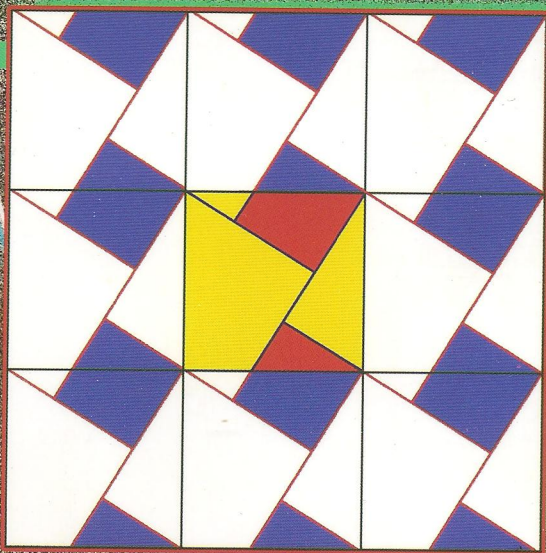




مرکز پژوهش‌ها
و تحقیقات ریاضی

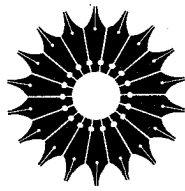
مبانی فیزیک ریاضیاتی

جلد اول



صدری حسنی

ترجمهٔ محمد هادی هادی زاده
محسن سربیشه ای



مبانی فیزیک ریاضیاتی

جلد اول

صدوری حسنی

ترجمه

محمدهادی هادی زاده، محسن سریشهای

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار مقدمات ریاضی
۱	۱-۰ عملیات روی مجموعه‌ها
۳	۲-۰ حاصلضربهای دکارتی
۴	۳-۰ نگاشت
۶	۴-۰ فضاهای متریک
۹	۵-۰ عدد اصلی مجموعه
۱۱	۶-۰ نمادگذاری
۱۵	۱ بردارهای واقع در صفحه و در فضا
۱۵	۱-۱ خواص اساسی بردارهای واقع در صفحه
۲۱	۲-۱ تبدیل مؤلفه‌ها
۲۵	۳-۱ ضرب داخلی
۳۷	۴-۱ بردار در فضا
۵۰	۵-۱ آنالیز برداری در مختصات دکارتی
۸۶	۶-۱ آنالیز برداری در مختصات خمیده خطی
۱۰۸	۷-۱ خلاصهٔ اتحادهای برداری
۱۱۴	۲ فضاهای برداری متناهی-بعد ۱ : بردارها و عملگرها
۱۱۴	۱-۲ فضاهای برداری
۱۲۵	۲-۲ حاصلضرب داخلی (اسکالر)
۱۳۸	۳-۲ عملگرهای خطی
۱۸۸	۴-۲ جایگشتها
۲۰۱	۳ فضاهای برداری متناهی-بعد ۲ : ماتریسها و تجزیهٔ طیفی
۲۰۱	۱-۳ ماتریسها
۲۱۶	۲-۳ پایه‌های راست‌هنجار

۲۲۱	تغییر پایه و تبدیلهای تشابهی	۳-۳
۲۲۶	دترمینان و رد	۴-۳
۲۵۲	حاصل جمعهای مستقیم و زیرفضاهای ناورد	۵-۳
۲۶۰	تجزیه و قطری کردن طیفی	۶-۳
۳۰۸	هندسه دیفرانسیل و آنالیز تانسوری	۴
۳۰۹	جبر تانسوری	۱-۴
۳۵۷	بردارها و خمینه‌ها	۲-۴
۳۷۶	آنالیز تانسوری روی خمینه‌ها	۳-۴
۳۸۰	حساب دیفرانسیل و انتگرال برونی	۴-۴
۴۱۶	فضاهای برداری نامتناهی-بعد (فضاهای توابع)	۵
۴۱۶	مسئله همگرایی	۱-۵
۴۲۵	توزیعها (توابع تعمیم‌یافته)	۲-۵
۴۴۸	فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی	۳-۵
۵۰۱	سری و تبدیلهای فوریه	۴-۵
۵۵۴	آنالیز مختلط ۱: جبر و حسابان مختلط	۶
۵۵۵	اعداد مختلط و جبر آنها	۱-۶
۵۷۱	توابع یک متغیر مختلط	۲-۶
۶۰۳	انتگرال‌گیری از توابع مختلط	۳-۶
۶۲۸	آنالیز مختلط ۲: حساب مانده‌ها	۷
۶۲۸	سریهای توابع مختلط	۱-۷
۶۵۳	حساب مانده‌ها	۲-۷
۶۸۳	توابع چندمقداری	۳-۷
۶۹۳	تداوم تحلیلی	۴-۷
۷۰۶	روش تندترین کاهش	۵-۷
۷۲۰	معادلات دیفرانسیل ۱: جداسازی متغیرها	۸
۷۲۲	معادله‌های دیفرانسیل جزئی معمولی و جداسازی زمان	۱-۸
۷۲۹	جداسازی در مختصات دکارتی	۲-۸
۷۳۲	جداسازی در مختصات استوانه‌ای	۳-۸
۷۳۶	جداسازی در مختصات کروی	۴-۸

پیشگفتار

مقدمات ریاضی

ریاضیات جدید با مفهوم اساسی (و تعریفناپذیر) مجموعه آغاز می‌شود. ما مجموعه را خانواده، یا گردابه‌ای بدون ساختار از اشیاء تلقی می‌کنیم. مثلاً مجموعه دانشجویان یک دانشکده، مردان یک شهر، زنانی که در یک شرکت کار می‌کنند، بردارهای واقع در فضا، نقاط واقع در یک صفحه، یا رویدادهای پیوستار فضا زمان. هر عضو a از یک مجموعه A را عنصری از آن مجموعه می‌نامیم. این رابطه را با نماد $a \in A$ (بخوانید " a عنصری یا جزئی است از A " یا " a متعلق است به A ")، و نقیض آن را با نماد $a \notin A$ نمایش می‌دهیم. گاهی، a را نقطه‌ای از مجموعه A می‌نامیم تا بر مفهوم ضمنی هندسی آن تأکید کرده باشیم.

۱-۵ عملیات روی مجموعه‌ها

مجموعه را معمولاً با ذکر یک یک عنصر آن در بین دو آکولاد، مشخص می‌کنیم. مثلاً $\{2, 4, 6, 8\}$ به معنای مجموعه‌ی مشتمل بر چهار عدد نخست طبیعی زوج؛ $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ تمام اعداد صحیح؛ $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ مجموعه‌ی تمام توانهای غیرمنفی (نامنفی) x ؛ و $\{-1, -1, 1, 1\}$ مجموعه‌ی چهار ریشه‌ی چهارم واحد است. با این همه، ذکر یک به یک عناصر برخی مجموعه‌ها ناممکن است. در این‌گونه موارد، مجموعه را با یک بیان تحت‌اللفظی یا ریاضی که برای تمام عناصر آن صادق است، توصیف می‌کنیم. چنین بیانی را معمولاً به صورت $\{x | P(x)\}$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم "مجموعه‌ی تمام x ها به‌گونه‌ای که $P(x)$ برقرار باشد." مثالهای بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$\{n \mid 1 < n < 9 \text{ زوج}\}$

$\{\pm n \mid n \text{ عددی طبیعی است}\}$

$\{y \mid y = x^n, n \text{ عددی طبیعی است}\}$

$\{z \mid z^2 = 1, z \text{ عددی مختلط است}\}$

با نمادی که در تندنویسی فراوان به کار می‌رود، دو مجموعهٔ اخیر را می‌توان به اختصار و به صورت $\{n \mid n \text{ عددی صحیح است و } n \geq 0\}$ و $\{z \mid z^2 = 1\}$ نمایش داد. همچنین می‌توان دایرهٔ به شعاع واحد را به صورت $\{z \mid |z| = 1\}$ ، بازهٔ بسته $[a, b]$ را به صورت $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ ، بازهٔ باز (a, b) را به صورت $\{x \mid a < x < b\}$ ، و مجموعهٔ تمام توانهای x را به صورت $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان داد. نماد اخیر، در این کتاب زیاد به کار خواهد رفت.

اگر $a \in A$ هرگاه $a \in B$ ، اصطلاحاً می‌گوییم B زیرمجموعه‌ای از A است و می‌نویسیم $B \subset A$ یا $A \supset B$. اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ ، در آن صورت $A = B$. مجموعه‌ای که به صورت $\{a \mid a \neq a\}$ تعریف می‌شود، مجموعهٔ تهی نام دارد و به صورت \emptyset نمایش داده می‌شود. بدیهی است که \emptyset شامل هیچ عنصری نیست و زیرمجموعه‌ای از هر مجموعهٔ دلخواه است. کلیهٔ زیرمجموعه‌ها (از جمله \emptyset)ی مجموعهٔ A را با 2^A نمایش می‌دهیم. علت این نماندگاری آن است که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ، مساوی 2^n است. با توجه به اینکه تعداد n مجموعه به شکل $\{a_i\}$ (که مجموعه‌های تک‌عنصری نامیده می‌شوند)، $n(n-1)/2$ مجموعه به شکل $\{a_i, a_j\}$ ، که در آن $i \neq j$ ، $n(n-1)(n-2)/3!$ مجموعه به شکل $\{a_i, a_j, a_k\}$ ، که در آن $i \neq j \neq k$ ، و غیره، وجود دارد، این موضوع را به آسانی می‌توان ثابت کرد. با شمول مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ پر به عنوان زیر مجموعه‌ها، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ F_n به این قرار خواهد شد

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + n + 1 = (1+1)^n = 2^n$$

اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع آنها، که به صورت $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است شامل تمام عناصری که به A یا B یا هر دو تعلق دارند. اشتراک مجموعه‌های A و B ، که به صورت $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است شامل تمام عناصری که هم متعلق به A است و هم متعلق به B . متمم مجموعهٔ A به صورت $\sim A$ نمایش داده می‌شود و بنابه تعریف، عبارت است از

$$\sim A \equiv \{a \mid a \notin A\}$$

متمم B در A (یا اختلاف آنها) عبارت است از

$$A \sim B \equiv \{a | a \in A \text{ و } a \notin B\}$$

در هر گونه کاربرد نظریه مجموعه‌ها، یک مجموعه عام زیربنا وجود دارد که زیرمجموعه‌های آن، موضوع مطالعه‌اند. مجموعه عام، معمولاً از محتوای بحث مشخص می‌شود. مثلاً در مطالعه خواص اعداد صحیح، مجموعه اعداد صحیح، که با \mathbb{Z} نمایش داده می‌شود، مجموعه عام است. مجموعه اعداد مختلط، \mathbb{C} ، مجموعه عام در آنالیز اعداد مختلط است، و مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، مجموعه عام در آنالیز اعداد حقیقی است. با در نظر گرفتن یک مجموعه عام X ، به جای $A \sim$ ، می‌توان نوشت $X \sim A$.

۲-۰ حاصلزربهای دکارتی

از دو مجموعه مفروض A و B ، و با در نظر گرفتن جفت عناصری از A و B ، یکی از A و یکی از B ، می‌توان مجموعه جدیدی تشکیل داد. حاصلزرب دکارتی A و B ، که به صورت $A \times B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه جفتهای مرتب (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in B$. در نمادگذاری نظریه مجموعه‌ها، این حاصلزرب را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ و } b \in B\}$$

این نکته را می‌توان به تعداد دلخواهی مجموعه تعمیم داد. اگر $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ معرف چند مجموعه باشند، در آن صورت حاصلزرب دکارتی آنها عبارت است از:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

که مجموعه n تاییهای مرتب به‌شمار می‌آید. اگر $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ، در آن صورت به جای $A \times A \times \dots \times A$ می‌نویسیم A^n ، و

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

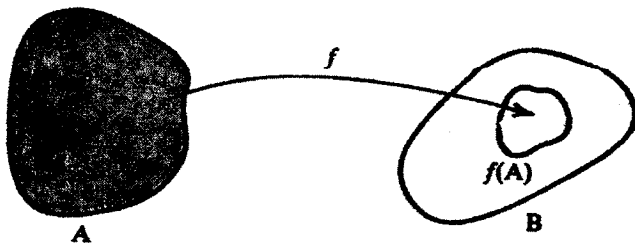
آشناترین مثال یک حاصلزرب دکارتی وقتی پیش می‌آید که $A = \mathbb{R}$. در این صورت \mathbb{R}^2 ، مجموعه جفتهای (x_1, x_2) با $x_1 \in \mathbb{R}$ ، $x_2 \in \mathbb{R}$. این معنا صرفاً بیانگر نقاط یک

صفحه است. به همین ترتیب، \mathbb{R}^2 مجموعه سه‌تاییهای (x_1, x_2, x_3) ، یا نقاط فضاست، و $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ مجموعه n تاییهاست.

۳-۰ نگاشت

نگاشت، مبحث بسیار مهمی است که به کمک آن ارتباطی بین دو مجموعه برقرار می‌شود. نگاشت f ، از مجموعه X به مجموعه Y ، که به صورت $f: X \rightarrow Y$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از یک همخوانی بین عناصر X و عناصر Y که در آن تمام عناصر X شرکت می‌کنند و هر عنصر X با فقط یک عنصر Y متناظر است. اگر $y \in Y$ عنصری باشد که از طریق نگاشت f ، متناظر با $x \in X$ است، آن را به صورت $y = f(x)$ می‌نویسیم و y را تصویر (نگاره) x تحت f می‌خوانیم. بنابراین، طبق تعریف نگاشت، $x \in X$ نمی‌تواند دو (یا چند) تصویر متفاوت داشته باشد.

اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد، $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ را تصویر A (شکل ۱-۰) می‌نامیم. همچنین، اگر $B \subset Y$ ، آنگاه $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ را تصویر وارون (یا پیش‌تصویر) B می‌نامیم. در قالب کلمات، $f^{-1}(B)$ شامل تمام عناصری از X است که تصویرهای آنها در $B \subset Y$ هستند. اگر B شامل یک تک‌عنصر، b ، باشد، در آن صورت $f^{-1}(b) = \{x \in X | f(x) = b\}$ شامل تمام عناصری از X است که به b نگاشته می‌شوند. توجه داشته باشید که ممکن است بسیاری از نقاط X ، همه با هم دارای یک تصویر در Y باشند. اگر $f(x_1) = f(x_2)$ به معنای $x_1 = x_2$ باشد، f را یک‌به‌یک می‌نامیم (و به صورت ۱-۱ نشان می‌دهیم). در یک نگاشت یک‌به‌یک، فقط یک عنصر از X با یک عنصر از Y متناظر است، هر چند ممکن است عناصری از Y وجود داشته باشند که در فرایند نگاشت شرکت نکنند. اگر $f(X) = Y$ ، نگاشت را اصطلاحاً پوشا می‌نامیم. نگاشتی که هم یک‌به‌یک باشد و



شکل ۱-۰ تابع f ، مجموعه A را به مجموعه B می‌نگارد، و برد f ، یعنی $f(A)$ ، به صورت زیرمجموعه B نشان داده شده است

هم پوشا، اصطلاحاً دوسوی خوانده می‌شود، یا می‌گوییم یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. تعداد عناصر دو مجموعه که پایکدیگر تناظر یک‌به‌یک داشته باشند، با هم برابر است. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت دوسوی از X به Y باشد، در آن صورت به ازای هر $y \in Y$ ، یک و فقط یک عنصر در X وجود دارد. به این ترتیب، نگاشتی مانند $f^{-1}: Y \rightarrow X$ از Y به X وجود دارد که با $f^{-1}(y) = x$ داده می‌شود، که در آن x عنصر منحصر به فردی است به گونه‌ای که $f(x) = y$. این نگاشت را وارون f می‌نامیم.

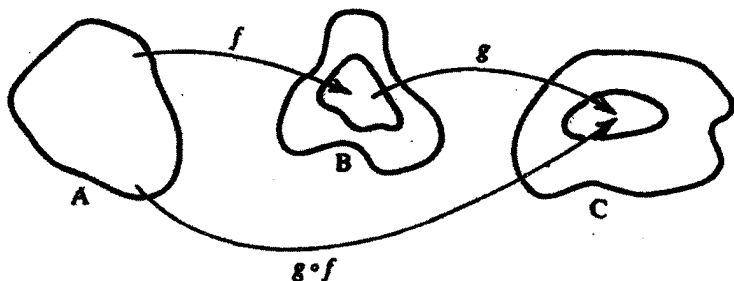
در تعریف نگاشت، مجموعه X را حوزه، مجموعه Y را هم‌حوزه، و $f(X)$ را بُد نگاشت f می‌نامیم. نگاشتی که هم حوزه آن مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، یا مجموعه اعداد مختلط، \mathbb{C} ، باشد، معمولاً تابع خوانده می‌شود.

مثلاً حساب انتگرال و دیفرانسیل (حسابان) متضمن مطالعه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است. دو تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +1)$ که به صورت $f(x) = x^2$ و $g(x) = \tanh x$ داده می‌شوند، دوسو هستند. تابع اخیر، ضمناً، نشان می‌دهد که تعداد نقاط واقع بر کل خط حقیقی با تعداد نقاطی که در بازه $(-1, +1)$ وجود دارد، یکسان است. اگر مجموعه اعداد حقیقی مثبت را با \mathbb{R}^+ نشان بدهیم، در آن صورت تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = x^2$ داده می‌شود، پوشاست اما یک‌به‌یک نیست $[x, -x]$ ، هر دو به یک $f(x)$ نگاشسته می‌شوند. با این همه، تابع $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ که با همان قاعده داده می‌شود، یعنی $g(x) = x^2$ ، یک‌به‌یک هست اما پوشا نیست. از سوی دیگر، $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ که به صورت $h(x) = x^2$ داده می‌شود، دوسوست، اما $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $u(x) = x^2$ داده می‌شود، نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

فرض کنید M_n معرف مجموعه ماتریسهای $n \times n$ حقیقی باشد. تابع $f: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ را با $f(A) = \det A$ به ازای $A \in M_n$ تعریف می‌کنیم. این تابع مسلماً پوشاست اما یک‌به‌یک نیست. توجه کنید که $f^{-1}(1)$ مجموعه تمام ماتریسهایی است که دترمینان آنها ۱ است. این ماتریسها در کاربردهای فیزیکی زیاد ظاهر می‌شوند و ما در فصلهای بعد آنها را بررسی خواهیم کرد.

مثال جالب توجه دیگر، تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ است که به صورت $f(z) = |z|$ بیان می‌شود. این تابع نیز نه یک‌به‌یک است و نه پوشا. در اینجا، $f^{-1}(1)$ دایره واحد است، یعنی دایره‌ای به شعاع ۱ در صفحه مختلط.

به حالت‌های زیادی برمی‌خوریم که در آنها حوزه یک نگاشت حاصلضرب دکارتی است. نگاشت $f: X \times X \rightarrow Y$ را به صورت $f(x_1, x_2) = y$ در نظر بگیرید که در آن X و Y مجموعه‌های دلخواهی‌اند. ذکر دو حالت خاص در اینجا حائز اهمیت است. حالت اول هنگامی



شکل ۲-۰ در ترکیب دو نگاشت، f و g ، به ترتیب ظاهر شدن f و g توجه کنید.

است که $Y = \mathbb{R}$. مثلاً حاصلضرب نقطه‌ای بردارها را می‌توان در این مورد به عنوان مثال ذکر کرد. بنابراین، اگر X مجموعه بردارها در صفحه باشد، می‌توانیم $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ را تعریف کنیم. حالت مهم دوم وقتی است که $Y = X$. در این صورت از یک عمل دوتایی بر روی X صحبت می‌کنیم که در اثر آن عنصری از X ، وابسته به دو عنصر از X است. مثلاً فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ ، مجموعه تمام اعداد صحیح باشد؛ در آن صورت، تابع $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ که به صورت $f(m, n) = mn$ تعریف می‌شود، عبارت است از عمل ضرب اعداد صحیح. به همین ترتیب، $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $g(x, y) = x + y$ تعریف می‌شود، عمل (دوتایی) جمع اعداد حقیقی است.

اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow W$ ، که در آن صورت نگاشت $h: X \rightarrow W$ را، که به صورت $h(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود، ترکیب f و g می‌نامیم، و به صورت $g \circ f$ نمایش می‌دهیم (شکل ۲-۰). اگر f و g هر دو، به ترتیب، با وارونه‌های f^{-1} و g^{-1} دوسو باشند، در آن صورت h نیز دارای یک وارون خواهد بود، و اثبات برقرار بودن تساویهای $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ کار آسانی است.

۴-۰ فضاهای متریک

هر چند که مجموعه‌ها منشأ ریاضیات جدید به‌شمار می‌آیند، اما به‌تنهایی از اهمیت صوری و مجردی برخوردارند. برای اینکه مجموعه‌ها را به‌صورت جالب و مفیدی در آوریم، لازم است با برخی ساختارهای آنها آشنا شویم. در روش کلی برای تحقق چنین ساختارهایی وجود دارد. این دو روش عبارت‌اند از تجرید و جداسازی دو شاخه عمده ریاضیات، یعنی جبر و آنالیز.

با اعمال یک عمل دوتایی روی یک مجموعه می‌توان آن را به یک ساختار جبری تبدیل کرد. مثلاً فضای برداری، که ساختاری جبری است و ما آن را به تفصیل در فصلهای ۲ و ۳ مطالعه

خواهیم کرد، در بین سایر ویژگیها، شامل عمل دوتایی جمع برداری است. گروه، که ما در این کتاب به آن نخواهیم پرداخت، اما ممکن است خواننده با آن آشنا باشد، مجموعه‌ای است با عمل دوتایی ضرب. مثالهای متعدد دیگری از دستگاههای جبری یافت می‌شوند که موضوع غنی جبر مجرد را تشکیل می‌دهند.

وقتی آنالیز، شاخه دیگری از ریاضیات، با بهره‌گیری از مفهوم مجموعه‌ها تجرید می‌شود، به توپولوژی می‌انجامد، که در آن مفاهیم حدود و پیوستگی نقشی اساسی ایفا می‌کنند. توپولوژی نیز مبحثی غنی، با پیامدها و کاربردهای فراگیر است.

با آنکه دو قلمرو یادشده ریاضیات، خود ذاتاً جالب و جذاب هستند، اما زیبایی واقعی و توانایی ریاضیات مجرد فقط وقتی حاصل می‌شود که این دو را با هم ترکیب کنیم. این حرکت، مباحثی چون گروههای توپولوژیک، گروههای لی، توپولوژی جبری، خمینه‌های مشتق‌پذیر، هندسه دیفرانسیلی، آنالیز تابعی، و بسیار مباحث دیگر، را به روی ما می‌گشاید که هر یک انقلابی در درک ما نسبت به دستگاههای ریاضی به‌وجود آورده و به‌نوبه خود بسیاری از مسائل فیزیکی را روشن کرده‌اند.

هدف این کتاب چندان بلندپروازانه نیست که ممکن است از مطالب بالا به‌نظر برسد. هر چند در خصوص برخی دستگاههای جبری بحث می‌کنیم و به‌دنبال آن ایده‌های "حد" و "پیوستگی" را به‌کار خواهیم برد، اما این کار با دامنه‌های محدود و فقط به‌هنگام نیاز با معرفی و کاربرد این مفاهیم انجام خواهد شد. از سوی دیگر، وقتی برخی مفاهیم کلی نیازمند حداقل مقدمات و شرایط لازم باشند، آنها را نیز معرفی خواهیم کرد. یکی از این مفاهیم، فضای متریک است که نقطه آغاز شاخه‌های بسیاری از ریاضیات جدید به‌شمار می‌آید. بنابراین، به‌تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۱-۴-۰: فضای متریک، عبارت است از مجموعه X به‌همراه یک تابع "حقیقی-مقدار" $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ، به‌گونه‌ای که

$$(الف) \quad d(x, y) \geq 0, \text{ و } d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y$$

$$(ب) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (تقارن)}$$

$$(ج) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (ثابری مثلث)}$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که X کاملاً یک مجموعه دلخواه است و نیاز به هیچ ساختاری، جز ساختار متریک که در بالا تعریف کردیم، ندارد. از این‌رو، تعریف ۱-۴-۰ خیلی کلی است و، مطابق مثالهای زیر، وضعیتهای متفاوت بسیاری را در برمی‌گیرد.

پیش از بررسی این مثالها، توجه کنید که تابع d که در بالا تعریف کردیم، تجرید مفهوم فاصله است: (الف) بیان می‌کند که فاصله بین دو نقطه همیشه مثبت، و صفر است فقط در صورتی که

آن دو نقطه بر هم منطبق شوند؛ (ب) اشاره به این دارد که اگر جای دو نقطه را با هم عوض کنیم، فاصله بین آنها تغییر نمی‌کند؛ (ج) بر این واقعیت معلوم اشاره می‌کند که حاصل جمع دو ضلع یک مثلث همیشه بزرگتر یا مساوی با ضلع سوم است.

اکنون به مثالها می‌پردازیم:

(۱) فرض کنید $X = \mathbb{Q}$ ، مجموعه اعداد گویا، و تعریف کنید: $d(x, y) = |x - y|$.

(۲) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ ، و $d(x, y)$ را مثل بالا تعریف کنید.

(۳) فرض کنید X شامل نقاط واقع بر سطح یک کره باشد. می‌توانیم دو تابع فاصله روی X تعریف کنیم. فرض کنید $d_1(P, Q)$ پاره‌خط مستقیمی باشد که دو نقطه P و Q واقع بر سطح کره را به هم وصل می‌کند. به سهولت می‌توان مشاهده کرد که d تمام خواص تابع متریک را دارد. همچنین می‌توانیم $d_2(P, Q)$ را به صورت طول کمان دایره عظیمه‌ای تعریف کنیم که از نقاط P و Q واقع بر سطح کره می‌گذرد.

(۴) فرض کنید $C(a, b)$ بر مجموعه توابع حقیقی-مقدار پیوسته‌ای در بازه $[a, b]$ دلالت

می‌کند. می‌توانیم تابع

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

را به ازای $f, g \in C(a, b)$ تعریف کنیم.

(۵) فرض کنید $C_B(a, b)$ بر مجموعه توابع حقیقی-مقدار پیوسته کراندار در بازه $[a, b]$ دلالت

کند. در این صورت می‌توانیم به ازای $f, g \in C_B(a, b)$ تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

در اینجا $|f(x) - g(x)|$ به ازای تمام مقادیر x در $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم، مقدار بیشینه آن را برمی‌گزینیم، و آن را $d(f, g)$ می‌نامیم.

تابع متریک، محیطی طبیعی به وجود می‌آورد که در آن می‌توان بسته بودن نقاط را در یک فضای متریک امتحان کرد. یکی از مواردی که ایده "بسته بودن" در آن اهمیت فراوانی پیدا می‌کند، مطالعه "دنباله" هاست. دنباله، عبارت است از نگاشت $s: \mathbb{N} \rightarrow X$ از مجموعه اعداد طبیعی، \mathbb{N} ، به فضای متریک X . با در نظر گرفتن عدد صحیح و مثبتی مانند n ، این نگاشت، نقطه $s(n)$ از فضای متریک X را به آن مربوط می‌کند. معمولاً رسم بر این است که به جای $s(n)$ ، نماد s_n را

می‌نویسند (یا x_n که با نماد X همساز باشد) و به جای نگاهت، مقادیر تابع را به صورت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان می‌دهند.

اطلاع از رفتار دنباله به‌ارای مقادیر بزرگ n ، از اهمیتی اساسی برخوردار است. به‌خصوص، مهم است که بدانیم آیا یک دنباله با افزایش n به یک مقدار متناهی میل می‌کند یا خیر. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ اصطلاحاً می‌گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به مقدار x می‌گراید. این همگرایی را می‌توان به صورت $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ، یا صرفاً $x_n \rightarrow x$ ، نیز نمایش داد. به عبارت دیگر، به‌ارای هر عدد حقیقی مثبت ε ، یک عدد طبیعی N چنان یافت می‌شود که وقتی $n \geq N$ ، آنگاه $d(x_n, x) < \varepsilon$.

صرفاً با داشتن دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، ممکن است نتوان مستقیماً همگرایی آن را امتحان کرد زیرا این امر مستلزم اطلاع از نقطه حدی x است. با این همه، انجام بهترین کار بعدی — یعنی اینکه آیا نقاط دنباله با بزرگ شدن n ، به یکدیگر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند یا خیر — امکان‌پذیر است. دنباله کوشی، دنباله‌ای است که در آن $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$ یا $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ مستقیماً می‌توان بررسی کرد که آیا یک دنباله، دنباله کوشی هست یا خیر. اما، این واقعیت که یک دنباله، دنباله کوشی است، همگرایی آن را تضمین نمی‌کند. مثلاً فرض کنید فضای متریک، مجموعه اعداد گویای \mathbb{Q} ، با تابع متریک $d(x, y) = |x - y|$ باشد. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را، که در آن $x_n = \sum_{k=1}^n (1 + 1/k)^k$ ، اثبات در نظر بگیرید. بدیهی است که x_n به‌ارای همه مقادیر n یک عدد گویاست. همچنین، اثبات $|x_n - x_m| \rightarrow 0$ ، یک تمرین در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بنابراین، دنباله یادشده، دنباله کوشی است. اما، نیک می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e = ۲٫۷۱۸۲۸ \dots$ که عددی گویا نیست. فضای متریکی که در آن هر دنباله کوشی همگرا بشود، فضای متریک کامل نامیده می‌شود. فضاهای متریک کامل، نقش مهمی در آنالیز جدید بازی می‌کنند. مثال قبل نشان می‌دهد که \mathbb{Q} یک فضای متریک کامل نیست. اما، اگر نقاط حدی تمام دنباله‌های کوشی را به \mathbb{Q} بیفزاییم، فضای حاصل کامل خواهد شد. البته، این فضای کامل، دستگاه اعداد حقیقی \mathbb{R} است. یکی از خواص عمومی تمام فضاهای متریک این است که هر فضای متریک غیر کامل را می‌توان "بزرگ کرد" تا به یک فضای متریک کامل تبدیل شود. این فرایند "بزرگساز" را می‌توان با یک روش دقیق ریاضی بیان کرد، اما ما در اینجا این کار را نخواهیم کرد.

۵-۰ عدد اصلی مجموعه

در حال حاضر، برخی اصطلاحات مربوط به شمارش در ریاضی فیزیک به‌کار می‌روند و بنابراین ما در اینجا آنها را تعریف می‌کنیم.

فرایند شمارش، مقایسهٔ "یک‌به‌یک" یک مجموعه با مجموعهٔ دیگر است. اگر دو مجموعه، در تناظر یک‌به‌یک با یکدیگر باشند، یعنی، اگر یک نگاشت دوسو بین آنها برقرار باشد، اصطلاحاً می‌گوییم که تعداد اعضای آنها با هم برابر است و در دو مجموعه با تعداد اعضای یکسان، اساساً "تعداد" عناصر نیز با هم برابر است. مجموعهٔ $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ، متناهی و تعداد اعضای آن n است. هر مجموعه‌ای را که از آن یک نگاشت دوسو به F_n وجود داشته باشد، اصطلاحاً متناهی می‌گویند و دارای n عنصر است.

اکنون مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ، را در نظر بگیرید. اگر یک نگاشت دوسویی بین یک مجموعهٔ A و مجموعهٔ \mathbb{N} وجود داشته باشد، در آن صورت می‌گوییم A نامتناهی اما شمارا است. مجموعهٔ تمام اعداد صحیح، مجموعهٔ تمام اعداد گویا، مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد، و مجموعهٔ اعداد اول از جمله نمونه‌های مجموعه‌های نامتناهی شمارا به حساب می‌آیند.

شاید عجیب به نظر برسد که یک زیرمجموعه (مثل مجموعهٔ تمام اعداد زوج) را می‌توان در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ تمام آن (مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی) قرار داد؛ با این همه، این خاصیتی است که همهٔ زیرمجموعه‌های نامتناهی دارند. در واقع، گاهی مجموعه‌های یادشده به صورت مجموعه‌هایی تعریف می‌شوند که با یکی از زیرمجموعه‌های سرّوشان در تناظر یک‌به‌یک‌اند. شاید از این نکته نیز تعجب کنید که به همان تعداد اعداد طبیعی، اعداد گویا هم وجود دارد.

مجموعه‌هایی را که نه متناهی‌اند و نه شمارا، اصطلاحاً شمارش‌ناپذیر یا ناشمارا می‌گویند که یا تشکیل یک پیوستار می‌دهند یا دارای تعداد اعضای پیوستارند. از جهتی، این مجموعه‌ها "نامتناهی‌تر" از هر مجموعهٔ شمارایی‌اند. نمونه‌های مجموعه‌های ناشمارا عبارت‌اند از نقاط واقع در بازهٔ $[0, 1]$ ، دستگاه اعداد حقیقی، نقاط واقع در یک صفحه، و نقاط واقع در فضا. می‌توان نشان داد که تعداد اعضای تمام این مجموعه‌ها یکسان‌اند. بنابراین، به همان تعداد نقاط واقع در فضای سه‌بعدی (کل عالم)، در بازهٔ $[0, 1]$ یا در هر بازهٔ متناهی دیگر نیز نقطه وجود دارد.

مفهوم "تعداد اعضا"، یک مبحث ریاضی خیلی بفرنج با پیامدهای جالب بسیار است. یکی از این پیامدها با مجموعهٔ کانتور مرتبط است. بازهٔ $[0, 1]$ را در نظر بگیرید. بازهٔ باز $(1/3, 2/3)$ را از وسط آن حذف کنید. یعنی، نقاط انتهایی $1/3$ و $2/3$ حذف خواهند شد. از قسمت باقیمانده، یعنی $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ ، دو $1/3$ میانی را حذف کنید؛ به این ترتیب، قسمت باقیمانده عبارت خواهد بود از $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. این عمل را تا بینهایت ادامه دهید. تعداد اعضای مجموعهٔ باقیمانده، که مجموعهٔ کانتور خوانده می‌شود، چندتااست؟ به‌طور

شهودی انتظار نداریم که چیزی باقیمانده باشد. ممکن است حدس بزنیم که تعداد نقاط باقیمانده حداکثر بینهایت، اما شماراست. واقعیت جالب این است که تعداد اعضا، همان تعداد اعضای بیوستار است! بنابراین، پس از حذف آن همه تلهای میانی، مجموعه‌ای که باقی می‌ماند دارای همان تعداد نقاطی است که مجموعه اصلی داشت.

۶-۵ نمادگذاری

برخی نمادگذاریهای استاندارد متداول در ریاضیات و ریاضی فیزیک، ما را از نوشتن خیلی از مطالب اضافی معاف می‌کنند و ما در این کتاب غالباً از آنها کمک خواهیم گرفت. این نمادها و علائم اختصاری در جدول ۱-۵ درج شده‌اند. نقیض هر چیزی را معمولاً با قراردادن علامت (/) بر روی نماد مربوط به آن نشان می‌دهند. مثلاً نماد \neq به معنای "دلالت ندارد" و \exists به معنای "وجود ندارد" است.

جدول ۱-۵ نمادها و علائم اختصاری به‌کار رفته در این کتاب

$A \times B$	حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های A و B .
(a, b)	بازه باز با نقاط انتهایی a و b ، شامل تمام اعداد حقیقی x به‌گونه‌ای که $a < x < b$.
$[a, b]$	بازه بسته با نقاط انتهایی a و b ، شامل تمام اعداد حقیقی x به‌گونه‌ای که $a \leq x \leq b$.
$A - \{a\}$	تمام نقاط مجموعه A ، جز نقطه a .
$a < \infty$	a ، متناهی است.
ش. م	شرط (شرایط) مرزی.
م. م. م	مسئله مقدار مرزی
C	مجموعه اعداد مختلط
$C(a, b)$	مجموعه توابع بیوسته حقیقی-مقدار، تعریف شده در بازه $[a, b]$
$C(a, b)$	مجموعه توابع بیوسته مختلط-مقدار، تعریف شده در بازه $[a, b]$
C^n	فضای n -تاییهای مختلط
$C^n(X)$	گردایه توابع در مجموعه X که دارای مشتقات تمام مرتبه‌های کمتر یا مساوی با n هستند.
$C^\infty(X)$	گردایه توابع در مجموعه X که دارای مشتقات تمام مرتبه‌ها هستند.
$C^\infty(X)$	زیرمجموعه متعلق به $C^\infty(X)$ که اعضایش در خارج یک زیرمجموعه کراندار (متناهی، فشرده) از X ناپدید می‌شوند.
ف. ا. ک	فرمول انتگرال کوشی
م. د	معادله دیفرانسیل
ع. د	عملگر دیفرانسیلی
\hat{e}	بردار واحد

$f: A \rightarrow B$	نگاشت f از مجموعه A به مجموعه B .
م. د. م. ا	معادله دیفرانسیل مرتبه اول
م. د. م. ا. خ	معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی
ت. گ	تابع گرین
م. د. ا. ه	معادله دیفرانسیل آیرهندسی
م. د. م. د. ه	معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن
م. ا	معادله انتگرالی
ا. ف. ا	اگر و فقط اگر
ع. ا	عملگر انتگرالی
م. د. م. د. ن	معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن
م. م. آ	مسئله مقدار آغازی
ط. ج	طرف چپ
N	مجموعه اعداد طبیعی
م. د. م	معادله دیفرانسیل معمولی
\mathcal{P}_n^c	مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه n (یا کمتر) و ضرایب مختلط.
\mathcal{P}_n^r	مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه n (یا کمتر) و ضرایب حقیقی.
م. د. ج	معادله دیفرانسیل جزئی
Q	مجموعه اعداد گویا
R	مجموعه اعداد حقیقی
R^+	مجموعه اعداد حقیقی مثبت
R^n	فضای اقلیدسی n -بعدی؛ فضای n -تایی‌های حقیقی
ط. ر	طرف راست
م. د. م. د	معادله دیفرانسیل مرتبه دوم
ع. د. م. د	عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم
م. د. م. د. خ	معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی
ع. د. م. د. خ	عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم خطی
ن. ص. ب	نیم صفحه بالا
\mathcal{V}_N	فضای برداری N -بعدی
$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$	حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری \mathcal{V} و \mathcal{W}
ن. ب	نسبت به
۱	عملگر واحد
1_N	ماتریس واحد N -بعدی

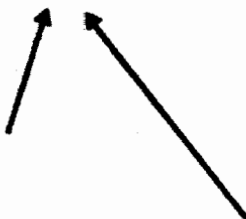
•	نماد ژنریک معرف عدد حقیقی صفر، صفر مختلف، و تابع صفر
•	ماتریس صفر
⊙	عملگر صفر
• یا (•)	بردار صفر
≈	تقریباً مساوی با
∈	متعلق است به؛ عنصری است از ...
*	مزدوج مختلف؛ علامت دوگانی
•	پایان مثال
■	پایان اثبات
∇	به‌ازای تمام
†	مزدوج هرمیتی (یک عملگر یا یک ماتریس)
⇒	دلالت دارد بر
∩	اشتراک، مقطع
≡	بنابر تعریف، برابر است با؛ بنابر تعریف، عبارت است از
⇔	معادل است با؛ اگر و فقط اگر
	تابع نرم
↔	تناظر یک‌به‌یک
$\prod_{i=m}^n a_i$	حاصلضرب $a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n$
\propto	متناسب است با
$\{a_i\}_{i=1}^n$	مجموعه شامل a_1, a_2, \dots, a_n
\ni	بگونه‌ای که؛ چنان که
$\sum_{i=m}^n a_i$	مجموعه‌ای از m تا n : $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$
\exists	وجود دارد (ند)
\sim	ترانهاد (یک ماتریس)؛ تبدیل فوریه (یک تابع)
U	اجتماع

بردارهای واقع در صفحه و در فضا

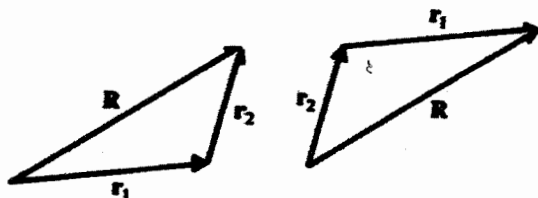
درونمایهٔ اساسی بخش اعظم ریاضی فیزیک را مفهوم بردار تشکیل می‌دهد. این مفهوم، کانون پارهٔ نخست این کتاب خواهد بود. در فصلهای ۲ و ۳، فضاهای برداری مجرد را بررسی خواهیم کرد. اما، برای هموار کردن راه تجرید، و در این فصل، برخی از خواص مناسب بردارهای واقع در صفحه و در فضا را که بیشتر با آنها آشنایی داریم، مرور می‌کنیم. مجموعه اصطلاحاتی را که معمولاً خاص فضاهای برداری مجرد است در اینجا نیز به‌کار می‌بریم تا دانشجوی مبتدی، ارتباط بین ساختارهای مجرد و موضوعاتی را که بیشتر با آنها آشناست، ملاحظه کند.

۱-۱ خواص اساسی بردارهای واقع در صفحه

در این فصل با بردارهای واقع در فضای معمولی آشنا می‌شویم و خواص آنها را بررسی می‌کنیم، اما به تعمیم نتایج به ابعاد بالاتر هم نگاهی می‌اندازیم. با بردارهای واقع در صفحه و متداول‌ترین تعریف یک بردار به صورت "چیزی که اشاره به جایی دارد" شروع می‌کنیم (شکل ۱-۱). مثالهایی از بردارها عبارت‌اند از: تغییر مکان یا جابه‌جایی، v ؛ سرعت، \mathbf{r} ؛ تکانه، \mathbf{p} ؛ میدان الکتریکی، \mathbf{E} ؛ و میدان مغناطیسی، \mathbf{B} .



شکل ۱-۱ بردارهای مختلف در صفحه.

شکل ۲-۱ بردار R ، حاصل جمع دو جابه‌جایی r_1 و r_2 است. توجه کنید که $r_1 + r_2 = r_2 + r_1 = R$.

اگر نوعی عملیات بر روی بردارها صورت نگیرد، موجودات بی‌مصرفی خواهند بود. اساسی‌ترین عمل عبارت است از تغییر طول بردار. این کار با ضرب کردن بردار در یک عدد حقیقی مثبت انجام می‌شود. مثلاً $2r$ برداری است در همان جهت r اما $3r$ بار طولانی‌تر از آن. اگر برداری را در -1 ضرب کنیم، جهت آن 180° تغییر خواهد کرد. یعنی، $-1 \times r = -r$ عبارت است از برداری با همان طول r اما در جهت مخالف آن. از ترکیب این دو عمل، می‌توان به فکر ضرب یک بردار در هر عدد حقیقی (مثبت یا منفی) افتاد. بنابراین، کمیت $0.732r$ برداری است به طول $0.732r$ برابر طول r ، و در خلاف جهت آن. عمل مرکب را می‌توان به قرار زیر جمع‌بندی کرد.

عمل ۱-۱: بردار را می‌توان در هر عدد حقیقی ضرب کرد. حاصل این ضرب، بردار دیگری خواهد بود.

عمل دیگر، جمع کردن دو بردار است. این عمل، از قانون بدهی جمع جابه‌جایی‌ها الهام می‌گیرد. در شکل ۲-۱، دو مورد جابه‌جایی r_1 و r_2 با هم جمع می‌شوند تا برابند، یا "حاصل جمع"، R ، را بدهند که این برابند خود نیز یک بردار است:

$$r_1 + r_2 = R$$

این عمل را می‌توان به شرح زیر جمع‌بندی کرد.

۱. در این تعریف، به‌طور ضمنی فرض می‌شود که بردار را می‌توان بدون اینکه تغییری در آن ایجاد شود، به موازات خودش حرکت داد.

عمل ۱-۱-۲: به‌ازای دو بردار دلخواه a_1 و a_2 ، بردار سومی مانند a_3 چنان وجود دارد که

$$a_3 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1$$

با استفاده از عملهای ۱-۱-۱ و ۱-۱-۲، می‌توان حاصل‌جمعی به‌صورت زیر تشکیل داد:^۱

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \quad (1-1)$$

که در آن، $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعدادی حقیقی، و a_1, a_2, \dots, a_n بردارند. مجموع (۱-۱) ترکیب خطی n بردار a_1, a_2, \dots, a_n نامیده می‌شود. اگر بتوان مجموعه‌ای از اعداد حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را (که هیچ‌کدام صفر نیستند) طوری یافت که حاصل‌جمع (۱-۱) صفر شود، اصطلاحاً می‌گوییم که بردارهای a_1, a_2, \dots, a_n خطی-وابسته‌اند. اگر نتوان چنین مجموعه‌ای از اعدادی را پیدا کرد، آن صورت می‌گوییم که بردارهای a_1, a_2, \dots, a_n خطی-مستقل‌اند. به بیان دیگر، هرگاه عبارت:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \quad (2-1)$$

دلالت بر این داشته باشد که:^۲

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

در آن صورت، a_1, a_2, \dots, a_n خطی-مستقل‌اند.

مثال ۱-۱-۱: (الف) دو بردار \hat{e}_x و \hat{e}_y (که گاهی به‌صورت \hat{i} و \hat{j} نشان داده می‌شوند) خطی-مستقل‌اند، زیرا^۳ عبارت:

$$\alpha \hat{e}_x + \beta \hat{e}_y = 0 \quad (1)$$

۱. برای توجیه عبارت (۱-۱)، باید شرکت‌پذیری جمع را نیز مسلم فرض کنیم، یعنی اینکه:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

۲. به بیان دقیق‌تر، در حقیقت باید یک بردار صفر به‌صورت 0 چنان تعریف کنیم که به‌ازای هر بردار a ، داشته باشیم:

$$a + 0 = 0 + a$$

۳. علامت " $\hat{\quad}$ " در بالای این حروف به معنای ۱ (واحد) بودن طول بردار است. معنای دقیق "طول" را به‌زودی خواهیم دید. فعلاً \hat{e}_x و \hat{e}_y را صرفاً، به‌ترتیب، بردارهایی در جهتهای x و y در نظر می‌گیریم.

در صورتی می‌تواند برقرار باشد که α و β هر دو صفر باشند. اگر یکی از آنها، مثلاً α ، مخالف صفر می‌بود، می‌توانستیم (۱) را بر آن تقسیم کنیم و یکی از بردارها را به صورت مضربی از بردار دیگر درآوریم:

$$\hat{e}_x = -\frac{\beta}{\alpha}\hat{e}_y$$

که ناممکن است.

(ب) دو تابع x^2 و x^3 ، که مقادیر دلخواهی را می‌پذیرد، خطی-مستقل اند. زیرا، اگر به‌ازای مقادیر دلخواه x داشته باشیم:

$$\alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \quad (2)$$

در آن صورت، با فرض $x = 1$ و $x = -1$ ، به ترتیب، خواهیم داشت

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha - \beta = 0$$

که دارای جواب منحصر به فردی به‌قرار زیر است:

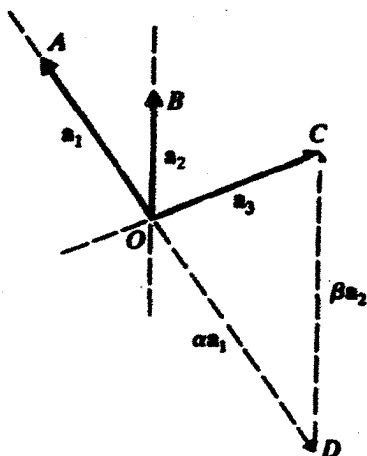
$$\alpha = \beta = 0$$

بنابراین، تنها راه برقرار بودن (۲) این است که α و β هر دو صفر باشند. به این ترتیب، استقلال خطی x^2 و x^3 اثبات می‌شود.

به آسانی می‌توان نشان داد که سه بردار در دو بعد، خطی-مستقل اند.^۱ در شکل ۱-۳ سه بردار دلخواه را از هر دو سو امتداد داده‌ایم. از نوک یکی از بردارها (a_2 ، در شکل)، خطی به موازات یکی از دو بردار دیگر رسم می‌کنیم تا بردار سوم (یا امتداد آن را) در نقطه D قطع کند. بردارهای \overrightarrow{OD} و \overrightarrow{DC} به ترتیب با a_1 و a_2 متناسب‌اند، و مجموع آنها عبارت است از a_3 . بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_3 = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \alpha a_1 + \beta a_2$$

۱. تعریف دقیق "بعد" در فصل ۲ خواهد آمد. معنای شهودی این واژه برای بحث حاضر، کافی است. فضای دوبعدی به معنای صفحه است.



شکل ۱-۳ سه بردار واقع در یک صفحه، خطی-مستقل هستند.

یا

$$\alpha a_1 + \beta a_2 - a_3 = 0$$

و a_1, a_2 و a_3 خطی-مستقل اند.

بدیهی است که همین کار را برای دو بردار دلخواه نیز می‌توانیم انجام دهیم. برای روشن شدن مطلب، بردارهای a_1 و a_2 را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم اعداد غیرصفر و حقیقی α' و β' چنان وجود دارند که

$$\alpha' a_1 + \beta' a_2 = 0$$

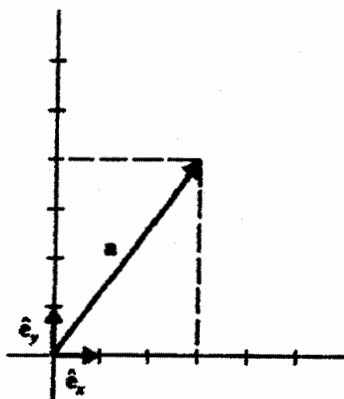
بنابراین،

$$a_1 = -\frac{\beta'}{\alpha'} a_2$$

و a_1 متناسب با a_2 ، یا a_1 و a_2 روی یک خط قرار دارند. و این امر برخلاف دلخواه و اختیاری بودن a_1 و a_2 است. به این ترتیب، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱-۳: تعداد بردارهای خطی-مستقل در یک صفحه، حداکثر، دو است. سه بردار در یک صفحه، خطی-وابسته‌اند.

این قضیه ما را به مفهوم "پایه" هدایت می‌کند.



شکل ۴-۱ مؤلفه‌های بردار a در پایه $\{e_x, e_y\}$ عبارت‌اند از $(3, 4)$.

تعریف ۴-۱-۱: مجموعه‌ای از بردارهای خطی-مستقل، یک پایه را تشکیل می‌دهند، به شرطی که هر بردار را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از آن مجموعه نوشت.

بردارهای a_1 و a_2 در شکل ۳-۱، یک پایه تشکیل می‌دهند که آن را به صورت $\{a_1, a_2\}$ نمایش می‌دهیم. در واقع، دو برداری که همخط نباشند (یعنی روی یک خط قرار نگیرند)، در صفحه خودشان یک پایه تشکیل می‌دهند.

در کنار تصور "پایه"، مفهوم مؤلفه‌های بردار هم مطرح می‌شود. با معلوم بودن پایه، راه منحصر به فردی (تمرین ۱-۱-۱) وجود دارد که به کمک آن یک بردار خاص را می‌توان برحسب بردارهای تشکیل‌دهنده پایه نوشت. ضرایب منحصر به فرد بردارهای پایه، مؤلفه‌های (یا مختصات) آن بردار خاص در آن پایه نامیده می‌شوند. مثلاً مؤلفه‌های بردار a_2 در پایه $\{a_1, a_2\}$ در شکل ۳-۱، عبارت‌اند از (α, β) .

مثال ۴-۱-۱: در شکل ۴-۱، بردار a دارای مؤلفه‌های $(3, 4)$ در پایه متشکل از بردارهای خطی-مستقل \hat{e}_x و \hat{e}_y است. در شکل پیداست که

$$a = 3\hat{e}_x + 4\hat{e}_y$$

تمرینها

۱-۱-۱ نشان دهید که مؤلفه‌های یک بردار در یک پایه مفروض در یک صفحه، منحصر به فردند.

۲-۱-۱ مؤلفه‌های هر بردار پایه $\{a_1, a_2\}$ نسبت به آن پایه، کدام‌اند؟

۲-۱ تبدیل مؤلفه‌ها

تعداد پایه‌هایی که در هر صفحه یافت می‌شود، بینهایت است، زیرا بینهایت زوج پایه برای تشکیل یک پایه می‌توان انتخاب کرد. بنابراین، تعداد بینهایت مجموعه مؤلفه برای هر بردار خاص وجود دارد، و می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توانیم رابطه‌ای بین دو مجموعه دلخواه از چنین مجموعه‌هایی بیابیم. در این رابطه، دستگاه فعال ماتریسها به‌کار می‌افتد، که خواص بنیادی آن را می‌دانید و در فصل ۳ نیز به تفصیل، آنها را مطرح خواهیم کرد (با این همه، تمرینهای پایان این بخش را بنگرید). بردار c را با مؤلفه‌های (α_1, α_2) در پایه $\{a_1, a_2\}$ و مؤلفه‌های (α'_1, α'_2) در پایه $\{a'_1, a'_2\}$ در نظر بگیرید. می‌توان نوشت

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \quad \text{و} \quad c = \alpha'_1 a'_1 + \alpha'_2 a'_2$$

چون a'_1 و a'_2 یک پایه تشکیل می‌دهند، هر بردار، به‌خصوص a_1 یا a_2 ، را می‌توان برحسب آنها نوشت:

$$a_1 = \gamma_{11} a'_1 + \gamma_{21} a'_2$$

$$a_2 = \gamma_{12} a'_1 + \gamma_{22} a'_2$$

که $(\gamma_{11}, \gamma_{21})$ و $(\gamma_{12}, \gamma_{22})$ ، به‌ترتیب، مؤلفه‌های a_1 و a_2 در پایه $\{a'_1, a'_2\}$ هستند. با ترکیب کردن معادلات بالا، داریم

$$\alpha_1(\gamma_{11} a'_1 + \gamma_{21} a'_2) + \alpha_2(\gamma_{12} a'_1 + \gamma_{22} a'_2) = \alpha'_1 a'_1 + \alpha'_2 a'_2$$

یا

$$(\alpha'_1 - \gamma_{11}\alpha_1 - \gamma_{12}\alpha_2)a'_1 + (\alpha'_2 - \gamma_{21}\alpha_1 - \gamma_{22}\alpha_2)a'_2 = 0$$

با توجه به استقلال خطی a'_1 و a'_2 داریم

$$\alpha'_1 = \gamma_{11}\alpha_1 + \gamma_{12}\alpha_2 \quad (\text{الف ۳-۱})$$

$$\alpha'_2 = \gamma_{21}\alpha_1 + \gamma_{22}\alpha_2 \quad (\text{ب ۳-۱})$$

این معادله‌ها را می‌توان به اختصار به شکل زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، اگر بردارهای ستونی

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{a}' \equiv \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} \quad (۱-۴الف)$$

و ماتریس 2×2 زیر:

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (۱-۴ب)$$

را معرفی کنیم، در آن صورت معادله‌های (۱-۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\mathbf{a}' = \Gamma \mathbf{a} \quad (۱-۴ج)$$

حال فرض کنید که پایه سوم $\{\mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2\}$ را نیز در اختیار داریم. در آن صورت، می‌توانیم \mathbf{a}'_1 و \mathbf{a}'_2 را به صورت ترکیبهای خطی زیر بنویسیم:

$$\mathbf{a}'_1 = \gamma'_{11} \mathbf{a}''_1 + \gamma'_{12} \mathbf{a}''_2$$

و

$$\mathbf{a}'_2 = \gamma'_{21} \mathbf{a}''_1 + \gamma'_{22} \mathbf{a}''_2$$

که $(\gamma'_{11}, \gamma'_{12})$ و $(\gamma'_{21}, \gamma'_{22})$ ، به ترتیب، مؤلفه‌های \mathbf{a}'_1 و \mathbf{a}'_2 در پایه جدید هستند. این دو معادله، منجر به معادله‌هایی شامل مؤلفه‌های زیر می‌شوند:

$$\alpha''_1 = \gamma'_{11} \alpha'_1 + \gamma'_{21} \alpha'_2 \quad (۱-۵الف)$$

$$\alpha''_i = \gamma'_{i1} \alpha'_1 + \gamma'_{i2} \alpha'_2 \quad (۵-۱ ب)$$

که در آن (α''_1, α''_2) مؤلفه‌های بردار c درباره‌ی $\{a''_1, a''_2\}$ هستند. مثل قبل، می‌توانیم معادله‌های (۵-۱) را به صورت ماتریسی با هم ترکیب کنیم؛ نتیجه عبارت خواهد بود از

$$a'' = \Gamma' a' \quad (۶-۱ الف)$$

که

$$a'' = \begin{pmatrix} \alpha''_1 \\ \alpha''_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \Gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} & \gamma'_{12} \\ \gamma'_{21} & \gamma'_{22} \end{pmatrix} \quad (۶-۱ ب)$$

و a' مثل قبل تعریف می‌شود.

با نشانیدن (۳-۱) در (۵-۱)، رابطه‌ی بین a'' و a مشخص می‌شود

$$\alpha''_1 = (\gamma'_{11} \gamma_{11} + \gamma'_{12} \gamma_{21}) \alpha_1 + (\gamma'_{11} \gamma_{12} + \gamma'_{12} \gamma_{22}) \alpha_2$$

و

$$\alpha''_2 = (\gamma'_{21} \gamma_{11} + \gamma'_{22} \gamma_{21}) \alpha_1 + (\gamma'_{21} \gamma_{12} + \gamma'_{22} \gamma_{22}) \alpha_2$$

که در شکل ماتریسی به صورت زیر درمی‌آید:

$$a'' = \Gamma'' a \quad (۷-۱ الف)$$

که در آن

$$\Gamma'' = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} \gamma_{11} + \gamma'_{12} \gamma_{21} & \gamma'_{11} \gamma_{12} + \gamma'_{12} \gamma_{22} \\ \gamma'_{21} \gamma_{11} + \gamma'_{22} \gamma_{21} & \gamma'_{21} \gamma_{12} + \gamma'_{22} \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (۷-۱ ب)$$

از سوی دیگر، معادله‌های ماتریسی (۱-۴ج) و (۱-۶الف) منجر می‌شوند به

$$a'' = \Gamma'(\Gamma a)$$

این معادله در صورتی با معادله (۱-۷الف) سازگار است که ضرب ماتریسها را به رسم معمول تعریف کنیم. این شرط سازگاری، انگیزه تعریف متداول ضرب ماتریسی است. بنابراین داریم

$$\Gamma'' = \Gamma'\Gamma$$

به ترتیب ضرب توجه کنید.

معادله‌های (۱-۳)، (۱-۵)، و (۱-۷)، بین مؤلفه‌های یک بردار، c ، در پایه‌های مختلف رابطه برقرار می‌کنند. اما، راه فیزیکی‌تر دیگری نیز برای تغییر این معادله‌ها وجود دارد. معادله (۱-۳) را در شکل ماتریسی آن در نظر بگیرید. در اینجا a یک بردار ستونی است که مؤلفه‌های بردار c را در پایه $\{a_1, a_2\}$ نمایش می‌دهد. با اعمال ماتریس Γ بر آن، بردار ستونی جدید a' پدید می‌آید، که می‌توان آن را مؤلفه‌های یک بردار جدید، c' ، در همان پایه، تعبیر کرد. بنابراین، به تعبیری، ما بردار c را با تبدیل Γ به بردار جدید c' تغییر دادیم. موضوع تبدیل یک بردار، در فصلهای بعدی کتاب اهمیت پیدا خواهد کرد. تعبیر بالا، تبدیل متغیر نامیده می‌شود (وقتی بردارهای پایه را تغییر می‌دهیم، c به صورت منفعلانه بدون تغییر باقی می‌ماند)؛ تعبیر دوم، تبدیل فعال نامیده می‌شود (c به صورت فعال به c' تغییر می‌کند).

تمرینها

۱-۲-۱ وقتی بردار a_2 در تمرین ۱-۱-۲ را به صورت فعال به ماتریس $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}) = \Gamma$ تبدیل کنیم، چه برداری به دست می‌آید؟

۲-۲-۱ نشان دهید که به ازای ماتریسهای پازولی، با تعریف زیر:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

داریم

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$$

$$\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = 2i\sigma_1$$

$$\sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 = 2i\sigma_2$$

۳-۲-۱ نشان دهید که به‌ازای ماتریسهای دایراک، که بنا بر تعریف عبارت‌اند از:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

داریم

$$(\alpha_i)^2 = 1, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

و

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad \text{به‌ازای } j \neq i$$

۳-۱ ضرب داخلی

فضایی برداری که تاکنون معرفی و بررسی کرده‌ایم، برای دنیای مهیج فیزیک خیلی محدود است، و اگر به آن جوهرهٔ بیشتری نیفزاییم هیچ فیزیکدانی نمی‌تواند از آن بهره‌برداری کند. یکی از چیزهایی که فیزیکدانان به آن نیاز دارند، مفهوم ضرب داخلی (یا ضرب اسکالر، یا ضرب نقطه‌ای) است، که با مفهوم متریک (تابع فاصله) ارتباط تنگاتنگی دارد.

۱-۳-۱ تابع متریک (تانسور متریک)

تابع متریک، بنا بر تعریف، عبارت است از:

تعریف ۱-۳-۱: متریکه یک نگاشت دوخطی، g ، از مجموعهٔ جفت بردارها به مجموعهٔ اعداد

۱. این تابع متریک را با متریکی که در مقدمه معرفی کردیم اشتباه نگیرید. این دو با هم مرتبط‌اند، اما متریک یاد شده در مقدمه در مورد تمام مجموعه‌ها و تابع متریک اخیر فقط در مورد مجموعهٔ بردارها تعریف می‌شود.

حقیقی، \mathbb{R} ، با خواص زیر است.^۱ به ازای جمیع اعداد حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و تمام بردارهای a_1, a_2, a_3

$$g(a_1, a_2) = g(a_2, a_1) \quad (الف-۱)$$

$$g(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, a_3) = \alpha_1 g(a_1, a_3) + \alpha_2 g(a_2, a_3) \quad (ب-۱)$$

$$g(a_1, \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) = \alpha_2 g(a_1, a_2) + \alpha_3 g(a_1, a_3) \quad (ج-۱)$$

توجه کنید که $g(a_1, a_2)$ به ازای هر a_1 و a_2 ، یک عدد حقیقی است. خاصیت (الف-۱) حاکی از این است که ترتیب شناسه بی اثر است (متریک متقارن)؛ بنابر (ب-۱)، g در شناسه اولش یک تابع خطی است؛ و (ج-۱) خطی بودن g را در شناسه دوم آن بیان می کند (واژه "دوخطی" از همین جا سرچشمه می گیرد).

تعریف ۱-۳-۲ کلی ترین متریکی است که می توان ساخت. این تعریف را می توان با در نظر گرفتن $g(a, a)$ برای یک بردار دلخواه a ، مشخص تر کرد. متریکی را نیمه معین مثبت می خوانیم، هرگاه

$$g(a, a) \geq 0 \quad \forall a \quad (د-۱)$$

علاوه بر این، هرگاه $g(a, a) = 0$ حاکی باشد از $a = 0$ ، آنگاه متریک a معین مثبت است. همه متریکهای مثبت نیستند. مثلاً ممکن است $g(a, a)$ در نظریه نسبیت منفی باشد. این موضوع را در فصل ۲ بررسی خواهیم کرد. در حال حاضر، فقط متریکهای معین مثبت را در نظر می گیریم و می نویسیم

$$\|a\| \equiv \sqrt{g(a, a)} \geq 0 \quad (۹-۱)$$

که $\|a\|$ ، نرم (یا طول) بردار a خوانده می شود.^۲ هر بردار a را که طولش صفر نباشد، می توان با

۱. برای توجه بیشتر، ر. ک. تمرین ۱-۳-۱، که در آن معادله (ج-۱) با استفاده از اصول هندسه مسطحه و مثلثات "ثابت" می شود.

۲. در واقع، مفهوم طول، یا نرم، دارای پیشینه ای درازتر از تابع متریک g است. بازتاب این نکته را می توان در چگونگی تعریف ضرب اسکالر در فیزیک مقدماتی برحسب طولها و کسینوس زاویه بین بردارها، مشاهده کرد. در واقع، فضاهای خطی نرمنداری یافت می شوند که نمی توان آنها را به فضایی با یک تابع متریک بالا برد (فصل ۵).

تقسیم بر نرم آن به یک بردار واحد تبدیل کرد، یعنی

$$\hat{e}_a = \frac{a}{\|a\|}$$

۱-۳-۲ ضرب اسکالر (ضرب داخلی)

تمام ملاحظات پیش‌تجربیدی‌اند. حال برای ملموس‌تر کردن بحث، بردار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$c = a_1 + \alpha a_2$$

که α یک عدد حقیقی و a_1 و a_2 دو بردار دلخواه (در یک صفحه)‌اند. با استفاده از تعریف ۱-۳-۱ و معادله (۹-۱)، داریم

$$0 \leq g(c, c) = g(a_1 + \alpha a_2, a_1 + \alpha a_2) = \|a_1\|^2 + \alpha^2 \|a_2\|^2 + 2\alpha g(a_1, a_2) \quad (10-1)$$

این نامساوی به‌ازای تمام مقادیر α صادق است. در حالت خاص، به‌ازای مقداری که عبارت سمت راست را کمینه می‌کند نیز صادق است. با گرفتن مشتق از عبارت سمت راست، مساوی قرار دادن نتیجه با صفر، و پیدا کردن مقدار کمینه‌ساز α ، داریم

$$\alpha = -\frac{g(a_1, a_2)}{\|a_2\|^2}$$

با نشان دادن این مقدار به‌جای α در معادله (۱۰-۱)، خواهیم داشت

$$\|a_1\|^2 + \frac{[g(a_1, a_2)]^2}{\|a_2\|^2} \|a_2\|^2 - 2 \frac{[g(a_1, a_2)]^2}{\|a_2\|^2} \geq 0$$

یا:

$$\|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \geq [g(a_1, a_2)]^2$$

بنابراین، در صورتی که $\|a_1\| \neq 0 \neq \|a_2\|$:

$$\frac{|g(a_1, a_2)|}{\|a_1\| \|a_2\|} \leq 1 \quad (11-1)$$



شکل ۵-۱ بردارهای a_1 و a_2 ، که در ضرب داخلی $a_1 \cdot a_2$ وارد می‌شوند.

عبارت سمت چپ رابطه (۱۱-۱) یک عبارت مثبت و همیشه کمتر از ۱ است (مادام که طول a_1 و a_2 صفر نباشد). بنابراین، به طور طبیعی می‌توان زاویه θ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\cos \theta \equiv \frac{g(a_1, a_2)}{\|a_1\| \|a_2\|}$$

یا

$$g(a_1, a_2) = \|a_1\| \|a_2\| \cos \theta$$

عبارت سمت راست همان تعریف ساده و مقدماتی حاصلضرب اسکالر دو بردار است. بنابراین، رسم بر این است که می‌نویسند^۱

$$g(a_1, a_2) \equiv a_1 \cdot a_2 = \|a_1\| \|a_2\| \cos \theta \quad (12-1)$$

هر چند معادله (۱۱-۱)، که سر منشأ مفهوم زاویه است، در مورد همه انواع بردارها صادق است (بخش ۲-۲)، اما تعریفی که در (۱۲-۱) برای زاویه بیان می‌شود، به بردارهای واقع در صفحه و فضا منحصر است، که θ ، مطابق شکل ۵-۱، صرفاً زاویه بین دو بردار است.

مثال ۱-۳-۱: ببینیم حاصلضرب اسکالر، برحسب مؤلفه‌ها در یک پایه مفروض، چه شکلی دارد. پایه $\{a_1, a_2\}$ و دو بردار دلخواه b و c را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \quad \text{و} \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 \quad (1)$$

۱. در جبر برداری مقدماتی، (۱۲-۱) نقطه آغاز بحث ضرب نقطه‌ای (اسکالر) است. با این همه، برخورد ما با مسئله در اینجا، هر چند تجریدی‌تر است، اما این مزیت را دارد که آسانتر می‌توان آن را بر موارد کلی‌تر اعمال کرد.

که (β_1, β_2) مؤلفه‌های بردار b و (γ_1, γ_2) مؤلفه‌های بردار c در پایه $\{a_1, a_2\}$ هستند. اکنون حاصلضرب اسکالر b و c را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} b \cdot c &\equiv g(b, c) = g(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2) \\ &= \beta_1 \gamma_1 g(a_1, a_1) + \beta_1 \gamma_2 g(a_1, a_2) + \beta_2 \gamma_1 g(a_2, a_1) + \beta_2 \gamma_2 g(a_2, a_2) \end{aligned} \quad (2)$$

ماتریس 2×2 ، G ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_{ij} \equiv g(a_i, a_j) \equiv a_i \cdot a_j \quad i, j = 1, 2 \quad (3)$$

یعنی

$$G = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

به این ترتیب، (۲) را می‌توان به این صورت:

$$b \cdot c = \beta_1 g_{11} \gamma_1 + \beta_1 g_{12} \gamma_2 + \beta_2 g_{21} \gamma_1 + \beta_2 g_{22} \gamma_2$$

یا، به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$b \cdot c = (\beta_1 \quad \beta_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\beta} G \gamma \quad (5)$$

که γ و β بردارهای ستونی‌اند و $\tilde{\beta}$ یک بردار سطری وابسته به β است.

ماتریس G ، ماتریس تابع متریک g است. ممکن است شکل G در یک پایه عام ساده نباشد و حتی تابعی از مکان باشد. اما، در بعضی پایه‌های خاص، G ممکن است تا حد چشمگیری ساده شود. مثلاً پایه‌آشنای $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ در صفحه را در نظر بگیرید. این بردارها منجر به متریکی با عناصر زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned} g_{11} &= a_1 \cdot a_1 \equiv \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = 1 & g_{12} &= a_1 \cdot a_2 \equiv \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = 0 \\ g_{21} &= a_2 \cdot a_1 \equiv \hat{e}_y \cdot \hat{e}_x = 0 & g_{22} &= a_2 \cdot a_2 \equiv \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y = 1 \end{aligned}$$

بنابراین، ماتریس G عبارت خواهد بود از

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad (6)$$

یعنی، ماتریس یکه (هماتی) دوبعدی. در پایه $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ ، معادله (۵)، شکل ساده زیر را پیدا می‌کند:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\beta_1 \quad \beta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = (\beta_1 \quad \beta_2) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 \quad (7)$$

که شکل آشنای حاصلضرب اسکالر برحسب مؤلفه‌هاست. این شکل ساده، یکی از انگیزه‌های کاربرد پایه‌های راست‌هنجار به‌شمار می‌آید (که در زیربخش بعد آن را توصیف خواهیم کرد). توجه کنید که در مورد برداری مانند \mathbf{v} که مؤلفه‌های آن در یک پایه راست‌هنجار $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ به‌صورت (v_1, v_2) هستند، با استفاده از (۷) می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2$$

و (۹-۱) منجر می‌شود به

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (8)$$

به‌عنوان یک مثال بارز و ملموس، بردارهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a}_1 = \hat{e}_x + \hat{e}_y \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_2 = 2\hat{e}_x + \hat{e}_y \quad (9)$$

عناصر ماتریسی متریک در پایه $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ عبارت‌اند از

$$g_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = (\hat{e}_x + \hat{e}_y) \cdot (\hat{e}_x + \hat{e}_y) = 2$$

$$g_{12} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = (\hat{e}_x + \hat{e}_y) \cdot (2\hat{e}_x + \hat{e}_y) = 3$$

$$g_{21} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = g_{12} = 3$$

$$g_{22} = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) = (2\hat{e}_x + \hat{e}_y) \cdot (2\hat{e}_x + \hat{e}_y) = 5$$

یا، در شکل ماتریس، به این قرار خواهد بود:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

اکنون بردارهای b و c را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آنها در $\{a_1, a_2\}$ ، به ترتیب، عبارت‌اند از $(1, 1)$ و $(-3, 2)$. با استفاده از (10) و (5) می‌توانیم حاصلضرب اسکالر b و c را برحسب این مؤلفه‌ها بنویسیم:

$$b \cdot c = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \quad (11)$$

همچنین می‌توانیم b و c را برحسب \hat{e}_x و \hat{e}_y بنویسیم و برای یافتن $b \cdot c$ از (7) بهره‌گیریم. چون b دارای مؤلفه‌های $(1, 1)$ در پایه $\{a_1, a_2\}$ است، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$b = a_1 + a_2 = (\hat{e}_x + \hat{e}_y) + (2\hat{e}_x + \hat{e}_y) = 3\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$$

همچنین

$$c = -3a_1 + 2a_2 = -3(\hat{e}_x + \hat{e}_y) + 2(2\hat{e}_x + \hat{e}_y) = \hat{e}_x - \hat{e}_y$$

بنابراین، در $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$ ، b دارای مؤلفه‌های $(3, 2)$ ، و c دارای مؤلفه‌های $(1, -1)$ است. لذا از (7) داریم

$$b \cdot c = (3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad (12)$$

که با (11) تطبیق می‌کند.

مثال ۱-۳-۲: متریکی را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر نمایش داده می‌شود:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

برای چنین متریکی، نتایج مثال ۱-۳-۱ منجر به یک حاصلضرب اسکالر بین دو بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ می‌شوند؛ این حاصلضرب به صورت زیر است

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \tilde{\alpha} G \beta = (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 \quad (2)$$

در حالت خاص

$$\|\mathbf{a}\|^2 \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \quad (3)$$

بدیهی است که بسته به اینکه $|\alpha_1| > |\alpha_2|$ یا $|\alpha_1| < |\alpha_2|$ ، کمیت $\|\mathbf{a}\|^2$ می‌تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد. چنین متریکی معین مثبت نیست. در واقع، بردار غیرصفری مثل $\mathbf{a} = (\alpha, \alpha)$ می‌تواند وجود داشته باشد که نرم آن صفر است؛ چنین برداری را بردار صفر می‌نامیم. تعمیم متریک نشان داده شده در (۱) به چهاربعد (سه بعد مربوط به فضا و یک بعد مربوط به زمان)، ریشه نظریه نسبیت است. در نظریه نسبیت خاص، بردارهای صفر، بردارهای چهاربعدی متناظر با جابه‌جایی‌های فضال-زمان سیگنالهای نوری هستند.

۳-۳-۱ تعامد

بردارهایی متقابلاً عمود بر یکدیگر برای توصیف موقعیتهای فیزیکی خیلی مناسب‌اند. مثلاً، انتخاب بردارهای پایه‌ای که بر یکدیگر عمودند، عمل مهم دوران را بسیار ساده می‌کند.

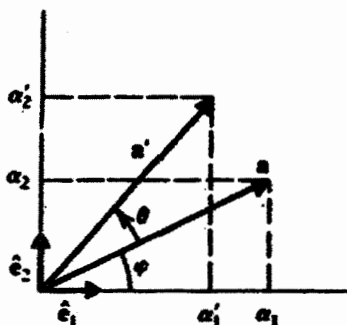
تعریف ۳-۳-۱: دو بردار را متعامد می‌نامیم در صورتی که حاصلضرب اسکالر آنها صفر شود. برداری نرمال است که نرم (طول) آن واحد باشد. دو بردار، متعامد یه‌نجار یا راست‌هنجارند در صورتی که متعامد، و هر دو نرمال باشند.

بردار \mathbf{a} را در صفحه در نظر بگیرید و آن را به صورت ترکیبی خطی از دو بردار پایه‌ای راست‌هنجار $\hat{\mathbf{e}}_1$ و $\hat{\mathbf{e}}_2$ بنویسید (شکل ۱-۶)،

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \hat{\mathbf{e}}_2$$

تعامد $\hat{\mathbf{e}}_1$ و $\hat{\mathbf{e}}_2$ ایجاب می‌کند که

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$$



شکل ۶-۱ بردارهای a و a' که چرخشی به اندازه θ بین آنها رابطه برقرار کرده است.

این عبارت به نوبه خود برای به دست آوردن مؤلفه‌های α_1 و α_2 خیلی مناسب است. از ضرب داخلی در \hat{e}_1 داریم:

$$a \cdot \hat{e}_1 = \alpha_1 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1$$

اما $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1$

$$a \cdot \hat{e}_1 = \alpha_1$$

همچنین، از ضرب داخلی a در \hat{e}_2 داریم

$$a \cdot \hat{e}_2 = \alpha_2$$

توجه کنید که اگر \hat{e}_1 و \hat{e}_2 راست‌هنگار نمی‌بودند، نمی‌توانستیم به این رابطه‌های ساده برسیم. حال فرض کنید با دوران a به اندازه زاویه θ (بدون تغییری در طول آن)، آن را به موضع جدیدی که در شکل ۶-۱ با a' نشان داده شده است، ببریم. چه رابطه‌ای بین مؤلفه‌های (α'_1, α'_2) متعلق به بردار a' و مؤلفه‌های (α_1, α_2) متعلق به بردار a برقرار است؟ ساده‌ترین راه پاسخ دادن به این پرسش توجه به این نکته است که

$$\alpha'_1 = a' \cdot \hat{e}_1 = \|a'\| \cos(\theta + \varphi) = \|a\| \cos(\theta + \varphi)$$

و

$$\alpha'_2 = a' \cdot \hat{e}_2 = \|a'\| \sin(\theta + \varphi) = \|a\| \sin(\theta + \varphi)$$

که ما از یکسان بودن طولهای a و a' استفاده کرده‌ایم. اکنون با بسط سینوس و کسینوس داریم

$$\alpha'_1 = \|a\| \cos \theta \cos \varphi - \|a\| \sin \theta \sin \varphi$$

و

$$\alpha'_2 = \|a\| \sin \theta \cos \varphi + \|a\| \cos \theta \sin \varphi$$

همچنین، با استفاده از شکل ۶-۱ داریم

$$\|a\| \cos \varphi = \alpha_1 \quad \text{و} \quad \|a\| \sin \varphi = \alpha_2$$

از این رو، خواهیم داشت

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \sin \theta$$

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \cos \theta$$

این روابط را می‌توان در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۱)$$

ماتریس A که در بردار ستونی سمت راست رابطه (۱۳-۱) ضرب می‌شود، از خاصیت مهم و ویژه‌ای برخوردار است. اگر جای سطر و ستونهای آن را با هم عوض کنیم، به طوری که سطر اول به ستون اول و سطر دوم به ستون دوم تبدیل شود، ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

این عمل را ترانزپوز، و ماتریس \tilde{A} را ترانزپوز ماتریس (۱۳-۱) می‌نامیم. به طور کلی، ترانزپوز یک ماتریس $m \times n$ که عنصر آن در سطر i ام و ستون j ام عبارت است از a_{ij} ، یک ماتریس $n \times m$ است که عنصر آن در سطر j ام و ستون i ام عبارت خواهد بود از a_{ij} .

برای ماتریس خاص A در (۱۳-۱)،

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}A$$

این معنا نشان می‌دهد که برای این ماتریس 2×2 خاص، ترانزادهمان وارون است، یا

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad (14-1)$$

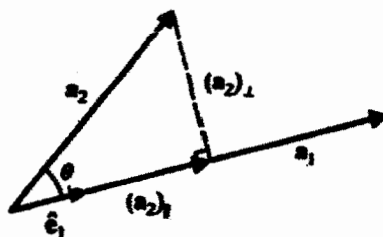
ماتریسهایی که ترانزاد و وارون آنها یکی باشد، به دلایلی که بعداً روشن خواهد شد، متعامد خوانده می‌شوند. این ماتریسها، و تعمیم آنها به ماتریسهای مختلط، در نظریه کوانتومی و سایر زمینه‌ها جایگاه خاصی دارند.

۴-۳-۱ فرایند گرام-اشمیت

اکنون که اهمیت بردارهای پایه راست‌هنجار معلوم شده است، طبیعتاً این پرسش پیش می‌آید که آیا اصولاً این بردارها وجود دارند یا خیر. به عبارت دیگر، با داشتن یک مجموعه بردار مستقل که تشکیل یک پایه را می‌دهند، آیا می‌توانیم بردارهای پایه راست‌هنجار جدیدی از ترکیبهای خطی آنها پیدا کنیم؟ پاسخ مثبت است، و روش سیستماتیک برای دستیابی به بردارهای پایه راست‌هنجار از هر مجموعه بردار پایه خطی-مستقل، فرایند راست‌هنجارش گرام-اشمیت نامیده می‌شود.

در صفحه، راست‌هنجارش گرام-اشمیت خیلی ساده است. فرض کنید دو بردار پایه a_1 و a_2 در اختیار داریم (شکل ۷-۱). برای به دست آوردن دو بردار راست‌هنجارش، ابتدا با تقسیم a_1 بر طول آن، $\|a_1\|$ ، بردار واحد \hat{e}_1 را پیدا می‌کنیم:

$$\hat{e}_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$



شکل ۷-۱ راست‌هنجارش گرام-اشمیت در صفحه.

بدیهی است که \hat{e}_1 یک بردار واحد است زیرا

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \cdot \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{a_1 \cdot a_1}{\|a_1\|^2} = 1$$

اکنون یک ترکیب خطی از a_2 و \hat{e}_1 به وجود می آوریم که بر \hat{e}_1 عمود باشد. به این منظور می نویسیم

$$a_2 = (a_2)_{\parallel} + (a_2)_{\perp}$$

که $(a_2)_{\parallel}$ و $(a_2)_{\perp}$ ، به ترتیب، موازی و عمود بر \hat{e}_1 اند. چون $(a_2)_{\parallel}$ در راستای \hat{e}_1 است، می توانیم بنویسیم:

$$(a_2)_{\parallel} = \|(a_2)_{\parallel}\| \hat{e}_1 = \|a_2\| \cos \theta \hat{e}_1 = (a_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1$$

از دو معادله قبل داریم،

$$(a_2)_{\perp} = a_2 - (a_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1$$

ملاحظه می کنیم که $(a_2)_{\perp}$ یک ترکیب خطی از a_2 و \hat{e}_1 است. صرفاً یک عدد است) و بر \hat{e}_1 عمود است [به سادگی می توان دید که $(a_2)_{\perp} \cdot \hat{e}_1 = 0$]. اگر $(a_2)_{\perp}$ را بر طول آن تقسیم کنیم، بردار واحدی عمود بر \hat{e}_1 به دست می آید. می توانیم این بردار واحد را \hat{e}_2 بنامیم:

$$\hat{e}_2 = \frac{(a_2)_{\perp}}{\|(a_2)_{\perp}\|} = \frac{a_2 - (a_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1}{\|a_2 - (a_2 \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1\|}$$

به این ترتیب، ما از دو بردار پایه خطی مستقل دلخواه، یک جفت بردار پایه راست هنجار به دست آورده ایم. این روش، برای موارد کلی تر نیز کاربرد دارد، و راست هنجارش گرام-اشمیت برای سه بعد و بیشتر را در آینده بررسی خواهیم کرد.

همان گونه که در مثال ۱-۳-۱ دیدیم، حاصلضرب داخلی، برحسب مؤلفه های بردارها در یک پایه راست هنجار، ساده و متقارن می شود. با استفاده از خاصیت خطی حاصلضرب اسکالر و

راست‌هنجارش \hat{e}_1 و \hat{e}_2 می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv (\alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2) \cdot (\beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_1 \beta_2 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 + \alpha_2 \beta_1 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \beta_2 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 \quad (15-1) \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \end{aligned}$$

که همان عبارت مثال ۱-۳-۱ است.

تمرینها

۱-۳-۱ نشان دهید که در دو بعد: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. (گوشد: این تمرین عمدتاً متضمن مثلثات و هندسه است.)

۲-۳-۱ زاویه بین دو بردار \mathbf{b} و \mathbf{c} را بیابید که مؤلفه‌های آنها در یک پایهٔ راست‌هنجار، به ترتیب، $(1, 2)$ و $(2, -3)$ است.

۳-۳-۱ با استفاده از روش گرام-شمیت، بردارهای راست‌هنجاری را بیابید که از دو بردار تمرین ۱-۳-۲ به دست می‌آیند.

۴-۳-۱ فرض کنید \mathbf{A} یک ماتریس 2×2 پادمتقارن باشد، یعنی ماتریسی با این خاصیت:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$$

در حالت خاص، عناصر قطری، a_{ii} ، صفرند. (چرا؟) ثابت کنید که $e^{\mathbf{A}}$ یک ماتریس راست‌هنجار است، که در آن، بنابه تعریف

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_2 + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k$$

۴-۱ بردار در فضا

مطالبی را که تا اینجا بیان کرده‌ایم به آسانی می‌توان به بردارهای واقع در فضا تعمیم داد. در حالت خاص، اگر $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ بردارهایی در فضا و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعدادی حقیقی باشند، در آن صورت ترکیب خطی

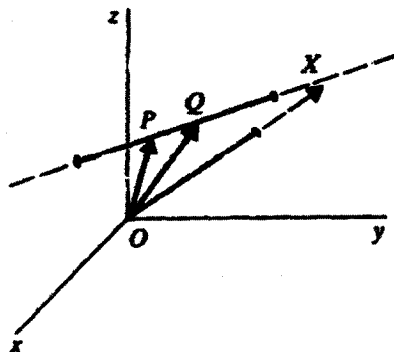
$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$$

نیز یک بردار در فضاست.

از لحاظ هندسی می‌توان نشان داد که چهار بردار دلخواه در فضا، خطی-وابسته‌اند. اثبات این مسئله شامل همان مطالبی است که برای بردارهای واقع در صفحه به‌کار بردیم (شکل ۱-۳)، اما مطرح کردن آن در سه بعد قدری پیچیده‌تر است، زیرا ترسیم اشیای سه‌بعدی بر روی صفحه کاغذ دشوارتر است. گرچه در سه بعد، هر چهار بردار دلخواهی را که در نظر بگیریم خطی-وابسته‌اند، اما سه بردار ناهم‌صفحه (یعنی سه برداری که در یک صفحه قرار ندارند)، خطی-مستقل‌اند و تشکیل یک پایه در فضا می‌دهند.

همچنین می‌توانیم یک متریک در فضا تعریف کنیم. متریک مزبور دارای تمام خواص تصریح شده در (۱-۸ الف) تا (۱-۸ ج) است. اگر بخواهیم، می‌توانیم با اعمال (۱-۸ د) و بهره‌گیری از این واقعیت که $g(a, a) = 0$ می‌کند a صفر باشد، این متریک را معین مثبت بسازیم. در آن صورت می‌توانیم با استفاده از (۱-۱۲)، زاویه θ بین دو بردار را تعریف کنیم. به عبارت دیگر، تمام خواص بردارهای واقع در صفحه، عیناً به بردارهای واقع در فضا منتقل می‌شود.

مثال ۱-۴-۱: معادله پارامتری خطی را که از دو نقطه مفروض می‌گذرد، می‌توان به شکل برداری به‌دست آورد؛ با توجه به این واقعیت که هر نقطه در فضا برداری را تعریف می‌کند که مؤلفه‌های آن مختصات نقطه یاد شده را تشکیل می‌دهند. یعنی، اگر مختصات نقطه‌های P و Q در شکل ۱-۸، به ترتیب، (p_1, p_2, p_3) و (q_1, q_2, q_3) باشند، در آن صورت می‌توانیم بردارهای p و q را با آن مؤلفه‌ها تعریف کنیم. نقطه دلخواه X با مختصات (x_1, x_2, x_3) (یا (x, y, z)) فقط در صورتی روی خط PQ قرار خواهد داشت که نوک بردار $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ روی آن خط واقع باشد. این



شکل ۱-۸ خطی که P و Q را به هم وصل می‌کند.

امر فقط به شرطی اتفاق می‌افتد که برداری که P و X را به هم وصل می‌کند، یعنی $x - p$ ، با بردار $q - p$ ، که P و Q را به هم وصل می‌کند متناسب باشد. بنابراین، به‌ازای عدد حقیقی t ، باید داشته باشیم:

$$x - p = t(q - p) \quad (۱)$$

یا

$$x = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq \quad (۲)$$

معادله (۲)، شکل برداری معادله یک خط است. این معادله را می‌توان با توجه به این امر که تساوی بردارها به معنای تساوی مؤلفه‌های متناظر آنهاست، به شکل مؤلفه‌ای نوشت. بنابراین،

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t)p_1 + tq_1 \\ x_2 &= (1 - t)p_2 + tq_2 \\ x_3 &= (1 - t)p_3 + tq_3 \end{aligned} \quad (۳)$$

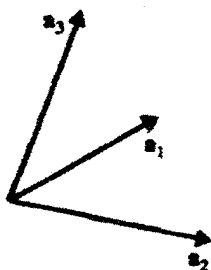
● که معادله پارامتری متداول یک خط است.

۱-۴-۱ بردارهای متعامد در فضا

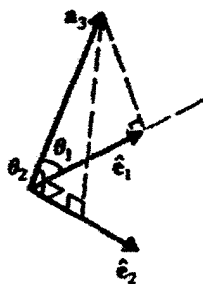
ترسیم بردارهای پایه راست‌هنگار در فضا، کار بی‌زحمتی است. این کار را می‌توان با فرایند راست‌هنگارش گرام-شمیت انجام داد. سه بردار ناهم‌صفحه a_1 ، a_2 و a_3 را مطابق شکل ۱-۹ در نظر بگیرید. در صفحه دو بردار a_1 و a_2 ، می‌توانیم فرایند گرام-شمیت را اعمال کنیم و دو بردار راست‌هنگار e_1 و e_2 را به‌دست آوریم (شکل ۱-۹ ب). برای به‌دست آوردن سومین بردار مجموعه، توجه کنید که می‌توان نوشت

$$a_3 = (a_3)_\perp + (a_3^{(1)})_{\parallel} + (a_3^{(2)})_{\parallel}$$

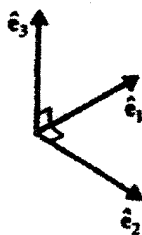
که $(a_3)_\perp$ مؤلفه عمود بر e_1 و e_2 بردار a_3 ، $(a_3^{(1)})_{\parallel}$ مؤلفه موازی با e_1 و $(a_3^{(2)})_{\parallel}$ مؤلفه



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹-۱ راست‌هندجاریش گرامشیت در فضا: (الف) سه بردار مستقل، \hat{e}_2 و \hat{e}_1 حاصل از راست‌هندجاریش a_1 و a_2 در صفحه، و (ج) سه بردار راست‌هندجار.

موازی با \hat{e}_2 است. $\|a_r^{(1)}\|$ و $\|a_r^{(2)}\|$ به صورت زیرند:

$$\|a_r^{(1)}\| = \|a_r\| \cos \theta_1 \hat{e}_1 = (a_r \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1$$

$$\|a_r^{(2)}\| = \|a_r\| \cos \theta_2 \hat{e}_2 = (a_r \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2$$

بنابراین، داریم

$$a_r = (a_r)_\perp + (a_r \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (a_r \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2$$

یا

$$(a_r)_\perp = a_r - (a_r \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 - (a_r \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2$$

اکنون \hat{e}_2 را تعریف می‌کنیم:

$$\hat{e}_2 = \frac{(a_r)_\perp}{\|(a_r)_\perp\|} = \frac{a_r - (a_r \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 - (a_r \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2}{\|a_r - (a_r \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 - (a_r \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2\|}$$

همین‌که به \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 دست یافتیم، هر برداری را می‌توان برحسب آنها نوشت. اگر a و b

بردار باشند، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3$$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3$$

مثل بردارهای واقع در صفحه، می‌توانیم حاصلضرب نقطه‌ای را برحسب مؤلفه‌های \mathbf{a} و \mathbf{b} بیان کنیم (با این همه، تمرین ۱-۲-۱ را ببینید):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \quad (16-1)$$

معادله (۱۶-۱) از خاصیت توزیع‌پذیری حاصلضرب داخلی [معادله‌های (۸-۱) و (۸-۱) ج] و راست‌هنجاری $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ و \hat{e}_3 به‌دست می‌آید.

۲-۴-۱ ماتریسهای متعامد 3×3

اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} را به‌صورت بردارهای ستونی زیر نشان دهیم:

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

در آن صورت (۱۶-۱) تبدیل می‌شود به

$$\tilde{\alpha} \boldsymbol{\beta} \equiv (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (17-1)$$

اکنون همین حاصلضرب داخلی را در پایه راست‌هنجار دیگری در نظر بگیرید. با نظر به ملاحظات قبلی در دو بعد، روشن است که باید یک ماتریس 3×3 مثل Γ چنان وجود داشته باشد که:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} = \Gamma \boldsymbol{\alpha} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\beta}' = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \beta'_3 \end{pmatrix} = \Gamma \boldsymbol{\beta}$$

که در آن، $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ و $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ به ترتیب، مؤلفه‌های a و b در پایه جدید (تبدیل منفعل) یا مؤلفه‌های بردار تبدیل یافته در دستگاه مختصات اصلی (تبدیل فعال) هستند. اکنون ببینیم در این وضعیت جدید، حاصلضرب داخلی چگونه است. به بیان دیگر، اگر یک تبدیل را هم بر a و هم بر b اعمال کنیم، بر سر $a \cdot b$ یا $\bar{\alpha}\beta$ چه می‌آید؟
از دیدگاه هندسی، چون با رفتن از یک پایه راست‌هنگار به پایه دیگر، طولها و زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند، نتیجه می‌گیریم که

$$a' \cdot b' = a \cdot b$$

یا

$$\bar{\alpha}'\beta' = \bar{\alpha}\beta$$

یعنی، در یک تبدیل مختصات راست‌هنگار (یا دوران)، حاصلضرب نقطه‌ای تغییری نمی‌کند.^۱ با جایگزین کردن α' و β' خواهیم داشت:

$$(\widetilde{\Gamma\alpha})(\Gamma\beta) = \bar{\alpha}\beta \quad (18-1)$$

به آسانی می‌توان نشان داد (و در فصل ۳ این کار را خواهیم کرد) که، به طور کلی، ترانهاد حاصلضرب دو ماتریس، با حاصلضرب ترانهادها با ترتیب عکس مساوی است. یعنی، به ازای هر دو ماتریس دلخواه A و B ، داریم

$$(\widetilde{AB}) = \widetilde{BA}$$

بنابراین، معادله (۱۸-۱) تبدیل می‌شود به

$$(\widetilde{\bar{\alpha}})(\Gamma\beta) = \bar{\alpha}\beta$$

۱. اصطلاح "تبدیل مختصات" را در اینجا تاحدی با مسامحه به کار می‌بریم. آنچه واقعاً مورد نظر است، عبارت خواهد بود از یک دوران صلب که شامل هیچ تغییر طول یا زاویه‌ای نیست. در حالت کلی، تبدیل مختصات ممکن است شامل تغییری در طول یا زاویه باشد.

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\Gamma}\Gamma)\beta = \tilde{\alpha}\beta$$

چون این رابطه به ازای هر بردار α و β برقرار است، باید داشته باشیم

$$\tilde{\Gamma}\Gamma = 1_r \quad (19-1)$$

که به معنای این است که Γ باید یک ماتریس متعامد باشد. این رابطه، تعمیم نتیجه‌ای است به فضا، که ما برای صفحه به دست آوردیم. اگر Γ را به صورت زیر بنویسیم

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

در آن صورت می‌توان معادله (19-1) را به این شکل نوشت:

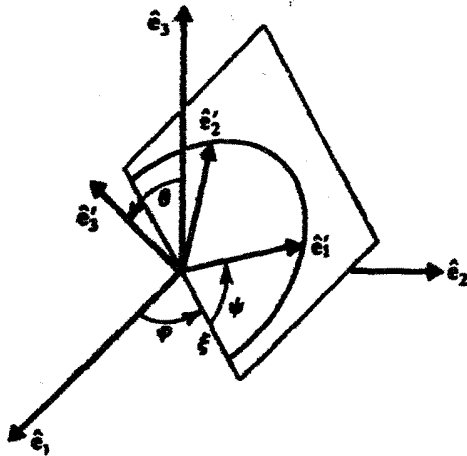
$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حاصلضرب در سمت چپ عبارت بالا، یک ماتریس 3×3 است که عناصر آن باید با عناصر متناظر ماتریس سمت راست، مساوی باشند. یعنی، عنصر یکدیگر $\tilde{\Gamma}\Gamma$ باید با عنصر یکدیگر سمت راست مساوی باشد؛ این حکم منجر می‌شود به

$$\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^2 = 1$$

همچنین، از تساوی عناصر یکدیگر در دو طرف داریم:

$$\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22} + \gamma_{31}\gamma_{32} = 0$$



شکل ۱-۱ زاویه‌های اویلر و رابطه بین دو دستگاه مختصات، $\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

و به همین ترتیب الی آخر. به این ترتیب، ۹ معادله به دست می‌آوریم. اما، واریسی ساده این معادله‌ها نشان می‌دهد که فقط ۶ تای آنها مستقل‌اند. بنابراین، ما فقط می‌توانیم ۶ معادله با ۹ مجهول را برحسب سه تا از این مجهولها حل کنیم. این سه پارامتر کاملاً دلخواه‌اند.

معنای فیزیکی این وضعیت آن است که سه پارامتر برای مشخص کردن یکی از چرخشهای صلب محورها مورد نیاز است. راههای بسیاری برای مشخص کردن این سه پارامتر وجود دارد. یکی از مفیدترین و مناسبترین راهها، استفاده از زاویه‌های اویلر (شکل ۱-۱) است. برحسب این زاویه‌ها، می‌توان نشان داد که ماتریس Γ به صورت زیر درمی‌آید (مثال ۱-۴-۲)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

خیلی سراسرست می‌توان ثابت کرد که

$$\tilde{\Gamma} \Gamma = \Gamma \tilde{\Gamma} = 1_r$$

بنابر این معادله، سطرها (ستونها)ی یک ماتریس متعامد، یک مجموعه بردار راست‌هنگار تشکیل می‌دهند (نام "ماتریس متعامد" از همین جا گرفته می‌شود). خواننده به آسانی می‌تواند ثابت کند که حاصلضرب داخلی هر سطر (ستون) در هر سطر (ستون) دیگر صفر، و نرم هر سطر (ستون) یک است. رویای اویلر در مکانیک برای توصیف حرکت دورانی جسم صلب مفیدند.

مثال ۱-۴-۲: از شکل ۱-۱۰ پیداست که دستگاه $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ را می‌توان با سه عمل زیر از $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ به دست آورد:

(الف) دستگاه مختصات را به اندازه زاویه φ حول محور \hat{e}_3 دوران دهید. این عمل، با دورانی در صفحه $\hat{e}_1 - \hat{e}_2$ به اندازه زاویه φ بدون تغییر کردن محور \hat{e}_3 ، متناظر است. ماتریس متناظر با این دوران عبارت است از

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

بدیهی است که این ماتریس مختصه z یک بردار ستونی (x, y, z) را تغییر نمی‌دهد در حالی که باعث دوران x و y به اندازه φ می‌شود.

(ب) دستگاه مختصات جدید را حول محور \hat{e}_1 جدید (محور x در شکل) به اندازه زاویه θ دوران دهید. ماتریس متناظر عبارت خواهد بود از

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

(ج) دستگاه را حول محور \hat{e}_2 جدید (محور y در شکل) به اندازه زاویه ψ دوران دهید. ماتریس متناظر عبارت است از

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$\Gamma = \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 \quad (4)$$

به ترتیب عمل ضرب توجه کنید.

۱-۴-۳ حاصلضرب برداری

عمل دیگر، که فقط برای بردارهای واقع در فضا تعریف می‌شود، حاصلضرب برداری است.^۱ با در اختیار داشتن دو بردار فضایی a و b ، می‌توانیم بردار فضایی سومی را چنان بیابیم که:

$$c = a \times b$$

طول c به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|c\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$$

که θ زاویه بین a و b است. جهت c با قاعده دست راست یافته می‌شود: اگر a را به اندازه زاویه کوچکتر بین a و b (به ترتیب ظاهر شدن a و b در اینجا توجه کنید)، به سوی b بچرخانیم، یک بیج راستگرد که عمود بر a و b است، در جهت $a \times b$ پیش خواهد رفت. این تعریف ایجاب می‌کند که

$$a \times b = -b \times a \quad (۱-۲۰)$$

و

$$a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$$

یعنی، $a \times b$ بر a و b عمود است. این واقعیت، روشن می‌کند که چرا $a \times b$ در صفحه تعریف نمی‌شود. اگرچه می‌توان $a \times b$ را برای بردارهایی چون a و b تعریف کرد که در یک صفحه قرار دارند، اما $a \times b$ در آن صفحه واقع نخواهد بود (بر آن صفحه عمود خواهد بود). برای حاصلضرب برداری، a و b را باید بردارهای فضایی در نظر گرفت. حاصلضرب برداری دارای خواص زیر است:

$$a \times (\alpha b) = \alpha a \times b$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$a \times a = 0$$

۱. برای ملاحظه رابطه بین حاصلضرب برداری و تانسورهای پادمتقارن، مثال ۴-۱۸-۱ را ببینید.

با استفاده از این خواص، می‌توانیم حاصلضرب برداری دو بردار را برحسب مؤلفه‌های آنها در یک پایهٔ راست‌هنجار بنویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3) \times (\beta_1 \hat{e}_1 + \beta_2 \hat{e}_2 + \beta_3 \hat{e}_3) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 + \alpha_1 \beta_2 \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 + \alpha_1 \beta_3 \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 + \alpha_2 \beta_1 \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 \\ &\quad + \alpha_2 \beta_2 \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 + \alpha_2 \beta_3 \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 + \alpha_3 \beta_1 \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 + \alpha_3 \beta_2 \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 \\ &\quad + \alpha_3 \beta_3 \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 \end{aligned}$$

اما به‌اعتبار خاصیت چهارم حاصلضرب برداری، داریم

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = 0$$

همچنین، در پی نحوهٔ سم‌گیری \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 ، \hat{e}_3 نسبت به یکدیگر در یک به اصطلاح دستگاه مختصات راستگرد، داریم

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_2$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_1$$

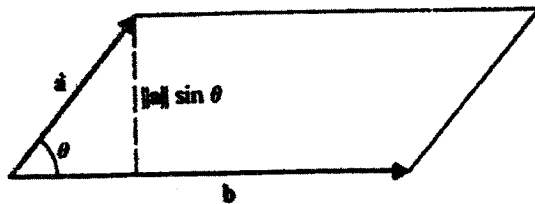
با استفاده از این روابط، خواهیم داشت

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \hat{e}_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \hat{e}_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \hat{e}_3$$

این معادله را با رعایت دقت و ظرافت می‌توان به یک شکل دترمینانی نوشت^۱

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad (21-1)$$

۱. در اینجا فرض شده خواننده آشنایی اساسی با دترمینانها دارد. نظریهٔ دترمینانها و رابطهٔ آنها با ماتریسها در فصلهای ۳ و ۴ ارائه خواهد شد.



شکل ۱۱-۱ مساحت متوازی‌الاضلاع، حاصلضرب ارتفاع در قاعده است.

به‌سخن دقیق، عناصر یک دترمینان باید عدد باشند، بنابراین ظاهر شدن بردارهای واحد در سطر اول کاملاً هم "مجاز" نیست. اما، می‌توانیم شکل دترمینانی (۲۱-۱) را به‌عنوان یک وسیله "یادسپار" که برای به‌خاطر سپردن مؤلفه‌های $a \times b$ مفید است، به‌کار ببریم. به‌ترتیب ظاهر شدن مؤلفه‌های a و b در دترمینان توجه کنید. تغییر ترتیب a و b در حاصلضرب برداری، با تعویض جای دو سطر دترمینان متناظر است، که باعث تغییر علامت آن می‌شود.

عملیات دیگری هم هستند که مجموعه بردارها را غنی‌تر می‌کنند. مثلاً در صورت اختیار داشتن یک مجموعه بردار، می‌توان با عمل دوتایی ضرب، بردارهای دیگری به‌وجود آورد. اگر عمل ضرب را برای بردارها تعریف کنیم، مجموعه بردارها به‌جبر برداری تبدیل می‌شود؛ این موضوع، در شکل کلی آن، در این کتاب مطرح نخواهد شد. با این همه، نوع خاصی از ضرب بردارها، یعنی تانسورها، را در فصل ۴ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱-۴-۳: از تعریف حاصلضرب برداری و شکل ۱۱-۱، ملاحظه می‌کنیم که

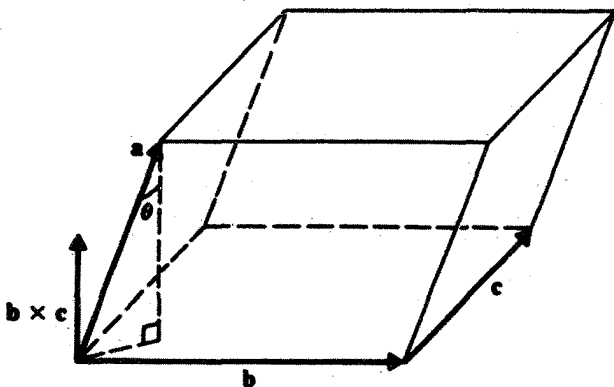
مساحت متوازی‌الاضلاعی که a و b اضلاع آن را مشخص کنند $\|a \times b\|$

بنابراین، با استفاده از (۲۱-۱) می‌توانیم مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از a و b را مستقیماً برحسب مؤلفه‌های آنها پیدا کنیم. مثلاً، مساحت تعریف شده با $a = (1, 1, -2)$ و $b = (2, 0, 3)$ را می‌توان با محاسبه حاصلضرب برداری زیر پیدا کرد:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$$

سیس طول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\|a \times b\| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{62}$$



شکل ۱۲-۱ مساحت متوازی‌السطوح مساوی است با حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن.

مثال ۱-۴-۴: حجم متوازی‌السطوحی که از سه بردار ناهم‌صفحه a ، b ، و c تشکیل می‌شود، عبارت است از $|a \cdot (b \times c)|$. این موضوع را می‌توان از شکل ۱۲-۱ ملاحظه کرد، زیرا می‌دانیم حجم عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= (b \times c)_1 \alpha_1 + (b \times c)_2 \alpha_2 + (b \times c)_3 \alpha_3 \\ &= (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) \alpha_1 + (\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) \alpha_2 + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \alpha_3 \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به صورت دترمینان زیر نوشت:

$$\text{حجم} = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

دقت کنید که باید قدرمطلق نتیجه را در نظر گرفت.

تمرینها

۱-۴-۱ تانسور متریک وابسته به بردارهای پایه $a_1 = \hat{e}_x + \hat{e}_y$ ، $a_2 = \hat{e}_x + \hat{e}_z$ ، و $a_3 = \hat{e}_y + \hat{e}_z$ را پیدا کنید.

۲-۴-۱ حاصلضرب داخلی دو بردار b و c را محاسبه کنید، که مؤلفه‌های آنها در پایه $\{a_1, a_2, a_3\}$ در تمرین ۱-۴-۱، به ترتیب، عبارت‌اند از $(1, -1, 2)$ و $(0, 2, 3)$.

۳-۴-۱ با استفاده از فرایند راست‌هنجارش گرام-اشمیت، سه بردار راست‌هنجار از پایه $\{a_1, a_2, a_3\}$ تمرین ۱-۴-۱ را پیدا کنید.

۴-۴-۱ با استفاده از فرایند راست‌هنجارش گرام-اشمیت، نشان دهید که سه بردار $(2, -1, 3)$ ، $(-2, 1, -1)$ ، و $(3, 1, 2)$ خطی-وابسته‌اند.

۵-۴-۱ شکل برداری معادله صفحه‌ای را که توسط سه نقطه P, Q, R ، به ترتیب به مختصات (p_1, p_2, p_3) ، (q_1, q_2, q_3) ، و (r_1, r_2, r_3) تعریف می‌شود، پیدا کنید.

۶-۴-۱ با استفاده از روشهای برداری، قانون سینوسها را برای مثلث به دست آورید.

۷-۴-۱ نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه سه بردار a_3, a_2, a_1 در یک صفحه واقع باشند، عبارت است از

$$a \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

۵-۱ آنالیز برداری در مختصات دکارتی

اکنون جبر بردارها را رها می‌کنیم و به اختصار پیرامون موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال بردارها، یا آنالیز برداری به بحث می‌پردازیم. بحث جبر برداری در N بعد را در فصل ۲ ادامه خواهیم داد.

مفهوم میدان، شالوده مطالعه آنالیز برداری را تشکیل می‌دهد، که در بسیاری از زمینه‌های فیزیک مانند حرکت شاره‌ها، رسانش گرما، نظریه الکترومغناطیس، گرانش، و غیره، نقش مهمی بازی می‌کند. در تمام این مقولات یک کمیت فیزیکی دخیل است که از نقطه‌ای به نقطه دیگر (و نیز از لحظه‌ای به لحظه دیگر) تغییر می‌کند و در نتیجه تابعی است از مختصات فضایی (و زمان). این کمیت فیزیکی یا می‌تواند اسکالر باشد، که در آن صورت آن را میدان اسکالر می‌نامیم، یا اینکه بردار باشد، که در آن صورت میدان برداری خوانده می‌شود. مثلاً دمای جو کمیتی اسکالر است زیرا تابعی از مختصات فضا (استوا در مقابل قطبها) و زمان (تابستان در مقابل زمستان) است و به هیچ جهت خاصی وابسته نیست. از سوی دیگر، سرعت باد میدانی برداری است، زیرا (۱) سرعت، خود یک بردار است، و (۲) بزرگی و جهت آن به مختصات فضا (و زمان) وابسته است. به طور کلی، وقتی از یک میدان برداری صحبت می‌کنیم، با سه تابع فضا (همراه با زمان)، که به مؤلفه‌های بردار مربوط‌اند، سروکار داریم.

به عنوان یک مثال خاص، وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن باد افقی است، و بسته به موقعیت، هر دو مؤلفه شرقی-غربی و شمالی-جنوبی تغییر می‌کنند. می‌توانیم (با چشمپوشی از

متغیر زمان) بنویسیم:

$$v_x = f_1(x, y, z)$$

$$v_y = f_2(x, y, z)$$

$$v_z = 0$$

که f_1 و f_2 توابعی از مختصات اند. توجه داشته باشید که مؤلفه‌های x و y هر دو توابعی از z (در این مثال، ارتفاع از سطح زمین) هستند، هر چند که سرعت هیچ‌گونه مؤلفه بالایی یا پایینی ندارد ($v_z = 0$). این امر صرفاً به آن معناست که وقتی به ارتفاعات بالاتر می‌رویم، دو مؤلفه سرعت تغییر خواهند کرد (نوعاً افزایش می‌یابند). نکته‌ای که در اینجا باید بر آن تأکید کرد، این است که در مورد یک میدان برداری، ما با سه تابع مختصات (و زمان) سروکار داریم.

با معلوم بودن میدانهای اسکالر و برداری، می‌توانیم عملیات تحلیلی (مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، و مانند آن) بر روی آنها انجام دهیم و میدانهای اسکالر و برداری جدیدی به دست آوریم. ابتدا مشتق‌گیری را بررسی می‌کنیم.

۱-۵-۱ مشتق نسبت به زمان

در بحث خود، پیرامون میدانها، دیدیم که امکان وابستگی به زمان نیز وجود دارد. به‌طور کلی، میدانها توابعی از زمان‌اند و عمل مشتق‌گیری نسبت به زمان را می‌توان تعریف کرد و به‌کار برد. مثلاً اگر v معرف سرعت یک ذره باشد، در آن صورت مشتق v نسبت به زمان شتاب است.

مشتق زمانی میدانهای اسکالر، درست مثل مشتق زمانی توابع معمولی است. در مورد میدانهای برداری، همان شگردی را تعقیب می‌کنیم که در مورد توابع معمولی برای تعریف مشتق به‌کار بردیم

$$\frac{da(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t}$$

وقتی \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند، برحسب مؤلفه‌ها داریم

$$\frac{da(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t)]\hat{e}_1 + [\alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t)]\hat{e}_2 + [\alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)]\hat{e}_3}{\Delta t}$$

۱. همچنین، فرض بر این است که سه تابع نمایانگر سه مؤلفه یک میدان برداری، دارای مشتقاتی از همه مرتبه‌ها هستند. این فرض در تمام مباحثی که از این پس می‌آیند، اعمال خواهد شد.

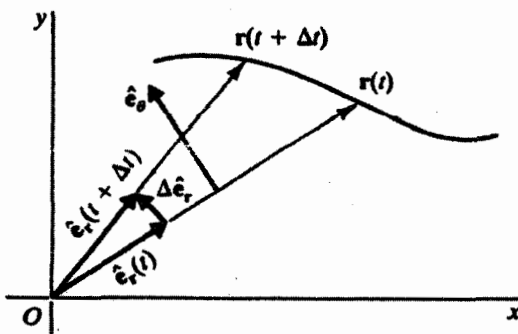
$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(t + \Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t} \right) \hat{e}_1 + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(t + \Delta t) - \alpha_2(t)}{\Delta t} \right) \hat{e}_2 \\
&\quad + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha_3(t + \Delta t) - \alpha_3(t)}{\Delta t} \right) \hat{e}_3 \\
&= \frac{d\alpha_1}{dt} \hat{e}_1 + \frac{d\alpha_2}{dt} \hat{e}_2 + \frac{d\alpha_3}{dt} \hat{e}_3 \quad (22-1)
\end{aligned}$$

که بنا بر آن، زامین مؤلفه مشتق یک بردار، مشتق زامین مؤلفه آن بردار است. توجه داشته باشید که وقتی \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 وابسته به زمان باشند، که نوعاً وقتی پیش می‌آید که حرکت ذره را مانند مختصات کروی و استوانه‌ای در مختصات خمیده خطی توصیف کنیم، بیان بالا درست نیست (مثال ۱-۵-۱). در مختصات دکارتی \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 بردارهای ثابتی‌اند، و بنابراین، (۲۲-۱) صادق است.

مثال ۱-۵-۱: بیابید شتاب ذره‌ای را که در یک صفحه حرکت می‌کند به روشی ابتدایی محاسبه کنیم. برای دستیابی به یک مثال پیچیده‌تر، مثال ۱-۶-۳ را ببینید. حرکت ذره را برحسب مختصات قطبی r و θ (شکل ۱-۱۳) توصیف می‌کنیم. مکان ذره با بردار \mathbf{r} مشخص می‌شود. می‌توان این بردار را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad (1)$$

که r طول بردار \mathbf{r} و \hat{e}_r یک بردار واحد در جهت \mathbf{r} است. توجه کنید که \hat{e}_r با زمان تغییر می‌کند.



شکل ۱-۱۳ بردار واحد \hat{e}_r با زمان تغییر می‌کند.

با مشتق گرفتن از (۱)، سرعت به دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} \quad (2)$$

شکل ۱-۱۳ نشان می‌دهد که $\Delta \hat{\mathbf{e}}_r$ در جهت $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ عمود بر $\hat{\mathbf{e}}_r$ و در جهتی است که در آن θ افزایش می‌یابد. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta \hat{\mathbf{e}}_r \approx \|\Delta \hat{\mathbf{e}}_r\| \hat{\mathbf{e}}_\theta \approx \|\hat{\mathbf{e}}_r\| \Delta \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

که در آن $\|\Delta \hat{\mathbf{e}}_r\|$ با کمان دایره‌ای به شعاع $\|\hat{\mathbf{e}}_r\|$ ، مقابل زاویه $\Delta \theta$ ، تقریب زده می‌شود. با این همه، چون طول $\hat{\mathbf{e}}_r$ واحد است، داریم

$$\Delta \hat{\mathbf{e}}_r \approx \Delta \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

و

$$\frac{\Delta \hat{\mathbf{e}}_r}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

در حد، وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ،

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{e}}_\theta \equiv \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (3)$$

که نقطه روی θ به معنای مشتق نسبت به زمان است. بنابراین (۲) تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (4)$$

چون می‌خواهیم شتاب، \mathbf{a} ، را پیدا کنیم، نه تنها به $d\hat{\mathbf{e}}_r/dt$ ، بلکه به $d\hat{\mathbf{e}}_\theta/dt$ نیز نیاز داریم. برای پیدا کردن مقدار اخیر، توجه کنید که $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = 0$. بنابراین،

$$0 = \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta) = \left(\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt}\right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \left(\frac{d\hat{\mathbf{e}}_\theta}{dt}\right)$$

و با استفاده از (۳)، داریم:

$$0 = \dot{\theta} + \hat{e}_r \cdot \left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right)$$

یا

$$\hat{e}_r \cdot \left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right) = -\dot{\theta} \quad (5)$$

از سوی دیگر، با مشتق گرفتن از $\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta = 1$ نسبت به زمان، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right) \cdot \hat{e}_\theta + \hat{e}_\theta \cdot \left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right) = 0$$

یا

$$\hat{e}_\theta \cdot \left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right) = 0 \quad (6)$$

اما $d\hat{e}_\theta/dt$ یک بردار در صفحه مورد نظر است و، بنابراین، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \alpha \hat{e}_r + \beta \hat{e}_\theta \quad (7)$$

با محاسبه حاصلضرب داخلی (۷) در \hat{e}_r و \hat{e}_θ ، و کاربرد (۵) و (۶)، نتیجه می‌گیریم که $\alpha = -\dot{\theta}$ و $\beta = 0$. بنابراین،

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \hat{e}_r \quad (8)$$

این نتیجه را می‌توانستیم از طریق هندسی، با دنبال کردن تغییر جهت \hat{e}_θ بر اثر تغییر \hat{e}_r ، نیز به دست آوریم.

اکنون با داشتن $d\hat{e}_r/dt$ و $d\hat{e}_\theta/dt$ ، می‌توانیم از (۴) مشتق بگیریم و شتاب را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv}{dt} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (9)$$

این همان شکل آشنای شتاب در مختصات قطبی است که در مسائل نیروی مرکزی در مکانیک به کار می‌رود. کاربرد مختصات قطبی در این‌گونه موارد سودمند است، زیرا اگر نیروی مرکزی باشد، در آن صورت \mathbf{a} در جهت \hat{e}_r خواهد بود، و مؤلفه \hat{e}_θ آن باید صفر شود. بنابراین، برای یک نیروی مرکزی:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

با ضرب کردن طرفین در r ، می‌رسیم به

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

یا

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (10)$$

که بنابراین کمیت $r^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است. اما $mr^2\dot{\theta}$ تکانه زاویه‌ای ذره نسبت به مبدأ است. بنابراین، (۱۰) بیانی از پایستگی تکانه زاویه‌ای در حالت‌هایی به‌شمار می‌آید که نیروی مرکزی است. ●

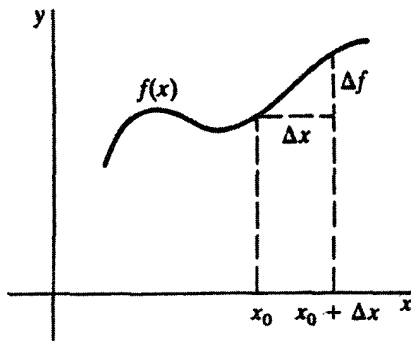
۲-۵-۱ گرادیان

در بسیاری موارد در فیزیک، آهنگ تغییر برخی توابع اسکالر نسبت به فاصله حائز اهمیت است. مثلاً، چگونگی تغییر انرژی پتانسیل نسبت به حرکت در فضا، با نیرویی که انرژی پتانسیل را تولید می‌کند ارتباط مستقیم دارد. همچنین، آهنگ تغییر (مشتق) پتانسیل الکتروستاتیکی نسبت به فاصله، میدان الکتروستاتیکی را به دست می‌دهد. مفهوم گرادیان، تصور مبهم "مشتق نسبت به فاصله" را دقیق و روشن می‌کند.

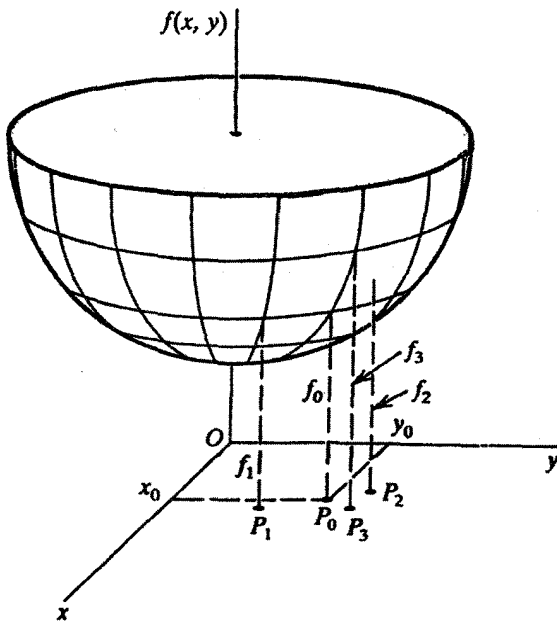
برای بررسی معنای "مشتق نسبت به فاصله"، ابتدا کار خود را با یک متغیر شروع می‌کنیم. در شکل ۱-۱۴، تابع $f(x)$ دارای نمودار Δf ، متناظر با متغیر Δx در x است. اگر Δx به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta f \approx \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \Delta x$$

که $(df/dx)_{x=x_0}$ معیاری است از سرعت تغییر $f(x)$ در نقطه x_0 .



شکل ۱۴-۱ مشتق تابع $f(x)$ ، معیاری است از سرعت تغییرات $f(x)$ وقتی از x_0 به نقطه مجاور $x_0 + \Delta x$ می‌رود.



شکل ۱۵-۱ تغییر در $f(x, y)$ بستگی به جهتی دارد که ما از (x_0, y_0) دور می‌شویم. گزاردان در جهتی است که این تغییر را بیشینه می‌سازد.

با یک متغیر هیچ ابهامی در تعریف مشتق پیش نمی‌آید، زیرا فقط یک راه برای تغییر x ، یعنی (تنها) متغیر، وجود دارد.^۱ با دو متغیر یا بیشتر، وضعیت مطابق شکل ۱۵-۱، کاملاً متفاوت خواهد بود. ۱. ظاهراً دو راه برای تغییر x و در نتیجه، دو امکان برای مشتق وجود دارد. اما، امکان دیگر شامل $-x$ ، منفی متغیر اصلی، است. البته مشتق، مستقل از اینکه علامت x چه باشد، فرقی نخواهد کرد.

بود. نقطه $P_0 = (x_0, y_0)$ در صفحه xy ، همراه با مقدار متناظر تابع $f(x_0, y_0) = f_0$ نشان داده شده است. از میان بینهایت نقطه‌ای که در نزدیکی P_0 قرار دارند و باعث تغییری در تابع می‌شوند، فقط سه نقطه نشان داده شده است. این نقاط نشان می‌دهند که چگونه تغییر در $f(x, y)$ بستگی به جهت و موقعیت نقطه مجاور نسبت به P_0 دارد. مثلاً اگر در جهت $P_0 P_1$ حرکت کنیم، تغییر در $f(x, y)$ خیلی اندک است، اما اگر در جهت $P_0 P_2$ حرکت کنیم، تغییر در تابع بیشتر خواهد بود، و اگر در جهت $P_0 P_3$ حرکت کنیم، به نظر می‌رسد که تغییر بیشینه باشد. این تغییر بیشینه، و جهت وابسته به آن، گرادیان نامیده می‌شود.

dr_{r_2} را نمایانگر بردار جابه‌جایی (بینهایت کوچک) در نظر می‌گیریم که P_0 را به P_2 در صفحه xy وصل می‌کند. آنگاه نتیجه می‌گیریم که از جمله بینهایت جهت دورشونده از P_0 ، فقط dr_{r_2} دارای خاصیت بیشینه بودن تغییر متناظر در $f(x, y)$ است. همچنین از قوانین حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که اگر $f(x, y)$ مشتق‌پذیر باشد، می‌توانیم به‌طور کلی بنویسیم

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} dy$$

که dx و dy مؤلفه‌های جابه‌جایی از P_0 ، و df تغییر در f ناشی از نموهای dx و dy است. این معادله را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$df = (\nabla f)_{P_0} \cdot d\mathbf{r} = \|\nabla f\| \|d\mathbf{r}\| \cos \theta$$

که، بنا به تعریف،

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} \quad (23-1)$$

برداری است در صفحه xy . بدیهی است که df هنگامی بیشینه خواهد بود که $\cos \theta = 1$ ، یعنی $d\mathbf{r}$ در جهت ∇f باشد. از سوی دیگر، در بالا دیدیم که مقدار dr_{r_2} مقدار df را بیشینه می‌کند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که ∇f باید در امتداد dr_{r_2} باشد. بردار مطرح شده در (23-1) عبارت است از گرادیان f در P_0 .

از بحث بالا معلوم می‌شود که حداکثر تغییر در یک تابع در نقطه P_0 وقتی حاصل می‌شود

که در جهت گرادیان حرکت کنیم و مقدار آن عبارت است از

$$df = \|\nabla f\| \|dr\|$$

که در آن:

$$\|dr\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

مفهوم گرادیان را می‌توان به سه متغیر نیز تعمیم داد، هر چند که تجسم آن از حالت دومتغیری دشوارتر است. در سه بعد، ما با تابع $f(x, y, z)$ سروکار داریم (که نمی‌توان آن را مثل شکل ۱-۱۵ ترسیم کرد) و باید ببینیم کدام یک از جهتهای $dr = (dx, dy, dz)$ تغییر در f را بیشینه می‌کند. داریم (البته با فرض مشتق‌پذیر بودن f)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

یا

$$df = \nabla f \cdot dr = \|\nabla f\| \|dr\| \cos \theta$$

که در آن

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (24-1)$$

در اینجا نیز بدیهی است که df به‌ازای $\cos \theta = 1$ بیشینه است، یعنی وقتی که dr در جهت ∇f ، گرادیان تابع، واقع باشد.

نماد ∇ را می‌توان به مثابه یک عملگر برداری (موسوم به "دل") تلقی کرد که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از $\partial/\partial x$ ، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$. به این ترتیب، می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (25-1)$$

هر عملگر، در کلی‌ترین شکلش، نگاشتی است از یک مجموعه به مجموعه‌ای دیگر. این عملگر برداری، توابع مشتق‌پذیر را به میدانهای برداری تبدیل می‌کند. یعنی، ∇ بر توابع مشتق‌پذیر عمل و میدانهایی برداری ایجاد می‌کند.

مثال ۱-۵-۲: به‌عنوان مثالی در زمینه محاسبه یک گرادینان، میدان اسکالر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$V(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

که در آن k مقداری ثابت است و گرادینانش را در نقطه $(1, 1, 0)$ پیدا می‌کنیم. به‌طور کلی، داریم

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1)$$

که $\partial V / \partial x$ ، $\partial V / \partial y$ ، و $\partial V / \partial z$ عبارت‌اند از

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

بنابراین، در نقطه $(1, 1, 0)$ داریم

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{(1,1,0)} = -\frac{k}{2\sqrt{2}} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{(1,1,0)} = -\frac{k}{2\sqrt{2}} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{(1,1,0)} = 0$$

یا

$$\nabla V = -\frac{k}{2\sqrt{2}}(1, 1, 0) \quad (2)$$

توجه کنید که ∇V با $(1, 1, 0)$ ، یعنی بردار مکان نقطه P ، متناسب است.

۱-۵-۳ شار و دیورژانس

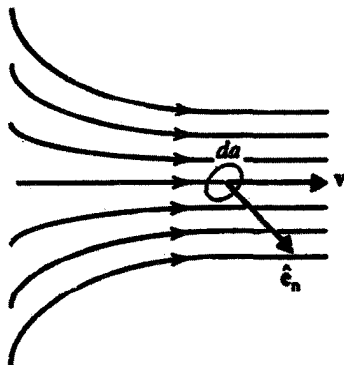
مشق مهم دیگر مرتبط با میدانهای برداری، دیورژانس است، که با مفهوم شار رابطه تنگاتنگی دارد. مثال بارزی از یک میدان برداری، میدان سرعت یک شاره است. وضعیت این مفهوم در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است. که در این شکل، شاره از چپ به راست در حرکت است. یک حلقه بینهایت کوچک به مساحت da در درون جریان قرار گرفته است. چقدر شاره در واحد زمان از حلقه می‌گذرد؟ بدیهی است که پاسخ بستگی به چگالی شاره، سرعت آن، اندازه مساحت da ، و همچنین جهت نسبی امتداد شارش و بردار واحد عمود بر مساحت، که آن را با \hat{e}_n نشان می‌دهیم، دارد. با اندکی تعمق ملاحظه می‌کنیم که مقدار شاره‌ای که، با چگالی واحد ثابت، از مساحت da می‌گذرد متناسب است با^۱

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot \hat{e}_n da \equiv \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (26-1)$$

که $d\Phi$ شار، \mathbf{v} ، است که از da می‌گذرد. گاهی بهتر است که بردار $d\mathbf{a} = \hat{e}_n da$ را مطابق آنچه که در (۲۶-۱) انجام داده‌ایم، به عنصر مساحت da نسبت بدهیم. اگر به‌جای حلقه یاد شده سطح بزرگ S را جایگزین کنیم، در آن صورت باید روی کل مساحت انتگرال بگیریم و بنویسیم

$$\Phi = \iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{e}_n da = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (27-1)$$

که Φ شار کل گذرنده از S و \int_S نمایانگر انتگرال‌گیری روی مساحت S است.



شکل ۱-۱۶ شار بردار سرعت \mathbf{v} از مساحت da با $d\Phi = \mathbf{v} \cdot \hat{e}_n da$ داده می‌شود، که \hat{e}_n بردار واحد عمود بر da است.

۱. جرم شاره‌ای که از da می‌گذرد، دقیقاً برابر است با $\rho \mathbf{v} \cdot \hat{e}_n da$ ؛ در این رابطه ρ چگالی شاره در da است. در اینجا، برای سهولت، چگالی را مساوی با ۱ در نظر می‌گیریم.

مثال ۱-۵-۳: جریان یک رودخانه را در نظر بگیرید و فرض کنید سرعت آب عبارت است از:

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_z$$

x فاصله از وسط بستر رودخانه و a نیم-پهنای رودخانه است. می‌خواهیم شار سرعت را پیدا کنیم؛ فرض می‌کنیم سطح مقطع رودخانه مستطیلی به عمق h است. وضعیت، مطابق شکل ۱-۱۷ است.

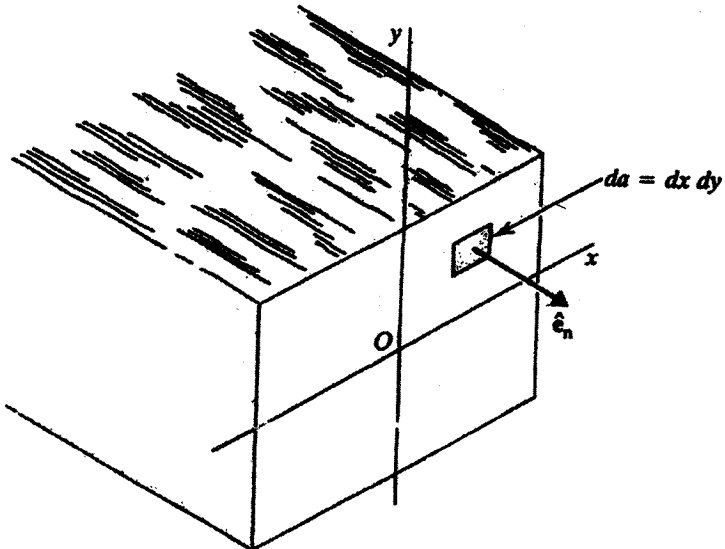
خط عمود بر مساحت da ، بر صفحه xy عمود و با سرعت هم‌جهت است. بنابراین، داریم

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = v da = v dx dy$$

و

$$\Phi = \iint_S v dx dy$$

S ، مساحت سطح مقطع رودخانه، عبارت است از $S = 2ah$. برای این وضعیت خاص، سرعت



شکل ۱-۱۷ رودخانه و سطح مقطع آن.

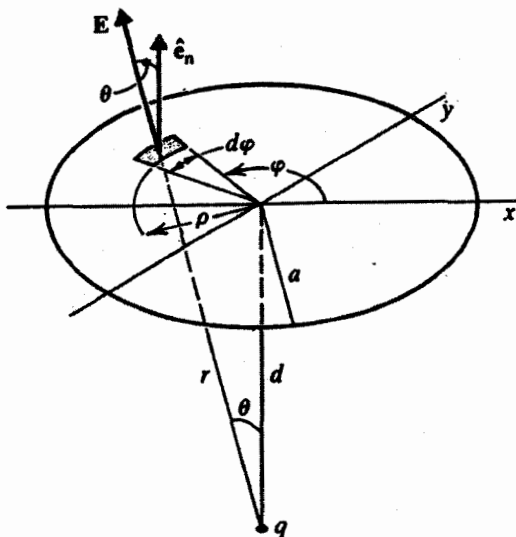
مستقل از y است، و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-a}^a v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = hv_0 \int_{-a}^a \left(dx - \frac{x^2}{a^2} dx\right) \\ &= hv_0 \left(2a - \frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{3}Sv_0.\end{aligned}$$

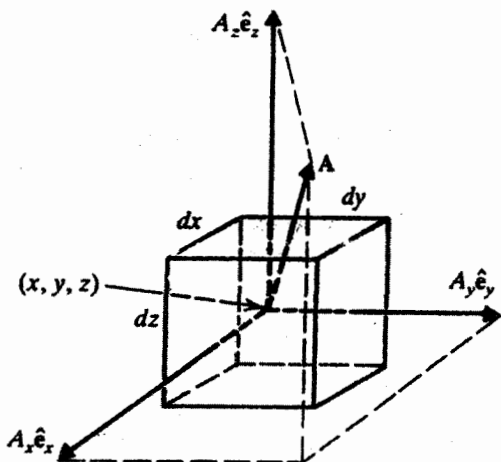
مثال ۱-۵-۴: به‌عنوان مثالی دیگر، شار میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای را که به فاصله d از مرکز دایره‌ای به شعاع a قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم (شکل ۱-۱۸). عنصر شار (در دستگاه cgs) عبارت است از

$$\begin{aligned}d\Phi &= \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \|\mathbf{E}\| \cos\theta da = \|\mathbf{E}\| \cos\theta \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{q}{r^2} \frac{d}{r} \rho d\rho d\varphi = \frac{qd}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi\end{aligned}$$

که مختصات قطبی (ρ, φ) برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه دایره، که در آن عنصر مساحت مساوی $\rho d\rho d\varphi$ است، به‌کار می‌روند. برای پیدا کردن شار کل، از آخرین عبارت بالا



شکل ۱-۱۸ شاری الکتریکی که از یک دایره می‌گذرد.



شکل ۱۹-۱ نمودار مربوط به محاسبه شار خالص خروجی میدان برداری A از سطح بسته بینهایت کوچکی که جعبه مکعب مستطیلی به حجم dV را دربر می‌گیرد.

انتگرال می‌گیریم:

$$\Phi = \iint_S \frac{qd}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho \, d\rho \, d\varphi = qd \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi qd \left[-(d^2 + \rho^2)^{-1/2} \Big|_0^a \right] = 2\pi q \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)$$

غالب اوقات لازم است شار عبوری از یک سطح بسته را محاسبه کنیم. مثلاً شار میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار در داخل حجمی که توسط یک سطح دربر گرفته می‌شود، در نظریه الکترومغناطیس حائز اهمیت است. چنین شاری را محاسبه می‌کنیم. برای شروع، حجم کوچک dV را که با یک جعبه مکعب مستطیلی به ابعاد dx ، dy ، و dz محدود می‌شود در نظر می‌گیریم (شکل ۱۹-۱)، و شار خالص خروجی میدان برداری اختیاری $A(x, y, z)$ را به دست می‌آوریم. شش‌وجه جعبه مورد نظر را چندان کوچک فرض می‌کنیم که زاویه بین خط عمود بر هر وجه و میدان برداری A روی da ثابت باشد. چون می‌خواهیم شار خروجی A را حساب کنیم، باید فرض کنیم که \hat{e}_n همواره رو به خارج حجم است.

برای محاسبه (۲۶-۱) برای این حالت خاص، می‌نویسیم

$$d\Phi = (d\Phi_1 + d\Phi_2) + (d\Phi_3 + d\Phi_4) + (d\Phi_5 + d\Phi_6)$$

که هر جفت پیرانتز، معرف یک محور است. مثلاً، $d\Phi_1$ شاری است گذرا از وجهی دارای یک مؤلفه قائم در امتداد قسمت مثبت محور x ، $d\Phi_2$ شاری است گذرا از وجهی دارای یک مؤلفه قائم در امتداد قسمت منفی محور x ، و به همین ترتیب الی آخر. ابتدا نگاهی بیندازیم به $d\Phi_1$ ، که می‌توان آن را به صورت

$$d\Phi_1 = \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n_1} da_1$$

یا، چون $\hat{\mathbf{e}}_{n_1}$ همان $\hat{\mathbf{e}}_x$ است، به شکل زیر نوشت:

$$d\Phi_1 = \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x da_1 = A_{1x} da_1$$

این کاری که کردیم مستلزم قدری توضیح است. اندیس پایین ۱ در A_{1x} بر محاسبه میدان نیرو در نقطه وسط (یا هر نقطه دیگر، زیرا مساحت بینهایت کوچک است) نخستین وجه دلالت می‌کند. اندیس پایین x در A_{1x} ، البته به معنای مؤلفه x است. بنابراین، A_{1x} به معنای مؤلفه x میدان \mathbf{A} در وسط وجه ۱، و da_1 مساحت وجه ۱، صرفاً مساوی با $dy dz$ (شکل ۱-۱۹)، است. چون مختصات نقطه وسط وجه ۱ عبارت است از $(x + dx/2, y, z)$ [توجه کنید که مختصات مرکز جعبه عبارت است از (x, y, z)]، می‌توانیم بنویسیم

$$d\Phi_1 = A_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy dz$$

از آنجا که A_x تابعی است (مشتق‌پذیر) از x ، y ، و z ، این معادله به معنای محاسبه تابع A_x در مختصات $x + dx/2$ ، y ، و z است. با استفاده از بسط سری تیلور توابع و حفظ جمله‌هایی تا مرتبه اول، می‌توانیم بنویسیم

$$A_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) = A_x(x, y, z) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dots$$

بنابراین داریم

$$d\Phi_1 = \left[A_x(x, y, z) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right] dy dz$$

به همین ترتیب، داریم:

$$\begin{aligned} d\Phi_y &= \mathbf{A}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_{xy} da_y = \mathbf{A}_y \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_x) da_y = -A_{yx} dy dz \\ &= -A_x \left(x - \frac{dx}{y}, y, z \right) dy dz = - \left[A_x(x, y, z) - \frac{dx}{y} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right] dy dz \end{aligned}$$

از جمع عبارتهای مربوط به $d\Phi_y$ و $d\Phi_x$ داریم

$$\begin{aligned} d\Phi_x + d\Phi_y &= dy dz \left[A_x(x, y, z) + \frac{dx}{y} \frac{\partial A_x}{\partial x} - A_x(x, y, z) + \frac{dx}{y} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$

که dV حجم جعبه کوچک است. با استدلالی مشابه، خواهیم داشت

$$d\Phi_y + d\Phi_z = \frac{\partial A_y}{\partial y} dV$$

و

$$d\Phi_x + d\Phi_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} dV$$

به این ترتیب، شار کل عبارت است از

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV$$

عبارت داخل پرانتز، دیورژانس میدان برداری \mathbf{A} نامیده می‌شود. اگر به خاطر بیاوریم که مؤلفه‌های عملگر برداری ∇ عبارت‌اند از $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ و توجه کنیم که عبارت داخل پرانتز شبیه حاصلضرب نقطه‌ای این عملگر در بردار \mathbf{A} است، در آن صورت دیورژانس را می‌توان به صورت فشرده‌تری نوشت. بنابراین، تعریف می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (28-1)$$

و می نویسیم

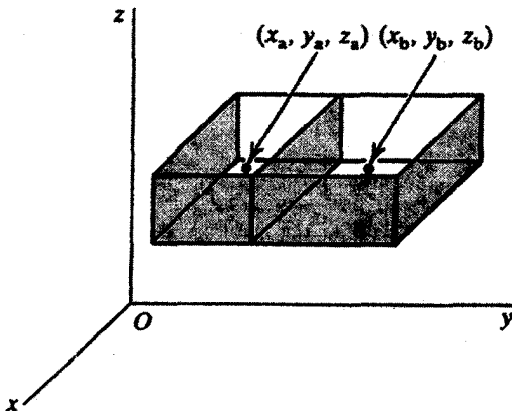
$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (29-1)$$

بنابر معادله (۲۹-۱)، شار خروجی بردار \mathbf{A} از سطح بینهایت کوچک یک جعبه بسته، مساوی است با مقدار دیورژانس بردار یاد شده در مرکز جعبه (یا هر نقطه‌ای دیگر، زیرا مکعب خیلی کوچک است) ضرب در حجم جعبه. به این ترتیب، تعریف دیورژانس مشخص می‌شود:

تعریف ۲-۵-۱: شار خروجی بر واحد حجم یک میدان برداری از سطح کوچک بسته‌ای که حجم کوچک واقع در نقطه P را محدود می‌کند (در حد وقتی حجم مزبور به سمت صفر میل می‌کند)، دیورژانس آن میدان برداری در نقطه P نامیده می‌شود. یعنی،

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}$$

پرسش بدیهی این است که آیا می‌توان (۲۹-۱) را به سطوح بزرگتر و اشکال اختیاری‌تری تعمیم داد یا خیر. دو جعبه با یک وجه مشترک (شکل ۲۰-۱) را در نظر بگیرید، حجم سمت چپ را a و حجم سمت راست را b بنامید. شار کل، البته، عبارت است از حاصل جمع شارهایی که از تمام



شکل ۲۰-۱ نمایش این واقعیت که شار کل گذرنده از سطح متشکل از دو جعبه، مساوی است با حاصل جمع گرادینان ضرب در حجم هر یک از جعبه‌ها.

شش وجه جعبه مرکب می‌گذرند:

$$d\Phi = (d\Phi_1 + d\Phi_2) + (d\Phi_3 + d\Phi_4) + (d\Phi_5 + d\Phi_6)$$

که مطابق معمول، $d\Phi_1$ شار کلی است که از وجهی می‌گذرد که دارای یک مؤلفه عمودی در امتداد قسمت مثبت محور x است، $d\Phi_2$ شار کلی است که از وجهی دارای یک مؤلفه عمودی در امتداد قسمت منفی x می‌گذرد، والی آخر.

در شکل ۱-۲۰ تمام وجوه درگیر را مشاهده می‌کنید. بدیهی است که

$$d\Phi_1 = d\Phi_{a1} + d\Phi_{b1}$$

$d\Phi_{a1}$ شار گذرا از وجه مثبت جعبه a و $d\Phi_{b1}$ شار گذرا از وجه مثبت جعبه b است. با بهره‌گیری از نمادگذاری مشابه، می‌توانیم بنویسیم

$$d\Phi_2 = d\Phi_{a2} + d\Phi_{b2}$$

و

$$d\Phi_5 + d\Phi_6 = d\Phi_{a5} + d\Phi_{b5} + d\Phi_{a6} + d\Phi_{b6}$$

اما، برای وجوه y داریم:

$$d\Phi_3 = d\Phi_{b3}$$

$$d\Phi_4 = d\Phi_{a4}$$

زیرا وجه جعبه مرکب در امتداد قسمت مثبت محور y متعلق است به جعبه b ، و در امتداد قسمت منفی محور y متعلق است به جعبه a . حال، توجه کنید که شار خروجی از وجه چپ جعبه b ، منفی شار خروجی از وجه راست جعبه a است، یعنی،

$$d\Phi_{b2} = -d\Phi_{a2}$$

یا

$$d\Phi_{br} + d\Phi_{ar} = 0$$

بنابراین، می‌رسیم به

$$d\Phi_r + d\Phi_r = d\Phi_{ar} + d\Phi_{ar} + d\Phi_{br} + d\Phi_{br}$$

با استفاده از تمام روابط بالا، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d\Phi = & (d\Phi_{a1} + d\Phi_{a2}) + (d\Phi_{a3} + d\Phi_{a4}) + (d\Phi_{a5} + d\Phi_{a6}) \\ & + (d\Phi_{b1} + d\Phi_{b2}) + (d\Phi_{b3} + d\Phi_{b4}) + (d\Phi_{b5} + d\Phi_{b6}) \end{aligned}$$

یا

$$d\Phi = d\Phi_a + d\Phi_b$$

که $d\Phi_a$ شار کل گذرنده از جعبه بسته a و $d\Phi_b$ شار کل گذرنده از جعبه بسته b است. حال می‌توانیم (۱-۲۹) را برای هر یک از جعبه‌های بسته به‌کار ببریم و بنویسیم

$$d\Phi = (\nabla \cdot \mathbf{A})_a dV_a + (\nabla \cdot \mathbf{A})_b dV_b$$

که هر یک از اندیسه‌های پایین نمایانگر محاسبه در نقطه‌ای واقع در داخل حجم مربوطه است. اکنون روشن است که می‌توانیم نتیجه بالا را به هر تعداد (کوچک) جعبه تعمیم بدهیم:

$$d\Phi = (\nabla \cdot \mathbf{A})_a dV_a + (\nabla \cdot \mathbf{A})_b dV_b + \dots + (\nabla \cdot \mathbf{A})_z dV_z$$

یادآوری این نکته حائز اهمیت است که سمت چپ این معادله عبارت است از شار خروجی فقط از سطح بیرونی. مثلاً $d\Phi$ می‌تواند شار خروجی از شش‌وجه یک جعبه مکعبی باشد که به جعبه‌های مکعبی بینهایت کوچکی تقسیم شده است.

برای سطح بسته‌ای با شکل اختیاری، می‌توان حجم آن را به N (تعدادی زیاد) جعبه مکعبی تقسیم کرد و نوشت^۱

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_i dV_i \quad (30-1)$$

کاربرد علامت تقریب، منعکس‌کننده این واقعیتهاست که شکل سطح بسته اختیاری است (به صورت جعبه نیست)؛ N ، علیرغم بزرگ بودن، نامتناهی نیست، و اندازه جعبه‌ها هم به اندازه کافی کوچک نیست. برای دستیابی به تساوی، باید اندازه جعبه‌ها را کوچک و کوچکتر و تعداد آنها را بزرگ و بزرگتر کنیم و (۳۰-۱) را به صورت یک انتگرال دقیق بنویسیم:

$$\Phi = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (31-1)$$

به این ترتیب، با استفاده از (۲۷-۱)، قضیه مهمی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۵-۱: (قضیه دیورژانس)

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

بنابر قضیه دیورژانس، انتگرال سطحی (شار) هر میدان برداری \mathbf{A} از یک سطح بسته S که حجم V را دربر می‌گیرد، مساوی است با انتگرال حجمی دیورژانس بردار \mathbf{A} .
برای دستیابی به درک بهتری از دیورژانس، شارش شارهای به چگالی $\rho(x, y, z, t)$ و سرعت $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ را در نظر می‌گیریم. شار ماده (مقدار ماده‌ای که در واحد زمان از سطحی به مساحت da می‌گذرد) از حاصلضرب (۲۶-۱) در ρ به دست می‌آید:

$$d\Phi_m = (\rho v) \cdot da$$

۱. در واقع باید در اینجا به جای dV_i بنویسیم ΔV_i ؛ اما در نوشتارهای فیزیک رسم بر این است که تمایزی بین این دو قائل نشوند.

که برای یک سطح بسته، طبق قضیه دیورژانس، تبدیل می‌شود به

$$\Phi_m = \iint_S (\rho \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

در حالت خاص، اگر سطح بسته بینهایت کوچک باشد، داریم

$$d\Phi_m = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

از سوی دیگر، پایداری ماده ایجاب می‌کند که آهنگ کاهش مقدار ماده در dV مساوی باشد با شار، $d\Phi_m$ ، یا، به‌ازای یک dV ثابت،

$$d\Phi_m = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

به‌علامت مهم منفی توجه کنید. با ترکیب دو معادله اخیر می‌رسیم به:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (32-1)$$

که شکل دیفرانسیلی پایداری ماده در شارش هر شارهای است. معادله (۳۲-۱) را گاهی به شکل دیگری نیز می‌نویسند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

یا

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (33-1)$$

طبق تعریف مشتق کلی، داریم

$$\frac{d\rho(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

بنابراین، معادله (۳۳-۱) تبدیل می‌شود به

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (34-1)$$

معادله (۳۳-۱) یا (۳۴-۱) را معادله پیوستگی می‌نامند. توجه کنید که مشتق زمانی در (۳۲-۱) به صورت مشتق جزئی و در (۳۴-۱) به صورت مشتق کلی است.

۴-۵-۱ انتگرال خطی و تاو

در بخش ۳-۵-۱، مفهوم شار و انتگرال سطحی وابسته به آن را ملاحظه کردیم. در این بخش، موضوع انتگرال خطی را بررسی می‌کنیم. مثال بارز یک انتگرال خطی عبارت است از کار انجام شده توسط یک نیرو. میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ را در نظر بگیرید که بر جسمی وارد می‌آید، و فرض کنید که جسم به اندازه بینهایت کوچک $d\mathbf{r}$ جابه‌جا شود. کار انجام شده توسط نیرو ناشی از این جابه‌جایی، بنا بر تعریف، عبارت است از:

$$dW = \mathbf{F}(x, y, z, t) \cdot d\mathbf{r}$$

توجه کنید که $d\mathbf{r}$ ، چون معرف جابه‌جایی است، دارای مؤلفه‌های (dx, dy, dz) است. بنابراین، همچنین می‌توان نوشت

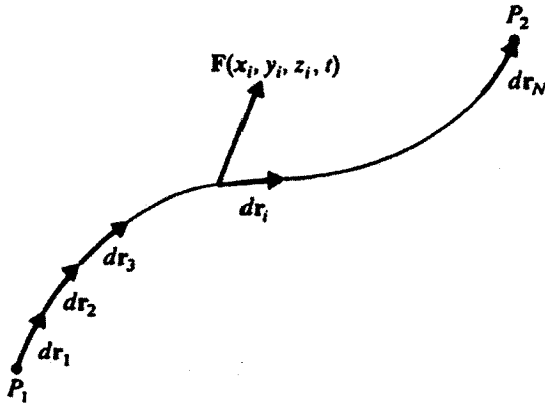
$$dW = F_x(x, y, z, t)dx + F_y(x, y, z, t)dy + F_z(x, y, z, t)dz$$

به منظور محاسبه کار برای یک جابه‌جایی متناهی، مطابق شکل ۱-۲۱، جابه‌جایی را به N جزء کوچک تقسیم، کار را برای هر جزء محاسبه، و نتایج را با هم جمع می‌کنیم تا برسیم به:

$$W \approx \mathbf{F}(x_1, y_1, z_1) \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}(x_2, y_2, z_2) \cdot d\mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{F}(x_N, y_N, z_N) \cdot d\mathbf{r}_N$$

که از وابستگی به زمان چشمپوشی کرده‌ایم و نقطه وسط (یا هر نقطه دیگر) $d\mathbf{r}_i$ را با (x_i, y_i, z_i) نشان داده‌ایم. معادله اخیر را می‌توان به شکل فشرده‌تری نوشت:

$$W \approx \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot d\mathbf{r}_i$$



شکل ۲۱-۱ انتگرال خطی میدان نیروی $F(x, y, z, t)$ از نقطه P_1 تا نقطه P_2 .

برای حذف علامت تقریب، باید هر چه ممکن است dr_i را کوچک و N را بزرگ اختیار کنیم. در آن صورت خواهیم داشت

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (35-1)$$

معادله (۳۵-۱)، طبق تعریف، انتگرال خطی میدان نیروی \mathbf{F} است. در این حالت خاص، این انتگرال عبارت است از کار انجام شده از P_1 تا P_2 . البته، می‌توانیم انتگرال خطی را نه تنها برای نیرو، بلکه برای هر میدان برداری به‌کار ببریم. مثلاً، در نظریه الکترومغناطیس، انتگرالهای خطی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نقش عمده‌ای را بازی می‌کنند.

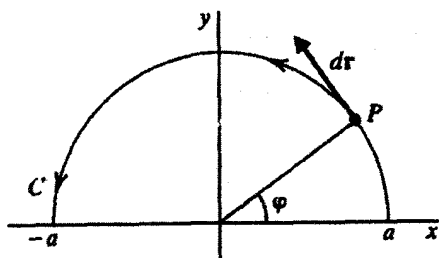
مثال ۵-۵-۱: می‌خواهیم انتگرال خطی $\mathbf{F}_1 = \hat{e}_x x^2 + \hat{e}_y y^2$ را روی نیم‌دایره نموده شده در شکل ۲۲-۱ محاسبه کنیم. روی این نیم‌دایره، $x = a \cos \varphi$ و $y = a \sin \varphi$. بنابراین، روی نیم‌دایره، \mathbf{F}_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_1 = \hat{e}_x a^2 \cos^2 \varphi + \hat{e}_y a^2 \sin^2 \varphi$$

همچنین، مؤلفه‌های عنصر جابه‌جایی، $d\mathbf{r}$ ، عبارت‌اند از:

$$dx = d(a \cos \varphi) = -a \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = d(a \sin \varphi) = a \cos \varphi d\varphi$$



شکل ۲۲-۱ مسیر نیمدایره برای محاسبه انتگرال خطی.

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi (\hat{e}_x a^r \cos^r \varphi + \hat{e}_y a^r \sin^r \varphi) \cdot (-\hat{e}_x a \sin \varphi d\varphi + \hat{e}_y a \cos \varphi d\varphi) \\ &= a^r \int_0^\pi (-\cos^r \varphi \sin \varphi + \sin^r \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= a^r \left(\frac{1}{r+1} \cos^{r+1} \varphi \Big|_0^\pi + \frac{1}{r+1} \sin^{r+1} \varphi \Big|_0^\pi \right) \\ &= -\frac{2}{r+1} a^r \end{aligned}$$

مثال ۶-۵-۱: مثال پیش را می‌توان با استفاده از مختصات دکارتی نیز حل کرد. مشاهده می‌شود که روی نیمدایره $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ، بنابراین $dy = -x(a^2 - x^2)^{-1/2} dx$. بنابراین،

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} &= [\hat{e}_x x^r + \hat{e}_y (a^2 - x^2)^{r/2}] \cdot [\hat{e}_x dx - \hat{e}_y x(a^2 - x^2)^{-1/2} dx] \\ &= x^r dx - x(a^2 - x^2)^{r/2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^{-a} [x^r - x(a^2 - x^2)^{r/2}] dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} \Big|_a^{-a} - \frac{1}{r+1} (a^2 - x^2)^{r/2+1} \Big|_a^{-a} \\ &= -\frac{2}{r+1} a^r \end{aligned}$$

که همان نتیجه‌های است که انتظارش را داریم.

مثال ۷-۵-۱: اکنون میدانی برداری را در نظر می‌گیریم که اندکی با مثال قبل متفاوت است. فرض کنید $\mathbf{F}_\gamma = \hat{e}_x \gamma^x + \hat{e}_y \gamma^y$. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\gamma \cdot d\mathbf{r} &= (\hat{e}_x a^x \sin^x \varphi + \hat{e}_y a^y \cos^y \varphi) \cdot (-\hat{e}_x a \sin \varphi d\varphi + \hat{e}_y a \cos \varphi d\varphi) \\ &= a^x (\cos^x \varphi - \sin^x \varphi) d\varphi \\ &= a^x (\cos \varphi - \sin \varphi) (\cos^x \varphi + \sin^x \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= a^x (\cos \varphi - \sin \varphi) (1 + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= a^x (\cos \varphi - \sin \varphi + \cos^x \varphi \sin \varphi - \sin^x \varphi \cos \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

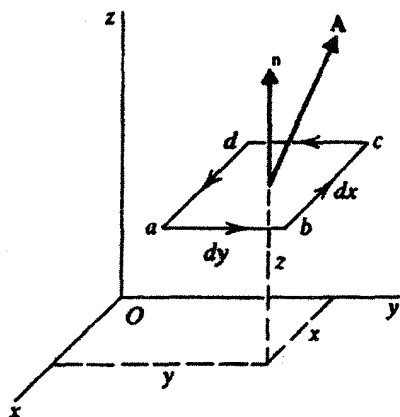
و انتگرال خطی تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}_\gamma \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi a^x (\cos \varphi - \sin \varphi + \cos^x \varphi \sin \varphi - \sin^x \varphi \cos \varphi) d\varphi \\ &= a^x (\sin \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi) \Big|_0^\pi = -\frac{4}{3} a^x \end{aligned}$$

تاویک میدان برداری. انتگرالهای خطی روی یک مسیر بسته از اهمیت خاصی برخوردارند. برای یک میدان برداری، \mathbf{A} ، و یک مسیر بسته، C ، انتگرال خطی را به صورت $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم، که دایره روی علامت انتگرال به معنای بسته بودن مسیر و C به معنای مسیر خاصی است که طی می‌شود.

اکنون شبیه قضیه دیورژانس را برای انتگرالهای خطی بسته به دست می‌آوریم. برای شروع، مسیر مستطیلی بسته کوچکی را در نظر می‌گیریم که ارتباط بردار واحد عمود بر آن، \hat{e}_n ، با جهت پیمایش مسیر بر طبق قاعده دست راست تعیین می‌شود.^۱ بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم که مستطیل به موازات صفحه xy است، به طوری که اضلاع آن موازی محور x و محور y بوده و \hat{e}_n موازی محور z است (شکل ۱-۲۳). انتگرال خطی را می‌توان به این

۱. آنچه در پی می‌آید قاعده دست راست است که، همان‌طور که در متن درس توضیح داده شده است، جهت انتگرال‌گیری را به جهت بردار واحد عمود بر سطح مربوط می‌کند: اگر انگشتان دست راست خود را در جهت انتگرال‌گیری روی منحنی خم کنید، شست شما باید در جهت \hat{e}_n باشد.



شکل ۲۳-۱ مسیر مستطیلی بسته در صفحه‌ای به موازات صفحه xy و با مرکز واقع در (x, y, z) .

صورت نوشت:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_b^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_d^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

در امتداد ab ، عنصر جابه‌جایی، $d\mathbf{r}$ ، همیشه در جهت مثبت x و بزرگی آن dx است، لذا می‌توان آن را به صورت $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x dx$ نوشت. بنابراین، اولین انتگرال در سمت راست عبارت بالا تبدیل می‌شود به

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_a^b \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_a^b \mathbf{A}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x dx) = \int_a^b A_{1x} dx$$

که، مثل قبل، اندیس پایین ۱ به معنای محاسبه \mathbf{A} در نقطه وسط ab و اندیس پایین x به معنای مؤلفه x است. حال، چون ab کوچک است و کسینوس زاویه بین \mathbf{A} و $d\mathbf{r}$ بر روی ab چندان تغییری نمی‌کند، می‌توانیم علامت انتگرال را حذف کنیم و بنویسیم:

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_{1x} dx = A_x \left(x, y - \frac{dy}{4}, z \right) dx$$

با استفاده از بسط تیلور، مثل قبل، خواهیم داشت

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left[A_x(x, y, z) - \frac{dy}{\gamma} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dx$$

همچنین، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_c^d \mathbf{A}_r \cdot d\mathbf{r}_r = \int_c^d \mathbf{A}_r \cdot (-\hat{e}_x dx) \\ &= - \int_c^d A_{rx} dx = -A_{rx} dx = -A_x \left(x, y + \frac{dy}{\gamma}, z \right) dx \\ &= - \left[A_x(x, y, z) + \frac{dy}{\gamma} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dx \end{aligned}$$

از جمع دو معادله آخر داریم

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy$$

سهام ناشی از دو ضلع دیگر مستطیل را نیز می‌توان حساب کرد:

$$\begin{aligned} \int_b^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_d^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= A_{ry} dy - A_{ry} dy \\ &= A_y \left(x + \frac{dx}{\gamma}, y, z \right) dy - A_y \left(x - \frac{dx}{\gamma}, y, z \right) dy \\ &= \left[A_y(x, y, z) + \frac{dx}{\gamma} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right] dy \\ &\quad - \left[A_y(x, y, z) - \frac{dx}{\gamma} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right] dy \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

حاصل جمع این دو معادله، نتیجه کلی را به دست می دهد:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (۳۶-۱)$$

حال به معادله (۳۶-۱) نگاه دقیقتری بیندازیم. می توان عبارت داخل پرانتز را مؤلفه z حاصلضرب برداری عملگر گرادیان، ∇ ، در \mathbf{A} تعبیر کرد. در واقع، با استفاده از نمایش کل دترمینانی حاصلضرب برداری، می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \hat{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (۳۷-۱)$$

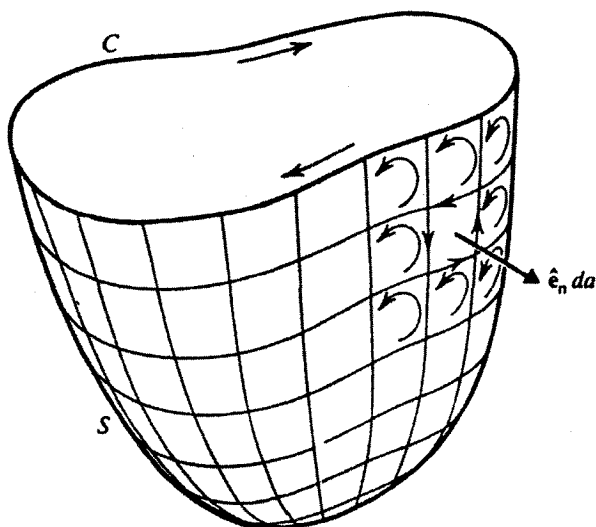
این حاصلضرب برداری تاو بردار \mathbf{A} نامیده می شود و در آنالیز برداری، کمیتی مهم به شمار می آید. بعداً این کمیت را بیشتر بررسی خواهیم کرد. اما در این مرحله صرفاً به تعریف آن، آن چنان که در معادله (۳۶-۱) به کار رفته است بسنده می کنیم. سمت راست آن معادله را می توانیم به این صورت بنویسیم

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = (\nabla \times \mathbf{A})_z dx dy = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_z da$$

که da مساحت مستطیل، یا $dx dy$ ، است. با توجه به اینکه \hat{e}_z در جهت عمود بر مساحت است، می توانیم به جای \hat{e}_z کمیت \hat{e}_n را جایگزین کنیم. بنابراین، (۳۶-۱) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_n da = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \quad (۳۸-۱)$$

بنابر معادله (۳۸-۱)، برای یک مسیر مستطیلی بینهایت کوچک، C ، انتگرال خطی بسته مساری است با مقدار مؤلفه عمودی تاو \mathbf{A} در مرکز مستطیل ضربدر مساحت مستطیل. این نتیجه به



شکل ۲۴-۱ منحنی C با سطحی اختیاری که لبه آن همان منحنی مفروض است. مجموع انتگرالهای خطی روی مسیره‌های مستطیلی نشان داده شده، مساوی است با انتگرال خطی روی منحنی C .

نوع انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد. در واقع، هر مستطیلی معرف یک صفحه است و ما این آزادی عمل را داریم که آن صفحه را صفحه xy بنامیم.

چه پیش می‌آید اگر مسیر، یک منحنی بسته اختیاری باشد؟ در شکل ۲۴-۱ یک مسیر بسته اختیاری را با یک سطح اختیاری S مشاهده می‌کنید که لبه آن، همان منحنی مفروض است. سطح S را به مساحت‌های مستطیلی کوچکی تقسیم می‌کنیم و به پربندهای (مسیره‌های انتگرال‌گیر) آنها جهتی را نسبت می‌دهیم که با جهت انتگرال‌گیری روی C تعیین می‌شود. اگر تمام سهمیه‌های ناشی از مسیره‌های مستطیلی کوچک را با هم جمع کنیم، انتگرال روی C به دست خواهد آمد زیرا سهمیه‌های ناشی از اضلاع مشترک مستطیلهای مجاور حذف می‌شوند. علت این امر آن است که جهت انتگرال‌گیری روی ضلع مشترک برای دو مستطیل مجاور خلاف یکدیگر است (شکل ۲۴-۱). بنابراین، شکل ماکروسکوپیکی یا بزرگ مقیاس (۳۸-۱) عبارت است از

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \approx \sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ni} da_i = \sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_i \cdot da_i$$

که $(\nabla \times \mathbf{A})_i$ تاو بردار \mathbf{A} در مرکز مستطیل i ام به مساحت da و عمود بر $\hat{\mathbf{e}}_{ni}$ و N تعداد مستطیلهای روی سطح S است. هرگاه در حین بزرگ شدن N مساحتها کوچک و کوچکتر شوند،

می‌توانیم به‌جای مجموع‌یابی انتگرال جایگزین کنیم و به قضیه زیر برسیم.

قضیه ۱-۵-۲: (قضیه استوکس)

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}$$

صورت توصیفی قضیه استوکس به این قرار است که انتگرال خطی یک میدان برداری \mathbf{A} روی مسیر بسته C مساوی است با انتگرال سطحی تاو \mathbf{A} روی هر سطحی که تنها لبه آن مسیر C است. جهت بردار عمود بر مساحت بینهایت کوچک da از سطح S به جهت انتگرال‌گیری روی C بستگی دارد و طبق قاعده دست راست تعیین می‌شود.

میدانهای برداری پایستار. میدانهای برداری پایستار از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردارند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱-۵-۵: میدان برداری پایستار، میدانی است که انتگرال خطی آن روی هر مسیر بسته‌ای صفر باشد.

یکی از نتایج فوری این تعریف آن است که انتگرال خطی یک میدان برداری پایستار مانند \mathbf{A} بین دو نقطه دلخواه در فضا، از مسیر طی شده مستقل است (مسئله ۱-۲۶). بنابراین، می‌توانیم به \mathbf{A} تابعی نسبت بدهیم که فقط به دو نقطه انتخابی بستگی دارد و مستقل از این است که چگونه از یکی به دیگری برویم. در حالت خاص، می‌توانیم تابع $V(x, y, z)$ را چنان تعریف کنیم که

$$V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

که مختصات P_1 و P_2 ، به ترتیب، عبارت‌اند از (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) . تابع V خوش‌تعریف است زیرا انتگرال مستقل از مسیر است. برای یک نقطه کلی P با مختصات (x, y, z) ، تعریف تابع $V(x, y, z)$ منجر می‌شود به

$$V(x, y, z) = V(x_0, y_0, z_0) - \int_0^P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (۳۹-۱)$$

این $V(x, y, z)$ را پتانسیل مربوط به میدان برداری \mathbf{A} می‌نامیم. گاهی پتانسیل در P_0 را صفر اختیار می‌کنند، که در آن صورت خواهیم داشت

$$V(x, y, z) = - \int_{P_0}^P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (40-1)$$

P_0 را نقطه مرجع پتانسیل می‌نامند.

وقتی فاصله P_0 و P_1 از یکدیگر بینهایت کوچک باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$dV = -\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

که dV تغییر بینهایت کوچک در پتانسیل میدان \mathbf{A} ناشی از جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ است. از سوی دیگر، V یعنی تابع اسکالر مشتق‌پذیری از x ، y و z ، دارای نموی بینهایت کوچک dV است،

$$dV = (\nabla V) \cdot d\mathbf{r}$$

بنابراین، داریم

$$(\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

اما این رابطه برای هر $d\mathbf{r}$ دلخواهی صادق است. اگر $d\mathbf{r}$ را، به نوبت، مساوی $\hat{e}_x dx$ ، $\hat{e}_y dy$ و $\hat{e}_z dz$ اختیار کنیم، به متساوی بودن سه مؤلفه ∇V و $-\mathbf{A}$ خواهیم رسید. بنابراین، داریم

$$\mathbf{A} = -\nabla V \quad (41-1)$$

که به معنای این است که یک میدان برداری پایستار را می‌توان به صورت منفی گرادینان یک پتانسیل نوشت.

خاصیت دیگر میدان برداری پایستار را می‌توان با بازنویسی (۳۸-۱)، که در هر مسیر بسته بینهایت کوچک اختیاری صدق می‌کند، به دست آورد:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_n da$$

اما، عبارت سمت چپ در رابطه بالا، به جهت پایستار بودن \mathbf{A} ، صفر است. یعنی،

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da = 0$$

که به ازای هر da و $\hat{\mathbf{e}}_n$ اختیاری صادق است. بنابراین، به این نتیجه مهم می‌رسیم که برای یک میدان برداری پایستار

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

این نکته حائز اهمیت است که علیرغم صفر بودن، $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ و کوچک بودن $d\mathbf{r}$ نمی‌توان $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ و بنابراین $\mathbf{A} = 0$ را نتیجه گرفت (چرا؟).

پایستگی میدان برداری ایجاب می‌کند که تاو آن صفر باشد. اما آیا $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ برای پایستار بودن یک میدان برداری کافی است؟ پاسخ، در حالت کلی، منفی است (مثال ۱-۶-۳ این نکته را نشان خواهد داد). به‌طور کلی، اگر میدان برداری در ناحیه‌ای از فضا، مانند U ، خوش‌تعریف و خوش‌رفتار (با تغییرات هموار، مشتق‌پذیر، و مانند آنها) باشد، در آن صورت $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ در U به معنای این است که در تمام منحنیهای بسته C که کاملاً در U قرار دارند، $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$. در اصطلاح ریاضیات جدید گفته می‌شود که ناحیه U قابل انقباض به صفر است، یعنی هر منحنی بسته‌ای در U می‌تواند، بدون مواجه شدن با هیچ نقطهٔ تکینگی از میدان برداری (که خوش‌تعریف و خوش‌رفتار نیست) منقبض و به یک نقطه تبدیل شود. بنابراین، به قضیهٔ زیر خواهیم رسید.

قضیهٔ ۱-۵-۴: فرض کنید ناحیه U در فضا برای میدان برداری \mathbf{A} قابل انقباض به صفر باشد. در آن صورت برای هر منحنی بستهٔ واقع در U دو حکم زیر هم‌ارزند:

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

و

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \forall C \text{ واقع در } U$$

بدیهی است که $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ همیشه به معنای پایستار نبودن \mathbf{A} است. اما، $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

به این معنا است که A فقط در صورتی پایستار است که ناحیه مورد نظر، قابل انقباض به صفر باشد.

مثال ۸-۵-۱: به مثالهای ۵-۵-۱ و ۷-۵-۱ بازمی‌گردیم و مسیر دیگری را، قسمتی از محور x بین نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ ، مطابق شکل ۲۵-۱، در نظر می‌گیریم. روی این مسیر $y = 0$ و $dy = 0$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{C'} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C'} [\hat{e}_x x^2 + \hat{e}_y(0)] \cdot [\hat{e}_x dx + \hat{e}_y(0)] \\ &= \int_a^{-a} x^2 dx = -\frac{2}{3} a^2\end{aligned}$$

که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵-۵-۱ به دست آوردیم. اما

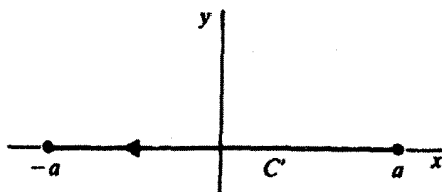
$$\int_{C'} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} [\hat{e}_x(0) + \hat{e}_y x^2] \cdot [\hat{e}_x dx + \hat{e}_y(0)] = 0$$

با نتیجه حاصل از مثال ۷-۵-۱ فرق می‌کند.

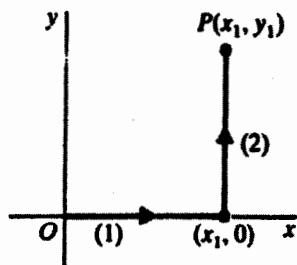
می‌توان انتظار داشت که \mathbf{F}_1 یک میدان پایستار باشد اما \mathbf{F}_2 مسلماً پایستار نیست. برای اینکه

بینیم \mathbf{F}_1 پایستار هست یا خیر، تاو آن را پیدا می‌کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



شکل ۲۵-۱ مسیر مستقیم برای محاسبه انتگرال خطی.



شکل ۲۶-۱ مسیر شکسته، از O تا P .

این نتیجه و این واقعیت که F_1 در تمام فضا خوش رفتار است، بنابر قضیه ۱-۵-۵، ما را به این نتیجه‌گیری می‌رساند که F_1 در واقع پایستار است. پتانسیل مربوط به این میدان برداری را می‌توان با مراجعه به شکل ۲۶-۱ به دست آورد. از آنجا که F_1 پایستار است، فرقی نمی‌کند که چه مسیری را برای رسیدن به $P(x_1, y_1)$ ، که نقطه دلخواهی در صفحه xy است، برمی‌گزینیم. انتخاب مسیر نشان داده شده در شکل، محاسبات را ساده‌تر می‌کند. روی مسیر (۱): $y = 0$ و $dy = 0$ ، و روی مسیر (۲): $x = x_1$ و $dx = 0$. بنابراین

$$\int_0^P F_1 \cdot dr = \int_{(1)} F_1 \cdot dr + \int_{(2)} F_1 \cdot dr = \int_0^{x_1} x^r dx + \int_0^{y_1} y^r dy = \frac{1}{r+1} x_1^{r+1} + \frac{1}{r+1} y_1^{r+1}$$

اگر مبدأ را نقطه مرجع پتانسیل در نظر بگیریم، به معنای این است که $V(0, 0, 0) = 0$. پس،

$$V(x_1, y_1) = - \int_0^P F_1 \cdot dr = - \frac{1}{r+1} (x_1^{r+1} + y_1^{r+1})$$

یا، به طور کلی،

$$V(x, y) = - \frac{1}{r+1} (x^{r+1} + y^{r+1})$$

مؤلفه‌های گرادیان این پتانسیل عبارت‌اند از

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -x^r \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -y^r$$

بنابراین،

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla V$$

که برای یک میدان برداری پایستار، قابل انتظار است.
تاو \mathbf{F}_2 عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}(2x - 2y) \neq 0$$

پس، همان‌طور که انتظار می‌رود، \mathbf{F}_2 یک میدان برداری پایستار نیست و هیچ تابع پتانسیلی ندارد.

۵-۵-۱ اعمال دوگانه دل

در این زیربخش، ترکیبهای متفاوت عملگر برداری ∇ را با خودش به اجمال بررسی می‌کنیم. با مشتق‌گیری مستقیم به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$$

همچنین می‌توان نشان داد،

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

بالاخره، دیورژانس گرادیان، عملگر مهمی با کاربردهای فراوان است که لاپلاسی نامیده می‌شود:

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (۴۲-۱)$$

همان‌گونه که ملاحظه خواهیم کرد، لاپلاسی در کل قلمرو فیزیک، در وضعیتهایی از امواج تشکیل شده روی پوسته طبل گرفته تا پخش ماده در فضا، انتشار امواج الکترومغناطیسی، و حتی بنیادی‌ترین رفتار ماده در مقیاس زیراتمی، که به کمک معادله شرودینگر در مکانیک کوانتومی توصیف می‌شود، بروز می‌کند.

تمرینها

۱-۵-۱ تکانه زاویه‌ای، L ، یک سیستم شامل N ذره نقطه‌ای به جرمهای m_1, m_2, \dots, m_N که به طور لحظه‌ای در نقاط r_1, r_2, \dots, r_N نسبت به یک مبدأ اختیاری قرار دارند، بنا به تعریف عبارت است از

$$L = \sum_{i=1}^N r_i \times p_i \quad (1)$$

که p_i تکانه خطی ذره i ام است. نشان دهید،

$$\frac{dL}{dt} = \tau \quad (2)$$

که

$$\tau = \sum_{i=1}^N r_i \times (F_i)_{\text{خارجی}}$$

و خارجی (F_i) ، نیروی خارجی است که بر ذره i ام اثر می‌کند.

۲-۵-۱ با بهره‌گیری از مختصات دکارتی، نشان دهید که برای یک تابع کلی به شکل $f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، گرادیان عبارت است از

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \hat{e}_r$$

۳-۵-۱ سطح $f(x, y, z) = C$ را، که در آن C مقدار ثابتی است، در نظر بگیرید. بردار واحدی

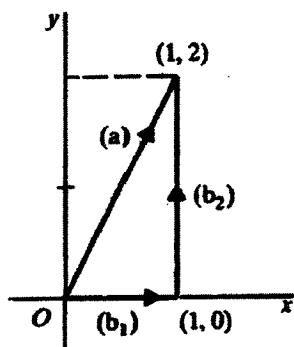
را پیدا کنید که در نقطه (x_0, y_0, z_0) بر این سطح عمود باشد.

۴-۵-۱ اتحاد برداری زیر را اثبات کنید:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

۵-۵-۱ انتگرال خطی نیروی

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + 3y) \hat{e}_x + (y^2 + 2x) \hat{e}_y$$



شکل ۲۷-۱ مسیره‌های شکسته و مستقیم از مبدأ تا $(1, 2)$.

را از مبدأ تا نقطه $(1, 2)$ ، ابتدا (الف) روی خطی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند و سپس (ب) روی مسیری که به‌طور مستقیم از مبدأ تا نقطه $(1, 0)$ و بعد از آن مستقیماً از $(1, 0)$ به $(1, 2)$ می‌رود، محاسبه کنید (شکل ۲۷-۱). (ج) آیا F پایستار است؟
۱-۵-۶ تمرین ۱-۵-۵ را برای میدان برداری

$$F(x, y) = (2x^2y + 4y)\hat{e}_x + (3y^2x + 3x)\hat{e}_y$$

تکرار کنید.

۱-۵-۷ آیا میدان برداری

$$A(x, y, z) = (2xy + 3z^2)\hat{e}_x + (x^2 + 4yz)\hat{e}_y + (2y^2 + 6xz)\hat{e}_z$$

پایستار است؟ در این صورت، پتانسیل مربوط به آن را پیدا کنید.

۱-۵-۸ نشان دهید،

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \iint_S \hat{e}_n \times \mathbf{A} da$$

که A یک میدان برداری اختیاری و S سطحی است که حجم V را دربر دارد.

۱-۶ آنالیز برداری در مختصات خمیده خطی

در بخشهای قبل عمدتاً با دستگاههای مختصات مستطیلی (دکارتی) سروکار داشته‌ایم که در آنها جهت بردارهای واحد \hat{e}_x ، \hat{e}_y ، و \hat{e}_z ثابت است. اما، به‌علت تقارنی که ممکن است در وضعیت

فیزیکی وجود داشته باشد، گاهی بهتر است از دستگاههای مختصات دیگری بهره گیریم. دو دستگاهی که در اینگونه موارد کاربرد فراوانی دارند، عبارت‌اند از مختصات کروی و استوانه‌ای. بنابراین، لازم است با عبارتهایی مثل گرادیان، دیورژانس، تاو، و لاپلاسی در این دستگاههای مختصات آشنا شویم.

این دستگاههای مختصات را به صورت حالت‌های خاصی از دستگاههای کلی‌تر موسوم به مختصات خمیده خطی بررسی می‌کنیم. نقطه P_0 در فضا را نه تنها با سه مختصه (x_0, y_0, z_0) ، بلکه با مقادیر سه تابع مستقل دلخواه از این مختصات نیز می‌توان معین کرد. این سه تابع را به صورت $f_1(x, y, z)$ ، $f_2(x, y, z)$ و $f_3(x, y, z)$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مقادیر آنها در P_0 به ترتیب، عبارت‌اند از q_1 ، q_2 و q_3 ، یعنی

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = q_1 \quad (الف-۴۳-۱)$$

$$f_2(x_0, y_0, z_0) = q_2 \quad (ب-۴۳-۱)$$

$$f_3(x_0, y_0, z_0) = q_3 \quad (ج-۴۳-۱)$$

در این صورت می‌گوییم که مختصات خمیده خطی P_0 عبارت‌اند از (q_1, q_2, q_3) . می‌توانیم به جای (x_0, y_0, z_0) سه مختصه دلخواه (x, y, z) را جایگزین کنیم و $(۴۳-۱)$ را به صورت معادلات سه سطح که یکدیگر را در نقطه P_0 قطع می‌کنند در نظر بگیریم؛ مثلاً سه معادله

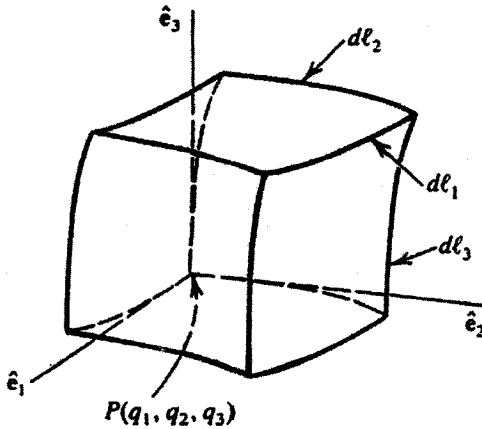
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \theta$$

و

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} = \varphi$$

به ترتیب، کره‌ای به شعاع r ، مخروطی به شعاع θ ، و صفحه‌ای مواز بر محور z را که با صفحه xz زاویه φ می‌سازد، توصیف می‌کنند. محل تقاطع این سه سطح، نقطه‌ای است با مختصات خمیده خطی (r, θ, φ) . شرط می‌کنیم که سه سطح $(۴۳-۱)$ عمود بر یکدیگر باشند، و بردارهای واحد \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 را، به ترتیب، عمود بر سطح اول، دوم، و سوم اختیار می‌کنیم. همچنین، فرض می‌کنیم



شکل ۲۸-۱ مختصات خمیده خطی q_1, q_2, q_3 . بردارهای واحد $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ و عناصر طول در سه جهت نیز نشان داده شده‌اند. توجه کنید که جهت بردارهای واحد به‌گونه‌ای است که $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$.

$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$ و این سه بردار واحد متقابلاً بر یکدیگر عمودند. بدیهی است که این بردارهای واحد جهت ثابتی در فضا ندارند؛ جهت آنها به نقطه مورد نظر بستگی دارد. شکل ۲۸-۱، مختصات q_1, q_2, q_3 و q_1, q_2 مربوط به یک نقطه کلی، P ، بردارهای واحد $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ و سطوح عمود بر آنها را نشان می‌دهد. بدیهی است که برای سه سطح خاصی که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = q_1 \quad y = q_2 \quad z = q_3$$

شرایط به مختصات دکارتی برمی‌گردد.

حال عناصر طول را در مختصات خمیده خطی در نظر بگیریم زیرا تمام عملیات مهم (گرادیان، دیورژانس، و تاو) شامل تغییراتی از میدان هستند که ناشی از تغییرات فاصله است. فرض کنید dL_1 عنصر طولی است که عمود بر سطح تعریف شده توسط (۱-۴۳الف) باشد. این کمیت عبارت است از فاصله مابین سطح:

$$f_1(x, y, z) = q_1$$

و سطح موازی و نزدیک:

$$f_1(x, y, z) = q_1 + dq_1$$

چون $d\mathcal{L}_1$ عمود بر سطح با مقدار ثابت q_1 است، q_2 و q_3 هر دو در امتداد $d\mathcal{L}_1$ ثابت باقی می‌مانند (شکل ۲۸-۱). بنابراین، به‌طور کلی می‌توانیم این عنصر طول را به‌صورت

$$d\mathcal{L}_1 = h_1 dq_1$$

بنویسیم که h_1 ، عموماً، تابعی از مختصات q_1, q_2, q_3 است. همچنین

$$d\mathcal{L}_2 = h_2 dq_2 \quad \text{و} \quad d\mathcal{L}_3 = h_3 dq_3$$

می‌توانیم تمام معادلات مربوط به عناصر طول را با هم ترکیب کنیم و آنها را به‌صورت یک معادله برداری بنویسیم:

$$d\mathbf{r} = \hat{e}_1 d\mathcal{L}_1 + \hat{e}_2 d\mathcal{L}_2 + \hat{e}_3 d\mathcal{L}_3 = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i h_i dl_i \quad (۴۴-۱)$$

(۴۴-۱)، معادله مفیدی است؛ مثلاً می‌توانیم بردارهای واحد \hat{e}_i را به‌صورت زیر به‌دست آوریم. با تقسیم دو طرف (۴۴-۱) بر dq_1 و این فرض که dq_2 و dq_3 صفرند، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dq_1} \right|_{\substack{q_2 = \text{ثابت} \\ q_3 = \text{ثابت}}} = \hat{e}_1 h_1$$

یا

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$$

به بیان کلی‌تر:

$$\hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{به‌ازای} \quad (۴۵-۱)$$

معادله (۴۵-۱) را می‌توان برای یافتن $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ و برحسب بردارهای واحد دستگاه‌های مختصات دیگر به‌کار برد.

عنصر حجم در مختصات خمیده خطی عبارت است از

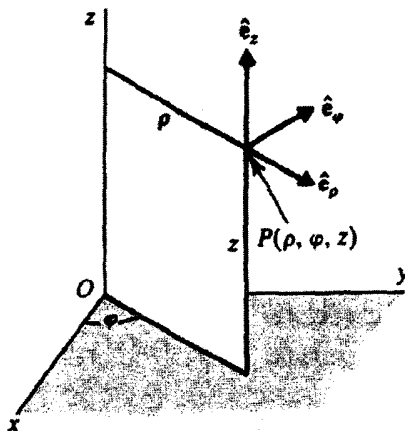
$$dV = d\mathcal{L}_1 d\mathcal{L}_2 d\mathcal{L}_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (۴۶-۱)$$

۱-۶-۱ مختصات استوانه‌ای

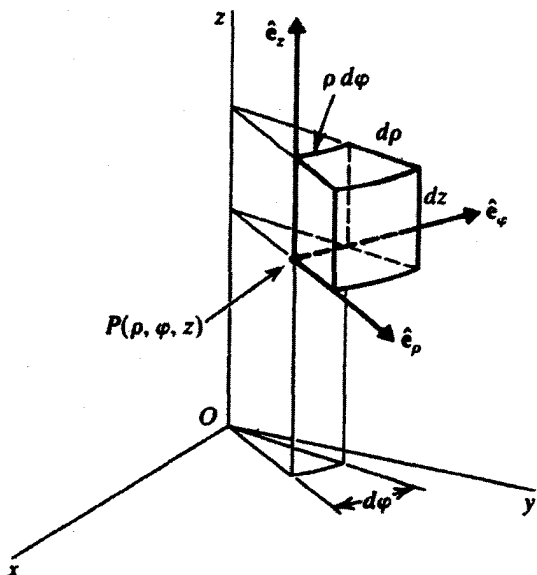
دستگاه مختصات استوانه‌ای را در شکل ۱-۲۹ مشاهده می‌کنید. مکان هر نقطه P در فضا با سه مختصه استوانه‌ای ρ ، φ ، و z مشخص می‌شود. مختصه ρ ، فاصله عمودی از محور z است؛ φ زاویه سمتی صفحه شامل P و محور z ، از صفحه xz ؛ و z فاصله از صفحه xy است. در نقطه P سه جهت متقابلاً عمود بر یکدیگر یافت می‌شود: \hat{e}_ρ در جهت خط عمود بر محور z است که امتداد آن از P می‌گذرد؛ \hat{e}_φ عمود بر صفحه شامل محور z و نقطه P است و در جهت متناظر با افزایش φ است؛ \hat{e}_z در جهت z مثبت است. وقتی نقطه P در فضا حرکت می‌کند، جهت این بردارهای واحد ثابت نمی‌ماند، اما همیشه عمود بر یکدیگر باقی می‌مانند. بردار \mathbf{r} که مکان نقطه P را مشخص می‌کند، عبارت است از

$$\mathbf{r} = \hat{e}_\rho \rho + \hat{e}_z z$$

این عبارت، شامل زاویه φ نیست و، بنابراین، یک نقطه منحصر به فرد را تعیین نمی‌کند. علت این امر آن است که بردارهای واحد نموده شده در شکل ۱-۲۹، جهت ثابتی در فضا ندارند. عناصر طول متناظر با تغییرات بینهایت کوچک مختصات یک نقطه، مهم‌اند. اگر مختصات φ و z نقطه P را ثابت نگه داریم و اجازه دهیم ρ به اندازه $d\rho$ افزایش پیدا کند، در آن صورت P به اندازه $d\mathbf{r} = \hat{e}_\rho d\rho$ جابه‌جا می‌شود. از سوی دیگر، اگر ρ و z را ثابت نگه داریم ولی اجازه دهیم φ به اندازه $d\varphi$ افزایش یابد، در آن صورت P به اندازه $d\mathbf{r} = \hat{e}_\varphi \rho d\varphi$ جابه‌جا خواهد شد.



شکل ۱-۲۹ دستگاه مختصات استوانه‌ای.



شکل ۱-۳۰ فواصل مربوط به تغییرات بینهایت کوچک مختصات ρ ، φ ، و z . عنصر حجم متناظر با این فواصل نیز نشان داده شده است.

سرانجام، اگر ρ و φ ثابت بمانند ولی z به اندازه dz افزایش پیدا کند، آنگاه: $dr = \hat{e}_z dz$. به ازای نمونه‌های اختیاری $d\rho$ ، $d\varphi$ و dz ، داریم

$$dr = \hat{e}_\rho d\rho + \hat{e}_\varphi \rho d\varphi + \hat{e}_z dz \quad (۴۷-۱)$$

و قدرمطلق dr عبارت است از

$$\|dr\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

شکل ۱-۳۰ این جابه‌جایی‌ها و عنصر حجم مربوط به آنها را نشان می‌دهد. حجم بینهایت کوچک عبارت است از

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

۱-۶-۲ مختصات کروی

مکان یک نقطه مانند P در مختصات کروی با r ، θ ، و φ مشخص می‌شود که r فاصله از مبدأ، θ زاویه بین محور z و بردار شعاع، و φ زاویه سمتی است. در نقطه P بردارهای واحد در شکل ۳۱-۱ نشان داده شده‌اند: \hat{e}_r در جهت بردار شعاعی است که از P می‌گذرد؛ \hat{e}_θ عمود بر صفحه شامل بردار شعاع و محور z و در جهت متناظر با افزایش θ است؛ \hat{e}_φ عمود بر \hat{e}_r و \hat{e}_θ است به‌گونه‌ای که $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta$. مانند قبل، وقتی در فضا حرکت می‌کند، جهت بردارهای واحد ثابت نمی‌ماند.

بردار $d\mathbf{r}$ که مکان نقطه P را توصیف می‌کند صرفاً عبارت است از $d\mathbf{r} = \hat{e}_r dr$ ، و مانند مختصات استوانه‌ای، P را به صورت منحصر به فرد تعیین نمی‌کند.

