\bigcap C$. اگر $x\in A$ آنگاه یقیناً $x\in A\bigcup B$ و $x\in A\bigcup C$، ولذا $x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. درحالت‌دیگر، $x\in B\bigcap C$ نتیجه می‌دهد $x\in B$ و $x\in C$. ازاین‌رو، $x\in A\bigcup B$ و $x\in A\bigcup C$، و لذا $x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. این ثابت می‌کند که

$$A\bigcup(B\bigcap C)\subseteq(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C). \qquad (*)$$

برعکس، فرض کنیم $y\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. آنگاه $y\in A\bigcup B$ و $y\in A\bigcup C$. در اینجا دوحالت‌را باید بررسی‌کنیم: وقتی $y\in A$ و وقتی $y\notin A$. اگر $y\in A$، آنگاه یقیناً $y\in A\bigcup(B\bigcap C)$. ازسوی دیگـر، اگر $y\notin A$، آنگاه ازآنجاکه $y\in A\bigcup B$، بایـد داشته باشیم $y\in B$؛ به‌همین نحو نتیجه می‌شود $y\in C$. لذا $y\in B\bigcap C$، که مجدداً نتیجه می‌شود $y\in A\bigcup(B\bigcap C)$. بنابراین

$$(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\subseteq A\bigcup(B\bigcap C).$$

ازاین و (*) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.
اثبات (ب) مشابهٔ اثبات فوق است. □

قضیهٔ ۵ یك‌زوج «قانون پخش‌پذیری» به‌دست می‌دهد که قابل مقایسه با پخش‌پذیری

ضرب اعداد روی جمع است:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)\,.$$

ولی درمورد اعداد، تعویض دوعمل قاعدهٔ جدیدی به‌دست نمی‌دهد:

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$

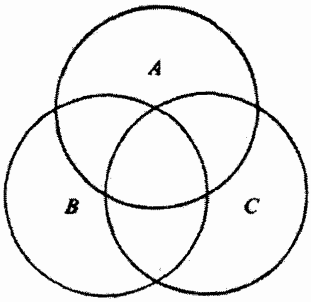
درحالت کلی درست نیست.

عملهای $\cup$ و $\cap$ روی مجموعه‌ها به‌طور متقارنتری عمل می‌کنند: هریك برروی دیگری پخش‌پذیراست.

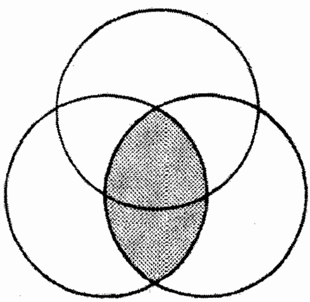
یك راه تصوراین اتحادهای گوناگون درنظریهٔ مجموعه‌ها، رسم چیزی است موسوم به دیاگرامهای ون[1]. اتحاد

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

را می‌توان بارسم سه قرص دو بـه دو متقاطع کـه مجموعه‌های A ، B ، و C را نمایش می‌دهند به‌صورت زیرنمایش داد:

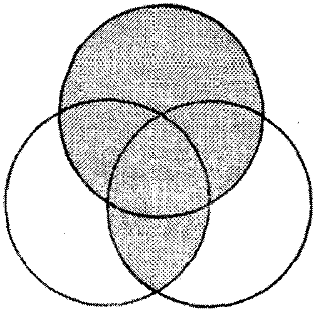


$B\cap C$ ناحیهٔ سایه‌دار مشترك بین B و C است:

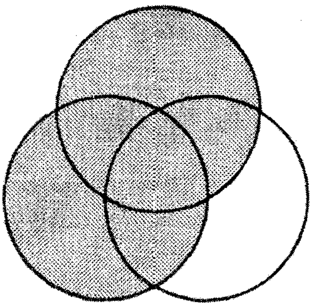


واجتماعش با A برابراست با:

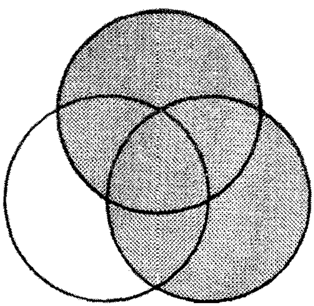
1. Venn



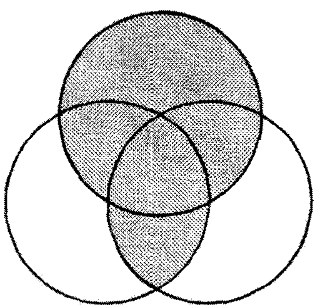
ازسوی دیگر، $A\bigcup B$ برابراست با:



و $A\bigcup C$ برابراست با:

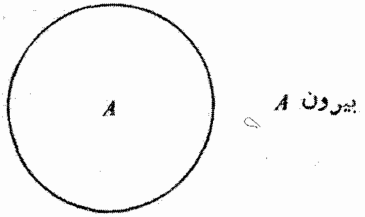


ولذا $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ ناحیهٔ مشترک بین این دو است، که عبارت‌است‌از:

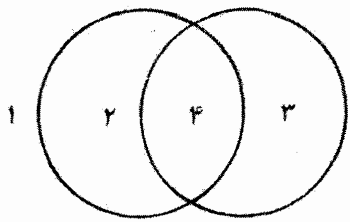


ونتیجه همان ناحیهٔ قبلی است.

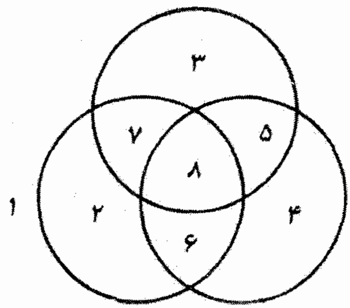
شاید خواننده مایل باشد بارسم دیاگرامهای ون مناسبی، اتحادهای دیگر قضیه‌های ۳، ۴، و ۵ راهم مجسم کند. ایـن ابزارهای تصویری، اگر درست انتخاب شوند، به‌بیشتر خوانندگان کمك‌می‌کنند که‌ایدهٔ ملموستری ازموضوع به‌دست آورند. برای‌حصول جامعترین تصویرممکن، دیاگرام باید بادقت رسم شود. باتنها یك مجموعهٔ A، دوناحیهٔ متمایز وجود دارد، درون A و بیرون A:



بادرنظرگرفتن دومجموعهٔ A و B، چهارناحیه بـه‌دست می‌آیـد، بیرون هردو، درون A ولی نه درون B، درون B ولی نه درون A، و درون هردو:

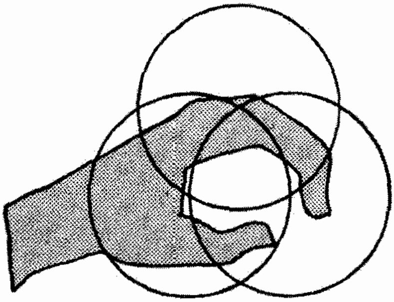


اگر سه مجموعهٔ A، B، و C را درنظر بگیریم، هشت ناحیه به‌دست می‌آید:



اگرمجموعهٔ چهارمی چون D چنان اضافـه شودکـه D با هریك ازاین هشت ناحیه فصل مشترك داشته باشد و ناحیهٔ بیرون D نیز این نواحی‌را قطع‌کند، آنگاه روی هـم شانزده ناحیه‌حاصل‌می‌شود. اگر بخواهیم A، B، C، و D را با دایره نمایش دهیم، به‌هیچ‌وجه

نمی‌توانیم به‌این امر دست یابیم. صرفاً سعی کنید دایرهٔ چهارمی با خواص مذکور به آخرین دیاگرام فوق اضافه کنید، آنگاه متوجه منظورما خواهید شد. البته این‌امر انجام‌پذیراست، ولی نه با یك دایره:



خود ون نیز وقتی برای نخستین بار این دیاگرامهارا رسم می‌کرد به‌چنین محدودیتهایی پی برده بود. این‌اشکالات‌را می‌توان بااستفاده‌از شکلهای نامأنوسی برای نمایش مجموعه‌ها برطرف کرد، ولی به‌لحاظ وجوداین دشواریهای فنی، بهتراست این شکلهارا فقط به‌عنوان ابزاری کمکی درنظربگیریم، ونه به‌عنوان یك روش واقعی اثبات. بهترین روش اثبات روابط کلی بین مجموعه‌ها، مشابه روشی است که درقضیه‌های ۳ ، ۴، و ۵ بیان شد.

مثلاً، ارتباطی کلی بین اجتماع، اشتراك، و زیرمجموعه‌ها وجود دارد:

قضیهٔ ۶. اگر A و B دومجموعه باشند، احکام زیرمعادلند:

(الف) $A \subseteq B$ ،

(ب) $A \cap B = A$ ،

(پ) $A \cup B = B$.

اثبات. رابطهٔ (ب) گویای این مطلب است که اعضای مشترك بین A و B همهٔ اعضای A هستند، لذا هرعضو A متعلق به B است، نتیجه اینکه $A \subseteq B$. عکس آن واضح است، ولذا (الف) و (ب) معادلند.

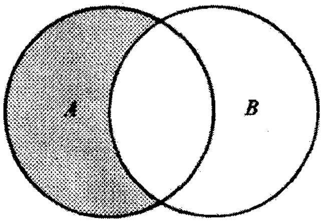
رابطهٔ (پ) حاکی‌است‌که اگر اعضای A را به B اضافه‌کنیم، دوباره B حاصل می‌شود. بنابراین هیچ یك ازاعضای A نمی‌تواند متعلق به B نباشد، ولذا نتیجه می‌شود که $A \subseteq B$. عکس این نیز واضح است، پس (الف) و (پ) نیز معادلند. □

متمم

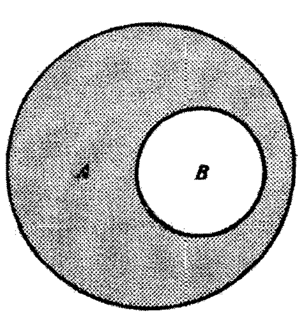
فرض‌کنیم A و B دو مجموعه باشند. تفاضل مجموعه‌ای $A - B$ طبق تعریف مجموعهٔ تمام اعضایی از A است که به B تعلق ندارند. بااستفاده ازنماد این تعریف چنین بیان می‌شود:

$$A-B=\{x\in A|x\notin B\}.$$

دریك دیاگرام ون، $A-B$ ناحیهٔ سایه‌دار زیراست:



اگر B زیر مجموعه‌ای از A باشد، آنگاه $A-B$ را متمم B نسبت به A می‌نامیم.



خوب بود اگرمی‌شد A را اصلاً درنظر نمی‌گرفتیم، ومتمم B را مجموعهٔ متشکل ازهمهٔ اشیایی‌که به B تعلق ندارند تعریف می‌کردیم. این انتظار زیادی است، زیرا این معنارا داردکه B ومتمم‌فرضیش مجموعه‌ای چون Ω را می‌سازندکه مطلقاً هرچیزی‌را دربردارد، ولی قبلاً نشان دادیم‌که چنین مجموعه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد. دربخش خاصی از ریاضیات ممکن‌است مجموعه‌ای چون U وجود داشته باشدکه همهٔ اشیای‌آن بحث‌را دربر گیرد. این مجموعه را عالم سخن یا مجموعهٔ جامع (جامع به‌تعبیرفعلی) می‌نامیم. مثلاً، وقتی اعداد صحیح مورد بحث هستند مجموعهٔ جامع‌را $U=\mathcal{Z}$ درنظر می‌گیریم. البته $U=\mathcal{R}$ هم خوب است. نکتهٔ مهم این‌است‌که مجموعهٔ جامع باید به‌اندازه‌ای باشد که همهٔ‌اشیای تحت بررسی‌را دربرگیرد. به‌قول معروف «در بحثی راجع به‌سگها، وقتی همهٔ سگهای غیرگله مورد نظرند، بیجاست نگران شترها باشیم.»

وقتی روی U توافق کردیم، متمم B^c از زیرمجموعه‌ای چون B از U را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B^c=U-B.$$

پس B^c متمم B نسبت به U است. ولی چون روی U توافق شده‌است، می‌توانیم آن‌را از نماد مربوط حذف کنیم، وبه هدف خود برسیم.

البته عمل ^{c} ازقوانین ساده‌ای پیروی می‌کند، ازجمله:

قضیهٔ ۷ . اگر A و B دوزیر مجموعه ازمجموعهٔ جامع U باشند، آنگاه:

(الف) $\varnothing^c = U$ ،

(ب) $U^c = \varnothing$ ،

(پ) $(A^c)^c = A$ ،

(ت) اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $B^c \supseteq A^c$.

باتوجه به (پ) می‌توانیم بنویسیم $A^{cc} = (A^c)^c$.

کمترابتدایی، ولی بسیارجالب، قوانین دمورگان[1] هستند:

قضیهٔ ۸ . اگر A و B زیرمجموعه‌هایی‌از مجموعهٔ جامع U باشند، آنگاه:

(الف) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ،

(ب) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

اثبات. فرض‌کنیم $x \in (A \cup B)^c$. آنگاه $x \notin A \cup B$. درنتیجه $x \notin A$ و $x \notin B$، پس $x \in A^c$ و $x \in B^c$، که نتیجه می‌دهد $x \in A^c \cap B^c$. بنابراین $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. برای رسیدن به رابطهٔ شمول عکس، مراحل استدلال‌را وارونه‌کنید.

این‌امر (الف) را ثابت می‌کند. رابطهٔ (ب) را می‌توان بـه‌طورمشابه به اثبات کـرد. همچنین می‌توان در (الف)، A^c را به جای A و B^c را به‌جای B گذاشت و

$$(A^c \cup B^c)^c = A^{cc} \cap B^{cc} = A \cap B$$

را به‌دست آورد. بامتمم گیری، داریم

$$A^c \cup B^c = (A^c \cup B^c)^{cc} = (A \cap B)^c$$

که همان رابطهٔ (ب) است. □

این قوانین پدیده‌ای را توصیف می‌کنندکه خوانندگان باهوش ممکن است متوجهٔ آن شده باشند: قوانین درنظریـهٔ مجموعه‌ها زوج زوج هستند، به این معناکه اگـردریکی اجتماع‌را بااشتراك واشتراك را با اجتماع عوض‌کنیم دیگری نتیجه می‌شود. این مطلب‌را به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

اصل دوگانی دمودگان

اگر درهر اتحاد درستی‌ازنظریهٔ مجموعه‌هاکه شامل تنها عملهای $\cup$ و $\cap$ باشد، سراسر،

---

1. De Morgan

عملهای $\bigcup$ و $\bigcap$ را باهم عوض کنیم، اتحاد درست دیگری نتیجه می‌شود.

اثبات کلی این مطلب مشکل نیست، ولی نیاز به یك استدلال استقرایی پیچیده دارد که موضوع اصلی را کاملاً تحت‌الشعاع قـرار می‌دهد. مورد زیر نمونـه‌ای است کلی از این اصل. اتحاد

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

را درنظرمی‌گیریم. ازطرفین متمم می‌گیریم وقوانین دمورگان‌را به‌کار می‌بریم تا

$$A^c\bigcap(B\bigcap C)^c=(A\bigcup B)^c\bigcup(A\bigcup C)^c$$

را به‌دست آوریم. حال قوانین دمورگان‌را که مجدداً به‌کار ببریم، داریم

$$A^c\bigcap(B^c\bigcup C^c)=(A^c\bigcap B^c)\bigcup(A^c\bigcap C^c).$$

تااینجا $\bigcup$ و $\bigcap$ با هم عوض شده‌اند. حال همه جا A را با A^c و B را با B^c و C را با C^c عوض می‌کنیم. از آنجا که این اتحاد بـرای همهٔ مجموعه‌های A ، B ، و C درست است، این تعویض مجاز است. در نتیجه

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcup C).$$

این همان قانون اول است، تنها باتعویض $\bigcup$ها و $\bigcap$ها باهم.

سؤال. وجود عمل ^{c} دراتحاد چه‌اثری روی استدلال دارد؟ (روش فوق‌را دراتحاد

$$B\bigcup(A\bigcap A^c)=B$$

به‌کار ببرید. چه‌اتفاقی می‌افتد؟).

مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها

ممکن است که همهٔ اعضای مجموعهٔ مفروضی چون S خود مجموعه باشند. در واقع، غالباً درنظرگرفتن مجموعه‌ای ازمجموعـه‌ها ابزار مفیدی است. مثلاً ممکن است داشته باشیم $S=\{A, B\}$ که درآن $A=\{۱, ۲\}$ و $B=\{۲, ۳, ۴\}$. مثالی پیچیده‌تر این است کـه مجموعه‌ای چون X رادرنظربگیریم و $\mathbb{P}(X)$ را مجموعهٔ همهٔزیرمجموعه‌های X بگیریم. این مجموعه را که مجموعهٔ توانی X می‌نامیم درخاصیت زیرصدق می‌کند:

$$Y\in\mathbb{P}(X) \text{ اگر وفقط اگر } Y\subseteq X.$$

مثلاً، اگر $X=\{۰, ۱\}$، آنگاه $\mathbb{P}(X)=\{\varnothing, \{۰\}, \{۱\}, \{۰, ۱\}\}$. در حالاتـی نظیر این‌که هرعضو S خود یك مجموعه است، می‌توان قدمی‌فراترگذاشت واعضای متعلق بـه این اعضارا درنظرگرفت. این‌امر تعمیم مفاهیم اجتماع واشتراك را به‌دست می‌دهد:

$$\bigcup S=\{x|S \text{ به ازای } A \text{یی در } x\in A\},$$
$$\bigcap S=\{x|S \text{ به‌ازای همهٔ } A \text{های در } x\in A\}.$$

$\bigcup S$ را «اجتماع S» و $\bigcap S$ را «اشتراك S» می‌نامیم. به‌عبارت‌دیگر، اجتماع S تشکیل می‌شود ازهمهٔ اعضای موجود دراعضای S، واشتراك S تشکیل می‌شود ازتمام اعضای مشترك بین همهٔ اعضای S. مثلاً،

$$\bigcup\{\{۱,۲\},\{۲,۳,۴\}\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$
$$\bigcap\{\{۱,۲\},\{۲,۳,۴\}\}=\{۲\}.$$

به‌طور کلی، به‌ازای هرمجموعهٔ X، داریم

$$\bigcup \mathbb{P}(X)=X$$
$$\bigcap \mathbb{P}(X)=\varnothing.$$

گرچه ممکن‌است این نماد در ابتداکمی نامأنوس به‌نظرآید، ولی بسیار باصرفه است و حقیقتاً تعمیم واقعی مفاهیم معمولی است. مثلاً، مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $S=\{A_۱, A_۲\}$، آنگاه

$$\bigcup S=A_۱\cup A_۲$$
$$\bigcap S=A_۱\cap A_۲.$$

به‌طور کلی‌تر،

$$\bigcup\{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}=A_۱\cup A_۲\cup \cdots \cup A_n,$$
$$\bigcap\{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}=A_۱\cap A_۲\cap \cdots \cap A_n.$$

نمادگذاری دیگر (ومتداولتر) برای این دو مفهوم آخراین است‌که بنویسیم

$$A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{r=۱}^{n}A_r$$

$$A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{r=۱}^{n}A_r.$$

یکبار دیگر درآخرفصل ۵ هم به‌اجتماع واشتراك تعمیم یافته بازخواهیم گشت.

تمرین

۱. کدام ازمجموعه‌های زیرباهم برابرند؟

(الف) $\{-۱, ۱, ۲\}$،

(ب) $\{-۱, ۲, ۱, ۲\}$،

(پ) $\{n \in \mathscr{Z} \mid |n| \leqslant ۲ \text{ و } n \neq ۰\}$،
(ت) $\{۲, ۱, ۲, -۲, -۱, ۲\}$،
(ث) $\{۲, -۲\} \cup \{۱, -۱\}$،
(ج) $\{-۲, -۱, ۱, ۲\} \cap \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

۲ . ثابت کنید که به‌ازای هردو مجموعهٔ A و B،

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B) \cdot$$

اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و B مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۳ باشد، مجموعهٔ $(A-B) \cup (B-A)$ را توصیف کنید.

۳ . اثبات احکام ۳ (الف)، ۳ (ب)، ۳ (پ)، وهمهٔ احکام قضیهٔ ۴ را بنویسید. با رسم دیاگرامهای ون این نتایج را روشن کنید.

۴ . دیاگرام ون مناسبی برای همهٔ فرمولهای شامل ۵ مجموعهٔ متفاوت رسم کنید.

۵ . اگر $S = \{$همهٔ زیرمجموعه‌های $X \subseteq \mathscr{Z}$ باشرط $۰ \in X\}$، مطلوب‌است $\bigcap S$ و $\bigcup S$.

۶ . اگر $S = S_۱ \cup S_۲$، ثابت کنید که $\bigcup S = (\bigcup S_۱) \cup (\bigcup S_۲)$.

۷ . اگر A دارای n عضو باشد $(n \in \mathscr{N})$، تعداد زیرمجموعه‌های A را به‌دست آورید. اگر بااثبات به روش استقرا آشنا هستید، نتیجه‌را بااین روش اثبات کنید.

۸ . اگر A ، B ، و C مجموعه‌هایی متناهی باشند و $|A|$ نمایش تعداد اعضای A باشد ، نشان دهید

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \cdot$$

یك دیاگرام ون رسم کنید.

۹ . درهریك ازاحکام زیر، اگربه‌جای S یکی‌از مجموعه‌های $\mathscr{N}$، $\mathscr{Z}$، $\mathscr{Q}$، $\mathscr{R}$ را بگذاریم، گزاره‌ای درست به دست می‌آوریم. مجموعهٔ مناسب‌را درهرحالت پیدا کنید.

(الف) $\{x \in S \mid x^۳ = ۵\} \neq \varnothing$ ،
(ب) $\{x \in S \mid -۱ \leqslant x \leqslant ۱\} = \{۱\}$ ،
(پ) $\{x \in S \mid ۲ < x^۲ < ۵\} - \{x \in S \mid x > ۰\} = \{-۲\}$.
(ت) $\{x \in S \mid ۱ < x \leqslant ۴\} = \{x \in S \mid x^۲ = ۴\} \cup \{۳, ۴\}$ ،
(ث)

$$\{x \in S \mid ۴x^۲ = ۱\} - \{x \in S \mid x < ۰\} = \{x \in S \mid ۵x^۲ = ۳\} \cup \{x \in S \mid ۲x = ۱\} \neq \varnothing \cdot$$

۱۵ . معادلهٔ $x+y=z$ به‌ازای $x, y, z \in \mathcal{N}$ جوابهای بسیاری دارد؛ معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}$ نیز جوابهایی دارد، ازجمله ۳ = x ، ۴ = y ، ۵ = z .
فرض کنیم:

$$F=\{n\in\mathcal{N} \mid \text{با شرط } x, y, z\in\mathcal{N} \text{ دارای جوابی باشد } x^n+y^n=z^n\}.$$

برای اثبات $F=\{۱, ۲\}$ چه باید کرد؟ این موضوع دربارهٔ اثبات برابری مجموعه‌ها درحالت کلی به‌ما چه می‌گوید؟

۴

رابطه

هدف این فصل معرفی یکی از مهمترین مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌هاست. مفهوم رابطه مفهومی است که در تمام ریاضیات یافت می‌شود و کاربردهای زیادی در خارج از ریاضیات نیز دارد. مثالهایی از روابط عبارتند از: در اعداد «بزرگتر است از»، «کوچکتر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر نیست با»؛ درنظریهٔ مجموعه‌ها، «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلق است به»؛ در حوزه‌های دیگر، «برادر ... است»، «پسر ... است». آنچه در همهٔ این مثالها مشترك است این‌است که همه به‌دو شیء اشاره می‌کنند و اینکه درهرحالت شیء اول یا در رابطه با شیء دوم هست یا نیست. مثلاً $a > b$، که a و b اعدادی صحیح باشند، یا درست است یا درست نیست ($۱ < ۲$ درست است، و $۲ < ۱$ نادرست).

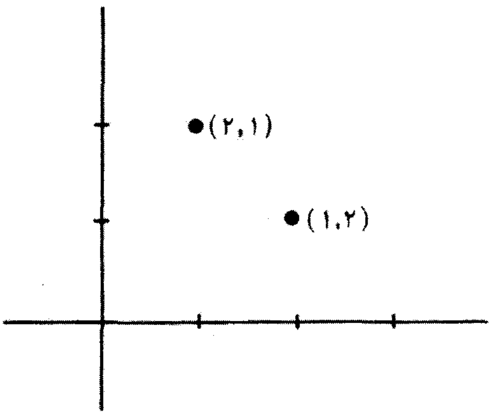
آن دوچیزی‌که در رابطه با یکدیگر هستند باید به‌ترتیب معینی درنظر گرفته شوند، مثلاً $a > b$ کاملاً متفاوت است با $b > a$. لذا نخستین‌کاری راکه در این فصل انجام می‌دهیم ساختن ابزاری است‌که بتواند با زوجهای مرتب‌کار کند. این مطلب نیزقابل‌تذکر است‌که رابطه‌ها می‌توانند بین‌اعضای مجموعه‌های متفاوت برقرار باشند، یعنی درمواردی می‌توان رابطه‌ای بین اعضای مجموعه‌ای چون A و اعضای مجموعه‌ای چون B داشت. اکثر مثالهایی‌که ذکر شدند مربوط به‌اعضای یك مجموعه هستند، ولی یك مثال از نوع دیگر را هم درفهرست مثالهای مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها گنجانیدیم و آن «متعلق است به» است. اگر A مجموعه‌ای باشد و B مجموعه‌ای که اعضایش‌خود مجموعه هستند، آنگاه به‌ازای هرعضو x از A و هرعضو Y از B، می‌توان دیدکه آیا $x \in Y$ یا نه. ازآنجاکه،

$x \in Y$، به‌ازای هر x از A و هر Y از B، یا درست است یا نادرست، پس، به‌معیاری که دراین فصل به‌توصیف آن خواهیم پرداخت، همین رابطه‌ای است بین A و B. زیبایی مطلبی که بیان شد در این است که آن را می‌توان تماماً با اصطلاحات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها فرمول بندی کرد.

در پایان این فصل، جزئیات نظریهٔ دونوع رابطه را که اهمیت ویژه‌ای دارند می‌پرورانیم: روابط هم‌ارزی و روابط ترتیبی.

زوج مرتب

گفتیم که برای مجموعه‌ها ترتیب نوشتن اعضا در یك فهرست اهمیتی ندارد، مثلاً برای مجموعه‌ای با دو عضو، $\{a, b\} = \{b, a\}$. این مطلب کاملاً به‌جای خود، ولی گاهی ضرور است که ترتیب را هم مشخص کنیم. مثلاً، درهندسهٔ تحلیلی هر نقطه از صفحه را با زوج (x, y) نمایش می‌دهیم. در اینجا ترتیب بسیار مهم است، مثلاً نقاط $(۲ ,۱)$ و $(۱ ,۲)$ متفاوت هستند:



به‌این نحو به‌مفهوم زوج مرتب (x, y) رهنمون می‌شویم، پرانتز را به‌این منظور به‌کار می‌بریم که آن را از $\{x, y\}$ متمایز کنیم. خاصیت مهمی که برای این مفهوم جدید لازم است این است که:

$$(x, y) = (u, v) \text{ اگر و فقط اگر } x = u \text{ و } y = v \qquad (*)$$

این مفهوم را می‌توان درتمام نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار برد. اگرمجموعه‌های A و B مفروض باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی $A \times B$، مجموعهٔ همهٔ این زوجهای مرتب است:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

تا اینجا خیلی‌خوب است؛ تنها مسئله این است که ما هنوز نگفته‌ایم معنی یك زوج مرتب

دقیقاً چیست. (x,y) چیست؟ اگر $A=B=\mathcal{R}$، آنگاه هرزوج مرتب (x,y) را می‌توانیم، با استفاده از مختصات دکارتی، نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات بدانیم. این مطلب در واقع منشاء مفهوم زوج مرتب است. با این تعبیر، صفحه را می‌توانیم به‌عنوان $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ (یا، به‌صورت اختصاری معمولتر در ریاضیات، $\mathcal{R}^2$) درنظر بگیریم. ولی اگر A مجموعه‌ای مانند {ترنج , پرتقال ,سیب} و B مجموعهٔ {چنگال ,کارد} باشد، دراین صورت $A\times B$ چیست؟این‌مجموعه یقیناً از زوجهای‌مرتب: (کارد ,سیب)،(چنگال ,سیب)،(کارد ,پرتقال)، (چنگال , پرتقال)، (کارد , ترنج)، (چنگال , ترنج) تشکیل می‌شود. لذا باز می‌گردیم به‌سؤال خودمان: زوج مرتب (کارد ,سیب) چیست؟ جواب‌در این نیست‌که بگوییم «این شیء چیست؟»، بلکه در این است‌که «چطور آن را به‌دست می‌آوریم؟». جواب این است که به‌طور کلی برای به‌دست‌آوردن (x,y)، ابتدا x را از A انتخاب می‌کنیم وسپس y را از B. ریاضیدان لهستانی کوراتوفسکی[1] دراین فرایندیك تعریف مجرد ممکن برای (x,y) مشاهده‌کردکه درآن صرفاً از مفاهیم مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها، آن هم مفاهیمی که قبلاً توصیف شده‌اند، استفاده می‌شود. با انتخاب x از A مجموعهٔ تك عضوی $\{x\}$ را داریم. سپس با انتخاب y از B مجموعهٔ $\{x,y\}$ را به‌دست می‌آوریم. کوراتوفسکی به‌طور ساده زوج مرتب (x,y) را باکمك این مجموعه‌ها تعریف می‌کند:

تعریف (کوراتوفسکی). زوج مرتب (x,y) از دوعضو x و y بنا به‌تعریف مجموعهٔ

$$(x,y)=\{\{x\},\ \{x,y\}\}$$

است.

این‌تعریف ظاهراً عجیب دارای این مزیت است که خاصیت (*) راکه برای زوجهای مرتب حیاتی است ارضا می‌کند:

قضیهٔ ۱. با توجه به‌تعریف کوراتوفسکی داریم:

$(x,y)=(u,v)$ اگر و فقط اگر $x=u$ و $y=v$.

اثبات. یقیناً اگر $x=u$، $y=v$، آنگاه از تعریف نتیجه می‌شود که $(x,y)=(u,v)$. ازسوی‌دیگر،فرض کنیم $(x,y)=(u,v)$. اگر $x\neq y$، آنگاه $(x,y)=\{\{x\},\ \{x,y\}\}$ دارای‌دوعضومتمایز $\{x\}$ و $\{x,y\}$ است که هریك باید متعلق به $(u,v)=\{\{u\}\ ,\ \{u,v\}\}$ باشد. این مطلب به‌این معنی است که دو عضو $\{u\}$ و $\{u,v\}$ نیز باید متفاوت باشند، ولذا $u\neq v$. حال باید داشته باشیم $\{x\}=\{u\}$ یا $\{x\}=\{u,v\}$؛ دومی به‌وضوح غیرممکن است (زیرا دومی این معنی‌را خواهد داشت که u و v هردو متعلق به $\{x\}$ هستند، ودرنتیجه $v=x=u$ که متناقض $u\neq v$ است). لذا $\{x\}=\{u\}$ و $x=u$. به‌روشی مشابه، داریم $\{x,y\}=\{u,v\}$، وچون $x=u$، $x\neq y$، و $y\in\{u,v\}$، نتیجه می‌گیریم که $y=v$. لذا

1. Kuratowski

طبق انتظار $x=u$ و $y=v$.

اگر $x=y$، فرم مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها قدری دگرگون می‌شود و

$$(x, y)=\{\{x\}, \{x,y\}\}=\{\{x\}, \{x, x\}\}=\{\{x\}, \{x\}\}=\{\{x\}\}$$

به‌دست می‌آید، ولذا (x, y) تنها یك عضو دارد، که آن هم $\{x\}$ است. اگر $(u,v)=(x,y)$، آنگاه (u, v) نیز دارای یك عضو است، در نتیجه $\{u, v\}=\{u\}$ و لذا $u=v$ و $(u, v)=\{\{u\}\}$. حال برابری $(x, y)=(u, v)$ به‌صورت $\{\{x\}\}=\{\{u\}\}$ درمی‌آید، که متوالیاً به $\{x\}=\{u\}$ وسپس به $x=u$ تحویل می‌یابد. لذا این حالت به $x=y=u=v$ می‌انجامد واثبات کامل است.[1] $\square$

این امرما را به کجا می‌رساند؟ ابتدا یك خبرخوب: تعریفی برای زوج مرتب (x, y) داریم که در آن صرفاً مفاهیم تثبیت شدهٔ مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار می‌رود. حال یك خبربد: این تعریف با مفهوم شهودی زوج مرتب درهندسهٔ تحلیلی مطابقت ندارد. در واقع اگر از ریاضیدانی خواسته شود که $(۱, ۲)$ را مجسم کند، به‌احتمال زیاد اوآن را به‌عنوان نقطه‌ای از صفحه می‌پندارد؛ خیلی بعید است که ایدهٔ $\{\{۱\}, \{۱, ۲\}\}$ به‌خاطرش خطور کند.

راه حل واقع بینانه این است که بگذاریم تعریف کوراتوفسکی درخاطرمحوشود، و درموقع لزوم برای‌ارائهٔ بنیانی‌دقیق‌به‌کار رود. ایدهٔ مهمی که باید به‌آن تکیه‌کنیم خاصیت $(*)$ است:

$$(x, y)=(u,v) \text{ اگر و فقط اگر } x=u \text{ و } y=v.$$

با درنظرداشتن‌این‌مطلب، $A \times B$ را به‌عنوان مجموعهٔ چنین‌زوجهای مرتبی‌درنظرمی‌گیریم،

$$A \times B=\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

تعبیر $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ به‌عنوان نقاط صفحه همچنان به‌صورت یکی از مفیدترین تعبیرها باقی‌می‌ماند ومسلماً $(*)$ راکه‌مفیدترین مشخصهٔ آن‌است ارضا می‌کند. این تعبیر $A \times B$ برای وقتی که A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{R}$ هستند نیز مفید است. مثلاً، اگر $A=\{۱, ۲, ۳\}$ و $B=\{۵, ۷\}$، آنگاه $A \times B$ مجموعهٔ زیر است:

---

۱. باکمی‌مهارت بیشتر، می‌توان این‌قضیه را خیلی‌سریعتر اثبات‌کرد. با به‌کاربردن نمادهای بخش آخرفصل ۳، داریم

$$\bigcup\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{x, y\} \text{ و } \bigcap\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{x\}$$

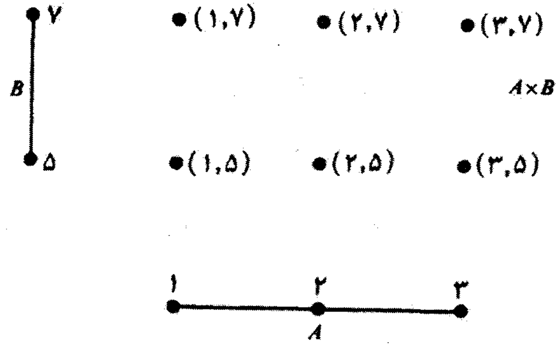
لذا $\bigcap(x, y)=\{x\}$ و $\bigcup(x, y)=\{x, y\}$. اگر $(x, y)=(u, v)$، با مقایسهٔ اشتراك و اجتماع، نتیجه می‌شود که:

$$\{x\}=\{u\} \text{ و } \{x, y\}=\{u, v\}.$$

اولی $x=u$ را نتیجه می‌دهد و باکمك آن (خواه $x=y$ خواه چنین نباشد) دومی $y=v$ را.

$$\{(۱,۵), (۱,۷), (۲,۵), (۲,۷), (۳,۵), (۳,۷)\}.$$

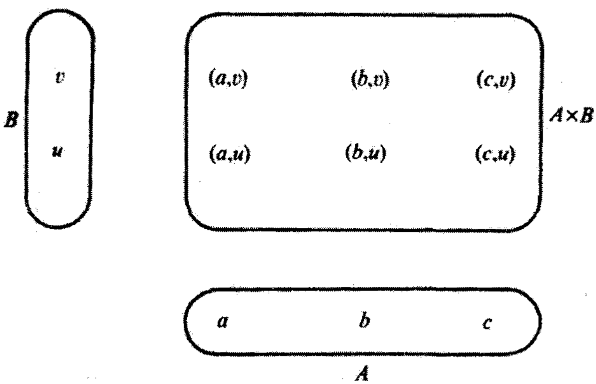
برحسب مختصات دکارتی، می‌توانیم تصویری از آن را هم رسم کنیم:



هرگاه A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{R}$ نباشند، این نوع تصویر زیاد مناسب نیست، ولی بازهم می‌تواند مفید باشد. مثلاً، اگر $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{u, v\}$، آنگاه

$$A\times B=\{(a, u), (a, v), (b, u), (b, v), (c,u), (c,v)\},$$

و نتیجه توسط:



نمایش داده می‌شود.

توجه داشته باشید که در حالت عمومی $A\times B\neq B\times A$. مثلاً، با همان A و B فوق داریم

$$B\times A=\{(u, a), (u,b), (u, c), (v, a), (v, b), (v, c)\}$$

که همان $A\times B$ نیست. به‌هرحال، حاصلضرب دکارتی از قوانین معینی پیروی می‌کند:

قضیهٔ ۲. به‌ازای مجموعه‌های A، B، و C داریم:

(الف) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$،

(ب) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$،

(پ) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$،

(ت) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

اثبات. همه آسان هستند، وبرهان همهٔ موارد مشابه است، لذا فقط(الف) را اثبات می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.
فرض کنیم $(u, v)\in(A\cup B)\times C$. آنگاه $u\in A\cup B$ و $v\in C$. لذا $u\in A$ یا $u\in B$. اگر $u\in A$، آنگاه $(u, v)\in A\times C$؛ اگر $u\in B$، آنگاه $(u, v)\in B\times C$. در هرحال، $(u, v)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. بنابراین

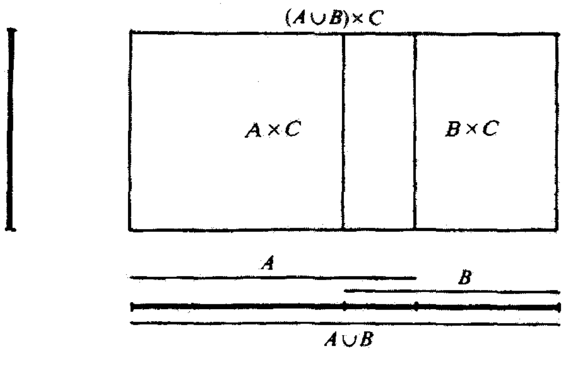
$$(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C).$$

حال فرض کنیم $x=(y,z)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. آنگاه $x\in(A\times C)$ یا $x\in(B\times C)$. در حالت اول، $y\in A$ و $z\in C$. در حالت دوم، $y\in B$ و $z\in C$، لذا $x=(y, z)\in(A\cup B)\times C$. این امر نشان می‌دهد که

$$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C.$$

باکنارهم‌گذاردن این دوقسمت، اثبات تمام می‌شود. □

این قسمت را می‌توان با نمودار زیرمجسم کرد:



قضیهٔ ۳. به‌ازای مجموعه‌هایی چون A، B، C، و D داریم:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

اثبات. فرض کنیم $x=(y,z)\in(A\times B)\cap(C\times D)$. آنگاه $y\in A$، $z\in B$،

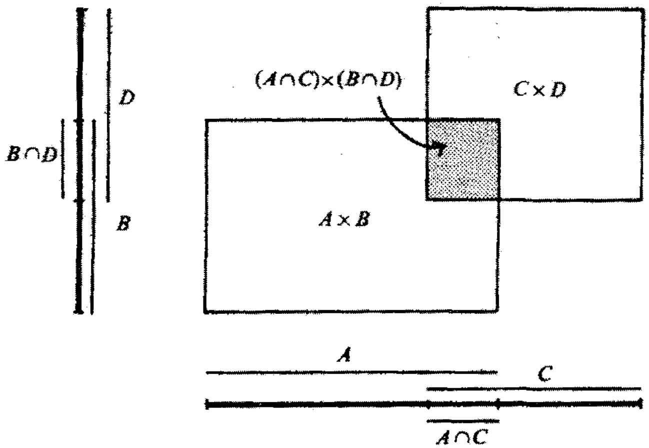
$y \in C$، و $z \in D$. لذا $y \in A \cap C$، و $z \in B \cap D$، پس $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
از این‌رو،

$$(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D).$$

برعکس، فرض کنیم $x = (y, z) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. آنگاه $y \in A$ و $y \in C$، $z \in B$، و $z \in D$؛ لذا $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$. بنابراین

$$(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D). \quad \square$$

نمودار اثبات چنین است:



همین نمودار روشن می‌سازد که چرا چنین قضیه‌ای برای اجتماع به‌جای اشتراك وجود ندارد.

اکنون که زوجهای مرتب را شناختیم، آسان است که به‌همان ترتیب، سه‌تایی‌های مرتب، چهارتایی‌های مرتب، والی‌آخر را هم تعریف کنیم؛ به‌این‌نحو که

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

$$(a, b, c, d) = ((c, b), c), d)$$

والی‌آخر. اینها اعضای حاصلضربهای مکرر دکارتی تعریف شده توسط

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

$$A \times B \times C \times D = ((A \times B) \times C) \times D$$

هستند. بعدها روش بهتری برای تعریف مفهوم کلی یك n تایی مرتب

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

به‌ازای هرعدد طبیعی n، هم پیدا خواهیم کرد. درحال حاضر برای هر n خاص می‌توانیم این‌کار را با تکرار فرایند به‌کارگرفته شده برای سه‌تایی‌ها و چهارتایی‌ها انجام دهیم. این تعمیمها خواصی مشابه با خاصیت اصلی زوجهای مرتب، یعنی خاصیت (*)، دارند. مثلاً، $(a, b, c)=(u, v, w)$ اگروفقط اگر $a=u$، $b=v$، و $c=w$. اثبات این‌مطلب ازکاربرد مکرر (*) نتیجه می‌شود.

رابطه

به‌طورشهودی، یك رابطه بین‌دوشیء ریاضی a و b شرطی درمورد a و b است‌که به‌ازای مقادیرمعینی از a و b یا درست‌است یا نادرست. مثلاً، «بزرگتراست از» رابطه‌ای است بین اعداد طبیعی. با به‌کاربردن نماد معمولی $>$، داریم:

$$۲>۱ \text{ درست است،}$$

$$۱>۲ \text{ نادرست است،}$$

$$۱۷>۳ \text{ نادرست است،}$$

والی‌آخر. این رابطه نوعی خاصیت زوجهای a و b است. در واقع باید زوج مرتب (a, b) را به‌کارببریم. زیرا مثلاً، $۲>۱$ ولی چنین نیست‌که $۱>۲$.

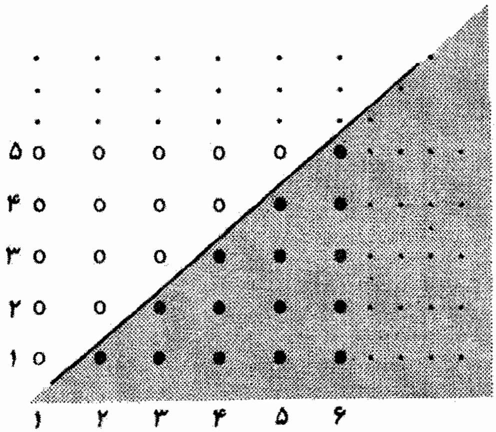
اگربدانیم به‌ازای کدام‌زوج مرتب (a, b) گزاره‌نمای $a>b$ درست‌است، آنگاه، برای هرمقصود ومنظوری، دقیقاً مشخص‌کرده‌ایم‌که منظورمان از رابطهٔ «بزرگتر است از» چیست. به‌عبارت دیگر، هر رابطه را می‌توانیم باکمك مجموعه‌ای از زوجهای مرتب تعریف‌کنیم. پس با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها، چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف. فرض‌کنیم A و B دومجموعه باشند. یك رابطه بین A و B زیرمجموعه‌ای است از $A\times B$.

اگر $A=B$، آنگاه صحبت ازیك رابطه روی A است[1] که زیرمجموعه‌ای است از $A\times A$. این تعریف نیازبه‌توضیح دارد. مثلاً، رابطهٔ «بزرگتر است از» روی $\mathcal{N}$ مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (a, b) است‌که درآن $a, b\in\mathcal{N}$ و(به‌معنی‌معمولی) $a>b$. این‌مجموعه را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد:

---

۱. در واقع از دیدگاهی نظری، نیازی به‌این تمایز نیست، زیرا هررابطه بین A و B را می‌توانیم رابطه‌ای روی $A\cup B$ بپنداریم. (دربارهٔ آن فکرکنید!)



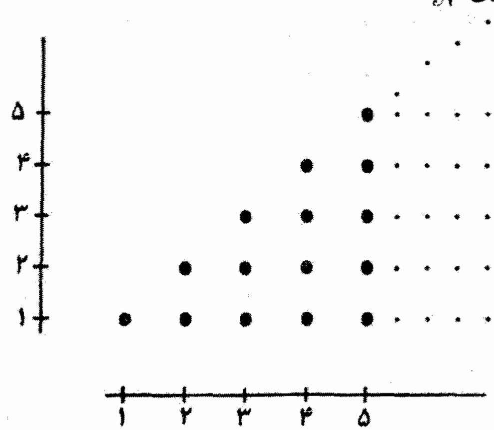
اگر R رابطه‌ای بین A و B باشد، آنگاه می‌گوییم که $a \in A$ و $b \in B$ توسط R در رابطه هستند هرگاه $(a, b) \in R$. متداولتر آن است که نماد

$$aRb \qquad (*)$$

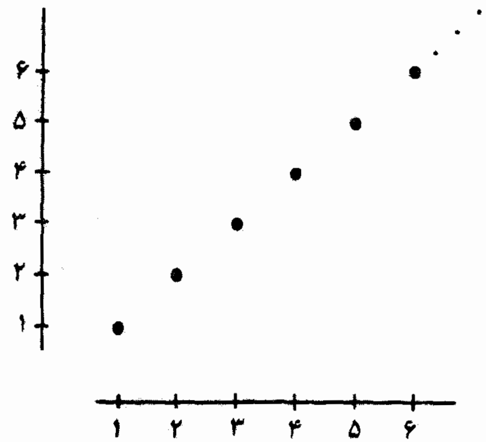
را به‌معنی $(a, b) \in R$ به‌کار ببریم. آنگاه $(a, b) \notin R$ را چنین می‌نویسیم: $a \not R b$. به‌این طریق امکان انواع تردستیها فراهم می‌شود. اگر رابطهٔ «بزرگتر است از» را با نماد معمولی $>$ نشان دهیم، آنگاه اگر R را رابطهٔ $>$ در نظر بگیریم، $a > b$ (به‌تعبیر (*)) به‌معنی $(a, b) \in >$ است، و این بنابه‌تعریف به‌همان معنی معمولی $a > b$ است. از سوی دیگر اگر $(a, b) \notin >$، می‌نویسیم $a \not> b$، که این نیز متناظر با کاربرد متعارف آن است. بنابراین نمادگذاری استانده را با یك دست‌کاری بدون وسواس در علامتها «بازمی‌یابیم». این ایدهٔ بسیار جالبی است ــ حداقل، ریاضیدانان از آن راضی به‌نظر می‌رسند ــ و ما نیز درآینده نماد aRb را به‌کار خواهیم برد.

حال چند مثال دیگر را درنظر می‌گیریم:

رابطهٔ $\geqslant$ روی $\mathcal{N}$



رابطهٔ $=$ روی $\mathscr{N}$:

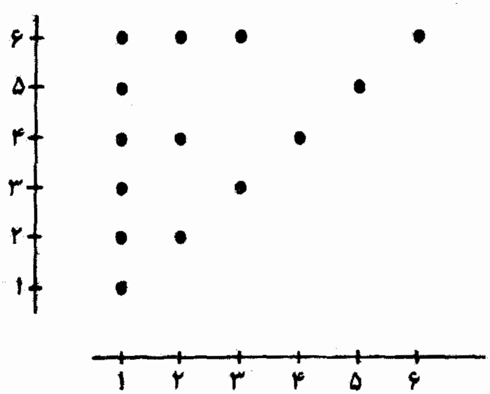


در واقع، رابطهٔ $=$ روی $\mathscr{N}$ همان مجموعهٔ $\{(x,x)|x\in\mathscr{N}\}$ است.

به‌عنوان آخرین‌مثال، فرض کنیم $X=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و "|" رابطهٔ «مقسوم‌علیهی است از» باشد، لذا $a|b$ به‌این معنی است که «a مقسوم‌علیهی است از b». به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب،

$$|=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),$$
$$(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}.$$

نمایش تصویری آن چنین است:



اگر رابطه‌ای چون R بین مجموعه‌های A و B مفروض باشد، و A' و B' به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از A و B باشند، می‌توانیم رابطه‌ای چون R' بین A' و B' را به‌صورت

زیر تعریف کنیم:

$$R' = \{(a, b) \in R | a \in A', b \in B'\}.$$

در واقع، به‌زبان نظریهٔ مجموعه‌ها،

$$R' = R \cap (A' \times B').$$

R' را تحدید R به A' و B' می‌نامیم. تا جایی‌که مربوط به‌اعضای A' و B' باشد، روابط R و R' یك مطلب را می‌گویند. تنها تفاوت در این است‌که R' مطلبی دربارهٔ اعضایی‌که متعلق به A' و B' نیستند بیان نمی‌کند.

رابطهٔ هم‌ارزی

هم در ریاضیات مقدماتی و هم در ریاضیات پیشرفته، تمایز بین اعداد صحیح فرد و زوج مهم است. (برای تصریح‌کامل این مطلب: اعداد فرد اعــداد به‌صورت ۲n+۱ ، به‌ازای اعداد صحیح n، یعنی اعداد ... ,۵ ,۳ ,۱ ,۱– ,۳– ,۵– , ... هستند و اعــداد زوج‌اعداد‌به‌صورت‌۲n ، یعنی اعداد ... ,۴ ,۲ ,۰ ,۲– ,۴– , ... هستند.)مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعداد صحیح به‌دو زیرمجموعهٔ مجزا تقسیم می‌شود

$$\mathcal{Z}_{\text{فرد}} = \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح فرد}$$

$$\mathcal{Z}_{\text{زوج}} = \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح زوج}$$

و لذا

$$\mathcal{Z}_{\text{فرد}} \cap \mathcal{Z}_{\text{زوج}} = \varnothing, \quad \mathcal{Z}_{\text{فرد}} \cup \mathcal{Z}_{\text{زوج}} = \mathcal{Z}.$$

روش دیگری هــم برای تقسیم $\mathcal{Z}$ به‌این دو قطعه وجود دارد؛ و آن بــا استفاده از رابطه‌ای است‌که موقتاً به‌آن نام خنثای «$\sim$» را می‌دهیم. به‌ازای m و n از $\mathcal{Z}$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

$m \sim n$ اگرو فقط اگر $m-n$ مضربی از ۲ باشد.

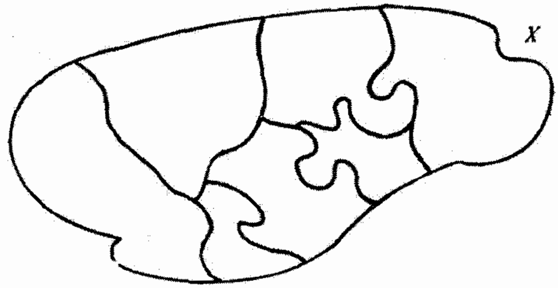
آنگاه:

همهٔ اعداد زوج توسط $\sim$ با هم رابطه دارند،
همهٔ اعداد فرد توسط $\sim$ با هم رابطه دارند،
هیچ عدد زوجی با هیچ عدد فردی رابطه ندارد،
هیچ عدد فردی با هیچ عدد زوجی رابطه ندارد.

واقعیتی‌که این‌تجزیه را میسر می‌سازد پیامدی از برخی از خواص کلی $\sim$ است، و اینك

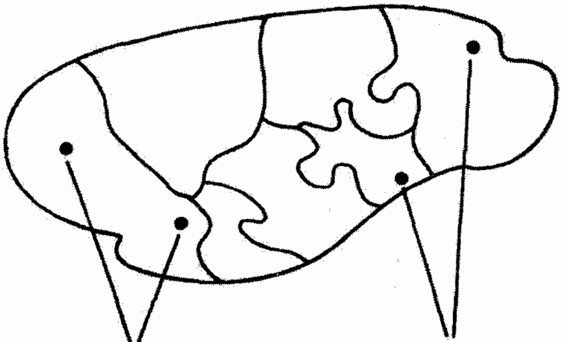
به‌تحلیل حالت کلی می‌پردازیم تا ببینیم چه خواصی مورد نیازند.

تصور کنیدکه مجموعه‌ای چون X به‌قطعات مجزا از همی تقسیم شده باشد.



می‌توانیم رابطه‌ای چون $\sim$ را تعریف کنیم:

$x \sim y$ اگرو فقط اگر x و y هردو دریك قطعه باشند.



برعکس، می‌توانیم قطعات را با رابطهٔ $\sim$ بازسازی کنیم: قطعه‌ای که x متعلق به‌آن است عبارت است از

$$E_x = \{y \in X | x \sim y\}.$$

اگراین مطلب را با رابطهٔ دیگری انجام دهیم خیلی‌چیزها ممکن است بهم بخورد. به خصوص ممکن است قطعات مجزا به‌دست نیایند. مثلاً، اگر $\sim$ رابطهٔ $|$ روی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد[1]، آنگاه داریم:

$$E_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶\},$$

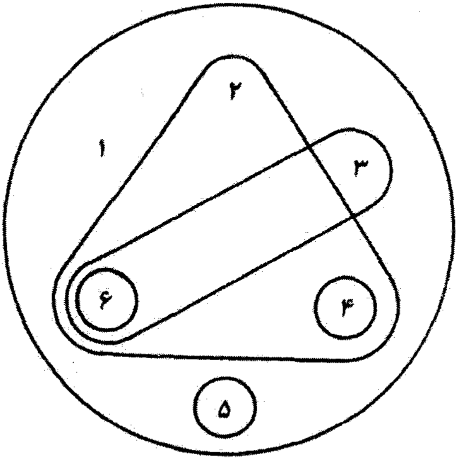
$$E_۲ = \{۲, ۴, ۶,\},$$

---

۱. $a | b$ یعنی a عدد b را عاد می‌کند.

$$E_{۳}=\{۳, ۶\},$$
$$E_{۴}=\{۴\},$$
$$E_{۵}=\{۵\},$$
$$E_{۶}=\{۶\}.$$

لذا مجموعه به‌صورت زیر تقسیم می‌شود:



اگر به‌جای این‌رابطه رابطهٔ $<$ روی $\mathcal{N}$ را درنظر بگیریم، حتی $x \in E_x$ نیز حاصل نمی‌شود، و لذا E_x به‌هیچ معنایی «قطعه‌ای که x متعلق به‌آن است» نیست.

چه خاصیتی است که باعث می‌شود $\sim$ اولیه درست‌کار کند، و سایرین غلط از آب درآیند؟ باید سه حکم بسیار بدیهی را درنظر بگیریم:

x متعلق به‌همان قطعهٔ x است،

اگر x متعلق به‌قطعهٔ y باشد، آنگاه y متعلق به‌قطعهٔ x است،

اگر x متعلق به‌قطعهٔ y باشد و y متعلق به‌قطعهٔ z، آنگاه x متعلق به‌قطعهٔ z است.

بدیهی است‌که هر رابطه‌ای چون $\sim$، با این خاصیت‌که $x \sim y$ اگر و فقط اگر x و y متعلق به‌یك قطعه باشند، باید دارای سه خاصیت فوق باشد، که ما آنها را در (۱)، (۲)، و (۳) تعریف زیر به‌صورت صوری می‌نویسیم.

تعریف. رابطه‌ای چون $\sim$ روی مجموعهٔ X رابطه‌ای هم‌ارزی است اگر به‌ازای هر $x, y, z \in X$:

(۱ه) $x \sim x$ ($\sim$ انعکاسی است)،

(۲ه) اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$ ($\sim$ تقارنی است)،

(۳۵) اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$ ($\sim$ متعدی است).

لذا هرگاه X را به‌قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطهٔ «متعلق به‌همان قطعه است که» رابطه‌ای هم‌ارزی است. اکنون نشان می‌دهیم هر رابطهٔ هم‌ارزی، به‌این طریق از قطعه‌بندی مناسبی حاصل می‌شود؛ در واقع ارتباط نزدیکی بین‌این دومفهوم وجود دارد. ابتدا به‌یك تعریف صوری «تقسیم به‌قطعات مجزا» نیازداریم.

تعریف. یك افراز مجموعه‌ای مانند X مجموعه‌ای است چون $\mathscr{P}$ که اعضایش زیر مجموعه‌هایی غیرتهی از X باشند و دارای شرایط زیر:

(ف ۱) هر $x \in X$ متعلق به Yیی از $\mathscr{P}$ باشد،

(ف ۲) اگر Y و Z در $\mathscr{P}$ باشند و $Y \neq Z$، آنگاه $Y \cap Z = \varnothing$.

اعضای $\mathscr{P}$ همان «قطعات» ما هستند. شرط (ف۱) بیان می‌کند که X اجتماع این قطعات است، زیراکه هرعضو X در قطعه‌ای قراردارد؛ (ف۲) بیان می‌کند که قطعات متمایزفصل مشترکی ندارند. نتیجه اینکه هیچ عضوی از X نمی‌تواند متعلق به‌دو قطعهٔ متمایز باشد.

هرگاه رابطه‌ای هم‌ارزی چون $\sim$ روی X مفروض‌باشد، ردهٔ هم‌ارزی عضو x از X (نسبت به $\sim$) را به‌عنوان مجموعهٔ زیرتعریف می‌کنیم:

$$E_x = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

قضیهٔ۴. فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی یك مجموعهٔ X باشد. آنگاه $\{E_x \mid x \in X\}$ افرازی از X است. رابطهٔ «متعلق به‌همان قطعه است که» همان رابطهٔ $\sim$ است.

برعکس، اگر $\mathscr{P}$ یك افراز X باشد، رابطهٔ $\sim$ را این‌طور تعریف می‌کنیم که $x \sim y$ اگر و فقط اگر x و y هردو در یك قطعه قرارداشته باشند. آنگاه $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی است، و افراز نظیرش به‌رده‌های هم‌ارزی، همان $\mathscr{P}$ است.

تذکر. این‌قضیه اجازه می‌دهد که به‌دلخواه از هر رابطهٔ هم‌ارزی یك افراز به‌دست آوریم و یا برعکس؛ هرگاه این فرایند را دوبار به‌کار ببریم، به‌جایی که آغاز کردیم باز-می‌گردیم.

اثبات. از آنجا که $x \in E_x$ نتیجه می‌گیریم که شرط (ف۱) برای یك افراز برقرار است. برای اثبات (ف۲)، فرض کنیم $E_x \cap E_y \neq \varnothing$. آنگاه عضوی چون $z \in E_x \cap E_y$ وجود دارد. پس $x \sim z$ و $y \sim z$. بنا به‌تقارن داریم $z \sim y$، وآنگاه خاصیت تعدی منجر می‌شود به $x \sim y$.

نشان می‌دهیم این مطلب‌ایجاب می‌کند که $E_x = E_y$. زیرا اگر $u \in E_x$ آنگاه داریم $x \sim u$ و $y \sim x$، لذا $y \sim u$؛ از این‌رو $E_x \subseteq E_y$. به‌همین‌نحو $E_y \subseteq E_x$. و این نشان

می‌دهد که $E_x = E_y$.

بنابراین ثابت کردیم که یا $E_x \cap E_y = \varnothing$ یا $E_x = E_y$. ولی این مطلب به‌طور منطقی هم‌ارز با (ف۲) است.

حال $x \approx y$ را به‌معنای «x و y هردودریك ردهٔ هم‌ارزی هستند» تعریف می‌کنیم. آنگاه

$x \approx y$ اگر و فقط اگر به‌ازای zی $x, y \in E_z$،

اگر و فقط اگر به‌ازای zی $x \sim z$ و $z \sim y$،

اگر و فقط اگر $x \sim y$.

از این‌رو $\approx$ همان $\sim$ است.

قسمت دوم قضیه به روشی مشابه ولی آسانتر اثبات می‌شود. اثبات آن را نمی‌نویسیم. □

یك مثال: حساب به‌پیمانهٔ n

با استفاده از مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی، تمایز بین اعداد فرد و زوج را تعمیم می‌دهیم و مطلبی را مطرح می‌کنیم که معمولاً (در دبیرستان) «حساب پیمانه‌ای» و یا (در دانشگاه) «اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n» نامیده می‌شود.

ابتدا حالت خاص $n = ۳$ را درنظرمی‌گیریم. رابطهٔ $\equiv_۳$، همنهشی به‌پیمانهٔ ۳، را روی $\mathscr{Z}$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

$m \equiv_۳ n$ اگر و فقط اگر $m - n$ مضربی از ۳ باشد.

قضیهٔ ۵. $\equiv_۳$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathscr{Z}$ است.

اثبات.

(۱ه) $m - m = ۰ = ۳ \times ۰$.

(۲ه) اگر $m - n = ۳k$ آنگاه $n - m = ۳(-k)$.

(۳ه) اگر $m - n = ۳k$ و $n - p = ۳l$ آنگاه $m - p = ۳(k + l)$. □

می‌دانیم که رده‌های هم‌ارزی (موسوم به رده‌های همنهشی به‌پیمانهٔ n) مجموعهٔ $\mathscr{Z}$ را افراز می‌کنند. این رده‌ها کدامند؟ ملاحظهٔ این مطلب باکمك مثال آسانتر است.

$E_۰ = \{y \mid ۰ \equiv_۳ y\}$

$= \{y \mid$ $y - ۰$ مضربی از ۳ باشد$\}$

$= \{y \mid y = ۳k$ ،به‌ازای kیی از $\mathscr{Z}\}$.

$E_۱ = \{y \mid ۱ \equiv_۳ y\}$

$$= \{y \mid y-1 = 3k\}$$
$$= \{y \mid y = 3k+1 \text{ ،}\mathcal{Z}\text{ بەازای } k \text{یی از}\}.$$

$$E_2 = \{y \mid 2 \equiv_3 y\}$$
$$= \{y \mid y = 3k+2 \text{ ،}\mathcal{Z}\text{ بەازای } k \text{یی از}\}.$$

$$E_3 = \{y \mid y = 3k+3 \text{ ،}\mathcal{Z}\text{ بەازای } k \text{یی از}\}.$$

ولی، $3k+3 = 3(k+1)$، لـذا $E_3 = E_0$. بـه همین نحو $E_4 = E_1$ ، $E_5 = E_2$ ، $E_{-1} = E_2$، $E_{-2} = E_1$، والی آخر. هرعدد صحیح بەیکی از صورتهای $3k$، $3k+1$، یا $3k+2$ است (برحسب اینکه در تقسیم به ۳ باقیماندهٔ ۰، ۱، یا ۲ داشته باشد)، لـذا دقیقاً سه ردهٔ همارزی بەدست می‌آید:

$$E_0 = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$
$$E_1 = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$E_2 = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

بەقدرکافی‌درمورد رابطهٔ همارزی سخن گفتیم. مطلب جالبتر، امکان محاسبه با این‌رده‌های همارزی است.

برای اینکه در حالت عمومی نمادگذاری روشنترباشد، نماد E_n برای نمایش ردهٔ همارزی n را عوض‌می‌کنیم و بەجای آن می‌نویسیم n_3. لذا سه ردهٔ فوق را با 0_3، 1_3، 2_3 نمایش می‌دهیم. می‌نـویسیم $\mathcal{Z}_3 = \{0_3 ، 1_3 ، 2_3\}$. عملهـای جمع و ضرب روی $\mathcal{Z}_3$ را بەصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_3 + n_3 = (m+n)_3$$
$$m_3 n_3 = (mn)_3. \qquad (*)$$

مثلاً، $1_3 + 2_3 = 3_3 = 0_3$؛ $2_3 2_3 = 4_3 = 1_3$.

ممکن است این‌کار بیهوده بەنظر آیـد: بـەزودی روشن می‌شودکـه چنین تصوری نادرست است. ممکن است این کار بی‌ضرر هـم بەنظر آید: قبل از اینکه نگران نادرست بودن مطلبی باشیم باید چند نکتهٔ ظریف را مورد توجه قراردهیم؛ پس ازکمی تفکرعمیق پی می‌بریم که این‌طورهم نیست.

نکتهٔ باریك در این است: هر رده دارای اسامی متفاوتی است؛ مثلاً،

$$1_3 = 4_3 = 7_3 = \ldots, \quad 2_3 = 5_3 = 8_3 = \ldots.$$

تعاریف (*)، برمبنای اسمی که بەکاربرده می‌شود، ممکن است برای یك سؤال جوابهای متفاوتی را بەدست دهند. مثلاً (٥ موذی ولجوج)، دیدیم که $1_3 + 2_3 = 0_3$. ولی ازآنجا

که $7_3 = 1_3$، $8_3 = 2_3$ ، همچنین داریم $15_3 = 7_3 + 8_3 = 2_3 + 1_3$. خوشبختانه $15_3 = 0_3$، و مجدداً می‌توانیم نفس راحتی بکشیم . در حالت کلی چه اتفاق می‌افتد؟ اگر $i_3 = i'_3$ ، آنگاه kیی وجود دارد که $i - i' = 3k$: و اگر $j_3 = j'_3$ آنگاه lای وجود دارد که $j - j' = 3l$. حال قاعدهٔ (*) دوجواب ممکن به‌دست می‌دهد:

$$i_3 + j_3 = (i+j)_3, \quad i'_3 + j'_3 = (i'+j')_3.$$

ولی،

$$i + j = i' + 3k + j' + 3l = (i'+j') + 3(k+l),$$

ولذا

$$(i+j)_3 = (i'+j')_3.$$

بنابراین، با هردو روش یك جواب به‌دست می‌آوریم، و (*) به‌عنوان تعریفی برای جمع با معنی است.

به‌همین‌نحو باید عدم وجود ابهام در ضرب را نیز بررسی‌کنیم. با فرض i، j، i'، j' به‌همان صورت فوق، داریم

$$i_3 j_3 = (ij)_3, \quad i'_3 j'_3 = (i'j')_3.$$

ولی

$$ij = (i'+3k)(j'+3l) = i'j' + 3(i'l + j'k + 3kl),$$

و لذا

$$(ij)_3 = (i'j')_3,$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

این‌مسئله،که بسیاری آن را درك نمی‌کنند، همیشه وقتی مطرح می‌شود که می‌خواهیم عملی روی مجموعه‌ها با قاعده‌ای از این نوع تعریف کنیم که «از مجموعه‌ها اعضایی را انتخاب کنید، عمل را روی آنها انجام دهید، و سپس مجموعه‌ای را بیابید که عضو حاصل متعلق به‌آن است». هرگاه، مانند فوق، نمادگذاری چنین فرایندی را پنهان کند، باید بسیار دقیق معنی نمادگذاری را بفهمیم، ونه‌اینکه نمادها را کورکورانه به‌کار ببریم. باید مطمئن شویم که انتخابهای متفاوت جواب متساوی به‌دست می‌دهند.

چنانچه خواننده تصور کند که این بررسی‌را می‌توان نادیده انگاشت، به‌این‌دلیل که هرچیز خوبی کارهم می‌کند، مسئلهٔ تعریف توان در $\mathbb{Z}_3$ را درنظرمی‌گیریم. روش طبیعی انجام این امر این است که از (*) تقلید و این‌طور تعریف کنیم که

$$m_3^{n_3} = (m^n)_3.$$

مثلاً، $2_3^{2_3} = (2^2)_3 = 4_3 = 1_3$. با استفاده از این «تعریف» می‌توانیم قضیه‌هایی درمورد

قوانین به‌توان رساندن هم به‌اثبات برسانیم، مثلاً:

$$(**) \qquad m_{۳}^{n۳+p۳} = (m^{n+p})_{۳} = (m^{n}m^{p})_{۳} = (m^{n})_{۳}(m^{p})_{۳} = m_{۳}^{m۳}m_{۳}^{p۳}.$$

ولی همهٔ اینها خوش‌خیالی زیادی است. زیرا، از آنجاکه $۵_{۳} = ۲_{۳}$، قاعدهٔ (**) همچنین نتیجه می‌دهد که:

$$۲_{۳}^{۲۳} = ۲_{۳}^{۵۳} = (۲^{۵})_{۳} = (۳۲)_{۳} = ۲_{۳}.$$

از آنجاکه $۲_{۳} \neq ۱_{۳}$ این نشان می‌دهد که (**) بی‌معنی است؛ بی‌معنی با ظاهری حق به‌جانب وچابك از خطرناکترین نوع.

در اصطلاح معمول، آنچه راکه باید بررسی کنیم این است که این عملها «خوش‌تعریف» هستند. در واقع این عبارت خیلی مؤدبانه است: چیزی راکه بررسی می‌کنیم این است که اصلاً عملی «تعریف شده» است! یك تعریف ظاهرفریب به‌هیچ‌وجه یك تعریف درست نیست.

از موضوع اصلی بسیار منحرف شدیم، اجازه دهید بازگردیم به‌حساب در $\mathbb{Z}_{۳}$. جدولهای جمع وضرب را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$+$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۱_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$	$۰_{۳}$
$۲_{۳}$	$۲_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$

$\times$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۰_{۳}$
$۱_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۲_{۳}$	$۰_{۳}$	$۲_{۳}$	$۱_{۳}$

می‌توان نشان داد که بسیاری از قوانین معمولی حساب (از جمله $x+y=y+x$، $x(y+z)=xy+xz$)، هرچند عبارات شگفت‌آوری مثل

$$((۱_{۳}+۱_{۳})+۱_{۳}+۱_{۳}) = ۱_{۳}$$

هم وجود دارند، برقرارند.

هر عدد صحیح n را می‌توانیم به‌جای ۳ به‌کاربریم و حساب به‌پیمانهٔ n را انجام دهیم. روی $\mathbb{Z}$ رابطهٔ $\equiv_{n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x \equiv_{n} y$ اگر و فقط اگر $x-y$ مضربی از n باشد.

n ردهٔ هم‌ارزی جدا از هم ۰_{n}، ۱_{n}، ۲_{n}، ...، $(n-۱)_{n}$ به‌دست می‌آیند؛ وداریم $n_{n} = ۰_{n}$، $(n+۱)_{n} = ۱_{n}$، والی‌آخر؛ و x_{n} متشکل است ازاعداد صحیحی که درتقسیم بر n باقیماندهٔ x دارند. درمجموعهٔ $\mathbb{Z}_{n}$ متشکل ازتمام رده‌های هم‌ارزی، عملهای حساب به‌همان صورتی که در (*) تعریف شد انجام می‌شوند.

این ایده‌ها را درفصل ۱۰ مورد بحث و بررسی بیشتر قرار خواهیم داد.

رابطهٔ ترتیبی

رابطه‌های ترتیبی گوناگونی راکه معمولاً در بحث با اعداد مطرح می‌شوند می‌توانیم با مثالهایی چون $4 < 5$، $7 < 2\pi$، $x^2 \geqslant 0$، $1 - x^2 \leqslant 1$، به‌ازای هرعدد حقیقی x، نشان دهیم. خوشبختانه رابطه‌های $>$، $<$، $\leqslant$، $\geqslant$ همه با هم در ارتباط هستند:

$x < y$ به‌معنی $y > x$ است،
$x \leqslant y$ 〃 〃 $y \geqslant x$ است،
$x \leqslant y$ 〃 〃 $x < y$ یا $x = y$ است،
$x < y$ 〃 〃 $x \leqslant y$ و $x \neq y$ است.

منظور این است که کافی است تنها یکی از این رابطه‌ها را مطالعه و نتیجه را به‌دیگران منتقل کنیم. در عمل با اعداد واقعی، بهتر است که تنها یکی از رابطه‌های اکید $>$ یا $<$ را درنظر بگیریم. به‌طور کلی نمی‌نویسیم $4 \leqslant 2 + 2$، صرفاً به‌این دلیل که مطلبی دقیقتر از آن را می‌دانیم، یعنی $2 + 2$ برابر است با 4. همچنین معمولاً می‌نویسیم $3 < 2 + 2$، زیرا این عبارت شامل اطلاع دقیقتری است از $3 \leqslant 2 + 2$. دراحکام کلی، موضوع قدری عوض می‌شود. مثلاً، این درست است که اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ و $a_n \geqslant b_n$، آنگاه $a \geqslant b$، ولی $a_n > b_n$ ایجاب نمی‌کند که $a > b$. (مثال ناقض با $a_n = 1/n$ و $b_n = 0$ به‌دست می‌آید.) در اینجا مختصر تمایلی به‌نامساویهای ضعیف $\leqslant$ و $\geqslant$ وجود دارد. با تعریف نامساویهای ضعیف مطلب را آغاز می‌کنیم.

تعریف. رابطه‌ای چون R روی یك مجموعهٔ A را یك رابطهٔ ترتیبی ضعیف می‌گویند هرگاه

(تض ۱) $a R b$ و $b R c$ ایجاب کند $a R c$،
(تض ۲) aRb یا bRa (یا هر دو)،
(تض ۳) $a R b$ و $b R a$ ایجاب کند که $a = b$.

این خواص به‌وضوح درمورد هردو رابطهٔ $\leqslant$ و $\geqslant$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی صادق هستند، که ممکن است قدری عجیب هم به‌نظر آید زیرا یکی به‌معنی «بزرگتر» است و دیگری «کوچکتر». ولی اگر اعداد حقیقی را به‌صورت نقاط روی یك خط در نظر بگیریم، می‌بینیم که می‌توانیم، با یك انعکاس، ترتیب را تغییر دهیم؛ چپ و راست را با هم عوض کنیم و در نتیجه $\leqslant$ و $\geqslant$ را. فقط هنگامی که آغاز به‌محاسبه می‌کنیم، و به‌این حقیقت نیاز داریم که $0 \leqslant a$ و $0 \leqslant b$ ایجاب کنند که $0 \leqslant ab$، به‌خاصیتی از $\leqslant$ پی می‌بریم که در مورد $\geqslant$ صادق نیست. بررسی این مطلب را تا فصل ۹، که به مطالعهٔ حساب می‌پردازیم، به‌تعویق می‌اندازیم. تا آن زمان کافی است به‌این نکته توجه کنیم که رابطه‌های ترتیبی ضعیف به‌صورت زوج ظاهر می‌شوند. اگر رابطه‌ای از این نوع مانند R مفروض باشد می‌توانیم R'، وارونهٔ R، را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$a R' b$ یعنی $b R a$.

R'، رابطهٔ وارونه نیز یك رابطهٔ ترتیبی ضعیف است و با وارونه‌کردن مجدد آن به $R''=R$ بازمی‌گردیم.

مثال ۱. اگر $A=\{a, b, c\}$ که در آن a، b، c متمایز هستند، آنگاه با $a R b$، $a R c$، $b R c$، $a R a$، $b R b$، $c R c$؛ می‌توانیم یك ترتیب ضعیف روی A تعریف کنیم. با قراردادن a، b، و c در یك سطر و گرفتن $x R y$ به‌معنی x درطرف‌چپ y است یا $x=y$، این ترتیب ضعیف را می‌توان مجسم کرد.

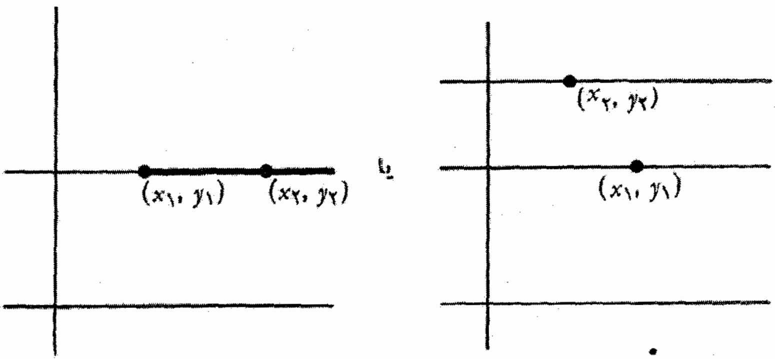
$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$$

وارونهٔ R به‌طورساده اعضا را به‌ترتیب c، b، a قرار می‌دهد.

مثال ۲. رابطهٔ ترتیبی R روی صفحه را این‌طور تعریف می‌کنیم:
$(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ معنی می‌دهد

یا $y_1=y_2$ و $x_1 \leqslant x_2$ (هردو با هم)،
یا $y_1<y_2$.

این رابطه نخست غریب به‌نظر می‌آید، ولی درتصویرمی‌بینیم که $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ صرفاً به‌این معنی است که یا (x_1, y_1) و (x_2, y_2) روی یك خط افقی قرار دارند و (x_1, y_1) در طرف چپ (یا برابر با) (x_2, y_2) است، یا اینکه (x_1, y_1) روی خطی افقی قراردارد که اکیداً پایین خطی افقی مار بر (x_2, y_2) است.



مثال ۳. $A=\{\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, (0,1,2,3\}\}$,

به‌ازای $x, y \in A$، $x R y$ معنی می‌دهد $x \subseteq y$.

در اینجا داریم $\{0,1,2,3\}\supseteq\{0,1,2\}\supseteq\{0,1\}\supseteq\{0\}$.

شمول مجموعه‌ها دارای خواص زیر است،

$X\subseteq Y$ و $Y\subseteq Z$ ایجاب می‌کند که $X\subseteq Z$،

$X\subseteq Y$ و $Y\subseteq X$ ایجاب می‌کند که $X=Y$،

ولی برای مجموعه‌های دلخواهی چون X و Y ممکن است داشته باشیم $X\nsubseteq Y$ و $Y\nsubseteq X$. درنتیجه شمول مجموعه‌ها به‌طور کلی در (تض۱) و (تض۳) صدق می‌کند ولی در (تض۲) صدق نمی‌کند. رابطه‌ای چون R روی یك مجموعهٔ A راکه در (تض۱) و (تض۳) صدق کند یك ترتیب جزئی و A را یك مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب[1] می‌نامیم، اگر A مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه شمول همیشه یك ترتیب جزئی ایجاد می‌کند.

فرض کنیم R یك ترتیب ضعیف روی مجموعه‌ای مثل A باشد، آنگاه S، ترتیب اکید متناظر به‌آن، این‌طور تعریف می‌شود:

$x\,S\,y$ دقیقاً به‌این معنی است که $x\,R\,y$ و $x\neq y$. مثلاً، اگر R رابطهٔ $\leqslant$ باشد آنگاه S همان رابطهٔ $<$ است.

