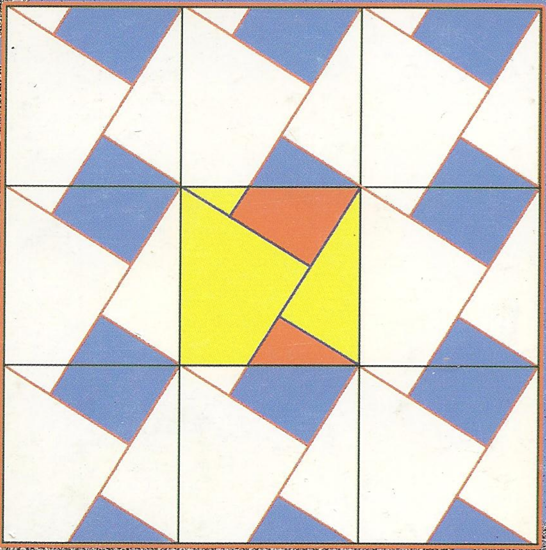
مبانی فیزیک ریاضیاتی

جلد دوم



صدری حسنی

ترجمهٔ محمدهادی هادی‌زاده

محسن سربیشه‌ای

مبانی فیزیک ریاضیاتی

جلد دوم

صدری حسنی

ترجمهٔ

محمدهادی هادی‌زاده، محسن سربیشه‌ای

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

۹

معادله‌های دیفرانسیل ۲: معادله‌های دیفرانسیل معمولی

در فصل پیش، معادلات دیفرانسیل معمولی را، به‌ویژه آنهاکه از مرتبهٔ دوم بودند، به‌عنوان معادله‌هایی که مستلزم توجهی خاص‌اند، مطرح کردیم. علت این امر آن است که بیشتر معادلات دیفرانسیل جزئی متداول در فیزیک ریاضیاتی را می‌توان به چند معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (مرتبهٔ دوم) تجزیه کرد. بنابراین، بقیهٔ این فصل ازکتاب به مطالعهٔ این معادلات اختصاص می‌یابد.

کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل معمولی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^۲y}{dx^۲}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = ۰ \qquad (۹\text{-}۱)$$

که در آن $F : \mathbb{R}^{n+۲} \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی‌ـمقدار در $\mathbb{R}^{n+۲}$ است. وقتی F به‌طور صریح و غیربدیهی به d^ny/dx^n بستگی داشته باشد، معادلهٔ (۹ـ۱) معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ nام است. اگر آن بخش از F که شامل y و تمام مشتقات آن است، نسبت به y خطی باشد، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی را اصطلاحاً خطی می‌نامیم. بنابراین، کلی‌ترین صورت معادلهٔ دیفرانسیل

معمولی خطی مرتبهٔ nام عبارت است از

$$p_\circ(x)y + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + p_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = q(x) \qquad p_n \neq \circ$$
(۹ـ۲)

که در آن $\{p_i(x)\}_{i=\circ}^n$ و $q(x)$ توابعی از متغیر مستقل x هستند. اگر $q(x) \equiv \circ$، اصطلاحاً گفته می‌شود معادلهٔ (۹ـ۲) همگن است؛ در غیر این‌صورت، آن را ناهمگن و $q(x)$ را جملهٔ ناهمگن می‌خوانند. رسم، و مناسب، است که عملگر خطی (دیفرانسیلی) به‌صورت زیر تعریف شود

$$\mathbb{L} \equiv p_\circ(x) + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \cdots + p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} \qquad (۹ـ۳)$$

و معادلهٔ (۹ـ۲) را به‌صورت زیر بنویسند

$$\mathbb{L}[y] = q(x) \qquad (۹ـ۴)$$

یکی از جوابهای معادلهٔ (۹ـ۱) یا (۹ـ۴)، تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ است به‌گونه‌ای که به‌ازای تمام xهایی که در حوزهٔ تعریف f باشند، آنگاه

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = \circ$$

یا

$$\mathbb{L}[f] = q(x)$$

فرامحدود کردن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است به فقدان آن انجامد. مثلاً، مطابق مثال زیر، اگر انتظار مشتق‌پذیری بیش از حد برای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را داشته باشیم، ممکن است نتوانیم جوابی برای آن پیدا کنیم.

مثال ۹ـ۰ـ۱: عمومی‌ترین جواب معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = |x|$$

با خاصیت $f(\circ) = \circ$، عبارت است از

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x^{۲} & \text{اگر } x \geq \circ \\ -\frac{۱}{۲}x^{۲} & \text{اگر } x \leq \circ \end{cases}$$

این تابع، پیوسته و مشتق اول آن $f'(x) = |x|$، نیز در $x = \circ$ پیوسته است. اما اگر بخواهیم مشتق دوم آن نیز در $x = \circ$ پیوسته باشد، جوابی نخواهیم یافت، زیرا

$$f''(x) = \begin{cases} +۱ & \text{اگر } x > \circ \\ -۱ & \text{اگر } x < \circ \end{cases}$$

یعنی، $f''(x)$ در $x = \circ$ پیوسته نیست. اگر بخواهیم $f'''(x)$ در $x = \circ$ وجود داشته باشد، در آن‌صورت باید مفهوم تابع را به توزیعها (فصل ۵) بسط بدهیم. ●

"فرامحدود" کردن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل، منجر به فقدان آن می‌شود، اما "فرومحدود" سازی آن نیز ممکن است به جوابهای چندگانه انجامد. برای ایجاد تعادلی بین این دو وضعیت فرین، قرارداد می‌کنیم که جواب تا هر چند مرتبه‌ای که مورد نظر ماست مشتق‌پذیر باشد و شرایط آغازی معینی را نیز برقرار کند. در مورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n، این گونه شرایط اولیه، معمولاً هم‌ارز با (اما نه محدود به) مشخص کردن تابع و $n - ۱$ مشتق اول آن هستند. نوع مشخص کردن مبتنی بر قضیهٔ زیر است

قضیهٔ ۹ـ۰ـ۱: (قضیهٔ تابع ضمنی) فرض کنید $F : \mathbb{R}^{n+۱} \to \mathbb{R}$، که به‌صورت $F(x_۱, \ldots, x_{n+۱}) \in \mathbb{R}$ داده می‌شود، در همسایگی نقطهٔ $P_\circ \equiv (r_۱, r_۲, \ldots, r_{n+۱})$ در $\mathbb{R}^{n+۱}$ دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ تا مرتبهٔ kام است. همچنین فرض کنید $(\partial F/\partial x_{n+۱})|_{r_{n+۱}} \neq \circ$. در این‌صورت، تابع منحصر به‌فردی مانند $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که به‌طور پیوسته k بار در همسایگی $P_\circ$ مشتق‌پذیر است، به‌طوری که به‌ازای تمام نقاط $P \equiv (x_۱, \ldots, x_{n+۱})$ در همسایگی $P_\circ$، $x_{n+۱} = G(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و $F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, G(x_۱, \ldots, x_n)) = \circ$. ■

به بیان ساده، بنابر قضیهٔ ۹ـ۰ـ۱، تحت شرایطی (آرام)، می‌توان یکی از متغیرهای مستقل در $F(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n+۱}) = \circ$ را برحسب سایر متغیرها به‌دست آورد.[1]

۱. برای مشاهدهٔ روش اثبات این قضیه، می‌توانید به هر کتاب پیشرفته‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثل ←

با اعمال این قضیه بر معادلهٔ (۹ـ۱)، در صورتی که F شرایط قضیه را برقرار کند، داریم

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

اگر مقدار جواب $y = f(x)$، که در آن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، و مشتقات تا مرتبهٔ $n - 1$ آن را بدانیم، با استفاده از این معادله می‌توانیم مشتق nام آن را محاسبه کنیم. علاوه بر این، با مشتق گرفتن از این معادله می‌توانیم مشتقات از همهٔ مرتبه‌ها را (در صورت وجود) حساب کنیم. با این کار، می‌توان جواب را برحسب سری تایلور بسط داد. به این ترتیب، دست‌کم برای جوابهایی که دارای مشتقاتی از همهٔ مرتبه‌ها هستند، اطلاع از مقدار جواب و $n - 1$ مشتق اول آن در نقطه‌ای مثل x_0، آن جواب را در یک نقطهٔ مجاور، x، تعیین می‌کند.

ما به مطالعهٔ نوع کلی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، معادلهٔ (۹ـ۱)، یا حتی نوع ساده‌تر خطی آن، معادلهٔ (۹ـ۲)، نخواهیم پرداخت، بلکه، صرفاً به اجمال معادلات دیفرانسیل معمولی نوع اول را بررسی، و سپس توجه خود را به معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ دوم معطوف خواهیم کرد.

۹ـ۱ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

شکل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به این قرار است

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(۹ـ۵الف)}$$

اگر تابع $F(x_1, x_2, x_3)$ نسبت به شناسهٔ سومش مشتق‌پذیر باشد و $\partial F/\partial x_3 \neq 0$، می‌توان y' (مشتق y) را برحسب تابعی از x و y پیدا کرد. در آن‌صورت، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = y' = G(x, y) \qquad \text{(۹ـ۵ب)}$$

و این معادلهٔ دیفرانسیل را نرمال می‌نامیم.

مثال ۹ـ۱ـ۱: سه حالت خاص از معادلهٔ (۹ـ۵ب) یافت می‌شود که بلافاصله به یک جواب می‌انجامد.

$\overrightarrow{\text{Courant}}$ چاپ ۱۳۱۵/۱۹۳۶ رجوع کنید.

(الف) اگر $G(x,y)$ مستقل از y باشد، در آن‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad dy = g(x)dx$$

و عمومی‌ترین جواب آن بر اساس قضیهٔ اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال عبارت است از

$$y = f(x) = C + \int_a^x g(t)dt \qquad C = f(a) \text{ که در آن} \qquad (۱)$$

این قضیه صرفاً بیان می‌کند که اگر $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در آن‌صورت به‌ازای هر $C \in \mathbb{R}$، جواب منحصر به‌فردی مانند $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متعلق به $dy/dx = g(x)$ چنان وجود دارد که $f(a) = C$. چنین جوابی با (۱) بیان می‌شود.

(ب) اگر $G(x,y)$ مستقل از x باشد، در آن‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = h(y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{h(y)} = dx \qquad h(y) \neq ۰ \text{ که در آن}$$

و تابع ضمنی

$$F(x,y) \equiv \int_C^y \frac{dt}{h(t)} - x + a = ۰$$

متضمن یک جواب است. یعنی، $F(x,y) = ۰$ را می‌توان با قضیهٔ تابع ضمنی حل کرد [با این فرض که شرایط آن برقرارند، یعنی، $\partial F/\partial y = ۱/h(y)$ پیوسته است.] توجه کنید که $y|_{x=a} \equiv f(a) = C$.

(ج) سومین حالت خاص، درواقع، تعمیمی از دو حالت اول است. اگر $G(x,y) = g(x)h(y)$، در آن‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

و

$$\int_C^y \frac{dt}{h(t)} = \int_a^x g(s)ds$$

یک جواب ضمنی است. ●

همان‌طورکه در مثال ۹ـ۱ـ۱ مشاهده می‌کنید، جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول معمولاً به یک شکل ضمنی، به‌صورت تابع $u : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ به‌دست می‌آیند به‌گونه‌ای که از حل $u(x, y) = ۰$ می‌توان جواب، y، را پیدا کرد. در تابع $u(x, y)$ یک ثابت دلخواه، که مقدار آن به شرایط اولیه بستگی دارد، نهفته است. معادلهٔ $u(x, y) = ۰$ معرف یک منحنی در صفحهٔ x-y است، که به مقدار ثابت (پنهان) در $u(x, y)$ بستگی دارد. چون ثابتهای متفاوت، به منحنیهای متفاوت می‌انجامند، بهتر است ثابت را جدا کنیم و بنویسیم $u(x, y) = C$. این کار به مبحث انتگرال یک معادلهٔ دیفرانسیل منجر می‌شود.

تعریف ۹ـ۱ـ۱: انتگرال هر معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول نرمال [معادلهٔ (۹ـ۵ب)] عبارت است از تابعی مانند $u : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$، به‌طوری که وقتی $y = f(x)$ یکی از جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل باشد، $u(x, f(x))$ به‌ازای جمیع مقادیر x یک مقدار ثابت است.

در فیزیک، به انتگرالهای معادلات دیفرانسیل زیاد برمی‌خوریم. اگر به‌جای x کمیت t (زمان) نشانده شود، در آن‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل، حرکت یک سیستم فیزیکی را توصیف می‌کند، و یک جواب $y = f(t)$ را می‌توان به‌صورت منحنی $u(t, y) = C$ نوشت، که در آن، u یکی از انتگرالهای معادلهٔ دیفرانسیل است. معادلهٔ $u(t, y) = C$ معرف یک منحنی در صفحهٔ ty است که بر روی آن مقدار $u(t, y)$ به‌ازای جمیع مقادیر t بدون تغییر باقی خواهد ماند. از این نظر، $u(t, y)$ را یک ثابت حرکت می‌خوانیم.

مثال ۹ـ۱ـ۲: وضعیتی که حوزهٔ مکانیک با آن فراوان برمی‌خوریم، حرکت یک ذرهٔ نقطه‌ای تحت تأثیر نیرویی است که فقط به مکان بستگی دارد. اگر مکان را با x و سرعت را با v نشان بدهیم، بنابر قانون دوم نیوتون داریم

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \qquad (\text{۱ـالف})$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، $dv/dt = dv/dx\, dx/dt = dv/dx\, v$، داریم

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \quad \Rightarrow \quad mv\, dv = F(x)dx \qquad (\text{۱ـب})$$

که انتگرال آن به آسانی به این قرار خواهد شد

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \int F(x)dx + C \equiv -V(x) + C \qquad (۲)$$

که در آن انرژی پتانسیل، به قرار

$$V(x) = -\int F(x)dx$$

به‌عنوان انتگرال نامعین (منفی) نیرو معرفی شده است. معادلهٔ (۲) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} + V(x) = C \qquad (۳)$$

پس، انتگرال (۱) عبارت است از

$$u(x, v) = \frac{۱}{۲}mv^{۲} + V(x)$$

که عبارت مربوط به انرژی (یا هامیلتونی) حرکت یک‌بعدی یک ذرهٔ تحت تأثیر پتانسیل $V(x)$ است. اگر v یکی از جوابهای (۱) باشد، در آن‌صورت $u(x, v) = \text{const.}$. چون جواب معادلهٔ (۱)، یک حرکت ممکن ذره را توصیف می‌کند، معادلهٔ (۳) حاکی از آن است که انرژی ذره در طی حرکت آن تغییر نمی‌کند. بیان اخیر، همان پایستگی انرژی (مکانیکی) است.

یک حالت خاص و مهم، حرکت نوسانگر هماهنگ است که برای آن $V(x) = ۱/۲kx^{۲}$ و معادلهٔ (۳) به‌صورت

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} + \frac{۱}{۲}kx^{۲} = C$$

یا

$$\frac{x^{۲}}{۲C/k} + \frac{v^{۲}}{۲C/m} = ۱$$

درمی‌آید. نمایش تغییرات معادلهٔ اخیر، به‌طور کلی، یک بیضی در صفحهٔ xv است. باید تأکید کرد که شکل منحنی در صفحهٔ xv هیچ ربطی به شکل منحنی مسیر حرکت ذره ندارد. ●

۹ـ۱ـ۱ عاملهای انتگرال‌گیری

فرض کنید $M, N : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته در حوزهٔ D از $\mathbb{R}^{۲}$ هستند. این عبارت را به‌صورت $M, N \in C^{(۰)}(\mathrm{D})$ نمایش می‌دهیم. [یادآور می‌شویم که $\mathrm{C}^{(n)}(\mathrm{D})$ معرف ردهٔ توابعی است که

n مشتق اول آنها در حوزهٔ D پیوسته است.] اغلب اوقات، اندیس بالای (۰) را حذف می‌کنیم.
دیفرانسیل $M\ dx + N\ dy$ کامل است اگر انتگرال خطی

$$\int_{P_1}^{P_2} [M(x,y)dx + N(x,y)dy]$$

از $P_1 \in \mathrm{D}$ تا $P_2 \in \mathrm{D}$، مستقل از مسیری باشد که دو نقطهٔ دلخواه را به‌هم وصل می‌کند. مثالهای دیفرانسیلهای کامل را قبلاً در فصلهای ۱ و ۴ ملاحظه کرده‌ایم. شرط بالا هم‌ارز با این است که بگوییم انتگرال خطی انتگرالده روی یک مسیر بسته صفر می‌شود. به این ترتیب، از مطالب فصلهای ۱ و ۴ چنین نتیجه می‌گیریم که اگر حوزهٔ D قابل انقباض به یک نقطه (یا، به زبان فصل ۶، سادهٔ همبند) باشد، در آن‌صورت شرط لازم و کافی برای "کامل بودن" یا "کاملیت" این است که تاو بردار $\mathbf{A} = (M, N, 0)$ صفر بشود. در این‌صورت، بردار $\mathbf{A}$ پایستار است و می‌توانیم تابع پتانسیل v را چنان تعریف کنیم که $\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} v = (\partial v/\partial x, \partial v/\partial y, 0)$، یا

$$dv = (\boldsymbol{\nabla} v)\cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = M\ dx + N\ dy$$

این عبارت نشان می‌دهد که $M = \partial v/\partial x$ و $N = \partial v/\partial y$. اکنون می‌توان گزارهٔ زیر را بیان کرد.

گزارهٔ ۹ـ۱ـ۲: اگر $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ یک دیفرانسیل کامل به‌صورت dv در حوزهٔ تعریف $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ باشد، در آن‌صورت $v(x,y)$ یکی از انتگرالهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۹\text{ـ}۶)$$

که جوابهای آن به شکل $v(x,y) = C$ هستند.

اثبات . اگر $y = f(x)$ یکی از جوابهای $v(x,y) = C$ باشد، در آن‌صورت

$$0 = \frac{dC}{dx} = \frac{dv}{dx} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}$$

بنابراین، $y = f(x)$، که از حل $v(x,y) = C$ به‌دست می‌آید، یکی از جوابهای (۹ـ۶) است، و $v(x,y) = C$ یک جواب (ضمنی) معادلهٔ (۹ـ۶) به‌شمار می‌آید. ■

تعداد نه چندان زیادی از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ یک کامل‌اند. با این همه، خیلی از آنها را می‌توان با ضرب در یک تابع مناسب، به‌صورت کامل درآورد. چنین تابعی، در صورت وجود، عامل انتگرال‌گیری نامیده می‌شود. بنابراین، اگر دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ کامل نباشد، اما معادلهٔ

$$q(x,y)M(x,y)dx + q(x,y)N(x,y)dy = dv$$

کامل باشد، در آن‌صورت $q(x,y)$ یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = \circ$$

است که جواب آن عبارت است از $v(x,y) = C$. این امر بدیهی است زیرا اگر $v(x,y) = C$ از حل $y = f(x)$ به‌دست آید. در آن‌صورت با فرض $q \neq \circ$

$$\circ = \frac{dv}{dx} = q\left(M + N\frac{dy}{dx}\right) \qquad \longleftrightarrow \qquad M + N\frac{dy}{dx} = \circ$$

همان‌طور که از مثال زیر و تمرین ۹ـ۱ـ۱، به‌طور کلی، مشاهده می‌شود، عاملهای انتگرال‌گیری منحصر به‌فرد نیستند.

مثال ۹ـ۱ـ۳: دیفرانسیل $x\,dy - y\,dx$ کامل نیست. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان تابعی مانند $q(x,y)$ پیدا کرد، به‌طوری که به‌ازای $v : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$، داشته باشیم

$$dv = qx\,dy - qy\,dx \tag{۱}$$

فرض می‌کنیم که حوزهٔ تعریف قابل انقباض به یک نقطه (یا، به‌عبارت دیگر، سادهٔ همبند) است. به این ترتیب شرط لازم و کافی برای برقراری (۱) عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x}(qx) = \frac{\partial}{\partial y}(-qy)$$

یا

$$x\frac{\partial q}{\partial x} + q = -y\frac{\partial q}{\partial y} - q \tag{۲}$$

(الف) فرض می‌کنیم q تابعی از فقط x است و می‌کوشیم تا جوابی برای معادلهٔ (۲) به‌دست آوریم. با این فرض، معادلهٔ (۲) تحویل می‌یابد به

$$x\frac{dq}{dx}+q=-q \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{dq}{dx}=۲q$$

که جواب آن به این قرار است

$$q=C/x^{۲} \qquad x\neq ۰$$

در این حالت، خواهیم داشت

$$dv=C\left(\frac{۱}{x}dy-\frac{y}{x^{۲}}dx\right)=C\,d\left(\frac{y}{x}\right)=d\left(\frac{Cy}{x}\right) \qquad x\neq ۰$$

بنابراین، مادام که $x\neq ۰$، هر تابع $C/x^{۲}$، با مقدار دلخواه C، یک عامل انتگرال‌گیری برای این معادله است

$$x\,dy-y\,dx=۰$$

این عامل انتگرال‌گیری منجر می‌شود به جواب

$$v=\frac{Cy}{x}=\text{const.} \qquad \Rightarrow \qquad y=mx \qquad x\neq ۰ \tag{۳}$$

شرط $x\neq ۰$، تمامی محور yها را از حوزهٔ تعریف (۳) حذف می‌کند. اگر قرار است "حوزهٔ تعریف"، سادهٔ همبند باشد، باید کاملاً در نیم‌صفحهٔ راست یا در نیم‌صفحهٔ چپ واقع باشد. پس، بزرگترین حوزهٔ تعریف با این خاصیت، یا نیم‌صفحهٔ راست است یا نیم‌صفحهٔ چپ، اما نه هر دو.

(ب) حال فرض می‌کنیم q تابعی از فقط y است. نتیجهٔ این فرض، عامل انتگرال‌گیری زیر است

$$q=\frac{C}{y^{۲}} \qquad y\neq ۰$$

برای $x\,dy-y\,dx=۰$ در این حالت، $v=Cx/y$ عبارت از انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل است، که بار دیگر به جواب داده شده در معادلهٔ (۳) می‌انجامد. در اینجا، بزرگترین حوزهٔ تعریف، یا نیم‌صفحهٔ بالا است و یا نیم‌صفحهٔ پایین، اما هر دو نیست.

شایان ذکر است که، اگرچه چندین عامل انتگرال‌گیری وجود دارد اما جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$x\,dy - y\,dx = 0$ منحصر به‌فرد است (تحت شرایط اولیهٔ مشخص). این نکته از جوابهایی که در قسمت (الف) به‌دست آوردیم نیز روشن است. منحصر به‌فرد بودن جواب، تحت شرایط اولیه یک خاصیت کلی معادله‌های دیفرانسیل است و در آینده آن را بررسی خواهیم کرد.

(ج) به آسانی می‌توان پی برد که

$$q = \frac{C}{x^2 + y^2} \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

نیز یک عامل انتگرال‌گیری است که به انتگرال

$$v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

و مثل قبل به جواب

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = m$$

می‌انجامد. ●

در واقع، قضیهٔ زیر را می‌توان ثابت کرد.[1]

قضیهٔ ۹ـ۱ـ۳: اگر معادلهٔ دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

در بازهٔ $[a, b]$ دارای یک جواب منحصر به فرد باشد، در آن‌صورت تعداد عاملهای انتگرال‌گیری آن بینهایت است. عامل انتگرال‌گیری کلی را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$v(x, y) = q(x, y)F(u)$$

که در آن $u(x, y) = C$ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل، $F(u)$ یک تابع مشتق‌پذیر دلخواه، و

$$q(x, y) \equiv \frac{\partial u/\partial x}{M} = \frac{\partial u/\partial y}{N}$$

یک عامل انتگرال‌گیری خاص است. ■

---

۱. ر.ک. Rubenstien، صص ۱۱ و ۱۲.

۹ـ۱ـ۲ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

کلی‌ترین شکل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول از معادلهٔ (۹ـ۲) به‌ازای $n = 1$ استخراج می‌شود. یعنی،

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \qquad \text{(۹ـ۷الف)}$$

یا، به‌عبارت دیگر

$$(p_0 y - q)dx + p_1 dy = 0 \qquad \text{(۹ـ۷ب)}$$

بنابر قضیهٔ ۹ـ۱ـ۳، اگر معادلهٔ (۹ـ۷ب) دارای یک جواب (منحصر به‌فرد) باشد، دست‌کم باید یک عامل انتگرال‌گیری داشته باشد. این عامل انتگرال‌گیری را $\mu(x, y)$ می‌نامیم. در این‌صورت تابعی مانند $v(x, y)$ چنان وجود دارد که

$$dv = \mu(p_0 y - q)dx + \mu p_1 dy = 0$$

شرط لازم و کافی برای برقراری این رابطه عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(p_0 y - q)] = \frac{\partial}{\partial x}(\mu p_1)$$

برای ساده کردن مسئله، فرض می‌کنیم μ تابعی از فقط x است (ما در جستجوی یک عامل انتگرال‌گیری نامشخص هستیم، نه کلی‌ترین آن). در این‌صورت شرط بالا منجر می‌شود به

$$\mu p_0 = \frac{d}{dx}(\mu p_1)$$

که دارای جواب زیر است

$$\mu(x) = \mu(x_0)\frac{p_1(x_0)}{p_1(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)}dt\right]$$

و در آن، x_0 یک نقطهٔ دلخواه است که μ و p_1 در آن معین‌اند. اکنون dv را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$dv = \left[\frac{d}{dx}(\mu p_1)y\right] dx + \mu p_1 dy - \mu q dx$$
$$= d(\mu p_1 y) - \mu q dx = d\left[\mu p_1 y - \int_{x_1}^{x} \mu(t)q(t)dt\right] = 0$$

که منجر می‌شود به

$$\mu p_1 y - \int_{x_1}^{x} \mu(t)q(t)dt = C$$

که در آن، x_1 نقطهٔ دلخواهی است که در آن $C = \mu(x_1)p_1(x_1)y(x_1)$. به این ترتیب، جواب عمومی معادله، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)p_1(x)}\left[C + \int_{x_1}^{x} \mu(t)q(t)dt\right] \tag{۸_۹}$$

که توأم با آن به قضیهٔ زیر می‌رسیم

قضیهٔ ۹_۱_۴: هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول به این شکل است:

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

که در آن p_0، p_1، و q در بازهٔ $[a, b]$ توابعی‌اند پیوسته، دارای یک جواب عمومی به‌صورت زیر:

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)p_1(x)}\left[C + \int_{x_1}^{x} \mu(t)q(t)dt\right]$$

که در آن C ثابتی دلخواه است [که با $y(x_1)$ تعیین می‌شود]

$$\mu(x) = \mu(x_0)\frac{p_1(x_0)}{p_1(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)}dt\right]$$

و x_0 و x_1 نقاطی دلخواه در بازهٔ $[a, b]$ هستند. ■

مثال ۹ـ۱ـ۴: در یک مدار الکتریکی شامل مقاومت R و خازن C، قانون کیرشهوف به‌معادلهٔ زیر می‌انجامد

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V(t)$$

که $V(t)$ ولتاژ وابسته به زمان و Q بار روی خازن است. این عبارت یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول ساده با $p_1(t)=R$، $p_0(t)=1/C$، و $q(t)\equiv V(t)$ است. عامل انتگرال‌گیری عبارت است از

$$\mu(t)=\mu(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(s)}{p_1(s)}ds\right]=\mu(t_0)\exp\left[\frac{1}{RC}(t-t_0)\right]\equiv Ae^{t/RC}$$

که منجر می‌شود به

$$Q(t)=\frac{1}{\mu(t)p_1(t)}\left[B+\int_{t_1}^{t}Ae^{s/RC}V(s)ds\right]$$

$$=\frac{B}{AR}e^{-t/RC}+\frac{e^{-t/RC}}{R}\int_{t_1}^{t}e^{s/RC}V(s)ds$$

معمولاً t_1 را صفر اختیار می‌کنند. در این‌صورت $Q(0)\equiv Q_0$ بار اولیه است که با عبارت زیر بیان می‌شود

$$Q_0=\frac{B}{AR}$$

(به‌ازای $t_1=0$، انتگرال در $t=0$ صفر می‌شود). بنابراین، بار در لحظهٔ t عبارت است از

$$Q(t)=Q_0e^{-t/RC}+\frac{1}{R}e^{-t/RC}\int_0^{t}e^{s/RC}V(s)ds$$

۹ـ۱ـ۳ بعضی معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبهٔ اول و جوابهای آنها

هر چند معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول را همیشه می‌توان حل کرد و به جوابهای داده شده در قضیهٔ ۹ـ۱ـ۴ رسید، اما هیچ قاعدهٔ کلی برای حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول در دست نیست. با این همه، روشهای مختلفی وجود دارد که می‌توان آنها را بر حالتهای خاص معادلات

دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول اعمال کرد. در این زیربخش، به بعضی از این روشها برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول مشهور اشاره می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول تفکیک‌پذیر. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول تفکیک‌پذیر به شکل زیر است

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

با اختلافهایی جزئی، این معادله را در مثال ۹ـ۱ـ۱ مطرح کردیم. جواب (ضمنی) عبارت است از

$$\int^y h(t)dt = \int^x g(t)dt + C$$

که در آن، حد پایین انتگرال‌گیری و C دلخواه‌اند.

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول همگن. شکل کلی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول همگن به‌صورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} = w\left(\frac{y}{x}\right)$$

که در آن $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته در بازه‌ای از $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن جواب، به جایگزینی زیر توجه می‌کنیم

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$$

که منجر می‌شود به

$$u + xu' = w(u) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{w(u) - u}{x}$$

و به‌ازای $g(t) = ۱/t$ و $h(t) = ۱/[w(t) - t]$ تفکیک‌پذیر است. بنابراین، یک جواب عمومی عبارت است از

$$\int^u \frac{dt}{w(t) - t} = \int^x \frac{dt}{t} + C$$

یا

$$x = A \exp\left[\int^{y/x} \frac{dt}{w(t) - t}\right] \qquad A = e^{-C}$$

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول کامل. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول کامل، که قبلاً نیز آن را مطرح کرده‌ایم، به شکل زیر است

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = ۰$$

و تابعی مانند v چنان وجود دارد که $dv = M\ dx + N\ dy = ۰$. جواب این معادله، صرفاً عبارت است از $v(x, y) = C$.

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول برنولی. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول برنولی به این قرار است

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = ۰ \qquad n \neq ۱$$

چون این معادله، شامل توانی از متغیر مستقل است، جایگزینی زیر را اجرا می‌کنیم

$$y = u^r \qquad r \neq ۰$$

با انتخاب r، در صورت امکان، آن را ساده می‌کنیم. با قرار دادن در معادلهٔ اصلی، داریم

$$u' + \frac{p(x)}{r}u + \frac{q(x)}{r}u^{mr-r+۱} = ۰$$

اگر می‌توانستیم نمای u در آخرین جمله را مساوی واحد کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی اولی به‌دست می‌آمد که حل آن خیلی ساده می‌بود. اما این کار مستلزم آن است که $nr - r = ۰$، که هیچ جوابی برای r ندارد. پس، در ادامه بهترین کار را انجام می‌دهیم و شرط می‌کنیم

$$nr - r + ۱ = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{۱}{۱ - n}$$

با این کار، معادله برحسب u به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$u' + (1-n)p(x)u + (1-n)q(x) = 0$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی مرتبهٔ اول است.

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول لاگرانژ. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول لاگرانژ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$y - xp(y') - q(y') = 0$$

برای حل این معادله، قرار می‌دهیم $y' = t$ و x را به‌صورت تابعی از t در نظر می‌گیریم. در این‌صورت

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y'}\,\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt}$$

از سوی دیگر، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول اصلی تبدیل می‌شود به

$$y = xp(t) + q(t)$$

بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\left[\frac{dx}{dt}p(t) + x\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt}\right]$$

یا

$$[t - p(t)]\frac{dx}{dt} - p'(t)x = q'(t)$$

باید دو حالت را در نظر بگیریم:

(۱) وقتی $p(t) = t$، معادلهٔ دیفرانسیل حاصل، معادلهٔ کلرو خوانده می‌شود. در این‌صورت $p'(t) = 1$، و

$$x = -q'(t)$$
$$y = xp(t) + q(t) = -tq'(t) + q(t)$$

که جوابی پارامتری است.

(۲) وقتی $t-p(t) \neq 0$، معادلهٔ حاصل برحسب $x(t)$ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی مرتبهٔ اول است که به آسانی می‌توان آن را حل کرد و x را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورد. بار دیگر یک جواب پارامتری به‌دست می‌آید

$$x = x(t)$$
$$y = xp(t) + q(t) = x(t)p(t) + q(t)$$

۹ـ۱ـ۴ وجود و یکتایی جوابهای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

برای تکمیل بحث، در این زیربخش برخی مطالب مربوط به اثبات وجود و یکتایی جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول را جمعبندی می‌کنیم.

تعریف ۹ـ۱ـ۵: تابع $F(x,y)$، یک شرط لیپ‌شیتز را در حوزهٔ تعریف $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ وقتی برقرار می‌کند که به‌ازای یک ثابت متناهی L (ثابت لیپ‌شیتز)، و برای تمام نقاط (x,y_1) و (x,y_2) در حوزهٔ تعریف D که دارای مختصهٔ x همسانی‌اند، در نامساوی زیر صدق کند

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

گزارهٔ ۹ـ۱ـ۶: فرض کنید $F \in \mathrm{C}^{(1)}(\mathrm{D})$؛ یعنی اینکه F در یک حوزهٔ محدب بستهٔ کراندار D، تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. در این‌صورت، F یک شرط لیپ‌شیتز را در آن حوزهٔ تعریف، با $L = \sup_{\mathrm{D}}|\partial F/\partial y|$، برقرار می‌کند.

زبان به‌کار رفته در این گزاره را می‌توان به این صورت تعبیر کرد: اولاً، پیوسته مشتق‌پذیری صرفاً به این معناست که $\partial F/\partial x$ و $\partial F/\partial y$ توابع پیوسته‌ای از x و y هستند. ثانیاً، حوزهٔ کراندار، ناحیه‌ای است در صفحهٔ xy که می‌تواند در دایره‌ای با شعاع متناهی محصور باشد. ثالثاً، برای این چند منظور، حوزهٔ بسته ناحیه‌ای است در صفحهٔ xy که نقاط روی مرزهایش را نیز در بر دارد. و سرانجام، $\sup_{\mathrm{D}}|\partial F/\partial y|$ به معنای بیشینه مقدار ممکن $|\partial F/\partial y|$ ناشی از تغییرات x و y در حوزهٔ تعریف D است. در اینجا، sup به معنای supermum است، که سوای برخی ریزه‌کاریهای ریاضی، همان maximum (بیشینه) است.

اکنون این نتایج را بر جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول $y' = F(x,y)$ اعمال می‌کنیم.

قضیهٔ ۹ـ۱ـ۷: (قضیهٔ یکتایی) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$، که در آن $x \in [a,b]$، دو جواب

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول $y' = F(x,y)$ در حوزهٔ تعریف D هستند، و F یک شرط لیپ‌شیتز را برقرار می‌کند. در این‌صورت

$$|f(x) - g(x)| \leq e^{L|x-a|}|f(a) - g(a)|$$

در حالت خاص، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول حداکثر دارای یک منحنی جواب است که از نقطهٔ $(a,c) \in$ D می‌گذرد. ■

نتیجه‌گیری نهایی قضیهٔ ۹ـ۱ـ۷، پیامد ساده‌ای است از شرط $f(a) = g(a) = c$. طبق این قضیه، اگر یک جواب $y = f(x)$ برای معادلهٔ $y' = F(x,y)$ وجود داشته باشد، به‌طوری که شرط $f(a) = c$ را برقرار کند، در آن‌صورت، این جواب، تنها جواب است. اما این قضیه چیزی در مورد وجود چنین جوابی بیان نمی‌کند. قضیهٔ زیر این کمبود را جبران می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۱ـ۸: (قضیهٔ وجود موضعی) فرض کنید تابع $F(x,y)$ در حوزهٔ بستهٔ

$$|y - c| \leq K, |x - a| \leq N$$

"تعریف‌شده" و پیوسته است و در آن حوزه یک شرط لیپ‌شیتز را برقرار می‌کند. همچنین، فرض کنید در این حوزه $M = \sup|F(x,y)|$. به این ترتیب، معادلهٔ دیفرانسیل $y' = F(x,y)$ دارای جواب یکتای $y = f(x)$ است که در رابطهٔ $f(a) = c$ صدق می‌کند و در بازهٔ $|x - a| \leq \min(N, K/M)$ "تعریف‌شده" است. ■

شرط یکتایی در قضیهٔ ۹ـ۱ـ۸ "وجود" را به یک ناحیهٔ موضعی محدود می‌کند. اگر این شرط یکتایی را برداریم، قضیهٔ دیگری به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۹ـ۱ـ۹: (قضیهٔ وجود پئانو) اگر تابع $F(x,y)$ به‌ازای $|y - c| \leq K$ و $|x - a| \leq N$ "پیوسته" باشد، و در آنجا $|F(x,y)| \leq M$، در آن‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل $y' = F(x,y)$ حداقل دارای یک جواب به شکل $y = f(x)$ است که به‌ازای $|x - a| \leq \min(N, K/M)$ "تعریف‌شده" است و در شرط اولیهٔ $f(a) = c$ صدق می‌کند. ■

تمرینها

۹ـ۱ـ۱ نشان دهید اگر معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای یک عامل انتگرال‌گیری q باشد، تعداد عاملهای انتگرال‌گیری آن نامتناهی خواهد بود.

۹ـ۱ـ۲ ولتاژ $V(t) = V_\circ$ را به مدت $T > \circ$ در دو سر مدار R_C برقرار و سپس آن را قطع می‌کنیم. بار روی خازن را پیدا کنید.

۹ـ۱ـ۳ یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل کسری خطی زیر را بیابید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + a_2 y}{b_1 x + b_2 y} \qquad a_1 b_2 \neq a_2 b_1$$

۹ـ۲ خواص کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

اکثر معادلات دیفرانسیلی که در فیزیک به آنها برمی‌خوریم، چه جزئی و چه معمولی، وقتی جمله‌های "به‌اصطلاح" غیرخطی‌شان را با تقریب حذف کنیم، به یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم تبدیل می‌شوند (این موضوع را به تفصیل در فصل ۸ نشان دادیم). بنابراین، باقیماندهٔ این فصل را به بحث پیرامون معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم اختصاص می‌دهیم.

عمومی‌ترین صورت معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به این قرار است

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_\circ(x)y = p_3(x) \qquad \text{(۹ـ۹الف)}$$

از تقسیم طرفین بر $p_2(x)$، معادلهٔ بالا به شکل نرمال درمی‌آید

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

که در آن، $p = p_1/p_2$ ، $q = p_\circ/p_2$، و $r = p_3/p_2$ اگر $p_2(x) \neq \circ$. معادلهٔ (۹ـ۹ب) هم‌ارز با (۹ـ۹الف) است. نقاطی که در آنها $p_2(x)$ صفر می‌شود، نقاط تکین معادلهٔ دیفرانسیل نامیده می‌شوند.

یک اختلافِ اساسی بین نقاط تکین معادلات دیفرانسیل خطی و نقاط تکین معادلات دیفرانسیل غیرخطی وجود دارد. برای یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی مانند $(x^2 - y)y' = x^2 + y^2$، منحنی $y = x^2$، گردایهٔ نقاط تکین است. این امر باعث می‌شود که نتوان جوابهایی مانند $y = f(x)$ به دست آورد که در بازهٔ $\mathrm{I} = [a, b]$ از محور xها "تعریف‌شده" باشند زیرا به‌ازای هر $x \in \mathrm{I}$، یک $y = x^2$ وجود دارد که برای آن، معادلهٔ دیفرانسیل "تعریف نشده" است. از سوی دیگر، معادلات دیفرانسیل خطی این مشکل را ندارند زیرا ضرایب مشتقات توابعی از فقط x هستند. بنابراین، تمام منحنیهای تکین قائم هستند. به این ترتیب، به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۹ـ۲ـ۱: شکل نرمال یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم [معادلهٔ (۹ـ۹ب)] در صورتی بر روی بازهٔ $[a,b]$ از محور xها منظم است که $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند. یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم نرمال، تابع دوبار مشتق‌پذیر $y=f(x)$ است، که در تمام نقاط $[a,b]$ در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم صدق می‌کند.

بدیهی است که هر تابعی که در معادله‌های (۹ـ۹) صدق کند، باید لزوماً دوبار مشتق‌پذیر باشد، و این تنها شرطی است که جوابها باید داشته باشند و، همان‌گونه که در بخش قبل اشاره کردیم، هر شرط مشتق‌پذیری مرتبهٔ بالاتری ممکن است بیش از حد محدودکننده باشد. با این همه، بیشتر جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم نرمال، خودبه‌خود بیش از دوبار مشتق‌پذیرند.

۹ـ۲ـ۱ خطی بودن، برهم‌نهی، و یکتایی

اگر عملگر دیفرانسیلی

$$\mathbb{L}=p_2\frac{d^2}{dx^2}+p_1\frac{d}{dx}+p_0 \qquad (۹ـ۱۰)$$

را معرفی کنیم، در آن‌صورت معادلهٔ (۹ـ۹الف) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$\mathbb{L}[y]=p_3 \qquad (۹ـ۱۱)$$

روشن است که $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی است، زیرا d/dx، و همهٔ توانهای آن، خطی است. بنابراین، به‌ازای مقادیر ثابت α و β،

$$\mathbb{L}[\alpha y_1+\beta y_2]=\alpha\mathbb{L}[y_1]+\beta\mathbb{L}[y_2]$$

در حالت خاص، اگر y_1 و y_2 دو جواب از جوابهای (۹ـ۱۱) باشند، در آن‌صورت

$$\mathbb{L}[y_1-y_2]=0$$

یعنی، تفاضل بین دو جواب هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، خود جوابی است برای معادلهٔ همگنی که از مساوی صفر قرار دادن p_3 به‌دست می‌آید

یکی از پیامدهای بلافصل این خطی بودن $\mathbb{L}$، لم زیر است.

لم ۹ـ۲ـ۲: اگر $\mathbb{L}[u] = r(x)$، $\mathbb{L}[v] = s(x)$، α و β مقادیری ثابت باشند، و $w = \alpha u + \beta v$، در آن‌صورت $\mathbb{L}[w] = \alpha r(x) + \beta s(x)$.

اثبات این لم خیلی آسان است، اما نتیجه‌ای که از آن به‌دست می‌آید خاصیت بنیادی عملگرهای خطی را توصیف می‌کند. وقتی $r = s = 0$، یعنی هنگامی که با معادله‌های همگن سروکار داریم، بنابراین لم اگر u و v دو جواب دلخواه معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن باشند، در آن‌صورت هر ترکیب خطی از u و v نیز جواب آن است. این حکم را اصل برهم‌نهی می‌نامیم.

در فصل ۸ دیدیم که براساس شهود فیزیکی، اگر معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر یک دستگاه فیزیکی و، با همان درجه از اهمیت، داده‌های اولیه را بشناسیم، انتظار داریم بتوانیم رفتار دستگاه را پیش‌بینی کنیم. "پیش‌بینی" نمی‌تواند پیش‌بینی باشد مگر اینکه منحصر به‌فرد باشد. وضعیتی که در آن داده‌های اولیه، یعنی شرایط اولیه، منجر به چند پیش‌بینی (جوابهای چندگانه برای معادله‌های دیفرانسیل) بشوند، از نظر فیزیکی قابل قبول نیستند. بنابراین، براساس صرف شهود فیزیکی و تحت شرایط اولیه معلوم، انتظار داریم یک جواب منحصر به‌فرد برای هر معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست آید.[۱]

این انتظار ما از معادلات خطی، در زبان ریاضیات به شکل یک قضیه وجود و یک قضیهٔ یکتایی بیان می‌شود، و ما قضیهٔ یکتایی را در اینجا، و قضیهٔ وجود را در بخش ۹ـ۳ـ۱ بررسی خواهیم کرد.

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۳: (قضیهٔ یکتایی) اگر p و q در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند، در آن‌صورت حداکثر یک جواب معادلهٔ (۹ـ۹ب)، که آن را با $y = f(x)$ نشان می‌دهیم، می‌تواند در شرایط اولیه $f(a) = c_1$ و $f'(a) = c_2$، که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی‌اند، صدق کند. ■

اثبات . فرض کنید f_1 و f_2 دو جواب باشند که در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کنند. در این‌صورت، تفاضل آنها، $f \equiv f_1 - f_2$، در معادلهٔ همگن با $r(x) = 0$، صدق می‌کند. شرط اولیه‌ای که $f(x)$ در آن صدق می‌کند، مسلماً عبارت است از $f(a) = 0 = f'(a)$. اکنون تابع نامنفی[۲] $u(x) \equiv [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ را، که بنابر تعریف آن، شرط اولیه $u(a) = 0$ را برقرار

۱. شهود فیزیکی همچنین بیان می‌دارد که اگر شرایط اولیه را به اندازهٔ بینهایت کوچکی تغییر بدهیم، جوابها نیز به مقدار بینهایت کوچکی تغییر خواهند کرد. بنابراین، اصطلاحاً گفته می‌شود که جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی، توابع پیوسته‌ای از شرایط اولیه هستند. ممکن است جوابهای معادلات دیفرانسیل غیرخطی برای دو شرط اولیه خیلی نزدیک به هم، خیلی با یکدیگر فرق داشته باشند. چون در عمل، شرایط اولیه را نمی‌توان با دقت ریاضی تثبیت کرد، معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌جوابهای غیرقابل پیش‌بینی، یا آشوب، می‌انجامند. در سالهای اخیر مبحث آشوب توجه زیادی را به‌خود جلب کرده است ولی ما نمی‌توانیم در اینجا به بحث پیرامون آن بپردازیم.

می‌کند، در نظر بگیرید. با مشتق گرفتن از $u(x)$ داریم

$$\begin{aligned} u'(x) &= ۲f'f + ۲f'f'' = ۲f'(f + f'') = ۲f'(f - pf' - qf) \\ &= -۲p(f')^۲ + ۲(۱ - q)ff' \end{aligned}$$

چون $(f \pm f')^۲ \geq ۰$، نتیجه می‌شود $۲|ff'| \leq f^۲ + f'^۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} ۲(۱ - q)ff' &\leq ۲|(۱ - q)ff'| = ۲|(۱ - q)||ff'| \\ &\leq |(۱ - q)|(f^۲ + f'^۲) \leq (۱ + |q|)(f^۲ + f'^۲) \end{aligned}$$

و، بنابراین

$$\begin{aligned} u'(x) \leq |u'(x)| &= |-۲pf'^۲ + ۲(۱ - q)ff'| \leq ۲|p|f'^۲ + (۱ + |q|)(f^۲ + f'^۲) \\ &= [۱ + |q(x)|]f^۲ + [۱ + |q(x)| + ۲|p(x)|]f'^۲ \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $K \equiv ۱ + \max[|q(x)| + ۲|p(x)|]$، که در آن بیشینه روی $[a, b]$ گرفته می‌شود. در این‌صورت، خواهیم داشت

$$u'(x) \leq K(f^۲ + f'^۲) = Ku(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۹ـ۲ـ۱ می‌رسیم به

$$u(x) \leq u(a)e^{K(x-a)} \qquad \forall x \in [a, b]$$

صفر شدن $u(a)$ به معنای صفر شدن $u(x)$ است، زیرا u نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین، $u(x) = f^۲(x) + f'^۲(x) = ۰$ ایجاب می‌کند که

$$f(x) = ۰ = f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad f_۱(x) - f_۲(x) = ۰ \qquad \forall x \in [a, b]$$

■

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۳ را می‌توان برای یافتن عمومی‌ترین جواب هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن بر آن اعمال کرد. در حالت خاص $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را دو جواب دلخواه معادلهٔ زیر بگیرید

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \qquad (۹\text{ـ}۱۲)$$

فرض کنید دو بردار $\mathbf{v}_1 = (f_1(x_0), f_1'(x_0))$ و $\mathbf{v}_2 = (f_2(x_0), f_2'(x_0))$ در $\mathbb{R}^2$ به‌ازای $x_0 \in [a, b]$ خطیِ مستقل‌اند. همچنین، فرض کنید $g(x)$ جواب دیگری از معادلهٔ (۹ـ۱۲) است. بردار $(g(x_0), g'(x_0))$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت و به دو معادلهٔ زیر دست یافت

$$g(x_0) = c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0)$$
$$g'(x_0) = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0)$$

حال، تابع زیر را

$$u(x) \equiv g(x) - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x)$$

که در معادلهٔ (۹ـ۱۲) و شرایط اولیه $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ صدق می‌کند، در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ ۹ـ۲ـ۳، $u(x) \equiv 0$ یا $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$، و ما قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۴: اگر f_1 و f_2 دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن $y''+py'+qy = 0$ باشند، که در آن $p, q \in \mathrm{C}^{(0)}[a, b]$، هرگاه $(f_1(x_0), f_1'(x_0))$ و $(f_2(x_0), f_2'(x_0))$ بردارهایی خطی مستقل در $\mathbb{R}^2$ به‌ازای یک $x_0 \in [a, b]$ باشند، در آن‌صورت هر جواب $g(x)$ از این معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن با ترکیبی خطی از f_1 و f_2 به‌صورت $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ با ضرایب ثابت c_1 و c_2 برابر است. ■

۹ـ۲ـ۲ دترمینان ورونیسکی

دو جواب $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در قضیهٔ ۹ـ۲ـ۴ از این خاصیت برخوردارند که هر جواب دیگری مانند $g(x)$ را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از آنها بیان کرد. با عاریت گرفتن از گنجینهٔ

تعابیر فضاهای برداری، f_1 و f_2 را یک "پایه جواب" معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن می‌نامیم. برای تشکیل یک "پایه جواب"، f_1 و f_2 باید خطی مستقل باشند. استقلال خطی توابع را در فصل ۵ بررسی کردیم، اما شایان ذکر است که وابستگی یا استقلال خطی تعدادی تابع $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$، مفهومی است که باید به‌ازای تمام $x \in [a,b]$ برقرار باشد. بنابراین، اگر بتوان $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ را چنان یافت که به‌ازای یک $x \in [a,b]$ داشته باشیم

$$\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n(x_0) = 0$$

به آن معنا نیست که $f_1, \ldots, f_n$ خطی وابسته‌اند. وابستگی خطی مستلزم این است که تساوی به‌ازای تمام $x \in [a,b]$ برقرار باشد. در واقع، باید بنویسیم

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = \mathbb{O}$$

که در آن $\mathbb{O}$ را تابع صفر می‌گویند که مقدار آن به‌ازای تمام $x \in [a,b]$ صفر است.

ماهیت رابطهٔ خطی بین f_1 و f_2 را می‌توان با دترمینان ورونیسکی آنها تعیین کرد.

تعریف ۹ـ۲ـ۵: دترمینان ورونیسکی دو تابع مشتق‌پذیر دلخواه $f_1(x)$ و $f_2(x)$ عبارت است از

$$W(f_1, f_2; x) \equiv f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$$

اعمال تعریف ۹ـ۲ـ۵ بر جوابهای معادلهٔ (۹ـ۱۲)، به گزارهٔ زیر می‌انجامد.

گزارهٔ ۹ـ۲ـ۶: دترمینان ورونیسکی دو جواب دلخواه معادلهٔ (۹ـ۱۲)، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$W(f_1, f_2; x) = W(f_1, f_2; a) e^{-\int_a^x p(t)dt} \qquad (۹ـ۱۳)$$

اثبات . با مشتق گرفتن از معادلهٔ (۹ـ۱۳) و جایگزین کردن از (۹ـ۱۲)، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول برحسب $W(f_1, f_2; x)$ به‌دست می‌آید که به آسانی قابل حل است. جزئیات را به‌صورت مسئله به خواننده وامی‌گذاریم. ■

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۷: دو جواب f_1 و f_2 از یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن [معادلهٔ (۹ـ۱۲)] فقط در صورتی خطی وابسته‌اند که دترمینان ورونیسکی آنها صفر باشد. ■

اثبات. به‌طور بدیهی می‌توان نشان داد که اگر f_1 و f_2 خطی وابسته باشند، درآن‌صورت دترمینان ورونیسکی آنها صفر می‌شود. برعکس، فرض کنیم $W(f_1, f_2; x)$ به‌ازای $x = x_1$ صفر است. در این‌صورت، دو بردار $(f_1(x), f_1'(x))$ و $(f_2(x_1), f_2'(x_1))$. در $\mathbb{R}^2$ خطی وابسته‌اند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم $f_1(x_1) = kf_2(x_1)$ و $f_1'(x_1) = kf_2'(x_1)$. تابع $f(x) \equiv f_1(x) - kf_2(x)$ یکی از جوابهای (۹ـ۱۲) است و شرایط اولیهٔ $f(x_1) = f'(x_1) = 0$ را برقرار می‌کند. بنابر اثبات قضیهٔ ۹ـ۲ـ۳، f باید صفر باشد. پس، به‌ازای تمام $x \in [a, b]$ باید $f_1(x) = kf_2(x)$، و در نتیجه، f_1 و f_2 خطی وابسته‌اند. ■

همان‌گونه که اثبات این قضیه نشان می‌دهد، وابستگی خطی همواره به صفر شدن دترمینان ورونیسکی می‌انجامد، خواه دو تابع یاد شده جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن باشند یا نباشند. اما، صفر شدن دترمینان ورونیسکی، به‌طور کلی، به وابستگی خطی منجر نمی‌شود. فقط در صورتی که دو تابع، جوابهای معادلهٔ (۹ـ۱۲) نیز باشند، صفر بودن دترمینان ورونیسکی به معنای وابستگی خطی است.

مثال ۹ـ۲ـ۱: فرض کنید به‌ازای $x \in [-1, 1]$، $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = |x|$. این دو تابع در بازهٔ داده شده خطی مستقل‌اند زیرا فقط در صورتی به‌ازای تمام xها رابطهٔ $\alpha_1 x + \alpha_2 |x| = 0$ برقرار است که $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. از سوی دیگر، دترمینان ورونیسکی به‌ازای تمام $x \in [-1, +1]$ صفر است

$$W(f_1, f_2; x) = x\frac{d}{dx}(|x|) - |x|\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x\frac{d}{dx}(|x|) - |x| = \begin{cases} x - x = 0 & \text{اگر } x > 0 \\ -x - (-x) = 0 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

به این ترتیب، دو تابع دلخواه می‌توانند دارای دترمینان ورونیسکی صفر باشند بدون اینکه خطی وابسته باشند. ●

مثال ۹ـ۲ـ۲: دترمینان ورونیسکی را می‌توان به n تابع تعمیم داد. دترمینان ورونیسکی توابع f_1،

f_2، ...، f_n عبارت است از

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \cdots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \cdots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

اگر توابع یاد شده خطی وابسته باشند، در آن‌صورت

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n; x) \equiv 0$$

مثلاً، روشن است که e^x، e^{-x} و $\sinh x$ خطی وابسته‌اند. بنابراین، انتظار داریم دترمینان زیر صفر باشد

$$W(e^x, e^{-x}, \sinh x; x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^x & e^x \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \\ \sinh x & \cosh x & \sinh x \end{pmatrix}$$

که به آسانی ملاحظه می‌شود چنین هم هست (ستون اول و آخر با هم یکی‌اند). ●

جواب دوم یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن. اگر یکی از جوابهای معادلهٔ (۹ـ۱۲) معلوم باشد، می‌توانیم با استفاده از دترمینان ورونیسکی یک جواب خطی مستقل دیگر برای آن بیابیم. فرض کنید $W(x) \equiv W(f_1, f_2; x)$ دترمینان ورونیسکی جوابهای f_1 و f_2 باشد. بنابراین، بنابر تعریف و گزارهٔ ۹ـ۲ـ۶، داریم

$$f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) = W(x) = W(a)e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

با معلوم بودن $f_1(x)$، عبارت بالا یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول برحسب $f_2(x)$ است، که با روش بخش ۹ـ۱ می‌توان آن را حل کرد. در واقع، $1/f_1^2(x)$ یک عامل انتگرال‌گیری است، بنابراین با تقسیم طرفین بر $f_1^2(x)$ داریم

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] = \frac{W(x)}{f_1^2(x)}$$

یا

$$\frac{f_۲(x)}{f_۱(x)} = c + \int_a^x \frac{W(s)}{f_۱^۲(x)} ds = c + \int_a^x \frac{۱}{f_۱^۲(s)} [W(a) e^{-\int_a^x p(t)dt}] ds$$

که c یک ثابت دلخواه انتگرال‌گیری است. بنابراین

$$f_۲(x) = f_۱(x) \left\{ c + W(a) \int_a^x \frac{۱}{f_۱^۲(s)} [e^{-\int_a^x p(t)dt}] ds \right\} \qquad (۱۴\_۹)$$

توجه داشته باشید که $W(a)$ یک ثابت (ناصفر) دلخواه دیگر است؛ لازم نیست برای به‌دست آوردن $W(a)$، تابع $W(x)$ را بشناسیم (این امر مستلزم دانستن $f_۲$ است، که ما تلاش می‌کنیم آن را بیابیم!). رسم بر این است که c را صفر اختیار می‌کنند زیرا با این کار جمله‌ای حاصل می‌شود که متناسب با $f_۱(x)$ است.

مثال ۹ـ۲ـ۳: (الف) یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم $y'' - k^۲ y = ۰$، عبارت است از e^{kx}. برای یافتن یک جواب دیگر، در معادلهٔ (۹ـ۱۴) قرار می‌دهیم $c = ۰$ و $W(a) = ۱$. چون $p(x) = ۰$، داریم

$$f_۲(x) = e^{kx} \left(۰ + \int_a^x \frac{ds}{e^{۲kx}} \right) = e^{kx} \left(-\frac{۱}{۲k} e^{-۲ks} \Big|_a^x \right)$$
$$= -\frac{۱}{۲k} e^{-kx} + \frac{e^{-۲ka}}{۲k} e^{kx}$$

که مستقیماً به انتخاب e^{-kx} برای جواب دوم می‌انجامد.

(ب) وقتی $-k^۲ \to k^۲$ یکی از جوابهای معادلهٔ $y'' + k^۲ y = ۰$ عبارت است از $\sin kx$. به‌ازای $c = ۰$، $a = \pi/۲k$، و $W(\pi/۲k) = ۱$، داریم

$$f_۲(x) = \sin kx \left(۰ + \int_{\pi/۲k}^x \frac{ds}{\sin^۲ ks} \right) = -\sin kx \cot ks |_{\pi/۲k}^x$$
$$= -\cos kx$$

(ج) برای جوابهای قسمت (الف)،

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{kx} & ke^{kx} \\ e^{-kx} & -ke^{-kx} \end{pmatrix} = -۲k$$

و برای جوابهای قسمت (ب)،

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \sin kx & k\cos kx \\ \cos kx & -k\sin kx \end{pmatrix} = -k$$

هر دو دترمینان ورونیسکی ثابت‌اند. این یک حالت خاص از این نتیجهٔ کلی است که دترمینان ورونیسکی دو جواب خطی مستقل معادلهٔ $y'' + q(x)y = ۰$ مقداری ثابت است. ●

بیشتر توابع خاصی که در فیزیک ریاضیاتی مطرح می‌شوند، جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم هستند. رفتار این توابع خاص در برخی نقاط را فیزیک موضوع مورد نظر تعیین می‌کند. در اکثر موارد، انتظار فیزیکی به ترجیح یک سؤال بر سؤال دیگر می‌انجامد. مثلاً، گرچه برای معادلهٔ لژاندر به این قرار

$$\frac{d}{dx}\left[(۱-x^۲)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+۱)y = ۰$$

دو جواب خطی مستقل وجود دارد، اما جوابی که بیشتر به آن برمی‌خوریم، یک چندجمله‌ای لژاندر، $P_n(x)$، است که در فصل ۵ آن را بررسی کردیم. جواب دیگر را می‌توان با حل معادلهٔ لژاندر یا با بهره‌گیری از معادلهٔ (۹ـ۱۴) به‌دست آورد. مثال زیر، به این نکته اشاره دارد.

مثال ۹ـ۲ـ۴: معادلهٔ لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left[(۱-x^۲)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+۱)y = ۰$$

را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} - \frac{۲x}{۱-x^۲}\,\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+۱)}{۱-x^۲}y = ۰$$

این معادله، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن است که در آن

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{و} \quad q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

یکی از جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن، چندجمله‌ای مشهور لژاندر، $P_n(x)$، است. با بهره‌گیری از این جواب به‌عنوان "ورودی" و استفاده از معادلهٔ (۹ـ۱۴)، می‌توان مجموعهٔ دیگری از جوابها را تولید کرد.

فرض کنید $Q_n(x)$ معرف "همتای" خطی مستقل $P_n(x)$ باشد. به این ترتیب، با قرار دادن $c = 0$ در معادلهٔ (۹ـ۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= W(a)P_n(x)\int_a^x \frac{1}{P_n^2(s)}\left(e^{-\int_a^s[-2t/(1-t^2)]dt}\right)ds \\ &= W(a)P_n(x)\int_a^x \frac{1}{P_n^2(s)}\left(\frac{1-a^2}{1-s^2}\right)ds \\ &= A_nP_n(x)\int_a^x \frac{ds}{(1-s^2)P_n^2(s)} \end{aligned}$$

A_n ثابت دلخواهی است که از طریق استانداردسازی تعیین می‌شود و a نقطهٔ دلخواهی در بازهٔ $[-1, +1]$ است. مثلاً به‌ازای $n = 0$، داریم $P_0 = 1$، و می‌رسیم به

$$Q_0(x) = A_0\int_a^x \frac{ds}{1-s^2} = A_0\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right]$$

شکل استاندارد $Q_0(x)$ با قرار دادن $A_0 = 1$ و $a = 0$، به‌دست می‌آید

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad |x| < 1$$

به همین ترتیب، چون $P_1(x) = x$،

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= A_1x\int_a^x \frac{ds}{s^2(1-s^2)} = A_1x\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right] \\ &= Ax + Bx\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

در اینجا، استانداردسازی منجر می‌شود به $A = ۰$، $B = ۱/۲$، و $C = -۱$. بنابراین

$$Q_{۱}(x) = \frac{۱}{۲} x \ln\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right) - ۱$$

●

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن را می‌توان با دقت بسیار برحسب توابع گرین، موضوع فصل ۱۱، بررسی کرد. با این همه، در اینجا می‌توان عمومی‌ترین جواب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن را تعیین کرد.

فرض کنید $g(x)$ یکی از جوابهای خصوصی معادلهٔ

$$\mathbb{L}[y] \equiv y'' + py' + qy = r(x) \tag{۹_۱۵}$$

و $h(x)$ یک جواب دیگر آن باشد. در این‌صورت $h(x) - g(x)$ در معادلهٔ (۹_۱۲) صدق می‌کند و می‌توان آن را به‌صورت ترکیبی خطی از یک پایه از جوابهای $f_{۱}$ و $f_{۲}$ نوشت، و به معادلهٔ زیر رسید

$$h(x) = c_{۱} f_{۱}(x) + c_{۲} f_{۲}(x) + g(x) \tag{۹_۱۶}$$

بنابراین، اگر یکی از جوابهای خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن (۹_۱۵) و دو پایه جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن را داشته باشیم، در آن‌صورت عمومی‌ترین جواب (۹_۱۵) را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از دو "پایه جواب" و جواب خصوصی بیان کرد.

می‌دانیم که وقتی یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن را داشته باشیم، چگونه جواب دوم آن را پیدا کنیم. اکنون نشان می‌دهیم که معلوم بودن چنین جوابی همچنین به ما این فرصت را می‌دهد که یک جواب خصوصی برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن به‌دست آوریم. روشی که ما به‌کار می‌بریم روش وردش ثابتها است. از این روش می‌توان در یافتن جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن نیز سود جست (تمرین ۹_۲_۳).

فرض کنید $g(x)$ جواب مطلوب معادلهٔ (۹_۱۵) باشد. اگر این جواب را به‌صورت $g(x) \equiv f_{۱}(x) v(x)$ بنویسیم، در آن‌صورت $v(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم زیر

صدق می‌کند

$$v'' + \left(p + \frac{2f_1'}{f_1}\right) v' = \frac{r}{f_1}$$

فرض کنید $u = v'$. در این‌صورت u در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

$$u' + \left(p + \frac{2f_1'}{f_1}\right) u = \frac{r}{f_1}$$

صدق می‌کند، که دارای عامل انتگرال‌گیری

$$\mu(x) = cf_1^2(x)\exp\left[\int_a^x p(t)dt\right] = \frac{f_1^2(x)}{W(x)}$$

و یک جواب به شکل

$$u = \frac{W(x)}{f_1^2(x)}\left[c + \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt\right]$$

است. اما با دانستن جواب دوم، f_2، که با (۹ـ۱۴) داده می‌شود، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{W(x)}{f_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

به این ترتیب، با قرار دادن $c = 0$ (ما یک جواب خصوصی را می‌خواهیم) و توجه به اینکه $u = dv/dx$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{f_2}{f_1}\int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt\right] - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\left[\frac{f_1(x)r(x)}{W(x)}\right]\end{aligned}$$

که این عبارت، به جواب خصوصی زیر می‌انجامد

$$g(x) = f_2(x)\int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt - f_1(x)\int_a^x \frac{f_2(t)r(t)}{W(t)}dt$$

ضمن گزارهٔ زیر، بحث بالا را جمعبندی می‌کنیم.

گزارهٔ ۹ـ۲ـ۸: دانستن فقط یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن کافی است تا عمومی‌ترین جواب آن معادله و معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن متناظر آن را به‌دست آوریم.

قضایای تفکیک و مقایسه. با استفاده از دترمینان ورونیسکی می‌توان برخی خواص نمودارهای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن را به‌دست آورد. یکی از این خواص از طریق قضیه‌ای منسوب به اشتورم بیان می‌شود و مربوط به موقعیت نسبی صفرهای دو جواب خطی مستقل یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن است.

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۹: (قضیهٔ تفکیک) صفرهای دو جواب خطی مستقل $f_1(x)$ و $f_2(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن (۹ـ۱۲) به‌طور متناوب رخ می‌دهند. یعنی، بین دو صفر f_1 یک صفر f_2، و برعکس، قرار می‌گیرد. ■

اثبات . باید نشان بدهیم که یک صفر f_1، بین دو صفر f_2 قرار دارد. استقلال خطی f_1 و f_2 به این معناست که به‌ازای هر $x \in [a, b]$، داریم $W(f_1, f_2) \neq 0$. فرض کنید $x_i \in [a, b]$ یک صفر f_2 باشد؛ یعنی، $f_2(x_i) = 0$. در این‌صورت

$$0 \neq W(f_1, f_2; x_i) = f_1(x_i) f_2'(x_i) - f_2(x_i) f_1'(x_i)$$
$$= f_1(x_i) f_2'(x_i)$$

در نتیجه، $f_1(x_i) \neq 0$ و $f_2'(x_i) \neq 0$. فرض کنید x_1 و x_2، که می‌دانیم $x_2 > x_1$، دو صفر پیاپی f_2 باشند. چون f_2 در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است و $f_2'(x_1) \neq 0$، f_2 باید در x_1 صعودی $[f_2'(x_1) > 0]$ یا نزولی $[f_2'(x_1) < 0]$ باشد. برای اینکه f_2 در نقطهٔ بعدی، x_2، صفر باشد، $f_2'(x_2)$ باید علامت مخالف $f_2'(x_1)$ را داشته باشد. قبلاً ثابت کردیم که علامت $W(f_1, f_2)$ در بازهٔ $[a, b]$ تغییر نمی‌کند. به این ترتیب، معادلهٔ بالا بیان می‌کند که $f_1(x_1)$ و $f_1(x_2)$ نیز مختلف‌العلامت‌اند. پس، پیوستگی f_1 ایجاب می‌کند که

$$\exists\, x_1 < x_0 < x_2 \ni f_1(x_0) = 0$$

با استدلالی مشابه، ثابت می‌شود بین دو صفر f_1 یک صفر f_2 قرار دارد. ■

مثال ۹ـ۲ـ۵: دو جواب خطی مستقل معادلهٔ $y'' + y = ۰$ عبارت‌اند از $\sin x$ و $\cos x$؛ بنابر قضیهٔ تفکیک، صفرهای $\sin x$ و $\cos x$ باید متناوب باشند. ما از مثلثات مقدماتی نیز این نکته را می‌دانیم. در حقیقت، صفرهای $\cos x$ به‌ازای ضرایب فرد $\pi/۲$ و صفرهای $\sin x$ در ضرایب زوج $\pi/۲$ رخ می‌دهند. ●

نتیجهٔ دیگری که به اشتورم منسوب است، قضیهٔ مقایسه نام دارد.[۱]

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۰: (قضیهٔ مقایسه) فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$، به‌ترتیب، جوابهای غیربدیهی معادله‌های $u'' + p(x)u = ۰$ و $v'' + q(x)v = ۰$ هستند، که در آن به‌ازای تمام مقادیر $x \in [a, b]$، داریم $p(x) \geq q(x)$. در این‌صورت، $f(x)$ دست‌کم یک‌بار بین دو صفر $g(x)$ صفر می‌شود، مگر اینکه $p(x) \equiv q(x)$ و f مضرب ثابتی از g باشد. ■

محدودیتی در نوع معادلات دیفرانسیلی که در قضیهٔ مقایسه به‌کار می‌روند، وجود ندارد. زیرا هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن را می‌توان به این شکل درآورد (تمرین ۹ـ۲ـ۴). یک حالت خاص مفید از این قضیه، به‌صورت یک نتیجه داده می‌شود (اثبات آسان اما آموزندهٔ آن را به‌صورت مسئله به‌خواننده وامی‌گذاریم).

نتیجهٔ ۹ـ۲ـ۱۱: اگر $q(x) \leq ۰$، در آن‌صورت هیچ جواب غیربدیهی معادلهٔ دیفرانسیل $v'' + q(x)v = ۰$ نمی‌تواند بیش از یک صفر داشته باشد.

مثال ۹ـ۲ـ۶: از بحث قبل باید روشن باشد که نوسانهای جوابهای معادلهٔ $v'' + q(x)v = ۰$ عمدتاً با علامت و قدرمطلق $q(x)$ تعیین می‌شوند. به‌ازای $q(x) \leq ۰$ هیچ نوسانی وجود ندارد؛ یعنی، هیچ جوابی وجود ندارد که علامت را بیش از یک بار تغییر بدهد. اکنون فرض کنید که به‌ازای یک مقدار حقیقی k داریم: $q(x) \geq k^۲ > ۰$. بنابراین، طبق قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۰، هر جوابی از $v'' + q(x)v = ۰$ باید دست‌کم یک صفر بین دو صفر پیاپی جواب $\sin x$ معادلهٔ $u'' + k^۲u = ۰$ داشته باشد. یعنی، اگر $q(x) \geq k^۲ > ۰$، هر جواب معادلهٔ $v'' + q(x)v = ۰$ دارای یک صفر در هر بازهٔ به طول $\pi/۲$ است.

بگذارید این نکته را برای معادلهٔ بسل به قرار زیر، اعمال کنیم

$$y'' + \frac{۱}{x}y' + \left(۱ - \frac{n^۲}{x^۲}\right)y = ۰$$

۱. برای اثبات این قضیه ر.ک.:
Birkhoff & Rota, 1978, 38.

با قرار دادن $v/\sqrt{x}$ به‌جای y می‌توانیم جملهٔ y' را حذف کنیم. با این جایگذاری، معادلهٔ بسل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$v'' + \left(۱ - \frac{۴n^۲ - ۱}{۴x^۲}\right)v = ۰$$

به‌ازای $n = ۰$، این معادله را مقایسه می‌کنیم با $u'' + u = ۰$، که یکی از جوابهای آن عبارت است از $u = \cos x$، و نتیجه می‌گیریم که هر بازهٔ به طول π از محور x های مثبت شامل دست‌کم یک صفر از هر جواب مرتبهٔ صفر ($n = ۰$) از معادلهٔ بسل است. بنابراین، به‌خصوص تابع بسل صفرم، که معمولاً به‌صورت $J_۰(x)$ نشان داده می‌شود، در هر بازه‌ای به طول π از محور xها دارای یک صفر است.

از سوی دیگر، به‌ازای $۴n^۲ - ۱ > ۰$، یا $n > ۱/۲$، داریم $[۱ - (۴n^۲ - ۱)/۴x^۲] < ۱$. یعنی، $\sin x$ دست‌کم دارای یک صفر بین دو صفر پی‌درپی توابع بسل با مرتبهٔ بزرگتر از ۱/۲ است. پس، نتیجه می‌گیریم که چنین تابع بسلی حداکثر می‌تواند یک صفر بین دو صفر پی‌درپی $\sin x$ (یا در هر بازهٔ به طول π روی محور xهای مثبت) داشته باشد.

با اعمال نتیجهٔ ۹ـ۲ـ۱۱ بر $v'' - v = ۰$، که عمومی‌ترین جواب آن عبارت است از $f(x) \equiv c_۱e^x + c_۲e^{-x}$، ملاحظه می‌کنیم که

$$f(x) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{۱}{۲}\ \ln\left|-\frac{c_۲}{c_۱}\right|$$

این x (حقیقی) در صورت وجود یکتاست. ●

۹ـ۲ـ۳ عملگرهای دیفرانسیلی الحاقی

عملگرهای الحاقی را به تفصیل در بحث فضاهای برداری متناهی‌ـبعد در فصلهای ۲ و ۳ بررسی کردیم. علی‌الخصوص، اهمیت عملگرهای خودالحاقی، یا هرمیتی، به‌وضوح به‌کمک قضیهٔ تجزیهٔ طیفی تشریح شد. یکی از پیامدهای آن قضیه، کاملیت ویژه‌بردارهای یک عملگر هرمیتی است؛ یعنی، این واقعیت که هر بردار دلخواه را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از ویژه‌بردارهای (راست‌هنجار) یک عملگر هرمیتی بیان کرد.

عملگرهای دیفرانسیلی الحاقی به همان درجه از اهمیت‌اند، زیرا "ویژه‌توابع" آنها نیز مجموعه‌های متعامد کاملی را تشکیل می‌دهند (فصل ۱۰). در این زیربخش مفهوم "الحاقی" را به حالت یک

عملگر دیفرانسیلی (درجهٔ دوم) تعمیم می‌دهیم. این کار را با یک "تعریف" شروع می‌کنیم.

تعریف ۹ـ۲ـ۱۲: معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن

$$\mathbb{L}[y] \equiv p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \qquad \text{(۹ـ۱۸الف)}$$

را اصطلاحاً کامل می‌خوانیم اگر و فقط اگر به‌ازای تمام مقادیر $y \in \mathrm{C}^{(2)}[a,b]$ و به‌ازای برخی مقادیر $A, B \in \mathrm{C}^{(1)}[a,b]$، داشته باشیم

$$p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = \frac{d}{dx}[A(x)y' + B(x)y] \qquad \text{(۹ـ۱۸ب)}$$

یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ (۹ـ۱۸الف) عبارت است از تابعی مانند $\mu(x)$، به‌طوری که $\mu\mathbb{L}[y] = 0$ کامل باشد.

اگر یک عامل انتگرال‌گیری وجود داشته باشد، درآن‌صورت معادلهٔ (۹ـ۱۸الف) تحویل می‌یابد به

$$\frac{d}{dx}[A(x)y' + B(x)y] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A(x)y' + B(x)y = C$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با یک جملهٔ ناهمگن ثابت است. حتی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن متناظر با (۹ـ۱۸الف) را می‌توان حل کرد، زیرا

$$\mu\mathbb{L}[y] = \mu(x)r(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}[A(x)y' + B(x)y] = \mu(x)r(x)$$

$$\Rightarrow \qquad A(x)y' + B(x)y = \int^x \mu(t)r(t)dt$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول عام است. بنابراین، وجود یک عامل انتگرال‌گیری، معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را به‌طورکامل حل می‌کند. بنابراین، این نکته اهمیت دارد که بدانیم آیا یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم کامل هست یا خیر. گزارهٔ زیر معیاری را برای کامل بودن معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به‌دست می‌دهد.

گزارهٔ ۹ـ۲ـ۱۳: معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم (۹ـ۱۸الف) کامل است اگر و فقط اگر $p_2'' - p_1' + p_0 = 0$.

اثبات . معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم یادشده کامل است اگر و فقط اگر (۹ـ۱۸ب) برقرار باشد، که فقط در صورتی صحیح است که داشته باشیم

$$p_۲ = A \quad p_۱ = A' + B \quad \text{و} \quad p_۰ = B'$$

این معادله‌ها هم‌ارزند با

$$p_۲'' = A'' \quad p_۱' = A'' + B' \quad \text{و} \quad p_۰ = B'$$

که به‌نوبهٔ خود با تک معادلهٔ $p_۲'' - p_۱' + p_۰ = ۰$ هم‌ارزند. ■

واضح است که معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم در حالت کلی کامل نیست. آیا می‌توانیم، نظیر آنچه در مورد یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول انجام دادیم، با ضرب کردن در یک عامل انتگرال‌گیری آن را کامل کنیم؟ گزارهٔ زیر متضمن پاسخ به این پرسش است.

گزارهٔ ۹ـ۲ـ۱۴: تابع $\mu \in C^{(۲)}(a, b)$ یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم (۹ـ۱۸الف) است، اگر و فقط اگر جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن

$$\mathbb{M}[\mu] \equiv (p_۲\mu)'' = (p_۱\mu)' + p_۰\mu = ۰ \qquad \text{(۹ـ۱۹الف)}$$

باشد.

اثبات . معادلهٔ (۹ـ۱۹الف) یکی از نتایج بلافصل گزارهٔ ۹ـ۲ـ۱۳ است ■

می‌توان با بسط معادلهٔ (۹ـ۱۹الف)، معادلهٔ هم‌ارز زیر را به‌دست آورد

$$p_۲\mu'' + (۲p_۲' - p_۱)\mu' + (p_۲'' - p_۱' + p_۰)\mu = ۰ \qquad \text{(۹ـ۱۹ب)}$$

عملگر $\mathbb{M}$، که با عبارت زیر بیان می‌شود

$$\mathbb{M} \equiv p_۲\frac{d^۲}{dx^۲} + (۲p_۲' - p_۱)\frac{d}{dx} + (p_۲'' - p_۱' + p_۰) \qquad \text{(۹ـ۲۰)}$$

الحاقی عملگر $\mathbb{L}$ نام دارد، و به‌صورت $\mathbb{M} \equiv \mathbb{L}^\dagger$ نمایش داده می‌شود. دلیل کاربرد واژهٔ ”الحاقی“ در زیر روشن می‌شود.

گزارهٔ ۹ـ۲ـ۱۴، وجود یک عامل انتگرال‌گیری را تصریح می‌کند. اما عامل یادشده را فقط با حل معادلهٔ (۹ـ۱۹الف) یا (۹ـ۱۹ب)، که دست‌کم به همان نامطبوعی حل معادلهٔ دیفرانسیل اولیه است!، می‌توان به‌دست آورد. برخلاف این، عامل انتگرال‌گیری یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول را صرفاً با انجام یک انتگرال‌گیری می‌توان پیدا کرد (قضیهٔ ۹ـ۱ـ۴).

هر چند، عاملهای انتگرال‌گیری معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به قدرتمندی همتاهایشان در معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم نیستند، اما می‌توانند مطالعه و بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را آسان کنند. ابتدا به این نکته اشاره می‌کنیم که الحاقی یک عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}$ همان عملگر اولیه است: $(\mathbb{L}^\dagger)^\dagger = \mathbb{L}$ (تمرین ۹ـ۲ـ۵). بنابراین حکم، اگر v یک عامل انتگرال‌گیری $\mathbb{M}[v] \equiv \mathbb{L}^\dagger[v] = 0$ باشد، در آن‌صورت u یک عامل انتگرال‌گیری $\mathbb{L}[u] = 0$ خواهد بود. در حالت خاص، با ضرب (۹ـ۱۸الف) (که در آن به‌جای y کمیت t را می‌گذاریم) در v، و ضرب (۹ـ۱۹الف) (که در آن به‌جای μ کمیت v را جایگزین می‌کنیم) در u، و کم کردن نتایج از هم، داریم

$$v\mathbb{L}[u] - u\mathbb{M}[v] = (vp_2)u'' - u(p_2v)'' + (vp_1)u' + u(p_1v)'$$

که پس از ساده کردن تبدیل می‌شود به

$$v\mathbb{L}[u] - u\mathbb{M}[v] = \frac{d}{dx}[p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv] \qquad \text{(۹ـ۲۱الف)}$$

با انتگرال‌گیری این رابطه از a تا b، خواهیم داشت

$$\int_a^b \{v\mathbb{L}[u] - u\mathbb{M}[v]\}dx = [p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv]\big|_a^b \qquad \text{(۹ـ۲۱ب)}$$

معادله‌های (۹ـ۲۱)، اتحاد لاگرانژ نامیده می‌شوند. معادلهٔ (۹ـ۲۱ب)، نامیدن $\mathbb{M}$ به‌عنوان الحاقی $\mathbb{L}$ را توجیه می‌کند. اگر u و v را به‌عنوان بردارهای مجرد $|\mathrm{u}\rangle$ و $|\mathrm{v}\rangle$، و $\mathbb{L}$ و $\mathbb{M}$ را به‌عنوان عملگرهایی در فضای هیلبرت در نظر بگیریم، و حاصلضرب داخلی را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\langle \mathrm{u}|\mathrm{v}\rangle = \int_a^b u^*(x)v(x)dx$$

آنگاه (۹ـ۲۱ب) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{v}|\mathbb{L}|\mathrm{u}\rangle - \langle \mathrm{u}|\mathbb{M}|\mathrm{v}\rangle &= \langle \mathrm{u}|\mathbb{L}^\dagger|\mathrm{v}\rangle^* - \langle \mathrm{u}|\mathbb{M}|\mathrm{v}\rangle \\ &= [p_2 vu' - (p_2 v)'u + p_1 uv]|_a^b\end{aligned}$$

اگر عبارت سمت راست صفر باشد، در آن‌صورت

$$\langle \mathrm{u}|\mathbb{L}^\dagger|\mathrm{v}\rangle^* = \langle \mathrm{u}|\mathbb{M}|\mathrm{v}\rangle \qquad \forall|\mathrm{u}>, |\mathrm{v}\rangle$$

و، چون تمام این عملگرها و توابع حقیقی‌اند، خواهیم داشت

$$\mathbb{L}^\dagger = \mathbb{M}$$

شبیه فضای برداری متناهی‌ـبعد خودالحاقی، عملگر دیفرانسیلی خودالحاقی نیز درخور توجه است. برای اینکه $\mathbb{L}^\dagger = \mathbb{M}$ مساوی $\mathbb{L}$ باشد، باید داشته باشیم [معادله‌های (۹ـ۱۸الف) و (۹ـ۱۹ب)].

$$\begin{aligned}2p_2' - p_1 &= p_1 \\ p_2'' - p_1' + p_0 &= p_0\end{aligned}$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم

$$p_2' = p_1$$

که معادلهٔ دوم را نیز حل می‌کند. اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه می‌توان (۹ـ۱۸الف) را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{L}[y] = p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y = (p_2 y')' + p_0 y = 0$$

یا

$$\mathbb{L}[y] = \frac{d}{dx}\left[p_2(x)\frac{dy}{dx}\right] + p_0(x) y = 0$$

البته، همهٔ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم خودالحاقی نیستند. آیا می‌توان آنها را به چنین وضعیتی درآورد؟ بگذارید دو طرف (۹ـ۱۸الف) را در تابعی مثل $h(x)$ که بعداً آن را تعیین خواهیم کرد، ضرب کنیم

$$h(x)p_۲(x)y'' + h(x)p_۱(x)y' + h(x)p_۰(x)y = ۰$$

$h(x)$ را چنان اختیار می‌کنیم که

$$\frac{d}{dx}(hp_۲) = hp_۱$$

یا

$$p_۲\frac{dh}{dx} + h(p'_۲ - p_۱) = ۰$$

این عبارت یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول تفکیک‌پذیر با جواب زیر است

$$h(x) = \frac{۱}{p_۲}\exp\left[\int^x \frac{p_۱(t)}{p_۲(t)}dt\right]$$

به این ترتیب، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۵: معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم مربوط به معادلهٔ (۹ـ۱۸)، خودالحاقی است، اگر و فقط اگر به شکل زیر باشد

$$\frac{d}{dx}\left[p_۲(x)\frac{dy}{dx}\right] + p_۰(x)y = ۰$$

اگر خودالحاقی نباشد، با ضرب کردن در

$$h(x) = \frac{۱}{p_۲}\exp\left[\int^x \frac{p_۱(t)}{p_۲(t)}dt\right]$$

می‌توان آن را به خودالحاقی تبدیل کرد. ■

مثال ۹ـ۲ـ۷: (الف) معادلهٔ لژاندر در شکل متداول آن، به قرار زیر

$$y'' - \frac{۲x}{۱ - x^۲}y' + \frac{\lambda}{۱ - x^۲}y = ۰$$

خودالحاقی نیست، زیرا

$$p'_۲ = (۱)' = ۰ \neq -\frac{۲x}{۱ - x^۲}$$

اما، اگر آن را در $۱ - x^۲$ ضرب کنیم، شکل خودالحاقیش به‌دست می‌آید:

$$(۱ - x^۲)y' - ۲xy'' + \lambda y = ۰$$

یا

$$\frac{d}{dx}\left[(۱ - x^۲)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = ۰$$

(ب) به همین‌ترتیب، شکل نرمال (متداول) معادلهٔ بسل

$$y'' + \frac{۱}{x}y' + \left(۱ - \frac{n^۲}{x^۲}\right)y = ۰$$

خودالحاقی نیست، اما اگر آن را در x ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{n^۲}{x}\right)y = ۰$$

که مسلماً خودالحاقی است. ●

۹ـ۲ـ۴ معادلهٔ ریکاتی

با جایگزینی $v = y'/y$، می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را به یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی مرتبهٔ اول تبدیل کرد. معادلهٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$$

تبدیل می‌شود به

$$v' + v^2 + p(x)v + q(x) = 0 \qquad \text{(۹ـ۲۲الف)}$$

که معادله غیرخطی مرتبهٔ اولی است موسوم به معادلهٔ ریکاتی. این معادله را می‌توان به شکل ساده‌تری هم در آورد (تمرین ۹ـ۲ـ۴)

$$u' + u^2 + S(x) = 0 \qquad S(x) = -\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q \qquad \text{(۹ـ۲۲ب)}$$

بنابراین، به‌کمک جایگذاری ریکاتی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به یک معادلهٔ دیفرانسیل درجهٔ دوم مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود. وقتی یکی از صورتهای معادلهٔ ریکاتی را حل کنیم می‌توانیم تابع اولیه را با استفاده از عبارت زیر به‌دست آوریم

$$y(x) = C \exp\left[\int^{x} v(t)dt\right]$$

تمرینها

۹ـ۲ـ۱ فرض کنید $u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است که در نامساوی دیفرانسیلی زیر صدق می‌کند

$$u'(x) \le Ku(x) \qquad x \in [a,b]$$

در این معادله K مقدار ثابتی است. نشان دهید

$$u(x) \le u(a)e^{K(x-a)}$$

۹ـ۲ـ۲ نشان دهید اگر (f_1, f_1') و (f_2, f_2') برای معادلهٔ (۹ـ۱۲) در یک نقطهٔ خطی وابسته باشند، در آن‌صورت f_1 و f_2 به‌ازای تمام مقادیر $x \in [a,b]$ خطی وابسته‌اند.

۹ـ۲ـ۳ با استفاده از روش وردش ثابتها، برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن، $f_2(x)$ را از $f_1(x)$ به‌دست آورید.

۹ـ۲ـ۴ نشان دهید $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را می‌توان با یک تبدیل تابعی مناسب، به شکل زیر درآورد

$$u'' + S(x)u = 0$$

$S(x)$ را برحسب $p(x)$ و $q(x)$ پیدا کنید.

۹ـ۲ـ۵ نشان دهید خودالحاقی $\mathbb{M}$ که در (۹ـ۱۹ب) داده شده است، همان $\mathbb{L}$ اصلی است.

۹ـ۳ جوابهای سری توانی معادله‌های دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم

نظریهٔ توابع یکی از غنی‌ترین شاخه‌های ریاضیات به‌شمار می‌آید که مرکز توجه آن برگوناگونی و تنوع بی‌پایان توابع معطوف است. ساده‌ترین نوع تابع یک چندجمله‌ای است، که با انجام عملیات جبری سادهٔ جمع و ضرب روی متغیر مستقل x به‌دست می‌آید. توابع مثلثاتی، از لحاظ پیچیدگی، در مرحلهٔ بعد قرار می‌گیرند، که با روشهای هندسی به‌دست می‌آیند. اگر طالب یک رهیافت ساده‌گرایانهٔ شهودی به توابع باشیم، سیاههٔ توابع در همین‌جا ختم می‌شود. فقط با ابداع و ظهور مشتقات، انتگرالها، و معادلات دیفرانسیل بود که انواع بسیار غنی توابع در قرنهای هجدهم و نوزدهم به منصهٔ ظهور رسیدند.

مثلاً e^x را که پیش از ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود نداشت، می‌توان به عنوان تابعی که با مشتق خودش برابر است، یا تابعی که در عبارت:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

صدق می‌کند، قلمداد کرد. این معادله به‌جواب ضمنی زیر می‌انجامد

$$\int_1^y \frac{dt}{t} = x + C$$

از سمت چپ می‌توان برای تعریف $\ln y$ استفاده کرد. در واقع در بعضی کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به این تعریف برمی‌خوریم (در مسئلهٔ ۹ـ۲۰، استدلالهای منتهی به معرفی $\int_1^x dt/t$ با $\ln x$ را جمعبندی می‌کنیم).

هر چند این تعریف تابع قدری مصنوعی به‌نظر می‌رسد، اما در اکثر کاربردها، این تنها راه تعریف یک تابع است. مثلاً، تابع خطا، که در آمار به‌کار می‌رود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{er}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

چنین تابعی را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد. به همین ترتیب، درکاربردها، به توابعی

چون توابع زیر، در موارد فراوانی برمی‌خوریم

$$\int^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt,\quad \int_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}\,dt,\quad \int_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}},\ldots$$

هیچ‌یک از این توابع را نمی‌توان برحسب سایر توابع شناخته شده بسط داد.

راه بهتری برای مطالعهٔ این‌گونه توابع، عبارت است از مطالعهٔ معادلهٔ دیفرانسیلی که این توابع در آن صدق می‌کنند. در واقع، اکثریت توابعی که در فیزیک ریاضیاتی با آنها سروکار داریم در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن

$$p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$$

صدق می‌کنند، که در آن $p_i(x)$ توابعی مقدماتی، عمدتاً چندجمله‌ای (حداکثر از درجهٔ ۲) هستند. البته، برای مشخص کردن کامل توابع، شرایط مرزی مناسب ضروری‌اند. به‌عنوان مثال، تابع خطای یادشده در بالا، با شرایط مرزی $y(0)=0$ و $y'(0)=1/\sqrt{\pi}$ در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن زیر صدق می‌کند

$$y''+2xy'=0$$

تمایل طبیعی مقاومت در برابر تصور یک تابع به‌عنوان جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، عمدتاً ناشی از ماهیت تجریدی معادلات دیفرانسیل است. مسلماً، تصور دستیابی به توابع با استفاده از ضربهای ساده، یا با شکلهای سادهٔ هندسی که در طی قرون در حول‌وحوش موضوع بوده‌اند، آسانتر است. مثال زیبای زیر باید بر این مقاومت غلبه و شخص شکاک را متقاعد کند که معادلات دیفرانسیل تمام اطلاعات پیرامون یک تابع را در بر دارند.

مثال ۹ـ۳ـ۱: می‌توان نشان داد که جوابهای معادله $y''+y=0$ واجد جملهٔ خاصی‌اند که از $\sin x$ و $\cos x$ انتظار داریم. دو جواب خطی مستقل این معادله را با $C(x)$ و $S(x)$ نشان می‌دهیم. برای مشخص کردن کامل این توابع، شرط می‌کنیم

$$C(0)=1\qquad C'(0)=0$$

$$S(0)=0\qquad S'(0)=1$$

ادعا می‌کنیم که این اطلاعات برای معرفی $C(x)$ و $S(x)$، به‌ترتیب، به‌صورت $\cos x$ و $\sin x$، کافی هستند.

در وحلهٔ اول، بگذارید نشان بدهیم که جوابها وجود دارند و توابع خوش‌رفتاری‌اند. با معلوم بودن $C(\circ)$ و $C'(\circ)$، معادلهٔ $y'' + y = \circ$ می‌تواند تمام مشتقات $C(x)$ در صفر را تولید کند:

$$\begin{aligned} C''(\circ) &= -C(\circ) = -۱ \\ C'''(\circ) &= -C'(\circ) = \circ \\ C^{(۴)}(\circ) &= -C''(\circ) = +۱ \end{aligned}$$

و، به‌طور کلی،

$$C^{(n)}(\circ) = \begin{cases} \circ & \text{به‌ازای } n \text{ فرد} \\ (-۱)^k & \text{به‌ازای } n = ۲k\text{، که در آن } k = \circ, ۱, \ldots \end{cases}$$

بنابراین، بسط تایلور (حقیقی) $C(x)$ عبارت است از

$$C(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} (-۱)^k \frac{x^{۲k}}{(۲k)!} \tag{۱}$$

به همین ترتیب

$$S(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} (-۱)^k \frac{x^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!} \tag{۲}$$

آزمون نسبت ساده‌ای درمورد سری معرف $C(x)$، می‌انجامد به

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+۱}}{a_k} \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{(-۱)^{k+۱} \dfrac{x^{۲(k+۱)}}{(۲k+۲)!}}{(-۱)^k \dfrac{x^{۲k}}{(۲k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{-x^۲}{(۲k+۲)(۲k+۱)} = \circ$$

که نشان می‌دهد سری مربوط به $C(x)$ به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست. به همین ترتیب، سری مربوط به $S(x)$ نیز همگراست. پس ما با توابع خوش‌تعریف متناهی مقدار سروکار داریم.

اکنون برخی خواص $C(x)$ و $S(x)$ را برمی‌شماریم و آنها را اثبات می‌کنیم

(الف) $$C'(x) = -S(x)$$

این رابطه را با مشتق گرفتن از

$$C''(x) + C(x) = 0$$

و نوشتن نتیجه به‌صورت $[C'(x)]'' + C'(x) = 0$، برای روشن کردن این واقعیت که $C'(x)$ نیز یک جواب است، اثبات می‌کنیم. چون $C'(0) = 0$ و $[C'(0)]' = C''(0) = -1$، جواب یکتا باید عبارت باشد از $C'(x) = -S(x)$. به همین ترتیب، $S'(x) = C(x)$.

(ب) $$C^2(x) + S^2(x) = 1$$

چون در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم جملهٔ $p(x)$ غایب است، طبق گزارهٔ ۹ـ۲ـ۶، دترمینان ورونیسکی $C(x)$ و $S(x)$ ثابت است. از سوی دیگر

$$W(C, S; x) = C(x)S'(x) - C'(x)S(x) = C^2(x) + S^2(x)$$

$$\underset{\text{زیرا } W \text{ ثابت است}}{\uparrow}{=} C^2(0) + S^2(0) = 1$$

(ج) $$S(a + x) = S(a)C(x) + C(a)S(x)$$

با بهره‌گیری از قاعدهٔ زنجیری به آسانی ملاحظه می‌کنیم که $S(a + x)$ یکی از جوابهای معادلهٔ $y'' + y = 0$ است. بنابراین، می‌توان آن را به‌صورت یک ترکیب خطی از $C(x)$ و $S(x)$ [که بنابر (ب) خطی مستقل‌اند] نوشت

$$S(a + x) = AS(x) + BC(x) \tag{۳}$$

این عبارت، یک اتحاد تابعی است که، به‌ازای $x = 0$ تبدیل می‌شود به

$$S(a) = BC(0) = B \tag{۴}$$

اگر از دو طرف (۳) مشتق بگیریم، می‌رسیم به

$$C(a+x) = AS'(x) + BC'(\circ) = AC(x) - BS(x) \tag{۵}$$

که، به‌ازای $x = \circ$، می‌دهد $C(a) = A$. با جایگزینی معادله‌های (۴) و (۵) در (۱) به اتحاد مطلوب می‌رسیم. استدلالی مشابه، منتهی می‌شود به $C(a+x) = C(a)C(x) - S(a)S(x)$.

(د) تناوب $C(x)$ و $S(x)$.

فرض کنید $x_\circ$ کوچکترین عدد حقیقی مثبتی است که به‌ازای آن $C(x_\circ) = S(x_\circ)$. در این‌صورت، بنابر خاصیت (ب) داریم $C(x_\circ) = S(x_\circ) = ۱/\sqrt{۲}$. از سوی دیگر

$$\begin{aligned} S(x_\circ + x) &= S(x_\circ)C(x) + C(x_\circ)S(x) = C(x_\circ)C(x) + S(x_\circ)S(x) \\ &= C(x_\circ)C(x) - S(x_\circ)S(-x) = C(x_\circ - x) \end{aligned}$$

زیرا، طبق (۲)، $S(x)$ تابع فردی از x است   بنابر (ج)

این رابطه به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار است؛ در حالت خاص، به‌ازای $x = x_\circ$ داریم

$$S(۲x_\circ) = C(\circ) = ۱ \qquad \Rightarrow \qquad C(۲x_\circ) = \circ$$

با بهره‌گیری مجدد از خاصیت (ج)، می‌رسیم به

$$S(۲x_\circ + x) = S(۲x_\circ)C(x) + C(۲x_\circ)S(x) = C(x)$$

$$C(۲x_\circ + x) = C(۲x_\circ)C(x) - S(۲x_\circ)S(x) = S(x)$$

با جایگذاری $x = ۲x_\circ$، می‌رسیم به

$$S(۴x_\circ) = C(۲x_\circ) = \circ$$

$$C(۴x_\circ) = -S(۲x_\circ) = -۱$$

با ادامهٔ این کار، به سادگی خواهیم داشت

$$S(8x_\circ + x) = S(x)$$
$$C(8x_\circ + x) = C(x)$$

که تناوب $S(x)$ و $C(x)$ را ثابت می‌کنند و نشان می‌دهند دورهٔ تناوب آنها $8x_\circ$ است.

حتی می‌توان $x_\circ$ را نیز تعیین کرد. این کار را به‌صورت یک مسئله به‌عهده دانشجو می‌گذاریم، اما نتیجه به این قرار است

$$x_\circ = \int_\circ^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

یک محاسبهٔ عددی نشان خواهد داد که این کمیت $\pi/4$ است. ●

اکنون که قانع شده‌ایم جوابهای سری نامتناهی معادلات دیفرانسیل، همان اندازه اطلاعات در بر دارند که توابعی که آنها نمایشگرشان هستند، آمادگی داریم که این جوابها را پیدا کنیم.

۹ـ۳ـ۱ روش ضرایب نامعین (روش فروبنیوس)

بررسی صحیح معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم مستلزم بهره‌گیری از آنالیز اعداد مختلط است و بعداً در این فصل به آن خواهیم پرداخت. اما در این مرحله، به دنبال یک جواب سری نامتناهی صوری برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به شرح زیر، هستیم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \circ$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$ حقیقی و تحلیلی‌اند. یعنی $p(x)$ و $q(x)$ را می‌توان با سریهای همگرا در بازه‌ای مانند (a,b) نمایش داد. [حالت جالبی را که در آن $p(x)$ و $q(x)$ ممکن است دارای تکینگیهایی باشند در مبحث جوابهای مختلط بررسی خواهیم کرد.]

روش کلی این است که بسطهایی به شکل

$$p(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k x^k \qquad q(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} b_k x^k \qquad (۹\text{ـ}۲۳)$$

برای توابع ضریب، و یک سری امتحانی به‌صورت

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{۲۴_۹}$$

برای جواب، فرض کنیم. سپس این بسطها را در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم می‌گذاریم و ضرایب توانهای x را در سمت چپ مساوی صفر قرار دهیم. نتیجه عبارت است از

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

و

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k c_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} x^k$$

بنابراین

$$p(x)y' = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k a_m x^m$$

$$= \sum_{k,m} (k+1) a_m c_{k+1} x^{k+m}$$

فرض کنید $k + m \equiv n$. در این‌صورت یکی از مجموعها، مثلاً m، نمی‌تواند بزرگتر از n بشود. بنابراین،

$$p(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [(n-m+1) a_m c_{n-m+1}] x^n$$

به همین ترتیب

$$q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (b_m c_{n-m}) x^n$$

با جایگذاری این مجموعها و قراردادن سری مربوط به y'' در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)c_{n+2}+\sum_{m=0}^{n}[(n-m+1)a_m c_{n-m+1}+b_m c_{n-m}]\right\}x^n=0$$

برای اینکه این رابطه به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، باید ضرایب توانهای x صفر باشند. نتیجه‌ای که به‌دست می‌آید عبارت است از

$$(n+1)(n+2)c_{n+2}=-\sum_{m=0}^{n}[(n-m+1)a_m c_{n-m+1}+b_m c_{n-m}] \qquad \text{به‌ازای } n\geq 0$$

یا

$$c_{n+1}=-\frac{\sum_{m=0}^{n-1}[(n-m)a_m c_{n-m}+b_m c_{n-m-1}]}{n(n+1)} \qquad \text{به‌ازای } n\geq 1 \qquad (۹\text{ـ}۲۵)$$

اگر c_0 و c_1، مثلاً، از شرایط مرزی معلوم باشند، می‌توان c_n را تعیین کرد، که انحصاراً بنابر (۹ـ۲۵)، داریم $n\geq 2$. این نتیجه، به‌نوبهٔ خود، یک بسط سری نامتناهی منحصر به فرد (یکتا) برای y به‌دست می‌دهد، و ما به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۹ـ۳ـ۱: (قضیهٔ وجود) برای هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم به شکل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ و با توابع ضریب تحلیلی که به کمک (۹ـ۲۳) داده شده است یک سری نامتناهی یکتا، که با (۹ـ۲۵) بیان می‌شود، وجود دارد که برای هر انتخاب c_0 و c_1، به‌طور صوری در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم صدق می‌کند. ■

این قضیه صرفاً وجود یک سری نامتناهی صوری را بیان می‌کند و هیچ ذکری از همگرایی آن به میان نمی‌آورد. مثال زیر نشان خواهد داد که حاصل آن لزوماً "همگرایی" نیست.

مثال ۹ـ۳ـ۲: جواب سری نامتناهی صوری معادلهٔ $x^2y'-y+x=0$ را پیدا کنید.

فرض می‌کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. در آن‌صورت، $y'=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(n+1)x^n$، و از جایگذاری در معادله داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(n+1)x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x=0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^{n+2} - c_0 - c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n + x = 0$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 1$$

و

$$(n+1)c_{n+1} = c_{n+2} \quad n \geq 0$$

بنابراین، به رابطهٔ بازگشتی زیر می‌رسیم

$$nc_n = c_{n+1} \qquad n \geq 1 \text{ به‌ازای}$$

جواب یکتای این رابطه عبارت است از $c_n = (n-1)!$، که به جواب زیر برای معادلهٔ دیفرانسیل منتهی می‌شود

$$y(x) = x + x^2 + (2!)x^3 + (3!)x^4 + \cdots + (n-1)!x^n + \cdots$$

این سری برای مقادیر ناصفر x همگرا نیست. ●

به‌طوری که بعداً خواهیم دید، برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معمولی، سریهای توانی (۹ـ۲۴) به یک تابع تحلیلی همگرا می‌شوند. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم حل‌شده در مثال ۹ـ۳ـ۲ نرمال (معمولی) نیست.

مثال ۹ـ۳ـ۳: به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ ۹ـ۳ـ۱، بگذارید معادلهٔ لژاندر را در شکل متعارفش در نظر بگیریم

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

که در آن، λ یک ثابت است. به‌ازای $|x| < ۱$، p و q هر دو تحلیلی‌اند، و

$$p(x) = -۲x\sum_{m=۰}^{\infty}(x^۲)^m = \sum_{m=۰}^{\infty}(-۲)x^{۲m+۱}$$

$$q(x) = \lambda\sum_{m=۰}^{\infty}(x^۲)^m = \sum_{m=۰}^{\infty}\lambda x^{۲m}$$

بنابراین

$$a_m = \begin{cases} ۰ & \text{زوج } m \\ -۲ & \text{فرد } m \end{cases} \quad \text{و} \quad b_m = \begin{cases} \lambda & \text{زوج } m \\ ۰ & \text{فرد } m \end{cases}$$

می‌خواهیم در معادلهٔ (۹ـ۲۵) به‌جای a_m و b_m مقدار قرار دهیم و $c_{n+۱}$ را پیدا کنیم. بهتر است دو حالت را وقتی n زوج و وقتی n فرد است، در نظر بگیریم. ابتدا، فرض می‌کنیم $n = ۲r + ۱$، که r یک عدد درست است. در این‌صورت به آسانی می‌توان پی برد که کاربرد (۹ـ۲۵) به

$$(۲r+۱)(۲r+۲)c_{۲r+۲} = \sum_{m=۰}^{r}(۴r - ۴m - \lambda)c_{۲(r-m)} \qquad (۱)$$

منجر می‌شود. با جایگذاری $r \to r+۱$، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}(۲r+۳)(۲r+۴)c_{۲r+۴} &= \sum_{m=۰}^{r+۱}(۴r+۴-۴m-\lambda)c_{۲(r+۱-m)} \\ &= (۴r+۴-\lambda)c_{۲r+۲} + \sum_{m=۱}^{r+۱}(۴r+۴-۴m+\lambda)c_{۲(r+۱-m)} \\ &= (۴r+۴-\lambda)c_{۲r+۲} + \sum_{m=۰}^{r}(۴r-۴m-\lambda)c_{۲(r-m)}\end{aligned}$$

$\uparrow$
با تغییر دادن متغیر ظاهری

$$= (۴r+۴-\lambda)c_{۲r+۲} + (۲r+۱)(۲r+۲)c_{۲r+۲}$$

$\uparrow$
طبق (۱)

$$= [۴r+۴-\lambda+(۲r+۱)(۲r+۲)]c_{۲r+۲}$$

اکنون با قرار دادن $k \equiv ۲r + ۲$، خواهیم داشت

$$(k+۱)(k+۲)c_{k+۲} = [k(k+۱) - \lambda]c_k$$

یا

$$c_{k+۲} = \frac{k(k+۱) - \lambda}{(k+۱)(k+۲)}c_k \qquad \text{به‌ازای } k \text{ زوج}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که این رابطه به‌ازای مقادیر فرد k نیز برقرار است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$c_{n+۲} = \frac{n(n+۱) - \lambda}{(n+۱)(n+۲)}c_n \tag{۲}$$

به‌ازای مقادیر دلخواه $c_۰$ و $c_۱$، به دو جواب مستقل می‌رسیم، که یکی فقط دربردارندهٔ توانهای زوج x، و دیگری شامل فقط توانهای فرد x است. آزمون نسبت،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+۲}x^{n+۲}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱) - \lambda}{(n+۱)(n+۲)}x^۲ = x^۲$$

نشان می‌دهد که سری به‌ازای $x = \pm ۱$ واگراست، مگر اینکه، به‌ازای عدد درست و مثبت l، داشته باشیم $\lambda = l(l+۱)$. در این‌صورت، سری تبدیل به یک چندجمله‌ای می‌شود، که همان چندجمله‌ای لژاندر است که در فصل ۵ با آن سروکار پیدا کردیم.