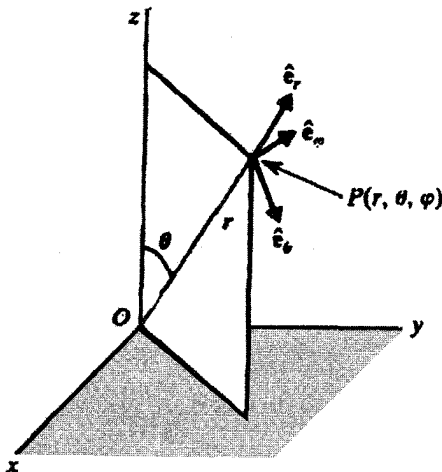
عنصر جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ ، متناظر با نمونه‌های اختیاری مختصات، عبارت است از

$$d\mathbf{r} = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\theta r d\theta + \hat{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (48-1)$$

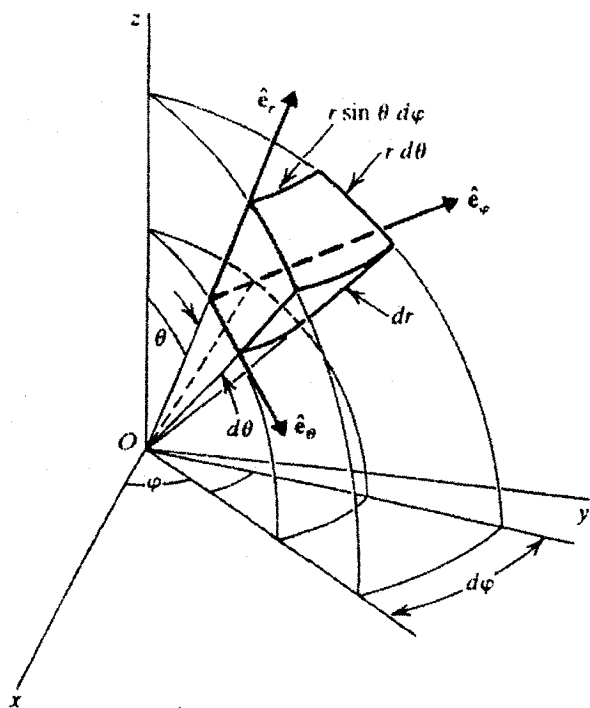
و قدرمطلق آن عبارت خواهد بود از:

$$\|d\mathbf{r}\| = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$$

توجه کنید که $\|d\mathbf{r}\| \neq dr$! نمونه‌ها و عنصر حجم متناظر با آنها در شکل ۳۲-۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳۱-۱ دستگاه مختصات کروی.



شکل ۱-۲۲ جابه‌جایی‌ها و عنصر حجم در دستگاه مختصات کروی.

عنصر حجم عبارت است از

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

نتایج اخیر در جدول ۱-۱ جمع‌بندی شده‌اند.

در اختیار داشتن رابطه‌ای مابین بردارهای واحد در مختصات کروی یا استوانه‌ای و بردارهای واحد دکارتی \hat{e}_x ، \hat{e}_y ، و \hat{e}_z نیز مفید است. برای دستیابی به این روابط، ابتدا توجه کنید که برای مختصات استوانه‌ای داریم:

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

و برای مختصات کروی هم داریم:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

جدول ۱-۱ متداولترین دستگاههای مختصات

کروی	استوانه‌ای	دکارتی	خمیده خطی
r	ρ	x	q_1
θ	φ	y	q_2
φ	z	z	q_3
\backslash	\backslash	\backslash	h_1
r	ρ	\backslash	h_2
$r \sin \theta$	\backslash	\backslash	h_3

بنابراین، برای مختصات استوانه‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{r} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z = \hat{e}_x \rho \cos \varphi + \hat{e}_y \rho \sin \varphi + \hat{e}_z z$$

و برای مختصات کروی:

$$\mathbf{r} = \hat{e}_x r \sin \theta \cos \varphi + \hat{e}_y r \sin \theta \sin \varphi + \hat{e}_z r \cos \theta$$

اکنون، با استفاده از معادله (۴۵-۱) و جدول ۱-۱، می‌رسیم به

$$\hat{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \hat{e}_x \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \varphi$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} [-\hat{e}_x \rho \sin \varphi + \hat{e}_y \rho \cos \varphi] = -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi$$

$$\hat{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{e}_z$$

همچنین

$$\hat{e}_r = \hat{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \hat{e}_z \cos \theta$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \hat{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \hat{e}_z \sin \theta$$

$$\hat{e}_\varphi = -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که سمت چپ این معادلات نمایانگر بردارهای متعامد است. اکنون در موضعی قرار گرفته‌ایم که می‌توانیم عملگرهای گرادیان، دیورژانس، و تاورا در مختصات خمیده خطی پیدا کنیم. وقتی این عملگرها را پیدا کردیم، یافتن آنها در مختصات استوانه‌ای و کروی صرفاً با قرار دادن مقادیر مناسب q_1, q_2 و h_1, h_2 و h_3 میسر می‌شود.

۱-۶-۳ عملگر گرادیان

پیدا کردن شکل عملگر گرادیان مستلزم آهنگ تغییر یک تابع اسکالر f نسبت به مسافت، در هر یک از جهت‌های مختصات است:

$$\nabla f = \hat{e}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathcal{L}_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathcal{L}_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial f}{\partial \mathcal{L}_3}$$

اما،

$$\frac{\partial f}{\partial \mathcal{L}_1} = \lim_{\Delta \mathcal{L}_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta \mathcal{L}_1} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} h_1 \frac{\Delta f}{\Delta q_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1}$$

و روابط مشابهی نیز برای $\partial f / \partial \mathcal{L}_2$ و $\partial f / \partial \mathcal{L}_3$ خواهیم داشت. که در نتیجه می‌رسیم به

$$\nabla f = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \quad (۴۹-۱)$$

با استفاده از مقادیر مناسب برای $q_1, q_2, q_3, h_1, h_2, h_3$ از جدول ۱-۱، بلافاصله می‌توانیم گرادیان را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسیم:

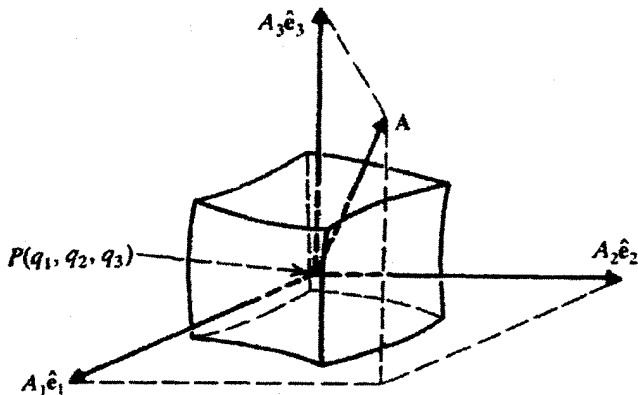
$$\nabla f = \hat{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

و در مختصات کروی:

$$\nabla f = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

۱-۶-۴ دیورژانس

برای پیدا کردن دیورژانس برداری مانند A ، عنصر حجم شکل ۱-۳۳ را در نظر می‌گیریم و شار



شکل ۳۳-۱ عنصر حجم در مختصات خمیده خطی، به مرکز $P(q_1, q_2, q_3)$ که مقدار بردار A در آن، عبارت است از $A(q_1, q_2, q_3)$.

خروجی از وجوه حجم را پیدا می‌کنیم. برای وجه جلویی داریم:

$$d\Phi_F = \mathbf{A}_F \cdot \hat{e}_1 da_F$$

که A_F به معنای مقدار A در مرکز وجه جلو و da_F مساحت وجه جلو است. بایستی گرفتن استدلالی که در بخش ۳-۵-۱ برای حالت مستطیلی به کار بردیم، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} d\Phi_F &= A_1 \left(q_1 + \frac{dq_1}{\gamma}, q_2, q_3 \right) h_r \left(q_1 + \frac{dq_1}{\gamma}, q_2, q_3 \right) h_r \left(q_1 + \frac{dq_1}{\gamma}, q_2, q_3 \right) dq_2 dq_3 \\ &= \left[A_1(q_1, q_2, q_3) + \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} \right] \left[h_r(q_1, q_2, q_3) + \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \right] \\ &\quad \times \left[h_r(q_1, q_2, q_3) + \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \right] \end{aligned}$$

با انجام عمل ضرب و نگهداشتن جمله‌های تا مرتبه سوم، می‌رسیم به

$$d\Phi_F = \left[A_1 h_r h_r + A_1 h_r \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} + A_1 h_r \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} + h_r h_r \frac{\partial A_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} \right] dq_2 dq_3$$

همچنین، برای وجه عقب داریم

$$\begin{aligned} d\Phi_B &= \mathbf{A}_B \cdot (-\hat{e}_1) da_B \\ &= -A_1 \left(q_1 - \frac{dq_1}{\gamma}, q_r, q_r \right) h_r \left(q_1 - \frac{dq_1}{\gamma}, q_r, q_r \right) h_r \left(q_1 - \frac{dq_1}{\gamma}, q_r, q_r \right) dq_r dq_r \\ &= - \left[A_1 - \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} \right] \left[h_r - \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \right] \left[h_r - \frac{dq_1}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \right] dq_r dq_r \\ &= - \left[A_1 h_r h_r - A_1 h_r \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} - A_1 h_r \frac{\partial h_r}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} - h_r h_r \frac{\partial A_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\gamma} \right] dq_r dq_r \end{aligned}$$

با جمع کردن شارهای خروجی از وجوه جلو و عقب، داریم

$$d\Phi_1 = d\Phi_F + d\Phi_B = \frac{\partial}{\partial q_1} (h_r h_r A_1) dq_1 dq_r dq_r$$

به همین ترتیب، شارهای عبوری از وجوه عمود بر \hat{e}_2 و \hat{e}_3 ، به ترتیب، عبارت‌اند از

$$d\Phi_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_r A_r) dq_1 dq_r dq_r$$

و

$$d\Phi_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_r A_r) dq_1 dq_r dq_r$$

حالا شار کلی را که از حجم بینهایت کوچک می‌گذرد، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d\Phi = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_r h_r A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_r A_r) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_r A_r) \right] dq_1 dq_2 dq_3 \quad (50-1)$$

به اعتبار تعریف ۱-۵-۱، می‌دانیم که دیورژانس عبارت است از شار بر واحد حجم، یعنی^۱،

$$\text{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV}$$

۱. به بیان دقیقتر، در مختصات خمیده خطی، دیورژانس (یا ناور) یک میدان برداری \mathbf{A} ، حاصلضرب نقطه‌ای (یا برداری) یک عملگر برداری ساده با \mathbf{A} نیست. در این مورد $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (یا $\nabla \times \mathbf{A}$) را باید به صورت "تک‌موجودی" تلقی کرد که تعریف آن با (۵۱-۱) یا (۵۲-۱) بیان می‌شود. بعضی مؤلفان $\text{div} \mathbf{A}$ (یا $\text{curl} \mathbf{A}$) را به جای $\nabla \cdot \mathbf{A}$ به کار می‌برند. با این همه، مادام که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (یا $\nabla \times \mathbf{A}$) به صورت یک تک‌موجود تلقی شود، ابهامی بیش نمی‌آید.

این تعریف دیورژانس، از دستگاه مختصاتی که به کار می‌رود مستقل و برای بحث حاضر مناسب است. با استفاده از معادلهٔ مربوط به عنصر حجم معادلهٔ (۱-۴۶) و معادلهٔ (۱-۵۰)، می‌رسیم به

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_r h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_r h_\varphi A_1) + \frac{\partial}{\partial q_r} (h_1 h_\varphi A_r) + \frac{\partial}{\partial q_\varphi} (h_1 h_r A_\varphi) \right] \quad (51-1)$$

در حالت خاص، برای مختصات استوانه‌ای

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

و برای مختصات کروی

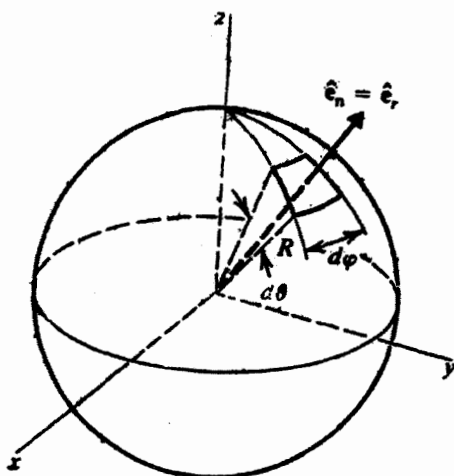
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

مثال ۱-۶-۱: میدان برداری

$$\mathbf{A} = k r^r \hat{e}_r$$

را که در آن k مقداری است ثابت، در نظر بگیرید. می‌خواهیم قضیهٔ دیورژانس را برای سطحی به شعاع R (شکل ۱-۳۴) تحقیق کنیم. عنصر شار، Φ ، با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \mathbf{A} \cdot \hat{e}_n da = k R^r \hat{e}_r \cdot \hat{e}_n da = k R^r da \\ &= k R^r \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$



شکل ۳۴-۱ شار عبوری از یک کره.

که در آن A در سطح کره، یعنی $r = R$ ، محاسبه می‌شود، و عنصر مساحت بر روی سطح یاد شده، عبارت است از:

$$da = (R d\theta)(R \sin \theta d\varphi)$$

با انتگرال‌گیری روی گستره θ (صفر تا π) و φ (صفر تا 2π)، داریم

$$\Phi = \iiint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da = kR^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi kR^2$$

از سوی دیگر، با استفاده از عبارت مربوط به دیورژانس در دستگاه مختصات کروی و توجه به اینکه $A_\theta = 0 = A_\varphi$ ، خواهیم داشت

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(kr^2) = 4kr$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iiint_V 4kr r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 4k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr \\ &= 4k(2\pi)(2) \frac{1}{3} R^3 = 4\pi k R^3 \end{aligned}$$

که برقرار بودن قضیه دیورژانس را برای این حالت خاص نشان می‌دهد.

مثال ۱-۶-۲: میدان برداری

$$\mathbf{A} = \frac{k}{r^2} \hat{e}_r$$

و سطحی کروی به شعاع R را، مطابق مثال ۱-۶-۱، در نظر بگیرید. ابتدا، شار عبوری از سطح یاد شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{e}_n da &= \iint_S \frac{k}{R^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_n R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi k \end{aligned} \quad (1)$$

از سوی دیگر، به آسانی ملاحظه می‌شود که با توجه به $A_\theta = 0 = A_\varphi$ و $A_r = k/r^2$ استفاده از عبارت دیورژانس در دستگاه مختصات کروی، داریم $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. بنابراین، سمت راست قضیه دیورژانس صفر، اما سمت چپ آن $4\pi k$ است. علت این امر آن است که در $r = 0$ ، نه تابع برداری و نه دیورژانس آن تعریف شده نیستند. وقتی روی حجم انتگرال می‌گیریم، مبدأ را نیز منظور می‌کنیم، و چون دیورژانس در آنجا بینهایت می‌شود، نمی‌توانیم به نحو مطلوبی انتگرال بگیریم. نکته جالب این است که در تمام نقاط، جز مبدأ داریم: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. به این ترتیب، تمام مقدار انتگرال $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$ باید ناشی از مبدأ باشد. این نکته به آن معناست که اگر ما حجم V

را به صورت باقیمانده $V = V_e + V_{\text{باقیمانده}}$ در نظر بگیریم، که در آن حجم بینهایت کوچکی در اطراف مبدأ و باقیمانده $V_{\text{باقیمانده}}$ بقیه حجم V است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV + \iiint_{V_{\text{باقیمانده}}} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \\ &= \iiint_{V_e} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \end{aligned}$$

زیرا $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در همه جای باقیمانده $V_{\text{باقیمانده}}$ صفر است. اما طرف راست باید $4\pi k$ بشود، بنابراین

$$\iiint_{V_e} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \approx \nabla \cdot \mathbf{A} V_e = 4\pi k$$

که این واقعیت که V_e بینهایت کوچک است به ما اجازه می‌دهد از علامت انتگرال چشمپوشی کنیم. این نتیجه حکایت از این دارد که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ از خواص زیر برخوردار است:

(الف) در همه جا، جز مبدأ، صفر است.

(ب) در مبدأ متناهی است (بنابراین $\nabla \cdot \mathbf{A} V_e$ متناهی است)؛ و

(ج) انتگرال آن روی تمام فضا ثابت است (توجه داشته باشید که کره اختیاری است اما انتگرال سطحی، صرفنظر از اینکه کره چه باشد، ثابت است).

چنین تابعی را تابع دلتای دیراک می‌نامیم و در فصل ۵، بیشتر به آن خواهیم پرداخت. در اینجا، صرفاً آن را به صورت $\delta(\mathbf{r})$ نشان می‌دهیم و یادآوری می‌کنیم که

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \quad (2)$$

نتیجه درست، سازگار با ۱، در صورتی حاصل می‌شود که فرض کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 4\pi k \delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r})$$

۱-۵-۶ تاو

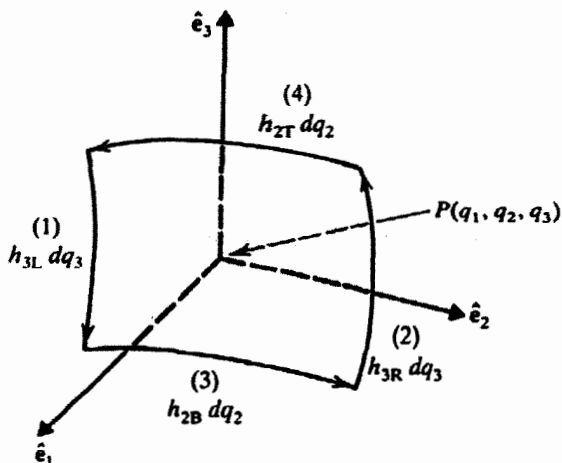
ابتدا به یک تعریف "مستقل از مختصات" تاو نیاز داریم. معادله (۱-۳۸) امکان تحقق چنین تعریفی را فراهم می‌آورد. مؤلفه تاو را در جهت \hat{e}_n به صورت:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{e}_n = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-1)$$

تعریف می‌کنیم که به صورت توصیفی حاکی از این است که مؤلفه تاو \mathbf{A} در جهت \hat{e}_n مساری است با انتگرال خطی \mathbf{A} روی مسیر بسته بی‌نهایت کوچک C ، تقسیم بر مساحت مسیر بسته C ، Δa ، که \hat{e}_n بر آن عمود است. در اینجا نیز بین جهت \hat{e}_n و جهت انتگرال‌گیری، طبق قاعده دست راست رابطه برقرار است. بدیهی است که در این تعریف، هیچ ذکری از دستگاه مختصات به میان نمی‌آید و می‌توان آن را به صورت کلی به کار برد.

سپس، مسیری عمود بر \hat{e}_n انتخاب، و انتگرال خطی \mathbf{A} را روی آن محاسبه می‌کنیم. وضعیت، در شکل ۳۵-۱ نشان داده شده است. برای مسیرهای (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، سهمهای زیر را برای انتگرال خطی در اختیار داریم، که در آنها از جملات بالاتر از مرتبه دوم چشم پوشیده‌ایم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_L \cdot d\mathbf{r}_L &= \mathbf{A}_L \cdot (-\hat{e}_r d\mathcal{L}_L) = -A_{rL} d\mathcal{L}_L = -A_{rL} h_{rL} dq_r \\ &= -A_r \left(q_1, q_2 - \frac{dq_r}{\gamma}, q_r \right) h_r \left(q_1, q_2 - \frac{dq_r}{\gamma}, q_r \right) dq_r \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۳۵-۱ مسیر انتگرال برای نخستین مؤلفه تاو \mathbf{A} در مختصات خمیده خطی.

$$\begin{aligned}
 &= - \left[A_r - \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial A_r}{\partial q_r} \right] \left[h_r - \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_r} \right] dq_r \\
 &= -A_r h_r + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) dq_r dq_r
 \end{aligned}$$

$$A_R \cdot dr_R = A_R \cdot (\hat{e}_r d\mathcal{L}_R) = A_{rR} d\mathcal{L}_R = A_{rR} h_{rR} dq_r \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &= A_r \left(q_1, q_r + \frac{dq_r}{\gamma}, q_r \right) h_r \left(q_1, q_r + \frac{dq_r}{\gamma}, q_r \right) dq_r \\
 &= \left[A_r + \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial A_r}{\partial q_r} \right] \left[h_r + \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_r} \right] dq_r \\
 &= A_r h_r + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) dq_r dq_r
 \end{aligned}$$

$$A_B \cdot dr_B = A_B \cdot (\hat{e}_r d\mathcal{L}_B) = A_{rB} d\mathcal{L}_B = A_{rB} h_{rB} dq_r \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 &= A_r \left(q_1, q_r, q_r - \frac{dq_r}{\gamma} \right) h_r \left(q_1, q_r, q_r - \frac{dq_r}{\gamma} \right) dq_r \\
 &= \left[A_r - \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial A_r}{\partial q_r} \right] \left[h_r - \frac{dq_r}{\gamma} \frac{\partial h_r}{\partial q_r} \right] dq_r \\
 &= A_r h_r + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) dq_r dq_r
 \end{aligned}$$

$$A_T \cdot dr_T = A_T \cdot (-\hat{e}_r d\mathcal{L}_T) = -A_{rT} d\mathcal{L}_T = -A_{rT} h_{rT} dq_r \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &= -A_r \left(q_1, q_r, q_r + \frac{dq_r}{\gamma} \right) h_r \left(q_1, q_r, q_r + \frac{dq_r}{\gamma} \right) dq_r \\
 &= -A_r h_r + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) dq_r dq_r
 \end{aligned}$$

با جمع کردن این مقادیر داریم

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) - \frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_r) \right] dq_r dq_r$$

برای مسیر شکل ۳۵-۱

$$da = h_r dq_r h_r dq_r$$

به این ترتیب، طبق رابطه (۵۲-۱)، مؤلفه اول تاو بردار \mathbf{A} تبدیل می‌شود به

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_r h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial q_r} (h_r A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial q_\varphi} (h_r A_r) \right]$$

عبارتهای مربوط به دو مؤلفه دیگر تاو را می‌توان مثل عملیات بالا پیدا کرد، و سه مؤلفه را با هم به صورت یک دترمینان نوشت:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (53-1)$$

اگر مقادیر مناسب مربوط به h و q در مختصات استوانه‌ای را جایگزین کنیم، داریم،

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\varphi \rho & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

و حال آنکه در مختصات کروی داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta r & \hat{e}_\varphi r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

مثال ۱-۳-۶: میدان برداری \mathbf{B} را در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر در نظر بگیرید،

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\rho} \hat{e}_\varphi$$

که در آن k مقدار ثابتی است. به آسانی ملاحظه می‌شود که تاو \mathbf{B} صفر است:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \rho \left(\frac{k}{\rho} \right) & \cdot \end{vmatrix}$$

اما، برای هر دایره (مثلاً به شعاع a) که مرکز آن بر مبدأ قرار دارد و در صفحه xy واقع است، داریم

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{k}{a} \hat{e}_\varphi \cdot \underbrace{(\hat{e}_\varphi a d\varphi)}_{d\mathbf{r}} = k2\pi \neq 0$$

دلیل این نتیجه عجیب آن است که دایره یاد شده قابل انقباض به صفر نیست، زیرا در مبدأ، که داخل دایره واقع بوده و در آن $\rho = 0$ ، \mathbf{B} تعریف شده نیست.

این میدان برداری باید آشنا به نظر برسد، زیرا معرف میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم راست حامل جریان در امتداد محور z است. انتگرال خطی \mathbf{B} روی هر مسیر بسته محیط برسیم (به ویژه، دایره بالا)، اصولاً، جریان داخل سیم را می‌دهد، و این جریان صفر نیست.

مثال ۱-۶-۴: میدانی برداری

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$$

و در آن \mathbf{r} بردار جابه‌جایی از مبدأ به‌شمار می‌آید، پایستار است. با استفاده از مختصات دکارتی و کروی، پایستگی این میدان را ثابت کنید.
ابتدا، در مختصات دکارتی داریم

$$\mathbf{F} = \hat{e}_x[xf(r)] + \hat{e}_y[yf(r)] + \hat{e}_z[zf(r)]$$

که تاو آن عبارت است از

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf & yf & zf \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_x \left[\frac{\partial}{\partial y}(zf) - \frac{\partial}{\partial z}(yf) \right] + \hat{\mathbf{e}}_y \left[\frac{\partial}{\partial z}(xf) - \frac{\partial}{\partial x}(zf) \right] \\ &+ \hat{\mathbf{e}}_z \left[\frac{\partial}{\partial x}(yf) - \frac{\partial}{\partial y}(xf) \right] \end{aligned}$$

ابتدا با بذل توجه بر مؤلفه x و نشانیدن f' به جای df/dr داریم

$$\frac{\partial}{\partial y}(zf) = z \frac{\partial f}{\partial y} = z \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \equiv z f' \frac{\partial r}{\partial y}$$

اما،

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \right] = \frac{y}{r}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial y}(zf) = yz f'$$

به همین ترتیب،

$$\frac{\partial}{\partial z}(yf) = yz f'$$

بنابراین، مؤلفه x بردار $\nabla \times \mathbf{F}$ صفر است. مؤلفه‌های y و z نیز صفرند، و خواهیم داشت

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

در مختصات کروی، به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ rf(r) & \circ & \circ \end{vmatrix} = \circ$$

بدیهی است که استفاده از مختصات کروی، محاسبات را به نحو چشمگیری ساده می‌کند. به این ترتیب، ثابت کردیم که هر میدان برداری خوش‌رفتار که قدرمطلق آن فقط تابعی از فاصله شعاعی، r ، و جهتش در راستای \mathbf{r} باشد، پایستار است. این نوع میدانهای برداری را به طور کلی میدانهای برداری مرکزی می‌گویند.

۱-۶-۶ لاپلاسی

از ترکیب دیورژانس و گرادیان، لاپلاسی به دست می‌آید. با استفاده از (۱-۴۹) و (۱-۵۱)، داریم

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (۱-۵۴)$$

برای مختصات استوانه‌ای، لاپلاسی عبارت است از

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

و برای مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$

تمرینها

۱-۶-۱ نشان دهید که اگر f فقط تابعی از r باشد، در آن صورت

$$\nabla \cdot (f\mathbf{r}) = r \frac{df}{dr} + 3f$$

۱-۶-۲ نشان دهید

$$\nabla \cdot \hat{e}_r = \frac{2}{r}$$

توجه کنید که هر چند، بنابه تعریف $\|\hat{e}_r\| = 1$ ، اما دیورژانس آن صفر نیست، زیرا جهت \hat{e}_r با مکان تغییر می‌کند.

۱-۶-۳ سرعت یک ذره را در دستگاه مختصات خمیده خطی عام پیدا کنید، و سپس نتیجه را در وضعیتهای خاص مختصات استوانه‌ای و کروی به‌دست آورید.

۱-۷ خلاصه اتحادهای برداری

پرکاربردترین اتحادهای برداری، در جدول ۱-۲ گردآوری شده‌اند. بیشتر این اتحادها را می‌توان

جدول ۱-۲ اتحادهای برداری متداول

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta, \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \quad (1-1)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \quad (2-1)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4-1)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (5-1)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{c}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})] - \mathbf{d}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \quad (6-1)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (7-1)$$

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv 0 \quad (8-1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (9-1)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (10-1)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (11-1)$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{a}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{a} + f \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (12-1)$$

$$\nabla \times (f \mathbf{a}) = (\nabla f) \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a}) \quad (13-1)$$

صرفاً با بسط آنها برحسب مؤلفه‌ها اثبات کرد. برخی، در متن درس یا در مثالها اثبات شده‌اند. بقیه را به صورت مسئله، به عهده خواننده گذاشته‌ایم. تمام بردارهای مندرج در جدول، یا در صفحه‌اند و یا در فضا. بردارها با حروف لاتین و مؤلفه‌های آنها با حروف متناظر یونانی نشان داده شده‌اند. بردارهای \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 سه بردار واحد متعامد در سه بعدند، که طبق قاعده دست راست با یکدیگر مرتبط‌اند: $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$.

مسائل

۱-۱ نشان دهید بردارهای:

$$A = 9\hat{e}_x + \hat{e}_y - 6\hat{e}_z \quad \text{و} \quad B = 4\hat{e}_x - 6\hat{e}_y + 5\hat{e}_z$$

بر یکدیگر عمودند.

۲-۱ نشان دهید بردارهای

$$A = 2\hat{e}_x - \hat{e}_y + \hat{e}_z$$

$$B = \hat{e}_x - 3\hat{e}_y - 5\hat{e}_z$$

و

$$C = 3\hat{e}_x - 4\hat{e}_y - 4\hat{e}_z$$

اضلاع یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

۳-۱ زاویه بین $A = 2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y + \hat{e}_z$ و $B = \hat{e}_x - 6\hat{e}_y + \hat{e}_z$ را پیدا کنید.

۴-۱ حاصلضرب نقطه‌ای $A = B - C$ را در خودش به دست آورید و با تفسیر هندسی نتیجه، قانون کسینوسها را ثابت کنید.

۵-۱ نشان دهید بردارهای:

$$A = \hat{e}_x \cos \theta + \hat{e}_y \sin \theta \quad \text{و} \quad B = \hat{e}_x \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \varphi$$

بردارهای واحدی در صفحه xy اند که با محور x زاویه‌های θ و φ می‌سازند. سپس با استفاده از حاصلضرب داخلی آنها فرمولی برای $\cos(\theta - \varphi)$ به دست آورید.

۶-۱ بردارهای A, B, C ، مبدأ را به نقاط A, B, C و C متصل می‌کنند. نشان دهید $(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)$ بر صفحه ABC عمود است.

۷-۱ بردارهای A و B ، اضلاع یک متوازی‌الاضلاع، C و D قطرهای آن، و θ زاویه بین A و B است. ثابت کنید

$$(\|C\|^2 + \|D\|^2) = 2(\|A\|^2 + \|B\|^2)$$

و

$$(\|C\|^2 - \|D\|^2) = 4 \|A\| \|B\| \cos \theta$$

۸-۱ نشان دهید: $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = B \cdot (C \times A)$

۹-۱ نشان دهید: $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ (این رابطه، به قاعده $bac\ cab$ معروف است).

۱۰-۱ اتحادهای (۵-۱) و (۶-۱) در جدول ۲-۱ را اثبات کنید.

۱۱-۱ نشان دهید:

$$(a_1 \times a_2) \cdot (a_1 \times a_2) = \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (a_1 \cdot a_2)^2$$

۱۲-۱ با استفاده از روشهای برداری، ثابت کنید که قطرهای لوزی بر یکدیگر عمودند.

۱۳-۱ یک معادله برای صفحه‌ای که از نقاط $P_1(2, -1, 1)$ ، $P_2(3, 2, -1)$ ، و $P_3(-1, 3, 2)$ می‌گذرد، بنویسید.

۱۴-۱ با استفاده از روش گرام-اشمیت، یک پایه متعامد سه‌بعدی از هر یک از مجموعه بردارهای زیر بسازید:

$$(الف) (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$$

$$(ب) (1, 2, 2), (0, 0, 1), (0, 1, 0)$$

۱۵-۱ یک ذره در صفحه xy طوری حرکت می‌کند که بردار مکان آن عبارت است از

$$r = \hat{e}_x a \cos \omega t + \hat{e}_y a \sin \omega t$$

که در آن ω مقداری است ثابت. نشان دهید که (الف) سرعت، \mathbf{v} ، بر \mathbf{r} عمود است؛ (ب) شتاب در جهت مبدأ است؛ و (ج) تکانه زاویه‌ای، $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ ، برداری ثابت (مستقل از زمان) است. ۱۶-۱ با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \left(\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right) \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{a}_2}{dt}\right)$$

و

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \left(\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right) \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \left(\frac{d\mathbf{a}_2}{dt}\right)$$

۱۷-۱ بردار واحدی پیدا کنید که در نقطه $(1, -2, 3)$ بر سطح $3x^2z - 2xy^2 - 4y = 9$ عمود باشد.

۱۸-۱ دیورژانس و تاور میدان برداری زیر را بیابید:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_x(x^2 + 2yz) + \hat{\mathbf{e}}_y(y^2 + 2xz) + \hat{\mathbf{e}}_z(z^2 + 2xy)$$

۱۹-۱ نشان دهید که اگر هر دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} پایستار باشند، دیورژانس $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ صفر است.

۲۰-۱ قضیه گرین را ثابت کنید:

$$\iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{a}$$

۲۱-۱ ثابت کنید: $\nabla \times (f\nabla f) = 0$.

۲۲-۱ نشان دهید:

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)f = r^2 \nabla^2 f - r^2 \frac{\partial f}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f}{\partial r}$$

۲۳-۱ با استفاده از قضیه دیورژانس، ثابت کنید که برای یک سطح بسته S : $\iint_S d\mathbf{a} = 0$.

۲۴-۱ با استفاده از قضیه دیورژانس، ثابت کنید: $\iiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{3} V$ ، که در آن V حجمی است که توسط سطح S محدود می‌شود.

۲۵-۱ ثابت کنید هرگاه A تاویک میدان برداری باشد، برای هر سطح S ، $\iint_S A \cdot d\mathbf{a} = 0$.

۲۶-۱ ثابت کنید انتگرال خطی یک میدان برداری پایستار بین دو نقطه دلخواه P_1 و P_2 مستقل از P_1 تا P_2 است. (راهنمایی: دو مسیر متفاوت از P_1 تا P_2 ، یک حلقه بسته تشکیل می‌دهند.)

۲۷-۱ اگر بردار $\mathbf{F} = \hat{e}_x(x + 2y + az) + \hat{e}_y(bx - 3y - z) + \hat{e}_z(4x + cy + 2z)$ پایستار باشد، a ، b ، و c را تعیین، و پتانسیل \mathbf{F} را پیدا کنید.

۲۸-۱ نشان دهید میدان برداری

$$\mathbf{F} = \hat{e}_x(3x^2y^2 + 2xz^2) + \hat{e}_y(2x^2y + 9y^2z^2) + \hat{e}_z(6x^2z^2 + 6y^2z)$$

پایستار است. پتانسیل \mathbf{F} را پیدا کنید.

۲۹-۱ برای میدان برداری مسئله ۲۷-۱، انتگرال خطی روی خط راست از مبدأ تا نقطه $(1, 2, 0)$ ، روی سهمی $y = 2x^2$ ، و روی خط شکسته $(0, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ و سپس تا $(1, 2, 0)$ را محاسبه کنید.

۳۰-۱ فرض کنید $P(\mathbf{r})$ نقطه‌ای در $\mathbf{r} = (x, y, z)$ و $P'(\mathbf{r}')$ نقطه دیگری در $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ باشد. نشان دهید:

$$\nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad \text{و} \quad \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

که ∇ نسبت به (x, y, z) ، و ∇' نسبت به (x', y', z') دیفرانسیل‌گیری می‌شود.

۳۱-۱ نشان دهید $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{F} = 0$ فقط در صورتی صفر است که $\|\mathbf{F}\|$ مقدار ثابتی باشد.

۳۲-۲ اتحاد (۹-۱) در جدول ۲-۱ را اثبات کنید.

۳۳-۱ اتحاد (۱۳-۱) در جدول ۲-۱ را اثبات کنید.

۳۴-۱ نشان دهید اتحاد $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ در مختصات دکارتی برقرار است.

۳۵-۱ اتحادهای (۲۰-۱) و (۲۱-۱) در جدول ۲-۱ را اثبات کنید.

۳۶-۱ با استفاده از شگردهایی شبیه آنچه که در حل تمرین ۱-۵-۸ به کار رفته است، اتحادهای (۲۵-۱)

و (۲۶-۱) در جدول ۲-۱ را اثبات کنید.

فضاهای برداری متناهی-بعد

۱: بردارها و عملگرها

آشنایی با فضاهای برداری دو و سه بعدی امکان تعمیم به هر تعدادی از ابعاد را میسر می‌کند. بهتر است این ایده‌ها را به طریق تجربیدی معرفی کنیم زیرا چنین تجربیدی توانا، ظریف، کلی‌اند و در عین حال مطالعه آنها آسان است. به جای فضاهای اقلیدسی N بعدی، که مستقیم‌ترین تعمیمهای ایده‌هایی است که تا اینجا مطرح کرده‌ایم، یک مرحله در تجرید جلوتر می‌رویم و فضاهای برداری N بعدی کلی را از نظر خواهیم گذرانید. بحث این فصل تعادلی بین "تشریفات" و "سهولت" برقرار خواهد کرد. با وجودی که توجه خود را روی فضاهای برداری متناهی بعد متمرکز خواهیم کرد، مفاهیم، ایده‌ها و مثالهایی که معرفی می‌کنیم می‌توانند به حالت‌های نامتناهی بعد نیز تسری یابند.

۲-۱ فضاهای برداری

بحث خود را با تعریف یک فضای برداری مجرد شروع می‌کنیم.

تعریف ۲-۱-۱: یک فضای برداری \mathcal{V} روی C ، بنابر تعریف، عبارت است از مجموعه‌ای از اشیاء که آنها را با $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ و غیره نشان می‌دهیم و بردار می‌نامیم، که از خواص^۱ زیر برخوردارند:

۱. نماد $\{a\}$ ، و کت، $\{a\}$ ، برای بردارها، که توسط دیراک ابداع شد، وقتی با فضاهای برداری مختلط سروکار داشته باشیم، بسیار مفید است. لیکن برای بحث نرم و متریکها تا حدی ناهنجار است و لذا در این بحثها به‌کار برده نمی‌شود.

(الف) با هر زوج بردار $|a\rangle$ و $|b\rangle$ ، در \mathcal{V} ، یک بردار $|a\rangle + |b\rangle$ ، که آن نیز در \mathcal{V} قرار دارد، متناظر است، که جمع $|a\rangle$ و $|b\rangle$ نامیده می‌شود. به طوری که:

$$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle \quad (۱)$$

$$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle \quad (۲)$$

(۳) یک بردار منحصر به فرد $|0\rangle \in \mathcal{V}$ وجود دارد، که بردار صفر نامیده می‌شود، به طوری که به ازای هر بردار $|a\rangle$ داشته باشیم:

$$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$$

(۴) با هر بردار $|a\rangle \in \mathcal{V}$ یک بردار منحصر به فرد $-|a\rangle$ متناظر است، به طوری که:

$$|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$$

(ب) به هر عدد مختلط α ، که اسکالر نامیده می‌شود، و هر بردار $|a\rangle$ ، یک بردار $\alpha|a\rangle$ در

\mathcal{V} نسبت می‌دهیم، به طوری که^۱

$$\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle \quad (۱)$$

$$۱(|a\rangle) = |a\rangle \quad (۲)$$

(ج) حاصلضریبهایی که شامل بردار و اسکالر باشند، توزیع پذیرند.

(۱) ضرب در اعداد مختلط (اسکالرها) نسبت به جمع برداری توزیع پذیر است:

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$$

(۲) ضرب در بردارها نسبت به جمع اسکالر توزیع پذیر است:

$$(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$$

مثال ۱-۲-۱: مثالهای زیر از فضاهای برداری را در نظر بگیرید:

۱. می‌توان تجرید را عمق بیشتری بخشید و به جای اعداد مختلط، از یک میدان دلخواه استفاده کرد. میدان تجریدی از اعداد حقیقی و مختلط است. برای مقصود ما در این کتاب، نمایش دادن اعداد حقیقی با \mathbb{R} ، و میدان اعداد مختلط توسط \mathbb{C} کافی است. در بخش ۱-۶ یک بحث مستقل دربارهٔ اعداد مختلط آمده است. علاوه بر \mathbb{R} و \mathbb{C} ، میدانهای دیگری نیز یافت می‌شود، ولی در این کتاب به آنها نخواهیم پرداخت.

(الف) اگر، به جای اعداد مختلط، اعداد حقیقی به عنوان میدان اسکالرها به کار رود، در این صورت مجموعه تمام اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، یک فضای برداری تشکیل می دهند. در این مورد اشیای $|a\rangle$ ، $|b\rangle$ ، و مانند آنها، همان α و β و غیره به شمار می آیند. به سادگی می توان تمام خواص فضاهای برداری را برای این حالت اثبات کرد.

(ب) فرض کنید $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ و مجموعه اسکالرها \mathbb{R} باشد. در این صورت \mathbb{C} یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است.

(ج) فرض کنید $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ ، و مجموعه اسکالرها \mathbb{C} باشد. در این صورت \mathbb{C} یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط است.

(د) فرض کنید $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ ، و میدان اسکالرها \mathbb{C} باشد. این، یک فضای برداری نیست، زیرا خاصیت (ب) از تعریف ۱-۲ برقرار نیست. یک عدد مختلط ضرب در یک عدد حقیقی، یک عدد حقیقی نیست و لذا، به \mathcal{V} تعلق ندارد.

(ه) مجموعه پیکانها در صفحه، تحت جمع معمولی بردارها، یک فضای برداری روی \mathbb{R} تشکیل می دهند.

(و) مجموعه پیکانها در فضا نیز، تحت جمع معمولی بردارها، یک فضای برداری روی \mathbb{R} تشکیل می دهند.

(ز) فرض کنید $\mathcal{P}^{\mathbb{C}}$ مجموعه تمام چندجمله ایها با ضرایب مختلط بر حسب متغیر t باشد. در این صورت $\mathcal{P}^{\mathbb{C}}$ ، تحت جمع معمولی چندجمله ایها و تحت ضرب یک چندجمله ای در یک عدد مختلط، فضایی برداری است. در این حالت، بردار صفر، همان چندجمله ای صفر است.

(ح) فرض کنید \mathbb{C}^n ، که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ ، مجموعه کلیه n -تاهای مختلط باشد. اگر $|a\rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ و $|b\rangle = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ عناصر \mathbb{C}^n باشند و α یک عدد مختلط باشد، در این صورت می توانیم تعریف کنیم:

$$|a\rangle + |b\rangle = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha|a\rangle = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_n)$$

$$|0\rangle = (0, 0, \dots, 0)$$

$$-|a\rangle = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$$

به آسانی می توان ثابت کرد که \mathbb{C}^n یک فضای برداری روی میدان مختلط است. این فضا، فضای مختصات n -بعدی مختلط نامیده می شود.

(ط) فرض کنید $\mathcal{M}^{m \times n}$ مجموعه تمام ماتریسهای $m \times n$ با عناصر مختلط باشد. در این صورت، تحت جمع و ضرب معمولی ماتریسها در اسکالرها، $\mathcal{M}^{m \times n}$ یک فضای برداری می شود. در این صورت بردار صفر همان ماتریس $m \times n$ است که تمام عناصر آن صفرند.

(ی) به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، فرض کنید $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ مجموعه تمام چندجمله‌ایها با درجه کوچکتر از یا مساوی $n-1$ و با ضرایب مختلط باشد. در اینجا نیز به آسانی می توان نشان داد که $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ تحت جمع معمولی چندجمله‌ایها و ضرب آنها در اسکالرها، مختلط یک فضای برداری است. به خصوص حاصل جمع دو چندجمله‌ای با درجه کوچکتر از یا مساوی $n-1$ نیز یک چندجمله‌ای با درجه کوچکتر از یا مساوی $n-1$ است، و ضرب کردن یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط در یک عدد مختلط، یک چندجمله‌ای دیگر از همان نوع را می دهد. در اینجا چندجمله‌ای صفر، بردار صفر است.

(ک) مجموعه $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ از چندجمله‌ایهای با درجه کوچکتر از یا مساوی $n-1$ و با ضرایب حقیقی روی اعداد حقیقی یک فضای برداری است، اما روی اعداد مختلط یک فضای برداری نیست، زیرا ضرب یک چندجمله‌ای، با ضرایب حقیقی، در یک عدد مختلط، حقیقی بودن ضرایب را منتفی می کند و در نتیجه یک چندجمله‌ای می دهد که متعلق به $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ نیست.

(ل) فرض کنید \mathbb{R}^n ، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، مجموعه تمام n تاهای حقیقی باشد. [این مورد، حالت خاص مورد (ح) است که در آن به جای میدان اعداد مختلط، از میدان اعداد حقیقی استفاده شده است.] در این صورت \mathbb{R}^n یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است. این فضا، فضای مختصات n بعدی حقیقی یا n فضای دکارتی نامیده می شود.

(م) فرض کنید $C(a, b)$ معرف مجموعه تمام توابع یک متغیره مختلط مقدار باشد، که در بازه حقیقی $[a, b]$ بیوسسته اند. به آسانی می توان نشان داد که $C(a, b)$ یک فضای برداری روی میدان مختلط است.

(ن) فرض کنید $C^{\infty}(a, b)$ نمایانگر مجموعه تمام توابع یک متغیره حقیقی-مقدار باشد که تا تمام مرتبه‌ها مشتق داشته باشد. در اینجا $C^{\infty}(a, b)$ یک فضای برداری روی میدان حقیقی تشکیل می دهد.

از مثال ۱-۱-۲ روشن می شود که وجود یک فضای برداری به همان اندازه که به ماهیت بردارها بستگی دارد به ماهیت اسکالرها نیز وابسته است.

تعریف ۱-۲-۲: بردارهای $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$ مستقل خطی اند اگر $\sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle = 0$ در آن $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ، دلالت بر $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ داشته باشد.

قضیه ۳-۱-۲: اگر $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^n \equiv \{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ عناصر مستقل خطی \mathcal{V} باشند، در این صورت به ازای هر $|x\rangle \in \mathcal{V}$ ، معادله

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle \quad (1-2)$$

حداکثر یک جواب برای مجموعه $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ دارد.

اثبات قضیه ۳-۱-۲ به عنوان تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می شود. گفته می شود بردار $|x\rangle$ یک ترکیب خطی از $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$ است.

تعریف ۴-۱-۲: یک پایه در فضای برداری \mathcal{V} یک مجموعه B از بردارهای مستقل خطی است، به طوری که هر بردار در \mathcal{V} یک ترکیب خطی از عناصر B باشد. فضایی برداری متناهی-بعدها اگر دارای یک پایه محدود باشد؛ در غیر این صورت نامتناهی-بعدها است.

یک پایه با شمارش واقعی نظیر $B = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ یا با شمارشی نمادین نظیر $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^n$ مشخص می شود.

قضیه ۵-۱-۲: تمام پایه های یک فضای برداری متناهی-بعدها معین دارای تعداد مساوی بردار مستقل اند. این عدد، بعد آن فضای برداری نامیده می شود. فضای برداری با N بعد را گاهی با \mathcal{V}_N نشان می دهند.

اثبات. فرض کنید $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^n$ و $B' = \{|a'_j\rangle\}_{j=1}^m$ دو پایه فضای برداری \mathcal{V} باشند. برای وضوح موضوع فرض کنید $m > n$. چون B پایه است، می توانیم تمام بردارهای B' را برحسب بردارهای B بسط دهیم:

$$|a'_1\rangle = \alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + \dots + \alpha_n |a_n\rangle$$

$$|a'_2\rangle = \beta_1 |a_1\rangle + \beta_2 |a_2\rangle + \dots + \beta_n |a_n\rangle$$

⋮

$$|a'_m\rangle = \mu_1 |a_1\rangle + \mu_2 |a_2\rangle + \dots + \mu_n |a_n\rangle$$

چون $m > n$ ، می توانیم $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$ را از n معادله اول حذف کنیم. این کار انجام شدنی

است زیرا معادلات فوق، به خاطر استقلال خطی طرف چپ، مستقل خطی اند. بنابراین، می‌توانیم بردارهای $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle$ را برحسب تنها n بردار اول $|a'_1\rangle, |a'_2\rangle, \dots, |a'_n\rangle$ بیان کنیم. با جایگزین کردن بردارهای قبلی برحسب بردارهای اخیر، و قراردادن در $m - n$ معادله باقیمانده، به $|a'_{n+1}\rangle, |a'_{n+2}\rangle, \dots, |a'_m\rangle$ برحسب $|a'_1\rangle, |a'_2\rangle, \dots, |a'_n\rangle$ می‌رسیم. این عمل با فرض اولیه که بنابراین $|a'_1\rangle, |a'_2\rangle, \dots, |a'_m\rangle$ مستقل خطی اند، در تناقض است. از این رو $n \neq m$. به همین ترتیب، $m \neq n$. از این رو $m = n$ و دو پایه دارای تعداد یکسانی بردار هستند. ■

اگر $|a\rangle$ یک بردار در فضای برداری N بعدی \mathcal{V} و $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه در این فضا باشد، در این صورت، بنا بر تعریف پایه، مجموعه اسکالری مانند $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ چنان وجود دارد که $|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle$. مجموعه $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ ، مؤلفه‌های $|a\rangle$ نسبت به پایه B نامیده می‌شوند.

تعریف ۶-۱-۲: یک زیرفضا، \mathcal{M} ، از یک فضای برداری \mathcal{V} ، یک زیرمجموعه \mathcal{V} است، با این خاصیت که اگر $|a\rangle \in \mathcal{M}$ و $|b\rangle \in \mathcal{M}$ ، در این صورت $|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ نیز به ازای هر α و β متعلق به \mathcal{C} ، به \mathcal{M} تعلق داشته باشد.

بدیهی است که هر زیرفضا به نوبه خود فضای برداری نیز هست.

مثال ۶-۱-۲: آنچه در زیر می‌آید، عبارت‌اند از زیرفضاهای بعضی از فضاهای برداری مثال ۶-۱-۲. (ب) زیرفضای $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ روی اسکالرهایی حقیقی، مطابق مثال ۶-۱-۲ الف، فضای اعداد حقیقی است.

(ج) در اینجا \mathbb{R} زیرفضای $\mathcal{C}_c = \mathcal{V}$ روی اعداد مختلط نیست، زیرا همان طوری که در مثال ۶-۱-۲ د تشریح شد، \mathbb{R} نمی‌تواند یک فضای برداری روی اعداد مختلط باشد.

(ه) زیرفضایی از پیکانها در صفحه روی \mathbb{R} ، عبارت است از مجموعه تمام بردارهایی که در امتداد خط معینی قرار دارند که از مبدأ می‌گذرد.

(و) زیرفضایی از پیکانها در فضای روی \mathbb{R} عبارت است از مجموعه تمام بردارهایی که در امتداد یک خط معین گذرا از مبدأ، قرار دارند. یک زیرفضای دیگر عبارت است از مجموعه تمام پیکانهای واقع در صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد.

(ز) یکی از زیرفضاهای \mathcal{C}^n عبارت است از \mathcal{C}^n .

(ح) یکی از زیرفضاهای \mathcal{C}^n عبارت است از \mathcal{C}^{n-1} . به طور کلی، به ازای $m < n$ ، \mathcal{C}^m یک زیرفضای \mathcal{C}^n است.

- (ط) به ازای $m \leq r$ و $s \leq n$ ، یک زیرفضای $\mathcal{M}^{r \times s}$ یک زیرفضای $\mathcal{M}^{m \times n}$ است. یعنی، تمام ماتریسهای 2×2 زیرفضایی از ماتریسهای 3×3 تشکیل می‌دهند، و الی آخر.
- (ی) به ازای $m < n$ ، \mathcal{P}_m^c یک زیرفضای \mathcal{P}_n^c است.
- (ک) به ازای $m < n$ ، \mathcal{P}_m^r یک زیرفضای \mathcal{P}_n^r است. توجه کنید که \mathcal{P}_m^r و \mathcal{P}_n^r هر دو، تنها روی اعداد حقیقی فضای برداری هستند.
- (ل) به ازای $m < n$ ، \mathbb{R}^m یک زیرفضای \mathbb{R}^n است. از این رو، \mathbb{R}^2 ، صفحه، یکی از زیرفضاهای \mathbb{R}^3 ، فضا، است. همچنین، $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ یک زیرفضای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^2 است. ●

مثال ۲-۱-۳: آنچه در زیر می‌آید اساس فضاهای برداری متناظری را تشکیل می‌دهند که در مثال ۲-۱-۱ ارائه شد.

(الف) عدد ۱ پایه‌ای برای این فضاست، که بنابراین یک بعدی است.

(ب) در اینجا اعداد ۱ و $i = \sqrt{-1}$ بردارهای پایه‌اند. بنابراین، فضا دوبعدی است.

(ج) در اینجا نیز ۱ یکی از پایه‌ها و فضا یک بعدی است. توجه کنید که گرچه بردارها همان بردارهای حالت ب هستند، ولی تغییر ماهیت اسکالرها تعداد ابعاد فضا را تغییر می‌دهد.

(و) مجموعه $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ (یا $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$) یک پایه را تشکیل می‌دهند. فضا سه بعدی است.

(ز) می‌توان با تک جمله‌ایهای $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ یک پایه تشکیل داد. بدیهی است که این فضا بینهایت بعدی است.

(ح) یک پایه از طریق $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \dots, \hat{e}_n$ داده می‌شود، که در آن:

$$\hat{e}_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$$

↑

مکان زام

که جز عنصر زام سایر عناصر صفرند. واضح است که این فضا n بعدی است.

(ط) یک پایه توسط $\hat{e}_{11}, \hat{e}_{12}, \dots, \hat{e}_{1n}, \dots, \hat{e}_{21}, \dots, \hat{e}_{2n}, \dots, \hat{e}_{m1}, \dots, \hat{e}_{mn}$ داده می‌شود، که در آن همه عناصر

ماتریس

$$\hat{e}_{ij} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix} \leftarrow \text{سطر } i\text{ام}$$

↑
ستون j ام

صفرند، جز عنصر سطر i ام و ستون j ام که یک هستند.

(ی) مجموعه متشکل از تک جمله‌ایهای $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ یک پایه تشکیل می‌دهد. بنابراین، این فضا n بعدی است.

(ل) پایه، همان پایه‌ای است که در (ح) مطرح شد.

(ن) اگر فرض کنیم $a = 0$ ، در این صورت مجموعه تک جمله‌ایهای $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ یک پایه تشکیل می‌دهند، زیرا بنا بر قضیه تایلور، هر تابع متعلق به $C^\infty(0, b)$ را می‌توان به صورت یک سری نامحدود بسط داد. از این رو، این فضا بینهایت بعدی است.

قضیه ۱-۲-۷: اگر S یک مجموعه بردار در فضای برداری \mathcal{V} باشد، در این صورت مجموعه \mathcal{M} از تمام ترکیبهای خطی بردارها در S ، یک زیرفضای \mathcal{V} است. می‌گوییم \mathcal{M} پدید آمده از S ، یا S ، \mathcal{M} را پدید می‌آورد. یا \mathcal{M} توسط S پدید آمده است.

اثبات قضیه ۱-۲-۷ آسان است و به‌عنوان یک مسئله در آخر فصل به‌عهده دانشجویان گذاشته شده است.

یک فضای برداری \mathcal{V} با پایه $\{a_i\}_{i=1}^n$ مفروض است. می‌توانیم با انتخاب m بردار از B ($m < n$) و تشکیل یک پایه از آنها، یک زیرفضای \mathcal{V} تشکیل دهیم. فضای پدیدآمده توسط این بردارها یک زیرفضای m بعدی فضای اولیه است. به‌عنوان نمونه، در مثال ۱-۲-۱ فضای برداری در قسمت (الف) یک زیرفضای یک‌بعدی فضای قسمت (ل) است؛ فضای مورد (ه) یک زیرفضای دوبعدی از فضای حالت‌های (و) و (ل) است. به همین ترتیب، فضای قسمت (ی) یک زیرفضای n بعدی مورد (ح) است و الی آخر.

۱-۱-۲ فضاهای دوگان

در فصل یک نگاهشتهای (دوخطی) از یک فضای برداری به مجموعه اسکالرها منجر به تانسور متریک و حاصلضربهای اسکالر (داخلی) شد. می‌توانیم آن مفاهیم را به N بعد تعمیم دهیم؛ لیکن بهتر (و روش‌مندتر) است که نگاهشتهای (یک) خطی از یک فضای برداری به اعداد مختلط (میدان اسکالرها) را بررسی کنیم. بنابراین، با ایده یک تابع خطی شروع می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۲: تابع خطی روی فضای بردار \mathcal{V} یک تابع اسکالر-مقدار، \mathbb{F} است به طوری که به‌ازای تمام مقادیر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$:

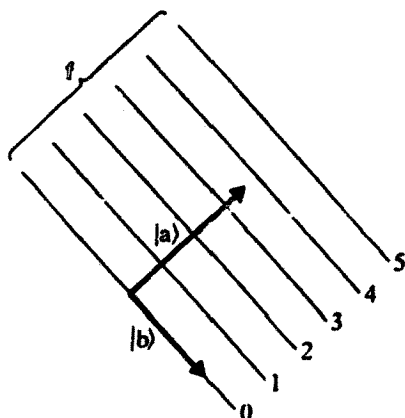
$$\mathbb{F}(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\mathbb{F}(|a\rangle) + \beta\mathbb{F}(|b\rangle) \quad (۲-۲)$$

اگر مجموع دو تابع خطی \mathbb{F} و \mathbb{G} به صورت: $(\mathbb{F} + \mathbb{G})(|a\rangle) \equiv \mathbb{F}(|a\rangle) + \mathbb{G}(|a\rangle)$ و حاصلضرب یک تابع خطی و یک اسکالر به صورت $(\alpha\mathbb{F})(|a\rangle) = \alpha(\mathbb{F}(|a\rangle))$ تعریف شود، در این صورت می‌توان مستقیماً نشان داد که مجموعه تمام تابعکهای خطی، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. بردار صفر این فضا یک تابع خطی است که توسط رابطه $\mathbb{F}(|a\rangle) = 0$ که به‌ازای تمام $|a\rangle$ های متعلق به \mathcal{V} صادق است، تعریف می‌شود. فضای برداری کلیه تابعکهای خطی، فضای دوگان \mathcal{V}^* نامیده و به صورت \mathcal{V}^* نشان داده می‌شود.

مثال ۱-۱-۲: یکی از راههای مناسب برای تجسم هندسی تابعکهای خطی، این است که آنها را به صورت سطوح موازی در فضا در نظر بگیریم. چنین تجسمی مشابه نمایش بردارها توسط پیکانهاست. وقتی یک تابع خطی روی یک بردار عمل می‌کند، از مجموعه متناظر سطوح موازی که آن تابع خطی را نمایش می‌دهند، پیکانی که معرف آن بردار است، رد می‌شود (شکل ۱-۱-۲).

چندین تابع خطی مهم یافت می‌شود. یک فضای برداری N بعدی با پایه $\mathbf{B} = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ در نظر بگیرید. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ یک مجموعه دلخواه معین از N اسکالر باشد، تابع خطی را می‌توان به کمک $\mathbb{F}(\{|a_i\rangle\}) = \alpha_i$ تعریف کرد. وقتی \mathbb{F} روی

۱. برای دستیابی به بحثی جامع در این خصوص، بنگرید به:



شکل ۱-۲ یک تابع خطی، F ، و دو بردار، $|a\rangle$ و $|b\rangle$ ، به طوری که $F(|a\rangle) = ۳۵$ و $F(|b\rangle) = ۰$ بردار $|a\rangle$ از ۳۵ رد می‌شود؛ $|b\rangle$ موازی سطوح است، و لذا از هیچکدام رد نمی‌شود.

هر بردار دلخواه $|b\rangle = \sum_{i=1}^N \beta_i |a_i\rangle$ در \mathcal{V} عمل کند، نتیجه عبارت خواهد بود از:

$$F(|b\rangle) = F\left(\sum_{i=1}^N \beta_i |a_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^N \beta_i F(|a_i\rangle) = \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i \quad (۳-۲)$$

بنابراین عبارت، $|b\rangle$ را می‌توان به صورت برداری ستونی با عناصر $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ و F را به صورت برداری سطری با عناصر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ نمایش داد. در این صورت $F(|b\rangle)$ صرفاً ضرب ماتریسی بردار سطری (در سمت چپ) و بردار ستونی (سمت راست) است. توجه کنید که F را مجموعه $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ به صورتی منحصر به فرد تعیین می‌کند. به عبارت دیگر، متناظر با هر مجموعه اسکالرهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ یک تابع خطی منحصر به فرد وجود دارد. به یک مجموعه بخصوص تابعهای F_1, F_2, \dots, F_N هدایت می‌شود که، به ترتیب، با مجموعه اسکالرهای $\{1, 0, 0, \dots, 0\}, \{0, 1, 0, \dots, 0\}, \dots, \{0, 0, 0, \dots, 1\}$ متناظرند. یعنی

$$F_1(|a_1\rangle) = 1 \quad \text{و} \quad F_1(|a_j\rangle) = 0 \quad j \neq 1$$

$$F_2(|a_2\rangle) = 1 \quad \text{و} \quad F_2(|a_j\rangle) = 0 \quad j \neq 2$$

⋮

$$F_N(|a_N\rangle) = 1 \quad \text{و} \quad F_N(|a_j\rangle) = 0 \quad j \neq N$$

یا اینکه:

$$\mathbb{F}_j(|a_i\rangle) = \delta_{ij} \quad (۴-۲)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر و، بنابراین تعریف، عبارت است از:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۵-۲)$$

تابعهای (۴-۲) در فضای دوگان \mathcal{V}^* یک پایه تشکیل می‌دهند. برای اثبات، فرض کنیم یک $\mathbb{G} \in \mathcal{V}^*$ داریم که به طور منحصر به فردی با عملش روی بردارهای پایه $\mathbb{B} = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ مشخص می‌شود. فرض کنید: $\mathbb{G}(|a_i\rangle) = \gamma_i \in \mathbb{C}$. در این صورت ادعا می‌کنیم که $\mathbb{G} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbb{F}_i$. در واقع، یک بردار دلخواه $|a\rangle$ در \mathcal{V} در نظر بگیرید که نسبت به مؤلفه‌های آن عبارت باشند از $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$. در این صورت

$$\mathbb{G}(|a\rangle) = \mathbb{G}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{G}(|a_i\rangle) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_i \quad (۶-۲)$$

از سوی دیگر:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbb{F}_i\right)(|a\rangle) &= \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbb{F}_i\right)\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j |a_j\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbb{F}_i(|a_j\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \alpha_i \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

چون (۶-۲) و (۷-۲) به‌ازای همه مقادیر دلخواه $|a\rangle$ برابرند، نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbb{G} = \sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbb{F}_i$$

به این ترتیب، به قضیه زیر می‌رسیم:

قضیه ۹-۱-۲: اگر \mathcal{V} یک فضای برداری N بعدی با پایه $B = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ باشد، در این صورت یک پایه منحصر به فرد $B^* = \{F_1, \dots, F_N\}$ متناظر با آن در \mathcal{V}^* با خاصیت $F_i(|a_j\rangle) = \delta_{ij}$ وجود دارد.

با توجه به این قضیه، فضای دوگان یک فضای برداری N بعدی نیز، N بعدی است. پایه B^* پایه دوگان B نامیده می شود. یکی از نتایج قضیه ۹-۱-۲ به این قرار است که با هر بردار در \mathcal{V} یک تابع خطی منحصر به فرد در \mathcal{V}^* متناظر است. این مطلب را می توان با توجه به این واقعیت مشاهده کرد که هر بردار $|a\rangle$ به طور منحصر به فردی با مؤلفه های $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ خود در یک پایه B مشخص می شود. تابع خطی منحصر به فرد F_a متناظر با $|a\rangle$ عبارت است از $F_a = \sum_{i=1}^N \alpha_i F_i$ ، که در آن $F_i \in B^*$.

۲-۲ حاصلضرب داخلی (اسکالر)

در فصل اول دیدیم فضایی برداری که با تعریف ۱-۱-۲ مشخص می شود، چندان بدون ساختار است که نمی تواند از نظر فیزیکی جالب باشد. علاج این فقدان ساختار را ایده های متریک و ضرب اسکالر تشکیل می دهد. از این رو، اکنون متریک (مختلط) را در نظر می گیریم. ابتدا از تعریف فصل اول بهره می گیریم و متریک g را به عنوان یک تابع دوخطی، با خواص زیر، تعریف می کنیم:

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = g(|b\rangle, |a\rangle) \quad (۲الف)$$

$$g(|a\rangle, \beta|b\rangle + \gamma|c\rangle) = \beta g(|a\rangle, |b\rangle) + \gamma g(|a\rangle, |c\rangle) \quad (۲ب)$$

$$g(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, |c\rangle) = \alpha g(|a\rangle, |c\rangle) + \beta g(|b\rangle, |c\rangle) \quad (۲ج)$$

$$g(|a\rangle, |a\rangle) \geq 0 \quad \text{و} \quad g(|a\rangle, |a\rangle) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad |a\rangle = |0\rangle \quad (۲د)$$

اما، بلافاصله مشکل پیش می آید. با استفاده از (۲ب) و (۲ج)، می رسم به:

$$g(i|a\rangle, i|a\rangle) = i^2 g(|a\rangle, |a\rangle) = -g(|a\rangle, |a\rangle)$$

که به ازای همه مقادیر $|a\rangle$ صادق است. اما، این حکم با (۲د) که ایجاب می کند $g(|a\rangle, |a\rangle)$ برای تمام بردارها (از جمله $i|a\rangle$) نامنفی باشد، ناسازگار است. منشأ این مسئله در (۲الف) نهفته است. باید آن را طوری تغییر دهیم که $g(|a\rangle, |a\rangle)$ (خودبه خود) حقیقی باشد. این خواسته،

اگر بخواهد (۲-۸د) معنی داشته باشد، یک شرط لازم برای $(g(|a\rangle, |a\rangle))$ است. به این ترتیب، (۲-۸الف) را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = (g(|b\rangle, |a\rangle))^* \quad (۲-۸الف')$$

که حقیقی بودن $(g(|a\rangle, |a\rangle))$ بلافاصله از آن نتیجه می‌شود. تغییر (۲-۸الف) خودبه‌خود یک تغییر در (۲-۸ج) را ایجاب می‌کند. این را می‌توان از مزدوج کردن (۲-۸ب) و استفاده از (۲-۸الف') ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned} (g(|a\rangle, \beta|b\rangle + \gamma|c\rangle))^* &= g(\beta|b\rangle + \gamma|c\rangle, |a\rangle) \\ &= \beta^*(g(|a\rangle, |b\rangle))^* + \gamma^*(g(|a\rangle, |c\rangle))^* \quad (۲-۸ج') \\ &= \beta^*g(|b\rangle, |a\rangle) + \gamma^*g(|c\rangle, |a\rangle) \end{aligned}$$

معادله (۲-۸ج) حاکی از آن است که، بنابه تعریف، اسکالره‌ای طرف راست (۲-۸ج) باید مزدوج مختلط شوند.

موضوع وجود یک متریک روی یک فضا، یک مسئله عمیق در آنالیز پیشرفته است، و اگر متریک وجود داشته باشد، راه‌های بسیاری برای وارد کردن آن در یک فضای برداری وجود دارد. اما، می‌توان نشان داد که برای یک فضای برداری متناهی-بعد، لااقل یک متریک وجود دارد، و اگر چند متریک وجود داشته باشد، در این صورت همه آنها هم‌ارزند.^۱ بنابراین، برای تمام مقاصد عملی می‌توانیم از متریک در یک فضای برداری متناهی-بعد صحبت کنیم. بنابراین، نظیر موارد دو و سه‌بعدی، می‌توانیم حرف g را حذف و از نمادگذاری‌ای استفاده کنیم که تنها شامل بردارها باشد. چندین نمادگذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد، ولی آنچه در این کتاب به‌کار گرفته می‌شود نمادگذاری برا و کت دیراک است که در آن $(g(|a\rangle, |b\rangle))$ به صورت $\langle a|b\rangle$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از این نمادگذاری، به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۲-۲-۱: حاصلضرب داخلی (اسکالار) هر دو بردار $|a\rangle$ و $|b\rangle$ ، در فضای برداری \mathcal{V} یک

عدد مختلط $\langle a|b \rangle \in \mathbb{C}$ است، به طوری که

$$\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^* \quad (۹-۲الف)$$

$$\langle a|(\beta|b \rangle + \gamma|c \rangle) = \beta \langle a|b \rangle + \gamma \langle a|c \rangle \quad (۹-۲ب)$$

$$\langle a|a \rangle \geq 0 \quad \text{و} \quad \langle a|a \rangle = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad |a \rangle = |0 \rangle \quad (۹-۲ج)$$

توجه کنید که رابطه هم‌ارز با (۸-۲ج) وجود ندارد، زیرا همان طوری که قبلاً تشریح شد، این رابطه با (۹-۲الف) ناسازگار بود. شکل سازگار، معادله (۸-۲ج)، از (۹-۲الف) و (۹-۲ب) نتیجه می‌شود. به علت وجود مزدوج مختلط در (۸-۲ج)، تابع g واقعاً دوخطی نیست؛ معمولاً آن را یک نگاشت یک‌وینیم خطی می‌نامند.

فضای برداری \mathcal{V} که در آن یک ضرب داخلی تعریف می‌شود، فضای حاصلضرب داخلی نامیده می‌شود، از بحث بالا نتیجه می‌شود که تمام فضاهای برداری با ابعاد محدود را می‌توان به فضاهای حاصلضرب داخلی تبدیل کرد.

می‌توان با مشخص کردن $|a \rangle$ به عنوان یک عنصر از فضای دوگان، ضرب داخلی را به تابع‌های خطی و فضاهای دوگان مرتبط کرد. یکی از راه‌های انجام این کار آن است که یک پایه $\{|a_1 \rangle, \dots, |a_N \rangle\}$ را در نظر بگیریم و $\alpha_1 = \langle a|a_1 \rangle, \dots, \alpha_N = \langle a|a_N \rangle$ را تعریف کنیم. همان طوری که قبلاً گفتیم، مجموعه اسکالرهای $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ یک تابع خطی منحصر به فرد \mathbb{F}_a را تعریف می‌کنند، به طوری که $\mathbb{F}_a(|a_i \rangle) = \alpha_i$. چون $\langle a|a_i \rangle$ نیز برابر α_i است، طبیعی است که بنویسیم $\mathbb{F}_a \equiv \langle a|$. بنابراین، بردار دوگان منحصر به فرد $|a \rangle$ را با $\langle a|$ مشخص می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$(|a \rangle)^\dagger \equiv \langle a| \quad (۱۰-۲)$$

که در آن نماد \dagger به معنی "دوگان" است.^۱

در باره دوگان یک ترکیب خطی از بردارها چه می‌توانیم بگوییم؟ فرض کنید $\langle c| = \alpha \langle a| + \beta \langle b|$ و ضرب داخلی $\langle c|$ با یک بردار دلخواه $|x \rangle$ را در نظر بگیرید. با استفاده از خاصیت (۹-۲ب)

۱. آنچه قبلاً گفتیم، با وجودی که فقط برای فضاهای برداری منتهای-بعد (یعنی، با ابعاد محدود) اثبات شد، در واقع برای فضاهای برداری نامتهای-بعد خاص که فضاهای هیلبرت نامیده می‌شوند، برقرار است. اثبات این مطلب، محتوای یک نتیجه مهم در آنالیز تابعک را تشکیل می‌دهد که لم رلیز نامیده می‌شود. ر.ک. Reed and Simon (1980, p. 43).

داریم

$$\langle x|c \rangle = \alpha \langle x|a \rangle + \beta \langle x|b \rangle$$

حال با بهرگیری از (۲-۹ الف) می‌نویسیم

$$\langle c|x \rangle = \langle x|c \rangle^* = \alpha^* \langle a|x \rangle + \beta^* \langle b|x \rangle$$

چون این رابطه بهازای تمام $|x\rangle$ ها صادق است، باید داشته باشیم

$$\langle c|c \rangle^\dagger \equiv \langle c| = \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b|$$

بنابراین، در یک "عمل" دوگانی، باید اسکالرها مزدوج مختلط شوند. بنابراین، به‌طور بسیار کلی داریم:

$$(\alpha \langle a| + \beta \langle b|)^\dagger = \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b| \quad (۱۱-۲)$$

مثال ۱۱-۲-۲: بهازای $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^n$ ، که در آن $|a\rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ و $|b\rangle = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ می‌توانیم تعریف کنیم:

$$\langle a|b \rangle = \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \dots + \alpha_n^* \beta_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \beta_i$$

اینکه آیا این حاصلضرب در تمام خواص لازم یک ضرب داخلی صدق می‌کند، به آسانی قابل بررسی است. به همین ترتیب، بهازای $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{R}^n$ ، این تعریف (بدون عمل مزدوج کردن) در تمام خواص یک ضرب داخلی صدق می‌کند. بنابراین، اگر $|a\rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ و $|b\rangle = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ، و α_i ها و β_i ها حقیقی باشند، در این صورت:

$$\langle a|b \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

یک ضرب اسکالر در \mathbb{R}^n تعریف می‌کند.

رایجتر است که بردار $|a\rangle$ را که در بالا تعریف شد، به صورت یک بردار ستونی نمایش دهیم

$$|a\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

در این صورت تعریف ضرب داخلی مختلط پیشنهاد می‌کند که دوگان $|a\rangle$ باید توسط یک بردار سطری یا عناصر مزدوج نمایش داده شود:

$$\langle a| = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \dots \quad \alpha_n^*)$$

در این صورت ضرب داخلی می‌تواند به صورت ضرب (ماتریسی) زیر نوشته شود:

$$\langle a|b\rangle = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \dots \quad \alpha_n^*) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

در حالت خاص، اگر $|b\rangle = |a\rangle$ ، آنگاه داریم: $\langle a|a\rangle = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$ ، که مسلماً نامنفی است.

مثال ۲-۲-۲: فرض کنید $x(t), y(t) \in \mathcal{S}^c$ که در آن فضای تمام چندجمله‌ایها نسبت به t است. تعریف می‌کنیم:

$$\langle x|y\rangle \equiv \int_a^b \rho(t) x^*(t) y(t) dt \quad (1)$$

که در آن a و b می‌تواند هر زوج اعدادی حقیقی باشند که بازای آنها انتگرال وجود دارد a و b می‌توانند بینهایت باشند) و $\rho(t)$ تابع بیوسه تک‌مقداری ناصفری است که در بازه $[a, b]$ همیشه مثبت است. در این صورت (۱) ضربی داخلی را تعریف می‌کند. می‌توانیم با اثبات معادلات

(۹-۲ الف) تا (۹-۲ ج)، این مطلب را نشان دهیم:

$$\begin{aligned} \langle y|x \rangle^* &= \left[\int_a^b \rho(t) y^*(t)x(t) dt \right]^* = \int_a^b \rho(t) [y^*(t)]^* [x(t)]^* dt \\ &= \int_a^b \rho(t) y(t)x^*(t) dt = \langle x|y \rangle \end{aligned} \quad (۹-۲ الف)$$

$$\begin{aligned} \langle x|(\beta|y\rangle + \gamma|u\rangle) &= \int_a^b \rho(t)x^*(t)[\beta y(t) + \gamma u(t)] dt \quad (۹-۲ ب) \\ &= \beta \int_a^b \rho(t)x^*(t)y(t) dt + \gamma \int_a^b \rho(t)x^*(t)u(t) dt \\ &= \beta \langle x|y\rangle + \gamma \langle x|u\rangle \end{aligned}$$

$$\langle x|x \rangle = \int_a^b \rho(t)x^*(t)x(t) dt = \int_a^b \rho(t)|x(t)|^2 dt \geq 0 \quad (۹-۲ ج)$$

زیرا هر دو کمیت $\rho(t)$ و $|x(t)|^2$ در بازه $[a, b]$ مثبت‌اند $|x(t)|^2$ می‌تواند صفر باشد). انتگرال آخری فقط وقتی صفر است که به‌ازای تمام مقادیر t داشته باشیم: $|x(t)|^2 = 0$. (بناباه فرض، $\rho(t)$ نمی‌تواند صفر باشد). اما، $|x(t)|^2 = 0$ فقط و فقط اگر $x(t) = 0$ ، یعنی $x(t)$ یک چندجمله‌ای صفر باشد.

بنابراین، (۱) تعریف ضربی داخلی است. توجه کنید که، بسته به اصطلاح تابع وزن، $\rho(t)$ می‌توان حاصلضربهای داخلی بسیاری را در \mathcal{P}^c تعریف کرد.

مثال ۲-۲-۳: فرض کنید $f(x), g(x) \in \mathbb{C}(a, b)$ و حاصلضرب داخلی آنها، بنا به تعریف، عبارت باشد از:

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x) dx$$

به آسانی می‌توان نشان داد که $\langle f|g \rangle$ در تمام شرایط ضرب داخلی صدق می‌کند. توجه کنید که تناظر $g(x) \leftrightarrow |g\rangle$ تناظر “دوگان” $f^*(x) \leftrightarrow |f\rangle$ را ایجاد می‌کند.

۱-۲-۲ تعامد

در فضاهای دو و سه بعدی مناسب دیدیم که بردارها را برحسب بردارهای متعامد با طول واحد بیان کنیم. تعمیم این مفهوم به فضاهای برداری N بعدی از اهمیت برخوردار است. گوییم بردارهای $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}_N$ متعامدند اگر

$$\langle a|b\rangle = 0 \quad (۱۲-۲الف)$$

بردار نرمال (یا بردار بهنجار) $|e\rangle$ ، برداری است که برای آن:

$$\langle e|e\rangle = 1 \quad (۱۲-۲ب)$$

تعریف ۱۲-۲-۲: پایه $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ در فضای برداری N بعدی \mathcal{V}_N پایه راست‌هنگار است، هرگاه

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (۱۳-۲)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونیگر است.

این تعریف حاکی از آن است که تمام بردارهای پایه بهنجار شده‌اند، و اینکه هر دو بردار متقابلاً بر یکدیگر عمودند.

مثال ۱۲-۲-۲: فرض کنید:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

یعنی، تنها عنصر ناصفر بردار ستونی $|e_i\rangle$ برابر یک است و در سطر i ام قرار دارد. این بردارهای پایه استاندارد \mathbb{R}^n (یا \mathbb{C}^n) راست‌هنگارند اگر ضرب داخلی مانند مثال ۱۲-۲ تعریف شده باشد.

به همین ترتیب، فرض کنید:

$$|e_k\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

و ضرب داخلی را مانند مثال ۲-۲-۳ با بازه $[0, 2\pi]$ تعریف کنیم. در این صورت

$$\langle e_l | e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ilx} e^{ikx} dx = 1$$

و برای $l \neq k$

$$\langle e_l | e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ilx} e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = 0$$

بنابراین، $\langle e_l | e_k \rangle = \delta_{lk}$.

فرایند گرام-اشمیت و پایه‌ها. همواره می‌توان هر پایه در \mathcal{V} را به یک پایه راست‌هنجار تبدیل کرد. فرایندی که توسط آن این عمل انجام می‌شود، راست‌هنجارسازی گرام-اشمیت نامیده می‌شود، این مطلب تعمیم موضوعی است که در فصل اول مورد بحث قرار گرفت. یک پایه $B = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ترکیبهای خطی از $|a_i\rangle$ ها بسازیم، به طوری که بردارهای حاصل راست‌هنجار باشند. ابتدا قرار می‌دهیم $\langle e_1 | = |a_1\rangle / \sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle}$. بدیهی است که $\langle e_1 | e_1 \rangle = 1$ ؛ در واقع، چون $\langle a_1 | a_1 \rangle$ حقیقی است، دوگان $|e_1\rangle$ عبارت است از

$$\langle e_1 | = \frac{1}{\sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle}} \langle a_1 |$$

$$\langle e_1 | e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle}} \langle a_1 | \left(\frac{1}{\sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle}} |a_1\rangle \right) = \frac{1}{\langle a_1 | a_1 \rangle} \langle a_1 | a_1 \rangle = 1$$

برای بردار دوم، می‌توانیم بنویسیم

$$\langle e_2 | = |a_2\rangle - \langle e_1 | a_2 \rangle |e_1\rangle$$

که می‌توان آن را به صورت متقارن‌تر زیر نوشت

$$|e'_r\rangle = |a_r\rangle - |e_1\rangle\langle e_1|a_r\rangle$$

واضح است که این بردار بر $|e_1\rangle$ عمود است؛ در واقع

$$\langle e_1|e'_r\rangle = \langle e_1|a_r\rangle - \langle e_1|e_1\rangle\langle e_1|a_r\rangle = \langle e_1|a_r\rangle - \langle e_1|a_r\rangle = 0$$

برای بهنجار کردن $|e'_r\rangle$ ، آن را بر $\sqrt{\langle e'_r|e'_r\rangle}$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$|e_r\rangle = \frac{|e'_r\rangle}{\sqrt{\langle e'_r|e'_r\rangle}}$$

بردار بهنجار شده‌ای عمود بر $|e_1\rangle$ خواهد بود. برای بردار سوم، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} |e'_r\rangle &= |a_r\rangle - |e_1\rangle\langle e_1|a_r\rangle - |e_2\rangle\langle e_2|a_r\rangle \\ &= |a_r\rangle - \sum_{i=1}^r |e_i\rangle\langle e_i|a_r\rangle \end{aligned}$$

توجه کنید که $|e'_r\rangle$ هم بر $|e_1\rangle$ و هم بر $|e_2\rangle$ عمود است:

$$\begin{aligned} \langle e_1|e'_r\rangle &= \langle e_1|a_r\rangle - \langle e_1|e_1\rangle\langle e_1|a_r\rangle - \langle e_1|e_2\rangle\langle e_2|a_r\rangle \\ &= \langle e_1|a_r\rangle - \langle e_1|a_r\rangle - 0 = 0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب $\langle e_2|e'_r\rangle = 0$.

به‌طور کلی، وقتی m بردار راست‌هنجار $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_m\rangle$ با $m < n$ را محاسبه کردیم، آنگاه می‌توانیم بردار بعدی را با استفاده از روابط زیر پیدا کنیم:

$$|e'_{m+1}\rangle = |a_{m+1}\rangle - \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i|a_{m+1}\rangle \quad (2-14f)$$

$$|e_{m+1}\rangle = \frac{|e'_{m+1}\rangle}{\sqrt{\langle e'_{m+1}|e'_{m+1}\rangle}} \quad (2-14g)$$

توجه کنید که، هر چند فضاهای برداری محدود بعدی را مورد بحث قرار دادیم، فرایند (۲-۱۴) را می‌توان برای فضاهای برداری بینهایت بعدی نیز ادامه داد.

نامساوی شوارتز. حال یک نامساوی مربوط به کوشی و شوارتز را بررسی می‌کنیم، که هم در ابعاد متناهی و هم در ابعاد نامتناهی صدق می‌کند و محدودیت آن در دو و سه بعد معادل با این واقعیت است که $\cos \theta \leq 1$.

قضیه ۲-۲-۳: به ازای هر زوج بردار $a, b \in \mathcal{V}$ و $|a|$ که در آن \mathcal{V} یک فضای ضرب داخلی است، نامساوی زیر برقرار است

$$|\langle a|b \rangle| \leq |a||b|$$

این نامساوی را نامساوی شوارتز (یا گاهی نامساوی کوشی-شوارتز) می‌گویند.

اثبات. با استفاده از (۲-۹ج)، به ازای $|c\rangle = \alpha|a\rangle + |b\rangle$ ، که در آن α یک اسکالر مختلط دلخواه است، داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle c|c \rangle = (\alpha^* \langle a| + \langle b|)(\alpha|a\rangle + |b\rangle) \\ &= \alpha^* \alpha \langle a|a \rangle + \alpha^* \langle a|b \rangle + \alpha \langle b|a \rangle + \langle b|b \rangle \end{aligned} \quad (15-2)$$

این نامساوی به ازای همه مقادیر اسکالر مختلط α برقرار است. به خصوص، α را می‌توان طوری انتخاب کرد که عبارت سمت راست (۱۵-۲) را کمینه کند. این مقدار α از مشتق‌گیری سمت راست و مساوی صفر قراردادن آن به دست می‌آید. برای این منظور، در عبارت فوق جایگزینی $\alpha \equiv c + iy_0$ و $\langle a|b \rangle \equiv x_0 + iy_0$ را اعمال می‌کنیم؛ می‌رسیم به

$$0 \leq (x^2 + y^2) \langle a|a \rangle + (x - iy)(x_0 + iy_0) + (x + iy)(x_0 - iy_0) + \langle b|b \rangle$$

یا

$$0 \leq (x^2 + y^2) \langle a|a \rangle + 2x_0 x + 2y_0 y + \langle b|b \rangle$$

این روابط به ازای همه مقادیر x و y برقرار است. به خصوص باید برای زوج مقدار (x, y) که سمت راست را کمینه می‌کند، نیز برقرار باشد. برای یافتن این زوج مقدار به خصوص، یکبار نسبت به x و بار

دیگر نسبت به y مشتق می‌گیریم و نتایج را مساوی صفر قرار می‌دهیم. دو معادله زیر به دست می‌آید:

$$2x\langle a|a\rangle + 2x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{x_0}{\langle a|a\rangle}$$

$$2y\langle a|a\rangle + 2y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{y_0}{\langle a|a\rangle}$$

یا

$$\alpha = x + iy = -\frac{x_0 + iy_0}{\langle a|a\rangle} = -\frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle}$$

حال مقدار α را در (۱۵-۲) قرار می‌دهیم؛ می‌رسیم به:

$$0 \leq \frac{\langle b|a\rangle}{\langle a|a\rangle} \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle} \langle a|a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle a|a\rangle} \langle a|b\rangle - \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle} \langle b|a\rangle + \langle b|b\rangle$$

یا

$$0 \leq -\langle b|a\rangle \langle a|b\rangle + \langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \quad (16-2)$$

اما $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$ ، لذا $\langle a|b\rangle \langle a|b\rangle = \langle a|b\rangle^* \langle a|b\rangle = |\langle a|b\rangle|^2$. با جایگزین کردن در (۱۶-۲)، نامساوی شوارتز به دست می‌آید.

خوب است بر قدرت تجرید تأکید ورزیم. نامساوی شوارتز را صرفاً از فرضهای بنیادی فضاهای ضرب داخلی به دست آوردیم. یعنی، هر فضای برداری که در آن یک ضرب داخلی تعریف شود، در این نامساوی صدق می‌کند. لذا، لازم نیست هرگاه با یک فضای برداری جدید مواجه می‌شویم، نامساوی شوارتز را ثابت کنیم.

طول یک بردار. در فصل ۱ با ایده شهودی طول بردار آشنا شدیم، که از آن برای تعریف ضرب نقطه‌ای استفاده کردیم. گاهی بهتر است ابتدا ضرب داخلی را معرفی و سپس طول را تعریف کنیم. یعنی، کاری که ما الان انجام خواهیم داد.

تعریف $2-2-4$: نرم (یا طول) یک بردار $|a\rangle$ ، با نماد $\|a\|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|a\| \equiv \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

یک فضای برداری که در آن یک نرم تعریف شده باشد، فضای خطی نرم‌دار نامیده می‌شود. فضای خطی نرم‌دار خودبه‌خود فضای متریک هم هست (مقدمه کتاب) زیرا می‌توان تعریف کرد: $d(a, b) \equiv \|a - b\|$ که سمت راست این عبارت همان نرم $\|a\| - \|b\|$ است. بنابه تعریف ۲-۲-۴، هر فضای ضرب داخلی یک فضای خطی نرم‌دار است. لیکن برعکس آن درست نیست؛ فضاهای خطی نرم‌داری یافت می‌شوند که نمی‌توان آنها را به فضاهای ضرب داخلی ارتقاء داد. در فصل پنجم با نمونه‌هایی از این فضاها مواجه خواهیم شد.^۱

مثال ۲-۲-۵: فرض کنید، فضا C^n باشد و فاصله بین $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ و $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$$

به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که $d(a, b) = d(b, a) \geq 0$ اگر $a = b$ در این صورت $d(a, b) = 0$ و اگر $d(a, b) = 0$ آنگاه $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| = 0$ یا $|\alpha_i - \beta_i| = 0$ به‌ازای تمام i ها، یا $\beta_i = \alpha_i$ به‌ازای تمام i ها. بنابراین

$$d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$$

و خاصیت دوم نیز برقرار است. برای اثبات خاصیت سوم، نامساوی مثلثی، توجه کنید که

$$|\alpha_i - \beta_i| + |\beta_i - \gamma_i| \geq |\gamma_i - \alpha_i| \quad \forall i$$

این رابطه از نامساوی مثلثی برای اعداد مختلط نتیجه می‌شود. اگر روی تمام i ها مجموع‌یابی کنیم، می‌رسیم به

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| + \sum_{i=1}^n |\beta_i - \gamma_i| \geq \sum_{i=1}^n |\gamma_i - \alpha_i|$$

که نامساوی مثلثی برای یک تابع فاصله مفروض است.

۱. نیز بنگرید به:

می‌توان نشان داد که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت p ,

$$d(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^p \right)^{1/p}$$

یک تابع فاصله است. فاصله‌ای که در ابتدای این مثال معرفی شد. حالت خاص $p = 1$ است. تابع متداول دیگر، حالتی است که در آن $p = 2$:

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2}$$

تمرینها

۱-۲-۲ بردارهای مستقل خطی $x(t) = t^n$ به‌ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ در \mathcal{C}^∞ و ضرب داخلی

$$\langle x|y \rangle = \int_{-1}^1 x^*(t)y(t)dt$$

مفروض است. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت، چندجمله‌ایهای راست‌هنجار $e_0(t)$, $e_1(t)$ و $e_2(t)$ را بیابید.

۲-۲-۲ تمرین ۱-۲-۲ را برای حالتی که ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف شده است، تکرار کنید.

$$\langle x|y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} x^*(t)y(t)dt$$

در اینجا $\rho(t) = e^{-t}$ و همان‌طوری که باید، همواره مثبت است:
راهنمایی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} t^n dt = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{به‌ازای } n = 0 \\ 0 & \text{به‌ازای مقادیر فرد } n \\ \sqrt{2\pi}[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)] & \text{به‌ازای مقادیر زوج } n \end{cases}$$

۲-۳-۲ نشان دهید که به ازای هر مجموعه n از اعداد مختلط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ داریم:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n|^2 \leq n(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2)$$

۲-۳-۴ نشان دهید تابع d که توسط $d(a, b) = \|a - b\|$ تعریف شده یک تابع فاصله است.

۲-۳ عملگرهای خطی

در بارور کردن ایده فضاهای برداری، پیشرفت چشمگیری کرده‌ایم. این باروری و غنا، هر چند مهم است، اگر به یک تک فضای برداری محدود باشد، ارزش چندانی ندارد. می‌خواهیم به فضای برداری خاصیت آزادی حرکت بدهیم، به طوری که بتوانند از یک فضا به فضای دیگر بروند. وسیله‌ای که محمل این خواص است، عملگری خطی است که موضوع این بخش را تشکیل می‌دهد. لیکن، آموزنده است ابتدا مفهوم نگاشت را (که در مقدمه مورد بحث قرار گرفت) با بررسی چند مثال که به بحث حاضر مربوط است، مرور می‌کنیم.

مثال ۲-۳-۱: آنچه در زیر می‌آید، چند مثال آشنا از نگاشت است.

(الف) فرض کنید $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ توسط $F(x) = x^2$ داده شده باشد. در اینجا، \mathbb{R}^+ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

(ب) فرض کنید $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ توسط $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ داده شده باشد.

(ج) فرض کنید $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ توسط $F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y)$ داده شده باشد، که در آن $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(د) فرض کنید \mathcal{V} یک فضای برداری باشد. در این صورت تابع خطی \mathbb{F} را می‌توان یک نگاشت $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ در نظر گرفت.

(ه) اگر حاصلضرب دکارتی، $A \times B$ ، دو مجموعه A و B را به صورت زوجهای مرتب (a, b) تعریف کنیم، به طوری که $a \in A$ و $b \in B$ ، در این صورت متریک g در فضای برداری \mathcal{V} روی \mathbb{C} را می‌توان به عنوان یک نگاشت $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ در نظر گرفت که توسط $g(|a\rangle, |b\rangle) = \langle a|b\rangle$ داده می‌شود.

(و) حرکت یک ذره نقطه‌ای در فضا را می‌توان به عنوان نگاشت $M: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت که در آن $[a, b]$ بازه‌ای از خط حقیقی است. به ازای هر $t \in [a, b]$ تعریف می‌کنیم

$$M(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

که در آن $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ توابعی از t با مقدار حقیقی هستند. اگر t را زمان در نظر بگیریم، که فرض می‌شود در بازه $[a, b]$ قرار داشته باشد، در این صورت $M(t)$ مسیر ذره را به صورت تابعی از زمان توصیف می‌کند، و a و b به ترتیب شروع و پایان حرکت‌اند.

۲-۳-۱ تبدیلات خطی

نگاشت دلخواه $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ از یک فضای برداری \mathcal{V} به یک فضای برداری دیگر \mathcal{W} را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که این دو فضای برداری روی یک میدان واحد، مثلاً \mathbb{C} ، باشند. $|a\rangle$ و $|b\rangle$ را در \mathcal{V} و $|x\rangle$ و $|y\rangle$ را در \mathcal{W} چنان در نظر بگیرید که $F(|a\rangle) = |x\rangle$ و $F(|b\rangle) = |y\rangle$ به طور کلی، F ساختار فضای برداری را حفظ نمی‌کند. یعنی، تصویر ترکیب خطی بردارها، همان ترکیب خطی تصویرها نیست:

$$F(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) \neq \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$$

در قسمت (الف) مثال ۲-۳-۱ اگر \mathbb{R} را فضای برداری روی اعداد حقیقی بگیریم، این نکته روشن است.

به کاربردهای بسیاری برمی‌خوریم که در آنها حفظ ساختار فضای برداری (حفظ ترکیب خطی) مورد نظر است. نگاشتهایی که از این خاصیت برخوردارند نگاشتهای خطی، یا تبدیلات خطی نامیده می‌شوند. از این رو، به تعریف زیر می‌رسیم:

تعریف ۲-۳-۱: تبدیلی خطی بین فضاهای برداری \mathcal{V} و \mathcal{W} عبارت است از نگاشت $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ به طوری که

$$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha T(|a\rangle) + \beta T(|b\rangle)$$

تبدیلات خطی، اغلب، عملگرهای خطی نامیده می‌شوند، و عمل آنها روی یک بردار بدون آوردن پراکنش نوشته می‌شود: $T|a\rangle \equiv T(|a\rangle)$.

مثال ۲-۳-۲: در زیر، نمونه‌هایی از عملگرهای خطی در فضاهای برداری مختلف را بیان می‌کنیم. اثبات خطی بودن در تمام حالتها آسان است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

(الف) فرض کنید $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ یک مجموعه محدود دلخواه از بردارها در \mathcal{V}

و $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ مجموعه توابع خطی متناظر روی \mathcal{V} باشد؛ می‌نویسیم:

$$A|x\rangle = F_1(|x\rangle)|a_1\rangle + F_2(|x\rangle)|a_2\rangle + \dots + F_n(|x\rangle)|a_n\rangle$$

در این صورت، A یک عملگر خطی در \mathcal{V} است.

(ب) فرض کنید π یک جایگشت اعداد صحیح $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. اگر $|x\rangle = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ یک بردار \mathbb{C}^n باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$A_\pi|x\rangle = (\eta_{\pi(1)}, \eta_{\pi(2)}, \dots, \eta_{\pi(n)})$$

در این صورت A_π یک عملگر خطی است که در مؤلفه‌های بردار $|x\rangle$ تغییر و تبدیل پدید می‌آورد. (ج) فرض کنید $|u\rangle$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، یعنی، $|u\rangle \in \mathcal{P}^{\mathbb{C}}$. اگر $|x\rangle \in \mathcal{P}^{\mathbb{C}}$ می‌توانیم تعریف کنیم:

$$A_\pi|x\rangle = |y\rangle$$

که در آن $|y\rangle$ به صورت $y(t) = x(u(t))$ تعریف می‌شود. به عنوان مثال، اگر $u(t) = 1 - t^2$ و $x(t) = 2 + 3t + 5t^2$ آنگاه

$$\begin{aligned} y(t) &= x(u(t)) = 2 + 3u(t) + 5(u(t))^2 \\ &= 2 + 3(1 - t^2) + 5(1 - t^2)^2 \\ &= 10 - 13t^2 + 5t^4 \end{aligned}$$

(د) به ازای هر $|x\rangle \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ ، که در آن $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k t^k$ می‌توانیم بنویسیم: $D|x\rangle = |y\rangle$ که در آن $|y\rangle \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} k \xi_k t^{k-1}$$

در این صورت D یک عملگر خطی است. (توجه کنید که D عملگر مشتق است).

(ه) به ازای هر $|x\rangle \in \mathcal{D}^c$ که در آن $x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k t^k$ می‌توانیم بنویسیم $\mathbb{S}|x\rangle = |y\rangle$ که در آن $|y\rangle \in \mathcal{D}^c$ به صورت زیر تعریف شده است

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\xi_k}{k+1} \right) t^{k+1}$$

در این صورت، \mathbb{S} یک عملگر خطی است. (توجه کنید که \mathbb{S} عملگر انتگرال است.)

(و) فرض کنید $C^n(a, b)$ معرف فضای تمام توابع حقیقی-مقداری باشد که در بازه $[a, b]$ روی خط حقیقی تعریف شده‌اند و دارای مشتقات تا مرتبه n ($n \geq 1$) هستند. در این صورت، هم \mathbb{D} (عملگر مشتق) و هم \mathbb{S} (عملگر انتگرال از a تا b) عملگرهای خطی روی $C^n(a, b)$ به شمار می‌آیند.

(ز) فرض کنید $w(t)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد. به ازای هر $|x\rangle \in \mathcal{D}^c$ می‌توانیم تعریف کنیم: $\mathbb{W}|x\rangle = |y\rangle$ که در آن $|y\rangle \in \mathcal{D}^c$ به صورت $y(t) = w(t)x(t)$ تعریف شده است؛ یعنی، $y(t)$ چندجمله‌ای است که از ضرب دو چندجمله‌ای $w(t)$ و $x(t)$ حاصل شده است. در این صورت \mathbb{W} یک عملگر خطی است. برای حالت خاصی که در آن $w(t) = t$ ، عملگر خطی مربوطه را با \mathbb{T} نمایش می‌دهیم. بنابراین، داریم

$$\mathbb{T}|x\rangle = tx(t)$$

(ح) فرض کنید $|f\rangle \in C^{(n)}(a, b)$ که در قسمت (و) تعریف شده است. فرض کنید $g(t)$ تابع دیگری در $C^n(a, b)$ باشد. تعریف می‌کنیم $\mathbb{G}|f\rangle = |u\rangle$ که در آن $u(t) = g(t)f(t)$ و $t \in [a, b]$. در این صورت \mathbb{G} خطی است. به خصوص عمل ضرب در t ، که عملگر مربوطه‌اش را با \mathbb{T} نمایش می‌دهیم، خطی است.

یکی از نتایج فوری تعریف ۱-۳-۲ این است که تصویر بردار صفر در \mathcal{V} ، بردار صفر در \mathcal{W} است. این مطلب برای نگاشت کلی صادق نیست ولی در مورد نگاشت خطی صحیح است. برای ملاحظه این نکته، در تعریف ۱-۳-۲ قرار دهید: $\alpha = 0 = \beta$ و توجه کنید که ضرب عدد صفر در هر برداری، بردار صفر را می‌دهد. لذا، به ازای $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$:

$$0 \cdot |a\rangle + 0 \cdot |b\rangle = |0\rangle_{\mathcal{W}} + |0\rangle_{\mathcal{W}} = |0\rangle_{\mathcal{W}}$$

$$\circ(\mathbb{T}|a) + (\mathbb{T}|b) = |\circ\rangle_{\mathcal{V}} + |\circ\rangle_{\mathcal{W}} = |\circ\rangle_{\mathcal{W}}$$

بنابراین

$$\mathbb{T}|\circ\rangle_{\mathcal{V}} = \mathbb{T}(\circ|a) + \circ|b) = \circ(\mathbb{T}|a) + \circ(\mathbb{T}|b) = |\circ\rangle_{\mathcal{W}}$$

که در آن $|\circ\rangle_{\mathcal{V}}$ بردار صفر در \mathcal{V} و $|\circ\rangle_{\mathcal{W}}$ بردار صفر در \mathcal{W} است.

بردار صفر در \mathcal{V} الزاماً به بردار صفر در \mathcal{W} نگاشته شده است. لیکن ممکن است بردارهای دیگری در \mathcal{V} به بردار صفر در امتداد \mathcal{W} کشیده شوند. در واقع به قضیه زیر می‌رسیم.

قضیه ۲-۳-۲: مجموعه بردارهایی در \mathcal{V} که تحت تبدیل خطی $\mathbb{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ به بردار صفر در \mathcal{W} نگاشته می‌شوند، یک زیرفضای \mathcal{V} را تشکیل می‌دهند که صفر-فضا یا هسته، \mathbb{T} نامیده و به صورت $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ نمایش داده می‌شود.

اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. بعد صفر-فضای \mathbb{T} را بعد هسته \mathbb{T} می‌نامیم و با $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ نمایش می‌دهیم.

از قبل می‌دانیم که برد \mathbb{T} ، نظیر برد هر نگاشت، یک زیرمجموعه \mathcal{W} است. اما، می‌توان به آسانی نشان داد که یک زیرفضای \mathcal{W} نیز وجود دارد.

قضیه ۲-۳-۳: برای یک تبدیل خطی $\mathbb{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ ، که در آن \mathcal{V} و \mathcal{W} فضاهای برداری خطی‌اند، $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ یک زیرفضای \mathcal{W} است. بعد $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ مرتبه \mathbb{T} نامیده می‌شود و به‌صورت مرتبه \mathbb{T} نمایش داده می‌شود.

فرض کنید با یک پایه $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ شروع و آنقدر بردار مستقل خطی به آن ملحق کنیم تا یک پایه برای \mathcal{V} به‌دست آید. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم اولین n بردار در این پایه، پایه‌ای را برای $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ تشکیل بدهند. ادعا می‌کنیم که تصویرهای بردارهای باقیمانده یک پایه برای $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ تشکیل می‌دهند. فرض کنید $\mathbf{B} = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$ ، که در آن $N = \dim \mathcal{V}$ ، یک پایه برای \mathcal{V} و $\mathbf{B}' = \{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ ، که در آن $n = n(\mathbb{T})$ ، یک پایه برای $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که: $\mathbb{T}(\mathbf{B}'') \equiv \{\mathbb{T}|a_{n+1}\rangle, \dots, \mathbb{T}|a_N\rangle\}$ یک پایه برای $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ به‌حساب می‌آید. بردار دلخواهی مانند $|x\rangle$ را در $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، برداری

مانند $\mathcal{V} \in |a\rangle$ چنان وجود دارد که $\mathbb{T}|a\rangle = |x\rangle$. اما چون B یک پایه \mathcal{V} است، $|a\rangle$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle + \sum_{i=n+1}^N \alpha_i |a_i\rangle$$

با اعمال \mathbb{T} به دو طرف رابطه بالا، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}|a\rangle = |x\rangle &= \mathbb{T} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle \right) + \mathbb{T} \left(\sum_{i=n+1}^N \alpha_i |a_i\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\mathbb{T}|a_i\rangle}_0 + \sum_{i=n+1}^N \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^N \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\{\mathbb{T}|a_{n+1}\rangle, \mathbb{T}|a_{n+2}\rangle, \dots, \mathbb{T}|a_N\rangle\}$ فضای $\mathbb{T}(\mathcal{V})$ را پدید می‌آورند. آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم این بردارها مستقل خطی‌اند. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ هایی چنان وجود خواهند داشت که:

$$\beta_1 \mathbb{T}|a_{n+1}\rangle + \beta_2 \mathbb{T}|a_{n+2}\rangle + \dots + \beta_m \mathbb{T}|a_N\rangle = 0$$

یا

$$\mathbb{T}(\beta_1 |a_{n+1}\rangle + \beta_2 |a_{n+2}\rangle + \dots + \beta_m |a_N\rangle) = 0$$

که نشان می‌دهد $\beta_1 |a_{n+1}\rangle + \beta_2 |a_{n+2}\rangle + \dots + \beta_m |a_N\rangle$ به $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ تعلق دارد و از این رو می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی از $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle$ نوشته شود. این امر محال است، زیرا، بنا بر فرض، $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle$ همگی مستقل‌اند. از این رو به قضیه زیر می‌رسیم:

قضیه ۲-۳-۴: فرض کنید $\mathbb{T}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت

$$\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) + \dim \mathbb{T}(\mathcal{V})$$

مثال ۲-۳-۳: فرض کنید $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$$(\quad 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 - x_2 - 3x_4)$$

حال سعی می‌کنیم صفر-فضای عملگر T را پیدا کنیم. برای یافتن $\mathcal{N}(T)$ باید (x_1, x_2, x_3, x_4) را طوری بیابیم که $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0)$ ، یا

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 - 3x_4 = 0$$

معادله سوم را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_1 = x_2 + 3x_4$$

در این صورت با قراردادن در معادله اول یا دوم، می‌رسیم به

$$x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3x_3 - 5x_4$$

بنابراین، برای اینکه رابطه (۱) برقرار باشد، بردار در \mathbb{R}^4 باید به صورت زیر باشد

$$(x_2 + 3x_3, -3x_3 - 5x_4, x_3, x_4) = x_3(1, -3, 1, 0) + x_4(3, -5, 0, 1)$$

که در آن x_3 و x_4 اعداد حقیقی دلخواه‌اند.

می‌توانیم بحث بالا را به قرار زیر بیان کنیم. صفر-فضای $\mathcal{N}(T)$ از بردارهایی تشکیل شده است که می‌توان آنها را به صورت $\alpha_1(1, -3, 1, 0) + \alpha_2(3, -5, 0, 1)$ نوشت؛ یعنی، بردارهایی که عبارت‌اند از ترکیبهای خطی دو بردار $(1, -3, 1, 0)$ و $(3, -5, 0, 1)$. این دو بردار مستقل خطی‌اند. از این رو $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. در این صورت، بنابر قضیه ۲-۳-۴ داریم:

$\dim \mathbb{T}(\mathcal{V}) = 2$ ، یعنی، برد \mathbb{T} دوبعدی است. این مطلب وقتی روشن می‌شود که توجه کنیم:

$$\mathbb{T}(x_1, \dots, x_r) =$$

$$(2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)(1, 0, 1) + (x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)(0, 1, -1)$$

و بنابراین، $\mathbb{T}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ترکیبی خطی فقط از دو بردار، یعنی $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, -1)$ به‌شمار می‌آید.

به کمک تعریف زیر به نگاشت خطی مهمی دست پیدا می‌کنیم.

تعریف ۲-۳-۵: فضای برداری \mathcal{V} را یکریخت با فضای برداری دیگر \mathcal{W} می‌گوییم، اگر یک نگاشت خطی دوسوی $\mathbb{T}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ وجود داشته باشد. در این صورت \mathbb{T} را یکریختی می‌نامیم. یکریختی اساساً همان اتحاد است. یعنی، برای تمام مقاصد عملی، دو فضای برداری یکریخت واقعاً یکی‌اند. هر چند به ظاهر با یکدیگر متفاوت باشند. مثلاً مجموعه اعداد مختلط، \mathbb{C} ، و مجموعه بردارها در یک صفحه، \mathbb{R}^2 ، به‌ظاهر ممکن است متفاوت باشند، لیکن روی اعداد حقیقی، این دو فضاهای برداری یکسانی را تشکیل می‌دهند. در واقع، تناظر

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy$$

یک یکریختی بین دو فضای برداری، برقرار می‌کند. باید تأکید کنیم که \mathbb{C} و \mathbb{R}^2 فقط به‌عنوان فضاهای برداری یکریخت‌اند. اگر از ورای ساختارهای فضای برداری به آنها بنگریم، این دو مجموعه کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند. مثلاً برای \mathbb{C} یک ضرب معمولی بین عناصر آن برقرار است، اما برای \mathbb{R}^2 چنین نیست. قضیه زیر ملاکی عملی برای یکریختی به‌دست می‌دهد.

قضیه ۲-۳-۶: نگاشت خطی پوشای $\mathbb{T}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ یکریختی است اگر و فقط اگر بعد هسته آن صفر باشد.

اثبات. فرض کنید \mathbb{T} یک یکریختی باشد. چون \mathbb{T} خطی است، $\mathbb{T}(0) = 0$ را به $\mathbb{T}(0)$ می‌برد. چون \mathbb{T} دوسو است، نمی‌تواند بردار دیگری از \mathcal{V} را به $\mathbb{T}(0)$ ببرد. بنابراین، $\dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) = 0$. برعکس، اگر فرض کنیم $\dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) = 0$ ، یعنی، \mathbb{T} تنها $\mathbb{T}(0)$ را به $\mathbb{T}(0)$ می‌برد، در این صورت

می‌توانیم نشان دهیم که \mathbb{T} دوسو است. اما، بنابر فرض، این نگاشت پوشاست. از سوی دیگر،

$$\begin{aligned} \mathbb{T}|x\rangle = \mathbb{T}|y\rangle &\Rightarrow \mathbb{T}(|x\rangle - |y\rangle) = |0\rangle_{\mathcal{V}} \\ &\Rightarrow |x\rangle - |y\rangle = |0\rangle_{\mathcal{V}} \Rightarrow |x\rangle = |y\rangle + |0\rangle_{\mathcal{V}} = |y\rangle \end{aligned}$$

بنابراین، \mathbb{T} باید نگاشت یک به یکی هم باشد. این امر نشان می‌دهد که \mathbb{T} تگاشتی دوسو و از این رو یکرخیخت است. ■

قضیه ۲-۳-۷: یک یکرخیختی $\mathbb{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ مجموعه‌های بردارهای مستقل خطی را به مجموعه‌های بردارهای مستقل خطی می‌برد. ■

اثبات. فرض کنید $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^m$ یک مجموعه بردار مستقل خطی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $\{\mathbb{T}|a_i\rangle\}_{i=1}^m$ نیز مستقل خطی است. اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ‌هایی چنان وجود داشته باشند که

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle = |0\rangle_{\mathcal{W}}$$

در این صورت خطی بودن \mathbb{T} می‌دهد:

$$\mathbb{T} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i |a_i\rangle \right) = |0\rangle_{\mathcal{W}}$$

از قضیه ۲-۳-۶، داریم

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i |a_i\rangle = |0\rangle_{\mathcal{V}}$$

و مستقل خطی بودن $|a_i\rangle$ ‌ها حاکی از آن است که به‌ازای تمام i ‌ها داشته باشیم $\alpha_i = 0$. از این رو، $\mathbb{T}|a_1\rangle, \mathbb{T}|a_2\rangle, \dots, \mathbb{T}|a_m\rangle$ باید مستقل خطی باشند. ■

قضیه زیر نشان می‌دهد که تعداد فضاهای برداری متناهی-بعد، اکیداً محدود است.

قضیه ۲-۳-۸: دو فضای برداری متناهی-بعد، یکرخیخت‌اند اگر و فقط اگر دارای ابعاد مساوی باشند. ■

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم اگر دو فضای برداری دارای ابعاد یکسان باشند، یکرخیخت‌اند. فرض کنید $B_{\mathcal{V}} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{V} و $B_{\mathcal{W}} = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{W} باشد. فرض کنید $\mathbb{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ یک تبدیل خطی باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathbb{T}|a_i\rangle = |b_i\rangle \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ادعا می‌کنیم که \mathbb{T} یک یکرخیختی است. برای اینکه نشان دهیم \mathbb{T} پوشاست، فرض کنید

$$|b\rangle \equiv \sum_{i=1}^N \beta_i |b_i\rangle$$

یک بردار دلخواه در \mathcal{W} باشد. در این صورت

$$|b\rangle = \sum_{i=1}^N \beta_i \mathbb{T}|a_i\rangle = \sum_{i=1}^N \mathbb{T}(\beta_i |a_i\rangle) = \mathbb{T}\left(\sum_{i=1}^N \beta_i |a_i\rangle\right)$$

بنابراین، $|b\rangle$ عبارت است از تصویر یک بردار در \mathcal{V} یعنی $\sum_{i=1}^N \beta_i |a_i\rangle$. برای اینکه نشان دهیم \mathbb{T} یک به یک است، از نتیجه قبلی و قضیه ۲-۳-۶ استفاده می‌کنیم. فرض کنید به ازای یک $|a\rangle$ متعلق به \mathcal{V} داشته باشیم $\mathbb{T}|a\rangle = |0\rangle_{\mathcal{W}}$. در این صورت

$$|0\rangle_{\mathcal{W}} = \mathbb{T}|a\rangle = \mathbb{T}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |b_i\rangle$$

اما بردارهای $|b_i\rangle$ مستقل خطی‌اند. بنابراین، به ازای $i = 1, 2, \dots, N$ داریم: $\alpha_i = 0$ و $|0\rangle_{\mathcal{W}} = |a\rangle$. این نتیجه نشان می‌دهد که $|0\rangle_{\mathcal{W}}$ تنها برداری در \mathcal{V} است که به $|0\rangle_{\mathcal{W}}$ نگاشته می‌شود. بنابراین $\dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) = 0$ و بنابر قضیه ۲-۳-۶، \mathbb{T} یکرخیختی است.

برعکس، فرض کنید یک یکرخیختی $\mathbb{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ وجود داشته باشد. باید نشان دهیم که \mathcal{V} و \mathcal{W} دارای ابعاد مساوی‌اند. فرض کنید $B_{\mathcal{V}} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{V} باشد. کافی است نشان دهیم $B'_{\mathcal{W}} = \{\mathbb{T}|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{W} است. از قبل، بنابر قضیه ۲-۳-۷ می‌دانیم که $\mathbb{T}|a_i\rangle$ ها مستقل خطی‌اند. آنچه باید نشان دهیم این است که این بردارها فضای \mathcal{W} را پدید

می آورند. فرض کنید $|b\rangle \in \mathscr{W}$ یک بردار دلخواه باشد. چون \mathbb{T} پوشاست، برداری مانند $|a\rangle \in \mathscr{V}$ چنان وجود دارد که $\mathbb{T}|a\rangle = |b\rangle$. از سوی دیگر، چون $B_{\mathscr{V}}$ یک پایه در \mathscr{V} است، داریم

$$|b\rangle = \mathbb{T}|a\rangle = \mathbb{T} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle$$

$|b\rangle$ را به صورت یک ترکیب خطی از $\langle \mathbb{T}|a_i\rangle$ ها نوشته ایم. به این ترتیب، اثبات اینکه $B_{\mathscr{W}}$ یک پایه برای \mathscr{W} است، کامل می شود. چون تعداد $\langle \mathbb{T}|a_i\rangle$ ها دقیقاً N است، تساوی $\dim \mathscr{W}$ و $\dim \mathscr{V}$ اثبات می شود. ■

یکی از نتایج قضیه ۲-۳-۸ این است که تمام فضاهای برداری N بعدی روی \mathbb{R} با \mathbb{R}^N یکرخیخت اند، و تمام فضاهای برداری N بعدی مختلط با \mathbb{C}^N یکرخیخت هستند. بنابراین، برای تمام مقاصد عملی، تنها دو فضای برداری N بعدی \mathbb{R}^N و \mathbb{C}^N ، داریم.

۲-۳-۲ جبر عملگرها

مجموعه تبدیلات خطی بین فضاهای برداری دارای خواص مهمی اند که در این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابتدا توجه کنید که اگر مجموع دو تبدیل خطی T_1 و T_2 ، از \mathscr{V} به \mathscr{W} را با

$$(T_1 + T_2)|a\rangle \equiv T_1|a\rangle + T_2|a\rangle$$

و حاصلضرب T_1 (یا T_2) در یک اسکالر α را با

$$(\alpha T_1)|a\rangle = \alpha(T_1|a\rangle)$$

تعریف کنیم، در این صورت مجموعه چنین تبدیلهایی یک فضای برداری تشکیل می دهند که آن را به صورت $\mathcal{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ نمایش می دهیم. بردار (عملگر) \mathcal{O} ، بنا به تعریف، عبارت است از عملگری که وقتی روی هر بردار عمل کند، بردار صفر را بدهد. عملگر صفر را با \mathcal{O} نمایش می دهیم. ثانیاً، یک عمل اضافی دیگر برای عملگرهای خطی وجود دارد که، عموماً، برای فضاهای برداری معمولی تعریف نمی شود. این عمل، ضرب دو تبدیل خطی است. اگر $T_1: \mathscr{V} \rightarrow \mathscr{W}$ و $T_2: \mathscr{W} \rightarrow \mathscr{U}$ عملگرهای خطی باشند، در این صورت همان طوری که به آسانی می توان ثابت کرد، ترکیب $T_2 \circ T_1: \mathscr{V} \rightarrow \mathscr{U}$ نیز یک عملگر خطی است. این ترکیب، ضرب T_1 و T_2

است. معمولاً دایره بین دو عملگر را حذف می‌کنند، یعنی

$$T_2 T_1 \equiv T_2 \circ T_1$$

در هر حال، این ضرب روی یک تک فضای برداری تعریف نمی‌شود، اما چنان است که یک عنصر از $\mathcal{L}(V, W)$ را می‌گیرد و یک عنصر سوم در $\mathcal{L}(V, U)$ می‌دهد. مطلوب این است که با یک فضا کار کنیم و ضرب عملگرهای متعلق به آن فضا را تعریف کنیم. اگر قرار دهیم $V = W = U$ ، در این صورت سه فضا به یک فضای منفرد $\mathcal{L}(V, V)$ تبدیل می‌شود، که می‌توانیم آن را با $\mathcal{L}(V)$ نمایش دهیم و T_2, T_1 و $T_2 T_1$ و $T_1 T_2$ به آن تعلق دارند. فضای $\mathcal{L}(V)$ تنها یک فضای برداری نیست بلکه یک جبر، جبر عملگرهای خطی روی V ، است. این جبر دارای یک عنصر صفر، O ، که اغلب به صورت \circ نمایش داده می‌شود، و یک عنصر همانی، I ، و دارای خواص زیر است:

$$TO = OT = O \quad \text{(الف) وجود عنصر صفر}$$

$$TI = IT = T \quad \text{(ب) وجود عنصر همانی}$$

$$T_1(T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3 \quad \text{(ج) خاصیت توزیع‌پذیری راست}$$

$$(T_1 + T_2)T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3 \quad \text{(د) خاصیت توزیع‌پذیری چپ}$$

$$T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2)T_3 \quad \text{(ه) خاصیت شرکت‌پذیری}$$

تبدیل صفر، قبلاً تعریف شده است. تبدیل همانی، عملگری است که در رابطه زیر صدق کند

$$I|a\rangle = |a\rangle \quad \forall |a\rangle \in V$$

حال که I را تعریف کردیم، می‌توانیم سؤال کنیم آیا می‌توان عملگری مانند T^{-1} یافت که دارای خاصیت $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ باشد؟ ابتدا، ببینیم آیا T^{-1} اصلاً وجود دارد یا خیر. بنابراین بحث کلی نگاشتها، توجه می‌کنیم که وارون تنها برای نگاشتهای دوسو تعریف می‌شود. با استفاده از آن تعریف در نگاشتهای خطی، نتیجه می‌گیریم که، تمام یکریختی‌ها (و فقط یکریختی‌ها) که بر یک فضای برداری عمل می‌کنند، وارون‌پذیرند (وارون دارند).

مثال ۲-۳-۴: فرض کنید، عملگر خطی $\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ توسط

$$\mathbb{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

تعریف شده باشد. می‌خواهیم ببینیم آیا \mathbb{T} وارون‌پذیر است یا خیر، اگر هست وارون آن را پیدا کنیم. عملگر \mathbb{T} فقط و فقط وقتی وارون دارد که \mathbb{T} دوسو باشد، و این حکم فقط و فقط زمانی صادق است که $\dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) = 0$. بنابراین، $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ را می‌سازیم، که مجموعه تمام بردارهایی است که در

$$\mathbb{T}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

یا

$$x_1 + x_2 = 0 \quad x_2 + x_3 = 0 \quad x_1 + x_3 = 0$$

صدق می‌کنند. این معادلات فقط یک جواب $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ دارد. به این ترتیب، تنها بردار متعلق به $\mathcal{N}(\mathbb{T})$ بردار صفر است، و از این رو $\dim \mathcal{N}(\mathbb{T}) = 0$. بنابراین، \mathbb{T} دارای وارون است.

برای یافتن \mathbb{T}^{-1} از رابطه $\mathbb{T}^{-1}\mathbb{T} = \mathbb{I}$ استفاده می‌کنیم

$$\mathbb{T}^{-1}\mathbb{T}(x_1, x_2, x_3) = \mathbb{T}^{-1}(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

تساوی آخر نشان می‌دهد که چگونه \mathbb{T}^{-1} روی بردارها عمل می‌کند. برای اینکه این نکته را روشن‌تر کنیم، قرار می‌دهیم $x_1 + x_2 = x$, $x_2 + x_3 = y$, $x_1 + x_3 = z$. سپس x_1, x_2 و x_3 را بر حسب x, y ، و z به دست می‌آوریم و در معادله قبل قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{-1}(x, y, z) &= \left(\frac{1}{4}(x - y + z), \frac{1}{4}(x + y - z), \frac{1}{4}(-x + y + z) \right) \\ &= \frac{1}{4}(x - y + z, x + y - z, -x + y + z) \end{aligned}$$

این معادله را بر حسب x_1, x_2, x_3 بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbb{T}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $T^{-1}T = I$:

$$\begin{aligned} T^{-1}T(x_1, x_2, x_3) &= T^{-1}(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) \\ &= \frac{1}{4}((x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_1 + x_3), (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) \\ &\quad - (x_1 + x_3), -(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_1 + x_3)) \\ &= \frac{1}{4}(2x_1, 2x_2, 2x_3) = (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

به این ترتیب، اثر $T^{-1}T$ روی هر عنصر دلخواه از \mathbb{R}^3 ، آن را بدون تغییر می‌گذارد. بنابراین،
 ● $TT^{-1} = I$. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $TT^{-1} = I$.

همان طوری که در بالا اشاره شد، همه عملگرهای خطی وارون‌پذیر نیستند. فقط یکریختی‌های خطی دارای وارون‌اند. قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر یک وارون وجود داشته باشد، باید منحصر به فرد باشد. این مطلب استفاده از نماد T^{-1} برای وارون T را توجیه می‌کند.

■ قضیه ۲-۳-۹: وارون یک عملگر خطی منحصر به فرد است.

اثبات. فرض کنید A و B دو وارون T باشند. در این صورت بنا به تعریف داریم

$$TA = I$$

طرفین را از چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$BTA = BI = B$$

اما $BT = I$ ، زیرا B نیز یک وارون T است. بنابراین

$$A = B \Rightarrow A = B$$

قضیه زیر را می‌توان به آسانی اثبات کرد.

قضیه ۲-۳-۱۰: اگر T_1 و T_2 دو عملگر خطی وارون‌پذیر باشند، در این صورت T_1T_2 نیز وارون‌پذیر است و

$$(T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$$

از قضیه ۲-۳-۸ می‌توان برای اثبات یک قضیه دیگر استفاده کرد.

قضیه ۲-۳-۱۱: یک تبدیل خطی $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر یک پایه \mathcal{V} را به پایه دیگر \mathcal{V} ببرد.

چندجمله‌ایهای عملگری. پس از تعریف ضرب و جمع عملگرها می‌توانیم چندجمله‌ایهایی از عملگرها تشکیل دهیم. توان‌های T را به طریق استقرایی به صورت

$$T^m = T \circ T^{m-1} = T^{m-1} \circ T$$

به‌ازای تمام m ‌های صحیح مثبت، $m \geq 1$ ، تعریف می‌کنیم. سازگار بودن این معادله (به‌ازای $m = 1$) رابطه‌ای از این قرار ایجاد می‌کند:

$$T^0 = I$$

حال می‌توانیم یک چندجمله‌ای از درجه n نسبت به T را به صورت زیر تعریف کنیم

$$P(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_n T^n \quad (17-2)$$

مثال ۲-۳-۵: فرض کنید $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک عملگر خطی باشد که بردارهای صفحه xy را به اندازه θ می‌چرخاند، یعنی:

$$T_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

می‌خواهیم توانهای T_θ را پیدا کنیم. ابتدا، T_θ^2 را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} T_\theta^2(x, y) &= T_\theta(\underbrace{x \cos \theta - y \sin \theta}_{x'}, \underbrace{x \sin \theta + y \cos \theta}_{y'}) \\ &= (x' \cos \theta - y' \sin \theta, x' \sin \theta + y' \cos \theta) \\ &= ((x \cos \theta - y \sin \theta) \cos \theta - (x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x \cos \theta - y \sin \theta) \sin \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta) \cos \theta \\ &= (x(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - y(\sin \theta \cos \theta), x(\sin \theta \cos \theta) \\ & \quad + y(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \\ &= (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta) \end{aligned}$$

به این ترتیب، T_θ^2 ، (x, y) را به اندازه 2θ می چرخاند. به همین ترتیب،

$$\begin{aligned} T_\theta^3(x, y) &= T_\theta(T_\theta^2(x, y)) = T_\theta(\underbrace{x \cos 2\theta - y \sin 2\theta}_{x''}, \underbrace{x \sin 2\theta + y \cos 2\theta}_{y''}) \\ &= (x'' \cos \theta - y'' \sin \theta, x'' \sin \theta + y'' \cos \theta) \\ &= (x(\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) - y(\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta), \\ & \quad x(\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta) + y(\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta)) \\ &= (x \cos 3\theta - y \sin 3\theta, x \sin 3\theta + y \cos 3\theta) \end{aligned}$$

به کمک استقراء ریاضی، می توانیم نشان دهیم که

$$T_\theta^n(x, y) = (x \cos n\theta - y \sin n\theta, x \sin n\theta + y \cos n\theta)$$

که نشان می دهد T_θ^n عبارت است از دوران (x, y) به اندازه $n\theta$ ، یعنی

$$T_\theta^n = T_{n\theta}$$

این نتیجه باید از ابتدا واضح می بود، زیرا T_θ^n معادل است با n بار دوران (x, y) و هر بار به اندازه θ .

توانهای منفی یک عملگر خطی وارون پذیر T به صورت زیر تعریف می شوند

$$T^{-m} \equiv (T^{-1})^m$$

توجه کنید که T^{-m} وارون T^m است.

نماهای \mathbb{T} در همان قواعد معمولی صدق می‌کنند. در حالت خاص، به‌ازای هر دو عدد صحیح m و n (مثبت یا منفی)، داریم

$$\mathbb{T}^m \mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{m+n}$$

$$(\mathbb{T}^m)^n = \mathbb{T}^{mn}$$

به‌علاوه، می‌توانیم m و n را تعمیم دهیم تا اعداد کسری و بالاخره تمام اعداد حقیقی را شامل شود.

مثال ۲-۳-۶: حال \mathbb{T}_θ^{-n} را محاسبه می‌کنیم، که در آن عملگر خطی مثال ۲-۳-۵ است. ابتدا \mathbb{T}_θ^{-1} را پیدا می‌کنیم. در پی عملگری می‌گردیم که به‌ازای مقادیر (x, y) داشته باشیم:

$$\mathbb{T}_\theta^{-1} \mathbb{T}_\theta(x, y) = (x, y) \quad (۱)$$

این رابطه را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbb{T}_\theta^{-1}(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = (x, y)$$

x' و y' را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad \text{و} \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

سپس x و y را برحسب x' و y' به‌دست می‌آوریم:

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \quad \text{و} \quad y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

به‌جای x و y در (۱) مقدار می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{T}_\theta^{-1}(x', y') = (x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta)$$

با مقایسه این رابطه با عمل \mathbb{T}_θ (مثال ۲-۳-۵)، ملاحظه می‌کنیم که اختلاف فقط در علامت جمله $\sin \theta$ است. نتیجه می‌گیریم که \mathbb{T}_θ^{-1} همان اثر $\mathbb{T}_{-\theta}$ را دارد. از این رو داریم

$$\mathbb{T}_\theta^{-1} = \mathbb{T}_{-\theta}$$

$$\mathbb{T}_\theta^{-n} = (\mathbb{T}_{-\theta})^\theta = \mathbb{T}_{-n\theta}$$

این هم آموزنده است که درستی تساوی $\mathbb{T}_\theta^{-n}\mathbb{T}_\theta^n = 1$ را تحقیق کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\theta^{-n}\mathbb{T}_\theta^n(x, y) &= \mathbb{T}_\theta^{-n} \underbrace{(x \cos n\theta - y \sin n\theta)}_{x'} \underbrace{(x \sin n\theta + y \cos n\theta)}_{y'} \\ &= (x' \cos n\theta + y' \sin n\theta, -x' \sin n\theta + y' \cos n\theta) \\ &= ((x \cos n\theta - y \sin n\theta) \cos n\theta + (x \sin n\theta + y \cos n\theta) \sin n\theta, \\ &\quad - (x \cos n\theta - y \sin n\theta) \sin n\theta + (x \sin n\theta + y \cos n\theta) \cos n\theta) \\ &= (x(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta), y(\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta)) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\mathbb{T}_\theta^n\mathbb{T}_\theta^{-n}(x, y) = (x, y)$$

این نکته حائز اهمیت است که توجه کنیم حتی اگر \mathbb{T} وارون پذیر باشد، $P(\mathbb{T})$ ، عموماً، وارون پذیر نیست. در واقع $\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2$ الزاماً وارون پذیر نیست، حتی اگر \mathbb{T}_1 و \mathbb{T}_2 هر دو وارون پذیر باشند. یک نمایش ساده از این واقعیت این است که به جای \mathbb{T}_2 کمیت $-\mathbb{T}_1$ را برگزینیم. در این صورت $\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 = 0$ ، که مسلماً وارون پذیر نیست. از این رو، مجموع عملگرهای وارون پذیر، لزوماً وارون پذیر نیست. به خصوص، چندجمله‌ایهای یک عملگر وارون پذیر، لزوماً وارون پذیر نیستند.

توابع عملگرها، می‌توان یک گام از چندجمله‌ایهای عملگری فراتر رفت و، از طریق بسط تایلور، با توابع آنها آشنا شد. یک تابع معمولی $f(x)$ را در نظر بگیرید که به صوت زیر، بسط تایلوری پیدا می‌کند:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x_0}$$

که در آن x_0 نقطه دلخواهی است که در آن تابع $f(x)$ و تمام مشتقاتش تعریف شده‌اند. یک تابع از عملگر \mathbb{T} با این تابع متناظر است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\mathbb{T}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{T} - x_0 \mathbb{1})^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x_0}$$

چون این سری، یک جمع نامتناهی از عملگرهاست، ممکن است درباره همگرایی آن دشواریهایی پیش آید. لیکن، همان طوری که در بخش ۳-۶ نشان خواهیم داد، برای فضاهای برداری متناهی-بعدها، $f(\mathbb{T})$ همواره تعریف شده است، و در واقع، همواره یک چندجمله‌ای نسبت به \mathbb{T} است. در حال حاضر، $f(\mathbb{T})$ را یک سری متناهی تلقی می‌کنیم.

وقتی تابع را بتوان حول $x_0 = 0$ بسط داد، ساده‌سازیهایی حاصل می‌شود. در این حالت،

می‌رسیم به

$$f(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{T}^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=0}$$

تابعی با کاربرد فراوان، عبارت است از تابع نمایی که بسط آن به صورت زیر است

$$e^{\mathbb{T}} \equiv \exp(\mathbb{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{T}^n}{n!} \quad (18-2)$$

مثال ۲-۳-۷: حال $e^{\mathbb{T}}$ را وقتی $\mathbb{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ توسط عبارت زیر داده شده باشد، محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbb{T}(x, y) = (-\alpha y, \alpha x)$$

می‌توانیم یک فرمول کلی برای عمل \mathbb{T}^n روی (x, y) پیدا کنیم. برای یک (x, y) دلخواه،

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^2(x, y) &= \mathbb{T}(-\alpha y, \alpha x) = (-\alpha(\alpha x), \alpha(-\alpha y)) \\ &= -\alpha^2(x, y) = -\alpha^2 \mathbb{1}(x, y) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbb{T}^2 = -\alpha^2 \mathbb{1}$$

به آسانی از T و T^r می‌توانیم توانهای بالاتر T را به دست آوریم، مثلاً:

$$T^r = T(T^r) = -\alpha^r T$$

$$T^r = T^r T^r = \alpha^r \mathbb{1}$$

پس، به‌طور کلی داریم:

$$T^{r2n} = (-1)^n \alpha^{rn} \mathbb{1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$T^{r2n+1} = (-1)^n \alpha^{rn} T \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

لذا:

$$\begin{aligned} e^T &= \sum_{\text{فرد } n} \frac{T^n}{n!} + \sum_{\text{زوج } n} \frac{T^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{rn}}{(2n+1)!} T + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{rn}}{(2n)!} \mathbb{1} \\ &= \frac{1}{\alpha} T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{r(n+1)}}{(2n+1)!} + \mathbb{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{rn}}{(2n)!} \end{aligned}$$

دو سری بالا، به‌ترتیب، بسط $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هستند. بنابراین، داریم:

$$e^T = \frac{1}{\alpha} T \sin \alpha + \mathbb{1} \cos \alpha$$

که نشان می‌دهد e^T یک چندجمله‌ای (درجه یک) نسبت به T است.

عمل e^T روی (x, y) به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} e^T(x, y) &= \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} T + \cos \alpha \mathbb{1} \right) (x, y) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} T(x, y) + \cos \alpha \mathbb{1}(x, y) \\ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} (-\alpha y, \alpha x) + (x \cos \alpha, y \cos \alpha) \\ &= (-y \sin \alpha, x \sin \alpha) + (x \cos \alpha, y \cos \alpha) \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{aligned}$$

خواننده پی خواهد برد که عبارت آخر، دورانی به اندازه زاویه α در صفحه xy است. بنابراین، می‌توانیم e^T را به‌عنوان یک عملگر دوران حول محور z ها در نظر بگیریم. از این نظر، \mathbb{T} مولد دوران نامیده می‌شود. برای مقادیر بینهایت کوچک α ، معادلهٔ کنش بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} e^T(x, y) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} (x - \alpha y, \alpha x + y) &= (x, y) + (-\alpha y, \alpha x) \\ &= \mathbb{1}(x, y) + \mathbb{T}(x, y) = (\mathbb{1} + \mathbb{T})(x, y) \end{aligned}$$

از این رو، به‌ازای مقادیر کوچک α ، دوران در صفحه xy عبارت است از $\mathbb{T} + \mathbb{1}$ ؛ یعنی \mathbb{T} ، به‌تنهایی دوران بینهایت کوچک را تعیین می‌کند. از سوی دیگر، هر دوران محدودی می‌تواند با اعمال متوالی دورانهای بینهایت کوچک تولید شود. به این دلیل است که \mathbb{T} مولد نامیده می‌شود. ●

با تمرین ۱-۳-۴، مسئله‌ای شبیه به مثال ۲-۳-۷، اما البته به زبان ماتریسی، مطرح کردیم. این ماجرا اتفاقی نیست بلکه نتیجه‌ای از ارتباط عمیقی است که بین عملگرهای خطی و ماتریسها برقرار است، و در فصل سوم به طرح آن خواهیم پرداخت.

جابه‌جاگرها. به‌طور کلی وقتی دو عملگر را در یکدیگر ضرب می‌کنیم، نتیجه حاصل به ترتیبی که این ضرب انجام شود، بستگی دارد. یعنی، اگر $\mathbb{T}, \mathbb{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، آنگاه $\mathbb{T}\mathbb{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ و $\mathbb{U}\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ولی عموماً $\mathbb{T}\mathbb{U}$ با $\mathbb{U}\mathbb{T}$ برابر نیست. در زیر، تساوی عملگرها به‌طور دقیق تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۳-۱۲: دو عملگر خطی $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ مساوی‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\mathbb{T}_1|a\rangle = \mathbb{T}_2|a\rangle \quad \forall |a\rangle \in \mathcal{V}$$

بیان معادل گزارهٔ بالا، به این قرار است:

$$\mathbb{T}_1 - \mathbb{T}_2 = \mathbb{O} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2$$

بنابراین، وقتی می‌گوییم $\mathbb{U}\mathbb{T} \neq \mathbb{T}\mathbb{U}$ ، معنای آن این است که می‌توانیم برداری مانند $|a\rangle \in \mathcal{V}$ چنان بیابیم که $\mathbb{U}\mathbb{T}|a\rangle \neq \mathbb{T}\mathbb{U}|a\rangle$. در این صورت، می‌گوییم \mathbb{T} و \mathbb{U} جابه‌جاپذیر نیستند.

مثال ۲-۳-۸: دو عملگر $\mathbb{T}, \mathbb{U} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، که بنا بر تعریف، عبارت‌اند از:

$$\mathbb{T}(x, y) = (x + 2y, 2x + y) \quad \text{و} \quad \mathbb{U}(x, y) = (x - y, x + y)$$

جابه‌جاپذیر نیستند، زیرا

$$\begin{aligned} TU(x, y) &= T(x - y, x + y) = (x - y + 2(x + y), 2(x - y) + x + y) \\ &= (3x + y, 3x - y) \end{aligned}$$

در حالی‌که

$$\begin{aligned} UT(x, y) &= U(x + 2y, 2x + y) = (x + 2y - (2x + y), (x + 2y) + (2x + y)) \\ &= (-x + y, 3x + 3y) \end{aligned}$$

واضح است که این دو حاصلضرب به‌ازای هر (x, y) دلخواه، با یکدیگر برابر نیستند. ●
برای اینکه ببینیم "به‌چه اندازه" دو عملگر جابه‌جا نمی‌شوند، اختلاف بین حاصلضربهای آنها را با ترتیبهای مختلف در نظر می‌گیریم و نتیجه را جابه‌جاگر آن دو عملگر می‌نامیم. این مطلب به کمک تعریف زیر دقیقتر بیان می‌شود.

تعریف ۲-۳-۱۳: جابه‌جاگر $[U, T]$ دو عملگر U و T که به $\mathcal{L}(V)$ تعلق دارند، عملگری در $\mathcal{L}(V)$ است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[U, T] \equiv UT - TU$$

یکی از پیامدهای فوری تعریف ۲-۳-۱۳، عبارت است از گزاره زیر:

گزاره ۲-۳-۱۴: به‌ازای $S, T, U \in \mathcal{L}(V)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ یا $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم

$$[U, T] = -[T, U] \quad \text{(الف) پادتقارن}$$

$$[\alpha U, \beta T] = \alpha\beta[U, T] \quad \text{(ب) خطی بودن (خطیت)}$$

$$[S, T + U] = [S, T] + [S, U] \quad \text{(ج) خطی بودن نسبت به عنصر سمت راست}$$

$$[S + T, U] = [S, U] + [T, U] \quad \text{(د) خطی بودن نسبت به عنصر سمت چپ}$$

$$[S, TU] = [S, T]U + T[S, U] \quad \text{(ه) خاصیت مشتق‌گیری چپ}$$

$$[ST, U] = S[T, U] + [S, U]T \quad \text{(و) خاصیت مشتق‌گیری راست}$$

$$[[S, T], U] + [[U, S], T] + [[T, U], S] = 0 \quad \text{(ز) اتحاد ژاکوبی}$$

اثبات. تقریباً در تمام موارد، اثبات نتیجه بی‌واسطه تعریف ۲-۳-۱۳ است. تنها استثنای (جزئی) عبارت‌اند از خواص مشتق‌گیری. برای اثبات مشتق‌گیری چپ، (د) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [S, TU] &= S(TU) - (TU)S = STU - TUS + \underbrace{TSU - TSU}_{\equiv 0} \\ &= (ST - TS)U + T(SU - US) \\ &= [S, T]U + T[S, U] \end{aligned}$$

■ خاصیت مشتق‌گیری راست دقیقاً به همین طریق اثبات می‌شود. پیامدهای مفید خاصیت (الف) از گزاره بالا (یا به بیان صریحتر، پیامدهای تعریف جابه‌جاگر) عبارت‌اند از:

$$[A, A] = 0$$

و

$$[A, A^m] = 0 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

در حالت خاص

$$[A, 1] = 0 \quad \forall A$$

و

$$[A, A^{-1}] = 0$$

۲-۳-۳ توابع عملگر مقداری و مشتق عملگرها
تا اینجا، درباره خواص جبری عملگرها، موجودات استاتیکی که از قواعد جبری معینی پیروی و نیازهای استاتیکی برخی کاربردها را برآورده می‌کنند، بحث کردیم. لیکن، کمیتهای فیزیکی، اشیاء یا

موجودات دینامیکی اند و اگر بخواهیم عملگرها معرف کمیت‌های فیزیکی باشند، باید بتوانند با زمان تغییر کنند. این پویندگی (دینامیزم) به بهترین وجهی در قلمرو مکانیک کوانتومی ظاهر می‌شود؛ در این حوزه مشاهده‌پذیرهای فیزیکی، موجودات واقعاً دینامیکی، توسط عملگر نمایش داده می‌شوند. بنابراین، نگاشت $\mathbb{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ را در نظر بگیرید که یک عدد حقیقی می‌گیرد و یک عملگر خطی روی فضای برداری \mathcal{V} می‌دهد.^۱ تصویر $t \in \mathbb{R}$ را با $\mathbb{H}(t)$ نشان می‌دهیم، که روی فضای برداری رابطه \mathcal{V} عمل می‌کند. معنی فیزیکی این عبارت این است که وقتی t (زمان معمولی) تغییر می‌کند، تصویر آن، $\mathbb{H}(t)$ نیز تغییر می‌کند. از این رو، به ازای مقادیر مختلف t ، عملگرهای مختلفی داریم. در حالت خاص:

$$[\mathbb{H}(t), \mathbb{H}(t')] \neq \mathbf{0} \quad t \neq t'$$

یک مثال واقعی در این مورد، عبارت است از عملگری که یک ترکیب خطی از عملگرهای \mathbb{D} و \mathbb{T} در مثال ۲-۳-۲ باشد، و در آن به جای اسکالرهای ثابت، از اسکالرهای تابع زمان استفاده شود. به طور مشخص، فرض کنید:

$$\mathbb{H}(t) = \mathbb{D} \cos \omega t + \mathbb{T} \sin \omega t$$

که در آن ω یک مقدار ثابت است. با گذشت زمان، هویت $\mathbb{H}(t)$ از \mathbb{D} به \mathbb{T} تغییر می‌کند و مجدداً به \mathbb{D} برمی‌گردد. حتی گاهی هویت دورگه‌ای پیدا می‌کند! چون \mathbb{T} و \mathbb{D} جابه‌جاپذیر نیستند، مقادیر $\mathbb{H}(t)$ به ازای مقادیر مختلف t لزوماً جابه‌جاپذیر نیستند.

از جمله عملگرهای جالب توجه، عملگرهایی اند که می‌توان آنها را به صورت $e^{\mathbb{H}(t)}$ نوشت، که در آن $\mathbb{H}(t)$ عملگرهای ساده‌اند. یعنی، بستگی $\mathbb{H}(t)$ به t ساده‌تر از بستگی متناظر $e^{\mathbb{H}(t)}$ است. قبلاً، در مثال ۲-۳-۷، با چنین وضعیتی روبرو شدیم؛ در آنجا نشان دادیم که عملگر دوران حول محور z ها را می‌توان به صورت $e^{\mathbb{T}}$ نوشت، و عمل \mathbb{T} روی (x, y) به مراتب ساده‌تر از عمل متناظر $e^{\mathbb{T}}$ بود.

چنین مواردی در فیزیک بسیار متداول است. در واقع، می‌توان نشان داد که تمام عملگرهایی که از نظر فیزیکی جالب توجه‌اند، می‌توانند به صورت حاصلضرب عملگرهای ساده‌تر نوشته شوند که هر کدام به شکل $e^{\mathbb{T}}$ هستند.^۲ به عنوان مثال، در مثال ۱-۴-۲ دیدیم که یک دوران دلخواه در

۱. به بیان دقیقتر، حوزه \mathbb{H} باید بازه $[\alpha, \beta]$ از خط حقیقی باشد. زیرا ممکن است \mathbb{H} برای تمام \mathbb{R} تعریف شده نباشد. اما، در اینجا لازم نیست چنین تفاوتی را قائل بشویم.

۲. بنگرید به: Varadarajan, 1984.

سه بعد را می‌توان به صورت حاصلضرب سه دوران ساده‌تر نوشت، که هر کدام عبارت بودند از دوران حول یک محور.

عملگرهای به شکل $\exp\{\mathbb{H}(t)\}$ چندان اهمیت دارند که روی آنها مطالعه بیشتری انجام شود. لیکن، کار خود را به محاسبه چند مشتق که در کاربردهای فیزیکی اهمیت دارند، محدود خواهیم کرد. ابتدا با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۲-۳-۱۵: برای نگاشت $\mathbb{H}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، مشتق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{H}(t + \Delta t) - \mathbb{H}(t)}{\Delta t}$$

این مشتق نیز به $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ تعلق دارد.

مشتق هر عملگر دقیقاً با مشتق تابع معمولی یکسان است. در واقع، مادام که ترتیب عوامل را حفظ کنیم، تمام قواعد مشتق‌گیری به عملگرها قابل اعمال است، به عنوان مثال،

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{U}\mathbb{T}) = \left(\frac{d\mathbb{U}}{dt}\right)\mathbb{T} + \mathbb{U}\left(\frac{d\mathbb{T}}{dt}\right)$$

مجاز نیستیم ترتیب عوامل ضرب را تغییر دهیم، حتی اگر هر دو عملگر که در هم ضرب می‌شوند یکی باشند. مثلاً اگر در معادله قبل داشته باشیم: $\mathbb{U} = \mathbb{T} = \mathbb{H}$ ، می‌رسیم به

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{H}^2) = \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt}\right)\mathbb{H} + \mathbb{H}\left(\frac{d\mathbb{H}}{dt}\right)$$

که عموماً با $2\mathbb{H}(d\mathbb{H}/dt)$ برابر نیست.

مثال ۲-۳-۹: حال مشتق $e^{t\mathbb{H}}$ را، که در آن \mathbb{H} مستقل از t است، به دست می‌آوریم. با استفاده از تعریف ۲-۳-۱۵، داریم

$$\frac{d}{dt}(e^{t\mathbb{H}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{(t+\Delta t)\mathbb{H}} - e^{t\mathbb{H}}}{\Delta t}$$

اما، به ازای مقادیر بینهایت کوچک Δt :

$$\begin{aligned} e^{(t+\Delta t)\mathbb{H}} - e^{t\mathbb{H}} &= e^{t\mathbb{H}}e^{(\Delta t)\mathbb{H}} - e^{t\mathbb{H}} = e^{t\mathbb{H}}(1 + \mathbb{H}\Delta t) - e^{t\mathbb{H}} \\ &= e^{t\mathbb{H}}\mathbb{H}\Delta t \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tH}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{tH}H\Delta t}{\Delta t} = e^{tH}H$$

چون H و e^{tH} جابه‌جاپذیرند، داریم

$$\frac{d}{dt}(e^{tH}) = He^{tH} = e^{tH}H$$

توجه کنید که در روند استخراج معادله مشتق e^{tH} از رابطه زیر بهره برده‌ایم:

$$e^{tH}e^{(\Delta t)H} = e^{(t+\Delta t)H}$$

ممکن است این رابطه بدیهی به نظر آید، ولی همان‌طور که بعداً نشان خواهیم داد، به‌طور کلی:
 ● $e^{H_1+H_2} \neq e^{H_1}e^{H_2}$ (بهر حال، تمرین ۲-۳-۸ را بنگرید).

حال شکل‌نمایی یک عملگر وابسته به زمان کلی‌تر، $e^{H(t)}$ ، را در نظر بگیرید. از تعریف ۲-۳-۱۵ برای محاسبه مشتق چنین عملگری بهره می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}(e^{H(t)}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{H(t+\Delta t)} - e^{H(t)}}{\Delta t}$$

اگر $H(t)$ دارای مشتق باشد، تا مرتبه اول نسبت به Δt ، داریم

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \Delta t \left(\frac{dH}{dt} \right)$$

و می‌توانیم بنویسیم:

$$e^{H(t+\Delta t)} = e^{H(t) + \Delta t(dH/dt)}$$

فاکتورگیری از $e^{H(t)}$ و بسط جزء باقیمانده خیلی وسوسه‌کننده به نظر می‌رسد. اما، همان‌طور که الان خواهیم دید، به‌طور کلی این کار امکان‌پذیر نیست. به‌عنوان تمرین، مثال زیر را در نظر بگیرید، که به انتگرال‌گیری از یک عملگر ربط پیدا می‌کند.

مثال ۲-۳-۱۰: در فیزیک اغلب با معادلات دیفرانسیل عملگرى، به شکل زیر، مواجه مى‌شویم

$$\frac{dU}{dt} = HU(t)$$

که در آن H به t بستگى ندارد. مى‌توانیم با مشتق‌گیرى متوالى و سپس به کمک بسط سری تیلورى، جواب چنین معادله‌اى را به دست آوریم. به این ترتیب

$$\frac{d^2U}{dt^2} = H \frac{dU}{dt} = H[HU(t)] = H^2U(t)$$

$$\frac{d^3U}{dt^3} = \frac{d}{dt}[H^2U(t)] = H^2 \frac{dU}{dt} = H^3U(t)$$

به‌طورکلى

$$\frac{d^n U}{dt^n} = H^n U(t)$$

با فرض اینکه $U(t)$ در $t = 0$ خوش‌تعریف باشد، روابط بالا مبین این نکته‌اند که تمام مشتقات $U(t)$ نیز در $t = 0$ خوش‌تعریف‌اند. از این‌رو، مى‌توانیم $U(t)$ را حول $t = 0$ بسط دهیم تا برسیم به:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \left(\frac{d^n U}{dt^n} \right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H^n U(0) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tH)^n}{n!} \right) U(0) = e^{tH} U(0) \end{aligned}$$

حال امکان برقرارى تساوى $e^{H_1+H_2} = e^{H_1} e^{H_2}$ را بررسى مى‌کنیم. تعريف مى‌کنیم: $[H_1, H_2] = T$ و فرض مى‌کنیم $[T, H_1] = 0 = [T, H_2]$. در این صورت، عملگر $U(t)$ را که به صورت زیر تعريف مى‌کنیم، در نظر مى‌گیریم

$$U(t) = e^{tH_1} e^{tH_2} e^{-t(H_1+H_2)}$$

از طرفین رابطه فوق مشتق می‌گیریم، و با استفاده از نتیجه مثال ۲-۳-۹ و قاعده ضرب در مشتق‌گیری، داریم

$$\frac{dU}{dt} = \mathbb{H}_l e^{t\mathbb{H}_l} e^{t\mathbb{H}_r} e^{-t(\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r)} + e^{t\mathbb{H}_l} \mathbb{H}_r e^{t\mathbb{H}_r} e^{-t(\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r)} - e^{t\mathbb{H}_l} e^{t\mathbb{H}_r} (\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r) e^{-t(\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r)} \quad (19-2)$$

سه عامل $U(t)$ در تمام جملات وجود دارد؛ اما، در بعضی جملات عملگری وجود دارد که نمی‌توان آن را به راحتی به سمت چپ آورد. می‌توانیم با استفاده از رابطه جابه‌جایی بین \mathbb{H}_l و \mathbb{H}_r ، تا حدی بر این مشکل فائق آییم. مثلاً:

$$e^{t\mathbb{H}_l} \mathbb{H}_r = \mathbb{H}_r e^{t\mathbb{H}_l} + [e^{t\mathbb{H}_l}, \mathbb{H}_r]$$

به‌عنوان یک مسئله خواننده باید نشان دهد که اگر $[\mathbb{H}_l, \mathbb{H}_r] = \mathbb{T}$ ، و اگر \mathbb{T} با \mathbb{H}_l و \mathbb{H}_r جابه‌جاپذیر باشد، در این صورت:

$$[e^{t\mathbb{H}_l}, \mathbb{H}_r] = t\mathbb{T}e^{t\mathbb{H}_l}$$

و بنابراین،

$$e^{t\mathbb{H}_l} \mathbb{H}_r = \mathbb{H}_r e^{t\mathbb{H}_l} + t\mathbb{T}e^{t\mathbb{H}_l}$$

به همین ترتیب، به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$e^{t\mathbb{H}_l} e^{t\mathbb{H}_r} (\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r) = (\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r) e^{t\mathbb{H}_l} e^{t\mathbb{H}_r}$$

با جایگذاری از دو معادله اخیر در (۱۹-۲)، می‌رسیم به:

$$\frac{dU}{dt} = \mathbb{H}_l U(t) + \mathbb{H}_r U(t) + t\mathbb{T}U(t) - (\mathbb{H}_l + \mathbb{H}_r)U(t) = t\mathbb{T}U(t)$$

جواب این معادله عبارت است از (تمرین ۲-۳-۹ را بنگرید):

$$U(t) = e^{(1/2)t^2 \mathbb{T}} U(0) = e^{(1/2)t^2 [\mathbb{H}_l, \mathbb{H}_r]}$$

زیرا از تعریف $U(t)$ و $T = [H_1, H_2]$ داریم: $U(0) = 1$. با در نظر گرفتن تعریف $U(t)$ ، داریم

$$e^{tH_1} e^{tH_2} e^{-t(H_1+H_2)} = e^{(1/2)t^2[H_1, H_2]}$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$e^{tH_1} e^{tH_2} e^{-(1/2)t^2[H_1, H_2]} = e^{t(H_1+H_2)} \quad (20-2)$$

به ازای $t = 1$ ، معادله (20-2) می‌دهد:

$$e^{H_1+H_2} = e^{H_1} e^{H_2} e^{-(1/2)[H_1, H_2]}$$

این نتیجه در گزاره زیر خلاصه شده است:

گزاره ۲-۳-۱۶: فرض کنید $H_1, H_2 \in \mathcal{L}(V)$. اگر

$$[H_1, [H_1, H_2]] = 0 = [H_2, [H_1, H_2]]$$

در این صورت

$$e^{H_1+H_2} = e^{H_1} e^{H_2} e^{-(1/2)[H_1, H_2]}$$

در حالت خاص:

$$e^{H_1+H_2} = e^{H_1} e^{H_2} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad [H_1, H_2] = 0$$

می‌توانیم با بهره‌گیری از گزاره ۲-۳-۱۶ مسئله یافتن مشتق $e^{H(t)}$ را به پایان برسانیم. فرض می‌کنیم (و این فرض تقریباً در تمام حالت‌های فیزیکی درست است) که هم $H(t)$ و هم dH/dt محتوای این گزاره، حالت خاص یک نتیجه کلی‌تر، موسوم به فرمول بیکرکمیل-هاسدورف است و در نظریه گروه لی اثبات می‌شود. برای بحث بیشتر (Varadarajan (1984) را بنگرید.

با $[\mathbb{H}, d\mathbb{H}/dt]$ جابه‌جاپذیر باشند. ولی فرض نمی‌کنیم که \mathbb{H} و $d\mathbb{H}/dt$ جابه‌جاپذیر باشند. با قرار دادن $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(t)$ و $\mathbb{H}_2 = \Delta t(d\mathbb{H}/dt)$ می‌رسیم به

$$e^{\mathbb{H}(t+\Delta t)} = e^{\mathbb{H}(t)} e^{\Delta t(d\mathbb{H}/dt)} e^{-(1/2)[\mathbb{H}(t), \Delta t(d\mathbb{H}/dt)]}$$

به‌ازای مقادیر بینهایت کوچک Δt ، رابطه بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} e^{\mathbb{H}(t+\Delta t)} &= e^{\mathbb{H}(t)} \left(1 + \Delta t \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt} \right) \right) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta t \left[\mathbb{H}(t), \frac{d\mathbb{H}}{dt} \right] \right) \\ &= e^{\mathbb{H}(t)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \Delta t \left[\mathbb{H}, \frac{d\mathbb{H}}{dt} \right] + \Delta t \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt} \right) \right\} \end{aligned}$$

و داریم

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbb{H}(t)}) = e^{\mathbb{H}} \frac{d\mathbb{H}}{dt} - \frac{1}{2} e^{\mathbb{H}} \left[\mathbb{H}, \frac{d\mathbb{H}}{dt} \right]$$

نیز، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} e^{\mathbb{H}(t+\Delta t)} &= e^{\mathbb{H}(t) + \Delta t(d\mathbb{H}/dt)} = e^{\Delta t(d\mathbb{H}/dt) + \mathbb{H}(t)} \\ &= e^{\Delta t(d\mathbb{H}/dt)} e^{\mathbb{H}(t)} e^{-(1/2)[\Delta t(d\mathbb{H}/dt), \mathbb{H}(t)]} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbb{H}(t)}) = \frac{d\mathbb{H}}{dt} e^{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} e^{\mathbb{H}} \left[\mathbb{H}(t), \frac{d\mathbb{H}}{dt} \right]$$

با جمع کردن دو عبارت مربوط به مشتق $e^{\mathbb{H}(t)}$ و تقسیم کردن حاصل بر عدد ۲، عبارت متقارن زیر برای مشتق به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbb{H}(t)}) = \frac{1}{2} \left(e^{\mathbb{H}} \frac{d\mathbb{H}}{dt} + \frac{d\mathbb{H}}{dt} e^{\mathbb{H}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ e^{\mathbb{H}}, \frac{d\mathbb{H}}{dt} \right\}$$

که در آن

$$\{T_1, T_2\} \equiv T_1 T_2 + T_2 T_1$$

۱۶۸ فضا‌های برداری متناهی-بعدها: بردارها و عملگرها

پادجاب‌جاگر عملگرهای T_1 و T_2 نامیده می‌شود.
از این رو به گزاره زیر می‌رسیم:

گزاره ۲-۳-۱۷: فرض کنید $\mathcal{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ و

$$[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, d\mathcal{H}/dt]] = 0 = [d\mathcal{H}/dt, [\mathcal{H}, d\mathcal{H}/dt]]$$

در این صورت

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathcal{H}(t)}) = \frac{1}{2} \left\{ e^{\mathcal{H}(t)}, \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right\}$$

در حالت خاص، اگر $[\mathcal{H}, d\mathcal{H}/dt] = 0$ پس

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathcal{H}(t)}) = \left(\frac{d\mathcal{H}}{dt} \right) e^{\mathcal{H}(t)} = e^{\mathcal{H}(t)} \left(\frac{d\mathcal{H}}{dt} \right)$$

این بخش را با چند مثال دیگر از کاربرد مشتق، به پایان می‌بریم.

مثال ۲-۳-۱۱: عملگر زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{F}(t) = e^{t\mathbb{A}}\mathbb{B}e^{-t\mathbb{A}}$$

که در آن \mathbb{A} و \mathbb{B} عملگرهای وابسته به t در \mathcal{V} هستند. به آسانی می‌توان نشان داد که (اثبات، به عنوان مسئله بر عهده خواننده واگذار می‌شود):

$$\frac{d\mathbb{F}}{dt} = [\mathbb{A}, \mathbb{F}(t)] \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}[\mathbb{A}, \mathbb{F}(t)] = \left[\mathbb{A}, \frac{d\mathbb{F}}{dt} \right]$$

با استفاده از این نتایج، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d^y \mathbb{F}}{dt^y} = \frac{d}{dt}[\mathbb{A}, \mathbb{F}(t)] = [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{F}(t)]] \equiv \mathbb{A}^y[\mathbb{F}(t)]$$

و به‌طور کلی

$$\frac{d^n \mathbb{F}}{dt^n} = \mathbb{A}^n[\mathbb{F}(t)]$$

که در آن $A^n[F(t)]$ به طور استقرایی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^n[F(t)] \equiv [A, A^{n-1}[F(t)]]$$

که در آن $A^0[F(t)] \equiv F(t)$ مثلاً

$$A^r[F(t)] \equiv [A, A^r[F(t)]] = [A[A, A[F(t)]]]$$

$$= [A, [A, [A, F(t)]]]$$

با محاسبه $F(t)$ و تمام مشتقات آن در $t = 0$ و قرار دادن در بسط تیلور حول $t = 0$

می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n F}{dt^n} \right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[F(0)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[B] \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} e^{tA} B e^{-tA} &= B + t[A, B] + \frac{t^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n[B] \end{aligned}$$

گاهی رابطه بالا را به صورت نمادی به شکل زیر می‌نویسند

$$e^{tA} B e^{-tA} \equiv \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) [B] \equiv (e^{tA}) [B]$$

که در آن، سمت راست صرفاً تعریفی برای جمع نامتناهی سمت چپ است.

به‌ازای $t = 1$ ، به فرمولی با کاربرد فراوان دست پیدا می‌کنیم:

$$\bullet \quad e^A B e^{-A} = e^A [B] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n [B] = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

مثال ۲-۳-۱۲: اگر A در مثال ۲-۳-۱۱ با $[A, B]$ جابه‌جاپذیر باشد، در این صورت سری در جمله دوم خاتمه می‌یابد، و داریم

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B]$$

به‌عنوان مثال، اگر A و B به‌ترتیب با D و T در مثال ۲-۳-۲ جایگزین شوند، می‌رسیم به

$$e^{tD} T e^{-tD} = T + t[D, T] = T + t \mathbb{1} \equiv T + t$$

که نشان می‌دهد عملگر T به اندازه t انتقال یافته است. از این رو e^{tD} را عملگر انتقال T به اندازه t ، و D را مولد انتقال می‌نامیم.

با کمی تغییر، T و D به‌ترتیب عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوانتومی می‌شوند. بنابراین، تکانه به‌عنوان مولد انتقال در مکانیک کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. ●

۲-۳-۴ مزدوج کردن عملگرها

مفهوم دوگانه بردار در ارتباط با ضرب داخلی مورد بحث قرار گرفت. اکنون عملگرهای خطی را وارد این مفهوم می‌کنیم، فرض کنید $|c\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ و $\langle c| = \mathbb{T}|b\rangle$. می‌دانیم که توابعی خطی در فضای دوگان \mathcal{V}^* وجود دارند که به $|b\rangle$ و $\langle c|$ وابسته‌اند؛ این توابع عبارت‌اند از $\langle b| \rangle^\dagger$ و $\langle c| \rangle^\dagger = \langle c|$. سؤالی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا عملگری خطی متعلق به $\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)$ وجود دارد که به‌نحوی با \mathbb{T} متناظر باشد؟ به بیان دیگر، آیا می‌توانیم یک عملگر خطی بیابیم که $|b\rangle$ را به $\langle c|$ مربوط کند؟ درست همان‌طور که \mathbb{T} ، $|b\rangle$ را به $\langle c|$ مرتبط می‌کرد؛ پاسخ به این پرسشها به شکل یک تعریف می‌آید.

تعریف ۲-۳-۱۸: فرض کنید $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ و $|c\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ ، به‌طوری که $\langle c| = \mathbb{T}|b\rangle$. عملگر $\mathbb{T}^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*)$ ، که الحاقی یا مزدوج هرمیتی \mathbb{T} نامیده می‌شود، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$\langle c| = \langle b|\mathbb{T}^\dagger \quad (21-2)$$

که در آن $\langle b|$ و $\langle c|$ به‌ترتیب دوگانهای $|b\rangle$ و $|c\rangle$ هستند.

توجه کنید که \mathbb{T}^\dagger (که “تی دگر” خوانده می‌شود) در سمت راست بردار (برا) در فضای دوگان \mathcal{V}^* قرار می‌گیرد. بنابراین، می‌گوییم که \mathbb{T}^\dagger “به‌سمت چپ عمل می‌کند”. لیکن، می‌توانیم \mathbb{T}^\dagger را

به عنوان یک عملگر در $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ نیز در نظر بگیریم، و بنابراین می‌تواند از سمت راست روی کتها عمل کند. معادله (۲-۲۱) برای این تعبیر و تفسیر خیلی مناسب است! در طرف راست معادله، T^\dagger مترصد یک کت است که روی آن عمل کند، درست به همان اندازه که $|c\rangle$ در طرف چپ منتظر یک کت است که با آن منقبض شود. استدلالهای مشابهی ما را به این نکته هدایت می‌کند که T را نه تنها به عنوان یک عملگر در $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ بلکه به صورت یک عملگر در $\mathcal{L}(\mathcal{V})^*$ نیز تعبیر کنیم. بحث بالا وقتی روشن‌تر می‌شود که دو طرف معادله (۲-۲۱) را در یک کت متناظر $|a\rangle$ ضرب کنیم. در این صورت داریم:

$$\langle c|a\rangle = \langle (b|T^\dagger)|a\rangle = \langle b|(T^\dagger|a\rangle) = \langle b|T^\dagger|a\rangle$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 بنا بر تعریف با تفسیر مجدد با رعایت صرفه‌جویی در نوشتن

به همین ترتیب، اگر $\langle c| = T|b\rangle$ را با یک برا، نظیر $|a\rangle$ منقبض کنیم، داریم

$$\langle a|c\rangle = \langle a|(T|b\rangle) = \langle (a|T)|b\rangle = \langle a|T|b\rangle$$

با گرفتن مزدوج مختلط معادله اخیر و یکی گرفتن $\langle c|a\rangle$ با $\langle a|c\rangle^*$ ، می‌رسیم به:

$$\langle a|T|b\rangle^* = \langle b|T^\dagger|a\rangle \quad (22-2)$$

این معادله را گاهی به صورت تعریف مزدوج هرمیتی به کار می‌برند. برخی خواص ترکیب عطفی را در قضیه زیر بیان خواهیم کرد.

قضیه ۲-۳-۱۹: فرض کنید $U, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در این صورت:

$$(U + T)^\dagger = U^\dagger + T^\dagger \quad (\text{الف})$$

$$(UT)^\dagger = T^\dagger U^\dagger \quad (\text{ب}) \quad (\text{به تعبیر در مرتبه توجه کنید!})$$

$$(\alpha T)^\dagger = \alpha^* T^\dagger \quad (\text{ج})$$

$$(T^\dagger)^\dagger = T \quad (\text{د})$$

اثبات. (الف) فرض کنید $|c\rangle = (U + T)|b\rangle = |b_1\rangle + |b_2\rangle$ که در آن $|b_1\rangle = U|b\rangle$

۱۷۲ فضاهای برداری متناهی-بعدها: بردارها و عملگرها

و $\langle b_r | = T|b \rangle$. بنا بر تعریف ترکیب عطفی داریم:

$$\langle c | = \langle b | (U + T)^\dagger = \langle b_l | + \langle b_r |$$

اما:

$$|b_l \rangle = U|b \rangle \Rightarrow \langle b_l | = \langle b | U^\dagger$$

و

$$|b_r \rangle = T|b \rangle \Rightarrow \langle b_r | = \langle b | T^\dagger$$

به این ترتیب

$$\langle b | (U + T)^\dagger = \langle b | U^\dagger + \langle b | T^\dagger = \langle b | (U^\dagger + T^\dagger)$$

این رابطه به ازای تمام مقادیر $|b \rangle$ صادق است. از این رو

$$(U + T)^\dagger = U^\dagger + T^\dagger$$

(ب) فرض کنید $\langle c | = UT|b \rangle = U|b_r \rangle$ در این صورت

$$\langle c | = \langle b_r | U^\dagger = \langle b | T^\dagger U^\dagger$$

از طرف دیگر، بنا به تعریف،

$$\langle c | = \langle b | (UT)^\dagger$$

با مقایسه این دو عبارت برحسب $\langle c |$ ، نتیجه مطلوب به دست می آید.

(ج) فرض کنید $\langle c | = (\alpha T)|b \rangle = T(\alpha|b \rangle) = T|b' \rangle$ در این صورت

$$\langle c | = \langle b' | T^\dagger$$

از معادله (۱۱-۲)، داریم $\langle b' | = \alpha^* \langle b |$ ؛ بنابراین، معادله قبلی به صورت زیر درمی آید

$$\langle c | = \alpha^* \langle b | T^\dagger = \langle b | (\alpha^* T^\dagger)$$

از سوی دیگر،

$$\langle c | = \langle b | (\alpha T)^\dagger$$

مقایسه این دو معادله اخیر، اتحاد مطلوب را به دست می دهد.
(د) معادله (۲۲-۲) را، به صورت زیر، دوبار به کار می بریم:

$$\langle a | T | b \rangle = (\langle a | T | b \rangle)^*{}^* = (\langle b | T^\dagger | a \rangle)^* = \langle a | (T^\dagger)^\dagger | b \rangle$$

چون این رابطه به ازای تمام مقادیر $|a\rangle$ و $|b\rangle$ صادق است، اتحاد دو عملگر باید برقرار باشد. ■
مفاهیم بالا را می توان با چند مثال ساده روشن کرد.

مثال ۲-۳-۱۳: در مثالهای قبل که با عملگرهای خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ سروکار داشتیم، یک عنصر \mathbb{R}^n توسط یک بردار سطری نظیر (x, y) برای \mathbb{R}^2 و (x, y, z) برای \mathbb{R}^3 ، نشان داده می شد. هیچ ابهامی وجود نداشت، زیرا فقط در \mathcal{V} عمل می کردیم. لیکن، از آنجا که وقتی T و T^\dagger را مورد بحث قرار می دهیم، عناصر \mathcal{V} و \mathcal{V}^* هر دو لازم اند، بهتر است بین آنها تفاوت قائل شویم. از این رو، به قراردادی که در مثال ۲-۲-۱ معرفی کردیم، و بر طبق آن کتها توسط بردارهای ستونی و براهها توسط بردارهای سطری نمایش داده می شوند، متوسل می شویم.
بنابراین، $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را که به صورت زیر داده می شود، در نظر بگیرید

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

سعی می کنیم عبارت مشابهی برای T^\dagger وقتی روی یک بردار در \mathcal{V} عمل می کند بیابیم. عمل T^\dagger روی \mathcal{V}^* به سادگی از رابطه بالا به دست می آید

$$(x \ y) T^\dagger = (x + y \ x - y)$$

که هیچ اطلاعاتی درباره T^\dagger ، به عنوان عضوی از $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، در بر ندارد.

۱. این اتحاد، به طور کلی، برای فضاهای برداری نامتناهی، به در برقرار نیست.

برای یافتن چنین عبارتی، از معادله (۲۲-۲) استفاده می‌کنیم، با توجه به این نکته که اسکالرها در اینجا حقیقی‌اند. بنابراین، فرض کنید:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

در این صورت:

$$\langle a|T|b\rangle = \langle a|T|b\rangle^* = (x_1 \quad y_1)T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad y_1) \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

چون همه چیز
حقیقی است

بنابه تعریف T

$$= x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 - y_1y_2 = x_2(x_1 + y_1) + y_2(x_1 - y_1)$$

$$= (x_2 \quad y_2) \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} = \langle b|T^\dagger|a\rangle$$

بنابه معادله (۲۲-۲)

$$= (x_2 \quad y_2)T^\dagger \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

تساوی آخر به‌ازای همه مقادیر (x_2, y_2) برقرار است. از این رو، داریم

$$T^\dagger \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}$$

یا، به‌طور کلی

$$T^\dagger \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

توجه کنید که در این حالت:

$$T^\dagger = T$$

اما، همان‌طوری که در مثال بعد نشان می‌دهیم، همیشه هم این‌طور نیست.

مثال ۲-۳-۱۴: حال فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر داده شده باشد

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

برای یافتن T^\dagger همان مراحل مثال قبلی را طی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle a | T | b \rangle &= (x_1 \quad y_1) T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad y_1) \begin{pmatrix} 2x_2 - y_2 \\ x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1x_2 - x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2 = x_2(2x_1 + y_1) + y_2(-x_1 + 2y_1) \\ &= (x_2 \quad y_2) \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 \\ -x_1 + 2y_1 \end{pmatrix} \equiv (x_2 \quad y_2) T^\dagger \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین، داریم

$$T^\dagger \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

که مسلماً با T متفاوت است

مثال ۲-۳-۱۵: حال عملگری اندکی پیچیده‌تر، $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ، را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر داده شده است

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 \\ i\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

فرض کنید

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

که بردارهای دوگان آنها به ترتیب عبارت‌اند از $\langle a| = (\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_3^*)$ و $\langle b| = (\beta_1^* \beta_2^* \beta_3^*)$.

با استفاده از (۲۲-۲)، T^\dagger را پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} \langle a|T|b\rangle^* &= \left[(\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \alpha_3^*) T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right]^* = \left[(\alpha_1^* \ \alpha_2^* \ \alpha_3^*) \begin{pmatrix} \beta_1 - i\beta_2 + \beta_3 \\ i\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 + i\beta_3 \end{pmatrix} \right]^* \\ &= [\alpha_1^* \beta_1 - i\alpha_1^* \beta_2 + \alpha_1^* \beta_3 + i\alpha_2^* \beta_1 - \alpha_2^* \beta_2 + \alpha_2^* \beta_3 - \alpha_2^* \beta_2 + i\alpha_2^* \beta_3]^* \\ &= \alpha_1 \beta_1^* + i\alpha_1 \beta_2^* + \alpha_1 \beta_3^* - i\alpha_2 \beta_1^* - \alpha_2 \beta_2^* + \alpha_2 \beta_3^* - \alpha_2 \beta_2^* - i\alpha_2 \beta_3^* \\ &= \beta_1^* (\alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3) + \beta_2^* (i\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_3^* (\alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3) \\ &= (\beta_1^* \ \beta_2^* \ \beta_3^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3 \end{pmatrix} = \langle b|T^\dagger|a\rangle \end{aligned}$$

↑
بنابر معادله (۲۲-۲)

از این رو داریم:

$$T^\dagger \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - i\alpha_3 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که $T^\dagger \neq T$

عملگرهای هرمیتی و یکانی. فرایند مزدوج کردن برای عملگرهای خطی خیلی شبیه مزدوج مختلط کردن اعداد مختلط است. این مطلب از معادله (۲۲-۲) و همچنین از بندهای (ج) و (د) در قضیه (۲-۳-۱۹) روشن است. بنابراین، طبیعی است که به دنبال عملگرهای حقیقی باشیم. تعریف زیر، به طور کامل با این واقعیت مشابه است که اعداد حقیقی به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط، با خاصیت $z = z^*$ هستند.

تعریف ۲-۳-۲۰: عملگر خطی $H \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ هرمیتی نامیده می‌شود اگر $H^\dagger = H$. به همین ترتیب، $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ پادهرمیتی است اگر $A^\dagger = -A$.

اگر قاعده تناظر عبارت باشد از $* \leftrightarrow \dagger$ ، عملگرهای هرمیتی با اعداد حقیقی متناظرند. در این صورت عملگرهای پادهرمیتی با چه چیزی متناظرند؟ مثال ۲-۳-۱۷ و تمرین ۲-۳-۱۰ پاسخ این سؤال را می‌دهند.

مثال ۲-۳-۱۶: ارزش انتظاری یک عملگر A در (حالت) $|a\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle A \rangle \equiv \langle a|A|a \rangle$$

به طور کلی مزدوج مختلط ارزش انتظاری عبارت است از:

$$\langle A \rangle^* = \langle a|A|a \rangle^* = \langle a|A^\dagger|a \rangle$$

در حالت خاص، اگر H یک عملگر هرمیتی باشد، در این صورت

$$\langle H \rangle^* = \langle a|H^\dagger|a \rangle = \langle a|H|a \rangle = \langle H \rangle$$

● که بر حقیقی بودن $\langle H \rangle$ دلالت می‌کند.

مثال ۲-۳-۱۷: هر عملگر پادهرمیتی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = iH$$

که در آن H یک عملگر هرمیتی است. در واقع، با گرفتن عملگر الحاقی از طرفین و استفاده از قضیه ۲-۳-۱۹، می‌رسیم به

$$A^\dagger = (iH)^\dagger = (i)^* H^\dagger = -iH = -A$$

● این رابطه نشان می‌دهد که اگر A پادهرمیتی باشد، در این صورت iA هرمیتی است.

مثال ۲-۳-۱۸: اگر A و B هر دو هرمیتی باشند، در این صورت، به طور کلی، AB هرمیتی نیست. زیرا

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \neq AB$$

لیکن اگر A و B جابه‌جاپذیر باشند، در این صورت هرمیتی بودن آنها حاکی از هرمیتی بودن حاصلضرب AB است.

در فصل اول دیدیم که دورانهای صلب حاصلضرب اسکالر را بدون تغییر می‌گذارند و مشاهده کردیم که چنین عملهایی با ماتریسهای متعامد نمایش داده می‌شوند. چه نوع تعمیمی از آن نتایج، در صورت وجود، برای فضاهای برداری دلخواه ممکن است؟

فرض کنید $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ ، و فرض کنید $U \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ عملگری باشد که ضرب اسکالر را حفظ می‌کند؛ یعنی، اگر $|b'\rangle = U|b\rangle$ و $|a'\rangle = U|a\rangle$ ، در این صورت $\langle a'|b'\rangle = \langle a|b\rangle$. با استفاده از معادله (۲۱-۲) برای $|a'\rangle$ ، می‌رسیم به:

$$\langle a'|b'\rangle = (\langle a|U^\dagger)(U|b\rangle) = \langle a|U^\dagger U|b\rangle = \langle a|b\rangle$$

چون این رابطه به‌ازای هر $|a\rangle$ و $|b\rangle$ دلخواهی صادق است، می‌رسیم به:

$$U^\dagger U = 1$$

با استفاده از نتیجه مسئله ۲-۲۳، پی می‌بریم که اگر $\dim \mathcal{V}$ متناهی باشد، U وارون‌پذیر، و از این رو وارون منحصر به فرد (یکتای) آن U^\dagger است. آنچه تاکنون عنوان کردیم، به صورت قضیه زیر جمع‌بندی می‌شود:

قضیه ۲-۳-۲۱: شرط لازم و کافی برای اینکه عملگر $U \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، که در آن $\dim \mathcal{V}$ متناهی است، ضرب داخلی را بدون تغییر بگذارد، به این قرار است:

$$U^\dagger = U^{-1}$$

عملگرهای خطی که معادله (۲۳-۲) برای آنها برقرار باشد، تبدیلات یکانی یا، به طور کلی‌تر، طولیایی (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

مثال ۲-۳-۱۹: تبدیل خطی $\mathbb{T}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbb{T} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - i\alpha_2)/\sqrt{2} \\ (\alpha_1 + i\alpha_2 - 2\alpha_3)/\sqrt{6} \\ [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

حال نشان می‌دهیم که \mathbb{T} یکانی است.
فرض کنید

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

با دوگانهای $\langle a| = (\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_3^*)$ و $\langle b| = (\beta_1^* \beta_2^* \beta_3^*)$ با استفاده از معادله (۲۲-۲)، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \langle a|\mathbb{T}|b\rangle^* &= \left[(\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_3^*) \mathbb{T} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right]^* \\ &= \left[(\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_3^*) \begin{pmatrix} (\beta_1 - i\beta_2)/\sqrt{2} \\ (\beta_1 + i\beta_2 - 2\beta_3)/\sqrt{6} \\ [\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)]/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right]^* \\ &= \left[\frac{\alpha_1^* \beta_1 - i\alpha_2^* \beta_2}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2^* \beta_1 + i\alpha_2^* \beta_2 - 2\alpha_3^* \beta_3}{\sqrt{6}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_3^* (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3) + i\alpha_3^* (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{\sqrt{6}} \right]^* \\ &= \beta_1^* \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \right) + \beta_2^* \left(\frac{i\alpha_1}{\sqrt{2}} - \frac{i\alpha_2}{\sqrt{6}} - \frac{\alpha_3(1+i)}{\sqrt{6}} \right) \\ &\quad + \beta_3^* \left(-\frac{2\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \right) \\ &= (\beta_1^* \beta_2^* \beta_3^*) \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \\ \frac{i\alpha_1}{\sqrt{2}} - \frac{i\alpha_2}{\sqrt{6}} - \frac{\alpha_3(1+i)}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \langle b|\mathbb{T}^\dagger|a\rangle \end{aligned}$$

بنابراین:

$$T^{\dagger} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \\ \frac{i\alpha_1}{\sqrt{2}} - \frac{i\alpha_2}{\sqrt{6}} - \frac{\alpha_3(1+i)}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2\alpha_2}{\sqrt{6}} + \frac{\alpha_3(1-i)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

و می‌توانیم ثابت کنیم که

$$TT^{\dagger} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

بنابراین $TT^{\dagger} = 1$. به همین ترتیب، می‌توانیم نشان دهیم که $T^{\dagger}T = 1$ و از این‌رو، T یکانی است.

عملگرهای تصویری. قبلاً زیرفضاها را به‌طور مختصر بررسی کردیم. اهمیت زیرفضاها در این است که اغلب پدیده‌های فیزیکی، نه در تمام فضای برداری موجود، بلکه در یکی از زیرفضاهای آن اتفاق می‌افتد. به‌عنوان مثال، با وجودی که عموماً حرکت در فضای سه‌بعدی اتفاق می‌افتد، ممکن است یا به‌خاطر قیدهای اعمال شده، یا به‌خاطر ماهیت نیروی عامل حرکت، حرکت مورد نظر به یک صفحه محدود شود. یک نمونه از آنها را می‌توان حرکت سیاره‌ای دانست.

از این‌رو، خوب است که ببینیم، چگونه می‌توانیم، در بحث عملگرهای خطی، از فضای کل به یکی از زیرفضاهای آن برویم. ابتدا یک مثال ساده در نظر می‌گیریم. یک نقطه در صفحه توسط مختصات (x, y) مشخص می‌شود. یکی از زیرفضاهای صفحه، محور x است. آیا عملگری مانند \mathbb{P} وجود دارد که وقتی روی چنین نقطه‌ای عمل می‌کند، به‌طریقی آن را به این زیرفضا منتقل کند؟ البته، عملگرهای زیادی از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R} وجود دارند. اما، ما به دنبال یک عملگر به‌خصوص هستیم. می‌خواهیم \mathbb{P} نقطه را روی محور x تصویر کند. چنین عملگری باید روی (x, y) عمل و $(x, 0)$ را ایجاد کند:

$$\mathbb{P}(x, y) = (x, 0)$$

این عملگر، عملگر تصویری نامیده می‌شود. توجه کنید که اگر نقطه قبلاً روی محور x ها واقع باشد، \mathbb{P} آن را تغییر نمی‌دهد؛ یعنی \mathbb{P} مانند یک عملگر واحد روی آن عمل می‌کند. به خصوص، اگر \mathbb{P} را دوبار اعمال کنیم، همان نتیجه‌ای را به دست خواهیم آورد که اگر یک بار اعمال می‌کردیم. و این موضوع برای هر نقطه در صفحه صادق است. از این رو، برای عملگر تصویر داریم

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$$

می‌توانیم بحث بالا را در قالب یک تعریف، تعمیم دهیم.

تعریف ۲-۳-۲۲: یک عملگر هرمیتی $\mathbb{P} \in \mathcal{L}(V)$ عملگر تصویر نامیده می‌شود اگر:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \quad (24-2)$$

از این تعریف، بلافاصله نتیجه می‌شود که تنها عملگر تصویر با یک وارون، عملگر همانی است. با ضرب طرفین (۲۴-۲) در \mathbb{P}^{-1} می‌رسیم به:

$$\mathbb{P}^2 \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P} \mathbb{P}^{-1} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{P} \mathbb{P}^{-1}) = \mathbb{P} \mathbb{P}^{-1}$$

یا

$$\mathbb{P} \mathbb{1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{1}$$

فرض می‌کنیم عملگرهای تصویر وارون‌پذیر نیستند، بنابراین با $\mathbb{1}$ مختلف‌اند. دو عملگر تصویر \mathbb{P}_1 و \mathbb{P}_2 را در نظر بگیرید. می‌خواهیم شرط آن را که $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$ یک عملگر تصویر باشد، بررسی می‌کنیم. بنا به تعریف

$$(\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2)^2 = \mathbb{P}_1^2 + \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2^2 = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1$$

لذا $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$ یک عملگر تصویر است، اگر و فقط اگر

$$\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = 0 \quad (25-2)$$

طرفین را از چپ در \mathbb{P}_1 ضرب می‌کنیم، می‌رسیم به:

$$\mathbb{P}_1' \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0}$$

و با ضرب طرفین رابطه (۲۵-۲) از راست در \mathbb{P}_1 داریم

$$\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0}$$

از این دو معادله اخیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0} \quad (۲۶-۲)$$

جواب (۲۵-۲) و (۲۶-۲) عبارت است از

$$\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0}$$

بنابراین، به گزاره زیر می‌رسیم:

گزاره ۲-۳-۲۳: فرض کنید $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ عملگرهای تصویر باشند. در این صورت $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$ یک عملگر تصویر است اگر و فقط اگر $\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 = \mathbf{0}$. عملگرهایی را که در این شرط صدق می‌کنند، عملگرهای متعامد می‌گویند.

به بیان کلی‌تر، اگر یک مجموعه $\{\mathbb{P}_i\}_{i=1}^N$ از عملگرهای تصویر در رابطه زیر صدق کند،

$$\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \begin{cases} \mathbb{P}_i & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

در این صورت $\mathbb{P} = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i$ نیز یک عملگر تصویر است.

یک الگوی عملگر تصویر، برحسب بردار بهنجار $|e_1\rangle$ ، به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbb{P} = |e_1\rangle \langle e_1|$$

بدیهی است که \mathbb{P} هرمیتی است

$$\mathbb{P}^\dagger = (|e_1\rangle \langle e_1|)^\dagger = |e_1\rangle \langle e_1|$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &= (|e_1\rangle\langle e_1|)(|e_1\rangle\langle e_1|) = |e_1\rangle \underbrace{\langle e_1|e_1\rangle}_{=1} \langle e_1| \\ &= |e_1\rangle\langle e_1| = \mathbb{P} \end{aligned}$$

در واقع، می‌توانیم یک پایه راست‌هنجار $\mathbf{B} = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ را در نظر بگیریم و یک مجموعه عملگر تصویر $\{\mathbb{P}_i = |e_i\rangle\langle e_i|\}_{i=1}^N$ بسازیم. عملگرهای \mathbb{P}_i دوه‌دو بر هم عمودند. بنابراین، جمع آنها، $\sum_{i=1}^N |e_i\rangle\langle e_i|$ ، نیز یک عملگر تصویر است، عملگری که چندان خاص است که در یک گزاره وارد و معرفی می‌شود.

گزاره ۲-۳-۲۴: فرض کنید $\mathbf{B} = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه راست‌هنجار برای \mathcal{V}_N باشد. در این صورت، مجموعه $\{\mathbb{P}_i = |e_i\rangle\langle e_i|\}_{i=1}^N$ از عملگرهای تصویری دوه‌دو متعامد تشکیل شده است و داریم

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i = \sum_{i=1}^N |e_i\rangle\langle e_i| = \mathbf{1}$$

این رابطه را رابطهٔ تعامیت می‌نامند.

اثبات. تعامد دوه‌دوی \mathbb{P}_i ها نتیجهٔ مستقیمی از راست‌هنجاری $|e_i\rangle$ ها است. برای اثبات این گزاره نشان می‌دهیم که دو طرف تساوی، وقتی روی هر بردار دلخواهی عمل کنند، منجر به یک بردار می‌شوند. یک بردار دلخواه $|a\rangle$ را که برحسب $|e_i\rangle$ ها نوشته شده است، در نظر بگیرید.

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j |e_j\rangle$$

\mathbb{P}_i را به $|a\rangle$ اعمال می‌کنیم و می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i |a\rangle &= \mathbb{P}_i \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j |e_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbb{P}_i |e_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j |e_i\rangle \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \alpha_i |e_i\rangle \end{aligned}$$

از این رو، به ازای هر بردار دلخواه $|a\rangle$ ، داریم:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i |a\rangle = \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i \right) |a\rangle$$

اگر به جای کل پایه، فقط m بردار اول ($m < N$) را اختیار کنیم، در این صورت عملگر تصویر $\mathbb{P}_m \equiv \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i|$ ، هر بردار دلخواهی را به زیرفضای پدید آمده توسط m بردار $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ ، تصویر می‌کند. به عبارت دیگر، اگر \mathbb{P}_m روی بردار $|a\rangle$ متعلق به \mathcal{V} عمل کند، نتیجه یک ترکیب خطی از m بردار اول خواهد بود. اثبات این مطلب، که آسان هم هست، به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

نکات بالا طی مثال زیر تشریح می‌شوند.

مثال ۲-۳-۲: سه بردار راست‌هنجار $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$ را که به صورت زیر داده شده‌اند، در نظر بگیرید

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

عملگرهای تصویر وابسته به هر یک از این بردارها را می‌توان با توجه به این نکته به دست آورد که $|e_i\rangle$ یک بردار سطری است. از این رو

$$\mathbb{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1 \ 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & & \\ \text{یک ماتریس} & & \\ 1 \times 3 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس 3×1

به همین ترتیب،

$$\mathbb{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ -1 \ 2) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_r = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که \mathbb{P}_i روی خطی در امتداد $|e_i\rangle$ تصویر می‌شود. این معنا را می‌توان به این طریق آزمود که \mathbb{P}_i را بر یک بردار دلخواه اعمال کنیم و نشان دهیم که بردار حاصل بر دو بردار دیگر عمود است. مثلاً فرض کنید \mathbb{P}_r روی یک بردار ستونی دلخواه (x, y, z) عمل کند:

$$|a\rangle \equiv \mathbb{P}_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x + y - 2z \\ 2x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

نشان می‌دهیم که $|a\rangle$ هم بر $|e_1\rangle$ و هم بر $|e_2\rangle$ عمود است:

$$\langle e_1 | a \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1 \ 0) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x + y - 2z \\ 2x - 2y + 4z \end{pmatrix} = 0$$

به همین ترتیب

$$\langle e_2 | a \rangle = \frac{1}{6\sqrt{3}} (-1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x + y - 2z \\ 2x - 2y + 4z \end{pmatrix} = 0$$

از این رو، در واقع $|a\rangle$ در امتداد $|e_3\rangle$ واقع است.

می‌توانیم عملگری را بیابیم که روی صفحه‌ی متشکل از $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ ، تصویر کند. این عملگر

عبارت است از

$$\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

وقتی این عملگر بريك بردار ستونی (x, y, z) عمل کند، بردارى پديد مى آورد که در صفحه $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ واقع، يا بر $|e_2\rangle$ عمود است.

$$|b\rangle \equiv (\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

و

$$\langle e_2 | b \rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix} = 0$$

عملگرهائى که روى صفحات حاصل از $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ و همچنين صفحات حاصل از $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$ تصوير مى کنند، به نحو مشابهى به دست مى آيند. بالاخره، به آسانى مى توان نشان داد که

$$\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

تمرینها

۲-۳-۱ قضيه ۲-۳-۲ را اثبات کنید.

۲-۳-۲ فرض کنید \mathcal{V} فضاى بردارى تمام ماتريسهاى 2×2 باشد و فرض کنید $\mathbb{R} = \mathcal{W}$. نشان دهید نگاشت $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ که توسط $F(A) = \det A$ داده مى شود (و در آن A مى تواند هر ماتريس 2×2 باشد) خطى نيست.

۲-۳-۳ با استفاده از استقراء رياضى، نشان دهيد: $[A, A^m] = 0$.

۲-۳-۴ برای \mathbb{D} و \mathbb{T} که در مثال ۲-۳-۲ تعريف شده اند، نشان دهيد $[\mathbb{D}, \mathbb{T}] = \mathbb{1}$.

۲-۳-۵ نشان دهيد اگر $[A, B]$ با A جابه جاپذير باشد، در اين صورت به ازاي هر عدد صحيح مثبت k داريم:

$$[A^k, B] = kA^{k-1}[A, B]$$

از استقراء رياضى استفاده کنید.

۶-۳-۲ نشان دهید برای \mathbb{D} و \mathbb{T} که در مثال ۲-۳-۲ تعریف شده‌اند، داریم:

$$[\mathbb{D}^k, \mathbb{T}] = k\mathbb{D}^{k-1} \quad \text{و} \quad [\mathbb{T}^k, \mathbb{D}] = -k\mathbb{T}^{k-1}$$

۷-۳-۲ مشتق $\mathbb{H}^{-1}(t)$ را محاسبه کنید.