قضیهٔ ۶. هر ترتیب اکید S روی یك مجموعهٔ A در احکام زیر صدق می‌کند:

(تا ۱) $a\,S\,b$ و $b\,S\,c$ ایجاب می‌کند $a\,S\,c$،

(تا ۲) اگر $a, b\in A$ مفروض باشند، آنگاه دقیقاً یکـی از سه شرط زیر برقرار است (ونه دوتای دیگر):

$$a\,S\,b,\; b\,S\,a,\; a=b.$$

اثبات. فرض کنیم $a\,S\,b$ و $b\,S\,c$ برقرار باشند. آنگاه داریم $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$، و بنا به (تض۱) نتیجه می‌گیریم که $a\,R\,c$. نمی‌توان داشت $a=c$، زیرا با جایگزینی در $b\,R\,c$، بنا به (تض۳) نتیجه می‌شود $b\,R\,a$. حال از این و $a\,R\,b$ حاصل می‌شود $a=b$ که درتناقض است با $a\,S\,b$. این مطلب (تا ۱) را ثابت می‌کند. از (تض۲) چنین به‌دست می‌آید که $a, b\in A$ ایجاب می‌کند $a\,R\,b$ یا $b\,R\,a$، و لذا $a\,S\,b$ یا $a=b$ یا $b\,S\,a$. ولی هیچ دوتایی از اینها نمی‌توانند به‌طور همزمان برقرار باشند، زیرا $a=b$ با تعریف هردو عبارت $a\,S\,b$ و $b\,S\,a$ تناقض‌دارد، و اگر $a\,S\,b$ و $b\,S\,a$ به‌طورهمزمان برقرار باشند، آنگاه $a\,R\,b$ و $b\,R\,a$ برقرارمی‌شوند، و لذا (تض۳) نتیجه می‌دهد که $a=b$، و این بازهم در تناقض با $a\,S\,b$ است. این مطلب (تا ۲) را ثابت می‌کند. $\square$

حکم (تا ۲) معمولاً قانون سه‌گانگی نامیده می‌شود. (درست همان طورکـه هر دوگانگی دو امکان دو به‌دو ناسازگار است، هرسه‌گانگی نیزسه امکان دو به‌دوناسازگار

---

۱. به‌طور ساده در زبان انگلیسی Poset نامیده می‌شود.

$a\ S\ b$، $b\ S\ a$، و $a=b$ است.) برای ترتیب اکید $<$ روی اعداد حقیقی، سه امکان دو به‌دو ناسازگار عبارتند از $a<b$، $b<a$، و $a=b$.

قبلاً متذکر شدیم که از طریق ارتباط

$a\leqslant b$ دقیقاً به‌این معنی که $a<b$ یا $a=b$،

می‌توانیم از $<$ به‌ترتیب ضعیف $\leqslant$ بازگردیم.

همین مطلب برای ترتیب اکید نیز درست است. اگر رابطه‌ای چون S روی یك مجموعهٔ A مفروض باشد و در (تا ۱) و (تا ۲) صدق کند، R را این‌طور تعریف می‌کنیم که

$a\ R\ b$ به‌معنی $a\ S\ b$ یا $a=b$ باشد.

به‌سهولت بررسی می‌شود کـه R در (تض۱)ـ(تض۳) صدق می‌کند، و آزادانـه می‌توان از یك ترتیب ضعیف به‌ترتیب اکید متناظرش رسید و بعد به محل اول بازگشت. به‌این ترتیب مفاهیم ترتیب ضعیف و اکید تعویض‌پذیرند. گـرچه (تض۱)ـ(تض۳) را به‌عنوان اصول‌موضوع بنیادی پذیرفتیم وخواص (تا ۱) و (تا ۲) را ثابت کردیم، به‌همین سهولت می‌توانیم وضعشان را وارونه کنیم و (تا ۱) و (تا ۲) را به‌عنوان اصول موضوع بنیادی بپذیریم و (تض۱)ـ(تض۳) را از آنها نتیجه بگیریم.

تمرین

۰۱ اثبات قضیه‌های ۲(ب)، ۲(پ)، و ۲(ت) را بنویسید.

۰۲ ثابت کنید که برای مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها، مانند S و T داریم:

$$(\bigcup S)\times(\bigcup T)\subseteq\bigcup\{X\times Y\,|\,X\in S,\ Y\in T\},$$
$$(\bigcap S)\times(\bigcap T)=\bigcap\{X\times Y\,|\,X\in S,\ Y\in T\}.$$

نشان دهید که در فرمول اول «$=$» را نمی‌توان جانشین «$\subseteq$» کرد.

۰۳ اگر $A=\varnothing$، نشان دهید که به‌ازای هرمجموعهٔ B داریم $A\times B=\varnothing=B\times A$. اگر $A\neq\varnothing$، نشان دهیـد کـه $A\times B=A\times C$ ایجاب می‌کنـد کـه $B=C$. بـا فرض $A\times B=B\times A$، در مورد A و B چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

۰۴ فرض کنید $A=\mathcal{N}\times\mathcal{N}$. رابطهٔ R روی A را این‌طور تعریف کنید که

$(m,\ n)\ R\ (r,\ s)$ به‌معنی $m+s=r+n$ باشد.

نشان دهید که R یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

اگر $B=\{(x,\ y)\in\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}\,|\,y\neq0\}$، و S رابطهٔ روی B با تعریف

$(a, b)\ S\ (c, d)$ اگر وفقط اگر $ad = bc$،

باشد، آیا S یك رابطهٔ هم‌ارزی است؟ ادعای خود را ثابت کنید؟

۵. چند رابطهٔ هم ارزی متمایزروی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد؟

۶. خواص (ه ۱)، (ه ۲)، و (ه ۳) رابطـهٔ هم‌ارزی را به‌خاطر بیاورید. کـدام از این خواص برای رابطه‌های بین $x, y \in \mathcal{R}$ داده شده توسط

(الف) $x < y$،

(ب) $x \geqslant y$،

(پ) $|x - y| < ۱$،

(ت) $|x - y| \leqslant ۰$،

(ث) $x - y$ گویاست،

(ج) $x - y$ گنگ است،

(چ) $(x - y)^۲ < ۰$،

برقرارند؟

۷. آیا اشتباهی در اثبات زیرکه (ه ۲) و (ه ۳) خاصیت (ه ۱) را نتیجه می‌دهند وجود دارد؟ اگر چنین است، اشتباه درکجاست؟

فرض کنیم $a \sim b$. بنا به (۲ه)، $b \sim a$. بنا به (۳ه) اگر $a \sim b$ و $b \sim a$ آنگاه $a \sim a$. این امر(۱ه) را ثابت می کند.

۸. به‌خاطر بیاوریدکه یك رابطهٔ هم‌ارزی چنان تعریف شدکه در اصول (ه ۱)، (ه ۲)، و(۳ه) صدق کند. چندرابطه مثال بزنید (هرچه با ذوقتر بهتر) که خواص زیرراداشته باشند:

(الف) درهیچ یك از خواص (ه ۱)، و (ه ۳) صدق نکند،

(ب) در (ه ۱) صدق کند ولی در (ه ۲) یا (ه ۳) صدق نکند،

(پ) در (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۱) یا (ه ۲) صدق نکند،

(ت) در (ه ۲) و (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۱) صدق نکند،

(ث) در (ه ۱) و (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۲) صدق نکند،

(ج) در (ه ۱) و (ه ۲) صدق کند ولی در (ه ۳) صدق نکند.

۹. جدولهای جمع وضرب اعداد صحیح به‌پیمانهٔ ۴، به‌پیمانهٔ ۵، وبه‌پیمانهٔ ۶ را بنویسید. همهٔ $a, b \in \mathbb{Z}_{۱۲}$ راکه $ab = ۰_{۱۲}$ بیابید.

۱۰. رابطه‌ای چون R روی $\mathcal{N}$ را این‌طور تعریف کنید:

$a\ R\ b$ یعنی a، b را عاد می‌کند،

به‌عبارت دیگر xی در $\mathcal{N}$ وجود دارد که $b=ax$.
آیا R یك رابطهٔ ترتیبی است؟ اگر هست،آیا ترتیب ضعیف است یا ترتیب اکید؟

۱۱. فرض کنیـــد $X=\{۱,۲,۶,۳۰,۲۱۰\}$ و یك رابطهٔ S روی X را این‌طور تعریف کنید :

$a\ S\ b$ یعنی a، b را عاد می‌کند.

آیا S یك رابطهٔ ترتیبی است؟ اگر هست، آیا ترتیب ضعیف است یا ترتیب اکید؟

۱۲. فرض کنید A مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی (اکید) S باشد و B مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی (اکید) T. ترتیب الفبایی L روی $A\times B$ را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$(a,\ b)\ L\ (c,\ d)$ یعنی: یا $a\ S\ c$

یا $a=c$ و $b\ T\ d$.

آیـا این یك رابطهٔ ترتیبی است؟ چه ارتباطی بین این رابطه و یك فرهنگ لغات وجود دارد؟

۵

تابع

مفهوم «تابع» درسراسر ریاضیات جدید، درتمام سطوح، از اهمیت بسزایی برخوردار است. مفهوم تابع نخست درحساب دیفرانسیل وانتگرال، که درباره توابع وچگونگی محاسبهٔ مشتق وانتگرال آنهاست، شکوفا شد.

تلاشهای اولیه برای پروراندن مفهوم کلی تابع تاحدی مغشوش ونامرفق بود، عمدتاً به این دلیل که سعی می‌شد مطالب زیادی‌را یکجا بررسی کنند. مفهوم تابع، به‌صورت کنونیش، تدریجاً از این تلاشها حاصل شده است: این مفهوم ازکلیت وسادگی بسیاری برخورداراست. کلیت این مفهوم به‌قدری‌است که برای انجام حساب دیفرانسیل وانتگرال ابتدا باید شرایطی اضافی برآنها اعمال کرد تا ردهٔ توابع‌را به‌آنهایی که قابل مشتق‌گیری یاانتگرال گیری هستند محدود نمود. بنابراین، باعرضهٔ تعریفی بسیارکلی از «تابع» و سپس انتخاب انواع خاص آنها با اعمال شرایط بیشتر شیء مطلوب به دست می‌آید.

دراین فصل، مفهوم کلی تابع‌را مورد بررسی قرارمی‌دهیم ــ به‌هرحال، این کتاب که دربارهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست! مفهوم کلی‌را بابحث دربارهٔ مثالهای مأنوس به‌تدریج می‌پرورانیم وسپس نتایج حاصل‌را تحلیل می‌کنیم. برخی از خواص عمومی تابع را موردبحث قرار می‌دهیم. سپس نمودار یك تابع‌را معرفی و رابطه‌اش را هم با تعریف صوری وهم باتصاویرمتداول بررسی می کنیم.

چند تابع متداول

متداول چنین است که یك «متغیر» x را که معمولاً عددی حقیقی فرض می‌شود بگیرند و یك «تابع $f(x)$ از x» را تعریف کنند. نکتهٔ اصلی این است که مقدار $f(x)$ را می‌توان به‌ازای هر x مفروض (احتمالاً تحت محدودیتهایی چون $x \neq 0$، $x > 0$، باتوجه بـه تابع مورد بحث) محاسبه‌کرد. مثلاً، مقدار تابع نمایی بـه ازای هرعدد حقیقی x برابر e^x ($e = ۲٫۷۱۸۲۸\ldots$) است؛ مقادیر توابع سینوس، کسینوس، یاتانژانت به‌ازای هر عدد حقیقی x برابر $\sin(x)$، $\cos(x)$، $\tan(x)$ است (به‌استثنای اینکه برای تانژانت، x باید مضارب‌فردی‌از $\pi/۲$ اختیارنشود تااینکه تعریف $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ بامعنی‌باشد)؛ مقدارتابع لگاریتمی‌برابر $\log(x)$ است هرگاه x عددی حقیقی و $x > 0$ باشد؛ مقدار تابع عکس به‌ازای هرعدد حقیقی $x \neq 0$ برابر $۱/x$ است؛ مقدارتابع‌توان دوم به‌ازای هرعدد حقیقی x برابر $x^۲$ است . توابـع دیگری چون تابع فاکتوریل $x!$، تنها به‌ازای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌شوند.

همهٔ این مثالها چه وجه مشترکی‌دارند؟ اینکه اصولاً می‌توان مقدار تابع‌را به‌ازای مقادیرمناسب x محاسبه‌کرد. به‌عبارت دیگر، هرتابع به‌هرعدد حقیقی مناسب x یك مقدار $f(x)$ که خود نیزعددی حقیقی است وابسته می‌کند. در مثالهای فوق بـه‌ترتیب داریـم $f(x) = e^x$، $\sin(x)$، $\cos(x)$، $\tan(x)$، $\log(x)$، $۱/x$، $x^۲$، یا $x!$.

نباید مقادیر تابع‌را باخود تابع اشتباه‌کرد. این عدد $\log(x)$ نیست‌که تابع است، بلکه قاعدهٔ «لگاریتم گیری» است‌کـه محاسبهٔ مقدار را مقدور می‌سازد. بـه عبارتی، نماد «log» تابع است. لذا هرتابع f «قاعده»ای است‌که به‌ازای هر عدد حقیقی x (احتمالاً تحت محدودیتهایی) یك عدد حقیقی $f(x)$ را معرفی می‌کند. اصرار ما بر این است‌کـه $f(x)$ به‌طوریکتا تعریف بشود: «قاعده»ای‌که به‌یك پرسش دوپاسخ متفاوت دهد فایده‌ای ندارد. ولذا باتوابعی نظیر «ریشهٔ دوم» باید دقیقتر باشیم، ومشخص‌کنیم که منظور ماریشهٔ دوم مثبت است یامنفی. فعلاً نگران این موضوع نباشید، بعداً که ایده‌ها جاافتاده‌ترشدند، به‌آن بازخواهیم گشت.

مفهوم‌کلی تابع

کلی‌ترین تعریف تابع ازتعریف متداول آن، باحـذف شرط حقیقی بـودن x و $f(x)$، حاصل می‌شود. (حتی در ریاضیات متداول هم قطعاً مایلیم‌کـه اعداد مختلط، ودر حقیقت اشیاء متعدد وگوناگون غیرعـددی نیزمنظور بشوند: ساده‌ترین و رضایتبخش‌ترین کاراین است‌که هیچ نوع محدودیتی درماهیت x یا $f(x)$ قایل نشویم.) حال باید منظورمان از معنی «قاعده» را روشنتر بیان‌کنیم.

ابتدا دو مجموعهٔ A و B را اختیار می‌کنیم. به‌عنوان تعریفی ابتدایی: یك تابع f از A به B قاعده‌ای است‌که به هر $a \in A$ عضو یکتای $f(a) \in B$ را نسبت دهد.

این تعریف بسیار گسترده‌است. همهٔ مثالهای فوق‌الذکر را شامل می‌شود: A را زیر‌مجموعهٔ مناسبی‌از $\mathcal{R}$ و B را خود $\mathcal{R}$ اختیارمی‌کنیم. مثلاً برای تابع نمایی داریم $A=\mathcal{R}$، $B=\mathcal{R}$، وقاعدهٔ مربوط $f(x)=e^x$ است. برای لگاریتم داریم $A=\{x\in\mathcal{R}|x>0\}$، $B=\mathcal{R}$، و $f(x)=\log(x)$. برای تابع عکس داریم $A=\{x\in\mathcal{R}|x\neq 0\}$، $B=\mathcal{R}$، و $f(x)=1/x$. برای تابع فاکتوریل داریم $A=\mathcal{N}$، $B=\mathcal{N}$، و $f(x)=x!$.

چند مثال ازانواع نسبتاً متفاوتی از تابع که دراین تعریف می‌گنجند عبارتنداز:

$A=$ {همهٔ دایره‌های درصفحه}، $B=\mathcal{R}$، و $f(x)=$ (شعاع x).

$A=$ {همهٔ دایره‌های درصفحه}، $B=\mathcal{R}$، و $f(x)=$ (مساحت x).

$A=$ {همهٔ زیرمجموعه‌های $\{0, 2, 4\}$}، $B=\mathcal{N}$، و $f(x)=$ (کوچکترین‌عضو x).

$A=$ {همهٔ زیر مجموعه‌های $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$}،
$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$، و $f(x)=$ (تعداد اعضای x).

$A=\mathbb{Z}$، $B=\{0,1,2\}$، و $f(x)=$ (باقیماندهٔ تقسیم x بر ۳).

$A=$ {فیل ,شیر ,شتر}، $B=$ {مارس ,ژانویه}، f(شیر) $=$ ژانویه، f(شتر) $=$ مارس، f(فیل) $=$ مارس.[1]

اصطلاحات زیر برای توابع متداول هستند. A را دامنه و B را همدامنهٔ f می‌نامیم، و می‌نویسیم

$$f:A\rightarrow B$$

به‌این معنی که «f تابعی است بادامنهٔ A وهمدامنهٔ B».

مطلب اصلی که هنوز باید مورد بحث قرار گیرد همان «قاعدهٔ» مزاحم است. دقیقاً به همان شیوه‌ای که «رابطه» را تعریف کردیم، با استفادهٔ عاقلانه‌ای از زوجهای مرتب، تعریفی صوری برای تابع هم به‌دست می‌آوریم. می‌خواهیم به‌هر $x\in A$ عضوی چون $f(x)\in B$ را نسبت دهیم. یك راه این است که آنهارا دریك زوج مرتب $(x, f(x))$ به‌هم بچسبانیم. آنگاه «قاعده» کل مجموعهٔ زوجهای مرتب $(x, f(x))$ است که درآن x درسراسر A تغییرمی‌کند، واین البته زیر مجموعه‌ای از $A\times B$ است. دراین روش، شرط اینکه $f(x)$ به‌ازای هر $x\in A$ معین باشد به‌این شرط تبدیل می‌شود که به‌ازای هر $x\in A$ حداقل یك عضو (x, y) درمجموعه وجودداشته باشد: برگردان شرط یکتا بودن $f(x)$ این است که چنین yیی باید یکتا باشد. اکنون می‌توان دید که چطور مجموعه‌ای از زوجهای مرتب جانشین قاعدهٔ تابع می‌شود: برای تعیین $f(x)$، زوجی‌چون (x, y) در

---

۱. البته این تابع کاملاً بیمورد است، وتابعی نیست که ازنظر ریاضیات مهم باشد. این مثال نشان می‌دهد که می‌توان تعاریف کاملاً دلخواهی برای $f(x)$ عرضه‌کرد. البته، این یکی آن‌قدرهم که به‌نظرمی‌رسد دلخواه‌نیست. باغ‌وحشی سه‌قفس‌اصلی دارد: قفس‌شتر، قفس‌شیر، وقفس فیل. هرسال یکبار تزیینات قفسهارا تغییر می‌دهند؛ قفس شیر درژانویه وقفسهای دیگر در مارس. حال داریم،

$f(x)=$ (ماهی که درآن تزیینات قفس x را تغییر می‌دهند)

این مجموعه بیابید: چنین زوجی وجود دارد ویکتاهم هست، لذا داریم $y=f(x)$.

پس تعریف صوری:

تعریف . فرض کنیم A و B دومجموعه باشند. یک تابع $f:A \to B$ زیرمجموعه‌ای چون f از $A \times B$ است به‌طوری که

(ت ۱) اگر $x \in A$ آنگاه yیی در B هست که $(x\,,\,y) \in f$،

(ت ۲) این عضو y یکتاست: به‌عبارت دیگر، اگر $x \in A$ و $z \in B$, y طوری باشند که $(x\,,\,y) \in f$، $(x\,,\,z) \in f$, آنگاه نتیجه می گیریم که $y=z$.

تابع را نگاشت[1] نیزمی‌خوانند.

طبق این تعریف، تابع «توان دوم» که روی $\mathcal{R}$ تعریف شد زیرمجموعهٔ

$$\{(x\,,\,x^2)\,|\,x \in \mathcal{R}\}$$

از $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ است. وتابع غیرعادی فوق مجموعهٔ

{(مارس ، فیل) ، (ژانویه ، شیر) ، (مارس ، شتر)}

است.

اگر $f(x)$ را آن عضو یکتای $y \in B$ بنامیم که $(x\,,\,y) \in f$، نماد معمولی تابع به‌دست می آید.

تعریف تابع بااستفاده از زوجهای مرتب به‌این دلیل که همه چیزش با اصطلاحات مربوط به‌مجموعه‌ها بیان می‌شود، ازلحاظ صوری بسیارجالب است. ولی برای تعریف تابعی مشخص استفاده از زوجهای مرتب غیرعملی وبیمورد است. لذا ازعبارتی نظیر عبارت زیر استفاده خواهیم کرد :

«تابعی چون $f:A \to B$ را با $\ldots = f(x)$ به‌ازای هر $x \in A$ تعریف کنید».

درهرمورد خاص، دستورمعینی برای یافتن $f(x)$ به‌ازای x مفروض، جانشین نقطه‌چین ... خواهد شد. تعبیرصوری این مطلب چنین است:

«f زیرمجموعهٔ $A \times B$ متشکل ازهمهٔزوجهای $(x\,,\,f(x))$ به‌ازای $x \in A$ است».

دراین صورت تنها مطلبی که باید حتماً بررسی شود این است که این دستور $f(x)$ را به‌طوریکتا تعیین می کند واینکه به‌ازای هر $x \in A$، $f(x) \in B$ است.

صرفاً برای روشنترشدن این نکته، مثالی ذکر می کنیم. تابع $f:\mathcal{N} \to \mathcal{Q}$ را با

$$f(n) = \text{بسط اعشاری } \sqrt{n} \text{ تا } n \text{ رقم}$$

تعریف کنید. آنگاه

---

۱. map یا mapping.

$$f(\circ)=۱$$

$$f(۱)=۱٫۴$$

$$f(۲)=۱٫۴۱$$

$$f(۳)=۱٫۴۱۴$$

والی آخر.

مجموعهٔ صوری زوجهای مرتب عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب

(n , بسط اعشاری $\sqrt{n}$ تا n رقم)

یعنی مجموعهٔ

$$\{(۱,۱٫۴), (۲,۱٫۴۱), (۳,۱٫۴۱۴), \ldots\} .$$

برتری کاربرد تعریف غیر صوری روشن است. این حقیقت که می‌دانیم چگونه آن‌را به صورت صوری برگردانیم به‌این معنی است که غیر صوری بودن اشکالی ایجاد نمی‌کند.

درخاتمهٔ این بخش به‌ذکر چند قاعده می‌پردازیم که به‌ظاهرمعرف تابع هستند ولی در بررسی دقیقتر تابع بودن هریك به‌دلیلی رد می‌شود.

«$f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ را با $f(x)=\dfrac{x^۲+۱۷x+۹۳}{x+۱}$ تعریف کنید».

این عبارت یك تابع را تعریف نمی‌کند، زیرا وقتی $x=-۱$ آنگاه $۱/(x+۱)$ معین نیست، ولذا $f(-۱)$ به‌عنوان عددی حقیقی تعیین نمی‌شود. اگر تعریف را عوض و با «$f:\mathcal{R}-\{-۱\} \to \mathcal{R}$ ...» شروع کنیم، آنگاه یك تابع داریم.

«$f:\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ را با $f(x)=\sqrt{x}$ (ریشهٔ دوم مثبت) تعریف کنید.» این عبارت یك تابع را تعریف نمی‌کند زیرا به‌ازای برخی‌ازمقادیر x، مثلاً $x=۲$، مقدار $f(x)=\sqrt{۲}$ متعلق به $\mathcal{Q}$ نیست. اگر دومین $\mathcal{Q}$ را به $\mathcal{R}$ تغییردهیم،واولین‌را به $\mathcal{Q}^+=\{x \in \mathcal{Q} | x \geqslant \circ\}$، آنگاه یك تابع داریم.

«$f:\mathcal{R} \to \mathcal{Q}$ را با $f(x)=$ (نزدیکترین عددگویا به x) تعریف کنید».

این عبارت یك تابع‌را تعریف نمی‌کند، زیرا $f(x)$ موردنظر وجود ندارد.

«$f:\mathcal{R} \to \mathcal{Z}$ را با $f(x)=$ (نزدیکترین عدد صحیح به x) تعریف کنید».

این یکی تقریباً یك تابع است: ایراد آن این‌است که، مثلاً، هردو عدد $\circ$ و ۱ از $\frac{۱}{۲}$ به

یك فاصله‌اند، ولذا $f(\frac{1}{2})$ به‌طوریکتا تعریف نمی‌شود.

خواص کلی توابع

اگر $f:A \to B$ یك تابع باشد، آنگاه یك زیرمجموعهٔ مهم B نگارهٔ f با تعریف

$$f(A)=\{f(x)|x \in A\}$$

است. نگارهٔ f مجموعهٔ مقادیر به‌دست آمده ازمحاسبهٔ $f(x)$ به‌ازای همهٔ xهای متعلق به دامنه است. نگارهٔ تابع لزومی ندارد تمام همدامنه‌اش باشد؛ مثلاً، اگر $f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با $f(x)=x^2$ تعریف بشود آنگاه نگاره‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است، و تمام همدامنه، یعنی $\mathcal{R}$، نیست.

عدم وجود تقارن درتعریف تابع ممکن است ناخوشایند به‌نظر آید: هرچند $f(x)$ باید برای هر $x \in A$ معین باشد، ولی لزومی ندارد که هر $b \in B$ به‌صورت $f(x)$ باشد. دلیل این امریك دلیل عملی‌است. وقتی تابعی‌را به‌کار می‌بریم، چون باید مطمئن باشیم که تابع معین است، آگاهی ازدامنهٔ دقیق ضرور است. دانستن اینکه مقادیر $f(x)$ دقیقاً در کجاقراردارند ازاهمیت کمتری برخورداراست، ولذا همدامنه را هرمجموعه‌ای که مناسب باشد انتخاب می‌کنیم. مثلاً، اگر

$$f:\mathcal{N} \to \mathcal{R}$$

را با

$$f(n)=\sqrt[3]{n!}$$

تعریف کنیم، آنگاه نگارهٔ f مجموعهٔ ریشه‌های سوم فاکتوریلها، یعنی

$$\{۱\,,\ \sqrt[3]{۲}\,,\ \sqrt[3]{۶}\,,\ \sqrt[3]{۲۴}\,,\ \sqrt[3]{۱۲۰}\,,\ \ldots\}\,,$$

است، که مجموعهٔ خیلی جالبی نیست. نگاره‌ها به‌طورکلی می‌توانند بسیار نامنظم باشند. لذا ترجیح می‌دهیم که تابع‌را برحسب یك همدامنه تعریف کنیم‌وازمحاسبهٔ دقیق‌آن قسمت ازهمدامنه‌که واقعاً مورد نیازاست صرفنظر نماییم، به‌این امید (امیدی‌کـه اغلب برآورده می‌شود) که نیازی به‌آن نداشته باشیم. البته اگرضرورت ایجاب‌کند می‌توانیم نگاره را هم به‌دست آوریم.

این امر نکتهٔ‌کوچك دیگری‌را مطرح می‌کند. اگر بخواهیم دقیق باشیم،نمی‌توانیم بگوییم همدامنهٔ یك تابع «یکتا»ست. توابع

$$f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}\,,\quad f(x)=x^2\,,$$

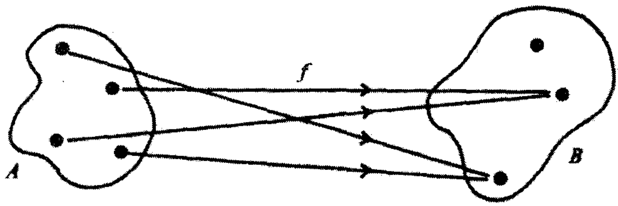
$$g:\mathcal{R} \to \mathcal{R}^+\,,\quad g(x)=x^2\,,$$

راکه در آن $\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} | x \geqslant 0\}$ درنظر می‌گیریم. همدامنهٔ اولی $\mathcal{R}$ ودومی $\mathcal{R}^+$ است؛ ولی تعریف صوری تابع به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب، در هردو حالت ما را به مجموعهٔ $\{(x , x^2) | x \in \mathcal{R}\}$ می‌کشاند. بنابراین، توابع f و g برابر هستند.

نکتهٔ اصلی این‌است که همدامنهٔ تابع مبهم است، و هرمجموعه‌ای که برد[1] تابع را شامل شود می‌تواند همدامنه‌اش باشد. ازسوی دیگر، دامنه به‌طوریکتا مشخص می‌شود.

می‌توانیم ملا لغطی‌تر باشیم ویك تابع‌را نه‌فقط با یك مجموعهٔ f از زوجهای مرتب، بلکه با یك سه‌تایی (f , A , B) تعریف کنیم واز این مشکل رهایی یابیم. ولی برای ما، این‌کار به‌زحمتش نمی‌ارزد: پذیرفتن ابهام در همدامنه ساده‌تراست. نماد $f:A \to B$ مشخص می‌کندکه درهرمورد خاص کدام یك ازهمدامنه‌های ممکن مورد نظر است.

اغلب مناسب است‌که تابعی چون $f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ را بارسم نمودارش مجسم کنیم. برای مجموعه‌هایی به غیراز $\mathcal{R}$، غالباً بهتراست‌که یك تابع‌را به‌صورت تصویری مانند



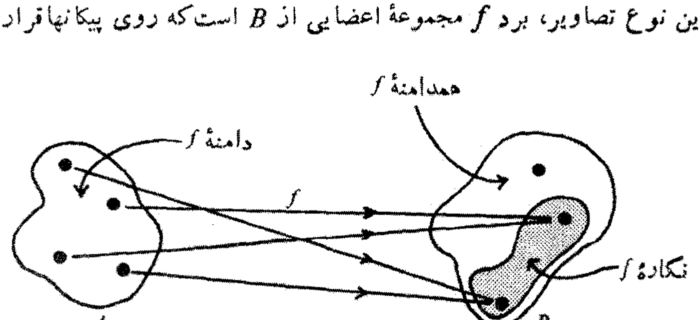
بپنداریم. به‌ازای هر $x \in A$، مقدار $f(x)$ را می‌توان در انتهای پیکان نظیرش یافت. آنگاه تعریف یك تابع به‌مصداق تصویر چنین است.

(ت۱′) هرعضو A درابتدای یك پیکان منحصربه‌فرد قرار دارد،

(ت۲′) همهٔ پیکانها به B ختم می‌شوند.

این تعریف صرفاً ابزاری تصویری، وهمتراز دیاگرامهای ون است؛ ولی به‌عنوان منبعی الهام‌بخش ومنبعی برای مثالهایی ساده، مفیدهم هست.

دراین نوع تصاویر، برد f مجموعهٔ اعضایی از B است‌که روی پیکانها قراردارند:



---

۱. منظوراز برد، همان نگاره است. م.

بنابراین، برد f تمام همدامنه یعنی B است اگر هرعضو B درانتهای پیکانی باشد. این مطلب تعریف صوریتر زیررا موجب می‌شود:

تعریف . تابعی چون $f: A \to B$ پوشا[۱] (به B) یا بردوی B است اگر هرعضو B به‌ازای حداقل یك $x \in A$ به‌صورت $f(x)$ باشد.

پوشا بودن یا نبودن یك تابع بستگی به‌انتخاب همدامنه‌اش دارد. گزارهٔ «f پوشاست» را تنها وقتی می‌توان بیان کرد که‌از فحوای کلام روشن باشدکه‌کدام همدامنه مورد نظراست ـ نظیرعبارتی‌چون «$f: A \to B$ پوشاست» که مسلماً همدامنه‌اش B است. مثالهای زیرموضوع‌را روشنترمی‌کنند.

(۱) $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$، که درآن $f(x)=x^{۲}$. این تابع پوشا به $\mathcal{R}$ نیست زیرا هیچ عدد حقیقی‌منفی مربع یك عدد حقیقی نمی‌تواند باشد؛ مثلاً $-۱ \in \mathcal{R}$ ولی -۱ به‌ازای هیچ xی در $\mathcal{R}$ به‌صورت $x^{۲}$ نیست.
(۲) $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{+}$، که درآن $f(x)=x^{۲}$. این تابع پوشا به $\mathcal{R}^{+}$ است، زیرا هر عدد حقیقی مثبت یك ریشهٔ دوم حقیقی دارد.
(۳) $f: A \to B$، که درآن $A=\{$همهٔ دایره‌های در صفحه$\}$، $B=\mathcal{R}^{+}$، و $f(x)=($شعاع $x)$. این تابع پوشا به $\mathcal{R}^{+}$ است، زیرا به‌ازای‌هرعدد حقیقی مثبت مفروض دایره‌ای به‌آن شعاع وجود دارد.

اگرهیچ عضوی از B درانتهای دوپیکان مختلف قرارنداشته باشد، نوع مهم‌دیگری ازتوابع به‌دست می‌آید:

تعریف . تابعی چون $f: A \to B$ تك گزین، یا یك به یك، است اگر به ازای هر $x, y \in A$، $f(x)=f(y)$ ایجاب‌کندکه $x=y$.

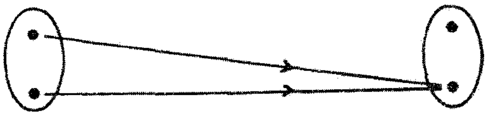
در اینجا انتخاب دقیق همدامنه مسئله‌ای ایجاد نمی‌کند: اگر f به‌ازای همدامنه‌ای یك به یك باشد، به ازای هر همدامنهٔ دیگر نیز یك به یك است. به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم :

(۱) $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$، که در آن $f(x)=x^{۲}$. این تابع یك به یك نیست، زیرا $f(۱)=۱=f(-۱)$ ولی $۱ \neq -۱$.
(۲) $f: \mathcal{R}^{+} \to \mathcal{R}$، که درآن $f(x)=x^{۲}$. این تابع یك به‌یك است: اگر x و y اعدادی حقیقی ومثبت باشند و $x^{۲}=y^{۲}$ آنگاه $x^{۲}-y^{۲}=(x-y)(x+y)=۰$، پس یا $x-y=۰$ که $x=y$، یا $x+y=۰$ که غیر ممکن است زیرا x و y هردو مثبت هستند، مگراینکه $x=y=۰$. درهرصورت، $x=y$.

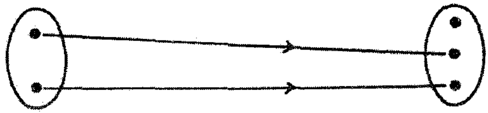
(۳) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$، که درآن $f(x)=1/x$. این تابع یك بـه یك است، زیرا اگر $1/x=1/y$ آنگاه $x=y$.
جالبتر ازهمه توابعی باهردو خاصیت فوق هستند:

تعریف. تابعی چون $f:A\to B$ دوسویی یا تناظر یك به یك است، اگرهم یك به یك وهم پوشا (به B) باشد.

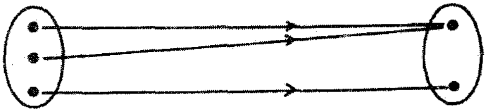
این مفهوم نیز بـه همدامنه بستگی دارد. عبارات «یك به‌یك» و «تناظر یك به‌یك» اغلب باهم اشتباه می‌شوند، وما به‌جای دومی عبارت «دوسویی» را به‌کار می‌بریم.
واضح است‌که $f:A\to B$ دوسویی است اگر وفقط اگر هر $b\in B$ به‌ازای عضو منحصر به‌فردی چون $x\in A$ به‌صورت $b=f(x)$ باشد.
همان طورکه تصاویر زیرنشان می‌دهند، هرنوع تلفیقی ازیك به‌یك بـودن وپوشا بودن می‌تواند رخ دهد:



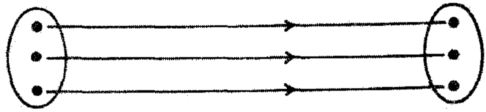
نه پوشاست و
نه یك به‌یك



پوشا نیست
یك به‌یك هست



پوشاست
یك به‌یك نیست

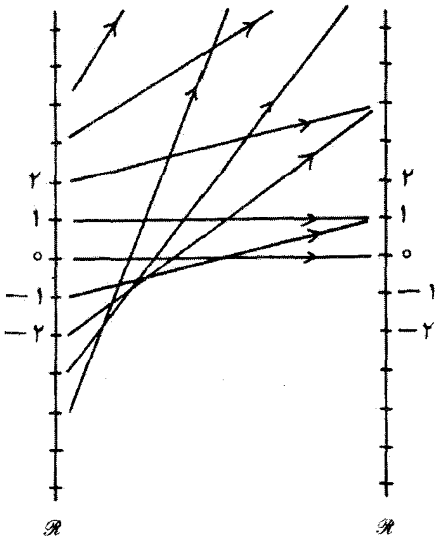


پوشا و یك به‌یك است $\Big\}$ یعنی دوسویی است

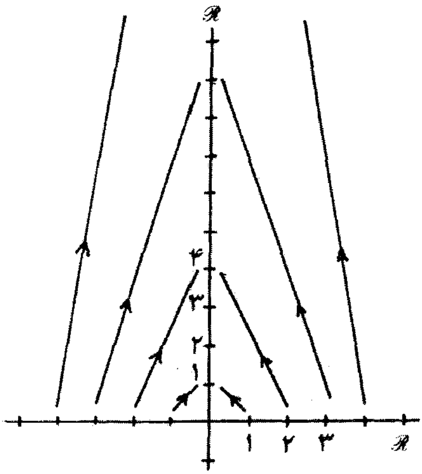
روی هـرمجموعهٔ A تابعی بسیار مهم وبسیار بدیهی می‌تـوان تعریف کـرد: تابع همانی $i_A:A\to A$ به‌ازای هر $a\in A$، توسط $i_A(a)=a$ تعریف می‌شود. بدیهی است که این تابع دوسویی است.

نمودار تابع

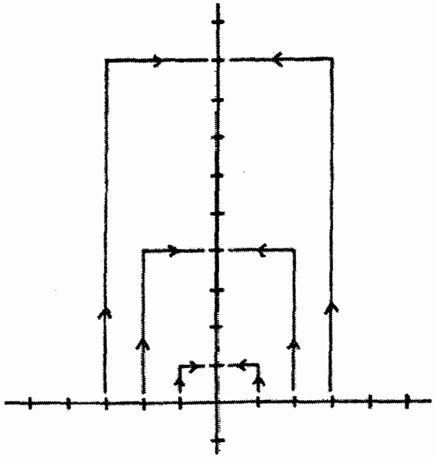
برای به‌تصویر درآوردن توابع دوشیوهٔ همتراز وجود دارد: یکی بانمودار (برای توابع $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) ودیگری بادیاگرام نقطه-پیکان. ارتباط جالبی بین این دو وجود دارد. تصویر نقطه-پیکان تابع $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ شکلی شبیه به‌شکل زیراست:



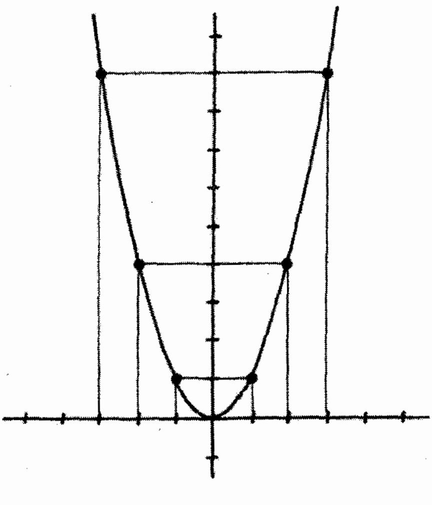
اگر A را به طور افقی چنان قرار دهیم که B را در ۰ قطع کند، دیگر پیکانها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



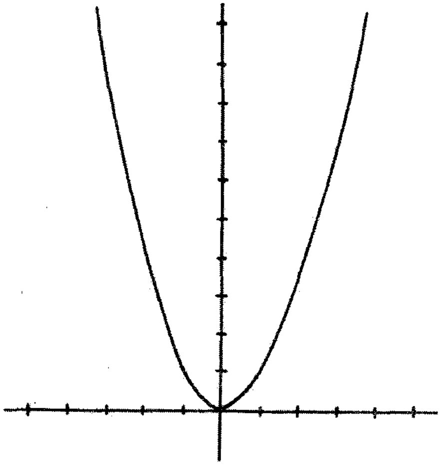
ولی جالبتر است پیکانهایی‌را به‌کار ببریم که فقط عمودی یا افقی باشند:



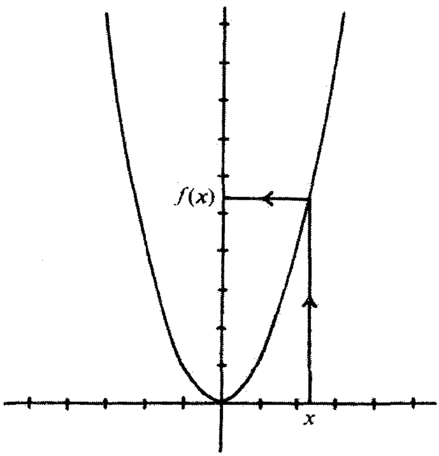
این تصویر روشن می‌سازد که نقاط مهم، گوشه‌های پیکانها هستند. اگر x را تغییر دهیم، همهٔ گوشه‌ها روی یك منحنی قرار می‌گیرند:



حال می‌توانیم پیکانهارا حذف کنیم، وفقط نمودار متداول f را باقی‌گذاریم :



برعکس، اگراین نمودار داده شده باشد، می‌توانیم پیکانهارا مجدداً رسم کنیم: از $x \in A$ شروع و به طورعمودی حرکت می کنیم تانمودار قطع شود، سپس افقی حرکت می کنیم تا B قطع شود. این نقطه همان $f(x)$ است.

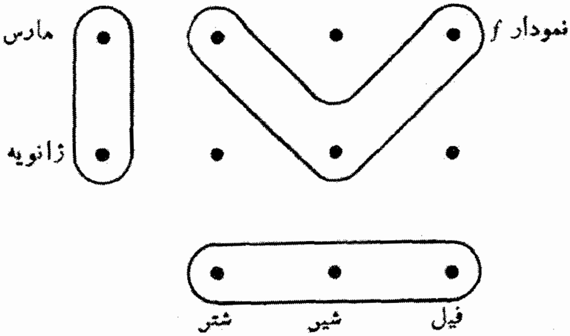


نمودار از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها چیست؟ صفحه همان $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ است و گوشه، در فرم پیکانی از x به $f(x)$، همان $(x\ ,\ f(x))$ است. لذا نمودار f مجموعهٔ

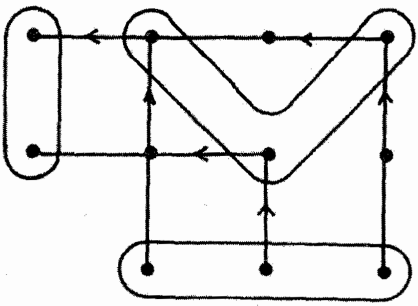
$$\{(x\ ,\ f(x)) | x \in \mathcal{R}\}$$

است، ولی این مجموعه در تعریف صوری، همان f است. باقبول $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ بـه‌عنوان یك صفحه، نمودار تابع همان تصویر طبیعی f است.

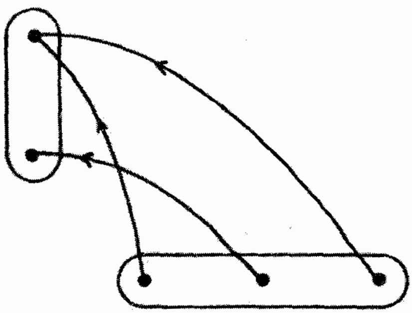
درمورد یك تابع کلی $f: A \to B$ هم به تصویر متناظری نیازمندیم. اکنون می‌توانیم $A \times B$ را رسم و از آن به جای صفحه استفاده کنیم. مثلاً «نمودار» تابع شتر-شیر-فیل، که در دو بخش پیش تعریف شد، به‌صورت زیر است:



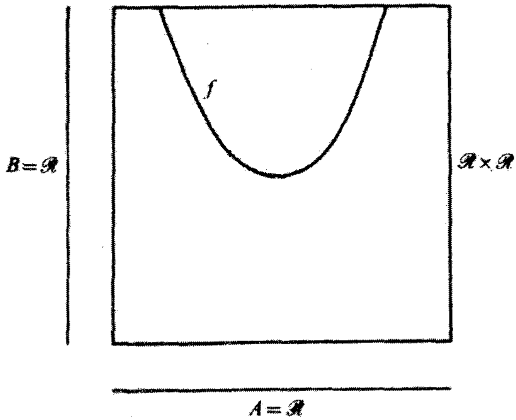
حال اگر ابتدا پیکانهایی از اعضای A به‌طور عمودی رسم کنیم تا نمودار را قطع کند، سپس به‌طور افقی تا B را، داریم



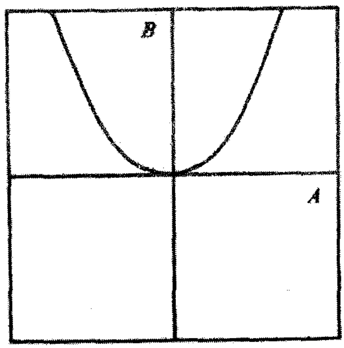
با کمی تغییر در شکل، تصویر نقطه-پیکان به‌دست می‌آید:



توجه‌کنید که، اگر بخواهیم دقیق باشیم، تصویـر نمودار تابعی مانند $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ باید چنین باشد:



ولی تصویر سنتی، که در آن A و B به‌عنوان «محور» روی صفحه رسم می‌شوند، مأنوستر ومناسبتر است:



اما باید به‌خاطر بسپاریم که این «محورها» جزئی از نمودار نیستند، بلکه بـرای نقاط (x, y) ازصفحه نقش برچسب را دارند.

ترکیب توابع

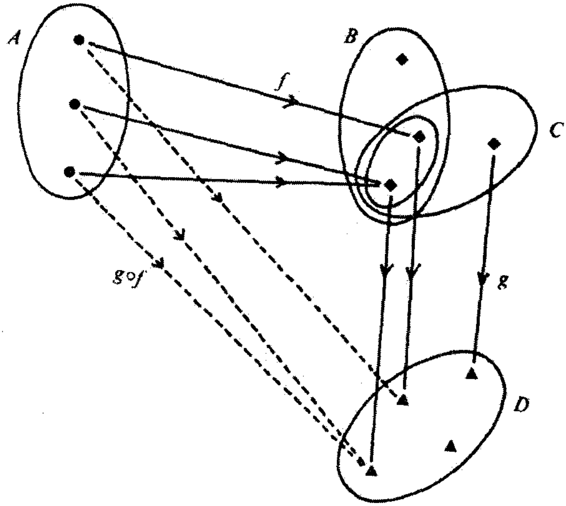
اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: C \rightarrow D$ دوتابع باشند، واگر نگارهٔ f زیرمجموعه‌ای از C باشد، آنگاه می‌توانیم f و g را ترکیب کنیم، به‌این‌نحو که «اول f رااعمال‌کنیم وسپس g را». به‌بیان صوری، تحت این فرضیات، تابعی چون

$$g \circ f : A \to D$$

را با قاعدهٔ [1]

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تعریف می‌کنیم.



البته باید بررسی کنیم که $g \circ f$ یك تابع از A به D است، ولی این آسان است.
یکی از خواص بسیار مفید ترکیب توابع شرکت‌پذیری است، به‌این‌معنا که:

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $f:A \to B$، $g:C \to D$، $h:E \to F$ سه تابع باشند به‌طوری که نگارهٔ f زیرمجموعه‌ای از C و نگارهٔ g زیرمجموعه‌ای از E باشد. آنگاه دو تابع

$$h \circ (g \circ f) : A \to F$$

$$(h \circ g) \circ f : A \to F$$

برابرند.

اثبات. منظور از «برابری» برابری دو زیرمجموعه‌ای است از $A \times F$ که این توابع را تعریف می‌کنند؛ این خود به‌این معنی است که به‌ازای هر $x \in A$ مقادیر این دو تابع با هم مساویند. حال داریم

---

۱. متأسفانه با آنکه $f \circ g$ طبیعی‌تر جلوه می‌کند نماد $g \circ f$ باید به‌معنی «اول f، سپس g» باشد. ولی دومی تعریف ترکیب را به‌صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ درمی‌آورد که نادرست است. یك راه‌حل این است که به‌جای $f(x)$ بنویسیم $(x)f$ و ترکیب را با $(x)f \circ g = ((x)f)g$ تعریف کنیم. ولی این نیز نامأنوس است!

$$h\circ(g\circ f)(x)=h(g\circ f(x))=h(g(f(x))),$$
$$(h\circ g)\circ f(x)=h\circ g(f(x))=h(g(f(x)))$$

که قضیه را ثابت می‌کنند. □

توابع همانی تحت ترکیب خواص جالبی دارند:

قضیهٔ ۲. اگر $f:A\to B$ یك تابع باشد، آنگاه

$$f\circ i_A=f,\quad i_B\circ f=f.$$

اثبات. اثبات بررسی ساده ومستقیمی از تعریف است. □

توابع وارون

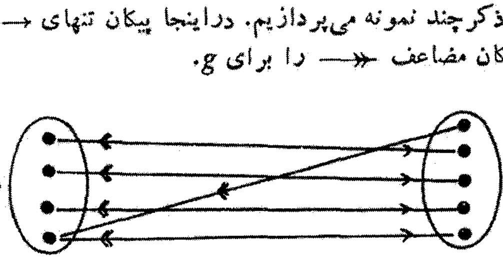
هر تابع $f:A\to B$ را به‌صورت شیئی درنظرمی گیریم که $x\in A$ را اختیارمی‌کند وکاری روی آن انجام می‌دهد، یعنی $f(x)\in B$ را تولید می‌کند. گاهی می‌توانیم تابعی چون g بیابیم که آنچه‌را f «انجام داده‌است» «خنثی» می‌کند، وآن تابع وارون f نام دارد. در تحلیل دقیق این موضوع موانعی هم وجود دارد.

تعریف. فرض‌کنیم $f:A\to B$ یك تابع باشد. آنگاه تابعی چون $g:B\to A$ یك وارون چپ f نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x\in A$، داشته باشیم $g(f(x))=x$، وارون راست f نام دارد هرگاه به ازای هر $y\in B$، داشته باشیم $f(g(y))=y$، وارون f خوانده می‌شود هرگـاه هم یـك وارون چپ f باشد و هم یـك وارون راست آن.

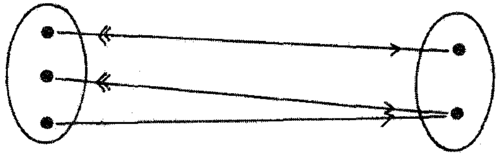
ملاحظه‌کنیدکه این سه شرط را می‌توانیم باعبارات معادل زیرهم بیان‌کنیم:

$$g\circ f=i_A,$$
$$f\circ g=i_B,$$
$$.f\circ g=i_B \text{ و } g\circ f=i_A$$

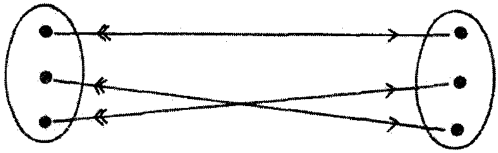
حال به ذکرچند نمونه می‌پردازیم. دراینجا پیکان تنهای $\longrightarrow$ را برای نمایش f به کارمی‌بریم وپیکان مضاعف $\twoheadleftarrow$ را برای g.



وارون
راست



وارون



این تصاویر، الهام‌بخش محکی مفید هستند:

قضیهٔ ۳. تابعی چون $f:A\to B$ دارای یك:
(الف) وارون چپ است اگروفقط اگر یك به‌یك باشد،
(ب) وارون راست است اگروفقط اگر پوشا باشد،
(پ) وارون است اگر وفقط اگر دوسویی باشد.

اثبات (الف). فرض کنیم f دارای‌وارون چپی‌چون g باشد. برای اثبات یك‌به‌یك بودن f فرض می‌کنیم $f(x)=f(y)$. آنگاه $x=g(f(x))=g(f(y))=y$، لذا f مسلماً یك به‌یك است.

برعکس، فرض کنیم f یك به یك باشد. اگر $y\in B$ و $y=f(x)$، آنگاه چنین تعریف می‌کنیم: $x=g(y)$. این x، بنا به‌یك به‌یك بودن f، یکتاست. اگر y عضوی از برد f نباشد، چنین xی وجود ندارد؛ در آن صورت aی دلخواهی از A انتخاب و $g(y)$ را مساوی با a تعریف می‌کنیم. حال $g(y)$ به‌ازای هر $y\in B$ معین است و $g:B\to A$ یك تابع. ولی طبق تعریف g داریم، $g(f(x))=x$، ولذا g یك وارون چپ است.

(ب) فرض کنیم f وارون راستی چون g داشته باشد. اگر $y\in B$ آنگاه $y=f(g(y))$، لذا این y به ازای $x=g(y)$ به‌صورت $f(x)$ است. ازاین‌رو f یك تابع پوشا به B است.

برعکس، فرض کنیم f پوشا باشد. گیریم $y\in B$. آنگاه به‌ازای xی از A، که لزوماً یکتا نیست، داریم $y=f(x)$. به ازای هر $y\in B$، $g(y)$ را یك عضو مشخص دلخواهی از A می‌گیریم که $y=f(g(y))$. آنگاه g یك تابع است و یك وارون راست f.

(پ) تابع f یك وارون دارد اگر وفقط اگر وارون چپی چون g داشته باشد که وارون راستی برای آن نیز باشد. این امر ایجاب می‌کند که f هم یك به‌یك باشد وهم پوشا، ولذا دوسویی. حال اگر f دوسویی باشد، وارون چپی چون g دارد، وبه‌آسانی بررسی می‌شود که این g یك وارون راست نیزهست. بنابراین f یك وارون دارد. □

چند مثال

(۱) $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$، $f(x)=x^{۳}$. ایــن تــابــع دو سویــی است و دارای وارون $g:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$، باتعریف $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ است.

(۲) $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$، $f(x)=x^{۲}$. این تابع دروضع کنونیش، نه یك به‌یك است ونه پوشا، لذا هیچ نوع وارونی ندارد. پس ریشه‌های دوم چه می‌شوند؟ می‌توانیم با انتخاب $\mathcal{R}^{+}=\{x\in\mathcal{R}|x\geqslant ۰\}$ به‌عنوان همدامنه، f را پوشا کنیم.حال $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}^{+}$ پوشاست، و $g(x)=\sqrt{x}$ (ریشهٔ دوم مثبت) یك وارون راست است زیرا $f(g(x))=(\sqrt{x})^{۲}=x$. ولی این یك وارون چپ نیست، زیرا

$$\sqrt{x^{۲}}=x \quad \text{اگر } x\geqslant ۰\text{،}$$

$$\sqrt{x^{۲}}=-x \quad \text{اگر } x<۰\text{،}.$$

(۳) دراین مثال، خواصی ازتوابع نمایی و لگاریتمی‌را فرض می گیریم که دراین کتاب آنها را به طور دقیق اثبات نکرده‌ایم. فرض کنیم $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$ توسط $f(x)=e^{x}$ تعریف شده باشد. این تابع یك به یك است زیــرا اگر $e^{x}=e^{y}$ آنگاه $e^{x-y}=۱$، لذا $x-y=۰$ وبنابراین $x=y$. این تابع یك وارون راست دارد، که (مثلاً[*]) با

$$g(y)=\log y \quad (y>۰)$$

$$g(y)=۲۷۳ \quad (y\leqslant ۰)$$

تعریف می‌شود. زیــرا $g(f(x))$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود: $f(x)=e^{x}$ کــه مثبت است، ولذا $g(f(x))=g(e^{x})=\log e^{x}=x$. عدد اختیاری ۲۷۳ دراین محاسبه وارد نمی‌شود: فقط به‌این دلیل آورده شده است‌که g روی تمام $\mathcal{R}$ تعریف بشود. با توجه بــه فرایند محاسبات، هرتعریف دیگر g روی اعداد حقیقی منفی هم درست است.

(۴) بارزتر آن است‌کــه تابــع $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}^{*}$ را درنظــر بگیریــم، کــه درآن $\mathcal{R}^{*}=\{x\in\mathcal{R}|x>۰\}$، و $f(x)=e^{x}$. اکنون f دوسویی است، و $g:\mathcal{R}^{*}\rightarrow\mathcal{R}$، با ضابطهٔ $g(y)=\log y$، یك وارون آن است زیرا:

$$e^{\log y}=y\,,$$

$$\log e^{x}=x\,.$$

(۵) دراین مثال آشنایی بابرخــی ازخــواص تــوابع مثلثاتی فــرض شده است: $f:\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\sin x$ را درنظر می‌گیریم. این تابع نه‌یك به‌یك است و نه پوشا، لذا هیچ نوع وارونی ندارد، پس $\sin^{-۱}x$ (یا $\arcsin x$) کــه در جدولهای مثلثاتی یافت می‌شود چیست؟ جواب این سؤال به‌این بستگی داردکه دقیقاً چه می‌خواهیم انجام بدهیم. اگــر $\sin^{-۱}(x)$ آن y یکتایی، $-\pi/۲\leqslant y\leqslant\pi/۲$، تعریف بشود کــه

$\sin y = x$، آنگاه این تابع یك وارون راست (ولی نه چپ) برای تابع $f: \mathcal{R} \to \{x \in \mathcal{R} | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ است، که در آن $f(x) = \sin x$. این تابع به طور قطع یك وارون چپ نیست: مثلاً،

$$\sin^{-1} \sin 6\pi = \sin^{-1} 0 = 0 \neq 6\pi .$$

گاهی می‌گوییم که $\sin^{-1}$ «چند مقداری» است. مطابق تعریف ما، این رابطه نمی‌تواند، به معنای دقیق کلمه، یك تابع باشد.

(۶) رضایتبخش‌ترین فرایند چنین است که فرض کنیم

$$f: \{x \in \mathcal{R} | -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2\} \to \{x \in \mathcal{R} | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

با ضابطهٔ $f(x) = \sin x$ تعریف شده باشد. آنگاه f دوسویی‌است، و $\sin^{-1}$ یك وارون برای این f است.

وارونهای چپ و راست لزومی‌ندارد یکتا باشند ـ این یکی ازدلایلی است که در ساختن آنها ازانتخابهای اختیاری استفاده می‌شود. ولی وارونها یکتا هستند.

قضیهٔ ۴. اگر تابعی هم یك وارون چپ داشته باشد وهم یك وارون راست، آنگاه یك وارون دارد. این تابع وارون، یکتاست، وهر وارون چپ یاراستی با آن برابراست.

اثبات. اگر $f: A \to B$ هم یك وارون چپ داشته باشد و هم راست، آنگاه طبق قضیهٔ ۳، f دوسویی است، و وارونی چون F دارد. اگر g یکی از وارونهای چپ آن باشد، آنگاه

$$g = g \circ i_B = g \circ (f \circ F) = (g \circ f) \circ F = i_A \circ F = F .$$

به‌همین ترتیب اگر h یکی از وارونهای راست آن باشد آنگاه $h = F$. از آنجایی که هروارون، به‌خصوص یك وارون چپ نیز هست، این مطلب همچنین ثابت می‌کند که F یکتاست. □

نماد نمایش‌تابع وارون تابع $f: A \to B$، به‌شرطی‌که وجود داشته باشد، عبارت است از

$$f^{-1}: B \to A .$$

قضیهٔ ۵. اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دوسویی باشند، آنگاه $g \circ f: A \to C$ نیز دو سویی است، و

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

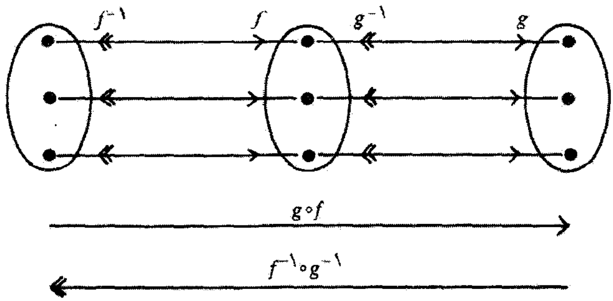
اثبات. واضح است که $g \circ f$ دو سویی است. با بررسی مستقیم به‌آسانی ثابت

می‌شود که $f^{-1}\circ g^{-1}$ یك وارون چپ آن‌هم هست، زیرا

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) &= f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))\\ &= f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)\\ &= f^{-1}\circ(i_B\circ f)\\ &= f^{-1}\circ f\\ &= i_A\,.\end{aligned}$$

لذا طبق قضیهٔ ۴ این تابع یك وارون است. □

این مطلب‌را می‌توانیم به صورت زیر تجسم کنیم: آنگاه روشن می‌شود که محاسبهٔ فوق بسیار کمتر از آنچه که به‌نظرمی‌رسد مهیب است.



تحدید

اگر $f: A\to B$ یك تابع باشد و X زیرمجموعه‌ای از A، می‌توانیم تابعی مانند

$$f|_X : X\to B\,,$$

به نام تحدید f به X، باضابطهٔ

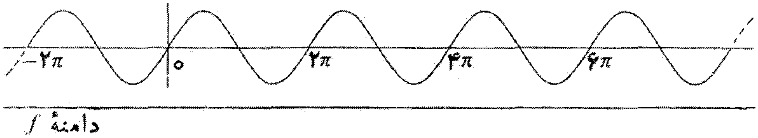
$$f|_X(x)=f(x)\,,\qquad (x\in X)$$

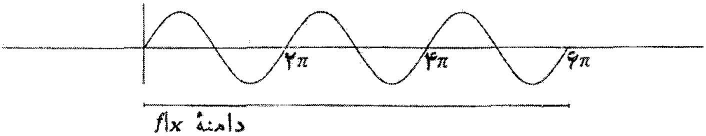
تعریف کنیم. تفاوت این تابع با f تنها در این است که x هایی که در X نیستند در نظر گرفته نمی‌شوند.

مثلاً، اگر $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باضابطهٔ $f(x)=\sin x$ باشد و

$$X=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\leqslant x\leqslant 6\pi\}\,,$$

آنگاه نمودارهای f و $f|_X$ به‌صورت زیرهستند:





عمل تحدید عملی نسبتاً بدیهی است. استفادهٔ اصلی آن در این است که توجه‌مان را به‌رفتار f روی زیرمجموعهٔ X معطوف می‌کند. گاهی این عمل مفید است: در فوق ملاحظه کردیم که با فرض $I=\{x\in\mathcal{R}|-1\leqslant x\leqslant 1\}$، $\sin:\mathcal{R}\to I$ دوسویی نیست. ولی اگر $X=\{x\in\mathcal{R}|-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2\}$ آنگاه $\sin|_X: X\to I$ دوسویی است.

اگر یک تابع همانی $i_A: A\to A$ به‌یک زیرمجموعهٔ $X\subseteq A$ محدود شود، تابع شمولی

$$i_A|_X: X\to A$$

به‌دست می‌آید که در آن $i_A|_X(x)=x$، $(x\in X)$. بنابراین، این همان تابع i_X است، ولی با همدامنه‌ای متفاوت که نتیجه‌اش تأکید روی چیز دیگری است.

دنباله و n تایی

اکنون با استفاده از توابع می‌توانیم به‌برخی از پرسشهایی که قبلاً مطرح شد پاسخ دهیم. به‌خصوص می‌توانیم تعاریف دقیقی از دنباله و n تایی ارائه دهیم. قبلاً زوج، سه‌تایی، چهارتایی، ... مرتب‌را تعریف کردیم، ولی یک دستور کلی عرضه نکردیم.

فرض کنیم X_n مجموعهٔ $\{x\in\mathcal{N}|1\leqslant x\leqslant n\}=\{1,2,3,\ldots,n\}$ باشد. اگر S یک مجموعه باشد، آنگاه هر n تایی از اعضای S را تابعی چون

$$f: X_n\to S.$$

تعریف می‌کنیم. کاری که این تابع انجام می‌دهد این‌است که $f(1)$، $f(2)$، ...، $f(n)$ را به‌عنوان اعضایی از S مشخص می‌کند. اگر نمادگذاری‌را به $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ تغییر دهیم ملاحظه می‌کنیم که دو n تایی $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ و $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ برابرند اگر وفقط اگر $f_1=g_1$، $f_2=g_2$، ...، $f_n=g_n$. واین همان صورتی‌است که یک n تایی باید داشته باشد.

به همین ترتیب می‌توانیم ایدهٔ یک دنبالهٔ $a_1, a_2, \ldots$ راکه قبلاً به عنوان یک «فهرست بی پایان» توصیف کردیم به‌طور دقیقتر به‌صورت تابعی چون

$$f: \mathcal{N} \to S$$

تعریف کنیم، ولی حالا $f(n)$ را همان a_n می‌انگاریم.

درمورد زوجهای مرتب، تعریف جدید (f_1, f_2) باآنچه که کوراتوفسکی داده است مساوی نیست. ولی دارای همان خاصیت است که $(f_1, f_2)=(g_1, g_2)$ اگر و فقط اگر $f_1=g_1$ و $f_2=g_2$. از آنجایی‌که این خاصیت تنها خاصیتی است که مورد استفاده واقع می‌شود، تفاوت این دوتعریف بی‌اهمیت است.

تابع چند متغیره

درحساب دیفرانسیل وانتگرال «توابع بادومتغیر»ی مانند

$$f(x, y)=x^2-3y^3+\cos xy, \quad (x, y \in \mathcal{R})$$

مطرح می‌شوند. برای دقیقتر مشخص‌کردن این توابع ازومی ندارد همهٔ مطالب قبلی‌را تکرارکنیم. نمادگذاری روشن می‌سازدکه f صرفاً یك تابع معمولی‌است‌که روی مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) تعریف می‌شود، یعنی

$$f: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R} \cdot$$

به‌طورکلی اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه هرتابع با دومتغیر $a \in A$ و $b \in B$، یك تابع معمولی $f: A \times B \to C$ است. به همین ترتیب توابع با n متغیر، توابعی معمولی هستندکه روی مجموعه‌ای از n تایی‌ها تعریف می‌شوند. خواهیم دیدکه این مفاهیم بسیار مفید هستند.

عمل دوتایی

به بیان ساده، هر عمل دوتایی روی مجموعه‌ای چون A تابعی مانند $f: A \times A \to A$ است. مثالهای این مفهوم در ریاضیات بسیارند:

(۱) جمع روی $\mathcal{N}$، $\alpha: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$، $\alpha(x, y)=x+y$.

(۲) ضرب روی $\mathcal{N}$، $\mu: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$، $\mu(x, y)=xy$.

(۳) تفریق روی $\mathcal{Z}$، $\sigma: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$، $\sigma(x, y)=x-y$.

(۴) تقسیم روی عناصر غیرصفر $\mathcal{Q}$.

فرض‌کنیم $\mathcal{Q}^*=\{x \in \mathcal{Q} \mid x \neq 0\}$،

$\mathcal{Q}^* \times \mathcal{Q}^* \to \mathcal{Q}^*$: δ، $\delta(x, y)=x/y$.

(۵) فرض‌کنیم $A=\mathbb{P}(X)$، مجموعهٔ همه زیر مجموعه‌های مجموعهٔ مفروضی چون X باشد، $u: A \times A \to A$ را با ضابطهٔ $u(Y_1, Y_2)=Y_1 \cup Y_2$ تعریف می‌کنیم.

(۶) برای مجموعهٔ مفروضی چون X، فرض کنیم M مجموعهٔ همهٔ توابع از X به X باشد، لذا $f \in M$ به‌این‌معناست که $f:X \rightarrow X$است. $c:M \times M \rightarrow M$ را با ضابطهٔ $c(g, f) = g \circ f$ تعریف می‌کنیم.

دراکثر اعمال دوتایی که در ریاضیات مطرح می‌شوند، عضو $f(x, y)$، بااستفاده ازنمادهایی چون $\circ$، به‌صورت $x \circ y$ نمایش داده می‌شود. درمثالهای فوق داریم $x+y$، xy، $x-y$، x/y، $x \cup y$، $x \circ y$. به این دلیل، معمولاً یك عمل دو تایی را با $\circ: A \times A \rightarrow A$ نمایش می‌دهیم ونگارهٔ $\circ(x, y)$ را با $x \circ y$. باتوجه به مثالهای (۲) و (۶)، $x \circ y$ را حاصلضرب یا ترکیب x و y می‌نامیم. درمثال (۲) هیچ نمادی بین اعضا وجود ندارد. این نمادگذاری اختصاری اغلب در موضوعات دیگر ریاضی هم که امکان اشتباه وجود نداشته باشد به کار می‌رود. مثلاً، ترکیب توابع در (۶) را معمولاً به جای $g \circ f$ به صورت gf می‌نویسیم. خواننده قبلاً هم وقتی که آموخت

2π را ۲ ضرب‌در π،

۲ $\frac{1}{2}$ را ۲ به اضافهٔ $\frac{1}{2}$، و

۲۱ را ۲ ضرب‌در ده به اضافهٔ ۱

بخواند درحقیقت باچنین قراردادهایی سروکار داشت.

باتوجه به نماد $x \circ y$، انتظار نداریم که $x \circ y$ و $y \circ x$ برابر باشند. مثلاً، در مورد تفریق داریم. $۲-۱ \neq ۱-۲$

اگر به‌ازای‌همهٔ اعضای $x, y \in A$ داشته باشیم $x \circ y = y \circ x$، آنگاه $\circ$ را جابه‌جایی می‌خوانیم.

مثالهای (۱)، (۲)، و (۵) جابه‌جایی هستند، ولی (۳) و (۴) چنین نیستند. مثال(۶) ناجابه‌جایی است هرگاه X بیش از یك عضو داشته باشد. (زیرا اگر $a, b \in X$، $a \neq b$، آنگاه چنین تعریف می‌کنیم که $f(a) = f(b) = a$، $g(a) = g(b) = b$، ودر غیر این صورت $f(x) = g(x) = x$، آنگاه داریم $g \circ f(a) = b$ ولی $f \circ g(a) = a$، لذا $g \circ f \neq f \circ g$.)

جز درحالتی که برما معلوم باشد یك عمل دوتایی جابه‌جایی است، رعایت ترتیب اعضا درحاصلضرب ضرور است. این عمل ضرب‌را می‌توانیم برای سه عضو (یا بیشتر) هم تعمیم دهیم. فرض‌کنیم $x, y, z \in A$، آنگاه $x \circ y \in A$ ومی‌توان آن را در z ضرب کرد. دراینجا ازپرانتز استفاده می‌کنیم وبرای نمایش حاصلضرب می‌نویسیم $(x \circ y) \circ z$ تانشانگر تمایزش‌با $x \circ (y \circ z)$ نیز باشد. اگرچه درعبارت دوم، x، y، z به همان ترتیب قبلی‌نوشته شده‌اند، ولی این‌یکی حاصلضرب x در $y \circ z$ است وممکن‌است باحاصلضرب اولی‌متفاوت باشد. مثلاً، $(۱-۲)-۳ \neq ۱-(۲-۳)$.

اگر برای همهٔ اعضای $x, y, z \in A$ داشته باشیم $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$، آنگاه

$\circ$ را شرکت‌پذیر می‌خوانیم. مثالهای (۱)، (۲)، (۵)، و (۶) شرکت‌پذیرهستند، ولی (۳) و (۴) چنین نیستند.

در بحث مربوط به مفهوم اعداد، اعمال دوتایی جابه‌جایی وشرکت‌پذیر (جمع و ضرب) به منزلهٔ سنگ زیربنا هستند.

به‌همان نحوی‌که اعمال دوتایی $f:A\times A \rightarrow A$ را تعریف کردیم، می‌توانیم اعمال سه‌تایی $t:A\times A\times A \rightarrow A$ راهم تعریف کنیم، وبه‌همین ترتیب تاآخر. حتی در آغاز این سلسله، می‌توانیم تابعی چون $g:A \rightarrow A$ را نیز به‌عنوان یك «عمل یك‌تایی» در نظربگیریم. این مفاهیم، درمقایسه با اهمیت اساسی اعمال دوتایی، در ریاضیات اهمیت چندانی ندارند.

خانوادهٔ اندیس‌دار ازمجموعه‌ها

درآخرفصل ۳ مفهوم مجموعه‌ای چون S راکه اعضایش خود مجموعه بودند بررسی کردیم. مثلاً، ممکن است داشته باشیم

$$S=\{S_1, \ldots, S_n\}$$

که درآن هر S_r خود یك مجموعه است. بااستفاده از مفهوم تابع می‌توانیم این ایده را تعمیم دهیم. اگر $\mathcal{N}_n=\{1, 2, \ldots, n\}$، آنگاه تابعی دو سویی چون $f:\mathcal{N}_n \rightarrow S$ با ضابطهٔ $f(r)=S_r$ در دست است. هیچ دلیلی وجود نداردکه خودرا به $\mathcal{N}_n$ محدود کنیم. اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد و $f:A \rightarrow S$ یك دو سویی، که درآن هرعضو S خود یك مجموعه است، آنگاه S را یك خانوادهٔ اندیس‌دار ازمجموعه‌ها می‌خوانیم،

$$S=\{S_\alpha | \alpha\in A\}.$$

دراین بحث A مجموعهٔ اندیس نام دارد.

اجتماع یك چنین خانوادهٔ اندیس‌دار، یعنی

$$\bigcup S=\{x | x\in S_\alpha \text{ ،} A \text{ به‌ازای } \alpha \text{ یی در }\},$$

را به‌صورت

$$\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$$

نیز نمایش می‌دهیم، واشتراك

$$\bigcap S=\{x | x\in S_\alpha \text{ ،} \alpha\in A \text{ به‌ازای هر }\}$$

راهم به‌صورت

$$\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha .$$

وقتی که $A = \mathcal{N}_n$، اغلب این مجموعه‌ها را با $\bigcup_{r=1}^{n} S_r$ و $\bigcap_{r=1}^{n} S_r$ نشان می‌دهیم؛ و وقتی که $A = \mathcal{N}$، نمادهای مربوط، $\bigcup_{r=1}^{\infty} S_r$ و $\bigcap_{r=1}^{\infty} S_r$ هستند. دراین عبارتها نگران نماد «∞» که جزئی از گسترش تاریخی موضوع است نباشید؛ امروزه آن‌را حذف واز نمادهای $\bigcup_{r\in\mathcal{N}} S_r$ و $\bigcap_{r\in\mathcal{N}} S_r$ استفاده می‌کنند.

تمرین

دراین تمرینها هرخاصیتی ازتوابع نمایی، لگاریتمی، ومثلثاتی‌راکه مورد لزوم باشدبدون اثبات می‌توان پذیرفت.

۱. نگارهٔ توابع $f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ ذیل‌را بیابید:
(الف) $f(x) = x^{۳}$،
(ب) $f(x) = x - ۴$،
(پ) $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۲$،
(ت) $f(x) = x^{۲} + \cos x$،
(ث) $f(x) = ۱/x$ اگر $x \neq ۰$ و $f(۰) = ۱$،
(ج) $f(x) = |x|$،
(چ) $x^{۲} + x - |x|^{۲}$،
(ح) $f(x) = x^{۱۶} + x$.

۲. برای هریک‌ازتوابع تعریف شده درفوق، تعیین‌کنیدآیا (به‌عنوان یک تابع $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$) (الف) یک به یک، (ب) پوشا، (پ) دوسویی است.

۳. توابع‌زیرطوری بایدتعریف شوندکه همدامنهٔ آنها $\mathcal{R}$ باشد، ودامنهٔ آنها زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{R}$. درهرمورد بزرگترین دامنهٔ ممکن‌را تعیین‌کنید:
(الف) $f(x) = \log x$،
(ب) $f(x) = \log \log \cos x$،
(پ) $f(x) = -x$،
(ت) $f(x) = \log(۱ - x^{۲})$،
(ث) $f(x) = \log(\sin^{۲}(x))$،
(ج) $f(x) = e^{x^{۲}}$،
(چ) $f(x) = ۱/(x^{۲} + ۱)$،

(ح) $f(x)=\sqrt{(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)(x-۵)(x-۶)}$ (ریشهٔ دوم مثبت). درهرمورد نگارهٔ f را پیداکنید.

۴. فرض کنید S مجموعهٔ دایره‌های درصفحه باشد و $f:S \to \mathcal{R}$ باضابطهٔ

$$f(s)=s \text{ مساحت}$$

تعریف بشود. آیا f یك به یك است؟ پوشاست؟ دوسویی است؟

حال فرض کنید T مجموعهٔ دایره‌هایی در صفحه باشد که مرکزشان درمبدأ است، و $\mathcal{R}^+=\{x \in \mathcal{R} | x \geqslant ۰\}$، آنگاه $g:T \to \mathcal{R}^+$ را باضابطهٔ

$$g(t)=t \text{ محیط}$$

تعریف کنید. آیا g یك به یك است؟ پوشاست؟ دوسویی است؟

۵. اگر A دوعضو داشته باشد و B سه عضو، چند تابع متفاوت از A به B وجود دارد؟ از B به A؟ درهرمورد چندتا یك به یك هستند؟ چندتا پوشا هستند؟ چندتا دوسویی‌هستند؟

۶. اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد ($n, m \in \mathcal{N}$)، تعداد توابع از A به B را بیابید.

۷. نشان دهید اگر $A=\varnothing$ و $B \neq \varnothing$، آنگاه، طبق تعریفی که باکمك نظریهٔ مجموعه‌ها عرضه شد، دقیقاً یك تابع از A به B وجود دارد. نشان دهید اگر $A \neq \varnothing$ و $B=\varnothing$، آنگاه هیچ تابعی وجود ندارد. چند تابع از $\varnothing$ به $\varnothing$ وجود دارد؟

۸. مثالهایی از توابع $f:\mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ بیاورید که:

(الف) نه یك به‌یك باشد ونه پوشا،

(ب) یك به‌یك باشد ولی پوشا نباشد،

(پ) پوشا باشد ولی یك به‌یك نباشد،

(ت) هم‌پوشا باشد وهم یك به‌یك.

۹. اگر $f:A \to B$، نشان دهیدکه، به‌ازای $X \subseteq A$ و $Y \subseteq B$، فرمولهای

$$\hat{f}(X)=\{f(x) | x \in X\}$$

$$\check{f}(Y)=\{x \in A | f(x) \in Y\}$$

دوتابع، $\hat{f}:\mathbb{P}(A) \to \mathbb{P}(B)$ و $\check{f}:\mathbb{P}(B) \to \mathbb{P}(A)$، تعریف می‌کنند.

ثابت کنیدکه به‌ازای هر $X_۱, X_۲ \subseteq A$ و $Y_۱, Y_۲ \subseteq B$، داریم:

(الف) $\hat{f}(X_۱ \cup X_۲)=\hat{f}(X_۱) \cup \hat{f}(X_۲)$،

(ب) $\hat{f}(X_1 \cap X_2) \subseteq \hat{f}(X_1) \cap \hat{f}(X_2)$ ولی برابری الزاماً برقرار نیست،
(پ) $\bar{f}(Y_1 \cup Y_2) = \bar{f}(Y_1) \cup \bar{f}(Y_2)$،
(ت) $\bar{f}(Y_1 \cap Y_2) = \bar{f}(Y_1) \cap \bar{f}(Y_2)$.

درصورتی که بدانیم f پوشاهم هست آیا می‌توانیم (ب) را به‌برابری تبدیل کنیم؟ اگر یك به‌یك باشد چطور؟ اگردوسویی باشد چطور؟

(نمادگذاری متداول در کتابهای درسی این است که می‌نویسند $f(X) = f(X)$ و $\bar{f}(Y) = f^{-1}(Y)$: ما نماد فوق‌را برای وضوح بیشتر به‌کار برده‌ایم.)