معادلهٔ (۲) را می‌توانستیم با قراردادن مستقیم معادله‌های (۹ـ۲۳) و (۹ـ۲۴) در شکل متعارف (نرمال) معادلهٔ لژاندر، به‌دست آوریم. راه طولانی‌تر دستیابی به (۲)، کلیت معادلهٔ (۹ـ۲۵) را نشان می‌دهد. در مورد معادله‌های دیفرانسیل خاص، عموماً بهتر است (۹ـ۲۳) و (۹ـ۲۴) را مستقیماً جاگذاری کنیم. ●

مثال ۹ـ۳ـ۴: چندجمله‌ایهای هرمیت را در فصل ۵ و در بحث چندجمله‌ایهای متعامد کلاسیک مطالعه کردیم. حال ببینیم این چندجمله‌ایها چگونه در فیزیک ظاهر می‌شوند.

معادلهٔ شرودینگر یک‌بعدی برای ذره‌ای واقع در پتانسیل $V(x)$، از رابطهٔ انرژی کلاسیک $E = p^۲/۲m + V(x)$ با جایگزینی $i\hbar\partial/\partial t$ به‌جای E و $-i\hbar\partial/\partial x$ به‌جای p و اعمال

عملگر حاصل بر تابع موج $\Psi(x,t)$ به‌دست می‌آید. بنابراین،

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^۲}{۲m}\,\frac{\partial^۲\Psi}{\partial x^۲}+V(x)\Psi$$

نوشتن $\Psi(x,t)$ به‌صورت $\Psi(x,t)=u(x)T(t)$، وابستگی به زمان را جدا می‌کند، و می‌دهد

$$T(t)=\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$$

که E انرژی ذره است. عمل بالا، همچنین منجر می‌شود به

$$\frac{d^۲u}{dx^۲}-\frac{۲m}{\hbar^۲}V(x)u+\frac{۲m}{\hbar^۲}Eu=۰$$

برای یک نوسانگر هماهنگ، $V(x)=۱/۲kx^۲\equiv ۱/۲m\omega^۲x^۲$، و

$$u''-\frac{m^۲\omega^۲}{\hbar^۲}x^۲u+\frac{۲m}{\hbar^۲}Eu=۰$$

با جایگزینی $u(x)=H(x)\exp(-m\omega x^۲/۲\hbar)$ و سپس تغییر متغیر $x=(۱/\sqrt{m\omega/\hbar})y$، خواهیم داشت

$$H''-۲yH'+\lambda H=۰ \qquad \text{که در آن} \quad \lambda=\frac{۲E}{\hbar\omega}-۱ \qquad (۱)$$

این عبارات صورت متعارف معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت است. بنابراین، بسط زیر را در نظر می‌گیریم

$$H(y)=\sum_{n=۰}^{\infty}c_ny^n$$

و به روابط زیر می‌رسیم

$$H'(y)=\sum_{n=۱}^{\infty}nc_ny^{n-۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)c_{n+۱}y^n$$

$$H''(y)=\sum_{n=۱}^{\infty}n(n+۱)c_{n+۱}y^{n-۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)(n+۲)c_{n+۲}y^n$$

که اگر آنها را در (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+\lambda c_n]y^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}y^{n+1}=0$$

یا

$$2c_2+\lambda c_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+3)c_{n+3}+\lambda c_{n+1}-2(n+1)c_{n+1}]y^{n+1}=0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توانهای y، داریم

$$c_2 = -\frac{\lambda}{2}c_0$$

$$c_{n+3}=\frac{2(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+3)}c_{n+1} \qquad \text{به‌ازای } n\geq 0$$

یا، اگر به‌جای n قرار دهیم $n-1$،

$$c_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n \tag{2}$$

آزمون نسبت نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_nx^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}x^2=0 \qquad \forall x$$

بنابراین، سری نامتناهی‌ای که ضرایبش از رابطهٔ بازگشتی (۲) پیروی کنند، به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست. با این همه، از نظر فیزیکی [الزوم $\lim_{x\to\infty}u(x)=0$؛ تمرین ۹ـ۳ـ۲]، سری باید بریده و کوتاه شود. این اتفاق فقط وقتی می‌افتد که به‌ازای یک عدد درست l داشته باشیم $2l=\lambda$، و آن وقت است که یک چندجمله‌ای به‌دست می‌آوریم، که همان چندجمله‌ای درجهٔ l هرمیت است. پیامد کوتاه شدن سری، کوانتش انرژی نوسانگر هماهنگ است. این مطلب را می‌توان به آسانی مشاهده کرد

$$2l=\frac{2E}{\hbar\omega}-1 \qquad \Rightarrow \qquad E=\left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

از معادلهٔ (۲)، دو جواب به‌دست می‌آید، یکی فقط شامل توانهای زوج و دیگری فقط شامل توانهای فرد. مسلم است که این جوابها خطی مستقل‌اند. بنابراین، با دانستن c_0 و c_1، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن در (۱) تعیین می‌شود. ●

در دو مثال بالا مشاهده می‌کنیم که چگونه با حل یک معادلهٔ دیفرانسیل، برخی توابع خاص که در فیزیک ریاضیاتی آنها را به‌کار می‌بریم، به روشی تحلیلی به‌دست می‌آیند. در فصل ۸ دیدیم چگونه چندجمله‌ایهای لژاندر را با روشهای جبری به‌دست آوریم (بحث هماهنگهای کروی). مطابق مثال زیر، حل مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ با استفاده از روشهای جبری نیز آموزنده است.

مثال ۹ـ۳ـ۵: هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ عبارت است از

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

که در آن $\mathbb{P} = -i\hbar\, d/dx$، عملگر تکانه است. بگذارید ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارهای $\mathbb{H}$ را پیدا کنیم. عملگر

$$\mathbf{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{\mathbb{P}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

و الحاقی آن

$$\mathbf{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{\mathbb{P}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

را تعریف می‌کنیم (توجه داشته باشید که x و p هرمیتی‌اند). با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی

$$[x, \mathbb{P}] = i\hbar\mathbb{1}$$

می‌توان ثابت کرد که

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \mathbb{1}$$

و نیز

$$\mathbb{H} = \hbar\omega\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\mathbb{1} \qquad (1)$$

علاوه بر این

$$[\mathbb{H}, \mathbf{a}] = \hbar\omega \left[\mathbf{a}^\dagger + \frac{۱}{۲}, \mathbf{a}\right] = \hbar\omega[\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}]\mathbf{a} = -\hbar\omega\, \mathbf{a} \qquad (\text{۲ـالف})$$

به همین ترتیب

$$[\mathbb{H}, \mathbf{a}^\dagger\,] = \hbar\omega\, \mathbf{a}^\dagger \qquad (\text{۲ـب})$$

فرض کنید $|\mathrm{u}_E\rangle$ ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار E است:

$$\mathbb{H}|\mathrm{u}_E\rangle = E|\mathrm{u}_E\rangle$$

با استفاده از معادله‌های (۲ـالف) و (۲ـب) خواهیم داشت

$$\mathbb{H}\,\mathbf{a}|\mathrm{u}_E\rangle = (\mathbf{a}\mathbb{H} - \hbar\omega\,\mathbf{a})|\mathrm{u}_E\rangle = (E - \hbar\omega)\mathbf{a}|\mathrm{u}_E\rangle$$

و به‌طور مشابه

$$\mathbb{H}\,\mathbf{a}^\dagger\,|\mathrm{u}_E\rangle = (E + \hbar\omega)\,\mathbf{a}^\dagger\,|\mathrm{u}_E\rangle$$

به این ترتیب، $\mathbf{a}|\mathrm{u}_E\rangle$ یک ویژه‌بردار $\mathbb{H}$، با ویژه‌مقدار $E - \hbar\omega$، و $\mathbf{a}^\dagger\,|\mathrm{u}_E\rangle$ ویژه‌برداری دیگر، با ویژه‌مقدار $E + \hbar\omega$، است. به این علت است که $\mathbf{a}^\dagger$ و $\mathbf{a}$ را به‌ترتیب عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده (یا آفرینش و نابودی) می‌نامیم. می‌توان نوشت

$$\mathbf{a}|\mathrm{u}_E\rangle = c_E|\mathrm{u}_{E-\hbar\omega}\rangle$$

با اعمال پی‌درپی $\mathbf{a}$، حالتهای با انرژی پایینتر به‌دست می‌آیند. اما برای این کار، حدی وجود دارد؛ چون $\mathbb{H}$ یک عملگر مثبت است نمی‌تواند دارای ویژه‌مقدار منفی باشد. بنابراین، باید حالت پایه‌ای چنان وجود داشته باشد که

$$\mathbf{a}|\mathrm{u}_\circ\,\rangle = \circ$$

انرژی این حالت پایه (یا ویژه‌مقدار متناظر با $|\mathrm{u}_\circ\,\rangle$) را می‌توان به‌دست آورد

$$\mathbb{H}|\mathrm{u}_\circ\,\rangle = \left(\hbar\omega\,\mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{a} + \frac{۱}{۲}\hbar\omega\right)|\mathrm{u}_\circ\,\rangle = \frac{۱}{۲}\hbar\omega|\mathrm{u}_\circ\,\rangle$$

اعمال پیاپی عملگر بالابرنده، هم حالتهای با انرژی بالاتر را می‌دهد و هم ویژه‌مقدارهای آنها را. بنابراین، $|\mathrm{u}_n\rangle$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\mathbf{a}^\dagger)^n|\mathrm{u}_۰\rangle = c_n|\mathrm{u}_n\rangle \tag{۳}$$

که در آن c_n ثابت بهنجارش است. انرژی متناظر با $|\mathrm{u}_n\rangle$ عبارت است از

$$E_n = \left(n + \frac{۱}{۲}\right)\hbar\omega$$

که همان چیزی است که در مثال ۹ـ۳ـ۴ به‌دست آوردیم.

برای یافتن c_n، شرط می‌کنیم که $|\mathrm{u}_n\rangle$ راست‌هنجار باشد. از ضرب داخلی (۳) در خودش، می‌توان نشان داد (مسئلهٔ ۹ـ۲۴)

$$|c_n|^۲ = n|c_{n-۱}|^۲ \quad \Rightarrow \quad |c_n|^۲ = n!|c_۰|^۲$$

که به‌ازای $|c_۰| = ۱$ و c_n حقیقی، خواهیم داشت

$$c_n\sqrt{n!}$$

به این ترتیب، نتیجه می‌شود

$$|\mathrm{u}_n\rangle = \frac{۱}{\sqrt{n!}}(\mathbf{a}^\dagger)^n|\mathrm{u}_۰\rangle$$

از سوی دیگر، برحسب توابع و عملگرهای مشتق از $\mathbf{a}|\mathrm{u}_۰\rangle = ۰$ می‌رسیم به

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{۲\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\frac{d}{dx}\right)u_۰(x) = ۰$$

که دارای جواب زیر است

$$u_۰(x) = c\exp\left(-\frac{m\omega x^۲}{۲\hbar}\right)$$

از بهنجارش $u_\circ(x)$، داریم

$$1 = \langle u_\circ | u_\circ \rangle = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} [u_\circ(x)]^2 dx = c^2 \left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/2}$$

بنابراین

$$u_\circ(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

اکنون می‌توانیم (۴) را برحسب عملگرهای دیفرانسیل بنویسیم

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

با تعریف متغیر جدید $y = \sqrt{m\omega/\hbar}x$، معادلهٔ بالا تبدیل می‌شود به

$$u_n\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}y\right) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} \left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2}$$

با استفاده از این رابطه و تعریفی که در مثال ۹ـ۳ـ۴ از چندجمله‌ایهای هرمیت داده شده است، یک فرمول کلی برای $H_n(x)$ می‌توان به‌دست آورد. در حالت خاص، اگر توجه کنیم که (مسئلهٔ ۹ـ۲۴)

$$e^{y^2/2}\left(y - \frac{d}{dy}\right)e^{-y^2/2} = -e^{y^2}\frac{d}{dy}e^{-y^2}$$

و به‌طور کلی

$$e^{y^2/2}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2} = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$$

فرمول رودریگز تعمیم‌یافتهٔ فصل ۵ دوباره به‌دست می‌آید. ●

معادلات دیفرانسیل دیگری، مانند معادلات بسل و لاگر، نیز در فیزیک حائز اهمیت‌اند. این معادله‌ها را بعداً با استفاده از آنالیز اعداد مختلط مطالعه خواهیم کرد.

با قضیهٔ مهم زیر به این بخش پایان می‌دهیم.[1]

قضیهٔ ۹ـ۳ـ۲: برای هر گزینهٔ c_0 و c_1، شعاع همگرایی هر جواب سری توانی به شکل (۹ـ۲۴) برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن نرمال $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ که به کمک رابطهٔ بازگشتی (۹ـ۲۵) تعریف شده حداقل به اندازهٔ شعاع کوچکتر از میان دو شعاع همگرایی دو سری (۹ـ۲۳) است. ■

در حالت خاص، اگر $p(x)$ و $q(x)$ در بازه‌ای در اطراف $x = 0$ تحلیلی باشند، جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن نرمال نیز در همسایگی $x = 0$ تحلیلی است.

تمرینها

۹ـ۳ـ۱ معادلهٔ لاپلاس در الکتروستاتیک عبارت است از $\nabla^2\Phi = 0$. وقتی این معادله را در مختصات کروی تفکیک کنیم، جزء شعاعی آن منجر می‌شود به

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{dy}{dx}\right] - n(n+1)y = 0 \qquad n \geq 0 \text{ به‌ازای}$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین، دو جواب مستقل این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی را پیدا کنید. (باید، هم توانهای منفی x و هم توانهای مثبت آن را در نظر بگیرید!)

۹ـ۳ـ۲ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n$$

حداقل با همان سرعتی که e^{x^2} به بینهایت میل می‌کند، به بینهایت می‌رود. به عبارت دیگر، نشان دهید که $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-x^2} \neq 0$. (راهنمایی: فقط توانهای زوج x را در نظر بگیرید.)

۹ـ۴ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \qquad \text{(۹ـ۲۶الف)}$$

---

۱. برای اثبات، ر.ک.
Birkhoff and Rota. 1978, p. 95.

اگر $r(x) = 0$، معادلهٔ نظیر را معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام همگن می‌نامیم. ابتدا حالت همگن را بررسی می‌کنیم.

۹ـ۴ـ۱ حالت همگن

جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام همگن

$$\mathbb{L}[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (\text{۹ـ۲۶ب})$$

را می‌توان با جایگزینی نمایی $y = e^{\lambda x}$، که منجر به معادلهٔ زیر می‌شود

$$\mathbb{L}[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

پیدا کرد. این رابطه در صورتی برقرار است که λ یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه:

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

باشد که طبق قضیهٔ اصلی جبر (فصل ۷) می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{k_m} \qquad (\text{۹ـ۲۷})$$

λ_j ریشه‌های متمایز $p(\lambda)$ را تشکیل می‌دهند و دارای چندگانگی k_j هستند.

خوب است $\mathbb{D} \equiv d/dx$ را معرفی و عملگر زیر را تعریف کنیم

$$\mathbb{L} \equiv p(\mathbb{D}) = \mathbb{D}^n + a_{n-1}\mathbb{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbb{D} + a_0$$

چون $\mathbb{D} - \mu$ و $\mathbb{D} - \lambda$ به‌ازای ثابتهای دلخواه μ و λ جابه‌جا می‌شوند، می‌توانیم بدون ابهام، از رابطهٔ بالا عامل‌گیری کنیم و بنویسیم

$$\mathbb{L} = p(\mathbb{D}) = (\mathbb{D} - \lambda_1)^{k_1}(\mathbb{D} - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\mathbb{D} - \lambda_m)^{k_m} \qquad (\text{۹ـ۲۸})$$

در مسیر دستیابی به عمومی‌ترین جواب معادلهٔ (۹ـ۲۶ب) ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر عدد دلخواه $r > 0$،

$$(\mathbb{D} - \lambda)(x^r e^{\lambda x}) = r x^{r-1} e^{\lambda x}$$

و به‌طور کلی،

$$(\mathbb{D}-\lambda)^k(x^r e^{\lambda x}) = r(r-۱)\cdots(r-k+۱)x^{r-k}e^{\lambda x}$$

در حالت خاص،

$$(\mathbb{D}-\lambda)^k(x^r e^{\lambda x}) = ۰ \qquad k > r \tag{۹\_۲۹}$$

بنابراین، مجموعه توابع $\{x^r e^{\lambda_j x}\}_{r=۰}^{k_j-۱}$ همهٔ جوابهای (۹_۲۶ب) هستند.

ریشه‌های λ_j عموماً مختلط‌اند. اگر ضرایب $\{a_j\}_{j=۰}^{n-۱}$ حقیقی باشند، در آن‌صورت هرگاه $x^r e^{\lambda x}$ یکی از جوابها باشد، آنگاه $x^r e^{\lambda^* x}$ نیز یک جواب است. بنابراین، با نوشتن $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ و استفاده از خطی بودن $\mathbb{L}$، نتیجه می‌گیریم که

$$x^r e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \quad \text{و} \quad x^r e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \qquad r = ۰, ۱, \ldots, k_j - ۱$$

همه جوابهای (۹_۲۶ب) هستند.

به آسانی ثابت می‌شود که توابع $x^r e^{\lambda_j x}$ خطی مستقل‌اند (تمرین ۹_۴_۱). از سوی دیگر، معادلهٔ (۹_۲۷) اشاره بر این دارد که مجموعهٔ $\{x^r e^{\lambda_j x}\}$، که در آن $r = ۰, ۱, \ldots k_j - ۱$ و $j = ۱, ۲, \ldots, m$، دقیقاً شامل n جزء است. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که حداقل n جواب خطی مستقل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام همگن (۹_۲۶ب) وجود دارد. در واقع، می‌توان نشان داد که تعداد جوابهای خطی مستقل دقیقاً nتاست.

قضیهٔ ۹_۴_۱: فرض کنید $\{\lambda_j\}_{j=۱}^{m}$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام همگن حقیقی (۹_۲۶ب) با چندگانگی‌های متناظر $\{k_j\}_{j=۱}^{m}$ باشند. در آن‌صورت توابع $x^r e^{\lambda_j x}$، که در آن $r = ۰, ۱, \ldots, k_j - ۱$، یک پایه جواب معادلهٔ (۹_۲۶ب) هستند. ■

مثال ۹_۴_۱: حرکت سه‌بعدی یک ذرهٔ تحت تأثیر نیرویی مرکزی را می‌توان به روش زیر به یک مسئلهٔ یک‌بعدی کاهش داد. ابتدا، صفحهٔ xy را صفحه‌ای در نظر می‌گیریم که از سرعت اولیه ذره و خط واصل بین ذره و مرکز نیرو، که منطبق بر مبدأ مختصات فرض می‌شود، تشکیل شده است. چون هیچ نیرویی به طرف بیرون صفحه وارد نمی‌آید، مسئله به دوبعد کاهش یافته است.

سپس، معادلات حرکت را در مختصات قطبی می‌نویسیم (فصل ۱):

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(r)$$

$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2m\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

معادلهٔ دوم کاهش می‌یابد به

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

(نقطه، روی θ به معنای مشتق نسبت به زمان است). این معادله، مبین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای، $L = mr^2\dot{\theta}$، است. با جایگزینی در معادلهٔ اول، خواهیم داشت

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \qquad (1)$$

حال اگر قرار بدهیم $u \equiv 1/r$، داریم

$$r = \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\,\frac{du}{d\theta}$$

همچنین، $\ddot{r} = -(L^2u^2/m^2)d^2u/d\theta^2$. از جایگزینی در (۱) داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

در مورد مسئلهٔ کپلر، حل این معادله ساده است، زیرا

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{1}{u}\right) = GMmu^2$$

و داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{GMm^2}{L^2} \qquad (2)$$

با فرض $v = u + GMm^۲/L^۲$، معادلهٔ (۲) تبدیل می‌شود به

$$\frac{d^۲v}{d\theta^۲} + v = ۰$$

چندجمله‌ای مشخصه، عبارت است از $۱ + \lambda^۲$ با ریشه‌های $\lambda = \pm i$. این ریشه‌های ساده به جوابهای خطی مستقل $v = \sin\theta$ و $v = \cos\theta$ می‌انجامند. بنابراین، جواب عمومی را می‌توان به صورتهای زیر بیان کرد

$$v = c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta$$

یا

$$v = A\cos(\theta - \theta_۰) \equiv u + \frac{GMm^۲}{L^۲}$$

یا، سرانجام

$$\frac{۱}{r} = A\cos(\theta + \theta_۰) - \frac{GMm^۲}{L^۲}$$

این معادلهٔ مقطع مخروطی، هر سه قانون کپلر را در بردارد. ●

مثال ۹ـ۴ـ۲: یک معادله که هم در مکانیک و هم در نظریهٔ مدارها به‌کار می‌رود، عبارت است از

$$\frac{d^۲y}{dt^۲} + a\frac{dy}{dt} + by = ۰ \qquad a, b > ۰ \tag{۱}$$

چندجمله‌ای مشخصهٔ این معادله عبارت است از

$$p(\lambda) = \lambda^۲ + a\lambda + b$$

ریشه‌های این چندجمله‌ای به این قرارند

$$\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}\left(-a + \sqrt{a^۲ - ۴b}\right) \qquad \text{و} \qquad \lambda_۲ = \frac{۱}{۲}\left(-a - \sqrt{a^۲ - ۴b}\right)$$

بسته به اندازهٔ نسبی a و b، می‌توانیم سه حالت متمایز تشخیص بدهیم.

(الف) $a^۲ > ۴b$ (تندمیرا)

فرض کنید $\gamma \equiv ۱/۲\sqrt{a^۲ - ۴b}$. در این‌صورت، عمومی‌ترین جواب، عبارت است از

$$y(t) = e^{-at/۲}(c_۱ e^{\gamma t} + c_۲ e^{-\gamma t})$$

چون $a > ۲\gamma$، این جواب در $t = ۰$ به‌صورت $y = c_۱ + c_۲$ آغاز می‌شود و پیوسته نزول می‌کند؛ به‌طوری که وقتی $t \to \infty$، آنگاه $y(t) \to ۰$.

(ب) $a^۲ = ۴b$ (میرای بحرانی)

در این حالت، یک ریشهٔ چندگانه داریم. بنابراین، جواب عمومی عبارت است از

$$y(t) = c_۱ t e^{-at/۲} + c_۲ e^{-at/۲}$$

این جواب در $t = ۰$ به‌صورت $y(۰) = c_۲$ آغاز می‌شود، در $t = ۲/a - c_۲/c_۱$، به یک بیشینه (یا کمینه) می‌رسد، و سپس به‌صورت نمایی به صفر میل می‌کند

(ج) $a^۲ < ۴b$ (نوسانی میرا)

فرض کنید $\omega \equiv ۱/۲\sqrt{۴b - a^۲}$. در این‌صورت، $\lambda_۱ = -a/۲ + i\omega$ و $\lambda_۲ = \lambda_۱^*$. ریشه‌ها مختلط‌اند، و بنابراین، عمومی‌ترین جواب به شکل زیر است

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-at/۲}(c_۱ \cos\omega t + c_۲ \sin\omega t) \\ &\equiv A e^{-at/۲}\cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

پس، جواب یک حرکت نوسانی با دامنهٔ میرای $A\exp(-at/۲)$ است. توجه کنید که اگر $a = ۰$، دامنه افت نمی‌کند. از این‌روست که a را عامل میرایی (یا ثابت میرایی) می‌نامیم.

این معادله‌ها یا یک دستگاه مکانیکی نوسان‌کننده، بدون هیچ نیروی خارجی، در یک شارهٔ چسبنده (اتلافی) را توصیف می‌کنند، یا مداری الکتریکی مشتمل بر یک مقاومت R، یک

القاگر L، و یک ظرفیت C را تشریح می‌کنند. برای نوسانگرهای مکانیکی داریم $a = r/m$ و $b = k/m$، که در آن، r ثابت اتلافی است که با رابطهٔ $f = rv$ با نیروی اتلافی و سرعت مرتبط است، و k صرفاً ثابت فنر (معیار سفتی فنر) است. برای مدارهای RLC، داریم $a = R/L$ و $b = ۱/LC$. بنابراین، عامل میرایی به بزرگی نسبی R و L بستگی دارد. از سوی دیگر، بسامد $\omega = \sqrt{b - (a/۲)^۲} = \sqrt{۱/LC - R^۲/۴L^۲}$به هر سه پارامتر بستگی دارد. در حالت خاص و به‌ازای $R \geq ۴L/C$، مدار نوسان نمی‌کند. ●

۹ـ۴ـ۲ حالت ناهمگن و تابع انتقال

یکی ازکاربردهای جالب معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام، وقتی است که یک نیروی محرکه بر دستگاه فیزیکی وارد می‌آید. این نیروی محرکه صرفاً جملهٔ ناهمگن معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام است. بهترین راه برای حل چنین معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام ناهمگنی، در کلی‌ترین شکل آن، استفاده از تبدیلهای فوریه و توابع گرین است، که ما این کار را در فصل ۱۱ انجام خواهیم داد. در یک حالت خاص، اما مهم، که در آن جملهٔ ناهمگن، حاصلضربی از چندجمله‌ایها و توابع نمایی است، جواب را می‌توان به‌صورت یک شکل بسته پیدا کرد. در این زیربخش به بررسی این حالت می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که جملهٔ ناهمگن در معادلهٔ (۹ـ۲۶الف) به شکل زیر است

$$r(x) = \sum_k p_k(x) e^{\lambda_k x}$$

که در آن $p_k(x)$ چندجمله‌ای و λ_k ثابت (مختلط) هستند. عمومی‌ترین جواب (۹ـ۲۶الف)، یک ترکیب خطی از پایه جوابها (آن‌طور که در قضیهٔ ۹ـ۴ـ۱ بیان شده است) و یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام است. پس به یافتن جواب خصوصی نیاز داریم. چون $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی است، روشن است که اگر $y_۱$ یک جواب خصوصی $\mathbb{L}[y] = r_۱(x)$ و $y_۲$ یک جواب خصوصی $\mathbb{L}[y] = r_۲(x)$ باشد، در آن‌صورت $y_۱ + y_۲$ یکی از جوابهای $\mathbb{L}[y] = r_۱(x) + r_۲(x)$ خواهد بود. پس اگر $r(x)$ را محدود کنیم به

$$r(x) = p(x) e^{\lambda x}$$

که در آن $p(x)$ یک چندجمله‌ای است، ازکلیت مسئله کاسته نخواهد شد.

به آسانی می‌توان نشان داد که، به‌ازای هر $f \in \mathrm{C}^{(1)}[a, b]$، داریم

$$(\mathbb{D} - \lambda)[e^{\lambda x} f(x)] = e^{\lambda x} f'(x)$$

در حالت خاص، اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ k باشد، در آن‌صورت معادلهٔ

$$(\mathbb{D} - \lambda)(u) = e^{\lambda x} p(x)$$

دارای یک جواب به شکل $u = e^{\lambda x} q(x)$ خواهد بود، که در آن $q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $k + ۱$ است که تابع اولیهٔ $p(x)$ به‌شمار می‌آید. همچنین می‌توان به آسانی ثابت کرد که هرگاه $\lambda_۱ \neq \lambda_۲$، در آن‌صورت

$$(\mathbb{D} - \lambda_۱)[e^{\lambda x} f(x)] = e^{\lambda x}[(\lambda - \lambda_۱) f(x) + f'(x)] \qquad (۹\text{\_}۳۰)$$

و، بنابراین معادلهٔ

$$(\mathbb{D} - \lambda_۱)(u) = e^{\lambda x} p(x) \qquad (۹\text{\_}۳۱)$$

دارای یک جواب به شکل $u = e^{\lambda x} q(x)$ است، که در آن $q(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ k است.

اعمال پی‌درپی معادله‌های (۹ـ۳۰) و (۹ـ۳۱) ما را به یک قضیه هدایت می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۴ـ۲: جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام $\mathbb{L}[y] = e^{\lambda x} S(x)$، که در آن $S(x)$ یک چندجمله‌ای است، عبارت است از $e^{\lambda x} q(x)$ که در آن $q(x)$ نیز یک چندجمله‌ای است. درجهٔ $q(x)$ با درجهٔ $S(x)$ یکی است، مگر اینکه $\lambda = \lambda_j$، که λ_j یک ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصهٔ $\mathbb{L}$ [معادلهٔ (۹ـ۲۷)] است. اگر $\lambda = \lambda_j$ دارای چندگانگی k_j باشد، در آن‌صورت درجهٔ $q(x)$ از درجهٔ $S(x)$ به اندازهٔ k_j فراتر می‌رود. ■

وقتی شکل جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام را پیدا کردیم، می‌توانیم ضرایب چندجمله‌ای جواب را با جایگزین کردن در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام و مساوی قرار دادن توانها در دو طرف، به‌دست آوریم.

مثال ۹ـ۴ـ۳: عمومی‌ترین جوابهای دو معادلهٔ دیفرانسیل را تحت شرایط مرزی $y = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ به‌دست می‌آوریم

(الف)

$$y'' + y = xe^x \qquad (۱)$$

چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از $۱ + \lambda^۲$، با ریشه‌های $\lambda_۱ = i$ و $\lambda_۲ = -i$. بنابراین، یک پایه جواب عبارت خواهد بود از $\{\cos x, \sin x\}$. برای پیدا کردن جواب خصوصی ملاحظه می‌کنیم که λ (ضریب x در جزء ناهمگن) مساوی ۱ است، که هیچ‌کدام از ریشه‌های $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ نیست. به این ترتیب، جواب خصوصی به شکل $q(x)e^x$ است که در آن $q(x) = Ax + B$ از درجهٔ ۱ است [هم‌درجه با $S(x) = x$]. اکنون $u = (Ax + B)e^x$ را در (۱) جایگزین می‌کنیم و A و B را به‌دست می‌آوریم

$$u' = Ae^x + (Ax + B)e^x$$
$$u'' = ۲Ae^x + (Ax + B)e^x$$

با قرار دادن در (۱)، داریم

$$Axe^x + (۲A + B)e^x + (Ax + B)e^x = xe^x$$

از مساوی قرار دادن توانها، می‌رسیم به

$$۲A = ۱ \quad \text{و} \quad ۲A + ۲B = ۰ \quad \Rightarrow \quad A = \frac{۱}{۲} = -B$$

بنابراین، عمومی‌ترین جواب عبارت است از

$$y = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + \frac{۱}{۲}(x - ۱)e^x$$

با اعمال شرایط مرزی داده شده، خواهیم داشت

$$۰ = y(۰) = c_۱ - \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad c_۱ = \frac{۱}{۲}$$
$$۱ = y'(۰) = c_۲$$

بنابراین،

$$y = \frac{۱}{۲}\cos x + \sin x + \frac{۱}{۲}(x-۱)e^x$$

جواب یکتاست.

(ب)

$$y'' - y = xe^x \tag{۲}$$

در اینجا $p(\lambda) = \lambda^۲ - ۱$، و ریشه‌ها عبارت‌اند از $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = -۱$. یک پایه جواب عبارت است از $\{e^x, e^{-x}\}$. برای پیدا کردن جواب خصوصی، ملاحظه می‌کنیم که $S(x) = x$ و $\lambda = ۱ = \lambda_۱$. به این ترتیب، قضیهٔ ۹ـ۴ـ۲ ایجاب می‌کند که $q(x)$ از درجهٔ ۲ باشد (زیرا $\lambda_۱$ یک ریشهٔ ساده است). بنابراین، $q(x) = Ax^۲ + Bx + C$ را امتحان می‌کنیم، که به جواب خصوصی $u = (Ax^۲ + Bx + C)e^x$ منجر می‌شود. با گرفتن مشتقات و جایگزینی در معادلهٔ (۲)، دو معادلهٔ

$$۴A = ۱ \quad و \quad A + B = ۰$$

به‌دست می‌آید که جوابهای آنها عبارت‌اند از $A = -B = ۱/۴$. توجه کنید که C معین نیست، زیرا Ce^x یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با (۲) است، و وقتی $\mathbb{L}$ بر u اعمال می‌شود، جملهٔ Ce^x را حذف می‌کند. راه دیگر نگریستن به وضعیت موجود، این است که توجه کنیم عمومی‌ترین جواب معادلهٔ (۲) به شکل زیر است

$$y = C_۱e^x + C_۲e^{-x} + \left(\frac{۱}{۴}x^۲ - \frac{۱}{۴}x + C\right)e^x$$

جملهٔ Ce^x را می‌توان در $C_۱e^{-x}$ ادغام کرد. بنابراین، قرار می‌دهیم $C = ۰$، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم، و جواب یکتا را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۵}{۴}\sinh x + \frac{۱}{۴}(x^۲ - x)e^x$$ ●

معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن $\mathbb{L}[y] = r(x)$ را می‌توان به مثابه یک ماشین (یا جعبهٔ سیاه) تلقی کرد که وقتی تابع $r(x)$ را به خورد آن می‌دهیم، تابع $y(x)$ را تولید می‌کند. از این حیث، طبیعی‌تر

این است که به "وارون" $\mathbb{L}$ توجه کنیم، که عملگری مانند $\mathbb{M}$ است، به‌طوری که $u = \mathbb{M}[r]$. با این همه، به‌طور کلی $\mathbb{M}$ وجود ندارد، زیرا ممکن است به‌ازای یک $r(x)$ مفروض، توابع متفاوت $u(x)$ وجود داشته باشند. ما قبلاً هنگامی که نمی‌توانستیم برخی جمله‌های جواب خصوصی را به‌طور یکتا تعیین کنیم، زیرا آنها جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن بودند، با این وضعیت برخورد کرده‌ایم. با این همه، با برخی محدودیتها (که آنها را بعداً بررسی خواهیم کرد) می‌توان برای یک $r(x)$ مفروض، $u(x)$ را یکتا کرد.

تعبیر معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن به مثابه یک ماشین، در پالایه‌های الکتریکی یا صوتی متداول است. یک سیگنال، تابع $r(x)$ ، به پالایه ارسال، و یک تابع دیگر، $u(x)$، به‌عنوان خروجی دریافت می‌شود. در این مقوله، مهمترین علامت ورودی، یک تابع سینوسی با شکل کلی

$$r(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

یا، در نمادگذاری مختلط، با $A \equiv |b|$ و $\arg(b) \equiv \alpha$، به‌صورت زیر است

$$r(t) = \mathrm{Re}(be^{i\omega t})$$

که ω یک ثابت (بسامد زاویه‌ای)، t معرف زمان (متغیر مستقل)، و A، B، و α نیز ثابت‌اند. با فرض اینکه $i\omega$ ریشهٔ $p(\lambda)$، چندجمله‌ای مشخصهٔ $\mathbb{L}$، نباشد، قضیهٔ ۹ـ۴ـ۲ یک جواب خصوصی، به‌صورت $U = C(\omega)e^{i\omega t}$، پیشنهاد می‌کند، که در آن $C(\omega)$ یک ثابت (وابسته به ω) است که می‌توان با جایگذاری در $\mathbb{L}[U] = be^{i\omega t}$ آن را تعیین کرد:

$$\mathbb{L}[C(\omega)e^{i\omega t}] = be^{i\omega t} \qquad \Rightarrow \qquad C(\omega) = \frac{b}{p(i\omega)}$$

با نوشتن $C(\omega) = \rho(\omega)e^{i\gamma(\omega)}$، $b = Ae^{i\alpha}$، و $p(i\omega) = R(\omega)e^{i\theta(\omega)}$، خواهیم داشت

$$\rho(\omega) = \frac{A}{R(\omega)} \qquad \text{و} \qquad \gamma(\omega) = \alpha - \theta(\omega)$$

به این ترتیب، جواب حقیقی، $u(t) = \mathrm{Re}[U(t)]$، عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{Re}[C(\omega)e^{i\omega t}] = \rho(\omega)\cos[\omega t + \gamma(\omega)] \\ &= \frac{A}{R(\omega)}\cos[\omega t + \alpha - \theta(\omega)] \end{aligned} \tag{۹ـ۳۲}$$

تابع $C(\omega)$، تابع انتقال وابسته به عملگر خطی $\mathbb{L}$ نامیده می‌شود. معادلهٔ (۹ـ۳۲) نشان می‌دهد که خروجی، $u(t)$، دارای همان بسامد ورودی است. این معادله، همچنین نشان می‌دهد که دامنهٔ $u(t)$ وابسته به بسامد است، و می‌توان با تغییر بسامد و به حداقل رساندن $R(\omega)$، به دامنه‌های خروجی بزرگی دست یافت. این همان پدیدهٔ معروف تشدید در مدارهای AC است.

مثال ۹ـ۴ـ۴: معادلهٔ (۱) از مثال ۹ـ۴ـ۲ را در نظر می‌گیریم و، برای مشخص بودن حالت نوسان میرا را اختیار می‌کنیم. در این حالت، $4b > a^2$ و

$$\omega_1 \equiv \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \equiv \omega_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{4\omega_0^2}}$$

که در آن $\omega_0 \equiv \sqrt{b}$ بسامد طبیعی دستگاه نامیده می‌شود.

چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$، بنابراین

$$p(i\omega) = -\omega^2 + i\omega a + b = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega a$$

و

$$R(\omega) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega a}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

دامنهٔ سیگنال خروجی، که گاهی تابع بهره خوانده می‌شود، عبارت است از

$$\rho(\omega) = \frac{A}{R(\omega)} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}}$$

مخرج در $\omega = \omega_0$ کمینه می‌شود، یعنی، هنگامی که بسامد راه‌انداز با بسامد طبیعی برابر است. در چنین وضعیتی، داریم

$$\rho(\omega) = \frac{A}{\omega_0 a}$$

که نشان می‌دهد وقتی a کوچک باشد، دامنهٔ سیگنال خروجی بزرگ است. در حد $a \to 0$، دامنه نامتناهی می‌شود، که نگران‌کننده است. اما، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $a = 0$، در آن‌صورت، در حالت تشدید، $i\omega_0$ یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$ خواهد بود. این حکم در این فرض که $i\omega$ ریشهٔ $p(\lambda)$ نباشد، در تناقض است.

ما فقط جواب خصوصی، $u(t)$، را در نظر گرفته‌ایم، زیرا عمومی‌ترین جواب

$$y(t) = Be^{-at/2}\cos(\omega_1 t + \beta) + u(r)$$

که در آن B و β مقادیر ثابتی‌اند، نهایتاً به $u(t)$ تحویل می‌یابد. نخستین جملهٔ سمت راست، جملهٔ گذار، به صفر افت می‌کند. آهنگ این افت را ثابت زمانی، $2/a$، تعیین می‌کند که عبارت است از مدت زمانی که در خلال آن دامنهٔ جملهٔ گذار به $1/e$ام مقدار اولیه‌اش افت می‌کند. ●

در مثال ۹ـ۴ـ۴ نشان می‌دهیم (حداقل برای حالت خاص معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم ناهمگن) که وقتی هیچ نیروی اتلافی وارد نمی‌آید (یعنی وقتی $a = 0$)، تابع بهرهٔ $\rho(\omega)$ به‌ازای یک بسامد خاص نامتناهی خواهد بود. این نکته را می‌توان در حالت کلی به این ترتیب دریافت که اگر $i\omega$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای مشخصه، برای سهولت فرض کنید یک ریشهٔ ساده، باشد. در آن‌صورت قضیهٔ ۹ـ۴ـ۲ جوابی به‌صورت $u(t) = (\acute{a}_1 t + a_2)e^{i\omega t}$ پیشنهاد می‌کند، و به روشنی معلوم است که با گذشت زمان، دامنه، یعنی $a_1 t + a_2$، بینهایت می‌شود.

اهمیت سیگنال سینوسی وقتی ظاهر می‌شود که توجه کنیم هر سیگنال دوره‌ای (تناوبی) $r(t)$ را می‌توان به‌صورت یک سری فوریه به‌صورت زیر بسط داد

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}$$

که در آن ω بسامد اصلی $r(t) \equiv \mathrm{Re}[R(t)]$ است. خطی بودن $\mathbb{L}$، جوابی به‌صورت $u(t) = \mathrm{Re}[U(t)]$ ایجاب می‌کند، که در آن

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega)e^{in\omega t}$$

با جایگذاری در $\mathbb{L}[U] = R(t)$، خواهیم داشت

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega)p(in\omega)e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}$$

چون $e^{in\omega t}$ متعامدند، داریم

$$C_n(\omega) = \frac{b_n}{p(in\omega)}$$

و

$$u(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n e^{in\omega t}}{p(i\omega n)}\right] \qquad (۹\_۳۳)$$

بنابراین، $u(t)$ نیز دوره‌ای و دارای همان بسامد اصلی $r(t)$ است.

۹ـ۴ـ۳ دستگاههای خطی با ضرایب ثابت

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول با بیش از یک متغیر مانند

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)
\end{aligned} \qquad (۹_۳۴)$$

از این بابت مهم‌اند که هر معادلهٔ دیفرانسیل نرمال (متعارف) از مرتبهٔ n، یعنی، معادلهٔ زیر را

$$\frac{d^n y}{dt^n} = F(y, y', \ldots, y^{(n-1)}; t)$$

می‌توان به یک دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، معادلات (۹ـ۳۴)، تبدیل کرد؛ به این ترتیب که در معادلات نامبرده قرار دهیم $x_1 = y, x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ ، و با این کار برسیم به دستگاه

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)
\end{aligned} \tag{۹ـ۳۵}$$

ما به مطالعهٔ تفصیلی (۹ـ۳۴) یا (۹ـ۳۵) نخواهیم پرداخت، زیرا این کار ما را زیاده از حد درگیر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل خواهد کرد. با این همه، ساده‌ترین شکل (۹ـ۳۴) را، که در آن تمام F_i توابعی خطی از x_j با ضرایب ثابت‌اند، بررسی خواهیم کرد.

حال برای دستگاه

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t)
\end{aligned} \tag{۹ـ۳۶}$$

یک جواب پیدا کنیم. این دستگاه معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی هم نوشت. با فرض

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

می‌توانیم (۹ـ۳۶) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{B} \tag{۹ـ۳۷}$$

ابتدا حالت همگن را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathsf{A}\mathbf{X} \qquad (۹\_۳۸)$$

برای یافتن یکی از جوابها، قرار می‌دهیم $x_i(t) = c_i e^{\lambda t}$یا در نمادگذاری ماتریسی

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}e^{\lambda t} \qquad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

با جایگذاری در (۹_۳۸)، خواهیم داشت

$$\lambda \mathbf{C}e^{\lambda t} = \mathsf{A}\mathbf{C}e^{\lambda t}$$

یا

$$(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{1})\mathbf{C} = ۰ \qquad (۹\_۳۹)$$

به این ترتیب، ما مسئله را به مسئلهٔ استاندارد پیدا کردن ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریسها، مبحثی که در فصل ۳ به تفصیل به آن پرداخته‌ایم، تبدیل کرده‌ایم. در نتیجه، اگر λ_i یک ویژه‌مقدار ماتریس A و $\mathbf{C}_i$ ویژه‌بردار متناظر با آن باشد، در آن‌صورت، کمیت

$$\mathbf{X}_i(t) \equiv \mathbf{C}_i e^{\lambda_i t} \equiv \begin{pmatrix} c_{i۱} \\ c_{i۲} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} \qquad (۹\_۴۰)$$

یکی‌از جوابهای معادلهٔ (۹_۳۸) است.

این جوابها فقط در صورتی خطی مستقل‌اند که عبارت

$$\det[\mathbf{X}_1(t),\dots,\mathbf{X}_n(t)] \equiv \det\begin{pmatrix} c_{11}e^{\lambda_1 t} & c_{21}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{n1}e^{\lambda_n t} \\ c_{12}e^{\lambda_1 t} & c_{22}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{n2}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}e^{\lambda_1 t} & c_{2n}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

مخالف صفر باشد. مادام که λ_1، λ_2، ...، و λ_n جملگی متمایز باشند، این مطلب درست است. بنابراین، اگر λ_i همه متمایز باشند، عمومی‌ترین جواب برای (۹ـ۳۸) عبارت است از

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}_i \mathbf{e}^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}$$

قضیهٔ زیر، حالت ویژه‌مقدارهای غیرساده را در بر می‌گیرد.[1]

قضیهٔ ۹ـ۴ـ۳: اگر ریشهٔ ماتریس $n \times n$ بعدی A عبارت باشد λ_0 با چندگانگی r، در آن‌صورت تعداد r جواب خطی مستقل متناظر با λ_0 برای $d\mathbf{X}/dt = \mathsf{A}\mathbf{X}$ وجود خواهد داشت. این جوابها به شکل زیرند

$$e^{\lambda_0 x}(\mathbf{V}_0 + x\mathbf{V}_1 + \cdots + x^k\mathbf{V}_k)$$

که در آن $k < r$ و $\mathbf{V}_i$ بردارهای ثابتی هستند. ■

مثال ۹ـ۴ـ۵: دستگاه زیر را، که در آن "نقطه"ها معرف مشتق نسبت به زمان‌اند، در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

۱. برای اثبات ر.ک. Rubenstein, 1969, 82-86.

در شکل ماتریسی، (۱) تبدیل می‌شود به

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathrm{A}\mathbf{X} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

به آسانی معلوم می‌شود که ویژه‌مقدارهای A عبارت‌اند از $\lambda_1 = -1$ با چندگانگی ۲ و $\lambda_2 = -2$ با چندگانگی ۱.

ویژه‌بردار مربوط به λ_2 عبارت است از

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

که در آن a یک ثابت دلخواه است.

برای λ_1 قضیهٔ ۹ـ۴ـ۳ را به‌کار می‌بریم و جواب را به‌صورت

$$\mathbf{X} = e^{-t}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 t)$$

می‌نویسیم که در آن $\mathbf{V}_0$ و $\mathbf{V}_1$ بردارهای ثابتی‌اند. با گرفتن مشتق از این جواب پیشنهادی و قرار دادن در (۲)، خواهیم داشت

$$\dot{\mathbf{X}} = e^{-t}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1 t) = \mathrm{A}\mathbf{X} = e^{-t}\mathrm{A}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 t)$$

که به یک دستگاه معادله می‌انجامد

$$\mathrm{A}\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0$$
$$\mathrm{A}\mathbf{V}_1 = -\mathbf{V}_1$$

دومین معادلهٔ این دستگاه، یک مسئلهٔ ویژه‌مقداری متناظر با $\lambda_1 = -1$ است. از حل آن، خواهیم داشت

$$\mathbf{V}_1 = b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در آن b ثابتی دلخواه است. با جایگذاری این مقدار در معادلهٔ اول دستگاه و نوشتن $\mathbf{V}_{۰}$ به‌صورت ماتریس ستونی $(a_{۱}, a_{۲}, a_{۳})$، خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۵ & -۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{۱} \\ a_{۲} \\ a_{۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix}$$

این معادله دارای دو جواب خطی مستقل است، که می‌توان آنها را به‌صورت زیر انتخاب کرد

$$\mathbf{V}_{۰}^{(۱)} = b \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۲ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{V}_{۰}^{(۲)} = b \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

این جوابها ما را به دو جواب زیر هدایت می‌کنند

$$\mathbf{X}^{(۱)}(t) \equiv e^{-t}(\mathbf{V}_{۰}^{(۱)} + \mathbf{V}_{۱} t)$$
$$\mathbf{X}^{(۲)}(t) \equiv e^{-t}(\mathbf{V}_{۰}^{(۲)} + \mathbf{V}_{۱} t)$$

به این ترتیب، عمومی‌ترین جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\mathbf{X}(t) = C_{۱} \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۴ \end{pmatrix} e^{-۲t} + C_{۲} \left[\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} t \right] e^{-t}$$
$$+ C_{۳} \left[\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} t \right] e^{-t} \qquad (۳)$$

●

برای حل معادلهٔ (۹ـ۳۷)، معادلهٔ ناهمگن، فقط به یکی از جوابهای خصوصی آن نیاز داریم. برای به‌دست آوردن چنین جوابی، از روش وردش ثابتها بهره می‌گیریم. این روش مستلزم اختیار n جواب خطی مستقل $\{\mathbf{X}_i\}_{i=۱}^{n}$، معادلهٔ همگن و نوشتن این عبارت است:

$$\mathbf{X}(t) = C_{۱}(t)\mathbf{X}_{۱}(t) + \cdots + C_n(t)\mathbf{X}_n(t) \qquad (۹\text{ـ}۴۱)$$

که در آن $C_i(t)$ را باید تعیین کنیم. با مشتق گرفتن از این معادله، خواهیم داشت

$$\dot{\mathbf{X}} = C_1\dot{\mathbf{X}}_1 + \cdots + C_n\dot{\mathbf{X}}_n + \dot{C}_1\mathbf{X}_1 + \cdots + \dot{C}_n\mathbf{X}_n$$

با اعمال ماتریس A بر (۹ـ۴۱) داریم

$$\mathsf{A}\mathbf{X} = C_1\mathsf{A}\mathbf{X}_1 + \cdots + C_n\mathsf{A}\mathbf{X}_n = C_1\dot{\mathbf{X}}_1 + \cdots + C_n\dot{\mathbf{X}}_n$$

زیرا، بنابر فرض، $\mathbf{X}_i$ جوابهای معادلهٔ همگن‌اند. با قرار دادن رابطهٔ بالا در (۹ـ۳۷) خواهیم داشت

$$\dot{C}_1\mathbf{X}_1 + \dot{C}_2\mathbf{X}_2 + \cdots + \dot{C}_n\mathbf{X}_n = \mathbf{B} \qquad (۹\text{ـ}۴۲)$$

این عبارت یک دستگاه n معادله (یادآور می‌شویم که $\mathbf{X}_i$ عبارت‌اند از n بردار) و n مجهول $(\dot{C}_i)$ است، که همیشه جواب دارد، زیرا $\mathbf{X}_i$ خطی مستقل هستند، و در نتیجه، ماتریس ضریبها، که ستونهای آن بردارهای مستقل $\mathbf{X}_i$ به‌شمار می‌آیند، وارون‌پذیر است. وقتی $\{\dot{C}_i\}_{i=1}^{n}$ تعیین شد، با انتگرال گرفتن از $\dot{C}_i$، می‌توان C_i را به‌دست آورد، که به‌نوبهٔ خود جواب خصوصی $\mathrm{X}(t)$ در (۹ـ۴۱) را تعیین می‌کنند.

یک نتیجه از فصل ۲، در اینجا برای دستگاههای خطی با ضرایب ثابت کارایی پیدا می‌کند. مثال ۲ـ۳ـ۱۰ نشان می‌دهد که معادلهٔ عملگری

$$\frac{d\mathbb{U}}{dt} = \mathbb{H}\mathbb{U}(t)$$

که در آن $\mathbb{H}$ از t مستقل است، جواب زیر را دارد

$$\mathbb{U}(t) = e^{\mathbf{H}t}\mathbb{U}(0)$$

کاربرد این ایده در بارهٔ معادلهٔ برداری (۹ـ۳۸)، به گزارهٔ زیر منجر می‌شود.

گزارهٔ ۹ـ۴ـ۴: عمومی‌ترین جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول $d\mathbf{X}/dt = \mathsf{A}\mathbf{X}$ که در آن A ماتریسی ثابت است، عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathsf{A}t}\mathbf{X}(0)$$

محاسبهٔ e^{At}، به‌طور کلی آسان نیست. در واقع، در فصل ۳ ملاحظه کردیم که محاسبهٔ هر تابعی از یک عملگر (ماتریس)، مستلزم قطری کردن، محاسبهٔ عملگرهای تصویر، و غیره است.

تمرینها

۹ـ۴ـ۱ نشان دهید که توابع $x^r e^{\lambda_j x}$، که در آن $r = ۰, ۱, ۲, \ldots, k$، خطی مستقل‌اند.

۹ـ۴ـ۲ معادلهٔ $y'' - ۲y' + y = xe^x$ را با شرایط مرزی $y(۰) = ۰$، $y'(۰) = ۱$ حل کنید.

۹ـ۴ـ۳ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم $\ddot{y} - ۲\dot{y} + y = ۰$ را به‌صورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بازنویسی، و دستگاه را حل کنید.

۹ـ۴ـ۴ با تبدیل معادلهٔ $\ddot{y} - ۲\dot{y} + y = te^t$ به یک دستگاه خطی، یک جواب خصوصی آن را بیابید.

۹ـ۵ معادلات دیفرانسیل مختلط

تا اینجا، با برخی روشهای مفید حل معادلات دیفرانسیل آشنا شده‌ایم. یکی از روشهای کارآمد که به جوابهای صوری منجر می‌شود، روش سری توانی است. همچنین قضیه‌ای را بیان کردیم که همگرایی جواب سری توانی را در داخل دایره‌ای که اندازهٔ آن حداقل به بزرگی کوچکترین دایرهٔ همگرایی توابع ضریب است، تضمین می‌کند.

بنابراین، همگرایی جواب مرتبط است با همگرایی توابع ضریب. اما در بارهٔ ماهیت همگرایی، یا تحلیلی بودن جواب، چه می‌توان گفت؟ آیا این نیز به تحلیلی بودن توابع ضریب وابسته است؟ اگر پاسخ مثبت است، چگونه؟ آیا نقاط تکین ضرایب، نقاط تکین جواب نیز هستند؟ در این‌صورت، آیا ماهیت تکینگیها هم مثل یکدیگر است؟ در این بخش، سعی می‌کنیم به این پرسشها پاسخ بدهیم.

هر پرسش پیرامون تحلیلی بودن را به بهترین وجه می‌توان در صفحهٔ مختلط پاسخ داد. یکی از دلایل عمدهٔ آن، خاصیت "تداوم تحلیلی" است که در فصل ۷ مطرح شد. معادلهٔ دیفرانسیل $du/dx = u^۲$ به‌ازای جمیع مقادیر x، جز $x = ۰$، دارای جواب $u = -۱/x$ است. بنابراین، باید خط "حقیقی" را با برداشتن $x = ۰$ از آن "سوراخ" کرد. در این‌صورت، دو جواب خواهیم داشت، زیرا حوزهٔ تعریف $u = -۱/x$ بر روی خط حقیقی همبند نیست (از نظر تکنیکی، تعریف یک تابع، شامل حوزهٔ آن و قاعدهٔ رفتن از حوزه به برد است). علاوه بر این، اگر ما خود را به خط "حقیقی" محدود کنیم، هیچ راهی برای متصل کردن ناحیهٔ $x < ۰$ به ناحیهٔ $x > ۰$ وجود ندارد. از سوی دیگر، در صفحهٔ مختلط، همین معادله، یعنی $dw/dz = w^۲$، دارای جواب مختلط $w = -۱/w$ است، که در همه جا، جز در $z = ۰$، تحلیلی است. سوراخ کردن صفحهٔ مختلط،

همبندی ناحیهٔ تعریف w را از بین نمی‌برد. بنابراین، جواب در ناحیهٔ $x > \circ$ را می‌توان، با دور زدن مبدأ، به‌طور تحلیلی تا جواب در ناحیهٔ $x < \circ$ ادامه داد.

هدف این بخش، بررسی خواص تحلیلی جوابهای برخی معادلات دیفرانسیل خطی معروف در فیزیک ریاضیاتی است. با نتیجه‌ای از نظریهٔ معادلهٔ دیفرانسیل بحث را آغاز می‌کنیم.

گزارهٔ ۹ـ۵ـ۱: (اصل پیوستگی) تابعی که از ادامهٔ تحلیلی یک جواب دلخواه یک معادلهٔ دیفرانسیل تحلیلی بر روی یک مسیر دلخواه در صفحهٔ مختلط به‌دست می‌آید، جواب ادامهٔ تحلیلی معادلهٔ دیفرانسیل یاد شده بر روی همان مسیر است.

معادلهٔ دیفرانسیل تحلیلی، معادله‌ای است که توابع ضریب آن تحلیلی باشند. با استفاده از این گزاره، می‌توان در یک ناحیه از صفحهٔ مختلط جوابی یافت و سپس آن را به‌طور تحلیلی ادامه داد. در مثال زیر نشان می‌دهیم که چگونه تکینگیهای توابع ضریب بر رفتار جواب تأثیر می‌گذارند.

مثال ۹ـ۵ـ۱: معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\gamma}{z} w = \circ \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

تابع ضریب $p(z) \equiv -\gamma/z$ دارای یک قطب ساده در $z = \circ$ است. جواب این معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به آسانی پیدا می‌شود

$$w = z^{\gamma}$$

بنابراین، بسته به اینکه آیا γ یک عدد درست غیرمنفی، یک عدد درست منفی، $-m$، یا یک عدد غیردرست باشد، در $z = \circ$، به‌ترتیب، جواب دارای یک نقطهٔ ساده، یک قطب مرتبهٔ m، یا یک نقطهٔ شاخه خواهد بود. ●

این مثال نشان می‌دهد که تکینگیهای جواب می‌توانند، بسته به پارامترهای موجود در معادلهٔ دیفرانسیل، بدتر یا بهتر از تکینگیهای توابع ضریب باشند.

۹ـ۵ـ۱ خواص تحلیلی کلی معادلات دیفرانسیل مختلط

به‌منظور آمادگی برای بررسی خواص تحلیلی جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم برخی خواص معادلات دیفرانسیل را از یک دیدگاه تحلیلی مختلط در نظر می‌گیریم.

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول مختلط. در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول همگن

$$\frac{dw}{dz} + p(z)w = ۰ \qquad (۴۳\text{-}۹)$$

فرض می‌کنیم $p(z)$ فقط دارای نقاط سادهٔ منزوی است. در نتیجه، می‌توان آن را در اطراف نقطهٔ $z_۰$، که ممکن است یک تکین $p(z)$ هم باشد، و در ناحیهٔ طوقی $r_۱ < |z - z_۰| < r_۲$ به‌صورت سری لوران بسط داد:

$$p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_۰)^n \qquad r_۱ < |z - z_۰| < r_۲$$

جواب معادلهٔ (۹ـ۴۳)، طبق قضیهٔ ۹ـ۱ـ۴ و به‌ازای $q = ۰$، عبارت است از

$$\begin{aligned} w(z) &= \exp\left[-\int p(z)dz\right] \\ &= C\exp\left[-\int a_{-۱}\frac{dz}{z - z_۰} - \sum_{n=۰}^{\infty} a_n\int(z-z_۰)^n dz - \sum_{n=۲}^{\infty} a_{-n}\int(z-z_۰)^{-n}dz\right] \\ &= C\exp\left[-a_{-۱}\ln(z-z_۰) - \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{a_n}{n+۱}(z-z_۰)^{n+۱} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_{-n-۱}}{n}(z-z_۰)^{-n}\right] \end{aligned}$$

این جواب را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$w(z) = C(z - z_۰)^\alpha g(z) \qquad (۴۴\text{-}۹)$$

که درآن $\alpha \equiv -a_{-۱}$ و $g(z)$ یک تابع تحلیلی تک‌مقداری در ناحیهٔ طوقی $r_۱ < |z - z_۰| < r_۲$ است. دلیل این امر آن است که تابع نمایی یک تابع تحلیلی، خودش تحلیلی است.

بسته به ماهیت تکینگی $p(z)$ در $z_۰$، جوابهای داده شده توسط (۹ـ۴۴) دارای رده‌بندیهای متفاوتی‌اند. مثلاً اگر $p(z)$ دارای یک تکینگی برداشتنی باشد (یعنی، اگر $a_{-n} = ۰ \ \forall n \geq ۱$)، جواب به‌صورت $Cg(z)$ است که تحلیلی است. در این حالت می‌گوییم که معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول [معادلهٔ (۹ـ۴۳)] دارای یک تکینگی برداشتنی در $z_۰$ است. اگر $p(z)$ دارای یک قطب ساده در $z_۰$ باشد (یعنی، اگر $a_{-۱} \neq ۰$ و $a_{-n} = ۰ \ \forall n \geq ۲$)، در آن‌صورت، به‌طور کلی، جواب در نقطهٔ $z_۰$ دارای یک شاخه است. در این حالت می‌گوییم که معادلهٔ دیفرانسیل

خطی مرتبهٔ اول دارای یک نقطهٔ تکین عادی است. بالاخره، اگر $p(z)$ دارای یک قطب از مرتبهٔ $m > 1$ باشد، در آن‌صورت جواب، یک تکینگی اساسی خواهد داشت (مسئله ۹ـ۳۴). در این‌صورت اصطلاحاً گفته می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول دارای یک نقطهٔ تکین غیرعادی است.

برای رسیدن به جواب داده شده توسط (۹ـ۴۴)، ناگزیر بودیم معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول را حل کنیم. چون معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ بالاتر را به این آسانی نمی‌توان حل کرد، بهتر است چنین جوابی را از راههای دیگری به‌دست بیاوریم. مثال زیر، زمینه را برای این تلاش آماده می‌کند.

مثال ۹ـ۵ـ۲: هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول، حداکثر با اختلاف یک ضریب ثابت، دارای یک جواب یکتاست که در قالب قضیهٔ ۹ـ۱ـ۴ بیان می‌شود. بنابراین، به‌ازای یک جواب مفروض $w(z)$، هر جواب دیگری باید به‌صورت $Cw(z)$ باشد. فرض کنید z_0 یک تکینگی $p(z)$ باشد، و $z - z_0 = re^{i\theta}$. از یک نقطهٔ z شروع کنید و z_0 را دور بزنید، به‌طوری که $\theta \to \theta + 2\pi$. هر چند ممکن است $p(z)$ در نقطهٔ z_0 دارای یک قطب ساده باشد، اما جواب ممکن است در آنجا یک نقطهٔ شاخه داشته باشد. این مطلب از جواب عمومی، که در آن ممکن است α یک عدد غیردرست باشد، مشهود است. بنابراین، $\tilde{w}(z) \equiv w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})$ ممکن است با $w(z)$ متفاوت باشد. اما، گزارهٔ ۹ـ۵ـ۱ حاکی از این است که $\tilde{w}(z)$ نیز جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول است. بنابراین، ضریبی مانند C چنان وجود دارد که $\tilde{w}(z) = Cw(z)$. اگر تعریف $C \equiv e^{2\pi i\alpha}$ با $\alpha \in \mathbb{C}$ را در نظر بگیریم، در آن‌صورت، تابع

$$g(z) = (z - z_0)^{-\alpha} w(z)$$

در اطراف z_0 تک‌مقداری است. در واقع

$$\begin{aligned} g(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) &= \left(re^{i(\theta+2\pi)}\right)^{-\alpha} w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) \\ &= (z - z_0)^{-\alpha} e^{-2\pi i\alpha} e^{2\pi i\alpha} w(z) = (z - z_0)^{-\alpha} w(z) = g(z) \end{aligned}$$

این استدلال نشان می‌دهد که هر جواب، $w(z)$، معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول [معادلهٔ (۹ـ۴۳)] را می‌توان به‌صورت $w(z) = (z - z_0)^{\alpha} g(z)$ نوشت، که در آن، $g(z)$ تک‌مقداری است. ●

ماتریس مداری. روش به‌کار رفته در مثال ۹ـ۵ـ۲ را می‌توان برای به‌دست آوردن نتیجه مشابهی برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام، به قرار زیر، تعمیم داد

$$\mathbb{L}[w] = \frac{d^n w}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \cdots + p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_0(z)w = 0 \qquad (۹\text{ـ}۴۵)$$

که در آن $p_i(z)$ در بازهٔ $r_1 < |z - z_0| < r_2$ تحلیلی‌اند.

فرض کنید $\{w_j(z)\}_{j=1}^n$ یک پایه جواب معادلهٔ (۹ـ۴۵) باشد، و $z - z_0 = re^{i\theta}$. از z شروع کنید و تابع $w_j(z)$ را به‌طور تحلیلی یک دور کامل تا $\theta + 2\pi$ ادامه بدهید. فرض کنید $\widetilde{w}_j(z) \equiv \widetilde{w}_j(z_0 + re^{i\theta}) \equiv w_j(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})$. در این‌صورت به آسانی می‌توان نشان داد که $\{\widetilde{w}_j(z)\}_{j=1}^n$ نیز یک پایه جواب است. از سوی دیگر، $\widetilde{w}_j(z)$ را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از $w_j(z)$ بیان کرد. بنابراین،

$$\widetilde{w}_j(z) = w_j(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \sum_{k=1}^n a_{jk} w_k(z)$$

ماتریس $\mathsf{A} \equiv (a_{jk})$، که ماتریس مداری معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام نامیده می‌شود، وارون‌پذیر است زیرا یک پایه را به پایه‌ای دیگر تبدیل می‌کند. بنابراین، دارای ویژه‌مقدارهای ناصفر است. فرض کنید $\lambda \neq 0$ یکی از این ویژه‌مقدارها باشد و بردار ستونی

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

را چنان انتخاب کنیم که $\tilde{\mathsf{A}}\mathbf{C} = \lambda\mathbf{C}$، یعنی، $\mathbf{C}$ یک ویژه‌بردار متعلق به $\tilde{\mathsf{A}}$ با ویژه‌مقدار λ باشد (توجه کنید که مجموعه ویژه‌مقدارهای A و $\tilde{\mathsf{A}}$ یکی هستند). همیشه حداقل یکی از این ویژه‌بردارها وجود دارد، زیرا چندجمله‌ای مشخصهٔ $\tilde{\mathsf{A}}$ دست‌کم دارای یک ریشه است، که به‌ازای آن همواره ممکن است برداری مانند $\mathbf{C}$ چنان پیدا کرد که $\tilde{\mathsf{A}}\mathbf{C} = \lambda\mathbf{C}$. اکنون فرض می‌کنیم

$$w(z) = \sum_{j=1}^n c_j w_j(z)$$

مسلماً، این $w(z)$ یکی از جوابهای (۹ـ۴۵) است، و

$$\begin{aligned}\widetilde{w}(z) &\equiv w(z_\circ + re^{i(\theta+2\pi)}) = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j(z_\circ + re^{i(\theta+2\pi)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} w_k(z) \\ &= \sum_{j,k} (\widetilde{A})_{kj} c_j w_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda c_k w_k(z) \\ &= \lambda w(z)\end{aligned}$$

اگر α را به‌صورت $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ تعریف کنیم، در آن‌صورت

$$w(z_\circ + re^{i(\theta+2\pi)}) = e^{2\pi i\alpha} w(z)$$

اکنون می‌نویسیم $f(z) \equiv (z-z_\circ)^{-\alpha} w(z)$. با دنبال کردن استدلال به‌کار رفته در مثال ۹ـ۵ـ۲، خواهیم داشت $f(z_\circ + re^{i(\theta+2\pi)}) = f(z)$؛ یعنی، $f(z)$ در اطراف $z_\circ$ تک‌مقداری است. بنابراین قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۲: هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام به شکل (۹ـ۴۵) با توابع ضریب تحلیلی در $r_1 < |z - z_\circ| < r_2$، جوابی به‌صورت

$$w(z) = (z - z_\circ)^\alpha f(z)$$

را می‌پذیرد که در آن، $f(z)$ در اطراف $z_\circ$ در بازهٔ $r_1 < |z - z_\circ| < r_2$ تک‌مقداری است. ■

نقطهٔ تکین منزوی $z_\circ$، که در نزدیک آن هر تابع تحلیلی $w(z)$ را می‌توان به‌صورت $w(z) = (z - z_\circ)^\alpha f(z)$ نوشت که در آن $f(z)$ "سوراخ‌شده" و $z_\circ$ تک‌مقداری و تحلیلی است، که نقطهٔ شاخهٔ ساده $w(z)$ نامیده می‌شود. مباحثی که منجر به قضیهٔ ۹ـ۵ـ۲ شدند، حاکی از این هستند که یک جواب با نقطهٔ شاخهٔ ساده فقط در صورتی وجود دارد که بردار $\mathbf{C}$ که مؤلفه‌هایش در $w(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j(z)$ ظاهر می‌شوند، یک ویژه‌بردار $\widetilde{\mathrm{A}}$، ترانهاد و ماتریس مداری، باشد. بنابراین، به تعداد ویژه‌بردارهای خطی مستقل، جوابهای با نقاط شاخهٔ ساده وجود دارد.

۹ـ۵ـ۲ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم مختلط

اکنون معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

با فرض دو جواب خطی مستقل $w_1(z)$ و $w_2(z)$، ماتریس A را تشکیل می‌دهیم و سعی می‌کنیم آن را قطری کنیم. سه پیامد ممکن این عمل عبارت‌اند از

(۱) ماتریس A قطری شدنی است، و ما می‌توانیم دو ویژه‌بردار $F(z)$ و $G(z)$ را که، به‌ترتیب، با دو ویژه‌مقدار متمایز λ_1 و λ_2 متناظرند، پیدا کنیم. این به آن معناست که

$$F(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_1 F(z) \quad \text{و} \quad G(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_2 G(z)$$

با تعریف $\lambda_1 = e^{2\pi i\alpha}$ و $\lambda_2 = e^{2\pi i\beta}$، بنابر قضیهٔ ۹ـ۵ـ۲، خواهیم داشت

$$F(z) = (z - z_0)^\alpha f(z) \quad \text{و} \quad G(z) = (z - z_0)^\beta g(z)$$

مجموعهٔ $\{F(z), G(z)\}$ را پایهٔ بندادی برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم می‌گویند.

(۲) ماتریس A قطری‌شدنی است، و دو ویژه‌مقدار با هم برابرند. در این حالت، $F(z)$ و $G(z)$ هر دو دارای ثابت همسان α هستند

$$F(z) = (z - z_0)^\alpha f(z) \quad \text{و} \quad G(z) = (z - z_0)^\alpha g(z)$$

(۳) نمی‌توانیم دو ویژه‌بردار بیابیم . این مورد متناظر با حالتی است که A قطری‌شدنی نیست (به‌زبان فصل ۳، ماتریس نرمال نیست) اما، همواره می‌توان یک ویژه‌بردار پیدا کرد، بنابراین A فقط یک ویژه‌مقدار، λ، دارد. فرض می‌کنیم $w_1(z)$ جواب به شکل $(z - z_0)^\alpha f(z)$ باشد، که در آن $f(z)$ تک‌مقداری است و $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$. وجود چنین جوابی، طبق قضیهٔ ۹ـ۵ـ۲، تضمین شده است. همچنین، فرض می‌کنیم $w_2(z)$ هر جواب خطی مستقل دیگری باشد (قضیهٔ ۹ـ۲ـ۴ بر وجود چنین جواب دومی تأکید دارد). در این‌صورت

$$w_2(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = aw_1(z) + bw_2(z)$$

ماتریس مداری عبارت خواهد بود از

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \circ \\ a & b \end{pmatrix}$$

که دارای ویژه‌مقدارهای λ و b است. چون فرض بر این است که A فقط دارای یک ویژه‌مقدار است (در غیر این‌صورت، پیامد اول رخ می‌داد)، باید $b = \lambda$. این تساوی، A را تبدیل می‌کند به

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \circ \\ a & b \end{pmatrix}$$

شرط $a \neq \circ$ برای تمایز این حالت با پیامد دوم ضروری است. اکنون $h(z) \equiv w_۲(z)/w_۱(z)$ را به‌طور تحلیلی یک دور کامل در اطراف $z_\circ$ ادامه می‌دهیم که نتیجه عبارت خواهد بود از

$$h(z_\circ + re^{i(\theta+۲\pi)}) = \frac{w_۲(z_\circ + re^{i(\theta+۲\pi)})}{w_۱(z_\circ + re^{i(\theta+۲\pi)})} = \frac{aw_۱(z) + \lambda w_۲ z}{\lambda w_۱(z)}$$

$$= \frac{a}{\lambda} + \frac{w_۲(z)}{w_۱(z)} = \frac{a}{\lambda} + h(z)$$

به این ترتیب، نتیجه می‌شود که تابع

$$g_۱(z) \equiv h(z) - \frac{a}{۲\pi i\lambda}\ln z$$

در بازهٔ $r_۱ < |z - z_\circ| < r_۲$ تک‌مقداری است. از این‌رو، $w_۲(z) = h(z)w_۱(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$w_۲(z) = w_۱(z)g_۱(z) + \frac{a}{۲\pi i\lambda}(\ln z)w_۱(z)$$

اگر $g_۱(z)$ و $w_۲(z)$ را، به‌ترتیب، به‌صورت $(۲\pi i\lambda/a)g_۱(z)$ و $(۲\pi i\lambda/a)w_۲(z)$ "باز تعریف" کنیم، به قضیهٔ زیر خواهیم رسید.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۳: اگر $p(z)$ و $q(z)$ در بازهٔ $r_۱ < z - z_\circ| < r_۲$ تحلیلی باشند، در آن‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم $w'' + p(z)w' + q(z)w = \circ$ یک پایه جواب در همسایگی

نقطهٔ تکین z_0 می‌پذیرد، و جوابها به شکل زیرند

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\beta} g(z)$$

یا، در حالتهای استثنایی (که دو ویژه‌بردار وجود ندارد)، به شکل زیر خواهند بود

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$$

$$w_2(z) = w_1(z)[g_1(z)^{\beta} + \ln z]$$

توابع $f(z)$، $g(z)$، و $g_1(z)$ در بازهٔ $r_1 < |z - z_0| < r_2$ تحلیلی و تک‌مقداری‌اند. ■

این قضیه به ما این اجازه را می‌دهد که نقطهٔ شاخهٔ z_0 را از بقیهٔ جوابها جدا کنیم. با این همه، هر چند $f(z)$، $g(z)$، و $g_1(z)$ در ناحیهٔ طوقی $r_1 < |z - z_0| < r_2$ تحلیلی‌اند، اما ممکن است در z_0 دارای قطبهایی از هر مرتبهٔ دلخواه باشند. آیا می‌توانیم قطبها را نیز جدا کنیم؟ در حالت کلی، خیر؛ اما، وقتی $p(z)$ و $q(z)$ دارای قطبهایی از مرتبهٔ معین باشند، این کار شدنی است. برای عملی کردن این منظور، به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۹ـ۵ـ۴: معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دومی به شکل $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ که در ناحیهٔ $0 < |z - z_0| < r$ تحلیلی است، در صورتی در z_0 دارای یک نقطهٔ تکین عادی است که $p(z)$ در بدترین وضعیت دارای یک قطب ساده در آن نقطه و $q(z)$ در بدترین وضعیت دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ در آن نقطه باشد.

در همسایگی یک نقطهٔ تکین عادی z_0، توابع ضریب $p(z)$ و $q(z)$ دارای بسطهای سری توانی‌اند

$$p(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$q(z) = \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

با ضرب دو طرف معادلهٔ اول در $(z-z_\circ)$ و در طرف معادلهٔ دوم در $(z-z_\circ)^۲$، خواهیم داشت

$$(z-z_\circ)p(z) \equiv P(z) \equiv \sum_{k=\circ}^{\infty} A_k(z-z_\circ)^k$$

و

$$(z-z_\circ)^۲q(z) \equiv Q(z) \equiv \sum_{k=\circ}^{\infty} B_k(z-z_\circ)^k$$

بهتر است معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم تعریف را در $(z-z_\circ)^۲$ ضرب کنیم و آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbb{L}[w] \equiv (z-z_\circ)^۲w'' + (z-z_\circ)P(z)w' + Q(z)w = \circ \qquad (۹\_۴۶)$$

اکنون ادعا می‌کنیم که جوابی به شکل

$$w(z) = (z-z_\circ)^\nu \left[۱+\sum_{k=۱}^{\infty} C_k(z-z_\circ)^k\right] \equiv (z-z_\circ)^\nu \sum_{k=\circ}^{\infty} C_k(z-z_\circ)^k \qquad (۹\_۴۷)$$

که در آن $C_\circ = ۱$، به‌طور صوری در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم صدق می‌کند. به این منظور، این جواب را در (۹ـ۴۶) قرار می‌دهیم؛ نتیجه عبارت است از

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}\left\{(n+\nu)(n+\nu-۱)C_n + \sum_{k=\circ}^{n}\left[(k+\nu)A_{n-k}+B_{n-k}\right]C_k\right\}(z-z_\circ)^{n+\nu} = \circ$$

که به رابطهٔ بازگشتی زیر می‌انجامد

$$(n+\nu)(n+\nu-۱)C_n = -\sum_{k=\circ}^{n}\left[(k+\nu)A_{n-k}+B_{n-k}\right]C_k \qquad n=\circ, ۱, ۲, \ldots$$

(۹ـ۴۸الف)

به‌ازای $n=\circ$، این رابطه منجر می‌شود به آنچه که معادلهٔ شاخصی برای نمای ν نام دارد

$$I(\nu) \equiv \nu(\nu-۱) + A_\circ\nu + B_\circ = \circ \qquad (۹\_۴۹)$$

ریشه‌های این معادله را نماهای مشخصهٔ $z_\circ$، و $I(\nu)$ را چندجمله‌ای شاخصی آن می‌گویند. برحسب این چندجمله‌ای، می‌توان (۹ـ۴۸الف) را به‌صورت زیر بیان کرد

$$I(\nu+n)C_n = -\sum_{k=\circ}^{n-۱}[(k+\nu)A_{n-k}+B_{n-k}]C_k \qquad n=۱,۲,\ldots \qquad \text{(۹ـ۴۸ب)}$$

معادلهٔ (۹ـ۴۹) تعیین می‌کند که چه مقادیری از ν ممکن هستند، و معادلهٔ (۹ـ۴۸ب) مقادیر $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، ... را می‌دهد، که به‌نوبهٔ خود $w(z)$ را تعیین می‌کنند. با این همه، اگر چندجمله‌ای شاخصی در $\nu + n$ به‌ازای برخی مقادیر مثبت و درست n صفر بشود، یعنی اگر $\nu + n$، و همچنین ν، ریشهٔ (۴ـ۴۹) باشند، در آن‌صورت $I(\nu+n)=\circ=I(\nu)$، و (۹ـ۴۸ب) معین نخواهد بود.

اگر $\nu_۱$ و $\nu_۲$ نماهای مشخصهٔ معادلهٔ شاخصی باشند و $\mathrm{Re}(\nu_۱) > \mathrm{Re}(\nu_۲)$، در آن‌صورت همیشه یک جواب برای $\nu_۱$ وجود دارد. جواب برای $\nu_۲$ نیز فقط در صورتی وجود دارد که به‌ازای بعضی مقادیر (مثبت) و درست n، رابطهٔ $\nu_۱ - \nu_۲ \neq n$ برقرار باشد. در حالت خاص، اگر $z_\circ$ یک نقطهٔ معمولی [یعنی نقطه‌ای که در آن $p(z)$ و $q(z)$ هر دو تحلیلی‌اند] باشد، در آن‌صورت فقط یک جواب با (۹ـ۴۸ب) تعیین می‌شود. (چرا؟)

بحث بالا را می‌توان در قالب قضیهٔ زیر جمعبندی کرد.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۵: اگر معادلهٔ دیفرانسیل $w'' + p(z)w' + q(z)w = \circ$ در $z = z_\circ$ دارای یک نقطهٔ تکین عادی باشد، در آن‌صورت حداقل یک سری توانی به شکل (۹ـ۴۷) به‌طور صوری در آن صدق می‌کند. اگر $\nu_۱$ و $\nu_۲$ نماهای مشخصهٔ $z_\circ$ باشند، در آن‌صورت، دو جواب خطی مستقل وجود خواهد داشت، مگر اینکه $\nu_۱ - \nu_۲$ یک عدد درست باشد. ■

مثال ۹ـ۵ـ۳: بعضی معادله‌های دیفرانسیلی را که در فیزیک به آنها برمی‌خوریم بررسی می‌کنیم.

(الف) معادلهٔ بسل عبارت است از

$$w'' + \frac{۱}{z}w' + \left(۱ - \frac{\alpha^۲}{z^۲}\right)w = \circ$$

در این مورد $z_\circ = \circ$، $A_\circ = ۱$، و $B_\circ = -\alpha^۲$. بنابراین، معادلهٔ شاخصی عبارت است از

$$\nu(\nu - ۱) + \nu - \alpha^۲ = \circ$$

و جوابهای آن عبارت‌اند از $\nu_۱ = -\alpha$ و $\nu_۲ = +\alpha$. بنابراین، دو جواب خطی مستقل برای معادلهٔ بسل وجود دارد، مگر اینکه $\nu_۲ - \nu_۱ = ۲\alpha$ یک عدد درست، یا α یک عدد درست یا نیم‌درست باشد.

(ب) برای پتانسیل کولنی، $f(r) = \beta/۲$، عمومی‌ترین معادلهٔ شعاعی [معادلهٔ (۸ـ۱۴ب)] تبدیل می‌شود به

$$w'' + \frac{۲}{z}w' + \left(\frac{\beta}{z} - \frac{\alpha}{z^۲}\right) w = ۰$$

نقطهٔ $z = ۰$ یک نقطهٔ تکین عادی است که در آن $A_۰ = ۲$ و $B_۰ = -\alpha$. چندجمله‌ای شاخصی عبارت است از

$$I(\nu) = \nu^۲ + \nu - \alpha$$

و نماهای مشخصه عبارت‌اند از

$$\nu_۱ = -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۴\alpha} \quad و \quad \nu_۲ = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۴\alpha}$$

دو جواب خطی مستقل وجود خواهد داشت، مگر اینکه $\nu_۲ - \nu_۱ = \sqrt{۱ + ۴\alpha}$ یک عدد درست باشد. در عمل، $\alpha = l(l + ۱)$، که l یک عدد درست است؛ بنابراین، $\nu_۲ - \nu_۱ = ۲l + ۱$. به این ترتیب، فقط یک جواب به‌دست می‌آید.

(ج) معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی عبارت است از

$$w'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + ۱)z}{z(۱ - z)}w' - \frac{\alpha\beta}{z(۱ - z)}w = ۰$$

تعداد زیادی از توابع در فیزیک ریاضیاتی جوابهای این معادلهٔ جالب، با مقادیر مناسب α، β، و γ را تشکیل می‌دهند. نقاط تکین عادی عبارت‌اند از $z = ۰$ و $z = ۱$. در $z = ۰$، $A_۰ = \gamma$، $B_۰ = ۰$، و چندجمله‌ای شاخصی عبارت است از $I(\nu) = \nu(\nu + \gamma - ۱)$، که ریشه‌های آن عبارت‌اند از $\nu_۱ = ۰$ و $\nu_۲ = ۱ - \gamma$. متناظر با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ دو جواب صوری وجود خواهد داشت، مگر اینکه γ یک عدد درست باشد. ●

در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، نشان داده می‌شود که، تا وقتی $\nu_۲ - \nu_۱$ یک عدد درست نباشد، جواب سری قضیهٔ ۹ـ۵ـ۵ در همسایگی $z_۰$ همگراست. در حالت استثنایی، یعنی وقتی $\nu_۲ - \nu_۱$ یک عدد درست باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

بهتر است محورهای مختصات را انتقال بدهیم تا $z_۰$ بر مبدأ منطبق شود. این کار قدری نوشتنی‌های ما را کمتر می‌کند، زیرا به‌جای توانهای $(z - z_۰)$، توانهای z را خواهیم داشت.

فرض کنید $\nu_۲ - \nu_۱$ یک عدد درست، و $\nu_۱$ ریشه‌ای است که جزء حقیقی آن بزرگتر است. بنابراین، به‌ازای یک $n \geq ۰$، داریم $\nu_۲ = \nu_۱ - n$ و یک جواب به شکل

$$w_۱ = z^{\nu_۱} f(z) \equiv z^{\nu_۱} \left(۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} C_k z^k \right)$$

در ناحیهٔ $r > |z| > ۰$، که در آن $r > ۰$، وجود خواهد داشت. اکنون

$$w(z) \equiv w_۱(z) h(z) = z^{\nu_۱} f(z) h(z)$$

را تعریف می‌کنیم و در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم قرار می‌دهیم تا یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول برحسب h' به‌دست آید

$$h'' + \left(p + \frac{۲w_۱'}{w_۱} \right) h' = ۰$$

یا، با جایگذاری $w_۱'/w_۱ = \nu_۱/z + f'/f$، معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول هم‌ارز معادلهٔ زیر حاصل شود

$$h'' + \left(\frac{۲\nu_۱}{z} + ۲\frac{f'}{f} + p \right) h' = ۰ \qquad (۹\text{ـ}۵۰)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل برحسب h' دارای یک نقطهٔ تکین عادی در $z = ۰$ است زیرا $f(۰) = ۱ \neq ۰$ و $p(z)$، حداکثر، در آن نقطه یک قطب ساده دارد. می‌توان نشان داد که ضریب جملهٔ $z^{-۱}$ در بسط لوران جملهٔ ضریب h' در (۹ـ۵۰) مساوی $n + ۱$ است، و همچنین

$$h(z) = \begin{cases} \ln z + g_۱(z) & \text{اگر } n = ۰ \\ C \ln z + z^{-n} g_۲(z) & \text{اگر } n \neq ۰ \end{cases}$$

که $g_1(z)$ و $g_2(z)$ در $z = 0$ تحلیلی‌اند (تمرین ۹ـ۵ـ۱). قضیهٔ زیر حاصل این نتیجه‌هاست.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶: فرض کنید نماهای مشخصهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با یک نقطهٔ تکین عادی در $z = 0$، عبارت‌اند از ν_1 و ν_2. اگر $\nu_1 - \nu_2$ یک عدد درست نباشد، یک پایه جواب به شکل ۹ـ۴۷ با $\nu = \nu_1$ یا $\nu = \nu_2$ وجود دارد. از سوی دیگر، اگر $\nu_2 = \nu_1 - n$، که در آن n یک عدد درست نامنفی است، در آن‌صورت یک پایهٔ متعارف جواب به شکل زیر وجود خواهد داشت

$$w_1 = z^{\nu_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)$$

$$w_2 = z^{\nu_2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right) + C w_1 \ln z$$

که در آن سریهای توانی در همسایگی $z = 0$ همگرایند. ■

اثبات . جز شکل w_2، به‌نحوی که در قضیه آمده است، اثبات در بالا تکمیل شده است. دستیابی به این شکل w_2 را به‌عنوان یک مسئلهٔ ساده (مسئلهٔ ۹ـ۳۹)، بر عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ■

۹ـ۵ـ۳ معادلات دیفرانسیل فوکسی

در بسیاری از موارد فیزیکی جالب، رفتار جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم در بینهایت حائز اهمیت است. مثلاً، همان‌گونه که مثال ۹ـ۳ـ۴ و تمرین ۹ـ۳ـ۲ نشان می‌دهند، تابعی که چگالی احتمال یک ذره را در مکانیک کوانتومی توصیف می‌کند، با افزایش فاصله از مرکز نیروی بستگی باید به صفر میل کند.

قبلاً دیدیم که رفتار یک جواب به کمک رفتار معادلهٔ دیفرانسیل، یا به‌عبارت مشخص‌تر، با رفتار توابع ضریب آن، تعیین می‌شود. برای تعیین رفتار در بینهایت، در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$$

قرار می‌دهیم $z = 1/t$ و می‌رسیم به

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}r(t)\right]\frac{dv}{dt} + \frac{1}{t^4}S(t)v(t) = 0 \qquad (۵۳\text{_}۹)$$

که در آن

$$v(t) \equiv w\left(\frac{1}{t}\right) \qquad r(t) \equiv p\left(\frac{1}{t}\right) \qquad S(t) \equiv q\left(\frac{1}{t}\right)$$

روشن است که وقتی $z \to \infty$، آنگاه $t \to 0$. بنابراین، به دانستن رفتار (۹ـ۵۳) در $t = 0$ علاقه‌مندیم. فرض می‌کنیم $r(t)$ و $S(t)$ هر دو در $t = 0$ تحلیلی‌اند. با این همه، معادلهٔ (۹ـ۵۳) به روشنی نشان می‌دهد که جواب $v(t)$ ممکن است هنوز در $t = 0$ (یا $z = \infty$)، به علت جمله‌های اضافی ظاهرشونده در توابع ضریب، دارای تکینگیهایی باشد.

فرض می‌کنیم که "بینهایت"، یک نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ (۹ـ۵۲) یا، به‌عبارت دیگر، $t = 0$ یک نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ (۹ـ۵۳) است. بنابراین، در بسطهای تایلور $r(t)$ و $S(t)$ (چون تحلیلی‌اند)، جملهٔ اول (ثابت) $r(t)$ و دو جملهٔ اول $S(t)$ باید صفر باشند، و به این ترتیب، می‌نویسیم

$$r(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

و

$$S(t) = b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots + b_n t^n + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k$$

برای $p(z)$ و $q(z)$ باید به‌ازای $|z| \to \infty$ عبارتهایی به شکل زیر داشته باشیم

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \\ q(z) &= \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_n}{z^n} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \end{aligned} \qquad (۵۴\text{_}۹)$$

وقتی $z = \infty$ یک نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ (۹ـ۵۲)، یا به عبارت دیگر، $t = ۰$ یک نقطهٔ تکین عادی (۹ـ۵۳) باشد، از قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = \nu_۱ - \nu_۲$ یک عدد درست نباشد، جوابهایی به شکل

$$v_۱(t) = t^{\alpha}\left(۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} C_k t^k\right) \qquad \alpha = \nu_۱, \nu_۲ \text{ به‌ازای}$$

یا، برحسب z، به‌صورت

$$w_۱(z) = z^{-\alpha}\left(۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}\right) \qquad \alpha = \nu_۱, \nu_۲ \text{ به‌ازای}$$

وجود دارند. دراینجا $\nu_۱$ و $\nu_۲$ نماهای مشخصهٔ (در $t = ۰$) معادلهٔ (۹ـ۵۳) هستند، که چندجمله‌ای شاخصی آن عبارت است از

$$\nu(\nu - ۱) + (۲ - a_۱) + b_۲ = ۰$$

اگر $\nu_۲ - \nu_۱$ یک عدد درست باشد، باز هم جوابهایی به‌صورت (۹ـ۵۵) وجود دارند، اما دومین صورت جوابها باید شامل یک جملهٔ لگاریتمی نیز باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل همگنی که توابع ضریب آن، تحلیلی و تک‌مقداری‌اند، معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی نامیده می‌شود، اگر در صفحهٔ منبسط مختلط $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (صفحهٔ مختلط شامل نقطهٔ واقع در بینهایت) دارای فقط نقاط تکین عادی باشد.

چون یک نوع خاص از معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی، ردهٔ گسترده‌ای از توابع غیرمقدماتی را در فیزیک ریاضیاتی توصیف می‌کند، خوب است که انواع گوناگون معادلات دیفرانسیل فوکسی را رده‌بندی کنیم. واقعیتی که در این رده‌بندی ملحوظ می‌شود، این است که توابع مختلطی که تنها تکینگیهای آنها در صفحهٔ منبسط مختلط عبارت‌اند از قطبها، توابع گویا (نسبت چندجمله‌ایها؛ تمرین ۹ـ۵ـ۲) هستند. بنابراین، انتظار داریم که ضرایب معادلات دیفرانسیل فوکسی فقط توابع گویا باشند.

بحث را با معادلات دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم دنبال می‌کنیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که معادله حداکثر دارای دو نقطهٔ تکین عادی در $z_۱$ و $z_۲$ است. با معرفی متغیر $\xi = (z - z_۱)/(z - z_۲)$، نقاط تکین عادی در $z_۱$ و $z_۲$، به‌ترتیب، به نقاط $\xi_۱ = ۰$ و $\xi_۲ = \infty$

در صفحهٔ منبسط ξ نگاشته می‌شوند. معادلهٔ (۹ـ۵۲) تبدیل می‌شود به

$$\frac{d^{2}u}{d\xi^{2}} + \Phi(\xi)\frac{du}{d\xi} + \Theta(\xi)u = 0 \tag{۹ـ۵۶}$$

که در آن u، Φ، Θ توابعی از ξ هستند که با قرار دادن z برحسب ξ، به‌ترتیب در $w(z)$، $p(z)$، و $q(z)$ به‌دست می‌آیند. چون $\xi = 0$ حداکثر یک قطب سادهٔ $\Phi(\xi)$ است، باید داشته باشیم

$$\Phi(\xi) = \frac{a_{1}}{\xi} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k}\xi^{k}$$

اما $\xi = \infty$ نیز یک نقطهٔ تکین عادی است. طبق (۹ـ۵۴)، نتیجه می‌شود که به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$، داریم $\alpha_k = 0$. بنابراین، $\Phi(\xi) = a_{1}/\xi$. به همین ترتیب، داریم $\Theta(\xi) = b_{2}/xi^{2}$. از این‌رو، یک معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم با دو نقطهٔ تکین عادی معادل است با معادلهٔ دیفرانسیل زیر

$$w'' + \frac{a_{1}}{z}w' + \frac{b_{2}}{z^{2}}w = 0$$

با ضرب دو طرف در z^{2}، می‌رسیم به

$$z^{2}w'' + a_{1}zw' + b_{2}w = 0$$

که معادلهٔ دیفرانسیل اویلر مرتبهٔ دوم است. معادلهٔ دیفرانسیل اویلر مرتبهٔ nام کلی، معادل با معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت است (مسئلهٔ ۹ـ۳۲). بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم با دو نقطهٔ تکین عادی، با معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دومی با ضرایب ثابت هم‌ارز است و هیچ چیز جدیدی را به‌دست نمی‌دهد.

بنابراین، ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم که جوابهای آن ممکن است شامل توابع غیرمقدماتی باشند، عبارت است از معادله‌ای که دارای سه نقطهٔ تکین عادی در نقاط، مثلاً، z_1، z_2، و z_3 باشد. با تبدیل

$$\xi = \frac{(z - z_{1})(z_{3} - z_{2})}{(z - z_{2})(z_{3} - z_{1})}$$

نگاشت z_1، z_2، و z_3 به $\xi_1 = 0$، $\xi_2 = \infty$، و $\xi_3 = 1$ تحقق خواهد یافت. بنابراین، فرض می‌کنیم که سه نقطهٔ تکین عادی عبارت‌اند از $z = 0$، $z = 1$، و $z = \infty$. می‌توان نشان داد (تمرین ۹ـ۵ـ۳) که عمومی‌ترین $p(z)$ و $q(z)$ عبارت‌اند از

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1} \quad \text{و} \quad q(z) = \frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)}$$

بنابراین، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۷: عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم با سه نقطهٔ تکین عادی را می‌توان به این شکل درآورد

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1}\right) w' + \left[\frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)}\right] w = 0 \qquad (۹\text{ـ}۵۷)$$

که در آن A_1، A_2، A_3، B_1، و B_2 مقادیر ثابتی‌اند. این معادله را معادلهٔ دیفرانسیل ریمان می‌نامیم. ■

معادلهٔ دیفرانسیل ریمان را می‌توان برحسب زوج نماهای مشخصهٔ (λ_1, λ_2)، (μ_1, μ_2)، و (ν_1, ν_2)، که به‌ترتیب، متعلق به نقاط ۰، ۱، و ∞ هستند، نوشت. معادلات شاخصی عبارت‌اند از

$$\lambda(\lambda - 1) + A_1\lambda + A_2 = 0$$

$$p۴pt]\mu(\mu - 1) + B_1\mu + B_2 = 0$$

و

$$\nu^2 + (1 - A_1 - B_1)\nu + A_2 + B_2 - A_3 = 0$$

با نوشتن معادلات شاخصی به‌صورت $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$، و مانند آنها و مقایسهٔ ضرایب، می‌توانیم به معادلات زیر دست پیدا کنیم

$$A_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \qquad A_2 = \lambda_1\lambda_2$$

$$B_1 = 1 - \mu_1 - \mu_2 \qquad B_2 = \mu_1\mu_2$$

$$A_1 + B_1 = \nu_1 + \nu_2 + 1 \qquad A_2 + B_2 - A_3 = \nu_1\nu_2$$

این معادلات به آسانی به اتحاد ریمان منجر می‌شوند

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 = 1 \qquad (۹\text{ـ}۵۸)$$

از جایگذاری این نتایج در (۹ـ۵۷)، قضیهٔ دیگری به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۹ـ۵ـ۸: معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دومی با سه نقطهٔ تکین عادی در صفحهٔ منبسط مختلط، هم‌ارز است با معادلهٔ دیفرانسیل ریمان

$$w'' + \left(\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{z} + \frac{1-\mu_1-\mu_2}{z-1}\right)$$

$$w' + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{z^2} + \frac{\mu_1\mu_2}{(z-1)^2} + \frac{\nu_1\nu_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2}{z(z-1)}\right) w = 0 \qquad (۹\text{ـ}۵۹)$$

که به‌طور یکتا با زوج نماهای مشخصه در هر نقطهٔ تکین، معین می‌شود. نماهای مشخصه، در اتحاد ریمان، معادلهٔ (۹ـ۵۸)، صدق می‌کنند. ■

یکتایی معادلهٔ دیفرانسیل ریمان این امکان را به‌دست می‌دهد که اتحادهایی برای جوابها پیدا کنیم و پارامترهای (۹ـ۵۹) را از پنج به سه کاهش دهیم. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که اگر $w(z)$ یکی از جوابهای (۹ـ۵۹) متناظر با (λ_1, λ_2)، (μ_1, μ_2)، و (ν_1, ν_2) باشد، در آن‌صورت تابع $v(z) = z^\lambda w(z)$، که آن نیز دارای نقاط شاخه در ۰، ۱، و ∞ است، جوابی است متناظر با $(\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda)$، (μ_1, μ_2)، و $(\nu_1 - \lambda, \nu_2 - \lambda)$. این حکم را می‌توان از قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ و معادلهٔ (۹ـ۵۵) استنباط کرد. به بیان کلی‌تر، تابع

$$v(z) = z^\lambda (z-1)^\mu w(z)$$

در نقاط $z = 0, 1, \infty$ دارای نقاط شاخه است [چون $w(z)$ چنین است]؛ بنابراین، جوابی است برای معادلهٔ دیفرانسیل ریمان. زوج نماهای مشخصهٔ آن عبارت‌اند از

$$(\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda) \quad (\mu_1 + \mu, \mu_2 + \mu) \quad \text{و} \quad (\nu_1 - \lambda - \mu, \nu_2 - \lambda - \nu)$$

در حالت خاص، اگر این امکان پیش آید که $\lambda = -\lambda_1$ و $\mu = -\mu_1$، آنگاه این زوجها تبدیل

می‌شوند به

$$(\nu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \nu_2 + \lambda_1 + \mu_1) \quad \text{و} \quad (\circ, \mu_2 - \mu_1) \qquad (\circ, \lambda_2 - \lambda_1)$$

اگر تعریفهای $\alpha \equiv \nu_1 + \lambda_1 + \mu_1$، $\beta \equiv \nu_2 + \lambda_1 + \mu_1$، و $\gamma \equiv 1 - \lambda_2 + \lambda_1$ را در نظر بگیریم و (۹ـ۵۸) را به‌کار ببریم، می‌توانیم این زوجها را به‌صورت

$$(\alpha, \beta) \quad \text{و} \quad (\circ, \gamma - \alpha - \beta) \qquad (\circ, 1 - \gamma)$$

بنویسیم که [با جایگذاری $\lambda_1 = \mu_1 = \circ$، $\lambda_2 = 1 - \gamma$، $\mu_2 = \gamma - \alpha - \beta$، $\nu_1 = \alpha$، و $\nu_2 = \beta$ در (۹ـ۵۹)] منجر می‌شوند به معادلهٔ دیفرانسیل ریمان به این قرار

$$w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{1 - \gamma + \alpha + \beta}{z - 1}\right) w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} w = \circ$$

این معادلهٔ مهم را معمولاً به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$z(1 - z)w'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)z]w' - \alpha\beta w = \circ \qquad (۹\text{ـ}۶۰)$$

و به آن معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی می‌گوییم. اکنون این معادله را مطالعه می‌کنیم.

۹ـ۵ـ۴ تابع ابرهندسی

دو نمای مشخصهٔ معادلهٔ (۹ـ۶۰) در $z = \circ$ عبارت‌اند از ۰ و $1 - \gamma$. از قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ نتیجه می‌شود که در $z = \circ$ یک جواب تحلیلی وجود دارد. این جواب را با $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ نشان می‌دهیم، و می‌نویسیم

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a_k z^k \qquad a_\circ = 1 \quad \text{که در آن}$$

با قرار دادن در (۹ـ۶۰)، رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید

$$a_{k+1} = \frac{(\alpha + k)(\beta + k)}{(k + 1)(\gamma + k)} a_k \qquad k \geq \circ$$

اگر $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$، این ضرایب را یکی پس از دیگری می‌توان تعیین کرد. در نتیجه

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k+1)} z^k$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+k)} z^k$$

سری (۹ـ۶۱) را سری ابرهندسی می‌نامیم، زیرا $F(1, \beta; \beta; z)$ صرفاً همان سری هندسی است. برخی از خواص مقدماتی تابع ابرهندسی را در مثالهای زیر بررسی می‌کنیم.

مثال ۹ـ۵ـ۴: بسیاری از خواص تابع ابرهندسی را می‌توان مستقیماً از معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی [معادلهٔ (۹ـ۶۰)] به‌دست آورد. مثلاً، با مشتق گرفتن از (۹ـ۶۰) و قرار دادن $v = w'$، خواهیم داشت

$$z(1-z)v'' + [\gamma + 1 - (\alpha + \beta + 3)z]v' - (\alpha+1)(\beta+1)v = 0$$

که نشان می‌دهد

$$F'(\alpha, \beta; \gamma; z) = CF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)$$

ثابت C را می‌توان با مشتق گرفتن از (۹ـ۶۱)، قرار دادن $z = 0$ در نتیجه به‌دست آمده، و توجه به اینکه $F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; 0) = 1$، تعیین کرد. در آن‌صورت، خواهیم داشت

$$F'(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)$$

از سوی دیگر، با نشاندن $w = z^{1-\gamma}u(\gamma \neq 1)$ در (۹ـ۶۰)، داریم

$$z(1-z)u^n + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)z]u' - \alpha_1\beta_1 u = 0$$

که در آن $\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1$، $\beta_1 = \beta - \gamma + 1$، و $\gamma_1 = 2 - \gamma$. به این ترتیب،

$$u = F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z)$$

بنابراین، u در $z = 0$ تحلیلی است. این حکم به نتیجهٔ جالبی می‌انجامد. به شرطی که γ عدد درستی نباشد، دو تابع

$$w_1(z) \equiv F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

و

$$w_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z)$$

یک پایهٔ متعارف جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی در $z = 0$ تشکیل می‌دهند. این موضوع، از قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ و این واقعیت نتیجه می‌شود که $(0, 1 - \gamma)$ زوج نمای مشخصه در $z = 0$ هستند.

با قرار دادن $w = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} u$ می‌توان به رابطهٔ سوم دست یافت. این جایگذاری به یک معادلهٔ ابرهندسی برحسب u به‌ازای $\alpha_1 = \gamma - \alpha$، $\beta_1 = \gamma - \beta$، و $\gamma_1 = \gamma$ منجر می‌شود. بنابراین، به اتحاد زیر می‌رسیم

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; z)$$

برای به‌دست آوردن پایهٔ متعارف در $z = 1$، جایگذاری $t = 1 - z$ را مورد توجه قرار می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $\alpha_1 = \alpha$ داریم $\beta_1 = \beta$، و $\gamma_1 = \alpha + \beta - \gamma + 1$ باز هم نتیجه معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی است. از $w_1(z)$ و $w_2(z)$ نتیجه می‌شود که

$$w_3(z) = F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z)$$

و

$$w_4(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta; \gamma - \alpha; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z)$$

این توابع یک پایهٔ متعارف جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی در $z = 1$ را تشکیل می‌دهند.

تقارن تابع ابرهندسی که به آسانی از معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی به‌دست می‌آید، عبارت است از

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\beta, \alpha; \gamma; z)$$

شش تابع $F(\alpha\pm 1,\beta;\gamma;z)$، $F(\alpha,\beta\pm 1;\gamma;z)$، و $F(\alpha,\beta;\gamma\pm 1;z)$ را توابع ابرهندسی مجاور $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ می‌نامند. با استفاده از آن قسمت از رابطهٔ (۹ـ۶۱) که شامل سری است، می‌توان روابط زیر را بین این توابع هندسی مجاور به‌دست آورد.

$$[\gamma-2\alpha-(\beta-\alpha)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha(1-z)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)$$
$$-(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)=0$$
$$(\gamma-\alpha-1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)$$
$$-(\gamma-1)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)=0$$
●

مثال ۹ـ۵ـ۵: در مثال ۹ـ۵ـ۴ نشان دادیم که چگونه پایهٔ جوابها را در $z=1$ از جواب عادی معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی در $z=0$، که عبارت است از $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$، به‌دست آوردیم. همچنین، می‌توان نشان داد که پایهٔ جواب در $z=\infty$ را نیز می‌توان از تابع ابرهندسی به‌دست آورد.

معادلهٔ (۹ـ۵۵) تابعی به شکل زیر را ایجاب می‌کند

$$v(z)=z^{r}F\left(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1;\frac{1}{z}\right)\equiv z^{r}w\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (1)$$

که در آن r، α_1، β_1، و γ_1 را باید تعیین کرد. بهتر است قرار بدهیم $t\equiv 1/z$، $\dot{w}=dw/dt$، و $\ddot{w}\equiv d^2w/dt^2$. در این‌صورت، چون w یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی است، داریم

$$\ddot{w}=-\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\dot{w}}{t(1-t)}+\frac{\alpha\beta}{t(1-t)}w$$

برحسب $z=1/t$، این عبارت به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{w}=\frac{[\gamma z^2-(\alpha+\beta+1)z]\dot{w}}{1-z}-\frac{\alpha\beta z^2}{1-z}w$$

اکنون با مشتق گرفتن از (۱) و بهره‌گیری از رابطهٔ

$$\frac{df}{dz}=\left(\frac{df}{dt}\right)\frac{dt}{dz}=-\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{df}{dt}$$

خواهیم داشت

$$v' \equiv \frac{dv}{dz} = rz^{r-1}w - z^{r-2}\dot{w}$$

$$v'' \equiv \frac{d^2v}{dz^2} = r(r-1)z^{r-2}w - 2(r-1)z^{r-3}\dot{w} + z^{r-4}\ddot{w}$$

از ضرب معادلهٔ مربوط به v'' در $z(z-1)$، داریم

$$z(1-z)v'' = r(r-1)z^{r-1}(1-z)w - 2(r-1)z^{r-2}(1-z)\dot{w} + z^{r-3}(1-z)\ddot{w} \qquad (2)$$

از معادلهٔ مربوط به v'، $\dot{w}$ را حساب می‌کنیم

$$\dot{w} = z^{2-r}(rz^{r-1}w - v') = z^{2-r}\left(\frac{rv}{z} - v'\right)$$

اکنون با جایگذاری w، $\dot{w}$، و $\ddot{w}$ برحسب v در (۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &z(1-z)v'' + [1-\alpha-\beta-2r-(2-\gamma-2r)z]v' \\ &\quad - \left[r^2 - r + ry - \frac{1}{z}(r+\alpha)(r+\beta)\right]v = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

اگر $r = -\alpha$ یا $r = -\beta$ این معادله به معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی تبدیل می‌شود. به‌ازای $r = -\alpha$ پارامترها عبارت‌اند از $\alpha_1 = \alpha$، $\beta_1 = 1 + \alpha - \gamma$، و $\gamma_1 = \alpha - \beta + 1$، که منجر می‌شوند به

$$v_1(z) = z^{-\alpha}F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma; \alpha-\beta+1; \frac{1}{z}\right)$$

به‌ازای $r = -\beta$، پارامترها عبارت‌اند از $\alpha_1 = \beta$، $\beta_1 = 1 + \beta - \gamma$، و $\gamma_1 = \beta - \alpha + 1$. بنابراین

$$v_2(z) = z^{-\beta}F\left(\beta, 1+\beta-\gamma; \beta-\alpha+1; \frac{1}{z}\right)$$

این دو معادله یک پایه جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی تشکیل می‌دهند که در اطراف $z=\infty$ برقرار است. ●

همان‌گونه که از مثالهای بالا پیداست، می‌توان روابط بسیاری بین توابع ابرهندسی با پارامترهای مختلف و متغیرهای مستقل به‌دست آورد. در واقع، کامر، ریاضیدان قرن نوزدهم نشان داد که ۲۴ جواب (البته، خطی وابسته) برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی وجود دارد. گردایهٔ این جوابها به جوابهای کامر مشهورند، و ما شش تا از آنها را در قالب دو مثال پیش به‌دست آوردیم. رابطهٔ مهم دیگر (که در تمرین ۹ـ۵ـ۵ به آن برخواهیم خورد) این است که اگر $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی باشد، در آن‌صورت

$$z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha; 1-\alpha+\beta; \frac{1}{z}\right) \qquad (۹\text{ـ}۶۲)$$

نیز یک جواب این معادله است.