۸-۳-۲ نشان دهید به ازای هر α و β متعلق به \mathbb{R} و هر $\mathbb{H} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، داریم:

$$e^{\alpha\mathbb{H}}e^{\beta\mathbb{H}} = e^{(\alpha+\beta)\mathbb{H}}$$

۹-۳-۲ جواب معادله دیفرانسیل عملگری زیر را بیابید:

$$\frac{dU}{dt} = t\mathbb{H}U(t)$$

۱۰-۳-۲ نشان دهید هر عملگر را می‌توان به صورت مجموع یک عملگر هرمیتی و یک عملگر پادهرمیتی نوشت.

۱۱-۳-۲ فرض کنید $f, g \in C^{(n)}(a, b)$ دارای این خاصیت است:

$$f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$$

نشان دهید برای چنین تابعی، عملگر مشتق \mathbb{D} پادهرمیتی است. ضرب داخلی مطابق معمول تعریف می‌شود:

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f^*(t)g(t)dt$$

۱۲-۳-۲ نشان دهید $U = e^{\mathbb{A}}$ هرمیتی است اگر و فقط اگر \mathbb{A} پادهرمیتی باشد.^۱

۱۳-۳-۲ با استفاده از نمادگذاری مثال ۱-۲-۲، عملگر تصویری \mathbb{P}_a وابسته به بردار

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

۱. اثبات دقیقتری از آنچه در حل این تمرین مورد نظر است، به استفاده از قضیه تجزیه طیفی، که در فصل سوم خواهد آمد، نیازمند است.

را پیدا کنید. نیز نشان دهید که \mathbb{P}_n هر بردار دلخواه در \mathbb{C}^2 را در امتداد $|a\rangle$ تصویر می‌کند.

۲-۳-۱۴ فرض کنید $\mathbb{P}_m = \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i|$ یک عملگر تصویری باشد که از m بردار راست‌هنگار اول پایه $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ وابسته به \mathcal{V} ساخته شده است. نشان دهید \mathbb{P}_m به زیرفضای پدید آمده توسط m بردار اول B ، تصویر می‌کند.

۲-۳-۱۵ طول تصویر بردار $(3, 4, -4)$ روی خط $x = 2t + 1, y = -t + 3, z = t - 1$ چقدر است؟

۲-۳-۱۶ فرض کنید عملگر $U: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ به صورت زیر داده شده باشد

$$U \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_2 \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

نشان دهید U یکانی است. وارون آن، U^\dagger ، را پیدا کنید.

۲-۴ جایگشتها

چند مفهوم مقدماتی مربوط به جایگشتها، در بحث دترمینانها و تانسورها در دو فصل بعدی مورد نیاز خواهد بود. از این رو، این فصل را با مقدمه‌ای دربارهٔ جایگشتها به پایان می‌بریم.

در محتوای نظریهٔ گروهها (مطالعهٔ مجرد تقارن)، جایگشتها احتمالاً قدیمی‌ترین و شناخته شده‌ترین اشیای ریاضی به‌شمار می‌آیند. این اشیاء دارای ساختار نظریهٔ گروهی بسیار غنی‌اند و به‌طور وسیعی در محدوده‌هایی از فیزیک که در آنها نظریهٔ گروه نقش غالبی ایفا می‌کند، به‌کار می‌آیند. در اینجا، جایگشتها را فقط به اندازه‌ای که در بحث دترمینانها و تانسورها لازم است، مورد بحث قرار خواهیم داد. برای این منظور، فقط ساختار نگاهستی (و نه نظریهٔ گروهی) جایگشتها را لازم داریم. بنابراین، با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۲-۴-۱: فرض کنید $A_n \equiv \{a_i\}_{i=1}^n$ معرف مجموعه‌ای از n شیء باشد. جایگشت A_n یک نگاهشت دوسویی روی مجموعه A_n است: $\pi: A_n \rightarrow A_n$.

نظیر تمام نگاهشتهای دوسویی، π دارای یک وارون π^{-1} است که خود نیز یک جایگشت به‌شمار می‌آید.

چون، یک تناظر یک به یک بین A^n و مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ وجود دارد، جایگشتها معمولاً به‌عنوان عملیات روی این اعداد صحیح مورد مطالعه قرار می‌گیرند. بنابراین، $\pi(i)$ تصویر

i تحت جایگشت π است. واضح است که $\pi(i)$ یک عدد از میان $\{1, 2, \dots, n\}$ است. معمولاً مرسوم است که نگاشت π را با شمارش واقعی نشان دهیم زیرا یک مجموعه محدود است. بنابراین، یک جایگشت نوعی به صورت زیر نشان داده می شود

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad (27-2)$$

یعنی، تحت نگاشت π عنصر ۱ با $\pi(1)$ ، عنصر ۲ با $\pi(2)$ و غیره متناظر است. چون این نگاشت دوسویی است، هیچ دو عنصری دارای یک تصویر واحد نیستند، و $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ تمام عناصر $\{1, 2, \dots, n\}$ را دربردارد. بنابراین، جایگشت صرفاً یک جابه جایی عناصر $\{i\}_{i=1}^n$ است. مثلاً، جایگشت

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

عدد ۱ را به ۳ می برد، و می نویسیم $\pi(1) = 3$. به همین ترتیب، $\pi(2) = 4$ ، $\pi(3) = 1$ و $\pi(4) = 2$. به آسانی می توان نشان داد که

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi$$

مجموعه تمام جایگشتهای روی n شیء را با S_n نمایش می دهیم. بدیهی است که اگر $\pi_1 \in S_n$ و $\pi_2 \in S_n$ ، در این صورت ترکیب (ضرب) $\pi_1 \circ \pi_2$ نیز به S_n تعلق خواهد داشت. عمل آن روی هر عدد صحیح برابر است با عملهای متوالی π_1 و π_2 :

$$\pi_2 \circ \pi_1(i) = \pi_2(\pi_1(i))$$

می توانیم با استفاده از معادله (۲۷-۲) این حاصلضرب را نشان دهیم. مثلاً، اگر

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

در این صورت، حاصلضرب با پیمودن مسیرهای مربوطه به دست می‌آید:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

چون با تعداد محدودی عدد سروکار داریم، اعمال متوالی یک جایگشت به هر مجموعه عدد صحیح $\{1, 2, \dots, n\}$ ، در نهایت همان اعداد صحیح اولیه را می‌دهد. این مطلب، ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۲-۴-۲: فرض کنید $\pi \in S_n, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ و فرض کنید r کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای آن داشته باشیم: $\pi^r(i) = (i)$. در این صورت مجموعه r عنصر متمایز $\{i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{r-1}(i)\}$ یک مدار π به طول r نامیده می‌شود.

واضح است که هر جایگشت را می‌توان به مدارهای گسسته تجزیه کرد. با شروع از ۱ و اعمال متوالی π تا اینکه مجدداً ۱ به دست آید، یک مدار تشکیل می‌شود که در آن ۱ (به‌اضافه سایر عناصر) وجود دارد. سپس یک عدد دوم که در این مدار نباشد، اختیار و π را متوالیاً اعمال می‌کنیم تا اینکه آن عدد مجدداً به دست آید. با ادامه کار به این روش، یک مجموعه مدار گسسته به دست می‌آوریم که تمام عناصر $\{1, 2, \dots, n\}$ را دربر می‌گیرند. به این ترتیب، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲-۴-۳: هر جایگشتی می‌تواند به مدارهای گسسته تجزیه شود.

معمولاً متداول است که عناصر هر مدار را به‌ترتیبی خاص در داخل پرانتز بنویسند؛ به این ترتیب که از اولین عنصر، مثلاً شروع می‌کنند، پس بلافاصله در سمت راست آن $\pi(i)$ ، و پس از آن $\pi^2(i)$ و ... را قرار می‌دهند. مثلاً جایگشت π_1 که در بالا مورد بحث قرار گرفت، دارای این ساختار مداری $\pi_1 = (13)(24)$ است، زیرا $\pi_1(1) = 3, \pi_1(3) = 1, \pi_1(2) = 4, \pi_1(4) = 2$ و $\pi_1^2(2) = \pi_1(4) = 2$ به همین ترتیب، $\pi_2 = (124)(3)$ و $\pi_2 \circ \pi_1 = (132)(4)$.

مثال ۲-۴-۱: فرض کنید $\pi_1, \pi_2 \in S_8$ به صورت زیر داده شده باشند:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

در این صورت، $\pi_2 \circ \pi_1$ (به ترتیب آنها توجه کنید) را می توان با دنبال کردن هر عنصری که پس از اعمال متوالی π_1 و π_2 به چه جایی می رود، همان طوری که توسط پیکانها مشخص شده است، پیدا کرد. حاصلضرب عبارت است از

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

حال ساختارهای مداری دو جایگشت و حاصلضرب آنها را پیدا می کنیم. ابتدا با ۱ در داخل هر جایگشت شروع و مدار را دنبال می کنیم، همان طوری که برای π_1 نشان داده شده است:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

این کار منجر می شود به

$$\pi_1 = (1374)(25)(68)$$

به طور مشابه

$$\pi_2 = (125)(36748)$$

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (163442)(5)(78)$$

توجه کنید که در تمام موارد، مدارها هیچ عنصر مشترکی ندارند. این امر از طریقی که مدارها را می‌سازیم نتیجه می‌شود.

به طور کلی، جایگشتها جابه‌جاپذیر نیستند. برای ملاحظه این نکته، $\pi_1 \circ \pi_2$ را در نظر می‌گیریم، حاصل آن عبارت است از:

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 6 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (15387)(2)(46)$$

واضح است که این حاصلضرب با $\pi_2 \circ \pi_1$ متفاوت است. لیکن، توجه کنید که $\pi_2 \circ \pi_1$ و $\pi_1 \circ \pi_2$ ساختار مداری یکسانی دارند، از این جهت که مدارهای با طول مساوی در هر دو ظاهر شده است. این امر، یکی از خاصیت‌های کلی تمام جایگشتهاست و از ساختار نظریه گروهی آنها نتیجه می‌شود.

تعریف ۲-۴-۴: فرض کنید $\pi \in S_n$. اگر π دارای یک مدار به طول r باشد و سایر مدارهای π دارای یک عنصر باشند، در این صورت π یک جایگشت دوره‌ای با طول r نامیده می‌شود. بنابراین، $\pi_r \in S_r$ ، که قبلاً تعریف شد یک جایگشت دوره‌ای با طول r است. به همین ترتیب:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

یک جایگشت دوره‌ای با طول ۴ است (این حکم را ثابت کنید).

یکی از جایگشت‌های مهم به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۴-۵: یک جایگشت دوره‌ای با طول ۲ یک ترانهاد نامیده می‌شود.

ترانهاد (ij) فقط جای دو عدد صحیح i و j را عوض می‌کند. مثال زیر، نشان می‌دهد که چگونه حاصلضربهای دوره‌ها (مدارها) روی $\{1, 2, \dots, n\}$ عمل می‌کنند.

مثال ۲-۴-۲: ضرب دوره‌های $P \in S_6$ را در نظر بگیرید

$$P \equiv (1435)(26)$$

حال باید مشاهده کنیم که به این ضرب چه جایگشتی وابسته است. با شروع از ۱، حاصلضرب

بالا را روی تمام اعداد صحیح (۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱) اعمال و نتیجه را ثبت می‌کنیم:

$$P(۱) = ۰ \quad P(۲) = ۶ \quad P(۳) = ۵ \quad P(۴) = ۳ \quad P(۵) = ۱ \quad P(۶) = ۲$$

دستیابی به این کمیتها از تعریف مدار و این واقعیت روشن می‌شود که تصویر آخرین عضو یک دوره اولین عضو آن است. از این‌رو، جایگشت وابسته به حاصلضرب P عبارت است از

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۶ & ۵ & ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

حاصلضرب دوره‌ها ممکن است گاهی شامل یک عضو مشترک باشد. در آن صورت، ترتیب دوره اهمیت پیدا می‌کند. البته در یک تک جایگشت، دوره‌ها گسسته‌اند. لیکن، در ضرب جایگشتها طی آن جایگشتها به صورت حاصلضرب دوره‌ها نوشته شده است، ممکن است چند دوره (یکی از هر جایگشت) با عناصر مشترک وجود داشته باشند. مثلاً، فرض کنید $\pi_1 \in S_6$ ، به صورت یکی از حاصلضربهای دوره‌ها به صورت زیر داده شده باشد

$$\pi_1 = (۱۴۳)(۲۴)(۴۵۶)$$

می‌خواهیم π_1 را به روش متداول نشان دهیم. ابتدا با ۱ شروع می‌کنیم و آنگاه عمل دوره‌ها با شروع از سمت راست، روی آن را پی می‌گیریم. دوره‌های اول و دوم ۱ را تنها می‌گذارند، و آخرین دوره ۱ را به ۴ می‌برد. به این ترتیب، $\pi_1(۱) = ۴$. برای ۲ توجه کنید که اولین دوره آن را تنها می‌گذارد، دوره دوم آن را به ۴ می‌برد و آخرین دوره ۴ را به ۳ می‌برد. بنابراین $\pi_1(۲) = ۳$. به همین ترتیب، $\pi_1(۳) = ۱$ ، $\pi_1(۴) = ۵$ ، $\pi_1(۵) = ۶$ ، $\pi_1(۶) = ۲$. بنابراین،

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۵ & ۶ & ۲ \end{pmatrix}$$

توجه کنید که π_1 یک جایگشت دوره‌ای با طول ۶ است. (مدار را از نقطه شروع ۱ تعقیب کنید!) به عنوان تمرین به عهده دانشجویان می‌گذاریم که نشان دهد جایگشت $\pi_2 \in S_5$ که توسط حاصلضرب زیر داده می‌شود

$$\pi_2 = (۱۳)(۱۵)(۱۲)(۱۴)$$

عبارت است از

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

که ساختار دوره‌ای آن به این قرار است

$$\pi_2 = (14253)$$

یعنی، این جایگشت دوره‌ای است.

یک دوره با طول ۱، نظیر (i) را می‌توان به صورت زیر به صورت حاصلضرب ترانهشها نوشت

$$(i) = (ij)(ij) \equiv [(ij)]^2$$

که در آن j یک عنصر دلخواه از $\{1, 2, \dots, n\}$ است. بدیهی است که این تجزیه منحصر به فرد نیست. در واقع، حاصلضرب هر ترانهش در خودش عنصر همانی است. از این رو، می‌توانیم چنین حاصلضربهایی از هر ضرب جایگشتها وارد کنیم، بدون اینکه چیزی تغییر کند.

گزارهٔ ۲-۴-۶: مداری به طول r ، (i_1, i_2, \dots, i_r) ، را می‌توان به صورت زیر به حاصلضرب $(r-1)$ ترانهش تجزیه کرد:

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$$

اثبات این گزاره به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

با وجودی که تجزیه‌ای نظیر تجزیه گزارهٔ ۲-۴-۶ منحصر به فرد نیست، می‌توان نشان داد که اگر $r-1$ ، تعداد ترانهشها در تجزیهٔ زوج (فرد) باشد، در این صورت هر تجزیهٔ دیگری نیز باید زوج (فرد) باشد. به عنوان مثال، به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$\begin{aligned} (1234) &= (14)(13)(12) = (21)(24)(23) \\ &= (14)(13)(12) \underbrace{(34)(34)}_1 \underbrace{(23)(12)(12)}_1 (23) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_1 \end{aligned}$$

یعنی، (۱۲۳۴) به صورت حاصلضرب ۳ یا ۹ ترانهش نوشته شده است، که دو تا از آنها فردند. قبلاً دیدیم که هر جایگشتی می تواند به صورت یک حاصلضرب از دوره ها نوشته شود. به علاوه، بنا بر گزاره (۲-۴-۶) این دوره ها را می توان به حاصلضربهای ترانهشها نیز تجزیه کرد. این مطلب گزاره زیر را ایجاب می کند.^۱

گزاره ۲-۴-۷: هر جایگشتی می تواند به صورت حاصلضربهای ترانهشها نوشته شود. چنین حاصلضربی منحصر به فرد نیست. اما، زوج بودن یا فرد بودن تعداد ترانهشها منحصر به فرد است.

تعریف ۲-۴-۸: یک جایگشت زوج (فرد) است اگر بتوان آن را به صورت حاصلضرب تعداد زوجی (فردی) ترانهش نوشت.

زوج یا فرد بودن یک جایگشت را می توان از ساختار دوره ای آن تعیین کرد. فرض کنید، k دوره π وجود داشته و طول دوره r_j باشد. در این صورت، گزاره ۲-۴-۶ مستقیماً بیان می دارد که دوره r_j را می توان به صورت حاصلضرب $r_j - 1$ ترانهش نوشت. با مجموع یابی روی تمام این اعداد، می رسمیم به

$$\text{تعداد ترانهشها در } \pi = \sum_{j=1}^k (r_j - 1) = \sum_{j=1}^k r_j - k$$

باید روشن شده باشد که حاصلضرب دو جایگشت زوج (فرد) همواره زوج است. از سوی دیگر حاصلضرب یک جایگشت زوج و فرد همواره فرد است. لذا، طبیعی است که عدد $+1$ را به جایگشتهای زوج و عدد -1 را به جایگشتهای فرد نسبت دهیم. از این رو، تعریف می کنیم

$$\delta_{\pi} \equiv \begin{cases} +1 & \text{اگر } \pi \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } \pi \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad (28-2)$$

کمیت δ_{π} ، گاهی نشان مشخص جایگشت نامیده می شود و به صورت $\text{sgn}(\pi)$ نمایش داده می شود.

کمیت جالب توجه دیگر، کمیتی مرسوم به تانسور لوی-چی ویتا، $\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ است (برای دستیابی به جزئیات، فصل چهارم را بنگرید). این کمیت دارای n نماد است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\varepsilon_{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)} = \delta_{\pi}$$

توجه کنید که $\varepsilon_{12\dots n} = +1$ ، زیرا در این حالت π جایگشت همانی است، که i را به خودش می‌برد؛ یعنی به‌ازای تمام i ها $\pi(i) = i$. به این ترتیب، طول تمام دوره‌های جایگشت همانی ۱ است، و چون $[(ij)]^2 = (i)$ ، تعداد $2n$ (یا یک عدد زوج دیگر) ترانهش در تجزیه‌اش پدید می‌آید. بعداً، در فصل سوم و چهارم به‌برخی نتایج به‌دست آمده در بالا باز خواهیم گشت.

تمرینها

۱-۴-۲ وارون جایگشتهای زیر را پیدا کنید

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

آنگاه مستقیماً نشان دهید که $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1}$.

۲-۴-۲ حاصلضربهای زیر را برحسب دوره‌های گسسته بیان کنید. فرض کنید تمام جایگشتها در S_7 هستند.

$$(الف) (145)(456)(347)(123) \quad (ب) (273)(562)(34) \quad (ج) (13)(134)(1345)$$

۳-۴-۲ جایگشت

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

را به‌صورت حاصلضربی از ترانهشها بنویسید. آیا این جایگشت زوج است یا فرد؟

مسائل

۱-۲ فرض کنید \mathbb{R}^+ معرف مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. "جمع" دو عضو \mathbb{R}^+ را به‌صورت ضرب آن دو عضو در معنای متعارف و معمول تعریف، و ضرب اسکالر در عناصر \mathbb{R} را به‌صورت $r \cdot p \equiv p^r$ تعریف کنید که در آن $r \in \mathbb{R}$ ، $p \in \mathbb{R}^+$ و $p \in \mathbb{R}^+$ است. با این عملیات نشان دهید که \mathbb{R}^+ روی \mathbb{R} یک فضای برداری است.

۲-۲ قضیه ۱-۲-۳ را ثابت کنید.

۳-۲ نشان دهید n بردار زیر یک پایه در \mathbb{C}^n (یا \mathbb{R}^n) تشکیل می‌دهند

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |a_n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

۴-۲ قضیه ۲-۱-۷ را اثبات کنید.

۵-۲ نشان دهید که در تعریف ۴-۱-۰، در مقدمه، بند (ج) بر بند (ب) دلالت می‌کند.

۶-۲ $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ایهای $a_0x^2 + a_1x + a_2$ و $b_1x^2 + b_2x + b_3$

در بازه $[0, 1]$ راست‌هم‌نوا باشند. ضرب داخلی در مثال ۲-۳-۲ تعریف شده است.

۷-۲ نشان دهید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که توسط $T(x, y) = (x^2 + y^2, x + y, 2x - y)$ داده

می‌شود، یک نگاشت خطی نیست.

۸-۲ نشان دهید تمام تبدیلهای مطرح شده در مثال ۲-۳-۲، خطی‌اند.

۹-۲ نشان دهید عملگرهای زیر خطی‌اند.

(الف) \mathcal{V} است روی اعداد حقیقی، و $A|z\rangle = z^*$.

(ب) همان \mathcal{P}^c است و $A|x\rangle = |y\rangle$ که در آن $y(t) = x(t+1) - x(t)$.

۱۰-۲ سه عملگر خطی A_1, A_2, A_3 را چنان در نظر بگیرید که $[A_1, A_2] = A_3$

و $[A_2, A_1] = A_3$ ، نشان دهید عملگر A با تعریف $A \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

با A_1, A_2, A_3 جابه‌جاپذیر است.

۱۱-۲ تبدیل خطی $D^n T^n$ و $T^n D^n$ روی چندجمله‌ایهای مثال ۲-۳-۲، را برای $n = 1, 2, 3$

محاسبه کنید.

۱۲-۲ عملگر خطی A روی فضای برداری متناهی-بعد \mathcal{V} را در نظر بگیرید. نشان دهید یک

چندجمله‌ای P چنان وجود دارد که $P(A) = 0$. (راهنمایی: بردار دلخواه $x \in \mathcal{V}$ را انتخاب

کنید و بردارهای $A^k|x\rangle$ به‌ازای مقادیر مختلف k را در نظر بگیرید.)

۱۳-۲ سایر خواص مطرح شده در گزاره ۲-۳-۱۴ را اثبات کنید.

۱۴-۲ نشان دهید اگر A و B هرمیتی باشند، در این صورت $i[A, B]$ نیز هرمیتی است.

۱۵-۲ نشان دهید

$$[U, T] = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad (U + T)(U - T) = U^2 - T^2$$

۱۶-۲ نشان دهید

$$\frac{d}{dt} \mathbb{H}^r = \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt} \right) \mathbb{H}^r + \mathbb{H} \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt} \right) \mathbb{H} + \mathbb{H}^r \left(\frac{d\mathbb{H}}{dt} \right)$$

۱۷-۲ نشان دهید اگر $[\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_r] = T$ و $[\mathbb{T}, \mathbb{H}_1] = 0 = [\mathbb{T}, \mathbb{H}_r]$ در این صورت

$$[\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_r^n] = nT\mathbb{H}_r^{n-1} \quad (\text{الف})$$

$$[\mathbb{H}_1, e^{t\mathbb{H}_r}] = tTe^{t\mathbb{H}_r} \quad (\text{ب})$$

۱۸-۲ ثابت کنید

$$e^{\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_r + \mathbb{H}_r} = e^{\mathbb{H}_1} e^{\mathbb{H}_r} e^{\mathbb{H}_r} e^{-1/2([\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_r] + [\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_r] + [\mathbb{H}_r, \mathbb{H}_r])}$$

به شرط آنکه $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_r, \mathbb{H}_1$ با تمام جابه‌جاگرها جابه‌جاپذیر باشند. تعمیم به $\mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_r + \dots + \mathbb{H}_n$ چگونه است؟

۱۹-۲ ثابت کنید اگر \mathbb{H} مستقل از t باشد، در این صورت

$$\frac{d}{dt}([\mathbb{H}, U(t)]) = \left[\mathbb{H}, \frac{dU}{dt} \right]$$

۲۰-۲ نشان دهید اگر $A(t) \equiv e^{t\mathbb{H}} A_0 e^{-t\mathbb{H}}$ که در آن \mathbb{H} و A_0 متعلق به $\mathcal{L}(V)$ و مستقل از t باشند، در این صورت

$$\frac{dA(t)}{dt} = [\mathbb{H}, A(t)]$$

وقتی \mathbb{H} با $A(t)$ جابه‌جاپذیر باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟۲۱-۲ مطلوب است تعیین T^\dagger برای نگاشت $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که به صورت زیر داده می‌شود

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 2z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

۲۲-۲ T^\dagger را برای هر یک از عملگرهای خطی زیر پیدا کنید:

(الف) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که به صورت زیر داده می‌شود

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

که در آن θ یک عدد حقیقی است. ($T^t T$ چیست؟)

(ب) $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ که به صورت زیر داده می‌شود

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(ج) $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ که به صورت زیر داده می‌شود

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 - 2i\alpha_3 \\ -2i\alpha_1 + \alpha_2 + i\alpha_3 \\ i\alpha_1 - 2i\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

۲۳-۲ فرض کنید $U, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، که در آن $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ متناهی-بعد است. فرض کنید $UT = 1$.

نشان دهید که U و T هر دو وارون‌پذیرند.

۲۴-۲ نشان دهید اگر P یک عملگر تصویر باشد، عملگر زیر نیز عملگر تصویر است

(الف) $U^t P U$ به ازای هر عملگر یکانی U .

۲۵-۲ نشان دهید حاصلضرب دو عملگر یکانی (متعامد) همواره یکانی (متعامد) است، اما

حاصلضرب دو عملگر هرمیتی (متقارن) یک عملگر هرمیتی (متقارن) است اگر و فقط اگر آن

دو عملگر جابه‌جاپذیر باشند.

۲۶-۲ حاصلضربهای $\pi_1 \circ \pi_2$ و $\pi_2 \circ \pi_1$ را برای دو جایگشت زیر پیدا کنید

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

۲۰۰ فضاهای برداری متناهی-بعدی: بردارها و عملگرها

۲۷-۲ وارون هر یک از جایگشتهای زیر را پیدا کنید

$$\text{(الف)} \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ب)} \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ج)} \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(د)} \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

۲۸-۲ جایگشتهای زیر را به صورت حاصلضرب دوره‌های گسسته بیان و تعیین کنید کدام یک دوره‌ای‌اند

$$\text{(الف)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(ب)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ج)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

۲۹-۲ جایگشتهای زیر را به صورت حاصلضرب ترانزها بیان و تعیین کنید زوج‌اند یا فرد.

$$\text{(الف)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(ب)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 8 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ج)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(د)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

۳۰-۲ نشان دهید حاصلضرب دو جایگشت زوج (فرد) همواره زوج، و حاصلضرب یک جایگشت زوج در یک جایگشت فرد همیشه فرد است.

۳۱-۲ نشان دهید π و π^{-1} دارای پاریته یکسان‌اند (هر دو یا زوج یا فردند).

فضاهای برداری متناهی-بعد ۲: ماتریسها و تجزیه طیفی

تا اینجا، در بررسیهای نظری مان، عمدتاً با بردارها و عملگرهای مجرد سروکار داشته‌ایم. همان‌گونه که در مثالها و تمرینها دیده‌ایم، نمایشهای مقید بردارها و عملگرها در بیشتر کاربردها ضروری‌اند. این نمایشها با انتخاب یک پایه و بیان تمام اعمال برحسب مؤلفه‌های بردارها و نمایشهای ماتریسی عملگرها به دست می‌آیند.

۱-۳ ماتریسها

پایه $\mathbf{B} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ را برای فضای برداری \mathcal{V}_N در نظر می‌گیریم، و بردار دلخواه $|x\rangle$ را در این پایه می‌نویسیم:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^N \eta_i |a_i\rangle$$

که در آن $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ مؤلفه‌های $|x\rangle$ در \mathbf{B} هستند. اکنون بردار

$$|y\rangle = \mathbf{A}|x\rangle$$

را، که در آن $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ عملگرى خطى است، در نظر مى‌گيريم. بردار $|y\rangle$ را به صورت ترکيبى خطى از $|a_i\rangle$ نيز مى‌توان نوشت:

$$|y\rangle = \sum_{j=1}^N \rho_j |a_j\rangle$$

بديهى است که ρ_j ها، به نحوى، به A وابسته‌اند. براى اينکه بينيم ρ_j ، A و η_i چه رابطه‌اى با هم دارند، A را بر $|x\rangle$ اعمال مى‌کنيم

$$A|x\rangle = A \left(\sum_{i=1}^N \eta_i |a_i\rangle \right) = \sum_{i=1}^N \eta_i (A|a_i\rangle)$$

ناشى از خطى بودن A

$$= \sum_{i=1}^N \eta_i \left(\sum_{j=1}^N \alpha_{ji} |a_j\rangle \right)$$

مؤلفه زام بردار $A|a_i\rangle$

$$= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \eta_i \alpha_{ji} \right) |a_j\rangle$$

چون عبارتهای سمت چپ دو معادله قبل با هم برابرند، داريم

$$\sum_{j=1}^N \rho_j |a_j\rangle = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \eta_i \alpha_{ji} \right) |a_j\rangle$$

يا

$$\sum_{j=1}^N \left[\rho_j - \sum_{i=1}^N \alpha_{ji} \eta_i \right] |a_j\rangle = 0$$

استقلال خطى $|a_j\rangle$ ها ايجاب مى‌کند که

$$\rho_j = \sum_{i=1}^N \alpha_{ji} \eta_i, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{بمازای} \quad (1-3)$$

اکنون می‌توانیم α_{zj} را عناصر ماتریس A تلقی کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}$$

این ماتریس، نمایش عملگر A در پایه $\mathbf{A} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ است. اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} را نیز، به ترتیب، به صورت بردارهای ستونی

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix}$$

نمایش بدهیم، در آن صورت (۱-۳) را می‌توان به صورت زیر، به شکل ماتریسی نوشت

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

این معادله، نمایش معادله عملگری $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ در پایه \mathbf{B} است.

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر مؤلفه‌های \mathbf{x} و \mathbf{y} در \mathbf{B} ، به ترتیب، η_i و ρ_i باشند، در آن صورت مؤلفه $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ عبارت است از $\mu_i = \eta_i + \rho_i$. همچنین، اگر α_{zj} و β_{zj} ، به ترتیب، مؤلفه‌های \mathbf{z} در نمایشهای ماتریسی عملگرهای \mathbf{A} و \mathbf{B} در آن صورت عنصر \mathbf{z} حاصل جمع آنها، $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، در \mathbf{B} به این قرار خواهد بود: $\sigma_{zj} = \alpha_{zj} + \beta_{zj}$. عناصر حاصلضرب دو عملگر را می‌توان با اثر دادن چنین حاصلضربی، مثلاً $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ (به ترتیب عملگرها در این تعریف توجه کنید)، بر یک بردار دلخواه \mathbf{x} ، به منظور دستیابی به بردار \mathbf{y} مثل قبل تعریف می‌شود، یافت. اگر ρ_i ، μ_i و β_{zj} ، به ترتیب، \mathbf{z} ، \mathbf{y} و \mathbf{z} مؤلفه \mathbf{y} ، \mathbf{y} و \mathbf{z} مؤلفه \mathbf{z} ، و \mathbf{z} مؤلفه \mathbf{z} در پایه \mathbf{B} باشند، در آن صورت از (۱-۳) خواهیم داشت

$$\mu_i = \sum_{j=1}^N \beta_{zj} \rho_j \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ به‌ازای}$$

با استفاده مجدد از (۱-۳)، و برقرار کردن رابطه مابین (y, A) و (x) در معادله قبل، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\mu_i &= \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \sum_{k=1}^N \alpha_{jk} \eta_k = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_{ij} \alpha_{jk} \eta_k \\ &\equiv \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij} \alpha_{jk} \eta_k \equiv \sum_{i,j} \beta_{ij} \alpha_{jk} \eta_k\end{aligned}\quad (2-3)$$

با تعریف $\gamma_{ik} \equiv \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \alpha_{jk}$ و مقایسه کردن آن با تعریف حاصلضرب ماتریسها در فصل اول، مشاهده می‌کنیم که این رابطه عبارت است از حاصلضرب دو ماتریس B (با عناصر β_{ij}) و A (با عناصر α_{ij}). اگر ماتریس C را (با عناصر γ_{ij}) تعریف کنیم، در آن صورت معادله بالا را در شکل ماتریسی می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C = BA$$

بنابراین عبارت، نمایش ماتریسی یک حاصلضرب عملگری، برابر با حاصلضرب ماتریسی نمایشهای ماتریسی آن دو عملگر است. بنابراین، معادله (۲-۳) را می‌توان در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$z = BAx$$

که x و z بردارهای ستونی نمایش‌دهنده (x) و (z) در پایه B هستند. چندان دشوار نخواهد بود که نشان دهیم تمام عملیاتی که روی عملگرها انجام می‌شوند، به نمایشهای ماتریسی آنها نیز منتقل می‌شوند. مثلاً، عنصر α_{ij} از نمایش ماتریسی A ، α_{ij} و $-\alpha_{ij}$ عنصر z از ماتریس وابسته به عملگر $-A$ است؛ و عناصر نمایش ماتریسی عملگر صفر، جملگی صفرند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که عنصر δ_{ij} از ماتریس معرف عملگر واحد I در هر پایه‌ای، δ_{ij} ، یعنی دلتای کرونکر است، که بنابر تعریف عبارت است از

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

بحث بالا در قالب گزاره زیر جمع‌بندی می‌شود.

گزاره ۱-۱-۳: اگر $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ عملگرهایی در فضای برداری N -بعدی \mathcal{V} باشند، در آن صورت به ازای هر پایه $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ از \mathcal{V} ، نگاشتی، مانند $\text{Mat} : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}_B^{(N)}$ ، از فضای عملگرهای خطی در \mathcal{V} ، به فضای ماتریسهای $N \times N$ وجود دارد که با $(\text{Mat}(A))_{ji} = a_{ji}$ داده می‌شود و در آن $\{a_{ji}\}_{j=1}^N$ مؤلفه‌های $A|a_i\rangle$ در B هستند. علاوه بر این، این نگاشت دارای ویژگیهای زیر است:

$$(\text{Mat}(A + B))_{ij} = (\text{Mat}(A))_{ij} + (\text{Mat}(B))_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{الف})$$

$$(\text{Mat}(\alpha A))_{ij} = \alpha(\text{Mat}(A))_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ (یا } \mathbb{R}) \quad (\text{ب})$$

$$(\text{Mat}(AB))_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad (\text{ج})$$

$$(\text{Mat}(\mathbf{0}))_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (\text{د})$$

$$(\text{Mat}(\mathbf{1}))_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{ه})$$

از (الف) و (ب) نتیجه می‌گیریم که این نگاشت خطی است.

باید تأکید کرد که نگاشت گزاره ۱-۱-۳، برای یک پایه مفروض تعریف می‌شود. به همین علت است که در تعریف Mat ، اندیس پایینی B برای فضای ماتریسی $N \times N$ به کار می‌رود. گزاره ۱-۱-۳ به هر عملگر خطی یک نمایش ماتریسی از آن عملگر در یک پایه مفروض نسبت می‌دهد. آیا این نمایش ماتریسی در آن فضای مفروض منحصر به فرد است؟ گزاره زیر به این پرسش پاسخ می‌دهد.

گزاره ۲-۱-۳: نگاشت $\text{Mat} : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}_B^{(N)}$ ، یک یک‌برخی خطی است.

اثبات. برای اثبات این حکم، باید ثابت کنیم که Mat دوسویی، یعنی هم‌پوشا و هم یک‌به‌یک، است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که Mat پوشاست. با داشتن $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ و هر ماتریس $A \in \mathcal{M}_B^{(N)}$ با عناصر a_{ji} ، می‌توانیم ماتریس خطی T_A را به این قرار تعریف کنیم: فرض کنید $|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle$ یک بردار اختیاری است. در آن صورت

۱. حروف الفبای لاتین اکثراً برای عناصر ماتریس یا مؤلفه‌های بردار به کار می‌روند. توجه داشته باشید که نماد مربوط به فضای ماتریسهای $N \times N$ با آنچه که در فصل ۱ به کار برده‌ایم متفاوت است.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_A|a\rangle &= \mathbb{T}_A \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle \right) \equiv \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{T}|a_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N a_{ji} |a_j\rangle \end{aligned}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که \mathbb{T}_A خطی است. هم‌اکنون نشان دادیم که به ازای هر A ، یک تبدیل خطی \mathbb{T}_A وجود دارد. بنابراین، Mat پوشاست.

اکنون ثابت می‌کنیم که Mat ، یک به یک است. اگر $\text{Mat}(A) = \text{Mat}(B)$ ، در آن صورت $a_{ij} = b_{ij}$ ، که به این معنا است که تمام عناصر دو ماتریس با هم برابرند؛ یعنی دو ماتریس با هم برابرند. بنابراین، دو عملگر متمایز هیچگاه به یک ماتریس نگاشته نمی‌شوند. بنابراین، Mat یک به یک است. ■

به علت یکریختی، تمام تمایزهای عملی بین عملگرهایی که بر یک فضای برداری N -بعدی و مجموعه ماتریسهای $N \times N$ اثر می‌کنند، از بین می‌رود. ساختارهای جبری $\mathcal{L}(V)$ و $\mathcal{M}_B^{(N)}$ یکسان‌اند. مزیت کاربرد دومی این است که در این مورد با آرایه‌هایی از اعداد سروکار داریم و بنابراین می‌توانیم با آنها محاسبه انجام بدهیم.

مثال ۱-۱-۳: می‌خواهیم نمایش ماتریسی عملگر خطی $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ را که با عبارت:

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x - z \\ 2y + z \end{pmatrix} \quad (1)$$

در پایه $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ داده می‌شود، پیدا کنیم.

یادآوری می‌کنیم که i زامین عنصر $\text{Mat}(A)$ ، یعنی α_{ji} ، با اعمال \mathbb{A} بر $|a_i\rangle$ به دست می‌آید. از آنجا که شاخص اول بر روی یک سطر و شاخص دوم بر روی یک ستون ثابت است، ضریبهای ثابت $\langle a_i | \mathbb{A} | a_i \rangle$ i زامین ستون $\text{Mat}(A)$ را می‌دهند. بنابراین، برای به دست آوردن اولین ستون، در نظر می‌گیریم:

$$\mathbb{A}|a_1\rangle \equiv \mathbb{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

به این ترتیب، اولین ستون ماتریس عبارت است از $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$. برای به دست آوردن دومین ستون، در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{A}|a_2\rangle \equiv \mathbb{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که منجر می‌شود به $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ به عنوان دومین ستون. به همین ترتیب، عبارت:

$$\mathbb{A}|a_3\rangle \equiv \mathbb{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ستون سوم را به صورت $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ به دست می‌دهد. کل این ماتریس عبارت است از

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

مادام که تمام بردارها را با بردارهای ستونی‌ای نمایش بدهیم که اجزای آنها ضرایب بسط بردارها در B هستند، (۱) و (۲) تمیزناپذیرند. اما، تأثیر (۲) بر بردار ستونی (x, y, z) منجر به (۱) نخواهد شد! بردار ستونی در سمت چپ رابطه (۱) واقعاً (هر چند که معمولاً تأکید نمی‌شود) بردار زیر است:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که عبارت است از بسطی برحسب به اصطلاح پایه استاندارد \mathbb{R}^3 ، نه برحسب B .

می‌توان $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ را برحسب B بسط داد

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 2x - z \\ 2y + z \end{pmatrix} \\ &= \left(2x - \frac{2}{3}y\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-x + \frac{y}{3} + 2z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(x + \frac{2}{3}y - z\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین رابطه، نمایش این بردار در پایه B به این قرار است:

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)_B = \begin{pmatrix} 2x - \frac{2}{3}y \\ -x + \frac{y}{3} + 2z \\ x + \frac{2}{3}y - z \end{pmatrix} \quad (3)$$

به همین ترتیب، نمایش $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ عبارت است از

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{z}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} \\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} \end{pmatrix} \quad (4)$$

● مطابق انتظار، با اعمال ماتریس (۲) بر (۳)، (۴) به دست می‌آید.

گاهی در نظر گرفتن نمایشهای ماتریسی عملگرهایی که باعث نگاشت \mathcal{V} به \mathcal{W} می‌شوند، به طوری که $N = \dim \mathcal{V} \neq \dim \mathcal{W} = N'$ بسیار سودمند است. برای دستیابی به این نمایشها، فرض می‌کنیم $B = \{ |a_i\rangle \}_{i=1}^N$ پایه‌ای در \mathcal{V} و $B' = \{ |b_j\rangle \}_{j=1}^{N'}$ پایه‌ای در \mathcal{W} است. همچنین نگاشت $\text{Mat} : \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{M}^{N' \times N}$ را با $(\text{Mat}(A))_{ji} = \alpha_{ji}$ ، که در

آن $\{\alpha_{ji}\}_{j=1}^{N'}$ مؤلفه‌های $A|a_i$ در B' هستند، تعریف می‌کنیم. از آنجا که z از 1 تا N' و i از 1 تا N تغییر می‌کند، ماتریس نمایشگر A ، عبارت خواهد بود از $N \times N'$.

مثال ۳-۱-۲: عملگر $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید که با

$$A(x, y, z) = (2x + y - 3z, x + y - z)$$

داده می‌شود. می‌خواهیم نمایش ماتریسی A را در پایه استاندارد \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^2 بیابیم. اگر بردارها را به صورت ستونی بنویسیم، طبق تعریف A داریم

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - 3z \\ x + y - z \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین، نخستین ستون A عبارت است از $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. به همین ترتیب،

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{دومین ستون} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{سومین ستون} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بنابراین، ماتریسی که معرف A باشد، عبارت است از ماتریس 2×3 زیر:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همان‌طور که باید، این ماتریس بر بردار 3 -بعدی اثر می‌کند و یک بردار 2 -بعدی می‌دهد.

۳-۱-۱ عملیات روی ماتریسها

با معلوم بودن یک ماتریس، می‌توانیم با انجام عملیاتی روی آن، ماتریسهای جدیدی به دست آوریم. این عملیات شامل ترانهش و مزدوج مختلطاند.

ترانهش، عملی است که بر اثر آن جای سطرها و ستونهای ماتریس عوض می‌شود. اگر ترانهاد ماتریس A را با \tilde{A} نمایش دهیم، در آن صورت خواهیم داشت

$$(\tilde{A})_{ij} = a_{ji} \quad (3-3)$$

که در آن، a_{ij} عناصر A هستند. در قضیه زیر خواص ترانهش را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳-۱-۳:

$$(\tilde{\tilde{A}}) = A \quad (\text{الف})$$

$$(A + B) = \tilde{A} + \tilde{B} \quad (\text{ب})$$

$$\widetilde{AB} = \tilde{B} \tilde{A} \quad (\text{ج})$$

اثبات این قضیه بلافاصله از تعریف ترانهش استنتاج می‌شود و ما آن را به عهده دانشجو می‌گذاریم.

ماتریسی که با ترانهاد خودش یکی باشد، یعنی در رابطه $A = \tilde{A}$ صدق می‌کند، از اهمیت خاصی برخوردار است. این‌گونه ماتریسها در فیزیک زیاد پیش می‌آیند و به ماتریسهای متقارن معروف‌اند. همچنین، ماتریسهای پادمتقارن ماتریسها با خاصیت $A = -\tilde{A}$ هستند. توجه کنید که هر ماتریسی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A = \frac{1}{2}(A + \tilde{A}) + \frac{1}{2}(A - \tilde{A})$$

که جمله اول متقارن و جمله دوم پادمتقارن است. یعنی، هر ماتریس را می‌توان به یک ماتریس متقارن به علاوه یک ماتریس پادمتقارن تجزیه کرد.

بین عناصر هر ماتریس متقارن رابطه برقرار است. این نکته را می‌توان از استدلال زیر دریافت:

$$(\tilde{A})_{ij} = (A_{ij}) \equiv a_{ij}$$

بنابراین، تقارن به معنای تقارن تحت تأثیر انعکاس، نسبت به قطر اصلی، است. از سوی دیگر، برای یک ماتریس پادمتقارن داریم

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

ماتریسی که در رابطه $A\bar{A} = \bar{A}A = 1$ صدق کند، متعامد نامیده می‌شود.

مزدوج مختلط یافتن عملی است که در اثر آن تمام عناصر یک ماتریس به مزدوج مختلطشان تبدیل می‌شوند. به این ترتیب، اگر مزدوج مختلط یک ماتریس را با علامت * نشان دهیم، آنگاه

$$(A^*)_{ij} = a_{ji}^* \quad (4-3)$$

اگر $A^* = A$ ، ماتریس را حقیقی می‌نامیم. بدیهی است که $(A^*)^* = A$.

در اثر ترکیب عملیات مزدوج مختلط و ترانپوز، جای سطرها و ستونهای ماتریس با هم عوض، و تمام عناصر آن به مزدوج مختلطشان تبدیل می‌شوند. این عمل مرکب را مزدوج هرمیتی می‌نامند و آن را، مثل عملگرها، با علامت † نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$A^\dagger = (\bar{A}^*) = (\bar{A})^* \quad (الف 5-3)$$

و در نتیجه،

$$(A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^* \quad (ب 5-3)$$

در جدول ۳-۱ مثالهایی از این عملیات را روی یک ماتریس درج کرده‌ایم. دو نوع ماتریس را به اعتبار اهمیتشان جداگانه تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳-۱-۴: ماتریس هرمیتی H در رابطه $H^\dagger = H$ یا، برحسب عناصر، در روابط

$$h_{ij}^* = h_{ji} \quad \text{صدق می‌کند. ماتریس یکانی } U \text{ در رابطه } U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \text{ برحسب عناصر،}$$

$$\text{در روابط } \sum_{k=1}^N u_{ik} u_{jk}^* = \sum_{k=1}^N u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij} \text{ صدق می‌کند.}$$

از تعریف ۳-۱-۴ بلافاصله نتیجه می‌شود که:

۱. عناصر قطری ماتریسهای هرمیتی حقیقی‌اند.

۲. ستون k ام هر ماتریس هرمیتی، مزدوج مختلط سطر k ام آن است، و برعکس.

جدول ۱-۳ برخی عملیات متداول روی یک ماتریس نوعی A .

ماتریس	مؤلفه‌ها	مثال
A	a_{ij}	$\begin{pmatrix} i & 1 & 1-i \\ 2 & e^{i\varphi} & -i \\ 0 & 2+3i & 1 \end{pmatrix}$
\tilde{A} (ترانهاد)	$(\tilde{A})_{ij} = a_{ji}$	$\begin{pmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & e^{i\varphi} & 2+3i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$
A^* (مزدوج مختلط)	$(A^*)_{ij} = a_{ji}^*$	$\begin{pmatrix} -i & 1 & 1+i \\ 2 & e^{-i\varphi} & i \\ 0 & 2-3i & 1 \end{pmatrix}$
A^\dagger (الحاقی)	$(A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$	$\begin{pmatrix} -i & 2 & 0 \\ 1 & e^{-i\varphi} & 2-3i \\ 1+i & i & 1 \end{pmatrix}$

۳. هر ماتریس هرمیتی حقیقی، لزوماً متقارن است.

۴. وقتی ماتریس یکانی را به صورت برداری در \mathbb{C}^N در نظر بگیریم، سطرهایش نسبت به یکدیگر راست‌هنجارند؛ ستونها نیز به همین صورت‌اند.

۵. ماتریس یکانی حقیقی لزوماً متعامد است.

گاهی ممکن (و مطلوب) است که ماتریس را به شکلی درآوریم که در آن، تمام عناصر غیرقطری صفر باشند. چنین ماتریسی را ماتریس قطری می‌نامیم.

در جدول ۲-۳ خواص انواع ماتریسهایی که تاکنون مطرح کرده‌ایم، جمع‌بندی شده است.

به آسانی می‌توان نشان داد که تعداد پارامترهای حقیقی مستقل در یک:

ماتریس $N \times N$ متقارن، $\frac{1}{2}N(N+1)$ است

ماتریس $N \times N$ پادمتقارن، $\frac{1}{2}N(N-1)$ است

ماتریس $N \times N$ یکانی (مختلط)، N^2 است

ماتریس $N \times N$ متعامد، $\frac{1}{2}N(N-1)$ است

ماتریس $N \times N$ هرمیتی (مختلط)، N^2 است

جدول ۲-۳ بعضی ماتریسهای خاص و خواص آنها

مثال	خاصیت		ماتریس
	شکل ماتریس	شکل مؤلفه	
$\begin{pmatrix} 2 & 3i & 4 \\ 3i & -2 & -5i \\ 4 & -5i & 0 \end{pmatrix}$	$\tilde{S} = S$	$s_{ij} = s_{ji}$	S (متقارن)
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4i+2 \\ -3 & -4i-2 & 0 \end{pmatrix}$	$\tilde{A} = -A$	$a_{ij} = -a_{ji}$	A (بادمتقارن)
$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 1-i \\ -2i & 3 & e^{i\varphi} \\ 1+i & e^{-i\varphi} & 4 \end{pmatrix}$	$H^t = H$	$h_{ij} = h_{ji}^*$	H (هرمیتی)
$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\tilde{O} \tilde{O} = \tilde{O} \tilde{O} = 1$	$\sum_k o_{ik} o_{jk} = \delta_{ij}$	O (متعامد)
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$	$U^t U = U U^t = 1$	$\sum_k u_{ik} u_{jk}^* = \delta_{ij}$	U (یکانی)
$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$		$d_{ij} = 0 \quad i \neq j$	D (قطری)

مثال ۳-۱-۳: (الف) یک نمونه اصلی از ماتریسهای متقارن، ماتریس گشتاور لختی است که در مکانیک به آن برمی خوریم. عنصر زئام این ماتریس به صورت زیر تعریف می شود:

$$I_{ij} \equiv \iiint \rho(x_1, x_2, x_3) x_i x_j dV$$

که در آن x_i مختصه (دکارتی) نام نقطه‌ای در توزیع جرم است که با چگالی حجمی $\rho(x_1, x_2, x_3)$ توصیف می‌شود. بدیهی است که $i_j = j_i$ ، یا $\tilde{A} = A$. ماتریس گشتاور لختی را، که دارای شش عنصر مستقل است، می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

(ب) یک ماتریس پادمقارن مهم در الکترومغناطیس ظاهر می‌شود. در مبحث نظریه نسبیت خاص اینشتین، سه مؤلفه پتانسیل برداری، A ، با پتانسیل اسکالر، ϕ ، ترکیب می‌شوند و چاربردار $(A_1, A_2, A_3, i\phi)$ را تشکیل می‌دهند که در آن $i = \sqrt{-1}$. همچنین، اگر c را سرعت نور در نظر بگیریم، ict چهارمین مؤلفه چاربردار تغییر مکان، (x_1, x_2, x_3, ict) ، است. این چاربردارها را به صورت (A_1, A_2, A_3, A_4) و (x_1, x_2, x_3, x_4) می‌نویسند و هر مؤلفه را با شاخص پایینی که یک حرف یونانی است نشان می‌دهند. به این ترتیب، A_μ و x_ν مؤلفه‌های معمولی این چاربردارها به شمار می‌آیند.

تانسور میدان الکترومغناطیسی، بنا بر تعریف، عبارت است از:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

این تعریف، منجر می‌شود به

$$F_{j\tau} = \frac{\partial A_j}{\partial x_\tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial x_j} = -\frac{i}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (1)$$

مقایسه (۱) با رابطه بین میدان الکتریکی E ، و پتانسیلها، که با عبارت زیر بیان می‌شود

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi$$

منجر خواهد شد به:

$$F_{j\tau} = iE_j$$

۱. کاربرد این صورت‌گیری، که در آن مؤلفه زمانی چاربردار در $\sqrt{-1} = i$ ضرب می‌شود، به کلی منسوخ شده است. اکنون متداول شده است که مؤلفه‌های زمان حقیقی را به کار ببرند و از متریک مینکوفسکی، که در فصل ۴ آن را مطرح خواهیم کرد، بهره می‌گیرند. با این همه، کاربرد مؤلفه‌های زمان موهومی، این بحث را ساده می‌کند.

همچنین، عبارتهای:

$$F_{1r} = \frac{\partial A_1}{\partial x_r} - \frac{\partial A_r}{\partial x_1} = -(\nabla \times \mathbf{A})_r = -B_r$$

$$F_{r1} = \frac{\partial A_1}{\partial x_r} - \frac{\partial A_r}{\partial x_1} = (\nabla \times \mathbf{A})_r = B_r$$

$$F_{r2} = \frac{\partial A_r}{\partial x_r} - \frac{\partial A_r}{\partial x_r} = -(\nabla \times \mathbf{A})_1 = -B_1$$

مؤلفه‌های میدان مغناطیسی، \mathbf{B} ، را می‌دهند. بدیهی است که تمام عناصر قطری صفر می‌شوند، و می‌توان تانسور الکترومغناطیسی را به صورت یک ماتریس پادمتقارن نوشت:

$$F = \begin{pmatrix} \circ & -B_r & B_r & iE_1 \\ B_r & \circ & -B_1 & iE_r \\ -B_r & B_1 & \circ & iE_r \\ -iE_1 & -iE_r & -iE_r & \circ \end{pmatrix}$$

این ماتریس وحدت پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی را نشان می‌دهد.
(ج) مثالهای ماتریسهای هرمیتی، ماتریسهای 2×2 اسپین پاؤلی هستند

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & -1 \end{pmatrix}$$

(د) در فصل ۱ با یک ماتریس متعامد مواجه شدیم که با چرخشهای اجسام صلب برحسب زوایای اویلر مرتبط بود.

تمرینها

۱-۱-۳ الف) نمایشهای ماتریس \mathbb{D} و \mathbb{T} ، عملگرهای مشتق و ضرب در t را که بر فضای چندجمله‌ایهای از مرتبه ۲ عمل می‌کنند، پیدا کنید. (ب) رابطه جابه‌جایی برای این ماتریسها چیست؟

۱-۲-۳ نشان دهید که تعداد مؤلفه‌های یک ماتریس متقارن $N \times N$ عبارت است از $\frac{1}{2}N(N+1)$.

۳-۱-۳ تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می شود

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, -x_2 + 2x_1, 2x_2 + x_1)$$

نمایش ماتریسی T را در: (الف) پایه استاندارد مربوط به \mathbb{R}^2 ، یعنی، $|e_1\rangle = (1, 0, 0)$ ، $|e_2\rangle = (0, 1, 0)$ و (ب) پایه متشکل از $|a_1\rangle = (1, 1, 0)$ ، $|a_2\rangle = (0, 2, 3)$ و $|a_3\rangle = (1, 0, -1)$ پیدا کنید.

۳-۱-۴ ماتریسی را که معرف عملگر مشتق d/dx در پایه $\{1, x, x^2, x^3\}$ فضای چندجمله‌ایهای درجه ۳ است، پیدا کنید. با استفاده از این ماتریس، مشتقات اول و دوم یک چندجمله‌ای درجه ۳ را به دست آورید.

۳-۲ پایه‌های راست‌هنجار

تاکنون با پایه‌های کلی سروکار داشته‌ایم، اما در وضعیت‌های عملی اگر یک پایه راست‌هنجار، $B = \{|e_i\rangle_{i=1}^N$ ، انتخاب کنیم، محاسبات ساده خواهند شد. عناصر ماتریس عملگر A را در چنین پایه‌ای می‌توان به روش زیر پیدا کرد: A را بر $|e_i\rangle$ اعمال کنید، و نتیجه را (که برداری است در فضای برداری \mathcal{V} که آن را B پدید آورده است) به صورت ترکیبی خطی از $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle$ بنویسید:

$$A|e_i\rangle = \sum_{k=1}^N a_{ki}|e_k\rangle$$

اکنون دو طرف را از چپ در $|e_j\rangle$ "ضرب کنید" و شرط راست‌هنجاری، $\langle e_j|e_i\rangle = \delta_{ji}$ ، و خطی بودن حاصلضرب اسکالر، $\langle c|(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle$ را به کار ببرید:

$$\begin{aligned} \langle e_j|A|e_i\rangle &= \langle e_j| \left(\sum_{k=1}^N a_{ki}|e_k\rangle \right) = \sum_{k=1}^N a_{ki} \langle e_j|e_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^N a_{ki} \delta_{jk} = a_{ji} \end{aligned}$$

بنابراین معادله، اگر عنصر z_{ij} ماتریس معرف یک عملگر را در یک پایه راست‌هنجار بخواهیم، باید آن عملگر را بین بردارهای z_{ij} (در طرف چپ) و z_{ij} (در طرف راست) این پایه بگنجانیم. به

$$\alpha_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle \quad (6-3)$$

مؤلفه‌های یک بردار را نیز می‌توانیم به روشی مشابه پیدا کنیم. بردار دلخواه $|a\rangle$ را در نظر بگیرید که در پایه راست‌هنجار B به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j |e_j\rangle$$

اینک دو طرف را از چپ در $\langle e_i |$ ضرب کنید:

$$\begin{aligned} \langle e_i | a \rangle &= \langle e_i | \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j |e_j\rangle \right) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i \end{aligned}$$

بنابراین، در یک پایه راست‌هنجار، مؤلفه نام یک بردار، از ضرب آن در $\langle e_i |$ به دست می‌آید. با استفاده از عبارت α_i ، بسط $|a\rangle$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^N \langle e_j | a \rangle |e_j\rangle = \sum_{j=1}^N |e_j\rangle \langle e_j | a \rangle$$

که مانند گزاره ۲-۳-۲ است اما با $|e_j\rangle \langle e_j| = P_j$.

اتحاد

$$1 = \sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i| \quad (7-3)$$

برای تمام پایه‌های راست‌هنجار (متناهی) صادق و برای انجام محاسبات، بسیار کارساز است. مثلاً هر عملگر خطی مانند A را می‌توان به صورت حاصل جمع روی مجموعه کاملی از عملگرهای

ساده تر نوشت. برای انجام این کار، ضریب $\mathbb{1}$ را در دو طرف \mathbb{A} وارد می‌کنیم و با استفاده از (۷-۳) (به کاربرد شاخصهای ظاهری متفاوت برای آنها توجه کنید) و سپس (۳-۶) می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{1} \mathbb{A} \mathbb{1} = \left(\sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \right) \mathbb{A} \left(\sum_j |e_j\rangle \langle e_j| \right) \\ &= \sum_{i,j} |e_i\rangle \langle e_i| \mathbb{A} |e_j\rangle \langle e_j| = \sum_{i,j} |e_i\rangle a_{ij} \langle e_j| \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} |e_i\rangle \langle e_j| \equiv \sum_{i,j} a_{ij} \mathbb{P}_{ij} \end{aligned}$$

این معادله، \mathbb{A} را برحسب عملگرهای \mathbb{P}_{ij} بیان می‌کند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathbb{P}_{ij} = |e_i\rangle \langle e_j|$$

اینک نمایش عملگرهای خاصی را بررسی می‌کنیم که در بخش ۲-۳-۴ مطرح کردیم و ارتباط بین آن عملگرها و ماتریسهای را می‌یابیم که در بخش ۳-۱ پیرامون آنها بحث کردیم. ببینیم ماتریس نمایشگر مزدوج هرمیتی عملگری مانند \mathbb{A} چیست. در یک پایه راست‌هنجار، عناصر این ماتریس با عبارت (۳-۶)، یعنی $a_{ij} = \langle e_i | \mathbb{A} | e_j \rangle$ بیان می‌شوند. با یافتن مزدوج مختلط این معادله و با بهره‌گیری از تعریف \mathbb{A}^\dagger که با معادله (۲-۲۲) بیان می‌شود، داریم

$$a_{ij}^* = \langle e_i | \mathbb{A} | e_j \rangle^* = \langle e_j | \mathbb{A}^\dagger | e_i \rangle$$

با بهره‌گیری از $(\mathbb{A}^\dagger)_{ji}$ برای نشان دادن عنصر i از عملگر \mathbb{A}^\dagger در پایه راست‌هنجار $\mathbb{B} = \{|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$ خواهیم داشت

$$(\mathbb{A}^\dagger)_{ji} = a_{ij}^*$$

یا

$$(\mathbb{A}^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$$

این عبارتها دقیقاً تعریف الحاقی یک ماتریس به‌شمار می‌آیند معادله (۳-۵۵).

دقت کنید که چگونه این نتیجه‌گیری به راست‌هنجاری بردارهای پایه بستگی دارد. اگر پایه راست‌هنجار نمی‌بود، نمی‌توانستیم عبارت ۳-۶ را، که نتیجه‌گیری ما مبتنی بر آن است، به‌کار ببریم. بنابراین، فقط در یک پایه راست‌هنجار، الحاقی یک عملگر با الحاقی ماتریس معرف آن عملگر نمایش داده می‌شود. به‌خصوص، یک عملگر هرمیتی فقط در صورتی که یک پایه راست‌هنجار به‌کار ببریم با یک ماتریس هرمیتی نمایش داده می‌شود. مثال ۳-۲-۱، این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۳-۲-۱: ماتریس نمایشگر عملگر هرمیتی \mathbb{H} را در یک پایه کلی (نه راست‌هنجار)، $\mathbf{B} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ ، در نظر بگیرید. عناصر ماتریس متناظر با \mathbb{H} به‌صورت

$$\mathbb{H}|a_k\rangle = \sum_{j=1}^N h_{jk}|a_j\rangle$$

و همچنین به‌صورت

$$\mathbb{H}|a_i\rangle = \sum_{j=1}^N h_{ji}|a_j\rangle$$

داده می‌شوند. با ضرب معادله اول در $\langle a_i|$ و دستیابی به مزدوج مختلط حاصلضرب، داریم

$$\langle a_i|\mathbb{H}|a_k\rangle^* = \left(\sum_{j=1}^N h_{jk}\langle a_i|a_j\rangle \right)^* = \sum_{j=1}^N h_{jk}^*\langle a_j|a_i\rangle$$

اما، بنا بر تعریف عملگر هرمیتی، سمت چپ معادله بالا صرفاً عبارت است از

$$\langle a_i|\mathbb{H}|a_k\rangle^* = \langle a_k|\mathbb{H}^\dagger|a_i\rangle = \langle a_k|\mathbb{H}|a_i\rangle$$

بنابراین، داریم

$$\langle a_k|\mathbb{H}|a_i\rangle = \sum_{j=1}^N h_{jk}^*\langle a_j|a_i\rangle$$

از سوی دیگر، با ضرب کردن (۱) در $\langle a_k|$ می‌رسیم به:

$$\langle a_k|\mathbb{H}|a_i\rangle = \sum_{j=1}^N h_{ji}\langle a_k|a_j\rangle$$

عبارتهای سمت چپ دو معادله آخر با هم برابرند، از این رو

$$\sum_{j=1}^N h_{jk}^* \langle a_j | a_i \rangle = \sum_{j=1}^N h_{ji} \langle a_k | a_j \rangle$$

از آنجا که این معادله هیچ مطلبی پیرامون h_{ij} ها بیان نمی‌کند، در حالت کلی نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $h_{ij}^* = h_{ji}$. اما اگر $\langle a_i | a_i \rangle$ ها راست‌هنجار باشند، در آن صورت

$$\langle a_j | a_i \rangle = \delta_{ji} \quad \text{و} \quad \langle a_k | a_j \rangle = \delta_{kj}$$

و داریم

$$\sum_{j=1}^N h_{jk}^* \delta_{ij} = \sum_{j=1}^N h_{ji} \delta_{kj}$$

یا

$$h_{ik}^* = h_{ki}$$

● برای یک پایه راست‌هنجار همین انتظار را داریم.

به همین ترتیب، انتظار داریم ماتریسهای نمایشگر عملگرهای یکانی فقط در صورتی که پایه راست‌هنجار باشد، یکانی باشند. این امر یکی از پیامدهای مستقیم معادله (۳-۵) است، اما برای ذکر مثالی در مورد چگونگی استفاده از معادله (۳-۷)، می‌توانیم آن را اثبات کنیم. چون $\mathbb{1} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger$ ، داریم

$$\langle e_i | \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle = \langle e_i | \mathbb{1} | e_j \rangle = \delta_{ij}$$

در سمت چپ، $\mathbb{1} = \sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k|$ را بین \mathbb{U} و \mathbb{U}^\dagger وارد می‌کنیم

$$\begin{aligned} \langle e_i | \mathbb{U} \left(\sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k| \right) \mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle &= \sum_{k=1}^N \langle e_i | \mathbb{U} | e_k \rangle \langle e_k | \mathbb{U}^\dagger | e_j \rangle \\ &\equiv \sum_{k=1}^N u_{ik} (\mathbb{U}^\dagger)_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

که در آن، u_{ik} عنصر k ام ماتریس معرف U در پایه B است و $(U^\dagger)_{kj}$ نیز به همین ترتیب تفسیر و تعبیر می‌شود. با استفاده از ۳-۵، داریم

$$\sum_{k=1}^N u_{ik} u_{jk}^* = \delta_{ij}$$

که نیمه اول شرط لازم برای ماتریس یکانی با تعریف ۳-۱ است. با تکرار محاسبه برای $U^\dagger U$ ، می‌توان نیمه دوم شرط را به دست آورد.

۳-۳ تغییر پایه و تبدیلهای تشابهی

مسائل فیزیکی را اغلب باید در پایه‌های خاصی توصیف کرد، زیرا در آن پایه شکل ساده‌تری به خود می‌گیرند؛ اما ممکن است هنوز نتیجه کلی حائز اهمیت باشد. در این‌گونه موارد مسئله را در یک پایه حل می‌کنیم و سپس نتیجه را به پایه‌های دیگر می‌بریم. اینک این مطلب را به تفصیل بررسی می‌کنیم.

با داشتن پایه مفروض $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ ، می‌توانیم بردار دلخواه $|a\rangle$ را با مؤلفه‌های $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ در B ، به صورت $|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle$ بنویسیم. حال فرض کنید پایه را به $B' = \{|a'_i\rangle, \dots, |a'_N\rangle\}$ تغییر دهیم. مؤلفه‌های $|a\rangle$ در B' کدام‌اند؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، $|a_i\rangle$ را بر حسب بردارهای B' می‌نویسیم

$$|a_i\rangle = \sum_{j=1}^N r_{ji} |a'_j\rangle$$

که r_{ji} مؤلفه‌های $|a_i\rangle$ در B' هستند (توجه کنید که برای اسکالرها به جای نمادهای یونانی، از نمادهای لاتین استفاده کرده‌ایم). اکنون در بسط بالا برای $|a\rangle$ ، کمیت $|a_i\rangle$ را جایگزین می‌کنیم

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N r_{ji} |a'_j\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_i r_{ji} |a'_j\rangle$$

اگر مؤلفه α_j در B' را با α'_j نشان دهیم، در آن صورت، بنابراین معادله:

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^N r_{ji} \alpha_i \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{بازای} \quad (الف ۳-۸)$$

اگر a', R, a را، به ترتیب، برای نشان دادن یک بردار ستونی با عناصر α'_i ، یک ماتریس $N \times N$ با مؤلفه‌های r_{ij} ، و یک بردار ستونی با عناصر α_i به کار ببریم، در آن صورت ۸-۳ الف را می‌توان در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$a' = Ra$$

یا

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad (۸-۳ \text{ ب})$$

ماتریس R را ماتریس تبدیل پایه می‌نامیم. این ماتریس، وارون‌پذیر است، زیرا تبدیلی خطی است که یک پایه را به پایه دیگر تبدیل می‌کند (قضیه ۲-۳-۱۱).

طبق معمول، (۸-۳) را می‌توان به عنوان تبدیل فعالی که در آن بردار $|a\rangle$ به بردار دیگری، $|a'\rangle$ ، با مؤلفه‌های $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_N\}$ در پایه B تبدیل می‌شود، نیز تلقی کرد. این دو تعبیر، البته با یکدیگر هم‌ارزند.

وقتی پایه را تبدیل می‌کنیم، بر سر یک ماتریس چه می‌آید؟ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$|b\rangle = A|a\rangle$$

که در آن $|a\rangle$ و $|b\rangle$ ، به ترتیب، دارای مؤلفه‌های $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ و $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ در B هستند. معادله ماتریسی متناظر با این معادله عبارت است از

$$\beta = Aa \quad (۹-۳ \text{ الف})$$

اینک، اگر پایه (یا بردارها) را تغییر دهیم، مؤلفه‌های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ ، به ترتیب، به مؤلفه‌های α' و β' تغییر خواهند یافت. ماتریس A' را باید چنان بیابیم که

$$\beta' = A'a'$$

بدیهی است که این ماتریس، تبدیل A خواهد بود. با بهره‌گیری از ۸-۳، می‌نویسیم $R\beta = A'Ra$ ، یا

$$\beta = (R^{-1}A'R)a \quad (۹-۳\text{ب})$$

از مقایسه (۹-۳الف) با این معادله و در نظر گرفتن این واقعیت که هر دو معادله برای هر a و β' دلخواه برقرارند، نتیجه می‌گیریم که

$$R^{-1}A'R = A$$

یا

$$A' = RAR^{-1}$$

این تساویها را تبدیل تشابهی روی A می‌نامیم، و اصطلاحاً می‌گوییم که A' مشابه A است. ماتریس تبدیل R را به آسانی می‌توان برای پایه‌های راست‌هنجار پیدا کرد. داریم

$$|e_i\rangle = \sum_{k=1}^N r_{ki} |e'_k\rangle$$

که در آن، $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ و $B' = \{|e'_i\rangle\}_{i=1}^N$ پایه‌های راست‌هنجارند. با ضرب این معادله در $\langle e'_j|$ ، می‌رسیم به

$$\langle e'_j | e_i \rangle = \sum_{k=1}^N r_{ki} \langle e'_j | e'_k \rangle = \sum_k r_{ki} \delta_{jk} = r_{ji} \quad (۱۱-۳)$$

یعنی، برای یافتن عنصر z_{ij} ماتریسی که مؤلفه‌های یک بردار را در پایه راست‌هنجار B به مؤلفه‌های همان بردار در پایه راست‌هنجار B' تغییر می‌دهد (معادله ۸-۳)، z_{ij} زامین کت پایه B را در زامین برای پایه B' ضرب می‌کنیم.

برای پیدا کردن زامین عنصر ماتریسی که B' را به B تغییر می‌دهد، باید زامین کت در B' ، یعنی $\langle e'_j|$ را در زامین برای B ، یعنی $|e_i\rangle$ ، ضرب کنیم

$$r'_{ij} = \langle e_i | e'_j \rangle$$

اما، همان‌گونه که از ۳-۸ مشاهده می‌شود، ماتریس R' باید مساوی R^{-1} باشد از سوی دیگر،

$$(r'_{ij})^* = \langle e_i | e'_j \rangle^* = \langle e'_j | e_i \rangle = r_{ji}$$

یا

$$(R^{-1})_{ij}^* = r_{ji}$$

یا

$$(R^{-1})_{ij} = r_{ji}^* = (R)_{ij} \quad (۱۲-۳)$$

این عبارت نشان می‌دهد که R ماتریسی یکانی است و به قضیه مهمی می‌انجامد.

قضیه ۳-۳-۱: ماتریسی که یک پایه راست‌هنجار را به پایه راست‌هنجار دیگری تبدیل می‌کند، لزوماً یکانی است.

از معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۲) داریم: $(R^\dagger)_{ij} = \langle e_i | e'_j \rangle$. بنابراین، برای به‌دست آوردن زامین ستون R^\dagger ، زامین بردار را در پایه جدید اختیار و به‌طور پیاپی آن را در $\langle e_i |$ ، به‌ازای $i = 1, 2, \dots, N$ "ضرب" می‌کنیم. اعدادی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند زامین ستون R^\dagger را می‌دهند. در حالت خاص، اگر پایه اصلی پایه استاندارد C^N باشد و $\langle e'_j |$ با یک بردار ستونی در آن پایه نشان داده شود، در آن صورت زامین ستون R^\dagger صرفاً همان بردار $\langle e_j |$ است.

مثال ۳-۳-۱: بردارهای

$$|a_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right)$$

$$|a_2\rangle = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \quad \frac{i}{\sqrt{6}} \quad \frac{-1+i}{\sqrt{6}} \right)$$

$$|a_3\rangle = \left(0 \quad \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right)$$

بردارهایی راست‌هنجار در C^3 هستند. می‌خواهیم ماتریس تبدیلی را بیابیم که پایه استاندارد را به این پایه ربط می‌دهد و آنگاه نشان دهیم که این ماتریس یکانی است.

عناصر ماتریس مطلوب عبارت‌اند از

$$r_{ij} = \langle a_i | e_j \rangle$$

که در آن $|e_1\rangle = (1, 0, 0)$ ، $|e_2\rangle = (0, 1, 0)$ و $|e_3\rangle = (0, 0, 1)$ بنا بر این

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{-1-i}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1-i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

و R^\dagger به این ترتیب به دست می‌آید که مزدوج مختلط R را می‌گیریم و جای سطر و ستونهای آن را عوض می‌کنیم

$$R^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$RR^\dagger = R^\dagger R = 1$$

تمرینها

۱-۳-۳ ماتریس تبدیل R را چنان بیابید که مابین پایه راست هنجار:

$$\left\{ |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

با پایه راست هنجاری که توسط فرایند گرام-اشمیت از بردارهای زیر به دست می آید

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad |a_3\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ارتباط برقرار کند.

۲-۳-۳ نشان دهید، مطابق انتظاری که از قضیه ۱-۳-۳ می رود، ماتریس R به دست آمده در تمرین ۱-۳-۳، یکانی است.

۳-۳-۳ اگر نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی A در \mathbb{C}^2 نسبت به پایه $\{(1, 0), (0, 1)\}$ به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، نمایش ماتریسی A نسبت به پایه $\{(1, 1), (1, -1)\}$ چه خواهد بود؟

۴-۳-۳ اگر نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی A در \mathbb{C}^3 نسبت به پایه $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ به صورت

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

باشد، نمایش ماتریسی A نسبت به پایه $\{(0, 1, -1), (1, -1, 0), (-1, 1, 0)\}$ چیست؟

۴-۳ دترمینان و رد

یکی از مفاهیم مهم مربوط به عملگرهای خطی و نمایشهای ماتریسی آنها، دترمینان است. تعریف دترمینان عملگرها برحسب ماتریسها، بدون توسل به نمایش خاصی از عملگر امکان پذیر است (و این تعریف را در فصل ۴ ارائه خواهیم کرد). در اینجا، دترمینانها را برحسب ماتریسها تعریف می کنیم.

در بحث جایگشتها در بخش ۴-۲، نماد جایگشت $\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ به صورت

$$\varepsilon_{12\dots N} = +1 \quad (۱۳-۳ الف)$$

و

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_N} = -\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_N} \quad (۱۳-۳ ب)$$

تعریف شد. به عبارت دیگر، $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ در اثر تعویض جای هر زوج از شاخصهایش کاملاً پادمتقارن است. در بحث دترمینانها، از نماد جایگشت بهره خواهیم برد.

مثال ۳-۴-۱: یکی از پیامدهای معادله (۳-۱۳) این است که اگر دو تا از شاخصها با هم برابر باشند، $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ صفر خواهد بود. فرض کنید دو شاخص یاد شده i_k و i_l باشند و هر دو را l بنامیم. به این ترتیب، $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ تبدیل می شود به

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots l \dots l \dots i_N} = -\varepsilon_{i_1 i_2 \dots l \dots l \dots i_N}$$

انتقال عبارت سمت راست به سمت چپ، می انجامد به

$$2\varepsilon_{i_1 i_2 \dots l \dots l \dots i_N} = 0$$

یا

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots l \dots l \dots i_N} = 0$$

۳-۴-۱ دترمینان یک ماتریس

اینک دترمینان ماتریس A را با عناصر a_{ij} تعریف می کنیم.

تعریف ۳-۴-۱: دترمینان نگاشتی، $\det : \mathcal{M}^{(N)} \rightarrow \mathbb{R}$ ، است که برحسب عناصر a_{ij} ی ماتریس $A \in \mathcal{M}^{(N)}$ به صورت زیر داده می شود

$$\det A \equiv \sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{1i_1} \dots a_{Ni_N} \quad (3-14 \text{ الف})$$

توجه کنید که a_{1i_1} همیشه یکی از درایه (عنصر)های سطر اول ماتریس A ، a_{2i_2} یکی از درایه های سطر دوم، والخ، است. همچنین، توجه داشته باشید که اگر $(i_1 i_2 \dots i_N)$ یک جایگشت زوج از $(1 \ 2 \dots N)$ باشد، $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = +1$ ، و اگر یک جایگشت فرد از آن باشد، آنگاه $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = -1$.

مثال ۳-۴-۲: به عنوان یک تمرین در زمینه مجموع بایه های چندگانه، رابطه ۳-۱۴ الف را به ازای

$N = 3$ محاسبه می‌کنیم:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

ابتدا مجموعیابی را روی i_1 انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{1i_2i_3} a_{11} a_{2i_2} a_{3i_3} + \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{2i_2i_3} a_{12} a_{2i_2} a_{3i_3} \\ &+ \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{3i_2i_3} a_{13} a_{2i_2} a_{3i_3} \end{aligned}$$

سپس، مجموعیابی روی i_2 را انجام می‌دهیم. در حاصل جمع اول در سمت راست، i_2 می‌تواند مقادیر ۲ و ۳ را بپذیرد (اگر $i_2 = 1$ ، در آن صورت ε دو شاخص متساوی خواهد داشت و طبق مثال ۳-۴-۱، باید صفر شود). در حاصل جمع دوم، i_2 می‌تواند ۱ و ۳، و در حاصل جمع سوم، ۱ و ۲ باشد. به این ترتیب، مجموعیابی روی i_2 منجر می‌شود به

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{12i_3} a_{11} a_{22} a_{3i_3} + \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{13i_3} a_{11} a_{23} a_{3i_3} \\ &+ \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{21i_3} a_{12} a_{21} a_{3i_3} + \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{23i_3} a_{12} a_{23} a_{3i_3} \\ &+ \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{31i_3} a_{13} a_{21} a_{3i_3} + \sum_{i_3=1}^2 \varepsilon_{32i_3} a_{13} a_{22} a_{3i_3} \end{aligned}$$

اکنون باید مجموعیابی را روی i_3 انجام دهیم. اما توجه داشته باشید که در هر یک از حاصل جمعهای بالا، i_3 فقط می‌تواند یک مقدار بپذیرد. مثلاً در نخستین حاصل جمع، i_3 فقط می‌تواند ۳ باشد، در دومین حاصل جمع فقط می‌تواند ۲ باشد، والی آخر. با توجه به این واقعیت، به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} \det A &= \varepsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \varepsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ \varepsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

بالاخره، با مقدار قراردادن به جای نماد جایگشت، می‌رسیم به

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (1)$$

همچنین، برای یک ماتریس 2×2 .

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

مثال ۳-۴-۳: ترفند زیر برای محاسبهٔ دترمینانهای 3×3 (و فقط 3×3) سودمند است. ستونهای اول و دوم را کنار ستون سوم بنویسید، حاصلضربها را در امتداد خطهای قطری به دست آورید و علامتهای نشان داده شده را به آنها نسبت دهید، و سپس تمام حاصلضربها را با هم جمع کنید:

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

+ + + - - -

تعریف ۳-۴-۱، $\det A$ را برحسب بسط سطرها می‌دهد، بنابراین درایهٔ اول از سطر اول، درایهٔ دوم از سطر دوم و الی آخر، است. بسط برحسب ستونها نیز، همان‌گونه که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، امکان‌پذیر است.

قضیهٔ ۳-۴-۲: دترمینان ماتریس A را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\det A = \sum_{i_1, \dots, i_N} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_N N} \quad (3-14 \text{ ب})$$

بنابراین، $\det A = \det \tilde{A}$.

اثبات . در (۳-۱۴الف)، i_1, i_2, \dots, i_N همه با هم متفاوت اند و یک جایگشت از $(1 \ 2 \dots N)$ به شمار می آیند. بنابراین باید شاخص دوم یکی از a ها ۱ باشد. فرض می کنیم که جمله j_1 ام چنین باشد؛ یعنی، $i_{j_1} = 1$ و

$$a_{1i_1} \cdots a_{j_1 i_1} \cdots a_{N i_N} = a_{1i_1} \cdots a_{j_1 1} \cdots a_{N i_N}$$

این جمله را به طرف چپ جمله a_{1i_1} می بریم و آن را به صورت $a_{j_1 1} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{N i_N}$ می نویسیم. اکنون درایه ای را جستجو می کنیم که شاخص دومش ۲ باشد و فرض می کنیم که این درایه در j_2 امین محل یافته شود؛ یعنی $i_{j_2} = 2$. این جمله را به طرف چپ، کنار $a_{j_1 1}$ منتقل می کنیم، و می نویسیم $a_{j_1 1} a_{j_2 2} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{N i_N}$. همین عمل را ادامه می دهیم تا برسیم به $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_N N}$. از آنجا که $j_1 j_2 \cdots j_N$ در واقع تغییر آرایشی است از $i_1 i_2 \cdots i_N$ ، شاخصهای مجموعیابی را می توانیم به $j_1 j_2 \cdots j_N$ تغییر بدهیم و بنویسیم

$$\det A = \sum_{j_1 \cdots j_N} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_N N}$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که $\varepsilon_{i_1 \dots i_N} = \varepsilon_{j_1 \dots j_N}$ ، قضیه ثابت شده است. در (۳-۱۴الف)، دنباله اعداد صحیح $(i_1 i_2 \dots i_N)$ از تغییر آرایش $(1 \ 2 \dots N)$ به دست می آید. آنچه که در بالا انجام داده ایم تغییر آرایش مجدد $(i_1 i_2 \dots i_N)$ با ترتیب معکوس است به طوری که دوباره می رسیم به $(1 \ 2 \dots N)$. بنابراین، اگر تغییر آرایش (۳-۱۴الف)، زوج (فرد) باشد، تغییر آرایش مجدد نیز زوج (فرد) خواهد بود. لذا، $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}$ ، و داریم

$$\det A = \sum_{j_1 \cdots j_N} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_N N}$$

و از این رو حکم ثابت است. ■

قضیه $3-4-3$: تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس، علامت دترمینان آن را تغییر می دهد. ■

اثبات. قضیه را برای تعویض جای دو سطر، با استفاده از (۳-۱۴الف)، اثبات می کنیم. با استدلالی مشابه، و با استفاده از (۳-۱۴ب)، برای دو ستون نیز می توان به نتیجه مشابهی رسید. تعویض جای، مثلاً

دو سطر j و k در (۳-۱۴ الف)، به این معناست که به جای $a_{N i_N} \cdots a_{k i_k} \cdots a_{j i_j} \cdots a_{i_1 i_1}$ بنویسیم $a_{N i_N} \cdots a_{j i_k} \cdots a_{k i_j} \cdots a_{i_1 i_1}$. بنابراین سمت راست معادله (۳-۱۴ الف) تبدیل می شود به

$$\begin{aligned} & \sum \varepsilon_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_N} a_{i_1 i_1} \cdots a_{k i_j} \cdots a_{j i_k} \cdots a_{N i_N} \\ &= - \sum \varepsilon_{i_1 \dots i_k \dots i_j \dots i_N} a_{i_1 i_1} \cdots a_{k i_j} \cdots a_{j i_k} \cdots a_{N i_N} \\ &= - \sum_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_k \dots i_j \dots i_N} a_{i_1 i_1} \cdots a_{j i_k} \cdots a_{k i_j} \cdots a_{N i_N} \end{aligned}$$

با یادآوری این نکته که $i_1 \dots i_N$ متغیرهایی ظاهری اند، می توانیم نتیجه بگیریم که حاصل جمع بالا درست مانند (۳-۱۴ الف) است. در واقع، اگر در (۳-۱۴ الف) مجموعیابی را به طور صریح روی i_j و i_k انجام بدهیم، خواهیم داشت

$$\det A = \sum_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_N} a_{i_1 i_1} \cdots a_{j i_j} \cdots a_{k i_k} \cdots a_{N i_N}$$

که درست مانند حاصل جمع بالاست، با این تفاوت که در آنجا جای شاخصهای ظاهری i_k و i_j را با هم عوض کرده ایم. اما انتخاب شاخص ظاهری اثری بر حاصل جمع ندارد و بنابراین قضیه ثابت شده است. ■

یکی از پیامدهای بی واسطه قضیه ۳-۴-۳ همانا نتیجه زیر است.

نتیجه ۳-۴-۴: دترمینان ماتریسی که دارای دو سطر (یا دو ستون) مساوی باشد، صفر است. از آنجا که هر جمله ۳-۱۴ شامل یک و فقط یک عنصر از هر سطر است، می توانیم با گردآوری تمام جملات سطر i ام که شامل $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_N}$ هستند، بنویسیم:

$$\det A = a_{i_1} A_{i_1} + a_{i_2} A_{i_2} + \cdots + a_{i_N} A_{i_N} = \sum_{j=1}^N a_{i_j} A_{i_j} \quad (15-3)$$

A_{i_j} شامل حاصلضربهای عناصر ماتریس A ، غیر از عنصر a_{i_j} است. چون هر عنصر یک سطر یا یک ستون حداکثر یک بار در هر جمله بسط ظاهر می شود، A_{i_j} نمی تواند شامل هیچ عنصری از سطر i ام یا ستون i ام باشد. کمیت A_{i_j} ، اصطلاحاً هم عامل a_{i_j} خوانده می شود، و ۳-۱۵ به بسط (لاپلاس) دترمینان A از طریق سطر i ام آن مشهور است. بدیهی است که بسط

مشابهی از طریق ستون i ام دترمینان A نیز وجود دارد، که با استدلالی مشابه و با استفاده از ۳-۱۴ ب به دست می آید.

گزاره ۳-۴-۵: اگر $k \neq i$ ، در آن صورت

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} A_{kj} = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^N a_{ji} A_{jk} = 0$$

اثبات. ماتریس B را در نظر بگیرید که از جایگزینی سطر k با سطر i ، که $k \neq i$ ، در ماتریس A به دست می آید (البته سطر i بدون تغییر باقی می ماند). ماتریس B دارای دو سطر مساوی و بنابراین دترمینان آن صفر است. اینک اگر $\det B$ را طبق (۳-۱۵) از طریق سطر k ام آن بسط دهیم، داریم

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^N b_{kj} B_{kj}$$

اما عناصر سطر k ام B مانند عناصر سطر i ام A هستند، یعنی $b_{kj} = a_{ij}$ ، و هم عاملهای سطر k ام B مانند هم عاملهای A هستند، یعنی $B_{kj} = A_{kj}$. بنابراین، نخستین معادله گزاره برقرار است. دومین معادله با استفاده از بسط ستونی به دست می آید. ■

مثال ۳-۴-۴: گزاره ۳-۴-۵ را با استفاده از یک ماتریس 3×3 بررسی می کنیم. با اختیار کردن $i = 1$ و $k = 2$ و مجموعیابی روی j ، داریم

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} A_{2j} = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$$

با توجه به تعریف A_{ij} به عنوان ضریب a_{ij} در بسط $\det A$ ، می توانیم از معادله (۱) در مثال ۳-۴-۲، مقادیر A_{21} ، A_{22} و A_{23} را بیابیم:

$$A_{21} = a_{13} a_{22} - a_{12} a_{23} \quad A_{22} = a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21} \quad A_{23} = a_{11} a_{21} - a_{12} a_{22}$$

با جایگزین کردن آن مقادیر در معادله قبل، داریم

$$\sum_{j=1}^r a_{1j} A_{rj} = a_{11}(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) + a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{12}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = 0$$

کهاد مرتبه $(N - 1)$ یک ماتریس $N \times N$ ، A ، دترمینان ماتریسی است که از حذف یک سطر و ستون A به دست می آید. اگر سطر i ام و ستون j ام از ماتریس A را حذف کنیم، در آن صورت کهاد حاصل را با M_{ij} نشان می دهیم.

قضیه ۳-۴-۶. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

اثبات. مجموعه ای روی i_1 در $۱۴-۳$ را به دو جزء تقسیم می کنیم؛ یکی به ازای $i_1 = 1$ و دیگری به ازای سایر مقادیر i_1 ، جز ۱:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i_2 \dots i_N} \varepsilon_{1i_2 \dots i_N} a_{11} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N} + \sum_{\substack{i_1 \dots i_N \\ i_1 \neq 1}} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{1i_1} \dots a_{Ni_N} \\ &= a_{11} \sum_{i_2 \dots i_N} \varepsilon_{i_2 \dots i_N} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N} + \text{جملاتی که شامل } a_{11} \text{ نیستند} \quad (۱۶-۳) \\ &= a_{11} M_{11} + \text{جملاتی که شامل } a_{11} \text{ نیستند} \end{aligned}$$

در اینجا از تعریف M_{11} و این واقعیت بهره برده ایم که نخستین حاصل جمع در $(۱۶-۳)$ دترمینانی شامل تمام a ها است جز آنها که در سطر و ستون اول یافت می شوند. توجه کنید که طبق تعریف، $\varepsilon_{1i_2 \dots i_N}$ دارای $(N - 1)$ شاخص است، که هیچ یک از آنها نمی تواند ۱ باشد؛ بنابراین، حاصل جمع در خط دوم رابطه $(۱۶-۳)$ ، دترمینان یک ماتریس $(N - 1) \times (N - 1)$ ، یعنی M_{11} ، است. اما آن حاصل جمع همچنین مساوی A_{11} ، یا چیزی است که در بسط دترمینان، در a_{11} ضرب می شود $(۱۵-۳)$:

$$A_{11} = \sum_{i_2 \dots i_N} \varepsilon_{1i_2 \dots i_N} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N}$$

بنابراین،

$$M_{11} = A_{11}$$

برای یک، a_{ij} کلی، آن را با تعداد $(i-1)$ تعویض جای یبایی سطرهای مجاور و سپس $(j-1)$ تعویض جای ستونهای مجاور، به وضعیت $(1, 1)$ منتقل می‌کنیم. دترمینان ماتریس جدید B که به این ترتیب به دست می‌آید، به‌قرار زیر است

$$\det B = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \det A = (-1)^{i+j} \det A$$

زیرا هر تعویض جای دو سطر یا دو ستون، یک علامت منفی ایجاد می‌کند. با اعمال رابطه (۱۶-۳) بر $\det B$ می‌توانیم (با نمادگذاری بدیهی) بنویسیم

$$\begin{aligned} \det B &= b_{11} M_{11}^{(B)} + \text{جملاتی که شامل } b_{11} \text{ نیستند} \\ &= a_{ij} M_{ij} + \text{جملاتی که شامل } a_{ij} \text{ نیستند} \end{aligned}$$

زیرا بنا بر ساختار B ، $b_{11} = a_{ij}$ و $M_{11} = M_{ij}$. از سوی دیگر، با استفاده از (۱۵-۳)، می‌توانیم بنویسیم

$$\det A = a_{ij} A_{ij} + \text{جملاتی که شامل } a_{ij} \text{ نیستند}$$

از مقایسه سه معادله اخیر، داریم

$$a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

یا

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ترکیب عبارت (۱۵-۳) و قضیه ۳-۴-۶، روشی عملی را (که احتمالاً با آن آشنا هستید) برای محاسبه دترمینان یک ماتریس به دست می‌دهد.

مثال ۳-۴-۵: هم‌عاملهای ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

طبق قضیه ۳-۴-۶ داریم

$$A_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_{31} = -3 \quad A_{32} = 2 \quad A_{33} = 1$$

۳-۴-۲ وارون یک ماتریس

اینک آماده‌ایم شرایطی را بررسی کنیم که تحت آنها وارون یک ماتریس وجود دارد. ابتدا، (۳-۱۵) و محتوای گزاره ۳-۴-۵ را با هم ترکیب می‌کنیم و به‌صورت یک تک‌معادله درمی‌آوریم

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} A_{kj} = (\det A) \delta_{ik} \quad (۳-۱۷)$$

ماتریس $C(A)$ را طوری تشکیل می‌دهیم که عناصر آن، c_{ij} ، هم‌عاملهای عناصر ماتریس A باشند. یعنی، $c_{ij} = A_{ij}$ یا

$$C(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \quad (۳-۱۸)$$

آنگاه (۱۷-۳) را می‌توان به صورت

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} c_{kj} = \sum_{j=1}^N a_{ij} (\widetilde{C(A)})_{jk} = (\det A) \delta_{ij}$$

یا، در شکل ماتریسی، به صورت

$$A(\widetilde{C(A)}) = (\det A) 1 \quad \text{یا} \quad A \left(\frac{\widetilde{C(A)}}{\det A} \right) = 1$$

نوشت. بنابراین به قضیه زیر خواهیم رسید.

قضیه ۳-۴-۷: ماتریس A فقط در صورتی دارای وارون است که $\det A \neq 0$. علاوه بر این،

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{C(A)}}{\det A} \quad (19-3)$$

که $C(A)$ ماتریس هم‌عاملهای A است.

در حالت خاص، وارون یک ماتریس 2×2 خیلی به آسانی پیدا می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (20-3)$$

مثال ۳-۴-۶: وارون ماتریس A در مثال ۳-۴-۵ را پیدا کنید. ابتدا دترمینان را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -5 \end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از (۳-۱۸)، همراه با نتایج مثال ۳-۴ و معادله (۳-۱۹)، داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

این نتیجه را به آسانی می‌توان با ضرب A و A^{-1} در یکدیگر امتحان کرد.

راه خیلی عملی‌تری برای محاسبه وارون ماتریسها وجود دارد. بحث زیر که مربوط به این روش است، بیشتر اثباتها را نادیده خواهد گرفت، زیرا در غیر این صورت، بیش از حد در نظریه ماتریسها غرق خواهیم شد.

تعریف ۳-۴-۸: یک عمل سطری ابتدایی روی یک ماتریس، یکی از عملهای زیر است:

(الف) تعویض جای دو سطر از ماتریس

(ب) ضرب یک سطر در یک عدد مخالف صفر

(ج) افزودن مضربی از یک سطر به سطری دیگر

عملهای ستونی ابتدایی نیز به طریقی مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۳-۴-۹: یک ماتریس در شکل مثلثی، یا پلکانی است در صورتی که سه شرط زیر در آن برقرار باشد:

۱. هر سطری که فقط شامل عناصر صفر است، زیر سطری قرارگیرد که شامل حداقل یک عنصر غیرصفر است.

۲. در حرکت از چپ به راست، نخستین عنصر غیرصفر هر سطر، در طرف چپ اولین عنصر غیرصفر هر سطر زیر آن باشد.

۳. نخستین عنصر غیرصفر هر سطر ۱ باشد.

ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در شکل مثلثی است، اما سه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نیستند. ماتریس A شرط (۳)، B شرط (۲)، و C شرط (۱) را نقض می‌کند.

قضیه ۳-۴-۱۰: هر ماتریس وارون‌پذیر را می‌توان با تعدادی متناهی "عمل سطری ابتدایی" به ماتریس I تبدیل کرد.

قضیه ۳-۴-۱۰، قضیه مهمی به‌شمار می‌آید که روش پیدا کردن ماتریسهای وارون، مبتنی بر آن است.^۱

قضیه ۳-۴-۱۱: ماتریس E را که $n \times n$ است ماتریس ابتدایی می‌نامیم در صورتی که بتوان آن را با یک تک‌عمل سطری یا ستونی ابتدایی از ماتریس I به‌دست آورد. مثلاً ماتریس زیر یک ماتریس ابتدایی است

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

زیرا اگر نخستین سطر 1 را در ۳- ضرب کنیم و آن را به سطر دوم بیفزاییم، E به‌دست می‌آید. ■ در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که عملهای سطری و ستونی ابتدایی، با یکدیگر هم‌ارزند.^۲

قضیه ۳-۴-۱۲: هر ماتریس ابتدایی را می‌توان با یک عمل سطری ابتدایی یا ستونی ابتدایی از I به‌دست آورد.^۳ ■

قضیه زیر، راه را برای دستیابی به نتیجه نهایی هموار می‌کند.

۱. برای اثبات قضیه ۳-۴-۱۰ کتاب زیر را ببینید:

Birkhoff and MacLane, 1977.

۲. در اینجا نیز، می‌توان اثبات را در کتاب Maclane & Birkhoff، یافت.

۳. در اینجا نیز، برای اثبات، ر.ک.

قضیه ۳-۴-۱۳: دو ماتریس A و B مفروض‌اند.

۱. اگر بتوان با یک عمل سطری ابتدایی، A را از B به دست آورد، در آن صورت $B = EA$.

که در آن E ماتریسی است ابتدایی که با همان عمل سطری از I به دست می‌آید.

۲. اگر بتوان با یک عمل ستونی ابتدایی، B را از A به دست آورد، در آن صورت $B = AE$.

که در آن E ماتریسی است ابتدایی که با همان عمل ستونی از I به دست می‌آید.

مثال ۳-۴-۷: ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

در این ماتریسها، B_1 از حاصلضرب نخستین سطر A در -2 و افزودن آن بر سطر دوم به دست می‌آید. ماتریس ابتدایی متناظر عبارت است از

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = B_1$$

به همین ترتیب، B_2 از حاصلضرب ستون دوم A در ۳ و افزودن آن بر ستون سوم به دست می‌آید. ماتریس ابتدایی متناظر عبارت است از

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B_T$$

گزارهٔ ۳-۴-۱۴: هر ماتریس ابتدایی E وارون پذیر است. علاوه بر این، E^{-1} نیز وارون پذیر است.

اثبات. هر عمل سطری ابتدایی را می توان با عمل مشابهی "خنثی" کرد. بنابراین، اگر با یک عمل ابتدایی E را از 1 به دست آوریم، می توانیم با انجام عمل خنثی کننده روی E ، 1 را بیابیم. اما طبق قضیهٔ ۳-۴-۱۳، این خنثی سازی را می توان با ضرب کردن E در ماتریس ابتدایی متناظر انجام داد، که آن را با E' نمایش می دهیم. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$E'E = 1$$

و E وارون پذیر است.

سرانجام، به آخرین مرحلهٔ ارائه روش یافتن وارونها می رسم.

گزارهٔ ۳-۴-۱۵: هر ماتریس وارون پذیر، حاصلضربی است از ماتریسهای ابتدایی.

اثبات. از قضیه های ۳-۴-۱۰ و ۳-۴-۱۳ می توانیم بنویسیم $1 = E_1 A \cdots E_{m-1} E_m$ ، یا

$$A = (E_m E_{m-1} \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$$

طبق گزارهٔ ۳-۴-۱۴، $\{E_i^{-1}\}_{i=1}^m$ ابتدایی اند.

اینک می توانیم قضیهٔ اصلی را بیان کنیم.

قضیهٔ ۳-۴-۱۶: اگر A یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد،

۱. ماتریس $(A|1)$ را می توان با تعدادی متناهی عملهای سطری ابتدایی به ماتریس $(1|A^{-1})$ ،

که $2n \times n$ است، تبدیل کرد.

۱. ماتریس $(A|1)$ به این معناست که ماتریس $n \times 2n$ از قرار دادن ماتریس $n \times n$ در سمت راست A به دست می آید. به آسانی می توان نشان داد که اگر A, B, C و $n \times n$ ماتریسهای باشند، در آن صورت $A(B|C) = (AB|AC)$

۲. اگر با عملهای سطری ابتدایی بتوان $(A|1)$ را به $(1|B)$ تبدیل کرد، در آن صورت
 $B = A^{-1}$

اثبات ۱. $(1|A^{-1})$ را می‌توانیم از ضرب $(A|1)$ در A^{-1} به دست آوریم:

$$A^{-1}(A|1) = (A^{-1}A|A^{-1}1) = (1|A^{-1})$$

اما، طبق گزاره ۳-۴-۱۵، A^{-1} حاصلضرب ماتریسهای ابتدایی است. بنابراین،

$$E_1 E_2 \dots E_m (A|1) = (1|A^{-1})$$

اما، قضیه ۳-۴-۱۳، حاصلضرب ماتریسهای ابتدایی بالا را به عملهای سطری ابتدایی منتقل می‌کند.

۲. بار دیگر، طبق قضیه ۳-۴-۱۳، عملهای سطری ابتدایی متناظرند با ضرب ماتریسهای ابتدایی. بنابراین می‌نویسیم

$$(1|B) = E_1 E_2 \dots E_m (A|1) \equiv C(A|1) = (CA|C)$$

این عبارت نشان می‌دهد که $CA = 1$ و $C = B$ و $C = B = A^{-1}$. بنابراین،

یکی از راههای سیستماتیک برای تبدیل $(A|1)$ به $(1|A^{-1})$ این است که ابتدا A را به شکل مثلثی درآوریم و سپس تمام عناصر غیرصفر هر ستون را با عملهای سطری ابتدایی حذف کنیم.

مثال ۳-۴-۸: وارون ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ را بیابید.
 با ماتریس

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv M$$

شروع می‌کنیم و با اعمال عملهای سطری ابتدایی بر M ، نیمهٔ چپ آن را به صورت پلکانی سطری درمی‌آوریم. اگر سطر سوم را با (k) و سه عمل تعریف ۳-۴-۸، به ترتیب، با $(j) \leftrightarrow (k)$ ،

$\alpha(k)$ و $\alpha(k) + (j)$ نشان دهیم، داریم

$$M \xrightarrow{-r(1)+(r)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r(r)+(r)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}(r)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \equiv M'$$

با اعمال عملهای سطری ابتدایی مناسب از نوع III، تمام عناصر ستونی بالای یک ۱ در طرف چپ M' را می‌توان به آسانی با صفر مساوی قرار داد

$$M' \xrightarrow{-r(r)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-r(r)+1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r(r)+(r)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

نیمه راست ماتریس حاصل، A^{-1} است. یعنی

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

این درست مانند ماتریسی است که در مثال ۳-۴-۶ پیدا کردیم.

مثال ۳-۴-۹: این هم آموزنده است که با شروع با ماتریسی وارون ناپذیر نشان دهیم که نمی توان آن را با عملهای سطری ابتدایی، به 1 تبدیل کرد. ماتریس زیر را در نظر می گیریم:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

آن را به طور سیستماتیک به صورت پلکانی سطری درمی آوریم

$$\begin{aligned} M &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \text{[pt]} & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-2(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

اینک ماتریس B به صورت پلکانی سطری است، اما عناصر سطر سوم آن، جملگی صفرند. هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم آن را به صورت یک ماتریس یکه درآوریم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که B وارون‌پذیر نیست. البته این امر بدیهی است، زیرا به آسانی می‌توان پی برد که $\det B = 0$.

۳-۴-۳ دترمینان حاصلضرب ماتریسها

در فصل ۴، دترمینانها را با استفاده از ابزار دقیق جبر برونوی (جبر گراسمان) بررسی خواهیم کرد. سادگی و قدرت جبر برونوی را با اثبات قضیه زیر "از راه دشوار"، بهتر می‌توان درک کرد.

$$\text{قضیه } ۳-۴-۱۷: \det(AB) = (\det A)(\det B)$$

اثبات. فرض کنید $P = AB$. به این ترتیب، با استفاده از ۳-۱۴ الف داریم

$$\begin{aligned} \det P &= \sum_{\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} p_{1 i_1} p_{2 i_2} \dots p_{N i_N} \\ &= \sum_{\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}} \left(\sum_{j_1} a_{1 j_1} b_{j_1 i_1} \right) \dots \left(\sum_{j_N} a_{N j_N} b_{j_N i_N} \right) \quad (۲۱-۳) \\ &= \sum_{i_1, j_1} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{N j_N} b_{j_1 i_1} b_{j_2 i_2} \dots b_{j_N i_N} \\ &= \sum_j a_{1 j_1} \dots a_{N j_N} \sum_i \varepsilon_{i_1 \dots i_N} b_{j_1 i_1} \dots b_{j_N i_N} \end{aligned}$$

حال توجه خود را بر دومین حاصل جمع متمرکز کنیم. b ها را طوری بازآرایی می‌کنیم که اولین شاخص اولین b ، ۱، اولین شاخص دومین b ، ۲، و الی آخر باشد. به این ترتیب، خواهیم داشت: $b_{1 i_{k_1}} b_{2 i_{k_2}} \dots b_{N i_{k_N}}$. روشن است که $(k_1 k_2 \dots k_N)$ جایگشتی است از $(1 \ 2 \dots N)$ که $(i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N})$ را به $(1 \ 2 \dots N)$ تبدیل می‌کند. همچنین، بدیهی است که $(i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N})$ همان جایگشتی از $(i_1 i_2 \dots i_N)$ است که $(j_1 j_2 \dots j_N)$ از $(1 \ 2 \dots N)$ اکنون ادعا می‌کنیم که

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N}} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}$$

این مطلب را می‌توان با توجه به این معنا ملاحظه کرد که اگر $(i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N})$ یک جایگشت زوج از $(i_1 i_2 \dots i_N)$ باشد، آنگاه $\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N}} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ (که در این مورد $(j_1 j_2 \dots j_N)$ نیز جایگشتی زوج از $(1 \ 2 \dots N)$ است و $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} = +1$)، و اگر $(i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_N})$

یک جایگشت فرد از $(i_1 i_2 \dots i_N)$ باشد: $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = -\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$] که در این حالت $(j_1 j_2 \dots j_N)$ نیز جایگشتی فرد از $(1 \ 2 \dots N)$ است و $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} = -1$. در هر یک از دو حالت، ادعای ما اثبات می‌شود. بنابراین، می‌توان (۲۱-۳) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \det P &= \sum_j a_{1j_1} \cdots a_{Nj_N} \sum_i \varepsilon_{j_1 \dots j_N} \varepsilon_{i k_1 \dots i k_N} b_{1i k_1} \cdots b_{N i k_N} \\ &= \sum_j a_{1j_1} \cdots a_{Nj_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N} \sum \varepsilon_{k_1 \dots k_N} b_{1k_1} \cdots b_{Nk_N} \\ &= (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

که در آن متغیرهای ظاهری در دومین حاصل جمع را بازاری می‌کنیم و به جای مجموعه نامطلوب $(i_1, i_2, \dots, i_N), (k_1, k_2, \dots, k_N)$ به کار می‌بریم.

مثال ۳-۴-۱۰: فرض کنید O و U ، به ترتیب، معرف یک ماتریس راست‌هنجار و یک ماتریس یکانی $n \times n$ باشند؛ یعنی،

$$O\bar{O} = \bar{O}O = 1$$

$$UU^t = U^tU = 1$$

با گرفتن دترمینان اولین معادله و استفاده از قضیه‌های ۳-۴-۲ و ۳-۴-۱۷، داریم

$$(\det O)(\det \bar{O}) = (\det O)^t = \det 1 = 1$$

بنابراین، برای یک ماتریس راست‌هنجار خواهیم داشت

$$\det O = \pm 1$$

تبدیل‌های راست‌هنجار، یک حاصلضرب داخلی حقیقی را "حفظ" می‌کنند. در میان این‌گونه تبدیلهای وارونه‌یافت می‌شوند که در ساده‌ترین شکلشان، یک بردار را در -1 ضرب می‌کنند. در سه بعد، این معنا مترادف است با انعکاس نسبت به مبدأ. ماتریس وابسته به این عمل، -1_3 است:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

دترمینان این ماتریس ۱- است. این عمل، یعنی نخستین نمونه از سایر تبدیلهای راست‌هنجار، نسبت به عملهایی با دترمینان ۱-، دشوارتر است.

گروه دیگر تبدیلهای راست‌هنجار، که دترمینانهای آنها ۱+ است، از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا آنها (در سه بعد) با چرخش متناظرند. مجموعه تبدیلهای راست‌هنجار در n بعد را که دارای دترمینان ۱+ هستند با $SO(n)$ نمایش می‌دهیم. این تبدیلهای از وضعیت خاصی برخوردارند، زیرا "عملگر همانی" متعلق به آنهاست. علاوه بر این، دارای ساختار ریاضی یک گروه (پیوسته) هستند، که در تمام زمینه‌های فیزیک پیشرفته کاربرد دارند.^۱

نتیجه مشابهی را نیز می‌توانیم برای تبدیلهای یکانی به دست آوریم. با گرفتن دترمینان دو طرف $UU^t = 1$ داریم

$$\begin{aligned} \det(UU^t) &= (\det U)(\det U^t) = (\det U)(\det U^*) \\ &= (\det U)(\det U^*) = |\det U|^2 = 1 \end{aligned}$$

بنابراین، می‌توانیم به‌طور کلی بنویسیم

$$\det U = e^{ia} \quad a \in \mathbb{R}$$

مجموعه تبدیلهای با $a = 0$ ، گروهی را تشکیل می‌دهند که 1 متعلق به آنهاست و ما آن گروه را با $SU(n)$ نمایش می‌دهیم. این گروه در سالهای اخیر در فیزیک انرژیهای بالا، به‌خصوص در تلاشهایی که در راه وحدت بخشیدن به برهم‌کنشهای بنیادی صورت گرفته، کاربردهای بسیاری یافته است.

۳-۴-۴ رد

همان‌گونه که در حل مسئله ۳-۱۰ نشان داده شده است، تبدیل تشابهی دترمینان ماتریس را تغییر نمی‌دهد. عملگری را در نظر بگیرید که نمایش ماتریسی آن در پایه‌ای داده شده است. در پایه‌ای دیگر، این عملگر نمایش ماتریسی متفاوتی خواهد داشت، که با نمایش اصلی توسط یک تبدیل تشابهی مرتبط است. یعنی، دترمینان نمایش ماتریسی یک عملگر، مستقل از پایه‌ای است که

۱. متأسفانه، محدودیت صفحات کتاب برای این مبحث، ما را از بررسی این جنبه زیبای ریاضی فیزیک باز می‌دارد. اما می‌توانید به کتاب Weyl (چاپ ۱۹۴۶) مراجعه کنید.

برای نمایش آن عملگر انتخاب می‌شود. بنابراین، می‌توانیم دترمینان را به‌عنوان خاصیت ذاتی یک عملگر تصور کنیم. (اثبات جالب این مطلب در فصل ۴ خواهد آمد.)
از کمیت دیگر وابسته به ماتریس که با تبدیلهای تشابهی تغییر نمی‌کند، می‌توان از رد ماتریس یاد کرد که، بنا بر تعریف، عبارت است از:

تعریف ۳-۴-۱۸: فرض کنید A یک ماتریس $N \times N$ باشد. نگاشت $\text{tr} : \mathcal{M}^{(N)} \rightarrow \mathbb{C}$ (یا \mathbb{R}) که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^N a_{ii}$$

رد A نام دارد.

قضیه ۳-۴-۱۹: رد، یک نگاشت خطی است. علاوه بر این،

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

اثبات. خطی بودن رد، مستقیماً از تعریف آن نتیجه می‌شود. برای اثبات بخش دیگر قضیه، از تعریف رد و حاصلضرب ماتریسی بهره می‌گیریم

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^N (AB)_{ii} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ji} = \sum_{i,j} B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N B_{ji} A_{ij} \right) = \sum_{j=1}^N (BA)_{jj} = \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

گزاره ۳-۴-۲۰: رد ماتریسهای مشابه همسان است.

اثبات. فرض کنید $A' = RAR^{-1}$. آنگاه

$$\begin{aligned} \text{tr}A' &= \text{tr}(RAR^{-1}) = \text{tr}[R(AR^{-1})] = \text{tr}[(AR^{-1})R] \\ &= \text{tr}(AR^{-1}R) = \text{tr}(A1) = \text{tr}A \end{aligned}$$

مثال ۳-۴-۱۱: به عنوان مثالی در زمینه محاسبات رد و آشنا شدن با نمادگذاری مجموعیابی، اثبات می‌کنیم

$$\text{tr}(AS) = 0$$

که در آن A ماتریسی پادمتقارن و S ماتریسی متقارن است. به خاطر دارید که هر ماتریس متقارن با ترانزپوز خود مساوی است

$$\tilde{S} = S \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} = s_{ji}$$

از سوی دیگر، ماتریس پادمتقارن، منفی ترانزپوز خود است

$$\tilde{A} = -A \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

با بهره‌گیری از این دو واقعیت، می‌توانیم نخستین معادله این مثال را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} \text{tr}(AS) &= \sum_{i=1}^N (AS)_{ii} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} s_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-a_{ji})(s_{ji}) \\ &= - \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N a_{ji} s_{ij} \right) = - \sum_{j=1}^N (AS)_{jj} \\ &= -\text{tr}(AS) \end{aligned}$$

با انتقال سمت راست این عبارت به سمت چپ آن، خواهیم داشت

$$2\text{tr}(AS) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr}(AS) = 0$$

مثال ۳-۴-۱۲: ثابت کنید که اگر A ماتریسی باشد که بتوان آن را با تبدیلی تشابهی به صورت قطری درآورد، آنگاه

$$\det A = e^{\text{tr}(\ln A)}$$

یعنی، به‌ازای یک ماتریس R داریم:

$$D = RAR^{-1}$$

که در آن D ماتریسی قطری است، که معمولاً به‌صورت $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ نوشته می‌شود، و λ ها عناصر قطری‌اند.

از تمرین ۳-۴-۸ داریم

$$\det D = e^{\text{tr}(\ln D)}$$

بنابراین

$$\det (RAR^{-1}) = e^{\text{tr}[\ln(RAR^{-1})]}$$

یا از قضیه ۳-۴-۱۷ و این واقعیت که $\det R^{-1} = 1/\det R$ می‌رسیم به

$$\det A = e^{\text{tr}[\ln(RAR^{-1})]}$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$\text{tr}[\ln(RAR^{-1})] = \text{tr}(\ln A)$$

حکم ثابت است. تابع کلی A را که می‌توان به‌صورت یک سری تیلور بسط داد، در نظر بگیرید

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

با اعمال یک تبدیل تشابهی در طرفین، داریم

$$\begin{aligned} Rf(A)R^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k RA^kR^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{RAA \dots AR^{-1}}_{\text{بار } k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{RAR^{-1}RAR^{-1}R \dots RAR^{-1}}_{\text{بار } k} \end{aligned}$$

۲۵۰ فضاهاى بردارى متناهى-بعد۲: ماتريسها و تجزيه طيفى

که در آن، عامل $R^{-1}R = 1$ را مابين A ها گنجائدهايم. بنا بر اين، داريم

$$Rf(A)R^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (RAR^{-1})^k = f(RAR^{-1})$$

که به طور خيلى کلى بيان مى کند تبديل تشابهى تابع يك ماتريس، تابع تبديل آن ماتريس است. در حالت خاص داريم

$$\ln(RAR^{-1}) = R(\ln A)R^{-1}$$

با گرفتن رد اين معادله و به کار بردن قضيه ۳-۴-۱۹، داريم

$$\text{tr}[\ln(RAR^{-1})] = \text{tr}[R(\ln A)R^{-1}] = \text{tr}(\ln A)$$

يعنى همان چيزى است که در پى اثباتش بوديم.

دترميتان و رد، هر دو، نگاهشايى از $\mathcal{M}^{(N)}$ به \mathbb{R} هستند. مثالهاى نقض نشان مى دهند که دترميتان يك نگاهش خطى نيست (تمرين ۳-۴-۳ را ملاحظه کنيد). اما رد، نگاهش خطى است، و اين امر امکان تعريف يك حاصلضرب داخلى را در فضاى بردارى ماتريسهاى $N \times N$ ميسر مى کند. در واقع به گزاره ۳-۴-۲۱: به ازاي دو ماتريس $A, B \in \mathcal{M}^{(N)}$ ، نگاهش $g : (\mathcal{M}^{(N)}) \times (\mathcal{M}^{(N)}) \rightarrow \mathbb{R}$ را مى توان به صورت زير تعريف کرد

$$g(A, B) = \text{tr}(A^{\dagger}B)$$

در اين صورت، g يك حاصلضرب داخلى يك-ونيم خطى است.

اثبات. بايد نشان دهيم g در معادله هاى (۹-۲) صدق مى کند. براى (۹-۲الف) داريم

$$\begin{aligned} g(B, A) &= \text{tr}(B^{\dagger}A) = \sum_{i,j} (B^{\dagger})_{ij} (A)_{ji} \\ &= \sum_{i,j} b_{ji}^* a_{ji} = \left(\sum_{i,j} a_{ji}^* b_{ji} \right)^* = \left(\sum_{i,j} (A^{\dagger})_{ij} (B)_{ji} \right)^* \\ &= (\text{tr}(A^{\dagger}B))^* = (g(A, B))^* \end{aligned}$$

برای ۹-۲ داریم:

$$g(A, \beta B + \gamma C) = \text{tr}(A^t(\beta B + \gamma C)) = \text{tr}(\beta A^t B + \gamma A^t C) \\ = \text{tr}(\beta A^t B) + \text{tr}(\gamma A^t C) = \beta g(A, B) + \gamma g(A, C)$$

↑
طبق خاصیت خطی بودن رد

برای ۹-۲ ج داریم

$$g(A, A) = \text{tr}(A^t A) = \sum_{i,j} a_{ji}^* a_{ji} = \sum_{i,j} |a_{ji}|^2$$

بدیهی است که $g(A, A) \geq 0$ و

$$\blacksquare \quad g(A, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i,j} |a_{ji}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ji} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$$

تمرینها

۱-۴-۳ نشان دهید اگر A یک ماتریس $N \times N$ و α یک عدد مختلط باشد، آنگاه

$$\det(\alpha A) = \alpha^N \det A$$

۲-۴-۳ نشان دهید در هر ماتریس یک، $\det 1 = 1$.

۳-۴-۳ نشان دهید، در حالت کلی، $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. بنابراین، دترمینان نگاشتی

خطی نیست.

۴-۴-۳ وارون ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

را بیابید.

۵-۴-۳ به طور صریح نشان دهید که برای ماتریسهای 2×2 ، $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

۶-۴-۳ ماتریسهای A و B ، که $N \times N$ هستند، چنان اند که $AB = 1$. نشان دهید این ماتریسها، هر دو وارون پذیرند.

۷-۴-۳ سه ماتریس $N \times N$ ، L_1, L_2 ، و L_3 در روابط $[L_1, L_2] = iL_3$ ، $[L_1, L_3] = iL_2$ ، و $[L_2, L_3] = iL_1$ صدق می کنند. نشان دهید

$$\text{tr} L_k = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{به ازای}$$

۸-۴-۳ اگر $D \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ماتریسی قطری با عناصر غیر صفر $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ باشد، ثابت کنید $\det D = e^{\text{tr}(\ln D)}$.

۹-۴-۳ نشان دهید تبدیل تشابهی حاصل از ماتریس:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

دترمینان یا رد ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

را تغییر نمی دهد.

۵-۳ حاصل جمعهای مستقیم و زیرفضاهای ناورد

در این بخش، برخی نتایج صوری مورد نیاز برای قسمتهای باقیمانده این فصل را معرفی می کنیم.

۱-۵-۳ حاصل جمعهای مستقیم

گاهی ممکن، و مناسب، است که فضای برداری را به زیرفضاهای (مجزای) خاصی تجزیه کنیم. مثلاً، در مورد صفحه ای در \mathbb{R}^3 که از مبدأ می گذرد، شاید بهتر باشد که هر بردار را به تصویر آن بر روی آن صفحه و مؤلفه ای عمود بر آن تجزیه کنیم. چنین تجزیه ای، یک بردار دلخواه در \mathbb{R}^3 را به یک بردار در \mathbb{R}^2 و یک بردار در \mathbb{R} تبدیل می کند. تعمیم این مطلب را به صورت یک تعریف بیان می کنیم.

تعریف ۳-۵-۱: فرض کنید \mathcal{U} و \mathcal{W} زیرفضاهای فضای برداری \mathcal{V} باشند به گونه‌ای که $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ و $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathbf{0}$ (یعنی، تنها بردار مشترک بین \mathcal{U} و \mathcal{W} ، بردار صفر است). در این صورت می‌گوییم که \mathcal{V} حاصل جمع مستقیم \mathcal{U} و \mathcal{W} است و می‌نویسیم

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$$

توجه داشته باشید که $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ به معنای این است که هر بردار در \mathcal{V} را می‌توان به صورت حاصل جمع یک بردار در \mathcal{U} و یک بردار در \mathcal{W} نوشت. گزاره زیر نشان می‌دهد که این تجزیه، منحصر به فرد است.

گزاره ۳-۵-۲: فرض کنید \mathcal{U} و \mathcal{W} زیرفضاهای \mathcal{V} باشند. در این صورت فقط در صورتی $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ که هر برداری در \mathcal{V} را بتوان به طور منحصر به فردی به صورت حاصل جمع یک بردار در \mathcal{U} و یک بردار در \mathcal{W} نوشت.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ ، $|v\rangle \in \mathcal{V}$ ، $|u\rangle \in \mathcal{U}$ ، $|w\rangle \in \mathcal{W}$ و $|v\rangle = |u\rangle + |w\rangle$. اگر $|u'\rangle \in \mathcal{U}$ و $|w'\rangle \in \mathcal{W}$ چنان وجود داشته باشند که

$$|v\rangle = |u'\rangle + |w'\rangle$$

در آن صورت

$$|u\rangle + |w\rangle = |u'\rangle + |w'\rangle \quad \text{یا} \quad |u\rangle - |u'\rangle = |w'\rangle - |w\rangle$$

اما، $(|u\rangle - |u'\rangle) \in \mathcal{U}$ و $(|w'\rangle - |w\rangle) \in \mathcal{W}$. طبق تعریف حاصل جمع مستقیم، باید داشته باشیم

$$|u\rangle - |u'\rangle = \mathbf{0} = |w'\rangle - |w\rangle$$

از این رو منحصر به فرد بودن تجزیه، اثبات می‌شود.

برعکس، اگر $|a\rangle \in \mathcal{U}$ و همچنین $|a\rangle \in \mathcal{W}$ در آن صورت

$$\begin{array}{c} |a\rangle = |a\rangle + \circ \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathcal{U} \text{ در } \quad \mathcal{W} \text{ در} \\ |a\rangle = \circ + |a\rangle \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathcal{U} \text{ در } \quad \mathcal{W} \text{ در} \end{array}$$

بدیهی است که این تجزیه منحصر به فرد نیست مگر اینکه $|a\rangle = \circ$. بنابراین، تنها بردار مشترک بین \mathcal{U} و \mathcal{W} ، بردار صفر است. این امر ثابت می‌کند که $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

گزاره ۳-۵-۳: بعد هر حاصل جمع مستقیم، حاصل جمع بعدهای جمعوندهای آن است. به عبارت دیگر، اگر $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ ، در آن صورت:

$$\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}$$

اثبات. فرض کنید $\{|u_i\rangle\}_{i=1}^m$ پایه‌ای برای \mathcal{U} و $\{|w_i\rangle\}_{i=1}^k$ پایه‌ای برای \mathcal{W} باشد. در این صورت به آسانی اثبات می‌شود که

$$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_m\rangle, |w_1\rangle, |w_2\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$$

پایه‌ای است برای \mathcal{V} . بقیه اثبات را به صورت یک مسئله ساده برای خواننده وامی‌گذاریم.

مثال ۳-۵-۱: فرض کنید \mathcal{V} فضای حاصلضرب داخلی، و \mathcal{M} یک زیرفضای دلخواه از \mathcal{V} باشد. مجموعه تمام بردارهای فضای \mathcal{V} را که بر تمام بردارهای زیرفضای \mathcal{M} عمودند، به صورت \mathcal{M}^\perp نمایش می‌دهیم. به آسانی ثابت می‌شود که \mathcal{M}^\perp نیز زیرفضایی از \mathcal{V} است. در واقع، اگر $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$ ، در آن صورت برای هر بردار $|c\rangle \in \mathcal{M}$ داریم

$$\langle c | (\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle) \rangle = \underbrace{\alpha \langle c | a \rangle}_{\text{زیر } |a\rangle \in \mathcal{M}^\perp} + \underbrace{\beta \langle c | b \rangle}_{\text{زیر } |b\rangle \in \mathcal{M}^\perp} = 0$$

\mathcal{M}^\perp (بخوانید "ام عمود") را متمم قائم \mathcal{M} می‌خوانند.

اکنون پایهٔ راست‌هنجار $B_1 = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ را برای \mathcal{M} در نظر بگیرید که در آن $m = \dim \mathcal{M}$. مجموعهٔ تمام بردارهای \mathcal{V} $\{a_k\} \in \mathcal{C}$ به‌گونه‌ای که به‌ازای جميع مقادیر i داشته باشیم: $\langle e_i | a_k \rangle = 0$ ، به روشنی \mathcal{M}^\perp را پدید می‌آورد. بزرگترین مجموعه بردارهای خطی مستقل از بین $\{a_k\}$ ، پایهٔ $B_2 = \{|a_k\rangle\}_{k=1}^l$ را برای \mathcal{M}^\perp تشکیل می‌دهد که در آن $l = \dim \mathcal{M}^\perp$. اکنون عملگر تصویر

$$P_{\mathcal{M}} \equiv \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i|$$

را تشکیل می‌دهیم. این عملگری است که یک بردار دلخواه $|a\rangle \in \mathcal{V}$ را بر زیرفضای \mathcal{M} تصویر می‌کند. در واقع، به‌ازای هر بردار $|a\rangle \in \mathcal{C}$ ،

$$P_{\mathcal{M}}|a\rangle = \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i|a\rangle \equiv \sum_{i=1}^m \alpha_i |e_i\rangle \in \mathcal{M}$$

ما اکنون ادعا می‌کنیم که $1 - P_{\mathcal{M}}$ عملگر تصویری است که بر \mathcal{M}^\perp تصویر می‌کند. واضح است که $1 - P_{\mathcal{M}}$ هر میتی است. علاوه بر این،

$$\begin{aligned} (1 - P_{\mathcal{M}})^\dagger &= (1 - P_{\mathcal{M}})(1 - P_{\mathcal{M}}) = 1 - 2P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{M}}^\dagger \\ &= 1 - 2P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{M}} = 1 - P_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

بنابراین، $1 - P_{\mathcal{M}}$ یک عملگر تصویر است. به‌ازای برداری چون $|a\rangle \in \mathcal{V}$ ، داریم $|b\rangle = (1 - P_{\mathcal{M}})|a\rangle$ پس

$$\begin{aligned} \langle e_i | b \rangle &= \langle e_i | (1 - P_{\mathcal{M}}) | a \rangle = \langle a | (1 - P_{\mathcal{M}})^\dagger | e_i \rangle^* \\ &= \langle a | (1 - P_{\mathcal{M}}) | e_i \rangle^* \\ &= \langle a | e_i \rangle^* - \langle a | P_{\mathcal{M}} | e_i \rangle^* = \langle a | e_i \rangle^* - \langle a | e_i \rangle^* = 0 \end{aligned}$$

زیرا $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ ، بنابراین، $|b\rangle = (1 - P_{\mathcal{M}})|a\rangle$ ، به‌ازای بردار دلخواه $|a\rangle$ ، متعلق به \mathcal{M}^\perp است. این نشان می‌دهد که $1 - P_{\mathcal{M}}$ بر \mathcal{M}^\perp تصویر می‌کند.

بردار دلخواه $\forall a \in \mathcal{V}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|a\rangle = (\mathbb{P}_{\mathcal{M}} + \mathbb{1} - \mathbb{P}_{\mathcal{M}})|a\rangle = \underbrace{\mathbb{P}_{\mathcal{M}}|a\rangle}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{(\mathbb{1} - \mathbb{P}_{\mathcal{M}})|a\rangle}_{\in \mathcal{M}^\perp}$$

علاوه بر این، تنها برداری که می‌تواند هم در \mathcal{M} باشد و هم در \mathcal{M}^\perp ، بردار صفر است، که تنها برداری است که بر خودش عمود است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

۳-۵-۲ زیرفضاهای ناورد

در این بخش، امکان دستیابی به زیرفضاها را در اثر اعمال یک عملگر خطی بر بردارهای فضای \mathcal{V} بررسی می‌کنیم. فرض کنید $|a\rangle$ یک بردار دلخواه در فضای \mathcal{V} و \mathbb{A} یک عملگر خطی در \mathcal{V} باشد. به این ترتیب، دنبالهٔ بردارهای

$$|a\rangle, \mathbb{A}|a\rangle, \mathbb{A}^2|a\rangle, \dots, \mathbb{A}^k|a\rangle, \dots$$

جملگی به \mathcal{V} متعلق خواهند بود. همچنین، فرض کنید m بیشینهٔ تعداد بردارهای خطی مستقل در میان آن دنباله باشد، بدیهی است $m \leq N$. اکنون فرض کنید \mathcal{M}_A^a زیر فضای m بعدی در فضای \mathcal{V} باشد که توسط بردارهای بالا پدید می‌آید. شاخص پایین \mathcal{M}_A^a نشانهٔ این است که زیر فضای مزبور در اثر عمل مکرر \mathbb{A} بر $|a\rangle$ به دست می‌آید. خاصیت این زیرفضا این است که هر بردار $|x\rangle \in \mathcal{M}_A^a$ بردار $\mathbb{A}|x\rangle$ نیز متعلق به \mathcal{M}_A^a است. به عبارت دیگر، هیچ برداری در \mathcal{M}_A^a که تحت عمل \mathbb{A} قرار بگیرد، زیرفضا را "ترک نمی‌کند". البته، در حالت کلی، اگر عملگر دیگری بر $|x\rangle$ عمل کند، نتیجه در \mathcal{M}_A^a نخواهد بود. اصطلاحاً می‌گوییم که \mathcal{M}_A^a یک زیر فضای ناوردی عملگر \mathbb{A} است.

اکنون پایهٔ $\mathbb{B} = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ در \mathcal{V} را، که m بردار اول آن زیر فضای \mathcal{M}_A^a را پدید می‌آورند، در نظر بگیرید. این کار را همیشه می‌توان انجام داد. در واقع، با داشتن هر مجموعه $N > k$ بردار خطی مستقل در \mathcal{V} ، می‌توانیم با جمع کردن بردارهای خطی مستقل دیگر یک پایه در \mathcal{V} تشکیل دهیم. بگذارید نگاهی بیندازیم به نمایش ماتریسی \mathbb{A} در چنین پایه‌ای. این نمایش با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\mathbb{A}|a_i\rangle = \sum_{j=1}^N a_{ji}|a_j\rangle \quad i = 1, 2, \dots, N$$

به ازای $i = 1, 2, \dots, N$

اگر $i \leq m$ ، در آن صورت به‌ازای $j > m$ خواهیم داشت $a_{ij} = 0$ ، زیرا وقتی $i \leq m$ آنگاه $\langle a_i \rangle \in \mathcal{M}_A^a$ است و بنابراین، می‌توان آن را فقط به‌صورت یک ترکیب خطی از $\{ \langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_m \rangle \}$ نوشت. به این ترتیب، نمایش ماتریسی A در B به شکل زیر خواهد بود

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A_1} & \\ \hline \begin{matrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{matrix} & \boxed{A_2} \end{array} \right)$$

که در آن A_1 ماتریس $m \times m$ و A_2 ماتریس $(N - m) \times (N - m)$ است. اصطلاحاً می‌گوییم

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

نمایشگر عملگر A در زیرفضای m بعدی \mathcal{M}_A^a است.

همچنین، ممکن است بتوان بردارهای پایهٔ باقیمانده در B ، یعنی $\langle a_{m+1} \rangle, \langle a_{m+2} \rangle, \dots, \langle a_N \rangle$ را چنان برگزید که ماتریس $(N - m) \times (N - m)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \dots & a_{1N} \\ a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,m+1} & a_{N,m+2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

شکل زیر را پیدا کند

$$A_2 = \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{matrix} \\ \hline \boxed{A_2} \end{array} \right)$$

که در آن A_r ماتریسی $(N - m) \times (N - m)$ است. این امر در صورتی ممکن است که بردارهای باقیمانده، (a_{m+1}, \dots, a_N) ، نیز یک زیرفضای ناوردای (متفاوت) تشکیل دهند. در آن صورت، ماتریس A را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O_1 \\ O_r & A_r \end{pmatrix}$$

که در آن A_1 یک ماتریس $m \times m$ و A_r یک ماتریس $(N - m) \times (N - m)$ است. O_1 و O_r ، به ترتیب، ماتریسهای صفر $m \times (N - m)$ و $(N - m) \times m$ هستند. ماتریسی را که بتوان با انتخاب مناسب یک پایه به این شکل درآورد، اصطلاحاً ماتریس تحویل‌پذیر می‌نامند. اگر ماتریس A به ماتریسهای A_1 و A_r تحویل‌پذیر باشد، به‌گونه‌ای که داشته باشیم

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_r \end{pmatrix}$$

در این صورت می‌نویسیم

$$A = A_1 \oplus A_r \quad (22-3)$$

گزارهٔ ۳-۵-۴: اگر A یک ماتریس $N \times N$ و دارای شکل بلوکی زیر باشد

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & O \\ \boxed{B} & \boxed{A_r} \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{B} \\ O & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

داریم

$$\det A = (\det A_1)(\det A_r)$$

اثبات. قضیه را برای شکل بلوکی اول ثابت می‌کنیم. اثبات برای شکل بلوکی دوم، با گرفتن ترانهاد ماتریس A و توجه به اینکه دترمینان در این ترانهاش تغییر نمی‌کند، نتیجه می‌شود.

فرض می‌کنیم A_1 یک ماتریس $m \times m$ ، A_2 یک ماتریس $(N - m) \times (N - m)$ ، و B یک ماتریس $m \times (N - m)$ است. از تعریف دترمینان داریم

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_i \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N} \\ &= \sum_i \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \underbrace{a_{1i_1} \dots a_{mi_{i_m}}}_{\substack{\text{همه مساوی صفر} \\ \text{مگر اینکه } i_1, i_2, \dots, i_m \\ \text{همه کوچکتر یا مساوی } m \text{ باشند}}} \underbrace{a_{m+1, i_{m+1}} \dots a_{Ni_N}}_{\substack{\text{همه مساوی صفر} \\ \text{مگر اینکه } i_{m+1}, \dots, i_N \\ \text{همه بزرگتر یا مساوی } m+1 \text{ باشند}}} \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_m=1 \\ \dots \\ i_{m+1}, \dots, i_N=m+1}}^m \sum^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{1i_1} \dots a_{mi_{i_m}} a_{m+1, i_{m+1}} \dots a_{Ni_N} \end{aligned}$$

از آنجا که m شاخص اول $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ هیچگاه با هیچ یک از $(N - m)$ شاخص باقیمانده تبادلی نمی‌یابند، می‌توانیم بنویسیم

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_N} = \varepsilon_{i_1 \dots i_m} \varepsilon_{i_{m+1} \dots i_N}$$

بنابراین، بسط بالا تبدیل می‌شود به

$$\det A = \sum_{i_1 \dots i_m}^m \varepsilon_{i_1 \dots i_m} a_{1i_1} \dots a_{mi_{i_m}} \sum_{i_{m+1} \dots i_N}^N a_{m+1, i_{m+1}} \dots a_{Ni_N}$$

حاصل جمع اول، $\det A_1$ ، و حاصل جمع دوم، $\det A_2$ است. بنابراین، داریم

$$\det A = (\det A_1)(\det A_2)$$

توجه داشته باشید که بلوک B در اینجا هیچ نقشی ندارد. به‌ویژه، اگر A تحویل‌پذیر باشد، به‌طوری که

$$A = A_1 \oplus A_2$$

در آن صورت مجدداً می‌رسیم به:

$$\det A = (\det A_1)(\det A_2)$$

۳-۶ تجزیه و قطری کردن طیفی

در این بخش، به عنوان هدف اصلی، نشان خواهیم داد که عملگرهای هرمیتی، قطری شدنی اند؛ یعنی، همیشه می توان یک پایه راست هنجار یافت که یک عملگر هرمیتی در آن پایه با یک ماتریس قطری نشان داده شود. علاوه بر این، اگر از آغاز، ماتریس هرمیتی در پایه ای راست هنجار نشان داده شده باشد، یک ماتریس تبدیل یکانی وجود دارد که آن نمایش ماتریسی را به شکل قطری درمی آورد. افزون بر این، قضیه "به اصطلاح" طیفی را، که بر اساس آن عملگر هرمیتی به صورت یک ترکیب خطی از عملگرهای تصویر نوشته می شود، نیز اثبات خواهیم کرد. این بخش، مسلماً یک بخش صوری است. اما، غنای ریاضی نهفته در آن ارزشمند است.

۳-۶-۱ ویژه مقدارها و ویژه بردارها

ویژه مقدارها و ویژه بردارها، تعمیم مفاهیم آشنایی در دو سوسه بعد به شمار می آیند. در حالت خاص، عمل دوران حول محور z به اندازه زاویه θ را در نظر بگیرید که با $\mathbb{R}_z(\theta)$ نمایش داده می شود. چنین دورانی، برداری چون (x, y) در صفحه xy را به بردار جدید $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ تبدیل می کند. به این ترتیب، بردار یاد شده تغییر خواهد کرد مگر اینکه $(x, y) = (0, 0)$ یا $\theta = 0$. آیا برداری با این خاصیت وجود دارد که هرگاه $\mathbb{R}_z(\theta)$ بر آن اعمال شود، تغییر نکند؟ اگر خود را از صفحه دو بعدی xy بالا بکشیم، بلافاصله با بردارهای بسیاری از این نوع روبرو می شویم که همه در امتداد محور z قرار دارند.

مثال بالا را می توان به هر دورانی (که معمولاً با زاویه های اویلر مشخص می شود) تعمیم داد. در واقع، با روشهایی که در این بخش خواهیم دید، می توان نشان داد که یک دوران کلی، که با زاویه های اویلر داده می شود، همیشه دارای برداری تغییر نیافتنی است که در امتداد محور چرخش قرار دارد. این مطلب را در تعریف زیر بیشتر تعمیم می دهیم.

تعریف ۳-۶-۱: اگر بین اسکالر λ ، و بردار غیر صفر $a \in \mathcal{V}$ ، و تبدیل خطی $\mathcal{L}(A) \in \mathcal{A}$ ، رابطه زیر برقرار باشد

$$A|a\rangle = \lambda|a\rangle \quad (3-23)$$

λ را ویژه مقدار و $|a\rangle$ را ویژه بردار می نامیم.

گزاره ۳-۶-۲: اگر بردار صفر را به مجموعه تمام ویژه بردارهای A متعلق به یک ویژه مقدار λ

بفزاییم و مجموعه حاصل را \mathcal{M}_λ بنامیم، در آن صورت \mathcal{M}_λ یک زیرفضای \mathcal{V} است.

- اثبات. اثبات این گزاره بلافاصله از تعریف ۳-۶-۱ و تعریف زیرضا حاصل می‌شود. ■
 بعد \mathcal{M} را اصطلاحاً چندگانگی هندسی λ می‌نامیم. اگر چندگانگی هندسی یک ویژه مقدار λ باشد، آن را ساده می‌خوانیم. مجموعه ویژه‌مقدارهای \mathbb{A} ، طیف \mathbb{A} نامیده می‌شود.
 رابطه ۳-۲۳ را به صورت

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1})|a\rangle = 0$$

می‌نویسیم. بنابراین معادله، فقط در صورتی $|a\rangle$ یک ویژه‌بردار \mathbb{A} است که $|a\rangle$ متعلق به صفر فضای $\mathbb{1} - \lambda \mathbb{A}$ باشد. اگر $\mathbb{1} - \lambda \mathbb{A}$ وارون‌پذیر باشد، در آن صورت صفر فضا فقط شامل بردار صفر خواهد بود، که به‌عنوان جواب معادله (۳-۲۳) قابل قبول نیست. به این ترتیب، اگر بخواهیم جوابهای ناصفر داشته باشیم، $\mathbb{1} - \lambda \mathbb{A}$ نباید وارون داشته باشد. این یکریختی بین عملگرهای خطی و ماتریسهای $N \times N$ معرف آنها، نشان می‌دهد که ماتریس نمایشگر $\mathbb{1} - \lambda \mathbb{A}$ نباید وارون داشته باشد. این خاصیت فقط در صورتی برقرار است که

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad (۳-۲۴)$$

ناوردایی دترمینان تحت یک تبدیل پایه، تضمین می‌کند که اگر ۳-۲۴ در یک پایه برقرار باشد، در تمام پایه‌ها برقرار خواهد بود.

دترمینان ۳-۲۴ یک چندجمله‌ای برحسب λ است که چندجمله‌ای مشخصه \mathbb{A} نامیده می‌شود. ریشه‌های این چندجمله‌ای، ریشه‌های مشخصه نامیده می‌شوند و صرفاً ویژه‌مقدارهای \mathbb{A} هستند. بدیهی است که ضریب λ^n در چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از $(-1)^n$. به این ترتیب می‌توان نوشت

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n \quad (۳-۲۵)$$

اگر در دو طرف λ را صفر قرار دهیم، می‌رسیم به

$$\det \mathbb{A} = \alpha_0$$

از سوی دیگر، هر چند جمله در \mathbb{C} را می‌توان به‌طور کامل عاملگیری کرد. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مشخصه A باشند، و λ_j, m_j بار ظاهر شود، در آن صورت (۲۵-۳) را می‌توان به صورت

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} \equiv \prod_{j=1}^p (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \quad (26-3)$$

نوشت، که به‌ازای $\lambda = 0$ تبدیل می‌شود به

$$\det A = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_p^{m_p} = \prod_{j=1}^p \lambda_j^{m_j} \quad (27-3)$$

بنابر معادله (۲۷-۳)، دترمینان یک عملگر، حاصلضرب تمام ویژه‌مقدارهای آن است. در حالت خاص، اگر یکی از ویژه‌مقدارها صفر باشد، در آن صورت عملگر یاد شده وارون‌پذیر نیست.

مثال ۳-۶: می‌خواهیم ویژه‌مقدارهای عملگر تصویر \mathbb{P} را پیدا کنیم. اگر $|a\rangle$ یک ویژه‌بردار باشد در آن صورت

$$\mathbb{P}|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

با اعمال دوباره \mathbb{P} در هر دو طرف، داریم

$$\mathbb{P}^2|a\rangle = \lambda\mathbb{P}|a\rangle = \lambda(\lambda|a\rangle) = \lambda^2|a\rangle$$

اما $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ ؛ بنابراین،

$$\mathbb{P}|a\rangle = \lambda^2|a\rangle$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda|a\rangle = \lambda^2|a\rangle$ ، یا $(\lambda^2 - \lambda)|a\rangle = 0$. چون $|a\rangle \neq 0$ ، نتیجه می‌گیریم $\lambda(\lambda - 1) = 0$ ، یا $\lambda = 0$ ، به این ترتیب تنها ویژه‌مقدارهای \mathbb{P} ، صفر و ۱ هستند. حضور صفر به‌عنوان یک ویژه‌مقدار \mathbb{P} دلیل دیگری است بر اینکه \mathbb{P} نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد. ●

در معادلات (۲۶-۳) و (۲۷-۳)، m_j را چندگانگی جبری λ_j می‌نامیم. قبلاً چندگانگی هندسی λ_j را به‌عنوان بعد زیرفضایی که با ویژه‌بردارهای متناظر با λ_j فراگرفته می‌شود، تعریف کردیم. اگر چندگانگی هندسی λ_j را با g_j نشان دهیم به گزاره زیر خواهیم رسید.

گزاره ۳-۶-۳: به ازای هر ویژه مقدار λ_j متعلق به A ، داریم $g_j \leq m_j$.

اثبات. اشاره می‌کنیم که \mathcal{M}_{λ_j} یک زیرفضای ناوردای g_j -بعدی است، زیرا اگر $a \in \mathcal{M}_{\lambda_j}$ ، در آن صورت $A|a\rangle = \lambda_j|a\rangle$. بنابراین، در پایه‌ای از \mathcal{V} که g_j بردار اول آن پایه‌ای از \mathcal{M}_{λ_j} را تشکیل می‌دهند، ماتریس A به این شکل است:

$$A = \begin{pmatrix} A_j & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

و

$$A - \lambda_j I = \begin{pmatrix} A_j - \lambda_j 1_{g_j} & B \\ 0 & C - \lambda_j 1_{N-g_j} \end{pmatrix}$$

که در آن، A_j ، 1_{g_j} ماتریسهایی $g_j \times g_j$ و C و 1_{N-g_j} ماتریسهایی $(N-g_j) \times (N-g_j)$ هستند. با توجه به گزاره ۳-۵-۴، داریم

$$\det(A - \lambda_j I) = [\det(A_j - \lambda_j 1_{g_j})][\det(C - \lambda_j 1_{N-g_j})]$$

عامل اول در سمت راست، صرفاً چندجمله‌ای مشخصه A_j است. با این همه، طبق تعریف \mathcal{M}_{λ_j} ، تنها ریشه این چندجمله‌ای، λ_j است که g_j بار ظاهر می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\det(A - \lambda_j I) = (\lambda_j - \lambda)^{g_j} \det(C - \lambda_j 1_{N-g_j})$$

از سوی دیگر، با توجه به ۳-۶-۲ می‌دانیم که چندگانگی جبری λ_j نمی‌تواند بزرگتر از m_j باشد. پس نتیجه می‌گیریم که

$$g_j \leq m_j$$

از گزاره ۳-۶-۳، به نتیجه مفید زیر می‌رسیم.

نتیجه ۳-۶-۴: اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ویژه مقدارهای متمایز A با چندگانگی‌های هندسی، به ترتیب، g_1, g_2, \dots, g_p باشند، و اگر $\sum_{j=1}^p g_j = N$ در آن صورت به ازای جمیع $j = 1, \dots, p$ خواهیم داشت $g_j = m_j$ که در آن، m_j چندگانگی جبری λ_j است.

۲-۶-۳ ویژه مقدارهای عملگرهای هرمیتی

در این بخش به عملگرهای هرمیتی می‌پردازیم و هرازگاهی نیز به عملگرهای یکانی اشاره خواهیم کرد. ابتدا به اثبات چند نتیجه کلی می‌پردازیم.

قضیه ۳-۶-۵: عملگر خطی A در یک فضای حاصلضرب داخلی فقط در صورتی \mathbb{O} است که به ازای تمام $|b\rangle$ و $|a\rangle$ ، داشته باشیم $\langle Aa|b\rangle = 0$.

اثبات .

$$A = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \quad A|a\rangle \equiv |Aa\rangle = 0$$

بالعکس، اگر

$$\langle Aa|b\rangle = 0 \quad \forall |a\rangle, |b\rangle$$

به ازای $|b\rangle = A|a\rangle \equiv |Aa\rangle$ مشخصاً باید داشته باشیم:

$$\langle Aa|Aa\rangle = 0 \quad \forall |a\rangle \quad \Rightarrow \quad A|a\rangle = 0 \quad \forall |a\rangle \quad \Rightarrow \quad A = \mathbb{O}$$

قضیه ۳-۶-۶: عملگر خطی A در یک فضای حاصلضرب داخلی مختلط (که اصطلاحاً فضای یکانی نیز نامیده می‌شود) فقط در صورتی است که به ازای تمام $|a\rangle$ ها داشته باشیم: $\langle Aa|a\rangle = 0$.

اثبات . بدیهی است اگر $A = \mathbb{O}$ ، در آن صورت $\langle Aa|a\rangle = 0$. عکس این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha a + \beta b)|(\alpha a + \beta b)\rangle &\equiv [A(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)]^\dagger(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) \\ &= (\alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b|)A^\dagger(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = |\alpha|^2 \langle a|A^\dagger|a\rangle \end{aligned}$$

۱. خیلی بهتر است که از نماد $|Aa\rangle$ به جای $A|a\rangle$ استفاده شود، زیرا در آن صورت مزدوج هرمیتی $\langle a|A^\dagger|a\rangle$ صرفاً به صورت $\langle Aa|a\rangle$ در خواهد آمد. این نکته را باید در نظر داشت. به عنوان مثال، بنابه تعریف مزدوج هرمیتی یک کت، $\langle \lambda a| = \langle a|\lambda^* = \lambda^* \langle a|$.

$$\begin{aligned}
 & + \alpha^* \beta \langle a | A^\dagger | b \rangle + \beta^* \alpha \langle b | A^\dagger | a \rangle + |\beta|^2 \langle b | A^\dagger | b \rangle \\
 & \equiv |\alpha|^2 \langle Aa | a \rangle + \alpha^* \beta \langle Aa | b \rangle + \beta^* \alpha \langle Ab | a \rangle + |\beta|^2 \langle Ab | b \rangle
 \end{aligned}$$

رابطه اخیر را به شکلی بازنویسی می‌کنیم که به آن اتحاد قطبش می‌گویند:

$$\alpha \beta^* \langle Ab | a \rangle + \alpha^* \beta \langle Aa | b \rangle = \langle A(\alpha a + \beta b) | \alpha a + \beta b \rangle - |\alpha|^2 \langle Aa | a \rangle - |\beta|^2 \langle Ab | b \rangle$$

بنابر فرض این قضیه، عبارت سمت راست صفر است. بنابراین

$$\alpha \beta^* \langle Ab | a \rangle + \alpha^* \beta \langle Aa | b \rangle = 0$$

این رابطه به‌ازای تمام مقادیر α و β برقرار است. با فرض $\alpha = \beta = 1$ داریم

$$\langle Ab | a \rangle + \langle Aa | b \rangle = 0$$

و با فرض $\alpha = i$ و $\beta = 1$ خواهیم داشت

$$i \langle Ab | a \rangle - i \langle Aa | b \rangle = 0$$

از این دو معادله می‌رسیم به

$$\langle Aa | b \rangle = 0 \quad \forall |a\rangle, |b\rangle$$

■ و بنابر قضیه ۳-۶-۵، $A = 0$. اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم یک قضیه اساسی را در مورد عملگرهای هرمیتی ثابت کنیم.

■ قضیه ۳-۶-۷: تبدیل خطی \mathbb{H} در یک فضای یکانی فقط در صورتی هرمیتی است که به‌ازای تمام $|a\rangle, |a\rangle \in \mathbb{H}$ حقیقی باشد

اثبات. اگر $\mathbb{H} = \mathbb{H}^\dagger$ ، در آن صورت

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{H}a|a \rangle^* &= ((\mathbb{H}|a\rangle)^\dagger|a\rangle)^* = \langle a|\mathbb{H}^\dagger|a \rangle^* = \langle a|(\mathbb{H}^\dagger)^\dagger|a \rangle = \langle a|\mathbb{H}|a \rangle \\ &= (\mathbb{H}^\dagger|a\rangle)^\dagger|a\rangle = \langle \mathbb{H}^\dagger a|a \rangle = \langle \mathbb{H}a|a \rangle\end{aligned}$$

و $\langle \mathbb{H}a|a \rangle$ باید حقیقی باشد.

برعکس، فرض کنید که $\langle \mathbb{H}a|a \rangle$ بهازای جمیع $|a\rangle$ ها حقیقی است. در آن صورت

$$\langle \mathbb{H}a|a \rangle = \langle \mathbb{H}a|a \rangle^* = \langle a|\mathbb{H}^\dagger|a \rangle^* = \langle a|\mathbb{H}|a \rangle = \langle \mathbb{H}^\dagger a|a \rangle \quad \forall |a\rangle$$

بنابراین، داریم

$$\langle (\mathbb{H} - \mathbb{H}^\dagger)a|a \rangle = 0 \quad \forall |a\rangle$$

طبق قضیه ۳-۶-۶، باید داشته باشیم $\mathbb{H} = \mathbb{H}^\dagger$.

مثال ۳-۶-۲: ماتریس $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix}$ هریتی است و بر \mathbb{C}^2 اثر می‌کند. بردار دلخواه $|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و $\langle \mathbb{H}a|a \rangle$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|\mathbb{H}a\rangle = \mathbb{H}|a\rangle = \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha_2 \\ i\alpha_1 \end{pmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{H}a|a \rangle &= (i\alpha_2^* \quad -i\alpha_1^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = i\alpha_2^*\alpha_1 - i\alpha_1^*\alpha_2 \\ &= i\alpha_2^*\alpha_1 + (i\alpha_2^*\alpha_1)^* = 2\text{Re}(i\alpha_2^*\alpha_1)\end{aligned}$$

و $\langle \mathbb{H}a|a \rangle$ حقیقی است.

اکنون کلی‌ترین ماتریس 2×2 ، $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ ، را که در آن a و c حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم. در آن صورت

$$|\mathbb{H}a\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_1 + b\alpha_2 \\ b^*\alpha_1 + c\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{H}a|a \rangle &= (a\alpha_1^* + b^*\alpha_1^* \quad b\alpha_1^* + b\alpha_1^*\alpha_2 + c\alpha_1^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = a|\alpha_1|^2 + b^*\alpha_1^*\alpha_1 + b\alpha_1^*\alpha_2 + c|\alpha_2|^2 \\ &= a|\alpha_1|^2 + c|\alpha_2|^2 + b^*\alpha_1^*\alpha_1 + (b^*\alpha_1^*\alpha_1)^* \\ &= a|\alpha_1|^2 + c|\alpha_2|^2 + 2\operatorname{Re}(b^*\alpha_1^*\alpha_1) \end{aligned}$$

در اینجا نیز $\langle \mathbb{H}a|a \rangle$ حقیقی است.

اینها مثالهایی عینی و مشخص از قضیه ۳-۶-۷ به شمار می آیند که نتایج بالا را برای تمام عملگرهای هرمیتی بیان می دارد.

عملگر \mathbb{A} در یک فضای حاصلضرب داخلی را مثبت ($\mathbb{A} \geq 0$) می نامیم هرگاه \mathbb{A} هرمیتی باشد و

$$\langle \mathbb{A}a|a \rangle \geq 0 \quad \forall |a\rangle \in \mathcal{V}$$

مثال ۳-۶-۳: مجذور یک عملگر هرمیتی، مثالی است از یک عملگر مثبت. توجه داریم که برای هر عملگر هرمیتی \mathbb{H} :

$$\mathbb{H}^\dagger = (\mathbb{H}^\dagger)^\dagger = (\mathbb{H}^\dagger)^\dagger$$

همچنین، به علت خواص حاصلضرب داخلی

$$\langle \mathbb{H}^\dagger a|a \rangle = \langle a|(\mathbb{H}^\dagger)^\dagger|a \rangle = \langle a|\mathbb{H}^\dagger\mathbb{H}|a \rangle = \langle \mathbb{H}a|\mathbb{H}a \rangle \geq 0$$

علاوه بر این، اگر به ازای هر \mathbb{H} وارون پذیر داشته باشیم، $\langle \mathbb{H}a|\mathbb{H}a \rangle = 0$ ، باید

$$\langle \mathbb{H}a|a \rangle = \langle \mathbb{H}a|a \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |a\rangle = 0$$

عملگری که این شرط اضافی را برقرار کند که $\langle \mathbb{A}a|a \rangle = 0$ ، به این معناست که $|a\rangle = 0$ ، و عملگر معین مثبت خوانده می شود. از بحث بالا نتیجه می گیریم که مربع یک عملگر هرمیتی وارون پذیر، معین مثبت است.

قضيه ۳-۶-۸: اگر \mathbb{H} در يك فضاى يكانى عملگرى هرميتى باشد، در آن صورت هر ويژه مقدار متعلق به \mathbb{H} حقيقي است. علاوه بر اين، اگر \mathbb{H} مثبت يا معين مثبت باشد، در آن صورت هر ويژه مقدار متعلق به آن نيز جين است.

اثبات. فرض كنيد $|h\rangle$ يك ويژه بردار متعلق به \mathbb{H} با ويژه مقدار λ باشد. در اين صورت به ازاي $\langle h|h\rangle \neq 0$ ، $\mathbb{H}|h\rangle = \lambda|h\rangle$ و در نتيجه مى توان نوشت

$$\frac{\langle \mathbb{H}h|h\rangle}{\langle h|h\rangle} = \frac{\langle \lambda h|h\rangle}{\langle h|h\rangle} = \frac{\lambda^* \langle h|h\rangle}{\langle h|h\rangle} = \lambda^*$$

اما طبق قضيه ۳-۶-۷، عبارت سمت چپ حقيقي است. بنابراين، λ^* حقيقي است، و اين امر ايجاب مى كند كه λ حقيقي باشد. علاوه بر اين، به معنای این است كه $\langle \mathbb{H}h|h\rangle \geq 0$ و $\lambda \geq 0$ الی آخر.

مثال ۳-۶-۴: مى خواهيم ويژه مقدارها و ويژه بردارهاى $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & -i \end{pmatrix}$ را پيدا كنيم. داريم

$$\det(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

بنابراين، ويژه مقدارها عبارت اند از $\lambda = \pm 1$ ، كه همان گونه كه انتظار داريم حقيقي اند.

برای پیدا کردن ويژه بردارها، مى نويسيم

$$0 = (\mathbb{H} - \lambda_1 \mathbb{1})|a_1\rangle = (\mathbb{H} - \mathbb{1})|a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - i\alpha_2 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

يا $\alpha_1 = -i\alpha_2$ ، كه نتيجه مى گيريم

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} -i\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \alpha \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

كه α يك عدد مختلط دلخواه است. همچنين

$$0 = (\mathbb{H} - \lambda_2 \mathbb{1})|a_2\rangle = (\mathbb{H} + \mathbb{1})|a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 - i\beta_2 \\ i\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}$$

یا $\beta_1 = i\beta_2$ ، که نتیجه می‌گیریم

$$|a_2\rangle = \beta_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \beta \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

که β یک عدد مختلط دلخواه است.

در اغلب موارد، مطلوب این است که α و β را چنان اختیار کنیم که $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ به بردارهای بهنجار تبدیل شوند. در آن صورت، لزوماً باید داشته باشیم

$$1 = \langle a_1 | a_1 \rangle = \alpha^* (i \quad 1) \alpha \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = |\alpha|^2 (1 + 1) = 2|\alpha|^2$$

یا اینکه

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad \text{به‌ازای}$$

یک مقدار متعارف عبارت است از $\varphi = 0$ ، که، به‌ازای آن، خواهیم داشت

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب،

$$|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \frac{1}{2} (i \quad 1) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

یعنی، دو بردار متناظر با ویژه‌مقدارهای متفاوت، بریکدیگر عمودند. بعداً خواهیم دید که این خاصیت در تمام عملگرهای هرمیتی مشترک است.

می‌توانیم قضیه‌ای را ثابت کنیم که تعمیم نکات مندرج در مثال ۳-۶-۴ به شمار می‌آید.

قضیه ۳-۶-۹: اگر \mathbb{A} یا هرمیتی باشد یا یکانی، در آن صورت ویژه‌بردارهای متعلق به \mathbb{A} که با ویژه‌بردارهای متمایز آن متناظرند، بر یکدیگر عمودند.

اثبات. فرض کنید $\langle a_1 | a_1 \rangle = \lambda_1 | a_1 \rangle$ و $\langle a_2 | a_2 \rangle = \lambda_2 | a_2 \rangle$ و $\lambda_1 \neq \lambda_2$. اگر \mathbb{A} هرمیتی باشد، داریم

$$\begin{aligned} \lambda_1^* \langle a_1 | a_2 \rangle &= \langle \mathbb{A} a_1 | a_2 \rangle = \langle a_1 | \mathbb{A}^\dagger a_2 \rangle = \langle a_1 | \mathbb{A} a_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle a_1 | a_2 \rangle \end{aligned}$$

یا

$$(\lambda_1^* - \lambda_2) \langle a_1 | a_2 \rangle = 0$$

اما $\lambda_1^* = \lambda_1$ زیرا طبق قضیه ۳-۶-۸، λ_1 حقیقی است. چون $\lambda_1 \neq \lambda_2$ باید داشته باشیم $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$.

اگر \mathbb{A} یکانی باشد، در آن صورت

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \langle \mathbb{A} a_1 | \mathbb{A} a_2 \rangle = \lambda_1^* \lambda_2 \langle a_1 | a_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle a_1 | a_2 \rangle$$

طبق مثال ۳-۶-۴

یا

$$\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \langle a_1 | a_2 \rangle = 0$$

در اینجا نیز چون $\lambda_1 \neq \lambda_2$ باید داشته باشیم $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$.

قضیه ۳-۶-۱۰: فرض کنید \mathbb{A} یک عملگر هرمیتی یا یک عملگر یکانی باشد. زیرفضای \mathcal{M} تحت تأثیر \mathbb{A} ناورداست، پس مؤلفه متعامد \mathcal{M}^\perp نیز چنین است (برای تعریف \mathcal{M}^\perp ، ر.ک. مثال ۳-۵-۱).

اثبات. فرض کنید $|a\rangle \in \mathcal{M}$ و $|b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$ دو بردار دلخواه باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\mathbb{A}|a\rangle \in \mathcal{M}$ ، در آن صورت $\mathbb{A}|b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$ خواهد بود. ابتدا، توجه داریم که اگر $|a\rangle \in \mathcal{M}$ ، در آن صورت $\mathbb{A}^\dagger|a\rangle \in \mathcal{M}$ ، زیرا اگر \mathbb{A} هرمیتی باشد، در زیرفضای \mathcal{M} ، خواهیم داشت $\mathbb{A}^\dagger|a\rangle = \mathbb{A}|a\rangle$.

از سوی دیگر، اگر \mathbb{A} یکانی باشد، در آن صورت به‌عنوان یک عملگر در زیرفضای \mathcal{M} ، وارون‌پذیر خواهد بود. این بدان معناست که به‌ازای هر $|a'\rangle \in \mathcal{M}$ ،

$$\exists |a\rangle \in \mathcal{M} \ni |a'\rangle = \mathbb{A}|a\rangle \Rightarrow \mathbb{A}^\dagger|a'\rangle = |a\rangle \in \mathcal{M}$$

بنابراین، در هر دو حالت، اگر $|a\rangle \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $\mathbb{A}^\dagger|a\rangle \in \mathcal{M}$. به این ترتیب داریم

$$\langle a|\mathbb{A}|b\rangle^* = \langle b|\underbrace{\mathbb{A}^\dagger|a\rangle}_{\in \mathcal{M}}\rangle = 0 \Rightarrow \langle a\mathbb{A}|b\rangle = 0$$

■ که دلالت می‌کند بر $\mathbb{A}|b\rangle \in \mathcal{M}^\perp$.

گزاره ۳-۶-۱۱: برای یک عملگر هرمیتی یا یکانی \mathbb{A} در یک فضای یکانی با ابعاد متناهی، چندگانگی جبری m هر یک از ویژه‌مقدارهای λ آن، مساوی با چندگانگی هندسی، g ، مربوط به λ است. به عبارت دیگر، تعداد دفعاتی که یک ویژه‌مقدار متعلق به \mathbb{A} در چندجمله‌ای مشخصه‌اش ظاهر می‌شود، با ابعاد زیرفضایی مساوی است که توسط ویژه‌بردارهای آن ویژه‌مقدار پدید می‌آید.

اثبات. روشن است که \mathcal{M}_λ تحت \mathbb{A} یک زیرفضای ناورداست. بنابر قضیه ۳-۶-۱۰،

$\mathcal{M}_\lambda^\perp$ نیز ناورداست. یعنی، ماتریس \mathbb{A} کاملاً تحویل‌پذیر است؛ یعنی

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_2 \end{pmatrix} \quad (28-3)$$

که $\dim \mathbb{A}_1 = g_j$ با استفاده از گزاره ۳-۵-۴ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) &= \det(\mathbb{A}_1 - \lambda \mathbb{1}_{g_j}) \det(\mathbb{A}_2 - \lambda \mathbb{1}_{N-g_j}) \\ &= (\lambda_j - \lambda)^{g_j} \det(\mathbb{A}_2 - \lambda \mathbb{1}_{N-g_j}) \end{aligned}$$

این همان نکته‌ای است که در گزاره ۳-۶-۳ هم آوردیم. اختلاف در اینجا این است که $\mathcal{M}_{\lambda_j}^\perp$ نیز ناورد است. به عبارت دقیق، این موضوع به آن معناست که ما نمی‌توانیم ویژه‌برداری از \mathbb{A} را که با λ_j متناظر است، در $\mathcal{M}_{\lambda_j}^\perp$ پیدا کنیم. بنابراین، عوامل بیشتری از $(\lambda_j - \lambda)$ در $\det(A_T - \lambda I_{N-g_j})$ وجود ندارند. به این ترتیب، تمام عوامل در $(\lambda_j - \lambda)^{g_j}$ نهفته‌اند و $g_j = m_j$.

■ اکنون ما در وضعیتی قرار داریم که بتوانیم قضیه محوری اصلی این بخش را اثبات کنیم.

قضیه ۳-۶-۱۲: (قضیه تجزیه طیفی) فرض کنید \mathbb{H} یک عملگر هرمیتی در فضای یکانی متناهی-بعد \mathcal{V} ، و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ویژه‌مقدارهای متمایز (حقیقی) آن باشند. به این ترتیب، عملگرهای تصویر (غیرصفر) P_1, P_2, \dots, P_r چنان وجود دارند که

$$P_i P_j = \mathbf{0} \quad \forall i \neq j \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{i=1}^r P_i = \mathbf{1} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i = \mathbb{H} \quad (\text{ج})$$

■ اثبات. فرض کنید P_i عملگری باشد که به \mathcal{M}_{λ_i} تصویر می‌شود. این به آن معناست که به‌ازای جمیع $|a\rangle \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$ ، $P_i |a\rangle \in \mathcal{M}_{\lambda_i}$.

(الف) اگر $\lambda_j \neq \lambda_i$ ، در آن صورت \mathcal{M}_{λ_i} و \mathcal{M}_{λ_j} متعامدند (هر بردار واقع در \mathcal{M}_{λ_i} با هر بردار واقع در \mathcal{M}_{λ_j} متعامد است). بنابراین، به‌ازای دو بردار دلخواه $|a\rangle$ و $|b\rangle$ متعلق به \mathcal{V} ، داریم

$$\langle P_i P_j a | b \rangle = \langle a | (P_i P_j)^\dagger | b \rangle = \langle a | P_j^\dagger P_i^\dagger | b \rangle = \langle a | P_j^\dagger P_i | b \rangle$$

↑

زیرا P_i هرمیتی است

$$= \underbrace{\langle P_j a |}_{\in \mathcal{M}_{\lambda_j}} \underbrace{| P_i b \rangle}_{\in \mathcal{M}_{\lambda_i}} = 0$$

بنابراین قضیه ۳-۶-۵، $P_i P_j = \mathbf{0}$.

(ب) فرض کنید $P = \sum_{i=1}^r P_i$ و توجه داشته باشید که

$$P^\dagger = \sum_{i=1}^r P_i^\dagger = \sum_{i=1}^r P_i = P$$

بنابراین، P یک عملگر تصویر است. تساوی $P = \mathbf{1}$ با اثبات وارون‌پذیری P نشان داده می‌شود. با توجه به اینکه P یک عملگر خطی است، فقط در صورتی وارون‌پذیر خواهد بود که فقط و فقط

اگر رتبه $\mathcal{V} = \dim \mathcal{V}$ یا $n(\mathbb{P}) = 0$ داریم

$$\mathbb{P}|a\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \mathbb{P}_i|a\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_i|a\rangle = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$$

که بر این معنا دلالت می‌کند که $|a\rangle$ دارای هیچ مؤلفه‌ای در هیچ یک از زیرفضاهای \mathcal{M}_{λ_i} نیست. با این همه، بنا بر گزاره ۳-۶-۱۱ داریم: $\sum_{i=1}^r \dim \mathcal{M}_{\lambda_i} = \dim \mathcal{V}$. تنها راهی که به ازای جمیع مقادیر i ، رابطه $\mathbb{P}_i|a\rangle = 0$ برقرار باشد، این است که $|a\rangle = 0$. بنابراین، بوجی \mathbb{P} صفر، و حکم ثابت است.

(ج) بردار دلخواه $|a\rangle \in \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $|a_i\rangle \equiv \mathbb{P}_i|a\rangle$. در این صورت

$$\begin{aligned} \mathbb{H}|a\rangle &= \mathbb{H} \left(\sum_{i=1}^r \mathbb{P}_i \right) |a\rangle = \sum_{i=1}^r \underbrace{\mathbb{H}\mathbb{P}_i|a\rangle}_{\in \mathcal{M}_{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^r \lambda_i |a_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbb{P}_i |a\rangle = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbb{P}_i \right) |a\rangle \end{aligned}$$

چون این معادله به ازای تمام مقادیر $|a\rangle \in \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ صادق است، داریم

$$\mathbb{H} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbb{P}_i$$

به آسانی می‌توان نشان داد که این تجزیه برای هر عملگر هرمیتی، منحصر به فرد است. اکنون می‌توانیم ارتباط بین قطری کردن یک ماتریس هرمیتی و قضیه طیفی را بیان کنیم. هر زیرفضای \mathcal{M}_{λ_i} ، یک پایه متعامد انتخاب می‌کنیم. اجتماع تمام این پایه‌ها مسلماً پایه‌ای است برای کل فضای \mathcal{V} . این بردارهای پایه را به صورت $|e_j^{(i)}\rangle$ نمایش می‌دهیم، که در آن، شاخص بالا معرف زیرفضا و شاخص پایین معرف بردار خاصی در آن زیرفضاست. بدیهی است که

$$\langle e_j^{(i)} | e_{j'}^{(i')} \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}$$

عناصر ماتریسی \mathbb{H} را می‌توانیم در چنین زیرفضایی به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \langle e_j^{(i)} | \mathbb{H} | e_{j'}^{(i')} \rangle &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle e_j^{(i)} | \mathbb{P}_k | e_{j'}^{(i')} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle e_j^{(i)} | (\delta_{ki'} | e_{j'}^{(i')} \rangle) \rangle = \lambda_{i'} \langle e_j^{(i)} | e_{j'}^{(i')} \rangle = \lambda_{i'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \end{aligned}$$

بنابراین، فقط عناصر قطری غیرصفرند. توجه داشته باشید که به ازای هر شاخص بالای (i) ما دارای m_i بردار متعامد $|e_j^{(i)}\rangle$ هستیم. پس، λ_i به تعداد m_i بار به عنوان یک عنصر قطری ظاهر می‌شود. در نتیجه، در چنین پایه متعامدی، \mathbb{H} به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

بار m_1 بار m_2 بار m_r

هر ماتریس هرمیتی مفروض H را می‌توان به عنوان نمایش یک عملگر هرمیتی در پایه متعامد استاندارد تلقی کرد. می‌توان ماتریس یکانی U را چنان یافت که پایه را به ویژه بردارهای عملگر هرمیتی، یعنی $|e_j^{(i)}\rangle$ تبدیل کند. نمایش عملگر هرمیتی در پایه جدید، همان‌گونه که در بخش ۳-۲ بررسی کردیم، به صورت UHU^\dagger است. با این همه، استدلال بالا نشان داد که ماتریس جدید قطری است. بنابراین، به گزاره دیگری می‌رسیم.

گزاره ۳-۶-۱۳: هر ماتریس هرمیتی را همواره می‌توان با یک تبدیل یکانی به صورت قطری درآورد.

مثال ۳-۶-۵: قطری کردن ماتریس هرمیتی زیر را به تفصیل در نظر می‌گیریم

$$H = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1+i & -1-i \\ \circ & \circ & -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i & \circ & \circ \\ -1+i & 1-i & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه عبارت است از

$$\det(H - \lambda I) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 2)^2$$

بنابراین، با چندگانگی $m_1 = 2$ داریم $\lambda_1 = -2$ ، و با چندگانگی $m_2 = 2$ داریم $\lambda_2 = 2$.
با نگاهی به معادله ماتریسی $(H + 2I)|a\rangle = 0$ ، یا

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i & 2 & 0 \\ -1+i & 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

ملاحظه می‌کنیم که این یک دستگاه معادلات خطی با جوابهای زیر است

$$a_2 = \frac{1}{4}(1+i)(a_1 + a_4)$$

$$a_4 = \frac{1}{4}(1-i)(a_1 - a_2)$$

دو پارامتر دلخواه وجود دارد، بنابراین انتظار داریم دو دسته جواب مستقل خطی وجود داشته باشد. به‌ازای دوگزینهش $a_1 = 1$ ، $a_2 = 0$ و $a_3 = 1$ ، $a_4 = 0$ ، به‌ترتیب داریم

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4}(1+i) \\ \frac{1}{4}(1-i) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4}(1+i) \\ -\frac{1}{4}(1-i) \end{pmatrix}$$

که برحسب اتفاق متعامدند. بنابراین، با بهنجار کردن آنها داریم

$$|e_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4}(1+i) \\ \frac{1}{4}(1-i) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4}(1+i) \\ -\frac{1}{4}(1-i) \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، از دیگر معادله ویژه مقدری $(H - 2I)|a\rangle = 0$ داریم

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & -2 & -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i & -2 & 0 \\ -1+i & 1-i & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

که به شرایط

$$a_3 = -\frac{1}{2}(1+i)(a_1 + a_2)$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(1-i)(a_2 - a_1)$$

و بردارهای راست هنجار

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(1+i) \\ -\frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

می انجامد.

ماتریس یکانی قطری کننده H را می توان از این بردارهای ستونی و با توجه به نکاتی که در پایان بخش ۲-۳ یادآوری کردیم، به دست آورد؛ یعنی صرفاً با قرار دادن بردارهای $|e_j\rangle$ در کنار هم، ماتریسی که به دست می آید R^{\dagger} (یا U^{\dagger}) است:

$$U^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) & -\frac{1}{2}(1+i) & -\frac{1}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & -\frac{1}{2}(1-i) & -\frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

و ماتریس یکانی عبارت خواهد بود از

$$U = (U^\dagger)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}$$

● به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که U ، ماتریس H را قطری می‌کند (یعنی UHU^\dagger قطری است).

مثال ۳-۶-۶: در بسیاری از کاربردهای فیزیکی، قطری کردن ماتریسها خیلی مفید خواهد بود. به‌عنوان یک مثال ساده اما بارز، حرکت یک ذره باردار را در یک میدان مغناطیسی ثابت که در جهت محور z هاست در نظر می‌گیریم. معادله حرکت برای چنین ذره‌ای عبارت است از

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

که، به‌صورت مؤلفه‌ای، تبدیل می‌شود به

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \quad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

با چشمپوشی از حرکت یکنواخت در راستای z ، باید دو معادله جفت‌شده اول را حل کنیم. می‌توان آن دو معادله را به شکل ماتریسی نوشت:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

اگر ماتریس 2×2 قطری می‌بود، می‌توانستیم دو معادله جفت‌نشده به‌دست بیاوریم و به آسانی آنها را حل کنیم. قطری کردن این ماتریس مستلزم یافتن ماتریس R به‌گونه‌ای است که

$$D \equiv R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

قطرى باشد. کارسازى اين ماتريس (که مستقل از زمان است) هنگامى مشخص مى شود که (۱) را در آن ضرب کنيم. نتيجه عبارت است از

$$\frac{d}{dt}R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m}R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}R^{-1}R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

که مى توان آن را به اين صورت نوشت:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

که در آن $\omega = qB/m$ و

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} \equiv R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

بنابراين، داريم:

$$\frac{dv'_x}{dt} = \lambda_1 \omega v'_x$$

با يك جواب $v'_x = v'_{0x} e^{\lambda_1 \omega t}$ و

$$\frac{dv'_y}{dt} = \lambda_2 \omega v'_y$$

با يك جواب $v'_y = v'_{0y} e^{\lambda_2 \omega t}$ ؛ که در آنها v'_{0x} و v'_{0y} ثابتهای انتگرال گيرى اند.

برای یافتن R ، به معادلهٔ مشخصه

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

با ریشه های $\lambda_1 = i$ و $\lambda_2 = -i$ توجه مى کنيم. سپس ویژه بردارهای راست هنجار را پيدا مى کنيم.

به ازای $\lambda_1 = i$ ، داريم

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = i a_1$$

که به ویژه بردار راست هنجار زیر می‌انجامد:

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، داریم

$$|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

با توجه به نکات پایانی بخش ۲-۳، داریم

$$R^{-1} = R^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R = (R^\dagger)^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

با داشتن R^{-1} می‌توان نوشت

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R^\dagger \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x e^{i\omega t} \\ v'_y e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

اگر مؤلفه‌های x و y سرعت در $t = 0$ ، به ترتیب، $v_{0,x}$ و $v_{0,y}$ باشند، خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_{0,x} \\ v'_{0,y} \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} v'_{0,x} \\ v'_{0,y} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_{0,x} - i v_{0,y} \\ v_{0,x} + i v_{0,y} \end{pmatrix}$$

با جایگذاری (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/\sqrt{2})(v_{0,x} - i v_{0,y})e^{i\omega t} \\ (1/\sqrt{2})(v_{0,x} + i v_{0,y})e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{0,x} \cos \omega t + v_{0,y} \sin \omega t \\ -v_{0,x} \sin \omega t + v_{0,y} \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که سرعت را به صورت تابعی از زمان به دست می دهد. با یک بار انتگرال گیری نسبت به زمان، بردار مکان به دست می آید.

۳-۶-۳ تبدیلهای قائم

همان گونه که مثال ۳-۶-۳ نشان می دهد، ماتریسهای قطری، بدون شک فوق العاده مفیدند. از آنجا که عملگرهای هرمیتی کاربردهای بسیار مهمی دارند، قضیه ۳-۶-۱۲، که قطری شدن این گونه عملگرها را تضمین می کند، باعث اطمینان خاطر خواهد بود. اما، عملگرهای هرمیتی، تنها عملگرهایی نیستند که در کاربردها مورد استفاده قرار می گیرند. به عنوان مثال، عملگرهای یکانی به روشنی در محفوظ نگه داشتن حاصلضربهای داخلی حائز اهمیت اند. بنابراین، طبیعی است که در جستجوی کلی ترین عملگرهایی برآیم که دارای یک تجزیه طیفی هستند.

در نگاه اول ممکن است چنین به نظر برسد که قضیه ۳-۶-۱۲ همه امکانات را در بردارد. قدر مسلم اینکه، تمرین ۲-۳-۱۰ به ما می گوید که هر عملگر دلخواه A را می توان برحسب "به اصطلاح" مؤلفه های دکارتی اش به صورت:

$$A = H + iH' \quad (29-3)$$

نوشت که در آن H و H' هر دو هرمیتی و، در نتیجه، بنابر قضیه ۳-۶-۱۲، قابل تجزیه اند. کجای این برداشت که H نیز قابل تجزیه است اشتباه است؟ پاسخ این است که عملگرهای تصویری که برای تجزیه H به کار می روند ممکن است مانند آنهایی نباشند که برای H' به کار می روند. بگذارید این نکته را به طور سیستماتیک با یک تعریف بررسی کنیم.

تعریف ۳-۶-۱۴: دو عملگر را به طور همزمان تجزیه پذیر می خوانیم در صورتی که بتوان آنها را، مطابق قضیه ۳-۶-۱۲، برحسب مجموعه عملگرهای تصویر همسانی نوشت.

این تعریف با نمایش ماتریسی دو عملگر یاد شده سازگار است، زیرا اگر پایه راست هنجار $B = \{|e_j^{(i)}\}$ مورد بحث در بخش پیش را برگزینیم، برای هر دو عملگر ماتریسهای قطری به دست خواهیم آورد. اگر H و H' در معادله (۲۹-۳) هر دو به طور همزمان تجزیه پذیر باشند، به گونه ای که

$$H = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i \quad \text{و} \quad H' = \sum_{i=1}^r \lambda'_i P_i \quad (30-الف)$$

در آن صورت:

$$A = \sum_{j=1}^r (\lambda_j + i\lambda'_j) P_j \quad (3-30)$$

و A دارای یک تجزیه طیفی است. شرایطی که تحت آن (۳-۳۰ الف) برقرار است کدامند؟ پاسخ در قضیه زیر نهفته است.

قضیه ۳-۶-۱۵: شرط لازم و کافی برای اینکه دو عملگر هرمیتی H و H' به طور همزمان تجزیه پذیر باشند، این است که داشته باشیم: $[H, H'] = 0$.

اثبات. اگر H و H' به طور همزمان تجزیه پذیر باشند، در آن صورت بنابر (۳-۳۰ الف) داریم:

$$HH' = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i \sum_{j=1}^r \lambda'_j P_j = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda'_j P_i P_j$$

اما به ازای جميع مقادیر i و j ، $P_i P_j = P_j P_i$ ، زیرا P_i و P_j دوه دو راست هنجارند (به ازای $i \neq j$ ، $P_i P_j = 0$). بنابراین، داریم

$$HH' = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda'_j P_j P_i = \sum_j \lambda'_j P_j \sum_i \lambda_i P_i = H'H$$

از سوی دیگر، اگر $[H, H'] = 0$ و اگر $|a\rangle$ ویژه برداری از H با ویژه مقدار λ باشد (یعنی، $(H|a\rangle = \lambda|a\rangle)$ ، در آن صورت

$$H(H'|a\rangle) = HH'|a\rangle = H'(H|a\rangle) = H'(\lambda|a\rangle) = \lambda(H'|a\rangle)$$

یعنی، $H'|a\rangle$ نیز یک ویژه بردار از H با همان ویژه مقدار متعلق به $|a\rangle$ است. در حالت خاص، زیر فضای \mathcal{M}_{λ} متناظر با ویژه مقدارهای λ از H جنگلی تحت تأثیر H' ناوردا هستند. یعنی، به ازای هر λ خاص، می توانیم \mathcal{M}_{λ} را به خودی خود به صورت یک فضای برداری تلقی، و قضیه ۳-۶-۱۲ را بر آن اعمال کنیم. تنها فرق موضوع این است که حاصل جمع عملگرهای تصویر در \mathcal{M}_{λ} به جای A ، عبارت خواهد بود از P_j .

مشخصاً، فرض کنید $\lambda_1^{(i)}, \lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_{s_j}^{(j)}$ ویژه‌مقدارهای \mathbb{H}' متناظر با ویژه‌بردارهای آن در \mathcal{M}_{λ_j} باشند. در آن صورت، طبق قضیه ۳-۶-۱۲، عملگرهای تصویر $\mathbb{P}_1^{(j)}, \mathbb{P}_2^{(j)}, \dots, \mathbb{P}_{s_j}^{(j)}$ چنان وجود دارند که

$$\mathbb{P}_k^{(j)} \mathbb{P}_l^{(j)} = 0 \quad k \neq l \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{k=1}^{s_j} \mathbb{P}_k^{(j)} = \mathbb{P}_j \quad (\text{ب})$$

(ج) (که \mathbb{H}' محدود به \mathcal{M}_{λ_j} است) $\sum_{k=1}^{s_j} \lambda_k^{(j)} \mathbb{P}_k^{(j)} = \mathbb{H}'_j$ از سوی دیگر، ناوردایی \mathcal{M}_{λ_j} ، \mathbb{H}' را کاهش می‌دهد به

$$\mathbb{H}' = \mathbb{H}'_1 \oplus \mathbb{H}'_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{H}'_r$$

با سرجمع کردن همه اینها، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \mathbb{H}' &= \left(\sum_{k_1=1}^{s_1} \lambda_{k_1}^{(1)} \mathbb{P}_{k_1}^{(1)} \right) \oplus \left(\sum_{k_r=1}^{s_r} \lambda_{k_r}^{(r)} \mathbb{P}_{k_r}^{(r)} \right) \oplus \dots \oplus \left(\sum_{k_r=1}^{s_r} \lambda_{k_r}^{(r)} \mathbb{P}_{k_r}^{(r)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_k^{(j)} \mathbb{P}_k^{(j)} \end{aligned}$$

از سوی دیگر،

$$\mathbb{H} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbb{P}_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{k=1}^{s_j} \mathbb{P}_k^{(j)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_j \mathbb{P}_k^{(j)}$$

■ مقایسه این دو بسط نشان می‌دهد که \mathbb{H} و \mathbb{H}' به‌طور همزمان تجزیه‌پذیرند.

با اعمال این نتیجه اجزای حقیقی و موهومی یک عملگر کلی \mathbb{A} ، می‌رسیم به آنجا که فقط و فقط در صورتی دارای یک تجزیه طیفی است که

$$\left[\frac{1}{\gamma} (\mathbb{A} + \mathbb{A}^\dagger), \frac{i}{\gamma} (\mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger) \right] = 0$$

یا

$$\frac{i}{\gamma} \{ -[\mathbb{A}, \mathbb{A}^\dagger] + [\mathbb{A}^\dagger, \mathbb{A}] \} = 0$$

$$[A, A^\dagger] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AA^\dagger = A^\dagger A \quad (31-3)$$

تبدیلی که در (۳۱-۳) صدق کند، تبدیل قائم نامیده می‌شود، و ما در واقع، قضیه زیر را اثبات کرده‌ایم:

قضیه ۳-۶-۱۶: یک عملگر فقط هنگامی در یک فضای یکانی (مختلط) دارای تجزیه طیفی است که قائم باشد.

بدیهی است که عملگرهای هرمیتی یکانی، قائم‌اند. همچنین باید توجه داشت که وقتی از تجزیه طیفی عملگرهای قائم به‌طور عام صحبت می‌کنیم، باید قید حقیقی بودن ویژه‌مقدارها را، که در قضیه ۳-۶-۱۲ مطرح شده است، حذف کنیم

مثال ۳-۶-۷: می‌خواهیم تجزیه طیفی ماتریس اسپین پاولی زیر را پیدا کنیم:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ابتدا، ویژه‌مقدارهای آن را به‌دست می‌آوریم

$$\det(\sigma_y - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

فرض کنید $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$. در آن صورت به‌ازای $|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ داریم:

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = i\alpha_1$$

و ویژه‌بردار راست‌هنجار عبارت است از

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، برای λ_2 خواهیم داشت

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

زیرفضاهای \mathcal{M}_{λ_i} یک‌بعدی‌اند؛ بنابراین،

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$$

۳-۶-۴ توابع تبدیلیها

توابع تبدیلیها را در فصل ۲ بررسی کردیم. اکنون با بهره‌گیری از قدرتی که تجزیه طیفی در اختیارمان نهاده، می‌توانیم به چند نتیجه مهم در خصوص آنها دست پیدا کنیم. اولاً، توجه داریم که اگر

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$$

در این صورت

$$A^t = \sum_{i=1}^r \lambda_i^t P_i$$

$$A^n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n P_i$$

بنابراین، هر چند جمله‌ای p برحسب A ، دارای یک تجزیه طیفی است،

$$p(A) = \sum_{i=1}^r p(\lambda_i) P_i \quad (الف \ ۳۲-۳)$$

با تعمیم این رابطه به توابع قابل بسط به صورت سری، خواهیم داشت

$$f(A) = \sum_{i=1}^r f(\lambda_i) P_i \quad (ب \ ۳۲-۳)$$

مثال ۳-۶-۸: می‌خواهیم تجزیه طیفی ماتریس یکانی (در واقع متعامد)

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

را بررسی کنیم. ابتدا ویژه‌مقدارها را پیدا می‌کنیم

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$\lambda_1 = e^{-i\theta} \text{ و } \lambda_2 = e^{i\theta}$$

اکنون ویژه‌بردارها را به دست می‌آوریم. به ازای λ_1 داریم

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - e^{-i\theta} & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = i \alpha_1 \Rightarrow$$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

و به ازاي λ_2 ، داريم

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - e^{-i\theta} & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -i\alpha_1 \Rightarrow$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

ملاحظه مى كنيم كه \mathcal{M}_{λ_i} يك بعدى اند و توسط $|e_i\rangle$ فرا گرفته مى شوند. بنا بر اين،

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1 - i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

آشكار است كه $P_1 + P_2 = 1$ و

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & -ie^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & ie^{i\theta} \\ -ie^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} = U$$

اگر لگارىتم طبيعى عبارت زير را بگيريم

$$U = e^{-i\theta} P_1 + e^{i\theta} P_2$$

آنگاه از (۳-۳۲) بهره گيريم، داريم

$$\begin{aligned} \ln U &= \ln(e^{-i\theta} P_1) + \ln(e^{i\theta} P_2) = -i\theta P_1 + i\theta P_2 \\ &= i(-\theta P_1 + \theta P_2) \equiv iH \end{aligned} \quad (1)$$

كه در آن $H \equiv -\theta P_1 + \theta P_2$ يك عملگر هرميتى است زيرا θ حقيقى است و P_1 و P_2 هرميتى اند. با معكوس كردن معادله (۱) داريم

$$U = e^{iH}$$

$$H = \theta[-P_1 + P_2] = \theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

به این ترتیب، نشان داده‌ایم که ماتریس یکانی U را می‌توان به صورت تابعی نمایی از یک عملگر پادهرمیتی نوشت. این یک نتیجه کلی است که در تمرین ۳-۶-۷ ثابت می‌شود.

یکی از توابع مهم یک عملگر، ریشه دوم آن است. راه طبیعی تعریف ریشه دوم عملگر A عبارت است از

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^r (\pm \sqrt{\lambda_i}) P_i \quad (33-3)$$

بدیهی است که این رابطه جوابهای متعددی برای ریشه به دست می‌دهد، زیرا هر جمله در (۳۳-۳) می‌تواند دارای علامت مثبت یا منفی باشد. برای منحصر به فرد کردن \sqrt{A} ، رسم بر این است که آن را فقط برای عملگرهای مثبت، که عملگرهای هرمیتی هستند، A ، با خاصیت $(Aa|a) \geq 0$ ، به ازای جميع مقادیر $|a\rangle \in \mathcal{V}$ ، تعریف کنند. در حالت خاص، تمام ویژه‌مقدارهای یک عملگر مثبت، نامنفی‌اند.

تعریف ۳-۶-۱۷: ریشه دوم مثبت عملگر مثبت $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$ عبارت است از:

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} P_i$$

منحصر به فرد بودن تجزیه طیفی، به این معناست که ریشه دوم مثبت یک عملگر مثبت، منحصر به فرد است.

مثال ۳-۶-۹: فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 5 \end{pmatrix}$ ، آنگاه \sqrt{A} را محاسبه کنید. ابتدا باید A را تجزیه طیفی کنیم. معادله مشخصه آن عبارت است از

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

که دارای ریشه‌های $\lambda_1 = 8$ و $\lambda_2 = 2$ است. چون هر دو ویژه‌مقدار مثبت‌اند و A هرمیتی است، نتیجه می‌گیریم که A در واقع مثبت است. همچنین، می‌توانیم ویژه‌بردارهای راست‌هنجار

اين عملگر را نيز به آسانى پيدا كنيم:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراين

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \sqrt{\lambda_1}P_1 + \sqrt{\lambda_2}P_2 = \sqrt{\lambda_1}\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\lambda_2}\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که به سهولت مى توان ملاحظه کرد که $(\sqrt{A})^2 = A$.

تمرین ۳-۶-۶ نشان مى دهد که P_i چندجمله‌ايهاى برحسب A هستند. بنا بر اين، نتيجه مى گيريم که \sqrt{A} نيز يك چندجمله‌اي برحسب A است. در واقع، از تمرین ۳-۶-۶ داريم

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} p_i(A) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \prod_{k \neq i} \frac{A - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \quad (34-3)$$

مثال ۳-۶-۱۰: اگر \sqrt{A} در مثال ۳-۶-۹ را به صورت يك چندجمله‌اي برحسب A بنويسيم، داريم

$$p_1(A) = \prod_{k \neq 1} \frac{A - \lambda_k}{\lambda_1 - \lambda_k} = \frac{A - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{6}(A - 2)$$

$$p_2(A) = \prod_{k \neq 2} \frac{A - \lambda_k}{\lambda_2 - \lambda_k} = \frac{A - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1}{6}(A - 8)$$

با جایگذاری در بسط \sqrt{A} که در (۳-۳۴) داده شده است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sqrt{A} &= \sqrt{\lambda_1} p_1(A) + \sqrt{\lambda_2} p_2(A) = \frac{2\sqrt{2}}{6}(A - 2) - \frac{\sqrt{2}}{6}(A - 8) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}A + \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

عبارت سمت راست آشکارا یک چندجمله‌ای (درجه اول) برحسب A است، و به آسانی می‌توان بی‌برد که همان ماتریس \sqrt{A} است.