۱۰. عمل دوتایی $\circ$ را روی $\mathbb{Z}$ با:

(الف) $x \circ y = x - y$،
(ب) $x \circ y = |x - y|$،
(پ) $x \circ y = x + y + xy$،
(ت) $x \circ y = \frac{1}{2}\left(x + y + \frac{1}{2}((-1)^{x+y} + 1) + 1\right)$،

تعریف کنید. نشان دهیدکه این اعمال در واقع اعمال دوتایی هستند. کدام یك جابه‌جایی است؟ کدام شرکت‌پذیر؟

٦

منطق ریاضی

کیفیت اساسی ریاضیات که آن را به‌طوریکپارچه به‌هم مربوط می‌سازد استفاده از اثبات ریاضی جهت استنتاج قضایای جدید از قضایای قبلی است که نظریه‌ای قوی وسازگار به‌وجود می‌آورد. این روشها فنونی را دربرمی‌گیرند که درزندگی روزمره معمول نیستند. اثبات به‌روش برهان خلف (که درکتابهای قدیمی «تعلیق محال» خوانده می‌شود) شاید جالبترین آنها باشد. برای اثبات درستی مطلبی بااین‌روش، فرض می‌کنیم که مطلب موردنظردرست نباشد وسپس نشان می‌دهیم که این‌فرض به‌تناقض منجرمی‌شود. به‌عنوان مثال:

قضیه. کوچکترین کران بالای $S=\{x\in\mathbb{R} | x<۱\}$ عدد ۱ است.

اثبات. بی‌شك ۱ یکی از کرانهای بالای S هست. گیریم K کران بالای دیگری باشد. فرض کنیم $K<۱$؛ آنگاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که $K<\frac{۱}{۲}(K+۱)<۱$. این مطلب به‌این معنی است که $K<\frac{۱}{۲}(K+۱)\in S$، که متناقض بااین امر است که K یك کران بالاست. بنابراین، فرض $K<۱$ باید غلط باشد ولذا $K\geqslant ۱$ و ۱ همان‌طور که مطلوب است کوچکترین کران بالاست. $\square$

اثبات فوق نمونه‌ای ازاین‌نوع استدلال است. به‌منظورتحلیل دقیقتر آن، فرض کنیم

P نمایش گزارهٔ «اگر K یک کران بالای S باشد، آنگاه $K \geqslant 1$» باشد. قسمت اصلی برهان فوق مربوط به اثبات درستی P است. P را غلط فرض کردیم (یعنی فرض کردیم کران بالایی چون K برای S وجود داردکه $K < 1$) وبابرهانی ساده به تناقض رسیدیم. اگراستدلال درست باشد، آنگاه P نمی‌تواند غلط باشد؛ لذا P باید درست باشد.

برای اینکه بتوانیم استدلالهایی بااین ماهیت را به پیش ببریم واز درستیشان نیز مطمئن باشیم، باید ازدوعامل‌اساسی مطمئن باشیم. اولاً گزارهٔ P (وهمچنین همهٔ گزاره‌های دیگری که دراستدلال موردنظرمطرح می‌شوند) باید به‌روشنی درست یابه‌روشنی نادرست باشد (گرچه گاهی ممکن‌است صدق یا کذب آن برما معلوم نباشد). درمحاورهٔ روزمره به گفته‌هایی نظیر«تقریباً همهٔ رانندگان گاهی سرعت بیش ازحد مجازدارند» برمی‌خوریم. گفته‌هایی این چنین به‌کاربرهان خلف نمی‌آیند. آیا به‌منظور رد این گفته‌کافی است تنها یک‌نفرپیداشودکه همیشه سرعت مجازرارعایت می‌کند؟ آیالازم‌است «تعداد قابل‌توجه‌ای» (معنای دقیقش هرچه باشد)، یاحتی اکثریتی، رابیابیم؟ زبان روزمرهٔ ما پراست ازاین‌نوع کلی‌گوییها که دراکثرموارد، ولی شاید نههمیشه، به‌طورمبهم درست هستند. اثبات ریاضی ازمصالح غیرقابل نفوذتری درست می‌شود، وچنین کلی‌گوییهایی درآن مجاز نیست: کلیهٔ گزاره‌های مطرح شده باید به‌روشنی درست یانادرست باشند.

دومین عامل اساسی دریک اثبات بابرهان خلف این‌است‌که استدلالهایی‌که درآن به‌کار می‌روند باید بی‌نقص باشند. تنهااگرچنین باشد، می‌توانیم مطمئن باشیم‌که دراثبات بابرهان خلف حلقهٔ نادرست درزنجیرهٔ برهان همان فرض اولیه‌است: P نادرست‌است.

یک لطیفهٔ قدیمی مربوط به‌سالن تأترمضمونش چیزی شبیه‌این است:

هنرپیشهٔ کمدی: تواینجا نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: چرند نگو، می‌بینی‌که هستم.

هنرپیشهٔ‌کمدی: تواینجا نیستی، بهت ثابت می‌کنم... ببین در ابرقوکه نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: نه‌نیستم.

هنرپیشهٔ‌کمدی: درقطب جنوب هم‌که نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: البته‌که نیستم.

هنرپیشهٔ‌کمدی: اگردابرقو یادرقطب جنوب نیستی، پس باید جای دیگه‌ای باشی.

هنرپیشهٔ جدی: البته‌که جای دیگه‌ای هستم!

هنرپیشهٔ‌کمدی: خوب، اگرجای دیگه‌ای هستی، پس نمی‌تونی اینجا باشی!

با چنین استدلالی سرگرم می‌شویم وهمه می‌توانیم عیب منطقی آن را ببینیم. ولی این امربرای مبتدیان دربرهان ریاضی، بی‌اعتمادی عمیقی نسبت به استفاده ازبرهان خلف به‌وجود می‌آورد. شاید چیزی نظیراین، به‌تصادف یاتردستی، درمیان اثبات رخ دهد. آیا وقتی برای اولین‌بار بااثبات‌گنگ بودن $\sqrt{2}$ مواجه شدید، بلافاصله و بدون هیچ شکی قانع شدید؟ این بی‌اعتمادی‌کاملاً بجاست: تنها راه برطرف‌کردن این بی‌اعتمادی اطمینان از بی‌عیب بودن منطق ریاضی است. بقیهٔ این فصل را به کاربرد دقیق زبان ریاضی و

اصطلاحات بنیادی درمنطق اختصاص می‌دهیم. و درفصل بعد به فنون اثبات ریاضی بازمی‌گردیم.

گزاره

به‌طوری‌که هم‌اکنون دیدیم، ضروراست هر گزاره‌ای‌که دریك‌اثبات ریاضی ارائه می‌شود به‌روشنی درست یا نادرست باشد.

چند نمونه عبارتند از:

(۱) $۲+۳=۵$.

(۲) کوچکترین‌کران بالای هرزیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathcal{R}$ یکتاست.

(۳) کران بالایی چون K برای $S=\{x\in\mathcal{R}|x<۱\}$ وجود داردکه $K<۱$

(۴) $\sqrt{۲}$ گنگ است.

در اینجا (۱)، (۲)، و (۴) درست هستند، ولی (۳) نادرست است. در ریاضیات، طبعاً، بیشترمایلیم گزاره‌هایی راموردبحث قراردهیم که درست هستند، نه‌آنهایی را که نادرستند، ولی به‌دلیل وجود برهانهای خلف وامثال‌آن، فعلاً بهتراست‌که آمدن هردوطرف سکه را مجازبدانیم.

برای تمایزبین‌گزاره‌های درست ونادرست، به‌هرگزاره یك ارزش درستی (یابه‌طور ساده، ارزش) قایل می‌شویم وآن‌را با t یا f که حروف اول معادلهای انگلیسی «درست» و «نادرست» هستند، نمایش می‌دهیم:

$t=\text{true}$، $f=\text{false}$. این‌گفته که‌گزاره‌ای دارای ارزش t است، صرفاً بیان فانتزی این مطلب است‌که‌گزاره درست است.

اگر P گزاره‌ای مفروض باشد، جملهٔ «P نادرست است» نیز یك گزاره است‌که ارزش آن مخالف ارزش درستی P است. مثلاً، اگر P گزارهٔ نادرست «$۵=۲+۲$» باشد، آنگاه «$۵=۲+۲$ نادرست است» گزاره‌ای درست‌است. دراصطلاح منطق، گزارهٔ «P نادرست است» رامعمولاً به‌صورت

$$\neg P$$

می‌نویسند ومی‌خوانند «چنین نیست که P». گرچه ممکن‌است وقتی‌گزاره‌ای واقعی جانشین P می‌شود، جملهٔ حاصل ازنظردستوری درست نباشد، ولی این مناسبترین نماد مختصربرای بیان این مطلب است. درمثال فوق، «چنین نیست‌که P» را این‌طورمی‌خوانیم «چنین‌نیست که $۵=۲+۲$». البته گزاره‌هایی معادل مانند «$۵=۲+۲$ نادرست است» یا «$۵\neq۲+۲$»، خوش‌آهنگ‌تر هستند. مرسوم است وقتی‌گزارهٔ «چنین نیست‌که p» را با کلمات بیان می‌کنیم، عبارت رابه‌نحومناسبی چنان تغییردهیم که روانترخوانده شود.

گزاره نما

در ریاضی یک نوع خیلی مهم حکم گزاره نماست که در فصل ۳ معرفی شد. یادآوری می‌کنیم که گزاره نما جمله‌ای است شامل یک نماد، مانند x، به‌طوری که وقتی عضوی از مجموعه‌ای چون X را جانشین x می‌کنیم، آن جمله یا به‌روشنی درست است یا به‌روشنی نادرست. «عدد حقیقی x از ۱ کوچکتر نیست» نمونه‌ای از یک گزاره نمای ریاضی است. اگر این گزاره نما را با $P(x)$ نمایش دهیم، آنگاه $P(۲)$ درست است، $P(۰)$ نادرست است، $P(\pi/۴)$ نادرست است، والی آخر؛ اگر ارزش $p(a)$ را به‌ازای هر $a\in\mathcal{R}$ بیابیم یک تابع ارزش $T_P: \mathcal{R} \rightarrow \{t, f\}$ به‌دست می‌آوریم که در آن $T_P(a)=t$ اگر $P(a)$ درست باشد، و $T_P(a)=f$ اگر $P(a)$ نادرست باشد.

این امر به‌نحو جالبی با ایده‌های مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها هماهنگی دارد. گزاره نمای $P(a)$، $\mathcal{R}$ را به‌دو زیرمجموعهٔ جدا ازهم افراز می‌کند، یکی شامل اعضایی است که به‌ازای آنها $P(x)$ درست‌است، ودیگری شامل اعضایی که به‌ازای آنها $P(x)$ نادرست است. مجموعهٔ اول را درنمادگذاری متداول با $\{x\in\mathcal{R} \mid P(x)\}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً، $\{x \in \mathcal{R} \mid x \geqslant ۱\}$ مربوط به‌حالتی‌است که هم‌اکنون توصیف شد. مجموعهٔ دیگر به‌صورت $\{x \in \mathcal{R} \mid \neg P(x)\}$ نوشته می‌شود و در مورد مثال فوق مجموعهٔ $\{x \in \mathcal{R} \mid x < ۱\}$ است.

این مثال آنچه را که درحالت کلی اتفاق می‌افتد نشان می‌دهد. به‌ازای هر گزاره‌نمای $P(x)$، یک تابع ارزش مانند فوق به‌دست می‌آید. آنگاه، به‌ازای $a \in S$، داریم

$a \in \{x \in S \mid P(x)\}$ اگر وفقط اگر $P(a)$ درست باشد،

$a \in \{x \in S \mid \neg P(x)\}$ اگر وفقط اگر $P(a)$ نادرست باشد.

به‌جای استفاده ازعبارات مبهمی چون «گزاره‌نمانوعی گزاره است که...» می‌توانیم از ایدهٔ «تابع ارزش» استفاده‌کنیم و با کمک نظریهٔ مجموعه‌ها هم تعریفی ارائه نماییم. ابتدا می‌توانیم بااین تعریف شروع کنیم که «هرتابع ارزش T_P روی مجموعه‌ای چون S تابعی است مثل $T_P : S \rightarrow \{t, f\}$». سپس چنین تعریف کنیم که «گزاره‌نمای $p(x)$ متناظر با T_P جمله‌ای است معادل با $`T_P(x)=t'$». تنها اشکال این روش این است که گزاره نماهای به‌ظاهر متفاوت توابع ارزش مساوی دارند:

$P_۱(x)$: «x یک کران بالای $\{s \in \mathcal{R} \mid s < ۱\}$ است»،

$P_۲(x)$: «$x \geqslant ۱$».

اثبات اینکه چنین گزاره نماهایی معادل هستند (یا، کلی‌تر بگوییم، درستی هر یک درستی دیگری راایجاب می‌کند)، کاراصلی ریاضیدانان راتشکیل می‌دهد. بنابراین گزاره‌نماهایی که ریاضیدانان درکارخود مورد استفاده قرارمی‌دهند ساختنی دارند که هم‌اکنون شرح آن گذشت. (برای توضیح این مطلب به‌خواننده، مؤلفین تقریباً درموقعیتی هستند که رنگ را تنها بااشاره‌کردن به‌چیزی و گفتن اینکه «این آبی است» توضیح بدهند. خوانندگان در موقعیت بهتری هستند: آنها تجربهٔ ریاضی نسبتاً زیادی دارند و لذا قادرند وقتی گزاره‌ای را می‌بینند آن را تشخیص بدهند!)

اگر در جمله‌ای بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، می‌توانیم بحث «گزاره‌نمای با دو متغیر»، یا با «سه متغیر»، وغیره را مطرح کنیم. مثلاً، جملهٔ «$x>y$» یک گزاره نمای با دو متغیر است (که آن را با $Q(x, y)$ نمایش می‌دهیم). اگر اعدادی حقیقی را جانشین x و y کنیم، یک گزاره به‌دست می‌آوریم. $Q(۳, ۲)$ درست است، و $Q(۷\frac{۱}{۴}, ۱۰+\sqrt{۲})$ نادرست است. در اینجا تابع ارزش را می‌توانیم به صورت $T_Q: \mathcal{R}\times\mathcal{R} \to \{t, f\}$ در نظر بگیریم که در آن $T_Q(x, y)=t$ اگر $Q(x, y)$ درست باشد، و $T_Q(x, y)=f$ اگر $Q(x, y)$ نادرست باشد.

به‌همین نحو می‌توانیم «$x^۲+y^۲=z$» را یک گزاره‌نمای با سه متغیر $x, y, z\in\mathcal{R}$ در نظر بگیریم که آن را با $R(x, y, z)$ نمایش می‌دهیم. تابع ارزش آن $T_R: \mathcal{R}\times\mathcal{R}\times\mathcal{R} \to \{t, f\}$ است، که در آن

$$T_R(x, y, z)=\begin{cases} t \text{ ، اگر } x^۲+y^۲=z \\ f \text{ ، اگر } x^۲+y^۲\neq z \end{cases}$$

درعمل، برخی از ریاضیدانان مجموعه‌ای را که گزاره به آن اشاره دارد همیشه به‌طور صریح ذکر نمی‌کنند و فرض می‌کنند که از فحوای کلام مشخص است. مثلاً، بدیهی است که گزارهٔ «$x>۳$» درمورد اعداد حقیقی است. فرض براین است که کسی تصور هم نمی‌کند چیزی را جانشین x کند که معنی نداشته باشد. به‌همین نحو، برای صرفه جویی در وقت، قراردادی است که همواره برای نمایش اعضایی ازمجموعه‌های مشخصی ازحروف معینی استفاده شود. مثلاً، n معمولاً برای نمایش عددی طبیعی به‌کارمی‌رود. از این‌رو، گزاره نمای «$n>۳$» را درمورد اعداد طبیعی درنظرمی‌گیرند. قبلاً هم مواردی از این قرارداد را دراین کتاب دیده‌ایم، مثلاً درتعریف همگرایی درصفحهٔ ۳۵ نوشتیم که:

دنباله‌ای چون (a_n) از اعداد حقیقی به‌حدی مانند l میل می‌کند اگر به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد که به ازای هر $n>N$، $|a_n-l|<\varepsilon$.

درهیچ کجای این‌تعریف به‌طورصریح ذکرنشده است که n عددی طبیعی است، ولی این به‌وضوح ازفحوای کلام پیداست. گرچه درابتدا ممکن است استفاده ازاین‌قرارداد مبین اندکی شلختگی درشیوه باشد، ولی دلیل خوبی برای‌آن وجود دارد. درریاضیات، هرچه صریحترصحبت شود به‌همان اندازه به‌نمادهای بیشتری نیازاست. طولانی کردن نوشته، آن چنان صفحه را ازنمادها وعلایم انباشته می‌کند که درک معنی اصلی مطلب، به دلیل حجم زیاد جزئیات، مشکل می‌شود. بنا براین‌انتخاب نمادگذاری مناسب که مفاهیم را تاحدامکان واضح ومختصر بیان کند، به‌سلیقه وشیوهٔ ریاضی‌نویسی نویسنده مربوط می‌شود.

هر و بعضی

اگر گزاره نمای مفروض $P(x)$ به‌ازای‌اعضای مجموعه‌ای چون S بامعنی باشد، می‌توانیم

جویا شویم که آیا به‌ازای همهٔ اعضای S درست، یا آنکه به‌ازای حداقل بعضی از اعضای S درست است. دراین صورت می‌توانیم گزاره‌های «به ازای همهٔ اعضای S ، $x \in S$ ، $P(x)$ درست است» و یا «به‌ازای بعضی از اعضای S ، $x \in S$ ، $P(x)$ درست است» را بسازیم. این گزاره‌ها می‌توانند گزاره‌هایی درست یا نادرست باشند. این گزاره‌ها را می‌توانیم با استفاده از علامتهایی موسوم به «سورعمومی» $\forall$ و «سوروجودی» $\exists$ به‌صورت نمادهای ریاضی هم بنویسیم.

$\forall x \in S : P(x)$ ، را می‌خوانیم «به‌ازای همهٔ اعضای S ، $x \in S$ ، $P(x)$».

$\exists x \in S : P(x)$ ، را می‌خوانیم «(دست‌کم) یك $x \in S$ وجود دارد که $P(x)$».

اگر گزاره‌نمای $P(x)$ به ازای همهٔ اعضای $x \in S$ درست باشد، آنگاه گزارهٔ $\forall x \in S : P(x)$ درست است، ودرغیراین صورت نادرست. ازسوی دیگر، هرگاه $P(x)$ به‌ازای دست‌کم یك $x \in S$ درست باشد، آنگاه‌گزارهٔ $\exists x \in S : P(x)$ درست است، و درغیراین صورت نادرست. نماد $\forall x \in S : P(x)$ را می‌توانیم به صورت «به ازای همهٔ $x \in S$ ، $P(x)$» یا «به‌ازای هر $x \in S$ ، $P(x)$» یا با هرجمله‌ای که از لحاظ دستوری معادل آنها باشد، بخوانیم. به‌همین نحوگزارهٔ $\exists x \in S : P(x)$ را می‌توانیم به صورتهای گوناگونی چون «xی در S هست که $P(x)$»، «به ازای بعضی از $x \in S$ ، $P(x)$» وغیره بخوانیم.

قابل تذکراست که گزارهٔ «به ازای بعضی از $x \in S$ ، $P(x)$» دارای این معنای ضمنی نیست که عضوی مانند $x \in S$ هست که به‌ازای آن $P(x)$ نادرست است. در زبان محاوره‌ای، در گفته‌ای نظیر

«بعضی از سیاستمداران صالح هستند»

این معنا مستتراست که سیاستمدارانی هم هستند که صالح نیستند. گزاره‌های ریاضی دارای چنین تعبیرهایی نیستند. گزارهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم:

«بعضی‌ازاعداد ۳۶۷۷، ۶۰۱، ۱۹، ۲۵۷، ۱۱۱۱۹، ۷۵۵۹، ۱۲۶۵۳ اول هستند»

به‌سهولت دیده می‌شود که ۱۹ اول است، ولذا این‌گزاره درست است. بااین حقیقت که همهٔ اعداد دیگرهم اول هستند این حکم بی‌اعتبارنمی‌شود. ازطرف دیگر، «بعضی» ممکن است معنی تنها یکی را داشته باشد؛ مثلاً گزارهٔ

«بعضی ازاعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ زوج هستند»

راگزاره‌ای درست تلقی می‌کنیم. این امر بررسی درستی $\exists x \in S : P(x)$ را بسیارساده می‌کند: تنهاکافی است یك مقدار برای x پیداکنیم که به‌ازای‌آن $P(x)$ درست باشد.

چند مثال. (۱) $\forall x \in \mathcal{R} : x^2 \geqslant 0$ به‌این‌معنی‌است که «به‌ازای هر $x \in \mathcal{R}$ ، $x^2 \geqslant 0$» یا «مربع هرعدد حقیقی، نامنفی است» یا جملات دیگری که از لحاظ دستوری معادل اینها باشند. این گزاره صادق است.

(۲) $\exists x \in \mathcal{R}: x^2 \geqslant 0$ را می‌خوانیم «xی در $\mathcal{R}$ هست که $x^2 \geqslant 0$» یا «عددی حقیقی وجود دارد که مربع آن نامنفی است». این نیز درست است.

(۳) $\forall x \in \mathcal{R}: x^2 > 0$ نادرست است (زیرا $0^2 \ngtr 0$).

(۴) $\exists x \in \mathcal{R}: x^2 > 0$ درست‌است (زیرا $1^2 > 0$. دراین مورد علاوه بر ۱ اعضای بسیاردیگری هم در $\mathcal{R}$ وجود دارند که این مطلب را نشان می‌دهند.)

(۵) $\exists x \in \mathcal{R}: x^2 < 0$ نادرست است.

اگر نماد x درسراسر یك گزاره سوردار را با نماد دیگری عوض کنیم، آنگاه گزارهٔ جدید را معادل گزارهٔ قبلی تلقی می‌کنیم.

$\exists x \in S: P(x)$ همان معنی $\exists y \in S: P(y)$ را دارد.

$\forall x \in S: P(x)$ همان معنی $\forall y \in S: P(y)$ را دارد.

مثلاً، $\exists x \in \mathcal{R}: x^2 > 0$ معادل $\exists y \in \mathcal{R}: y^2 > 0$ است. هردو گزاره بیان می‌کنند که «عددی حقیقی وجود دارد که مربع آن مثبت است».

بیش از یك سور

اگر گزاره نمایی با دو یا بیشتر متغیر دردست باشد، آنگاه می‌توانیم برای هرمتغیر یك سور به کار ببریم. مثلاً، اگر $P(x, y)$ گزاره نمای «$x+y=0$» باشد، آنگاه گزارهٔ $\forall x \in \mathcal{R} \exists y \in \mathcal{R}: P(x, y)$ را می‌خوانیم «به ازای هر $x \in \mathcal{R}$، یك y در $\mathcal{R}$ هست که $x+y=0$». درمنطق، متداول است که همهٔ سورها را درجلوی گزاره نما بگذاریم و آنها را به‌همان ترتیب نوشته شده بخوانیم؛ مثلاً، $\exists y \in \mathcal{R} \forall x \in \mathcal{R}: P(x, y)$ را می‌خوانیم «یك y در $\mathcal{R}$ هست که به‌ازای هر $x \in \mathcal{R}$، $x+y=0$». رعایت ترتیب مهم‌است. از دو گزارهٔ فوق، $\forall x \in \mathcal{R} \exists y \in \mathcal{R}: P(x, y)$ درست است (زیرا به‌ازای هر $x \in \mathcal{R}$، می‌توانیم $y=-x$ اختیار کنیم که $x+y=0$ به‌دست آید)، ولی $\exists y \in \mathcal{R} \forall x \in \mathcal{R}: P(x, y)$ نادرست است، زیرا این گزاره ازوجود یك y در $\mathcal{R}$ خبر می‌دهد که به ازای هر $x \in \mathcal{R}$، در $x+y=0$ صدق می‌کند. هیچ مقداری از y چنین خاصیتی ندارد. تشخیص صحیح ترتیب سورها دراین نوع گزاره‌ها، یك بخش اساسی از تفکر ریاضی صحیح است. نادرست تشخیص دادن ترتیب یك اشتباه معمول است (ومختص مبتدیان هم نیست). یکی ازموارد بروز این مسئله وقتی است که بخواهیم گزاره‌ای را که احتمالاً ازلحاظ منطقی روشن است با زبان خشك ریاضی بیان کنیم. ترتیب کلمات را، گاهی به‌قیمت‌ازدست دادن وضوح منطقی، طوری تغییرمی‌دهیم که جمله‌ای خوش‌آهنگ‌تر به‌دست‌آید. به‌خصوص به‌جای اینکه همهٔ سورها را دراول جمله بیاوریم، آنها را درمیان جمله درج می‌کنیم. (ما قبلاً، درچند سطر بالاتر، وقتی که نوشتیم «... این گزاره از وجود یك y در $\mathcal{R}$ خبرمی‌دهد که به‌ازای هر $x \in \mathcal{R}$، در $x+y=0$ صدق می‌کند» خود نیزاین کاررا کردیم!) گزارهٔ زیررا درنظرمی گیریم:

«هرعددگویای ناصفریك وارون گویا دارد».

منظوراز این گزاره این است که «اگر $x \in \mathcal{Q}$، و $x \neq 0$، مفروض باشد، عضوی مانند $y \in \mathcal{Q}$ وجود دارد که $xy = 1$». این گزاره البته درست است: اگر $x = p/q$ که در آن p و q اعداد صحیح هستند و $p \neq 0$، $q \neq 0$، آنگاه $y = q/p$. این گزاره را به زبان منطق چنین می‌نویسیم:

$$«\forall x \in \mathcal{Q} \, (x \neq 0) \, \exists \, y \in \mathcal{Q} : xy = 1» .$$

یك ریاضیدان ممکن است برای نقل همان ایده ترتیب کلمات را عوض کند و بگوید «یك وارون گویا به‌ازای هرعددگویای ناصفروجود دارد» البته بیان این گونه گزاره‌ها می‌تواند باعث سوء تعبیرهم بشود. اگر دقت شود که معنای ریاضی مکتوب تا حد امکان روشن و صریح باشد، به‌حل مشکل کمك می‌شود.

تنها هنگامی درنوشتن گزاره‌ها ابهام رخ می‌دهد که سورهای به‌کار رفته متفاوت باشند. اگرسورها ازیك نوع باشند، چنین مسئله‌ای وجود ندارد. مثلاً، اگر گزاره نمای $P(x,y) : «(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2»$ مفروض باشد، آنگاه هردو گزارهٔ

$$\forall x \in \mathcal{R} \; \forall y \in \mathcal{R} : P(x, y)$$

و

$$\forall y \in \mathcal{R} \; \forall x \in \mathcal{R} : P(x, y)$$

به‌معنی «به ازای هر x و y در $\mathcal{R}$، $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» خواهند بود، ومسلماً درست. اگرمتغیرهای مورد بحث نظیرمورد فوق ازیك مجموعه باشند معمولاً نمادگذاری راساده می‌کنیم ومی‌نویسیم $\forall x, y \in \mathcal{R} : P(x, y)$. همین مطالب برای سوروجودی نیز برقرارند. مثلاً، اگر $Q(x, y)$ عبارت «x و y گنگ هستندو $x+y$ گویا» باشد، آنگاه این

$$\exists y \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} \; \exists x \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} : Q(x,y) \quad \text{و} \quad \exists x \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} \; \exists y \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} : Q(x, y)$$

هردو بیان می‌کنند که «دوعدد حقیقی x و y وجود دارند که گنگ هستند ولی مجموع آنها گویاست». (این گزاره درست است، زیرا $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ گنگ هستند، ولی 0 گویاست). این گزاره را می‌توان چنین نیزنوشت $\exists x, y \in \mathcal{R} - \mathcal{Q} : Q(x, y)$.

یك خطر جزئی دیگرهم درریاضی مکتوب وجود دارد وآن این است که سورعمومی همیشه به‌طورصریح نوشته نمی‌شود؛ وغالباً باید ازفحوای کلام استنباط شود. نگاهی دیگر به‌تعریف همگرایی دنباله درصفحهٔ ۳۵ بیفکنیم:

یك دنباله از اعداد حقیقی به حدی مانند l میل می‌کند اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر $n > N$، $|a_n - l| < \varepsilon$.

این جمله بیش ازحد لازم طولانی است و ریاضیدانان سعی می‌کنند به‌طریقی این

گزافه‌گویی را تا حد امکان کوتاه کنند. یکی از کلمات کوچکی که حذف می‌شود «هر» است. یك بیان متداول برای تعریف $a_n \to l$ این‌است که:

بافرض $\varepsilon > 0$، Nی هست که $n > N$ ایجاب می‌کند $|a_n - l| < \varepsilon$.

باا ندکی تفاوت، بیانهای دیگری هم برای این تعریف وجود دارند، ولی دراصل همهٔ آنها به یك معنا هستند. اگراین مطلب را درك کنید، دردرك ماهیت مسئلهٔ تفاهم مطالب ریاضی با دقتی مناسب، قدم بزرگی برداشته‌اید.

نقیض یک‌گزاره

درصفحهٔ ۱۲۳ نقیض گزارهٔ P را، که با $\neg P$ نمایش داده می‌شود، معرفی کردیم.

ارزش $\neg P$ را می‌توان درجدول زیر(به‌نام جدول ارزش) نشان داد:

P	$\neg P$
t	f
f	t

بامطالعهٔ هرسطر، این‌جدول صرفاً بیان می‌کند که وقتی P درست باشد، $\neg P$ نادرست است، وبرعکس. نماد $\neg$ ناقض نامیده می‌شود زیرا باتغییرمعنی وارزش، گزاره راعوض می‌کند.

به همین نحو بااستفاده از $\neg$ می‌توان نقیض یك گزاره‌نما را به دست آورد. اگر $P(x)$ گزاره نمای «$x > 5$» باشد، آنگاه $\neg P(x)$ گزاره نمای «$x > 5$ نادرست است» ، یا به‌طورمعادل «$x \not> 5$» ، است.

نقیض یك گزارهٔ شامل سور مارا به مورد جالبی رهنمون می‌کند. به‌آسانی دیده می‌شود که «$\forall x \in S : P(x)$ نادرست است» چیزی نیست جز «$\exists x \in S : \neg P(x)$» . (اگراین مطلب نادرست باشد که $P(x)$ به ازای هر $x \in S$ درست است، آنگاه باید xی در S وجود داشته باشد که به ازای‌آن $P(x)$ نادرست، ودرآن صورت $\neg P(x)$ درست باشد.) این‌مطلب را می‌توان با استفاده ازنمادها چنین نوشت:

(۱) $\neg \forall x \in S : P(x)$ ، هم معنی $\exists x \in S : \neg P(x)$ است.

همچنین

(۲) $\neg \exists x \in S : P(x)$ ،هم معنی $\forall x \in S : \neg P(x)$ است.

جملهٔ دوم بیان می‌کند که وقتی می‌گوییم «هیچ xی وجود ندارد که به‌ازای آن $P(x)$ درست باشد» مثل این‌است که بگوییم «به‌ازای هر $x \in S$ ، $P(x)$ نادرست‌است» .

به‌عنوان مثالی ازمورد (۲)، داریم:

$\neg \exists x \in \mathcal{R} : x^2 < 0$ . . . هیچ xی در $\mathcal{R}$ نیست که $x^2 < 0$.

$\forall x \in \mathcal{R} : \neg (x^2 < 0)$ . . . هر $x \in \mathcal{R}$، در $x^2 \nless 0$ صدق می‌کند.

این دو اصل ساده دراستدلال ریاضی ازاهمیتی اساسی برخوردارند. روشنتر بگوییم، اولی بیان می‌کند «برای اینکه نشان دهیم گزاره نمای $P(x)$ به ازای هر $x \in S$ درست نیست، کافی است xی بیابیم که به ازای آن $P(x)$ نادرست باشد». دومی حکم می‌کند «برای اینکه نشان دهیم هیچ xی در S نیست که به‌ازای آن $p(x)$ درست باشد، لازم است ثابت کنیم که به‌ازای هر $x \in S$، $P(x)$ نادرست‌است».

قاعدهٔ عملی فوق برای به‌دست آوردن نقیض جمله‌های سوردار هنگامی ارزش واقعی خود را نشان می‌دهد که چندین سور درکار باشند. مثالی از این نوع، تعریف همگرایی دنباله‌هاست که درنمادگذاری منطقی چنین است:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N (|a_n - l| < \varepsilon).$$

برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ (a_n) به حد l میل نمی‌کند، باید درستی نقیض این گزاره، یعنی

$$\neg [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{N} \forall n > N (|a_n - l| < \varepsilon)],$$

را ثابت کنیم. با استفاده ازاصول (۱) و (۲)، این گزاره متوالیاً چنین می‌شود:

$$\exists \varepsilon > 0 \neg [\exists N \in \mathcal{N} \forall n > N (|a_n - l| < \varepsilon)]$$

وسپس

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathcal{N} \neg [\forall n > N (|a_n - l| < \varepsilon)],$$

وآنگاه

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathcal{N} \exists n > N \neg (|a_n - l| < \varepsilon)$$

که سرانجام به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathcal{N} \exists n > N (|a_n - l| \nless \varepsilon).$$

برای اینکه ثابت کنیم (a_n) به l میل نمی‌کند، باید ثابت کنیم که گزارهٔ آخر درست است، یعنی باید نشان دهیم εی مثبت هست که به ازای هرعدد طبیعی N همیشه عدد طبیعی بزرگتری از آن چون n وجود دارد که $|a_n - l| \nless \varepsilon$. بیشتر دشواری درموضوعی چون آنالیز ریاضی سروکار داشتن با گزاره‌هایی ازاین قبیل است. با کمی تجربه و تمرین و با همواره به‌خاطرسپردن سورها می‌توان بردشواری فایق آمد.

دستور منطقی: رابطها

در ریاضیات از حروف ربط استاندارد مانند «و»، «یا»، و غیره با معانی کاملاً خاصی استفاده می‌کنیم. مثلاً، «یا» را به‌معنی «شمولی» آن به‌کار می‌بریم. منظور این است که اگر P و Q دو گزارهٔ مشخصی باشند، آنگاه P یا Q گزاره‌ای است که آن را درست می‌دانیم هرگاه یکی یا هردو گزارهٔ P و Q درست باشند. این مطلب را می‌توان با جدول ارزش زیر نشان داد:

P	Q	$P \vee Q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

جدول را درسطرهای افقی آن می‌خوانیم. مثلاً، سطر دوم بیان می‌کند که اگر P درست و Q نادرست باشد، آنگاه P یا Q درست است.

حروف ربط دیگری که در ریاضیات دائماً به‌کار می‌روند عبارتند از «و»، «دلالت دارد بر»، و «اگر و فقط اگر». به‌این حروف ربط نمادهای مناسبی هم نسبت داده می‌شود: & (و)، $\Rightarrow$ (دلالت دارد بر)، $\Longleftrightarrow$ (اگر و فقط اگر). جداول ارزش آنها به صورت زیر است:

P	Q	$P \& Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

P	Q	$P \Rightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

این جداول نیز به‌همان صورت فوق خوانده می‌شوند. اولی و آخری نسبتاً واضح هستند. $P \& Q$ را تنها وقتی درست می‌دانیم که P و Q هردو درست باشند، $P \Longleftrightarrow Q$ را تنها وقتی درست می‌دانیم که ارزش P و Q مساوی باشند. جالب توجه جدول $P \Rightarrow Q$ است. اگر P درست باشد، آنگاه سطرهای اول و دوم بیان می‌کنند که استلزام $P \Rightarrow Q$ درست

است درصورتی که Q نیزدرست باشد، ونادرست‌است درصورتی کـه Q نـادرست باشد. این امر نشان می‌دهدکه درستی $P \Rightarrow Q$ به‌این معنی است که اگر P درست باشد، آنگاه Q نیزباید درست باشد. این همان تعبیرعادی علامت استلزام $\Rightarrow$ است، وبه‌این‌دلیل $P \Rightarrow Q$ اغلب به‌صورت «اگر P، آنگاه Q» تعبیرمی‌شود.[۱] ولی درحالتی‌که P نادرست باشد چی؟ سطرهای سوم وچهارم بیان می‌کنندکـه چه Q درست بـاشد و چه نادرست، $P \Rightarrow Q$ را درست می‌دانیم. فلسفه بافیهای بسیاری درمورد این مطلب وجود دارد. «چطورنادرستی P می‌تواند دلالت بردرستی Q باشد؟» دلیل این امررا می‌توان دراستفادهٔ متعارف ریاضیات از رابطها، در ارتباط بـا گزاره نماها بـه جای گزاره‌ها، دیـد. اگـر $P(x)$ و $Q(x)$ دوگزاره نمای هردو درست به‌ازای $x \in S$ باشند، آنگاه بااستفاده ازرابطها به‌شیوهٔ فوق، می‌توان گزاره‌نماهایی چون $P(x) \vee Q(x)$ ، $P(x) \ \& \ Q(x)$، و غیره را به دست آورد. به خصوص گزاره نمای $P(x) \Rightarrow Q(x)$ با همان جـدول ارزش فوق را هم داریم. گاهی گزاره نمای $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به ازای همهٔ $x \in S$ درست است. دراین حالت است‌که این جدول، ارزش خودرا نشان می‌دهد. مثلاً، هرگاه $P(x)$ گزاره نمای «$x > ۵$» و $Q(x)$ گزاره نمای «$x > ۲$» بـاشد، آنگاه همـهٔ ریاضیدانان دراین نکته اتفاق نظردارند کـه $P(x) \Rightarrow Q(x)$ درست است، البته بعضی این گـزاره‌نما را چنین می‌خوانند «اگر $x > ۵$، آنگاه $x > ۲$»، وعلاقه‌ای‌هم به‌آنچه‌که درحالت $x \not> ۵$ رخ می‌دهد ندارند. حال مقادیر مختلفی به‌جای x می‌گذاریم ونتیجه را بررسی می‌کنیم:

اگر $x = ۴$، آنگاه $P(۴)$ نادرست‌است و $Q(۴)$ درست.

اگر $x = ۱$، آنگاه $P(۱)$ نادرست‌است و $Q(۱)$ هم نادرست.

اینها، دقیقاً سطرهای سه وچهار جدول ارزش « $\Rightarrow$» هستند، ونشان می‌دهندکـه این جدول ارزش چگونه به‌دست می‌آید. با این تعبیر، این جدول ارزش را می‌توان بـه‌صورت زیر به‌وجه بهتری توصیف کرد:

«$P \Rightarrow Q$ درست است»

به‌این معنی که

(الف) «اگر P درست باشد، آنگاه Q نیز باید درست باشد» ،

ولی

(ب) «اگر P نادرست باشد، آنگاه Q ممکن است درست یا نادرست باشد، ودر

---

۱. جدولی‌که مؤلف برای گزارهٔ $P \Rightarrow Q$ درنظرگرفته‌است برای گزارهٔ شرطی «اگر P آنگاه Q» به‌کار می‌رودکه P مقدم نام دارد و Q تالی آن. حال آنکه از نماد $P \Rightarrow Q$ تنها موقعی استفاده می‌شودکه گزارهٔ شرطی $P \Rightarrow Q$ همواره درست (یعنی بنا به تعریف صفحهٔ ۱۳۹ یك توتولوژی) باشد، که در این صورت درستی P باید درستی Q را ایجاب‌کند. نماد $\Rightarrow$ بـا این معنا «استلزام» نامیده می‌شود. همین تذکر در مورد گـزارهٔ دوشرطی $P \Leftrightarrow Q$ نیـز صـادق است و رابطهٔ آن بـا $P \Leftrightarrow Q$ ـم.

این حالت هیچ حکمی نمی‌توان کرد».

رابطهای دیگری نیز وجود دارند مثلاً «یای مانع جمع» (که دراینجا با $\veebar$ نمایش داده می‌شود) باجدول ارزش:

P	Q	$P \veebar Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

$P \veebar Q$ درست است درصورتی‌که یکی ازدو گزارهٔ P یا Q، ولی نه هردو باهم، درست باشند.

اصولاً می‌توان جدولهای ارزش رابطهای دیگررا نیزنوشت، ولی این جدولها را می‌توان ازترکیب جدولهای ارزش قبلی به‌دست آورد. مثلاً، یای مانع جمع موجود در گزارهٔ $P \veebar Q$ را می‌توان با استفاده ازگزارهٔ $(P \vee Q) \,\&\, \neg(P \,\&\, Q)$ نیزتوصیف کرد. این مطلب را با تفصیل بیشتر دربخش «فرمولهای گزاره‌های مرکب» مورد بحث قرار خواهیم داد.

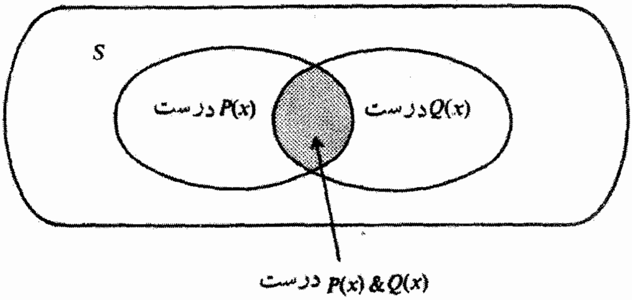
ریاضیدانان برای نوشتن مطالب ریاضی، ازنظرشیوهٔ نگارش خودرا به‌استفاده از رابطهایی‌که هم اینک توصیف شد محدود نمی‌کنند. آنها بنابه‌سلیقه از رابطهای دستوری نظیر «ولی»، «چون»، «زیرا» و غیره هم استفاده می‌کنند. این رابطها را باید به همان معانی دستوری کلمات داده شده تعبیرکرد. مثلاً، جدول ارزش «P ولی Q» همان جدول ارزش «$P \& Q$» است. گزارهٔ «$\sqrt{2}$ گنگ است ولی $(\sqrt{2})^2$ گویاست» همان معنی را داردکه «$\sqrt{2}$ گنگ است و $(\sqrt{2})^2$ گویاست». به همین ترتیب «P زیرا Q» و «P چون Q» همان جدول ارزش «$Q \Rightarrow P$» را دارند. خوانندگان می‌توانند با بررسی چند مثال خودرا بااین مترادفها مأنوس سازند. (تمرینهای آخرفصل را ملاحظه‌کنید.)

ارتباط بانظریهٔ مجموعه‌ها

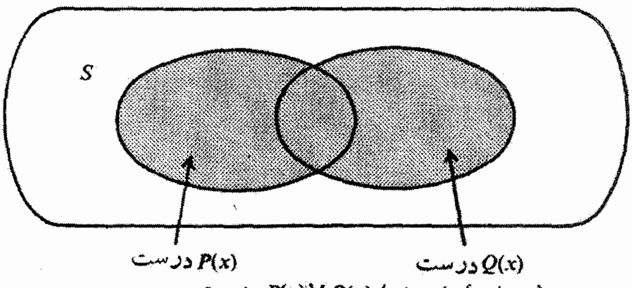
اگررابطها وناقض $\neg$ را برگزاره نماهای یک متغیری اعمال‌کنیم، آنگاه درارتباط با نمادگذاری نظریهٔ مجموعه‌ها رابطهٔ ساده‌ای به‌دست می‌آوریم. فرض‌کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دوگزاره نمای معتبرروی مجموعه‌ای چون S باشند وبه زیرمجموعه‌هایی توجه‌کنیم که

درمورد آنها ترکیبهای گوناگونی ازاین گزاره‌ها درست هستند. به‌ازای «&» داریم:

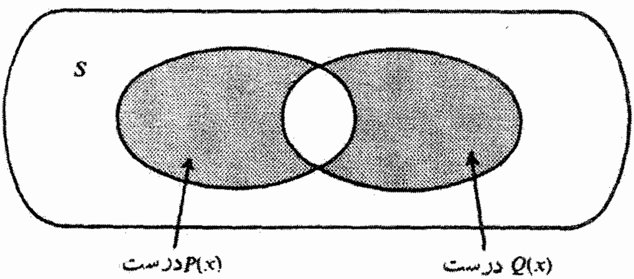
$$\{x \in S | P(x) \,\&\, Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cap \{x \in S | Q(x)\}$$



همچنین $\{x \in S | P(x) \vee Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cup \{x \in S | Q(x)\}$

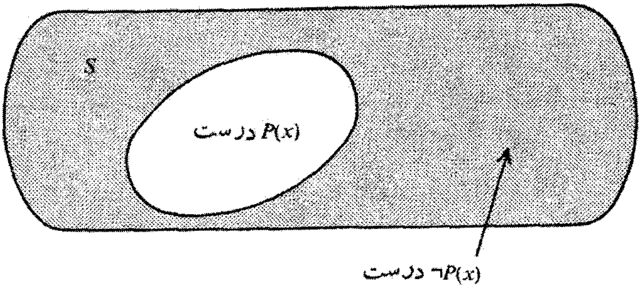


این یکی از دلایلی است که «V یای شمولی» را در تناظر با اجتماع مجموعه‌ها به‌کار می‌بریم و نه «V یای مانع جمع» راکه درتناظر با چیزی است که در نظریهٔ مجموعه‌ها «تفاضل متقارن» نامیده و با ناحیهٔ سایه‌دار نمودار زیر نمایش داده می‌شود:



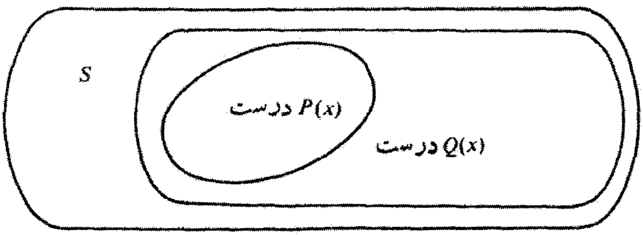
اعمال ناقض $\neg$ بر تنها گزاره نمای $P(x)$ متناظر است بـا عمل متمم گیری در نظریهٔ مجموعه‌ها:

$$\{x \in S | \neg P(x)\} = S - \{x \in S | P(x)\}.$$



هنگام بـررسی استلزام $P(x) \Rightarrow Q(x)$ با اندك تفاوتی به‌وضعیت نگاه می کنیم. ما درواقع تنها به موردی علاقه‌مندیم که $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به‌ازای همهٔ xها درست بـاشد. در ایـن مورد، اگـر $P(x)$ درست بـاشد، $Q(x)$ نیز بـایـد درست بـاشد، یعنی اگـر $a \in \{x \in S \mid P(x)\}$ آنگـاه $a \in \{x \in S \mid Q(x)\}$ کـه بـه ایـن معنی است کـه $\{x \in S | P(x)\} \subseteq \{x \in S | Q(x)\}$. درستی گزارهٔ $P(x) \Rightarrow Q(x)$ متناظر است بـا شمول مجموعه‌ها[1]:

درستی $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به‌ازای همهٔ $x \in S$:



به‌همین ترتیب $P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ به‌ازای هر $x \in S$ درست است اگر وفقط اگر

$$\{x \in S | P(x)\} = \{x \in S | Q(x)\}.$$

---

۱. یکبار دیگر پانوشت صفحهٔ ۱۳۲ مطرح می‌شود. $P(x) \Rightarrow Q(x)$ تنهـا وقتـی نظیر شمول مجموعه‌هاست که سطر اول جدول مذکور درصفحهٔ ۱۳۱ برای $\Rightarrow$ مورد نظر باشد. ـــ م.

فرمول گزاره‌های مرکب

با استفاده از رابطها و ناقض‌ها می‌توان از گزاره‌ها و گزاره نماهای مفروضی گزاره‌ها و گزاره‌نماهای پیچیده‌تری به‌دست آورد، مثلاً، $(P \& Q) \vee R$. این گزاره شامل سه گزاره است وجدول ارزشش $۸ = ۲^۳$ سطر دارد:

			محاسبهٔ میانی	
P	Q	R	$P \& Q$	$(P \& Q) \vee R$
t	t	t	t	t
t	t	f	t	t
t	f	t	f	t
t	f	f	f	f
f	t	t	f	t
f	t	f	f	f
f	f	t	f	t
f	f	f	f	f

توجه داریدکه نماد «$(P \& Q) \vee R$» درواقع دستورالعملی برای تشکیل گزاره یا گزاره نمای جدیدی است از سه گزاره یا گزاره نمای مفروض. برای تأکید براین مطلب، وقتی که P، Q، و R گزاره یا گزاره نماهای نامشخصی باشند آن را یك فرمول گزاره‌ای مرکب می‌نامیم. هرگاه گزاره‌های مشخصی به‌جای P، Q، و R قرار گیرند، مثلاً

$$(۲>۳ \;\&\; ۲>۶) \vee (۲>۱),$$

به آن نام گزارهٔ مرکب می‌نهیم. وهمچنین هرگاه از گزاره نماهای مشخصی استفاده کنیم، آن‌را یك گزاره نمای مرکب می‌نامیم. مثلاً

$$(x>۳ \;\&\; x>۶) \vee (x>۱)$$

یك گزاره نمای مرکب است.

قسمت قابل ملاحظه‌ای ازهراثبات ریاضی متضمن کلنجار رفتن با گزاره‌ها و گزاره‌نماهای مرکب‌است. هنگام تشکیل این فرمولها، غالباً برای نمایش چگونگی ساخت آنها، استفاده از پرانتز الزامی است. مثلاً، $(P \& Q) \vee R$ با $P \& (Q \vee R)$ فرق دارد. درواقع، باتوجه به‌سطرهفتم جدول ارزش فوق داریم: اگر P نادرست، Q نادرست، و R درست باشد، آنگاه $(P \& Q) \vee R$ درست‌است؛ ولی محاسبه نشان می‌دهدکه دراین‌حالت $P \& (Q \vee R)$ نادرست است. این مطلب درموردگزاره نماها نیزصادق است. لذا هرگاه

امکان اشتباه وجود داشته باشد، باید دقت شودکه پرانتزها در جای مناسب قرار گیرند. (گاهی حذف پرانتزمجازاست. مثلاً، $(P \& Q) \& R$ همان جدول ارزش $P \& (Q \& R)$ را دارد، ولذا اگربنویسیم $P \& Q \& R$ مسئله‌ای ایجاد نمی‌شود).

در تشکیل فرمولهای گزاره‌ای مرکب با استفاده از چند رابط وناقض، اغلب به فرمولهایی دست می‌یابیم که ظاهراً باهم فرق دارند، ولی جدول ارزششان یکسان‌است. مثلاً، $P \Rightarrow Q$ و $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

P	Q	محاسبات میانی $\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
t	t	f	f	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	t
f	f	t	t	t

یا صرف نظرازمحاسبات میانی،

P	Q	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

دراین مورد، این فرمولهای گزاره‌ای مرکب را منطقاً معادل می‌خوانیم.

اگردوفرمول گزاره‌ای مرکب را با S_1 و S_2 نمایش دهیم، برای تعادل منطقی آنها می‌نویسیم

$$S_1 \equiv S_2 .$$

مثلاً، نتیجهٔ فوق‌را می‌توان به‌صورت

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

هم بیان کرد.

نکتهٔ جالب توجه درمورد فرمولهای گزاره‌ای مرکب این است که گاهی می‌توان دوتا ازآنها راکه ازنمادهای متفاوتی هم تشکیل می‌شوند معادل دانست. این امر هنگامی اتفاق می‌افتدکه تغییر ارزش یکی ازنمادها اثری در نتیجهٔ نهایی نداشته باشد. مثلاً، $P \,\&\, (\neg P)$ همیشه نادرست است. با محاسبهٔ جدول ارزش $(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$، داریم :

P	Q	$(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$
t	t	f
t	f	t
f	t	f
f	f	t

لذا ارزش «$(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$» همواره مساوی‌ارزش $\neg Q$ است وبستگی به‌ارزش P ندارد. یك راه مشاهدهٔ این مطلب، که نمونه‌ای واقعی ازاخوت ریاضی است، این‌است که $\neg Q$ را تابعی ازهردوگزارهٔ P و Q بدانیم، ولذا جدول ارزشش می‌شود:

P	Q	$\neg Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	f
f	f	t

باتوجه به‌این ابزارصوری، مجازیم بنویسیم

$$\neg Q \equiv (P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)\,.$$

یك فرمول گزاره‌ای مرکب‌را توتولوژی می‌نامند درصورتی‌که همواره، وبدون‌توجه به‌ارزش نمادهای گزاره‌ای مربوط، درست باشد. مثالهایی ازآن عبارتند از:

(یك) $P \vee (\neg P)$ ،

(دو) $P \Rightarrow (P \vee Q)$ ،

(سه) $(P \,\&\, Q) \Rightarrow P$ ،

(چهار) $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

خواننده باید بررسی‌کندکه ستون‌آخرجدول ارزش اینها تنها شامل‌ارزش t است.

هرگاه یك فرمول گزاره‌ای مرکب، به‌ازای هرارزشی‌که نمادهای گزاره‌ای مربوط داشته باشند، همواره‌ارزش f رابپذیرد، آنگاه‌آن‌رایك تناقض می‌نامند. مثلاً، $P \,\&\, (\neg P)$ یك تناقض است.

هردو توتولوژی منطقاً معـادل هستند، وهمچنین هردو تناقض منطقاً معـادل هستند. علاوه براین، یـك فرمول گزاره‌ای مرکب چون S توتولوژی است اگر وفقط اگر $\neg S$ تناقض باشد.

استفاده از نماد T برای یـك توتولوژی و C برای یك تناقض مناسب است. حال چند نتیجهٔ جالب به‌دست می‌آوریم. مثلاً، $(\neg P) \Rightarrow C$ منطقاً معادل P است. جدول ارزش آنها ازاین قراراست

P	P
t	t
f	f

P	$(\neg P) \Rightarrow C$
t	t
f	f

(برای محاسبهٔ جدول سمت چپ، به‌خاطرداشته باشیدکه ارزش C همیشه f است.)

اگر یك تناقض مشخصی، مثلاً $Q \,\&\, (\neg Q)$ ، را به‌جای C بگذاریم بازهمان نتیجه حاصل می‌شود:

P	Q	P
t	t	t
t	f	t
f	t	f
f	f	f

P	Q	$(\neg P) \Rightarrow (Q \,\&\, (\neg Q))$
t	t	t
t	f	t
f	t	f
f	f	f

خواننده باید تمام محاسبات میانی در جدول سمت چپ را انجام دهد تا بصیرتی درمورد آنچه که می‌گذرد به‌دست‌آورد.

برای بررسی تعادل منطقی دوفرمول گزاره‌ای مرکب S_1 و S_2، به جای مقایسهٔ دوجدول ارزش مربوط، می‌توان فقط جدول $S_2 \Longleftrightarrow S_1$ را بررسی کرد. اگر S_1 منطقاً معادل S_2 باشد، آنگاه $S_2 \Longleftrightarrow S_1$ یك توتولوژی است، و برعکس. مثلاً، تعادل منطقی $P \Rightarrow Q$ و $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ متناظر با این امر است که $[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)]$ یك توتولوژی است.

استنتاج منطقی

شیوهٔ کلی در اثبات غالباً این نیست که صدق گزارهٔ مفروضی را اثبات کنیم، بلکه این است که درستی گزاره‌ای را که منطقاً معادل آن است ثابت کنیم. نمونه‌هایی مهم به شرح زیرند:

(۱) عکس نقیض $P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. برای اثبات درستی $P \Rightarrow Q$، صدق $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ رانشان می‌دهیم.

(۲) اثبات با برهان خلف $P \equiv (\neg P) \Rightarrow C$، که در آن C یك تناقض است. برای اثبات P، درستی $(\neg P) \Rightarrow C$ را نشان می‌دهیم.

(۳) اثبات اگر وفقط اگر $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \,\&\, (Q \Rightarrow P)$.

(۴) صورت دوم اگر وفقط اگر $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \,\&\, ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))$.

برای اثبات درستی $P \Longleftrightarrow Q$، صدق هردو گزارهٔ $P \Rightarrow Q$ و $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ را نشان می‌دهیم.

درستی گزاره‌ای را که از گزاره‌های معلومی ساخته می‌شود، با کمك جدولهای ارزش و با توجه به نحوهٔ تشکیل آن گزاره، مشخص می‌کنیم. مثلاً، فرض کنیم می‌دانیم که P و همچنین $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ درست‌اند. با توجه به‌این حقایق، می‌توان استنتاج کرد که Q نیز باید درست باشد. ممکن است گزاره‌های مورد بحث مرکب باشند، مانند $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$، و اگرچه می‌دانیم که کل گزاره درست است، ممکن است هیچ اطلاعی در مورد سازه‌هایش نداشته باشیم. یعنی ممکن است بدانیم که $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ درست است، ولی از ارزشهای P یا Q هیچ اطلاعی نداشته باشیم. با این وجود هنوز هم می‌توانیم از آن نتایجی استنتاج کنیم؛ مثلاً، اگر $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ صادق باشد، آنگاه می‌دانیم که گزارهٔ معادلش، $Q \Rightarrow P$، نیز درست است. در زیر چند مورد را نام می‌بریم که درهرمورد صدق گزارهٔ ستون سمت چپ را می‌توان ازصدق گزارهٔ ستون سمت راست استنتاج کرد.

اگر این گزاره‌ها درست باشند...	... آنگاه این گزاره‌ها نیزباید درست باشند
$P, (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	Q
$(\neg P) \Rightarrow C$ (تناقض)	P
$P, P \Rightarrow Q$	Q
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
$P \vee Q, \neg P$	Q
$P \& Q$	$P \vee Q$
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
$P_1, \ldots, P_n$	$P_1 \& \& \cdots \& P_n$
$P_1, \cdots, P_n, (P_1 \& \cdots \& P_n) \Rightarrow Q$	Q

این فهرست را می‌توان تا بینهایت ادامه داد. برای به دست آوردن یك سطرجدید، چند فرمول گزاره‌ای مرکب S_1 ، . . . ، S_n را درستون سمت راست بنویسید و درمقابل آن ، در ستون سمت چپ، فرمول گزاره‌ای مرکبی چون D بنویسید که هرگاه S_1، . . . ، S_n صادق باشند، D نیزقطعاً درست باشد. این امر مستلزم بررسی جدولهای ارزش S_1، . . . ، S_n، و D است؛ ولی باتوجه به فرمول $(S_1 \& \ldots \& S_n) \Rightarrow D$، می‌توان این شرایط را دریك جدول مرکب فرمول‌بندی کرد. اگراین یك توتولوژی باشد، آنگاه درستی S_1، . . . ، S_n درستی D راکه موردنظراست، تضمین می‌کند.

هرتوتولوژی راکه به صورت $(S_1 \& \ldots \& S_n) \Rightarrow D$ باشد یك قاعدهٔ استنباط می‌خوانیم. اگر یك قاعدهٔ استنباط مفروض باشد، ودرفرمول گزاره‌ای مرکب مربوط گزاره‌هایی واقعی جایگزین شوند، آنگاه اگر S_1، . . . ، S_n درست باشند، می‌توان نتیجه گرفت که D نیزصادق است.

هرگاه گزاره‌های مورد بحث شامل گزاره نماهای سوردار هم باشند، آنگاه برای بررسی اینکه صدق یك گزاره نتیجه‌ای طبیعی ازصدق گزاره‌های مفروض است، باید به چگونگی ترکیب آنها توجه کرد. به عنوان یك مورد ساده، ممکن است بدانیم که $\forall x \in S : P(x)$ درست است،واز این مطلب نتیجه بگیریم که $\exists x \in S : P(x)$ نیز صادق است.[1] اگردرستی $\forall x \in S : P(x)$ و $\forall x \in S : Q(x)$ مفروض باشند،می‌توان گزاره‌های بسیاری از جمله $\forall x \in S : P(x) \& Q(x)$، $[\forall x \in S : P(x)] \vee [\forall x \in S : Q(x)]$، و $P(a) \& Q(b)$ راکه درآن $a, b \in S$ ، وغیره را نتیجه گرفت. بازهم می‌توانیم فهرستی ازاحکام حاصل از گزاره‌های شامل گزاره‌نماهای سوردار را تشکیل دهیم.

---

۱. این مطلب درصورتی درست است که مجموعهٔ S ناتهی باشد.ــم.

اگراین‌گزاره‌ها درست باشند ...	... آنگاه این گزاره‌ها نیزباید درست باشند
$\forall x \in S : P(x),\ \forall x \in S : Q(x)$	$\forall x \in S : [P(x) \,\&\, Q(x)]$
$\forall x \in S \neq \varnothing : P(x)$	$\exists x \in S : P(x)$
$\forall x \in S : P(x)$	$P(a)\ (a \in S)$
$P(a)\ (a \in S \neq \varnothing)$	$\exists x \in S : P(x)$
$\neg [\forall x \in S \neq \varnothing : P(x)]$	$\exists x \in S : [\neg P(x)]$
$\neg [\exists x \in S : P(x)]$	$\forall x \in S : [\neg P(x)]$
$\exists x \in S\ \forall y \in S\ \forall z \in M : \neg [P(x,y,z)]$	$\neg [\forall x \in S\ \exists y \in S\ \exists z \in M : P(x, y, z)]$

والی‌آخر.

استنتاجهای متعدد دیگری راهم می‌توان به‌این فهرست افزود. درستون سمت راست گزاره‌های S_1، . . . ، S_n راکه ممکن است متشکل از گزاره نماهای سوردار باشند نوشته می‌شوند، ودرستون سمت چپ گزاره‌ای چون D که درستیش مشروط به‌درستی همهٔ S_1، . . . ، S_n هاست. این را هم می‌توان به صورت شرط درستی تنها گزارهٔ $(S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n) \Rightarrow D$ فرمول بندی کرد. گزاره نماها بسیارپیچیده‌تر از گزاره‌های ساده هستند، وماآزمونی کلی برای بررسی صدق‌آنها عرضه نخواهیم کرد.

اثبات

درعمل، نقطهٔ شروع کارمان چند گزارهٔ H_1، . . . ، H_r است و می‌خواهیم صدق گزاره‌ای مانند D را استنتاج کنیم. این فرایند ممکن‌است باداخل شدن گزاره‌های فرعی دیگری بسیارپیچیده شود. به‌این‌خاطر، فرایند رادرچند مرحله انجام می‌دهیم؛ به‌این‌ترتیب که دنباله‌ای از گزاره‌هایی چون L_1، . . . ، L_n راکه در آن $L_n = D$ می‌نویسیم؛ هرسطر L_m، به ازای هر n ، . . . ، ۲ ، ۱ $= m$، یا یکی ازفرضهای H_1 ، . . . ، H_r است یا درستیش را می‌توان از صدق L_1 ، . . . ، L_{m-1} استنباط کرد. به خصوص، L_1 باید یکی از فرضها باشد وهرسطر L_2، . . . ، L_n یا باید استنتاجی درست ازسطرهای قبل باشد، یا یکی ازفرضها. بدیهی است که این فرایند صدق سطرآخر یعنی D را ایجاب می‌کند. در اینجا نیز مثل قبل صدق استنتاج L_m از سطرهای پیشین با بررسی درستی $(L_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ حاصل می‌شود. چنانچه L_m یکی ازفرضها باشد، ازجدول ارزش $\Rightarrow$ بلافاصله نتیجه می‌شود که $(L_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ درست است؛ ولی هرگاه L_m یکی ازفرضها نباشد، به‌بررسی بیشتری نیازاست.

هرگاه نتیجهٔ نهایی D به صورت $P \Rightarrow Q$ باشد، آنگاه ریاضیدانان غالباً این

دستورالعمل را تغییرمی‌دهند ودرفهرست $L_۱$، . . . ، L_n، گزارهٔ P را درسطر اول به‌عنوان $L_۱$، و Q را درسطر آخربه عنوان L_n، می‌نویسند. دراین مورد، هرسطرمیانی یا باید یک فرض باشد، یا، مانند فوق، درستیش باید ازسطرهای پیشین نتیجه بشود. ممکن‌است برخی از سطرها گزاره نما باشند: در اینجا نیز مهم این است یقین حاصل کنیم که $(L_۱ \ \& \ldots \& \ L_{m-۱}) \Rightarrow L_m$ همواره درست‌است.

مثال. هر گاه

$H_۱ : ۵ > ۲$

$H_۲ : \forall x, y, z \in \mathcal{R} : [(x > y) \ \& \ (y > z)] \Rightarrow (x > z)$

مفروض باشند، اثبات $(x > ۵) \Rightarrow (x > ۲)$ را می‌توان چنین نوشت:

$L_۱ : x > ۵$

$L_۲ : ۵ > ۲$

$L_۳ : \forall x, y, z \in \mathcal{R} : [(x > y) \ \& \ (y > z)] \Rightarrow (x > z)$

$L_۴ : x > ۲.$

گرچه اثبات این استنتاج خاص کار فکری چندانی نمی‌برد،ولی دستورالعمل کلی، یك شیوهٔ اثبات را که به‌صورت زیرفرمول بندی می‌کنیم نشان می‌دهد:

تعریف. اگر گزاره‌های $H_۱$، . . . ، H_r مفروض باشند، یك اثبات حکم $P \Rightarrow Q$ (که درآن P و Q ممکن است گزاره یا گزاره نما باشند) از تعدادی متناهی از سطرهایی مانند

$$L_۱ = P$$

$$L_۲$$

$$\vdots$$

$$L_n = Q$$

تشکیل می‌شودکه هر سطر L_m $(۲ \leqslant m \leqslant n)$ یا یك فرض H_s $(۱ \leqslant s \leqslant r)$ است یا گزاره یاگزاره نمایی که

$$(L_۱ \ \& \ldots \& \ L_{m-۱}) \Rightarrow L_m$$

گزاره‌ای است درست.

تحت این شرایط، اگر P صادق باشد، آنگاه هرسطر پس از آن نیزباید صادق باشد وازاین امر بخصوص درستی Q هم نتیجه می‌شود. باتوجه به جدول ارزش $\Rightarrow$ ، ملاحظه می‌کنیم که این مطلب صدق $P \Rightarrow Q$ را ثابت می‌کند.

باید نیست حالتی را هم بررسی کنیم که P نادرست باشد. اگر P یك گزاره نما باشد چنین چیزی به‌سادگی می‌تواند اتفاق بیفتد، به‌این ترتیب که ممکن است مقادیری جانشین متغیر آن بشود که گزاره نما به گزاره‌ای نادرست تبدیل شود. به عنوان نمونه در مثال فوق، $x>5$ نادرست است هر گاه (مثلاً) $x=1$، که در آن صورت سطر L_4 به‌صورت $2<1$ درمی‌آید که آن هم نادرست‌است. ازسوی دیگر، اگر x برابر ۳ باشد، آنگاه L_1 نادرست است ولی L_4 به‌صورت $2<3$ درمی‌آید که صادق‌است. خلاصه بگوییم، اگر P نادرست باشد هیچ نتیجه‌ای درمورد صدق یاکذب سطرهای پس ازآن حاصل نمی‌شود: تنها مطلبی که به‌آن یقین داریم این‌است که گزارهٔ مرکب $P \Rightarrow Q$ صادق‌است. واین به‌این خاطراست که، گرچه می‌دانیم استنتاجهای $(L_1 \& \ldots \& L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ همه درست هستند، کذب L_1 می‌تواند به کذب L_m منجر بشود.

این مطلب مهمترین عامل در اثبات با برهان خلف است. این برهان دقیقاً دارای همان قالبی است که درفوق آمد. برای اثبات P، گزاره‌ای معادل با آن چون $(\neg P) \Rightarrow C$ را که در آن C یك تناقض است، ثابت می‌کنیم. دراین صورت سطراول L_1 را به صورت $(\neg P)$ شروع و به‌سطر آخر L_n که C باشد ختم می‌کنیم. بافرض صدق $(\neg P)$، هرسطر پس ازآن نیز باید درست باشد. ولی L_n به‌خاطر تناقض بودن مسلماً نادرست‌است. ازاین‌رو $(\neg P)$ نمی‌تواند صادق باشد، پس P باید صادق باشد. به‌این ترتیب صدق P «با برهان خلف» اثبات می‌شود.

همچنین اثبات درستی $P \Rightarrow Q$ بااستفاده از اثبات درستی $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ که منطقاً معادل آن‌است، اساساً دارای همین ساخت‌است؛ باسطر $(\neg Q)$ آغازمی‌کنیم و به‌سطر $(\neg P)$ خاتمه می‌دهیم.

آنچه که گفتیم تعریف صوری مراحل منطقی یك اثبات‌است. اما به‌هنگام اثبات عملاً چه باید بنویسیم؟ فصل بعد یکی ازپاسخهای ممکن را به‌ما می‌دهد.

تمرین

۱. جداول ارزش گزاره‌های مرکب زیررا بنویسید:

(الف) $P \Rightarrow (\neg P)$،

(ب) $((P \& Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \& (Q \Rightarrow R))$،

(پ) $(P \& Q) \Rightarrow (P \vee Q)$،

(ت) $(\neg Q) \vee (Q \Rightarrow P) \vee (P \Rightarrow Q)$.

کدام، یك توتولوژی است؟

۲. گزاره‌های زیررا بااستفاده ازسورهای $\forall$ و $\exists$ بنویسید، وبگویید کدام صادق است.

(الف) به‌ازای هرعدد حقیقی x، عددی حقیقی مانند y وجود دارد که $x=y^3$.

(ب) عددی حقیقی مانند y وجود دارد که به‌ازای هرعدد حقیقی x، مجموع $x+y$

مثبت است.

(پ) به‌ازای هرعدد گنگ x، عددی صحیح مانند n وجود دارد که در $x<n<x+1$ صدق می‌کند.

(ت) باقیماندهٔ مربع هرعدد صحیح تقسیم بر۴ یا برابر ۰ است یا برابر۱.

(ث) مجموع مربعات دوعدد اول مخالف با ۲، عددی است زوج.

۳. گزاره‌های زیررا به‌نثرفارسی برگردانید:

(الف) $\forall x \in \mathcal{R}\, \exists y \in \mathcal{R} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$،

(ب) $\exists y \in \mathcal{R}\, \forall x \in \mathcal{R} : x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$،

(پ) $\exists N \in \mathcal{N}\, \forall \varepsilon \in \mathcal{R} : [(\varepsilon > 0) \,\&\, (n > N)] \Rightarrow (1/n < \varepsilon)$،

(ت) $\forall x \in \mathcal{N}\, \forall y \in \mathcal{N}\, \exists z \in \mathcal{N} : x + z = y$.

(ث) $\forall x \in \mathcal{Z}\, \forall y \in \mathcal{Z}\, \exists z \in \mathcal{Z} : x + z = y$.

برگردانهای خود را به دقت بخوانید، واگرفکرمی کنیدکه خشك ورسمی هستند، آنها را روانتربنویسید (ولی معنی آنها را تغییرندهید!) تعیین کنیدکدام یك ازگزاره‌های (الف)ـ(ث) صادق است وکدام کاذب. برای هرمورد دلیلی ذکرکنید.

۴. درهریك ازموارد زیر، جداول ارزش رابنویسید وبگوییدآیا دوگزارهٔ موردنظرمعادل هستند یا نه.

(الف) $\neg[P \,\&\, (\neg P)]$ و $P \vee (\neg P)$،

(ب) $P \Rightarrow Q$ و $(\neg P) \,\&\, Q$،

(پ) $P \Rightarrow Q$ و $(\neg Q) \,\&\, P$،

(ت) $(P \Rightarrow Q) \,\&\, R$ و $P \Rightarrow (Q \,\&\, R)$،

(ث) $[P \,\&\, (\neg Q)] \Rightarrow [R \,\&\, (\neg R)]$ و $P \Rightarrow Q$.

۵. قوانین استنباط مذکور دربخش «استنتاج منطقی» راباستفاده ازجداول ارزش (هرکجا که امکان پذیرباشد) ثابت کنید.

۶. کدام یك ازاستنتاجهای زیرمنطقاً درست است؟

(الف) «اگرتوافقنامهٔ محدودیت سلاحهای استراتژیك امضا شود، یاسازمان ملل‌متحد طرح خلع سلاح را تصویب کند، قیمت سهام صنایع اسلحه‌سازی تنزل می کند. ولی‌قیمت سهام صنایع جنگی تنزل نمی کند، و لذا توافقنامهٔ محدودیت سلاحهای استراتژیك امضا نمی‌شود.»

(ب) «اگرانگلستان ازبازار مشترك خارج شود یااگرکسری بازرگانی تقلیل یابد، قیمت‌کره پایین می‌آید. اگرانگلستان در بازار مشترك باقی بماند، صادرات افزایش نمی‌یابد. کسری بازرگانی افزایش می‌یابد مگراینکه صادرات افزایش یابد. بنابراین قیمت‌کره پایین نمی‌آید.»

(پ) «برخی ازسیاستمداران صالح هستند. برخی از زنان سیاستمدارند. بنابراین برخی اززنان سیاستمدار، صالح هستند.»

(ت) «اگرسخت کارنکنم خوابم می‌برد. اگر نگران باشم خوابم نمی‌برد. بنابراین اگرنگران باشم سخت‌کارمی‌کنم.»

۰۷ درحالتهای زیر گزارهٔ

$$y > z \text{ ولی } x \leqslant y$$

را درنظر بگیرید:

(الف) $x = ۱$ ، $y = ۲$ ، $z = ۰$ ،

(ب) $x = ۱$ ، $y = ۲$ ، $z = ۳$ ،

(پ) $x = ۲$ ، $y = ۱$ ، $z = ۰$ ،

(ت) $x = ۲$ ، $y = ۱$ ، $z = ۳$.

درکدام مورد گزاره صادق است؟ بااستفاده ازاین اطلاعات یك جدول‌ارزش برای «ولی» تنظیم وتحقیق کنید که

$$(P \,\&\, Q) \Longleftrightarrow (P \text{ ولی } Q)$$

یك توتولوژی است.

همین عمل را درمورد «ازآنجاکه» و «بنابراین» انجام دهید وآنها را بـا «دلالت دارد بر» مقایسه‌کنید. درمورد «مگر» چه می‌توان گفت؟

۰۸ نقیض گزاره‌های زیرچیست؟

(الف) $\forall x : (P(x) \,\&\, Q(x))$ ،

(ب) $\exists x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$ ؛

(پ) $\forall x \in \mathcal{R}\ \exists y \in \mathcal{R} : x \geqslant y$ ،

(ت) $\forall x \in \mathcal{R}\ \forall y \in \mathcal{R}\ \exists z \in \mathcal{Q} : x + y \geqslant z$.

آیا (پ) و (ت) درست هستند یا نادرست؟

۰۹ قضیه‌های زیررا بابرهان خلف ثابت‌کنید.

(الف) اگر x و y در $\mathcal{R}$ باشند و به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ ($\varepsilon \in \mathcal{R}$) داشته باشیم $y \leqslant x + \varepsilon$، آنگاه $y \leqslant x$.

(ب) به ازای هرعدد حقیقی x ، یا $x + \sqrt{۳}$ گنگ است یا $x - \sqrt{۳}$ گنگ است.

(پ) کوچکترین عددگویایی که از $\sqrt{۲}$ بزرگترباشد وجود ندارد.

۱۰. رابطهای $\neg$ ، $\&$ ، $\vee$ ، و $\Rightarrow$ را درنظربگیرید. نشان دهید

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \,\&\, Q$$

$$P \vee Q \equiv \neg[(\neg P) \,\&\, (\neg Q)]$$

و نتیجه بگیرید که هر گزارهٔ مرکب را می‌توان برحسب تنها رابطهای $\neg$ و $\&$ نوشت. آیا می‌توان هر گزارهٔ مرکب را برحسب تنها یکی از رابطهای $\neg$، $\&$، $\vee$، $\Rightarrow$ نوشت؟

رابط خط را که با | نمایش داده می‌شود طبق جدول

P	Q	$P \vert Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$P|Q \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

همچنین نشان دهید که

(الف) $(\neg P) \equiv P|P$،

(ب) $(P \,\&\, Q) \equiv (P|Q)|(Q|P)$،

(پ) $(P \vee Q) \equiv (P|P)|(Q|Q)$،

(ت) $(P \Rightarrow Q) \equiv P|(Q|Q)$.

سپس نتیجه بگیرید که هر گزارهٔ مرکب را می‌توان با استفاده از تنها رابط خط نوشت.

(تذکر: استفاده از این رابط ممکن است از نظر تعداد رابطهای متفاوت با صرفه باشد، ولی آیا خواندن گزارهٔ

$$(((P|P)|Q)|((P|P)|Q))|(Q|Q)$$

ساده‌تر از خواندن گزارهٔ

$$((\neg P) \,\&\, Q) \Rightarrow Q$$

است؟ با این حال این دو گزاره معادلند...)

۷

اثبات ریاضی

در فصل قبل، دربارهٔ کاربرد منطقی زبان در ریاضیات و روش اثبات صدق یك گزاره با استفاده از گزاره‌های مفروض بحث کردیم، و نشان دادیم که چگونه می‌توان یك اثبات را به صورت دنباله‌ای از استنتاجهای منطقی نوشت. ولی در عمل این شیوه، راه رضایتبخشی برای نگارش اثبات نیست: نوشتن همهٔ جزئیات اثبات، متن را کلیشه‌ای می‌کند وطول آن را ازحدمعقول فراتر می‌برد. دراین فصل، تصویرکلی اثباتهای ریاضی را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که ریاضیدانان در عمل چگونه این اثباتها را می‌نویسند. نگارش یك اثبات ریاضی علاوه براستخوان‌بندی منطقی به‌حس تشخیص هم نیاز داردکه در هر موردحقیقتاً تا چه اندازه جزئیات لازم است: چه مطالبی باید نوشته شود و چه مطالبی بدون اینکه لطمه‌ای به‌اثبات واردشود می‌تواند حذف گردد. شرح خیلی مختصر، ممکن است قسمتهای حساس اثبات را نادیده بگیرد؛ وشرح مفصل، ممکن است شکل‌کلی اثبات را مبهم سازد.

این بحث را با بررسی یك اثبات واقعی‌که به‌شیوهٔ متداول ریاضی نوشته شده‌است آغاز، وآن را با ساختمان صوری فصل قبل مقایسه می‌کنیم.

قضیه. اگر (a_n) و (b_n) دو دنباله از اعداد حقیقی باشند که $a_n \to a$ و $b_n \to b$ (هرگاه $n \to \infty$)، آنگاه $a_n+b_n \to a+b$.

اثبات. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. چون $a_n \to a$، N_1ی وجود دارد که

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

چون $b_n \to b$، N_2یی وجود دارد که

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$. هرگاه $n > N$، آنگاه $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ و $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$، و لذا بنابر نامساوی مثلثی

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

پس، همان طور که مطلوب بود، $a_n + b_n \to a + b$. □

برای تحلیل ساخت این اثبات، آن را سطربندی می‌کنیم و با افزودن کلماتی مناسب، ساخت آن را واضحتر می‌نامیم.

فرضها

H_1. (a_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، و $a_n \to a$.
H_2. (b_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، و $b_n \to b$.

اثبات

۱. فرض کنیم $\varepsilon > 0$.
۲. چون $a_n \to a$، N_1ی وجود دارد که $n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۳. چون $b_n \to b$، N_2یی وجود دارد که $n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۴. فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$.
۵. اگر $n > N$ آنگاه $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ و $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۶. لذا، بنابر نامساوی مثلثی، $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$.
۷. $|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$.
۸. $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

۹. (Nی چون $N=\max(N_1, N_2)$ وجود دارد که)

$$n>N \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon.$$

۱۰. طبق انتظار، $a_n+b_n \rightarrow a+b$.