بسیاری از توابع که در فیزیک ریاضیاتی به آنها برمی‌خوریم، با تابع ابرهندسی مرتبط‌اند. حتی برخی از توابع مقدماتی متداول را می‌توان با پارامترهای مناسب برحسب تابع ابرهندسی بیان کرد. مثلاً، وقتی $\gamma=\beta$، داریم

$$F(\alpha,\beta;\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)}z^k = (1-z)^{-\alpha}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right) = \frac{1}{z}\sin^{-1}z$$

همچنین

$$F(1,1;2;-z) = \frac{1}{z}\ln(1+z)$$

با این همه، کارآیی واقعی تابع ابرهندسی این است که تقریباً تمام توابع غیرمقدماتی را که در فیزیک به آنها برمی‌خوریم، در بر می‌گیرد. در اینجا اجمالاً به چند مورد اشاره می‌کنیم.

توابع ژاکوبی. توابع ژاکوبی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر هستند

$$(1-x^2)\frac{d^2x}{dx^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{du}{dx} + \lambda(\lambda+\alpha+\beta+1)u = 0 \qquad (۹\text{ـ}۶۳)$$

تعریف $x \equiv ۱ - ۲z$، معادلهٔ (۹ـ۶۳) را به معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی با پارامترهای $\alpha_۱ = \lambda$، $\beta_۱ = \lambda + \alpha + \beta + ۱$، و $\gamma_۱ = ۱ + \alpha$ تغییر می‌دهد. جوابهای معادلهٔ (۹ـ۶۳)، که توابع ژاکوبی نوع اول خوانده می‌شوند، با بهنجارش مناسب، عبارت‌اند از

$$P_{\gamma}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\lambda+\alpha+۱)}{\Gamma(\lambda+۱)\Gamma(\alpha+۱)} F\left(-\lambda, \lambda+\alpha+\beta+۱; ۱+\alpha; \frac{۱-z}{۲}\right)$$

(۹ـ۶۴)

به‌ازای $\lambda = n$، که n عدد نامنفی درستی است، $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n با بسطی به قرار زیر است

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+۱)}{\Gamma(n+۱)\Gamma(n+\alpha+\beta+۱)} \sum_{k=۰}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+۱)}{\Gamma(\alpha+k+۱)} \left(\frac{z-۱}{۲}\right)^k$$

اینها همان چندجمله‌ایهای ژاکوبی‌اند که در فصل ۵ مطرح کردیم. در واقع، معادلهٔ دیفرانسیل فصل ۵ که چندجمله‌ای $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ در آن صدق می‌کند، با (۹ـ۶۳) همسان است. توجه کنید که تبدیل $x = ۱ - ۲z$، نقاط $z = ۰$ و $z = ۱$ را، به‌ترتیب، به نقاط $x = ۱$ و $x = -۱$ منتقل می‌کند. بنابراین، نقاط تکین عادی توابع ژاکوبی نوع اول در ±۱ و ∞ هستند.

با استفاده از (۹ـ۶۲)، مجموعه جواب خطی مستقل، دیگری برای (۹ـ۶۳) به‌دست می‌آید. این جوابها، توابع ژاکوبی نوع دوم نامیده می‌شوند:

$$Q_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{۲^{\lambda+\alpha+\beta}\Gamma(\lambda+\alpha+۱)\Gamma(\lambda+\beta+۱)}{\Gamma(۲\lambda+\alpha+\beta+۲)(z-۱)^{\lambda+\alpha+۱}(z+۱)^{\beta}}$$

$$F\left(\lambda+\alpha+۱, \lambda+۱; ۲\lambda+\alpha+\beta+۲; \frac{۲}{۱-z}\right) \qquad (۹ـ۶۵)$$

توابع (فراکروی) گگنباؤر. توابع گگنباؤر، یا توابع فراکروی، حالتهای خاصی از توابع ژاکوبی هستند که به‌ازای آنها $\alpha = \beta = \mu - ۱/۲$. این توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$C_{\lambda}^{\mu}(z) \equiv \frac{\Gamma(\lambda+۲\mu)}{\Gamma(\lambda+۱)\Gamma(۲\mu)} F\left(-\lambda, \lambda+۲\mu; \mu+\frac{۱}{۲}; \frac{۱-z}{۲}\right) \qquad (۹ـ۶۶)$$

به تغییر در ثابت بهنجارش توجه کنید. توابع گگنباؤر خطی مستقل " از نوع دوم "را می‌توان از (۹ـ۶۵) و با جایگذاری $\alpha = \beta = \mu - ۱/۲$ به‌دست آورد.

توابع لژاندر. حالت خاص دیگری از توابع ژاکوبی به‌ازای $\alpha = \beta = \circ$ به‌دست می‌آید. این توابع توابع لژاندر نوع اول خوانده می‌شوند

$$P_\lambda(z) \equiv P_\lambda^{(\circ,\circ)}(z) = F\left(-\lambda, \lambda+۱; ۱; \frac{۱-z}{۲}\right) \qquad (۶۷\_۹)$$

با قرار دادن $\alpha = \beta = \circ$ در (۹ـ۵۶)، توابع لژاندر نوع دوم به‌دست می‌آیند

$$Q_\lambda(z) \equiv Q_\lambda^{(\circ,\circ)}(z) = \frac{۲^\lambda[\Gamma(\lambda+۱)]^۲}{\Gamma(۲\lambda+۲)(z-۱)^{\lambda+۱}} F\left(\lambda+۱, \lambda+۱; ۲\lambda+۲; \frac{۲}{۱-z}\right)$$

توابع دیگری که از توابع ژاکوبی مشتق می‌شوند، نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آیند (فصل ۵).

۹ـ۵ـ۵ توابع ابرهندسی همشار؛ توابع بسل

تبدیل $x = ۱ - ۲z$، نقاط تکین عادی معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی را به مقداری متناهی منتقل می‌کند. در نتیجه، توابع جدید هنوز دارای دو نقطهٔ تکین عادی، $z = \pm ۱$، در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ هستند. در برخی موارد فیزیکی مهم، فقط مبدأ، که متناظر با $r = \circ$ در مختصات کروی است (نوعاً، جایگاه چشمهٔ نیروی مرکزی)، نقطهٔ تکین به‌شمار می‌آید. اگر بخواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی به‌دست بیاوریم که با چنین موردی سازگار باشد، باید نقطهٔ تکین $z = ۱$ را به بینهایت "هل" بدهیم. این کار را می‌توان با جایگذاری $t = rz$ در معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی و گرفتن حد $r \to \infty$ انجام داد. جایگذاری یادشده منجر می‌شود به

$$\frac{d^۲w}{dt^۲} + \left(\frac{\gamma}{t} + \frac{۱-\gamma+\alpha+\beta}{t-r}\right)\frac{dw}{dt} + \frac{\alpha\beta}{t(t-r)}w = \circ \qquad (۶۸\_۹)$$

اگر "کورکورانه" با فرض ثابت ماندن α، β، و γ، حد $r \to \infty$ را بگیریم، معادلهٔ (۹ـ۶۸) تبدیل می‌شود به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول مقدماتی زیر

$$\frac{d^۲w}{dt^۲} + \frac{\gamma}{t}\frac{dw}{dt} = \circ$$

برای به‌دست آوردن یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرمقدماتی، مجبوریم پارامترها را قدری دستکاری کنیم، یعنی بگذاریم بعضی از آنها به بینهایت میل کنند. امر مسلم این است که γ باید متناهی باقی بماند، زیرا این پارامتر در اولین جملهٔ ضریب dw/dt ظاهر می‌شود. بنابراین β یا α را به بینهایت میل

می‌دهیم. هر یک را که انتخاب کنیم نتیجه یکی است، زیرا α و β به‌طور متقارن در معادله ظاهر می‌شوند. رسم بر این است که فرض می‌کنند $\beta = r \to \infty$. در این‌صورت، معادلهٔ (۹ـ۶۸) تبدیل می‌شود به (توجه کنید که t متناهی است.)

$$\frac{d^{۲}w}{dt^{۲}} + \left(\frac{\gamma}{t} - ۱\right)\frac{dw}{dt} - \frac{\alpha}{t}w = ۰$$

با ضرب این دو معادله در t و تغییر مجدد متغیر مستقل به z، داریم

$$zw''(z) + (\gamma - z)w'(z) - \alpha w(z) = ۰ \qquad (۹\text{ـ}۶۹)$$

این معادله را معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار می‌گویند.

شایان ذکر است که نقطهٔ واقع در بینهایت، دیگر یک نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ (۹ـ۹۶) نیست. با این همه، هنوز می‌توان جوابهایی به شکل سری برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار جستجو کرد. چون $z = ۰$ هنوز یک نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار است، می‌توانیم بسطهای حول آن نقطه را به‌دست آوریم. نماهای مشخصه، مثل قبل، ۰ و $۱ - \gamma$ هستند. بنابراین، یک جواب تحلیلی برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار در مبدأ وجود دارد، که تابع ابرهندسی همشار نامیده می‌شود و آن را با $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ نشان می‌دهیم. چون $z = ۰$ تنها تکینگی (متناهی) معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار است، پس $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ یک تابع تام است.

بسط سری مربوط به $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ را می‌توان مستقیماً از (۹ـ۶۱) و این واقعیت به‌دست آورد که

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right)$$

نتیجه عبارت است از

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\gamma + k)\Gamma(k + ۱)} z^k \qquad (۹\text{ـ}۷۰)$$

این عبارت را سری ابرهندسی همشار می‌نامیم.

مانند معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی، می‌توان جواب دیگری نیز برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی

همشار به‌دست آورد. اگر $\gamma - 1$ یک عدد درست نباشد، در آن‌صورت (تمرین ۹ـ۵ـ۴)

$$z^{1-\gamma} \lim_{\beta\to\infty} F\left(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1; 2-\gamma; \frac{z}{\beta}\right)$$
$$= z^{1-\gamma} \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; \frac{z}{\beta}\right)$$

چون F نسبت به دو پارامتر اولش متقارن است

$$= z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z)$$

به این ترتیب، هر یک از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z)$ نوشت.

مثال ۹ـ۵ـ۶: معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر، در یکاهایی که در آن $\hbar = 1$، عبارت است از

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$

برای مورد اتمهای هیدروژن‌گونه با عدد اتمی Z، $V(r) = -Ze^2/r$، و معادله تبدیل می‌شود به

$$\nabla^2\Psi + \left(2mE + \frac{2mZe^2}{r}\right)\Psi = 0$$

قسمت شعاعی این معادله توسط معادلهٔ (۸ـ۱۴ب) با $f(r) = 2mE + 2mZe^2/r$ داده می‌شود. با تعریف $u \equiv rR(r)$، خواهیم داشت

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\lambda + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}\right)u = 0 \qquad (1)$$

که در آن $\lambda \equiv 2mE$، $a = 2mZe^2$، و $b = l(l+1)$. این معادله را می‌توان با تعریف $r \equiv kz$ (که در آن k ثابت دلبخواهی است که بعداً تعیین خواهد شد) ساده‌تر کرد و به معادلهٔ زیر رسید

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\lambda k^2 + \frac{ak}{z} - \frac{b}{z^2}\right)u = 0$$

با اختیار کردن $\lambda k^۲ = -۱/۴$، خواهیم داشت

$$\frac{d^۲u}{dz^۲} + \left(-\frac{۱}{۴} + \frac{a/۲\sqrt{-\lambda}}{z} - \frac{b}{z^۲}\right)u = ۰$$

معادله‌های با این شکل را می‌توان با جایگزینی زیر

$$u(z) = z^{\mu}e^{-\nu z}f(z)$$

به معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشاری تبدیل کرد. به این ترتیب، (با $a' \equiv a/۲\sqrt{-\lambda}$) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d^۲f}{dz^۲} + \left(\frac{۲\mu}{z} - ۲\nu\right)\frac{df}{dz} + \left[-\frac{۱}{۴} + \frac{\mu(\mu-۱)}{z^۲} - \frac{۲\mu\nu}{z} + \frac{a'}{z} - \frac{b}{z^۲} + \nu^۲\right]f = ۰ \quad (۲)$$

با اختیار کردن $\nu^۲ = ۱/۴$ و $\mu(\mu-۱) = b$، معادلهٔ (۲) تبدیل می‌شود به

$$f'' + \left(\frac{۲\mu}{z} - ۲\nu\right)f' - \frac{۲\mu\nu - a'}{z}f = ۰$$

که به شکل (۹ـ۶۹) است.

به دلایل فیزیکی، انتظار داریم وقتی $z \to \infty$، آنگاه $u(z) \to ۰$. بنابراین، $\nu = ۱/۲$. همچنین

$$b = l(l+۱) \quad \Rightarrow \quad \mu = -۱ \quad \text{یا} \quad \mu = l+۱$$

باز هم به دلایل فیزیکی، شرط می‌کنیم که $u(۰)$ متناهی باشد (تابع موج نباید در $r = ۰$ نامتناهی بشود). این حکم ایجاب می‌کند که $\mu = l + ۱$. بنابراین، خواهیم داشت

$$f'' + \left(\frac{۲\mu}{z} - ۱\right)f' - \frac{\mu - a'}{z}f = ۰ \qquad \text{که در آن } \mu = l+۱$$

با ضرب کردن طرفین در z، داریم

$$zf'' + (۲\mu - z)f' - (\mu - a')f = ۰$$

مقایسهٔ این رابطه با (۹ـ۶۹) نشان می‌دهد که f متناسب است با $\Phi(\mu - a', ۲\mu; z)$. بنابراین، جواب معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$u = Cz^{l+۱}e^{(-۱/۲)z}\Phi(l + ۱ - a', ۲l + ۲; z)$$

استدلالی شبیه آنچه که در حل تمرین ۹ـ۳ـ۲ به‌کار می‌رود، نشان می‌دهد که حاصلضرب $e^{-z/۲}\Phi(l + ۱ - a', ۲l + ۲; z)$ نامتناهی خواهد بود مگر اینکه سری توانی نمایشگر Φ بریده (تبدیل به یک چندجمله‌ای) شود. این اتفاق وقتی می‌افتد که به‌ازای عدد درست نامنفی $N \geq ۰$ داشته باشیم

$$l + ۱ - a' = -N \qquad (۳)$$

به این ترتیب، چندجمله‌ایهای لاگر را تعریف می‌کنیم

$$L_n^j(z) \equiv \frac{\Gamma(n + j + ۱)}{\Gamma(n + ۱)\Gamma(j + ۱)}\Phi(-N, j + ۱; z) \qquad j = ۲l + ۱$$

شرط (۳) قاعدهٔ کوانتش برای ترازهای انرژی یک اتم هیدروژن‌گونه است. با یادآوری تعریف a'، داریم $a' = a/۲\sqrt{-\lambda} = N + l + ۱ \equiv n$، که در آن $n \geq ۱$، و نتیجه می‌گیریم

$$\lambda = -\frac{a^۲}{۴n^۲} = -\frac{۴m^۲Z^۲e^۴}{۴n^۲} \qquad \text{به‌ازای } n \geq ۱$$

یا

$$E = -Z^۲\left(\frac{mc^۲}{۲}\right)\alpha\frac{۱}{n^۲} \qquad \text{به‌ازای } n \geq ۱$$

که در آن $\alpha = e^۲/\hbar c = ۱/۱۳۷$ ثابت ساختار ریز است. با قرار دادن مقادیر تمام ثابتها، می‌توانیم این معادله را به شکلی بنویسیم که انرژی را برحسب الکترون‌ولت می‌دهد

$$E = -\frac{۱۳{,}۶Z^۲}{n^۲}(\text{eV}) \qquad n \geq ۱ \qquad (۴)$$

از سوی دیگر، جوابهای معادلهٔ (۱) عبارت‌اند از

$$R_{n,l}(r) \equiv \frac{u_{n,l}(r)}{r} = Cr^l e^{-Zr/na_\circ} \Phi\left(-n+l+۱, ۲l+۲; \frac{۲Zr}{na_\circ}\right)$$

و عمومی‌ترین جواب عبارت است از

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{l=\circ}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_{nlm} Y_{lm}(\theta,\varphi) r^l e^{-Zr/na_\circ} \Phi\left(-n+۱+۱, ۲l+۲; \frac{۲Zr}{na_\circ}\right)$$

که در آن $a_\circ = \hbar^۲/me^۲ = \circ,۵۲۹ \times ۱\circ^{-۸}\text{cm}$، شعاع بور است.

معادلهٔ بسل، که در فصل ۸ آن را معرفی کردیم، معمولاً به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$w'' + \frac{۱}{z}w' + \left(۱ - \frac{\nu^۲}{z^۲}\right) w = \circ \qquad (۷۱\text{-}۹)$$

مطابق مطالبی که در مثال ۹ـ۵ـ۶ دیدیم، جایگذاری $u = z^\mu e^{-\eta z} f(z)$، معادلهٔ (۹ـ۷۱) را تبدیل می‌کند به معادلهٔ

$$f'' + \left(\frac{۲\mu+۱}{z} - ۲\eta\right) f' + \left[\frac{\mu^۲ - \nu^۲}{z^۲} - \frac{\eta(۲\mu+۱)}{z} + \eta^۲ + ۱\right] f = \circ$$

که، اگر قرار دهیم $\mu = \nu$ و $\eta = i$، کاهش می‌یابد به

$$f'' + \left(\frac{۲\nu+۱}{z} - ۲i\right) f' - \frac{(۲\nu+۱)i}{z} f = \circ$$

با جایگذاری دیگری به‌صورت $t = ۲iz$، خواهیم داشت

$$t\frac{d^۲f}{dt^۲} + [(۲\nu+۱) - t]\frac{df}{dt} - \left(\nu + \frac{۱}{۲}\right) f = \circ$$

که به‌ازای $\alpha = \nu + ۱/۲$ و $\gamma = ۲\nu + ۱$ به همان شکل (۹ـ۶۹) است.

بنابراین، جوابهای معادلهٔ بسل [معادلهٔ (۹ـ۷۱)] را می‌توان به‌صورت مضربهای ثابتی از $z^\nu e^{-iz}\Phi(\nu+۱/۲, ۲\nu+۱; ۲iz)$ نوشت. با بهنجارش مناسب، تابع بسل نوع اول و از مرتبهٔ

ν را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_\nu(z) \equiv \frac{۱}{\Gamma(\nu+۱)}\left(\frac{z}{۲}\right)^\nu e^{-iz}\Phi\left(\nu+\frac{۱}{۲}, ۲\nu+۱; ۲iz\right) \qquad (۷۲\_۹)$$

با کاربرد (۹ـ۷۰) و بسط مربوط به e^{-iz}، می‌توان نشان داد که

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{k!\Gamma(\nu+k+۱)}\left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k} \qquad \nu \geq ۰ \qquad (۷۳\_۹)$$

نامنفی بودن ν، خوش‌تعریف بودن $J_\nu(z)$ را در $z = ۰$ تضمین می‌کند. بنابراین، همان‌طور که قبلاً در بعد وسیعتری یادآور شدیم، $J_\nu(z)$ در صورتی یک تابع تام است که $\nu \geq ۰$. جواب دوم خطی مستقل را طبق معمول می‌توان به‌دست آورد که متناسب است با

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{۲}\right)^\nu e^{-iz} z^{۱-(۲\nu+۱)}\Phi\left(\nu+\frac{۱}{۲}-(۲\nu+۱)+۱, ۲-(۲\nu-۱); ۲iz\right)\\
&= (C)\left(\frac{z}{۲}\right)^{-\nu} e^{-iz}\Phi\left(-\nu+\frac{۱}{۲}, -۲\nu+۱; ۲iz\right)\\
&= (C)J_{-\nu}(z)
\end{aligned}$$

مشروط بر اینکه $۱-\gamma \equiv ۱-(۲\nu+۱) = -۲\nu$ یک عدد درست نباشد. وقتی ν عدد درستی باشد، آنگاه $J_{-n}(z) = (-۱)^n J_n(z)$ (تمرین ۹ـ۵ـ۶). بنابراین، وقتی ν عددی نادرست است، عمومی‌ترین جواب به شکل $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$ خواهد بود

حال اگر ν مساوی یک عدد درست n باشد، جواب دوم خطی مستقل را چگونه پیدا کنیم؟ ابتدا تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$Y_\nu(z) \equiv \frac{[J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)]}{\sin(\nu\pi)} \qquad (۷۴\_۹)$$

این تابع را تابع بسل نوع دوم، یا تابع نویمان می‌نامند. به‌ازای مقادیر نادرست (غیرصحیح) ν، این عبارت صرفاً یک ترکیب خطی از دو جواب خطی مستقل J_ν و $J_{-\nu}$ است. به‌ازای مقادیر درست ν، تابع یادشده نامعین است. بنابراین، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به تعریف زیر نظر می‌کنیم

$$Y_n(z) \equiv \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \frac{۱}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-۱)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]$$

با مشتق گرفتن از (۹ـ۷۳) نسبت به ν، داریم

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = J_\nu \ln\left(\frac{z}{۲}\right) - \left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{\Psi(\nu+k+۱)}{k!\Gamma(\nu+k+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}$$

که در آن $\Psi(z) \equiv (d/dz)\ln\Gamma(z)$. به همین ترتیب

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = -J_{-\nu} \ln\left(\frac{z}{۲}\right) - \left(\frac{z}{۲}\right)^{-\nu} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\Psi(-\nu+k+۱)}{k!\Gamma(-\nu+k+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}$$

با نشاندن مقادیر به‌جای $\partial J_\nu/\partial\nu$ و $\partial J_{-\nu}/\partial\nu$ در تعریف $Y_n(z)$، خواهیم داشت

$$Y_n(z) = \frac{۲}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{۲}\right) - \frac{۱}{\pi}\left(\frac{z}{۲}\right)^n \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{\Psi(n+k+۱)}{k!\Gamma(n+k+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}$$
$$- \frac{۱}{\pi}\left(\frac{z}{۲}\right)^{-n} (-۱)^n \sum_{k=۰}^{\infty} (-۱)^k \frac{\Psi(k-n+۱)}{k!\Gamma(k-n+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k} \qquad (۹\text{ـ}۷۵)$$

چون $Y_\nu(z)$ به‌ازای هر مقدار ν، خواه درست یا نادرست، از $J_\nu(z)$ مستقل خطی است، بهتر است $\{J_{\nu(z)}, Y_\nu(z)\}$ را به عنوان یک پایه جواب برای معادلهٔ بسل در نظر بگیریم.

یک پایه جواب دیگر به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_\nu^{(۱)}(z) \equiv J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad \text{و} \quad H_\nu^{(۲)}(z) \equiv J_\nu(z) - iY_\nu(z) \qquad (۹\text{ـ}۷۶)$$

به این عبارتها توابع بسل نوع سوم، یا توابع هنکل می‌گویند.

هرگاه به‌جای z کمیت iz را در معادلهٔ بسل قرار دهیم، این معادله منجر می‌شود به

$$\frac{d^۲w}{dz^۲} + \frac{۱}{z}\frac{dw}{dz} - \left(۱ + \frac{\nu^۲}{z^۲}\right) w = ۰$$

که پایه جوابهای آن مضاربی از $J_\nu(iz)$ و $J_{-\nu}(iz)$ است. به این ترتیب، توابع بسل نوع اول تعدیل‌یافته به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$I_\nu(z) \equiv e^{-i(\pi/۲)\nu} J_\nu(iz) = \left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!\Gamma(k+\nu+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}$$

به همین ترتیب، توابع بسل نوع سوم تعدیل‌یافته، بنابر تعریف، عبارت‌اند از

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{۲\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)]$$

وقتی ν یک عدد درست، n، است، آنگاه $I_n = I_{-n}$، و K_n مبهم است. بنابراین، $K_n(z)$ را به‌صورت $\lim_{\nu\to n} K_\nu(z)$ تعریف می‌کنیم. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$K_n(z) = \frac{(-۱)^n}{۲}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial\nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial\nu}\right]$$

که نمایش سری توانی آن به این قرار است

$$\begin{aligned}K_n(z) =& (-۱)^{n+۱} I_n(z)\ln\left(\frac{z}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}(-۱)^n\left(\frac{z}{۲}\right)^n\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\Psi(k+n+۱)}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}\\ &+ \frac{۱}{۲}(-۱)^n\left(\frac{z}{۲}\right)^{-n}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\Psi(k-n+۱)}{k!\Gamma(k-n+۱)}\left(\frac{z}{۲}\right)^{۲k}\end{aligned}$$

به روش زیر می‌توانیم یک رابطهٔ بازگشتی برای جوابهای معادلهٔ بسل به‌دست آوریم. اگر $Z_\nu(z)$ یک جواب مرتبهٔ ν باشد، در آن‌صورت (مسئلهٔ ۹ـ۵۶)

$$Z_{\nu+۱} = C_۱ z^\nu \frac{d}{dz}[z^{-\nu} Z_\nu(z)] \quad \text{و} \quad Z_{\nu-۱} = C_۲ z^{-\nu}\frac{d}{dz}[z^\nu Z_\nu(z)]$$

اگر ثابتها را چنان اختیار کنیم که $Z_{\nu+۱}$ و $Z_{\nu-۱}$ در (۹ـ۷۳) صدق کنند، در آن‌صورت $C_۱ = -۱$ و $C_۲ = ۱$. با مشتق گرفتن از معادله‌های مربوط به $Z_{\nu+۱}$ و $Z_{\nu-۱}$، خواهیم داشت

$$Z_{\nu+۱} = \left(\frac{\nu}{z}\right) Z_\nu - \frac{dZ_\nu}{dz} \qquad \text{(۹ـ۷۷الف)}$$

$$Z_{\nu-۱} = \left(\frac{\nu}{z}\right) Z_\nu + \frac{dZ_\nu}{dz} \qquad \text{(۹ـ۷۷ب)}$$

با جمع کردن این دو معادله، می‌رسیم به رابطهٔ بازگشتی زیر

$$Z_{\nu-۱}(z) + Z_{\nu+۱}(z) = \frac{۲\nu}{z} Z_\nu(z) \qquad \text{(۹ـ۷۸)}$$

که $Z_\nu(z)$ می‌تواند هر یک از سه نوع تابع بسل باشد.

در فصل بعد، در مبحث دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل، نشان خواهیم داد که توابع بسل، توابعی متعامدند، و بنابراین، توابع مناسب دیگر را می‌توان برحسب آنها بسط داد.

تمرینها

۹ـ۵ـ۱ نشان دهید (۹ـ۵۲) جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول (۹ـ۵۰) است.

۹ـ۵ـ۲ نشان دهید تابعی که فقط در صفحهٔ منبسط مختلط دارای قطب واقع باشد، لزوماً یک تابع گویاست.[1]

۹ـ۵ـ۳ نشان دهید معادلهٔ (۹ـ۵۷) معرف عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی مرتبهٔ دوم است.

۹ـ۵ـ۴ نشان دهید تابع بیضوی نوع اول را، که بنابر تعریف عبارت است از

$$K(z) \equiv \int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{d\theta}{\sqrt{۱ - z\sin^۲\theta}}$$

می‌توان به‌صورت $(\pi/۲)F(۱/۲, ۱/۲; ۱; z)$ بسط داد.

۹ـ۵ـ۵ نشان دهید که اگر $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی باشد در آن‌صورت عبارت

$$z^{\alpha-\gamma}(۱ - z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma - \alpha, ۱ - \alpha; ۱ + \alpha - \beta; \frac{۱}{z}\right)$$

نیز یکی از جوابهای آن است.

۹ـ۵ـ۶ نشان دهید که $J_{-n}(z) = (-۱)^n J_n(z)$.

۹ـ۵ـ۷ در یک ناحیهٔ بدون پتانسیل، معادلهٔ شعاعی (۸ـ۱۴ب) به یک معادلهٔ دیفرانسیل کاهش می‌یابد که در آن $f(r) = \lambda$ یک مقدار ثابت است. جوابهای آن معادلهٔ دیفرانسیل را برحسب توابع بسل بنویسید.

۹ـ۵ـ۸ بنابر قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶، اگر تفاضل بین نماهای مشخصهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم عدد درستی باشد، در آن‌صورت ممکن است یک جملهٔ $\ln z$ در جواب دوم وجود داشته باشد. اما، این جمله در یک ثابت ضرب خواهد شد. فقط در صورتی که این ثابت ناصفر باشد یک واگرایی لگاریتمی در $z = \circ$ پدید خواهد آمد. در جوابهای معادلهٔ بسل با $\nu = n + ۱/۲$، که در

[1] ۱. در حقیقت اینجا جای این تمرین نیست و باید در فصل ۷ بیاید. اما، به‌خاطر وابستگی به این مبحث و نیز به بهانهٔ مرور آنالیز اعداد مختلط آن را در اینجا می‌آوریم.

آن n یک عدد درست ناصفر است، جملهٔ لگاریتمی غایب است. این را می‌توان با نشان دادن این نکته ملاحظه کرد که $Z_{n+1/2}(z)$ و $Z_{-n-1/2}(z)$ خطی مستقل‌اند. دترمینان ورونیسکی جوابهای معادلهٔ بسل را پیدا کنید و نشان دهید که فقط در صورتی صفر می‌شود که ν یک عدد درست باشد. [راهنمایی: مقدار ورونیسکی را برای مقادیر کوچک z در نظر بگیرید، و از فرمول $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \pi/\sin \nu\pi$ استفاده کنید.]

۹ـ۵ـ۹ با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۹ـ۷۸) ثابت کنید

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m [z^{-\nu} Z_\nu(z)] = z^{\nu-m} Z_{\nu-m}(z)$$

۹ـ۵ـ۱۰ $J_{1/2}(z)$ و $J_{-1/2}(z)$ را برحسب توابع مقدماتی بنویسید.

۹ـ۵ـ۱۱ با استفاده از نتایج تمرینهای ۹ـ۵ـ۹ و ۹ـ۵ـ۱۰، رابطهٔ زیر را به‌دست آورید

$$J_{-n-1/2}(z) = \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\cos z}{z}\right)$$

۹ـ۵ـ۱۲ با استفاده از روابط

$$\frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad \text{و} \quad \frac{d}{dz}[z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$$

روابط زیر را به‌دست آورید

(الف) $$\int z^{-\nu+1} J_\nu(z)\,dz = -z^{-\nu+1} J_{\nu-1}(z) \quad \text{و} \quad \int z^{\nu+1} J_\nu(z)\,dz = z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)$$

(ب) $$\int z^{\mu+1} J_\nu(z)\,dz = z^{\mu+1} J_{\nu+1}(z) + (\mu-\nu) z^\mu J_\nu(z) - (\mu^2-\nu^2)\int z^{\mu-1} J_\nu(z)\,dz$$

(ج) $\int z^3 J_0(z)\,dz$ را حساب کنید.

مسائل

۹ـ۱ با استفاده از مشتق‌گیری مستقیم، نشان دهید که تابع داده شده در معادلهٔ (۹ـ۸) در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول (۹ـ۷) صدق می‌کند.

۹ـ۲ فرض کنید $u(x,y)=C$ یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $M\ dx+N\ dy=0$ است. نشان دهید (الف) $(\partial u/\partial x)/M=(\partial u/\partial y)/N$، و (ب) $\mu(x,y)\equiv(\partial u/\partial x)/M$ یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دیفرانسیل است. (ج) به‌ازای تابع مشتق‌پذیر و دلخواه $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، نشان دهید که $\nu(x,y)=\mu(x,y)F(u)$ نیز یک عامل انتگرال‌گیری برای معادلهٔ دیفرانسیل است.

۹ـ۳ بار خازن یک مدار RC را که در آن یک پتانسیل ثابت V_0 برای مدت زمان $T>0$ اعمال و سپس قطع می‌شود، تجزیه و تحلیل کنید. مواردی را در نظر بگیرید که در آنها $t<T$ و $t>T$.

۹ـ۴ تمام توابع $f(x)$ را که انتگرال معین از صفر تا x آنها مساوی مربع عملگر آنهاست، پیدا کنید.

۹ـ۵ (الف) فرض کنید $p_1u'+p_0u=0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول همگن برحسب u است. این معادله را حل کنید. (توجه کنید که معادله تفکیک‌پذیر است و به آسانی می‌توان از آن انتگرال گرفت.) (ب) معادلهٔ $p_1y'+p_0y=q$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y=uv$، آنگاه یک معادله برحسب v به‌دست آورید. این معادله را حل کنید، و یک جواب عمومی برای $p_1y'+p_0y=q$ به‌دست آورید. این روش وردش پارامترهاست، که برای معادله‌های مرتبهٔ دوم نیز می‌تواند به‌کار رود.

۹ـ۶ یک جسم در حال سقوط در هوا، دارای حرکتی است که به‌طور تقریبی با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv$$

که در آن $v=dx/dt$ سرعت جسم است. با این فرض که جسم از حال سکون شروع به حرکت کند، این سرعت را به‌صورت تابعی از زمان (t) پیدا کنید.

۹ـ۷ گزارهٔ ۹ـ۲ـ۶ را ثابت کنید.

۹ـ۸ فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر خطی مستقل هستند. نشان دهید که دترمینان ورونیسکی آنها صفر است. (توجه داشته باشید که نیازی نیست f و g جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن باشند.)

۹ـ۹ نشان دهید که دترمینان ورونیسکی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم $y''+q(x)y=0$، یک مقدار ثابت است.

۹ـ۱۰ یک رابطهٔ انتگرالی کلی برای $G_n(x)$، "همتای" خطی مستقل چندجمله‌ای هرمیت $H_n(x)$ پیدا کنید. این رابطه را مشخصاً به‌ازای $n=0,1$ بنویسید. آیا ممکن است $G_0(x)$ و $G_1(x)$ را برحسب توابع مقدماتی نوشت؟

۹ـ۱۱ برای هر زوج جواب و معادلهٔ دیفرانسیل آنها، دترمینان ورونیسکی را حساب کنید. و جوابی را به‌دست آورید که در شرایط اولیه $y(0) = 2$ و $y'(0) = 1$ صدق می‌کند.

(الف) $\cos x$ و $\sin x$؛ $y'' + y = 0$

(ب) e^{-x} و e^{-3x}؛ $y'' + 4y' + 3y = 0$

(ج) x و e^x؛ $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$.

۹ـ۱۲ فرض کنید f_1، f_2، و f_3 سه جواب دلخواه معادلهٔ $y'' + py' + qy = 0$ هستند. نشان دهید

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{pmatrix} = 0$$

۹ـ۱۳ نشان دهید که برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن $y'' + py' + qy = 0$، داریم

$$p = -\frac{f_1 f_2'' - f_2 f_1''}{w(f_1, f_2)} \quad \text{و} \quad q = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{w(f_1, f_2)}$$

(به این ترتیب، با داشتن دو جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل را پیدا کرد.)

۹ـ۱۴ فرض کنید f_1، f_2، و f_3، سه جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ سوم

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

هستند. یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول پیدا کنید که ورونیسکی آن عبارت باشد از

$$w(x) \equiv \det \begin{pmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' \\ f_2 & f_2' & f_2'' \\ f_3 & f_3' & f_3'' \end{pmatrix}$$

۹ـ۱۵ نتیجهٔ ۹ـ۲ـ۱۱ را ثابت کنید. (راهنمایی: جواب $v = 1$ معادلهٔ دیفرانسیل $v'' = 0$ را در نظر بگیرید.)

۹ـ۱۶ نشان دهید که اگر $u(x)$ و $v(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خودالحاقی $(pu')' + qu = 0$ باشند، در آن‌صورت اتحاد آبل $p(uv' - vu') = \text{const.}$ برقرار است.

۹ـ۱۷ هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را به شکل خودالحاقی در آورید

(الف) $x^2y'' + xy' + y = 0$

(ب) $y'' + y'\tan x = 0$

۹ـ۱۸ با یک تغییر مناسب متغیر وابسته، معادلهٔ دیفرانسیل خودالحاقی $(py')' + qy = 0$ را به $u'' + S(x)u = 0$ تحویل کنید. $S(x)$ چیست؟ این تحویل را بر معادلهٔ لژاندر

$$[(1 - x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

اعمال کنید و نشان دهید که

$$S(x) = \frac{[1 + n(n+1) - n(n+1)x^2]}{(1 - x^2)^2}$$

اکنون با استفاده از این نتیجه، نشان دهید که هر جواب معادلهٔ لژاندر دست‌کم دارای $(2n+1)/\pi$ صفر در بازهٔ $(-1, 1)$ است.

۹ـ۱۹ با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن، معادلهٔ ریکاتی را به‌دست آورید. با کاربرد یک تبدیل تابعی مناسب، نتیجه را به شکل ساده‌ای که در معادلهٔ (۹ـ۲۲ب) داده شده است، یعنی

$$u' + u^2 + S(x) = 0$$

در آورید.

۹ـ۲۰ تابع $L(x) \equiv \int_0^x dt/t$ را تعریف کنید.

(الف) نشان دهید که $L(1) = 0$.

(ب) نشان دهید که $\int_\alpha^x dt/t = \int_1^{x/\alpha} dt/t$، و بنابراین $L(x/\alpha) = L(x) - L(\alpha)$.

(ج) نشان دهید که $L(\alpha x) = L(\alpha) + L(x)$.

(د) فرض کنید x_0 نقطه‌ای است که در آن $L(x_0) = 1$. با مقایسهٔ برخی انتگرالده‌های مناسب نشان دهید که $2 < x_0 < 3$.

(این خواص قویاً ایجاب می‌کنند که $L(x)$ در حقیقت تابع لگاریتم طبیعی است.)

۹ـ۲۱ برای تابع $S(x)$ تعریف شده در مثال ۹ـ۳ـ۱، فرض کنید $S^{-۱}(x)$ تابع وارون است. نشان دهید

$$\frac{d}{dx}[S^{-۱}(x)] = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

و نتیجه بگیرید

$$S^{-۱}(x) = \int_۰^x \frac{dt}{\sqrt{۱ - t^۲}}$$

۹ـ۲۲ (الف) معادلهٔ (۱) مثال ۹ـ۳ـ۳ را به‌دست آورید.

(ب) با جایگذاری مستقیم، معادلهٔ (۲) مثال ۹ـ۳ـ۳ را به‌دست آورید.

(ج) فرض کنید $\lambda = l(l+۱)$. چندجمله‌ایهای لژاندر $P_l(x)$ را، با این شرط که $P_l(۱) = ۱$، به‌ازای $l = ۰, ۱, ۲, ۳$، حساب کنید.

۹ـ۲۳ با استفاده از معادلهٔ (۲) مثال ۹ـ۳ـ۴، سه چندجمله‌ای اول هرمیت را به‌دست آورید. با استفاده از بهنجارش

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^۲ e^{-x^۲} dx = \sqrt{\pi}۲^n n!$$

ثابت دلخواه را تعیین کنید.

۹ـ۲۴ برای حل این مسئله به مثال ۹ـ۳ـ۵ مراجعه کنید.

(الف) رابطهٔ جابه‌جایی $[\mathbb{a}, \mathbb{a}^\dagger] = \mathbb{1}$ را به‌دست آورید.

(ب) نشان دهید که هامیلتونی را می‌توان مانند معادلهٔ (۱) نوشت.

(ج) رابطهٔ جابه‌جایی $[\mathbb{a}, (\mathbb{a}^\dagger)^n] = n(\mathbb{a}^\dagger)^{n-۱}$ را به‌دست آورید.

(د) با ضرب داخلی $(\mathbb{a}^\dagger)^n|\mathrm{u}_۰\rangle = C|\mathrm{u}_n\rangle$ درخودش نشان دهید که $|C_n|^۲ = n|C_{n-۱}|^۲$. با استفاده از این رابطه، نتیجه بگیرید که $|C_n|^۲ = n!|C_۰|^۲$.

(ه) نشان دهید که برای هر تابع $f(y)$،

$$\left(y - \frac{d}{dy}\right)(e^{y^۲/۲} f) = -e^{y^۲/۲}\frac{df}{dy} \qquad (۱)$$

با اعمال پی‌درپی $(y - d/dy)$ بر دو طرف (۱)، ثابت کنید

$$\left(y - \frac{d}{dy}\right)(e^{y^۲/۲} f) = (-۱)^n e^{y^۲/۲} \frac{d^n f}{dy^n}$$

(و) با انتخاب یک $f(y)$ در قسمت (ه) نشان دهید که

$$e^{y^۲/۲}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^۲/۲} = (-۱)^n e^{y^۲} \frac{d^n}{dy^n}(e^{-y^۲})$$

۹ـ۲۵ معادلهٔ $y'' + xy = ۰$ به‌نام معادلهٔ دیفرانسیل ایری را به روش سریهای توانی حل کنید. نشان دهید که شعاع همگرایی برای هر دو جواب مستقل، نامتناهی است. با استفاده از قضیهٔ مقایسه نشان دهید که به‌ازای $x > ۰$ این جوابها دارای تعداد بینهایت صفرند، اما به‌ازای $x < ۰$ حداکثر می‌توانند یک صفر داشته باشند.

۹ـ۲۶ $\sinh x$ و $\cosh x$ را به‌عنوان جوابهای معادلهٔ $y'' = y$ که، به‌ترتیب، در شرایط مرزی $y(۰) = ۰$، $y'(۰) = ۱$ و $y(۰) = ۱$، $y'(۰) = ۰$ صدق می‌کنند، تعریف کنید. نشان دهید که

(الف) $\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$

(ب) $\cosh(-x) = \cosh x$

(ج) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

(د) $\sinh(a + x) = \sinh a \cosh x + \cosh a \sinh x$

۹ـ۲۷ نشان دهید که $(Ax^۲ + B)y'' + Cxy' + Dy = ۰$ فقط در صورتی دارای یک جواب به‌صورت چندجمله‌ای درجهٔ n است، که $An^۲ + (C - A)n + D = ۰$.

۹ـ۲۸ نشان دهید تابعی که به‌صورت زیر تعریف شود

$$f_n(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n}[(۱ - x^۲)^n]$$

در معادلهٔ لژاندر، $(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + n(n + ۱)y = ۰$، صدق می‌کند.

۹ـ۲۹ یک پایه جواب حقیقی برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر پیدا کنید

(الف) $y'' + ۵y' + ۶ = ۰$ (ب) $y''' + ۶y'' + ۱۲y' + ۸y = ۰$

(ج) $\dfrac{d^۴ y}{dx^۴} = y$ (د) $\dfrac{d^۴ y}{dx^۴} = -y$

۹ـ۳۰ مسائل "مقدار اولیه" زیر را حل کنید

(الف) $\frac{d^۴y}{dx^۴} = y, y(۰) = y'(۰) = y'''(۰), y''(۰) = ۱$

(ب) $\frac{d^۴y}{dx^۴} + \frac{d^۲y}{dx^۲} = ۰, y(۰) = y''(۰) = y'''(۰) = ۰, y'(۰) = ۱$

(ج) $\frac{d^۴y}{dx^۴} = ۰, y(۰) = y'(۰) = y''(۰) = ۰, y'''(۰) - ۲$

۹ـ۳۱ جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را پیدا کنید

(الف) $y'' = xe^x$

(ب) $y'' - ۴y' + ۴y = x^۲$

(ج) $y'' + y = \sin x \sin ۲x$

(د) $y'' - y = (۱ + e^{-x})^۲$

(هـ) $y'' - y = e^x \sin ۲x$

(و) $y^{(۶)} - y^{(۴)} = x^۲$

(ز) $y'' - ۴y' + ۴ = e^x + xe^{۲x}$

(ح) $y'' + y = e^{۲x}$

۹ـ۳۲ معادلهٔ اویلر، به شرح زیر، را در نظر بگیرید

$$x^n y^{(n)} + a_{n-۱}x^{n-۱}y^{(n-۱)} + \cdots + a_۱ xy' + a_۰ y = r(x)$$

قرار بدهید $x = e^t$ و نشان بدهید که این جایگذاری، معادله را به یک معادلهٔ دیفرانسیل با ضریبهای ثابت تبدیل می‌کند. مشخصاً، معادلهٔ

$$x^۲y'' - ۴xy' + ۶y = x$$

را حل کنید

۹ـ۳۳ دستگاههای معادلات زیر را حل کنید

(الف)

$$\dot{x} = x + y + e^{\sqrt{۲}t}$$
$$\dot{y} = x - y$$

(ب)

$$\dot{x} + ax - by = e^t$$
$$\dot{y} - ay + bx = e^t$$

به‌ازای $a^۲ - b^۲ = ۱$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + z \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= x + y - z \end{aligned} \qquad \text{(ج)}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= ۲x - ۵y + ۴z \end{aligned} \qquad \text{(د)}$$

در هر مورد نشان بدهید که چگونه می‌توان دستگاه را به یک تک معادلهٔ دیفرانسیل با مرتبهٔ بالاتر تبدیل کرد. (راهنمایی: از معادله‌ها هر چند بار که لازم است مشتق بگیرید، سپس تمام توابع و مشتقات آنها، جز یکی، را حذف کنید.)

۹ـ۳۴ نشان دهید که اگر $p(z) = ۱/z^۲$، در آن‌صورت جواب معادلهٔ $w' + p(z)w = ۰$ دارای یک تکینگی اساسی در $z = ۰$ است.

۹ـ۳۵ فرض کنید $\{w_j(z)\}_{j=۱}^{n}$ یک پایه جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ nام معادلهٔ (۹ـ۴۵) است. نشان دهید که $\{w_j(z_۰ + re^{i(\theta+۲\pi)})\}_{j=۱}^{n}$ نیز یک پایه جواب است.

۹ـ۳۶ رابطهٔ بازگشتی (۹ـ۴۸الف) را به‌دست آورید و آن را، مانند معادلهٔ (۹ـ۴۸ب)، برحسب چندجمله‌ای شاخصی بیان کنید.

۹ـ۳۷ نشان دهید که برای یک نقطهٔ معمولی، فقط یک جواب معادلهٔ $w''+p(z)w'+q(z)w=۰$ را می‌توان تعیین کرد. نمای مشخصهٔ وابسته به این جواب چیست؟

۹ـ۳۸ چندجمله‌ای شاخصی، نماهای مشخصه، و رابطهٔ بازگشتی را در هر دو نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ لژاندر

$$w'' - \frac{۲z}{۱ - z^۲}w' + \frac{\alpha}{۱ - z^۲}w = ۰$$

پیدا کنید. A_k برای نقطهٔ $z = +۱$ چیست؟

۹ـ۳۹ تابع $w_۲(z)$ قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ را به‌دست آورید.

۹ـ۴۰ نشان دهید که جایگذاری $z = ۱/t$، معادلهٔ (۹ـ۵۲) را به (۹ـ۵۳) تبدیل می‌کند.

۹ـ۴۱ چندجمله‌ای شاخصی معادلهٔ (۹ـ۵۳) را به‌دست آورید.

۹ـ۴۲ با استفاده از معادله‌های (۹ـ۴۹) و (۹ـ۵۳)، معادلهٔ شاخصی مربوط به معادلهٔ دیفرانسیل ریمان [معادلهٔ (۹ـ۵۷)] را به‌دست آورید.

۹ـ۴۳ نشان دهید که تبدیل

$$v(z) = z^{\lambda}(z-۱)^{\mu} w(z)$$

زوج نماهای مشخصهٔ مربوط به معادلهٔ دیفرانسیل ریمان را به

$$(\lambda_۱ + \lambda, \lambda_۲ + \lambda) \quad (\mu_۱ + \mu, \mu_۲ + \mu) \quad \text{و} \quad (\nu_۱ - \mu - \lambda, \nu_۲ - \mu - \lambda)$$

تبدیل می‌کند.

۹ـ۴۴ تمام نتایج مثال ۹ـ۵ـ۴ را به‌دست آورید.

۹ـ۴۵ با مشتق گرفتن از معادلهٔ (۹ـ۶۱) نشان دهید که

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z)$$

۹ـ۴۶ با استفاده از جایگذاری مستقیم در سری (۹ـ۶۱) نشان دهید که

$$F(-\alpha, \beta; \beta; -z) = (۱+z)^{\alpha}$$

$$F\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}; \frac{۳}{۲}; z^۲\right) = \frac{۱}{z}\sin^{-۱} z$$

و

$$F(۱, ۱; ۲; -z) = \frac{۱}{z}\ln(۱+z)$$

۹ـ۴۷ تمام مراحل حذف شده در مثال ۹ـ۵ـ۵ را تکمیل کنید.

۹ـ۴۸ تمام مراحل حذف شده در حل تمرین ۹ـ۵ـ۵ را تکمیل کنید.

۹ـ۴۹ با استفاده از معادلهٔ (۹ـ۶۳)، معادلهٔ (۹ـ۶۴) را به‌دست آورید.

۹ـ۵۰ معادلهٔ (۹ـ۶۵) را به‌دست آورید.

۹ـ۵۱ نشان دهید که $z = \infty$ نقطهٔ تکین عادی معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار نیست.

۹ـ۵۲ با استفاده از معادلهٔ (۹ـ۶۱)، معادلهٔ (۹ـ۷۰) را به‌دست آورید.

۹ـ۵۳ (الف) نشان دهید که معادلهٔ وبرـهرمیت

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right)u = 0$$

را می‌توان به معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار تبدیل کرد. [راهنمایی: جایگذاری $u(z) = \exp(-1/4z^2)v(z)$ را به‌کار ببرید.]

(ب) ترکیب خطی

$$\Psi(\alpha, \gamma; z) \equiv \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\Phi(\alpha, \gamma; z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z)$$

نیز یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی همشار است. نشان دهید که چندجمله‌ایهای هرمیت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = 2^n\Psi\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$

۹ـ۵۴ ثابت کنید که تابع خطای

$$\mathrm{Er}[f(z)] \equiv \int_0^z e^{-t^2}dt$$

در رابطهٔ

$$\mathrm{Er}[f(z)] = z\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right)$$

صدق می‌کند.

۹ـ۵۵ معادلهٔ (۹ـ۷۳) را از (۹ـ۷۰)، (۹ـ۷۲)، و بسط تابع نمایی به‌دست آورید. جواب خود را با به‌دست آوردن نتیجهٔ مشابه، مستقیماً از (۹ـ۷۱) و با استفاده از روش ضرایب نامعین، که در بخش ۹ـ۳ مطرح شده است، کنترل کنید.

۹ـ۵۶ اگر Z_ν یکی از جوابهای معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν باشد، نشان دهید که $z^\nu(d/dz)[z^{-\nu}Z_\nu(z)]$ یک جواب مرتبهٔ $\nu + 1$ و $z^{-\nu}(d/dz)[z^\nu Z_\nu(z)]$ یک جواب مرتبهٔ $\nu - 1$ است.

۹ـ۵۷ نشان دهید که، به‌ازای عدد درست ν، جواب دیگری برای معادلهٔ بسل وجود دارد و می‌توان آن را به این‌صورت نوشت

$$Y_n(z) = J_n(z)[f_n(z) + K_n \ln z]$$

که در آن $f_n(z)$ حول $z = ۰$ تحلیلی است [راهنمایی: از قضیهٔ ۹ـ۵ـ۶ و این واقعیت که $J_n(z)$ یک تابع تام است، استفاده کنید.]

۹ـ۵۸ (الف) نشان دهید که دترمینان ورونیسکی، $W(J_\nu, Z; z)$، J_ν و هر جواب Z دیگر معادلهٔ بسل، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\frac{d}{dz}[zW(J_\nu, Z; z)] = ۰$$

(ب) به‌ازای یک ثابت A، نشان دهید که

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{Z(z)}{J_\nu(z)}\right] = \frac{W(z)}{J_\nu^۲(z)} = \frac{A}{zJ_\nu^۲(z)}$$

(ج) نشان دهید که جواب عمومی دوم معادلهٔ بسل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$Z_\nu(z) = J_\nu(z)\left[B + A\int \frac{dz}{zJ_\nu^۲(z)}\right]$$

۹ـ۵۹ توابع کروی بسل به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$f_l(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{Z_l + ۱/۲(z)}{\sqrt{z}}\right)$$

فرض کنید $f_l(z)$ نوعی تابع بسل کروی است. با مشتق گرفتن مستقیم و جایگذاری در معادلهٔ بسل، نشان دهید که

(الف) $\frac{d}{dz}[z^{l+۱}f_۱(z)] = z^{l+۱}f_{l-۱}(z)$

(ب) $\frac{d}{dz}[z^{-l}f_l(z)] = -z^{-l}f_{l+۱}(z)$

(ج) با ترکیب نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، رابطه‌های بازگشتی

$$f_{l-۱}(z) + f_{l+۱}(z) = \frac{۲l+۱}{z}f_l(z)$$

و

$$l f_{l-1}(z) - (l+1) f_{l+1}(z) = (2l+1)\frac{df_l}{dz}$$

را به‌دست آورید.

۹ـ۶۰ نشان دهید که $W(J_\nu, Y_\nu; z) = 2/\pi z$.

۹ـ۶۱ نشان دهید که

(الف) $Y_{n+1/2}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}(z)$ و $Y_{-n-1/2}(z) = (-1)^n J_{n+1/2}(z)$

(ب) $Y_{-\nu}(z) = (\sin\nu\pi) J_\nu(z) + (\cos\nu\pi) Y_\nu(z) = \dfrac{J_\nu(z) - \cos\nu\pi J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$

(ج) در حد $\nu \to n$ $\quad Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$

۹ـ۶۲ نشان دهید که $W(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}; z) = -4i/(\pi z)$.

۹ـ۶۳ با استفاده از رابطهٔ بازگشتی مربوط به توابع بسل نشان دهید $J_1(z) = -J_0'(z)$.

۹ـ۶۴ تابع مولد برای توابع بسل عبارت است از $\exp[1/2 z(t - t^{-1})]$. برای پی بردن به این مطلب، تابع یادشده را به‌صورت $\exp(zt/2)\exp(-z/2t)$ بازنویسی کنید، هر دو عامل را بسط بدهید، و حاصلضرب را به‌صورت توانهای t^n بنویسید. اکنون نشان دهید که ضریب t^n، صرفاً عبارت است از $J_n(z)$. بالاخره، با استفاده از $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$، فرمول زیر را به‌دست آورید.

$$\exp\left[\frac{1}{2} z(t - t^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z)$$

۹ـ۶۵ نشان دهید که $J_{-1/2}(z) = (2/\pi z)^{1/2} \cos z$.

۹ـ۶۶ با استفاده از معادلهٔ (۹ـ۷۷الف) و روشی شبیه به آنچه که برای تمرین ۹ـ۵ـ۹ به‌کار رفته است، فرمول زیر را به‌دست آورید

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m [z^{-\nu} Z_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} Z_{\nu+m}(z)$$

سپس نشان دهید که

$$J_{n+1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{n+1/2}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right)$$

۹ـ۶۷ با جایگذاریهای $z = \beta t^{\gamma}$ و $w = t^{\alpha}u$، معادلهٔ بسل

$$z^{2}\frac{d^{2}w}{dz^{2}} + z\frac{dw}{dz} + (z^{2} - \nu^{2})w = 0$$

را به

$$t^{2}\frac{d^{2}u}{dt^{2}} + (2\alpha + 1)t\frac{du}{dt} + (\beta^{2}\gamma^{2}t^{2\gamma} + \alpha^{2} - \nu^{2}\gamma^{2})u = 0$$

تبدیل کنید. اکنون نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل ایری، $d^{2}u/dt^{2} - tu = 0$، دارای جوابهایی به شکل $J_{1/3}(2/3it^{3/2})$ و $J_{-1/3}(2/3it^{3/2})$ است.

۹ـ۶۸ نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{d^{2}w}{dt^{2}} + \frac{e^{2t} - \nu^{2}}{t^{4}}w = 0$$

عبارت است از

$$w = t[AJ_{\nu}(e^{1/t}) + BY_{\nu}(e^{1/t})]$$

۹ـ۶۹ با جایگذاری $w = (d/dz)\ln v$، عبارت $dw/dz + w^{2} + z^{m} = 0$ را تبدیل کنید. اکنون با جایگذاریهای دیگر، به این قرار

$$v = u\sqrt{z} \quad \text{و} \quad t = \frac{2}{m+2}z^{1+(1/2)m}$$

نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل جدید را می‌توان به یک معادلهٔ بسل مرتبهٔ $1/(m+2)$ تبدیل کرد.

۹ـ۷۰ با شروع از رابطهٔ

$$\exp\left[\frac{1}{2}x(t - t^{-1})\right]\exp\left[\frac{1}{2}y(t - t^{-1})\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(x+y)(t - t^{-1})\right]$$

و توجه به این نکته که تابع نمایی، تابع مولد $J_{n}(z)$ است، "قضیهٔ جمع" را برای توابع بسل اثبات کنید

$$J_{n}(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k}(x)J_{n-k}(y)$$

۱۰

دستگاههای اشتورم-لیوویل

در فصلهای هشتم و نهم خواص جوابهای عملگر دیفرانسیلی خطی (DO)،

$$\mathbb{L} = p_۲(x)d^۲/dx^۲ + p_۱(x)d/dx + p_۰(x)$$

را از دیدگاه تحلیلی با تأکید بر بسط جوابها به‌صورت سری توانی، همگرایی این جوابها، نقاط تکین جوابها، و مانند آنها، مورد بحث قرار دادیم. در این فصل بر جنبهٔ جبری معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم تأکید می‌ورزیم. البته، نمی‌توان به جنبهٔ تحلیلی عملگر دیفرانسیلی بی‌توجه بود، زیرا بنابر ماهیتش، بر خلاف مثلاً ماتریسها که گسسته‌اند، این عملگرها تغییرات آرامی دارند.

به‌طور مشخص، در این فصل بر بردارها و ویژه‌مقادیر عملگرهای دیفرانسیلی خطی یاد شده در بالا توجه ویژه مبذول می‌کنیم. این امر از اهمیت خاصی برخوردار است زیرا، همان‌طور که در فصل هشتم گفتیم، جداسازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همواره به‌صورت عبارتهایی به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{۱}{u}\mathbb{L}[u] + \lambda = ۰$$

که در آن u تابعی تک‌متغیره، λ ثابتی دلخواه و پیشینی (استنباطی)، $\mathbb{L}$ عملگر دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم است.

۱۰ـ۱ معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل

معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{L}[u] + \lambda u = 0 \qquad \text{(۱۰ـ۱الف)}$$

یا

$$p_2(x)\frac{d^2 u}{dx^2} + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_0(x)u + \lambda u = 0 \qquad \text{(۱۰ـ۱ب)}$$

این عبارت، معادلهٔ ویژه‌مقداری برای عملگر $\mathbb{L}$ است. با بهره‌گیری از قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۵ و با ضرب کردن (۱۰ـ۱ب) در عبارت زیر

$$w(x) \equiv \frac{1}{p_2(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt\right]$$

عبارت حاصل به‌ازای مقادیر حقیقی λ، خودالحاقی می‌شود و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [\lambda w(x) - q(x)]u = 0 \qquad \text{(۱۰ـ۲الف)}$$

که در آن، $p(x) \equiv w(x)p_2(x)$ و $q(x) \equiv -p_0(x)w(x)$. معادلهٔ (۱۰ـ۲الف) صورت استاندارد معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل ($S\text{-}L$) است، که در این فصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هرگاه d/dx را با $\mathbb{D}$ و $\mathbb{L}$ را با $\mathbb{D}[p(x)\mathbb{D}] - q(x)$ نمایش دهیم، می‌توانیم (۱۰ـ۲الف) را به‌صورت کوته‌نوشتی زیر بنویسیم

$$\mathbb{D}[p\mathbb{D}u] - qu + \lambda wu \equiv \mathbb{L}[u] + \lambda w(x)u = 0 \qquad \text{(۱۰ـ۲ب)}$$

مسئلهٔ اشتورم‌ـلیوویل عبارت است از یافتن تمام ویژه‌مقدارها و ویژه‌توابع (غیربدیهی) معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل. فرض می‌کنیم λ حقیقی باشد و p و q و w در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند، و فرض می‌کنیم $u(x)$، در حالت کلی، تابعی مختلط مقدار از متغیر حقیقی x باشد [با همهٔ اینها، در کل

این بحث $u(x)$ حقیقی خواهد بود]. معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل منظم عبارت است از معادله‌ای که در آن $p(x)$ و $w(x)$ به‌ازای تمام مقادیر $x \in [a, b]$ مثبت باشند. مسئلهٔ اشتورم‌ـلیوویل تعریف شده نیست مگر آنکه شرایط نقاط انتهایی، یا شرایط مرزی نیز مشخص باشند. یکی از شرایط مرزی کلی (BC) معمولاً به‌صورت دو ترکیب جدا و مستقل خطی از مقادیر u و u' در دو نقطهٔ انتهایی داده می‌شود. چنین شرطی را بعداً در این فصل بیان خواهیم کرد. اکنون، به تعریف زیر می‌پردازیم.

تعریف ۱۰ـ۱ـ۱: معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل منظم [معادلهٔ (۱۰ـ۲الف) یا (۱۰ـ۲ب)] روی بازهٔ محدود بسته $[a, b]$، توام با شرایط مرزی تفکیک شدهٔ

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \qquad \text{و} \qquad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

را، که در آن α، α'، β، و β' ثابتهای معلومی‌اند، دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منظم می‌گویند. دو حالت بدیهی را که در آنها $\alpha = \alpha' = 0$ و $\beta = \beta' = 0$، مستثنی می‌کنیم.

نوع دیگری از شرایط مرزی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، شرایط مرزی تناوبی است. این شرایط مرزی مخصوصاً برای حالتهایی مناسب است که در آن، توابع ضریب معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل در $[a, b]$ متناوب و دورهٔ تناوبشان $b - a$ باشد. در چنین حالتهایی، شرایط مرزی

$$u(a) = u(b) \qquad \text{و} \qquad u'(a) = u'(b)$$

روی ویژه‌توابع معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل اعمال می‌شود.

مثال ۱۰ـ۱ـ۱: (الف) دستگاه اشتورم‌ـلیوویل شامل معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل $d^2u/dt^2 + \omega^2 u = 0$، در بازهٔ $[0, T]$ با شرایط مرزی تفکیک‌شدهٔ $u(0) = 0$ و $u(T) = 0$ دارای ویژه‌توابع

$$u_n(t) = \sin \frac{n\pi}{T} t \qquad n = 1, 2, \ldots$$

و ویژه‌مقادیر

$$\lambda_n \equiv \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

هستند. توجه کنید که $n=0$ مستثنی شده است، زیرا به جواب بدیهی $u_0(t)\equiv 0$ منجر می‌شود.

(ب) فرض کنید معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل همان معادلهٔ قسمت (الف)، ولی در بازهٔ $[-T,+T]$ و با شرایط مرزی تناوبی $u(-T)=u(T)$ و $u'(T)=u'(T)$، باشد. توجه می‌کنیم که شرایط مرزی متناوب در اینجا قابل اعمال است، زیرا، توابع ضریب $p(t)=1=w(t)$ و $q(t)=0$ (به‌طور بدیهی) در بازهٔ $[-T,+T]$ تناوبی‌اند. ویژه‌توابع عبارت‌اند از ۱، $\sin(n\pi t/T)$ و $\cos(n\pi t/T)$، که در آنها n یک عدد صحیح است. توجه کنید که در اینجا یک واگنی وجود دارد؛ از این نظر که دو ویژه‌تابع مستقل خطی یافت می‌شوند که دارای ویژه‌مقدار $(n\pi/T)^2$ هستند.

(ج) معادلهٔ بسل برای یک مقدار ثابت معین $\nu 2$ عبارت است از

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(k^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0 \qquad a\le x\le b$$

و اگر آن را در تابع زیر ضرب کنیم به یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تبدیل می‌شود:

$$w(x)=\frac{1}{p_2(x)}\exp\left[\int^x\frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt\right]=\exp\left[\int^x\frac{dt}{t}\right]=x$$

در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)u=0$$

که با $\rho=w=x$، $\lambda=k^2$، و $q(x)=\nu^2/x$ از نوع معادلهٔ (۱۰ـ۲الف) است. اگر $a>0$، می‌توانیم با اعمال شرایط مرزی تفکیک‌شدهٔ مناسب، دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منظمی را به‌دست آوریم. ●

بررسی فضاهای برداری متناهی‌ـبعد را در فصل سوم نشان دادیم که ویژه‌بردارهای یک عملگر خودالحاقی (هرمیتی) یک فضای برداری را پدید می‌آورند. از سوی دیگر، در بحث فضاهای هیلبرت نامتناهی‌ـبعدی در فصل پنجم، از عملگرها و ویژه‌بردارها هیچگونه ذکری به میان نیامد. اکنون می‌توانیم بین این دو فصل ارتباطی برقرار کنیم.

در فصل سوم دیدیم که دو ویژه‌بردار یک عملگر هرمیتی متناظر با ویژه‌مقدارهای مختلف بر یکدیگر عمودند. در اینجا، یک $\mathbb{L}$، داریم، که یک عملگر دیفرانسیلی هرمیتی (خودالحاقی) است.

آیا ویژه‌بردارهای آن متعامدند؟ اکنون به بررسی این نکته می‌پردازیم. در فصل نهم اتحاد لاگرانژ برای یک عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ را به‌دست آوردیم

$$u\mathbb{L}[v] - v\mathbb{L}[u] = \frac{d}{dx}\{p(x)[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\} \qquad (۱۰\text{ـ}۳)$$

اگر این اتحاد را برای معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل (۱۰ـ۲الف) با $u = u_۱$ متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda_۱$، و $v = u_۲$ متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda_۲$ به‌کار بریم، برای عبارت سمت چپ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} u_۱\mathbb{L}[u_۲] - u_۲\mathbb{L}[u_۱] &= u_۱(-\lambda_۲ w u_۲) + u_۲(\lambda_۱ w u_۱) \\ &= (\lambda_۱ - \lambda_۲) w u_۱ u_۲ \end{aligned}$$

آنگاه با انتگرال‌گیری از دو طرف (۱۰ـ۳)، می‌رسیم به:

$$(\lambda_۱ - \lambda_۲)\int_a^b w u_۱ u_۲ dx = \{p(x)[u_۱(x)u'_۲(x) - u_۲(x)u'_۱(x)]\}_a^b$$

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر $u_۱$ و $u_۲$ در شرایط مرزی تفکیک‌شده یا در شرایط مرزی متناوب صدق کنند، عبارت سمت راست این معادله صفر می‌شود. در مورد شرایط مرزی متناوب، شرط اضافی $p(a) = p(b)$ اعمال می‌شود. بنابراین، داریم

$$(\lambda_۱ - \lambda_۲)\int_a^b w(x)u_۱(x)u_۲(x)dx = ۰$$

در حالت خاص، اگر $\lambda_۱ \neq \lambda_۲$

$$\int_a^b w(x)u_۱(x)u_۲(x)dx = ۰$$

و دو ویژه‌تابع $u_۱(x)$ و $u_۲(x)$، متناظر با دو ویژه‌مقدار مختلف، در صورتی متعامدند که ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle \mathrm{u}|\mathrm{v}\rangle \equiv \int_a^b w(x)u(x)v(x)dx \qquad (۱۰\text{ـ}۴)$$

این تعریف، دقیقاً همان تعریفی است که در فصل پنجم از ضرب داخلی کردیم. لیکن، در اینجا u مزدوج مختلط نشده است زیرا عملگر $\mathbb{L}$ حقیقی است. عمل مزدوج مختلط کردن تنها وقتی لازم است که $\mathbb{L}$ مختلط باشد، یعنی وقتی $p(x)$ یا $q(x)$ تابع مختلطی از x حقیقی باشد. چون تمام دستگاههای اشتورم-لیوویل که در فیزیک ظاهر می‌شوند حقیقی‌اند، می‌توانیم از تعریف معادلهٔ (۱۰-۴) استفاده کنیم. نتایج قبلی را می‌توان در قالب یک قضیه جمعبندی کرد.

قضیهٔ ۱۰-۱-۲: ویژه‌توابع یک دستگاه منظم اشتورم-لیوویل یا یک معادلهٔ اشتورم-لیوویل با شرایط مرزی متناوب متعامدند، و دارای تابع وزن $w(x)$ هستند. ■

مثال ۱۰-۱-۲: (الف) دستگاه اشتورم-لیوویل منظم $u'' + \lambda u = \circ$، $x \in [\circ, \pi]$ دارای ویژه‌توابع $u_n(x) = \sin nx$ است که در آن $n = ۱, ۲, \ldots$. برای این دستگاه $w(x) = ۱$، و قضیهٔ ۱۰-۱-۲، حاکی از آن است که

$$\int_{\circ}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \circ \qquad n \neq m$$

که با توجه به نظریهٔ سری فوریه (فصل پنجم) به این مطلب واقفیم.

(ب) ویژه‌توابع دستگاه اشتورم-لیوویل منظم $u'' + \lambda u = \circ$، $x \in [-\pi, \pi]$ عبارت‌اند از ۱، $\cos nx$، $\sin nx$، که در آن $n = ۱, ۲, \ldots$. در اینجا نیز بر طبق قضیهٔ ۱۰-۱-۲، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx = \circ = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \qquad \forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \circ = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \qquad n \neq m \quad \text{به‌ازای}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \circ \qquad \text{همهٔ اعداد صحیح } n \text{ و } m$$ ●

دستگاه اشتورم-لیوویل منظم در کاربردهایی که ممکن است a یا b یا هر دو نامتناهی باشند یا در جایی که a یا b یکی از نقاط تکین معادلهٔ اشتورم-لیوویل باشند، دارای محدودیت زیادی است. دستگاه اشتورم-لیوویل تکین عبارت است از دستگاهی که برای آن یک یا چند شرط از شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) بازهٔ $[a, b]$ از یک طرف یا از هر دو طرف تا بینهایت امتداد یابد.

(ب) یا p و یا w در یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی a و b صفر شود.

(ج) تابع $q(x)$ در $[a, b]$ پیوسته نباشد.

(د) هر یک از توابع $p(x)$، $q(x)$ و $w(x)$ در a یا b تکین باشند.

اگر بازهٔ $[a, b]$ طوری محدود شده باشد که ویژه‌توابع با تابع وزن $w(x)$ انتگرال‌پذیر مجذوری شوند (فصل پنجم را ببینید)، در این‌صورت واضح است که حاصلضرب داخلی (۱۰ـ۴) همواره متناهی است. بنابراین، ویژه‌توابع دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تکین در صورتی متعامدند که عبارت سمت راست (۱۰ـ۳) صفر شود.

مثال ۱۰ـ۱ـ۳: (الف) توابع بسل $J_\nu(x)$، توابع تام‌اند. بنابراین، به‌ازای هر عدد مثبت متناهی b، در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر مربعی‌اند. به‌ازای مقدار ثابت ν معادلهٔ دیفرانسیل

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2)u = 0 \qquad (1)$$

با جایگذاری $kr = x$، به معادله بسل تبدیل می‌شود:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0$$

بنابراین، جواب (۱) که در $r = 0$ منظم و با ویژه‌مقدار k^2 متناظر است، می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$u_k(r) \equiv J_\nu(kr)$$

در این‌صورت، به‌ازای دو ویژه‌مقدار متفاوت k^2 و k'^2، در صورتی ویژه‌توابع مربوطه متعامدند، که جملهٔ مرزی (۱۰ـ۳) صفر شود، یعنی اگر

$$\{r[J_\nu(kr)J'_\nu(k'r) - J_\nu(k'r)J'_\nu(kr)]\}_0^b$$

صفر شود ، که فقط و فقط وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم

$$J_\nu(kb)J'_\nu(k'b) - J_\nu(k'b)J'_\nu(kb) = 0$$

یکی از گزینشهای متداول به این قرار است که

$$J_\nu(kb) = 0 = J_\nu(k'b)$$

یعنی، kb و $k'b$ هر دو به‌عنوان ریشه‌های (مختلف) تابع بسل مرتبهٔ ν در نظر گرفته شوند. [اینکه، بیش از یکی (در واقع، بینهایت) از چنین ریشه‌ای می‌توان یافت بعداً در همین فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت]. بنابراین، اگر k_i و k_j ریشه‌های مختلف $J_\nu(kb) = ۰$ باشند، داریم

$$\int_۰^b r\ J_\nu(k_i r) J_\nu(k_j r) dr = ۰$$

(ب) معادلهٔ لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left[(۱ - x^۲)\frac{du}{dx}\right] + \lambda u = ۰ \qquad -۱ < x < ۱$$

هم‌اکنون خودالحاقی است. بنابراین $w(x) = ۱$ و $p(x) = ۱ - x^۲$. ویژه‌توابع این دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تکین [تکین، به این علت که $p(۱) = p(-۱) = ۰$] در نقاط انتهایی $x = \pm ۱$ منظم‌اند و چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ با $\lambda = n(n+۱)$ متناظرند. بدیهی است که جملهٔ مرزی (۱۰ـ۳) در $a = -۱$ و $b = +۱$ صفر می‌شود. چون $P_n(x)$ها در $[-۱, +۱]$ انتگرال‌پذیر مجذوری‌اند، می‌رسیم به

$$\int_{-۱}^{+۱} P_n(x) P_m(x) dx = ۰ \qquad m \neq n$$

●

مثال ۱۰ـ۱ـ۴: معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت عبارت است از

$$u'' - ۲xu' + \lambda u = ۰ \tag{۱}$$

اگر آن را در عبارت زیر ضرب کنیم

$$w(x) = \exp\left[\int^x (-۲t) dt\right] = e^{-x^۲}$$

به یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تبدیل می‌شود. معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل حاصل عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^۲}\frac{du}{dx}\right] + \lambda e^{-x^۲} u = ۰ \tag{۲}$$

جملهٔ مرزی متناظر با دو ویژه‌تابع $u_1(x)$ و $u_2(x)$ که به‌ترتیب دارای ویژه‌مقادیر λ_1 و $\lambda_1 \neq \lambda_2$ هستند، عبارت است از

$$\{e^{-x^2}[u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)]\}_a^b$$

اگر $a = -\infty$ و $b = +\infty$، این جمله به‌ازای u_1 و u_2ی دلخواه، صفر می‌شود (زیرا همان‌طوری که در زیر نشان می‌دهیم، این توابع چندجمله‌ای‌اند).

تابع u یک ویژه‌تابع از (۲)، متناظر با ویژه‌مقدار λ است اگر و فقط اگر یک جواب از (۱) باشد. جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل که با $\lambda = 2n$ متناظرند، عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای هرمیت $H_n(x)$ که در فصل پنجم مورد بحث قرار گرفتند. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = 0 \qquad m \neq n \text{ اگر}$$

این عبارت همان رابطهٔ تعامد برای چندجمله‌ایهای هرمیت است که در فصل پنجم به‌دست آوردیم. ●

۱۰ـ۲ خواص دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل

مطالعهٔ دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل یکی از مهمترین زمینه‌های فیزیک ریاضیاتی به‌شمار می‌آید. زیرا هر معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل توابع متعامدی تولید می‌کند، که در، مثلاً، نظریهٔ فضاهای هیلبرت، مورد نیازاند. شرح کامل دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل از حوصلهٔ این کتاب خارج است. ما فقط به بررسی چند مثال از زمینه‌های مختلف فیزیک خواهیم پرداخت و چند قضیهٔ مهم را بدون اثبات، بیان خواهیم کرد.[1] ابتدا با قضیهٔ زیر بحث خود را شروع می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۱: دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منظم دارای تعداد بینهایت ویژه‌مقدار حقیقی است که می‌توان آنها را به‌صورت $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n$ مرتب کرد، که در آن $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. ویژه‌تابع $u_n(x)$ متناظر با ویژه‌مقدار λ_n در بازهٔ $a < x < b$ دقیقاً دارای n صفر است. ■

مثال ۱۰ـ۲ـ۱: دستگاه اشتورم‌ـلیوویل $u''+\lambda u = 0$ در $[0, \pi]$ با شرایط مرزی $u(0) = 0 = u(\pi)$ دارای ویژه توابع $u_n(x) = \sin nx$ و ویژه‌مقادیر $\lambda_n = n^2$ است که در آن $n = 1, 2, \ldots$.

[1] برای دستیابی به بحثی مفصل در این زمینه، ر.ک.
Birkhoff & Rota, 1978 or Hellwig, 1967.

می‌توانیم این ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\lambda_n = (n+1)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$u_n(x) = \sin(n+1)x \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

این نوع برچسب‌گذاری ویژه‌مقدار صفرم و ویژه‌تابع صفرم را ممکن می‌کند، یعنی همان چیزی که از قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۱ نتیجه می‌شود.

واضح است که $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. همچنین صفرهای $u_n(x)$ به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$\sin(n+1)x = 0 \quad \Rightarrow \quad (n+1)x = m\pi \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

یا

$$x_m = \frac{m}{n+1}\pi \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

این روابط نشان می‌دهند که در بازهٔ باز $0 < x < \pi$، یعنی مستثنی کردن ۰ و π، دقیقاً n صفر داریم. ●

۱۰ـ۲ـ۱ رفتار مجانبی ویژه‌مقادیر بزرگ

مسئلهٔ اشتورم‌ـلیوویل در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل فیزیک ریاضیاتی نقش اساسی دارد. در مواردی، معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل مستقیماً به فیزیک مربوط می‌شود. مثلاً، ویژه‌مقدار λ، می‌تواند با تکانهٔ زاویه‌ای مداری الکترون در اتم متناظر باشد (بررسی هماهنگهای کروی در فصل هشتم) یا مربوط به ترازهای انرژی یک ذره در یک پتانسیل باشد [مثالهای (۹ـ۳ـ۴) و (۹ـ۵ـ۶) را بنگرید]. در این‌صورت، در بسیاری موارد، بهتر است اطلاعاتی درباره رفتار دستگاه اشتورم‌ـلیوویل در حد λهای بزرگ (تکانهٔ زاویه‌ای بالا یا انرژی بالا) به‌دست آوریم.

بهتر است که معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل را به شکل ساده‌تر و مناسبتری تبدیل کنیم. این کار با جایگذاری لیوویل (تمرین ۱۰ـ۲ـ۱) انجام می‌شود که عبارت است از

$$u(x) = v(t)[p(x)w(x)]^{-1/4} \quad \text{و} \quad t = \int_a^x \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds \qquad (10\text{-}5)$$

این جایگذاری، معادله اشتورم‌ـلیوویل را به معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند

$$\frac{d^2v}{dt^2}+[\lambda-\hat{q}(t)]v=0 \qquad (۱۰\text{ـ}۶\text{الف})$$

که در آن

$$\hat{q}(t)=\frac{q(x(t))}{w(x(t))}+[p(x(t))w(x(t))]^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}[(pw)^{1/4}] \qquad (۱۰\text{ـ}۶\text{ب})$$

مثال ۱۰ـ۲ـ۲: برای معادلهٔ بسل $(d/dx)(x\,du/dx)+(k^2x-\nu^2/x)u=0$، داریم

$$p(x)=x=w(x) \quad \text{و} \quad q(x)=\frac{\nu^2}{x}$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۰ـ۵) منجر می‌شود به

$$v(t)=u(x(t))[x(t)x(t)]^{1/4}=\sqrt{x}u(x) \qquad (1)$$

و

$$t=\int^x\sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds=\int^x\sqrt{\frac{s}{s}}ds=x$$

از (۱۰ـ۶) می‌رسیم به

$$\hat{q}(t)=\frac{\nu^2/t}{t}+[t^2]^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}[t^{1/2}]=\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}$$

و

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left[k^2-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right]v=0$$

به‌ازای $\nu = ۱/۲$، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت داریم

$$\frac{d^۲v}{dt^۲} + k^۲v = ۰$$

که دارای جوابهایی از نوع $\cos kt$ و $\sin kt$ است. در این‌صورت معادلهٔ (۱) می‌دهد

$$J_{۱/۲}(kt) = A\frac{\sin kt}{\sqrt{t}} \quad \text{یا} \quad J_{۱/۲}(kt) = B\frac{\cos kt}{\sqrt{t}}$$

اما، از آنجا که $J_n(x)$ در $x = ۰$ تحلیلی است، باید داشته باشیم

$$J_{۱/۲}(kx) = A\frac{\sin kx}{\sqrt{x}}$$

که همان نتیجه به‌دست آمده در تمرینهای ۹ـ۵ـ۹ تا ۹ـ۵ـ۱۱ است.

در بحث بالا از این واقعیت بهره گرفتیم که، مانند آنچه در مثال ۱۰ـ۱ـ۳ تشریح شده است، جوابهای معادلهٔ بسل متناظر با ویژه‌مقدار k به‌صورت $Z_\nu(kx)$ نوشته می‌شوند. ●

چون هر معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل را می‌توان به (۱۰ـ۶) تبدیل کرد، می‌توانیم فقط دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل به شکل

$$u'' + [\lambda - q(x)]u \equiv u'' + Q(x)u = ۰ \qquad Q = \lambda - q \qquad \text{(۱۰ـ۷الف)}$$

با شرایط مرزی زیر را در نظر بگیریم

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = ۰ \quad \text{و} \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = ۰ \qquad \text{(۱۰ـ۷ب)}$$

فرض کنید، به‌ازای تمام $x \in [a, b]$، داشته باشیم $Q(x) > ۰$، یعنی $\lambda > q(x)$. این فرضی معقول است زیرا λهای بسیار بزرگ مورد نظر ما هستند.

اگر جایگذاری پروفر را انجام دهیم که عبارت است از

$$u = RQ^{-۱/۴}\sin\phi \quad \text{و} \quad u' = RQ^{۱/۴}\cos\phi \qquad \text{(۱۰ـ۸)}$$

که در آن $R(x,\lambda)$ و $\phi(x,\lambda)$ توابعی از x و وابسته به λ هستند، مطالعهٔ دستگاه (۱۰ـ۷) ساده‌تر می‌شود. این جایگذاری، معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل (۱۰ـ۷الف) را به یک زوج معادله تبدیل می‌کند (تمرین ۱۰ـ۲ـ۲).

$$\frac{d\phi}{dx}=\sqrt{\lambda-q(x)}-\frac{q'}{۴[\lambda-q(x)]}\sin ۲\phi \qquad (۱۰ـ۹الف)$$

$$\frac{dR}{dx}=\frac{Rq'}{۴(\lambda-q)}\cos ۲\phi \qquad (۱۰ـ۹ب)$$

تابع $R(x,\lambda)$ مثبت فرض می‌شود، زیرا هرگونه منفی بودن u را می‌توان به فاز $\phi(x,\lambda)$ منتقل کرد. همچنین، R نمی‌تواند در هیچ نقطهٔ $a \le x \le b$ صفر باشد، زیرا در این‌صورت هم u و هم u' در آن نقطه صفر خواهند شد، و بر طبق استدلال به‌کار رفته در اثبات قضیهٔ ۹ـ۲ـ۳، خواهیم داشت $u(x)\equiv ۰$.

معادلات (۱۰ـ۹) در بحث رفتار مجانبی جواب دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل وقتی $\lambda\to\infty$ و $x\to\infty$، بسیار مفیدند. ابتدا لازم است نمادی را در نظر بگیریم که اغلب در آنالیز به‌کار می‌رود. در اختیار داشتن یک نمادگذاری برای رفتار تابع $f(x,\lambda)$ به‌ازای λهای بزرگ و تمامی مقادیر x مفید واقع می‌شود. اگر به‌ازای تمام مقادیر x، وقتی $\lambda\to\infty$ تابع کراندار باقی بماند، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x,\lambda)=O(۱)$$

از لحاظ شهودی، این کار به آن معناست که همان‌طوری که λ بزرگ و بزرگتر می‌شود، اندازهٔ تابع $f(x,\lambda)$ از مرتبهٔ واحد باقی می‌ماند. به بیان دیگر، به‌ازای هیچ مقداری از x، $\lim_{\lambda\to\infty} f(x,\lambda)$ نامتناهی نمی‌شود. اگر تابع $g(x,\lambda)\equiv\lambda^n f(x,\lambda)$ از مرتبهٔ واحد باشد، یعنی

$$g(x,\lambda)\equiv\lambda^n f(x,\lambda)=O(۱)$$

در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$f(x,\lambda)=\frac{O(۱)}{\lambda^n}$$

این عبارت به آن معناست که وقتی λ به سمت بینهایت میل کند، $f(x,\lambda)$ با آهنگ $۱/\lambda^n$ به سمت صفر میل می‌کند. گاهی این مطلب را به‌صورت $f(x,\lambda)=O(\lambda^{-n})$ می‌نویسیم.

برخی خواص $O(۱)$ به‌قرار زیرند:

(الف) $O(۱) + O(۱) = O(۱)$ و $O(۱)O(۱) = O(۱)$.

(ب) به‌ازای مقادیر متناهی a و b: $\int_a^b O(۱)dx = O(۱)$.

(ج) اگر r و s اعداد حقیقی باشند و $s \leq r$، در این‌صورت

$$\frac{O(۱)}{\lambda^r} + \frac{O(۱)}{\lambda^s} = \frac{O(۱)}{\lambda^r}$$

(د) اگر $g(x)$ یک تابع کراندار از x باشد، بسط سری تایلور می‌انجامد به:

$$[\lambda + g(x)]^r = \lambda^r \left[۱ + \frac{g(x)}{\lambda}\right]^r = \lambda^r \left\{۱ + r\frac{g(x)}{\lambda} + \frac{r(r-۱)}{۲}\left[\frac{g(x)}{\lambda}\right]^۲ + \frac{O(۱)}{\lambda^۳}\right\}$$

$$= \lambda^r + rg(x)\lambda^{r-۱} + \frac{r(r-۱)}{۲}[g(x)]^۲\lambda^{r-۱} + O(۱)\lambda^{r-۳}$$

$$= \lambda^r + rg(x)\lambda^{r-۱} + O(۱)\lambda^{r-۲}$$

$$= \lambda^r + O(۱)\lambda^{r-۱}$$

$$= O(۱)\lambda^r$$

[گاهی $O(۱)\lambda^s$ را به‌صورت $O(\lambda^s)$ می‌نویسند.]

به معادلات (۱۰ـ۹) برمی‌گردیم و با استفاده از خاصیت (د) عبارت سمت راست را بسط می‌دهیم، می‌رسیم به

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda} + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{O(۱)}{\lambda} = \sqrt{\lambda} + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{O(۱)}{\lambda}$$

در این‌صورت بسط تایلور $\phi(x, \lambda)$ و $R(x, \lambda)$ حول $x = a$ می‌دهد

$$\phi(x, \lambda) = \phi(a, \lambda) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)(x-a) + \cdots$$

$$R(x, \lambda) = R(a, \lambda) + \left(\frac{dR}{dx}\right)(x-a) + \cdots$$

بنابراین، در حد $\lambda \to \infty$، می‌رسیم به

$$\phi(x,\lambda) = \phi(a,\lambda) + \sqrt{\lambda}(x-a) + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{(۱۰ـ۱۰الف)}$$

$$R(x,\lambda) = R(a,\lambda) + \frac{O(1)}{\lambda} \qquad \text{(۱۰ـ۱۰ب)}$$

این نتایج در تعیین رفتار λ_n به‌ازای nهای بزرگ مفیدند. برای این منظور، از (۱۰ـ۷) و (۱۰ـ۸) بهره می‌گیریم و می‌نویسیم

$$-\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{u'(a)}{u(a)} = \frac{R(a,\lambda)Q^{1/4}(a,\lambda)\cos[\phi(a,\lambda)]}{R(a,\lambda)Q^{-1/4}(a,\lambda)\sin[\phi(a,\lambda)]}$$

که در آن فرض کرده‌ایم $\alpha' \neq 0$. اگر $\alpha' = 0$، می‌توانیم نسبت α'/α را که تعریف شده است (زیرا دست‌کم یکی از αها باید مخالف صفر باشد)، در نظر بگیریم. فرض کنیم $A = -\alpha/\alpha'$، و بنویسیم

$$\cot[\phi(a,\lambda)] = \frac{A}{\sqrt{Q}} = \frac{A}{\sqrt{\lambda - q(a)}}$$

به همین ترتیب

$$\cot[\phi(b,\lambda)] = \frac{B}{\sqrt{\lambda - q(b)}}$$

که در آن $B = -\beta/\beta'$. حال توجه خود را به ویژه‌مقدار nام معطوف می‌کنیم و اولین معادله از دو معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\phi(a,\lambda_n) = \cot^{-1}\frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)}}$$

به‌ازای λ_nهای بزرگ، شناسهٔ $\cot^{-1}$ کوچک است. لذا، می‌توانیم عبارت سمت راست را حول صفر بسط تایلور بدهیم. فقط کمترین مرتبه‌ها را نگه می‌داریم، می‌رسیم به

$$\cot^{-1}\frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)}} = \cot^{-1}(0) - \frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)}} + \cdots = \cot^{-1}(0) + \frac{O(1)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

یا

$$\phi(a, \lambda_n) = \frac{\pi}{۲} + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad \text{(۱۰ـ۱۱الف)}$$

به همین ترتیب

$$\phi(b, \lambda_n) = \frac{\pi}{۲} + n\pi + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad \text{(۱۰ـ۱۱ب)}$$

جملهٔ $n\pi$ در (۱۰ـ۱۱ب) ظاهر شده است، زیرا بنابر قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۱، ویژه‌تابع nام دارای n صفر بین a و b است. چون $u = RQ^{-۱/۴}\sin\phi$، یعنی اینکه وقتی x و a به b می‌رود، $\sin\phi$ باید از n عبور کند. بنابراین باید فاز ϕ در $x = b$ به اندازهٔ $n\pi$ از فاز آن در $x = a$ بزرگتر باشد.

با قرار دادن $x = b$ در (۱۰ـ۱۰الف)، با $\lambda \to \lambda_n$، و بهره‌گیری از (۱۰ـ۱۱)، می‌رسیم به

$$\frac{\pi}{۲} + n\pi + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\pi}{۲} + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}} + \sqrt{\lambda_n}(b-a) + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

یا

$$\sqrt{\lambda_n}(b-a) = n\pi + \frac{O(۱)}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad \text{(۱۰ـ۱۲)}$$

یکی از پیامدهای این نتیجه به این قرار است که به‌ازای λ_nهای بزرگ

$$\lim_{n\to\infty} n\lambda_n^{-۱/۲} = \frac{b-a}{\pi}$$

بنابراین، $\sqrt{\lambda_n} = C_n n$، که در آن $\lim_{n\to\infty} C_n = \pi/(b-a)$، و معادلهٔ (۱۰ـ۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{O(۱)}{C_n n} = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{O(۱)}{n} \qquad \text{(۱۰ـ۱۳)}$$

این معادله رفتار مجانبی ویژه‌مقدارها را توصیف می‌کند. در قالب قضیهٔ زیر، که بدون اثبات بیان می‌شود، رفتار مجانبی ویژه‌توابع را تشریح می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۲: فرض کنید $\{u_n(x)\}_{n=}^{\infty}$ ویژه‌توابع بهنجارشدهٔ دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منظم باشند، که توسط معادلهٔ (۱۰ـ۷) با شرط $\alpha'\beta' \neq ۰$ داده شده است. در این‌صورت به‌ازای $n \to \infty$ داریم

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{b-a}} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{O(۱)}{n} \qquad (۱۰\text{ـ}۱۴)$$

■

مثال ۱۰ـ۲ـ۳: حال یک فرمول مجانبی برای چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ به‌دست می‌آوریم. ابتدا، جایگذاری لیوویل را که به‌کمک (۱۰ـ۵) بیان شده است، اعمال می‌کنیم تا معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left[(۱-x^۲)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+۱)P_n = ۰$$

را به معادلهٔ زیر تبدیل کنیم

$$\frac{d^۲ v}{dt^۲} + [\lambda_n - \hat{q}(t)]v = ۰ \qquad \lambda_n \equiv n(n+۱) \qquad (۱)$$

در اینجا $p(x) = ۱ - x^۲$ و $w(x) = ۱$، بنابراین

$$t = \int^x \frac{ds}{\sqrt{۱-s^۲}} = \cos^{-۱} x \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \cos t$$

و

$$P_n(x(t)) = v(t)[۱-x^۲(t)]^{-۱/۴} = v(t)(\sin t)^{-۱/۲} \qquad (۲)$$

در (۱) داریم

$$\hat{q}(t) = (۱-x^۲)^{-۱/۴}\frac{d^۲}{dt^۲}[(۱-x^۲)^{۱/۴}]$$
$$= (\sin t)^{-۱/۲}\frac{d^۲}{dt^۲}[(\sin t)^{۱/۲}] = -\frac{۱}{۴}\left(۱ + \frac{۱}{\sin^۲ t}\right)$$

به‌ازای nهای بزرگ، می‌توانیم از $\hat{q}(t)$ چشم بپوشیم و تقریب $\lambda_n = n^۲ + n \approx (n + ۱/۲)^۲$ را به‌کار بریم و بنویسیم

$$\frac{d^۲v}{dt^۲} + \left(n + \frac{۱}{۲}\right)^۲ v = ۰$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$v(t) = A\cos\left[\left(n + \frac{۱}{۲}\right)t + \alpha\right]$$

که در آن A و α ثابتهای دلخواهی‌اند که باید تعیین شوند. با قرار دادن این جواب در (۲) می‌رسیم به

$$P_n(\cos t) = \frac{A}{\sqrt{\sin t}}\cos\left[\left(n + \frac{۱}{۲}\right)t + \alpha\right]$$

برای تعیین α، توجه کنید که اگر n فرد باشد، آنگاه $P_n(۰) = ۰$. بنابراین، اگر قرار دهیم $t = \pi/۲$، جزء کسینوسی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\cos\left[n\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} + \alpha\right]$$

که به‌ازای nهای فرد صفر می‌شود، اگر و فقط اگر $\alpha = -\pi/۴$. بنابراین فرمول مجانبی عمومی برای چندجمله‌ایهای لژاندر عبارت است از

$$P_n(\cos t) = \frac{A}{(\sin t)^{۱/۲}}\cos\left[\left(n + \frac{۱}{۲}\right)t - \frac{\pi}{۴}\right] \qquad \bullet$$

۱۰ـ۲ـ۲ رفتار مجانبی xهای بزرگ

جایگذاریهای لیوویل و پروفر در بررسی رفتار جوابهای دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل برای xهای بزرگ بسیار مفیدند. اما، به‌جای ادامهٔ این حالت کلی، فقط حالت مهم معادلهٔ بسل را در نظر خواهیم گرفت.

فرض کنید $Z_\nu(kx)$ یکی از جوابهای معادلهٔ بسل، به‌شرح زیر باشد

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \left(k^۲x - \frac{\nu^۲}{x}\right)u = ۰$$

در این‌صورت، مطابق مثال ۱۰ـ۲ـ۲، جایگذاری لیوویل $v(x) = \sqrt{x}Z_\nu(kx)$، معادلهٔ بسل را به معادلهٔ زیر تبدیل می‌کند

$$\frac{d^۲v}{dx^۲} + \left(k^۲ - \frac{\nu^۲ - \frac{۱}{۴}}{x^۲}\right)v = ۰ \tag{۱۰ـ۱۵}$$

می‌خواهیم رفتار $v(x)$ به‌ازای مقادیر بزرگ x را بررسی کنیم

بهترین راه برای این کار آن است که معادلاتی را در نظر بگیریم که از جایگذاری پروفر به‌دست آمده‌اند، که برای معادلهٔ بسل عبارت‌اند از

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{k^۲ - \frac{a}{x^۲}} + \frac{a\sin ۲\phi}{۲(k^۲x^۳ - ax)}$$
$$\frac{dR}{dx} = -\frac{Ra\ \cos ۲\phi}{۲(k^۲x^۳ - ax)}$$

در اینجا، $a \equiv \nu^۲ - ۱/۴$. به‌ازای xهای بزرگ، این معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\phi' = k\left(۱ - \frac{a}{۲k^۲x^۲}\right) + \frac{O(۱)}{x^۳}$$
$$\frac{R'}{R} = \frac{O(۱)}{x^۳}$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ اول بین x و $b > x$، می‌رسیم به

$$\phi(b) - \phi(x) = kb - kx - \frac{a}{۲kx} + \frac{a}{۲kb} + \frac{O(۱)}{x^۲}$$

اگر x را ثابت بگیریم و b را به سمت بینهایت میل دهیم ($b \to \infty$)، مشاهده می‌کنیم که $\phi(b) - kb$ به سمت یک مقدار متناهی میل می‌کند، که می‌توانیم آن را با ϕ_∞ نمایش دهیم. در این‌صورت به‌ازای $b \to \infty$، خواهیم داشت

$$\phi(x) = \phi_\infty + kx + \frac{a}{۲kx} + \frac{O(۱)}{x^۲} \tag{۱۰ـ۱۶الف}$$

همین انتگرال‌گیری روی معادلهٔ مربوط به R'/R، می‌دهد

$$R(x) = R_\infty + \frac{O(1)}{x^2} \qquad (\text{۱۰ـ۱۶ب})$$

که در آن $R_\infty = \lim_{b\to\infty} R(b)$.

با جایگزین کردن معادلات (۱۰ـ۱۶) و عبارت

$$Q^{-1/4} = \left(k^2 - \frac{a}{x^2}\right)^{-1/4} = k^{-1/2} + \frac{O(1)}{x^2}$$

در معادلهٔ (۱۰ـ۸)، می‌رسیم به

$$v(x) = \left[R_\infty + \frac{O(1)}{x^2}\right]\left[k^{-1/2} + \frac{O(1)}{x^2}\right]\sin\left[\phi_\infty + kx + \frac{a}{2kx} + \frac{O(1)}{x^2}\right]$$

با بسط عبارت سمت چپ در بالا می‌توان به آسانی به اتحاد زیر دست یافت

$$\sin\left[\alpha + \frac{O(1)}{x^2}\right] = \sin\alpha + \frac{O(1)}{x^2}$$

با استفاده از این اتحاد و $kx_\infty \equiv \pi/2 - \phi_\infty$ می‌رسیم به

$$Z_\nu(kx) \equiv \frac{v(x)}{\sqrt{x}} = \frac{R_\infty}{\sqrt{kx}}\cos\left(kx - kx_\infty + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2kx}\right) + \frac{O(1)}{x^{5/4}} \qquad (\text{۱۰ـ۱۷})$$

ثابتهای R_∞ و ϕ_∞ به‌طور یکتا $Z_\nu(kx)$ را تعیین می‌کنند.

در مورد توابع بسل $J_\nu(x)$، می‌توان نشان داد که (بخش ۱۱ـ۳ـ۲).

$$kx_\infty = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad R_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

به همین ترتیب برای توابع نویمان، $Y_\nu(x)$، می‌توان نشان داد

$$kx_\infty = \left(\nu + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad R_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

از این‌رو، می‌توانیم بنویسیم

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \cos\left[x - \left(\nu + \frac{۱}{۲}\right)\frac{\pi}{۲} + \frac{\nu^۲ - \frac{۱}{۴}}{۲x}\right] + \frac{O(۱)}{x^{۵/۲}}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \sin\left[x - \left(\nu + \frac{۱}{۲}\right)\frac{\pi}{۲} + \frac{\nu^۲ - \frac{۱}{۴}}{۲x}\right] + \frac{O(۱)}{x^{۵/۲}}$$

به کمک این دو رابطه، به آسانی به عبارتهای مجانبی توابع هنکل می‌رسیم:

$$H_\nu^{(۱)}(x) \equiv J_\nu(x) + iY_\nu(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} e^{i[x-(\nu+۱/۲)(\pi/۲)+(\nu^۲-۱/۴)/۲x]} + \frac{O(۱)}{x^{۵/۲}}$$

$$H_\nu^{(۲)}(x) \equiv J_\nu(x) - iY_\nu(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} e^{-i[x-(\nu+۱/۲)(\pi/۲)+(\nu^۲-۱/۴)/۲x]} + \frac{O(۱)}{x^{۵/۲}}$$

اگر از جملهٔ آخر در نما، که در حد $x \to \infty$ صفر می‌شود، چشم بپوشیم، عبارت مجانبی برای $H_\nu^{(۱)}(x)$ با آنچه که در فصل هفتم و با استفاده از روش تندترین کاهش به‌دست آوردیم، مطابقت دارد.

از همین روش برای سایر معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنیم. ابتدا، معادلهٔ دیفرانسیل با جایگذاری لیوویل به شکل معادلهٔ (۱۰ـ۶) تبدیل می‌شود؛ سپس جایگذاری پروفر در معادلهٔ (۱۰ـ۸) انجام می‌شود تا دو معادلهٔ دیفرانسیل از نوع (۱۰ـ۹) به‌دست آید. با حل معادلهٔ (۱۰ـ۹) در حد $x \to \infty$، رفتار ϕ و R و در نتیجه رفتار u تعیین می‌شود.

تمرینها

۱۰ـ۲ـ۱ جایگذاری لیوویل با تغییر متغیرهای مستقل وابسته به‌صورت

$$u = y(x)v \quad \text{و} \quad t = \int^x h(s)ds$$

شروع می‌شود. y و h را چنان بیابید که معادلهٔ کلی اشتورم‌ـلیوویل

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [\lambda w(x) - q(x)]u = ۰$$

به (۱۰ـ۶) تبدیل شود

۱۰-۲-۲ با استفاده از معادلات تعریف‌شدهٔ (۱۰-۸)، معادله‌های (۱۰-۹) را از (۱۰-۷الف) به‌دست آورید.

۱۰-۳ بسط برحسب ویژه‌توابع

این واقعیت را در آخر فصل هشتم برشمردیم که دست‌کم در مختصات کروی، جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی را همواره می‌توان برحسب حاصلضرب برخی توابع اندیس‌دار بسط داد. حال قدری بیشتر در این مورد بحث می‌کنیم.

مسئلهٔ اصلی در چنین بسطی کامل بودن ویژه‌توابع دستگاه اشتورم-لیوویل است. قبلاً ملاحظه کردیم که تمام معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که مورد بحث قرار دادیم، به دستگاههای اشتورم-لیوویل منجر می‌شوند. حل این دستگاهها به تعداد بیشماری ویژه‌مقدار گسسته و ویژه‌توابع راست‌هنجار متناظر آنها می‌انجامد. اما چه کاری می‌توان با این ویژه‌توابع کرد، و چگونه این توابع به جواب مورد نظر یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مربوط‌اند؟ گرایش طبیعی این است که هر عامل جواب مجزا را به‌صورت یک ترکیب خطی (نامتناهی) از ویژه‌توابع دستگاه اشتورم-لیوویل متناظر بیان کنیم. اما، برای اینکه این روش شدنی باشد، باید مجموعهٔ ویژه‌توابع دستگاه اشتورم-لیوویل کامل باشد.

هرگونه پرسشی پیرامون کاملیت فضای (هیلبرت) بینهایت بعدی، غیربدیهی است. قضیه‌ای که مهمترین نتیجهٔ این فصل به‌شمار می‌آید، تشان می‌دهد که ویژه‌توابع دستگاه اشتورم-لیوویل یقیناً کامل‌اند. قبل از پرداختن به این قضیه، لازم است با چند نمادگذاری آشنا شویم. ابتدا، یادآور می‌شویم که $\mathscr{L}^2_w(a,b)$ معرف فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی با تابع وزن $w(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ است. در این‌صورت، شرایط مرزی تفکیک‌شدهٔ تعریف ۱۰-۱-۱ و شرایط مرزی متناوب آن را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم

$$R_1 u = 0 \quad \text{و} \quad R_2 u = 0$$

که در آن

$$R_j u \equiv \alpha_{j1} u(a) + \alpha_{j2} u'(a) + \alpha_{j3} u(b) + \alpha_{j4} u'(b) \qquad j = 1, 2 \qquad (۱۰\text{-}۱۸)$$

و $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{24}$، چنان اعدادی‌اند که مرتبهٔ ماتریس زیر ۲ باشد:

$$\mathsf{a} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix}$$

شرایط مرزی تفکیک‌شده با حالتی متناظر است که در آن $\alpha_{۱۱} = \alpha$، $\alpha_{۱۲} = \alpha'$، $\alpha_{۲۳} = \beta$ و $\alpha_{۲۴} = \beta'$، و سایر α_{ij}ها صفر باشند. به همین ترتیب، شرایط مرزی متناوب، حالت خاصی است که برای آن $\alpha_{۱۱} = -\alpha_{۱۳} = \alpha_{۲۲} = -\alpha_{۲۴} = ۱$ و سایر α_{ij}ها صفر است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که مرتبه ماتریس a برای این دو حالت خاص ۲ است. فرض کنید

$$\mathscr{U} \equiv \{u(x) | u \in \mathrm{C}^{(۲)}(a,b); R_j u = ۰ \quad j = ۱, ۲\} \qquad (۱۰\text{-}۱۹)$$

یک زیرفضای $\mathscr{L}^۲_w(a,b)$ باشد. بالاخره، برای اینکه از صفر شدن عبارت سمت راست اتحاد لاگرانژ مطمئن شویم، باید تساوی زیر برقرار باشد

$$p(b)\det\begin{pmatrix}\alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲}\\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲}\end{pmatrix} = p(a)\det\begin{pmatrix}\alpha_{۱۳} & \alpha_{۱۴}\\ \alpha_{۲۳} & \alpha_{۲۴}\end{pmatrix} \qquad (۱۰\text{-}۲۰)$$

اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ زیر را از نظر بگذرانیم![1]

قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱: (کاملیت ویژه‌توابع دستگاه اشتورم‌ـلیوویل). ویژه‌توابع $\{u_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ متعلق به یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل که از معادله اشتورم‌ـلیوویل $(pu')' + (\lambda w - q)u = ۰$ و شرایط مرزی (۱۰ـ۱۸) تشکیل شده است یک پایهٔ کامل برای زیرفضای $\mathscr{U}$ی $\mathscr{L}^۲_w(a,b)$ تشکیل می‌دهد که در (۱۰ـ۱۹) توصیف شده است. ویژه‌مقدارهای حقیقی و نامتناهی شمارش‌پذیرند و هر یک دارای چندگانگی حداکثر ۲ هستند. آنها را می‌توان بر طبق اندازهٔ $\lambda_۱ \le \lambda_۲ \le \cdots$ مرتب کرد و تنها نقطهٔ حدی آنها $+\infty$ است. ■

توجه کنید که شرایط مرزی تفکیک‌شده و متناوب هر دو به‌عنوان حالتهای خاص در (۱۰ـ۲۰) وجود دارند (تمرین ۱۰ـ۳ـ۱). از این‌رو، قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ تمام ویژه‌توابعی را در برمی‌گیرد که تا اینجا مورد بحث قرار دادیم. ثانیاً، تعامد ویژه‌توابع متناظر با ویژه‌مقدارهای مختلف و این واقعیت که تعداد بینهایت ویژه‌مقدار متمایز وجود دارد، وجود تعداد بینهایت ویژه‌تابع را تضمین می‌کند. ثالثاً، این ویژه‌توابع، یک پایهٔ $\mathscr{U}$ را تشکیل می‌دهند و نه کل $\mathscr{L}^۲_w(a,b)$ را. تنها آن توابعی از $u \in \mathscr{L}^۲_w(a,b)$ که در شرایط مرزی (۱۰ـ۱۸) صدق می‌کنند، برحسب $u_n(x)$ قابل بسط‌اند. بالاخره، قسمت آخر قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ تکرار بخشی از قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۱ است، اما به این علت نتیجه می‌شود که شرایطی

۱. برای اثبات نگاه کنید به فصل هفتم کتاب:

Helwig, 1967.

که تحت آنها قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ اعمال می‌شود، کلی‌تر از شرایطی است که قضیهٔ ۱۰ـ۲ـ۱ به آنها اعمال می‌شود.