۳-۶-۵ تجزیه قطبی

بدیهی است که بین عملگرها و اعداد مختلط شباهتهای زیادی وجود دارد. مثلاً رفتار عملگرهای هرمیتی خیلی به رفتار اعداد حقیقی شبیه است: دارای ویژه‌مقدارهای حقیقی‌اند؛ مربعات آنها مثبت‌اند؛ هر عملگری را می‌توان به صورت $i\mathbb{H}' + \mathbb{H}$ نوشت، که در آن \mathbb{H} و \mathbb{H}' هر دو، هرمیتی‌اند؛ والی آخر. همچنین، عملگرهای یکانی را می‌توان به صورت $e^{i\mathbb{H}}$ نوشت، که در آن \mathbb{H} هرمیتی است. بنابراین، عملگرهای یکانی، مشابه‌های اعداد مختلط با بزرگی واحد، مانند $e^{i\theta}$ هستند. یک عدد مختلط را می‌توان به صورت $re^{i\theta}$ نیز نوشت. آیا می‌توان یک عملگر دلخواه را نیز به همین شکل نوشت؟ در قالب قضیه زیر به این پرسش پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۳-۶-۱۸: اگر \mathbb{A} یک عملگر دلخواه در یک فضای یکانی با ابعاد متناهی باشد، عملگر مثبت منحصر به فردی مانند \mathbb{P} ، و عملگری یکانی مانند \mathbb{U} چنان وجود دارد که $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{P}$. اگر \mathbb{A} وارون‌پذیر باشد، در آن صورت \mathbb{U} نیز منحصر به فرد است.

اثبات. قضیه را برای حالتی که در آن \mathbb{A} وارون‌پذیر است اثبات می‌کنیم.^۱
عملگر $\mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}$ مثبت است زیرا

$$\langle \mathbb{A}^\dagger \mathbb{A} a | a \rangle = \langle \mathbb{A} a | (\mathbb{A}^\dagger)^\dagger | a \rangle = \langle \mathbb{A} a | \mathbb{A} a \rangle \geq 0$$

بنابراین، دارای یک ریشه دوم منحصر به فرد، $\mathbb{P} = \sqrt{\mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}}$ ، است. حال فرض می‌کنیم $\mathbb{V} = \mathbb{P}\mathbb{A}^{-1}$ یا $\mathbb{V}\mathbb{A} = \mathbb{P}$ ، و نشان می‌دهیم \mathbb{V} یکانی است.

$$\mathbb{V}^\dagger = (\mathbb{P}\mathbb{A}^{-1})^\dagger = (\mathbb{A}^{-1})^\dagger \mathbb{P}^\dagger = (\mathbb{A}^\dagger)^{-1} \mathbb{P}$$

۱. اثبات حالت کلی را می‌توان در کتابهای جبر خطی مثل (Halmos, ۱۹۵۸) یافت.

$$V^t V = (A^t)^{-1} P P A^{-1} = (A^t)^{-1} P^t A^{-1} = (A^t)^{-1} A^t A A^{-1} = I$$

اکنون فرض می‌کنیم $U = V^t$. در آن صورت $VA = P$ نتیجه می‌دهد $U^t A = P$ یا $A = UP$. برای اثبات منحصر به فرد بودن، ملاحظه می‌کنیم که $UP = U^t P^t$ به معنای این است که $P = U^t U^t P^t$ و

$$\begin{aligned} P^t &= P^t P = (U^t U^t P^t)^t (U^t U^t P^t) = P^t U^t U^t U^t P^t \\ &= P^t P^t = P^t \end{aligned}$$

چون تبدیل مثبت P^t (یا P^t) فقط یک ریشه دوم دارد، نتیجه می‌گیریم که $P = P^t$. اگر A وارون‌پذیر باشد، در آن صورت $P = U^t A$ نیز چنین است. بنابراین، $UP = U^t P^t = U^t P$ منجر می‌شود به $U P P^{-1} = U^t P P^{-1}$ یا $U = U^t$ ، و نیز منحصر به فرد است. ■
در عمل، P و U با توجه به این رابطه به دست می‌آیند که:

$$A A^t = P U (P U)^t = P U U^t P = P^t$$

به این ترتیب، پیدا کردن P مستلزم تجزیه طیفی $A A^t$ و گرفتن ریشه دوم مثبت آن است. وقتی P پیدا شد، U را می‌توان از تعریف $A = P U$ محاسبه کرد. در حالت کلی، U منحصر به فرد نیست. اما، اگر P (و A) وارون‌پذیر باشد، در آن صورت U با استفاده از $U = P^{-1} A$ ، به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.

۳-۶-۶ فضاهای برداری حقیقی

تاکنون محور بحث در این فصل بیشتر متوجه فضاهای با (حاصل) ضرب داخلی مختلط (یکانی) بوده است. دستگاه اعداد مختلط خیلی غنی‌تر از دستگاه اعداد حقیقی است. مثلاً، در مقدمه اثبات قضیه تجزیه طیفی، از وجود n ریشه یک چندجمله‌ای درجه n در میدان مختلط (که قضیه بنیادی جبر به شمار می‌آید) استفاده کردیم. از سوی دیگر، همه ریشه‌های یک چندجمله‌ای از اعداد حقیقی لزوماً حقیقی نیستند.

بنابراین، شاید به نظر برسد که فضاهای برداری حقیقی، از قضایا و نتایج مفیدی که برای فضاهای مختلط به دست آوردیم برخوردار نخواهند بود. اما، با استفاده از فرایندی موسوم به مختلط سازی یک فضای برداری حقیقی، که در آن یک جزء موهومی به چنین فضایی افزوده می شود، می توان عملاً تمام نتایجی را که در اینجا برای فضاهای برداری مختلط به دست آمد، اثبات کرد.^۱

قضیه ۳-۶-۱۹: یک عملگر متقارن حقیقی، دارای همان تجزیه طیفی بیان شده در قضیه ۳-۶-۱۲ است.

این قضیه به خصوص در کاربردهای فیزیک کلاسیک، که عمدتاً با فضاهای حقیقی سروکار دارد، مفید است. یک وضعیت نوعی، شامل برداری است که با یک ماتریس متقارن به یک بردار دیگر مرتبط است. بنابراین، لازم است دستگاه مختصاتی را بیابیم که در آن دو بردار یاد شده رابطه ساده‌ای با یکدیگر دارند. این فرایند شامل قطری کردن ماتریس متقارن با یک چرخش (یک ماتریس متعامد حقیقی) است. قضیه ۳-۶-۱۹ تضمین می کند که این قطری سازی، امکان پذیر است.

مثال ۳-۶-۱۱: برای دستگاهی مشتمل بر N ذره نقطه‌ای، گشتاور زاویه‌ای کل، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

اگر ذرات یاد شده جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ را تشکیل دهند، در آن صورت $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ و داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ و $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. در آن صورت گشتاور زاویه‌ای به صورت زیر درمی آید

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \quad (1)$$

۱. این کار در کتاب ارزشمند Halmos, (۱۹۵۸) انجام شده است، و ما در اینجا فقط به ذکر نتایج آن اکتفا می کنیم.

و برای هر یک از مؤلفه‌های این معادله، داریم

$$L_x = \sum_{i=1}^N m_i [\omega_x (r_i^y - x_i^y) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z]$$

$$L_y = \sum_{i=1}^N m_i [\omega_y (r_i^x - y_i^x) - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z]$$

$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i [\omega_z (r_i^x - z_i^x) - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y]$$

اگر تعریف کنیم

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^y - x_i^y) \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^x - y_i^x) \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^x - z_i^x)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum m_i x_i y_i$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \sum m_i x_i z_i$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \sum m_i y_i z_i$$

در آن صورت معادله (۱) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ماتریس 3×3 بالا را معمولاً با I نمایش می‌دهیم و آن را ماتریس گشتاور لختی می‌نامیم. این ماتریس متقارن است، و بنابراین قضیه ۳-۶-۱۹ می‌توان آن را با یک تبدیل متعامد (همزاد یک تبدیل یکانی در یک فضای برداری حقیقی) قطری کرد. اما تبدیل متعامد در سه بعد، صرفاً یک چرخش دستگاه مختصات است. بنابراین، طبق قضیه ۳-۶-۱۹، همواره می‌توان دستگاه‌های مختصاتی اختیار کرد که در آن ماتریس گشتاور لختی قطری است. در چنین دستگاه مختصاتی داریم:

$$L_x = I_{xx} \omega_x \quad L_y = I_{yy} \omega_y \quad L_z = I_{zz} \omega_z$$

که معادلات را خیلی ساده می‌کند.

به همین ترتیب، انرژی جنبشی یک جسم صلب در حال چرخش عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

که، در حالت کلی، شامل عناصر غیرقطری I_{xy} و جزء آنهاست و شکل ساده آن به صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$

کاربرد دیگر قضیه ۳-۶-۱۹، در مطالعه مقاطع مخروطی است. مثال زیر، این کاربرد را نشان می‌دهد (تمرین ۳-۶-۹).

مثال ۳-۶-۱۲: کلی‌ترین شکل معادله یک مقطع مخروطی به صورت زیر است:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0$$

که در آن a_1, \dots, a_6 جملگی مقادیر ثابتی‌اند. اگر محورهای مختصات بر محورهای اصلی مقطع مخروطی منطبق باشند، جمله xy غایب خواهد بود، و مقطع مخروطی را به آسانی می‌توان رسم کرد. بنابراین، از نظر هندسی باید بتوانیم مختصات xy را چنان دوران دهیم که بر محورهای اصلی منطبق شوند. این کار را با آنچه که در این بخش ملاحظه کردیم، انجام می‌دهیم. ابتدا، ملاحظه می‌کنیم که معادله کلی برای یک مقطع مخروطی را می‌توان در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_4 \quad a_5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_6 = 0$$

ماتریس 2×2 ، متقارن است و لذا می‌توان آن را با یک ماتریس متعامد قطری کرد. این ماتریس متعامد را R می‌نامیم. به این ترتیب $\bar{R}R = 1$ ، و می‌توان نوشت

$$(x \quad y) \bar{R}R \begin{pmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{pmatrix} \bar{R}R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_4 \quad a_5) \bar{R}R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_6 = 0$$

فرض کنید

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad R \begin{pmatrix} a_1 & a_2/2 \\ a_2/2 & a_2 \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} a'_1 & 0 \\ 0 & a'_2 \end{pmatrix}$$

$$R \begin{pmatrix} a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_2 \\ a'_0 \end{pmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$(x' \quad y') \begin{pmatrix} a'_1 & 0 \\ 0 & a'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (a'_2 \quad a'_0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a'_0 = 0$$

$$a'_1(x')^2 + a'_2(y')^2 + a'_2x' + a'_0y' + a'_0 = 0$$

جمله تداخلی (xy) حذف شده است. ماتریس متعامد R صرفاً یک چرخش (دوران) است. در واقع، درست همان چرخشی است که محورهای مختصات را بر محورهای اصلی منطبق می‌کند.

هر چند موضوع عملگرهای متقارن نسبتاً سراسر است، اما مبحث عملگرهای متعامد (همزاد عملگرهای یکانی در یک فضای برداری حقیقی) قدری پیچیده‌تر است. در مثال ۳-۶-۸ ملاحظه کردیم که ویژه‌مقدارهای یک تبدیل متعامد در دو بعد، در حالت کلی، مختلط‌اند. این موضوع با تبدیلهای متقارن در تضاد است.

می‌توان ثابت کرد که اگر ویژه‌مقدار یک عملگر متعامد، ± 1 نباشد، باید مختلط باشد. عملگر متعامد \mathbb{O} را به‌عنوان یک عملگریکانی در یک فضای برداری مختلط در نظر بگیرید. در آن صورت، بنابر تمرین ۳-۶-۴، قدرمطلق هر یک از ویژه‌مقدارهای آن ۱ است. بنابراین، تنها جوابهای حقیقی عبارت‌اند از: ± 1 . برای پیدا کردن سایر ویژه‌مقدارها ملاحظه می‌کنیم که \mathbb{O} ، به‌عنوان یک عملگریکانی در یک فضای یکانی، را می‌توان به‌صورت e^A نوشت که در آن A پادهرمیتی است (تمرین ۳-۶-۷). این موضوع را به‌عنوان مسئله به خواننده وامی‌گذاریم تا نشان دهد اگر \mathbb{A} و \mathbb{B} دو عملگر دلخواه باشند و $[A, B] = 0$ ، در این صورت به‌لاری دو تابع اختیاری f و g ، داریم $[f(A), g(B)] = 0$. در حالت خاص، چون $(\mathbb{O} \tilde{\mathbb{O}} = \tilde{\mathbb{O}} \mathbb{O} = 1)$ ، $[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}] = 0$ ، داریم

$[A, \tilde{A}] = 0$ یا $[\ln O, \ln \tilde{O}] = 0$. به این ترتیب، بنابر گزاره ۲-۳-۱۶، داریم

$$O \tilde{O} = e^A e^{\tilde{A}} = e^{A+\tilde{A}} = 1$$

یا

$$A + \tilde{A} = O \quad \Leftrightarrow \quad A = -\tilde{A}$$

و A پادمتقارن است. چون O حقیقی است، A نیز حقیقی است.

اکنون ویژه‌مقدارهای A را در نظر می‌گیریم. اگر λ ، ویژه‌مقداری متعلق به A و متناظر با ویژه‌بردار $|a\rangle$ باشد، داریم

$$\langle a|A|a\rangle = \lambda \langle a|a\rangle$$

با گرفتن مزدوج مختلط دو طرف خواهیم داشت

$$\langle a|A^\dagger|a\rangle = \lambda^* \langle a|a\rangle$$

اما $A^\dagger = \tilde{A}^* = \tilde{A} = -A$ زیرا A حقیقی و پادمتقارن است. بنابراین داریم

$$\langle a|A|a\rangle = -\lambda^* \langle a|a\rangle$$

که منجر می‌شود به

$$\lambda^* = -\lambda$$

اگر λ حقیقی باشد، تنها امکان این است که صفر باشد. اگر λ حقیقی نباشد، در آن صورت باید

بالاخره می‌رسیم به شبیه تجزیه قطبی برای فضاهای با (حاصل) ضرب داخلی حقیقی.

قضیه ۳-۶-۲۱: هر عملگر (ماتریس) حقیقی A را می‌توان به صورت $A = PO$ نوشت، که در آن P متقارن مثبت و O متعامد است.

مثال ۳-۶-۱۳: می‌خواهیم ماتریس زیر را به شکل قطبی آن تجزیه کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

داریم،

$$P^T = A\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

که دارای ویژه‌مقدارهای $\lambda_1 = 16$ و $\lambda_2 = 1$ ، و ویژه‌بردارهای

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

است. عملگرهای تصویر عبارت‌اند از

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} P = \sqrt{P^T} &= \sqrt{\lambda_1}P_1 + \sqrt{\lambda_2}P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که A وارون پذیر است. بنابراین، P نیز وارون پذیر است، و

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

حال، اگر $A = PO$ ، در آن صورت $O = P^{-1}A$ ، یا

$$O = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

● به آسانی می توان تحقیق کرد که O در واقع متعامد است.

گشت و گذار نسبتاً طولانی ما در جبر عملگرها و نظریه ماتریسها نشان داده است که انواع بسیاری از عملگرها یافت می شوند که می توان آنها را قطری کرد. آیا دلیل این امر آن است که احتمالاً همه عملگرها قابلیت قطری شدن دارند؟ به عبارت دیگر، اگر یک عملگر داشته باشیم، آیا می توانیم پایه ای پیدا کنیم که ماتریس نمایشگر آن عملگر در آن پایه قطری باشد؟ پاسخ، در حالت کلی، منفی است. بحث پیرامون این موضوع ما را به قضیه هامیلتون-کیلی و شکل متعارف زوردان یک ماتریس می کشاند سگریزی که در حوصله این کتاب نیست. خواننده علاقه مند می تواند چنین مقوله ای را در کتابهای جبر خطی و نظریه ماتریسها بیابد. ذکر یک نتیجه در اینجا حائز اهمیت است. اگر ریشه های چند جمله ای مشخصه یک ماتریس همه ساده باشند، در آن صورت می توان با یک تبدیل تشابهی (نه لزوماً یکانی) آن را به شکل قطری درآورد.

مثال ۳-۶-۱۴: به عنوان مثال دیگری از کاربرد نتایج این بخش، می خواهیم انتگرال n گانه زیر را محاسبه کنیم:

$$I_n = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \cdots \int_0^\infty dx_n e^{-\sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j} \quad (1)$$

که در آن m_{ij} عناصر یک ماتریس معین، مثبت، متقارن، و حقیقی هستند.

فرض کنید M ماتریس با عناصر m_{ij} باشد. از آنجا که این ماتریس متقارن است، می توان آن را با یک ماتریس متعامد R قطری کرد، به طوری که $RMR^T = D$ ماتریسی قطری است که عناصر قطری آن ویژه مقدارهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ماتریس M هستند. چون M مثبت و معین است، هیچ یک از این ویژه مقدارها صفر یا منفی نیست.

جزء نمایی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j &= \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{M} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{x} \\ &= \tilde{\mathbf{x}}' \mathbf{D} \mathbf{x}' = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2 \\ \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

یا، در شکل مؤلفه‌ای،

$$x'_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

به همین ترتیب، چون $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}'$

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ji} x'_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{به‌ازای}$$

از سوی دیگر "عنصر حجم" $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ به صورت

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)} \right| dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n \\ &\equiv |\det \mathbf{J}| dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n \end{aligned}$$

با "عنصر حجم" $dx'_1, dx'_2, \dots, dx'_n$ مرتبط است که در آن \mathbf{J} ماتریس ژاکوبی است که عنصر $\partial x_i / \partial x'_j$ آن r_{ji} است. اما

$$\partial x_i / \partial x'_j = r_{ji} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \tilde{\mathbf{R}} \quad \Rightarrow \quad |\det \mathbf{J}| = |\det \tilde{\mathbf{R}}| = 1$$

بنابراین، برحسب x' ، انتگرال I_n تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\infty dx'_1 \int_0^\infty dx'_2 \cdots \int_0^\infty dx'_n e^{-\lambda_1(x'_1)^2 - \lambda_2(x'_2)^2 - \cdots - \lambda_n(x'_n)^2} \\ &= \left(\int_0^\infty dx'_1 e^{-\lambda_1(x'_1)^2} \right) \left(\int_0^\infty dx'_2 e^{-\lambda_2(x'_2)^2} \right) \cdots \left(\int_0^\infty dx'_n e^{-\lambda_n(x'_n)^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^n (\det M)^{-1/2} \end{aligned}$$

که در آن از این واقعیت بهره گرفته شده است که دترمینان یک ماتریس، حاصل ضرب ویژه‌مقدارهای آن است.

تمرینها

۳-۶-۱ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

۳-۶-۲ عملگر π_{ij} را، که جای α_i و α_j را در $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \in \mathbb{C}^n$ عوض می‌کند در نظر بگیرید. نشان دهید که ویژه‌مقدارهای π_{ij} فقط می‌توانند ± 1 باشند.

۳-۶-۳ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای عملگر $-id/dx$ را که در $C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ عمل می‌کند، پیدا کنید.

۳-۶-۴ نشان دهید که قدرمطلق ویژه‌مقدارهای یک عملگر یکانی U مساوی ۱ است.

۳-۶-۵ تجزیه طیفی (الف) A^{-1} و (ب) $A^t A$ ، برای عملگر نرمال A کدام‌اند؟

۳-۶-۶ نشان دهید که \mathbb{P}_i در (۳-۳۲) را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای برحسب A نوشت.

۳-۶-۷ نشان دهید که متناظر با هر عملگر یکانی U ، که در یک فضای برداری با ابعاد متناهی عمل می‌کند، یک عملگر هرمیتی مانند H به‌گونه‌ای وجود دارد که $U = e^{iH}$.

۳-۶-۸ تجزیه قطبی ماتریس زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ \sqrt{7} & 3 \end{pmatrix}$$

۳-۶-۹ زاویه بین محورهای اصلی مقطع مخروطی $0 = 36 - 4xy + 5y^2 - 2x^2$ و دستگاهمختصات xy چیست؟ این مقطع مخروطی، چه نوع مقطعی است؟۳-۶-۱۰ نقطه $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ، بیشینه (کمینه) تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(\mathbf{r})$ است، در صورتی که $0 = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)_{\mathbf{r}=\mathbf{a}} \equiv \nabla f|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}}$ ، به ازای مقادیر کوچک $\delta = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ ، تفاضل $f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})$ منفی (مثبت) باشد. نشان دهید که $f(\mathbf{r})$ فقط در صورتیدارای یک کمینه (بیشینه) است که ماتریس $n \times n$ بعدی $(D)_{ij} \equiv (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)_{\mathbf{a}}$ فقط

دارای ویژه مقدارهای غیرمنفی (غیرمثبت) باشد.

مسائل

۳-۱ نشان دهید اگر $|z| = |x| + |y|$ ، در آن صورت در هر پایه اختیاری، مؤلفه‌های $|z|$ مساریبا حاصل جمع مؤلفه‌های متناظر $|x|$ و $|y|$ هستند. همچنین نشان دهید که عناصر ماتریس

نمایش دهنده حاصل جمع دو عملگر یادشده عبارت‌اند از حاصل جمعهای عناصر ماتریسهای

نمایش دهنده آن دو عملگر.

۳-۲ نشان دهید که عملگر واحد، \mathbf{A} ، با ماتریس واحد در هر پایه نمایش داده می‌شود.

۳-۳ نشان دهید که عناصر قطری یک ماتریس پادمتقارن جملگی صفرند.

۳-۴ نشان دهید که تعداد پارامترهای حقیقی مستقل:

(الف) برای یک ماتریس پادمتقارن $N \times N$ عبارت است از $N(N-1)/2$.(ب) برای یک ماتریس یکانی (مختلط) $N \times N$ عبارت است از N^2 .(ج) برای یک ماتریس هرمیتی (مختلط) $N \times N$ عبارت است از N^2 .(د) برای یک ماتریس متعامد (حقیقی) $N \times N$ عبارت است از $N(N-1)/2$.۳-۵ ثابت کنید که اگر ماتریس M در رابطه $MM^\dagger = 0$ صدق کند، در آن صورت $M = 0$. توجهداشته باشید که، در حالت کلی، $AB = 0$ به معنای این نیست که یکی از ماتریسها صفر است.در واقع، مربع ماتریس 2×2 و غیر صفر $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ ، صفر است.

۳-۶ نشان دهید که در بسط دترمینان داده شده در معادله‌های (۳-۱۴)، هیچ دو عنصری از یک

سطر یا یک ستون نمی‌توانند در جمله‌ای از حاصل جمع ظاهر شوند.

۷-۳ با استفاده از هر دو روشی که در این فصل ارائه شده است، وارونه‌های ماتریسهای زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & (1-i)/2\sqrt{2} & (1+i)/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & -(1+i)/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -(1-i)/2\sqrt{2} & -(1+i)/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -(1-i)/2\sqrt{2} & (1+i)/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

۸-۳ با استفاده از قضیه ۳-۴-۳، نتیجه فرعی آن را ثابت کنید.

۹-۳ به‌ازای چه مقادیری از α ، ماتریسهای زیر وارون پذیرند؟ در هر مورد که ممکن است، وارونها را پیدا کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

۱۰-۳ نشان دهید که $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. با استفاده از این موضوع، ثابت کنید که یک تبدیل تشابهی، دترمینان ماتریس را تغییر نمی‌دهد.

۱۱-۳ نشان دهید که افزودن مضربی از یک سطر (ستون) به سطر (ستونی) دیگر از یک ماتریس، دترمینان آن ماتریس را تغییر نمی‌دهد.

۱۲-۳ فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^N$ مجموعه‌ای است مشتمل بر N سطر از ماتریسی $N \times N$ مانند A

که در آن a_i بر یکدیگر عمودند. ثابت کنید که

$$|\det A| = \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_n\|$$

(راهنمایی: $A^t A$ را در نظر بگیرید.)

۱۳-۳ با فرض اینکه A و A' ماتریسهای مشابهی باشند، ثابت کنید که ویژه مقادیر این دو ماتریس همسانند.

۱۴-۳ ثابت کنید که یک مجموعه از n معادله خطی همگن n مجهولی، فقط در صورتی دارای جواب ناصفر است که درمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

۱۵-۳ با استفاده از درمینانها، نشان دهید که ماتریس پادمتقارنی که ابعاد آن فرد است، نمی تواند دارای وارون باشد.

۱۶-۳ ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ که در آن $x \neq 0$ مفروض است. ثابت کنید امکان ندارد بتوان ماتریسی 2×2 و وارون پذیر مانند R پیدا کرد به گونه ای که RAR^{-1} قطری باشد. (این موضوع نشان می دهد که همه عملگرها قابل قطری شدن نیستند.)

۱۷-۳ اثبات گزاره ۳-۵-۳ را کامل کنید.

۱۸-۳ فرض کنید π جایگشتی از اعداد درست $\{1, 2, \dots, n\}$ است. اگر $A|x\rangle = (\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(n)})$ باشد، بنویسید $|x\rangle = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ طیف A چیست؟

۱۹-۳ نشان دهید که هر عملگر برگشتی (یعنی، عملگری مانند A با خاصیت $A^t = 1$) فقط دارای ویژه مقادیر ± 1 است.

۲۰-۳ نشان دهید که برای عملگر قائم A و هر عملگر دیگر B ,

$$[A, B] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [P_i, B] = 0$$

که در آن، P_i عملگرهای تصویر در تجزیه طیفی A هستند. (راهنمایی: از تمرین ۳-۶-۶ استفاده کنید.)

۲۱-۳ نشان دهید که هر ماتریس متعامد 2×2 را می توان به یکی از دو صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

ماتریس سمت راست، یک چرخش محض (با دترمینان $+1$)، و ماتریس سمت چپ شامل یک چرخش و یک وارونگی مختصات (با دترمینان -1) است. هر دو ماتریس چنان‌اند که نخستین عنصر ماتریس به‌ازای $\theta = 0$ ، به 1 تبدیل می‌شود.

۲۲-۳ در هر حالت زیر، چرخش پادساعتگردی از محورهای xy را بیابید که مقطع مخروطی را به شکل متعارف آن درمی‌آورد و سپس مقطع مخروطی را تعیین کنید.

$$(الف) \quad 11x^2 + 3y^2 + 6xy - 12 = 0$$

$$(ب) \quad 5x^2 - 3y^2 - 6xy + 6 = 0$$

$$(ج) \quad 2x^2 - y^2 - 4xy - 3 = 0$$

$$(د) \quad 6x^2 + 3y^2 - 4xy - 7 = 0$$

۲۳-۳ با فرض $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^n$ ، ثابت کنید $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$.

۲۴-۳ ثابت کنید اگر دو ماتریس وارون‌پذیر $A, B \in N \times N$ ، پادجاب‌جاپذیر باشند (یعنی، $AB + BA = 0$)، در آن صورت (الف) N باید زوج باشد؛ و (ب) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.

۲۵-۳ فرض کنید عملگرهای M, S, A ، به‌ترتیب، دلخواه، متقارن، و پادمتقارن هستند. ثابت کنید که

$$(الف) \quad \text{tr}(M) = \text{tr}(\tilde{M})$$

$$(ب) \quad \text{tr}(SA) = 0; \text{ در حالت خاص: } \text{tr}(A) = 0$$

$$(ج) \quad [A, S] = 0 \text{ فقط در صورتی پادمتقارن است که } [A, S] = 0$$

$$(د) \quad \text{MSM} \text{ متقارن، و } \text{MAM} \text{ پادمتقارن است.}$$

$$(ه) \quad \text{MHM}^\dagger \text{ هرمیتی است اگر } H \text{ هرمیتی باشد.}$$

۲۶-۳ حاصل جمع مربعات عناصر یک ماتریس را به‌صورت یک رد بیان کنید. نشان دهید که این حاصل جمع تحت یک تبدیل متعامد، ناورد است.

۲۷-۳ با توجه به اینکه چرخش به اندازه زاویه $\theta_1 + \theta_2$ در صفحه xy مترادف با حاصلضرب دو چرخش است، فرمولهای زیر را به‌دست آورید

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

۲۸-۳ نشان دهید که برای چرخش $R_{\hat{n}}(\theta)$ به اندازه زاویه θ حول محور دلخواه \hat{n} ، داریم:

$$\text{tr}[R_{\hat{n}}(\theta)] = 1 + 2 \cos \theta$$

۲۹-۳ نشان دهید که اگر A وارون پذیر باشد، در آن صورت ویژه بردارهای A^{-1} با ویژه بردارهای A همسان اند و ویژه مقدارهای A^{-1} ، معکوس ویژه بردارهای A هستند.
 ۳۰-۳ تمام ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریسهای زیر را پیدا کنید:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

۳۱-۳ سه جرم نقطه‌ای مساوی در $(a, a, 0)$ ، $(a, 0, a)$ ، و $(0, a, a)$ واقع اند.

(الف) ماتریس گشتاور لختی را پیدا کنید.

(ب) ویژه مقدارهای ماتریس گشتاور لختی و ویژه بردارهای متناظر آنها را به دست آورید.

۳۲-۳ با استفاده از قضیه تجزیه طیفی، ثابت کنید اگر دو ماتریس هرمیتی دارای مجموعه ویژه مقدارهای همانندی باشند، در آن صورت ارتباط آنها یکانی است.

۳۳-۳ ثابت کنید در یک فضای برداری با ابعاد متناهی، هر تابعی از یک عملگر، صرفاً یک چند جمله‌ای از آن عملگر است. (راهنمایی: تمرین ۳-۶-۶).

۳۴-۳ نشان دهید اگر دو عملگر جابه‌جا بشوند، توابع آن دو عملگر نیز جابه‌جا می‌شوند.

۳۵-۳ نشان دهید که یک ماتریس دلخواه A را می‌توان به صورت $D = UAV^T$ "قطری" کرد، که در آن U و V ماتریسهای یکانی و D ماتریسی قطری و حقیقی با فقط ویژه مقدارهای نامنفی است.

۳۶-۳ نشان دهید که اگر λ یک ویژه مقدار از عملگر پادمتقارن A باشد، در آن صورت $-\lambda$ نیز چنین است. با استفاده از این موضوع، ثابت کنید که عملگرها (ماتریسهای) با ابعاد فرد را نمی‌توان وارون کرد.

۳۷-۳ ماتریسهای یکانی را پیدا کنید که ماتریسهای هرمیتی زیر را قطری می‌کنند

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -i \\ -1 & 0 & i \\ i & -i & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & -1 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

(هشدار! ممکن است ناچار شوید برای بعضی از ماتریسها به روشهای عددی متوسل شوید.)

هندسهٔ دیفرانسیل و آنالیز تانسوری

قبلاً تانسورها را تقریباً به طور کامل با مبحث نسبیت مترادف می‌گرفتند (جز کاربردهایی جزئی در هیدرودینامیک). دانشجویان رشتهٔ فیزیک تا وقتی درس نظریهٔ نسبیت عام را نگرفته بودند، به مطالعهٔ تانسورها نیازی نداشتند. در آن موقع فصلی مقدماتی دربارهٔ جبر و آنالیز تانسوری را می‌خواندند، چند مسئله‌ای حل می‌کردند تا با خواندن مطلب با محتوای ”مبحث“ آموخته شوند، چند واقعیت اساسی دربارهٔ نسبیت را فرا می‌گرفتند، و سرانجام آن را کنار می‌گذاشتند (مگر اینکه می‌خواستند در شاخهٔ نسبیت متخصص شوند).

امروز، با ظهور و پیدایش نظریه‌های پیمانه‌ای ذرات بنیادی، این عقیده که میدانهای پیمانه‌ای را باید به صورت اشیایی هندسی تلقی کرد، و این اعتقاد عمومی که تمام برهم‌کنشهای بنیادی (از جمله گرانش) نموده‌های گوناگون یک ابرنیرو به‌شمار می‌آیند، این تصویر عمیقاً تغییر کرده است. به‌عنوان نتیجه، دو تحول مهم پیش آمده است: تانسورها در سایر برهم‌کنشها علاوه بر گرانش (نظیر برهم‌کنشهای هسته‌ای ضعیف و قوی) وارد شده‌اند؛ و جنبه‌های هندسی (مستقل از مختصات) تانسورها در مطالعهٔ تمام برهم‌کنشها نقش هر چه مهمتری یافته‌اند. مطالعهٔ مستقل از مختصات تانسورها محور حوزهٔ جالب هندسهٔ دیفرانسیل به‌شمار می‌آید، که در این فصل به اختصار به آن اشاره می‌کنیم.

این فصل به دو بخش عمده تقسیم شده است. در بخش ۱-۴ به جبر تانسوری، و در بقیه فصل به آنالیز تانسوری می‌پردازیم. از آنجا که صرفاً این مطالب مقدمه‌ای بر موضوع اصلی است، برخی اثباتها حذف شده‌اند.

بنابر رسم، تنها فضاهای برداری حقیقی را در نظر خواهیم گرفت و موقتاً نمادگذاری برا و کت دیراک را که استفاده از آنها در فضاهای یکانی (مختلط) بسیار سودمند است، کنار می‌گذاریم. در این فصل بردارهای پایه فضای برداری \mathcal{V} با نمادهای پایین و بردارهای پایه فضای همزاد آن، \mathcal{V}^* با نماد بالا نشان داده خواهند شد. یعنی، $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه در \mathcal{V} و $\{e_j^i\}_{j=1}^N$ یک پایه در \mathcal{V}^* هستند. همچنین، قرارداد مجموع‌یابی اینشتین را به‌کار خواهیم برد. فرض می‌کنیم روی نمادهای تکراری، که یکی پایین و دیگری بالا قرار دارد، مجموع‌یابی انجام شده است. یعنی، $a_i^j b_j^i$ به معنی $\sum_{i=1}^N a_i^j b_j^i$ است. در این صورت، طبیعی‌تر است که عناصر نمایش ماتریسی یک عملگر A را (به جای α_{ij}) به صورت α_j^i برچسب‌گذاری کنیم، زیرا در این صورت $Ae_i = \alpha_j^i e_j$.

۱-۴ جبر تانسوری

چون تانسورها انواع خاصی از عملگرهای خطی روی فضاهای برداری هستند، بار دیگر فضای $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ، فضای تمام نگاشتهای خطی از فضای برداری (حقیقی) \mathcal{V} به فضای برداری (حقیقی) \mathcal{W} ، را در نظر می‌گیریم. قبلاً توجه کردیم که $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ با فضای ماتریسی $N_2 \times N_1$ یکرिخت است اگر $\dim \mathcal{V} = N_1$ و $\dim \mathcal{W} = N_2$. به‌خصوص این نکته بر این معنا دلالت می‌کند که: $\dim \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = N_2 N_1$. در گزاره زیر، مستقیماً این مطلب را نشان می‌دهیم.

گزاره ۱-۴-۱: فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{N_1}$ یک پایه برای \mathcal{V} و $\{e'_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_2}$ یک پایه برای \mathcal{W} باشد. (الف) در این صورت عملگرهای خطی $\mathbb{T}_\beta^j : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ که به صورت زیر تعریف می‌شوند (به روش جدیدی که دلتای کرونگر نوشته شده است توجه کنید):

$$\mathbb{T}_\beta^j e_i = \delta_i^j e'_\beta \quad j = 1, \dots, N_1; \beta = 1, \dots, N_2$$

یک پایه در $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ تشکیل می‌دهند. در حالت خاص، $\dim \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = N_1 N_2$. (ب) اگر \mathbb{T}_j^α ها عناصر ماتریسی یک عملگر \mathbb{T} باشند، در این صورت

$$\mathbb{T} = \tau_j^\alpha \mathbb{T}_j^\alpha$$

اثبات. T_{β}^j ها مستقل خطی اند زیرا اگر اعدادی حقیقی مانند α_j^{β} وجود داشته باشند، به طوری که مجموع $\alpha_j^{\beta} T_{\beta}^j$ ها صفر باشد، در این صورت برای تمام بردارهای پایه e_i داریم:

$$0 = \alpha_j^{\beta} T_{\beta}^j e_i = \alpha_j^{\beta} \delta_i^j e'_{\beta} = \alpha_i^{\beta} e'_{\beta}$$

مستقل خطی بودن e'_{β} دلالت بر این دارد که به ازای $\beta = 1, 2, \dots, N_{\beta}$ داریم $\alpha_i^{\beta} = 0$. از اینکه معادلهٔ بالا به ازای تمام e_i ها برقرار است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر i و هر β داریم $\alpha_i^{\beta} = 0$.

به ازای هر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ که عناصر ماتریسی آن در پایه بالا عبارت باشد از τ_j^{α} ، داریم:

$$T e_i = \tau_i^{\alpha} e'_{\alpha} = \delta_i^j \tau_j^{\alpha} e'_{\alpha} = \tau_j^{\alpha} (\delta_i^j e'_{\alpha}) = \tau_j^{\alpha} (T_{\alpha}^j e_i) = (\tau_j^{\alpha} T_{\alpha}^j) e_i$$

از این رو، $T = \tau_j^{\alpha} T_{\alpha}^j$ مبین این است که T_{α}^j ها $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ را پدید می‌آورند. پس $\{T_{\alpha}^j\}_{j, \alpha=1}^{N_1, N_2}$ یک پایه برای $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ است. توجه کنید که بند (ب) را نیز ثابت کردیم. ■

فضای همزاد \mathcal{V}^* همان فضای $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ است. در این صورت بنا بر گزارهٔ ۴-۱-۱ (با $N_{\beta} = 1$) $\dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}$ که در فصل دوم نشان داده شده فضای همزاد، در مبحث تانسورها مهم است، بنابراین چند خاصیت آن را در زیر بررسی می‌کنیم. پایهٔ $\{T_{\beta}^j\}$ در گزارهٔ ۴-۱-۱، وقتی $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ ، به $\{T_j^j\}$ تبدیل و با $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^N$ نمایش داده می‌شود که در آن $N = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}$. ε^j ها دارای خاصیت زیرند

$$\varepsilon^j e_i = \delta_i^j \mathbf{1} = \delta_i^j \quad (1-4)$$

که در آن $\mathbf{1}$ یک پایه برای \mathbb{R} است. این رابطه در فصل دوم ثابت شد. پایه $B^* \equiv \{\varepsilon^j\}_{j=1}^N$ همان پایهٔ همزاد $B = \{e_i\}_{i=1}^N$ است. به محل "طبیعی" نماد برای B و B^* توجه کنید.

حال فرض کنید $B' \equiv \{f_i\}_{i=1}^N$ یک پایه دیگر \mathcal{V} و R یک ماتریس (وارون‌پذیر) باشد که B را به B^* می‌برد. فرض کنید $B'^* = \{\varphi^j\}_{j=1}^N$ همزاد B' باشد. می‌خواهیم ماتریسی را پیدا کنیم که B^* را به B'^* می‌برد. اگر این ماتریس را با A و عناصر آن را با a_j^i نمایش دهیم، داریم

$$\delta_i^k = \varphi^k \mathbf{f}_i = (a_i^k \varepsilon^l)(r_i^j \mathbf{e}_j) = a_i^k r_i^j (\varepsilon^l \mathbf{e}_j) = a_i^k r_i^j \delta_i^l$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{f}_i \text{ و } \varphi^k \text{ و } \delta_i^k & \text{بنابر تعریف} & \text{بنابر تعریف} \\ \text{همزادند} & \text{R و A} & \text{همزادند} \end{array}$$

$$= a_i^k r_i^l = (AR)_i^k \Rightarrow AR = 1 \Rightarrow A = R^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{بنابر تعریف} \\ \text{ضرب ماتریسی} \end{array}$$

بنابراین، ماتریسی که پایه‌های \mathcal{V}^* را تبدیل کند، وارون ماتریسی است که پایه‌های متناظر \mathcal{V} را تبدیل می‌کند.

لازم به تأکید است که در معادلات بالا، نماد بالایی در a_i^k یا r_i^j معرف سطرها و نماد پایینی معرف ستون‌هاست. برای به خاطر سپردن این نکته توجه کنید که بردارهای ستونی \mathbf{e}_i را می‌توان به صورت ستون‌های یک ماتریس تصور کرد، و در این صورت نماد پایینی معرف این ستون‌هاست. به همین ترتیب، ε^i را می‌توان سطرها را یک ماتریس در نظر گرفت.

۱-۱-۴ نگاهشتهای چند خطی

می‌توانیم مفهوم تابعهای خطی را تعمیم دهیم.

تعریف ۱-۴-۲: فرض کنید $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ و \mathcal{W} فضاهاى برداری باشند. نگاشت $T: \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{W}$ دوخطی نامیده می‌شود اگر نسبت به هر متغیر خطی باشد، یعنی، اگر

$$T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \beta_1 T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2)$$

$$T(\mathbf{v}_1, \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \beta_2 \mathbf{v}'_2) = \alpha_2 T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \beta_2 T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2)$$

به‌ازای تمام \mathbf{v}_i و \mathbf{v}'_i ‌های متعلق به \mathcal{V}_i و α_i ها و β_i های متعلق به \mathbb{R} ، که در آنها $i = 1, 2$ ، روابط بالا برقرار باشند.

یادآور می‌شویم که $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ حاصلضرب دکارتی \mathcal{V}_1 و \mathcal{V}_2 ، یا مجموعه زوجهای مرتب $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ است که $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$ و $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$. می‌توانیم تعریف ۱-۴-۲ را به نگاهشتهای چندخطی تعمیم دهیم. در حالت خاص، یک نگاشت r خطی $T: \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_r \rightarrow \mathcal{W}$ نسبت

به تمام متغيرهايش خطي است، يعني

$$T(v_1, \dots, \alpha v_i + \alpha' v'_i, \dots, v_r) = \alpha T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) \\ + \alpha' T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r)$$

می‌توانیم نگاشت دوخطی را به آسانی تشکیل دهیم. فرض کنید $\tau_1 \in \mathcal{V}_1^*$ و $\tau_2 \in \mathcal{V}_2^*$. نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 : \tau_1 \otimes \tau_2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tau_1 \otimes \tau_2(v_1, v_2) = (\tau_1(v_1))(\tau_2(v_2)) \quad (۴-۲الف)$$

عبارت $\tau_1 \otimes \tau_2$ ضرب تانسوری τ_1 و τ_2 نامیده می‌شود. بدیهی است که چون τ_1 و τ_2 هر کدام جداگانه خطی‌اند، $\tau_1 \otimes \tau_2$ نیز خطی است.

نگاشتهای چندخطی می‌توانند در کميتهای اسکالر ضرب، و دو نگاشت چندخطی از یک نوع می‌توانند با هم جمع شوند؛ در هر یک از این حالتها نتیجه یک نگاشت چندخطی از همان نوع است. بنابراین، مجموعه نگاشتهای r خطی از $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_r$ به \mathcal{W} یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که توسط $\mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r; \mathcal{W})$ نشان داده می‌شود.

می‌توانیم نگاشتهای چندخطی روی فضای همزاد را نیز تشکیل دهیم. ابتدا توجه کنید که می‌توانیم، به صورت زیر، یک تابع خطی طبیعی روی \mathcal{V}^* تعریف کنیم. فرض می‌کنیم $\tau \in \mathcal{V}^*$ و $v \in \mathcal{V}$ ، در این صورت $\tau(v) \in \mathbb{R}$. حال این عبارت را معکوس می‌کنیم و می‌نویسیم $v(\tau) \equiv \tau(v)$ ، یعنی، یک نگاشت $v : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که به صورت $v(T) = T(v)$ داده شده است.^۱ به آسانی می‌توان نشان داد که این نگاشت خطی است. به این ترتیب، با یکسان گرفتن $(\mathcal{V}^*)^*$ و \mathcal{V} ، به طور طبیعی یک تابع خطی روی \mathcal{V}^* ساخته‌ایم.

اکنون ساختن نگاشتهای چندخطی روی \mathcal{V}^* کار آسانی است. به عنوان مثال، می‌توانیم مشابه کاری که برای ساختن دو خطی روی $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ انجام دادیم، برای ساختن یک نگاشت دوخطی انجام دهیم. به طور مشخص فرض کنید $v_1 \in \mathcal{V}_1$ و $v_2 \in \mathcal{V}_2$ و ضرب تانسوری $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^* : v_1 \otimes v_2$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$v_1 \otimes v_2(T_1, T_2) = (v_1(T_1))(v_2(T_2)) = (T_1(v_1))(T_2(v_2)) \quad (۴-۲ب)$$

۱. از اینجا به بعد برای بردارها و تابعهای خطی و نگاشتهای چندخطی از نمادگذاری واحدی استفاده خواهد شد.

همچنین می‌توانیم نگاشت‌های چندخطی آمیخته، نظیر $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} : \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}$ را که به صورت زیر بیان می‌شوند، تشکیل دهیم

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}(\theta, \mathbf{u}) = \mathbf{v}(\theta)\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{v})\mathbf{T}(\mathbf{u}) \quad (\text{ج ۲-۴})$$

یک نگاشت دوخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} : \mathbf{h}$ یافت می‌شود که به طور طبیعی \mathcal{V}^* و \mathcal{V} را جفت می‌کند؛ این نگاشت با $\mathbf{h}(\theta, \mathbf{v}) \equiv \theta(\mathbf{v})$ داده می‌شود. این نگاشت جفت‌شدگی طبیعی \mathcal{V}^* و \mathcal{V} به \mathbb{R} نامیده می‌شود و با بهره‌گیری از براکت‌های زاویه‌دار آنها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{h}(\theta, \mathbf{v}) \equiv \langle \theta, \mathbf{v} \rangle \equiv \theta(\mathbf{v})$$

تانسورها. به طور کلی تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴-۱-۳: فرض کنید \mathcal{V} فضایی برداری و \mathcal{V}^* فضای همزاد آن باشد. در این صورت تانسوری از نوع (r, s) یک نگاشت چند خطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} : \mathbf{T}_s^r$ است (که در آن \mathcal{V}^* به تعداد r مرتبه و \mathcal{V} به تعداد s مرتبه ظاهر شده است). مجموعه تمام چنین نگاشت‌هایی، به ازای مقادیر ثابت r و s ، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که آن را با $\mathcal{F}_s^r(\mathcal{V})$ نمایش می‌دهند. کمیت r ، درجهٔ پادوردایی تانسور، و s درجهٔ هموردایی تانسور نامیده می‌شود. به این ترتیب، تعداد r عنصر از \mathcal{V}^* و s عنصر از \mathcal{V} می‌گیرد و یک عدد حقیقی از آنها تولید می‌کند. مثلاً فرض کنید $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathcal{V}$ و $\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \dots, \mathbf{T}^s \in \mathcal{V}^*$ و ضرب تانسوری زیر

$$\mathbf{T}_s^r \equiv \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{T}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{T}^s : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{r \text{ مرتبه}} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{s \text{ مرتبه}} \rightarrow \mathbb{R}$$

را به این قرار تعریف کنیم

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{T}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{T}^s(\theta^1, \dots, \theta^r, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) \\ &= \mathbf{v}_1(\theta^1) \dots \mathbf{v}_r(\theta^r) \mathbf{T}^1(\mathbf{u}_1) \dots \mathbf{T}^s(\mathbf{u}_s) \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \theta^i(\mathbf{v}_i) \mathbf{T}^j(\mathbf{u}_j) \end{aligned}$$

خواننده نباید ضرب تانسوری \otimes را، که یک عمل جبری است، با ضرب دکارتی \times ، که صرفاً یکی از عملیات در نظریهٔ مجموعه‌ها است خلط کند. هر v در حاصلضرب تانسوری به یک عنصر از \mathcal{V}^* نیاز دارد؛ به همین جهت است که تعداد عاملهای \mathcal{V}^* در حاصلضرب دکارتی با تعداد v ها در ضرب تانسوری برابر است. حاصلضرب دکارتی $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ با s عامل ضرب را گاهی با \mathcal{V}° (به‌طور مشابه برای \mathcal{V}^*) نمایش می‌دهیم.

تانسوری از نوع (\circ, \circ) را اسکالر می‌نامیم، به‌گونه‌ای که $\mathcal{T}^{\circ}(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$. تانسوری از نوع $(1, \circ)$ ، یک بردار پادوردا و نوع $(\circ, 1)$ بردار هموردا نامیده می‌شود. تانسوری از نوع (r, \circ) را تانسور پادوردا از درجهٔ r و تانسوری از نوع (\circ, s) را تانسور هموردا از درجهٔ s می‌نامیم.

جبر تانسورها. به مجموعه تانسورهای نوع (r, s) روی فضای برداری \mathcal{V} ، می‌توان یک ساختار فضای برداری داد، که آن را به‌صورت $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ نمایش می‌دهیم. اگر تمام این فضاها را کنار هم گرد آوریم، می‌توانیم یک ضرب در آن مجموعه تعریف کنیم. با این کار، اجتماع تمام $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ ها به یک جبر تبدیل می‌شود، که به آن جبر تانسورها می‌گویند.

تعریف ۴-۱-۴: ضرب تانسوری یک تانسور \mathbf{T} از نوع (r, s) و یک تانسور \mathbf{U} از نوع (k, l) ، یک تانسور $\mathbf{T} \otimes \mathbf{U}$ از نوع $(r+k, s+l)$ است که به عنوان یک عملگر روی $\mathcal{V}^{s+l} \times (\mathcal{V}^*)^{r+k}$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes \mathbf{U}(\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^{r+k}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s+l}) \\ = \mathbf{T}(\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \mathbf{U}(\mathbf{T}^{r+1}, \dots, \mathbf{T}^{r+k}, \mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_{s+l}) \end{aligned}$$

این تعریف تعمیم معادلات (۴-۲) است. به آسانی می‌توان نشان داد که اگر \mathbf{S} ، \mathbf{T} و \mathbf{U} تانسور باشند، در این صورت داریم

$$(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) \otimes \mathbf{U} = \mathbf{S} \otimes (\mathbf{T} \otimes \mathbf{U})$$

$$\mathbf{S} \otimes (\mathbf{T} + \mathbf{U}) = \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \mathbf{U}$$

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T}) \otimes \mathbf{U} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{U} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{U}$$

لیکن، به‌طور کلی $\mathbf{T} \otimes \mathbf{U} \neq \mathbf{U} \otimes \mathbf{T}$ ؛ یعنی، ضرب تانسوری جابه‌جاپذیر نیست. مؤلفه‌های تانسورها. در انجام محاسبات مربوط به تانسورها، لازم است یک پایه برای \mathcal{V} و

یکی برای \mathcal{V}^* برگزینیم و تانسورها را برحسب اعداد (مؤلفه‌ها) نمایش دهیم. البته این فرایند جدید نیست. عملگرهای خطی را با آرایه‌های اعداد به صورت ماتریس نمایش می‌دهند. مورد تانسورها صرفاً تعمیمی از عملگرهای خطی است و می‌تواند به صورت یک قضیه بیان شود.

قضیه ۳-۱-۴: فرض کنید $B^* = \{e^j\}_{j=1}^N$ و $\{e_i\}_{i=1}^N = B$ به ترتیب پایه‌های \mathcal{V}^* و \mathcal{V} باشند. در این صورت مجموعه تمام ضربهای تانسوری $\epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_r} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$ پایه برای $\mathcal{G}_s^r(\mathcal{V})$ تشکیل می‌دهند. به علاوه، مؤلفه‌های هر تانسور $A \in \mathcal{G}_s^r(\mathcal{V})$ عبارت‌اند از

$$A_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_r} = A(\epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$$

اثبات. به ازای هر $T^1, T^2, \dots, T^r \in \mathcal{V}^*$ و $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathcal{V}$ داریم $T^p = a_j^p \epsilon^j$ و $v_q = b_q^i e_i$ که در آن $q = 1, \dots, s$ و $p = 1, \dots, r$ و

$$\begin{aligned} A(T^1, \dots, T^r, v_1, \dots, v_s) &= A(a_{j_1}^1 \epsilon^{j_1}, \dots, a_{j_r}^r \epsilon^{j_r}, b_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, b_{i_s}^s e_{i_s}) \\ &= a_{j_1}^1 \dots a_{j_r}^r b_{i_1}^1 \dots b_{i_s}^s A(\epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s}) \end{aligned}$$

بنابر چندخطی بودن A

$$\begin{aligned} &= A_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_r} e_{j_1}(T^1) \dots e_{j_r}(T^r) \epsilon^{i_1}(v_1) \dots \epsilon^{i_s}(v_s) \\ &= A_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_r} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_s} \\ &\quad \times (T^1, \dots, T^r, v_1, \dots, v_s) \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

در این مرحله آخر از روابط زیر بهره گرفته‌ایم

$$\begin{aligned} e_j(T^p) &= e_j(a_i^p \epsilon^i) = a_i^p e_j(\epsilon^i) = a_i^p \delta_j^i = a_j^p \\ \epsilon^i(v_q) &= \epsilon^i(b_q^j e_j) = b_q^j \epsilon^i(e_j) = b_q^j \delta_j^i = b_q^i \end{aligned}$$

که حاصل این واقعیت‌اند که e_j یک تابع خطی روی \mathcal{V}^* و ϵ^i یک تابع خطی روی \mathcal{V} است. معادله (۳-۴) برای T^p و v_q دلخواه برقرار است، از این رو عملگرهای دو طرف باید با هم

برابر باشند، بنابراین

$$\mathbf{A} = A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_r} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_s} \quad (4-4)$$

این رابطه دلالت می‌کند بر آنکه حاصلضربهای $\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_r} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_s}$ فضای $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ را پدید می‌آورند. تمرین ۴-۱-۱ نشان می‌دهد که این حاصلضربها مستقل خطی نیز هستند. بنابراین یک پایه $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ را تشکیل می‌دهند.

توجه کنید که برای هر عامل در ضرب تانسوری $\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_r} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_s}$ تعداد N امکان وجود دارد. بنابراین، تعداد ضربهای تانسوری ممکن N^{r+s} است، و به نتیجه‌ای برای مسئله قبلی می‌رسیم.

نتیجه ۴-۱-۶: تعداد ابعاد $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ عبارت است از N^{r+s} که در آن $N = \dim \mathcal{V}$.

مثال ۴-۱-۱: برای روشن شدن موضوع، حالت خاص $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ را به صورت $\mathbf{A} = A_j^i \mathbf{e}_i \otimes \epsilon^j$ بنویسیم. به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ، می‌توانیم عمل \mathbf{A} روی \mathbf{v} را در مسیری طبیعی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = (A_j^i \mathbf{e}_i \otimes \epsilon^j)(\mathbf{v}) \equiv A_j^i \mathbf{e}_i (\epsilon^j(\mathbf{v}))$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \in \mathbf{R} & \in \mathbf{R} \end{array}$$

این تساوی نشان می‌دهد که $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \in \mathcal{V}$ ، یعنی، \mathbf{A} را می‌توان به عنوان یک عملگر تعریف کرد که برداری در \mathcal{V} را می‌گیرد و یک بردار دیگر، که آن نیز در \mathcal{V} است، می‌دهد. بنابراین، \mathbf{A} را می‌توان به صورت یک عملگر خطی در \mathcal{V} تصور کرد، و $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. به همین ترتیب، به ازای $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^*$ ، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}) = (A_j^i \mathbf{e}_i \otimes \epsilon^j)(\mathbf{T}) = A_j^i [\mathbf{e}_i(\mathbf{T})] \epsilon^j$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \in \mathbf{R} & \in \mathbf{R} \end{array}$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{A}(\mathbf{T}) \in \mathcal{V}^*$. بنابراین $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*)$. نشان داده‌ایم که سه فضای $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ ، $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ و $\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)$ ، به طریقی که مستلزم توضیح است، یکسان‌اند. آنچه نشان دادیم این است

که با یک $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ معین یک عملگر خطی متعلق به $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ یا $[\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)]$ متناظر است و یک رابطه طبیعی با \mathcal{A} دارد. به همین ترتیب، به ازای هر $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ یا $[\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)]$ با یک نمایش ماتریسی در پایه‌ای از \mathcal{V} (یا \mathcal{V}^*) که به صورت A_j^i داده می‌شود، به طور طبیعی یک تانسور در $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ با آن متناظر است، یعنی $\epsilon^j \otimes e_i \otimes A_j^i$. بنابراین، یک تناظر یک‌به‌یک طبیعی بین $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ ، $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ و $[\mathcal{L}(\mathcal{V}^*)]$ برقرار است. این تناظر طبیعی یکریختی نامیده می‌شود و معنای آن این است که بگوییم فضاها یکسان‌اند.

تانسورها را به عنوان توابع چندخطی تعریف کردیم که مانند ماشینی چندخطی عمل می‌کنند که یک بردار از فضای حاصلضرب دکارتی \mathcal{V} ها و \mathcal{V}^* ها می‌گیرد و عددی حقیقی تولید می‌کند. اما می‌توانیم با در نظر گرفتن نمایش مطرح شده در معادله (۴-۴) تانسور را به عنوان ماشینی خطی تعبیر کنیم که برداری متعلق به یک فضای حاصلضرب دکارتی می‌گیرد و یک تانسور تولید می‌کند. این معنا متناظر با وضعیتی است که در آن تمام عوامل (۴-۴) "شریک" پیدا نمی‌کنند. نمونه‌ای از این وضعیت در مثال ۴-۱-۱ ارائه شد.

برای روشن شدن این مطلب، $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ را، به قرار زیر، در نظر بگیرید:

$$\mathcal{A} = A_{jk}^i e_i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k$$

این ماشین به یک بردار حاصلضرب دکارتی به شکل (T, v_1, v_2) ، با $T \in \mathcal{V}^*$ و $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ ، نیاز دارد تا یک عدد حقیقی بدهد. لیکن اگر به حد کافی تغذیه نشود، کارش را تمام نخواهد کرد. مثلاً، اگر فقط یک بردار T متعلق به \mathcal{V}^* به آن بدهیم، یک تانسور متعلق به $\mathcal{T}_2^0(\mathcal{V})$ به ما خواهد داد:

$$\mathcal{A}(T) = (A_{jk}^i e_i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k)(T) = A_{jk}^i e_i(T) \epsilon^j \otimes \epsilon^k$$

اگر به آن یک بردار دوگانه $(v_1, v_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ بدهیم، یک بردار در \mathcal{V} تولید خواهد کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v_1, v_2) &= (A_{jk}^i e_i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k)(v_1, v_2) \\ &= A_{jk}^i e_i \epsilon^j(v_1) \epsilon^k(v_2) \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

حال ببینیم اگر تنها یک بردار $v \in \mathcal{V}$ به آن بدهیم چه می‌شود؟ در این صورت سردرگم خواهد شد، زیرا چندان هوشمند هست که بداند v نمی‌تواند متعلق به ϵ^j باشد. به این علت است که

باید ماشین را آگاه کنیم که به کدام عامل ϵ^v باید برود. این کار با قرار دادن v در داخل پرانتزی که با قرار دادن گاماها به چند ناحیه تقسیم شده است، انجام می‌شود. بنابراین، اگر بنویسیم (\cdot, v, \cdot) ، ماشین می‌داند که v به ϵ^j تعلق دارد، و (\cdot, \cdot, v) می‌گوید که ماشین باید v را با ϵ^k منقبض کند. اگر بنویسیم (v, \cdot, \cdot) ، ماشین یک "پیام خطا" خواهد داد زیرا نمی‌تواند v را با ϵ_i منقبض کند! قوانین تبدیل. مؤلفه‌های یک تانسور A ، که در معادله (۴-۴) داده شده‌اند، به پایه‌ای که در آن توصیف می‌شوند بستگی دارند. اگر پایه تغییر کند، مؤلفه‌ها هم تغییر خواهند کرد. رابطه بین مؤلفه‌های یک تانسور در پایه‌های مختلف قانون تبدیل برای آن تانسور به خصوص نامیده می‌شود. حال این مفهوم را بررسی می‌کنیم.

با قرار دادن "بالا-خط" پایه‌های مختلف را از هم تمیز می‌دهیم. به عنوان مثال $B = \{e_i\}_{i=1}^N$ ، $\bar{B} = \{\bar{e}_j\}_{j=1}^N$ ، $\bar{B}^* = \{\bar{e}^i\}_{i=1}^N$ ، $B^* = \{e^j\}_{j=1}^N$ ، $\bar{B}^* = \{\bar{e}^k\}_{k=1}^N$ پایه‌های \mathcal{V}^* هستند. مؤلفه‌ها نیز با k از هم متمایز می‌شوند. یادآور می‌شویم که اگر R ماتریسی باشد که B و \bar{B} را به هم مربوط می‌کند، در این صورت $S = R^{-1}$ ، B^* و \bar{B}^* را به هم مربوط خواهد کرد. برای یک تانسور A از نوع $(1, 2)$ ، بنا بر قضیه ۴-۱-۵، داریم:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{jk}^i &= \mathbf{A}(\bar{e}^i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = \mathbf{A}(s_m^i \epsilon^m, r_j^n e_n, r_k^p e_p) \\ &= s_m^i r_j^n r_k^p \mathbf{A}(\epsilon^m, e_n, e_p) \quad (5-4) \\ &= s_m^i r_j^n r_k^p A_{np}^m \end{aligned}$$

این قانونی است که مؤلفه‌های یک تانسور را از یک پایه به پایه دیگر تبدیل می‌کند. در بررسی "وابسته به مختصات" تانسورها، معادله (۵-۴) رابطه تعریف کننده برای تانسوری از نوع $(1, 2)$ ، به شمار می‌آید. به عبارت دیگر، تانسوری از نوع $(1, 2)$ به صورت یک "دسته" اعداد، A_{np}^m ، تعریف می‌شد که وقتی پایه تغییر می‌کرد، طبق قاعده (۵-۴) به یک "دسته" اعداد دیگر \bar{A}_{jk}^i تبدیل می‌شد. در بررسی جدید تانسورها لازم نیست که برای تعریف تانسورها، هیچ پایه‌ای معرفی شود. فقط وقتی مؤلفه‌های تانسور مورد نیاز باشند باید پایه‌ها را معرفی کنیم. مزیت بررسی جدید واضح است، زیرا تانسوری از نوع $(1, 2)$ دارای ۲۷ مؤلفه در سه بعد و ۶۴ مؤلفه در چهار بعد است، که همه آنها با نماد A نمایش داده می‌شوند. لیکن، نباید نقش مؤلفه‌ها را دست‌کم گرفت. گذشته از این، وقتی به محاسبات عملی می‌رسیم. مجبوریم یک پایه انتخاب و کار با مؤلفه‌ها را آغاز کنیم.

معادله (۵-۵) قانون تبدیل برای یک تانسور از نوع (۱, ۲) به شمار می آید. معادلات دیگری را که برای یافتن قوانین برای انواع دیگر ضروری اند می توان به آسانی ساخت و در اینجا آنها را ذکر نمی کنیم. توابع تانسورها. چون $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ فضاهای برداری اند، می توان نگاشتهای

$$h : \mathcal{T}_s^r(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_t^k(\mathcal{V})$$

را ساخت. مطابق معمول، نگاشتهای خطی مورد توجه اند. مثلاً $\mathbb{R} : \mathcal{T}_0^0(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_0^0(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$ همان چیزی است که قبلاً تابعک خطی نامیده می شد. به همین ترتیب: $\mathbb{1} : \mathcal{T}_0^1(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(\mathcal{V})$ تبدیلی خطی روی \mathcal{V} است.

تبدیل خطی خاص عبارت است از $\text{tr} : \mathcal{T}_1^1(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_0^0(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$ که به صورت زیر داده می شود

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr}(A_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \equiv A_i^i \equiv \sum_{i=1}^N A_i^i$$

این عبارت تبدیلی بسیار شبیه به تابع ردّ است که در مبحث تبدیلات خطی در فصل دوم با آن مواجه شدیم. در واقع یکریختی $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{V})$ و $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ به طور کامل این رد را با رد تبدیلات خطی یکی می کند.

در تعریف بالا به طور صریح از مؤلفه ها نسبت به یک پایه استفاده شده است. بنابراین، ممکن است چنین تصور شود که رد تابع وابسته به پایه است. لیکن، به آسانی می توان نشان داد که (تمرین ۴-۱-۳) در واقع مستقل از پایه است. توابعی از تانسورها که به پایه بستگی نداشته باشند، ناوردا نامیده می شوند. یک مثال دیگر از ناوردایی، تابعک خطی است. اثبات این واقعیت آسان است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

مثال ۴-۱-۲: نشان می دهیم که لازم نیست هر عبارتی برحسب مؤلفه ها، ناوردا باشد. تانسور $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_0^2(\mathbb{R}^2)$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر بیان می شود

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$$

مشابه رد برای \mathbf{A} را محاسبه می کنیم:

$$A_{ii} \equiv \sum_{i=1}^2 A_{ii} = A_{11} + A_{22} = 1 + 0 = 1$$

حال، به یک پایه جدید، $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ، که به صورت زیر داده می‌شود، می‌رویم

$$e_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \quad \text{و} \quad e_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

A ، برحسب بردارهای پایه جدید، به صورت زیر است

$$\begin{aligned} A &= (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) \otimes (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) + (-\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \otimes (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \\ &= 3\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 \end{aligned}$$

● که در آن $\bar{A}_{ii} = 0 + 6 = 6 \neq A_{ii}$

هرگاه کمیتی، بدون ارجاع به پایه بیان شود، مسلماً ناورد است. رد یک نمونه از این معنا به شمار می‌آید. مثال دیگر، دترمینان یک عملگر خطی [یا یک عضو $\mathcal{F}^1(\mathcal{V})$] است، که قبلاً برحسب نمایش ماتریسی آن عملگر تعریف شد، و مسلماً وابسته به پایه است. لیکن تعریف مستقلی از پایه برای دترمینان یک تانسور بعداً در این بخش عنوان خواهد شد.

علاوه بر نگاشتهای نوع $\mathcal{F}_s^r \rightarrow \mathcal{F}_1^k$: h که توابع یک متغیری‌اند، می‌توانیم نگاشتهایی تعریف کنیم که به چند متغیر بستگی دارند؛ و به بیان دیگر، چند عنصر از \mathcal{F}_s^r را می‌گیرند و یک عنصر از \mathcal{F}_1^k را می‌دهند. می‌توان نوشت

$$h : \underbrace{\mathcal{F}_s^r(\mathcal{V}) \times \cdots \times \mathcal{F}_s^r(\mathcal{V})}_{\text{مرتبه } m} \rightarrow \mathcal{F}_1^k(\mathcal{V})$$

یا به بیان ساده:

$$h : (\mathcal{F}_s^r(\mathcal{V}))^m \rightarrow \mathcal{F}_1^k(\mathcal{V})$$

در این صورت، بدیهی است که $h(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ، که در آن t_1, t_2, \dots, t_m تانسوری از نوع (k, l) است. اگر نسبت به تمام متغیرهایش خطی باشد، به آن تابع چندخطی می‌گویند. به علاوه، اگر $h(t_1, \dots, t_m)$ به انتخاب پایه \mathcal{F}_s^r بستگی نداشته باشد، ناوردای چندخطی نامیده می‌شود. در اغلب موارد $k = 0 = l$ ، و در این صورت از ناوردهای با مقدار اسکالر یا به طور ساده‌تر، ناوردها صحبت می‌کنیم. نمونه‌ای از یک ناوردای چندخطی دترمینانی است که به صورت تابعی از سطرهای یک ماتریس در نظر گرفته می‌شود.

یک رده مهم از ناورداهای چند خطی از انقباضها حاصل می شود، که بنا بر تعریف به قرار زیرند:

تعریف ۴-۱-۷: انقباض یک تانسور $A \in \mathcal{T}_s^r(\mathcal{V})$ نسبت به نماد پادوردای p و نماد هموردای q ، نگاشتی خطی به صورت $\mathcal{T}_{s-1}^r(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{T}_s^{r-1}(\mathcal{V})$ است که بر حسب مؤلفه ها، به صورت زیر بیان می شود

$$(C(A))_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = A_{j_1 \dots j_{s-1} k j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} k i_r}$$

به آسانی می توان نشان داد که انقباضها ناوردا هستند. اثبات آن دقیقاً مشابه اثبات ناوردایی رد است. در واقع، رد یک حالت خاص انقباض به شمار می آید که در آن $r = s = 1$.

۴-۱-۲ تقارن در تانسورها

در بسیاری از کاربردها با تانسورهایی سروکار پیدا می کنیم که دارای نوعی تقارن اند. قبلاً با تانسور متقارن - تانسور متریک - مواجه شده ایم. اگر، مطابق فرضی که در این فصل کردیم، \mathcal{V} یک فضای برداری حقیقی باشد و $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ ، آنگاه $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$. از اینجا مشاهده می شود که تعویض v_1 و v_2 مقدار g را تغییر نمی دهد. آنچه در زیر می آید، تعمیم همین مطلب است.

تعریف ۴-۱-۸: تانسور A نسبت به متغیرهای λ ام و ζ ام متقارن است اگر مقدار آن، به عنوان یک تابع چندخطی، با تعویض این متغیرها، تغییر نکند. بدیهی است که این دو متغیر باید از یک نوع باشند.

یکی از نتایج مستقیم تعریف ۴-۱-۸ این است که، در هر پایه، وقتی نمادهای λ ام و ζ ام تعویض شدند، مؤلفه های تانسور تغییر نمی کنند. برای نشان دادن این نکته، تانسور A از نوع $(3, 1)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که نسبت به متغیرهای پادوردای دوم و سوم متقارن است. در این صورت

$$A_i^{j k} = A(\epsilon^i, \epsilon^j, \epsilon^k, e_l) = A(\epsilon^i, \epsilon^k, \epsilon^j, e_l) = A_i^{k j}$$

↑

بنا بر تعریف تانسور متقارن

و تعویض نمادها، مؤلفه ها را تغییر نمی دهد.

تعریف ۴-۱-۹: تانسوری متقارن پادورداست، هرگاه نسبت به هر زوج نماد پادوردایش متقارن باشد و متقارن همورداست اگر نسبت به هر زوج نماد هموردایش متقارن باشد. تانسوری متقارن

است که هم متقارن پادوردا و هم متقارن هموردا باشد.

بدیهی است که نمی‌تواند نسبت به تعویض نماد پادوردا با نماد هموردا تقارن وجود داشته باشد.

جبر تانسورهای متقارن. مجموعهٔ کلیه تانسورهای متقارن \mathcal{S}^r از نوع $(r, 0)$ یک زیرفضای فضای برداری \mathcal{T}^r را تشکیل می‌دهند؛ به همین ترتیب، مجموعه تانسورهای نوع $(0, s)$ یک زیرفضای \mathcal{T}_s^0 و \mathcal{T}_s^0 را تشکیل می‌دهند. مؤلفه‌های تانسور متقارن $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^r$ عبارت‌اند از $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ ، که در آن $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ ؛ سایر مؤلفه‌ها با توجه به تقارن داده می‌شوند. با وجودی که مجموعه تانسورهای متقارن یک فضای برداری تشکیل می‌دهند، تانسورها تحت ضرب معمولی، جبر تشکیل نمی‌دهند. در واقع، حتی اگر $\mathbf{A} = A^{ij} e_i \otimes e_j$ و $\mathbf{B} = B^{kl} e_k \otimes e_l$ تانسورهای متقارن از نوع $(2, 0)$ باشند، لازم نیست حاصل ضرب تانسوری زیر، تانسور متقارنی از نوع $(4, 0)$ باشد

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^{ij} B^{kl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$$

مثلاً $A^{ik} B^{jl}$ ممکن است مساوی $A^{ij} B^{kl}$ نباشد. اما، می‌توانیم تعریف ضرب تانسوری را چنان تغییر دهیم که از ضرب عوامل متقارن یک تانسور متقارن حاصل شود. ابتدا، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۴-۱۰: متقارن‌ساز عملگر، $\mathcal{S}: \mathcal{T}_s^r \rightarrow \mathcal{S}^r$ است که به صورت زیر داده می‌شود

$$(\mathcal{S}(\mathbf{A}))(\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^r) = \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{T}^{\pi(1)}, \dots, \mathbf{T}^{\pi(r)}) \quad (6-4)$$

که در آن مجموع‌یابی روی تعداد $r!$ جایگشت، π ، اعداد صحیح $1, 2, \dots, r$ انجام می‌شود، و $\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^r$ عناصر \mathcal{V}^* هستند، و $\pi(j)$ عددی است که تحت جایگشت، j به آن می‌رود. گاهی $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ را با \mathbf{A}_s نمایش می‌دهند. بدیهی است که \mathbf{A}_s تانسوری متقارن است.

مثال ۱-۴-۳: معادله (۶-۴) را به ازای $r = 2$ و $r = 3$ به طور صریح می‌نویسیم:

(الف) به ازای $r = 2$ ، تنها دو جایگشت داریم، و

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) = \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) + \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1)] \quad (1)$$

(ب) به ازای $r = 3$ ، شش جایگشت ۱، ۲، ۳ داریم. در این صورت، (۴-۶) منجر می شود به:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3) = \frac{1}{6} & [\mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3) + \mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^3, \mathbf{T}^2) + \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^3) \\ & + \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3, \mathbf{T}^1) + \mathbf{A}(\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) + \mathbf{A}(\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1)] \end{aligned} \quad (۲)$$

واضح است که تعویض هر زوج از \mathbf{T} ها در سمت راست (۱) یا (۲)، در حاصل جمع تغییری پدید نمی آورد. بنابراین، \mathbf{A}_s حقیقتاً تانسوری متقارن است.

یکی از کمیت‌هایی که باید به آن توجه کرد، عبارت است از ابعاد $\mathcal{S}^r(\mathcal{V})$. اگر $\dim \mathcal{V} = N$ پس می توان نشان داد

$$\dim \mathcal{S}^r(\mathcal{V}) = \binom{N+r-1}{r} \equiv \frac{(N+r-1)!}{r!(N-1)!}$$

برای اثبات، باید تعداد اعداد صحیح مختلف i_1, \dots, i_r را شمرد که به ازای آنها داریم $1 \leq i_m \leq i_{m+1} \leq N$ (به ازای هر m).

تعریف مشابهی، متقارن ساز $\mathcal{S}_s: \mathcal{S}_s^0 \rightarrow \mathcal{S}_s$ را می دهد. به جای $\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \dots, \mathbf{T}^r$ در (۴-۶) خواهیم داشت: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$.

اکنون آماده ایم یک ضرب روی $\mathcal{S}^r(\mathcal{V})$ تعریف کنیم و از آن یک جبر، به نام جبر متقارن بسازیم.

تعریف ۴-۱۱: ضرب متقارن تانسورهای متقارن $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^r(\mathcal{V})$ و $\mathbf{B} \in \mathcal{S}^t(\mathcal{V})$ عبارت است از تانسور متقارن $\mathbf{S}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \mathcal{S}^{r+t}(\mathcal{V})$. این حاصلضرب را با \mathbf{AB} نمایش می دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{AB}(\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^{r+t}) &= \frac{1}{(r+t)!} \sum_{\pi} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{T}^{\pi(1)}, \dots, \mathbf{T}^{\pi(r+t)}) \\ &= \frac{1}{(r+t)!} \sum_{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{T}^{\pi(1)}, \dots, \mathbf{T}^{\pi(r)}) \mathbf{B}(\mathbf{T}^{\pi(r+1)}, \dots, \mathbf{T}^{\pi(r+t)}) \end{aligned}$$

که در اینجا نیز مجموع بایی روی کلیه جایگشت‌های $1, 2, \dots, r+t$ صورت می گیرد. حاصلضرب متقارن $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_s^r(\mathcal{V})$ و $\mathbf{B} \in \mathcal{S}_s^t(\mathcal{V})$ نیز به نحو مشابهی تعریف می شود.

مثال ۴-۱-۴: حال حاصلضربهای تانسوری متقارن درجه ۲ و ۳ را تشکیل می‌دهیم. ابتدا $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ را در نظر بگیرید. با بهره‌گیری از تعریف متقارن ساز، حاصلضرب متقارن v_1 و v_2 را پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} (v_1 v_2)(T^1, T^2) &\equiv [S(v_1 \otimes v_2)](T^1, T^2) = \frac{1}{2} \sum_{\pi} (v_1 \otimes v_2)(T^1, T^2) \\ &= \frac{1}{2} [(v_1 \otimes v_2)(T^1, T^2) + (v_1 \otimes v_2)(T^2, T^1)] \\ &= \frac{1}{2} [v_1(T^1)v_2(T^2) + v_1(T^2)v_2(T^1)] \\ &= \frac{1}{2} [v_1(T^1)v_2(T^2) + v_2(T^1)v_1(T^2)] \\ &= \frac{1}{2} [(v_1 \otimes v_2)(T^1, T^2) + v_2 \otimes v_1(T^1, T^2)] \\ &= \frac{1}{2} (v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)(T^1, T^2) \end{aligned}$$

چون این رابطه به‌ازای هر زوج T^1 و T^2 برقرار است، می‌رسیم به

$$v_1 v_2 = \frac{1}{2} (v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)$$

به همین ترتیب، می‌توانیم نشان دهیم

$$\begin{aligned} (v_1 v_2) v_3 &= v_1 (v_2 v_3) = v_1 (v_3 v_2) = \dots \\ &= \frac{1}{6} (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 \\ &\quad + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_2 \otimes v_1) \end{aligned}$$

از تعریف ضرب متقارن برمی‌آید که این ضرب، جابه‌جاپذیر، شرکت‌پذیر و پخش‌پذیر است

$AB = BA$	جابه‌جاپذیر:
$(AB)C = A(BC)$	شرکت‌پذیر:
$(A + B)C = AC + BC$	پخش‌پذیر:
$A(B + C) = AB + AC$	

اگر یک پایه $\{e_i\}_{i=1}^N$ برای \mathcal{V} برگزینیم و تمام تانسورهای متقارن را، با استفاده از خواص بالا، برحسب حاصلضربهای متقارن e_i بیان کنیم، در این صورت هر تانسور متقارنی را می‌توان به صورت مجموع جملاتی از نوع $\alpha(e_1)^{n_1}(e_2)^{n_2}\dots(e_N)^{n_N}$ نوشت، که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$.

تانسورهای شبه‌متقارن. شبه‌تقارن، همان تقارن است با این تفاوت که در تعویض متغیرها، تانسور تغییر علامت می‌دهد. به کمک قضیهٔ زیر، تانسورهای شبه‌متقارن بیشتر مشخص و روشن می‌شوند.

قضیهٔ ۱۲-۱-۴: تانسور A نسبت به اندیسهای پادوردای i و j شبه‌متقارن است اگر و فقط اگر به‌ازای تمام مقادیر $T \in \mathcal{V}^*$ ، قرار دادن T به‌جای هر دو متغیر i ام و j ام A ، بدون توجه به مقادیر سایر متغیرها، صفر بدهند.

اثبات. فرض کنید $A \in \mathcal{S}_s^r(\mathcal{V})$ یک تانسور شبه‌متقارن باشد، در این صورت به‌ازای کمیت‌های دلخواه T^p و v_q داریم

$$A(T^1, \dots, T^{i-1}, T, T^{i+1}, \dots, T^{j-1}, T, T^{j+1}, \dots, T^r, v_1, \dots, v_s) = 0$$

فرض کنید به‌ازای مقادیر دلخواه $\alpha, \beta \in \mathcal{V}^*$ ، داشته باشیم $T = \alpha + \beta$. در این صورت بعد از بسط A ، با استفاده از خطی بودن آن، رابطه بالا می‌دهد

$$\begin{aligned} 0 &= A(\dots, \alpha, \dots, \alpha, \dots) + A(\dots, \alpha, \dots, \beta, \dots) \\ &\quad + A(\dots, \beta, \dots, \alpha, \dots) + A(\dots, \beta, \dots, \beta, \dots) \end{aligned}$$

که در آن نقطه‌ها، جز در مواضع i ام و j ام، جانشین متغیرهای مکانی شده‌اند. در جمع بالا، جملات اول و آخر، بنا بر تعریف A ، صفرند. بنابراین به‌ازای α و β دلخواه، داریم

$$A(\dots, \alpha, \dots, \beta, \dots) = -A(\dots, \beta, \dots, \alpha, \dots)$$

این رابطه نشان می‌دهد که A ، شبه‌متقارن است. نیمهٔ دوم اثبات بدیهی و واضح است.

تعریف ۱۳-۱-۴: تانسور شبه‌متقارن هموردا (پادوردا)، بنا بر تعریف، عبارت است از تانسوری که نسبت به تمام زوج متغیرهای هموردا (پادوردا) شبه‌متقارن باشد. هر تانسور شبه‌متقارن است اگر هم شبه‌متقارن هموردا و هم پادوردا باشد.

۳-۱-۴ جبر خارجی و کاربرد آن در دترمینانها

در بحث زیر پیرامون جبر خارجی، توجه خود را روی تانسورهای نوع $(r, 0)$ متمرکز می‌کنیم. لیکن، نکتهٔ مهم این است که به خاطر داشته باشیم که فقط تغییر نقش \mathcal{V} و \mathcal{V}^* باعث می‌شود که تمام تعریفها، قضیه‌ها، گزاره‌ها و نتیجه‌گیریها برای تانسورهای نوع $(0, s)$ نیز صادق باشند.

مجموعهٔ همه تانسورهای شبه‌متقارن نوع $(p, 0)$ یک زیرفضای $\mathcal{T}_0^p(\mathcal{V})$ را تشکیل می‌دهند. این زیرفضا را با $\Lambda^p(\mathcal{V})$ نشان می‌دهند (این نمادگذاری عجیب، بعداً وقتی حاصلضرب شبه‌متقارن تانسورها را مورد بحث قرار دهیم، منطقی‌تر جلوه خواهد کرد). به هر حال، این یک جبر نیست مگر اینکه، مشابه حالت متقارن، یک ضرب شبه‌متقارن تعریف کنیم. ابتدا، باید تعریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۱۴-۱-۴: هر پاد (شبه) متقارن‌ساز، عبارت است از عملگر خطی $\mathbb{A} : \mathcal{T}_0^p \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{V})$ که به صورت زیر بیان می‌شود

$$[\mathbb{A}(\mathbf{A})](\mathbf{T}^1, \dots, \mathbf{T}^p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{T}^{\pi(1)}, \dots, \mathbf{T}^{\pi(p)}) \quad \mathbf{A} \in \mathcal{T}_0^p(\mathcal{V}) \quad (7-4)$$

جمع روی تمام جایگشتهای $(1, 2, \dots, p)$ صورت می‌گیرد و بسته به اینکه جایگشت زوج یا فرد باشد، $\delta_{\pi} = \pm 1$. گاهی $\mathbb{A}(\mathbf{A})$ را با \mathbf{A}_a نمایش می‌دهند.

مثال ۵-۱-۴: حال معادله (۷-۴) را به‌ازای مقادیر $p = 2$ و $p = 3$ می‌نویسیم.
(الف) به‌ازای $p = 2$ با استفاده از نمادگذاری بدیهی برای جایگشتها، داریم

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}(\mathbf{A}))(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) &= \frac{1}{2} \{ \delta_{\pi_{12}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) + \delta_{\pi_{21}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2) - \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) \} \end{aligned}$$

در اینجا $\delta_{\pi_{12}} = -1$ ، زیرا برای اینکه از $(2, 1)$ به $(1, 2)$ برسیم، لازم است فقط یک (و تعداد فرد) تعویض نماد انجام دهیم.
(ب) به‌ازای $p = 3$ داریم

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}(\mathbf{A}))(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3) &= \frac{1}{6} \{ \delta_{\pi_{123}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3) + \delta_{\pi_{132}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^3, \mathbf{T}^2) \\ &\quad + \delta_{\pi_{213}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1, \mathbf{T}^3) + \delta_{\pi_{231}} \mathbf{A}(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3, \mathbf{T}^1) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta_{\pi_{11}} \mathbf{A}(T^r, T^1, T^r) + \delta_{\pi_{11}} \mathbf{A}(T^r, T^r, T^1) \} \\
 = & \frac{1}{6} \{ \mathbf{A}(T^1, T^r, T^r) - \mathbf{A}(T^1, T^r, T^r) - \mathbf{A}(T^r, T^1, T^r) \\
 & + \mathbf{A}(T^r, T^r, T^1) + \mathbf{A}(T^r, T^1, T^r) - \mathbf{A}(T^r, T^r, T^1) \}
 \end{aligned}$$

خواننده باید نشان دهد که تمام جملاتی که با علامت مثبت آمده‌اند، با تعداد زوجی تعویض نماد از (۱۲۳) به دست می‌آیند و آنها که با علامت منفی آمده‌اند، با تعداد فردی تعویض متناظرند. ●
 حال می‌توانیم ضرب مهمی را تعریف کنیم که فضای برداری $\Lambda^p(\mathcal{V})$ را به یک جبر تبدیل می‌کند.

تعریف ۴-۱-۱۵: ضرب خارجی (که ضرب گوه‌ای، گراسمن، تناوبی یا وک^۱ نیز نامیده می‌شود) دو تانسور شبه‌متقارن $\mathbf{A} \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ و $\mathbf{B} \in \Lambda^q(\mathcal{V})$ یک تانسور شبه‌متقارن دیگری است که به $\Lambda^{p+q}(\mathcal{V})$ تعلق دارد و به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$$

مثال ۴-۱-۶: حال ضربهای گوه‌ای $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ و $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3$ را به‌ازای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{V}$ پیدا می‌کنیم. به‌ازای $T^1, T^2 \in \mathcal{V}^*$ دلخواه داریم

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)(T^1, T^2) &= [\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)](T^1, T^2) = \frac{1}{2} \sum_{\pi} \delta_{\pi}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(T^{\pi(1)}, T^{\pi(2)}) \\
 &= \frac{1}{2} [\delta_{\pi_{12}}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(T^1, T^2) + \delta_{\pi_{21}}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(T^2, T^1)] \\
 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(T^1, T^2) - \mathbf{v}_1(T^2)\mathbf{v}_2(T^1)] \\
 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(T^1, T^2) - (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1)(T^1, T^2)] \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1)(T^1, T^2)
 \end{aligned}$$

چون این رابطه به‌ازای تمام T^1 و T^2 ها برقرار است، داریم

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1)$$

به همین ترتیب، می‌توانیم نشان دهیم که تعریف:

$$[(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3](T^1, T^2, T^3) = \frac{1}{6} \sum_{\pi} \delta_{\pi}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)(T^{\pi(1)}, T^{\pi(2)}, T^{\pi(3)})$$

منجر به رابطه زیر می‌شود

$$(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = \frac{1}{6}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2)$$

- این رابطه نشان می‌دهد که ضرب خارجی، لااقل برای مورد حاضر، شرکت‌پذیر است. قضیه زیر حاوی خواص ضرب خارجی است.^۱

قضیه ۱۶-۱-۴: ضرب خارجی، در مورد تانسورهای شبه‌متقارن A, B, C دارای خواص زیر است. الف) شرکت‌پذیری:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

ب) پادجاب‌پذیری: اگر $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ و $B \in \Lambda^q(\mathcal{V})$ ، در این صورت

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$$

در حالت، $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ ، به‌ازای همه $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ ، بخش‌پذیری:

$$(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$$

$$A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$$

مؤلفه‌های $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ به کمک i_1, \dots, i_p داده می‌شوند، که در آن $i_1 < i_2 < \dots < i_p$.

۱. برای اثبات ر.ک.:

سایر مؤلفه‌ها با توجه به شبه‌تقارن به این مؤلفه‌ها مربوط‌اند. تعداد مؤلفه‌های مستقل، که ابعاد $\Lambda^p(\mathcal{V})$ به‌شمار می‌آیند، عبارت است از تعداد روشهایی که می‌توان از میان N عدد متمایز، p عدد را چنان انتخاب کرد که هیچ دو عددی با هم مساوی نباشند. این تعداد همان ترکیب N شیئی p به p است. بنابراین داریم:

$$\dim \Lambda^p(\mathcal{V}) = \binom{N}{p} = \frac{N!}{p!(N-p)!} \quad (۸-۴)$$

در حالت خاص $\dim \Lambda^N(\mathcal{V}) = ۱$. این کمیت نباید ما را به شگفت اندازد، زیرا از یک پایه \mathcal{V} می‌توانیم با تشکیل تمام ضربهای $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ به‌تعداد $\binom{N}{p}$ ، یک پایه برای $\Lambda^p(\mathcal{V})$ بسازیم. اما، وقتی $p = N$ ، تا یک ضرب فقط چنین حاصلضربی دارد عبارت است از $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$.

یکی از روشهای دقیق برای تعیین استقلال خطی بردارها با بهره‌گیری از فرمول‌بندی که تا اینجا مطرح کردیم، در قالب گزاره زیر بیان می‌شود:

گزاره ۷-۱-۴: مجموعه بردارهای \mathcal{V} $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathcal{V}$ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$$

اثبات. اگر $\{v_i\}_{i=1}^p$ مستقل خطی باشند، در این صورت یک زیرفضای p بعدی \mathcal{M} متعلق به \mathcal{V} را پدید می‌آورند. اگر \mathcal{M} را به‌نوبه خود یک فضای برداری بگیریم، داریم: $\dim \Lambda^p(\mathcal{M}) = ۱$. پایه‌ای برای $\Lambda^p(\mathcal{M})$ عبارت است از $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$ ، که نمی‌تواند صفر باشد زیرا $\Lambda^p(\mathcal{M})$ یک‌بعدی است.

برعکس، فرض کنیم $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0$. در این صورت با در نظر گرفتن ضرب خارجی سمت چپ در $v_2 \wedge v_3 \wedge \dots \wedge v_p$ ملاحظه می‌کنیم که تمام جملات، جز جمله اول، صفر می‌شوند. از این‌رو داریم $\alpha_1 v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = 0$. این واقعیت که $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$ در حالی است که باید α_1 صفر باشد. به همین ترتیب، ضرب در $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$ نشان می‌دهد که $\alpha_2 = 0$ و غیره. ■

مثال ۷-۱-۴: فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{V} تشکیل دهد. فرض کنید

$$v_1 = e_1 + 2e_2 - e_3$$

$$v_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$$

$$v_3 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$$

برای اینکه تعیین کنیم آیا v_1, v_2, v_3 مستقل خطی‌اند یا خیر، ضرب سه‌گانه گوه‌ای آنها را تشکیل می‌دهیم. ابتدا، ضرب دو کمیت اول را در نظر می‌گیریم

$$v_1 \wedge v_2 = (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (3e_1 + e_2 + 2e_3) = -\Delta e_1 \wedge e_2 + \Delta e_1 \wedge e_3 + \Delta e_2 \wedge e_3$$

تمام ضربهای گوه‌ای دارای عوامل تکراری، صفر می‌شوند. حال در ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 &= -\Delta e_1 \wedge e_2 \wedge (-e_1 - 3e_2 + 2e_3) + \Delta e_1 \wedge e_3 \wedge (-e_1 - 3e_2 + 2e_3) \\ &\quad + \Delta e_2 \wedge e_3 \wedge (-e_1 - 3e_2 + 2e_3) \\ &= -1 \Delta e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - 1 \Delta e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - \Delta e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین سه بردار مستقل خطی‌اند.

● مثال ۴-۱-۸: به‌عنوان یک مثال دیگر، از کاربرد گزارهٔ ۴-۱-۱۷، ابتدا لم کارتان را نشان می‌دهیم، که بر طبق آن اگر $\{e_i\}_{i=1}^p$ یک مجموعه بردار مستقل خطی، در \mathcal{V} تشکیل دهند و $\{v_i\}_{i=1}^p$ نیز بردارهایی در \mathcal{V} باشند، به‌گونه‌ای که $\sum_{i=1}^p e_i \wedge v_i = 0$ ، در این صورت، v_i ها تنها ترکیبهای خطی مجموعه $\{e_i\}_{i=1}^p$ هستند. به‌علاوه، اگر $v_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} e_j$ ، در این صورت $A_{ij} = A_{ji}$. برای نشان دادن این مطلب، می‌نویسیم

$$0 = e_1 \wedge v_1 + e_2 \wedge v_2 + \dots + e_p \wedge v_p \quad (1)$$

با ضرب کردن طرفین در $e_2 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_p$ داریم

$$0 = -v_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p \equiv -v_1 \wedge \Omega$$

که در آن $\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p$. به همین ترتیب اگر طرفین معادله را در ضرب گوه‌ای $e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_p$ ضرب کنیم، می‌رسیم به $-v_2 \wedge \Omega = 0$. به‌طور کلی:

$$v_k \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

بر طبق گزاره ۴-۱-۱۷ و v_k, e_1, \dots, e_p مستقل خطی اند. بنابراین

$$v_k = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} e_i$$

حال، معادله (۱) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \circ &= \sum_{k=1}^p e_k \wedge v_k = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^p e_k \wedge (A_{ki} e_i) = \sum_{k,i} A_{ki} e_k \wedge e_i \\ &= \sum_{k < i} (A_{ki} - A_{ik}) e_k \wedge e_i \end{aligned} \quad (2)$$

اما $\{e_k \wedge e_i\}$ به ازای $k < i$ یک پایه در $\Lambda^2(\mathcal{M})$ تشکیل می دهد که در آن \mathcal{M} زیرفضای پدید آمده توسط $\{e_i\}_{i=1}^p$ است. به این ترتیب، ضرایب سمت راست (۲) باید صفر شوند، و از این رو $A_{ki} = A_{ik}$.

توجه کرده اید که اگر تانسور A متعلق به $\Lambda^p(\mathcal{V})$ باشد، در این صورت می توان آن را به عنوان ترکیبی خطی از ضربهای خارجی بیان کرد. گاهی خوب است بدانیم که آیا یک تانسور را می توان به عنوان یک ضرب خارجی منفرد از p بردار بیان کرد یا خیر. چنین تانسورهایی تجزیه پذیر نامیده می شوند. یعنی، $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ تجزیه پذیر است، اگر بردارهای خطی مستقل $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathcal{V}$ چنان وجود داشته باشند که $A = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$. به ازای $p = 2$ یک ملاک فشرده داریم.

گزاره ۴-۱-۱۸: تانسور $A \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ تجزیه پذیر است اگر و فقط اگر $A \wedge A = \circ$.

اثبات. اگر $A = v_1 \wedge v_2$ ، در این صورت بدیهی است که $A \wedge A = \circ$. برعکس، اگر فرض کنیم $A \wedge A = \circ$ ، ادعا می کنیم که یک بردار $v \in \mathcal{V}$ چنان وجود دارد که $v \wedge A = \circ$. به ازای هر مقدار i ، بردار $A^{ij} e_j$ (به جمع بندی روی j توجه کنید) چنین برداری است. می توانیم این نکته را این طور نشان دهیم

$$\begin{aligned} (A^{ij} e_j) \wedge A &= (A^{ij} e_j) \wedge (A^{kl} e_k \wedge e_l) = A^{ij} A^{kl} e_j \wedge e_k \wedge e_l \\ &= \frac{1}{3} A^{ij} A^{kl} e_j \wedge e_k \wedge e_l + \frac{1}{3} A^{ik} A^{jl} e_k \wedge e_j \wedge e_l \\ &\quad + \frac{1}{3} A^{il} A^{jk} e_l \wedge e_j \wedge e_k \end{aligned}$$

از نمادهای ظاهری مختلف استفاده کرده‌ایم و یک عبارت را سه بار بازنویسی کرده‌ایم. عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(A^{ij}e_j) \wedge A = \frac{1}{3}(A^{ij}A^{kl} - A^{ik}A^{jl} + A^{il}A^{jk})e_j \wedge e_k \wedge e_l$$

اما اگر $A \wedge A = 0$ ، بنا به تمرین ۴-۱-۶، عبارت داخل پرانتز صفر می‌شود. بنابراین، $v = A^{ij}e_j$ دارای این خاصیت است که $v \neq 0$ و $v \wedge A = 0$. بر طبق تمرین ۴-۱-۵ باید عضوی از $\mathcal{V} \equiv \Lambda^1(\mathcal{V})$ وجود داشته باشد، یعنی یک بردار $u \in \mathcal{V}$ چنان وجود داشته باشد که داشته باشیم: $A = v \wedge u$. بدین ترتیب، A تجزیه‌پذیر است. ■

مثال ۴-۱-۹: (الف) در سه بعد همه $A \in \Lambda^2 \mathcal{V}$ تجزیه‌پذیرند. زیرا $A = A^{ij}e_i \wedge e_j$ و $A \wedge A = A^{ij}A^{kl}e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l$ ضرب خارجی درجه ۴ صفر می‌شود. بنابراین $A \wedge A = 0$.

(ب) در چهار بعد $A = e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3$ تجزیه‌پذیر نیست در واقع:

$$A \wedge A = (e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3) = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$$

یکی از زیباترین کاربردهای جبر خارجی در نظریهٔ دترمینانهاست. قبلاً در فصل سوم، دترمینانها را به تفصیل بررسی کردیم و دیدیم که اثبات بعضی قضیه‌ها در بارهٔ دترمینانها چقدر درهم‌ریخته و پیچیده می‌شد. با این ابزار جبر خارجی، خواهیم دید که چقدر این نظریه دقیق می‌شود و تا چه حد بعضی برهانها و اثباتها ساده و بدیهی می‌شوند.

ابتدا، یادآوری می‌کنیم که وقتی \mathcal{V} ، N بعدی باشد، داریم $\dim(\mathcal{V}) = N$. یعنی، اگر $\{e_i\}_{i=1}^N$ یکی از پایه‌های \mathcal{V} باشد، در این صورت $e_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge e_N$ تنها بردار در پایه مربوطه $\Lambda^N(\mathcal{V})$ است. از سوی دیگر، اگر $\{v_i\}_{i=1}^N$ مجموعه دلخواهی از N بردار باشد، حاصلضرب $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_N$ یا صفر (اگر v_i ها مستقل خطی باشند)، و یا یک حاصلضرب غیرصفر متعلق به $\Lambda^N(\mathcal{V})$ است. چون $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$ یک پایهٔ $\Lambda^N(\mathcal{V})$ است، می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که برای هر مجموعه N بردار $v_1, v_2, \dots, v_N \in \mathcal{V}$ ، حاصلضرب $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_N$ مضربی (که ممکن است صفر باشد) از $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$ است.

حال فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ یک عملگر خطی روی \mathcal{V} باشد. در این صورت، مجموعه

بردارهای Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_N جمله‌گی به \mathcal{V} تعلق دارند. بر طبق تذکرات بالا،

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N \text{ با } (Ae_1) \wedge (Ae_2) \wedge \dots \wedge (Ae_N)$$

متناسب است. حال نشان می‌دهیم که ضریب تناسب عبارت است از $\det A$.

قضیه ۱۹-۴: فرض کنید $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ خطی باشد. فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{V} باشد. در این صورت

$$(Ae_1) \wedge (Ae_2) \wedge \dots \wedge (Ae_N) = (\det A) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N \quad (۹-۴الف)$$

■ به علاوه، $\det A$ از پایه مستقل است.

اثبات. فرض کنید به‌ازای $r = 1, 2, \dots, N$ داریم $Ae_r = A_r^{ir} e_{i_r}$. در این صورت

$$\begin{aligned} (Ae_1) \wedge \dots \wedge (Ae_N) &= (A_1^{i_1} e_{i_1}) \wedge \dots \wedge (A_N^{i_N} e_{i_N}) \\ &= A_1^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_N^{i_N} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N} \end{aligned} \quad (۹-۴ب)$$

ضریبهای خارجی از خواص زیر برخوردارند

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N} = \begin{cases} 0 & \text{اگر دو اندیس با هم برابر باشند} \\ + e_1 \wedge \dots \wedge e_N & \text{اگر } (i_1, \dots, i_N) \text{ جایگشت زوجی} \\ & \text{از } (1, 2, \dots, N) \text{ باشد} \\ - e_1 \wedge \dots \wedge e_N & \text{اگر } (i_1, \dots, i_N) \text{ جایگشت فردی} \\ & \text{از } (1, 2, \dots, N) \text{ باشد} \end{cases}$$

خواص بالا را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} e_1 \wedge \dots \wedge e_N$$

که در آن $\varepsilon_{i_1, \dots, i_N}$ همان است که در فصل دوم تعریف شده است. از این رو، می‌توانیم عبارت (۹-۴ب) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$(Ae_1) \wedge \dots \wedge (Ae_N) = (A_1^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_N^{i_N} \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_N}) e_1 \wedge \dots \wedge e_N$$

عبارت داخل پرانتز سمت راست همان دترمینان است که قبلاً تعریف شد (به قرارداد مجموعیابی توجه کنید).

معادله (۴-۹الف) را می‌توان به مثابه یک نگاشت $\Lambda^N(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^N(\mathcal{V})$ در نظر گرفت که به صورت $\mathbb{A}^{(N)}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N) \equiv (\mathbb{A}e_1) \wedge (\mathbb{A}e_2) \wedge \dots \wedge (\mathbb{A}e_N)$ داده می‌شود. گاهی، $\mathbb{A}^{(N)}$ توسیع همومورفیک (همنگار) \mathbb{A} نامیده می‌شود. چون $\mathbb{A}^{(N)}$ یک عملگر در یک فضای یک‌بعدی است، به‌طور کامل با مقدار ثابت $\det \mathbb{A}$ تعیین می‌شود. به‌علاوه، همان‌طور که مسئله ۴-۸ نشان می‌دهد، این مقدار مستقل از پایه‌ای است که برای $\Lambda^N(\mathcal{V})$ انتخاب شده است. ■

مثال ۴-۱۰: نماد $\varepsilon_{i_1, \dots, i_N}$ را تانسور لوی-چی‌ویتا می‌گویند. می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_N} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N \quad (۱-الف)$$

که معادل است با

$$e_{j_{i_1}} \wedge e_{j_{i_2}} \wedge \dots \wedge e_{j_{i_N}} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_N} \quad (۱-ب)$$

حال ببینیم $\varepsilon_{i_1, \dots, i_N}$ تا چه حدی به انتخاب پایه بستگی دارد. فرض کنید $\{\bar{e}_j\}_{j=1}^N$ یک پایه دیگر باشد، در این صورت

$$\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_N} = \bar{\varepsilon}_{i_1, \dots, i_N} \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \dots \wedge \bar{e}_N \quad (۲)$$

اما داریم $\bar{e}_i = r_i^j e_j$ ، که در آن r_i^j عناصر یک ماتریس وارون‌پذیر (ماتریس تبدیل) هستند. فرض کنید $\bar{e}_k = R e_{j_k}$ در این صورت

$$\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_N = (R e_{j_1}) \wedge \dots \wedge (R e_{j_N}) = (\det R) e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_N}$$

و

$$\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_N} = (R e_{j_{i_1}}) \wedge \dots \wedge (R e_{j_{i_N}}) = (\det R) e_{j_{i_1}} \wedge \dots \wedge e_{j_{i_N}}$$

با قرار دادن روابط بالا در (۲)، داریم

$$(\det R)e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N} = \bar{\varepsilon}_{i_1 \dots i_N} (\det R)e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}$$

چون R وارون پذیر است، $\det R \neq 0$ و می تواند از طرفین حذف شود. از این رو، داریم

$$e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N} = \bar{\varepsilon}_{i_1 \dots i_N} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}$$

با توجه به ب داریم

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_N} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N} = \bar{\varepsilon}_{i_1 \dots i_N} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}$$

یا

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_N} = \bar{\varepsilon}_{i_1 \dots i_N}$$

بنابراین تانسور لوی-چی ویتا در تمام دستگاههای مختصات یک مقدار دارد. این را می توان از روی تعبیر (۱-الف) به عنوان توسیع همومورفیک یک "عملگر" جایگشت، که تنها عمل آن روی بردارهای پایه جابه جا کردن آنهاست نیز دید. بنابراین، (۱-الف) با (۴-الف) یکسان است و $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ همان دترمینان است. چون دترمینان مستقل از پایه است، $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ نیز مستقل از پایه خواهد بود. ●

در تعریف $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ در معادله (۱-الف) مثال قبل، برای پایه $\{e_i\}$ ترتیبی فرض شده است. اگر جای e_1 و e_2 را با هم عوض کنیم، سمت راست منفی می شود، که علامت $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ را عوض می کند. این نکته را بعداً بررسی خواهیم کرد.

حال دو عملگر $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که $AB \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. حال به دترمینان نگاه می کنیم. بنابر تعریف

$$(AB)^{(N)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_N = [\det(AB)] e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N$$

اما

$$\begin{aligned} (AB)^{(N)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_N &= (ABe_1) \wedge (ABe_2) \wedge \cdots \wedge (ABe_N) \\ &= A^{(N)}[(Be_1) \wedge \cdots \wedge (Be_N)] = A^{(N)}[(\det B)e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] \\ &= (\det B)A^{(N)}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_N) = (\det B)(\det A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \end{aligned}$$

با مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا داریم

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (\det \mathbb{A})(\det \mathbb{B}) \quad (۱۰-۴)$$

در اینجا، واقعاً توانایی و دقت جبر خارجی را درک می‌کنیم؛ برای اثبات (۴-۱۰) در فصل سوم، مجبور بودیم نمادها را به‌نحو پیچیده‌ای جابه‌جا کنیم.

۴-۱-۴ ضرب داخلی و پایه‌های راست‌هنگار (بررسی مجدد)

در فصل اول و دوم ضرب داخلی را برحسب یک تابع متریک تعریف کردیم که دو بردار را به‌عنوان ورودی می‌گرفت و یک عدد حقیقی تولید می‌کرد. اکنون می‌دانیم که در بیان تانسوری، این چه نوع ماشینی است.

تعریف ۴-۱-۴: یکی از شکل‌های دوخطی روی \mathcal{V} تانسور متقارن از نوع $(۲, ۰)$ ، یعنی تابع دوخطی متقارن $\mathbb{g} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ است.

اگر $\{e_j\}_{j=1}^N$ یک پایه برای \mathcal{V} و $\{e^i\}_{i=1}^N$ پایه همزادش باشد، در این صورت $\mathbb{g} = g_{ij}e^i e^j$ قرارداد مجموع‌یابی اینشتین را به‌خاطر داشته باشید، زیرا $e^i e^j = 1/2(e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i)$ یک پایهٔ $\mathcal{S}^2(\mathcal{V}^*)$ تشکیل می‌دهد. برای هر بردار $v \in \mathcal{V}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbb{g}(v) = g_{ij}e^i e^j(v) = g_{ij}e^i e^j(v^k e_k) = g_{ij}v^k e^i e^j(e_k) = g_{ij}v^j e^i \quad (۱۱-۴)$$

بنابراین، $\mathbb{g}(v) \in \mathcal{V}^*$. این عبارت نشان می‌دهد که \mathbb{g} را می‌توان به‌مثابه یک نگاشت $\mathbb{g} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ که توسط معادلهٔ (۴-۱۱) داده می‌شود در نظر گرفت. برای اینکه، این معادله معنی داشته باشد، نباید مهم باشد که با چه عاملی در ضرب تقارن \mathcal{V} منقبض می‌شود. اما، این یک نتیجهٔ بدیهی از تقارنهای $g_{ij} = g_{ji}$ و $e^i e^j = e^j e^i$ است، از این رو $\mathbb{g}(v) = g_{ij}e^i e^j(v) = g_{ij}e^i(v) e^j$ به‌نحو منحصر به‌فردی تعریف می‌شود. مؤلفه‌های g_{ij} می‌تواند در پایهٔ $\{e^i\}_{i=1}^N$ ی \mathcal{V}^* با v_i نمایش داده می‌شوند، از این رو

$$v_i \equiv g_{ij}v^j \quad \text{که در آن} \quad \mathbb{g}(v) = v_i e^i \quad (۴-۱۲ الف)$$

به این ترتیب، با بهره‌گیری از صورت دو خطی متقارن \mathbb{g} ، اندیس v^i را پایین آورده‌ایم. از کار بردها، v_i به‌طور منحصر به‌فردی تعریف می‌شود؛ به‌علاوه، تناظر یک به یک بین v^i و v_i برقرار است. این

امر فقط و فقط وقتی اتفاق می افتد که نگاشت $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ وارون پذیر باشد، که در این صورت باید یک نگاشت منحصر به فرد $g^{-1}: \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}$ یا $g^{-1} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{V})$ چنان وجود داشته باشد که:

$$\begin{aligned} g^{-1}g(v) &= v = g^{-1}(v_i \epsilon^i) = v_i g^{-1}(\epsilon^i) = v_i [(g^{-1})^{jk} e_j e_k](\epsilon^i) \\ &= v_i (g^{-1})^{ik} e_j e_k(\epsilon^i) = v_i (g^{-1})^{ji} e_j = v^j e_j \end{aligned}$$

↑
یا بنا به تعریف v

$$v^j = v_i (g^{-1})^{ji}$$

معمولاً، ۱- را حذف می کنند و می نویسند

$$v^j = g^{ji} v_i \quad (4-12 \text{ ب})$$

که در آن، این فرض که g با اندیسه‌های بالا وارون g (با اندیس پایین) است، پذیرفته شده است. دوخطی وارون پذیر را ناواگن می گویند. یکی از صورتهای دوخطی متقارن ناواگن را ضرب داخلی می نامند.

به این ترتیب، مشاهده می کنیم که حضور یک صورت دوخطی متقارن، به طور طبیعی مابین بردارهای \mathcal{V} و \mathcal{V}^* به نحو منحصر به فردی ارتباط برقرار می کند. برای رفتن از یک بردار در \mathcal{V} به تصویر منحصر به فردش از \mathcal{V}^* کافی است با استفاده از (۴-۱۲الف) اندیس را پایین بیاوریم، و رفتن برعکس شامل بهره گیری از (۴-۱۲ب) برای بالا بردن اندیس می شود. این فرایند را می توان به تمام تانسورها تعمیم داد. مثلاً، با وجودی که هیچ ارتباطی بین $\mathcal{P}_1^0(\mathcal{V})$ ، $\mathcal{P}_1^1(\mathcal{V})$ و $\mathcal{P}_1^2(\mathcal{V})$ وجود ندارد، وارد کردن یک صورت دوخطی متقارن، به طور طبیعی همه این فضاها را به هم مرتبط و یک تناظر یک به یک بین آنها برقرار می کند. مثلاً، با یک تانسور در $\mathcal{P}_1^2(\mathcal{V})$ با مؤلفه های t_{ij}^{kl} ، یک تانسور منحصر به فرد در $\mathcal{P}_1^1(\mathcal{V})$ که به صورت مؤلفه ای با عبارت $t_{ij}^{kl} = g_{ik} t_{ij}^{kl}$ بیان می شود، و یک تانسور منحصر به فرد دیگر از $\mathcal{P}_1^0(\mathcal{V})$ ، که با عبارت $t_{ij} = g_{ij} t_{ij}^{kl} = g_{ij} g_{jk} t_{ij}^{kl}$ بیان می شود، متناظر است.

توجه کنید که بالا بردن یا پایین آوردن یک اندیس مستلزم ضرب کردن در g^{ij} یا g_{ij} و مجموع بابی روی اندیسی است که پایین یا بالا برده می شود. حال سعی می کنیم یکی از اندیسه‌های t_{ij}^{kl} را، که یک تانسور نیز هست و برای آن فرایند پایین آوردن تعریف شده است، پایین بیاوریم.

پایین آوردن یکی از اندیسهای g^{ij} تانسور g^i_j را می‌دهد که تانسوری متعلق به $\mathcal{T}^1_1(\mathcal{V})$ است. می‌دانیم که $\mathcal{T}^1_1(\mathcal{V})$ با $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ هم‌ریخت (یعنی با آن یکسان) است. بنابراین، g^i_j را می‌توان به مثابه نمایش ماتریسی یک عملگر در \mathcal{V} تلقی کرد. حال ببینیم، این عملگر چیست. داریم:

$$v^i = g^{ij} v_j$$

طرفین را در g_{ik} ضرب و روی i مجموع‌بایی می‌کنیم و می‌رسیم به

$$g_{ik} v^i = v_k = g_{ik} g^{ij} v_j = g^j_k v_j$$

این عبارت باید به‌ازای تمام v ها برقرار باشد. بنابراین، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$g^j_k = g_{ik} g^{ij} = \delta^j_k \quad (۱۳-۴)$$

یعنی، عملگر متناظر با g^i_j همان عملگر واحد است. در واقع این معنا در تمام پایه‌ها صادق است. ضرب داخلی به‌عنوان یک صورت دوخطی متقارن ناواگن تعریف شده است. ملاک مهم ناواگنی دارای هم‌ارزهایی است که می‌توان در یک گزاره ارائه داد.

گزارهٔ ۴-۱-۲: یکی از صورتهای دوخطی متقارن g ناواگن است اگر و فقط اگر الف) به‌ازای هر $v \in \mathcal{V}$ مخالف صفر، یک $w \in \mathcal{V}$ چنان وجود داشته باشد که $g(v, w) \neq 0$ ، یا ب) ماتریس مؤلفه‌های g_{ij} دارای دترمینان غیرصفر باشد.

اثبات. صورت دوخطی متقارن $g \in \mathcal{T}^0_2(\mathcal{V})$ ناواگن است اگر و فقط اگر g ، به‌عنوان عملگر خطی $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ، دارای وارون باشد؛ این فرایند صادق است فقط و فقط اگر $\det g$ مخالف صفر باشد [این همان قسمت ب است]. اگر $\det g$ غیرصفر باشد، در این صورت بعد هسته g صفر است، اگر و فقط اگر به‌ازای $v \in \mathcal{V}$ غیرصفر داشته باشیم

$$g(v) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists a, w \in \mathcal{V} \ni [g(v)](w) = g(v, w) = g(w, v) \neq 0$$

توجه کنید که $g(v) \in \mathcal{V}^*$ ، بنابراین $[g(v)](w)$ خوش تعریف است،

$$[g(v)](w) = g_{ij} v^j \epsilon^i(w) = g_{ij} \epsilon^j(v) \epsilon^i(w) = g(v, w) = g(w, v)$$

قبلاً بند ب از گزاره ۱-۴-۲۱ را در عمل در معادله (۱۳-۴) ملاحظه کرده‌ایم. آنچه در زیر می‌آید یکی از نتایج مستقیم این گزاره است؛ اما چندان مهم است که به‌عنوان یک نتیجه بیان می‌شود.

نتیجه ۱-۴-۲۲: ماتریس $g_{zj} = g(e_i, e_j)$ متعلق به یک ضرب داخلی، الزاماً باید دارای وارون باشد.

تعریف ۱-۴-۲۳: یکی از صورتهای دوخطی متقارن کلی (نه الزاماً ناواگن) g را می‌توان به‌صورت زیر طبقه‌بندی کرد.

- (الف) معین مثبت اگر به‌ازای هر $v \neq 0$ داشته باشیم: $g(v, v) > 0$.
- (ب) معین منفی اگر به‌ازای هر $v \neq 0$ داشته باشیم: $g(v, v) < 0$.
- (ج) معین اگر g یا معین مثبت یا معین منفی باشد.
- (د) نیمه معین مثبت اگر به‌ازای هر v داشته باشیم: $g(v, v) \geq 0$.
- (ه) نیمه معین منفی اگر به‌ازای هر v داشته باشیم: $g(v, v) \leq 0$.
- (و) نامعین اگر g یا نیمه معین مثبت، یا نیمه معین منفی باشد.
- (ز) نامعین، اگر g ، معین نباشد.

مثال ۱-۴-۱۱: بعضی از طبقه‌بندیهای تعریف ۱-۴-۲۳ را می‌توان در \mathbb{R}^2 با $v_1 = (x_1, y_1)$ و $v_2 = (x_2, y_2)$ و $v = (x, y)$ نشان داد.
(الف) همیشه مثبت:

$$g(v_1, v_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

زیرا اگر $v \neq 0$ ، در این صورت یا $x \neq 0$ یا $y \neq 0$ ، و $g(v, v) = x^2 + y^2 > 0$ ،
(ب) همیشه منفی

$$g(v_1, v_2) = \frac{1}{4}(x_1 y_2 + x_2 y_1) - x_1 x_2 - y_1 y_2$$

زیرا

$$g(v, v) = xy - x^2 - y^2 = -\frac{1}{4}(x-y)^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$$

که مسلماً به‌ازای $v \neq 0$ ، منفی است.

(ج) نامعین

$$g(v_1, v_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

به‌ازای $x = y$ داریم $g(v, v) = 0$ ، اما g ناواگن است، زیرا در پایهٔ استاندارد \mathbb{R}^2 ، g دارای ماتریس زیر است

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس وارون‌پذیر است، پس بنابر گزارهٔ ۴-۱-۲۱، g ناواگن است.
(د) نیمه‌معین مثبت

$$g(v_1, v_2) = x_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad g(v, v) = x^2$$

به‌ازای $v = (0, y)$ ، صفر می‌شود، لیکن $g(v, v)$ هرگز منفی نمی‌شود. از این‌رو:

$$g(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

اما g واگن است زیرا ماتریس آن در پایه استاندارد \mathbb{R}^2 عبارت است از

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که وارون‌پذیر نیست.

همان‌طوری که در فصلهای اول و دوم دیدیم، دو بردار $u, v \in \mathcal{V}$ برهم عمودند، اگر $g(u, v) = 0$ بردار پوچ g عبارت است از برداری که بر خودش عمود باشد. اگر g معین باشد، در این صورت تنها بردار پوچ بردار صفر است. برعکس آن نیز درست است و به‌صورت گزارهٔ زیر بیان می‌شود.

گزارهٔ ۴-۱-۲۴: اگر g معین نباشد، در این صورت یک بردار غیرصفر $v \in \mathcal{V}$ چنان وجود دارد که $g(v, v) \leq 0$. به همین ترتیب، از اینکه g همیشه منفی نیست، نتیجه می‌شود که بردار غیرصفر

$w \in \mathcal{V}$ چنان وجود دارد که $g(w, w) \geq 0$. به ازای مقادیر مختلف α , $0 \leq \alpha \leq 1$. بردارهای زیر را در نظر بگیرید

$$u = \alpha v + (1 - \alpha)w$$

تمام این بردارها غیرصفرند مگر اینکه v و w مستقل خطی باشند، که در این صورت

$$v = \beta w$$

$$g(v, v) = g(\beta w, \beta w) = \beta^2 g(w, w) \geq 0$$

اما فرض کرده بودیم که $g(v, v) \leq 0$. بنابراین، $g(v, v) = 0$ و همین نتیجه مورد نظر ماست. اگر فرض کنیم هیچ یک از u ها صفر نیست، در این صورت

$$g(u, u) = g[\alpha v + (1 - \alpha)w, \alpha v + (1 - \alpha)w] = \alpha^2 g(v, v) + 2\alpha(1 - \alpha)g(v, w) + (1 - \alpha)^2 g(w, w)$$

تابع پیوسته‌ای از α است. به ازای $\alpha = 0$ این تابع دارای مقدار $g(w, w) \geq 0$ است، مقدار آن به ازای $\alpha = 1$ عبارت است از $g(v, v) \leq 0$. بنابراین، باید مقداری برای α چنان وجود داشته باشد که $g(u, u) = 0$

مثال ۱۲-۱-۴: در نظریه نسبیت خاص، ضرب داخلی دو چاربردار "جابه‌جایی"

$$r_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1) \quad \text{و} \quad r_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$$

که در آن c سرعت نور است، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(r_1, r_2) = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

بدیهی است که این عبارت یکی از صورتهای دوخطی متقارن نامعین است. بنابراین گزاره ۱-۴-۲۴، باید یک بردار بوج غیرصفر وجود داشته باشد. چنین برداری، r ، در رابطه زیر صدق می‌کند

$$g(r, r) = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} \Rightarrow c = \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \pm \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$$

این عبارت متناظر است با ذره‌ای که با سرعت نور حرکت می‌کند. بنابراین، پرتوهای نوری عبارت‌اند از بردارهای بوج در نظریه نسبیت خاص.

هرگاه در یک فضای برداری یک ضرب داخلی داشته باشیم، امکان داشتن بردارهای پایه راست‌هنجار وجود دارد. لیکن، چون $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ می‌تواند منفی یا صفر باشد، ناممکن است که برای برخی بردارها (آن‌طور که در فصل اول و دوم تعریف شد) هنجارش داشته باشیم. از این رو، یک پایه راست‌هنجار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴-۱-۲۵: یک پایه $\{e_i\}_{i=1}^N$ از \mathcal{V} نسبت به \mathbf{g} راست‌هنجار است اگر به ازای $i \neq j$ داشته باشیم $\mathbf{g}(e_i, e_j) = 0$ و هر $\mathbf{g}(e_i, e_i)$ (بدون جمع‌بندی) یکی از سه مقدار $+1$ ، -1 و 0 باشد. $\mathbf{g}(e_i, e_i)$ مؤلفه‌های قطری \mathbf{g} نامیده می‌شوند. از n_+ ، n_- و n_0 برای نشان دادن تعداد بردارهای e_i که برای آنها $\mathbf{g}(e_i, e_i)$ به ترتیب $+1$ ، -1 و 0 است، بهره می‌گیریم.

وجود پایه‌های راست‌هنجار برای \mathbf{g} همیشه مثبت از طریق فرایند راست‌هنجارسازی گرام-اشمیت در فصل‌های اول و دوم اثبات شد. یکی از مراحل این فرایند تقسیم‌بندی به وسیله $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ بود، که وقتی مجاز است که \mathbf{g} همیشه مثبت (یا منفی) باشد. لیکن، برای حالت کلی $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ می‌تواند صفر باشد و فرایند گرام-اشمیت نقض می‌شود. معنی این حرف آن نیست که برای یک \mathbf{g} کلی (احتمالاً نامعین) پایه‌های راست‌هنجار وجود ندارد. در واقع، وجود دارند؛ اما اثبات وجود آنها کمی دشوارتر است و محتوای قضیه زیر را تشکیل می‌دهد.^۱

قضیه ۴-۱-۲۶: برای هر صورت دوخطی متقارن \mathbf{g} روی \mathcal{V} ، یک پایه راست‌هنجار وجود دارد. به علاوه، n_+ ، n_- و n_0 در تمام پایه‌های راست‌هنجار یکسان‌اند.

کمیت n اندیس \mathbf{g} و $s \equiv n_+ - n_-$ نشان \mathbf{g} نامیده می‌شود.

مثال ۴-۱-۱۳: فرض کنید $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ و $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ و

۱. برای اثبات نگاه کنید به:

$v = (x, y, z)$ صورت دوخطی متقارن زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(v_1, v_2) = \frac{1}{4}(x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + x_1z_2 + x_2z_1)$$

بنابراین $g(v, v) = xy + yz + xz$ می‌خواهیم یک مجموعه بردار در \mathbb{R}^3 را بیابیم که نسبت به g راست‌هنجارند.

واضح است که $e_1 = (1, 1, 0)$ طوری است که $g(e_1, e_1) = 1$. بنابراین، یکی از این بردارهاست. حال $v = (1, 0, 1)$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که

$$f_r = v - \frac{g(v, e_1)}{g(e_1, e_1)} e_1$$

e_1 عمود است؛ یعنی $g(f_r, e_1) = 0$ به علاوه

$$f_r = (1, 0, 1) - \frac{3/2}{1}(1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$$

بنابراین، $g(f_r, f_r) = 3/4 - 3/2 - 1/2 = -5/4$ و

$$e_r = \frac{f_r}{\sqrt{|g(f_r, f_r)|}} = \frac{f_r}{\sqrt{5/4}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

بردار دوم است، با $g(e_r, e_r) = -1$ ، بالاخره، $w = (0, 1, 1)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$f_r = w - \frac{g(w, e_1)}{g(e_1, e_1)} e_1 - \frac{g(w, e_r)}{g(e_r, e_r)} e_r$$

هم بر e_1 و هم بر e_r عمود است و به سادگی می‌توان نشان داد که

$$f_r = \frac{4}{15}(-3, 1, 1)$$

با $g(f_r, f_r) = -4/5$. بنابراین، بردار سوم را می‌توان به صورت زیر اختیار کرد

$$e_r = \frac{f_r}{\sqrt{4/5}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

به این ترتیب، داریم

$$g(e_1, e_1) = 1$$

$$g(e_2, e_2) = -1$$

$$g(e_3, e_3) = -1$$

$$g(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j$$

و

$$n_+ = 1 \quad n_- = 2 \quad n_0 = 0$$

یعنی، اندیس g عبارت است از ۲ و علامت آن -1 است. با وجودی که در یک پایه خاص کار کردیم، قضیه ۱-۴ تا ۲۶ تضمین می‌کند که n_+ ، n_- و n_0 مستقل از پایه باشند. ●

باید تأکید کنیم که ناوردایی n_+ ، n_- و n_0 نسبت به پایه‌ها برای پایه‌های راست‌هنگار نسبت به g صادق است. به‌عنوان یک مثال نقیض، g مثال ۱-۴ تا ۱۳ را که به پایه استاندارد \mathbb{R}^3 ، $\{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (0, 1, 0), e'_3 = (0, 0, 1)\}$ اعمال شده است، در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$g(e'_i, e'_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

بنابراین، شاید به‌نظر برسد که برای این پایه $n_0 = 3$ لیکن، پایهٔ استاندارد نسبت به g راست‌هنگار نیست. در واقع،

$$g(e'_1, e'_2) = \frac{1}{4} = g(e'_1, e'_3) = g(e'_2, e'_3)$$

به همین دلیل است که بردار غیراستاندارد e_1 ، v و w در مثال ۱-۴ تا ۱۳ انتخاب شدند. در پایهٔ راست‌هنگار، ماتریس g ، با عناصر 1 ، -1 و 0 قطری است. در حالت خاص، اگر g ناواگن، یعنی، ضرب داخلی باشد، در این صورت n_0 باید صفر باشد. بنابراین، یک ضرب داخلی کلی روی یک فضای برداری N بعدی در شرایط زیر صدق می‌کند

$$n_+ + n_- = N \quad \text{و} \quad n_+ - n_- = s$$

که از آنها نتیجه می شود

$$s = N - 2n_-$$

فضای ضرب داخلی با $n_- = 1$ یا $n_- = N - 1$ ، فضای مینکوفسکی نامیده می شود. به ازای $N=4$ ، این فضا همانا فضای نظریه نسبیت خاص است. فضای ضرب داخلی با $n_- = 0$ فضای اقلیدسی نامیده می شود. این فضایی است که تمام حوزه های فیزیک کلاسیکی در بستر آن اتفاق می افتد.

مثال ۴-۱۴: فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه \mathcal{V} و $\{e^j\}_{j=1}^N$ پایه همزادش باشد. می توانیم تانسور جایگشت را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\delta_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N} \equiv N! \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_N} (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_N}) \quad (1)$$

از این تعریف واضح است که $\delta_{j_1, \dots, j_N}^{i_1, \dots, i_N}$ نسبت به تمام اندیسهای بالایی شبه متقارن است. با وجودی که واضح نیست، ولی واقعیت دارد که نسبت به اندیسهای پایین نیز شبه متقارن است. این را می توان به صورت زیر دید. فرض کنید دو تا از نمادهای پایین با هم برابر باشند. یعنی این حرف این است که دو تا از e_i ها در (۱) با هم برابرند. این دو e_j با دو تا از ϵ^i ها، مثلاً ϵ^k و ϵ^l منقبض خواهند شد. بنابراین در بسط جمله ای مانند $C \epsilon^k(e_j) \epsilon^l(e_j)$ وجود خواهد داشت، که در آن C حاصلضرب سایر عوامل است. چون حاصلضرب نسبت به اندیسهای بالا کاملاً شبه متقارن است: باید جمله دیگری با علامت منفی وجود داشته باشد که در آن اندیسهای k و l تعویض شده اند، $-C \epsilon^l(e_j) \epsilon^k(e_j)$. این موضوع باعث می شود که حاصل جمع صفر شود. قضیه ۴-۱۲ می رساند که (۱) نسبت به اندیسهای پایین نیز پادمتقارن است. از اینجا به این نتیجه می رسیم که

$$\delta_{j_1, \dots, j_N}^{i_1, \dots, i_N} \propto \epsilon^{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{j_1, \dots, j_N}$$

برای یافتن ضریب تناسب، توجه کنید که

$$\begin{aligned} \delta_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N} &= N! \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \dots \wedge \epsilon^N (e_1, e_2, \dots, e_N) \\ &= N! [A(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \dots \otimes \epsilon^N)](e_1, \dots, e_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\pi} \delta_{\pi} (\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \cdots \otimes \epsilon^N) (\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(N)}) \\ &= \sum_{\pi} \delta_{\pi} \epsilon^1(\mathbf{e}_{\pi(1)}) \epsilon^2(\mathbf{e}_{\pi(2)}) \cdots \epsilon^N(\mathbf{e}_{\pi(N)}) \\ &= \sum_{\pi} \delta_{\pi} \delta_{\pi(1)}^1 \delta_{\pi(2)}^2 \cdots \delta_{\pi(N)}^N \end{aligned}$$

تنها مشارکت در حاصل جمع از جایگشت با خاصیت $\pi(i) = i$ حاصل می‌شود. این جایگشت همان است که در آن داریم $\delta_{\pi} = 1$. بنابراین، داریم

$$\delta_{1,2,\dots,N}^{1,2,\dots,N} = 1$$

از سوی دیگر (قسمت ب از تمرین ۴-۱۸ را ببینید).

$$\epsilon_{1,2,\dots,N}^{1,2,\dots,N} \epsilon_{1,2,\dots,N} = \epsilon_{1,2,\dots,N}^{1,2,\dots,N} = (-1)^{n-1}$$

بنابراین، ضریب تناسب عبارت است از $(-1)^{n-1}$. لذا

$$\epsilon_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N} \epsilon_{j_1, j_2, \dots, j_N} = (-1)^{n-1} \delta_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N}$$

می‌توانیم یک عبارت صریح برای تانسور جایگشت مثال ۴-۱۴ بیابیم. مانند همین مثال،

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \epsilon^i \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_N} (\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_N}) &= \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_N} (\mathbf{e}_{\pi(j_1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(j_N)}) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \epsilon^{i_1}(\mathbf{e}_{\pi(j_1)}) \cdots \epsilon^{i_N}(\mathbf{e}_{\pi(j_N)}) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \delta_{\pi(j_1)}^{i_1} \delta_{\pi(j_2)}^{i_2} \cdots \delta_{\pi(j_N)}^{i_N} \end{aligned}$$

تساوی آخر از اینجا نتیجه می‌شود که $\{\epsilon^j\}$ و $\{\mathbf{e}_i\}$ پایه‌های همزادند و از این رو $\delta_i^j(\mathbf{e}_i) = \epsilon^j(\mathbf{e}_i)$ حال می‌توانیم بنویسیم

$$\delta_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N} = \sum_{\pi} \delta_{\pi} \delta_{\pi(j_1)}^{i_1} \delta_{\pi(j_2)}^{i_2} \cdots \delta_{\pi(j_N)}^{i_N} \quad (۴-۱۴ الف)$$

$$\varepsilon^{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_N} = (-1)^n \sum_{\pi} \delta_{\pi} \delta^{i_1} \pi(j_1) \delta_{\pi(j_2)}^{i_2} \cdots \delta_{\pi(j_N)}^{i_N} \quad (ب ۱۴-۴)$$

یادآوری می‌کنیم که بسته به اینکه π جایگشت زوج یا فردی از $(1, 2, \dots, N)$ باشد، آنگاه $\delta_{\pi} = \pm 1$.

مثال ۴-۱۵: می‌توانیم معادله (۴-۱۴ الف) را اجمالاً به صورت یک دترمینان بنویسیم. ابتدا توجه کنید که $\delta_{\pi} = \varepsilon_{\pi(1), \dots, \pi(N)}$ حال در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{j_1, j_2, \dots, j_N} &= \sum_{\pi} \varepsilon_{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N)} \delta_{\pi(1)}^{i_1} \delta_{\pi(2)}^{i_2} \cdots \delta_{\pi(N)}^{i_N} \\ &\equiv \sum_{k_1, \dots, k_N} \varepsilon_{k_1, k_2, \dots, k_N} \delta_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2} \cdots \delta_{k_N}^{i_N} \end{aligned}$$

واضح است که سمت راست دترمینان ماتریسی است با عناصر $\delta_{j_i}^{i_k}$ و در آن k_1, \dots, N اگر $1, 2, \dots, N$ را با j_1, j_2, \dots, j_N جایگزین کنیم، همین مطلب نیز صادق است؛ بنابراین

$$\delta_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{i_1, i_2, \dots, i_N} = \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \delta_{j_2}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_N}^{i_1} \\ \delta_{j_1}^{i_2} & \delta_{j_2}^{i_2} & \cdots & \delta_{j_N}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_N} & \delta_{j_2}^{i_N} & \cdots & \delta_{j_N}^{i_N} \end{pmatrix}$$

مثال ۴-۱۶: به عنوان یک کاربرد از فرمولبندی قبلی، می‌توانیم دترمینان یک ماتریس 2×2 را برحسب ردها بنویسیم. فرض کنید A چنین ماتریسی با عناصر A_i^j باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} \det A &= \varepsilon_{ij} A_i^j A_j^i = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{ij} A_i^j A_j^i - \varepsilon_{ij} A_j^i A_i^j \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{ij} \varepsilon^{kl} A_k^i A_l^j \} = \frac{1}{2} A_k^i A_l^j (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l) \\ &= \frac{1}{2} (A_i^i A_j^j - A_j^i A_i^j) = \frac{1}{2} [(\text{tr} A)(\text{tr} A) - (A^T)_i^i] \\ &= \frac{1}{2} [(\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^T)] \end{aligned}$$

می‌توانیم نتیجه مثال ۱۶-۱-۴ را تعمیم دهیم و درمیان یک ماتریس $N \times N$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\det A = \frac{1}{N!} \varepsilon^{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_N} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_N}^{j_N}$$

که در آن، فضای مورد نظر، اقلیدسی فرض می‌شود با $n_- = 0$. رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\det A = \frac{1}{N!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} \delta_{\pi(j_1)} \dots \delta_{\pi(j_N)} A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_N}^{j_N} \quad (15-4)$$

۵-۱-۴ عملگر ستاره‌ای هوج

در فصل دوم اثبات کردیم که تمام فضاهای برداری با ابعاد یکسان هم‌ریخت (یکسان) اند. از سوی دیگر، دو فضای برداری $\Lambda^{N-p}(\mathcal{V})$ و $\Lambda^p(\mathcal{V})$ دارای ابعاد یکسان هستند

$$\binom{N}{p} = \binom{N}{N-p}$$

بنابراین، بین این دو فضا یک‌ریختی برقرار است. هوج یک یک‌ریختی طبیعی بین این دو فضا برقرار کرد، که به زودی آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲۷-۱-۴: پایه جهت‌دار یک فضای برداری N بعدی \mathcal{V} عبارت است از یک مجموعه مرتب N بردار مستقل خطی.

اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ یک پایه جهت‌دار و $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ یک پایه دیگر باشد، در این صورت

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_N = (\det R) v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_N$$

که در آن R ماتریس تبدیل و $\det R$ یک عدد غیرصفر (R وارون‌پذیر) است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین، به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۲۸-۱-۴: سمت‌گیری عبارت است از گردایه تمام پایه‌های جهت‌داری که یک ماتریس تبدیل بین آن درمیان مثبت ارتباط برقرار می‌کند.

بدیهی است که در هر فضای برداری فقط دو سمتگیری وجود دارد. هر پایه جهت‌دار به طور مثبت به هر پایه جهت‌دار دیگر متعلق به همان سمتگیری مربوط است و به طور منفی به هر پایه جهت‌دار دیگری که متعلق به سمتگیری دیگر است، ربط پیدا می‌کند.

در \mathbb{R}^3 ، پایه‌های $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ و $\{\hat{e}_y, \hat{e}_x, \hat{e}_z\}$ به سمتگیریهای مختلف تعلق دارند، زیرا

$$\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z = -\hat{e}_y \wedge \hat{e}_x \wedge \hat{e}_z$$

پایه اول، دستگاه مختصات راست‌گرد و پایه دوم دستگاه مختصات چپ‌گرد نامیده می‌شوند. هر پایه دیگر، یا راست‌گرد یا چپ‌گرد است. نوع سومی وجود ندارد.

فضای ضرب داخلی که برای آن یک سمتگیری مشخص شده باشد، فضای برداری جهت‌دار نامیده می‌شود.

تعریف ۴-۱-۲۹: فرض کنید \mathcal{V} یک فضای برداری با یک ضرب داخلی \mathbf{g} باشد. فرض کنید \mathcal{V}^* دارای پایه راست‌هنگار (نسبت به \mathbf{g}) جهت‌دار $\{\epsilon^i\}_{i=1}^N$ باشد. عنصر حجم جهت‌دار μ به صورت $\mu \in \Lambda^N(\mathcal{V}^*)$ تعریف می‌شود که عبارت است از $\mu \equiv \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \dots \wedge \epsilon^N$.

توجه کنید که اگر $\{e_i\}$ به همان ترتیب $\{\epsilon^j\}$ مرتب باشد، در این صورت $\mu(e_1, e_2, \dots, e_N) = +1$ می‌گوییم $\{e_i\}$ به طور مثبت جهت‌دار است. به طور کلی، $\{v_i\}$ به طور مثبت جهت‌دار است اگر $\mu(v_1, v_2, \dots, v_N) > 0$. توجیه برای نوشتن عنصر حجم جهت‌دار از این واقعیت نتیجه می‌شود که اگر $\{\varphi^k\}_{k=1}^N$ پایه راست‌هنگار دیگر، در همان سمتگیری باشد و توسط ماتریس R به $\{\epsilon^j\}$ ارتباط داشته باشد، در این صورت

$$\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^N = (\det R) \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \dots \wedge \epsilon^N$$

چون $\{\varphi^k\}$ و $\{\epsilon^j\}$ راست‌هنگارند، دترمینان \mathbf{g} برای هر دو بردار عبارت است از $(-1)^n$. در این صورت از تمرین ۴-۱-۱۱ نتیجه می‌شود که $(\det R)^2 = 1$ یا $\det R = \pm 1$ اما، $\{\varphi^k\}$ و $\{\epsilon^j\}$ یک عنصر حجم را می‌دهند.

عنصر حجم \mathcal{V} برحسب یک پایه برای \mathcal{V}^* تعریف می‌شود. دلیل این امر را بعداً وقتی ملاحظه کنیم که dx, dy, dz یک پایه برای $(\mathbb{R}^3)^*$ تشکیل می‌دهد و یک عنصر حجم \mathbb{R}^3 عبارت است از $dx \wedge dy \wedge dz \equiv dx \, dy \, dz$ روشن خواهد شد. اکنون آماده‌ایم تا عملگر ستاره‌ای هوج را معرفی کنیم.

تعریف ۴-۱-۳: فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه راست هنجار مرتب \mathcal{V} نسبت به ضرب داخلی g باشد. عملگر ستاره‌ای هوج یک نگاشت خطی $\Lambda^p(\mathcal{V}) \rightarrow \Lambda^{N-p}(\mathcal{V})$ است که به صورت زیر داده می‌شود (به قرارداد مجموع‌یابی اینشتین توجه کنید)

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \frac{1}{(N-p)!} \varepsilon_{i_1, \dots, i_p}^{i_{p+1}, \dots, i_N} e_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_N} \quad (الف) \quad (۴-۱۶)$$

که در آن

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_N}^{i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_N} = g^{j_1 i_{p+1}} g^{j_2 i_{p+2}} \dots g^{j_{N-p} i_N} \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_{N-p}} \quad (ب) \quad (۴-۱۶)$$

با وجودی که این تعریف براساس انتخاب یک پایه استوار است، می‌توان نشان داد که در واقع این عملگر مستقل از پایه است. توجه کنید که حاصلضرب g ها در سمت راست (۴-۱۶ ب) عبارت است از ± 1 . در حالت خاص، برای فضاهای اقلیدسی، که در آن $m_- = 0$ ، حاصلضرب وجود ندارد.

مثال ۴-۱۷: حال تعریف ۴-۱-۳ را به $\Lambda^p(\mathbb{R}^3)$ به ازای $p = 0, 1, 2, 3$ اعمال می‌کنیم. فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه راست هنجار جهت‌دار \mathbb{R}^3 باشد. (الف) به ازای $\Lambda^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ پایه عبارت است از 1، و (۴-۱۶ الف) می‌دهد

$$*1 = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

(ب) به ازای $\Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ ، پایه عبارت است از $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، و (۴-۱۶ الف) می‌دهد:

$$\begin{aligned} *e_i &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} e_j \wedge e_k & \Rightarrow & & *e_1 &= e_2 \wedge e_3 \\ & & & & *e_2 &= e_3 \wedge e_1 \\ & & & & *e_3 &= e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

(ج) برای $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ ، یک پایه عبارت است از $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ و (۴-۱۶ الف)

می‌دهد:

$$\begin{aligned} *e_i \wedge e_j &= \varepsilon_{ij}^k e_k & \Rightarrow & & *e_1 \wedge e_2 &= \varepsilon_{12}^3 e_3 = \varepsilon_{12}^3 e_3 = \varepsilon_{123} e_3 = e_3 \\ *e_1 \wedge e_3 &= \varepsilon_{13}^k e_k = \varepsilon_{13}^2 e_2 = \varepsilon_{132} e_2 = -e_2 \\ *e_2 \wedge e_3 &= \varepsilon_{23}^k e_k = e_1 \end{aligned}$$

(د) برای $(\mathbb{R}^2)^\wedge$ ، یک پایه عبارت است از $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ و (۴-۱۶ الف) می دهد

$$* e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = \varepsilon_{123} = 1$$

مثال ۴-۱۷-۱۷ می تواند به این معنا اشاره داشته باشد که دوبار اعمال کردن عملگر ستاره‌ای هوج (ترکیب * با خودش یا *^o) با اعمال عملگر همانی یکسان است. این امر تا حدودی درست است. قضیه زیر، بیان دقیقی از این حدس را ارائه می دهد.^۱

قضیه ۴-۱۷-۳۱: به ازای $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ ، که در آن \mathcal{V} یک فضای جهت دار نسبت به ضرب داخلی g است، داریم

$$*^o * A \equiv * * A = (-1)^n - (-1)^{p(N-p)} A \quad (17-4)$$

که در آن $n = \dim \mathcal{V}$ و $N = \dim \mathcal{V}$ اندیس g است و $n = \dim \mathcal{V}$.

در حالت خاص، برای فضاهای اقلیدسی با تعداد فرد می دهد، $* * A = A$. برای حالت \mathbb{R}^2 نیز وضع به همین منوال است.

به ازای $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ دلخواه و یک پایه دلخواه (نه الزاماً راست هنجار) $\{v_i\}_{i=1}^N$ متعلق به \mathcal{V} ، که به طور مثبت به $\{e_i\}$ مرتبط است، و A بر حسب آن به صورت $A = A^{i_1, i_2, \dots, i_p} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ بر حسب آن به صورت $A = A^{i_1, i_2, \dots, i_p} v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ داده می شود، داریم:

$$*A = (\det R)^{-1} \frac{1}{(N-p)!} A_{j_1, \dots, j_p} \varepsilon^{j_1, \dots, j_p, j_{p+1}, \dots, j_N} e_{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_N}$$

که در آن بالا بردن و پایین آوردن توسط تانسور ضرب داخلی g $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ که در پایه $\{v_i\}$ بیان شده است، انجام می شود. از تمرین ۴-۱۷-۱۱، داریم $(\det R)^2 = (-1)^n - \det G$ ، که در آن G معرف ماتریس g در $\{v_i\}$ است. چون در این حالت $\det R > 0$ ، داریم $\det R = |\det G|^{1/2}$. بنابراین، عبارت بالا برای $*A$ را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$*A = |\det G|^{-1/2} \frac{1}{(N-p)!} A_{j_1, j_2, \dots, j_p} \varepsilon^{j_1, j_2, \dots, j_p, j_{p+1}, \dots, j_N} e_{j_{p+1}} \wedge e_{j_{p+2}} \wedge \dots \wedge e_{j_N} \quad (18-4)$$

۱. برای اثبات مراجعه کنید به:

تأکید می‌کنیم که در جمع $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ ، هیچ محدودیتی روی محدودهٔ مجموع‌یابی وجود ندارد جز اینکه « A^{i_1, i_2, \dots, i_p} شبه‌مقارن است. معنی این حرف آن است که اگر A به صورت ترکیب خطی تنها چند حاصلضرب $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ داده شده باشد، که در آن همه بردارهای پایه ممکن حضور ندارند، در این صورت مؤلفه‌های A باید در میان تمام $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ های ممکن تجزیه شود. اگر $A = e_1 \wedge v_2$ ، در این صورت در حاصل جمع $A^{ij} e_i \wedge e_j$ مؤلفه‌های غیرصفر عبارت‌اند از $A^{12} = 1/2$ و $A^{21} = -1/2$ ، و سایر مؤلفه‌ها صفرند. به همین ترتیب، وقتی $B = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ به شکل $B = B^{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k$ نوشته شود، بدیهی است که مؤلفه‌های غیرصفر B به B^{123} محدود نمی‌شوند. مؤلفه‌های دیگری، نظیر B^{132} ، B^{231} و مانند آنها، نیز غیرصفرند. در واقع داریم

$$B^{123} = -B^{132} = -B^{213} = B^{231} = B^{312} = -B^{321} = \frac{1}{6}$$

وقتی با جمع‌گذاری روی حاصلضربهای خارجی مواجهیم، این نکته را باید در نظر داشت. البته، واضح است که حاصلضربهای خارجی «مختلف» در جمع‌بندی، جملگی وابسته خطی‌اند.

مثال ۱-۴-۱۸: فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}^3$ و $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه راست‌هنگار جهت‌دار از \mathbb{R}^3 باشد. در این صورت $a = a^i e_i$ و $b = b^j e_j$. حال $a \wedge b$ و $*(a \wedge b)$ را محاسبه می‌کنیم. یک g اقلیدسی روی \mathbb{R}^3 فرض می‌کنیم. واضح است که

$$a \wedge b = (a^i e_i) \wedge (b^j e_j) = a^i b^j e_i \wedge e_j$$

و

$$\begin{aligned} *(a \wedge b) &= *(a^i b^j e_i \wedge e_j) = a^i b^j *(e_i \wedge e_j) \\ &= a^i b^j (\varepsilon_{ijk} e_k) = (a^i b^j \varepsilon_{ijk}) e_k \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که $*(a \wedge b)$ یک بردار است با مؤلفه‌های

$$[* (a \wedge b)]^k = a^i b^j \varepsilon_{ij}^k$$

$$\begin{aligned} [*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})]^1 &= a^i b^j \varepsilon_{ij}^1 = a^i b^j \varepsilon_{ij1} = a^i b^r \varepsilon_{ir1} + a^i b^r \varepsilon_{ir1} \\ &= a^r b^r \varepsilon_{rr1} + a^r b^r \varepsilon_{rr1} = \varepsilon_{rr1} (a^r b^r - a^r b^r) \\ &= a^r b^r - a^r b^r \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned} [*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})]^2 &= a^r b^1 - a^1 b^r \\ [*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})]^3 &= a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{aligned}$$

سه معادله آخر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

به این ترتیب، روش مناسبی برای نوشتن حاصلضرب خارجی دو بردار در \mathbb{R}^3 ، برحسب تانسور لوی‌چیویتا داریم

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^k = a^i b^j \varepsilon_{ij}^k$$

این رابطه (همراه با نتایج تمرین ۴-۱-۹) وقتی با ضرب برداری (خارجی) سروکار داریم کار را آسان می‌کند.

تناظر بین $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ فقط در سه بعد برقرار است زیرا رابطه

$$\dim[\Lambda^1(\mathcal{V})] = \dim[\Lambda^2(\mathcal{V})]$$

تنها زمانی برقرار است که $\dim \mathcal{V} = 3$. در واقع، اگر $\dim \mathcal{V} = N$ ، در این صورت

$$\frac{N}{2!(N-2)!} = \frac{N}{1!(N-1)!} \Leftrightarrow (N-1)! = 2[(N-2)!] \Leftrightarrow N-1=2 \Leftrightarrow N=3$$

به همین دلیل است که ضرب خارجی را می‌توان تنها در سه بعد، به صورت ماشینی که دو بردار در \mathcal{V} را می‌گیرد و یک بردار در \mathcal{V} تولید می‌کند، تعریف کرد.

مثال ۱۹-۱-۴: می‌توانیم از نتایج مثال ۱۸-۱-۴ و تمرین ۹-۱-۴ استفاده و چند اتحاد برداری (برحسب مؤلفه‌هایشان) را ثابت کنیم.

(الف) به‌ازای $a \times (b \times c) = b(a \times c) - c(a \times b)$ داریم

$$[a \times (b \times c)]^k = a^i (b \times c)^j \varepsilon_{ij}^k = a^i \varepsilon_{ij}^k (b^l c^m \varepsilon_{lm}^j)$$

$$= a^i b^l c^m \varepsilon_{ij}^k \varepsilon_{lm}^j = a_i b^l c^m \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmj}$$

↑
بنابر مسئله ۱۶-۴

$$= -a_i b^l c^m \varepsilon^{ikj} \varepsilon_{lmj} = -a_i b^l c^m (\delta_l^i \delta_m^k - \delta_m^i \delta_l^k)$$

$$= -a_i b^i c^k + a_i b^k c^i = -a \cdot b c^k + a \cdot c b^k$$

که مؤلفه k ام $b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ است.

(ب) به‌ازای $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$ داریم

$$a \cdot (a \times b) = a_k (a \times b)^k = a_k (a^i b^j \varepsilon_{ij}^k)$$

$$= a^k a^i b^j \varepsilon_{ijk} = 0$$

↑

با توجه به متقارن بودن $a^k a^i$ ، پادمتقارن بودن ε_{ijk} ، و تمرین ۱۳-۱-۴

(ج) به‌ازای $\nabla \times (\nabla f) = 0$ داریم

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla_i (\nabla f)_j \varepsilon^{ijk} = \nabla_i (\nabla_j f) \varepsilon^{ijk} = (\nabla_i \nabla_j f) \varepsilon^{ijk}$$

$$= 0$$

↑

با توجه به متقارن بودن $\nabla_i \nabla_j$ ، پادمتقارن بودن ε_{ijk} ، و تمرین ۱۳-۱-۴

تمرینها

۱-۱-۴ نشان دهید $\epsilon^{i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{i_r} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_r} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_1}$ مستقل خطی اند.

۲-۱-۴ حاصلضرب تانسوری $A = 2\hat{e}_x - \hat{e}_y + 3\hat{e}_z$ در خودش چیست؟

۳-۱-۴ نشان دهید $\mathcal{T}' \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع خطی ناورد است.

۴-۱-۴ فرض کنید $A \in \mathcal{T}'(\mathcal{V})$ شبهمتقارن باشد. نشان دهید اگر $T^1, \dots, T^r \in \mathcal{V}^*$ مستقل

خطی باشند، در این صورت $A(T^1, \dots, T^r) = 0$.

۵-۱-۴ فرض کنید $v \in \mathcal{V}$ که در آن $v \neq 0$ ، و فرض کنید $A \in \Lambda^p(\mathcal{V})$ ، و نشان دهید $v \wedge A = 0$

اگر و فقط اگر بردار $B \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{V})$ چنان وجود داشته باشد که $A = v \wedge B$.

۶-۱-۴ فرض کنید $A \in \Lambda^r(\mathcal{V})$ ، با مؤلفه‌های A^{ij} . نشان دهید $A \wedge A = 0$ اگر و فقط اگر

به‌ازای تمام مقادیر i, j, k, l در هر پایه‌ای، این رابطه برقرار باشد

$$A^{ij}A^{kl} - A^{ik}A^{jl} + A^{il}A^{jk} = 0$$

۷-۱-۴ فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه در \mathbb{R}^3 باشد. یک عملگر $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: \mathbb{P}_{ijk} تعریف

می‌کنیم که هر مجموعه سه بردار $\{v_1, v_2, v_3\}$ را به $\{v_i, v_j, v_k\}$ تعویض می‌کند. نمایش ماتریسی

این عملگر را بیابید و نشان دهید $\mathbb{P}_{ijk} = \det \mathbb{P}_{ijk}$.

۸-۱-۴ فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یک پایه راست‌هنگار نسبت به ضرب داخلی g باشد.

(الف) نشان دهید ماتریس g^{ij} با g_{ij} یکسان است.

(ب) اگر $\epsilon^{i_1, \dots, i_N}$ از $\epsilon_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ (تانسوری لوی‌چی‌ویتا) با بالا بردن اندیسها به دست آمد:

باشد، نشان دهید

$$\epsilon^{1, 2, \dots, N} = (-1)^{n-1} \epsilon_{1, 2, \dots, N} = (-1)^{n-1}$$

۹-۱-۴ برای یک فضای اقلیدسی سه‌بعدی، $\epsilon^{ijk} \epsilon_{lmn}$ ، $\epsilon^{ijk} \epsilon_{imk}$ ، و $\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijz}$ را به دست آورید،

به طوری که مجموع‌یابی روی اندیسهای تکراری انجام می‌شود.

۱۰-۱-۴ با استفاده از نتیجه مثال ۴-۱۵، جمع‌یابی تمرین ۴-۹ را به دست آورید.

۱۱-۱-۴ فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^N$ یکی از پایه‌های راست‌هنگار \mathcal{V} نسبت به ضرب داخلی g باشد.

فرض کنید $\eta_{ij} = \pm \delta_{ij}$ ماتریس g در این پایه راست‌هنگار باشد. فرض کنید $\{v_j\}_{j=1}^N$ یک پایه

دیگر (که الزاماً راست‌هنگار نیست) با ماتریس تبدیل R باشد. اگر G معرف ماتریس g در $\{v_j\}$

باشد، نشان دهید

$$\det G = \det \eta (\det R)^2 = (-1)^n (\det R)^2$$

در حالت خاص، علامت این دترمینان ناورد است. چرا $\det G$ با $\det \eta$ برابر نیست؟
 ۱۲-۱-۴ در نظریه الکترومغناطیس نسبی، جریان، J ، و تانسور میدان الکترومغناطیسی، F ، به ترتیب، یک چاربردار و یک تانسور پادمتقارن مرتبه ۲ هستند. یعنی، $J = J^i e_i$ و $F = F^{ij} e_i \wedge e_j$.
 مؤلفه‌های J و F را پیدا کنید. توجه کنید که در اینجا $N = 4$ است.
 ۱۳-۱-۴ برای یک تانسور $S^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$ که نسبت به تعویض اندیسهای i و j متقارن است و یک تانسور دیگر $A_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$ که نسبت به تعویض اندیسهای k و l شبه‌متقارن است، نشان دهید که

$$S^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} A_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} = 0$$

۱۴-۱-۴ سه مؤلفه J ، عملگر تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی، در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند (فصل دوم)

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ij}^k J_k$$

نشان دهید که $|J|^2 = J^k J_k$ با هر سه مؤلفه جابه‌جاپذیر است.
 ۱۵-۱-۴ یک عملگر برداری V به صورت مجموعه‌ای از سه عملگر $\{V^1, V^2, V^3\}$ تعریف می‌شود که در روابط جابه‌جایی زیر با تکانه زاویه‌ای صدق کنند

$$[V^i, J^j] = i \epsilon^{ijk} V_k$$

نشان دهید $|V|^2 \equiv V^k V_k$ با هر سه مؤلفه تکانه زاویه‌ای جابه‌جاپذیر است.
 ۱۶-۱-۴ ماتریسهای پاؤلی

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یک ذره با اسپین $1/2$ را در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی توصیف می‌کنند. به آسانی می‌توان

نشان داد که این ماتریسها در روابط زیر صدق می‌کنند

$$[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \varepsilon_{ij}^k \sigma_k \quad (1)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} 1_r \quad (2)$$

که در آن 1_r ماتریس یکه 2×2 است. نشان دهید

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ij}^k \sigma_k + \delta_{ij} 1_r \quad (\text{الف})$$

(ب) برای هر دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} داریم $(\sigma \cdot \mathbf{a})(\sigma \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} 1 + i \sigma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

۲-۴ بردارها و خمینه‌ها

در جبر تانسوری با بردارها و تانسورهای بی‌جان، یعنی اشیایی که نه حرکت و نه تغییری می‌کنند و فاقد هرگونه دینامیکی‌اند، سروکار داریم. هرگاه در فیزیک به تانسور نیاز پیدا کنیم، باید بدانیم که این تانسورها چگونه با مکان و زمان تغییر می‌کنند. تانسورهایی که به مکان و زمان بستگی دارند میدانهای تانسوری نامیده می‌شوند و موضوع بحث این بخش را تشکیل می‌دهند.

در مطالعه جبر تانسورها، فراگرفتمیم که تانسورها تعمیم بردارها به‌شمار می‌آیند. وقتی فضای برداری \mathcal{V} و فضای همزاد \mathcal{V}^* آن را در اختیار داشته باشیم، می‌توان روی فضای حاصلضرب اسکالر آنها توابع چندخطی تعریف کرد و انواع مختلف تانسورها را به‌دست آورد. می‌توانیم ضربهای تانسوری فرمهای مختلف \mathcal{V} و \mathcal{V}^* را بگیریم و همه انواع تانسورها را ایجاد کنیم. بنابراین، وقتی دانستیم یک بردار چیست، می‌توانیم بر پایه آن تانسورها را بسازیم.

در بخش ۱-۴ به این سؤال نپرداختیم که بردار چیست؛ فقط فرض کردیم که این موجود ریاضی وجود دارد. چون تمام بردارهای مورد نظر در آنجا، ساکن بودند، صرف وجودشان کافی بود. اما، در آنالیز تانسوری که اشیاء از یک نقطه به نقطه دیگر (و همچنین نسبت به زمان) تغییر می‌کنند، وجود بردارها در یک نقطه، وجود آنها در تمام نقاط را تضمین نمی‌کند. از این‌رو اکنون باید برای بردارها، چیزی بیش از صرف وجودشان را فرض کنیم.

مفهوم دیگری که لازم است در اینجا روشن شود، فضا، یا فضا-زمان است. ابتدا، این مفهوم را بررسی می‌کنیم.

۱-۲-۴ خمینه‌های مشتق‌پذیر

فضا، در فیزیک مقدماتی یکی از چیزهای غیرقابل تعریف است. بازه‌های طول و زمان مفاهیمی‌اند

که "معلوم فرض می‌شوند"، و هر تعریف دیگری از این مفاهیم استدلالی دوری را تشکیل می‌دهند. تا وقتی به یک فضای منحصر به فرد محدود باشیم، این معنا صادق است. در فیزیک کلاسیک، این فضا، فضای سه‌بعدی اقلیدسی است، که در آن همه انواع حرکات اتفاق می‌افتد. در نسبیت خاص، فضا به فضا-زمان و هندسه اقلیدسی به هندسه مینکوفسکی تبدیل می‌شود. در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، فضای مورد نظر فضای هیلبرت (بینهایت‌بعدی) است، و زمان تنها پارامتر دینامیکی است. در نظریه میدان کوانتومی، فضای هیلبرت به تابعی از فضا و زمان تبدیل می‌شود. در نظریه نسبیت عام، گرانش به انحنای فضا منجر می‌شود.

بدیهی است که انواع فضاهایی وجود دارند که ممکن است کاملاً با یکدیگر متفاوت به نظر برسند. اگر فرض کنیم جملگی آنها غیرقابل تعریف‌اند، یک محیط فئودالی ایجاد می‌شود که در آن هر نظامی در "قلمرو" خودش "فضای" مخصوص به خودش را دارد. این امر اشکالی ایجاد نمی‌کند، ولی اگر یک مالک بخواهد چیزی درباره سایر قلمروها بداند، در این صورت برخورد رخ می‌دهد.

ریاضی‌دانان برای اجتناب از این مشکل، مضمون وحدت‌بخشی ابداع کرده‌اند که تمام عوامل مشترک همه فضاها را یکپارچه می‌کند. این مضمون وحدت‌بخش نظریه خمینه‌های مشتق‌پذیر است. فهم دقیق خمینه‌های مشتق‌پذیر، نیاز به آشنایی با مباحث پیشرفته‌ای از جمله فضاهای توپولوژیک، فضاهای باناخ، توپولوژی جبری، گروه‌های لی، آنالیز و مانند آنها دارد. طرح این مباحث از محدوده و حوصله این کتاب خارج است. لیکن، یک درک کاربردی از نظریه خمینه بسیار ساده است. در اینجا، کلمه "کاربردی" مترادف است با "غیردقیق"، "ناکامل" و "حسی". بحثی که از این پس می‌آید نه دقیق است و نه کامل.

ابتدا، با تعریفی حسی از یک خمینه مشتق‌پذیر شروع می‌کنیم:

تعریف ۴-۲-۱: خمینه مشتق‌پذیر مجموعه‌ای از اشیاء است که نقطه نامیده می‌شوند و رابطه همواری مابین آنها برقرار است، به طوری که همسایگی هر نقطه مانند همسایگی یک فضای m بعدی (دکارتی) است؛ m بعد خمینه نامیده می‌شود.

همان طوری که در این نوع نوشتگان متداول است، در این کتاب، کلمه "خمینه" با "خمینه مشتق‌پذیر" مترادف است.

مثال ۴-۲-۱: موارد زیر نمونه‌هایی از خمینه‌های مشتق‌پذیر هستند.

(الف) فضای \mathbb{R}^n یک خمینه m بعدی است.

(ب) کره، یک خمینه دوعدی است.

(ج) چنبره، یک خمینه دوعدی است.

(د) مجموعه تمام ماتریسهای حقیقی $n \times n$ که عناصر آنها توابعی حقیقی، با مشتق‌های از همه مرتبه‌ها، باشند، یک خمینه n^2 بعدی است. (در اینجا هر نقطه یک ماتریس $n \times n$ است).

(ه) مجموعه تمام دورانها در \mathbb{R}^3 یک خمینه سه‌بعدی است. (در اینجا هر نقطه یک دوران است).

(و) هر سطح هموار در \mathbb{R}^3 یک خمینه دوعدی است.

(ز) کره واحد n -بعدی S^n ، که عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط در \mathbb{R}^{n+1} که در رابطه

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

صدق می‌کنند، یک خمینه است.

هر سطح با لبه‌ها، زانوهای تیز، یا نقاط تیز، نمی‌تواند یک خمینه باشد. بنابراین، مخروط یک خمینه دوعدی نیست زیرا صاف و هموار نیست؛ رأس آن یک نقطه تیز است. استوانه بسته خمینه نیست زیرا دارای لبه‌های تیز است. لیکن استوانه طویل نامحدود، خمینه است.

اصطلاحی که در تعریف خمینه مشتق‌پذیر به‌کار رفت، ممکن است نیاز به توضیح داشته باشد. نقاط، خودشان تعریف‌ناپذیرند. مجموعه آنها یک فضای توپولوژیکی می‌سازد که دارای مقطعهایی معین و خواص وحدت‌بخش و یگانگی است که به آنها نمی‌پردازیم. برای ما، مفهوم همسایگی مهم است. همسایگی یک نقطه P ، مجموعه‌ای از نقاطند که "به‌حد کافی به P نزدیک باشند".

فرض کنید U_P معرف همسایگی P باشد. وقتی می‌گوییم این همسایگی مانند یک فضای

(دکارتی) m بعدی است، منظور این است که یک نگاشت دوسو: $U_P \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، از همسایگی

U_P به همسایگی $\varphi(U_P)$ در \mathbb{R}^m چنان وجود دارد که وقتی در U_P به‌طور پیوسته از نقطه P

حرکت می‌کنیم، تصویر آن به‌طور پیوسته در $\varphi(U_P)$ حرکت کند. چون $\varphi(P) \in \mathbb{R}^m$ ، می‌توانیم توابع

$U_P \rightarrow \mathbb{R}$ را طوری تعریف کنیم که $x^i : U_P \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\varphi(P) = (x^1(P), x^2(P), \dots, x^m(P)) \in \mathbb{R}^m$.

این توابع، توابع مختصه‌ای φ نامیده می‌شوند. $x^i(P)$ ها، مختصات P نامیده می‌شوند. همسایگی

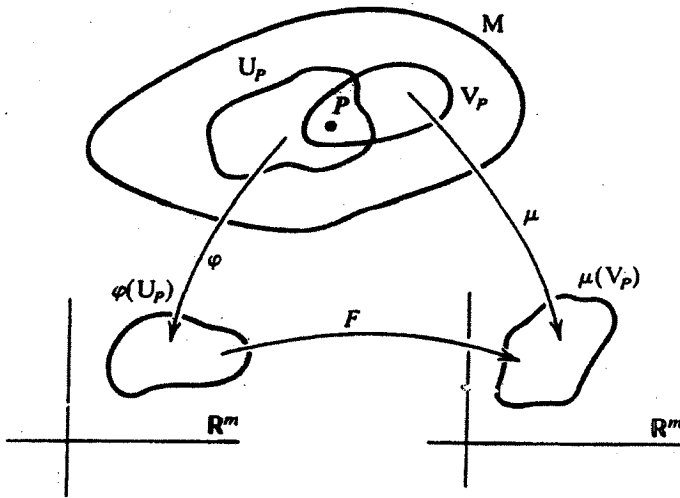
U_P همراه با نگاشت φ آن از یک نمودار با (U_P, φ) نشان داده می‌شوند.

فرض کنید (V_P, μ) یک نمودار دیگر در P با توابع مختصه‌ای

$$\mu(P) = (y^1(P), y^2(P), \dots, y^m(P)) \in \mathbb{R}^m$$

باشد (شکل ۱-۴). هرگاه U_P و V_P همپوشانی کنند، باید تابعی مانند $F : \varphi(U_P) \rightarrow \mu(V_P)$

وجود داشته باشد که تا همه مرتبه‌ها دارای مشتق باشد. توجه کنید که $\varphi(U_P)$ و $\mu(V_P)$



شکل ۱-۴ دو نمودار شامل P ، (U_P, φ) و (V_P, μ) ، که به مختصات دکارتی \mathbb{R}^m نگاشت شده‌اند، تابع F یک تابع معمولی از \mathbb{R}^m به \mathbb{R}^m است.

زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^m هستند؛ بنابراین، مشتقهای F تعریف شده‌اند. مجموعه توابعی که تا تمام مرتبه‌ها مشتق داشته باشند با C^∞ نمایش داده می‌شوند. وقتی یک تابع نظیر F بین دو تابع مختصه‌ای مانند $\varphi(U_P)$ و $\mu(V_P)$ وجود داشته باشد، گوییم این دو نمودار با C^∞ -رابطه هستند. چنین C^∞ -رابطه‌ای، چیزی را تعریف می‌کند که در تعریف خمینه به معنی "هموار" گرفته می‌شود. مجموعه‌ای از نمودارها که خمینه را در برمی‌گیرد و هر زوج از آنها C^∞ -رابطه دارند، C^∞ اطلس نامیده می‌شوند.

مثال ۲-۲-۴: برای یک کره واحد دوبعدی، S^2 ، می‌توانیم نموداری به صورت زیر بسازیم. فرض کنید $P = (x_1, x_2, x_3)$ یک نقطه در \mathbb{R}^3 ، نقطه‌ای در S^2 باشد. در این صورت $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ یا

$$x_2 = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}$$

علامت مثبت با نیمکره بالایی و علامت منفی با نیمکره پایینی متناظر است. فرض کنید U^+ نیمکره بالایی باشد، در این صورت می‌توان یک نمودار (U^+, φ) با $\varphi: U^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ از تصویر کردن روی صفحه $x^1 x^2$ ساخت:

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2)$$

به همین ترتیب، (U^-, μ) با $\mu : U^- \rightarrow \mathbb{R}^2$ که توسط $\mu(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2)$ داده می‌شود، یک نمودار برای نیمکره پایینی است.

در نظریه خمینه، همسایگی‌ها، که روی آنها نگاشته‌های نمودارها تعریف می‌شوند، معمولاً مرز ندارند. علت این امر آن است که بهتر است حدود را روی همسایگی‌های بدون مرز (باز) تعریف کنیم. از این رو، در دو نمودار بالا باید استوا، که مرز هر دو نیمکره است، مستثنی شود. با این عمل U^+ و U^- نمی‌توانند S^2 را بپوشانند؛ بنابراین، اطلس تشکیل نمی‌دهند. برای اینکه S^2 را بپوشانیم نمودارهای بیشتری مورد نیاز است. دو تا از این نمودارها عبارت‌اند از: نیمکره‌های راست و چپ، که برای آنها به ترتیب $x_2 > 0$ و $x_2 < 0$ است. اما، این دو همسایگی دو نقطه، $(1, 0, 0)$ و $(-1, 0, 0)$ ، را دربر نمی‌گیرند. علت این امر هم آن است که مرزهای نیمکره‌های راست و چپ باید مستثنی شوند. افزودن نیمکره‌های جلو و عقب به این مجموعه، این دو نقطه را نیز می‌پوشاند. به این ترتیب، S^2 به‌طور کامل پوشیده می‌شود و یک اطلس داریم.

البته، مقدار زیادی همپوشانی در بین نمودارها وجود دارد، و می‌توان نشان داد (ولی ما در اینجا آن را نشان نمی‌دهیم) که این همپوشانیها دارای C^∞ -رابطه‌اند.

مثال ۳-۲-۴: برای S^2 در مثال فوق، می‌توانیم یک نمودار جدید برحسب پارامترهای $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ بیابیم، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

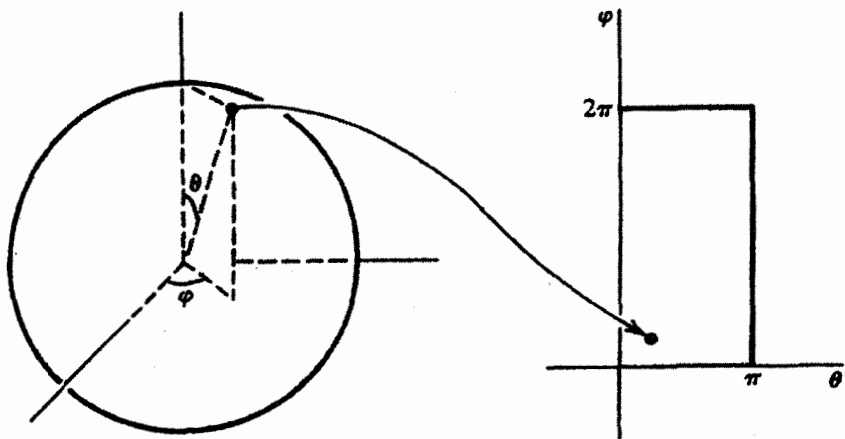
$$x_1 = \sin \theta \cos \varphi \quad x_2 = \sin \theta \sin \varphi \quad x_3 = \cos \theta$$

در این صورت، یک نمودار توسط (S^2, μ) داده می‌شود، که در آن

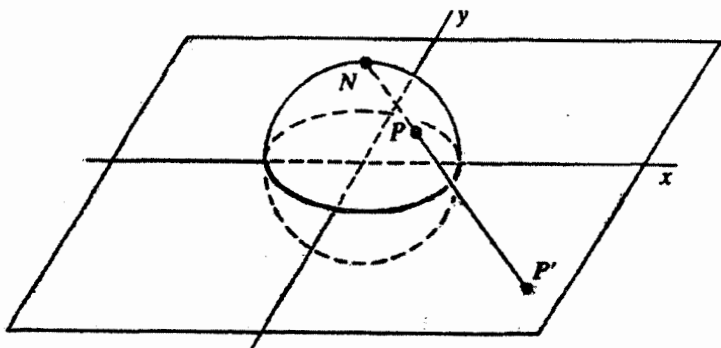
$$\mu(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = (\theta, \varphi)$$

یک نقطه S^2 را به یک ناحیه در \mathbb{R}^2 می‌نگارد. این مطلب به‌طور طرحواره در شکل ۲-۴ نشان داده شده است.

لیکن، این نمودار همه S^2 را نمی‌پوشاند، زیرا وقتی θ برابر 0 یا π باشد، مقدار φ نامعین است. به عبارت دیگر، (π) یا 0 $\theta = 0$ یک نقطه از کره (قطب شمال یا قطب جنوب) را مشخص می‌کنند، در حالی‌که تصویر آن در \mathbb{R}^2 کل محور φ است، از این رو باید (π) یا 0 $\theta = 0$ را از نمودار (S^2, μ) مستثنی کنیم. برای اینکه این دو نقطه را بپوشانیم، به نمودارهای بیشتری نیاز داریم.



شکل ۲-۴ یک نمودار که نقاط کره S^2 را در مختصات دکارتی \mathbb{R}^3 می‌نگارد. توجه کنید که به ازای $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ نگاشت تعریف شده نیست و لذا برای اینکه کره را بی‌پوشانیم لااقل یک نمودار دیگر لازم است.



شکل ۳-۴ تصویر گنجانگشتی S^2 روی \mathbb{R}^2 . توجه کنید که قطب شمال تصویری روی این نقشه ندارد، بنابراین برای اینکه کل کره پوشانده شود، یک نمودار دیگر لازم است.

مثال ۴-۲-۴: نمودار سوم برای S^2 ، چیزی است به نام تصویر گنجانگشتی که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. در چنین نگاشتی برای به دست آوردن تصویر یک نقطه، از قطب شمال به آن نقطه وصل می‌کنیم و آن را ادامه می‌دهیم تا صفحه $x_1 x_2$ را قطع کند. می‌توان نشان داد که نگاشت $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای $\pi_2 = 1$ ، یعنی قطب شمال، این نگاشت درست از کار در نمی‌آید. از این رو، قطب شمال باید مستثنی شود. برای در بر گرفتن قطب شمال، یک تصویر گنجانگاشتی دیگر، این بار از قطب جنوب، لازم داریم. در این صورت این دو نگاشت تمام S^2 را خواهند پوشاند. این یک واقعیت شناخته شده در هندسهٔ دیفرانسیل است که ناممکن است تمام S^2 را با یک تک‌نمودار بپوشانیم.

بیش از این در مورد خمینه‌ها بحث نمی‌کنیم. کسانی که علاقه‌مند به این مبحث هستند، می‌توانند به کارهایی نظیر آنچه در مراجع آورده شده است مراجعه کنند.

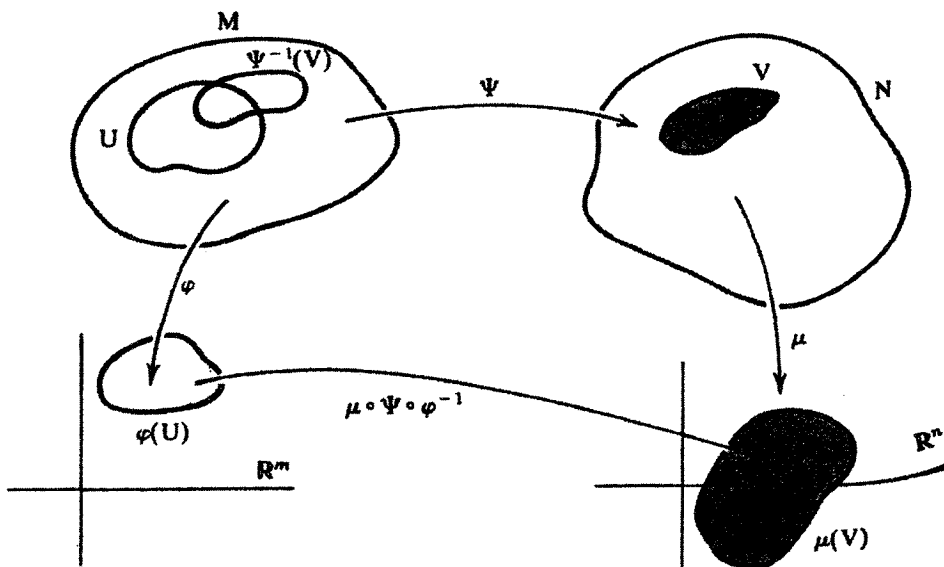
۲-۲-۴ منحنیها و مماسها؛ میدانهای برداری مختصه‌ای

پس از تعریف خمینه، تقریباً آماده‌ایم تا بردارها و تانسورها را تعریف کنیم. برای شروع، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲-۲-۴: فرض کنید M و N به ترتیب خمینه‌هایی با m و n بعد باشند. فرض کنید $\Psi: M \rightarrow N$ نگاشتی از M به N باشد. گوئیم Ψ عبارت است از C^∞ اگر برای هر نمودار (U, φ) در M و هر نمودار (V, μ) در N ، تابع مرکب $\mu \circ \Psi \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، هر جا که تعریف شده باشد، C^∞ باشد.

مضمون این تعریف در شکل ۲-۴ نشان داده شده است. یکی از حالت‌های خاص مهم وقتی پیش می‌آید که $N = \mathbb{R}$ ؛ در این صورت Ψ را یک تابع (حقیقی-مقدار) می‌نامیم. مجموعهٔ تمام توابع C^∞ در نقطهٔ $P \in M$ توسط $F^\infty(P)$ نمایش داده می‌شود. معنای این امر آن است که اگر $f \in F^\infty(P)$ ، در این صورت $f: U_P \rightarrow \mathbb{R}$ برای همسایگی U_P عبارت است از C^∞ . حالت خاص دیگر تعریف ۲-۲-۴، وقتی پیش می‌آید که $M = \mathbb{R}$. این حالت آنقدر مهم است که یک تعریف جداگانه می‌طلبد.

تعریف ۳-۲-۴: منحنی مشتق‌پذیر عبارت است از نگاشت C^∞ در بازهٔ \mathbb{R} به M . به این ترتیب، اگر $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ عبارت باشد از C^∞ ، در این صورت γ یک منحنی مشتق‌پذیر نامیده می‌شود. در مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال باید با این مبحث آشنا شده باشید که در کجا $M = \mathbb{R}^2$ و منحنی توسط $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ یا صرفاً با $\mathbb{F}(t)$ بیان می‌شود. نقطهٔ $\gamma(a) \in M$ را نقطهٔ اولیه و $\gamma(b) \in M$ را نقطهٔ نهایی منحنی γ می‌گویند. یک منحنی بسته است اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$.



شکل ۴-۴ مناظر با هر نگاشت $\Psi : M \rightarrow N$ ، یک نگاشت مختصات $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mu \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$ وجود دارد. نگاشت اخیر عبارت مختصای برای Ψ نامیده می‌شود.

اکنون آماده‌ایم ببینیم بردار در یک نقطه چیست؟ تمام بردارهایی که در فیزیک کلاسیک با آنها آشنا هستیم، نظیر مکان، سرعت، تکانه، تکانه زاویه‌ای و مانند آنها، بر پایه بردار مکان بنا شده‌اند. حال ببینیم چگونه می‌توانیم چنین برداری را تعمیم دهیم به طوری که با مفهوم خمینه سازگار باشد. در \mathbb{R}^2 بردار مکان از P به Q را یک خط مستقیم در نظر می‌گیریم که در P شروع و به Q ختم می‌شود. به علاوه، اگر P را به هر نقطه نهایی دیگری که روی پاره خط PQ قرار دارد متصل کنیم، جهت بردار تغییر نمی‌کند. علت این امر آن است که \mathbb{R}^2 فضایی تخت است، خط راست خوش‌تعریف است، و درباره راستای بردار از P به Q هیچ ابهامی وجود ندارد.

لیکن وقتی به سطحی کروی دوبعدی نظیر کره برویم، همه چیز تغییر می‌کند. خط راستی از نیویورک به پکن را چگونه تعریف می‌کنیم؟ تعریف قانع‌کننده‌ای از مستقیم بودن روی یک سطح منحنی در اختیار نداریم. به علاوه، همان طوری که در امتداد غرب از نیویورک به پکن می‌رویم، نوک پیکان تغییر جهت می‌دهد. جهت آن در نیویورک قدری با جهت آن در شیکاگو متفاوت است. در سانفرانسیسکو حتی این تغییر بیشتر است، وقتی به پکن می‌رسیم نوک پیکان تقریباً در جهت مخالف اولیه قرار می‌گیرد.

علت این تغییر جهت پیکان، مسلماً انحنای خمینه است. می‌توانیم اثر این انحنا را به حداقل برسانیم، مشروط بر آنکه خیلی از نیویورک دور نشویم. اگر نزدیک به نیویورک بمانیم، سطح زمین

تخت به‌نظر خواهد رسید، و می‌توانیم بی‌کانهایی بین این نقاط ترسیم کنیم. هر چه دو نقطه به هم نزدیکتر باشند، تقریب تخت بودن بهتر است. بدیهی است که مفهوم بردار، یک مفهوم موضعی، و فرایند ساختن بردار فرایندی حدی است.

فرایند حدی در مثال کره مستلزم ایده‌های "نزدیک بودن" و "دور بودن" بود. چنین ایده‌هایی به مفهوم فاصله نیاز دارند، که برای یک کره طبیعی است اما برای خمینه کلی ضرورتی ندارد. برای اغلب خمینه‌ها می‌توان یک تابع فاصله (متریک) تعریف کرد که "فاصله" بین دو نقطه از خمینه را به‌دست دهد، حتی اگر این نقاط ماتریس یا زاویه دوران باشند! به هر حال، مفهوم بردار کلی‌تر از آن است که نیاز به چنین ساختار پیچیده‌ای به نام متریک داشته باشد. ثمربخشی انتزاعی و نظری متریک ناشی از حقیقی-مقدار بودن آن است: اگر دو نقطه P_1 و P_2 مفروض باشند، فاصله بین آنها، $d(P_1, P_2)$ ، یک عدد حقیقی نامنفی است. بنابراین، فواصل بین نقاط مختلف را می‌توان مقایسه کرد، و در مورد بزرگ یا کوچک بودن این فواصل تصمیم‌گیری کرد.

قبلاً، دو مفهوم برای خمینه‌ها (اساسی‌تر از مفهوم متریک) تعریف کردیم که در کنار هم می‌توانند به‌جای مفهوم متریک در تعریف بردار به‌عنوان حد، بنشینند. این مفاهیم عبارت‌اند از توابع (حقیقی-مقدار) و منحنیها. حال ملاحظه کنیم که چگونه توابع و منحنیها می‌توانند جایگزین متریکها شوند.

فرض کنید $M : [a, b] \rightarrow M$ یک منحنی در خمینه M باشد. فرض کنید $P \in M$ نقطه‌ای از M باشد که روی منحنی γ قرار دارد به‌طوری که به‌ازای هر $c \in [a, b]$ داشته باشیم $\gamma(c) = P$. فرض کنید $f \in F^\infty(P)$ یک تابع C^∞ در P باشد. f را به نقاط همسایه P که روی منحنی γ قرار دارند محدود کنید. در این صورت تابع مرکب $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی-مقدار روی \mathbb{R} است. می‌توانیم مانند مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال، مقادیر $f \circ \gamma$ برای اعداد حقیقی مختلف نزدیک به c را با هم مقایسه کنیم. اگر $u \in [a, b]$ معرف متغیر باشد، در این صورت $f \circ \gamma(u) = f(\gamma(u))$ مقدار $f \circ \gamma$ را به‌ازای مقادیر مختلف u می‌دهد. در حالت خاص، تفاضل

$$\Delta(f \circ \gamma) \equiv f(\gamma(u)) - f(\gamma(c))$$

مقیاسی است برای اینکه تا چه حد نقطه $\gamma(u) \in M$ به P نزدیک است. یک گام جلوتر می‌رویم و تعریف می‌کنیم

$$\left. \frac{d(f \circ \gamma)}{du} \right|_{u=c} \equiv \lim_{u \rightarrow c} \frac{f(\gamma(u)) - f(\gamma(c))}{u - c} \quad (19-4)$$

که همان مشتق معمولی یک تابع معمولی یک متغیره است. لیکن، این مشتق اساساً به γ و به نقطه P بستگی دارد. تابع f صرفاً یک تابع آزمون است. می‌توانستیم هر تابع دیگری را اختیار کنیم و به کمک آن ملاحظه کنیم که با حرکت روی γ چیزها چگونه تغییر می‌کنند. آنچه مهم است این نیست که چه تابعی را انتخاب می‌کنیم، بلکه این است که منحنی γ چگونه با حرکت در امتداد γ و دور شدن از P ، به تغییر تابع می‌انجامد. این تغییر، به همان ترتیبی که به کمک (۴-۱۹) بیان شده است، توسط مشتق جهت‌دار در امتداد γ در P تعیین می‌شود. به همین جهت است که بردار مماس در P در امتداد γ به‌عنوان مشتق جهت‌دار تعریف می‌شود.

استفاده از مشتق به‌عنوان بردار مماس، اگرچه در نزد فیزیکدانان امری جدید است، برای ریاضی‌دانان از مدتها قبل آشناست. برای یک فیزیکدان تصور اینکه برای اندازه‌گیری آهنگ تغییر توابع، بردارها تغییر کنند، دشوار است. برای اینکه به این ایده عادت کند، مقداری تغییر ساختاری ذهن لازم است تا چنین ایده‌ای جا بیفتد. مثال ساده زیر می‌تواند به برقراری رابطه مشتق بردار کمک کنند. حالت آشنای یک صفحه و بردار $\mathbf{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y$ را در نظر بگیرید. چگونه به \mathbf{a} یک مشتق جهتی (مشتق سویی) وابسته می‌کنیم؟ ابتدا به یک منحنی $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، که به‌نحوی با \mathbf{a} مرتبط باشد، نیاز داریم. ترسیم این منحنی آسان است. یک خط راست در امتداد \mathbf{a} را در نظر می‌گیریم؛ یعنی قرار می‌دهیم: $\gamma(u) = (a_x u, a_y u)$. این منحنی است که به‌ازای $u = 0$ از مبدأ \mathbb{R}^2 (یعنی ابتدای \mathbf{a}) و به‌ازای $u = 1$ از نقطه (a_x, a_y) (انتهای \mathbf{a}) می‌گذرد. مشتق سویی در مبدأ، برای یک تابع دلخواه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{du} \right|_{u=0} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(u)) - f(\gamma(0))}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a_x u, a_y u) - f(0, 0)}{u} \end{aligned} \quad (۴-۲۰)$$

با بسط تیلور، در دو بعد می‌رسیم به

$$f(x, y) = f(0, 0) + x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} + y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} + \dots$$

که به‌ازای $x = a_x u$ و $y = a_y u$ خواهیم داشت

$$f(a_x u, a_y u) = f(0, 0) + a_x u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{u=0} + a_y u \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{u=0} + \dots$$

با قرار دادن در (۴-۲۰)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{du} \right|_{u=0} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a_x u (\partial f / \partial x)_{u=0} + a_y u (\partial f / \partial y)_{u=0} + \dots}{u} \\ &= a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \\ &= \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} \right) f \end{aligned}$$

این رابطه به وضوح رابطه‌ی بین مشتق‌های سویی و بردارها را نشان می‌دهد. در واقع تناظرهای $\partial/\partial x \leftrightarrow \hat{e}_x$ و $\partial/\partial y \leftrightarrow \hat{e}_y$ این ارتباط را به طور بسیار طبیعی برقرار می‌کنند.

توجه کنید که منحنی γ که در بالا اختیار شده است به هیچوجه منحصر به فرد نیست. در واقع بینهایت منحنی وجود دارند که در مبدأ دارای مماسهای مشترک‌اند و یک مشتق سویی می‌دهند.

اکنون آماده‌ایم تا مماس را تعریف کنیم.

تعریف ۴-۲-۴: فرض کنید M یک خمینه‌ی مشتق‌پذیر باشد. مماس در $P \in M$ عبارت است از عملگری مانند $t: F^\infty(P) \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری که به ازای هر $f, g \in F^\infty(P)$ و $a, b \in \mathbb{R}$ (الف) t خطی است:

$$t(af + bg) = at(f) + bt(g)$$

و

(ب) t در خاصیت مشتق‌گیری زیر صدق می‌کند

$$t(fg) = (t(f))g(P) + f(P)(t(g))$$

عملگر t یک تجرید از عملگر مشتق است. توجه کنید که $t(f)$ ، $g(P)$ ، $f(P)$ و $t(g)$ ، جملگی اعداد حقیقی‌اند.

اگر جمع و ضرب اسکالر مشتق‌های سویی به طور بدیهی تعریف شوند، مجموعه‌ی تمام مماسها در $P \in M$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد که فضای مماس در P نامیده و با $\mathcal{T}_P(M)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴-۲-۴ از معادلات (۴-۱۹) و (۴-۲۰) ناشی شد. حال به عقب برمی‌گردیم و ملاحظه می‌کنیم که آیا واقعاً (۴-۱۹) یک مماس است، یعنی، در دو شرط تعریف صدق می‌کند یا خیر.

گزاره ۴-۲-۵: فرض کنید γ یک منحنی C^∞ در M باشد به طوری که $\gamma(c) = P$. $Y_*(c)$ را چنان تعریف می‌کنیم که به ازای هر $f \in F^\infty(P)$ ، داشته باشیم

$$(Y_*(c))(f) \equiv \left. \frac{d}{du} f \circ \gamma \right|_{u=c}$$

در این صورت $Y_*(c) \in \mathcal{T}_P(M)$ ، یعنی، $Y_*(c)$ یک مماس در P است و مماس بر γ در c نامیده می‌شود.