سطر ۱ گزاره نمای «$\varepsilon > 0$» است، و اگر به‌پایین توجه کنیم می‌بینیم سرانجام، در سطر ۹، وجود Nی را ثابت می‌کنیم که $\varepsilon > |(a_n+b_n)-(a+b)| \Leftarrow n>N$.
فرض کنیم

$P(\varepsilon)$ گزاره نمای $\varepsilon > 0$ باشد،

و

$Q(\varepsilon)$ گزاره نمای $\exists N \varepsilon \mathcal{N} : n>N \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

آنگاه سطرهای ۱ــ۹ اثباتی برای درستی

$$P(\varepsilon) \Rightarrow Q(\varepsilon).$$

است. در سطر ۱۰، این گزاره به گزاره‌ای معادل، $a_n+b_n \rightarrow a+b$، برگردانده شده است.

حال سطرهای ۱ــ۹ را که مراحل اصلی اثبات هستند دقیقتر بررسی می‌کنیم. سطرهای ۲ و ۳ برگردان فرضهای H_1 و H_2 هستند، و درآن این نکته تلویحاً بیان‌شده است که اگر $\varepsilon > 0$ آنگاه $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ و لذا $\frac{1}{2}\varepsilon$ را هم می‌توان در تعریف حد به‌کار برد. علی‌الاصول، باید این استنتاجهای منطقی کوچك را نیز به‌طور صریح نوشت، ولی درعمل مراحلی را که اجزای معلوم تکنیك هستند حذف می‌کنیم.

سطر ۴ مطلب تازه‌ای است: تعریف نماد N برحسب N_1 و N_2. این تعریف را در صورت تمایل می‌توانیم حذف کنیم وبدون‌هیچ تغییر واقعی در اثبات همه جا به‌جای N، $\max(N_1, N_2)$ را بنویسیم. ولی در عمل، برای ساده‌کردن نمادها، متداول است که برای‌نمایش مفاهیم پیچیده‌ای که ازمفاهیم معلوم قبلی‌ساخته می‌شوند، از نمادهای جدیدی استفاده کنند.

سطر ۵ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ نتیجه می‌شود (البته صدق گزارهٔ $n>N$ ایجاب می‌کند که $n>N_1$ و $n>N_2$، مسلم فرض شده است).

سطر ۶ چیزی نیست جز محاسبه. در این سطر، قبل از استفاده از نامساوی مثلثی برای نوشتن نتیجهٔ نهایی، عملیات نسبتاً سادهٔ حساب برای‌تبدیل $|(a_n+b_n)-(a+b)|$ به $|(a_n-a)+(a_n-b)|$ نیز به‌کار گرفته شده است. توجه کنید که این سطر گزاره‌نمایی از n به‌نظر می‌رسد، ولی به طور ضمنی آن را درحیطهٔ سور $\forall n>N$ از سطر ۵، می‌دانیم.

سطر ۷ از سطرهای ۵ و ۶ نتیجه می‌شود؛ در این سطر نیز به‌طور ضمنی از یك قضیهٔ معلوم حساب، این بار جمع نامساویها، استفاده شده است.
سطر ۸ صرفاً محاسبه است.
سطر ۹ از سطرهای ۲-۸ نتیجه می‌شود.

این تحلیل از یك اثبات نسبتاً ساده نشان می‌دهد که ریاضیدانان اثباتها را دقیقاً به‌صورتی که در فصل قبل شرح داده شد نمی‌نویسند. شماره‌گذاری مراحل، هم در معرفی فرضیات وهم در استنباطها، حذف می‌شوند؛ تعریفهای جدیدی معرفی می‌شوند؛ و کل مطلب، کاملاً برخلاف نوشتن دنباله‌ای صوری از گزاره‌ها، به‌نثر سلیس نوشته می‌شود.
علت چیست؟ نخست اینکه ریاضیدانان سالها قبل از اینکه تحلیل منطقی باب شود به‌نوشتن اثبات می‌پرداختند، از این‌رو از ابتدا مرسوم بوده است که اثباتها را به‌نثر بنویسند واین سبك همچنان ادامه دارد. علت اصلی این است که حذف جزئیات بدیهی و به‌کار بردن نمادهای جدید برای ساختهای پیچیده، جزئی از فرایند قابل درك‌تر کردن استنتاجهاست. برای ساختن نظریه، مغز بشر الگوهای مأنوس را تشخیص می‌دهد وازجزئیاتی که قابل فهمند صرفنظر می‌کند تا بتواند روی موضوع جدید تمرکز کند. درواقع گنجایش مغز بشر برای نگهداری اطلاعات جدید محدود است، واغلب برای درك تصویر کلی مطلب، حذف جزئیات مأنوس ضرور است. بنابراین در یك اثبات مکتوب، استنتاجهای منطقی مرحله به‌مرحله راکه قبلا جزئی از معلومات اولیهٔ خواننده درآمده‌اند مختصرجلوه‌می‌دهند تا بتوانندکل ساخت اثبات را دریابند.
ریاضیدانان هنگام پرداختن نظریه‌ای جدید تمایل دارند بین احکام کاملا جاافتاده‌ای که جزئی از تکنیك کارشان است و مطالب جدیدی که می‌پرورانند فرق قایل شوند. لذا، ایده‌های تثبیت شده را به‌راحتی می‌پذیرند وچندین مطلب راکه خوب با آنها آشنا هستند، اغلب بدون ذکر صریح مراجع مربوط به اثبات، دریك سطر می‌نویسند. این‌کار را چنان با اطمینان انجام می‌دهندکه‌گویی اگر موضوع به‌سؤال گذاشته شود، می‌توانند جزئیات را ارائه دهند (گرچه ممکن است به‌یادآوردن این جزئیات‌کار آسانی نباشد!).
نتایج تازه به‌دست آمده به‌منزلهٔ قلب نظریهٔ مورد بحث هستند، و بنابراین با دقت زیادی بررسی می‌شوند. هرگاه نیازی به‌آنها باشد آنها را به‌عنوان فرض صریحاً بیان می‌کنند ومراجع مربوط به‌اثباتشان را هم ذکر می‌نمایند.
اینکه چه‌وقت می‌توان مراحل منطقی یك اثبات یا مراجع مربوط به‌آن را حذف کرد، و چه‌وقت باید آنها را به‌طورکامل ارائه داد، جزئی است ازکیفیت اغفال‌کننده و سبك ریاضی. ریاضیدانان مختلف عقاید متفاوتی دارند. نکته این است که به مفاد اثبات توجه کنیم و ببینیم چه‌کسانی مورد خطاب هستند. مثلاً، خواننده این‌کتاب به‌احتمال زیاد دانشجویی است‌که تجربه‌اش عمدتاً ازکتابها و درسهای توصیفی حاصل شده است. دراین مورد به‌نظر می‌رسدکه مطالب باید با توضیح‌کاملتری ارائه شوند. از سوی دیگر، مکاتبات بین دو متخصص ممکن است از شرح خیلی مختصر رئوس مطالب تشکیل بشود و بر روی

جزئیات تازه و مهم تمرکز یابد. با این وجود، هردو مورد استثنایی فوق در این خاصیت مشترك هستند که بیان جزئیات در صورتی‌که در قالب مورد نظر جزئی از معلومات اولیه باشند، حذف می‌شوند.

به‌عنوان مثالی مشخص، در درس آنالیز ممکن است قوانین حساب جزئی از ابزار اولیه فرض‌شوند؛ ولی مفاهیم جدیدی چون حد، پیوستگی، وغیره به‌تفصیل بررسی گردند. قضایای مربوط به‌این مفاهیم جدید به دقت اثبات می‌شوند، و درصورت لزوم در قضایای بعد هم به‌طور صریح به‌آنها ارجاع می‌گردد. دراثباتی‌که درفوق تحلیل‌کردیم، قضایای مربوط به‌حساب را بدون هیچ اشاره‌ای به‌کار بردیم، والبته نامساوی مثلثی را ذکرکردیم، زیرا احساس می‌شدکه نسبتاً جدید است وارزش یادآوری را دارد. درمباحث پیشرفته‌تر، این مطلب هم جزئی از ابزار اولیه می‌شود وبدون اشارهٔ ویژه‌ای به‌کار می‌رود.

اصولاً[۲]، هراثباتی‌که توسط ریاضیدانان به‌کار می‌رود همان ساختی را داردکه در فصل قبل توصیف شد، ولی چنین اثباتی در مضمونی عرضه می‌شودکه نتایج معینی جزء متداول تکنیك ضمنی آن شده باشند. لذا اثبات‌گزاره‌ای چون D از فرضهای صریح H_1، . . .، و H_n، متشکل خواهد بود از تعدادی‌گزاره چون L_1، L_2، . . .، و L_n، که L_n همان D است، وهر L_m به‌یکی از دوصورت زیر است:

(یك) حقیقتی است شناخته شده،که یا استنباط ساده‌ای است از فرضها یا از تکنیك ضمنی،

(دو) استنتاجی است از سطرهای قبلی L_1، . . .، L_{n-1}،که بااستفاده از منطق‌صوری وحقایق معلوم از تکنیك ضمنی حاصل می‌شود.

هراثبات، به‌صورت تلفیقی از یك زبان طبیعی و نمادپردازی ریاضی نوشته می‌شود که ساخت منطقی‌را روشن سازد. اگر استنتاجها ازقراین روشن باشند شماره‌گذاری‌مراحل را می‌توان حذف کرد، و برای ساده‌کردن نمادگذاری، نمادهای جدیدی را هم می‌توان معرفی کرد.

ساخت هراثبات واقعی حکمی چون $P \Rightarrow Q$ همان شالوده را داردکه یك اثبات صوری و منطقی، ولی درآن تلویحاً از تکنیك ضمنی هم استفاده می‌شود.

گاهی ممکن است موضوع مورد بحث‌آن قدر واضح باشدکه هیچ فرض صریحی ذکر نشود. مثلاً:

قضیه. (اقلیدس). تعداد اعداد اول نامتناهی است.

اثبات. فرض‌کنیم فقط تعدادی متناهی عدداول وجود داشته باشد مثلاً p_1، . . .، p_n. عدد اولی چون p عدد $N = 1 + p_1p_2 \ldots p_n$ را بخش می‌کند. ولی p نمی‌تواندیکی از اعداد p_1، . . .، p_n باشد، زیرا باقیماندهٔ حاصل از تقسیم N بر هر یك از این اعداد برابر ۱ است. این مطلب با این فرض‌که p_1، . . .، p_n فهرست کاملی است از اعداد اول در تناقض است. $\square$

این اثبات، به‌مبحث حساب اعداد صحیح، شامل تجزیه به عوامل اول، برمی‌گردد. این اثبات، به صورت اثبات با برهان خلف داده شده است. فرض کنیم P گزارهٔ «تعداد اعداد اول نامتناهی است» باشد. سطر اول اثبات بیان می‌کند کـه «فرض کنیم $\neg P$»، و سپس در جستجوی یك تناقض، خط معمول استدلال دنبال می‌شود. بنابـراین، $\neg P$ بـاید نادرست باشد، و لذا P حتماً درست است.

دراین نوع اثبات، بایدکاملاً مراقب مطالب ضمنی باشیم، تا درقسمتهایی ازاثبات که حذف‌شده‌اند نقصی منطقی وجود نداشته باشد. مثلاً، چه اشکالی دربه‌اصطلاح«اثبات» زیر وجود دارد؟

قضیه (؟). ۱ بزرگترین عدد صحیح است.

اثبات (؟). فرض‌کنیم چنین نباشد. فرض کنیم n بزرگترین عدد صحیح باشد. آنگاه $n > 1$. حال n^2 نیز یك عدد صحیح است، و $n^2 > n \cdot 1 = n$. لذا $n^2 > n$؛ و این در تناقض با این فرض است که n بزرگترین عدد صحیح است.

بنابراین فرض نخست نادرست است، و ۱ همان‌طورکـه ادعا شده بود، بزرگترین عدد صحیح است. □

نقص این اثبات درکجاست؟ قبل‌ازخواندن مطالب بعد به‌جواب‌این سؤال‌فکرکنید.

نقص این اثبات درگزارهٔ «فرض‌کنیم n بزرگترین عدد صحیح بـاشد» است. این گزاره نقیض صحیح‌گزارهٔ «۱ بزرگترین عدد صحیح است» نیست. نقیض آن چنین‌است: «$n > 1$ بزرگترین عدد صحیح است یـا بزرگترین عدد صحیح وجود ندارد»، و با پذیرفتن این گـزاره، تناقض به‌وجود نمی‌آید، زیـرا $n^2 > n$ متناقض بـا عبارت ایرانیك فوق نیست.

این نقص منطقی به‌دلیل غیرصوری بودن اثبات پنهان شده است. اجتناب ازدامهایی نظیر این، نیاز به‌تجربهٔ فراوان دارد.

دستگاه اصل موضوعی

برای حصول اطمینان از اینکـه مطالب ضمنی مورد استفاده مبنای استواری دارند، باید اصول اولیه‌ای دردست باشند. به‌این منظور، گزاره‌های صریح معینی را بـه عنوان اصول موضوع بنیادی اختیار می‌کنیم، وصادق بودن آنهارا به‌عنوان فرض می‌پذیریم، وهمهٔ‌نتایج دیگر نظریه را ازآنها استنتاج می‌کنیم. این نتایج بنابه‌سلیقه، قضیه، حکم، لم، نتیجه،و... نامیده می‌شوند. غالباً کلمات «قضیه» و «حکم» مترادف تلقی می‌شوند، بـرخی از مؤلفین هم صرفاً یکی‌ازاینها را به‌کار می‌برند.ما ترجیح می‌دهیم که‌کلمهٔ «حکم» را برای‌توصیف نتایج سادهٔ معمولی به‌کار ببریم، وکلمهٔ «قضیه» را به‌مطالب مهمتری اختصاص دهیم. به‌این

ترتیب، با متمایزکردن قضیه‌های مهم از احکام، ساخت نظریه بهتر جلوه می‌کند.[۱]

برای بهتر جلوه دادن سیمای نظریه و برای کاستن پیچیدگی اثباتهای خیلی طولانی، می‌توان اجـزای تشکیل دهندهٔ یك اثبات را جداکرد و آنها را قبل از بیان صورت قضیه به اثبات رسانید. این نتایج مقدماتی را لم می‌نامیم. ممکن است لمهای متعددی را قبل از قضیهٔ اصلی اثبات‌کنیم تا وقتی به‌اثبات قضیهٔ اصلی رسیدیم همهٔ‌کارهای دشوار انجام شده وتنهاکار باقیمانده ایجاد ارتباط بین مطالب باشد. به‌این ترتیب می‌توان اثبات خود قضیه را امری بسیار طبیعی‌تر نمایاند و به‌خواص برجستهٔ آن جلوه‌ای روشنتر داد وآن را بـا شرح جزئیات مذکور درلمها مخفی نکرد.

لم (کـه پیش‌از قضیه می‌آید) متممی داردکـه آن را نتیجه می‌نامیم. و این خود نتیجه‌ای است‌که می‌تواند به‌سادگی از قضیه استنتاج شود، و بلافاصله بعد از آن می‌آید. گاهی اثبات، به دلیل مضمون، چنان بدیهی است‌کـه از ارائـه آن صرفنظر می‌گردد، یا «به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود».

با درجه‌بندی‌کردن عنوان نتایج اثبات شده به‌صورت قضیه، لم، و نتیجه، می‌تـوان نظریه را منسجم‌تر و قابل حصول‌تر ساخت. درضمن، همان‌طورکـه به‌سطوح پیشرفته‌تر و پیچیده‌تر نظریه می‌رسیم، می‌توانیم نتایج بیشتری را به‌عنوان مطالب ضمنی و اساسی آن نظریه، به‌نحوی‌که قبلاً شرح آن رفت، جزء مفروضات بدانیم.

درفصل ۲، بـه‌ایده‌های شهودی اعداد حقیقی نظری افکندیم و درآن زمینه نتایجی نیز به‌اثبات رسانیدیم. برای بررسی‌صوری این موضوع، باید برخی از خواص حساب‌را به‌عنوان اصول موضوع بنیادی اختیارکنیم ومطالب را به‌طور منطقی برمبنای آنها بسازیم. اگر دقیق باشیم از تمام‌کلکهایی‌که دراین زمینه به‌طور شهودی پروراندیم استفاده‌می‌کنیم تا راه خود را جهت تشکیل نظریه به‌صورت صوری پیداکنیم. در فصل ۸ اصول موضوع مناسبی برای اعداد طبیعی درنظر می‌گیریم وسپس بـه‌سایر دستگاههای اعداد می‌پردازیم. وقتی بنیادی استوار برای حساب داشته باشیم، می‌توانیم آن را بـه عنوان مطالب ضمنی به‌کار ببریم ونظریه‌های پیشرفته‌تر را بناکنیم. در بررسی فضاهای برداری، یاآنالیز، و یا هندسه، نتایج مربوط به حساب را می‌توان مفروض دانست و توجه خود را به‌اثبات نتایج رده‌های بالاتر معطوف‌کرد. در هرمرحله باید روشن باشدکه از چه نوع نتایجی می‌توان بدون اشاره استفاده‌کرد، وکدام را باید به‌دقت نام برد. گاهی مؤلف یك‌کتاب درسی، یا یك مدرس، می‌تواند فرض‌کند کـه موضوع خود روشنگر این مطلب هست و لذا از ذکر صریح آن صرفنظر نماید.

---

۱. واژهٔ «حکم» را به‌جای‌کلمه proposition آورده‌ایم ولی چون از طرفی تمایز بین‌نتایج مهم وغیرمهم مطلبی است شخصی‌واز طرف دیگر باب‌کردن واژهٔ نامأنوس وغیر ضرور «حکم» برای قضیه جایز نیست به‌جای هردوی این واژه‌ها «قضیه» را به‌کار خواهیم برد. ـ م.

سؤالهای امتحانی

یکی‌از مواردی‌که برای دانشجویان اهمیت بسزایی دارد این است‌که چه اثباتی‌درامتحان قابل قبول است.این امر تـا حدی به ممتحن بستگی دارد، ولی قسمتی از نگرانی مربوط به‌عدم آگاهی از مضمون است. در هرکتاب، مضمون از وضعیت مشخص می‌شود. بدیهی است‌که برای یك اثبات مربوط به فصل ۷، پذیرفتن نتایج موجود در فصلهای ۱ـ۶ مجاز است. ولی درامتحان، ممکن است روشن نباشدکـه اثبات در چه سطحی مورد نیاز است. آیا باید همهٔ جزئیات را شامل باشد؟ از چه مطالبی می‌توان با اطمینان صرفنظرکرد؟اگر سؤال خوب‌طرح شده باشد، مضمون مشخص است. بدیهی‌است‌که عبارتی چون «بااستفاده ازاصول اولیه، نشان دهیدکه...» اثباتی دقیق با استفاده ازتعاریف بنیانی واصول‌موضوع را می‌طلبد. سؤالی مربوط به‌قسمتهای پیشرفته‌تر یك موضوع، چنین جوابی را نمی‌طلبد، و مفروض دانستن هرمطلب ثابت شدهٔ قبلی، به‌عنوان مطالب ضمنی آن سطح، بی‌خطر است. هرگز تـوضیح بیشتری از آنچه کـه مناسب مفاهیم مربوط بـه‌سؤال است عرضه نکنید. بخصوص، اگرطراح سؤال از ایده‌های معینی استفادهٔ واضحی‌کرده باشد، شماهم‌می‌توانید بـه‌همان اندازهٔ وضوح آنها را درحل مسئله بـه‌کارگیرید. این‌کار از جوابهای طولانی، شامل اثبات مطالب مقدماتی‌که باید فرض‌گرفته شوند، جلوگیری می‌کند.

یك سؤال ممکن است از سطوح مختلفی تشکیل بشود، مثلاً قسمت اولش مقدماتی باشد و قسمتهای بعدی پیشرفته‌تر. دانشجوی خردمند، به‌طور محسوس قدرت استدلال خود را درحد مضمون افزایش‌می‌دهد و آزادانه ایده‌هایی متناسب با وضع جدید به‌کارمی‌گیرد.

تمرین

۱. آیا نوشتهٔ ذیل، یك اثبات است؟ اگر نیست، چرا؟

قضیه: به‌ازای هردو عدد حقیقی y و x داریم

$$\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}.$$

اثبات: طرفین را به‌توان ۲ می‌رسانیم ودر ۴ ضرب می‌کنیم تا

$$x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy$$

به‌دست می‌آید، سپس با تفریق $4xy$ از طرفین داریم

$$x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$$

ولی عبارت $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ همیشه نامنفی است، لذا قضیه ثابت می‌شود.

۲. آیا نوشتهٔ زیر یك اثبات است؟ اگر نیست، چرا؟

قضیه: درهرمثلث متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به‌دو ساق برابرند.
اثبات: فرض کنیم $\triangle ABC$ یك مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع $AB = AC$ باشد. آنگاه $\triangle ABC$ قابل انطباق بر $\triangle ACB$ است، زیرا اضلاع نظیر برابرند: $AB = AC$، $BC = CB$، $AC = AB$. لذا زوایای نظیر هم برابرند: و به‌خصوص $\angle ABC = \angle ACB$.
(خواص معمولی مثلثهای قابل انطباق را می‌توانید به‌عنوان فرض بپذیرید.)

۳. آیا «اثباتهای» داده شده در فصل ۲ این کتاب، در حد مضمون مناسبی اثباتهای موثقی هستند؟ اگر هستند، مضمون چیست؟ اگر نیستند، اثباتها چه باید باشند؟

۴. اثبات قضیهٔ ۵، فصل ۳، را تحلیل کنید و نشان دهید که هرگزاره چگونه از گزاره‌های قبلی نتیجه می‌شود. به‌اثبات موجود چه باید افزود تا درتعریف منطقی یك «اثبات» صدق کند؟
این تمرین را برای اثباتهای دیگر فصل ۳ هم تکرار کنید.

۵. یك کتاب درسی ریاضی بردارید، قضیه‌ای از آن را انتخاب کنید (که اثباتش نه‌خیلی طولانی باشد و نه خیلی کوتاه) وسپس ساختش را تحلیل نمایید. چه نتایجی به عنوان مطالب ضمنی پذیرفته شده‌اند؟
تمرین را برای‌چند قضیهٔ دیگر، ترجیحاً ازکتابهای متفاوت واز شاخه‌های گوناگون ریاضیات، تکرار کنید.

۶. اصول زیر،اصول موضوع یك دستگاه (تا به‌حال تعریف‌نشدهٔ) ریاضی به‌نام بوروکراسی است. این دستگاه متشکل است از
یك مجموعهٔ B از بوروکراتها،
یك مجموعهٔ C ازکمیته‌ها،
یك رابطهٔ S بین B و C (بخوانید... در... خدمت می‌کند)، که دراصول موضوع زیر صدق می‌کنند:
(ب۱) هر بوروکرات حداقل درسه کمیتهٔ متفاوت خدمت می‌کند.
(ب۲) درهرکمیته، حداقل سه بوروکرات متفاوت خدمت می‌کنند.
(ب۳) به‌ازای هردو کمیتهٔ متمایز مفروض، دقیقاً یك بوروکرات در هردو کمیته خدمت می‌کند.
(ب۴) به‌ازای هردو بوروکرات متمایز مفروض، دقیقاً یك کمیته وجود دارد که هر دو بوروکرات در آن خدمت می‌کنند.
با توجه به‌این اصول موضوع، ثابت کنید که اگر تعداد بوروکراتها متناهی باشد، تعداد کمیته‌ها نیز متناهی است. ثابت کنید که درهر بوروکراسی همیشه دست‌کم هفت بوروکرات باید وجود داشته باشد،ضمناً یك بوروکراسی پیدا کنید که دقیقاً هفت بوروکرات داشته باشد.

۷. اثبات زیر در تعریف منطقی اثبات صدق می‌کند. برای اینکه بفهمید واقعاً چه‌می‌گذرد آن را تحلیل کنید.

قضیه: اگر A، B، و C سه مجموعه باشند، آنگاه $(A \cap A) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

اثبات:

L_1: فرض کنیم $a \in (A \cap B) \cap C$.

L_2: $a \in A \cap B$.

L_3: فرض کنیم $b \in A \cap (B \cap C)$.

L_4: $a \in C$.

L_5: $b \in B \cap C$.

L_6: $b \in B$.

L_7: $a \in B$.

L_8: $b \in C$.

L_9: $\{a , b\} \subseteq B$.

L_{10}: $b \in A$.

L_{11}: $a \in A$.

L_{12}: $b \in A \cap B$.

L_{13}: $a \in A \cap B$.

L_{14}: $\{a , b\} \subseteq A \cap B$.

L_{15}: $a \in B \cap C$.

L_{16}: $a \in A \cap (B \cap C)$.

L_{17}: $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

L_{18}: $b \in (A \cap B) \cap C$.

L_{19}: $(A \cap B) \cap C \supseteq A \cap (B \cap C)$.

L_{20}: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

این اثبات را به‌شیوه‌ای محسوس بنویسید که ساخت استدلال روشنتر شود.

قسمت III

عرضهٔ اصل موضوعی دستگاهها

حال به‌حود دستگاههای اعداد می‌پردازیم، ساختشان‌را تحلیل می‌کنیم، ومی‌کوشیم فهرستی صوری‌ازاصول موضوع بیابیم که آنهارا به‌طور دقیق توصیف کند. همچنین نشان می‌دهیم که بااستفاده‌ازمواد اولیهٔ نظریهٔ مجموعه‌هاچگونه دستگاههایی ساخته می‌شوندکه این‌اصول را ارضاکنند. این‌امر ایده‌های شهودیمان‌را برپایه‌ای استوار قرار می‌دهد ومارا مجاز می‌سازدکه بدون هیچ تردید منطقی آنهارا به‌کار ببریم.

به بیان استعاره، اکنون می‌خواهیم ساختمانمان‌را بسازیم، یا می‌خواهیم گیاهمان‌را بکاریم: نکته مهم این‌است‌که باید چنان دقت کنیم که‌اشتباهی رخ ندهد، واین به‌معنی‌اعمال دقت لازم درجزئیات است.

طرزتفکری که‌اکنون‌ازخواننده خواسته می‌شودکمی متفاوت‌است. گرچه ازایده‌های شهودی می‌توان به‌عنوان منبع انگیزه‌بخش استفاده‌کرد، ولی هیچ مطلبی‌را تازمانیکه‌اثبات منطقی دقیقی برایش ارائه نشده است نمی‌توان به‌عنوان جزئی‌از اثبات به‌کاربرد. بنابراین لازم است، با استفاده از اصول موضوع، خواصی راکه قبلاً به‌طور شهودی پذیرفتیم به دقت اثبات‌کنیم. این کار را به‌این خاطر می‌کنیم‌که مطمئن شویم این خواص، به‌تعبیر صوری، واقعاً درست هستند، زیرا پذیرش قبلیشان بیشتر برمبنای عادت بود تامنطق. لذا ایده‌هایمان‌را برپایه‌ای معتبرتر قرار می‌دهیم.

درفصل ۸، حتی برای احکام ظاهراً بدیهی، اثباتهایی بسیار مفصل ارائه می‌دهیم. ولی ازفصل ۹ به‌بعد به‌تدریج ازمیزان جزئیات کم می‌کنیم، وبررسی قسمتهایی از اثبات‌را که در حال حاضر برای خواننده عادی است به عهدهٔ خودش می‌گذاریم. این امر برای اجتناب از گم‌شدن نکات اصلی، درزیر توده‌ای ازجزئیات پرزحمت، ضروراست. روش اثبات مرحله به مرحله، اگر به درازا بکشد، تصویرکلی‌را مبهم می‌سازد.

۸

اعداد طبیعی و اثبات به‌روش استقرا

در نگاه اول به‌نظر نمی‌رسد که اثبات به روش استقرا در الگـوی اثبات توصیف شده در فصل قبل بگنجد. به‌یك نمونه توجه می‌کنیم:

قضیه. مجموع نخستین n عدد طبیعی برابر با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است.

اثبات. این حکم به وضوح به ازای $n=۱$ صادق است. اگر به ازای $n=k$ نیز صادق باشد، داریم

$$۱+۲+\dots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱)\,.$$

حال باافزودن $k+۱$ به طرفین رابطه، داریم

$$۱+۲+\dots+(k+۱)=\frac{۱}{۲}k(k+۱)+(k+۱)=\frac{۱}{۲}(k+۱)(k+۲)\,.$$

این عدد، مجموع نخستین $k+۱$ عدد طبیعی است ولذافرمول مذکوربه‌ازای $n=k+۱$ هم درست است. بنا به استقرا، فرمول مذکور به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی صادق است. □

بسیاری این اثبات‌را برهانی از نوع «والی‌آخر ...» می‌دانند، کـه در آن ابتدا

درستی حکم به‌ازای $n=۱$ نشان داده می‌شود؛ آنگاه، پس‌از اثبات مرحلهٔ عمومی رسیدن از $n=k$ به $n=k+۱$، آن‌را برای $k=۱$ به‌کارمی‌بریم تا از $n=۱$ به $n=۲$ برسیم، سپس با استفادهٔ مجدد آن از $n=۲$ به $n=۳$ می‌رسیم، والی آخر، تاهرجاکه بخواهیم. مثلاً، پس‌از ۵۹۲ بار استفاده‌از مرحلهٔ عمومی می‌توانیم به $n=۵۹۳$ برسیم. تنها اشکال این است‌که برای رسیدن به‌مقادیر بزرگ n، باید مرحلهٔ عمومی‌را به دفعات بسیارزیاد به کار ببریم، ودر واقع هرگز نمی‌توانیم همهٔ اعداد طبیعی را دریك اثبات باطول متناهی بگنجانیم.

راه رهایی ازاین مشکل حذف بخش «و الی آخر ...» ازاثبات وقراردادن آن، به طور واضح درخود تعریف اعداد طبیعی است. سپس خواهیم دیدکه اثبات به‌روش استقرا درالگوی اثباتهای ریاضی توصیف شده در فصل قبل می گنجد.

اعداد طبیعی

اعداد طبیعی مجموعه‌ای کاملاً غیر بدیهی هستند، زیرا نمی‌توانیم فهرست کاملی ازاعضای آن‌را بنویسیم: این اعداد الی غیرالنهایه ادامه دارند. ارائـه توصیفی رضایتبخش برای آنها، نیازمند روشی متفاوت است. خوشبختانه ایدهٔ شهودی شمارش‌را می‌توان به آسانی به زبان مجموعه‌ها بیان کرد. با ۱ شروع می کنیم، سپس ۲، آنگاه ۳، و به‌همین نحو تالی‌ها را تاهرجاکه مایل باشیم نامگذاری می‌کنیم. برای درك «کل» مفهوم مجموعهٔ اعداد، این نامگذاری تالیهارا به‌صورت یك تابع روی مجموعهٔ $\mathcal{N}$ اعداد طبیعی درنظر می گیریم. یعنی، بـه جستجوی تابعی چون $s:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ باخواص مناسب مـی‌پردازیم. دراینجا s «تالی» را نمایش می‌دهد و $s(۱)=۲$، $s(۲)=۳$، والی آخر. دو خاصیت بدیهی مورد نیاز عبارتند از اینکه:

(یك) s پوشا نباشد (زیرا به‌ازای هر $n\in\mathcal{N}$، $s(n)\neq ۱$)،

(دو) s یك به‌یك باشد ($s(m)=s(n)$ ایجاب کندکه $m=n$).

خاصیت مهم سومی به‌صورت زیرهم‌مورد نیازاست تااثباتهای‌استقرایی ازآن نتیجه شوند:

(سه) فرض کنیم $S\subseteq\mathcal{N}$ طوری باشدکه $۱\in S$؛ وبه‌ازای هر $n\in\mathcal{N}$، اگر $n\in S$ آنگاه $s(n)\in S$. دراین صورت $S=\mathcal{N}$.

به‌عبارت دیگر، (سه) بیان می کندکه هر زیرمجموعهٔ شامل ۱ کـه درصورت شامل بودن n، $s(n)$ را نیزشامل باشد، برابرهمهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

این مطلب واقعیتی شگفت آور است‌کـه این سه خاصیت تنها خواص مورد لـزوم برای توصیف اعداد طبیعی هستند. هرپایهٔ اصل موضوعی برای حساب، تنها بـه این نیاز داردکه وجود مجموعه‌ای بااین سه خاصیت به‌عنوان اصل موضوع پذیرفته شود. به دلایل تکنیکی بهتراست به‌جای ۱ با ۰ شروع کنیم. یافتن دلایل مشکل نیست. گرچه درشمارش معمولاً با ۱ شروع می‌کنیم، ولی مجموعهٔ تهی ۰ عضو دارد ومفید است بتوانیم این‌را هم بیان کنیم. همچنین، درحساب داشتن عضو صفر به‌راحتی کارکمك می‌کند. به‌این دو دلیل و

دلایل دیگر، دستگاه اصل موضوعی‌را با ۰ شروع می‌کنیم، و برای آنکه این دستگاه با مفهوم‌شهودی‌اعداد طبیعی اشتباه نشود، $\mathbb{N}_0$ را برای نمایش دستگاه صوری به‌کارمی‌بریم، اندیس یادآور مشمول بودن ۰ است. به این ترتیب اصول موضوع پئانو[1] برای اعداد طبیعی به‌دست می‌آیند، که به‌نام ریاضیدان ایتالیایی مسئول ابداع این روش دراواخر قرن نوزدهم است:

فرض‌کنیم مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}_0$ و تابعی چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ وجود دارد که:

(ط ۱) s پوشا نیست: عضوی چون $0 \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $s(n) \neq 0$.

(ط ۲) s یك به یك‌است: اگر $s(m)=s(n)$ آنگاه $m=n$.

(ط ۳) اگر $S \subseteq \mathbb{N}_0$ چنان‌باشد که $0 \in S$؛ و به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}_0$، $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$، آنگاه $S = \mathbb{N}_0$.

هیچ تضمینی وجود ندارد که چنین مجموعهٔ $\mathbb{N}_0$ ی وجود داشته باشد، لذا باید وجود آن‌را هم به‌عنوان یك‌اصل موضوع بنیادی بپذیریم:

اصل موضوع وجوداعداد طبیعی. مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}_0$ و تابعی چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ باخواص (ط ۱) ـ (ط ۳) وجود دارد.

باهمین چند اصل، می‌توانیم تمام خواص معمولی حساب‌را عرضه‌کنیم و بپرورانیم، بعداً هم دستگاههای دیگر اعداد، شامل اعداد حقیقی ومختلط، را بسازیم. همچنین خواهیم دید که‌اصل موضوع (ط ۳) چطور براثبات به‌روش استقرا محیط می‌شود. مورد سادهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

قضیهٔ ۱. اگر $n \in \mathbb{N}_0$، $n \neq 0$، آنگاه عضو یکتایی چون $m \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد که $n=s(m)$.

اثبات. فرض‌کنیم $S=\{n \in \mathbb{N}_0 | n=0$ یا به ازای $m \in \mathbb{N}_0$ی، $n=s(m)\}$. مسلماً $0 \in S$. اگر $n \in S$ آنگاه یا $n=0$، که دراین‌صورت $s(n)=s(0)$ ولذا $s(n) \in S$؛ یا $n=s(m)$، و $s(n)=s(s(m))$ که $s(m) \in \mathbb{N}_0$، ولذا $s(n) \in S$. ازاین‌رو، بنا به‌اصل موضوع (ط ۳)، $S = \mathbb{N}_0$. این امر نشان می‌دهد که یك m مطلوب وجود دارد. یکتایی آن از (ط ۲) نتیجه می‌شود. □

قضیهٔ ۱ بیان می‌کندکه ۰ تنها عضوی است که تالی نیست، واین خاصیتی است که آن‌را از دیگر اعضا متمایز می‌کند. مجموعهٔ $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 - \{0\}$ را مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌نامیم. $s(0)$ را با ۱ نشان می‌دهیم. این عضو ۱ در $\mathbb{N}$ است وخواهیم دیدکه از اهمیت خاصی برخوردار است.

---

1. Peano

یکبار دیگر به‌اثبات قضیهٔ ۱ توجه می‌کنیم. ساخت اصلی آن تشکیل می‌شود از تعریف مجموعه‌ای چون S، وسپس

(یك) اثبات $0 \in S$،

(دو) اثبات $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$،

(سه) استفاده ازاصل موضوع (ط۳) جهت استنتاج $S = \mathbb{N}_0$.

الگوی اثبات به‌روش استقرا همیشه همین است.

S در عمل به‌صورت

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 | P(n)\}$$

است که درآن $P(n)$ گزاره‌نمایی است که می‌دانیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$ یادرست است یا نادرست. احکام (یك)، (دو)، (سه) چنین برگردان می‌شوند:

(یك)′ اثبات درستی $P(0)$،

(دو)′ اثبات اینکه اگر $P(n)$ درست باشد آنگاه $P(S(n))$ هم درست است.

(سه)′ استفاده از (ط۳) جهت استنتاج درستی $P(n)$ به‌ازای همهٔ $n \in \mathbb{N}_0$. استفاده ازاصل موضوع (ط۳)، اثبات‌را بدون هیچ اشاره‌ای به برهانی ازنوع «والی‌آخر...» به پایان می‌رساند. خواننده می‌تواند اسکلت اساسی‌این روش‌را درقضیه‌ای‌که درآغاز فصل بیان شد ملاحظه‌کند، بااین استثناکه درآنجا به‌جای ۰ با ۱ شروع کردیم وبه‌جای $s(n)$ نوشتیم $n+1$. بعداً نشان می‌دهیم‌که اگر باهر $k \in \mathbb{N}_0$، به ویژه با $k=1$، هم شروع کنیم، بازهم این روش به‌کار می‌رود، ولذا قضیهٔ ابتدای فصل صرفاً مثال ساده‌ای ازاثبات استقرایی است‌که به‌اصل موضوع (ط۳) وابسته است.

درعمل ممکن است به اصل موضوع (ط۳) صریحاً اشاره نشود. اثبات‌را می‌توانیم تماماً برحسب گزاره‌نمایی چون $P(n)$ بیان کنیم، و پس‌از اثبات مراحل (یك)′، و (دو)′، بگوییم‌که حکم «$P(n)$ به‌ازای همهٔ nها درست است» بنا به‌استقرا ثابت شد. خواننده همواره باید این را به‌عنوان استفاده‌ای ضمنی ازاصل موضوع (ط۳)، که به‌همین دلیل‌هم اصل موضوع استقرا نامیده می‌شود، تعبیرکند. درجریان چنین اثباتی، فرض درست بودن $P(n)$ را فرض استقرا واثبات‌اینکه $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ را مرحلهٔ استقرا می‌نامند. فعلاً که آغاز بررسی $\mathbb{N}_0$ است، مجموعهٔ S را همواره به طورصریح بیان خواهیم کرد.

تعریف به استقرا

مهمترین مطلبی‌که باید مورد توجه قرار گیرد حساب در $\mathbb{N}_0$ است. ابتدا باید عملهای اصلی جمع وضرب‌را تعریف کنیم. عمل جمع‌را می‌توانیم باقراردادن

$$m + 0 = m, \tag{۱}$$

به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}_0$، تعریف کنیم وسپس $m+s(n)$ را برحسب $m+n$ به‌وسیلهٔ

$$m+s(n)=s(m+n)\,. \tag{۲}$$

به‌نظر می‌رسد که اصل موضوع استقراء هم برای اثباتها طراحی شده است و هم برای تعاریف. ولی نقصی، ناشی‌از تفاوتی بنیادی بین‌اثبات‌وتعریف، وجود دارد که باید برطرف شود. دراثبات به‌روش استقراء، مرحلهٔ استقرایی $n\in S \Rightarrow s(n)\in S$ تنها متضمن نشان‌دادن این است‌که اگر $n\in S$ درست باشد، آنگاه $s(n)\in S$ نیز درست است؛ در حقیقت لازم نیست بدانیم‌که آیا $n\in S$ درست‌است یا نه. ولی برای ارائه تعریفی استقرایی برای‌جمع، جهت امکان تعریف $m+s(n)$ به وسیلهٔ (۲)، قطعاً ضرور است که ابتدا مقدار $m+n$ را بشناسیم. البته، الگوی شهودیمان $\mathscr{N}$ حاکی است‌که اگربا (۱) شروع‌کنیم می‌توانیم مرحلهٔ (۲) را n مرتبه به‌کار ببریم و $m+n$ را به دست آوریم. متأسفانه چنین حکمی در اثبات نشده‌است؛ درواقع‌اگر $m\in\mathbb{N}$ مفروض باشد، هنوزنمی‌دانیم‌که اگربا ۰ شروع کنیم وتالی‌های $s(0)=1$، $s(1)=2$، والی آخر را به‌دست آوریم، سرانجام به m می‌رسیم. در واقع قصد مااین است‌که برهانهای «والی‌آخر...» را حذف‌کنیم. راه رفع این نقص این است‌که یك‌اصل‌کلی درمورد درستی‌اینگونه تعریفها به‌اثبات برسانیم. گرچه اصول‌کلی‌تری هم وجود دارند، ولی‌ما حکمی‌را اثبات می‌کنیم که کلیهٔ موارد موجود در این فصل‌را شامل می‌شود.

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ بازگشتی). اگر X یك مجموعه، $f:X\to X$ یك تابع، و $c\in X$ باشد، آنگاه تابعی یکتاچون $\phi:\mathbb{N}_0\to X$ وجود داردکه:

(یك) $\phi(0)=c$،

(دو) به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}_0$، $\phi(s(n))=f(\phi(n))$.

بحث پیش‌از اثبات. برحسب نمادهای مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها ازفصل ۵، تابعی چون $\phi:\mathbb{N}_0\to X$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}_0\times X$ است باخواص:

(I) اگر $n\in\mathbb{N}_0$، $x\in X$ی وجود داردکه $(n,x)\in\phi$،

(II) اگر (n,x) و $(n,y)\in\phi$، آنگاه $x=y$.

پس برای تعریف ϕ کافی است زیرمجموعهٔ متناظرش را مشخص‌کنیم. حال با برگرداندن صورت قضیه، این زیر مجموعه باید دارای خواص زیرباشد:

(الف) $(0,c)\in\phi$،

(ب) $(n,x)\in\phi\Rightarrow(s(n),f(x))\in\phi$.

ولی زیرمجموعه‌های بسیاری، چون خود $\mathbb{N}_0\times X$، بااین خواص وجود دارند. آن‌یکی که مورد نظرماست، اشتراك همهٔ این زیرمجموعه‌هاست، زیرا تنها این زیرمجموعه خواص (I) و (II) را ارضا می‌کند.

اثبات. فرض‌کنیم ϕ اشتراك همهٔ زیرمجموعه‌هایی چون U از $\mathbb{N}_0\times X$ باشدکه

$$(0,c)\in U\,, \tag{۳}$$

$$(n,\ x)\in U \Rightarrow (s(n),\ f(x))\in U\ . \qquad (۴)$$

آنگاه ϕ هردوی این خواص را ارضا می‌کند؛ به‌علاوه، این کوچکترین مجموعه‌ای است که این خواص‌را دارد. حال باید ثابت کنیم که ϕ در واقع یك تابع است، که به‌معنای بررسی (I) و (II) می‌باشد.

اگر فرض کنیم

$$S=\{n\in \mathbb{N}_\circ | (n,\ x)\in\phi \text{ ،}x\in X \text{ به‌ازای}\}$$

(I) به آسانی ثابت می‌شود، زیرا (الف) می‌گوید که $\circ\in S$ و (ب) می‌گوید که $n\in S\Rightarrow s(n)\in S$. بنا به‌استقرا $S=\mathbb{N}_\circ$.

(II) کمی پیچیده‌تر است (ولی نه زیاد). فرض کنیم

$$T=\{n\in \mathbb{N}_\circ | (n,\ x)\in\phi \text{ ،یکتایی } x\in X \text{ به‌ازای}\}\ .$$

می‌دانیم که $(\circ,\ c)\in\phi$. اگر همچنین $(\circ,\ d)\in\phi$، و $c\neq d$، فرض می‌کنیم

$$\phi^{-}=\phi-\{(\circ,\ d)\}\ .$$

آنگاه ϕ^{-}، در (۳) صدق می‌کند؛ واگر $(n,\ x)\in\phi^{-}$ آنگاه $(s(n),\ f(x))\in\phi$ وبرابر $(\circ,\ d)$ هم نیست زیرا بنا به اصل موضوع (ط۱)، $s(n)\neq\circ$. لذا $(s(n),\ f(x))\in\phi^{-}$ و ϕ^{-} در (۴) صدق می‌کند. ازآنجا که ϕ کوچکترین مجموعه‌ای است که در (۳) و (۴) صدق می‌کند، این یك تناقض است؛ پس‌این d وجود ندارد، ولذا $\circ\in T$.

مرحلهٔ استقرا نیز به همین نحو اثبات می‌شود. اگر $n\in T$ آنگاه، به‌ازای دقیقاً یك $x\in X$، $(n,\ x)\in\phi$. از (ب) داریم $(s(n),\ f(x))\in\phi$؛ پس برای اثبات $s(n)\in T$ باید نشان دهیم که هیچ زوج مرتب دیگری چون $(s(n),\ y)\in\phi$ وجود ندارد که $y\neq f(x)$. اگر به‌فرض محال چنین زوجی‌وجود داشته باشد، $\phi^{*}=\phi-\{(s(n),\ y)\}$ را درنظر می گیریم. چون $s(n)\neq\circ$، بازهم می‌بینیم که ϕ^{*} در (۳) صدق می‌کند. برای بررسی (۴) لازم است ثابت کنیم که

$$(m,\ z)\in\phi^{*}\Rightarrow(s(m),\ f(z))\in\phi^{*} \text{ ،}m\in\mathbb{N}_\circ \text{ به‌ازای هر}.$$

حال به‌ازای $m=n$ این‌گزاره صادق است، زیرا فقط یك $x\in X$ داریم‌که $(n,\ x)\in\phi$، وبنا به (ب)، به‌ازای این x، $(s(n),\ f(x))\in\phi$ واین هم برابربا $(s(n),\ y)$ نیست‌زیرا $y\neq f(x)$. اگر $m\neq n$، بنابه (ب) داریم $(s(m),\ f(z))\in\phi$، و بنابه (ط۲)، $s(m)\neq s(n)$. پس $(s(m),\ f(x))\neq(s(n),\ y)$،ونتیجه‌اینکه $(s(m),\ f(z))\in\phi^{*}$. درهرحال، ϕ^{*} در (۴) صدق می‌کندومجدداً به‌یك تناقض‌می‌رسیم. بنا به‌استقرا $T=\mathbb{N}_\circ$، و اثبات کامل می‌شود. □

به‌عنوان مثالهایی برای استفاده ازقضیهٔ بازگشتی داریم:

(۱) جمع. $\phi_m: \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$، $\phi_m(n) = m+n$، با تعریف

$$\phi_m(\circ) = m$$

$$\phi_m(s(n)) = s(\phi_m(n)).$$

دراینجا $c = m$ و $f = s$.

(۲) ضرب. $\mu_m: \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$، $\mu_m(n) = mn$، با تعریف

$$\mu_m(\circ) = \circ$$

$$\mu_m(s(n)) = \mu_m(n) + m.$$

دراینجا $c = \circ$، $f(r) = r + m$.

(۳) توان. $\pi_m: \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$، $\pi_m(n) = m^n$، با تعریف

$$\pi_m(\circ) = 1$$

$$\pi_m(s(n)) = m\pi_m(n).$$

دراینجا $c = 1$، $f(r) = rm$.

(۴) ترکیب مکرر یك تابع $f: X \to X$، باتعریف

$$f^\circ(x) = x$$

بهازای هر $x \in X$، $f^{s(n)}(x) = f(f^n(x))$.

قواعد حساب

حال که جمع وضرب بهروش مناسبی تعریف شدند، اثبات قواعد معمولی حساب امر نسبتاً ساده‌ای است. البته اگرخواننده سعی کند بدون هیچ گونه راهنمایی خودش این قواعد را اثبات کند، پی‌خواهد برد که اثباتها خیلی هم بدیهی نیستند. ابزار اصلی استقراء، ومشکل اصلی یافتن بهترین ترتیب جهت اثبات مطالب است. تصور می‌کنیم خوانندهٔ با استعداد بتواند مطالب زیررا بهنحو بهتری‌هم عرضه کند.

برای ارجاع، تعاریف‌را یادآوری می‌کنیم:

$$(\alpha \text{ یك})\ m + \circ = m, \qquad (\alpha \text{ دو})\ m + s(n) = s(m+n),$$

$$(\mu \text{ یك})\ m\circ = \circ, \qquad (\mu \text{ دو})\ ms(n) = mn + m.$$

حال از (α دو) و (α یك) درمی‌یابیم که $m + s(\circ) = s(m+\circ) = s(m)$. قبلاً $s(\circ)$ را با ۱ نشان دادیم، پس $s(m) = m + 1$.

لم ۳. بهازای هر $m \in \mathbb{N}_\circ$:

(الف) $0+m=m$،
(ب) $1+m=s(m)$،
(پ) $0m=0$،
(ت) $1m=m$.

اثبات. درهرمورد ازاستقرا روی m استفاده می‌شود. (الف) را ثابت، و بقیه‌را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. فرض کنیم

$$S=\{m\in \mathbb{N}_0 \mid 0+m=m\}.$$

بنا به (α یك)، واضح است که $0\in S$. حال اگر $m\in S$ آنگاه $0+m=m$، لذا بنا به (α دو)، $0+s(m)=s(0+m)=s(m)$. بنابراین $s(m)\in S$. بنا به (ط۳)، $S=\mathbb{N}_0$. □

قضیهٔ ۴. به ازای هر $m, n, p\in \mathbb{N}_0$:
(الف) $(m+n)+p=m+(n+p)$،
(ب) $m+n=n+m$،
(پ) $(mn)p=m(np)$،
(ت) $mn=nm$،
(ث) $m(n+p)=mn+mp$.

اثبات. (الف) با استفاده از

$$S=\{p\in \mathbb{N}_0 \mid (m+n)+p=m+(n+p)\}$$

واستقرا روی p ثابت می‌شود. اولاً

$$(m+n)+0=m+n \qquad \text{بنا به (}\alpha\text{ یك)}$$
$$=m+(n+0) \qquad \text{بنا به (}\alpha\text{ یك)}$$

لذا $0\in S$.

ثانیاً اگر $p\in S$ آنگاه

$$(m+n)+p=m+(n+p), \tag{۵}$$

لذا

$$(m+n)+s(p)=s((m+n)+p) \qquad \text{بنا به (}\alpha\text{ دو)}$$
$$=s(m+(n+p)) \qquad \text{بنا به (۵)}$$
$$=m+s(n+p) \qquad \text{بنا به (}\alpha\text{ دو)}$$

$$=m+(n+s(p))$$ بنا به (α دو)

ودر نتیجه $s(p)\in S$. بنا به‌استقرا، $S=\mathbb{N}_\circ$.

(ب) را با استقرا روی n و با استفاده از

$$S=\{n\in \mathbb{N}_\circ | m+n=n+m\}$$

ثابت می‌کنیم. لم ۳ (الف) نشان می‌دهد که $\circ\in S$. اگر $n\in S$، آنگاه

$$m+n=n+m, \qquad (۶)$$

و لذا

$$m+s(n)=s(m+n)$$ بنا به (α دو)

$$=s(n+m)$$ بنا به (۶)

$$=n+s(m)$$ بنا به (α دو)

$$=n+(۱+m)$$ بنا به لم۳ (ب)

$$=(n+۱)+m$$ بنا به‌قضیهٔ۴ (الف)

$$=s(n)+m,$$

وبنا براین $s(n)\in S$. بنا به‌استقرا، $S=\mathbb{N}_\circ$، وازاینجا (ب) هم اثبات می‌شود.

اینك بهتراست، بااستفاده از استقرا روی p، (ث) را ثابت کنیم. فرض کنیم

$$S=\{p\in \mathbb{N}_\circ | m(n+p)=mn+mp\} .$$

آنگاه

$$m(n+\circ)=mn$$ بنا به (α یك)

$$=mn+\circ$$ بنا به (α یك)

$$=mn+m\circ$$. بنا به (μ یك)

و در نتیجه $\circ\in S$.

اگر $p\in S$. آنگاه

$$m(n+p)=mn+mp \qquad (۷)$$

و لذا

$$m(n+s(p))=ms(n+p)$$ بنا به (α دو)

$$=m(n+p)+m$$ بنا به (μ دو)

$$=(mn+mp)+m$$ بنا به (۷)

$$= mn + (mp + m) \quad \text{بنا به (الف)}$$

$$= mn + ms(p) \quad \text{بنا به (}\mu\text{ دو)}$$

واز اینجا $s(p) \in S$، واستقرا نتیجه می‌دهد که $S = \mathbb{N}_0$.

حال اثبات (پ) نسبتاً ساده است واز همان نوع اثباتهای قبلی است. پس (ت) باقی می‌ماند که قدری پیچیده‌تر است. فرض کنیم

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 | mn = nm\} .$$

بنا به لم۳ (پ)، $0 \in S$. اگر $n \in S$ آنگاه

$$mn = nm \tag{۸}$$

داریم

$$ms(n) = mn + m, \quad \text{بنا به (}\mu\text{ دو)}$$

$$= nm + m. \quad \text{و بنا به (۸)،}$$

اگر می‌توانستیم نشان دهیم که این مقدار برابر با $s(n)m$ است اثبات تمام بود، ولی متأسفانه هنوز این‌را نمی‌دانیم. ولی می‌توانیم آن‌را با استقرای دیگری روی m اثبات کنیم. فرض کنیم

$$T = \{m \in \mathbb{N}_0 | nm + m = s(n)m\} .$$

آنگاه $0 \in T$، واگر $m \in T$ آنگاه

$$nm + m = s(n)m, \tag{۹}$$

ولذا

$$ns(m) + s(m) = n(m + 1) + (m + 1)$$

$$= (nm + n) + (m + 1) \quad \text{بنا به (ث)}$$

$$= nm + (n + (m + 1)) \quad \text{بنا به (الف)}$$

$$= nm + ((n + m) + 1) \quad \text{بنا به (الف)}$$

$$= nm + ((m + n) + 1) \quad \text{بنا به (ب)}$$

$$= nm + (m + (n + 1)) \quad \text{بنا به (الف)}$$

$$= (nm + m) + (n + 1) \quad \text{بنا به (الف)}$$

$$= s(n)m + s(n) \quad \text{بنا به (۹)}$$

$$= s(n)s(m) \quad \text{بنا به (}\mu\text{ دو)}$$

ولذا $s(m) \in T$ و $T = \mathbb{N}_\circ$. بنابراین، با بازگشت به‌نقطه‌ای که توقف کرده بودیم داریم، $s(n) \in S$ و $S = \mathbb{N}_\circ$. این‌امر (ت) را ثابت می‌کند. □

حال‌که این تمرین حجیم استقرایی انجام شد، می‌توانیم این نتایج مربوط به‌حساب را آزادانه به‌کار ببریم. نخست $n+1$ را جانشین $s(n)$ می‌کنیم. در این صورت اصل موضوع استقرا صورت مأنوس‌تری به‌خود می‌گیرد:

اگر $S \subseteq \mathbb{N}_\circ$، $0 \in S$، و $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$، آنگاه $S = \mathbb{N}_\circ$.

اصل موضوع (ط۲) هم به‌صورت

$$m+1=n+1 \Rightarrow m=n$$

برگردانده می‌شود، واین‌اصل‌را می‌توان بااستفاده‌از استقرا تعمیم داد وچنین به‌دست‌آورد:

قضیهٔ ۵ . به‌ازای هر $m, n, q \in \mathbb{N}_\circ$:

(الف) $m+q=n+q \Rightarrow m=n$،

(ب) $q \neq 0$، $mq=nq \Rightarrow m=n$.

اثبات . (الف) ازاستقرا روی q استفاده می‌کنیم.فرض کنیم

$$S=\{q \in \mathbb{N}_\circ | m+q=n+q \Rightarrow m+n\} .$$

واضح است که $0 \in S$. اگر $q \in S$، فرض می‌کنیم

$$m+(q+1)=n+(q+1) .$$

آنگاه، بنابه قضیهٔ ۴،

$$(m+q)+1=(n+q)+1,$$

لذا بنابه (ط۲)،

$$m+q=n+q$$

وچون $q \in S$،

$$m=n .$$

بنابراین $q+1 \in S$، وبنا به‌استقرا $S = \mathbb{N}_\circ$.

(ب) فرض کنیم

$$S=\{m \in \mathbb{N}_\circ | q \neq 0 , mq=nq \Rightarrow m=n\} .$$

برای اثبات $0 \in S$، فرض می‌کنیم $q \neq 0$ و

$$nq=0q=0 .$$

آنگاه به‌ازای عددی چون p داریم $q=p+۱$. اگر $n\neq ۰$ آنگاه $n=r+۱$. پس $nq=(Pr+p+r)+۱$ نمی‌تواند ۰ باشد. بنابراین $n=۰$، و $۰\in S$.

حال فرض کنیم $m\in S$، $q\neq ۰$، و

$$(m+۱)q=nq\,.$$

مانندقبل، داریم $n\neq ۰$، لذا به‌ازای $r\in \mathbb{N}_۰$ی، $n=r+۱$. آنگاه $mq+q=rq+q$. بنابه قسمت (الف)، $mq=rq$؛ بنابه فرض، $m=r$. درنتیجه $n=m+۱$. این مطلب، اثبات‌را کامل می‌کند. □

اکنون می‌توانیم تفریق را مورد بحث قراردهیم. فرض کنیم $p=r+q$. بنابه‌قضیهٔ ۵، r توسط p و q به طور یکتا به‌دست می‌آید. بنابراین r را با $p-q$ نمایش می‌دهیم. به‌ازای $m, n\in \mathbb{N}_۰$، رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$m\geqslant n \iff \exists\, r\in \mathbb{N}_۰,\ m=r+n$$

تعریف می‌کنیم. اگر $m, n\in \mathbb{N}_۰$، تفاضل $m-n$ فقط وقتی تعریف می‌شود کـه $m\geqslant n$. بااین شرایط می‌توانیم قواعد مختلف تفریق‌را طبق نیاز اثبات‌کنیم؛ ازجمله :

به‌ازای $m\geqslant n\geqslant r$، $m-(n-r)=(m-n)+r$،

به‌ازای $n\geqslant r$، $m+(n-r)=(m+n)-r$،

به‌ازای $n\geqslant r$، $m(n-r)=mn-mr$.

اثبات همهٔ اینها ساده است؛ مثلاً، آخری چنین اثبات می‌شود که

(چون $n\geqslant r$) $n=s+r$،

در نتیجه

$$mn=m(s+r)=ms+mr\,.$$

لذا بنابه تعریف،

$$mn-mr=ms=m(n-r)$$

زیرا $s=n-r$.

تقسیم‌را نیز می‌توانیم بررسی کنیم، ودرصورتی که $m=rn$ ($n\neq ۰$)، می‌توانیم r را با m/n نمایش دهیم. این سؤال‌را کـه چه وقت تقسیم امکان‌پذیـر است دربخش بعد مورد بحث قرار خواهیم داد.

ترتیب در اعداد طبیعی

قبلاً در $\mathbb{N}_\circ$ رابطهٔ $\geqslant$ را تعریف کردیم. رابطه‌های ترتیبی دیگر چنین تعریف می‌شوند:

$$m>n \Leftrightarrow m\geqslant n \,\&\, m\neq n,$$

$$m\leqslant n \Leftrightarrow n\geqslant m,$$

$$m<n \Leftrightarrow n>m.$$

باید ثابت کنیم که این رابطه‌ها در واقع، به‌معنای فصل ۴ ، رابطه‌های ترتیبی هستند. مثلاً

قضیهٔ ۶. به‌ازای هر $m, n, p\in \mathbb{N}_\circ$، $m\geqslant n,\ n\geqslant p \Rightarrow m\geqslant p$.

اثبات. اعدادی چون $s\in \mathbb{N}_\circ$ و r وجود دارند که $m=r+n$، و $n=s+p$. بنابراین $m=r+(s+p)=(r+s)+p$، لذا $m\geqslant p$. □

اثبات خاصیت دوم رابطه‌های ترتیبی نیز آسان است:

قضیهٔ ۷. اگر $m, n\in \mathbb{N}_\circ$، $m\geqslant n$، و $n\geqslant m$، آنگاه $m=n$.

اثبات. اعدادی چون $r, t\in \mathbb{N}_\circ$ وجود دارند که $m=r+n$، و $n=t+m$؛ لذا $m=r+t+m$. بنا به قضیهٔ ۵ (الف)، $r+t=\circ$. $t\neq \circ$ نمی‌تواند باشد، زیرا بنا به قضیهٔ ۱ نتیجه می‌گیریم که به ازای عضوی چون $q\in \mathbb{N}_\circ$، $t=q+1$، و سپس $(r+q)+1=\circ$، که متناقض اصل موضوع (ط ۱) است. بنابراین $t=\circ$، ولذا $n=m$. □

خاصیت سوم رابطهٔ ترتیبی نیاز به‌یك اثبات فنی‌تری دارد که به قضیهٔ ۱۲ موکول می‌شود. ولی اثبات این مطلب که این روابط تحت عملهای حساب در $\mathbb{N}_\circ$ همان طور رفتار می‌کنند که انتظار می‌رود، امرساده‌ای است:

قضیهٔ ۸. به‌ازای هر $m, n, q\in \mathbb{N}_\circ$:

(الف) اگر $m\geqslant n$، و $p\geqslant q$، آنگاه $m+p\geqslant n+q$،

(ب) اگر $m\geqslant n$، و $p\geqslant q$، آنگاه $mp\geqslant nq$.

اثبات. (الف) اعدادی‌چون $r, s\in \mathbb{N}_\circ$ وجوددارند که $m=r+n$، و $p=s+q$. ازاین‌رو، پس‌از ساده‌کردن، می‌بینیم که $m+p=(r+s)+(n+q)$.

(ب) به‌همین نحو داریم $mp=nq+(rs+ns+rq)$. □

عضو صفر $\circ$ کوچکترین عضو $\mathbb{N}_\circ$ است، به‌این معنی که:

لم ۹. اگر $m\in \mathbb{N}_\circ$ آنگاه $m\geqslant \circ$.

اثبات. $m=0+m$. □

عضو ۱ کوچکترین عضو بعدی است:

لم۱۰. اگر $m\in \mathbf{N}_0$، $m>0$ آنگاه $m\geqslant 1$.

اثبات. بنا بـه قضیهٔ ۱، اگر $m\neq 0$ آنگاه بـه ازای عضـوی چـون $q\in \mathbf{N}_0$، $m=q+1$. بنابراین $m\geqslant 1$. □

به‌همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که بعداز ۱، $1+1=2$ کوچکترین عضو است، سپس بعداز ۲، $2+1=3$ کوچکتریـن است، والی‌آخر. مفیدتر است که دراین مـورد قضیه‌ای کلی به‌اثبات برسد :

قضیهٔ۱۱. اگر $m, n\in \mathbf{N}_0$ و $m>n$، آنگاه $m\geqslant n+1$.

اثبات. به‌ازای $r\in \mathbf{N}_0$ داریم $m=n+r$؛ و $r\neq 0$ زیـرا $m\neq n$. بنا بـه قضیهٔ ۱، بـه ازای عضـوی چـون $q\in \mathbf{N}_0$، $r=q+1$، لـذا $m=(n+1)+q$، و $m\geqslant n+1$. □

حال اثبات اینکه $\geqslant$ به‌معنای فصل ۵ یك رابطهٔ ترتیبی است‌را می‌توان کامل کرد.

قضیهٔ ۱۲. رابطهٔ $\geqslant$ یك رابطهٔ ترتیبی (ضعیف) روی $\mathbf{N}_0$ است.

اثبات. بنا به‌تعریف، باید ثابت‌کنیم که به‌ازای هر $m, n, p\in \mathbf{N}_0$،

(تض ۱) $m\geqslant n \,\&\, n\geqslant p \Rightarrow m\geqslant p$،

(تض ۲) $m\geqslant n$ یا $n\geqslant m$،

(تض ۳) اگر $m\geqslant n$ و $n\geqslant m$، آنگاه $m=n$.

(تض ۱) و (تض ۳) را قبلاً درقضیه‌های ۶ و ۷ اثبات‌کردیـم. بـرای اثبات (تض ۲)، فرض می‌کنیم

$$S(m)=\{n\in \mathbf{N}_0 \mid m\geqslant n \text{ یا } n\geqslant m\}.$$

می‌خواهیم ثابت‌کنیم که به‌ازای هر $m\in \mathbf{N}_0$، $S(m)=\mathbf{N}_0$. بـه‌ازای هر m مفروضی، داریم $0\in S(m)$، زیرا $m\geqslant 0$. حال فرض کنید $n\in S(m)$. داریـم $m\geqslant n$ یا $n\geqslant m$. اگر $n\geqslant m$ آنگاه $n+1\geqslant m$. اگر $n\leqslant m$ آنگاه یا $n=m$، و $m\leqslant n+1$، یا $m>n$ که دراین صورت بنا به‌قضیهٔ ۱۱، $m\geqslant n+1$. لذا $n+1\in S(m)$. بنابـه استقرا، طبق انتظار $S(m)=\mathbf{N}_0$. □

همان طورکه درفصل ۴ متذکرشدیم، نتیجه می‌گیریم که $>$ یك رابطهٔ ترتیبی اکید

است. یعنی، به‌ازای هر $m, n, p \in \mathbf{N}_\circ$،

$$m > n \,\&\, n > p \Rightarrow m > p,$$

و دقیقاً یکی از روابط $m > n$، $m = n$، و $m < n$ درست است (قانون سه‌گانگی).
قضیهٔ بعد تقریباً عکس قضیهٔ ۵ است.

قضیهٔ۱۳. به‌ازای هر $m, n, q \in \mathbf{N}_\circ$:
(الف) $m+q > n+q \Rightarrow m > n$،
(ب) بافرض $q \neq \circ$، $mq > nq \Rightarrow m > n$.

اثبات. (الف) اگر $m \ngtr n$، آنگاه بنا به‌قانون سه‌گانگی، $m \leqslant n$. ولی بنا به‌قضیهٔ ۸ (الف)، $m \leqslant n$ نتیجه می‌دهد $m+q \leqslant n+q$. این مطلب متناقض فرض است، و لذا قسمت (الف) اثبات می‌شود. قسمت (ب) به‌طور مشابه ثابت می‌شود. □

البته‌اگر $\leqslant$ را به‌جای $<$ درنظر بگیریم، بازهم قضیهٔ ۱۳ معتبر است، ودراین صورت قضیهٔ اخیر دقیقاً عکس قضیهٔ ۵ خواهد بود.

یکتایی $\mathbf{N}_\circ$

مجموعهٔ $\mathbf{N}_\circ$، عملیات، و ترتیبش، به‌معنی کاملاً مشخصی یکتا هستند. به‌عنوان‌مثالی پیش‌پا افتاده، دستگاه شمارش انگلیسی «وان، تو، تری، . . .»، با وجودی که بی‌تردید باشمارش فارسی «یك، دو، سه، . . .» متفاوت است، دارای همان ساخت حسابی‌است. برای مشاهدهٔ این مطلب، ملاحظه می‌کنیم که درترجمهٔ انگلیسی به‌فارسی باجانشین‌کردن «یك» بـه‌جای «وان»، «دو» به‌جای «تو»، والی آخر، حساب معتبرانگلیسی به‌حساب‌معتبرفارسی، وبرعکس، تبدیل می‌شود. درمورد $\mathbf{N}_\circ$ نیزهمین طور است. فرض‌کنیم بتوانیم مجموعهٔ دیگری چون $\mathbf{N}'_\circ$ وتابعی چون $s' : \mathbf{N}'_\circ \to \mathbf{N}'_\circ$ پیداکنیم کـه در اصول موضوع متناظر، (ط‌۱′) ــ (ط‌۳′) صدق کنند. آنگاه تابع $\phi : \mathbf{N}_\circ \to \mathbf{N}'_\circ$ را با

$$\phi(\circ) = \circ'$$
$$\phi(s(n)) = s'(\phi(n)),$$

به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}_\circ$، تعریف می‌کنیم. این تابع، بنابه قضیهٔ بازگشتی، وجود دارد؛ تابعی چون $\varphi : \mathbf{N}'_\circ \to \mathbf{N}_\circ$ باتعریف

$$\varphi(\circ') = \circ$$
$$\varphi(s'(m)) = s(\varphi(m)),$$

به‌ازای هر $m \in \mathbf{N}'_\circ$، وجود دارد.

یك اثبات سادهٔ استقرایی نشان می‌دهد که ϕ و φ وارون یکدیگرند. فرض می‌کنیم $S=\{n\in \mathbb{N}_\circ|\varphi\phi(n)=n\}$ ونشان می‌دهیم که $\varphi\phi=1_{\mathbb{N}_\circ}$، و به‌همین‌نحو ثابت می‌کنیم که $\phi\varphi=1_{\mathbb{N}'_\circ}$. استقرا روی n همچنین نشان می‌دهد که

$$\phi(m+n)=\phi(m)+\phi(n),$$

$$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n),$$

و

$$m\geqslant n \Rightarrow \phi(m)\geqslant\phi(n).$$

لذا تابع دوسویی ϕ بین $\mathbb{N}_\circ$ و $\mathbb{N}'_\circ$، حساب و ترتیب‌را حفظ می‌کند: می‌توانیم از آن برای «برگرداندن» نتایج معتبر در یکی به‌نتایج معتبر در دیگری استفاده کنیم. چنین تابع دوسویی‌را یك یکریختی ترتیبی[1] می‌نامند. با این معنی، دستگاهی که (ط ۱)ـ(ط ۳)را ارضا می‌کند ساخت منحصر به‌فرد دارد: تمام‌این دستگاهها یکریخت ترتیبی یکدیگرند. همهٔ خواص اعداد طبیعی درسه‌اصل موضوع ساده خلاصه می‌شود!

پس یکی‌از دستگاههایی که می‌تواند این اصول موضوع را ارضا کند، همان مفهوم شهودیمان $\mathscr{N}\cup\{\circ\}$ است، ولذا این دستگاه باید به‌روش بدیهی متناظر با $\mathbb{N}_\circ$ باشد. تفاوت اساسی آنها دراین است که خواص موردنظر دربارهٔ $\mathscr{N}\cup\{\circ\}$ بامثال و تجربه به دست آمده، وحال‌آنکه خواص $\mathbb{N}_\circ$ به‌طور منطقی ازاصول موضوع استنتاج شده‌اند. پس برای همهٔ خواص عادی مربوط به $\mathscr{N}\cup\{\circ\}$ می‌توان توجیه دقیقی ارائه داد. مثلاً می‌توانیم اعضای $\mathbb{N}_\circ$ را بااستفاده‌ازنماد دهدهی نامگذاری کنیم وجداول جمع وضرب‌را محاسبه نماییم. فعلاً، ارجح است که این نکات فنی‌را خیلی عادی بپنداریم وازآنها صرفنظر کنیم .

شمارش

همچون درزندگی روزمره، می‌توانیم بااستفاده ازاعداد طبیعی «بشماریم». فرض‌کنیم به ازای $n\in\mathbb{N}$،

$$\mathbb{N}(n)=\{m\in\mathbb{N}|1\leqslant m\leqslant n\},$$

و

$$\mathbb{N}(\circ)=\varnothing .$$

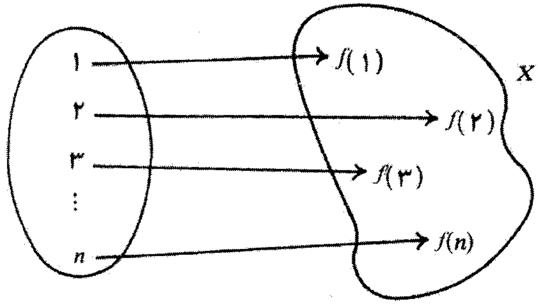
می‌گوییم مجموعه‌ای چون X دارای n عضو $(n\in\mathbb{N}_\circ)$ است اگر تابعی دو سویی چون

---

۱. کلمهٔ «یکریختی»، به‌تنهایی، معمولاً برای توابعی‌دوسویی که تمام‌عملهای حسابی (جبری) مربوط را حفظ می‌کنند به‌کار می‌رود. کلمهٔ «ترتیبی» برای تأکید براین مطلب به‌کارمی‌رود که ترتیب نیزحفظ می‌شود. این اصطلاح، برای دستگاههای متعدد دیگرریاضی‌هم کاربرد دارد.

$$f: \mathbb{N}(n) \to X$$

وجود داشته باشد. این مطلب الگویی برای ایدهٔ ابتدایی شمارش است:



اگر به‌ترتیب به‌اعضای $f(۱)$، $f(۲)$، ...، و $f(n)$ اشاره کنیم و آنهارا «۱، ۲، ...، وn» بنامیم، آنگاه دقیقاً شیوهٔ متداول شمردن را رعایت کرده‌ایم. نماد مفید $\mathbb{N}(۰)=\varnothing$ به ما اجازه می‌دهد که این‌روند را برای مجموعهٔ تهی نیز به‌کار ببریم. اگر به‌ازای $n \in \mathbb{N}_۰$ ی، مجموعــه‌ای دارای n عضــو باشد، آن‌را باپایان، ودر غیراین صورت آن‌را بی‌پایان می‌نامیم.[۱]

این شیوهٔ شمارش، به‌ترتیب شمردن بستگی‌ندارد: اگردوسویی $f: \mathbb{N}(n) \to X$ و دوسویی $g: \mathbb{N}(m) \to X$ مفروض باشند، همواره داریم $m=n$. برای‌اثبات این‌مطلب، فرض می کنیم $\varphi = f^{-۱}g$. آنگاه $\varphi: \mathbb{N}(m) \to \mathbb{N}(n)$ یك دو سویی است. بــه‌روش استقرا ثابت می‌کنیم که اگــر تابعی دو سویی بین $\mathbb{N}(m)$ و $\mathbb{N}(n)$ وجــود داشته باشد، آنگاه $m=n$.

این مطلب یقیناً به‌ازای $m=۰$ درست است.فرض می کنیم مطلب به‌ازای $m \in \mathbb{N}_۰$ نیز درست باشد، ودوسویی

$$\theta: \mathbb{N}(m+۱) \to \mathbb{N}(k).$$

را درنظر می گیریم. حال $k \neq ۰$، یا در غیراین صورت $m+۱=۰$ که متناقض (ط ۱) است. بنـابـرایـن بـه ازای $n \in \mathbb{N}_۰$ ی، $k=n+۱$. حـال تــابــع دو سویــی $\theta^*: \mathbb{N}(m+۱) \to \mathbb{N}(n+۱)$ را چنان می‌سازیم که $\theta^*(m+۱)=n+۱$. اگرداشته باشیم $\theta(m+۱)=n+۱$، آنگاه $\theta^*=\theta$ را اختیارمی‌کنیم. وگرنه عضوی چون $q \leqslant n$ وجود داردکه $\theta(q)=n+۱$، و لذا چنین تعریف می کنیم که

$$\theta^*(q)=\theta(m+۱),$$

$$\theta^*(m+۱)=n+۱,$$

---

۱. با پایان را متناهی وبی‌پایان را نامتناهی هم می‌نامند.ــم.

و درسایرموارد، $\theta^*(r)=\theta(r)$.

حال θ^* را به‌تابعی چون

$$\theta^*|_{\mathbf{N}(m)} : \mathbf{N}(m) \rightarrow \mathbf{N}(n)$$

محدود می‌کنیم. این تابع به وضوح دوسویـی است، ولذا بنا به‌استقرا، $m=n$. بنابراین $m+۱=n+۱=k$، پس مرحلهٔ استقرایی کامل می‌شود.

این مطلب ایدهٔ شهودی شمارش دردستگاه صوری‌را توجیه می‌کند.

ابتکار فون نویمان[1]

اکنون برای تنوع، روش برجستهٔ جان‌فون‌نویمان برای توصیف اعداد طبیعی‌راکه درسال ۱۳۰۲ هجری شمسی (۱۹۲۳ میلادی) اعلام شد، ذکر می‌کنیم. این روش، که عدد n را به‌عنوان مجموعه‌ای با n عضو تعریف می‌کند، به‌خصوص برای شمارش مناسب است. برای شروع تنها یك انتخاب برای مجموعهٔ با ۰ عضو وجود دارد، پس قرار می‌دهیم

$$۰_v=\varnothing \,.$$

(دراینجا اندیس v دراشاره به‌فون‌نویمان است). حال یك شیء به‌نام ۰_v داریم، لذا

$$۱_v=\{۰_v\}$$

را تعریف می‌کنیم که به‌طور آشکار مجموعه‌ای است بایك عضو. حال دو شیء داریم ۰_v و ۱_v، و لذا

$$۲_v=\{۰_v,\ ۱_v\}$$

را تعریف می‌کنیم. اکنون روشن است که چطور باید ادامه داد. ملاحظه کنیدکه

$$\{۰_v,\ ۱_v\}=\{۰_v\}\cup\{۱_v\}=۱_v\cup\{۱_v\}\,.$$

پس‌از تعریف n_v به صورت

$$n_v=\{۰_v,\ ۱_v,\ \ldots,\ (n-۱)_v\}$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}(n+۱)_v&=n_v\cup\{n_v\}\\&=\{۰_v,\ \ldots,\ (n-۱)_v\}\cup\{n_v\}\\&=\{۰_v,\ \ldots,\ n_v\}\,.\end{aligned}$$

---

1. von Neumann, John

این تعریف را می‌توان به‌صورت صوری‌تر زیرهم بیان کرد. به‌ازای هرمجموعهٔ X، فرض کنیم

$$\sigma(X)=X\cup\{X\}$$

تالی X باشد. این تعریف دارای خاصیت عجیب

$$X\subseteq\sigma(X) \quad \text{و} \quad X\in\sigma(X)$$

است. حال مجموعه‌ای چون Ω را که اعضایش مجموعه هستند استقرایی می‌نامیم اگر

$$\varnothing\in\Omega\,,$$
$$X\in\Omega\Rightarrow\sigma(X)\in\Omega\,.$$

برای پرهیز ازتعریفی چون «والی‌آخر ...»، فون‌نویمان اصل موضوع زیررا وضع کرد:

اصل موضوع بینهایت. مجموعه‌ای استقرایی چون Ω وجود دارد.

این مجموعهٔ Ω ممکن است بزرگترازمجموعه‌ای باشد که مورد نیازاست. ولی اگر $\mathbb{N}_v$ اشتراك همهٔ زیرمجموعه‌های استقرایی Ω باشد، آنگاه‌این مجموعه کوچکترین مجموعهٔ استقرایی‌است. ازاین‌رو، اگر $S\subseteq\mathbb{N}_v$ و S استقرایی‌باشد، نتیجه‌می‌گیریم که $S=\mathbb{N}_v$.

از آنجا که $\mathbb{N}_v$ استقرایی است، داریم $\varnothing\in\mathbb{N}_v$، و $X\in\mathbb{N}_v\Rightarrow\sigma(X)\in\mathbb{N}_v$، لذا $\sigma:\mathbb{N}_v\to\mathbb{N}_v$ یك‌تابع‌است. همچنین، به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}_v$، $\sigma(n)\neq\varnothing$، زیرا $n\in\sigma(n)$. ثابت می‌کنیم که σ یك به یك است.