در فصل پنجم توابع راست‌هنجار را مفصلاً مورد بحث قرار دادیم و نشان دادیم که چگونه سایر توابع را می‌توان برحسب آنها بسط داد. این بحث شامل چند جمله‌ایهای متعامد مختلف، روابط بازگشتی که این چندجمله‌ایها در آنها صدق می‌کنند، فرمول تعمیم‌یافتهٔ رودریگز برای محاسبهٔ آنها، و حتی معادلات دیفرانسیلی بود که این چندجمله‌ایها جوابهای آنها بودند. لیکن، روش به‌کار رفته در فصل پنجم برحسب ضرورت از دیدگاهی جبری بیان شد. روی‌هم‌رفته چندجمله‌ایهای متعامد نتیجهٔ منطقی تلاش گروهی از ریاضی فیزیکدانان قرن نوزدهم برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بوده است. این ریاضی‌دانان در تلاش برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در حوزهٔ فیزیک، با استفاده از جداسازی متغیرها، به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم متعددی برخورد کردند، که بعداً مشخص شد همهٔ آنها دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل هستند. لذا، از نظر منطقی باید این فصل قبل از فصل پنجم می‌آمد. اما ترتیب فصلها، براساس وضوح و سادگی ارائه و این واقعیت که مبحث معادلات دیفرانسیل پیش‌نیاز فصل دهم است، مرتب شده است.

قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ یک ارتباط مهم بین مفاهیم جبری، که در فصل پنجم مطرح کردیم، و بحث تحلیلی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل به‌شمار می‌آید. این قضیه، برخی توابع ریاضی واقعی را برای ما فراهم می‌آورد که تا هر دقت دلخواهی قابل محاسبه باکامپیوترند و می‌توانند به‌عنوان توابع پایه برای تمام بسطهای تشریح‌شده در فصل پنجم به‌کار روند. بقیهٔ این فصل به حل چند معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی در فیزیک ریاضیاتی، با استفاده از جداسازی متغیرها و قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱، اختصاص دارد.

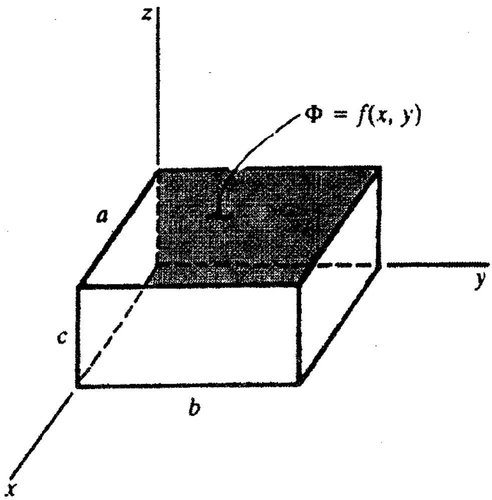
۱۰ـ۳ـ۱ جداسازی در مختصات دکارتی

مسائلی که در مختصات دکارتی مورد بررسی قرارمی‌گیرند، نوعاً شامل مسائلی‌اند که برای آنها، مرزها به شکل جعبه‌های مکعب‌مستطیلی یا صفحات مستطیلی هستند.

مثال ۱۰ـ۳ـ۱: جعبهٔ رسانا. یک جعبهٔ رسانا به شکل مکعب‌مستطیل با ابعاد a، b و c در نظر بگیرید (شکل ۱۰ـ۱). پتانسیل تمام سطوح آن جز سطح بالایی، که پتانسیل آن به‌صورت $f(x,y)$ داده می‌شود، صفر است. می‌خواهیم پتانسیل را در تمام نقاط داخل این جعبه پیدا کنیم.

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مربوطه در این حالت عبارت از معادلهٔ لاپلاس، $\nabla^2\Phi = 0$، است. تابع $\Phi(x,y,z)$ را به‌صورت حاصلضرب سه تابع می‌نویسیم

$$\Phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$



شکل ۱۰ـ۱ جعبهٔ رسانای مکعب‌مستطیلی، که یک سطح آن در پتانسیل $f(x,y)$ و سایر سطوح در پتانسیل صفر قرار دارند.

در این‌صورت سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر به‌دست می‌آید (فصل هشتم)

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda^{(۱)}X = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d^۲Y}{dy^۲} + \lambda^{(۲)}Y = ۰ \qquad (۲)$$

$$\frac{d^۲Z}{dz^۲} + \lambda^{(۳)}Z = ۰ \qquad (۳)$$

که در آن

$$\lambda^{(۱)} + \lambda^{(۲)} + \lambda^{(۳)} = ۰$$

از صفر شدن Φ در $x = ۰$ و $x = a$ نتیجه می‌شود:

$$\Phi(۰, y, z) = X(۰)Y(y)Z(z) = ۰ \quad \Rightarrow \quad X(۰) = ۰$$

$$\Phi(a, y, z) = X(a)Y(y)Z(z) = ۰ \quad \Rightarrow \quad X(a) = ۰$$

به این ترتیب یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda^{(۱)}X = ۰ \qquad X(۰) = ۰ = X(a)$$

که شرط مرزی آن نه تفکیک‌شده و نه متناوب است، اما در (۱۰ـ۱۸)، با $\alpha_{۱۱} = \alpha_{۲۳} = ۱$ و سایر α_{ij}های صفر، صدق می‌کند. این دستگاه اشتورم‌ـلیوویل دارای ویژه‌مقدارها و ویژه‌توابع زیر است:

$$\lambda_n^{(۱)} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \quad و \quad X_n(x) \equiv \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

به همین ترتیب، معادلهٔ (۲) به مقادیر و توابع زیر می‌انجامد

$$\lambda_m^{(۲)} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲ \quad و \quad Y_m(x) \equiv \sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \qquad m = ۱, ۲, \ldots$$

از سوی دیگر، معادله (۳) به دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منجر نمی‌شود زیرا شرط مرزی برای سطح بالایی با (۱۰ـ۱۸) سازگار نیست. اما، می‌توانیم جوابی برای این معادله به‌دست آوریم. با وارد کردن عبارت

$$\gamma_{mn}^۲ \equiv \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲$$

معادله (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^۲Z}{dz^۲} - \gamma_{mn}^۲ Z = ۰$$

یکی از جوابهای این معادله که با $Z(۰) = ۰$ سازگار است، عبارت است از

$$Z(z) = C\sinh(\gamma_{mn} z)$$

توجه کنید که مثلاً $X(x)$ تابعی است که در $R_۱X = ۰ = R_۲X$ صدق می‌کند. بنابراین، برطبق قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱، می‌توان آن را به‌صورت یک ترکیب خطی از $X_n(x)$ها نوشت:

$$X(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

به همین ترتیب

$$Y(y)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

در نتیجه، عمومی‌ترین جواب را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sinh(\gamma_{mn}z)$$

که در آن $A_{mn}\equiv A_n B_m C$.

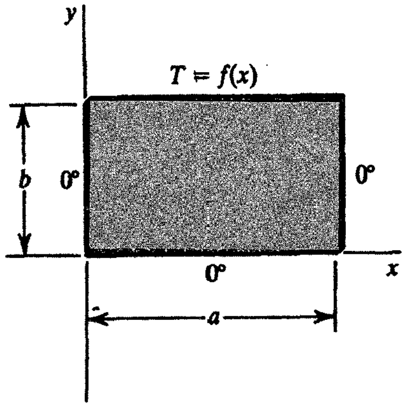
برای اینکه Φ را به‌طور کامل مشخص کنیم، باید ثابتهای دلخواه A_{mn} را تعیین کنیم. این کار، با اعمال شرط مرزی باقیمانده، $\Phi(x,y,c)=f(x,y)$، انجام می‌شود که منجر به اتحاد زیر می‌شود

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sinh(\gamma_{mn}c)$$
$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

که در آن $B_{mn}\equiv A_{mn}\sinh(\gamma_{mn}c)$. این عبارت یک سری فوریه دوبعدی است (فصل پنجم) که ضرایب آن به صورت زیر داده می‌شوند

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dy\, f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$ ●

مثال ۱۰ـ۳ـ۲: پخش با حالت پایا فاصله وقتی انتقال (پخش) گرما به‌گونه‌ای اتفاق افتد که دما از زمان مستقل باشد، این فرایند را انتقال گرما با حالت پایا می‌نامند. در این‌صورت معادلهٔ پخش، $\partial T/\partial t=a^2\nabla^2 T$، به معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 T=0$، تبدیل می‌شود و از روش مثال ۱۰ـ۳ـ۱ می‌توان بهره گرفت. به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که معادلهٔ پخش این امکان را برای ما فراهم می‌آورد که هر تبدیل خطی‌را، نظیر $T\to aT+b$، روی T انجام دهیم و باز هم این معادله برقرار باشد. یعنی، می‌توان T را براساس هر یک از سه مقیاس متداول (کلوین، سانتیگراد، فارنهایت) اندازه‌گیری کرد.



شکل ۱۰_۲ صفحهٔ مربع‌مستطیلی رسانای گرما.

یک صفحهٔ مربع‌مستطیلی به اضلاع a و b را که رسانای گرماست، در نظر بگیرید. سه ضلع در $T = ۰$ قرار دارند و دمای ضلع چهارم مطابق $T = f(x)$ متغیر است (شکل ۱۰_۲). سطوح تخت عایق‌بندی شده‌اند، به‌طوری که نمی‌توانند به محیط اطراف گرما دهند. می‌خواهیم با فرض انتقال گرما با حالت پایا، تغییرات T روی صفحه را پیدا کنیم.

این مسئله، دوبعدی است. تفکیک متغیرها منجر خواهد شد به

$$T(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda^{(۱)}X = ۰ \tag{۱}$$

$$\frac{d^۲Y}{dy^۲} + \lambda^{(۲)}Y = ۰ \tag{۲}$$

$$\lambda^{(۱)} + \lambda^{(۲)} = ۰$$

معادلهٔ (۱) و شرایط مرزی متناوب $T(۰, y) = T(a, y) = ۰$ یک دستگاه اشتورم_لیوویل تشکیل می‌دهند که ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر آن عبارت‌اند از

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad \lambda_n^{(۱)} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

بنابراین، مطابق قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱، یک $X(x)$ کلی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

از سوی دیگر، معادلهٔ (۲)، دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تشکیل نمی‌دهد. اما، می‌توانیم معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0$$

و به جواب عمومی زیر برسیم

$$Y = Ae^{(n\pi/a)y} + Be^{-(n\pi/a)y}$$

چون $T(x, 0) = 0$، باید داشته باشیم: $Y(0) = 0$. از این رابطه نتیجه می‌شود $A + B = 0$ که به‌نوبهٔ خود به جوابی به‌صورت $Y = C\sinh(n\pi y/a)$ می‌انجامد.

به این ترتیب، عمومی‌ترین جواب، که با سه شرط مرزی $T(0, y) = T(a, y) = T(x, 0) = 0$ سازگار باشد، عبارت است از

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

شرط مرزی چهارم به سری فوریهٔ زیر منجر می‌شود

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

که ضرایب آن را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد

$$C_n \equiv B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

در حالت خاص، اگر دمای ضلع چهارم T_0 باشد، داریم

$$C_n = \frac{2T_0}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right)[1 - (-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4T_0}{n\pi} & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

و می‌رسیم به

$$T(x,y)=\frac{۴T_۰}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲k+۱}\,\frac{\sinh[(۲k+۱)\pi y/a]}{\sinh[(۲k+۱)\pi b/a]}\sin[(۲k+۱)\pi x/a] \qquad (۳)$$

از سوی دیگر، اگر تغییرات دمای ضلع چهارم به‌صورت $f(x)=T_۰\sin(\pi x/a)$ باشد، در آن‌صورت

$$C_n=\frac{۲T_۰}{a}\int_۰^a\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx=\frac{۲T_۰}{a}\ \left(\frac{a}{۲}\right)\delta_{n,۱}=T_۰\,\delta_{n,۱}$$

و

$$B_n=\frac{C_n}{\sinh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)}=\frac{T_۰}{\sinh\left(\dfrac{\pi b}{a}\right)}\delta_{n,۱}$$

و خواهیم داشت

$$T(x,y)=T_۰\,\frac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \qquad (۴)$$

فقط یک جمله از سری باقی می‌ماند، زیرا تغییرات روی ضلع چهارم یکی از هماهنگهای بسط است.

توجه کنید که تغییرات دما که معادلات (۳) و (۴) آن را بیان می‌کنند، از جنس صفحه مستقل‌اند، زیرا با یک حالت پایا سروکار داریم. رسانایی ماده فقط در فرایند انتقال گرما، در حین رسیدن به حالت پایا، یک عامل مهم به‌شمار می‌آید. ●

وقتی تعادل برقرار شد، توزیع دما برای تمام مواد یکسان است. در دو مثال بالا با وضعیتهای ایستا یا استاتیکی (مستقل از زمان) سروکار داشتیم. اما، اغلب موارد با اهمیت و جالب فیزیکی، دینامیکی‌اند. بنابراین، گنجاندن وابستگی زمانی در این معادلات، حائز اهمیت است.

مثال ۱۰-۳-۳: میلهٔ نازک با دو سر در دمای $T=۰$ میلهٔ رسانای یک‌بعدیی را در نظر بگیرید که یک سر آن در مبدأ، $x=۰$، و سر دیگرش در $x=b$ قرار دارد. دو سر میله در $T=۰$ نگه داشته می‌شوند. ابتدا، در $t=۰$، فرض می‌کنیم توزیع دمای میله با تابع $f(x)$ بیان شود. می‌خواهیم در زمان t دما را در هرنقطهٔ x روی میله محاسبه کنیم.

باید این معادلهٔ دینامیکی را حل کنیم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^{۲}\nabla^{۲}T \equiv a^{۲}\frac{\partial^{۲}T}{\partial x^{۲}}$$

جداسازی متغیرها، $T(t,x) = g(t)X(x)$، به دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی می‌انجامد

$$\frac{dg}{dt} + a^{۲}\lambda g = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d^{۲}X}{dx^{۲}} + \lambda X = ۰ \qquad (۲)$$

شرایط مرزی $T(t,۰) = ۰ = T(t,b)$ دلالت می‌کنند بر $X(۰) = ۰ = X(b)$. بنابراین، معادلهٔ (۲) یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تشکیل می‌دهد که جوابهای آن عبارت‌اند از

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^{۲} \qquad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ می‌رسیم به

$$X(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

جواب معادلهٔ (۱) نیز به آسانی به‌دست می‌آید

$$g(t) = Ce^{-a^{۲}(n\pi/b)^{۲}t}$$

و این جواب به یک جواب عمومی به‌صورت زیر منجر می‌شود

$$T(t,x) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_n e^{-(n\pi a/b)^{۲}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

از شرط اولیه، $f(x) = T(۰,x)$، می‌رسیم به

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

که از آن می‌توانیم ضرایب بسط را محاسبه کنیم

$$B_n = \frac{۲}{b} \int_{۰}^{b} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x\right) dx$$

●

مثال ۱۰ـ۳ـ۴: فرض کنید تمام اضلاع صفحهٔ مثال ۱۰ـ۳ـ۲ در $T = ۰$ باشند. فرض کنید در زمان $t = ۰$، توزیع دما به‌صورت $f(x, y)$ باشد. می‌خواهیم تغییرات دما را برای تمام نقاط (x, y) در تمام لحظات $t > ۰$ پیدا کنیم.

معادلهٔ پخش برای این مسئله عبارت است از

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^{۲} \left(\frac{\partial^{۲} T}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} T}{\partial y^{۲}} \right)$$

که در آن k به‌جای a به‌کار رفته و a طول یک ضلع صفحه است. جداسازی متغیرها به‌صورت $T(x, y, t) = X(x)Y(y)g(t)$ منجر به سه معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌شود

$$\frac{d^{۲} X}{dx^{۲}} + \lambda^{(۱)} X = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d^{۲} Y}{dy^{۲}} + \lambda^{(۲)} Y = ۰ \qquad (۲)$$

$$\frac{dg}{dt} + k^{۲}(\lambda^{(۱)} + \lambda^{(۲)}) g = ۰ \qquad (۳)$$

شرایط مرزی $T(۰, y, t) = T(a, y, t) = T(x, ۰, t) = T(x, b, t) = ۰$ همراه با معادلات (۱) و (۲)، به دستگاه اشتورم‌ـلیوویل منجر شوند. جوابهای این دو معادله را می‌توان به آسانی به‌دست آورد:

$$\lambda_n^{(۱)} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{۲} \qquad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$\lambda_m^{(۲)} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^{۲} \qquad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

از این جوابها (مطابق قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱) جواب عمومی زیر به‌دست می‌آید

$$X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$Y(y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

با $\gamma_{mn}\equiv k^2\pi^2(n^2/a^2+m^2/b^2)$، جواب معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$g(t)=Ce^{-\gamma_{mn}t}$$

با ترکیب تمام نتایج بالا، می‌رسیم به

$$T(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}e^{-\gamma_{mn}t}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

که در آن $A_{mn}\equiv CA_nB_m$ یک ثابت دلخواه است. برای تعیین این ثابت، شرط اولیهٔ $T(x,y,0)=f(x,y)$ را اعمال می‌کنیم و می‌رسیم به

$$f(x,y)=\sum_{m,n}A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

که از روی آن ضرایب A_{mn} به‌دست می‌آیند

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dy\ f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$ ●

مثال ۱۰ـ۳ـ۵: ذره در جعبه رفتار ذره‌ای اتمی به جرم μ دریک جعبه مکعب‌مستطیلی به اضلاع a، b و c (چاه پتانسیل سه‌بعدی نامتناهی) را معادلهٔ شرودینگر برای ذرهٔ آزاد تعیین می‌کند

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

با این شرط مرزی $\psi(x,y,z,t)$ که در روی تمام صفحات جعبه در تمام لحظات صفر است.

جداسازی متغیرها به‌صورت $\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ منجر به معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌شود

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda^{(۱)}X = ۰$$
$$\frac{d^۲Y}{dy^۲} + \lambda^{(۲)}Y = ۰$$
$$\frac{d^۲Z}{dz^۲} + \lambda^{(۳)}Z = ۰$$
$$\frac{dT}{dt} + i\omega T = ۰$$

که در آن

$$\omega \equiv \frac{\hbar}{۲\mu}(\lambda^{(۱)} + \lambda^{(۲)} + \lambda^{(۳)})$$

معادلات فضایی، همراه با شرایط مرزی زیر

$$\psi(۰,y,z,t) = \psi(a,y,z,t) = ۰ \quad \Rightarrow \quad X(۰) = ۰ = X(a)$$
$$\psi(x,۰,z,t) = \psi(x,b,z,t) = ۰ \quad \Rightarrow \quad Y(۰) = ۰ = Y(b)$$
$$\psi(x,y,۰,t) = \psi(x,y,c,t) = ۰ \quad \Rightarrow \quad Z(۰) = ۰ = Z(c)$$

به سه دستگاه اشتورم-لیوویل می‌انجامند، که جوابهای آنها را به آسانی می‌توان به‌دست آورد:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad \lambda^{(۱)} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \qquad n = ۱,۲,\ldots$$
$$Y_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad \lambda^{(۲)} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲ \qquad m = ۱,۲,\ldots$$
$$Z_l(x) = \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right) \qquad \lambda^{(۳)} = \left(\frac{l\pi}{c}\right)^۲ \qquad l = ۱,۲,\ldots$$

از سوی دیگر، جواب معادلهٔ زمانی عبارت است از

$$T = Ce^{-i\omega_{lmn}t}$$

که در آن

$$\omega_{lmn} \equiv \frac{\hbar}{2\mu}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2\right]$$

بنابراین، جواب معادلهٔ شرودینگر سازگار با شرایط مرزی، عبارت است از

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{l,m,n=1}^{\infty} A_{lmn} e^{-i\omega_{lmn} t} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{b}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right)$$

ثابتهای A_{lmn} را شکل اولیهٔ تابع موج، $\psi(x, y, z, 0)$، تعیین می‌کند. باید گفت که انرژی ذره عبارت است از

$$E = \hbar\omega_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$$

که در آن، کمیتِ:

$$k^2 \equiv \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}\right)$$

عدد موج است. واضح است که انرژی ذره کوانتیده است.

هر دسته از سه عدد صحیح مثبت n، m، و l یک حالت ذره را نمایش می‌دهد. برای یک مکعب، $a = b = c = L$، انرژی ذره عبارت است از

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2}(n^2 + m^2 + l^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu V^{2/3}}(n^2 + m^2 + l^2) \qquad (1)$$

که در آن $V \equiv L^3$ حجم جعبه است. حالت پایه $(1, 1, 1)$ و انرژی آن عبارت است از $E = 3\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ که ناواگن است (فقط یک حالت با این انرژی متناظر است). اما ترازهای بالاتر واگن‌اند. مثلاً، سه حالت $(1, 1, 2)$، $(1, 2, 1)$ و $(2, 1, 1)$ جملگی با یک مقدار انرژی $E = 6\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ متناظرند. حالتهای متناظر با مقادیر بزرگتر n، m و l حتی واگنی بیشتری دارند. می‌توان معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر نوشت

$$n^2 + m^2 + l^2 = R^2$$

که در آن $R^2 \equiv 2\mu EV^{2/3}/\hbar^2\pi^2$. این معادله، مانند معادلهٔ یک کره در فضای nml است. اگر R بزرگ باشد. تعداد حالتهای موجود در داخل کره‌ای به شعاع R (تعداد حالتهای با انرژی مساوی با یا کمتراز E) برابر است با حجم اولین هشت‌ـیک. اگر N تعداد این حالتها باشد، داریم

$$N = \frac{1}{8}\left(\frac{4\pi}{3}\right) R^3 = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu EV^{2/3}}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2}$$
$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2} V$$

بنابراین، چگالی حالتها (تعداد حالتها در واحد حجم) عبارت است از

$$n \equiv \frac{N}{V} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2} \tag{2}$$

این عبارت، در فیزیک حالت جامد فرمول بسیار مهمی است، زیرا انرژی E (با اصلاحات جزئی که به‌خاطر اسپین ذره لازم است) انرژی فرمی است. اگر انرژی فرمی را با E_{F} نمایش دهیم، معادلهٔ (۲) منجر می‌شود به

$$E_{\mathrm{F}} = \alpha n^{2/3}$$

که α یک ثابت است. ●

در مثالهای قبل، تغییرات زمانی به کمک مشتق مرتبهٔ اول داده شد. بنابراین، تا جایی که به زمان مربوط می‌شود، یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول داریم. نتیجه می‌شود که مشخص کردن کمیت فیزیکی مورد نظر (دمای T یا تابع‌موج ψی شرودینگر) برای تعیین جواب منحصر به‌فرد کافی باشد.

نوع دوم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان که در فیزیک با آنها مواجه می‌شویم، معادلات موجی‌اند شامل مشتق مرتبهٔ دوم نسبت به زمان و معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم نسبت به‌زمان به‌شمار می‌آیند. از این‌رو، در جواب عمومی آنها دو پارامتر دلخواه وجود دارد. برای تعیین این دو پارامتر دلخواه، انتظار وجود دو شرط اولیه را داریم.

مثال ۱۰ـ۳ـ۶: ساده‌ترین نوع معادلهٔ موج عبارت است از معادله در یک‌بعد، مثلاً، موجی که

روی یک طناب منتشر می‌شود. چنین معادلهٔ موجی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} = \frac{۱}{c^۲}\,\frac{\partial^۲\psi}{\partial t^۲}$$

که در آن c سرعت انتشار موج است. در مورد طناب، این سرعت به کشش، τ، و چگالی خطی جرم، ρ، به‌صورت $c = \sqrt{\tau/\rho}$ بستگی دارد.

فرض کنید طول طناب که دو سرش (در $x = ۰$ و $x = a$) بسته است، عبارت باشد از a. یعنی، "جابه‌جایی" ψ در $x = ۰$ و در $x = a$، صفر است.

جداسازی متغیرها، به‌صورت $\psi(x,t) = X(x)T(t)$ منجر به دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر می‌شود

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda X = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d^۲T}{dt^۲} + \lambda c^۲ T = ۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۱) و شرایط مرزی فضایی دستگاه اشتورم‌ـلیوویل را مشخص می‌کنند که جوابهای آن (ویژه‌مقادیر و ویژه‌توابع) عبارت‌اند از

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \qquad X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

یکی از جوابهای عمومی معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر است

$$T = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$$

که در آن $\omega_n \equiv cn\pi/a$ و A_n و B_n ثابتهای دلخواه‌اند. بنابراین، جواب عمومی عبارت است از

$$\psi(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

علاوه بر مشخص کردن شکل اولیهٔ طناب به‌صورت $\psi(x,۰) = f(x)$، سری فوریه به‌صورت زیر هم داده می‌شود.

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

که A_n را تعیین می‌کند. در مورد B_nها چکار کنیم؟ از نظر فیزیکی، شکل موج به‌تنهایی برای تعریف منحصر به‌فرد مسئله، کافی نیست. ممکن است طناب، در حالی که شکل اولیهٔ مورد نظر را دارد، حرکتهای متفاوتی داشته باشد. بنابراین، باید شکل سرعت را نیز بدانیم، که به این معنی است که تابع $\partial\psi/\partial t$ را در $t = ۰$ مشخص کنیم. اگر داشته باشیم

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=۰} = g(x)$$

در این‌صورت

$$g(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

و B_nها نیز تعیین می‌شوند.

برای مشخص کردن منحصر به‌فرد ψ لازم است نه تنها شکل موج اولیه بلکه "شکل سرعت" آن را نیز داشته باشیم.

بسامدهای مختلف ω_n، که در آن $n = ۱, ۲, \ldots$، مدهای نوسانی نامیده می‌شوند. بنابراین، به‌طور کلی، یکی از جوابها عبارت است از برهم‌نهی خطی تعداد بینهایت مد. در عمل، می‌توان یک مد، یا با شرایط اولیهٔ مناسب تعداد محدودی از مدها را تا َحدودی "برانگیخت". ●

در عمل، برای امواج پیشرونده نه امواج ساکن، مشخص کردن شکل موج و شکل سرعت به اهمیت مد انتشار نیست. از این‌رو، مثلاً در نظریهٔ موجبرها، پس از اینکه تغییرات زمانی جدا شد، یک تغییر زمانی به‌خصوص، نظیر $e^{+i\omega t}$، و یک راستای خاص برای انتشار موج، که معمولاً راستای zهاست اختیار می‌شود.

به این ترتیب، اگر u معرف یکی از مؤلفه‌های میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد، می‌توانیم بنویسیم $u(x, y, z, t) = \psi(x, y)e^{i(\omega t \pm kz)}$، که در آن k عدد موج، مقداری ثابت است. در این‌صورت معادلهٔ موج به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\psi}{\partial y^۲} + \left(\frac{\omega^۲}{c^۲} - k^۲\right)\psi = ۰$$

با معرفی $\gamma^۲ \equiv \omega^۲/c^۲ - k^۲$ و $\nabla_t \equiv (\partial/\partial x \text{ و } \partial/\partial y)$ و نوشتن معادلهٔ بالا برحسب بردارهای

کامل، می‌رسیم به

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(۱۰ـ۲۱الف)}$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y) \\ \mathbf{B}(x, y) \end{bmatrix} e^{i(\omega t \pm kz)} \qquad \text{(۱۰ـ۲۱ب)}$$

این معادلات معادلاتی اساسی‌اند که در مطالعهٔ موجبرهای الکترومغناطیسی و کاواکهای تشدید به‌کار می‌روند.

مثال ۱۰ـ۳ـ۷: موجبرهای مکعب‌مستطیلی معادلات ماکسول در پیوند با معادلهٔ (۱۰ـ۲۱ب) مؤلفه‌های عرضی (مؤلفه‌های عمود بر راستای انتشار) $\mathbf{E}_t$ و $\mathbf{B}_t$ را برحسب مؤلفه‌های طولی E_z و B_z می‌دهند

$$\gamma^2 \mathbf{E}_t = \boldsymbol{\nabla}_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\boldsymbol{\nabla}_t B_z) \qquad (1)$$

$$\gamma^2 \mathbf{B}_t = \boldsymbol{\nabla}_t \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\boldsymbol{\nabla}_t E_z) \qquad (2)$$

که در آن $\gamma^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ و $\boldsymbol{\nabla}_t$ عملگر گرادیان دوبعدی در صفحهٔ عرضی است.

معمولاً سه نوعِ موجِ هدایت‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱. امواج مغناطیسی عرضی (TM) که برای آنها در همه جا $B_z = 0$. شرایط مرزی روی $\mathbf{E}$ ایجاب می‌کند که E_z روی دیواره‌های رسانای موجبر صفر شود.

۲. امواج عرضی الکتریکی (TE) که برای آنها در همه جا $E_z = 0$. شرایط مرزی روی B_z ایجاب می‌کند که $\partial B_z/\partial n$، که در آن $\partial/\partial n$ مشتق سویی عمود بر دیواره‌هاست، در محل دیواره‌ها صفر شود.

۳. امواج عرضی الکترومغناطیسی (TEM) که برای آنها $E_z = 0 = B_z$. برای جواب غیربدیهی، معادلات (۱) و (۲) ایجاب می‌کنند که $\gamma^2 = 0$. این شرط، شبیه به یک موج آزاد بدون مرز است.

مد امواج مغناطیسی عرضی را به اختصار توضیح می‌دهیم (برای جزئیات بیشتر می‌توانید به هر کتابی در زمینهٔ نظریهٔ الکترومغناطیس مراجعه کنید). معادلات اساسی در این مد عبارت‌اند از

$$(\nabla_t^۲ + \gamma^۲)E_z = ۰$$

$$B_z = ۰$$

$$\gamma^۲ \mathbf{E}_t = \boldsymbol{\nabla}_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\gamma^۲ \mathbf{B}_t = i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{e}}_z \times (\boldsymbol{\nabla}_t E_z)$$

برای موجبری با سطح مقطع مربع‌مستطیلی به اضلاع a و b که به ترتیب در راستای محور x و y قرار دارند، داریم

$$\frac{\partial^۲ E_z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ E_z}{\partial y^۲} + \gamma^۲ E_z = ۰$$

جداسازی متغیرها، $E_z(x,y) \equiv X(x)Y(y)$، به دو دستگاه اشتورم-لیوویل منجر می‌شود

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \lambda^{(۱)}X = ۰ \qquad X(۰) = X(a) = ۰$$

$$\frac{d^۲Y}{dy^۲} + \lambda^{(۲)}Y = ۰ \qquad Y(۰) = Y(b) = ۰$$

که در آن $\lambda^{(۱)} + \lambda^{(۲)} = \gamma^۲$. جواب این معادلات عبارت‌اند از

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad \lambda_n^{(۱)} \equiv \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad \lambda_m^{(۲)} \equiv \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲ \qquad m = ۱, ۲, \ldots$$

عدد موج این‌طور بیان می‌شود

$$k_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^۲}{c^۲} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲}$$

که برای اینکه موج منتشر شود باید حقیقی باشد (مقدار موهومی k به نمو یا کاهش نمایی در امتداد محور zها منجر می‌شود). بنابراین، بسامد قطع برقرار می‌شود:

$$\omega_{mn} \equiv c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{۲} + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^{۲}} \qquad m, n \geq ۱$$

که پایین‌تر از آن موج نمی‌تواند در داخل موجبر منتشر شود. به این ترتیب، برای یک موج مغناطیسی عرضی، پایین‌ترین بسامد که می‌تواند در امتداد یک موجبر مربع‌مستطیلی انتشار یابد، عبارت است از

$$\omega_{۱۱} = \frac{\pi c\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}{ab}$$

بنابراین، عمومی‌ترین جواب برای E_z عبارت است از

$$E_z = \sum_{m,n=۱}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{i(\omega t \pm k_{mn} z)}$$

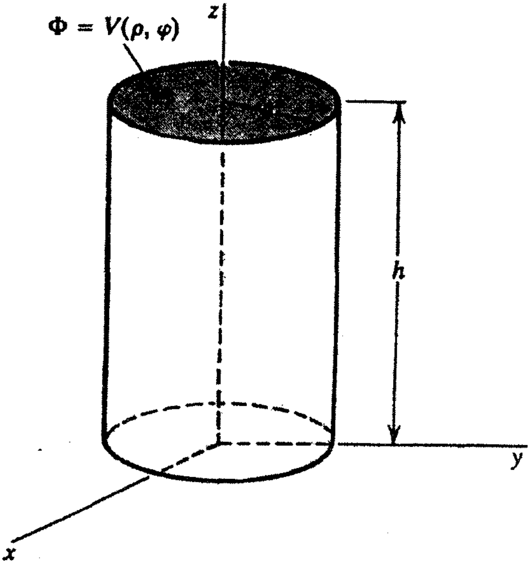
ثابتهای A_{mn} دلخواه‌اند و می‌توان آنها را از شکل اولیه موج تعیین کرد، اما معمولاً این کار انجام نمی‌شود. وقتی E_z پیدا شد، سایر مؤلفه‌ها را می‌توان به کمک معادلات (۱) و (۲) محاسبه کرد. ●

۱۰ـ۳ـ۲ جداسازی در مختصات استوانه‌ای

وقتی شکل هندسی مرزها استوانه‌ای باشد، دستگاه مختصات مناسب هم دستگاه استوانه‌ای است. این نوع دستگاه همواره به "یک نوع" از توابع بسل منجر می‌شود.

مثال ۱۰ـ۳ـ۸: قوطی استوانه‌ای رسانا یک قوطی استوانه‌ای شکل را به شعاع a و ارتفاع h در نظر بگیرید (شکل ۱۰ـ۳). پتانسیل $V(\rho, \varphi)$ در سطح قاعدهٔ بالایی متغیر است، و سطح جانبی و قاعدهٔ پایین به زمین متصل شده‌اند. می‌خواهیم پتانسیل الکتروستاتیکی را در تمام نقاط داخلی قوطی پیدا کنیم.

جداسازی متغیرها، $\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)S(\varphi)Z(z)$، معادلهٔ لاپلاس $\nabla^{۲}\Phi = ۰$، را به



شکل ۱۰-۳ یک قوطی استوانه‌ای رسانا که هر دو سر قاعده بالای آن پتانسیل $V(\rho,\varphi)$ برقرار است و بقیهٔ سطوح آن به زمین متصل‌اند.

سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} + m^2 S = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

معادلهٔ اولی، معادلهٔ بسل است که جواب عمومی آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$R(\rho) = AJ_m(k\rho) + BY_m(k\rho)$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل دوم عبارت است از

$$S(\varphi) = C\cos m\varphi + D\sin m\varphi$$

دوره‌ای بودن Φ (و از این‌رو S) نسبت به φ ایجاب می‌کند که m یک عدد صحیح باشد. سرانجام،

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل سوم، از این قرار است

$$Z = Ee^{kz} + Fe^{-kz}$$

توجه کنید که هیچ‌یک از سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی منجر به دستگاه اشتورم‌ـلیوویل نمی‌شود، زیرا شرایط مرزی مربوط به آنها در (۱۰ـ۱۸) صدق نمی‌کنند. اما، می‌توانیم باز هم مسئله را با اعمال شرایط مرزی داده شده حل کنیم.

این واقعیت که پتانسیل باید در همه جای داخل قوطی (از جمله در $\rho = 0$) متناهی باشد، به صفر شدن B می‌انجامد، زیرا تابع نویمان $Y_m(k\rho)$ در $\rho = 0$ تعریف شده نیست. از سوی دیگر، می‌خواهیم Φ در $\rho = a$ صفر شود. از این شرط، داریم

$$J_m(ka) = 0$$

که نشان می‌دهد، باید ka یک ریشهٔ تابع بسل مرتبهٔ m باشد. اگر صفر nام تابع بسل مرتبهٔ m را با x_{mn} نمایش دهیم، داریم

$$ka = x_{mn} \quad \Rightarrow \quad k \equiv \frac{x_{mn}}{a} \quad n = 1, 2, \ldots$$

به همین ترتیب، صفر شدن Φ در $z = 0$ به این معناست که

$$E = -F \quad \text{و} \quad Z = E \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a} z\right)$$

اکنون می‌توانیم R، S و Z را در هم ضرب کنیم و روی تمام مقادیر m و n جمع ببندیم و این نکته را در نظر داشته باشیم که مقادیر منفی m جملاتی می‌دهند که به‌طور خطی به مقادیر مثبت متناظر وابسته‌اند. نتیجه عبارت است از

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}z\right) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \tag{1}$$

که در آن A_{mn} و B_{mn} ثابتهایی‌اند که باید با توجه به شرایط مرزی باقیمانده تعیین شوند.

برای تعیین این ثابتها از تعامد توابع مثلثاتی و بسل استفاده می‌کنیم. اگر قرار دهیم $z = h$، در این‌صورت (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$V(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)\sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}h\right)(A_{mn}\cos m\varphi+B_{mn}\sin m\varphi)$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$A_{mn}=\frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})\sinh\left(x_{mn}\dfrac{h}{a}\right)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a d\rho\,\rho V(\rho,\varphi)J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right)\cos m\varphi$$

و

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})\sinh\left(x_{mn}\dfrac{h}{a}\right)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a d\rho\,\rho V(\rho,\varphi)J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right)\sin m\varphi$$

با استفاده از نتیجهٔ به‌دست آمده در تمرین ۱۰ـ۳ـ۷، داریم:

$$\int_0^a \rho J_m^2\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right)d\rho=\frac{a^2}{2}J_{m+1}^2(x_{mn})$$

در حالت خاص ولی مهم تقارن سمتی، که در آن $V(\rho,\varphi)$ مستقل از φ است، می‌رسیم به

$$A_{mn}=\frac{4\delta_{m,0}}{a^2 J_1^2(x_{0n})\sinh\left(x_{0n}\dfrac{h}{a}\right)}\int_0^a d\rho\,\rho V(\rho)J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right)$$

$$B_{mn}=0$$ ●

مثال ۱۰ـ۳ـ۸ یک مسئلهٔ نوعی را نشان می‌دهد که جواب آن برحسب سری موسوم به سری فوریه‌ـبسل داده می‌شود

$$\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z)(A_{mn}\cos m\varphi+B_{mn}\sin m\varphi)$$

(۲۲ـ۱۰)

جدول ۱۰ـ۱ برخی مقادیر x_{mn} و y_{mn} صفرهای توابع بسل $J_m(x)$ و توابع نویمان $Y_m(x)$

n	x_{0n}	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	x_{4n}	x_{5n}	x_{6n}	x_{7n}	x_{8n}
۱	۲٫۴۰۵	۳٫۸۳۲	۵٫۱۳۶	۶٫۳۸۰	۷٫۵۸۸	۸٫۷۷۱	۹٫۹۳۶	۱۱٫۰۸۶	۱۲٫۲۲۵
۲	۵٫۵۲۰	۷٫۰۱۶	۸٫۴۱۷	۹٫۷۶۱	۱۱٫۰۶۵	۱۲٫۳۳۹	۱۳٫۵۸۹	۱۴٫۸۲۱	۱۶٫۰۳۸
۳	۸٫۶۵۴	۱۰٫۱۷۳	۱۱٫۶۲۰	۱۳٫۰۱۵	۱۴٫۳۷۳	۱۵٫۷۰۰	۱۷٫۰۰۴	۱۸٫۲۸۸	۱۹٫۵۵۵
۴	۱۱٫۷۹۱	۱۳٫۳۲۴	۱۴٫۷۹۶	۱۶٫۲۲۳	۱۷٫۶۱۶	۱۸٫۹۸۰	۲۰٫۳۲۱	۲۱٫۶۴۲	۲۲٫۹۴۵
۵	۱۴٫۹۳۱	۱۶٫۴۷۱	۱۷٫۹۶۰	۱۹٫۴۰۹	۲۰٫۸۲۷	۲۲٫۲۱۸	۲۳٫۵۸۶	۲۴٫۹۳۵	۲۶٫۲۶۷
	y_{0n}	y_{1n}	y_{2n}	y_{3n}	y_{4n}	y_{5n}	y_{6n}	y_{7n}	y_{8n}
۱	۰٫۸۹۴	۲٫۱۹۷	۳٫۳۸۴	۴٫۵۲۷	۵٫۶۴۵	۶٫۷۴۷	۷٫۸۳۸	۸٫۹۲۰	۹٫۹۹۵
۲	۳٫۹۵۸	۵٫۴۳۰	۶٫۷۹۴	۸٫۰۹۸	۹٫۳۶۲	۱۰٫۵۹۷	۱۱٫۸۱۱	۱۳٫۰۰۸	۱۴٫۱۹۰
۳	۷٫۰۸۶	۸٫۵۹۶	۱۰٫۰۲۳	۱۱٫۳۹۶	۱۲٫۷۳۰	۱۴٫۰۳۴	۱۵٫۳۱۴	۱۶٫۵۷۴	۱۷٫۸۱۸
۴	۱۰٫۲۲۲	۱۱٫۷۴۹	۱۳٫۲۱۰	۱۴٫۶۲۳	۱۶٫۰۰۰	۱۷٫۳۴۷	۱۸٫۶۷۱	۱۹٫۹۷۴	۲۱٫۲۶۱
۵	۱۳٫۳۶۱	۱۴٫۸۹۷	۱۶٫۳۷۹	۱۷٫۸۱۸	۱۹٫۲۲۴	۲۰٫۶۰۳	۲۱٫۹۵۸	۲۳٫۲۹۴	۲۴٫۶۱۳

که در آن $k_{mn} \equiv x_{mn}/a$ و x_{mn} صفر nام تابع بسل مرتبهٔ m است. بعضی از این صفرها در جدول ۱۰ـ۱ داده شده‌اند.

علت اینکه به‌ازای k مقادیر گسسته‌ای به‌دست آوردیم، این است که Φ در $\rho = a$ صفر می‌شود. اگر فرض کنیم $a \to \infty$، در این‌صورت k یک متغیر پیوسته خواهد‌بود، و به‌جای جمعبندی روی k، یک انتگرال به‌دست خواهیم آورد. این حالت کاملاً شبیه انتقال از سری فوریه به تبدیل فوریه است، ولی ما این مطلب را بیشتر ادامه نخواهیم داد.

مثال ۱۰ـ۳ـ۹: یک صفحهٔ دایره‌ای به شعاع a را که رسانای گرماست در نظر بگیرید؛ تابع توزیع دمای آن در $t = ۰$ به‌صورت $f(\rho, \varphi)$ است. می‌خواهیم تغییرات دما، T، را برای تمام نقاط (ρ, φ) روی صفحه در زمانهای $t > ۰$ پیدا کنیم، در صورتی‌که دمای لبهٔ صفحه $T = ۰$ باشد.

این مثال، مسئله‌ای دوبعدی و متضمن معادلهٔ گرماست

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^{۲} \nabla^{۲} T = k^{۲} \left[\frac{۱}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{۱}{\rho^{۲}} \frac{\partial^{۲} T}{\partial \varphi^{۲}} \right]$$

جداسازی متغیرها به‌صورت $T(\rho,\varphi,t) = R(\rho)S(\varphi)g(t)$، به معادلات دیفرانسیل معمولی زیر منجر می‌شود:

$$\frac{dg}{dt} = k^{2}\lambda^{(1)}g$$

$$\frac{d^{2}S}{d\varphi^{2}} + \lambda^{(2)}S = 0$$

$$\frac{d^{2}R}{d\rho^{2}} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \left(\frac{\lambda^{(2)}}{\rho^{2}} + \lambda^{(1)}\right)R = 0$$

برای به‌دست آوردن کاهش نمایی دما به‌جای افزایش نمایی، لازم است داشته باشیم $\lambda^{(1)} \equiv -b^{2} < 0$. برای اینکه تناوبی بودن تضمین شود، باید داشته باشیم: $\lambda^{(2)} \equiv m^{2}$، که در آن m عددی صحیح است. این شرایط، به جوابهای زیر منجر می‌شود

$$g(t) = Ae^{-k^{2}b^{2}t}$$

$$S(\varphi) = B\cos m\varphi + C\sin m\varphi$$

$$R(\rho) = DJ_{m}(b\rho)$$

جواب مستقل خطی دیگر معادلهٔ بسل، در اینجا غایب است، زیرا در ناحیهٔ مورد نظر $\rho = 0$.

اگر قرار به صفر شدن دما در $\rho = a$ باشد، باید داشته باشیم

$$R(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{m}(ba) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{x_{mn}}{a}$$

نتیجه می‌شود که جواب عمومی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$T(\rho,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k^{2}(x_{mn}/a)^{2}t} J_{m}\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right)(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi)$$

ضرایب A_{mn} و B_{mn} را می‌توان مانند مثال ۱۰ـ۳ـ۸ به‌دست آورد. ●

مثال ۱۰ـ۳ـ۱۰: ذره در قوطی استوانه‌ای حال مشابه استوانه‌ای وضعیت مثال ۱۰ـ۳ـ۵ را بررسی می‌کنیم. در مورد یک قوطی استوانه‌ای به شعاع L و شعاع a که در آن یک ذرهٔ اتمی به

جرم μ محبوس است، معادلهٔ شرودینگر در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$i\frac{\partial\psi}{dt} = -\frac{\hbar}{۲\mu}\left[\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{۱}{\rho^{۲}}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial\varphi^{۲}} + \frac{\partial^{۲}\psi}{\partial z^{۲}}\right]$$

این مسئله را با این شرط مرزی حل می‌کنیم که $\psi(\rho, \varphi, t)$ روی دیواره‌های قوطی صفر شود.

جداسازی متغیرها به‌صورت $\psi(\rho, \varphi, z, t) = R(\rho)S(\varphi)Z(z)T(t)$، منجر می‌شود به

$$\frac{d^{۲}S}{d\varphi^{۲}} + \lambda^{(۱)}S = ۰$$

$$\frac{d^{۲}Z}{dz^{۲}} + \lambda^{(۲)}Z = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{d^{۲}R}{d\rho^{۲}} + \frac{۱}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{۲\mu}{\hbar}\omega - \lambda^{(۲)} - \frac{\lambda^{(۱)}}{\rho^{۲}}\right]R = ۰ \qquad (۲)$$

تناوبی بودن ψ نسبت به φ می‌دهد $\lambda^{(۱)} = m^{۲}$. معادلهٔ (۱) همراه با شرایط مرزی روی Z یک دستگاه اشتورم-لیوویل با جواب زیر تشکیل می‌دهد

$$Z(z) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right) \qquad \lambda_k^{(۲)} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^{۲} \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

اگر قرار دهیم $b^{۲} \equiv (۲\mu/\hbar)\omega - (k\pi/L)^{۲}$، در این‌صورت معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^{۲}R}{d\rho^{۲}} + \frac{۱}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(b^{۲} - \frac{m^{۲}}{\rho^{۲}}\right)R = ۰$$

و جواب خوش‌رفتار آن در $\rho = ۰$ عبارت است از $J_m(b\rho)$. چون $R(a) = ۰$، شرط کوانتش را به قرار زیر به‌دست می‌آوریم

$$ba = x_{mn} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{x_{mn}}{a} \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

بنابراین، ویژه‌مقادیرانرژی عبارت‌اند از

$$E_{kmn} \equiv \hbar\omega_{kmn} = \frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^{۲} + \frac{x_{mn}^{۲}}{a^{۲}}\right]$$

جواب عمومی معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\psi(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{\substack{k,n=۱ \\ m=۰}}^{\infty} e^{-i\omega_{kmn}t} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right)$$

$$(A_{kmn}\cos m\varphi + B_{kmn}\sin m\varphi)$$ ●

امواج روی پوست طبل دایره‌ای از نظر تاریخی حائز اهمیت‌اند، زیرا مطالعهٔ آنها یکی از اولین مواردی بوده است که طی آنها توابع بسل ظاهر شده‌اند. در مثال زیر، چنین امواجی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰-۳-۱۱: غشاء مرتعش معادلهٔ موج برای سیستم مرتعش دوبعدی نظیر پوست طبل عبارت است از

$$\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\psi}{\partial y^۲} = \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\psi}{\partial t^۲}$$

که c، سرعت انتشار موج، به‌صورت $c = \sqrt{\tau/\sigma}$ بیان می‌شود، که در آن τ کشش بر واحد طول و σ چگالی جرم سطحی غشاء است.

در مورد غشاء دایره‌ای که روی یک استوانه قرار دارد، لازم است معادلهٔ موج بالا را در مختصات قطبی ρ و φ بنویسیم. خواهیم داشت

$$\frac{۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{۱}{\rho^۲}\frac{\partial^۲\psi}{\partial\varphi^۲} = \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲\psi}{\partial t^۲}$$

معادلهٔ بالا، بعد از جداسازی متغیرها به‌صورت زیر درمی‌آید

$$S = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi \qquad m = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$$T = A'\cos\omega t + B'\sin\omega t$$

$$\frac{d^۲R}{d\rho^۲} + \frac{۱}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{\omega^۲}{c^۲} - \frac{m^۲}{\rho^۲}\right)R = ۰$$

جواب معادلهٔ اخیر که به‌ازای $\rho = ۰$ تعریف و در $\rho = a$ صفر می‌شود، عبارت است از

$$R = CJ_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \qquad n = ۱, ۲, \ldots, \frac{\omega}{c} = \frac{x_{mn}}{a}$$ که در آن

این رابطه نشان می‌دهد که فقط بسامدهای زیر منتشر می‌شوند

$$\omega_{mn} \equiv \frac{c}{a} x_{mn}$$

اگر برای غشاء یک شکل اولیه به‌صورت $f(\rho, \varphi)$ و یک سرعت اولیهٔ صفر فرض کنیم، در این‌صورت $B' = ۰$ و جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$\psi(\rho, \varphi, t) = \sum_{\substack{m=۰ \\ n=۱}}^{\infty} J_m \left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \cos\left(\frac{cx_{mn}}{a}t\right) (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi)$$

که در آن

$$A_{mn} = \frac{۲}{\pi a^۲ J^۲_{m+۱}(x_{mn})} \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^a d\rho\, \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \cos m\varphi$$

$$B_{mn} = \frac{۲}{\pi a^۲ J^۲_{m+۱}(x_{mn})} \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^a d\rho\, \rho f(\rho, \varphi) J_m \left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sin m\varphi$$

در حالت خاص، اگر جابه‌جایی اولیهٔ غشاء از φ مستقل باشد، در این‌صورت فقط جملهٔ با $m = ۰$ نقش بازی می‌کند و می‌رسیم به

$$\psi(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n J_۰ \left(\frac{x_{۰n}}{a}\rho\right) \cos\left(\frac{cx_{۰n}}{a}t\right)$$

که در آن

$$A_n = \frac{۴}{a^۲ J^۲_۱(x_{۰n})} \int_۰^a d\rho\, \rho f(\rho) J_۰ \left(\frac{x_{۰n}}{a}\rho\right)$$

بدیهی است که موج از لحظات بعدی هیچ‌گونه وابستگی به φ نخواهد داشت. ●

یکی از کاربردهای مهم معادلهٔ موج در موجبرهای استوانه‌ای است، که در مثال زیر آن را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰ـ۳ـ۱۲: موجبرهای استوانه‌ای در موج مغناطیسی عرضی که در داخل یک استوانهٔ رسانای توخالی، در امتداد محور منتشر می‌شود، داریم (مثال ۱۰ـ۳ـ۷)

$$\frac{۱}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right) + \frac{۱}{\rho^۲} \frac{\partial^۲ E_z}{\partial \varphi^۲} + \gamma^۲ E_z = ۰$$

جداسازی $E_z = R(\rho)S(\varphi)$ به $S(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$ منجر می‌شود و

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

جواب این معادله که در $\rho = 0$ منظم است و در $\rho = a$ صفر می‌شود، عبارت است از

$$R = CJ_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{x_{mn}}{a}$$

با توجه به تعریف γ، خواهیم داشت

$$\gamma^2 = \frac{x_{mn}^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2}}$$

این رابطه بسامد قطع را به‌صورت زیر می‌دهد

$$\omega_{mn} = \frac{c}{a}x_{mn}$$

جواب مربوط به حالتی با تقارن سمتی $(m = 0)$ عبارت است از

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{x_{0n}}{a}\rho\right)e^{i(\omega t \pm k_n z)} \quad \text{و} \quad B_z = 0$$

که در آن

$$k_n \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{0n}^2}{a^2}}$$

●

تنوع در مضمون توابع بسل بسیار زیاد است. تاکنون به سه نوع تابع بسل و همچنین توابع بسل تبدیل‌یافته برخورد کرده‌ایم. با نوع دیگری از توابع بسل که در کاربردها با آن مواجه می‌شویم، و به توابعی به‌نام توابع کلوین می‌انجامند، طی مثال زیر آشنا می‌شویم.

مثال ۱۰-۳-۱۳: توزیع جریان در یک سیستم دایره‌ای جریان بار در سیستم بینهایت درازی را به سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a در نظر بگیرید. معادلهٔ مربوطه را می‌توان به شرح زیر به‌دست آورد.

از معادلات ماکسول شروع می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = ۰ \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = ۰$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{۱}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{۴\pi}{c}j + \frac{۱}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{۱}$$

اگر از طرفین معادلهٔ سوم کرل بگیریم، می‌رسیم به

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{۱}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{۴\pi}{c}j + \frac{۱}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] \tag{۲}$$

برای بسامدهای معمولی، $|۴\pi j| \gg |\partial \mathbf{E}/\partial t|$. بنابراین، جملهٔ دوم سمت راست را حذف می‌کنیم. عبارت سمت چپ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^۲\mathbf{E} = -\nabla^۲\mathbf{E} \tag{۳}$$

با بهره‌گیری از قانون اهم، $j = \sigma\mathbf{E}$، در (۳) و جایگزین کردن نتیجه در (۲) معادله‌ای که با آن سروکار داریم، حاصل می‌شود

$$\nabla^۲ j - \frac{۴\pi\sigma}{c^۲}\frac{\partial j}{\partial t} = ۰$$

برای سادگی فرض می‌کنیم سیستم در امتداد محور zها واقع است و هیچگونه اختلالی هم وجود ندارد، از این‌رو j نیز در امتداد محور zها قرار می‌گیرد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که j از φ و z در دستگاه مختصات استوانه‌ای مستقل است و وابستگی زمانی آن به‌صورت $e^{-i\omega t}$ است. در این‌صورت می‌رسیم به

$$\frac{۱}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dj}{d\rho}\right) + \tau^۲ j = ۰ \tag{۴}$$

که در آن

$$\tau^۲ = i\frac{۴\pi\sigma\omega}{c^۲} \equiv \frac{۲i}{\delta^۲}$$

و $\delta = c/\sqrt{۲\pi\sigma\omega}$ را عمق پوسته می‌گویند.

معادلهٔ کلوین معمولاً به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{x}\,\frac{dw}{dx} - ik^2 w = 0 \qquad (5)$$

با جایگزین کردن $x = \sqrt{i}t/k$، معادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{1}{t}\,\frac{dw}{dt} + w = 0$$

که معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر است. اگر بخواهیم جواب در $x = 0$ منظم باشد، تنها انتخابمان به این قرار است

$$w(t) = J_0(t) = J_0(e^{-i\pi/4}kx)$$

این عبارت همان تابع کلوین برای معادلهٔ (۵) است. این تابع را معمولاً به‌صورت زیر می‌نویسند

$$J_0(e^{-i\pi/4}kx) \equiv \mathrm{ber}(kx) + i[\mathrm{bei}(kx)]$$

که در آن، ber و beiبه‌ترتیب نمایانگر ”بسل حقیقی“ و ”بسل موهومی“اند. اگر در بسط $J_0(z)$، جایگزینی $z = e^{-i\pi/a}kx$ را اجرا و اجزای حقیقی و موهومی بسط را جدا کنیم، می‌رسیم به

$$\mathrm{ber}(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4!)^2} - \cdots$$

$$\mathrm{bei}(x) = \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \frac{(x/2)^{10}}{(5!)^2} - \cdots$$

معادلهٔ (۴) که به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d^2 j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{dj}{d\rho} + i\frac{2}{\delta^2}j = 0$$

مزدوج مختلط (۵) است، مشروط بر آنکه $k^2 \equiv 2/\delta^2$. بنابراین، جواب آن عبارت خواهد بود از

$$j(\rho) = AJ_0(e^{i\pi/4}k\rho) \equiv A\left\{\mathrm{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho\right) - i\left[\mathrm{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho\right)\right]\right\}$$

می‌توانیم مقدار چگالی جریان در ρ را با مقدارش روی صفحهٔ $\rho = a$ مقایسه کنیم:

$$\left|\frac{j(\rho)}{j(a)}\right| = \left[\frac{\operatorname{ber}^{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\delta}\rho\right) + \operatorname{bei}^{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\delta}\rho\right)}{\operatorname{ber}^{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\delta}a\right) + \operatorname{bei}^{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\delta}a\right)}\right]^{۱/۲}$$

در بسامدهای پایین، δ بزرگ است، که پیامد آن کوچک بودن $\sqrt{۲}\rho/\delta$ است؛ بنابراین $\operatorname{ber}(\sqrt{۲}\rho/\delta) \approx ۱$ و $\operatorname{bei}(\sqrt{۲}\rho/\delta) \approx ۰$ که دلالت می‌کند بر $|j(\rho)/j(a)| \approx ۱$، و چگالی جریان تقریباً یکنواخت است. در بسامدهای بالاتر، نسبت چگالیهای جریان از مقداری کمتر از ۱ در $\rho = ۰$ شروع می‌شود و به مقدار ۱ در $\rho = a$ افزایش می‌یابد. مقدار اولیه به بسامد بستگی دارد. در بسامدهای خیلی بالا، مقدار شروع تقریباً صفر است. ●

۱۰ـ۳ـ۳ جداسازی در مختصات کروی

به یاد آورید که اغلب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را که در کاربردهای فیزیکی با آنها مواجه می‌شویم، می‌توان در مختصات کروی، به‌صورت زیر جداسازی کرد

$$\mathbb{L}^{۲}Y(\theta,\varphi) = l(l+۱)Y(\theta,\varphi) \qquad \text{(۱۰ـ۲۳الف)}$$

و

$$\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۲}{r}\,\frac{dR}{dr} + \left[f(r) - \frac{l(l+۱)}{r^{۲}}\right]R = ۰ \qquad \text{(۱۰ـ۲۳ب)}$$

در خصوص معادلهٔ اول در فصل هشتم به تفصیل بحث کردیم (مانند معادلهٔ ۸ـ۱۴الف). در حالت خاص، $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ را طوری تشکیل دادیم که یک دنبالهٔ راست‌هنجار تشکیل دادند. اما، این عبارت صرفاً جبری بود و دربارهٔ کامل بودن $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ اطلاعاتی به‌دست نمی‌داد.

با توجه به قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱، می‌توانیم (۱۰ـ۲۳الف) را با نوشتن

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = P_{lm}(\theta)S_m(\varphi)$$

به دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم. خواهیم داشت

$$\frac{d^۲ S_m}{d\varphi^۲} + m^۲ S_m = ۰$$

$$\frac{d}{dx}\left[(۱ - x^۲)\frac{dP_{lm}}{dx}\right] + \left[l(l+۱) - \frac{m^۲}{۱ - x^۲}\right] P_{lm} = ۰$$

که در آن $x = \cos\theta$. هر دوی این معادله‌ها دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل‌اند که در شرایط قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱ صدق می‌کند. بنابراین، S_mها مابین خودشان متعامدند و یک مجموعهٔ کامل را برای $\mathscr{L}^۲[۰, ۲\pi]$ تشکیل می‌دهند. به همین ترتیب، به‌ازای هر مقدار مشخص m، مقادیر $P_{lm}(x)$ یک مجموعهٔ متعامد کامل برای $\mathscr{L}^۲[-۱, +۱]$ (در واقع برای زیرمجموعهٔ $\mathscr{L}[-۱, +۱]$ که در همان شرایط مرزی P_{lm} در $x = \pm ۱$ صدق می‌کنند) تشکیل می‌دهند. بنابراین، حاصلضربهای (تانسوری) $Y_{lm}(x, \varphi) = P_{lm}(x) S_m(\varphi)$ یک دنبالهٔ متعامد کامل در مجموعه (ضرب دکارتی) $[-۱, +۱] \times [۰, ۲\pi]$، که برحسب زوایای کروی کره واحد $۰ \leq \theta \leq \pi, ۰ \leq \varphi \leq ۲\pi$ هستند، تشکیل می‌دهند.

حال چند مثال مشخص از بسط در دستگاه مختصات کروی را بررسی می‌کنیم. ابتدا از ساده‌ترین حالت، که در آن $f(r) = ۰$ و معادلهٔ لاپلاس نامیده می‌شود، شروع می‌کنیم.

مثال ۱۰ـ۳ـ۱۴: الکتروستاتیک. در حوزهٔ مسائل الکتروستاتیکی در غیاب بار الکتریکی، معادلهٔ لاپلاس، $\nabla^۲\Phi = ۰$، به معادلهٔ (۱۰ـ۲۳ب) با $f(r) = ۰$ منجرمی‌شود:

$$\frac{d^۲ R}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\,\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+۱)}{r^۲} R = ۰$$

اگر طرفین این معادله را در ۲ ضرب کنیم به معادلهٔ اویلر می‌رسیم، که پس از جایگزینی $r = e^t$ و بهره‌گیری از قاعدهٔ زنجیره‌ای و توجه به این نکته که $dt/dr = ۱/r$، به معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^۲ R}{dt^۲} + \frac{dR}{dt} - l(l+۱) R = ۰$$

این معادله، دارای یک چندجمله‌ای مشخصهٔ $p(\lambda) = \lambda^۲ + \lambda - l(l+۱)$، با ریشه‌های $\lambda_۱ = l$

و $\lambda_2 = -(l+1)$ است. بنابراین، یکی از جوابهای عمومی آن به‌صورت زیر است

$$R(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = A(e^t)^l + B(e^t)^{-l-1}$$

یا برحسب r،

$$R(r) = Ar^l + Br^{-l-1}$$

بدینسان، عمومی‌ترین جواب معادلهٔ لاپلاس عبارت است از

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

در نواحی شامل مبدأ مختصات، متناهی بودن Φ ایجاب می‌کند که $B_{lm} = 0$. اگر پتانسیل در این نواحی را با Φ_{in} نمایش دهیم، می‌رسیم به

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

به‌طور مشابه، برای نواحی شامل $r = \infty$، داریم

$$\Phi_{\text{out}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{l} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

برای تعیین A_{lm} و B_{lm}، لازم است به شرایط مرزی مربوطه متوسل شویم. در حالت خاص، در مورد کره‌ای به شعاع a با پتانسیل روی سطح $V(\theta,\varphi)$، داریم

$$V(\theta,\varphi) \equiv \Phi_{\text{in}}(a,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{l} A_{lm} a^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

با ضرب کردن طرفین در $Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)$ و انتگرال‌گیری روی زاویهٔ فضایی $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$، خواهیم داشت

$$A_{lm} = \frac{1}{a^l} \iint d\Omega V(\theta,\varphi) Y^*_{lm}(\theta,\varphi)$$

به همین ترتیب

$$B_{lm} = a^{1+l} \iint d\Omega V(\theta,\varphi) Y^*_{lm}(\theta,\varphi)$$

در حالت خاص، اگر $V(\theta,\varphi)$ از φ مستقل باشد، تنها مؤلفه‌هایی که برای آنها $m = 0$، ناصفرند و داریم

$$A_{l0} = \frac{2\pi}{a^l}\int_0^\pi \sin\theta\, V(\theta) Y^*_{l0}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{a^l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^\pi \sin\theta\, V(\theta) P_l(\cos\theta) d\theta$$

که منجر می‌شود به

$$\Phi_{\text{in}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2l+1}{2}\right) A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

که

$$A_l = \int_0^\pi \sin\theta\, V(\theta) P_l(\cos\theta) d\theta$$

به همین ترتیب

$$\Phi_{\text{out}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2l+1}{2}\right) A_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta)$$

حتماً خوانندهٔ زیرک پی‌برده‌است که تمام مسائل الکتروستاتیک در میان مسائل مربوط به پخش با حالت پایا همتاهای دقیق دارند. علت این امر آن است که هر دو وضعیت از معادلهٔ لاپلاس پیروی می‌کنند. ●

دشوارترین حالت بعدی عبارت است از حالتی که برای آن $f(r)$ مقداری ثابت است. معادلهٔ پخش، معادلهٔ موج، و معادلهٔ شرودینگر برای ذرهٔ آزاد، وقتی متغیر زمانی از بقیهٔ متغیرها جدا شود، به چنین حالتی منجر می‌شوند.

معادلهٔ هلمهولتز عبارت است از

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \qquad (۲۴\text{-}۱۰)$$

و جزء شعاعی آن به این قرار است

$$\frac{d^{۲}R}{dr^{۲}} + \frac{۲}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^{۲} - \frac{l(l+۱)}{r^{۲}}\right]R = ۰ \qquad (۱۰\text{-}۲۵)$$

(این معادله، در تمرین ۹ـ۵ـ۷ مورد بحث قرار گرفته است) این جوابها، توابع بسل کروی نامیده می‌شوند، و به‌طور کلی آنها را با $z_l(x)$ نمایش می‌دهند و به‌صورت زیر می‌نویسند

$$z_l(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{Z_{l+۱/۲}(x)}{\sqrt{x}} \qquad (۱۰\text{-}۲۶)$$

که در آن $Z_\nu(x)$ جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν است.

بنابراین، یکی از جوابهای عمومی معادلهٔ (۱۰ـ۲۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$R_l(r) = Aj_l(kr) + By_l(kr)$$

اگر مبدأ مختصات در ناحیهٔ مورد نظر واقع باشد، باید قرار دهیم $B = ۰$. در چنین حالتی جواب معادلهٔ هلمهولتز عبارت خواهد بود از

$$\psi_k(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=۰}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}j_e(kr)Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (۱۰\text{-}۲۷)$$

اندیس پایین k حاکی از آن است که ψ یکی از جوابهای معادلهٔ (۱۰ـ۲۴) و $k^{۲}$ ثابت آن است.

مثال ۱۰ـ۳ـ۱۵: ذره در چاه پتانسیل نامتناهی سه‌بعدی معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان برای ذره‌ای در یک چاه پتانسیل نامتناهی به شعاع a با شرط مرزی $\psi(a,\theta,\varphi) = ۰$، عبارت است از

$$-\frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}\nabla^{۲}\psi = E\psi$$

در اینجا، E انرژی ذره و μ جرم آن است. معادلهٔ شرودینگر را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla^{۲}\psi + \frac{۲\mu E}{\hbar^{۲}}\psi = ۰$$

اگر $k^۲ \equiv ۲\mu E/\hbar^۲$، بلافاصله می‌توانیم جواب شعاعی آن را بنویسیم

$$R_l(r) = Aj_l(kr) = Aj_l(\sqrt{۲\mu E}r/\hbar)$$

صفر شدن ψ در a ایجاب می‌کند که $j_l(\sqrt{۲\mu E}a/\hbar) = ۰$، یا

$$\frac{\sqrt{۲\mu E}a}{\hbar} = X_{ln} \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

که در آن X_{ln} عبارت است از صفر nام $j_l(x)$. به این ترتیب، انرژی به‌صورت زیر کوانتیده است

$$E_{ln} = \frac{\hbar^۲ X_{ln}^۲}{۲\mu a^۲} \qquad l = ۰, ۱, \ldots ; n = ۱, ۲, \ldots$$

جواب عمومی معادلهٔ شرودینگر عبارت است از

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\substack{n=۱ \\ l=۰}}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{nlm} j_l\left(X_{ln}\frac{r}{a}\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

●

یکی از نتایج معادلهٔ (۱۰ـ۲۷) با سودمندی ویژه، این است که موج تخت را می‌توانیم برحسب توابع بسل کروی بسط دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد که اگر در معادلهٔ (۱۰ـ۲۴) قسمت k طول یک بردار با مشخصهٔ $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^۲$ باشد، $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ یکی از جوابهای (۱۰ـ۲۴) است. بنابراین، $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را می‌توان مانند (۱۰ـ۲۷) بسط داد. با این فرض که $\mathbf{k}$ در امتداد محور zها واقع باشد، داریم $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kr\cos\theta$، که از φ مستقل است. از این‌رو در چنین حالتی جملاتی از (۱۰ـ۲۷) باقی می‌مانند که به‌ازای آنها $m = ۰$. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=۰}^{\infty} A_l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

می‌توان نشان داد (تمرین ۱۰ـ۳ـ۱۳) که $A_l = i^l(۲l + ۱)$. بنابراین

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=۰}^{\infty} (۲l + ۱) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \qquad (۱۰\text{ـ}۲۸)$$

برای یک جهت دلخواه $\mathbf{k}$، داریم $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kr\ \cos\gamma$، که در آن γ زاویه بین $\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}$ است. از این‌رو، می‌توان نوشت

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\gamma)$$

سرانجام با استفاده از قضیهٔ جمع هماهنگهای کروی، معادلهٔ (۸ـ۳۰)، می‌رسیم به

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (۱۰\text{ـ}۲۹)$$

که در آن θ' و φ' زاویه‌های $\mathbf{k}$ و θ و φ زاویه‌های $\mathbf{r}$ به‌شمار می‌آیند.

این نوع تجزیهٔ امواج تخت به مؤلفه‌هایی با تکانه‌هایی زاویه‌ای مداری معین، در مبحث نظریهٔ پراکندگی برای امواج و ذرات فوق‌العاده مفید است.

تمرینها

۱۰ـ۳ـ۱ نشان دهید شرایط مرزی تفکیک‌شده و متناوب، عبارت‌اند از حالتهای خاص تساوی (۱۰ـ۲۰).

۱۰ـ۳ـ۲ پتانسیل داخل یک مکعب را به ضلع a پیدا کنید، مشروط بر آنکه قاعدهٔ بالا در پتانسیل ثابت V_0 واقع باشد و سطوح دیگر به زمین متصل باشند (پتانسیل آنها صفر باشد).

۱۰ـ۳ـ۳ یک تیغهٔ رسانای گرمای طویل به پهنای b در امتداد مثبت محور xها چنان قرار دارد که یک رأسش در $(0\,,0)$ و رأس دیگرش در $(0\,,b)$ قرار گرفته است. ضلع با پهنای b در دمای T_0 و دو ضلع طویل در $T=0$ نگه‌داشته می‌شوند. دو سطح تخت عایق‌بندی شده‌اند. با فرض برقرار بودن حالت تعادل، تغییرات دمای تیغه را پیدا کنید.

۱۰ـ۳ـ۴ دمای دو سر یک میلهٔ نازک رسانای گرما در $T=0$ قرار دارند. در ابتدا نیمهٔ اول میله در دمای $T=T_0$، و نیمهٔ دوم آن در $T=0$ قرار داشته‌اند. سطوح عرضی میله از نظر گرمایی عایق‌بندی شده‌اند. توزیع دما را نسبت به زمان بیابید.

۱۰ـ۳ـ۵ وسط طناب مثال ۱۰ـ۳ـ۶ را به اندازهٔ $a/2$، در امتداد عمود بر طناب بالا می‌بریم و آن را از حالت سکون رها می‌کنیم. تابع‌موج حاصل چگونه است؟

۱۰ـ۳ـ۶ جواب عمومی برای انتشار موج الکترومغناطیسی در یک کاواک تشدید. این کاواک عبارت است از جعبه‌ای مکعب‌مستطیلی به اضلاع $0\le x\le a$، $0\le y\le b$ و $0\le z\le d$ که

دیواره‌های آن رسانای کامل‌اند. در مورد مدهایی که این کاواک می‌تواند داشته باشد، بحث کنید.
۱۰ـ۳ـ۷ بهنجارش زیر را برای توابع بسل به‌دست آورید

$$\int_{0}^{a} \rho J_\nu \left(\frac{x_{\nu n}}{a}\rho\right) J_\nu \left(\frac{x_{\nu l}}{a}\rho\right) d\rho = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]\delta_{nl}$$

۱۰ـ۳ـ۸ پتانسیل یک قوطی استوانه‌ای رسانا را بیابید که پتانسیل دو سر قاعدهٔ بالایی آن مقدار ثابت V_0 و سایر سطوحش به زمین متصل است.
۱۰ـ۳ـ۹ دمای نقاط مختلف سطح یک تیغهٔ رسانای دایره‌ای به شعاع a را در همهٔ زمانهای $t > 0$ بیابید، در صورتی که لبهٔ آن در دمای $T = 0$ قرار دارد و سطحش در ابتدا از مرکز تا $a/2$ با یک حمام گرمایی به دمای T_0 در تماس است.
۱۰ـ۳ـ۱۰ مدها و میدانهای متناظر یک کاواک تشدید استوانه‌ای به طول L و شعاع a را بیابید. در مورد پایین‌ترین مد موج مغناطیسی عرضی بحث کنید.
۱۰ـ۳ـ۱۱ پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج یک کرهٔ رسانا به شعاع a را که در پتانسیل ثابت V_0 قرار دارد، به‌دست آورید.
۱۰ـ۳ـ۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره‌ای به شعاع a که نیمهٔ بالایی آن در پتانسیل ثابت V_0 و نیمه پایینی آن در پتانسیل $-V_0$ قرار دارد، پیدا کنید.
۱۰ـ۳ـ۱۳ بسط موج تخت، معادلهٔ (۱۰ـ۲۸)، را به‌دست آورید. (راهنمایی: از تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر بهره گیرید و به حد $k \to 0$ توجه کنید.)

مسائل

۱۰ـ۱ نشان دهید جایگذاری لیوویل که توسط (۱۰ـ۵) بیان می‌شود، دستگاههای منظم اشتورم‌ـلیوویل را به دستگاههای منظم اشتورم‌ـلیوویل و شرایط مرزی جداشده و متناوب را به شرایط مرزی جداشده و متناوب تبدیل می‌کند.
۱۰ـ۲ فرض کنید $u_1(x)$ و $u_2(x)$ از طریق جایگذاری لیوویل به $v_1(t)$ و $v_2(t)$ تبدیل شوند. نشان دهید ضرب داخلی روی $[a, b]$ با تابع وزن $w(x)$ به ضرب داخلی روی $[0, c]$ با تابع وزن واحد تبدیل می‌شود، که در آن $c = \int_a^b \sqrt{w/p}\, dx$.
۱۰ـ۳ پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل مکعبی به ضلع a را بیابید، در صورتی که تمام سطوح آن، جز سطح بالایی، به زمین متصل شده باشند و پتانسیل سطح بالایی به‌صورت زیر داده

شده باشد.

(الف) $\circ \le x \le a \quad \dfrac{V_\circ}{a}x$ (ب) $\circ \le y \le a \quad \dfrac{V_\circ}{a}y$

(ج) $\circ \le x, y \le a \quad \dfrac{V_\circ}{a^{\text{۲}}}xy$ (د) $\circ \le x \le a \quad V_\circ \sin\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)$

۱۰ـ۴ سطوح جانبی یک مکعب به زمین متصل شده‌اند، و قاعدهٔ بالا و پایین آن به‌ترتیب، در پتانسیلهای $f_{\text{۱}}(x,y)$ و $f_{\text{۲}}(x,y)$ قرار دارند

(الف) یک عبارت کلی برای پتانسیل در داخل مکعب (مانند مثال ۱۰ـ۳ـ۱) به‌دست آورید.

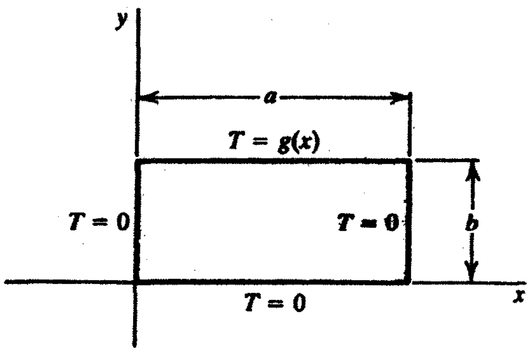
(ب) اگر پتانسیل قاعدهٔ بالایی $V_\circ$ ولت و پتانسیل قاعده پایینی $-V_\circ$ ولت باشد، وضعیت پتانسیل در داخل مکعب چگونه است؟

۱۰ـ۵ پتانسیل داخل یک رسانای استوانه‌ای نیم‌ـمتناهی را به مقطع مربعی به ضلع a، پیدا کنید. تمام وجوه، جز وجه مربعی که در پتانسیل ثابت $V_\circ$ قرار دارد، به زمین متصل‌اند.

۱۰ـ۶ توزیع دمای یک تیغهٔ مربع‌مستطیلی به اضلاع a و b (شکل ۱۰ـ۴) را بیابید که سه ضلع آن در دمای $T = \circ$ قرار دارند، و تغییرات دمایی ضلع چهارمش به قرار زیر است:

(الف) $\circ \le x < a \quad \dfrac{T_\circ}{a}x$ (ب) $\circ \le x \le a \quad \dfrac{T_\circ}{a^{\text{۲}}}x(x-a)$

(ج) $\circ < x < a \quad \dfrac{T_\circ}{a}\left|x - \dfrac{a}{\text{۲}}\right|$ (د) $\circ \le x \le a \quad T = \circ$



شکل ۱۰ـ۴

۱۰ـ۷ تمرین ۱۰ـ۳ـ۳ را برای حالتی که در آن ضلع کوچکتر در هر یک از دماهای زیر نگه داشته شود، تکرار کنید

(الف) $T = \begin{cases} \circ & \circ < y < \frac{b}{۲} \\ T_\circ & \frac{b}{۲} < y < b \end{cases}$ (ب) $T = \frac{T_\circ}{b} y \qquad \circ \le y < b$

(ج) $T = T_\circ \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right) \qquad \circ \le y \le b$ (د) $T = T_\circ \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \qquad \circ \le y \le b$

۱۰ـ۸ دو سر یک میلهٔ باریک رسانای گرما به طول b در دمای $T = \circ$ قرارگرفته‌اند. سطح جانبی میله نسبت به گرما عایق شده است. توزیع دما را در زمانهای مختلف به‌ازای هر یک از دماهای اولیهٔ زیر پیدا کنید

(الف)
$$T(\circ, x) = \begin{cases} T_\circ & \text{برای } \frac{۱}{۳} \text{ وسط میله} \\ \circ & \text{برای } \frac{۲}{۳} \text{ دیگر} \end{cases}$$

(ب)
$$T(\circ, x) = \left| x - \frac{b}{۲} \right| - \frac{b}{۲} \qquad \circ \le x \le b$$

(ج)
$$T(\circ, x) = \cos\left(\frac{\pi}{b} x\right) \qquad \circ < x < b$$

(د)
$$T(\circ, x) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } \circ \le x \le \frac{b}{۳} \\ T_\circ \sin\left(\frac{۳\pi}{b} x - \pi\right) & \text{اگر } \frac{b}{۳} \le x \le \frac{۲b}{۳} \\ \circ & \text{اگر } \frac{۲b}{۳} \le x \le b \end{cases}$$

۱۰ـ۹ مثال ۱۰ـ۳ـ۳ را با این فرض که سر واقع در $x = \circ$ در دمای $T_\circ$، و سر واقع در $x = b$ در دمای $-T_\circ$ قرار دارد، تکرار کنید. (راهنمایی: جواب متناظر با $\lambda = \circ$ ضروری است و نمی‌توان آن را مستثنی کرد.)

۱۰ـ۱۰ مسئله ۱۰ـ۸ را با این فرض که توزیع دمای اولیه به‌صورت زیر باشد، تکرار کنید

(الف) $$T(\circ, x) = -\frac{2T_\circ}{b}x + T_\circ \qquad \circ \le x \le b$$

(ب) $$T(\circ, x) = -\frac{2T_\circ}{b^2}x^2 + T_\circ \qquad \circ \le x \le b$$

(ج) $$T(\circ, x) = \frac{T_\circ}{b}x + T_\circ \qquad \circ \le x < b$$

۱۰ـ۱۱ $T(x, y, t)$ را برای تیغهٔ مربع‌مستطیلی مثال ۱۰ـ۳ـ۴ تعیین کنید، مشروط بر اینکه در ابتدا ربع پایین سمت چپ در $T_\circ$ و بقیهٔ تیغه در $T = \circ$ قرار داشته باشد.

۱۰ـ۱۲ تمام اضلاع تیغهٔ مثال ۱۰ـ۳ـ۲ در $T = \circ$ قرار دارد؛ مطلوب است تعیین توزیع دما در تمام لحظات، در صورتی‌که توزیع دمای اولیه به‌صورت زیر باشد

(الف) $$T(x, y, \circ) = \begin{cases} T_\circ & \frac{1}{4}a \le x \le \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{1}{4}b \le y \le \frac{3}{4}b \quad \text{اگر} \\ \circ & \end{cases}$$

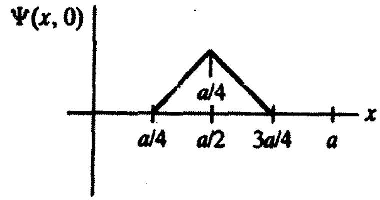
(ب) $$T(x, y, \circ) = \frac{T_\circ}{ab}xy \qquad \circ \le x < a \text{ و } \circ \le y < b$$

(ج) $$T(x, y, \circ) = \frac{T_\circ}{a}x \qquad \circ \le x < a \text{ و } \circ < y < b$$

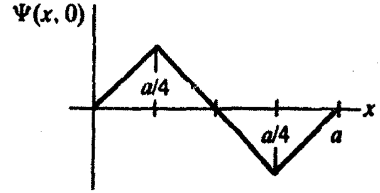
۱۰ـ۱۳ مثال ۱۰ـ۳ـ۴ را برای حالتی که دمای اضلاع T_1، T_2، T_3، و T_4 باشد، تکرار کنید. (راهنمایی: باید جوابهای $\lambda^{(i)} = \circ$ را در نظر بگیرید.)

۱۰ـ۱۴ به‌طنابی به طول a که دو سرش بسته شده و سرعت اولیه‌اش صفر است، یک جابه‌جایی اولیه مطابق شکلهای زیر، داده می‌شود. $\psi(x, t)$ را در هر یک از این حالتها تعیین کنید.

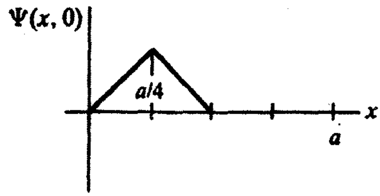
(الف)



(ب)



(ج)



۱۰ـ۱۵ مسئلهٔ ۱۰ـ۱۴ را با این فرض تکرار کنید که جابه‌جایی اولیه صفر و توزیع سرعت اولیه به کمک شکلهای مربوطه داده شده باشد.

۱۰ـ۱۶ مسئلهٔ ۱۰ـ۱۵ را با این فرض تکرار کنید که توزیع سرعت اولیه به‌صورت زیر باشد

(الف)
$$g(x)=\begin{cases} V_{۰} & ۰\le x\le \dfrac{a}{۲} \quad \text{اگر} \\ ۰ & \dfrac{a}{۲}< x\le a \quad \text{اگر} \end{cases}$$

(ب)
$$g(x)=\begin{cases} V_{۰}\sin\dfrac{۲\pi x}{a} & ۰\le x\le \dfrac{a}{۲} \quad \text{اگر} \\ ۰ & \dfrac{a}{۲}< x\le a \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۱۰ـ۱۷ سر سمت چپ طنابی به طول a محکم شده است، و انتهای سمت راست آن با یک جابه‌جایی به معادلهٔ $A\sin\omega t$ حرکت می‌کند. $\psi(x,t)$ و یک مجموعه شرایط اولیه سازگار برای جابه‌جایی و سرعت بیابید.

۱۰ـ۱۸ مثال ۱۰ـ۳ـ۸ را برای حالتی که قوطی دارای طول نیم‌متناهی و قاعدهٔ آن در پتانسیل $V(\rho,\varphi)$ قرار داشته باشد، تکرار کنید. سطح جانبی را متصل به زمین فرض کنید.

۱۰ـ۱۹ مسئلهٔ ۱۰ـ۱۸ را برای حالتهایی تکرار کنید که پتانسیل قاعده به صورتهای زیر باشد

$$V = \frac{V_\circ}{a} y \quad \text{(الف)}$$

$$V = \frac{V_\circ}{a} x \quad \text{(ب)}$$

$$V = \frac{V_\circ}{a^۲} xy \quad \text{(ج)}$$

[راهنمایی: از اتحاد انتگرالی $\int z^{\nu+۱} J_\nu(z) dz = z^{\nu+۱} J_{\nu+۱}(z)$ بهره گیرید].

۱۰ـ۲۰ توزیع دمای حالت پایا، $T(\rho, \varphi, z)$، را برای یک استوانهٔ توپر نیم‌متناهی به شعاع a بیابید، در صورتی‌که توزیع دمای قاعدهٔ آن $f(\rho, \varphi)$ و سطح جانبی‌اش در $T = \circ$ قرار داشته باشد.

۱۰ـ۲۱ توزیع دمای حالت پایای یک استوانهٔ توپر به شعاع و ارتفاع ۱۰ را پیدا کنید، در صورتی که قاعدهٔ پایینی و سطح جانبی آن در $T = \circ$ و قاعدهٔ بالایی‌اش در $T = ۱۰۰^\circ$ قرار داشته باشد.

۱۰ـ۲۲ یک صفحهٔ دایره‌ای تخت به شعاع a ابتدا در دمای $T_\circ$ قرار دارد. از لحظهٔ $t = \circ$ به بعد، دمای محیط آن در $T = \circ$ قرار می‌گیرد؛ توزیع دما را برای لحظات بعدی پیدا کنید.

۱۰ـ۲۳ مسئلهٔ ۱۰ـ۲۲ را با این فرض تکرار کنید که توزیع دما در $t = \circ$ به‌صورت زیر باشد

$$T(\rho, \varphi, \circ) = \frac{T_\circ}{a} y \quad \text{(الف)}$$

$$T(\rho, \varphi, \circ) = \frac{T_\circ}{a} x \quad \text{(ب)}$$

$$T(\rho, \varphi, \circ) = \frac{T_\circ}{a^۲} xy \quad \text{(ج)}$$

۱۰ـ۲۴ دو پوستهٔ نیم‌استوانه‌ای رسانای طویل یکسان به شعاع a چنان به یکدیگر چسبانیده شده‌اند که نسبت به یکدیگر عایق‌بندی شده‌اند. یک نیم‌استوانه در پتانسیل $V_\circ$ قرار دارد و نیمهٔ دیگر متصل به زمین است. پتانسیل را در نقاط داخل استوانه به‌دست آورید. (راهنمایی: معادلهٔ لاپلاس در دوبعد را جداسازی کنید).

۱۰ـ۲۵ معادلهٔ یک غشاء مستطیلی مرتعش به اضلاع a و b را بیابید که تمام وجوه آن به یکدیگر محکم شده‌اند. نشان دهید برای حالت $a = b$، یک مد بسامدی معین می‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

۱۰ـ۲۶ یک توزیع بار خطی چگالی یکنواخت λ در امتداد محور zها از $z = -b$ تا $z = b$ ادامه دارد. نشان دهید پتانسیل الکتروستاتیکی، $\Phi(r, \theta, \varphi)$، در هر نقطهٔ $r > b$ به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = ۲\lambda \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(b/r)^{۲k+۱}}{۲k+۱} P_{۲k}(\cos\theta)$$

[راهنمایی: نقطه‌ای به فاصلهٔ $r > b$ از مبدأ مختصات روی محور zها را در نظر بگیرید. این مسئلهٔ ساده را با استفاده از $\Phi = \int dq/r$ حل، و نتیجه را با سری نامتناهی مقایسه کنید تا ضرایب مجهول یافته شوند.]

۱۰-۲۷ پتانسیل الکتروستاتیک در داخل یک کره به شعاع a را بیابید، مشروط بر اینکه نیمکرهٔ بالایی به زمین متصل و نیمکرهٔ پایینی در پتانسیل ثابت $V_۰$ قرار داشته باشد.

۱۰-۲۸ یک کره به‌شعاع a در دمای $T_۰$ قرار دارد. این کره در داخل یک تودهٔ رسانای گرما واقع است. عبارتهایی جهت توزیع دمای حالت پایا برای داخل و خارج کره پیدا کنید.

۱۰-۲۹ دمای نیمهٔ بالایی یک کرهٔ رسانای گرما به شعاع a عبارت است از $T = ۱۰۰^\circ\mathrm{C}$؛ نیمهٔ پایینی آن در دمای $T = -۱۰۰^\circ\mathrm{C}$ نگه داشته شده است. تمام کره در داخل یک جرم بینهایت بزرگ از ماده‌ای رسانای گرما، قرار دارد. توزیع دمای حالت پایا برای داخل و خارج کره را پیدا کنید.

۱۰-۳۰ توزیع دمای حالت پایا در داخل و خارج یک کره به شعاع a را در حالتهایی بیابید که دمای سطح آن به‌صورت زیر داده شده باشد

(الف) $T_۰ \cos^۲\theta$ (ب) $T_۰ \cos^۴\theta$ (ج) $T_۰(\cos\theta - \cos^۳\theta)$ (د) $T_۰|\cos\theta|$

۱۰-۳۱ پتانسیل الکتروستاتیکی داخل و خارج یک کرهٔ رسانا به شعاع a را در صورتی بیابید که کره در پتانسیلهای زیر قرار داشته باشد

(الف) $V_۰(\cos\theta - ۳\sin^۲\theta)$ (ب) $V_۰(۵\cos^۳\theta - ۳\sin^۲\theta)$

(ج) $\begin{cases} V_۰(\cos\theta - ۳\sin^۲\theta) & \text{برای نیم‌کرهٔ بالایی} \\ ۰ & \text{برای نیم‌کرهٔ پایینی} \end{cases}$

۱۰-۳۲ توزیع دمای حالت پایا در داخل یک نیمکره به شعاع a را در صورتی بیابید که سطح منحنی در $T_۰$ و سطح تخت در $T = ۰$ قرار داشته باشد. [راهنمایی: کره را کامل فرض کنید و نیمهٔ پایینی آن را در دمایی واحد چنان قرار دهید که توزیع دمای کلی سطح تابع فردی حول $\theta = \pi/۲$ باشد].

۱۰-۳۳ توزیع دمای حالت پایا در داخل یک لایهٔ کروی به شعاع داخلی $R_۱$ و شعاع خارجی $R_۲$ را بیابید، در صورتی‌که دمای سطح داخلی آن ثابت، $T_۱$، و دمای سطح خارجیش ثابت، $T_۲$، باشد.

۱۱

عملگرها در فضاهای هیلبرت و توابع گرین

تا اینجا، در بررسی معادلات دیفرانسیل، معادلات ناهمگن، جز معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت را در نظر نگرفته‌ایم. اما در اینجا می‌توانیم یکی از ظریفترین و دقیقترین دستگاههای ریاضیات پیشرفته را برای حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن به‌کار گیریم. این دستگاه، که به‌نحوی هماهنگ تکنیکهای جبری و تحلیلی را در هم می‌آمیزد، روش تابع گرین نام دارد و مضمون اصلی این قسمت از کتاب ما را تشکیل می‌دهد.

۱۱ـ۱ مقدمه

می‌توانیم معادلهٔ عملگر برداری تجریدی زیر را در فضای برداری Nبعدی $\mathcal{V}$ حل کنیم

$$\mathbb{A}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{v}\rangle$$

در این معادله $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ و $|\mathrm{u}\rangle, |\mathrm{v}\rangle \in \mathcal{V}$، و می‌توان با گزینش یک پایهٔ $\mathbf{B} = \{|\mathrm{a}_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ برای $\mathcal{V}$، نوشتن معادله به شکل ماتریسی، و حل دستگاه N معادلهٔ خطی حاصل، آن را حل کرد. با این کار مؤلفه‌های جواب $|\mathrm{u}\rangle$ در $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آیند. اگر مؤلفه‌ها را در پایهٔ دیگری مثل $\mathbf{B}'$

بخواهیم، با بهره‌گیری از تبدیل ماتریسی R که مابین $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}'$ ارتباط برقرار می‌کند، می‌توانیم آنها را به‌دست بیاوریم (فصل ۳).

یک شگرد صوری و متعارف برای رسیدن به معادلهٔ ماتریسی وجود دارد. بهتر است یک پایهٔ راست‌هنجار $\mathbf{B} = \{|\mathrm{e}_i\rangle\}_{i=۱}^{N}$ برای $\mathscr{V}$ انتخاب کنیم و تمام مؤلفه‌ها را نسبت به این پایه بسنجیم. با ادغام دوطرف معادلهٔ $\mathbb{A}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{v}\rangle$ در $\langle \mathrm{e}_i|$ و وارد کردن $\mathbb{1} = \sum_{j=۱}^{N} |\mathrm{e}_j\rangle\langle \mathrm{e}_j|$ در بین $\mathbb{A}$ و $|\mathrm{u}\rangle$، داریم

$$\sum_{j=۱}^{N} \langle \mathrm{e}_i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle\langle \mathrm{e}_j|\mathrm{u}\rangle = \langle \mathrm{e}_i|\mathrm{v}\rangle \qquad i = ۱, ۲, \ldots, N$$

یا

$$\sum_{j=۱}^{N} A_{ij} u_j = v_i \qquad i = ۱, ۲, \ldots, N \qquad \text{(۱۱\_۱الف)}$$

که در آن $A_{ij} \equiv \langle \mathrm{e}_i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle$، $u_j \equiv \langle \mathrm{e}_j|\mathrm{u}\rangle$، و $v_i \equiv \langle \mathrm{e}_i|\mathrm{v}\rangle$. معادلهٔ (۱۱_۱الف) صرفاً یک دستگاه N معادلهٔ خطی با N مجهول $\{u_j\}_{j=۱}^{N}$ است، که می‌توان آن را حل کرد و جوابهای معادلهٔ اولیه را برحسب $\mathbf{B}$ به‌دست آورد.

یکی از حالتهای مهم به این قرار است که $\mathbb{A}$ برحسب $\mathbf{B}$ قطری باشد، یعنی $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$، که در آن $\{\lambda_i\}_{i=۱}^{N}$ مجموعهٔ ویژه‌مقادیر $\mathbb{A}$ است. برای این وضعیت خاص داریم

$$\lambda_i u_i = v_i \qquad i = ۱, ۲, \ldots N \qquad \text{(جمع بر روی } i \text{ صورت می‌گیرد)} \qquad \text{(۱۱\_۱ب)}$$

این معادله فقط در صورتی (به‌ازای یک v_i دلخواه) دارای یک جواب یکتاست که به‌ازای جمیع مقادیر i داشته باشیم $\lambda_i \neq ۰$. در این‌صورت

$$u_i = \frac{v_i}{\lambda_i} \qquad i = ۱, ۲, \ldots, N$$

در حالت خاص، اگر به‌ازای جمیع مقادیر i داشته باشیم $v_i = ۰$، یعنی معادلهٔ (۱۱_۱ب) همگن باشد، جواب یکتا، جواب بدیهی خواهد بود. از سوی دیگر، وقتی برخی از λ_iها صفر باشند، ممکن است جوابی برای معادلهٔ (۱۱_۱ب) وجود نداشته باشد، اما معادلهٔ همگن دارای یک جواب

نابدیهی باشد (لزومی ندارد u_i صفر باشد). با یادآوری این نکته (از فصل ۳) که عملگر $\mathbb{A}$ فقط در صورتی وارون‌پذیر است که هیچ‌یک از ویژه‌مقادیر آن صفر نباشند، به یک گزاره می‌رسیم.

گزارهٔ ۱۱ـ۱ـ۱: عملگر $\mathbb{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ فقط در صورتی وارون‌پذیر است که معادلهٔ همگن $\mathbb{A}|\mathrm{u}\rangle = 0$ دارای جواب نابدیهی نباشد.

اینک شگردی را به‌کار می‌گیریم که هم اکنون در مورد فضاهای برداری نامتناهی‌ـبعد، به‌خصوص برای حالت اندیس پیوسته توصیف کردیم. دست‌کم به‌طور صوری، می‌توانیم به همان طریقی کار را ادامه دهیم که برای فضای Nبعدی عمل کردیم. بنابراین، با کاربرد نمادگذاری متداول در حالت "پیوسته"، می‌خواهیم جوابهای معادلهٔ زیر را بیابیم:

$$\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle \tag{۱۱ـ۲}$$

با دنبال کردن روش به‌کار رفته در بالا، خواهیم داشت

$$\langle \mathrm{x}|\mathbb{K}\left(\int_a^b |\mathrm{y}\rangle w(y)\langle y|dy\right)|\mathrm{u}\rangle = \int_a^b \langle \mathrm{x}|\mathbb{K}|\mathrm{y}\rangle w(y)\langle y|\mathrm{u}\rangle dy = \langle \mathrm{x}|\mathrm{f}\rangle$$

که از نتایج به‌دست آمده در بخش ۵ـ۲ استفاده کرده‌ایم. با نوشتن این نتیجه در قالب نمادگذاری "شناسهٔ" پیوسته، خواهیم داشت

$$\int_a^b K(x,y)w(y)u(y)dy = f(x) \tag{۱۱ـ۳}$$

که شبیه پیوستهٔ (۱۱ـ۱) است. در اینجا، $[a,b]$ بازه‌ای است که توابع در آن تعریف می‌شوند. ملاحظه می‌کنیم که اندیسها به شناسه‌های پیوسته تبدیل، و حاصل‌جمع نیز به انتگرال تبدیل شده است. عملگر $\mathbb{K}$ در (۱۱ـ۲) که به معادله‌ای چون (۱۱ـ۳) منجر می‌شود، عملگر انتگرالی نام دارد، و اصطلاحاً می‌گویند "عنصر ماتریسی" $K(x,y)$ هستهٔ آن است.

اگر $\mathbb{K}$ دارای وارونی مانند، مثلاً $\mathbb{G}$ باشد، می‌توان از معادلهٔ (۱۱ـ۲) $|\mathrm{u}\rangle$ را به‌دست آورد. از ضرب طرفین آن در $\mathbb{G}$ خواهیم داشت $|\mathrm{u}\rangle = \mathbb{G}|\mathrm{f}\rangle$، که شکل انتگرالی آن به این قرار خواهد بود

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)w(y)f(y)dy$$

بنابراین، مسئلهٔ حل معادلهٔ (۱۱ـ۲) تبدیل می‌شود به یافتن $G(x,y)$، یعنی وارون $K(x,y)$. نکتهٔ جالب در مورد G این است که وقتی آن را بیابیم، می‌توانیم معادلهٔ (۱۱ـ۲) را برای $f(x)$ دلخواه حل کنیم. این کار مخصوصاً وقتی مفید است که K یک عملگر دیفرانسیلی باشد. اما یک عملگر دیفرانسیلی چگونه از یک عملگر انتگرالی مثل $\mathbb{K}$ ناشی می‌شود؟

در بحث پیرامون حالت "گسسته"، به این نکته اشاره کردیم که $\mathbb{A}$ می‌تواند در پایهٔ مفروض $\mathbf{B}$ قطری باشد. در مورد (۱۱ـ۳) نیز چنین می‌کنیم؛ یعنی (با توجه به اینکه x و y اندیسهای K هستند) فرض می‌کنیم به‌ازای $x \neq y$، خواهیم داشت $K(x,y) = \circ$. این‌گونه عملگرها را عملگرهای موضعی می‌گویند. بنابراین، نقش انتگرال فقط در نقطهٔ $x = y$، ایفا می‌شود. اگر $K(x,y)$ در این نقطه متناهی، و توابع $w(y)$ و $u(y)$ در آنجا خوش‌رفتار باشند، عبارت سمت چپ رابطهٔ (۱۱ـ۳) صفر خواهد شد و ما با ناسازگاریهایی مواجه می‌شویم. بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$K(x,y) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } x \neq y \\ \infty & \text{اگر } x = y \end{cases}$$

از این‌رو، $K(x,y)$ رفتار یک تابع دلتا را دارد. فرض می‌کنیم

$$K(x,y) \equiv L(x)\frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

و در (۱۱ـ۳) قرار می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$L(x)u(x) = f(x)$$

در حالت گسسته، λ_i صرفاً یک عدد اندیس است؛ مشابه پیوستهٔ آن، $L(x)$، می‌تواند صرفاً معرف یک تابع باشد. با این همه، این واقعیت که x یک متغیر (اندیس) پیوسته است، ممکن است امکانهای دیگری را نیز برای $L(x)$ به‌وجود آورد که در مورد حالت گسسته وجود ندارد. به‌عنوان مثال، $L(x)$ ممکن است یک عملگر دیفرانسیلی باشد، یعنی عملگری که $u(x)$ را به "گشت‌وگذاری بی‌هدف" به نقاط اطراف می‌برد و سپس آن را به x، با علامت مشتقی در جلو آن، باز می‌گرداند. این "گشت‌وگذار" برای $u(x)$ امکان‌پذیر است زیرا x یک متغیر پیوسته است، و فرایند تحلیلی حدگرفتن روی آن را می‌توان تعریف کرد. برای حالت گسسته، u_i باید از i به $i+1$ "بجهد" و سپس به i بازگردد. این فرایند تفاضل (برخلاف دیفرانسیل)، موضعی نیست، بلکه نه تنها شامل i بلکه شامل $i+1$ نیز

هست. "نقطه" i یک همسایهٔ (بینهایت نزدیک) ندارد. مشتق، اگرچه با یک فرایند حدی شامل نقاط همسایه تعریف می‌شود، اما یک عملگر موضعی است. بنابراین می‌توان از مشتق یک تابع در یک نقطه سخن گفت.

این تفاوت اساسی، بین عملگرهای گسسته و عملگرهای پیوسته، از نظر کاربردی، عملگرهای پیوسته را خیلی غنی‌تر می‌کنند. در حالت خاص، اگر $L(x)$ را یک عملگر دیفرانسیلی بگیریم، معادلهٔ $L(x)u(x) = f(x)$ مستقیماً به عرضهٔ پرثمر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌انجامد. در آن مبحث، $G(x, y)$، یعنی وارون $L(x)$، را تابع گرین $\mathbb{L}$ می‌خوانیم. توابع گرین را بعداً به تفصیل بررسی خواهیم کرد، اما ابتدا به اجمال، عملگرها را در فضاهای هیلبرت مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱۱ـ۲ عملگرها در فضاهای هیلبرت

مفهوم یک عملگر در یک فضای هیلبرت، فوق‌العاده باریک و ظریف است. حتی مشخصه‌های ابتدایی عملگرها، مانند عمل مزدوج هرمیتی، را عموماً نمی‌توان در تمامی فضای هیلبرت تعریف کرد.

در فضاهای برداری متناهی بعد، یک تناظر یک‌به‌یک بین عملگرها و ماتریسها وجود دارد. بنابراین، تا حدودی، مطالعهٔ عملگرها به مطالعهٔ ماتریسها، که گردایه‌هایی از اعداد حقیقی یا مختلط به‌شمار می‌آید، تحول می‌یابد. هر چند که ما قبلاً به تشابه مابین ماتریسها و هسته‌ها اشاره کرده‌ایم، اما وقتی A_{ij} به $K(x, y)$ تبدیل می‌شود، قلمرو جدیدی از پرسشها هم گشوده می‌شود-پرسشهایی دربارهٔ پیوستگی $K(x, y)$ در هر دو شناسهٔ آن، دربارهٔ حد $K(x, y)$، بر اثر نزدیک شدن x و یا y به نقاط انتهایی بازه‌ای که K بر روی آن تعریف می‌شود، دربارهٔ کرانداری و "فشردگی" $\mathbb{K}$، و مانند آنها. این‌گونه ظرفیتها نامنتظره هم نیستند. از این گذشته، وقتی در فصل ۵ سعی کردیم مفهوم فضاهای برداری متناهی-بعد را به نامتناهی-بعد تعمیم بدهیم، به مشکلاتی برخوردیم. در آنجا، فقط بردارها مورد نظر بودند؛ تعمیم عملگرها به مراتب پیچیده‌تر است.

در این بخش، برخی جنبه‌های کلی نظریهٔ عملگرها را جمعبندی می‌کنیم. ابتدا بحث را پیرامون ردهٔ مهمی از عملگرها، یعنی عملگرهای انتگرالی، شروع کنیم.

۱۱ـ۲ـ۱ عملگرهای انتگرالی

هر عملگر انتگرالی را برحسب هسته‌اش تعریف می‌کنند. فرض کنید $K(x, y)$ یک تابع پیوستهٔ (مختلط مقدار) است که بر روی مربع $a \le x \le b$، $a \le y \le b$ تعریف می‌شود. این تابع،

تبدیلی را در فضای "به‌اصطلاح "توابع انتگرال‌پذیر ریمانی، که آن را با $\mathscr{R}(a,b)$ نمایش می‌دهیم، القا می‌کند که به‌ازای $f\in\mathscr{R}(a,b)$ داریم

$$\mathbb{K}f(x) \equiv g(x) \equiv \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

این معادله را تبدیل انتگرالی می‌نامیم. توجه کنید که $w(x) = ۱$.

عملگر انتگرالی الحاقی را در تشابه با حالت متناهی بعد تعریف می‌کنیم. بنابراین، در نمادگذاری دیراک تعریف می‌کنیم $\langle \mathrm{x}|\mathbb{K}^\dagger|\mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{y}|\mathbb{K}|\mathrm{x}\rangle^*$، که برحسب هسته‌ها داریم $K^\dagger(x,y) = [K(y,x)]^*$. هستهٔ $K(x,y)$ یک تبدیل انتگرالی پدید می‌آورد:

$$\mathbb{K}^\dagger f(x) = \int_a^b K^\dagger(x,y)f(y)dy = \int_a^b K^*(y,x)f(y)dy$$

تبدیل انتگرالی $K : \mathscr{R}(a,b) \to \mathscr{R}(a,b)$ را اصطلاحاً هرمیتی می‌خوانیم، در صورتی‌که

$$\langle \mathbb{K}\mathrm{f}|\mathrm{g}\rangle = \langle \mathrm{f}|\mathbb{K}|\mathrm{g}\rangle \qquad \forall f,g\in\mathscr{R}(a,b)$$

این عبارت مستقیماً به شرط زیر (تمرین ۱۱ـ۲ـ۱) می‌انجامد

$$K(x,y) = K^*(y,x)$$

در حالت خاص، برای توابع و عملگرهای حقیقی‌ـمقدار، این شرط تقلیل می‌یابد به

$$K(x,y) = K(y,x)$$

و هسته را هستهٔ متقارن می‌خوانیم.

مثال ۱۱ـ۲ـ۱: چند مثال از تبدیلهای انتگرالی را از نظر می‌گذرانیم.

(الف) با تبدیل فوریه در فصل ۵ آشنا شدیم. هسته، هرمیتی نیست اما متقارن (به‌عنوان یک تابع مختلط مقدار) است

$$K(x,y) = e^{ixy}$$

(ب) تبدیل لاپلاسی در مهندسی برق کاربرد فراوانی دارد. هستهٔ آن عبارت است از

$$K(x,y) = e^{-xy}$$

و بدیهی است که متقارن و هرمیتی است (x و y حقیقی‌اند).

(ج) تبدیل اویلر دارای هسته‌ای به قرار زیر است

$$K(x,y) = (x-y)^{\nu}$$

اگر ν زوج باشد، هسته متقارن می‌شود.

(د) هستهٔ تبدیل ملین عبارت است از

$$K(x,y) = G(x^{y})$$

که G تابعی دلخواه است. غالباً فرض می‌شود $K(x,y)$ صرفاً به‌صورت x^{y} است.

(ه) هستهٔ تبدیل هنکل عبارت است از

$$K(x,y) = yJ_{n}(xy)$$

که در آن J_n تابع بسل مرتبهٔ n است.

(و) هستهٔ تبدیلی که در ارتباط با معادلهٔ بسل سودمند است، به‌قرار زیر خواهد بود

$$K(x,y) = \left(\frac{x}{۲}\right)^{\nu} e^{(y-x^{۲}/۴y)}$$

●

هسته‌هایی را که در اینجا از نظر می‌گذرانیم، جملگی حقیقی و متقارن خواهند بود، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. فرض بر این است که توابع جملگی حقیقی‌اند، و حاصلضرب داخلی با این عبارت بیان می‌شود

$$\langle \mathrm{f}|\mathrm{g}\rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx$$

که حاکی از فرض ۱ $= w(x)$ است.

مانند آنچه که در مورد حالت متناهی‌ـبعد انجام دادیم، می‌توانیم ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارهای یک عملگر انتگرالی را نیز تعریف کنیم. تابع $f \in \mathscr{R}(a,b)$ را ویژه‌تابع $\mathbb{K}$ با ویژه‌مقدار λ می‌نامیم، فقط اگر $f \not\equiv 0$ و

$$\mathbb{K}f(x) = \lambda f(x) \qquad \text{(۱۱ـ۴الف)}$$

یا

$$\int_a^b K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x) \qquad \text{(۱۱ـ۴ب)}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایز یک تبدیل انتگرالی متقارن K، متعامدند.