اثبات. باید نشان دهیم که شرایط الف و ب از تعریف ۴-۲-۴، برای $f, g \in F^\infty(P)$ و $a, b \in \mathbb{R}$ برقرارند.

$$(Y_*(c))(af + bg) = \left. \frac{d}{du} (af + bg) \circ \gamma \right|_{u=c} = \left. \frac{d}{du} (af \circ \gamma + bg \circ \gamma) \right|_{u=c} \quad (\text{الف})$$

$$= a \left. \frac{d}{du} f \circ \gamma \right|_{u=c} + b \left. \frac{d}{du} g \circ \gamma \right|_{u=c}$$

$$= a(Y_*(c))(f) + b(Y_*(c))(g)$$

$$(Y_*(c))(fg) = \left. \frac{d}{du} (fg) \circ \gamma \right|_{u=c} \equiv \left. \frac{d}{du} [(f \circ \gamma)(g \circ \gamma)] \right|_{u=c} \quad (\text{ب})$$

$$= \left[\left. \frac{d}{du} (f \circ \gamma) \right|_{u=c} \right] \cdot (g \circ \gamma)_{u=c} + (f \circ \gamma)_{u=c} \left[\left. \frac{d}{du} (g \circ \gamma) \right|_{u=c} \right]$$

$$= [(Y_*(c))(f)]g(\gamma(c)) + f(\gamma(c))[(Y_*(c))(g)]$$

$$= [(Y_*(c))(f)]g(P) + f(P)[(Y_*(c))(g)]$$

توجه کنید که برای رسیدن از تساوی دوم به تساوی سوم در (ب)، از قاعده زنجیره‌ای مشتق معمولی استفاده کرده‌ایم. همچنین، برای اینکه از تساوی اول به تساوی دوم برسیم، از این واقعیت استفاده

کرده‌ایم که بنا به تعریف، حاصلضرب دو تابع که در یک نقطه محاسبه شده‌اند با حاصلضرب مقادیر آن دو تابع در آن نقطه برابر است. بنابراین شرایط (الف) و (ب) برقرار است و $Y_*(c)$ واقعاً یک مماس در P است. ■

حال یک منحنی خاص و بردار مماس متناظر با آن را که در موارد کاربردی از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردارند در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ یک دستگاه مختصات در P باشد، که در آن x^i $M \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مختصه نام است؛ φ نگاشت C^∞ دوسوازی \mathbb{R}^m به M است. لذا، می‌نویسیم: $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow M$. حال، برای نقطه $P \in M$ با دستگاه مختصاتی در همسایگی P ، مختصه نام P عدد حقیقی $x^i(P)$ است. فرض کنید تمام مختصات P ، جز مختصه نام، که می‌تواند تغییر کند، مشخص شده باشد. فرض کنید u این تغییر باشد، لذا، $x^i(P) = u \in \mathbb{R}$. اکنون به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۴-۲-۶: فرض کنید $P \in M$ و (U_P, φ) یک نمودار در P باشد. در این صورت منحنی $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow M$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_i(u) = \varphi^{-1}(x^1(P), \dots, x^{i-1}(P), u, x^{i+1}(P), \dots, x^m(P))$$

منحنی مختصه نام از P نامیده می‌شود. مماس بر این منحنی در P با $\partial_i(P)$ نمایش داده می‌شود و به آن میدان برداری مختصه نام می‌گویند.

توجه کنید که $\partial_i(P)$ مبین هیچ عملی روی P نیست؛ بلکه به این معنی است که باید در نقطه P محاسبه شود. یعنی، $\partial_i(P)$ به آن معنی است که ابتدا روی توابع عمل و سپس نتیجه را در P محاسبه کنید.

فرض کنید $c = x^i(P)$. در این صورت به ازای $f \in F^\infty(P)$ داریم

$$\begin{aligned} (\partial_i(P))f &= (Y_{i*}(c))f = \left. \frac{d}{du} f \circ \gamma_i \right|_{u=c} = \left. \frac{d}{du} f(\gamma_i(u)) \right|_{u=c} \\ &= \left. \frac{d}{du} g(\varphi^{-1}(x^1(P), \dots, u, \dots, x^m(P))) \right|_{u=c} \\ &\equiv \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_P \end{aligned}$$

که تساوی آخر، تعریف (طبیعی) مشتق جزئی f نسبت به مختصه i ام است که در نقطه P محاسبه شده است. این مشتق جزئی هم یک تابع C^∞ روی M است. لذا، به گزاره زیر می‌رسیم.

گزاره ۴-۲-۷: میدانهای برداری مختصه‌ای در P ، که با $\partial_i(P)$ نمایش داده می‌شوند، که در آن $i = 1, 2, \dots, m$ ، عبارت‌اند از عملگرهای $\mathbf{F}^\infty(P) \rightarrow \mathbf{F}^\infty(P)$: $\partial_i(P)$ که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$(\partial_i(P))f = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_P \quad i = 1, 2, \dots, m; f \in \mathbf{F}^\infty(P) \quad (21-4)$$

و مشتقات جزئی در P به شمار می‌آیند. یکی از نمادگذارهای متداول برای $\partial f / \partial x^i$ عبارت است از $f_{,i}$.

توجه کنید که این گزاره با تعریف ۴-۲-۴، که در آن مماس t ، $\mathbf{F}^\infty(P)$ را روی اعداد حقیقی می‌نگارد، متناقض نیست. در معادله (۲۱-۴)، $\partial f / \partial x^i|_P$ یک عدد حقیقی است، اما معادله از این فراتر می‌رود و یک تابع با مقدار حقیقی می‌دهد. دلیل استفاده از کلمه "میدان" در بحث بالا، به زودی تشریح خواهد شد.

مثال ۴-۲-۵: نقطه $P = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ را روی کره S^2 در نمودار (U_P, μ) که به صورت زیر داده می‌شود، در نظر بگیرید

$$\mu(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = (\theta, \varphi)$$

اگر θ ثابت نگه داشته شود و φ روی مقادیری که با u داده می‌شوند تغییر کند، در این صورت منحنی مختصه‌ای وابسته به φ به صورت زیر داده می‌شود

$$\gamma_\varphi(u) = u^{-1}(\theta, u) = (\sin \theta \cos u, \sin \theta \sin u, \cos \theta)$$

همان طوری که u تغییر می‌کند، $\gamma_\varphi(u)$ روی S^2 یک منحنی را می‌پیماید. این منحنی دایره‌ای به شعاع $\sin \theta$ است.

مماس بر این منحنی در هر نقطه توسط $\partial / \partial \varphi$ یا ∂_φ ، که مشتق نسبت به مختصه φ است، داده می‌شود.

به همین ترتیب، منحنی $\gamma_\theta(u)$ منحنی عظیمه‌ای را روی S^2 می‌پیماید که $\partial_\theta \equiv \partial/\partial\theta$ بر آن مماس است.

به فضای برداری تمام مشتقها در P ، $\mathcal{T}_P(M)$ ، قبلاً اشاره کردیم. در مورد S^2 این فضای مماسی عبارت است از یک صفحه که در یک نقطه بر کره مماس است. همچنین، بدیهی است که دو بردار ∂_φ و ∂_θ واقع بر این صفحه مستقل خطی‌اند. لذا تشکیل یک پایه برای صفحه مماس می‌دهند. این استدلال می‌تواند به هر خمینه‌ای تعمیم داده شود. قضیه زیر چنین تعمیمی است

قضیه ۴-۲-۸: فرض کنید M یک خمینه باشد و $P \in M$. در این صورت $\{\partial_i(P)\}_{i=1}^m$ تشکیل یک پایه $\mathcal{T}_P(M)$ می‌دهند. به خصوص $\mathcal{T}_P(M)$ ، m بعدی است. هر بردار دلخواه $t \in \mathcal{T}_P(M)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود (قرارداد مجموع‌یابی اینشتین مورد استفاده قرار گرفته است):

$$t = a^i \partial_i(P)$$

که در آن

$$a^i = t(x^i)$$

برای استدلال اخیر این قضیه تمرین ۴-۲-۱ را ببینید.

فرض کنید دو دستگاه مختصات در P داریم: (x^i) با مماسهای $\partial_i(P)$ و (y^j) با مماسهای $\nabla_j(P)$. نیز فرض کنید $t \in \mathcal{T}_P(M)$. در این صورت t را می‌توان یا برحسب ∂_i یا برحسب ∇_j بسط داد:

$$t = a^i \partial_i(P) = b^j \nabla_j(P)$$

می‌توانیم از این رابطه بهره‌گیریم و a^i را برحسب b^j به دست آوریم. از قضیه ۴-۲-۸ داریم:

$$\begin{aligned} a^i &= t(x^i) = (b^j \nabla_j(P))(x^i) = \left[b^j \frac{\partial}{\partial y^j} (P) \right] (x^i) \\ &= b^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_P \end{aligned} \quad (22-4)$$

در حالت خاص، اگر $t = \nabla_k(P)$ ، در این صورت $\delta_k^j = t(y^j) = [\nabla_k(P)](y^j) = \delta_k^j$ و $b^j = t(y^j) = [\nabla_k(P)](y^j) = \delta_k^j$ می‌دهد (۲۲-۴)

$$a^i = \delta_k^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial y^k}(P) = a^i \partial_i(P) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^i}(P) \quad (23-4)$$

این عبارت، قاعده زنجیره‌ای برای خمینه‌هاست. توجه کنید که $\partial/\partial x^i(P)$ به این معناست که مشتق را برحسب P حساب کنید. همچنین توجه کنید که روی شاخص پایین i در (۲۳-۴) جمع‌بندی می‌شود. برای هر تابع $f \in F^\infty(P)$ ، معادله (۲۳-۴) به این قرار خواهد شد:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^k}(P) \right] f = \frac{\partial f}{\partial y^k} \Big|_P = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}(P) \right] f = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \Big|_P \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_P$$

که به‌وضوح قاعده زنجیره‌ای در مشتق را نشان می‌دهد.

۳-۲-۴ دیفرانسیل نگاشت

حال که فضاهای مماسی را ساخته‌ایم و پایه‌های آنها را تعریف کرده‌ایم، آماده‌ایم مفهوم دیفرانسیل (مشتق) یک نگاشت بین خمینه‌ها را بررسی کنیم. این مفهوم در ساختن صورتهای دیفرانسیلی، که در آنالیز تانسوری مهم‌اند، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تعریف ۳-۲-۴: فرض کنید M و N به‌ترتیب خمینه‌هایی با m و n بعد باشند، و فرض کنید $\Psi: M \rightarrow N$ یک نگاشت C^∞ باشد. فرض کنید، $P \in M$ و $Q = \Psi(P) \in N$ تصویر P باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_P(M)$ و $\mathcal{T}_Q(N)$ به‌ترتیب فضاهای مماسی در P و Q باشند. در این صورت یک نگاشت القایی $\Psi_*P: \mathcal{T}_P(M) \rightarrow \mathcal{T}_Q(N)$ وجود دارد که دیفرانسیل Ψ در P نامیده می‌شود و به‌صورت زیر داده می‌شود. فرض کنید $t \in \mathcal{T}_P(M)$ و $f \in F^\infty(Q)$ ؛ یعنی، f یک تابع C^∞ است که در همسایگی Q در N تعریف شده است. واضح است که Ψ_*f یک تابع C^∞ روی M است. حال عمل $\Psi_*P(t) \in \mathcal{T}_Q(N)$ روی f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\Psi_*P(t))(f) \equiv t(f \circ \Psi) \quad (24-4)$$

چون $f \circ \Psi \in F^\infty(P)$ ، می‌دانیم t چگونه روی آن عمل می‌کند و یک عدد حقیقی می‌دهد. بنابراین، سمت راست عبارت (۲۴-۴) یک عدد حقیقی خوش‌تعریف است. در سمت چپ، f یک تابع با مقدار حقیقی روی N و $\Psi_{*P}(t)$ یک بردار مماس از نقطه تصویر P است، که عمل آن روی f به‌طور منحصر به‌فردی توسط عبارت طرف راست داده می‌شود.

حال ببینیم عبارت (۲۴-۴) برحسب توابع "مختصه‌ای" چگونه به‌نظر می‌رسد. فرض کنید x^i ، به‌ازای $i = 1, 2, \dots, m$ مختصات P و y^α به‌ازای $\alpha = 1, 2, \dots, n$ یک تابع C^∞ با مقدار حقیقی روی M است. بنابراین، می‌توانیم با تابعی که برحسب مختصات بیان شده است، بنویسیم

$$y^\alpha \circ \Psi = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

حال می‌نویسیم $t = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i(P)$. به همین ترتیب،

$$\Psi_{*P}(t) = \sum_{\alpha=1}^n b^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(Q)$$

زیرا $\Psi_{*P}(t) \in \mathcal{T}_Q(N)$ و $\{\partial/\partial y^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ یک پایه $\mathcal{T}_Q(N)$ است. از قضیه ۴-۲-۸ و تعریف ۴-۲-۹، داریم

$$\begin{aligned} b^\alpha &= [\Psi_{*P}(t)](y^\alpha) = t(y^\alpha \circ \Psi) = t(f^\alpha) \\ &= \left[\sum_{i=1}^m a^i \partial_i(P) \right] (f^\alpha) = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_P \end{aligned}$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر به شکل ماتریسی نوشت

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & \partial f^1/\partial x^2 & \dots & \partial f^1/\partial x^m \\ \partial f^2/\partial x^1 & \partial f^2/\partial x^2 & \dots & \partial f^2/\partial x^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial f^n/\partial x^1 & \partial f^n/\partial x^2 & \dots & \partial f^n/\partial x^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$$

ماتریس $n \times m$ با n نمایش داده می‌شود و ماتریس ژاکوبی Ψ نسبت به مختصات x^i و y^α است.

دو حالت خاص که توجه دقیقتری می طلبند، حالتی‌اند که در آنها $M = \mathbb{R}$ و $N = \mathbb{R}$. در هر کدام، $\mathcal{T}_c(\mathbb{R})$ یک بعدی است با بردار پایه $d/du(c)$. وقتی $M = \mathbb{R}$ ، نگاشت به یک منحنی تبدیل می‌شود: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow N$ ، تنها بردار با تصویری جالب برای ما، عبارت است از $t = d/du(c)$ ، که در آن $\gamma(c) = P$. با استفاده از گزاره ۴-۲-۵، از (۴-۲۴) داریم

$$\left[\gamma_* \frac{d}{du}(c) \right] f = \frac{d}{du} f \circ \gamma \Big|_{u=c} = [\mathbf{Y}_*(c)](f)$$

این رابطه مبین این نکته است که دیفرانسیل یک منحنی در c ، همان بردار مماس در $\gamma(c)$ است. وقتی $N = \mathbb{R}$ ، با یک تابع با مقدار حقیقی سروکار داریم: $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. دیفرانسیل f در P عبارت است از $f_*: \mathcal{T}_P(M) \rightarrow \mathcal{T}_c(\mathbb{R})$ ، که در آن $c = f(p)$. چون $\mathcal{T}_c(\mathbb{R})$ یک بعدی است، برای یک مماس $t \in \mathcal{T}_P(M)$ داریم

$$f_*(t) = a \frac{d}{du}(c) \quad (۴-۲۶ الف)$$

فرض کنید $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه روی \mathbb{R} باشد. در این صورت

$$[f_*(t)](g) = a \frac{dg}{du} \Big|_c$$

سمت چپ می‌دهد: $[f_*(t)](g) = t(f \circ g)$. بنابراین داریم

$$t(f \circ g) = a \frac{dg}{du}$$

برای یافتن a ، قرار می‌دهیم $g(u) = u$ ، که تابع همانی است؛ در این صورت $dg/du = 1$ و $t(f \circ g) = t(f) = a$. با قرار دادن در (۴-۲۶ الف)، می‌رسیم به

$$f_*(t) = t(f) \frac{d}{du}(c) \quad (۴-۲۶ ب)$$

چون $\mathcal{T}_c(\mathbb{R})$ یک بعدی است، لازم نیست $d/du(c)$ را بنویسیم. بنابراین، دیفرانسیل f را، که با $df \equiv f_*$ نمایش می‌دهیم، به‌عنوان یک نگاشت $df: \mathcal{T}_P(M) \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که

به صورت زیر بیان می‌شود

$$(df)(\mathbf{t}) = \mathbf{t}(f) \quad (27-4)$$

در حالت خاص، اگر f تابع مختصه‌ای x^i و \mathbf{t} مماس بر منحنی مختصه‌ای \mathcal{P} باشد، می‌رسیم به

$$dx^i(\partial_j(P)) = \partial_j x^i(P) = \delta_j^i \quad (28-4)$$

این رابطه، نشان می‌دهد که $\{dx^i\}_{i=1}^m$ همزاد پایه $\{\partial_j(P)\}_{j=1}^m$ از $\mathcal{T}_P(M)$ است.

مثال ۴-۲-۶: فرض کنید $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مقدار حقیقی روی M باشد، فرض کنید x^i معرف مختصات در P باشد. df را بر حسب توابع مختصه‌ای بیان می‌کنیم. برای $\mathbf{t} \in \mathcal{T}_P(M)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i(P)$$

و

$$df(\mathbf{t}) = \mathbf{t}(f) = \sum_{i=1}^m a^i [\partial_i(P)](f) = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i f$$

اما از قضیه ۴-۲-۸ نتیجه می‌گیریم: $a^i = \mathbf{t}(x^i)$. بنابراین، معادله (۲۷-۴) می‌دهد

$$a^i = \mathbf{t}(x^i) = (dx^i)(\mathbf{t})$$

بنابراین، داریم

$$(df)(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)[(dx^i)(\mathbf{t})]$$

چون این رابطه برای تمام $\mathbf{t} \in \mathcal{T}_P(M)$ صادق است، داریم

$$df = \sum_{i=1}^M (\partial_i f) dx^i$$

این فرمول کلاسیکی برای دیفرانسیل یک تابع f به شمار می‌آید.

تمرین

۱-۲-۱ $\partial_i x^i$ را محاسبه کنید و نشان دهید اگر $t = \sum a^i \partial_i(P)$ یک مماس در P باشد، در این صورت

$$a^i = t(x^i) \quad \text{و} \quad t = \sum_{i=1}^m (t x^i) \partial_i(P)$$

۳-۴ آنالیز تانسوری روی خمینه‌ها

تا اینجا، فضاهای برداری را مطالعه کردیم، فراگرفتم که چگونه از بردارها تانسورها را بسازیم، با خمینه‌ها (تجرید فضاها) آشنا شدیم، دیدیم چگونه با استفاده از ایده مماس و یک منحنی بردارها را در یک تک‌نقطه بسازیم و حتی بردارهای دوگان dx^i با بردارهای مختصه‌ای $\partial_i(P)$ در نقطه P از یک خمینه را یافتیم. از این رو تمام چیزهایی را که برای مطالعه آنالیز تانسوری لازم است، در اختیار داریم.

۱-۳-۴ میدانهای برداری

می‌خواهیم ببینیم یک میدان برداری در یک خمینه چیست. برای شروع تعریف زیر را در نظر بگیرید.

تعریف ۱-۳-۴: گردایه (اجتماع) تمام مماسها در نقاط مختلف یک خمینه M با $T(M)$ نمایش داده می‌شود و به آن کلاف مماسهای M می‌گویند

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} \mathcal{T}_P(M)$$

می‌توان نشان داد که $T(M)$ یک خمینه $2m$ بعدی است با $m = \dim M$. اکنون می‌توان یک میدان برداری تعریف کرد.

تعریف ۲-۳-۴: یک میدان برداری X روی یک زیرمجموعه U ی خمینه M عبارت است از نگاشت $X: U \rightarrow T(M)$ ، به طوری که $X(P) \in \mathcal{T}_P(M)$. حوزه X عبارت است از U و فضای برد آن $T(M)$ است.

به زبان ساده، یک میدان برداری روی U ماشینی است که وقتی به ورودی آن یک نقطه از U را بدهید، یک بردار مماس می‌دهد.

برحسب مختصات x^i ، در هر نقطه $P \in M$ داریم

$$X(P) = X_P^i \partial_i(P)$$

که در آن اعداد حقیقی X_P^i ، مؤلفه‌های $X(P)$ در پایه $\{\partial_i(P)\}$ هستند. وقتی P در U تغییر کند، عدد حقیقی X_P^i تغییر می‌کند. بنابراین، می‌توانیم X_P^i را به‌عنوان تابعی از P در نظر بگیریم و تابع با مقدار حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow M: X^i$ را با $X^i(P) \equiv X_P^i$ تعریف کنیم. بنابراین، مؤلفه‌های یک میدان برداری توابع با مقدار حقیقی روی M هستند.

مثال ۴-۳-۱: فرض کنید $M = \mathbb{R}^3$. در هر نقطه $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ، فرض کنید $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 باشد. فرض کنید فضای برداری در P باشد. در این صورت $T(\mathbb{R}^3)$ مجموعه تمام فضاهای برداری \mathcal{V}_P برای همه مقادیر $P \in \mathbb{R}^3$ است.

می‌توانیم مقدار میدان الکتریکی در یک نقطه‌ای واقع در \mathbb{R}^3 را ابتدا با مشخص کردن نقطه، مثلاً به‌صورت (x_0, y_0, z_0) ، تعیین کنیم. این کار به نحو منحصر به فردی فضای مماسی $\mathcal{T}_{(x_0, y_0, z_0)}(\mathbb{R}^3)$ را تعیین می‌کند. وقتی فضای برداری را داشته باشیم، می‌توانیم این سؤال را که مؤلفه‌های میدان الکتریکی در آن فضا کدام‌اند، مطرح کنیم. این مؤلفه‌ها با سه عدد $E_x(x_0, y_0, z_0)$ ، $E_y(x_0, y_0, z_0)$ ، و $E_z(x_0, y_0, z_0)$ داده می‌شوند. استدلال برای هر میدان برداری دیگری نیز چنین است.

برای مشخص کردن یک "نقطه" در $T(\mathbb{R}^3)$ ، نیاز به سه عدد داریم تا موقعیت در \mathbb{R}^3 را تعیین کند و سه عدد دیگر که مؤلفه‌های میدان برداری در آن نقطه را بدهند. بنابراین، یک "نقطه" در $T(\mathbb{R}^3)$ با شش "مختصه" (x, y, z, E_x, E_y, E_z) داده می‌شود، و $T(\mathbb{R}^3)$ یک خمینه شش‌بعدی است.

می‌دانیم یک بردار (مماس) t ، در نقطه $P \in M$ چگونه روی یک تابع $f \in F^\infty(P)$ عمل می‌کند و یک عدد حقیقی $t(f)$ ، می‌دهد. می‌توانیم این‌را، نقطه به نقطه، برای یک میدان برداری X تعمیم دهیم و یک تابع $X(f)$ به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$[X(f)](P) \equiv [X(P)](f) \quad \forall P \in U \quad (29-4)$$

که در آن U یک زیرمجموعه M است که هم X و هم f روی آن تعریف شده‌اند. سمت راست خوش‌تعریف است، زیرا می‌دانیم چگونه $X(P)$ ، بردار در P ، روی توابع در نقطه عمل می‌کند و

عدد حقیقی $[X(P)](f)$ را می‌دهد. از سوی دیگر، در سمت چپ $X(f)$ را داریم که نقطهٔ P را به یک عدد حقیقی می‌نگارد. لذا، $X(f)$ یقیناً یک تابع با مقدار حقیقی روی M است. از این رو، می‌توانیم میدانهای برداری را مستقیماً به‌عنوان عملگرهای روی توابع C^∞ تعریف کنیم که در هر دو رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$X(fg) = [X(f)]g + fX(g)$$

یک نمونهٔ آشنا از میدان برداری، میدان برداری مختصه‌ای ∂_i است.

به‌طور کلی، $X(f)$ یک تابع C^∞ نیست، حتی اگر f چنین باشد. میدانی برداری که برای هر تابع C^∞ ، f یک تابع C^∞ ایجاد می‌کند، یک میدان برداری C^∞ نامیده می‌شود. چنین میدانی برداری دارای مؤلفه‌هایی است که در M توابع C^∞ هستند.

۲-۳-۴ تک‌صورتها و میدانهای تانسوری

فضاهای برداری، $\mathcal{T}_p(M)$ ، در هر نقطهٔ M را تعریف کردیم. همچنین پایه‌های مختصات $\{\partial_i(P)\}_{i=1}^m$ ، برای این فضاهای برداری را نیز ساختیم. در انتهای بخش ۲-۴ نشان دادیم که دیفرانسیلهای $\{dx^i\}_{i=1}^m$ یک پایه تشکیل می‌دهند که دوگان $\{\partial_i(P)\}$ است. حال توجه خود را به این فضای همزاد، که آن را با $\mathcal{T}_p^*(M)$ نشان می‌دهیم، معطوف می‌کنیم. با توجه به مجموعهٔ تمام $\mathcal{T}_p^*(M)$ ها در تمام نقاط M ، به کلاف کتانژانت M دست می‌یابیم

$$T^*(M) = \bigcup_{P \in M} \mathcal{T}_p^*(M) \quad (۳۰-۴)$$

این فضای دوگان $T(M)$ در هر نقطهٔ M است. اکنون می‌توانیم مشابه میدان برداری را برای کلاف کتانژانت تعریف کنیم.

تعریف ۳-۳-۴: هر تک‌صورت ω روی یک زیرمجموعهٔ U از یک خمینهٔ M عبارت است از نگاشت $\omega: U \rightarrow T^*(M)$ چنان که $\omega(P) \in \mathcal{T}_p^*(M)$. بنابراین، تک‌صورت عبارت است از "تابعی" که وقتی یک نقطهٔ $P \in M$ مفروض باشد یک بردار دوگان $\omega(P) \in \mathcal{T}_p^*(M)$ تولید کند.

اگر ω یک تک-صورت و X یک میدان برداری روی M باشد، در این صورت $\omega(X)$ تابعی با مقدار حقیقی روی M است که، به‌طور طبیعی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[\omega(X)](P) = [\omega(P)][X(P)]$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $\underbrace{P \text{ در } P \text{ یک تابع خطی در } P}_{\text{یک عدد حقیقی در } P}$

نمونه اصلی تک-صورت عبارت است از دیفرانسیل مختصه‌ای dx^i .

به‌طور کاملاً مشابهی با حالت میدانهای برداری، ω را می‌توان برحسب پایه‌های $\{dx^i\}$ نوشت

$$\omega = \omega_i dx^i$$

در اینجا، ω_i ها، یعنی مؤلفه‌های ω ، توابع حقیقی-مقدار روی M هستند.

با در اختیار بودن فضاهای برداری $\mathcal{T}_P(M)$ و $\mathcal{T}_P^*(M)$ ، می‌توانیم تمام انواع تانسورها در هر نقطه P را بسازیم. اجتماع تمام این تانسورها را کلاف تانسورها می‌گویند و می‌توان مطابق معمول، یک میدان تانسوری تعریف کرد. به این ترتیب، به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۴-۳-۴: فرض کنید، $\mathcal{T}_P(M)$ و $\mathcal{T}_P^*(M)$ فضاهای تانزانت و کتانزانت در $P \in M$ باشند. در این صورت مجموعه تانسورهای نوع (r, s) روی $\mathcal{T}_P(M)$ را با $\mathcal{T}_{P,s}^r(M)$ نشان می‌دهند. کلاف تانسورهای نوع (r, s) روی M ، که با $T_s^r(M)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از

$$T_s^r(M) = \bigcup_{P \in M} \mathcal{T}_{P,s}^r(M)$$

میدان تانسوری T_s^r از نوع (r, s) روی زیرمجموعه‌ای چون U از M عبارت است از نگاشت $T_s^r(P) \in \mathcal{T}_{P,s}^r(M)$ که به‌طوری که $T_s^r : U \rightarrow T_s^r(M)$

در حالت خاص، اگر $r = s = 0$ ، با توابع حقیقی-مقدار مواجهیم. به‌ازای $r = 1$ و $s = 0$

داریم: $T_0^1 = T(M)$ ، و میدان تانسوری، میدانی برداری است. به‌ازای $r = 0$ و $s = 1$

و $T_1^0(M) = T^*(M)$ ، و میدان تانسوری به یک تک-صورت تبدیل می‌شود.

مؤلفه‌های T_s^r نسبت به مختصات x^i عبارت‌اند از m^{r+s} تابع حقیقی-مقدار:

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_s}^{i_1, i_2, \dots, i_r} = T_s^r(dx^{i_1}, dx^{i_2}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \partial_{j_2}, \dots, \partial_{j_s})$$

تمرین

۴-۳-۱ فرض کنید x^i توابع مختصات روی یک زیرمجموعه M باشند. $\omega(X)$ را برحسب توابع مؤلفه‌ای ω و X بیان کنید.

۴-۴ حساب دیفرانسیل و انتگرال بروننی

تانسورهای شبه‌متقارن، از اهمیت کاربردی خاصی برخوردارند. قالب‌بندی جبری این تانسورها را در بخش ۴-۱ مطالعه کردیم. حال آنها را به مثابه توابعی روی خمینه‌ها بررسی می‌کنیم.

۴-۴-۱ صورتهای دیفرانسیلی

تعریف ۴-۴-۱: فرض کنید M یک خمینه و P یک نقطه از M باشد. فرض کنید $\Lambda^p_P(M)$ معرف فضای تمام تانسورهای پادمقارن مرتبه p روی فضای مماس (تانزانته) در P باشد. فرض کنید $\Lambda^p_P(M)$ اجتماع همه $\Lambda^p_P(M)$ ها به‌ازای تمام $P \in M$ باشد. یک p -صورت (دیفرانسیلی) ω عبارت است از نگاشت $\omega: U \rightarrow \Lambda^p(M)$ به‌طوری که $\omega(P) \in \Lambda^p_P(M)$ ، که در آن مطابق معمول، U یک زیرمجموعه M است.

چون $\{dx^i\}_{i=1}^m$ پایه‌ای برای $T^*_P(M)$ در هر نقطه $P \in M$ است پس،

$$\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\}$$

پایه‌ای است برای p -صورتهای تمام خواص جبری اثبات شده در بخش ۴-۱، در مورد این p -صورتهای در هر نقطه $P \in M$ ، صادق‌اند.

چون ω از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند، می‌توانیم مشتقهای ω را تعریف کنیم. یادآور می‌شویم که $\Lambda^0(M)$ ، مجموعه صفر-صورتهای همان توابع حقیقی-مقدار روی M هستند. همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر f یک صفر-صورت باشد، در این صورت df ، دیفرانسیل f ، یک تک-صورت است. بنابراین، عملگر دیفرانسیلی d از یک صفر-صورت، یک تک-صورت تولید می‌کند. این واقعیت که این معنا را می‌توان به p -صورتهای تعمیم داد، موضوع قضیه بعدی است. مشتق بروننی. قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۴-۴-۲: برای یک زیرمجموعه U از M ، یک عملگر منحصر به‌فرد:

$$d: \Lambda^p(U) \rightarrow \Lambda^{p+1}(U)$$

چنان وجود دارد که به‌ازای هر $\omega \in \Lambda^p(M)$ و $\eta \in \Lambda^q(M)$ داریم

$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \quad (\text{الف})$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \quad (\text{ب})$$

$$d(d\omega) = 0, \quad \omega \text{ به‌ازای هر } \omega \quad (\text{ج})$$

$$df = (\partial_i f) dx^i, \quad f, \text{ مقدار حقیقی-مقدار } f \quad (\text{د})$$

عملگر d را عملگر مشتق برونوی می‌گویند.^۱

مثال ۴-۴-۱: در نظریه الکترومغناطیس نسبیتی، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی با یکدیگر تانسور میدان الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهند. این تانسور، تانسوری شبه‌متقارن با مرتبه ۲ است، که می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} F = & -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz \\ & + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن t ، مختصه زمانی است و واحدها چنان‌اند که c ، یعنی سرعت نور، برابر یک باشد. حال مشتق برونوی F را می‌گیریم. در این فرایند، از این نکته بهره می‌گیریم که $df = \partial_i f dx^i$ و $d(dx^i \wedge dx^j) = 0$ و در تعیین dE_i و dB_j ، تنها جملاتی را در نظر می‌گیریم که نقش آنها غیرصفر است:

$$\begin{aligned} dF = & - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dx - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right) \wedge dt \wedge dy \\ & - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} dx + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right) \wedge dt \wedge dz + \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) \wedge dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

با جمع کردن جملات مشابه و در نظر گرفتن تغییر علامت ناشی از پادمقارن بودن ضرب برونوی،

۱. برای اثبات این قضیه نگاه کنید به:

داریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz \\ &+ \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dt \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left[\left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_z \right] dt \wedge dx \wedge dy + \left[\left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_y \right] dt \wedge dx \wedge dz \\ &+ \left[\left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_x \right] dt \wedge dy \wedge dz + (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

با توجه به معادلات ماکسول، هر یک از نمونه‌های $d\mathbf{F}$ صفر می‌شوند. بنابراین، وقتی \mathbf{F} را به صورت (۱) تعریف می‌کنیم، می‌توانیم دو تا از معادلات ماکسول، معادلات به اصطلاح همگن، را به صورت معادله ساده زیر بنویسیم:

$$d\mathbf{F} = 0$$

مثال ۴-۴-۲: تانسور میدان الکترومغناطیسی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

که در آن α و β مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌گیرند و ۰ اندیس زمان به شمار می‌آید. فرض کنید $\mathbf{p} = p_\alpha dx^\alpha$ تک‌صورت تکانه و

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \equiv \left(\frac{dp_\alpha}{d\tau} \right) dx^\alpha$$

مشتق آن نسبت به ویژه‌زمان τ باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{u} = u^\beta \partial_\beta$ چاربردار سرعت ذره است. در این صورت قانون نیروی لورنتس به صورت ساده زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = q\mathbf{F}(\mathbf{u})$$

که در آن q بار الکتریکی ذره‌ای به سرعت \mathbf{u} است. توجه کنید که \mathbf{F} ، یک تک‌صورت با \mathbf{u} ، که یک بردار است، منقبض می‌شود و در طرف راست یک تک‌صورت می‌دهد. بنابراین، هر دو طرف از یک نوع‌اند. درستی این ادعا را می‌توان به قرار زیر تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{d\tau} dx^\alpha &= q(F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta)(u^\gamma \partial_\gamma) = qF_{\alpha\beta} u^\gamma \left[\frac{1}{\gamma} (dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha)(\partial_\gamma) \right] \\ &= qF_{\alpha\beta} u^\gamma \left[\frac{1}{\gamma} (dx^\alpha) dx^\beta (\partial_\gamma) - \frac{1}{\gamma} (dx^\beta) dx^\alpha (\partial_\gamma) \right] \\ &= qF_{\alpha\beta} u^\gamma \left[\frac{1}{\gamma} dx^\alpha \delta_\gamma^\beta - \frac{1}{\gamma} dx^\beta \delta_\gamma^\alpha \right] = \frac{1}{\gamma} qF_{\alpha\beta} (u^\beta dx^\alpha - u^\alpha dx^\beta) \\ &= \frac{1}{\gamma} q(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}) u^\beta dx^\alpha = (qF_{\alpha\beta} u^\beta) dx^\alpha \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر از طرفین، می‌رسیم به

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = qF_{\alpha\beta} u^\beta$$

به‌ازای $\alpha = 1$ داریم

$$\frac{dp_1}{d\tau} = qF_{1\beta} u^\beta = q[F_{10} u^0 + f_{1r} u^r + F_{1r} u^r] \quad (1)$$

به یاد آورید که $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ که در آن

$$\begin{aligned} (d\tau)^\gamma &\equiv d\tau^\gamma = (dt)^\gamma - (dx^1)^\gamma - (dx^2)^\gamma - (dx^3)^\gamma \\ &= (dt)^\gamma \left\{ 1 - \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^\gamma + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^\gamma + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^\gamma \right] \right\} \\ &= (dt)^\gamma (1 - v^2) \end{aligned}$$

و $\mathbf{v} = (dx^1/dt, dx^2/dt, dx^3/dt)$ سرعت ذره است. چون $x^0 = t$ داریم

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

با قرار دادن در (۱) و با توجه به اینکه $F_{12} = -F_{21} = -B_2$, $F_{13} = B_2$, $F_{10} = -F_{01} = +E_1$ می‌رسیم به

$$\frac{dp_1}{dt\sqrt{1-v^2}} = q \left[E_1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + B_2 \frac{v_2}{\sqrt{1-v^2}} - B_2 \frac{v_2}{\sqrt{1-v^2}} \right]$$

یا

$$\frac{dp_1}{dt} = q[E_1 + (v_2 B_2 - v_2 B_2)] = [q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})]_1$$

سایر مؤلفه‌ها هم به همین ترتیب به دست می‌آیند. پس، با بیان برداری داریم:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

که همان شکل آشنای قانون نیروی لورنتس در الکترومغناطیس است.

در اینجا نیز، به ساده‌سازی که زبان فرما فراهم می‌آورد، توجه کنید.

یکی از ترکیب‌های عملگرها با سودمندی بسیار زیاد، عبارت است از ترکیب مشتق برون‌ی و عملگر ستاره‌ای هوج. یادآور می‌شویم که عملگر اخیر، بنا بر تعریف، عبارت است از:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(N-p)!} \varepsilon_{i_p+1, \dots, i_m}^{i_1, \dots, i_p} dx^{i_p+1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \quad (31-4)$$

که در آن m بعد خمینه است.

مثال ۳-۴-۴: حال $*\mathbf{F}$ و $\mathbf{d}(*\mathbf{F})$ را محاسبه می‌کنیم که در آنها $\mathbf{F} = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ تانسور میدان الکترومغناطیسی است.

$$*\mathbf{F} = *(F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) = F_{\alpha\beta} * (dx^\alpha \wedge dx^\beta) = F_{\alpha\beta} \frac{1}{\nu!} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

حال، \mathbf{d} را به این دو-صورت اعمال می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(*\mathbf{F}) &= \mathbf{d} \left(\frac{1}{\nu!} F_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \\ &= \frac{1}{\nu!} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta, \gamma} dx^\gamma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

که در آن $F_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \partial F_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma$. حال F را برحسب E و B می‌نویسیم

$$F = -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (۱)$$

بنابراین عبارت، در حالت خاص، نتیجه می‌شود که اگر $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ در این صورت $F_{01} = -F_{10} = -1/2 E$ والی آخر. ضریب $1/2$ در محاسبات بعدی اهمیت دارد. اکنون می‌توانیم $d(*F)$ را بسط دهیم و با استفاده از معادله (۱) آن را برحسب E و B بنویسیم. بعد از یک رشته محاسبات طولانی ولی بی‌دردسر، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} d(*F) = & \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right)_z \right] dt \wedge dx \wedge dy \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right)_y \right] dt \wedge dz \wedge dx \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right)_x \right] dt \wedge dy \wedge dz + (\nabla \cdot \mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (۲)$$

معادلات ناهمگن ماکسول عبارت‌اند از

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (۳)$$

که در آن ρ و \mathbf{J} به ترتیب چگالی بار و جریان هستند. می‌توانیم این دو چگالی را با هم به صورت یک تک‌صورت چار-جریان بنویسیم:

$$\mathbf{J} = J_\alpha dx^\alpha$$

بنابراین

$$*\mathbf{J} = J_\alpha (*dx^\alpha) = J_\alpha \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho}^\alpha dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

$$\begin{aligned}
 &= -J_x dx \wedge dy \wedge dz - J_y dt \wedge dy \wedge dz - J_z dt \wedge dz \wedge dx \\
 &\quad - J_z dt \wedge dx \wedge dy \\
 &= \rho dx \wedge dy \wedge dz - J_x dt \wedge dy \wedge dz - J_y dt \wedge dz \wedge dx \\
 &\quad - J_z dt \wedge dx \wedge dy
 \end{aligned} \tag{۴}$$

در اینجا، از این نکته‌ها بهره گرفته‌ایم که $\mathbf{J} = (J^x, J^y, J^z) = (J_x, J_y, J_z)$ و $\rho = J^0 = -J_0$. با مقایسهٔ معادلات (۲)، (۳) و (۴) ملاحظه می‌کنیم که به زبان صورتها، معادلات ناهمگن ماکسول، ظاهر سادهٔ زیر را دارند

$$d(*\mathbf{F}) = 4\pi(*\mathbf{J})$$

صورت‌های بسته و دقیق. حل تمرین ۴-۴-۲ نشان می‌دهد که رابطهٔ $d^2\omega = 0$ دست‌کم در \mathbb{R}^3 ، با $\nabla \times (\nabla f) = 0$ و $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ هم‌ارز است. معمولاً در فیزیک مرسوم است که در جهت عکس نیز حرکت می‌کنند، یعنی، با داشتن $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، می‌توان فرض کرد که به‌ازای تابعی مانند f ، داریم: $\mathbf{E} = \nabla f$. به همین ترتیب $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ دلالت می‌کند بر اینکه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

شبيه گزارهٔ بالا برای یک p -صورت کلی کدام است؟ صورت ω که در رابطهٔ $d\omega = 0$ صدق می‌کند، صورت بسته نامیده می‌شود. صورت دقیق عبارت است از صورتی که می‌توان آن را به شکل $\omega = d\eta$ نوشت. بنابراین، هر صورت دقیقی خودبه‌خود بسته است. این حکم لم پوانکاره است. به‌طوری که در زیر می‌آید، عکس این لم فقط زمانی صادق است که ناحیهٔ تعریف صورت از نظر توپولوژیکی ساده باشد.

یک p -صورت ω را در نظر بگیرید که روی ناحیهٔ U از یک خمینهٔ M تعریف شده است. اگر تمام منحنیهای بسته در U را بتوان به یک نقطه در U منقبض کرد، می‌گوییم U منقبض و به یک نقطه تبدیل می‌شود. اگر ω برای یک نقطهٔ P روی M تعریف نشده باشد، در این صورت هر U که شامل P باشد، به یک نقطه قابل انقباض نیست. دلیل این امر آن است که محدودهٔ تعریف ω عبارت است از {تمام نقاط U جز P } و از این رو یک منحنی بسته حول P نمی‌تواند به یک نقطه در U' فشرده شود. در فصل اول با یک نمونه از این مورد برخورد کردیم. اکنون می‌توانیم عکس لم پوانکاره را به‌عنوان یک قضیه بیان کنیم.

قضیه ۴-۴-۳: (عکس لم یوانکاره) فرض کنید U چنان ناحیه‌ای در خمینه M باشد، به طوری که U منقبض و به یک نقطه تبدیل شود. فرض کنید ω یک p -صورت روی U باشد به طوری که $d\omega = 0$. در این صورت یک $(p-1)$ -صورت η روی U چنان وجود دارد که

$$\omega = d\eta$$

این قضیه به کمک مثال زیر تشریح می‌شود.^۱

مثال ۴-۴-۴: تانسور میدان الکترومغناطیسی $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ یک دو-صورت است که در $dF = 0$ صدق می‌کند. از این رو، یک دو-صورت بسته است. مطابق عکس لم یوانکاره، اگر F از یک ناحیه U از \mathbb{R}^4 خوش‌تعریف باشد، در این صورت باید یک تک-صورت η چنان وجود داشته باشد که $F = d\eta$.

حال، این تک-صورت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\eta = A_\alpha dx^\alpha$$

در این صورت $d\eta = A_{\alpha,\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha$ و داریم

$$F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = A_{\alpha,\beta} dx^\beta \wedge dx^\alpha$$

یا

$$(F_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha}) dx^\alpha \wedge dx^\beta = 0$$

برای اینکه ضریب را مساوی صفر قرار دهیم باید مطمئن شویم که در $dx^\alpha \wedge dx^\beta$ ، i از کوچکتر است. از اینجا می‌رسیم به

$$\sum_{\alpha < \beta} (F_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} + A_{\alpha,\beta}) dx^\alpha \wedge dx^\beta = 0$$

۱. برای اثبات ر. ک.:

بنابراین

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

- چاربردار A^α ، همان چارپتانسیل نظریه الکترومغناطیسی نسبیتی است. توجه کنید که $(p-1)$ -صورت قضیه ۴-۴-۳ منحصر به فرد نیست. در واقع، اگر a یک $(p-2)$ -صورت باشد، در این صورت ω را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\omega = d(\eta + da)$$

زیرا $d(da)$ متحد با صفر است. این آزادی در انتخاب η ناوردایی پیمانه‌ای نامیده می‌شود، و تعمیم آن نقش مهمی در فیزیک برهم‌کنشهای بنیادی ایفا می‌کند.

۴-۴-۲ هندسه ریمانی و صورتهای بردار-مقدار

قبلاً فقط نظریه نسبیت را مرتبط با هندسه تلقی می‌کردند. ولی اخیراً، با ظهور نظریه میدان پیمانه‌ای، ارتباط بسیار عمیقی بین چهار برهم‌کنش بنیادی (گرانش، الکترومغناطیس، نیروی هسته‌ای ضعیف و نیروی هسته‌ای قوی) و ایده‌های هندسی برقرار شده است. بنابراین، ایده‌ها و روشهای هندسی به‌طور فزاینده‌ای برای فیزیکدانان اهمیت پیدا کرده‌اند.

هندسه (دیفرانسیل)، علاوه بر کاربردهایش، چنان سادگی و ظرافت ذاتی دارد که مطالعه آن مقدار زیادی ترضیه خاطر ایجاد می‌کند. لذا ابتدا با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۴-۴-۴: خمینه ریمان عبارت است از خمینه مشتق‌پذیر M با میدان تانسوری C^∞ متقارن، $g \in \mathcal{P}_2^0(M)$ ، به طوری که در هر نقطه $P \in M$ ، کمیت $g(P)$ ضرب داخلی است. بنابراین، اگر u و v میدانهای برداری C^∞ روی M باشند، در این صورت $g(u, v)$ یک تابع C^∞ روی M است.

وقتی g روی M تعریف شد، می‌توانیم بردارهای راست‌هنجار را در هر نقطه M به دست آوریم. یعنی، می‌توانیم میدانهای برداری راست‌هنجار $\{e_i\}$ را چنان بسازیم که در هر نقطه $P \in M$:

$$e_i \cdot e_j \equiv g(e_i, e_j) = \eta_{ij} \equiv \pm \delta_{ij}$$

خمینهٔ ریمان عموماً تخت نیست (مفهوم تخت بودن بعداً تعریف خواهد شد). یکی از راههای یافتن تخت یا منحنی بودن ذاتی فضا این است که بردار را به موازات خودش و به همان مقدار در دو امتداد عمود بر هم جابه‌جا کنیم، مجدداً تغییر بردار را بیابیم، سپس ترتیب دو انتقال را عوض و این دو تغییر را با هم مقایسه کنیم. در یک فضای تخت این دو تغییر یکسان‌اند، ولی به‌طور کلی این‌طور نیست. سطح یک کرهٔ نمایشی از این معنا را فراهم می‌آورد. فرض کنید یک بردار عمود بر استوا داریم. برای اینکه اثر انحنا را زیاد کنیم، این بردار را روی استوا و به موازات خودش به اندازهٔ یک‌چهارم محیط استوا جابه‌جا، سپس آن را تا قطب شمال جابه‌جا می‌کنیم. مقداری را که بردار تغییر کرده است اندازه‌گیری می‌کنیم. مجدداً با بردار عمود بر استوا شروع می‌کنیم، ولی این بار آن را به موازات خودش تا قطب شمال انتقال می‌دهیم و آنگاه در مسیری عمود بر این مسیر آن را به اندازهٔ یک‌چهارم محیط کره جابه‌جا می‌کنیم. مجدداً تغییر بردار را اندازه می‌گیریم. بدیهی است که این دو تغییر با یکدیگر مساوی نخواهند بود.

بحث شهودی بالا باید به روشن شدن این مطلب کمک کند که انحناى یک خمینه (فضا) به‌طور طبیعی به تغییرات (مشتقات دوگانه) بردارها مربوط است. بنابراین، برای یافتن انحناى فضا به نحوهٔ تغییر بردارها توجه می‌کنیم. چون یک تغییر با اعمال مشتق خارجی به اشیاء محاسبه می‌شود، تغییر در یک بردار X عبارت است از dX که هم یک بردار و هم یک تک‌صورت است. به این دلیل است که در اینجا تک‌صورت‌های بردار-مقدار را مطالعه می‌کنیم. هدف ما این است که با توجه به تغییر در بردارها، انحناى فضا را پیدا کنیم. مشتق خارجی را آنقدر به بردارها اعمال می‌کنیم تا به آنچه که انحناى خمینه نامیده می‌شود برسیم.

در هندسهٔ دیفرانسیل همه چیز به‌صورت موضعی اتفاق می‌افتد، و انتقالها و جابه‌جایی‌ها جملگی بینهایت کوچک‌اند. قبلاً با عملگری که برای چنین تغییرات بینهایت کوچکی مناسب است (عملگر مشتق بروننی) مواجه شده‌ایم؛ حال به این عملگر با دقت بیشتری نگاه می‌کنیم. برای یک تابع روی M ، داریم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = dx^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (۳۲-۴)$$

که در آن x^i ها توابع مختصه‌ای‌اند. توجه کنید که:

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{j < i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \end{aligned}$$

بنابراین $d^2 f = 0$ به این معناست که مشتقات جزئی آمیخته به ترتیب مشتقها بستگی ندارد. از نظر هندسی، منظور این است که برای جابه‌جایی‌های کوچک dx^i و dx^j ، اگر حرکت در دو جهت عمود بر هم باشد، یکبار با یک ترتیب و بار دیگر به ترتیب عکس، مقدار تابع یکسان می‌ماند. این مطلب، حتی اگر فضا خمیده باشد، صادق است.

تابع f دلخواه است. بنابراین، می‌توانیم معادله (۴-۳۲) را به معادله‌ای نمایشگر یک عملگر کلی \mathbb{d} تلقی کنیم که، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\mathbb{d} = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (۴-۳۳ \text{ الف})$$

به طوری که $df = \mathbb{d}f$ و $d^2 f = \mathbb{d}^2 f$ معمولاً به \mathbb{d} یک نقطهٔ P متصل می‌کنیم تا نشان دهیم که مقدار در آن نقطه محاسبه، یا حرکت‌های بینهایت کوچک از آن نقطه آغاز می‌شود. بنابراین، می‌نویسیم:

$$\mathbb{d}P = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (۴-۳۳ \text{ ب})$$

توجه کنید که $\mathbb{d}P$ یک تک‌صورت بردار-مقدار، یعنی برداری با مؤلفه‌های تک‌صورت dx^i است. با وجودی که $\mathbb{d}P$ برحسب دستگاه مختصات (x^i) تعریف شده، مستقل از مختصات است (تمرین ۴-۴-۶).

به طور کلی، $\partial/\partial x^i$ ها راست‌هنجار نیستند. لیکن، بهتر است در هر نقطه خمینه پایه‌های راست‌هنجار به‌کار برود. از این رو، در هر نقطهٔ $P \in M$ میدانهای برداری راست‌هنجار $\{e_i\}$ و تک‌صورت‌های متناظر $\{\epsilon^j\}$ آنها را انتخاب می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\mathbb{d}P = \epsilon^j e_j \quad (۴-۳۳ \text{ ج})$$

این نکته را هم در نظر داریم که ϵ^j و e_j نه مؤلفه، بلکه اعضای زام $\{\epsilon^j\}$ و $\{e_j\}$ هستند. حال \mathbb{d} را به (۴-۳۳) اعمال می‌کنیم؛ با استفاده از این واقعیت که $\mathbb{d}^2 P = 0$ (زیرا به‌ازای تمام توابع، $\mathbb{d}^2 f = 0$). در این صورت داریم:

$$0 = \mathbb{d}^2 P = \mathbb{d}(\epsilon^j e_j) = \mathbb{d}\epsilon^j e_j + (-1)^j \epsilon^j \wedge \mathbb{d}e_j \quad (۴-۳۴ \text{ الف})$$

که از خاصیت (ب) در قضیه ۴-۴-۲ درباره عملگر مشتق بروننی که \mathbb{d} تعمیمی از آن به شمار می‌آید، استفاده کرده‌ایم. می‌دانیم که چگونه \mathbb{d} روی تک‌صورتها عمل می‌کند این کمیت همان مشتق بروننی است. از سوی دیگر، چون e_j یک بردار است، انتظار داریم $\mathbb{d}e_j$ یک تک‌صورت برداری-مقدار باشد. بنابراین، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbb{d}e_j = \omega_j^k e_k \quad (\text{ب } ۳۴-۴)$$

که در آن ω_j^k تک‌صورت هستند. با جایگزین کردن (ب) در (۴-۳۴الف) داریم

$$\circ = d\epsilon^j e_j - \epsilon^j \wedge \omega_j^k e_k = (d\epsilon^k - \epsilon^j \wedge \omega_j^k) e_k$$

بنابر استقلال خطی e_k ها می‌رسیم به

$$d\epsilon^k = \epsilon^j \wedge \omega_j^k \quad (\text{الف } ۳۵-۴)$$

رابطه راست‌هنجاری $e_i \cdot e_j = \pm \delta_{ij}$ محدودیت پادتقارنی زیر را به تک‌صورت‌های ω_j^i تحمیل می‌کند:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = \circ \quad (\text{ب } ۳۵-۴)$$

واضح است که $\{\omega_i^j\}$ کلیه اطلاعات مربوط به این موضوع را می‌دهد که پایه‌های $\{e_i\}$ و $\{\epsilon^i\}$ با دور شدن بینهایت کوچک از نقطه P چگونه تغییر می‌کند. اگر بتوانیم ω_i^j ها را بیابیم، هندسه فضا را (دست‌کم به طور موضعی) خواهیم فهمید. اما این ω_i^j ها باید در معادلات (۴-۳۵) صدق کنند، و به طوری که هم‌اکنون خواهیم دید، معادلات (۴-۳۵)، ω_i^j ها را به طور منحصر به فردی تعیین می‌کنند.

چون ϵ^j ها یک پایه تشکیل می‌دهند، می‌توانیم ω_i^j ها را برحسب آنها بیان کنیم:

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijk} \epsilon^k$$

که در آن $\omega_{ij} \equiv g_{ik} \omega_j^k$ شکل شاخص پایین ω_j^i است. توابع حقیقی-مقدار Γ_{ijk} ضرایب ارتباط نامیده می‌شوند. به اعتبار رابطه (۴-۳۵ب)، این ضرایب در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \circ \quad (\text{الف } ۳۶-۴)$$

از سوی دیگر، $d\epsilon^k$ که یک دو-صورت است، می‌تواند به قرار زیر بیان شود

$$d\epsilon^k = \frac{1}{\sqrt{}} C_{ij}^k \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

با

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0$$

که در آن C_{ij}^k همان ضرایب (توابع) بسط هستند. می‌توانیم $d\epsilon^k$ را مستقیماً نیز برحسب Γ_{ijk} بنویسیم

$$\begin{aligned} d\epsilon^k &= g^{ik} \epsilon^j \wedge \omega_{ji} = g^{ik} \epsilon^j \wedge (\Gamma_{jil} \epsilon^l) \\ &= g^{ik} \Gamma_{jil} \epsilon^j \wedge \epsilon^l = \frac{1}{\sqrt{}} g^{ik} (\Gamma_{jil} - \Gamma_{lij}) \epsilon^j \wedge \epsilon^l \end{aligned}$$

با مقایسه دو عبارت بالا برحسب $d\epsilon^k$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$C_{ji}^k = g^{ik} (\Gamma_{jil} - \Gamma_{lij})$$

با پایین آوردن شاخصها در دو طرف رابطه بالا، می‌رسیم به

$$C_{ijl} = \Gamma_{jil} - \Gamma_{lij} \quad (۴-۳۶)$$

معادلات (۴-۳۶) دقیقاً با (۴-۳۵) هم‌ارزند. اگر بتوانیم نشان دهیم که Γ های منحصر به فردی در (۴-۳۶) الف) و (۴-۳۶) ب) صدق می‌کنند، در این صورت منحصر به فرد بودن ω_{ij} نتیجه می‌شود. منحصر به فرد بودن Γ ها در تمرین ۴-۴ نشان داده شده است. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{}} (-C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij}) \quad (۴-۳۷)$$

حال ماتریسهای

$$\epsilon \equiv (\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^m) \quad e \equiv \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \quad \Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^m \\ -\omega_1^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\omega_1^m & -\omega_2^m & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

را که عناصر آنها تک-صورت یا بردار هستند، معرفی می‌کنیم. آنگاه معادلات (۴-۳۳ج)، (۴-۳۴ب) و (۴-۳۵ب) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$dP = \epsilon e$$

$$de = \Omega e \quad (۴-۳۸)$$

$$\Omega + \tilde{\Omega} = 0$$

این معادلات را معادلات ساختاری می‌نامند. می‌توانیم معادله (۴-۳۵الف) را به شکل ماتریسی نیز بنویسیم:

$$d\epsilon = \epsilon \wedge \Omega \quad (۴-۳۹)$$

این رابطه، شرط انتگرال‌پذیری نامیده می‌شود.

دیدیم که $d^2 P = 0$ با $d^2 f / \partial x^i \partial x^j = \partial^2 f / \partial x^j \partial x^i$ هم‌ارز است. که این خود نتیجه این واقعیت بود که تغییرات بینهایت کوچک در توابع با جابه‌جایی در دو راستای عمود بر هم به ترتیب انجام آنها بستگی نداشت. همچنین توجه کردیم که ممکن است برای بردارها چنین حکمی صدق نکند. بنابراین، اگر $d^2 e$ صفر نباشد، نباید متعجب شویم. در واقع باید مقدار آن به انحناى خمینه ارتباط داشته باشد. حال مقدار آن را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} d^2 e &= d(de) = d(\Omega e) = d\Omega e + (-1)^1 \Omega \wedge de \\ &= d\Omega e - \Omega \wedge (\Omega e) \\ &= (d\Omega - \Omega \wedge \Omega) e \\ &\equiv \Theta e \end{aligned} \quad (۴-۴۰)$$

که در آن

$$\Theta \equiv d\Omega - \Omega \wedge \Omega \quad (۴-۴۱)$$

ماتریس انحنا نامیده می‌شود.

می‌توانیم به شرایط انتگرال‌پذیری دیگری برسیم. با اعمال d به (۳۹-۴) داریم:

$$\begin{aligned} d(d\varepsilon) &= 0 = d\varepsilon \wedge \Omega + (-1)^1 \varepsilon \wedge d\Omega \\ &= \varepsilon \wedge \Omega \wedge \Omega - \varepsilon \wedge d\Omega \\ &= \varepsilon \wedge (-\Theta) \Rightarrow \varepsilon \wedge \Theta = 0 \end{aligned} \quad (42-4)$$

به همین ترتیب، با اعمال d به (۴۱-۴)، مطابق تمرین ۴-۴-۹، می‌رسیم به

$$d\Theta = \Omega \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega \quad (43-4)$$

این کمیت را اتحاد (همانی) بیانچی می‌گویند.

از تعریف Θ روشن می‌شود که این کمیت ماتریسی است با عناصر دوصورتی. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\theta_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon^k \wedge \varepsilon^l \quad (44-4)$$

که تانسور انحنای ریمان، R_{ijkl} ، را تعریف می‌کند. از پادمتقارن بودن Θ (که به‌عنوان یک مسئله بر عهده خواننده واگذار می‌شود) و معادله (۴۴-۴) می‌رسیم به

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0 \quad (\text{الف } 45-4)$$

$$R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0 \quad (\text{ب } 45-4)$$

به همین ترتیب، مطابق تمرین ۴-۴-۱۰، $\varepsilon \wedge \Theta = 0$ معادل است با

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \quad (\text{ج } 45-4)$$

تقارن دیگر R_{ijkl} ، که می‌توان با استفاده از معادله (۴۵-۴) نشان داد، عبارت است از

$$R_{ijkl} = R_{klij} \quad (45-4)$$

اثبات رابطه بالا را به‌عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم.

در کاربردها، معمولاً با متریک g شروع می‌کنیم که برحسب میدانهای برداری مختصه‌ای بیان شده است

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (46-4)$$

با

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) \equiv \partial_i \cdot \partial_j$$

سپس پایه‌های $\{e_i\}$ و $\{\epsilon^i\}$ به ترتیب برحسب $\{\partial_i\}$ و $\{dx^i\}$ ساخته می‌شوند، و به طریقی که در بالا مشخص شد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در زیر به چند مثال از این روش خواهیم پرداخت. اما، می‌توان مستقیماً برحسب $\{\partial_i\}$ و $\{dx^i\}$ نیز کار کرد و ضرایب اتصال لازم را تشکیل داد. در مثالهای زیر نشان می‌دهیم که این کار چگونه انجام می‌شود.

مثال ۴-۴-۵: فرض کنید $\{dx^i\}$ و $\{\partial_i\}$ میدانهای مختصه‌ای باشند. داریم

$$dP = dx^i \partial_i$$

و

$$d(\partial_i) = a_{ik}^j \partial_j$$

که در آن a_{ik}^j تکه‌صورت‌اند و از این رو می‌توانند به صورت ترکیبهای خطی از dx^k ها نوشته شوند

$$a_{ik}^j = \left[\begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right] dx^k$$

ضرایب $\{a_{ik}^j\}$ ضرایب اتصال، یا نمادهای کریستوفل نامیده می‌شوند. همچنین داریم:

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \cdot \partial_j$$

بنابراین

$$dg_{ij} = d(\partial_i) \cdot \partial_j + \partial_i \cdot d(\partial_j) = (a_{ik}^k \partial_k) \cdot \partial_j + \partial_i \cdot (a_{jk}^k \partial_k)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_i^k g_{kj} + a_j^k g_{ik} \\
 &= \begin{bmatrix} k \\ il \end{bmatrix} g_{kj} dx^l + \begin{bmatrix} k \\ jl \end{bmatrix} g_{ik} dx^l
 \end{aligned}$$

از سوی دیگر، چون g_{ij} یک تابع حقیقی-مقدار است، داریم

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} dx^l$$

از دو معادلهٔ اخیر می‌رسیم به

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \begin{bmatrix} k \\ il \end{bmatrix} g_{kj} + \begin{bmatrix} k \\ jl \end{bmatrix} g_{ik}$$

که وقتی شاخص پایین آورده شود، به طوری که

$$[j, il] \equiv \begin{bmatrix} k \\ il \end{bmatrix} g_{kj}$$

تبدیل می‌شود به

$$[j, il] + [i, jl] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \quad (۱)$$

به علاوه، رابطهٔ $\partial P = 0$ می‌دهد

$$[i, jk] + [i, kj] = 0 \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) مشابه معادلات (۴-۳۶) هستند. جواب منحصر به فرد این معادله عبارت است از

$$[i, jk] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right)$$

این همان نماد کریستوفل است که در آنالیز تانسوری کلاسیک (پراندیس) به کار می‌آید.

اکنون، می‌توانیم ملاحظه کنیم یک جابه‌جایی بینهایت کوچک در یک خمینه (منحنی) به چه معناست. فرض کنید همان طبیعی‌ترین معنایی را داشته باشد که می‌توان به آن نسبت داد. فرض کنید P یک نقطه از M و γ یک منحنی باشد که از P می‌گذرد، به طوری که $\gamma(c) = P$. برای یک δu بینهایت کوچک، فرض کنید $P' = \gamma(c + \delta u)$ یک نقطه روی γ و نزدیک به P باشد. مختصات P عبارت‌اند از $\{x^i(P')\}$ و مختصات P' ، $\{x^i(P')\}$ هستند. چون x^i ها توابع خوش‌رفتاری‌اند، $x^i(P') - x^i(P)$ اعداد حقیقی بینهایت کوچک‌اند. فرض کنید

$$\xi^i = x^i(P') - x^i(P)$$

$$\mathbf{v} = \xi^i \partial_i$$

را تشکیل دهید که در آن $\{\partial_i\}$ از بردارهای مماس در P تشکیل شده است. \mathbf{v} را جابه‌جایی بینهایت کوچک در P می‌نامیم. می‌توان نشان داد (تمرین ۴-۴-۱۱) که طول این بردار، یعنی $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ، عبارت است از

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g_{ij} \xi^i \xi^j$$

آن را طول کمان از P به P' می‌نامیم و طبعاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = g_{ij} \xi^i \xi^j$$

معمولاً dx^i (تک‌صورت نیست) را به جای ξ^i می‌نویسند، بنابراین

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (47-4)$$

که در آن dx^i ها اعداد حقیقی بینهایت کوچک هستند.

هم‌ارزی طول کمان معادله (۴۷-۴) و متریک معادله (۴۶-۴) علت این امر است که چرا در اغلب مسائل علمی به جای متریک از طول کمان استفاده می‌شود. وقتی طول کمان معلوم شد، متریک g_{ij} را می‌توان یافت. سپس کلیه کمیت‌های هندسی مربوطه را می‌توان از g_{ij} محاسبه کرد.

مثال ۴-۴-۶: اکنون به چند مثال از طول کمان و متریک‌های متناظر توجه می‌کنیم.

(الف) برای $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ، متریک اقلیدسی \mathbb{R}^3 است، با $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(ب) برای $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ ، متریک، مینکوفسکی \mathbb{R}^4 است؛ با $\eta_{ij} = g_{ij}$ که در آن $\eta_{ii} = 1$ ، $\eta_{zz} = \eta_{yy} = \eta_{xx} = -\eta_{tt} = 1$ و به‌ازای $i \neq j$ ، $\eta_{ij} = 0$.
 (ج) برای $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ، متریک از مختصات قطبی در \mathbb{R}^3 تشکیل شده است، با $g_{\theta\theta} = r$ ، $g_{r\theta} = 1$ و $g_{\varphi\varphi} = r \sin\theta$ و سایر مؤلفه‌ها صفر.
 (د) برای $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ ، متریک یک سطح کروی دوبعدی است با $g_{\varphi\varphi} = a \sin\theta$ و سایر مؤلفه‌ها برابر صفر.

(ه) برای $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$ ، متریک، متریک فریدمن است که در کیهانشناسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا $g_{tt} = -1$ ، $g_{\chi\chi} = a(t)$ و $g_{\theta\theta} = a(t) \sin\chi \sin\theta$ و سایر مؤلفه‌ها صفرند.
 (و) برای $ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + dr^2/(1 - 2M/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ، متریک، متریک شوارتزشیلد است با $g_{tt} = -(1 - 2M/r)^{1/2}$ و $g_{rr} = (1 - 2M/r)^{-1/2}$ و سایر مؤلفه‌ها صفرند.

توجه کنید که در تمام موارد بالا، دیفرانسیلها اعداد بینهایت کوچک هستند. برای هر طول کمانی، یک پایه راست‌هنجار تک‌صورت داریم

$$\mathbf{e}^z = dz, \mathbf{e}^y = dy, \mathbf{e}^x = dx \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3 \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{e}^z = dz, \mathbf{e}^y = dy, \mathbf{e}^x = dx \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^0 \otimes \mathbf{e}^0 \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{e}^0 = dt$$

$$\mathbf{e}^\varphi = r \sin\theta d\varphi, \mathbf{e}^\theta = r d\theta, \mathbf{e}^r = dr \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^r + \mathbf{e}^\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}^\varphi \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{e}^\varphi = a \sin\theta d\varphi, \mathbf{e}^\theta = a d\theta \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}^\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}^\varphi \quad (\text{د})$$

$$\mathbf{e}^x = a(t) d\chi, \mathbf{e}^1 = dt \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = -\mathbf{e}^t \otimes \mathbf{e}^t + \mathbf{e}^x \otimes \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}^\varphi \quad (\text{ه})$$

$$\mathbf{e}^\varphi = a(t) \sin\chi \sin\theta d\varphi, \mathbf{e}^\theta = a(t) \sin\chi d\theta$$

$$\mathbf{e}^t = (1 - 2M/r)^{1/2} dt \quad \text{با} \quad \mathbf{g} = -\mathbf{e}^t \otimes \mathbf{e}^t + \mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^r + \mathbf{e}^\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}^\varphi \otimes \mathbf{e}^\varphi \quad (\text{و})$$

$$\mathbf{e}^\varphi = r \sin\theta d\varphi, \mathbf{e}^\theta = r d\theta, \mathbf{e}^t = (1 - 2M/r)^{-1/2} dr$$

توجه کنید که در موارد بالا، دیفرانسیلها، تک‌صورت هستند.

میدان برداری $X \in T(M)$ که تحت عمل d تغییر نکند، موازی انتقال‌یافته است. بنابراین برای انتقال موازی X ، داریم

$$dX = 0$$

اگر X و Y میدانهای برداری باشند، در این صورت

$$d(X \cdot Y) = (dX) \cdot Y + X \cdot (dY)$$

در حالت خاص، اگر X و Y ، هر دو انتقال موازی پیدا کنند، در این صورت ضرب داخلی ثابت می ماند

$$d(X \cdot Y) = 0$$

منحنی $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ژئودزیک نامیده می شود، اگر وقتی منحنی را با طول کمان s پارامترسازی کنیم، مماس بر آن در امتداد منحنی انتقال موازی پیدا می کند.

مثال ۴-۴-۷: فرض کنید $M = \mathbb{R}^2$. طول کمان که توسط:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

داده می شود، می تواند به صورت $ds^2 = \epsilon^1 \otimes \epsilon^1 + \epsilon^2 \otimes \epsilon^2$ نوشته شود که در آن

$$\epsilon^1 \equiv \frac{dx}{y} \quad \text{و} \quad \epsilon^2 \equiv \frac{dy}{y}$$

تعریف شده است. بنابراین $\{\epsilon^1, \epsilon^2\}$ تک-صورت‌های راست هنجار هستند. از بررسی ϵ^1 و ϵ^2 ، همراه با این واقعیت که $dx(\partial_x) = dy(\partial_y) = 1$ و $dx(\partial_y) = dy(\partial_x) = 0$ ، بلافاصله نتیجه می شود که $e_1 = y\partial_x$ و $e_2 = y\partial_y$.

برای یافتن تانسور انحنا باید de را محاسبه کنیم. این مقدار از مشتق‌گیری برونی ϵ ها، به دست می آید:

$$\begin{aligned} de^1 &= d\left(\frac{1}{y}dx\right) = \frac{1}{y^2}dx \wedge dy = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \\ de^2 &= d\left(\frac{1}{y}dy\right) = -\frac{1}{y^2}dy \wedge dy = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

بنابراین، از (۴-۳۵) استفاده می‌کنیم تا ω_j^i را به دست آوریم، به طوری که:

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1$$

و

$$d\epsilon^k = \epsilon^j \wedge \omega_j^k$$

به ازای $k = 1$ ، داریم

$$d\epsilon^1 = \epsilon^1 \wedge \omega_1^1 + \epsilon^2 \wedge \omega_2^1 = \epsilon^2 \wedge \omega_2^1 = -\omega_1^2 \wedge \epsilon^2$$

از مقایسه این رابطه با (۱) نتیجه می‌شود

$$\omega_1^2 = -\epsilon^1 = -\omega_2^1$$

بنابراین، ماتریس Ω عبارت است از

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^1 \\ -\epsilon^1 & 0 \end{pmatrix}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} d\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & d\epsilon^1 \\ -d\epsilon^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \\ -\epsilon^1 \wedge \epsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \end{aligned}$$

و

$$\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^1 \\ -\epsilon^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^1 \\ -\epsilon^1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

از این رو، ماتریس انحنا عبارت است از

$$\Theta = d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon^1 \wedge \epsilon^2$$

این رابطه نشان می‌دهد که تنها مؤلفه مستقل مخالف صفر تانسور انحناى ریمان عبارت است از $R_{1212} = 12$.

مثال ۴-۴-۸: برای یک سطح کروی به شعاع a ، عنصر طول عبارت است از:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

بنابراین، فرمهای راست‌هنجار عبارت‌اند از

$$\epsilon^\theta = a d\theta \quad \text{و} \quad \epsilon^\varphi = a \sin \theta d\varphi$$

بردارهای متناظر به این قرارند:

$$e_\theta = \frac{1}{a} \partial_\theta \quad \text{و} \quad e_\varphi = \frac{1}{a \sin \theta} \partial_\varphi$$

این حکم را می‌توان به آسانی اثبات کرد، زیرا

$$e^\theta(e_\theta) = (a d\theta) \left(\frac{1}{a} \partial_\theta \right) = d\theta(\partial\theta) = 1$$

و مانند آن، از این رو، داریم

$$de^\theta = a d^2\theta = 0$$

$$de^\varphi = a(\cos \theta) d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{a} \cot \theta \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi$$

که می‌دهد:

$$(de^\theta \quad de^\varphi) = (\epsilon^\theta \quad \epsilon^\varphi) \wedge \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cot \theta}{a} \epsilon^\varphi \\ -\frac{\cot \theta}{a} \epsilon^\theta & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{\cot \theta}{a} \epsilon^\varphi \\ -\frac{\cot \theta}{a} \epsilon^\varphi & \cdot \end{pmatrix}$$

با دیفرانسیل گیری برونی، می‌رسیم به

$$d\Omega = \begin{pmatrix} \cdot & -\frac{1}{a^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi \\ \frac{1}{a^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi & \cdot \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، $\Omega \wedge \Omega = 0$ لذا ماتریس انحنا عبارت است از

$$\Theta = d\Omega = -\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ -1 & \cdot \end{pmatrix} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi$$

تتها مؤلفه مستقل تانسور انحنا ریمان عبارت است از

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -\frac{1}{a^2}$$

● همان‌طور که برای یک سطح کروی انتظار می‌رود، ثابت است.

واضح است که وقتی تمام g_{ij} ها در عبارت عنصر خطی برای تمام نقاط خمینه ثابت باشند، در این صورت به‌ازای تمام z ها، ϵ^z با dx^z متناسب خواهد بود و $d\epsilon^z = 0$. از این مطلب بلافاصله نتیجه می‌شود که $\Omega = 0$ و لذا $\Theta = 0$ ؛ یعنی، خمینه دارای هیچ انحنائی نیست. چنین خمینه‌ای را خمینه تخت می‌نامیم. پس، به‌ازای $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ داریم $\epsilon^x = dx$ ، $\epsilon^y = dy$ ، $\epsilon^z = dz$ و $d\epsilon^x = d\epsilon^y = d\epsilon^z = 0$. فضا تخت است.

اما، طولهای کمان یک فضای تخت به شکلهای مختلف با ضرایب غیربدیهی درمی‌آیند. آیا ماتریس انحنا Θ طول کمان تخت را تشخیص می‌دهد، یا می‌توانیم Θ را به این باور هدایت کنیم که با انحنا دارای این امتیاز اختصاصی شود که در عالم واقع چه‌موقع صفر است؟ در مثال زیر نشان می‌دهیم که ماتریس انحنا می‌تواند تخت بودن را مستقل از چگونگی شکل عنصر خط آن، آشکارسازی کند!

مثال ۴-۴-۹: در مختصات کروی عنصر خط (طول کمان) فضای اقلیدسی تخت \mathbb{R}^3 عبارت است از:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

می‌خواهیم ماتریس انحنا Θ را محاسبه کنیم. ابتدا به یک مجموعه راست‌هنگار از تک‌صورتها نیاز داریم، که بلافاصله از عبارت بالا به دست می‌آیند

$$\epsilon^r = dr \quad \epsilon^\theta = r d\theta \quad \epsilon^\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

بر طبق معادله (۴-۳۵ الف) برای یافتن Ω باید مشتقات خارجی این تک‌صورتها را محاسبه کنیم

$$d\epsilon^r = d^2 r = 0$$

$$d\epsilon^\theta = dr \wedge d\theta + r \underbrace{d^2 \theta}_0 = \epsilon^r \wedge \left(\frac{\epsilon^\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \epsilon^r \wedge \epsilon^\theta$$

$$\begin{aligned} d\epsilon^\varphi &= d(r \sin \theta) \wedge d\varphi = \sin \theta dr \wedge d\varphi + r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \sin \theta \epsilon^r \wedge \left(\frac{\epsilon^\varphi}{r \sin \theta} \right) + r \cos \theta \left(\frac{\epsilon^\theta}{r} \right) \wedge \left(\frac{\epsilon^\varphi}{r \sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r} \epsilon^r \wedge \epsilon^\varphi + \frac{\cot \theta}{r} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi \end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم از تعریف ω_j^i ، معادله (۴-۳۵ الف)، استفاده کنیم و ماتریس تک‌صورتها، Ω را پیدا کنیم. در محاسبه عناصر Ω باید به خاطر داشته باشیم که، این یک ماتریس شبه‌متقارن است؛ بنابراین، ω_j^i (بدون مجموع‌یابی روی i) صفر است و $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$. همچنین توجه کنید که $d\epsilon^k = 0$ به معنای $\omega_j^k = 0$ نیست. با در نظر داشتن این نکات، می‌توانیم به سادگی Ω را به دست آوریم (محاسبه به عنوان یک مسئله برعهده خواننده گذاشته می‌شود)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \epsilon^\theta & \frac{1}{r} \epsilon^\varphi \\ -\frac{1}{r} \epsilon^\theta & 0 & \frac{\cot \theta}{r} \epsilon^\varphi \\ -\frac{1}{r} \epsilon^\varphi & -\frac{\cot \theta}{r} \epsilon^\theta & 0 \end{pmatrix}$$

مشتق بروننی این ماتریس را می‌توان محاسبه کرد؛ نتیجه عبارت خواهد بود از

$$d\Omega = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \frac{\cot \theta}{r^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi \\ \cdot & \cdot & -\frac{1}{r^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi \\ -\frac{\cot \theta}{r^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi & \frac{1}{r^2} \epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi & \cdot \end{pmatrix}$$

که دقیقاً همان ضرب بروننی $\Omega \wedge \Omega$ است. بنابراین،

$$\Theta = d\Omega - \Omega \wedge \Omega = \cdot$$

● و واقعاً فضا تخت است.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که، به همان‌گونه که در مثالهای قبل دیده می‌شود، انحنا به‌طور ذاتی محاسبه می‌شود. هیچ‌وقت مجبور نیستیم فضا را رها کنیم و برای اینکه انحنا را "ببینیم" به ابعاد بالاتر برویم. مثلاً در مورد کره، تنها اطلاعاتی که داشتیم عنصر خطی برحسب مختصات روی کره بود. هیچ‌وقت مجبور نبودیم به آنالیز سه‌بعدی متوسل شویم تا ببینیم که یک کره در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^3 نشانده شده است.

مثال ۴-۴-۱۰: حال، ژئودزیکهای فضایی را که طول کمانش در مثال ۴-۴-۷ داده شده است، تعیین می‌کنیم.

فرض کنید $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ چنین ژئودزیکی باشد. اما باید γ را با s پارامترسازی کنیم. بنابراین، می‌نویسیم

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$$

میدان برداری مماس بر این منحنی (گزارهٔ ۴-۲-۵) برای یک تابع حقیقی دلخواه، $f(x, y)$ ، به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} Y_* f &= \frac{d}{ds} f \circ \gamma(s) = \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) = \frac{d}{ds} f(x(s), y(s)) \\ &= \frac{dx}{ds} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} \right) f \end{aligned}$$

به این ترتیب، مؤلفه‌های Y_{*s} در پایهٔ مختصه‌ای $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ همان dx/ds و dy/ds هستند. این مؤلفه‌ها، برحسب e_1 و e_2 به صورت زیر درمی‌آیند

$$Y_{*s} = \frac{dx}{ds} \frac{1}{y} e_1 + \frac{dy}{ds} \frac{1}{y} e_2$$

حال از طرفین مشتق برونی می‌گیریم و برای صفر قرار می‌دهیم (بنابه تعریف ژئودزیک)

$$0 = dY_{*s} = d\left(\frac{dx}{ds} \frac{1}{y}\right) e_1 + \frac{dx}{ds} \frac{1}{y} de_1 + d\left(\frac{dy}{ds} \frac{1}{y}\right) e_2 + \frac{dy}{ds} \frac{1}{y} de_2 \quad (1)$$

از $de_i = \omega_i^j e_j$ و نتیجه مثال ۴-۴-۷، می‌رسیم به

$$de_1 = \epsilon^1 e_2 \quad de_2 = -\epsilon^1 e_1 \quad \epsilon^1 = \frac{dx}{y}$$

بنابراین، معادله (۱) می‌دهد

$$0 = \left[d\left(\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}\right) - \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{ds}\right) \frac{dx}{y} \right] e_1 + \left[d\left(\frac{1}{y} \frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}\right) \frac{dx}{y} \right] e_2$$

از استقلال خطی e_1 و e_2 دو معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$d\left(\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}\right) - \left(\frac{1}{y} \frac{dy}{ds}\right) \frac{dx}{y} = 0 \quad (2\text{-الف})$$

$$d\left(\frac{1}{y} \frac{dy}{ds}\right) + \left(\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}\right) \frac{dx}{y} = 0 \quad (2\text{-ب})$$

به آسانی می‌توان اثبات کرد که این دو معادله یکسان‌اند.

با قرار دادن $y' \equiv dy/dx$ ، می‌توان نشان داد که معادلات (۲-الف) و (۲-ب) به صورت زیر

درمی‌آیند

$$ydy' + [1 + (y')^2] dx = 0 \quad (3)$$

با فرض $v \equiv y' = dy/dx$ ، یعنی، $dx = dy/v$ و قرار دادن در (۳)، نتیجه می‌شود:

$$ydv + (1 + v^2) \frac{dy}{v} = 0$$

که جواب آن $r^2/y^2 = v^2 + 1$ است، که در آن r^2 ثابت انتگرال‌گیری است. v را از این معادله محاسبه می‌کنیم:

$$v = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - 1}$$

یا

$$\frac{y dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = dx$$

که جواب زیر از آن به دست می‌آید

$$(x + a)^2 + y^2 = r^2$$

که در آن a یک ثابت دلخواه دیگر است.

بنابراین، ژئودزیکها دایره‌هایی هستند با شعاعهای دلخواه که مرکز آنها روی محور x ها واقع است.

مثال ۴-۴-۱۱: ژئودزیک متریک $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ را می‌توانیم به صورت زیر حساب کنیم. ابتدا توجه کنید که $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

بنابراین، برای $f \in F^\infty(\mathbb{R}^3)$ داریم:

$$\begin{aligned} Y_{**}f &= \frac{d}{ds} f \circ \gamma(s) = \frac{d}{ds} [f(\gamma(s))] = \frac{d}{ds} f(x(s), y(s), z(s)) \\ &= \frac{dx}{ds} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

بنابراین

$$Y_{**} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

بایه‌های راست‌هنجار عبارت‌اند از $\{dx, dy, dz\}$ و $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$. چون

$$d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$$

تمام ω ها صفرند. بنابراین $\mathbf{d}(\partial_x) = \mathbf{d}(\partial_y) = \mathbf{d}(\partial_z) = 0$ و از (۱) می‌رسیم به:

$$0 = \mathbf{d}Y_{*s} = \mathbf{d}\left(\frac{dx}{ds}\right) \partial_x + \mathbf{d}\left(\frac{dy}{ds}\right) \partial_y + \mathbf{d}\left(\frac{dz}{ds}\right) \partial_z$$

لذا

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{ds} = \text{const.} \equiv a_x \Rightarrow x = a_x s + b_x$$

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0 \Rightarrow y = a_y s + b_y$$

$$d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0 \Rightarrow z = a_z s + b_z$$

و ژئودریکها خط مستقیم‌اند.

مثال ۴-۴-۱۲: به‌عنوان نمایش دیگری از کاربرد فرمولبندی پیش‌گفته، مختصات منحنی‌الخط فصل اول را مورد بررسی مجدد قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که جابه‌جایی، برحسب این مختصات، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$ds^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2$$

بنابراین، تک‌صورت‌های راست‌هنجار، عبارت‌اند از

$$\epsilon^1 = h_1 dq_1 \quad \epsilon^2 = h_2 dq_2 \quad \epsilon^3 = h_3 dq_3$$

همچنین توجه کنید (از تمرین ۴-۴-۴) که

$$*d * df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx \wedge dy \wedge dz \equiv \nabla^2 f dx \wedge dy \wedge dz \quad (1)$$

با بهره‌گیری از این تعریف، لاپلاسی را برحسب q_1, q_2, q_3 پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}^1 + \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}^2 + \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}^3 \end{aligned}$$

حال عملگر ستاره‌ای هوج را اعمال می‌کنیم

$$\begin{aligned} *df &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) * \mathbf{e}^1 + \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) * \mathbf{e}^2 + \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) * \mathbf{e}^3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 + \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \\ &= \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) dq_2 \wedge dq_3 + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) dq_3 \wedge dq_1 \\ &\quad + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) dq_1 \wedge dq_2 \end{aligned}$$

یک‌بار دیگر مشتق می‌گیریم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} d * df &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) dq_2 \wedge dq_3 \wedge dq_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) dq_3 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \quad (2) \\ &= \left\{ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right] \right\} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 \end{aligned}$$

چون $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ تک‌صورت‌های راست‌هنجارند (مانند $\{dx, dy, dz\}$)، عنصرهای حجم $\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$ و $dx \wedge dy \wedge dz$ با یکدیگر برابرند. بنابراین، پس از جایگزین کردن $\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$

با $dx \wedge dy \wedge dz$ در ۲ و مقایسه با ۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]$$

که همان نتیجه به‌دست آمده در فصل اول است.

مثال ۴-۴-۱۲ نشان می‌دهد که چرا در تعریف ۴-۱-۲۹، حاصلضرب تک‌صورتها، عنصر حجم نامیده می‌شود. در دستگاه مختصات دکارتی، این مطلب چندان بدیهی است که احتیاج به بحث ندارد.

همان‌طوری که قبلاً تذکر دادیم، اگر یک فضا دارای عناصر خطی با $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$ باشد، در این صورت انحناى ریمان به‌طور بدیهی صفر می‌شود. به مثالهایی برخوردیم که در آن، مؤلفه‌های تانسور متریک به هیچوجه بدیهی و پیش پا افتاده نبودند، بلکه Θ چندان هوشمند بود که تخت بودن را در شکل مبدل، تشخیص دهد. آیا ممکن است در فضاهای تخت، یعنی در فضاهایی که در آنها $\Theta = 0$ ، دستگاه مختصاتی انتخاب کرد که عناصر خطی برحسب آنها دارای $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$ باشد؟ این سؤال به کمک یک قضیه پاسخ داده می‌شود، که با استفاده از نتایج تا حدودی آن را اثبات می‌کنیم.^۱ اگر Ω یک ماتریس تک‌صورت باشد، به‌طوری که

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

در این صورت یک ماتریس متعامد A چنان وجود دارد که

$$\Omega = (dA)A^{-1} \quad (4A-4)$$

اینک، برای بیان این قضیه آماده‌ایم.

قضیه ۴-۴-۵: فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد با $\Theta = 0$. در این صورت M تخت است، یعنی، یک دستگاه مختصات موضعی (x^i) وجود دارد که برای آن $\{\partial_i\}$ یک پایهٔ راست‌هنجار است.

اثبات. چون $\Theta = 0$ ، داریم $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$. بنابراین، بنابه (۴-۴۸) یک ماتریس متعامد چنان وجود دارد که

$$\Omega = (dA)A^{-1} \Rightarrow dA = \Omega A$$

حال، ماتریس سطری تک-صورت $T = (T^1, T^2, \dots, T^m)$ را به کمک $T = \epsilon A$ تعریف می‌کنیم که در آن ϵ ماتریس سطری تک-صورتی است که Ω برحسب آن داده شده است. سپس با استفاده از (۴-۳۹)، داریم

$$\begin{aligned} dT &= d(\epsilon A) = (d\epsilon)A - \epsilon \wedge dA \\ &= (\epsilon \wedge \Omega)A - \epsilon \wedge (\Omega A) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$dT^i = 0 \quad \forall i$$

بنابر قضیهٔ ۴-۳، باید صفر-صورت‌های (توابع) x^i چنان وجود داشته باشند که

$$T^i = dx^i \quad \forall i$$

این x^i ها، همان مختصاتاتی‌اند که به دنبالشان هستیم. پایهٔ $\{\partial_i\}$ با استفاده از وارون A به دست می‌آید (بحث مربوط به گزارهٔ ۴-۱-۱ را بنگرید):

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_m \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

چون A متعامد است $\{dx^i\}$ و $\{\partial_i\}$ هر دو پایه‌های راست‌هنجار هستند.

این فصل مباحث ضروری جبر تانسوری و آنالیز تانسور دیفرانسیلی را در بر گرفت. متأسفانه به جهت محدودیت حوصلهٔ کتاب، مبحث آنالیز تانسوری انتگرالی شامل تعمیم موضوعاتی نظیر

انتگرالهای خطی، سطحی، قضیه استوکس، قضیه دیورژانس و مانند آنها، را حذف کردیم. همچنین، فهم کامل این مباحث، روی یک خمینه کلی نیاز به درک عمیق برخی مفاهیم از توپولوژی دارد که خارج از حوصله این کتاب است.

تمرینها

۱-۴-۴ فرض کنید $M = \mathbb{R}^2$ و f یک تابع حقیقی-مقدار باشد. فرض کنید $\omega = a_i dx^i$ یک تک-صورت و $\eta = b_1 dx^1 \wedge dx^2 + b_2 dx^2 \wedge dx^1 + b_3 dx^1 \wedge dx^2$ یک دو-صورت روی \mathbb{R}^2 باشند. نشان دهید: (الف) df گرادیان f ، (ب) $d\omega$ تاو بردار $A = (a_1, a_2, a_3)$ و (ج) $d\eta$ دیورژانس بردار $B = (b_1, b_2, b_3)$ را می‌دهد.

۲-۴-۴ نشان دهید: (الف) $\nabla \times (\nabla f) = 0$ ، و (ب) $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ عبارت‌اند از نتایج $d^2 = 0$.

۳-۴-۴ با فرض $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ ، معادلات همگن ماکسول $\nabla \cdot B = 0$ و $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ را برحسب $F_{\alpha\beta}$ بنویسید.

۴-۴-۴ فرض کنید $f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ یک تابع روی \mathbb{R}^2 باشد. مطلوب است محاسبه $*d * df$.
 ۵-۴-۴ نشان دهید، پایداری جریان پیامد بی‌واسطه و خودبه‌خود معادله همگن ماکسول $d * F = (4\pi) * J$ است.

۶-۴-۴ نشان دهید dP مستقل از دستگاه مختصات است.
 ۷-۴-۴ نشان دهید ω_j^k در $\omega_j^k e_k = de_j$ ، نسبت به اندیسهایشان پادمقارن‌اند.

۸-۴-۴ نشان دهید جواب منحصر به فردی برای Γ_{ijk} برحسب C_{ijk} وجود دارد، اگر داشته باشیم

$$C_{ijk} + C_{jik} = 0 \quad (1)$$

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = 0 \quad (2)$$

$$\Gamma_{jik} - \Gamma_{kij} = C_{ijk} \quad (3)$$

۹-۴-۴ نشان دهید $d\Theta = \Omega \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega$

۱۰-۴-۴ رابطه $\varepsilon \wedge \Theta = 0$ را به شکل مؤلفه‌ای بنویسید و معادله (۴-۵-۴) را به دست آورید.

۱۱-۴-۴ نشان دهید طول بردار جابه‌جایی $v = \xi^k \partial_k$ عبارت است از $\xi^i \xi^i g_{ij}$.

۱۲-۴-۴ ژئودزیکهای سطح یک کره به شعاع a را که دارای عنصر خطی زیر است، بیابید

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

مسائل

۱-۴ نشان دهید نگاشت $v : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ که توسط $v(\tau) = \tau(v)$ داده می‌شود، خطی است.
 ۲-۴ نشان دهید مؤلفه‌های یک حاصلضرب تانسوری برابر است با حاصلضرب مؤلفه‌های عوامل زیر

$$(U \otimes T)_{j_1, \dots, j_{r+k}}^{i_1, \dots, i_{r+k}} = U_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} T_{j_{r+1}, \dots, j_{r+k}}^{i_{r+1}, \dots, i_{r+k}}$$

۳-۴ ثابت کنید تابع $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع ناوردای خطی است.
 ۴-۴ نشان دهید

$$\dim \mathcal{S}^r(\mathcal{V}) = \binom{N+r-1}{r} \equiv \frac{(N+r-1)!}{r!(N-1)!}$$

۵-۴ اگر A نسبت به بعضی از زوج متغیرهایش شبه‌متقارن باشد، نشان دهید: $S(A) = 0$.
 ۶-۴ نشان دهید آیا سه بردار زیر وابسته خطی‌اند یا مستقل خطی:

$$v_1 = 2e_1 - e_2 + 3e_2 - e_2$$

$$v_2 = -e_1 + 3e_2 - 2e_2$$

$$v_3 = 3e_1 + 2e_2 - 4e_2 + e_2$$

۷-۴ نشان دهید $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ ، که با عبارت زیر داده می‌شود

$$-2e_1 \wedge e_2 + 3e_1 \wedge e_3 - 5e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3 - 4e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_3$$

قابل تجزیه است. v_2 و v_1 را چنان بیابید که $A = v_1 \wedge v_2$.

۸-۴ در یک بعد، وقتی عملگر خطی روی یک بردار عمل کند، فقط آن بردار را در یک ثابت ضرب می‌کند. نشان دهید این ثابت مستقل از بردار انتخاب شده است. یعنی، این ثابت خاصیت ذاتی عملگر است.

۹-۴ حل تمرین ۷-۱-۴ را کامل کنید.

۱۰-۴ نشان دهید $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ مؤلفه‌های تانسور $g \in \mathcal{S}^2(\mathcal{V}^*)$ در پایه $\{e_i\}_{i=1}^N$ از \mathcal{V} است.

۱۱-۴ فرض کنید $\mathcal{N}(g)$ معرف فضای پوچ g باشد که به‌عنوان عملگر خطی $\mathcal{N}(g) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$

در نظر گرفته می‌شود. نشان دهید که $\mathcal{N}(\mathbf{g})$ متشکل است از تمام بردارهای $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ، به طوری که به ازای تمام $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ، داریم $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. همچنین نشان دهید که در پایه راست‌هنجار $\{\mathbf{e}_i\}$ ، $\mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ یک پایه $\mathcal{N}(\mathbf{g})$ تشکیل می‌دهد، و بنابراین n_0 بعد هسته \mathbf{g} است.

۱۲-۴ نشان دهید $\delta_\pi = \varepsilon_{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N)}$.

۱۳-۴ با استفاده از معادله ۱۵-۴ نشان دهید که برای یک ماتریس 3×3 سی A ، داریم

$$\det A = \frac{1}{3!} [(\text{tr} A)^3 - 3 \text{tr} A \text{tr}(A^2) + 2 \text{tr} A^3]$$

۱۴-۴ مطلوب است تعیین اندیس و نشان صورت دوخطی \mathbf{g} روی \mathbb{R}^3 که به صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1 - y_1 z_2 - y_2 z_1$$

۱۵-۴ با استفاده از خطی بودن عملگر هوج ستاره‌ای و این واقعیت که $\mathbf{v}_i = r_i^j \mathbf{e}_j$ نشان دهید که معادله (۱۶-۴ الف) دلالت می‌کند بر (۱۸-۴).

۱۶-۴ نشان دهید هر جا که جمع‌بندی روی یک اندیس بالایی و یک اندیس پایینی وجود دارد، تغییر محل اندیس بالایی به اندیس پایینی و برعکس، حاصل جمع را تغییر نمی‌دهد. به عبارت دیگر، $A^i B_i = A_i B^i$.

۱۷-۴ با استفاده از تعریف ضرب متقاطع برحسب ε_{ijk} درستی اتحادهای برداری زیر را اثبات کنید

(الف) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

(ب) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(ج) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$

(د) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A})$

(ه) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

۱۸-۴ نشان دهید هر تانسور $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{V})$ می‌تواند به صورت $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$ نوشته شود که در آن $\mathbf{S} \in \mathcal{S}^2(\mathcal{V})$ یک تانسور متقارن و $\mathbf{A} \in \Lambda^2(\mathcal{V})$ یک تانسور پادمقارن است. آیا این را می‌توان به تانسورهایی با مرتبه‌های اختیاری تعمیم داد؟

۱۹-۴ نشان دهید به ازای هر $\mathbf{t} \in \mathcal{S}_P(\mathbf{M})$ و هر تابع ثابت $c \in \mathbb{F}^\infty(P)$ ، داریم $\mathbf{t}(c) = \mathbf{0}$.

[راهنمایی: از قسمتهای (الف) و (ب) در تعریف ۴-۲-۴ استفاده کنید و نشان دهید

$$[(ct)]_1 = \mathbf{t}(c) + (ct)_1$$

۲۰-۴ فرض کنید (x^i) و (y^i) دستگاههای مختصات روی یک زیرمجموعه U از خمینه M باشد. فرض کنید X^i و Y^i مؤلفه‌های یک میدان برداری نسبت به دو دستگاه مختصات باشند. نشان دهید

$$Y^i = \sum_j X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

۲۱-۴ نشان دهید: $F \wedge (*F) = |B|^2 - |E|^2$. به خاطر آورید که $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} = -1/2 E_x$ و الی آخر.

۲۲-۴ با توجه به $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ و $J = J_\gamma dx^\gamma$ ، نشان دهید که $d(*F) = 4\pi(*J)$ به شکل مؤلفه‌ای، به صورت زیر است

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 4\pi J^\alpha$$

۲۳-۴ قضیه ۳-۴-۴ را به‌زای $p = 1$ و $p = 4$ روی \mathbb{R}^3 تفسیر کنید.

۲۴-۴ فرض کنید A و B ماتریسهایی با عناصر تک‌صورت باشند. نشان دهید $(A \wedge B) = -\widetilde{B} \wedge \widetilde{A}$.

۲۵-۴ با استفاده از تقارنهای R_{ijkl} نشان دهید: $R_{ijkl} = R_{klij}$.

۲۶-۴ نشان دهید در یک پایه مختصات $\epsilon^i P = 0$ ، داریم

$$\begin{bmatrix} i \\ jk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ kj \end{bmatrix} = 0$$

۲۷-۴ نشان دهید $[i, jk] + [i, kj] = \partial g_{ij} / \partial x^k$ و $[j, ik] + [j, ki] = 0$ دارای جواب منحصر به فرد زیر است

$$[i, jk] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right)$$

۲۸-۴ اگر

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cdot & \cot \theta \epsilon^\nu \\ -\cot \theta \epsilon^\nu & \cdot \end{pmatrix}$$

$d\Omega$ را بیابید.

۲۹-۴ Ω را از تمرین ۴-۴-۹ محاسبه کنید. مشتق برون Ω را بگیرید و نشان دهید این مشتق عبارت است از $\Omega \wedge \Omega$.

۳۰-۴ انحنای فضای دوبعدی را که طول کمان آن به صورت زیر است، پیدا کنید

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$$

۳۱-۴ انحنای فضایی سه بعدی را بیابید که عنصر خطی آن به صورت زیر داده شده است:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

۳۲-۴ تانسورهای انحنای فضاهای فریدمن و شوارتزشیلد را که در مثال ۴-۴-۶ آمده است، پیدا کنید.

۳۳-۴ ژئودزیکهای متریک $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$ را پیدا کنید.

۳۴-۴ این ادعا را که $A \cos \varphi + B \sin \varphi - \cot \theta = 0$ ، یک جواب معادله زیر است (و در

حل تمرین ۴-۴-۱۲ مورد استفاده قرار گرفت) ثابت کنید

$$\frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \sin \theta - 2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \cos \theta - \sin^3 \theta \cos \theta = 0$$

۳۵-۴ (الف) نشان دهید در \mathbb{R}^2 ، عملگر ترکیبی \mathbf{d} تاویک بردار را، وقتی بردار به عنوان مؤلفه‌های

یک دو-صورت نوشته شود، می‌دهد. (ب) به همین ترتیب، نشان دهید \mathbf{d} عملگر دیورژانس برای

تک-صورتهاست. (ج) با استفاده از این نتایج و روشی که در مثال ۴-۴-۱۲ به کار رفت، عبارت‌های

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ و $\nabla \times \mathbf{A}$ را در مختصات منحنی الخط پیدا کنید.

فضاهای برداری نامتناهی-بعد (فضاهای توابع)

مفاهیم اساسی فضاهای برداری متناهی-بعد را، که در فصل ۲ با آنها آشنا شدیم، به آسانی می‌توان به بینهایت بعد تعمیم داد. تعریف فضای برداری و مفاهیم ترکیب خطی، استقلال خطی، پایه، زیرفضا، فراگیری، و مانند آنها نیز جملگی به بینهایت بعد کشیده می‌شوند. اما، یک چیز در وضعیت جدید تفاوت اساسی دارد، و این اختلاف، مطالعه فضاهای برداری نامتناهی-بعد را خیلی غنی‌تر و آشکارا نابدهی‌تر از مطالعه فضاهای متناهی-بعد می‌سازد. در فضای برداری متناهی-بعد، با مجموعه‌های متناهی سروکار داریم، اما در فضاهای نامتناهی-بعد، سروکار ما با مجموعه‌های نامتناهی است. بنابراین، دغدغه ما مسئله همگرایی چنین مجموعه‌هایی است.

۱-۵ مسئله همگرایی

هر نوع همگرایی متضمن مفهوم فاصله است. چنین مفهومی را در مقدمه بررسی کردیم. در مورد فضاهای برداری، یکی از نامزدهای طبیعی برای فاصله بین بردارها نرم است، که در فصل ۲ در بحث حاصلضربهای داخلی، با آن برخورد کردیم. با این همه، مفهوم نرم مستلزم این نیست که فضای برداری، فضایی با (حاصل)ضرب داخلی باشد، بلکه به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۵-۱: فضای برداری \mathcal{V} (که لزوماً متناهی-بعد نیست)، فضای خطی نرم‌دار نامیده می‌شود، در صورتی که نگاشتی مانند $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V} : N$ وجود داشته باشد که به‌ازای $a, b \in \mathcal{V}$:

$$\forall |a\rangle \neq 0 \quad N(|a\rangle) > 0 \quad (\text{الف})$$

$$N(0) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$N(\alpha|a\rangle) = |\alpha|N(|a\rangle) \quad (\text{ج})$$

$$N(|a\rangle + |b\rangle) \leq N(|a\rangle) + N(|b\rangle) \quad (\text{د})$$

معمولاً می‌نویسند $N(|a\rangle) \equiv \|a\|$. و ما این نمادگذاری را فراوان به کار می‌بریم. هر فضای با حاصل ضرب داخلی، خودبه‌خود نرم‌دار است. ما صرفاً، مانند فصل ۲، تعریف $\|a\| \equiv \sqrt{\langle a|a\rangle}$ را در اینجا تکرار می‌کنیم.

مثال ۵-۱-۱: برخی فضاهای نرم‌دار خطی عبارت‌اند از

(الف) $\mathcal{V} = \mathbb{R}$: در این صورت، به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، قرار دهید: $\|\alpha\| = |\alpha|$.

(ب) $\mathcal{V} = \mathbb{C}$: در این صورت، به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ، قرار دهید

$$\|\alpha\| = |\alpha| = \sqrt{[\text{Re}(\alpha)]^2 + [\text{Im}(\alpha)]^2}$$

(ج) ۱. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$: در این صورت به ازای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ، قرار دهید:

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

۲. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$: در این صورت به ازای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ، قرار دهید:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

۳. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$: در این صورت به ازای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ، قرار دهید:

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

می‌توان نشان داد که تمام این نرم‌ها، اصل موضوعهای تعریف ۵-۱-۱ را برقرار می‌کنند. در ۳،

۱. نمادگذاری دیراک برای فضاهای با حاصل ضرب داخلی بسیار مناسب، اما در سایر شرایط نامناسب است، مثلاً بهتر است نرم بردار $|a\rangle \in \mathcal{V}$ به صورت $\|a\|$ نوشته شود تا $\| |a\rangle \|$. همچنین، فاصله بین $|a\rangle$ و $|b\rangle$ با $d(a, b)$ بهتر نشان داده می‌شود تا با $d(|a\rangle, |b\rangle)$. هرگاه ابهامی پیش نیاید و راحت‌تر باشد، نمادگذاری دیراک حذف خواهد شد.

نامساوی مینکوفسکی، یعنی

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i + \beta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^p \right)^{1/p}$$

بکار می‌رود.^۱ همچنین، توجه کنید که ۱ و ۲ حالت‌های خاصی از ۳، به ترتیب به‌ازای $p = 1$ و $p = 2$ هستند.

تابع نرم، بنا بر تعریف، عبارت است از فاصله طبیعی بین بردارها. بنابراین، به‌ازای $a, b \in \mathcal{V}$ ، فاصله بین آنها، $d(a, b)$ ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(a, b) \equiv (|a| - |b|) \equiv \|a - b\| \quad (1-5)$$

نرم، محکی به دست می‌دهد که ببینیم آیا دو بردار به یکدیگر نزدیک‌اند یا نه: اگر $\|a - b\|$ کوچک باشد، می‌گوییم $|a|$ و $|b|$ به یکدیگر نزدیک‌اند. در مثال ۱-۵-۱ مشاهده کردیم که در یک فضای برداری مفروض ممکن است چند نرم قابل تعریف باشند. بنابراین، مفهوم "نزدیکی" همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، بستگی به نوع نرم بکار برده شده در فضای برداری دارد.

مثال ۱-۵-۲: فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}^n$ بردار صفر باشد، یعنی $\alpha = 0$. اگر فرض کنیم $\beta \in \mathbb{R}^n$ برداری است که مؤلفه‌های آن همه ۱ هستند، به‌ازای $n = 1000$ و $p = 1$ ، قسمت (ج) مثال ۱-۵-۱ فاصله‌های زیر را بین α و β برای نرم‌های مختلف \mathbb{R}^n به دست می‌دهد.

$$\|\alpha - \beta\| = \sum_{i=1}^{1000} |0 - \beta_i| = 1000 \times 0.1 = 100 \quad (1)$$

$$\|\alpha - \beta\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{1000} \beta_i^2} = \sqrt{1000 \times 0.1} = \sqrt{100} = 10 \quad (2)$$

$$\|\alpha - \beta\| = \left[\sum_{i=1}^{1000} (0.1)^{10} \right]^{1/10} = (1000 \times 10^{-10})^{1/10} = 0.2 \quad (3)$$

بنابراین، طبق (۱)، β خیلی از مبدأ دور است، و (۳) می‌گوید که β خیلی به مبدأ نزدیک است.

۱. برای اثبات نگاه کنید به

اکنون که راهی در اختیار داریم تا ملاحظه کنیم آیا بردارها به هم نزدیک‌اند یا دور، می‌توانیم از حدود و همگرایی بردارها سخن به میان آوریم. با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۵-۱-۲: دنباله‌ای از بردارهای $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ را در یک فضای خطی نرم‌دار، دنباله کوشی می‌نامیم در صورتی که $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \|a_i - a_j\| = 0$ دنباله کوشی در تعریف زیر به‌کار می‌آید.

تعریف ۵-۱-۳: فضای برداری کامل، \mathcal{V} ، فضای خطی نرم‌داری است که هر دنباله برداری کوشی در آن دارای یک بردار حدی در همان فضاست. به عبارت دیگر، اگر $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله کوشی باشد، در آن صورت برداری مانند $a \in \mathcal{V}$ چنان وجود دارد که $\lim_{i \rightarrow \infty} \|a_i - a\| = 0$. از این تعریف مشخص می‌شود که کمال (کامل بودن) همانقدر به فضای برداری مربوط است که به نرم آن.

مثال ۵-۱-۳: آنچه در زیر می‌آید، نمونه‌هایی از فضاهای برداری کامل‌اند.
 (الف) \mathbb{R} ، نسبت به نرم $\|\alpha\| = |\alpha|$ کامل است. به عبارت دیگر، هر دنباله کوشی از اعداد حقیقی، دارای حدی در \mathbb{R} است. این حکم در آنالیز حقیقی ثابت می‌شود.
 (ب) \mathbb{C} ، نسبت به نرم

$$\|\alpha\| = |\alpha| = \sqrt{[\operatorname{Re}(\alpha)]^2 + [\operatorname{Im}(\alpha)]^2}$$

کامل است. این حکم به آسانی و با توجه به اینکه برای هر عدد مختلط z ، عبارت است از

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

و اینکه کمال دستگاه اعداد مختلط، \mathbb{C} ، پیامدی است از کمال \mathbb{R} اثبات می‌شود. اثبات را به صورت یک مسئله به‌عهده خواننده وامی‌گذاریم.

(ج) هر فضای حاصلضرب داخلی متناهی-بعد، کامل است. فرض کنید $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نامتناهی از بردارهایی در \mathcal{V}_N باشد، به طوری که وقتی $i, j \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\|a_i - a_j\| \rightarrow 0$. پایه‌ای راست‌هنجار مانند $\{e_k\}_{k=1}^N$ در \mathcal{V}_N چنان اختیار می‌کنیم که

$$|a_i\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k^{(i)} |e_k\rangle \quad \text{و} \quad |a_j\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k^{(j)} |e_k\rangle$$

در آن صورت

$$\begin{aligned}\|a_i - a_j\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^N (\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}) e_k \right\|^2 = \sum_{k,l} (\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)})^* (\alpha_l^{(i)} - \alpha_l^{(j)}) \langle e_k | e_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N |\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}|^2\end{aligned}$$

چون عبارت سمت راست به صفر میل می‌کند و تمام جمله‌های سمت چپ مثبت‌اند، هر جمله $|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}|$ وقتی $i, j \rightarrow \infty$ باید به صفر میل کند. به علت کامل بودن \mathbb{C} ، مجموعه‌ای مانند $\alpha_k \in \mathbb{C}$ چنان وجود دارد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k^{(n)} = \alpha_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

اکنون ادعا می‌کنیم که $|a\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k |e_k\rangle$ برداری است که دنباله $\{|a_i\rangle\}$ به آن می‌گراید. در واقع،

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|a_i - a\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |\alpha_k^{(i)} - \alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_{i \rightarrow \infty} |\alpha_k^{(i)} - \alpha_k|^2 = 0$$

در مثال ۳-۱-۵ مشاهده می‌کنیم که هر فضای حاصلضرب داخلی متناهی-بعد، \mathcal{V}_N ، در \mathbb{R} کامل است. در مثال پایین، که مثال نقضی است برای فضای حاصلضرب داخلی متناهی-بعد توابع پیوسته، نشان می‌دهیم که چقدر کلمه "متناهی" در اینجا حائز اهمیت است.

مثال ۴-۱-۵: دنباله نامتناهی توابع پیوسته $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ را که در بازه $[-1, +1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{k} \leq x \leq 1 & \text{اگر} \\ \frac{kx+1}{2} & -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} & \text{اگر} \\ 0 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} & \text{اگر} \end{cases}$$

در فصل ۲ ملاحظه کردیم که مجموعه توابع پیوسته‌ای که در بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود، یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. علاوه بر این، اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای باشند و انتگرال

$\int_a^b g^*(x) f(x) dx$ وجود داشته باشد، در آن صورت انتگرال یاد شده دارای تمام خواص ضرب داخلی است.

دنباله $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ که در بالا تعریف شده است، به فضای توابع پیوسته تعلق دارد. علاوه بر این، به آسانی می‌توان ثابت کرد (تمرین ۵-۱-۲) که

$$d^1(f_i, f_j) = \int_{-1}^1 |f_i(x) - f_j(x)|^2 dx \xrightarrow{i, j \rightarrow \infty} 0$$

بنابراین، $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله کوشی است. با این همه، حد این دنباله عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{اگر } -1 < x < 0 \end{cases}$$

● در $x = 0$ ناپیوسته است و، بنابراین، به فضایی که دنباله اولیه در آن قرار دارد تعلق ندارد. به این ترتیب، ملاحظه می‌کنیم که، در حالت کلی، فضاهای برداری نامتناهی-بعد کامل نیستند. در حقیقت، نشان دادن این موضوع که آیا یک فضای برداری نامتناهی-بعد کامل است یا خیر، آسان نیست.

کامل بودن فضای برداری نامتناهی-بعد، بسته بودن فضا را تحت مجموعه‌های نامتناهی تضمین می‌کند. هر فضای برداری (متناهی-بعد یا نامتناهی-بعد) شامل بردارهای $\{a_i\}$ ، تمام ترکیبهای خطی-متناهی به شکل $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ را در بردارد (این حکم، از تعریف فضای برداری در فصل ۲ نتیجه می‌شود)، اما وقتی n به سمت بینهایت میل کند، وضعیت فرق می‌کند. تا اینجا، تعریفی برای مجموع نامتناهی بردارها نداریم. کاملیت (یا کمال)، راهی را برای تعریف مجموعه‌های نامتناهی و حدود آنها، هرگاه وجود داشته باشد، به ما نشان می‌دهد. با استفاده از تعریف زیر می‌توان به کامل بودن فضای برداری اطمینان پیدا کرد.

تعریف ۵-۱-۴: فضای حاصلضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت می‌نامیم و با \mathcal{H} نمایش می‌دهیم.

فرض خواهیم کرد که فضای هیلبرت مورد نظر، دارای بینهایت بعد است. در مطالعه فضاهای هیلبرت بهتر است از بردارهای راست‌هنجار استفاده کنیم. به این ترتیب، یک دنباله نامتناهی از بردارهای راست‌هنجار، $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ، را در نظر می‌گیریم که همه متعلق به فضای هیلبرت‌اند. هیچ

کمبودی از این گونه بردارها وجود ندارد، زیرا تعداد ابعاد نامتناهی است. در این صورت، بردار $f \in \mathcal{H}$ را اختیار و حاصلضربهای داخلی

$$f_i \equiv \langle e_i | f \rangle \quad (۲-۵الف)$$

و همچنین دنبالهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$|f_n\rangle \equiv \sum_{i=1}^n f_i |e_i\rangle \quad n = 1, 2, \dots \quad (۲-۵ب)$$

برای بردارهای $|f\rangle$ و $|f_n\rangle$ ، بنابر نامساوی شوارتز، داریم

$$|\langle f | f_n \rangle|^2 \leq \langle f | f \rangle \langle f_n | f_n \rangle \quad (۲-۵ج)$$

با نشان دادن (۲-۵ب) در (۲-۵ج) و استفاده از راست‌هنجاری $|e_i\rangle$ ، می‌رسیم به

$$|\langle f | f_n \rangle|^2 \leq \langle f | f \rangle \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right) \quad (۲-۵د)$$

از سوی دیگر، از حاصلضرب داخلی (۲-۵ب) در $\langle f |$ ، داریم

$$\langle f | f_n \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \langle f | e_i \rangle = \sum_{i=1}^n f_i f_i^* = \sum_{i=1}^n |f_i|^2$$

که اگر این عبارت را در (۲-۵د) قرار بدهیم، نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \leq \langle f | f \rangle$$

این نتیجه به‌ازای هر مقدار دلخواه n صادق است و، در حالت خاص، به‌ازای $n \rightarrow \infty$ می‌توان آن را به‌صورت یک گزاره بیان کرد.

گزارهٔ ۵-۱-۵: فرض کنید $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعهٔ نامتناهی از بردارهای راست‌هنجار فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد. همچنین فرض کنید $f \in \mathcal{H}$ و اعداد مختلط $f_i \equiv \langle e_i | f \rangle$ را تعریف کنید.

در این صورت نامساوی بسل برقرار است:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 \leq \langle f|f \rangle \quad (3-5)$$

نامساوی بسل نشان می‌دهد که بردار زیر همگراست

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i |e_i\rangle \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i |e_i\rangle$$

یعنی، نرم آن متناهی است. با این همه، نامساوی یاد شده نمی‌گوید که آیا بردار مزبور به $|f\rangle$ می‌گراید یا خیر. برای بیان چنین مطلبی به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۶-۱-۵: دنباله بردارهای راست‌هنجار $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ را در یک فضای هیلبرت \mathcal{H} کامل می‌نامیم اگر $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ و $\langle \psi | e_i \rangle = 0$ به ازای تمام مقادیر i ، به معنای این باشد که $\langle \psi | \psi \rangle = 0$. به بیان دیگر، تنها برداری که در یک فضای هیلبرت بر تمام اعضای یک دنباله راست‌هنجار کامل عمود باشد، بردار صفر است. در گزاره زیر، یک دنباله بردار راست‌هنجار مشخص می‌شود.

تعریف ۷-۱-۵: فرض کنید $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله راست‌هنجار در \mathcal{H} است. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادل‌اند.

(الف) $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ کامل است

(ب) $\forall |f\rangle \in \mathcal{H} \quad |f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i | f \rangle$ در فضای \mathcal{H}

(ج) $\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i| = 1$

(د) $\forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle f | g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f | e_i \rangle \langle e_i | g \rangle$

(ه) $\forall |f\rangle \in \mathcal{H} \quad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f | e_i \rangle|^2$

اثبات. استزاهای (الف) \Rightarrow (ب) \Rightarrow (ج) \Rightarrow (د) \Rightarrow (ه) \Rightarrow (الف) را اثبات خواهیم کرد.

(ب) \Rightarrow (الف): بردار $|\psi\rangle \equiv |f\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i | f \rangle$ بر تمام بردارهای واقع در $\{|e_i\rangle\}$

عمود است، زیرا

$$\langle e_j | \psi \rangle = \langle e_j | f \rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j | e_i \rangle \langle e_i | f \rangle = 0$$

بنابراین، $\langle \psi | \psi \rangle$ باید صفر باشد، و

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i | f \rangle$$

(ج) \Rightarrow (ب): چون $\langle f | f \rangle = (\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i |) |f\rangle$ به ازای تمام $|f\rangle$ ها برقرار است، باید $\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i| = 1$ برقرار باشد.

(د) \Rightarrow (ج): به علت خطی بودن حاصلضرب داخلی:

$$\langle f | g \rangle = \langle f | 1 | g \rangle = \langle f | (\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i |) | g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f | e_i \rangle \langle e_i | g \rangle$$

(و) \Rightarrow (د): در (د) فرض کنید $|g\rangle = |f\rangle$ ، و به یاد بیاورید که $\langle e_i | f \rangle = \langle f | e_i \rangle^*$.

(الف) \Rightarrow (د): فرض کنید $|f\rangle$ بر تمام $|e_i\rangle$ ها عمود است. در این صورت، به ازای همه i ها، خواهیم داشت $\langle f | e_i \rangle = 0$. بنابراین، مجموع صفر است، و $\|f\|^2 = 0$ به معنای این است که $|f\rangle = 0$ ، زیرا فقط بردار صفر دارای نرم صفر است. ■

تساوی

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f | e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 \quad (۴-۵)$$

که در آن $f_i \equiv \langle e_i | f \rangle$ ، تساوی پارسوال خوانده می شود. اعداد f_i ضریبهای فوریهٔ تعمیم یافته خوانده می شوند. رابطهٔ

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i| = 1 \quad (۵-۵)$$

معمولاً رابطهٔ کاملیت خوانده می شود، اما در مورد هر یک از استازامهای دیگر نیز گزارهٔ ۷-۱-۵ همین تعریف صادق است.

گزارهٔ ۷-۱-۵ به طور طبیعی تعریف زیر را به دنبال دارد.

تعریف ۸-۱-۵: دنبالهٔ راست هنجار کامل $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ در \mathcal{H} ، یک پایه در \mathcal{H} خوانده می شود. هر فضای هیلبرت را دارای یک پایهٔ شمارا، مانند آنچه که در تعریف ۸-۱-۵ دیده می شود، اصطلاحاً فضای تفکیک پذیر می نامیم. می توان نشان داد^۱ که در یک فضای هیلبرت تفکیک ناپذیر

تمام بردارها بر یکدیگر عمودند. در این کتاب فقط فضاهای هیلبرت تفکیک پذیر را از نظر می گذرانیم. با این همه، برای اینکه بینش اندکی در مورد خواص فضاهای هیلبرت تفکیک ناپذیر پیدا کنیم، در بخشی که به دنبال می آید یکی از موضوعهای وابسته یعنی تابع دلتای دیراک، را که مثالی است از یک رده اشیا ریاضی موسوم به توابع توزیع یافته، یا توزیعها، مورد بحث قرار می دهیم.

تقرینها

۱-۱-۵ نشان دهید

$$\left| \|a\| - \|b\| \right| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

و

$$\left| \|a\| - \|b\| \right| \leq \|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

۱-۲-۵ نشان دهید $\{f_k(x)\}$ ، یعنی دنباله تابعهای تعریف شده در ۱-۵-۴، یک دنباله کوشی است.

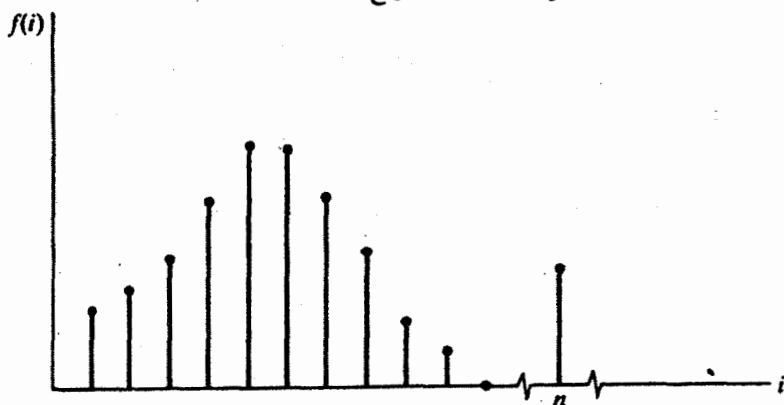
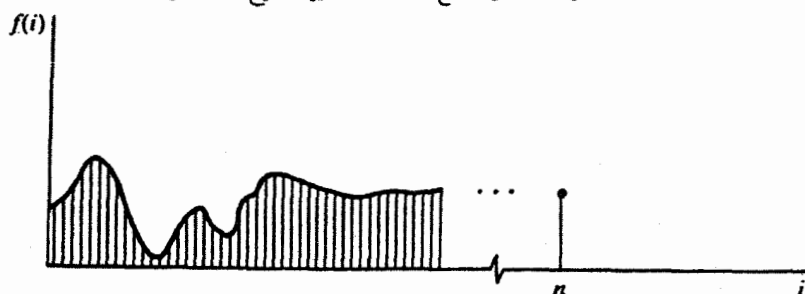
۲-۵ توزیعها (توابع تعمیم یافته)

تابعهای تعمیم یافته (در حقیقت) تابع نیستند. راه طبیعی بررسی آنها در قالب تابعهای خطی است، که بعداً به آنها خواهیم پرداخت. با این همه، ما به انگیزه‌هایی نیاز داریم، و می خواهیم ببینیم که این انگیزه در وضعیتهای خاص چگونه بروز می کنند. یکی از جایگاههای طبیعی این "تابعها" قلمرو اندیس پیوسته است. بنابراین، این مفهوم را بررسی خواهیم کرد، اما باید به خاطر داشته باشیم که بررسی ما شهودی محض است. (در واقع، برخی استدلالها که در زیر بخش زیر می آیند غلط اند!) با این همه، آنقدر استنباط شهودی پیرامون موضوع پیدا می کنیم که به صرف اندکی وقت روی آنها بیارزد.

۱-۲-۵ اندیس پیوسته و تابع دلتای دیراک

بگذارید اندیس پیوسته را گام به گام پیش ببریم. ابتدا، مؤلفه‌های بردار f را در پایه $\{i\}_{i=1}^{\infty}$ $B =$ در \mathcal{H} در نظر می گیریم و فرض می کنیم $f = \{if\}$ مؤلفه نام آن باشد. با داشتن پایه B ، مجموعه f ها بردار f را به طور منحصر به فرد تعیین می کند. این f ها در گستره نگاهت $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ،

۱. در اینجا برای نشان دادن عضوی از یک پایه راست‌هنجار از نماد $|i\rangle$ به جای $|e_i\rangle$ استفاده می کنیم زیرا بعدها مطلب را به شاخصهای پیوسته تعمیم می دهیم، و کاربرد $|i\rangle$ این تعمیم را آسانتر می کند.

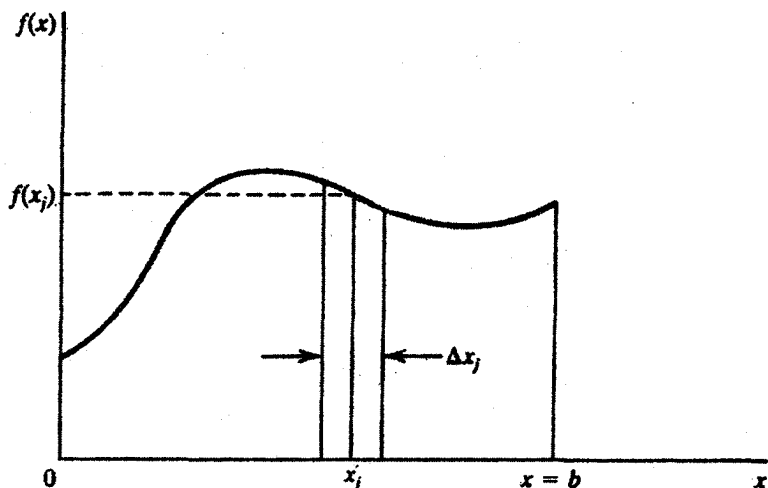
شکل ۱-۵ نمودار تابع f به‌ازای مقادیر صحیح شناسه آن.شکل ۲-۵ نمودار $f(i)$ در یک معیاس افقی کاهش‌یافته.

از مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} به مجموعه اعداد مختلط \mathbb{C} هستند، که با $f(i) = f_i$ ، یا:

$$f(i) = \langle i|f \rangle \quad (۶-۵)$$

بیان می‌شود. این بیان، راه دیگری را برای نمایش بردارها به‌دست می‌دهد: بردار مجرد، تابعی است که مقدار آن در عدد درست i عبارت است از مختصه i ام بردار مجرد در یک پایه مشخص. اگر، موقتاً اسکالرها را به‌جای مختلط حقیقی فرض کنیم، می‌توانیم نمودار چنین تابعی را نیز، مطابق شکل ۱-۵ ترسیم کنیم.

در شکل ۲-۵، طول واحد بر روی محور i چنان کاهش داده شده است که نقاط به یکدیگر نزدیک‌تر شوند. مرحله دوم در تجرید این است که بگذاریم طول واحد در امتداد محور افقی به‌صفر میل کند، یا بینهایت کوچک شود. در این حالت، حد بالا را می‌توان با یک نقطه متناهی بر روی محور افقی نمایش داد. این نمایش متناظر است با یک محور افقی نمایشگر متغیری. پیوسته، مثلاً x ، و یک محور عمودی معرف تابعی مانند $f(x)$ از آن متغیر پیوسته. بازه بین نقاط معرف اعداد



شکل ۳-۵ نمودار تابع f بر حسب متغیر پیوسته x ، که وقتی حاصل می‌شود که بازه بین نقاط معرف اعداد صحیح به سمت صفر میل کند.

صحیح بر روی محور x ها (در حد) صفر است. بنابراین، گستره متغیر x از $x = 0$ (متناظر با $i = 1$) تا $x = b$ (متناظر با $i = \infty$) است، که در آن، b حد بالای متغیر x به شمار می‌آید. بنابراین، می‌توان تابع $f(x)$ را به صورت شکل ۳-۵ نشان داد. الزامی وجود ندارد که خود را به بازه $[0, b]$ محدود کنیم؛ می‌توانستیم بازه را به $[a, b]$ تعمیم بدهیم که در آن، a متناظر با $i = 1$ و b متناظر با $i = \infty$ ، یا $a = -\infty$ و $b = +\infty$ باشد.

چگونه $|f|$ را بر حسب $|x|$ ها بیان کنیم؟ ابتدا بازه $[a, b]$ را به N قسمت مساوی، هر یک به طول $\Delta x = \frac{(b-a)}{N}$ ، تقسیم می‌کنیم. آنگاه می‌نویسیم

$$|f| = \sum_{i=1}^{\infty} f_i |i| = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k) |j, k|$$

که در آن تک مجموع‌یابی روی i را به مجموع دوگانه تغییر داده‌ایم. بنابر مجموع اول (روی j)، بی‌می‌بریم که در چه بازه‌ای هستیم، و مجموع دوم (نامتناهی) تمام سهمهای مؤثر در بازه زام را به یکدیگر اضافه می‌کند. فرض کنید x_j نقطه میانی بازه زام باشد و $f(x)$ در آن بازه تغییر چندانی نکند. در آن صورت $f(x_j) \approx f_j(k)$ ، و از مجموع بالا داریم

$$|f| \approx \sum_{j=1}^N f(x_j) \sum_{k=1}^{\infty} |j, k|$$

اگر ما با اعداد معمولی سروکار می‌داشتیم، مجموع روی k تعداد نقاط در بازه Δx_j می‌توانستیم آن را با $w(x_j)\Delta x_j$ که در آن $u(x)$ یک تابع چگالی است که می‌گویید چند نقطه بر واحد بازه وجود دارد، تقریب بزنیم.^۱ شاید وسوسه شویم و بخواهیم همین کار را در مورد بردارها انجام بدهیم و بنویسیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} |j, k\rangle = w(x_j)\Delta x_j |x_j\rangle$$

که در آن، $|x_j\rangle$ "میانگین" تمام بردارها در بازه Δx_j است. اما، بلافاصله دچار مشکل می‌شویم، زیرا $|x_j\rangle$ بر تمام بردارهای دیگر بازه یاد شده عمود است (بحث پایان بخش ۱-۵). یعنی، $|x_j\rangle$ هیچ مؤلفه‌ای در راستای هیچ‌یک از بردارهای دیگر ندارد و از این رو، نمی‌تواند "میانگین" آنها باشد. اینجاست که شهود با دقت در می‌افتد. با این همه، ما از این ناسازگاری چشم می‌پوشیم و به کار خود ادامه می‌دهیم، زیرا نتایجی که به دست می‌آید درست است و روابطی به دست خواهیم آورد که در بسیاری شرایط مفیدند.

با بهره‌گیری از معادله (۷-۵)، می‌توانیم بنویسیم

$$|f\rangle \approx \sum_{j=1}^N f(x_j)w(x_j)\Delta x_j |x_j\rangle$$

وقتی $N \rightarrow \infty$ و $\Delta x_j \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$|f\rangle \equiv \int_a^b f(x)w(x)|x\rangle dx \quad (۸-۵)$$

این رابطه عبارت است از بسط $|f\rangle$ برحسب بردارهایی با اندیس پیوسته. اکنون معادله (۶-۵) تبدیل می‌شود به

$$f(x) = \langle x|f\rangle$$

و

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \int_a^b \langle x|f\rangle w(x)|x\rangle dx = \int_a^b w(x)|x\rangle \langle x|f\rangle dx \\ &\equiv \left[\int_a^b |x\rangle w(x)\langle x| dx \right] |f\rangle \end{aligned}$$

۱. تابع چگالی، $w(x)$ ، که ضریب وزن نیز خوانده می‌شود، رابطه نزدیکی با بهنجارش $|x\rangle$ دارد. گزینش متداول، $w(x) = 1$ ، فقط یکی از گزینشهای فراوان و ممکن برای بهنجارش $|x\rangle$ است (معادله ۱۱-۵).

چون این رابطه به ازای هر f دلخواه صادق است، رابطه کاملیت را برای یک اندیس پیوسته به دست می آوریم

$$\int_a^b |x\rangle w(x) \langle x| dx = 1 \quad (۹-۵الف)$$

این عبارت، تعمیم (۵-۵) به حالت پیوسته است. در بیشتر (اما نه همه) کاربردها، $w(x)$ واحد اختیاری می شود، و (۹-۵الف) تبدیل می شود به

$$\int_a^b |x\rangle \langle x| dx = 1 \quad (۹-۵ب)$$

هر چند معادله (۸-۵) ساده و بی پیرایه به نظر می رسد، اما هیولایی در آن خفته است! ما به نحوه استنتاج (۸-۵) از (۷-۵) شک داریم برای آنکه نظری اجمالی بر این هیولا بیندازیم، بگذارید حاصلضرب داخلی (۸-۵) را نسبت به $\langle x'|$ به دست آوریم:

$$\langle x'|f\rangle = f(x') = \int_a^b f(x) \langle x'|x\rangle w(x) dx \quad \forall |f\rangle$$

که فرض بر این است که x' در بازه $[a, b]$ قرار دارد [در غیر این صورت، بنا به تعریف، $f(x') = 0$]. اگر $\langle x'|x\rangle$ را به صورت $D(x', x)$ ، تابعی از x و x' نمایش دهیم، و معادله قبل را به شکل زیر بنویسیم

$$f(x') = \int_a^b f(x) D(x', x) w(x) dx \quad (۱۰-۵)$$

این معادله، که به ازای هر $f(x)$ دلخواه برقرار است، بلافاصله به ما می گوید که $D(x', x)$ تابعی معمولی نیست. وقتی از حاصلضرب دو تابع معمولی انتگرال بگیریم، حاصل انتگرال رابطه ای با هیچ یک از توابع اولیه یا با مقدار آن در نقطه ای واقع در گستره انتگرال گیری نخواهد داشت.

به کمک معادله (۱۰-۵) می توان نشان داد که

$$1. \quad D(x', x) = 0 \quad \text{اگر } x \neq x'$$

$$2. \quad D(x, x) = \infty$$

$$3. \quad D(x', x) = D(x - x') = D(x' - x)$$

$$4. \quad \int_a^b w(x) D(x - x') dx = 1$$

اثبات، در قالب مسئله، برعهده خواننده گذاشته می شود.

معمولاً تابع دلتای دیراک را به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\delta(x - x') = w(x)D(x', x) \equiv w(x)\langle x'|x \rangle \quad (11-5)$$

به این ترتیب، به گزاره زیر خواهیم رسید

گزاره ۱-۲-۵: تابع دلتای دیراک که در معادله‌های (۱۰-۵) و (۱۱-۵) تعریف شده است، از

خواص زیر برخوردار است

$$\delta(x - x') = 0 \text{ اگر } x \neq x' \text{ (الف)}$$

$$\delta(0) = \infty \text{ (ب)}$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \text{ (یعنی تابع دلتای دیراک زوج است) (ج)}$$

$$\int_a^b \delta(x - x') dx = 0 \text{ اگر } x' \notin [a, b] \text{ (د)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1 \text{ به‌ویژه } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x') \text{ (ه)}$$

در خاصیت (ه)، بازه را نامتناهی گرفته‌ایم زیرا در همه جا، جز یک نقطه، $\delta(x - x') = 0$.

بنابراین، شامل کردن تمامی بقیه خط حقیقی، انتگرال را تغییر نمی‌دهد.

معادله (۱۱-۵) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\langle x'|x \rangle = \frac{1}{w(x)} \delta(x - x')$$

که تعمیم رابطه راست‌هنگاری بردارها به حالت اندیس پیوسته است.

تمام مطالب بالا را می‌توان بر فضاهای برداری مختلط نیز اعمال کرد. در آن حالت، $f(x)$

مختلط خواهد بود و

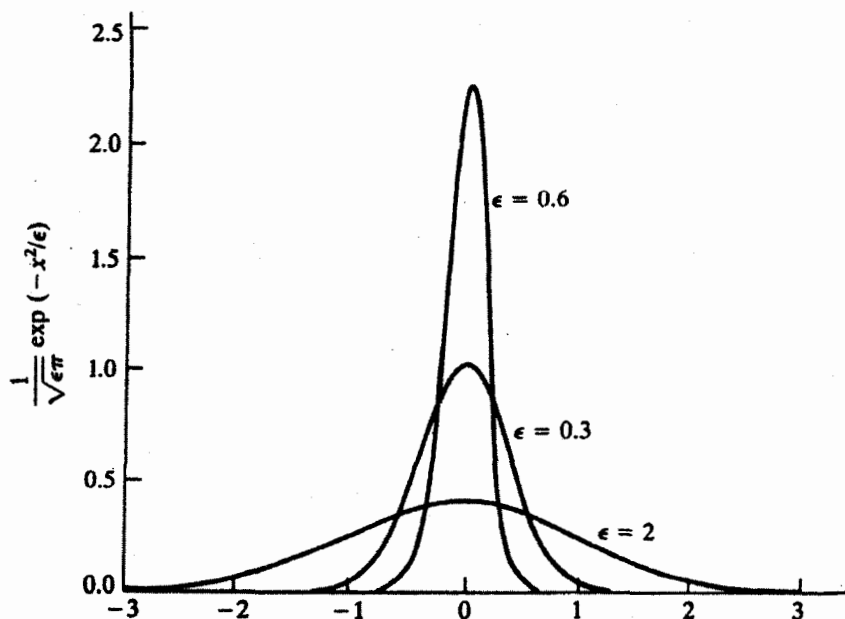
$$f^*(x) = \langle x|f \rangle^* = \langle f|x \rangle$$

مثال ۱-۲-۵: یکی از مثالها برای نمایش تابع دلتای دیراک، منحنی گاوسی است که با همان زمان

و سرعتی که ارتفاعش به بینهایت میل می‌کند، پهنای آن به صفر میل می‌کند، به طوری که مساحت

زیر آن ثابت می‌ماند. در واقع، می‌توان نوشت

$$\delta(x - x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} e^{-(x-x')^2/\epsilon}$$



شکل ۴-۵ نمودار تابع $e^{-x^2/\epsilon}/\sqrt{\epsilon\pi}$ برحسب مقادیر مختلف ϵ . هر چه ϵ کوچکتر باشد قله تابع تیزتر است.

به ازای هر مقدار ناصفر ϵ ، به آسانی می توان ثابت کرد که (تمرین ۵-۳-۲)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} e^{-(x-x')^2/\epsilon} dx = 1$$

این رابطه از ϵ مستقل و بنابراین در حد $\epsilon \rightarrow 0$ نیز برقرار است. از سوی دیگر، نمودار منحنیهای گاوسی به ازای مقادیر مختلف ϵ نشان می دهند (شکل ۴-۵) که وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ قله تابع تیز می شود.

مثال ۲-۲-۵: تابع $D_T(x-x')$ را که به صورت زیر تعریف می شود، در نظر بگیرید

$$D_T(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{it(x-x')} dt$$

توجه کنید که انتگرال روی t گرفته می شود، نه x (یا x')! انتگرال خیلی سراسر است و ساده است و

منجر می شود به

$$D_T(x - x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{it(x-x')}}{i(x-x')} \right] \Big|_{-T}^{+T} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin T(x-x')}{x-x'} \right]$$

نمودار $D_T(x - x')$ به صورت تابعی از x به ازای $x' = 0$ و مقادیر مختلف T در شکل ۵-۵ نشان داده شده است. توجه کنید که با افزایش T ، پهنای منحنی کاهش می یابد. مساحت زیر منحنی را می توان محاسبه کرد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x - x') dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x - x')}{x - x'} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$$

در این محاسبه از نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

بهره برده شده است که ما آن را در فصل ۷ با استفاده از روش توانای حساب مانده ها از آنالیز اعداد مختلط به دست خواهیم آورد (مثال ۷-۲-۱۳). بنابراین، مساحت از پهنای T ، مستقل است. در شکل ۵-۵ مشاهده می کنیم که با افزایش T ، $D_T(x - x')$ هر چه بیشتر به شکل تابع دلتای دیراک میل می کند. در واقع، داریم

$$\delta(x - x') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin T(x - x')}{x - x'} \right] \quad (1)$$

برای پی بردن به این مطلب، توجه داریم که به ازای هر مقدار متناهی T می توانیم بنویسیم

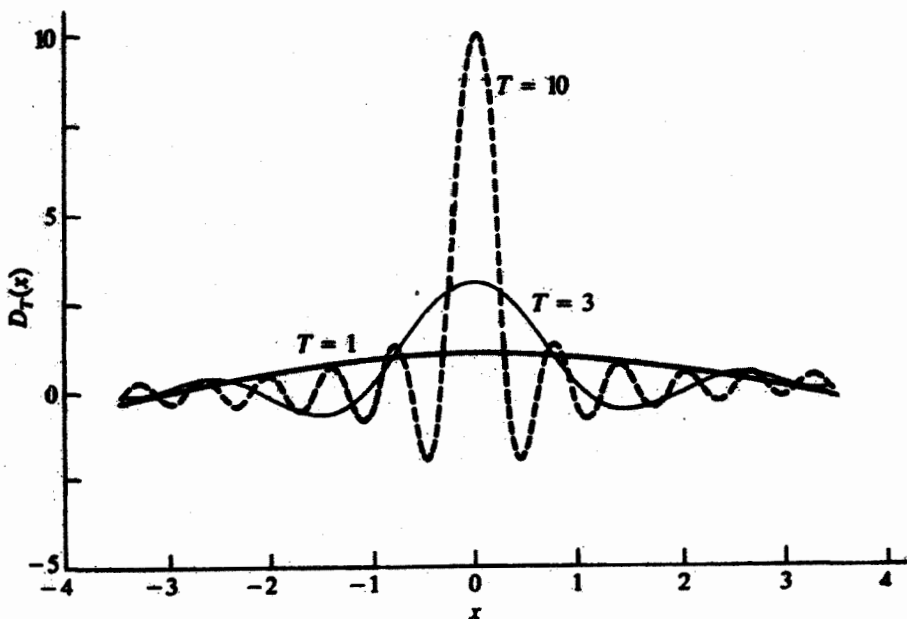
$$D_T(x - x') = \frac{T}{\pi} \left[\frac{\sin T(x - x')}{T(x - x')} \right]$$

این عبارت نشان می دهد که اگر x خیلی به x' نزدیک باشد،

$$\sin T(x - x') / T(x - x') \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad T(x - x') \rightarrow 0$$

بنابراین، وقتی $x \rightarrow x'$ ، داریم

$$D_T(x - x') \approx \frac{T}{\pi}$$



شکل ۵-۵ تابع $\sin Tx/x$ به ازای مقادیر مختلف T ترسیم شده است. هر چه T بزرگتر باشد، قله تابع تیزتر است.

که به ازای مقادیر بزرگ T ، بزرگ است. این همان چیزی است که از تابع دلتا انتظار می‌رود: $\delta(\epsilon) = \infty$. از سوی دیگر، پهنای $D_T(x-x')$ در اطراف x' ، تقریباً با نقاطی داده می‌شود که در آنها $D_T(x-x')$ به صفر افت می‌کند: $T(x-x') = \pm\pi$ یا $x-x' = \pm\pi/T$. بنابراین، پهنای، تقریباً، با فاصله بین $x_+ = x' + \pi/T$ و $x_- = x' - \pi/T$ یا $\Delta x = x_+ - x_- = 2\pi/T$ که با بزرگ شدن T به صفر میل می‌کند، داده می‌شود. در اینجا نیز، این معنا همان چیزی است که از یک تابع دلتا انتظار می‌رود.

پس ملاحظه می‌کنیم که (۱) دارای ویژگیهای تابع دلتای دیراک است. به این اعتبار می‌توانیم

بنویسیم

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-x')} dt$$

مثال ۳-۲-۵: سومین نمایش تابع دلتای دیراک شامل تابع پله‌ای $\theta(x-x')$ است که به صورت

$$\theta(x-x') \equiv \begin{cases} 0 & x < x' \\ 1 & x > x' \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

تعریف می‌شود و در $x = x'$ ناپیوسته است. این تابع پله‌ای را می‌توان با یک تابع پیوسته $T_\varepsilon(x - x')$ که به صورت

$$T_\varepsilon(x - x') \equiv \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq x' - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}(x - x' + \varepsilon) & \text{اگر } x' - \varepsilon \leq x \leq x' + \varepsilon \\ 1 & \text{اگر } x \geq x' + \varepsilon \end{cases}$$

تعریف می‌شود، و در آن ε عدد کوچک مثبتی است، تقریب زد. روشن است که

$$\theta(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(x - x')$$

حال شیب $T_\varepsilon(x - x')$ را به صورت تابعی از x در نظر بگیریم

$$\frac{dT_\varepsilon(x - x')}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x < x' - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{اگر } x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon \\ 0 & \text{اگر } x > x' + \varepsilon \end{cases}$$

توجه داشته باشید که شیب در $x = x' - \varepsilon$ و $x = x' + \varepsilon$ معین نیست. ملاحظه می‌کنیم که dT_ε/dx در همه جا صفر است، مگر وقتی که در بازه $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ قرار دارد، که مساوی $1/2\varepsilon$ است و وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ به بینهایت میل می‌کند. در اینجا دوباره ردپای تابع دلتا را می‌بینیم. در واقع، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dT_\varepsilon}{dx} \right) dx = \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \left(\frac{dT_\varepsilon}{dx} \right) dx = \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = 1$$

و مساحت زیر تابع dT_ε/dx مساوی ۱ است. پس جای تعجب نیست که بینیم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dT_\varepsilon(x - x')}{dx} = \delta(x - x')$$

با تعویض جای مشتق‌گیری و حدگیری خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(x - x') \right] = \frac{d}{dx} \theta(x - x') = \delta(x - x')$$

۲-۲-۵ چندین اندیس پیوسته

اکنون که به استنباطی از اندیس پیوسته دست یافته‌ایم، می‌توانیم نتایج را به چندین اندیس پیوسته تعمیم بدهیم. قبلاً $f(x)$ را به صورت مؤلفه x ام یک بردار مجرد $|f\rangle$ در نظر گرفتیم، و دیدیم که $f(x)$ با نموداری شبیه آنچه که در شکل ۳-۵ آمده است، نمایش داده می‌شود. برای توابعی از دو متغیر x و y ، می‌توانیم $f(x, y)$ را مؤلفه یک بردار مجرد $|f\rangle$ در راستای یک بردار پایه $|x, y\rangle$ تصور کنیم. این پایه، تعمیم مستقیم $|x\rangle$ به بیش از یک اندیس پیوسته است. البته نشانهای x و y کاملاً از یکدیگر مستقل‌اند. پس $f(x, y)$ ، بنابر تعریف، عبارت خواهد بود از:

$$f(x, y) \equiv \langle x, y | f \rangle$$

اگر گستره x از a تا b و گستره y از c تا d باشد، در آن صورت می‌توانیم معادله‌های مربوط به یک متغیر را به شکل زیر تعمیم بدهیم

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) w(x, y) |x, y\rangle \\ \int_a^b dx \int_c^d dy |x, y\rangle w(x, y) \langle x, y| &= 1 \\ f(x', y') &= \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) w(x, y) \langle x', y' | x, y \rangle \\ \langle x', y' | x, y \rangle w(x, y) &= \delta(x - x') \delta(y - y') \end{aligned}$$

اکنون تعمیم به n اندیس پیوسته، کاری است بدیهی. اگر گستره نامین اندیس پیوسته را $[a_i, b_i]$ فرض کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) w \\ &\quad (x_1, x_2, \dots, x_n) |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \\ \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n |x_1, \dots, x_n\rangle w(x_1, \dots, x_n) \langle x_1, \dots, x_n| \\ &= 1 \\ f(x'_1, \dots, x'_n) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n) w \end{aligned}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \langle x'_1, \dots, x'_n | x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$\langle x'_1, \dots, x'_n | x_1, \dots, x_n \rangle = w(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1 - x'_1) \cdots \delta(x_n - x'_n)$$

با معرفی نمادگذاریهای زیر می‌توان این معادلات را به صورت جمع و جورتر نوشت

$$\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$d^n r = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n \equiv \int_a^b d^n r \equiv \int d^n r$$

$$|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = |\mathbf{r}\rangle$$

$$\delta(x_1 - x'_1) \cdots \delta(x_n - x'_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

در آن حالت خواهیم داشت

$$|f\rangle = \int d^n r f(\mathbf{r}) w(\mathbf{r}) |\mathbf{r}\rangle \quad (۵-۱۲ الف)$$

$$\int d^n r |\mathbf{r}\rangle w(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}| = 1 \quad (۵-۱۲ ب)$$

$$f(\mathbf{r}') = \int d^n r f(\mathbf{r}) w(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle \quad (۵-۱۲ ج)$$

$$\langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle w(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (۵-۱۲ د)$$

مثال ۵-۲-۴: به عنوان مثال دیگری از تابع دلتای دیراک، نتیجه مثال ۱-۶-۲ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

بردار داخل پراتز عبارت سمت چپ را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

و از این رابطه می‌رسیم به معادله

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

که در ریاضی فیزیک نتیجه بسیار مهمی است. ملاحظه می‌کنیم که اگر این معادله را در q ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla^2 \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

● که معادله پواسون در الکتروستاتیک برای پتانسیل بار نقطه‌ای q است (تمرین ۵-۲-۱).

۳-۲-۵ توزیعها به‌عنوان توابع خطی

تابع دلتای دیراک که در بالا مورد بحث قرار گرفت در اواخر سالهای ۱۹۲۰ و اوایل سالهای ۱۹۳۰ توسط پل آدرین موریس دیراک، در حینی که سرگرم بررسی مسائل پراکندگی در مکانیک کوانتومی بود، معرفی شد. این "تابع" که به‌نظر می‌رسید بیشتر خواص توابع ریاضی دیگر را نقض کند، رفتاری شبیه به گزاره ۵-۲-۱ داشت.

علاوه بر این، تابع $\delta'(x)$ (تمرین ۵-۲-۶) چنان است که، به‌ازای هر تابع دلخواه $f(x)$ ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x')dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-x')dx = -f'(x') \quad (13-5)$$

$\delta'(x)$ را می‌توان با این رابطه تعریف کرد. علاوه بر این، مشتق هر تابعی را در هر نقطه (مثلاً یک تابع ناپیوسته را در یک نقطه ناپیوستگی، که در آن، تعریف معمولی مشتق ناممکن است) می‌توان با این رابطه تعریف کرد. یعنی، اگر $\varphi(x)$ یک تابع "بد" باشد، که مشتق آن قابل تعریف نیست، و $f(x)$ یک تابع "خوب" باشد، می‌توانیم مشتق $\varphi(x)$ را به این صورت تعریف کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \quad (14-5)$$

انتگرال سمت راست خوش‌تعریف است.

عامل مشترک مابین $\delta(x)$ ، $\delta'(x)$ ، $\delta''(x)$ ، ... (توابعی که دیراک آنها را "ناسره" خواند) عبارت از این است که، در همه کاربردها، آنها در داخل انتگرال ظاهر می‌شوند و مقدار انتگرال،

مادام که تابع $f(x)$ - موسوم به تابع آزمون- خوش رفتار باشد، خوش تعریف است. لوران شوارتز، که نظریه جدیدی به نام نظریه توابع (یا توابع تعمیم یافته) را پرداخت، از این ایده بهره گرفت. بنابراین، هر توزیع، "موجودی" ریاضی است که همراه با یک تابع آزمون خوش رفتار در داخل یک انتگرال چنان ظاهر می شود که نتیجه انتگرال گیری یک عدد خوش تعریف است. بسته به اینکه نوع تابع آزمون به کار برده شده چه باشد، انواع متفاوتی از توابعها را می توان تعریف کرد. اگر بخواهیم تابع دلتای دیراک و مشتقات آن را از همه مراتب به کار ببریم، در آن صورت تابعهای آزمون باید دارای مشتقاتی از همه مرتبه ها باشند، یعنی، باید تابعهای C^∞ باشند. علاوه بر این، برای اینکه نظریه توابعها کار بکند، تمام تابعهای آزمون باید در خارج از یک "حجم" متناهی \mathbb{R}^n یا C^n صفر بشوند. ما از نمادهای $C_F^\infty(\mathbb{R}^n)$ یا $C_F^\infty(C^n)$ برای نشان دادن همه این نوع تابعها که در \mathbb{R}^n یا C^n تعریف می شوند بهره می گیریم (F معرف واژه finite، به معنای متناهی است). تصور تابعی که بینهایت بار قابل تعریف مشتق گیری باشد و در عین حال در خارج یک ناحیه متناهی صفر شود، دشوار است. با این همه، در مثال زیر نشان می دهیم که چنین توابعی وجود ندارد.

مثال ۵-۲-۵: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \exp(-1/x) & x \geq 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & x < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

روشن است که $d^n f/dx^n$ به ازای جميع مقادیر n و جميع مقادیر x ، احتمالاً جز $x = 0$ ، وجود دارد. به ازای $x = 0$ از تعریف مشتق استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\exp(-1/\Delta x)}{\Delta x} & \Delta x > 0 \quad \text{اگر} \\ \frac{0}{\Delta x} & \Delta x < 0 \quad \text{اگر} \end{cases} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta x}\right) e^{-1/\Delta x} & \Delta x > 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & \Delta x < 0 \quad \text{اگر} \end{cases} \end{aligned}$$

با استفاده از قاعده هوییتال، داریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \right) e^{-1/\Delta x} = 0$$

بنابراین:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

در واقع، با استدلالهایی مشابه، می توان نشان داد که

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=0} = 0 \quad \forall n$$

بنابراین، f یک تابع C^∞ است.

اکنون تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را، بنابر تعریف زیر، در نظر می گیریم:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \\ \exp \left[\frac{1}{x(x-1)} \right] & \text{اگر } 0 < x < 1 \end{cases}$$

این تابع، $C^\infty_{\mathbb{R}}$ است و در خارج از بازه $(0, 1)$ صفر می شود.

می توان دیدگاههای بالا را تعمیم داد و تابع زیر را که $C^\infty_{\mathbb{R}}$ است و در خارج از بازه (a, b)

صفر می شود، تعریف کرد

$$h(x; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \leq a \text{ یا } x \geq b \\ \exp \left[\frac{1}{(x-a)(x-b)} \right] & \text{اگر } a < x < b \end{cases}$$

خاصیت مسلم توزیعهها، عبارت است از چگونگی ترکیب آنها با توابع آزمون برای به دست دادن یک عدد. توابع آزمون آشکارا یک فضای برداری در \mathbb{R} یا \mathbb{C} تشکیل می دهند. در این "زبان" فضا بردار، توزیعهها، تابعههایی خطی اند. خطی بودن، پیامدی ساده از خواص انتگرال است. بنابراین، به تعریف زیر می رسیم.

تعریف ۲-۲-۵: یک توزیع، یا تابع تعمیم یافته، تابعی خطی در فضای $C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ یا $C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{C}^n)$ است. اگر $f \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ و φ یک توزیع باشد، در آن صورت

$$\varphi[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) d^n t$$

علاوه بر این، معمولاً فرض می‌شود که φ برخی شرایط پیوستگی معین را نیز برقرار می‌کند، اما ما به حوزه این جزئیات وارد نخواهیم شد.

در تعریف ۲-۲-۵، $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ یا \mathbb{C}^n و $d^n t = dt_1 dt_2, \dots, dt_n$ و توجه داشته باشید که $\varphi[f]$ همان‌گونه که از تابع انتظار می‌رود، عدد است. نمادگذاری متداول دیگر، عبارت است از $\langle \varphi, f \rangle$. این نمادگذاری جالبتر است زیرا نه فقط به این علت که φ یک تابع خطی است، به این معنا که $\varphi[af + bg] = a\varphi[f] + b\varphi[g]$ ، بلکه به این دلیل که مجموعه تمام این‌گونه تابعهای خطی یک فضای برداری را تشکیل می‌دهد؛ یعنی، ترکیب خطی φ ها نیز "تعریف شده است". بنابراین، $\langle \varphi, f \rangle$ به‌طور طبیعی معرف یک "دموکراسی" متقابل است. اکنون ما یک راه تندنویسی انتگرالها را در اختیار داریم. مثلاً، اگر δ معرف تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ باشد، در آن صورت

$$\langle \delta, f \rangle = f(0) \quad (الف \ ۱۵-۵)$$

همچنین

$$\langle \delta', f \rangle = -f'(0) \quad (ب \ ۱۵-۵)$$

و برای ترکیبهای خطی،

$$\langle a\delta + b\delta', f \rangle = af(0) - bf'(0) \quad (ج \ ۱۵-۵)$$

عیب این‌گونه نمادگذاری این است که بین توزیعهای با شناسه‌های مختلف تمیز قائل نمی‌شود. بنابراین، از معادله‌های (۱۵-۵) معلوم نیست که آیا ما با $\delta(x)$ سروکار داریم یا $\delta(x - x')$ یا $\delta(x^2 - a^2)$ ، یا یک توزیع دیگر. معادله‌های (۱۵-۵) را فقط هنگامی به‌کار خواهیم برد که "شناسه" از محتوای مطلب کاملاً مشخص باشد.

همچنین فرض خواهیم کرد که می‌توانیم خاصیت خطی

$$\langle \varphi, \sum_{i=1}^n a_i f_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi, f_i \rangle$$

را به مجموعه‌های پیوسته، یا انتگرالها، نیز تعمیم بدهیم، بنابراین می‌رسیم به:

$$\langle \varphi, \int_a^b f dy \rangle = \int_a^b \langle \varphi, f \rangle dy$$

یا، به‌طور صریح

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \int_a^b f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x, y) dx dy \quad (۱۶-۵ \text{ الف})$$

همچنین،

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle \varphi, f \rangle = \left\langle \varphi, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad (۱۶-۵ \text{ ب})$$

مثال ۶-۲-۵: تابع معمولی (پیوسته) f را می‌توان به مثابه حالت خاصی از یک توزیع تصور کرد. تابع خطی $f: C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ به‌سادگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle f, g \rangle \equiv f[g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

مثال ۷-۲-۵: کاربردهای جالب توزیعها (توابع تعمیم یافته) وقتی پیش می‌آیند که مفهوم چگالی را تعمیم دهیم تا نه تنها چگالیهای هموار، که چگالیهای نقطه‌ای، خطی، و سطحی را هم در بر بگیرد. همان‌طور که در تمرین ۱-۲-۵ نشان دادیم، بار نقطه‌ای q واقع در τ_0 را می‌توان دارای چگالی بار $\rho(\tau) = q\delta(\tau - \tau_0)$ تلقی کرد. در زبان تابعهای خطی، ρ را به‌صورت توزیع $\rho: C_{\mathbb{F}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ تعبیر می‌کنیم، که به‌ازای یک تابع $f \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ دلخواه f می‌دهد:

$$\rho[f] = \langle \rho, f \rangle = qf(\tau_0)$$

سرشت "هیولایی" ρ در این معادله پنهان شده است. با این همه، ما می‌توانیم این سرشت را با

توجه به اینکه سمت چپ عبارت است از

$$\iiint \rho(\mathbf{r})f(\mathbf{r})d^3r = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{r}_i)f(\mathbf{r}_i)\Delta V_i$$

شناسایی کنیم. در عبارت سمت راست این معادله، تنها عنصر حجمی که شرکت می‌کند عنصری است که شامل نقطه \mathbf{r}_0 است؛ سهم بقیه عناصر حجم، چگالی صفر است. وقتی $\Delta V_i \rightarrow 0$ ، تنها در صورتی سمت راست می‌تواند یک عدد متناهی بدهد که $\rho(\mathbf{r}_0)f(\mathbf{r}_0)$ نامتناهی باشد. چون f یک تابع خوش‌رفتار است، $f(\mathbf{r}_0)$ متناهی است. پس، $\rho(\mathbf{r}_0)$ نامتناهی است، که بر این معنا دلالت می‌کند که $\rho(\mathbf{r})$ یک تابع دلتای دیراک است.

به همین ترتیب، فرض کنید روی منحنی γ در \mathbb{R}^3 ، چگالی بار خطی و هموار $\lambda(\mathbf{r})$ وجود دارد. توزیع $\rho: C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\langle \rho, f \rangle = \int_{\gamma} \lambda(\mathbf{r})f(\mathbf{r})dl$$

تعریف می‌کنیم که در آن، dl یک عنصر کمان از γ ، و انتگرال بر روی منحنی است. بار دیگر سرشت ویژه ρ را می‌توان با نوشتن این عبارت بازشناخت

$$\langle \rho, f \rangle = \iiint \rho(\mathbf{r})f(\mathbf{r})d^3r = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{r}_i)f(\mathbf{r}_i)\Delta V_i$$

که در آن، ΔV_i اکنون استوانه‌ای است بینهایت نازک که دقیقاً به شکل γ درآمده است. در اینجا نیز سهم همه عناصر حجم در سمت راست صفر می‌شود، مگر سهم ΔV_i ، که شامل منحنی باردار γ است. چون $\Delta V_i \rightarrow 0$ و $f(\mathbf{r})$ تابع خوبی است، $\rho(\mathbf{r})$ باید به‌ازای نقاط واقع بر γ نامتناهی، و در جاهای دیگر صفر باشد.

همچنین، می‌توان نشان داد که اگر $\sigma(\mathbf{r})$ یک چگالی بار سطحی هموار روی سطح S در \mathbb{R}^3 باشد، در آن صورت توزیع $\rho: C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ که با عبارت زیر داده می‌شود

$$\langle \rho, f \rangle = \iint_S \sigma(\mathbf{r})f(\mathbf{r})da$$

در همه جا صفر است، مگر در نقاط واقع بر S ، که نامتناهی است.

مثال ۵-۲-۷ نشان می دهد که اگر یک توزیع بر حسب انتگرالهای با ابعاد پایین تر تعریف بشود، در آن صورت توزیع در نقاط انتگرالده نامتناهی می شود. به طور کلی، اگر $\rho : C_F^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شود

$$\langle \rho, f \rangle = \int_S \sigma(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^m r \quad (17-5)$$

که در آن، S یک ابرسطح، $\sigma(\mathbf{r})$ یک تابع هموار بر روی S است و $m < n$ در آن صورت $\rho(\mathbf{r})$ باید به ازای $\mathbf{r} \in S$ نامتناهی باشد.

توزیعها به عنوان حدود دنباله هایی از تابعها. دیدیم که تابع دلتا را می توان به عنوان حد یک تابع معمولی تلقی کرد. این دیدگاه را می توان تعمیم داد.

تعریف ۵-۲-۳: فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}$ دنباله ای از تابعهاست به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx$$

به ازای هر $f \in C_F^\infty(\mathbb{R})$ وجود دارد. در این صورت، اصطلاحاً می گویند دنباله یادشده به توزیع φ می گراید، که این توزیع، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\langle \varphi, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx \quad \forall f \quad (18-5)$$

این همگرایی را به صورت $\varphi_n \rightarrow \varphi$ نمایش می دهیم.

به این ترتیب، می توان ثابت کرد

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \rightarrow \delta(x)$$

و

$$\frac{1 - \cos nx}{n\pi x^2} \rightarrow \delta(x)$$

والی آخر: اثباتها را به عنوان مسئله برعهده خواننده می گذاریم.

مشق توزیع. مشتق توزیع به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۴-۲-۵: مشتق توزیع φ ، توزیع دیگر φ' است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle \varphi', f \rangle \equiv -\langle \varphi, f' \rangle \quad \forall f \in C_{\mathbb{F}}^{\infty} \quad (19-5)$$

مثال ۸-۲-۵: با ترکیب تعریفهای ۳-۲-۵ و ۴-۲-۵ می‌توان نشان داد که اگر توابع θ_n به صورت زیر تعریف شوند

$$\theta_n(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{اگر } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x & \text{اگر } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{اگر } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

در آن صورت $\theta_n'(x) \rightarrow \delta(x)$

از (۱۹-۵) و این واقعیت که $\theta_n(x)$ را می‌توان به صورت یک توزیع تلقی کرد (مثال ۶-۲-۵)، داریم

$$\langle \theta_n', f \rangle = -\langle \theta_n, f' \rangle$$

که، برحسب انتگرالها، عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n'(x) f(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) \frac{df}{dx} dx \\ &= - \left[\int_{-\infty}^{-1/n} \theta_n(x) \frac{df}{dx} dx + \int_{-1/n}^{1/n} \theta_n(x) \frac{df}{dx} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/n}^{\infty} \theta_n(x) \frac{df}{dx} dx \right] \\ &= - \left(0 + \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2} x df + \int_{1/n}^{\infty} df \right) \\ &= -\frac{n}{2} \left(x f \Big|_{-1/n}^{1/n} - \int_{-1/n}^{1/n} f dx \right) - f(x) \Big|_{1/n}^{\infty} \end{aligned}$$

بدازی مقادیر بزرگ n داریم: $1/n \approx 0$ و $f(1/n) \approx f(0)$. بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'_n(x) f(x) dx \approx -\frac{n}{2} \left[\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0) \left(\frac{2}{n}\right) \right]$$

$$- f(\infty) + f\left(\frac{1}{n}\right) \approx f(0)$$

در حد $n \rightarrow \infty$, تقریب به تساوی تبدیل می شود. بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta'_n(x) f(x) dx = f(0) = \langle \delta, f \rangle$$

و

$$\theta'_n \rightarrow \delta$$

توجه داشته باشید که به اعتبار این فرض که تمام توابع باید در خارج از یک حجم متناهی صفر شوند، پس $f(\infty) = 0$.

انتگرال توزیع. در بالا دیدیم که مشتق یک توزیع، برحسب مشتق تابع آزمون بیان می شود. پس، تعجب آور نیست که تابع اولیه (یا پادمشتق، یا انتگرال نامعین) یک توزیع نیز برحسب تابع اولیه تابع آزمون داده شود. در واقع، می توانیم (۵-۱۹) را برعکس، و به صورت زیر بنویسیم

$$\langle \Phi, f \rangle \equiv -\langle \varphi, F \rangle \quad (5-20 \text{ الف})$$

که در آن Φ و F ، به ترتیب، توابع اولیه φ و f هستند. تابع اولیه f عبارت است از

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

بنابراین، حتی اگر $f(x) \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ ممکن است در بینهایت صفر نشود، زیرا $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ ممکن است صفر نباشد. در آن صورت، $F \notin C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ ، و معادله (۵-۲۰ الف) برای F تعریف شده نیست. با این همه، به روش زیر می توان این مشکل را رفع کرد. فرض کنید $g \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ چنان است که $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ و همچنین $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = a$. به این ترتیب، تابع اولیه $ag \equiv f_0 \equiv f - ag$ متعلق به $C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ و (۵-۲۰ الف) تعریف شده است. از این رو، به تعریف زیر خواهیم رسید.

تعریف ۵-۲-۵: فرض کنید φ یک توزیع باشد و $f \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}$. همچنین فرض کنید $a = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ و $g \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}$. در آن صورت تابع اولیه φ ، که آن را با Φ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle \Phi, f \rangle = \langle \Phi, f_0 \rangle + \langle C, f \rangle$$

که در آن $f_0 = f - ag$ یک (توزیع) ثابت، و $\langle \Phi, f_0 \rangle$ مطابق (۵-۲۰الف) تعریف می‌شود. ثابت C چیزی نیست جز $\langle \Phi, g \rangle$.

مثال ۵-۲-۹: می‌خواهیم با استفاده از تعریف ۵-۲-۵، تابع اولیه $\delta(x)$ را پیدا کنیم. به ازای $\varphi = \delta$ داریم

$$\langle \Phi, f \rangle = \langle \Phi, f_0 \rangle + \text{مقدار ثابت} = -\langle \delta, F_0 \rangle + \text{مقدار ثابت}$$

$$= -F_0(0) + \text{مقدار ثابت} = -\int_{-\infty}^0 f_0(t) dt + \text{مقدار ثابت}$$

$$= -\int_{-\infty}^0 [f(t) - ag(t)] dt + \text{مقدار ثابت} \quad (۱)$$

$$\equiv -\int_{-\infty}^0 f(t) dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

که b ثابت جدیدی است که در آخرین مرحله تعریف می‌شود. با بازنویسی عبارت سمت چپ رابطه (۱) برحسب انتگرالها و تغییر متغیر ظاهری انتگرال‌گیری از t به x ، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^0 (b-1) f(x) dx + \int_0^{\infty} b f(x) dx \quad \forall f \in C_{\mathbb{F}}^{\infty}(\mathbb{R})$$

این معادله فقط در صورتی به ازای تمام مقادیر f برقرار است که

$$\Phi(x) = \begin{cases} b-1 & x < 0 \quad \text{اگر} \\ b & x > 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

به ازای $b=1$ تابع δ تا به دست می‌آید، که قبلاً نشان دادیم تابع اولیه δ است.

تغییر متغیرهای انتگرال گیری. قبلاً نحوه برخورد با $\delta(F(x))$ را دیدیم. به زبان توزیعها، ممکن است عبارتهایی نظیر $\varphi(f(x))$ تعریف شده نباشند، به خصوص اینکه تابعهای آزمون به C_0^∞ محدود شده اند. در واقع، اگر ما طبیعی ترین کار را انجام دهیم و تعریف $y = f(x)$ را در نظر بگیریم به طوری که متغیر انتگرال گیری تغییر کند، ممکن است با مشکل مواجه شویم، زیرا احتمال دارد x بر حسب y قابل بیان نباشد. حتی اگر قابل بیان هم باشد، ممکن است C_0^∞ نباشد. با این همه، اگر $y = f(x)$ ، عبارت باشد از C_0^∞ و $x = f^{-1}(y)$ نیز C_0^∞ باشد، در آن صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(f(x))g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)g(f^{-1}(y)) \left| \frac{df^{-1}(y)}{dy} \right| dy \quad (21-5)$$

یا

$$\langle \psi, g \rangle = \langle \varphi, h \rangle \quad (22-5)$$

که در آن $h(y) = g(f^{-1}(y))|df^{-1}(y)/dy|$ و $\psi(x) = \varphi(f(x))$ در \mathbb{R}^n باید از ژاکوبی استفاده کرد. بنابراین، در (۲۲-۵)،

$$\psi(\mathbf{r}) = \varphi(f(\mathbf{r})) \quad \text{و} \quad h(\mathbf{y}) = g(f^{-1}(\mathbf{y})) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|$$

در این بخش در خصوص اندیسه‌های پیوسته بحث کردیم. بهترین راه مطالعه "توابع" حاصل از اندیسه‌های پیوسته، مثل تابع دلتای دیراک، کاربرد مفهوم توزیعها، یا توابع تعمیم یافته است. در بقیه این فصل با فضا‌های تفکیک پذیر هیلبرت سروکار خواهیم داشت، که در آنها یک پایه راست هنجار "شمارا" وجود دارد. همان گونه که خواهیم دید، این فضا‌های هیلبرت، در مقایسه با فضا‌های تفکیک پذیر، کاربردهای فیزیکی بیشتر و جالبتری دارند.

تمرینها

۱-۲-۵ گاهی خوب است بتوانیم به یک ذره نقطه‌ای یک چگالی نسبت دهیم. مثلاً می‌توانیم چگالی جرم و چگالی باریک یک نقطه مادی با بار q را نمایش دهیم. نشان دهید که

$$\rho_m(x) = m\delta(x - x_0) \quad \text{و} \quad \rho_e(x) = q\delta(x - x_0)$$

معرف چگالی بار و چگالی جرم یک ذره نقطه‌ای واقع در $x = x_0$ هستند. (این حالت یک وضعیت یک‌بعدی است، که به آسانی می‌توان آن را به ابعاد بیشتر تعمیم داد.)

۲-۲-۵ یک تابع چگالی برای دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که به ترتیب در $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ قرار گرفته‌اند، بنویسید.

۳-۲-۵ نشان دهید

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3k$$

۴-۲-۵ نشان دهید:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x - x_0)$$

که در آن، x_0 چنان است که $f(x_0) = 0$.

۵-۲-۵ اگر تابع $f(x)$ در تمرین ۴-۲-۵ بیش از یک صفر داشته باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟ این امکان را بکاویید.

۶-۲-۵ نشان دهید

$$\delta'(x) \equiv \frac{d}{dx} \delta(x) \quad \text{که در آن} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0)$$

۳-۵ فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی

قبلاً گفتیم که گردایه تمام توابع پیوسته تعریف‌شده در $[a, b]$ ، یک فضای برداری خطی تشکیل می‌دهد، و در مثال ۴-۱-۵ نشان دادیم که این فضا کامل نیست. اما، اگر محدودیت پیوستگی را برداریم، در آن صورت یک فضای کامل خواهیم داشت. بگذارید فضای توابع را به تفصیل مطالعه کنیم.

تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت $\langle f |$ ، عضوی از فضای برداری مجرد (نامتناهی-بعد) که مؤلفه x آن در "پایه" $B = \{|x\rangle | x \in [a, b]\}$ عبارت است از $f(x)$ ، تلقی کرد. به عبارت دیگر، می‌توانیم بنویسیم: $f(x) = \langle x | f \rangle$.

حاصلضرب داخلی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را می‌توان با استفاده از (۹-۵) به صورت زیر "به دست" آورد

$$\begin{aligned} \langle g|f \rangle &= \langle g|\mathbb{1}|f \rangle = \langle g|\left[\int_a^b |x\rangle w(x)\langle x|dx \right]|f \rangle \\ &= \int_a^b \langle g|x\rangle \langle x|f \rangle w(x) dx \\ &= \int_a^b g^*(x)f(x)w(x) dx \end{aligned}$$

اگر $f(x) = g(x)$ ، خواهیم داشت

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \quad (23-5)$$

توابعی که (۲۳-۵) برای آنها تعریف بشود، اصطلاحاً انتگرال‌پذیر مربعی نامیده می‌شوند.

فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی در بازه $[a, b]$ به صورت $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ نشان داده می‌شود. در این نمادگذاری، \mathcal{L} معرف لبگ^۱ است، که مفهوم انتگرال معمولی ریمان را به حالت‌های توابع شدیداً ناپیوسته تعمیم داد؛ 2 نمایانگر توان $f(x)$ در انتگرال؛ a و b معرف حدود انتگرال‌گیری؛ و w نشانه تابع وزن (تابعی اکیداً مثبت و حقیقی-مقدار)^۲ است. وقتی $w(x) = 1$ ، از نمادگذاری $\mathcal{L}^2(a, b)$ بهره می‌گیریم.

فضای $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ چندان مؤثر و مهم نیست مگر اینکه کامل باشد. در قضیه زیر، که آن را به ریس و فیشر نسبت می‌دهند، این کاملیت اثبات می‌شود.^۳

قضیه ۳-۵-۱: فضای $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ کامل است. به عبارت دیگر، اگر دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر مربعی $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ چنان وجود داشته باشد که

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|f_i - f_j\|^2 \equiv \lim_{i,j \rightarrow \infty} \int_a^b |f_i(x) - f_j(x)|^2 w(x) dx = 0$$

1. Lebesgue

۲. انتگرال (۲۳-۵) را در واقع باید یک انتگرال لبگ تلقی کرد؛ اما، در این کتاب، مابین آن و انتگرال معمولی ریمان فرقی قائل نمی‌شویم.

۳. برای ملاحظه اثبات، کتاب زیر را مطالعه کنید:

در آن صورت تابعی مانند $f(x) \in \mathcal{L}_w^1(a, b)$ چنان وجود خواهد داشت که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |f_i(x) - f(x)|^p w(x) dx = 0$$

■ فضای هیلبرت \mathcal{H} ، عبارت است از فضای نامتناهی-بعد کامل حاصلضرب داخلی دیگر. قضیه زیر نشان می‌دهد که تعداد فضاهای نامتناهی-بعد کامل با حاصلضرب داخلی، شدیداً محدود است.

قضیه ۵-۳-۲: فضاهای \mathcal{H} و $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ یکرخت‌اند. یعنی، بین فضای هیلبرت و فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی تناظر یک به یکی برقرار است.

■ ما هنوز متناهی بودن $\int_a^b g^*(x)f(x)w(x)dx$ در $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ را اثبات نکرده‌ایم. می‌دانیم که:

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx$$

و

$$\langle g|g \rangle = \int_a^b |g(x)|^2 w(x) dx$$

متناهی‌اند، اما نمی‌دانیم که آیا

$$\langle g|f \rangle = \int_a^b g^*(x)f(x)w(x) dx$$

نیز متناهی هست یا خیر. اما، اگر نامساوی شوارتس، به این قرار

$$|\langle g|f \rangle|^2 \leq \langle g|g \rangle \langle f|f \rangle$$

را (که برای هر فضای برداری، متناهی یا نامتناهی، برقرار است) به‌کار ببریم، خواهیم داشت

$$\left| \int_a^b g^*(x)f(x)w(x) dx \right|^2 \leq \left[\int_a^b |g(x)|^2 w(x) dx \right] \left[\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right]$$

که سمت چپ آن مسلماً متناهی است.

۱-۳-۵ کلیاتی پیرامون چندجمله‌ایهای متعامد

یکریختی مندرج در قضیه ۲-۳-۵، فضای هیلبرت را قدری ملموستر می‌کند، اما این فضا باز هم نسبتاً مجرد است. توابع انتگرال‌پذیر مربعی عمومی را چگونه باید تجسم کنیم؟ ما به برخی توابع خاص نیاز داریم تا با آنها کار کنیم، و وایرشراس و استون با قضیه زیر به کمک ما می‌آیند.^۱

قضیه ۳-۳-۵: (قضیه تقریب استون-وایرشراس) دنباله بردارهای $\{f_k\}$ با "مختصات"

$$f_k(x) \equiv \langle x | f_k \rangle \equiv x^k$$

■ در آن $k = 0, 1, 2, \dots$ در $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ یک پایه تشکیل می‌دهد.

بنابراین، هر بردار $|f\rangle$ را می‌توان به صورت:

$$|f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |f_k\rangle$$

یا در شکل تابعی، که از حاصلضرب داخلی این رابطه با $\langle x |$ به دست می‌آید، به صورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

نوشت. توجه داشته باشید که $|f\rangle$ ها متعامد نیستند اما مستقل خطی‌اند. بنابراین، با استفاده از فرایند گرام-شمیت می‌توان توابعی — در این حالت، چندجمله‌ایهایی — متعامد یافت که $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ را فرا بگیرند. در مثالهای زیر، ساختن چند نمونه اول این چندجمله‌ایهای متعامد [اما غیر (نرمال) هنجار شده] را نشان می‌دهد.

مثال ۱-۳-۵: بازه $[-1, +1]$ را در نظر می‌گیریم، سعی می‌کنیم ترکیبهایی خطی و متعامد (نه لزوماً نرمال) از x^k را بیابیم. $w(x)$ را واحد فرض می‌کنیم و این توابع متعامد را با $P_k(x)$ نمایش می‌دهیم. به ازای $k = 0$ ، فرض می‌کنیم $P_0(x) = f_0(x) = 1$. به ازای $k = 1$ می‌خواهیم $P_1(x)$ در بازه $[-1, 1]$ با $P_0(x)$ متعامد باشد. برای یافتن $P_1(x)$ ، یک شکل کلی به صورت

۱. برای اثبات، ر.ک.:

$P_1(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم، و a و b را چنان می‌یابیم که $P_1(x)$ بر $P_0(x) = 1$ عمود باشد:

$$0 = \int_{-1}^{+1} P_1(x)P_0(x)dx = \int_{-1}^{+1} (ax + b)dx = \frac{1}{2}ax^2 \Big|_{-1}^{+1} + 2b = 2b$$

به این ترتیب، یکی از ضرایب، یعنی b ، صفر است. برای یافتن ضریب دیگر، به یک روش استاندارد نیاز داریم. $P_j(x)$ را با شرط زیر "استاندارد" می‌کنیم:

$$P_j(1) = 1 \quad \text{به‌ازای تمام مقادیر } j$$

به‌ازای $j = 1$ ، از این شرط داریم

$$P_1(1) = a(1) + 0 = a = 1$$

می‌رسیم به

$$P_1(x) = x$$

برای محاسبه $P_2(x)$ ، می‌نویسیم $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ و a ، b ، و c را چنان تعیین می‌کنیم که $P_2(x)$ هم بر $P_0(x)$ و هم بر $P_1(x)$ عمود باشد و استاندارد بالا را نیز برقرار کند.

$$0 = \int_{-1}^{+1} P_2(x)P_0(x)dx = \frac{2}{3}a + 2c$$

$$0 = \int_{-1}^{+1} P_2(x)P_1(x)dx = \frac{2}{3}b$$

$$P_2(1) = a + b + c = 1$$

این سه معادله، دارای جوابهای منحصر به فرد زیرند

$$a = \frac{3}{2} \quad b = 0 \quad c = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4}(\Delta x^2 - 3x)$$

و

$$P_2(x) = \frac{1}{8}(3\Delta x^2 - 3\circ x^2 + 3)$$

والی آخر. این چندجمله‌ایها به چندجمله‌ایهای لژاندر مشهورند و جوابهای یک معادله دیفرانسیل مهم به‌شمار می‌آیند که بعداً در این کتاب آن‌را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. به‌طور کلی، m امین چندجمله‌ای با رابطه‌ای مشهور به فرمول رودریگز داده می‌شود:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

مثال ۱-۳-۵ فقط یکی از انواع بسیار زیاد چیزی را مورد بحث قرار می‌دهد که اصطلاحاً چندجمله‌ایهای متعامد کلاسیک نامیده می‌شوند و در یک بازه مشخص $[a, b]$ از طریق یک تابع وزن $w(x)$ بر یکدیگر عمودند.

این‌گونه چندجمله‌ایها را می‌توان با شروع از توابع ۱، x ، x^2 ، ...، x^k و بهره‌گیری از فرایند گرام-اشمیت به‌دست آورد. با این همه، یک روش دقیق، اما کمتر کلی، یافت می‌شود که تمام این چندجمله‌ایها را به روشی واحد مورد بررسی قرار می‌دهد.^۱ ما این روش را به‌کار خواهیم برد

توابع:

$$F_n(x) = \frac{1}{w} \frac{d^n}{dx^n} (ws^n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24-5)$$

را با شرایط زیر برای $F_1(x)$ ، $w = w(x)$ ، و $s = s(x)$ در نظر بگیرید:

۱. $F_1(x)$ یک چندجمله‌ای درجه اول برحسب x ؛
۲. $s(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x با درجه کمتر یا مساوی ۲ و با ریشه‌های حقیقی؛
۳. $w(x)$ یک تابع حقیقی، مثبت، و انتگرال‌پذیر در بازه $[a, b]$ و با شرایط مرزی $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$.

همانگونه که خواهیم دید، سه شرط بالا تعداد موارد ممکن برای $F_n(x)$ را به شدت محدود می‌کنند. در واقع، ملاحظه خواهیم کرد که $F_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n برحسب x است و $F_k(x)$ به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ با وزن $w(x)$ در بازه $[a, b]$ یک مجموعه از چندجمله‌ایهای متعامد تشکیل می‌دهد. به منظور هموار کردن راه اثبات این دو حکم، ابتدا به اثبات دو لم می‌پردازیم.

در بحث زیر، $p^{(-k)}(x)$ معرف یک چندجمله‌ای عام با درجه کمتر یا مساوی با k است. مثلاً $5 - 4x^2 + 3x^5$ ، $1 + 2x$ ، $1 - 8x^2 + 3x^2 - 24x^2 + 2x - 1$ ، و $p^{(-5)}(x)$ با 2 یا $p^{(-6)}(x)$ یا $p^{(-9)}(x)$ نمایش داده می‌شوند زیرا درجه همه آنها کمتر یا مساوی با 5 ، 6 ، و 9 است.

لم ۳-۴: اتحاد زیر برقرار است:

$$\frac{d^m}{dx^m}(ws^n p^{(-k)}) = ws^{n-m} p^{(-k+m)}$$

اثبات. اگر در رابطه (۳-۵) قرار بدهیم $n = 1$ ، خواهیم رسید به

$$F_1(x) = \frac{1}{w} \frac{d}{dx}(ws) = \frac{1}{w} \frac{dw}{dx} s + \frac{1}{w} w \frac{ds}{dx}$$

یا

$$s \frac{dw}{dx} = w \left(F_1(x) - \frac{ds}{dx} \right)$$

حالا مشتق $ws^n p^{(-k)}$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ws^n p^{(-k)}) &= \frac{dw}{dx} s^n p^{(-k)} + nw \frac{ds}{dx} s^{n-1} p^{(-k)} + ws^n \frac{dp^{(-k)}}{dx} \\ &= ws^{n-1} \left\{ \left[F_1(x) + (n-1) \frac{ds}{dx} \right] p^{(-k)} + s \frac{dp^{(-k)}}{dx} \right\} \end{aligned}$$

اما چون، بنا به تعریف، $F_1(x)$ و $s(x)$ ، به ترتیب، چندجمله‌ایهایی از درجه اول و (حداکثر) دوم هستند، عبارت داخل آکولاد از درجه کمتر یا مساوی با $k+1$ است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{d}{dx}(ws^n p^{(-k)}) = ws^{n-1} p^{(-k+1)}$$

که حکایت از این دارد که n به اندازه ۱ واحد کاهش و k به اندازه ۱ واحد افزایش یافته است. بدیهی است که

$$\frac{d^r}{dx^r}(ws^n p^{(-k)}) = \frac{d}{dx}(ws^{n-1} p^{(-k+1)}) = ws^{n-2} p^{(-k+2)}$$

و در حالت کلی

$$\frac{d^m}{dx^m}(ws^n p^{(-k)}) = ws^{n-m} p^{(-k+m)}$$

که همان اتحاد مطلوب است.

لم ۵-۳-۵: تمام مشتقهای $(d^m/dx^m)(ws^n)$ ، که در آنها $m < n$ ، در $x = a$ و $x = b$ صفرند.

اثبات. در اتحاد لم ۵-۳-۴، قرار دهید $k = 0$ و فرض کنید چندجمله‌ای درجه صفر عبارت است از: $p^{(-0)} = 1$. به این ترتیب، داریم

$$\frac{d^m}{dx^m}(ws^n) = ws^{n-m} p^{(-m)}$$

که به ازای $x = a$ ، براساس شرط (۳)، تبدیل خواهد شد به

$$\left. \frac{d^m}{dx^m}(ws^n) \right|_{x=a} = w(a) s^{n-m}(a) p^{(-m)}(a) = 0$$

و لم به این ترتیب اثبات می‌شود.

اکنون در وضعیتی هستیم که قضیه مهم زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۵-۳-۶: $F_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n برحسب x است و، با وزن $w(x)$ ، در بازه $[a, b]$ عمود بر هر چندجمله‌ای $p^{(l)}(x)$ با درجه l کمتر از n است، بنابراین

$$\int_a^b p^{(l)}(x) F_n(x) w(x) dx = 0 \quad l < n \quad \text{به‌ازای} \quad (25-5)$$

اثبات . ابتدا، تعامد را اثبات می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 \int_a^b p^{(l)}(x) F_n(x) w(x) dx &= \int_a^b p^{(l)}(x) \frac{1}{w} \left[\frac{d^n}{dx^n} (ws^n) \right] w dx \\
 &= \int_a^b p^{(l)}(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) \right] dx \\
 &= p^{(l)}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dp^{(l)}}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) dx \\
 &= 0 - \int_a^b \frac{dp^{(l)}}{dx} \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) \right] dx \\
 &= - \frac{dp^{(l)}}{dx} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2 p^{(l)}}{dx^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) dx \\
 &= 0 + \int_a^b \frac{d^2 p^{(l)}}{dx^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) dx
 \end{aligned}$$

در اینجا ما دو بار به طریق جزء به جزء انتگرال گرفته‌ایم و از لم ۵-۳-۵ به ازای $m = n - 1$ و $m = n - 2$ استفاده کرده‌ایم. با ادامهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء (کلاً l بار) سرانجام خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \int_a^b p^{(l)}(x) F_n(x) w(x) dx &= \int_a^b \frac{d^l p^{(l)}}{dx^l} \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (ws^n) dx \\
 &= C \int_a^b \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-l-1}}{dx^{n-l-1}} (ws^n) \right] dx \\
 &= C \frac{d^{n-l-1}}{dx^{n-l-1}} (ws^n) \Big|_a^b = 0
 \end{aligned}$$

که از این واقعیت بهره جسته‌ایم که مشتق l ام یک چندجمله‌ای درجهٔ l ، مقداری ثابت است. توجه داشته باشید که چون $n > l$ ، $l < n$ ، بنابراین آخرین خط در اثبات بالا، خوش‌تعریف است.

برای اثبات جزء اول قضیه، با استفاده از لم ۵-۳-۴ به‌ازای $k = 0$ و $m = n$ خواهیم داشت

$$\frac{d^n}{dx^n}(ws^n) = ws^{\circ} p^{(-n)} = wp^{(-n)}$$

یا

$$F_n(x) = \frac{1}{w} \frac{d^n}{dx^n}(ws^n) = p^{(-n)}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $F(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n یا کمتر است. می‌خواهیم ثابت کنیم که در واقع درجه این چندجمله‌ای دقیقاً مساوی n است. پس می‌نویسیم

$$F_n(x) = p^{(-n-1)}(x) + a_n x^n$$

که کاری است که همواره می‌توان انجام داد (اگر امکان صفر بودن a_n را نیز در نظر بگیریم) برای نشان دادن این نکته که a_n نمی‌تواند صفر باشد، ابتدا دو طرف رابطه بالا را در $F_n(x)$ ضرب می‌کنیم و در بازه $[a, b]$ با تابع وزن $w(x)$ از آن انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b [F_n(x)]^2 w(x) dx = \int_a^b F_n(x) p^{(-n-1)}(x) w(x) dx + a_n \int_a^b x^n F_n(x) w(x) dx$$

بنابر معادله (۲۵-۵)، اولین انتگرال سمت راست عبارت بالا صفر است. عبارت سمت چپ، یک کمیت مثبت است زیرا $w(x)$ و $[F_n(x)]^2$ هر دو مثبت‌اند. بنابراین، داریم

$$a_n \int_a^b x^n F_n(x) w(x) dx \neq 0$$

■ به‌خصوص، دلالت بر $a_n \neq 0$ دارد. بنابراین، $F_n(x)$ از درجه n است.

معمولاً، یک ضریب بهنجارش در تعریف $F_n(x)$ منظور می‌کنند و می‌نویسند:

$$F_n(x) = \frac{1}{K_n w} \frac{d^n}{dx^n}(ws^n) \quad (۲۶-۵)$$

این معادله، فرمول رودریگز تعمیم‌یافته نامیده می‌شود. به دلایل تاریخی، توابع چندجمله‌ای متفاوت را به روشهای متفاوتی بهنجار می‌کنند، و به همین دلیل است که ما در اینجا K_n را معرفی کرده‌ایم.

از قضیه ۵-۳-۶ روشن است که دنباله شامل چندجمله‌ایهای $F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ یک مجموعه متعامد از چندجمله‌ایها در بازه $[a, b]$ و با وزن $w(x)$ تشکیل می‌دهد.

۲-۳-۵ رده‌بندی چندجمله‌ایهای متعامد

اکنون پیامد انتخابهای مختلف $s(x)$ را با محدودیتهای ناشی از شرط (۲) بررسی می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر x را به $\alpha x + \beta$ تغییر دهیم، که در آن α و β دو مقدار ثابت‌اند، نه درجه $s(x)$ تغییر خواهد کرد و نه خاصیت تعامد $F_n(x)$ ، زیرا هر سه شرط یاد شده باز هم برقرار خواهند بود. تنها تغییری که پیش خواهد آمد، در حدود a و b انتگرال‌گیری خواهد بود؛ این مقادیر را چنان تنظیم خواهیم کرد تا $s(x)$ و $w(x)$ به ساده‌ترین شکل ممکن در آیند.

مراد ما از بیان اخیر، این است که α و β اختیاری‌اند (البته $\alpha \neq 0$) و آنها را چنان اختیار خواهیم کرد که عبارتها را ساده کنند. در حالت خاص، $F_1(x)$ را که یک چندجمله‌ای درجه اول است، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_1(x) = -\frac{x}{K_1} \quad (۵-۲۷الف)$$

که با $\alpha = -1/K_1$ و $\beta = 0$ متناظر است. از سوی دیگر، به ازای $n = 1$ از معادله (۵-۲۶) داریم

$$F_1(x) = \frac{1}{K_1 w} \frac{d}{dx}(ws) = \frac{s}{K_1 w} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{K_1} \frac{ds}{dx} \quad (۵-۲۷ب)$$

با مساوی قرار دادن (۵-۲۷الف) و (۵-۲۷ب) یک معادله دیفرانسیل بر حسب $w(x)$ به دست می‌آید، که عبارت است از

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dx} = -\frac{x + ds/dx}{s} \quad (۵-۲۸)$$

شرط مرزی این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0 \quad (۵-۲۹)$$

با اعمال شرط (۲) و شرط مرزی بالا بر (۵-۲۸)، تمام چندجمله‌ایهای متعامد فیزیک به دست می‌آیند. بنابراین شرط (۲)، $s(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $0, 1, 2$ است. بگذارید این سه امکان را بررسی کنیم.