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که‌اگر $m,n\in\mathbb{N}_v$ و $m\in n$، آنگاه $m\subseteq n$. زیرا فرض کنیم

$$S=\{n\in\mathbb{N}_v|m\in n\Rightarrow m\subseteq n\}\,.$$

واضح است که $\varnothing\in S$ فرض کنیم $n\in S$ و $m\in\sigma(n)$. آنگاه یا $m\in n$ یا $m=n$. در هر دوحالت $m\subseteq n\cup\{n\}=\sigma(n)$. از این‌رو S زیرمجموعه‌ای استقرایی از $\mathbb{N}_v$ است، و لذا $S=\mathbb{N}_v$.

حال فرض کنیم $\sigma(m)=\sigma(n)$. آنگاه $m\cup\{m\}=n\cup\{n\}$. بنابراین $m\in n\cup\{n\}$ یا $m\in n$ یا $m=n$. با توجه به یادآوری فوق، $m\subseteq n$. به همین نحو $n\subseteq m$، پس $m=n$ و σ یك به یك است.

باجمع بندی‌این یادآوریهاملاحظه‌می کنیم که $\mathbb{N}_v$ یك مجموعه‌است، $\sigma:\mathbb{N}_v\to\mathbb{N}_v$ یك تابع است، $\varnothing\in\mathbb{N}_v$، و داریم:

(یك) به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}_v$، $\varnothing\neq\sigma(n)$،

(دو) $\sigma(m)=\sigma(n)\Rightarrow m=n$،

(سه) اگر $S\subseteq\mathbb{N}_v$، $\varnothing\in S$، و $n\in S\Rightarrow\sigma(n)\in S$، آنگاه $S=\mathbb{N}_v$.

این خواص، همان اصول موضوع پئانو هستند که درآن $\mathbb{N}_v$ به جای $\mathbb{N}$ ، σ به جای

s، و $\varnothing$ بـه‌جای ۰ قرار گرفته است. لذا ایدهٔ فون‌نویمان بنیاد دیگری برای اعداد طبیعی به‌دست‌می‌دهد، و اصل موضوع بینهایتش به‌عنوان جانشینی برای اصل موضوع وجود اعداد طبیعی‌عمل می‌کند. می‌توانستیم به‌جای روش پئانو ازاین‌روش استفاده‌کنیم. ولی در دستگاه فون‌نویمان، ساده‌ترین راه شمارش این‌است که بگوییم، مجموعه‌ای چون X دارای n عضو است اگر تابعی دوسویی چون $f:n_v \to X$، یعنی

$$f:\{۰_v, ۱_v, \ldots, (n-۱)_v\} \to X$$

وجود داشته باشد. و این‌امر به‌این معنی‌است که به‌جای‌شمارش ابتدایی‌تر «n ،...، ۳،۲،۱» که به‌آن عادت کرده‌ایم، بشماریم «۰_v، ۱_v، ۲_v، ...، $(n-۱)_v$».

صورتهای دیگر استقرا

در اثبات بـه روش استقرا، گاهی درمرحلهٔ استقرا بـه فرضی بیش از صادق بودن $P(n)$ نیازمندیم. ممکن‌است‌لازم‌باشدبدانیم که $P(۱)$، $P(۲)$، ...، $P(n)$ همه صادقند تا بتوانیم به $P(n+۱)$ برسیم . اصلـی موسوم بـه «اصل عمومـی استقرا» راه‌گشای این وضعیت است. اگر

(الف ع ۱): $P(۰)$ درست باشد، و

(الف ع ۲): درستی $P(m)$، به‌ازای‌هر $m \in \mathbb{N}_۰$ با $m \leqslant n$، درستی $P(m+۱)$ را ایجاب‌کند،

آنگاه $P(n)$ به‌ازای همهٔ اعضای $n \in \mathbb{N}_۰$ درست است.

ابتدا، به‌دلیل دقیقتر به‌نظررسیدن گزارهٔ دوم، چنین تصور می‌شودکه‌این‌اصل تعمیمی واقعی ازاصل استقرا است. ولی‌اگر فرض‌کنیم $Q(n)$ گزاره‌نمای

$$P(۰)\ \&\ P(۱)\ \&\ldots\&\ P(n),$$

یا به‌بیان صوری‌تر گزاره‌نمای

«به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}_۰$، با $m \leqslant n$، $P(m)$ درست است»

باشد، آنگاه می‌بینیم که (الف ع ۱) و (الف ع ۲) به:

(یك) $Q(۰)$ درست است،

(دو) درستی $Q(n)$ درستی $Q(n+۱)$ را نتیجه می‌دهد،

تبدیل می‌شوند.

بنا براین ظاهر فریبندهٔ اصل «عمومی» از بین می‌رود: این همان اصل عادی بـرای $Q(n)$ است، وازنظر تئوری کلی‌ترازاصل معمولی استقرا نیست. البته، درعمل‌گاهی اثباتها را ساده‌تر می‌کند. بااستفاده ازآن می‌توانیم نسخهٔ بـدل بسیار مفیدی ازاصل استقـرا را اثبات کنیم:

قضیهٔ ۱۴ (اصل خوش ترتیبی). هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{N}_0$ دارای کوچکترین عضو است.[1]

اثبات به‌عبارت صوری‌تر، باید نشان دهیم که اگر $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{N}_0$، آنگاه عضوی چون $a \in S$ وجود دارد که به‌ازای هر $s \in S$ داریم $a \leqslant s$. برای یافتن یك تناقض، فرض می‌کنیم چنین aیی وجودندارد. گیریم $P(n)$ گزاره‌نمای $n \notin S$ باشد. آنگاه $P(0)$ درست است، زیرا اگر $0 \in S$، لم ۹ نتیجه می‌دهد که ۰ کوچکترین عضو S است. حال فرض می‌کنیم که $P(m)$ به‌ازای هر $m \leqslant n$ درست باشد، لذا اگر $m \leqslant n$ آنگاه $m \notin S$. اگر $s \in S$ آنگاه $s > n$، و لذا بنا به قضیهٔ ۱۱، $s \geqslant n+1$. عدد $n+1$ متعلق به S نیست زیرا در غیر این صورت باید کوچکترین عضو باشد، پس $n+1 \notin S$ و $P(n+1)$ درست است. بنا به اصل عمومی استقرا، $P(n)$ به ازای هر nی درست است، یعنی، S تهی است. واین یك تناقض است. $\square$

نسخهٔ بدل دیگری از اصل استقرا از ۰ شروع نمی‌کند بلکه از عضوی چون $k \in \mathbb{N}_0$ آغاز می‌کند. اگر

$P(k)$ درست باشد ،

و اگر

درستی $P(m)$، به‌ازای همهٔ $m \geqslant k$ ، درستی $P(m+1)$ را ایجاب کند،

آنگاه می‌توان استنتاج کرد که $P(n)$ به‌ازای هر $n \geqslant k$ درست است.

اگر $Q(n) = P(n+k)$ اختیارشود، این‌اصل به‌اصل معمولی تبدیل می‌شود. اغلب این اصل‌را به‌ازای $k = 1$ به‌کار می‌بریم. ولی درقضیهٔ بعد، که در جایی دیگر مورد نیاز است، $k = 3$ گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۱۵ (قانون کلی شرکت پذیری). اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$، آنگاه حاصل‌جمع $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مستقل از نحوهٔ قراردادن پرانتزهاست.

اثبات. اگر $n = 3$ ، تنها دوشیوهٔ پرانتزگذاری وجود دارد ، وآن هم $(a_1 + a_2) + a_3$ و $a_1 + (a_2 + a_3)$ است. این دو، بنا به قضیهٔ ۴ (الف) برابرند. فرض کنیم قضیه برای nی درست باشد. آنگاه، بدون هیچ ابهامی می‌توانیم همهٔ پرانتزهای مربوط به حاصل‌جمع n عدد یا کمتررا حذف کنیم. لذا باید مجموع

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_{n+1})$$

را درنظر بگیریم ونشان دهیم که مقدارآن مستقل‌از k است. فرض کنیم

$$a = a_1 + \cdots + a_k$$

---

۱. یعنی، عضوی‌متعلق به‌آن‌زیرمجموعه‌و $\leqslant$ (کوچکتر ازیامساوی‌با) هرعضودیگر آن مجموعه.

$$b = a_{k+1} + \cdots + a_n$$

$$c = a_{n+1}\,.$$

آنگاه عبارت فوق برابر است با

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$= (a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}$$

که به k وابسته نیست. این امر مرحلهٔ استقرا را کامل می‌کند. □

وقتی ضرب را به‌جای جمع در نظر بگیریم، اثبات مشابه همین خواهد بود.

تقسیم

اگر $m, n \in \mathbb{N}_0$ و $n \neq 0$، همیشه امکان‌پذیر نیست که m را بر n تقسیم کنیم و جوابی در $\mathbb{N}_0$ به دست آوریم. برای امکان‌پذیر بودن این تقسیم، m باید مضربی از n باشد، یعنی به‌ازای عضوی چون $q \in \mathbb{N}_0$ باید داشته باشیم $m = qn$. اگر چنین نباشد، آنگاه عمل تقسیم باقیمانده‌ای خواهد داشت.

قضیهٔ ۱۶ (الگوریتم تقسیم). اگر $m, n \in \mathbb{N}_0$، $n \neq 0$، اعضای یکتایی چون $q, r \in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $m = qn + r$، $r < n$.

اثبات. استقرا را روی m به‌کار می‌بریم. فرض کنیم

$$S = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m = qn + r \text{ ،} r < n \text{ ،} q, r \in \mathbb{N}_0 \text{ به‌ازای}\}\,.$$

ازآنجاکه $0 = 0n + 0$، داریم $0 \in S$. فرض کنیم $m \in S$. آنگاه $m = qn + r$ که در آن $r < n$، و

$$m + 1 = qn + r + 1\,. \qquad (*)$$

حال چون $r < n$، نتیجه می‌گیریم که $r + 1 \leqslant n$. لذا یا $n = r + 1$، که $(*)$ به

$$m + 1 = (q + 1)n + 0$$

تبدیل می‌شود، یا $r + 1 < n$، که $(*)$ به

$$m + 1 = qn + (r + 1) \quad \text{و} \quad r + 1 < n$$

بدل می‌گردد. درهردو حالت، $m + 1 \in S$، و لذا بنا به‌استقرا $S = \mathbb{N}_0$.

برای اینکه نشان دهیم q و r یکتا هستند، فرض می‌کنیم

$$m = qn + r = q'n + r'$$

و $r, r' < n$، آنگاه

$$qn \leqslant m < (q+1)n$$

$$q'n \leqslant m < (q'+1)n\,.$$

ازاین‌رو، بنا به‌خاصیت تعدی رابطهٔ ترتیبی، $qn < (q'+1)n$، ولـذا بنا بـه قضیهٔ ۱۳، $q < q'+1$، و آنگاه بنا به‌قضیهٔ ۱۱، $q \leqslant q'$. به همین نحو $q' \leqslant q$، پس $q = q'$. حال بنا به قضیهٔ ۵ (الف) نتیجه می گیریم که $r = r'$. □

تجزیه به عوامل

اکنون می‌توانیم تجزیه به عوامل اول را مورد بحث قرار دهیم، وبه‌خصوص یکتایی آن‌را ثابت کنیم. چون فقط اعداد غیرصفرمورد توجه هستند، دربقیهٔاین فصل با $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 - \{0\}$ سروکار خواهیم داشت. ابتدا به‌ارائه چند تعریف ساده می‌پردازیم.

می گوییم $k \in \mathbb{N}$ یك عامل یامقسوم علیه $m \in \mathbb{N}$ است اگر $s \in \mathbb{N}$ ی وجودداشته باشدکه $m = ks$. می‌نویسیم $k|m$. واضح است که ۱ و m مقسوم علیه‌های m هستند؛ هر مقسوم‌علیه دیگر، یك مقسوم علیه واقعی نام‌دارد. m راعددی اول می‌خوانیم اگر $m \neq 1$ و m هیچ مقسوم‌علیه واقعی نـداشته باشد. (۱ را برای سهولت بیان مواردی چون قضیهٔ تجزیه به‌عوامل یکتا که بعداً خواهد آمدکنار می گذاریم.) به‌آسانی دیده می‌شودکه هـر مقسوم‌علیه k برای m باید درحوزهٔ $1 \leqslant k \leqslant m$ قـرار داشته باشد، زیـرا اگر $k > m$ آنگاه‌چون $1 \leqslant s$، درمی‌یابیم که $ks > m$. لذاهرمقسوم‌علیه‌واقعی‌درحوزهٔ $1 < k < m$ قرار دارد.

اگر k مقسوم علیهی بـرای دو عدد $m, n \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌را یك مقسوم علیه مشترك می‌نامیم. پس ۱ همیشه مقسوم علیهی مشترك است؛ اگر ۱ تنها مقسوم علیه مشترك باشد، m و n را متباین می‌خوانیم. به‌جای‌اینکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌را به عنوان بزرگترین عدد بین‌مقسوم علیه‌های مشترك تعریف کنیم (که در واقع چنین هم هست)، آن‌را بـه‌روش مفیدتری تعریف می کنیم. می گوییم $h \in \mathbb{N}$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $n \in \mathbb{N}$ و m است اگر h مقسوم علیه مشترکی باشدکـه هرمقسوم علیه مشترك دیگری چـون k، مقسوم علیهی از h هم باشد. می‌نویسیم ب. م. م. $h = (m, n)$. ساده‌ترین راه اثبات اینکه هر دو عـدد طبیعی غیرصفر بزرگترین مقسوم علیه مشترکی دارند، محاسبهٔ صریح آن است. بـرنامه‌ای برای محاسبهٔ ب.م.م. وجود دارد که (به‌دلایل تاریخی، الگوریتم اقلیدسی[1] نامیده می‌شود) واز دو حقیقت زیرناشی می‌شود:

(یك) اگر $r_1 = q_1 r_2$ آنگاه ب. م. م. $r_2 = (r_1, r_2)$،

---

1. Euclidean algorithm

(دو) اگر $r_۱ = q_۱ r_۲ + r_۳$ و $r_۳ \neq ۰$، آنگاه ب.م.م. $(r_۱ , r_۲) =$ ب.م.م. $(r_۲ , r_۳)$.
اثبات این احکام با استفاده از تعریف ب.م.م. تمرین ساده‌ای است، و به‌خصوص (دو) به‌این دلیل درست است که معادلهٔ $r_۱ = q_۱ r_۲ + r_۳$ نشان می‌دهد که هر مقسوم علیه مشترك $r_۱$ و $r_۲$ باید $r_۳$ را نیز بخش کند، و هرمقسوم علیه مشترك $r_۲$ و $r_۳$ باید $r_۱$ را هم بخش کند.

الگوریتم اقلیدسی

برای پیدا کردن ب.م.م. $r_۱$ و $r_۲$، مکرراً الگوریتم تقسیم را به‌کارمی‌بریم تا q_i و r_iهایی پیدا کنیم که

$$r_۱ = q_۱ r_۲ + r_۳, \qquad (r_۳ < r_۲)$$

$$r_۲ = q_۲ r_۳ + r_۴, \qquad (r_۴ < r_۳)$$

$$\cdots$$

$$r_i = q_i r_{i+۱} + r_{i+۲}, \qquad (r_{i+۲} < r_{i+۱})$$

$$\cdots$$

چون $\ldots < r_۴ < r_۳ < r_۲$، این روند نمی‌تواند الی غیرالنهایه ادامه یابد، زیرا اصل خوش ترتیبی بیان می‌کند که مجموعهٔ اعداد موردنظر کوچکترین عضوی دارد، و به‌آسانی نتیجه می‌شود که در مرحله‌ای داریم $r_{i+۲} = ۰$ و $r_{i+۱} \neq ۰$. این مقدار $r_{i+۱}$، بزرگترین مقسوم علیه مشترکی برای $r_۱$ و $r_۲$ است. زیراکه احکام (یك) و (دو) فوق نشان می‌دهند که

$$r_{i+۱} = \text{ب.م.م.} (r_i , r_{i+۱}) = \ldots = \text{ب.م.م.} (r_۲ , r_۳) = \text{ب.م.م.} (r_۱ , r_۲) .$$

به‌عنوان مثال ب.م.م. ۶۱۲ و ۲۲۱ را پیدا می‌کنیم (استفاده از عملهای حساب را به‌عنوان جزئی از تکنیك ضمنی مجاز می‌دانیم، زیرا دیدیم که آنها را هم می‌توان به‌طور رسمی جزئی از $\mathbb{N}_۰$ دانست):

$$۶۱۲ = ۲ \times ۲۲۱ + ۱۷۰$$

$$۲۲۱ = ۱ \times ۱۷۰ + ۵۱$$

$$۱۷۰ = ۳ \times ۵۱ + ۱۷$$

$$۵۱ = ۳ \times ۱۷$$

بنابراین ب.م.م. $(۶۱۲ ، ۲۲۱) = ۱۷$.
ملاحظه می‌کنیم که این روش، برخلاف روشی که غالباً درمدارس یاد داده می‌شود، بدون تجزیهٔ اعداد به‌عوامل اول، ب.م.م. را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۷ . اگر h ب.م.م. اعداد $r_۱ , r_۲ \in \mathbb{N}$ باشد، و $n \in \mathbb{N}$، آنگاه ب.م.م. اعداد

nr_1 و nr_2 عدد nh است.

اثبات. اگر مراحل الگوریتم اقلیدسی را که در فوق نوشته شد درمورد ب.م.م. (r_1, r_2) به‌کار ببندیم وهمه‌را در n ضرب کنیم، دستگاه معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$nr_1 = q_1 nr_2 + nr_3, \quad (nr_3 < nr_2)$$
$$nr_2 = q_2 nr_3 + nr_4, \quad (nr_4 < nr_3)$$
$$\cdots$$
$$nr_i = q_i nr_{i+1}, \quad (r_{i+2} = 0 \text{ با این یادآوری که })\,.$$

یکتا بودن باقیمانده درهرمرحله نشان می‌دهد که این دستگاه، الگوریتم اقلیدسی برای ب.م.م. (nr_1, nr_2) است، ودرنتیجه

$$nr_{i+1} = n\cdot((r_1, r_2)\text{ ب.م.م.})\,. \quad \square$$

از این قضیه حقیقت مهمی به دست می‌آید:

لم ۱۸. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و p عدد اولی باشد که mn را بخش کند، آنگاه p عدد m را بخش می‌کند یا عدد n را.

اثبات. فرض کنیم p، m را بخش نکند. چون p اول است، تنها مقسوم علیه‌های آن ۱ و p هستند؛ لذا ب.م.م. دوعدد p و m باید ۱ باشد. بنا به‌قضیهٔ ۱۷، ب.م.م. اعداد nm و np عدد n است.ولی p هم nm وهم np را بخش می‌کند، لذا بنا به‌تعریف ب.م.م. عدد p، n را نیز بخش می‌کند. $\square$

نتیجهٔ ۱۹. اگر $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$، و p عدداولی باشد که‌حاصلضرب $m_1 \cdots m_r$ را بخش کند، آنگاه p حداقل یکی‌از m_1، . . . ، m_r را بخش می‌کند.

اثبات. استقرا را روی $r \geqslant 2$ به‌کار ببرید. $\square$

آخرین قضیهٔ این فصل به‌طور صوری بیان می‌کند که تجزیهٔ اعداد طبیعی به عوامل اول، بجز احتمالاً درترتیب نوشتن عوامل یکتاست.

قضیهٔ ۲۰ (یکتایی تجزیه به عوامل اول). فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$، $m \geqslant 2$، و

$$m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} = q_1^{f_1} \cdots q_s^{f_s}$$

که در آن p_i ها و q_i ها اول هستند واعداد طبیعی $e_i, f_i \geqslant 1$. آنگاه $r = s$ وتابعی دوسویی چون $\phi: \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, s\}$ وجود دارد که به‌ازای‌هر i، $p_i = q_{\phi(i)}$ و $e_i = f_{\phi(i)}$.

اثبات. استقرا را روی $k=e_1+\dots+e_r$ به‌کار می‌بندیم. اگـر $k=1$ آنگاه $m=p_1$، $r=1$، و $e_1=1$. حال، p_1 حاصلضرب q ها را بخش می‌کند، لذا بنا به نتیجهٔ ۱۹ به‌ازای عددی چون i، q_i را بخش می‌کند. چون q_i اول‌است لذا $p=q_i$. با استفاده ازقضیهٔ ۵ (ب) می‌توانیم طرفین رابطهٔ فوق‌را بر p_1 تقسیم کنیم و

$$1=q_1^{f_1}\cdots q_i^{f_i-1}\cdots q_s^{f_s}$$

را به‌دست‌آوریم. این تنها وقتی‌امکان‌پذیراست که $s=1$ و $f_1=1$. بنابراین، دو تجزیه به عوامل فوق به‌صورت $m=p_1=q_1$ هستند، و ϕ را می‌توان تابع همانی دانست.

حال فرض کنیم که حکم قضیه به ازای k درست باشد، و فرض کنیم $e_1+\dots+e_r=k+1$. نظیرحالت $k=1$، به‌ازای عددی چون i داریم $p_1=q_i$. نتیجه اینکه $e_1=f_i$ زیرا درغیراین صورت اگر بااستفاده ازقضیهٔ ۵ (ب) توانهای p_1 را ازطرفین حذف کنیم، یك طرف بر p_1 قابل تقسیم خواهد بود وطرف دیگر چنین نخواهد بود. حال باحذف همهٔ توانهای p_1، داریم

$$p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}=q_1^{f_1}\cdots q_{i-1}^{f_{i-1}}q_{i+1}^{f_{i+1}}\cdots q_s^{f_s}.$$

بنابه‌استقرا، $r-1=s-1$، وتابعی دوسویی چون

$$\varphi:\{2,\dots,r\}\to\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,s\}$$

وجود داردکه به ازای $j=2,\dots,r$، $p_j=q_{\varphi(j)}$ و $e_j=f_{\varphi(j)}$. حال‌کافی است ϕ را چنین تعریف کنیم

$$\phi(1)=i$$

$$\phi(j)=\varphi(j)\quad \text{و به‌ازای } j=2,\dots,r$$

ولذا مرحلهٔ استقرا ثابت می‌شود. □

تمرین

شش تمرین اول‌را باید درمضمون مطالب‌این فصل درنظرگرفت، وبقیه‌راکه باروش‌استقرا اثبات می‌شوند ومربوط به زمینه‌های وسیعتری از ریاضیات هستند باید در مضمون مناسب بررسی کرد.

۱. m^n، به‌ازای $m, n\in\mathbb{N}_0$، چنین تعریف می‌شود:

$$m^0=1,\ m^{n+1}=m^n m.$$

بااستفاده ازبرهان استقرایی مناسبی، ثابت‌کنیدکه

$$m^{n+r}=m^n m^r$$

$$m^{nr}=(m^n)^r$$
$$(mn)^r=m^r n^r\ .$$

۲. هردنباله از اعداد طبیعی تابعی است چون $s:\ \mathbf{N}\to\mathbf{N}_\circ$. به جای $s(n)$، می‌نویسیم s_n و s را با (s_n) نمایش می‌دهیم. اگر (s_n) دنباله‌ای باشد، n امین مجموع جزئی σ_n از (s_n) را به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_\text{۱}=s_\text{۱},\quad \sigma_{n+\text{۱}}=\sigma_n+s_{n+\text{۱}}\ .$$

مجموع σ_n به‌صورت $\sigma_n=s_\text{۱}+s_\text{۲}+\dots+s_n$ نیز نوشته می‌شود.
به‌روش استقرا ثابت کنید که:

(الف) $\text{۱}+\text{۲}+\dots+n=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}n(n+\text{۱})$،

(ب) $\text{۱}^\text{۲}+\text{۲}^\text{۲}+\dots+n^\text{۲}=\frac{\text{۱}}{\text{۶}}n(n+\text{۱})(\text{۲}n+\text{۱})$،

(پ) $\text{۱}^\text{۳}+\text{۲}^\text{۳}+\dots+n^\text{۳}=\frac{\text{۱}}{\text{۴}}n^\text{۲}(n+\text{۱})^\text{۲}$.

۳. به‌ازای $n\in\mathbf{N}_\circ$، $n!$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\circ!=\text{۱},\ (n+\text{۱})!=n!\ (n+\text{۱}).$$

با استفاده از استقرا روی n، ثابت کنید که به‌ازای هر $\circ\leqslant r\leqslant n$، $r!\,(n-r)!$ عدد $n!$ را بخش می‌کند.

به‌ازای‌هر $n,r\in\mathbf{N}_\circ$، $\circ\leqslant r\leqslant n$، $\binom{n}{r}\in\mathbf{N}$ را برابر با $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ تعریف می‌کنیم.
نشان دهید که:

$$\binom{n}{\circ}=\text{۱},\ \binom{n}{\text{۱}}=n,\ \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\ ,$$

و

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-\text{۱}}=\binom{n+\text{۱}}{r}.$$

با استفاده از تساوی آخر، بااستقرا ثابت کنید که به‌ازای هر $a,b,n\in\mathbf{N}_\circ$:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-\text{۱}}+\dots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\dots+\binom{n}{n}b^n\ .$$

۴. بااستقرا، یا به نحوی دیگر، ثابت کنید که:

(الف) $1\cdot1!+2\cdot2!+\dots+n\cdot n!=(n+1)!-1$،

(ب) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$،

(پ) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}=2^{n-1}n$.

۵. بزرگترین مقسوم علیه مشترك ۲۲۴۴ و ۲۱۴۵ را باروشهای زیر محاسبه کنید:
(الف) به‌روش الگوریتم اقلیدسی،
(ب) به‌روش تجزیه به‌عوامل اول اعداد ۲۲۴۴ و ۲۱۴۵.

۶. اعداد فیبوناچی (u_n) به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌شوند:

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}\cdot$$

u_3، u_4، u_5، u_6، و u_7 را به‌دست آورید. ثابت کنید که هرعدد طبیعی، مجموعی از اعداد فیبوناچی است. آیا این عبارت یکتاست؟

۷. اگر x_1، . . . ، x_n اعدادی حقیقی باشند، ثابت کنید که

$$|x_1|+\dots+|x_n|\geqslant|x_1+\dots+x_n|\cdot$$

۸. فرض کنید p/q کسری به‌ساده‌ترین صورت باشد که به ازای عددی طبیعی چون n

$$\frac{1}{n+1}<\frac{p}{q}<\frac{1}{n}\cdot$$

نشان دهید $\frac{p}{q}-\frac{1}{n+1}$ کسری است که صورتش، درساده‌ترین صورت، کوچکتر از p است. بنابراین، بااستقرا، ثابت کنید که هر کسر واقعی p/q راکه درآن $p<q$، می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی ازمعکوسهای متمایز نوشت:

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\dots+\frac{1}{n_k}\cdot$$

دراینجا n_1، . . . ، n_k اعدادی طبیعی هستند.

مثلاً، $\frac{19}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{60}$.

بااستفاده ازتکنیك عرضه شده دراین تمرین، ۵/۷ رابه‌صورت مجموعی‌ازمعکوسها بنویسید.

۹. نظیرهای الگوریتم تقسیم والگوریتم اقلیدسی‌را برای چند جمله‌ایهای

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$

باضرایب حقیقی، بیان‌واثبات‌کنید. (راهنمایی: اگر $a_n \neq 0$، آنگاه درجهٔ $p(x)$ عضوی از $\mathbb{N}_0$ است).

۱۰. برج هانوی معمایی است متشکل‌از n قرص به اندازه‌های متفاوت‌که می‌توانند درسه کپهٔ A، B، و C قرار گیرند. «مجازیم» قرصی‌را از روی یك برج‌برداریم وبرروی برجی دیگر بگذاریم به شرطی‌که برروی قرصی کوچکتر قرار نگیرد. نخست همهٔ قرصهارا در یك برج A، به‌ترتیب نزولی اندازه‌هایشان قرار می‌دهیم به‌طوری‌که بزرگترینشان درته برج باشد؛ دوبرج دیگرخالی هستند، ثابت‌کنید با دنباله‌ای‌ازجابه‌جاییهای مجازمی‌توانیم همهٔ قرصهارا به برج B منتقل‌کنیم.

۱۱. آیا اثباتهای زیر اثباتهای استقرایی درستی هستند؟

(الف) همهٔ اشخاص طاس هستند.

اثبات. استقرا را روی تعداد n موها به کار می‌بریم. بدیهی است‌که شخص بدون مو طاس است. برای طاس نبودن، کافی نیست‌که یك مو به‌شخص طاس بیفزاییم، لذا اگر شخص با n مو طاس باشد، شخص با $n+1$ مو نیزطاس است. بنا به‌استقرا، هرشخص هراندازه هم‌که موداشته باشد، طاس است.

(ب) تعداد موهای همهٔ اشخاص برابر است.

اثبات. استقرا را روی تعداد اشخاص به‌کار می‌بندیم. اگر این تعداد ۰ یا ۱ باشد، گزاره به‌وضوح درست‌است. فرض‌کنیم این‌گزاره درمورد n شخص درست باشد. $n+1$ شخص‌را درنظر می‌گیریم، یکی‌را حذف می‌کنیم، آنگاه بنابه استقرا، تعداد موهای n شخص باقیمانده برابراست. شخص دیگری‌را حذف می‌کنیم: بازهم‌تعدادموهای n شخص باقیمانده برابراست، پس تعداد موهای‌اولین شخص حذف شده برابر باتعداد موهای بقیه است. بنابراین تعداد موهای همهٔ $n+1$ شخص برابر است.

(پ) اگر n خط مستقیم روی یك قرص مستدیر چنان رسم شوند که هیچ سه خطی یکدیگررا دریك‌نقطه قطع نکنند، این خطوط قرص‌را به 2^n قسمت تقسیم می‌کنند.

اثبات. به‌ازای $n = 1, 2$، تعداد تقسیمات برابر ۲ و ۴ است. فرض‌کنیم نتیجه به ازای n درست باشد. اگرخط دیگری اضافه شود، هرناحیه‌ای‌که این خط ازآن بگذرد به دوقسمت تقسیم می‌شود، ولذا جمعاً 2^{n+1} قسمت به‌دست می‌آید. پس بنا به‌استقرا، گزاره اثبات می‌شود.

(ت) به‌ازای هرعدد طبیعی n، عدد $n^2 - n + 41$ عددی اول (مثبت یامنفی) است.

اثبات. $1^2 - 1 + 41 = 41$، $2^2 - 2 + 41 = 43$، $3^2 - 3 + 41 = 47$، $4^2 - 4 + 41 = 53$، $5^2 - 5 + 41 = 61$، $6^2 - 6 + 41 = 71$، ....

(ث) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 + 1$.

اثبات. اگر فرمول فوق به ازای n درست باشد، آنگاه به‌طرفین $2n + 1$ را می‌افزاییم تا

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)+(۲n+۱)=n^۲+۱+(۲n+۱)$$
$$=(n+۱)^۲+۱$$

به دست آید. این همان فرمول فوق است که در آن $n+۱$ به‌جای n قرار گرفته است، لذا بنا به‌استقرا، فرمول فوق به‌ازای هرعدد طبیعی درست است.

(ج) $۲+۴+\cdots+۲n=n(n+۱)$.

اثبات. اگر $۲+۴+\cdots+۲n=n(n+۱)$، آنگاه

$$۲+۴+\cdots+۲n+۲(n+۱)=n(n+۱)+۲(n+۱)$$ و لذا،

$$۲+۴+\cdots+۲(n+۱)=(n+۱)(n+۲).$$

بنا به‌استقرا، فرمول فوق به‌ازای همهٔ nها درست است.

۱۲ . استقرا با تفاضل. میانگین حسابی n عدد حقیقی $a_۱$، ...، a_n برابر است با $(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n$ و میانگین هندسی آنها (اگر همه غیرمنفی باشند) برابر است با $\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$. ثابت کنید که اگر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n\geqslant ۰$، آنگاه

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n\geqslant\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}.$$

ممکن است اثبات استقرایی معمولی نتیجه ندهد. روش کشی‌را امتحان می‌کنیم: فرض کنید $P(n)$ گزارهٔ «به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n\geqslant ۰$،

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n\geqslant\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

باشد».

ابتدا بااستقرای معمولی ثابت کنید که $۰\leqslant a\leqslant b\Rightarrow ۰\leqslant a^n\leqslant b^n$، وسپس استنتاج کنید که به‌ازای $a, b\geqslant ۰$، داریم $a^n\leqslant b^n\Rightarrow a\leqslant b$. اگر $\sqrt[n]{x}$ نمایش ریشهٔ n م مثبت عدد $x\geqslant ۰$ باشد، استنتاج کنید که به‌ازای $x, y\geqslant ۰$، $x\geqslant y\Longleftrightarrow\sqrt[n]{x}\geqslant\sqrt[n]{y}$.

$P(۱)$ بدیهی است، و $P(۲)$ رامی‌توان با بررسی علامت $\frac{۱}{۴}(a_۱+a_۲)^۲-a_۱a_۲$ اثبات کرد. حال ثابت کنید که $P(n)\Rightarrow P(۲n)$. (راهنمایی: از $P(n)$ درمورد $a_۱$، ...، a_n وهمچنین درمورد $a_{n+۱}$، ...، $a_{۲n}$ استفاده کنید وآنها را بااستفاده از $P(۲)$ به یکدیگر ارتباط دهید. آنگاه ثابت کنید که $P(n)\Rightarrow P(n-۱)$. (بامفروض‌بودن $a_۱$، ...، $a_{n-۱}$، فرض کنید $a_n=(a_۱+\cdots+a_{n-۱})/_{n-۱}$ و بااستفاده از $P(n)$ نشان دهید که

$$\sqrt[n]{a_۱\cdots a_{n-۱}a_n}\leqslant a_n.$$

این‌را به‌توان n برسانید و نتیجه‌را ساده کنید تا $P(n-1)$ به‌دست آید.)
حال استنتاج کنید که $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ درست است.

۱۳ . اثبات درستی $P(n)$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، همیشه با یك برهان استقرایی ساده حاصل نمی‌شود. مثلاً گمان گلدباخ[1] که هر عدد طبیعی زوج مجموع دو عدد اول است، $۲ = ۱ + ۱$، $۴ = ۲ + ۲$، $۶ = ۳ + ۳$، $۸ = ۵ + ۳$، $۱۰ = ۷ + ۳$، ... (به شرطی که ۱ را هم یك عدد اول بدانیم) ظاهراً درست‌است. گمان گلدباخ را برای اعداد طبیعی زوج $۲n \leqslant ۵۰$ بررسی کنید. آیا الگویی که بتواند جهت اثباتی استقرایی به‌کار رود دیده می‌شود؟ معلوم نیست که آیا این گمان درست‌است یا نادرست. اگر توانستید صحت یا سقم آن‌را ثابت کنید، تلگرامی‌هم برای ما بفرستید!

1. Goldbach, Conjecture

۹

اعداد حقیقی

با توجه به الگوی شهودیمان $\mathcal{R}$ می‌توانیم ببینیم که چه خواصی مطلوب الگوی صوری اعداد حقیقی است. دو عمل دوتایی (جمع و ضرب) با خواص حسابی مناسب، وکافی برای امکان تعریف تفریق و تقسیم، باید وجود داشته باشند. علاوه بر این رابطه‌ای ترتیبی هم که به‌طور مناسبی به‌جمع وضرب مربوط شود. وطرحش طوری باشدکه حضور اعضای منفی را نیز ملحوظ کند، باید وجود داشته باشد. آخرین جزء اصلی اصل کمال است، که به‌طور غیر صوری در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت. این سه جنبه: حساب، ترتیب و اصل کمال، اگر به‌طور مناسبی بیان شوند می‌توانند، همان گونه که (ط۱)-(ط۳)، $\mathbb{N}_0$ را مشخص می کنند، اعداد حقیقی را به طور کامل توصیف نمایند. روشهای متعددی برای بیان خواص مطلوب وجود دارند، ولی تجربهٔ قرن گذشتهٔ ریاضیات نشان می‌دهد که دستگاه اصول موضوع ذیل یکی از بهترین است.

فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای باشد که روی آن دو عمل دوتایی $+$ و $\cdot$ (به نامهای جمع و ضرب) تعریف شده‌اند. اگر $a , b \in \mathbb{R}$، $a+b$ را مجموع a و b و $a \cdot b$ را حاصلضرب آنها می‌نامیم. بنا به‌رسم متداول، از این پس نقطه را حذف می‌کنیم و حاصلضرب را به صورت ab می‌نویسیم.

(ا) حساب

مجموعه‌ای چون $\mathbb{R}$ با اعمال دوتایی $+$ و $\cdot$ میدان نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر

$a, b, c \in \mathbb{R}$:

ج۱) $a+b=b+a$،

ج۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$،

ج۳) عضوی چون $0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $a+0=a$،

ج۴) اگر $a \in \mathbb{R}$ عضوی چون $-a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $a+(-a)=0$،

ض۱) $ab=ba$،

ض۲) $a(bc)=(ab)c$،

ض۳) عضوی چون $1 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $0 \neq 1$، و به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $1a=a$،

ض۴) اگر $a \in \mathbb{R}$، $a \neq 0$، عضوی چون $a^{-1} \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $aa^{-1}=1$،

پ) $a(b+c)=ab+ac$.

عضوهای ۰ و ۱ را اعضای صفر و یکهٔ $\mathbb{R}$ می‌نامند. به‌واسطهٔ (ج۱) و (ض۱) داریم $0+a=a$، $(-a)+a=0$، $a1=a$، $a^{-1}a=1$ و $(a+b)c=ac+bc$.

تفریق را با

$$a-b=a+(-b)$$

و تقسیم را با

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}\text{، به‌شرطی که } b \neq 0\text{،}$$

تعریف می‌کنیم.

(ب) ترتیب

میدانی چون $\mathbb{R}$ را مرتب خوانیم اگر زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که:

ت۱) $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b, ab \in \mathbb{R}^+$،

ت۲) $a\mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$ یا $-a \in \mathbb{R}^+$

ت۳) $(a \in \mathbb{R}^+) \& (-a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow a=0$.

این اصول موضوع طوری طرح شده‌اند که ترتیب به‌نحو صحیح به‌حساب مربوط گردد. مجموعهٔ $\mathbb{R}^+$ متناظر ایدهٔ شهودیمان از زیرمجموعهٔ عضوهای مثبت است. آنگاه رابطهٔ معمولی ترتیب با

$$a \geqslant b \Longleftrightarrow a-b \in \mathbb{R}^+$$

تعریف می‌شود. بعداً نشان خواهیم داد که این رابطه در واقع یك رابطهٔ ترتیبی هست.

(پ) اصل کمال

عضو a از $\mathbb{R}$ را یك کران بالای زیرمجموعه‌ای چون $S \subseteq \mathbb{R}$ می‌خوانیم اگر به‌ازای هر $s \in S$، $a \geqslant s$. هر مجموعهٔ S را کـه دارای کران بالا باشد از بالا کراندار می‌نامیم. عضوی چون λ از $\mathbb{R}$ را یك کوچکترین کران بالای (ك.ك.ب) S نامیم اگر:

(یك) به‌ازای هر $s \in S$، $\lambda \geqslant s$ (λ یك کران بالا باشد)،

(دو) $(a \geqslant s$ به‌ازای هر $s \in S) \Rightarrow a \geqslant \lambda$ (λ بین کرانهای بالا کوچکترین باشد).

آخرین اصل موضوع چنین‌ست.

(ك) اگر S زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ و S از بالا کراندار باشد، آنگاه S در $\mathbb{R}$ دارای یك کوچکترین کران بالاست.

این اصل، اصل موضوع کمال است. هر دستگاهی که همهٔ سیزده اصل موضوع فوق، (ج۱) ـ (ج۴)، (ض۱) ـ (ض۴)، (پ)، (ت۱) ـ (ت۳)، (ك)، را داشته باشد یك میدان مرتب کامل می‌نامند.

اگر بخواهیم درسمان را بر اصل موضوع وجـود $\mathbb{N}_0$ بنا کنیم، باید مسئلهٔ ساختن میدان مرتب کامل $\mathbb{R}$ برپایهٔ $\mathbb{N}_0$ را حل کنیم. این عمل، به نحوی مشابه عرضهٔ شهودی که در سطح مدارس بـه‌کار می‌رود، انجام‌پذیر است. ابتدا اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را از $\mathbb{N}_0$ و اعداد گویای $\mathbb{Q}$ را از $\mathbb{Z}$ می‌سازیم. این عمل با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها به‌نحوی بسیارساده انجام می‌پذیرد. ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{Q}$ کار دشوارتری است، و بررسی سیزده اصل موضوع در مواردی بسیار مشکل.

اکنون به ساختن این رشته از دستگاههای اعداد می‌پردازیم، زیرا ایـن جزئی از میراث ریاضی است که هر ریاضیدان باید، حداقل یکبار در دوران زندگیش، آن را ببیند. با مروری بر گذشته می‌بینیم که اهمیت این ساختن‌ها در این است که نشان دهیم فرض وجود $\mathbb{N}_0$، به‌علاوهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، وجود $\mathbb{R}$ را ایجاب می‌کند. به‌منظور استفاده، بهتراست وجود $\mathbb{R}$ را به‌عنوان اصل موضوع پایه در نظر بگیریـم و از ساختن آن صرفنظر کنیم (ولی در نظر داشته باشیم که ساختن آن امکان‌پذیر است). ساختن اعـداد، خود اثری است از قرن نوزدهم، که در آن زمان اعدادطبیعی به‌عنوان پایهٔ ریاضیات پذیرفته شد، ولی درك کاملی از اعداد حقیقی وجود نداشت. در آن قرن، اثبات این مطلب که در ریاضیات اعداد حقیقی اشیا معتبری هستند اهمیت داشت، و لذا ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{N}_0$ مؤثر واقع شد. ولی امـروزه، که انجام‌پذیر بودن این‌کار بـه ثبوت رسیده است، مسائل روانی و فلسفی مربوط جدیت خود را از دست داده‌اند: اگر بـه‌جای $\mathbb{N}_0$ وجود $\mathbb{R}$ را اصل قـرار دهیم، نه چیزی از دست می‌دهیم و نه‌چیزی به‌دست می‌آوریم. ولی اصل قرار دادن $\mathbb{R}$، کار را بسیار ساده‌تر می‌کند، زیرا یافتن زنجیری چون

$$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}_0$$

از زیرمجموعه‌های اعدادگـویا، صحیح، و طبیعی در داخل نسبتاً ساده‌تر است. برای انجام این امر، باید خواص مناسبی که مشخص کنندهٔ $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ باشند مشخص گردند ($\mathbb{N}_0$ با همان اصل موضوع (ط۱) ـ (ط۳) قبلاً مشخص شده است). درفصل ۱۰ این روندساختن

سازه‌های داخلی $\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و مزایای آن را هم ملاحظه می‌کنیم. ولی اینك، پس از افزودن چند نکته به‌اصل موضوع جهت امکان محاسبه و ایجاد ترتیب، به‌ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{N}_\circ$ می‌پردازیم.

استنتاجهای مقدماتی مربوط به‌حساب

انتظار نداریم که الگوی شهودیمان از اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ همهٔ خواص میدان را دارا باشد: به‌خصوص اینکه همهٔ اعضای $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ وارون ضربی هم ندارند. ولی سایر اصول‌موضوع مربوط به‌حساب، یعنی همه‌مگر (ض۴)، باید برقرار باشند. مجموعه‌ای چون R با دو عمل دوتایی حایز شرایط (ج۱)ــ(ج۴)، (ض۱)ــ(ض۳)، و (پ) یك‌حلقه[1] نامیده می‌شود. اگر علاوه براین زیرمجموعه‌ای چون R^+ هم وجود داشته باشد که (ت۱)ــ(ت۳) را ارضا کند، حلقهٔ مرتب خواهیم داشت.

اینك از این اصول موضوع استنتاجهایی می‌نماییم که نه تنها خود نتایج مفیدی هستند، بلکه تمرین خوبی برای شیوهٔ اصل موضوعی هم هستند.

قضیهٔ ۱. اگر R حلقه باشد، و به‌ازای عضوی چون $x \in R$، و به‌ازای هر $a \in R$، $a+x=a$، آنگاه $x=\circ$. و اگر به‌ازای هر $a \in R$، $xa=a$، آنگاه $x=۱$.

اثبات. اگر $a=\circ$ آنگاه $\circ+x=\circ$. ولی بنا به (ج۳) و (ج۱)، $\circ+x=x$، لذا $x=\circ$. به‌همین نحو $x=x۱=۱$. □

این قضیه نشان می‌دهد که عضوهای صفر و یکهٔ R یکتا هستند: هیچ عضو دیگری این‌خاصیت‌را ندارد. به‌همین‌نحومنفی‌عضوی چون a، یعنی $-a$، به‌طوریکتا تعیین می‌شود:

قضیهٔ ۲. اگر به‌ازای عضوهای x و a از حلقهٔ R، $x+a=\circ$، آنگاه $x=-a$.

اثبات.

$x=x+\circ$,	بنا به (ج۳)
$=x+(a+(-a))$,	بنا به (ج۴)
$=(x+a)+(-a)$,	بنا به (ج۲)
$=\circ+(-a)$,	چون $x+a=\circ$
$=-a$,	بنا به (ج۴) . □

[1] . به‌بیان دقیقتر یك حلقهٔ جابه‌جایی. کلمهٔ «حلقه» معمولاً به‌دستگاهی اطلاق می‌شود که مجموعهٔ محدودتری از اصول موضوع، بجز (ض۱)، را ارضا کند. چون دلیلی نمی‌بینیم که حلقه‌های غیر جابه‌جایی را مطرح کنیم، از رویهٔ جاری پیروی وصفت غیر جابه‌جایی را حذف می‌کنیم. (دردرسهای مربوط به‌جبر چنین حلقه‌ای را یك «حلقهٔ جابه‌جایی با عضو یکه» می‌نامند.ــم.)

اگر R یك میدان باشد آنگاه وارون ضربی (برای اعضای غیرصفر) هم به‌طوریکتا تعیین می‌شود، و اثبات مشابه اثبات فوق است.

قضیهٔ ۳. اگر R یك حلقه باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in R$، $-(-a)=a$.

اثبات. بنا به‌تعریف داریم، $a+(-a)=0$. بنا به‌قضیهٔ ۲، $a=-(-a)$. $\square$

قضیهٔ ۴. اگر R یك حلقه باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in R$، $a0=0a=0$.

اثبات.

$$a0=a(0+0), \qquad \text{(ج۳) بنا به}$$
$$=a0+a0, \qquad \text{(پ) بنا به}$$

و با افزودن $-(a0)$ به‌طرفین تساوی، داریم

$$0=a0+(-a0)=(a0+a0)+(-a0),$$
$$=a0+(a0+(-a0)), \qquad \text{(ج۱) بنا به}$$
$$=a0+0, \qquad \text{(ج۴) بنا به}$$
$$=a0, \qquad \text{(ج۳) بنا به}$$

آنگاه بنا به (ض۱)، $0a=0$. $\square$

قضیهٔ ۵. اگر R یك حلقه باشد و $a, b \in R$ آنگاه $-(ab)=(-a)b=a(-b)$.

اثبات.

$$ab+(-a)b=(a+(-a))b, \qquad \text{(ض۱) و (پ) بنا به}$$
$$=0b, \qquad \text{(ج۴) بنا به}$$
$$=0, \qquad \text{(قضیهٔ ۴) بنا به}$$

و لذا، بنا به‌قضیهٔ ۲، $(-a)b=-(ab)$. بقیهٔ احکام از (ض۱) نتیجه می‌شوند. $\square$

حال به‌آسانی می‌توان نتایج دیگری چون $(-a)(-b)=ab$، یا $(-1)a=-a$ را هم اثبات کرد. اگر R یك میدان باشد، همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر $a\neq 0$ آنگاه $a=(a^{-1})^{-1}$. با تعریف تفریق و تقسیم، طبق روال فوق، می‌توانیم خواص دیگری از این عملها را هم که انتظار داریم اثبات کنیم، مثلاً:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

جزئیات به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

اینك به بررسی خواص ترتیب می‌پردازیم. فرض‌کنیم حساب مربوط به‌حلقه‌ها و میدانها به اندازه‌ای جا افتاده‌اند که هنگام استفاده، دیگر نیازی به‌اشارهٔ صریح نداشته باشند. ولی ذکر صریح اصول موضوع مربوط به ترتیب را هنوز هم لازم می‌دانیم.

استنتاجهای مقدماتی در مورد ترتیب

در این بخش R حلقه‌ای مرتب فرض می‌شود. همان طورکه قبلاً اشاره شد، در R رابطهٔ ترتیب با

$$a \geqslant b \Longleftrightarrow a-b \in R^{+} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. بلافاصله نتیجه می‌گیریم که $a \in R^{+} \Longleftrightarrow a \geqslant 0$، پس

$$R^{+}=\{a \in R \mid a \geqslant 0\}. \qquad (۲)$$

حال با استفاده از (ت۱) ـ (ت۳) ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۶. رابطهٔ $\geqslant$ روی R یك ترتیب ضعیف است.

اثبات. باید سه خاصیت:

(تض۱) $a \geqslant b \,\&\, b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c$،

(تض۲) $a \geqslant b$ یا $b \geqslant a$،

(تض۳) $a \geqslant b \,\&\, b \geqslant a \Rightarrow a=b$،

را اثبات کنیم.

برای اثبات (تض۱) داریم، $a \geqslant b \,\&\, b \geqslant c \Rightarrow a-b\,,\, b-c \in R^{+}$. بنا به (ت۱)، $(a-b)+(b-c) \in R^{+}$، لذا $a-c \in R^{+}$، پس $a \geqslant c$. (این اولین مواجههٔ «بی‌دردسرما با حساب» است: اثبات $(a-b)+(b-c)=a-c$ به‌روش اصل‌موضوعی مراحل متعددی داردکه در اینجا حذف می‌شوند).

برای اثبات (تض۲)، (ت۲) نتیجه می‌دهد که $a-b \in R^{+}$ یا

$$b-a=-(a-b) \in R^{+}.$$

لذا $a \geqslant b$ یا $b \geqslant a$.

برای اثبات (تض۳)، اگر هر دو $a-b$ و $b-a \in R^+$، آنگاه بنا به (ت۳)، $a-b=0$، لذا $a=b$. □

رابطهٔ ترتیب، در قبال حساب به‌گونه‌ای مناسب عمل می‌کند:

قضیهٔ ۷. به‌ازای هر $a, b, c, d \in R$:

(الف) $a \geqslant b \;\&\; c \geqslant d \Rightarrow a+c \geqslant b+d$،

(ب) $a \geqslant b \geqslant 0 \;\&\; c \geqslant d \geqslant 0 \Rightarrow ac \geqslant bd$.

اثبات. طبق (۱)، تعریف $\geqslant$ را به‌کار ببندید و از حساب استفاده کنید. □

در تعریف میدان مرتب (یا حلقهٔ مرتب) می‌توانیم خواص مذکور در قضیه‌های ۶ و ۷ را به جای (ت۱)ـ(ت۳) قرار دهیم و جهت تعریف R^+ از رابطهٔ $\geqslant$ و تساوی (۲)، منتها در جهت معکوس، استفاده نماییم. اینکه کدام را انتخاب می‌کنیم، به سلیقه مربوط می‌شود.

در یك حلقهٔ مرتب، قدر مطلق را با

$$|a| = \begin{cases} a & \text{اگر } a \in R^+ \\ -a & \text{اگر } -a \in R^+ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم که به‌ازای هر $a \in R$، $|a| \geqslant 0$، و با تکرار برهان فصل ۲ در این مضمون صوری، داریم

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a||b|.$$

با توجه به این مقدمات ابزار کافی برای ساختن اعداد صحیح، گویا، و حقیقی به دست آورده‌ایم.

ساختن اعداد صحیح

برای رسیدن از $\mathbf{N}_0$ به‌اعداد صحیح، باید به‌معرفی اعداد منفی بپردازیم. در واقع باید تفاضل $m-n$ اعداد طبیعی را درنظر بگیریم. اگر $m \geqslant n$ این تفاضلها به‌عنوان اعدادی طبیعی قابل تعریف هستند؛ و لذا هدف ارائهٔ تعریف آنها در حالت $n > m$ است. اگر $m, n, r, s \in \mathbf{N}_0$ و $m \geqslant n$، $r \geqslant s$ آنگاه

$$m-n = r-s \Longleftrightarrow m+s = r+n.$$

حال ملاحظه می‌کنیم که طرف راست این رابطه بدون هیچ محدودیتی برای m، n، r، s

بامعنی است. این مطلب راهنمای ماست. مجموعهٔ $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ متشکل از زوجهای مرتب (m, n) را اختیار و روی آن رابطهٔ $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(m, n) \sim (r, s) \Longleftrightarrow m+s=r+n.$$

برای اینکه نشان دهیم این رابطه رابطه‌ای هم‌ارزی است تنها به‌حساب در $\mathbb{N}_0$ نیازمندیم. پس از انجام این بررسی، مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را مجموعهٔ ایـن **رده‌های هم‌ارزی** تعریف می‌کنیم. ایدهٔ بحث این است کـه **ردهٔ** هم‌ارزی (m, n) باید درتناظر بـا عدد شهودی $m-n$ باشد؛ بررسی صوری این ایده به‌صورت زیر است. فرض‌کنیم $\langle m, n \rangle$ کلاس‌هم‌ارزی‌شامل (m, n) را نمایش‌دهد. آنگاه $\langle m, n \rangle = \langle r, s \rangle \Rightarrow m+s=r+n$. روی $\mathbb{Z}$ جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم[1]:

$$\langle m, n \rangle + \langle p, q \rangle = \langle m+p, n+q \rangle,$$

$$\langle m, n \rangle \langle p, q \rangle = \langle mp+nq, mq+np \rangle.$$

مسئله این است که نشان دهیم ایـن اعمال به‌معنای فصل ۴ خوش‌تعریف هستند. لذا فرض می‌کنیم $\langle m, n \rangle = \langle m', n' \rangle$ و $\langle p, q \rangle = \langle p', q' \rangle$.
آنگاه $m+n'=m'+n$، و $p+q'=p'+q$. حال

$$\begin{aligned}(m+p)+(n'+q') &= (m+n')+(p+q') \\ &= (m'+n)+(p'+q) \\ &= (m'+p')+(n+q).\end{aligned}$$

بنابراین $\langle m+p, n+q \rangle = \langle m'+p', n'+q' \rangle$، و لـذا جمع خوش‌تعریف است. خوش‌تعریفی ضرب نیز به‌همین نحو بررسی می‌شود.

حال اگر فرض‌کنیم

$$\mathbb{Z}^+ = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{N}_0 \text{ در } m \geqslant n\},$$

اثبات حلقه بودن و مرتب بودن $\mathbb{Z}$ به‌صورت تمرینی آسان ولی طولانی درمی‌آید.

قضیهٔ ۸. $\mathbb{Z}$ با اعمال فوق حلقه‌ای است مرتب.

اثبات. بایدصحت اصول‌موضوع(ج۱)ـ(ج۴)، (ض۱)ـ(ض۳)، (پ) و(ت۱)ـ

---

۱. درمورد $\langle m, n \rangle$ به‌صورت "$m-n$" فکر کنید. آنگاه ایـن تعاریف از برگردان عبارات زیر به‌دست می‌آیند

$$(m-n)+(p-q)=(m+p)-(n+q)$$

$$(m-n)(p-q)=(mp+nq)-(mq+np).$$

(ت۳) را بررسی کنیم. در تمام موارد با استفاده از تعریف $\mathbb{Z}$ خاصیت مورد نظر در $\mathbb{N}_0$ را باز گو وصحت آن راباحساب بررسی می کنیم. به‌عنوان نمونه (ج۱) را اثبات می کنیم.

فرض کنید $a=\langle m, n\rangle$ و $b=\langle p, q\rangle$. آنگاه

$$a+b=\langle m+p, n+q\rangle$$

بنا به‌حساب در $\mathbb{N}_0$ ،

$$=\langle p+m, q+n\rangle$$

$$=b+a.$$

اثبات اصول موضوع دیگر گاهی سخت‌تر، ولی به‌همین نحو است: خواننده باید مداد و کاغذ در دست بگیرد وصحت آنها را بررسی کند! ریاضیات یك ورزش چون فوتبال برای تماشا نیست. □

مرحلهٔ بعدی بازیافتن نمادمعمول اعداد صحیح، به‌صورت اعدادطبیعی مثبت یامنفی، است. هر عضو $\mathbb{Z}^+$ به صورت $\langle m, n\rangle$ است که در آن $m \geqslant n$، لذا می‌توانیم آن را به‌صورت $\langle m-n, 0\rangle$ هم بنویسیم. پس هر عضو $\mathbb{Z}^+$ به ازای عضوی چون $r \in \mathbb{N}_0$ به‌صورت $\langle r, 0\rangle$ است. حال اصل موضوع (ت۲) بیان می کند که به ازای‌هر $a \in \mathbb{Z}$، $a \in \mathbb{Z}^+$ یا $-a \in \mathbb{Z}^+$، پس $a=\langle r, 0\rangle$ یا

$$a=-\langle r, 0\rangle=\langle 0, r\rangle.$$

تابع $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}^+$ را با $f(n)=\langle n, 0\rangle$ تعریف می‌کنیم. به‌آسانی می بینیم که f دو سویی است و:

$$f(m+n)=f(m)+f(n),$$

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

$$m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant f(n),$$

یعنی f، به‌معنای فصل قبل، یك یکریختی ترتیبی است.

این امر یك مسئله فنی به‌پیش می‌آورد. ممکن است انتظار داشته باشیم $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ ، که نیست: در عوض $\mathbb{N}$ با $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$ یکریخت ترتیبی است. این مطلب به این معنی است که گرچه $\mathbb{N}_0$ و $\mathbb{Z}^+$ بـه‌طور قطع دو شیء متفاوت هستند (دومی یك مجموعه از رده‌های هم‌ارزی زوجهای مرتب است)، ولی بلافاصله پس از عبور از مرحلهٔ ساختن، تفاوت بین آنها بی‌اهمیت می‌شود: از نظر حساب و ترتیب دقیقاً دارای ساخت ریاضی یکسان‌هستند.

یکی‌از راههای برخوردبا این مسئله توجه به‌این مطلب است که $\mathbb{Z}^+$ اصول‌موضوع (ط۱) - (ط۳) را ارضا می کند ولذا خواصی دقیقاً یکسان با $\mathbb{N}_0$ دارد. پس به‌طورموقت

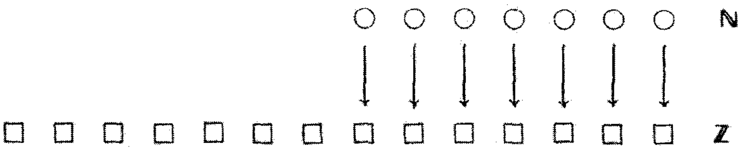
$\mathbb{N}_\circ$ ی را انتخاب می‌کنیم، $\mathbb{Z}$ را می‌سازیم وسپس $\mathbb{N}_\circ$ قدیمی را به‌بوتهٔ فراموشی می‌سپاریم. مسئله این‌است که همین عمل‌را باید با$\mathbb{Q}$و$\mathbb{R}$نیز انجام دهیم.واین روند کاهی راکوه‌کردن است. ازطرفی، رعایت تفاوت بین $\mathbb{N}_\circ$ و $\mathbb{Z}^+$، و بین مجموعه‌های مشابهی که بعداً خواهند آمد، بحث را با یکریختی‌های بدنما مخدوش می‌سازد و مطلب ساده‌ای را پیچیده جلوه می‌دهد.

روش رضایتبخش‌تر این است کـه با استفاده از یکریختی‌ها، نمادگذاری را تغییر دهیم. یعنی، نمادهای

$$n \text{ برای } \langle n , \circ \rangle$$

$$-n \text{ برای } \langle \circ , n \rangle ,$$

را اختیارکنیم وبا استفاده از یکریختی نشان دهیم‌که این تغییر نماد، در حساب یا ترتیب هیچ نتیجهٔ نامطلوبی ایجاد نمی‌کند. حاصل ایـن‌کار ایـن است‌که $\mathbb{Z}^+$ را حذف‌کنیم و به‌جایش $\mathbb{N}_\circ$ را قرار دهیم.با تعریف عملهای مربوط روی $\mathbb{N}_\circ \cup (\mathbb{Z}-\mathbb{Z}^+)$ می‌توانستیم این‌کار را به‌روش صوری نظریهٔ مجموعه‌ها هم انجام دهیم.آنگاه در دستگـاه حاصل،که مجدداً آن را $\mathbb{Z}$ می‌نامیم، داریم $\mathbb{N}_\circ \subseteq \mathbb{Z}$. (دیاگرام زیر ب   این ایده را به‌قدرکافی روشن بسازد.)



ساختن اعدادگویا

الگو بسیار شبیه الگوی فوق است. در اینجا با $\mathbb{Z}$ آغاز می‌کنیم ومی‌خواهیم‌مجموعه‌ای بزرگترچون $\mathbb{Q}$ را معرفی کنیم‌که در آن کسرهای m/n قابل تعریف باشند. برای‌انجام این امر،فرض می‌کنیم S مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (m , n) باشدکه $m , n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq \circ$. رابطهٔ $\sim$ را با

$$(m , n) \sim (p , q) \Longleftrightarrow mq = np$$

تعریف می‌کنیم. (در ایـن تعریف از خاصیت مطلوب $m/n = p/q$ اگـر و فقط اگـر $mq = np$ الهام‌گرفته‌ایم.) حال $\mathbb{Q}$ را مجموعـهٔ رده‌های هم‌ارزی ایـن رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم و، با پیش‌بینی نتیجـهٔ نهایی، نماد m/n را بـرای نمایش ردهٔ هم‌ارزی (m , n) به‌کار می‌بریم. عملها را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq},$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

قضیهٔ ۹. $\mathbb{Q}$ با عملهای فوق یك میدان تشکیل می‌دهد.

اثبات. جزئیات به‌خواننده واگذار می‌شود. ابتدا لازم است نشان دهیم که این عملها خوش‌تعریف هستند. سپس باید صحت فهرست بلند بالایی از اصول موضوع را بررسی کنیم. انجام این‌کار وقتی واقعاً مؤثر است که خود شما آن را انجام دهید: خواندن محاسبات طولانی اشخاص دیگر، بخصوص که ساده و سرراست هم باشند، به‌ندرت مفید واقع می‌شود. ولی به‌هرجهت راهنمایی می‌کنیم که: به‌ازای $m\,,\,n\neq 0$، وارون ضربی m/n، n/m است. □

حال با قرار دادن

$$\mathbb{Q}^{+}=\left\{\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\,|\,m\,,\,n\in\mathbb{Z}^{+}\,,\,n\neq 0\right\}$$

یك ترتیب تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰. با توجه به‌تعریف فوق، $\mathbb{Q}$ میدانی مرتب است.

اثبات. این قضیه را نیز به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم. □

حال، تابعی داریم چون $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ با تعریف $g(n)=n/1$. و باز هم به ازای $m\,,\,n\in\mathbb{Z}$:

$$g(m+n)=g(m)+g(n)\,,$$

$$g(mn)=g(m)g(n)\,,$$

$$m\geqslant n\Rightarrow g(m)\geqslant g(n)$$

و لذا g نیز یك یکریختی ترتیبی است. حال همچون درمورد $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$، می‌توانیم $\mathbb{Z}$ را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$، هرچندکه دقیقاً چنین نیست، بپنداریم.

از آنجا که هر کسر m/n را می‌توانیم به‌صورت $(m/1)(1/n)=(m/1)(n/1)^{-1}$ هم بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که یکسان گرفتن n با $n/1$ مغایرتی با نمادگذاری ندارد، و متناظر الگوی شهودی معمولی است.

حقیقتاً مندرجات این فصل تا اینجا صرفاً نوعی سرگرمی و بازی جبری بود. ولی از این پس مطالب جدی‌تر خواهند شد.

اعداد حقیقی

ساختن اعداد حقیقی به صورت اعداد اعشاری بی‌پایان، به‌روش فصل ۲، هرچند از نظر کلی پر دردسر، ولی امکان‌پذیر است. با این وجود، در آنجا ملاحظه کردیم که استفاده از تقریب زدن دنباله‌های اعدادگویا مزایای تکنیکی هم دارد. البته به کار بردن دنباله‌های یکنوا بسیار آسان است، ولی ما از دنباله‌های کلی‌تر «کشی[1]» که در زیر تعریف می‌شوند، استفاده می‌کنیم. نظیر بخشهای قبل، بسیاری از جزئیات ساده را حذف می‌کنیم؛ بهانهٔ ما هم مثل قبل همان است که: اگرچنین کنیم نکات اصلی ساده‌تر دیده می‌شوند، و جزئیات به زمینهٔ بحث ملحق می‌شوند.

دنبالهٔ اعدادگویا

هر دنباله از اعدادگویا را می‌توانیم به‌طور صوری به‌صورت تابعی چون

$$s: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

تعریف کنیم. به‌جای $s(n)$ می‌نویسیم s_n ودنباله را با $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یا با $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$، و یا فقط با (s_n) نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathbb{S}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های اعدادگویا باشد. جمع و ضرب در $\mathbb{S}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$$
$$(a_n)(b_n)=(a_nb_n).$$

لم ۱۱.۰ $\mathbb{S}$ تحت عملهای فوق یك حلقه است.

اثبات. عضو همانی $(1, 1, 1, \ldots)$، عضو صفر $(0, 0, 0, \ldots)$، و وارون جمعی (a_n)، $(-a_n)$ است. بررسی صحت همهٔ این مطالب کاملاً عادی است. $\square$

با این وجود، ملاحظه کنید که $\mathbb{S}$ یك میدان نیست. اگر همهٔ جملات s_n غیر صفر باشند، آنگاه (s_n) دارای وارون ضربی $(1/s_n)$ است. ولی اگر جمله‌ای چون $s_n=0$ باشد، آنگاه هیچ وارونی نمی‌تواندوجود داشته باشد. مثلاً، $(0, 1, 1, \ldots)$ نمی‌تواند وارونی چون $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$، داشته باشد، زیرا

---

1. Cauchy

$$(0, 1, 1, \cdots)(b_1, b_2, b_3, \cdots) = (0, b_2, b_3, \cdots) \neq (1, 1, 1, \cdots).$$

همان‌طور که در فصل ۲ دیدیم، هر عدد حقیقی را می‌توانیم «حد» دنباله‌ای از اعداد گویا بپنداریم. در بحث حاضر نیز می‌توانیم همان تعریف همگرایی مذکور در آن فصل را بپذیریم، به‌شرطی که ε در آن تعریف را عدد گویا اختیار کنیم.

تعریف. می‌گوییم دنباله‌ای چون (s_n) از اعداد گویا به $l \in \mathbf{Q}$ میل می‌کند اگر به ازای هر $\varepsilon \in \mathbf{Q}$، $\varepsilon > 0$، عضوی چون $N \in \mathbf{N}$ وجود داشته باشد که

$$n > N \Rightarrow |s_n - l| < \varepsilon.$$

این تعریف برای بحث کاملاً رضایتبخش نیست: همگرایی به‌حدی گویا در واقع آن چیزی نیست که مطلوب ماست. به‌خاطر امکان بحث، فرض کنیم همگرایی دنباله‌ای از اعداد گویا به‌حدی حقیقی مصداق داشته باشد. این فرض مسلماً درالگوهای شهودی $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ صدق می‌کند. مسئله اینجاست که به طور صوری بر ما معلوم نیست که این حد چیست. با این وجود، اگر (s_n) به‌عددی حقیقی چون l همگرا باشد، آنگاه Nی وجود دارد که

$$|s_n - l| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n > N،$$

و همچنین

$$|s_m - l| < \varepsilon. \qquad \text{به‌ازای هر } m > N،$$

از ترکیب این دو نامساوی، داریم:

$$|s_m - s_n| < 2\varepsilon. \qquad \text{به‌ازای هر } m, n > N،$$

حال در این گزاره عدد حقیقی فرضی l وجود ندارد. اگر به‌جای ε با $\frac{1}{2}\varepsilon$ شروع کنیم، با تنظیم مطالب فوق ایدهٔ اساسی زیر را به‌دست می‌آوریم:

تعریف. دنباله‌ای چون (s_n) از اعداد گویا یک دنبالهٔ کشی است اگر به‌ازای هر عددگویای $\varepsilon > 0$، Nی وجود داشته باشد که

$$m, n > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

به‌طور شهودی، جمله‌های چنین دنباله‌ای به‌یکدیگر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. (آگوستین کشی ریاضیدان فرانسوی قرن نوزدهم است که تألیفات فراوانی دارد و گرچه احتمالاً مبتکر مفهوم این دنباله‌ها نباشد ولی آنها را در بعد وسیعی مورد استفاده قرار داده است.)

دنباله‌های کشی، که به‌عنوان دنباله‌های تقریبهای گویای اعداد حقیقی مد نظر قرار می‌گیرند، مواد اولیهٔ ساخت صوری خود اعداد حقیقی را فراهم می‌سازند.

لم ۱۲. هر دنبالهٔ کشی کراندار است.

اثبات. با فرض $\varepsilon = ۱$، Nی وجود دارد که بازای هر $m, n > N$، $|s_n - s_m| < ۱$.
لذا به‌ازای هر $n > N$ داریم $|s_n - s_{N+۱}| < ۱$، یعنی $|s_n| < |s_{N+۱}| + ۱$. از این‌رو،
به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$|s_n| \leqslant \max\{|s_۱|, |s_۲|, \ldots, |s_N|, |s_{N+۱}| + ۱\}. \quad \square$$

لم ۱۳. اگر (a_n) و (b_n) دو دنبالهٔ کشی باشند، آنگاه $(a_n + b_n)$، $(a_n b_n)$، و $(-a_n)$ نیز دنباله‌های کشی هستند.

اثبات. اگر $\varepsilon > ۰$ گویا باشد، $N_۱$ی و $N_۲$یی وجود دارند که:

$$m, n > N_۱ \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{۱}{۲}\varepsilon,$$

$$m, n > N_۲ \Rightarrow |b_m - b_n| < \frac{۱}{۲}\varepsilon.$$

لذا به‌ازای $m, n > N = \max(N_۱, N_۲)$، داریم:

$$\begin{aligned}|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| &= |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \\ &\leqslant |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \\ &< \frac{۱}{۲}\varepsilon + \frac{۱}{۲}\varepsilon \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

پس $(a_n + b_n)$ کشی است.

برای اثبات کشی بودن دنبالهٔ $(a_n b_n)$، ملاحظه می‌کنیم که طبق لم ۱۲، اعداد گویایی چون $A, B \in \mathbf{Q}$ وجود دارند که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $|a_n| < A$ و $|b_n| < B$. با قدری دوراندیشی (مؤلفین این اثبات را قبلاً دیده‌اند)، اگر $\varepsilon \in \mathbf{Q}$، $\varepsilon > ۰$، داریم $\varepsilon/(A+B) \in \mathbf{Q}$، و $\varepsilon/(A+B) > ۰$؛ لذا می‌توانیم $N_۱$ی و $N_۲$یی پیدا کنیم که:

$$m, n > N_۱ \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$m, n > N_۲ \Rightarrow |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

حال اگر $m, n > N = \max(N_۱, N_۲)$ آنگاه هردو نامساوی فوق برقرارند، ولذا

$$\begin{aligned}|a_m b_m - a_n b_n| &= |(a_m - a_n)b_m + a_n(b_m - b_n|)| \\ &\leqslant |a_m - a_n||b_m| + |a_n||b_m - b_n| \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right)B + A\cdot\frac{\varepsilon}{A+B} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

پس (a_nb_n) هم‌کشی است.

در پایان، کشی بودن $(-a_n)$ را می‌توان یا با محاسبهٔ مستقیم، و یا با قرار دادن $b_n = -1$، به‌ازای همهٔ nها، در برهان فوق، اثبات کرد. □

حال اگر فرض کنیم $\mathcal{C}$ نمایش مجموعه همهٔ دنباله‌های کشی باشد، داریم:

قضیهٔ ۱۴. $\mathcal{C}$ تحت جمع وضرب دنباله‌ها، طبق تعریف فوق، یک حلقه است.

اثبات. اگر $(a_n),(b_n)\in\mathcal{C}$، لم ۱۳ بیان می‌کند که $(a_n)+(b_n)\in\mathcal{C}$، $(a_n)(b_n)$، $(-a_n)$. واضح است که دنبالهٔ صفر $(\dots, ۰, ۰, ۰)$ و دنبالهٔ یکهٔ $(\dots, ۱, ۱, ۱)$ به $\mathcal{C}$ تعلق دارند. باتوجه به‌اصول موضوع حلقه‌ها، این امر نشان می‌دهد که (ج۳)، (ج۴)، و (ض۳) برقرارند. اصول موضوع دیگر به این دلیل صادقند که، طبق لم ۱۱، این اصول برای همهٔ دنباله‌های اعدادگویا برقرارند. □

اما، هنوز یک میدان ساخته نشده است، زیرا دنباله‌ای مانند $(\dots, ۱, ۱, ۰)$ کشی وغیر صفر است ولی وارون ندارد. برای‌حل این مشکل، به‌مسئلهٔ دیگری هم توجه‌می‌کنیم: وآن اینکه به‌طور شهودی دنباله‌های مختلف کشی می‌توانند حد برابر داشته باشند. بامعرفی مفهومی دیگر، هردو مشکل را باهم برطرف می‌کنیم.

تعریف. دنباله‌ای چون (s_n) از اعدادگویا را یک دنبالهٔ پوچ می‌نامیم اگر به ۰ همگرا باشد، یعنی اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، Nی وجود داشته باشد که هرگاه $n > N$ آنگاه $|s_n| < \varepsilon$.

اگر دو دنبالهٔ (a_n) و (b_n) به‌یک حد l میل کنند، آنگاه به‌آسانی دیده می‌شود که دنبالهٔ $(a_n - b_n)$ پوچ است. این الهام‌بخش رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\mathcal{C}$ چون:

$$(a_n)\sim(b_n) \iff (a_n - b_n) \text{ پوچ باشد،}$$

است. برای اینکه ببینیم این یک رابطهٔ هم‌ارزی هست، ملاحظه می‌کنیم که احکام $(a_n)\sim(a_n)$ و $(a_n)\sim(b_n) \Rightarrow (b_n)\sim(a_n)$ کاملاً بدیهی هستند. اگر $(a_n)\sim(b_n)$ و $(b_n)\sim(c_n)$،

آنگاه $(a_n - b_n)$ و $(b_n - c_n)$ پوچ هستند، یعنی بـه ۰ میل می‌کنند. طبق استدلال اولین قضیهٔ فصل ۷، این امر ایجاب می‌کند کـه $((a_n - b_n) + (b_n - c_n))$ به ۰ میل کند، یعنی $(a_n - c_n)$ هم پوچ باشد، لذا $(a_n) \sim (c_n)$.

حال فرض می‌کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های کشی باشد، و ردهٔ هم‌ارزی شامل (s_n) با $[s_n]$ نشان داده شود.

عملهای جمع وضرب را با تعریفهای:

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n],$$

$$[a_n][b_n] = [a_n b_n]$$

به $\mathbb{R}$ سرایت می‌دهیم. این‌عملها خوش‌تعریف هستند. زیرا اگر $[a_n] = [a'_n]$ و $[b_n] = [b'_n]$، آنگاه $(a_n - a'_n)$ و $(b_n - b'_n)$ پوچ هستند. از این‌رو $((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n))$ نیز پوچ است، ولذا $[a_n + b_n] = [a'_n + b'_n]$. اثبات خوش‌تعریف بودن ضرب به‌این‌سرراستی نیست. طبق لم ۱۲، اعداد گویایی چون A و B وجود دارند که

به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_n| < A, \ |b'_n| < B$.

حال اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، می‌توانیم N_1 ی, N_2 یی پیدا کنیم که

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

اگر $n > N = \max(N_1, N_2)$، آنگاه

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a'_n b'_n| &= |a_n(b_n - b'_n) + (a_n - a'_n)b'_n| \\ &\leqslant |a_n||b_n - b'_n| + |a_n - a'_n||b'_n| \\ &< A \cdot \frac{\varepsilon}{A+B} + \frac{\varepsilon}{A+B} \cdot B \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $(a_n b_n - a'_n b'_n)$ پوچ است، ولذا $[a_n b_n] = [a'_n b'_n]$.

قضیهٔ ۱۵. $\mathbb{R}$ با این عملها یك میدان است.

اثبات. بـررسی صحت اصول مـوضوع (ج۱)-(ج۴)، (ض۱)-(ض۳)، و (پ) امری عادی است. عضو صفر $[0]$ است، عضو یکه $[1]$، و منفی $[a_n]$، $[-a_n]$ است. کار

اصلی، اثبات (ض۴) است: اگر $[a_n] \neq [0]$، آنگاه $[a_n]$ وارونی در $\mathbb{R}$ دارد.

حال $[a_n] \neq [0]$ اگر و فقط اگر (a_n) پوچ نباشد. لذا $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد که به‌ازای آن Nی با خاصیت $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ وجود ندارد. واضحتر بگوییم، برای این مقدار ε، به‌ازای هر $N \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که $n > N$ و $|a_n| \geqslant \varepsilon$.

ولی چون (a_n) کشی است، N_1ی وجود دارد که اگر $m, n > N_1$ آنگاه $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. فرض کنیم $N_2 = \max(N, N_1)$. آنگاه به‌ازای هر $m > N_2$، $n > N_2$ی می‌توانیم بیابیم که $|a_n| \geqslant \varepsilon$، وسپس $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. لذا $|a_m| > \frac{1}{2}\varepsilon$. (اگر دلیل آن روشن نیست: فرض کنید $|a_m| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$، آنگاه داریم

$$|a_n| = |(a_n - a_m) + a_m| \leqslant |a_n - a_m| + |a_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

که تناقض است.)

لذا به‌خصوص، به‌ازای $m > N_2$، $a_m \neq 0$. دنباله‌ای چون (b_n) را به‌صورت

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \leqslant N_2، \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{اگر } n > N_2، \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \leqslant N، \\ 1 & \text{اگر } n > N_2، \end{cases}$$

پس $(1 - a_n b_n)$ دنباله‌ای پوچ است؛ درواقع اگر $n > N_2$، برابر صفر است، و لذا $[a_n b_n] = [1]$. بنابراین $[a_n]$ وارون دارد، ودرنتیجه $\mathbb{R}$ یك میدان است. □

ترتیب در $\mathbb{R}$

برای تعریف ترتیب روی $\mathbb{R}$، مسئلهٔ دیگری وجود دارد. جملات دنباله‌ای که حد مثبت دارد ممکن است هم منفی باشند و هم مثبت. با توجه به لم زیر، می‌توانیم تعریفی مناسب، ولی اندکی غیرطبیعی، ارائه دهیم.

لم ۱۶. هر دنبالهٔ گویای غیرپوچ کشی (a_n) دارای این خاصیت است که $\varepsilon > 0$ی و $N \in \mathbb{N}$ی وجود دارند که به‌ازای هر $n > N$، $|a_n| > \varepsilon$.

اثبات. این، همان پاراگرافهای دوم وسوم اثبات قضیهٔ ۱۵ است که در آن ε به‌جای $\frac{1}{2}\varepsilon$ گرفته می‌شود. □

تعریف. $[a_n] \in \mathbb{R}^+$ اگر وفقط اگر یا

(یك) $[a_n]=[0]$، یا

(دو) $\varepsilon>0$ ی، $\varepsilon \in \mathbf{Q}$، وجود داشته باشد که به ازای $N \in \mathbf{N}$ ی، هرگاه $n>N$ آنگاه $a_n>\varepsilon$.