۱۱ـ۲ـ۲ هسته‌های تفکیک‌پذیر

معادلات ویژه‌مقداری، (۱۱ـ۴)، را می‌توان به آسانی حل کرد، در صورتی‌که $K(x,y)$ تفکیک‌پذیر باشد، یعنی، توابع $\{h_i(x)\}_{i=1}^n$ وجود داشته باشند که در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند و به‌ازای $c_{ij} = c_{ji}$ داشته باشیم

$$K(x,y) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} h_i(x) h_j(y)$$

با جایگذاری این عبارت در (۱۱ـ۴ب)، خواهیم داشت

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} h_i(x) \int_a^b h_j(y) f(y) dy = \lambda f(x)$$

با تعریف $a_j \equiv \int_a^b h_j(y)f(y)dy$ و جایگذاری آن در معادلهٔ قبل، می‌رسیم به

$$\lambda f(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} h_i(x) a_j \qquad \text{(۱۱ـ۵)}$$

با قرار دادن دوبارهٔ این رابطه در تعریف a_j خواهیم داشت

$$\lambda a_j = \int_a^b h_j(y)[\lambda f(y)]dy = \int_a^b h_j(y)\left[\sum_{i,k=۱}^{n} c_{ik}h_i(y)a_k\right]dy$$
$$= \sum_{i,k=۱}^{n}\left[c_{ik}\int_a^b h_j(y)h_i(y)dy\right]a_k \equiv \sum_{k=۱}^{n} m_{jk}a_k$$

که در آن

$$m_{jk} \equiv \sum_{i=۱}^{n} c_{ik}\int_a^b h_j(y)h_i(y)dy$$

این معادله، معادله‌ای ویژه‌مقداری برای ماتریس $n\times n$بعدی M با عناصر m_{ij} است. وقتی ویژه‌بردارها و ویژه‌مقدارها پیدا شدند، می‌توانیم آنها را در (۱۱ـ۵) قرار دهیم و $f(x)$ را به‌دست بیاوریم. حائز اهمیت است که توجه کنیم (۱۱ـ۵) فقط در صورتی دارای جوابی به این صورت

$$f(x) = \frac{۱}{\lambda}\sum_{i,j=۱}^{n} c_{ij}h_i(x)a_j$$

است که λ یکی از ویژه‌مقدارهای ناصفر ماتریس M باشد.

بدیهی است که فقط تعدادی متناهی ویژه‌مقدار وجود دارد. فرض کنید $\{\lambda_k\}_{k=۱}^{m}$ مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای ناصفر و $\{f_k(x)\}_{k=۱}^{m}$ مجموعهٔ ویژه‌بردارهای متناظر با آنها باشند. در این‌صورت، می‌توانیم بنویسیم

$$f_k(x) = \frac{۱}{\lambda_k}\sum_{i,j=۱}^{n} c_{ij}h_i(x)a_j^{(k)}$$

که در آن $a_j^{(k)}$، مؤلفهٔ jام ویژه‌بردار kام است. روشن است که اگر بیش از یک ویژه‌بردار خطی مستقل وجود داشته باشد، بیش از یک $f_k(x)$ وجود خواهد داشت.

از سوی دیگر، اگر به‌ازای $g\in\mathscr{R}(a,b)$، داشته باشیم $\mathbb{K}g(x) = ۰$، در آن‌صورت $g(x)$ یک ویژه‌بردار $\mathbb{K}$ با ویژه‌مقدار صفر است. چون همهٔ $\{\lambda_k\}_{k=۱}^{m}$ مخالف صفرند، $g(x)$ باید قائم بر همهٔ مقادیر $f_k(x)$ باشد. به این ترتیب، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۱: فرض کنید $K(x,y)$ یک هستهٔ ناصفر، متقارن، و تفکیک‌پذیر است. در این‌صورت مجموعه توابع راست‌هنجار $\{f_k(x)\}_{k=1}^{m}$ در $\mathscr{R}(a,b)$ و مجموعه اسکالرهای ناصفر و حقیقی $\{\lambda_k\}_{k=1}^{m}$ چنان وجود دارند که به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, m$ داریم $\mathbb{K}f_k(x) = \lambda_k f_k(x)$. اگر $g \in \mathscr{R}(a,b)$ قائم بر همهٔ f_kها باشد، در آن صورت $\mathbb{K}g(x) = 0$. اسکالرهای λ_k، تنها ویژه‌مقادیر ناصفر $\mathbb{K}$ هستند، و فقط تعدادی متناهی ویژه‌بردار خطی مستقل متناظر با هر یک از ویژه‌مقدارها وجود دارد. ■

مثال ۱۱ـ۲ـ۲: ویژه‌مقدارهای ناصفر و ویژه‌بردارهای متناظر را برای هستهٔ $K(x,y) = 1 + \sin(x+y)$ در بازهٔ $-\pi \leq x, y \leq \pi$ پیدا می‌کنیم.

ما در جستجوی توابع f و اسکالرهای λ هستیم به‌طوری که در رابطهٔ $\mathbb{K}f(x) = \lambda f(x)$، یا در عبارت

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x,y) f(y) dy = \lambda f(x) \tag{1}$$

صدق کنند. با بسط $\sin(x+y)$ و جایگذاری نتیجه در (۱)، می‌رسیم به

$$\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \sin x \cos y + \cos x \sin y] f(y) dy = \lambda f(x)$$

یا

$$a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x = \lambda f(x) \tag{2}$$

که در آن

$$a_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \qquad a_2 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \cos y f(y) dy \qquad a_3 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\lambda a_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} (a_1 + a_2 \sin y + a_3 \cos y) dy = 2\pi a_1$$

به همین ترتیب

$$\lambda a_۲ = \pi a_۳ \quad و \quad \lambda a_۳ = \pi a_۲ \tag{۳}$$

اگر $a \neq ۰$، خواهیم داشت $\lambda = ۲\pi$، که وقتی در (۳) قرار داده شود، منجر می‌شود به $a_۲ = a_۳ = ۰$. بنابراین، به‌عنوان نخستین جواب، داریم

$$\lambda_۱ = ۲\pi \quad و \quad a^{(۱)} = a\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

که a ثابت دلخواهی است. اکنون از معادلهٔ (۲) خواهیم داشت

$$a_۱ = \lambda_۱ f_۱(x) \quad \Rightarrow \quad f_۱(x) = \text{const.}$$

از سوی دیگر، اگر $\lambda \neq ۲\pi$، آنگاه خواهیم داشت: $a_۱ = ۰$. به این ترتیب از معادلهٔ (۳) خواهیم داشت

$$\lambda = \pm\pi \quad و \quad a_۲ = \pm a_۳$$

به‌ازای $\lambda_۱ \equiv \lambda_۲ \equiv \pi$، از معادلهٔ (۲) داریم

$$f(x) \equiv f_۲(x) = (\text{const.})(\sin x + \cos x)$$

به‌ازای $\lambda = \lambda_۳ \equiv -\pi$، داریم

$$f(x) = f_۳(x) = (\text{const.})(\sin x - \cos x)$$

ویژه‌توابع بهنجار عبارت‌اند از

$$f_۱(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$

$$f_۲(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}(\sin x + \cos x)$$

و

$$f_۲(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}(\sin x - \cos x)$$

جایگزینی مستقیم در (۱) به آسانی ثابت می‌کند که $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$ ویژه‌توابع $\mathbb{K}$ با ویژه‌مقادیر نشان داده شده هستند. ●

قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۱ حاکی از آن است که به‌ازای هر ویژه‌مقدار ناصفر، تعدادی متناهی ویژه‌تابع وجود دارد. همان‌گونه که در مثال زیر مشاهده خواهد شد، برای یک ویژه‌مقدار صفر ممکن است تعدادی نامتناهی ویژه‌تابع وجود داشته باشد.

مثال ۱۱ـ۲ـ۳: فرض کنید به‌ازای $-\pi \leq x, y \leq \pi$، داریم $K(x,y) = \sin x \sin y$. به این ترتیب، به‌ازای $\lambda = ۰$، معادلهٔ ویژه‌مقداری عبارت است از

$$\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y f(y) dy = \lambda f(x) = ۰$$

چون تعداد بینهایت تابع عمود بر $\sin y$ وجود دارد [به‌عنوان مثال، $f(y) = \sin ny$، که در آن $n = ۲, ۳, \ldots$] نتیجه می‌گیریم که برای معادلهٔ ویژه‌مقداری بالا تعداد بینهایت جواب وجود دارد. ●

۱۱ـ۲ـ۳ ویژه‌مقدارها و وارونها

مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای عملگری که در یک فضای برداری متناهی بعد عمل می‌کند متناهی است؛ مجموعهٔ یاد شده مشتمل است بر ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ عملگر یادشده. از سوی دیگر، در فصل ۱۰ به عملگر اشتورم‌ـلیوویل، $\mathbb{L}$، برخوردیم که دارای بینهایت ویژه‌مقدار است (قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱). وقتی تعدادی نامتناهی ویژه‌مقدار مجاز باشند، هیچ چیز نمی‌تواند از تبدیل مجموعهٔ ویژه‌مقدارها به یک پیوستار جلوگیری کند. بنابراین، به‌طور کلی، یک عملگر هم می‌تواند دارای ویژه‌مقدارهای گسسته و هم دارای ویژه‌مقدارهای پیوسته باشد. پیوستگی، رنج و جذبهٔ آنالیز را توأم با هم برایمان همراه می‌آورد.

وارون یک عملگر. این پرسش که آیا عملگر $\mathbb{A}$ در یک فضای متناهی‌ـبعد، وارون‌پذیر هست یا خیر، به‌طور موجز با مقدار دترمینان آن پاسخ داده می‌شود: $\mathbb{A}$ فقط در صورتی وارون‌پذیر است که $\det \mathbb{A} \neq ۰$.

در فضاهای نامتناهی بعد (هیلبرت) دترمینانی وجود ندارد. چگونه می‌توانیم بگوییم که آیا یک عملگر در فضای هیلبرت وارون‌پذیر هست یا خیر؟ استفاده از ارتباط بین وارون‌پذیری و ویژه‌مقدارها در ابتدای این فصل منجر به گزارهٔ ۱۱ـ۱ـ۱ شد، که می‌توان آن را برای عملگری که بر هر فضای برداری، خواه متناهی یا نامتناهی، عمل می‌کند، اثبات کرد.

معادلهٔ $\mathbb{A}|u\rangle = 0$ را در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که، در حالت کلی، نه حوزهٔ و نه بردِ $\mathbb{A}$، تمامی $\mathscr{H}$ نیست. اگر $\mathbb{A}$ وارون‌پذیر باشد، در آن‌صورت تنها جواب معادلهٔ $\mathbb{A}|u\rangle = 0$، عبارت است از $|u\rangle = 0$. از سوی دیگر، این فرض که معادلهٔ مورد نظر جواب نابدیهی ندارد، به معنای آن است که فضای تهی متعلق به $\mathbb{A}$ فقط شامل بردار صفر است. بنابراین

$$\mathbb{A}|u_1\rangle = \mathbb{A}|u_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}(|u_1\rangle - |u_2\rangle) = 0 \quad \Rightarrow \quad |u_1\rangle - |u_2\rangle = 0$$

این عبارت نشان می‌دهد که $\mathbb{A}$ یک به‌یک است، یعنی، عبارت است از یک نگاشت خطی دوسو از حوزهٔ $\mathbb{A}$، $D(\mathbb{A})$، به بُردِ $\mathbb{A}$، یا $\mathbb{A}(\mathscr{H})$. بنابراین، $\mathbb{A}$ باید وارون داشته باشد.

بحث بالا را می‌توان به‌صورت زیر هم بیان کرد. اگر $\mathbb{A}|u\rangle = 0$، در آن‌صورت (طبق تعریف ویژه‌بردارها) فقط در صورتی‌که $|u\rangle \neq 0$، آنگاه $\lambda = 0$ یک ویژه‌مقدار $\mathbb{A}$ است. بنابراین اگر $\mathbb{A}|u\rangle = 0$ دارای جواب نابدیهی نباشد، صفر نمی‌تواند ویژه‌مقدار $\mathbb{A}$ باشد. این مطلب را می‌توان به‌صورت یک قضیه نیز بیان کرد.

قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۲: عملگر $\mathbb{A}$ در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ فقط در صورتی دارای وارون $\mathbb{A}^{-1}$ است که $\lambda = 0$ ویژه‌مقدار $\mathbb{A}$ نباشد. ∎

به یاد داشته باشید که $\mathbb{A}$ فقط روی یک زیرمجموعهٔ $\mathscr{H}$، یعنی $D(\mathbb{A})$، تعریف می‌شود. همچنین، $\mathbb{A}^{-1}$ نیز فقط در برد $\mathbb{A}$، که عبارت باشد از $\mathbb{A}(x)$، تعریف می‌شود.

ویژه‌مقدارهای عملگر دلخواه $\mathbb{A}$ برحسب عملگر $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1}$ مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف ۱۱ـ۲ـ۳: فرض کنید $\mathbb{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. عدد مختلط λ را اصطلاحاً می‌گوییم در مجموعهٔ حلال $\rho(\mathbb{A})$ واقع است در صورتی‌که $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1}$ یک نگاشت دوسو باشد. عملگر

$$\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) \equiv (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})^{-1}$$

را حلال$\mathbb{A}$ در λ می‌نامیم. اگر $\lambda \notin \rho(\mathbb{A})$، در آن‌صورت می‌گوییم λ در طیف $\mathbb{A}$، که به‌صورت

$\sigma(\mathbb{A})$ مستلزم این است که بدانیم آیا $\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})$ کراندار هست یا خیر. در واقع، تعریف دقیقتری از ۱۱ـ۲ـ۳ مشخص می‌کند که $\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})$ کراندار است.

تعریف ۱۱ـ۲ـ۴: عملگر $\mathbb{B} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ را کراندار می‌گوییم در صورتی‌که یک عدد حقیقی ناصفر مانند M چنان وجود داشته باشد که

$$\|\mathbb{B}\mathbf{u}\| \leq M \|\mathbf{u}\| \qquad \forall |\mathbf{u}\rangle \in \mathscr{H}$$

کوچکترین مقدار M را نرم$\mathbb{B}$ ، $\|\mathbb{B}\|$، می‌نامیم.

در مورد اکثر عملگرهایی که به آنها توجه داریم، مثل عملگرهای خودالحاقی، طیف عملگر، مشتمل بر ویژه‌مقدارهای آن است و گاهی آن را طیف نقطه‌ای می‌نامیم.

مثال ۱۱ـ۲ـ۴: به چند نمونه از بحث بالا نظر می‌کنیم. (الف) فرض کنید $\mathbb{A}$ عملگر خودالحاقی $-id/dx$ باشد، و $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(-\infty, \infty) \equiv \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. در آن‌صورت، همان‌گونه که می‌توان به آسانی ثابت کرد (فصل ۳)، $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$؛ یعنی، تمام اعداد حقیقی، ویژه‌مقدار $\mathbb{A}$ هستند. ویژه‌تابع $u_\lambda(x)$ متناظر با ویژه‌مقدار λ عبارت است از $e^{-i\lambda x}$. توجه داشته باشید که $u_\lambda(x) \notin \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$؛ اما، $u_\lambda(x)$ را می‌توان با هر دقت مطلوبی به یک بسته موج مناسب "تقریب زد".

(ب) فرض کنید $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$، و $\mathbb{A}$ عملگری است که تابع $f(x)$ را در x ضرب می‌کند. $\mathbb{A}f(x) = xf(x)$. در اینجا نیز $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$، و هر تابعی یک ویژه‌تابع است.

(ج) فرض کنید $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ و $\mathbb{A} = -d^2/dx^2$. تابع $u(x) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ یک ویژه‌تابع متناظر با ویژه‌مقدار λ است، فقط در صورتی که داشته باشیم

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

برای اینکه این معادله دارای جواب، یعنی در $\pm\infty$ متناهی باشد، λ باید مثبت باشد. بنابراین $\sigma(\mathbb{A}) = (0, \infty)$. در اینجا نیز، مانند قسمت (الف)، داریم $u_\lambda(x) \notin \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$.

(د) فرض کنید $\mathbb{A} = (1 - x^2)(d^2/dx^2) - 2x(d/dx)$ در بازهٔ $\mathscr{L}^2[-1, +1]$ تعریف شده باشد. در آن‌صورت $\sigma(\mathbb{A}) = \{l(l+1) | l \text{ یک عدد درست نامنفی}\}$، و ویژه‌توابع صرفاً چندجمله‌ایهای لژاندر هستند. ●

عملگر خودالحاقی $\mathbb{H}$ فقط دارای ویژه‌مقادیر حقیقی است؛ بنابراین، $\sigma(\mathbb{H}) \subset \mathbb{R}$. بزرگی ویژه‌مقادیر عملگر یکانی $\mathbb{U}$ عبارت‌اند از ۱؛ بنابراین، $\sigma(\mathbb{U})$ عبارت است از دایرهٔ واحد، یا

$\{\lambda \in \mathbb{C} \,||\lambda| = ۱\}$. از سوی دیگر، $\rho(\mathbb{H})$ مشتمل بر قسمت بالا ($y > ۰$)، قسمت پایین ($y < ۰$)، و احتمالاً بخشی از محور اعداد حقیقی است، و $\rho(\mathbb{U})$ تمام نقاط داخل و خارج دایرهٔ واحد و احتمالاً برخی نقاط واقع بر روی دایره را در بر می‌گیرد.

خواص مفید حلال. حلال هر عملگر از دو خاصیت مهم برخوردار است که در تحلیل طیف عملگر فوق‌العاده حائز اهمیت‌اند.

به‌خاطر بیاورید که اگر $\lambda \in \rho(\mathbb{A})$، آنگاه عملگر $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}$ وارون‌پذیر است. در واقع، $\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})^{-۱}$. همچنین، $\mathbb{R}_\mu(\mathbb{A}) = (\mathbb{A} - \mu\mathbb{1})^{-۱}$. فرض می‌کنیم $\lambda \neq \mu$ و تفاضل بین دو حلال را در نظر می‌گیریم. با قدری عملیات داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) - \mathbb{R}_\mu(\mathbb{A}) &= \frac{۱}{\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1}} - \frac{۱}{\mathbb{A} - \mu\mathbb{1}} \\ &= \frac{\mathbb{A} - \mu\mathbb{1} - \mathbb{A} + \lambda\mathbb{1}}{(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})(\mathbb{A} - \mu\mathbb{1})} = \frac{(\lambda - \mu)\mathbb{1}}{(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})(\mathbb{A} - \mu\mathbb{1})} \\ &= (\lambda - \mu)\frac{۱}{\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1}}\left(\frac{۱}{\mathbb{A} - \mu\mathbb{1}}\right) = (\lambda - \mu)\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})\mathbb{R}_\mu(\mathbb{A})\end{aligned}$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) - \mathbb{R}_\mu(\mathbb{A})}{\lambda - \mu} = \mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})\mathbb{R}_\mu(\mathbb{A}) \qquad (۶\text{_}۱۱)$$

(برای ملاحظهٔ راه جدی‌تر رسیدن به این نتیجه، ر.ک. حل تمرین ۱۱ـ۲ـ۴.)

برای به‌دست آوردن خاصیت دوم حلال، از $\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})$ نسبت به λ صریحاً مشتق می‌گیریم و آن را در $\mu = \lambda$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d}{d\lambda}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = \frac{d}{d\lambda}[(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})^{-۱}] = (-۱)(-\mathbb{1})(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})^{-۲} = [\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})]^۲$$

با مشتق گرفتن از دو طرف این معادله می‌رسیم به

$$\frac{d^۲}{d\lambda^۲}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = ۲\frac{d\mathbb{R}_\lambda}{d\lambda}[\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})] = ۲[\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})]^۳$$

به‌طور کلی

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = n![\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})]^{n+۱}$$

به‌طور کلی

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})\bigg|_{\lambda=\mu} = n!\mathbb{R}_\mu^{n+1}(\mathbb{A})$$

اگر بسط سری تایلور وجود داشته باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\mu)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n}\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})\bigg|_{\lambda=\mu} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n\mathbb{R}_\mu^{n+1}(\mathbb{A}) \qquad (۷\_۱۱)$$

که دومین خاصیت حلال است.

به بیان دقیقتر، باید (۱۱ـ۷) را بین دو بردار دلخواه در حوزهٔ $\mathbb{R}_\lambda$ قرار دهیم، که نتیجه عبارت است از

$$\langle \mathrm{u}|\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})|\mathrm{v}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\mu)^n\langle \mathrm{u}|\mathbb{R}_\mu^{n+1}(\mathbb{A})|\mathrm{v}\rangle$$

و هر دو طرف آن توابعی معمولی از λ هستند. علاوه بر این، با مشتق گرفتن صریح از $\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})$ به (۱۱ـ۷) می‌رسیم، که کاملاً هم صحیح نیست.[1]

۱۱ـ۲ـ۴ تجزیهٔ طیفی ماتریسها از دیدگاهی تحلیلی

چون روشهای تحلیلی در جبر عملگرها از قدرت زیادی برخوردارند و از آنجا که این روشها تنها ابزار مطالعهٔ حالت نامتناهی‌ـبعد به‌شمار می‌آیند، در این زیربخش تجزیهٔ طیفی یک ماتریس را (که در فصل ۳ بررسی کردیم) دوباره از دیدگاهی تحلیلی از نظر می‌گذرانیم.

فرض کنید A یک ماتریس $N \times N$ دلخواه (نه ضرورتاً هرمیتی) است. همچنین فرض کنید $\{\lambda_i\}_{i=1}^{r}$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصهٔ آن $p(\mu) = \det(\mathsf{A} - \mu 1)$، باشد فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C}$، و به‌ازای همهٔ مقادیر $i = 1, 2, \ldots, r$ داشته باشیم $|\lambda| > |\lambda_i|$. به این ترتیب می‌توان

---

۱. برای دستیابی به یکی از طریقه‌های دست‌یابی آن ر.ک.
Reed & Simon (1980) or Richtmeyer (1978).

$R_\lambda(A)$ را به‌صورت زیر بسط داد

$$R_\lambda(A) \equiv \frac{۱}{A-\lambda 1} = -\frac{۱}{\lambda}\left[\frac{۱}{1-\left(\frac{A}{\lambda}\right)}\right]$$

$$= -\frac{۱}{\lambda}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = -\frac{۱}{\lambda}\left(1+\frac{A}{\lambda}+\frac{A^۲}{\lambda^۲}+\cdots\right) \qquad (۱۱\text{ـ}۸)$$

این بسط فقط وقتی بامعنی است که داشته باشیم

$$\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| = \frac{\| A \|}{|\lambda|} < ۱$$

که در آن $\| A \|$ در تعریف ۱۱ـ۲ـ۴ معرفی شده است. آن λ که برگزیده‌ایم این نامساوی را برقرار می‌کند.

معادلهٔ (۱۱ـ۸) عبارت است از بسط لوران $R_\lambda(A)$، و بلافاصله می‌توان ماندهٔ $R_\lambda(A)$ را که همان ضریب $۱/\lambda$ است، به‌دست آورد:

$$\mathrm{Res}[R_\lambda(A)] = -1$$

یا

$$-\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma R_\lambda(A)d\lambda = 1$$

که در آن Γ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاعی که به اندازهٔ کافی بزرگ است که تمام ویژه‌مقدارهای A را در برمی‌گیرد و با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که

$$-\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma \lambda R_\lambda(A)d\lambda = A$$

و به‌طور کلی

$$-\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma \lambda^n R_\lambda(A)d\lambda = A^n \qquad n = ۰, ۱, \ldots$$

با بسط تابع $f(\mathsf{A})$ به‌صورت سری توانی و کاربرد انتگرالی بالا برای هر توان، خواهیم داشت

$$-\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda = f(\mathsf{A}) \qquad (۱۱\text{ـ}۹)$$

با نوشتن این معادله به شکل

$$-\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda 1-\mathsf{A}}d\lambda = f(\mathsf{A})$$

می‌بینیم که به تعمیم فرمول انتگرال کوشی به توابع عملگر مقداری دست یافته‌ایم.

برای بهره‌گیری از هر یک از فرمولهای انتگرالی بالا، باید رفتار تحلیلی $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ را بشناسیم. بنابر قضیهٔ ۳ـ۴ـ۷

$$[\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})]_{ij} = [(\mathsf{A}-\lambda 1]_{ij} = \frac{[\widetilde{\mathsf{C}(\mathsf{A}-\lambda 1)}]_{ij}}{\det(\mathsf{A}-\lambda 1)} \equiv \frac{C_{ij}(\lambda)}{p(\lambda)}$$

که $C_{ij}(\lambda)$ هم‌عامل عنصر ijام ماتریس $\mathsf{A}-\lambda 1$ و $p(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A است. بدیهی است که $C_{ij}(\lambda)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ $N-۱$، و $p(\lambda)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ N است. بنابراین، $[\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})]$ تابعی گویا از λ است. در نتیجه فقط قطبهای $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$، تکینگیهای آن به‌شمار می‌آیند. قطبها صرفاً صفرهای مخرج، یا ویژه‌مقادیر A هستند.

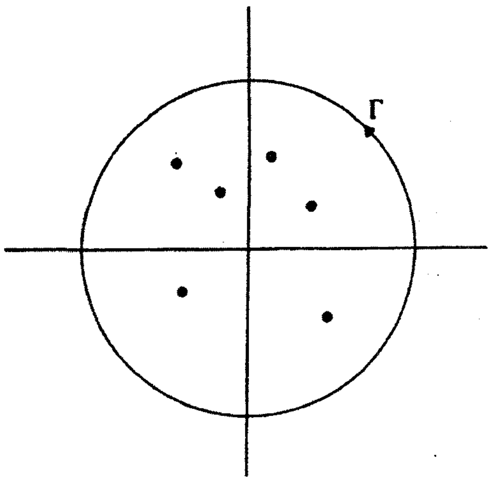
می‌توانیم مسیر Γ را چنان تغییر شکل دهیم که شامل دایره‌های کوچک γ_j شود، که این دایره‌ها ویژه‌مقادیر منزوی λ_j (شکل ۱۱ـ۱) را احاطه می‌کنند. در آن‌صورت، به‌ازای $f(\mathsf{A}) = 1$، معادلهٔ (۱۱ـ۹) منجر می‌شود به

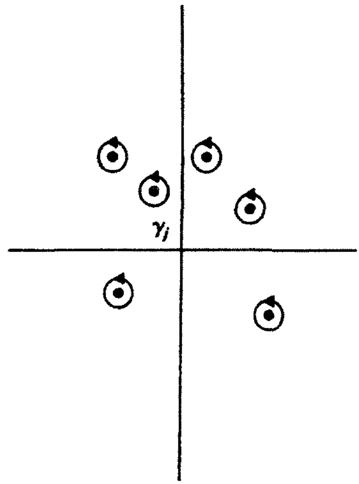
$$1 = -\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{j=۱}^{r}\oint_{\gamma_j}\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda \equiv \sum_{j=۱}^{r}\mathsf{P}_j \qquad (۱۱\text{ـ}۱۰\text{الف})$$

که در آن

$$\mathsf{P}_j \equiv -\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{\gamma_j}\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda \qquad (۱۱\text{ـ}۱۰\text{ب})$$

می‌توان ثابت کرد (تمرین ۱۱ـ۲ـ۶) که $\{\mathsf{P}_j\}_{j=۱}^{r}$ یک مجموعه از خودتوانهای متعامد است،





شکل ۱۱ـ۱ (الف) دایرهٔ بزرگ Γ، و (ب) مسیر تغییر شکل‌یافتهٔ شامل دایره‌های کوچک γ_j.

به این معنا که

$$\mathsf{P}_i\mathsf{P}_j = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ \mathsf{P}_i & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

بنابراین، (۱۱ـ۱الف) یکی از تجزیه‌های اتحاد است، که در قضیهٔ تجزیهٔ طیفی در فصل ۳ مشخص شده است.

اکنون با فرض $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}$ در (۱۱ـ۹)، مسیر را مثل بالا تغییر شکل می‌دهیم، و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= -\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{j=۱}^{r}\oint_{\gamma_j} \lambda \mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda \\ &= -\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{j=۱}^{r}\left[\lambda_j \oint_{\gamma_j} \mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda + \oint_{\gamma_j}(\lambda-\lambda_j)\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda\right] \\ &\equiv \sum_{j=۱}^{r}(\lambda_j \mathsf{P}_j + \mathsf{D}_j) \end{aligned} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۱)$$

که در آن

$$\mathsf{D}_j \equiv -\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{\gamma_j}(\lambda-\lambda_j)\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda$$

می‌توان ثابت کرد (تمرین ۱۱ـ۲ـ۷) که

$$D_j^n = -\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{\gamma_j}(\lambda-\lambda_j)^n\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})d\lambda$$

در حالت خاص، چون فقط قطبهای $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$، تکین‌اند، عدد صحیح مثبتی مانند m چنان وجود دارد به‌طوری که $\mathsf{D}_j^m = ۰$.

ما تاکنون هیچ فرضی در مورد A به‌جا نیاورده‌ایم. اگر فرض کنیم A هرمیتی است، در آن‌صورت $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ دارای قطبهای ساده خواهد بود (تمرین ۱۱ـ۲ـ۸). در نتیجه، $(\lambda-\lambda_j)\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ در λ_j به‌ازای تمام $j = ۱,۲,\ldots,r$ تحلیلی خواهد بود، و در (۱۱ـ۱۱) خواهیم داشت: $\mathsf{D}_j = ۰$. بنابراین، داریم

$$\mathsf{A} = \sum_{j=۱}^{r}\lambda_j\mathsf{P}_j$$

که همان تجزیهٔ طیفی مطرح شده در فصل ۳ است. این روند، اثبات قضیهٔ ۳ـ۶ـ۱۲ را، جز نشان‌دادن هرمیتی بودن P_j (تمرین ۱۱ـ۲ـ۹)، تکمیل می‌کند.

مثال ۱۱ـ۲ـ۵: کلی‌ترین شکل ماتریس ۲ × ۲ به‌صورت زیر است

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۱۲}^* & a_{۲۲}\end{pmatrix}$$

که $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ اعدادی حقیقی‌اند. به این ترتیب

$$\mathsf{A}-\lambda 1 = \begin{pmatrix} a_{۱۱}-\lambda & a_{۱۲} \\ a_{۱۲}^* & a_{۲۲}-\lambda\end{pmatrix}$$

و

$$\det(\mathsf{A}-\lambda 1) = \lambda^۲ - (a_{۱۱}+a_{۲۲})\lambda + a_{۱۱}a_{۲۲} - |a_{۱۲}|^۲$$

که ریشه‌های آن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\equiv \frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4|a_{12}|^2}\right]\\ \lambda_2 &\equiv \frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4|a_{12}|^2}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

وارون $\mathsf{A}-\lambda 1$ را بلافاصله می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A}) = (\mathsf{A}-\lambda 1)^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathsf{A}-\lambda 1)}\begin{pmatrix} a_{22}-\lambda & -a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{11}-\lambda\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}\begin{pmatrix} a_{22}-\lambda & -a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{11}-\lambda\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2}$$

می‌خواهیم نشان بدهیم که (۲) فقط دارای قطبهای ساده است. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) اگر $\lambda_2 \neq \lambda_1$، در آن‌صورت روشن است که $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ قطبهای ساده دارد.

(۲) اگر $\lambda_2 = \lambda_1$، به‌نظر می‌رسد که $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ است. اما، توجه کنید که اگر $\lambda_2 = \lambda_1$، آنگاه رادیکال معادلهٔ (۱) باید صفر شود. این اتفاق فقط در صورتی می‌افتد که $a \equiv a_{22} = a_{11}$ و $a_{12} = 0$. پس نتیجه می‌شود که $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ و

$$\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A}) = \frac{1}{(\lambda-a)^2}\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda\end{pmatrix}$$

این عبارت به روشنی نشان می‌دهد که در این حالت $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$ فقط دارای قطبهای ساده است.

بنابراین مستقیماً ثابت کرده‌ایم که حلال یک ماتریس هرمیتی 2×2 فقط می‌تواند دارای قطبهای ساده باشد. ●

اگر A هرمیتی نباشد، آنگاه $\mathsf{D}_j \neq 0$؛ اما D_j هنوز پوچتوان است. یعنی به‌ازای یک عدد صحیح مثبت m، داریم $\mathsf{D}_j^m = 0$. با استفاده از این خاصیت و معادلهٔ (۱۱ـ۱۱) می‌توان نشان داد که با یک تبدیل تشابهی، A به شکل متعارف ژوردان درمی‌آید. یعنی یک ماتریس $N \times N$

مانند S وجود دارد که

$$SAS^{-1} \equiv J \equiv \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}$$

که در آن، J_i به‌صورت زیر است

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

و λ یکی از ویژه‌مقدارهای A به‌شمار می‌آید. J_iهای مختلف، ممکن است شامل ویژه‌مقدارهای همسانی از A باشند.[1]

۱۱ـ۲ـ۵ تجزیهٔ طیفی عملگر خودالحاقی

بحث زیربخش قبل را می‌توان به عملگر خودالحاقی که در فضای هیلبرت عمل می‌کند، تعمیم داد. ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{E}_j \equiv \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}_i = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \cdots + \mathbb{P}_j$$

و، با $\mathbb{E}_0 \equiv \mathbb{O}$،

$$\Delta\mathbb{E}_j \equiv \mathbb{E}_j - \mathbb{E}_{j-1} = \mathbb{P}_j$$

۱. برای دستیابی به بحثی پیرامون "شکل متعارف ژوردان" ماتریسها ر.ک.:
Birkhoff & MacLane (1977), Denery and Krzywicki (1967), or Halmos (1958).

سپس می‌نویسیم

$$\mathbb{1} = \sum_j \Delta\mathbb{E}_j \quad \text{و} \quad \mathbb{A} = \sum_j \lambda_j \Delta\mathbb{E}_j$$

اکنون با تغییر Δ به d و $\sum$ به $\int$، تعمیم به یک پیوستار امکان‌پذیر می‌شود. در حالت خاص، معادلهٔ مربوط به $\mathbb{A}$ تبدیل می‌شود به

$$\mathbb{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\mathbb{E}_\lambda \tag{۱۱-۱۲}$$

که λ یک پارامتر حقیقی (ویژه‌مقدار خودالحاقی $\mathbb{A}$) است.

معادلهٔ (۱۱-۱۲) را در حقیقت باید به‌صورت زیر نوشت

$$\langle \mathrm{u}|\mathbb{A}|\mathrm{v}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \langle \mathrm{u}|d\mathbb{E}_\lambda|\mathrm{v}\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(\langle \mathrm{u}|\mathbb{E}_\lambda|\mathrm{v}\rangle)$$

می‌توان نشان داد[1] که

$$\mathbb{E}_\lambda = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \mathbb{R}_\xi(\mathbb{A}) d\xi$$

در این عبارت C یک مسیر مناسب است؛ و همچنین می‌توان ثابت کرد که

$$\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{\xi - \lambda} d\mathbb{E}_\xi$$

و نشان داد $\mathbb{E}_\lambda$، که در آنها $-\infty < \lambda < +\infty$، به یک معنا "عملگرهای تصویرند". از این نظر، معادلهٔ (۱۱-۱۲) مشابه تجزیهٔ طیفی برای عملگر خودالحاقی $\mathbb{A}$ در یک فضای هیلبرت است. بررسی مفصل این مطالب مستلزم طرح پرسشهای دشواری پیرامون همگرایی سریها و انتگرالهاست و از سطح این کتاب فراتر می‌رود.

۱۱-۲-۶ ویژه‌مقدارهای عملگر انتگرالی متقارن

در بخش ۱۱-۲-۲ دیدیم که یک عملگر انتگرالی تفکیک‌پذیر متقارن فقط تعدادی متناهی ویژه‌مقدار دارد. در مورد عملگر انتگرالی متقارن کلی (عام) وضعیت به چه صورت است؟ در این زیربخش، به بررسی چند نتیجهٔ مهم دربارهٔ این عملگرها می‌پردازیم. نخستین مورد، یک قضیه است.[2]

1. Rictmeyer, 1978, Chapter 9. 2. Roach, 1970, pp 91 & 92

قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۵: تعداد ویژه‌مقدارهای ناصفر متمایز یک عملگر انتگرالی متقارن، "شمارا" است. به‌ازای هر یک از این ویژه‌مقدارها حداکثر تعدادی متناهی ویژه‌تابع خطی مستقل وجود دارد. ■

به یاد داشته باشید که یک مجموعهٔ شمارا یا دارای تعدادی متناهی عنصر است یا تعدادی نامتناهی عنصر دارد که می‌توان آنها را در تناظر یک به یک با اعداد صحیح قرار داد. بنابراین، ویژه‌مقدارهای یک عملگر انتگرالی را می‌توان با یک عدد صحیح k مشخص کرد. این امر با عملگر خودالحاقی عام که در زیربخش قبل آن را بررسی کردیم، در تضاد است. مجموعهٔ $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ را طیف عملگر انتگرالی $\mathbb{K}$ می‌نامند. البته، مجموعهٔ λ_kها ممکن است دارای تعدادی متناهی عنصر ناصفر باشد، که در آن‌صورت هستهٔ عملگر تفکیک‌پذیر خواهد بود. ممکن است حتی در مواردی هیچ‌یک از λ_kها مخالف صفر نباشد. برای یک عملگر انتگرالی عام، مجموعه ممکن است تهی باشد؛ یعنی، عملگر انتگرالی (نامتقارن) ممکن است اصلاً هیچ ویژه‌مقداری نداشته باشد.

چه نوع عملگرهایی دارای ویژه‌مقدارهای ناصفرند؟ بگذارید ابتدا مورد متناهی بعد را در نظر بگیریم. اگر $\mathbb{A}\in\mathscr{L}(\mathscr{V})$ یک عملگر متقارن در فضای برداری Nبعدی $\mathscr{V}$ باشد، در آن‌صورت ویژه‌مقدارهای آن را می‌توان با حل چندجمله‌ای مشخصهٔ درجهٔ N، $p(\lambda)\equiv\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1})$، به‌دست آورد. مادام که $N\geq ۱$، این چندجمله‌ای دست‌کم دارای یک ریشه است. علاوه بر این، برای یک عملگر (هرمیتی) متقارن، دست‌کم یکی از ریشه‌ها مخالف صفر است. علت این امر آن است که عملگر متقارن $\mathbb{A}$ را می‌توان قطری کرد؛ یعنی، پایه‌ای وجود دارد که در آن $\mathbb{A}$ با یک ماتریس قطری نمایش داده می‌شود که عناصرش صرفاً ویژه‌مقادیر $\mathbb{A}$ هستند. اگر همهٔ ویژه‌مقادیر صفر باشند، این ماتریس، به‌ماتریس صفر کاهش می‌یابد. تبدیل ماتریس صفر به هر پایهٔ دیگر، به ماتریس صفر منجر می‌شود. بنابراین، $\mathbb{A}$ در تمام پایه‌ها با ماتریس صفر نمایش داده می‌شود. یعنی، $\mathbb{A}$ عملگر صفر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که یک عملگر متقارن ناصفر در یک فضای برداری متناهی‌ـبعد حداقل دارای یک ویژه‌مقدار ناصفر است.

با تغییرات مناسب، بحث قبل را می‌توان به حالت نامتناهی‌ـبعد تعمیم داد. در حالت خاص، عملگرهای انتگرالی متقارن و حقیقی در صورتی که بخواهند متحد با صفر نباشند باید ویژه‌مقدارهای ناصفر داشته باشند.

می‌خواهیم یک عملگر انتگرالی متقارن را تجزیهٔ طیفی کنیم. مشخصاً، می‌خواهیم هسته را به‌صورت یک مجموع (نامتناهی) از حاصلضرب توابع بیان کنیم. برای انجام این کار، دوباره به مورد متناهی‌ـبعد نگاهی می‌اندازیم.

از فصل ۳ یا زیربخش ۱۱ـ۲ـ۴ به یاد بیاورید که عملگر هرمیتی (یا متقارن حقیقی) $\mathbb{A}$ را

می‌توان به‌صورت $\mathbb{A} = \sum_{i=۱}^{r} \lambda_i \mathbb{P}_i$ بیان کرد که در آن λ_i ویژه‌مقادیر $\mathbb{A}$ و $\mathbb{P}_i$ عملگرهای تصویر به زیرفضای $\mathscr{M}_{\lambda_i}$ هستند که با ویژه‌بردارهای متناظر با λ_i فراگرفته می‌شود. اگر پایهٔ $\{|\mathrm{e}_k^{(i)}\rangle\}_{k=۱}^{m_i}$ را برای $\mathscr{M}_{\lambda_i}$ داشته باشیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbb{P}_i = \sum_{k=۱}^{m_i} |\mathrm{e}_k^{(i)}\rangle\langle \mathrm{e}_k^{(i)}|$$

و

$$\mathbb{A} = \sum_{i=۱}^{r} \lambda_i \sum_{k=۱}^{m_i} |\mathrm{e}_k^{(i)}\rangle\langle \mathrm{e}_k^{(i)}|$$

اگر گردایهٔ همهٔ $|\mathrm{e}_k^{(i)}\rangle$ را به‌ازای مقادیر مختلف i و k در نظر بگیریم، یک پایه برای تمامی فضای برداری به‌دست می‌آید، که ما آن را با $\mathbf{B} = \{|\mathrm{e}_j\rangle\}_{j=۱}^{N}$ نمایش می‌دهیم. اگر تکرار λها را نیز مجاز بشماریم، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbb{A} = \sum_{j=۱}^{N} \lambda_j |\mathrm{e}_j\rangle\langle \mathrm{e}_j|$$

با استفاده از قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۵، می‌توانیم تعمیم صوری بالا را به یک عملگر انتگرالی متقارن بنویسیم

$$\mathbb{K} = \sum_{j} \lambda_j |\mathrm{f}_j\rangle\langle \mathrm{f}_j|$$

با "قراردادن" این رابطه مابین $|\mathrm{x}\rangle$ و $\langle \mathrm{y}|$، خواهیم داشت

$$K(x,y) = \sum_{j} \lambda_j f_j(x) f_j(y) \qquad (۱۱\text{ـ}۱۳)$$

که شکل مطلوب است. معادلهٔ (۱۱ـ۱۳)، در حالت کلی، یک مجموع نامتناهی است. اما، ممکن است تمام جمله‌های مجموع، جز تعدادی متناهی از آنها، صفر باشند. در آن‌صورت هسته تفکیک‌پذیر خواهد بود. این مفهوم را می‌توان به‌صورت یک گزاره بیان کرد.

گزارهٔ ۱۱ـ۲ـ۶: فرض کنید $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ ویژه‌مقادیر ناصفر یک عملگر انتگرالی متقارن $\mathbb{K}$ و $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ ویژه‌توابع راست‌هنجار متناظر با آنها هستند. اگر $\mathbb{K}$ هیچ ویژه‌مقدار ناصفر دیگری نداشته باشد، در آن‌صورت

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x)f_j(y)$$

یعنی، K تفکیک‌پذیر است.

این گزاره، قضیهٔ عکس ۱۱ـ۲ـ۱، و همچنین مشابه قضیهٔ تجزیهٔ طیفی برای عملگرهای انتگرالی متقارنی است که تعدادی متناهی ویژه‌مقدار ناصفر دارند (عملگرهای انتگرالی تفکیک‌پذیر) مجموع در گزاره، یک مجموع نامتناهی است که در آن تمام ضرایب λ_j، جز تعدادی متناهی از آنها، صفرند.

اگر تعداد ویژه‌مقدارهای ناصفر $\mathbb{K}$ نامتناهی باشد، در آن‌صورت مجموع (۱۱ـ۱۳) فقط در صورتی به‌طور یکنواخت و مطلق همگراست که $K(x,y)$ نیم‌معین مثبت باشد، یا

$$\langle \mathrm{f}|\mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle \geq 0 \qquad \forall f\in\mathscr{R}(a,b)$$

فقط برای چنین هسته‌ای است که معادلهٔ (۱۱ـ۱۳) دارای معنی است.

تمرینها

۱۱ـ۲ـ۱ نشان دهید اگر به‌ازای همهٔ $f,g\in\mathscr{R}(a,b)$، عملگر $\mathbb{K}$ در رابطهٔ $\langle\mathbb{K}\mathrm{f}|\mathrm{g}\rangle=\langle\mathrm{f}|\mathbb{K}\mathrm{g}\rangle$ صدق کند، در آن‌صورت هستهٔ $\mathbb{K}$ در رابطهٔ $K(x,y)=K^*(y,x)$ صدق خواهد کرد.

۱۱ـ۲ـ۲ ویژه‌مقدارهای ناصفر و ویژه‌توابع نظیر آنها را برای هستهٔ $K(x,y)=xy$ در بازهٔ $a\leq x,y\leq b$ پیدا کنید.

۱۱ـ۲ـ۳ نشان دهید که عملگر تکانهٔ $-id/dx$ کراندار نیست. [راهنمایی: $\mathscr{L}^2(0,a)$ را به‌ازای $a>0$ در نظر بگیرید و یک مثال نقض پیدا کنید.]

۱۱ـ۲ـ۴ معادلهٔ (۱۱ـ۶) را به‌دست آورید.

۱۱ـ۲ـ۵ برای یک عملگر هرمیتی $\mathbb{A}$، نشان دهید که

$$\|\,\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})|\mathrm{u}\rangle\,\|\leq\frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}\,\|\,\mathrm{u}\,\|$$

۱۱ـ۲ـ۶ با استفاده از تعریف (۱۱ـ۱۰ب)، نشان دهید که $\mathbb{P}_j$ خودتوانهای متعامدند. [راهنمایی: $\mathbb{P}_j^{۲}$ را به‌صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید و (۱۱ـ۶) را به‌کار ببرید.]

۱۱ـ۲ـ۷ با استفاده از روش تمرین ۱۱ـ۲ـ۶ نشان دهید که

$$\mathbb{D}_j^n = -\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{\gamma_j}(\lambda-\lambda_j)^n \mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A})d\lambda$$

[راهنمایی: از استقرای ریاضی استفاده کنید.)

۱۱ـ۲ـ۸ نشان دهید که برای ماتریس هرمیتی A، حلال $\mathsf{R}_\lambda(\mathsf{A})$، فقط دارای قطبهای ساده است. [راهنمایی: نامساوی تمرین ۱۱ـ۲ـ۵ را در $|\lambda-\lambda_j|$ ضرب کنید و نشان دهید که عبارت سمت چپ حتی وقتی $\lambda \to \lambda_j$، متناهی است.]

۱۱ـ۲ـ۹ نشان دهید که $\mathbb{P}_j$ در معادله‌های (۱۱ـ۱۰) وقتی هرمیتی‌اند که $\mathbb{A}$ هرمیتی باشد. [راهنمایی: مزدوج هرمیتی معادلهٔ (۱۱ـ۱۰ب) را بگیرید.]

۱۱ـ۳ تبدیلهای انتگرالی و معادلات دیفرانسیل

در فصل ۹ با یک روش کلی برای حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریهای توانی، موسوم به روش فروبنیوس، آشنا شدیم که جوابی را به‌دست می‌دهد که در محدودهٔ یک دایرهٔ همگرایی، همگراست. در حالت کلی، این دایرهٔ همگرایی ممکن است کوچک باشد؛ اما، تابعی که توسط سری توانی نمایش داده می‌شود به کمک روشهای ارائه شده در فصل ۷ می‌تواند به‌طور تحلیلی پیوسته باشد. در این بخش با روش دیگری آشنا خواهیم شد که تبدیلهای انتگرالی را به‌کار گرفته و پیوستگی تحلیلی را خودبه‌خود دربردارد. بنابراین، به‌جای یک سری نامتناهی، جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل، $u(z)$، با تبدیل انتگرالی زیر نمایش داده می‌شود

$$u(z) = \int_C K(z,t)v(t)dt$$

که در آن مسیر C، هسته $K(z,t)$، و تابع $v(t)$ را باید تعیین کنیم.

فرض کنید $\mathbb{L}_z$ یک معادلهٔ دیفرانسیل برحسب z است. می‌خواهیم $u(z)$ را چنان تعیین کنیم که

$$\mathbb{L}_z[u] = ۰$$

یا، به‌نحوی مشابه، داشته باشیم

$$\int_C (\mathbb{L}_z[K(z,t)])v(t)dt = ۰$$

فرض کنید بتوانیم $\mathbb{M}_t$، یعنی معادلهٔ دیفرانسیلی برحسب متغیر t، را طوری بیابیم که

$$\mathbb{L}_z[K(z,t)] = \mathbb{M}_t[K(z,t)]$$

در آن‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل تبدیل می‌شود به

$$\int_C (\mathbb{M}_t[K(z,t)])v(t)dt = ۰$$

اگر $\mathbb{M}_t^\dagger$ الحاقی $\mathbb{M}_t$ و a و b نقاط ابتدایی و انتهایی C باشند (a و b ممکن است برهم منطبق باشند)، در آن‌صورت اتحاد لاگرانژ [معادلهٔ (۹ـ۲۱ب)] منجر می‌شود به

$$۰ = \mathbb{L}_z[u] = \int_a^b K(z,t)\mathbb{M}_t^\dagger[v(t)]dt + Q(K,v)\Big|_a^b$$

که در آن $Q(K,v)$ جمله رویه‌ای است. بنابراین، اگر $v(t)$ و مسیر C (یا a و b) را چنان تعیین کنیم که

$$\mathbb{M}_t^\dagger[v] = ۰ \quad \text{و} \quad Q(K,v)|_a^b = ۰ \qquad (۱۱\text{ـ}۱۴)$$

در آن‌صورت مسئله حل شده است. نکته اینجاست که $\mathbb{M}_t$ را چنان تعیین کنیم که حل (۱۱ـ۱۴) آسانتر از حل معادلهٔ اولیه $\mathbb{L}_z[u] = ۰$ باشد. این معادله نیز به‌نوبهٔ خود با گزینش ماهرانهٔ هستهٔ $K(z,t)$ تسهیل می‌شود.

در این بخش چگونگی حل برخی معادلات دیفرانسیل متداول در فیزیک ریاضیاتی را با استفاده از دیدگاهی که در بالا مطرح شد، بررسی خواهیم کرد.

۱۱ـ۳ـ۱ نمایشهای انتگرالی تابع ابرهندسی و تابع ابرهندسی همشار

به یاد بیاورید که برای معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی، عملگر دیفرانسیلی عبارت است از

$$\mathbb{L}_z = z(۱-z)\frac{d^۲}{dz^۲} + [\gamma - (\alpha+\beta+۱)z]\frac{d}{dz} - \alpha\beta$$

برای چنین عملگرهایی، که توابع ضریب آنها چندجمله‌ای‌اند، گزینش مناسب برای $K(z,t)$، هستهٔ اویلر عبارت است از $(z-t)^s$. با اعمال $\mathbb{L}_z$ بر این هسته، خواهیم داشت

$$\mathbb{L}_z[K(z,t)] = z(1-z)s(s-1)(z-t)^{s-2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]s(z-t)^{s-1} - \alpha\beta(z-t)^s$$

$$= \{z^2[-s(s-1) - s(\alpha+\beta+1) - \alpha\beta] + z[s(s-1) + s\gamma + st(\alpha+\beta+1) + 2\alpha\beta t] - \gamma st - \alpha\beta t^2\}(z-t)^{s-2} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۵)$$

توجه کنید که، گذشته از یک ثابت ضربی، $K(z,t)$ نسبت به z و t متقارن است. این حکم پیشنهاد می‌شود که شکل کلی $\mathbb{M}_t$ را می‌توان مانند شکل $\mathbb{L}_z$ برگزید، با این تفاوت که جای z و t را با هم عوض کرد. اگر بتوانیم پارامترها را چنان دستکاری کنیم که $\mathbb{M}_t$ شکل ساده‌ای پیدا بکند، در آن‌صورت اقبال حل کردن مسئله به ما روی خواهد نمود. برای مثال، اگر $\mathbb{M}_t$ همان شکل $\mathbb{L}_z$ بدون حضور جملهٔ ثابت را داشته باشد، در آن‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی، عملاً به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (برحسب dv/dt) کاهش می‌یابد. ما از این امکان استفاده می‌کنیم.

معادلهٔ (۱۱ـ۱۵) نشان می‌دهد که اعمال $\mathbb{L}_z$ بر $K(z,t)$، علاوه بر عامل مشترک و کلی $(z-t)^{s-2}$، یک عبارت درجهٔ دوم برحسب t ایجاد می‌کند که جملهٔ t^2 در آن دارای ضریب $-\alpha\beta$ است. تقارن t و z به معنای این است که، چون $\mathbb{L}_z[K(z,t)] = \mathbb{M}_t[K(z,t)]$، وقتی $\mathbb{M}_t$ بر $K(z,t)$ اثر کند نیز درست همان عبارت درجهٔ دوم پدید می‌آید. با این همه، در مورد $\mathbb{M}_t$ ما این آزادی عمل را داریم که s را چنان انتخاب کنیم که جملهٔ z^2 غایب باشد. در آن‌صورت جملهٔ ثابت حذف خواهد شد، و معادلهٔ دیفرانسیل شامل $\mathbb{M}_t$ را به آسانی می‌توان حل کرد. بنابراین، با مساوی صفر قرار دادن ضریب z^2 خواهیم داشت

$$s^2 + s(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\alpha \quad \text{یا} \quad s = -\beta$$

اگر گزینهٔ $s = -\alpha$ را در نظر بگیریم ($s = -\beta$ منجر به نمایش متفاوتی خواهد شد)، داریم

$$\mathbb{L}_z[K(z,t) = \mathbb{M}_t[K(z,t)] = \{z[\alpha(\alpha+1) - \alpha\gamma + \alpha t(\beta-\alpha-1)] + \alpha\gamma t - \alpha\beta t^2\}(z-t)^{-\alpha-2}$$

$$= \{(z-t)[\alpha(\alpha+1)-\alpha\gamma+\alpha t(\beta-\alpha-1)]$$
$$+t[\alpha(\alpha+1)-\alpha\gamma$$
$$+\alpha t(\beta-\alpha-1)]+\alpha\gamma t-\alpha\beta t^2\}(z-t)^{-\alpha-2}$$
$$=[\alpha(\alpha+1)-\alpha\gamma+\alpha t(\beta-\alpha-1)](z-t)^{-\alpha-1}$$
$$+\alpha(\alpha+1)(t-t^2)(z-t)^{-\alpha-2}$$
$$=\left\{(t-t^2)\frac{d^2}{dt^2}+[\alpha+1-\gamma+t(\beta-\alpha-1)]\frac{d}{dt}\right\}(z-t)^{-\alpha}$$

بنابراین

$$\mathbb{M}_t=(t-t^2)\frac{d^2}{dt^2}+[\alpha+1-\gamma+t(\beta-\alpha-1)]\frac{d}{dt} \qquad \text{(۱۱ـ۱۶الف)}$$

که منجر می‌شود به معادلهٔ دیفرانسیل

$$\mathbb{M}_t[u]=(t-t^2)\frac{d^2u}{dt^2}+[\alpha+1-\gamma+t(\beta-\alpha-1)]\frac{du}{dt}=0$$

اما، ما به معادلهٔ الحاقی علاقه‌مندیم، که با مراجعه به معادلهٔ (۹ـ۱۹الف) به آسانی پیدا می‌شود

$$\mathbb{M}_t^\dagger[v]=\frac{d^2}{dt^2}[(t-t^2)v(t)]-\frac{d}{dt}\{[\alpha-\gamma+1+t(\beta-\alpha-1)]v(t)\}=0$$
(۱۱ـ۱۶ب)

جواب این معادله عبارت است از (تمرین ۱۱ـ۳ـ۱):

$$v(t)=Ct^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}$$

ما همچنین به جملهٔ رویه‌ای، $Q(K,v)$، در اتحاد لاگرانژ نیاز داریم. پس از محاسبهٔ (تمرین ۱۱ـ۳ـ۲)، داریم:

$$Q(K,v)=C\alpha t^{\alpha-\gamma+1}(t-1)^{\gamma-\beta}(z-t)^{-\alpha-1}$$

و بالاخره، باید مسیر را مشخص کنیم. برای مسیرهای مختلف، جوابهای متفاوتی خواهیم داشت. مسیر انتخابی، البته باید دارای این ویژگی باشد که در اثر انتگرال‌گیری نقش $Q(K,v)$ از بین برود. دو امکان وجود دارد: یا مسیر بسته است [در معادلهٔ (۱۱ـ۱۴)، $a=b$] یا $a \neq b$، اما $Q(K,v)$ در a و b یک مقدار دارد.

بگذارید امکان دوم را در نظر بگیریم. روشن است که اگر $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta)$، آنگاه $Q(K,v)$ در $t=۱$ صفر می‌شود. همچنین، وقتی $t \to \infty$،

$$Q(K,v) \to (-۱)^{-\alpha-۱} C\alpha t^{\alpha-\gamma+۱} t^{\gamma-\beta} t^{-\alpha-۱} = (-۱)^{-\alpha-۱} C\alpha t^{-\beta}$$

که اگر $\operatorname{Re}(\beta) > ۰$، صفر می‌شود. بنابراین، فرض می‌کنیم $a=۱$ و $b=\infty$ و $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta) > ۰$. در نتیجه (به تعویض جای z و t در عامل اول توجه کنید) خواهیم داشت:

$$u(z) = C' \int_۱^\infty (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} (t-۱)^{\gamma-\beta-۱} dt \qquad (۱۱\text{ـ}۱۷)$$

می‌توان نشان داد که ثابت C' مساوی $\Gamma(\gamma)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)$ است (تمرین ۱۱ـ۳ـ۳). بنابراین

$$u(z) \equiv F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_۱^\infty (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} (t-۱)^{\gamma-\beta-۱} dt$$

با تغییر متغیر از t به $۱/t$، فرمولی به‌دست می‌آید که به فرمول اویلر برای تابع ابرهندسی معروف است

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_۰^۱ (۱-tz)^{-\alpha} t^{\beta-۱} (۱-t)^{\gamma-\beta-۱} dt \qquad (۱۱\text{ـ}۱۸)$$

در روند دستیابی به (۱۱ـ۱۸)، ناچار بوده‌ایم فرض کنیم $|z| < ۱$ (تمرین ۱۱ـ۳ـ۳). اکنون می‌توانیم $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ را به‌طور تحلیلی به تمام ناحیه‌هایی از صفحهٔ مختلط ادامه دهیم که انتگرال در آن خوش‌تعریف است. تنها جمله‌ای که در انتگرال ممکن است معضلی ایجاد کند عبارت است از $(۱-tz)^{-\alpha}$. به‌ازای مقدار دلخواه α، این جمله دارای دو نقطهٔ شاخه، یکی در $z=۱/t$ و دیگری در $z=\infty$ است. بنابراین، ما صفحهٔ z را از $z_۱=۱/t$، نقطه‌ای واقع بر محور اعداد حقیقی مثبت، تا $z_۲=\infty$ می‌بریم. چون $۰ \le t \le ۱$، پس $z_۱$ در بازهٔ $[۱,\infty]$ قرار دارد. برای اطمینان از قابل اعمال بودن برش بر تمام مقادیر t، فرض می‌کنیم $z_۱=۱$ و صفحه را در امتداد محور

حقیقی مثبت برش می‌زنیم. نتیجه‌ای که به‌دست می‌آید به این قرار است که مادام که داشته باشیم

$$0 < \arg(1-z) < 2\pi \qquad (۱۱\text{_}۱۹)$$

معادلهٔ (۱۱_۱۸) خوش‌رفتار خواهد بود.

می‌توان مسیر دیگری را نیز انتخاب کرد، که عموماً به‌جواب متفاوتی می‌انجامد. مثلاً، مطابق تمرین ۱۱_۳_۴، مسیر از $t = 0$ تا $t = 1$، منجر می‌شود به این جواب

$$w(z) = C\int_0^1 (z-t)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}dt$$

که با انتخاب مناسب ثابت C، می‌انجامد به

$$\begin{aligned} w(z) &= z^{-\alpha}F(\alpha, \alpha-\gamma+1; \alpha-\beta+1; 1/z) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\int_0^1 (z-t)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt \end{aligned}$$

این جوابی است که در مثال ۹_۵_۵ به‌دست آمد.

اکنون که نمایش انتگرالی تابع ابرهندسی را به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم به آسانی نمایش انتگرالی تابع ابرهندسی همشار را نیز با گرفتن حد مناسب پیدا کنیم.

در بخش ۹_۵_۵ نشان داده شد که

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right)$$

بنابراین، باگرفتن حد (۱۱_۱۸)، باید بتوان $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ را به‌دست آورد. حضور $\Gamma(\beta)$ و $\Gamma(\gamma-\beta)$ کار را قدری پیچیده می‌کند، اما از سوی دیگر، تقارن تابع ابرهندسی از عوامل کمک‌کننده به‌شمار می‌آید. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \gamma; z) &= \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty} F\left(\beta, \alpha; \gamma; \frac{z}{\beta}\right) \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 \left(1-\frac{tz}{\beta}\right)^{-\beta} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{tz}{\beta}\right)^{-\beta}=e^{tz}$$

در معادلهٔ بالا برای $\Phi(\alpha,\gamma;z)$، نهایتاً خواهیم داشت

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{tz}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \quad (۱۱\text{ـ}۲۰)$$

توجه داشته باشید که شرط $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$ هنوز در اینجا باید برقرار باشد.

تبدیلهای انتگرالی، به‌خصوص در تعیین رفتار مجانبی توابع مفید واقع می‌شوند. در مثال زیر، این رفتار تابع ابرهندسی همشار بررسی می‌شود.

مثال ۱۱ـ۳ـ۱: می‌خواهیم با استفاده از نمایش انتگرالی، رفتار مجانبی $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ را وقتی $t\to\infty$، تعیین کنیم

معادلهٔ (۱۱ـ۲۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\left[-\int_{-\infty}^{0} e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{1} e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\right]$$

با قرار دادن $-t/z$ به‌جای t در انتگرال اول و $1-t/z$ در انتگرال دوم، معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha,\gamma;z)=&\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\left[-\int_{\infty}^{0} e^{-t}\left(-\frac{t}{z}\right)^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(-\frac{dt}{z}\right)\right.\\&\left.+\int_{\infty}^{0} e^{z(1-t/z)}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(-\frac{dt}{z}\right)\right]\\=&\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\left[(-z)^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}dt\right.\\&\left.+z^{\alpha-\gamma}e^{z}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\alpha-1}dt\right]\end{aligned}$$

با این فرض که در امتداد محور حقیقی مثبت $z \to \infty$، دومین جملهٔ داخل کروشه‌ها به‌علت وجود عامل نهایی در آن، غالب خواهد شد. همچنین، وقتی $z \to \infty$، انتگرال موجود در جملهٔ دوم به $\Gamma(\gamma - \alpha)$ میل می‌کند (فصل ۱۴). بنابراین، وقتی $z \to \infty$، داریم

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) \to \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-\gamma} e^{z}$$

●

۱۱ـ۳ـ۲ نمایش انتگرالی و رفتار مجانبی تابعهای بسل

انتخاب هسته، مسیر، و تابع $v(t)$ که منجر به نمایش انتگرالی یک تابع می‌شوند، خود یک هنر به‌حساب می‌آید، و قرن نوزدهم استادانی را در این زمینه به میدان آورد. یک موضوع مخصوصاً فراگیر در روند این تلاشها، معادلهٔ بسل و توابع بسل بود. در این بخش نمایشهای انتگرالی توابع بسل را بررسی می‌کنیم.

همان‌گونه که در مثال ۱۱ـ۲ـ۱ آمد، یک هستهٔ مفید برای معادلهٔ بسل عبارت است از

$$K(z,t) = \left(\frac{z}{۲}\right)^{\nu} \exp\left(t - \frac{z^{۲}}{۴t}\right)$$

وقتی عامل دیفرانسیلی بسل،

$$\mathbb{L}_z \equiv \frac{d^{۲}}{dz^{۲}} + \frac{۱}{z}\,\frac{d}{dz} + \left(۱ - \frac{\nu^{۲}}{z^{۲}}\right)$$

بر $K(z,t)$ تأثیر کند، نتیجه می‌شود

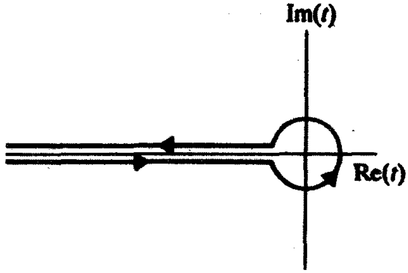
$$\mathbb{L}_z K(z,t) = \left(-\frac{\nu+۱}{t} + ۱ + \frac{z^{۲}}{۴t^{۲}}\right)\left(\frac{z}{۲}\right)^{\nu} e^{t-z^{۲}/۴t} = \left(\frac{d}{dt} - \frac{\nu+۱}{t}\right) K(z,t)$$

بنابراین، $\mathbb{M}_t = d/dt - (\nu+۱)/t$، و معادلهٔ (۹ـ۱۹الف) می‌دهد

$$\mathbb{M}_t^{\dagger}[v(t)] = -\frac{dv}{dt} - \frac{\nu+۱}{t} v = ۰$$

که جواب آن، که شامل ثابت دلخواه انتگرال‌گیری k است، عبارت است از

$$v(t) = kt^{-\nu-۱}$$



شکل ۱۱ـ۲ مسیر C در صفحهٔ t که در محاسبهٔ $J_\nu(z)$ به‌کار می‌رود.

وقتی این جواب و هسته را در جملهٔ رویه‌ای اتحاد لاگرانژ، معادلهٔ (۹ـ۲۱)، قرار بدهیم، خواهیم داشت

$$Q(K,v)=p_1Kv=k\left(\frac{z}{2}\right)^\nu t^{-\nu-1}e^{t-z^2/4t}$$

مسیری که در صفحهٔ t به‌ازای جمیع مقادیر v صفر شدن نقش $Q(K,v)$ را تضمین می‌کند، در $t=-\infty$ آغاز می‌شود، به مبدأ می‌آید، آن را دور می‌زند، و نهایتاً به $t=-\infty$ باز می‌گردد (شکل ۱۱ـ۲). به‌علت وجود عامل e^t در عبارت مربوط به $Q(K,v)$ این مسیر امکان‌پذیر است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$J_\nu(z)=k\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_C t^{-\nu-1}e^{t-z^2/4t}dt \qquad (۱۱\text{ـ}۲۱)$$

توجه کنید که انتگرالده به علت وجود عامل $t^{-\nu-1}$ دارای یک برش در امتداد محور حقیقی منفی است. اگر ν یک عدد صحیح باشد، برش در $t=0$ به یک قطب کاهش می‌یابد.

ثابت k را باید چنان تعیین کنیم که عبارت بالا برای $J_\nu(z)$ با نمایش سری به‌دست آمده در فصل ۹ بخواند. می‌توان نشان داد (تمرین ۱۱ـ۳ـ۵) که $k=1/2\pi i$. بنابراین، داریم

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_C t^{-\nu-1}\ e^{t-z^2/4t}dt$$

بهتر است عامل $(z/2)^\nu$ را به داخل انتگرال ببریم، متغیر انتگرال‌گیری جدید $u=2t/z$ را معرفی، و معادلهٔ قبل را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u^{-\nu-1}\ e^{(z/2)(u-1/u)}du \qquad (۱۱\text{ـ}۲۲)$$

این نتیجه مادامی صادق است که وقتی روی محور حقیقی منفی $u \to -\infty$، آنگاه $\operatorname{Re}(zu) < 0$؛ یعنی برای کارایی (۱۱ـ۲)، $\operatorname{Re}(z)$ باید مثبت باشد.

وقتی ν یک عدد صحیح است، نتیجهٔ جالبی از (۱۱ـ۲۲) به‌دست می‌آید، زیرا در این‌صورت تنها تکین در مبدأ خواهد بود، و در نتیجه مسیر را می‌توان به‌صورت یک دایره حول مبدأ در نظر گرفت. این حکم منجر می‌شود به

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C u^{-n-1} e^{(z/2)(u-1/u)}du$$

که، بنابر قضیهٔ ۷ـ۱ـ۴، nامین ضریب بسط لوران $\exp[(z/2)(u-1/u)]$ حول مبدأ است. به این ترتیب، به نتیجهٔ مهم زیر خواهیم رسید

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n \qquad (۱۱\text{ـ}۲۳)$$

بنابراین، تابع $\exp[(z/2)(t-1/t)]$ را، همان‌گونه که اقتضا می‌کند، تابع مولد توابع بسل درست‌ـمرتبه می‌خوانند. معادلهٔ (۱۱ـ۲۳) می‌تواند در به‌دست آوردن روابط برای این‌گونه توابع بسل مفید باشد.

مثال ۱۱ـ۳ـ۲: عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱۱ـ۲۳) را به‌صورت $\exp(zt/2)\exp(-z/2t)$ می‌نویسیم، توابع نمایی را بسط می‌دهیم و با گردآوری جمله‌ها می‌رسیم به

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = e^{zt/2}e^{-z/2t} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{zt}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{z}{2t}\right)^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+n} t^{m-n} \qquad (۱)$$

با فرض $m-n=k$، تغییر مجموع‌یابی روی m به k، و توجه به اینکه k از $-\infty$ به $+\infty$ می‌رود، خواهیم داشت

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+k)!n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k} t^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\right]t^k \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۲) با (۱۱ـ۲۳)، بسط تابع بسل به‌دست می‌آید

$$J_k(z) = \left(\frac{z}{۲}\right)^k \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\Gamma(n+k+۱)\Gamma(n+۱)} \left(\frac{z}{۲}\right)^{۲n}$$

همچنین، می‌توانیم یک رابطهٔ بازگشتی برای $J_n(z)$ به‌دست بیاوریم. با مشتق گرفتن از دو طرف (۱۱ـ۲۳) نسبت به t خواهیم داشت

$$\frac{z}{۲}\left(۱+\frac{۱}{t^۲}\right) e^{(z/۲)(t-۱/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(z)t^{n-۱} \tag{۳}$$

با استفاده از (۱۱ـ۲۳)، عبارت سمت چپ می‌دهد:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{۲}+\frac{z}{۲t^۲}\right) J_n(z)t^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{۲} J_n(z)t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{۲} J_n(z)t^{n-۲} \\ &= \frac{z}{۲} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-۱}(z)t^{n-۱} + \frac{z}{۲} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+۱}(z)t^{n-۱} \\ &= \frac{z}{۲} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-۱}(z)+J_{n+۱}(z)]t^{n-۱} \end{aligned} \tag{۴}$$

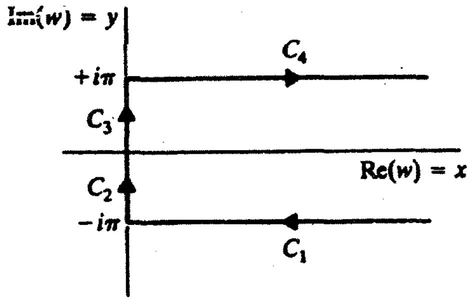
که در نخستین مجموع به‌جای n قرار داده‌ایم $n-۱$ و در دومین مجموع قرار داده‌ایم $n+۱$. با مساوی قرار دادن توانهای t در معادله‌های (۳) و (۴)، داریم

$$nJ_n(z) = \frac{z}{۲}[J_{n-۱}(z)+J_{n+۱}(z)]$$

که در فصل ۹ به نحو دیگری به‌دست آمد [معادلهٔ (۹ـ۷۸)]. ●

با شروع از (۱۱ـ۲۲) و جایگزینیهایی متفاوت، نمایشهای انتگرالی دیگری برای توابع بسل به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال، می‌توانیم قرار بدهیم $u=e^w$ و فرض کنیم دایرهٔ مسیر C دارای شعاع واحد است (این امر امکان‌پذیر است زیرا با بزرگ کردن ε تا ۱، با هیچ تکینگی روبرو نمی‌شویم). مسیر C' در صفحهٔ w به‌صورت زیر تعیین می‌شود. می‌نویسیم $u=re^{i\theta}$ و $w=x+iy$، بنابراین

$$re^{i\theta}=e^x e^{iy} \quad \Rightarrow \quad r=e^x \quad \text{و} \quad e^{i\theta}=e^{iy}$$



شکل ۱۱ـ۳ مسیر C' در صفحهٔ w برای محاسبهٔ $J_\nu(z)$.

در امتداد قسمت اول C، داریم $\theta = -\pi$ و r از ∞ به ۱ می‌رود. بنابراین، در امتداد قسمت متناظر C'، $y = -\pi$ و x از ∞ به صفر می‌رود. روی دایرهٔ C، $r = ۱$ و θ از $-\pi$ به $+\pi$ می‌رود. بنابراین، در امتداد قسمت متناظر C'، $x = ۰$ و y از $-\pi$ به $+\pi$ می‌رود. بالاخره، در قسمت آخر C'، $y = \pi$ و x از صفر به ∞ می‌رود. بنابراین، مسیر C' در صفحهٔ w مطابق شکل ۱۱ـ۳ خواهد بود.

باجایگزینی $u = e^w$ در (۱۱ـ۲۲)، خواهیم داشت

$$J_\nu(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C'} e^{z\sinh w - \nu w}dw \qquad \mathrm{Re}(z) > ۰ \tag{۱۱ـ۲۴}$$

که می‌توان آن را به عبارت زیر تبدیل کرد (تمرین ۱۱ـ۳ـ۶)

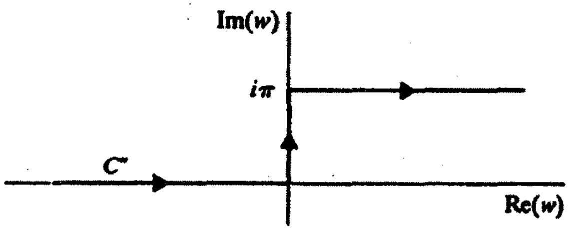
$$J_\nu(z) = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_۰^\infty e^{-\nu t - z\sinh t}dt \qquad \mathrm{Re}(z) > ۰ \tag{۱۱ـ۲۵}$$

اگر n عدد درستی باشد، به حالت خاصی خواهیم رسید

$$J_n(z) = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta$$

در حالت خاص

$$J_۰(z) = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \cos(z\sin\theta)d\theta$$



شکل ۱۱ـ۴ مسیر C'' در صفحهٔ w که برای محاسبهٔ $H_\nu^{(1)}(z)$ به‌کار رفته است.

با استفاده از نمایش انتگرالی $J_\nu(z)$ می‌توان نمایش انتگرالی انواع دیگر توابع بسل را پیدا کرد. مثلاً، برای به‌دست آوردن نمایش انتگرالی تابع نویمان $Y_{\nu(z)}$، معادلهٔ (۹ـ۷۴) را به‌کار می‌گیریم

$$\begin{aligned}Y_\nu(z) =&(\cot \nu\pi)J_\nu(z) - \frac{1}{\sin \nu\pi}J_{-\nu}(z)\\ =&\frac{\cot \nu\pi}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta - \frac{\cos \nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t - z\sinh t}dt\\ &- \frac{1}{\pi \sin \nu\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta + z\sin\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\nu t - z\sinh t}dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0\end{aligned}$$

با قرار دادن $\pi - \theta$ به‌جای θ در سومین انتگرال سمت راست و جایگزین کردن نتیجهٔ حاصل و معادلهٔ (۱۱ـ۲۵) در $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$، خواهیم داشت

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i(z\sin\theta - \nu\theta)}d\theta + \frac{1}{i\pi}\int_0^\infty e^{\nu t - z\sinh t}dt + \frac{e^{-i\nu\pi}}{i\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t - z\sinh t}dt$$

این عبارت را به آسانی می‌توان با انتگرال‌گیری در امتداد مسیر C'' شکل ۱۱ـ۴ اثبات کرد. بنابراین، داریم

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{C''} e^{z\sinh w - \nu w}dw \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

با تغییر i به $-i$، می‌توان نشان داد که

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{i\pi}\int_{C'''} e^{z\sinh w - \nu w}dw \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

که C''' تصویر آینه‌ای C'' نسبت به محور حقیقی است.

همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، نمایشهای انتگرالی، به‌خصوص برای تعیین رفتار مجانبی توابع مفیدند. برای توابع بسل می‌توانیم دو نوع حد در نظر بگیریم. با فرض اینکه ν و $x \equiv z$ هر دو حقیقی‌اند، داریم $\nu \to \infty$ یا $x \to \infty$. ابتدا، بگذارید رفتار $J_\nu(x)$ بزرگ مرتبه $(\nu \to \infty)$ را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم $\nu > x$، و می‌نویسیم

$$\nu \equiv x\cosh w_\circ \qquad w_\circ > \circ$$

در این‌صورت معادلهٔ (۱۱ـ۲۴) منجر می‌شود به

$$J_\nu(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C'} e^{x(\sinh w - w\cosh w_\circ)}dw$$

به زبان بخش ۷ـ۵ (با قراردادن w به‌جای z)، داریم

$$g(w) = ۱ \qquad \text{و} \qquad f(w) = \sinh w - w\cosh w_\circ$$

نقطهٔ زینی از $df/dw = \circ$ یا $\cosh w = \cosh w_\circ$ به‌دست می‌آید. بنابراین، به‌ازای $n = \circ, ۱, ۲, \ldots$، داریم $w = \pm w_\circ + ۲in\pi$. چون مسیر C' در عبارت سمت راست قرار دارد، ما نقطهٔ $w_\circ$ را به‌عنوان نقطهٔ زینی انتخاب می‌کنیم.

اکنون باید مسیری را پیدا کنیم که از $w_\circ$ بگذرد و در امتداد آن رابطهٔ

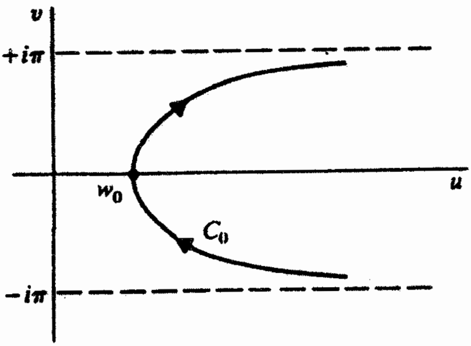
$$\mathrm{Im}[f(w)] = \mathrm{Im}[f(w_\circ)] = \circ$$

برقرار باشد. با نوشتن $w = u + iv$، داریم

$$\begin{aligned} f(w) &= \sinh u\cosh iv + \cosh u \sinh iv - (u+iv)(\cosh w_\circ) \\ &= \sinh u \cos v - u\cosh w_\circ + i(\cosh u \sin v - v\cosh w_\circ) \end{aligned}$$

بنابراین، تساوی $\mathrm{Im}[f(w)] = \circ$، مسیر

$$\cosh u = \frac{v\cosh w_\circ}{\sin v}$$



شکل ۱۱ـ۵ مسیر $C_\circ$ در صفحهٔ w که برای محاسبهٔ $J_\nu(\nu\alpha)$ به‌ازای مقادیر بزرگ ν به‌کار می‌رود.

را، که در شکل ۱۱ـ۵ نشان داده شده است، تعیین می‌کند. روشن است که مسیر C' معادلهٔ (۱۱ـ۲۴) را می‌توان به $C_\circ$ تغییر داد (شکل ۱۱ـ۳).

اکنون متغیر حقیقی

$$t^{2} \equiv \sinh w_\circ - w_\circ \cosh w_\circ - (\sinh w - w \cosh w_\circ)$$

را معرفی می‌کنیم [معادله‌های (۷ـ۲۰) و (۷ـ۲۳)]. با بسط این متغیر در حول $w_\circ$، تا جملهٔ مرتبهٔ چهارم، خواهیم داشت

$$t^{2} = -\frac{\sinh w_\circ}{2!}(w-w_\circ)^{2} - \frac{\cosh w_\circ}{3!}(w-w_\circ)^{3} - \frac{\sinh w_\circ}{4!}(w-w_\circ)^{4} + \cdots \qquad (۱۱\text{ـ}۲۶)$$

اما، معادلهٔ (۷ـ۲۵) حاکی از این است که ما باید w را به‌صورت یک سری توانی برحسب t بیان کنیم. برای پیدا کردن این سری توانی، می‌نویسیم

$$w(t) = w_\circ + \sum_{m=1}^{\infty} b_m t^m$$

و سری را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$w(t) - w_\circ \approx b_1 t + b_2 t^{2} + b_3 t^{3}$$

با قرار دادن این رابطه در معادلهٔ (۱۱ـ۲۶) و مساوی گرفتن ضرایب توانهای مشابه t از دو طرف، خواهیم داشت

$$-\frac{\sinh w_0}{2} b_1^2 = 1$$

$$(-\sinh w_0) b_1 b_2 - \frac{\cosh w_0}{6} b_1^3 = 0$$

$$-\frac{\sinh w_0}{2} b_2^2 - (\sinh w_0) b_1 b_3 - \frac{\cosh w_0}{2} b_1^2 b_2 - \frac{\sinh w_0}{24} b_1^4 = 0$$

که جوابهای آنها عبارت‌اند از

$$b_1 = \pm i \left(\frac{2}{\sinh w_0}\right)^{1/2} \qquad b_2 = \frac{\coth w_0}{3\sinh w_0} \qquad b_3 = \frac{b_1^3}{24}\left(\frac{5}{3}\coth^2 w_0 - 1\right)$$

این واقعیت که داریم

$$\frac{\pi}{2} = \arg\left(\lim_{t\to 0}\frac{dw}{dt}\right) = \arg(b_1)$$

ما را وامی‌دارد که علامت مثبت b_1 را انتخاب کنیم.

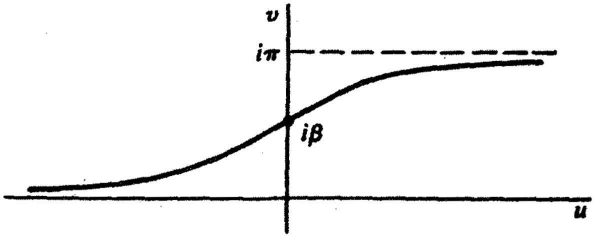
با مشتق گرفتن از $w(t)$ و مقایسهٔ آن با معادلهٔ (۷ـ۲۵) خواهیم داشت

$$a_0 = b_1 = i\left(\frac{2}{\sinh w_0}\right)^{1/2}$$

$$a_1 = 2b_2 = \frac{2\coth w_0}{3\sinh w_0}$$

$$a_2 = 3b_3 = \frac{b_1^3}{8}\left(\frac{5}{3}\coth^2 w_0 - 1\right)$$

اگر مقادیر بالا را در معادلهٔ (۷ـ۲۸الف) قرار بدهیم، فرمولی مجانبی به‌دست می‌آید که به‌ازای



شکل ۱۱ـ۶ مسیری که در صفحهٔ w برای محاسبهٔ $H_\nu^{(1)}(x)$ در حد مقادیر بزرگ x به‌کار می‌رود.

$w_\circ \to \infty$ صادق است:

$$J_{x\cosh w_\circ}(x) \approx \frac{1}{2\pi i} e^{x(\sinh w_\circ - w_\circ \cosh w_\circ)} \left(a_\circ \sqrt{\frac{\pi}{x}} + a_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^{x(\sinh w_\circ - w_\circ \cosh w_\circ)}}{(2\pi x \sinh w_\circ)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{8x \sinh w_\circ}\left(1 - \frac{5}{3}\coth^2 w_\circ\right) + \cdots\right]$$

بگذارید رفتار مجانبی را برای مقادیر بزرگ x، که به اجمال در فصل ۱۰ بررسی کردیم، در نظر بگیریم. بهتر است توابع هنکل $H_\nu^{(i)}(x)$ را، به‌ازای $i = 1, 2$، بررسی کنیم. مسیرهای C'' و C'''، هم محور حقیقی مثبت و هم محور حقیقی منفی را در بردارند؛ از این‌رو خوب است، با فرض $x > \nu$، بنویسیم $\nu = x\cos\beta$، به‌طوری که

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{C''} e^{x(\sinh w - w\cos\beta)} dw$$

نقاط زینی، به‌ازای جوابهای $\cosh w = \cos\beta$، که عبارت‌اند از $w_\circ = \pm i\beta$ به‌دست می‌آیند. با انتخاب $w_\circ = +i\beta$، ملاحظه می‌کنیم که مسیری که در امتداد آن داریم

$$\operatorname{Im}[\sinh w - w\cos\beta] = \text{const.} = \operatorname{Im}[\sinh w_\circ - w_\circ \cos\beta]$$

با این عبارت بیان می‌شود

$$\cosh u = \frac{\sin\beta + (v - \beta)\cos\beta}{\sin v}$$

این مسیر در شکل ۱۱ـ۶ نشان داده شده است. بقیهٔ عملیات دقیقاً مثل عملیاتی است که در

بالا برای $J_\nu(x)$ شرح دادیم. در واقع، برای به‌دست آوردن بسط $H_\nu^{(1)}(x)$، صرفاً w_0 را با $i\beta$ جایگزین می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \left(\frac{2}{i\pi x \sin\beta}\right)^{1/2} e^{i(x\sin\beta - \nu\beta)} \left[1 + \frac{1}{8ix\sin\beta}\left(1 + \frac{5}{3}\cot^2\beta\right) + \cdots\right]$$

وقتی $x \gg \nu$، آنگاه $\beta \approx \pi/2$، و داریم

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i[x - \nu(\pi/2) - (\pi/4)]}\left(1 + \frac{1}{8ix}\right)$$

که، به‌ازای $1/x \to 0$، همان است که در تمرین ۷ـ۵ـ۱ به‌دست آوردیم.

نقطهٔ زینی دیگر در $-i\beta$، تابع هنکل دیگر را با حد مجانبی زیر به‌دست می‌دهد

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i[x - \nu(\pi/2) - (\pi/4)]}\left(1 - \frac{1}{8ix}\right)$$

با استفاده از عبارتهای مربوط به $H_\nu^{(1)}(x)$ و $H_\nu^{(2)}(x)$ می‌توانیم شکلهای مجانبی $J_\nu(x)$ و $Y_\nu(x)$ را برای مقادیر بزرگ x بنویسیم:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) =& \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \\ & \left[\cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x}\sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots\right] \\ Y_\nu(x) =& \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \\ & \left[\sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8x}\cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots\right] \end{aligned}$$

در حد $1/x \to 0$، این روابط به نتایجی می‌انجامند که در بخش ۱۰ـ۲ـ۲ به‌دست آوردیم.

تمرینها

۱۱ـ۳ـ۱ معادلهٔ (۱۱ـ۱۶) را حل کنید و $v(t)$ را به‌دست آورید.

۱۱ـ۳ـ۲ جملهٔ رویه‌ای در اتحاد لاگرانژ را به‌ازای $\mathbb{M}_t^\dagger$ و $\mathbb{M}_t$ در معادلات (۱۱ـ۱۶) حساب کنید.

۱۱ـ۳ـ۳ ثابت C' در معادلهٔ (۱۱ـ۱۷) را، که جواب معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی است، تعیین کنید. [راهنمایی: $(t-z)^{-\alpha}$ را بسط بدهید، و از رابطهٔ

$$B(a,b) \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_{1}^{\infty} t^{-a-b}(t-1)^{b-1}dt$$

که در فصل ۱۴ آن را به‌دست می‌آوریم، استفاده کنید.]

۱۱ـ۳ـ۴ با فرض اینکه مسیر انتگرال $u(z)$ از $t=0$ تا $t=1$ است و انتخاب مناسب C ثابت را به‌جا می‌آورد، جواب این معادله را به‌دست آورید:

$$w(z) = z^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1; \alpha-\beta+1; \frac{1}{z}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\int_{0}^{1}(z-t)^{-\alpha}t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt$$

۱۱ـ۳ـ۵ (الف) انتگرال مسیر معادلهٔ (۱۱ـ۲۱) را برای هر یک از سه قطعهٔ مسیر شکل ۱۱ـ۲ بنویسید. توجه کنید که وقتی t از $-\infty$ می‌آید، $\arg(t) = -\pi$، و وقتی t به $-\infty$ می‌رود، $\arg(t) = +\pi$. یک انتگرال حقیقی از صفر تا ∞ به‌دست آورید.

(ب) با استفاده از رابطهٔ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$، که در فصل ۱۴ به‌دست می‌آید، نشان دهید که

$$\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\Gamma(z+1)\sin\pi z}$$

(ج) تابع $\exp(z^2/4t)$ در انتگرال قسمت (الف) را بسط، و نشان دهید که انتگرال مسیر کاهش می‌یابد به

$$-2i\sin\nu\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\frac{\Gamma(-n-\nu)}{\Gamma(n+1)}$$

(د) نتیجهٔ قسمت (ج) را در قسمت (ب) به‌کار ببرید، و نتیجه را با بسط سریِ $J_\nu(z)$ در فصل ۹ مقایسه و، نهایتاً، ثابت کنید $k = 1/2\pi i$.

۱۱ـ۳ـ۶ با انتگرال‌گیری در امتداد C_1، C_2، C_3، و C_4 از شکل ۱۱ـ۳، معادلهٔ (۱۱ـ۲۵) را به‌دست آورید.

۱۱ـ۴ توابع گرین در یک بعد

در این بخش، موضوع اصلی این فصل، یعنی توابع گرین در یک بعد را، که همانا توابع گرین معادلات دیفرانسیل معمولی به‌شمار می‌آیند، بررسی می‌کنیم.

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$\mathbb{L}_x[u] = f(x)$$

را که در آن $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی عام است، در نظر بگیرید. در نمادگذاری تجریدی دیراک، این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{L}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle$$

اگر $\mathbb{L}$ دارای وارون $\mathbb{L}^{-1} \equiv \mathbb{G}$ باشد، جواب را می‌توان به‌صورت $|\mathrm{u}\rangle = \mathbb{L}^{-1}|\mathrm{f}\rangle \equiv \mathbb{G}|\mathrm{f}\rangle$ نوشت. با ضرب کردن این رابطه در $\langle\mathrm{x}|$ و وارد کردن $\mathbb{1} = \int dy|\mathrm{y}\rangle w(y)\langle y|$ بین $\mathbb{G}$ و $|\mathrm{f}\rangle$، خواهیم داشت

$$u(x) = \int dy G(x,y) w(y) f(y) \qquad (۱۱\text{ـ}۲۷)$$

بنابراین، وقتی $G(x,y)$ را بشناسیم، می‌توانیم جواب، $u(x)$، را در یک شکل انتگرالی پیدا کنیم. اما $G(x,y)$ را چگونه پیدا کنیم؟

بنابر تعریف وارون، $\mathbb{L}\mathbb{G} = \mathbb{1}$. اگر دو طرف این رابطه را بین $\langle\mathrm{x}|$ و $|\mathrm{y}\rangle$ قرار دهیم و $\mathbb{1} = \int dx'|\mathrm{x}'\rangle w(x')\langle\mathrm{x}'|$ را بین $\mathbb{L}$ و $\mathbb{G}$ ببریم، خواهیم داشت

$$\int dx' L(x,x') w(x') G(x',y) = \langle\mathrm{x}|\mathrm{y}\rangle = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

در حالت خاص، اگر $\mathbb{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی موضعی (بخش ۱۱ـ۱)، یعنی

$$L(x,x') \equiv [\delta(x-x')/w(x)]\mathbb{L}_x$$

باشد، خواهیم داشت

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)} \qquad (۱۱\text{ـ}۲۸\text{الف})$$

گاهی فرض می‌شود ۱ $\equiv$ $w(x)$. در این‌صورت داریم

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \delta(x-y) \qquad \text{(۱۱ـ۲۸ب)}$$

چه $w(x)$ مساوی ۱ باشد، چه نباشد، $G(x,y)$ را تابع گرین عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_x$ می‌نامیم.

از آغاز، تأکید بر چند نکته حائز اهمیت است. اولاً، $\mathbb{L}_x$ ممکن است برای تمامی مقادیر $\mathbb{R}$ تعریف نشود. بنابراین، بازه‌ای از $\mathbb{R}$، مثل $[a,b]$، را حوزهٔ $\mathbb{L}$ می‌خوانیم. ثانیاً، که مهمتر نیز هست، اینکه مشخص کردن کامل $\mathbb{L}_x$ مستلزم برخی شرایط اولیه (یا مرزی) است. بنابراین، انتظار داریم که $G(x,y)$ به این شرایط اولیه نیز بستگی داشته باشد. ثالثاً، ملاحظه می‌کنیم وقتی $\mathbb{L}_x$ بر (۱۱ـ۲۷) تأثیر می‌کند، داریم

$$\mathbb{L}_x u(x) = \int dy [L_x G(x,y)] w(y) f(y) = \int dy \frac{\delta(x-y)}{w(x)} w(y) f(y) = f(x)$$

که تأییدی است بر این نکته که در واقع $u(x)$ یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل معمولی اولیه است. رابعاً، معادلات (۱۱ـ۲۸)، که شامل تابع تعمیم‌یافته (یا به‌زبان فصل ۵، توزیع) $\delta(x-y)$ هستند، در قالب همان مضمون معنا دارند. بنابراین، ما به $G(x,y)$ نه به‌عنوان یک تابع معمولی بلکه به‌عنوان یک توزیع نگاه می‌کنیم. بالاخره، فرض بر این است که معادلهٔ (۱۱ـ۲۷) برای یک تابع (خوشرفتار) دلخواه برقرار است.

۱۱ـ۴ـ۱ محاسبهٔ برخی توابع گرین

در این زیربخش، چند مثال در زمینهٔ محاسبهٔ $G(x,y)$ برای $\mathbb{L}_x$های خیلی ساده مطرح می‌کنیم. بعداً خواهیم دید که برای عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم عام چگونه توابع گرین به‌دست می‌آیند.

مثال ۱۱ـ۴ـ۱ : ساده‌ترین عامل دیفرانسیلی عبارت است از $\mathbb{L}_x \equiv d/dx$. می‌خواهیم تابع گرین آن را پیدا کنیم.

باید توزیعی را بیابیم که مشتق آن تابع دلتای دیراک باشد:

$$\frac{d}{dx} G(x,y) = \delta(x-y)$$

در فصل ۵ به چنین توزیعی، تابع پله‌ای $\theta(x-y)$، برخوردیم. بنابراین

$$G(x,y) = \theta(x-y) + \alpha(y)$$

که $\alpha(y)$ " ثابت" انتگرال‌گیری است. ●

مثال ۱۱ـ۴ـ۱، شامل هیچ شرط مرزی (یا اولیه) نبود. بنابراین، می‌توانیم تابع گرین به‌دست آمده را تابع گرین نامعین بنامیم. ببینیم شرایط مرزی چگونه بر تابع گرین حاصل اثر می‌کنند.

مثال ۱۱ـ۴ـ۲: بیایید معادلهٔ

$$\frac{du}{dx} = f(x) \qquad x \in [\circ, \infty), u(\circ) = \circ$$

را حل کنیم.

یکی از جوابهای عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل با (۱۱ـ۲۷) و مثال ۱۱ـ۴ـ۱ داده می‌شود:

$$u(x) = \int_\circ^\infty \theta(x-y) f(y) dy + \int_\circ^\infty \alpha(y) f(y) dy$$

عامل $\theta(x-y)$ در اولین جملهٔ سمت راست، انتگرال را در x ختم می‌کند. در نتیجه،

$$u(x) = \int_\circ^\infty f(y) dy + \int_\circ^\infty \alpha(y) f(y) dy$$

از شرایط مرزی داریم

$$\circ = u(\circ) = \circ + \int_\circ^\infty \alpha(y) f(y) dy$$

تنها راه برقراری این رابطه برای $f(y)$ دلخواه این است که $\alpha(y)$ صفر باشد. بنابراین

$$G(x,y) = \theta(x-y)$$

و

$$u(x) = \int_\circ^\infty \theta(x-y) f(y) dy = \int_\circ^x f(y) dy$$

رسیدن به این عبارت شبیه کشتن مگس با یک پتک است! می‌توانستیم این نتیجه را با یک انتگرال‌گیری ساده به‌دست آوریم. اما، راه کمربندی ارائه شده در اینجا، برخی خواص مهم توابع گرین را که بعداً بررسی خواهیم کرد، به نمایش می‌گذارد. (توجه کنید که شرط مرزی معرفی شده در اینجا، حالت خیلی خاصی است. اگر $u(\circ) = a$، چه اتفاقی می‌افتد؟ تمرین ۱۱ـ۴ـ۱ به این پرسش، پاسخ می‌دهد.) ●

مثال ۱۱ـ۴ـ۳: عامل دیفرانسیلی پیچیده‌تری عبارت است از $\mathbb{L}_x \equiv d^۲/dx^۲$. تابع گرین نامعین آن را پیدا می‌کنیم.

با یک بار انتگرال‌گیری از عبارت زیر نسبت به x،

$$\frac{d^۲}{dx^۲}G(x,y) = \delta(x-y)$$

خواهیم رسید به

$$\frac{d}{dx}G(x,y) = \theta(x-y) + \alpha(y)$$

دومین انتگرال‌گیری منجر می‌شود به

$$G(x,y) = \int dx\theta(x-y) + x\alpha(y) + \eta(y)$$

که α و η توابع دلخواهی از y هستند و انتگرال عبارت است از انتگرال نامعینی که به‌قرار زیر آن را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید $\Omega(x,y)$ تابع اولیه $\theta(x-y)$ است؛ یعنی،

$$\frac{d\Omega}{dx} = \theta(x-y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x>y \\ \circ & \text{اگر } x<y \end{cases} \qquad (۱)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\Omega(x,y) = \begin{cases} x+\alpha(y) & \text{اگر } x>y \\ b(y) & \text{اگر } x<y \end{cases}$$

توجه داشته باشید که ما $\Omega(x,y)$ را در $x=y$ تعریف نکرده‌ایم. در زیر روشن خواهد شد که

$\Omega(x,y)$ به‌ازای $x=y$ پیوسته است. $\Omega(x,y)$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\Omega(x,y)=[x+a(y)]\theta(x-y)+b(y)\theta(y-x) \tag{۲}$$

برای تعیین $a(y)$ و $b(y)$، از (۲) مشتق می‌گیریم و آن را با (۱) مقایسه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dx}&=\theta(x-y)+[x+a(y)]\delta(x-y)-b(y)\delta(x-y)\\&=\theta(x-y)+[x-b(y)+a(y)]\delta(x-y)\end{aligned} \tag{۳}$$

که از تساوی زیر بهره برده‌ایم

$$\frac{d}{dx}\theta(x-y)=-\frac{d}{dx}\theta(y-x)=\delta(x-y)$$

برای اینکه معادلهٔ (۳) با (۱) در توافق باشد، باید داشته باشیم:

$$[x-b(y)+a(y)]\delta(x-y)=0$$

به یاد داریم که در فصل ۵ دیدیم: $x\delta(x)\equiv 0$، نتیجه می‌گیریم:

$$a(y)-b(y)=-y$$

و با جایگذاری در عبارت مربوط به $\Omega(x,y)$، خواهیم داشت

$$\Omega(x,y)=(x-y)\theta(x-y)+b(y)[\theta(x-y)+\theta(y-x)]$$

اما $\theta(x)+\theta(-x)\equiv 1$؛ بنابراین

$$\Omega(x,y)=(x-y)\theta(x-y)+b(y)$$

این عبارت نشان می‌دهد که $\Omega(x,y)$ در $x=y$ پیوسته است؛ این خاصیت پیامدی است از رابطهٔ $x\delta(x)=0$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$G(x,y)=(x-y)\theta(x-y)+x\alpha(y)+\beta(y)$$

که در آن $\beta(y)\equiv\eta(y)+b(y)$.

تابع گرین در مثال ۱۱ـ۴ـ۳ دارای دو تابع دلخواه $\alpha(y)$ و $\beta(y)$ است، که نتیجه کاستی تصریح $\mathbb{L}_x$ هستند (تصریح کامل $\mathbb{L}_x$ مستلزم شرایط مرزی است). مثال زیر، از طریق مشخص کردن برخی شرایط مرزی، این کاستی را از میان برمی‌دارد.

مثال ۱۱ـ۴ـ۴: تابع گرین را برای عبارت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\mathbb{L}_x[u] = \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

شرط مرزی آن عبارت است از $u(a) = u(b) = 0$، که در آن $[a, b]$ بازهٔ تعریف $\mathbb{L}_x$ است. مثال ۱۱ـ۴ـ۳، تابع گرین (نامعین) مربوط به $\mathbb{L}_x$ را به‌ما می‌دهد. با استفاده از آن، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b (x-y)\theta(x-y)f(y)dy + x\int_a^b \alpha(y)f(y)dy + \int_a^b \beta(y)f(y)dy \\ &= \int_a^x (x-y)f(y)dy + x\int_a^b \alpha(y)f(y)dy + \int_a^b \beta(y)f(y)dy \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم

$$0 = u(a) = a\int_a^b \alpha(y)f(y)dy + \int_a^b \beta(y)f(y)dy \qquad (1)$$

و

$$0 = u(b) = \int_a^b (b-y)f(y)dy + b\int_a^b \alpha(y)f(y)dy + \int_a^b \beta(y)f(y)dy \qquad (2)$$

از این دو رابطه می‌توان $\alpha(y)$ و $\beta(y)$ را تعیین کرد. اگر انتگرال آخر سمت راست معادلهٔ (۲) را با (۱) تلفیق کنیم، خواهیم داشت

$$0 = \int_a^b [b - y + b\alpha(y) - a\alpha(y)]f(y)dy$$

چون این رابطه باید برای $f(y)$ دلخواه برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$b - y + (b-a)\alpha(y) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(y) = -\frac{b-y}{b-a}$$

که هرگاه در معادلهٔ (۱) به‌جای $\alpha(y)$ مقدار قرار بدهیم، خواهیم داشت

$$\circ = \int_a^b \left[-\frac{a(b-y)}{b-a} + \beta(y)\right] f(y)dy$$

که از آن به‌دست می‌آید

$$\beta(y) = \frac{a(b-y)}{b-a}$$

با وارد کردن $\alpha(y)$ و $\beta(y)$ در عبارت مربوط به $G(x,y)$ که در مثال ۱۱ـ۴ـ۳ به‌دست آمد، خواهیم داشت

$$G(x,y) = (x-y)\theta(x-y) + (x-a)\frac{y-b}{b-a} \quad a \leq x; y \leq b$$

نکتهٔ جالب این است که چون $a - y \leq \circ$، پس

$$G(a,y) = (a-y)\theta(a-y) = \circ$$

و، چون به‌ازای جمیع مقادیر $y \leq b$، داریم $\theta(b-y) = ۱$، پس

$$G(b,y) = (b-y)\theta(b-y) + (b-a)\frac{y-b}{b-a} = \circ$$

این دو معادله واقعیت مهمی را آشکار می‌کنند که به‌عنوان تابعی از x، $G(x,y)$ همان شرط مرزی (همگنی) را برقرار می‌کند که جواب معادلهٔ دیفرانسیل. این یک خاصیت کلی است که بعداً آن را بررسی خواهیم کرد. ●

در تمام مثالهای بالا، شرایط مرزی خیلی ساده بودند. مشخصاً، مقدار جواب و یا مشتق آن در نقاط مرزی صفر بودند. اگر شرایط مرزی تا این حد ساده نباشند، چه پیش می‌آید؟ در حالت خاص، وقتی $u(a)$ [یا $u'(a)$] و $u(b)$ [یا $u'(b)$] صفر نیستند، مسئله را چگونه باید حل کرد؟

عملگر دیفرانسیلی کلی $\mathbb{L}_x$ و معادلهٔ دیفرانسیل

$$\mathbb{L}_x[u] = f(x)$$

را با شرایط مرزی

$$u(a) = a_1 \quad \text{و} \quad u(b) = b_1$$

در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که می‌توانیم این دستگاه را به حالتی که در آن $u(a) = u(b) = 0$، تبدیل کنیم. از فصل ۹ به یاد دارید که عمومی‌ترین جواب معادلهٔ $\mathbb{L}_x[u] = f(x)$ به شکل زیر است

$$u = u_{\text{h}} + u_{\text{i}}$$

که u_{h}، جواب معادلهٔ همگن، در $\mathbb{L}_x u_{\text{h}} = 0$ صدق می‌کند و شامل پارامتر دلخواه و جدانشدنی جواب معادلات دیفرانسیل است. مثلاً، اگر $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم با دو جواب خطی مستقل، v و w، باشد، در آن‌صورت

$$u_{\text{h}}(x) = C_1 v(x) + C_2 w(x)$$

از سوی دیگر، u_{i} یکی از جوابهای معادله دیفرانسیل ناهمگن است.

اگر شرط کنیم که $u_{\text{h}}(a) = a_1$ و $u_{\text{h}}(b) = b_1$، در آن‌صورت u_{i} در دستگاه زیر صدق می‌کند

$$\mathbb{L}_x[u_{\text{i}}] = f(x)$$
$$u_{\text{i}}(a) = u_{\text{i}}(b) = 0$$

که از نوعی است که در مثالهای قبل مطرح کردیم. وقتی $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم است، می‌توانیم تمام امکانات فصل ۹ را برای رسیدن به $v(x)$، $w(x)$، و بنابراین $u_{\text{h}}(x)$، به‌کار بگیریم. در آن‌صورت، مسئله تبدیل می‌شود به معادلهٔ دیفرانسیلی که شرایط مرزی برای آن همگن‌اند؛ یعنی، مقدار جواب و یا مشتق آن در نقاط مرزی صفر است.

مثال ۱۱ـ۴ـ۵: فرض کنیم $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2$. در این‌صورت محاسبهٔ u_{h} بدیهی است

$$\mathbb{L}_x[u_{\text{h}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 u_{\text{h}}}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\text{h}}(x) = C_1 x + C_2$$

برای محاسبهٔ C_1 و C_2، شرایطِ مرزی $u_h(a) = a_1$ و $u_h(b) = b_1$ را اعمال می‌کنیم:

$$C_1 a + C_2 = a_1$$
$$C_1 b + C_2 = b_1$$

در نتیجه

$$C_1 = \frac{b_1 - a_1}{b - a} \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{a_1 b - a b_1}{b - a}$$

معادلهٔ ناهمگن، مسئله‌ای را همسان با مسئلهٔ مثال ۱۱ـ۴ـ۴ تعریف می‌کند. بنابراین، بلافاصله می‌توانیم بنویسیم

$$u_i(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

که در آن

$$G(x, y) = (x - y)\theta(x - y) + (x - a)\frac{y - b}{b - a}$$

بنابراین، جواب عمومی عبارت است از

$$u(x) = \frac{b_1 - a_1}{b - a}x + \frac{a_1 b - a b_1}{b - a} + \int_a^x (x - y) f(y) dy + \frac{(x - a)}{b - a}\int_a^b (y - b) f(y) dy$$

●

مثال ۱۱ـ۴ـ۵ نشان می‌دهد که یک معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن را می‌توان به دو معادلهٔ دیفرانسیل، یکی همگن با شرایط مرزی ناهمگن و دیگری ناهمگن با شرایط مرزی همگن، تفکیک کرد. مثالهای بالا نشان می‌دهند که جوابهای معادلات دیفرانسیل را می‌توان به اختصار برحسب توابع گرینی نوشت که خودبه‌خود، در صورت همگن بودن شرایط مرزی، شامل آن شرایط هستند. آیا یک تابع گرین می‌تواند جواب معادلهٔ دیفرانسیلی با شرایط مرزی ناهمگن را نیز به‌دست بدهد؟ در مثال زیر نشان می‌دهیم که اگر ما $\mathbb{L}_x$ را به‌عنوان یک عملگر در مفهوم تعمیم‌یافتهٔ فصل ۵ تلقی کنیم، یعنی، عملگری که بر توابع تعمیم‌یافته (توزیعها) تأثیر می‌کند، در

آن‌صورت، تعیین $G(x,y)$ برای یافتن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با شرایط مرزی ناهمگن کافی است.