اگر درجه s ، \circ باشد، در آن صورت

$$s(x) = \alpha \neq \circ$$

و رابطه

$$\frac{ds}{dx} = \circ$$

منجر به معادله دیفرانسیل

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dx} = -\frac{x}{\alpha}$$

با جواب عمومی زیر می شود

$$w(x) = Ae^{-x^2/\alpha}$$

که در آن A ثابت انتگرال گیری است. این تابع وزن باید در (۲۹-۵) صدق کند. پس

$$s(a)w(a) = \alpha w(a) = \alpha Ae^{-a^2/\alpha}$$

که فقط در صورتی صفر می شود که $\alpha > \circ$ و $a = \pm\infty$. به همین ترتیب، تساوی $s(b)w(b) = \circ$ حاکی از این است که $b = \pm\infty$. اما چون $b > a$ ، ما به انتخاب زیر هدایت می شویم

$$a = -\infty \quad \text{و} \quad b = +\infty$$

با انتخاب $\alpha = 1$ و $A = 1$ ، می توان شناسه را از $x/\sqrt{2}$ به x تغییر داد و گزاره زیر را به دست آورد:

گزاره ۵-۳-۷: اگر $s(x)$ یک چندجمله ای ثابت باشد، در آن صورت می توان انتخاب $s(x) = 1$ را در نظر گرفت. به این ترتیب

$$w(x) = \exp(-x^2)$$

$$a = -\infty \quad \text{و} \quad b = +\infty$$

اگر درجه s مساوی ۱ باشد، به طور کلی می توان نوشت:

$$s(x) = \alpha(x - \beta)$$

که در آن، α و β مقادیر ثابتی اند. در این صورت، معادله (۲۸-۵) تبدیل می شود به

$$\frac{1}{w} \frac{dw}{dx} = -\frac{x + \alpha}{\alpha(x - \beta)} = -\frac{x - \beta + \beta + \alpha}{\alpha(x - \beta)} = -\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right) \frac{1}{x - \beta}$$

یا

$$\frac{dw}{w} = -\frac{1}{\alpha} dx - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right) \frac{dx}{x - \beta}$$

با گرفتن انتگرال از دو طرف، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \ln w &= -\frac{x}{\alpha} - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right) \ln(x - \beta) + \ln A \\ &= -\frac{x}{\alpha} + \ln[(x - \beta)^{-(\alpha + \beta)/\alpha}] + \ln A \end{aligned}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$w(x) = A(x - \beta)^{-(1 + \beta/\alpha)} e^{-x/\alpha}$$

برای اعمال شرط مرزی (۲۹-۵)، حاصلضرب زیر را تشکیل می دهیم

$$s(x)w(x) = A\alpha(x - \beta)^{-\beta/\alpha} e^{-x/\alpha}$$

روشن است که این عبارت فقط در صورتی به ازای $x = \beta$ صفر می شود که $\beta/\alpha < 0$. از سوی دیگر، تابع نمایی در $x = +\infty$ (یا $-\infty$) صفر می شود اگر $\alpha > 0$ (یا $\alpha < 0$). به این ترتیب،

انتخاب مطلوب این است:

$$\frac{\beta}{\alpha} < 0 \quad \alpha = \beta \quad b = +\infty \quad \alpha > 0$$

همچنین، با تغییر متغیرهایی به این قرار:

$$\frac{x - \beta}{\alpha} = y \quad \text{یا} \quad x = \alpha y + \beta$$

می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} w(y) &= A(\alpha y)^{-(1+\beta/\alpha)} e^{-y-\beta/\alpha} = A e^{-\beta/\alpha} \alpha^{-(1+\beta/\alpha)} y^{-(1+\beta/\alpha)} e^{-y} \\ &= B y^\nu e^{-y} \end{aligned}$$

که در آن، B صرفاً یک ثابت دیگر، $\nu = -1 - \beta/\alpha > -1$ ، و بازه از $a = 0$ تا $b = +\infty$ است. با چشمپوشی از ثابت B و جایگزینی متغیر متداولتر x به جای y ، می‌توانیم بحث بالا را به صورت یک گزاره جمع‌بندی کنیم.

گزاره ۵-۳-۸: اگر $s(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۱ باشد، در آن صورت می‌توان فرض کرد $s(x) = x$ و در نتیجه آن

$$w(x) = x^\nu e^{-x} \quad \nu > -1$$

و

$$a = 0 \quad \text{و} \quad b = +\infty$$

اگر درجه s عبارت باشد از ۲، نتیجه گزاره زیر خواهد بود (ر.ک. مسئله ۵-۱۸).

گزاره ۵-۳-۹: اگر $s(x)$ از درجه ۲ باشد، آنگاه این امکان وجود دارد که $s(x) = 1 - x^2$ را اختیار کنیم، در این صورت

$$w = (1 - x)^\nu (1 + x)^\mu \quad \nu, \mu > -1$$

جدول ۱-۵ مشخصات چندجمله‌ایهای هرمیت، لاگِر، و ژاکوبی

چندجمله‌ای	$s(x)$	$w(x)$	بازه
$H_n(x)$ ، هرمیت	۱	e^{-x^2}	$(-\infty, +\infty)$
$L_n^\nu(x)$ ، لاگِر	x	$x^\nu e^{-x}$ به‌ازای $\nu > -1$	$(0, \infty)$
$P_n^{(\nu, \mu)}(x)$ ، ژاکوبی	$1-x^2$	$(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ به‌ازای $\mu, \nu > -1$	$[-1, +1]$

جدول ۲-۵ مشخصات چندجمله‌ایهای متداول ژاکوبی

چندجمله‌ای	$w(x)$	ν	μ
$P_n(x)$ ، لژاندر	۱	۰	۰
$C_n^\lambda(x)$ ، گگنباور	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ به‌ازای $\lambda > -\frac{1}{2}$	$\lambda - \frac{1}{2}$	$\lambda - \frac{1}{2}$
$T_n(x)$ ، چیشف نوع اول	$(1-x^2)^{-1/2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$U_n(x)$ ، چیشف نوع دوم	$(1-x^2)^{1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$a = 1 \quad \text{و} \quad b = +1$$

بحث بالا را می‌توان به این صورت جمع‌بندی کرد که، مستقل از یک تبدیل خطی بدیهی شناسه، چندجمله‌ایهای متعامدی را که در بخش ۵-۳ معرفی شدند می‌توان، تا ثابت‌هایی ضربی، به سه نوع چندجمله‌ای کاهش داد که در جدول ۱-۵ درج شده‌اند.

به‌ازای مقادیر خاصی از μ و ν در چندجمله‌ایهای ژاکوبی، به چندجمله‌ایهایی می‌رسیم که عرفاً نامهای متفاوتی داشته‌اند. چندجمله‌ایهای لژاندر به‌ازای $\mu = \nu = 0$ به‌دست می‌آیند، چندجمله‌ایهای گگنباور^۱ متناظر با $\mu = \nu = \lambda - 1/2$ هستند؛ چندجمله‌ایهای چیشف نوع اول آنهایی‌اند که به‌ازای $\mu = \nu = -1/2$ به‌دست می‌آیند؛ و در چندجمله‌ایهای چیشف نوع دوم داریم $\mu = \nu = +1/2$. جدول ۲-۵ این چهار نوع چندجمله‌ای را نشان می‌دهد.

توجه دارید که تعریف هر یک از چندجمله‌ایهای اخیر، شامل یک "استانداردسازی" است که به یک انتخاب خاص از K_n در "فرمول رودریگز تعمیم‌یافته" کاهش می‌یابد. این انتخاب، ربطی

به بهنجارش چندجمله‌ایها ندارد بلکه صرفاً یک سنت تاریخی است.

پیش از مطالعه جداگانه این چندجمله‌ایهای متعامد، دو خاصیت عمده‌تر آنها را — روابط بازگشتی، و معادلات دیفرانسیلی که این چندجمله‌ایها جوابهای آنها هستند — بررسی می‌کنیم. روابط بازگشتی. همه چندجمله‌ایهای متعامد (نه فقط آنها که در این بخش بررسی می‌شوند) در یک رابطه بازگشتی صدق می‌کنند؛ بنابراین، ملاحظات زیر در مورد همه چندجمله‌ایهای متعامد صادق است. فرض کنید $C_n(x)$ یک مجموعه از چندجمله‌ایهای متعامد (با اعضای $F_n(x)$) با خاصیت بدیهی زیر باشد:

$$\int_a^b C_n(x) p^{(-n-1)} w(x) dx = 0 \quad (30-5)$$

نمادگذاریهای زیر را در این بحث به‌کار خواهیم برد:

$$k_n = C_n(x) \text{ ضریب } x^n \text{ در } (31-5 \text{ الف})$$

$$k'_n = C_n(x) \text{ ضریب } x^{n-1} \text{ در } (31-5 \text{ ب})$$

$$h_n = \int_a^b [C_n(x)]^2 w(x) dx \quad (31-5 \text{ ج})$$

درجه چندجمله‌ای

$$C_{n+1}(x) - \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) x C_n(x)$$

کتر از یا مساوی با n است، و، بنابراین، و می‌توان آن‌را به صورت یک ترکیب خطی از $C_n(x)$ بسط داد:

$$C_{n+1}(x) - \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) x C_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j C_j(x) \quad (32-5)$$

با ضرب دو طرف این معادله در $C_m(x)w(x)$ ، و گرفتن انتگرال از a تا b خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_a^b C_{n+1}(x) C_m(x) w(x) dx - \frac{k_{n+1}}{k_n} \int_a^b x C_m(x) C_n(x) w(x) dx \\ = \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b C_j(x) C_m(x) w(x) dx \end{aligned}$$

مادام که $m \leq n$ ، اولین انتگرال عبارت سمت چپ صفر خواهد شد؛ دومین انتگرال هم به‌ازای $m \leq n - 2$ به نتیجه صفر می‌انجامد [اگر $m \leq n - 2$ ، در آن صورت $x C_m(x)$ یک چندجمله‌ای درجه $n - 1$ خواهد بود، و طبق معادله (۳۰-۵)، انتگرال باید صفر شود]. بنابراین، داریم

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_a^b C_j(x) C_m(x) w(x) dx = 0 \quad m \leq n - 2$$

به دلیل تعامد $C_j(x)$ ، انتگرال داخل مجموع صفر است مگر اینکه $j = m$. بنابراین، مجموع، کاهش می‌یابد به

$$a_m \int_a^b [C_m(x)]^2 w(x) dx = 0 \quad m \leq n - 2$$

چون انتگرال ناصفر است، نتیجه می‌گیریم که

$$a_m = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, n - 2$$

و معادله (۳۲-۵) کاهش پیدا می‌کند به

$$C_{n+1}(x) - \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) x C_n(x) = a_{n-1} C_{n-1}(x) + a_n C_n(x)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C_{n+1}(x) = \left[\left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) x + a_n \right] C_n(x) + a_{n-1} C_{n-1}(x) \quad (33-5)$$

تمرین ۳-۵-۱ نشان می‌دهد که اگر ما تعریفهای زیر را در نظر بگیریم

$$\alpha_n \equiv \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad (5-34\text{الف})$$

$$\beta_n \equiv \frac{k_{n+1}}{k_n} \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right) \quad (5-34\text{ب})$$

$$\gamma_n \equiv -\frac{h_n}{h_{n-1}} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \right) \quad (ج\ ۳۴-۵)$$

که در آنها k'_n, k_n و h_n با معادله‌های (۳۱-۵) داده می‌شوند، در آن صورت می‌توانیم رابطه بازگشتی را به صورت زیر بیان کنیم

$$C_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) C_n(x) + \gamma_n C_{n-1}(x) \quad (۳۵-۵)$$

باید تأکید کرد که این رابطه بازگشتی برای تمام چندجمله‌ایهای متعامد برقرار است، زیرا هیچ‌یک از خاصیت‌های وابسته به $F_n(x)$ در به دست آوردن آن به کار نرفته است. تنها خاصیتی که به کار برده‌ایم رابطه تعامد، یعنی معادله (۳۰-۵)، است. رابطه بازگشتی (۳۵-۵) را می‌توان برای پیدا کردن رابطه‌های بازگشتی دیگر و محاسبه انتگرال‌های شامل توان‌های x به کار برد. در مثال‌های زیر این نکات را نشان می‌دهیم.

مثال ۳-۲: به عنوان کاربرد از رابطه بازگشتی (۳۵-۵)، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$I_1 \equiv \int_a^b x C_m(x) C_n(x) w(x) dx$$

به این منظور، رابطه بازگشتی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$xC_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} C_{n+1}(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} C_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} C_{n-1}(x)$$

جایگذاری در معادله بالا منجر می‌شود به

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b C_m(x) C_{n+1}(x) w(x) dx - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \int_a^b C_m(x) C_n(x) w(x) dx - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \int_a^b C_m(x) C_{n-1}(x) w(x) dx$$

اکنون با استفاده از رابطه‌های تعامد بین $C_k(x)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\alpha_n} \delta_{m,n+1} \int_a^b [C_m(x)]^2 w(x) dx - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \delta_{m,n} \int_a^b [C_m(x)]^2 w(x) dx \\ &\quad - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \delta_{m,n-1} \int_a^b [C_m(x)]^2 w(x) dx \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_{m-1}} \delta_{m,n+1} - \frac{\beta_m}{\alpha_m} \delta_{m,n} - \frac{\gamma_{m+1}}{\alpha_{m+1}} \delta_{m,n-1} \right) h_m \end{aligned}$$

یا

$$I_1 = \begin{cases} \frac{h_m}{\alpha_{m-1}} & m = n + 1 \text{ اگر} \\ -\frac{\beta_m h_m}{\alpha_m} & m = n \text{ اگر} \\ -\frac{\gamma_{m+1} h_m}{\alpha_{m+1}} & m = n - 1 \text{ اگر} \\ \text{در غیر این صورت} & \end{cases}$$

مثال ۳-۳-۵: می‌خواهیم با استفاده از رابطه بازگشتی (۳۵-۵)، یک رابطه بازگشتی دیگر که شامل توان دوم x است به دست آوریم. به این منظور، رابطه بازگشتی را به شکلی که در مثال ۲-۳-۵ آمده است می‌نویسیم:

$$xC_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} C_{n+1}(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} C_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} C_{n-1}(x) \quad (1)$$

از ضرب دو طرف در x خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x^2 C_n(x) &= \frac{1}{\alpha_n} x C_{n+1}(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} x C_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} x C_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{1}{\alpha_{n+1}} C_{n+2}(x) - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} C_{n+1}(x) - \frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1}} C_n(x) \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta_n}{\alpha_n} \left[\frac{1}{\alpha_n} C_{n+1}(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} C_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} C_{n-1}(x) \right]$$

$$-\frac{\gamma_n}{\alpha_n} \left[\frac{1}{\alpha_{n-1}} C_n(x) - \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} C_{n-1}(x) - \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} C_{n-2}(x) \right]$$

که پس از بازآرایش آن می‌رسیم به

$$x^r C_n(x) = \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n+1}} C_{n+r}(x) - \left(\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_n \alpha_{n+1}} + \frac{\beta_n}{\alpha_n^r} \right) C_{n+1}(x)$$

$$- \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_n \alpha_{n+1}} - \frac{\beta_n^r}{\alpha_n^r} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n \alpha_{n-1}} \right) C_n(x)$$

$$+ \left(\frac{\beta_n \gamma_n}{\alpha_n^r} + \frac{\gamma_n \beta_{n-1}}{\alpha_n \alpha_{n-1}} \right) C_{n-1}(x) + \frac{\gamma_n \gamma_{n-1}}{\alpha_n \alpha_{n-1}} C_{n-2}(x)$$

$$\equiv A_n C_{n+r}(x) + B_n C_{n+1}(x) + D_n C_n(x) + E_n C_{n-1}(x) + G_n C_{n-2}(x)$$

مثال ۳-۳-۵: با استفاده از نتیجه مثال ۳-۳-۵ می‌توان انتگرال زیر را محاسبه کرد

$$I_r \equiv \int_a^b x^r C_m(x) C_n(x) w(x) dx$$

به این منظور، از مثال ۳-۳-۵ برای $x^r C_n(x)$ مقدار قرار می‌دهیم:

$$I_r = \int_a^b C_m(x) [A_n C_{n+r}(x) + \dots + G_n C_{n-2}(x)] w(x) dx$$

$$= A_n \int_a^b C_m(x) C_{n+r}(x) w(x) dx + \dots + G_n \int_a^b C_m(x) C_{n-2}(x) w(x) dx$$

با استفاده از تعامد C_k ها خواهیم داشت:

$$I_r = A_n \delta_{m, n+r} h_m + \dots + G_n \delta_{m, n-2} h_m$$

$$= h_m (A_{m-r} \delta_{m, n+r} + B_{m-1} \delta_{m, n+1} + D_m \delta_{m, n} + E_{m+1} \delta_{m, n-1} + G_{m+r} \delta_{m, n-2})$$

$$I_{\gamma} = \begin{cases} \frac{h_m}{\alpha_{m-2}\alpha_{m-1}} & \text{اگر } m = n + 2 \\ -h_m \left[\frac{\beta_m}{\alpha_m\alpha_{m-1}} + \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}^2} \right] & \text{اگر } m = n + 1 \\ -h_m \left[\frac{\gamma_{m+1}}{\alpha_m\alpha_{m+1}} - \frac{\beta_m^{\gamma}}{\alpha_m^2 + \frac{\gamma_m}{\alpha_m\alpha_{m-1}}} \right] & \text{اگر } m = n \\ h_m \left[\frac{\beta_{m+1}\gamma_{m+1}}{\alpha_m^2 + 1} + \frac{\gamma_{m+1}\beta_m}{\alpha_m\alpha_{m+1}} \right] & \text{اگر } m = n - 1 \\ \frac{h_m\gamma_{m+1}\gamma_{m+2}}{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}} & \text{اگر } m = n - 2 \\ \cdot & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل. اکنون در جستجوی معادله دیفرانسیلی برمی‌آیم که $F_n(x)$ جوابهای آن باشند. این معادله دیفرانسیل باید شامل dF_n/dx باشد که یک چندجمله‌ای از درجه $n - 1$ یا کمتر است. با استفاده از لم ۴-۳-۵ به‌ازای $m = 1, n = 1$ و $k = n - 1$ و چندجمله‌ای داریم $p^{(-k)} = dF_n/dx$

$$\frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) = wp^{(-n)}$$

با بسط چندجمله‌ای عام در سمت راست برحسب چندجمله‌ایهای متعامد $F_n(x)$ ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) = w \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x) \quad (36-5)$$

که در آن، λ_i ثابت‌هایی‌اند که باید تعیین شوند. اکنون هر دو طرف را در $F_m(x)$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b F_m \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b F_m F_i w dx$$

انتگرالهای سمت راست. جمله‌گی صفرند مگر اینکه $m = n$ ، و از این رو نتیجه صرفاً h_m است. برای عبارت سمت چپ به‌ازای $m < n$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b F_m \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) dx &= F_m ws \frac{dF_n}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b ws \frac{dF_n}{dx} \frac{dF_m}{dx} dx \\ &= 0 - F_n ws \frac{dF_m}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b F_n \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_m}{dx} \right) dx \\ &= \int_a^b w F_n \left[\frac{1}{w} \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_m}{dx} \right) \right] dx = 0 \end{aligned}$$

نتیجه صفر است زیرا عبارت داخل کروشه، یک چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی با $m < n$ است. در محاسبات بالا، به‌هنگام دوبار انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، از این واقعیت که $w(a)s(a) = 0 = w(b)s(b)$ بهره برده‌ایم. یا سرجمع کردن مطالب، می‌توان نوشت

$$0 = \lambda_m h_m \quad m < n \text{ به‌ازای}$$

یا، چون $h_m \neq 0$ ، پس

$$\lambda_m = 0 \quad m < n \text{ به‌ازای}$$

بنابراین، معادله (۳۶-۵) به معادله دیفرانسیل گزاره زیر تبدیل می‌شود.

گزاره ۳-۵-۱۰: چندجمله‌ایهای F_n ، در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$\frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) = w \lambda_n F_n \quad (37-5)$$

که در آن

$$\lambda_n = n \left[K_1 \frac{dF_1}{dx} + \frac{1}{\gamma} (n-1) \frac{d^{\gamma} s}{dx^{\gamma}} \right]$$

اثبات . فقط باید λ_n را محاسبه کنیم. به این منظور، دو طرف (۳۷-۵) را در $F_n(x)$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b F_n \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) dx = \lambda_n \int_a^b w [F_n(x)]^2 dx = \lambda_n h_n \quad (\text{الف } ۳۸-۵)$$

برای محاسبه عبارت سمت چپ چنین عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b F_n \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) dx &= \int_a^b F_n \left(\frac{d(ws)}{dx} \frac{dF_n}{dx} + ws \frac{d^2 F_n}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_a^b w F_n \left\{ \left[\frac{1}{w} \frac{d}{dx}(ws) \right] \frac{dF_n}{dx} + s \frac{d^2 F_n}{dx^2} \right\} dx \end{aligned}$$

اما، بنابر فرمول رودریگز تعمیم‌یافته،

$$\frac{1}{w} \frac{d}{dx}(ws) = K_1 F_1$$

بنابراین داریم،

$$\int_a^b F_n \frac{d}{dx} \left(ws \frac{dF_n}{dx} \right) dx = \int_a^b w F_n \left(K_1 F_1 \frac{dF_n}{dx} + s \frac{d^2 F_n}{dx^2} \right) dx \quad (\text{ب } ۳۸-۵)$$

چون $F_1(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۱ و s یک چندجمله‌ای از درجه (حداکثر) ۲ است، می‌توانیم آنها را به صورت زیر بنویسیم

$$F_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$s(x) = \alpha_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$$

از سوی دیگر،

$$\frac{dF_n}{dx} = \frac{d}{dx} (k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots) = n k_n x^{n-1} + (n-1) k'_n x^{n-2} + \dots$$

$$\frac{d^2 F_n}{dx^2} = n(n-1) k_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) k'_n x^{n-3} + \dots$$

به اعتبار خاصیت تعامد چندجمله‌ایهای $F_n(x)$ ، فقط توان n ام x در چندجمله‌ای درجه n ام داخل پراتر سمت چپ رابطه (۳۸-۵) تأثیر خواهد داشت. بنابراین، می‌توانیم به جای عبارت داخل پراتر عبارت بر حسب x با توان n ام را بنشانیم:

$$\left(K_1 F_1 \frac{dF_n}{dx} + s \frac{d^2 F_n}{dx^2} \right) \rightarrow K_1 \alpha_1 n k_n x^n + \alpha_2 n(n-1) k_n x^n$$

به این ترتیب، (۳۸-۵) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \int_a^b F_n \frac{d}{dx} \left(w s \frac{dF_n}{dx} \right) dx &= [K_1 \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1)] k_n \int_a^b w F_n x^n dx \\ &= [K_1 \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1)] h_n \end{aligned}$$

که از معادله (۳۱-۵) و این نکات که $k_n x^n = F_n(x) - p^{(-n-1)}$ و F_n عمود بر $p^{(-n-1)}$ است از معادله (۳۰-۵)، سود جستیم. با جایگزینی این نتیجه‌ها در (۳۸-۵) می‌رسیم به

$$\lambda_n = K_1 \alpha_1 n + \alpha_2 n(n-1)$$

که در آن

$$\alpha_1 = \frac{dF_1}{dx} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dx^2}$$

بنابراین، می‌رسیم به

$$\lambda_n = n \left[K_1 \frac{dF_1}{dx} + \frac{1}{2} (n-1) \frac{d^2 s}{dx^2} \right] \quad (۳۹-۵)$$

که همان نتیجه مطلوب است.

پیش از مطالعه چندجمله‌ایهای متعامد خاص، قدری در کلیت دقت بحث قبل تأمل کنیم. با بجا آوردن فقط چند فرض محدود (سه شرط بخش ۳-۵، ۱-۳، ۱-۳) و معادله تعریفگر (۲۴-۵) انتخاب تابع وزن و، توأم با آن، انتخاب بازه $[a, b]$ را شدیداً محدود کرده‌ایم. با همه اینها، تمام سیاهه چندجمله‌ایهای متعامد کلاسیک (مندرج در جدول ۱-۵) منظور شده است. آنچه باقی مانده است، یافتن چندجمله‌ایهای خاصی است که در فیزیک زیاد به‌کار می‌روند.

دیدیم که چهار پارامتر k_n, k'_n, K_n و تمام خواص چند جمله‌ایها را تعیین می‌کنند. وقتی K_n با یک استانداردسازی مشخص شد، می‌توانیم سایر پارامترها را تعیین کنیم. k_n و k'_n با فرمول رودریگز تعمیم‌یافته بیان می‌شوند، و h_n را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} h_n &= \int_a^b [F_n(x)]^r w(x) dx = \int_a^b F_n [k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots] w dx \\ &= k_n \int_a^b F_n x^n w dx = k_n \int_a^b \frac{1}{K_n w} \left[\frac{d^n}{dx^n} (ws^n) \right] x^n w dx \\ &= \frac{k_n}{K_n} \int_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n} (ws^n) dx = \frac{k_n}{K_n} \int_a^b x^n \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) \right] dx \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء و یادآوری این نکته از لم ۵-۳-۵ که:

$$\left. \frac{d^m}{dx^m} (ws^n) \right|_{x=a} = 0 = \left. \frac{d^m}{dx^m} (ws^n) \right|_{x=b} \quad m < n$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{k_n}{K_n} \left[x^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (x^n) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (ws^n) dx \\ &= -\frac{k_n}{K_n} \int_a^b \frac{d}{dx} (x^n) \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) \right] dx \\ &= -\frac{k_n}{K_n} \left[\frac{d}{dx} (x^n) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} (x^n) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (ws^n) dx \\ &= (-1)^r \frac{k_n}{K_n} \int_a^b \frac{d^r}{dx^r} (x^n) \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} (ws^n) dx \end{aligned}$$

بدیهی است که پس از m بار انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$h_n = (-1)^m \frac{k_n}{K_n} \int_a^b \frac{d^m}{dx^m} (x^n) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (ws^n) dx$$

وقتی $m = n$ ، از این رابطه می‌رسیم به

$$h_n = (-1)^n \frac{k_n}{K_n} \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} (x^n) \frac{d^\circ}{dx^\circ} (ws^n) dx$$

اما

$$\frac{d^\circ}{dx^\circ} (ws^n) = ws^n \quad \text{و} \quad \frac{d^n}{dx^n} (x^n) = n!$$

به طوری که نتیجه نهایی عبارت است از

$$h_n = \frac{(-1)^n k_n n!}{K_n} \int_a^b ws^n dx \quad (40-5)$$

به هنگام مطالعه و بررسی چند جمله‌ایهای متعامد کلاسیک، از این نتیجه سود خواهیم جست.

مثال ۵-۳-۵: گاهی روابط بازگشتی شامل مشتقات توابع متعامد خیلی مفیدند. می‌خواهیم این‌گونه روابط بازگشتی را به دست آوریم. در اینجا نیز، با معادله (۳۵-۵) برای $F_n(x)$ شروع می‌کنیم:

$$F_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) F_n'(x) + \gamma_n F_{n-1}(x) \quad (1)$$

با گرفتن مشتق از دو طرف داریم

$$\frac{dF_{n+1}}{dx} = \alpha_n F_n + (\alpha_n x + \beta_n) \frac{dF_n}{dx} + \gamma_n \frac{dF_{n-1}}{dx} \quad (2)$$

دومین مشتق عبارت است از

$$F_{n+1}'' = 2\alpha_n F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) F_n'' + \gamma_n F_{n-1}'' \quad (3)$$

معادله دیفرانسیل (۳۷-۵) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$F_n'' + \frac{1}{ws} \frac{d(ws)}{dx} F_n' = \frac{1}{s} \lambda_n F_n$$

یا، با تعریف $g(x) \equiv (1/ws)[d(ws)/dx]$ ، به صورت

$$F_n'' = -g(x)F_n' + \frac{\lambda_n}{s}F_n$$

و با جایگزینی در (۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & -g(x)F_{n+1}' + \frac{\lambda_{n+1}}{s}F_{n+1} \\ &= 2\alpha_n F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) \left[-gF_n' + \frac{\lambda_n}{s}F_n \right] + \gamma_n \left[-gF_{n-1}' + \frac{\lambda_{n-1}}{s}F_{n-1} \right] \end{aligned}$$

اکنون اگر (۲) را در این معادله قرار دهیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} & -g[\alpha_n F_n + (\alpha_n x + \beta_n)F_n' + \gamma_n F_{n-1}'] + \frac{\lambda_{n+1}}{s}F_{n+1} \\ &= 2\alpha_n F_n' + (\alpha_n x + \beta_n) \left[-gF_n' + \frac{\lambda_n}{s}F_n \right] + \gamma_n \left[-gF_{n-1}' + \frac{\lambda_{n-1}}{s}F_{n-1} \right] \end{aligned}$$

یا، بعد از ساده کردن،

$$2\alpha_n F_n' + \left[\alpha_n g(x) + \frac{\lambda_n}{s}(\alpha_n x + \beta_n) \right] F_n - \frac{\lambda_{n+1}}{s}F_{n+1} + \frac{\gamma_n F_{n-1}}{s}F_{n-1} = 0 \quad (۴)$$

این عبارت، یکی از صورتهای رابطه بازگشتی است.

با جایگزینی (۱) در (۴)، شکل دیگری از رابطه بازگشتی شامل مشتقها به دست می‌آید

$$\begin{aligned} & 2\alpha_n F_n' + \left[\alpha_n g + \frac{\lambda_n}{s}(\alpha_n x + \beta_n) \right] F_n - \frac{\lambda_{n+1}}{s}[(\alpha_n x + \beta_n)F_n + \gamma_n F_{n-1}] \\ & + \frac{\gamma_n \lambda_{n-1}}{s}F_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

یا

$$2\alpha_n F_n' + \left[\alpha_n g + \frac{(\alpha_n x + \beta_n)}{s}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \right] F_n + \frac{\gamma_n}{s}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})F_{n-1} = 0 \quad (۵)$$

می‌توان با ضرب معادله (۵) در ws ، گرفتن مشتق از دو طرف، بهره‌گیری از (۵-۳۷) و تعریف $g(x)$ ، شکل سومی از رابطه بازگشتی به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_n w \lambda_n F_n + \frac{d}{dx} \left\{ \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + w(\alpha_n x + \beta_n)(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \right] F_n \right\} \\ + \gamma_n (\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1}) \frac{d}{dx}(wF_{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

از ضرب (۴) در ws ، گرفتن مشتق از معادله حاصل و استفاده از (۵-۳۷)، رابطه مفید دیگری به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_n w \lambda_n F_n + \frac{d}{dx} \left\{ \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + w \lambda_n (\alpha_n x + \beta_n) \right] F_n \right\} \\ - \lambda_{n+1} \frac{d}{dx}(wF_{n+1}) + \gamma_n \lambda_{n-1} \frac{d}{dx}(wF_{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

اکنون $\gamma_n d/dx(wF_{n-1})$ را از (۶) به‌دست می‌آوریم و نتیجه را در (۷) قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن، نتیجه عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_n \lambda_n w F_n + \frac{d}{dx} \left\{ \left[\alpha_n \frac{d}{dx}(ws) + (\lambda_n - \lambda_{n-1})(\alpha_n x + \beta_n) w \right] F_n \right\} \\ + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1}) \frac{d}{dx}(wF_{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (۸)$$

و سرانجام یک رابطه بازگشتی جالب دیگر عبارت است از

$$\begin{aligned} A_n(x) F_n(x) - \lambda_{n+1} (\alpha_n x + \beta_n) \frac{dw}{dx} F_{n+1} + \gamma_n \lambda_{n-1} \frac{dw}{dx} F_{n-1} \\ + B_n(x) \frac{dF_{n+1}}{dx} + \gamma_n D_n F'_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_n(x) \equiv (\alpha_n x + \beta_n) \left[\gamma \alpha_n w \lambda_n + \alpha_n \frac{d^\gamma}{dx^\gamma}(ws) + \frac{dw}{dx} \lambda_n (\alpha_n x + \beta_n) \right] \\ - \alpha_n^\gamma \frac{d}{dx}(ws) \end{aligned}$$

$$B_n(x) \equiv \alpha_n \frac{d}{dx}(ws) - (\alpha_n x + \beta_n)w(x)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

$$D_n(x) \equiv (\alpha_n x + \beta_n)w(\lambda_{n-1} - \lambda_n) - \alpha_n \frac{d}{dx}(ws)$$

معادله (۹)، با گرفتن مشتق عبارت داخل آکولاد معادله (۷)، ضرب معادله حاصل در $(\alpha_n x + \beta_n)$ ، قرار دادن مقدار به جای $(\alpha_n x + \beta_n)F'_n$ از (۲)، به دست می آید. جزئیات محاسبات به صورت یک مسئله برعهده خواننده گذاشته می شود.

همه این روابط خیلی پیچیده به نظر می رسند. با این همه، پیچیدگی، بهایی است که برای دستیابی به کلیت می پردازیم. وقتی با چند جمله ایهای متعامد خاص سروکار داشته باشیم، معادله ها خیلی ساده می شوند. به عنوان مثال، برای چند جمله ایهای هرمیت و لژاندر، معادله (۵)، به ترتیب تبدیل می شوند به

$$H'_n = 2nH_{n-1}$$

و

$$(1 - x^2)P'_n + n x P_n - n P_{n-1} = 0$$

همچنین، با اعمال (۸) بر چند جمله ایهای لژاندر خواهیم داشت

$$P'_{n+1} - x P'_n - (n+1)P_n = 0 \quad (10)$$

به همین ترتیب، معادله (۹) منجر می شود به

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} - (2n+1)P_n = 0 \quad (11)$$

که به آسانی می توان درستی آن را تحقیق کرد.

با دستکاری معادله های (۱)، (۲)، و (۴) می توان به رابطه های بازگشتی خیلی بیشتری دست

یافت، اما ما وارد این جزئیات نمی شویم.

۳-۳-۵ مثالهای چندجمله‌ایهای متعامد

اکنون به برخی مثالهای خاص از چندجمله‌ایهای متعامد که دارای کاربردهای مهمی هستند، نگاهی می‌اندازیم.

چندجمله‌ایهای هرمیت. چندجمله‌ایهای هرمیت با $H_n(x)$ نشان داده می‌شوند و به دلایل تاریخی طوری استانداردسازی می‌شوند که $K_n = (-1)^n$. بنابراین، فرمول رودریگز تعمیم یافته تبدیل می‌شود به [یادآور می‌شویم که $s(1) = 1$ و $w(x) = e^{-x^2}$]:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (41-5)$$

بدیهی است هر بار که از e^{-x^2} مشتق می‌گیریم، یک ضریب $-2x$ ظاهر می‌شود. بنابراین، بالاترین توان x عبارت است از

$$(-1)^n e^{x^2} (-2x)^n e^{-x^2} = 2^n x^n$$

و در نتیجه، می‌رسیم به

$$k_n = 2^n$$

برای پیدا کردن k'_n بهتر است اول ببینیم آیا این چندجمله‌ای زوج است یا فرد. با قرار دادن $-x$ به جای x در (41-5) داریم:

$$\begin{aligned} H_n(-x) &= (-1)^n e^{(-x)^2} \frac{d^n}{d(-x)^n} [e^{-(x)^2}] \\ &= (-1)^n e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \end{aligned}$$

اگر n زوج باشد، داریم

$$H_n(-x) = (-1)^n (-1)^n H_n(x) = H_n(x)$$

که به معنای این است که $H_n(x)$ فقط می‌تواند توانهای زوج x را داشته باشد. از سوی دیگر، اگر n فرد باشد، خواهیم داشت

$$H_n(-x) = -H_n(x)$$

که نشان می‌دهد $H_n(x)$ فقط دارای توانهای فرد x است. از این بحث نتیجه می‌گیریم که بالاترین توان بعدی x در $H_n(x)$ نه $n-1$ بلکه $n-2$ است. بنابراین، ضریب x^{n-1} برای $H_n(x)$ صفر است، و داریم

$$k'_n = 0$$

اکنون h_n را که با عبارت (۴۰-۵) بیان می‌شود، حساب می‌کنیم. به‌ازای $s = 1$ ، $w = e^{-x^2}$ ، $a = -\infty$ ، $b = +\infty$ (جدول ۱-۵)، $K_n = (-1)^n$ ، و $k_n = 2^n$ ، خواهیم داشت

$$h_n = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(-1)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

که در آن، از رابطه زیر بهره برده‌ایم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

این همان نتیجه‌ای است که در تمرین ۲-۳-۵ به‌دست می‌آید. برای یافتن رابطه بازگشتی، α_n ، β_n ، و γ_n ، آن‌گونه که در معادله‌های (۳۴-۵) تعریف شده‌اند، نیاز داریم

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$$\beta_n = \alpha_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right) = 0$$

$$\gamma_n = -\frac{h_n}{h_{n-1}} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \right) = -\frac{\sqrt{\pi} 2^n n!}{\sqrt{\pi} 2^{n-1} (n-1)!} \left(\frac{2}{2} \right) = -2n$$

بنابراین، رابطه بازگشتی معادله (۳۵-۵) تبدیل می‌شود به

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (42-5)$$

سرانجام، برای نوشتن معادله دیفرانسیلی که $H_n(x)$ در آن صدق کند، ابتدا باید λ_n را آن‌گونه

پیدا کنیم که با معادله (۳۹-۵) داده می شود. ملاحظه می کنیم که

$$K_1 = -1 \quad \frac{d^2 s}{dx^2} = 0 \quad F_1(x) = (-1)e^{x^2} \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = 2x$$

و یا

$$F_1' = 2$$

که منجر می شود به

$$\lambda_n = n[(-1)2] = -2n$$

با وارد کردن تمام این اطلاعات در (۳۷-۵)، معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx} \right) = e^{-x^2} (-2n)H_n$$

یا

$$-2xe^{-x^2} H_n' + e^{-x^2} H_n'' + 2ne^{-x^2} H_n = 0$$

به دست می آید. از ضرب در e^{x^2} خواهیم داشت

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0 \quad (43-5)$$

چند جمله ایهای لاگرنج. چند جمله ایهای لاگرنج را با $L_n^\nu(x)$ نشان می دهند و برای آنها $s(x) = x^\nu e^{-x} w(x) = x^\nu e^{-x}$ (که در آن $\nu > -1$)، $a = 0$ و $b = +\infty$ در این مورد، استانداردسازی مثبتی است بر

$$K_n = n!$$

که از آن فرمول رودریگز تعمیم یافته به دست می آید

$$\begin{aligned} L_n^\nu(x) &= \frac{1}{n! x^\nu e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (x^\nu e^{-x} x^n) \\ &= \frac{1}{n!} x^{-\nu} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\nu} e^{-x}) \end{aligned} \quad (44-5)$$

برای پیدا کردن k_n ، توجه داریم که مشتق گرفتن از e^{-x} توان جدیدی از x معرفی نمی‌کند بلکه فقط یک ضریب -1 به محاسبات وارد می‌کند. بنابراین، بالاترین توان x به این ترتیب به دست می‌آید که $x^{n+\nu}$ را به حال خود رها کنیم و از e^{-x} ، n بار مشتق بگیریم. از این کار نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{n!} x^{-\nu} e^x x^{n+\nu} (-1)^n e^{-x} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

که منجر می‌شود به:

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

می‌توان زوج یا فرد بودن $L_n^\nu(x)$ را کنترل کرد؛ اما بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که تغییر x به $-x$ عبارت سمت راست (۴۴-۵) را کاملاً دگرگون می‌کند. در واقع، در این حالت $k'_n \neq 0$ و می‌توان آن را با توجه به این نکته محاسبه کرد که بالاترین توان بعدی x به این ترتیب به دست می‌آید که نخستین مشتق $x^{n+\nu}$ را n بار با خودش جمع و نتیجه را در $(-1)^{n-1}$ سکه ناشی از مشتق‌گیری از e^{-x} است ضرب کنیم:

$$\frac{1}{n!} x^{-\nu} e^x [(-1)^{n-1} n(n+\nu) x^{n+\nu-1} e^{-x}] = \frac{(-1)^{n-1} (n+\nu)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

و در نتیجه:

$$k'_n = \frac{(-1)^{n-1} (n+\nu)}{(n-1)!}$$

سرانجام، به‌ازای h_n خواهیم داشت

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{(-1)^n [(-1)^n / n!] n!}{n!} \int_0^\infty x^\nu e^{-x} x^n dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{n+\nu} e^{-x} dx \end{aligned}$$

اگر ν عدد درستی نباشد (و نیازی هم نیست که باشد)، انتگرال سمت راست را نمی‌توان با روشهای مقدماتی محاسبه کرد. در واقع، این انتگرال در کاربردهای ریاضی چندان ظاهر می‌شود

که به آن نام خاص تابع گاما داده‌اند و آن را به صورت زیر می‌نویسند:

$$\Gamma(z + 1) \equiv \int_0^{\infty} x^z e^{-x} dx \quad (45-5)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد (مبحث تابع گاما در فصل ۱۴ آمده است) که

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = z(z - 1)\Gamma(z - 1) = \dots$$

اگر z مساوی عدد درست n باشد، این رابطه به $\Gamma(1)$ ختم می‌شود، که مساوی ۱ است، و می‌رسیم به

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (46-5)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که چرا گاهی تابع گاما را تابع فاکتوریل می‌نامند. اکنون می‌توانیم h_n را به صورت زیر بنویسیم

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!} = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(n + 1)} \equiv \frac{(n + \nu)!}{n!}$$

که در آن، بنا به تعریف، به‌ازای ν ، داریم: $(n + \nu)! \equiv \Gamma(n + \nu + 1)$. برای پیدا کردن رابطه بازگشتی، ابتدا با استفاده از (۳۴-۵) پارامترهای مربوطه را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{(-1)^{n+1}/(n+1)!}{(-1)^n/n!} = -\frac{1}{n+1}$$

$$\beta_n = \alpha_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right) = -\frac{1}{n+1} \left[\frac{(-1)^n(n+1+\nu)/n!}{(-1)^{n+1}/(n+1)!} \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{n-1}(n+\nu)/(n-1)!}{(-1)^n/n!} \right]$$

$$= \frac{2n + \nu + 1}{n + 1}$$

$$\gamma_n = -\frac{(n + \nu)!/n!}{(n + \nu - 1)!/(n - 1)!} \left[\frac{-1/(n + 1)}{-1/n} \right] = -\frac{n + \nu}{n + 1}$$

آنگاه، (۳۵-۵) را به صورت

$$L_{n+1}^{\nu}(x) = \left[-\frac{x}{n+1} + \frac{\nu n + \nu + 1}{n+1} \right] L_n^{\nu}(x) - \frac{n+\nu}{n+1} L_{n-1}^{\nu}(x)$$

یا

$$(n+1)L_{n+1}^{\nu} = (\nu n + \nu + 1 - x)L_n^{\nu} - (n+\nu)L_{n-1}^{\nu}$$

می‌نویسیم.

برای معادلهٔ دیفرانسیل، به $L_n^{\nu}(x)$ نیاز داریم

$$L_n^{\nu}(x) = x^{-\nu} e^x \frac{d}{dx} (x^{\nu+1} e^{-x}) = -x + \nu + 1$$

بنابراین، $dL_n^{\nu}/dx = -1$ و معادلهٔ (۳۹-۵) تبدیل می‌شود به

$$\lambda_n = n(-1) = -n$$

معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ (۳۷-۵)، منجر می‌شود به

$$\frac{d}{dx} \left(x^{\nu+1} e^{-x} \frac{dL_n^{\nu}}{dx} \right) = x^{\nu} e^{-x} (-n) L_n^{\nu}$$

یا

$$(\nu+1)x^{\nu} e^{-x} \frac{dL_n^{\nu}}{dx} - x^{\nu+1} e^{-x} \frac{dL_n^{\nu}}{dx} + x^{\nu+1} e^{-x} \frac{d^2 L_n^{\nu}}{dx^2} = -n x^{\nu} e^{-x} L_n^{\nu}$$

سرانجام با ضرب در $x^{-\nu} e^x$ می‌رسیم به

$$x \frac{d^2 L_n^{\nu}}{dx^2} + (\nu+1-x) \frac{dL_n^{\nu}}{dx} + n L_n^{\nu} = 0 \quad (۴۷-۵)$$

چندجمله‌ایهای لژاندر. به جای مطرح کردن چندجمله‌ایهای ژاکوبی، یک حالت خاص از آنها، یعنی چندجمله‌ایهای $P_n(x)$ لژاندر را، که کاربردهای خیلی بیشتری در فیزیک دارند، بررسی خواهیم کرد.

به‌ازای $\nu = 0 = \mu$ (متناظر با چندجمله‌ایهای لژاندر)، تابع وزن چندجمله‌ایهای زاکوبی به $w(x) = 1$ کاهش می‌یابد. بازه نیز به $[-1, +1]$ ، و $s(x)$ هم به $1 - x^2$ تبدیل خواهد شد. در این حالت، "استانداردسازی" عبارت است از

$$K_n = (-2)^n n! = (-1)^n 2^n n!$$

بنابراین، فرمول رودریگز تعمیم‌یافته به صورت زیر درمی‌آید:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^n] \quad (48-5)$$

برای پیدا کردن k_n ، عبارت داخل کروشه را با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای بسط می‌دهیم و n امین مشتق بالاترین توان x را در نظر می‌گیریم. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} k_n x^n &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(-x^2)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n}) \\ &= \frac{1}{2^n n!} 2n(2n-1)(2n-2) \cdots (n+1)x^n \end{aligned}$$

یا

$$k_n = \frac{1}{2^n n!} 2n(2n-1)(2n-2) \cdots (n+1)$$

که می‌تواند به صورت جمع‌وجورتر زیر نوشته شود (تمرین ۳-۳-۵).

$$k_n = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

برای پیدا کردن k'_n ، با توجه به زوج یا فرد بودن چندجمله‌ایها، ملاحظه می‌شود که

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

که حاکی از آن است که $P_n(x)$ یا زوج است یا فرد. در هر یک از این حالتها، توان $n - 1$ برای x وجود نخواهد داشت. بنابراین،

$$k'_n = 0$$

برای h_n ، بار دیگر (۴۰-۵) را به کار می‌بریم

$$h_n = \frac{(-1)^n k_n n!}{K_n} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx$$

انتگرال را می‌توان با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء پیاپی محاسبه کرد. نتیجه عبارت خواهد بود از (تمرین ۳-۵-۴):

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx = \frac{2(n!) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2n+1) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

که به‌نوبه خود، می‌دهد

$$h_n = \frac{2}{2n+1}$$

اکنون با استفاده از (۳۴-۵)، پارامترهای α_n ، β_n و γ_n را برای رابطه بازگشتی می‌یابیم

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{(n+1)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{2n+1}{n+1}$$

که در آن، رابطه $\Gamma(n + 3/2) = (n + 1/2) \Gamma(n + 1/2)$ را به کار برده‌ایم. در مرحله بعد،

$$\beta_n = 0$$

زیرا $k'_n = 0 = k'_{n+1}$ و بالاخره،

$$\gamma_n = -\frac{2/(2n+1)}{2/(2n-1)} \left[\frac{(2n+1)/(n+1)}{(2n-1)/n} \right] = -\frac{n}{n+1}$$

بنابراین، رابطه بازگشتی عبارت است از

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}x\right)P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

یا

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (۴۹-۵)$$

اکنون با به بهره‌گیری از $K_1 = -2$ ، $P_1(x) = -1/2(d/dx)(1-x^2) = x$ ، $dP_1/dx = 1$ ، $d^2s/dx^2 = (d^2/dx^2)(1-x^2) = -2$ می‌رسیم به

$$\lambda_n = n \left[-2 + \frac{1}{4}(n-1)(-2) \right] = -n(n+1)$$

که به معادله دیفرانسیل زیر می‌انجامد

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] = -n(n+1)P_n \quad (۵۰-۵ \text{ الف})$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد:

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad (۵۰-۵ \text{ ب})$$

جمع‌بندی سایر چندجمله‌ایها. چون بحث چندجمله‌ایهای کلاسیک خیلی طولانی است، ما به جزئیات مربوط به بقیه چندجمله‌ایها وارد نمی‌شویم. در جدول ۳-۵، جمع‌بندی نتیجه‌های مربوط به چندجمله‌ایهای زاكوبی، گگنباور، و چیشف را درج کرده‌ایم.

۴-۳-۵ بسط برحسب چندجمله‌ایهای متعامد

پس از بررسی چندجمله‌ایهای متعامد کلاسیک مختلف، تابع دلخواه $f \in \mathcal{L}_w^2(a, b)$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی، یا بسط، از این چندجمله‌ایها نوشت. اگر تابع متعامد (نه لزوماً کلاسیک) را با $|C_k\rangle$ و تابع مفروض را با $|f\rangle$ نشان بدهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |C_n\rangle \quad (۵۱-۵ \text{ الف})$$

چندجمله‌ایهای گلبانور	$P_n^{(\nu, \mu)}(x)$ ، ژاکوبی،	
$K_n = (-\nu)^n n! \frac{\Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{\nu}\right) \Gamma(\nu\lambda)}{\Gamma(n + \nu\lambda) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{\nu}\right)}$	$K_n = (-\nu)^n n!$	استانداردسازی
$k_n = \frac{\nu^n}{n!} \left[\frac{\Gamma(n + \lambda)}{\Gamma(\lambda)} \right]$	$K_n = \nu^{-n} \frac{\Gamma(\nu n + \nu + \mu + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \mu + \nu + 1)}$	ثابتها
$k'_n = 0$	$k'_n = \frac{n(\nu - \mu)}{\nu n + \nu + \mu} k_n$	
$h_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \nu\lambda) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{\nu}\right)}{n!(n + \lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(\nu\lambda)}$	$h_n = \frac{\nu^{\nu + \mu + 1} \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(n + \mu + 1)}{(\nu n + \nu + \mu + 1) (n!) \Gamma(n + \nu + \mu + 1)}$	
$C_n^\lambda(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \nu\lambda) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{\nu}\right)}{\nu^n n! \Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{\nu}\right) \Gamma(\nu\lambda)} (1 - x^\nu)^{\lambda + 1/\nu}$	$P_n^{(\nu, \mu)}(x) = \frac{(-1)^n}{\nu^n n!} (1 - x)^{-\nu} (1 + x)^{-\mu} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\nu + \mu} (1 + x)^{\mu + n}]$	فرمول رودیگنز
$\frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^\nu)^{n + \lambda - 1/\nu}] (1 - x^\nu)$		
$\frac{d^\nu}{dx^\nu} C_n^\lambda - (\nu\lambda + 1)x \frac{dC_n^\lambda}{dx} + n(n + \nu\lambda) C_n^\lambda$		
$= 0$		
	$(1 - x^\nu) \frac{d^\nu}{dx^\nu} P_n^{(\nu, \mu)}(x) + [\mu - \nu - (\nu + \mu + \nu)x] \frac{d}{dx} P_n^{(\nu, \mu)}(x)$	معادله دیفرانسیل
	$+ n(n + \mu + \nu + 1) P_n^{(\nu, \mu)}(x) = 0$	

$$(n+1)C_{n+1}^\lambda = 2(n+\lambda)x C_n^\lambda - (n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda$$

$$2(n+1)(n+\nu+\mu+1)(2n+\nu+\mu)P_{n+1}^{(\nu,\mu)}(x)$$

$$= (2n+\nu+\mu+1)[(2n+\nu+\mu)(2n+\nu+\mu+2)x + \nu^2 - \mu^2]$$

$$P_n^{(\nu,\mu)}(x) - 2(n+\nu)(n+\mu)(2n+\nu+\mu+2)P_{n-1}^{(\nu,\mu)}(x)$$

چند جمله‌ایهای چبیشف نوع دوم، $U_n(x)$

چند جمله‌ایهای چبیشف نوع اول، $T_n(x)$

رابطهٔ بازگشتی

$$K_n = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n (n+1)!}$$

$$k_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$k_n = 2^n$$

$$k_n = 2^{n-1}$$

$$k'_n = 0$$

$$k'_n = 0$$

$$h_n = \frac{\pi}{2}$$

$$h_n = \frac{\pi}{2}$$

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)!} (1-x^2)^{-1/2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+1/2}]$$

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} (1-x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}]$$

استانداردسازی

ثابتها

فرمول رودیگرز

$$(1-x^2) \frac{d^2 U_n}{dx^2} - 2x \frac{dU_n}{dx} + n(n+2)U_n = 0$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - 2x \frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0$$

معادلهٔ دیفرانسیل

$$U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1}$$

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

رابطهٔ بازگشتی

که در آن، در حالت کلی، $\langle C_k | f \rangle \neq a_k$ ، زیرا $|C_k\rangle$ ها بهنجار به واحد نیستند. با ضرب کردن عبارت سمت چپ در $\langle C_i |$ و استفاده از تعامد $\langle C_i | C_k \rangle$ ها، می‌توانیم a_k را پیدا کنیم:

$$\langle C_i | f \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle C_i | C_k \rangle = a_i \langle C_i | C_i \rangle$$

یا

$$a_i = \frac{\langle C_i | f \rangle}{\langle C_i | C_i \rangle} \quad (5-52 \text{ الف})$$

در شکل تابعی، این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a_i = \frac{\int_a^b C_i^*(x) f(x) w(x) dx}{\int_a^b |C_i(x)|^2 w(x) dx} \quad (5-52 \text{ ب})$$

(5-51 الف) را نیز می‌توان با ضرب کردن دو طرف آن در $\langle x |$ و توجه به این نکات که $\langle x | f \rangle = f(x)$ و $\langle x | C_k \rangle = C_k(x)$ به صورت یک رابطه تابعی نوشت. نتیجه‌ای که بدست می‌آید عبارت است از

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(x) \quad (5-51 \text{ ب})$$

اکنون چند مثال خاص از بسط توابع برحسب چندجمله‌ایهای متعامد را با استفاده از (5-51) و (5-52) بررسی می‌کنیم.

مثال 5-3-6: می‌خواهیم تابع

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

به‌ازای $0 < x < 1$ به‌ازای $-1 < x < 0$

را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بسط دهیم. از (5-51) داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$$

که، بنابر (۵-۵۲ب)، داریم:

$$a_k = \frac{\int_{-1}^1 P_k(x)f(x)dx}{\int_{-1}^1 [P_k(x)]^2 dx} = \frac{\int_{-1}^1 P_k(x)f(x)dx}{h_k} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^+ P_k(x)f(x)dx$$

اکنون در این معادله به جای $f(x)$ مقدار می گذاریم و می نویسیم

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^0 P_k(x)(-1)dx + \int_0^1 P_k(x)(+1)dx \right] \\ &= \frac{2k+1}{2} \left[\int_0^1 P_k(x)dx - \int_{-1}^0 P_k(x)dx \right] \end{aligned}$$

برای ادامه کار، ابتدا انتگرال دوم را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 P_k(x)dx &= \int_{+1}^0 P_k(-y)d(-y) = - \int_1^0 P_k(-y)dy \\ &= \int_0^1 P_k(-x)dx = (-1)^k \int_0^1 P_k(x)dx \end{aligned}$$

در اینجا، در دومین گام، x را به $-y$ تغییر داده ایم، درگام چهارم، انتگرال را، با به کار بردن x به جای y ، دوباره نوشته ایم، و در آخرین مرحله، از خاصیت زوج یا فرد بودن $P_k(x)$ بهره برده ایم. بنابراین،

$$a_k = \frac{2k+1}{2} [1 - (-1)^k] \int_0^1 P_k(x)dx$$

از این رابطه روشن است که اگر k زوج باشد، آنگاه $a_k = 0$. بنابراین فقط چندجمله ایهای فرد در بسط سهم خواهند بود. حال، با استفاده از تمرین ۵-۳-۵ برای انتگرال چندجمله ایهای لژاندر در بازه $[0, 1]$ ، خواهیم داشت

$$a_k = \frac{(2k+1)(k-1)!}{2^k \left(\frac{k+1}{2}\right)! \left(\frac{k-1}{2}\right)!} (-1)^{(k-1)/2}$$

به این ترتیب، چندجمله اول بسط را می توان نوشت

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{5}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) - \dots$$

توجه کنید که بسط مثال ۵-۳-۶، $f(x)$ را در بازه $[-1, +1]$ می‌دهد. آنچه که در خارج از این بازه بر سر $f(x)$ می‌آید از این معادله مشهود نیست. به بیان دیگر، بسط می‌تواند معرف توابع بسیاری باشد که اختلاف آنها با یکدیگر در خارج از بازه $[-1, +1]$ است اما در داخل آن با هم یکسان‌اند.

همچنین توجه کنید که $f(x)$ یک تابع فرد است؛ یعنی $f(-x) = -f(x)$ ، که از تعریف آن نیز، همین معنا مشهود است. بنابراین، فقط چندجمله‌ایهای فرد در بسط $f(x)$ ظاهر می‌شوند تا این خاصیت آن را حفظ کنند.

این واقعیت که شناسه $P_k(x)$ به بازه $[-1, +1]$ محدود است، ممکن است دلالت بر این معنا داشته باشد که x احتمالاً سینوس یا کسینوس یک زاویه است. در واقع، جایی که چندجمله‌ایهای لژاندر به‌طور خیلی طبیعی ظاهر می‌شوند، در جواب معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی شامل لاپلاسی است که در مختصات کروی نوشته شده باشد. پس از اینکه با استفاده از روش جداسازی متغیرها (فصل ۸)، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به سه معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد، معادله دیفرانسیل متناظر با زاویه قطبی θ به جوابهایی می‌انجامد که چندجمله‌ایهای لژاندر حالت‌های خاصی از آن هستند. این معادله دیفرانسیل، با نشانیدن $x = \cos \theta$ خیلی ساده می‌شود. به این دلیل است که در کاربردهای فیزیکی، شناسه چندجمله‌ایهای لژاندر در بازه $[-1, +1]$ قرار می‌گیرد.

مثال ۵-۳-۷: به‌عنوان مثال دیگری از بسط توابع برحسب چندجمله‌ایهای متعامد، $|x|$ را در بازه $[-1, +1]$ برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بسط می‌دهیم:

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\gamma k + 1}{\gamma} \int_{-1}^1 |x| P_k(x) dx = \frac{\gamma k + 1}{\gamma} \left[\int_{-1}^0 (-x) P_k(x) dx + \int_0^1 x P_k(x) dx \right] \\ &= \frac{\gamma k + 1}{\gamma} \left[\int_{+1}^0 (+x) P_k(-x) d(-x) + \int_0^1 x P_k(x) dx \right] \\ &= \frac{\gamma k + 1}{\gamma} [(-1)^k + 1] \int_0^1 x P_k(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر k فرد باشد، آنگاه $a_k = 0$. این همان چیزی است که انتظار داریم، زیرا $|x|$ یک تابع زوج از x است، و بنابراین، فقط چندجمله‌ایهای زوج باید در بسط آن ظاهر شوند. برای محاسبه انتگرال (۱)، رابطه بازگشتی معادله (۴۹-۵) را به‌کار می‌بریم و می‌نویسیم

$$\int_0^1 x P_k(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(x) \right] dx \quad k \geq 2$$

توجه کنید که چون k زوج است، $k+1$ و $k-1$ هر دو فردند، و ما می‌توانیم با استفاده از نتیجه تمرین ۵-۳-۵ (به ترتیب، با جایگزینی $k+1$ و $k-1$ ، به جای k) بنویسیم

$$\begin{aligned} \int_0^1 x P_k(x) dx &= \frac{k+1}{2k+1} (-1)^{k/2} \frac{k!}{2^{k+1} \left(\frac{k+2}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}\right)!} + \frac{k}{2k+1} (-1)^{(k-2)/2} \frac{(k-2)!}{2^{k-1} \left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k-2}{2}\right)!} \\ &= (-1)^{k/2} \frac{(k-2)!}{(2k+1) \left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k-2}{2}\right)! 2^{k-1}} \left[\frac{(k+1)(k-1)k}{2 \left(\frac{k}{2}+1\right) \frac{k}{2}} - k \right] \\ &= (-1)^{k/2-1} \frac{(k-2)!}{2^k \left(\frac{k}{2}+1\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)!} \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

پس، (۱) منجر می‌شود به

$$a_k = (-1)^{k/2-1} \frac{(2k+1)(k-2)!}{2^k \left(\frac{k}{2}+1\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)!} \quad k \geq 2$$

به‌ازای $k=0$ ، تعریف a_k را مستقیماً به‌کار می‌بریم و می‌نویسیم

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{1}{2}$$

اگر به ازای $s = 1, 2, 3, \dots$ بنویسیم $k = 2s$ ، خواهیم داشت

$$|x| = \frac{1}{\gamma} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(4^s + 1)(2s - 2)!}{4^s (s + 1)! (s - 1)!} P_{2s}(x)$$

چند جمله اول بسط عبارت‌اند از

$$|x| = \frac{1}{\gamma} + \frac{5}{8} P_2(x) - \frac{3}{16} P_4(x) + \frac{13}{128} P_6(x) - \dots$$

مثال ۵-۳-۸: تابع دلتای دیراک را می‌توان برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بسط داد:

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

که در آن

$$a_n = \frac{2n+1}{\gamma} \int_{-1}^1 \delta(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{\gamma} P_n(0)$$

اگر n فرد باشد، a_n صفر خواهد بود زیرا $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای فرد خواهد بود. بنابراین، باید $P_n(0)$ را به ازای مقادیر زوج n حساب کنیم. به این منظور، رابطه بازگشتی مربوط به $P_n(x)$ را به ازای $x = 0$ محاسبه می‌کنیم. با قرار دادن $x = 0$ در (۴۹-۵)، داریم

$$(n+1)P_{n+1}(0) = -nP_{n-1}(0)$$

اگر n را با $n-1$ جایگزین کنیم (برای به دست آوردن رابطه‌ای شامل P_n) خواهیم داشت

$$nP_n(0) = -(n-1)P_{n-2}(0)$$

یا

$$P_n(0) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(0) = -\left(\frac{n-1}{n}\right) \left(-\frac{n-3}{n-2}\right) P_{n-2}$$

$$= \dots = \left(-\frac{n-1}{n}\right) \left(-\frac{n-3}{n-2}\right) \dots \left(-\frac{n-2m+1}{n-2m+2}\right) P_{n-2m}$$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2m+1)}{n(n-2)(n-4)\dots(n-2m+2)} P_{n-2m}(\circ)$$

بنابراین، اگر $n = 2m$ ، می توان نوشت

$$P_{2m}(\circ) = (-1)^m \frac{(2m-1)(2m-3)\dots(3)(1)}{2m(2m-2)\dots(4)(2)} P_0(\circ)$$

حالا با ضرب صورت و مخرج در $(2)(4)\dots(2m-4)(2m-2)(2m)$ جاهای خالی را در صورت پر می کنیم:

$$P_{2m}(\circ) = (-1)^m \frac{2m(2m-1)(2m-2)\dots(3)(2)(1)}{[(2m)2(m-1)2(m-2)\dots 2(2)2(1)]^2}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

زیرا $P_0(x) = 1$ پس، می توانیم بنویسیم

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{2} (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} P_{2m}(x)$$

این بسط را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\delta(x-x') = w(x) \langle x|x' \rangle = \langle x|\mathbb{1}|x' \rangle = \langle x| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k\rangle \langle f_k| \right) |x' \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(x') f_k(x)$$

که $\{f_n\}$ یک مجموعه بردار راست هنجار کامل است. از تقسیم بر عبارت:

$$h_k^{1/2} \equiv \left\{ \int_{-1}^1 [P_k(x)]^2 dx \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$$

$P_k(x)$ را راست‌هنجار می‌کنیم، و در آن صورت می‌رسیم به

$$\delta(x - x') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(x')}{\sqrt{2/(2k+1)}} \left(\frac{P_k(x)}{\sqrt{2/(2k+1)}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} P_k(x') P_k(x)$$

به‌ازای $x' = 0$ ، خواهیم داشت

$$\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} P_k(0) P_k(x)$$

که با نتیجه قبل سازگار است.

۵-۳-۵ توابع مولد

چند جمله‌ایهای متعامد از یک نوع معین را می‌توان با مشتق گرفتن پیاپی از یک تک‌تابع دومتغیره، تولید کرد. چنین تابعی را تابع مولد می‌نامیم و با $g(x, t)$ نمایش می‌دهیم. لازم است این تابع مولد به صورت زیر قابل بسط باشد:

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n F_n(x) \quad (53-5)$$

به طوری که مشتق n ام $g(x, t)$ نسبت به t که به‌ازای $t = 0$ محاسبه می‌شود، یعنی

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} [g(x, t)] \right|_{t=0} = n! a_n F_n(0)$$

با اختلاف یک ثابت ضربی، $F_n(x)$ را بدهد. ثابت a_n ، برای دستیابی به یک شکل بسته برای $g(x, t)$ ، معرفی می‌شود.

بلافاصله می‌توان برای $g(x, t)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نوشت. چون $F_n(x)$ در (۳۷-۵) صدق می‌کند، می‌توان نوشت

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w s \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \frac{d}{dx} \left(w s \frac{dF_n}{dx} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n w \lambda_n F_n$$

اکنون تعریف λ_n در (۳۹-۵) را به کار می‌بریم و می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(ws \frac{\partial g}{\partial x} \right) &= w \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \left[nK_1 \frac{dF_1}{dx} + \frac{1}{\gamma} n(n-1) \frac{d^{\gamma} s}{dx^{\gamma}} \right] F_n \\ &= wK_1 \frac{dF_1}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n t^n F_n + \frac{1}{\gamma} w \frac{d^{\gamma} s}{dx^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) t^n F_n \\ &= wK_1 \frac{dF_1}{dx} t \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} F_n + \frac{1}{\gamma} w \frac{d^{\gamma} s}{dx^{\gamma}} t^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-\gamma} F_n \end{aligned}$$

نخستین مجموع در آخرین خط این معادله صرفاً $\partial g / \partial t$ و دومین مجموع $\partial^{\gamma} g / \partial t^{\gamma}$ است. بنابراین، معادله تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ws \frac{\partial g}{\partial x} \right) = wK_1 F_1' t \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} ws'' t^{\gamma} \frac{\partial^{\gamma} g}{\partial t^{\gamma}} \quad (54-5)$$

توجه کنید که F_1' ، K_1 و s'' جمله‌گی ثابت‌اند.

معادله (۵۴-۵)، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطلوب است؛ اما اگر نتوان آن را به صورت یک شکل بسته حل کرد، یعنی یک عبارت تحلیلی برحسب $g(x, t)$ به دست آورد، کاربرد چندانی نخواهد داشت. (۵۴-۵)، مانع از این می‌شود که این معادله دارای یک جواب بسته باشد. اگر $g(x, t)$ را به شکل بسته بخواهیم، باید نوع چندجمله‌ای متعامد را مشخص کنیم. بنابراین، در دو مثال زیر روش به دست آوردن یک شکل بسته برای توابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت و لژاندر را به اجمال بیان می‌کنیم. سایر توابع مولد را می‌توان به روشی مشابه به دست آورد. ما این کار را نخواهیم کرد،^۱ اما سیاههٔ مهمترین آنها در جدول ۴-۵ درج شده است.

مثال ۹-۳-۵: می‌خواهیم توابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت را به دست آوریم. با تعریف

$$g(x, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n H_n(x) = a_0 H_0(x) + a_1 t H_1(x) + a_2 t^2 H_2(x) + \dots \quad (1)$$

شروع می‌کنیم، و با گرفتن مشتق نسبت به x (با فرض اینکه t ثابت است) و استفاده از رابطه

۱. برای بحث تفصیلی پیرامون توابع مولد نگاه کنید به کتاب:

جدول ۴-۵ توابع مولد براى چندجمله‌اىهاى انتخاب شده

تابع مولد	چندجمله‌اى
$\exp(-t^2 + 2xt)$	هرمیت، $H_n(x)$
$\exp[-xt/(1-t)]/(1-t)^{\nu+1}$	لاگر، $L_n^\nu(x)$
$(t^2 - 2xt + 1)^{-1/2}$	لژاندر، $P_n(x)$
$(1-t^2)(t^2 - 2xt + 1)^{-1}$	چیشف نوع اول، $T_n(x)$
$(t^2 - 2xt + 1)^{-1}$	چیشف نوع دوم، $U_n(x)$

بازگشتى مربوط به چندجمله‌اىهاى هرمیت که در مثال ۵-۳-۵ به دست آمد، مى‌رسیم به

$$\frac{dg}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \frac{dH_n}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n 2n H_{n-1} = 2t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} H_{n-1} \quad (2)$$

حال اگر تعريف كنيم

$$n a_n \equiv a_{n-1}$$

در آن صورت (۲) منجر مى‌شود به

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= 2t \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} H_{n-1} = 2t(a_0 H_0 + a_1 t H_1 + a_2 t^2 H_2 + \dots) \\ &= 2tg \end{aligned}$$

این معادله دیفرانسیل را (با یادآوری این نکته که t صرفاً یک مقدار ثابت است) به آسانی می‌توان حل کرد

$$\frac{dg}{g} = 2t dx \quad \Rightarrow \quad \ln g = 2tx + \ln C$$

یا

$$g(x, t) = C e^{2tx}$$

برای پیدا کردن C ابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای $1 = a_0$.

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} a_{n-2} \right) = \dots = \frac{1}{n!} a_0 = \frac{1}{n!}$$

سپس $g(x, t)$ در (۱) را به‌ازای $x = 0$ محاسبه می‌کنیم، که نتیجه می‌شود

$$g(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n H_n(0)$$

با استفاده از استدلال‌هایی شبیه آنچه که در مثال ۵-۳-۸ آمده است، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$H_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{به‌ازای } n \text{ فرد} \\ (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} & n = 2m \text{ به‌ازای } m \end{cases}$$

پس خواهیم داشت

$$g(0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} t^{2m} (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} = e^{-t}$$

اما، همچنین داریم

$$g(0, t) = C$$

بنابراین،

$$g(x, t) = e^{-t'+2tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

توجه داشته باشید که

$$\left. \frac{\partial^n g}{\partial t^n} \right|_{t=0} = H_n(x)$$

پس، مثلاً

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=0} = (-2t + 2x)e^{-t+2tx}|_{t=0} = 2x = H_1(x)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right|_{t=0} = [-2e^{-t+2tx} + (-2t + 2x)^2 e^{-t+2tx}]|_{t=0} = -2 + 4x^2 = H_2(x)$$

و الی آخر.

مثال ۵-۳-۱۰: استخراج تابع مولد برای چندجمله‌ایهای لژاندر قدری پیچیده است. با تعریف اساسی معادله (۵-۵۳) شروع می‌کنیم

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n P_n(x) \quad (1)$$

حال، نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{dg}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \frac{dP_n}{dx} = a_0 \frac{dP_0}{dx} + a_1 t \frac{dP_1}{dx} + \dots = a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n P'_n \quad (2)$$

سپس یک رابطه بازگشتی به‌کار می‌بریم تا P'_n را با عبارتی که شامل مشتقها نیست، جایگزین کنیم. ابتدا از معادله (۱۱) از مثال ۵-۳-۵ استفاده می‌کنیم، در آن، n را با $n+1$ جایگزین می‌کنیم و در (۲) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n [P'_{n-2} + (2n-1)P_{n-1}] \\ &= a_1 t + \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n P_{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n (2n-1)P_{n-1} \\ &= a_1 t + t^2 \frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-2} P_{n-2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^n P_{n-1} - t \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} P_{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

مجموعه‌های اول و آخر ایجاب می‌کنند که a_n را به شکل زیر تعریف کنیم

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = 1$$

در این صورت با توجه به (۳) خواهیم داشت

$$\frac{dg}{dx} = t + t^r \frac{dg}{dx} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} - t(g-1)$$

یا

$$(1-t^r) \frac{dg}{dx} + tg = 2 \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} + 2t \quad (4)$$

همچنین می‌توانیم رابطه بازگشتی معادله (۱۰) در مثال ۵-۳-۵ را در (۲) قرار دهیم و رابطه زیر را به دست آوریم

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= t + \sum_{n=2}^{\infty} t^n (xP'_{n-1} + nP_{n-1}) = t + tx \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^{n-1} P_{n-1} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} \\ &= t + tx \frac{d}{dx} (g-1) + \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} = t + tx \frac{dg}{dx} + \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} \end{aligned}$$

یا

$$(1-xt) \frac{dg}{dx} = \sum_{n=2}^{\infty} nt^n P_{n-1} + t \quad (5)$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت سمت راست معادله (۴)، دو برابر (۵) است. بنابراین، می‌نویسیم

$$(1-t^r) \frac{dg}{dx} + tg = 2(1-xt) \frac{dg}{dx}$$

که منجر می‌شود به

$$(t^r - 2xt + 1) \frac{dg}{dx} = tg$$

یا

$$\frac{dg}{g} = \frac{t dx}{t^r - 2xt + 1}$$

۵۰۰ فضاهای برداری نامتناهی بعد (فضاهای توابع)

با گرفتن انتگرال از دو طرف، داریم

$$\ln g = -\frac{1}{\gamma} \ln(t^\gamma - \gamma xt + 1) + \ln C$$

یا

$$g(x, t) = \frac{C}{\sqrt{t^\gamma - \gamma xt + 1}}$$

برای پیدا کردن مقدار ثابت، توجه داریم که

$$g(1, t) = \frac{C}{1-t} \quad |t| < 1 \quad \text{به‌ازای}$$

از سوی دیگر، معادله (۱)، با استفاده از $P_n(1) = 1$ ، می‌دهد:

$$g(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad |t| < 1 \quad \text{به‌ازای}$$

با مقایسه دو معادله آخر مشاهده می‌کنیم که $C = 1$ ، و داریم

$$g(x, t) = (t^\gamma - \gamma xt + 1)^{-1/\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

مشاهده می‌شود که در این حالت،

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n g}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

به‌عنوان مثال

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\gamma} (\gamma t - \gamma x) (t^\gamma - \gamma xt + 1)^{-\gamma/\gamma} \Big|_{t=0} = x = P_1(x)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -1 + \gamma x^2 = 2P_2(x)$$

و الی آخر.

تمرینها

۱-۳-۵ a_n و a_{n-1} در معادله ۳۳-۵ را برحسب k ، k' و h که در معادله‌های (۳۱-۵) تعریف شده‌اند، پیدا کنید.

۲-۳-۵ انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ را محاسبه کنید.

۳-۳-۵ نشان دهید که برای چندجمله‌ایهای لژاندر،

$$k_n = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

۴-۳-۵ انتگرال $\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx$ را محاسبه کنید.

۵-۳-۵ نشان دهید که

$$\int_0^1 P_k(x) dx = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2} (k-1)!}{2^k \left(\frac{k+1}{2}\right)! \left(\frac{k-1}{2}\right)!} & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } k \text{ زوج و بزرگتر از } 2 \text{ باشد} \\ 1 & \text{اگر } k = 0 \end{cases}$$

۴-۵ سری و تبدیلهای فوریه

تنها مبحثی که در تمام زمینه‌های فیزیک خود را به رخ می‌کشد، آنالیز فوریه است. مثلاً این مبحث در مکانیک کلاسیک و آنالیز مدهای پهنجار، در نظریه الکترومغناطیس و آنالیز امواج با بسامدهای گوناگون، در ملاحظات مربوط به نوفه و فیزیک گرما، در نظریه کوانتومی میدان نسبیتی و در صورتگرایی عملیاتی ایجاد و نابودی نقش بازی می‌کند.

به‌علت همین اهمیت، بقیه این فصل به مطالعه سری و تبدیلهای فوریه اختصاص می‌یابد. بهترین راه شروع این مطالعه، تعمیم قضیه استون-وایشراس (قضیه ۳-۳-۵) است، که کامل بودن تک‌جمله‌ایها، x^k ، را، که به‌نوبه خود زیربنای چندجمله‌ایهای متعامد به‌شمار می‌آید، نشان می‌دهد. تعمیم قضیه ۳-۳-۵ به‌ما اجازه می‌دهد مجموعه دیگری از توابع متعامد را پیدا کنیم که یک تابع دلخواه را می‌توان برحسب آنها بسط داد. این تعمیم شامل چندجمله‌ایهایی با بیش از یک متغیر است.^۱

۱. برای اثبات این قضیه کتاب زیر را نگاه کنید:

قضیه ۵-۴-۱: قضیه استون-وایرستراس تعمیم یافته) اگر $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در حوزه $a_i \leq x_i \leq b_i$ پیوسته باشد، در آن صورت می توان آن را برحسب تک جمله ایهای $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}$ که در آنها $k_n \geq 0$ بسط داد.

قضیه استون-وایرستراس تعمیم یافته را می توان برحسب بردارها و نمایش تابعی آنها تفسیر کرد؛ این کار را در بخش ۵-۳ انجام دادیم. به عبارت دیگر، $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}$ را می توان به عنوان مختصات یک بردار مجرد f_{k_1, k_2, \dots, k_n} در امتداد $\{r\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ تلقی کرد:

$$\begin{aligned} \langle r | f_{k_1, k_2, \dots, k_n} \rangle &\equiv \langle x_1, x_2, \dots, x_n | f_{k_1, k_2, \dots, k_n} \rangle \\ &\equiv f_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \end{aligned} \quad (55-5)$$

به این ترتیب، این قضیه بیان می کند که مجموعه $\{f_{k_1, k_2, \dots, k_n}\}_{k_1=0}^{\infty}$ که با معادله (55-5) نمایش داده می شود، پایه ای برای فضای توابع پیوسته n متغیر x_1, x_2, \dots, x_n تشکیل می دهد.

۵-۴-۱ سری (مثلثاتی) فوریه

اکنون توابعی دوره ای را در نظر می گیریم و بسط آنها را برحسب توابع دوره ای مقدماتی بررسی می کنیم. به این منظور، قضیه استون-وایرستراس تعمیم یافته را با دو متغیر x و y به کار می گیریم. تابع $f(x, y)$ را می توان به صورت یک سری برحسب توانهای x ضرب در توانهای y نوشت: $f(x, y) = \sum_{k,m} a_{km} x^k y^m$. در این معادله، x و y را می توان مختصات در صفحه xy تلقی کرد که، به نوبه خود، می توانند برحسب مختصات قطبی r و θ نوشته شوند. در این صورت داریم

$$f(r, \theta) = \sum_{k,m} a_{km} r^{k+m} \cos^k \theta \sin^m \theta$$

در حالت خاص اگر فرض کنیم $r = 1$ ، تابعی از فقط θ به دست می آید،

$$f(\theta) = \sum_{k,m} a_{km} \cos^k \theta \sin^m \theta$$

۱. رسم (اما سرسری و حاکی از شلختگی!) این است که، علیرغم جایگزینی متغیرهای شناسه با متغیرهای جدید مرتبط با متغیرهای قدیم، حرف یکسانی را برای نشان دادن تابع به کار می برند. بنابراین، $f(r, \theta)$ در واقع به معنای $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ است. پس اگر $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ ، در آن صورت $f(r, \theta) \neq 2r^2 + 3\theta^2$ ، اما $f(r, \theta) = 2r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta$.

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

در آن، تبدیل می شود به

$$f(\theta) = \sum_{k,m} a_{km} \left(\frac{1}{r}\right)^k (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^k \left(\frac{1}{r}\right)^m (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^m$$

با بسط جمله های سمت راست و گردآوری تمام توانهای مشابه، خواهیم رسید به:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\theta} \quad (56-5)$$

که در آن مقدار ثابتی است که به بستگی a_{km} دارد.

سمت راست رابطه (56-5) دوره ای، با دوره تناوب 2π ، است؛ پس، مخصوصاً برای تابع دوره ای $f(\theta)$ مناسب است که شرط دوره ای $f(\theta - \pi) = f(\theta + \pi)$ را برقرار کند. رابطه (56-5) را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$\begin{aligned} f(\theta) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{in\theta} + b_{-n} e^{-in\theta}) \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + b_{-n} (\cos n\theta - i \sin n\theta)] \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n + b_{-n}) \cos n\theta + i(b_n - b_{-n}) \sin n\theta] \quad (57-5) \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \end{aligned}$$

که در آن کمیت های

$$A_n = b_n + b_{-n} \quad \text{و} \quad B_n = i(b_n - b_{-n})$$

ثابت های اند که به ازای هر $f(\theta)$ باید تعیین شوند. اگر $f(\theta)$ حقیقی باشد، در آن صورت A_n, b_0

B_n نیز حقیقی‌اند. معادله (۵۶-۵) یا (۵۷-۵) بسط سری فوریه $f(\theta)$ نامیده می‌شود. حال توجه خود را به توابع دوره‌ای مقدماتی $e^{in\theta}$ معطوف می‌کنیم. توابع $\dots, |n-1\rangle, |1\rangle, |0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$ را چنان تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌های θ آنها با رابطه زیر بیان شوند:

$$\langle \theta | n \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (58-5)$$

این توابع (بردارها)، که فرض می‌شود به $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ تعلق دارند، متعامدند، که به آسانی نیز قابل اثبات است. همچنین، می‌توان نشان داد که این بردارها کامل‌اند. در واقع، برای توابعی که در بازه $[-\pi, \pi]$ پیوسته هستند، این کاملیت پیامدی از قضیه ۵-۴-۱ به شمار می‌آید. با این همه، می‌توان نشان داد که دنباله $\{|n\rangle\}$ که در (۵۸-۵) تعریف شد نیز در بازه $[-\pi, \pi]$ یک دنباله متعامد کامل برای توابع تک‌ای-پیوسته است. بنابراین، هر تابع (دوره‌ای) از θ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از این بردارهای راست‌هنجار بیان کرد. یعنی، هر $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ (دوره‌ای) را می‌توان در نمادگذاری برداری به صورت یک ترکیب خطی از $|n\rangle$ ها نوشت:

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n |n\rangle \quad (الف 59-5)$$

که در آن

$$f_n = \langle n | f \rangle \quad (ب 59-5)$$

اگر مؤلفه θ ام دو طرف را اختیار کنیم، می‌توانیم (الف ۵۹-۵) را به صورت یک رابطه تابعی بنویسیم:

$$\langle \theta | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \langle \theta | n \rangle$$

یا

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} \quad (الف 60-5)$$

که در آن، f_n با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} f_n &= \langle n | f \rangle = \langle n | \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\theta\rangle \langle \theta| d\theta \right) | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \langle n | \theta \rangle \langle \theta | f \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\theta} f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(\theta) \quad (\text{ب-۵-۶۰}) \end{aligned}$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که هر چند ممکن است $f(\theta)$ فقط برای بازه $-\pi \leq \theta \leq \pi$ تعریف شده باشد، اما معادله‌های (۶۰-۵) حوزه تعریف $f(\theta)$ را، به‌ازای جمیع مقادیر $k \in \mathbb{Z}$ به بازه $(2k+1)\pi \leq \theta \leq (2k-1)\pi$ گسترش می‌دهد. بنابراین، اگر قرار باشد که یک تابع توسط (۶۰-۵) نمایش داده شود (بدون هیچ‌ذکری از بازه تعریف)، آن تابع باید نسبت به دوره‌های θ باشد.

تابع لزوماً در بازه $[-\pi, \pi]$ تعریف نمی‌شوند؛ در واقع، معمولاً آنها را در یک بازه دلخواه $[a, b = a+L]$ تعریف می‌کنند. به‌عنوان یک مثال خاص، تابع $f(x)$ را، که در بازه $[a, b = a+L]$ تعریف می‌شود و دارای دوره تناوب L است، در نظر بگیرید. متغیر جدیدی تعریف می‌کنیم.

$$\theta \equiv \frac{2\pi}{L} \left(x - a - \frac{L}{2} \right)$$

به‌طوری که

$$x = \frac{L}{2\pi} \theta + a + \frac{L}{2}$$

اگر این عبارت را در $F(x)$ قرار بدهیم، یک تابع از θ به‌دست می‌آید

$$F \left(\frac{L}{2\pi} \theta + a + \frac{L}{2} \right) \equiv f(\theta)$$

که در بازه $[-\pi, \pi]$ دوره‌ای است

$$\begin{aligned} f(\theta - \pi) &= F \left[\frac{L}{2\pi} (\theta - \pi) + a + \frac{L}{2} \right] \\ &= F \left(\frac{L}{2\pi} \theta + a \right) = F \left(x - \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f(\theta + \pi) = F \left[\frac{L}{\sqrt{2}\pi}(\theta + \pi) + a + \frac{L}{\sqrt{2}} \right] = F \left(x + \frac{L}{\sqrt{2}} \right)$$

دوره‌ای بودن $F(x)$ به این معناست که

$$f(\theta - \pi) = f(\theta + \pi)$$

پس می‌توانیم $f(\theta)$ را برحسب توابع مقدماتی $e^{in\theta}$ ($1/\sqrt{2\pi}$) بسط بدهیم:

$$f(\theta) = F \left(\frac{L}{\sqrt{2}\pi}\theta + a + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}$$

اگر به جای θ برحسب x قرار بدهیم، داریم

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in[(\sqrt{2}\pi/L)(x-a-L/\sqrt{2})]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F'_n e^{i(\sqrt{2}\pi/L)x}$$

که در آن، داریم

$$F'_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_n e^{-i(\sqrt{2}\pi/L)(a+L/\sqrt{2})}$$

با استفاده از (۵-۶۰)، می‌توانیم بنویسیم

$$F'_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\sqrt{2}\pi/L)(a+L/\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\theta e^{-in\theta} f(\theta)$$

برحسب x این عبارت تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} F'_n &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-i(\sqrt{2}\pi/L)(a+L/\sqrt{2})} \int_a^{a+L} \frac{\sqrt{2}\pi}{L} dx e^{-i(\sqrt{2}\pi/L)(x-a-L/\sqrt{2})} F(x) \\ &= \frac{1}{L} \int_a^b dx e^{-i(\sqrt{2}\pi/L)x} F(x) \end{aligned}$$

در پایه $\{|x\rangle\}$ ، مؤلفه‌های بردار راست هنجار $|n\rangle$ ، که حالا متعلق به $\mathcal{L}^2(a, b)$ هستند، عبارت‌اند از

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(\nu n\pi/L)x}$$

بهتر است F'_n را چنان "بازتعریف" کنیم که تبدیل شود به مؤلفه n ام بردار $|F\rangle$ در پایه راست هنجار $\{|n\rangle\}$. بنابراین، می‌نویسیم

$$|F\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n |n\rangle$$

یا در پایه $\{|x\rangle\}$

$$\langle x|F\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \langle x|n\rangle$$

یا

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i(\nu n\pi/L)x} \quad (۵-۶۱الف)$$

که در آن، F_n به صورت

$$F_n = \langle n|F\rangle = \int_a^b dx \langle n|x\rangle \langle x|F\rangle = \int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(\nu n\pi/L)x} F(x)$$

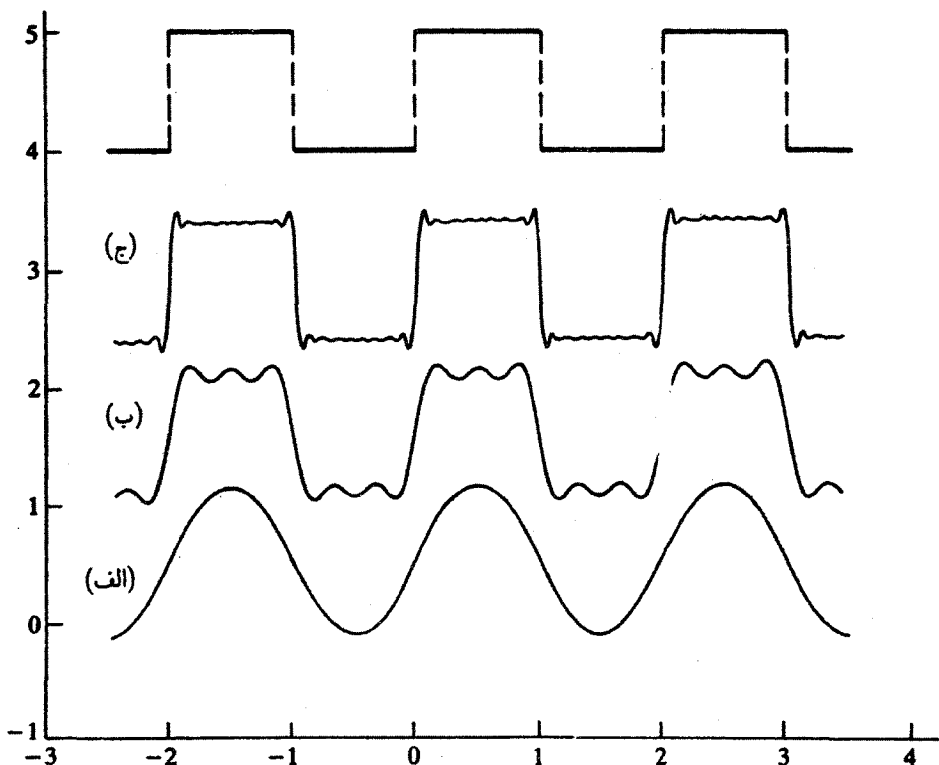
یا

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx e^{-i(\nu n\pi/L)x} F(x) \quad (۵-۶۱ب)$$

تعریف می‌شود.

معادله‌های (۶۱-۵) عبارت‌اند از تعمیم (۵-۶۰) به حالتی که در آن بازه دوره‌ای به جای $[-\pi, \pi]$ عبارت است از $[a, a+L]$. در مثالهای زیر این نکات روشن می‌شوند.

مثال ۵-۴-۱: در مطالعه سیگنالهای ولتاژ تناوبی مدارهای الکتریکی به شکلهای مختلف برخورد می‌کنیم. مثالی در این زمینه، پتانسیل مربعی به ارتفاع ε_0 ، "دوام" T ، و "دوره استراحت" T



شکل ۶-۵ نمودار موج مربعی و تقریبهای گوناگون آن، با استفاده از سری فوریه، با (الف) یک جمله، (ب) سه جمله، و (ج) یازده جمله.

(شکل ۶-۵) است. این پتانسیل به صورت تابعی از زمان، $V(t)$ ، را می توان به صورت یک سری فوریه بسط داد. بازه، عبارت است از $[0, 2T]$ ، زیرا یک چرخه کامل تغییرات پتانسیل را می پوشاند. بنابراین، با استفاده از (۶-۵ الف) می نویسیم

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{i(\gamma n \pi / 2T)t} \quad (1)$$

که در آن

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^{2T} dt e^{-i(\gamma n \pi / 2T)t} V(t) \quad (2)$$

مسئله، پیدا کردن V_n است. این کار به آسانی با جایگزینی

$$V(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T < t \leq 2T \end{cases} \text{ اگر}$$

در (۲) برای به دست آوردن عبارت زیر، انجام می شود

$$V_n = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2T}} \int_0^T dt e^{-i(n\pi/T)t} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2T}} \left(-\frac{T}{in\pi} \right) [(-1)^n - 1] \quad n \neq 0$$

بنابراین داریم

$$V_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \neq 0 \text{ زوج باشد} \\ \frac{\sqrt{2T}\varepsilon_0}{in\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

به ازای $n = 0$ ، داریم:

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^{2T} dt V(t) = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{T}{2}}$$

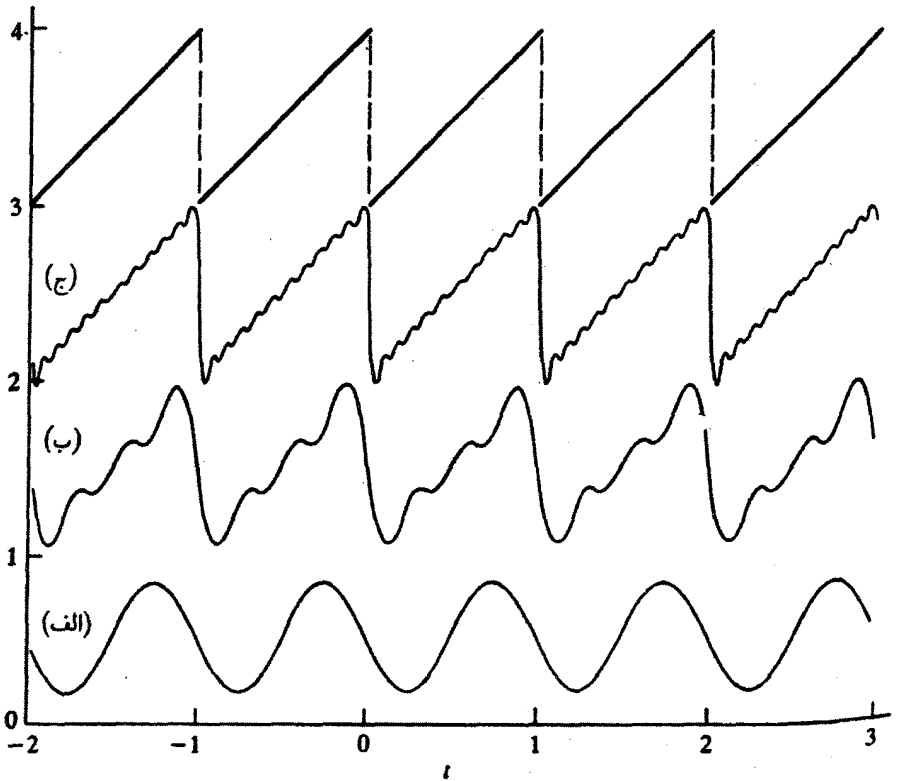
بنابراین، می توانیم بنویسیم

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \left[\varepsilon_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + \frac{\sqrt{2T}\varepsilon_0}{i\pi} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{فرد } n}}^{-1} \frac{1}{n} e^{i(n\pi/T)t} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد } n}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i(n\pi/T)t} \right) \right]$$

$$= \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \left[\sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد } n}}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right) e^{-i(n\pi/T)t} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد } n}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i(n\pi/T)t} \right] \right\}$$

که در نخستین مجموع، n را به $-n$ تغییر داده ایم. اکنون روشن است که

$$V(t) = \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد } n}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{n\pi t}{T} \right) \right\}$$



شکل ۷-۵ نمودار موج دندانانه ارهای و تقریبهای گوناگون آن با استفاده از سری فوریه، با (الف) یک جمله؛ (ب) سه جمله؛ و (ج) یازده جمله.

در شکل ۵-۶، نمایش نموداری مجموع بالا را وقتی فقط چند جمله اول حضور دارند، مشاهده می‌کنید.

مثال ۲-۴-۵: پتانسیل دیگری که زیاد به‌کار می‌رود، پتانسیل دندانانه ارهای (شکل ۷-۵) است. معادله $V(t)$ عبارت است از

$$V(t) = \varepsilon_0 \frac{t}{T} \quad 0 \leq t \leq T$$

و نمایش فوریه آن به‌صورت زیر در می‌آید

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{i(2n\pi/T)t}$$

که در آن

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt e^{-i(\gamma n \pi / T)t} V(t) \quad (۱)$$

به اختلاف بین معادله‌های بالا، که در آنها دوره تناوب عبارت است از T ، و معادله‌های متناظر در مثال ۴-۵، که در آنها دوره تناوب $2T$ است، توجه کنید. با جایگزینی برای $V(t)$ در انتگرال (۱) داریم

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt e^{-i(\gamma n \pi / T)t} \varepsilon_0 \frac{t}{T} = \varepsilon_0 T^{-\gamma/2} \int_0^T t e^{-i(\gamma n \pi / T)t} dt \\ &= \varepsilon_0 T^{-\gamma/2} \left(\frac{Tt}{-i\gamma n \pi} e^{-i(\gamma n \pi / T)t} \Big|_0^T + \frac{T}{i\gamma n \pi} \int_0^T dt e^{-i(\gamma n \pi / T)t} \right) \\ &= \varepsilon_0 T^{-\gamma/2} \left(\frac{T^2}{-i\gamma n \pi} \right) = -\frac{\varepsilon_0 \sqrt{T}}{i\gamma n \pi} \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

بازای $n = 0$ داریم

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt \varepsilon_0 \frac{t}{T} = \frac{1}{\sqrt{T}} \varepsilon_0 \frac{T}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \varepsilon_0 \frac{T}{2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{\varepsilon_0 \sqrt{T}}{i\gamma n \pi} e^{i(\gamma n \pi t / T)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon_0 \sqrt{T}}{i\gamma n \pi} e^{i(\gamma n \pi t / T)} \right) \right] \\ &= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{\gamma n \pi t}{T} \right) \right] \quad (۲) \end{aligned}$$

شکل صریح چند جمله‌اول عبارت است از

$$V(t) = \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sin \left(\frac{\gamma \pi t}{T} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\gamma \pi t}{T} \right) + \frac{1}{3} \sin \left(\frac{\gamma \pi t}{T} \right) + \dots \right] \right\}$$

در شکل ۷-۵ منحنی نمایش تغییرات معادله (۲) برحسب چند جمله‌اول را مشاهده می‌کنید.

مثال ۳-۴-۵: اکنون می‌خواهیم تابع زیر را به صورت سری فوریه بسط بدهیم:

$$f(\theta) = \theta \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

m امین ضریب تابع عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\theta}{-in} e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2} e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{+\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2\pi}{-in} (-1)^n \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{-in} (-1)^n \end{aligned}$$

همچنین

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \theta d\theta = 0$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{2\pi}}{-in} (-1)^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{-in} (-1)^n e^{in\theta} \right] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\theta \end{aligned}$$

در حالت خاص، بازای $\theta = \pi/2$ داریم

$$\frac{\pi}{4} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = - \sum_{\substack{n=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^{(n-1)/2}$$

یا، اگر به جای n قرار بدهیم $2k+1$ ،

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (-1)^k = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

که بسطی است برحسب π .

مثالهای بالا بر واقعیت مهمی در سری فوریه دلالت می‌کنند. در نقاط ناپیوستگی (مثلاً $t = T$ در مثالهای ۱-۴-۵ و ۲-۴-۵ و $\theta = \pm\pi$ در مثال ۳-۴-۵)، مقدار تابع "تعریف‌شده" نیست، اما بسط سری فوریه به آن مقداری نسبت می‌دهد که میانگین دو مقدار در چپ و راست ناپیوستگی است. مثلاً در مثال ۲-۴-۵، وقتی مقدار $t = T$ را در سری بنشانیم، تمام جمله‌های سینوسی حذف می‌شوند، و داریم

$$V(T) = \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

از سوی دیگر،

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [V(T - \varepsilon) + V(T + \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varepsilon_0 \frac{T - \varepsilon}{T} + \varepsilon_0 \frac{T + \varepsilon}{T} \right] = \varepsilon_0$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}[V(T - 0) + V(T + 0)] \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}[V(T - \varepsilon) + V(T + \varepsilon)] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 = V(T)$$

این معنا یک خاصیت کلی سری فوریه است. در واقع، قضیه اصلی سری فوریه، که به دنبال می‌آید، این خاصیت را بیان می‌کند.

قضیه ۲-۴-۵: سری فوریه تابع $f(\theta)$ که در بازه $[-\pi, \pi]$ تکه‌ای پیوسته است، همگرا می‌شود به

$$\frac{1}{2}[f(\theta + 0) + f(\theta - 0)] \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$\frac{1}{2}[f(\pi) + f(-\pi)] \quad \theta = \pm\pi$$

یکی از قاعده‌های مناسب این است که برای توابع زوج (فرد) فقط جمله‌های کسینوسی (سینوسی) در بسط فوریه ظاهر شوند. البته، توابع زوج و فرد در یک بازه متقارن حول مبدأ تعریف می‌شوند. این معنا را به صورت خیلی کلی می‌توان ثابت کرد. بازه را به صورت $[-L/2, L/2]$ در نظر می‌گیریم و (۵-۶الف) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i(\gamma n \pi / L)x}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/\gamma}^{L/\gamma} F(x) e^{-i(\gamma n \pi / L)x} dx$$

حالا متغیر انتگرال‌گیری را به $y = -x$ تغییر می‌دهیم و می‌رسیم به

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{+L/\gamma}^{-L/\gamma} F(-y) e^{i(\gamma n \pi / L)y} (-dy) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/\gamma}^{L/\gamma} F(-y) e^{i(\gamma n \pi / L)y} dy$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$F_{-n} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/\gamma}^{L/\gamma} F(-y) e^{-i(\gamma n \pi / L)y} dy$$

اکنون روشن است که

$$F_{-n} = \begin{cases} F_n & \text{اگر } F(-y) = F(y) \text{ یا اگر } F \text{ زوج باشد} \\ -F_n & \text{اگر } F(-y) = -F(y) \text{ یا اگر } F \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad (۶۲-۵)$$

با جایگذاری این عبارت در بسط $F(x)$ ، می‌رسیم به:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i(\gamma n \pi / L)x} + F_{-n} e^{-i(\gamma n \pi / L)x}) \right]$$

پس، برای $F(x)$ زوج، داریم

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos \left(\frac{\gamma n \pi}{L} x \right) \right] \quad (\text{الف } ۶۲-۵)$$

و برای $F(x)$ فرد داریم

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^{\infty} 2i F_n \sin \left(\frac{\gamma n \pi}{L} x \right) \quad (\text{ب } ۶۲-۵)$$

توجه کنید که در (۵-۶۳)، جمله ثابت حضور ندارد زیرا به ازای $n = 0$ و توابع فرد، (۵-۶۲) ایجاب می‌کند که

$$F_0 = -F_0 = 0$$

معادله (۵-۶۳) به علت ضریب i در آن مایه نگرانی است. اما، همان‌گونه که در تمرین ۳-۴-۵ نشان داده می‌شود، F_n یک عدد موهومی محض، و از این رو iF_n حقیقی است.

بالاخره، به این نکته اشاره می‌کنیم که وقتی یک سری فوریه را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم، ضرایب A_n و B_n می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که b_n در (۵-۵۶) همان $f_n/\sqrt{2}\pi$ در (۵-۶۰الف) است. پس به اعتبار تعریفهای A_n و B_n داریم

$$\begin{aligned} A_n &= b_n + b_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}(f_n + f_{-n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} f(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{in\theta} f(\theta) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (۵-۶۴الف) \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (۵-۶۴ب)$$

و

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \equiv \frac{1}{2} A_0$$

به این ترتیب، برای تابع $f(\theta)$ که در بازه $[-\pi, \pi]$ تعریف می‌شود، سری فوریه عبارت است از

$$f(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (۵-۶۵)$$

که A_n و B_n با (۵-۶۴) داده می‌شوند.

برای یک تابع کلی $F(x)$ ، که در $[a, a+L]$ تعریف می‌شود، شبیه (۶۴-۵) عبارت است از

$$A_n = \frac{2}{L} \int_a^b F(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx \quad (۶۶-۵ \text{ الف})$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_a^b F(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx \quad (۶۶-۵ \text{ ب})$$

و بسط عبارت است از

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right) \quad (۶۷-۵)$$

مثال ۴-۴-۵: مطلوب است بسط تابع

$$F(x) = |x| \quad -a \leq x \leq a$$

چون $|x|$ زوج است، ما فقط انتظار حضور جمله‌های کسینوسی را خواهیم داشت. بنابراین، با استفاده از (۶۷-۵) می‌نویسیم

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi x}{L}$$

از (۶۶-۵ الف) و این واقعیت که $L = 2a$ ، داریم

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{2a} \int_{-a}^a |x| \cos \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{1}{a} \left[\int_{-a}^0 (-x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx + \int_0^a x \cos \frac{n\pi x}{a} dx \right] \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a x \cos \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

بنابراین،

$$A_0 = \frac{2}{a} \int_0^a x dx = a$$

$$A_n = \frac{2}{a} \left(\frac{a}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{a} \Big|_0^a - \frac{a}{n\pi} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right)$$

$$= \frac{2a}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

با توجه به اینکه فقط جمله‌های فرد شرکت خواهند داشت

$$|x| = a \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)(\pi x/a)]}{(2k+1)^2} \right\}$$

اگر قرار دهیم $x = 0$ [که نقطه‌ای است در حوزه تعریف $F(x)$ ، داریم

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

یا

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad (1)$$

که راه دیگری برای محاسبه π به دست می‌دهد.

بازای $x = a$ ، می‌توانیم (۱) را به کار ببریم و بنویسیم

$$F(a) = a \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\pi]}{(2k+1)^2} \right\}$$

$$= a \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} = a$$

ملاحظه می‌کنیم که چون $F(x) = |x|$ در $x = a$ پیوسته است، سری همان‌گونه که انتظار می‌رود،

مقدار واقعی آن را به دست می‌دهد.

مثال ۵-۴-۵: یک سوکننده تمام‌موج جریان متناوب را می‌توان با شروع از یک سیگنال دوره‌ای به شکل $f(t) = \sin |\omega t|$ ، و سپس آرایشهای مناسبی از مقاومتها و خازنها، به منظور هموار کردن

برآمدگیها، یک سو و آن را به یک جریان مستقیم تبدیل کرد، به طوری که سیگنال خروجی به ولتاژ مستقیم خیلی نزدیک باشد.

آنالیز فوریه سیگنال بالا را بررسی می‌کنیم. چون $f(t)$ به ازای $-\pi < \omega t < \pi$ زوج است، انتظار داریم فقط جمله‌های کسینوسی حضور داشته باشند. اگر، موقتاً، به جای ωt ، θ به کار ببریم، می‌توانیم بنویسیم

$$\sin |\theta| = \frac{1}{\pi} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin |\theta| \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-\sin \theta) \cos n\theta \, d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} \sin \theta \cos n\theta \, d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \cos n\theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{n+1} [\cos(n+1)\pi - 1] + \frac{1}{n-1} [\cos(n-1)\pi - 1] \right\} \\ &= -\frac{2}{n^2-1} \left[\frac{(-1)^n + 1}{\pi} \right] \end{aligned}$$

بنابراین،

$$A_n = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2-1} \right) & \text{به ازای } n \neq 0 \text{ زوج} \\ 0 & \text{به ازای } n = 0 \end{cases}$$

و

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin |\theta| d\theta = \frac{4}{\pi}$$

$$\sin |\omega t| = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{4k^2 - 1}$$

خوب است که سری فوریه را به بیش از یک بعد تعمیم بدهیم. این تعمیم، به خصوص در بلورشناسی و فیزیک حالت جامد، که با ساختارهای سه‌بعدی متناوب در قالب بلورها سروکار دارند، مفید است.

برای تعمیم به N بعد، ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن یک تابع N بعدی دوره‌ای، حاصلضرب توابع دوره‌ای یک‌بعدی به شکل داده شده در (۶۱-۵) است. یعنی،

$$F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{L_1}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} F_{n_1} e^{i(\gamma_{n_1} \pi / L_1) x_1}$$

$$F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{L_2}} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F_{n_2} e^{i(\gamma_{n_2} \pi / L_2) x_2}$$

⋮

$$F(x_k) = \frac{1}{\sqrt{L_k}} \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} F_{n_k} e^{i(\gamma_{n_k} \pi / L_k) x_k}$$

⋮

$$F(x_N) = \frac{1}{\sqrt{L_N}} \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} F_{n_N} e^{i(\gamma_{n_N} \pi / L_N) x_N}$$

و

$$F(\mathbf{r}) = F(x_1)F(x_2) \cdots F(x_N)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2 \cdots L_N}} \sum_{n_1 \dots n_N = -\infty}^{\infty} F_{n_1} \cdots F_{n_N} e^{i[(\gamma_{n_1} \pi / L_1) x_1 + \cdots + (\gamma_{n_N} \pi / L_N) x_N]}$$

$$= \frac{1}{V_N^{1/2}} \sum_{\mathbf{n}} F_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{g}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \quad (61-5)$$

که در آن، نمادگذاریهای جدید زیر را به کار برده ایم

$$F(\mathbf{r}) \equiv F(x_1)F(x_2) \cdots F(x_N)$$

$$V_N \equiv L_1 L_2 \cdots L_N$$

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, \dots, n_N)$$

$$F_{\mathbf{n}} \equiv F_{n_1} F_{n_2} \cdots F_{n_N}$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{n}} \equiv 2\pi \left(\frac{n_1}{L_1}, \frac{n_2}{L_2}, \dots, \frac{n_N}{L_N} \right)$$

$$\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

هر چند، معادله (۶۸-۵) برای یک تابع دوره‌ای خاص از N متغیر تعریف شده است، اما می‌توان آن را به عنوان تعریف سری فوریه برای هر تابع دوره‌ای $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ از N متغیر تلقی کرد. با این همه، کاربرد (۶۸-۵) مستلزم قدری توضیح است.

در یک بعد، شکل کوچکترین ناحیهٔ دوره‌ای، منحصر به فرد است. مثلاً صرفاً یک پاره‌خط به طول L ، اما در دو و چند بعد، ممکن است شکل این‌گونه نواحی گوناگون باشد. مثلاً در دو بعد ممکن است مستطیل، شش‌ضلعی، و مانند آنها باشند. بنابراین، فرض می‌کنیم V_N در (۶۸-۵) معرف یاختهٔ بسیط شبکهٔ N بعدی باشد. این یاخته در فیزیک حالت جامد خیلی حائز اهمیت است و (در سه بعد) یاختهٔ ویگنر-سایتس نامیده می‌شود.

رسم بر این است که ضریب $1/V_N^{1/2}$ را به $F_{\mathbf{n}}$ وارد کنند و می‌نویسند

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} F_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{g}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{الف } ۶۹-۵)$$

که سری فوریهٔ معکوس آن عبارت خواهد بود از

$$F_{\mathbf{n}} = \frac{1}{V_N} \int_{V_N} F(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{g}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} d^N \mathbf{r} \quad (\text{ب } ۶۹-۵)$$

که در آن، انتگرال روی یک یاختهٔ ویگنر-سایتس صورت می‌گیرد. یادآور می‌شویم که $F(\mathbf{r})$ یک تابع دوره‌ای از \mathbf{r} است. یعنی، اگر \mathbf{r} به اندازهٔ \mathcal{L} ، که برداری است معرف مرزهای یک یاخته، تغییر کند، در آن صورت باید به تابع همسانی برسیم

$$F(\mathbf{r} + \mathcal{L}) = F(\mathbf{r})$$

در مورد (۵-۶۹الف) این خاصیت منجر می‌شود به

$$F(r + \mathcal{L}) = \sum_n F_n e^{i g_n \cdot (r + \mathcal{L})} = \sum_n e^{i g_n \cdot \mathcal{L}} F_n e^{i g_n \cdot r}$$

که در صورتی مساوی $F(r)$ است که داشته باشیم

$$e^{i g_n \cdot \mathcal{L}} = 1 \quad (۷۰-۵)$$

در سه بعد،

$$\mathcal{L} = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$$

که در آن m_1, m_2, m_3 و اعدادی درست و a_1, a_2, a_3 و محورهای بلورند (که معمولاً متعامد نیستند). از سوی دیگر،

$$g_n = n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3$$

که در آن n_1, n_2, n_3 اعدادی درست و b_1, b_2, b_3 بردارهای شبکه وارون‌اند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b_1 = \frac{2\pi(a_2 \times a_3)}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \quad b_2 = \frac{2\pi(a_3 \times a_1)}{a_2 \cdot (a_3 \times a_1)} \quad b_3 = \frac{2\pi(a_1 \times a_2)}{a_3 \cdot (a_1 \times a_2)}$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$a_i \cdot b_j = 2\pi \delta_{ij}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} g_n \cdot \mathcal{L} &= \left(\sum_{i=1}^r n_i \cdot b_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^r m_j a_j \right) = \sum_{i,j} n_i m_j b_i \cdot a_j \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^r m_i n_i = 2\pi (\text{عدد درست}) \end{aligned}$$

و (۷۰-۵) برقرار است.

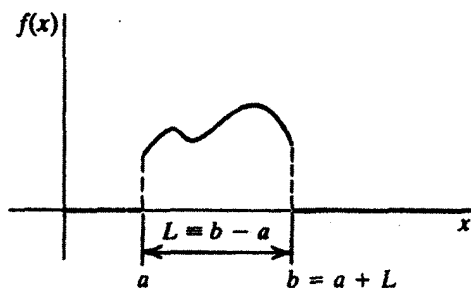
۲-۴-۵ تبدیل فوریه

معادله‌های (۶۱-۵)، مادام که $F(x)$ دوره‌ای باشد، بر روی تمامی "خط حقیقی" برقرارند. با این همه، اکثر توابعی که در کاربردهای فیزیکی با آنها روبرو می‌شویم در یک بازه $[a, b]$ تعریف می‌شوند و فراتر از آن بازه تکراری نیستند. مفید خواهد بود اگر بتوانیم این‌گونه توابع را نیز به شکلی از "سری" فوریه بسط بدهیم.

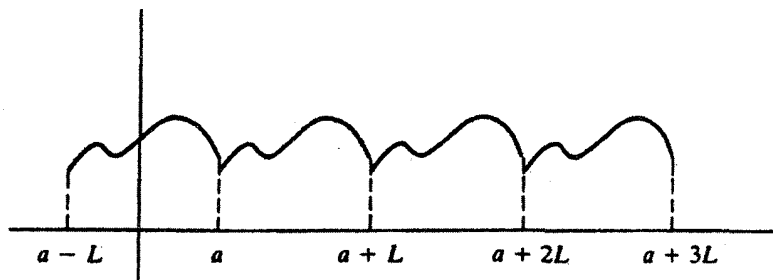
یکی از راههای انجام این کار، آن است که با سری دوره‌ای شروع کنیم و سپس، با گسترش حوزه تعریف تابع، بگذاریم دوره تناوب به بینهایت میل کند. به عنوان یک حالت خاص، فرض کنید می‌خواهیم تابع $f(x)$ را، که فقط برای بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود و در جاهای دیگر مقدار صفر به آن نسبت داده می‌شود، نمایش بدهیم (شکل ۸-۵). برای شروع کار می‌توانیم معادله‌های نمایش سری (۶۱-۵) را امتحان کنیم، اما این کار به یک تابع دوره‌ای خواهد انجامید که در هر دوره تناوب، نمایش تغییرات تابع شبیه شکل ۸-۵ است. این وضعیت را در شکل ۹-۵ مشاهده می‌کنید. سپس می‌توانیم تابع $g_1(x)$ را که در بازه $[a - L_1/2, b + L_1/2]$ تعریف می‌شود و در آن L_1 یک عدد مثبت دلخواه است، بیازماییم:

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a - L_1/2 < x < a \\ f(x) & \text{اگر } a < x < b \\ 0 & \text{اگر } b < x < b + L_1/2 \end{cases}$$

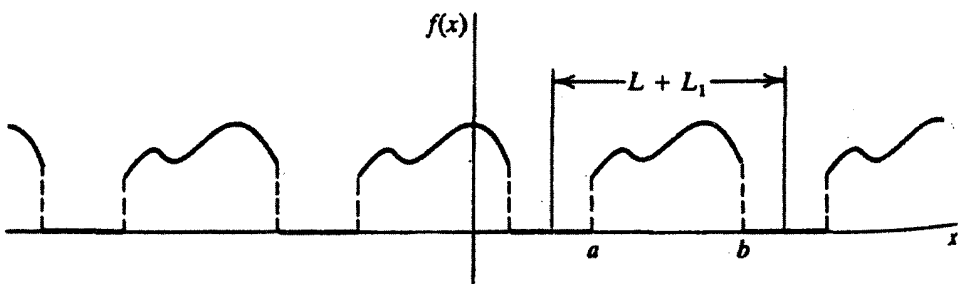
حال، با استفاده از معادله‌های (۶۱-۵)، نمایشی برای $g_1(x)$ به دست می‌آوریم که در اینجا نیز دوره‌ای است و در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است. برای این تابع، معادله‌های (۶۱-۵) به شکل



شکل ۸-۵ تابع f که در بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود.



شکل ۹-۵ نمایش سری فوریه تابع $f(x)$ ، یک تابع دوره‌ای با دوره تناوب $L = b - a$ ایجاد می‌کند. به طوری که در هر بازه $[a + nL, a + (n + 1)L]$ ، تابع شبیه $f(x)$ است.



شکل ۱۰-۵ نمایش سری فوریه تابع دوره‌ای $g_1(x)$.

زیر درمی‌آیند

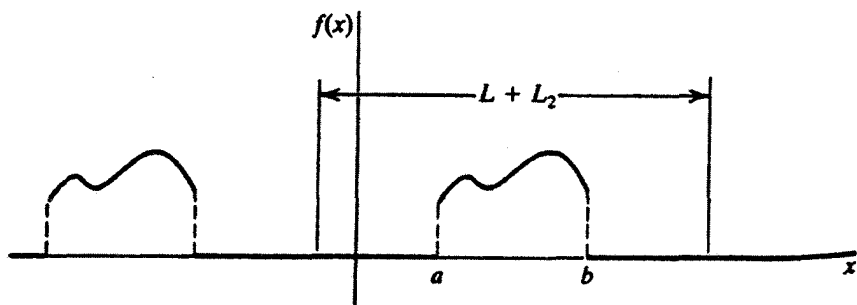
$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L + L_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(1)} e^{i[2n\pi/(L + L_1)]x}$$

که در آن

$$g_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{L + L_1}} \int_{a-L_1/2}^{b+L_1/2} e^{-i[2n\pi/(L + L_1)]x} g_1(x) dx$$

حال تابعی مانند $g_2(x)$ را امتحان بکنیم که در بازه $[a - L_2/2, b + L_2/2]$ تعریف می‌شود و در آن $L_2 > L_1$ ، به طوری که

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a - L_2/2 < x < a \\ f(x) & \text{اگر } a < x < b \\ 0 & \text{اگر } b < x < b + L_2/2 \end{cases}$$



شکل ۱۱-۵ نمایش سری فوریه تابع دوره‌ای $g_2(x)$. دو تا از چهار تکرار شکل ۱۰-۵ حذف شده‌اند.

نمایش دوره‌ای $g_2(x)$ در شکل ۱۱-۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنیم که با افزایش دوره از $L + L_1$ به $L + L_2$ ، اجزای مختلف تابع بیشتر از هم دور می‌شوند. تابع $g_2(x)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L + L_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(2)} e^{i[2n\pi/(L+L_2)]x}$$

که در آن

$$g_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{L + L_2}} \int_{a-L_2/2}^{b+L_2/2} dx e^{-i[2n\pi/(L+L_2)]x} g_2(x)$$

به طور کلی، می‌توانیم تابع $g_M(x)$ را در بازه $[a - L_M/2, b + L_M/2]$ تعریف کنیم، که در آن $L_M \gg L_1$ ، به طوری که

$$g_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a - L_M/2 < x < a \\ f(x) & \text{اگر } a < x < b \\ 0 & \text{اگر } b < x < b + L_M/2 \end{cases}$$

نمایش دوره‌ای $g_M(x)$ به این قرار است

$$g_M(x) = \frac{1}{\sqrt{L + L_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(M)} e^{i[2n\pi/(L+L_M)]x} \quad (۱۱-۵الف)$$

که در آن

$$g_n^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{L+L_M}} \int_{a-L_M/\gamma}^{b+L_M/\gamma} dx e^{-i[\gamma n\pi/(L+L_M)]x} g_M(x) \quad (ب\ ۷۱-۵)$$

تا اینجا باید روشن شده باشد که اگر $L_M \rightarrow \infty$ ، تابع کاملاً منزوی شده و تکرار آن متوقف خواهد شد. حال رفتار معادله‌های (۷۱-۵) را وقتی L_M به‌طور نامحدود نمو می‌کند، بررسی می‌کنیم. ابتدا، ملاحظه می‌کنیم که کمیت $k_n \equiv \gamma n\pi/(L+L_M)$ که در جزء نمایی ظاهر می‌شود، تقریباً به‌صورت پیوسته درمی‌آید. به عبارت دیگر، وقتی n به اندازه یک واحد تغییر کند، k_n فقط به مقدار اندکی تغییر می‌کند. این حکم ایجاب می‌کند که جمله‌های عبارت حاصل جمع، در (۷۱-۵ الف)، را بتوان درهم‌آمیخت و به رابطه زیر دست یافت

$$g_M(x) \approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(M)}(k_j)}{\sqrt{L+L_M}} e^{ik_j x} \Delta n_j$$

که در آن به جای $g_{n_j}^{(M)}$ نماد $g^{(M)}(k_j)$ را نوشته‌ایم. کمیت Δn_j به‌نای بازه زام و ممکن است عدد بزرگی باشد؛ اما، در آن بازه، نه $g^{(M)}(k_j)/\sqrt{L+L_M}$ و نه $e^{ik_j x}$ هیچکدام تغییر زیادی نمی‌کنند. از رابطه

$$k_j \equiv \frac{\gamma n_j \pi}{L+L_M}$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta n_j = \frac{L+L_M}{\gamma\pi} \Delta k_j$$

و $g_M(x)$ تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} g_M(x) &\approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{g^{(M)}(k_j)}{\sqrt{L+L_M}} \right) e^{ik_j x} \left(\frac{L+L_M}{\gamma\pi} \right) \Delta k_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{L+L_M}{\gamma\pi}} g^{(M)}(k_j) e^{ik_j x} \Delta k_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k_j) e^{ik_j x} \Delta k_j \end{aligned}$$

که در آن، $\tilde{g}(k_j)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{g}(k_j) \equiv \sqrt{\frac{L + L_M}{2\pi}} g^{(M)}(k_j)$$

اکنون روشن است که مجموع (حاصل جمع) پیش‌گفته به یک انتگرال نزدیک می‌شود، و با چشمپوشیدن از نشان M در سمت چپ، می‌توان نوشت

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} dk \quad (۵-۷۲الف)$$

با استفاده از تعریف $\tilde{g}(k_j)$ ، معادله (۵-۷۱ب) تبدیل می‌شود به

$$\sqrt{\frac{2\pi}{L + L_M}} \tilde{g}(k_j) = \frac{1}{\sqrt{L + L_M}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_j x} g_M(x)$$

که با چشمپوشی از اندیسه‌های پایین j و M ، خواهیم داشت

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x) \quad (۵-۷۲ب)$$

معادله‌های (۵-۷۲الف) و (۵-۷۲ب)، به ترتیب تبدیلهای انتگرال فوریه $\tilde{g}(k)$ و $g(x)$ نامیده می‌شوند.

تحلیل (آنالیز) بالا به مطالب مطرح شده در بحث اندیس پیوسته (بخش ۵-۲) خیلی شبیه است. با این همه، ما در اینجا در عزیمت از سری (ناپیوسته) فوریه به تبدیل (پیوسته) فوریه با هیچ دشواری روبه‌رو نشدیم. علت این گذار آرام، آن است که ما نه تنها بردارهای $\{n\}$ ، که حاصلضرب داخلی آنها را نیز مقیاس‌بندی کردیم. در هر یک از مراحل بالا، بازه انتگرال‌گیری $[a, b]$ ، و همراه با آن، فضای $\mathcal{L}^2(a, b)$ تغییر داده شده است. بنابراین، دو مقیاس‌بندی یاد شده یکدیگر را جبران و گذار آرام را میسر کرده‌اند. در صورتبندی مجرد بخش ۵-۲، هیچ بازه $[a, b]$ وجود نداشت که آن را تنظیم کنیم، و حاصلضرب داخلی هم "مجدداً مقیاس‌بندی" نمی‌شد که مقیاس‌بندی $\{n\} \rightarrow \{x\}$ را جبران کند. آنالیز حاضر اشاره به این دارد که نتیجه نهایی بحث مجرد پیشین درست است، هر چند که راه دستیابی به آن دارای دشواریهای جدی است.

مثال ۵-۴-۶: تبدیل فوریه تابعی را که به صورت زیر تعریف می‌شود، پیدا کنید

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{اگر } |x| \leq a \text{ و } a > 0 \\ 0 & \text{اگر } |x| > a \end{cases}$$

از (۵-۲۲ب) داریم

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin ka}{ka} \right) \end{aligned}$$

که همان تابعی است که در مثال ۵-۲۲ دیدیم.

حال این نتیجه را به تفصیل بررسی کنیم. اولاً، توجه کنید که اگر $a \rightarrow \infty$ ، تابع $g(x)$ بر روی کل "خط حقیقی" تبدیل به یک مقدار ثابت می‌شود، و بنابر مثال ۵-۲۲، خواهیم داشت:

$$\tilde{g}(k) = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ka}{k} = \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \pi \delta(k)$$

این همان چیزی است که ما برای یک تابع ثابت انتظار داریم (تمرین ۵-۴-۵). ثانیاً، فرض کنید $a \rightarrow 0$ و $b \rightarrow \infty$ به گونه‌ای که $2ab$ ، یعنی مساحت سطح زیر $g(x)$ ، مساوی ۱ شود. پس، $g(x)$ به تابع دلتا میل می‌کند، و $\tilde{g}(k)$ تبدیل می‌شود به

$$\tilde{g}(k) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{ka} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

که دوباره با نتیجه تمرین ۵-۴-۵ در توافق است.

سرانجام توجه داریم که پهنای $g(x)$ عبارت است از؟

$$\Delta x = 2a$$

و پهنای $\tilde{g}(k)$ ، روی محور k ها، تقریباً با فاصله بین دو صفر $\tilde{g}(k)$ ، در طرفین $k = 0$ ، مساوی است:

$$\Delta k = k_+ - k_- = \frac{2\pi}{a}$$

پس نتیجه می‌گیریم که افزایش پهنای $g(x)$ منجر به کاهش پهنای $\tilde{g}(k)$ می‌شود. به عبارت دیگر، وقتی تابع پهن است، تبدیل فوریه آن تیز است. در حد پهنای نامتناهی (تابع ثابت)، تیزی نامتناهی (تابع δ) خواهیم داشت. این دو بیان آخری خیلی کلی‌اند. در واقع، می‌توان نشان داد که در حالت کلی، برای هر تابع $g(x)$

$$(\Delta x)(\Delta k) \geq 1$$

وقتی هر دو طرف این نامساوی را در $\hbar \equiv h/2\pi$ ضرب کنیم، نتیجه، همان رابطه مشهور عدم قطعیت هایزنبرگ است، که در آن تکانه p مساوی $\hbar k$ و \hbar ثابت پلانک است:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

پس از اینکه تبدیل $g(x)$ به دست آمد، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk \\ &= \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk \end{aligned}$$

مثال ۵-۴-۷: حال بیاید تبدیل فوریه یک تابع گاوسی را به دست آوریم:

$$g(x) = Ce^{-bx^2} \quad a, b > 0$$

اگر این عبارت را در (۵-۷۲) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\tilde{g}(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b[x^2 + (ik/b)x]} dx$$

با کامل کردن جمله مربعی در جزء نمایی، می‌رسیم به:

$$x^2 + \frac{ik}{b}x = \left(x + \frac{ik}{2b}\right)^2 + \frac{k^2}{4b^2}$$

حال داریم:

$$\tilde{g}(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-k'/2b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x+ik/2b)^t} dx$$

برای محاسبه دقیق این انتگرال، باید از روشهای آنالیز مختلط، که در فصل ۷ به آنها خواهیم پرداخت، استفاده کنیم. با این همه، می‌توان از این واقعیت که دومین جمله در جزء نمایی یک عدد موهومی است، چشمپوشی کرد، جایگذاری $y = x + ik/2b$ را در نظر گرفت، و نوشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x+ik/2b)^t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^t} dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

بنابراین، می‌رسیم به:

$$\tilde{g}(k) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-k'/2b}$$

که این نیز یک تابع گاوسی است.

در اینجا نیز ملاحظه می‌کنیم که پهنای $g(x)$ ، که با $1/\sqrt{b}$ متناسب است، با پهنای $\tilde{g}(k)$ که با \sqrt{b} متناسب است، نسبت عکس دارد. پس، دوباره داریم: $1 \approx (\Delta x)(\Delta k)$.

معادلات (۵-۷۲الف) و (۵-۷۲ب) عکس یکدیگرند. با این همه، معلوم نیست که این دو با هم سازگار باشند. به عبارت دیگر، اگر (۵-۷۲الف) را درست راست (۵-۷۲ب) بنشانیم، آیا یک اتحاد به دست می‌آوریم؟ بگذارید این حکم را امتحان کنیم (به کاربرد متغیر ظاهری متفاوت در انتگرال‌گیری توجه کنید!)

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k') e^{ik'x} dk' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k') e^{ix(k'-k)} dk' \end{aligned}$$

اکنون ترتیب دو انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم:

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{g}(k') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \right]$$

اما عبارت داخل کروشه عبارت است از تابع دلتا (مثال ۵-۲-۲). بنابراین، داریم

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{g}(k') \delta(k' - k)$$

که یک اتحاد است.

مانند آنچه در مورد فوریه دیدیم، معادله‌های (۵-۷۲)، حتی اگر $g(x)$ و $\tilde{g}(k)$ تکه‌ای-پیوسته باشند، برقرارند. در آن صورت، تبدیلهای فوریه به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [g(x + 0) + g(x - 0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{ikx} dk \quad (۵-۷۳ الف)$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\tilde{g}(k + 0) + \tilde{g}(k - 0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \quad (۵-۷۳ ب)$$

که هر صفر در سمت چپ، یک ε است که در حد، به سمت صفر رفته است. خوب است که معادله‌های (۵-۷۲) یا (۵-۷۳) را به بیش از یک بعد تعمیم بدهیم. کار تعمیم، خیلی سراسر است و منجر به این نتیجه می‌شود:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/r}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_n e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \tilde{g}(k_1, \dots, k_n)$$

$$\tilde{g}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/r}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} g(x_1, \dots, x_n)$$

با معرفی بردارهای $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ و $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ داریم

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/r}} \int d^n k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{g}(\mathbf{k}) \quad (۵-۷۴ الف)$$

و

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/r}} \int d^n r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} g(\mathbf{r}) \quad (۵-۷۴ ب)$$

اکنون نمادگذاری مجردی را که قبلاً برای بررسی نتایج قبل به کار بردیم، مجدداً به کار می‌گیریم. تبدیل انتگرال فوریه به این ترتیب از سری فوریه به دست می‌آید که اندیس گسسته n به اندیس

پیوسته k تبدیل می‌شود. این حرف به آن معناست که ما باید بتوانیم با نوعی فرایند حدی، $|k\rangle$ را از $|n\rangle$ به دست آوریم. باید تأکید کنیم که بر سر راه عزیزت از یک بردار "گسسته" به یک بردار "پیوسته"، تعداد زیادی دام نهاده شده است. این‌گونه "دام"‌ها را قبلاً هم دیده‌ایم. با این همه، بار دیگر از آنها چشم می‌پوشیم و به رابطه کاملیت $|n\rangle$ ‌ها نظر می‌کنیم:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

اگر جمله‌ها را در هم بیامیزیم (n در حال نزدیک شدن به یک اندیس پیوسته است؛ بنابراین، اختلاف بین $|n\rangle$ و $|n+1\rangle$ بینهایت کوچک است)، در آن صورت رابطه بالا را می‌توان به رابطه زیر تقریب زد

$$1 \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} |n_j\rangle\langle n_j| \Delta n_j$$

که در آن، مثل قبل، Δn_j تعداد اعداد درست در بازه Δn_j است. اکنون با تعریف

$$k_j \equiv \frac{2\pi n_j}{L}$$

می‌رسیم به

$$\Delta n_j = \frac{L}{2\pi} \Delta k_j$$

با جایگذاری این رابطه در عبارت مربوط به ۱، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 1 &\approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |n_j\rangle\langle n_j| \frac{L}{2\pi} \Delta k_j \\ &= \sum_j \left(\sqrt{\frac{L}{2\pi}} |n_j\rangle \right) \left(\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \langle n_j| \right) \Delta k_j \\ &\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} |k_j\rangle\langle k_j| \Delta k_j \end{aligned}$$

که در آن بردار $|k_j\rangle$ (که نباید آن را با عدد k_j ی تعریف شده در بالا خلط کرد) به صورت زیر تعریف می شود

$$|k_j\rangle \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}|n_j\rangle$$

نمایش x بردار $|k_j\rangle$ را می توان از ضرب داخلی $|k_j\rangle$ در $\langle x|$ به دست آورد:

$$\begin{aligned}\langle x|k_j\rangle &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\langle x|n_j\rangle = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(2n_j\pi/L)x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x}\end{aligned}$$

با کنار گذاشتن اندیس j ، خواهیم داشت:

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (75-5)$$

در حد بینهایت کوچک k ، عبارت مربوط به 1 تبدیل به انتگرال می شود:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |k\rangle\langle k| dk \quad (76-5)$$

این عبارت، معادله (۹-۵ الف) به ازای $w(k) = 1$ است. معادله (۱۱-۵) تبدیل می شود به

$$\langle k|k'\rangle = \delta(k - k') \quad (77-5)$$

می توانیم فراتر برویم و نمایش انتگرالی تابع دلتا را بنویسیم

$$\begin{aligned}\delta(k - k') &= \langle k|1|k'\rangle = \langle k| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| dx \right) |k'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle k|x\rangle\langle x|k'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k' - k)x}\end{aligned}$$

بدیهی است که، همچنین می توان نوشت

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(x-x')k}$$

در واقع، می توان تابع دلتا را بر حسب هر مجموعه تابع راست هنجاری نمایش داد (مثال ۵-۳-۸). پایه راست هنجار کلی $\{|n\rangle\}$ را با نمایش x به صورت $f_n(x) = \langle x|n\rangle$ در نظر بگیرد. با استفاده از رابطه کاملیت به این قرار:

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= w(x)\langle x|x'\rangle = \langle x|1|x'\rangle w(x) \\ &= \langle x| \left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right) |x'\rangle w(x) = \sum_n \langle x|n\rangle\langle n|x'\rangle w(x) \quad (78-5) \\ &= \sum_n f_n(x) f_n^*(x') w(x) \end{aligned}$$

رابطه اخیر، تابع دلتا را به صورت مجموع حاصلضربهای توابع راست هنجار بیان می کند و برای هر مجموعه تابع راست هنجار کاملی این رابطه صادق است. در حالت خاص، اگر توابع مثلثاتی را، که برای آنها $w(x) = 1$ ، به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\delta(x - x') = \sum_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(2n\pi/L)x} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(2n\pi/L)x'} = \frac{1}{L} \sum_n e^{i(2n\pi/L)(x-x')}$$

اگر با بیش از یک بعد سروکار داشته باشیم، می نویسیم

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \quad (79-5 \text{ الف})$$

و

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (79-5 \text{ ب})$$

و معادله (۷۵-۵) تبدیل می‌شود به

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{الف } ۸۰-۵)$$

با رابطه مزدوج مختلط

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{ب } ۸۰-۵)$$

معادلات (۷۹-۵) و (۸۰-۵) بین $|\mathbf{k}\rangle$ و $|\mathbf{r}\rangle$ شباهت عجیبی را بیان می‌کنند. در واقع، هر بردار مجرد مفروض $|f\rangle$ را می‌توان یا برحسب نمایش x آن، $\langle \mathbf{r} | f \rangle = f(\mathbf{r})$ ، و یا برحسب نمایش k آن، $\langle \mathbf{k} | f \rangle = f(\mathbf{k})$ ، بیان کرد. این دو نمایش، با یکدیگر کاملاً هم‌ارزند، و یک تناظر یک‌به‌یک مابین آنها برقرار است که با معادله‌های (۷۴-۵) داده می‌شود. نمایشی که در عمل به‌کار می‌رود، با کاربرد فیزیکی دیکته می‌شود. مثلاً در مکانیک کوانتومی، بیشتر اوقات نمایش x ، که متناظر با مکان است، به‌کار می‌رود، زیرا در آن صورت معادلات عملگرها به معادله‌های دیفرانسیلی تبدیل می‌شوند که خطی‌اند و حل آنها از معادله‌های متناظر با نمایش k ، که مرتبط با تکانه‌اند، ساده‌تر است.

مثال ۸-۴-۵: تبدیل فوریه پتانسیل کولنی: حالا از تبدیل فوریه $V(r)$ ، پتانسیل کولنی دو بار نقطه‌ای Q و Q' را به‌دست آوریم:

$$V(r) = \frac{QQ'}{r}$$

تبدیل فوریه در آزمایش‌های پراکندگی با اتمها و جامدات حائز اهمیت است. همان‌گونه که در زیر خواهیم دید، تبدیل فوریه $V(r)$ "تعریف شده" نیست. اما، اگر پتانسیل یوکاوا، یعنی، عبارت زیر را به‌کار گیریم:

$$V_\alpha(r) = \frac{QQ'e^{-\alpha r}}{r} \quad \alpha > 0$$

تبدیل فوریه "خوش-تعریف" خواهد بود، و می‌توانیم با گرفتن حد $\alpha \rightarrow 0$ ، پتانسیل کولنی را به‌دست آوریم. بنابراین، سعی می‌کنیم تبدیل فوریه $V_\alpha(r)$ را پیدا کنیم.

سروکار ما با فضای سه بعدی است و بنابراین می نویسیم

$$\tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2}\pi)^{3/2}} \iiint d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{QQ' e^{-\alpha r}}{r}$$

از حضور r روشن است که مختصات مناسب برای این مسئله، مختصات کروی است. هر امتدادی را می توان به عنوان محور z ها انتخاب کرد. انتخاب مناسب در این مورد عبارت است از امتداد k . بنابراین، فرض می کنیم

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{e}}_z = k \hat{\mathbf{e}}_z$$

و

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$$

که θ ، زاویه قطبی در مختصات کروی است. اکنون داریم

$$\tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{QQ'}{(\sqrt{2}\pi)^{3/2}} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \theta} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

انتگرال گیری روی φ خیلی آسان است و به 2π منجر می شود. سپس انتگرال بر روی θ گرفته می شود که نتیجه عبارت خواهد بود از

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} d\theta = \int_{-1}^1 du e^{-ikru} = \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr})$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\alpha(\mathbf{k}) &= \frac{QQ'(\sqrt{2}\pi)}{(\sqrt{2}\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(\frac{1}{ikr} \right) (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= \frac{QQ'}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{1}{ik} \right) \int_0^\infty dr (e^{(-\alpha+ik)r} - e^{-(\alpha+ik)r}) \\ &= \frac{QQ'}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{1}{ik} \right) \left(\frac{e^{(-\alpha+ik)r}}{-\alpha+ik} \Big|_0^\infty + \frac{e^{-(\alpha+ik)r}}{\alpha+ik} \Big|_0^\infty \right) \end{aligned}$$

توجه کنید که ضریب α در اینجا به کمک ما می آید زیرا رفتار جزء نمایی را در $\infty \rightarrow r$ ، آهسته

می‌کند. نهایتاً، داریم

$$\tilde{V}_\alpha(k) = \frac{2QQ'}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k^2 + \alpha^2} \right)$$

ضریب α معیاری است از برد پتانسیل از $V_\alpha(r)$ برمی‌آید که هر چه α بزرگتر باشد، برد کوتاه‌تر است. در واقع، در پاسخ به کوتاهی برد نیروهای هسته‌ای بود که یوکاوا α را معرفی کرد. در الکترومغناطیس، که برد بینهایت است، α صفر و $V_\alpha(r)$ به $V(r)$ تبدیل می‌شود. به این ترتیب، تبدیل فوریه پتانسیل کولنی عبارت است از

$$\tilde{V}_{\text{coul}}(k) = \frac{2QQ'}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k^2} \right)$$

توجه داشته باشید که این عبارت، تبدیل فوریه انرژی پتانسیل کولنی بین دو بار نقطه‌ای Q و Q' است. اگر توزیعهای بار دیگری به‌کار برده شوند، تبدیل فوریه متفاوت خواهد بود.

مثال ۵-۴-۹: عامل شکل. در مثال ۵-۴-۸، انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی بین دو بار نقطه‌ای بررسی شد. اکنون می‌خواهیم حالتی را در نظر بگیریم که در آن یکی از بارها روی یک حجم متناهی توزیع شده است. در این صورت انرژی پتانسیل عبارت خواهد بود از

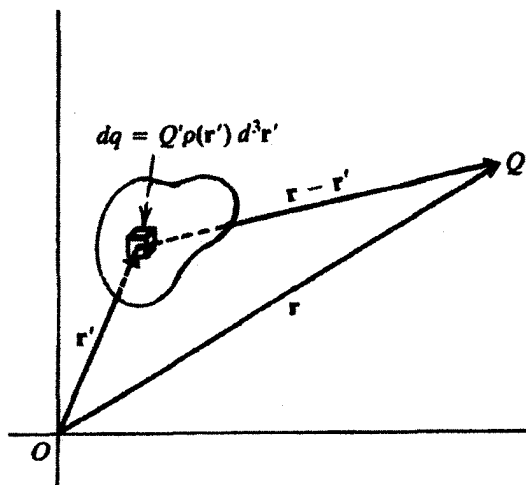
$$V(r) = Q \iiint \frac{Q' \rho(r')}{|r - r'|} d^3 r'$$

که $Q' \rho(r')$ چگالی بار در نقطه r' است. توجه داشته باشید که $\rho(r')$ را طوری به‌نجار کرده‌ایم که $\iiint \rho(r') d^3 r' = 1$. شکل ۵-۱۲، شکل هندسی این وضعیت را نشان می‌دهد. با تغییر متغیر

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad d^3 r' = d^3 R$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3 r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Q \int d^3 R \frac{Q' \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{R} \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۱۲-۵ انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی یک بار نقطه‌ای واقع در \mathbf{r} و یک توزیع بار را می‌توان با استفاده از شکل هندسی نشان داده شده در اینجا حساب کرد.

چون دیفرانسیلهای d^3r و d^3R شامل اطلاعاتی پیرامون تعداد انتگرالی‌هایی‌اند که باید محاسبه شوند، ما فقط یک علامت را برای انتگرال به‌کار خواهیم برد. برای محاسبه (۱)، $\rho(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ را با تبدیل فوریه آن جایگزین می‌کنیم:

$$\rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{R})} \quad (2)$$

به تک علامت انتگرال، ظاهر شدن ترکیب $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ در هر دو طرف (که باید نیز چنین باشد)، و کاربرد \mathbf{k}' به‌عنوان متغیر ظاهری انتگرال‌گیری توجه کنید. از ترکیب (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}) &= \frac{QQ'}{(2\pi)^3} \int d^3r d^3R d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}}}{R} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \\ &= QQ' \int d^3R d^3k' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}}}{R} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \left(\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})}}_{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= QQ' \int d^r R \frac{1}{R} \int d^r k' e^{ik' \cdot R} \tilde{\rho}(k') \delta(k' - k) \\
 &= QQ' \tilde{\rho}(k) \int d^r R \frac{e^{ik \cdot R}}{R} \quad (۳)
 \end{aligned}$$

آنچه که در این نتیجه جالب است، این است که نقش توزیع بار، $\tilde{\rho}(k)$ ، کاملاً از زیر علامت انتگرال بیرون آورده شده است. انتگرال، سوای تغییر علامت k ، صرفاً همان تبدیل فوریه انرژی پتانسیل بین دو بار نقطه‌ای، Q و Q' ، است که در مثال ۵-۴-۸ به دست آمد. بنابراین، می‌توانیم (۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{V}(k) = (2\pi)^{r/2} \tilde{\rho}(k) \tilde{V}_{\text{coul}}(-k) = \frac{4\pi QQ' \tilde{\rho}(k)}{|k|^r}$$

این معادله در تحلیل ساختار ذرات اتمی حائز اهمیت است. تبدیل فوریه $\tilde{V}(k)$ را می‌توان مستقیماً در آزمایشهای پراکندگی اندازه گرفت. در یک آزمایش نوعی، یک هدف (باردار) با یک ذره باردار نقطه‌ای (الکترون) بمباران می‌شود. اگر تجزیه و تحلیل داده‌های پراکندگی، انحرافی از رفتار $(1/k^r)$ -گونه $\tilde{V}(k)$ نشان بدهد، در آن صورت می‌توان نتیجه گرفت که ذره هدف دارای توزیع بار است. به بیان مشخص‌تر، نمودار $|k|^r \tilde{V}(k)$ برحسب k ، تغییرات $\tilde{\rho}(k)$ نسبت به k را به دست می‌دهد. اگر نمودار حاصل یک مقدار ثابت باشد، در آن صورت $\tilde{\rho}(k)$ ثابت است، و هدف یک ذره نقطه‌ای است [$\tilde{\rho}(k)$ برای ذرات نقطه‌ای، که $\rho(\mathbf{r}') \propto \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ، ثابت است]. هرگونه انحرافی از مقدار ثابت، مؤید وابستگی $\tilde{\rho}(k)$ به k است، و نتیجه، ذره هدف باید دارای توزیع بار باشد.

تعمیم بحث بالا به فضا زمان نسبیستی چهاربعدی، مبنای پیش کشیده شدن استدلال وجود کوارکها در سال ۱۹۶۸ قرار گرفت، زیرا نتایج پراکندگی انرژی-بالای الکترون از پروتون در مرکز شتابدهنده خطی استنفورد، وجود انحرافی را از مقدار ثابت برای $\tilde{\rho}(k)$ پروتونها نشان می‌داد. تابع $\tilde{\rho}(k)$ (و تعمیم نسبیستی آن)، عامل شکل نامیده می‌شود. ●

مثال ۵-۴-۱۰: حال می‌خواهیم تبدیل فوریه یک تابع دوره‌ای را بررسی کنیم و ببینیم آیا یک سری فوریه به دست می‌آوریم یا خیر. تابع دوره‌ای با بازه تناوبی L را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید $g_c(x)$ معرف تکماتبعی است که دریاخته پایه، $[a, a+L]$ ، تعریف می‌شود؛ یعنی، به ازای $x \notin [a, a+L]$ ، داریم: $g_c(x) = 0$. اکنون می‌توانیم تابع دوره‌ای $g(x)$ را، که

تکراری از $g_c(x)$ است، برای تمام بازه‌های تناوب بنویسیم:

$$g(x) = \begin{cases} g_c(x) & \text{اگر } a \leq x \leq a + L \\ g_c(x - L) & \text{اگر } a + L \leq x \leq a + 2L \\ \vdots \\ g_c(x - jL) & \text{اگر } a + jL \leq x \leq a + (j + 1)L \\ \vdots \end{cases}$$

چون در خارج از بازه، $g_c(x) = 0$ می‌توان نوشت:

$$g(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_c(x - jL)$$

اکنون به آسانی می‌توان ثابت کرد که این تابع در واقع دوره‌ای است:

$$\begin{aligned} g(x + L) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_c(x - jL + L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_c[x - (j - 1)L] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_c(x - mL) \end{aligned}$$

در اینجا ما $(j - 1)$ را با m جایگزین کرده‌ایم. این معادله، همسان با معادله قبل است، با این تفاوت که اندیس ظاهری در آن تغییر کرده است.

اکنون که تابع به صورت جمع‌وجوری نوشته شده است، می‌توانیم تبدیل فوریه آن را بنویسیم:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_c(x - jL) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g_c(x - jL) \end{aligned} \quad (1)$$

اما $g_c(x - jL)$ فقط در صورتی ناصفر است که $a + jL \leq x \leq a + (j + 1)L$ به این

ترتیب، (۱) کاهش می‌یابد به

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{a+jL}^{a+(j+1)L} dx e^{-ikx} g_c(x - jL)$$

با تغییر متغیر انتگرال‌گیری به $y = x - jL$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j \int_a^{a+L} dy e^{-ik(y+jL)} g_c(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j e^{-ikjL} \int_a^{a+L} dy e^{-iky} g_c(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{g}_c(k) \sum_j e^{-ikjL} \quad (2) \end{aligned}$$

که در آن، بنا به تعریف، $\tilde{g}_c(k)$ عبارت است از

$$\tilde{g}_c(k) \equiv \int_a^{a+L} dy e^{-iky} g_c(y)$$

حال بگذارید نتیجه تمرین ۵-۴-۲ را برای توابع e^{ijkL} بنویسیم:

$$\delta(kL - 2m\pi) = \frac{1}{L} \sum_j e^{-ijkL} \quad (3)$$

همان‌طور که در تمرین یاد شده ذکر شده است، این معادله به تمامی برقرار نیست. به عنوان مثال، اگر به ازای $l \neq m$ داشته باشیم: $kL = 2l\pi$ ، در آن صورت سمت چپ صفر اما سمت راست بینهایت است! علت این است که m دلخواه است و ما ناچاریم همه m ها را در سمت چپ بگنجانیم. بنابراین، معادله (۳) را به صورت زیر تصحیح می‌کنیم:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(kL - 2m\pi) = \frac{1}{L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij kL}$$

اگر این معادله را در (۲) بنشانیم، خواهیم داشت

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{g}_c(k) L \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(kL - 2m\pi)$$

اکنون می‌توانیم به فضای x برگردیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{g}(k) = \frac{L}{2\pi} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_c(k) e^{ikx} \delta(kL - 2m\pi) dk \\ &= \frac{L}{2\pi} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_c(k) e^{ikx} \frac{1}{L} \delta\left(k - \frac{2m\pi}{L}\right) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_c\left(\frac{2m\pi}{L}\right) e^{i(2m\pi/L)x} \end{aligned}$$

که، اگر $(1/2\pi)\tilde{g}(2m\pi/L)$ را به عنوان ضریب فوریه $g(x)$ در نظر بگیریم، یک سری فوریه است.

تبدیلهای فوریه و مشتقات. احتمالاً متداولترین کاربرد تبدیلهای فوریه، حل معادله‌های دیفرانسیل است. علت این امر آن است که عملگر مشتق در فضای r ، در فضای k به ضرب معمولی تبدیل می‌شود. مثلاً اگر از $g(r)$ در (۵-۷۴) الف نسبت به x_j مشتق بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} g(r) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{g}(k) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_j x_j + \dots + k_n x_n)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{g}(k) (ik_j) e^{ik \cdot r} \end{aligned}$$

یعنی، هر بار که نسبت به یکی از مؤلفه‌های r مشتق می‌گیریم، مؤلفه نظیر k "پایین می‌آید". شیب n بعدی عبارت است از

$$\nabla g(r) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{g}(k) (ik) e^{ik \cdot r}$$

و لاپلاسی n بعدی عبارت خواهد بود از

$$\nabla^2 g = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \tilde{g}(k) (-k^2) e^{ik \cdot r}$$

که در آن $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2$.

ما در حل معادله‌های دیفرانسیل در فصلهای ۱۱ و ۱۲ از تبدیلهای فوریه استفاده زیادی خواهیم کرد. در اینجا می‌توان با ذکر یک مثال ساده نکات بالا را به نمایش گذاشت. این معادله

دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را در نظر بگیرید:

$$C_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + C_2 \frac{dy}{dx} + C_3 y = f(x)$$

که در آن C_1, C_2, C_3 و مقادیر ثابتی اند. می‌توان صرفاً با جایگزین کردن آنچه در زیر می‌آید، در این معادله، آن را "حل" کرد

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{y}(k) e^{ikx} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{y}(k) (ik) e^{ikx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{y}(k) (-k^2) e^{ikx} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{y}(k) (-C_1 k^2 + iC_2 k + C_3) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

با مساوی قرار دادن ضریب e^{ikx} در دو طرف، داریم:

$$\tilde{y}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{-C_1 k^2 + iC_2 k + C_3}$$

اگر ما $\tilde{f}(k)$ را بشناسیم [که می‌توان آن را از $f(x)$ به دست آورد]، می‌توانیم با تبدیل فوریته $y(x), \tilde{y}(k)$ را محاسبه کنیم. محاسبه انتگرالهای حاصل، آسان نیست. در مواردی، روشهای فصل ۷ می‌توانند مفید باشند؛ در سایر موارد، ممکن است انتگرالگیری عددی آخرین راه چاره باشد. با این همه، قدرت واقعی تبدیل فوریته، در آنالیز صوری معادله‌های دیفرانسیل نهفته است. تبدیل فوریته یک توزیع. تمرین ۵-۴-۵ به تبدیل فوریته تابع دلتای دیراک اختصاص دارد. دیدیم که این تبدیل دقیقاً به همان روش تابعهای معمولی تعریف می‌شود. تبدیل فوریته یک تابع را بهتر است مستقیماً برحسب عمل توزیع به عنوان یک تابعک خطی تعریف کنیم: بگذارید تمایز بین متغیرهای x و k را کنار بگذاریم و تبدیل فوریته تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را صرفاً به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{f}(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_2) e^{-it_1 t_2} dt_2 \quad (A1-5)$$

اکنون دو تابع، f و g ، را در نظر می‌گیریم، و توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\langle f, \tilde{g} \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-ixy} dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \tilde{f}(y) dy = \langle \tilde{f}, g \rangle\end{aligned}$$

تعریف زیر، از این معادله ناشی می‌شود.

تعریف ۳-۴-۵: فرض کنید φ یک تابع توزیع و f یک تابع $C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ است که تبدیل فوریه \tilde{f} آن وجود دارد و آن نیز یک تابع $C_{\mathbb{F}}^{\infty}$ است. در این صورت، تبدیل فوریه $\tilde{\varphi}$ تابع φ را به صورت توزیع $\langle \tilde{\varphi}, f \rangle = \langle \varphi, \tilde{f} \rangle$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱۱-۴-۵: تبدیل فوریه $\delta(x)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\delta}, f \rangle &= \langle \delta, \tilde{f} \rangle = \tilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_r) dt_r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) f(t_r) dt_r = \langle 1/\sqrt{2\pi}, f \rangle\end{aligned}$$

بنابراین، همان‌طور که انتظار می‌رود، $\tilde{\delta} = 1/\sqrt{2\pi}$.

مثال ۱۲-۴-۵: تبدیل فوریه $\delta(x - x')$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\delta}(x - x'), f \rangle &= \langle \delta(x - x'), \tilde{f} \rangle = \tilde{f}(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_r) e^{-ix't_r} dt_r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-ix't_r} f(t_r) dt_r\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $\varphi(x) = \delta(x - x')$ خواهیم داشت

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix't}$$

تمرینها

۱-۴-۵ نشان دهید $e^{in\theta}/\sqrt{2\pi}$ به ازای $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ در بازه $[-\pi, +\pi]$ ، راست هنجارند.

۲-۴-۵ نشان دهید به ازای θ و θ' در $[-\pi, +\pi]$ ،

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta-\theta')} = \delta(\theta - \theta')$$

اگر m عدد درستی باشد، به ازای $\theta' = 2m\pi$ چه اتفاقی می افتد؟

۳-۴-۵ نشان دهید در معادله (۵۷-۵)، اگر $f(\theta)$ حقیقی باشد، A_n و B_n نیز حقیقی اند.

۴-۴-۵ بسط فوریه $\cos kx$ را که در بازه $[-a, +a]$ تعریف می شود، پیدا کنید.

۵-۴-۵ تبدیل فوریه: (الف) تابع ثابت $f(x) = C$ ، و (ب) تابع دلتای دیراک چیست؟

۶-۴-۵ تبدیل فوریه

$$g(x) = \begin{cases} b - \frac{b}{a}|x| & |x| \leq a \text{ به ازای} \\ 0 & |x| > a \text{ به ازای} \end{cases}$$

را پیدا کنید.

۷-۴-۵ نشان دهید که (الف) اگر $g(x)$ حقیقی باشد، در آن صورت $\tilde{g}^*(k) = \tilde{g}(-k)$ ، و (ب) اگر

$g(x)$ زوج (فرد) باشد، $\tilde{g}(k)$ نیز زوج (فرد) است.

۸-۴-۵ با استفاده از تبدیل فوریه در سه بعد، یک جواب برای معادله پواسون

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

را پیدا کنید.

۹-۴-۵ نشان دهید که $\tilde{\tilde{f}}(t) = f(-t)$

۱۰-۴-۵ به ازای $\varphi(x) = \delta'(x - x')$ ، $\tilde{\varphi}(y)$ را پیدا کنید.

مسائل

۱-۵ نشان دهید که قانون متوازی الاضلاع،

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

برای فضای حاصلضرب داخلی صادق است.

۲-۵ جوردن و فون نویمان نشان داده‌اند که اگر قانون متوازی‌الاضلاع (مسئله ۱-۵) در یک فضای (نرم‌دار کامل) باناخ برقرار باشد، فضای یاد شده یک فضای با حاصلضرب داخلی است. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ مشتمل بر تمام توابع $f(x)$ را که به‌ازای آنها $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ متناهی است، در نظر بگیرید. بدیهی است این فضا، یک فضای برداری نرم‌دار است. فرض کنید f و g چنان باشند که هیچ x وجود نداشته باشد که به‌ازای آن، $f(x)$ و $g(x)$ هر دو ناصفر باشند. نشان دهید که

$$\|f \pm g\| = \|f\| + \|g\| \quad (\text{الف})$$

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad (\text{ب})$$

(ج) با نرم تعریف شده در بالا، $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ یک فضای با حاصلضرب داخلی نیست.

۳-۵ با استفاده از کاملیت \mathbb{R} ، کاملیت \mathbb{C} را ثابت کنید.

۴-۵ با استفاده از معادله‌های تعریفگر تابع دلتای دیراک [معادله‌های (۵-۱۰) و (۵-۱۱)]، احکام گزاره ۱-۲-۵ را ثابت کنید. [راهنمایی: به‌ازای $x' \in [a, b]$ ، بازه را به سه بخش $[a, x' - \varepsilon]$ ، $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ ، و $[x' + \varepsilon, b]$ تقسیم کنید؛ فرض کنید $f(x)$ یک تابع "خوشرفتار" است؛ و توجه کنید که دو طرف (۵-۱۰) به‌ازای یک تابع دلخواه $f(x)$ با هم برابرند.]
۵-۵ برای تابع f که در مثال ۵-۲-۵ تعریف شده است، نشان دهید که مشتقهای مشتمل بر همه مرتبه‌ها وجود دارند و در $x = 0$ صفر می‌شوند.

۶-۵ فرض کنید $c < a < b < -c$. یک تابع C^∞ بسازید که به‌ازای $a < x < b$ مساوی ۱ و به‌ازای $|x| \geq c$ مساوی ۰ باشد. [راهنمایی: به توابعی از نوع $H(x) = (1/A) \int_b^x h(t; b, c)$ نگاه کنید، که در آنها $h(t; b, c)$ طبق مثال ۵-۲-۵ تعریف می‌شود و $A = H(c)$.]
۷-۵ توزیع $\rho : C^\infty(\mathbb{R}^r) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\langle \rho, f \rangle \equiv \iint \sigma(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{a}$$

که در آن $\sigma(\mathbf{r})$ یک تابع هموار بر روی سطح هموار S در \mathbb{R}^r است، تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر \mathbf{r} بر روی S نباشد، $\rho(\mathbf{r})$ صفر و اگر \mathbf{r} بر روی S باشد، $\rho(\mathbf{r})$ بینهایت است.

۸-۵ عبارت مربوط به تابع دلتای دیراک را در مختصات استوانه‌ای، $\delta(\rho, \varphi, z)$ ؛ مختصات کروی، $\delta(r, \theta, \varphi)$ ؛ و مختصات خمیده کلی، $\delta(q_1, q_2, q_3)$ ، پیدا کنید. [راهنمایی: تابع دلتای دیراک در \mathbb{R}^r ، در رابطه $\iiint \delta(\mathbf{r}) d^r r = 1$ صدق می‌کند.]

۹-۵ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 7x + 2) dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - \pi^2) \cos x dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\infty} \delta(\sin \pi x) (2/3)^x dx \quad (\text{ج})$$

۱۰-۵ فرض کنید $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ یک تابع هموار در \mathbb{R}^n و φ یک توزیع باشد. نشان دهید که $\alpha\varphi$ نیز یک توزیع است. تعریف طبیعی $\alpha\varphi$ چیست؟۱۱-۵ اگر $\varphi = |x|$ ، با استفاده از معادله (۱۹-۵)، مشتق φ را پیدا کنید.۱۲-۵ نشان دهید که بر اساس تعریف ۲-۳، تمام دنباله‌های زیر به $\delta(x)$ میل می‌کنند.

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1 - \cos nx}{\pi n x^2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{n}{\pi} \left(\frac{1}{1 + n^2 x^2} \right) \quad (\text{ج})$$

$$\frac{\sin nx}{\pi x} \quad (\text{د})$$

[راهنمایی: $\varphi_n(x)$ را به‌ازای مقادیر بزرگ n و $x \approx 0$ تقریب بزنید، و سپس انتگرال را محاسبه کنید.]

۱۳-۵ نشان دهید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\theta(x) = 1/2[(1 + \tanh(nx))]$ ۱۴-۵ فرض کنید φ یک توزیع در \mathbb{R} ، و α یک تابع C^∞ باشد. با تعریف $\alpha\varphi$ مطابق مسئله ۱۰-۵،نشان دهید که $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$.۱۵-۵ نشان دهید که $x\delta'(x) = -\delta(x)$.۱۶-۵ به‌ازای $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ، نشان دهید

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{2\pi}[a_0\delta(t) + ia_1\delta'(t) + \dots + i^n a_n\delta^{(n)}(t)]$$

که در آن

$$\delta^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$$

۱۷-۵ با دنبال کردن روش مثال ۵-۳-۱ و استفاده از این واقعیت که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

سه چندجمله‌ای اول هرمیت را پیدا کنید.

۱۸-۵ گزاره ۵-۳-۹ را ثابت کنید.

۱۹-۵ با استفاده از فرمول رودریگز تعمیم‌یافته برای چندجمله‌ایهای هرمیت و انتگرال‌گیری جزء به

جزء، x^{2k} و x^{2k+1} را برحسب چندجمله‌ایهای هرمیت بسط دهید.

۲۰-۵ با استفاده از رابطه بازگشتی برای چندجمله‌ایهای هرمیت، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^{n-1} n! [\delta_{m,n-1} + 2(n+1)\delta_{m,n+1}]$$

۲۱-۵ با اعمال صورتبندی کلی مثال ۵-۳-۵، رابطه بازگشتی زیر را برای چندجمله‌ایهای هرمیت

به دست آورید:

$$H_n + H'_{n-1} - 2xH_{n-1} = 0$$

۲۲-۵ (الف) با تخصیص نتیجه مثال ۵-۳-۴ بر چندجمله‌ایهای هرمیت نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n \left(n + \frac{1}{2}\right) n!$$

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx$ را حساب کنید.

۲۳-۵ با استفاده از رابطه بازگشتی برای چندجمله‌ایهای هرمیت، نشان دهید که

$$H_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} & \text{اگر } n = 2m \end{cases}$$

۲۴-۵ با استفاده از تابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت ثابت کنید

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \frac{s^m t^n}{m! n!} = e^{-x^2 + 2x(s+t) - (t^2 + s^2)}$$

و سپس با انتگرال‌گیری از دو طرف، ثابت کنید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} e^{st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (st)^n}{n!}$$

با استفاده از این رابطه، بهنجارش $H_n(x)$ یا

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n \sqrt{\pi} n!$$

را نتیجه بگیرید.

۲۵-۵ با استفاده پیاپی از رابطه بازگشتی معادله (۴۲-۵)، نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2} H_m(x) H_{m+n}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n > k \\ \sqrt{\pi} 2^m (m+k)! & \text{اگر } n = k \end{cases}$$

۲۶-۵ با آگاهی از اینکه $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ ، جمله‌های $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ ، $P_4(x)$ و $P_5(x)$ را

با استفاده از رابطه بازگشتی برای چندجمله‌ایهای لژاندر، معادله (۴۹-۵)، پیدا کنید.

۲۷-۵ معادله (۹) از مسئله ۵-۳-۵ را با استفاده از معادله (۷) به دست آورید.

۲۸-۵ با اعمال صورتبندی کلی مثال ۵-۳-۵، رابطه بازگشتی زیر را برای چندجمله‌ایهای لژاندر

به دست آورید:

$$nP'_n - xP''_n + P'_{n-1} = 0$$

۲۹-۵ با استفاده از روش مثال ۵-۳-۵، رابطه بازگشتی زیر را برای چندجمله‌ایهای لژاندر به دست آورید:

$$(1-x^2)P'_n - nP_{n-1} + nxP_n = 0$$

۳۰-۵ نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

۳۱-۵ با استفاده از تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر، نشان دهید که به ازای n فرد، $P_n(1) = 1$

و $P_n(-1) = (-1)^n$ ، همچنین نشان دهید که $P'_n(0) = 0$ و $P'_n(1) = 1/2n(n+1)$.

۳۲-۵ انرژیهای پتانسیل الکتروستاتیکی و گرانشی، هر دو، به عبارت $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ بستگی دارند که در آن \mathbf{r}' موضع چشمه (بار یا جرم) و \mathbf{r} نقطه مشاهده است. اگر \mathbf{r} در امتداد محور z ها واقع باشد، با استفاده از مختصات کروی و تعریف تابع مولد، نشان دهید:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

که در آن $r_{<} r_{>}$ عضو کوچکتر (بزرگتر) از میان $\{r, r'\}$ ، و θ زاویه قطبی است. ۳۳-۵ انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی یا گرانشی $\Phi(\mathbf{r})$ با عبارت زیر بیان می شود

$$\Phi(\mathbf{r}) = k \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

که در آن k مقداری ثابت و $\rho(\mathbf{r}')$ تابع چگالی (بار یا جرم) است. با استفاده از نتیجه مسئله ۳۲-۵ نشان دهید که اگر $\rho(\mathbf{r}')$ تقارن کروی داشته باشد، در آن صورت، به ازای $r > r'$ ، $\Phi(\mathbf{r})$ به انرژی پتانسیل یک بار نقطه‌ای در مبدأ کاهش می یابد.

۳۴-۵ با استفاده از تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر و خاصیت تعامد آنها، رابطه زیر را به دست آورید

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

از سمت چپ انتگرال بگیرید، نتیجه را بر حسب توانهای t بسط دهید، و از مقایسه توانهای t در دو طرف، رابطه زیر را به دست آورید

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

۳۵-۵ با استفاده از تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{\pi} \frac{a \cos \theta + b}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} \sin \theta d\theta \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\pi} \frac{a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} \sin \theta d\theta \quad (\text{ب})$$

۳۶-۵ از $g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$ نسبت به x مشتق بگیرید و با دستکاری نتیجه حاصل، به رابطه زیر برسید:

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P'_n(x) = t \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

با مساوی قرار دادن توانهای متناظر t در دو طرف، رابطه بازگشتی زیر را به دست آورید:

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x) - P_n(x) = 0$$

۳۷-۵ نشان دهید که برای چندجمله‌ایهای هرمیت و لژاندر، هر دو، $g(x, t) = g(-x, -t)$ همچنین با بسط $g(x, t)$ و $g(-x, -t)$ و مقایسه ضرایب t^n ، رابطه‌های پاریته را برای این چندجمله‌ایها به دست آورید:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad \text{و} \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

۳۸-۵ با استفاده مستقیم از معادله دیفرانسیلی که چندجمله‌ایهای لژاندر در آن صدق می‌کنند، تعامد این چندجمله‌ایها را به دست آورید.

۳۹-۵ با اعمال نتیجه‌های کلی مثال ۵-۳-۵ بر چندجمله‌ایهای لاگر، رابطه‌های بازگشتی زیر را پیدا کنید

$$nL_n^\nu - (n + \nu)L_{n-1}^\nu - x \frac{dL_n^\nu}{dx} = 0$$

$$(n + 1)L_{n+1}^\nu - (2n + \nu + 1 - x)L_n^\nu + (n + \nu)L_{n-1}^\nu = 0$$

۴۰-۵ از تابع مولد چندجمله‌ایهای لاگر نتیجه بگیرید که

$$L_n^\nu(0) = \frac{(n + \nu)!}{(n!)(\nu!)}$$

۴۱-۵ نشان دهید که $L_n(x) \equiv L_n^0(x)$ چندجمله‌ایهای راست‌هنجارند.

۴۲-۵ از رابطه

$$g(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x)$$

نسبت به x مشتق بگیرید و از مقایسه توانهای t به این نتیجه برسید:

$$L'_n(0) = -n \quad \text{و} \quad L''_n(0) = \frac{1}{4}n(n-1)$$

[راهنمایی: با مشتق گرفتن از $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1/(1-t)$ ، یک بسط برای $(1-t)^{-2}$ به دست آورید.]

۴۳-۵ e^{-kx} را به صورت یک سری برحسب چندجمله‌ایهای لاگر، $L'_n(x)$ بسط دهید. ضرایب را با استفاده از (الف) تعامد $L'_n(x)$ و (ب) تابع مولد، پیدا کنید.

۴۴-۵ رابطه‌های بازگشتی جدول ۳-۵ را برای چندجمله‌ایهای ژاکوبی، گگنباؤر، چبیشف به دست آورید.

۴۵-۵ نشان دهید که $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ و $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$. [راهنمایی:

$$[g(x, t) = g(-x, -t)]$$

۴۶-۵ نشان دهید که $T_n(1) = 1$ ، $T_n(-1) = (-1)^n$ ، $T_m(0) = (-1)^m$ و

$T_{2m+1}(0) = 0$ و همچنین $U_n(1) = n+1$ ، $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$ ،

$$U_{2m}(0) = 0 \quad \text{و} \quad U_{2m+1}(0) = (-1)^m$$

۴۷-۵ فرض کنید که تابع زیر دوره‌ای است:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi - \theta) & 0 \leq \theta \leq \pi \text{ به‌ازای} \\ -\frac{1}{4}(\pi + \theta) & -\pi \leq \theta < 0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

نشان دهید که بسط سری فوریه آن عبارت است از

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$$

۴۸-۵ اگر $f(x) = x$ یک تابع دوره‌ای در بازه $(0, 2a)$ باشد، ثابت کنید

$$x = a - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

۴۹-۵ نشان دهید که "تقریب"

$$f(x) = \begin{cases} 2x(a-x) & 0 \leq x \leq a \text{ بازای} \\ 2x(a+x) & -a \leq x \leq 0 \text{ بازای} \end{cases}$$

بر $\sin(\pi x/a)$ در بازه $[-a, a]$ ، دارای بسط سری فوریه

$$f(x) = \frac{32a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi y}{a} \right]$$

است. $f(x)$ و $\sin(\pi x/a)$ را بین a و $-a$ روی یک نمودار ترسیم کنید و ببینید چرا $f(x)$ را تقریب بر $\sin(\pi x/a)$ می‌نامند.

۵۰-۵ بسط سری فوریه $f(\theta) = \theta^2$ را برای $|\theta| < \pi$ پیدا کنید. سپس نشان دهید که

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

۵۱-۵ بسط سری فوریه تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \text{ بازای} \\ 0 & -\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq 0 \text{ بازای} \end{cases}$$

۵۲-۵ فرض کنید $f(\theta)$ یک تابع دوره‌ای به صورت $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ است. نشان دهید:

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t-n)$$

۵۳-۵ فرض کنید:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & |t| < T \text{ بازای} \\ 0 & |t| > T \text{ بازای} \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T]}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin[(\omega + \omega_0)T]}{\omega + \omega_0} \right\}$$

رابطه عدم قطعیت $(\Delta\omega)(\Delta t) \approx 4\pi$ را به دست آورید.

۵۴-۵ اگر $f(x) = g(x + a)$ ، نشان دهید که $\tilde{f}(k) = e^{-iak}\tilde{g}(k)$.

۵۵-۵ به ازای $a > 0$ ، تبدیل فوریه $f(x) = e^{-|x|}$ را پیدا کنید. آیا $\tilde{f}(k)$ متقارن است؟ آیا حقیقی است؟ رابطه‌های عدم قطعیت را پیدا کنید.

۵۶-۵ نوسانگر هماهنگ میرا با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & t > 0 \text{ به ازای} \\ 0 & t < 0 \text{ به ازای} \end{cases}$$

$\tilde{f}(\omega)$ را بیابید و نشان دهید که توزیع بسامد، $|\tilde{f}(\omega)|^2$ ، با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$|\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{A^2}{2\pi} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} \right]$$

۵۷-۵ نشان دهید (این حکم به قضیهٔ پیچش مشهور است) که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)e^{-iky}dk$$

وقتی $y = 0$ این رابطه به چه شکلی در می‌آید؟

۵۸-۵ رابطهٔ پارسوال را برای تبدیلهای فوریه ثابت کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}^*(k)dk$$

در حالت خاص، نرم یک تابع، تحت تبدیل فوریه ناورداست.

۵۹-۵ تبدیل فوریهٔ توزیع φ با این رابطه بیان می‌شود

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta'(t-n)$$

$\varphi(x)$ چیست؟ [راهنمایی: از $\tilde{\varphi}(-x) = \varphi(x)$ استفاده کنید.]

آنالیز مختلط ۱: جبر و حسابان مختلط

نیاز به بسط مفهوم اعداد که جوابهای معادلاتی جبری را دربرگیرند که $x^2 + 1 = 0$ نمونه‌ای از آنها به‌شمار می‌آید، به تکوین اعداد مختلط انجامید. چنین تکوین و تکاملهایی از این دست در تاریخ ریاضیات غیرمعمول و نامتعارف نیست. علت ابداع اعداد اصم به جهت نیاز به عددی بود که می‌توانست معادله‌ای به صورت $x^2 - 2 = 0$ را حل کند. به همین ترتیب، اعداد کسری و گویا، حاصل عملیات ضرب و تقسیم و جستجو در پی (مثلاً) عددی بودند که با ضرب شدنشان در عدد ۳ به دست آید، یا به بیانی دیگر، عددی را می‌جستند که در معادله $3x - 4 = 0$ صدق کند.

اما، مابین اعداد مختلط و سایر اعدادی که در بالا از آنها یاد کردیم، یک اختلاف اساسی وجود دارد: تمام اعداد گویا، اصم و به‌طور کلی اعداد حقیقی با کمیت‌های فیزیکی اندازه‌پذیر متناظرند. اما، هیچ کمیت فیزیکی اندازه‌پذیری وجود ندارد که بتوان آن را با یک عدد مختلط توصیف کرد. به همین دلیل، عجیب نیست که لایب‌نیتس، عدد مختلط را "پرواز روح خدا" نامیده است. به این ترتیب، طبعاً یک پرسش پیش می‌آید: اگر هیچ کمیت فیزیکی را نمی‌توان برحسب اعداد مختلط اندازه‌گیری کرد، چه نیازی به آنها وجود دارد؟ پاسخ این است که هر چند هیچ تک کمیت فیزیکی را نمی‌توان برحسب اعداد مختلط بیان کرد، ولی یک زوج کمیت فیزیکی را دقیقاً

می‌توان به کمک یک تک عدد مختلط توصیف کرد. مثلاً، موجی متشکل از یک دامنه و یک فاز را می‌توان به کمک یک عدد مختلط تشریح کرد، که برداری واقع در صفحه xy است و طولش دامنه و زاویه‌اش با محور x ها فاز موج را تشکیل می‌دهد. هیچ محدودیتی در تعداد امکانات کاربردی اعداد مختلط در فیزیک و مهندسی وجود ندارد. در واقع، در فصلهای قبل در بسیاری از موارد از اعداد مختلط بهره گرفته‌ایم. در این فصل و فصل بعدی، مطالعه روش مند و (تا حدودی) جامعی در خصوص اعداد مختلط و آنالیز مختلط انجام می‌دهیم.

۱-۶ اعداد مختلط و جبر آنها

سیستم اعداد را آنقدر وسیع می‌گیریم که جوابهای معادلاتی چون معادلات زیر را در برگیرد

$$x^2 = -1 \quad \text{یا} \quad x^2 + 1 = 0$$

بدیهی است که جوابها، x ، نمی‌توانند حقیقی باشند. زیرا عدد حقیقی وقتی به توان دو برسد، حاصل عدد حقیقی مثبتی است، در حالی که ما می‌خواهیم x^2 یک عدد منفی باشد. بنابراین، با توجه به اعداد حقیقی، که به شکل زیرند

$$z = x + iy \tag{۱-۶}$$

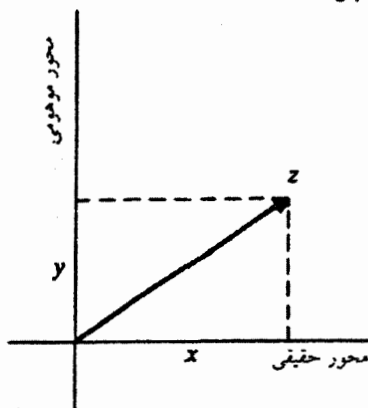
مفهوم اعداد را بسط می‌دهیم. در معادله بالا، i به این قرار تعریف می‌شود:

$$i \equiv \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \tag{۲-۶}$$

که i جواب صوری معادله $x^2 + 1 = 0$ است. بی‌می‌پریم که (با کمال تعجب!) نیازی نداریم برای حل هر معادله جبری، اعداد دیگری را وارد کنیم. در واقع، بنا بر قضیه بنیادی جبر، تمام ریشه‌های هر معادله جبری به صورت

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

و با ضرایب دلخواه (حقیقی یا مختلط) $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ، در دستگاه اعداد مختلط قرار دارند. پس، به این معنا، دستگاه اعداد مختلط کاملترین دستگاه به حساب می‌آید.

شکل ۱-۶ نمایش دکارتی عدد مختلط z در صفحه مختلط \mathbb{C} .

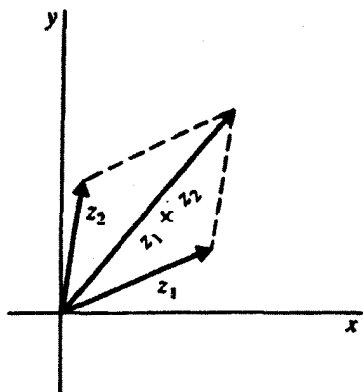
عدد مختلط را می‌توان، به‌نحو مناسبی، به‌صورت یک نقطه در صفحه xy نشان داد، که در اینجا این صفحه را صفحه مختلط می‌نامند (شکل ۱-۶). در معادله (۱-۶)، x را جزء حقیقی z می‌گویند و آن را به‌صورت $\operatorname{Re}(z)$ می‌نویسند، و y جزء موهومی z است، که به‌صورت $\operatorname{Im}(z)$ نوشته می‌شود. به همین ترتیب، محور افقی در شکل ۱-۶، محور حقیقی و محور عمودی، محور موهومی نامیده می‌شود. مجموعه تمام اعداد مختلط، یا مجموعه تمام نقاط واقع در صفحه مختلط را با \mathbb{C} نمایش می‌دهیم.

می‌توانیم عملگرهای مختلفی روی \mathbb{C} تعریف کنیم که تعمیم عملگرهای مشابه روی دستگاه اعداد حقیقی \mathbb{R} هستند. باید به‌خاطر داشته باشیم که $i^2 = -1$ و شکل نهایی یک معادله باید مانند معادله (۱-۶) با اجزای حقیقی و موهومی نوشته شود. مثلاً، مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ عبارت است از

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

این مجموع می‌تواند، مطابق شکل ۱-۶، در صفحه مختلط به‌صورت جمع برداری z_1 و z_2 نمایش داده شود. حاصلضرب z_1 و z_2 را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1(iy_2) + iy_1 x_2 + (iy_1)(iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$



شکل ۲-۶ جمع دو عدد مختلط، شبیه جمع برداری بردارهای دوبعدی است.

بنابراین

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad (۳-۶)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

برای رسیدن به (۳-۶) به طور ضمنی از این واقعیت بهره برده‌ایم که دو عدد مختلط فقط و فقط وقتی با هم برابرند که اجزای حقیقی آنها با هم و اجزای موهومی‌شان نیز با هم برابر باشند. عامل i در z به ما امکان عملیات جدیدی برای اعداد مختلط می‌دهد که در حوزه اعداد حقیقی وجود ندارد. یکی از این عملیات، مزدوج مختلط کردن است. مزدوج مختلط z ، یعنی z^* (یا \bar{z})، بنا بر تعریف، عبارت است از

$$z^* \equiv (x + iy)^* \equiv x - iy \quad (۴-۶)$$

که از طریق جایگزین کردن i با $-i$ حاصل می‌شود. می‌توان بلافاصله پی برد که

$$zz^* = z^*z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

که یک عدد حقیقی مثبت است. ریشه دوم مثبت zz^* را قدرمطلق یا نرم z می‌گویند و آن را با $|z|$ نمایش می‌دهند. بنابراین، داریم

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{z^*z} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۵-۶)$$

البته، این قدرمطلق، همان طول برداری است که z را در صفحه مختلط نمایش می‌دهد. برخی خواص مفید قدرمطلقها به این قرارند

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (۶-۱۶الف)$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \quad (۶-۱۶ب)$$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (۶-۱۶ج)$$

نامساوی اخیر، نامساوی مثلثی است که در بخش ۵-۱ در مورد نرمها با آن روبرو شدیم.

مثال ۶-۱-۱: حال به چند نمونه از محاسبات مربوط به اعداد مختلط می‌پردازیم

$$\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = i \quad (الف)$$

زیرا

$$\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i - (1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{|1-i|^2} = \frac{2i}{2} = i$$

که در آن $z = 1 - i$ و $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$

$$(i+1)^{-2} = -\frac{1}{4} \quad (ب)$$

زیرا

$$(i+1)^{-2} = \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{(i+1)^2(i+1)^2} = \frac{1}{(2i)(2i)} = \frac{1}{4i^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{1}{2}(1+i) \quad (ج)$$

زیرا

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{2+i}{3-i} \left(\frac{3+i}{3+i} \right) = \frac{6+5i+i^2}{9-i^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\left| \frac{2i-1}{i-2} \right| = 1 \quad (د)$$

زیرا

$$\left| \frac{2i-1}{i-2} \right| = \sqrt{\frac{2i-1}{i-2} \left(\frac{-2i-1}{-i-2} \right)} = \sqrt{\frac{(2)^2 + (-1)^2}{(1)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (ه)$$

زیرا

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^*} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_1^*}{z_2^*} \right)} = \sqrt{\frac{z_1 z_1^*}{z_2 z_2^*}} = \sqrt{\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (و)$$

زیرا

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(z_1 z_2)(z_1 z_2)^*} = \sqrt{z_1 z_2 z_1^* z_2^*} = \sqrt{(z_1 z_1^*)(z_2 z_2^*)} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2} = |z_1| |z_2| \end{aligned}$$

(ز) معادله $|z - a| = b$ ، که در آن a و b اعداد ثابت‌اند (b عدد حقیقی و مثبت)، یک دایره به شعاع b و مرکز $a \equiv a_x + ia_y$ را توصیف می‌کند. این معنا را به آسانی می‌توان ملاحظه کرد، زیرا

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |(x + iy) - (a_x + ia_y)|^2 = |(x - a_x) + i(y - a_y)|^2 \\ &= (x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = b^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که $|z - a| = b$ فاصله بین دو عدد مختلط z و a است. از این رو $|z - a| = b$ ، که در آن a ثابت و z متغیر است، عبارت است از مجموعه نقاطی مانند z که به فاصله b از a قرار دارند. ●

همچنین می‌توانیم با استفاده از مزدوج مختلط، تقسیم دو عدد مختلط را تعریف کنیم. برای یافتن اجزای حقیقی و موهومی یک کسر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (۷-۶ \text{ الف})$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (۷-۶ \text{ ب})$$

در حالت خاص

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

چند خاصیت مربوط به یافتن مزدوج مختلط (که در بالا مورد استفاده قرار گرفت) در قالب گزاره زیر جمع‌بندی شده است.

گزاره ۱-۱-۶: مزدوج‌یابی اعداد مختلط در اتحادهای زیر صدق می‌کنند

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$(z^*)^* = z$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

$$(z^n)^* = (z^*)^n$$

اثبات. این اثبات بلافاصله از تعریف مزدوج مختلطیابی ناشی می‌شود و، برای اتحاد آخر، باید از قضیهٔ دو جمله‌ای بهره گرفت.

به‌طور کلی، می‌توانیم مزدوج مختلط یک تابع $f(z)$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$(f(z))^* \equiv f(z^*) \quad (۸-۶)$$

این عبارت معادل نشان دادن z در عبارت $f(z)$ به‌جای z است. (برای دستیابی به جزئیات، رک مبحث انعکاس شوارتز در فصل هفتم.)

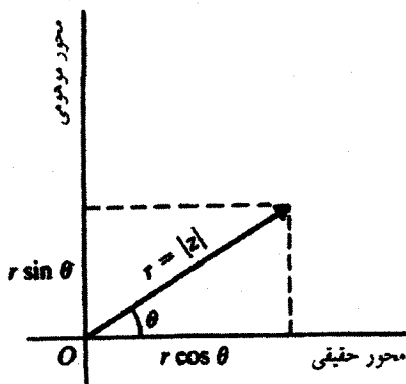
۱-۱-۶ مختصات قطبی و اعداد مختلط

با وارد کردن مختصات قطبی در اعداد مختلط، ابزار توانایی فراهم می‌آید که عملیات پیچیده را آسان می‌کند. در شکل ۳-۶، یک عدد مختلط و مختصات قطبی آن را مشاهده می‌کنید. z ، برحسب این مختصات قطبی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

با این فرض که عملیات روی سریهای اعداد مختلط مانند اعداد حقیقی صورت می‌گیرد، می‌توان نشان داد که (تمرین ۱-۲-۶):

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۹-۶)$$



شکل ۳-۶ نمایش قطبی عدد مختلط z در صفحهٔ مختلط C.

بنابراین، یک عدد مختلط را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$z = re^{i\theta} \quad (\text{الف } ۱۰-۶)$$

که در آن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} = |z| \quad (\text{ب } ۱۰-۶)$$

و

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{ج } ۱۰-۶)$$

توجه کنید که θ به نحو منحصر به فردی تعیین نمی‌شود؛ می‌توان هر مضرب صحیحی از 2π را به آن افزود بدون اینکه z تغییر کند. می‌شود از (۱۰-۶) توأم با عبارتهای زیر بهره گرفت

$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta$$

در این صورت می‌توان از مختصات دکارتی به مختصات قطبی رفت و برعکس. مختصه θ را شناسه z می‌گویند و آن را به صورت زیر می‌نویسند

$$\theta = \arg(z)$$

مزدوج مختلط z در مختصات قطبی عبارت است از

$$z^* = x - iy = r \cos \theta - ir \sin \theta = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = re^{-i\theta}$$

این معادله، حکم قبلی را که یافتن مزدوج مختلط معادل جایگزین کردن i با $-i$ است، تأیید می‌کند.

مثال ۱۰-۶-۲: می‌توانیم از نمایش قطبی اعداد مختلط بهره گیریم و چند اتحاد مثلثاتی را به دست آوریم. در تمام حالت‌های زیر، $r = 1$.

$$1 = e^{i\theta} e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad (\text{الف})$$

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{ب})$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1 + \theta_2)} &= e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی این دو معادله با هم و اجزای موهومی آن با هم، می‌رسیم به

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} e^{3i\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3(\cos \theta)^2 i \sin \theta + 3(i \sin \theta)^2 \cos \theta \\ &\quad + (i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی دو معادله بالا، داریم

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \quad (\text{ج})$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

مثال ۱-۶-۳: می‌شود قسمت ج مثال ۱-۶-۲ را تعمیم داد. از

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{و} \quad e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

قضیه موسوم به مواور را استخراج می‌کنیم

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

پس، با استفاده از بسط دو جمله‌ای، سمت راست رابطه بالا را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}
 & (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} \\
 &= \sum_k \binom{n}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} \\
 &\quad + \sum_{k \text{ فرد}} \binom{n}{k} (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} \\
 &= \sum_{l=0}^{[n]} \binom{n}{2l} i^{2l} (\sin \theta)^{2l} (\cos \theta)^{n-2l} \\
 &\quad + \sum_{l=0}^{[n]} \binom{n}{2l+1} i^{2l+1} (\sin \theta)^{2l+1} (\cos \theta)^{n-2l-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{[n]} (-1)^l \binom{n}{2l} \sin^{2l} \theta \cos^{n-2l} \theta \\
 &\quad + i \sum_{l=0}^{[n]} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \sin^{2l+1} \theta \cos^{n-2l-1} \theta
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$[n]$ ، بسته به مورد، می‌تواند n یا $n-1$ باشد. با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و اجزای هومی، به دست می‌آوریم

$$\cos n\theta = \sum_{l=0}^{[n]} (-1)^l \binom{n}{2l} \sin^{2l} \theta \cos^{n-2l} \theta \quad (ع)$$

$$\sin n\theta = \sum_{l=0}^{[n]} (-1)^l \binom{n}{2l+1} \sin^{2l+1} \theta \cos^{n-2l-1} \theta$$

می‌توان با استفاده از نمایش قطبی z و z^* در (۹-۶) به این نتایج مفید برسیم

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (۱۱-۶ \text{ الف})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (۱۱-۶ \text{ ب})$$

۶-۱-۲ ریشه n ام واحد

به جهت ماهیت نمایی بودن مختصات قطبی در موقع ضرب، تقسیم، و به توان رساندن، از فایده خاصی برخوردارند. مثلاً

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (۱۲-۶ \text{ الف})$$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (۱۲-۶ \text{ ب})$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{r_1 e^{i\theta_1}} = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/2} = r_1^{1/2} (e^{i\theta_1})^{1/2} = \sqrt{r_1} e^{i(\theta_1/2)} \quad (۱۲-۶ \text{ ج})$$

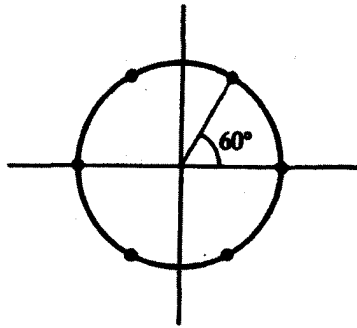
والی آخر. هر یک از این روابط از تعبیرهای هندسی جالبی برخوردارند. مثلاً بنابر (۱۲-۶ ب)، وقتی یک عدد مختلط z_1 را در یک عدد مختلط دیگر z_2 ضرب می‌کنیم، اندازه آن با ضریب r_2 اتساع و زاویه‌اش به اندازه θ_2 افزایش می‌یابد. یعنی، ضرب هم شامل اتساع است و هم شامل دوران. در حالت خاص، اگر یک عدد مختلط را در $e^{i\omega t}$ ضرب کنیم، که در آن t یک متغیر حقیقی (زمان) است، به برداری در صفحه xy می‌رسیم که طولش ثابت است ولی با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد.

یکی از کاربردهای جالب این ایده‌ها، استخراج ریشه n ام واحد است. می‌خواهیم تمام z هایی را بیابیم که در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$z^n = 1 \quad (۱۳-۶)$$

کلی‌ترین راهی که می‌توان واحد را نوشت، عبارت است از

$$1 = e^{2i\pi k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



شکل ۴-۶ شش ریشه ششم واحد به صورت شش نقطه متساوی‌فاصله روی دایره واحد.

بنابراین،

$$z^n = e^{i\pi k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

از طرفین ریشه n ام می‌گیریم، می‌رسیم به

$$z = (e^{i\pi k})^{1/n} = e^{i\pi k/n} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

و ریشه‌های متمایز $\{z_k\}$ عبارت‌اند از

$$z_k = e^{i\pi k/n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (14-6)$$

ملاحظه می‌کنیم که دقیقاً n ریشه n ام برای واحد (عدد ۱) وجود دارد. تمام این ریشه‌ها بر روی دایره واحد در صفحه مختلط با فاصله‌های مساوی قرار دارند (شکل ۴-۶).

مثال ۴-۱-۶: ریشه‌های مختلف واحد در زیر داده شده‌اند.