بنابراین، جملات هر دنبالهٔ کشی مطلقاً مثبت باید، از نقطه‌ای به‌بعد، نه‌فقط مثبت بلکه مقدار معینی (چون ε) بزرگتر از صفر باشند.

قضیهٔ ۱۷. $\mathbb{R}$ یك میدان مرتب است.

اثبات. واضح است که اگر $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}^+$، آنگاه $[a_n+b_n] \in \mathbb{R}^+$، و $[a_nb_n] \in \mathbb{R}^+$. همچنین واضح است که اگر $[a_n] \in \mathbb{R}^+$ و $[-a_n] \in \mathbb{R}^+$، آنگاه $[a_n]=[0]$.
تنها باید نشان دهیم که $[a_n] \in \mathbb{R}^+$ یا $[-a_n] \in \mathbb{R}^+$. طبق لم ۱۶، یا $[a_n]=[0] \in \mathbb{R}^+$ یا، به‌ازای $N \in \mathbb{R}$ ی و $\varepsilon>0$ ی هرگاه $n>N$ داریم $|a_n|>\varepsilon$. همچنین، چون (a_n) کشی است، به‌ازای $m, n>N_1$ داریم $|a_m-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$. لذا به‌ازای $n>\max(N, N_1)$، علامت a_n نمی‌تواند تغییرکند، زیرا در آن‌صورت باید داشته باشیم $a_n>\varepsilon$، $a_{n+1}<-\varepsilon$، و $|a_n-a_{n+1}|>2\varepsilon$ یا اینکه $a_n<-\varepsilon$، $a_{n+1}>\varepsilon$، وهمان نتیجهٔ قبلی.
بنابراین یا عددی چون $N_2=\max(N, N_1)$ وجود دارد که به‌ازای هر $n>N_2$، $a_n>\varepsilon$، که دراین صورت $[a_n] \in \mathbb{R}^+$؛ یا اینکه به ازای هر $n>N_2$، $a_n<-\varepsilon$، که دراین صورت $[-a_n] \in \mathbb{R}^+$. □

کامل‌بودن $\mathbb{R}$

اثبات کامل بودن به‌مراتب دشوارتر است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر

$$\hat{q}=[q, q, q, \ldots] \quad \text{، } q \in \mathbf{Q} \text{ به‌ازای}$$

تعریف شود، آنگاه حکم $\mathbf{Q}$ یکسریخت ترتیبی با زیرمجموعهٔ $\{\hat{q} \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbf{Q}\}$ از $\mathbb{R}$ است، به‌آسانی اثبات می‌شود.

لم ۱۸. اگر $[a_n] \in \mathbb{R}$ آنگاه به‌ازای عضوی چون $p \in \mathbf{Z}$، $[a_n]<\hat{p}$.

اثبات. طبق لم ۱۲، به ازای عضوی چون $A \in \mathbf{Q}$، $|a_n|<A$. اگر p یك عدد صحیح ناکمتر از $A+1$ باشد، آنگاه $[a_n]<\hat{p}$. □

قضیهٔ ۱۹. $\mathbb{R}$ یك میدان مرتب کامل است.

اثبات. فقط باید کامل بودن اثبات شود. پس فرض می‌کنیم $X \neq \varnothing$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، وعضوی چون $[x_n]$ از $\mathbb{R}$ یک کران بالا برای X باشد. طبق لم ۱۸ به‌ازای عضوی مثل $p \in \mathbb{Z}$، $[x_n] < \hat{p}$، پس $\hat{p}$ یک کران بالا برای X است.

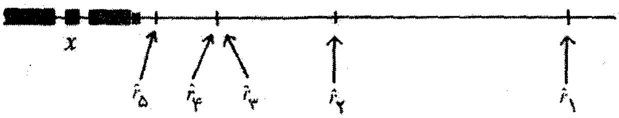
به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$ یک عدد گویا چون r_m را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم k_m کوچکترین عدد صحیحی است که $(\widehat{k_m/2^m})$ یک کران بالا برای X باشد، وفرض کنیم $r_m = k_m/2^m$. (نماد $\widehat{k_m/2^m}$ صرفاً روش دیگری است برای نوشتن $\hat{q}$، $q = k_m/2^m$، که از نظر چاپ مناسبتر است.)

ابتدا باید این روند را توجیه کنیم. مجموعهٔ S متشکل از همهٔ اعداد صحیح j_m ی که به‌ازای آن $\widehat{j_m/2^m}$ یک کران بالا برای X باشد، ناتهی است، زیرا $j_m = 2^m p$ در این مجموعه است. از طرف دیگر عدد صحیحی چون h وجود دارد که به‌ازای آن $\widehat{h/2^m}$ یک کران بالا نیست. زیرا اگر $[a_n] \in X$، آنگاه می‌توان $N \in \mathbb{N}$ ی و $A \in \mathbb{Q}$ یی پیدا کرد که به‌ازای هر $n > N$،

$$-A < a_n < A.$$

اگر $h/2^m < -A$، آنگاه $\widehat{h/2^m}$ یک کران بالا برای X نیست. نتیجه اینکه هر $j_m \in S$ بزرگتر از h است. فرض کنیم T مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{j_m - h \mid j_m \in S\}$ باشد: این مجموعه ناتهی است، ولذا طبق اصل خوش‌ترتیبی کوچکترین عضوی چون l دارد. حال می‌نویسیم $k_m = l + h$.

اکنون می‌توانیم اعداد گویای $r_m = k_m/2^m$ را، به عنوان کوچکترین اعداد گویای به‌صورت 2^m/(عددصحیح) که $\widehat{r_m}$ یک کران بالا برای X باشد، طبق تصویر زیر نمایش دهیم:



بنا به تعریف داریم

$$2k_m - 2 < k_{m+1} \leqslant 2k_m.$$

زیرا اگر

$$\widehat{(2k_m-2)/2^{m+1}}$$

یک کران بالا برای X باشد،

$$\widehat{(k_m-1)/2^m}$$

نیز چنین است، و خود متناقض این مطلب است که k_m کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت

است؛ واز طرف دیگر

$$\widehat{2k_m/2^{m+1}}$$

یک کران بالا است، ولذا $k_{m+1} \leqslant 2k_m$. نتیجه اینکه

$$r_m - \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant r_{m+1} \leqslant r_m.$$

ولی به‌آسانی از این مطلب نتیجه می‌شود که (r_n) یک دنبالهٔکشی است، زیرا

$$|r_m - r_{m+s}| \leqslant 2^{-m-1} + \cdots + 2^{-m-s} < 2^{-m}$$

اکنون تقریباً به‌نتیجهٔ مطلوب‌رسیده‌ایم: فرض‌کنیم $r = [r_n] \in \mathbb{R}$. آنگاه با توجه‌به‌تصویر فوق می‌توان انتظار داشت که r کوچکترین کران بالای مطلوب باشد.

با برهانی ساده، از این حقیقت که هر $\hat{r}_m$ یک کران بالاست، نتیجه می گیریم که r هم یک کران بالاست. فرض‌کنید r کوچکترین کران بالا نباشد، لذا $t < r$ یک کران بالای X است. آنگاه $t = [t_n]$،وبنا به تعریف ترتیب‌در $\mathbb{R}$ ، $\varepsilon > 0$ ی، $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ، وجود دارد که‌به‌ازای $N < n$، $r_n - t_n > \varepsilon$.ولی به‌ازای‌مقداری به‌قدر کافی بزرگ چونm داریم $1/2^m < \varepsilon$، ولذامی‌توانیم، با حفظ کران بالابودن، r_m را به $r_m - 1/2^m$ تقلیل دهیم. ولی‌این امرk_mرا بـه $k_m - 1$ تقلیل می‌دهد، کـه متناقض خاصیت معرف k_m است. پس r کوچکترین کران بالاست، و $\mathbb{R}$ کامل است. □

مانند قبل، در واقع $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ نیست، ولی البته یک یکریختی ترتیبی وجود دارد که طبق آن می‌توانیم عضو q از $\mathbb{Q}$ را به‌جای $\hat{q}$ از $\mathbb{R}$ اختیار کنیم وبدین ترتیب $\mathbb{Q}$ را بـه زیرمجموعه‌ای واقعی از $\mathbb{R}$ تبدیل نماییم. پس همان‌طور که می‌خواستیم سرانجام زنجیری از دستگاههای اعداد به‌دست آوردیم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

تمرین

۱. ابتدا مطالب اثبات نشدهٔ این فصل:

(الف) اثبات‌کامل قضیهٔ ۶، شامل خواص حساب فرض شدهٔ در آن مبحث، را بنویسید.

(ب) اثبات قضیهٔ ۸ راکامل کنید.

(پ) قضیهٔ ۱۰ را ثابت کنید.

۲. اگر R یک حلقه باشد، به ازای $x \in R$ و $n \in \mathbb{N}_0$، عضوهای $x^n \in R$، و $\hat{n}$ را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\hat{0}=0_R,\ \widehat{n+1}=\hat{n}+1_R,$$
$$x^0=1_R,\ x^{n+1}=x^n x.$$

اگر $[r!(n-r)!]/n!=\binom{n}{r}$ ضریب دوجمله‌ای باشد، ثابت کنید که به‌ازای هر $x,\ y\in R$، داریم

$$(x+y)^n=x^n+\hat{n}x^{n-1}y+\dots+\widehat{\binom{n}{r}}x^{n-r}y^r+\dots+y^n.$$

۳. اگر $p\in\mathbb{N}$ اول و $\hat{p}=0_R$ در R باشد (همچنانکه مثلاً در $\mathbb{Z}_p$ چنین است)، نشان دهید که
$$(x+y)^p=x^p+y^p.$$
مثالی از حلقه‌ای چون R ذکر کنید که $\hat{n}=0_R$، ولی $(x+y)^n\neq x^n+y^n$.

۴. اگر R حلقهٔ مرتبی باشد، نشان دهید:

$$x^2-\hat{5}x+\hat{6}\geqslant 0_R$$

اگر و فقط اگر $x\geqslant\hat{3}$ یا $x\leqslant\hat{2}$.

۵. با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، ثابت کنید که اگر $m\ ,\ n\in\mathbb{N}$ متباین باشند، آنگاه اعضایی چون $a\ ,\ b\in\mathbb{N}$ وجود دارند که

$$am+bn=1.$$

هرگاه $m=1008$ و $n=1375$، مطلوب است a و b.

۶. به‌طور صوری ثابت کنید که هر عدد گویای مثبت را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت m/n، که در آن $m\ ,\ n\in\mathbb{N}$ متباین هستند، نوشت. این عمل را «نوشتن کسر به‌ساده‌ترین صورت» می‌نامند. اگر دو عدد گویای p/q و r/s به‌ساده‌ترین صورت باشند، آیا $(ps+qr)/(qs)$ نیز چنین است؟ $(pr)/(qs)$ چطور؟
نشان دهید که اگر p/q به ساده‌ترین صورت باشد، p^2/q^2 نیز چنین است. با استفاده از یکتایی کسرهای به‌ساده‌ترین صورت، اثباتی محکم برای اصم بودن $\sqrt{2}$ ارائه دهید.

۷. احکام زیر را در مورد هرمیدان مرتب (که فرض می‌کنیم $\mathbb{Q}$ را شامل می‌شود) اثبات کنید:

(الف) $a\leqslant b\Leftrightarrow -b\leqslant -a$،
(ب) $a<b\Leftrightarrow -b<-a$،

(پ) $1 > 0 > -1$،

(ت) اگر $a \neq 0$، آنگاه $a^2 > 0$،

(ث) $0 < a \leqslant b \Rightarrow 0 < b^{-1} \leqslant a^{-1}$،

(ج) اگر $a < 0$ و $b < 0$، آنگاه $ab > 0$.

۸. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ ناتهی متناهی چون X از هر میدان مرتب، دارای کوچکترین عضو و بزرگترین عضو است. (کوچکترین عضو، عضوی چون $x \in X$ است که به‌ازای هر $y \in X$، $x \leqslant y$؛ بزرگترین عضو نیز به همین نحو تعریف می‌شود). آیا اگر شرط متناهی بودن X را حذف کنیم حکم فوق هنوز هم صادق است؟

۹. در تعریف رابطهٔ ترتیبی برای $\mathbb{R}$، چرا مناسب نیست تعریف کنیم که $[a_n] \geqslant 0$ اگر $N \in \mathbb{R}$ی وجود داشته باشد که به‌ازای هر $n > N$، $a_n \geqslant 0$؟

۱۰. فرض کنید $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n+1}/(n+1)!$. ثابت کنید (a_n) کشی است، و لذا به‌حدی چون l میل می‌کند. ثابت کنید که همهٔ a_nها گویا هستند، ولی l گویا نیست.

۱۰

اعداد حقیقی به عنوان یك میدان مرتب کامل

در این فصل نشان می‌دهیم که روند فصل قبل را چگونه می‌توان وارونه کرد. درآنجا وجود مجموعه‌ای با خواص بنیادی (ط ۱)ـ(ط ۳) اعداد طبیعی به عنوان اصل موضوع پذیرفته، و سرانجام مجموعه‌ای چون $\mathbb{R}$ ساخته شد که یك میدان مرتب کامل بود. دراینجا با قبول اصل موضوع وجود یك میدان مرتب کامل، آغاز و وارونه عمل می‌کنیم تا به مجموعهٔ اعداد طبیعی برسیم. این فرایند ازنظر تکنیکی ساده‌تر است (مثلاً، زنجیر $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ را واقعاً، بدون یکریختی‌های ساختگی، به دست می‌آوریم.)

این بحث را با ذکر چند مثال ازمیدان، حلقه، میدان مرتب، وحلقهٔ مرتب شروع می‌کنیم، تا نشان دهیم که گونه‌های وسیعی ازاین نوع دستگاهها وجود دارند. هردستگاهی که ازمجموعه‌ای صوری ازاصول موضوع تبعیت کند یك الگوی آن‌اصول موضوع نامیده می‌شود، وبرتری روش اصل موضوعی دراین است که هراستنتاجی ازاصول موضوع درهر الگوی آن اصول نیز صادق است. بنابراین هرنتیجهٔ درستی راکه ازاصول موضوع یك میدان مرتب استنتاج کنیم درالگوهای $\mathbf{Q}$ و $\mathbb{R}$ هم که درفصل قبل ساخته شدند ـ و درواقع در هر دستگاهی که این اصول را ارضا کند ـ برقرار است. بنابراین تنها کافی است نتایج را یکبار استنتاج کنیم، ونه اینکه برای هرالگو آن را تکرار نماییم.

روش اصل موضوعی برتری دیگری نیز دارد: برتری انتخاب الگویی یکتا (تا حد یکریختی). مثلاً، درمورد اصول (ط ۱)ـ(ط ۳) این اتفاق افتاد: دستگاههایی که دراین اصول صدق می‌کنند یکریخت ترتیبی یکدیگرند ولذا ازهر نظر یکی هستند. خواهیم دید

که همین مطلب درمورد اصول موضوع میدان مرتب کامل نیز درست است: این اصول، دستگاهی یکتا، تا حد یکریختی، تعریف می‌کنند. بنا براین می‌توانیم چنین دستگاهی را همان مجموعهٔ اعداد حقیقی بنامیم. این پایان طرح کار است: با ایده‌های شهودی نقاط روی یك خط و بسطهای اعشاری شروع کردیم ومجموعه‌ای ازاصول موضوع راکه دستگاه مطلوب را به‌طور یکتا تعریف می‌کند فرمول‌بندی نمودیم. (ومی‌توانیم به‌طور همزمان توصیفی به‌همان سادگی برای اعداد صحیح وهمچنین برای اعدادگویا هم به‌دست آوریم.)

چند مثال ازحلقه ومیدان

این مطلب درست نیست که هردستگاهی ازاصول موضوع ساختی یکتا، حتی تا حد یکریختی، تعریف می‌کند. مثلاً $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ هردوحلقه هستند، ولی یکریخت نیستند زیرا $\mathbb{Q}$ میدان است و $\mathbb{Z}$ نیست. برای اینکه به‌وسیلهٔ وضع اصول موضوع اضافی امکانات را محدود کنیم به‌معرفی چند مثال تازه می‌پردازیم.

مثال ۱. $\mathbb{Z}_n$، حلقهٔ اعداد به‌سنج n. فرض‌کنیم n یك عدد صحیح بزرگتر از صفر باشد، و $r, s \in \mathbb{Z}$. رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$r \sim s \Longleftrightarrow r-s=kn \text{ ، به ازای عضوی چون } k \in \mathbb{Z}$$

به‌آسانی ثابت می‌شودکه این رابطه، رابطه‌ای هم‌ارزی‌است، ومجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی آن را $\mathbb{Z}_n$ می‌نامیم. ردهٔ شامل m را با m_n نشان می‌دهیم. با تعمیم‌الگوریتم تقسیم، حکم زیر به‌دست می‌آید: اگر $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n > 0$ آنگاه اعدادی چون $q, r \in \mathbb{Z}$ با شرط $0 \leqslant r < n$ وجود دارندکه $m=qn+r$. پس $m-r=qn$، و لذا هرعدد صحیح هم‌ارز عدد صحیحی چون r است که $0 \leqslant r < n$. اعضای $\mathbb{Z}_n$ عبارتند از 0_n، 1_n، …، $(n-1)_n$. نظیر فصل ۴ (که درآن مورد خاص $n=3$ بحث شد) می‌توانیم روی رده‌های هم‌ارزی اعمالی به‌شرح زیر تعریف کنیم:

$$r_n+k_n=(r+k)_n \text{ ,}$$

$$r_n k_n=(rk)_n \text{ .}$$

این عملها خوش‌تعریف هستند و دراصول موضوع یك حلقه صدق می‌کنند که عضو صفرش 0_n وعضو یکه‌اش 1_n است.

اگر n اول نباشد، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ میدان نیست. زیرا اگر با شرایط $0 < r < n$، $0 < k < n$، $n=rk$ آنگاه

$$r_n k_n = n_n = 0_n \text{ .}$$

می‌گوییم عضوی چون x ازیك حلقه مقسوم‌علیه صفر است اگر $x \neq 0$، ولی، به ازای عضوی چون $y \neq 0$ درآن حلقه، $xy=0$. پس r_n و k_n مقسوم‌علیه‌های صفر هستند.

ولی میدان مقسوم‌علیه صفر ندارد، زیرا اگر درمیدانی $xy=0$، $y\neq 0$، آنگاه داریم $x=xyy^{-1}=0y^{-1}=0$. پس $\mathbf{Z}_n$، به‌ازای nهای غیراول، میدان نیست.

مثلاً، در $\mathbf{Z}_6$ داریم $2_6 3_6=0_6$، ولی $2_6\neq 0_6$ و $3_6\neq 0_6$. این اعضا در $\mathbf{Z}_6$ وارون ضربی ندارند؛ زیرا می‌توانیم مستقیماً هم هرشش عضو را امتحان کنیم و این نکته را ببینیم. بنابراین $2_6 0_6=0_6$، $2_6 1_6=2_6$، $2_6 2_6=4_6$، $2_6 3_6=0_6$، $2_6 4_6=2_6$، $2_6 5_6=4_6$. درهیچکدام جواب 1_6 به دست نمی‌آید.

اما، اگر n اول باشد، آنگاه $\mathbf{Z}_n$ یك میدان است. طرق متعددی برای اثبات این مطلب وجود دارد، از آن میان روش زیر هرچند پیشرفته‌ترین نیست ولی مستقیم‌ترین هست. اگر $r_n\neq 0_n$ مفروض باشد، با محاسبهٔ حاصلضربهای

$$r_n 0_n=0_n\,,\ r_n 1_n=r_n\,,\ \ldots\,,\ r_n(n-1)_n=?.$$

وارونی برای آن پیدا می‌کنیم. همهٔ این عضوها متفاوت هستند، زیرا اگر

$$r_n k_n=r_n l_n$$

و $0\leqslant k<l<n$، آنگاه

$$r_n(l-k)_n=0_n$$

پس n عدد $r(l-k)$ را بخش می‌کند. ولی هردو عامل بین 0 و n قرار دارند، وچون n اول است به‌تناقض می‌رسیم.

حال این فهرست ازحاصلضربها، دقیقاً شامل n عضو است که همه متفاوت هستند؛ و از آنجا که $\mathbf{Z}_n$ فقط nعضو دارد، هر کدام باید دقیقاً یکباردرفهرست ظاهر بشوند به‌خصوص 1_n هم باید درجایی، فرضاً در $r_n k_n=1_n$، ظاهر گردد؛ ولذا k_n وارون موردنظر است. ازاین‌رو، اگر n اول باشد، $\mathbf{Z}_n$ یك میدان است.

مثلاً، در $\mathbf{Z}_5$، وارون 3_5 را با محاسبهٔ حاصلضربهای $3_5 0_5=0_5$، $3_5 1_5=3_5$، $3_5 2_5=1_5$، $3_5 3_5=4_5$، $3_5 4_5=2_5$، به‌دست می‌آوریم؛ این حاصلضربها، به ترتیب 0_5، 3_5، 1_5، 4_5، 2_5 دقیقاً همان اعضای $\mathbf{Z}_5$ هستند. 1_5 هم درمیان آنها هست، و وارون 3_5، 2_5 است.

مثال ۲. $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\in\mathbf{R}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$. این دستگاه میدانی است که عضو صفرش $0+0\sqrt{2}$ و عضو یکه‌اش $1+0\sqrt{2}$ است. وارون جمعی $a+b\sqrt{2}$، $-a-b\sqrt{2}$ است، واگر $a+b\sqrt{2}\neq 0$، وارون ضربیش

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{(-b)}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

است. (به‌آسانی ثابت می‌شود که اگریکی از a و b صفر نباشند، آنگاه $a^2-2b^2\neq 0$؛

درحقیقت اثبات نظیر اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ است.)

مثال ۳. این مثال بعداً به عنوان مثال نقیض به‌کار خواهد رفت. مثال این است: میدان $\mathbb{R}(t)$ متشکل از توابع گویا با مجهولی چون t. هرعضو $\mathbb{R}(t)$ را می‌توانیم به راحت‌ترین‌وجه به‌صورت خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای

$$\frac{a_n t^n + \cdots + a_0}{b_m t^m + \cdots + b_0}$$

توصیف کنیم، که در آن $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ وهمهٔ b_iها هم صفر نیستند. هر کسر نظیر فوق، تابعی چون $f: D \to \mathbb{R}$ را به دست می‌دهد که در آن

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid b_m \alpha^m + \cdots + b_0 \neq 0\}$$

و

$$f(\alpha) = \frac{a_n \alpha^n + \cdots + a_0}{b_m \alpha^m + \cdots + b_0}\,.$$

این‌عبارت، خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای‌است، به‌همان نحوی که‌هرعددگویا هم‌خارج‌قسمت دوعددصحیح است، ولذا نام «تابع گویا».[1]

مجموع وحاصلضرب توابع گویا به‌همان صورت متداول تعریف می‌شوند، و دستگاه حاصل یك میدان است. $\mathbb{R}$ را می‌توانیم با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}(t)$ متشکل از توابع

---

۱. تعریفی صوری از $\mathbb{R}(t)$ به‌صورت زیر است. نخست، چون هرچندجمله‌ای با ضرایبش، $a_0, \ldots, a_n$، مشخص می‌شود، هر چندجمله‌ای صوری را به صورت دنباله‌ای چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که به ازای $n \in \mathbb{N}_0$ی، برای تمام $m > n$ داشته باشیم $s(m) = 0$. می‌نویسیم $s(m) = s_m$ و s را با دنبالهٔ $(s_0, s_1, \ldots, s_r, \ldots)$ نمایش می‌دهیم، منتها با این تفاهم که ازنقطه‌ای به‌بعد داریم $s_m = 0$. جمع وضرب را به‌صورت

$$(s_0, s_1, \ldots, s_r, \ldots) + (p_0, p_1, \ldots, p_r, \ldots) = (s_0 + p_0, s_1 + p_1, \ldots, s_r + p_r, \ldots)$$
$$(s_0, s_1, \ldots, s_r, \ldots)(P_0, p_1, \ldots p_r, \ldots) = (s_0 p_0, s_0 p_1 + s_1 p_0, \ldots, q_r, \ldots)$$

که در آن $q_r = s_0 p_r + s_1 p_{r-1} + \cdots + s_r p_0$، تعریف می‌کنیم دنبالهٔ $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ را t می‌نامیم، آنگاه داریم

$$(s_0, s_1, \ldots, s_r, \ldots) = s_0 + s_1 t + \cdots + s_r t^r + \cdots,$$

ولذا اگر هر $s \in \mathbb{R}$ را با $(s, 0, 0, \ldots)$ یکی بگیریم، به نمادگذاری معمولی چندجمله‌ایها بازمی‌گردیم. چندجمله‌ایهای صوری، یك حلقه تشکیل می‌دهند با استفاده از رده‌های هم‌ارزی زوجهای مرتب، دقیقاً به‌همان‌نحوی که $\mathbb{Q}$ را از $\mathbb{Z}$ ساختیم، $\mathbb{R}(t)$ را هم‌ازحلقهٔ چندجمله‌ایهای صوری می‌سازیم.

$a_\circ/1$، که در آن $a_\circ \in \mathbb{R}$، یکی بگیریم.

می‌توانیم مثالهای جالب دیگری هم برای حلقه ومیدان عرضه‌کنیم: ولی، مثالهای فوق به‌خصوص مناسب این فصل هستند.

چند مثال ازحلقه ومیدان مرتب

حال به‌معرفی ترتیب می‌پردازیم. وقتی‌که آن را درمورد مثالهای فوق به‌کار ببندیم به‌نتایج جالبی دست می‌یابیم.

(الف) مثال ۱. $\mathbb{Z}_n$ را نمی‌توانیم طوری مرتب‌کنیم که به‌حلقه‌ای مرتب تبدیل شود. (البته می‌توانیم آن را به نحوی مرتب‌کنیم، ولی با حساب هماهنگ نمی‌شود، مثلاً

$$\circ_n < 1_n < 2_n < \cdots < (n-1)_n \;.$$

ولی از این ترتیب یك حلقهٔ مرتب حاصل نمی‌شود، زیرا در آن صورت از $1_n > \circ_n$، $(n-1)_n > \circ_n$ نتیجه می‌گیریم که $\circ_n = 1_n + (n-1)_n > \circ_n$ که بی‌معنی است.)

کلی‌تر بگوییم، فرض‌کنیم بتوانیم رابطه‌ای ترتیبی روی $\mathbb{Z}_n$ تعریف‌کنیم که آن را به حلقه‌ای مرتب تبدیل‌کند. آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{Z}_n^+$ متشکل از اعداد مثبت وجود خواهد داشت‌که اصول موضوع (ت ۱)ـ(ت ۳) را ارضا می‌کند. بنا به (ت ۲)، یا $1_n \in \mathbb{Z}_n^+$ یا $-1_n \in \mathbb{Z}_n^+$. از آنجاکه $(-1_n)(-1_n) = 1_n \cdot 1_n = 1_n$، هریك ازاین دوحالت، بنابه (ت ۱)، ایجاب می‌کندکه $1_n \in \mathbb{Z}_n^+$. با استفاده از (ت ۱) واستقرا داریم $2_n = 1_n + 1_n \in \mathbb{Z}_n^+$، $3_n \in \mathbb{Z}_n^+$، ...، $(n-1)_n \in \mathbb{Z}_n^+$. ولی این به‌همان تناقض قبلی منجر می‌شود. ازاین‌رو $\mathbb{Z}_n$ را نمی‌توان به حلقه‌ای مرتب تبدیل کرد.

مثال ۲. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ را به دوطریق می‌توان به‌میدانی مرتب تبدیل‌کرد!

روش اول این است‌که چون $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$، رابطهٔ ترتیبی معمولی $\mathbb{R}$ را به $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ محدود کنیم: بدیهی است که این ترتیب، $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ را به یك میدان مرتب تبدیل می‌سازد.

روش دوم پیچیده‌تر است. تابعی چون $\theta : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ با تعریف

$$\theta(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

وجود دارد. حال θ یك یکریختی از $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ به‌خودش است (که معمولاً یك خودریختی نامیده می‌شود)، یعنی θ یك دوسویی با این خواص است‌که به ازای هر $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$$

$$\theta(xy)=\theta(x)\theta(y)\ .$$

(مطلب فوق را بررسی‌کنید!) اگر رابطهٔ ترتیبی را که در بالا تعریف شد بـا $\leqslant$ نمایش دهیم، رابطه‌ای جدید به‌نمایش $\preccurlyeq$ چنین تعریف می‌شود:

$$x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow \theta(x) \geqslant \theta(y)\ .$$

خواننده خود باید بررسی‌کندکه این ترتیب نیز $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ را به یك میدان مرتب تبدیل می‌سازد. مثلاً، اگر $x, y \succcurlyeq ۰$ آنگاه $\theta(x), \theta(y) \geqslant \theta(۰)=۰$، پس $\theta(x)\theta(y) \geqslant ۰$، لذا $\theta(xy) \geqslant ۰$، وبنابراین $xy \succcurlyeq ۰$. اصول دیگر نیز بـه همین‌نحو اثبات می‌شونـد. ملاحظه می‌کنیم که دراین ترتیب، ۰ $\sqrt{۲}$.

تذکر. این مثال را باید بـا واقعیت زیر مقایسه‌کرد: $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ را تنها به‌یك طریق می‌توان به‌حلقه‌ای مرتب (یا درمورد $\mathbb{Q}$، به‌میدانی مرتب) تبدیل کرد. دلیل این‌امر به‌طور خلاصـه چنین است. همان طـور کـه درمـورد $\mathbb{Z}_n^+$ بحث شد، همواره $۱ > ۰$، زیـرا $۱ = ۱^۲ = (۱ -)^۲$. با استقرا ثابت می‌شود که درهر رابطهٔ ترتیبی روی $\mathbb{Z}$، همهٔ اعـداد طبیعی بایـد مثبت باشند، پس بنا به (ت ۲) اعـداد صحیح منفی معمولی بایـد درترتیب مفروض هم منفی باشند. لذا درمورد $\mathbb{Z}$، تنها همان‌ترتیب معمولی اعتبار دارد. ازآنجاکه هرعضو $\mathbb{Q}$ خارج‌قسمتی ازاعداد صحیح‌است، همین مطلب فوق (باکمی زحمت) برای $\mathbb{Q}$ نیز صادق است.

این مطلب درمورد $\mathbb{R}$ نیز صادق است، ولی برای اثبات به‌این واقعیت نیاز داریم که هرعدد صحیح مثبت جذر دارد، واقعیتی‌که نیازمند اثبات است. اثبات این‌مطلب نتیجهٔ ساده‌ای ازاصل‌کمال است. اگر $x \in \mathbb{R}$ و $x > ۰$، فرض می‌کنیم

$$L=\{y \in \mathbb{R} \mid y > ۰ \ \&\ y^۲ < x\}\ .$$

آنگاه به‌آسانی دیده می‌شودکـه L ازبالاکراندار وغیرتهی است. بنا بـه اصل کمال، L کوچکترین‌کران بالایی چون u دارد؛ با برهان خلف به‌آسانی دیده می‌شودکه $x=u^۲$.

حال، با هر رابطه‌ای‌که $\mathbb{R}$ را به‌میدانی مرتب تبدیل کند، همهٔ عضوهای به صورت $y^۲$ $(y \in \mathbb{R})$ باید مثبت‌باشند، وهمهٔ عضوهای به‌صورت $-y^۲$ باید منفی‌باشند. بنا به‌مطالبی که هم‌اکنون گفتیم، اعضای مثبت ومنفی $\mathbb{R}$ (به‌معنی معمول) باید نسبت به‌هر رابطهٔ ترتیبی دیگری نیز به ترتیب مثبت ومنفی باشند، زیرا این عضوها دقیقاً به‌همان صورت موردنظر هستند. پس تنها یك رابطهٔ ترتیبی وجود داردکه $\mathbb{R}$ را به‌یك میدان مرتب تبدیل می‌کند.

مثال ۳. می‌توان رابطه‌ای تـرتیبی بـه میدان توابع‌گویای $\mathbb{R}(t)$ نسبت دادکـه خواص جالبی هم داشته باشد. (این رابطه مفهومی از اندازه به‌تابع نسبت نمی‌دهد، ولی این امر ما را ازارائهٔ ترتیبی‌که اصول موضوع (ت ۱)ـ(ت ۳) را ارضاکند بازنمی‌دارد. $\mathbb{R}(t)^+$ را با

$$\mathbb{R}(t)^+=\{f(t)\in\mathbb{R}(t)|\exists\,\alpha_\circ\in\mathbb{R}:\alpha\geqslant\alpha_\circ\Rightarrow f(\alpha)\geqslant\circ\}$$

تعریف می‌کنیم، به‌این معنی که $f(t)$ را مثبت می‌دانیم اگر وفقط اگر $f(\alpha)$ به‌ازای همهٔ مقادیر به‌قدر کافی بزرگ α، مثبت باشد. (مثلاً با این تعریف $(t^۲-۱۷)/(۵t^۳+۴t)$ مثبت است، ولی $(t+۱)/(۳t-t^۲)$ منفی است.) می‌توانیم ثابت کنیم که این ترتیب، $\mathbb{R}(t)$ را به‌میدانی مرتب تبدیل می‌کند. اگر $\mathbb{R}$ را با مجموعهٔ توابع ثابت یکی بگیریم، آنگاه همچون گذشته تحدید ترتیب $\mathbb{R}(t)$ روی $\mathbb{R}$ همان ترتیب معمولی $\mathbb{R}$ است.

باکمال تعجب، $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}(t)$ از بالا کراندار است؛ درحقیقت تابع $f(t)=t$ کران بالایی برای آن است. زیرا اگر $\beta\in\mathbb{R}$ آنگاه تابع $g(t)=f(t)-\beta=t-\beta$ دارای این خاصیت است که به‌ازای هر $\alpha>\beta$، $g(\alpha)>\circ$، پس $g(t)\in\ \ (t)^+$. این امر ثابت می‌کند که t کران بالایی برای $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}(t)$ است.

بازهم یکریختی

ما قبلاً هم مفهوم «یکریختی» و«یکریختی ترتیبی»را درموارد خاص به‌کار برده‌ایم، وحال برما واجب است که آنها را درحالت کلی بررسی کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر R و S دوحلقه باشند آنگاه $\theta:R\to S$ یك یکریختی است اگر دوسویی باشد واگر به‌ازای هر $r, s\in R$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}\theta(r+s)&=\theta(r)+\theta(s)\\ \theta(rs)&=\theta(r)\theta(s)\,.\end{aligned}\tag{*}$$

ثابت کردیم که بسیاری ازساختهای اصل موضوعی تا حد یکریختی یکتا هستند. خواننده ممکن است بخواهد بداند که چرا نمی‌توانیم بهتر ازاین عمل کنیم، وآنها را واقعاً یکتا بسازیم. دلیل این امر این است که اولاً توقعی بیش ازاندازه است، و درثانی آن‌چنان مزیتی هم‌ندارد. ازاین گذشته، هریکریختی‌صرفاً نام اعضا را (از r به $\theta(r)$) عوض‌می‌کند؛ پس اگر R یك حلقه باشد، می‌توانیم، با روشهای متعدد تعویض نام، به‌حلقه‌های یکریخت بسیاری دست یابیم. به‌بیان صوری، فرض کنیم S مجموعهٔ دلخواهی باشد که به‌ازایش یك دوسویی $\theta:R\to S$ وجود داشته باشد (S را یك حلقه فرض نمی‌کنیم) وبا استفاده از (*) به‌طور وارونه عملهای حلقه روی S را با

$$\theta(r)+\theta(s)=\theta(r+s)$$

$$\theta(r)\theta(s)=\theta(rs)\,.$$

تعریف بکنیم. آنگاه S با R یکریخت می‌شود.

چطور می‌دانیم که مجموعه‌هایی چون S با دوسویی‌هایی مناسب وجود دارند؟ هر شیء دلخواهی چون t را اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که $S=R\times\{t\}$؛ θ را با

$\theta(r)=(r, t)$ تعریف می‌کنیم. این تابع همیشه یك دوسویی است؛ و t هایی متفاوت، Sهای متفاوتی را به دست می‌دهند. این مطلب نشان می‌دهد که گونه‌های وسیعی از مجموعه‌هایی چون S را می‌توان یافت؛ واین صرفاً یك راه سادهٔ یافتن آنهاست.

از آنجا که عملهای جبری روی حلقه است که مهم‌اند، ونه خود اعضا، حلقه‌های یکریخت به همان خوبی حلقهٔ اول هستند. پس انتظار بسیار محدودکننده‌ای است که دستگاهی جبری را به‌طور یکتا مشخص کنیم؛ وانگهی، یکتایی تا حد یکریختی مطلوبترین حالتی است که به‌آن نیازمندیم.

همین مطلب در مورد یکریختی‌های ترتیبی بین دوحلقهٔ مرتب R و S هم که علاوه بر (*) شرط

$$r\geqslant s \Rightarrow\theta(r)\geqslant\theta(s)$$

را نیز ارضا می‌کنند، صادق است

ازفلسفه‌بافی دست برمی‌داریم و به ذکر نتایجی مفید وساده از (*) می‌پردازیم.

لم ۱. اگر $\theta : R \rightarrow S$ یك یکریختی حلقه‌ای باشد، آنگاه به‌ازای هر $r\in R$:

(الف) $\theta(\circ)=\circ$،

(ب) $\theta(1)=1$،

(پ) $\theta(-r)=-\theta(r)$،

(ت) $\theta(1/r)=1/\theta(r)$، به‌شرطی‌که $1/r$ وجود داشته باشد.

اثبات. به‌ازای هر $r\in R$، داریم $r=\circ+r$. با اعمال θ، داریم

$$\theta(r)=\theta(\circ+r)=\theta(\circ)+\theta(r)\ .$$

حال چون θ پوشاست، هرعضو S به ازای عضوی چون $r\in R$ به صورت $\theta(r)$ است. بنابراین به‌ازای هر $s\in S$

$$s=\theta(\circ)+s$$

ولذا بنا به قضیهٔ ۱ فصل ۹، $\theta(\circ)=\circ$. این مطلب (الف) را ثابت می‌کند، و (ب) هم به‌همین‌نحو اثبات می‌شود. برای اثبات (پ)،

$$r+(-r)=\circ,$$

$$\theta(r)+\theta(-r)=\theta(\circ)=\circ\ .$$

بنا به‌قضیهٔ ۲ فصل ۹، $\theta(-r)=-\theta(r)$. این مطلب (پ) را ثابت می‌کند، و اثبات (ت) هم به‌همین نحو است. □

اگر R یك حلقه باشد، آنگاه هر زیرحلقهٔ R زیرمجموعه‌ای چون S است که:

(یك) $r, s \in S \Rightarrow r+s \in S$،
(دو) $r, s \in S \Rightarrow rs \in S$،
(سه) $s \in S \Rightarrow -s \in S$،
(چهار) $1 \in S$.

از (چهار)، (سه)، (یك) نتیجه می‌گیریم که $0 = 1+(-1) \in S$. مثلاً $\mathbf{Z}$ زیرحلقه‌ای از $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{Q}$ زیرحلقه‌ای از $\mathbf{R}$ است.

همان‌طور که درمورد یکریختی‌های بین حلقه‌ها بیان شد، اغلب کافی‌است زیرحلقه‌ای یکریخت با چیزی بشود، به‌جای اینکه واقعاً خود آن چیز باشد.

اگر R یك میدان باشد، آنگاه هر زیرمیدان S زیرحلقه‌ای از آن است که خاصیت اضافی

(پنج) $s \in S,\ s \neq 0 \Rightarrow s^{-1} \in S$،

را نیز دارا باشد.

مثلاً، $\mathbf{Q}$ زیرمیدانی از $\mathbf{R}$ است.

این ایده‌ها دربخش بعد به درد می‌خورند.

ذکر چند صفت مشخصه

قضیهٔ ۲. هرحلقه‌ای چون R شامل زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$ یا به ازای nی با $\mathbf{Z}_n$.

اثبات. تابع $\theta: \mathbf{Z} \to R$ را (با استفاده ازقضیهٔ بازگشتی!) به‌وسیلهٔ $\theta(0)=0$، $\theta(1)=1$، و به‌ازای $n>0$، $\theta(n+1)=\theta(n)+1$، تعریف می‌کنیم، آنگاه به‌ازای هر $n>0$ می‌نویسیم، $\theta(-n)=-(\theta(n))$. با برهانی استقرایی ثابت می‌شود که:

$$\theta(m+n)=\theta(m)+\theta(n)\ ,$$
$$\theta(mn)=\theta(m)\theta(n)\ .$$

اگر θ یك به‌یك باشد، قضیه تمام است، زیرا درآن صورت $\theta(\mathbf{Z})$، نگارهٔ $\mathbf{Z}$ تحت θ، زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$. متأسفانه θ ممکن است یك به‌یك نباشد، دراین صورت به روش زیر استدلال می‌کنیم.

اعضایی چون $r > s \in \mathbf{Z}$ وجود دارندکه $\theta(r)=\theta(s)$. بنابراین $\theta(r-s)=\theta(r)-\theta(s)=0$. با استفاده از خاصیت خوش‌ترتیبی، فرض می‌کنیم n کوچکترین عدد طبیعی باشدکه $n \neq 0$، $\theta(n)=0$. ازاین مطلب نتیجه می‌گیریم که اعداد $\theta(0)$، $\theta(1)$، ...، $\theta(n-1)$ همه متفاوت هستند، زیرا اگر $\theta(r)=\theta(s)$ و $0 < r < s < n$، آنگاه $\theta(s-r)=0$ که متناقض تعریف n است. همچنین، اگر

$u-v=qn$ $(u, v, q \in \mathbb{Z})$، آنگاه،

$$\theta(u)-\theta(v)=\theta(u-v)=\theta(qn)=\theta(q)\theta(n)=\theta(q)\circ=\circ.$$

ازاین‌رو، با توجه به نمادگذاری $\mathbb{Z}_n$ ، اگر $u_n=v_n$، آنگاه $\theta(u)=\theta(v)$. بنابراین می‌توانیم به‌وسیلهٔ $\phi(u_n)=\theta(n)$ تابعی چون $\phi: \mathbb{Z}_n \to R$ تعریف کنیم. یادآوری فوق نشان می‌دهد که ϕ خوش‌تعریف است. حال داریم

$$\phi(u_n+v_n)=\phi((u+v)_n)=\theta(u+v)=\theta(u)+\theta(v)=\phi(u_n)+\phi(v_n),$$

$$\phi(u_nv_n)=\phi((uv)_n)=\theta(uv)=\theta(u)\theta(v)=\phi(u_n)\phi(v_n).$$

ازآنجاکه $\theta(\circ)$، ...، $\theta(n-۱)$ همه متفاوت هستند، $\phi(\circ_n)$، ...، $\phi((n-۱)_n)$ نیز همه متفاوتند، پس ϕ یك‌به‌یك است. بنابراین $\phi(\mathbb{Z}_n)$ زیرحلقه‌ای است از R یکریخت با $\mathbb{Z}_n$. □

قضیهٔ ۳. هرمیدان F شامل زیرمیدانی است یکریخت با $\mathbf{Q}$ یا با $\mathbb{Z}_p$ (p اول).

اثبات. با توجه به قضیهٔ ۲ ، F شامل زیرحلقه‌ای است چون S یکریخت با $\mathbb{Z}$ یا با $\mathbb{Z}_n$.

فرض کنیم S یکریخت با $\mathbb{Z}$ ، و $\theta: \mathbb{Z} \to S$ یکریختی نظیرش باشد. $\phi: \mathbf{Q} \to F$ را با

$$\phi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\theta(m)}{\theta(n)}, \quad (m, n \in \mathbf{Q}, n \neq \circ)$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $n\neq\circ \Rightarrow \theta(n)\neq\circ$، زیرا θ یك به‌یك است، و لذا طرف راست تساوی فوق با معنی است. حال ϕ یك به‌یك است، زیرا اگر $\phi(m/n)=\phi(r/s)$ آنگاه

$$\frac{\theta(m)}{\theta(n)}=\frac{\theta(r)}{\theta(s)}.$$

ازاینجا

$$\theta(ms)=\theta(m)\theta(s)=\theta(r)\theta(n)=\theta(rn).$$

پس

$$ms=rn,$$

وبنابراین

$$\frac{m}{n}=\frac{r}{s}.$$

اکنون به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\phi(\mathbf{Q})$ زیرمیدانی است یکریخت با $\mathbf{Q}$.

حال فرض کنیم S یکریخت با $\mathbf{Z}_n$ باشد. اگر n مرکب، یعنی $n=qr$ باشد، آنگاه $\phi(q_n)$ و $\phi(r_n)$ در F مقسوم‌علیه صفر هستند. ولی‌میدانی چون F مقسوم‌علیه صفر ندارد ($xy=0,\ y\neq 0 \Rightarrow x=xyy^{-1}=0y^{-1}=0$). بنابراین n اول است، مثلاً $n=p$؛ وازآنجا که $\mathbf{Z}_p$ میدان است، زیرمیدانی از F پیدا کردیم که با $\mathbf{Z}_p$ یکریخت است. □

اکنون رابطهٔ ترتیب را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. هرحلقهٔ مرتب شامل زیرحلقه‌ای است که با $\mathbf{Z}$ یکریخت ترتیبی است.

اثبات. بنا به‌قضیهٔ ۲، هرحلقهٔ مرتب شامل زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$ یا با $\mathbf{Z}_n$. اثبات این مطلب که $\mathbf{Z}_n$ نمی‌تواند به حلقه‌ای مرتب تبدیل شود همچنین نشان می‌دهد که $\mathbf{Z}_n$ نمی‌تواند زیرحلقهٔ مرتبی باشد. اثبات این مطلب که رابطهٔ ترتیبی روی $\mathbf{Z}$ یکتاست نشان می‌دهد که زیرحلقهٔ یکریخت با $\mathbf{Z}$ ، یکریخت ترتیبی با $\mathbf{Z}$ نیز هست. □

همچنین داریم:

قضیهٔ ۵. هرمیدان مرتب، شامل زیرمیدانی است یکریخت ترتیبی با $\mathbf{Q}$.

اثبات. نظیر اثبات قضیهٔ ۴ احتمال وقوع $\mathbf{Z}_p$ را طرد، وسپس از یکتایی ترتیب روی $\mathbf{Q}$ استفاده کنید. □

این دوقضیه، $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را به‌صورت اصل موضوعی ساده‌ای مشخص می‌کنند:

$\mathbf{Z}$ حلقهٔ مرتب مینیمالی است،

(یعنی، $\mathbf{Z}$ حلقهٔ مرتبی است که هیچ زیرحلقهٔ سره‌ای ندارد)؛

$\mathbf{Q}$ میدان مرتب مینیمالی است،

(یعنی، $\mathbf{Q}$ میدان مرتبی است که هیچ زیرمیدان سره‌ای ندارد).

این مطالب $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را تا حد یکریختی به‌طور یکتا تعریف می‌کنند زیرا بنا به‌قضیهٔ ۴، هرحلقهٔ مرتب مینیمالی باید با $\mathbf{Z}$ یکریخت باشد؛ وبنا به‌قضیهٔ ۵، هرمیدان مرتب مینیمالی باید یکریخت با $\mathbf{Q}$ باشد.

درپایان می‌پردازیم به میدانهای مرتب‌کامل. برای بررسی این میدانها باید مفاهیم دیگری چون «حد» و «دنباله‌های کشی» را نیز مطرح کنیم. پس فرض می‌کنیم F میدان مرتبی باشد. بنابه‌قضیه ۵، این میدان شامل زیرمیدانی است که با $\mathbf{Q}$ یکریخت ترتیبی است، وبا تعویض نمادگذاری می‌توانیم، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم که این میدان همان $\mathbf{Q}$ باشد. می‌گوییم که دنباله‌ای چون (a_n) ازاعضای F کشی است اگر:

به‌ازای هر $\varepsilon>0$ ، $\varepsilon\in F$ ، $N\in\mathbb{N}_0$ی وجود داشته باشد که به‌ازای هر $m,n>N$ ،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

دنبالهٔ (a_n) به‌یك حد $\lambda \in F$ میل می‌کند اگر به‌ازای $\varepsilon > 0$، $\varepsilon \in F$، بتوان $N \in \mathbb{N}_0$ی پیدا کرد که به‌ازای هر $n > N$،

$$|a_n - \lambda| < \varepsilon .$$

مانند قبل می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lambda \text{ ، یا } \lim a_n = \lambda .$$

نتیجهٔ کلیدی به شرح زیر است:

لم ۶. درهرمیدان مرتب‌کاملی، هردنبالهٔ کشی حدی دارد.

اثبات. فرض کنیم (a_n) یك دنبالهٔ کشی در F باشد. طبق برهان لم ۱۲ فصل ۹ (برحسب F) این دنباله کراندار است. لذا هرمجموعه‌ای ازعضوهای این دنباله کراندار است. فرض کنیم

$$b_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots\} \text{ کوچکترین کران بالای }.$$

این عضو، بنا به‌کامل بودن F، وجود دارد. بدیهی است که

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$$

و دنبالهٔ (b_n) ازپایین کراندار است (مثلاً به‌وسیلهٔ هرکران پایین (a_n)). ازاین‌رو می‌توانیم فرض کنیم که

$$c = (b_n) \text{ بزرگترین کران پایین }.$$

ادعا می‌کنیم که c حد دنبالهٔ اولیه یعنی (a_n) است.

برای اثبات این ادعا، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. فرض کنید که فقط تعدادی متناهی از مقادیر n دارای خاصیت

$$c - \frac{1}{2}\varepsilon < a_n < c + \frac{1}{2}\varepsilon$$

باشند. آنگاه Nی انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر $n > N$،

$$a_n \leqslant c - \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{یا} \quad a_n \geqslant c + \frac{1}{2}\varepsilon .$$

ازطرفی $N_1 > N$ی وجود داردکه اگر $m, n > N_1$ آنگاه $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. پس

$$a_n \leqslant c-\frac{۱}{۲}\varepsilon \text{ ،} n > N_۱ \text{ به‌ازای هر}$$

یا

$$.a_n \geqslant c+\frac{۱}{۲}\varepsilon \text{ ،} n > N_۱ \text{ به‌ازای هر}$$

شرط دوم ایجاب می‌کند mی وجود داشته باشد که به ازای هر $n > N_۱$، $a_n > b_m$، که تعریف b_m نقض می‌شود. همچنین، شرط اول ایجاب می‌کند که بتوانیم $b_{N_۱}$ را با $b_{N_۱}-\frac{۱}{۲}\varepsilon$ عوض کنیم، که این نیز تعریف $b_{N_۱}$ را نقض می‌کند.

نتیجه اینکه به‌ازای هر M، $m > M$ی وجود دارد که

$$c-\frac{۱}{۲}\varepsilon < a_m < c+\frac{۱}{۲}\varepsilon .$$

از آنجا که (a_n) کشی است، $M_۱ > M$ی وجود دارد که به ازای هر $m, n > M_۱$، $|a_n - a_m| < \frac{۱}{۲}\varepsilon$. بنابراین به‌ازای $n > M_۱$،

$$c-\varepsilon < a_n < c+\varepsilon .$$

این مطلب طبق ادعا، ایجاب می‌کند که $\lim a_n = c$. □

قدم بعدی این است:

لم ۷. فرض کنیم $F \supseteq \mathbf{Q}$ میدان مرتب کاملی باشد. اگر $x \in F$، آنگاه عضوی چون $p \in \mathbf{Z}$ وجود دارد که $p-۱ \leqslant x < p$.

اثبات. فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}$، $n \leqslant x$. آنگاه $\mathbf{Z}$ از بالا به x کراندار است، ولذا بنابه‌اصل کمال، کوچکترین کران بالایی چون k هم دارد. ازاین‌رو به ازای هر $n \in \mathbf{Z}$، $n+۱ \leqslant k$، زیرا همچنین $n+۱ \in \mathbf{Z}$. این مطلب ایجاب می‌کند که $n \leqslant k-۱$، ولذا $k-۱$ کران بالای کوچکتری برای $\mathbf{Z}$ باشد. این مطلب تعریف k را نقض می‌کند. بنابراین به‌ازای $n \in \mathbf{Z}$ی داریم $x < n$. به همین نحو، به‌ازای $m \in \mathbf{Z}$ی، $m < x$. از آنجا که تنها تعدادی متناهی عدد صحیح بین m و n وجود دارد، می‌توانیم کوچکترین عدد صحیحی چون p را پیدا کنیم که $x < p$. آنگاه $p-۱ \leqslant x < p$، و لم اثبات می‌شود. □

به عنوان آخرین قدم مقدماتی:

لم ۸. فرض می کنیم F میدان مرتب کاملی باشد، و (a_n) و (b_n) دو دنبالهٔ به‌ترتیب

با حدود a و b باشند. آنگاه:

(الف) $\lim (a_n+b_n)=a+b$،

(ب) $\lim (a_n b_n)=ab$.

اثبات. برای قسمت (الف) همان‌اثبات نخستین‌قضیهٔ فصل ۷ را دنبال وتنها بررسی کنید که آن اثبات به‌طور صوری نیز با معنی است. برای قسمت (ب)، توجه‌کنید که بنا به‌برهان لم ۱۲، فصل ۹، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، وبه‌ازای A و Bهایی از F، داریم $|a_n| < A$، $|b_n| < B$. حال اگر $\varepsilon > 0$، داریم $\varepsilon/(A+B) > 0$. پس N_1ی وجود داردکه به‌ازای هر $n > N_1$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

و N_2یی وجود داردکه به‌ازای هر $n > N_2$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

بنابراین به‌ازای هر $n > N = \max(N_1, N_2)$،

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right)B + \frac{A\varepsilon}{A+B} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

این مطلب (ب) را ثابت می‌کند.(به‌تشابه این برهان با برهانی‌که بلافاصله قبل ازقضیهٔ ۹ آمده است توجه‌کنید.) □

درمورد $\mathbb{R}$ قضیه‌ای قویتر ازقضیه‌های ۴ و ۵ هم می‌توان به دست آورد.

قضیهٔ ۹. هرمیدان مرتب‌کاملی با $\mathbb{R}$ یکریخت ترتیبی است.

اثبات. فرض‌کنیم F میدان مرتب‌کاملی باشد. بنا به‌قضیهٔ ۵، F زیرمیدانی‌یکریخت با $\mathbb{Q}$ دارد. طبق معمول، برای سهولت درنمادگذاری، این زیرمیدان را با $\mathbb{Q}$ یکی می‌گیریم، ولذا بدون از دست دادن‌کلیت داریم $\mathbb{Q} \subseteq F$.

اعضای $\mathbb{R}$ رده‌های هم‌ارزی $[a_n]$ از دنباله‌های کشی (a_n) متشکل از اعدادگویا هستند. تابعی چون $\theta : \mathbb{R} \to F$ با

$$\theta([a_n]) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

را تعریف می‌کنیم. ابتدا باید بررسی‌کنیم که این تعریف بامعنی است. پس ثابت می‌کنیم

که (a_n) در F کشی است (این مطلب کاملاً همان چیزی نیست که (a_n) در $\mathbf{Q}$ کشی باشد، زیرا مقادیر بیشتری برای ε وجود دارند.) فرض کنیم $\varepsilon \in F$، $\varepsilon > 0$. ادعا می‌کنیم که عددگویایی چون ε' وجود دارد که $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. حال $1/\varepsilon \in F$ و، بنا به لم ۷، به‌ازای عضوی چون $p \in \mathbb{Z}$، $p > 1/\varepsilon$. آنگاه $p > 0$، و $1/p \in \mathbf{Q}$. $0 < 1/p \in \mathbf{Q}$ $\varepsilon' = 1/p \in \mathbf{Q}$ را اختیار می‌کنیم. حال چون (a_n) در $\mathbf{Q}$ کشی است، $N \in \mathbf{N}_0$ی وجود دارد که به ازای هر $m, n > N$،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon' .$$

از این‌رو، به‌ازای هر $m, n > N$،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

و (a_n) در F هم کشی است. بنا به لم ۶، $\lim a_n$ در F وجود دارد.

با برهانی شبیه برهان فوق، به آسانی دیده می‌شود که θ خوش‌تعریف و یك به‌یك است؛ لم ۸ ثابت می‌کند که $\theta(\mathbb{R})$ زیرحلقه‌ای است از F و یکریخت با $\mathbb{R}$. به‌آسانی اثبات می‌شود که θ رابطهٔ ترتیب را نیز حفظ می‌کند.

حال باید ثابت کنیم که θ پوشاست. فرض کنید $x \in F$. بنا به لم ۷ عدد صحیحی چون a_0 وجود دارد که $a_0 \leqslant x < a_0 + 1$. با استقرا (و با استفاده از لم ۷) می‌توانیم اعدادی صحیح چون a_i بین ۰ و ۹ پیدا کنیم که

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} .$$

حال اگر $b_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ داریم

$$|b_n - x| < \frac{1}{10^n}$$

و به‌آسانی (با برهانی شبیه بند دوم این اثبات) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim b_n = x .$$

وچون (b_n) در $\mathbf{Q}$ کشی است، پس $[b_n] \in \mathbb{R}$، و

$$\theta([b_n]) = \lim b_n = x .$$

بنابراین θ پوشاست، وقضیه اثبات می‌شود. $\square$

ارتباط با دستگاههای شهودی

اکنون می‌توانیم ایده‌هایمان را اندکی مرتب‌تر کنیم. برای هردستگاه ازاصول موضوع

فوق‌الذکر، دونوع الگو داریم: الگوهای صوری $\mathbb{N}_0$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$؛ والگوهای غیرصوری $\mathscr{N}_0$، $\mathscr{Z}$، $\mathscr{Q}$، $\mathscr{R}$. برای‌این حقیقت‌که $\mathscr{R}$ میدان مرتب‌کاملی‌است یك‌توضیح موجه شهودی عرضه‌کردیم، لذا به‌همین اساس شهودی، قضیهٔ ۹ بیان می‌کندکه $\mathscr{R}$ و $\mathbb{R}$ یکریخت هستند. به عبارت دیگر، صورتگرایی، مشهوداتمان را به ثبوت می‌رساند، وبا استفاده از آن می‌توانیم همهٔ خواص موجود در $\mathscr{R}$ را توجیه‌کنیم. در واقع، اکنون‌فرق چندانی نمی‌کند که $\mathscr{R}$ غیرصوری را به‌کار ببریم یا $\mathbb{R}$ صوری را: کاری‌که انجام شد هردو را حفاظت می‌کند، واکنون تفاوتی اساسی بین آنها قایل نیستیم.

درحقیقت، این فصل وفصل قبل نشان می‌دهندکه می‌توانیم دستگاههای عددی را به‌یکی از دو روش زیر بسازیم.

(الف) وجود $\mathbb{N}_0$ را اصل‌موضوع فرض‌کنیم‌وبه‌ترتیب $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ رابسازیم؛یا

(ب) وجود $\mathbb{R}$ را اصل موضوع فرض‌کنیم و به‌ترتیب $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{N}_0$ را بسازیم.

بنابراین با تلفیق عاقلانهٔ این دو روش، می‌توانیم با هرکدام ازآنها، مثلاً با $\mathbb{Z}$، یا با $\mathbb{Q}$، شروع‌کنیم و دستگاههای دیگر را، با استفاده ازفصل ۹ روبه‌بالا، یا با به‌کاربردن این‌فصل روبه‌پایین، بسازیم. قضیهٔ یکتایی‌که دراین فصل اثبات شد نشان می‌دهدکه تفاوتی اساسی نمی‌کندکه‌کدام روش را به‌کار ببریم: نتایج همواره یکریخت هستند وبا ایده‌های شهودیمان هماهنگ. دراین صورت محل دقیق‌آغاز کار به‌سلیقه مربوط است و نه به‌الزام. ازهرنقطه‌ای که‌شروع‌کنیم می‌توانیم با اعتباری‌یکسان همهٔ دستگاههای‌اعداد را بپرورانیم، وتمام‌نتایج استاندهٔ حساب‌مقدماتی را براساس اصل موضوعی بازیابیم.

تمرین

۰۱ اثبات‌کامل قضیهٔ ۵ را بنویسید.

۰۲ ثابت‌کنیدکه درهرمیدان مرتب F،

$$\text{به‌ازای هر } a\in F\text{،}\quad a^{2}+1>0.$$

نتیجه بگیریدکه اگر $x^{2}+1=0$ در میدانی جوابی داشته باشد، آنگاه آن میدان را نمی‌توان مرتب‌کرد. همهٔ جوابهای $x^{2}+1=0$ را درمیدانهای $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_3$، و $\mathbb{Z}_5$ پیدا کنید.

۰۳ با استفاده ازالگوریتم‌اقلیدسی نشان دهیدکه به‌ازای $m, n\in\mathbb{N}$، تکنیکی‌برای محاسبهٔ اعضایی چون $a, b\in\mathbb{Z}$ وجود داردکه $am+bn=h$؛ دراینجا h بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n, m است. نتیجه بگیریدکه اگر m و n متباین باشند، آنگاه اعدادی صحیح چون a و b وجود دارندکه $am+bn=1$. هرگاه $m=1008$ و $n=1375$، a و b را پیداکنید. وارون ضربی 1008_{1375} در $\mathbb{Z}_{1375}$ را پیداکنید.

نشان دهید که m_n در $\mathbf{Z}_n$ یك وارون ضربی دارد اگروفقط اگر m و n متباین باشند.

۴. درهرحلقهٔ مرتب، ثابت کنید که به‌ازای هر x و y

$$||x|-|y||\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|\cdot$$

۵. بااستفاده ازاصول موضوع میدان مرتب کامل، ثابت کنید که هرعضومثبت a از $\mathbf{R}$ جذر مثبت یکتایی دارد. (راهنمایی: $\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x^{۲}\leqslant a\}$ را درنظر بگیرید.)

۶. با استقرا ثابت کنید که درهرحلقهٔ مرتبی چون $\mathbf{Q}$، $۰\leqslant a\leqslant b\Rightarrow a^n\leqslant b^n$. به‌ازای $a\in\mathbb{R}$، $a\geqslant ۰$، نشان دهید که اگر عضوی چون $r\in\mathbf{R}$ وجود داشته باشد که $r\geqslant ۰$ و $r^n=a$، آنگاه این r یکتاست.

۷. نشان دهید که درهرمیدان مرتب کامل، هرعضو مثبت دارای ریشهٔ nام یکتاست. ($\{x\,|\,x^n\leqslant a\}$ را درنظر بگیرید.)

۸. با استفاده ازتمرین ۷، برای هرعضو مثبت x متعلق به‌یك میدان مرتب‌کامل وبرای عدد گویایی چون p/q، $x^{p/q}$ را تعریف کنید.

۹. میدانی چون $\mathbf{Q}(\sqrt{۳})$ نظیر $\mathbf{Q}(\sqrt{۲})$ را تعریف کنید و نشان دهید که به دو روش متفاوت می‌توان آن را به‌یك میدان مرتب تبدیل کرد.

۱۰. نشان دهید که دو رابطهٔ ترتیبی مذکور برای $\mathbf{Q}(\sqrt{۲})$ تنها رابطه‌های ترتیبی هستند که تحت آنها $\mathbf{Q}(\sqrt{۲})$ به یك میدان مرتب تبدیل می‌شود.

۱۱. میدانی با دقیقاً چهار رابطهٔ ترتیبی مختلف پیدا کنید که همه آن‌را به‌میدانی مرتب تبدیل کنند.

۱۲. فرض کنید $\mathbf{R}[t]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای $p(t)=a_nt^n+a_{n-۱}t^{n-۱}+\dots+a_۰$ با ضرایب حقیقی باشد. رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$p(t)\geqslant q(t)\Longleftrightarrow p(۰)\geqslant q(۰)$$

تعریف کنید. آیا این رابطه $\mathbf{R}[t]$ را به حلقه‌ای مرتب تبدیل می‌کند؟

۱۳. درهرمیدان مرتب F، مفهوم حد

$$a_n\to a \quad \text{وقتی} \quad n\to\infty$$

را می‌توان چنین تعریف کرد که اگر $e\in F$، $e>۰$، $N\in\mathbf{N}$ی وجود داشته باشد که

e > $|a_n - a|$ ⇐ $N < n$. درمیدان $\mathbb{R}(t)$ مثال ۳، صفحهٔ ۲۱۸، نشان دهید که دنبالهٔ $(1/n)$ به‌صفر میل نمی‌کند. (عضوی چون $e \in \mathbb{R}(t)$ پیدا کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $1/n > e$.) نشان دهید که اگر F یك میدان مرتب کامل باشد، آنگاه $1/n \to 0$.

۱۴. فرض کنید F یك میدان مرتب باشد. نشان دهید که F کامل است اگر وفقط اگر هردو شرط زیر برقرار باشند:

(یك) هردنبالهٔ کشی همگرا باشد، (اصل کمال کشی)،

(دو) اگر $e \in F$، $e > 0$، آنگاه به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ی، $1/10^n < e$، (شرط ارشمیدسی).

۱۵. مبادزه. نشان دهید که در یك میدان مرتب، اصل کمال کشی، اصل کمال را ایجاب نمی‌کند.

۱۱

اعداد مختلط وماورای آن

اعداد مختلط هنوز هم درنظر برخی با شك آمیخته با ترس همراه است، ولی درنظر ریاضیدان امروزی این دستگاه صرفاً گسترش مجموعه بنیاد ساده‌ای ازاعداد حقیقی است. دراین فصل نشان می‌دهیم که چطور این اعداد از $\mathbb{R}$ ساخته می‌شوند، و به‌این ترتیب سلسله مراتب استاندهٔ دستگاههای عددی، $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ را کامل می کنیم. می‌توانستیم با ادامهٔ این روند، گسترشی برای هم بیابیم. همیلتون[1]، ریاضیدان قرن نوزدهم، گسترشی برای $\mathbb{C}$ پیداکرد وآن را چهارگانها نامید؛ ما هم شرح مختصری از آن را ارائه خواهیم داد. ولی ماهیت ریاضیات جدید چنان است که باید دید خود را وسیعترکنیم و به دستگاههایی اصل موضوعی بپردازیم که ساختهای ریاضی مفیدتری را به دست دهند. مفهوم عدد چیزی جز قسمتی ازاین بررسی کلی نیست. جبر جدید با دستگاههایی اصل موضوعی سروکار داردکه، به طورکلی، متشکل ازمجموعه‌هایی است همراه با عملهای مختلفی روی آن مجموعه‌ها. ما قبلاً دوتا ازاین دستگاهها را دیده‌ایم؛ حلقه ومیدان، ولی دستگاههای متعدد دیگری هم وجود دارند. ازآنجاکه این‌کتاب مربوط به جبر نیست، هیچ یك ازاین دستگاهها را به‌طور مفصل بررسی نمی‌کنیم، ولی بد نیست اهم آنها را برشماریم. اگر بخواهیم پا را از اعداد مختلط فراتر نهیم، مسیر پربار راه چهارگانهای همیلتون نیست، بلکه مسیر ساختهای جبری تعمیم‌یافتهٔ جبر جدید است.

---

1. Hamilton

دورنمای تاریخی

درفصل ۱ مشکلات مربوط به‌پذیرش اعداد مختلط به عنوان مفهومی اصیل را برشمردیم. بدنیست با اندکی درنگ به‌نکات تاریخی بپردازیم، زیرا ممکن است کمکی باشد به‌دور- نگه‌داشتن خواننده ازسوءتفاهمهای احتمالی.

دراوایل قرن شانزدهم اشتیاق زیادی برای حل معادلات جبری وجود داشت، و از آن جمله بود:

پیداکردن دوعددکه مجموعشان ده وحاصلضربشان چهل باشد.

با نمادگذاری امروزی، این مسئله به معادلات زیر منجر می‌شود:

$$x+y=۱۰,$$

$$xy=۴۰.$$

y را ازمعادلهٔ اول پیدا می‌کنیم و درمعادلهٔ دوم می‌گذاریم،

$$x(۱۰-x)=۴۰$$

ولذا

$$x^{۲}-۱۰x+۴۰=۰$$

که جوابهای

$$x=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۱۶۰}}{۲}=۵\pm\sqrt{-۱۵}$$

را به‌دست می‌دهد. متناظر با $x=۵+\sqrt{-۱۵}$ ، $y=۵-\sqrt{-۱۵}$ است‌وبرعکس، پس جواب مسئله دو عبارت $۵+\sqrt{-۱۵}$ و $۵-\sqrt{-۱۵}$ است. ریاضیدانان قرن شانزدهم دریافتندکه این اعداد، حقیقی نیستند. مربع هرعدد حقیقی عددی مثبت است، پس -۱۵ مربع عددی حقیقی نیست، ولذا $\sqrt{-۱۵}$ نمی‌تواند حقیقی باشد. با این‌حال، بدون توجه به ماهیت $\sqrt{-۱۵}$، وقتی این جوابها را با هم جمع کنیم، جمله‌های $\pm\sqrt{-۱۵}$ حذف می‌شوند و

$$(۵+\sqrt{-۱۵})+(۵-\sqrt{-۱۵})=۱۰$$

به‌دست می‌آید و وقتی آنها را درهم ضرب‌کنیم،

$$(۵+\sqrt{-۱۵})(۵-\sqrt{-۱۵})=۵^۲-(\sqrt{-۱۵})^۲$$
$$=۲۵-(-۱۵)$$
$$=۴۰$$

حاصل می‌شود. صرفاً اگر $\sqrt{-۱۵}$ را عــددی «موهومی» بینگاریم وبــا این تصورکــه مــربعش ۱۵ — است عملیات جبری مــربوط را انجــام دهیم، عبارات $۵+\sqrt{-۱۵}$ و $۵-\sqrt{-۱۵}$ جواب مسئله خواهند بود. می‌دانیم، هرعــدد حقیقی مثبت a دارای جذر مثبت $\sqrt{a}$ است. جذر هرعــدد حقیقی منفی $-a$ $(a>۰)$ را، درصورت وجود، می‌توان به‌صورت $\sqrt{-a}=\sqrt{-۱}\sqrt{a}$ نوشت. اویلر[1]، ریاضیدان‌قرن هیجدهم نماد[2] i را برای $\sqrt{-۱}$ معرفی کرد،و لذا $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$. هرعبارت به‌صورت $x+iy$ راکه $x, y\in\mathbb{R}$ یك عدد مختلط نامیدنــد، البته هنوز هم ماهیت اصلی چنین عبارتی برایشان روشن نبود. به‌این ترتیب، هرمعادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^۲+bx+c=۰, \quad (a, b, c\in\mathbb{R})$$

جوابی چون

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad (b^۲\geqslant ۴ac \text{ اگر})$$

و

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{۴ac-b^۲}}{۲a} \quad (b^۲< ۴ac \text{ اگر})$$

دارد. بــه عبارت دیگر، اگــر $b^۲\geqslant ۴ac$ آنگاه معادلــه جوابهای حقیقی دارد، و اگــر $b^۲<۴ac$، معادله اصلاً جواب حقیقی ندارد ولی جوابهای مختلط دارد.

این امر، درنظر ریاضیدانان آن زمان یك دوگانگی بین جوابهای حقیقی (به معنی واقعی) وموهومی (به‌معنی عدم وجود) معادلات ایجادکرد. در واقع اعداد مختلط با اثــر روانی مربوط به واژه‌های «مختلط» و «موهومی» مواجه شدند.

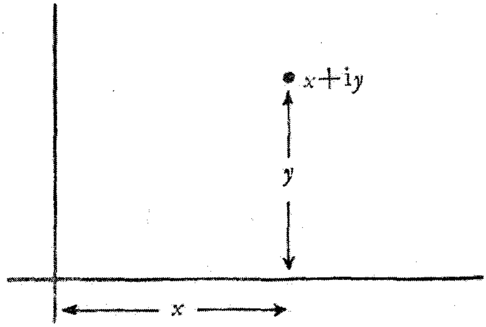
در ۱۸۰۶، آرگان[3]، ریاضیدان فــرانسوی، هرعدد مختلط $x+iy$ را بــه عنوان نقطه‌ای ازصفحه توصیف کرد:

---

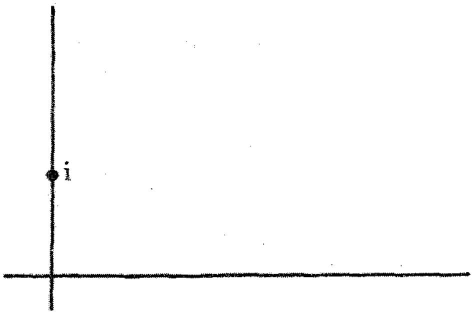
1. Euler

۲. اخیراً مهندسین جدید وبرخی از ریاضیدانــان نماد j را برای $\sqrt{-۱}$ به‌کار می‌برند.

3. Argand



محور افقی به‌عنوان محور حقیقی، ومحور عمودی به‌عنوان محور موهومی درنظر گرفته شد؛ وعدد i به‌صورت نقطهٔ به‌فاصلهٔ یك واحد بالای محور موهومی درآمد.



این توصیف اعداد مختلط را «دیاگرام آرگان» نامیدند وامروزه غالباً تصاویر اعداد مختلط به‌عنوان نقاط صفحه به‌آن نام‌معروفند؛ اگرچه این‌ایده قبلاً (۱۷۹۹) هم در تز دکترای گاوس[1]، ریاضیدان بزرگ آلمانی، مطرح شده بود وحتی این در اثر نه‌چندان معروف وسل[2] (۱۷۹۷) نقشه‌بردار دانمارکی هم منعکس‌است ــ اینها رویدادهای تاریخی این مفهوم هستند. گرچه هم‌اکنون اعداد مختلط را به طور ملموس به عنوان نقاط صفحه توصیف‌کردیم، ولی ابهامات دورانهای قبل هنوز هم آنها را احاطه‌کرده‌اند. گاوس هر عدد مختلط را به‌طور صریح زوجی چون (x, y) از اعداد حقیقی می‌پنداشت. در دهۀ ۱۸۳۰ همیلتون ریاضیدان ایرلندی رسماً آنها را «جفتهای اعداد حقیقی» (او به‌هر زوج مرتب جفت اطلاق می‌کرد) نامید. این قلب مطلب‌است و راهنمای توصیف جدید: هر نقطه ازصفحه زوج مرتبی چون (x, y) است ونماد $x+iy$ صرفاً نام دیگری است برای آن. عبارت مرموز i چیزی جز زوج مرتب $(0, 1)$ نیست.

---

1. Gauss　　2. Wessell

نحوهٔ ساختن اعداد مختلط

فرض‌کنیم $\mathbb{C}$ نام دیگری[1] برای $\mathbb{R}^2$، مجموعهٔ زوجهای‌مرتب (x, y) به‌ازای $x, y \in \mathbb{R}$، باشد. جمع وضرب را روی $\mathbb{C}$ با:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2), \qquad (1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) \qquad (2)$$

تعریف می‌کنیم. به‌آسانی ثابت می‌شود کــه $\mathbb{C}$ تحت این عملها میدانی است‌که $(0, 0)$ صفر آن و $(1, 0)$ یکهٔ آن‌است. قرینهٔ (x, y)، $(-x, -y)$ واگر $(x, y)\neq(0, 0)$، وارون ضربی (x, y)

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

است.

تابع $f: \quad \to \quad$ را با $f(x)=(x, 0)$ تعریف می‌کنیم، آنگاه

$$f(x_1+x_2)=(x_1+x_2, 0)=(x_1, 0)+(x_2, 0)=f(x_1)+f(x_2).$$

و

$$f(x_1x_2)=(x_1x_2, 0)=(x_1, 0)(x_2, 0)=f(x_1)f(x_2).$$

تابع f به‌وضوح یك به‌یك است ولذا یك یکریختی میدانهاست؛ از $\mathbb{R}$ برروی زیرمیدان $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{C}$. این زیرمیدان $f(\mathbb{R})$ چیزی جز «محور حقیقی» توصیف آرگان نیست.

طبق معمول، $\mathbb{R}$ را، با توجــه به‌یکریختی فوق، به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تلقی می‌کنیم، بدین‌معنی‌که اعداد حقیقی را به‌عنوان محورحقیقی صفحهٔ مختلط درنظر می‌گیریم ونماد x را به‌جای $(x, 0)$ به‌کار می‌بریم.

$\mathbf{i}$ را زوج مرتب $(0, 1)$ تعریف می‌کنیم، ولذا، با استفاده از (۲)، داریم

$$\mathbf{i}^2=(0, 1)^2=(-1, 0).$$

بنابراین، با درنظرگرفتن $(-1, 0)$ به‌عنوان عدد حقیقی -1 داریم $\mathbf{i}^2=-1$.

به‌طورکلی، با استفاده از (۱) و (۲)، داریم

$$(x, 0)+(0, 1)(y, 0)=(x, 0)+(0, y)=(x, y).$$

اگر $(x, 0)$ و $(y, 0)$ را به‌ترتیب‌با x و y از $\mathbb{R}$ عوض‌کنیم، عبارت فوق‌بیان می‌کندکه

---

[1]. ما اغلب $\mathbb{C}$ را، به‌دلیل توصیف آرگان، صفحهٔ مختلط می‌نامیم، ولی اکنون می‌بینیم‌کــه به‌عنوان مجموعه، $\mathbb{C}$ دقیقاً با $\mathbb{R}^2$ یکی است. لــذا، به‌عنوان مجموعه، صفحهٔ مختلط وصفحهٔ حقیقی هردو مبین یك چیزند!

$$x+iy=(x,\ y).$$

«عدد مختلط»[1] $x+iy$ نام دیگری برای زوج مرتب $(x,\ y)$ است.

جهت توجه، به‌تعاریف جمع و ضرب (۱) و (۲) برحسب نماد اخیر بازمی‌گردیم و درمی‌یابیم که

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

به‌این‌ترتیب هم جمع وهم ضرب معمولی اعداد مختلط را بازمی‌یابیم (در واقع علت تنظیم تعاریف (۱) و (۲) به‌شکلی که دیدیم نیز همین بود!)

ازنظر تاریخی x درعبارت $x+iy$ را «جزء حقیقی» و y را «جزء موهومی» می‌نامیم. به‌عنوان مختصات اول و دوم زوج مرتب $(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$، هردوعدد x و y حقیقی هستند. اگر

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

آنگاه

$$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)$$

وبنا به‌خواص معمول زوجهای مرتب،

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

درقدیم چنین استنتاجی را «مقایسه‌کردن جزءهای حقیقی وموهومی» می‌نامیدند. و حال آن‌را به‌عنوان کاربردی ازتعریف مجموعه بنیاد زوجهای مرتب می‌دانیم.

امروزه چنین تفسیر می‌کنند که معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-10x+40=0$ در $\mathbb{R}$ جوابی ندارد، ولی اگر آن‌را به عنوان معادله‌ای در $\mathbb{C}$ درنظر بگیریم، دارای دوجواب $5\pm i\sqrt{15}$ است. این توضیح «پیچیده»تر از این مورد نیست که معادلهٔ $2x=1$ را در $\mathbb{N}$ درنظر بگیریم یا در $\mathbb{Q}$. معادلهٔ $2x=1$ هیچ جوابی در $\mathbb{N}$ ندارد، ولی در $\mathbb{Q}$ جواب $x=\frac{1}{2}$ است.