این نتیجه‌گیری، ناشی از این واقعیت است که $u_{\rm h}(x)$ به‌حوزهٔ عملگر دیفرانسیلی تعریف شده با دستگاه $\mathbb{L}_x[u] = f(x)$، $u(a) = u(b) = 0$ تعلق ندارد، و از این‌رو ما معمولاً نمی‌دانیم چگونه عملگر دیفرانسیلی که شرط مرزی همگن جزئی از تعریف آن به‌شمار می‌آید، بر $u_{\rm h}(x)$ اثر می‌گذارد. با این همه، مطابق مطالب فصل ۵، توزیعها فاقد این مشکل‌اند. در آنجا دیدیم که چگونه از یک تابع ناپیوسته در نقطهٔ ناپیوستگی آن "مشتق" بگیریم. اگر $\varphi(x)$ چنین تابعی و $f(x)$ تابع "خوبی" باشد، در آن‌صورت مشتق φ عبارت است از

$$\langle \varphi', f\rangle \equiv -\langle f', \varphi\rangle \qquad \forall f\in \mathrm{C}^\infty[a,b]$$

که در آن

$$\langle f, \varphi\rangle \equiv \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

مثال ۱۱ـ۴ـ۶: می‌خواهیم دستگاه مثال ۱۱ـ۴ـ۵ را با روشی که هم اکنون شرح دادیم، حل کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $\mathbb{L}_x \equiv d^2/dx^2$ خودالحاقی است (قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۵). بنابراین، با این فرض که u شرط مرزی همگن $u(a) = u(b) = 0$ را برقرار می‌کند، خواهیم داشت

$$\langle \mathbb{L}_x u, v\rangle = \langle u, \mathbb{L}_x v\rangle \tag{1}$$

ما رابطهٔ (۱) را برای تعریف چگونگی تأثیر $\mathbb{L}_x$ بر هر تابع v به‌کار می‌بریم. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از عبارت سمت چپ داریم

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2}v\,dx = \left(\frac{du}{dx}\right)v\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}dx = u'(b)v(b)$$

$$- u'(a)v(a) - uv'|_a^b + \int_a^b u\frac{d^2v}{dx^2}dx$$

چون $u(x)$ شرط مرزی همگن را برقرار می‌کند، خواهیم داشت

$$\langle \mathbb{L}_x \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathbb{L}_x \mathrm{v}\rangle = \int_a^b uv''dx + v(b)u'(b) - v(a)u'(a)$$
$$= \int_a^b u[v'' - v(b)\delta'(x-b) + v(a)\delta'(x-a)]dx$$

بنابراین، عملگر تعمیم‌یافته را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{L}_x v \equiv v'' - v(b)\delta'(x-b) + v(a)\delta'(x-a)$$

دقت کنید که اگر v متعلق به‌حوزهٔ $\mathbb{L}_x$ باشد، یعنی $v(a) = ० = v(b)$، در آن‌صورت، همان‌طور که انتظار می‌رود، $\mathbb{L}_x$ به $d^۲/dx^۲$ کاهش می‌یابد.

مسئلهٔ مثال ۱۱ـ۴ـ۵ به یافتن تابعی مانند $v(a)$ تبدیل می‌شود، به‌گونه‌ای که [توجه کنید که در اینجا u با v جایگزین شده است و $v'' = f(x)$]

$$\mathbb{L}_x v = f(x) - b_۱\delta'(x-b) + a_۱\delta'(x-a)$$

هرگاه بنویسیم $v = v_\mathrm{i} + v_\mathrm{h}$، که در آن

$$v_\mathrm{i} = \int_a^b G(x,y)f(y)dy$$

و مانند $G(x,y)$، در شرایط مرزی $v_\mathrm{i}(a) = v_\mathrm{i}(b) = ०$ صدق می‌کند، مسئله را به یافتن v_h چنان تبدیل می‌کند که

$$\mathbb{L}_x v_\mathrm{h} = -b_۱\delta'(x-b) + a_۱\delta'(x-a) \qquad (۲)$$

مشتقهای تابع دلتا در سمت راست، سرنخی به‌دست می‌دهند. آیا می‌توان با استفاده از تابع گرین v_h را پیدا کرد؟ گذشته‌از اینها همه، $G(x,y)$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \delta(x-y) \qquad (۳)$$

و اگر ما از دو طرف این رابطه مشتق بگیریم، مشتق تابع دلتا به‌دست می‌آید. مشتق را می‌توانیم نسبت به x یا y بگیریم. هرکدام را انتخاب کنیم فرقی نمی‌کند زیرا $\mathbb{L}_x$ و d/dx جابه‌جا می‌شوند، بنابراین

$$\frac{d}{dx}[\mathbb{L}_x G(x,y)] = \mathbb{L}_x\left[\frac{d}{dx}G(x,y)\right] = \delta'(x-y)$$

و یک ترکیب خطی مناسب از dG/dx که به‌ازای $y=b$ و $y=a$ محاسبه شود، جوابی برای $v_{\rm h}$ به‌دست خواهد داد. با این همه، در حالت کلی، $\mathbb{L}_x$ و d/dx به‌اعتبار توابع ضریب $\mathbb{L}_x$ جابه‌جا نمی‌شوند. بنابراین، از دو طرف (۳) نسبت به y مشتق می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbb{L}_x\left\{b_1\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]_{y=b}\right\} = -b_1\delta'(x-b)$$

$$\mathbb{L}_x\left\{-a_1\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]_{y=b}\right\} = a_1\delta'(x-b)$$

اکنون خطی بودن $\mathbb{L}_x$ ایجاب می‌کند که عبارت زیر در (۲) صدق کند

$$v_{\rm h}(x) \equiv b_1\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]_{y=b} - a_1\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right]_{y=a}$$

بنابراین، مشاهده می‌کنیم که تعیین $G(x,y)$ با شرایط همگن برای به‌دست آوردن جواب معادلهٔ دیفرانسیل کافی است، حتی اگر شرایط مرزی ناهمگن باشند. در اینجا، برخلاف مثال ۱۱ـ۴ـ۵، مجبور نیستیم مسئله را به دو بخش تفکیک کنیم. بعداً خواهیم دید که این روند یکی از خواص کلی توابع گرین است و به تابع گرین مربوط به $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2$ اختصاص ندارد.

اکنون بگذارید با استفاده از تابع گرین به‌دست آمده در مثال ۱۱ـ۴ـ۴، $v_{\rm h}(x)$ را محاسبه کنیم:

$$G(x,y) = (x-y)\theta(x-y) + (x-a)\frac{y-b}{b-a}$$

می‌دانیم که

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=b} = -\theta(x-b) - (x-b)\delta(x-b) + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=a} = -\theta(x-a) - (x-a)\delta(x-a) + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} - 1 = \frac{x-b}{b-a}$$

بنابراین

$$v_h = b_1\frac{x-a}{b-a} - a_1\frac{x-b}{b-a} = \frac{b_1-a_1}{b-a}x + \frac{ba_1-ab_1}{b-a}$$

که همسان با جواب همگنی است که در مثال ۱۱ـ۴ـ۵ به‌دست آمد. ●

۱۱ـ۴ـ۲ ملاحظات صوری مربوط به توابع گرین

مطالب و مثالهای بخش قبل، شمه‌ای از توانایی توابع گرین را به نمایش می‌گذارند. ظرافت و دقت این تابع وقتی ظاهر می‌شود که متوجه شویم تابع یاد شده شامل تمام اطلاعات در خصوص جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل برای هر نوع شرط مرزی است (مثال ۱۱ـ۴ـ۶). بنابراین، وقت آن رسیده است که به بحث این توابع جنبهٔ صوری‌تری بدهیم.

توابع گرین، وارون عملگرهای دیفرانسیلی به‌شمار می‌آیند. بنابراین، درک روشنی از عملگرها حائز اهمیت است. یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبه nام را به کمک قضیهٔ زیر تعریف می‌کنند.[1]

قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۱: فرض کنید

$$\mathbb{L}_x = p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x) \qquad \text{(۱۱ـ۲۹الف)}$$

که در آن، در بازهٔ $\mathrm{I} \equiv [a,b]$، داریم $p_n(x) \not\equiv 0$. همچنین فرض کنید $x_0 \in \mathrm{I}$ و γ_1، γ_2، ...، γ_n اعدادی معلوم و $f(x)$ یک تابع تکه‌ای خطی مفروض در بازهٔ I است. در آن‌صورت، مسئلهٔ مقدار اولیه

$$\mathbb{L}_x[u] = f \qquad x \in \mathrm{I}$$

1. Birkhoff & Rota, 1978, Chapter 6.

$$u(x_\circ) = \gamma_1, u'(x_\circ) = \gamma_2, \dots, u^{(n-1)}(x_\circ) = \gamma_n \qquad \text{(۱۱ـ۲۹ب)}$$

فقط و فقط دارای یک جواب است. ■

این حکم صرفاً قضیهٔ وجود و یکتایی برای یک عامل دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ nام است. معادلهٔ (۱۱ـ۲۹ب) را مسئلهٔ مقدار اولیه با داده‌های $\{f(x); \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ می‌نامیم. از این قضیه برای تعریف $\mathbb{L}_x$ بهره می‌گیریم. قسمتی از آن تعریف شرایط مرزی هستند که جوابهای $\mathbb{L}_x$ باید در آنها صدق کنند.

شرطی مرزی با اهمیتی خاص، عبارت است از شرط همگنی که در آن

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \circ$$

در چنین حالتی می‌توان نشان داد (تمرین ۱۱ـ۴ـ۳) که تنها جواب نابدیهی معادلهٔ دیفرانسیل همگن $\mathbb{L}_x[u] = \circ$، عبارت است از $u \equiv \circ$. پس، بنابر قضیهٔ ۱۱ـ۲ـ۲، $\mathbb{L}_x$ وارون‌پذیر است؛ یعنی، عملگر یکتای $\mathbb{G}$ چنان وجود دارد که $\mathbb{LG} = \mathbb{1}$، یا به زبان "مؤلفه‌ها"،

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

به این ترتیب، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۲: عامل دیفرانسیلی $\mathbb{L}_x$، عنوان شده در (۱۱ـ۲۹الف)، وابسته به مسئلهٔ مقدار اولیه با داده‌های $\{f(x); \circ, \circ, \dots, \circ\}$ وارون‌پذیر است؛ یعنی، تابعی مانند $G(x,y)$ چنان وجود دارد که

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

■

اهمیت شرایط مرزی همگن را اکنون بهتر درک می‌کنیم. قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۲ این نکته را توجیه می‌کند که چرا ما برای دستیابی به تابع گرین در تمام مثالهای بخش ۱۱ـ۴ـ۱، ناگزیر بودیم شرایط مرزی همگن اعمال کنیم.

شرایط مرزی (۱۱ـ۲۹ب) مسلماً تنها شرایطی نیستند که می‌توان به‌کار برد. کلی‌ترین شرایط مرزی خطی‌ای که در نظریهٔ عملگرهای دیفرانسیلی به‌آنها برمی‌خوریم، عبارت‌اند از

$$\mathbb{R}_1[u] \equiv \alpha_{11}u(a) + \cdots + \alpha_{1n}u^{(n-1)}(a) + \beta_{11}u(b) + \cdots + \beta_{1n}u^{(n-1)}(b) = \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{R}_n[u] \equiv \alpha_{n1}u(a) + \cdots + \alpha_{nn}u^{(n-1)}(a) + \beta_{n1}u(b) + \cdots + \beta_{nn}u^{(n-1)}(b) = \gamma_n$$
(۳۰-۱۱)

n بردار سطری $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \beta_{11}, \ldots, \beta_{1n}), \ldots, (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}, \beta_{n1}, \ldots, \beta_{nn})$، بنا به فرض، مستقل‌اند (در حالت خاص، هیچ سطری متحد با صفر نیست). ما $\mathbb{R}_1$، $\mathbb{R}_2$، ...، $\mathbb{R}_n$ را تابعکهای مرزی می‌خوانیم، زیرا به‌ازای هر تابع به اندازهٔ کافی هموار u، یک عدد γ_i می‌دهند. عامل دیفرانسیلی (۱۱-۲۹الف) و شرایط مرزی (۱۱-۳۰) با هم تشکیل یک مسئلهٔ مقدار مرزی می‌دهند. معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbb{L}_x[u] = f$ تحت شرایط مرزی (۱۱-۳۰) یک مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{f(x); \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ است.

توجه داریم که $\mathbb{R}_i$، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، تابعکهایی خطی به‌شمار می‌آیند؛ یعنی، $\mathbb{R}_i[u_1 + u_2] = \mathbb{R}_i[u_1] + \mathbb{R}_i[u_2]$ و $\mathbb{R}_i[\alpha u] = \alpha\mathbb{R}_i[u]$. چون $\mathbb{L}_x$ نیز خطی است، نتیجه می‌گیریم که اصل برهم‌نهی در مورد دستگاه مشتمل بر $\mathbb{L}_x[u] = f$ و شرایط مرزی (۱۱-۳۰)، که گاهی هم آن را به‌صورت $(\mathbb{L}; \mathbb{R}_1, \ldots, \mathbb{R}_n)$ نمایش می‌دهیم، نافذ است. اگر u در مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{f; \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ و v در مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{g; \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ صدق کند، در آن‌صورت، $\alpha u + \beta v$ در مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{\alpha f + \beta g; \alpha\gamma_1 + \beta\mu_1, \ldots, \alpha\gamma_n + \beta\mu_n\}$ صدق خواهد کرد. اگر u و v هر دو در مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{f; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ صدق کنند، در آن‌صورت، $u - v$ در مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{0; 0, 0, \ldots, 0\}$، که مسئلهٔ کاملاً همگن خوانده می‌شود، صدق می‌کند.

برخلاف مسئلهٔ مقدار اولیه، ممکن است مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{0; 0, \ldots, 0\}$ یک جواب نابدیهی داشته باشد. اگر مسئلهٔ کاملاً همگن دارای جواب نابدیهی نباشد، در آن‌صورت مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{f; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ حداکثر دارای یک جواب (یک جواب برای هر داده‌ای وجود دارد) خواهد بود. از سوی دیگر، اگر مسئلهٔ کاملاً همگن دارای جوابهای نابدیهی باشد، در آن‌صورت، مسئلهٔ مقدار مرزی با داده‌های $\{f; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ یا جواب ندارد یا بیش از یک جواب دارد.[1]

معمولاً فرض می‌شود که عملگر دیفرانسیلی بر یک فضای هیلبرت، مثل $\mathscr{L}_w^2(a, b)$ عمل می‌کند. از سوی دیگر، همهٔ توابع فضای $\mathscr{L}_w^2(a, b)$ در شرایط مرزی لازم برای تعریف $\mathbb{L}_x$ صدق

1. Stakgold, 1979, 203-204.

نمی‌کنند. بنابراین، توابعی که برای آنها عملگر تعریف می‌شود (آنها که شرایط مرزی را برقرار می‌کنند) زیرمجموعه‌ای از $\mathscr{L}_w^2(a,b)$ را تشکیل می‌دهند که حوزهٔ $\mathbb{L}$ نامیده می‌شود و به‌صورت $\mathrm{D}(\mathbb{L})$ نمایش داده می‌شود. از دیدگاه صوری تمیز قائل شدن بین توابعی با حوزه‌های متفاوت، فوق‌العاده اهمیت دارد. مثلاً، اگر عملگر مشتق در $\mathscr{L}_w^2(-\pi,\pi)$ یا در $\mathscr{L}_w^2(-\infty,+\infty)$ تعریف شود، دارای خواص کاملاً متفاوتی خواهد بود.

مثال ۱۱ـ۴ـ۷: عملگر تکانهٔ $\mathbb{P} = -id/dx$ وقتی بر $\mathscr{L}^2(a,b)$ عمل می‌کند، از این خاصیت برخوردار است که

$$\langle \mathrm{u}|\mathbb{P}|\mathrm{v}\rangle \equiv \int_a^b u^*(x)\left[-i\frac{d}{dx}v(x)\right]dx = -iu^*(x)v(x)\Big|_a^b + i\int_a^b v(x)\frac{du^*}{dx}dx$$
$$= -iu^*(b)v(b) + iu^*(a)v(a) + \langle \mathrm{v}|\mathrm{p}|\mathrm{u}\rangle^* \qquad (۱)$$

در حالت خاص، $\mathbb{P}$ فقط در صورتی هرمیتی خواهد بود که جملهٔ مرزی صفر شود، یا

$$u^*(b)v(b) = u^*(a)v(a)$$

بنابراین، حوزهٔ عملگر هرمیتی $\mathbb{P}$ مشتمل بر تمام توابع u در $\mathscr{L}^2(a,b)$ به‌گونه‌ای است که $u(a) = u(b)$. مثلاً، $\sin x$ وقتی که بر $\mathscr{L}^2(-\pi,\pi)$ عمل می‌کند، به حوزهٔ $\mathbb{P}$ تعلق دارد. از سوی دیگر، تمام توابع متعلق به $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$ خودبه‌خود با تعریف $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$ در $a = -\infty$ و $b = +\infty$ صفر می‌شوند. با این همه، $\sin x$ به $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$، یا بنابراین، وقتی بر $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$ عمل می‌کند، به حوزهٔ $\mathbb{P}$ هرمیتی تعلق ندارد. ●

الحاقی یک عملگر دیفرانسیلی در مطالعهٔ توابع گرین نقشی اساسی بازی می‌کند. بنابراین، اطلاق معنای دقیقی به آن حائز اهمیت است. برای عمومیت بخشیدن به بحث، در تعریف زیر فرض بر این است که u، v، و $\mathbb{L}_x$ لزوماً حقیقی نیستند.

تعریف ۱۱ـ۴ـ۳: فرض کنید $\mathbb{L}_x$ عامل دیفرانسیلی (۱۱ـ۲۹)، و $\mathbb{L}_x^\dagger$، عامل دیفرانسیلی دیگری با این خاصیت است که به‌ازای $u \in \mathrm{D}(\mathbb{L}_x)$ و $v \in \mathrm{D}(\mathbb{L}_x^\dagger)$ دلخواه، داریم

$$w\{v^*(\mathbb{L}_x[u]) - u(\mathbb{L}_x^\dagger[v])^*\} = \frac{d}{dx}[Q(u,v^*)]$$

که در آن $Q(u,v)$، به‌نام ترکیب عطفی توابع u و v، بستگی به u و v و مشتقهای آنها تا مرتبهٔ $n-1$ دارد. عامل دیفرانسیلی $\mathbb{L}_x^\dagger$ را به این ترتیب الحاقی صوری $\mathbb{L}_x$ می‌نامیم. اگر $\mathbb{L}_x^\dagger = \mathbb{L}_x$، در آن‌صورت اصطلاحاً می‌گوییم که $\mathbb{L}_x$ به‌طور صوری خودالحاقی است. علاوه بر این، اگر $\mathrm{D}(\mathbb{L}_x) = \mathrm{D}(\mathbb{L}_x^\dagger)$، در آن‌صورت می‌گوییم $\mathbb{L}_x$ خودالحاقی یا هرمیتی است.

رابطه‌ای که در تعریف ۱۱ـ۴ـ۳ آمده و شامل ترکیب عطفی است، تعمیمی از اتحاد لاگرانژ به‌شمار می‌آید و می‌توان آن را به‌صورت انتگرالی نیز نوشت

$$\int_a^b dxw\{v^*(\mathbb{L}_x[u])\} - \int_a^b dx\ w\{u(\mathbb{L}_x^\dagger[v])^*\} = Q(u,v^*)|_a^b \qquad (۱۱\text{ـ}۳۱)$$

گاهی این شکل نمایش را اتحاد تعمیم‌یافتهٔ گرین می‌نامند.

دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم. چون عملگرهای دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم برای کاربردهای فیزیکی از عمومیت کافی برخوردارند، توجه خود را به آنها معطوف می‌کنیم.

از آنجا که شرایط مرزی همگن در ساختمان توابع گرین حائز اهمیت‌اند، ابتدا شرایط مرزی از نوع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1[u] &\equiv \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) + \beta_{11}u(b) + \beta_{12}u'(b) = 0 \\ \mathbb{R}_2[u] &\equiv \alpha_{21}u(a) + \alpha_{22}u'(a) + \beta_{21}u(b) + \beta_{22}u'(b) = 0 \end{aligned} \qquad (۱۱\text{ـ}۳۲)$$

که طبق معمول، فرض بر این است که $(\alpha_{11},\alpha_{12},\beta_{11},\beta_{12})$ و $(\alpha_{21},\alpha_{22},\beta_{21},\beta_{22})$ خطی مستقل‌اند.

اگر بنابر رسم، حاصلضرب داخلی را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle \mathrm{u}|\mathrm{v}\rangle = \int_a^b dx\ w(x)u^*(x)v(x)$$

در آن‌صورت، معادلهٔ (۱۱ـ۳۱) را می‌توان به‌طور صوری به شکل زیر نوشت

$$\langle \mathrm{v}|\mathbb{L}|\mathrm{u}\rangle = \langle \mathrm{u}|\mathbb{L}^\dagger|\mathrm{v}\rangle^* + Q(u,v^*)|_a^b$$

اگر جملهٔ رویه‌ای صفر بشود، یعنی اگر داشته باشیم:

$$Q(u,v^*)|_{x=b} = Q(u,v^*)|_{x=a} \qquad (۱۱\text{ـ}۳۳)$$

رابطهٔ قبل بر تعریف متداول الحاقی منطبق خواهد بود. حال شرایطی را بررسی کنیم که تحت آن، این رابطه برقرار خواهد بود.

با فرض شرایط مرزی (۱۱ـ۳۲)، می‌خواهیم محدودیتهای اعمال شده بر (۱۱ـ۳۲) را چنان بیابیم که (۱۱ـ۳۳) برقرار باشد (تمرین ۱۱ـ۴ـ۵). می‌توان ثابت کرد که v باید شرایطی مرزی شبیه ۱۱ـ۳۲ را برقرار کند:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1[v^*] &\equiv \gamma_{11}v^*(a) + \gamma_{12}{v'}^*(a) + \delta_{11}v^*(b) + \delta_{12}{v'}^*(b) = 0 \\ \mathbb{B}_2[v^*] &\equiv \gamma_{21}v^*(a) + \gamma_{22}{v'}^*(a) + \delta_{21}v^*(b) + \delta_{22}{v'}^*(b) = 0\end{aligned} \qquad (۱۱\text{ـ}۳۴)$$

اصطلاحاً می‌گوییم که این شرایط مرزی همگن، الحاقی شرایط مرزی (۱۱ـ۳۲) هستند. مسلماً، این شرایط مرزی با شرایط مرزی (۱۱ـ۳۲) همسان نیستند. بنابراین، نیازی نیست که حوزهٔ یک عملگر دیفرانسیلی مانند حوزهٔ الحاقی‌اش باشد.

مثال ۱۱ـ۴ـ۸: فرض کنید $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2$ و

$$\mathbb{R}_1[u] \equiv \alpha u(a) - u'(a) = 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{R}_2[u] \equiv \beta u(b) - u'(b) = 0 \qquad (۱)$$

می‌خواهیم $Q(u, v^*)$ و شرایط مرزی الحاقی را برای v پیدا کنیم. با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء مکرر [یا با بهره‌گیری از معادلهٔ (۹ـ۲۱الف)]، خواهیم داشت

$$Q(u, v^*) = u'v^* - u{v'}^*$$

برای اینکه جملهٔ رویه‌ای صفر شود، باید داشته باشیم

$$u'(a)v^*(a) - u(a){v'}^*(a) = u'(b)v^*(b) - u(b){v'}^*(b)$$

با جایگذاری از (۱) در این معادله، خواهیم داشت

$$u(a)[\alpha v^*(a) - {v'}^*(a)] = u(b)[\beta v^*(b) - {v'}^*(b)]$$

که در صورتی به‌ازای مقدار دلخواه u برقرار است که

$$\mathbb{B}_1[v^*] \equiv \alpha v^*(a) - {v'}^*(a) = 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{B}_2[v^*] \equiv \beta v^*(b) - {v'}^*(b) = 0 \qquad (۲)$$

این رابطه، حالت خاصی است که در آن شرایط مرزی الحاقی با شرایط مرزی اولیه همسانند (با این تفاوت که در اینجا مزدوج مختلط v به‌کار رفته است).

برای پی بردن به این مطلب که نیازی نیست شرایط مرزی اولیه با الحاقی‌شان همسان باشند، روابط زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{R}_1[u] = u'(a) - \alpha u(b) = 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{R}_2[u] = \beta u(a) - u'(b) = 0 \qquad (۳)$$

که از آن خواهیم داشت

$$u(b)[\alpha v^*(a) + v'^*(b)] = u(a)[\beta v^*(b) + v'^*(a)]$$

بنابراین

$$\mathbb{B}_1[v^*] \equiv \alpha v^*(a) + v'^*(b) = 0 \quad \text{و} \quad \mathbb{B}_2[v^*] \equiv \beta v^*(b) + v'^*(a) = 0 \qquad (۴)$$

که مانند (۳) نیست. شرایطی مرزی مانند (۱) و (۲)، که در آنها هر معادله شامل تابع و مشتق آن است، که در یک نقطه محاسبه شده‌اند، شرایط مرزی ناآمیخته خوانده می‌شوند. از سوی دیگر، (۳) و (۴) شرایط مرزی آمیخته هستند. ●

گاهی بهتر است که (۱۱ـ۳۲) و (۱۱ـ۳۴) را، به‌ترتیب، به‌صورت

$$\mathbb{R}[u] \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{R}_1[u] \\ \mathbb{R}_2[u] \end{pmatrix} = (\alpha\ \beta) \begin{pmatrix} \mathrm{U}_a \\ \mathrm{U}_b \end{pmatrix} = 0 \quad \mathrm{U}_a \equiv \begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix}, \mathrm{U}_b \equiv \begin{pmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{pmatrix} \quad \text{به‌ازای}$$

(۱۱ـ۳۵)

و

$$\mathbb{B}[v^*] \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{B}_1[v^*] \\ \mathbb{B}_2[v^*] \end{pmatrix} \equiv (\gamma\ \delta) \begin{pmatrix} \mathrm{V}_a^* \\ \mathrm{V}_b^* \end{pmatrix} = 0 \quad \mathrm{V}_a^* \equiv \begin{pmatrix} v^*(a) \\ v'^*(a) \end{pmatrix}, \mathrm{V}_b^* \equiv \begin{pmatrix} v^*(b) \\ v'^*(b) \end{pmatrix} \quad \text{به‌ازای}$$

(۱۱ـ۳۶)

بنویسیم، که در آنها α، β، γ، و δ ماتریسهایی ۲ × ۲ با عناصر مشخص هستند، و ضرب بردارهای سطری و ستونی به‌صورت ضرب بلوکی تعریف می‌شود.

عملگرهای دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم خودالحاقی. در فصل ۹ نشان دادیم که یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم، در اتحاد گرین تعمیم‌یافته، به‌ازای $w(a) = 1$ صدق می‌کند. در واقع، چون u و v در معادلهٔ (۹ـ۱۲ب) حقیقی هستند، آن معادله در صورتی با (۱۱ـ۳۱) همسان است که قرار بدهیم $w = 1$ و

$$Q(u, v) = p_2 vu' - (p_2 v)'u + p_1 uv \qquad (۱۱\text{ـ}۳۷)$$

همچنین، دیده‌ایم که هر عامل دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم را می‌توان (به‌طور صوری) تبدیل به خودالحاقی کرد. بنابراین، عامل دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم (به‌طور صوری) خودالحاقی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{L}_x = \mathbb{L}_x^\dagger = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$$

که در آن $p(x)$ و $q(x)$، هر دو توابعی حقیقی‌اند و حاصلضرب داخلی با وزن $w = 1$ تعریف می‌شود. اگر به عملگرهایی علاقه‌مند باشیم که به‌طور صوری خودالحاقی‌اند و وزن کلی آنها عبارت است از $w > 0$، می‌توانیم آنها را به این ترتیب به‌دست آوریم: ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $\mathbb{L}_x$ با یک وزن واحد به‌طور صوری خودالحاقی باشد، در آن‌صورت $(1/w)\mathbb{L}_x$ با وزن w خودالحاقی است. سپس، می‌بینیم که $\mathbb{L}_x$ به‌ازای تمام توابع q، به‌خصوص wq، به‌طور صوری خودالحاقی است. اکنون تعریف زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{L}_x^{(w)} \equiv \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + qw$$

به این ترتیب، $\mathbb{L}_x^{(w)}$ با وزن واحد به‌طور صوری خودالحاقی است و در این‌صورت

$$\mathbb{L}_x \equiv \frac{1}{w}\mathbb{L}_x^{(w)} = \frac{1}{w}\,\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q \qquad (۱۱\text{ـ}۳۸\text{الف})$$

با وزن $w(x) > 0$ به‌طور صوری خودالحاقی است.

برای عملگرهای دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم که با وزن w به‌طور صوری خودالحاقی‌اند، ترکیب عطفی داده شده در (۱۱ـ۳۷)، با مقادیر حقیقی u و v به رابطهٔ زیر کاهش می‌یابد

$$Q(u, v) = p(x)w(x)(vu' - uv') \qquad (۱۱\text{ـ}۳۸\text{ب})$$

به این ترتیب، جملهٔ رویه‌ای در اتحاد گرین تعمیم‌یافته فقط در صورتی صفر می‌شود که داشته باشیم

$$p(b)w(b)[v(b)u'(b)-u(b)v'(b)]=p(a)w(a)[v(a)u'(a)-u(a)v'(a)] \quad (۱۱\text{ـ}۳۹)$$

عملگر دیفرانسیلی، در صورتی خودالحاقی (یا هرمیتی) می‌شود که u و v هم در معادلهٔ (۱۱ـ۳۹) و هم در شرایط مرزی همسان، صدق کنند. به آسانی می‌توان نشان داد که چهار نوع شرایط مرزی زیر در مورد $u(x)$، اعتبار (۱۱ـ۳۹) را تضمین، و بنابراین، یک عملگر هرمیتی، $\mathbb{L}_x$، تعریف می‌کنند که با (۱۱ـ۳۸) داده می‌شود:

۱. شرایط مرزی دیریکله: $u(a) = u(b) = ۰$
۲. شرایط مرزی نویمان: $u'(a) = u'(b) = ۰$
۳. شرایط مرزی ناآمیختهٔ عام: $\alpha u(a) - u'(a) = \beta u(b) - u'(b) = ۰$
۴. شرایط مرزی دوره‌ای: $u(a) = u(b)$ و $u'(a) = u'(b)$

۱۱ـ۴ـ۳ توابع گرین عملگرهای دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم

اکنون ما در موقعیتی قرارگرفته‌ایم که توابع گرین عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم را پیدا کنیم. یادآور می‌شویم که اگر $\mathbb{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی باشد، وارون آن، $\mathbb{G}$، به‌نام عملگر گرین، بنابر تعریف عبارت است از

$$\mathbb{L}\mathbb{G} = ۱$$

همان‌گونه که در آغاز این بخش عنوان کردیم، این معادله منجر می‌شود به معادلهٔ دیفرانسیل زیر

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)} \quad (۱۱\text{ـ}۴۰)$$

که در آن، $G(x,y)$ تابع گرین مربوط به $\mathbb{L}_x$ است. روشن است که $\mathbb{G}$ وارون صوری $\mathbb{L}$ است. اگر قرار بر وجود $\mathbb{G}$ است، $\mathbb{L}$ باید وارون‌پذیر باشد. حال وارون‌پذیری $\mathbb{L}$ را بررسی می‌کنیم.

ابتدا به این نکته اشاره می‌کنیم که مشخص کردن کامل $\mathbb{L}_x$ مستلزم نه تنها دانستن $p_۰(x)$، $p_۱(x)$، و $p_۲(x)$، یعنی توابع ضریب آن، بلکه مستلزم دانستن شرایط مرزی که بر جوابها اعمال می‌شوند، نیز هست. کلی‌ترین شرایط مرزی مناسب یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم، از نوع آن چیزی‌اند که در (۱۱ـ۳۰) به‌ازای $n = ۲$ داده شده است. بنابراین، برای مشخص کردن

$\mathbb{L}_x$ به‌طور یکتا، دستگاه $(\mathbb{L};\mathbb{R}_1,\mathbb{R}_2)$ با داده‌های $(f;\gamma_1,\gamma_2)$ را در نظر می‌گیریم. این دستگاه، یک مسئلهٔ مقدار مرزی یکتا تعریف می‌کند

$$\mathbb{L}_x[u] \equiv p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_0(x)u = f(x) \qquad \text{(۱۱ـ۴۱الف)}$$

$$\mathbb{R}_i[u] = \gamma_i \quad i = 1, 2 \qquad \text{(۱۱ـ۴۱ب)}$$

یکی از شرطهای لازم برای اینکه $\mathbb{L}_x$ وارون‌پذیر باشد، این است که معادلهٔ دیفرانسیل همگن $\mathbb{L}_x[u] = 0$ باید فقط جواب $u \equiv 0$ را داشته باشد. برای اینکه $u \equiv 0$ تنها جواب باشد، باید یک جواب باشد. یعنی باید تمام شرایط در معادله‌های (۱۱ـ۴۱) را برآورد. در حالت خاص، چون $\mathbb{R}_i$ توابعی خطی از u هستند، باید داشته باشیم

$$\mathbb{R}_i[0] = 0$$

این حکم را می‌توان به‌صورت یک لم بیان کرد.

لم ۱۱ـ۴ـ۴: یکی از شرطهای لازم برای اینکه عملگر دیفرانسیلی تعریف شده در (۱۱ـ۴۱الف) وارون‌پذیر باشد، این است که $\gamma_i = 0$؛ یعنی باید شرایط مرزی (۱۱ـ۴۱ب) همگن باشند.

بنابراین، برای مطالعهٔ توابع گرین، باید بررسی خود را به مسائلی با شرایط مرزی همگن محدود کنیم. در ابتدا ممکن است این امر تحدیدکننده به‌نظر برسد، زیرا همهٔ مسائل شرایط مرزی همگن ندارند. آیا می‌توانیم مسائل دیگر را نیز با روش گرین حل کنیم؟ همان‌گونه که بعداً در این بخش خواهیم دید، پاسخ مثبت است.

بحث بالا به روشنی اشاره به این نکته دارد که تابع گرین مربوط به $\mathbb{L}_x$، که وارون آن است، فقط در صورتی تعریف می‌شود که ما دستگاه $(\mathbb{L};\mathbb{R}_1,\mathbb{R}_2)$ را با داده‌های $(f;0,0)$ در نظر بگیریم. اگر تابع گرین وجود داشته باشد، باید در (۱۱ـ۴۰)، که در آن $\mathbb{L}_x$ بر $G(x,y)$ عمل می‌کند، صدق کند. اما بخشی از تعریف $\mathbb{L}_x$، شرایطی مرزی‌اند که بر جوابها اعمال می‌شوند. بنابراین، اگر سمت چپ (۱۱ـ۴۰) بخواهد معنی‌دار باشد، $G(x,y)$ نیز باید همان شرایط مرزی را برقرار کند. بنابراین، به تعریف زیر خواهیم رسید.

تعریف ۱۱ـ۴ـ۵: تابع گرین عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_x$، عبارت است از تابعی مانند $G(x,y)$ که در

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

و، به‌عنوان تابعی از x، در شرایط مرزی

$$\mathbb{R}_i[G] = ۰ \qquad i = ۱, ۲$$

که در آن $\mathbb{R}_i$ مطابق معادلهٔ (۱۱ـ۳۰) تعریف می‌شوند، صدق کند.

بهتر است به‌طور همزمان، تابع گرین الحاقی $\mathbb{L}_x$ را نیز مطالعه کنیم. با نشان دادن این تابع به‌صورت $g(x,y)$، داریم

$$\mathbb{L}_x^\dagger g(x,y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)} \qquad \text{(۱۱ـ۴۲الف)}$$

$$\mathbb{B}_i[g] = ۰ \qquad i = ۱, ۲ \qquad \text{(۱۱ـ۴۲ب)}$$

که $\mathbb{B}_i$ تابعکهای مرزی الحاقی $\mathbb{R}_i$ هستند و در (۱۱ـ۳۴) داده شده‌اند. تابع $g(x,y)$ به تابع گرین الحاقی وابسته به معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱ـ۴۱الف) مشهور است.

اکنون می‌توانیم با استفاده از (۱۱ـ۴۱) و (۱۱ـ۴۲) جوابهای

$$\mathbb{L}_x[u] = f(x) \qquad \mathbb{R}_i[u] = ۰ \qquad i = ۱, ۲ \qquad \text{(۱۱ـ۴۳الف)}$$

و

$$\mathbb{L}_x^\dagger[v] = h(x) \qquad \mathbb{B}_i[v^*] = ۰ \qquad i = ۱, ۲ \qquad \text{(۱۱ـ۴۳ب)}$$

را پیدا کنیم. به‌ازای $v(x) = g(x,y)$ در (۱۱ـ۳۱)، که فرض می‌کنیم سمت راست آن صفر است، داریم

$$\int_a^b w g^*(x,y) \mathbb{L}_x[u] dx = \int_a^b w u(x) (\mathbb{L}_x^\dagger[g])^* dx$$

اگر (۱۱ـ۴۲الف) را در سمت راست و (۱۱ـ۴۳الف) را در سمت چپ به‌کار ببریم می‌رسیم به

$$u(y) = \int_a^b g^*(x,y)w(x)f(x)dx$$

به همین ترتیب، به‌ازای $u(x) = G(x,y)$، معادلهٔ (۱۱ـ۳۱) می‌دهد

$$v^*(y) = \int_a^b G(x,y)w(x)h^*(x)dx$$

یا، چون $w(x)$ یک تابع حقیقی (مثبت) است:

$$v(y) = \int_a^b w(x)G^*(x,y)h(x)dx$$

این معادلات برحسب $u(y)$ و $v(y)$، همانی نیستند که ما انتظار داریم [مثلاً، معادلهٔ (۱۱ـ۲۷)]. اما، اگر برخی خواص توابع گرین را، که در زیر بررسی خواهیم کرد، از نظر بگذرانیم، این معادلات، همان معادلات مطلوب خواهند شد.

خواص توابع گرین. معادلهٔ (۱۱ـ۳۱) را، با عبارت سمت راست مساوی صفر، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\int_a^b dt\, w(t)\{v^*(t)(\mathbb{L}_t[u])\} = \int_a^b dt\, w(t)\{u(t)(\mathbb{L}_t^\dagger[v])^*\} \qquad (۱۱\text{ـ}۴۴)$$

این رابطه را گاهی اتحاد گرین می‌نامند. با جایگذاری $u(t) \equiv G(t,y)$ و $v(t) = g(t,x)$ در (۱۱ـ۴۴)، خواهیم داشت

$$\int_a^b dt\, w(t)g^*(t,x)\frac{\delta(t-y)}{w(t)} = \int_a^b dt\, w(t)G(t,y)\frac{\delta(t-x)}{w(t)}$$

یا

$$g^*(y,x) = G(x,y)$$

یکی از پیامدهای این اتحاد، آن است که $G(x,y)$ باید شرایط مرزی الحاقی را نسبت به‌شناسهٔ دومش برقرار کند.

اگر، موقتاً، فرض کنیم که تابع گرین وابسته به یک دستگاه $(\mathbb{L};\mathbb{R}_1,\mathbb{R}_2)$ یکتاست، در آن‌صورت، چون برای یک عملگر دیفرانسیلی هرمیتی، $\mathbb{L}_x$ و $\mathbb{L}_x^\dagger$ همسان‌اند و u و v هر دو شرایط مرزی مشابهی را برقرار می‌کنند، باید داشته باشیم

$$G(x,y)=g(x,y)$$

یا، با توجه به $g^*(y,x)=G(x,y)$، خواهیم داشت

$$G(x,y)=G^*(y,x)$$

در حالت خاص، اگر توابع ضریب $\mathbb{L}_x$ همه حقیقی باشند، $G(x,y)$ حقیقی خواهد بود، و داریم

$$G(x,y)=G(y,x)$$

یعنی، G نسبت به دو شناسهٔ خود، متقارن است.

آخرین خاصیت، مربوط به پیوستگی $G(x,y)$ و مشتق آن در $y=x$ است. برای یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم، داریم

$$\mathbb{L}_x G(x,y)=p_2(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+p_1(x)\frac{\partial G}{\partial x}+p_0(x)G=\frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

که در آن p_0، p_1، و p_2، بنابر فرض ، در بازهٔ $\mathrm{I}=[a,b]$ حقیقی و پیوسته‌اند، و $w(x)$ و $p_2(x)$ به‌ازای جمیع $x\in\mathrm{I}$، بزرگتر از صفر فرض می‌شوند. دو طرف معادلهٔ دیفرانسیل را در $h(x)\equiv\mu(x)/p_2(x)$، که در آن $\mu(x)\equiv\exp[\int_a^x p_1(t)/p_2(t)dt]$، و با توجه به اینکه $d\mu/dx=(p_1/p_2)\mu$، ضرب می‌کنیم. این کار، معادلهٔ دیفرانسیل را تبدیل می‌کند به

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right]+\frac{p_0(x)\mu(x)}{p_2(x)}G(x,y)=\frac{\mu(y)}{p_2(y)w(y)}\delta(x-y)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\mu(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}+\int_a^x\frac{p_0(t)\mu(t)}{p_2(t)}G(t,y)dt=\frac{\mu(y)}{p_2(y)w(y)}\theta(x-y)+\text{const.}\tag{۱۱-۴۵}$$

زیرا تابع اولیهٔ $\delta(x-y)$ عبارت است از $\theta(x-y)$ (فصل ۵).

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $p_{۰}=۰$ و تابع گرین مربوط به آن را با $G_{۰}(x,y)$ نشان می‌دهیم. معادلهٔ (۱۱ـ۴۵) تبدیل می‌شود به

$$\mu(x)\frac{\partial G_{۰}}{\partial x}=\frac{\mu(y)}{p_{۲}(y)w(y)}\theta(x-y)+C_{۱}$$

که، چون μ، $p_{۲}$، و w در بازهٔ I پیوسته‌اند و $\theta(x-y)$ فقط در $x=y$ ناپیوسته است، دلالت دارد بر پیوسته بودن $\partial G_{۰}/\partial x$ در همه جای بازهٔ I جز در $x=y$. با این همه، همان‌طور که در تمرین ۱۱ـ۴ـ۶ نشان داده می‌شود، $G_{۰}(x,y)$ خود در $x=y$ پیوسته است.

اکنون، با نوشتن

$$G(x,y)=G_{۰}(x,y)+H(x,y)$$

و اعمال $\mathbb{L}_x$ بر دو طرف آن، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x-y)}{w(x)}&=\left(p_{۲}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}+p_{۱}\frac{d}{dx}\right)G_{۰}+p_{۰}G_{۰}+\mathbb{L}_xH(x,y)\\&=\frac{\delta(x-y)}{w(x)}+p_{۰}G_{۰}+\mathbb{L}_xH(x,y)\end{aligned}$$

یا

$$p_{۲}\frac{d^{۲}H}{dx^{۲}}+p_{۱}\frac{dH}{dx}+p_{۰}H=-p_{۰}G_{۰}$$

پیوستگی $G_{۰}$، $p_{۰}$، $p_{۱}$، و $p_{۲}$ در بازهٔ I، به معنای پیوستگی H است، زیرا ناپیوستگی در H مستلزم ناپیوستگی تابع دلتا در dH/dx است، که امری محال است، زیرا هیچ تابع دلتایی در معادلهٔ مربوط به H وجود ندارد. چون $G_{۰}$ و H هر دو پیوسته‌اند، G باید در بازهٔ I پیوسته باشد.

اکنون می‌توانیم جهش در $\partial G/\partial x$ را در $x=y$ محاسبه کنیم. این جهش را با $\Delta G'(y)$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta G'(y)\equiv\lim_{\varepsilon\to ۰}\left[\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right|_{x=y+\varepsilon}-\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right|_{x=y-\varepsilon}\right]$$

با تقسیم (۱۱ـ۴۵) بر $\mu(x)$ و گرفتن حد یاد شده برای تمام جمله‌ها، خواهیم داشت

$$\Delta G'(y) + \lim_{\varepsilon\to \circ}\left[\frac{\text{۱}}{\mu(y+\varepsilon)}\int_a^{y+\varepsilon}\frac{p_\circ(t)\mu(t)}{p_{\text{۲}}(t)}G(t,y)dt - \frac{\text{۱}}{\mu(y-\varepsilon)}\int_a^{y-\varepsilon}\frac{p_\circ(t)\mu(t)}{p_{\text{۲}}(t)}G(t,y)dt\right]$$
$$= \frac{\mu(y)}{p_{\text{۲}}(y)w(y)}\lim_{\varepsilon\to\circ}\left[\frac{\theta(+\varepsilon)}{\mu(y+\varepsilon)} - \frac{\theta(-\varepsilon)}{\mu(y-\varepsilon)}\right] + \circ$$

جملهٔ دوم در سمت راست صفر است، چون همهٔ توابع در y پیوسته‌اند. حد طرف راست صرفاً عبارت است از $\text{۱}/\mu(y)$. بنابراین، داریم

$$\Delta G'(y) = \frac{\text{۱}}{p_{\text{۲}}(y)w(y)} \qquad (\text{۱۱ـ۴۶})$$

ساختمان و یکتایی توابع گرین. اکنون در موقعیتی هستیم که تابع گرین را برای یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم عام محاسبه کنیم و نشان دهیم که این تابع یکتاست.

قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۶: دستگاه $(\mathbb{L};\mathbb{R}_{\text{۱}},\mathbb{R}_{\text{۲}})$ با داده‌های $(f(x);\circ,\circ)$ را، که در آن $\mathbb{L}_x$ عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دومی است در نظر بگیرید. اگر معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbb{L}_x[u]=\circ$ جواب نابدیهی نداشته باشد، در آن‌صورت تابع گرین وابسته به دستگاه داده شده وجود دارد و یکتا نیز هست. جواب دستگاه عبارت است از

$$u(x) = \int_a^b dy\; w(y)G(x,y)f(y)$$

که این جواب نیز یکتاست. ■

اثبات . تابع گرین در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\mathbb{L}_x G(x,y) = \circ$$

به‌ازای جمیع مقادیر $x\in[a,b]$، جز $x=y$، صدق می‌کند. پس ما $[a,b]$ را به دو بازهٔ $\mathrm{I}_{\text{۱}}=[a,b]$ و $\mathrm{I}_{\text{۲}}=[y,b]$ تقسیم و ملاحظه می‌کنیم که یکی از جوابهای عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن

بالا را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از پایهٔ جوابهای، مثلاً u_1 و u_2، نوشت. بنابراین، می‌توانیم جواب معادلهٔ دیفرانسیل را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} G_{\text{چپ}}(x,y) &\equiv c_1u_1(x)+c_2u_2(x) \qquad x\in \mathrm{I}_1 \\ G_{\text{راست}}(x,y) &\equiv d_1u_1(x)+d_2u_2(x) \qquad x\in \mathrm{I}_2 \\ G(x,y) &= \begin{cases} G_{\text{چپ}}(x,y) & x\in\mathrm{I}_1 \\ G_{\text{راست}}(x,y) & x\in\mathrm{I}_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{۱۱-۴۷}$$

که c_1، c_2، d_1، و d_2، عموماً توابعی از y به‌شمار می‌آیند. برای تعیین $G(x,y)$ باید چهار مجهول را پیدا کنیم. ما همچنین چهار رابطه داریم: پیوستگی G، جهش $\partial G/\partial x$ در $x=y$، و دو شرط مرزی $\mathbb{R}_1[G]=\mathbb{R}_2[G]=0$.

از پیوستگی G داریم

$$c_1(y)u_1(y)+c_2(y)u_2(y)=d_1(y)u_1(y)+d_2(y)u_2(y)$$

جهش $\partial G/\partial x$ در $x=y$ منجر می‌شود به

$$c_1(y)u_1'(y)+c_2(y)u_2'(y)-d_1(y)u_1'(y)-d_2(y)u_2'(y)=-\frac{1}{p_2(y)w(y)}$$

معرفی $b_1\equiv c_1-d_1$ و $b_2\equiv c_2-d_2$، دو معادلهٔ اخیر را به معادلات زیر تغییر می‌دهد

$$b_1u_1+b_2u_2=0$$

و

$$b_1u_1'+b_2u_2'=-\frac{1}{p_2w}$$

این معادله‌ها فقط و فقط در صورتی یک جواب یکتا دارند که داشته باشیم

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix}\neq 0$$

اما دترمینان صرفاً ورونیسکی دو جواب مستقل $u_۱$ و $u_۲$ است و، بنابراین نمی‌تواند صفر باشد. از این‌رو، $b_۱(y)$ و $b_۲(y)$ برحسب $u_۱$، $u'_۱$، $u_۲$، $u'_۲$، $p_۲$، و w تعیین می‌شوند.

ما اکنون این تعریف را در نظر می‌گیریم

$$h(x,y) \equiv \begin{cases} b_۱(y)u_۱(x) + b_۲(y)u_۲(x) & x \in \mathrm{I}_۱ \\ ۰ & x \in \mathrm{I}_۲ \end{cases}$$

به‌طوری که این رابطه برقرار شود

$$G(x,y) = h(x,y) + d_۱(y)u_۱(x) + d_۲(y)u_۲(x)$$

و به این ترتیب تعداد مجهولها را به دو، $d_۱$ و $d_۲$، کاهش می‌دهیم.

اعمال شرایط مرزی، دو رابطهٔ دیگر به‌دست می‌دهد

$$\mathbb{R}_۱[G] = \mathbb{R}_۱[h] + d_۱\mathbb{R}_۱[u_۱] + d_۲\mathbb{R}_۱[u_۲] = ۰$$
$$\mathbb{R}_۲[G] = \mathbb{R}_۲[h] + d_۱\mathbb{R}_۲[u_۱] + d_۲\mathbb{R}_۲[u_۲] = ۰$$

آیا می‌توانیم این معادله‌ها را حل کنیم و $d_۱$ و $d_۲$ را به‌طور یکتا از آنها به‌دست بیاوریم؟ جواب مثبت است اگر داشته باشیم

$$\det\begin{pmatrix} \mathbb{R}_۱[u_۱] & \mathbb{R}_۱[u_۲] \\ \mathbb{R}_۲[u_۱] & \mathbb{R}_۲[u_۲] \end{pmatrix} \neq ۰$$

و در حقیقت می‌توان ثابت کرد (تمرین ۱۱ـ۴ـ۷) که این دترمینان ناصفر است.

وقتی $\{b_i, d_i\}_{i=۱}^{۲}$ به‌طور یکتا پیدا شد، می‌توانیم c_i را به‌طور یکتا محاسبه کنیم، همهٔ آنها را در (۱۱ـ۴۷) قرار بدهیم، و $G(x,y)$ را به‌طور یکتا به‌دست بیاوریم. یکتا بودن $u(x)$ را نیز می‌توان به همین ترتیب اثبات کرد. ■

مثال ۱۱ـ۴ـ۹: تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x = d^۲/dx^۲$ را با شرایط مرزی $u(a) = u(b) = ۰$ پیدا می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ $\mathbb{L}_x[u] = ۰$ با شرایط مرزی داده شده دارای جواب ناصفر

نیست (ثابت کنید). بنابراین، تابع گرین یاد شده وجود دارد. معادلهٔ دیفرانسیل برای تابع گرین عبارت است از

$$\frac{d^2G}{dx^2} = 0 \qquad x \neq y \text{ به‌ازای}$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از

$$G(x,y) = \begin{cases} c_1x + c_2 & a \le x < y \text{ به‌ازای} \\ d_1x + d_2 & y < x \le b \text{ به‌ازای} \end{cases} \tag{1}$$

پیوستگی در $x = y$ می‌دهد

$$c_1y + c_2 = d_1y + d_2$$

یا، به اعتبار تعریف $b_i \equiv c_i - d_i$،

$$b_1y + b_2 = 0 \tag{2}$$

از ناپیوستگی dG/dx در $x = y$، با فرض $w = 1$، داریم

$$d_1 - c_1 = \frac{1}{p_2w} = 1 \tag{3}$$

از معادله‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$b_1 = -1 \quad \text{و} \quad b_2 = y$$

از سوی دیگر، $G(x,y)$ باید شرایط مرزی داده شده را برقرار کند. بنابراین، $G(a,y) = 0 = G(b,y)$. از آنجا که $a \le y$ و $b \ge y$، خواهیم داشت

$$c_1a + c_2 = 0$$

$$d_1b + d_2 = 0$$

یا، با قرار دادن $c_i = b_i + d_i$،

$$ad_1 + d_2 = a - y$$
$$bd_1 + d_2 = 0$$

جواب این معادله‌ها عبارت است از

$$d_1 = \frac{y-a}{b-a} \quad \text{و} \quad d_2 = -\frac{b(y-a)}{b-a}$$

با b_1، b_2، d_1، d_2 داده شده در بالا، خواهیم داشت

$$c_1 = b_1 + d_1 = -\frac{b-y}{b-a}$$
$$c_2 = b_2 + d_2 = a\frac{b-y}{b-a}$$

با نوشتن (۱) به‌صورت

$$G(x,y) = (c_1x + c_2)\theta(y-x) + (d_1x + d_2)\theta(x-y)$$

و به‌کار بردن اتحاد $\theta(y-x) = 1 - \theta(x-y)$، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} G(x,y) &= c_1x + c_2 - (c_1x + c_2)\theta(x-y) + (d_1x + d_2)\theta(x-y) \\ &= c_1x + c_2 - (b_1x + b_2)\theta(x-y) \end{aligned}$$

با بهره‌گیری از مقادیری که برای bها و cها پیدا شد، خواهیم داشت

$$G(x,y) = (a-x)\left(\frac{b-y}{b-a}\right) + (x-y)\theta(x-y)$$

که مانند تابع گرین به‌دست آمده در مثال ۱۱ـ۴ـ۴ است. ●

مثال ۱۱ـ۴ـ۱۰: اکنون می‌خواهیم تابع را برای $\mathbb{L}_x = d^{۲}/dx^{۲} + ۱$ با شرایط مرزی $u(۰) = u(\pi/۲) = ۰$ به‌دست بیاوریم. جواب عمومی $\mathbb{L}_x[u] = ۰$ عبارت است از

$$u(x) = A\sin x + B\cos x$$

اگر شرایط مرزی را اعمال کنیم به‌دست می‌آید $u \equiv ۰$. بنابراین، $G(x,y)$ وجود دارد. شکل کلی $G(x,y)$ عبارت است از

$$G(x,y) = \begin{cases} c_۱ \sin x + c_۲ \cos x & ۰ \le x < y \\ d_۱ \sin x + d_۲ \cos x & y < x \le \pi/۲ \end{cases} \qquad (۱)$$

از پیوستگی G در $x = y$، به‌ازای $b_i \equiv c_i - d_i$، خواهیم داشت

$$b_۱ \sin y + b_۲ \cos y = ۰ \qquad (۲)$$

ناپیوستگی مشتق G در $x = y$ می‌دهد

$$b_۱ \cos y - b_۲ \sin y = -۱ \qquad (۳)$$

که فرض کرده‌ایم $w(x) = ۱$. از حل (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$b_۱ = -\cos y \quad \text{و} \quad b_۲ = \sin y$$

نتایج حاصل از شرایط مرزی به این قرارند

$$G(۰,y) = ۰ \quad \Rightarrow \quad c_۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad d_۲ = -b_۲ = -\sin y$$
$$G(\pi/۲,y) = ۰ \quad \Rightarrow \quad d_۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad c_۱ = b_۱ = -\cos y$$

با جایگذاری در (۱)، داریم

$$G(x,y) = \begin{cases} -\cos y \sin x & x < y \\ -\sin y \cos x & x > y \end{cases}$$

یا، با استفاده از تابع تتا،

$$\begin{aligned} G(x,y) &= (-\cos y \sin x)\theta(y-x) - (\sin y \cos x)\theta(x-y) \\ &= -(\cos y \sin x)[1-\theta(x-y)] - (\sin y \cos x)\theta(x-y) \qquad (۴) \\ &= -\cos y \sin x + \theta(x-y)\sin(x-y) \end{aligned}$$

خوب است مستقیماً تحقیق کنیم که معادلهٔ (۴) در $\mathbb{L}_x[G] = \delta(x-y)$ صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_x[G] &= -\cos y\, \mathbb{L}_x[\sin x] + \mathbb{L}_x[\theta(x-y)\sin(x-y)] \\ &= 0 + \frac{d^2}{dx^2}[\theta(x-y)\sin(x-y)] + \theta(x-y)\sin(x-y) \\ &= \frac{d}{dx}[\delta(x-y)\sin(x-y) + \theta(x-y)\cos(x-y)] + \theta(x-y)\sin(x-y) \end{aligned}$$

اولین جمله صفر است زیرا سینوس در تنها نقطه‌ای که تابع دلتا ناصفر باشد صفر می‌شود (فصل ۵). بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_x[G] = [\delta(x-y)\cos(x-y) - \theta(x-y)\sin(x-y)] \\ + \theta(x-y)\sin(x-y) = \delta(x-y) \end{aligned}$$

زیرا تابع دلتا ایجاب می‌کند که $x = y$؛ در اینجا $\cos(x-y) = 1$. ●

وجود و یکتایی تابع گرین، $G(x,y)$، همراه با خواص و الحاقی آن، بر وجود یکتایی الحاقی تابع گرین، $g(x,y)$، دلالت می‌کنند. با بهره‌گیری از این واقعیت، می‌توان اثبات کرد که شرط عدم یک جواب نابدیهی برای $\mathbb{L}_x[u] = 0$، یکی از شرایط لازم برای وجود $G(x,y)$ نیز هست. یعنی، اگر $G(x,y)$ وجود داشته باشد، در آن‌صورت $\mathbb{L}_x[u] = 0$ به معنای $u = 0$ است.

فرض کنید $G(x,y)$ وجود دارد؛ در آن‌صورت $g(x,y)$ نیز وجود دارد. در اتحاد گرین، فرض کنید $v = g(x,y)$. در نتیجه به اتحاد زیر خواهیم رسید

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) g^*(x,y)(\mathbb{L}_x[u])dx &= \int_a^b w(x)u(x)(\mathbb{L}_x^\dagger[g])^* dx \\ &= \int_a^b w(x)u(x)\frac{\delta(x-y)}{w(x)}dx = u(y) \end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر $\mathbb{L}_x[u] = 0$، به‌ازای جمیع مقادیر y، خواهیم داشت $u(y) = 0$، که معنا می‌دهد: $u \equiv 0$. به این ترتیب گزارهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزارهٔ ۱۱ـ۴ـ۷: معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbb{L}_x[u] = 0$ فقط در صورتی به معنای $u \equiv 0$ است که تابع گرین متناظر با $\mathbb{L}_x$ و شرایط مرزی همگن، وجود داشته باشند.

گاهی گفته می‌شود که تابع گرین یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت به تفاضل $x - y$ بستگی دارد. این بیان از آنجا ناشی می‌شود که اگر $u(x)$ یکی از جوابهای معادلهٔ زیر باشد

$$\mathbb{L}_x[u] \equiv a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u = f(x)$$

در آن‌صورت $u(x-y)$ به شرطی جواب این معادله

$$a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u = f(x-y)$$

است که a_0، a_1، و a_2 ثابت باشند. بنابراین، اگر $G(x)$ یکی از جوابهای $\mathbb{L}_x[G] = \delta(x)$ باشد [در اینجا نیز با فرض $w(x) = 1$]، در آن‌صورت به‌نظر می‌رسد که جواب $\mathbb{L}_x[G] = \delta(x-y)$ صرفاً $G(x,y)$ باشد. همان‌گونه که مثالهای ۱۱ـ۴ـ۹ و ۱۱ـ۴ـ۱۰ نشان می‌دهند، مسلماً این حکم غلط است. دلیل آن، البته، شرایط مرزی است. این واقعیت که $G(x-y)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مناسب صدق می‌کند، تضمینی ایجاد نمی‌کند که در شرایط مرزی مناسب هم صدق خواهد کرد. اما، همان‌گونه که در تمرین ۱۱ـ۴ـ۸ ملاحظه می‌کنیم، این حدس برای یک مسئلهٔ مقدار اولیه همگن، صادق است.

شرایط مرزی ناهمگن. تا اینجا، توجه ما به مسائل با شرایط مرزی همگن، $\mathbb{R}_i[u] = 0$ به‌ازای $i = 1, 2$، معطوف بوده است. اگر شرایط مرزی ناهمگن باشند، چه اتفاقی می‌افتد؟ خواهیم دید که روش تابع گرین، علیرغم اینکه آن را برای شرایط مرزی همگن به‌دست آوردیم، این نوع مسائل را هم حل می‌کند! در واقع، نمودی از این نکته را در مثال ۱۱ـ۴ـ۶ دیده‌ایم. رمز این موفقیت، اتحاد گرین تعمیم‌یافته است.

فرض کنید بخواهیم جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر

$$\mathbb{L}_x[u] = f(x)$$

با

$$\mathbb{R}_i[u] = \gamma_i \qquad i = ۱, ۲$$

را بیابیم و تابع گرین مربوط به $\mathbb{L}_x$ (البته، با شرایط مرزی همگن) در دست است. با قرار دادن $v = g(x,y) = G^*(y,x)$ در اتحاد گرین تعمیم‌یافته و استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل، خواهیم داشت

$$\int_a^b w(x)G(y,x)f(x)dx - \int_a^b w(x)u(x)(\mathbb{L}_x^\dagger[g(x,y)])^* dx = Q(u, G(y,x))|_{x=a}^{x=b}$$

یا، با استفاده از $\mathbb{L}_x^\dagger[g(x,y)] = \delta(x-y)/w(y)$، خواهیم داشت

$$u(y) = \int_a^b w(x)G(y,x)f(x)dx - Q(u, G(y,x))|_{x=a}^{x=b}$$

جملهٔ رویه‌ای را محاسبه می‌کنیم. می‌توانیم معادله‌ها را برای $\mathbb{R}_i$ به‌ازای دو کمیت از چهار کمیت $u(۰)$، $u'(a)$، $u(b)$، $u'(b)$ برحسب دو کمیت دیگر حل کنیم. فرض کنید که $\mathbf{U}_b$ برحسب $\mathbf{U}_a$ معلوم است معادلهٔ [(۱۱ـ۱) از تمرین ۱۱ـ۴ـ۵]. بنابراین، با به‌دست آوردن $u(b)$ و $u'(b)$، به‌صورت خیلی کلی خواهیم داشت

$$\mathbf{U}_b = \Gamma \mathbf{U}_a + \mathsf{M}\gamma$$

که Γ و M ماتریسهایی‌اند که وقتی $\mathbf{U}_b \equiv \begin{pmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{pmatrix}$ را برحسب $\mathbf{U}_a$ پیدا می‌کنیم، به‌دست می‌آیند. جملهٔ اول در سمت راست، شبیه جمله‌ای است که در حالت همگن به‌دست می‌آید، زیرا حتی وقتی $\gamma_۱ = \gamma_۲ = ۰$، دقیقاً عملیات سطری مشابهی در مورد عبارت سمت چپ معادله‌های مربوط به شرایط مرزی انجام می‌گیرد. حضور جملهٔ دوم به علت انجام عملیات نظیر بر روی γ_iهاست. نتیجه‌ای که در تمرین ۱۱ـ۴ـ۵ به‌دست می‌آید عبارت است از

$$Q(u, v^*)|_a^b = \widetilde{\mathbf{U}}_b \mathsf{A}(b)\mathbf{V}_b^* - \widetilde{\mathbf{U}}_a \mathsf{A}(a)\mathbf{V}_a^*$$

با قرار دادن مقدار به‌جای $\mathbf{U}_b$ در این معادله [با استفاده از قسمت (الف) تمرین ۱۱ـ۴ـ۵ در

آخرین مرحله]، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Q(u,v^*)|_a^b &= (\tilde{\mathbf{U}}_a\tilde{\Gamma}+\tilde{\gamma}\tilde{\mathsf{M}})\mathsf{A}(b)\mathbf{V}_b^* - \tilde{\mathbf{U}}_a\mathsf{A}(a)\mathbf{V}_a^* \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_a\{\tilde{\Gamma}\mathsf{A}(b)\mathbf{V}_b^* - \mathsf{A}(a)\mathbf{V}_a^*\} + \tilde{\gamma}\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{A}(b)\mathbf{V}_b^* \\ &= \tilde{\gamma}\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{A}(b)\mathbf{V}_b^* \end{aligned} \qquad (۱۱\_۴۸)$$

به یاد بیاورید که

$$\mathbf{V}_b^* \equiv \begin{pmatrix} v^*(b) \\ v'^*(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^*(b,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}g^*(x,y)|_{x=b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(y,b) \\ \frac{\partial}{\partial x}G(y,x)|_{x=b} \end{pmatrix}$$

یعنی، $Q(u,v^*)|_a^b$ کاملاً برحسب G و مشتق آن و ثابتهای γ_1 و γ_2 داده می‌شود. این واقعیت که می‌بینیم G و $\partial G/\partial x$ در $x=b$ حساب می‌شوند، ناشی از فرض ساده‌ساز (اما بی‌ضرر) به‌کار رفته در تمرین ۱۱ـ۴ـ۵ است، که طی آن $u(b)$ و $u'(b)$ برحسب $u(a)$ و $u'(a)$ نوشته شده‌اند. البته، ممکن است امکان عملی شدن این گزینه وجود نداشته باشد؛ در آن‌صورت ما باید زوج دیگری از چهار کمیت یاد شده را برحسب کمیت دیگر پیدا کنیم، و هر زوجی از چهار کمیت $G(y,a)$، $(\partial G(y,x)/\partial x)|_{x=a}$، $G(y,b)$، و $(\partial G(y,x)/\partial x)|_{x=b}$ ممکن است به‌صورت مؤلفه‌های $\mathbf{V}_b^*$ ظاهر شوند. اما، در هر صورت، معادلهٔ (۱۱ـ۴۸) هنوز برقرار است، زیرا $\mathbf{V}_b^*$ شامل G و $\partial G/\partial x$ است که در a یا b محاسبه می‌شوند. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$u(y) = \int_a^b w(x)G(y,x)f(x)dx - \tilde{\gamma}\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{A}\mathbf{V}^* \qquad (۱۱\_۴۹)$$

که اندیس پایین b را از $\mathbf{V}_b^*$ حذف کرده‌ایم. این معادله نشان می‌دهد که وقتی $G(x,y)$ معلوم باشد، u را می‌توان کاملاً تعیین کرد، حتی اگر شرایط مرزی ناهمگن باشند.

معادلهٔ (۱۱ـ۴۹) بر این واقعیت تأکید دارد که $u(y)$، وابسته به γ_1، γ_2، G، و $\partial G/\partial x$ است. در عمل، نیازی به محاسبهٔ $\tilde{\mathsf{M}}$ و A و وارد کردن آنها در این معادله نیست. می‌توان عبارت مربوط به $Q(u,v^*)$ را که از اتحاد لاگرانژ فصل ۹ به‌دست آمد مورد استفاده قرار داد و آن را در a و b محاسبه کرد. این کار به‌طور کلی شامل محاسبهٔ u و G و مشتقات آنها در a و b است. می‌دانیم محاسبهٔ G را چگونه انجام بدهیم، زیرا در واقع می‌توانیم آن را در صورت وجود بسازیم. اما، آیا

محاسبهٔ u همچنین است؟ دو کمیت از چهار کمیت مرتبط با u را می‌توان برحسب دو تای دیگر محاسبه و به عبارت مربوط به $Q(u, v^*)|_a^b$ وارد کرد. به این ترتیب، معادلهٔ (۱۱ـ۴۸) تضمین می‌کند که ضرایب دو جملهٔ دیگر صفر خواهند بود. پس، می‌توانیم به آسانی تمام جمله‌هایی را حذف کنیم که در $Q(u, v^*)|_a^b$ حضور دارند و شامل عاملی از دو جملهٔ دیگر هستند.

به‌طور مشخص، با استفاده از ترکیب عطفی یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم با خودالحاقی صوری [معادلهٔ (۱۱ـ۳۸ب)] خواهیم داشت

$$u(y) = \int_a^b w(x)G(y,x)f(x)dx - \left\{ p(x)w(x)\left[G(y,x)\frac{du}{dx} - u(x)\frac{\partial G}{\partial x}(y,x)\right]\right\}_{x=a}^{x=b}$$

که با تعویض جای x و y می‌دهد

$$u(x) = \int_a^b w(y)G(x,y)f(y)dy + \left\{ p(y)w(y)\left[u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} - G(x,y)\frac{du}{dy}\right]\right\}_{y=a}^{y=b} \tag{۱۱ـ۵۰}$$

این معادله فقط در مورد عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم صادق است. یعنی، کاربرد آن مستلزم تبدیل عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم به یک شکل خودالحاقی است (فرایندی که بنابر قضیهٔ ۹ـ۲ـ۱۵، همیشه امکان‌پذیر است).

با قرار دادن $f(x) = 0$، می‌توانیم جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbb{L}_x[u] = 0$ را که شرایط مرزی ناهمگن در آن صدق می‌کنند، نیز به‌دست آوریم.

مثال ۱۱ـ۴ـ۱۱: جواب $d^2u/dx^2 = f(x)$ را با شرایط مرزی $u(a) = \gamma_1$ و $u(b) = \gamma_2$ می‌یابیم. تابع گرین برای این مسئله در مثالهای ۱۱ـ۴ـ۵ و ۱۱ـ۴ـ۹ محاسبه شده است. در نتیجه، با محاسبهٔ جملهٔ رویه‌ای در (۱۱ـ۵۰) شروع می‌کنیم. داریم $p(y) = 1$، و قرار می‌دهیم $w(y) = 1$، در نتیجه، جملهٔ رویه‌ای تبدیل می‌شود به

$$\text{جملهٔ رویه} = u(b)\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=b} - G(x,b)u'(b) - u(a)\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=a} + G(x,a)u'(a)$$

$$= \gamma_2\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=b} - \gamma_1\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=a} + G(x,a)u'(a) - G(x,b)u'(b)$$

صفر شدنِ جمله‌های ناخواسته را می‌توان از این موضوع دریافت که

$$G(x,a) = g^*(a,x) = (g(a,x))^*$$

اما $g(a,x) = ۰$، زیرا الحاقی تابع گرین، یعنی $g(x,y)$، در شرایط مرزی الحاقی شرایط مرزی همگن (که به‌ازای $\gamma_i = ۰$ به‌دست می‌آیند) صدق می‌کند. در این حالت خاص و ساده، اتفاقاً شرایط مرزی، خودالحاقی‌اند (شرایط مرزی دیریکله). بنابراین، $u(a) = u(b) = ۰$ ایجاب می‌کند که به‌ازای جمیع مقادیر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $g(a,x) = g(b,x) = ۰$. (در حالتهای پیچیده‌تر، ضریب $u'(a)$ ممکن است پیچیده‌تر، اما باز هم صفر باشد.) بنابراین، نهایتاً داریم

$$\text{جملهٔ رویه} = \gamma_۲ \frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=b} - \gamma_۱ \frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=a}$$

اکنون با استفاده از عبارت مربوط به $G(x,y)$ که در مثالهای ۱ـ۴ـ۵ و ۱۱ـ۴ـ۹ به‌دست آمده است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y} &= -\frac{a-x}{b-a} - \theta(x-y) - \underbrace{(x-y)\delta(x-y)}_{\equiv ۰} \\ &= \frac{x-a}{b-a} - \theta(x-y) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=b} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=a} = \frac{x-a}{b-a} - ۱ = \frac{x-b}{b-a}$$

با قرار دادن در (۱۱ـ۵۰)، خواهیم رسید به

$$u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y) + \frac{\gamma_۲ - \gamma_۱}{b-a} x + \frac{b\gamma_۱ - a\gamma_۲}{b-a}$$

این عبارت را مقایسه کنید با نتیجهٔ به‌دست آمده از مثال ۱۱ـ۴ـ۵. ●

توابع گرین، از تعبیر بسیار ساده و روشنگرانهٔ فیزیکی برخوردارند. معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگنی مثل $\mathbb{L}_x[u] = f(x)$ را می‌توان به مثابه جعبه‌ای سیاه ($\mathbb{L}_x$) تلقی کرد که در حضور یک چشمهٔ (f)، کمیت فیزیکی (u) را تعیین می‌کند. مثلاً، پتانسیل الکتروستاتیکی، کمیتی فیزیکی با چشمهٔ "بار" است؛ چشمهٔ میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی است؛ سرچشمهٔ تغییر مکان و سرعت نیروست، الی آخر به همین ترتیب.

با استفاده از این تعبیر و این فرض که $w(x) = ۱$، ملاحظه می‌کنیم که $G(x, y)$ به‌صورت کمیت فیزیکی محاسبه شده در x، به‌هنگامی است که چشمهٔ $\delta(x - y)$ آن در y قرار گرفته است. به بیان دقیقتر، فرض کنید چشمه در $y_۱$ قرار گرفته و شدت آن $S_۱$ است؛ در آن‌صورت چشمه تبدیل به $S_۱\delta(x - y_۱)$ می‌شود. بنابراین، به‌علت خطی بودن $\mathbb{L}_x$، کمیت فیزیکی، یعنی تابع گرین، عبارت است از $S_۱G(x, y_۱)$. اگر $G(x, y)$ جواب $\mathbb{L}_x u = \delta(x - y)$ باشد، در آن‌صورت $S_۱G(x, y_۱)$ جواب $\mathbb{L}_x u = S_۱\delta(x - y_۱)$ خواهد بود. اگر تعداد زیادی چشمه، متناظر با شدتهای $\{S_i\}_{i=۱}^N$، در $\{y_i\}_{i=۱}^N$ قرار گرفته باشند، در آن‌صورت چشمهٔ f به‌صورت تابعی از x تبدیل می‌شود به

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{N} S_i\delta(x - y_i)$$

و کمیت فیزیکی متناظر، $u(x)$، تبدیل می‌شود به

$$u(x) = \sum_{i=۱}^{N} S_iG(x, y_i)$$

چون چشمهٔ S_i در y_i قرار گرفته است، طبیعی‌تر این است که یک تابع $S(x)$ تعریف کنیم و بنویسیم $S_i = S(y_i)$. وقتی تعداد چشمه‌های نقطه‌ای بینهایت و y_i به یک متغیر پیوستهٔ هموار تبدیل شود، مجموعها به انتگرال تبدیل می‌شوند، و در نتیجه داریم

$$f(x) = \int_a^b S(y)\delta(x - y)dy$$

$$u(x) = \int_a^b S(y)G(x, y)dy$$

انتگرال اول نشان می‌دهد که $S(x) \equiv f(x)$. بنابراین، انتگرال دوم تبدیل می‌شود به

$$u(x) = \int_a^b f(y)G(x,y)dy$$

که دقیقاً همان است که به‌طور صوری به‌دست آوردیم.

تمرینها

۱۱ـ۴ـ۱ با استفاده از روش تابع گرین، معادلهٔ دیفرانسیل $\mathbb{L}_x u(x) \equiv du/dx = f(x)$ را با شرط مرزی $u(0) = a$ حل کنید.

۱۱ـ۴ـ۲ مسئلهٔ مثال ۱۱ـ۴ـ۴ را با شرایط مرزی $u(a) = u'(a) = 0$ حل کنید. نشان دهید که تابع گرین متناظر نیز در این شرایط مرزی صدق می‌کند.

۱۱ـ۴ـ۳ نشان دهید که مسئلهٔ مقدار اولیه با داده‌های $\{0, 0, \ldots, 0; 0\}$ فقط دارای جواب $u = 0$ است.

۱۱ـ۴ـ۴ عملگر دیفرانسیلی

$$\mathbb{L}_x^{(n)} \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

را اصطلاحاً کامل می‌خوانند در صورتی که یک عملگر دیفرانسیلی مانند

$$\mathbb{M}_x^{(n-1)} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

چنان وجود داشته باشد که

$$\mathbb{L}_x^{(n)}[u] = \frac{d}{dx}(\mathbb{M}_x^{(n-1)}[u]) \qquad \forall u \in \mathrm{C}^{(n)}(a,b)$$

(الف) نشان دهید که $\mathbb{L}_x^{(n)}$ فقط در صورتی کامل است که داشته باشیم

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{d^m p_m}{dx^m} = 0$$

(ب) نشان دهید یک عامل انتگرال‌گیری، یعنی تابعی مانند $\mu(x)$، برای $\mathbb{L}_x^{(n)}$ چنان وجود دارد که $\mu(x)\mathbb{L}_x^{(n)}$ فقط در صورتی کامل است که $\mu(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$\mathbb{N}_x^{(n)}[\mu] \equiv \sum_{m=\cdot}^{n} (-۱)^m \frac{d^m}{dx^m}(\mu p_m) = \cdot$$

عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{N}_x^{(n)}$ الحاقی صوری $\mathbb{L}_x^{(n)}$ است.

توجه کنید که مطالب مطرح شده در بخش ۹ـ۲ـ۳ در قالب این تمرین تعمیم می‌یابند.

۱۱ـ۴ـ۵ محدودیتهایی را بررسی کنید که باید بر v اعمال کنیم تا وقتی معادلهٔ (۱۱ـ۳۲) برقرار است، جملهٔ رویه‌ای صفر بشود. از آنجا که دو بردار سطری $(\alpha_{۱۱}, \ldots, \beta_{۱۲})$ و $(\alpha_{۲۱}, \ldots, \beta_{۲۲})$ خطی مستقل‌اند، دو تا از کمیتهای $u(a)$، $u(b)$، $u'(a)$، و $u'(b)$ را می‌توان برحسب دوتای دیگر نوشت. برای ساده کردن بحث فرض کنید که $u(b)$ و $u'(b)$ خطی‌اند.

(الف) کلی‌ترین شکل $Q(u, v^*)$ را بنویسید. با تعریف بردارهای ستونی

$$\mathrm{U}_{x_\circ} \equiv \begin{pmatrix} u(x_\circ) \\ u'(x_\circ) \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{V}^*_{x_\circ} \equiv \begin{pmatrix} v^*(x_\circ) \\ v'^*(x_\circ) \end{pmatrix} \qquad (۱)$$

نشان دهید که جملهٔ رویه‌ای منجر می‌شود به

$$\widetilde{\mathrm{U}}_b \mathsf{A}(b) \mathbf{V}^*_b = \widetilde{\mathrm{U}}_a \mathsf{A}(a) \mathbf{V}^*_a$$

که در آن، $\mathsf{A}(x)$ یک ماتریس ۲ × ۲ بعدی تابع x است.

(ب) ماتریسهای ۲ × ۲بعدی زیر را تعریف کنید.

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_{۱۱} & \beta_{۱۲} \\ \beta_{۲۱} & \beta_{۲۲} \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که (۱۱ـ۳۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{\alpha}\mathrm{U}_a = -\boldsymbol{\beta}\mathrm{U}_b$$

(ج) نشان دهید که v^* نیز باید شرطی شبیه (۲) [یا (۱۱ـ۳۲)] را برقرار کند.

۱۱ـ۴ـ۶ نشان دهید که $G_{\circ}(x,y)$، یعنی تابع گرین مربوط به عملگر

$$p_{۲}(x)\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}+p_{۱}(x)\frac{d}{dx}$$

در $x=y$ پیوسته است.

۱۱ـ۴ـ۷ با فرض اینکه $\mathbb{L}_x[u]=\circ$ دارای جواب غیربدیهی نیست، نشان دهید که ماتریس

$$\mathsf{R}\equiv\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{۱}[u_{۱}] & \mathbb{R}_{۱}[u_{۲}]\\ \mathbb{R}_{۲}[u_{۱}] & \mathbb{R}_{۲}[u_{۲}]\end{pmatrix}$$

که در آن $u_{۱}$ و $u_{۲}$ جوابهای مستقلی از $\mathbb{L}_x[u]=\circ$ و $\mathbb{R}_i$ تابعکهای مرزی هستند، دارای دترمینان ناصفر است. (راهنمایی: دستگاه معادلات خطی $\alpha\mathbb{R}_{۱}[u_{۱}]+\beta\mathbb{R}_{۱}[u_{۲}]=\circ$ و $\alpha\mathbb{R}_{۲}[u_{۱}]+\beta\mathbb{R}_{۲}[u_{۲}]=\circ$ را در نظر بگیرید.)

۱۱ـ۴ـ۸ فرض کنید $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت و شرایط مرزی $u(a)=u'(a)=\circ$ است. تابع گرین را پیدا کنید و نشان دهید تابعی است از $x-y$.

۱۱ـ۵ بسط ویژه‌تابعی توابع گرین

ملاحظه کردیم که توابع گرین، در معنایی وسیع، وارونهای عملگرهای دیفرانسیلی‌اند. وارونهای عملگرها در فضای هیلبرت را به بهترین وجه می‌توان برحسب حلالها مطالعه کرد، زیرا اگر عملگر $\mathbb{A}$ دارای وارون باشد، صفر در میان ویژه‌مقدارهای آن نیست، و

$$\mathbb{R}_{\circ}(\mathbb{A})\equiv\mathbb{R}_{\lambda}(\mathbb{A})|_{\lambda=\circ}\equiv(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1})^{-۱}|_{\lambda=\circ}=\mathbb{A}^{-۱}$$

بنابراین، خوب است که حلال یک عملگر دیفرانسیلی را بررسی کنیم. مطالعهٔ ما فقط منحصر به حالتی است که در آن ویژه‌مقدارها گسسته‌اند؛ مثلاً، وقتی $\mathbb{L}_x$ یک عملگر اشتورم‌ـلیوویل است.

از لحاظ، صوری داریم

$$(\mathbb{L}-\lambda\mathbb{1})\mathbb{R}_{\lambda}(\mathbb{L})\equiv\mathbb{1}$$

این رابطه منجر می‌شود به معادلهٔ دیفرانسیل زیر

$$(\mathbb{L}_x - \lambda)\mathrm{R}_\lambda(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

که در آن $\mathrm{R}_\lambda(x, y) \equiv \langle \mathrm{x}|\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{L})|\mathrm{y}\rangle$. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل، $\mathrm{R}_\lambda(x, y)$ صرفاً تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x - \lambda$ است. بنابراین، معادله را می‌توانیم به‌صورت

$$(\mathbb{L}_x - \lambda)G_\lambda(x, y) = \frac{\delta(x-y)}{w(x)}$$

بازنویسی کنیم، که در آن $\mathbb{L}_x - \lambda$ یک عملگر دیفرانسیلی با شرایط مرزی همگن است. تابع گرین $G_\lambda(x, y)$ فقط در صورتی وجود دارد که معادلهٔ $(\mathbb{L}_x - \lambda)[u] = 0$ دارای جواب نابدیهی نباشد؛ این اتفاق هم فقط وقتی می‌افتد که معادلهٔ $\mathbb{L}_x[u] = \lambda u$ دارای جواب نابدیهی نباشد، که باز، به‌نوبهٔ خود، وقتی صادق است که λ ویژه‌مقدار $\mathbb{L}_x$ نباشد. ما شرایط مرزی را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mathbb{L}_x$ هرمیتی بشود.

اگر $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم هرمیتی باشد، در آن‌صورت دستگاه $\mathbb{L}_x[u] = \lambda u$، $\{\mathbb{R}_i[u] = 0\}_{i=1}^{2}$ را می‌توان یک دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تلقی کرد. فرض کنید $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ویژه‌مقدارهای $\mathbb{L}_x$ و $u_n^{(k)}(x)$ ویژه‌توابع متناظر با آنها هستند. اندیس k وجه تمایز بردارهای خطی مستقل متناظر با همان ویژه‌مقدار λ_n است. این ویژه‌توابع، مجموعهٔ کاملی برای زیرفضای هیلبرت تشکیل می‌دهند که مشتمل بر آن توابعی است که همان شرایط مرزی $u_n^k(x)$ را برقرار می‌کنند. علی‌الخصوص، $G_\lambda(x, y)$ را می‌توان برحسب $u_n^{(k)}(x)$ بسط داد. البته، ضرایب بسط، توابعی از y هستند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$G_\lambda(x, y) = \sum_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(y) u_n^{(k)}(x)$$

که در آن

$$a_n^{(k)}(y) \equiv \int_a^b w(x) u_n^{*(k)}(x) G_\lambda(x, y) dx$$

با استفاده از اتحاد گرین، معادلهٔ (۱۱ـ۴۴)، و این واقعیت که λ_n حقیقی است، داریم

$$\begin{aligned}
\lambda_n a_n^{(k)}(y) &= \int_a^b w(x)[\lambda_n u_n^{(k)}(x)]^* G_\lambda(x,y)dx \\
&= \int_a^b w(x)G_\lambda(x,y)\{\mathbb{L}_x^\dagger[u_n^{(k)}(x)]\}^* dx \\
&\underset{\uparrow}{=} \int_a^b w(x)[u_n^{(k)}(x)]^* \mathbb{L}_x[G_\lambda(x,y)]dx
\end{aligned}$$

بنابر اتحاد گرین

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b w(x)[u_n^{(k)}(x)]^* \left[\frac{\delta(x-y)}{w(x)} + \lambda G_\lambda(x,y)\right] dx \\
&= [u_n^{(k)}(y)]^* + \lambda \int_a^b w(x)u_n^{*(k)}(x)G_\lambda(x,y)dx \\
&= u_n^{*(k)}(y) + \lambda a_n^{(k)}(y)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$a_n^{(k)}(y) = \frac{u^{*(k)}(y)}{\lambda_n - \lambda}$$

و بسط تابع گرین عبارت است از

$$G_\lambda(x,y) = \sum_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{*(k)}(y)}{\lambda_n - \lambda} u_n^{(k)}(x) \tag{۱۱ـ۵۱}$$

این بسط تا وقتی صادق است که به‌ازای جمیع مقادیر $n = 0, 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $\lambda_n \neq \lambda$. اما این دقیقاً شرطی است که وجود وارون برای $\mathbb{L} - \lambda\mathbb{1}$ را تضمین می‌کند.

اگر λ را مختلط در نظر بگیریم، از معادلهٔ (۱۱ـ۵۱) نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آید. در آن‌صورت $G_\lambda(x,y)$ در $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ دارای قطبهای ساده‌ای (به تعداد بینهایت) خواهد بود. ماندهٔ در قطب λ_n عبارت است از $-\sum_k u_n^{*(k)}(y)u_n^{(k)}(x)$. اگر C_m مسیری باشد که قطبهای $\{\lambda_n\}_{n=0}^{m}$ در

درون آن قرار گرفته‌اند، در آن‌صورت، طبق قضیهٔ مانده‌ها، داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{C_m} G_\lambda(x,y)d\lambda = -\sum_k \sum_{n=۰}^{m} u_n^{*(k)}(y)u_n^{(k)}(x)$$

به‌خصوص، اگر بگیریم $m \to \infty$، داریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{C_\infty} G_\lambda(x,y)d\lambda = -\sum_k \sum_{n=۰}^{\infty} u_n^{*(k)}(y)u_n^{(k)}(x) \qquad (۱۱\text{-}۵۲)$$

$$= -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{بنا بر کاملیت } u_n^{(k)}(x) \text{ و فصل ۵}}}{\frac{\delta(x-y)}{w(x)}}$$

که در آن C_∞ مسیری است که تمام ویژه‌مقادیر $\{\lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در بر دارد. معادلهٔ (۱۱ـ۵۲)، مشابه نامتناهی‌ـبعد معادلهٔ (۱۱ـ۹) به‌ازای $f(\mathbb{A}) = \mathbb{1}$ است.

مثال ۱۱ـ۵ـ۱: عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_x = d^۲/dx^۲$ را با شرایط مرزی $u(۰) = u(a) = ۰$ در نظر بگیرید. این یک عملگر اشتورم‌ـلیوویل با ویژه‌مقدارها و ویژه‌توابع بهنجار زیر است:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \text{ و } u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

معادلهٔ (۱۱ـ۵۱) تبدیل می‌شود به

$$G_\lambda(x,y) = -\frac{۲}{a}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a)}{\lambda-(n\pi/a)^۲}$$

که منجر می‌شود به

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_C \left[-\frac{۲}{a}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a)}{\lambda-(n\pi/a)^۲}\right]d\lambda$$

$$= -\frac{۱}{۲\pi i}\left(\frac{۲}{a}\right)\sum_{n=۰}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\oint_C \frac{d\lambda}{\lambda-(n\pi/a)^۲}$$

$$= -\frac{۱}{۲\pi i}\left(\frac{۲}{a}\right)\sum_{n=۰}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$\left\{۲\pi i \text{Res}\left[\frac{۱}{\lambda-(n\pi/a)^۲}\right]_{\lambda=(n\pi/a)^۲}\right\}$$

$$= -\frac{۲}{a}\sum_{n=۰}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

که ملاحظه می‌شود عبارت سمت راست معرف $-\delta(x-y)$ است. ●

اگر صفر در میان ویژه‌مقدارهای $\mathbb{L}_x$ نباشد، معادلهٔ (۱۱ـ۵۱) منجر می‌شود به

$$G(x,y) \equiv G_۰(x,y) = \sum_k \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{u_n^{*(k)}(y)\, u_n^{(k)}(x)}{\lambda_n} \qquad (۱۱\text{ـ}۵۳)$$

که عبارتی است برای تابع گرین مربوط به $\mathbb{L}_x$ برحسب ویژه‌مقدارها و ویژه‌توابع آن.

مسائل

۱۱ـ۱ تعریف $\mathbb{P}_i$ را مطابق (۱۱ـ۱۰ب) در نظر بگیرید و ثابت کنید اگر $j \neq i$ آنگاه $\mathbb{P}_i\mathbb{P}_j = ۰$.

۱۱ـ۲ ثابت کنید

$$\mathbb{R}_\lambda(\mathbb{A}) = -\frac{۱}{۲\pi i}\oint_\Gamma \frac{\mathbb{R}_\xi(\mathbb{A})}{\xi-\lambda}d\xi$$

۱۱ـ۳ ویژه‌مقدارهای ناصفر و ویژه‌توابع متناظر با آنها را برای هر هسته پیدا کنید:

(الف) $-\pi \le x,y \le \pi$ $\quad K(x,y) = ۱+\cos(x,y)$

(ب) $-\pi \le x,y \le \pi$ $\quad K(x,y) = \sin x\cos y$

(ج) $۰ \le x,y \le \frac{\pi}{۲}$ $\quad K(x,y) = \sin x\cos y$

(د) $a \le x,y \le b$ $\quad K(x,y) = x+y$

(ه) $a \le x,y \le b$ $\quad K(x,y) = ۱+xy$

(و) $a \le x,y \le b$ $\quad K(x,y) = e^{x+y}$

۱۱ـ۴ (الف) فرض کنید f و g در بازهٔ $[a,b]$ توابعی حقیقی، پیوسته و متعامدند. نشان دهید که $K(x,y) = f(x)g(y)$ دارای هیچ ویژه‌مقدار ناصفری نیست.

(ب) ثابت کنید که یک تبدیل انتگرالی تفکیک‌پذیر متقارن، همیشه دارای یک ویژه‌مقدار صفر است.

۱۱ـ۵ ثابت کنید، به‌ازای $1 \leq k \leq m$، وقتی $|\mathrm{f}_k\rangle$ ویژه‌بردار عملگر $\mathbb{K}$ با ویژه‌مقدار λ_k باشد، ویژه‌بردار عملگر $\mathbb{K} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j |\mathrm{f}_j\rangle\langle f_j|$ با ویژه‌مقدار صفر نیز هست.

۱۱ـ۶ فرمول اویلر، معادلهٔ (۱۱ـ۱۸)، را به‌دست آورید.

۱۱ـ۷ با جایگذاری $t = \exp(i\theta)$ در (۱۱ـ۲۳)، نشان دهید که

$$e^{iz\,\sin\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\theta) + 2i\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z)\sin[2n+1)\theta]$$

به‌خصوص، نشان دهید که

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\theta} d\theta$$

۱۱ـ۸ نمایش انتگرالی $H_\nu^{(1)}(z)$ و $H_\nu^{(2)}(z)$ راکه دربخش ۱۱ـ۳ـ۲ داده شده است، به‌دست آورید.

۱۱ـ۹ با تغییر متغیرهای $k = \ln t$ و $ix = \omega - \alpha$ نشان دهید که تبدیل فوریه، به تبدیل ملین زیر تغییر می‌کند

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\alpha}^{+i\infty+\alpha} F(\omega) t^{-\omega} d\omega$$

که در آن داریم

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) t^{\omega-1} dt$$

۱۱ـ۱۰ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{L}[f](s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

نشان دهید که تبدیل لاپلاس

(الف) $f(t) = 1$، عبارت است از $1/s$، که در آن $s > 0$

(ب) $f(t) = \exp(\omega t)$، به‌ازای $t > ۰$، عبارت است از $۱/(s - \omega)$ که در آن $s > \omega$

(ج) $f(t) = \cosh \omega t$، عبارت است از $s/(s^۲ - \omega^۲)$

(د) $f(t) = \sinh \omega t$، عبارت است از $\omega/(s^۲ - \omega^۲)$

(ه) $f(t) = \cos \omega t$، عبارت است از $s/(s^۲ + \omega^۲)$

(و) $f(t) = \sin \omega t$، عبارت است از $\omega/(s^۲ + \omega^۲)$

(ز) $f(t) = t^n$، عبارت است از $\Gamma(n + ۱)/s^{n+۱}$، که در آن $s > ۰$، و $n > -۱$.

۱۱ـ۱۱ با یافتن تبدیل لاپلاس و تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$f(t) = \int_۰^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

نتیجه را به‌ازای هم $t > ۰$ و هم $t < ۰$ برحسب تابع تتا بیان کنید. (به‌بعضی نتایج مسئلهٔ ۱۱ـ۱۰ نیاز دارید.)

۱۱ـ۱۲ نشان دهید که تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع عبارت است از

$$\mathbb{L}[F'](s) = s\mathbb{L}[F](s) - F(۰)$$

همچنین نشان دهید که تبدیل لاپلاس مشتق دوم عبارت است از

$$\mathbb{L}[f''](s) = s^۲\mathbb{L}[F](s) - sF(۰) - F'(۰)$$

با استفاده از این نتایج، معادلهٔ دیفرانسیل

$$u''(t) + \omega^۲ u(t) = ۰$$

را با شرایط مرزی $u(۰) = a$، $u'(۰) = ۰$ حل کنید.

۱۱ـ۱۳ الحاقی صوری هر یک از عملگرهای زیر را: (الف) به‌صورت یک عملگر دیفرانسیلی، و (ب) به‌صورت یک عملگر، یعنی، با شمول شرایط مرزی، تعیین کنید. کدام عملگرهای دیفرانسیلی به‌طور صوری خودالحاقی‌اند؟ کدام عملگرها به‌طور صوری خودالحاقی‌اند (یعنی جملهٔ رویه‌ای صفر می‌شود)؟ کدام عملگرها هرمیتی‌اند؟

(الف) $\mathbb{L}_x = d^۲/dx^۲$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ با شرایط مرزی $u(۰) = u'(۰) = ۰$

(ب) $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2 + 1$ در بازهٔ $[0, 1]$ با شرایط مرزی $u(0) = u(1) = 0$

(ج) $\mathbb{L}_x = d/dx + 1$ در بازهٔ $[0, \infty]$ با شرایط مرزی $u(0) = 0$

(د) $\mathbb{L}_x = d^3/dx^3 - \sin x d/dx + 3$ در بازهٔ $[0, \pi]$ با $u(0) = 0$، $u'(0) = 0$،
$u''(0) - 4u(\pi) = 0$

۱۱ـ۱۴ نشان دهید که شرایط مرزی دیریکله، نویمان، ناآمیختهٔ عام، و دوره‌ای، عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم خودالحاقی صوری زیر

$$\mathbb{L}_x = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$$

را به خودالحاقی (هرمیتی) تبدیل می‌کنند.

۱۱ـ۱۵ با استفاده از روشی مشابه آنچه که در متن کتاب برای عملگرهای دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم توصیف شده است، نشان دهید که برای عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ اول $\mathbb{L}_x = p_1 d/dx + p_0$

(الف) تابع گرین نامعین عبارت است از

$$G(x, y) \equiv \frac{\mu(y)}{p_1(y) w(y)} \left[\frac{\theta(x - y)}{\mu(x)} \right] + C(y)$$

که در آن

$$\mu(x) = \exp \left[\int^x \frac{p_0(t)}{p_1(t)} dt \right]$$

(ب) و تابع گرین، خود در $x = y$ ناپیوسته است، در شرایطی که داریم

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [G(y + \varepsilon, y) - G(y - \varepsilon, y)] = \frac{1}{p_1(y) w(y)}$$

(ج) برای شرایط مرزی همگن

$$\mathbb{R}[u] \equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

$G(x, y)$ را پیدا کنید و نشان دهید

$$G(x, y) = \frac{1}{p_1(y) w(y) v(y)} v(x) \theta(x - y) + C(y) v(x)$$

که در آن $v(x)$ جواب دلخواهی از معادلهٔ دیفرانسیل همگن $\mathbb{L}_x[v] = 0$ است و

$$C(y) = \frac{\beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b)}{\mathbb{R}[v] p_1(y) w(y) v(y)}$$

و $\mathbb{R}[v] \neq 0$.

(د) مستقیماً نشان دهید که $\mathbb{L}_x[G] = \delta(x-y)/w(x)$.

۱۱ـ۱۶ فرض کنید $\mathbb{L}_x$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت است. نشان دهید که اگر $u(x)$ در $\mathbb{L}_x[u] = f(x)$صدق کند، در آن‌صورت $u(x-y)$ در $\mathbb{L}_x[u] = f(x-y)$ صدق خواهد کرد. (توجه کنید که هیچگونه شرط مرزی مشخص نشده است.)

۱۱ـ۱۷ تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2 + 1$ را با شرایط مرزی $u(0) = u'(0) = 0$ بیابید. نشان دهید که تابع حاصل را می‌توان فقط به‌صورت تابعی از $x - y$ نوشت.

۱۱ـ۱۸ برای تمام توابع گرین مثالها و تمرینهای بخش ۹ـ۴ به پرسشهای زیر پاسخ بدهید: آیا تابع گرین نسبت به شناسه‌اش متقارن است؟ در غیر این‌صورت، سعی کنید آن را به شکلی بنویسید که همان‌طور باشد. آیا این کار همیشه ممکن است؟ چرا بله یا چرا خیر؟

۱۱ـ۱۹ تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2 + k^2$ را با شرایط مرزی $u(0) = u(a) = 0$ پیدا کنید.

۱۱ـ۲۰ تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x = d^2/dx^2 - k^2$ را با شرایط مرزی $u(\infty) = u(-\infty) = 0$ پیدا کنید.

۱۱ـ۲۱ تابع گرین عملگر $\mathbb{L}_x = (d/dx)(xd/dx)$ را با این شرط که $G(x,y)$ در $x = 0$ متناهی و در $x = 1$ صفر است، پیدا کنید.

۱۱ـ۲۲ تابع گرین و جوابهای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را در بازهٔ $[0, 1]$ پیدا کنید.

(الف) $u'' - k^2 u = f; u(0) - u'(0) = a, u(1) = b$

(ب) $u'' = f; u(0) = u'(0) = 0$

(ج) $u'' + 6u' + 9u = 0; u(0) = 0, u'(0) = 1$

(د) $u'' + \omega^2 u = f(x), x > 0; u(0) = a, u'(0) = b$

(هـ) $u^{(4)} = f; u(0) = 0, u'(0) = 2u'(1), u(1) = a, u''(0) = 0$

۱۱ـ۲۳ با استفاده از بسط ویژه‌تابعی تابع گرین، مسئلهٔ مقدار مرزی $u'' = x$، $u(0) = 0$، $u(1) - 2u'(1) = 0$ را حل کنید.

۱۲

توابع گرین در بیش از یک‌بعد

بررسی و مطالعهٔ جامع و دامنه‌دار توابع گرین در یک‌بعد در فصل قبل باید توانایی و ظرافت کاربرد آنها را در حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن روشن کرده باشد. اگر معادلهٔ دیفرانسیلی دارای یک جواب (یکتا) باشد، تابع گرین وجود دارد و حاوی کلیهٔ اطلاعات لازم برای تشکیل دادن یک جواب است. این جواب از تأثیر دادن یک عملگر انتگرالی، که هسته‌اش تابع گرین مربوطه است، بر روی جملهٔ ناهمگن به‌دست می‌آید مثلاً معادلهٔ (۱۱ـ۲۷).

یکی از خواص اساسی تابع گرین به این قرار است که باید در بعضی شرایط مرزی صدق کند. در واقع، وجود آن به نوع شرایط مرزی اعمال شده بستگی دارد. در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، با دو نوع مسئله روبه‌رو شدیم. مسئلهٔ اول، که مسائل مقدار اولیه نامیده می‌شود، شامل مشخص کردن (برای یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nام) مقدار جواب و $n - ۱$ مشتق اول آن در یک نقطهٔ معین می‌شود. در این‌صورت، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، اگر به‌حد کافی خوشرفتار باشد، مقدار جواب را در همسایگی نقطهٔ یاد شده، به‌طور یکتایی تعیین خواهد کرد. به‌علت این یکتایی، توابع گرین، همواره برای مسائل مقدار اولیه وجود دارند.

مسائل نوع دوم، به‌نام مسائل مقدار مرزی، (وقتی معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ دوم باشد) مستلزم تعیین رابطه‌ای بین جواب و مشتق آن در مرزهای بازه $[a, b]$ است. این مرزها روابطی‌اند که آنها را

با $\gamma_i = \mathbb{R}_i[u]$، به‌ازای $i = ۱, ۲$، نمایش دادیم. در این حالت، وجود یکتایی تابع گرین تضمین نمی‌شود.

مابین مرز در یک‌بعد و مرز در دو یا چند بعد، اختلاف (توپولوژیکی) عمده‌ای برقرار است. در یک بعد، مرز شامل فقط دو نقطه است، در m بعد، $m \geq ۲$، مرز دارای بینهایت نقطه است. مرز در ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^۲$ یک منحنی بسته است، در $\mathbb{R}^۳$ یک سطح بسته، و در $\mathbb{R}^m$ یک ابررویه است. این اختلاف عمده، مطالعهٔ توابع گرین در m بعد را پیچیده‌تر، اما در عین حال غنی‌تر و مناسبتر می‌کند، و به‌طور پیچیده‌ای با مطالعهٔ مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در هم می‌آمیزد. مطالعهٔ دقیق این مبحث خارج از حوصله این کتاب است. لیکن، برای آماده‌سازی بحث پیرامون توابع گرین در m بعد، مبانی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در بخش اول این فصل ارائه می‌شود.

۱۲ـ۱ خواص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این بخش چند واقعیت و چند خاصیت از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، به‌خصوص چگونگی تأثیر شرایط مرزی در جوابهای آنها، ارائه می‌شود. به اختلاف مهم بین معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توجه خواهیم کرد. وجود یک جواب برای یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در شرط مرزی معینی صدق می‌کند، به نوع معادلهٔ دیفرانسیل بستگی دارد.

۱۲ـ۱ـ۱ مسئلهٔ کوشی

وقتی بیش از یک متغیر وجود دارد، روش ساده نشان دادن مشتق جزئی از مرتبهٔ دلخواه به مسئلهٔ پیچیده‌ای تبدیل می‌شود. برای اینکه این مسئله را به حداقل برسانیم، می‌توانیم از چند نمادگذاری خاص بهره گیریم.

اگر $i \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ عبارت باشد از mگانه‌ای با مؤلفه‌های اعداد صحیح نامنفی، بنابر تعریف، داریم

$$[i]_m \equiv \sum_{k=1}^{m} i_k$$

$$\frac{\partial^{[i]_m}}{\partial x^{[i]_m}} \equiv \frac{\partial^{[i]_m}}{\partial x_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \cdots \partial x_m^{i_m}} \equiv \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m}}{\partial x_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \cdots \partial x_m^{i_m}} \qquad (۱ـ۱۲)$$

بنابراین، به‌ازای $m = 1$، داریم $[i]_1 = i_1$، و

$$\frac{\partial^{[i]_1}}{\partial x^{[i]_1}} = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}$$

همان مشتق i_1ام نسبت به تنها متغیر، x_1، است. به‌ازای $m = 2$، داریم

$$[i]_2 = i_1 + i_2$$

و

$$\frac{\partial^{[i]_2}}{\partial x^{[i]_2}} = \frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1} \partial_2^{i_2}}$$

یعنی، مشتق جزئی از مرتبهٔ $i_1 + i_2$ است که در آن i_1 عوامل نسبت به x_1 و i_2 عوامل نسبت به x_2 است. مثلاً اگر $[i]_2 = 3$، در این‌صورت

$$\frac{\partial^{[i]_2}}{\partial x^{[i]_2}} \equiv \frac{\partial^3}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial^3}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}$$

می‌تواند هر یک از مشتقات جزئی زیر باشد

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \qquad \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \qquad \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \qquad \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}$$

به‌ازای مقادیر بالاتر m و $[i]_m$، تعداد مشتقات جزئی ممکن سریعاً افزایش می‌یابد.

سرانجام، پارامتری با نماد چند مؤلفه‌ای، نظیر $a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ به‌سادگی توسط a_i نمایش داده می‌شود، و $\sum_i^{[i]_m}$ به معنای مجموع‌یابی روی تمام مقادیر ممکن $i_1, i_2, \ldots, i_m$ است، به‌طوری که مجموع $i_1 + i_2 + \cdots + i_m$ با مقدار $[i]_m$ برابر باشد. بنابراین، به‌ازای $[i]_2 = 3$، داریم

$$\begin{aligned}\sum_i^{[i]_2} a_i \frac{\partial^{[i]_2} f}{\partial x^{[i]_2}} &\equiv \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1 + i_2 = 3}} a_{i_1 i_2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{i_1} \partial_2^{i_2}} \\ &= a_{30} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + a_{21} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + a_{12} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} + a_{03} \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}\end{aligned}$$

عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به m متغیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$F\left(x_j, u, \left\{\frac{\partial^{[i]_m} u}{\partial x^{[i]_m}}\right\}_{[i]_m=1}^{M}\right) = 0$$

که در آن F عبارت است از یک تابع چندمتغیرهٔ مناسب، $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ عبارت است از مجموعهٔ متغیرهای مستقل، $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی‌ـمقدار از m متغیر مستقل که M بار مشتق‌پذیر است، و M عدد صحیح مثبتی است که مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود.

معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتقات جزئی نیمه‌خطی یا شبه‌خطی مرتبهٔ M به‌صورت زیر است

$$\sum_{i}^{M} a_i \frac{\partial^M u}{\partial x^{[i]_m}} + F\left(x_j, u, \left\{\frac{\partial^{[i]_m} u}{\partial x^{[i]_m}}\right\}_{[i]_m=1}^{M-1}\right) = 0$$

که در آن $a_i \equiv a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ توابعی از $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ هستند. مثلاً،

$$\sum_{i}^{2} a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^{[i]_m}} + F\left(x_j, u, \left\{\frac{\partial u}{\partial x^{[i]_m}}\right\}\right) = 0$$

معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم نسبت به m متغیر است که بشود آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{j,k=1}^{m} b_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + F\left(x_j, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0$$

در این معادله $b_{jk}(x) \equiv b_{jk}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ها توابع حقیقی‌ـمقدار از m متغیرند. در حالت خاص، اگر $m = 2$ و $x \equiv x_1$ و $y \equiv x_2$، معادلهٔ زیر، عمومی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم شبه‌خطی از دو متغیر است:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ M نسبت به m متغیر به‌صورت زیر است

$$\mathbb{L}_x[u] = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{۱۲ـ۲الف}$$

که در آن

$$\mathbb{L}_x \equiv \sum_{[i]_m \equiv k=1}^{M} \sum_{i}^{[i]_m=k} a_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial^k}{\partial x^{[i]_m}} \tag{۱۲ـ۲ب}$$

جزء اصلی $\mathbb{L}_x$ عبارت است از

$$\mathbb{L}_p \equiv \sum_{i}^{[i]_m=M} a_i^{(M)}(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial^M}{\partial x^{[i]_m}} \tag{۱۲ـ۲ج}$$

ضرایب $a_i^{(k)}$ و جملهٔ ناهمگن (یا چشمه) f توابع پیوسته‌ای از شناسهٔ آنها هستند.

در اینجا توجه خود را بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی معطوف خواهیم کرد و معادلات (۱۲ـ۲) را به‌عنوان یک مسئلهٔ مقدار اولیه با داده‌های اولیهٔ مناسب در نظر خواهیم گرفت. مستقیمترین تعمیم مسئلهٔ مقدار اولیهٔ نظریهٔ معادلهٔ دیفرانسیل به این قرار است که مقادیر u و تمام مشتقهای قائم با مرتبه‌های کمتر یا مساوی $M - 1$ آن روی یک ابررویهٔ Γ به ابعاد $m - 1$ را، مشخص کنیم. این نوع داده‌های اولیه را داده‌های کوشی می‌گویند و مسئلهٔ مقدار اولیه حاصل به مسئلهٔ کوشی برای $\mathbb{L}_x$ موسوم است. توجه کنید که در اینجا مشتقهای مماسی وارد نمی‌شوند، زیرا وقتی مقادیر u روی Γ را بدانیم، می‌توانیم u را در دو نقطهٔ همسایه روی Γ محاسبه کنیم، و حد نزدیک و نزدیکتر شدن دو نقطه به یکدیگر را در نظر بگیریم، و مشتقات مماسی را پیدا کنیم.