به‌ازای $n = 2$

$$z = e^{i\pi k/2} = e^{i\pi k} \quad k = 0, 1 \Rightarrow z_1 = e^0, z_2 = e^{\pi i} \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -1$$

به‌ازای $n = 3$

$$z = e^{i\pi k/3} \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow z_1 = e^0, z_2 = e^{i\pi/3}, z_3 = e^{2\pi i/3}$$

$$e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{4\pi i/3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ثابت می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= -\frac{1}{8} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = 1 \end{aligned}$$

به همین ترتیب است برای $(-1/2 - i(\sqrt{3}/2))$.

$$z = e^{2\pi i k/3} = e^{\pi i k/3} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = e^{\pi i/3} \quad z_3 = e^{2\pi i/3} \quad z_4 = e^{\pi i}$$

یا

$$z_1 = 1 \quad z_2 = i \quad z_3 = -1 \quad z_4 = -i$$

بمازای $n = 6$.

$$z = e^{2\pi i k/6} = e^{\pi i k/3} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = e^{\pi i/3} \quad z_3 = e^{2\pi i/3} \quad z_4 = e^{\pi i} \quad z_5 = e^{4\pi i/3} \quad z_6 = e^{5\pi i/3}$$

یا

$$z_1 = 1 \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \quad z_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \quad (14-6)$$

$$z_4 = -1 \quad z_5 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \quad z_6 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

مثال ۵-۱-۶: جذر $z = a + ib$ را در مختصات دکارتی می‌یابیم. روشی که به‌کار می‌بریم برای یافتن ریشه n ام نیز به‌کار می‌رود. ابتدا z را به صورت قطبی می‌نویسیم:

$$z = re^{i\theta} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}$$

هر دو طرف را به توان $1/2$ می‌رسانیم

$$z^{1/2} = r^{1/2} e^{i\theta/2} = (a^2 + b^2)^{1/4} e^{i\theta/2} = (a^2 + b^2)^{1/4} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

داریم

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \left[\frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{1/2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= (\sqrt{a^2 + b^2})^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{1/2} + i \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{a^2 + b^2} + a)^{1/2} + i(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^{1/2}] \quad (1) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که چگونه یک محاسبه ساده ریشه دوم ممکن است پیچیده باشد. البته وقتی در عمل با اعداد مختلط (و نه نمادها) سروکار داریم، می‌توانیم مستقیماً r و θ را محاسبه و ریشه دوم را در مختصات قطبی پیدا کنیم که بسیار آسانتر است. لیکن گاهی به عبارت تحلیلی — و نه صرفاً مقدار عددی — یک ریشه دوم نیاز داریم. چنین نیازی، مثلاً، وقتی با انتشار امواج الکترومغناطیسی در رساناها سروکار داریم، پیش می‌آید، که در آن ریشه دوم ضریب شکست مختلط از معادلات ماکسول به‌دست می‌آید و عبارتی برای ضریب شکست مورد نظر است.

معادله (۱) تنها یکی از ریشه‌ها را می‌دهد. واضح است که ریشه دیگری وجود دارد که در (۱) نیست. برای یافتن این جواب دوم باید θ را با $\theta + 2k\pi$ که در آن $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و $\theta/2$ را با $\theta/2 + k\pi$ ، به‌ازای $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ جایگزین کنیم. به‌ازای $k = 0, 1$ ریشه‌های متمایز به‌دست می‌آیند. بنابراین خواهیم رسید به:

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= r^{1/2} e^{i(\theta/2 + k\pi)} = e^{ik\pi} \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad k = 0, 1 \\ &= \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}\end{aligned}$$

ریشه دیگری، منفی ریشه‌ای است که در (۱) به‌دست آمد. می‌توانیم این مقدار را، به ریشه n ام تعمیم دهیم. لیکن، عبارت کلی دکارتی مانند (۱) بسیار دشوار است. از سوی دیگر، شکل قطبی آن به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\bullet \quad z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} = e^{2ik\pi/n} r^{1/n} e^{i\theta/n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

۳-۱-۶ سایر نمایشهای اعداد مختلط

نمایشهایی که برای اعداد مختلط به‌کار بردیم، یعنی $z = x + iy$ و $z = r e^{i\theta}$ ، متداولترین نمایشها در کاربردها به‌شمار می‌آیند. لیکن، نمایشهای دیگری هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً z را می‌توان به کمک زوج عدد حقیقی نشان داد

$$z \equiv (x, y)$$

مجموعه تمام چنین زوجهایی، همراه با عملهای

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1, y_2)$$

و

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

با مجموعه اعداد مختلط $z = x + iy$ ، شبیه است. در حالت خاص، عدد مختلط واحد، 1_c ، عبارت است از

$$1_c \equiv (1, 0)$$

زیرا

$$1_c z = (1, 0)(x, y) = (x, y) = z$$

از سوی دیگر

$$i = (0, 1)$$

زیرا

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1_c$$

بین عنصر همانی مختلط، 1_c ، و عنصرهای حقیقی، 1 ، تفاوتی وجود ندارد.

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که بین این رهیافت زوج اعداد حقیقی و رهیافتی که قبلاً در همین بخش اختیار کردیم، تفاوتی وجود ندارد. هر کدام از آنها مزیت خاص خود را دارد. رهیافتی که قبلاً به کار رفت برای محاسباتی که انسان انجام می‌دهد طبیعی‌تر است، اما با کامپیوتر، رهیافت زوج اعداد حقیقی مناسبتر است، زیرا می‌توانند در حافظه خود برای آرایه‌های دو مؤلفه‌ای به آسانی جابجایی و جایگذاری کنند.

روشهای دیگری نیز وجود دارد. روش سومی که کمتر متداول است، عبارت است از شناسایی

عناصر زیر:

$$1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

آنگاه نوشتن اعداد مختلط $z = x + iy$ به صورت زیر

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

در اینجا، اعداد مختلط را مانند ماتریسهای 2×2 تلقی می‌کنیم.

تمرینها

۱-۶ می توان اعداد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ را به صورت بردارهای دوبعدی در نظر گرفت

$$z_1 = \hat{e}_x x_1 + \hat{e}_y y_1 \quad \text{و} \quad z_2 = \hat{e}_x x_2 + \hat{e}_y y_2$$

نشان دهید

$$z_1^* z_2 = z_1 \cdot z_2 + i \hat{e}_z \cdot (z_1 \times z_2)$$

۲-۱-۶ نشان دهید $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

۳-۱-۶ نشان دهید

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \cos \frac{n\theta}{2}$$

و

$$\sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \sin \frac{n\theta}{2}$$

۴-۱-۶ نمایشهای اعداد مختلط زیر را از صورت دکارتی به صورت قطبی، و برعکس، تبدیل کنید

(الف) $1 + i$ (ب) $2 + 3i$ (ج) i (د) $2e^{-i\pi/6}$ (ه) $5e^{i(35^\circ)}$

۲-۶ توابع یک متغیر مختلط

تابع مختلط صرفاً یک نگاشت $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ است، به گونه ای که f یک عدد مختلط می گیرد و (عموماً) یک عدد مختلط دیگر می دهد. بنابراین، می نویسیم

$$f(z) = w \quad (15-6)$$

که در آن هم z و هم w اعداد مختلط اند. معادله (۱۵-۶) را می توان از لحاظ هندسی به مثابه یک تناظر بین دو صفحه مختلط، صفحه z و صفحه w ، تلقی کرد. صفحه w دارای یک محور

حقیقی و یک محور موهومی است، که می‌توانیم آنها را به ترتیب u و v بنامیم. u و v هر دو توابع حقیقی بر حسب مختصات z هستند، که عبارت‌اند از x و y . پس می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (۱۶-۶)$$

این معادله، برای هر نقطه (x, y) در صفحه z ، یک نقطه یکتا (u, v) در صفحه w می‌دهد. بنابراین، نواحی صفحه z به داخل نواحی صفحه w نگاشته می‌شوند. مثلاً یک منحنی در صفحه z به یک منحنی در صفحه w نگاشته می‌شود. این نکته طی مثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۱-۲-۶: حال به بررسی رفتار چند تابع مختلط مقدماتی می‌پردازیم. در حالت خاص، به طریقه‌ای توجه می‌کنیم که یک خط در صفحه z به منحنیهای مختلف در صفحه w نگاشته می‌شود. یک خط در صفحه z را که به کمک معادله $y = mx$ داده شده است، در نظر بگیرید. (الف) ابتدا، با تابع ساده $w = f(z) = z^2$ شروع می‌کنیم. داریم

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

و

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = 2xy$$

به‌ازای $y = mx$ ، می‌رسیم به

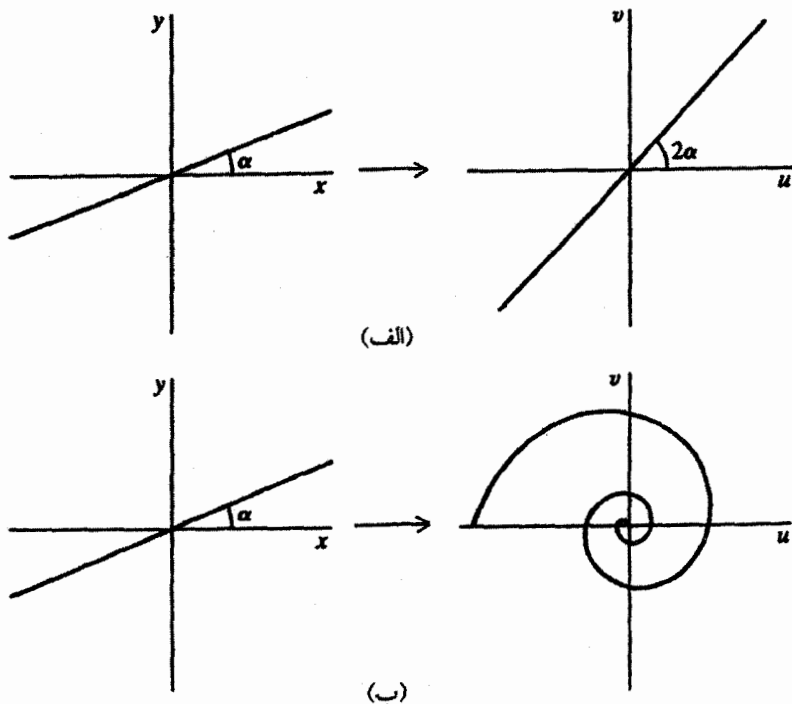
$$u = x^2 - m^2 x^2 = (1 - m^2)x^2$$

$$v = 2mx^2$$

برای یافتن منحنی در صفحه w ، x را بین این دو معادله حذف می‌کنیم تا v را به صورت تابعی از u به‌دست آوریم

$$v = 2m \frac{u}{1 - m^2} = \frac{2m}{1 - m^2} u$$

این عبارت، معادله خطی است که از مبدأ صفحه w می‌گذرد. توجه کنید که اگر α زاویه خط در صفحه xy با محور x ها باشد ($m = \tan \alpha$)، در این صورت، مطابق شکل ۱۵-۶ الف، زاویه‌ای



شکل ۵.۶ (الف) خط $y = mx$ که با محور حقیقی در صفحه z زاویه α می‌سازد، تحت نگاشت $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که با $f(z) = z^2$ بیان می‌شود، به یک خط نگاشته می‌شود که با محور حقیقی در صفحه w زاویه 2α می‌سازد. (ب) همان خط، تحت نگاشت $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که با $f(z) = e^z$ بیان شده به یک مارپیچ نگاشته می‌شود.

که خط در صفحه wv با محور u می‌سازد، عبارت است از 2α . (چرا؟)
 (ب) حال تابع $w = f(z) = e^z = e^{x+iy}$ را در نظر بگیرید، که در اینجا آن را به صورت $e^x(\cos y + i \sin y)$ تعریف می‌کنیم

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

حال، اگر جایگذاری $y = mx$ را انجام دهیم، خواهیم داشت

$$u = e^x \cos mx$$

$$v = e^x \sin mx$$

اما، برخلاف قسمت (الف)، در اینجا نمی‌توانیم x را حذف کنیم و v را به صورت تابع صریحی از u به دست آوریم. با این همه، این معادلات، معادلات پارامتری یک منحنی‌اند که می‌توان آن را، مطابق شکل ۶-۵، در صفحه wv رسم کرد.

۶-۲-۱ حدود و پیوستگی

حد توابع مختلط، مانند فصل ۵، برحسب قدرمطلقها (نرمها) تعریف می‌شود. می‌نویسیم

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w_0$$

که به این معناست که، به ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ ، می‌توانیم یک عدد حقیقی متناظر $\delta > 0$ چنان بیابیم که هرگاه $|z - a| < \delta$ ، آنگاه $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. به همین ترتیب، گوییم تابع $f(z)$ در $z = a$ پیوسته است، اگر

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

یا اگر اعداد $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ چنان وجود داشته باشند که هرگاه $|z - a| < \delta$ ، آنگاه $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

۶-۲-۲ مشتق تابع مختلط

مشتق یک تابع مختلط، مطابق معمول تعریف می‌شود.

تعریف ۶-۲-۱: فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. مشتق f در z_0 که با $(df/dz)_z$ نشان داده می‌شود، عبارت است از

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته و مستقل از Δz باشد.

در این تعریف، "گزارة مستقل از Δz " به معنی مستقل از Δx و Δy (مؤلفه‌های Δz) است و از این رو به معنی مستقل از جهت نزدیک شدن به z_0 است. محدودیتهای این تعریف به حالت حقیقی نیز تسری پیدا می‌کند. مثلاً مشتق $f(x) = |x|$ در $x = 0$ وجود ندارد زیرا از راست به سمت $+1$ و از چپ به سمت -1 میل می‌کند.

به آسانی می‌توان نشان داد که تمام قواعد صوری مشتق‌گیری (مثلاً مشتق حاصلضرب، حاصل جمع و نسبت توابع) که در مورد توابع حقیقی اعمال می‌شود، در مورد توابع مختلط نیز صادق‌اند.

مثال ۲-۲-۶: حال مشتق $f(z) = x + 2iy$ در $z = 0$ را بررسی می‌کنیم. از تعریف ۱-۲-۶ داریم

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x + 2i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

برای یافتن حد نهایی، باید مسیری در صفحه z برگزینیم و در امتداد آن به مبدأ $z = 0$ نزدیک شویم. اگر محور x را به‌عنوان مسیر انتخاب کنیم، آنگاه $\Delta y = 0$ و می‌رسیم به

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 0}{\Delta x + 0} = 1$$

از سوی دیگر، اگر محور y را مسیر انتخاب کنیم، داریم $\Delta x = 0$ و در حد داریم

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 + 2i\Delta y}{0 + i\Delta y} = 2$$

به‌طور کلی، برای خطی که از مبدأ می‌گذرد، $y = mx$ ، حد عبارت است از

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2i(m\Delta x)}{\Delta x + im\Delta x} = \frac{1 + 2im}{1 + im} \\ &= \frac{1 + 2m^2 + im}{1 + m^2} \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که وقتی m را به دلخواه تغییر می‌دهیم، بینهایت مقدار برای $(df/dz)_{z=0}$ به‌دست می‌آوریم؛ بنابراین df/dz در $z = 0$ وجود ندارد.

۳-۲-۶ شرایط کوشی-ریمان (C-R)

سؤالی که در اینجا به‌طور طبیعی پیش می‌آید به این قرار است: چه موقع حد تعریف ۱-۲-۶ وجود دارد؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، شرایط لازم و کافی برای وجود این حد را می‌یابیم. به اعتبار تعریف مشتق واضح است که مشتق‌پذیری یک محدودیت جدی روی $f(z)$ قرار می‌دهد، زیرا

می‌خواهد حد، برای تمام مسیرهایی که از z_0 می‌گذرند، یکسان باشد. نکته مهم دیگری که باید در نظر داشت این است که مشتق‌پذیری یک خاصیت موضعی است. برای اینکه پی ببریم یک تابع $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر است یا خیر، به مقدار کوچک Δz از z_0 دور می‌شویم و بررسی می‌کنیم تا ببینیم آیا حد $\lim (df/dz)_{z_0}$ وجود دارد یا خیر. شرایطی که تحت آنها یک تابع مختلط مشتق‌پذیر است کدام‌اند؟ به‌ارای

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

تعریف ۱-۲-۶ می‌دهد

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

اگر این حد برای تمام مسیره‌ها وجود داشته باشد، باید برای دو مسیر خاص که در آنها $\Delta y = 0$ (محور x ‌ها) و $\Delta x = 0$ (محور y ‌ها)، نیز وجود داشته باشد. برای مسیر اول، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + i \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \end{aligned}$$

که از تعریف مشتقات جزئی بهره برده‌ایم. برای مسیر دوم ($\Delta x = 0$)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dz}\right)_{z_0} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= -i \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \end{aligned}$$

اگر قرار بر مشتق‌پذیر بودن در z_0 باشد، معادلات مربوط به دو مسیر باید مساوی باشند، یعنی

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z_0} + i \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{z_0} = -i \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z_0} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{z_0}$$

با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی طرفین این معادله و با چشمپوشی از اندیسهای پایین z_0 (x_0 ، y_0 یا z_0 دلخواه است)، می‌رسیم به

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (۱۷-۶ \text{ الف})$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (۱۷-۶ \text{ ب})$$

این دو شرط، که برای مشتق‌پذیری $f(z)$ لازم‌اند، شرایط کوشی-ریمان (C-R) نامیده می‌شوند. راه دیگر نوشتن شرایط C-R، به این ترتیب است که جایگذاریهای

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

را در $u(x, y)$ و $v(x, y)$ اعمال کنیم و از قاعده زنجیره‌ای برای نوشتن معادلات (۱۷-۶) برحسب z و z^* بهره‌گیریم، نتیجه را در عبارت زیر قرار دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial u}{\partial z^*} + i \frac{\partial v}{\partial z^*}$$

و نشان دهیم که معادلات (۱۷-۶) با معادله زیر هم‌ارزند

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

(تمرین ۲-۲-۶ را ببینید). بنابراین معادله، شرط مشتق‌پذیر بودن f ، این است که از z^* مستقل باشد.

اگر مشتق f وجود داشته باشد، استدلالهایی که منجر به معادلات (۱۷-۶) شد، می‌رسانند که می‌توان آن را به صورتهای زیر بیان کرد

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۱۸-۶ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۱۸-۶ \text{ ب})$$

شرایط C-R تضمین می‌کنند که این دو معادله هم‌ارزند. طی مثال زیر، مشتق‌پذیری توابع مختلط روشن می‌شود.

مثال ۳-۲-۶: حال به بررسی چند تابع می‌پردازیم تا ببینیم آیا مشتق‌پذیرند یا خیر.

$$f(z) = x + 2iy \quad (الف)$$

قبلاً مشتق‌ناپذیری این تابع را در مبدأ با در نظر گرفتن مسیرهای مختلف تا مبدأ، نشان دادیم. می‌توانیم نشان دهیم این تابع نمی‌تواند در هیچ نقطه صفحه مختلط مشتق‌پذیر باشد. توجه کنید که

$$u = x \quad \text{و} \quad v = 2y$$

بنابراین

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

و معادله (۱۷-۶ الف) برقرار نیست. معادله (۱۷-۶ ب) برقرار است ولی کافی نیست.

می‌توانیم $f(z)$ را برحسب z و z^* نیز بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{4}(z + z^*) + 2i \left[\frac{1}{4i}(z - z^*) \right] = \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}z^*$$

می‌بینیم که $f(z)$ به z^* بستگی صریحی دارد و

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

این عبارت نیز نشان می‌دهد که $f(z)$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy \quad (\text{ب})$$

در اینجا $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ ، پس داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بنابراین، $f(z)$ می‌تواند مشتق‌پذیر باشد! به یاد آورید که معادلات (۱۷-۶) شرایط لازم بودند؛ نشان نداده‌ایم (اما به‌زودی این کار را خواهیم کرد) که کافی نیز هستند.

حال بررسی می‌کنیم که آیا $\partial f / \partial z^* = 0$ یا خیر:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[\frac{1}{2}(z+z^*) \right]^2 - \left[\frac{1}{2i}(z-z^*) \right]^2 + 2i \left[\frac{1}{2}(z+z^*) \right] \left[\frac{1}{2i}(z-z^*) \right] \\ &= \frac{1}{4}[z^2 + (z^*)^2 + 2zz^*] + \frac{1}{4}[z^2 + (z^*)^2 - 2zz^*] + \frac{1}{4}[z^2 - (z^*)^2] \\ &= z^2 \end{aligned}$$

وابستگی به z^* وجود ندارد، از این رو $f(z)$ می‌تواند مشتق‌پذیر باشد.

(ج) فرض کنید $u(x, y) = e^x \cos y$ و $v(x, y) = e^x \sin y$. در این صورت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

و شرایط C-R برقرار است. همچنین

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

و وابستگی به z^* وجود ندارد.

شرط مشتق‌پذیری بسیار محدودکننده است (باید مشتق در طول بینهایت مسیر وجود داشته باشد). لیکن، شرایط C-R ملایم به نظر می‌رسند (فقط برای دو مسیر به دست آمده‌اند). در واقع، این دو مسیر، نماینده‌های واقعی تمام مسیرها هستند؛ یعنی، شرایط C-R، مطابق قضیه زیر، نه تنها لازم، بلکه کافی نیز هستند.

قضیه ۲-۲-۶: تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یک ناحیه از صفحه مختلط مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر شرایط کوشی-ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(یا به طور معادل $\partial f / \partial z^* = 0$) برقرار باشد و تمام مشتق‌های جزئی u و v در آن ناحیه پیوسته باشند. در این صورت

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

اثبات. قبلاً نشان دادیم که اگر $f(z)$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت شرایط C-R برقرارند. اکنون نشان می‌دهیم اگر شرایط C-R برقرار باشند، در این صورت تابع مشتق‌پذیر است. ابتدا، توجه می‌کنیم که اگر اصلاً مشتق وجود داشته باشد، باید به صورت (۱۸-۶ الف) یا (۱۸-۶ ب) باشد. بنابراین، باید نشان دهیم که

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

یا نشان دهیم که به طور معادل

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| < \varepsilon \quad |\Delta z| < \delta \quad \text{هر گاه}$$

بنابر تعریف

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &\quad - u(x, y) - iv(x, y) \end{aligned}$$

چون u و v دارای مشتقهای جزئی مرتبه اول پیوسته‌ای اند، می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \delta_1 \Delta y$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \delta_2 \Delta y$$

که در آن $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$ اعداد حقیقی‌اند که با میل کردن Δx و Δy به صفر، به صفر میل می‌کنند و با استفاده از این عبارتها، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \delta_1 \Delta y \\ &\quad + iv + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + i \varepsilon_2 \Delta x + i \delta_2 \Delta y - u - iv \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + i \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y \\ &\quad + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \Delta x + (\delta_1 + i \delta_2) \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \Delta x \\ &\quad + (\delta_1 + i \delta_2) \Delta y \end{aligned}$$

که در مرحله آخر از شرایط C.R. بهره گرفته‌ایم. با تقسیم طرفین بر $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ ، می‌رسیم به

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta_1 + i \delta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

اگر از طرفین قدرمطلق بگیریم و از نامساوی مثلثی استفاده کنیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| &= \left| (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta_1 + i \delta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \\ &\leq \left| (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| + \left| (\delta_1 + i \delta_2) \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \end{aligned}$$

$$= |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2| \frac{|\Delta x|}{|\Delta z|} + |\delta_1 + i\delta_2| \frac{|\Delta y|}{|\Delta z|}$$

$$\leq |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2| + |\delta_1 + i\delta_2|$$

این مرحله آخر از این نکته ناشی شده است که

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta z|} = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1$$

$$\frac{|\Delta y|}{|\Delta z|} = \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1$$

می‌توانیم با کوچک کردن Δz ، جمله‌های ε و δ را تا هر حدی بخواهیم کوچک اختیار کنیم. به این ترتیب، نشان دادیم که وقتی شرایط C-R برقرار باشند، تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر است. ■

تعریف ۳-۲-۶: تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در z تحلیلی نامیده می‌شود اگر در z_0 و کلیه نقاط مجاور z_0 مشتق‌پذیر باشد. نقطه‌ای که در آن f تحلیلی است نقطه منظم f نامیده می‌شود. نقطه‌ای که در آن f تحلیلی نیست نقطه تکینه یا تکینگی f نامیده می‌شود. تابعی که برای آن تمام نقاط \mathbb{C} ، نقاط منظم اند، تابع تام گفته می‌شود.

مثال ۳-۲-۶: حال به بررسی چند مثال از توابع تام می‌پردازیم

$$f(z) = z \quad (\text{الف})$$

در اینجا $u = x$ و $v = y$ ؛ به آسانی می‌توان نشان داد که شرایط C-R برقرار است و

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

از این رو، در تمام نقاط صفحه مختلط، مشتق وجود دارد

$$f(z) = z^2 \quad (\text{ب})$$

در اینجا $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ ؛ شرایط C-R برقرارند و

$$\frac{df}{dz} = 2x + i2y = 2z$$

پس، $f(z)$ در تمام نقاط مشتق پذیر است

$$f(z) = z^n \quad n \geq 1 \quad (\text{ج})$$

با استفاده از استقراء ریاضی و این واقعیت که حاصلضرب دو تابع تام خودش یک تابع تام است، نشان می‌دهیم که z^n یک تابع تام است. در واقع نشان می‌دهیم که

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1} \quad (۱)$$

این رابطه را به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ در قسمتهای (الف) و (ب) نشان داده‌ایم. فرض کنید، این تساوی به‌ازای k برقرار باشد. در این صورت

$$\frac{d}{dz}(z^{k+1}) = \frac{d}{dz}(zz^k) = \frac{dz}{dz}z^k + z\frac{d}{dz}(z^k)$$

↑

بنابه قاعده ضرب برای مشتق

$$= z^k + z(kz^{k-1}) = (k+1)z^k$$

↑

بر طبق قسمت (الف) و فرضیه استقراء

بنابراین، بر طبق استقرای ریاضی، (۱) به‌ازای تمام n ها برقرار است. این معنای به‌خصوص، نشان می‌دهد که z^n یک تابع تام است

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad (\text{د})$$

که در آن a_i ها ثابتهای دلخواه‌اند. اینکه $f(z)$ یک تابع تام است، مستقیماً از قسمت (ج) و این واقعیت که مجموع دو تابع تام خودش یک تابع تام است، نتیجه می‌شود.

حال، مثالهایی را در نظر می‌گیریم که تام نیستند

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{ه})$$

مشتق این تابع عبارت است از

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

که به‌ازای $z = 0$ وجود ندارد. بنابراین، $z = 0$ تکینگی $f(z)$ است. اما هر نقطهٔ دیگر، یک نقطهٔ منظم f است.

$$f(z) = |z|^2 \quad (و)$$

با استفاده از تعریف مشتق، خواهیم داشت

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(z^* + \Delta z^*) - zz^*}{\Delta z} = z^* + \Delta z^* + z \frac{\Delta z^*}{\Delta z}$$

به‌ازای $z = 0$ ، داریم $\Delta f / \Delta z = \Delta z^*$ که وقتی $\Delta z \rightarrow 0$ ، صفر می‌شود. لذا df/dz در $z = 0$ ، صفر است. اما، اگر $z \neq 0$ ، حد $\Delta f / \Delta z$ به این بستگی خواهد داشت که چگونه z به سمت صفر میل کند. بنابراین، اگر $z \neq 0$ ، مشتق df/dz وجود ندارد. این امر نشان می‌دهد که حتی اگر اجزای حقیقی و موهومی یک تابع مختلط دارای مشتقات جزئی پیوسته تا تمام مرتبه‌ها در یک نقطه باشند، ممکن است تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. در حالت مورد نظر ما، عبارتهای

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad v(x, y) = 0$$

دارای مشتقات جزئی پیوسته تا تمام مرتبه‌ها، در تمام نقاط (x, y) هستند؛ با همهٔ اینها $|z|^2$ در هیچ جا (جز $z = 0$) مشتق‌پذیر نیست.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} \quad (ز)$$

داریم

$$\frac{df}{dz} = -\cos z / (\sin z)^2$$

بنابراین، f تعداد بینهایت نقطه تکین (منفرد) دارد

$$z = \pm n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال ۶-۲-۴ نشان می‌دهد که هر چند جمله‌ای نسبت به z تام است. تمرین ۶-۲-۵ نشان می‌دهد تابع نمایی e^z نیز تام است. پس، هر یک از حاصلضربها و (یا) حاصل جمعهای چند جمله‌ایها و e^z نیز تام خواهد بود. می‌توانیم توابع تام دیگری هم تشکیل دهیم. مثلاً e^{iz} و e^{-iz} توابع تام هستند، لذا توابع مثلثاتی که به صورت زیر تعریف می‌شوند، نیز توابع تام‌اند

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

می‌توان نشان داد که $\sin z$ و $\cos z$ تنها صفرهای حقیقی دارند (تمرین ۶-۲-۶ را ببینید). توابع هذلولوی را نیز می‌توان به همین ترتیب تعریف کرد

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

هر چند مجموع و حاصلضرب توابع تام، خودشان تام هستند، ولی عموماً نسبت آنها چنین نیست. مثلاً اگر $f(z)$ و $g(z)$ ، به ترتیب، چند جمله‌ایهای مرتبه m و n باشند، در این صورت به‌ازای $n > 0$ نسبت $f(z)/g(z)$ تام نیست، زیرا در صفرهای $g(z)$ (و این صفرها همواره وجود دارند) مشتق تعریف شده نیست.

توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ مربوط به یک تابع تحلیلی دارای خواص جالبی‌اند که در مثالهای زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۶-۲-۵: خانواده منحنیهای $u(x, y) = \text{const.}$ بر خانواده منحنیهای $v(x, y) = \text{const.}$ در هر نقطه از ناحیه‌ای از صفحه مختلط که در آن $f(z) = u + iv$ تحلیلی است، عمود است. این حکم را می‌توان با توجه به خط عمود بر منحنیها به آسانی مشاهده کرد. همان طوری که در فصل ۱ بحث شد، عمود بر منحنی $u(x, y) = \text{const.}$ عبارت است از $\nabla u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y)$. به‌طور مشابه قائم بر منحنی $v(x, y) = \text{const.}$ عبارت است از $\nabla v = (\partial v / \partial x, \partial v / \partial y)$. از ضرب نقطه‌ای این دو عمود، نتیجه می‌شود

$$(\nabla u) \cdot (\nabla v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

۶-۲-۴ کاربردهای توابع تحلیلی در الکتروستاتیک

اجزای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی، هر یک در معادله لاپلاس دوبعدی صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (۶-۱۹ الف)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (۶-۱۹ ب)$$

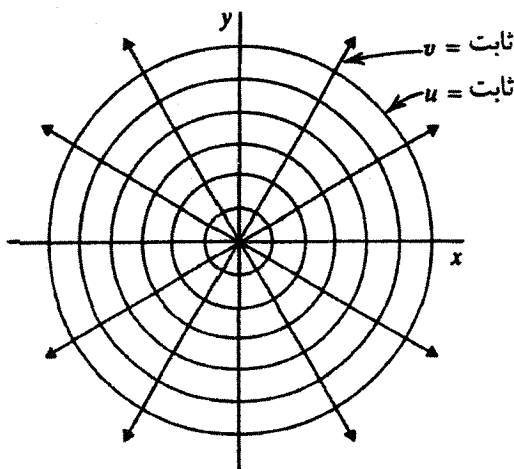
درستی این حکم را می‌توان به آسانی و به اعتبار شرایط C-R تحقیق کرد. معادله لاپلاس در سه بعد، $\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 + \partial^2 \Phi / \partial z^2 = 0$ ، پتانسیل الکتروستاتیکی را، در ناحیه‌ای از فضا که در آن بار الکتریکی وجود ندارد، توصیف می‌کنند. در هر مسئله معمولی الکتروستاتیک، پتانسیل Φ در برخی مرزها (معمولاً سطوح رسانا) داده می‌شود و مقادیرش را در سایر نقاط فضا می‌خواهند. روشهای متعددی برای حل چنین مسائلی وجود دارد (این روشها در فصلهای ۸ و ۱۰ مورد بحث قرار خواهند گرفت). لیکن بعضی از این مسائل دارای درجه تقارن معینی‌اند که امکان می‌دهد آنها را به دو بعد کاهش دهیم. در چنین مواردی، نظریه توابع تحلیلی فوق‌العاده مفید واقع می‌شود.

تقارنی که در بالا از آن یاد کردیم، تقارن استوانه‌ای است، که در آن می‌دانیم پتانسیل مستقل از مختصه z (محور تقارن) است. این وضعیت وقتی اتفاق می‌افتد که رساناها استوانه‌ای باشند، یا توزیع بار در برخی نواحی فضا چنان باشد که چگالیهای بار مستقل از z باشند. در چنین مواردی $\partial \Phi / \partial z = 0$ و مسئله به یک مسئله دوبعدی تبدیل می‌شود.

توابعی که در معادله لاپلاس صدق می‌کنند، توابع هماهنگ نامیده می‌شوند. بنابراین، پتانسیل الکتروستاتیکی یک تابع هماهنگ سه‌بعدی است؛ لیکن پتانسیل، برای یک توزیع بار و (یا) شرط مرزی با تقارن استوانه‌ای یک تابع هماهنگ دوبعدی است، به همان‌گونه که اجزای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی هستند [معادلات ۶-۱۹] را بنگرید] آیا ارتباطی بین پتانسیلهای با تقارن استوانه‌ای و توابع تحلیلی وجود دارد؟ بلی.

برای یافتن این ارتباط، یک میله طویل مستقیم با چگالی بار خطی ثابت λ در نظر بگیرید. در کتابهای درسی الکتریسیته و مغناطیس نشان داده شده است که میدان الکتریکی \mathbf{E} و پتانسیل Φ (با انتخاب مناسب نقطه مرجع) در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{\rho} \hat{e}_\rho$$



شکل ۶-۶ منحنیهای با مقادیر ثابت v و u برای تابع $w(z) = \ln z$. توجه کنید که این دو دسته منحنی در هر نقطه صفحه مختلط بر یکدیگر عمودند.

و

$$\Phi = 2\lambda \ln \rho = 2\lambda \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

واضح است که $\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 = 0$ دلالت می‌کند بر اینکه Φ می‌تواند جزء حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد. اما کدام تابع تحلیلی؟ مثال ۶-۲-۵ سرنخی از این موضوع به دست ما می‌دهد.

فرض کنید u ، یعنی جزء حقیقی تابعی تحلیلی که در پی آن می‌گردیم، تابع پتانسیل باشد. داریم

$$u = \Phi = 2\lambda \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

v چه تابعی باید باشد؟ بنابر مثال ۶-۲-۵، دو دسته منحنی $u = \text{const.}$ و $v = \text{const.}$ در هر نقطه بر یکدیگر عمودند. در این مورد که u ثابت است، به ثابت بودن Φ دلالت می‌کند، که به نوبه خود دلالت بر سطوح هم‌پتانسیل دارد. این سطوح هم‌پتانسیل استوانه‌هایی‌اند که سطح مقطع آنها با صفحه xy توسط منحنیهای $u(x, y) = \text{const.}$ توصیف می‌شوند. این منحنیها با $x^2 + y^2 = \text{const.}$ داده می‌شوند؛ یعنی، دایره‌هایی‌اند که مرکز مبدأ مختصات. بنابراین، دسته منحنیهای دیگر باید شعاعهایی باشند که از مبدأ خارج می‌شوند (شکل ۶-۶). این شعاعها در مختصات استوانه‌ای عبارت‌اند از

$$v(\rho, \varphi) = g(\varphi)$$

که در آن g همان تابعی است که باید آن را بیابیم. لیکن، برای اینکه $w = u + iv$ تحلیلی شود (تمرین ۶-۲-۷)، باید $v = 2\lambda\varphi$ را برگزینیم. در این صورت

$$w(z) = 2\lambda \ln \rho + 2i\lambda\varphi = 2\lambda \ln(\rho e^{i\varphi}) = 2\lambda \ln z$$

این همان تابع تحلیلی است که در جستجویش بودیم. چنین تابعی، پتانسیل مختلط نامیده می‌شود و بسیار مفید است. مثلاً به آسانی می‌توان نشان داد که اندازه میدان الکتریکی همان اندازه مشتق پتانسیل است

$$|\mathbf{E}| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \quad (۲۰-۶)$$

بنابر مثال زیر، این نتیجه کلی است.

مثال ۶-۲-۶: اگر $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ یک پتانسیل مختلط باشد، به طوری که $u(x, y) = \Phi$ در این صورت

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -E_x + iE_y$$

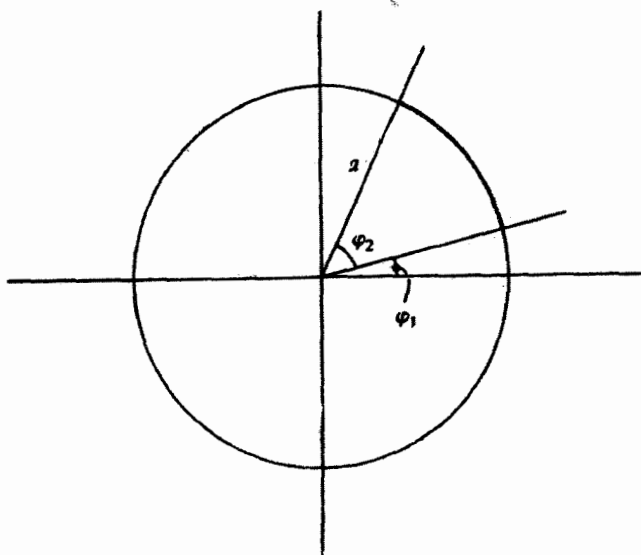
و

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{(-E_x)^2 + (E_y)^2} = |\mathbf{E}|$$

زیرا، بنابر تقارن استوانه‌ای داریم $E_z = -\partial\Phi/\partial z = 0$. بنابراین، مشتق پتانسیل مختلط مستقیماً مقدار میدان الکتریکی را می‌دهد.

استفاده دیگر از $w(z)$ ، در محاسبه شار عبوری از یک سطح است. وضعیت ساده‌ای را در نظر بگیرید که در آن می‌خواهیم شار عبوری از قسمتی از یک استوانه به شعاع a و طول l (در راستای محور z) که مابین زوایای سمتی φ_1 و φ_2 واقع است، محاسبه کنیم (شکل ۶-۷). به آسانی می‌توان شار را محاسبه کرد:

$$\text{شار} = \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dz \int_{l_1}^{l_2} \rho d\varphi \frac{2\lambda}{\rho} = 2\lambda l(\varphi_2 - \varphi_1)$$



شکل ۷-۶ قسمتی از منحنی $u = \text{const.}$ که بین دو منحنی مختلط $v = \text{const.}$ قرار دارد.

با توجه به اینکه $v = 2\lambda\varphi$ می‌رسیم به

$$\frac{\text{شار}}{l} \equiv (z = v_2 - v_1) \text{ طول واحد طول}$$

این حکم نیز یک نتیجه کلی است (در تمرین ۸-۲-۶ آن را ملاحظه کردیم)، و در قالب گزاره زیر بیان شده است.

گزاره ۴-۲-۶: فرض کنید $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ پتانسیل مختلط (تحلیلی) یک توزیع بار الکتروستاتیکی با تقارن استوانه‌ای باشد. فرض کنید یک منحنی از (x_1, y_1) تا (x_2, y_2) در صفحه xy ، فصل مشترک یک سطح استوانه‌ای با صفحه xy باشد. در این صورت

$$|\mathbf{E}| = \left| \frac{dw}{dz} \right|$$

شار عبوری از تکه (استوانه‌ای) سطح بر واحد طول در امتداد محور استوانه عبارت است از $v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1)$.

تابع v را گاهی تابع خط جریان می‌گویند.

وقتی دو رسانای استوانه‌ای داشته باشیم که خطوط میدان از یکی شروع و به دیگری ختم شود، می‌گوییم آن دو رسانا خازنی را تشکیل می‌دهند. این دو رسانا دو منحنی هم‌پتانسیل را روی صفحه xy می‌نگارند که عبارت‌اند از $u(x, y) = u_1$ و $u(x, y) = u_2$ ، که در آن u_1 و u_2 پتانسیل‌های رساناها هستند. البته بینهایت منحنی هم‌پتانسیل در صفحه xy وجود دارد. حال، می‌خواهیم ببینیم اگر از یک نقطه P_1 روی $u(x, y) = u_1$ شروع کنیم و در امتداد u_1 حرکت کنیم، مقدار تابع خط جریان چه تغییری می‌کند. برای یک دور کامل u_1 ، بر طبق گزاره ۶-۲-۴، تغییر در v برابر شار کل خواهد بود. بر طبق قانون گاوس، این شار کل به بار واحد طول محصور شده مربوط می‌شود:

$$\frac{\text{بار کل}}{\text{طول}} = 4\pi \frac{\text{شار کل}}{\text{طول}}$$

اما شار کل بر واحد طول همان تغییر در v است. اگر این تغییر کل را با $[v]$ نمایش دهیم، می‌رسیم به

$$\frac{\text{بار کل}}{\text{طول}} = \frac{1}{4\pi} [v]$$

اکنون می‌توانیم به آسانی ظرفیت در واحد طول دو رسانا را به دست آوریم

$$c = \frac{C}{l} = \frac{\text{بار بر واحد طول}}{\text{اختلاف پتانسیل}} = \frac{\frac{1}{4\pi} [v]}{|u_2 - u_1|}$$

به همین ترتیب، انرژی الکتروستاتیکی بر واحد طول عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} cV^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{[v]}{|u_2 - u_1|} \right)^2 |u_2 - u_1|^2 = \frac{1}{8\pi} [v]^2 |u_2 - u_1|$$

ملاحظه می‌کنیم که اطلاعات زیادی در $|z|w$ نهفته است. همان طوری که در بالا نشان دادیم، جزء حقیقی و جزء موهومی آن، هر دو، دارای مفهوم فیزیکی‌اند.

خوب است تابع پتانسیل مختلط مربوط به بیش از یک خط باردار را بدانیم. برای یافتن چنین پتانسیلی، باید ابتدا $w(z)$ را برای یک بار خطی که از مبدأ جابه‌جا شده است، بدانیم. اگر خط در $z_0 = x_0 + iy_0$ قرار داشته باشد، در این صورت به آسانی می‌توان نشان داد که

$$w(z) = 2\lambda \ln(z - z_0)$$

در این صورت، اصل برهم‌نهی بلافاصله، تابع پتانسیل مختلط n بار خطی واقع در z_1, z_2, \dots را می‌دهد

$$w(z) = 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(z - z_k) \quad (21-6)$$

مثال ۷-۲-۶: به‌عنوان یک کاربرد از معادله (۲۱-۶)، منحنیهای هم‌پتانسیل و خطوط جریان را برای دو بار خطی با اندازه‌های مساوی و علامت مخالف که در صفحه xy و در $y = a$ و $y = -a$ واقع‌اند، محاسبه می‌کنیم. از معادله (۲۱-۶) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} w(z) &= 2\lambda \ln(z + ia) - 2\lambda \ln(z - ia) \\ &= 2\lambda \ln \frac{z + ia}{z - ia} \end{aligned}$$

z را برحسب w به‌دست می‌آوریم

$$\frac{z + ia}{z - ia} = e^{w/2\lambda}$$

پس از کمی عملیات جبری، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} z &= ia \frac{\cosh(w/4\lambda)}{\sinh(w/4\lambda)} = ia \frac{\cosh\left(\frac{u}{4\lambda} + i\frac{v}{4\lambda}\right)}{\sinh\left(\frac{u}{4\lambda} + i\frac{v}{4\lambda}\right)} \\ &= ia \frac{\cosh \frac{u}{4\lambda} \cos \frac{v}{4\lambda} + i \sinh \frac{u}{4\lambda} \sin \frac{v}{4\lambda}}{\sinh \frac{u}{4\lambda} \cos \frac{v}{4\lambda} + i \cosh \frac{u}{4\lambda} \sin \frac{v}{4\lambda}} \end{aligned}$$

که پس از کمی عملیات، خواهیم داشت

$$z = a \frac{\sin \frac{v}{2\lambda} + i \sinh \frac{u}{2\lambda}}{\cosh \frac{u}{2\lambda} - \cos \frac{v}{2\lambda}}$$

بنابراین

$$x = \frac{a \sin(v/2\lambda)}{\cosh(u/2\lambda) - \cos(v/2\lambda)} \quad \text{و} \quad y = \frac{a \sinh(u/2\lambda)}{\cosh(u/2\lambda) - \cos(v/2\lambda)}$$

با حذف $v/2\lambda$ از دو معادله بالا، که به عملیات جبری بیشتری نیاز دارد، به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 + a^2 - 2ay \coth \frac{u}{2\lambda} = 0$$

یا

$$x^2 + \left(y - a \coth \frac{u}{2\lambda} \right)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(u/2\lambda)}$$

به همین ترتیب، با حذف $u/2\lambda$ ، می‌رسیم به

$$\left(x - a \coth \frac{v}{2\lambda} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sin^2(v/2\lambda)}$$

اکنون واضح است که سطوح هم‌پتانسیل ($u = \text{const.}$) عبارت‌اند از دایره‌هایی در صفحه xy به شعاعهای $a/\sinh(u/2\lambda)$ که مرکز آنها در $(0, a \coth(u/2\lambda))$ واقع است. به همین ترتیب، خطوط جریان ($v = \text{const.}$) نیز دایره‌هایی‌اند با شعاعهای $a/\sin(v/2\lambda)$ و مراکز $(a \coth(v/2\lambda), 0)$.

توجه کنید که مراکز منحنیهای هم‌پتانسیل با پتانسیل مثبت ($u > 0$) در امتداد مثبت محور y ها قرار دارد و مراکز منحنیهای هم‌پتانسیل با پتانسیل منفی در امتداد منفی محور y ها واقع‌اند.

صورتگرایی مثال ۶-۲-۷ از کاربرد عملی بسیار جالبی برخوردار است. حال این مسئله را وارون می‌کنیم و می‌پرسیم: دو دایره دلخواه به شعاعهای R_1 و R_2 و پتانسیلهای u_1 و u_2 به فاصله D مابین مراکزشان، مفروض‌اند، آیا می‌توان دوبار خطی ناهمنام در صفحه xy چنان قرار داد که این دایره‌ها دو تا از منحنی‌های هم‌پتانسیل باشند؟ هرگاه این کار میسر باشد، پس می‌توانیم ظرفیت بین هر دو رسانای استوانه‌ای را بیابیم، زیرا می‌توانیم رساناها را (که سطوح هم‌پتانسیل‌اند)

بر این دایره‌ها منطبق کنیم، بار واحد طول، λ ، و موضع آنها روی محور y ها، $\pm a$ ، را برحسب R_1 ، R_2 و D پیدا کنیم. در این صورت ظرفیت (بر واحد طول) عبارت است از

$$c = \frac{\lambda}{|u_2 - u_1|}$$

که برحسب شکل هندسی دو رسانای استوانه‌ای داده می‌شود. در مثال زیر، این موضوع روشن می‌شود.^۱

مثال ۸-۲-۶: ظرفیت واحد طول دو رسانای استوانه‌ای به شعاعهای R_1 و R_2 را می‌یابیم که فاصله مابین مراکز آنها D است.

در جستجوی دو بار خطی با چگالیهای $+\lambda$ و $-\lambda$ برمی‌آییم، چنانکه این دو استوانه، دو سطح هم‌پتانسیل آنها باشند. بنابر مثال ۷-۲-۶، داریم

$$R_1 = \frac{a}{\sinh(u_1/2\lambda)} \quad \text{و} \quad R_2 = \frac{a}{\sinh(u_2/2\lambda)} \quad (\text{الف-۱})$$

$$y_1 = a \coth(u_1/2\lambda) \quad \text{و} \quad y_2 = a \coth(u_2/2\lambda) \quad (\text{ب-۱})$$

که در آن y_1 و y_2 موضع مراکز دو استوانه روی محور y ها (که فرض می‌کنیم دو مرکز را به هم متصل می‌کند) هستند. می‌توانیم از معادلات بالا λ و a را به‌دست آوریم. لیکن، مستقیماً ظرفیت بر واحد طول را محاسبه می‌کنیم. لازم است λ را برحسب $|u_1 - u_2|$ پیدا کنیم. برای این منظور به‌صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۸-۶)

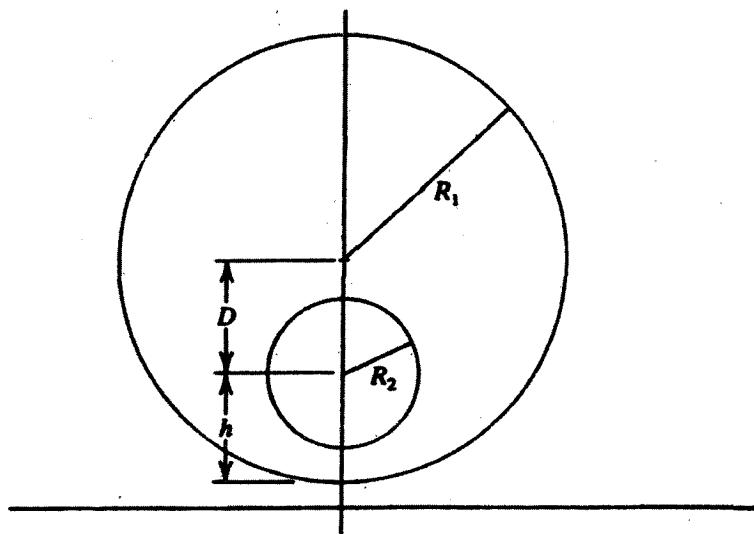
$$D = |y_1 - y_2| = \left| a \frac{\cosh(u_1/2\lambda)}{\sinh(u_1/2\lambda)} - a \frac{\cosh(u_2/2\lambda)}{\sinh(u_2/2\lambda)} \right|$$

$$= |R_1 \cosh(u_1/2\lambda) - R_2 \cosh(u_2/2\lambda)|$$

با به توان ۲ رساندن طرفین، می‌رسیم به

$$D^2 = R_1^2 \cosh^2(u_1/2\lambda) + R_2^2 \cosh^2(u_2/2\lambda) - 2R_1 R_2 \cosh(u_1/2\lambda) \cosh(u_2/2\lambda)$$

۱. برای دستیابی به مثالهای بیشتر نگاه کنید به:



شکل ۸۶ وقتی R_1 به بینهایت میل کند، شکل هندسی مسئله به یک استوانه به اضافه یک صفحه نزدیک می‌شود.

$$= R_1^2 [1 + \sinh^2(u_1/2\lambda)] + R_2^2 [1 + \sinh^2(u_2/2\lambda)] - 2R_1 R_2 \cosh(u_1/2\lambda) \cosh(u_2/2\lambda)$$

حال از اتحاد $\cosh(a - b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$ در جمله آخر سمت راست رابطه بالا بهره می‌گیریم؛ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D^2 &= R_1^2 + R_2^2 + R_1^2 \sinh^2 \frac{u_1}{2\lambda} + R_2^2 \sinh^2 \frac{u_2}{2\lambda} - 2R_1 R_2 \\ &\left[\cosh \left(\frac{u_1}{2\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda} \right) + \sinh \frac{u_1}{2\lambda} \sinh \frac{u_2}{2\lambda} \right] \\ &= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cosh \left(\frac{u_1}{2\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda} \right) + \left(R_1 \sinh \frac{u_1}{2\lambda} - R_2 \sinh \frac{u_2}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

مطابق عبارت (۱-الف)، جمله آخر (۲) صفر است. بنابراین، داریم

$$\cosh \left(\frac{u_1 - u_2}{2\lambda} \right) = \left| \frac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2R_1 R_2} \right|$$

ضرورت علامت قدرمطلق در عبارت سمت راست این است که تضمین می‌کند کسینوس هذلولوی مثبت است. اینک می‌شود به آسانی ظرفیت را محاسبه کرد

$$\left| \frac{u_1 - u_2}{2\lambda} \right| = \left| \cosh^{-1} \left(\left| \frac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2R_1 R_2} \right| \right) \right|$$

و

$$c = \left| \frac{\lambda}{u_1 - u_2} \right| = \frac{1}{2} \left| \cosh^{-1} \left(\left| \frac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2R_1 R_2} \right| \right) \right|^{-1}$$

چند حالت خاص را ذکر می‌کنیم.
(الف) برای استوانه‌های هم‌محور

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right|^{-1}$$

که می‌توان درستی آن را تحقیق کرد.

(ب) برای یک استوانه و یک صفحه، یکی از شعاعها، مثلاً R_1 ، را به ∞ میل می‌دهیم، در حالی که $h \equiv R_1 - D$ ثابت می‌ماند. در این صورت بلافاصله می‌رسیم به

$$c = \frac{1}{2 |\cosh^{-1}(h/R_2)|}$$

(ج) برای استوانه‌های مشابه

$$R_1 = R_2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2 \left| \cosh^{-1} \left(\left| 1 - \frac{D^2}{R^2} \right| \right) \right|}$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$c = \frac{1}{2 |\cosh^{-1}(D/2R)|}$$

۵-۲-۶ نگاشتهای همدیس

مثالهای زیر بخش قبلی، توانایی کاربرد توابع تحلیلی در حل مسائل الکتروستاتیکی دوبعدی را نشان می‌دهند. اما دامنه توانایی توابع تحلیلی، نسبت به آنچه آن مثالها نشان داد، بسی وسیعتر است. برای اینکه ایده‌ای از چگونگی سودمندی توابع تحلیلی به‌دست آوریم، می‌توانیم به روشهای بالا از دید دیگری نگاه کنیم.

به‌جای اینکه $w(z)$ را به‌عنوان یک پتانسیل مختلط در نظر بگیریم، به آن به‌مثابه یک نگاشت از صفحه z (یا صفحه xy) به صفحه w (یا صفحه uv) نگاه می‌کنیم. یعنی، نقاط صفحه xy به نقاط صفحه uv نگاشته می‌شوند. در حالت خاص، منحنیهای هم‌پتانسیل (دایره‌ها در مثالهای قبل) به خطوط موازی با محور v در صفحه w نگاشته می‌شوند. این امر بدیهی است، زیرا منحنیهای هم‌پتانسیل به‌صورت $u = \text{const.}$ تعریف می‌شوند که یک خط موازی با محور v است. به همین ترتیب، خطوط جریان به خطوط افقی در صفحه w نگاشته می‌شوند.

این نگاشت، ساده‌سازی عظیمی در هندسه به‌شمار می‌آید. خطوط راست، به‌خصوص اگر موازی با محورها باشند، به‌مراتب ساده‌تر از دایره‌ها هستند، مخصوصاً اگر مرکز دایره‌ها مبدأ مختصات نباشد. بنابراین اگر بتوانیم به‌نحوی وضعیت را به صفحه w منتقل کنیم، مسئله ما بسیار ساده خواهد بود. وقتی مسئله در صفحه w حل شد، می‌توانیم به صفحه z برگردیم و همه چیز را برحسب x و y بیان کنیم.

بنابراین، دو “جهان” مختلط در نظر بگیرید که یکی از آنها با صفحه xy یا متغیر z مشخص می‌شود و دیگری، “جهان پریم‌دار” که با z' نمایش داده می‌شود و اجزای حقیقی و مختلط آن x' و y' هستند. از z شروع می‌کنیم که در آنجا می‌خواهیم یک کمیت فیزیکی نظیر پتانسیل الکتروستاتیکی $\Phi(x, y)$ را بیابیم. اگر در جهان z ، مسئله خیلی پیچیده باشد، آن را به جهان z' منتقل می‌کنیم، که ممکن است در آن آسانتر حل شود؛ مسئله را در آنجا حل می‌کنیم (برحسب x' و y') و سپس به جهان $z(x, y)$ برمی‌گردیم. نگاشتی که z و z' را به هم مربوط می‌کند باید به‌طور هوشمندانه‌ای انتخاب شود. در غیر این‌صورت، تضمینی وجود ندارد که مسئله آسانتر شود.

برای اینکه روش بالا کارآ باشد، دو شرط لازم است. اولاً، با انتقال به z' ، نباید معادله دیفرانسیلی که فیزیک مسئله را توصیف می‌کند، پیچیده‌تر شود. زیرا در الکتروستاتیک، معادله لاپلاس خود ساده‌ترین نوع معادله است؛ در جهان z' نیز باید معادله لاپلاس برقرار باشد. ثانیاً، و مهم‌تر از آن، نگاشت نباید زاویه بین منحنیها را تغییر بدهد. این امر ضروری است، زیرا می‌خواهیم منحنیهای هم‌پتانسیل و خطوط میدان در هر دو جهان بر یکدیگر عمود باشند. نگاشتی که زاویه بین دو

منحنی در یک نقطه را تغییر نمی‌دهد، نگاشت هم‌دیس نامیده می‌شود. همان‌طوری که گزارهٔ زیر نشان می‌دهد، چنین نگاشتهایی در اختیار داریم.

گزارهٔ ۵-۲-۶: فرض کنید γ_1 و γ_2 منحنیهایی در صفحهٔ مختلط z باشند که در نقطهٔ z_0 تحت زاویهٔ α یکدیگر را قطع کرده‌اند. فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ نگاشتی باشد که توسط $z' = x' + iy' = f(z)$ که در z_0 تحلیلی است داده شده است. فرض کنید γ'_1 و γ'_2 تصویرهای γ_1 و γ_2 تحت این نگاشت باشند، که یکدیگر را با زاویه α' قطع می‌کنند.

(الف) در این صورت $\alpha' = \alpha$ ، یعنی نگاشت f هم‌دیس است مشروط بر آنکه $(dz'/dz)_{z_0} \neq 0$.

(ب) اگر Φ نسبت به (x, y) هماهنگ باشد، نسبت به (x', y') نیز هماهنگ خواهد بود.

اثبات. قسمت اول را ثابت می‌کنیم (قسمت دوم مسئله‌ای است مستلزم مشتق‌گیری جزئی و قاعده زنجیره‌ای که آن را برعهده خواننده وامی‌گذاریم) قرار می‌دهیم

$$z - z_0 = re^{i\theta} \quad z' - z'_0 = r'e^{i\theta'} \quad \left(\frac{dz'}{dz}\right)_{z_0} = R_0 e^{i\psi_0}$$

حال نسبت زیر

$$\frac{z' - z'_0}{z - z_0} = \frac{r'}{r} e^{i(\theta' - \theta)}$$

و حد $z \rightarrow z_0$ را روی γ_1 بگیرید. عبارت طرف چپ به سمت $R_0 e^{i\psi_0}$ میل می‌کند. مطابق شکل ۹-۶، زاویه در سمت راست به سمت $\theta'_1 - \theta_1$ میل می‌کند. بنابراین داریم

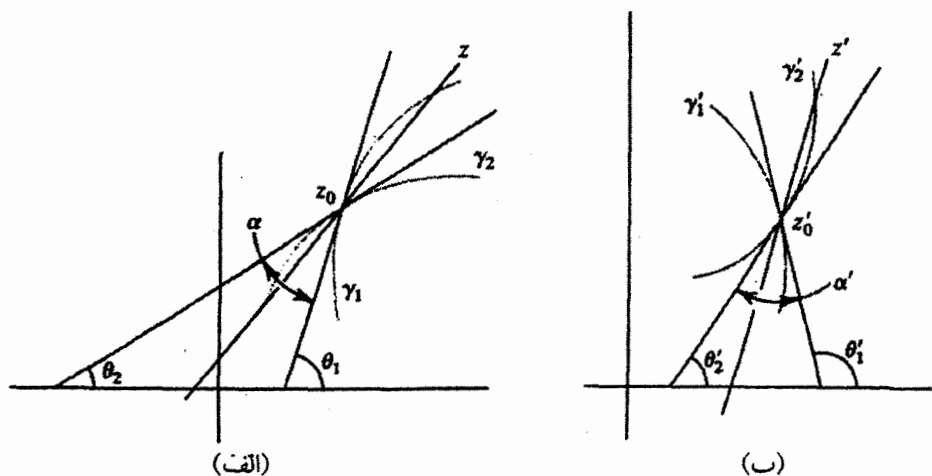
$$\psi_0 = \theta'_1 - \theta_1$$

به علت مخالف صفر بودن عبارت $(dz'/dz)_{z_0}$ ، این زاویه خوش‌تعریف است. لذا $R_0 \neq 0$. مبین این نکته است که طول بردار مخالف صفر است و با محور افقی یک زاویهٔ معین می‌سازد. به همین ترتیب، وقتی روی γ_2 داشته باشیم $z \rightarrow z_0$ ، می‌رسیم به

$$\psi_0 = \theta'_2 - \theta_2$$

بنابراین

$$\theta'_1 - \theta_2 = \theta'_1 - \theta_1 \quad \text{یا} \quad \alpha = \theta_2 - \theta_1 = \theta'_2 - \theta'_1 = \alpha'$$



شکل ۹-۶ وقتی نقطه z روی یک منحنی به z_0 میل کند، خط واصل بین این دو نقطه به سمت مماس بر منحنی میل می‌کند. (الف) هندسه صفحه z . توجه کنید که زاویه θ_1 برابر مجموع دو زاویه θ_2 و α است. (ب) همین وضعیت برای صفحه z' ترسیم شده است.

بنابراین، دو زاویه با هم برابرند. آنچه در زیر می‌آید، مثالهایی از نگاشتهای همدیس است.

$$z' = z + a \quad (۱)$$

که در آن a یک ثابت مختلط دلخواه است. این صرفاً یک انتقال صفحه z است.

$$z' = bz \quad (۲)$$

که در آن b یک ثابت مختلط است. این هم یک اتساع است، که در آن فواصل با ضریب $|b|$ اتساع پیدا می‌کنند. یک نمودار در صفحه z به یک نمودار (هم‌نهشت) مشابه در صفحه z' تبدیل می‌شود که با ضریب $|b|$ ، کوچک ($|b| < 1$) یا بزرگ ($|b| > 1$) شده است.

$$z' = \frac{1}{z} \quad (۳)$$

این نگاشت را وارونی می‌گویند. در تمرین ۹-۲-۶ مشاهده می‌کنیم که تحت چنین نگاشتی، دایره‌ها به دایره یا خط راست نگاشته می‌شوند. یک دایره در صفحه z به مرکز a و شعاع $|a| \neq r$ ، به

یک دایره در صفحه z' نگاشته می‌شود که مرکز آن در نقطه

$$a' = \frac{a^*}{|a|^2 - r^2}$$

قرار دارد و شعاعش عبارت است از

$$r' = \frac{r}{||a|^2 - r^2|}$$

اگر $r = |a|$ ، در این صورت دایره به یک خط راست نگاشته خواهد شد.

(۴) با ترکیب سه مثال بالا، نگاشت کلی زیر حاصل می‌شود

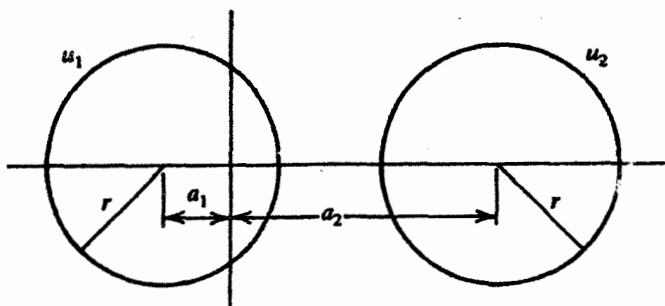
$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (۲۲-۶)$$

که چنانچه $cz + d \neq 0$ و $dz'/dz \neq 0$ ، همدیس است. از شرط اخیر می‌رسیم به

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

نگاشتهای از نوع (۲۲-۶) تبدیلات همنگار نامیده می‌شوند. یکی از خواص مفید (۲۲-۶) به این قرار است که یک ناحیه نامحدود صفحه z را به یک ناحیه محدود از صفحه z' می‌نگارد. این امر واضح است، زیرا نقاطی با مقادیر بسیار بزرگ z به همسایگی نقطه $z' = a/c$ نگاشته می‌شوند. بی‌تردید این استدلال دوطرفه است؛ یعنی (۲۲-۶) نواحی بینهایت کوچک از صفحه z در نزدیکی $z = -d/c$ را به نواحی بزرگ از صفحه z' می‌نگارد. مفید بودن (۲۲-۶) طی مثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۲۲-۶: دو استوانهٔ رسانا با شعاعهای یکسان r ، به ترتیب در پتانسیلهای u_1 و u_2 قرار دارند. فرض کنید مراکز آنها روی محور x ها و به فواصل a_1 و a_2 از مبدأ قرار داشته باشند (شکل ۲۲-۶). می‌خواهیم پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از چنین آرایشی را در تمام صفحه xy پیدا کنیم. بنا بر الکتروستاتیک مقدماتی، می‌دانیم که اگر دو استوانه هم‌محور (و البته، با شعاعهای مختلف) می‌بودند، مسئله بسیار آسان می‌شد. بنابراین، سعی می‌کنیم دو دایره را به دو دایرهٔ متحدالمرکز در صفحه az' چنان تبدیل کنیم که ناحیهٔ نامحدود خارج دو دایره در صفحه z به ناحیهٔ حلقوی



شکل ۶-۱۰ هندسه مسئله وقتی از صفحه z دیده شود.

محدود بین دو دایره متحدالمرکز در صفحه z' نگاشته شود. در این صورت (به آسانی) پتانسیل در صفحه z' را پیدا و نتیجه را به صفحه z منتقل می‌کنیم.

کلی‌ترین نگاشتی که ممکن است بتواند این کار را انجام دهد، همان نگاشتی است که (معادله ۶-۲۲) آن را بیان می‌کند. اما، معلوم می‌شود که لازم نیست تا این حد کلی عمل کنیم. در واقع، حالت خاص $z' = 1/(z - c)$ که در آن c یک ثابت حقیقی است، کافی است. بنابراین، فرض کنید معادله بالا نگاشت بین z و z' را توصیف کند. در این صورت

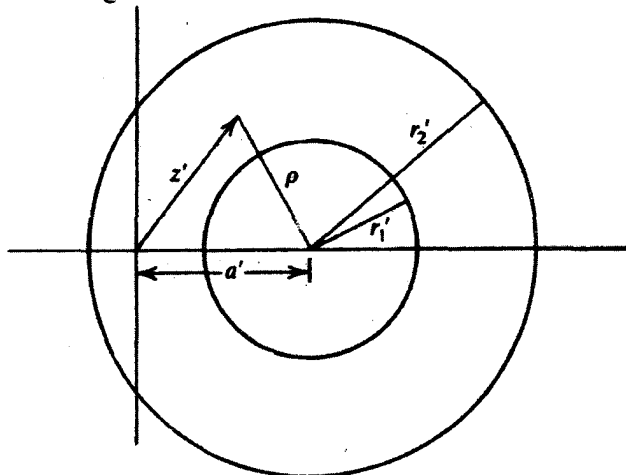
$$z = \frac{1}{z'} + c$$

و دایره‌های $|z - a_i| = r$ ، به‌ازای $i = 1, 2$ ، به دایره‌های $|z' - a'_i| = r'_i$ ، به‌ازای $i = 1, 2$ ، نگاشته خواهند شد، که در آن (بنا به تمرین ۶-۲۹)

$$a'_i = \frac{a_i - c}{(a_i - c)^2 - r^2} \quad \text{و} \quad r'_i = \frac{r}{|(a_i - c)^2 - r^2|} \quad i = 1, 2$$

آیا می‌توانیم پارامترها را چنان تنظیم کنیم که دایره‌ها در صفحه z' متحدالمرکز باشند؛ یعنی به‌طوری که $a'_1 = a'_2$ ؟ پاسخ مثبت است. قرار می‌دهیم $a_i - c = b_i$ ، و a'_1 و a'_2 را مساوی قرار می‌دهیم و b_2 را برحسب b_1 به‌دست می‌آوریم. نتیجه عبارت است از $b_2 = b_1$ یا $b_2 = -r^2/b_1$. جواب اول بدیهی است، ولی جواب دوم منجر می‌شود به

$$a_2 - c = -\frac{r^2}{a_1 - c}$$



شکل ۱۱-۶ هندسه مسئله، آن چنانکه از صفحه z' دیده می شود.

اگر این فرض ساده کننده، ولی عموماً کاربردی، را بجا آوریم که مرکز استوانه اول بر مبدأ منطبق است، در این صورت $a_1 = 0$ و

$$a_2 = c + \frac{r^2}{c} \equiv D$$

که در آن D فاصله بین استوانه هاست. ملاحظه می کنیم که c به کمک D تعیین می شود. به ازای $a_1 = 0$ ، می رسمیم به

$$a' \equiv a_1' = a_2' = -\frac{c}{c^2 - r^2}$$

و هندسه مسئله مطابق شکل ۱۱-۶ است.

برای چنین هندسه ای، پتانسیل در یک نقطه از ناحیه حلقوی (طوقی) به صورت زیر بیان می شود

$$\Phi' = A \ln \rho + B = A \ln |z' - a'| + B$$

که در آن A و B ثابتهای حقیقی اند که با شرایط $\Phi'(\rho = r_1') = u_1$ و $\Phi'(\rho = r_2') = u_2$ تعیین می شوند

$$A = \frac{u_1 - u_2}{\ln(r_1'/r_2')} \quad \text{و} \quad B = \frac{u_2 \ln r_1' - u_1 \ln r_2'}{\ln(r_1'/r_2')}$$

پتانسیل Φ' جزء حقیقی تابع مختلط

$$F(z') = A \ln(z' - a') + B$$

است که جز در $z' = a'$ نقطه‌ای که در خارج ناحیه مورد نظر قرار دارد، تحلیلی است. اکنون می‌توانیم به عقب برگردیم و با قرار دادن $z' = 1/(z - c)$ به صفحه z برویم و برسیم به

$$G(z) = A \ln \left(\frac{1}{z - c} - a' \right) + B$$

که جزء حقیقی آن، پتانسیل در صفحه z است

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re}[G(z)] = A \ln \left| \frac{1 - a'z + a'c}{z - c} \right| + B$$

$$= A \ln \left| \frac{(1 + a'c - a'x) - ia'y}{(x - c) + iy} \right| + B$$

$$= \frac{A}{2} \ln \left[\frac{(1 + a'c - a'x)^2 + a'^2 y^2}{(x - c)^2 + y^2} \right] + B$$

و این همان پتانسیل مطلوب ماست.

تمرینها

۶-۲-۱ نشان دهید تابع $w = 1/z$ خط راست $y = 1/2$ در صفحه z را به یک دایره در صفحه w می‌نگارد.

۶-۲-۲ نشان دهید معادلات (۶-۱۷) با $\partial f / \partial z^* = 0$ معادل‌اند. $\partial f / \partial z$ چیست؟

۶-۲-۳ نشان دهید، اگر z در مختصات قطبی نمایش داده شود، مشتق تابع $f(z)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + i \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

که در آن U و V اجزای حقیقی و موهومی $f(z)$ هستند که در مختصات قطبی نوشته شده است. شرایط C-R چیست؟

۶-۲-۴ نشان دهید $d/dz(\ln z) = 1/z$

۵-۲-۶ نشان دهید یک تابع منحصر به فرد $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ با سه خاصیت زیر، وجود دارد:

$f(z)$ تک مقداری و به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است،

$$df/dz = f(z) \text{ و}$$

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

$f(z)$ کدام است؟

۶-۲-۶ نشان دهید $\sin z$ و $\cos z$ تنها دارای صفرهای حقیقی اند.

۷-۲-۶ اگر v اجزای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $w(z)$ باشند و $u = 2\lambda \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$ ، نشان دهید $v = 2\lambda\theta + \text{const.}$

۸-۲-۶ فرض کنید $w = u + iv$ یک پتانسیل مختلط باشد که در آن u پتانسیل الکتروستاتیکی واقعی است. نشان دهید:

$$v(x_2, y_2) - v(x_1, y_1) = \text{شار بر واحد طول روی محور } z \text{ ها}$$

که در آن (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقاط انتهایی منحنی اند که فصل مشترک قطعه‌ای از سطح استوانه با صفحه xy را نشان می‌دهد.

۹-۲-۶ نشان دهید وارونی $1/z = z'$ دایره‌ها در صفحه z را به دایره یا خط در صفحه z' می‌نگارد.

۳-۶ انتگرال گیری از توابع مختلط

مشقت تابع مختلط مفهوم مهمی است و مطابق مطالب بخش ۲-۶، ابزاری توانا در کاربردهای فیزیکی به شمار می‌آید. مفهوم انتگرال گیری از آن هم مهمتر است. در واقع، بعداً در همین بخش خواهیم دید که می‌توان مشتقها را برحسب انتگرالها نوشت. انتگرالهای معین توابع مختلط را در این بخش به تفصیل مطالعه خواهیم کرد. انتگرال نامعین، یا تابع اولیه یک تابع مختلط، حالت خاصی از انتگرال معین است که در آن "حد بالا" به صورت یک متغیر است.

۱-۳-۶ انتگرالهای معین توابع مختلط

انتگرال معین هر تابع مختلط دقیقاً مشابه انتگرال معین توابع حقیقی تعریف می‌شود. بنابراین، داریم

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(z) dz = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta z_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N f(z_i) \Delta z_i$$

که در آن Δz_i قطعه‌ای کوچک، واقع در z_i ، از منحنی است که عدد مختلط α_1 را به عدد مختلط α_2 در صفحه z ، متصل می‌کند. از آنجا که بینهایت مسیر برای اتصال α_1 به α_2 وجود دارد، تضمینی وجود ندارد که انتگرال دارای یک مقدار منحصر به فرد باشد. ممکن است برای مسیرهای مختلف، مقادیر مختلفی برای انتگرال به دست آورد.

در فصل اول با وضعیت مشابهی روبرو شدیم. وقتی انتگرال خطی یک میدان برداری را مورد بحث قرار می‌دادیم، دیدیم که بعضی میدانهای برداری دارای انتگرالهایی هستند که وابسته به مسیرند. در آنجا، توجه کردیم که شرط استقلال از مسیر، شرایط محدودکننده‌ای بر میدان برداری تحمیل می‌کند. این ایده‌ها را در مورد انتگرال یک تابع مختلط بررسی می‌کنیم.

انتگرال معین یک تابع مختلط $f(z) = u + iv$ را برحسب اجزای حقیقی و موهومی می‌نویسیم

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(z) dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u dx - v dy) + i \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (v dx + u dy)$$

دو انتگرال سمت راست، به انتگرالهای خطی دوبعدی بردارها بسیار شبیه‌اند. در واقع، اگر بردارهای دوبعدی زیر را تعریف کنیم

$$\mathbf{A}_1 \equiv (u, -v) \quad \text{و} \quad \mathbf{A}_2 \equiv (v, u)$$

در این صورت انتگرالهای بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(z) dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} + i \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} \quad (23-6)$$

که در آن $d\mathbf{l} = (dx, dy)$ عنصر جابه‌جایی در طول مسیر از α_1 تا α_2 است. اکنون می‌توانیم نتایج فصل اول را در مورد دو بردار به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم که (۲۳-۶) مستقل از مسیر است، اگر و فقط اگر تاو آنها صفر شود. چون \mathbf{A}_1 و \mathbf{A}_2 هر دو تنها مؤلفه‌های x و y دارند که فقط به x و y وابسته‌اند، می‌رسیم به

$$\nabla \times \mathbf{A}_1 = \hat{e}_z \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_2 = \hat{e}_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

که هر دوی آنها صفر می‌شوند اگر و فقط اگر u و v در شرایط $C-R$ صدق کنند. اما این حکم دقیقاً همان چیزی است که برای اینکه $f(z)$ تحلیلی باشد، لازم است. استقلال از مسیر یک انتگرال همان صفر شدن انتگرال در طول یک مسیر بسته است. در فصل اول دیدیم که وقتی داریم

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

که ناحیه تعریف \mathbf{A} به صفر قابل انقباض باشد، یعنی، وقتی $\nabla \times \mathbf{A}$ در هر نقطه از آن ناحیه صفر باشد.

بحث قبلی را می‌توان در یک قضیه مهم، که قضیه کوشی-گورسا نامیده می‌شود، خلاصه کرد. اما بهتر است ابتدا با برخی واژگان متداول در آنالیز مختلط، به‌کار می‌رود، آشنا شویم.

(۱) منحنی (فصل چهارم را بنگرید) عبارت است از نگاشت $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ از بازه حقیقی

$[a, b]$ به صفحه مختلط که توسط $z(t) = x(t) + iy(t)$ بیان می‌شود، و در آن $a \leq t \leq b$.

(۲) کمان ساده، یا کمان جوردن، عبارت است از منحنی‌ای که خودش را قطع نکند [یعنی، به‌ازای $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم: $z(t_1) \neq z(t_2)$].

(۳) منحنی بسته ساده یا منحنی جوردن کمان ساده‌ای است که در دو انتها خودش را قطع می‌کند [یعنی، طوری است که $z(a) = z(b)$].

(۴) کمان هموار، منحنی‌ای است که برای آن رابطه $dz/dt = dx/dt + i dy/dt$ برقرار، و به‌ازای $t \in [a, b]$ مخالف صفر باشد.

(۵) پربند، کمانی است که از تعداد محدودی کمان هموار که به دنبال یکدیگر متصل شده‌اند، آن را تشکیل می‌دهند. وقتی تنها مقادیر اولیه و نهایی $z(t)$ یکسان باشند، پربند را پربند بسته ساده می‌نامند.

قضیه ۱-۳-۶: (قضیه کوشی-گورسا). فرض کنید $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ روی یک پربند بسته C و در تمام نقاط صفحه مختلط محصور در C ، تحلیلی باشد. در این صورت

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

مثال ۱-۳-۶: چند مثال از انتگرال‌های معین روی مسیرهای مختلف را بررسی می‌کنیم.

(الف) انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$I_1 = \int_{\gamma_1} z \, dz$$

که در آن γ_1 خط راستی است که از مبدأ به نقطه $(1, 2)$ ترسیم شده است. در امتداد این خط داریم: $y = 2x$ و $z = x + iy = x + 2ix$. بر حسب t ، خواهیم داشت

$$z(t) = t + 2it \quad 0 \leq t \leq 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} z \, dz = \int_0^1 (t + 2it)(dt + 2i \, dt) \\ &= \int_0^1 (-2t \, dt + 4it \, dt) \\ &= (-2 + 4i) \left(\frac{1}{2} \right) = -1 + 2i \end{aligned}$$

برای مسیر دیگر γ_2 ، که در امتداد آن $y = 2x^2$ ، خواهیم داشت

$$z(t) = t + 2it^2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

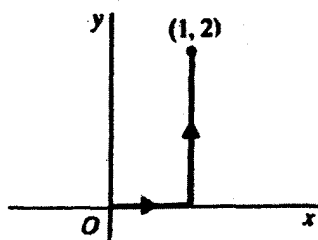
و

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_2} z \, dz = \int_0^1 (t + 2it^2)(dt + 4it \, dt) \\ &= \int_0^1 (t \, dt + 8it^2 \, dt + 2it^2 \, dt) = -\frac{2}{3} + 2i \end{aligned}$$

بنابراین $I_1 = I_2$.

(ب) حال، انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I_3 = \int_{\gamma_3} z^2 \, dz$$



شکل ۱۲-۶ مسیر مربوط به انتگرال I_4' .

که در آن γ_1 مانند قسمت (الف) است. به جای z برحسب t قرار می‌دهیم، و می‌رسیم به

$$I_4 = \int_0^1 (t + 2it)^2 (dt + 2i dt) = (1 + 2i)^2 \int_0^1 t^2 dt = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

سپس، I_4 را با عبارت زیر مقایسه می‌کنیم

$$I_4' = \int_{\gamma_1} z^2 dz$$

که در آن γ_2 در شکل ۱۲-۶ نشان داده شده است. این مسیر را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد

$$z(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \text{ به‌ازای} \\ 1 + i(t-1) & 1 \leq t \leq 3 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

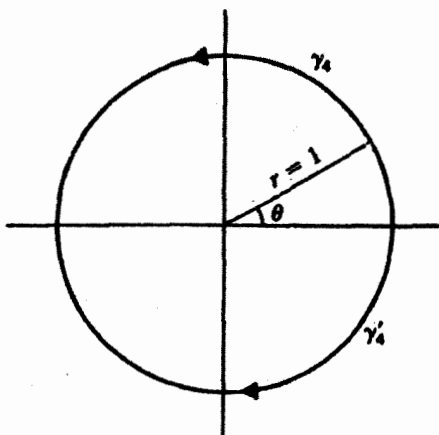
از این رو

$$\begin{aligned} I_4' &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^3 [1 + i(t-1)]^2 (i dt) \\ &= \frac{1}{3} + \left(-4 - \frac{2}{3}i\right) = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

که با I_4 یکسان است.

(ج) می‌توانیم با در نظر گرفتن انتگرال زیر نشان دهیم که تساوی برای مسیرهای مختلف همیشه تضمین نمی‌شود. انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I_4 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$$



شکل ۱۳-۶ وجود نقطه نکینه $z = 0$ در داخل دایره، مانع می‌شود که دو انتگرال در امتداد γ_2 و γ_4 مساوی باشند.

که در آن γ_2 مطابق شکل ۱۳-۶ نیم‌دایره بالایی با شعاع واحد است. می‌توان برحسب θ یک معادله پارامتری برای γ_2 نوشت

$$z(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i\pi$$

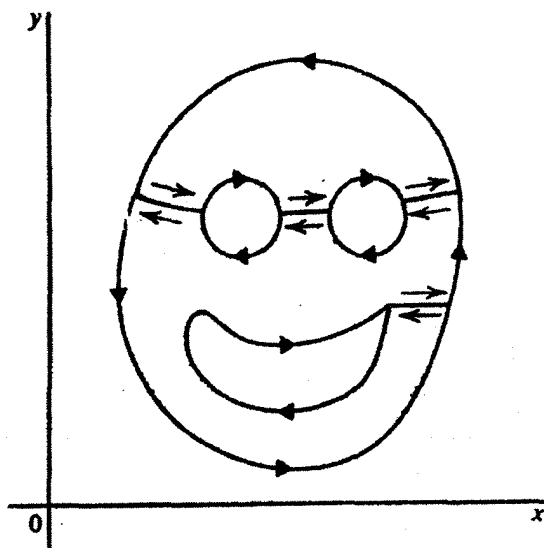
از سوی دیگر،

$$I_4 = \int_{\gamma_4} \frac{1}{z} dz = - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = -i\pi$$

در اینجا، دو انتگرال با یکدیگر مساوی نیستند. می‌توانیم با γ_2 و γ_4 یک پربند C تشکیل دهیم که پادساعتگرد است و انتگرال $f(z) = 1/z$ در امتداد آن به قرار زیر است

$$I \equiv \oint_C \frac{1}{z} dz = I_2 - I_4 = 2i\pi$$

مخالف صفر بودن I منعکس‌کننده این واقعیت است که $1/z$ در تمام نقاط محصور شده توسط پربند بسته C ، تحلیلی نیست. (قضیه کوشی-گورسا این واقعیت را تعمیم می‌دهد).

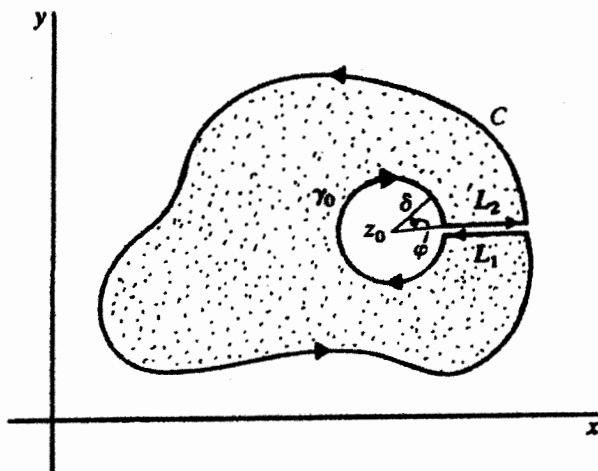


شکل ۱۴-۶ یک پر بند پیچیده را همواره می‌توان به پر بندهای ساده‌تر تجزیه کرد. توجه کنید که "چشمها" و "دهان" در جهت (منفی) طی می‌شوند.

قضیه ۱-۳-۶ به نواحی پیچیده‌تری از آنچه به نظر می‌رسد، قابل اعمال است. حتی اگر یک ناحیه شامل نقاطی باشد که در آنها $f(z)$ تحلیلی نیست، می‌توان با تعریف مجدد ناحیه و پر بند، از آن نقاط اجتناب کرد. چنین شگردی اتخاذ قرارداد جهت "حرکت" در امتداد پر بند را ایجاب می‌کند. این قرارداد چندان مهم است که جداگانه بیان شود.

قرارداد ۲-۳-۶: در موقع انتگرال‌گیری در طول یک پر بند بسته قرارداد می‌کنیم که چنان در امتداد پر بند حرکت کنیم که ناحیه محصور شده توسط پر بند در سمت چپ ما واقع شود. انتگرال‌گیری که با این قرارداد انجام شود، انتگرال‌گیری در سوی مثبت نامیده می‌شود. انتگرال‌گیری در خلاف این جهت، دارای علامت منفی است.

در مورد یک پر بند بسته ساده، حرکت پادساعتگرد، انتگرال‌گیری در جهت مثبت را می‌دهد. اما، وقتی پر بند پیچیده‌تر شود، این نتیجه‌گیری دیگر صادق نیست. در شکل ۱۴-۶، مسیر پیچیده‌ای را مشاهده می‌کنید که ناحیه‌ای را که در آن انتگرالده تحلیلی است (ناحیه هاشورخورده) احاطه کرده است. توجه کنید که می‌توان یک قسمت از ناحیه را دو بار در سوهای مخالف طی کرد، بدون اینکه در انتگرال، که مجموع انتگرالهای قسمتهای مختلف پر بند است، تغییری ایجاد شود. نیز توجه کنید که "چشمها" و "دهان" (شکل ۱۴-۶) در جهت ساعتگرد طی می‌شوند. این عمل ضروری است، برای اینکه وقتی روی پر بند حرکت می‌کنیم، ناحیه محصور شده در سمت چپ باقی بماند.



شکل ۱۵-۶ انتگرالده در داخل و روی ناحیه هاشورخورده تحلیلی است. همواره می‌توان پربندهایی تشکیل داد که تمام نقاط تکیه را مستثنی کند.

ناحیه‌ای مانند آنچه در شکل ۱۴-۶ مشاهده می‌کنید و در آن حفره‌هایی ایجاد شده است، یک ناحیه همبند چندگانه نامیده می‌شود. در مقابل، ناحیه همبند ساده ناحیه‌ای است که در آن هر پربند بسته ساده تنها نقاط آن ناحیه را در برگیرد.

یکی از نتایج قضیه کوشی-گورسا، فرمول مهمی است، که در زیر به آن اشاره می‌کنیم.

قضیه ۳-۳-۶: (فرمول انتگرال کوشی یا CIF). فرض کنید f در داخل و روی یک پربند بسته ساده C تحلیلی باشد. فرض کنید z_0 نقطه‌ای دلخواه در داخل C است. در این صورت

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (24-6)$$

اثبات. ناحیه هاشورخورده را در شکل ۱۵-۶ در نظر بگیرید که C ، پربند (۲۴-۶)؛ γ_0 ، دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع بینهایت کوچک δ ؛ L_1 و L_2 ، دو خط مستقیم که بینهایت به یکدیگر نزدیک‌اند، آن را احاطه کرده‌اند (در واقع می‌توانیم فرض کنیم L_1 و L_2 روی هم قرار دارند، اما در شکل برای واضحتر بودن آنها را جدا از هم رسم کرده‌ایم). مجموعه تمام این منحنیها را C' می‌نامیم.

چون $f(z)/(z - z_0)$ روی پربند C' و در داخل ناحیه هاشورخورده تحلیلی است، می‌توانیم

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{L_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] \end{aligned}$$

عوامل مؤثر ناشی از L_2 و L_1 یکدیگر را حذف می‌کنند زیرا در دو جهت مخالف‌اند. عامل مؤثر مربوط به دایرهٔ بینهایت کوچک γ_0 را محاسبه می‌کنیم. اولاً، توجه کنید که چون $f(z)$ پیوسته است (مشتق‌پذیری به منزلهٔ پیوستگی است) می‌توانیم به‌ازای $z \in \gamma_0$ ، بنویسیم

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

که در آن ε یک عدد مثبت کوچک است. بنابر نامساوی داربو (تمرین ۲-۳-۶)

$$\left| \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\delta} 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon$$

که تبدیل می‌شود به

$$\oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

یا

$$\oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0}$$

می‌توان با توجه به اینکه جهت γ_0 ساعتگرد است، $z - z_0 = \delta e^{i\varphi}$ و $dz = i\delta e^{i\varphi} d\varphi$ را به آسانی محاسبه کرد. می‌رسیم به

$$\oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} = - \int_0^{2\pi} \frac{d(\delta e^{i\varphi})}{\delta e^{i\varphi}} = - \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = -2\pi i$$

با جمع کردن تمام مقادیر بالا، خواهیم داشت

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right]$$

و به این ترتیب، قضیه اثبات شده است.

مثال ۳-۳-۶: می‌توانیم با بهره‌گیری از CIF، انتگرالهای زیر را محاسبه کنیم

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 3)^2 (z - i)} \quad I_2 = \oint_{C_2} \frac{(z^2 - 1) dz}{\left(z - \frac{1}{2}\right) (z^2 - 4)^2}$$

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{e^{z/2} dz}{(z - i\pi)(z^2 - 20)^2}$$

که در آن C_3 دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r_3 است، به طوری که $r_3 = 1$ ، $r_1 = 3/2$ و $r_2 = 4$.

برای I_1 ، توجه کنید که $f_1(z) \equiv z^2 / (z^2 + 3)^2$ روی C_1 و داخل آن تحلیلی است. بنابراین،

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z - i} dz = 2\pi i f_1(i) = 2\pi i \frac{i^2}{(-1 + 3)^2} = -i \frac{\pi}{2}$$

به همین ترتیب، $f_2(z) = (z^2 - 1) / (z^2 - 4)^2$ در داخل و روی C_2 تحلیلی است. در این صورت با قضیه ۳-۳-۶ می‌رسیم به

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z - \frac{1}{2}} dz = 2\pi i f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{32\pi}{1125} i$$

برای انتگرال آخری، $f_3(z) \equiv e^{z/2} / (z^2 - 20)^2$ ، و

$$I_3 = \oint_{C_3} \frac{f_3(z)}{z - i\pi} dz = 2\pi i f_3(i\pi) = -\frac{2\pi}{(\pi^2 + 20)^2}$$

فرمول انتگرال کوشی، مقدار هر تابع تحلیلی در هر نقطه داخل یک پرند ساده بسته را می‌دهد.

مشروط بر اینکه مقدار تابع فقط در نقاط روی پربند معلوم باشد. به نظر می‌رسد که گویی توابع در داخل یک پربند محبوس‌اند؛ وقتی مقدارشان روی پربندی که یک ناحیه را محصور می‌کند، دیگر نمی‌توانند در داخل آن ناحیه تغییر کنند.

به وضعیت مشابهی در الکتروستاتیک برمی‌خوریم: تعیین پتانسیل در کرانه‌ها، نوعاً رساناها، خودبه‌خود مقدار آن را در هر نقطه دیگری از فضای محصور شده توسط رساناها تعیین می‌کند. این عبارت، مضمون قضیه یکتایی است که در مسائل مقدار مرزی الکتروستاتیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما، پتانسیل الکتروستاتیکی Φ را شرط دیگری نیز محدود می‌کند که همان معادله لاپلاس، $\nabla^2 \Phi = 0$ ، است؛ ترکیب معادله لاپلاس و شرایط مرزی یکتایی Φ را فراهم می‌آورد.

از سوی دیگر، به نظر می‌رسد که مشخص کردن یک تابع تحلیلی روی یک پربند، بدون هیچ شرط دیگری، برای تعیین مقدار تابع در تمام نقاط داخل آن پربند کافی است. اما این‌طور نیست. یک تابع تحلیلی به‌خاطر تعریفش، در شرط محدودکننده دیگری صدق می‌کند. اجزای حقیقی و موهومی آن، هر کدام در معادله لاپلاس دوبعدی صدق می‌کنند! همان‌طور که قبلاً بحث شد، این اجزاء، توابع هماهنگ‌اند. بنابراین، نباید عجیب باشد که مقدار یک تابع تحلیلی در مرز (پربند) مقدار تابع در تمام نقاط داخل مرز را تعیین کند.

۲-۳-۶ مشتق توابع تحلیلی

قضیه ۲-۳-۶ برای کار کردن در زمینه توابع تحلیلی ابزار قدرتمندی به‌شمار می‌آید. یکی از کاربردهای این قضیه عبارت است از محاسبه مشتقات چنین توابعی از تمام مرتبه‌ها. بهتر است متغیر ظاهری انتگرال‌گیری (۲۴-۶) را به ξ تبدیل کنیم و CIF را به صورت زیر بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (25-6)$$

که در آن C یک پربند ساده بسته در صفحه ξ و z یک نقطه در داخل C است. برای تعریف مشتق یک تابع تحلیلی، به گزاره زیر نیاز داریم.

گزاره ۲-۳-۶: فرض کنید C یک پربند (که لزوماً بسته نیست) و $g(z)$ یک تابع پیوسته روی C باشد. در این صورت تابع $f(z)$ ، که بنا بر تعریف عبارت است از

$$f(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

در هر نقطه $z \notin C$ تحلیلی است.

اثبات . با استفاده از تعریف مشتق، مشتق $f(z)$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \\ &\left[\int_C \frac{g(\xi)d\xi}{\xi - z - \Delta z} - \int_C \frac{g(\xi)d\xi}{\xi - z} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_C g(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_C g(\xi) \frac{\Delta z}{(\xi - z - \delta z)(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \frac{g(\xi)d\xi}{(\xi - z - \delta z)(\xi - z)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} \end{aligned}$$

این مشتق، به‌ازای تمام مقادیر z که روی C نباشند، تعریف شده است. بنابراین $f(z)$ به‌ازای $z \notin C$ تحلیلی است.

می‌توانیم مشتق بالا را به مشتق مرتبه m تعمیم دهیم و برسیم به

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

می‌توانیم این نتیجه را، مطابق قضیه زیر به هر تابع تحلیلی که توسط (۲۵-۶) بیان می‌شود، به‌کار بندیم.

قضیه ۳-۶-۵: مشتقات هر تابع تحلیلی $f(z)$ از تمام مرتبه‌ها در محدوده تحلیلی بودن آن تابع وجود دارند و خودشان نیز در آن محدوده تحلیلی‌اند. مشتق m ام $f(z)$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (26-6)$$

مثال ۳-۳-۶: حال، معادله (۲۶-۶) را مستقیماً به چند تابع ساده اعمال و مشتقات آنها را پیدا می‌کنیم. در تمام موارد، فرض خواهیم کرد که پربند دایره‌ای به‌مرکز z و شعاع r است.

(الف) تابع $f(z) = K \equiv \text{const.}$ مفروض است؛ بدازای $n = 1$ داریم

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{K}{(\xi - z)^2} d\xi$$

چون ξ همواره روی دایره C ، به مرکز z قرار دارد

$$\xi - z = re^{i\theta} \quad \text{و} \quad d\xi = rie^{i\theta} d\theta$$

بنابراین، داریم

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{K}{(re^{i\theta})^2} ire^{i\theta} d\theta = \frac{K}{2\pi r} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

یعنی، مشتق مقادیر ثابت صفر است.

(ب) تابع $f(z) = z$ مفروض است، بدازای $n = 1$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\xi}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{z + re^{i\theta}}{(re^{i\theta})^2} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{r} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} (0 + 2\pi) = 1 \end{aligned}$$

(ج) تابع $f(z) = z^2$ مفروض است، برای مشتق مرتبه اول معادله (۶-۲۶) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\xi^2}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(z + re^{i\theta})^2}{(re^{i\theta})^2} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z^2 + (re^{i\theta})^2 + 2zre^{i\theta}] (re^{i\theta})^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z^2}{r} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta + r \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta + 2z \int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} [0 + 0 + (2z)(2\pi)] = 2z \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که، به‌طور کلی، $(d/dz)z^m = mz^{m-1}$. اثبات این رابطه به‌عنوان یک مسئله به خواننده واگذار می‌شود.

چند نتیجه مفید از CIF. بعداً از قضیه ۳-۳-۵ بهره‌های مفیدی خواهیم برد. لیکن، چند خاصیت جالب از توابع تحلیلی یافت می‌شود که بهتر است در اینجا آنها را مورد بحث قرار دهیم. این خواص را در قالب گزاره‌های زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۳-۳-۶: قدرمطلق تابع تحلیلی $f(z)$ نمی‌تواند در داخل ناحیه تحلیلی بودن آن تابع، بیشینه موضعی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید R ناحیه تحلیلی بودن $f(z)$ باشد. فرض کنید $z_0 \in R$ و γ_0 دایره کوچکی به مرکز z_0 و شعاع δ باشد. در این صورت، بنابر CIF می‌رسیم به

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz$$

که از آن خواهیم داشت

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz \right|$$

بنابر نامساوی داریو (تمرین ۳-۳-۲) می‌رسیم به

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{|z_0 - z|} \right) 2\pi\delta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{\delta} \right) 2\pi\delta = M$$

که در آن M مقدار بیشینه $|f(z)|$ به‌ازای $z \in \gamma_0$ است. بر طبق این نامساوی است که یک نقطه z روی دایره γ_0 وجود دارد (نقطه‌ای که در آن بیشینه $|f(z)|$ حاصل می‌شود، به‌طوری که $|f(z_0)| \leq |f(z)|$. اما، γ_0 می‌تواند به هر اندازه دلخواه کوچک باشد. بنابراین، به‌ازای هر نقطه z_0 یک نقطه z وجود دارد که به اندازه دلخواه به z_0 نزدیک است و $|f(z_0)| \leq |f(z)|$. از این‌رو، نمی‌تواند هیچ بیشینه موضعی $|f(z)|$ در داخل R وجود داشته باشد. ■

گزاره ۳-۳-۷: تابع تام کراندار لزوماً مقداری ثابت است.

اثبات. نشان می‌دهیم که مشتق چنین تابعی صفر است. رابطه زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

و فرض می‌کنیم که $p(z)$ به‌ازای هر مقدار (محدود) $z \in \mathbb{C}$ هرگز صفر نمی‌شود. در این صورت $f(z)$ به‌ازای همهٔ مقادیر $z \in \mathbb{C}$ کراندار و تحلیلی است، و بنابراین گزارهٔ ۶-۳-۷، $f(z)$ ثابت است. این بیان یک تناقض است. بنابراین، باید دست‌کم یک z ، مثلاً $z = z_1$ ، وجود داشته باشد که به‌ازای آن $p(z)$ صفر شود. بنابراین، $(z - z_1)$ را جدا می‌کنیم و $p(z)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$p(z) = (z - z_1)q(z)$$

که در آن $q(z)$ از درجهٔ $n - 1$ است. با تکرار استدلال بالا برای $q(z)$ ، داریم

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)q(z)$$

که در آن $r(z)$ از درجهٔ $n - 2$ است. با ادامهٔ این استدلال می‌توانیم $p(z)$ را به‌طور کامل به عوامل خطی تجزیه کنیم. آخرین چندجمله‌ای یک ثابت (چندجمله‌ای درجهٔ صفر) خواهد بود، که آن را با c نمایش می‌دهیم.

تابع اولیهٔ یک تابع تحلیلی، تابع اولیهٔ (انتگرال نامعین) تابع تحلیلی را می‌توان با استفاده از انتگرالهای معین، تعریف کرد. فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در یک ناحیهٔ R از صفحهٔ مختلط تحلیلی باشد. فرض کنید z_0 و z دو نقطه در R باشند. انتگرال $\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ وجود دارد و از مسیر مستقل است. بنابراین، می‌توانیم تابع $f(z)$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$F(z) \equiv \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

می‌توانیم نشان دهیم که $F(z)$ تابع اولیهٔ $f(z)$ است. رابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi + \int_z^{z_0} f(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

و تفاضل زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z) \Delta z \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z) \int_z^{z+\Delta z} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \end{aligned}$$

حال از طرفین قدرمطلق می‌گیریم؛ از نامساوی داریو استفاده می‌کنیم، و با فرض $\Delta z \rightarrow 0$ ، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \\ &\leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta z|} \max |f(\xi) - f(z)| |\Delta z| = 0 \end{aligned}$$

تساوی آخر در طرف راست از پیوستگی f حاصل می‌شود. به این ترتیب گزاره زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۸-۳-۶: فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در ناحیه R از \mathbb{C} تحلیلی باشد. در این صورت در هر نقطه $z \in R$ یک تابع تحلیلی $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ چنان وجود دارد که:

$$\frac{dF}{dz} = f(z)$$

توجه کنید که در اثبات گزاره ۸-۳-۶ فقط از پیوستگی f و این واقعیت که انتگرال خوش‌تعریف بود، بهره گرفتیم. این دو شرط برای اثبات تحلیلی بودن f کافی است. قضیه زیر، که به موررا منسوب است، این نکته را بیان می‌کند و عکس قضیه کوشی-گورسا است که بنابراین، توابع تحلیلی روی هر پربند بسته دارای انتگرال صفرند.

قضیه ۹-۳-۶: (قضیه موررا) فرض کنید تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در ناحیه همبند ساده R پیوسته باشد. اگر برای هر پربند ساده بسته C در R داشته باشیم

$$\oint_C f(\xi) d\xi = 0$$

در این صورت f در تمامی R تحلیلی است.

تمرینها

۱-۳-۶ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - 1 - i}$$

که در آن γ : (الف) خط واصل بین $z_1 = 2i$ و $z_2 = 3$ است. (ب) مسیر از z_1 تا $z = 0$ و سپس از $z = 0$ تا z_2 .

۲-۳-۶ فرض کنید $f(z)$ یک تابع کراندار (که لزوماً تحلیلی نیست) در طول پربند C باشد؛ یعنی $M \in \mathbb{R}^+$ چنان وجود دارد که

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C$$

نشان دهید

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

که در آن L طول پربند C است. این نامساوی را نامساوی داربو می‌گویند. ۳-۳-۶ فرض کنید f در داخل و روی دایره γ_0 که به صورت $|z - z_0| = r_0$ داده می‌شود، تحلیلی باشد و از آن در جهت مثبت انتگرال گرفته باشیم. نشان دهید نامساوی کوشی برقرار است:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r_0^n}$$

که در آن M مقدار بیشینه $|f(z)|$ روی γ_0 است.

مسائل

۱-۶ هر یک از اعداد مختلط زیر را به شکل دکارتی بنویسید.

$$\frac{2}{1-3i} \quad (\text{الف}) \quad \frac{1-i}{1+i} \quad (\text{ب}) \quad (1+i\sqrt{3})^2 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} \quad (\text{و}) \quad (1-i)^2 \quad (\text{ه}) \quad \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} \quad (\text{د})$$

۲-۶ مدول (اندازه، طول، قدرمطلق) و شناسه هر یک از اعداد مختلط زیر را پیدا کنید:

$$3i \quad (\text{الف}), \quad -2 \quad (\text{ب}), \quad 2-5i \quad (\text{ج}), \quad 1+i \quad (\text{د}), \quad 1-i \quad (\text{ه}), \quad 5+2i \quad (\text{و})$$

۳-۶ ریشه‌های زیر را محاسبه و آنها را رسم کنید

$$\sqrt[3]{1+i} \quad (\text{الف}), \quad \sqrt{-1} \quad (\text{ب}), \quad \sqrt[3]{1} \quad (\text{ج}), \quad \sqrt{-32} \quad (\text{د})$$

$$\sqrt{4+5i} \quad (\text{ه}), \quad \sqrt{-1} \quad (\text{و}), \quad \sqrt{-16i} \quad (\text{ز}), \quad \sqrt{-1} \quad (\text{ح})$$

۴-۶ ثابت کنید $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

۵-۶ ثابت کنید z حقیقی است اگر و فقط اگر $z = z^*$

۶-۶ مجموعه نقاطی را که توسط هر یک از شرایط زیر تعیین می‌شود، ترسیم کنید

$$|z+i| = |z-i| \quad (\text{ج}) \quad |z+2i| \leq 4 \quad (\text{ب}) \quad |z-2+i| = 2 \quad (\text{الف})$$

$$z^2 + (z^*)^2 = 2 \quad (\text{و}) \quad 2z + 3z^* = 1 \quad (\text{ه}) \quad \operatorname{Im}(\bar{z} + i) = 2 \quad (\text{د})$$

۷-۶ نشان دهید معادله دایره‌ای به شعاع r و به مرکز z_0 می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(zz_0^*) = r^2 - |z_0|^2$$

۸-۶ نشان دهید که

$$(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3}) \quad (\text{ب}) \quad (-1+i)^7 = -8(1+i) \quad (\text{الف})$$

۹-۶ چهار ریشه $z^4 + 4 = 0$ را بیابید و با استفاده از آن $z^2 + 4$ را به عوامل مربعی با ضرایب

حقیقی تجزیه کنید.

۱۰-۶ با فرض $z_1 z_2 \neq 0$ نشان دهید $\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = |z_1| |z_2|$ اگر و فقط اگر

$$\arg(z_1) - \arg(z_2) = 2n\pi$$

که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

۱۱-۶ با فرض $z_1 z_2 \neq 0$ نشان دهید $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ اگر و فقط اگر

$\arg(z_2) = 2n\pi$ ؛ که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ معنی هندسی این حکم چیست؟

۱۲-۶ فرض کنید $z \neq 1$ و $z^n = 1$. نشان دهید $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

۱۳-۶ z را با (x, y) نشان دهید و معادلاتی برای x و y بیابید که از $z^2 + z + 1 = 0$ به دست

می‌آیند. با حل این معادلات، ریشه‌های این معادله را بیابید. این جوابها را با جوابهایی که از حل

مستقیم معادله برحسب z به دست می‌آید، مقایسه کنید.

۱۴-۶ با فرض

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$z z^* = (\det z) = 1$ را بیابید و نشان دهید

۱۵-۶ مقدار i^i چیست؟

۱۶-۶ اتحادهای زیر برای مشتق‌گیری را، با استفاده از تعریف مشتق (یا هر چیز دیگری) و این

فرض که توابع در ناحیه معینی از \mathbb{C} مشتق‌پذیرند، اثبات کنید

$$\frac{d}{dz}(f + g) = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d}{dz}(fg) = \frac{df}{dz}g + f\frac{dg}{dz} \quad (\text{ب})$$

$$g(z) \neq 0 \text{ وقتی } \frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2} \quad (\text{ج})$$

۱۷-۶ نشان دهید: (الف) مجموع و حاصلضرب دو تابع تام، توابع تام هستند، (ب) نسبت دو تابع

تام، در همه جا، جز صفر(های) مخرج، تحلیلی است.

۱۸-۶ اتحادهای زیر را ثابت کنید

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y, \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y \quad (\text{الف})$$

$$\operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y, \operatorname{Im}(\cos z) = -\sin x \sinh y \quad (\text{ب})$$

$$\operatorname{Re}(\sinh z) = \sinh x \cos y, \operatorname{Im}(\sinh z) = \cosh x \sin y \quad (\text{ج})$$

$$\operatorname{Re}(\cosh z) = \cosh x \cos y, \operatorname{Im}(\cosh z) = \sinh x \sin y \quad (\text{د})$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \quad (\text{ه})$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

۱۹-۶ نشان دهید هیچ کمیتی چون $z \in \mathbb{C}$ وجود ندارد که در آن $e^z = 0$.

۲۰-۶ تمام صفرهای $\sinh z$ و $\cosh z$ را بیابید.

۲۱-۶ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \quad (\text{ب})$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \quad (\text{ج})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z \quad (\text{د})$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \sin^2 z = 2 \sin z \cos z \quad (\text{ه})$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\sin(z_1 + z_2)}{\cos(z_1 + z_2)} = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2} \quad (\text{و})$$

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z), \sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z) \quad (\text{ز})$$

$$\tan 2z = \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z} \quad (\text{ح})$$

۲۲-۶ درستی اتحادهای هذلولوی زیر را تحقیق کنید

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \quad (\text{ب})$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \quad (\text{ج})$$

$$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z, \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z \quad (\text{د})$$

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\sinh(z_1 + z_2)}{\cosh(z_1 + z_2)} = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2} \quad (\text{ه})$$

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2}(\cosh 2z + 1), \sinh^2 z = \frac{1}{2}(\cosh 2z - 1) \quad (\text{و})$$

$$\tanh 2z = \frac{2 \tanh z}{1 + \tanh^2 z} \quad (\text{ز})$$

$$\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh x - i \sin y}{\cosh x - \cos y} \quad (\text{ب}) \quad \tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\sinh x + i \sin y}{\cosh x + \cos y} \quad (\text{الف})$$

۲۴-۶ در کجا تابع $f(z) = 3z^2 - 2ze^{z^2} + e^{-z}$ مشتق پذیر است؟

۲۵-۶ تمام مقادیر z را که در روابط زیر صدق می کنند، پیدا کنید

$$e^{2z-1} = 1 \quad (\text{ج}) \quad e^z = 1 + \sqrt{3}i \quad (\text{ب}) \quad e^z = -3 \quad (\text{الف})$$

۲۶-۶ نشان دهید $1 < |e^{-2z}| < 1$ اگر و فقط اگر $\text{Re}(z) > 0$.

۲۷-۶ نشان دهید $\exp(z^*)$ در هیچ جا تحلیلی نیست.

۲۸-۶ نشان دهید به ازای همه مقادیر z داریم $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

۲۹-۶ نشان دهید هم جزء حقیقی و هم جزء موهومی هر تابع تحلیلی هماهنگ است.

۳۰-۶ نشان دهید هر یک از توابع زیر، $u(x, y)$ ، هماهنگ است، و مزدوج هماهنگ تابع $v(x, y)$ ،

را چنان بیابید که $u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد

$$x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{وقتی} \quad \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{ج}) \quad e^x \cos y \quad (\text{ب}) \quad x^2 - 3xy^2 \quad (\text{الف})$$

$$e^{y^2 - x^2} \cos 2xy \quad (\text{ا}) \quad e^{-2y} \cos 2x \quad (\text{د})$$

$$e^x (x \cos y - y \sin y) + 2 \sinh y \sin x + x^2 - 3xy^2 + y \quad (\text{و})$$

۳۱-۶ با این فرض که α و β حقیقی اند، حاصل جمعهای زیر را بیابید

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta) \quad (\text{الف})$$

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta) \quad (\text{ب})$$

۳۲-۶ درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\sin^{-1} z = -i \ln[i(z + \sqrt{z^2 - 1})] \quad (\text{ب}) \quad \cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (\text{الف})$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (\text{د}) \quad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (\text{و}) \quad \sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad (\text{ا})$$

۳۳-۶ منحنی تعریف شده به وسیله هر یک از معادلات زیر را بیابید

$$z = 1 - it \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (\text{الف})$$

$$z = t + it^2 \quad -\infty < t < +\infty \quad (\text{ب})$$

$$z = a(\cos t + i \sin t) \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, a > 0 \quad (\text{ج})$$

$$z = t + \frac{i}{t} \quad -\infty < t < 0 \quad (\text{د})$$

۳۴-۶ نشان دهید پتانسیل مختلط برای یک سیم مستقیم طویل واقع در (x_0, y_0) عبارت است از $w(z) = 2\lambda \ln(z - z_0)$.

۳۵-۶ (الف) تمام مراحل حذف شده در مثال ۷-۲-۶ را بیان کنید. (ب) عملیات مثال ۸-۲-۶ را کامل کنید.

۳۶-۶ فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ توسط $f(z) = z' = x' + iy'$ بیان شده باشد. نشان دهید اگر f تحلیلی باشد و $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0$ در این صورت $\partial^2 \phi / \partial x'^2 + \partial^2 \phi / \partial y'^2 = 0$ (یعنی توابع تحلیلی، توابع هماهنگ در صفحه z را به توابع هماهنگ در صفحه z' می نگارند).

۳۷-۶ انتگرالهای (الف) $\int_0^{2\pi} e^{it} dt$ و (ب) $\int_0^\infty e^{-zt} dt$ را محاسبه کنید، که در آنها $\text{Re}(z) > 0$.

۳۸-۶ فرض کنید $f(t) = u(t) + iv(t)$ یک تابع مختلط مقدار پیوسته (قطعه‌ای) از یک متغیر حقیقی t باشد که در بازه $a \leq t \leq b$ تعریف شده است. نشان دهید اگر $F(t) = U(t) + iV(t)$ چنان تابعی باشد که $dF/dt = f(t)$ در این صورت

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

۳۹-۶ مقدار انتگرال $\int_C [(z+2)/z] dz$ را بیابید، که در آن C عبارت است از

$$\text{(الف) نیم‌دایره } z = 2e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{(ب) نیم‌دایره } z = 2e^{i\theta}, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{(ج) دایره } z = 2e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

۴۰-۶ انتگرال $\int_C z^m (z^*)^n dz$ را محاسبه کنید، که در آن m و n اعداد صحیح‌اند و C دایره $|z| = 1$ در جهت پادساعتگرد است.

۴۱-۶ فرض کنید C مرز مربعی باشد که رأسهای آن در نقاط $z = 0, z = 1, z = 1 + i, z = i$ و

$$\oint_C (5z + 2) dz = 0$$
 نشان دهید.

۴۲-۶ با فرض جهت ساعتگرد برای C ، پرند مسئله ۴۱-۶، انتگرال $\oint_C \pi \exp(\pi z^*) dz$ را

محاسبه کنید.

۴۳-۶ فرض کنید C_1 یک پربند بسته ساده باشد. C_1 را چنان به پربند C_2 تغییر دهید که در این عمل C_1 با هیچ تکنیکی تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ برخورد نکند. نشان دهید $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$. [یعنی، همواره می‌توان پربند را به شکلهای ساده‌تری (نظیر یک دایره) تبدیل، و سپس انتگرال را محاسبه کرد.]

۴۴-۶ با استفاده از نتیجه مسئله ۴۳-۶، نشان دهید وقتی C مرز مربع $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 2$ با جهت پادساعتگرد باشد، داریم

$$\oint_C \frac{dz}{z-1-i} = 2\pi i \quad \text{و} \quad \oint_C (z-1-i)^{m-1} dz = 0 \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

۴۵-۶ با استفاده از معادله (۲۶-۶)، نشان دهید

$$\frac{dz^m}{dz} = mz^{m-1}$$

۴۶-۶ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)}$$

که در آن C دایره $|z|=3$ و انتگرال‌گیری در جهت مثبت است.

۴۷-۶ فرض کنید C دایره $|z|=3$ باشد، که در جهت مثبت روی آن انتگرال‌گیری می‌شود. نشان دهید اگر

$$g(z) = \oint_C \frac{2\xi^2 - \xi - 1}{\xi - z} d\xi \quad |z| \neq 3$$

در این صورت $g(2) = 10\pi i$. مقدار $g(z)$ به ازای $|z| > 3$ چقدر است؟

۴۸-۶ به ازای $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که به صورت زیر بیان می‌شود

$$g(z) = \oint_C \frac{\xi^2 + 3\xi}{(\xi - z)^2} d\xi$$

که در آن C پربند بسته ساده‌ای است که در جهت مثبت روی آن انتگرال‌گیری می‌شود. نشان دهید وقتی C نقطه $z=1$ را دور بزند، $g(1) = 6\pi i$ و وقتی $z=1$ خارج از C واقع باشد، آنگاه $g(1) = 0$.

۴۹-۶ نشان دهید وقتی f در داخل و روی یک پربند بسته ساده C واقع باشد و z_0 روی C نباشد، داریم

$$\oint_C \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

۵۰-۶ فرض کنید C مرز مربعی باشد که اضلاعش در امتداد خطوط $x = \pm 3$ و $y = \pm 3$ قرار دارند. برای انتگرالگیری در جهت مثبت هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\oint_C \frac{e^{-z}}{z - i\frac{\pi}{4}} dz$ (ب) $\oint_C \frac{e^z}{z(z^2 + 10)} dz$ (ج) $\oint_C \frac{\cos z}{(z - \frac{\pi}{4})(z^2 - 10)} dz$

(د) $\oint_C \frac{\tan z}{(z - \alpha)^2} dz$ $-3 < \alpha < 3$ (ه) $\oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2 - 10)(z - 2)}$

(و) $\oint_C \frac{\sinh z}{z^2} dz$ (ز) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2} dz$ (ح) $\oint_C \frac{\cos z}{z^2} dz$

(ط) $\oint_C \frac{\cos z}{(z - i\frac{\pi}{4})^2} dz$ (ی) $\oint_C \frac{e^z}{(z - i\pi)^2} dz$ (ک) $\oint_C \frac{\cos z}{z + i\pi} dz$

(ل) $\oint_C \frac{e^z}{z^2 - 5z + 4} dz$ (م) $\oint_C \frac{\sinh z}{(z - i\frac{\pi}{4})^2} dz$ (ن) $\oint_C \frac{\cosh z}{(z - i\frac{\pi}{4})^2} dz$

۵۱-۶ فرض کنید C دایره $|z - i| = 3$ باشد که در جهت مثبت روی آن انتگرالگیری می‌شود. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را پیدا کنید

(الف) $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz$ (ب) $\oint_C \frac{\sinh z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$ (ج) $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 9}$

(د) $\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}$ (ه) $\oint_C \frac{\cosh z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$ (و) $\oint_C \frac{z^2 + 4 - 3z}{z^2 - 4z + 3} dz$

۵۲-۶ نشان دهید چندجمله‌ایهای لژاندر به ازای $|x| < 1$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n (2\pi i)} \oint_C \frac{(1 - z^2)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

که در آن C دایره واحد حول مبدأ است.



آنالیز مختلط ۲: حساب مانده‌ها

یکی از تواناترین ابزارهای آنالیز مختلط در اختیار ما قرار می‌دهد عبارت است از نظریه مانده‌ها، که محاسبه برخی انتگرالهای معین را که حل آنها به روشهای دیگر ناممکن است، میسر می‌کند. استخراج، کاربرد، و تحلیل این ابزار قسمت عمده این فصل را تشکیل می‌دهد. لیکن، لازم است ابتدا چند مفهوم اولیه را بیان کنیم.

۱-۷ سریهای توابع مختلط

همگرایی سریها در فضای متری را در فصل پنجم مورد بحث قرار دادیم. همچنین دیدیم که سیستم اعداد مختلط قسمت نرم $|z|$ و $\|z\|$ یک فضای کامل است. در این بخش، همگرایی دنباله و سریهای اعداد مختلط را مجدداً بررسی می‌کنیم و چند نمایش توابع مختلط برحسب سریها را به دست می‌آوریم.

۱-۱-۷ همگرایی سریها

گوییم دنباله $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط به حد z همگرا می‌شود، اگر داشته باشیم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z - z_k| = 0$$

به بیان دیگر، به ازای هر عدد مثبت ε یک عدد صحیح N چنان وجود داشته باشد که هرگاه $k \geq N$ ، آنگاه $|z - z_k| < \varepsilon$. به آسانی می توان گزارهٔ زیر را اثبات کرد.

گزارهٔ ۱-۱-۷: فرض کنید $\{z_k = x_k + iy_k\}_{k=1}^{\infty}$ در این صورت $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$. اگر و فقط اگر داشته باشیم $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$.

می توان با مجموعیابی جزء به جزء، سریها را به دنباله ها تبدیل کرد. به عنوان مثال، برای مطالعهٔ سری نامتناهی $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ، مجموعیابیهای جزء به جزء

$$Z_n \equiv \sum_{k=1}^n z_k$$

را تشکیل می دهیم و دنبالهٔ $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بررسی می کنیم. به این ترتیب، می گوئیم سری نامتناهی $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ به Z همگرا می شود، اگر داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z$$

اینها، همه تعریفهایی بودند که در فصل پنجم با آنها مواجه شدیم. در اینجا برای کامل کردن بحث و جانداختن برخی نمادگذاریها، آنها را مجدداً مورد بحث قرار می دهیم. گزارهٔ زیر، یکی از نتایج مستقیم گزارهٔ ۱-۱-۷ است.

گزارهٔ ۲-۱-۷: فرض کنید $\{z_k = x_k + iy_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $Z = X + iY$. در این صورت $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = Z$ اگر و فقط اگر $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X$ و $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = Y$.

اغلب بهتر است بقیهٔ جملات، بعد از جملهٔ n ام، را به صورت $R_n \equiv Z - Z_n$ تعریف کنیم. برای تثبیت همگرایی یک سری کافی است نشان دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

مثال ۱-۱-۷: سریهایی که غالباً در آنالیز به کار می روند، سریهای هندسی اند

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

نشان می دهیم به ازای $|z| < 1$ ، این سری به $1/(1-z)$ همگرا می شود.

برای مجموع‌یابی جزء به جزء n جمله، داریم

$$Z_n = \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \quad (1)$$

(۱) را در z ضرب می‌کنیم

$$zZ_n = z + z^2 + \cdots + z^n + z^{n+1} \quad (2)$$

طرفین (۲) را از طرفین (۱) کم می‌کنیم، می‌رسیم به

$$Z_n - zZ_n = 1 - z^{n+1} \Rightarrow Z_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

حال، با نشان دادن این نکته که باقیماندهٔ جملات، بعد از جمله n ام در حد $n \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می‌کند، نشان می‌دهیم که Z_n به $1/(1-z)$ همگرا می‌شود. داریم

$$R_n = Z - Z_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

و به‌ازای $|z| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{1}{|1-z|} \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{n+1} = 0$$

بنابراین، وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه $R_n \rightarrow 0$ می‌رسیم به

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

۷-۱-۲ سریهای تایلور و لوران

بسط توابع برحسب چندجمله‌ایها و یکجمله‌ایها در حساب حائز اهمیت است و در تحلیل فصل ۵ مورد تأکید قرار گرفت. اکنون این مفهوم را در مورد توابع تحلیلی به‌کار می‌گیریم.

قضیه ۷-۱-۳: (سری تایلور) فرض کنید f در داخل دایره C_0 به مرکز z_0 و شعاع r_0 تحلیلی باشد. در این صورت در هر نقطه z در داخل C_0 داریم

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (1-7)$$

یعنی، سری توانی، به ازای $|z - z_0| < r_0$ به $f(z)$ همگرا می‌شود.

اثبات. از CIF و این نکته که z در داخل C_0 قرار دارد، داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k \end{aligned}$$

تساوی آخر از مثال ۷-۱-۱ و این واقعیت نتیجه می‌شود که $|(z - z_0)/(\xi - z_0)| < 1$ ، زیرا z در داخل دایره C_0 و ξ روی آن قرار دارد. با قرار دادن در CIF، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k \right] d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} f(\xi) \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

■ که همان نتیجه مطلوب است. تساوی آخر از معادله (۶-۲۶) نتیجه می‌شود.

به‌ازای $z_0 = 0$ ، سری مک‌لوران را به‌دست می‌آوریم

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

برای هر دو سری، $f^{(0)}(z_0) \equiv f(z_0)$.

بسط تیلور، تحلیلی بودن تابع در تمام نقاط داخل دایره C_0 را ایجاب می‌کند. بیشتر اوقات ممکن است نقطه‌ای در داخل C_0 واقع باشد، که در آن تابع تحلیلی نیست. سری لوران با چنین مواردی وفق داده می‌شود.

قضیه ۷-۱۷: (سری لوران) فرض کنید C_1 و C_2 دایره‌هایی در صفحه z به مرکز z_0 و شعاعهای r_1 و r_2 باشند، که $r_1 > r_2$. فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ روی C_1 و C_2 و تمام ناحیه طوقی بین دو دایره، تحلیلی باشد. در این صورت در هر نقطه $z \in R$ ، $f(z)$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

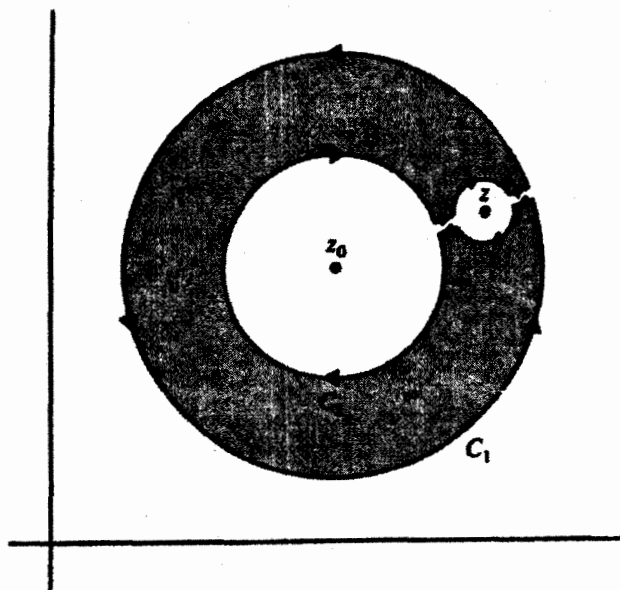
که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

■ و C هر پربندی در داخل R است که z_0 را احاطه می‌کند.

اثبات. فرض کنید γ یک پربند کوچک در ناحیه R باشد که مطابق شکل ۷-۱۷، z_0 را احاطه کرده است. برای پربند مرکب C' ، قضیه کوشی-گورسا می‌دهد $\oint_{C'} f(\xi)/(\xi - z) d\xi = 0$ ، اما، چون C' از سه قسمت تشکیل شده است، که دو قسمت آن در جهت ساعتگرد طی می‌شوند، می‌رسیم به

$$0 = \oint_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = - \oint_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



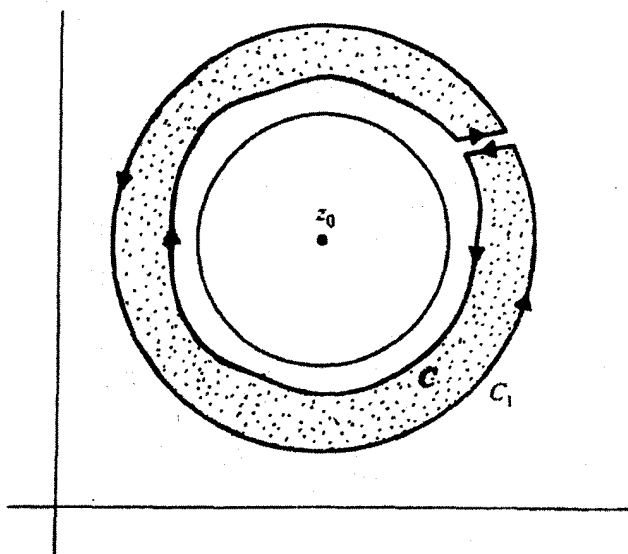
شکل ۱-۷ ناحیه طوقی که در بسط لوران مورد استفاده قرار می‌گیرد. فاصله بین قسمتهای مستقیم پربند C' برای نشان دادن جهت حرکت است.

که در آن انتگرالهای روی γ و C_2 در جهت پادساعتگرد فرض شده است. انتگرال γ بر طبق CIF، برابر است با $2\pi i f(z)$. بنابراین، می‌رسیم به

$$2\pi i f(z) = \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2-7)$$

از همان ترفندی که برای به دست آوردن بسط تیلور به کار بردیم، بهره می‌گیریم. چون z در ناحیه طوقی قرار دارد، پس $r_1 < |z - z_0| < r_2$. وقتی کسرها را بسط می‌دهیم، باید این معنا را در نظر داشته باشیم. در حالت خاص، به ازای $\xi \in C_1$ ، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$



شکل ۲-۷ تابع در ناحیه هاشورزده تحلیلی است. بنابراین، انتگرالهای روی C_1 و C_2 با یکدیگر برابرند.

و به ازای $\xi \in C_2$ ، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{-(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

با قرار دادن دو بسط بالا در معادله (۲-۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \oint_{C_2} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi \quad (3-7) \end{aligned}$$

حال، یک پربند دلخواه C را در R که z_0 را احاطه می‌کند، در نظر می‌گیریم. در شکل ۲-۷ ناحیه‌ای را مشاهده می‌کنیم که توسط یک پربند مرکب از C_1 و C_2 محصور شده است. در این ناحیه، $f(\xi)/(\xi - z_0)^{n+1}$ تحلیلی است (زیرا ξ هرگز برابر z_0 نمی‌شود). بنابراین، انتگرال روی

این پربند مرکب، بنابر قضیه کوشی-گورسا، باید صفر شود. با روشی که اکنون دیگر با آن آشناییم، می‌رسیم به:

$$\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

به همین ترتیب

$$\oint_{C_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi = \oint_C f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi$$

در جمع‌بندی دوم در معادله (۳-۷) قرار می‌دهیم $n + 1 \equiv -m$ تا به صورت زیر درآید

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{-m}} \oint_C f(\xi)(\xi - z_0)^{-m-1} d\xi = \sum_{m=-\infty}^{-1} (z - z_0)^m \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}} d\xi$$

با تغییر اندیس ظاهری به n ، داریم

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

با قرار دادن این مقدار در (۳-۷)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم دو مجموع را با هم ترکیب و طرفین را بر $2\pi i$ تقسیم کنیم، می‌رسیم به

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right]$$

که همان بسط مطلوب است.

تا وقتی $r_1 < |z - z_0| < r_2$ بسط لوران همگراست. در حالت خاص، اگر $r_2 = \infty$ ، یعنی، اگر تابع در تمام ناحیه داخلی دایره بزرگ تحلیلی باشد، در این صورت a_n به‌ازای $n = -1, -2, \dots, -\infty$ صفر خواهد بود، زیرا $f(\xi)/(\xi - z_0)^{n+1}$ به‌ازای مقادیر منفی تحلیلی خواهد بود. بنابراین، تنها توانهای مثبت $(z - z_0)$ در سری حضور خواهند داشت و چنانکه باید، همان سری تیلور را به‌دست خواهیم آورد.

واضح است که می‌توانیم C_1 را منبسط و C_2 را منقبض کنیم تا به نقطه‌ای برسیم که دیگر در آن نقطه f تحلیلی نیست. این نکته، از نحوه اثبات، که در آن تنها تحلیلی بودن در ناحیه طوقی از اهمیت برخوردار است، نه اندازه آن، واضح است. بنابراین می‌توانیم با منبسط کردن C_1 و منقبض کردن C_2 تمام نقاط ممکن تحلیلی را در آن وارد کنیم.

مثال ۷-۱-۲: حال چند تابع را برحسب سریها بسط می‌دهیم. برای توابع تام، هیچ نقطه‌ای در کل صفحه مختلط وجود ندارد که این توابع در آن تحلیلی نباشند. بنابراین، تنها توانهای مثبت $(z - z_0)$ حضور خواهند داشت، و یک بسط تیلوری خواهیم داشت که به‌ازای همه مقادیر z برقرار است.

(الف) حال e^z را حول $z_0 = 0$ بسط می‌دهیم. مشتق n ام e^z برابر e^z است. بنابراین $f^{(n)}(0) = 1$ و با بسط تیلور می‌رسیم به

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(ب) سری مک‌لوران برای $\sin z$ را با توجه به اینکه

$$\left. \frac{d^{(n)}}{dz^n} (\sin z) \right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

و جایگزین کردن آن در بسط تیلور به‌دست می‌آوریم

$$\sin z = \sum_{\text{فرد } n} (-1)^{(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

به همین ترتیب، داریم

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

(ج) تابع $1/(1+z)$ نام نیست، از این رو ناحیه همگرایی آن محدود است. حال بسط مک‌لوران این تابع را می‌یابیم. از مبدأ ($z_0 = 0$) آغاز می‌کنیم؛ این تابع در داخل تمام دایره‌هایی به شعاع $r < 1$ تحلیلی است. در $r = 1$ ، به یک تکینگی، نقطه $z = -1$ ، برمی‌خوریم. بنابراین، این سری به‌ازای تمام نقاط z که در آنها $|z| < 1$ ، همگراست. برای چنین نقاطی، داریم

$$f^{(n)}(0) \equiv \left. \frac{d^n}{dz^n} [(1+z)^{-1}] \right|_{z=0} = (-1)^n n!$$

بنابراین

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

با تغییر z به $-z$ ، می‌رسیم به

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

● که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۷-۱-۱ به‌دست آوردیم.

مثال ۷-۱-۳: حال، تابع زیر را برحسب سری لوران بسط می‌دهیم

$$f(z) = \frac{2+3z}{z^2+z^3}$$

این تابع را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{2+3z}{1+z} \right) = \frac{1}{z^2} \left(3 - \frac{1}{1+z} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \left(3 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = \frac{1}{z^2} (3 - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots) \end{aligned}$$

↑
 $|z| < 1$

$$= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \dots$$

این سری به‌ازای $1 < |z| < \infty$ همگراست. توجه کنید که توانهای منفی z نیز وجود دارند. در واقع، با استفاده از نمادگذاری قضیه ۷-۱-۴، خواهیم داشت

$$a_{-2} = 2, \quad a_{-1} = 1, \quad a_n = 0 \quad n \leq -3$$

و

$$a_n = (-1)^{n+1} \quad n \geq 0$$

۷-۱-۳ خواص سریها

اگر سری $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ همگرا باشد، هم جزء حقیقی، $\sum x_k$ و هم جزء موهومی، $\sum y_k$ ، سری همگرا خواهند بود. بنابر معلوماتی که از حسابان داریم، شرط لازم برای همگرایی سریهای حقیقی $\sum x_k$ و $\sum y_k$ این است که $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. بنابراین، برای یک سری همگرا از اعداد مختلط

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$$

از این رو، جملات این نوع سری باید کراندار باشند. بنابراین، یک عدد صحیح چنان وجود دارد که

$$M \ni |z_k| < M \quad \forall k$$

سری مختلط را مطلقاً همگرا می‌گویند اگر سریهای حقیقی زیر همگرا باشند

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

بدیهی است که همگرایی مطلق، به معنی همگرایی است. اکنون یک گزاره مهم را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۷-۱-۵: اگر سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ که در آن $z_1 \neq z_0$ به‌ازای $z = z_1$ همگرا باشد، به‌ازای هر مقدار z که در شرط $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ صدق کند، مطلقاً همگرا خواهد بود.

اثبات. چون سری به ازای $z = z_1$ همگراست، کراندار است. از این رو، عددی مثبت چنان وجود دارد که

$$M \ni |a_k(z_1 - z_0)^k| < M$$

و

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k(z_1 - z_0)^k \frac{(z - z_0)^k}{(z_1 - z_0)^k} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z_1 - z_0)^k| \left| \frac{(z - z_0)^k}{(z_1 - z_0)^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M C^k \\ &= M \sum_{k=0}^{\infty} C^k = \frac{M}{1 - C} \end{aligned}$$

چون در آن $C \equiv |(z - z_0)/(z_1 - z_0)|$ یک عدد مثبت حقیقی کوچکتر از ۱ است. عبارت سمت راست یک عدد محدود (مثبت) است، سری مقادیر مطلق همگراست و اثبات کامل می‌شود. ■

بزرگترین دایره حول z_0 را که برای آن سری توانی گزاره ۷-۱-۵ همگرا می‌شود، دایره همگرایی سری توانی می‌نامند. این گزاره حاکی از آن است که سری نمی‌تواند در هر نقطه دیگر z_1 که در خارج این دایره است، همگرا باشد زیرا در این صورت این سری در داخل دایره بزرگتری به مرکز z_0 و شعاع $|z_1 - z_0|$ همگرا خواهد بود.

به همین ترتیب، اگر سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} b_k/(z - z_0)^k$ به ازای z_1 همگرا باشد، در این صورت به ازای تمام مقادیری از z که در $|z - z_0|^{-1} < |z_1 - z_0|^{-1}$ یا $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ صدق کنند، یعنی، برای تمام نقاط خارج از دایره‌ای به مرکز z_0 که از z_1 می‌گذرد، همگرا خواهد بود. پس ناحیه همگرایی ناحیه خارجی یک دایره به مرکز z_0 است.

در موقع تعیین همگرایی یک سری توانی، رفتار باقیمانده پس از n جمله را در نظر می‌گیریم. اگر این باقیمانده به صفر میل کند، گوئیم سری همگراست. سری توانی زیر را در نظر بگیرید

$$S(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (4-7)$$

که فرض می‌کنیم در تمام نقاط داخل دایره‌ای که برای آن $|z - z_0| = r$ همگرا باشد. معنی این حکم آن است که عبارت

$$\begin{aligned} R_N(z) &\equiv S(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n(z - z_0)^n \end{aligned}$$

به‌ازای $N \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند. پس، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح N_ε چنان وجود دارد که

$$N > N_\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |R_n(z)| < \varepsilon$$

عموماً، عدد صحیح N_ε ممکن است به z وابسته باشد؛ یعنی، به‌ازای مقادیر مختلف z ممکن است ناگزیر شویم N_ε های مختلفی انتخاب کنیم. وقتی N_ε مستقل از z باشد، گوئیم همگرایی یکنواخت است. سری توانی معادله (۴-۷) و همان‌طوری که قضیه زیر نشان می‌دهد، همگراست.

قضیه ۶-۱-۷: فرض کنید سری توانی

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

در تمام نقاط داخل دایره همگرایی‌اش، $|z - z_0| = r$ ، همگرا باشد. در این صورت در تمام نقاط داخل آن دایره به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود. ■

اثبات. فرض کنید z' نقطه‌ای ثابت در داخل دایره همگرایی باشد (که می‌تواند حتی الامکان از z_0 دور باشد). عدد حقیقی مثبت Q_N را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q_N \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n(z' - z_0)^n| \quad (5-7)$$

همگرایی ایجاب می‌کند که، به‌ازای عدد صحیح مثبت N_ε ، وقتی $N > N_\varepsilon$ ، داشته باشیم

$Q_N < \varepsilon$. از سوی دیگر، به ازای هر z که فاصله اش از z_0 کوچکتر از $|z' - z_0|$ باشد، داریم

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z - z_0|^n \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z' - z_0|^n$$

$$= \sum_{n=N}^m |a_n| (z' - z_0)^n \leq Q_N < \varepsilon \quad N > N_\varepsilon$$

↑
زیرا تمام جملات معادله (۵-۷)
مثبت اند و همه آنها در سمت
چپ گنجانده نشده اند.

توجه کنید که N_ε از z مستقل است. ممکن است این عدد به z' بستگی داشته باشد، ولی همین که z' را تثبیت کردیم، N_ε را می توان یکبار و برای همیشه انتخاب کرد. نامساوی بالا به ازای تمام مقادیر m صادق است؛ به خصوص وقتی $m \rightarrow \infty$ که در آن صورت سمت چپ آن به $R_N(z)$ تبدیل می شود، برقرار است. به این ترتیب، ثابت کرده ایم که

$$|R_N(z)| \leq Q < \varepsilon \quad N > N_\varepsilon$$

که در آن N_ε از z مستقل است. این عبارت همگرایی یکنواخت سری توانی را ثابت می کند. ■
می توان نشان داد که سری توانی $S(z)$ برای نقاط داخل دایره همگرایی اش پیوسته است (تمرین ۷-۱-۲).

با قرار دادن معکوس $(z - z_0)$ در سری توانی، می توانیم نشان دهیم که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n / (z - z_0)^n$ در طوق $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$ همگرا باشد، به ازای تمام z های واقع در آن طوق به طور یکنواخت همگرا خواهد بود، و این سری نمایانگر یک تابع پیوسته z در آنجاست.

گزاره ۷-۱-۷: فرض کنید C نمایانگر پربندی در داخل دایره همگرایی سری توانی $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ باشد. فرض کنید $g: C \rightarrow C$ روی C پیوسته باشد. در این صورت سری را که از ضرب هر جمله سری توانی در $g(z)$ به دست می آید، می توان جمله به جمله انتگرال گیری کرد

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz \quad (6-7)$$

اثبات . (۶-۷) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz + \int_C g(z)R_N(z)dz$$

و توجه می‌کنیم که انتگرال سمت چپ وجود دارد، زیرا $S(z)$ و $g(z)$ هر دو پیوسته‌اند. به همین ترتیب، مجموع سمت راست وجود دارد، زیرا مجموع تعداد محدودی از انتگرالهای توابع پیوسته است. به این ترتیب، انتگرال آخر در سمت راست نیز وجود دارد. استدلال متعارف برای تحقیق در درستی تساوی زیر به عنوان مسئله برعهده خواننده واگذار می‌شود

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_C g(z)R_N(z)dz = 0$$

با این کار، روند اثبات تکمیل می‌شود.

یکی از نتایج مهم این گزاره وقتی به دست می‌آید که برای پر بند C یک پر بند ساده بسته و برای $g(z)$ مقدار ۱ قرار دهیم. در این صورت، به ازای تمام n ها، می‌رسیم به

$$\oint_C g(z)(z - z_0)^n dz = \int_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad \forall n$$

زیرا، $(z - z_0)^n$ تابعی نام و قضیه کوشی-گورسا هم اعمال می‌شود. بنابراین، معادله (۶-۷) برای هر پر بند ساده بسته C در داخل دایره همگرایی می‌دهد $\oint_C S(z)dz = 0$. بنابر پیوستگی $S(z)$ و قضیه موررا، $S(z)$ در داخل دایره همگرایی‌اش، تحلیلی است. به این ترتیب، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۷-۱-۸: هر سری توانی همگرا تابعی را نمایش می‌دهد که در هر نقطه در داخل دایره همگرایی آن سری تحلیلی باشد.

توجه کرده‌اید که مشتق هر تابع تحلیلی را می‌توان برحسب انتگرالی پر بندی بیان کرد (قضیه ۶-۳-۵). از سوی دیگر، گزاره ۷-۱-۷ برای ما این امکان را فراهم می‌آورد که از سری توانی، جمله به جمله انتگرال بگیریم. با ترکیب این دو نتیجه، می‌توانیم قضیه زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۷-۱-۹: از هر سری توانی همگرا می‌توان در هر نقطه z واقع در داخل دایره همگرایی آن سری، جمله به جمله مشتق گرفت؛ یعنی

$$\frac{dS(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

اثبات. چون $S(z)$ تحلیلی است، مشتق آن با رابطه زیر بیان می شود

$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{S(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

که در آن C یک پربند ساده بسته است که z را احاطه کرده و در داخل دایره همگرایی قرار دارد. این امر ایجاب می کند که در معادله (۶-۷)، z را به ξ تبدیل و عبارت زیر را اختیار کنیم

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{(\xi - z)^2} \right]$$

از سمت چپ معادله حاصل، مشتق $S(z)$ را داریم و سمت راست منجر می شود به

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^2} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

↑
بنابه قضیه ۵-۳-۶

به کمک مقایسه روابط بالا، قضیه اثبات می شود.

قضیه ۹-۱-۷ و گزاره ۷-۱-۷ برای تعیین نمایشهای سری برخی توابع برحسب توابع ساده تر، مفیدند. در خلال مثالهای زیر این نکته روشن می شود.

مثال ۷-۱-۴: می توانیم با مشتقگیری از طرفین این سری

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (1)$$

بسط این سری را به ازای $1/(1+z)^2$ به دست آوردیم

$$-\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z} \right) = \frac{1}{(1+z)^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dz} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$$

با یکبار دیگر مشتقگیری، می رسیم به

$$-\frac{2}{(1+z)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{d}{dz} z^{n-1} = - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2}$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = +\frac{1}{1} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2} = \frac{1}{1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$$

می‌توانیم از طرفین (۱) انتگرال نامعین بگیریم. این عمل، مادام که خود را به نقاط واقع در ناحیه تحلیلی این سری محدود کنیم، مجاز است. در این حالت، این ناحیه عبارت است از کل دایره $|z| = 1$. در این صورت، عبارت سمت چپ تبدیل می‌شود به $\ln(1+z)$ ، و می‌توانیم بنویسیم

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

یکتایی نمایشها. به کمک سریهای تیلور و لوران امکان می‌یابیم که هر تابع تحلیلی را برحسب سریهای توانی بسط دهیم. در مورد سری تیلور $f(z)$ این بسط امری عادی است زیرا ضریب جمله m ام صرفاً عبارت است از $f^{(n)}(z_0)/n!$ ، که در آن z_0 مرکز دایره همگرایی است. اما وقتی سری لوران قابل اعمال باشد، ضریب m ام، مطابق قضیه ۷-۱-۴، عبارت است از a_n که عموماً محاسبه آسانی دارد. معمولاً مقادیر a_n را می‌توان با واریسی و انجام بعضی عملیات با سریهای معلوم، یافت. اما اگر برای تعیین این ضرایب، از چنین روشی شهودی بهره گیریم، می‌توانیم مطمئن باشیم که به سری لوران دست نیافته‌ایم؟ قضیه زیر به این معضل پاسخ می‌دهد.

قضیه ۷-۱-۱۰: اگر سری $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ در تمام نقاط واقع در یک ناحیه طوقی حول z_0 به $f(z)$ همگرا شود، در این صورت این سری بسط سری لوران برای $f(z)$ در آن ناحیه است. ■

اثبات. از قضیه ۷-۱-۷، که آن را بسط می‌دهیم تا توانهای منفی $(z - z_0)$ را نیز شامل شود، همراه با

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{k+1}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

بهره می‌گیریم، تا برسیم به

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_C \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{k-n+1}} \end{aligned}$$

که در آن C دایره‌ای در داخل طوقی است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{k-n+1}} = \delta_{kn}$$

این رابطه، به نوبه خود، حاکی از آن است که

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = a_k$$

بنابراین، ضریب سری توانی مفروض، دقیقاً همان ضریب سری لوران است، و این دو باید یکسان باشند. ■

برای روشنتر شدن ایده‌هایی تجربیدی که در مجموعه قضایا و گزاره‌های قبلی آوردیم، چند مثال را ملاحظه می‌کنیم. اما، اگر بر مبحث حساب سریهای توانی مسلط باشیم، می‌توانیم گستره وسیعتری از مثالها را بررسی کنیم. اثبات قضیه زیر که در ضمن آن در زمینه سری توانی دستکارهای ریاضی قابل ملاحظه‌ای اجرا می‌شود، چندان دشوار نیست.

قضیه ۷-۱۱: فرض کنید دو سری توانی زیر در داخل دایره $|z-z_0|=r$ همگرا باشند

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{و} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

در این صورت به‌ازای مقادیر z در داخل این دایره، مجموع

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (z-z_0)^n$$

به $f(z) + g(z)$ و حاصلضرب

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_m (z-z_0)^{m+n} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

به $f(z)g(z)$ همگرا خواهند شد. به علاوه، اگر به ازای مقادیر همسایگی z_0 ، داشته باشیم $g(z) \neq 0$ ، در این صورت سری حاصل از نسبت

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z-z_0)^m} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$$

در آن همسایگی، به $f(z)/g(z)$ همگرا خواهد شد.

علی‌الاصول، بنابراین این قضیه می‌توان سریهای نامتناهی همگرا را طوری دستکاری کرد که گویی مجموع تعداد محدودی جمله‌اند (چندجمله‌ای). چنین کاری در مواقعی که با بسطهای تیلور و لوران سروکار داریم، که در آنها محاسبات مستقیم بسیار خسته‌کننده است، فوق‌العاده مفید واقع خواهند شد.

در مثالهای زیر، توانایی حساب سریهای نامتناهی را مشاهده می‌کنید.

مثال ۷-۱-۵: می‌خواهیم سری لوران مربوط به تابع زیر را پیدا کنیم

$$f(z) = \frac{1}{4z - z^2}$$

این تابع، نسبت دو تابع نام است. از این رو، بنابر قضیه ۷-۱-۱۱، در همه جا جز در صفرهای $4z - z^2$ ، یعنی در $z = 0$ و $z = 4$ ، تحلیلی است. برای ناحیه طوقی (در اینجا r_1 در قضیه ۷-۱-۴، صفر است) که در آن $0 < |z| < 4$ ، $f(z)$ را حول $z = 0$ بسط لوران می‌دهیم. به جای آنکه عملاً z_n را محاسبه کنیم، ابتدا توجه می‌کنیم که

$$f(z) = \frac{1}{4z(1 - z/4)} = \frac{1}{4z} \left(\frac{1}{1 - z/4} \right)$$

عامل دوم را می‌توان به یک سری هندسی بسط داد، زیرا $|z/4| < 1$:

$$\frac{1}{1 - z/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^n \quad (1)$$

$4z$ را یک سری خاص می‌گیریم که در آن

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 4 & n = 1 \end{cases}$$

با تقسیم رابطه (۱) بر z^2 و توجه به این نکته که $z = 0$ تنها صفر z^2 ، و از ناحیه طوقی خارج است، عبارت زیر را به دست می آوریم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \frac{z^n}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2(n+1)} z^{n-1} \quad 0 < |z| < 4$$

با وجودی که این سری را با استفاده از سایر سریها به دست آورده ایم، یکتایی نمایش سریها، تضمین می کند که این همان سری لوران برای ناحیه یاد شده است.

$f(z)$ را در ناحیه ای که برای آن $|z| > 4$ ، چگونه می توانیم نمایش دهیم؟ این ناحیه در خارج دایره $|z| = 4$ قرار دارد و از این رو انتظار داریم در آن ناحیه توانهای منفی z وجود داشته باشند. برای یافتن بسط لوران، می نویسیم

$$f(z) = \frac{1}{-z^2(1 - 4/z)} = -\frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{1 - 4/z} \right)$$

و توجه می کنیم که $|4/z| < 1$ در خارج دایره بزرگتر قرار دارد. بنابراین، عامل دوم می تواند به صورت یک سری هندسی نوشته شود

$$\frac{1}{1 - 4/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{-n}$$

با تقسیم رابطه بالا بر $-z^2$ ، که در ناحیه بیرونی دایره بزرگتر تحلیلی است، می رسمیم به

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{-n}}{-z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{-n-2}$$

مثال ۶-۷: تابع زیر، به ازای $|z| < 1$ ، حول مبدأ دارای بسط تیلور است

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

برای یافتن این بسط، می نویسیم

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z/2} \quad (1)$$

با بسط هر دو کسر برحسب سری هندسی $|z|$ و $|z/2|$ هر دو از یک کوچکترند، می‌رسیم به

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

با افزودن دو سری، بنا بر قضیه ۷-۱-۱۱، خواهیم داشت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n})z^n \quad |z| < 1$$

این عبارت، بسط تیلور منحصر به فرد $f(z)$ در داخل دایره $|z| = 1$ است.

به‌ازای $1 < |z| < 2$ ، به سری لوران می‌رسیم. با توجه به رابطه زیر می‌توان به این امر پی برد

$$f(z) = \frac{1/z}{1/z - 1} - \frac{1}{1 - z/2} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - 1/z} \right) - \frac{1}{1 - z/2} \quad (2)$$

چون هر دو کسر سمت راست (۲) در ناحیه طوقی ($|z/2| < 1$, $|1/z| < 1$) همگرایند،

می‌رسیم به

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \\ &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

که در آن به‌ازای $n < 0$ ، داریم $a_n = -1$ و به‌ازای $n \geq 0$ داریم $a_n = -2^{-n}$. این عبارت،

بسط لوران منحصر به فرد $f(z)$ در ناحیه مفروض است.

سرانجام، به‌ازای $|z| > 2$ تنها توانهای منفی z را داریم. با نوشتن $f(z)$ به‌صورت زیر، بسط

آن را در این ناحیه به‌دست می‌آوریم

$$f(z) = -\frac{1/z}{1 - 1/z} + \frac{2/z}{1 - 2/z}$$

با بسط دادن این کسرها، می‌رسیم به

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) z^{-n-1}$$

این نتیجه نیز بسط منحصر به فرد $f(z)$ در ناحیه $|z| > 2$ است.

مثال ۷-۱-۷: $f(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z) \equiv \begin{cases} (1 - \cos z)/z^2 & z \neq 0 \text{ به‌ازای} \\ \frac{1}{2} & z = 0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که $f(z)$ یک تابع تام است.

چون $1 - \cos z$ و z^2 توابع تام هستند، نسبت آنها در همه جا جز به‌ازای صفرهای مخرج، z^2 ، تحلیلی است. بنابراین، قضیه ۷-۱-۱۱ حاکی از آن است که $f(z)$ در همه جا به‌جز احتمالاً در $z = 0$ ، تحلیلی است. برای پی بردن به رفتار $f(z)$ در $z = 0$ ، سری مک‌لوران آن را از نظر می‌گذرانیم

$$1 - \cos z = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

که دلالت می‌کند بر

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots$$

با ملاحظه عبارت سمت چپ بالا ممکن است این تصور پیش آید که تنها نقطه‌ای که سری در آن همگرا نمی‌شود، عبارت است از $z = 0$. اما بسط سمت راست نشان می‌دهد که مقدار سری $1/2$ است، که بنا به تعریف، عبارت است از $f(0)$. بنابراین، سری، به‌ازای تمام مقادیر z همگرا می‌شود، و بنا به قضیه ۷-۱-۸، $f(z)$ تام است.

مثال ۷-۱-۸: سری لوران می‌تواند اطلاعاتی درباره انتگرال یک تابع حول پرند بسته‌ای به ما

بدهد که ممکن است تابع در داخل آن تحلیلی نباشد. در واقع، به اعتبار قضیه ۴-۱-۷، داریم

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi \quad (1)$$

بنابراین، برای یافتن انتگرال یک تابع (غیر تحلیلی) حول یک پریند بسته، سری لوران تابع یاد شده را می‌نویسیم و تعبیر ضریب جمله $1/(z - z_0)$ را از آن استخراج می‌کنیم. برای روشن کردن این ایده، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$I \equiv \oint_C \frac{dz}{z^2(z-2)} \quad (2)$$

که در آن C دایره‌ای به شعاع ۱ به مرکز مبدأ مختصات است. این تابع در ناحیه طوقی $0 < |z| < 2$ تحلیلی است. بنابراین، می‌توانیم آن را در آن ناحیه بسط لوران بدهیم. می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-2)} &= -\frac{1}{2z^2} \left(\frac{1}{1-z/2} \right) = -\frac{1}{2z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{1}{8} - \dots \end{aligned}$$

بنابراین $a_{-1} = -1/4$ و رابطه (۱) منجر می‌شود به

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = -i\frac{\pi}{4}$$

هر طریقه دیگری برای محاسبه این انتگرال، غیر بدیهی است. در واقع، در بخش بعدی خواهیم دید که برای یافتن برخی انتگرالها لازم است ابتدا آنها را به شکل معادله (۲) درآوریم و از معادله (۱) یا معادله مرتبط با آن بهره بگیریم.

صفرهای توابع تحلیلی. فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در z_0 تحلیلی باشد. در این صورت، بنا به تعریف، یک همسایگی z_0 چنان وجود دارد که در آن f تحلیلی است. در حالت خاص، می‌توانیم یک دایره $|z - z_0| = r$ بیابیم، که در داخل آن f دارای بسط تیلور باشد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

گوییم f دارای یک صفر مرتبه k است اگر، به‌ازای $0, 1, \dots, k-1$ ، داشته باشیم $f^{(n)}(z_0) = 0$ اما $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. در آن صورت

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n \quad a_k \neq 0, |z - z_0| < r$$

$g(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n \quad |z - z_0| < r$$

و توجه می‌کنیم که $g(z_0) = a_k \neq 0$. همگرا بودن سری سمت راست حاکی از پیوسته بودن $g(z)$ در z_0 است. در نتیجه، به‌ازای همهٔ مقادیر $\varepsilon > 0$ ، کمیتی چون δ چنان وجود دارد که هرگاه $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|g(z) - a_k| < \varepsilon$. اگر اختیار کنیم $\varepsilon = |a_k|/2$ ، در این صورت، به‌ازای $\delta_0 > 0$ داریم

$$|g(z) - a_k| < \frac{|a_k|}{2} \quad \text{هرگاه } |z - z_0| < \delta_0 \text{ آنگاه}$$

بنابراین، مادام که z در داخل دایرهٔ $|z - z_0| = \delta_0$ واقع باشد، $g(z)$ نمی‌تواند صفر باشد، زیرا در این صورت نامساوی اول دلالت بر $|a_k| < |a_k|/2$ خواهد داشت که این خود یک تناقض است. پس، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۷-۱-۱۲: فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در z_0 تحلیلی باشد و $f(z_0) = 0$. در این صورت یک همسایگی z_0 وجود دارد که در آن f هیچ صفر دیگری ندارد، مگر آنکه $f \equiv 0$. بنابراین، صفرهای تابع تحلیلی منزوی‌اند.

وقتی $k = 1$ ، گوییم z_0 یک صفر سادهٔ f است. برای یافتن مرتبهٔ صفر یک تابع در یک نقطه، از تابع مشتق می‌گیریم، مقدار مشتق در آن نقطه را محاسبه می‌کنیم، و این کار را ادامه می‌دهیم تا مقدار مخالف صفری برای مشتق به‌دست آوریم. بنابراین، صفرهای $\cos z$ که عبارت‌اند از $z = (2k+1)\pi/2$ ، جملگی ساده‌اند، زیرا

$$\left. \frac{d}{dz} \cos z \right|_{z=(2k+1)\pi/2} = -\sin \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right] \neq 0$$

برای یافتن مرتبه صفرهای

$$f(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}$$

در $z = 0$ ، از $f(z)$ مشتق می‌گیریم و $f'(0)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f'(0) = (e^z - 1 - z)_{z=0} = 0$$

با مشتق‌گیری مجدد، می‌رسیم به

$$f''(0) = (e^z - 1)_{z=0} = 0$$

یکبار دیگر مشتق‌گیری منجر می‌شود به

$$f'''(0) = (e^z)_{z=0} = 1 \neq 0$$

پس، این صفر از مرتبه ۳ است.

تمرینها

۱-۱-۷ به ازای $0 < r < 1$ نشان دهید

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta = \frac{r \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

۲-۱-۷ نشان دهید اگر سری توانی $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ همگرا باشد، در این صورت در

داخل دایره همگرایی‌اش یک تابع پیوسته است.

۳-۱-۷ نشان دهید، تابع زیر نام است

۴-۱-۷ فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در z_0 تحلیلی است و

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k)}(z_0) = 0$$

نشان دهید تابع زیر در z_0 تحلیلی است.

$$g(z) \equiv \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} & z \neq z_0 \quad \text{به‌ازای} \\ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & z = z_0 \quad \text{به‌ازای} \end{cases}$$

۵-۱-۷ با نوشتن بسط سری لوران و اختیار کردن ضریب مناسب، انتگرال $\oint_C dz/z^2$ را محاسبه کنید، که در آن C عبارت است از دایره $|z| = 1$ که در سوی پاد ساعتگرد روی آن انتگرال‌گیری انجام می‌گیرد.

۶-۱-۷ بسط سری لوران $f(z) = \sinh z/z^2$ را به‌دست آورید.

۷-۱-۷ بسط سری $f(z) = z/(z-1)$ را برای تمام نواحی تحلیلی $f(z)$ بنویسید.

۸-۱-۷ نشان دهید $\oint_C dz/(e^z - 1) = 2\pi i$ ، که در آن C دایره $|z| = 1$ است.

۲-۷ حساب مانده‌ها

در این بخش به طرح یک روش کارآمد برای محاسبه انتگرال‌ها می‌پردازیم. در بخش پیشین، به مثالهایی برخوردیم که در آنها انتگرال‌ها به ضرایب بسط سری لوران، ربط پیدا می‌کنند. در اینجا، یک راه حساب‌شده و منظم برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی و مختلط را مطرح می‌کنیم.

۱-۲-۷ مانده‌ها

یادآوری می‌کنیم که یک نقطهٔ تکین z_0 از تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ عبارت است از نقطه‌ای که در آن f تحلیلی نباشد. علاوه بر اینها، اگر یک همسایگی z_0 وجود داشته باشد که f در تمام آن نقاط (البته جز z_0) تحلیلی باشد، در این صورت z_0 یک تکینگی تنهای f است. تقریباً تمام تکینگی‌هایی که تا حالا با آنها مواجه شدیم، تکینگی‌های تنها بودند. لیکن، بعداً هنگام بحث توابع چندمقداری، خواهیم دید که تکینگی‌هایی که تنها نیستند، نیز وجود دارند.

فرض کنید، z_0 یک تکینگی تنهای f باشد. سپس یک ناحیهٔ $\tau > 0$ چنان وجود داشته باشد که در داخل ناحیهٔ طوقی رابطهٔ $\tau < |z - z_0| < \tau$ برقرار و تابع f دارای بسط لوران

زیر باشد

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \text{و} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi$$

در حالت خاص

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi \quad (7-7)$$

در اینجا، C پربند ساده بسته حول z_0 است، که در جهت مثبت طی می‌شود، و f در داخل و روی آن، جز در خود z_0 ، تحلیلی است. عدد مختلط b_1 ، که به انتگرال f در امتداد پربند مربوط می‌شود، با مانده f در نقطه تکین تنهای z_0 نامیده می‌شود. توجه به این نکته حائز اهمیت است که تا جایی که z_0 تنها نقطه تکین در داخل C باشد، مانده از پربند C مستقل است. چند مثال از کاربرد معادله (7-7) در محاسبه انتگرالها را دیده‌ایم. حال دو مثال دیگر را از نظر می‌گذرانیم.

مثال 7-2-1: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - \pi/2)^2} dz$$

که در آن C پربند بسته‌ای است که $z = \pi/2$ یک نقطه در داخل آن است.

برای محاسبه انتگرال، تابع را حول $z = \pi/2$ بسط می‌دهیم و از معادله (7-7) بهره می‌گیریم.

توجه کنید که

$$\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{(z - \pi/2)^r} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{r-n-r}}{(2n)!} \\ &= (z - \pi/2)^{-r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \pi/2} \right) + \frac{z - \pi/2}{4!} - \dots \end{aligned}$$

این بسط، نشان می‌دهد که $b_1 = -1/2$ ، از این رو

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z - \pi/2)^r} dz = 2\pi i b_1 = -i\pi$$

مثال ۷-۲-۲: انتگرال

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^r} dz$$

که در آن C دایره $|z| = 1$ است؛ صفر خواهد بود زیرا از

$$\frac{\cos z}{z^r} = \frac{1}{z^r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z^r} - 1 + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

$b_1 = 0$ به دست می‌آید (در بسط لوران جمله $1/3$ وجود ندارد). بنابراین، بر طبق معادله (۷-۷)، باید انتگرال صفر شود.

به همین ترتیب، وقتی C دایره $|z| = 2$ باشد، داریم

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^r} dz = i\pi e$$

زیرا

$$e^z = e e^{z-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$\frac{e^z}{(z-1)^r} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-r}}{n!} = e \left[\frac{1}{(z-1)^r} + \frac{1}{(z-1)^r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} \right) + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots \right]$$

بنابراین، $b_1 = e/2$.

معمولاً از $\text{Res}[f(z_0)]$ برای نمایش دادن ماندهٔ f در نقطهٔ تکین تنهای z_0 استفاده می‌کنیم. در این صورت، معادلهٔ (۷-۷) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z_0)]$$

اگر چند نقطهٔ تکین تنها در داخل یک پرند بستهٔ ساده C وجود داشته باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟ به کمک قضیهٔ زیر به پاسخ این پرسش می‌رسیم.

قضیهٔ ۷-۱: فرض کنید C یک پرند ساده بسته باشد که در جهت مثبت روی آن انتگرال‌گیری می‌شود و در داخل و روی آن، جز در چند نقطهٔ تکین تنهای z_1, z_2, \dots, z_m واقع در داخل آن، تحلیلی باشد. در این صورت

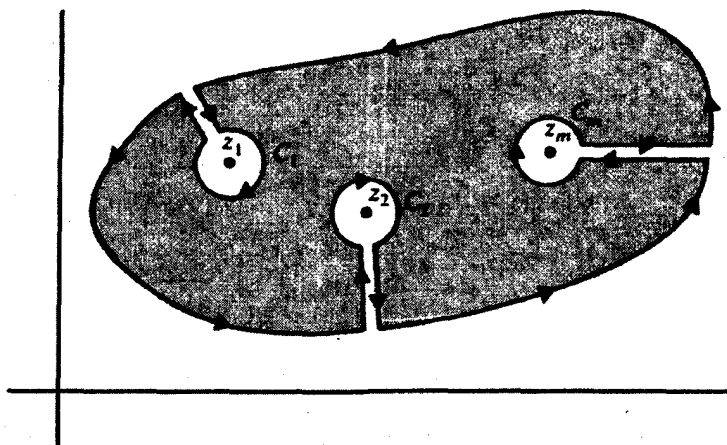
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}[f(z_k)] \quad (۸-۷)$$

اثبات. فرض کنید C_k دایره‌ای در جهت مثبت، حول z_k باشد در این صورت بنا بر شکل ۷-۳ و قضیهٔ کوشی-گورسا خواهیم داشت

$$0 = \oint_C f(z) dz = - \oint_{\text{دایره}} f(z) dz + \int_{\text{خطوط موازی}} f(z) dz + \oint_C f(z) dz$$

که علامت منفی انتگرال اول به خاطر جهت منفی انتگرال‌گیری روی دایره‌هاست. سهمهای خطوط موازی یکدیگر را حذف می‌کنند، و می‌رسیم به

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^m 2\pi i \text{Res}[f(z_k)]$$



شکل ۳-۷ می‌توان با دور زدن، از تکینگها اجتناب کرد.

که در مرحله آخر، از تعریف مانده در z_k استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳-۲-۷: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\oint_C \frac{2z - 3}{z(z-1)} dz$$

که در آن C ، عبارت است از دایره $|z| = 2$. دو تکینگی تنها در C یکی در $z_1 = 0$ و دیگری در $z_2 = 1$ وجود دارد. برای یافتن $\text{Res}[f(z)]$ حول مبدأ بسط می‌دهیم

$$\frac{2z - 3}{z(z-1)} = \frac{3}{z} + \frac{-1}{z-1} = \frac{3}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{3}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \quad |z| < 1$$

که می‌دهد $\text{Res}f(z_1) = 1$. به همین ترتیب، با بسط حول $z = 1$ داریم

$$\frac{2z - 3}{z(z-1)} = \frac{3}{z-1+1} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

که از آن نتیجه می‌شود $\text{Res}[f(z_2)] = -1$. بنابراین

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{2z - 3}{z(z-1)} dz &= 2\pi i \{ \text{Res}[f(z_1)] + \text{Res}[f(z_2)] \} \\ &= 2\pi i (3 - 1) = 4\pi i \end{aligned}$$

۲-۲-۷ دسته‌بندی تکنیکیهای تنها

فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ دارای یک تکنیکی در $z = z_0$ باشد. در این صورت، یک عدد حقیقی $r > 0$ و یک ناحیه طوقی $0 < |z - z_0| < r$ ، چنان وجود دارد که f را می‌توان با سری لوران نمایش داد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (9-7)$$

مجموع دوم در معادله (۹-۷)، که شامل توانهای منفی $(z - z_0)$ است، قسمت اصلی f در z_0 نامیده می‌شود. می‌توانیم از قسمت اصلی استفاده کنیم و بین سه نوع تکنیکی تنها تفاوت قائل شویم. رفتار تابع در نزدیکی تکنیکی تنها، از هر جهت تفاوت اساسی دارد.

۱. اگر به‌ازای تمام مقادیر $n \geq 1$ داشته باشیم $b_n = 0$ ، آنگاه z_0 یک نقطهٔ تکین برداشتی f نامیده می‌شود. در این صورت، سری لوران فقط شامل توانهای غیرمنفی $(z - z_0)$ است، و قرار دادن $f(z_0) = a_0$ ، تابع را در z_0 تحلیلی می‌کند. مثلاً، تابع

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

با قرار دادن $f(0) = 1/2$ ، یک تابع تام می‌شود.

۲. اگر به‌ازای تمام مقادیر $n > m$ و $b_m \neq 0$ داشته باشیم $b_n = 0$ ، آنگاه z_0 یک قطب مرتبهٔ m نامیده می‌شود. در این صورت، بسط به شکل زیر درمی‌آید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

به‌ازای $0 < |z - z_0| < r$

در حالت خاص، اگر $m = 1$ ، آنگاه z_0 را یک قطب ساده می‌نامیم.

۳. اگر قسمت اصلی f در z_0 واجد بینهایت جملهٔ غیرصفر باشد، نقطهٔ z_0 تکنیکی اساسی نامیده می‌شود. یک نمونه از توابع دارای تکنیکیهای اساسی، عبارت است از

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z^n}\right)$$

که در $z = 0$ دارای یک تکینگی اساسی و دارای مانده ۱ در آن نقطه است. برای اینکه ملاحظه کنیم چنین توابعی چقدر عجیب‌اند، با فرض اینکه a هر مقدار حقیقی است، z را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$z = \frac{1}{\ln a + 2n\pi i} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

برای این z داریم

$$e^{1/z} = e^{\ln a + 2n\pi i} = ae^{2n\pi i} = a \quad \forall n$$

در حالت خاص، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه z به اندازه دلخواهی می‌تواند به مبدأ نزدیک شود. بنابراین، در یک ناحیه کوچک دلخواه در همسایگی مبدأ، بینهایت نقطه وجود دارد که در آنها تابع $e^{1/z}$ می‌تواند مقدار دلخواه a را بگیرد. این نتیجه برای تمام توابع با تکینگیهای اساسی برقرار است.

مثال ۲-۴: اکنون به ذکر چند مثال با قطبهای از مرتبه‌های مختلف می‌پردازیم.

(الف) تابع $(z^2 - 3z + 5)/(z - 1)$ حول $z = 1$ دارای سری لوران است که تنها سه جمله دارد:

$$\frac{z^2 - 3z + 5}{z - 1} = -1 + (z - 1) + \frac{3}{z - 1}$$

بنابراین، دارای یک قطب ساده در $z = 1$ ، با مانده ۳ است.

(ب) سری لوران تابع $\sin z/z^6$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^6} &= \frac{1}{z^6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{(5!)z} - \frac{z}{7!} + \dots \end{aligned}$$

قسمت اصلی دارای سه جمله است. قطب، در $z = 0$ ، از مرتبه ۵ است، و مانده این تابع در $z = 0$ عبارت است از $1/120$.

(ج) تکینگی برداشتنی تابع $(z^2 - 5z + 6)/(z - 2)$ در $z = 2$ ، عبارت است از

$$\frac{z^2 - 5z + 6}{z - 2} = \frac{(z - 2)(z - 3)}{(z - 2)} = z - 3 = -1 + (z - 2) \quad z \neq 2$$

و به‌ازای تمام مقادیر داریم $b_n = 0$.

۳-۲-۷ قطبها و مانده‌ها

مهمترین نوع تکنیکی در کاربردها، نوع دوم، یعنی قطبها، است. برای تابعی که در z_0 دارای یک قطب مرتبه m است، محاسبه مانده‌ها آسان است. چنین محاسبه‌ای، به‌نوبه خود، ما را قادر می‌سازد تا بدون زحمت زیاد اغلب انتگرالها را محاسبه کنیم. مانده یک تابع f را که در z_0 دارای یک قطب مرتبه m است، چگونه محاسبه می‌کنیم؟
بدیهی است که اگر f دارای یک قطب مرتبه m باشد، در این صورت $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که، بنا بر تعریف، عبارت است از

$$g(z) \equiv (z - z_0)^m f(z)$$

که در z_0 تحلیلی است. بنابراین، برای هر پیربند ساده بسته C شامل z_0 که هیچ نقطه تکین دیگری از f را در بر نمی‌گیرد، داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z_0)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} dz \\ &= \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) \end{aligned}$$

که برحسب f ، این مقدار عبارت است از

$$\operatorname{Res}[f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \quad (الف ۱۰-۷)$$

در حالت خاص، ولی مهم، یک قطب ساده به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{Res}[f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] \quad (ب ۱۰-۷)$$

۴-۲-۷ محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از قضیه مانده‌ها

مهمترین کاربرد مانده‌ها، کاربردشان در محاسبه انتگرالهای معین حقیقی است. می‌توان بعضی از انتگرالهای معین حقیقی را به‌صورت عبارت مختلط در آورد و آنها را به انتگرالگیری مسیری در صفحه مختلط مربوط کرد. این روش را در صفحات بعد مورد بحث قرار خواهیم داد؛ ولی بهتر است ابتدا یک لم، به نام لم جوردن، را اثبات کنیم.

لم ۲-۲-۷: (الم جوردن) فرض کنید C_R قسمت بالایی نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R در صفحه مختلط باشد. فرض کنید f تابعی باشد که وقتی $|z| \rightarrow \infty$ ، به‌ازای $\arg(z) \in [0, \pi]$ ، به‌طور یکنواخت و سریعتر از $1/z$ به سمت صفر میل کند. فرض کنید α یک عدد حقیقی غیرمنفی باشد. در این صورت

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

اثبات. به‌ازای $z \in C_R$ ، می‌توانیم بنویسیم $z = Re^{i\theta}$ ، $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ ، و

$$iaz = i\alpha(R \cos \theta + iR \sin \theta) = i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} |I_R| &= \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |e^{iaz}| |f(z)| |dz| \\ &= \int_0^\pi |e^{i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta}| |f(Re^{i\theta})| R d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R |f(Re^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

بنابه فرض، $R|f(Re^{i\theta})| < \varepsilon(R)$ از θ مستقل است، که در آن $\varepsilon(R)$ عدد مثبت دلخواهی است که وقتی $R \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند، از این رو

$$|I_R| < \varepsilon(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = \varepsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta$$

↑
بنابر مسئله ۲-۲-۷

به‌علاوه، به‌ازای $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha R \sin \theta} \leq e^{-(2\alpha R/\pi)\theta}$$

$$|I_R| < 2\varepsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-(2\alpha R/\pi)\theta} d\theta = \frac{\pi\varepsilon(R)}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R})$$

■ که دلالت می‌کند بر $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

توجه کنید که لم جوردن در حالت $\alpha = 0$ نیز صادق است، زیرا وقتی $\alpha \rightarrow 0$ ، $\alpha R \rightarrow 0$ (اگر $\alpha < 0$)، $(1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow \alpha R$. باز هم این لم صادق است، به شرط آنکه نیم‌دایره C_R در نیم‌صفحه پایین صفحه مختلط باشد و به‌ازای $\pi \leq \arg(z) \leq 2\pi$ ، $f(z)$ به‌طور یکنواخت به صفر میل می‌کند.

اکنون در وضعیتی هستیم که بتوانیم قضیه مانده‌ها را به محاسبه انتگرالهای معین به‌کار ببریم. سه نوع انتگرال را که بیشتر از همه به آنها برخورد می‌کنیم، به‌طور جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم. در همه حالتها فرض می‌کنیم، لم جوردن برقرار باشد.

انتگرال توابع گویا. اولین نوع انتگرالی که می‌توانیم با استفاده از قضیه مانده‌ها محاسبه کنیم، به شکل زیر است

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ایهای حقیقی‌اند. به‌ازای همه مقادیر حقیقی x ، داریم $q(x) \neq 0$ و $p(x)/q(x)$ تابع زوجی از x است. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \equiv \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{\pm}} \frac{p(z)}{q(z)} dz$$

که در آن C_{\pm} یک پربند (باز) واقع بر روی محور حقیقی و بین $-R$ تا $+R$ است. با این فرض که لم جوردن برقرار باشد، می‌توانیم با افزودن یک نیم‌دایره به شعاع R ، آن پربند را ببندیم. این کار، در مقدار انتگرال تغییری ایجاد نمی‌کند، زیرا در حد $R \rightarrow \infty$ ، مشارکت انتگرال نیم‌دایره به سمت صفر میل خواهد کرد. اگر $q(z)$ در نیم‌صفحه بالایی دارای صفر باشد، می‌توانیم پربند را در آنجا ببندیم. در این صورت، می‌رسیم به

$$I_1 = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{p(z)}{q(z)} dz = \pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left[\frac{p(z_k)}{q(z_k)} \right]$$

که در آن C عبارت است از پریند بسته متشکل از بازه $[-R, R]$ و نیم‌دایره C_R و $\{z_k\}_{k=1}^m$ عبارت‌اند از صفرهای $q(z)$ در نیم‌صفحه بالایی. می‌توان به‌جای آن، پریند را در نیم‌صفحه پایینی بست، که در این صورت

$$I_1 = -\pi i \sum_{j=1}^l \operatorname{Res} \left[\frac{p(z_i)}{q(z_j)} \right]$$

که در آن $\{z_j\}_{j=1}^l$ عبارت‌اند از صفرهای $q(z)$ در نیم‌صفحه پایین. علامت منفی نشانگر این است که در نیم‌صفحه پایین در جهت پادساعتگرد انتگرال می‌گیریم. حال به چند نمونه از محاسبه این نوع انتگرالها نظر می‌کنیم.

مثال ۷-۲-۵: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$$

که چون لم جوردن برقرار است (پایینتر را بنگرید)، این انتگرال با انتگرال مسیری زیر متناظر است.

$$\frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz$$

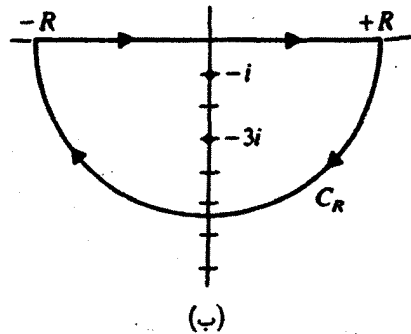
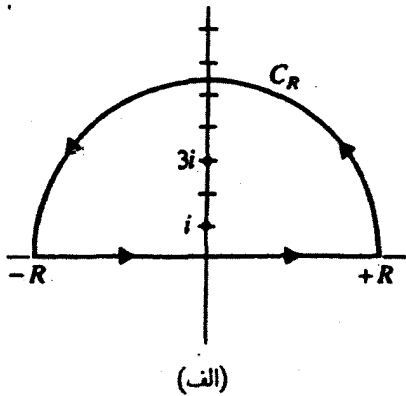
که در آن C در شکل ۷-۲-۴ الف نشان داده شده است. توجه کنید که در جهت مثبت روی پریند انتگرال‌گیری شده است. این امر همواره برای نیم‌صفحه بالایی برقرار است. تکنیکهای تابع در نیم‌صفحه بالایی قطبهای ساده عبارت‌اند از i و $3i$ که با صفرهای ساده مخرج متناظرند. مانده‌ها در این قطبها عبارت‌اند از

$$\operatorname{Res}[f(i)] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \frac{i^2}{(2i)(-1+9)} = -\frac{1}{16i}$$

$$\operatorname{Res}[f(3i)] = \lim_{z \rightarrow 3i} (z-3i) \frac{z^2}{(z^2+i)(z-3i)(z+3i)} = \frac{(3i)^2}{(-9+1)(6i)} = \frac{3}{16i}$$

بنابراین، می‌رسیم به

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = i\pi \left(-\frac{1}{16i} + \frac{3}{16i} \right) = \frac{\pi}{8}$$



شکل ۴-۷ (الف) نیم‌دایرهٔ بزرگ در نیم‌صفحهٔ بالایی اختیار شده است. (ب) نیم‌دایرهٔ بزرگ در نیم‌صفحهٔ پایین انتخاب شده است. توجه کنید که پرند در جهت ساعتگرد طی می‌شود.

آموزنده است که همین نتیجه را با استفاده از نیم‌صفحهٔ پایین به دست آوریم. در این حالت، پرند در شکل ۴-۷ نشان داده شده است و در جهت ساعتگرد گرفته می‌شود؛ بنابراین، باید در انتگرال‌گیری یک علامت منفی وارد کنیم. نقاط تکین در $z = -i$ و $z = -3i$ قرار دارند. این قطبها، قطبهای ساده‌اند که در آنها مانده‌های تابع عبارت‌اند از

$$\text{Res}[f(-i)] = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{(-i)^2}{(-2i)(9)} = \frac{1}{18i}$$

$$\text{Res}[f(-3i)] = \lim_{z \rightarrow -3i} (z+3i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{(-3i)^2}{(-8)(-6i)} = -\frac{3}{16i}$$

بنابراین،

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = -i\pi \left(\frac{1}{18i} - \frac{3}{16i} \right) = \frac{\pi}{8}$$

برای اینکه نشان دهیم لم جویدن برای این انتگرال قابل اعمال است، کافی است نشان دهیم $\lim_{R \rightarrow \infty} R[f(Re^{i\theta})] = 0$. در این حالت $\alpha = 0$ ، زیرا هیچ تابع نمایی در انتگرالده وجود

ندارد. بنابراین،

$$R|f(Re^{i\theta})| = R \left| \frac{1}{(R^r e^{r i \theta} + 1)(R^r e^{r i \theta} + 1)} \right| = \frac{R}{|R^r e^{r i \theta} + 1| |R^r e^{r i \theta} + 1|}$$

اما

$$\begin{aligned} |R^r e^{r i \theta} + 1| &= \sqrt{(R^r e^{r i \theta} + 1)(R^r e^{-r i \theta} + 1)} = \sqrt{R^{2r} + 2R^r \cos r\theta + 1} \\ &\geq \sqrt{R^{2r} - 2R^r + 1} = R^r - 1 \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$|R^r e^{r i \theta} + 1| \geq R^r - 1$$

از این رو

$$R|f(Re^{i\theta})| \leq \frac{R^r}{(R^r - 1)(R^r - 1)} \equiv \varepsilon(R)$$

وقتی $R \rightarrow \infty$ ، $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ ، آنگاه $R|f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0$

مثال ۶-۲-۷: حال انتگرال پیچیده‌تری به قرار زیر را از نظر می‌گذرانیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r}{(x^r + 1)(x^r + 4)^r} dx$$

که، در نیم صفحه بالایی، به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{r} \oint_C \frac{z^r}{(z^r + 1)(z^r + 4)^r} dz$$

قطبهای واقع در نیم صفحه بالایی در $z = i$ و $z = 2i$ قرار دارند. قطب اول، یک قطب ساده و

قطب آخر یک قطب مرتبه ۲ است. بنابراین،

$$\operatorname{Res}[f(i)] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)^2} = \frac{-1}{2i(3)^2} = -\frac{1}{18i}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(2i)] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[(z - 2i)^2 \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 2i)^2(z - 2i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 2i)^2} \right] = \frac{5}{72i} \end{aligned}$$

و

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2} = i\pi \left(-\frac{1}{18i} + \frac{5}{72i} \right) = \frac{\pi}{72}$$

با بستن پربند در نیم صفحه پایین، به همین نتیجه می‌رسیم.

انتگرال حاصلضربهای توابع گویا و توابع مثلثاتی. انتگرال نوع دومی که می‌توانیم با استفاده از قضیه مانده‌ها محاسبه کنیم، به صورت زیر است

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax \, dx \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax \, dx$$

که در آن a یک عدد حقیقی، $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ایهای حقیقی از x هستند و $q(x)$ صفر حقیقی ندارد. این انتگرالها اجزای حقیقی و موهومی انتگرال زیر را تشکیل می‌دهند

$$I_{\pm} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax} dx$$

وجود e^{iax} ، انتخاب نیم صفحه را تعیین می‌کند. اگر $a \geq 0$ ، نیم صفحه بالا را اختیار می‌کنیم، در غیر این صورت نیم صفحه پایین را برمی‌گزینیم. البته، باید توان x در مخرج آنقدر باشد که $R|p(Re^{i\theta})/q(Re^{i\theta})|$ به طور یکنواخت به سمت صفر میل کند. در مثالهای زیر، این روش را تشریح می‌کنیم.

مثال ۷-۲-۷: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + 1)^2} dx \quad a \neq 0$$

این انتگرال، جزء حقیقی انتگرال زیر به‌شمار می‌آید

$$I_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

وقتی $a \geq 0$ ، همچنان که از لم جوردن برمی‌آید، نیم‌صفحه بالایی را می‌بندیم. سپس مانند انتگرالهای توابع گویا عمل می‌کنیم. بنابراین می‌رسیم به

$$I_{\Gamma} = \oint_C \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(i)] \quad a > 0$$

زیرا فقط یک تکینگی در نیم‌صفحه بالا، در $z = i$ ، وجود دارد که یک قطب مرتبه ۲ است. پس مانده زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(i)] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{e^{iaz}}{(z - i)^2 (z + i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z + i)^{-2} e^{iaz}] = \lim_{z \rightarrow i} [-2(z + i)^{-3} e^{iaz} + ia(z + i)^{-2} e^{iaz}] \\ &= -\frac{2e^{-a}}{(2i)^3} + \frac{iae^{-a}}{(2i)^2} \\ &= \frac{e^{-a}}{2i} (1 + a) \end{aligned}$$

با جایگزین کردن این مقدار در عبارت I_{Γ} ، می‌رسیم به

$$I_{\Gamma} = \frac{\pi}{2} e^{-a} (1 + a) \quad a > 0$$

وقتی $a < 0$ ، باید پربند را در نیم‌صفحه پایین ببندیم، که در آن قطب مرتبه ۲ در $z = -i$ واقع و پربند در جهت ساعتگرد است. بنابراین، خواهیم داشت

$$I_{\Gamma} = \oint_C \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)^2} dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f(-i)]$$

برای مانده، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(-i)] &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^2 \frac{e^{iaz}}{(z-i)^2(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} [(z-i)^{-2} e^{iaz}] \\ &= -\frac{e^a}{2i} (1-a) \end{aligned}$$

و عبارت I_2 ، به صورت زیر خواهد بود

$$I_2 = \frac{\pi}{2} e^a (1-a) \quad a < 0$$

از این رو، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2} dx = \operatorname{Re}(I_2) = I_2 = \frac{\pi}{2} (1+|a|) e^{-|a|}$$

مثال ۷-۲-۸: به عنوان یک مثال دیگر، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+4} dx \quad a \neq 0$$

این انتگرال، جزء موهومی انتگرال زیر است

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+4} dx$$

که، بر حسب z و برای پربند بسته شده در نیم صفحه بالایی، به صورت زیر درمی‌آید

$$I_2 = \oint_C \frac{z e^{iaz}}{z^2+4} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}[f(z_j)] \quad (1)$$

تکنیکها توسط صفرهای مخرج تعیین می‌شوند

$$z^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad z^2=-4=4e^{i(\pi+2n\pi)} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$z = \sqrt{2} e^{i(2n+1)\pi/4} = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$$

از این چهار ریشه ساده، فقط دو تا، $1+i$ و $-1+i$ ، در نیم صفحه بالایی قرار دارند. اکنون مانده را محاسبه می‌کنیم

$$\text{Res}[f(1+i)] = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z-1-i) \frac{ze^{iaz}}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)}$$

$$= \frac{(1+i)e^{ia(1+i)}}{(2i)(2)(2+2i)} = \frac{e^{ia}e^{-a}}{4i}$$

$$\text{Res}[f(-1+i)] = \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i) \frac{ze^{iaz}}{(z+1-i)(z+1+i)(z-1-i)(z-1+i)}$$

$$= \frac{(-1+i)e^{ia(-1+i)}}{(2i)(-2)(-2+2i)} = -\frac{e^{-ia}e^{-a}}{4i}$$

با قرار دادن در (۱)، می‌رسیم به

$$I_T = 2\pi i \frac{e^{-a}}{4i} (e^{ia} - e^{-ia}) = i \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 4} dx = \text{Im}(I_T) = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a \quad a > 0 \quad (2)$$

به‌ازای $a < 0$ ، پی می‌بریم که $-a > 0$ ، و معادله (۲) می‌دهد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 4} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin[(-a)x]}{x^2 + 4} dx = -\frac{\pi}{2} e^{-(-a)} \sin(-a)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^a \sin a \quad (3)$$

می‌توانیم (۲) و (۳) را به‌صورت زیر جمع‌بندی کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \sin a$$

انتگرالهایی که فقط شامل توابع مثلثاتی اند. انتگرال نوع سومی که می‌توانیم با استفاده از قضیه ماندها محاسبه کنیم، تنها شامل توابع مثلثاتی و نوعاً به صورت زیر است

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

که در آن F یک تابع دلخواه (نوعاً گویا) در $\sin \theta$ و $\cos \theta$ است. چون θ از صفر تا 2π تغییر می‌کند، می‌توانیم آن را شناسه یک نقطه z روی یک دایره واحد به مرکز مبدأ بگیریم. در این صورت $z = e^{i\theta}$ و $1/z = e^{-i\theta}$ ، و می‌توانیم جایگزینی زیر را در انتگرال اصلی اجرا کنیم

$$\cos \theta = \frac{z + 1/z}{2} \quad \sin \theta = \frac{z - 1/z}{2i} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

و برسیم به

$$\oint_C F\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz}$$

این انتگرال را می‌توان با روش ماندها محاسبه کرد. در مثالهای زیر، طریقه استفاده از این روش را ملاحظه می‌کنید.

مثال ۷-۲-۹: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} \quad |a| < 1$$

به جای $\cos \theta$ و $d\theta$ برحسب z قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\oint_C \frac{dz/iz}{1 + a[(z^2 + 1)/2z]} = \frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{2z + az^2 + a}$$

که در آن C دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات است. تکنیکهای انتگرالده همان صفرهای مخرج اند. با استفاده از فرمول معادلات درجه دو، صفرهای ساده مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

بدیهی است که به ازای $|a| < 1$ در خارج C قرار دارد، لذا در انتگرال سهمی ندارد. اما z_1 در داخل C واقع است، و می‌رسیم به

$$\oint_C \frac{dz}{2z + az^2 + a} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)]$$

مانده قطب ساده در z_1 را می‌توان محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z_1)] &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{a(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{z_1 - z_2} \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{2\sqrt{1 - a^2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

سرانجام، داریم

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \frac{2}{i} \oint \frac{dz}{2z + az^2 + a} = \frac{2}{i} 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

مثال ۷-۲-۱۰: به عنوان یک مثال دیگر، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \quad a > 1$$

چون $\cos \theta$ تابع زوجی نسبت به θ است، می‌توانیم بنویسیم

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$$

این انتگرال روی کل دایره‌ای گرفته می‌شود که مبدأ را دربر می‌گیرد، و می‌توانیم جایگذاری معمولی زیر را انجام دهیم:

$$I = \frac{1}{2} \oint_C \frac{dz/iz}{[a + (z^2 + 1)/2z]^2} = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{2z dz}{(z^2 + 2az + 1)^2}$$

ریشه‌های مخرج عبارت‌اند از

$$z_1 = a - \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{و} \quad z_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

که هر دو از مرتبه ۲ هستند. ریشه دوم در خارج دایره واحد قرار دارد زیرا $a > 1$. همچنین می‌توان به آسانی اثبات کرد که به‌ازای همه مقادیر بزرگتر از ۱ ($a > 1$)، z_1 در داخل دایره واحد واقع است. چون z_1 یک قطب مرتبه ۲ است، داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z_1)] &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[(z - z_1)^2 \frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [z(z - z_2)^{-2}] = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2} - \frac{2z_1}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{a}{2(a^2 - 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

به این ترتیب می‌رسیم به

$$I = \frac{2}{i} \{2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)]\} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

سایر انتگرالهای محاسبه‌پذیر. واضح است که سه نوع انتگرال معین که قبلاً درباره آنها صحبت کردیم، تمام موارد ممکن را دربر نمی‌گیرند. انتگرالهای دیگری نیز یافت می‌شوند که در هیچ یک از سه دسته قرار نمی‌گیرند، اما با همه آنها محاسبه‌پذیرند. همان‌طور که در دو مثال زیر مشاهده خواهید کرد، انتخاب مناسب پرند، محاسبه سایر انواع انتگرالها را میسر می‌کند.