اغلب در ریاضیات به‌مسائلی برمی‌خوریم که در زمینهٔ مفروضی جواب ندارند، ولی اگر در زمینهٔ وسیعتری تعبیر شوند، پیدا کردن جواب میسر است. ازاین پدیده تعجب نکنید و به‌آن بی‌جهت پربها ندهید.

---

۱. برخی به غلط چنین تصور می‌کنند که هرعدد مختلط عبارتی چون $x+iy$ است که درآن x و y حقیقی باشند و $y\neq 0$، وعبارت $x+iy$ راکه درآن $y=0$ «عددی حقیقی» می‌نامند. ریاضیدانان هر عبارت به‌صورت $x+iy$ ($x,\ y\in\mathbb{R}$) را که شامل اعداد حقیقی نیز هست یك عدد مختلط می‌نامند.

مزدوج

هرعدد مختلط $x+iy$ را می‌توانیم با تک‌نمادی چون z (یا با هرحرف مناسب دیگری) نمایش دهیم. هرگاه بنویسیم $z=x+iy$، همواره فرض می‌کنیم که $x, y \in \mathbb{R}$، مگــر اینکه چیزی برخلاف آن ذکرکرده باشیم. با این وضعیت مزدوج $z=x+iy$ را با

$$\bar{z}=x-iy$$

تعریف می‌کنیم. مثلاً، $\overline{۳+۲i}=۳-۲i$، $\overline{۱-۲i}=۱+۲i$، والی آخر. مزدوج گیری دارای خواص مقدماتی معینی است که آنها را درقضیهٔ زیر می‌آوریم:

قضیهٔ ۱.

(الف) $\overline{z_۱+z_۲}=\bar{z}_۱+\bar{z}_۲$،

(ب) $\overline{z_۱z_۲}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲$،

(پ) $\bar{\bar{z}}=z$،

(ت) $z=\bar{z} \Longleftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

اثبات. بررسی ابتدایی تعاریف. □

اگر $c:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ را با $c(z)=\bar{z}$ تعریف کنیم، آنگاه قضیهٔ ۱ بیان می‌کند کــه c یك خودریختی ازمیدان $\mathbb{C}$ است وتحدیدش روی $\mathbb{R}$ تابع همانی است.

قدرمطلق

اگر $z=x+iy$، $x, y\in\mathbb{R}$، آنگاه $x^۲+y^۲\geqslant ۰$. هــرعدد حقیقی مثبت جــذر مثبت یکتا دارد. قدرمطلق هر z در $\mathbb{C}$ را با

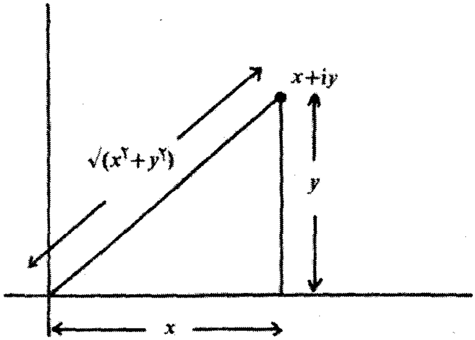
$$|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

تعریف می‌کنیم.

مثلاً $|۳+۲i|=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}$، $|-۵|=\sqrt{۲۵}=۵$. بــه خصوص، به‌ازای هرعدد حقیقی x، $|x|=\sqrt{x^۲}$، و ازآنجا که جذر مثبت انتخاب می‌شود، این امر درمورد اعداد حقیقی به‌تعریف معمولی قدرمطلق تحویل می‌یابد؛ یعنی به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{اگر } x\geqslant ۰ \text{،} \\ -x & \text{اگر } x<۰ \text{،} \end{cases}$$

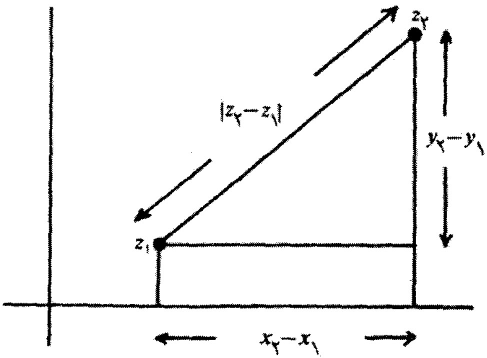
به‌بیان هندسی، قدرمطلق، فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ $x+iy$ درصفحهٔ مختلط است.



اگر $z_1=x_1+iy_1$، $z_2=x_2+iy_2$، آنگاه

$$|z_2-z_1|=|(x_2-x_1)+i(y_2-y_1)|$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

این مقدار، فاصلهٔ از نقطهٔ z_1 تا نقطهٔ z_2 درصفحه است:



قضیهٔ ۲.

(الف) به‌ازای هر $z\in\mathbb{C}$، $|z|\in\mathbb{R}$ و $|z|\geqslant 0$،

(ب) $z=0\Longleftrightarrow|z|=0$،

(پ) $|z|^2=z\bar{z}$،

(ت) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$،

(ث) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

اثبات. (الف) و (ب) ساده‌اند.

(پ) ازتعریف نتیجه می‌شود، زیرا اگر $z=x+iy$، آنگاه

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2=|z|^2.$$

(ت) از آنجا که به‌ازای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $|z| \geqslant 0$ ، کافی است نشان دهیم که

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

ولی

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \qquad \text{بنا به ۲ (پ)،}$$

$$= z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad \text{بنا به ۱ (ب)}$$

$$= z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 |z_2|^2.$$

(ث) اثبات مستقیم این نامساوی به‌عملیات جبری بغرنجی منجرمی‌شود که با زحمت به پایان می‌رسد. بهتر، ولی غیرمستقیم‌تر این است که بنویسیم $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ واتحاد

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

را درنظر بگیریم، که بلافاصله نتیجه می‌دهد:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

با گرفتن جذر

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leqslant |z_1||z_2|$$

به دست می‌آید که درصورت منفی‌بودن $x_1 x_2 + y_1 y_2$ ، بازهم درست است. بنابراین

$$2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leqslant 2|z_1||z_2|$$

که آنگاه

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2 \leqslant x_1^2 + y_1^2 + 2|z_1||z_2| + x_2^2 + y_2^2.$$

این عبارت به‌صورت

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

یا

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$$

درمی‌آید. از آنجا که قدرمطلق همیشه مثبت است، با جذرگرفتن ازطرفین داریم

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \ \square$$

قسمت (پ) قضیهٔ فوق توصیف جالبی برای وارون $z = x + iy$ ، با فرض $z \neq 0$،

است، زیرا داریم $|z|^{\text{۲}}=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}\neq \text{۰}$ ، واز اینجا معادلهٔ $z\bar{z}=|z|^{\text{۲}}$ ایجاب می‌کند که

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^{\text{۲}}}=\text{۱}$$

ولذا

$$z^{-\text{۱}}=\frac{\bar{z}}{|z|^{\text{۲}}}\cdot$$

بد نیست تأکید کنیم که، گرچه قسمت (ت) قضیه صحبت از یك نامساوی می‌کند، این نامساوی بین دوعدد حقیقی $|z_{\text{۱}}+z_{\text{۲}}|$ و $|z_{\text{۱}}|+|z_{\text{۲}}|$ است. علی‌رغم اینکه زیرمیدان $\mathbb{R}$ از $\mathbb{C}$ میدان مرتبی است، خود $\mathbb{C}$ چنین نیست. این، به‌این معنی نیست که نمی‌توانیم $\mathbb{C}$ را به‌تعبیر فصل ۴ مرتب کنیم. مسلماً می‌توانیم. مثلاً، می‌توانیم رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$x_{\text{۱}}+\mathrm{i}y_{\text{۱}}\geqslant x_{\text{۲}}+\mathrm{i}y_{\text{۲}} \Longleftrightarrow x_{\text{۱}}\geqslant x_{\text{۲}} \text{ یا } (x_{\text{۱}}=x_{\text{۲}} \text{ و } y_{\text{۱}}\geqslant y_{\text{۲}})$$

تعریف کنیم. این رابطه یقیناً رابطه‌ای ترتیبی است. ولی با حساب به‌طور مطلوب هماهنگ نیست: مثلاً داریم

$$z_{\text{۱}}\geqslant \text{۰},\ z_{\text{۲}}\geqslant \text{۰} \nRightarrow z_{\text{۱}}z_{\text{۲}}\geqslant \text{۰}$$

زیرا مثال زیر نشان می‌دهد که

$$\mathrm{i}\geqslant \text{۰} \text{، ولی } \mathrm{i}^{\text{۲}}=-\text{۱}\ngeqslant \text{۰}\cdot$$

به‌هیچ‌وجه نمی‌توانیم ترتیبی در $\mathbb{C}$ تعریف کنیم که با حساب $\mathbb{C}$ هماهنگ باشد یعنی $\mathbb{C}$، به تعبیر فصل ۹، به میدانی مرتب تبدیل شود. زیرا باید زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{C}^{+}\subseteq\mathbb{C}$ پیدا شود که:

(یك) $z_{\text{۱}},\ z_{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+}\Rightarrow z_{\text{۱}}+z_{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+},\ z_{\text{۱}}z_{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+}$،

(دو) $z\in\mathbb{C}\Rightarrow z\in\mathbb{C}^{+}$ یا $-z\in\mathbb{C}^{+}$،

(سه) $z\in\mathbb{C}^{+},\ -z\in\mathbb{C}^{+}\Rightarrow z=\text{۰}$.

ولی (دو) ایجاب می‌کند که $\mathrm{i}\in\mathbb{C}^{+}$ یا $-\mathrm{i}\in\mathbb{C}^{+}$ ؛ درحالت اول، (یك) ایجاب می‌کند که $\mathrm{i}^{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+}$، و درحالت دوم $(-\mathrm{i})^{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+}$، پس درهر دوحالت $-\text{۱}\in\mathbb{C}^{+}$. با استفادهٔ مجدد از (یك) داریم $(-\text{۱})^{\text{۲}}\in\mathbb{C}^{+}$، پس $\text{۱}\in\mathbb{C}^{+}$. این امر متناقض با (سه) است، زیرا $\text{۱},\ -\text{۱}\in\mathbb{C}^{+}$ ولی $\text{۱}\neq\text{۰}$. به دلیل عدم وجود ترتیب در $\mathbb{C}$، نامساویهایی چون $z_{\text{۱}}>z_{\text{۲}}$ بین اعداد مختلط بی‌معنی هستند مگر اینکه این اعداد حقیقی باشند. فرمولهایی نظیر $|z_{\text{۱}}|>|z_{\text{۲}}|$ کاملاً امکان‌پذیر است، زیرا $|z_{\text{۱}}|,\ |z_{\text{۲}}|\in\mathbb{R}$ واعداد حقیقی میدانی است مرتب.

چهارگانهای همیلتون

می‌توانیم بازهم بـه توسعهٔ دستگاههای عددی $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ بپردازیم و در جستجوی گسترشی برای $\mathbf{C}$ باشیم. در قـرن گذشته همیلتون، ریاضیدان ایرلندی، بـرای سالیان متمادی متعاقب تصورش از اعداد مختلط به عنوان جفتهای مـرتب (x, y) اعداد حقیقی، درجستجوی دستگاهی متشکل از سه تایی‌های (x_1, x_2, x_3) یـا چهارتایی‌های (x_1, x_2, x_3, x_4) بود که گسترشی‌ازاعداد مختلط هم باشند. در ۱۸۴۳ دستگاهی متشکل ازچهارتایی‌ها پیدا کرد که «تقریباً» یك میدان‌است، دقیقاً به‌این معنی که همهٔ اصول موضوع میدان را ارضا می‌کند مگر جابه‌جایی ضرب را.

حلقهٔ بخشی دستگاهی جبری است متشکل ازمجموعه‌ای چون D و دوعمل دوتایی $+$ و $\cdot$ روی D به‌طوری که به‌ازای هر $a, b, c \in D$،

(ج ۱) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(ج ۲) عضوی‌چون $0 \in D$ وجود دارد که‌به‌ازای هر $a \in D$، $0+a=a+0=a$.

(ج ۳) اگر $a \in D$، عضوی چون $-a \in D$ وجود دارد که

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

(ج ۴) $a+b=b+a$.

(ض ۱)[1] $(ab)c=a(bc)$.

(ض ۲) عضوی چون $1 \in D$، $0 \neq 1$، وجود دارد کـه بـه‌ازای هر $a \in D$، $a1=1a=a$.

(ض ۳) اگـر $a \in D$، $a \neq 0$، عضوی چـون $a^{-1} \in D$ وجـود دارد کـه $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

(پ) $a(b+c)=ab+ac$، $(b+c)a=ba+ca$.

چهارگانهای همیلتون، نامی که او بردستگاه چهارتایی‌هایش گذاشت، مثالی ازحلقهٔ بخشی است. ضرب آن جابه‌جایی نیست بـه این معنی کـه به ازای a و bهای مشخصی داریم $ab \neq ba$.

کشف او را می‌توان برحسب سه نماد i، j، k کـه طبق قاعدهٔ زیـر درهم ضرب می‌شوند تشریح کرد:

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$$

$$\mathrm{ij}=\mathrm{k},\ \mathrm{jk}=\mathrm{i},\ \mathrm{ki}=\mathrm{j}$$

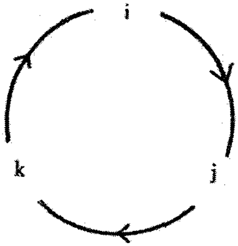
$$\mathrm{ji}=-\mathrm{k},\ \mathrm{kj}=-\mathrm{i},\ \mathrm{ik}=-\mathrm{j}.$$

شش تساوی آخر را می‌توان با نوشتن نمادهای i، j، k روی دایره‌ای درجهت حرکت

---

۱. طبق معمول به‌جای $a \cdot b$ می‌نویسیم ab.

عقربه‌های ساعت به‌شرح زیر توصیف کرد:



حاصلضرب هر دوتا از این نمادها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، سومین نماد است و درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، منفی سومین نماد است.

همیلتون هرچهارتایی اعداد حقیقی (x_1, x_2, x_3, x_4) را به‌صورت $x_1+\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}x_3+\mathrm{k}x_4$ درنظر می‌گرفت. او آنها را به‌صورت بدیهی زیر جمع می‌کرد:

$$(x_1+\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}x_3+\mathrm{k}x_4)+(y_1+\mathrm{i}y_2+\mathrm{j}y_3+\mathrm{k}y_4)$$
$$=(x_1+y_1)+\mathrm{i}(x_2+y_2)+\mathrm{j}(x_3+y_3)+\mathrm{k}(x_4+y_4),$$

وحاصلضرب آنها را با استفاده ازقاعدهٔ فوق برای ضرب i ، j ، k به‌دست می‌آورد.

اگر ضرب را به‌طورکامل بنویسیم، داریم:

$$(x_1+\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}x_3+\mathrm{k}x_4)(y_1+\mathrm{i}y_2+\mathrm{j}y_3+\mathrm{k}y_4)$$
$$=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$
$$+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+\mathrm{j}(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)$$
$$+\mathrm{k}(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1).$$

این عبارت را می‌توان به طور بدیهی، با قراردادن (a_1, a_2, a_3, a_4) به جای $a_1+\mathrm{i}a_2+\mathrm{j}a_3+\mathrm{k}a_4$، برحسب چهارتایی‌های مرتب هم نوشت.

به‌بیان صوری، جمع وضرب این چهارتایی‌ها چنین‌اند:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+x_3,\ x_4+y_4),$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

که در آن

$$a_1=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$
$$a_2=x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3$$

$$a_3 = x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2$$

$$a_4 = x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1$$

مجموعهٔ همهٔ چهارتاییها را با $\mathbb{H}$ (به خاطر همیلتون) نمایش میدهیم. این چهارتاییها را چهارگانها یا اعداد فوق مختلط نیز مینامند.

قضیهٔ ۳. چهارگانهای $\mathbb{H}$ یك حلقهٔ بخشی تشکیل میدهند.

اثبات. صرفاً باید درمورد $\mathbb{H}$ اصول موضوع (ج ۱)ـ(ج ۴)، (ض ۱)ـ(ض ۳)، و (پ) را بررسی کرد. همهٔ این اصول بهآسانی اثبات میشوند. البته، ما اولین کسی خواهیم بود که اثبات شرکتپذیری ضرب (ض ۱) را حداقل کسلکننده میدانیم. عضو صفر در (ج ۲)، $(0, 0, 0, 0)$ است، قرینهٔ (x_1, x_2, x_3, x_4) در (ج ۳)، $(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ است، عضویکه در (ض ۲)، $(1, 0, 0, 0)$ است و وارون $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ در (ض ۳)،

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{-1} = \left(\frac{x_1}{a}, -\frac{x_2}{a}, -\frac{x_3}{a}, -\frac{x_4}{a}\right)$$

است که در آن $a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. □

ضرب در $\mathbb{H}$ بهطور کلی جابهجایی نیست، مثلاً

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1),$$

ولی

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1).$$

اگر بنویسیم $\mathrm{i} = (0, 1, 0, 0)$، $\mathrm{j} = (0, 0, 1, 0)$، $\mathrm{k} = (0, 0, 0, 1)$، آنگاه، همانطور که قبلاً نیز بیان شد، داریم $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$، $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$. قواعد دیگر همیلتون برای ضرب i، j، k نیز بههمیننحو بهنتیجه میرسند، دلیل هم صرفاً این است که قاعدهٔ ضرب را طوری تعریف کردیم که چنین بشود.

اگر زیرمجموعهٔ $C = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{H} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ را درنظر بگیریم، آنگاه ضرب در C به

$$(x_1, y_1, 0, 0)(x_2, y_2, 0, 0) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1, 0, 0)$$

بدل میشود، و لذا این ضرب جابهجایی است. بهآسانی میبینیم که تابع $f: \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ بهتعریف $f(x + \mathrm{i}y) = (x, y, 0, 0)$ یك یکریختی بین میدانهای $\mathbb{C}$ و C است. با توجه بهاین یکریختی $\mathbb{C}$ را میتوانیم زیرمجموعهای از $\mathbb{H}$ بدانیم. اگر (x_1, x_2, x_3, x_4) را بهصورت $x_1 + \mathrm{i}x_2 + \mathrm{j}x_3 + \mathrm{k}x_4$ بنویسیم، تابع $f: \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ بهصورت سادهٔ زیر

درمی آید:

$$f(x+\mathrm{i}y)=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}0+\mathrm{k}0\,.$$

پس با پنداشتن عـدد مختلط $x+\mathrm{i}y$ بـه عنوان چهارگان $x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}0+\mathrm{k}0$ شمول $\mathbb{C}\subseteq\mathbb{H}$ به دست می آید.

به طرق متعددی خواص $\mathbb{C}$ را می‌توان به $\mathbb{H}$ تعمیم داد (وازاینجا نام «اعداد فوق مختلط»). مثلاً مزدوج چهارگانی چون $q=x_1+\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}x_3+\mathrm{k}x_4$ را می‌توانیم با

$$\bar{q}=x_1-\mathrm{i}x_2-\mathrm{j}x_3-\mathrm{k}x_4$$

تعریف کنیم. این تعریف برخی ازخواص مزدوج مختلط را دارد، ولی نه همهٔ آنها را. به‌خصوص

$$\overline{q_1+q_2}=\bar{q}_1+\bar{q}_2$$

$$\bar{\bar{q}}=q$$

$$q=\bar{q}\Longleftrightarrow q\in\mathbb{R}\,.$$

قاعدهٔ مزدوج حاصلضرب به صورت

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1$$

درمی آید، که خواننده می تواند صحت آن را با محاسبهٔ صریح بررسی کند. ازآنجا کـه ضرب جابه‌جایی نیست، در رابطهٔ فوق ترتیب $\bar{q}_2$ و $\bar{q}_1$ را نمی‌توان عوض کرد.

همچنین می‌توانیم قدرمطلق چهارگانی چون $q=x_1+\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}x_3+\mathrm{k}x_4$ را با

$$|q|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

تعریف کنیم. دراین مورد، داریم:

به‌ازای هر $q\in\mathbb{H}$، $|q|\in\mathbb{R}$ و $|q|\geqslant 0$،

$$|q|=0\Longleftrightarrow q=0,$$

$$q\bar{q}=|q|^2,$$

$$|q_1q_2|=|q_1||q_2|,$$

$$|q_1+q_2|\leqslant|q_1|+|q_2|\,.$$

از اثبات این مطالب کـه برخی آسان و برخی مشکلتر هستند صرفنظـر می کنیم. (اثباتها مشابهٔ حالات مختلط هستند، البته باید غیرجابه‌جایی بودن $\mathbb{H}$ را درنظر گرفت.)

نظیر اعـداد مختلط، بـه ازای $q\in\mathbb{H}$، $q\neq 0$، داریم $q\bar{q}=|q|^2$ کـه در آن

$\circ \neq {|q|}^{۲}$، پس

$$\frac{q\bar{q}}{|q|^{۲}}=۱$$

و

$$q^{-۱}=\frac{\bar{q}}{|q|^{۲}}\cdot$$

بدون مبالغه برخی از خواص چهارگانها شگفت‌انگیزند. مثلاً، می‌دانیم $\mathrm{i}^{۲}=\mathrm{j}^{۲}=\mathrm{k}^{۲}=(-\mathrm{i})^{۲}=(-\mathrm{j})^{۲}=(-\mathrm{k})^{۲}=-۱$، لذا معادلهٔ

$$x^{۲}+۱=\circ$$

در $\mathbf{H}$ حداقل شش جواب دارد، یعنی $\pm \mathrm{i}$، $\pm \mathrm{j}$، و $\pm \mathrm{k}$.

درحقیقت $(\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{k}d)^{۲}=-b^{۲}-c^{۲}-d^{۲}$، پس هرچهارگانی چون $\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{k}d$ با شرط $b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}=۱$ جوابی برای $x^{۲}+۱=\circ$ است. این معادله در $\mathbf{H}$ دارای بینهایت جواب است.

معادلهٔ $x^{۲}+۱=\circ$ در $\mathbf{Q}$ هیچ جوابی ندارد، در $\mathbf{C}$ دوجواب دارد. هرمعادلهٔ درجهٔ دوم حداکثر دوجواب در $\mathbf{C}$ دارد، ولی وقتی $\mathbf{H}$ را درنظر می‌گیریم وخاصیت جابه‌جایی ضرب را از دست می‌دهیم، این خاصیت را نیز از دست می‌دهیم.

چهارگانها دستگاه جبری جالبی هستند وفی‌نفسه ارزش مطالعه را دارند، ولی‌اهمیت تاریخی آنها به خاصیت غیرجابه‌جایی بودن ضرب مربوط می‌شود. این، ریاضیات را از حصار خاصیت جابه‌جایی، که به موجب آن جابه‌جایی ضرب اعداد را قانونی از پیش تعیین شده و تغییرناپذیر می‌دانستند، نجات داد. ازآن پس بررسی دستگاهی‌که درآن لزوماً «a برابر b» مساوی «b برابر a» نباشد نیز منطقی شد، واین امر به بسیاری از ساختهای جبری تعمیمی ممکن‌که در ریاضیات جدید مورد مطالعه قرار می‌گیرند انجامید. امروزه هرساخت جبری را به‌عنوان مجموعه‌ای توأم با عملهایی دوتایی روی‌آن می‌پنداریم که خواص گوناگونی را ارضا سازند. اینك نگاهی گذرا به‌برخی ازآنها می‌اندازیم، تا اینکه خواننده قسمتی ازطیف وسیع دستگاههای موجود درجبر امروزی را ببیند.

نیم‌گروه و گروه

با مجموعه‌ای چون X وعملی دوتایی چون $\circ$ روی X آغاز می‌کنیم.

(۱) اگر به‌ازای هر a، b، c در X، $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$، آنگاه $\circ$ را شرکت‌پذیر می‌نامیم.

(۲) عضوی‌چون e در X راکه‌به‌ازای‌هر $a\in X$ دارای‌خاصیت $a\circ e=e\circ a=a$ باشد یك همانی می‌نامیم.

(۳) اگر عضوی همانی چون e وجود داشته باشد، آنگاه بـه ازای هـر $a \in X$، عضوی چون $b \in X$ را وارون a می‌نامیم اگر $a \circ b = b \circ a = e$.
(۴) اگر به‌ازای هر a و b در X، $a \circ b = b \circ a$، آنگاه ∘ را جابه‌جایی می‌نامیم.
هرمجموعه‌ای چون X با یك عمل دوتایی با شرایط (۱) و (۲) یك نیم‌گروه[1] نامیده می‌شود؛ اگر (۳) نیز برآورده شود، آن را یك گروه، واگر همهٔ شرایط (۱)-(۴) برقرار باشند آنگاه آن را یك گروه جابه‌جایی، یا یك گروه آبلی می‌نامیم.

چند مثال

(۱) $\mathbb{N}_0$ تحت عمل دوتایی $+$ یك نیم گروه با همانی ۰ است.
(۲) $\mathbb{N}_0$ تحت ضرب یك نیم گروه با همانی ۱ است.
(۳) $\mathbb{Z}$ تحت ضرب یـك نیم گروه است.
(۴) $\mathbb{Z}$ تحت جمع یك گروه است. همانی آن صفر، و وارون $n \in \mathbb{Z}$، $-n$ است، زیرا $n+0=0+n=n$ و $n+(-n)=(-n)+n=0$.
(۵) اعضای غیرصفـر $\mathbb{H}$ تحت ضرب یـك گـروه است. همانی آن ۱، و وارون $q \in \mathbb{H}-\{0\}$، $\bar{q}/|q|^2$ است.
مثالهای (۱)-(۴) جابه‌جایی هستند، ومثال (۵) غیر جابه‌جایی است.

گروهها ونیم گروهها در ریاضیات در موارد گوناگون زیادی پیش می‌آیند. مثلاً اگر A یك مجموعه‌باشد، مجموعهٔ X متشکل ازهمهٔ توابع از A به A تحت ترکیب توابع یك نیم گروه است. پس $f \in X$ بـه این معنی است که $f: A \to A$، واگر $f, g \in X$، آنگاه ترکیب f، g که به‌صورت gf نوشته می‌شود، همان ترکیب معمولی توابع، یعنی $gf: A \to A$ با تعریف،

$$gf(a) = g(f(a))\text{، به‌ازای هر } a \in A$$

است. عضو همانی X تابع همانی A، $i_A: A \to A$، $i_A(a)=a$، است. عضوی چون $f \in X$ وارون دارد اگر و فقط اگر دوسویی باشد، و آنگاه وارون آن همان وارون مجموعهٔ بنیاد است. فرض کنیم $B(A)$ مجموعهٔ همهٔ دوسویی‌های از A به A باشد، پس $f \in B(A)$ به‌این معناست که «$f: A \to A$ دوسویی است». آنگاه $B(A)$ یك گروه است. اگر A حداقل سه عضو داشته باشد، آنگاه $B(A)$ جابه‌جایی نیست. فرض کنیم a، b، c سه عضو متمایز A باشند و $\theta, \phi \in B(A)$ چنین تعریف شوند:

$$\theta(a)=b\text{،}\quad \theta(b)=a\text{،}\quad \theta(c)=c\text{، وبه‌ازای هر } x \text{ دیگر از } A\text{، } \theta(x)=x\text{؛}$$

$$\phi(a)=c\text{،}\quad \phi(b)=b\text{،}\quad \phi(c)=a\text{، وبه‌ازای هر } x \text{ دیگر از } A\text{، } \phi(x)=x\text{.}$$

---

۱. اصطلاح «نیم‌گروه» معمولاً به دستگاهی اطلاق می‌شودکه شرط (۱) را ارضا سازد؛ و اگر (۲) نیز برآورده شود آن را نیم‌گروه باهمانی، یا تکواره، می‌نامند. ــم.

هر دوتابع θ و ϕ دوسویی هستند و $\phi\theta \neq \theta\phi$ زیرا

$$\phi\theta(a) = \phi(b) = b$$

درحالی که

$$\theta\phi(a) = \theta(c) = c.$$

مطالعهٔ گروهها درجبر جدید بسیارمهم است وهنوزهم بخش بسیار فعالی ازپژوهش ریاضی است.

حلقه ومیدان

ما قبلاً درفصل ۹ به حلقه ومیدان اشاره کرده‌ایم. این مفاهیم را می‌توانیم بـا استفاده از مفهوم گروه ونیم گروه به‌طور مختصرتری هم توصیف کنیم.

هر حلقه متشکل است از یك مجموعه چون R و دوعمل دوتایی $+$ و $\cdot$، به طوری که R تحت $+$ گروهی جابه‌جایی باشد، و تحت $\cdot$ نیم گروه باشد، واین دوعمل با قوانین پخش‌پذیری:

به‌ازای هر $a, b, c \in R$، $a(b+c) = ab+ac$، $(b+c)a = ba+ca$،

با هم در رابطه باشند. اگـر ضرب جابه‌جایی بـاشد آنگاه R را یك حلقهٔ جابه‌جایی می‌نامیم. پس $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ حلقه‌هایی جابه‌جایی هستند و $\mathbb{H}$ حلقه‌ای (غیرجابه‌جایی) است. هرمیدان مجموعه‌ای چون F با دو عمل جابه‌جایی $+$ و $\cdot$ است که F تحت $+$ یك گروه با همانی ٥ باشد، $F - \{0\}$ تحت ضرب یك گروه (با همانی ۱) باشد واین دوعمل با قانون پخش‌پذیری:

به‌ازای هر $a, b, c \in F$، $a(b+c) = ab+ac$،

با هم در رابطه باشند. مثالهای آن شامل $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ است ولی $\mathbb{Z}$ (چون عضوهـای غیرصفر بدون وارون ضربی هم وجود دارند) یـا $\mathbb{H}$ (چون ضرب غیر جابه‌جایی است) میدان نیستند. قبلاً مفهوم حلقهٔ بخشی D را معرفی کردیم که مجموعه‌ای با عملهای $+$ و $\cdot$ را توصیف می‌کند که D تحت $+$ گروهی جابه‌جایی با همانی٥، $D - \{0\}$ تحت $\cdot$ گروهی (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد وقوانین پخش‌پذیری هم برقرار باشند:

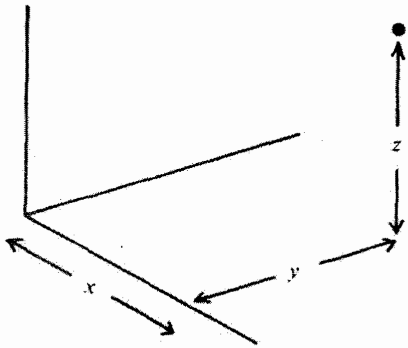
به‌ازای هر $a, b, c \in D$، $a(b+c) = ab+ac$، $(b+c)a = ba+ca$.

مثالهای آن شامل $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، و $\mathbb{H}$ است.

فضای برداری

نقاط درفضای سه‌بعدی را می‌توانیم با انتخاب سه محور ونمایش هرنقطه با مختصات x،

y ، z ، توصیف کنیم.



هر نقطه درفضای سه‌بعدی چیزی جز سه‌تایی مرتب اعداد حقیقی (x, y, z) نیست. فضا را می‌توانیم به عنوان مجموعهٔ $\mathbb{R}^۳$ متشکل از سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی درنظر بگیریم. با استفاده ازقاعدهٔ بدیهی زیر می‌توانیم این سه‌تایی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$(x_۱, y_۱, z_۱)+(x_۲, y_۲, z_۲)=(x_۱+x_۲, y_۱+y_۲, z_۱+z_۲)\cdot$$

جمع شرکت‌پذیر وجابه‌جایی است، سه‌تایی $(۰, ۰, ۰)$ نقش همانی را دارد، و وارون (x, y, z)، $(-x, -y, -z)$ است. پس $\mathbb{R}^۳$ تحت این عمل جمع، گروهی جابه‌جایی است.

همچنین می‌توانیم هر سه‌تایی (x, y, z) را درهرعضو a از $\mathbb{R}$ به صورت زیر ضرب کنیم:

$$a(x, y, z)=(ax, ay, az)\cdot$$

این عمل طبق قواعد زیر با جمع وضرب روی $\mathbb{R}$ در رابطه است:

$$(a+b)(x, y, z)=a(x, y, z)+b(x, y, z),$$

$$(ab)(x, y, z)=a(b(x, y, z)),$$

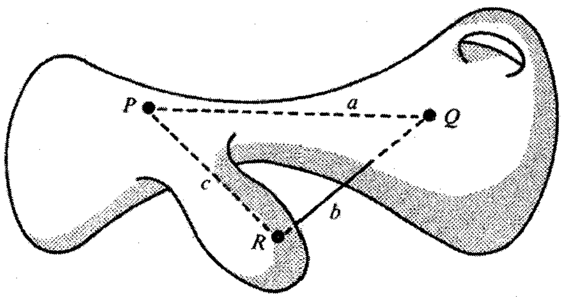
$$۱(x, y, z)=(x, y, z)$$

وبا جمع بردارها به‌صورت زیر:

$$a\{(x_۱, y_۱, z_۱)+(x_۲, y_۲, z_۲)\}=a(x_۱, y_۱, z_۱)+a(x_۲, y_۲, z_۲)\cdot$$

ازآنجاکه درفضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم، صحبت ازفضاهای با بعدهای بیشتر عجیب به‌نظر می‌آید. نظریهٔ نسبیت انیشتاین زمان را به‌عنوان متغیر چهارم به‌کار می‌گیرد، یعنی نقطهٔ (x, y, z) در زمان t را با چهارتایی (x, y, z, t) نمایش می‌دهد. بعد پنجم

چیست؟ جواب این سؤال این است که این روند، انحرافی است ازجریان اصلی ریاضیات. مسلماً ما جبراً درفضای سه‌بعدی با زمان به عنوان نوعی بعد چهارم زندگی می‌کنیم، ولی در ریاضیات بعدهای بالاتر هم دارای ارزش معتبری هستند. مثلاً، برای توصیف موقعیت دونقطهٔ مستقل (x_1, y_1, z_1)، و (x_2, y_2, z_2)، درفضا به شش عدد حقیقی نیاز داریم. این اعداد را می‌توانیم به‌ترتیب به صورت یك شش‌تایی $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ درنظربگیریم که مکان هردونقطه را نشان می‌دهد. اگر جسم صلبی را درفضا درنظربگیریم، مکان آن را می‌توانیم با تعیین موقعیت سه نقطهٔ غیرهمخط P، Q، و R از جسم دقیقاً مشخص کنیم.



فرض کنیم فاصله‌های PQ، QR، RP، به‌ترتیب برابر a، b، c باشند، آنگاه می‌توانیم P را درنقطهٔ (x_1, y_1, z_1) قرار دهیم؛ Q را به هرنقطه‌ای چون (x_2, y_2, z_2) حرکت دهیم، تنها تحت این شرط که فاصلهٔ (x_1, y_1, z_1) از (x_2, y_2, z_2) برابر a بماند؛ پس[1]:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=a^2. \qquad (1)$$

سرانجام می‌توانیم این جسم را حول محور PQ چنان دوران دهیم که R درنقطه‌ای چون (x_3, y_3, z_3) قرار گیرد، البته تنها با محدودیتهای $QR=b$ و $RP=c$:

$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=b^2 \qquad (2)$$

$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=c^2. \qquad (3)$$

مکان این جسم صلب با نه مختص x_1، y_1، z_1، x_2، y_2، z_2، x_3، y_3، و z_3 تحت شرایط معادلات (۱)، (۲)، و (۳) تعیین می‌شود. می‌توانیم، و به هیچ‌وجه عجیب هم نیست که، این جسم را به عنوان نه‌تایی $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$ در $\mathbb{R}^9$

---

۱. همان‌طورکه فاصلهٔ بین (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در $\mathbb{R}^2$ برابر با $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ است، فاصلهٔ بین (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) در $\mathbb{R}^3$ هم برابر با

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

است.

درنظر بگیریم، ولذا مکان جسم صلب با نقطه‌ای در $\mathbb{R}^{۹}$ ، تنها تحت شرایط معادلات (۱)، (۲)، و (۳)، به‌دست می‌آید. مثالهایی ازاین قبیل در ریاضیات فراوانند. به‌هیچ‌وجه خود را به $\mathbb{R}^{۳}$ محدود نمی‌کنیم و $\mathbb{R}^{n}$ را، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، که مسلماً برآن برتری دارد درنظر می‌گیریم.

نظیر $\mathbb{R}^{۳}$ ، می‌توانیم جمع در $\mathbb{R}^{n}$ وضرب دراعداد حقیقی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$(x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n)+(y_{۱}, y_{۲}, \cdots, y_n)=(x_{۱}+y_{۱}, x_{۲}+y_{۲}, \cdots, x_n+y_n),$$
$$a(x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n)=(ax_{۱}, ax_{۲}, \cdots, ax_n).$$

این عملها دارای همان خواص نظیر در $\mathbb{R}^{۳}$ هستند. برای سهولت امر می‌نویسیم $v=(x_{۱}, x_{۲}, \cdots, x_n)$، $w=(y_{۱}, y_{۲}, \cdots, y_n)$ ، آنگاه داریم:

$$(a+b)v=av+bv,$$
$$a(bv)=(ab)v,$$
$$۱v=v,$$

به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^{n}$ ، $(v+w)=av+aw$.

به‌این‌ترتیب ایدهٔ فضای برداری تکوین می‌یابد.

با مجموعه‌ای چون V ویك عمل دوتایی $+$ شروع می‌کنیم. سپس تابعی چون $m: \mathbb{R}\times V \to V$ رالازم داریم که برای سهولت‌امر $m(a, v)$ را به‌طور ساده به‌صورت av می‌نویسیم. V را یك فضای برداری روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم اگر:

(ف‌ب ۱) V تحت $+$ گروهی جابه‌جایی باشد،

(ف‌ب ۲) به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $v, w \in V$:

$$(a+b)v=av+bv,$$
$$a(bv)=(ab)v,$$
$$۱v=v,$$
$$a(v+w)=av+aw.$$

$\mathbb{R}^{n}$ مثالی ازاین دستگاه‌است، ولی موارد جالب دیگری هم وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم V مجموعهٔ همهٔ توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. پس $f \in V$ به‌این معنی است که $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. دوتابع $f, g \in V$ را می‌توانیم با هم جمع کنیم و $f+g \in V$ را با تعریف:

به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

به‌دست آوریم. مثلاً اگر $f(x)=x^{۳}+x^{۲}$ و $g(x)=۳x+۲$ ، آنگاه

$(f+g)(x)=x^۳+x^۲+۳x+۲$. ضرب اعضای V در $a\in\mathbb{R}$ توسط:

$$(af)(x)=a(f(x))$$ به‌ازای هر x در $\mathbb{R}$،

تعریف می‌شود. مثلاً، اگر $f(x)=x^۳+x^۲$ و $a=-۳$، آنگاه

$$(af)(x)=-۳(x^۳+x^۲).$$

بنا به‌تعریف، V فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ است. دراین مثال اعضای V تابع هستند.

مثالهای بسیار غیرمنتظره‌ای ازفضاهای برداری هم وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم می‌خواهیم جوابی چون $y=f(x)$ ازمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+۹۵\frac{dy}{dx}+۱۰۶۶y=۰$$

را به دست آوریم. (دراینجا فرض می‌کنیم با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا هستیم.) آنگاه به‌ازای‌توابع مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g.\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ واعداد حقیقی $a, b\in\mathbb{R}$، داریم:

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=a\frac{df(x)}{dx}+b\frac{dg(x)}{dx},$$

$$\frac{d^۲}{dx^۲}(af(x)+bg(x))=a\frac{d^۲f(x)}{dx^۲}+b\frac{d^۲g(x)}{dx^۲}.$$

بنا براین:

$$\frac{d^۲}{dx^۲}(af(x)+bg(x))+۹۵\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))+۱۰۶۶(af(x)+bg(x))$$

$$=a\left\{\frac{d^۲f(x)}{dx^۲}+۹۵\frac{df(x)}{dx}+۱۰۶۶f(x)\right\}$$

$$+b\left\{\frac{d^۲g(x)}{dx^۲}+۹۵\frac{dg(x)}{dx}+۱۰۶۶g(x)\right\}.$$

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ هر دوجوابهایی ازاین معادلهٔ دیفرانسیل باشند، آنگاه هردوعبارت داخل کروشه برابر صفرند و درنتیجه $y=af(x)+bg(x)$ نیز یك جواب است.

فرض‌کنیم S مجموعهٔ توابع مشتق‌پذیری باشدکه جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل هستند. آنگاه (به‌ازای $a=b=۱$)

$$f, g\in S\Rightarrow f+g\in S,$$

و به‌آسانی دیده می‌شود که S تحت $+$ گروهی جابه‌جایی است. به همین نحو (به ازای $b=0$)،

$$a\in\mathbb{R}\ ,\ f\in S\Rightarrow af\in S\cdot$$

بـا بررسی اصول موضوع (ف‌ب ۱) و (ف‌ب ۲)، می‌بینیم کـه مجموعـهٔ S متشکل از جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ است.

برای اینکه این شرح مختصر ازساختهای ریاضی درخواننده این تصور را به‌وجود نیاورد که جبر جدید چیزی جزفهرست خشکی ازاصول موضوع نیست، باید به ذکر برخی ازنتایج برجستهٔ این روند بپردازیم. طی دوهزارسال، از زمـان یونان قدیم، ریاضیدانان سعی داشتند تنها با استفاده ازخط‌کش وپرگار زاویـه را تثلیث کنند. بـا تلفیق جالبی از نظریهٔ فضاهای برداری و نظریهٔ میدانها نشان داده شدکه زاویهٔ $60°$ (وبسیاری دیگر) را نمی‌توان بدین‌نحو تثلیث کرد. (برای جزئیات بیشتر، به کلافام[1] [۲]، یا استیوارت[2] [۱۶] رجوع کنید). درقرن شانزدهم ریاضیدانان می‌توانستند هرمعادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

را با فرمولی چون

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حل کنند، وفرمولهای جبری پیچیده‌تری برای حل هرمعادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+b=0$$

وهرمعادلهٔ درجهٔ چهارم

$$ax^4+bx^4+cx^2+dx+e=0$$

هم عرضه نمایند. جستجو برای فرمولی جبری برای حل معادلات درجهٔ پنجم

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

خیلی بیشتر از دوقرن ادامـه یافت. درقرن نوزدهم بـا استفاده ازنظریهٔ میدانها ونظریـهٔ گروهها رشتهٔ شگفت‌آوری ازنتایج نشان دادکه‌هیچ فرمول جبری برای‌حل معادلات‌درجهٔ پنجم وجود ندارد. (رجوع شود به استیوارت [۱۶] یا آرتین[3] [۱]).

تعمیمهای گوناگونی ازمفهوم فضاهای بـرداری روی $\mathbb{R}$ هم امکان‌پذیر است. مثلاً اگر درتعریف فضاهای برداری به‌جای $\mathbb{R}$ میدانی چون F را درنظر بگیریم، آنگاه یك فضای برداری روی F به دست می‌آوریم. واگر بـه جای آن حلقه‌ای چون R را درنظر

---

1. Clapham   2. Stewart   3. Artin

بگیریم، آنگاه مفهوم مدول روی R به دست می‌آید. مطالعهٔ این دستگاههای گوناگون و کاربردهایشان موضوع مورد بحث درجبر جدید است.

راه آینده

مواد درسی دیگر ریاضیات محض در دانشگاههای امروز عبارتند از آنالیز، هندسه، و توپولوژی. همهٔ این دروس برمبنای آنچه که توصیف کردیم ساخته می‌شوند. آنالیز اساساً مطالعهٔ صوری حد، مشتق، و انتگرال است برپایهٔ اصول موضوع اعداد حقیقی. ابتدا توابع $f: D \to \mathbb{R}$، که در آن $D \subseteq \mathbb{R}$، درنظر گرفته می‌شود، سپس می‌پردازند به توابع $f: D \to \mathbb{R}^m$ با شرط $D \subseteq \mathbb{R}^n$. آنالیز مختلط، توابع مشتق‌پذیر $f: D \to \mathbb{C}$ را که در آن $D \subseteq \mathbb{C}$ مورد مطالعه قرار می‌دهد. درقرن اخیر هندسه به وسیلهٔ ساختهای جبری تسخیر شد، البته زبان هندسی همچنان محفوظ مانده‌است تا ویژگی مورد انتظار ازموضوع سلب نشود. منشأ توپولوژی را می‌توان درمفهوم «فضای متریك» جستجو کرد. این فضا به‌بیان ساده، مجموعه‌ای است چون M با تابعی مانند $d: M \times M \to \mathbb{R}$ به طوری که $d(x, y)$ رفتاری شبیه به «تابع فاصله‌ای» بین x و y داشته باشد. همهٔ خواصی که d باید داشته باشد عبارتند از:

(یك) به‌ازای هر $x, y \in M$، $d(x, y) \geqslant 0$،

(دو) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$،

(سه) به‌ازای هر $x, y \in M$، $d(x, y) = d(y, x)$،

(چهار) به‌ازای هر $x, y, z \in M$، $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

مثلاً در $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، یا $\mathbb{H}$، می‌توانیم $d(x, y) = |x - y|$ را تعریف کنیم و در این صورت اصول موضوع (یك)-(چهار) ارضا می‌شوند؛ ولی موارد بسیارکلی‌تری از فضاهای متریك هم وجود دارند. دراین کتاب نه هدف ماست ونه تمایلمان که این امور را به تفصیل مورد بحث قرار دهیم؛ این پروژه‌ای نیست که دریك درس دورهٔ لیسانس، یا حتی در دورهٔ بعد ازآن، به‌پایان برسد. همچنین هدف ما این نیست که دانشجویان صرفاً دستگاههای جبری را به حافظه بسپارند: وقتی بعداً به طور دقیق مورد مطالعه قرار بگیرند، این منظور هم عملی خواهد شد.

دربسیاری ازکاربردهایی که ساختهای جبری مناسب باشند می‌توان به تعبیر این ایده‌های ریاضی پرداخت؛ درحقیقت اغلب خود کاربردها مفیدترین ساختی راکه باید مورد مطالعه قرار بگیرد تحمیل می‌کنند؛ این کاربردها در زمینه‌های: فیزیك، مهندسی، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، آمار، کامپیوتر، کاربردهای جدیدی درعلوم اجتماعی، در روانشناسی، وغیره می‌باشند. هدف ازاین حاشیه‌پردازی مختصر درمباحث وسیع ریاضیات جدید این است که نشان دهیم چگونه ایده‌های عرضه شده دراین کتاب مبنایی برای همهٔ ریاضیات هستند. اکنون برروی سکوی پرتاب ایستاده‌ایم، وآمادهٔ جهش به حوزه‌های بالاتر اندیشهٔ ریاضیات هستیم.

تمرین

۱. اگر z_1، ...، z_n اعدادی مختلط باشند، ثابت کنید:

$$|z_1+\dots+z_n|\leqslant|z_1|+\dots+|z_n|.$$

۲. فرض کنید ω عدد مختلط تعریف شده به وسیلهٔ $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ باشد. ثابت کنید $\omega^3=1$ و $1+\omega+\omega^2=0$.

۳. ثابت کنید $\{1, \omega, \omega^2\}$ تحت ضرب یك گروه است.

۴. مفهوم یکریختی $\theta: G\to H$ بین گروههای G و H را (با مقایسه با تعاریف قبلی) تعریف کنید. ثابت کنید که گروه $\{1, \omega, \omega^2\}$ با گروه $\mathbf{Z}_3$ تحت جمع یکریخت است.

۵. به‌ازای چهارگانهایی چون p و q نشان دهید که:

(الف) $\overline{p+q}=\bar{p}+\bar{q}$،

(ب) $\overline{pq}=\bar{p}\bar{q}$،

(پ) $\bar{\bar{q}}=q$،

(ت) $q=\bar{q}\Longleftrightarrow q\in\mathbb{R}$.

۶. به ازای $a, b\in\mathbb{H}$، نشان دهید $(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2$. با مثال نشان دهید که این رابطه را نمی‌توان به طور کلی با $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ عوض کرد. اگر $a\in\mathbb{H}$ و $b\in\mathbb{R}$، ثابت کنید که $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

معادلهٔ $x^2+2x+1=0$ را در $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، و $\mathbb{H}$ حل کنید. (فرض کنید $x=y-1$، و y را به دست آورید.)

با جایگزین کردن $x=y+1$، معادلهٔ $x^2-2x+2=0$ را در $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، و $\mathbb{H}$ حل کنید.

۷. معادلهٔ $x(1+\mathrm{j})+\mathrm{k}=2+\mathrm{i}$ را به‌ازای چهارگان x حل کنید.

۸. معادلهٔ $\mathrm{i}x\mathrm{j}+\mathrm{k}=3+2\mathrm{j}$ را به‌ازای چهارگان x حل کنید.

۹. مطلوب است $x, y\in\mathbb{H}$ به طوری که $3\mathrm{i}x-2\mathrm{j}y=-1$ و $x\mathrm{k}+y=0$.

۱۰. چهارگانهای مختلط $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ را به صورت چهارتایی‌هایی چون (a_1, a_2, a_3, a_4) از اعداد مختلط، با همان قواعد جمع وضرب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. آیا $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ یك حلقهٔ بخشی است؟

۱۱. ثابت کنید که اعداد مختلط به‌تعبیر زیر کامل‌کشی هستند:

اگر (a_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که به‌ازای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$، $\varepsilon > 0$، Nی در $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $m, n > N$، $|a_m - a_n| < \varepsilon$، آنگاه (a_n) در $\mathbb{C}$ به حدی میل می‌کند.

(راهنمایی: نشان دهید، $x_n + iy_n \to x + iy \Longleftrightarrow x_n \to x \,\&\, y_n \to y$).

۱۲. در $\mathbb{R}^3$ عملی دوتایی چون $\wedge$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, b, c) \wedge (d, e, f) = (bf - ce,\ cd - af,\ ae - bd).$$

ثابت کنید به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$x \wedge y + y \wedge x = 0,$$

$$(x \wedge y) \wedge z + (y \wedge z) \wedge x + (z \wedge x) \wedge y = 0.$$

آیا $\wedge$ جابه‌جایی است؟ شرکت‌پذیر است؟

۱۲

عدد اصلی

«بینهایت چیست؟» وقتی این سؤال را اخیراً از برخی از دانشجویان سال اول دانشگاه پرسیدیم، همه بر این جواب اتفاق نظر داشتند که «چیزی است بزرگتر از هر عدد طبیعی». این جواب به تعبیری درست است؛ یکی از دستاوردهای نظریهٔ مجموعه‌ها این است که می‌توانیم معنی روشنی برای مفهوم بینهایت ارائه دهیم. نه تنها یك بینهایت، بلکه بسیاری، سلسله‌ای وسیع از بینهایت‌ها، پیدا می‌کنیم. می‌توانیم به سؤالی چون «چند عدد گویا وجود دارد؟» پاسخی شگفت‌آور بدهیم: «به همان تعداد اعداد طبیعی». مفیدترین نوع سؤال در این جواب مصداق پیدا می‌کند. به جای اینکه بپرسیم در مجموعهٔ مفروضی «چند» عضو وجود دارد، مفیدتر است دو مجموعه را با هم مقایسه کنیم و بپرسیم آیا تعداد اعضای این دو برابرند. این امر را می‌توانیم چنین توصیف کنیم که هر گاه تابعی دوسویی چون $f: A \to B$ وجود داشته باشد، آنگاه «تعداد اعضای دو مجموعهٔ A و B برابرند».

به جای اینکه با سلسلهٔ کامل بینهایت‌ها شروع کنیم، با آن بینهایتی آغاز می‌کنیم که بعداً معلوم خواهد شد که کوچکترین آنهاست. مجموعهٔ استانده‌ای که برای امر مقایسه برمی‌گزینیم مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است. بهتر است به جای $\mathbb{N}_0$، $\mathbb{N}$ را به کار ببریم، صرفاً به این دلیل که هر دوسویی $f: \mathbb{N} \to B$، اعضای B را به صورت یك دنباله بیان می‌کند؛ با استفاده از این دوسویی $f(1)$ را می‌توانیم عضو اول B، $f(2)$ را عضو دوم، و الی آخر بنامیم. با این روند، روشی برای شمارش B به دست می‌آوریم. البته، اگر با استفاده از این دوسویی عضوها را یکی پس از دیگری بخوانیم، «$f(1), f(2), \ldots$»، عملاً هیچگاه

به‌انتهای آن نمی‌رسیم، ولی یقیناً می‌دانیم که اگر عضوی چون $b \in B$ به‌ما داده شود، آنگاه به‌ازای n ی از $\mathbb{N}$، $b = f(n)$، لذا سرانجام پس از زمان معینی به‌آن عضو خاص می‌رسیم.

یادآوری می‌کنیم که در فصل ۸ داشتیم $\mathbb{N}(\circ) = \varnothing$، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\mathbb{N}(n) = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant n\}.$$

می‌گوییم که مجموعه‌ای چون X متناهی است اگر به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ ی، یك دوسویی چون $f : \mathbb{N}(n) \to X$ وجود داشته باشد. می‌گوییم که X شمارش‌پذیر است اگر یا X متناهی باشد یا یك دوسویی‌مانند $f : \mathbb{N} \to X$ وجود داشته باشد. اگر یك دوسویی $f : \mathbb{N}(n) \to X$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌توانیم بگوییم که X، n عضو دارد. این همان روش معمولی شمارش است. اگر یك دوسویی $f : \mathbb{N} \to X$ وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم که X، $\aleph_\circ$ عضو دارد. علامت $\aleph$ اولین حرف الفبای زبان عبری است و «آلف»[1] نامیده می‌شود، و $\aleph_\circ$ اولین مثال از یك مفهوم جدید عدد است که برای بیان بزرگی مجموعه‌ای نامتناهی به‌کار می‌رود. وقتی می‌گوییم که مجموعهٔ X دارای $\aleph_\circ$ عضو است، صرفاً منظورمان این است که تابعی دوسویی بین $\mathbb{N}$ و X وجود دارد، و این دقیقاً مانند این است که بگوییم «تعداد اعضای (عدد اصلی) X و $\mathbb{N}$ برابرند». قبل از اینکه اعداد اصلی را به‌طور کلی مورد بحث قرار دهیم، نگاهی دقیقتر به‌مفهوم شمارش‌پذیری می‌اندازیم.

مثال ۱. $\mathbb{N}_\circ$ شمارش‌پذیر است. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\circ$ را $f(n) = n - 1$ تعریف می‌کنیم، آنگاه f دوسویی است. این اولین خاصیت جالب این روش «شمارش مجموعه‌های نامتناهی» است. $\mathbb{N}$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbb{N}_\circ$ است، پس به طور شهودی باید تعداد کمتری عضو داشته باشد، ولی به‌معنی وجود یك تابع دوسویی بین مجموعه‌ها، آنها هم‌اندازه‌اند. از نظر تاریخی، گالیله[2] در ۱۶۳۸ با ارائهٔ تناظری یك به یك بین اعداد طبیعی و مربع اعداد طبیعی، مثالی روشنتر عرضه کرد:

مثال ۲. (گالیله). تناظری یك به‌یك بین اعداد طبیعی و مربعات کامل وجود دارد:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

به‌بیان نظریهٔ جدید مجموعه‌ها، اگر $S = \{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$، تابع $f : \mathbb{N} \to S$ با تعریف $f(n) = n^2$ دوسویی است.

بیش از دوقرن، این مطلب ظاهراً متناقض، هر کوششی جهت ارائه معنی دقیقی برای بینهایت را دچار اشکال کرده بود. تا جایی که لایبنیتز پیشنهاد کرد بهتر است تنها مجموعه‌های متناهی را درنظر بگیریم، زیرا تناقض از نامتناهی بودن $\mathbb{N}$ به‌وجود می‌آید.

---

1. aleph 2. Galileo

تحلیل او برای رهایی از این مشکل این بود که اگر تنها مجموعه‌ای متناهی از اعدادطبیعی را درنظر بگیریم، مثلاً اعداد کوچکتر از صد را، آنگاه تناظر یك به‌یکی بین اعداد طبیعی کوچکتر ازصد ومربعات کامل کوچکتر ازصد وجود ندارد. جواب کانتور[1] به‌این پارادوکس دردهۀ ۱۸۷۰، از این هم جالبتر است. اونشان داد که اگر «به‌همان تعداد» به‌این‌معنی باشد که تابعی دوسویی بین دومجموعه وجود دارد، آنگاه هرمجموعۀ نامتناهی دارای «همان تعداد» عضواست که زیرمجموعۀ سره‌ای از آن! دراینجا کلمۀ «نامتناهی» دارای این تعبیرتکنیکی است که B نامتناهی‌است اگربه‌ازای هیچ nی از $\mathbf{N}_0$ تابعی دوسویی‌چون $f:\mathbf{N}(n) \to B$ وجود نداشته باشد.

قضیۀ ۱ (کانتور). اگر مجموعه‌ای چون B نامتناهی باشد، آنگاه زیرمجموعۀ سره‌ای چون $A \neq B$ و تابعی دوسویی چون $f:B \to A$ وجود دارند.

اثبات. ابتدایك زیرمجموعۀ نامتناهی‌شمارش‌پذیری چون X از B را برمی‌گزینیم. از آنجا که هیچ تابع دوسویی بین $\mathbf{N}(0)$ و B وجود ندارد، B غیرتهی است و عضوی در B وجود دارد که آن را x_1 می‌نامیم. به‌روش استقرا تابعی چون $g:\mathbf{N} \to B$ راچنین تعریف می‌کنیم که $g(1)=x_1$ و اگر عضوهای متمایز x_1، x_2، ...، x_n را پیدا کرده باشیم، آنگاه چون g، $g:\mathbf{N}(n) \to B$، نمی‌تواند دوسویی‌باشد، عضودیگری هم باید وجود داشته باشد، که آن را $x_{n+1} \in B$ می‌نامیم، و این عضو با x_1، ...، x_n فرق دارد؛ $g(n+1)=x_{n+1}$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم

$$X=\{x_n \in B \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

می‌نویسیم $A=B-\{x_1\}$، و $f:B \to A$ را با

$$f(x_n)=x_{n+1} \quad \text{به‌ازای } x_n \in X،$$

و

$$f(b)=b \quad \text{به‌ازای } b \notin X،$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه f یك دوسویی است. □

شگفت‌آورتر این است که با استفاده از مثال گالیله می‌توانیم زیرمجموعه‌ای چون C پیدا کنیم که $B-C$ نامتناهی باشد وبا این وجود تابعی دوسویی چون $f:B \to C$ هم وجود داشته باشد. یك زیرمجموعۀ نامتناهی شمارش‌پذیر X از B را همچون در اثبات فوق انتخاب و فرض می‌کنیم

$$C=B-\{x_n \in X \mid n \text{ مربع کامل نباشد}\}$$

---

1. Cantor

و $f:B \to C$ را با:

$$f(x_n)=x_{n+1} \quad \text{به‌ازای } x_n \in X،$$

$$f(b)=b \quad \text{به‌ازای } b \notin X،$$

تعریف می‌کنیم. اگر با یک مجموعهٔ نامتناهی B آغاز کنیم، می‌توانیم یک زیرمجموعهٔ نامتناهی (شمارش‌پذیر) از آن برداریم و باقیمانده هنوز هم زیر مجموعه‌ای چون C با «همان تعداد اعضای» B باشد!

راه حل کانتور برای مسئلهٔ نامتناهی، معرفی مفهوم عدد اصلی بود. فعلاً فرض کنیم که به‌ازای هر مجموعهٔ X، مفهومی به‌نام عدد اصلی با این خاصیت وجود دارد که اگر تابعی دوسویی چون $f:X \to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه عددهای اصلی X و Y برابرند، و اگر هیچ تابع دوسویی وجود نداشته باشد، آنگاه عددهای اصلیشان متفاوتند. درمورد مجموعه‌های متناهی، نامزد مناسبی برای عدد اصلی در دست داریم. اگر یک دوسویی چون $f:\mathbb{N}(n) \to X$ مفروض باشد، می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی X، n است. به‌همین نحو، اگر دوسویی $f:\mathbb{N} \to X$ مفروض باشد، می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی X، $\aleph_0$ است. برای مجموعه‌های نامتناهی دیگر ممکن است لازم باشد نمادهای دیگری برای اعداد اصلیشان ابداع شوند. به‌طور کلی، عدد اصلی X را با $|X|$ نمایش می‌دهیم، با این تفاهم که اگر یک دوسویی چون $f:X \to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه $|X|=|Y|$ ($|X|$ و $|Y|$ دو نماد متفاوت برای نمایش یک عدد اصلی هستند). اگر تابعی یک به‌یک چون $f:X \to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌گوییم که $|X| \leqslant |Y|$، وطبق معمول $|X| < |Y|$ را به‌این معنی تعریف می‌کنیم که $|X| \leqslant |Y|$ و $|X| \neq |Y|$.

به‌طور کلی، اگر X زیر مجموعه‌ای از Y باشد، آنگاه تابع شمول $i:X \to Y$، $i(x)=x$، یک به‌یک است، پس داریم:

$$X \subseteq Y \Rightarrow |X| \leqslant |Y|.$$

قضیهٔ ۱ بیان می‌کند که به‌ازای هرمجموعهٔ نامتناهی B، زیرمجموعهٔ سره‌ای چون A از آن وجود دارد که $|B|=|A|$. پس به‌ازای مجموعه‌های نامتناهی،

$$X \subsetneqq Y \not\Rightarrow |X| < |Y|.$$

این دوگانگی اقامه شده توسط مثال گالیله بیشتر جنبهٔ روانی دارد تا جنبهٔ ریاضی. در توسیع دستگاه اعداد طبیعی و مفهوم شمارش که اعداد اصلی نامتناهی را نیز شامل شود، دستگاه بزرگتر ممکن است همهٔ خواص دستگاه کوچکتر را نداشته باشد. آشنایی با دستگاه کوچکتر موجب می‌شود که خواص معینی را انتظار داشته باشیم و وقتی همه‌چیز، آن‌طور که احساس می‌کنیم، با هم نمی‌خواند گیج می‌شویم. اضطراب وقتی به‌وجود می‌آید که اصل اعداد حقیقی درمورد مثبت بودن مربع هر عدد حقیقی توسط مربعات اعداد مختلط نقض می‌گردد. این مشکل وقتی مرتفع شد که تشخیص دادیم اعداد مختلط را نمی‌توانیم به‌همان نحو

مرتب کنیم که زیرمجموعه‌اش اعداد حقیقی را. تناقض ظاهری گالیله را نیز به‌همین نحو رفع می‌کنیم، که می‌بینیم وقتی «عدد اصلی یکسان» را برحسب یك تابع دوسویی بین مجموعه‌ها تعبیر می‌کنیم، آنگاه شمول سرهٔ A در B به‌تنهایی مانع برابری اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی A و B نمی‌شود.

حال بازمی‌گردیم به‌مفهوم شمارش‌پذیری. اولاً، اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، نظیر اثبات قضیهٔ ۱، می‌توانیم یك زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر چون $X \subseteq B$ انتخاب کنیم. این امر به‌این معنی است که $|B| \geqslant |X| = \aleph_0$؛ پس $\aleph_0$ کوچکترین عدد اصلی نامتناهی است. باکمال تعجب عدد اصلی بسیاری ازمجموعه‌های آشنا که ظاهراً بسیار بزرگتر از $\mathbb{N}$ هستند برابر $\aleph_0$ است.

مثال ۳. اعداد صحیح شمارش‌پذیرند. تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ را با:

$$\text{به‌ازای } n \in \mathbb{N}\text{، } f(۲n) = n \text{ و } f(۲n-۱) = ۱-n\text{،}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه دوسویی زیر به‌دست می‌آید:

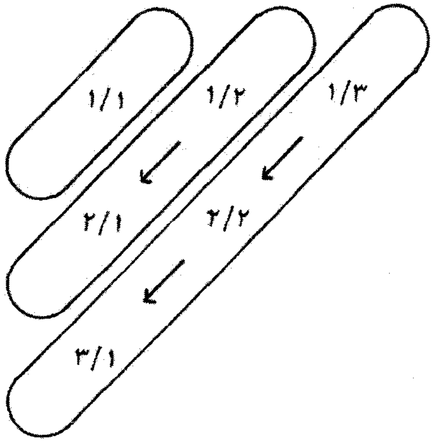
$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & ۲ & & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۱ & & -۱ & ۲ & -۲ & ۳ & -۳ & \cdots \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم با وجودی که f دوسویی است، ترتیب را حفظ نمی‌کند (به‌این معنی که $m < n$ ایجاب نمی‌کند که $f(m) < f(n)$، مثلاً $f(۳) > f(۲)$). وقتی می‌خواهیم توابعی دوسویی بین مجموعه‌های مرتب تعریف کنیم، ممکن است مجبور باشیم این عمل را به‌طور بسیار نامنظمی انجام دهیم؛ به‌مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۴. اعداد گویا شمارش‌پذیرند. این امر را درچند مرحله انجام می‌دهیم، ابتدا اعداد گویای مثبت را می‌شماریم. هرعدد گویای مثبت برابر با p/q است، که p و q اعداد طبیعی هستند. یك روش شمارش اعداد گویا این است که آنها را به‌صورت ردیف بنویسیم:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{۱}{۱} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \cdots \\ \\ \frac{۲}{۱} & \frac{۲}{۲} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۴} & \cdots \\ \\ \frac{۳}{۱} & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۳} & \frac{۳}{۴} & \cdots \\ \\ \frac{۴}{۱} & \frac{۴}{۲} & \frac{۴}{۳} & \frac{۴}{۴} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

حال آنهـا را در امتداد «قطرها» می‌خوانیم، اول ۱/۱، بعد ۱/۲، ۲/۱، آنگاه ۱/۳، ۲/۲، ۳/۱، والی آخر:



به‌این‌نحو رشته‌ای از اعداد به‌صورت ۱/۱, ۱/۲, ۲/۱, ۱/۳, ۲/۲, ۳/۱, ... به‌دست می‌آید. در این فهرست اعداد تکراری هم وجود دارند، زیـرا ۲/۲ = ۱/۱ و بعداً نیز اعداد ۳/۳، ۴/۴، و غیره به‌دست می‌آیند. به‌همین نحو، ... = ۳/۶ = ۲/۴ = ۱/۲. هرعضو فهرست را به‌ترتیب می‌نویسیم واگر عضوی را قبلاً نوشته‌ایم آن‌را حذف می‌کنیم، آنگاه این فهرست به‌صورت ۱/۱, ۱/۲, ۲/۱, ۱/۳, ۳/۱, ... درمی‌آید. فرض کنیم a_n، nمین عدد گویا در فهرست باقیمانده، باشد، آنگاه تابع f از اعداد طبیعی بـه اعداد گویای مثبت با تعریف $f(n)=a_n$ دوسویی است. ولی هر عدد گویا یا مثبت، یا صفر، و یا منفی است، لذا فهرست $0, a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_n, -a_n, \dots$ هر عدد گویا را دقیقاً یکبار شامل می‌شود و تابع $g: \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ با تعریف:

$$g(1)=0\text{، و به‌ازای هر } n\in\mathbf{N}\text{، } g(2n)=a_n\text{، } g(2n+1)=-a_n\text{،}$$

همان‌طور که می‌خواستیم دوسویی است.

لازم به‌تذکر است که گرچه فرمول صریحی برای $g(n)$ عرضه نکردیم، ولی دستورالعمل صریحی برای آن ارائه نمودیم. چند جملهٔ اول عبارتند از:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 3 & -3 & \dots
\end{array}$$

و خواننده خود قادر است تا هر کجا کـه بخواهد این فهرست را ادامـه دهد. بعداً قضیهٔ

بسیار مؤثرتری (قضیهٔ شرودر[1]- برنشتاین[2]) را عرضه می‌کنیم که با کمك آن می‌توانیم، بدون ساختن هیچ تابع دوسویی صریحی، برابری عدد اصلی دومجموعه را نشان دهیم. با استفاده از آن قضیه، می‌توان مثال آخر را بسیار تمیزتر بررسی کرد.

دلیل این امر که هم «متناهی» وهم «نامتناهی شمارش‌پذیر» را «شمارش‌پذیر» دانستیم وجود قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ۲. هرزیر مجموعه از مجموعه‌ای شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

اثبات. اگر $f: \mathbb{N} \to A$ دوسویی باشد و $B \subseteq A$، آنگاه یا B متناهی است، یا می‌توان تابع $g: \mathbb{N} \to B$ را بنا به:

$g(1)$ کوچکترین m ی است که $f(m) \in B$،

پس از پیدا کردن $g(1)$، . . . ، $g(n)$، آنگاه

$g(n+1)$ کوچکترین m ی است که $f(m) \in B - \{g(1), \ldots, g(n)\}$،

تعریف کرد. به‌طور غیرصوری، این تعریف منجر می‌شود به‌اینکه اعضای A را به صورت فهرست

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

بنویسیم، و در آن اعضایی راکه در B نیستند حذف کنیم، و اعضایی راکه در B هستند به‌همان ترتیب باقی گذاریم. □

واقعیت قابل توجه در مورد مجموعه‌های شمارش‌پذیر این است که با استفاده از آنها می‌توانیم مجموعه‌هایی‌را بسازیم که‌بسیار بزرگتر به‌نظر می‌آیند، ولی بازهم شمارش‌پذیر هستند، با این مضمون دقیق‌که:

قضیهٔ۳. اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های شمارش‌پذیر خود شمارش پذیر است.

اثبات. اگر دسته‌ای شمارش‌پذیراز مجموعه‌ها مفروض باشد، می‌توانیم $\mathbb{N}$ را به‌عنوان مجموعهٔ اندیس به‌کار ببریم و این دسته از مجموعه‌ها را به‌صورت $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ بنویسیم. (اگر تنها تعدادی متناهی A_1، . . . ، A_k وجود داشته باشند، به‌ازای $n > k$ می‌نویسیم $A_n = \varnothing$.) از آنجاکه هر A_n ی شمارش پذیر است، اعضای A_n را می‌توانیم به‌صورت فهرستی چون $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}, \ldots$ بنویسیم، که اگر A_n متناهی باشد این فهرست پایان می‌پذیرد، و اگر A_n نامتناهی شمارش‌پذیرباشد، این فهرست به‌صورت دنباله‌ای

1. Schröder 2. Bernstein

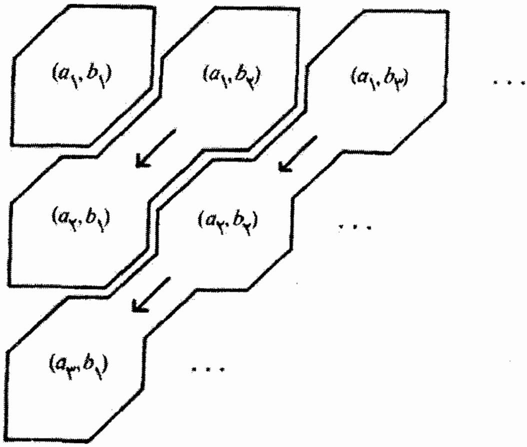
نامتناهی است. حال اعضای $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ را در آرایش مستطیلی جـدول‌بندی می‌کنیم و آنها را نظیر مثال ۴ در امتداد قطرها می‌خوانیم:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} & a_{۱۵} & \cdots \\
a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} & a_{۲۵} & \cdots \\
a_{۳۱} & a_{۳۲} & & & & \cdots \\
a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴} & a_{۴۵} & \cdots \\
a_{۵۱} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

ممکن‌است بین اعداد آرایش فاصله بیفتد زیرا برخی‌ازمجموعه‌ها متناهی هستند (همچون در سطرسوم آرایش‌فوق) یا به‌این علت‌که ممکن است تنها تعدادی متناهی مجموعه وجود داشته باشد. ممکن است، وقتی‌دومجموعهٔ A_n و A_m اعضای مشترکی‌دارند، برخی‌ازاعداد آرایش تکرار بشوند، مثلاً عضوی‌که درسطر nم است در سطر mم نیز بیاید. فاصله‌ها را درنظر نمی‌گیریم، و عضوهایی راکـه قبلاً هم درفهرست آمـده‌اند حذف می‌کنیم. پس فهرست حاصل یا متناهی است ، یـا دنباله‌ای نامتناهی و بدون جملهٔ تکراری . این مطلب نشان می‌دهدکه $\bigcup\limits_{n\in N} A_n$ شمارش‌پذیر است. $\square$

قضیهٔ۴. حاصلضرب دکارتی دومجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

اثبات. اگـر A و B شمارش‌پـذیر باشند ، اعضـای A را به‌صـورت دنبـالـهٔ $a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots$ (که باپایان است اگر A متناهی باشد) می‌نویسیم. اعضای B را هم به‌صورت $b_۱, b_۲, \ldots, b_m, \ldots$ می‌نویسیم. حال‌اعضای $A\times B$ را به‌صورت آرایش مستطیلی می‌نویسیم و آنها را در امتداد قطرها می‌خوانیم:



اگر A یا B متناهی باشد، فاصله‌هایی وجود خواهد داشت که باید از رویشان بگذریم؛ اگر هردو متناهی باشند، آنگاه $A\times B$ نیز متناهی است. اگر هردو نامتناهی باشند، آنگاه نوشتن دوسویی صریح $f:\mathbb{N}\to A\times B$ چندان مشکل نیست. یك عضو درقطر اول داریم، دو عضو در قطر دوم، و به‌طور کلی n عضو در قطر nم. پس در n قطر اول $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ عضو وجود دارد. rمین عضو قطر بعدی (a_r, b_{n+2-r}) است، پس فرمول صریح دوسویی $f:\mathbb{N}\to A\times B$ چنین است:

به‌ازای $m=\frac{1}{2}n(n+1)+r$، $(1\leqslant r\leqslant n+1)$، $f(m)=(a_r, b_{n+2-r})$. □

به‌عنوان مثالی ازکاربرد قضیهٔ ۴، داریم:

مثال۵. در صفحه، مجموعهٔ نقاط با مختصات گویا، شمارش‌پذیر است.

در این مرحله ازکار، خواننده‌ای راکه ممکن است تصورکند هر مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر است می‌بخشیم، ولی‌با درنظرگرفتن اعداد حقیقی می‌بینیم که این تصور نادرست است.

مثال۶. اعداد حقیقی شمارش‌پذیر نیستند. این مطلب را با برهان خلف اثبات می‌کنیم، ونشان می‌دهیم که هیچ تابعی چون $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ نمی‌تواند پوشا باشد، پس هیچ دوسویی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ وجود ندارد. فرض‌کنیم تابعی چون $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ داده شده باشد، هر $f(m)\in\mathbb{R}$ را به‌صورت بسط اعشاری

$$f(m)=a_m{/}a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn}\cdots\quad,\ a_{mn}\in\mathbb{Z},\ a_{mn}\in\mathbb{N}_0,\ 0\leqslant a_{mn}\leqslant 9$$

می‌نویسیم؛ در اینجا به‌خاطر قطعیت، اگربسط پایان داشته باشد، آن را طوری که هست

می‌نویسیم و در انتهایش دنباله‌ای از صفر قرار می‌دهیم و هیچ‌گاه بسط را با دنباله‌ای از نه به‌پایان نمی‌رسانیم. حال یك عدد حقیقی متفاوت با همهٔ $f(m)$ها می‌نویسیم.
فرض کنیم

$$\beta = ۰/b_۱ b_۲ \ldots b_n \ldots$$

که در آن

$$b_n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a_{nn} = ۰ \text{،} \\ ۰ & \text{اگر } a_{nn} \neq ۰ \text{،} \end{cases}$$

آنگاه β متفاوت بـا $f(n)$ است زیرا در رقـم nم تفاوت دارند. توجـه‌کنید ازابهامی احتمالی که ممکن بود از یك دنبالهٔ نامتناهی متشکل از نه موجود در بسط ناشی شود بـا قرار ندادن چنین رقمی در β اجتناب کرده‌ایم.

فرض‌کنیم $\aleph$ عدداصلی $\mathbb{R}$ باشد. چون $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ پس $\aleph_۰ \leqslant \aleph$، ومثال ۶ نشان می‌دهد که $\aleph \neq \aleph_۰$، لذا سرانجام‌عددی‌اصلی‌پیداکردیم که اکیداً بزرگتراز $\aleph_۰$ است. درحقیقت به‌ازای هرعدد اصلی، یك عدد اصلی‌اکیداً بزرگتر ازآن هم وجود دارد. این عدد اصلی باید به‌مجموعه‌ای چون A منسوب باشد. حال نشان می‌دهیم که عدد اصلی مجموعهٔ توانی A اکیداً بزرگتر از عدد اصلی خود A است:

قضیهٔ ۵. اگر A یك مجموعه باشد، آنگاه $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.

اثبات. بدیهی است کـه تابع $f: A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$ با تعریف $f(a) = \{a\}$ یك به‌یك است، پس $|A| \leqslant |\mathbb{P}(A)|$. لذا باید ثابت‌کنیم $|\mathbb{P}(A)| \neq |A|$. کافی‌است نشان دهیم که هیچ تابعی چون $f: A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$ نمی‌تواند پوشا باشد. به‌ازای هرچنین‌تابعی‌و‌به‌ازای هر $a \in A$، داریم $f(a) \in \mathbb{P}(A)$، پس $f(a)$ زیرمجموعـه‌ای از A است. این سؤال را مطرح می‌کنیم که «آیا a متعلق به $f(a)$ هست؟». جواب همواره یا «آری» است یا «نه»، و ما اعضایی را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای‌آنها جواب «نه» باشد و بدین‌ترتیب مجموعهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$B = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\}.$$

حال ادعا می‌کنیم که توسط تابع f، B با هیچ عضوی از A پوشیده نمی‌شود، زیرا اگر B به ازای عضوی چون $a \in A$ برابر با $f(a)$ باشد، سؤال «آیا a متعلق به B است؟» به تناقض منجرمی‌شود:

$$a \in B \Rightarrow a \notin f(a)$$

$$a \notin B \Rightarrow a \in f(a).$$

پس B با f پوشیده نمی‌شود و f پوشا نیست؛ و مسلماً نمی‌تواند دوسویی باشد. □

قضیهٔ ۵ ما را به‌سلسله‌ای از نامتناهی‌ها رهنمون می‌کند. با $|\mathbb{N}|=\aleph_0$ شروع می‌کنیم. سپس $|\mathbb{P}(\mathbb{N})|$ اکیداً بزرگتر است از $\aleph_0$، و بعد $|\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))|$، والی آخر.