۱۲ـ۱ـ۲ ابررویه‌های مشخصه

برخلاف مسئلهٔ مقدار اولیه در یک‌بعد، ممکن است مسئلهٔ کوشی برای داده‌های کوشی دلخواه جواب نداشته باشد، یا اگر داشته باشد، ممکن است یکتا نباشد. وجود و یکتایی جواب، علی‌الاصول به ابررویهٔ Γ و نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بستگی دارد. فرض می‌کنیم Γ هموار باشد. تعریف تکینگی ابررویه (خمینه) هموار در فصل چهارم آمده است. در اینجا، "هموار" به این معناست که بتوانیم در هر نقطهٔ $P \in \Gamma$ یک دستگاه مختصات وارد کنیم.

یک نقطهٔ $P \in \Gamma$ در نظر بگیرید. $m - 1$ مختصهٔ ξ_2، ξ_3، ...، و ξ_m برای مشخص کردن نقاط روی Γ وارد کنید. دستگاه مختصات را، در صورت لزوم با انتقال، چنان انتخاب کنید که

P مبدأ مختصات، به مختصات $(\circ, \circ, \ldots, \circ)$، باشد. ξها مختصات مماسی نامیده می‌شوند. حال فرض کنید $\xi_1 = \nu$ مختصهٔ باقیماندهٔ قائم بر Γ باشد. معمولاً، ξ_i مختصه iام تصویر نقطهٔ روی Γ روی ابرصفحهٔ مماس بر Γ در P در نظر گرفته می‌شود.

تا وقتی از P خیلی دور نشویم، داده‌های کوشی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$u(\circ, \xi_2, \ldots, \xi_m), \frac{\partial u}{\partial \nu}(\circ, \xi_2, \ldots, \xi_m), \ldots, \frac{\partial^{M-1} u}{\partial \nu^{M-1}}(\circ, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

با بهره‌گیری از قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \qquad \xi_1 \equiv \nu$$

می‌توانیم $M - 1$ مشتق اول u نسبت به x_i را تعیین کنیم. این پرسش اساسی پیش می‌آید که آیا می‌توانیم با استفاده از داده‌های کوشی بالا و معادلهٔ دیفرانسیل، u را به‌طور یکتایی تعیین کنیم؟ برای پاسخ دادن به این پرسش به مسئلهٔ مشابه آن در یک بعد نگاه می‌اندازیم.

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ Mام زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{L}_x[u] = a_M(x)\frac{d^M u}{dx^M} + \cdots + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_\circ(x)u = f(x) \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

و فرض کنید داده‌های اولیه در $x_\circ$ به‌صورت $x_\circ : \{u(x_\circ), u'(x_\circ), \ldots, u^{(M-1)}(x_\circ)\}$ باشد. اگر ضرایب $\{a_k(x)\}_{k=\circ}^{M}$ و $f(x)$ پیوسته باشند و اگر $a_M(x_\circ) \neq \circ$، قضیهٔ ۱۱-۴-۱ ایجاب می‌کند که یک جواب منحصر به‌فرد برای مسئلهٔ مقدار اولیه در همسایگی $x_\circ$ وجود داشته باشد. به‌ازای $a_M(x_\circ) \neq \circ$ می‌توانیم $u^{(M)}(x_\circ)$ را از معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست آوریم

$$\begin{aligned} u^{(M)}(x_\circ) = \frac{1}{a_M(x_\circ)}[f(x_\circ) \\ - a_{M-1}(x_\circ)u^{(M-1)}(x_\circ) - \cdots - a_1(x_\circ)u'(x_\circ) - a_\circ(x_\circ)u(x_\circ)] \end{aligned}$$

داده‌های اولیه وشناسایی $f(x_\circ)$، $u^{(M)}(x_\circ)$ را به‌طور یکتایی به‌دست می‌دهد. با یافتن $u^{(M)}(x_\circ)$، می‌توانیم با دقت دلخواه (با انتخاب Δx به‌قدر کافی کوچک) داده‌های اولیهٔ جدید

زیر را در $x_1 = x_0 + \Delta x$ محاسبه کنیم:

$$u(x_1) = u(x_0) + u'(x_0)\Delta x, \ldots, u^{(M-1)}(x_1) = u^{(M-1)}(x_0) + u^{(M)}(x_0)\Delta x$$

با استفاده از این داده‌های اولیهٔ جدید و قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۱، از یک جواب یکتا در x_1 مطمئن می‌شویم. چون فرض کرده‌ایم $a_M(x)$ به‌ازای x_1 خیلی نزدیک به x_0 پیوسته است، پس $a_M(x_1) \neq 0$ و می‌توان داده‌های اولیهٔ جدیدتری در $x_2 = x_1 + \Delta x$ یافت. این فرایند را می‌توان چنان ادامه داد تا به تکینگی معادلهٔ دیفرانسیل، یعنی نقطه‌ای که در آن $a_M(x)$ صفر می‌شود، رسید. به این ترتیب، می‌توانیم جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیه در بازهٔ (x_0, b) را بسازیم، مشروط بر آنکه $a_M(x)$ در هیچ جا در $[x_0, b]$ صفر شود. این روش مشابه روشی است که در تداوم تحلیلی تابع مختلط در فصل هفتم به‌کار بردیم.

لیکن، به‌ازای $a_M(x_0) = 0$ نمی‌توانیم $u^{(M)}(x_0)$ را بدون ابهام محاسبه کنیم. در چنین حالتی، طرف چپ (۱۲ـ۳) به‌طور کامل از داده‌های اولیه تعیین می‌شود. اگر اتفاقاً طرف چپ برابر $f(x_0)$ شود، در این‌صورت تعداد بینهایت جواب برای $u^{(M)}(x_0)$ وجود دارد؛ اگر سمت چپ برابر $f(x_0)$ نباشد، هیچ جوابی وجود ندارد. این مشکل را می‌توان به طریق دیگری که برای تعمیم به حالت mبعدی مفید است، بیان کرد: $\mathbb{L}_x[u]$ خودش از روی داده‌های اولیه تعیین می‌شود.

حال به موضوع ساختن u می‌پردازیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن مسئلهٔ کوشی دارای یک جواب است. همان مراحل مربوط به مسئلهٔ مقدار اولیه را دنبال می‌کنیم. به خاطر ساختن جواب عددی برای نقاط نزدیک به P و دور از Γ (چون تابع به‌طور کامل روی Γ تعیین شده است، نه تنها مشتق Mام آن بلکه مشتقات تمام مرتبه‌ها روی Γ معلوم است)، باید بتوانیم $\partial^M u/\partial\nu^M$ را در P محاسبه کنیم. اگر ضریب $\partial^M u/\partial\nu^M$ در $\mathbb{L}_x[u]$، وقتی $x_1, \ldots x_m$ برحسب ν، $\xi_2, \ldots, \xi_m$ نوشته شود، برابر صفر باشد، چنین چیزی محال است. این موضوع به تعریف زیر می‌انجامد:

تعریف ۱۲ـ۱ـ۱: اگر $\mathbb{L}_x[u]$ در نقطهٔ $P \in \Gamma$ بتواند از داده‌های کوشی به تنهایی محاسبه شود، ابررویهٔ Γ مشخصه برای $\mathbb{L}_x$ در P نامیده می‌شود. اگر Γ مشخصهٔ تمام مقادیر $P \in \Gamma$ باشد، در این‌صورت Γ را مشخصهٔ ابررویه برای $\mathbb{L}_x$ می‌نامیم.

بنابراین، اگر Γ مشخصه در P باشد، ضریب $\partial^M u/\partial\nu^M$ در عبارت $\mathbb{L}_x[u]$ صفر می‌شود. در واقع، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۲ـ۱ـ۲: فرض کنید Γ یک ابررویهٔ هموار $(m-۱)$ بعدی باشد. فرض کنید $\mathbb{L}_{x}[u]$ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ M از m متغیر باشد. در این‌صورت Γ یک مشخصهٔ در $P \in \Gamma$ است، اگر و فقط اگر ضریب $\partial^M u/\partial \nu^M$، وقتی $\mathbb{L}_x$ برحسب دستگاه مختصات قائم‌ـمماس $(\nu, \xi_۲, \ldots, \xi_m)$ بیان شود، صفر شود. ■

قضیهٔ فرعی زیر یکی از نتایج مفید قضیهٔ ۱۲ـ۱ـ۲ است.

قضیهٔ ۱۲ـ۱ـ۳: ابررویهٔ Γ در P مشخصه نیست اگر و فقط اگر تمام مشتقات جزئی مرتبه Mام u نسبت به $\{x_i\}_{i=۱}^m$ در P به‌طور غیرمبهمی از داده‌های کوشی روی Γ و معادلهٔ دیفرانسیل، تعیین شوند. ■

در حالت یک‌بعدی، به‌ازای $a_M(x_\circ) = \circ$ مشکل ایجاد می‌شود. به زبانی که در اینجا به‌کار می‌بریم، می‌توانیم $x_\circ$ را یک "نقطهٔ مشخصه" بنامیم. این امر درست است زیرا در این حالت خاص $m = ۱$، و بعد ابررویه‌ها می‌توانند فقط عبارت باشند از $m - ۱ = \circ$. بنابراین، می‌توانیم بگوییم در همسایگی یک نقطهٔ مشخصه، مسئلهٔ مقدار اولیه جواب خوش‌تعریفی ندارد.
در حالت کلی $m > ۱$، به همین ترتیب می‌توان گفت اگر P روی یک ابررویهٔ مشخصهٔ $\mathbb{L}$ قرار داشته باشد، مسئلهٔ کوشی در همسایگی P دارای جواب خوش‌تعریفی نیست. بنابراین، تعیین ابررویه‌های مشخصهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

مثال ۱۲ـ۱ـ۱: معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول با دو متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbb{L}[u] \equiv a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y,u) = \circ \qquad (۱)$$

اگر $F(x,y,u) \equiv c(x,y)u + d(x,y)$، این معادله خطی خواهدبود. این معادله با همین شکل، شبه‌خطی است. این بحث از شکل $F(x,y,u)$ مستقل است و از آن تأثیر نمی‌پذیرد.
می‌خواهیم ابررویه‌ها (در این حالت منحنیها)ی مشخصهٔ $\mathbb{L}$ را پیدا کنیم. داده‌های کوشی عبارت‌اند از تعیین سادهٔ u روی Γ. از قضیهٔ فرعی ۱۲ـ۱ـ۳ برای یافتن منحنیهای مشخصه بهره می‌گیریم. این کار شامل به‌دست آوردن روابطی می‌شود که تعیین (یا فقدان) $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ در $P \equiv (x,y)$ را تضمین کند.

معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱) می‌انجامد به

$$-F(P, u(P)) = a(P)\frac{\partial u}{\partial x}(P) + b(P)\frac{\partial u}{\partial y}(P)$$

از سوی دیگر، اگر $Q \equiv (x + dx, y + dy)$ روی منحنی Γ قرار داشته باشند، داریم

$$u(Q) - u(P) = dx\frac{\partial u}{\partial x}(P) + dy\frac{\partial u}{\partial y}(P)$$

داده‌های کوشی عبارت سمت چپ هر دو معادلهٔ قبل را تعیین می‌کنند. با در نظرگرفتن این معادلات به‌صورت یک دستگاه دو معادله خطی نسبت به مجهولهای $\partial u/\partial x(P)$ و $\partial u/\partial y(P)$، نتیجه می‌گیریم که این دستگاه وقتی دارای یک جواب یکتاست که ماتریس ضرایب آن وارون‌پذیر باشد. بنابراین، Γ یک منحنی مشخصه است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\det\begin{pmatrix} dx & dy \\ a(P) & b(P) \end{pmatrix} = b(P)dx - a(P)dy = ۰$$

یا با این فرض که $a(x, y) \neq ۰$،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

حل این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول، y را به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌دهد، و به این ترتیب منحنی مشخصه تعیین می‌شود. توجه کنید که جواب عمومی این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول شامل یک ثابت دلخواه است، از این‌رو یک دسته منحنی مشخصه به‌دست می‌آید. ●

۱۲ـ۱ـ۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم دوبعدی و شرایط مرزی آنها

در مثال ۱۲ـ۱ـ۱ منحنیهای مشخصهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول شبه‌خطی را تعیین کردیم. چون معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم از اهمیت برخوردارند، در اینجا مسئلهٔ مشابهی را برای معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم با دو متغیر بررسی می‌کنیم. کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم شبه‌خطی عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbb{L}[u] \equiv & a(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + ۲b(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} \\ & + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = ۰\end{aligned} \qquad (۴\text{ـ}۱۲)$$

مانند مثال ۱۲ـ۱ـ۱، از قضیهٔ ۱۲ـ۱ـ۳ استفاده می‌کنیم تا منحنیهای مشخصهٔ $\mathbb{L}$ را تعیین کنیم. در جستجوی شرایطی هستیم که تحت آنها تمام مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم u بتوانند از معادلهٔ دیفرانسیل و داده‌های کوشی، که مقادیر u و مشتقات مرتبهٔ اول آن روی Γ به‌شمار می‌آید، به‌دست آید. یک نقطهٔ $Q \equiv (x+dx, y+dy)$ نزدیک به $P \equiv (x,y)$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}(Q) - \frac{\partial u}{\partial x}(P) = dx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) + dy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(P)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(Q) - \frac{\partial u}{\partial y}(P) = dx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(P) + dy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P)$$

$$-F\left(P, u(P), \frac{\partial u}{\partial x}(P), \frac{\partial u}{\partial y}(P)\right) = a(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) + 2b(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(P) + c(P)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P)$$

این دستگاه سه معادلهٔ خطی با سه مجهول $(\partial^2 u/\partial x^2)(P)$، $(\partial^2 u/\partial x\partial y)(P)$، و $(\partial^2 u/\partial y^2)(P)$ دارای یک جواب یکتاست اگر و فقط اگر دترمینان ضرایب آن صفر باشد. بنابراین، Γ یک منحنی مشخصه است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\det\begin{pmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a(P) & 2b(P) & c(P)\end{pmatrix} = 0$$

یا

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dx\,dy + c(x,y)(dx)^2 = 0$$

در این‌صورت، با فرض $a(x,y) \neq 0$، نتیجه می‌شود

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{۱۲ـ۵}$$

سه حالت وجود دارد که باید در نظر بگیریم:

۱. اگر $b^۲ - ac < ۰$، معادله (۱۲ـ۵) دارای جواب نیست؛ یعنی، در نقطهٔ P هیچ منحنی مشخصه‌ای وجود ندارد. در این‌صورت معادلهٔ (۱۲ـ۴) را بیضوی می‌گوییم. بنابراین، معادلهٔ لاپلاس در دو بعد، $\partial^۲u/\partial x^۲ + \partial^۲u/\partial y^۲ = ۰$، بیضوی است زیرا $b^۲ - ac = -۱$. در واقع، این معادله در کل صفحه بیضوی است، یا به بیان دیگر در تمام صفحهٔ xy منحنی مشخصه ندارد. این امر ممکن است ما را به آنجا هدایت کند که تصور کنیم مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ لاپلاس در دو بعد دارای یک جواب یکتاست. اما با وجودی که فقدان یک ابررویهٔ مشخصه در P شرط لازم برای وجود یک جواب برای مسئلهٔ کوشی است، این شرط کافی نیست. در تمرین ۱۲ـ۱ـ۱ به یک مسئلهٔ کوشی برمی‌خوریم که بَد صورت است، یعنی جواب در هر نقطهٔ ثابت یک تابع پیوسته از داده‌های اولیه نیست. برآوردن این شرط برای یک مسئلهٔ خوش‌صورت، هم از جهت فیزیکی و هم از جهت ریاضی لازم است.

۲. اگر $b^۲ - ac > ۰$، معادلهٔ (۱۲ـ۵) دارای دو جواب است؛ یعنی، دو منحنی مشخصه وجود دارد که از P می‌گذرند. در این‌صورت معادلهٔ (۱۲ـ۴) را هذلولوی می‌گویند. معادلهٔ موجی $\partial^۲u/\partial x^۱ - \partial^۲u/\partial t^۲ = ۰$، در تمام صفحهٔ xt چنین معادله‌ای است.

۳. اگر $b^۲ - ac = ۰$، معادلهٔ (۱۲ـ۴) را سهموی می‌گوییم. در این‌صورت، فقط یک منحنی مشخصه در P وجود دارد. معادلهٔ پخش یک‌بعدی $\partial u/\partial t - a\partial^۲u/\partial x^۲ = ۰$ در تمام صفحهٔ xt سهموی است.

این سؤال که از چه نوع شرایط مرزی باید بهره گرفت تا یک جواب یکتا برای معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌دست آورد، یکی از مسائل پیچیده ریاضی به‌شمار می‌آید. همان‌طوری که در تمرین ۱۲ـ۱ـ۱ مشاهده می‌کنیم، با وجودی که تمام شرایط فراهم است تا مسئلهٔ کوشی برای معادلهٔ لاپلاس دوبعدی جواب یکتا داشته باشد، اما عملاً دارای جواب خوش‌صورت نیست. از سوی دیگر، مثالهای فصل دهم راجع به پتانسیلهای الکتروستاتیکی و دما، ما را به این اعتقاد هدایت می‌کنند که مشخص کردن جواب u روی یک منحنی بسته، یک جواب یکتا می‌دهد. این موضوع پایهٔ عمیق فیزیکی دارد. با این همه، مشخص کردن دما (یا پتانسیل الکتروستاتیکی) روی یک سطح بسته باید برای دادن اطلاعات دربارهٔ دما (یا پتانسیل الکتروستاتیکی) در ناحیهٔ نزدیک به منحنی کافی باشد. شرط مرزی که در آن مقدار جواب روی یک منحنی بسته داده شده باشد، شرط مرزی دیریکله و مسئله وابسته به آن، مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله نامیده می‌شود.

یک نوع شرط مرزی دیگر وجود دارد که در زمینه‌های فیزیکی، برای معادلهٔ لاپلاس در دو بعد مناسب است. این شرط براساس این واقعیت استوار است که اگر بار سطحی روی یک رسانا

مشخص شده باشد، در این‌صورت پتانسیل الکتروستاتیکی در نزدیکی رسانا به‌طور یکتا تعیین می‌شود. بار سطحی روی یک رسانا با اندازهٔ میدان الکتریکی روی رسانا متناسب است. از سوی دیگر، میدان الکتریکی، مشتق قائم پتانسیل است. یکی از شرایط مرزی که در آن اندازهٔ مشتق قائم جواب روی یک منحنی بسته مشخص شده باشد، شرط مرزی نویمان، و مسئلهٔ مربوط به آن مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان نامیده می‌شود.

بنابراین، دست‌کم در دوبعد و تنها در زمینه‌های فیزیکی، یا مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله و یا مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان برای معادلهٔ لاپلاس، مسئله‌ای خوش‌صورت است.

برای معادلهٔ گرما (یا پخش) توزیع دمای اولیه روی یک میله در امتداد محور xها، که دو سر آن در دماهای ثابت قرار دارند، به‌دست داده می‌شود. در مورد میله‌ای که دو سر آن در $x = a$ و $x = b$ قرار دارد، این توزیع معادل با داده‌های $u(0, x)$، $u(t, a) = T_1$، و $u(t, b) = T_2$ است. این کمیتها، داده‌های کوشی نیستند، به همین جهت نباید نگران منحنیهای مشخصه باشیم. منحنی مرزی از سه قسمت تشکیل شده است.

(۱) $t = 0$، به‌ازای $a \leq x \leq b$

(۲) $t > 0$، به‌ازای $x = a$

(۳) $t > 0$، به‌ازای $x = b$

در صفحهٔ xt، این منحنی یک مستطیل باز تشکیل می‌دهد که یک ضلع آن $\overline{ab}$ و خطوط قائم در a و b دو ضلع دیگر آن را تشکیل می‌دهند. مسئله عبارت است از تعیین u روی ضلعی که منحنی را می‌بندد؛ یعنی روی ضلع $a \leq x \leq b$، در $t > 0$.

معادلهٔ موج ایجاب می‌کند که هم u و هم $\partial u/\partial t$ در $t = 0$ مشخص شده باشند. جابه‌جایی مرزهای یک محیط مواج، مثلاً طنابی کشیده، نیز باید مشخص شود. در اینجا هم، مانند مورد پخش، منحنی باز است ولی داده‌های اولیه، داده‌های کوشی به‌شمار می‌آیند. بنابراین، برای معادلهٔ موج، یک مسئلهٔ کوشی با داده‌های کوشی داریم که روی یک منحنی بسته مشخص شده‌اند. چون منحنی، مستطیل باز، منحنی مشخصه معادلهٔ موج نیست، مسئله کوشی خوش‌صورت است.

۱۲ـ۱ـ۴ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم در m بعد و شرایط مرزی آنها

در باقیماندهٔ این فصل به خاطر اهمیت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم در فیزیک ریاضیاتی، به همین بحث می‌پردازیم. در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم و شرایط مرزی وابسته به آنها را رده‌بندی می‌کنیم.

کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم شبه‌خطی از m متغیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x_1,\dots,x_m)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + F\left(x_1,\dots,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (۶\_۱۲)$$

که در آن فرض شده A_{jk} نسبت به j و i متقارن است. در غیر این‌صورت، از تقارن مشتق دوم آمیخته استفاده می‌شود تا ضریب آن را به‌صورت ترکیب متقارن $(1/2)(A_{jk}+A_{kj})$ بنویسیم. مجموعه جدید $\{y_k\}_{k=1}^{m}$ را که به‌صورت زیر بیان می‌شود، اختیار کنیم

$$y_k = \sum_{l=1}^{m} R_{kl} x_l \qquad k = 1,2,\dots,m \qquad (۷\_۱۲)$$

که در آن R، فعلاً یک ماتریس ثابت دلخواه است. بنابراین

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_l} = R_{kl} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_n \partial x_l} = 0$$

با تعریف ماتریسهای زیر

$$U_{mn}^{(x)} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_n} \quad \text{و} \quad U_{kj}^{(y)} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}$$

می‌توانیم بنویسیم (مجموع‌یابی روی تمام اندیسهای تکراری در آنها مستتر است)

$$U_{mn}^{(x)} = U_{kj}^{(y)} \frac{\partial y_k}{\partial x_m}\frac{\partial y_j}{\partial x_n} = U_{kj}^{(y)} R_{km} R_{jn} = (\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{U}^{(y)}\mathrm{R})_{mn}$$

مجموع در (۱۲_۶) عبارت است از

$$\text{مجموع} \equiv A_{jk}(\mathbf{x})U_{jk}^{(x)} = A_{kj}(\mathbf{x})U_{jk}^{(x)} = (\mathrm{A}(\mathbf{x})\mathrm{U}^{(x)})_{kk} = \mathrm{tr}[\mathrm{A}(\mathbf{x})\mathrm{U}^{(x)}]$$

که برحسب y، می‌شود

$$\text{مجموع} = \mathrm{tr}(\mathrm{A}(\mathbf{x})\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{U}^{(y)}\mathrm{R}) = \mathrm{tr}[\mathrm{R}\mathrm{A}(\mathbf{x})\tilde{\mathrm{R}}\mathrm{U}^{(y)}]$$

در یک نقطهٔ ثابت به‌خصوص، $\mathbf{x}_\circ \equiv (x_{\circ_1}, x_{\circ_2}, \ldots, x_{\circ_m})$، عناصر ماتریس $\mathsf{A}(\mathbf{x})$ اعداد (حقیقی) (و نه توابع)اند. چون A حقیقی و متقارن است، می‌تواند توسط یک ماتریس متعامد قطری شود. فرض کنید R، که تاکنون دلخواه بود، همان ماتریس متعامد باشد. در این‌صورت $\mathsf{RA}(\mathbf{x}_\circ)\tilde{\mathsf{R}}$ قطری خواهد بود و عناصر آن عبارت‌اند از

$$(\mathsf{RA}(\mathbf{x}_\circ)\tilde{\mathsf{R}})_{jk} \equiv b_j(\mathbf{x}_\circ)\delta_{jk} \equiv a_j(\mathbf{y}_\circ)\delta_{jk}$$

که در آن $\mathbf{x}_\circ$ با استفاده از وارونهٔ معادلهٔ (۱۲ـ۷) با $\mathbf{y}_\circ$ جایگزین شده است. در اینجا b_j همان ویژه‌مقدار jام A است. در نقطهٔ $\mathbf{x}_\circ$، داریم

$$\text{مجموع} = \mathrm{tr}(\mathsf{RA}(\mathbf{x}_\circ)\tilde{\mathsf{R}}U^{(\mathbf{y}_\circ)}) = (\mathsf{RA}(\mathbf{x}_\circ)\tilde{\mathsf{R}})_{jk}U_{kj}^{(\mathbf{y}_\circ)}$$

$$= \sum_{j,k} a_j(\mathbf{y}_\circ)\delta_{jk}U_{kj}^{(\mathbf{y}_\circ)} = \sum_{j=1}^{m} a_j(\mathbf{y}_\circ)U_{jj}^{(\mathbf{y}_\circ)}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j(\mathbf{y}_\circ)\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}$$

به این ترتیب، نشان دادیم که می‌توان در نقطهٔ $\mathbf{x}_\circ$، معادلهٔ (۱۲ـ۶)، را که شامل مشتقهای متقاطع است، به‌صورت زیر تبدیل کرد

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(\mathbf{y}_\circ)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_\circ} + F\left(\mathbf{y}_\circ, u, \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{y}_\circ)\right) = 0 \qquad (۱۲ـ۸)$$

که در آن $\mathbf{y}_\circ$ و $(\partial u/\partial y)(\mathbf{y}_\circ)$، به‌ترتیب، کوته‌نوشت $(y_{\circ 1}, y_{\circ 2}, \ldots, y_{\circ m})$ و $(\partial u/\partial y_1)|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_\circ}$، $(\partial u/\partial y_2)|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_\circ}$، ...، $(\partial u/\partial y_m)|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_\circ}$)، هستند.

می‌توان با بهره‌گیری از معادلهٔ (۱۲ـ۸)، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم را به‌صورت زیر رده‌بندی کرد:

۱. معادله (۱۲ـ۶) را نوع بیضوی در $\mathbf{x}_\circ$ می‌گویند، اگر تمام ضرایب $a_j(\mathbf{y}_\circ)$ در (۱۲ـ۸) مخالف صفر و هم‌علامت باشند.

۲. معادله (۱۲ـ۶) را نوع هذلولوی در $\mathbf{x}_\circ$ می‌گویند، اگر تمام ضرایب $a_j(\mathbf{y}_\circ)$ در (۱۲ـ۸) مخالف صفر باشند ولی هم‌علامت نباشند. هرگاه فقط علامت یک ضریب با علامت سایر ضرایب مخالف باشد، معادلهٔ نوع هذلولوی نامیده می‌شود.

۳. معادلهٔ (۱۲ـ۶) را نوع سهموی در $\mathbf{x}_\circ$ می‌نامند، اگر دست‌کم یکی از ضرایب $a_j(\mathbf{y}_\circ)$ در (۱۲ـ۸) صفر باشد.

اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم در تمام نقاط حوزهٔ تعریفش از یک نوع معین باشد، خودش هم از همان نوع نامیده می‌شود. در حالت خاص، اگر ضرایب a_j ثابت باشند، نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر نمی‌کند.

نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم در دو بعد به دو طریق تعریف شده است. در تمرین ۱۲ـ۱ـ۲ نشان می‌دهیم که این دو، دست‌کم در حالت خاص ضرایب ثابت، هم‌ارزند.

همان‌طوری که قبلاً گفتیم، موضوع وابستگی شرایط مرزی به نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد نظر، مسئلهٔ بسیار پیچیده‌ای است. در بخش پیش، سه نوعْ شرط مرزی مناسب برای سه نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی، فقط براساس استدلالهای فیزیکی، وارد کردیم. می‌توانیم بحث یاد شده را به mبعد تعمیم دهیم. به اعتبار آشنایی با مسائل فیزیکی، چنین تعمیمی از $m = ۲$ به $m = ۳$ با توفیق همراه است. بنابراین، می‌توانیم تناظر زیر را که با نماد $\leftrightarrow$ نمایش می‌دهیم، بین یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم با m متغیر و شرایط مرزی مناسب برقرار کنیم:

۱. معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $\leftrightarrow$ شرایط مرزی دیریکله یا نویمان روی یک ابررویهٔ بسته.

۲. معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم هذلولوی $\leftrightarrow$ داده‌های کوشی روی یک ابررویهٔ باز.

۳. معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $\leftrightarrow$ شرایط مرزی دیریکله یا نویمان روی یک ابررویهٔ باز.

تمرینها

۱۲ـ۱ـ۱ مسئلهٔ کوشی را برای معادلهٔ لاپلاس دوبعدی با داده‌های کوشی $u(\circ, y) = \circ$، $(\partial u/\partial x)(\circ, y) = \varepsilon \sin ky$، که در آن ε و k ثابت‌اند، حل کنید. نشان دهید اگر داده‌های کوشی تغییر کنند، جواب به‌طور پیوسته تغییر نمی‌کند.

۱۲ـ۱ـ۲ نشان دهید در تعریف انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم، که در متن کتاب آمده است، برای معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم، با دو متغیر، زیر هم‌ارزند

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + ۲b\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} + c\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \circ$$

که در آن a، b، و c مقادیر ثابت‌اند.

۱۲ـ۲ توابع گرین و توابع دلتا در ابعاد بالاتر

در این بخش برخی مشخصه‌های توابع گرین در ابعاد بالاتر مورد بحث قرار خواهد گرفت. این مشخصه‌ها به عملگر مشتق جزئی صوری وابسته به تابع گرین و نیز به توابع دلتا مربوط‌اند.

می‌توانیم با استفاده از ایدهٔ چند اندیس پیوسته، معادلهٔ عملگری

$$\mathbb{L}\mathbb{G} = \mathbb{1}$$

را به معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر تبدیل کنیم

$$\mathbb{L}_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{w(\mathbf{x})} \qquad \text{(۱۲ـ۹الف)}$$

که در آن $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_m)$، $\mathbf{y} \equiv (y_1, \ldots, y_m)$، و $w(\mathbf{x})$ تابع وزن است که معمولاً آن را واحد می‌گیرند، $\mathbb{L}_x$ عملگر دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم از متغیر $\mathbf{x}$ است، و فقط در مختصات دکارتی، داریم

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2) \cdots \delta(x_m - y_m) \qquad \text{(۱۲ـ۹ب)}$$

در اغلب کاربردها، مختصات دکارتی مناسبترین دستگاه نیست. لذا، بهتر است (۱۲ـ۹) را در سایر دستگاههای مختصات هم بیان کنیم. مخصوصاً خوب است بدانیم که تابع دلتا چگونه تحت یک تبدیل مختصات کلی تبدیل می‌شود.

۱۲ـ۲ـ۱ تبدیل مختصات تابع دلتا

فرض کنید

$$x_i \equiv f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

یک تبدیل مختصات از $\{x_i\}_{i=1}^m$ به $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ باشد. فرض کنید P نقطه‌ای است که مختصات آن در دستگاههای مختصات x و ξ به‌ترتیب $\mathbf{a} \equiv (a_1, \ldots, a_m)$ و $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ باشد. فرض کنید J ژاکوبی تبدیل، یعنی قدرمطلق دترمینان ماتریسی با عناصر $\partial x_i / \partial \xi_j$، باشد. تابع $f(\mathbf{x}) \equiv F(x_1, \ldots, x_m)$ را در نظر بگیرید. بنابه تعریف تابع دلتا، داریم

$$\int d^m x F(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = F(\mathbf{a})$$

اگر این معادله را برحسب دستگاه مختصات ξ بیان کنیم، با توجه به $d^m x = J d^m\xi$، می‌رسیم به

$$\int d^m\xi J F(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))\delta(f_1(\xi) - a_1)\cdots\delta(f_m(\xi) - a_m)$$
$$= F(a_1, \dots, a_m) = F(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \qquad (۱۲\text{_}۱۰)$$

که در آن از $a_i = f_i(\alpha)$ استفاده کرده‌ایم. با معرفی نمادگذاری $H(\xi) \equiv F(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))$، (۱۲ـ۱۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\int d^m\xi J H(\xi)\delta(f_1(\xi) - f_1(\alpha))\cdots\delta(f_m(\xi) - f_m(\alpha)) = H(\alpha)$$

از سوی دیگر،

$$\int d^m\xi H(\xi)\delta(\xi_1 - \alpha_1)\cdots\delta(\xi_m - \alpha_m) = H(\alpha)$$

بنابراین، می‌رسیم به

$$J\delta(f_1(\xi) - f_1(\alpha))\cdots\delta(f_m(\xi) - f_m(\alpha)) = \delta(\xi_1 - \alpha_1)\cdots\delta(\xi_m - \alpha_m)$$

یا، به بیان نمادگذاری فشرده‌تری

$$J\delta(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{a}(\alpha)) = \delta(\xi - \alpha)$$

یا به بیان ساده

$$J\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \delta(\xi - \alpha) \qquad (۱۲\text{_}۱۱)$$

البته باید در نظر داشت که این امر مستلزم آن است که در P داشته باشیم $J \neq 0$.

مثال ۱۲ـ۲ـ۱: برای دستگاه مختصات قطبی کروی، داریم

$$x_1 \equiv x = r\sin\theta\cos\varphi \equiv \xi_1 \sin\xi_2 \cos\xi_3$$
$$x_2 \equiv y = r\sin\theta\sin\varphi \equiv \xi_1 \sin\xi_2 \sin\xi_3$$
$$x_3 \equiv z = r\cos\theta \equiv \xi_1 \cos\xi_2$$

و ژاکوبی عبارت است از قدرمطلق عبارت

$$\det\begin{pmatrix} \sin\xi_2\cos\xi_3 & \xi_1\cos\xi_2\cos\xi_3 & -\xi_1\sin\xi_2\sin\xi_3 \\ \sin\xi_2\sin\xi_3 & \xi_1\cos\xi_2\sin\xi_3 & \xi_1\sin\xi_2\cos\xi_3 \\ \cos\xi_2 & -\xi_1\sin\xi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\cos\xi_2(\xi_1^2\sin\xi_2\cos\xi_2)+\xi_1\sin\xi_2(\xi_1\sin\xi_2)(\xi_1\sin^2\xi_2)=\xi_1^2\sin\xi_2\equiv r^2\sin\theta=$$

از معادله (۱۲ـ۱۱)، می‌رسیم به

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r_0^2\sin\theta_0}$$

که در آن (x_0, y_0, z_0) و $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ مختصات نقطهٔ واحدی در دو دستگاه مختصات هستند. ●

وقتی در P داشته باشیم $J=0$، چه اتفاقی می‌افتد؟ نقطه‌ای که در آن ژاکوبی صفر می‌شود نقطهٔ تکین یا تکینهٔ تبدیل نامیده می‌شود. بنابراین، تمام نقاط روی محور zها از جمله مبدأ مختصات، در مثال ۱۲ـ۲ـ۱ نقاط تکین هستند. چون J دترمینان است، صفر شدن آن در یک نقطه نمایانگر این نکته است که در همسایگی آن نقطه، تبدیل وارون‌پذیر نیست؛ یعنی تناظر یک‌به‌یک ندارد. بنابراین، در تبدیل از مختصات دکارتی به کروی، نقطهٔ $(0, 0, -5)$ به $(5, 180°, \varphi)$ تبدیل می‌شود، که در آن φ دلخواه است. به همین ترتیب، نقطه $(0, 0, 0)$ در مختصات دکارتی به $(0, \theta, \varphi)$ در مختصات کروی تبدیل می‌شود، که در آن θ و φ دلخواه‌اند. مختصه‌ای که مقدار آن در یک نقطهٔ تکین تعیین شده نباشد، یک مختصهٔ چشمپوشیدنی در آن نقطه نامیده می‌شود. بنابراین، در مبدأ مختصات θ و φ هر دو چشمپوشیدنی‌اند.

فرض کنید در میان مختصات ξ، در $P\equiv(a_1, a_2, \ldots, a_m)$، مجموعهٔ $\{\xi_i\}_{i=k+1}^m$ چشمپوشیدنی است. یعنی، هرگاه هر تابع نظیر F برحسب مختصات ξ بیان‌شود، از مختصات چشمپوشیدنی مستقل خواهد بود. بنابراین، بررسی مجدد معادلهٔ (۱۲ـ۱۰) نشان می‌دهد که (تمرین ۱۲ـ۲ـ۱ را ببینید)

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a})=\frac{1}{|J_k|}\delta(\xi_1-\alpha_1)\cdots\delta(\xi_k-\alpha_k) \qquad (\text{۱۲ـ۱۲الف})$$

که در آن

$$J_k \equiv \int d\xi_{k+1} d\xi_{k+2} \cdots d\xi_m J \qquad \text{(۱۲\_۱۲ب)}$$

بحث بالا را می‌توان به‌صورت یک گزاره بیان کرد.

گزارهٔ ۱۲_۲_۱: فرض کنید $x_i \equiv f_i(\xi)$، که در آن $i = 1, \ldots, m$ تبدیلی از مختصات دکارتی x_i به مختصات منحنی‌الخط ξ_j، و J ژاکوبی این تبدیل باشد. فرض کنید P یک نقطهٔ تکین تبدیل باشد و $J_{k+1}, J_{k+2}, \ldots, J_m$ مختصات چشمپوشیدنی در P باشند که مختصات آنها در x_i برابر $a \equiv (a_1, \ldots, a_m)$ و در ξ_i برابر $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ هستند. در این‌صورت، با تعریف $J_k \equiv \int d\xi_{k+1} \cdots d\xi_m J$، داریم

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{|J_k|} \delta(\xi_1 - \alpha_1) \delta(\xi_2 - \alpha_2) \cdots \delta(\xi_k - \alpha_k)$$

در حالت خاص، اگر تبدیلی یک به یک باشد، آنگاه $k = m$ و $J_m \equiv J$ و (۱۲_۱۱) به‌دست می‌آید.

مثال ۱۲_۲_۲: در دو بعد، تبدیل مابین دستگاه دکارتی و قطبی عبارت است از

$$x_1 \equiv x = r \cos\theta \equiv \xi_1 \cos\xi_2$$
$$x_2 \equiv y = r \sin\theta \equiv \xi_1 \sin\xi_2$$

با ژاکوبی

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial\xi_1 & \partial x_1/\partial\xi_2 \\ \partial x_2/\partial\xi_1 & \partial x_2/\partial\xi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\xi_2 & -\xi_1 \sin\xi_2 \\ \sin\xi_2 & \xi_1 \cos\xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 = r$$

که در مبدأ ($r = 0$) صفر می‌شود. زاویهٔ θ تنها مختصهٔ چشمپوشیدنی در مبدأ است. بنابراین $k = 1$، و

$$J_1 = \int_0^{2\pi} J\, d\theta = \int_0^{2\pi} r\, d\theta = 2\pi r$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

تبدیل، بین مختصات دکارتی و کروی، در سه بعد همراه با ژاکوبی آنکه عبارت است از $J = r^2 \sin\theta$، در مثال ۱۲ـ۲ـ۱ داده شده است. مقادیر θ و φ هر چه باشند، این ژاکوبی در مبدأ صفر می‌شود. بنابراین، در مبدأ ($k = 1$) دو مختصهٔ چشمپوشیدنی داریم، که پس از انتگرال‌گیری روی آنها، می‌رسیم به

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta = 4\pi r^2$$

بنابراین، داریم

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$ ●

۱۲ـ۲ـ۲ مختصات کروی در m بعد

برای بحث دربارهٔ توابع گرین در m بعد، دستگاه مختصات منحنی‌الخط خاصی مفید است. این دستگاه، تعمیم مختصات کروی سه‌بعدی است. دستگاه مختصات کروی m بعدی، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\begin{aligned} x_1 &= r\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{m-1} \\ x_k &= r\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{m-k} \cos\theta_{m-k+1} \qquad 2 \le k \le m-1 \\ x_m &= r\ \cos\theta_1 \end{aligned} \qquad (۱۲\text{ـ}۱۳)$$

(توجه کنید که به‌ازای $m = 3$، دو مختصهٔ اول در مقایسه با تعریف معمولی‌شان، نادر هستند).

به آسانی می‌توان نشان داد که (مثال ۱۲ـ۲ـ۳) ژاکوبی تبدیل (۱۲ـ۳) عبارت است از

$$J = r^{m-1}(\sin\theta_1)^{m-2}(\sin\theta_2)^{m-3}\cdots(\sin\theta_k)^{m-k-1}\cdots\sin\theta_{m-2} \qquad (۱۲\text{ـ}۱۴)$$

و عنصر حجم برحسب این مختصات، به این قرار است

$$d^m x = J\, dr\, d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{m-1} = r^{m-1} dr\, d\Omega_m \qquad (۱۲\text{ـ}۱۵\text{الف})$$

که در آن کمیت

$$d\Omega_m \equiv (\sin\theta_1)^{m-2}(\sin\theta_2)^{m-3}\cdots\sin\theta_{m-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\cdots d\theta_{m-1} \qquad \text{(۱۲ـ۱۵ب)}$$

عنصر m بعدی زاویهٔ حجمی است.

مثال ۱۲ـ۲ـ۳: به‌ازای $m = 4$، داریم

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\\
x_2 &= r\,\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\
x_3 &= r\,\sin\theta_1\cos\theta_2\\
x_4 &= r\,\cos\theta_1
\end{aligned}$$

ژاکوبی تبدیل به‌صورت زیر است

$$J = \det\begin{pmatrix}
\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\
\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\\
\sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0\\
\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$= r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$$

می‌توانیم ژاکوبیهایی که تا اینجا به‌ازای مقادیر مختلف m به‌دست آورده‌ایم، به‌صورت زیر بنویسیم

m	J
۲	r
۳	$r^2\sin\theta_1$
۴	$r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$

واضح است که این نتایج به معادلهٔ (۱۲ـ۱۴) به‌ازای هر مقدار $m \geq 2$ تعمیم داده می‌شود. ●

همان‌طوری که در تمرین ۱۲ـ۲ـ۲ ملاحظه می‌کنیم، زاویهٔ حجمی کل در m بعد عبارت

است از

$$\Omega_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \qquad (۱۲\_۱۶)$$

یکی از نتایج جالب که به آسانی قابل حصول است، عبارتی برای تابع دلتا در مبدأ مختصات برحسب مختصات کروی است. چون $r = 0$، معادلهٔ (۱۲_۱۴) نشان می‌دهد که تمام زاویه‌ها چشمپوشیدنی‌اند. بنابراین، داریم

$$J_1 = \int J\, d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{m-1} = r^{m-1} \int d\Omega_m = r^{m-1}\Omega_m$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\cdots\delta(x_m) = \frac{\delta(r)}{\Omega_m r^{m-1}} = \frac{\Gamma(m/2)\delta(r)}{2\pi^{m/2} r^{m-1}} \qquad (۱۲\_۱۷)$$

۱۲_۲_۳ تابع گرین برای لاپلاس

با روشی که در بالا عنوان کردیم، می‌توانیم تابع گرین برای لاپلاسی را به آسانی به‌دست آوریم. از مسائل مربوط به شرایط مرزی چشم می‌پوشیم و فقط تابعی را بیان می‌کنیم که در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود، قرار می‌دهیم $\mathbf{y} = 0$؛ یعنی محورها را چنان انتقال می‌دهیم که $\mathbf{y}$ مبدأ جدید باشد. در این‌صورت داریم

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

این معادله در مختصات کروی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = \frac{\delta(r)}{\Omega_m r^{m-1}} \qquad (۱۲\_۱۸\text{الف})$$

چون عبارت سمت راست فقط تابعی از r است، انتظار داریم که G نیز همین رفتار را داشته

باشد. حال باید $\nabla^۲$ را برحسب مختصات کروی بیان کنیم. به‌طور کلی، این کار دشوار است؛ ولی برای تابعی که فقط به r بستگی داشته باشد، می‌توانیم $\nabla^۲$ را به آسانی پیدا کنیم. توجه کنید که در مختصات دکارتی داریم $\nabla^۲ = \sum_{i=۱}^{m} \partial^۲/\partial x_i^۲$. در مورد تابع $F(r)$ که فقط به r بستگی داشته باشد، داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{x_i}{r}$$

درستی این تساوی را می‌توان با توجه به $r = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_m^۲}$ به آسانی تحقیق کرد. با یک باز دیگر مشتق‌گیری، می‌رسیم به

$$\frac{\partial^۲ F}{\partial x_i^۲} = \frac{\partial^۲ F}{\partial r^۲}\,\frac{x_i^۲}{r^۲} + \frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{۱}{r} - \frac{x_i^۲}{r^۳}\right)$$

که حاصل آن به این قرار است

$$\begin{aligned}\nabla^۲ F(r) &= \sum_{i=۱}^{m} \frac{\partial^۲ F}{\partial x_i^۲} = \frac{\partial^۲ F}{\partial r^۲} + \frac{m-۱}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r}\\ &= \frac{۱}{r^{m-۱}}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{m-۱}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\end{aligned}$$

از این‌رو، برای تابع گرین، می‌رسیم به

$$\frac{d}{dr}\left(r^{m-۱}\frac{dG}{dr}\right) = \frac{\delta(r)}{\Omega_m} \qquad \text{(۱۲ـ۱۸ب)}$$

جواب این معادله به‌ازای $m \geq ۳$ عبارت است از (تمرین ۱۲ـ۲ـ۳)

$$\begin{aligned}G &= -\frac{۱}{(m-۲)\Omega_m}\left(\frac{۱}{r^{m-۲}}\right)\\ &= -\frac{\Gamma(m/۲)}{۲(m-۲)\pi^{m/۲}}\left(\frac{۱}{r^{m-۲}}\right) \qquad m \geq ۳\end{aligned} \qquad \text{(۱۲ـ۱۹الف)}$$

می‌توانیم بردار $\mathbf{y}$ را، که قبلاً در مبدأ قرار دادیم، با توجه به $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ دوباره وارد کنیم. بنابراین، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= -\frac{\Gamma(m/۲)}{۲(m-۲)\pi^{m/۲}}\left(\frac{۱}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{m-۲}}\right) \\ &= -\frac{\Gamma(m/۲)}{۲(m-۲)\pi^{m/۲}}\left[\sum_{i=۱}^{m}(x_i-y_i)^۲\right]^{-(m-۲)/۲} \quad m \geq ۳ \end{aligned} \tag{۱۲\_۱۹ب}$$

به‌ازای $m = ۲$، داریم

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{۱}{۲\pi}\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \frac{۱}{۴\pi}\ln[(x_۱-y_۱)^۲+(x_۲-y_۲)^۲] \tag{۱۲\_۱۹ج}$$

با دست یافتن به تابع گرین برای لاپلاسی، مطابق معمول، می‌توانیم جواب معادلهٔ ناهمگن، یعنی معادلهٔ پواسون، به قرار زیر را به‌دست آوریم:

$$\nabla^۲ u = -\rho(\mathbf{x})$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\int d^m y\, G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \\ &= \frac{\Gamma(m/۲)}{۲(m-۲)\pi^{m/۲}}\int d^m y \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{m-۲}} \end{aligned}$$

در حالت خاص، به‌ازای $m = ۳$ می‌رسیم به

$$u(\mathbf{x}) = \frac{۱}{۴\pi}\int d^۳ y \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

که پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از چگالی بار، $\rho(\mathbf{y})$، است

تمرینها

۱۲ـ۲ـ۱ معادلات (۱۲ـ۱۲) را اثبات کنید. ابتدا، توجه کنید که سمت راست معادلهٔ (۱۲ـ۱۰) فقط تابعی از $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ است. یعنی،

$$F(f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi)|_{\xi=\alpha} \equiv F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (1)$$

(الف) با تجزیهٔ انتگرال به دو جزء، یکی شامل $\xi_1, \ldots, \xi_k$ و دیگری شامل $\xi_{k+1}, \cdots, \xi_m$، معادلهٔ (۱۲ـ۱۰) را بازنویسی کنید. با مقایسهٔ عبارتهای سمت راست و سمت چپ، نشان دهید که

$$\int d\xi_{k+1} \cdots d\xi_m J\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \delta(\xi_1-\alpha_1)\cdots\delta(\xi_k-\alpha_k) \qquad (2)$$

(ب) نشان دهید $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ مستقل از $\{\xi_j\}_{j=k+1}^{m}$ است. برای این منظور، ابتدا خلاف آن را فرض کنید و نشان دهید که در این‌صورت اتحاد (۲) نقض می‌شود.

(ج) تابع دلتا را از انتگرال خارج کنید و به (۱۲ـ۱۲الف) برسید. با نشان دادن این نکته که در $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$، $J_k \neq 0$، اثبات را کامل کنید.

۱۲ـ۲ـ۲ زاویهٔ حجمی کل Ω_m را در m بعد پیدا کنید.

۱۲ـ۲ـ۳ با انجام مراحل زیر، تابع گرین m بعدی برای لاپلاسی را بیابید.

(الف) این فرض که $r \neq 0$، و این شرط که در $r \to \infty$ خواهیم داشت $G(r) \to 0$، معادلهٔ (۱۲ـ۱۸ب) را حل کنید (این کار فقط به‌ازای $m \geq 3$ می‌تواند انجام شود).

(ب) با استفاده از قضیهٔ واگرایی در m بعد و با بهره‌گیری از (۱۲ـ۱۸الف) نشان دهید:

$$\int_S \frac{dG}{dr} da = 1$$

که در آن S یک ابررویهٔ کروی به شعاع r است. حال، با استفاده از این رابطه و نتیجهٔ قسمت (الف)، سایر ثابتهای انتگرال‌گیری را پیدا کنید.

۱۲ـ۳ بحث صوری تابع گرین در m بعد

در بخش پیش به بحث دربارهٔ تابع گرین برای لاپلاسی پرداختیم، بدون اینکه از شرایط مرزی ذکری به میان آید. در این بخش به بیان یک صورتگرایی خواهیم پرداخت که نه تنها برای عملگرهای کلی‌تر قابل استفاده، بلکه شرایط مرزی را نیز در بر می‌گیرد.

۱۲ـ۳ـ۱ خواص کلی توابع گرین در m بعد

هرگونه مطالعه در خصوص توابع گرین، بر پایهٔ اتحاد گرین استوار است، که شکل یک‌بعدی آن را در فصل یازدهم معادله (۱۱ـ۳۱) دیدیم. در اینجا، آن را به m بعد تعمیم می‌دهیم. فرض کنید دو عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ و $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}$ چنان وجود داشته باشند که به‌ازای هر دو تابع u و v، در رابطهٔ زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} v^{*}\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] - u(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v])^{*} &= \nabla \cdot \mathbf{Q}(u, v^{*}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i(u, v^{*}) \end{aligned} \qquad (۱۲\text{ـ}۲۰)$$

عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}$، مانند حالت یک‌بعدی، الحاقی صوری $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ نامیده می‌شود. با انتگرال‌گیری از (۱۲ـ۲۰) روی یک ناحیهٔ بستهٔ D در $\mathbb{R}^m$، که (مطابق رسم در نوشتارهای ریاضی) مرز آن را با $\partial\mathrm{D}$ نمایش می‌دهیم، و با بهره‌گیری از قضیهٔ واگرایی، می‌رسیم به:

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x \{v^{*}\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] - u(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v])^{*}\} = \int_{\partial\mathrm{D}} \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}} da \qquad (۱۲\text{ـ}۲۱)$$

که در آن $\hat{\mathbf{e}}_n$ بردار یکهٔ mبعدی عمود بر $\partial\mathrm{D}$، و da عنصر "مساحت" ابررویهٔ mبعدی $\partial\mathrm{D}$ است. معادلهٔ (۱۲ـ۲۱) اتحاد گرین تعمیم‌یافته به m بعد است. توجه کنید که برای آسانی کار، تابع وزن را واحد قرار داده‌ایم.

اگر طرف راست (۱۲ـ۲۱)، جملهٔ رویه‌ای، صفر شود، گوییم عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ خودالحاقی است. در چنین حالتی، مانند حالت یک‌بعدی، لزوماً داریم:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} = \mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger} \qquad (۱۲\text{ـ}۲۲)$$

معادلهٔ (۱۲ـ۲۲) شرط لازمی برای این است که جملهٔ رویه‌ای صفر شود زیرا u و v، بنا به فرض، دلخواه‌اند. $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ را هرمیتی گوییم اگر (۱۲ـ۲۲) برقرار باشد و حوزه‌های تعریف $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ و $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}$، که با صفر شدن جملهٔ رویه‌ای تعیین می‌شود، یکسان باشند.

مثال ۱۲ـ۳ـ۱: برای عملگر:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla^{۲} + \mathbf{b} \cdot \nabla + c$$

که در آن $\{b_i\}_{i=1}^{m}$ توابعی از $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ هستند، اتحاد:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot[v\boldsymbol{\nabla}u-u\boldsymbol{\nabla}v+\mathbf{b}uv]=v\nabla^2u-u\nabla^2v+v\mathbf{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}u)+u\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{b}v)$$

نشان می‌دهد که:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v]\equiv\nabla^2v-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{b}v)+cv$$

و

$$\mathbf{Q}(u,v^*)=\mathbf{Q}(u,v)=v\boldsymbol{\nabla}u-u\boldsymbol{\nabla}v+\mathbf{b}uv$$

در این‌صورت اتحاد گرین تعمیم‌یافته عبارت است از

$$\int_{\mathrm{D}}d^mx(v\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u]-u\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v])=\int_{\partial\mathrm{D}}(v\boldsymbol{\nabla}u-u\boldsymbol{\nabla}v+uv\mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{e}}_n da$$

یک شرط لازم برای اینکه $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ خودالحاقی باشد [معادله (۱۲ـ۲۲)] این است که داشته باشیم:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u]=\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[u]\qquad\forall u$$

یا

$$\nabla^2u+\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+cu=\nabla^2u-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{b}u)+cu$$

این رابطه شرطهای زیر را می‌دهد

$$\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}u=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{b}u)=-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})u-\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}u\qquad(۱)$$

یا

$$۲\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}u+u(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})=۰\qquad\forall u\qquad(۲)$$

به‌ازای $u = \circ$، معادلهٔ (۲) می‌دهد $\nabla \cdot \mathbf{b} = \circ$، که در این‌صورت معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{b} \cdot \nabla u = \circ$$

با فرض $u = x_i$، داریم $b_i = \circ$، که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} = \nabla^{\text{۲}} + c(\mathbf{x})$$

به‌طور صوری خودالحاقی است. ●

می‌توانیم با بهره‌گیری از معادلهٔ (۱۲ـ۲۱) و معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] = f(\mathbf{x}) \qquad \text{(۱۲ـ۲۳)}$$

و الحاقی صوری آن را

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v] = h(\mathbf{x}) \qquad \text{(۱۲ـ۲۴)}$$

مطالعه کنیم.

مانند حالت یک‌بعدی، فرض می‌کنیم $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ به‌ترتیب معرف توابع گرین برای $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ و $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}$ باشند. فرض کنید شرایط مرزی چنان باشند که جملهٔ رویه‌ای در (۱۲ـ۲۱) صفر شود. در این‌صورت اتحاد گرین را به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x v^* \mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] = \int_{\mathrm{D}} d^m x u (\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^{\dagger}[v])^* \qquad \text{(۱۲ـ۲۵)}$$

اگر قرار دهیم $u = G(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ و $v = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$، که در آن $\mathbf{t}, \mathbf{y} \in \mathrm{D}$، معادلهٔ (۱۲ـ۲۵) منجر می‌شود به:

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x g^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{t}) = \int_{\mathrm{D}} d^m x G(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

یا

$$g^*(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \qquad \text{(۱۲ـ۲۶الف)}$$

در حالت خاص، وقتی $\mathbb{L}_x$ خودالحاقی صوری باشد، داریم

$$G^*(\mathbf{t},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{t}) \qquad (۱۲\text{ـ}۲۶\text{ب})$$

اگر تمام توابع ضرایب $\mathbb{L}_x$ حقیقی باشند، G حقیقی خواهد بود و (۱۲ـ۲۶ب) به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$G(\mathbf{t},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{t}) \qquad (۱۲\text{ـ}۲۶\text{ج})$$

یعنی تابع گرین متقارن خواهد بود.

اگر قرار دهیم $v = g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ و از (۱۲ـ۲۳) و (۱۲ـ۲۵) استفاده کنیم، می‌رسیم به:

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\mathrm{D}} d^m x g^*(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{x})$$

که با استفاده از (۱۲ـ۲۶الف) و تعویض جای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

به همین ترتیب، می‌توان نشان داد

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{D}} d^m y g(\mathbf{x},\mathbf{y}) h(\mathbf{y})$$

۱۲ـ۳ـ۲ جوابهای (تکینه) اصلی

جملهٔ ناهمگن معادلهٔ دیفرانسیلی که $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یکی از جوابهای آن به شمار می‌آید، تابع دلتا، $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$، است. باعث تعجب خواهد بود اگر $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ "متوجه" این جمله نشود که مایهٔ فاجعه است و خود را طوری تنظیم کند که در $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ نسبت به سایر نقاط "معمولی" رفتار متفاوتی داشته باشد. وقتی قضیهٔ ۱۱ـ۴ـ۶ را ثابت کردیم، به رفتار تکینهٔ تابع گرین در $x=y$ در یک‌بعد توجه داشتیم. در آنجا تابع $h(x,y)$ را که در $x=y$ گسسته بود، به‌عنوان بخشی از تابع گرین وارد کردیم. به همین ترتیب، در اوایل این فصل، وقتی توابع گرین برای لاپلاسی در دو و m بعد را مورد بحث قرار دادیم، پی بردیم که در $\mathbf{r}=۰$ یا $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ رفتار تکینه‌ای دارند.

بعد از لاپلاسی، از لحاظ میزان دشواری، عملگر دیفرانسیل جزئی بیضوی بود که در مثال ۱۲ـ۳ـ۱ مورد بحث قرار گرفت:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla^{2} + q(\mathbf{x})$$

با جایگزین کردن این عملگر در (۱۲ـ۲۱) و استفاده از عبارت $\mathbf{Q}$ که در آن مثال داده شده است، می‌رسیم به

$$\int_{\mathrm{D}} d^{m}x\{v\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] - u(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[v])\} = \int_{\partial\mathrm{D}} (v\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}} \cdot \nabla u - u\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} v) da$$

با قرار دادن $v = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و نمایاندن $\hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ به‌صورت $\partial/\partial n$، خواهیم داشت

$$\int_{\mathrm{D}} d^{m}x[G(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbb{L}_{\mathbf{x}}u - u\mathbb{L}_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})] = \int_{\partial\mathrm{D}} \left[G(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] da$$

(۱۲ـ۲۷)

می‌خواهیم از (۱۲ـ۲۷) استفاده کنیم تا رفتار $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ را در $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \to 0$ بیابیم. از این‌رو، با فرض $\mathbf{y} \in \mathrm{D}$، حوزهٔ تعریف D را به دو جزء تجزیه می‌کنیم: یکی ابرکرهٔ بینهایت کوچک $\mathbf{S}_{\varepsilon}$ به مرکز $\mathbf{y}$ و شعاع ε؛ و دیگری بقیهٔ حوزهٔ تعریف D. به‌جای D از ناحیهٔ $\mathbf{D}' \equiv \mathbf{D} - \mathbf{S}_{\varepsilon}$ استفاده می‌کنیم. نکات زیر برای D' به آسانی استنتاج می‌شوند:

۱. $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ زیرا در D' داریم $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

۲. $\int_{\mathrm{D}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathrm{D}'}$

۳. $\partial\mathbf{D}' = \partial\mathbf{D} \cup \partial\mathbf{S}_{\varepsilon}$

فرض کنید می‌خواهیم جواب معادلهٔ زیر را تحت شرایط مرزی معینی، که هنوز مشخص نشده، پیدا کنیم:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] \equiv [\boldsymbol{\nabla}^{2} + q(\mathbf{x})]u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

با استفاده از سه نکتهٔ بالا، معادلهٔ (۱۲ـ۲۷) منجر می‌شود به:

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x[G\mathbb{L}_{\mathbf{x}}u - u\mathbb{L}_{\mathbf{x}}G] = \lim_{\varepsilon \to \circ} \int_{\mathrm{D}'} d^m x[G\mathbb{L}_{\mathbf{x}}u - u\mathbb{L}_{\mathbf{x}}G]$$
$$= \lim_{\varepsilon \to \circ} \int_{\mathrm{D}'} d^m x G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathrm{D}} d^m x G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{x})$$
$$= \int_{\partial \mathrm{D}} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) da + \int_{\partial \mathbf{S}_\varepsilon} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) da$$

با این فرض که شرایط مرزی چنان‌اند که انتگرال روی $\partial\mathrm{D}$ صفر می‌شود (از فصل یازدهم یادآوری می‌کنیم که، دست‌کم برای یک‌بعد، این شرط لازم برای وجود توابع گرین بود)، سرانجام، می‌رسیم به:

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{x}) = \int_{\partial \mathbf{S}_\varepsilon} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) da$$

در مورد کرهٔ mبعدی داریم $da = r^{m-1} d\Omega_m$ که برای $\mathbf{S}_\varepsilon$ برابر است با $\varepsilon^{m-1} d\Omega_m$. با قرار دادن در معادلهٔ قبلی، می‌رسیم به

$$\int_{\mathrm{D}} d^m x G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{x}) = \int_{\partial \mathbf{S}_\varepsilon} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) \varepsilon^{m-1} d\Omega_m$$

می‌خواهیم عبارت سمت راست برابر $u(\mathbf{y})$ باشد. در صورتی تساوی محقق می‌شود که به‌ازای u دلخواه داشته باشیم

$$\lim_{\varepsilon \to \circ} \int_{\partial \mathbf{S}_\varepsilon} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon^{m-1} d\Omega_m = \circ \quad \text{و} \quad \lim_{\varepsilon \to \circ} \int_{\partial \mathbf{S}_\varepsilon} u \frac{\partial G}{\partial n} \varepsilon^{m-1} d\Omega_m = u(\mathbf{y})$$

این اتفاق وقتی اتفاق می‌افتد:

$$\lim_{r \to \circ} G(\mathbf{y}+\mathbf{r},\mathbf{y}) r^{m-1} = \circ \qquad \text{(۱۲ـ۲۸الف)}$$

و

$$\lim_{r \to \circ} \frac{\partial G}{\partial r}(\mathbf{y}+\mathbf{r},\mathbf{y}) r^{m-1} = \text{const.} \qquad \text{(۱۲ـ۲۸ب)}$$

یکی از جوابهای این دو معادله عبارت است از

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{cases}-\dfrac{F(\mathbf{x},\mathbf{y})}{2\pi}\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+H(\mathbf{x},\mathbf{y}) & m=2\\ -\dfrac{1}{(m-2)\Omega_m}\left[\dfrac{F(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{m-2}}\right]+H(\mathbf{x},\mathbf{y}) & m\geq 3\end{cases} \qquad (۱۲\_۲۹)$$

که در آن $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ و $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ در $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ خوش‌رفتارند. معرفیِ این توابع لازم است، زیرا معادلات (۱۲ــ۲۸) رفتار $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را تنها وقتی تعیین می‌کند که $\mathbf{y}\approx\mathbf{x}$. چنین رفتاری، $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را به‌طور یکتایی تعیین نمی‌کند. مثلاً، $\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ و $e^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ در حد $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to 0$ رفتار یکسانی دارند.

معادلهٔ (۱۲ــ۲۹) نشان می‌دهد که، دست‌کم به‌ازای $\mathbb{L}_\mathbf{x}=\nabla^2+q(\mathbf{x})$، تابع گرین از دو جزء تشکیل شده است. جزء اول رفتار تکینهٔ تابع گرین را وقتی تعیین می‌کند که $\mathbf{x}\to\mathbf{y}$. ماهیت این تکینگی (یعنی اینکه چگونه تابع گرین در حد $\mathbf{x}\to\mathbf{y}$ "بینهایت" می‌شود) فوق‌العاده مهم است، زیرا پیش‌نیازی است برای اینکه بتوانیم جواب را برحسب یک نمایش انتگرالی بنویسیم که تابع گرین هسته آن باشد. به‌خاطر اهمیتشان در چنین نمایشهایی است، که جملات اول در سمت راست (۱۲ــ۲۹) جوابهای اصلی معادلهٔ دیفرانسیل، یا جزء تکینهٔ تابع گرین نامیده می‌شود.

دربارهٔ جزء دوم تابع گرین چه می‌گوییم؟ برای آوردن جواب، این جزء چه نقشی دارد؟ تا اینجا از در نظر گرفتن شرایط مرزی اجتناب کرده‌ایم. در اینجا $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ می‌تواند به ما کمک کند. $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ در شرایط مرزی مربوطه صدق کند. این نکته را دقیقتر و کلی‌تر مورد بحث قرار می‌دهیم.

اگر شرایط مرزی را در نظر بگیریم، تابع گرین برای یک عملگر دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $\mathbb{L}_\mathbf{x}$ نمی‌تواند به‌طور یکتایی تعیین شود. در حالت خاص، اگر $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یک تابع گرین باشد، یعنی اگر $\mathbb{L}_\mathbf{x}G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$، در این‌صورت، مادام که $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یک جواب معادلهٔ همگن باشد، یعنی $\mathbb{L}_\mathbf{x}H(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ باشد، $G(\mathbf{x},\mathbf{y})+H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نیز یک تابع گرین خواهد بود. بنابراین می‌توانیم تابع گرین را به‌صورت زیر به دو جزء تجزیه کنیم:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})\equiv G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})+H(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (۱۲\_۳۰\text{الف})$$

در اینجا، $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ جزء تکینهٔ تابع گرین است و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\mathbb{L}_\mathbf{x}G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (۱۲\_۳۰\text{ب})$$

$H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ جزء منظم تابع گرین را تشکیل می‌دهد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \qquad (۱۲\text{-}۳۰ج)$$

G_s و H (و بنابراین G) هیچ‌کدام یکتا نیستند. اما، اگر شرایط مرزی مناسبی که به نوع $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ بستگی دارد اعمال کنیم، در این‌صورت $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ یکتا خواهد بود.

به بیان دقیقتر فرض کنید می‌خواهیم تابع گرینی برحسب $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ بیابیم که در مرز ∂D صفر شود؛ یعنی می‌خواهیم $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را چنان انتخاب کنیم که $G(\mathbf{x}_b,\mathbf{y}) = 0$، و در آن $\mathbf{x}_b$ یک نقطهٔ دلخواه روی مرز است. کار ضروری این است که یک $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ پیدا کنیم که در معادلهٔ (۱۲ـ۳۰ب) و یک $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ بیابیم که در معادلهٔ (۱۲ـ۳۰ج) را با شرط مرزی $H(\mathbf{x}_b,\mathbf{y}) = -G_s(\mathbf{x}_b,\mathbf{y})$، صدق کند. مسئلهٔ اخیر را، که شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن است، می‌توان با روشهای فصل ۱۰ حل کرد. چون هرگونه بحثی دربارهٔ شرایط مرزی به نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بستگی دارد، انواع مختلف این معادلات در بخش بعدی بررسی خواهند شد.

۱۲ـ۴ توابع گرین برای سه نوع معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این بخش، توابع گرین برای معادلات بیضوی، سهموی، و هذلولوی را بررسی می‌کنیم که در شرایط مرزی مربوط به خودشان (به‌گونه‌ای که در آخر بخش ۱۲ـ۱ مشخص شده است) صدق می‌کنند.

۱۲ـ۴ـ۱ معادلات بیضوی

کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی m متغیر که از نوع بیضوی را در بخش ۱۲ـ۱ مورد بحث قرار دادیم. در اینجا، این حالت کلی را بررسی نخواهیم کرد زیرا تمام عملگرهای دیفرانسیلی با مشتقات جزئی بیضوی که در فیزیک ریاضیاتی با آنها سروکار داریم، بسیار ساده‌تر از آن هستند. در واقع، عملگر دیفرانسیلی با مشتقات جزئی بیضوی خودالحاقی:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla^2 + q(\mathbf{x})$$

برای مقاصد این بحث به‌قدر کافی کلی هست.

از بخش ۱۲ـ۱ یادآوری می‌کنیم که شرایط مرزی وابسته به یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی از دو نوع، یعنی دیریکله و نویمان، هستند. اکنون هر نوع را جداگانه بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله. مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله از یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی همراه با شرط مرزی دیریکله تشکیل شده است؛ مانند معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] \equiv \nabla^{2} u + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in \mathrm{D} \qquad \text{(۱۲ـ۳۱الف)}$$

همراه با شرط مرزی:

$$u(\mathbf{x}_{\mathrm{b}}) = g(\mathbf{x}_{\mathrm{b}}) \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{b}} \in \partial\mathbf{D} \equiv \mathbf{S} \qquad \text{(۱۲ـ۳۱ب)}$$

که در آن $g(\mathbf{x}_{\mathrm{b}})$ تابع معینی است که روی ابررویهٔ بستهٔ $\mathbf{S}$ تعریف شده است.

به‌همان دلیل که در مورد تابع گرین یک‌بعدی آوردیم، تابع گرین برای مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله باید در شرط مرزی همگن صدق کند. بنابراین، تابع گرین‌ـدیریکله، که با $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نمایش داده می‌شود، باید در روابط زیر صدق کند

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},\mathbf{y}) = 0 \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{b}} \in \mathbf{S} \equiv \partial\mathbf{D}$$

این نکته همراه با بحث بخش ۱۲ـ۳ـ۲ مربوط به اجزای تکینه و منظم تابع گرین، به تعریف زیر می‌انجامد.

تعریف ۱۲ـ۴ـ۱ : تابع گرین وابسته به عملگر بیضوی خودالحاقی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ در حوزهٔ تعریف D، عبارت است از تابعی مانند $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$

(ب) $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_{\mathrm{b}} \in \partial\mathrm{D}$

(ج) $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ بتواند به‌صورت $G_{\mathrm{D}}^{(s)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نوشته شود، که در آن $G_{\mathrm{D}}^{(s)}$ هر جواب اصلی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}G_{\mathrm{D}}^{(s)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ و $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ جواب منظم مسئلهٔ دیریکله در D است که در شرط مرزی زیر صدق می‌کند

$$H(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},\mathbf{y}) = -G_{\mathrm{D}}^{(s)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

با استفاده از معادلات (۱۲ـ۳۱) و خواص $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ در معادله (۱۲ـ۲۷) و تعویض $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، می‌رسیم به

$$u(\mathbf{x})=\int_{\mathrm{D}} d^m y G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{x})+\int_{\partial\mathrm{D}} g(\mathbf{y}_{\mathrm{b}})\frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x},\mathbf{y}_{\mathrm{b}})da \qquad (۱۲ـ۳۲)$$

که در آن $\partial/\partial n_y$ معرف مشتق قائم نسبت به شناسهٔ دوم است.

ذکر چند حالت خاص (۱۲ـ۳۲) به‌گفتنش می‌ارزد. اولین حالت، عبارت است از $u(\mathbf{x}_{\mathrm{b}})=۰$، یعنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن که در شرط مرزی همگن صدق می‌کند. برای دستیابی به آن، به‌جای $g(\mathbf{x}_{\mathrm{b}})$ در (۱۲ـ۳۲) صفر قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$u(\mathbf{x})=\int_{\mathrm{D}} d^m y G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})$$

حالت خاص دوم، عبارت است از حالت همگن بودن معادلهٔ دیفرانسیل، یعنی $f(\mathbf{x})=۰$، ولی ناهمگن بودن شرط مرزی در این حالت داریم:

$$u(\mathbf{x})=\int_{\partial\mathrm{D}} g(\mathbf{x}_{\mathrm{b}})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},\mathbf{y})da$$

که باز هم به حالت یک‌بعدی بسیار شبیه است. سرانجام، جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن با شرط مرزی همگن عبارت است از $u\equiv ۰$، که به آن جواب صفر گفته می‌شود. این جواب با شهود فیزیکی سازگار است. اگر تابع روی مرز صفر واقع بوده و هیچ چشمه‌ای، $f(\mathbf{x})$، وجود نداشته باشد تا "آشفتگی" ایجاد کند، انتظار داریم هیچ جواب غیربدیهی نداشته باشیم.

مثال ۱۲ـ۴ـ۱: می‌خواهیم تابع گرین برای لاپلاسی سه‌بعدی $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}\equiv\nabla^۲$ را که در شرط مرزی دیریکله، $G_{\mathrm{D}}(\rho,\mathbf{y})=۰$، صدق می‌کند، و در آن ρ روی صفحه xy است، پیدا کنیم. در اینجا D نیم‌صفحهٔ بالایی $(z>۰)$ و $\partial\mathrm{D}$ صفحهٔ xy است.

بهتر است به‌جای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به‌ترتیب از $\mathbf{r}\equiv(x,y,z)$ و $\mathbf{r}'\equiv(x',y',z')$ استفاده کنیم. با استفاده از (۱۲ـ۱۹) به‌عنوان $G_{\mathrm{D}}^{(s)}$، جزء تکینهٔ G_{D}، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')&=-\frac{۱}{۴\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+H(\mathbf{r},\mathbf{r}')\\&=-\frac{۱}{۴\pi}\,\frac{۱}{\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲}}+H(x,y,z;x',y',z')\end{aligned}$$

این شرط که G_{D} روی صفحه xy صفر شود، منجر می‌شود به

$$H(x,y,\circ;x',y',z')=\frac{\backslash}{\text{۴}\pi}\frac{\backslash}{\sqrt{(x-x')^{\text{۲}}+(y-y')^{\text{۲}}+z'^{\text{۲}}}}$$

این رابطه، وابستگی H به x و y را مشخص می‌کند. از سوی دیگر، $\nabla^{\text{۲}}H=\circ$ در D دلالت می‌کند بر اینکه شکل H باید مانند شکل $G_{\mathrm{D}}^{(s)}$ باشد، زیرا، جز در $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$، $G_{\mathrm{D}}^{(s)}$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. بنابراین، برای وابستگی به z می‌توانیم به دو انتخاب $(z-z')^{\text{۲}}$ و $(z+z')^{\text{۲}}$ دست بزنیم. انتخاب اول، منجر به $G\equiv\circ$ می‌شود که یک جواب بدیهی است. بنابراین، باید این انتخاب را بکنیم

$$H(x,y,z;x',y',z')=\frac{\backslash}{\text{۴}\pi}\frac{\backslash}{(x-x')^{\text{۲}}+(y-y')^{\text{۲}}+(z+z')^{\text{۲}}}$$

توجه کنید که با $\mathbf{r}''\equiv(x',y',-z')$، این معادله، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla^{\text{۲}}H(\mathbf{r};\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$$

از اینجا ملاحظه می‌شود که H، هم‌چنانکه باید، در معادلهٔ دیفرانسیل همگن صدق نمی‌کند، اما $\mathbf{r}''$ در خارج D است. بنابراین، مادام که $\mathbf{r}\in\mathrm{D}$، و H در معادلهٔ دیفرانسیل همگن در D، صدق می‌کند. از این‌رو، تابع گرین برای شرط مرزی دیریکلهٔ داده شده، عبارت است از

$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{\backslash}{\text{۴}\pi}\left(\frac{\backslash}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{\backslash}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\right)$$

که در آن r'' انعکاس $\mathbf{r}'$ نسبت به صفحهٔ xy است.

این نتیجه یک تعبیر فیزیکی مستقیم دارد. اگر تعیین جواب معادلهٔ لاپلاس یکی از مسائل الکتروستاتیک تلقی شود، در این‌صورت $G_{\mathrm{D}}^{(s)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای واحد واقع در $\mathbf{r}'$ در نقطهٔ $\mathbf{r}$، و $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ پتانسیل دو بار ناهمنام، یکی در $\mathbf{r}$ و دیگری در تصویر آینه‌ای $\mathbf{r}'$ است. این واقعیت که این دو بار از صفحهٔ xy به یک فاصله‌اند، تضمین می‌کند که پتانسیل روی این صفحه صفر باشد. وارد کردن بارهای تصویری برای صفر کردن $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ روی $\partial\mathrm{D}$ یکی از کارهای بسیار متداول در الکتروستاتیک است و به آن روش تصویری می‌گویند. بنابراین، مسئلهٔ دیریکله برای لاپلاسی منجر به یافتن بارهای نقطه‌ای مناسب در خارج D می‌شود که صفر بودن پتانسیل روی ∂D را تضمین می‌کنند. در مورد شکلهای هندسی ساده، نظیر آنچه در این

مثال بحث کردیم، تعیین اندازه و محل این بارهای تصویری آسان است، که باعث می‌شود این روش فوق‌العاده مفید باشد. در شکلهای هندسی پیچیده باید به روشهای دیگری متوسل شد.

وقتی تابع گرین را یافتیم، می‌توانیم مسئلهٔ مقدار مرزی کلی دیریکله را مطرح کنیم:

$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r}) \quad \text{و} \quad u(x, y, 0) \equiv g(x, y) \quad z > 0$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\begin{aligned} u(x,y,z) =& \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} dz'\,\rho(x',y',z') \\ & \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right. \\ & \left. -\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right] \\ & +\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy'\, g(x',y') \frac{\partial G_{\mathrm{D}}}{\partial z}\bigg|_{z=0} \end{aligned} \qquad (1)$$

یکی ازکاربردهای معمولی این مورد شامل وارد کردن تعدادی بار در مجاورت یک ورقهٔ رسانای نامحدود است که در پتانسیل ثابت V_0 قرار دارد. اگر N بار، $\{q_i\}_{i=1}^{N}$، در $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ وجود داشته باشد، در این‌صورت

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

و

$$g(x, y) = \text{const.} = V_0$$

بنابراین

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} - \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i|}\right) + V_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\partial G_{\mathrm{D}}}{\partial z}\bigg|_{z=0} \qquad (2)$$

که در آن $\mathbf{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ و $\mathbf{r}'_i \equiv (x_i, y_i, -z_i)$. می‌توان به این نکته که انتگرال دوگانه در (۲) برابر یک است، از طریق انتگرال‌گیری مستقیم رسید یا از این نکته به آن رسید که حاصل‌جمع در $z = \circ$ برابر صفر است. از سوی دیگر، $u(x, y, \circ) = V_\circ$. بنابراین، جواب به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \right) + V_\circ$$ ●

مثال ۱۲-۴-۲: روش تصویری، وقتی مرز را یک کره تشکیل دهد، نیز قابل اعمال است. می‌خواهیم در داخل کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات این مسئله مقدار مرزی دیریکله را حل کنیم:

$$\nabla^2 u = -\rho(r, \theta, \varphi) \qquad r < a$$

$$u(a, \theta, \varphi) \equiv g(\theta, \varphi)$$

تابع گرین در روابط زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 G_{\mathrm{D}}(r, \theta, \varphi'; r', \theta', \varphi') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad r < a \tag{1}$$

$$G_{\mathrm{D}}(a, \theta, \varphi; r', \theta', \varphi') = \circ \tag{2}$$

بنابراین، باز هم G_{D} را می‌توان پتانسیل بارهای نقطه‌ای تعبیر کرد، که یکی از آنها در داخل کره و دیگری در خارج کره قرار دارد.

می‌نویسیم $G_{\mathrm{D}} = G_{\mathrm{D}}^{(s)} + H$ و H را طوری اختیار می‌کنیم که معادلهٔ(۲) برقرار باشد. چون $G_{\mathrm{D}}^{(s)}$ در (۱) صدق می‌کند، H باید در معادلهٔ لاپلاس صدق کند. اگر قرار دهیم:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = \frac{-k}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}$$

که در آن k مقداری ثابت است که باید تعیین شود و $\mathbf{r}''$ در خارج کره قرار دارد، در این‌صورت $\nabla^2 H$ در داخل کره صفر خواهد بود. به این ترتیب، مسئله به پیدا کردن مقدار k در $\mathbf{r}''$ (محل بار تصویری) تبدیل شده است. می‌توانیم بنویسیم:

$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{k}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}$$

با این فرض که $\mathbf{r}''$ در همان جهت $\mathbf{r}'$ واقع است، می‌خواهیم $\mathbf{r}''$را چنان انتخاب کنیم که:

$$\left(\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_{r=a} = \left(\frac{k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\right)_{r=a}$$

یا

$$k(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)_{r=a} = (|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)_{r=a}$$

این رابطه نشان می‌دهد که k باید مثبت باشد. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و بسط می‌دهیم و می‌رسیم به:

$$k^۲(a^۲ + r'^۲ - ۲ar'\cos\gamma) = a^۲ + r''^۲ - ۲ar''\cos\gamma \qquad (۳)$$

که در آن γ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ است، و فرض کرده‌ایم $\mathbf{r}'$ و $\mathbf{r}''$ در یک راستا باشند. برای اینکه رابطهٔ (۳) به‌ازای هر مقدار دلخواه γ برقرار باشد، باید داشته باشیم

$$k^۲ r' = r'' \qquad (۴)$$

در این‌صورت

$$k^۲(a^۲ + r'^۲) = a^۲ + r''^۲ \qquad (۵)$$

معادلات (۴) و (۵) منجر می‌شوند به

$$k^۴ r'^۲ - k^۲(a^۲ + r'^۲) + a^۲ = ۰$$

که جوابهای مثبت آن عبارت‌اند از

$$k = ۱, \frac{a}{r'}$$

انتخاب اول، یعنی $r'' = r'$، ناممکن است زیرا r'' باید در خارج کره واقع باشد. بنابراین، جواب $k = a/r'$ را انتخاب می‌کنیم، که از آن نتیجه می‌شود $\mathbf{r}'' = (a^۲/r'^۲)\mathbf{r}'$. با این مقدار

$\mathbf{r}''$، داریم

$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{ar'}{|r'^2\mathbf{r} - a^2\mathbf{r}'|}\right] \tag{۶}$$

با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ (۱۲ـ۳۲) و توجه به $\partial G/\partial n_y = (\partial G/\partial r')_{r'=a}$، می‌رسیم به

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{ar'}{|r'^2\mathbf{r} - a^2\mathbf{r}'|}\right)\rho(\mathbf{r}')$$
$$+\frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \,\frac{g(\theta',\varphi')}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} \tag{۷}$$

که در آن $\mathbf{a} \equiv (a,\theta',\varphi')$ برداری از مبدأ به یک نقطه روی کره است. برای معادلهٔ لاپلاس $\rho(\mathbf{r}') = 0$، و از (۷) می‌رسیم به

$$u(\mathbf{r}) = \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \,\frac{g(\theta',\varphi')}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} \tag{۸}$$

می‌توان نشان داد که اگر $g(\theta',\varphi') = V_0 = \text{const.}$، در این‌صورت $u(\mathbf{r}) = V_0$. این واقعیت در نظریهٔ الکترومغناطیس نشان داده می‌شود. اگر پتانسیل روی کره ثابت باشد، پتانسیل داخل آن نیز ثابت و برابر پتانسیل در سطح کره خواهد بود. اثبات این مطلب به‌عنوان یک مسئله به خواننده واگذار می‌شود. ●

مسئله مقدار مرزی نویمان. مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان به آسانی مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله نیست، زیرا برای مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان باید مشتق قائم جواب را تعیین کنیم. اما مشتق قائم از طریق قضیهٔ دیورژانس به لاپلاسی مربوط می‌شود. بنابراین، شرط مرزی و معادلهٔ دیفرانسیل به یکدیگر جفت شده‌اند و ممکن است اصلاً جوابی نداشته باشند، مگر اینکه چند شرط حل‌پذیری اعمال کنیم. اگر عملگر لاپلاسی را در نظر بگیریم، این نکات به روشنی نشان داده می‌شوند.

مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in \mathrm{D}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in \partial\mathrm{D}$$

با انتگرال‌گیری معادلهٔ اول روی D و استفادهٔ از قضیهٔ دیورژانس، می‌رسیم به

$$\int_{\mathrm{D}} f(x)d^m x = \int_{\mathrm{D}} \nabla\cdot(\nabla u)d^m x = \int_{\partial\mathrm{D}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}}\cdot\nabla u da = \int_{\partial\mathrm{D}} \frac{\partial u}{\partial n}da$$

این رابطه نشان می‌دهد که نمی‌توانیم به دلخواه به $\partial u/\partial n$ روی مرز مقدار بدهیم. در حالت خاص، اگر مانند مورد توابع گرین، شرایط مرزی همگن باشند، سمت راست صفر است:

$$\int_{\mathrm{D}} f(\mathbf{x})d^m x = \circ$$

همان‌طوری که در بالا گفتیم، این رابطه روی معادلهٔ دیفرانسیل محدودیت ایجاد می‌کند و نه روی جواب و شرط حل‌پذیری آن. برای اینکه این شرط برقرار شود، لازم است از جملهٔ ناهمگن مقدار میانگین آن روی ناحیهٔ D را کم کنیم. بنابراین، اگر V_{D} حجم ناحیهٔ D باشد، در این‌صورت:

$$\nabla^۲ u = f(\mathbf{x}) - \bar{f}$$

که در آن:

$$\bar{f} \equiv \frac{۱}{V_{\mathrm{D}}}\int_{\mathrm{D}} d^m x f(\mathbf{x})$$

تضمین می‌کند که مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان حل‌پذیر است. در حالت خاص، جملهٔ ناهمگن برای تابع گرین، نه $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ بلکه $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\bar{\delta}$ است، که در آن:

$$\bar{\delta} \equiv \frac{۱}{V_\circ}\int_{\mathrm{D}} d^m x\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{۱}{V_{\mathrm{D}}} \qquad \mathbf{y}\in\mathrm{D}$$

بنابراین، تابع گرین برای مسئلهٔ مقدار مرزی نویمان، $G_N(\mathbf{x},\mathbf{y})$، در معادلات زیر صدق می‌کند

$$\nabla^۲ G_N(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{۱}{V_{\mathrm{D}}}$$
$$\frac{\partial G_{\mathrm{N}}}{\partial n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \circ \qquad \mathbf{x}\in\partial\mathrm{D}$$

با اعمال اتحاد گرین، معادله (۱۲ـ۲۷)، خواهیم داشت

$$\int_{\mathrm{D}} d^m y G_{\mathrm{N}}(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y}) - \int_{\mathrm{D}} u\left[\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{۱}{V_{\mathrm{D}}}\right]d^m y = \int_{\partial\mathrm{D}} G_{\mathrm{N}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial n}da$$

که به نمایش زیر منجر می‌شود

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) - \int_{\partial\mathrm{D}} G_{\mathrm{N}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} da + \bar{u} \qquad (۳۳\text{-}۱۲)$$

که در آن کمیت

$$\bar{u} = \frac{1}{V_{\mathrm{D}}} \int_{\mathrm{D}} d^m x u(\mathbf{x})$$

عبارت است از مقدار میانگین u در D. معادله (۱۲ـ۳۳) فقط برای عملگر لاپلاسی صادق است. هر چند که می‌توان نتیجهٔ مشابهی برای یک عملگر دیفرانسیلی با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ دوم خودالحاقی کلی با ضرایب ثابت به‌دست آورد. بحث در خصوصِ این نتیجه را بیش از این ادامه نمی‌دهیم زیرا کاربرد عملی چندانی ندارد.

در طول بحث تا اینجا فرض کرده‌ایم که D کراندار باشد؛ یعنی نقاط داخل D را در نظر گرفته‌ایم و شرایط مرزی را روی مرز $\partial\mathrm{D}$ مشخص کرده‌ایم. این مسئله را مسئلهٔ مقدار مرزی داخلی می‌نامند. در بسیاری از موارد فیزیکی، نقاط خارج D مورد نظر است. در این‌صورت با یک مسئلهٔ مقدار مرزی خارجی سروکار داریم. در چنین مواردی، باید رفتار تابع گرین در بینهایت را مشخص کنیم. در اغلب موارد شرایط فیزیکی چنین رفتاری را تعیین می‌کنند. مثلاً، برای مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکلهٔ خارجی، که در آن

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{D}} G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d^m y + \int_{\partial\mathrm{D}} u(\mathbf{y}_b) \frac{\partial G_{\mathrm{D}}}{\partial n_y}(\mathbf{x},\mathbf{y}_b) da$$

و می‌خواهیم که با $|\mathbf{x}| \to \infty$، داشته باشیم $u(\mathbf{x}) \to 0$؛ صفر شدن $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ در بینهایت، تضمین می‌کند که تا وقتی $\partial\mathrm{D}$ یک رویهٔ محدود باشد، انتگرال دوم صفر شود. برای اینکه صفر شدن انتگرال اول تضمین شود، باید بخواهیم که آهنگ میل کردن $G_{\mathrm{D}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ به سمت صفر از آهنگ میل کردن $f(\mathbf{y})d^m y$ به بینهایت سریعتر باشد. برای اغلب موارد فیزیکی مورد نظر، محاسبهٔ توابع گرین خارجی با محاسبهٔ توابع گرین داخلی تفاوت ماهوی ندارند. لیکن ممکن است عملیات جبری پیچیده‌تر باشد.

بعداً برای یافتن توابع گرین برای عملگرهای دیفرانسیلی جزئی معینی که در شرایط مرزی مناسب صدق می‌کنند، روشهای کلی را بیان خواهیم کرد. در اینجا، فقط آنچه را شرایط مرزی

آمیخته برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی نامیده می‌شود، ذکر می‌کنیم. شرط مرزی آمیختهٔ کلی به این قرار است

$$\alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial\mathrm{D} \qquad (۳۴\text{ـ}۱۲)$$

در تمرین ۱۲ـ۴ـ۱ شرایطی را بررسی می‌کنیم که تابع گرین باید در چنین حالتی در آنها صدق کند.

۱۲ـ۴ـ۲ معادلات سهموی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی در مسائل استاتیک، با جواب مستقل از زمان ظاهر می‌شوند. همان‌طورکه در فصلهای هشتم و دهم گفتیم، دو نوع عمدهٔ معادلهٔ وابسته به زمان وجود دارد: معادلهٔ پخش (یا گرما) (که با تبدیل t به it به معادلهٔ شرودینگر تبدیل می‌شوند؛ از این‌رو بحث زیر معادلهٔ شرودینگر را نیز در بر می‌گیرد) و معادلهٔ موج. معادلهٔ نوع اول عبارت است از معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی و معادلهٔ نوع دوم معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی هذلولوی است. در این بخش، معادلهٔ پخش را بررسی می‌کنیم که به این صورت است

$$\nabla^۲ u = a^۲ \frac{\partial u}{\partial t}$$

با تغییر t به $t/a^۲$، می‌توانیم این معادله را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}[u] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^۲\right) u(\mathbf{x}, t) = ۰$$

می‌خواهیم تابع گرین وابسته به $\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}$ و شرایط مرزی همگن را محاسبه کنیم. به اعتبار وجود متغیر زمان باید جواب در $t = ۰$ را نیز مشخص کنیم. بنابراین، مسئلهٔ مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
&\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}[u] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^۲\right) u = ۰ && \mathbf{x}\in\mathrm{D} \\
&u(\mathbf{x}_\mathrm{b}, t) = ۰ && \mathbf{x}_\mathrm{b}\in\partial\mathrm{D} \qquad (۳۵\text{ـ}۱۲)\\
&u(\mathbf{x}, ۰) = h(\mathbf{x}) && \mathbf{x}\in\mathrm{D}
\end{aligned}$$

برای یافتن جواب (۱۲ـ۳۵)، می‌توانیم از روشی، یعنی روش ویژه‌توابع، بهره گیریم که برای محاسبهٔ توابع گرین در حالت کلی مفید است. فرض کنید $\{u_n\}_{n=۱}^{\infty}$ ویژه‌توابع $\nabla^۲$ با ویژه‌مقادیر

$\{-\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. فرض کنید شرط مرزی به‌ازای $\mathbf{x}_b \in \partial D$، عبارت باشد از $u_n(\mathbf{x}_b) = 0$. در این‌صورت:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_n(\mathbf{x}) + \lambda_n u_n(\mathbf{x}) &= 0 \qquad n = 1, 2, \ldots ; \mathbf{x} \in D \\ u_n(\mathbf{x}_b) &= 0 \qquad \mathbf{x}_b \in \partial D \end{aligned} \tag{۳۶_۱۲}$$

معادلات (۱۲ـ۳۶) یک مسئلهٔ اشتورم‌ـلیوویل در m بعد را تشکیل می‌دهند. در فصل دهم دیدیم که (به‌ازای $m = 3$) چگونه چنین مسئله‌ای را می‌توان به m مسئله اشتورم‌ـلیوویل در یک‌بعد تبدیل کرد و چگونه هر دستگاه اشتورم‌ـلیوویل ویژه‌توابع متعامد تولید می‌کنند. با به‌کارگیریِ نتایج فصل دهم، فرض می‌کنیم (۱۲ـ۳۶) دارای یک جواب است و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه کامل راست‌هنجاری تشکیل می‌دهند.

به‌علت کاملیت u_nها، می‌توانیم بنویسیم

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) u_n(\mathbf{x}) \tag{۳۷_۱۲}$$

این کار امکان‌پذیر است زیرا در هر مقدار مشخص t، کمیت $u(\mathbf{x}, t)$ تابعی از $\mathbf{x}$ است و از این‌رو، می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی همان مجموعه، $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$، نوشته شود. چون تابع $u(\mathbf{x}, t)$ برحسب همان u_nها نوشته شده است، بدیهی است که ضرایب باید به زمان بستگی داشته باشند. ضرایب $C_n(t)$ به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$C_n(t) = \int_D u(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}) d^m x$$

برای محاسبهٔ $C_n(t)$ از معادلهٔ بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و با بهره‌گیری از (۱۲ـ۳۵)، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \dot{C}_n(t) \equiv \frac{dC_n}{dt} &= \int_D \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}) d^m x \\ &= \int_D [\nabla^2 u(\mathbf{x}, t)] u_n(\mathbf{x}) d^m x \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد گرین برای عملگر ∇^2، می‌رسیم به

$$\int_D [u_n \nabla^2 u - u \nabla^2 u_n] d^m x = \int_{\partial D} \left(u_n \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) da$$

چون u و u_n هر دو روی ∂D صفر می‌شوند، سمت راست صفر است، و به‌دست می‌آوریم

$$C_n(t) = \int_D u\nabla^2 u_n d^m x = -\lambda_n \int_D u(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}) d^m x = -\lambda_n C_n(t)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$C_n(t) = C_n(0) e^{-\lambda_n t}$$

که در آن

$$C_n(0) = \int_D u(\mathbf{y}, 0) u_n(\mathbf{y}) d^m y = \int_D h(\mathbf{y}) u_n(\mathbf{y}) d^m y$$

از طریق نشاندن $C_n(t)$ در (۱۲ـ۳۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_D h(\mathbf{y}) u_n(\mathbf{y}) d^m y\right] e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_D \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y})\right] h(\mathbf{y}) d^m y \end{aligned}$$

هرگاه تعریفی به‌قرار زیر ارائه دهیم، رابطهٔ بالا می‌تواند نمایشی باشد برای تابع گرین:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y})$$

همچنین، هرگاه بخواهیم به‌ازای $t < 0$، رابطهٔ $u(\mathbf{x}, t) = 0$ برقرار باشد، داریم:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y}) \theta(t)$$

یا به عبارتی کلی‌تر

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t - \tau) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n (t-\tau)} u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y}) \theta(t - \tau) \qquad (۱۲ـ۳۸)$$

به این خاصیت مهم توجه کنید:

$$\lim_{\tau\to t} G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

این رابطه را معمولاً به‌صورت زیر می‌نویسند

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y};0^+)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (۱۲\text{_}۳۹)$$

همچنین توجه کنید که

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)&=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})\theta(t-\tau)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_n)e^{-\lambda_n(t-\tau)}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})\theta(t-\tau)\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})\delta(t-\tau)\\&\quad-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)}[\nabla^2 u_n(\mathbf{x})]u_n(\mathbf{y})\theta(t-\tau)\end{aligned}$$

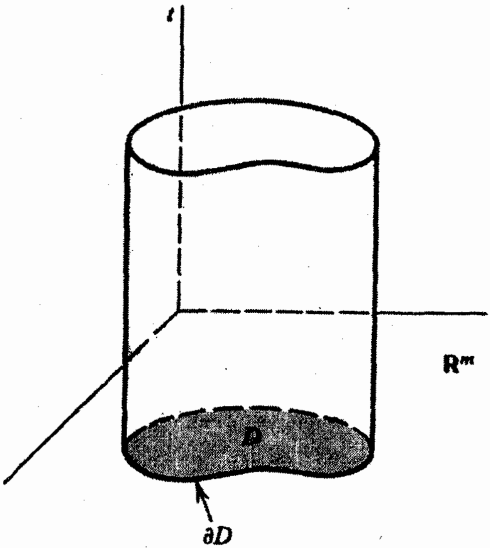
با عنایت به (۱۲ـ۳۶)، جملهٔ اول و جملهٔ آخر سمت راست یکدیگر را حذف می‌کنند. جملهٔ وسطی وقتی صفر است که $t=\tau$؛ در این صورت، مجموع مقدار $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ را می‌دهد. بنابراین،

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-\tau) \qquad (۱۲\text{_}۴۰)$$

این عبارت دقیقاً همان چیزی است که برای تابع گرین یک عملگر نسبت به متغیرهای $\mathbf{x}$ و t، انتظارش را داریم. خاصیت دیگر $G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)$ این است که روی $\partial\mathrm{D}$ صفر می‌شود.

حال که تابع گرین و خواص آن را یافتیم، در وضعیتی قرار گرفته‌ایم که بتوانیم معادلهٔ ناهمگن

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}[u]=f(\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x}\in\mathrm{D} \qquad (۱۲\text{_}۴۱\text{الف})$$



شکل ۱۲ـ۱ "استوانه‌ای" که در محاسبه تابع گرین برای معادلات پخش و موج به‌کار می‌رود. توجه کنید که قاعده‌ها صفحه‌های ساده نیستند بلکه ابررویه‌اند (یعنی، فضاهایی چون $\mathbb{R}^m$).

را با شرایط مرزی زیر حل کنیم

$$u(\mathbf{x}_b, t) = g(\mathbf{x}_b, t) \qquad \mathbf{x}_b \in \partial \mathrm{D}$$
$$u(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathrm{D} \tag{۱۲ـ۴۱ب}$$

تجربه‌های مربوط به مسائل مشابه ولی ساده‌تر نشان می‌دهند که برای پیشروی به‌سوی جواب معادله، باید صورتی از اتحاد گرین را مطرح کنیم که شامل $\mathbb{L}$ و الحاقی آن باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$v(\mathbf{x}, t)\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}u(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t)\mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t}v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(uv) - \nabla \cdot (v\nabla u - u\nabla v) \tag{۱۲ـ۴۲الف}$$

که در آن $\mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t} = -\partial/\partial t - \nabla^2$.

حال یک استوانه $(m+1)$ بعدی را در نظر بگیرید که قاعده‌های آن در $t = \varepsilon$ واقع می‌شود، که ε عدد مثبت کوچکی است. این قاعده در ابررویهٔ mبعدی عبارت است از $\mathbb{R}^m$. قاعدهٔ دیگر در $t = \tau - \varepsilon$ قرار دارد و مشابه رونوشت $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^m$ است (شکل ۱۲ـ۱). فرض کنید a^μ، که

در آن $\mu = ۰, ۱, \ldots, m$، مؤلفه‌های بردار $(m + ۱)$ بعدی $\mathbf{a} \equiv (a^{۰}, a^{۱}, \ldots, a^{m})$ باشند. ضرب داخلی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a^{\mu} b_{\mu} \equiv a^{۰} b^{۰} - a^{۱} b^{۱} - a^{۲} b^{۲} - \cdots - a^{m} b^{m} \equiv a^{۰} b^{۰} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

بردار $\mathbf{Q}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q_{۰} = uv \qquad \mathbf{Q} = v \nabla u - u \nabla v$$

در این‌صورت، (۱۲ـ۴۲الف) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t} v = \sum_{\mu=۰}^{m} \frac{\partial Q^{\mu}}{\partial x^{m}} \tag{۱۲ـ۴۲ب}$$

عبارت سمت راست را همان واگرایی در فضای $(m + ۱)$ بعدی می‌یابیم. اگر حجم استوانه $(m + ۱)$بعدی را با $\mathscr{D}$ و مرز آن را با $\partial \mathscr{D}$ نشان دهیم و از (۱۲ـ۴۲ب) روی $\mathscr{D}$ انتگرال بگیریم، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{D}} (v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t} v) d^{m+۱} x &= \int_{\mathscr{D}} \sum_{\mu} \frac{\partial Q^{\mu}}{\partial x^{\mu}} d^{m+۱} x \\ &= \int_{\partial \mathscr{D}} \sum_{\mu=۰}^{m} Q^{\mu} n_{\mu} ds \end{aligned} \tag{۱۲ـ۴۳}$$

که در آن ds عنصر مساحت $\partial \mathscr{D}$ است. توجه کنید که در مرحلهٔ آخر، از قضیهٔ واگرایی استفاده کرده‌ایم. عبارت سمت چپ انتگرالی روی t و $\mathbf{x}$ است، که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{\mathscr{D}} (v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t} v) d^{m+۱} x = \int_{\epsilon}^{\tau-\epsilon} dt \int_{\mathrm{D}} d^{m} x (v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^{\dagger}_{\mathbf{x},t} v)$$

از سوی دیگر، عبارت سمت راست (۱۲ـ۴۳) را می‌توان به سه جزء تجزیه کرد: یک قاعده در $t = \epsilon$، یک قاعده در $t = \tau - \epsilon$، و سطح جانبی. قاعدهٔ $t = \epsilon$ همان ناحیهٔ D است که بردار عمود رو به خارج آن در راستای منفی t است. بنابراین، $n_{۰} = -۱$، $n_{۱} = n_{۲} = \cdots = n_{m} = ۰$. قاعدهٔ $t = \tau - \epsilon$ نیز ناحیهٔ D است؛ اما، بردار عمود بر آن در امتداد مثبت t است. بنابراین، به‌ازای

$m, \ldots, i = 1$، داریم $n_i = 0$ و $n_0 = +1$. عنصر مساحت برای این دو قاعده عبارت است از $d^m x$. بردار یکهٔ قائم بر سطح جانبی، فاقد مؤلفهٔ زمانی و همان بردار یکهٔ عمود بر مرز D است. عنصر مساحت برای سطح جانبی عبارت است از $dt\, da$، که در آن da عنصر مساحت برای $\partial \mathrm{D}$ به‌شمار می‌آید. مطالب بالا را جمع‌بندی می‌کنیم، و می‌توانیم (۱۲ـ۴۳) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \int_{\mathrm{D}} d^m x (v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^\dagger_{\mathbf{x},t} v)$$
$$= \int_{\mathrm{D}} (-Q^0)\Big|_{t=\varepsilon} d^m x + \int_{\mathrm{D}} (Q^0\,|_{t=\tau-\varepsilon}) d^m x - \int_{\partial \mathrm{D}} da \int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$$

علامت منفی جملهٔ آخر از تعریف ضرب داخلی نتیجه می‌شود. اگر به‌جای Q مقدار قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \int_{\mathrm{D}} d^m x (v \mathbb{L}_{\mathbf{x},t} u - u \mathbb{L}^\dagger_{\mathbf{x},t} v)$$
$$= -\int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{x}, \varepsilon) v(\mathbf{x}, \varepsilon) d^m x + \int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{x}, \tau-\varepsilon) v(\mathbf{x}, \tau-\varepsilon) d^m x - \int_{\partial \mathrm{D}} da \int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right)$$
(۱۲ـ۴۴)

v را $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t-\tau)$، تابع گرین وابسته به عملگر الحاقی، می‌گیریم، می‌دهد

$$\int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \int_{\mathrm{D}} d^m x [g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t-\tau) f(\mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \delta(t-\tau)]$$
$$= -\int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{x}, \varepsilon) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \varepsilon-\tau) d^m x + \int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{x}, \tau-\varepsilon) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -\varepsilon) d^m x$$
$$- \int_{\partial \mathrm{D}} da \int_\varepsilon^{\tau-\varepsilon} dt \left[g(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}; t-\tau) \frac{\partial u}{\partial n} - u(\mathbf{x}_b, t) \frac{\partial g}{\partial n} \right] \qquad (۱۲ـ۴۵)$$

اکنون از نکات زیر بهره می‌گیریم:

۱. در انتگرال دوم در سمت چپ داریم $\delta(t-\tau) = 0$، زیرا t هیچگاه نمی‌تواند در ناحیهٔ انتگرال‌گیری با τ برابر شود.

۲. با عنایت به معادلهٔ (۱۲ـ۲۶الف)، خاصیت تقارنی تابع گرین (توجه کنید که $\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}$ حقیقی است)، داریم

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t-\tau) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \tau-t)$$

که در آن از این نکته بهره گرفته‌ایم که t و τ، به‌ترتیب، مؤلفه‌های زمانی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هستند.

در حالت خاص، بنابر (۱۲ـ۳۹) داریم

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y};-\varepsilon)=G(\mathbf{y},\mathbf{x};\varepsilon)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

۳. تابع $g(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)$ در همان شرط مرزی همگنی صدق می‌کند که $G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)$ در آن صادق است. بنابراین، به‌ازای $\mathbf{x_b}\in\partial\mathrm{D}$ داریم $g(\mathbf{x_b},\mathbf{y};t-\tau)=0$.

با قرار دادن تمامی کمیتهای بالا در (۱۲ـ۴۵) و آنگاه با در نظر گرفتن حد $\varepsilon\to 0$، می‌رسیم به:

$$\int_0^\tau dt\int_{\mathrm{D}} d^m x G(\mathbf{y},\mathbf{x};\tau-t)f(\mathbf{x},t)$$
$$=-\int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{x},0)G(\mathbf{y},\mathbf{x};\tau)d^m x+u(\mathbf{y},\tau)+\int_{\partial\mathrm{D}}\int_0^\tau dt\,da\,u(\mathbf{x_b},t)\frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{y},\mathbf{x};\tau-t)$$

سرانجام، با عوض کردن جای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و t و τ، خواهیم داشت

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\int_0^t d\tau\int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)f(\mathbf{y},\tau)+\int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{y},0)G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)d^m y$$
$$-\int_0^t\int_{\partial\mathrm{D}} d\tau\,da\,u(\mathbf{y_b},\tau)\frac{\partial}{\partial n_y}[G(\mathbf{x},\mathbf{y_b};t-\tau)] \qquad (۱۲\text{ـ}۴۶)$$

که در آن $\partial/\partial n_y$ در انتگرال آخری به معنی مشتق‌گیری قائم نسبت به شناسهٔ دوم تابع گرین است.

معادلهٔ (۱۲ـ۴۶) جواب کامل معادلات (۱۲ـ۴۱)، مسئلهٔ مقدار مرزی وابسته به معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی، را به‌دست می‌دهد. اگر $f(\mathbf{y},\tau)=0$ و u روی ابررویهٔ $\partial\mathrm{D}$ صفر شود، در این‌صورت (۱۲ـ۴۶) می‌دهد:

$$u(\mathbf{x},t)=\int_{\mathrm{D}} u(\mathbf{y},0)G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)d^m y \qquad (۱۲\text{ـ}۴۷)$$

که جواب مسئله مقدار مرزی معادله‌های (۱۲ـ۳۵) است، که به تابع گرین کلی (۱۲ـ۳۸) انجامید.

معادلهٔ (۱۲ـ۴۷) خود به زیبایی برای تعبیر فیزیکی مناسب است. عبارت سمت راست را می‌توان به مثابه یک عملگر انتگرالی با هستهٔ $G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ تلقی کرد. این عملگر انتگرالی روی $u(\mathbf{y},0)$ عمل می‌کند و $u(\mathbf{x},t)$ را می‌دهد؛ یعنی، اگر صورت جواب در $t=0$ معلوم باشد، عملگر انتگرالی شکل آن در زمانهای بعدی را می‌دهد. به همین دلیل، $G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)$ را عملگر تحول یا انتشارگر می‌نامند.