مثال ۷-۲-۱: می‌خواهیم انتگرال گاوسی زیر را محاسبه کنیم

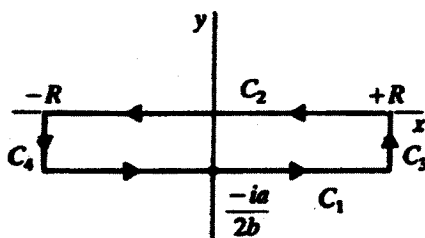
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax - bx^2} dx \quad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$$

عبارت توان را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b[x - (ia/2b)]^2 - (a^2/4b)} dx = e^{-a^2/4b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b[x - (ia/2b)]^2} dx \\ &= e^{-a^2/4b} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-b[x - (ia/2b)]^2} dx \end{aligned}$$

با تغییر متغیر انتگرال‌گیری به $z = x - ia/2b$ ، می‌رسیم به

$$I = e^{-a^2/4b} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R - ia/2b}^{R - ia/2b} e^{-bz^2} dz$$



شکل ۵.۷

حال، I_R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I_R \equiv \int_{-R-ia/2b}^{R-ia/2b} e^{-bz'} dz$$

این انتگرال در طول خط است C_1 ، موازی محور x ‌ها، گرفته می‌شود (شکل ۵.۷). پرند را مطابق شکل می‌بینیم و توجه می‌کنیم که $e^{-bz'}$ در تمام ناحیه داخلی پرند بسته تحلیلی است. پس، این انتگرال مسیری، بر طبق قضیه کوشی-گورسا، باید صفر شود. بنابراین، خواهیم داشت

$$I_R + \int_{C_T} e^{-bz'} dz + \int_R^{-R} e^{-bz'} dx + \int_{C_T} e^{-bz'} dz = 0$$

در امتداد C_T ، $z = R + iy$ و

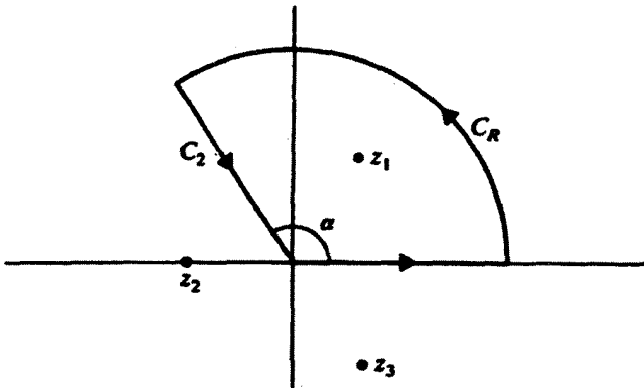
$$\int_{C_T} e^{-bz'} dz = \int_{-ia/2b}^0 e^{-b(R+iy)'} i dy = ie^{-bR'} \int_{-ia/2b}^0 e^{by' - 2ibRy} dy$$

که وقتی $R \rightarrow \infty$ ، صریحاً به سمت صفر میل می‌کند. در مورد انتگرالی که در امتداد C_T گرفته شده، نیز نتیجه مشابهی به دست می‌آوریم. پس، داریم

$$I_R = \int_{-R}^R e^{-bx'} dx$$

و $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx'} dx = \sqrt{\pi/b}$ (تمرین ۵-۳-۲). سرانجام، می‌رسیم به

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax - bx'} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-a'/2b}$$



شکل ۶-۷

مثال ۱۲-۲-۷: حال انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

نمی‌توانیم مانند قبل حد پایین انتگرال را به $-\infty$ ببریم، زیرا در اینجا انتگرالده زوج نیست. برای اینکه ملاحظه می‌کنیم چگونه پربند را ببندیم، تکنیکهای انتگرالده را مطالعه می‌کنیم. این تکنیکها، همان ریشه‌های مخرج به‌شمار می‌آیند

$$z^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{i(2n+1)\pi/2}$$

یا

$$z_1 = e^{i\pi/2} \quad z_2 = e^{i\pi} = -1 \quad z_3 = e^{i3\pi/2}$$

این ریشه‌ها و همچنین پربندی را که فقط z_1 را به‌عنوان یک نقطهٔ درونی دارد، در شکل ۶-۷ مشاهده می‌کنید. بنابراین، داریم

$$I + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)] \quad (1)$$

مطابق معمول، انتگرال روی C_R صفر می‌شود. در امتداد C_2 ، داریم $z = re^{i\alpha}$ که در آن α ثابت

است؛ بنابراین

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^r + 1} = \int_0^\pi \frac{e^{i\alpha} dr}{(re^{i\alpha})^r + 1} = -e^{i\alpha} \int_0^\infty \frac{dr}{r^r e^{ri\alpha} + 1}$$

در حالت خاص، اگر فرض کنیم $\alpha = 2\pi$ ، می‌رسیم به

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^r + 1} = -e^{i2\pi/r} \int_0^\infty \frac{dr}{r^r + 1} = -e^{i2\pi/r} I$$

با قرار دادن این مقدار در (۱)، خواهیم داشت

$$(1 - e^{i2\pi/r})I = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z_1)]$$

از سوی دیگر،

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z_1)] &= \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/r}} (z - e^{i\pi/r}) \frac{1}{(z - e^{i\pi/r})(z + 1)(z - e^{i5\pi/r})} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{r}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (i\sqrt{3})} \end{aligned}$$

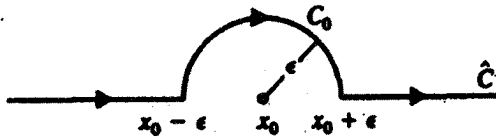
حاصل این دو معادله به‌قرار زیر است

$$\left(\frac{r}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) I = \frac{2\pi i}{\left(\frac{r}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (i\sqrt{3})}$$

یا

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

مقدار اصلی یک انتگرال. تا اینجا فقط در خصوص انتگرال توابعی بحث کرده‌ایم که بر روی پربند دارای تکینگی نبودند. اکنون پیامدهای حضور نقاط تکینه روی پربند را بررسی می‌کنیم.



شکل ۷-۷ پربند C_0 که نقطه x_0 را مستثنی می‌کند.

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (۱۱-۷)$$

که در آن x_0 عددی حقیقی و f در x_0 تحلیلی است. برای اجتناب از x_0 که به بینهایت داریم انتگرال می‌انجامد، با تغییر پربند به صورت شکل ۷-۷، آن را دور می‌زنیم. پربند C_0 یک نیم‌دایره به شعاع ϵ است. برای پربند C که در شکل ۷-۷ نشان داده شده است، داریم

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - x_0} dz$$

در حد $\epsilon \rightarrow 0$ ، دو جمله اول در سمت راست، بنا به تعریف، مقدار اصلی انتگرال (۱۱-۷) را تشکیل می‌دهند:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{f(x) dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right]$$

با توجه به $z - x_0 = \epsilon e^{i\theta}$ و $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ ، انتگرال روی نیم‌دایره را محاسبه می‌کنیم. بنابراین

$$\int_{C_0} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{\pi}^0 \frac{f(x_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = -i\pi f(x_0)$$

و

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0) \quad (۱۲-۷ \text{ الف})$$

از سوی دیگر، اگر C_0 زیر تکینگی در نظر گرفته شود، می‌رسیم به

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + i\pi f(x_0) \quad (12-7)$$

ملاحظه می‌کنیم که انتگرال پربندی به این بستگی دارد که چگونه نقطه تکین x_0 را خارج یا مستثنی کنیم. لیکن، مقدار اصلی در صورت وجود، منحصر به فرد است. برای محاسبه این مقدار اصلی، مانند قبل با افزودن یک نیم‌دایره بزرگ به آن و با این فرض که بنابر لم جوردن سهم این نیم‌دایره به صفر میل می‌کند، پربند را می‌بندیم. سمت چپ $12-7$ الف یا $12-7$ ب به یک انتگرال پربندی بسته تبدیل می‌شود که مقدار آن به کمک قضیه مانده‌ها داده می‌شود. از این رو داریم

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res} \left[\frac{f(z_j)}{z_j - x_0} \right] \quad (13-7)$$

که در آن علامت مثبت متناظر با حالتی است که نیم‌دایره بینهایت کوچک را در نیم صفحه بالایی قرار می‌دهیم (شکل $7-7$) و علامت منفی با انتخاب دیگر متناظر است. توجه کنید که برخلاف ظاهر معادله $13-7$ ، مقدار اصلی، در صورت وجود، یک مقدار منحصر به فرد دارد (تمرین $7-2-8$).

مثال $7-2-13$: اکنون با استفاده از روش مقدار اصلی، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

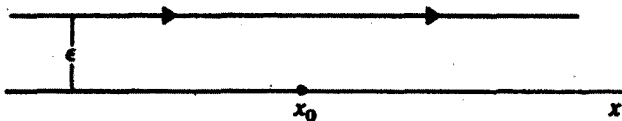
$$I \equiv \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

به نظر می‌رسد که $x = 0$ یک نقطه تکین انتگرالده باشد؛ اما در واقع همان طوری که بسط تیلور $\sin x/x$ نشان می‌دهد، این یک تکینگی برداشتنی است. برای اینکه از روش مقدار اصلی بهره بگیریم، می‌نویسیم

$$I = \frac{1}{2} \text{Im}(I') \equiv \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \equiv \frac{1}{2} \text{Im} \left(P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

اکنون از معادله $13-7$ با دایره کوچک در نیم صفحه بالایی بهره می‌گیریم و به این نکته مهم توجه می‌کنیم که هیچ تکینگی برای e^{iz}/x در آن وجود ندارد. پس،

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi e^{i(0)} = i\pi$$



شکل ۸-۷ پر بند معادلی که از "باز کشیدن" پر بند شکل ۷-۷ به دست می‌آید.

از این رو،

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im}(i\pi) = \frac{\pi}{2}$$

قبلاً در مثال ۲-۲-۵ به این نتیجه مهم رسیدیم.

اگر با کشیدن پر بند معادله (۷-۱۲ الف) مطابق شکل ۸-۷، آن را تغییر شکل دهیم، می‌توانیم مقدار اصلی یک انتگرال را به صورتی فشرده‌تر بنویسیم. اگر ε به قدر کافی کوچک باشد، چنین تغییر شکلی تعداد تکیه‌گاه‌های داخل پر بند بسته بینهایت را تغییر نخواهد داد. بنابراین، سمت چپ (۷-۱۲ الف) تغییر نخواهد کرد. از این رو، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{-\infty + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0} dz$$

اگر متغیر انتگرال‌گیری را به $z = \xi - i\varepsilon$ تبدیل کنیم، انتگرال به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi + i\varepsilon)}{\xi + i\varepsilon - x_0} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - x_0 + i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - x_0 + i\varepsilon} dz \quad (14-7)$$

که در مرحله آخر متغیر ظاهری انتگرال‌گیری را به z برگردانده‌ایم. توجه کنید که چون f در تمام نقاط روی پر بند پیوسته فرض شده است، به ازای مقادیر کوچک ε خواهیم داشت $f(\xi + i\varepsilon) \rightarrow f(\xi)$. انتگرال آخری (۷-۱۴) نشان می‌دهد که هیچ تکیه‌گی روی محور x جدید وجود ندارد؛ تکیه‌گی را به $x - i\varepsilon$ منتقل کرده‌ایم. به عبارت دیگر، به تکیه‌گی روی محور x ‌ها، یک جزء موهومی منفی کوچک داده‌ایم. بنابراین، می‌توانیم (۷-۱۲ الف) را به صورت زیر بنویسیم

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 + i\varepsilon} dx \quad (15-7)$$

که در انتگرال آخری به جای z ، از x استفاده کرده‌ایم زیرا حقیقتاً در امتداد محور x جدید انتگرال می‌گیریم. به کمک استدلال مشابهی خواهیم داشت

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = -i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 - i\varepsilon} dx$$

که می‌توان آن را با (۷-۱۵) ترکیب کرد و رسید به

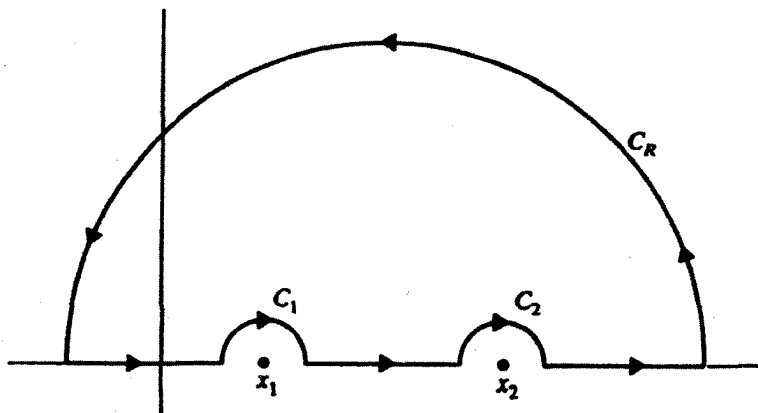
$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_0 \pm i\varepsilon} \quad (۷-۱۶)$$

مثال ۷-۲-۱۴: اگر دو نقطهٔ تکین x_1 و x_2 روی محور حقیقی وجود داشته باشند، می‌توانیم یک فرمول کلی برای مقدار اصلی تابع به دست آوریم. فرض کنید انتگرال به صورت زیر باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} dx \equiv \int_{C_x} \frac{f(z)}{(z - x_1)(z - x_2)} dz$$

که در آن C_x همان محور x هاست. حال مانند قبل با تکمیل نیم‌دایره‌های کوچک که هر دو در نیم‌صفحهٔ بالایی قرار دارند، نقاط x_1 و x_2 را خارج می‌کنیم (شکل ۷-۹). می‌توانیم، بدون نوشتن انتگرالده، انتگرال پربندی را به صورت زیر بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} + \int_{C_1} + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} + \int_{C_2} + \int_{x_2+\varepsilon}^{\infty} + \int_{C_R} = 2\pi i \sum \text{Res}$$



شکل ۷-۹ یکی از چهار انتخاب برای محاسبهٔ مقدار اصلی انتگرال.

طبعاً مقدار اصلی انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} \dots + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} \dots + \int_{x_2 + \varepsilon}^{\infty} \dots$$

سهام نیم‌دایره‌های کوچک را می‌توان محاسبه کرد

$$\int_{C_1} \frac{f(z) dz}{(z - x_1)(z - x_2)} = \int_{\pi}^0 \frac{f(x_1 + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}(x_1 + \varepsilon e^{i\theta} - x_2)} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \int_{\pi}^0 d\theta$$

\uparrow زیرا روی C_1 $z = x_1 + \varepsilon e^{i\theta}$ \uparrow زیرا ε کوچک است و f پیوسته فرض شده است

$$= -i\pi \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

به همین ترتیب

$$\int_{C_2} \frac{f(z) dz}{(z - x_1)(z - x_2)} = -i\pi \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

با قرار دادن نتایج بالا در کنار یکدیگر، می‌رسیم به

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - x_1)(x - x_2)} - i\pi \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 2\pi i \sum \text{Res}$$

اگر حالتی را در نظر بگیریم که در آن C_2 و C_1 در دو نیم‌صفحه پایین قرار داشته باشند، می‌رسیم به

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \pm i\pi \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + 2\pi i \sum \text{Res} \quad (1)$$

که در آن علامت مثبت مربوط به حالتی است که در آن C_2 و C_1 در نیم‌صفحه بالایی قرار دارند و علامت منفی برای حالتی است که هر دو در نیم‌صفحه پایین باشند. در حالت خاص، اگر هیچ تکینگی وجود نداشته باشد، هیچ سهم از مانده‌ها موجود نخواهد بود، و (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \pm i\pi \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

همچنین می‌توان با در نظر گرفتن حد $x_1 \rightarrow x_2$ ، نتیجه را برای حالتی که دو تکینگی بر یکدیگر منطبق باشند، به‌دست آورد. در این صورت، سمت راست (۲)، به یک مشتق تبدیل می‌شود، و داریم

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} dx = \pm i\pi \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

مثال ۷-۲-۱۵: از مانده‌ها بهره می‌گیریم و تابع زیر را محاسبه می‌کنیم

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x - i\varepsilon} dx$$

باید با افزودن یک نیم‌دایره بزرگ پر بند را ببندیم. اینکه این کار را در نیم‌صفحه بالا یا نیم‌صفحه پایین انجام دهیم، با علامت k تعیین می‌شود. اگر $k > 0$ ، آن را در نیم‌صفحه بالا می‌بندیم. بنابراین

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{ikz}}{z - i\varepsilon} dz = 2\pi i \quad (\text{مانده در } i\varepsilon) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\varepsilon} \left[(z - i\varepsilon) \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{ikz}}{z - i\varepsilon} \right) \right] = e^{-k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \quad k > 0 \end{aligned}$$

از سوی دیگر، اگر $k < 0$ ، باید در نیم‌صفحه پایین ببندیم، که در آن $e^{ikz}/(z - i\varepsilon)$ تحلیلی است. پس، بنا بر قضیه کوشی-گورسا، انتگرال صفر می‌شود. از این رو، داریم

$$f(k) = \begin{cases} 1 & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

این عبارت، دقیقاً همان تعریف تابع تانگنست. به این ترتیب، یک نمایش انتگرالی برای این تابع به‌دست آوردیم

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{t - i\varepsilon} dt$$

تمرینها

۷-۲-۱ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z-2)}$$

که در آن C دایره $|z|=3$ است.

۷-۲-۲ فرض کنید $h(z)$ تابعی تحلیلی باشد که در $z = z_0$ دارای یک قطب ساده است، و فرض کنید $g(z)$ در آنجا تحلیلی باشد. فرض کنید $f(z) = g(z)/h(z)$ ، و نشان دهید

$$\text{Res}[f(z_0)] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

۷-۲-۳ مانده $f(z) = 1/\cos z$ را در تمام قطبهایش بیابید.

۷-۲-۴ انتگرال $\int_0^\infty dx/(x^2+1)^2(x^2+4)$ را یکبار با بستن پرند در نیم صفحه بالا و یکبار در نیم صفحه پایین، محاسبه کنید.

۷-۲-۵ انتگرال $\int_0^\infty dx/(x^2+1)^2(x^2+2)$ را محاسبه کنید.۷-۲-۶ انتگرال $I = \int_0^\infty dx \cos ax/(x^2+b^2)$ را محاسبه کنید.

۷-۲-۷ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad |a| < 1$$

۷-۲-۸ نشان دهید جواب معادله (۷-۱۳)، برای هر دو انتخاب نیمدایره کوچک یکسان است.

۷-۲-۹ قسمت اصلی انتگرال زیر را پیدا کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

۷-۲-۱۰ عبارتی که در مطالعه توابع گرین (انتشارگرها) با آن مواجه می‌شویم، عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{x^2 - k^2} dx$$

که در آن k و t ثابتهای حقیقی‌اند. مقدار اصلی این انتگرال چقدر است؟

۱۱-۲-۷ از نتیجه مثال ۱۵-۲-۷ بهره گیرید و نشان دهید $d\theta(k)/dk = \delta(k)$.
۱۲-۲-۷ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx \quad 0 < \alpha < 1$$

۳-۷ توابع چندمقداری

دلخواه بودن مقدار زاویه $\theta \equiv \arg(z)$ در $z = re^{i\theta}$ ، تا مضربی از 2π به توابعی منجر می‌شود که در یک نقطه مقادیر متفاوتی دارند. مثلاً تابع $f(z) = z^{1/2}$ را در نظر بگیرید. با نوشتن z در مختصات قطبی، می‌رسیم به

$$f(z) \equiv f(r, \theta) = (re^{i\theta})^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

این رابطه نشان می‌دهد که به ازای یک مقدار z ، $z = (r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$ ، دو مقدار مختلف $f(r, \theta)$ و $f(r, \theta + 2\pi) = -f(r, \theta)$ به دست می‌آوریم.

در وهله نخست ممکن است این نتیجه نگران‌کننده به نظر برسد. روی هم رفته، تعریف توابع (نگاشت) تضمین می‌کند که برای هر نقطه در حوزه تعریف تابع یک حوزه مقادیر یکتا به دست آید. در اینجا به ازای یک z ، دو حوزه مقادیر (نگاره) متفاوت به دست آمده است. ریمان برای این دید دوگانه مختلط یک راه علاج، برگه‌های ریمان، را یافت. در خصوص این مطالب در زیر به اختصار بحث می‌کنیم، اما ابتدا نگاه دقیقتری به یک الگوی نمونه توابع چندمقداری می‌اندازیم.

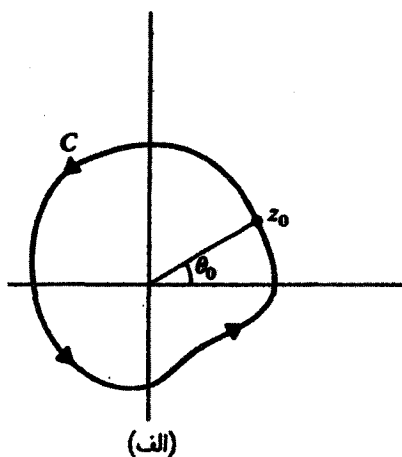
۱-۳-۷ تابع لگاریتمی

حال، تابع لگاریتمی، $\ln z$ ، را از نظر می‌گذرانیم. این مفهوم، برای $z = re^{i\theta}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

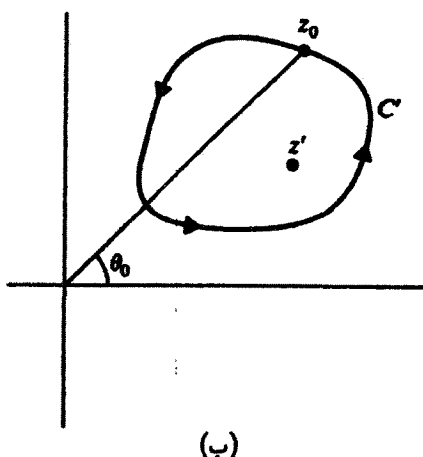
$$\ln z = \ln r + i\theta \equiv \ln|z| + i \arg(z)$$

که در آن $\arg(z)$ فقط در محدوده مضربی از 2π تعریف شده است؛ یعنی، $\arg(z) = \theta + 2n\pi$ ، که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

با در نظر گرفتن یک مسیر بسته حول نقطه $z = 0$ ، مطابق شکل ۱۰-۷ الف، می‌توانیم ماهیت خاص تابع لگاریتمی را ملاحظه کنیم. با شروع از z_0 ، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کنیم، زاویه



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱۰ (الف) وقتی z_0 مسیر C را یک دور کامل می‌زند، θ_0 به اندازه 2π تغییر می‌کند؛ (ب) وقتی z_0 یک دور کامل می‌زند، θ_0 به مقدار اولیه‌اش برمی‌گردد.

θ_0 به‌طور ثابت افزایش می‌یابد، تا اینکه به نقطه اولیه در صفحه z برسیم. لیکن، در این صورت زاویه مورد نظر عبارت است از $\theta_0 + 2\pi$. به این ترتیب، فرایند حرکت حول مبدأ، مقدار تابع لگاریتمی را به اندازه 2π افزایش داده است. بنابراین،

$$(\ln z_0)_{\text{نهایی}} - (\ln z_0)_{\text{اولیه}} = 2\pi i$$

زیرا، z_0 نهایی با z_0 اولیه زاویه‌های متفاوتی دارند. توجه کنید که در این فرایند، z_0 تغییر نمی‌کند، زیرا

$$(z_0)_{\text{نهایی}} = r e^{i(\theta_0 + 2\pi)} = r e^{i\theta_0} = (z_0)_{\text{اولیه}}$$

تعریف ۷-۳-۱: نقطه شاخه یک تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ عبارت است از نقطه‌ای مانند $z_0 \equiv (r_0, \theta_0) \in \mathbb{C}$ با این خاصیت که برای هر منحنی بسته C حول z_0 داشته باشیم $f(r_0, \theta_0) \neq f(r_0, \theta_0 + 2\pi)$.

بنابراین، $z = 0$ یک نقطه شاخه تابع لگاریتمی است. مطالعه رفتار $\ln(1/w) = -\ln w$ حول $w = 0$ نشان می‌دهد که نقطه واقع "در بینهایت" نیز یک نقطه شاخه $\ln z$ است. در شکل ۷-۱۰ ب مشاهده می‌کنید که هر نقطه دیگر صفحه مختلط نظیر z' ، نمی‌تواند یک نقطه شاخه باشد زیرا وقتی C' را به‌طور کامل طی کنیم، θ_0 به اندازه 2π تغییر نمی‌کند.

۲-۳-۷ سطوح ریمانی

ایدهٔ سطح ریمانی با حذف تمام نقاطی که روی خط (یا هر منحنی دیگر) واصل بین دو نقطه شاخه قرار دارند، شروع می‌شود. این امر برای $\ln z$ به معنای حذف تمام نقاط واقع بر یک منحنی است که از $z = 0$ شروع می‌شود و تا نقطهٔ بینهایت ادامه می‌یابد. چنین منحنی‌ای را بریدگی شاخه‌ای یا صرفاً بریدگی می‌گویند.

حال توجه خود را به $\ln z$ معطوف می‌کنیم و بریدگی را در امتداد نیمهٔ منفی محور حقیقی در نظر می‌گیریم. توابع زیر را نیز تعریف می‌کنیم

$$f_n(z) = f_n(r, \theta) = \ln r + i(\theta + 2n\pi); -\pi < \theta < \pi; r > 0, n = 0, \pm 1, \dots$$

به طوری که $f_n(z)$ به ازای $-\pi \leq \theta < \pi$ همان مقادیری را می‌گیرد که $\ln z$ در فاصلهٔ $(2n+1)\pi < \theta < (2n-1)\pi$ می‌گیرد. به این ترتیب، تابع چندمقداری لگاریتمی را با یک دسته تابع مختلف جایگزین می‌کنیم که در صفحهٔ z بریده شده تحلیل می‌اند.

این فرایند بریدن صفحهٔ z و سپس تعریف یک رشته توابع، تناقضی را که در اثر وجود نقاط شاخه ایجاد می‌شود برطرف می‌کند؛ زیرا، دیگر مجاز نیستیم یک نقطهٔ شاخه را به طور کامل دور بزنیم. دور زدن کامل، شامل عبور از بریدگی است، که به نوبهٔ خود، حوزهٔ تعریف $f_n(z)$ را نقض می‌کند.

تا اینجا پیشرفت خوبی داشته‌ایم. تابع چندمقداری (غیرتحلیلی) $\ln z$ را با یک دسته تابع تحلیلی $f_n(z)$ (در حوزهٔ تعریفشان) جایگزین کرده‌ایم. اما یک مسئله باقی می‌ماند: $f_n(z)$ در بریدگی دارای ناپیوستگی است. در واقع، درست در بالای بریدگی داریم

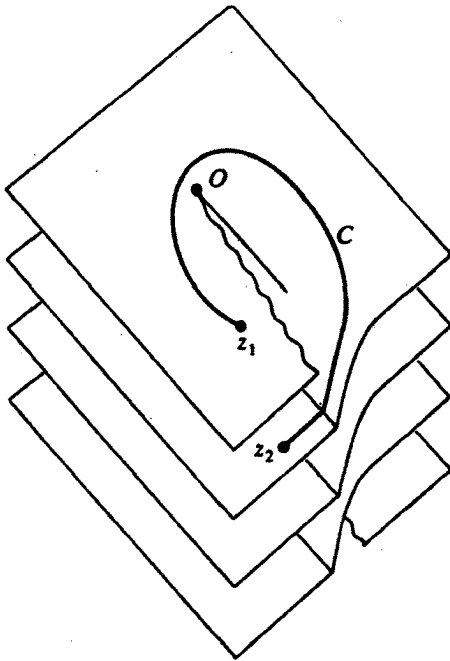
$$f_n(r, \pi - \varepsilon) = \ln r + i(\pi - \varepsilon + 2n\pi) \quad \varepsilon > 0$$

و درست در زیر بریدگی داریم

$$f_n(r, -\pi + \varepsilon) = \ln r + i(-\pi + \varepsilon + 2n\pi) \quad \varepsilon > 0$$

و

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f_n(r, \pi - \varepsilon) - f_n(r, -\pi + \varepsilon)] = 2\pi i$$



شکل ۷-۱۱ چند برگه از سطح ریمانی برای تابع لگاریتمی. مسیر C که مبدأ O را دور می‌زند، به برگه پایتتر می‌رسد.^۱

برای حل این مشکل، توجه می‌کنیم که مقدار $f_n(z)$ درست در بالای بریدگی، با مقدار $f_{n+1}(z)$ درست در زیر بریدگی، برابر است. این امر، ساختار هندسی زیر را که منسوب به ریمان است، پیشنهاد می‌کند: یک مجموعه نامحدود از صفحات مختلط بریده‌شده را تصور کنید که بر روی یکدیگر قرار دارند و هر کدام با یک مقدار n متناظرند. صفحات مجاور در امتداد بریدگی چنان به هم مربوط‌اند که لبه بالایی بریدگی در صفحه $(n-1)$ ام به لبه پایینی بریدگی در صفحه n ام متصل است. تمام صفحات این دو نقطه شاخه را در بردارند. یعنی، نقاط شاخه، مانند "لولاهایی" اند که تمام صفحات در آن به هم متصل‌اند. با این ساختار هندسی، اگر از بریدگی عبور کنیم، به صفحه دیگری که مجاور صفحه اول است، می‌رسیم (شکل ۷-۱۱).^۱

این سطح هندسی که هم اکنون بنا کردیم، سطح ریمانی نامیده می‌شود؛ هر صفحه یک برگه ریمانی نام دارد و با R_j ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) نمایش داده می‌شود. تابعی تک‌مقداری که روی یک برگه ریمانی تعریف می‌شود، شاخه تابع چندمقداری نامیده می‌شود.

1. Denery and Krzywicki, *Math for Physicists*, p 70 and 71, New York, Harper Row, 1967.

به نتیجه زیر دست یافته‌ایم: از یک تابع چندمقداری، یک رشته توابع تک‌مقداری ساخته‌ایم که هر کدام در یک تک‌صفحهٔ مختلط تعریف شده‌اند؛ از این رشته توابع، یک تابع مختلط منفرد ساخته‌ایم که روی یک سطح ریمانی منفرد تعریف شده است. بنابراین، تابع لگاریتمی در تمام سطح ریمانی، جز در نقاط شاخه، که همان نقاط تکین تابع هستند، تحلیلی است.

اکنون می‌توانیم اهمیت هندسی نقاط شاخه را به آسانی ملاحظه کنیم. یک دور کامل حول یک نقطهٔ شاخه ما را به برگهٔ ریمانی دیگری می‌برد، که تابع در آن، مقدار متفاوتی دارد. از سوی دیگر، یک دور کامل حول یک نقطهٔ معمولی، یا هرگز به ترک برگه منجر نمی‌شود، یا اگر بشود، به نقطهٔ شروع برمی‌گردد.

حال دو تابع چندمقداری متداولتر و سطوح ریمانی آنها را به اختصار بررسی می‌کنیم.

تابع $f(z) = z^{1/n}$. تنها نقاط شاخه برای تابع $f(z) = z^{1/n}$ عبارت‌اند از نقاط $z = 0$ و بینهایت. بنابر تعریف

$$f_k(z) \equiv r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi/n)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad 0 < \theta < 2\pi$$

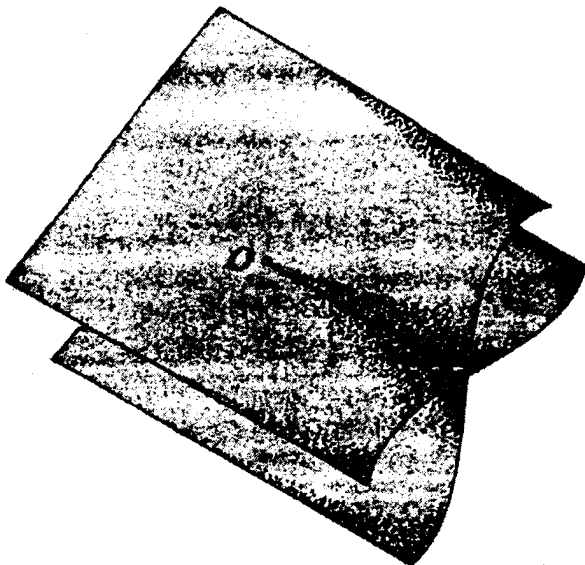
و ادامه همان روش تابع لگاریتمی، ملاحظه می‌کنیم که باید در سطح ریمانی، n برگهٔ ریمانی وجود داشته باشد که آنها را با R_0, R_1, \dots, R_{n-1} مشخص می‌کنیم. لبهٔ پایینی R_n در امتداد بریدگی، که در امتداد محور حقیقی مثبت گرفته می‌شود، به لبهٔ بالایی R_n می‌چسبد. این سطح ریمانی به‌ازای $n = 2$ در شکل ۱۲-۷ نشان داده شده است.

واضح است که به‌ازای هر مقدار غیرصحیح α ، تابع $f(z) = z^\alpha$ دارای یک نقطهٔ شاخه در $z = 0$ و یک نقطهٔ دیگر در بینهایت است. به‌ازای مقادیر اصم α ، تعداد برگه‌های ریمانی نامحدود است.

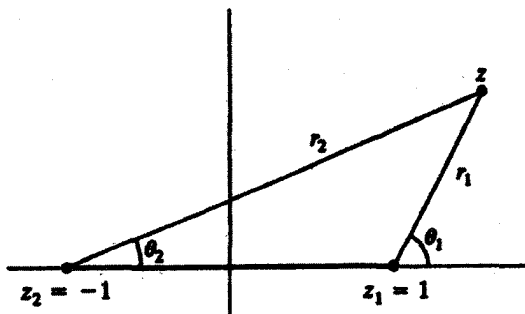
تابع $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$. نقاط شاخه برای تابع $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ در $z_1 = +1$ و $z_2 = -1$ قرار دارند (شکل ۱۳-۷). با نوشتن $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، داریم

$$f(z) = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/2} (r_2 e^{i\theta_2})^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i[(\theta_1 + \theta_2)/2]}$$

بریدگی در راستای محور حقیقی است و از $z = -1$ تا $z = +1$ امتداد دارد. نسبت به سطح ریمانی، دو برگهٔ ریمانی وجود دارد. واضح است که فقط چرخه‌های 2π شامل یک نقطه شاخه، بریدگی را قطع می‌کنند و از این‌رو به یک برگهٔ دیگر منتهی می‌شوند. هر منحنی بسته‌ای که هر دو



شکل ۱۲-۷ سطح ریمانی برای $f(z) = z^{1/2}$



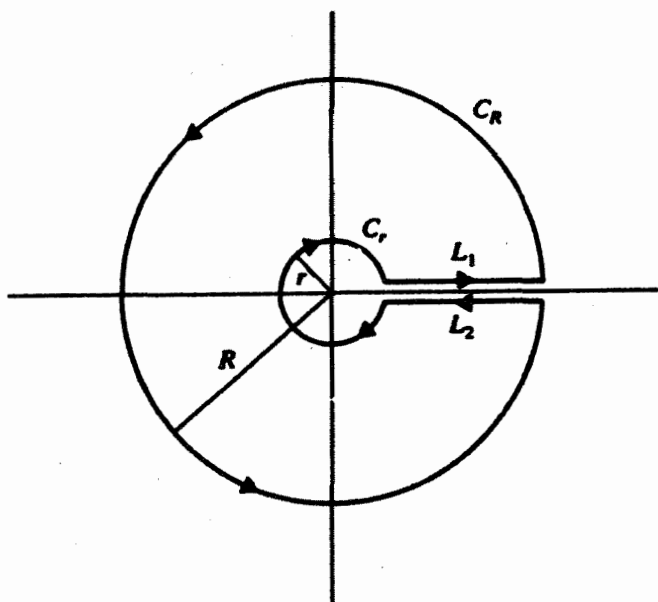
شکل ۱۳-۷ بریدگی از z_1 به z_2 است. مسیرهایی که تنها یک نقطه را دور بزنند، بریدگی را قطع خواهند کرد و از این‌رو، به برگه دیگر منتهی خواهند شد.

نقطه z_1 و z_2 را دربر داشته باشند، به‌طور کامل روی برگه اولیه قرار خواهند داشت.^۱

مثال ۱-۳-۷: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + 1} dx \quad -1 < \alpha < 1$$

1. Denery and Krywicki, *Math for Physicists*, p 70 and 71, New York: Harper Row, 1967.



شکل ۷-۱۴

برای این منظور، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم

$$I = \oint_C \frac{z^\alpha}{z^\gamma + 1} dz$$

که در آن C در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده و بریدگی در امتداد محور حقیقی مثبت است. برای محاسبه سهم C_R و C_r ، به جای r و R متغیر ρ را قرار می‌دهیم. در این صورت داریم

$$I_\rho \equiv \int_{C_r} \frac{(\rho e^{i\theta})^\alpha}{(\rho e^{i\theta})^\gamma + 1} i \rho e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\theta}}{\rho^\gamma e^{i\gamma\theta} + 1} d\theta$$

واضح است که چون $|\alpha| < 1$ ، وقتی $\rho \rightarrow \infty$ یا $\rho \rightarrow 0$ داریم، $I_\rho \rightarrow 0$. حال سهم L_1 و L_2 را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که این دو یکدیگر را حذف نمی‌کنند زیرا، مقدار تابع در بالا و پایین بریدگی با یکدیگر متفاوت است. برای محاسبه انتگرالها باید یک شاخه تابع را انتخاب کنیم. در اینجا، شاخه‌ای را انتخاب می‌کنیم که روی آن داریم

$$z^\alpha \equiv |z|^\alpha e^{i\alpha\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi$$

در امتداد L_1 ,

$$\theta \approx 0 \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = x^\alpha$$

و در امتداد L_2 ,

$$\theta \approx 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = (xe^{2\pi i})^\alpha$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^\alpha}{z^\gamma + 1} dz &= \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\gamma + 1} dx + \int_\infty^0 \frac{x^\alpha e^{i2\pi\alpha}}{(xe^{2\pi i})^\gamma + 1} dx \\ &= (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\gamma + 1} dx \end{aligned} \quad (1)$$

سمت چپ این معادله را می‌توان با استفاده از قضیه ماندها به دست آورد. دو قطب ساده در نقاط $z = -i$ و $z = +i$ وجود دارد. ماندها در این نقاط عبارت‌اند از

$$\text{Res}[f(i)] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^\alpha}{(z - i)(z + i)} = \frac{i^\alpha}{2i} = \frac{(e^{i\pi/2})^\alpha}{2i}$$

$$\text{Res}[f(-i)] = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{z^\alpha}{(z + i)(z - i)} = -\frac{(e^{i3\pi/2})^\alpha}{2i}$$

بنابراین

$$\oint_C \frac{z^\alpha}{z^\gamma + 1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{i\alpha\pi/2}}{2i} - \frac{e^{i3\alpha\pi/2}}{2i} \right) = \pi(e^{i\alpha\pi/2} - e^{i3\alpha\pi/2})$$

از ترکیب این معادله با معادله (۱)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^\gamma + 1} dx &= \frac{\pi(e^{i\alpha\pi/2} - e^{i3\alpha\pi/2})}{e^{i\alpha\pi}(e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi})} \\ &= \frac{-2\pi i \sin(\alpha\pi/2)}{-2i \sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{2} \sec \frac{\alpha\pi}{2} \end{aligned}$$

اگر شاخه دیگری از تابع را انتخاب کرده بودیم، هم سمت راست و هم سمت چپ معادله (۱) متفاوت به دست می‌آمد، ولی نتیجه نهایی یکسان بود.

مثال ۷-۳-۲: در اینجا انتگرال دیگری را که دارای یک بریدگی شاخه‌ای است در نظر می‌گیریم

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^a}{x+1} dx \quad 0 < a < 1$$

برای محاسبه این انتگرال، از شاخه صفرم تابع و پرند شکل ۷-۱۴ استفاده می‌کنیم. بنابراین، با نوشتن $z = \rho e^{i\theta}$ داریم

$$\begin{aligned} I' &= \oint_C \frac{z^{-a}}{z+1} dz \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\rho^{-a}}{\rho+1} d\rho + \int_{C_R} \frac{z^{-a}}{z+1} dz + \int_{\infty}^0 \frac{(\rho e^{i\pi})^{-a}}{\rho e^{i\pi}+1} d\rho + \int_{C_r} \frac{z^{-a}}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}[f(-1)] \end{aligned} \quad (1)$$

با همان استدلالی که در مثال ۷-۳-۱ به کار گرفتیم، سهم هر دو دایره صفر می‌شود. از سوی دیگر

$$\operatorname{Res}[f(-1)] = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z+1) \frac{z^{-a}}{z+1} \right] = (-1)^{-a}$$

برای شاخه‌ای که به کار می‌بریم، داریم $e^{i\pi} = -1$. بنابراین

$$\operatorname{Res}[f(-1)] = e^{-i\pi a}$$

انتگرالهای (۱) می‌دهند

$$I' = \int_0^{\infty} \frac{\rho^{-a}}{\rho+1} d\rho - e^{-i\pi a} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{-a}}{\rho+1} d\rho = (1 - e^{-i\pi a}) I$$

با قرار دادن در (۱)، داریم

$$(1 - e^{-i\pi a}) I = 2\pi i e^{-i\pi a}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad 0 < a < 1$$

مثال ۷-۳-۳: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$$

شاخهٔ صفرم تابع لگاریتمی را که در آن $-\pi < \theta < \pi$ ، اختیار می‌کنیم و از پریند شکل ۷-۷ بهره می‌گیریم، و آن را با یک دایرهٔ بزرگ در نیم‌صفحهٔ بالایی می‌بندیم. بنابراین، قرار می‌دهیم $z = \rho e^{i\pi}$ (توجه کنید که $\rho > 0$) و انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} I' &= \oint_C \frac{\ln z}{z^2+1} dz = \int_{\infty}^{\epsilon} \frac{\ln(\rho e^{i\pi})}{(\rho e^{i\pi})^2+1} e^{i\pi} d\rho \\ &\quad + \int_{C_r} \frac{\ln z}{z^2+1} dz + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\ln(\rho)}{\rho^2+1} d\rho + \int_{C_R} \frac{\ln z}{z^2+1} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}[f(i)] \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $z = i$ تنها تکیگی (که اتفاقاً یک قطب ساده است) در نیم‌صفحهٔ بالایی به‌شمار می‌آید. حال، توجه کنید که

$$\int_{\infty}^{\epsilon} \frac{\ln(\rho e^{i\pi})}{(\rho e^{i\pi})^2+1} e^{i\pi} d\rho = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\ln \rho + i\pi}{\rho^2+1} d\rho = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\ln \rho}{\rho^2+1} d\rho + i\pi \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2+1}$$

سه‌م مربوط به دایره‌ها به‌سمت صفر میل می‌کند. از سوی دیگر

$$\operatorname{Res}[f(i)] = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{\ln z}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{\ln i}{2i} = \frac{\ln e^{i\pi/2}}{2i} = \frac{\pi}{4}$$

با قرار دادن در (۱)، می‌رسیم به

$$2 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\ln \rho}{\rho^2+1} d\rho + i\pi \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2+1} = i \frac{\pi^2}{2}$$

همچنین می‌توانیم به آسانی نشان دهیم که [مسئله ۷-۱۲]

$$\int_0^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین، در حد $\varepsilon \rightarrow 0$ ، خواهیم داشت

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln \rho}{\rho^2 + 1} d\rho = 0$$

تمرینها

۷-۳-۱ نشان دهید نقطه واقع در بینهایت، یک نقطه شاخه برای $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ نیست.
 ۷-۳-۲ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

۷-۴ تداوم تحلیلی

توابع تحلیلی خواص منحصر به فرد معینی دارند که تاکنون به بعضی از آنها توجه کرده‌ایم. مثلاً، فرمول انتگرال کوشی، مقدار یک تابع تحلیلی در داخل یک پربند بسته ساده را برحسب فقط مقدار آن روی پربند می‌دهد. همچنین، دیدیم که می‌توانیم پربندهای انتگرال‌گیری را تغییر شکل دهیم، به شرطی که هیچ تکینگی تابع را قطع نکنیم.

با ترکیب این دو خاصیت و این فرض که $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در داخل ناحیه $R \subset \mathbb{C}$ تحلیلی باشد، می‌توان پرسش زیر را مطرح کنیم: آیا ممکن است f را تنها در یک زیرمجموعه R تعریف کنیم و مقدار آن را در بقیه R از مقدارش در این زیرمجموعه به دست آوریم؟ در این بخش خواهیم دید که پاسخ این پرسش مثبت است. لیکن، ابتدا قضیه زیر را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۷-۴-۱: فرض کنید $f_1, f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در یک ناحیه R تحلیلی باشند. اگر در همسایگی یک نقطه $z \in R$ داشته باشیم: $f_1 = f_2$ ، یا اگر برای یک قطعه از یک منحنی در R داشته باشیم $f_1 = f_2$ ؛ در این صورت

$$f_1 = f_2 \quad \forall z \in R$$

اثبات. بنابه قضیه ۷-۱-۱۲، صفرهای یک تابع تحلیلی، منزوی هستند و اگر صفرها منزوی نباشند، این تابع باید با صفر متحد باشد. با اعمال این قضیه به $f_1 - f_2$ ، بلافاصله نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

یکی از نتایج قضیه بالا، نتیجه فرعی زیر است.

نتیجه ۷-۴-۲: رفتار یک تابع که در ناحیه $R \subset \mathbb{C}$ تحلیلی است، به طور کامل از رفتار آن در همسایگی (کوچک) یک نقطه دلخواه در آن ناحیه، تعیین می‌شود.

قضیه ۷-۴-۱ را می‌توان یک قضیه یکتایی در نظر گرفت که به وسیله آن رفتار یک تابع تحلیلی در همسایگی کوچک یک نقطه $z \in R$ "از راه تله پاتی" با نقاط دور R ارتباط برقرار می‌کند. می‌توانیم با نگاه به بسط سری تیلور تابع تحلیلی، این تله پاتی (دوراگاهی) را واضحتر ملاحظه کنیم. چون f در تمام نقاط R تحلیلی است، می‌توانیم $f(z)$ را حول یک نقطه دلخواه $z_0 \in R$ بسط تیلور دهیم و بررسییم به

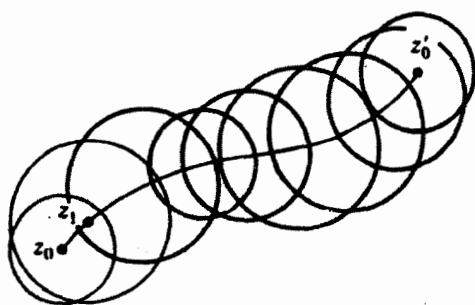
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{الف } ۱۷-۷)$$

که در آن $|z - z_0| = r_0$ دایره همگرایی C_0 مربوط به f است. حال، فرض کنید $z'_0 \in R$ یک نقطه (دور) دیگر باشد و z_0 و z'_0 را توسط یک مسیر پیوسته که به طور کامل در R قرار دارد، به هم متصل کنید. $z_1 \in C_0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که z_1 در داخل C_0 قرار داشته باشند. از سری توانی (الف ۱۷-۷) می‌توان جمله به جمله بینهایت بار مشتق گرفت، و سریهای حاصل جملگی به ازای تمام مقادیر z در داخل C_0 همگرا هستند. به خصوص اینکه تمام مقادیر $f(z_1), f'(z_1), \dots, f^{(n)}(z_1), \dots$ خوش تعریف‌اند. بنابراین، f را می‌توان حول z_1 بسط داد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n \quad |z - z_1| < r_1 \quad (\text{ب } ۱۷-۷)$$

که در آن r_1 شعاع همگرایی f حول z_1 است. چون f روی C تحلیلی است، r_1 مخالف صفر است، و همواره می‌توانیم z_1 را طوری انتخاب کنیم که دایره همگرایی C_1 آن، دارای نقاطی در خارج C_0 باشد. بنابراین، داشتن بسط $f(z)$ تنها برای نقاط داخل C_0 ، ما را قادر می‌سازد تا $f(z)$ را با استفاده از (ب ۱۷-۷) برای نقاط خارج C_0 محاسبه کنیم. بدیهی است که این کار را می‌توانیم تا وقتی تکرار کنیم که به z'_0 برسیم (شکل ۷-۱۵).

این فرایند تعیین رفتار یک تابع تحلیلی در خارج ناحیه‌ای که در آن ابتدا تعریف شده است (در حالت بالا، در داخل C_0)، تداوم تحلیلی نامیده می‌شود. با وجودی که تعداد بینهایت طریق برای ادامه تحلیلی فراسوی ناحیه تعریف شده وجود دارد، مقادیر تمام توابعی که در نتیجه ادامه دادهای



شکل ۱۵-۷ مراحل مختلف در تداوم تحلیلی از z_0 به z'_0 .

مختلف به دست آمده‌اند در هر نقطه معین یکسان است. این حکم از نتیجه فرعی ۲-۴-۷ نتیجه می‌شود.

فرض کنید $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ به ترتیب برای نواحی R_1 و R_2 تعریف شده باشند. فرض کنید f_1 و f_2 در نواحی تحلیلی بودن مربوط به خود شکلهای تابعی متفاوتی داشته باشند. اگر بین R_1 و R_2 یک همپوشانی برقرار باشد و اگر در این ناحیه همپوشانی داشته باشیم $f_1 = f_2$ ، در این صورت تداوم تحلیلی (منحصر به فرد) f_1 به R_2 باید f_2 باشد، و برعکس. در واقع، می‌توانیم f_1 و f_2 را به عنوان یک تابع منفرد $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ چنان در نظر بگیریم که

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{وقتی } z \in R_1 \\ f_2(z) & \text{وقتی } z \in R_2 \end{cases}$$

بدیهی است که f برای ناحیه مرکب $R = R_1 \cup R_2$ تحلیلی است. در این صورت گوئیم که f_1 و f_2 ادامه تحلیلی یکدیگرند.

مثال ۱-۴-۷: تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

که به ازای $|z| < 1$ تحلیلی است. دیده‌ایم که این تابع به ازای $|z| < 1$ به $1/(1-z)$ همگرا

می‌شود. بنابراین، داریم

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{وقتی } |z| < 1$$

و f_1 به‌ازای $|z| \geq 1$ تعریف شده نیست.

حال تابع دیگری به قرار زیر را ملاحظه می‌کنیم

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \left(z + \frac{2}{3}\right)^n$$

که به‌ازای $|z + 2/3| < 5/3$ همگراست. برای اینکه ملاحظه می‌کنیم این تابع به چه مقداری همگرا می‌شود، توجه می‌کنیم به اینکه

$$f_2(z) = \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{5} \left(z + \frac{2}{3} \right) \right]^n$$

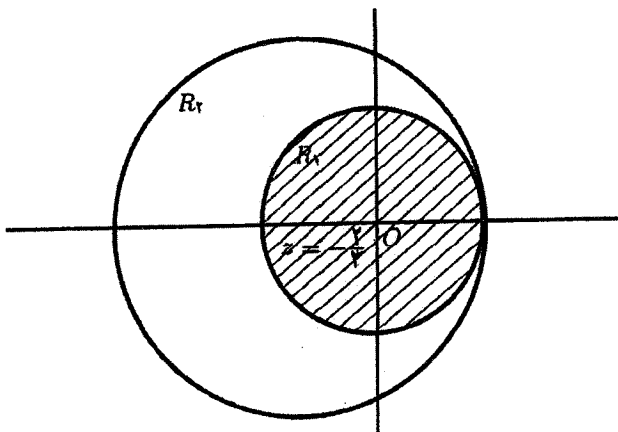
بنابراین، وقتی $|z + 2/3| < 5/3$ داریم

$$f_2(z) = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5} \left(z + \frac{2}{3} \right)} = \frac{1}{1-z} \quad \left| z + \frac{2}{3} \right| < \frac{5}{3}$$

مشاهده می‌کنیم با وجودی که $f_1(z)$ و $f_2(z)$ در دو ناحیه همپوشانی می‌کنند، شکل تابعی متفاوتی دارند (شکل ۷-۱۶)، اینها هر دو معرف یک تابع $f(z) = 1/(1-z)$ هستند. از این رو می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & |z| < 1 \\ f_2(z) & \left| z + \frac{2}{3} \right| < \frac{5}{3} \end{cases}$$

و $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تداوم تحلیلی یکدیگرند. در واقع، $f(z) = 1/(1-z)$ ادامه تحلیلی هر دو تابع f_1 و f_2 به‌ازای تمام C ، جز $z = 1$ است. شکل ۷-۱۶، ناحیه تعریف f_1 ، به‌ازای $1, 2$ ، e ، را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۷ تابع $f_2(z)$ تداوم تحلیلی تابع $f_1(z)$ به ناحیه بزرگتر R_2 است.

مثال ۲-۴-۷: تابع

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt$$

فقط به ازای $\text{Re}(z) > 0$ وجود دارد، که در این صورت

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \quad \text{به ازای } \text{Re}(z) > 0$$

ناحیه تعریف آن، R_1 ، که در شکل ۱۷-۷ نشان داده شده است، نیم صفحه سمت راست است. حال، f_2 را به کمک سری هندسی زیر تعریف می‌کنیم

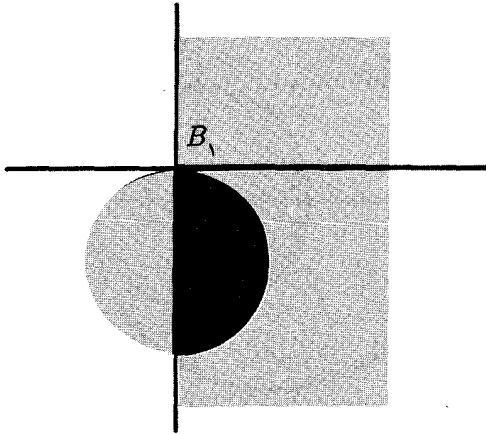
$$f_2(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{i} \right)^n \quad \text{به ازای } |z+i| < 1$$

این سری در داخل دایره همگرایی‌اش، R_2 ، به مقدار زیر همگرا می‌شود

$$i \frac{1}{1 - (z+i)/i} = \frac{1}{z}$$

بنابراین، داریم

$$f(z) \equiv \frac{1}{z} = \begin{cases} f_1(z) & z \in R_1 \\ f_2(z) & z \in R_2 \end{cases}$$



شکل ۱۷-۷ توابع $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تداوم تحلیلی یکدیگرند: f_1 و f_2 را به نیم‌صفحه راست تداوم تحلیلی می‌دهد و f_1 و f_2 را به نیم‌صفحه چپ ادامه تحلیلی می‌دهد.

این دو تابع تداوم تحلیلی یکدیگرند، و $f(z) = 1/z$ به‌ازای تمام $z \in \mathbb{C}$ ، جز $z = 0$ ، تداوم تحلیلی هر دو تابع f_1 و f_2 است.

۱-۴-۷ اصل انعکاس شوارتز

روابط پاشندگی از جمله نتایجی است که در کاربردهای فیزیکی مفید واقع می‌شوند. برای اینکه به چنین روابطی برسیم، لازم است، رفتار توابع تحلیلی را در دو طرف محور حقیقی بدانیم. این رفتار را می‌توان با استفاده از اصل انعکاس شوارتز یافت، که برای آن گزاره زیر لازم است.

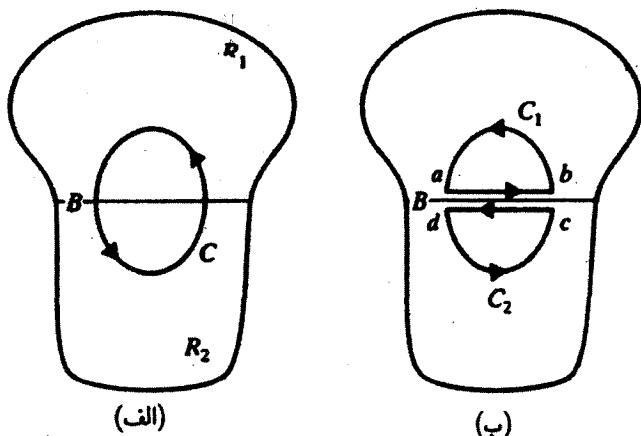
گزاره ۳-۴-۷: فرض کنید f در R_i تحلیلی باشد، که در آن $i = 1, 2$. فرض کنید B مرز بین R_1 و R_2 باشد (شکل ۱۸-۷) و فرض کنید f_1 و f_2 روی B پیوسته باشند و

$$f_1(z) = f_2(z) \quad z \in B$$

در این صورت f_1 و f_2 تداوم تحلیلی یکدیگرند و هر دو با هم یک تابع (منحصر به فرد) را تعریف می‌کنند

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in R_1 \cup B \\ f_2(z) & z \in R_2 \cup B \end{cases}$$

که در کل ناحیه $R_1 \cup R_2 \cup B$ تحلیلی است.



شکل ۱۸.۷ (الف) نواحی R_1 و R_2 توسط مرز B و پربند C از یکدیگر جدا شده‌اند. (ب) پربند C به C_1 و C_2 تجزیه می‌شود.

اثبات. یک منحنی بسته دلخواه C در $R_1 \cup R_2 \cup B$ را در نظر بگیرید. اگر C به طور کامل در R_1 یا در R_2 قرار داشته باشد، انتگرال $\oint_C f(z) dz$ صفر می‌شود. اگر قسمتی از C در R_1 و قسمتی در R_2 باشد، در این صورت

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_1} f_1(z) dz + \oint_{C_2} f_2(z) dz$$

که در آن $C_1 \subset R_1$ و $C_2 \subset R_2$. توجه کنید که سهمهای مربوط به قطعات ab و cd یکدیگر را حذف می‌کنند؛ به همین دلیل است که می‌توانیم انتگرال‌گیری در طول C را به صورت مجموع دو انتگرال در امتداد C_1 و C_2 بنویسیم که به ترتیب به طور کامل در R_1 و R_2 قرار دارند. با توجه به تحلیلی بودن f_1 و f_2 در نواحی مربوط به خود، سمت راست معادله بالا صفر می‌شود. بنابراین،

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad \forall C \subset R_1 \cup R_2 \cup B$$

بنابه قضیه موروا f در تمام $R_1 \cup R_2 \cup B$ تحلیلی است. بنابراین، از قضیه ۱۴-۷ نتیجه می‌شود که f_1 و f_2 تداوم تحلیلی یکدیگرند. ■

اکنون برای بیان اصل انعکاس شوارتز آماده‌ایم.

قضیه ۱۴-۴: (اصل انعکاس شوارتز). فرض کنید f در یک ناحیه R ، که قسمتی از محور حقیقی بخشی از مرز B آن را تشکیل می‌دهد، تحلیلی باشد. هر گاه $f(z) \in \mathbb{R}$ ، $\text{Im}(z) = 0$

در این صورت تداوم تحلیلی f به R^* (تصویر آینه‌ای R نسبت به محور حقیقی) وجود دارد، و به صورت زیر بیان می‌شود

$$g(z) \equiv f^*(z^*) \quad z \in R^*$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که g در R^* تحلیلی است. فرض کنید

$$f(z) \equiv f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در این صورت

$$f(z^*) = f(x, -y) = u(x, -y) + iv(x, -y)$$

و

$$g(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

بنابراین

$$U(x, y) = u(x, -y) \quad \text{و} \quad V(x, y) = -v(x, -y)$$

و

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial(-y)} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

دو معادله اخیر شرایط کوشی-ریمان برای $g(z)$ به‌شمار می‌آیند. بنابراین، g تحلیلی است. سپس، مقادیر f و g را روی محور حقیقی با هم مقایسه می‌کنیم

$$f(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0)$$

$$g(x, 0) = U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0) - iv(x, 0)$$

لیکن، بنا بر فرض $f(x, 0)$ حقیقی است، که دلالت می‌کند بر: $v(x, 0) = 0$ و $g(x, 0) = f(x, 0)$ در این صورت، از گزاره ۷-۴-۳ نتیجه می‌شود که $f(z) = g(z)$ و $f^*(z^*) = g(z)$ تداوم تحلیلی یکدیگرند.

بنابراین، یک تابع تحلیلی h چنان وجود دارد که

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in R \\ f^*(z^*) & z \in R^* \end{cases}$$

توجه کنید که $h(z^*) = g(z^*) = f^*(z) = h^*(z)$

۷-۴-۲ روابط پاشندگی

فرض کنید $f(z)$ در تمامی صفحه مختلط، جز در یک برش در امتداد محور حقیقی که از x_0 تا بینهایت ادامه دارد، تحلیلی باشد. برای یک نقطه z غیر واقع بر محور x ، فرمول انتگرال کوشی می‌دهد

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

که در آن C پربندی است که در شکل ۷-۱۹ مشاهده می‌کنید. فرض می‌کنیم f آنقدر سریع به صفر میل کند که سهم مربوط به دایره بزرگ به سمت صفر میل کند. در این صورت

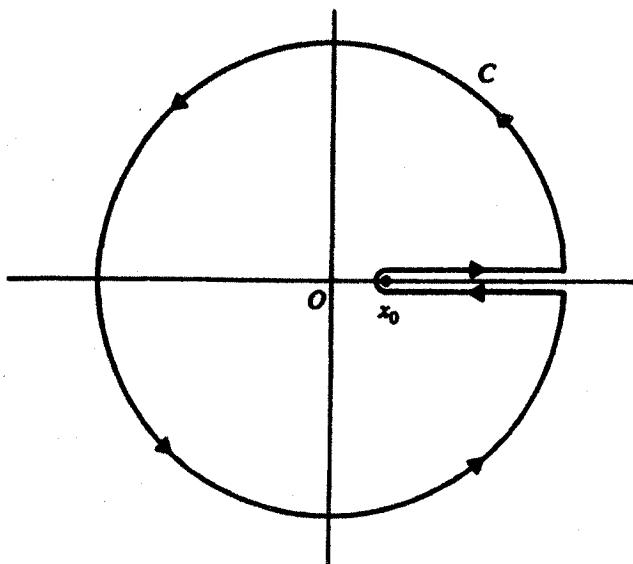
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{x_0+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{x_0-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{x_0}^{\infty} \frac{f(x+i\varepsilon)}{x-z+i\varepsilon} dx - \int_{x_0}^{\infty} \frac{f(x-i\varepsilon)}{x-z-i\varepsilon} dx \right] \end{aligned}$$

چون z روی محور حقیقی قرار ندارد، می‌توانیم از $i\varepsilon$ در مخرج کسرها چشم‌پوشیم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{[f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)]}{x-z} dx$$

اکنون می‌توان از اصل انعکاس شوارتز به صورت $f^*(z) = f(z^*)$ بهره گرفت و رسید به

$$f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon) = f(x+i\varepsilon) - f^*(x+i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im}[f(x+i\varepsilon)]$$



شکل ۷-۱۹ پرند به‌کار رفته برای روابط پاشندگی.

نتیجه نهایی به این قرار خواهد بود

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\text{Im}[f(x + i\varepsilon)]}{x - z} dx$$

این رابطه یکی از شکل‌های رابطه پاشندگی است. این رابطه مقدار یک تابع در هر نقطه صفحه مختلط برش داده شده را برحسب انتگرال جزء موهومی آن تابع روی لبه بالایی برش بیان می‌کند.

مثال ۷-۴-۳: روابط پاشندگی که در آن هیچ مانده‌ای در نیم‌صفحه بالایی وجود ندارد نیز می‌تواند از معادله (۷-۱۳) به‌دست آید. معادله (۷-۱۳) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$f(x_0) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

که در آن یک پرند با دایره کوچک در نیم‌صفحه بالا اختیار کرده‌ایم. با نوشتن رابطه بالا برحسب

اجزای حقیقی و موهومی f ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f(x_0)] + i\operatorname{Im}[f(x_0)] &= \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[f(x)] + i\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[f(x)]}{x - x_0} dx \end{aligned}$$

از این رابطه، به روابط پاشندگی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f(x_0)] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx \\ \operatorname{Im}[f(x_0)] &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[f(x)]}{x - x_0} dx \end{aligned}$$

در برخی کاربردها، جزء موهومی f تابعی فردی از شناسه است؛ یعنی،

$$\operatorname{Im}[f(-x)] = -\operatorname{Im}[f(x)]$$

با استفاده از این خاصیت، داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f(x_0)] &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(-x)]}{-x - x_0} dx + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x - x_0} dx \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{2x \operatorname{Im}[f(x)]}{x^2 - x_0^2} dx \end{aligned}$$

به این ترتیب گاهی رابطه پاشندگی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\operatorname{Re}[f(x_0)] = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{Im}[f(x)]}{x^2 - x_0^2} dx$$

مثال ۷-۴-۴: برای اینکه روابط پاشندگی برقرار باشند، یک پیش شرط عبارت است از

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |f(\operatorname{Re}^{i\theta})| = 0$$

که در آن R شعاع نیم‌دایره بزرگ در نیم‌صفحه بالایی است. اگر f در این پیش‌شرط صدق نکند، باز هم می‌توان یک رابطه پاشندگی که به آن رابطه پاشندگی با یک تفریق می‌گویند، به دست آورد. این کار را می‌توان با وارد کردن یک عامل اضافی x در مخرج انتگرالده انجام داد. به سادگی می‌توانیم نتیجه به دست آمده در مثال ۷-۲-۱۴ را به کار ببندیم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی طرفین، می‌رسیم به

$$\frac{\operatorname{Re}[f(x_2)]}{x_2 - x_1} = \frac{\operatorname{Re}[f(x_1)]}{x_2 - x_1} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{(x - x_1)(x - x_2)} dx$$

$$\frac{\operatorname{Im}[f(x_2)]}{x_2 - x_1} = \frac{\operatorname{Im}[f(x_1)]}{x_2 - x_1} - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[f(x)]}{(x - x_1)(x - x_2)} dx$$

در حالت خاص، اگر قرار دهیم $x_1 = 0$ و $x_2 = x_0$ ، معادله اول منجر می‌شود به

$$\frac{\operatorname{Re}[f(x_0)]}{x_0} = \frac{\operatorname{Re}[f(0)]}{x_0} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x(x - x_0)} dx$$

و اگر $\operatorname{Im}[f(-x)] = -\operatorname{Im}[f(x)]$ خواهیم داشت

$$\frac{\operatorname{Re}[f(x_0)]}{x_0} = \frac{\operatorname{Re}[f(0)]}{x_0} + \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x(x - x_0)} dx + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x(x - x_0)} dx \right\}$$

انتگرال اول این معادله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\int_{\infty}^0 \frac{\operatorname{Im}[f(-x)]}{-x(-x - x_0)} (-dx) = - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f(x)]}{x(x + x_0)} dx$$

با قرار دادن این مقدار در معادله بالایی، داریم

$$\operatorname{Re}[f(x_0)] = \operatorname{Re}[f(0)] + \frac{x_0}{\pi} P \left\{ \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[f(x)] \left[\frac{-1}{x(x + x_0)} + \frac{1}{x(x - x_0)} \right] dx \right\}$$

$$\operatorname{Re}[f(x_0)] = \operatorname{Re}[f(\circ)] + \frac{2x_0^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{dx \operatorname{Im}[f(x)]}{x(x^2 - x_0^2)} \quad (1)$$

در اپتیک^۱ نشان داده شده است که جزء موهومی دامنه پراکندگی رو به جلو به ازای بسامد ω به وسیله به اصطلاح قضیه اپتیکی، به سطح مقطع کل برای جذب نور با آن بسامد ربط پیدا می کند

$$\operatorname{Im}[f(\omega)] = \frac{\omega}{4\pi} \sigma_{\text{کل}}(\omega)$$

با قرار دادن این رابطه در (۱)، می رسمیم به

$$\operatorname{Re}[f(\omega_0)] = \operatorname{Re}[f(\circ)] + \frac{\omega_0^2}{2\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{d\omega \sigma_{\text{کل}}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (2)$$

بنابراین، جزء حقیقی (همدوس) پراکندگی رو به جلوی نور، یعنی جزء حقیقی ضریب شکست، را می توان، با اندازه گیری یا با محاسبه $\sigma_{\text{کل}}(\omega)$ ، که کمیت ساده تری برای توصیف جذب نور توسط محیط است، محاسبه کرد. معادله (۲) رابطه اصلی کرامرزکرونیگ است. ●

تمرینها

۷-۴-۱ با استفاده از تداوم تحلیلی، تحلیلی بودن توابع نمایی، هذلولوی و مثلثاتی، و اتحادهای مشابه برای z حقیقی، اتحادهای زیر را اثبات کنید:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (\text{ب}) \quad e^z = \cosh z + \sinh z \quad (\text{الف})$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z \quad (\text{ج})$$

۷-۴-۲ نشان دهید تابع $1/z^2$ معرف تداوم تحلیلی تابع

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad |z+1| < 1 \quad \text{به ازای}$$

به ناحیه $\mathbb{C} - \{0\}$ است.

۷-۴-۳ تداوم تحلیلی

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \sin t \, dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{به ازای}$$

را به $\mathbb{C} - \{i, -i\}$ پیدا کنید.

۷-۵ روش تندترین کاهش

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I(\alpha) \equiv \int_C e^{\alpha f(z)} g(z) dz \quad (18-7)$$

در این انتگرال، $|\alpha|$ در مقایسه با ۱ بزرگ است و f و g در ناحیه‌ای از C ، شامل پربند C ، تحلیلی‌اند. از آنجا که این انتگرال غالباً در کاربردهای فیزیکی ظاهر می‌شود، هرگاه بتوانیم یک تقریب بسیار خوب برای آن بیابیم که به تمام f ها و g ها قابل اعمال باشد، کاری مفید انجام داده‌ایم. این واقعیت که $|\alpha|$ بزرگ است، بسیار مفید خواهد بود.

می‌توانیم با تعریف مجدد $f(z)$ ، در صورت لزوم، فرض کنیم که α مثبت و حقیقی است $|\alpha|$ را به صورت $\alpha = |\alpha| e^{i \arg(\alpha)}$ می‌نویسیم و $e^{i \arg(\alpha)}$ را در $f(z)$ وارد می‌کنیم. توان انتگرالده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\alpha f(z) = \alpha u(x, y) + i \alpha v(x, y)$$

چون α مثبت و بزرگ است، انتظار داریم جزء نمایی در بیشینه $u(x, y)$ بیشترین مقدار را داشته باشد. بنابراین، اگر پربند را طوری تغییر دهیم که از یک نقطه z_0 بگذرد که در آن $u(x, y)$ بیشینه است، سهم عمده در انتگرال می‌تواند از همسایگی z_0 ناشی شود. این کار موجب می‌شود که بتوان توان را حول z_0 بسط داد و پایستریترین جملات بسط را نگه داشت، که همان چیزی است که به دنبالش هستیم. اما یک نکته وجود دارد. به خاطر بزرگی α ، با تغییر $v(x, y)$ ، حتی به مقدار کوچک، جزء موهومی αf در توان سریعاً نوسان خواهد کرد. این نوسان می‌تواند سهم جزء حقیقی $(f(z_0))$ را به مقدار کوچک چشمپوشیدنی برساند که کل این روش را از انتفاع خواهد انداخت. بنابراین، می‌خواهیم تغییرات $e^{i \alpha v(x, y)}$ را چنان کنترل کنیم که $v(x, y)$ تا حد ممکن به آرامی تغییر کند. یکی از شرطهای لازم (ولی نه کافی) این است که مشتق v در z_0 صفر شود. این شرط همراه با این واقعیت که جزء حقیقی در z_0 بیشینه باشد، منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0} = 0 \quad (19-7)$$

اما در همین جا توقف نمی‌کنیم، بلکه می‌خواهیم جزء موهومی f در طول C ثابت باشد: $\text{Im}[f(z)] = \text{Im}[f(z_0)]$ یا $v(x, y) = v(x_0, y_0)$

معادله (۷-۱۹) و شرایط کوشی-ریمان ایجاب می‌کند که در z داشته باشیم

$$\partial u / \partial x = 0 = \partial u / \partial y$$

از این رو شاید به نظر برسد که z یک بیشینه (یا کمینه) واقعی سطحی است که توسط تابع $z = u(x, y)$ توصیف می‌شود (در اینجا، z محور است و عدد مختلط نیست). دو راه وجود دارد که نشان دهیم چنین نیست. اولین راه یاری گرفتن از گزاره ۶-۳-۶ است که بر طبق آن، اگر f تحلیلی باشد بیشینه موضعی ندارد. راه دوم این است که توجه کنیم برای اینکه سطح یک بیشینه (یا کمینه) داشته باشد، باید هر دو مشتق دوم $\partial^2 u / \partial x^2$ و $\partial^2 u / \partial y^2$ منفی (مثبت) باشند. اما، این امر ناممکن است، زیرا $u(x, y)$ هماهنگ است، یعنی $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$. نقطه‌ای که در آن مشتقها صفر شوند اما نه بیشینه باشند و نه کمینه، نقطهٔ زینی نامیده می‌شود. به این دلیل است که روشی را که در زیر توصیف می‌شود، گاهی روش نقطهٔ زینی می‌گویند. مقادیر z که به z_0 نزدیک‌اند، مورد توجه ما هستند. از این رو، $f(z)$ را حول z_0 بسط تیلور می‌دهیم، با استفاده از معادله (۷-۱۹)، و حفظ جملات تا جملهٔ دوم، خواهیم رسید به

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 f''(z_0) \quad (۷-۲۰)$$

فرض کنید $f''(z_0) \neq 0$ (اگر نه، تا مرتبهٔ بالاتر ادامه می‌دهیم). با وارد کردن

$$z - z_0 \equiv r_1 e^{i\theta_1} \quad (۷-۲۱الف)$$

و

$$\frac{1}{2} f''(z_0) \equiv r_2 e^{i\theta_2} \quad (۷-۲۱ب)$$

و قرار دادن آنها در بسط بالا، می‌رسیم به

$$f(z) - f(z_0) = r_1^2 r_2 e^{i(2\theta_1 + \theta_2)}$$

یا

$$\operatorname{Re}[f(z) - f(z_0)] = r_1^2 r_2 \cos(2\theta_1 + \theta_2) \quad (۷-۲۲الف)$$

$$\operatorname{Im}[f(z) - f(z_0)] = r_1^2 r_2 \sin(2\theta_1 + \theta_2) \quad (۷-۲۲ب)$$

ثابت بودن $\text{Im}[f(z)]$ ایجاب می‌کند که $\sin(2\theta_1 + \theta_2) = 0$ یا $2\theta_1 + \theta_2 = n\pi$. بنابراین، به‌ازای

$$\theta_1 = -\frac{\theta_2}{2} + n\frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3 \text{ به‌ازای}$$

جزء موهومی f ثابت است. با قرار دادن در (۷-۲۱الف)، خواهیم داشت

$$z - z_0 = r_1 e^{i(-\theta_2/2 + n\pi/2)}$$

که برحسب مؤلفه‌های دکارتی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$x - x_0 = r_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$y - y_0 = r_1 \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right)$$

با حذف r_1 از این دو معادله، خواهیم داشت

$$y - y_0 = \left[\tan\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) \right] (x - x_0)$$

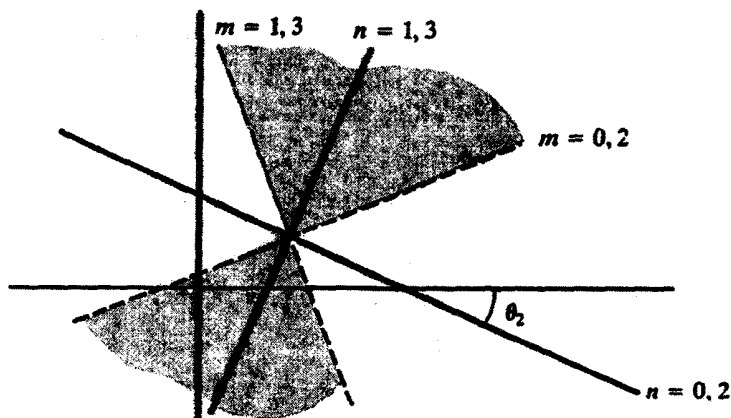
این عبارت معادلهٔ یک خط است (به‌علت ثابت بودن θ_2) که از $z_0 = (x_0, y_0)$ می‌گذرد و با محور حقیقی زاویهٔ $(n\pi - \theta_2)/2$ را می‌سازد. به‌ازای $n = 0, 2$ به یک خط می‌رسیم و به‌ازای $n = 1, 3$ خط دیگری که بر خط اول عمود است، حاصل خواهد شد (شکل ۷-۲۰). باید تأکید کنیم که در امتداد این خطوط، جزء موهومی $f(z)$ ثابت می‌ماند.

به همین ترتیب، می‌توانیم منحنیهایی (خطوطی) به‌دست آوریم که در امتداد آنها جزء حقیقی $f(z)$ ثابت است. داریم

$$\cos(2\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

یا

$$\theta_1 = -\frac{\theta_2}{2} + \frac{2m+1}{4}\pi \quad m = 0, 1, 2, 3$$



شکل ۷-۲۰ نواحی مختلف صفحه z برای روش تندترین کاهش. نواحی هاشورزده نواحی‌اند که در آنها $\text{Re}[f(z)] < \text{Re}[f(z_0)]$. توجه کنید که تنها یک منحنی با جزء موهومی ثابت از چنین ناحیه‌ای می‌گذرد.

خطوط متناظر روابط بالا به صورت زیر داده می‌شوند

$$y - y_0 = \left[\tan \left(\frac{2m+1}{4} \pi - \frac{\theta_1}{4} \right) \right] (x - x_0)$$

که با دسته خطوط دیگر زاویه 45° می‌سازند (شکل ۷-۲۰).

نواحی مورد نظر ما ناحیه‌هایی‌اند که در آنها $\text{Re}(f)$ از یک بیشینه نسبی در z_0 عبور می‌کند. بر طبق معادله (۷-۲۲)، این وضعیت در نقاطی پیش می‌آید که برای آنها $\cos(2\theta_1 + \theta_2) < 0$. این وضعیت، به نوبه خود، منجر می‌شود به

$$\frac{2k+1}{4} \pi - \frac{\theta_1}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{2k+1}{4} \pi - \frac{\theta_2}{4} \quad k = 0, 1$$

یا

$$\frac{2k+1}{4} \pi - \frac{\theta_1}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{2k+3}{4} \pi - \frac{\theta_2}{4} \quad k = 0, 1$$

این نواحی در شکل ۷-۲۰ نشان داده شده‌اند. واضح است که فقط یک منحنی با $\text{Im}[f(z)]$ ثابت از این نواحی می‌گذرد. این مطلب عموماً صحیح است زیرا، بین دو صفر متوالی برای کسینوس، فقط یک صفر برای سینوس وجود دارد.

می‌خواهیم مسیری در داخل این نواحی اختیار کنیم که در امتداد آن کمیت

$$|\operatorname{Re}[f(z)] - \operatorname{Re}[f(z_0)]|$$

بیشینه باشد. معادله (۲۲-۷) الف) چنین مسیری را تعیین می‌کند، که روی آن $\cos(2\theta_1 + \theta_2)$ باید برابر ۱- باشد. اما این مقدار دقیقاً با مسیری متناظر است که روی آن $\sin(2\theta_1 + \theta_2) = 0$ ؛ یعنی، مسیری که روی آن جزء موهومی $f(z)$ ثابت است. تنها چنین مسیری در ناحیه مورد نظر قرار دارد، و روش تعیین آن منحصر به فرد است. چون کاهش از مقدار بیشینه در z_0 ، در امتداد این مسیر بیشینه است، این روش را روش تندترین کاهش می‌نامند.

حال که پر بند C_0 را تعیین کرده‌ایم، انتگرال را تقریب می‌زنیم. ابتدا توجه کنید که در امتداد C_0 داریم: $\operatorname{Im}[f(z) - f(z_0)] = 0$. بنابراین، $f(z) - f(z_0)$ در امتداد C_0 حقیقی و منفی است، و بر طبق معادله (۲۰-۷)، می‌توانیم یک پارامتر حقیقی t ، به صورت زیر وارد کنیم

$$t^2 = -\frac{1}{\gamma}(z - z_0)^2 f''(z_0) \quad (23-7)$$

با قرار دادن (۲۰-۷) در (۱۸-۷) و بهره‌گیری از (۲۳-۷) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} I(\alpha) &\approx \int_{C_0} e^{\alpha[f(z_0) - t^2]} g(z) dz \\ &= e^{\alpha f(z_0)} \int_{C_0} e^{-\alpha t^2} g(z) dz \end{aligned}$$

می‌توانیم از معادله (۲۳-۷) z را بر حسب t به دست آوریم و در این معادله قرار دهیم

$$I(\alpha) \approx e^{\alpha f(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} g(z(t)) \frac{dz}{dt} dt \quad (24-7)$$

بسط حدود انتگرال به بینهایت، در نتیجه تغییر چشمگیری پدید نمی‌آورد، زیرا α بزرگ و مثبت فرض شده است. برای محاسبه (۲۴-۷)، عبارت $g(z(t)) dz/dt$ را بر حسب سری مک‌لوران می‌نویسیم

$$g(z(t)) \frac{dz}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (25-7)$$

با قرار دادن رابطه بالا در (۲۴-۷)، خواهیم داشت

$$I(\alpha) \approx e^{\alpha f(z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} t^k dt \quad (26-7)$$

اگر انتگرال داخل جمع‌بندی را با I_2 نشان دهیم، با توجه به اینکه به ازای تمام مقادیر n داریم $I_{2n+1} = 0$ خواهیم رسید به

$$I_{2n+2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} I_{2n} \quad \text{و} \quad I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بنابراین، داریم

$$I_{2n} = \sqrt{\pi} \frac{(1)(3)(5)\dots(2n-1)}{\gamma^n \alpha^{(2n+1)/2}} \quad (\text{الف } 27-7)$$

همچنین می‌توان نشان داد که

$$I_{2n} = \alpha^{-n-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \forall n \geq 0 \quad (\text{ب } 27-7)$$

که در آن $\Gamma(k)$ تابع گاما است که در فصل پنجم به آن اشاره شده و در فصل چهاردهم نیز مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در (۲۶-۷) مقدار قرار می‌دهیم و شکل نهایی، بسط مجانبی، $I(\alpha)$ را به دست می‌آوریم

$$I(\alpha) \approx e^{\alpha f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} I_{2n} = e^{\alpha f(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \alpha^{-n-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{الف } 28-7)$$

تقریباً در تمام بسطها، فقط جمله اول از سری بالا باقی می‌ماند، که می‌دهد

$$I(\alpha) \approx e^{\alpha f(z_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} a_0 \quad (\text{ب } 28-7)$$

مثال ۷-۵-۱: حال انتگرال زیر را تقریب می‌زنیم

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\alpha} dz$$

که در آن α حقیقی است. برای سهولت فرض می‌کنیم $\alpha > 0$. ابتدا، باید انتگرال را به صورت معادله (۱۸-۷) بنویسیم. این کار را با توجه به اینکه $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ ، انجام می‌دهیم. بنابراین، داریم

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha \ln z - z} dz = \int_0^\infty e^{\alpha (\ln z - z/\alpha)} dz$$

و این کمیتها را تعیین هويت می‌کنیم

$$f(z) = \ln z - \frac{z}{\alpha} \quad \text{و} \quad g(z) = 1$$

نقطهٔ زینی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{df}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \alpha$$

اکنون باید مسیر تندترین کاهش را اختیار کنیم، که به ازای آن لازم است $f''(z_0) = -1/\alpha^2$ باشد. بنابراین، معادله (۲۱-۷) (ب) می‌دهد

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) = r_2 e^{i\theta_2} = \frac{1}{2\alpha^2} (-1) = \frac{1}{2\alpha^2} e^{i\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \pi$$

خطوط فاز ثابت به صورت زیر داده می‌شوند

$$\sin(2\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\theta_1 + \pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 + \pi = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3$$

برای یافتن تندترین کاهش، باید داشته باشیم

$$\cos(2\theta_1 + \pi) = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 0, \pi$$

با توجه به تعریف θ_1 [معادله (۲۱-۷) الف]، می‌توانیم بنویسیم

$$z - \alpha = r_1 e^{i\theta_1} = \pm r_1 \quad \Rightarrow \quad z = \alpha \pm r_1$$

بنابراین، برای اینکه تقریب مطلوب باشد، z باید روی خط حقیقی قرار گیرد. این حرف بدان معنی است که ناچار نیستیم پربند را تغییر شکل دهیم.

می‌خواهیم از (۷-۲۸) استفاده کنیم. برای یافتن a_0 ، باید از معادله (۷-۲۵) استفاده کنیم که به ازای مقادیر کوچک می‌دهد $a_0 = dz/dt$ از سوی دیگر، (۷-۲۳) و $f''(\alpha) = -1/\alpha^2$ منجر می‌شوند به

$$t^2 = \frac{(z - \alpha)^2}{2\alpha^2} \Rightarrow t = \frac{z - \alpha}{\sqrt{2\alpha}} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \sqrt{2\alpha} = a_0.$$

با جایگزین کردن در (۷-۲۸) ب، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} I(\alpha) &\approx e^{\alpha f(\alpha)} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sqrt{2\alpha} = \sqrt{2\pi} \alpha^{1/2} e^{\alpha(\ln \alpha - 1)} \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\alpha} \alpha^{\alpha+1/2} \end{aligned}$$

چون به طوری که شاید خودتان هم توجه کرده باشید $I(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$ ، این معادله تقریبی برای تابع گاما است، که به آن تقریب استرلینگ می‌گویند. توجه کنید که اگر $\alpha = n$ یک عدد صحیح باشد، در این صورت

$$\Gamma(n + 1) = n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$$

که گاهی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\ln(n!) \approx \ln(\sqrt{2\pi}) - n + \left(n + \frac{1}{4}\right) \ln n$$

به ازای n های بزرگ، می‌توان رابطه بالا را باز هم ساده‌تر کرد

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n$$

تمرینها

۱-۵-۷ تابع هنکل نوع اول، بنا بر تعریف، عبارت است از

$$H_\nu^{(1)}(\alpha) \equiv \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha/2)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

بسط مجانبی این تابع را بیابید. شاخه‌ای از این تابع را پیدا کنید که در آن $-\pi < \theta \leq \pi$.

مسائل

۱-۷ نشان دهید اگر $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^* = s^*$.

۲-۷ نشان دهید اگر دنباله $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، در این صورت یک $M > 0$ چنان وجود دارد که به ازای تمام n ها داریم $|z_n| < M$.

۳-۷ نشان دهید اگر به ازای تمام n ها، داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ و $|z_n| \leq M$ در این صورت $|z| \leq M$.

۴-۷ نشان دهید که

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad |z-2| < 2$$

۵-۷ $\sinh z$ را حول نقطه $z = i\pi$ بسط تیلور دهید.

۶-۷ بزرگترین دایره‌ای را بیابید که در داخل آن سری مک‌لوران برای $\tanh z$ به $\tanh z$ همگرا شود.

۷-۷ در مورد هر یک از توابع زیر، بسطی (منحصر به فرد) برای کل ناحیه تحلیلی بودن آنها پیدا کنید

$$\frac{\sinh z - z}{z^2} \quad (\text{د}) \quad \frac{1}{z^2(1-z)} \quad (\text{ج}) \quad z \cos(z^2) \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{(z-2)(z-3)} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (\text{ح}) \quad \frac{z^2-4}{z^2-9} \quad (\text{ز}) \quad \frac{1}{z^2-1} \quad (\text{و}) \quad \frac{1}{(1-z)^2} \quad (\text{ه})$$

۸-۷ اثبات گزاره ۷-۱-۷ را کامل کنید.

۹-۷ نشان دهید توابع زیر، $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ، توابع تام‌اند.

$$f(z) \equiv \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad f(z) \equiv \begin{cases} \frac{e^{2z}-1}{z^2} - \frac{2}{z} & z \neq 0 \\ 2 & z = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

۱۰-۷ چند جمله اول غیرصفر بسط سری لوران هر یک از توابع زیر را به دست آورید. همچنین

انتگرال تابع در امتداد یک پربند بسته ساده کوچک حول مبدأ را پیدا کنید.

$$\frac{z}{1-\cosh z} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1}{1-\cos z} \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{\sin z} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{z^2}{6z+z^2-6\sinh z} \quad (\text{ه}) \quad \frac{z^2}{z-\sin z} \quad (\text{د})$$

۱۱-۷ هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید، پربند C برای آنها دایره $|z| = 3$ است.

(الف) $\oint_C \frac{z-3}{z(z-2)} dz$ (ب) $\oint_C \frac{e^z}{z(z-i\pi)} dz$ (ج) $\oint_C \frac{\cos z}{z(z-\pi)} dz$

(د) $\oint_C \frac{z^2+1}{z(z-1)} dz$ (ه) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2+\pi^2} dz$ (و) $\oint_C \frac{1-\cos z}{z^2} dz$

(ز) $\oint_C \frac{\sinh z}{z^2} dz$ (ح) $\oint_C z \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ (ط) $\oint_C \frac{dz}{z^2(z+\delta)}$

(ی) $\oint_C \tan z dz$ (ک) $\oint_C \frac{dz}{\sinh 2z}$ (ل) $\oint_C \frac{e^z}{z^2} dz$

(م) $\oint_C \frac{dz}{z^2 \sin z}$

۱۲-۷ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

(الف) $\int_0^\infty \frac{2x^2+1}{x^2+\delta x^2+6} dx$ (ب) $\int_0^\infty \frac{dx}{6x^2+\delta x^2+1}$

(ج) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ (د) $\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^2+1} dx$

(ه) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ (و) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+2)^2(x^2+2\delta)}$

(ز) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx \quad a \neq 0$ (ح) $\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{(b^2+x^2)^2} \quad a \neq 0$

(ط) $\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (ی) $\int_0^\infty \frac{x^2 \sin ax}{x^2+1} dx$

(ک) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2+2x+13)^2}$ (ل) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad a > 0$

(م) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^2+2} dx$ (ن) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2-2x+1} dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^r + 1} \quad (\text{ع}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^r - 2x + 10} dx \quad (\text{س})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^r + 1)^2} \quad (\text{ف})$$

۱۳-۷ مقادیر اصلی کوشی انتگرالهای زیر را پیدا کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^r} dx \quad a \geq 0 \quad (\text{ب}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^r + 4)(x - 1)} \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^r - 5x + 6} \quad (\text{ج})$$

۱۴-۷ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^r + b^r)} dx \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^r - b^r}{x^r + b^r} \left(\frac{\sin ax}{x} \right) dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^r x}{x^r} dx \quad (\text{د}) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^r + b^r)^r} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^r x}{x^r} dx \quad (\text{و}) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos^r ax - \cos^r bx}{x^r} dx \quad (\text{ا})$$

۱۵-۷ با استفاده از $z = e^{i\theta}$ ، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^r r\theta}{\Delta - \epsilon \cos r\theta} d\theta \quad (\text{ج}) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^r \theta} \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\Delta + \epsilon \sin \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos^r \theta)^r} \quad a, b > 0 \quad (\text{ا}) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad a > 1 \quad (\text{د})$$

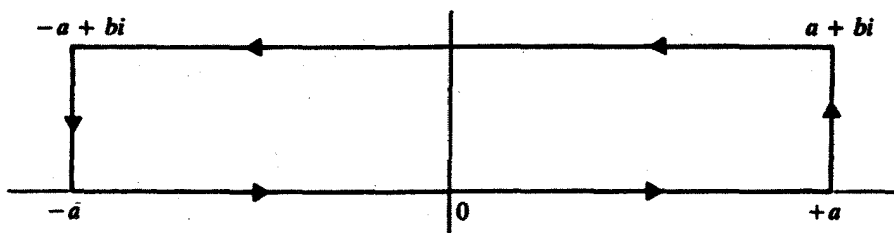
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^r r\phi d\phi}{1 - 2a \cos \phi + a^r} \quad a \neq \pm 1 \quad (\text{و}) \quad \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a \cos \phi + a^r} \quad a \neq \pm 1 \quad (\text{و})$$

$$\int_0^{\pi} \tan(x + ia) dx \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{ط}) \quad \int_0^{\pi} e^{\cos \phi} \cos(n\phi - \sin \phi) d\phi \quad (\text{ح})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad b \neq 0$$

که در آن $b \neq 0$

را با انتگرال‌گیری از تابع e^{-z^2} روی مسیر مستطیلی، شکل ۲۱-۷، به دست آورید.



شکل ۲۱-۷

۱۷-۷ تابع بتا به کمک رابطه زیر تعریف می‌شود

$$B(a, b) \equiv \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad a > 0, b > 0$$

با جایگزینی $t = 1/(x+1)$ و استفاده از نتیجه مثال ۷-۳-۲، نشان دهید

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

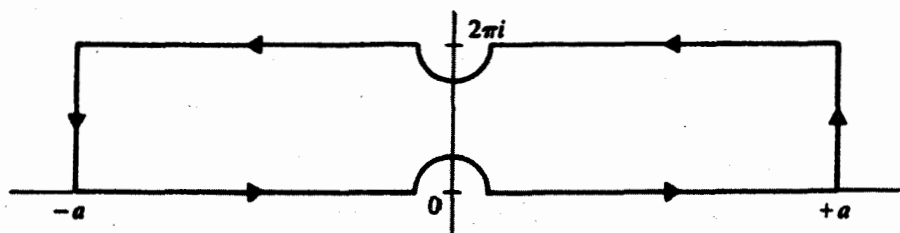
۱۸-۷ انتگرالهای زیر را که در آنها $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ ، بیابید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \quad (\text{الف}) \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + a^2)^2 \sqrt{x}} dx \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{x^2 + a^2} \quad (\text{ج})$$

۱۹-۷ با استفاده از پربند شکل ۲۲-۷، انتگرالهای

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos ax}{\sinh x} dx \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx \quad (\text{الف})$$

را محاسبه کنید.



شکل ۲۲-۷

۲۰-۷ نشان دهید برای هر تابع دلخواه f در بازه $[-1, +1]$ ، داریم

$$\int_0^\pi f(\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin \theta) d\theta$$

۲۱-۷ تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ را حول $z = a$ (که در آن $|a| < 1$) بسط تیلور دهید. به‌ارزی چه مقادیری از a این بسط امکان می‌دهد تا تابع $f(z)$ را تداوم تحلیلی دهیم.

۲۲-۷ دو سری توانی

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{و} \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$

دارای حوزه تعریف همگرایی مشترک نیستند. با همه اینها، نشان دهید که ادامه تحلیلی یکدیگرند. ۲۳-۷ ثابت کنید، توابع تعریف شده توسط سریهای

$$1 + az + a^2 z^2 + \dots \quad \text{و} \quad \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \dots$$

تداوم تحلیلی یکدیگرند.

۲۴-۷ نشان دهید تابع

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad z \neq \pm i$$

تداوم تابع زیر به $\mathbb{C} - \{i, -i\}$ است

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad |z| < 1$$

۲۵-۷ تداوم تحلیلی تابع

$$f(z) = \int_0^{\infty} te^{-zt} dt \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

را به $\mathbb{C} - \{0\}$ پیدا کنید

۲۶-۷ مقدار اصلی انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - x_0^2} dx$$

را بیابید و انتگرال زیر را برای چهار علامت ممکن محاسبه کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x - x_0 \pm i\varepsilon)(x + x_0 \pm i\varepsilon)}$$

۲۷-۷ تابع هنکل نوع دوم، بنابر تعریف، عبارت است از

$$H_{\nu}^{(\gamma)}(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha/\gamma)(z-1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

که در آن حدود در نیم صفحه پایینی است. بسط مجانبی این تابع را پیدا کنید.

۲۸-۷ وابستگی مجانبی تابع بسط تعدیل یافته نوع اول را که به کمک رابطه زیر تعریف می شود،

پیدا کنید

$$I_{\nu}(\alpha) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{(\alpha/\gamma)(z+1/z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

که در آن C از $-\infty$ شروع می شود، مبدأ را دور می زند و سرانجام به $-\infty$ برمی گردد. از این رو

محور حقیقی منفی از حوزه تحلیلی بودن مستثنی شده است.

۲۹-۷ وابستگی مجانبی

$$K_{\nu}(\alpha) \equiv \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha/\gamma)(z+1/z)} \frac{dz}{z^{1+\nu}}$$

را که تابع بسط تعدیل یافته نوع دوم نامیده می شود، پیدا کنید. بریدگی شاخه ای در امتداد محور

حقیقی مثبت گرفته شده است.



معادلات دیفرانسیل ۱: جداسازی متغیرها

سروکار فیزیک، این دقیقترین علوم، با پیشگوییهاست. این پیشگوییها بر دو عامل مبتنیاند: اطلاعات اولیه (داده‌ها)، و قانون حاکم بر فرایند فیزیکی مورد نظر. بنابراین، اطلاع از اینکه وضعیت در اینجا و اکنون چیست (داده‌های اولیه، شرایط اولیه، شرایط مرزی) فیزیکدانان را قادر می‌سازد پیشگویی کنند که وضعیت در آنجا و آنوقت چه خواهد بود. این توانایی پیشگویی، مبتنی بر این باور شهودی است که کمیت‌های فیزیکی، که به پارامترهای پیوسته‌ای مثل مکان و زمان وابسته‌اند، باید توابع پیوسته‌ای از آن پارامترها باشند. بنابراین، آگاهی از مقادیر آن توابع در یک نقطه (اولیه) و اینکه آن توابع چگونه (براساس قوانین فیزیک) از نقطه‌ای به نقطه دیگر در همسایگی آن تغییر می‌کنند، این امکان را فراهم می‌آورد که مقادیر آن توابع را در نقطه مجاور پیشگویی کنیم. وقتی مقادیر توابع در نقطه جدید تعیین شدند، می‌توان آنها را در نقاط مجاور بعدی پیشگویی کرد، و فرایند را ادامه داد تا به یک نقطه دوردست رسید.

در مکانیک، آگاهی از نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m ، که در نقطه \mathbf{r}_0 واقع و با تکانه \mathbf{p}_0 در لحظه t_0 در حال حرکت است، اجازه می‌دهد که تکانه آن را در لحظه $t_0 + \Delta t$ پیشگویی کنیم. چون $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ ، براساس قانون دوم حرکت نیوتون، داریم

$$\Delta \mathbf{p} \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t_0) \Delta t$$

$$p(t_0 + \Delta t) = p_0 + \Delta p \approx p_0 + F(r_0, t_0) \Delta t$$

به همین ترتیب

$$r(t_0 + \Delta t) \approx r_0 + \frac{p_0}{m} \Delta t$$

هر چه Δt کوچکتر باشد، کیفیت پیشگویی بهتر خواهد بود. در حد $\Delta t \rightarrow 0$ (یعنی، وقتی Δt به یک دیفرانسیل تبدیل شود)، نتیجه‌ای دقیق به دست می‌آید.
قانون دوم حرکت نیوتون،

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) = F(r, dr/dt, t)$$

مثالی است از یک معادله دیفرانسیل معمولی (م. د. م). متغیر وابسته r ، از معادله‌ای که شامل یک تک‌متغیر مستقل، t ، آن متغیر وابسته، و مشتقات مختلف آن است، تعیین می‌شود.
در مکانیک ذره (نقطه) مادی، فقط یک متغیر مستقل وجود دارد، و به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود. اما در سایر عرصه‌های فیزیک، که در آن پدیده‌های پیوسته مانند میدانها مطالعه می‌شوند، تغییرات نسبت به مکان نیز حائز اهمیت‌اند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، که اصطلاحاً آنها را معادلات دیفرانسیل جزئی (م. د. ج) می‌نامیم، معادلاتی‌اند که در آنها مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای مختصات ظاهر می‌شوند. مثلاً در الکتروستاتیک، که در آن میدانهای اسکالر ایستا (پتانسیل) و میدانهای برداری (میدان الکتریکی) مطالعه می‌شوند، قانون حاکم بر آنها با معادله پواسون، $\nabla^2 \Phi(r) = -4\pi\rho(r)$ ، توصیف می‌شود، که در آن Φ پتانسیل الکتروستاتیکی و $\rho(r)$ چگالی بار حجمی است. در نظریه انتقال گرما، که در آن دمای T تابعی از مکان و زمان است، معادله گرما یک رابطه مهم است و می‌توان آن را به شکل ساده $\partial T / \partial t = (k/\rho c) \nabla^2 T$ نوشت، که k رسانندگی گرمایی، ρ چگالی جرم، و c ظرفیت گرمایی محیط است. همچنین، معادله شرودینگر، $i\hbar \partial \Psi / \partial t = -(\hbar^2 / 2m) \nabla^2 \Psi + V(r) \Psi$ ، در مکانیک کوانتومی، و معادله موج، $\nabla^2 \Psi - (1/c^2) \partial^2 \Psi / \partial t^2 = 0$ ، در بسیاری از زمینه‌های فیزیک از اهمیت خاصی برخوردارند.
در واقع، جز در قوانین مکانیک ذره مادی و مدارهای الکتریکی، که در آنها تنها متغیر مستقل زمان است، تقریباً تمام قوانین فیزیک به کمک معادلات دیفرانسیل جزئی توصیف می‌شوند. چند

روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وجود دارد، اما متداولترین (و تواناترین) آنها روش جداسازی متغیرهاست، که بنا بر آن، یک معادله دیفرانسیل جزئی به چند معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. این روش، طبیعتاً معادلات دیفرانسیل معمولی را واجد اهمیت خاصی می‌کند، و در این فصل و فصل بعد نیز محور بحث ما همین موضوع است. در این فصل عمدتاً خواهیم دید که معادلات دیفرانسیل معمولی چگونه از پیش پافتاده‌ترین معادلات دیفرانسیل جزئی در حوزه ریاضی-فیزیک به دست می‌آیند.

۱-۸ معادله‌های دیفرانسیل جزئی معمولی و جداسازی زمان

بحث را با ساده‌ترین معادله دیفرانسیل جزئی، یعنی معادله پواسون، که در مسائل الکتروستاتیک ظاهر می‌شود آغاز می‌کنیم

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (1-8)$$

توجه داشته باشید که معادله پواسون کلی‌ترین معادله‌ای نیست که در الکتروستاتیک به آن برمی‌خوریم. معادله (۱-۸) مستلزم برخی فرضهای ساده‌ساز است، که در مثالهای زیر آنها را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱-۸: دو نمونه از معادلات اصلی الکتروستاتیک عبارت‌اند از

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f$$

معادله اول صرفاً بیان می‌کند که میدان الکتریکی \mathbf{E} پایستار است. معادله دوم شکل دیفرانسیلی قانون گاوس است، که شار برون‌سوی بردار جابه‌جایی \mathbf{D} را از یک سطح بسته به مقدار بارهای آزاد محصورشده در آن سطح ربط می‌دهد.

از $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ نتیجه می‌گیریم که یک پتانسیل الکتروستاتیکی Φ چنان یافت می‌شود که $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. از سوی دیگر، $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ ، که در آن \mathbf{P} بردار قطبش است. به‌طور کلی، \mathbf{P} تابعی از \mathbf{E} است. بنابراین، $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}(-\nabla\Phi)$ ، و دومین معادله در (۱) منجر می‌شود به

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = -\nabla^2 \Phi + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho_f$$

$$\nabla^2 \Phi - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{E}) = -4\pi\rho_f$$

وابستگی کلی \mathbf{P} به \mathbf{E} این معادله را خیلی پیچیده (غیرخطی) می‌کند. فقط در وضعیت‌های ساده، مثلاً هنگامی که محیط خلأ ($\mathbf{P} = 0$) یا خطی ($\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$)، با χ ثابت) است، به معادله پواسون می‌رسیم. برای یک محیط خطی خواهیم داشت

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\chi\mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} \equiv \epsilon\mathbf{E}$$

و معادله دوم در (۱) تبدیل می‌شود به

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \epsilon \nabla \cdot (-\nabla\Phi) = 4\pi\rho_f$$

یا

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\frac{\rho_f}{\epsilon} \equiv -4\pi\rho$$

در خلأ که $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ، معادله (۱-۸) به معادله لاپلاس کاهش می‌یابد

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2-8)$$

بسیاری از مسائل الکتروستاتیکی شامل رساناهایی‌اند که در پتانسیلهای معینی قرار دارند و در خلأ واقع شده‌اند. در فضای بین این سطوح رسانا، پتانسیل الکتروستاتیکی از معادله (۲-۸) پیروی می‌کند. معادله دیفرانسیل جزئی دیگری که در ریاضی فیزیک با آن روبرو می‌شویم، مربوط به شارش گرماست. چون هر نوع شارشی با زمان صورت می‌گیرد، انتظار داریم که t در معادله گرما ظاهر شود، که ساده‌ترین نوع آن عبارت است از

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T \quad (3-8)$$

در این رابطه، T دمای (مطلق) و a ثابتی است که محیطی را مشخص می‌کند که گرما در آن شارش دارد.

مثال ۲-۱-۸: وقتی دمای حجم کوچک dV از جسمی به چگالی جرمی ρ ، به اندازه dT تغییر می‌کند، مقدار گرمایی که مبادله می‌شود، عبارت است از

$$d^*Q = (\rho dV)c dT$$

که c ظرفیت گرمایی جسم است. کمیت‌های ρ ، c و T می‌توانند تابعی از مکان باشند؛ دما نیز تابعی از زمان است. بنابراین، داریم

$$d^t Q = \rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})dT(\mathbf{r}, t)dV$$

اگر روی تمام حجم جسم انتگرال بگیریم، می‌رسیم به

$$dQ = \iiint_V \rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})dT(\mathbf{r}, t)dV$$

dQ گرمای مبادله‌شده از تمامی حجم در بازه زمانی dt و dT تغییر دما، در نقطه \mathbf{r} ، در آن بازه زمانی است. بنابراین، مقدار گرمای مبادله شده بر واحد زمان عبارت است از

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \rho(\mathbf{r})c(\mathbf{r})\frac{\partial T}{\partial t}dV \quad (1)$$

در غیاب چشمه گرمای، این کمیت باید مساوی باشد با شارگرمای از سطح S محصورکننده حجم V . این شارگرمای با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\iint_S k(\nabla T) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da$$

با فرض اینکه k ، رسانندگی گرمایی، ثابت باشد، و با بهره‌گیری از قضیه دیورژانس، خواهیم داشت

$$\iint_S k(\nabla T) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n da = k \iiint_V (\nabla^t T)dV$$

با مساوی قرار دادن سمت راست این رابطه با سمت راست رابطه (۱)، و این فرض ساده‌ساز که ρ و c نیز ثابت‌اند، و همچنین این فرض که عبارتهای بالا برای حجم دلخواه V برقرارند، خواهیم داشت

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^t T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{k}{\rho c} \right) \nabla^2 T$$

● که همان معادله (۳-۸) است با $a^2 = k/\rho c$.

شاید یکی از معادلات دیفرانسیل جزئی مهمتری که در ریاضی فیزیک با آن روبرو می‌شویم، معادله موج باشد

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4-8)$$

این معادله (یا شکل ساده‌تر آن در بدهای کمتر) در ارتعاش تارها و طبلها، انتشار صوت در گازها، جامدات، و مایعات، انتشار آشفته‌گیها در پلاسماها، و انتشار امواج الکترومغناطیسی به‌کار می‌رود (برای دستیابی به معادله موج در الکترودینامیک، ر. ک. تمرین ۱-۸-۱ را ببینید). بدون شک یکی از مهمترین معادلات در فیزیک، معادله شرودینگر است، که می‌توان آن را به شکل (نامتداول) زیر نوشت

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \Psi = -\frac{2im}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5-8)$$

در این معادله، m جرم ذره میکروسکوپیکی، \hbar ثابت پلانک تقسیم بر 2π ، V انرژی پتانسیل ذره، و $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ چگالی احتمال یافتن ذره در نقطه \mathbf{r} و لحظه t است. تعمیم نسبیتی معادله شرودینگر برای یک ذره آزاد به جرم m ، معادله کلاین-گوردون است که برحسب یکاهای طبیعی ($\hbar = 1 = c$)، به شکل زیر کاهش پیدا می‌کند

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = m^2 \Phi \quad (6-8)$$

معادلات (۳-۸ تا ۶-۸) دارای مشتقات جزئی نسبت به زمان هستند. به‌عنوان نخستین گام در حل این معادلات دیفرانسیل جزئی و مقدمه‌ای بر روشهای مشابهی که در بخشهای بعد مطرح خواهند شد، بگذارید متغیر زمان را جدا کنیم. در هر چهار معادله، توابع را با نماد کلی $\Psi(\mathbf{r}, t)$ نمایش می‌دهیم.

جداسازی متغیرها، با تفکیک وابستگیهای r و t به صورت دو عامل آغاز می‌شود

$$\Psi(r, t) \equiv R(r)T(t)$$

این عاملگیری به ما اجازه می‌دهد که دو عمل مشتق‌گیری نسبت به فضا و زمان را از هم جدا کنیم. بنابراین، مثلاً $\nabla^2 \Psi$ با $T \nabla^2 R$ و $\partial \Psi / \partial t$ با $R(dT/dt)$ جایگزین می‌شود. برای حفظ کلیت هر چه بیشتر مسئله، فرض می‌کنیم L معرف همه اعمال بر روی Ψ ، جز مشتق نسبت به زمان باشد، و معادلات مربوطه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$L\Psi = \begin{cases} \partial \Psi / \partial t \\ \partial^2 \Psi / \partial t^2 \end{cases}$$

بنابراین، برای معادله (۵-۸)، که شامل یک مشتق مرتبه اول نسبت به زمان است،

$$L = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 + \frac{1}{i\hbar} V$$

و برای (۶-۸)، که شامل یک مشتق مرتبه دوم است

$$L = \nabla^2 - m^2$$

والی آخر.

با این نمادگذاری و جداسازی بالا، داریم

$$L(RT) \doteq T(LR) = \begin{cases} R dT/dt \\ R d^2 T/dt^2 \end{cases}$$

از تقسیم طرفین بر RT ، خواهیم رسید به

$$\frac{T(LR)}{RT} = \begin{cases} \frac{1}{T} & \frac{dT}{dt} \\ \frac{1}{T} & \frac{d^2 T}{dt^2} \end{cases}$$

یا

$$\frac{1}{R} \mathbb{L}(R) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \frac{dT}{dt} \\ \frac{1}{T} & \frac{d^2 T}{dt^2} \end{cases} \quad (7-8)$$

باید توجه داشت که دو R در سمت چپ با هم حذف نمی‌شوند، زیرا \mathbb{L} یک عملگر است. اکنون مرحله حساس در فرایند جداسازی متغیرها فرا می‌رسد. سمت چپ معادله (7-8) تابعی از فقط مکان، و سمت راست تابعی از فقط زمان است. چون T و t متغیرهای مستقلی‌اند، تنها راه برای برقراری (7-8) این است که هر دو طرف ثابت باشند. اگر این ثابت را به صورت کلی با α نشان بدهیم، داریم

$$\frac{1}{R} \mathbb{L}(R) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}R = \alpha R$$

و

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \alpha T$$

یا

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha T$$

ما معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان اولیه را به یک معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dT}{dt} = \alpha T \quad \text{یا} \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha T \quad (8-الف)$$

و یک معادله دیفرانسیل جزئی فقط شامل متغیرهای مکان

$$(\mathbb{L} - \alpha)R = 0$$

کاهش داده‌ایم. روشن است که کلی‌ترین شکل $\mathbb{L} - \alpha$ ، که از معادله‌های (8-الف تا 8-ج) به دست می‌آید، عبارت است از

$$\mathbb{L} - \alpha \equiv \nabla^2 + f(r)$$

بنابراین، معادله‌های (۳-۸ تا ۶-۸) با معادله (۸-الف) به‌طور کامل هم‌ارزند

$$\nabla^2 R + f(\mathbf{r})R = 0 \quad (۸-ب)$$

این معادله هم اکنون معادله لاپلاس را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود [حالتی که در آن $f(\mathbf{r}) \equiv 0$]. برای شمول معادله پواسون، صفر سمت راست را با $g(\mathbf{r}) \equiv -4\pi\rho(\mathbf{r})$ جایگزین می‌کنیم و می‌رسیم به

$$\nabla^2 R + f(\mathbf{r})R = g(\mathbf{r})$$

بحث بالا را می‌توان با این حکم جمع‌بندی کرد: اکثر معادلات دیفرانسیل جزئی (ساده‌شده‌ای) را که در ریاضی فیزیک با آنها روبرو می‌شویم، می‌توان به معادلات دیفرانسیل معمولی (خیلی ساده) که در قالب معادله (۸-الف) و معادله دیفرانسیل جزئی که در قالب (۸-ب) داده شده‌اند، کاهش داد. به استثنای معادله پواسون، در تمام معادلات بالا جمله سمت راست صفر است. ما بررسی خود را به این حالت "به اصطلاح" همگن محدود و (۸-ب) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (۸-ج)$$

حالت ناهمگنی که در آن $g(\mathbf{r}) \neq 0$ ، در فصل‌های ۱۱ و ۱۲ بررسی خواهد شد. در بقیه این فصل به مطالعه معادله ۸-ج در دستگاه‌های مختصات گوناگون خواهیم پرداخت. توجه داشته باشید که هیچ استدلال پیشینی (استنباطی) برای مشروعیت فرض بنیادین متغیرها وجود ندارد. از همه اینها گذشته، معلوم نیست بتوانیم $\sin(xt)$ را به صورت حاصلضرب $f(x)g(t)$ بنویسیم. با این همه، در تمام موارد حائز اهمیت فیزیکی، جداسازی متغیرها کارساز است، و بحثی که از این پس مطرح می‌کنیم نیز بر همین فرض مبتنی است.

تمرین

۱-۱-۸ با شروع از معادلات ماکسول در خلأ، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

معادله موج را برای \mathbf{E} و \mathbf{B} به دست آورید.

۲-۸ جداسازی درمختصات دکارتی

در مختصات دکارتی، معادله (۸-۸) تبدیل می‌شود به

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + f(x, y, z)\Psi = 0$$

روش جداسازی، برای "زمان" عملی بود، و دلیلی ندارد که برای مختصات عملی نباشد. بنابراین، فرض می‌کنیم که می‌توانیم وابستگی به مختصات مختلف را از هم جدا کنیم و بنویسیم

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

بنابراین، معادله دیفرانسیل جزئی بالا منجر می‌شود به

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(x, y, z)XYZ = 0$$

از تقسیم طرفین بر XYZ ، خواهیم داشت

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(x, y, z) = 0$$

این معادله تقریباً "جداشده" است. جمله اول تابعی از فقط x ، جمله دوم تابعی از فقط y ، و جمله سوم تابعی از فقط z است. اما جمله آخر، به‌طور کلی، مختصات را با هم ترکیب می‌کند. تنها راه انجام جداسازی کامل، این است که جمله آخر نیز "جداشده" باشد، یعنی، بتوان آن را به‌صورت مجموع سه تابع، هر یک وابسته به یک تک‌مختصه، بیان کرد. در چنین حالت خاصی خواهیم داشت

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0$$

یا

$$\left[\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + f_1(x) \right] + \left[\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + f_2(y) \right] + \left[\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_3(z) \right] = 0$$

جمله اول در سمت چپ تابعی از فقط x ، جمله دوم تابعی از فقط y ، و جمله سوم تابعی از فقط z است. چون حاصل جمع این سه جمله یک مقدار ثابت (صفر) است، هر جمله باید یک مقدار ثابت باشد. اگر مقدار ثابت متناظر با جمله z را با α_3 نمایش بدهیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{X} \frac{d^r X}{dx^r} + f_1(x) = \alpha_1$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^r Y}{dy^r} + f_2(y) = \alpha_2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^r Z}{dz^r} + f_3(z) = \alpha_3$$

که می‌توان آنها را به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{d^r X}{dx^r} + [f_1(x) - \alpha_1]X = 0 \quad (الف ۹-۸)$$

$$\frac{d^r Y}{dy^r} + [f_2(y) - \alpha_2]Y = 0 \quad (ب ۹-۸)$$

$$\frac{d^r Z}{dz^r} + [f_3(z) - \alpha_3]Z = 0 \quad (ج ۹-۸)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (د ۹-۸)$$

معادله‌های (۹-۸)، کلی‌ترین مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی حاصل از جداسازی معادلات دیفرانسیل جزئی نشان داده شده در معادله (۸-۸ج) را تشکیل می‌دهند. حالت‌های خاصی که معمولاً در کاربردها پیش می‌آیند در قالب مثال زیر ارائه شده‌اند.

مثال ۸-۲-۱: به چند حالتی که معادله‌های (۹-۸) را می‌توان برای آنها به کار برد توجه می‌کنیم. (الف) در الکتروستاتیک، با شروع از معادله لاپلاس، که در آن $f(r) = 0$ می‌رسیم به

$$\frac{d^r X}{dx^r} - \alpha_1 X = 0 \quad \frac{d^r Y}{dy^r} - \alpha_2 Y = 0 \quad \frac{d^r Z}{dz^r} + (\alpha_1 + \alpha_2)Z = 0 \quad (۱)$$

جوایه‌های (۱) توابعی مثلثاتی یا هیپربولیک (نمایی) اند، که با شرایط مرزی (سطوح رسانا) تعیین می‌شوند. (ب) در مکانیک کوانتومی معادله شرودینگر مستقل از زمان برای یک ذره آزاد در سه بعد

عبارت است از

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (2)$$

که در آن m ، جرم ذره، E ، انرژی ذره، و $\hbar = h/2\pi$ ثابت اند. در این حالت، $f(\mathbf{r}) = 2mE/\hbar^2$ را می‌توان با یکی از α ها، مثلاً α_1 ، در یک گروه قرار داد، و در نتیجه، معادله‌های (۸-۹) تبدیل می‌شوند به

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\alpha_1 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) X = 0 \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} - \alpha_2 Y = 0 \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - \alpha_3 Z = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

پس از اینکه زمان از تغییر مختصات جدا شد، معادلات گرما و موج نیز به معادله‌ای شبیه (۲) تبدیل می‌شوند؛ بنابراین، معادلات دیفرانسیل معمولی بالا را می‌توان در این حالتها نیز به‌کار گرفت. (ج) در مکانیک کوانتومی، معادله شرودینگر مستقل از زمان برای یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه‌بعدی، عبارت است از

$$\nabla^2 \Psi - \left(\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \Psi = 0$$

بنابراین

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

از طریق هم‌گروه کردن ثابت $2mE/\hbar^2$ با α_1 ، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 X = \left(\alpha_1 - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) X$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} y^2 Y = \alpha_2 Y$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} z^2 Z = \alpha_3 Z \quad (2)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

۳-۸ جداسازی در مختصات استوانه‌ای

معادله کلی (۳-۸)، در مختصات کروی به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + f(\rho, \varphi, z) \Psi = 0$$

برای جداسازی مختصات، می‌نویسیم

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)S(\varphi)Z(z)$$

با جایگزینی در معادله کلی، و تقسیم طرفین بر RSZ ، می‌رسیم به

$$\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{S} \left(\frac{1}{\rho^2} \right) \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f(\rho, \varphi, z) = 0$$

اگر این معادله بخواهد تفکیک‌پذیر باشد، باید داشته باشیم

$$f(\rho, \varphi, z) = f_1(\rho) + \frac{1}{\rho^2} f_2(\varphi) + f_3(z)$$

در نتیجه، معادله تبدیل می‌شود به

$$\left[\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + f_1(\rho) \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + f_2(\varphi) \right] + \left[\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_3(z) \right] = 0$$

مجموع دو جمله اول مستقل از z است، بنابراین جمله سوم نیز باید چنین باشد. از این رو خواهیم داشت

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + f_3(z) = \alpha_1$$

و

$$\left[\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + f_1(\rho) \right] + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + f_2(\varphi) \right] + \alpha_1 = 0$$

از ضرب طرفین این معادله در ρ^2 خواهیم داشت

$$\left[\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 f_1(\rho) + \alpha_1 \rho^2 \right] + \left[\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + f_2(\varphi) \right] = 0$$

چون جمله اول تابعی از فقط ρ و جمله دوم تابعی از فقط φ است، هر دو جمله باید ثابت‌هایی باشند که مجموعشان صفر می‌شود. بنابراین

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + f_2(\varphi) = \alpha_2$$

و

$$\frac{1}{R} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \rho^2 f_1(\rho) + \alpha_1 \rho^2 + \alpha_2 = 0$$

با سرجمع کردن آنچه در بالا آمده است، نتیجه می‌گیریم که وقتی معادله کلی، معادله (۸-۸ج)، در مختصات استوانه‌ای تفکیک‌پذیر باشد، به سه معادله دیفرانسیل معمولی زیر تجزیه خواهد شد

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + [f_2(z) - \alpha_2] Z = 0 \quad (۸-۱۰ الف)$$

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} + [f_2(\varphi) - \alpha_2] S = 0 \quad (۸-۱۰ ب)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \{ \rho^2 [f_1(\rho) + \alpha_1] + \alpha_2 \} R = 0 \quad (۸-۱۰ ج)$$

در حالت خاصی که f_1 متحد با صفر باشد، خواهیم داشت

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (\alpha_1 \rho^2 + \alpha_2) R = 0$$

که معادله دیفرانسیل بسل نامیده می‌شود. این معادله در مسائل الکتروستاتیکی و انتقال گرمای با شکل هندسی استوانه‌ای، و مسائل متضمن انتشار موج دوبعدی، مثل طبلها، بروز می‌کند. (معادله بسل را در فصلهای ۹ و ۱۰ حل خواهیم کرد.)

مثال ۸-۳-۱: مسئله الکتروستاتیکی ای را در نظر بگیرید که در آن سروته یک قوطی استوانه‌ای به ارتفاع l به زمین متصل است (پتانسیل Φ در آنجا صفر است)، و سطح جانبی آن در پتانسیل V_0 قرار دارد.

در چنین حالتی، معادله لاپلاس به‌کار می‌آید. بنابراین $f(x) \equiv 0$ ، که بر این معنا دلالت دارد که $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. از معادله (۸-۱۰ الف) خواهیم داشت

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \alpha_1 Z = 0 \quad (1)$$

که، به‌ازای $\alpha_1 \neq 0$ ، به آسانی می‌توان ثابت کرد که دارای جواب عمومی زیر است

$$Z = Ae^{\sqrt{\alpha_1}z} + Be^{-\sqrt{\alpha_1}z}$$

با اعمال شرط مرزی $\Phi(\rho, \varphi, 0) = 0$ داریم

$$R(\rho)S(\varphi)Z(0) = 0$$

چون این رابطه باید به‌ازای مقادیر دلخواه ρ و φ برقرار باشد، باید داشته باشیم $Z(0) = 0$ یا $A + B = 0$. بنابراین، خواهیم داشت

$$Z = A(e^{\sqrt{\alpha_1}z} - e^{-\sqrt{\alpha_1}z}) \quad (2)$$

در $z = l$ نیز پتانسیل باید صفر باشد. این حرف به آن معناست که $Z(l) = 0$ ، یا

$$Z(l) = A(e^{\sqrt{\alpha_1}l} - e^{-\sqrt{\alpha_1}l}) = 0 \quad (3)$$

به‌ازای $A = 0$ ، معادله (۲) می‌دهد $Z \equiv 0$ ، که به معنای $\Phi \equiv 0$ است. این جواب بدیهی است و ما علاقه‌ای به آن نداریم. شرط می‌کنیم که عامل دیگر در معادله (۳) صفر باشد. این امر منجر می‌شود به

$$e^{\sqrt{\alpha_1}l} = e^{-\sqrt{\alpha_1}l}$$

$$e^{2\sqrt{\alpha_1}t} = 1$$

اگر بر مقادیر حقیقی $\sqrt{\alpha_1}$ اصرار بورزیم، تنها جواب این معادله عبارت خواهد بود از $\alpha_1 = 0$ ، که طبق معادله (۲)، جواب بدیهی دیگری است. بنابراین، اعداد موهومی را به $\sqrt{\alpha_1}$ نسبت می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم کمیت $2\sqrt{\alpha_1}t = 2in\pi$ یکی از جوابهای مسئله است که در آن n عددی صحیح است. از این رو، می‌نویسیم

$$\sqrt{\alpha_1} = i \frac{n\pi}{l} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha_1 = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

به‌ازای $\alpha_1 = 0$ ، معادله (۱) به $d^2 Z/dz^2 = 0$ تبدیل می‌شود، که به جواب عمومی $Z = az + b$ با ثابتهای دلخواه a و b ، می‌انجامد.

این نتیجه، نمونه‌ای است نوعی از اینکه چگونه شرایط مرزی روابطی محدودکننده، مانند معادله (۴)، بر پارامترهای یک معادله اعمال می‌کنند. در اینجا، سادگی معادله دیفرانسیل، معادله (۱)، با ملایمت و همواری به شرایط نهفته در (۴) می‌انجامد. در مورد معادلات پیچیده‌تر، به این شرایط به آسانی نمی‌توان دست یافت.

محدودیت دیگری، این بار بر α_2 ، نیز قابل دستیابی است و از معادله (۸-۱۰ ب) حاصل می‌شود. به‌ازای $f_2 \equiv 0$ ، این معادله تبدیل می‌شود به

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} - \alpha_2 S = 0$$

که شبیه معادله (۱) است. بنابراین، یک جواب عمومی برای این معادله عبارت است از

$$S = \begin{cases} Ce^{\sqrt{\alpha_2}\varphi} + De^{-\sqrt{\alpha_2}\varphi} & \alpha_2 \neq 0 \text{ اگر} \\ C'\varphi + D' & \alpha_2 = 0 \text{ اگر} \end{cases} \quad (5)$$

صرفنظر از اینکه چه نوع شرایط مرزی بر پتانسیل Φ اعمال کنیم، روشن است که Φ باید به ازای φ و $\varphi + 2\pi$ مقدار یکسانی داشته باشد. این حرف به معنای $\alpha_2 \neq 0$ (از جواب بدیهی $S = D'$ چشم می‌پوشیم)، و $R(\rho)S(\varphi)Z(z) = R(\rho)S(\varphi + 2\pi)Z(z)$ ، یا $S(\varphi) = S(\varphi + 2\pi)$ است. با جایگذاری مقدار اخیر در (۵) داریم

$$Ce^{\sqrt{\alpha_2}\varphi} + De^{-\sqrt{\alpha_2}\varphi} = Ce^{\sqrt{\alpha_2}(\varphi+2\pi)} + De^{-\sqrt{\alpha_2}(\varphi+2\pi)}$$

یا

$$Ce^{\sqrt{\alpha_2}\varphi}(1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi}) + De^{-\sqrt{\alpha_2}\varphi}(1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}2\pi}) = 0$$

از ضرب دو طرف در $e^{\sqrt{\alpha_2}\varphi}$ ، می‌رسیم به

$$Ce^{2\sqrt{\alpha_2}\varphi}(1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi}) + D(1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}2\pi}) = 0$$

این رابطه باید به ازای جميع مقادیر φ برقرار باشد. تنها راه تحقق این شرط آن است که

$$1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi} = 0 \quad \text{و} \quad 1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}2\pi} = 0$$

کلی‌ترین جواب برای این هر دو رابطه عبارت است از

$$\sqrt{\alpha_2} = im \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

یا

$$\alpha_2 = -m^2 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

۴-۸ جداسازی در مختصات کروی

متداولترین دستگاه مختصاتی که در ریاضی فیزیک به کار می‌رود، دستگاه مختصات کروی است. علت این امر آن است که نیروها، انرژیهای پتانسیل، و اکثر آرایشهای هندسی که در طبیعت به آنها

برمی‌خوریم، دارای تقارن کروی‌اند. در باقیمانده این بخش، جداسازی متغیرهای کروی را به تفصیل بیان می‌کنیم.

۸-۴-۱ جداسازی زاویه‌ها از جزء شعاعی لاپلاسی

در متغیرهای دکارتی و استوانه‌ای، شرایط مرزی نقش مهمی در ماهیت جوابهای معادله دیفرانسیل معمولی به‌دست آمده از معادله دیفرانسیل جزئی دارند (ثابت‌های α_1 و α_2 دلخواه‌اند؛ شرایط مرزی تعیین می‌کنند که آیا این پارامترها اعدادی درست، اعدادی حقیقی، یا اعدادی مختلط‌اند یا خیر). با این همه، در تقریباً تمام کاربردها، جزء زاویه‌ای متغیرهای کروی را می‌توان جدا و به‌طور خیلی کلی مطالعه و بررسی کرد. علت آن است که جزء زاویه‌ای لاپلاسی در دستگاه مختصات کروی ارتباط تنگاتنگی با عمل چرخش و تکانه زاویه‌ای، که مستقل از هر وضعیت خاصی‌اند، دارد.

جداسازی جزء زاویه‌ای در مختصات کروی را درست می‌توان شبیه جداسازی مختصات دکارتی و استوانه‌ای با نوشتن $\bar{\mathbb{P}}$ به‌صورت حاصلضرب سه تابع، که هر یک به فقط یکی از متغیرهای r ، θ ، و φ بستگی دارد، انجام داد. با این همه، ما روش متفاوتی را که در مکانیک کوانتومی و در حل معادله شرودینگر متداول است، به‌کار خواهیم برد. این رهیافت، که بر جبر عملگرها، فصلهای ۲ و ۳، مبتنی و فوق‌العاده توانا و دقیق است، جوابهای جزء زاویه‌ای را به شکل بسته می‌دهد. عملگر برداری $\bar{\mathbb{P}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{\mathbb{P}} = -i\nabla \equiv -\sqrt{-1}\nabla$$

به‌طوری که مؤلفه دکارتی زام $\bar{\mathbb{P}}$ عبارت است از $\bar{\mathbb{P}}_j \equiv -i\partial/\partial x_j$ با $j = 1, 2, 3$. در مکانیک کوانتومی، $\bar{\mathbb{P}}$ عملگر تکانه است. به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$[x_j, \bar{\mathbb{P}}_k] = i\delta_{jk}$$

و

$$[x_j, x_k] = 0 = [\bar{\mathbb{P}}_j, \bar{\mathbb{P}}_k]$$

همچنین، می‌توان عملگر تکانه زاویه‌ای را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \bar{\mathbb{P}}$$

صورت "مؤلفه‌ای" این رابطه، عبارت خواهد بود از

$$\mathbb{L}_i = (\mathbf{r} \times \overline{\mathbb{P}})_i = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbb{P}_k \quad i = 1, 2, 3$$

که در آن از قرارداد مجموع‌یابی اینشتین (جمع بر روی اندیسهای مکرر) استفاده شده است. با کاربرد روابط جابه‌جایی بالا، خواهیم داشت (تمرین ۸-۴-۱)

$$[\mathbb{L}_j, \mathbb{L}_k] = i\varepsilon_{jkl} \mathbb{L}_l \quad (۱۱-۸)$$

به‌زودی خواهیم دید که \mathbb{L} را می‌توان فقط برحسب زاویه‌های θ و φ نوشت. اما، در تعریف $\overline{\mathbb{L}}$ یک تک‌عامل از $\overline{\mathbb{P}}$ وجود دارد؛ بنابراین اگر $\overline{\mathbb{L}}$ را مجذور کنیم، دو عامل از $\overline{\mathbb{P}}$ ظاهر خواهد شد، که ممکن است به لاپلاسی تبدیل شود. به این ترتیب، ممکن است بتوانیم ∇^2 را برحسب \mathbb{L}^2 بنویسیم، که فقط به زاویه‌ها بستگی دارد، و شاید هم یک جملهٔ دوم که فقط شامل r است. بگذارید این نکته را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2 &\equiv \overline{\mathbb{L}} \cdot \overline{\mathbb{L}} = \sum_{i=1}^3 \mathbb{L}_i \mathbb{L}_i \equiv \mathbb{L}_i \mathbb{L}_i = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbb{P}_k \varepsilon_{imn} x_m \mathbb{P}_n \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{بنابر قرارداد مجموع‌یابی اینشتین} \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} x_j \mathbb{P}_k x_m \mathbb{P}_n \\ &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) x_j \mathbb{P}_k x_m \mathbb{P}_n \\ &= x_j \mathbb{P}_k x_j \mathbb{P}_k - x_j \mathbb{P}_k x_k \mathbb{P}_j \end{aligned}$$

ما باید این عبارت را چنان بنویسیم که عاملهای با اندیس همسان کنار یکدیگر باشند، تا یک حاصلضرب نقطه‌ای بدهند. همچنین، باید سعی کنیم، تا حد ممکن، عاملهای p را درست راست نگه بداریم تا بتوانند بدون تداخل از ناحیهٔ عاملهای x روی توابع عمل کنند. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2 &= x_j (x_j \mathbb{P}_k - i\delta_{kj}) \mathbb{P}_k - (\mathbb{P}_k x_j + i\delta_{kj}) x_k \mathbb{P}_j \\ &= x_j x_j \mathbb{P}_k \mathbb{P}_k - i x_j \mathbb{P}_j - \mathbb{P}_k x_k x_j \mathbb{P}_j - i x_j \mathbb{P}_j \\ &= x_j x_j \mathbb{P}_k \mathbb{P}_k - 2i x_j \mathbb{P}_j - (x_k \mathbb{P}_k - i\delta_{kk}) x_j \mathbb{P}_j \end{aligned}$$

دوباره با کاربرد قرارداد مجموع‌یابی اینشتین و یادآوری این نکته که $\delta_{kk} = 3$ می‌توانیم بنویسیم

$$L^i = r^i \left(\bar{\mathbf{P}} \right)^i - 2ir \cdot \bar{\mathbf{P}} - (\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{P}})(\mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{P}}) + 3ir \cdot \bar{\mathbf{P}}$$

که هرگاه جایگزینی $\bar{\mathbf{P}} = -i\nabla$ را اجرا کنیم، منجر می‌شود به

$$\nabla^i = -r^{-i} L^i + r^{-i} (\mathbf{r} \cdot \nabla)(\mathbf{r} \cdot \nabla) + r^{-i} \mathbf{r} \cdot \nabla$$

حال اگر ∇^2 بر تابع $\Psi(r, \theta, \varphi)$ اثر کند، خواهیم داشت

$$\nabla^i \Psi = -\frac{1}{r^i} L^i \Psi + \frac{1}{r^i} (\mathbf{r} \cdot \nabla)(\mathbf{r} \cdot \nabla) \Psi + \frac{1}{r^i} \mathbf{r} \cdot \nabla \Psi \quad (12-8)$$

اما ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbf{r} \cdot \nabla = r \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \nabla = r \nabla_r \equiv r \frac{\partial}{\partial r}$$

به این ترتیب، شکل نهایی $\nabla^2 \Psi$ به‌دست می‌آید:

$$\nabla^i \Psi = -\frac{1}{r^i} L^i \Psi + \frac{1}{r^i} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (13-8)$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که معادله (۱۲-۸) یک رابطه کلی است که در همه دستگاههای مختصات صادق است. در واقع، تمام عملیات جبری‌ای که منجر به این معادله شد، در مختصات دکارتی صورت گرفته است. اما، چون این معادله را با نمادگذاری برداری نوشته‌ایم، هیچ نشانی مبنی بر اینکه با استفاده از مختصات دکارتی به‌دست آمده است، مشاهده نمی‌شود. معادله (۱۳-۸) عبارت است از شکل کروی (۱۲-۸)، و آن چیزی است که ما آن را پی خواهیم گرفت. ابتدا یک فرض ساده‌ساز، اما، در بیشتر موارد، نامحدودکننده، اتخاذ خواهیم کرد، مبنی بر اینکه در معادله (۸-۸ج)، معادله اصلی، $f(r)$ تابعی است از فقط r . تقریباً در تمام کاربردهای فیزیکی، این فرض صادق است.

پس، در مختصات کروی، معادله (۸-۸ج) تبدیل می‌شود به

$$-\frac{1}{r^i} L^i \Psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + f(r) \Psi = 0$$

موقتاً، با فرض اینکه L^1 فقط به θ و φ بستگی دارد و جدا کردن Ψ به صورت حاصلضرب دو تابع، $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ، این معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$-\frac{1}{r^2}L^1(RY) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (RY) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (RY) + f(r)RY = 0$$

از تقسیم طرفین بر RY داریم

$$-\frac{1}{r^2 Y} L^1(Y) + \frac{1}{r R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r R} \frac{dR}{dr} + f(r) = 0$$

و سرانجام با ضرب در r^2 خواهیم داشت

$$-\frac{1}{Y} L^1(Y) + \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 f(r) = 0$$

با استدلالی شبیه آنچه که در بخشهای پیش به‌کار گرفتیم، داریم

$$-\frac{1}{Y} L^1(Y) = -\alpha$$

و

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 f(r) = \alpha$$

این دو معادله را می‌توان به صورت‌های زیر نیز بیان کرد

$$L^1 Y(\theta, \varphi) = \alpha Y(\theta, \varphi) \quad (۸-۱۴ الف)$$

و

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[f(r) - \frac{\alpha}{r^2} \right] R = 0 \quad (۸-۱۴ ب)$$

ما فعلاً توجه خود را به جزء زاویه‌ای، معادله (۸-۱۴ الف)، معطوف و جزء شعاعی را به بحث کلی معادلات دیفرانسیل معمولی در فصل بعد موکول می‌کنیم. باقیمانده این زیربخش، ضمن

محاسبه $\mathbb{L}_z \equiv \mathbb{L}_z$, $\mathbb{L}_y \equiv \mathbb{L}_y$, $\mathbb{L}_x \equiv \mathbb{L}_x$ و روشن کردن این نکته که اینها از r مستقل اند، صرف این خواهد شد که ثابت کنیم \mathbb{L}^2 فقط به θ و φ بستگی دارد. چون \mathbb{L}_z یک عملگر است، تأثیر آن را بر یک تابع دلخواه $f(r)$ مطالعه می‌کنیم. بنابراین

$$\mathbb{L}_z f = -i\epsilon_{ijk} x_j \nabla_k f \equiv -i\epsilon_{ijz} x_j \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

با نوشتن x_j دکارتی برحسب r, θ, φ و استفاده از قاعده زنجیری، می‌توانیم $\partial f / \partial x_k$ را برحسب مختصات استوانه‌ای بیان کنیم. این بیان، $\mathbb{L}_z f$ را برحسب r, θ, φ به ما خواهد داد. آنچه می‌خواهیم نشان دهیم این است که در عبارت نهایی، r غایب است. روند استدلال را شروع می‌کنیم با

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

و وارونه‌های آنها، به این قرارند

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad \cos \theta = \frac{z}{r} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

مشتقات دکارتی، $\partial f / \partial x_k$ را می‌توانیم برحسب مختصات کروی بیان کنیم، مثلاً

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

مشتق یک دستگاه مختصات نسبت به دستگاه دیگر را به آسانی می‌توان محاسبه کرد

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} (rx)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{x}{r^2}$$

اکنون، با مشتق گرفتن از دو طرف معادله $\cos \theta = z/r$ خواهیم داشت

$$-\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{z \partial r / \partial x}{r^2} = -\frac{zx}{r^3}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{zx}{r^3 \sin \theta}$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tan \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) \Rightarrow \sec^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

یا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi$$

با بهره‌گیری از این عبارتها برای $\partial r / \partial x$ ، $\partial \theta / \partial x$ ، و $\partial \varphi / \partial x$ در معادله مربوط به $\partial f / \partial x$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{xz}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{y}{x^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

دقیقاً به همین ترتیب، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{yz}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{x} \cos^2 \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

اکنون می‌توانیم با تأثیر دادن L_x بر یک تابع دلخواه، آن را حساب کنیم

$$\begin{aligned} L_x f &= (yP_z - zP_y) f = -i \left(y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= -i \left[\frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{yz^2}{r^2} - \frac{y}{r} \right) \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{zy}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{yz^2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{x} \cos^2 \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] \\ &= +i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) f \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$L_x = i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (۱۵-۸ \text{ الف})$$

با استدلال‌هایی مشابه، خواهیم داشت

$$L_y = i \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (۱۵-۸ ب)$$

و

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (۱۵-۸ ج)$$

به این ترتیب، گزارهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزارهٔ ۸-۴-۱: در مختصات کروی، L_x ، L_y و L_z عملگرهایی‌اند که فقط به θ و φ بستگی دارند.

تمرین ۸-۴-۲، روش محاسبهٔ L^2 را از معادله‌های (۱۵-۸) نشان می‌دهد. نتیجه، عبارت خواهد بود از

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (۱۶-۸)$$

جایگذاری در معادلهٔ (۸-۱۳)، لاپلاسی را، مطابق نتایج فصل ۱، در مختصات کروی به دست می‌دهد.

۸-۴-۲ ویژه‌مقدارهای L^2

اکنون که L^2 را برحسب θ و φ یافته‌ایم، علی‌الاصول باید بتوانیم آن را به معادلهٔ (۸-۱۴ الف) وارد، وابستگی θ و φ را تفکیک، و معادلات دیفرانسیل معمولی مربوطه را حل کنیم. با این همه، راه خیلی دقیقتر و ظریفتری برای حل جبری معادلهٔ (۸-۱۴ الف) وجود دارد، زیرا این معادله صرفاً یک معادلهٔ ویژه‌مقداری برای L^2 است. در این زیربخش، ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای L^2 را پیدا خواهیم کرد.

به این منظور، L^2 را به صورت یک عملگر مجرد در نظر می‌گیریم و (۸-۱۴ الف) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$L^2|Y\rangle = \alpha|Y\rangle$$

که در آن $|Y\rangle$ بردار مجردی است که مؤلفه (θ, φ) ام آن را می‌توان بعداً پیدا کرد. چون \mathbb{L}^1 یک عملگر دیفرانسیلی است، دارای نمایش ماتریسی (متناهی بعد) نیست. بنابراین، روش دترمینانی برای محاسبه ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها در اینجا کارساز نخواهد بود. در عوض، تمام ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارهای متناظر آنها را با در نظر گرفتن یک مجموعهٔ بیشینه از عملگرهای جابه‌جا شونده تولید خواهیم کرد.

معادلهٔ بالا، یک ویژه‌مقدار، α ، و یک ویژه‌بردار، $|Y\rangle$ ، را مشخص می‌کند. اما ممکن است با هر α ، بیش از یک $|Y\rangle$ متناظر باشد. برای تمایز بین این ویژه‌بردارهای واگن، یک عملگر ثانوی را از میان $\{\mathbb{L}_i\}_{i=1}^2$ ، مثلاً \mathbb{L}_3 ، که با \mathbb{L}^1 جابه‌جا می‌شود برمی‌گزینیم. سپس \mathbb{L}_3 را در زیرفضاهای متناظر با α های مختلف قطری می‌کنیم (برای شرح بیشتر، ر.ک. بحث تجزیهٔ طیفی در فصل ۳) و هر $|Y\rangle$ را با ویژه‌مقدار متناظر با α مشخص می‌کنیم. این کار شدنی است، زیرا \mathbb{L}^1 و \mathbb{L}_3 هر دو در فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی، عملگرهایی هرمیتی‌اند (اثبات، به صورت یک مسئله به خواننده واگذار می‌شود). این کار را چندان ادامه می‌دهیم تا عملگر جابه‌جاشوندهٔ دیگری باقی نماند. تا آنجا که تأثیر عملگرهای $\{\mathbb{L}_i\}_{i=1}^2$ مورد نظر است، ویژه‌بردارهایی که با این روش به دست می‌آیند، ناواگن‌اند.

به این ترتیب، به جستجوی بیشینهٔ مجموعهٔ عملگرهای جابه‌جاشونده از میان $\{\mathbb{L}^1, \mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3\}$ می‌پردازیم. در تمرین ۴-۱-۱۴ نشان می‌دهیم که \mathbb{L}^1 با تمام \mathbb{L}_i ها جابه‌جا می‌شود. اما هیچکدام از \mathbb{L}_i ها با هم جابه‌جا نمی‌شوند. بنابراین، بیشینهٔ مجموعهٔ عملگرهای جابه‌جاشونده، مشتمل بر \mathbb{L}^1 و فقط یکی از \mathbb{L}_i هاست. رسم بر این است که $\mathbb{L}_z \equiv \mathbb{L}_3$ را به عنوان شریک \mathbb{L}^1 انتخاب می‌کنند، که در نتیجه $\{\mathbb{L}^1, \mathbb{L}_z\}$ ، بیشینهٔ مجموعهٔ عملگرهای جابه‌جاشونده خواهد شد. ویژه‌مقدارهای این دو عملگر، بردار $|Y\rangle$ را مشخص خواهند کرد. چون $\{\mathbb{L}^1, \mathbb{L}_z\} = 0$ ، می‌توانیم بردارهایی را انتخاب کنیم که به‌طور همزمان ویژه‌بردارهای هر دو عملگر باشند. اگر این بردارها را با ویژه‌مقدارهای دو عملگر یاد شده مشخص کنیم، خواهیم داشت

$$\mathbb{L}^1|Y_{\alpha,\beta}\rangle = \alpha|Y_{\alpha,\beta}\rangle \quad (۸-۱۷الف)$$

$$\mathbb{L}_z|Y_{\alpha,\beta}\rangle = \beta|Y_{\alpha,\beta}\rangle \quad (۸-۱۷ب)$$

هرمیتی بودن \mathbb{L}^1 و \mathbb{L}_z حاکی از حقیقی بودن α و β است. اکنون باید مقادیر ممکن α و β را تعیین کنیم.

دو عملگر جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_+ \equiv L_x + iL_y$$

$$L_- \equiv L_x - iL_y$$

با این تعریفها به آسانی می‌توان اثبات کرد که

$$[L', L_{\pm}] = 0 \quad (الف\ ۱۸۸)$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (ب\ ۱۸۸)$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z \quad (ج\ ۱۸۸)$$

معادله (الف ۱۸۸) حکایت از این دارد که در زیرفضای متناظر با ویژه‌مقدارهای α ، L_{\pm} ناورد هستند! یعنی

$$L'(L_{\pm}|Y_{\alpha,\beta}\rangle) = \alpha(L_{\pm}|Y_{\alpha,\beta}\rangle)$$

از سوی دیگر، از معادله (ب ۱۸۸) داریم

$$\begin{aligned} L_z(L_+|Y_{\alpha,\beta}\rangle) &= (L_z L_+)|Y_{\alpha,\beta}\rangle = (L_+ L_z + L_+)|Y_{\alpha,\beta}\rangle \\ &= L_+ L_z |Y_{\alpha,\beta}\rangle + L_+ |Y_{\alpha,\beta}\rangle = \beta L_+ |Y_{\alpha,\beta}\rangle + L_+ |Y_{\alpha,\beta}\rangle \\ &= (\beta + 1)(L_+ |Y_{\alpha,\beta}\rangle) \end{aligned}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $L_+ |Y_{\alpha,\beta}\rangle$ دارای ویژه‌مقداری یک واحد بیشتر از ویژه‌مقدار $L_z |Y_{\alpha,\beta}\rangle$ است. به عبارت دیگر، L_+ ویژه‌مقدار L_z را به اندازه یک واحد بالا می‌برد. به این علت است که L_+ را عملگر بالا برنده می‌نامند. همچنین، L_- عملگر پایین برنده نامیده می‌شود، زیرا

$$L_z(L_-|Y_{\alpha,\beta}\rangle) = (\beta - 1)(L_-|Y_{\alpha,\beta}\rangle)$$

بحث بالا را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد

$$L_{\pm}|Y_{\alpha,\beta}\rangle = C_{\pm}|Y_{\alpha,\beta\pm 1}\rangle$$

که C_{\pm} ثابت‌هایی‌اند که باید (بعداً) با بهنجارش مناسب تعیین شوند.

محدودیت‌هایی در α و β و روابط بین آنها برقرار است. پیش از بررسی این موضوع، به این نکته اشاره می‌کنیم که چون L^2 مجموع مربعات ماتریسهای هرمیتی است، باید یک عملگر مثبت باشد (فصل ۳)؛ یعنی

$$\langle a | L^2 | a \rangle \geq 0 \quad \forall |a\rangle$$

در حالت خاص

$$0 \leq \langle Y_{\alpha,\beta} | L^2 | Y_{\alpha,\beta} \rangle = \alpha \langle Y_{\alpha,\beta} | Y_{\alpha,\beta} \rangle \equiv \alpha \| Y_{\alpha,\beta} \|^2$$

بنابراین

$$\alpha \geq 0$$

از سوی دیگر، مطابق تمرین ۸-۴-۳،

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - L_z \quad (۱۹-۸ \text{ الف})$$

و

$$L^2 = L_- L_+ + L_z^2 + L_z \quad (۱۹-۸ \text{ ب})$$

با قرار دادن دو طرف معادله (۱۹-۸ الف) بین $\langle Y_{\alpha,\beta} |$ و $| Y_{\alpha,\beta} \rangle$ داریم

$$\langle Y_{\alpha,\beta} | L^2 | Y_{\alpha,\beta} \rangle = \langle Y_{\alpha,\beta} | L_+ L_- | Y_{\alpha,\beta} \rangle + \langle Y_{\alpha,\beta} | L_z^2 | Y_{\alpha,\beta} \rangle - \langle Y_{\alpha,\beta} | L_z | Y_{\alpha,\beta} \rangle$$

یا

$$\alpha \| Y_{\alpha,\beta} \|^2 = \langle Y_{\alpha,\beta} | L_+ L_- | Y_{\alpha,\beta} \rangle + \beta^2 \| Y_{\alpha,\beta} \|^2 - \beta \| Y_{\alpha,\beta} \|^2$$

چون $L_+ = (L_-)^\dagger$

$$\| L_- | Y_{\alpha,\beta} \rangle \|^2 = (\alpha - \beta^2 + \beta) \| Y_{\alpha,\beta} \|^2$$

چون نرْمها مثبت اند، از این رابطه خواهیم داشت

$$\alpha \geq \beta^2 - \beta$$

به همین ترتیب، از (۸-۱۹ ب) داریم

$$\alpha \geq \beta^2 + \beta$$

از حاصل جمع این دو نامساوی خواهیم رسید به:

$$2\alpha \geq 2\beta^2 \Rightarrow |\beta| \leq \sqrt{\alpha} \Rightarrow -\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$$

این عبارت نشان می‌دهد که مقادیر β کراندارند. یعنی، β بیشینه، β_+ و β کمینه، β_- چنان وجود دارد که فراتر از آنها هیچ مقداری برای β وجود ندارد. این اتفاق فقط در صورتی می‌تواند بیفتد که

$$\mathbb{L}_+ |Y_{\alpha, \beta_+} \rangle = 0$$

$$\mathbb{L}_- |Y_{\alpha, \beta_-} \rangle = 0$$

زیرا اگر $\mathbb{L}_\pm |Y_{\alpha, \beta_\pm} \rangle$ ناصفر باشند، باید مقداری از β را متناظر با $\beta_\pm \pm 1$ داشته باشند و می‌دانیم که، بنابر فرض، چنین چیزی امکان ندارد.

اکنون با قرار دادن (۸-۱۹ ب) بین $\langle Y_{\alpha, \beta_+} |$ و $|Y_{\alpha, \beta_+} \rangle$ و با بهره‌گیری از رابطه $\mathbb{L}_+ |Y_{\alpha, \beta_+} \rangle = 0$ خواهیم داشت

$$\alpha \|Y_{\alpha, \beta_+}\|^2 = 0 + \beta_+^2 \|Y_{\alpha, \beta_+}\|^2 + \beta_+ \|Y_{\alpha, \beta_+}\|^2$$

یا

$$(\alpha - \beta_+^2 - \beta_+) \|Y_{\alpha, \beta_+}\|^2 = 0$$

بنابر تعریف، $\langle Y_{\alpha, \beta_+} \rangle \neq 0$ (زیرا در غیر این صورت $\beta_+ - 1$ بیشینه می‌بود). بنابراین، خواهیم داشت

$$\alpha = \beta_+^2 + \beta_+$$

روشی مشابه برای (۸-۱۹ الف) منجر می‌شود به

$$\alpha = \beta_-^2 - \beta_-$$

از حل این دو معادله برحسب β_+ و β_- داریم

$$\beta_+ = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4\alpha})$$

$$\beta_- = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4\alpha})$$

این واقعیت که $\beta_+ \geq \beta_-$ و $\sqrt{1+4\alpha} \geq 1$ ، ما را به گزینشهای زیر وامی‌دارد

$$\beta_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4\alpha})$$

و

$$\beta_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4\alpha}) = -\beta_+$$

با شروع از $\langle Y_{\alpha, \beta_+} \rangle$ ، می‌توانیم \mathbb{L}_- را پی‌درپی بر آن اعمال کنیم. در هر گام، مقدار β یک واحد کاهش می‌یابد. البته باید حدی بر تعداد بردارهایی که به این ترتیب به دست می‌آیند وجود داشته باشد، زیرا $|\beta| \leq \sqrt{\alpha}$. بنابراین، باید عددی درست و نامنفی، مثل k ، چنان وجود داشته باشد که

$$(\mathbb{L}_-)^{k+1} \langle Y_{\alpha, \beta_+} \rangle = 0$$

یا

$$\mathbb{L}_-(\mathbb{L}_-^k \langle Y_{\alpha, \beta_+} \rangle) = 0$$

بنابراین، $L_-^k |Y_{\alpha, \beta_+}\rangle$ باید با $|Y_{\alpha, \beta_-}\rangle$ متناسب باشد. به خصوص، چون مقدار β برای $|Y_{\alpha, \beta_+}\rangle$ مساوی $\beta_+ - k$ است، داریم

$$\beta_- = \beta_+ - k$$

اکنون، با استفاده از $\beta_- = -\beta_+$ (که در بالا به دست آمد) به مهمترین نتیجه می‌رسیم

$$\beta_+ = \frac{k}{\gamma} \equiv j \quad k \in \mathbb{N}$$

و چون $\alpha = \beta_+^2 + \beta_+$

$$\alpha = j(j+1)$$

این نتیجه چندان مهم هست که به صورت یک قضیه بیان بشود.

قضیه ۲-۴-۸: ویژه بردارهای L^j را می‌توان به صورت $|Y_{jm}\rangle$ نوشت، و

$$L^j |Y_{jm}\rangle = j(j+1) |Y_{jm}\rangle$$

$$L_z |Y_{jm}\rangle = m |Y_{jm}\rangle$$

که j عددی درست یا نیم درست، و m دارای مقداری از بین $1 + 2j$ عدد در مجموعه $\{j, j-1, \dots, -j+1, -j\}$ است. ■

اکنون، به اختصار، بهنجارش ویژه بردارها را بررسی می‌کنیم. از پیش می‌دانیم که چون $|Y_{jm}\rangle$ ویژه بردارهای عملگرهای هرمیتی L^j و L_z هستند، متعامدند. حال می‌خواهیم شرط کنیم که نرم این ویژه بردارها واحد باشد؛ یعنی،

$$\langle Y_{j'm'} | Y_{jm} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

این شرط، C_{\pm} را، که قبلاً معرفی کردیم، تعیین می‌کند. ابتدا C_+ را در نظر می‌گیریم، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_+ |Y_{jm}\rangle = C_+ |Y_{j, m+1}\rangle$$

مزدوج هرمیتی این معادله عبارت است از

$$\langle Y_{jm} | L_- = C_+^* \langle Y_{j,m+1} |$$

از ادغام این دو معادله خواهیم داشت

$$\langle Y_{jm} | L_- L_+ | Y_{jm} \rangle = |C_+|^2 \langle Y_{j,m+1} | Y_{j,m+1} \rangle$$

با استفاده از معادله (۸-۱۹ب)، قضیه ۸-۴-۲، و بهنجارش بالا خواهیم داشت

$$j(j+1) - m(m+1) = |C_+|^2$$

یا

$$|C_+| = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

پذیرش این گزاره شناسه (فاز) عدد مختلط C_+ صفر است، آن را عدد حقیقی مثبتی می‌سازد.
بنابراین

$$C_+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

و به همین ترتیب

$$C_- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$L_+ | Y_{jm} \rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} | Y_{j,m+1} \rangle \quad (۸-۲۰الف)$$

$$L_- | Y_{jm} \rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} | Y_{j,m-1} \rangle \quad (۸-۲۰ب)$$

این بحث در این زیربخش، روش استاندارد بررسی تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی به‌شمار می‌آید. در مفهوم مکانیک کوانتومی، قضیه ۸-۴-۲ این نتیجه فیزیکی مهم را بیان می‌کند که ذرات می‌توانند اسپین درست یا نیم‌درست داشته باشند. این استنتاج به (گروه) دورانها در سه بعد گره می‌خورد، که به نوبه خود، مثالی است از گروه "لی"، یا گروه پیوسته انتقال^۱.

۸-۴-۳ ویژه بردارهای L^2 (هماهنگهای کروی)

بحثی که در بخش پیش کردیم، در یک فضای برداری مجرد صورت گرفت. اکنون می‌خواهیم به فضای تابعی برگردیم و عملگرها و بردارها را برحسب θ و φ نمایش بدهیم. ابتدا، L_z را مطابق معادله (۸-۱۵ج) به صورت یک عملگر دیفرانسیلی در نظر می‌گیریم. معادله ویژه مقدری L_z تبدیل می‌شود به

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{jm}(\theta, \varphi) = m Y_{jm}(\theta, \varphi)$$

با نوشتن $Y_{jm}(\theta, \varphi) = P_{jm}(\theta) Q_{jm}(\varphi)$ و جایگزینی در معادله بالا، خواهیم داشت

$$\frac{dQ_{jm}}{d\varphi} = im Q_{jm}$$

که جواب آن عبارت است از

$$Q_{jm}(\varphi) = C_{jm} e^{im\varphi}$$

که C_{jm} یک مقدار ثابت است. با ادغام C_{jm} در P_{jm} ، می‌توان نوشت

$$Y_{jm}(\theta, \varphi) = P_{jm}(\theta) e^{im\varphi}$$

۱. در فیزیک کلاسیک، مقدار توابع باید به‌ازای φ و $\varphi + 2\pi$ یکی باشد. این شرط، مقادیر m را به‌اعداد درست محدود می‌کند. اما در مکانیک کوانتومی، قدرمطلقاً حائز اهمیت‌اند، و بنابراین اگر بخواهیم وارد مقوله گروه‌های لی بشویم، از بحث معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی خیلی منحرف خواهیم شد. با این همه، توجه به این نکته حائز اهمیت است که در واقع مطالعه معادلات دیفرانسیل بود که سوفوس لی را به بررسی تقارنهای آنها و ابداع شاخه‌ای جدید از ریاضیات و فیزیک نظری هدایت کرد که اکنون نام او را یدک می‌کنند. بنابراین، وجود ارتباطی بین نظریه گروهها (دوران، تکانه زاویه‌ای) و معادله دیفرانسیلی که ما سعی به حل کردن آن داریم، نباید تعجب‌آور باشد.

m می‌تواند اعداد نیم‌درست را نیز بپذیرد. از این پس، فرض خواهیم کرد که m یک عدد درست است و ویژه‌بردارهای \mathbb{L}^2 را به صورت $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ نشان خواهیم داد، که در آن l یک عدد درست نامفنی است. می‌خواهیم یک شکل تحلیلی برای $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ پیدا کنیم.

به این منظور، به عبارتهایی (دیفرانسیلی) تحلیلی برای \mathbb{L}_{\pm} نیاز داریم. این عبارتها را به آسانی می‌توان با استفاده از عبارتهای مربوط به \mathbb{L}_z و \mathbb{L}_y که در معادلات (۸-۱۵) داده شده‌اند، به دست آورد. (انجام عملیات سراسر جبری را به عنوان مثابه بر عهده خواننده وامی‌گذاریم) بنابراین داریم

$$\mathbb{L}_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (21-8)$$

وقتی \mathbb{L}_{+} بر $P_{ll}(\theta)e^{il\varphi} \equiv Y_{ll}(\theta, \varphi)$ تأثیر کند، نتیجه صفر است. این عمل منجر می‌شود به معادله دیفرانسیل

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (P_{ll}(\theta)e^{il\varphi}) = 0$$

که به نوبه خود، می‌دهد

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) P_{ll}(\theta) = 0$$

جواب این معادله (که در تمرین ۸-۴-۴ به دست می‌آید) عبارت است از

$$P_{ll}(\theta) = C_l (\sin \theta)^l$$

علت اینکه به مقدار ثابت یک اندیس پایین نسبت داده‌ایم، این است که هر P_{ll} ممکن است به ثابت انتگرال‌گیری متفاوتی منجر شود. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = P_{ll}(\theta)e^{il\varphi} = C_l (\sin \theta)^l e^{il\varphi} \quad (22-8)$$

با در دست داشتن $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ ، می‌توانیم هر $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ را با اعمال پیاپی \mathbb{L}_{-} به دست آوریم. مثال زیر، عملیات جبری سراسر، اما مفید، را برای مورد بردارهای مجرد نشان می‌دهد.

مثال ۸-۴-۱: می‌خواهیم با اعمال پیاپی \mathbb{L}_- بر $|Y_{ll}\rangle$ ، عبارتی برای $|Y_{lm}\rangle$ پیدا کنیم. اثر \mathbb{L}_- به‌طور کامل با معادله (۸-۲۰) توصیف می‌شود. برای نخستین توان \mathbb{L}_- داریم

$$\mathbb{L}_- |Y_{ll}\rangle = \sqrt{l(l+1) - l(l-1)} |Y_{l,l-1}\rangle = \sqrt{2l} |Y_{l,l-1}\rangle$$

با اعمال مجدد \mathbb{L}_- بر این معادله، داریم

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_-)^2 |Y_{ll}\rangle &= \sqrt{2l} \mathbb{L}_- |Y_{l,l-1}\rangle = \sqrt{2l} \sqrt{2(l-1)} |Y_{l,l-2}\rangle \\ &= \sqrt{2(2l)(2l-1)} |Y_{l,l-2}\rangle \end{aligned}$$

و باز هم اگر \mathbb{L}_- را یک‌بار دیگر اعمال کنیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_-)^3 |Y_{ll}\rangle &= \sqrt{2(2l)(2l-1)} \mathbb{L}_- |Y_{l,l-2}\rangle = \sqrt{2(2l)(2l-1)} \sqrt{6(l-1)} |Y_{l,l-3}\rangle \\ &= \sqrt{3!(2l)(2l-1)(2l-2)} |Y_{l,l-3}\rangle \end{aligned}$$

به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که ترتیب خاص زیر برای توان کلی k برقرار است

$$(\mathbb{L}_-)^k |Y_{ll}\rangle = \sqrt{k!(2l)(2l-1)\cdots(2l-k+1)} |Y_{l,l-k}\rangle$$

یا

$$(\mathbb{L}_-)^k |Y_{ll}\rangle = \sqrt{\frac{k!(2l)!}{(2l-k)!}} |Y_{l,l-k}\rangle$$

اگر قرار بدهیم $l-k \equiv m$ ، خواهیم داشت

$$(\mathbb{L}_-)^{l-m} |Y_{ll}\rangle = \sqrt{\frac{(l-m)!(2l)!}{(1+m)!}} |Y_{l,m}\rangle$$

که نهایتاً منجر می‌شود به

$$|Y_{l,m}\rangle = \sqrt{\frac{(1+m)!}{(1-m)!(2l)!}} (\mathbb{L}_-)^{l-m} |Y_{ll}\rangle$$

علی‌الاصول، نتیجه مثال ۸-۴-۱ تمام ویژه‌بردارهای (مجرد) را به دست می‌دهد. اما در عمل، مفید خواهد بود اگر بتوانیم یک شکل بسته (برحسب مشتقات) صرفاً برای بخش θ ی $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ داشته باشیم. به این منظور، عملگر L_- را، آن‌طور که در معادله (۲۱-۸) داده شده است، بر معادله (۲۲-۸) تأثیر می‌دهیم و از آن، $Y_{l,l-1}(\theta, \varphi)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} L_- Y_{ll} &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) [P_{ll}(\theta) e^{il\varphi}] \\ &= e^{-i\varphi} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta (il) \right] [P_{ll}(\theta) e^{il\varphi}] \\ &= (-1) e^{i(l-1)\varphi} \left(\frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) P_{ll}(\theta) \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد (تمرین ۸-۴-۵) که

$$\left(\frac{d}{d\theta} + n \cot \theta \right) f(\theta) = \frac{1}{(\sin \theta)^n} \frac{d}{d\theta} [(\sin \theta)^n f(\theta)] \quad (23-8)$$

با استفاده از این نتیجه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L_- Y_{ll} &= (-1) e^{i(l-1)\varphi} \frac{1}{(\sin \theta)^l} \frac{d}{d\theta} [\sin^l \theta (C_l \sin^l \theta)] \\ &= (-1) C_l \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{(\sin \theta)^l} \frac{d}{d\theta} [(\sin^l \theta)^l] \\ &\equiv e^{i(l-1)\varphi} P_{l,l-1}(\theta) \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد

$$P_{l,l-1}(\theta) = (-1) C_l \frac{1}{(\sin \theta)^l} \frac{d}{d\theta} [(\sin^l \theta)^l]$$

با اعمال مجدد L_- خواهیم رسید به

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{L}_-)^r Y_{ll} &= \mathbb{L}_- [e^{i(l-1)\varphi} P_{l,l-1}(\theta)] \\
 &= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) [e^{i(l-1)\varphi} P_{l,l-1}(\theta)] \\
 &= e^{-i\varphi} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} - (l-1) \cot \theta \right] [e^{i(l-1)\varphi} P_{l,l-1}(\theta)] \\
 &= (-1) e^{i(l-2)\varphi} \left[\frac{d}{d\theta} + (l-1) \cot \theta \right] P_{l,l-1}(\theta)
 \end{aligned}$$

حالا معادله (۲۳-۸) را با $n = l - 1$ به کار می‌بریم:

$$(\mathbb{L}_-)^r Y_{ll} = (-1) e^{i(l-2)\varphi} \frac{1}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\theta} [(\sin \theta)^{l-1} P_{l,l-1}]$$

با جایگزینی کردن عبارت بالا به جای $P_{l,l-1}$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{L}_-)^r Y_{ll} &= (-1)^r C_l e^{i(l-2)\varphi} \frac{1}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\theta} \left\{ (\sin \theta)^{l-1} \frac{1}{(\sin \theta)^l} \frac{d}{d\theta} [(\sin^r \theta)^l] \right\} \\
 &= (-1)^r C_l \frac{e^{i(l-2)\varphi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} [(\sin^r \theta)^l] \right\}
 \end{aligned}$$

و با جایگذاری $u = \cos \theta$ ، می‌رسیم به

$$(\mathbb{L}_-)^r Y_{ll} = C_l \frac{e^{i(l-2)\varphi}}{(\sqrt{1-u^2})^{l-2}} \frac{d^r}{du^r} [(\sqrt{1-u^2})^l]$$

اکنون روشن است که

$$(\mathbb{L}_-)^k Y_{ll} = C_l \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{(\sqrt{1-u^2})^{l-k}} \left(\frac{d}{du} \right)^k [(\sqrt{1-u^2})^l]$$

اگر اکنون قرار بدهیم $k = l - m$ ، خواهیم داشت

$$(\mathbb{L}_-)^{l-m} Y_{ll} = C_l \frac{e^{im\varphi}}{(\sqrt{1-u^2})^{m/2}} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} [(\sqrt{1-u^2})^l]$$

و با استفاده از مثال ۸-۴-۱، می‌رسیم به

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} C_l \frac{e^{im\varphi}}{(1-u^2)^{m/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^{l-m} [(1-u^2)^l]$$

برای اینکه $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ کاملاً مشخص بشود، باید C_l را محاسبه کنیم. چون C_l اندیس m ندارد، در عبارت بالا قرار می‌دهیم $m = 0$ و در نتیجه

$$Y_{l,0}(u, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} C_l \frac{d^l}{du^l} [(1-u^2)^l]$$

عبارت سمت راست خیلی شبیه به چندجمله‌ایهای لژاندر فصل ۵ است. در واقع،

$$Y_{l,0}(u, \varphi) = \frac{C_l}{\sqrt{(2l)!}} (-1)^l 2^l (l!) P_l(u) \equiv A_l P_l(u)$$

یادآور می‌شویم که $|Y_{l,m}|$ راست‌هنجارند. برای حالت $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ ، این عبارت تبدیل می‌شود به

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

که، برحسب $u = \cos\theta$ ، عبارت خواهد شد از

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 Y_{l',m'}^*(u, \varphi) Y_{l,m}(u, \varphi) du = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

در حالت خاص، به‌ازای $l = l'$ و $m = m' = 0$ ، خواهیم داشت

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 |Y_{l,0}(u, \varphi)|^2 du = 1$$

با جایگذاری $Y_{l,0}$ برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر، می‌رسیم به

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 |A_l|^2 [P_l(u)]^2 du = 1 = 2\pi |A_l|^2 \int_{-1}^1 [P_l(u)]^2 du = 2\pi |A_l|^2 \frac{2}{2l+1}$$

↑
بنابر استانداردسازی $P_l(u)$

$$= \frac{2\pi}{2l+1} |A_l|^2$$

اگر، مطابق رسم، فاز عدد مختلط A_l را صفر قرار بدهیم، داریم

$$A_l = \frac{C_l}{\sqrt{(2l)!}} (-1)^l 2^l (l!) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

که در نتیجه، با کاربرد این رابطه، نهایتاً خواهیم داشت

$$Y_{lm}(u, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{e^{im\varphi}}{2^l l!} \right) \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (1-u^2)^{-m/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} [(1-u^2)^l] \quad (24-8)$$

که در آن، $u = \cos \theta$. این توابع، که ویژه تابعهای L^2 و L^2_{φ} هستند، هماهنگهای کروی نامیده می‌شوند و درکاربردهایی فیزیکی که در آنها لاپلاسی برحسب مختصات کروی بیان می‌شود، زیاد ظاهر می‌شوند. بلافاصله می‌توان جزء θ توابع (24-8) را جدا کرد

$$P_{lm}(u) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{1}{2^l l!} \right) \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (1-u^2)^{-m/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} [(1-u^2)^l]$$

اما، این عبارت همان صورتی نیست که در نوشتارهای ریاضی به‌کار می‌برند. به علل تاریخی، توابع لژاندر وابسته، $P_l^m(u)$ را، که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، به‌کار می‌بریم

$$P_l^m(u) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} P_{lm}(u) \\ = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left[\frac{(1-u^2)^{-m/2}}{2^l l!} \right] \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} [(1-u^2)^l] \quad (25-8 \text{ الف})$$

بنابراین

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] \right\}^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (25-8 \text{ ب})$$

هماهنگهای کروی را با شروع از $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ و اعمال عملگر پایین برنده \mathbb{L}_- تولید کردیم. به جای این، می‌توانستیم از $Y_{l,-l}(\theta, \varphi)$ شروع و عملگر بالا برنده \mathbb{L}_+ را بر آن اعمال کنیم. این روش، همانند روش قبل است و در زیر آن را جمع‌بندی می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم به

$$|Y_{l,-m}\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} (\mathbb{L}_+)^{l-m} |Y_{l,-l}\rangle \quad (۲۶-۸)$$

(این عبارت با دنبال کردن مراحل مثال ۸-۴-۱ به دست می‌آید). سپس، رابطه $\mathbb{L}_- |Y_{l,-l}\rangle = 0$ را در شکل دیفرانسیلی آن به کار می‌بریم تا به رابطه زیر برسیم

$$\left(\frac{d}{d\theta} - l \cot \theta\right) P_{l,-l}(\theta) = 0$$

که همان شکل معادله دیفرانسیل مربوط به P_{ll} را دارد. بنابراین، جواب عبارت است از

$$P_{l,-l} = C_l' (\sin \theta)^l$$

و

$$Y_{l,-l}(\theta, \varphi) \equiv P_{l,-l}(\theta) e^{-il\varphi} = C_l' (\sin \theta)^l e^{-il\varphi}$$

اعمال مکرر \mathbb{L}_+ ، منجر خواهد شد به

$$(\mathbb{L}_+)^k Y_{l,-l}(u, \varphi) = C_l' \frac{(-1)^k e^{-i(l-k)\varphi}}{(1-u^2)^{(l-k)/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^k [(1-u^2)^l]$$

که در آن $u = \cos \theta$. نقطه با جایگذاری $k = l - m$ و کاربرد معادله (۲۶-۸)، داریم

$$Y_{l,-m}(u, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} C_l' e^{-im\varphi} \frac{(-1)^{l-m}}{(1-u^2)^{m/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^{l-m} [(1-u^2)^l]$$

ثابت C_l' را می‌توان مثل قبل تعیین کرد. در واقع، به ازای $m = 0$ ما درست همان نتیجه قبل را

به دست می آوریم، بنابراین انتظار داریم C_l' مساوی با C_l باشد. از این رو

$$Y_{l,-m}(u, \varphi) = (-1)^{l+m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{e^{-im\varphi}}{2^l l!} \right) \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \\ (1-u^2)^{-m/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} [(1-u^2)^l] \quad (27-8)$$

و از مقایسه با (24-8) نتیجه می گیریم

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{الف } 28-8)$$

و با استفاده از تعریف $Y_{l,-m}(\theta, \varphi) \equiv P_{l,-m}(\theta) e^{-im\varphi}$ و قسمت اول معادله (25-8 الف) خواهیم داشت

$$P_l^{-m}(\theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\theta) \quad (\text{ب } 28-8)$$

چند هماهنگ کروی اول به ازای m های مثبت در زیر داده شده اند. هماهنگهای با m منفی را می توان با استفاده از معادله (28-8 الف) به دست آورد.

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad l = 0 \text{ به ازای}$$

$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad l = 1 \text{ به ازای}$$

$$Y_{2,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2 \theta \quad Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \quad l = 2 \text{ به ازای}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,2} = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} e^{2i\varphi} \sin^2 \theta \quad Y_{2,1} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \quad l = 3 \text{ به ازای}$$

$$Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta (\cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (\cos^2 \theta - 3 \cos \theta)$$

اکنون که هماهنگهای کروی را یافته‌ایم، می‌توانیم معادله دیفرانسیلی را که این توابع در آن صدق می‌کنند به دست آوریم. از معادلات (۸-۱۴ الف)، (۸-۱۶) و (۸-۲۵ ب) و این واقعیت که به ازای عدد درست l ، داریم $\alpha = l(l+1)$ و می‌رسیم به

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}] = l(l+1) P_l^m e^{im\varphi}$$

که منجر می‌شود به

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_l^m + l(l+1) P_l^m = 0$$

مثل قبل، با فرض $u = \cos \theta$ خواهیم داشت

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{dP_l^m}{du} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] P_l^m = 0$$

این معادله را معادله دیفرانسیل لژاندر وابسته می‌گویند. جوابهای این معادله، همان توابع لژاندر وابسته‌اند که شکل بسته آنها در معادله (۸-۲۵ الف) داده شده است.

به ازای $m = 0$ ، داریم

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{dP_l^0}{du} \right] + l(l+1) P_l^0 = 0$$

که معادله لژاندری است که جوابهای آن، بار دیگر توسط (۸-۲۵ الف) به ازای $m = 0$ داده می‌شوند، و همان چندجمله‌ایهای لژاندری‌اند که در فصل ۵ دیده‌ایم. به ازای $m = 0$ ، هماهنگهای کروی، از φ مستقل می‌شوند. این معنا متناظر با وضعیتی فیزیکی است که در آن تقارن صریح سمتی برقرار است. در این‌گونه موارد (که بدیهی است ویژگی فیزیکی مورد سؤال به φ بستگی ندارد) فقط یک چندجمله‌ای لژاندر، که فقط به $\cos \theta$ بستگی دارد، در تابع شعاعی ضرب خواهد شد.

۴-۴-۸ بسط توابع زاویه‌ای

راست‌هنجاری $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ایجاب می‌کند که توابع θ و φ را برحسب هماهنگهای کروی بسط بدهیم. کامل بودن این توابع را، به روش کلی، در فصل ۱۰ بررسی خواهیم کرد. فعلاً با پذیرش

کامل بودن آنها، می‌نویسیم

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (۲۹-۸ \text{ الف})$$

برای پیدا کردن a_{lm} طرفین را در $Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi)$ ضرب می‌کنیم و روی زاویه فضایی انتگرال می‌گیریم. نتیجه، که با استفاده از رابطه راست‌هنجاری به‌دست می‌آید، عبارت است از

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta f(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) d\theta \quad (۲۹-۸ \text{ ب})$$

قضیه جمع برای هماهنگ‌های کروی. پیامد مهمی از بسط بالا، قضیه جمع برای هماهنگ‌های کروی است. دو بردار واحد \bar{e}_r و \bar{e}_r' را، به ترتیب، با زاویه‌های کروی (θ, φ) و (θ', φ') در نظر بگیرید (شکل ۱-۸). فرض کنید زاویه بین این دو بردار γ است. در آن صورت، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

اکنون چند جمله‌ای لژاندر $P_l(\cos \gamma)$ را، که قطعاً تابعی از θ و φ است، در نظر بگیرید. بنا بر (۲۹-۸)، این چند جمله‌ای را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ بسط داد. چون $P_l(\cos \gamma)$ تابعی از θ' و φ' نیز هست، انتظار می‌رود که a_{lm} توابعی از θ' و φ' باشند. بنابراین، به طور خیلی کلی، داریم

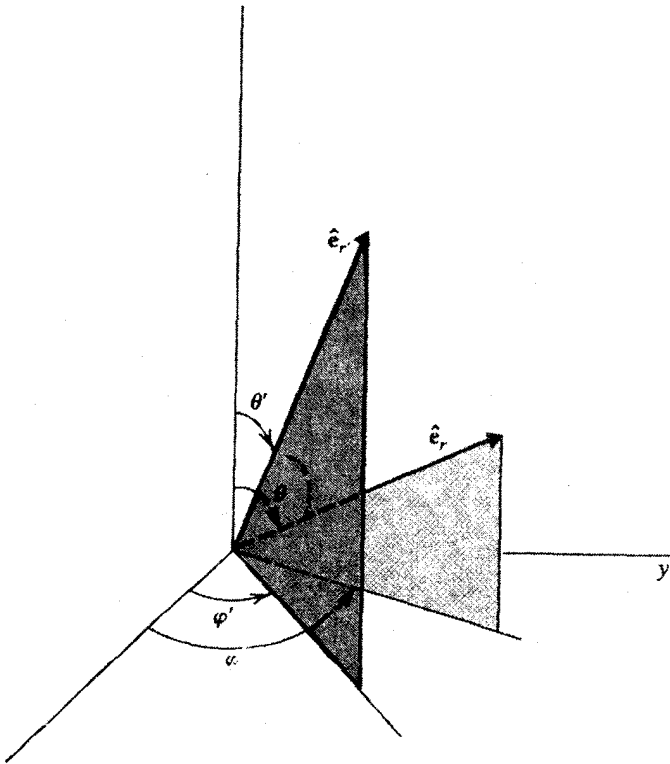
$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{+k} a_{km}(\theta', \varphi') Y_{km}(\theta, \varphi)$$

بنابر قضیه جمع

$$a_{km} = \delta_{kl} \frac{4\pi}{\sqrt{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

بنابراین

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{\sqrt{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') U_{lm}(\theta, \varphi) \quad (۳۰-۸)$$



شکل ۱-۸ بردارهای واحد \hat{e}_r و \hat{e}_r ، با زاویه‌های کروی هر یک و زاویه γ بین آنها.

برای اثبات این قضیه، ملاحظه می‌کنیم که به ازای $\theta' = 0$ ، داریم $\cos \gamma = \cos \theta$. از سوی دیگر،

$$\mathbb{L}^l P_l(\cos \theta) = \mathbb{L}^l Y_{l,0}(\theta, \varphi) = l(l+1)P_l(\cos \theta)$$

و $P_l(\cos \theta)$ ویژه برداری است از \mathbb{L}^l با ویژه مقدار $l(l+1)$. همچنین، ملاحظه می‌شود که اگر محورها را دوران بدهیم $P_l(\cos \theta)$ تبدیل به $P_l(\cos \gamma)$ می‌شود. اما عملگر $\mathbb{L}^l = \bar{\mathbb{L}} \cdot \bar{\mathbb{L}}$ حاصلضرب عددی دو عملگر برداری است. ناوردایی حاصلضرب عددی تحت تأثیر دوران، ایجاب می‌کند که \mathbb{L}^l نیز ناوردا باشد. در نمادگذاری عملگرهای مجرد، این نکته را به صورت $\mathbb{R} \mathbb{L}^l \mathbb{R}^{-1} = \mathbb{L}^l$ بیان می‌کنیم، که در آن عملگر دوران است. بنابراین، با استفاده از بردارهای مجرد، می‌توان نوشت

$$\mathbb{L}^l |l, 0\rangle = l(l+1) |l, 0\rangle$$

$$\mathbb{R}L^l|l, \circ) = l(l+1)\mathbb{R}|l, \circ)$$

یا

$$\mathbb{R}L^l\mathbb{R}^{-1}(\mathbb{R}|l, \circ)) = l(l+1)(\mathbb{R}|l, \circ)) \Rightarrow L^l(\mathbb{R}|l, \circ)) = l(l+1)(\mathbb{R}|l, \circ))$$

به این ترتیب، بردار دوران یافته $\mathbb{R}|l, \circ)$ همان مقدار l را دارد که بردار اولیه دارد. به زبان فضای تابعی، این مطلب به آن معناست که چندجمله‌ای دوران یافته $P_l(\cos \gamma)$ همان مقداری را برای l دارد که قبلاً داشته است. بنابراین، در بسط $P_l(\cos \gamma)$ فقط باید جمله $k = l$ وجود داشته باشد. به این ترتیب، مجموع کاهش می‌یابد به

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_m(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (31-8)$$

که در آن $a_{lm} \equiv A_m$ (زیرا l ثابت است) می‌خواهیم نشان دهیم که

$$A_m(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{4l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

این کار را در چند مرحله انجام می‌دهیم.
اولاً، توجه کنید که

$$Y_{lm}(\circ, \varphi) = \delta_m \cdot Y_{l\circ}(\circ, \varphi) = \delta_m \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(1) = \delta_m \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

این عبارت را از معادله (۸-۲۵الف) و این واقعیت که عامل $(1-u^2)$ در تمام جمله‌های ناشی از مشتق‌گیری از $(1-u^2)^l$ باقی خواهد ماند، مگر اینکه $m = \circ$ می‌توان دریافت. ثانیاً، اگر در دو طرف (۸-۲۹الف) قرار دهیم $\theta = \circ$ ، خواهیم داشت

$$f(\theta, \varphi)|_{\theta=\circ} = \sum_{l=\circ}^{\infty} a_l \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

در حالت خاص، اگر فقط یک جمله l در مجموع وجود داشته باشد، داریم

$$f_l(\theta, \varphi)|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a_l.$$

طبق (۸-۲۹)ب،

$$a_l = \iint d\Omega f_l(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

که در آن نماد متداول $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ را به کار برده‌ایم. زاویه‌های (θ, φ) اشاره به گزینش خاصی از محورها دارند. اگر (γ, β) را برای اشاره به زاویه‌های یک دستگاه مختصات دلخواه در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$a_l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \iint d\Omega f_l(\gamma, \beta) P_l(\cos \gamma)$$

ثالثاً اگر دو طرف (۸-۳۱) را در $Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$ ضرب کنیم و انتگرال بگیریم، داریم

$$A_m(\theta', \varphi') = \iint d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) P_l(\cos \gamma)$$

دو معادله آخر یکی‌اند، در صورتی که اتحاد زیر را از نظر بگذرانیم

$$f_l(\gamma, \beta) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*[\theta(\gamma, \beta, \theta', \varphi'), \varphi(\gamma, \beta, \theta', \varphi')]$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} A_m(\theta', \varphi') &\equiv a_l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f_l(\gamma, \beta) \Big|_{\gamma=0} \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*[\theta(\gamma, \beta, \theta', \varphi'), \varphi(\gamma, \beta, \theta', \varphi')] \Big|_{\gamma=0} \end{aligned}$$

اما وضعیت $\gamma = 0$ ، همانگونه که از شکل ۱-۸ پیداست، اشاره به این دارد که $\theta = \theta'$ و $\varphi = \varphi'$. بنابراین

$$A_m(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

که نتیجه مطلوب است.

قضیه جمع، به خصوص در بسط $1/|r - r'|$ ، که زیاد به آن برمی‌خوریم، مفید است. برای "معین" بودن، فرض می‌کنیم $|r'| \equiv r' < |r| \equiv r$. در آن صورت، با معرفی $t = r'/r$ ، خواهیم داشت

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{[r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \gamma]^{1/2}} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{(1 + t^2 - 2t \cos \gamma)^{1/2}} \right]$$

تابع تعمیم یافته برای چندجمله‌ایهای لژاندر را از فصل ۵ به یاد می‌آوریم و از قضیه جمع استفاده می‌کنیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r - r'|} &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\cos \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{(r')^l}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

بدیهی است اگر $r' < r$ ، می‌توانیم برحسب نسبت r/r' بسط بدهیم. بنابراین، رسم بر این است که $r < r'$ را برای اشاره به شعاع کوچکتر و $r > r'$ را برای اشاره به شعاع بزرگتر از میان شعاعهای r و r' به‌کار می‌برند. پس معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (32-8)$$

این معادله در مطالعه پتانسیلهای کولنی خیلی مفید است.

جواب عمومی در مختصات کروی، در اختیار داشتن یک فرمول کلی برای جوابهای معادله (۸-۸) (ج-۸) در یک دستگاه مختصات کروی خیلی مفید است. مثلاً معادله یاد شده را به دو

معادله هم‌ارز، (۸-۱۴ الف) و (۸-۱۴ ب)، کاهش داده‌ایم. با بازنویسی (۸-۱۴ ب) به صورت زیر

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[f(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

و جایگزینی $R = u/r$ داریم

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[f(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0$$

به طور کلی، $f(r)$ شامل مقدار ثابتی است که دارای یک برچسب است، اندیسی مانند n که می‌تواند بینهایت مقدار (درست) را بپذیرد. به این ترتیب، u دارای دو برچسب، n و l ، است. با یادآوری این نکته که $\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر n ، l و m خاص، به جواب زیر می‌رسیم

$$\Psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{u_{nl}}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

و یک جواب عمومی به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n,l,m} C_{nlm} \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

تمرینها

۸-۴-۱ برای عملگر تکانه زاویه‌ای $\mathbb{L}_k = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbb{P}_k$ ، ثابت کنید رابطه‌های جابه‌جایی زیر برقرارند

$$[\mathbb{L}_j, \mathbb{L}_k] = i\varepsilon_{jkl} \mathbb{L}_l$$

۸-۴-۲ برای \mathbb{L}^2 عبارتی برحسب θ و φ به دست آورید.

۸-۴-۳ نشان دهید که

$$\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_+ \mathbb{L}_- + \mathbb{L}_z^2 - \mathbb{L}_z \quad \text{و} \quad \mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_- \mathbb{L}_+ + \mathbb{L}_z^2 + \mathbb{L}_z$$

۸-۴-۴ جواب $dP/d\theta - (l \cot \theta)P = 0$ را پیدا کنید.

$$\left(\frac{d}{d\theta} + n \cot \theta \right) f(\theta) = \frac{1}{(\sin \theta)^n} \frac{d}{d\theta} [(\sin \theta)^n f(\theta)]$$

مسائل

۱-۸ با اعمال عملگر $[x_j, \mathbb{P}_k]$ بر تابع دلخواه $f(\mathbf{r})$ ، ثابت کنید $[x_j, \mathbb{P}_k] = i\delta_{jk}$.

۲-۸ با استفاده از رابطه قطعی $\mathbb{L}_i = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbb{P}_k$ ، نشان دهید که $\varepsilon_{ijk} \mathbb{L}_i = x_j \mathbb{P}_k - x_k \mathbb{P}_j$ (در این هر دو عبارت مفهوم مجموعی روی اندیسهای مکرر مستتر است).

۳-۸ $\partial f / \partial y$ و $\partial f / \partial z$ را در مختصات کروی پیدا کنید.

۴-۸ \mathbb{L}_y و \mathbb{L}_z را برحسب مختصات کروی پیدا کنید.

۵-۸ با جایگزینی عبارت \mathbb{L}^2 برحسب θ و φ در معادله (۸-۱۳)، نشان دهید که این کار به لاپلاسی در مختصات کروی، فصل ۱ می‌انجامد.

۶-۸ نشان دهید که در فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی، \mathbb{L}^2 ، \mathbb{L}_x ، \mathbb{L}_y و \mathbb{L}_z عملگرهایی هرمیتی‌اند.

۷-۸ روابط جابه‌جایی زیر را ثابت کنید

$$[\mathbb{L}^2, \mathbb{L}_{\pm}] = 0 \quad [\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_{\pm}] = \pm \mathbb{L}_{\pm} \quad [\mathbb{L}_+, \mathbb{L}_-] = 2\mathbb{L}_z$$

۸-۸ نشان دهید که $\mathbb{L}_{\pm} |Y_{\alpha\beta}\rangle$ همان ویژه‌مقداری را به‌ازای \mathbb{L}^2 دارد که $|Y_{\alpha\beta}\rangle$. همچنین نشان دهید که ویژه‌مقدار $\mathbb{L}_- |Y_{\alpha\beta}\rangle$ برای \mathbb{L}_z مساوی است با $\beta - 1$.

۹-۸ فرض کنید \mathcal{Y} فضایی با حاصلضرب داخلی، و $\mathbb{H} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ هرمیتی است. نشان دهید که، برای هر بردار دلخواه $|a\rangle \in \mathcal{Y}$ ، داریم $\langle a | \mathbb{H}^2 | a \rangle \geq 0$.

۱۰-۸ نشان دهید $|Y_{\alpha\beta\pm}\rangle$ نمی‌تواند صفر باشد.

۱۱-۸ نشان دهید اگر $|Y_{jm}\rangle$ بهنجاریده به واحد باشد، در آن صورت، با انتخاب مناسب فاز

$$\mathbb{L}_- |Y_{jm}\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |Y_{j,m-1}\rangle$$

۱۲-۸ با شروع از \mathbb{L}_y و \mathbb{L}_z ، عبارت زیر را برای \mathbb{L}_{\pm} به‌دست آورید:

$$\mathbb{L}_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

۱۳-۸ با جایگزینی $u = \cos \theta$ ، محاسباتی را که به یک عبارت برای $(\mathbb{L}_-)^k Y_{ll}$ منتهی می‌شود، انجام دهید.

۱۴-۸ معادله (۲۶-۸) را به دست آورید.

۱۵-۸ نشان دهید که

$$(\mathbb{L}_+)^k Y_{l,-l}(u, \varphi) = C_l' \frac{(-1)^k e^{i(l-k)\varphi}}{(1-u^2)^{(l-k)/2}} \left(\frac{d}{du} \right)^k [(1-u^2)^l]$$

۱۶-۸ معادله (۲۸-۸) را به دست آورید.

۱۷-۸ نشان دهید که

$$\sum_{m=-l}^{+l} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

بازای $l = 1$ و $l = 2$ ، صحت این رابطه را تحقیق کنید.

۱۸-۸ نشان دهید که قضیه جمع برای هماهنگهای کروی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos[m(\varphi - \varphi')]$$