قضیهٔ شرودر- برنشتاین

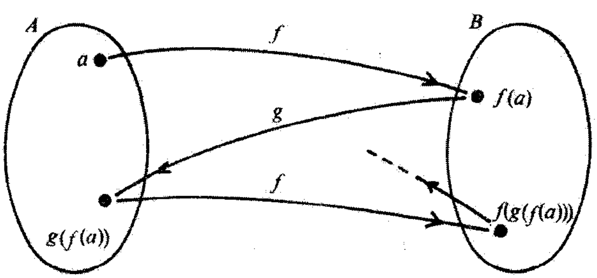
سؤالی بدیهی که می‌تواند در مورد رابطهٔ $\leqslant$ بین اعداد اصلی مطرح شود این است که:

اگر $|B|\leqslant|A|$ و $|A|\leqslant|B|$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $|B|=|A|$؟

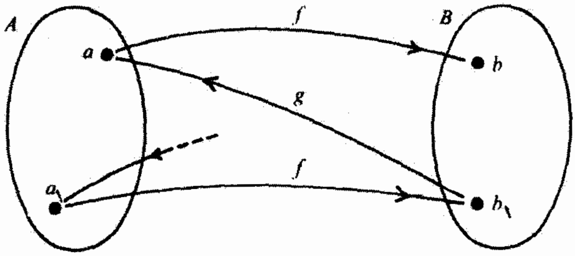
جواب این سؤال مثبت ومحتوای این حکم همان قضیهٔ شرودر- برنشتاین است. اثبات آن پیچیده‌تر از آن است که درنگاه اول از چنین قضیهٔ ظاهراً ساده‌ای برمی‌آید. مسئلهٔ اصلی این‌است: $|A|\leqslant|B|$ بیان می‌کند که تابعی یك به‌یك چون $f{:}A\to B$ وجود دارد و $|B|\leqslant|A|$ هم‌یك تابع یك به‌یك درجهت عکس‌مانند $g{:}B\to A$ دراختیارما می‌گذارد، ولی تنها مشکل این است که لزوماً این توابع یك به‌یك به‌وجهی با هم در رابطه نیستند. و ما باید با استفاده از آنها به‌طریقی تابعی دوسویی بین A و B بسازیم.

قضیهٔ ۶ (شرودر- برنشتاین). به ازای هردو مجموعهٔ A و B، $|A|\leqslant|B|$ و $|B|\leqslant|A|$ ایجاب می‌کنند که $|A|=|B|$.

اثبات. توابع یك به‌یك $f{:}A\to B$ و $g{:}B\to A$ در دست‌اند. می‌توانیم با استفاده از f از A به B برسیم و یا با g از B به A. با تکرار این روند، و با این رفت و برگشتها می‌توانیم اعضای $f(a),\ g(f(a)),\ f(g(f(a))),\ \ldots$ را به‌دست آوریم. کلید اثبات این‌است که بکوشیم چنین‌زنجیری‌را وارونه ردیابی کنیم. با $b\in B$ شروع می‌کنیم ومی‌بینیم



که آیا عضوی چون a از A وجود دارد که $b=f(a)$؛ اگر چنین aیی وجود داشته باشد، یکتاست. سپس می‌بینیم که آیا عضوی چون b_1 در B وجود دارد که $a=g(b_1)$، و سپس $a_1\in A$ی که $b_1=f(a_1)$؛ به‌این‌منظور که زنجیری به‌صورت $b, a, b_1, a_1, \ldots, b_n, a_n$، بسازیم که $a_r=g(b_r)$ و $b_{r+1}=f(a_r)$، در وارونه ردیابی کردن زنجیری به‌این نحو،



سه چیز می‌تواند اتفاق بیفتد:

(یك) به a_Nی از A برسیم و توقف کنیم زیرا هیچ b^*ای در B وجود ندارد که $g(b^*)=a_N$،

(دو) به b_Nی از B برسیم و توقف کنیم زیرا هیچ a^*ای در A وجود ندارد که $f(a^*)=b_N$،

(سه) روند همواره ادامه داشته باشد.

این امر B را به‌سه مجموعه افراز می‌کند:

(۱) B_A، زیرمجموعهٔ اعضای B که همچون در (یك) جدش از A منشأ می‌گیرد.

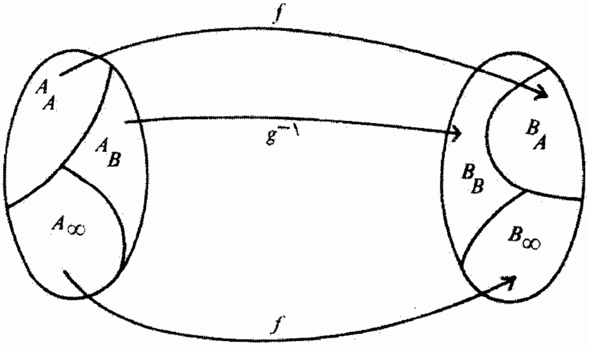
(۲) B_B، زیرمجموعهٔ اعضای B که همچون در (دو) جدش از B منشأ می‌گیرد.

(۳) B_∞، زیرمجموعهٔ اعضای B که همچون در (سه) جدش الی غیرالنهایه قابل ردیابی است.

(ملاحظه می‌کنید که B_A، B_B، و B_∞ مجزا ازهم هستند و اجتماعشان B است، پس حقیقتاً افرازی را به‌دست می‌دهند.) به‌همین نحو A را می‌توانیم به‌مجموعه‌هایی چون A_A، A_B، A_∞ افراز کنیم که به ترتیب جد هریك یا از A منشأ می‌گیرد یا از B، یا الی غیرالنهایه به‌عقب برمی‌گردد.

به‌آسانی دیده می‌شود که تحدید f بر A_A یك دوسویی چون $f:A_A \to B_A$ است؛ تحدید g بر B_B هم یك دوسویی چون $g:B_B \to A_B$ را به‌دست می‌دهد و تحدید f و g هردو دوسویی‌هایی مانند $f:A_\infty \to B_\infty$ و $g:B_\infty \to A_\infty$ را به‌دست می‌دهند. با استفاده از دوسویی اول و یك دوسویی از سومی، می‌توانیم یك دوسویی چون $F:A \to B$ به صورت زیر بسازیم:

$$F(a)=\begin{cases} f(a) & \text{اگر } a\in A_A، \\ g^{-1}(a) & \text{اگر } a\in A_B، \\ f(a) & \text{اگر } a\in A_\infty، \end{cases}$$



این امر اثبات قضیه راکامل می‌کند. □

به‌عنوان مثالی ازکاربرد این قضیه، حکم شمارش‌پذیر بودن اعدادگویا را به روش دیگری هم اثبات می‌کنیم. تابع شمول $i: \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ نشان می‌دهد که $|\mathbf{N}| \leqslant |\mathbf{Q}|$، و از آنجاکه هر عددگویا را می‌توان به‌طور یکتا به‌ساده‌ترین صورت $(-۱)^n p/q$ نوشت‌که درآن n، p، q در $\mathbf{N}$ هستند، بنا به یکتایی تجزیه به عوامل، تابع $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$، $f((-۱)^n p/q) = ۲^n ۳^p ۵^q$، یك به‌یك است، پس $|\mathbf{Q}| \leqslant |\mathbf{N}|$.

مثالی جالبتر این است که نشان می‌دهیم $|\mathbf{P}(\mathbf{N})| = \aleph$. تابعی یك به‌یك چون $f: \mathbf{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$ با

$$f(A) = ۰/a_۱ a_۲ \ldots a_n \ldots$$

راکه درآن

$$a_n = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } n \notin A، \\ ۱ & \text{اگر } n \in A، \end{cases}$$

می‌توان به‌دست‌آورد. به‌ازای هر زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq \mathbf{N}$، این تابع بسط اعشاری یکتایی‌را به‌دست می‌دهد و f یك به‌یك است. یافتن‌تابعی‌یك به‌یك چون $g: \mathbf{R} \to \mathbf{P}(\mathbf{N})$ به‌مهارت بیشتری نیازدارد. به‌جای نوشتن‌اعداد حقیقی به‌صورت دهدهی،آن را به‌صورت دودویی بیان می‌کنیم، به‌این معنی‌که آن را به‌عنوان حدکسرهای به‌صورت

$$a_۰ + \frac{a_۱}{۲} + \frac{a_۲}{۴} + \cdots + \frac{a_n}{۲^n}$$

که در آن $a_۰$ عددی صحیح است و a_n به‌ازای $n \geqslant ۱$ برابر ۰ یا ۱ ، می‌نویسیم. اگر عباراتی‌راکه با بینهایت ۱ ختم می‌شوند (همتای دودویی مسئلهٔ دهدهی شامل دنباله‌ای نامتناهی از ۹) مستثنی‌کنیم، آنگاه چنین بسط دودویی یکتاست. حال عدد صحیح $a_۰$ را در مبنای دوتایی به‌صورت

$$a_0 = (-1)^m b_k \ldots b_2 b_1$$

که در آن m و ارقام b_1، b_2، ...، b_k همه ۰ یا ۱ هستند، می‌نویسیم؛ آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی x بسط دودویی یکتایی به‌صورت

$$x = (-1)^m\ b_k \ldots b_2 b_1 / a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

داریم، که در آن m و همهٔ ارقام b_1، ...، b_k، a_1، ...، a_n، ...، برابر ۰ یا ۱ هستند. برای سهولت امر، دراین حالت به‌ازای $n > k$، می‌نویسیم $b_n = 0$. حال جملات را به‌صورت دنباله‌ای چون $m, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ درنظر می‌گیریم. این دنباله، دنباله‌ای از ۰ و ۱ است و طبق قاعدهٔ زیر زیرمجموعه‌ای یکتا چون A از $\mathbb{N}$ را تعریف می‌کند:

«$r \in A$ اگر و فقط اگر rمین جملهٔ دنباله ۱ باشد»

به‌این‌نحو تابعی چون $g: \mathbb{R} \to \mathbb{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌شود که $g(x)$ زیرمجموعهٔ Aی تعیین شده با این روش است. این تابع یك به‌یك است، و قضیهٔ شرودر- برنشتاین نشان می‌دهد که $|\mathbb{R}| = |\mathbb{P}(\mathbb{N})|$.

حساب اعداد اصلی

همان‌گونه که می‌توانیم اعداد اصلی متناهی را با هم جمع کنیم، درهم ضرب کنیم، و به‌توان برسانیم، می‌توانیم با تقلید از فرایندهای مجموعه بنیاد مربوط، عملهای متناظر در مورد اعداد اصلی نامتناهی را نیز تعریف کنیم. برخی، ولی نه همهٔ، خواص حساب معمولی در مورد اعداد اصلی نیز برقرارند و بسیار آموزنده است که بررسی کنیم کدام خواص برقرار هستند. ابتدا تعاریف:

جمع. اگر α و β دوعدد اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی)، دومجموعهٔ مجزا[1] از هم A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که $\alpha = |A|$ و $\beta = |B|$. $\alpha + \beta$ را عدد اصلی $A \cup B$ تعریف می‌کنیم.

ضرب. اگر $\alpha = |A|$ و $\beta = |B|$، آنگاه $\alpha\beta = |A \times B|$.

توان. اگر $\alpha = |A|$ و $\beta = |B|$، آنگاه $\alpha^\beta = |A^B|$، که در آن A^B مجموعهٔ همهٔ توابع از B به A است.

خواننده باید کمی تأمل کند و نشان دهد که وقتی مجموعه‌های مربوط متناهی باشند آنگاه

---

۱. این عمل همواره امکان‌پذیر است؛ اگر A و B مجزا نباشند، آنها را با $A' = A \times \{0\}$ و $B' = B \times \{1\}$ جایگزین می‌کنیم. دوسویی‌های بدیهی نشان می‌دهند که $|A| = |A'|$ و $|B| = |B'|$. به‌علاوه، A' و B' مجزا هستند زیرا اگر $x \in A' \cap B'$ آنگاه $x = (a, 0) = (b, 1)$ لذا $1 = 0$، که ممکن نیست.

این تعاریف با حساب معمولی جور درمی‌آیند. به‌خصوص، وقتی $|A|=m$ و $|B|=n$، آنگاه در تعریف تابعی چون $f:B\to A$، هرعضو $b\in B$، m حق انتخاب به‌عنوان نگاره دارد، و روی هم m^n تابع حاصل می‌شود. جمع و ضرب در حالت متناهی بسیار آسان هستند.

توجه کنید که مجموعه‌های مورد نظر در تعریف جمع باید مجزا باشند، ولی این‌امر برای دو عمل دیگر ضرور نیست. دلیل این مطلب روشن است: اگر $|A|=m$، $|B|=n$، و $A\cap B\neq\varnothing$، آنگاه $|A\cup B|<m+n$. مهمترین واقعیتی که در مورد این تعاریف باید بررسی شود خوش‌تعریف بودن آنهاست. اگر با اعداد اصلی α و β شروع کنیم باید مجموعه‌های A و B را چنان انتخاب کنیم که $|A|=\alpha$ و $|B|=\beta$: باید نشان دهیم که اگرمجموعه‌های متفاوتی چون A' و B' را به‌کار گیریم، آنگاه درهرمورد عدد اصلی‌حاصل همانند عدد اصلی قبلی است. مثلاً در مورد ضرب، اگر $|A|=|A'|$ و $|B|=|B'|$، آنگاه دوسویی‌هایی چون $f:A\to A'$ و $g:B\to B'$ وجود دارند که دوسویی $h:A\times B\to A'\times B'$ با تعریف

$$h(a,\, b)=(f(a),\, g(b))$$

را القا می‌کنند. پس $|A\times B|=|A'\times B'|$، و حاصلضرب اعداد اصلی خوش‌تعریف است. در مورد جمع و توان اعداد اصلی اثباتها شبیه به‌اثبات فوق هستند.

اگرخواص این‌عملهای مربوط به‌حساب را مورد بررسی قراردهیم، پی می‌بریم که بسیاری از خواص اعداد متناهی برای اعداد اصلی در حالت عام هم برقرارند:

قضیهٔ ۷. اگر α، β، و γ اعدادی اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی)، آنگاه:

(یك) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$،

(دو) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$،

(سه) $\alpha+0=\alpha$،

(چهار) $\alpha\beta=\beta\alpha$،

(پنج) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$،

(شش) $1\alpha=\alpha$،

(هفت) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$،

(هشت) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma$،

(نه) $\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$،

(ده) $(\alpha\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\beta^\gamma$.

اثبات. فرض کنیم A، B، و C مجموعه‌هایی (مجزا) به‌ترتیب با اعداد اصلی α، β، و γ باشند. 0 عدد اصلی $\varnothing$ و 1 عدد اصلی هرمجموعهٔ تك عضوی مثلاً $\{0\}$ است.

(یك)–(سه) بدیهی هستند: زیرا $A\cup B=B\cup A$، $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

و $A\bigcup\varnothing=A$. (چهار)-(شش) از دوسویی‌های بدیهی $f:A\times B\to B\times A$ با تعریف $f((a,b))=(b,a)$، $g:(A\times B)\times C\to A\times(B\times C)$ با تعریف

$$g(((a,b),c))=(a,(b,c))$$

و $h:\{0\}\times A\to A$ با تعریف $h((0,a))=a$، نتیجه می‌شوند. (هفت) از برابری $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$ نتیجه می‌شود.

اگر سه حکم آخر مشکلتر به‌نظرمی‌آیند، تنها به‌این علت است که خواننده آشنایی کمتری با مجموعهٔ توابع A^B از B به A دارد. تنها کافی‌است دوسویی‌های مناسبی را طرح‌ریزی کنیم.

(هشت) تابع $f:A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$ را چنین تعریف می‌کنیم که با تابعی چون $\phi:B\bigcup C\to A$ آغاز می‌نماییم، و $\phi_1:B\to A$ را تحدید ϕ به B و $\phi_2:C\to A$ را تحدید ϕ به C می گیریم، وبعد می نویسیم $f(\phi)=(\phi_1,\phi_2)$. این‌تابع f دوسویی‌است.

(نه) تابع $g:A^{B\times C}\to(A^B)^C$ را چنین تعریف می‌کنیم که با تابعی چون $\phi:B\times C\to A$ شروع، وبعد تابع $g(\phi):C\to A^B$ راباا $[g(\phi)](c):B\to A$ تعریف می‌کنیم که هر b از B را به

$$([g(\phi)](c))(b)=\phi((b,c)).$$

می‌نگارد. از آنجا که‌این‌تابع نامأنوس‌تراست، بدنیست نشان دهیم که g یك دوسویی‌است. g یك به‌یك‌است، زیرا اگر به‌ازای دوتابع ϕ و ψ از $B\times C$ به A، $g(\phi)=g(\psi)$، آنگاه

به‌ازای هر $b\in B$ و هر $c\in C$، $([g(\phi)](c))(b)=([g(\psi)](c))(b)$

پس؛ بنابه تعریف،

به‌ازای هر $b\in B$ و هر $c\in C$، $\phi((b,c))=\psi((b,c))$

که به‌این معنی است که $\psi=\phi$.

برای اینکه نشان دهیم g پوشاست، با تابعی چون $\theta\in(A^B)^C$، یعنی $\theta:C\to A^B$، آغاز، و بعد $\phi:B\times C\to A$ را با:

به‌ازای هر $b\in B$ وهر $c\in C$، $\phi(b,c)=[\theta(c)](b)$

تعریف می‌کنیم. همان‌طور که می‌خواستیم، داریم $g(\phi)=\theta$.

(ده) آخرین تساوی بین اعداد اصلی از دوسویی $h:(A\times B)^C\to A^C\times B^C$ نتیجه می‌شود که با نوشتن هر $\phi:C\to A\times B$ برحسب

به‌ازای $c\in C$، $\phi(c)=(\phi_1(c),\phi_2(c))$

وسپس با درج $h(\phi)=(\phi_1,\phi_2)$ به‌دست می‌آید. بررسی جزئیات به‌خواننده واگذار می‌شود. □

اکنون با اعداداصلی، چند محاسبهٔ صریح انجام می‌دهیم. به‌عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ ۳، داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی متناهی n، $n+\aleph_0=\aleph_0+n=\aleph_0$، و

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 \cdot$$

این مطلب نشان می‌دهد که تعریف حاصل تفریق اعــداد اصلی نامتناهی امکان‌پذیر نیست، زیرا $\aleph_0-\aleph_0$ برابرچه باید باشد؟ بنابرنتایج فوق این‌تفاضل‌می‌تواند هرعدد اصلی‌متناهی باشد یا خود $\aleph_0$، پس حاصل تفریق را نمی‌توان به‌طور یکتا تعریف کرد تا

$$\aleph_0-\aleph_0=\alpha \Longleftrightarrow \aleph_0=\aleph_0+\alpha.$$

از قضیهٔ ۴ به‌آسانی نتیجه می‌شود که:

به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $n\aleph_0=\aleph_0 n=\aleph_0$، و

$$\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$$

محاسبهٔ $\aleph_0 0$ جالب است. این مقدار برابر صفر است. در حقیقت داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی β، $0\beta=0$.

این مطلب به‌این دلیل است که:

به‌ازای هرمجموعهٔ B، $A=\varnothing \Rightarrow A\times B=\varnothing$،

زیرا اگر A عضوی نداشته باشد، آنگاه هیچ زوج مرتبی چون (a, b) هم وجود ندارد که درآن $a\in A$ و $b\in B$. واین حاکی‌است که، برحسب اعداد اصلی، صفر برابر بینهایت، بدون توجه به‌اندازهٔ عدد اصلی بینهایت، صفر است.

محاسبهٔ α^0 و α^1 به‌ازای هرعدد اصلی α نیــز آموزنده است. بنــا به‌تعریف، اگر $\alpha=|A|$، آنگاه α^0 عدد اصلی مجموعهٔ توابع از $\varnothing$ به A است. پندار احتمالی شماکــه هیچ تابعی از $\varnothing$ به A وجود ندارد قابل اغماض است، ولی تعریف مجموعــه بنیاد تابعی چون $f:\varnothing\to A$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\varnothing\times A$ تنها یك تابع را به‌دست می‌دهد، و آن زیرمجموعهٔ تهی ازمجموعهٔ $\varnothing\times A$ است. پس $1=\alpha^0$. از آنجاکه $1=|\{0\}|$، α^1 عدد اصلی مجموعهٔ توابع از $\{0\}$ به A است. هرتابع $f:\{0\}\to A$ به‌طور یکتا با عضو $f(0)\in A$ مشخص می‌شــود ، پس تابعــی دوسویی چــون $g: A^{\{0\}}\to A$ بــا تعریف $g(f)=f(0)$ وجود داردکه نشان می‌دهد $|A|=|A^{\{0\}}|$، یــا $\alpha^1=\alpha$. با استفاده از قضیهٔ ۷ (سه) و استقراء، داریم

$$1=(\aleph_0)^0\text{، و به‌ازای هر } n\in\mathbb{N}\text{، } (\aleph_0)^n=\aleph_0.$$

اگر به‌ازای هرعدد اصلی چون α، 2^α را محاسبه‌کنیــم، برحسب مجموعهٔ توانی ، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آوریم. فرض‌کنیم $\alpha=|A|$، آنگاه، از آنجاکه $2=|\{0, 1\}|$، داریم:

$$|\{۰, ۱\}^A| = ۲^\alpha.$$

ولی هر تابعی چون $\phi: A \to \{۰, ۱\}$ دقیقاً متناظر زیرمجموعه‌ای از A است، به‌صورت:

$$\{a \in A | \phi(a) = ۱\}.$$

تابعی چون $f: \{۰, ۱\}^A \to \mathbb{P}(A)$ را با $f(\phi) = \{a \in A | \phi(a) = ۱\}$ تعریف می‌کنیم، آنگاه f دوسویی است؛ و لذا $|\mathbb{P}(A)| = ۲^\alpha$. بنا به‌قضیهٔ ۵ داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی α، $\alpha < ۲^\alpha$.

ترتیب اعداد اصلی

دراین فصل تاکنون در مواردگوناگون چندین مطلب دربارهٔ ترتیب اعداد اصلی اثبات کرده‌ایم. اکنون فرصت خوبی است که این نتایج را جمع‌آوری کنیم و با اثبات احکام باقیمانده فهرست نتایج را جامعتر بنماییم:

قضیهٔ ۸. اگر α، β، γ، و δ اعدادی اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی) آنگاه:

(یك) $\alpha \leqslant \beta,\ \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$،

(دو) $\alpha \leqslant \beta,\ \beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$،

(سه) $\alpha \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$،

(چهار) $\alpha \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\delta$،

(پنج) $\alpha \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha^\gamma \leqslant \beta^\delta$.

اثبات. مجموعه‌هایی‌چون A، B، C، وD با اعداد اصلی α، β، γ، وδ را انتخاب می‌کنیم.

(یك) اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ یك به‌یك باشند، آنگاه $gf: A \to C$ هم یك به‌یك است.

(دو) این همان قضیهٔ شرودر-برنشتاین است.

(سه) اگر $f: A \to B$ و $g: C \to D$ دوسویی‌هایی با شرایط $A \cap B = \varnothing$، و $C \cap D = \varnothing$ باشند، تابع $h: A \cup C \to B \cup D$ را با:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ به‌ازای } \\ g(x) & x \in C \text{ به‌ازای } \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون $A \cap B = \varnothing$، این تابع خوش‌تعریف است، و چون $B \cap D = \varnothing$، از این واقعیت که f و g یك به‌یك هستند نتیجه می‌گیریم که h هم یك به‌یك است.

(چهار) اگر $f: A \to B$ و $g: C \to D$ یك به‌یك باشند، تابع $p: A \times C \to B \times D$ را با:

$$p((a,c))=(f(a),\ g(c))\ \text{،}c\in C \text{ و هر } a\in A \text{ به‌ازای هر}$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که p یك به‌یك است (زیرا اگر $p((a_1,c_1))=p((a_2,c_2))$، آنگاه $(f(a_1),\ g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$، پس $f(a_1)=f(a_2)$ و $g(c_1)=g(c_2)$، و از یك به‌یك بودن f و g نتیجه می‌گیریم که $a_1=a_2$ و $c_1=c_2$).

(پنج) با در نظر گرفتن $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ این مطلب بهتر دیده می‌شود. (اگر $f:A\rightarrow B$ و $g:C\rightarrow D$ یك به‌یك باشند، آنگاه در برهان زیر به‌جای A، B، $f(A)\subseteq B$، و به‌جای C، D، $g(C)\subseteq D$ را در نظر می‌گیریم.) به‌ازای زیرمجموعه‌های $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، برای تعریف $\mu: A^C\rightarrow B^D$ کافی است نشان دهیم که تابعی چون $\phi: C\rightarrow A$ را چگونه می‌توان به‌تابعی چون $\mu(\phi): D\rightarrow B$ توسعه داد. آسانترین راه انجام این امر این است که عضوی چون $b\in B$ را انتخاب، (هرعضوی این کار را انجام می‌دهد؛ مورد استثنایی $B=\varnothing$ با برهانی جداگانه حکم پنج را به‌آسانی نتیجه می‌دهد) وسپس $\mu(\phi)\in B^D$ را با:

$$[\mu(\phi)](d)=\begin{cases}\phi(d) & \text{،}d\in C \text{ به‌ازای } \\ b & \text{،}d\in D-C \text{ به‌ازای }\end{cases}$$

تعریف کنیم. آنگاه $\mu: A^C\rightarrow B^D$ یك به‌یك است زیرا $\mu(\phi_1)=\mu(\phi_2)$ نتیجه می‌دهد که[1]:

$$\text{،}[\mu(\phi_1)](d)=[\mu(\phi_2)](d)\ \text{،}d\in D \text{ به‌ازای هر}$$

به‌خصوص، این امر به‌این معنی است که:

$$\phi_1(d)=\phi_2(d)\ \text{،}d\in C \text{ به‌ازای هر}$$

ولذا $\phi_1=\phi_2$. □

با توجه به آخرین قضیه، خواننده ملاحظه می‌کند که از فهرست خواص قابل انتظار در مورد رابطهٔ ترتیبی، خاصیت جالبی از قلم افتاده است. حکم نکردیم که هردو عدد اصلی با هم قابل‌مقایسه هستند، یعنی اگر α و β دوعدد اصلی باشند، آنگاه یا $\beta\leqslant\alpha$ یا $\alpha\leqslant\beta$. این حکم به‌این منجرمی‌شود که مجموعه‌هایی چون A و B به‌ترتیب با اعداد اصلی α و β را انتخاب کنیم ونشان دهیم که یا تابع یك به‌یکی چون $f:A\rightarrow B$ وجود دارد، یا $g:B\rightarrow A$ (یا هردو). برای ساختن چنین تابع یك به‌یکی، یا باید اطلاعاتی در مورد مجموعه‌های A و B داشته باشیم، یا روش کلی ساختن تابع یك به‌یك مناسبی را بدانیم. اگرمجموعه‌های مشخصی مفروض باشند، می‌توانیم با استفاده از هوش و زیرکی خود به‌طرز ویژه‌ای کوشش کنیم تابعی یك به‌یك از یکی به‌دیگری بسازیم. روشی کلی که به‌ازای همهٔ مجموعه‌ها مؤثر باشد نیازمند صراحت بیشتری درمورد منظورمان از «مجموعه» است. این امرمرزهای نظریهٔ مجموعه‌ها را در فشارمی گذارد. اگرمحدودیتهای مشخصی را برای

---

1. تابع $\mu(\phi): D\rightarrow B$ معمولاً یك به‌یك نیست؛ این تابع را با تابع $\mu: A^C\rightarrow B^D$ اشتباه نگیرید.

اصطلاح «مجموعه» قایل نشویم نمی‌توانیم در بارهٔ مقایسهٔ دوتا از آنها هم صحبت کنیم . نظریـهٔ مجموعه‌هـا به‌گیاه زنـده و بزرگی تبدیل شده است؛ برای بارور کردن آن باید ریشه‌های محکمتری به‌مبانی آن افزود.

تمرین

۱. فرض کنید X مجموعهٔ نقاط (x, y, z) در $\mathbb{R}^۳$ با شرط $x, y, z \in \mathbb{Q}$ باشد. آیا X شمارش‌پذیر است؟

۲. فرض کنید S مجموعهٔ کره‌هـای در $\mathbb{R}^۳$ باشد کـه مراکزشان مختصات گویـا دارند و شعاعشان اعدادی گویا هستند. نشان دهید که S شمارش‌پذیر است.

۳. فرض کنید $[۰, ۱[$ مجموعـهٔ اعداد حقیقی x با شرط $۰ \leqslant x < ۱$ باشد. بـا نوشتن هر عضو این مجموعـه به‌صورت یك بسط اعشاری، ثابت کنید که $[۰, ۱[$ شمارش‌ناپذیر است.

۴. کدام یك از مجموعه‌هـای زیر شمارش‌پذیر است ؟ (هرمورد را اثبات یا رد کنید.)

(الف) $\{n \in \mathbb{N} |$ اول باشد $n\}$،

(ب) $\{r \in \mathbb{Q} \,|r > ۰\}$،

(پ) $\{x \in \mathbb{R} |\, ۱ < x < ۱۰^{۱,۰۰۰,۰۰۰}\}$،

(ت) $\mathbb{C}$،

(ث) $\{x \in \mathbb{R} \,|x^۲ = ۲^a ۳^b$ ،$a, b \in \mathbb{N}$ به‌ازای اعضایی چون$\}$.

۵. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ برابر است با

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leqslant x \leqslant b\},$$

فاصلهٔ باز برابراست با $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|a < x < b\}$، وفاصله‌های نیم‌بازبرابرند با

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|a \leqslant x < b\},$$

$$]a ,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x \leqslant b\}.$$

ثابت کنید به‌ازای $a < b$ و $c < d$، تابع $f:[a, b] \to [c, d]$ با تعریف:

$$f(x) = \frac{(b-x)c}{b-a} + \frac{(x-a)d}{b-a}$$

دوسویی است. نتیجه بگیرید که هردو فاصلهٔ بسته، اعداد اصلی برابر دارند.

همچنین ثابت کنید که اعداد اصلی $[a, b]$، $]a, b[$، $[a, b[$، $]a, b]$ همه بـا هم

برابرند. (راهنمایی: با انتخاب d, c با شرط $a < c < d < b$، و سپس با استفاده از قضیهٔ شرودر- برنشتاین نشان دهید که عدد اصلی $[a, b]$ با اعداد اصلی سه فاصلهٔ دیگر برابر است.)

۶. ثابت کنید که عدد اصلی هر فاصلهٔ بسته، هر فاصلهٔ باز، و هر فاصلهٔ نیم‌باز برابر با $\aleph$ است.

۷. ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی متمایز تعداد شمارش‌پذیری عدد گویا و تعداد شمارش‌ناپذیری عدد گنگ وجود دارند.

۸. تابع دوسویی صریحی از $[۰, ۱]$ به $]۰, ۱[$ بسازید. (اگر به‌طرق دیگری موفق نشدید، از ساختار شرودر- برنشتاین روی توابع یک به یک $f:[۰, ۱] \to]۰, ۱[$ با تعریف $f(x) = \frac{۱}{۲}x$، و $g:]۰, ۱[\to [۰, ۱]$ با تعریف $g(x) = x$، استفاده کنید.)

۹. اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعهٔ دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$|A_۱| + |A_۲| = |A_۱ \cup A_۲| + |A_۱ \cap A_۲|.$$

این مطلب را برای n مجموعهٔ $A_۱$، ...، A_n تعمیم دهید.

۱۰. مثالهای نقیضی پیدا کنید که در هر مورد نشان دهد گزاره‌های کلی زیر به‌ازای اعداد اصلی α، β، و γ نادرست هستند:

(الف) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$،

(ب) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$،

(پ) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^{\gamma} < \beta^{\gamma}$،

(ت) $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma^{\alpha} < \gamma^{\beta}$.

۱۱. (الف) تابع $f:[۰, ۱[\times [۰, ۱[\to [۰, ۱[$ را با

$$f((۰/a_۱a_۲ \dots a_n \dots, ۰/b_۱b_۲ \dots b_n \dots)) = ۰/a_۱b_۱a_۲b_۲ \dots a_nb_n \dots$$

تعریف کنید. و نتیجه بگیرید که $\aleph^۲ = \aleph$.

(ب) با استفاده از $\aleph = ۲^{\aleph_۰}$، و خواص حساب اعداد اصلی، نتیجهٔ (الف) را به‌نحو بهتری اثبات کنید.

(پ) با استفاده از $\aleph\aleph \geqslant \aleph_۰\aleph \geqslant ۱\aleph$، یا به‌روشی دیگر، $\aleph_۰\aleph$ را پیدا کنید.

(ت) به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، $n\aleph$ چیست؟

(ث) ثابت کنید که $\aleph^{\aleph_۰} = \aleph$ و $۲^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$.

(ج) مطلوب است $\aleph_۰^{\aleph}$.

۱۲. اگر عدد اصلی نامتناهی α مفروض باشد، می‌توان نشان داد که عددی اصلی چون β

وجود دارد که $\alpha = \aleph_0 \beta$. با استفاده از این واقعیت نشان دهید که $\aleph_0 \alpha = \alpha$.

۱۳. (اثباتی که با آن، بدون حتی مشخص کردن یکی، کانتور نشان داد که اعداد متعالی هم وجود دارند!)

عددی حقیقی را جبری می‌نامیم اگر جواب یك معادلهٔ چند جمله‌ای چون

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

با ضرایب صحیح باشد. اگر چنین نباشد، آن عدد را متعالی[1] می‌نامیم.

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب صحیح شمارش‌پذیر است.

(ب) نشان دهید که مجموعهٔ اعداد جبری شمارش‌پذیر است.

(پ) نشان دهید برخی از اعداد حقیقی باید متعالی باشند.

(ت) چند عدد متعالی وجود دارد؟

---

۱. اعداد متعالی را اعداد غیرجبری هم می‌گویند.—م.

قسمت IV

تحکیم مبانی

فصلهای ۱۱ و ۱۲ نشان دادند که مطالب عرضه شده چگونه می‌توانند بـه مباحث اصلی ریاضیات، به قلمروهایی بالاتر و بالاتر، بینجامند. ولی فصل آخر این کتاب ما را درجهت عکس، به عمق مطالب، راهنمایی می‌کند.

زیرا حال که چنین ساختمان زیبایی را ساخته‌ایم عاقلانه‌است به‌بررسی مجدد زمینی که بنا روی‌آن قـرار دارد بپردازیم. کاری‌که انجام داده‌ایم این بودکـه به‌جای دستگاه بسیار پیچیدهٔ مشهودات دربـارهٔ اعداد، دستگاه نسبتاً ساده‌تر مشهودات دربارهٔ مجموعه‌ها را قرار دادیم. اساس مجموعــه بنیاد هنوز هم شهودی، وغیرصوری است. اگر خانــه‌ای یك طبقه ساخته بودیم، این موضوع احتمالاً اهمیت چندانی نداشت؛ ولی یك آسمان‌خراش ساخته‌ایم (آسمان‌خراشی که می‌تواند به ارتفاع بسیار بالاتری نیز توسعه یابد)، و اکنون زمان آن رسیده است که زیربنا راکمی عمیق‌تر بررسی‌کنیم وببینیم آیا سنگینی این بنا را می‌تواند تحمل کند. یا، به‌اصطلاح کشاورزان، باید مطمئن شویم کـه ریشه‌ها قدرت تحمل گیاه کاملاً رشد یافته را دارند. ولذا باید خاك را اصلاح کنیم، وکود و بذری بـاکیفیت بهتر به‌کار ببریم.

هدف مـا صرفاً برشمردن کارهایی است‌کـه می‌تواند انجام بگیرد، ونه در واقع انجام دادن آنها؛ لذا به‌طوری غیرصوری دربارهٔ امکان پیداکردن اصول موضوعی برای نظریهٔ مجموعه‌ها بحث خواهیم کرد.

ممکن است چنین به‌نظر آیدکه بحث ما دایره‌ای کامل را طی‌کرده است: وما درست به‌نقطه‌ای که آغازکرده بودیم بازگشته‌ایم، و دلواپس همان مطالب قبلی هستیم. در واقع

چنین نیست: ما به‌طور مارپیچ حرکت کرده‌ایم، به‌همان نقطهٔ اولیه بازگشته‌ایم ولی در سطحی بالاتر. اکنون مسائل موجود، وحل آنها را خیلی بهتر ازقبل می‌شناسیم. مطالبی را که تاکنون مورد بحث قرار داده‌ایم تقریباً برای همهٔ دروس ریاضی دانشگاهی کاملاً کافی هستند. ولی نباید این‌قدر هم ساده‌اندیش باشیم که تصورکنیم به پاسخ کامل ونهایی دست یافته، یا به سرحدکمال رسیده‌ایم.

۱۳

اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها

تاکنون کار ما متمرکز بود حول محور به دست‌آوردن دستگاهی صوری بـرای حساب براساس نظریهٔ مجموعه‌ها. این تحلیل باید درك عمیقی از دستگاههای گوناگون اعداد به‌ما داده باشد که کارشان چگونه است، وموقعیتشان در بین اشیاء کجاست. همچنین باید قوهٔ انتقاد و درك خواننده از قوانین دقیق را قوت بخشیده باشد. ممکن است این قوا چنان قوی شده باشند کـه خواننده بتواند فقدان یك عامل اساسی را ببیند. مـا همهٔ مطالب را به‌صورت اصول موضوعی درآورده‌ایم مگر یك مطلب قابل‌توجه را: خود نظریهٔ مجموعه‌ها.

با توجه به زحماتی کـه درمورد جزئیات ساخت دستگاههای اعداد متحمل شده‌ایم، جای تأسف فراوان خواهد بود اگر مبنایی‌که روی آن کارکرده‌ایم معیوب ازآب درآید وقادر به‌تحمل سنگینی ساختمان عظیمی‌که روی آن بنا شده است نباشد. درتحلیل نهایی، بناکردن نظریهٔ صوری اعداد روی‌نظریهٔ طبیعی، شهودی‌وغیرصوری مجموعه‌هارضایتبخش‌تر ازاین نیست‌که با نظریهٔ طبیعی، شهودی وغیرصوری خود اعداد آغاز کنیم!

با این وجود، هنوزهم می‌توانیم با بازگشتن به‌نقطهٔ آغاز و نیز اصول موضوعه‌ای کردن نظریهٔ مجموعه‌ها ازاین انتقاد واقعاً مخرب رهایی یابیم. (در واقع، بهتر بودکه از ابتدا نظریهٔ مجموعه‌ها را برپایه‌ای اصولی بنا می‌کردیم، ولی‌کاری‌که از واقعیت این‌قدر دور است وهیچگونه آگاهی ازضرورت انجامش وجود نـدارد، مشکلات ذهنی فراوانی ایجاد می‌نماید!) ما نه خیلی عمیق وارد جـزئیات می‌شویم (خوانندگان مشتاق می‌توانند

به‌کتاب مندلسن[1] [۱۰] رجوع کنند)، ونه با روشی خیلی صوری آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. هدف ما صرفاً: روشن‌کردن فرضیات ناخودآگاهی است‌که در مورد مجموعه‌ها پذیرفته می‌شوند، حذف‌کردن برخی ازفرضیات ظاهرالصلاحی است‌که منجر به‌پارادوکس می‌گردند، وارائهٔ فهرستی ازاصول موضوع است‌که رضایتبخش به‌نظر می‌آیند.

ازنظر تاریخی، برخی از ریاضیدانان امید بیشتری داشتند. دراوایل قرن اخیر عده‌ای ازآنان، به‌سرکردگی دیوید هیلبرت[2]، مبادرت به‌نوعی ردیابی آرتوری برای‌حقیقت نمودند: ردیابی پایه‌ای محکم و ثابت برای ریاضیات، وضمانتی‌که حقایق ریاضیات را مطلق جلوه دهد. دراین جهان ناپایدار وناطمئن، تعجب‌آور نیست‌که عاقبت‌الامر همهٔ این امیدها به یأس تبدیل شود.

برخی ازمشکلات

مشکلات نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها دونوع هستند. اول وجود پارادوکسها: نتایج ظاهراً متناقضی‌که ازمنطق ظاهراً بی‌نقص بسه دست می‌آیند. دوم وجود مشکلات کاملاً تکنیکی: آیا اعداداصلی نامتناهی همیشه قابل مقایسه‌اند؟ آیا عددی‌اصلی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود دارد؟

جهت ایجاد انگیزه، دوپارادوکس را درنظر می گیریم. اولی‌که منسوب به برتراند راسل[3] است و درفصل ۳ به‌آن اشاره شد. اگر

$$S=\{x \mid x\notin x\},$$

آنگاه آیا $S\in S$ یا $S\notin S$؟ هریك ازاین دومستقیماً دیگری را نتیجه می‌دهد!

برای پارادوکس دوم، فرض‌کنیم U مجموعهٔ همهٔ اشیاء، مثلاً تعریف شده توسط

$$U=\{x \mid x=x\}$$

باشد. حال به‌ازای هرمجموعهٔ X داریم $X\subseteq U$ به‌خصوص مجموعهٔ توانی $\mathbb{P}(U)\subseteq U$. حال، با توجه به‌اعداد اصلی، داریم:

$$|U|\geqslant|\mathbb{P}(U)|.$$

ولی بنا به‌قضیهٔ ۵ ازفصل ۱۲، داریم.

$$|U|<|\mathbb{P}(U)|.$$

این یك تناقض است: اشکال درچیست؟

پاسخهای بسیاری قابل تصورند، مثلاً:

پاسخ شترمرغ. مشکلات را نادیده بگیرید، شاید برطرف شوند.

---

1. Mendelson 2. David Hilbert 3. Bertrand Russell

پاسخ بدبین. پارادوکسها حاکی از نقایص اجتناب ناپذیر ریاضیات هستند. ریاضیات را رها کنید و رشتهٔ مفیدتری چون بافندگی و یا جامعه‌شناسی را برگزینید.

پاسخ خوش بین. استدلالها را دوباره بیازمایید، منشاء مشکلات را بیابید، وسعی کنید پارادوکسها را به دور بریزید وهرچه را ارزش نگهداری دارد نجات دهید.

اگر موافق شترمرغ هستید: همین‌جا مطالعه را متوقف کنید. اگر موافق بدبین هستید: این کتاب را بسوزانید. واگرموافق خوش بین هستید: به مطالعه ادامه دهید...

مجموعه و کلاس

درچند بخش بعد یك پاسخ ممکن به‌این مسئله موسوم بـه نظریهٔ مجموعه‌های فون‌نویمان-برنیز[1]-گودل[2]، را موردبحث قرارمی‌دهیم. این راه حل ازمشاهدهٔ این مطلب ناشی می‌شود که یك منبع خوش‌ظاهرمشکل‌ساز همان آزادی تشکیل مجموعه‌های عجیب، وبسیاربزرگ، (همچون دومجموعهٔ S و U فوق‌الذکر) است. ظاهراً، همهٔ پارادوکسهای شناخته شده از این گونه راهها «رخنه» می‌کنند. بنابـراین بین دومفهوم فرق قایل می‌شویم. کلاس، کـه می‌توان آن را دسته‌ای دلخواه (چیزی کـه تاکنون بـه‌طور طبیعی «مجموعه» نامیده شده است) پنداشت، و مجموعه، کـه نوعی کلاس معتبر است. بـا این‌ترتیب توانایی تعریف مخلوقات عجیب یـا بزرگ را تنها به‌کلاس محدود می‌کنیم. ایـده این است: وجزئیات تقریباً به‌صورت زیر.

کلاسها به‌عنوان اشیایی ابتدایی وتعریف نشده، همراه با رابطه‌ای چون $\in$ (متناظر مفهوم شهودی عضویت) ونفی آن $\notin$ در نظر گرفته می‌شوند. اگر X و Y دوکلاس باشند لازم است یکی از دوحالت

$$X \in Y\,, \quad X \notin Y$$

برقرار باشد. برابری کلاسها $X=Y$ را با

$$(\forall Z)(Z \in X \Longleftrightarrow Z \in Y)$$

تعریف می‌کنیم. کلاسی چون X را یك مجموعه می‌خوانیم اگر به‌ازای کلاسی چون Y، داشته باشیم $X \in Y$. تعریف قاطع همین است: مجموعـه‌ها اشیایی هستندکـه می‌توانند اعضای اشیایی دیگر باشند. این تعریف با احساس شهودیمان که مجموعه‌ها اشیایی هستند که اشیاء دیگری عضوآن هستند متفاوت است؛ وهمین تفاوت است که تعریف مجموعه‌های بزرگ وعجیب را مشکل می‌سازد. برای‌اینکه این تعریف مؤثر واقع شود، توافق می‌کنیم که عبارتی نظیر

$$\{x \mid P(x)\}$$

---

1. Bernays 2. Gödel

به معنی «کلاس همهٔ مجموعه‌های x که به‌ازای آن $P(x)$ صادق است» باشد. مجبوریم این محدودیت را قایل شویم، زیرا به هرحال تنها مجموعه‌ها می‌توانند اعضای کلاسها باشند؛ این امر پارادوکسها را سد می‌کند.

مثلاً کلاس راسل را درنظر می‌گیریم

$$S = \{X | X \notin X\}.$$

با تعبیر جدید، این، کلاس همهٔ مجموعه‌های X است که $X \notin X$. حال برهان معمول را که به‌تناقض منجر می‌شد مرور می‌کنیم، و می‌بینیم چه اتفاقی می‌افتد. فرض کنیم $S \in S$. آنگاه S عضو شیئی است، لذا مجموعه است، پس $S \notin S$، که تناقض است. حال فرض کنیم $S \notin S$. اگر S مجموعه باشد، آنگاه خاصیت تعریف‌کنندهٔ $X \notin X$ را ارضا می‌کند، ولذا بنا به‌تعریف $S \in S$. این نیز یك تناقض است. حال این امکان می‌ماند که S مجموعه نباشد. دراین حالت نمی‌توانیم استنتاج کنیم که $S \in S$: اعضای S باید مجموعه باشند وعضو خودشان هم نباشند.

نتیجهٔ حاصل ازاین مطلب این است که پارادوکس به دست نمی‌آید: تنها چیزی که به دست می‌آید اثبات این مطلب است که S مجموعه نیست. کلاسهایی که مجموعه نباشند کلاسهای واقعی نامیده می‌شوند؛ هم‌اکنون ثابت کردیم که چنین کلاسهایی وجود دارند. به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که U هم یك کلاس واقعی است، وبازهم پارادوکسی وجود ندارد.

خود اصول موضوع

اکثر اصول موضوع موردنیاز از قبل مشخص هستند، زیرا تنها کاری راکه انجام می‌دهند این است که اشیایی راکه می‌خواهیم حتماً مجموعه باشند، مجموعه می‌سازند. برای سهولت دربیان این اصول، فرض می‌کنیم نمادگذاری متداول نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌طریق واضح، برای کلاسها هم تجهیز شده باشند. مثلاً تعریف می‌کنیم که

$$\varnothing = \{x | x \neq x\}$$

$$\{x, y\} = \{u | y = u \text{ یا } x = u\}$$

والی آخر.

ازاین به‌بعد قرار می‌گذاریم که حروف کوچك x، y، z، ... مجموعه‌هایی را نمایش دهند، وحروف بزرگ X، Y، Z، ... کلاسهایی را، که ممکن است مجموعه باشند یا نباشند.

(م ۱) توسیع‌پذیری. $X = Y \Longleftrightarrow (\forall Z)(X \in Z \Longleftrightarrow Y \in Z)$.

(برابری کلاسها را با «داشتن اعضای یکسان» تعریف کرده‌ایم. این اصل موضوع صرفاً تکنیکی بیان می‌کند که کلاسهای برابر، به اشیاء یکسان تعلق دارند.)

(م ۲) مجموعهٔ تهی. $\varnothing$ یك مجموعه است.

(م ۳) زوج. به‌ازای همهٔ مجموعه‌های x و y، $\{x, y\}$ یك مجموعه است.

حال می‌توانیم مجموعه‌های تك‌عضوی را با $\{x\} = \{x, x\}$ تعریف کنیم، و در این صورت زوجهای مرتب را بااستفاده ازتعریف کوراتوفسکی $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ تعریف می‌کنیم، وبه‌همین‌ترتیب توابع و روابط را همچون قبل.

(م ۴) عضویت. $\in$ یك رابطه است، یعنی، کلاسی چون M متشکل از زوجهای مرتب (x, y) وجود دارد که $(x, y) \in M \Longleftrightarrow x \in y$.

(م ۵) اشتراك. اگر Y، X دو کلاس باشند، $X \cap Y$ یك کلاس است.

(م ۶) متمم. اگر X یك کلاس باشد، متمم آن X^c هم وجود دارد و یك کلاس است.

(م ۷) دامنه. اگر X کلاسی از زوجهای مرتب باشد، کلاسی چون Z وجود دارد که به ازای یك v، $u \in Z \Longleftrightarrow (u, v) \in X$.

ازاینها جالبتر اصل موضوعی است برای تعریف یك کلاس با خاصیتی ازاعضایش، نظیر همان $\{x | P(x)\}$. دراینجا یك اصل کلی را بیان می‌کنیم: درصورت تمایل می‌توان این اصل را از تعدادکمی اصول موضوع خاصتر ازهمان نوع هم به دست آورد.

(م ۸) وجود کلاس. فرض کنیم $\phi(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ گزاره نمای مرکبی باشد که در آن تنها متغیرهای مجموعه‌ای، سوردار ظاهر بشوند. آنگاه کلاسی چون Z وجود دارد که:

$$(x_1, \dots, x_n) \in Z \Longleftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_n).$$

می‌نویسیم

$$Z = \{(x_1, \dots, x_n) | \phi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_n)\}.$$

ملاحظه کنید که دراینجا xها مجموعه هستند. به‌خصوص، اعضای کلاس

$$Z = \{x | P(x)\}$$

مجموعه‌هایی چون x هستند که به‌ازای آنها $\mathbb{P}(x)$ صادق است. این اصل، همان‌طور که درفوق ملاحظه کردیم، ما را ازپارادوکس مصون می‌دارد.

(م ۹) اجتماع. اجتماع مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها یك مجموعه است.

(م ۱۰) مجموعهٔ توانی. اگر x مجموعه باشد، $\mathbb{P}(x)$ نیز مجموعه است.

(م ۱۱) زیرمجموعه. اگر x یك مجموعه و X یك کلاس باشد، آنگاه $x \cap X$ یك مجموعه است.

درپایان، اصل موضوعی وجود دارد که قدری کلی‌تر ازاصل موضوع زیر است:

(م ۱۲) جایگزینی. اگر دامنهٔ تابعی چون f یك مجموعه باشد، آنگاه نگاره‌اش هم یك مجموعه است.

این اصول تقریباً برای همهٔ دستگاههایی که با استفاده ازنظریهٔ مجموعه‌ها ارائه

شدند کافی هستند. ضمناً، همهٔ آنها، حتی اگر خود را تنها به‌مجموعه‌های متناهی هم محدود کنیم، برقرار می‌باشند. بنا بر این اصلی لازم داریم که مبین وجود مجموعه‌های نامتناهی باشد، زیرا درغیراین‌صورت نمی‌توانیم هیچ‌یك از دستگاههای اعداد مورد علاقهٔ خودمان را بسازیم. بنابراین اصل موضوع دیگری راکه درفصل ۸ معرفی کردیم اضافه می‌نماییم (ابتکار فون نویمان):

(م ۱۳) اصل موضوع بینهایت. مجموعه‌ای چون x وجود داردکه $\varnothing \in x$، وهرگاه $y \in x$ آنگاه $y \bigcup \{y\} \in x$.

با استفاده ازتعریف فون‌نویمان برای اعداد طبیعی، این اصل موضوع به‌این حکم بدل می‌شودکه اعداد طبیعی یك مجموعه تشکیل می‌دهند. کاملاً بدیهی است که بدون پذیرش چنین حکمی، نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند چندان مفید باشد.

سیزده اصلی راکه برشمردیم تقریباً برای همهٔ کارهای قبلیمان کافی هستند؛ البته اثبات جزئیات (طبق معمول) قدری پیچیده وکسالت‌آور است. با این وجود، برخی از مسائل مربوط به‌فصل اعداد اصلی نیاز به‌اصول موضوع ظریفتر دیگری هم دارند.

اصل موضوع انتخاب

درقضیهٔ ۱ ازفصل ۱۲ ازاستدلالی استفاده کردیم که عضوی چون x_1 ازیك مجموعهٔ B انتخاب شد، سپس x_2 از $B-\{x_1\}$، . . . ، وبه‌طور کلی عضوی چون x_{n+1} از $B-\{x_1,\dots,x_n\}$. اگرچه این استدلال مانند یك استدلال بازگشتی به نظر می‌رسد، ولی درقضیهٔ ۲ فصل ۸ نمی‌گنجد،زیرا x_{n+1} به‌دلخواه انتخاب‌می‌شود ونه برحسب تابع‌مشخص ازقبل‌تعیین‌شده‌ای. اجمالاً اینکه، این روش ازما می‌خواهد «بینهایت انتخاب دلخواه» انجام بدهیم. می‌توان ثابت کرد (البته نه به‌آسانی) که فهرست اصول موضوع ارائه شده تا اینجا برای توجیه این مطلب کافی نیست. بنابراین اصل موضوع دیگری را هم بیان می‌کنیم:

(م ۱۴) اصل موضوع انتخاب. اگر $\{x_\alpha\}_{\alpha\in a}$ خانوادهٔ اندیس شده‌ای ازمجموعه‌ها (با مجموعهٔ اندیسی چون a) باشد آنگاه تابعی چون f وجود داردکه:

$$f : a \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in a} x_\alpha$$

و

$$\text{به‌ازای هر } \alpha \in a\text{،}\quad f(\alpha) \in x_\alpha .$$

به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر $\alpha \in a$، f عضوی از x_α را «برمی‌گزیند». کلاً درك شهودی این اصل دشوار، ولی امروزه علت بیانش قابل فهم است. نه صادق‌بودنش اصول (م ۱)–(م ۱۳) را نقض می‌کند و نه‌کاذب بودنش (همان‌طورکه نه صادق بودن و نه‌کاذب بودن قانون جابه‌جایی، متناقض‌اصول موضوع تعریف گروه است: هم گروههای جابه‌جایی وجود دارند وهم گروههای غیرجابه‌جایی). واقعیت اول را کورت گودل درسال ۱۹۴۰ اثبات

کرد، و واقعیت دوم را (مسئله‌ای که مدتها لاینحل بود) پال کهن[1] در ۱۹۶۳. ازاین‌رو در ریاضیات معمول است که درصورت استفاده ازاصل موضوع انتخاب به‌آن اشاره شود، حال آنکه به‌طور معمول ازاصول موضوع عادی (م ۱)-(م ۱۳) ذکری به میان نیاید.

با پذیرفتن اصل موضوع انتخاب می‌توانیم یك سر سست بحث را محکم کنیم. این اصل نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر دومجموعهٔ x و y، یا داریم $|y| \geqslant |x|$ یا $|x| \geqslant |y|$. (برای اثبات آن به صفحهٔ ۱۹۸ کتاب مندلسن [۱۰] رجوع شود.)

فرض پیوستار که هیچ عدد اصلی نامتناهی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد نیز همین‌طور است: نه صادق بودنش (م ۱)-(م ۱۳)، یا حتی (م ۱)-(م ۱۴)، را نقض می‌کند و نه کاذب بودنش. اثبات‌این حقایق نیز کار گودل وکهن است. شاید شگفت‌آور باشد که جواب مسئله‌ای به این صراحت این‌قدر نامشخص باشد؛ ولی نشان می‌دهد که این مسائل چه‌اندازه ظریف هستند.

گه‌گاه اصول موضوع دیگری هم پیشنهاد شده‌اند؛ و امروزه بسیاری از روابط موجود بین آنها هم کاملاً قابل درك اند. وما خواننده را به کتابهای تخصصی‌تری ارجاع می‌دهیم.

سازگاری

حال، آخرین مسئله راکه باید با آن مواجه شویم مورد بحث قرار می‌دهیم. پس از پذیرفتن اصول موضوع، چطور می‌دانیم که هیچ پارادوکسی رخ نمی‌دهد؟ یقیناً چنین به‌نظر می‌رسد که از آنها اجتناب کرده‌ایم (مثلاً، تاکنون هیچ کس نتوانسته است حتی یك پارادوکس هم پیداکند)، ولی چطور می‌توانیم مطمئن باشیم که هیچ تناقضی ازنظر مخفی نمانده است؟ دراین زمان جوابی قطعی ونهایی برای این مطلب وجود دارد. متأسفانه، جواب این است: هرگز نمی‌توانیم مطمئن باشیم.

برای توضیح این مطلب باید به عصر دیوید هیلبرت بازگردیم. دستگاهی از اصول موضوع را سازگار می‌خوانیم اگر به تناقض منجر نشود. هیلبرت می‌خواست ثابت کند که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار هستند.

اثبات این‌مطلب برای برخی از دستگاههای اصول موضوع آسان است. اگر بتوانیم الگویی برای آن اصول پیداکنیم؛ یعنی، دستگاهی پیداکنیم که‌این‌اصول را ارضا کند، آنگاه این اصول باید سازگار باشند (درغیر این صورت الگو نمی‌تواند وجود داشته باشد). اشکال این است که استفاده ازچه موادی را برای ساختن الگو مجاز بدانیم؟ عموماً براین نکته اتفاق‌نظر دارند که ازیك الگوی متناهی نباید صرفنظر کرد، زیرا هرحکم درمورد آن‌را، اصولاً در زمانی محدود می‌توان بررسی کرد. اما، به عنوان مثال، اصل موضوع بینهایت به‌این معنی است که نمی‌توان یك الگوی متناهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها پیداکرد. ایدهٔ هیلبرت این بودکه چیزی با قیدکمتر هم کافی است. وی آن چیز را فرایند

---

1. Cohen

تصمیم می‌خواند. این، به اصطلاح، یك برنامهٔ کامپیوتری متناهی است که وقتی با فرمولی از نظریهٔ مجموعه‌ها تغذیه شود، فرایندی را به‌کار می‌برد و تصمیم می‌گیرد که آن فرمول صادق است یا نه (نظیر روش جدول درستی برای قضیه‌ها). اگر بتوانیم چنین برنامه‌ای را پیدا کنیم، و ثابت نماییم که همیشه مؤثر است، آنگاه می‌توانیم به‌آن معادلهٔ

$$0 \neq 0$$

را بخورانیم و ببینیم پاسخ چیست. اگر جواب «صادق» باشد آنگاه اصول موضوع باید ناسازگار باشند، زیرا می‌توانیم نشان دهیم که هرتناقضی حکم فوق را ایجاب می‌کند (با کمك تناقض از استدلالی خالی استفاده کنید: دریك دستگاه ناسازگار هرحکمی صادق است!). برای مدتی چنین تصور می‌شد که ایدهٔ هیلبرت ممکن است مؤثر باشد.

آنگاه کورت گودل، با اثبات دوقضیه، همهٔ امیدها را برباد داد. قضیهٔ اول اینکه در نظریهٔ مجموعه‌ها قضیه‌های صادقی وجود دارند که نه اثباتی برای آنها وجود دارد و نه تکذیبی. دوم اینکه: اگر نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار هم باشد، هیچ فرایند تصمیمی وجود ندارد که سازگاری آن را اثبات کند.

اثبات قضیه‌های گودل بسیار فنی هستند: رئوس این اثباتها درصفحات ۲۹۴ــ۲۹۵ کتاب استیوارت [۱۵] داده شده‌اند. ولی این قضیه‌ها امید هیلبرت برای اثبات سازگاری کامل را به‌یأس مبدل می‌سازند.

آیا، با این همه، این به این معنی است که جستجو برای منطقی دقیقتر در ریاضیات عبث است؟ اگر قرار باشد که سرانجام کل مطلب درهوا معلق بماند، به‌نظر دربدو امر هم به زحمتش نمی‌ارزد. این مؤکداً نتیجه‌ای نیست که باید اتخاذ شود. بدون جستجوی صحیحی برای دقت، هرگز قضیه‌های گودل حاصل نمی‌شدند. کاری راکه این‌قضیه‌ها انجام می‌دهند آشکارساختن مسائل معینی است که جزء لاینفك خود روش اصل موضوعی هستند. آنها روش اصل موضوعی را باطل جلوه نمی‌دهند: برعکس، روش اصل موضوعی چارچوب مناسبی برای کل ریاضیات جدید، و الهامی برای توسعهٔ ایده‌های نو، ارائه می‌دهد. ولی با توجه به‌قضیه‌های گودل می‌توانیم ازاین خیال باطل که هرچیزی بی‌نقص است اجتناب کنیم، و محدودیتها و همچنین تواناییهای روش اصل موضوعی را بهتر درك نماییم.

تمرین

۱. نشان دهیدازاصل‌موضوع انتخاب نتیجه‌می‌شودکه اگر $f: A \to B$ پوشا باشد، آنگاه $|B| \leqslant |A|$. برعکس، براساس اصول موضوع دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها، ثابت کنید که حکم دوم، اصل موضوع انتخاب را ایجاب می‌کند.

۲. اگردسته‌ای‌ازمجموعه‌ها چون $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ اندیس‌شده بامجموعه‌ای مانند A مفروض باشد،

حاصلضرب دکارتی آنها با مجموعهٔ همهٔ توابعی چون $f: A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ که $f(\alpha) \in X_\alpha$ تعریف می‌شود. نشان دهیدکه به‌ازای $A=\{۱, ۲, \ldots, n\}$، این تعریف متناظر تعریف معمولی $X_۱ \times X_۲ \times \ldots \times X_n$ است.

ثابت‌کنیدکه اصل موضوع انتخاب معادل این حکم است‌که هرحاصلضرب دکارتی مجموعه‌های غیرتهی، خود غیرتهی است.

۳. نشان دهیدکه دراثبات قضیهٔ ۱ ازفصل ۱۲ نوعی انتخاب به‌کار می‌رود. آن‌انتخاب را برحسب تابعی از یك مجموعه از زیرمجموعه‌های B به B بیان‌کنید. آیا دراین مورد لازم است‌که همهٔ زیرمجموعه‌های B، درانتخاب شرکت داده شوند؟

۴. گمان گلدباخ (تمرین ۱۳ درآخـر فصل ۸) راکـه بیان می‌کند هرعدد صحیح زوج مجموع دوعدد اول است، مجدداً مورد بررسی قرار دهید. تعداد دلخواهی از حالات این گمان را بررسی‌کنید وببینید آیا هیچ الگویی برای اعداد اولی‌که ظاهر می‌شوند وجود دارد. خود را متقاعدکنیدکه گمان گلدباخ می‌تواند صادق باشد ولی اثباتی‌که همهٔ موارد را دربرگیرد وجود نـدارد. ازطرف دیگر، همیشه این امکان وجود داردکه‌گمان گلدباخ به‌ازای عدد صحیح بسیار بزرگی‌که هنوز ما آن را پیدا نکرده‌ایم، کاذب باشد.

۵. اگر گزاره‌نمای معتبری چون $P(n)$ به‌ازای هر n در $\mathbb{N}$، چنان باشدکه برای هر $P(n)$ طبق مندرجات درفصل ۶ اثباتی بـا تعدادی متناهی سطر وجود داشته باشد، آیـا عاقلانه است انتظار داشته باشیم‌که اثباتی به همین معنی برای

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

هم وجود داشته باشد؟

۶. پیشگفتار ومقدمـهٔ هریك ازچهارقسمتی کـه‌کتاب را تشکیل می‌دهند مطالعه‌کنید. حال تمرینهای انتهای فصل یك را مرور کنید. اگر هنوز هم حلهای مکتوبی را کـه برای بار اول، فصل یك را می‌خواندید داریـد، چه خوب. اگر ایـن کتاب به مقصود خود رسیده باشد، نظرتان درمورد بسیاری ازاین مباحث عوض شده وبه‌کمال رسیده است. اکنون در موقعیتی هستیدکه نوع تفکـر مورد استفاده در ریاضیات پیشرفته‌تر را بهتر درك می‌کنید، ضمناً ایده‌هایی، درمورد نوع مسائل موجود درمبانی ریـاضیات‌که ارزش مطالعهٔ بیشتری دارند، هم به دست آورده‌اید.

منابع

فهرستی از کتابهای برگزیده که برای مطالعهٔ بیشتر مناسب اند (و از جمله کتابهایی که در داخل متن مورد ارجاع قرار گرفته‌اند) در زیر آمده است. کتابهایی که مطالعهٔ آنها به‌معلومات ریاضی اضافی نیاز دارد، با علامت ستاره مشخص شده‌اند.

WE list below a selection of books suitable for further reading (and including those referred to in the text). Those which require extra mathematical background are marked with an asterisk.

1.* ARTIN, E. (1959). *Galois theory*. Notre Dame, Indiana.
2. CLAPHAM, C. R. J. (1969). *Introduction to abstract algebra*. Routledge & Kegan Paul.
3. COXETER. H. S. M. (1961) *Introduction to geometry*. Wiley.
4. FOWLER, D. H. (1973). *Introducing real analysis*. Transworld Student Library.
5. GREEN, J. A. (1965). *Sets and groups*. Routledge & Kegan Paul.
6. —— (1958). *Sequences and series*. Routledge & Kegan Paul.
7. HALMOS, P. R. (1960). *Naive set theory*. Van Nostrand.
8. HILTON, P. J. and GRIFFITHS, H. B. (1970). *A comprehensive textbook of classical mathematics: a contemporary interpretation*. Van Nostrand Reinhold.
9. KLINE, M. (1969). *Mathematics in the modern world: readings from Scientific American*. Freeman.
10.* MENDELSON, E. (1964). *Introduction to mathematical logic*. Van Nostrand.
11. MUNKRES, J. R. (1964). *Elementary linear algebra*. Addison-Wesley.
12. NAGEL, E. and NEWMAN, J. R. (1958). *Gödel's proof*. Routledge & Kegan Paul.
13. SKEMP, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penguin.
14. SPIVAK, M. (1967). *Calculus*. Benjamin.
15. STEWART, I. N. (1975). *Concepts of modern mathematics*. Penguin.
16.* —— (1973). *Galois theory*. Chapman & Hall.

اسامی خاص

فهرست نمادها

واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

abelian group	گروه آبلی
absolute value [→ modulus]	قدرمطلق
addition	جمع
algorithm	الگوریتم
Archimedes' condition	شرط ارشمیدس
arithmetic	حساب
_modulo n	حساب به‌پیمانهٔ n
_of decimals	حساب اعداد اعشاری
associative	شرکت‌پذیر
automorphism	خودریختی
axiom	اصل موضوع
_of choice	اصل موضوع انتخاب
_of infinity	اصل موضوع بینهایت
_s of real numbers	اصول موضوع اعداد حقیقی
axiomatic system	دستگاه اصل موضوعی
bijection	دوسویی
binary operation	عمل دوتایی
bounded	کراندار
cardinal arithemetic	حساب اعداد اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی

class	کلاس [← رده]
codomain	همدامنه
collection	دسته
commutative	جابه‌جایی
complement	متمم
complete ordered field	میدان مرتب کامل
completeness axiom	اصل کمال
complex number	عدد مختلط
complex quaternion	چهارگان مختلط
composition	ترکیب
compound	مرکب
concept formation	تشکل مفهوم
congruence	همنهشتی
–class	ردهٔ همنهشتی
–modulo n	همنهشتی به‌پیمانهٔ n
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
–of a complex number	مزدوج یك عدد مختلط
connective	رابط
consistency	سازگاری
contextual technique	تکنیك ضمنی
continuum hypothesis	فرض پیوستار
contradiction	تناقض
contrapositive	عکس نقیض
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
coprime	متباین
corollary	نتیجه
countable set	مجموعهٔ شمارش‌پذیر
counting	شمارش
decimal expansion	بسط اعشاری
decreasing	نزولی
deduction	استنتاج
definition	تعریف

difference	تفاضل
disjoint	مجزا
distributive	پخشی
divergent	واگرا
division	تقسیم [← بخش]
_algorithm	الگوریتم تقسیم
_ring	حلقهٔ بخشی
divisor [→ factor]	مقسوم‌علیه [← عامل]
domain	دامنه
Egyptian addition	جمع مصری
element [→ member]	عنصر [← عضو]
empty [→ null]	تهی [← پوچ]
_set	مجموعهٔ تهی
equation	معادله
equivalence	هم‌ارزی [← تعادل]
_class	ردهٔ هم‌ارزی
_relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Euclidean algorithm	الگوریتم اقلیدسی
existential quantifier	سور وجودی
extensionality	توسیع‌پذیری
factor [→ divisor]	عامل [← مقسوم‌علیه]
family	خانواده
field	میدان
finite	متناهی [← با پایان]
formal	صوری
formalization	صورتگرایی
fraction	کسر
function	تابع
_of several variables	تابع چند متغیره
general Principle of induction	اصل عمومی استقرا
graph	نمودار
greatest element	بزرگترین‌عضو
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین

group	گروه
highest [→ greatest]	بزرگترین
_common factor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك
hypercomplex number	عدد فوق‌مختلط
hypothesis	فرض
identity	همانی
_element	عضو همانی
_function	تابع همانی
if and only if	اگر و فقط اگر
image [→ range]	نگاره [← برد]
implication	استلزام
inclusion	شمولی
_function	تابع شمولی
increasing	صعودی
index set	مجموعهٔ اندیس
indexed family of sets	خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها
induction	استقرا
_axiom	اصل موضوع استقرا
_hypothesis	فرض استقرا
inductive set	مجموعهٔ استقرایی
infinite	نامتناهی [← بی‌پایان]
injection [→ one to one]	تك‌گزین [← يك به‌يك]
integer	عدد صحیح
intersection	اشتراك
inverse	وارون
irrational number	عدد گنگ
isomorphism	یکریختی
least upper bound	کوچکترین کران بالا
lemma	لم
limit	حد
logical equivalence	معادل منطقی
lower bound	کران پایین

map [→ mapping]	نگاشت
mapping [→ map]	نگاشت
mathematical induction	استقرای ریاضی
member [→ element]	عضو [← عنصر]
membership	عضویت
model	الگو
modifier	ناقض
module	مدول
modulo	پیمانه
modulus [→ absolute value]	قدرمطلق [← پیمانه]
monoid	تکواره
n_tuple	nتایی
natural number	عدد طبیعی
negation	نقیض
null	پوچ [← تهی]
_set	مجموعهٔ تهی
number	عدد
_systems	دستگاههای اعداد
one to one [→ injection]	یك به‌یك
onto [→ surjection]	پوشا
order	ترتیب
_isomorphism	یکریختی ترتیبی
_relation	رابطهٔ ترتیبی
_ordered pair	زوج مرتب
partial order	ترتیب جزئی
partially ordered set	مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب
partition	افراز
place_value	ارزش مکانی
power set	مجموعهٔ توانی
predicate	گزاره‌نما [منطق]، خبر [فارسی]
prime	اول
_factorization	تجزیه به‌عوامل اول

_number	عدد اول
principle of duality	اصل دوگانی
proof	اثبات
_by induction	اثبات به‌روش استقرا
_by the contrapositive	اثبات با عکس نقیض
proper	سره [→ واقعی]
_factor	عامل [مقسوم‌علیه] واقعی
_subset	زیرمجموعهٔ سره
proposition [→ theorem]	حکم [→ قضیه]
quantifier	سور
quaternion	چهارگان
quotient	خارج قسمت
range [→ image]	برد [→ نگاره]
rational	گویا
_function	تابع گویا
_number	عدد گویا
real	حقیقی
_line	خط حقیقی
_number	عدد حقیقی
recursion theorem	قضیهٔ بازگشتی
reflexive	انعکاسی
relation	رابطه
replacement axiom	اصل جایگزینی
restriction	تحدید
ring	حلقه
rule of inference	قاعدهٔ استنباط
schema	طرح
semigroup	نیم‌گروه
sequence	دنباله
set of sets	مجموعه‌ای از مجموعه‌ها
singleton	مجموعهٔ تک عضوی
statement	گزاره

strict	اکید
—order	ترتیب اکید
—relation	رابطهٔ ترتیبی اکید
subfield	زیرمیدان
subgroup	زیرگروه
subring	زیرحلقه
subset	زیرمجموعه
successor	تالی
—set	مجموعهٔ تالی
surjection [→ onto]	پوشا
symmetric	متقارن
—difference	تفاضل متقارن
tautology	توتولوژی
theorem [→ propsition]	قضیه
transcendental number	عدد متعالی [← عدد غیرجبری]
transitive	متعدی
triangle inequality	نامساوی مثلثی
trichotomy law	قانون سه‌گانگی
truth	ارزش [← درستی]
—function	تابع ارزش
—table	جدول ارزش
—value	ارزش درستی
uncounltable	شمارش ناپذیر
union	اجتماع
unity	یکه
universal set	مجموعهٔ جامع
universal quantifier	سورعمومی
universe of discourse	عالم سخن
upper bound	کران بالا
vacuous reasoning	برهان به‌انتفای مقدم
vector space	فضای برداری
venn diagram	دیاگرام ون

weak order relation	رابطهٔ ترتیبی ضعیف
well defined	خوش تعریف
well ordered	خوش ترتیب
well ordering principle	اصل خوش ترتیبی
zero divisor	مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آبلی	abelian
اثبات	proof
ـ با برهان خلف	proof by contradiction
ـ با عکس نقیض	proof by the contrapositive
ـ به‌روش استقرا	proof by induction
ارزش [← درستی]	truth
ـ درستی	truth value
ـ مکانی	place-value
استقرا	induction
ـ ی ریاضی	mathematical induction
استلزام	implication
استنتاج	deduction
اشتراك	intersection
اصل	principle
ـ خوش ترتیبی	well ordering principle
ـ دوگانی	principle of duality
ـ عمومی استقرا	general principle of induction
اصل موضوع	axiom
ـ استقرا	induction axiom
ـ انتخاب	axiom of choice
ـ بینهایت	axiom of infinity
ـ کمال	completeness axiom

اصول موضوع	axioms
ـ اعداد حقیقی	axioms of real numbers
ـ پئانو	peano axioms
اعشاری	decimal
افراز	partition
اگر و فقط اگر	if and only if
الگوریتم	algorithm
ـ اقلیدسی	Euclidean algorithm
ـ تقسیم	division algorithm
nتایی	n-tuple
اندیس	index
با پایان [← متناهی]	finite
بازگشتی	recursion
بخش [← تقسیم]	division
برد [← نگاره]	range [→ image]
بردار	vector
برهان به‌انتفای مقدم	vacuous reasoning
بزرگترین	greatest [→ highest]
ـ عضو	greatest element
ـ کران پایین	greatest lower bound
ـ مقسوم‌علیه مشترك	highest common factor
بسط اعشاری	decimal expansion
بی‌پایان [← نامتناهی]	infinite
پخشی	distributive
پوشا	surjection [→ onto]
پیمانه	modulo
تابع	function
ـ ارزش	truth function
ـ چند متغیره	function of several variables
ـ شمولی	inclusion function
ـ گویا	rational function
ـ همانی	identity function
تالی	successor

تجزیه به‌عوامل اول	prime factorization
تحدید	restriction
ترتیب	order
ـ جزئی	partial order
ترکیب	composition
تشکل مفهوم	concept formation
تعریف	definition
ـ به‌استقرا	definition by induction
تفاضل	difference
ـ متقارن	symetric difference
تقسیم [⟵ بخش]	division
تك‌گزین [⟵ یك به‌یك]	injection [→ one to one]
تکنیك ضمنی	contextual technique
تکواره	monoid
تناقض	contradiction
توتولوژی	tautology
توسیع پذیری	extensionality
تهی [⟵ پوچ]	empty [→ null]
جا به‌جایی	commutative
جدول ارزش	truth table
جمع مصری	egyptian addition
چهارگان	quaternion
ـ مختلط	complex quaternion
حاصلضرب	product
ـ دکارتی	cartesian product
حد	limit
حساب	arithmetic
ـ اعداد اصلی	cardinal arithmetic
ـ اعداد اعشاری	arithmetic of decimals
ـ به‌پیمانهٔ n	arithmetic modulo n
حلقه	ring
ـ بخشی	division ring

خارج قسمت	quotient
خانواده	family
ـ اندیس‌دار از مجموعه‌ها	indexed family of sets
خط حقیقی	real line
خودریختی	automorphism
خوش‌ترتیب	well ordered
خوش‌تعریف	well defined
دامنه	domain
درستی [← ارزش]	truth
دستگاه اصل موضوعی	axiomatic system
دستگاههای اعداد	number systems
دسته	collection
دنباله	sequence
ـ پوچ	null sequence
دوتایی	binary
دوسویی	bijection
دیاگرام	diagram
ـ ون	venn diagram
رابط	connective
رابطه	relation
ـ ترتیبی	strict order relation
ـ اکید	order relation
ـ ضعیف	weak order relation
ـ هم‌ارزی	equivalence relation
ردهٔ هم‌ارزی	equivalence class
ردهٔ همنهشتی	congruence class
زوج مرتب	ordered pair
زیرحلقه	subring
زیرگروه	subgroup
زیرمجموعه	subset
زیرمیدان	subfield
سازگاری	consistency
سور	quantifier

universal quantifier	ـ عمومی
existential quantifier	ـ وجودی
archimedes' condition	شرط ارشمیدس
associative	شرکت‌پذیر
counting	شمارش
countable	ـ پذیر
uncountable	ـ ناپذیر
increasing	صعودی
formal	صوری
schema	طرح
universe of discourse	عالم سخن
factor	عامل [⟵ مقسوم‌علیه]
number	عدد
cardinal number	ـ اصلی
prime number	ـ اول
real number	ـ حقیقی
integer number	ـ صحیح
natural number	ـ طبیعی
hyper complex number	ـ فوق مختلط
irrational number	ـ گنگ
rational number	ـ گویا
transcendental number	ـ متعالی
complex number	ـ مختلط
member [⟶ element]	عضو [⟵ عنصر]
identity element	ـ همانی
membership	عضویت
contrapositive	عکس نقیض
binary operation	عمل دوتایی
element [⟶ member]	عنصر [⟵ عضو]
hypothesis	فرض
induction hypothesis	ـ استقرا

ـ پیوستار	continuum hypothesis
فضای برداری	vector space
قاعدهٔ استنباط	rule of inference
قانون سه‌گانگی	trichotomy law
قدرمطلق [← پیمانه]	absolute value [→ modulus]
قضیه	theorem [→ proposition]
ـ بازگشتی	recursion theorem
کران پایین	lower bound
کراندار	bounded
کسر	fraction
کلاس [← رده]	class
کمال	completeness
کوچکترین کران بالا	least upper bound
گروه	group
گزاره	statement
گزاره‌نما [منطق]، خبر [فارسی]	predicate
گویا	rational
لم	lemma
متباین	coprime
متعدی	transitive
متقارن	symetric
متمم	complement
متناهی [← باپایان]	finite
مجموعه	set
ـ ای از مجموعه‌ها	set of sets
ـ استقرایی	inductive set
ـ اندیس	index set
ـ به‌طور جزئی مرتب	partially ordered set
ـ تالی	successor set
ـ تك عضوی	singleton set
ـ توانی	power set

empty set [→ null set]	ـــ تهی
universal set	ـــ جامع
countable set	ـــ شمارش‌پذیر
module	مدول
compound	مرکب
conjugate	مزدوج
equivalence	معادل [←― هم‌ارزی]
logical equivalence	ـــ منطقی
equation	معادله
divisor [→ factor]	مقسوم‌علیه [←― عامل]
zero divisor	ـــ صفر
field	میدان
ordered field	ـــ مرتب
complete ordered field	ـــ کامل
modifier	ناقض
infinite	نامتناهی
triangle inequality	نامساوی مثلثی
corollary	نتیجه
decreasing	نزولی
negation	نقیض
image [→ range]	نگاره [←― برد]
map [→ mapping]	نگاشت
semigroup	نیم‌گروه
inverse	وارون
divergent	واگرا
identity	همانی
codomain	همدامنه
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
congruent	همنهشت
congruence	همنهشتی
congruence modulo n	ـــ به پیمانهٔ n

یک به یک	one to one
یکریختی	isomorphism
— ترتیبی	order isomorphism
یکه	unity

فهرست راهنما