۱۲ـ۴ـ۳ معادلات هذلولوی

معادلهٔ هذلولوی‌ای که در خصوص آن بحث خواهیم کرد. عبارت است از معادلهٔ موج به قرار زیر

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0$$

با تعریف مجدد متغیر t، معادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}[u] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u = 0 \qquad (۱۲\text{ـ}۴۸)$$

می‌خواهیم تابع گرین برای $\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}$ را با شرایط مرزی مناسب محاسبه کنیم. همان کاری را که برای معادلهٔ سهموی کردیم، در اینجا نیز انجام می‌دهیم و می‌نویسیم

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y};t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mathbf{y};t)u_n(\mathbf{x}) \qquad (۱۲\text{ـ}۴۹\text{الف})$$

$$C_n(\mathbf{y};t) = \int_{\mathrm{D}} G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)u_n(\mathbf{x})d^m x \qquad (۱۲\text{ـ}۴۹\text{ب})$$

که در آن $u_n(\mathbf{x})$ توابع راست‌هنجاری‌اند که در معادلهٔ:

$$\nabla^2 u_n(\mathbf{x}) + \lambda_n u_n(\mathbf{x}) = 0 \qquad (۱۲\text{ـ}۵۰)$$

و شرایط مرزی معینی که هنوز مشخص نشده است، صدق می‌کنند. مطابق معمول، انتظار داریم G در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}[G] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-\tau) \qquad (۱۲\text{ـ}۵۱)$$

با قرار دادن (۱۲ـ۴۹الف) در (۱۲ـ۵۱) با $\tau = 0$ و با بهره‌گیری از (۱۲ـ۵۰)، می‌رسیم به:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2}[C_n(\mathbf{y};t)] \right\} u_n(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mathbf{y};t)\lambda_n u_n(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t)$$

با استفاده از $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})$ در عبارت سمت راست داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2 C_n}{\partial t^2}(\mathbf{y};t)+\lambda_n C_n(\mathbf{y};t)\right\}u_n(\mathbf{x})=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(\mathbf{y})\delta(t)]u_n(\mathbf{x})$$

حاصل راست‌هنجاری $u_n(\mathbf{x})$ به این قرار است

$$\frac{\partial^2 C_n}{\partial t^2}(\mathbf{y};t)+\lambda_n C_n(\mathbf{y};t)=u_n(\mathbf{y})\delta(t)$$

که نشان می‌دهد $C_n(\mathbf{y};t)$ تفکیک‌پذیر است. در واقع،

$$C_n(\mathbf{y};t)=u_n(\mathbf{y})T_n(t)$$

که در آن

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda_n\right)T_n(t)=\delta(t)$$

این معادله تابع گرین یک بعدیی را توصیف می‌کند و می‌تواند با استفاده از روشهای فصل یازده حل شود. با فرض $T_n(t)=0$، به‌ازای $t\leq 0$، می‌رسیم به:

$$T_n(t)=\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\theta(t)$$

که در آن $\lambda_n=\omega_n^2$. با جایگزین کردن نتایج بالا در (۱۲ـ۴۹الف) به‌دست می‌آوریم:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\theta(t)$$

یا، به‌طور کلی‌تر:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\mathbf{x})u_n(\mathbf{y})\frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}\theta(t-\tau) \qquad (۵۲\text{ـ}۱۲)$$

توجه کنید که:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y};\circ^{+})=\circ \qquad \text{(۱۲ـ۵۳الف)}$$

و

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)\right|_{t\to\circ^{+}}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad \text{(۱۲ـ۵۳ب)}$$

که می‌توان آن را به آسانی اثبات کرد.

با در اختیار داشتن تابع گرین برای عملگر $\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}$ معادلهٔ (۱۲ـ۴۸)، می‌توانیم به مسئلهٔ مقدار مرزی زیر بپردازیم

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}\right)u(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{x},t) && \mathbf{x}\in \mathrm{D}\\
u(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},t) &= h(\mathbf{x}_{\mathrm{b}},t) && \mathbf{x}_{\mathrm{b}}\in \partial\mathrm{D}\\
u(\mathbf{x},\circ) &= \phi(\mathbf{x}) && \mathbf{x}\in \mathrm{D}\\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)\right|_{t=\circ} &= \psi(\mathbf{x}) && \mathbf{x}\in \mathrm{D}
\end{aligned} \qquad \text{(۱۲ـ۵۴)}$$

مانند مورد معادلهٔ سهموی، ابتدا عبارت مناسبی برای اتحاد گرین به‌دست می‌آوریم. این کار با توجه به رابطهٔ زیر انجام می‌شود

$$v\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}u-u\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}v=\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\boldsymbol{\nabla}\cdot(u\boldsymbol{\nabla}v-v\boldsymbol{\nabla}u)$$

بنابراین، $\mathbb{L}_{\mathbf{x},t}$ خودالحاقی است. به‌علاوه، می‌توانیم قرار دهیم

$$Q_{\circ}=u\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{Q}=u\boldsymbol{\nabla}v-v\boldsymbol{\nabla}u$$

با ادامه گام به گام روش به‌کار رفته در حالت مورد سهموی، به آسانی می‌توانیم به اتحاد گرینی

دست یابیم و نشان دهیم که

$$u(\mathbf{x},t) = \int_\circ^t d\tau \int_\mathrm{D} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y};t-\tau) f(\mathbf{y},\tau)$$
$$+ \int_\mathrm{D} [\psi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y};t) - \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x},\mathbf{y};t)] d^m y$$
$$= \int_\circ^t d\tau \int_{\partial\mathrm{D}} da\, h(\mathbf{y}_\mathrm{b},\tau) \frac{\partial}{\partial n_y} [G(\mathbf{x},\mathbf{y}_\mathrm{b};t-\tau] \qquad (۵۵\_۱۲)$$

جزئیات این عملیات را به‌صورت مسئله برعهده خواننده می‌گذاریم.

برای معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرط مرزی همگن $h = \circ = \psi$، می‌رسیم به

$$u(\mathbf{x},t) = -\int_\mathrm{D} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x},\mathbf{y};t) d^m y$$

به تفاوت مابین این معادله و معادلهٔ (۱۲_۴۷) توجه کنید. در اینجا انتشارگر مشتق زمانی تابع گرین است. یک تفاوت دیگر بین معادلات سهموی و هذلولوی برقرار است. وقتی جواب یک معادلهٔ سهموی روی مرز صفر شود و در ابتدا صفر باشد، و معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن باشد، جواب باید صفر شود. این مطلب از معادلهٔ (۱۲_۴۶) روشن است. از سوی دیگر، معادلهٔ (۱۲_۵۵) نشان می‌دهد که تحت همان شرایط ممکن است یک جواب ناصفر برای معادلهٔ هذلولوی وجود داشته باشد، مشروط بر آنکه عبارت زیر مخالف صفر باشد:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=\circ} = \psi(\mathbf{x})$$

در چنین حالتی، می‌رسیم به:

$$u(\mathbf{x},t) = \int_\mathrm{D} \psi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y};t) d^m y$$

این اختلاف در دو نوع معادله، ناشی از این واقعیت است که معادلات هذلولوی دارای مشتقات زمانی مرتبه دوم‌اند. بنابراین، صورت اولیه یک جواب برای مشخص کردن یکتای آن کافی نیست. سرعت اولیهٔ نیمرخ نیز ضروری است. در فصل دهم در این مورد، به مثالهایی چند برخورد کردیم.

تمرینها

۱۲ـ۴ـ۱ شرطی مرزی را بیابید که تابع گرین باید در آن صدق کند تا جواب u آن برحسب تابع گرین قابل نمایش باشد، در صورتی که شرط مرزی روی u، مانند معادلهٔ (۱۲ـ۳۴)، آمیخته باشد. یک عملگر دیفرانسیلی جزئی خطی مرتبهٔ دوم خودالحاقی از نوع بیضوی را در نظر بگیرید و فرض کنید یا $\alpha(\mathbf{x})$ و یا $\beta(\mathbf{x})$ به‌ازای $\mathbf{x} \in \partial D$ مخالف صفر باشد.

۱۲ـ۴ـ۲ تابع گرین‌ـدیریکله برای دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ را پیدا کنید. [راهنمایی: از رابطهٔ:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = -\frac{۱}{۲\pi}\ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|) - \frac{۱}{۲\pi}\ln[f(\mathbf{r}'')]$$

برای جزء منظم تابع گرین بهره گیرید و $f(\mathbf{r}'')$ و $\mathbf{r}''$ را بیابید.] از این تابع گرین برای نوشتن جواب مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله استفاده کنید.

۱۲ـ۵ روشهای محاسبهٔ توابع گرین

بحث توابع گرین در این فصل خیلی صوری بوده است. تا اینجا، جز در بخش ۱۲ـ۲، مثال بارزی از توابع گرین مشاهده نکرده‌ایم. هدف عمدهٔ این بخش به این قرار است که فاصلهٔ مابین صورتگرایی و کاربردهای واقعی را پر کنیم. چند روش مؤثر برای تعیین توابع گرین به‌کار گرفته‌ایم، ولی فقط در خصوص سه روش بحث خواهیم کرد که عبارت‌اند از روش تبدیل فوریه، روش بسط ویژه‌تابع، و روش عملگری.

۱۲ـ۵ـ۱ روش تبدیل فوریه

یادآوری می‌کنیم که هر تابع گرین را می‌توان به‌صورت مجموع یک جزء تکینه و یک جزء منظم نوشت:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

جزء تکینه در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[G_s] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

و جزء منظم که در $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] = ۰$ صدق می‌کند، چنان انتخاب شده است که $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ در شرایط مرزی مناسب صدق کند. چون قبلاً، در فصل دهم، معادلات همگن را به تفصیل مورد بحث قرار

داده‌ایم، در این بخش $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را محاسبه نخواهیم کرد، بلکه اجزای تکینه توابع گرین مختلف را محاسبه می‌کنیم.

چون شرایط مرزی نسبت به $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ هیچ نقشی بازی نمی‌کنند، می‌توان از روش تبدیل فوریه، که مستلزم انتگرال‌گیری روی تمام فضاست، بهره گیریم. روش تبدیل فوریه یک عیب و ایراد دارد؛ اگر توابع ضریب ثابت نباشند، این روش کارساز نیست. اما، برای کاربردهای فیزیکی، این عیب چندان مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا تقریباً تمام معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در فیزیک ریاضیاتی دارای ضرایب ثابت‌اند.

حال کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابتی، به قرار زیر، را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] = f(\mathbf{x})$$

که در آن

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} \equiv a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j,k=1}^{m} b_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \tag{۱۲ـ۵۶الف}$$

و a_0، a_j و b_{jk} ثابت‌اند. تابع گرین متناظر، دارای یک جزء تکینه است که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}} G_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{۱۲ـ۵۶ب}$$

روش تبدیل فوریه با این فرض شروع می‌شود که برای جزء تکینه و تابع دلتا یک نمایش انتگرالی فوریه نسبت به متغیر x در نظر بگیریم:

$$G_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \widetilde{G}_s(\mathbf{k},\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int d^m k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

با نشاندن این فرمولها در (۱۲ـ۵۶ب)، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\mathbf{x}} G_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \widetilde{G}_s(\mathbf{k},\mathbf{y}) \mathbb{L}_{\mathbf{x}}[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \widetilde{G}_s(\mathbf{k},\mathbf{y}) \left[a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j (ik_j) - \sum_{j,l=1}^{m} b_{jl} k_j k_l\right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int d^m k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\end{aligned}$$

بدینسان:

$$\widetilde{G}_s(\mathbf{k},\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \left(\frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}}{a_0 + i\sum_{j=1}^{m} a_j k_j - \sum_{j,l=1}^{m} b_{jl} k_j k_l}\right) \quad \text{(۱۲ـ۵۷الف)}$$

با نشاندن این تابع در نمایش انتگرالی برحسب $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$، خواهیم داشت:

$$G_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int d^m k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{a_0 + i\sum_{j=1}^{m} a_j k_j - \sum_{j,l=1}^{m} b_{jl} k_j k_l} \quad \text{(۱۲ـ۵۷ب)}$$

اگر بتوانیم انتگرال (۱۲ـ۵۷ب) را محاسبه کنیم، می‌توانیم $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را پیدا کنیم.

در مثالهای زیر معادلات (۱۲ـ۵۷) در مورد چند مسئلهٔ مشخص به‌کار رفته است. توجه کنید که (۱۲ـ۵۷ب) به‌وضوح نشان می‌دهد که $G_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ تابعی از $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ است. از این نکته در فصل یازدهم یاد کردیم که در آنجا توجه کردیم تنها مانعی که در نوشتن تابع گرین به‌صورت تابعی از $x-y$ وجود دارد، شرایط مرزی است. اما، شرایط مرزی در محاسبهٔ جزء تکینه تابع گرین هیچ نقشی ندارند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$G_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_s(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \equiv G_s(\mathbf{r})$$

که در آن $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}-\mathbf{y}$.

مثال ۱۲ـ۵ـ۱ : می‌خواهیم جزء تکینهٔ تابع گرین برای لاپلاسی را در m بعد محاسبه کنیم که درآن $m > 2$. (همین کار را در بخش ۱۲ـ۲، با استفاده از یک روش دیگر انجام دادیم.)

با $a_\circ = \circ$، $a_j = \circ$، $b_{jl} = \delta_{jl}$ و $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$، معادلهٔ (۱۲ـ۵۷ب) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int d^m k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{-k^2} \tag{1}$$

که در آن $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2 \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$. برای انتگرال‌گیری از (۱)، مختصات کروی در فضای mبعدی k را اختیار می‌کنیم. به‌علاوه، برای ساده کردن محاسبات، فرض می‌کنیم محور k_m چنان در امتداد $\mathbf{r}$ قرار داشته باشد که $\mathbf{r} \equiv (\circ, \circ, \ldots, |\mathbf{r}|)$ و $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k|\mathbf{r}|\cos\theta_1$. با قرار دادن این مقادیر در (۱) و نوشتن $d^m k$ و مختصات کروی، می‌رسیم به:

$$G_s(\mathbf{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^m} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}|\cos\theta_1}}{k^2}$$
$$k^{m-1}(\sin\theta_1)^{m-2}(\sin\theta_2)^{m-3}\cdots\sin\theta_{m-2}\,dk\,d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{m-1} \tag{2}$$

توجه کنید که $d\Omega_m = (\sin\theta_1)^{m-2} d\theta_1 d\Omega_{m-1}$؛ این را در معادلهٔ (۱۲ـ۱۵ب) به‌وضوح دیده می‌شود. بنابراین، بعد از انتگرال‌گیری روی زوایای $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{m-1}$، معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^m}\Omega_{m-1}\int_\circ^\infty k^{m-3}dk \int_\circ^\pi (\sin\theta_1)^{m-2} e^{ik|\mathbf{r}|\cos\theta_1} d\theta_1$$

انتگرال دوم را می‌توان به کمک جدولهای انتگرال پیدا کرد[1]:

$$\int_\circ^\pi (\sin\theta)^{m-2} e^{ik|\mathbf{r}|\cos\theta} d\theta = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{kr}\right)^{m/2-1}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) J_{m/2-1}(kr) \quad m \neq 2$$

با نشاندن این انتگرال و معادله (۱۲ـ۱۵ب) در معادلهٔ قبل، داریم:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\left(\frac{1}{r^{m/2-1}}\right)\int_\circ^\infty k^{m/2-2} J_{m/2-1}(kr)\,dk \quad m > 2$$

۱. مثلاً ر.ک.:

Gradshteyn and Ryzhik, 1965, p. 489.

با استفاده از این نتیجه:

$$\int_{\circ}^{\infty} x^{\mu} J_{\nu}(ax)dx = ۲^{\mu} a^{-\mu-۱} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+۱}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+۱}{۲}\right)}$$

به‌دست می‌آوریم:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{۲}-۱\right)}{۴\pi^{m/۲}}\left(\frac{۱}{r^{m-۲}}\right) \qquad m > ۲$$

که دقیقاً با (۱۲_۱۹الف) مطابقت دارد، زیرا $\Gamma(m/۲) = (m/۲-۱)\Gamma(m/۲-۱)$. ●

مثال ۱۲_۵_۲: می‌خواهیم جزء تکینهٔ تابع گرین را برای عملگر هلمهولتز (تعدیل‌یافته) $\nabla^۲ - \mu^۲$ پیدا کنیم. در این مورد معادله (۱۲_۵۷ب) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$G_s(\mathbf{r}) = \frac{-۱}{(۲\pi)^m}\int d^m k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mu^۲+k^۲}$$

با ادامهٔ همان روش مثال ۱۲_۵_۱، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} G_s(\mathbf{r}) &= -\frac{\Omega_{m-۱}}{(۲\pi)^m}\int \frac{k^{m-۱}dk}{\mu^۲+k^۲}\int_{\circ}^{\pi}(\sin\theta_۱)^{m-۲}e^{ikr\cos\theta_۱}d\theta_۱ \\ &= -\frac{\Omega_{m-۱}}{(۲\pi)^m}\sqrt{\pi}\left(\frac{۲}{r}\right)^{m/۲-۱}\Gamma\left(\frac{m-۱}{۲}\right)\int_{\circ}^{\infty}\frac{k^{m/۲}}{\mu^۲+k^۲}J_{m/۲-۱}(kr)dk \end{aligned}$$

در اینجا می‌توانیم از فرمول انتگرالی زیر استفاده کنیم:

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{J_{\nu}(bx)x^{\nu+۱}}{(x^۲+a^۲)^{\eta+۱}}dx = \frac{a^{\nu-\eta}b^{\eta}}{۲^{\eta}\Gamma(\eta+۱)}K_{\nu-\eta}(ab)$$

که در آن:

$$K_{\nu}(z) \equiv \frac{i\pi}{۲}e^{i\nu\pi/۲}H_{\nu}^{(۱)}(iz)$$

خواهیم داشت:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{\Omega_{m-1}}{(2\pi)^m}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{r}\right)^{m/2-1}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\mu^{m/2-1}\frac{\pi}{2}e^{im\pi/4}H^{(1)}_{m/2-1}(i\mu r)$$

که به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{\pi/2}{(2\pi)^{m/2}}\left(\frac{\mu}{r}\right)^{m/2-1}e^{im\pi/4}H^{(1)}_{m/2-1}(i\mu r) \qquad (1)$$

می‌توان نشان داد که تمرین ۱۲ـ۵ـ۱ به‌ازای $m = 3$، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$$

که پتانسیل یوکاوای مربوط به یک بار واحد است (فصل ۵).

می‌توانیم با قرار دادن $\pm i\mu$ به‌جای μ در (۱)، تابع گرین برای $\nabla^2 + \mu^2$ را به‌دست آوریم. نتیجه به این قرار خواهد بود:

$$G_s(\mathbf{r}) = i^{m+1}\frac{\pi/2}{(2\pi)^{m/2}}\left(\frac{\mu}{r}\right)^{m/2-1}H^{(1)}_{m/2-1}(\pm\mu r) \qquad (2)$$

به‌ازای $m = 3$، این رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{e^{\pm i\mu r}}{4\pi r}$$

دو علامت در نما با به اصطلاح "امواج" ورودی و خروجی متناظرند. ●

وقتی با معادلات سهموی و هذلولوی سروکار داریم، بهتر است متغیر "دیگری" (معمولاً t) را به عنوان تابع مختصهٔ صفرم در نظر بگیریم. در این‌صورت، در تبدیل فوریه از $\omega = -k_0$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$G_s(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{(m+1)/2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int d^m k\widetilde{G}_s(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (\text{۱۲ـ۵۸الف})$$

و

$$\delta(\mathbf{r})\delta(t) = \frac{۱}{(۲\pi)^{m+۱}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^m k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

که در آن $\mathbf{r}$ عملگر جابه‌جایی mبعدی است.

مثال ۱۲ـ۵ـ۳: می‌خواهیم $G_s(\mathbf{r},t)$ را برای عملگر پخش mبعدی $\partial/\partial t - \nabla^۲$، که در آن $\nabla^۲$ لاپلاسی mبعدی است، محاسبه کنیم.

عبارت (۱۲ـ۵۸) را در رابطهٔ زیر می‌نشانیم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^۲\right) G_s(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

بلافاصله می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} G_s(\mathbf{r},t) &= \frac{۱}{(۲\pi)^{m+۱}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^m k \frac{۱}{-i\omega + k^۲} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ &= \frac{i}{(۲\pi)^{m+۱}} \int d^m k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + ik^۲} \qquad (۱) \end{aligned}$$

که در آن، طبق معمول، $k^۲ \equiv k_۱^۲ + k_۲^۲ + \cdots + k_m^۲$. انتگرال‌گیری از ω را می‌توان با استفاده از حساب مانده‌ها که در فصل هفتم ملاحظه کردیم، انجام داد. انتگرالده در $\omega = -ik^۲$، یعنی در نیمهٔ پایین صفحهٔ ω مختلط، دارای یک قطب ساده است. برای انتگرال‌گیری باید علامت t را بدانیم. اگر $t > ۰$، تابع نمایی تعیین می‌کند که باید پربند را از سوی نیمهٔ پایین که در آن یک قطب وجود دارد، ببندیم؛ از این‌رو سهم قطب در مانده وجود دارد. از سوی دیگر، اگر $t < ۰$، پربند را باید از سمت نیمهٔ بالا بست. در این‌صورت انتگرال صفر می‌شود، زیرا قطبها در نیمهٔ بالایی صفحه سهمی ندارند. از این‌رو، باید در تابع گرین یک تابع پله‌ای معرفی کنیم.

با محاسبهٔ مانده، به آسانی می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + ik^۲} &= -۲\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega + ik^۲}\right)\bigg|_{\omega=-ik^۲} \\ &= -۲\pi i e^{-i(-ik^۲)t} = -۲\pi i e^{-k^۲ t} \end{aligned}$$

(علت وارد شدن غلامت منفی این است که پربند انتگرال‌گیری در نیم صفحهٔ بالایی در جهت ساعتگرد است) با جایگزین کردن این مقدار در معادلهٔ (۱)، بهره‌گیری از مختصات کروی که در آن آخرین محور k در امتداد $\mathbf{r}$ است، و با انتگرال‌گیری روی تمام زاویه‌ها، جز $\theta_۱$، می‌رسیم به:

$$G_s = \theta(t)\frac{\Omega_{m-۱}}{(۲\pi)^m}\int_۰^\infty k^{m-۱}dke^{-k^۲t}\int_۰^\pi(\sin\theta_۱)^{m-۲}e^{ikr\cos\theta_۱}d\theta_۱$$
$$= \theta(t)\frac{\Omega_{m-۱}}{(۲\pi)^m}\sqrt{\pi}\left(\frac{۲}{r}\right)^{m/۲-۱}\Gamma\left(\frac{m-۱}{۲}\right)\int_۰^\infty k^{m/۲}e^{-k^۲t}J_{m/۲-۱}(kr)dk$$

برای انتگرال روی $\theta_۱$ از نتیجه‌ای بهره برده‌ایم که در مثال ۱۲ـ۵ـ۱ به‌دست آمد.

با استفاده از فرمول انتگرالی[۱]:

$$\int_۰^\infty x^\mu e^{-\alpha x^۲}J_\nu(\beta x)dx = \frac{\beta^\nu\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+۱}{۲}\right)}{۲^{\nu+۱}\alpha^{(۱/۲)(\mu+\nu+۱)}\Gamma(\nu+۱)}\Phi\left(\frac{\mu+\nu+۱}{۲},\nu+۱;-\frac{\beta^۲}{۴\alpha}\right)$$

خواهیم داشت:

$$G_s(\mathbf{r},t) = \theta(t)\frac{۲\pi^{(m-۱)/۲}}{(۲\pi)^m}\sqrt{\pi}\left(\frac{۲}{r}\right)^{m/۲-۱}\frac{r^{m/۲-۱}}{۲^{m/۲}t^{m/۲}}\Phi\left(\frac{m}{۲},\frac{m}{۲};\frac{-r^۲}{۴t}\right) \quad (۲)$$

معادلهٔ (۹ـ۷۰)، بسط به سری تابع ابرهندسی هم‌جریان Φ، نشان می‌دهد که $\Phi(\alpha,\alpha;z) = e^z$. با قرار دادن این نتیجه در (۲) و ساده کردن آن، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$G_s(\mathbf{r},t) = \frac{e^{-r^۲/۴t}}{(۴\pi t)^{m/۲}}\theta(t)$$

●

مثال ۱۲ـ۵ـ۴: می‌خواهیم جزء تکینهٔ تابع گرین برای عملگر معادلهٔ موج $\partial^۲/\partial t^۲ - \nabla^۲$ را پیدا کنیم. اختلاف بین این مثال و مثال قبلی، این است که در اینجا مشتق زمانی از مرتبهٔ دوم است.

---
1. Gradshteyn and Ryzhik 1965, 716 and 1058.

بنابراین، به‌جای معادلهٔ (۱) در مثال ۱۲ـ۵ـ۳، از رابطهٔ زیر شروع می‌کنیم:

$$G_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{۱}{(۲\pi)^{m+۱}} \int d^m k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^۲ - k^۲} \qquad (۱)$$

انتگرال‌گیری روی ω را می‌توان با استفاده از روش مانده‌ها انجام داد. چون تکینه‌های انتگرالده، $\omega = \pm k$، روی محور حقیقی واقع‌اند، منطقی است که از مقدار اصلی به‌جای مقدار واقعی انتگرالی استفاده کنیم. این کار نیز به‌نوبهٔ خود، به علامت t بستگی دارد. اگر $t > ۰$، باید پربند را در نیمهٔ پایین صفحه ببندیم تا از بینهایت شدن تابع نمایی جلوگیری شود. در این‌صورت بنابه مثال ۷ـ۲ـ۱۴، می‌رسیم به

$$\mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - k)(\omega + k)} = -i\pi \frac{e^{-ikt} - e^{ikt}}{۲k} = -\pi \frac{\sin kt}{k} \qquad t > ۰$$

به‌ازای $t < ۰$، باید پربند را در نیمهٔ بالایی ببندیم، که منجر می‌شود به

$$\mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - k)(\omega + k)} = +i\pi \frac{e^{-ikt} - e^{ikt}}{۲k} = \pi \frac{\sin kt}{k} \qquad t < ۰$$

با ترکیب این دو معادله، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^۲ - k^۲} &= -\pi \frac{\sin kt}{k} [\theta(t) - \theta(-t)] \\ &\equiv -\pi \frac{\sin kt}{k} \varepsilon(t) \end{aligned}$$

که در آن

$$\varepsilon(t) \equiv \theta(t) - \theta(-t) = \begin{cases} ۱ & t > ۰ \\ -۱ & t < ۰ \end{cases}$$

با جایگزین کردن در (۱) خواهیم داشت

$$G_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon(t)\Omega_{m-۱}}{۲(۲\pi)^m} \int_۰^{\infty} k^{m-۱} dk \frac{\sin kt}{k} \int_۰^{\pi} (\sin\theta_۱)^{m-۱} e^{ikr\cos\theta_۱} d\theta_۱$$

که در آن روی تمام زاویه‌ها، جز $\theta_۱$، انتگرال‌گیری کرده‌ایم. سرانجام، با استفاده از نتیجهٔ انتگرال‌گیری روی $\theta_۱$ که در مثال ۱۲ـ۵ـ۱ آوردیم و ساده کردن نتیجه، می‌رسیم به

$$G_s(\mathbf{r},t) = \frac{\varepsilon(t)}{۲(۲\pi)^{m/۲}r^{m/۲-۱}} \int_۰^\infty k^{m/۲-۱} J_{m/۲-۱}(kr) \sin kt \, dk \qquad (۲)$$

به‌طوری که در تمرین ۱۲ـ۵ـ۳ مشاهده کردیم، تابع گرینی که معادلهٔ (۲) به‌دست داده است، فقط در معادلهٔ موج همگن، که در سمت راست آن تابع دلتا وجود ندارد، صدق می‌کند. دلیل این امر آن است که مقدار اصلی یک انتگرال، اگرچه ممکن است از نظر ریاضی معقول باشد، ولی ممکن است موقعیت فیزیکی را منعکس نکند. در واقع، تابع گرین در (۲) شامل دو جزء است که با دو پربند مختلف انتگرال‌گیری متناظرند.

نتیجه می‌گیریم که توابع گرینی که از نظر فیزیکی جالب‌اند، نه از مقدار اصلی، بلکه از دادن یک جزء موهومی کوچک به قطبها به‌دست می‌آیند. بنابراین، با جایگزین کردن انتگرال ω با یک انتگرال مسیری که برای آن دو قطب کمی به نیمهٔ پایینی صفحه جابه‌جا شده‌اند، و استفاده از روش مانده‌ها، می‌رسیم به

$$I_{\mathrm{up}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^۲ - k^۲} d\omega \equiv \int_{C_۱} \frac{e^{-izt}}{z^۲ - k^۲} dz = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ \frac{۲\pi}{k} \sin kt & t > ۰ \end{cases}$$

$$= \frac{۲\pi}{k} \theta(t) \sin kt$$

مقدار صفر ناشی از این نکته است که به‌ازای $t < ۰$، پربند باید در نیمه بالایی صفحه، جایی که هیچ قطبی در داخل $C_۱$ وجود ندارد، بسته شود. با جایگزین کردن این مقدار در (۱) و انجام عملیاتی مانند قبل، آنچه را تابع گرین تأخیری می‌نامیم، به‌دست می‌آید:

$$G_s^{(\mathrm{ret})}(\mathbf{r},t) = \frac{\theta(t)}{(۲\pi)^{m/۲}r^{m/۲-۱}} \int_۰^\infty k^{m/۲-۱} J_{m/۲-۱}(kr) \sin kt \, dk \qquad (۳)$$

از سوی دیگر، با نشاندن انتگرال ω به‌جای یک انتگرال مسیری $C_۲$ که برای آن قطبها کمی به نیمهٔ بالایی صفحه جابه‌جا شده‌اند، آنچه را که تابع گرین پیشرونده است به‌دست می‌آوریم:

$$G_s^{(\mathrm{adv})}(\mathbf{r},t) = -\frac{\theta(-t)}{(۲\pi)^{m/۲}r^{m/۲-۱}} \int_۰^\infty k^{m/۲-۱} J_{m/۲-۱}(kr) \sin kt \, dk \qquad (۴)$$

قبل از اینکه در خصوص مفهوم فیزیکی این دو تابع برای حالت $m = ۳$ بحث کنیم، رفتار (۲) و (۳) و (۴) را برای مقادیر نزدیک به $\pm r$ بررسی می‌کنیم.

برخلاف معادلات بیضوی و سهموی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، انتگرال روی k به یک تابع، بلکه یک توزیع است؛ این موضوع را می‌توان با توجه به اینکه تابع زیر تابع زوجی از α است، مشاهده کرد:

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-\alpha x} J_{\nu}(\beta x) x^{\nu} dx = \frac{(۲\beta)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{\pi}(\alpha^{۲}+\beta^{۲})^{\nu+۱/۲}} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > |\mathrm{Im}(\beta)|$$

بنابراین، می‌نویسیم:

$$\sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{۲i}$$

آنگاه عدد منفی کوچکی به توان تابع نمایی می‌افزاییم، به آسانی ملاحظه می‌کنیم که تا وقتی $t^{۲} \neq r^{۲}$ آنگاه (۲)، (۳)، و (۴) صفر می‌شوند. برای اینکه ببینیم وقتی $t = \pm r$ چه اتفاق می‌افتد، اختلاف بین دو انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_{\varepsilon}^{+} \equiv \int_{۰}^{\infty} e^{-(-it+\varepsilon)k} J_{\nu}(kr) k^{\nu} dk = \frac{(۲r)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{\pi}}[(-it+\varepsilon)^{۲}+r^{۲}]^{-(\nu+۱/۲)}$$

$$I_{\varepsilon}^{-} \equiv \int_{۰}^{\infty} e^{-(it+\varepsilon)k} J_{\nu}(kr) k^{\nu} dk = \frac{(۲r)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{\pi}}[(it+\varepsilon)^{۲}+r^{۲}]^{-(\nu+۱/۲)}$$

نتیجه، تا مرتبهٔ اول نسبت به ε، عبارت است از:

$$I_{\varepsilon}^{+} - I_{\varepsilon}^{-} = \frac{۲i(۲\nu+۱)\varepsilon t(۲r)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{\pi}(r^{۲}-t^{۲})^{\nu+۳/۲}}$$

با نشاندن این مقدار در یکی از عبارتهای G_s، مثلاً (۲)، به‌ازای $\nu = m/۲ - ۱$، می‌رسیم به:

$$G_s(\mathbf{r}, t; \varepsilon) \approx \frac{i(m-۱)\Gamma\left(\frac{m-۱}{۲}\right) t\varepsilon(t)}{۲(\pi)^{[(m+۱)/۲]}}\left[\frac{\varepsilon}{(r^{۲}-t^{۲})^{[(m+۱)/۲]}}\right] \qquad (۵)$$

از این رابطه به‌وضوح مشاهده می‌کنیم که تا وقتی $r^{2} \neq t^{2}$، آنگاه

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_{\mathrm{s}}(\mathbf{r}, t; \varepsilon) = 0$$

اما، اگر $r^{2} = t^{2}$، در این‌صورت مخرج آخرین عامل در (۵) صفر و $G_{\mathrm{s}}(\mathbf{r}, t; \varepsilon)$ بینهایت می‌شود. این رفتار، شبیه رفتار یک تابع دلتاست.

برای محاسبهٔ تابع گرین، لازم است عبارتی برای انتگرال موجود در (۲)، (۳) یا (۴) پیدا کنیم. اگر این انتگرال را با $I^{(\nu)}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I^{(\nu)} &= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to \infty} (I_{\varepsilon}^{+} - I_{\varepsilon}^{-}) \\ &= \frac{(2r)^{\nu}\Gamma(\nu + 1/2)}{2i\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{[r^{2}+(-it+\varepsilon)^{2}]^{\nu+1/2}} - \frac{1}{[r^{2} + (it + \varepsilon)^{2}]^{\nu+1/2}} \right\} \end{aligned}$$

برای این حالت، $\nu = m/2 - 1$. بنابراین، عبارت بالا می‌دهد

$$\begin{aligned} I^{(m/2-1)} = {} & \frac{(2r)^{m/2-1}\Gamma\left(\dfrac{m-1}{2}\right)}{2i\sqrt{\pi}} \\ & \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{[r^{2} + (-it + \varepsilon)^{2}]^{(m-1)/2}} - \frac{1}{[r^{2} + (it + \varepsilon)^{2}]^{(m-1)/2}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

در اینجا، بهتر است در خصوص دو حالت به‌طور جداگانه بحث کنیم که در آنها m فرد و m زوج است. حال عبارتی برای m فرد به‌دست می‌آوریم (حالت m زوج به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود). وقتی m فرد باشد، $m - 1$ زوج است. بنابراین، می‌توانیم عدد درستی چون $n = (m - 1)/2$ معرفی کنیم و (۶) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$I^{(n)} = \frac{(2r)^{n-1/2}\Gamma(n)}{2i\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{[r^{2} + (-it + \varepsilon)^{2}]^{n}} - \frac{1}{[r^{2} + (it + \varepsilon)^{2}]^{n}} \right\} \quad (7)$$

فرض کنید $u \equiv r^{2} + (-it + \varepsilon)^{2}$؛ در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{u^{n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} \left(\frac{1}{u}\right)$$

با توجه به اینکه اتحاد زیر برای هر تابع دلخواهی از u برقرار است:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{df}{du}2r \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{du} = \frac{1}{2r}\,\frac{\partial f}{\partial r}$$

می‌توانیم بنویسیم $d/du = (1/2r)\partial/\partial r$ و:

$$\frac{1}{u^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)$$

یا

$$\frac{1}{[r^2 + (\pm it+\varepsilon)^2]^n} = \frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{r^2 + (\pm it+\varepsilon)^2}\right]$$

بنابراین، معادلهٔ (۷) می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} I^{(n)} = \frac{(2r)^{n-1/2}\Gamma(n)}{2i\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1} \\ \left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{r^2+(-it+\varepsilon)^2} - \frac{1}{r^2+(it+\varepsilon)^2}\right]\right\} \end{aligned} \qquad (8)$$

اما حدی که در (۸) برقرار است، دقیقاً همان حد حالت سه‌بعدی است که در تمرین ۱۲ـ۵ـ۲ محاسبه شد. در آنجا رسیدیم به:

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \frac{(2r)^{1/2}}{2i\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{r^2+(-it+\varepsilon)^2} - \frac{1}{r^2+(it+\varepsilon)^2}\right] \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2r}}[\delta(t+r) - \delta(t-r) \end{aligned}$$

که می‌دهد:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{r^2+(-it+\varepsilon)^2} - \frac{1}{r^2+(it+\varepsilon)^2}\right] = -\frac{i\pi}{r}[\delta(t+r) - \delta(t-r)]$$

با نشاندن این مقدار در (۸) و توجه به این نکته که $\Gamma(n) = (n-1)!$، می‌رسیم به:

$$I^{(n)} = -\frac{\sqrt{\pi}(2r)^{n-1/2}}{2}\left(-\frac{1}{2r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{r}[\delta(t+r) - \delta(t-r)]\right\}$$

با استفاده از این نتیجه در (۳) و (۴)، خواهیم داشت:

$$G_s^{(\mathrm{ret})}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1}\left[\frac{\delta(t-r)}{r}\right] \quad n=\frac{m-1}{2} \qquad \text{(۹ـالف)}$$

$$G_s^{(\mathrm{adv})}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-1}\left[\frac{\delta(t+r)}{r}\right] \quad n=\frac{m-1}{2} \qquad \text{(۹ـب)}$$

توابع تتا در (۹) ضروری نیستند، زیرا شناسه‌های توابع دلتا قبلاً محدودیتهای مربوطهٔ توابع تتا را برآورده کرده‌اند.

دو تابع مطرح شده در (۹) از تعبیر فیزیکی جالبی برخوردارند. توابع گرین انتشارگر (سیگنال) هستند، و $G_s^{(\mathrm{ret})}$ فقط توانایی انتشار سیگنال برای زمانهای مثبت را دارد. از سوی دیگر، $G_s^{(\mathrm{ret})}(\mathbf{r},t)$ فقط می‌تواند در راستای منفی زمان سیگنال را منتشر کند. بنابراین، اگر در ابتدا ($t=0$) یک سیگنال (با شرایط مرزی مناسب) تولید شود، $G_s^{(\mathrm{ret})}$، و $G_s^{(\mathrm{adv})}$ هر دو عمل می‌کنند تا آن را در راستای زمان مربوط به خود انتشار دهند. شاید چنین به‌نظر رسد که $G_s^{(\mathrm{adv})}$ بی‌فایده است، زیرا هر سیگنالی در جهت پیشروندهٔ زمان منتشر می‌شود. اما این تعبیر فقط برای رویدادهای کلاسیکی، صادق است. در نظریهٔ میدانهای کوانتومی نسبیتی، پادذرات، از دیدگاه ریاضی به‌صورت ذراتی با حرکت در جهت منفی زمان تعبیر می‌شوند. بنابراین، نمی‌توانیم به‌سادگی از $G_s^{(\mathrm{adv})}$ چشم بپوشیم. در واقع، انتشارگر درستی که باید در این نظریه اختیار کنیم، ترکیبی خطی از $G_s^{(\mathrm{adv})}$ و $G_s^{(\mathrm{ret})}$ است که انتشارگر فاینمن نام دارد. ●

مثال ۱۲ـ۵ـ۴ یک اختلاف ظریف مابین توابع گرین برای عملگرهای دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم در یک بعد و عملگرهای یاد شده در ابعاد بالاتر را نشان می‌دهد. در فصل یازدهم دیدیم که توابع اول توابع پیوسته‌ای در بازه‌ای هستند که در آن تعریف شده‌اند. در اینجا، می‌بینیم که توابع گرین در ابعاد بالاتر نه تنها توابع پیوسته نیستند، بلکه حتی به مفهوم معمولی تابع هم نیستند، شامل یک تابع دلتا هستند. بنابراین، به‌طور کلی، توابع گرین در ابعاد بالاتر را باید به‌صورت توزیع (توابع تعمیم‌یافته) در نظر گرفت.

مثال ۱۲ـ۵ـ۵: می‌خواهیم تابع گرین برای عملگر هلمهولتز، $\nabla^2+\mu^2$، در دو بعد را با مرز دایره‌ای به شعاع a پیدا کنیم.

می‌توانیم یا مستقیماً G_s را پیدا کنیم یا از معادلهٔ (۲) در مثال ۱۲ـ۵ـ۲ با $m=2$ استفاده

کنیم. در هر حال، نتیجه عبارت است از:

$$G_s(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{i}{۴}H_۰^{(۱)}(\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$$

که می‌دهد

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{i}{۴}H_۰^{(۱)}(\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) + H(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

شرط مرزی $G(\mathbf{a},\mathbf{r}') = ۰$، که در آن $\mathbf{a}$ بردار واصل از مبدأ به مرز دایره‌ای است، ایجاب می‌کند که H در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$H(\mathbf{a},\mathbf{r}') = \frac{i}{۴}H_۰^{(۱)}(\mu|\mathbf{a}-\mathbf{r}'|) \qquad (۱)$$

یادآوری می‌کنیم که $H(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ در معادلهٔ هلمهولتز همگن $(\nabla^۲ + \mu^۲)H = ۰$، صدق می‌کند. به اعتبار تفکیک متغیرها (فصلهای ۸ و ۱۰) و این واقعیت که H در $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ منظم است، می‌رسیم به:

$$H(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{n=۰}^{\infty} J_n(\mu r)[a_n(\mathbf{r}')\cos n\theta + b_n(\mathbf{r}')\sin n\theta]$$

چون ضرایب a_n و b_n فقط نسبت به $\mathbf{r}$ ثابت‌اند، شناسهٔ $\mathbf{r}'$ برای آنها ظاهر شده است. اکنون معادلهٔ (۱) منجر می‌شود به:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} J_n(\mu a)[a_n(\mathbf{r}')\cos n\theta + b_n(\mathbf{r}')\sin n\theta]$$
$$= \frac{i}{۴}H_۰^{(۱)}\left(\mu\sqrt{a^۲ + r'^۲ - ۲ar'\cos(\theta-\theta')}\right)$$

عبارت سمت چپ یکی از بسطهای سری فوریهٔ عبارت سمت راست است. ضرایب را می‌توان مطابق معمول محاسبه کرد:

$$a_۰(\mathbf{r}') = \frac{i}{۸\pi J_۰(\mu a)}\int_۰^{۲\pi} H_۰^{(۱)}\left(\mu\sqrt{a^۲ + r'^۲ - ۲ar'\cos(\theta-\theta')}\right)d\theta$$

$$a_n(\mathbf{r}') = \frac{i}{4\pi J_n(\mu a)} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}\left(\mu\sqrt{a^2 + r'^2 - 2ar'\cos(\theta - \theta')}\right)\cos n\theta\, d\theta$$

$$b_n(\mathbf{r}') = \frac{i}{4\pi J_n(\mu a)} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}\left(\mu\sqrt{a^2 + r'^2 - 2ar'\cos(\theta - \theta')}\right)\sin n\theta\, d\theta$$

این معادلات به‌طور کامل $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$، و در نتیجه $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ را تعیین می‌کنند. ●

روشی که در مثال ۱۲ـ۵ـ۵ مطرح شد، می‌تواند در مورد تعداد بسیاری از مسائل که اهمیت عملی دارند اعمال شود. مسائل مورد بحث در فصلهای هشتم و دهم به‌قدر کافی این روش را روشن می‌کنند.

۱۲ـ۵ـ۲ روش بسط ویژه‌تابع

فرض کنید عملگر دیفرانسیلی $\mathbb{L}_\mathbf{x}$، که در یک حوزهٔ تعریف D با مرز ∂D تعریف شده است، دارای ویژه‌مقادیر گسستهٔ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ویژه‌توابع راست‌هنجار متناظر با $\{u_m(\mathbf{x})\}_{m=1}^{\infty}$ باشد. البته ممکن است این دو مجموعه در تناظر یک‌به‌یک نباشند. ممکن است واگنی برقرار باشد؛ مثلاً، یک λ_n ممکن است با چند $u_m(\mathbf{x})$ متناظر باشد. فرض کنید $u_m(\mathbf{x})$ها در همان شرایطی مرزی صدق کنند که توابع گرین تعریف شده در زیر صدق می‌کنند.

حال عملگر $\mathbb{L}_\mathbf{x} - \lambda\mathbb{1}$ را در نظر بگیرید، که در آن λ با همه λ_nها متفاوت است. در این‌صورت، مانند حالت یک‌بعدی، این عملگر وارون‌پذیر است، و می‌توانیم تابع گرین آن را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$(\mathbb{L}_\mathbf{x} - \lambda)G_\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

که در آن تابع وزن برابر یک قرار داده شده است. کامل بودن $\{u_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbb{1}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{u}_n\rangle\langle \mathrm{u}_n|\right)|\mathbf{y}\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})$$

و

$$G_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbf{y})u_n(\mathbf{x})$$

که در آن $a_n(\mathbf{y})$ ضرایب بسط $G_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$اند که، بنا بر فرض، در همان شرایط مرزی u_nها صدق می‌کنند، و لذا برحسب آنها قابل بسط‌اند. با جایگزین کردن این دو بسط در معادلهٔ دیفرانسیل مفروض می‌دهد:

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{x}} - \lambda)\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbf{y})u_n(\mathbf{x})\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})$$

یا با استفاده از $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}u_n(\mathbf{x}) = \lambda_n u_n(\mathbf{x})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \lambda)a_n(\mathbf{y})u_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} u - n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})$$

از راست‌هنجاری u_nها، می‌رسیم به:

$$a_n(\mathbf{y}) = \frac{u_n^*(\mathbf{y})}{\lambda_n - \lambda}$$

بنابراین:

$$G_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})}{\lambda_n - \lambda} \qquad (۵۹\text{ـ}۱۲)$$

در حالت خاص، اگر صفر یک ویژه‌مقدار $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ نباشد، تابع گرین برای $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_\circ(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})}{\lambda_n} \qquad (۶۰\text{ـ}۱۲)$$

این یک بسط تابع گرین برحسب ویژه‌مقادیر $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ است.

ادامهٔ تعبیری صوری از معادله (۱۲ـ۶۰) آموزنده است. یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ تجزیهٔ طیفی به ما امکان می‌دهد که برای یک عملگر $\mathbb{A}$ با ویژه‌مقادیر λ_i و عملگرهای تصویر $\mathbb{P}_i$، بنویسیم:

$$f(\mathbb{A}) = \sum_i f(\lambda_i)\mathbb{P}_i$$

صورت زیر را فرض می‌کنیم:

$$\mathbb{P}_i \equiv \sum_j |\mathrm{u}_j^{(i)}\rangle\langle \mathrm{u}_j^{(i)}|$$

که در آن $|\mathrm{u}_j^{(i)}\rangle$ ویژه‌تابع jام متناظر با ویژه‌مقدار λ_i است، و مجموع‌یابی روی تمام ویژه‌توابع انجام می‌گیرد؛ می‌توانیم بنویسیم:

$$f(\mathbb{A}) = \sum_n f(\lambda_n)|\mathrm{u}_n\rangle\langle \mathrm{u}_n|$$

در اینجا، n تعداد ویژه‌توابع متناظر با ویژه‌مقادیر مختلف است. حال، اگر از یک تابع به‌خصوص $f(\mathbb{A}) \equiv \mathbb{A}^{-۱}$ بهره گیریم، خواهیم داشت

$$\mathbb{G} \equiv \mathbb{A}^{-۱} = \sum_n \lambda_n^{-۱}|\mathrm{u}_n\rangle\langle \mathrm{u}_n| = \sum_n \frac{|\mathrm{u}_n\rangle\langle \mathrm{u}_n|}{\lambda_n}$$

یا به شکل عناصر ماتریسی:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv \langle \mathbf{x}|\mathbb{G}|\mathbf{y}\rangle = \sum_n \frac{\langle \mathbf{x}|\mathrm{u}_n\rangle\langle \mathrm{u}_n|\mathbf{y}\rangle}{\lambda_n} = \sum_n \frac{u_n(\mathbf{x})u_n^*(\mathbf{y})}{\lambda_n}$$

این عبارت اخیر بر طرف راست رابطه (۱۲ـ۶۰) منطبق است.

با وجودی که طرز ارائهٔ مطالب پیشین صوری بود، ارتباط مابین عملگرهای جبری (که در فصلهای دوم و سوم با آنها آشنا شدیم) و عملگرهای دیفرانسیل را نشان می‌دهد.

معادلات (۱۲ـ۵۹) و (۱۲ـ۶۰) ایجاب می‌کنند که $u_n(\mathbf{x})$ها یک مجموعهٔ گسسته راست‌هنجار کامل تشکیل می‌دهند. در فصل دهم، در قالب بحث دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل، با نمونه‌های زیادی از چنین ویژه‌توابعی مواجه شدیم. البته تمام دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل در آنجا یک‌بعدی بودند. در اینجا دستگاه اشتورم‌ـلیوویل را به mبعد تعمیم می‌دهیم. به هر حال، این یک محدودیت نیست، زیرا تفکیک متغیرها، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی m بعدی را به m معادلهٔ دیفرانسیل معمولی یک بعدی تبدیل می‌کند. اگر شرایط مرزی مناسب باشد، m معادلهٔ دیفرانسیل معمولی m دستگاه اشتورم‌ـلیوویل تشکیل می‌دهند. مروری بر فصل دهم نشان خواهد داد که شرایط مرزی همگن همواره دستگاههای اشتورم‌ـلیوویل منجر می‌شوند. در واقع، قضیهٔ ۱۰ـ۳ـ۱

شاهدی بر این ادعاست. چون توابع گرین باید در شرایط مرزی همگن نیز صدق کنند، بسطهایی چون بسطهای (۱۲ـ۵۹) و (۱۲ـ۶۰) امکان‌پذیر است.

مثال ۱۲ـ۵ـ۶: به‌عنوان یک مثال عملی و عینی، بسط ویژه‌تابع تابع گرین لاپلاسی دوبعدی $\nabla^۲ = \partial^۲/\partial x^۲ + \partial^۲/\partial y^۲$، در داخل یک ناحیهٔ مربع مستطیلی $a \leq x \leq ۰$، $b \leq y \leq ۰$ با شرایط مرزی دیریکله را به‌دست می‌آوریم. چون تابع گرین در مرز صفر می‌شود، مسئلهٔ ویژه‌مقداری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla^۲ u = \lambda u \qquad u = ۰ \quad \text{روی } \partial D$$

از تفکیک متغیرها به‌صورت $u(x, y) = X(x)Y(y)$، می‌رسیم به

$$\frac{d^۲X}{dx^۲} + \alpha X = ۰ \qquad X(۰) = X(a) = ۰ \tag{۱}$$

$$\frac{d^۲Y}{dy^۲} - (\alpha + \lambda)Y = ۰ \qquad Y(۰) = Y(b) = ۰ \tag{۲}$$

جواب (۱) عبارت است از:

$$X(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad \alpha = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

از سوی دیگر، معادلهٔ (۲) فقط وقتی جواب خواهد داشت که داشته باشیم:

$$b\sqrt{\alpha + \lambda} = im\pi \;\Rightarrow\; \lambda = -\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲\right] \qquad m, n = ۱, ۲, \ldots$$

در چنین صورتی، جواب عبارت است از:

$$Y(y) = B\ \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \qquad m = ۱, ۲, \ldots$$

به این ترتیب، ویژه‌توابع متعامد را به‌دست آوردیم:

$$u_{mn}(x, y) \equiv X(x)Y(y) = A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

که ویژه‌مقادیر متناظر آنها عبارت‌اند از:

$$\lambda_{mn} = -\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{۲} + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^{۲}\right]$$

برای اینکه u_{mn}ها را بهنجار کنیم، باید A_{mn}ها را مناسب اختیار کنیم. داریم:

$$۱ = \int_{۰}^{a} dx \int_{۰}^{b} dy [u_{mn}(x,y)]^{۲} = A_{mn}^{۲} \int_{۰}^{a} \sin^{۲}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \int_{۰}^{b} \sin^{۲}\left(\frac{mn}{b}y\right) dy$$

$$= (A_{mn})^{۲}\left(\frac{a}{۲}\right)\left(\frac{b}{۲}\right)$$

و

$$A_{mn} = \frac{۲}{\sqrt{ab}}$$

با قرار دادن تمام مقادیر بالا در معادلهٔ (۱۲ـ۶۰) و توجه به این نکته که ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر با دو اندیس مشخص شده‌اند، می‌رسیم به:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G(x, y; x', y') = \sum_{m,n=۱}^{\infty} \frac{u_{mn}(x,y) u_{mn}(x', y')}{\lambda_{mn}}$$

$$= -\frac{۴}{ab} \sum_{m,n=۱}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{۲} + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^{۲}}$$

به تغییر از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{r}$ و از $\mathbf{y}$ به $\mathbf{r}'$ توجه کنید. همچنین توجه کنید که λ_{mn}ها هرگز صفر نمی‌شوند. و بنابراین $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ خوش‌تعریف است. ●

در مثال (۱۲ـ۶ـ۵)، $\lambda = ۰$ ویژه‌مقدار $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ نبود. وقتی یک تابع گرین برحسب ویژه‌توابعش بسط داده می‌شود، این حکم باید درست باشد. در کاربردهای فیزیکی، برخی شرایط (که چیزی جدا از شرایط مرزی‌اند) وقتی به تابع گرین اعمال می‌شوند، خودبه‌خود ویژه‌مقدار صفر را مستثنی می‌کنند. به‌عنوان مثال، این شرط که تابع گرین در مبدأ محدود بماند، به‌حد کافی حدی است که ویژه‌مقدار صفر را حذف کند.

مثال ۱۲ـ۵ـ۷: مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله دوبعدی $\nabla^{۲}u = f$، $u = ۰$ روی دایره‌ای به شعاع a را در نظر بگیرید. اگر تنها شرایط مرزی را در نظر بگیریم و بپرسیم آیا $\lambda = ۰$ یک ویژه‌مقدار است یا خیر، مطابق استقلال زیر، پاسخ مثبت است.

عمومی‌ترین جواب $\nabla^{۲}u = ۰$ در مختصات قطبی می‌تواند با روش جداسازی متغیرها به‌دست آید:

$$u(\rho,\varphi) = A + B\ln\rho + \sum_{n=۱}^{\infty}(b_n\rho^n b'_n\rho^{-n})\cos n\varphi + \sum_{n=۱}^{\infty}(c_n\rho^n + c'_n\rho^{-n})\sin n\varphi \qquad (۱)$$

با توسل به شرایط مرزی داریم

$$۰ = u(a,\varphi) = A + B\ln a + \sum_{n=۱}^{\infty}(b_n a^n + b'_n a^{-n})\cos n\varphi + \sum_{n=۱}^{\infty}(c_n a^n + c'_n a^{-n})\sin n\varphi$$

که به‌ازای مقادیر دلخواه φ برقرار است، اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$A = -B\ln a \qquad b'_n = -b_n a^{۲n} \qquad c'_n = -c_n a^{۲n}$$

با قرار دادن در (۱)، می‌رسیم به

$$u(\rho,\varphi) = B\ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\rho^n - \frac{a^{۲n}}{\rho^n}\right)(b_n\cos n\varphi + c_n\sin n\varphi) \qquad (۲)$$

بنابراین، اگر چیزی فراتر از شرایط مرزی نخواسته باشیم، $\nabla^{۲}u = ۰$ دارای یک جواب غیربدیهی است که به کمک (۲) به‌دست می‌آید. یعنی، $\lambda = ۰$ یک ویژه‌مقدار معادلهٔ $\nabla^{۲}u = \lambda u$ است.

اما واقعیت فیزیکی ایجاب می‌کند که $u(\rho,\varphi)$ در مبدأ خوش‌رفتار باشد. به اعتبار این شرط، B، b'_n و c'_n در معادلهٔ (۱) صفر می‌شوند. در این‌صورت شرایط مرزی بقیهٔ ضرایب در (۱) را صفر می‌کنند. بنابراین، این خواسته که $u(\rho,\varphi)$ در $\rho = ۰$ خوش‌رفتار باشد، وضعیت را کاملاً معکوس و فقدان ویژه‌مقدار صفر برای $\nabla^{۲}$ را ایجاب می‌کند، که این امر به‌نوبهٔ خود وجود تابع گرین را تضمین می‌کند. ●

۱۲ـ۵ـ۳ روش عملگری

ایدهٔ اساسی که روش عملگری بر شالودهٔ آن استوار شده، به‌قرار زیر است: فرض کنید $\mathbb{L}_1$ و $\mathbb{L}_2$ دو عملگر جابه‌جاپذیر باشند و می‌خواهیم $(\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2)^{-1}$ را پیدا کنیم. چون $\mathbb{L}_2$ با $\mathbb{L}_1$ جابه‌جاپذیر است، وقتی همراه با $\mathbb{L}_1$ باشد، می‌توان آن را ثابت تلقی کرد. در حالت خاص، معادلهٔ:

$$(\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2)\mathbb{G}=\mathbb{1}$$

می‌تواند معادله‌ای عملگری به تنهایی نسبت به $\mathbb{L}_1$ در نظر گرفته شود، که در آن $\mathbb{L}_2$ مانند یک ثابت:

$$\mathbb{L}_1\mathbb{G}+\mathbb{L}_2\mathbb{G}=\mathbb{1}$$

اگر $\mathbb{L}_1$ (و $\mathbb{L}_2$) عملگرهای دیفرانسیلی باشند، در این‌صورت این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbb{L}_1 G(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbb{L}_2 G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

در اغلب موارد، $\mathbb{L}_1$ فقط به یک زیرمجموعهٔ $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ بستگی دارد. فرض کنید $\mathbf{x}_1$ معرف این زیرمجموعه و $\mathbf{x}_2$ معرف بقیهٔ مختصات باشد. در این‌صورت، می‌توانیم بنویسیم:

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1)\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2)$$

اگر $G_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2;k)$ معرف تابع گرین برای $\mathbb{L}_1+k$، ثابت باشد، می‌رسیم به:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=G_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2;\mathbb{L}_2)\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2) \qquad (۱۲\text{ـ}۶۱)$$

این عبارت را می‌توان با توجه به رابطهٔ زیر به آسانی اثبات کرد:

$$(\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2)G(\mathbf{x},\mathbf{y})=[(\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2)G_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2;\mathbb{L}_2)]\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2)$$

$$=\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1)\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

وقتی G_1 به‌صورت تابعی از $\mathbb{L}_2$ یافته شد، می‌توان آن را روی $\delta(\mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2)$ اعمال کرد و تابع گرین مورد نظر را به‌دست آورد.

طی مثال زیر این روش را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۲ـ۵ـ۸: مثال ۱۲ـ۵ـ۶ را با استفاده از روش عملگری تکرار می‌کنیم.

فرض کنید $\mathbb{L}_1 = \partial^2/\partial x^2$ و $\mathbb{L}_2 = \partial^2/\partial y^2$. در این‌صورت تابع گرین در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2)G(x, y; x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y')$$
$$G(0, y; x', y') = G(a, y; x', y') = G(x, 0; x', y') = G(x, b; x', y') = 0 \qquad (1)$$

فرض کنید $\mathbb{L}_2$ ثابت باشد (چون $[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] = 0$، این فرض را می‌توانیم بکنیم) و توجه خود را بر مسئلهٔ یک‌بعدی متمرکز کنیم:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \mathbb{L}_2 G = \delta(x - x')\delta(y - y')$$
$$G(0, y; x', y') = G(a, y; x', y') = 0 \qquad (2)$$

که در آن $\mathbb{L}_2$، y و x' و y' پارامتر فرض می‌شوند. معادلهٔ (۲) را می‌توان با روشهای فصل یازدهم حل کرد (در حالت خاص، مسئلهٔ ۱۱ـ۱۹ را بنگرید که در آن $\mathbb{L}_2 \equiv k^2$). جواب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$G_1(x, y, x', y'; \mathbb{L}_2) = \begin{cases} (\mathbb{K}\sin \mathbb{K}a)^{-1}\sin \mathbb{K}x \sin \mathbb{K}(a-x') & 0 \le x < x' \\ (\mathbb{K}\sin \mathbb{K}a)^{-1}\sin \mathbb{K}(a-x)\sin \mathbb{K}x' & x' < x \le a \end{cases} \qquad (3)$$

که در آن $\mathbb{K} = \sqrt{\mathbb{L}_2}$.

برای یافتن تابع گرین کامل باید عملگر $G_1(x, y, x', y'; \mathbb{L}_2)$ را به $\delta(y - y')$ اعمال کنیم. بهترین راه برای انجام این کار آن است که $\delta(y - y')$ را برحسب ویژه‌توابع $\mathbb{L}_2$ بنویسیم و سپس G_1 را به عبارت حاصل اثر دهیم. این ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر متناظرشان را، از طریق حل دستگاه اشتورم‌ـلیوویل زیر، به آسانی به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbb{L}_2 u \equiv \frac{d^2u}{dy^2} = \lambda u \qquad u(0) = u(b) = 0$$

جوابهای بهنجار عبارت‌اند از:

$$u_n = \sqrt{\frac{۲}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \qquad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{۲} \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

کامل بودن ویژه‌توابع ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\delta(y - y') = \frac{۲}{b} \sum_{n=۱}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right)$$

این رابطه، توأم با این نکته که

$$f(\mathbb{L}_۲) u_n(y) = f(\lambda_n) u_n(y)$$

منجر می‌شود به:

$$f(\mathbb{L}_۲)\delta(y - y') = \frac{۲}{b} \sum_{n=۱}^{\infty} f\left(-\frac{n^۲\pi^۲}{b^۲}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right)$$

در حالت خاص:

$$f(\mathbb{K})\delta(y - y') = f(\sqrt{\mathbb{L}_۲})\delta(y - y') = \frac{۲}{b} \sum_{n=۱}^{\infty} f\left(i\frac{n\pi}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right)$$

با استفاده از این رابطه و عبارت (۳) در (۱۲ـ۶۱)، می‌رسیم به:

$$G(x, y; x', y') = G_۱(x, y, x', y'; \mathbb{L}_۲)\delta(y - y')$$

$$= \begin{cases} \dfrac{۲}{b} \displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{in\pi}{b} x\right) \sin\left[\frac{in\pi}{b}(a - x')\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right)}{\frac{in\pi}{b} \sin\left(\frac{in\pi}{b} a\right)} & ۰ \leq x < x' \\[2ex] \dfrac{۲}{b} \displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \dfrac{\sin\left[\frac{in\pi}{b}(a - x)\right] \sin\left(\frac{in\pi}{b} x'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y'\right)}{\frac{in\pi}{b} \sin\left(\frac{in\pi}{b} a\right)} & x' < x \leq a \end{cases}$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد:

$$G=\begin{cases}\dfrac{۲}{\pi}\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sinh\left(\dfrac{in\pi}{b}x\right)\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x')\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y'\right)}{n\sinh\left(\dfrac{in\pi a}{b}\right)} & ۰\leq x<x' \\ \\ \dfrac{۲}{\pi}\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x)\right]\sinh\left(\dfrac{n\pi}{b}x'\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y'\right)}{n\sinh\left(\dfrac{n\pi a}{b}a\right)} & x'<x\leq a\end{cases}$$

هر چند این نتیجه با نتیجهٔ مثال ۱۲ـ۵ـ۶ متفاوت به‌نظر می‌رسد. می‌توان نشان داد که هر دو معادل یکدیگرند. اثبات این موضوع به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ●

گاهی بهتر است یک عملگر را به بیش از دو جزء تجزیه کنیم. مثلاً یک عملگر را می‌توان به صورت $\mathbb{L}_۱+\mathbb{L}_۲+\mathbb{L}_۳$ نوشت، که در آن، به‌ازای تمام $i,j=۱,۲,۳$، داریم: $[\mathbb{L}_i,\mathbb{L}_j]=۰$. در این‌صورت، می‌توانیم $\mathbb{L}_۲$ و $\mathbb{L}_۳$ را عدد فرض و مسئله را برحسب $\mathbb{L}_۱$ حل کنیم. به تابع گرینی به‌صورت $G_۱(\mathbf{x}_۱,\mathbf{y}_۱;\mathbf{x}_۲,\mathbf{y}_۲;\mathbb{L}_۲,\mathbb{L}_۳)$ می‌رسیم، و تابع گرین کامل را به‌صورت زیر پیدا کنیم:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=G_۱(\mathbf{x}_۱,\mathbf{y}_۱;\mathbf{x}_۲,\mathbf{y}_۲;\mathbb{L}_۲,\mathbb{L}_۳)\delta(\mathbf{x}_۲-\mathbf{y}_۲)$$

در این تابع، $\mathbf{x}_۲$ و $\mathbf{y}_۲$ متغیرهایی‌اند که $\mathbb{L}_۲$ و $\mathbb{L}_۳$ روی آنها عمل می‌کنند.

مثال ۱۲ـ۵ـ۹: می‌خواهیم مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله برای عملگر $\nabla^۲-k^۲$ را در ناحیهٔ زیر حل کنیم:

$$\mathrm{D}\equiv\{(x,y,z)|۰\leq x\leq a,۰\leq y\leq b,-\infty<z<+\infty\}$$

بنابراین، هیچ مرزی در راستای z وجود ندارد. اما می‌خواهیم تابع گرین در $z=\pm\infty$ تعریف شده باشد.

تابع گرین در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}&(\nabla^۲-k^۲)G=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\\&G(۰,y,z)=G(a,y,z)=G(x,۰,z)=G(x,b,z)=۰\end{aligned}\qquad(۱)$$

با نوشتن $\mathbb{L}_1 = \partial^2/\partial z^2$، $\mathbb{L}_2 = \partial^2/\partial x^2$، و $\mathbb{L}_3 = \partial^2/\partial z^2$، داریم:

$$\frac{d^2G}{dz^2} - (k^2 - \mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_3)G = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

اگر تعریف کنیم:

$$\mu^2 \equiv k^2 - \mathbb{L}_2 - \mathbb{L}_3$$

در این‌صورت به مسئلهٔ یک‌بعدی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2G_1}{dz^2} - \mu^2 G_1 = \delta(z - z')$$
$$G_1(z = -\infty) = G_1(z = +\infty) = 0$$

جواب آن به آسانی به‌دست می‌آید (مسئلهٔ ۱۱ـ۲۰ را بنگرید) و:

$$G_1(z, z'; x, x', y, y'; \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3) = -\frac{e^{-\mu|z-z'|}}{2\mu}$$

و تابع گرین تمام به‌صورت زیر است:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(-\frac{e^{-\mu|z-z'|}}{2\mu}\right)\delta(x - x')\delta(y - y') \qquad (2)$$

مانند قبل، توابع دلتا را به‌صورت یک سری از ویژه‌توابع $\mathbb{L}_2$ و $\mathbb{L}_3$ بیان می‌کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که ویژه‌توابع بهنجار $\mathbb{L}_2$ که در $u(0) = u(a) = 0$ صدق می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$u_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

و ویژه‌مقادیر مربوطه عبارت‌اند از:

$$\lambda_n^{(2)} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

به همین ترتیب، ویژه‌توابع و ویژه‌مقادیر $\mathbb{L}_۳$ عبارت‌اند از

$$u_m^{(۳)}(y) = \sqrt{\frac{۲}{b}}\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad \text{و} \quad \lambda_m^{(۳)} = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲ \quad m = ۱, ۲, \ldots$$

به این ترتیب، می‌توانیم بنویسیم:

$$\delta(x-x')\delta(y-y') = \frac{۴}{ab}\sum_{m,n=۱}^{\infty}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)$$

با نشاندن این رابطه در معادلهٔ (۲)، می‌رسیم به:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{۲}{ab}\sum_{m,n=۱}^{\infty}\frac{e^{-\mu_{mn}|z-z'|}}{\mu_{mn}}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \qquad (۳)$$

که در آن

$$\mu_{mn}^۲ \equiv k^۲ - \lambda_n^{(۲)} - \lambda_m^{(۳)} = k^۲ + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲ + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^۲$$

از (۳) می‌توانیم تابع گرینی برای عملگر هلمهولتز $\nabla^۲ + k^۲$ در حوزهٔ تعریف D را نیز به‌دست آوردیم. این کار به کمک تبدیل $k \to ik$ صورت می‌پذیرد. ●

در مثالهای ۱۲ـ۵ـ۸ و ۱۲ـ۵ـ۹ یک عملگر را انتخاب کردیم و بقیهٔ را ثابت گرفتیم. البته، هیچ دلیل پیشینی برای این انتخاب وجود ندارد. مثلاً می‌توانستیم در مثال ۱۲ـ۵ـ۸ قرار دهیم $\mathbb{L}_۱ = \partial^۲/\partial y^۲$. در این‌صورت تابع گرین به‌صورت زیر در می‌آید:

$$G=\begin{cases}\dfrac{۲}{\pi}\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sinh\left(\dfrac{n\pi}{a}y\right)\sinh\left[\dfrac{n\pi}{a}(b-y')\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x'\right)}{n\sinh\left(\dfrac{n\pi}{a}b\right)} & ۰\leq y<y' \\ \\ \dfrac{۲}{\pi}\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{a}(b-y)\right]\sinh\left(\dfrac{n\pi}{a}y'\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x'\right)}{n\sinh\left(\dfrac{n\pi}{a}b\right)} & y'<y\leq b\end{cases}$$

(۱۲_۶۲)

مسلماً این تابع کاملاً هم‌ارز تابع به‌دست آمده در مثال ۱۲_۵_۸ است. هر دو تابع گرین به‌ازای تمام مقادیر x و y در ناحیهٔ مربع مستطیلی $۰\leq y\leq b$ ،$۰\leq x\leq a$، جز در $(x,y)=(x',y')$، همگرا هستند؛ اما ممکن است آهنگ همگرایی برای دو تابع فرق کند. به‌طور مشخص می‌توانیم این حکم را از معادلهٔ (۱۲_۶۲) به‌ازای $y>y'$ ملاحظه کنیم. توجه کنید که این سری، بسطی به سری فوریه است که می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$G=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n(y,y';x')\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

که در آن a_n ضریب بسط است که به چند پارامتر بستگی دارد. آهنگ همگرایی این سری از آهنگی که با آن ضرایب به‌ازای مقادیر بزرگ n به سمت صفر میل کنند، تعیین می‌شود. به‌ازای چنین مقادیری از n داریم:

$$a_n\approx\frac{\frac{۱}{۲}\exp\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right]\frac{۱}{۲}\exp\left[\frac{n\pi}{a}y'\right]}{\frac{۱}{۲}n\exp\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)$$

$$=\frac{e^{(n\pi/a)(y'-y)}}{۲n}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)$$

از این عبارت واضح است که، مستقل از مقدار x'، مادام که y دور از y' باشد، a_n به‌سرعت به صفر میل می‌کند. بنابراین، اگر $G(x,y;x',y')$ در نقطهٔ (x,y) که مختصهٔ y آن دور از y' قرار دارد، مورد نظر ما باشد، در این‌صورت بسط مناسب، عبارت است از همان بسط (۱۲_۶۲)؛

یعنی، بسطی است برحسب ویژه‌توابع x. از سوی دیگر (و این مطلب را می‌توان از طریق تشابه دقیق با حالت بالا نشان داد) اگر تابع گرین در یک نقطهٔ (x, y) مورد نظر ما باشدکه مختصهٔ x آن دور از نقطهٔ تکینهٔ (x', y') واقع است، در این‌صورت بسط مناسب، بسطی است که در مثال ۱۲ـ۵ـ۸ داده شده است.

در این بحث توجه خود را روی روش عملگری به مختصات دکارتی متمرکزکردیم که در آن عملگر تمام، مثلاً $\nabla^{۲}$، حاصل‌جمع عملگرهای مشتق با ضرایب ثابت بود. در سایر دستگاههای مختصات، روش کار به این سرراستی نیست (که از مثالهای ۱۲ـ۵ـ۸ و ۱۲ـ۵ـ۹ برمی‌آید). در چنین مواردی، می‌توان یک مجموعه عملگر (دیفرانسیلی) خودالحاقی $\{\mathbb{M}_i\}_{i=۱}^{k}$، چنان معرفی کرد که به‌ازای تمام مقادیر $i, j = ۱, \ldots, k$ داشته باشیم $[\mathbb{M}_i, \mathbb{M}_j] = ۰$ و $\mathbb{L} = \mathbb{L}_۱\mathbb{M}_۱ + \cdots + \mathbb{L}_k\mathbb{M}_k$ که در آن $\mathbb{L}$ عملگر تمام است و $\{\mathbb{L}_i\}_{i=۱}^{k}$ از عملگری دیفرانسیلی تشکیل شده‌اند که روی متغیرهایی عمل می‌کنند که $\mathbb{M}_i$ها روی آن تأثیر ندارند. در این‌صورت می‌توانیم یک مجموعهٔ کامل از ویژه‌توابع $\{u_j(\mathbf{y})\}_{j=۱}^{\infty}$ چنان اختیار کنیم که:

$$\mathbb{M}_i u_j(\mathbf{y}) = \lambda_{ij} u_j(\mathbf{y})$$

که در آن $\mathbf{y}$ مجموعه متغیرهایی است که $\mathbb{M}_i$ روی آنها عمل می‌کند. به‌عنوان یک تغییر جزئی در نمادگذاری، $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را به‌عنوان شناسه‌های تابع گرین کل در نظر می‌گیریم و آن را برحسب $u_j(\mathbf{y})$ بسط می‌دهیم:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=۱}^{\infty} g_n(\mathbf{x}, \mathbf{r}') u_n(\mathbf{y}) \qquad (۱۲\text{ـ}۶۳)$$

در اینجا، $\mathbf{x}$ مجموعهٔ متغیرهایی است که $\mathbb{L}_i$ها روی آنها عمل می‌کنند. نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}')}{J_۱(\mathbf{x}')J_۲(\mathbf{y}')}$$

$$= \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{J_۱(\mathbf{x}')} \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(\mathbf{y}) u_n^*(\mathbf{y}') \qquad (۱۲\text{ـ}۶۴)$$

که در آن $J_۱(\mathbf{x}')J_۲(\mathbf{y}') \equiv J(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ ژاکوبی تبدیل از دستگاه مختصات دکارتی $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ به مختصات منحنی‌الخط $(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ است.

توجه کنید که قسمتی از ژاکوبی که به متغیرهای $\mathbf{y}$ بستگی دارد، حذف شده است. این عمل ناشی از این واقعیت است که $J_2(\mathbf{y})$ واقعاً یک تابع وزن برای انتگرالهای روی $\mathbf{y}$ است. با نشاندن (۱۲ـ۶۳) و (۱۲ـ۶۴) در $\mathbb{L} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}\mathbb{G} &= (\mathbb{L}_1\mathbf{M}_1 + \mathbb{L}_2\mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbb{L}_k\mathbf{M}_k)\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\mathbf{x},\mathbf{r}')u_n(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[(\mathbb{L}_1\mathbf{M}_1 + \cdots + \mathbb{L}_k\mathbf{M}_k)u_n(\mathbf{y})]g_n(\mathbf{x},\mathbf{r}') \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[(\lambda_{1n}\mathbb{L}_1 + \cdots + \lambda_{kn}\mathbb{L}_k)g_n(\mathbf{x},\mathbf{r}')]u_n(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{J_1(\mathbf{x}')}u_n^*(\mathbf{y}')\right]u_n(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

از راست‌هنجاری $u_n(\mathbf{y})$ می‌رسیم به

$$(\lambda_{1n}\mathbb{L}_1 + \lambda_{2n}\mathbb{L}_2 + \cdots + \lambda_{kn}\mathbb{L}_k)g_n(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{y}') = \frac{u_n^*(\mathbf{y}')}{J_1(\mathbf{x}')}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (۱۲\text{ـ}۶۵)$$

این معادله به‌وضوح نشان می‌دهد که تمام متغیرهای $\mathbf{y}$ حذف شده‌اند. با اعمال همان روش به عملگرهای سمت چپ، می‌توان تعداد باز هم بیشتری از متغیرها را کاهش داد تا سرانجام یک عملگر یک‌بعدی به‌دست آید، که بتوان روش فصل یازدهم را در مورد آن به‌کار بست.

مثال ۱۲ـ۵ـ۱۰: لاپلاسی را در مختصات کروی در نظر بگیرید:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$$

با تعریف:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_1 u = u \qquad \mathbb{L}_1 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\
&\mathbf{M}_2 u = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \qquad \mathbb{L}_2 u = \frac{1}{r^2}u
\end{aligned} \quad (۱)$$

لاپلاسی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 = \mathbb{L}_1\mathbb{M}_1 + \mathbb{L}_2\mathbb{M}_2$$

که در آن $[\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2] = 0$؛ زیرا $\mathbb{M}_1$ عملگر همانی است. ویژه‌توابع مشترک $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ همان ویژه‌توابع $\mathbb{M}_2$ هستند. اما $\mathbb{M}_2$ همان (منفی) عملگر تکانهٔ زاویه‌ای است که در فصل هشتم در خصوص آن بحث کردیم، و ویژه‌توابع آن هماهنگهای کروی‌اند. بنابراین، داریم:

$$\mathbb{M}_2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

حال تابع گرین را مانند معادلهٔ (۱۲ـ۶۳) می‌نویسیم:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} g_{lm}(r; r', \theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

همچنین تابع دلتا را به این قرار می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi')}{r'^2 \sin\theta'} \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r'^2} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi)Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

که در آن از کامل بودن هماهنگهای کروی بهره برده‌ایم:

$$\frac{\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi')}{\sin\theta'} = \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi)Y^*_{lm}(\theta', \varphi')$$

با جایگزین کردن روابط بالا در $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}\nabla^2 G &= (\mathbb{L}_1\mathbb{M}_1 + \mathbb{L}_2\mathbb{M}_2) \sum_{l,m} g_{lm}(r; r', \theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l,m} \{[\mathbb{L}_1 - l(l+1)\mathbb{L}_2]g_{lm}(r, r'; \theta', \varphi')\}Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r'^2} \sum_{l,m} Y^*_{lm}(\theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

از تعامد $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ها می‌رسیم به:

$$[\mathbb{L}_1 - l(l+1)]g_{lm}(r;r',\theta',\varphi') = \frac{\delta(r-r')}{r'^2}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

این رابطه نشان می‌دهد که جزء زاویه‌ای g_{lm} همان $Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$ است. با جدا کردن این جزء از وابستگی r' و r و قرار دادن مقدار به‌جای $\mathbb{L}_1$ و $\mathbb{L}_2$، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg_{lm}}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}g_{lm} = \frac{\delta(r-r')}{r^2} \qquad (۲)$$

که در آن g_{lm} فقط تابعی از r و r' است. می‌توان از روش فصل یازدهم برای حل معادلهٔ (۲) استفاده کرد (تمرین ۱۲ـ۵ـ۵). ●

همان‌طوری که شاید پی برده باشید، تشابه قابل‌توجهی بین روش عملگری و روش جداسازی متغیرها برقرار است. در واقع، روش عملگری یک روش فانتزی برای جداسازی متغیرهاست که در آن روی جنبه عملگری تأکید شده است.

تمرینها

۱۲ـ۵ـ۱ نشان دهید به‌ازای $m = ۳$، عبارت $G_s(\mathbf{r})$ که توسط معادلهٔ (۱) در مثال ۱۲ـ۵ـ۲ داده شده است، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G_s(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$$

۱۲ـ۵ـ۲ جزء تکینهٔ تابع گرین تأخیری و تابع گرین پیشرونده را برای معادلهٔ موج در سه‌بعد پیدا کنید.

۱۲ـ۵ـ۳ نشان دهید تابع گرین [معادلهٔ (۲) در مثال ۱۲ـ۵ـ۴] به‌دست آمده از مقدار اصلی انتگرال روی ω، برای معادلهٔ موج در سه‌بعد فقط در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن صدق می‌کند.

۱۲ـ۵ـ۴ بسط ویژه‌تابع تابع گرین برای مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله برای عملگر لاپلاسی دوبعدی را که برای آن ناحیهٔ مورد نظر قسمت داخلی دایره‌ای به شعاع a است، پیدا کنید.

۱۲ـ۵ـ۵ محاسبات مثال ۱۲ـ۵ـ۱۰ را کامل کنید و تابع گرین برای لاپلاسی با شرایط مرزی دیریکله روی دو کرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای a و b $(a < b)$ را به‌دست آورید. حالتی را در نظر بگیرید که در آن $a \to 0$ و $b \to \infty$، و نتیجه را با جزء تکینهٔ تابع گرین برای لاپلاسی مقایسه کنید.

مسائل

۱۲ـ۱ منحنیهای مشخصه را برای معادلهٔ موج دوبعدی و معادلهٔ پخش دوبعدی پیدا کنید.

۱۲ـ۲ منحنیهای مشخصه برای $\mathbb{L}[u] = \partial u/\partial x$ را بیابید.

۱۲ـ۳ نشان دهید، x_i در (۱۲ـ۱۳) کره‌ای mبعدی به شعاع r را توصیف می‌کند، یعنی $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = r^2$.

۱۲ـ۴ حجم یک کرهٔ mبعدی را پیدا کنید.

۱۲ـ۵ تابع گرین برای مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله در دو بعد را بیابید، در صورتی‌که D در نیم‌صفحهٔ بالایی قرار داشته باشد و ∂D محور xها باشد.

۱۲ـ۶ با استفاده از روش تصویری، تابع گرین را برای قسمت داخلی یک کره به شعاع a در دو و سه بعد پیدا کنید.

۱۲ـ۷ معادلات (۱۲ـ۵۳) را به‌دست آورید.

۱۲ـ۸ با استفاده از روشی که برای معادلات سهموی ارائه شد، معادلهٔ (۱۲ـ۵۵) را به‌دست آورید.

۱۲ـ۹ با استفاده از روش تبدیل فوریه، جزء تکینهٔ تابع گرین را برای $\partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2$ و $\partial/\partial t - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial/\partial z^2$ به‌دست آورید. نتایج خود را با آنچه در مثال ۱۲ـ۵ـ۳ به‌دست آمد، مقایسه کنید.

۱۲ـ۱۰ مستقیماً نشان دهید $G^{(\mathrm{ret})}$ و $G^{(\mathrm{adv})}$ هر دو در $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$ در سه بعد صدق می‌کنند.

۱۲ـ۱۱ معادلهٔ (۷) در مثال ۱۲ـ۴ـ۲ را از معادلهٔ (۶) به‌دست آورید.

۱۲ـ۱۲ با استفاده از معادلهٔ (۸) در مثال ۱۲ـ۴ـ۲، نشان دهید اگر $g(\theta', \varphi') = V_0$، پتانسیل در هر نقطه در داخل کره V_0 است.

۱۲ـ۱۳ مثال ۱۲ـ۵ـ۱ را برای $m = 2$ تکرار کنید.

۱۲ـ۱۴ یک جعبهٔ مکعب مستطیلی به اضلاع a، b، و c واقع در یک هشتم اول که یک رأس آن در مبدأ قرار دارد، در نظر بگیرید. فرض کنید D معرف داخل این جعبه باشد. (الف) نشان دهید صفر نمی‌تواند ویژه‌مقدار عملگر لاپلاسی با شرایط مرزی دیریکله روی ∂D باشد. (ب) تابع گرین برای این مسئله مقدار مرزی دیریکله را پیدا کنید.

۱۲ـ۱۵ نشان دهید نتایج مثالهای ۱۲ـ۵ـ۶ و ۱۲ـ۵ـ۸ هم‌ارزند.

۱۲ـ۱۶ تابع گرین برای معادلهٔ هلمهولتز $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ روی مستطیل $0 \le x \le a$، $0 \le y \le b$ را پیدا کنید.

۱۲ـ۱۷ جزء تکینهٔ تابع گرین یک‌بعدی برای عملگر $ad^2/dx^2 + b$ را، که در آن $a > 0$ و $b > 0$ پیدا کنید.

۱۲ـ۱۸ تابع گرین عملگر لاپلاسی دوبعدی مناسب برای شرایط مرزی نویمان روی مستطیل $0 \le y \le b$ ،$0 \le x \le a$ را محاسبه کنید.

۱۲ـ۱۹ تابع گرین‌ـدیریکله سه‌بعدی را برای عملگر کلاین‌ـگوردون استاتیک $\nabla^2 - k^2$ را در نیم‌صفحهٔ $z \ge 0$ پیدا کنید.

۱۲ـ۲۰ تابع گرین‌ـنویمان سه‌بعدی برای $\nabla^2 - k^2$ را در نیم‌صفحهٔ $0 \le z$ پیدا کنید.

۱۲ـ۲۱ نشان دهید تابع گرین‌ـدیریکله دوبعدی برای عملگر کلاین‌ـگوردون استاتیک دوبعدی $\nabla^2 - k^2$ در نوار نامحدود $0 \le x \le a$ ،$-\infty \le y \le +\infty$ عبارت است از:

$$G(x, y; x', y') = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n |y-y'|}}{\lambda_n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)$$

که در آن $\lambda_n^2 = k^2 + (n\pi/a)^2$ فرض شده است در حد $|y| \to \infty$، داریم $G(x, y; x', y') \to 0$.

۱۲ـ۲۲ با استفاده از روش عملگری تابع گرین‌ـدیریکله دوبعدی برای عملگر دوبعدی $\nabla^2 - k^2$ روی مربع مستطیل $0 \le y \le b$ و $0 \le x \le a$. را محاسبه کنید. همچنین یک بسط ویژه‌تابعی برای این تابع گرین پیدا کنید.

۱۲ـ۲۳ با استفاده از روش عملگری تابع گرین‌ـدیریکله سه‌بعدی برای لاپلاسی در یک استوانه با مقطع دایره به شعاع a و ارتفاع h را بیابید.

۱۲ـ۲۴ جزء تکینهٔ تابع گرین برای عملگر سه‌بعدی شرودینگر آزاد، به این قرار را بیابید:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$$

$\hbar$ و μ ضرایب ثابت‌اند.

۱۲ـ۲۵ با استفاده از روش عملگری نشان دهید تابع گرین برای معادلهٔ هلمهولتز $\nabla^2 + k^2$ در سه‌بعد عبارت است از:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} j_l(kr_<) h_l(kr_>) Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm}(\theta', \varphi')$$

که در آن، $r_<$ $(r_>)$ مختصهٔ کوچکتر (بزرگتر) در میان r و r' است و j_l و h_l به‌ترتیب توابع بسل و هانکل کروی‌اند. هیچ شرط مرزی صریحی، جز اینکه در $r = 0$ توابع منظم باشند و به‌ازای

$|\mathbf{r}| \to \infty$، داشته باشیم $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \to ۰$، فرض نشده است. حال اتحاد زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{۴\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = ik\sum_{l,m} j_l(kr_<)h_l(kr_>)Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

۱۲ـ۲۶ از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲ـ۲۵ بهره‌گیرید و بسط موج تخت زیر را به‌دست آورید معادله (۱۰ـ۲۹):

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = ۴\pi\sum_{l,m} i^l J_l(kr)Y_{lm}(\theta,\varphi)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

که در آن θ' و φ' مختصات زاویه‌ای $\mathbf{k}$ هستند. [راهنمایی: فرض کنید $|\mathbf{r}|' \to \infty$ و از رابطهٔ:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (\mathbf{r}'^{۲}+\mathbf{r}^{۲}-۲\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{۱/۲} \to r' - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r'} \equiv r' - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}{k}$$

و رفتار مجانبی $h^{(۱)}_l(z)$ برای مقادیر بزرگ یعنی، $h^{(۱)}_l(z) \to (۱/z)e^{i[z+(l+۱)(\pi/۲)]}$ استفاده کنید.]

۱۲ـ۲۷ تابع گرین تأخیری برای عملگر در دو بعد را محاسبه کنید و نشان دهید که این تابع عبارت است از:

$$G^{(\mathrm{ret})}_{\mathrm{s}}(\mathbf{r},t) = \frac{\theta(t)}{۲\pi\sqrt{t^{۲}-r^{۲}}}$$

حال، از این نتیجه سود جویید و تابع گرین زیر برای ابعاد زوج را به‌دست آورید:

$$G^{(\mathrm{ret})}_{\mathrm{s}}(\mathbf{r},t) = \frac{\theta(t)}{۲\pi}\left(-\frac{۱}{۲\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{n-۱}\left[\frac{۱}{\sqrt{t^{۲}-r^{۲}}}\right] \qquad n = m/۲$$

۱۳

معادلات انتگرالی

مسئلهٔ زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید جرم نقطه‌ای m روی یک منحنی کاملاً هموار که در صفحهٔ yz قرار دارد، تحت تأثیر گرانش، که در راستای منفی z وارد می‌آید، حرکت کند. فرض کنید معادلهٔ منحنی عبارت باشد از $y = F(z)$. بنابر پایستگی انرژی می‌رسیم به:

$$\frac{۱}{۲}m\dot{z}^۲ + \frac{۱}{۲}m\dot{y}^۲ + mgz = E$$

با قرار دادن $\dot{y} = (dF/dz)\dot{z}$ در معادله بالا، $\dot{z}$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{\frac{۲E}{m} - ۲gz}}{\sqrt{۱ + (dF/dz)^۲}} \equiv \frac{\sqrt{E/mg - z}}{u(z)} \qquad (۱\_۱۳)$$

که در آن

$$u(z) \equiv \sqrt{۱ + (dF/dz)^۲/۲g}$$

اگر سرعت اولیهٔ جرم نقطه‌ای صفر باشد، در این‌صورت E/mg همان ارتفاع اولیهٔ $z_\circ$ است. از معادلهٔ (۱۳ـ۱) داریم

$$t = -\int_h^{z_\circ} \frac{u(z)}{\sqrt{z_\circ - z}} dz$$

که در آن h ارتفاعی است که ذره در مدت زمان t به آن می‌رسد. برای سهولت، h را صفر می‌گیریم و معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$t = -\int_\circ^z \frac{u(\eta)}{\sqrt{z - \eta}} d\eta \equiv -f(z) \qquad (۱۳ـ۲)$$

وابستگی t به ارتفاع اولیه را با انتخاب z به‌عنوان ارتفاع، مورد تأکید قرار داده‌ایم.

آیا اگر $f(z)$، یعنی وابستگی زمانی حرکت به‌صورت تابعی از ارتفاع اولیه به‌ازای ارتفاعهای اولیه مختلف داده شده باشد، می‌توانیم $u(z)$، و از این‌رو منحنی، را پیدا کنیم؟ چنین سؤالی معادلهٔ (۱۳ـ۲) را به یک معادلهٔ انتگرالی تبدیل می‌کند؛ معادله‌ای که در آن انتگرال یک تابع مجهول داده شده است و از آن برای یافتن خود تابع بهره گرفته می‌شود.

۱۳ـ۱ رده‌بندی معادلات انتگرالی

معادلهٔ (۱۳ـ۲)، به نام معادلهٔ انتگرالی آبل، تنها یکی از انواع فراوان معادلات انتگرالی است. چند نمونهٔ دیگر از آنها را در زیر می‌آوریم:

مثال ۱۳ـ۱ـ۱: تبدیل فوریهٔ تابع زیر را می‌توان یک معادلهٔ انتگرالی در نظر گرفت:

$$\tilde{f}(k) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

که در آن $\tilde{f}(k)$ معلوم است و باید به کمک آن معادلهٔ $f(x)$ یافته شود. البته، جواب این معادله، تبدیل وارون است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

مثال ۱۳ـ۱ـ۲: یک مسئلهٔ ویژه‌مقداری با شرایط مرزی دیریکله را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \lambda u \quad \mathbf{x}\in \mathrm{D} \\ u(\mathbf{x}_b) &= 0 \quad \mathbf{x}_b \in \partial \mathrm{D} \end{aligned} \qquad (1)$$

اگر λu را جملهٔ ناهمگن معادلهٔ دیفرانسیل بگیریم، بلافاصله می‌توانیم (۱) را حل کنیم:

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y})$$

که در آن $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ تابع گرین مناسب برای شرایط مرزی است. این عبارت، معادله‌ای انتگرالی است که در آن تابع مجهول u هم در داخل و هم در خارج انتگرال ظاهر شده است. ●

مثال ۱۳ـ۱ـ۳: مسئلهٔ مقدار مرزی دیریکله در m بعد به این قرار

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] &= 0 \quad \mathbf{x}\in \mathrm{D} \\ u(\mathbf{x}_b) &= f(\mathbf{x}_b) \quad \mathbf{x}_b \in \partial \mathrm{D} \end{aligned} \qquad (1)$$

را می‌توان یک معادلهٔ انتگرالی در $m - 1$ بعد تبدیل کرد.

فرض کنید $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ تابع گرین برای $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ با شرایط مرزی دیریکله باشد. معادلهٔ انتگرالی $(m - 1)$ بعدی معادل با (۱) عبارت است از

$$\int_{\partial \mathrm{D}} G(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) da_y = f(\mathbf{x}_b) \quad \mathbf{x}_b \in \partial \mathrm{D}$$

که در آن $\eta(\mathbf{y})$ تابعی مجهول است. اگر بتوانیم $\eta(\mathbf{y})$ را بیابیم، حل مسئلهٔ مقدار مرزی اولیه به این صورت است:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial \mathrm{D}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) da_y \qquad (2)$$

چون به‌ازای $\mathbf{x}\in \mathrm{D}$ غیرواقع بر روی مرز، داریم:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u(\mathbf{x})] = \int_{\partial \mathrm{D}} \mathbb{L}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) da_y = \int_{\partial \mathrm{D}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}) da_y = 0$$

از سوی دیگر، اگر $\mathrm{x}\in\partial\mathrm{D}$، در این‌صورت $u(\mathbf{x})$ به‌صورتی که در (۲) داده شده است آن‌چنانکه باید، به $u(\mathbf{x}_\mathrm{b}) = f(\mathbf{x}_\mathrm{b})$ تبدیل خواهد شد. ●

معادلات انتگرالی را به دو دستهٔ عمده می‌توان تقسیم کرد. معادلاتی که دارای حد متغیر انتگرال‌گیری‌اند، معادلات ولترا نام دارند. معادلهٔ انتگرالی آبل نمونه‌ای از این نوع معادله است. اگر حدود انتگرال‌گیری ثابت باشند، معادلهٔ انتگرالی را معادلهٔ فردهولم می‌نامند. اگر تابع مجهول فقط در داخل انتگرال باشد، معادلهٔ انتگرالی را نوع اول می‌گویند. معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول در خارج انتگرال است، نوع دوم هستند. چهار نوع معادلهٔ انتگرالی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

معادلهٔ ولترای نوع اول	$\int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x)$
معادلهٔ فردهولم نوع اول	$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$
معادلهٔ ولترای نوع دوم	$u(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x)$
معادلهٔ فردهولم نوع دوم	$u(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$

در هر حالت ، $K(x,t)$ هستهٔ معادلهٔ انتگرالی نامیده می‌شود. اگر هستهٔ معادلهٔ اولترا به $\theta(x-t)K(x,t)$ تبدیل شود، معادله به یک معادلهٔ فردهولم تبدیل می‌شود. بنابراین، فقط معادلات انتگرالی فردهولم را مورد بحث قرار خواهیم داد.

به حل معادلهٔ فردهولم، به قرار زیر اقدام می‌کنیم

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad \text{(۱۳ـ۳الف)}$$

می‌توانیم این معادله را به‌صورت زیر خلاصه کنیم

$$|\mathrm{u}\rangle - \lambda\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle \qquad \text{(۱۳ـ۳ب)}$$

این معادله از نوع دوم و تنها نوعی است که ما در اینجا در خصوص آن بحث خواهیم کرد. معادلات انتگرالی نوع اول خیلی دشوارترند، اما خوشبختانه در کاربردهای فیزیکی به‌ندرت ظاهر می‌شوند.

ثابت λ در اینجا برای سهولت معرفی شده است. بعداً خواهیم دید که این کمیت ویژه‌مقدار $\mathbb{K}$ است.

باید گفت که درست همان‌طوری که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (شامل بیش از یک متغیر مستقل) داریم، معادلات انتگرالی در ابعاد بالاتر را نیز داریم. با تعمیم (۱۳ـ۳الف) به m بعد، می‌رسیم به

$$u(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \qquad (۱۳\text{ـ}۴)$$

که در آن D ناحیه‌ای معین در m است و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بردارهای m بعدی‌اند.

۱۳ـ۲ جوابهای سری نویمان

یکی از روشهای حساب شده و نظام‌مند حل معادله (۱۳ـ۳ب)، مستلزم تقریبهای متوالی است. اگر این معادله را به این صورت بنویسیم

$$|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle + \lambda \mathbb{K} |\mathrm{u}\rangle \qquad (۱۳\text{ـ}۵\text{الف})$$

می‌توانیم آن را به شرح زیر تعبیر کنیم. اختلاف بین $|\mathrm{u}\rangle$ و $|\mathrm{f}\rangle$ عبارت است از $\lambda\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle$. اگر $\lambda\mathbb{K}$ نبود، دو بردار $|\mathrm{u}\rangle$ و $|\mathrm{f}\rangle$ مساوی می‌بودند. اثر $\lambda\mathbb{K}$ این است که $|\mathrm{u}\rangle$ را چنان تغییر می‌دهد که وقتی نتیجهٔ حاصل به $|\mathrm{f}\rangle$ افزوده می‌شود، بردار $|\mathrm{u}\rangle$ را می‌دهد. از این‌رو، به‌عنوان تقریب اولیه، $|\mathrm{u}\rangle$ را مساوی $|\mathrm{f}\rangle$ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$|\mathrm{u}_0\rangle = |\mathrm{f}\rangle$$

که در آن اندیس مرتبهٔ تقریب را نشان می‌دهد (در اینجا، مرتبه صفرم است، زیرا $\lambda\mathbb{K} = 0$). برای یافتن تقریب بهتر، به‌جای $|\mathrm{u}\rangle$ در عبارت سمت راست (۱۳ـ۵الف)، مقدار قرار می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$|\mathrm{u}_1\rangle = |\mathrm{f}\rangle + \lambda \mathbb{K} |\mathrm{f}\rangle \qquad (۱۳\text{ـ}۵\text{ب})$$

باز هم اگر به‌جای $|\mathrm{u}\rangle$ در عبارت طرف دوم (۱۳ـ۵الف) مقدار $|\mathrm{u}_1\rangle$ را قرار دهیم، به تقریب بهتری خواهیم رسید

$$|\mathrm{u}_2\rangle = |\mathrm{f}\rangle + \lambda \mathbb{K}(|\mathrm{f}\rangle + \lambda \mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle) = |\mathrm{f}\rangle + \lambda \mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle + \lambda^2 \mathbb{K}^2 |\mathrm{f}\rangle$$

اکنون شگرد ما آشکار و واضح است. وقتی $\langle u_n|$، تقریب nام، به‌دست آمد، می‌توانیم با جایگزین کردن در سمت راست (۱۳ـ۵الف)، $\langle u_{n+1}|$ را به‌دست آوردیم.

قبل از ادامهٔ بحث، معادلات بالا را به‌صورت انتگرالی می‌نویسیم. برای (۱۳ـ۵ب) داریم

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt$$

با جایگزین کردن این مقدار در (۱۳ـ۳الف)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b ds\, K(x,s) u_1(s) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b ds\, K(x,s) \left[f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) f(t) dt \right] \qquad \text{(۱۳ـ۵ج)} \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b ds\, K(x,s) f(s) + \lambda^2 \int_a^b dt \left[\int_a^b K(x,s) K(s,t) ds \right] f(t) \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم

$$K^2(x,t) \equiv \int_a^b K(x,s) K(s,t) ds$$

به این اعتبار، معادله (۱۳ـ۵ج) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b ds\, K(x,s) f(s) + \lambda^2 \int_a^b dt\, K^2(x,t) f(t)$$

با جایگزین کردن این تابع در عبارت سمت راست (۱۳ـ۳الف)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} u_3(x) =& f(x) + \lambda \int_a^b dt\, K(x,t) f(t) + \lambda^2 \int_a^b dt\, K^2(x,t) f(t) \\ &+ \lambda^3 \int_a^b dt\, K^3(x,t) f(t) \end{aligned}$$

که در آن

$$K^3(x,t) \equiv \int_a^b ds_1 \int_a^b ds_2 K(x,s_1) K(s_1,s_2) K(s_2,t)$$

می‌توان به عبارتهای مشابهی برای $u_۴(x)$ و $u_۵(x)$ و $\cdots$ دست یافت. می‌توان انتگرالهایی که "توانهای" مختلف K را بیان می‌کنند، با استفاده از نمادگذاری دیراک و بردارهای با اندیسهای پیوسته، که در فصل پنجم مورد بحث قرار گرفت، به‌دست آورد. بنابراین، مثلاً:

$$\begin{aligned} K^۲(x,t) &\equiv \langle \mathbf{x}|\mathbb{K}^۲|\mathrm{t}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbb{K}\mathbb{1}\mathbb{K}|\mathrm{t}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}|\mathbb{K}\left(\int_a^b |\mathrm{s}\rangle\langle \mathrm{s}|ds\right)\mathbb{K}|\mathrm{t}\rangle \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{x}|\mathbb{K}|\mathrm{s}\rangle\langle \mathrm{s}|\mathbb{K}|\mathrm{t}\rangle ds = \int_a^b K(x,s)K(s,t)ds \end{aligned}$$

همواره می‌توانیم از این روش بهره گیریم و معادله‌ای را که به‌صورت کت نوشته شده است، به معادله‌ای برحسب توابع و انتگرالها تبدیل کنیم. از این‌رو، می‌توانیم توجه خود را به معادلهٔ (۱۳ـ۳ب) و تقریبهای مختلف آن معطوف کنیم.

با ادامهٔ این روند تا تقریب nام، به آسانی می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} |\mathrm{u}_n\rangle &= |\mathrm{f}\rangle + \lambda\mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle + \cdots + \lambda^n\mathbb{K}^n|\mathrm{f}\rangle \\ &= \sum_{j=۰}^{n}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle \end{aligned} \qquad \text{(۱۳ـ۶الف)}$$

که شکل انتگرالی آن به‌صورت زیر است

$$u_n(x) = \sum_{j=۰}^{n}\lambda^j\int_a^b K^j(x,t)f(t)dt \qquad \text{(۱۳ـ۶ب)}$$

در اینجا، $K^j(x,t)$، با روندی تکراری، به قرار زیر تعریف می‌شود:

$$K^{۰}(x,t) = \delta(x-t) \qquad K^j(x,t) = \int_a^b K(x,s)K^{j-۱}(s,t)ds \qquad \text{(۱۳ـ۶ج)}$$

امید ما این است که در حد $n \to \infty$، داشته باشیم: $|\mathrm{u}_n\rangle \to |\mathrm{u}\rangle$. از این‌رو، محتاطانه می‌نویسیم

$$|\mathrm{u}\rangle = \sum_{j=۰}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle \qquad \text{(۱۳ـ۷الف)}$$

و

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \int_a^b K^j(x,t) f(t) dt \qquad (\text{۱۳ـ۷ب})$$

سری معادلات (۱۳ـ۷) را سری نویمان می‌نامند.

اولاً، توجه کنید که معادلات (۱۳ـ۷) به طور صوری در معادلات (۱۳ـ۳) صدق می‌کنند. با نشاندن (۱۳ـ۷الف)، مثلاً در (۱۳ـ۳ب)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}|\mathrm{u}\rangle - \lambda\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle &= \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle - \lambda\mathbb{K}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle \\ &= |\mathrm{f}\rangle + \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle - \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^{j+1}|\mathrm{f}\rangle \\ &= |\mathrm{f}\rangle\end{aligned}$$

زیرا دو مجموع آخر یکدیگر را حذف می‌کنند. ثانیاً، سری نمایی در (۱۳ـ۷الف) را می‌توان مستقیماً از (۱۳ـ۳ب) به‌دست آورد چرا که معادلهٔ اخیر را می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$(\mathbb{1} - \lambda\mathbb{K})|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle$$

که دارای "جوابی" به‌صورت زیر است

$$|\mathrm{u}\rangle = (\mathbb{1} - \lambda\mathbb{K})^{-1}|\mathrm{f}\rangle \equiv \left(\frac{1}{\mathbb{1} - \lambda\mathbb{K}}\right)|\mathrm{f}\rangle$$

معادلهٔ (۱۳ـ۷الف) همان بسط سری هندسی $1/(\mathbb{1} - \lambda\mathbb{K})$ است. سرانجام، معادلات (۱۳ـ۷) تنها وقتی معنی دارند که سریها، به معنایی که هم اکنون تشریح می‌کنیم، همگرا باشند.

سری (۱۳ـ۷الف) همگرا می‌شود اگر نرم آن متناهی باشد. با توجه به نامساوی مثلثی می‌توانیم بنویسیم

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \| (\lambda\mathbb{K})^j|\mathrm{f}\rangle \|$$

به این ترتیب، اگر سری (اعداد) سمت راست در اینجا همگرا شود، سری (۱۳ـ۷الف) نیز همگرا خواهد شد. چون عبارت سمت راست شامل یک بردار $\langle \mathrm{f}|$ است، همگرایی به ماهیت $\langle \mathrm{f}|$ بستگی دارد. یعنی، باید برای هر $\langle \mathrm{f}|$ جدید همگرایی سری را بیازماییم. خوب خواهد بود اگر بتوانیم آزمونی مطرح کنیم که از $\langle \mathrm{f}|$ مستقل باشد. می‌توانیم این کار را با استفاده از مفهوم نرم یک عملگر (تعریف ۱۱ـ۴ـ۲) انجام دهیم. یادآوری می‌کنیم که عملگر کراندار $\mathbb{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{V})$ عبارت است از عملگری با این خاصیت که به‌ازای $M \geq 0$ داشته باشیم

$$\| \mathbb{A}|\mathrm{u}\rangle \| \leq M \, \| \mathbf{u} \| \qquad \forall |\mathrm{u}\rangle \in \mathscr{V}$$

کوچکترین M همان نرم $\mathbb{A}$ است. بنابراین، داریم

$$\| \mathbb{A}|\mathrm{u}\rangle \forall \leq \| \mathbb{A} \| \, \| \mathbf{u} \|$$

نامساوی متناظر برای $\mathbb{K}$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد. با گرفتن $K(x,t)$ به مثابه یک تابع انتگرال‌پذیر مربعی از x و t، یعنی، با فرض:

$$\int_a^b dx \int_a^b [K(x,t)]^2 dt \equiv B^2 < \infty$$

می‌توانیم عبارت زیر را به‌صورت ضرب داخلی K (فقط به عنوان تابعی از t) و f تلقی کنیم:

$$[\mathbb{K}f(x)]^2 \equiv \left[\int_a^b k(x,t) f(t) dt\right]^2$$

اکنون می‌توانیم نامساوی شوارتز را در مورد این ضرب داخلی به‌کار بریم و بنویسیم:

$$[g(x)]^2 \equiv [\mathbb{K}f(x)]^2 \leq \| f \|^2 \left\{ \int_a^b [K(x,t)]^2 dt \right\}$$

با انتگرال‌گیری طرفین نسبت به x، خواهیم داشت:

$$\int_a^b [g(x)]^2 dx \leq \| f \|^2 \int_a^b dx \int_a^b dt [K(x,t)]^2 dt$$

یا

$$\| g \|^{۲} \equiv \| \mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle \|^{۲} \leq \| f \|^{۲} B^{۲}$$

که سرانجام، نتیجهٔ آن به این قرار است:

$$\| \mathbb{K}|\mathrm{f}\rangle \| \leq \| f \| B \qquad \text{(۱۳ـ۸الف)}$$

این نامساوی را می‌توان به آسانی به‌صورت زیر تعمیم داد (تمرین ۱۳ـ۲ـ۱)

$$\| \mathbb{K}^{n}|\mathrm{f}\rangle \| \leq \| f \| B^{n} \qquad \text{(۱۳ـ۸ب)}$$

حال، به سری معادله (۱۳ـ۷) برمی‌گردیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=۰}^{\infty} (\lambda\mathbb{K})^{j}|\mathrm{f}\rangle \right\| &\leq \sum_{j=۰}^{\infty} \| (\lambda\mathbb{K})^{j}|\mathrm{f}\rangle \| = \sum_{j=۰}^{\infty} |\lambda|^{j} \, \| \mathbb{K}^{j}|\mathrm{f}\rangle \| \\ &\leq \sum_{j=۰}^{\infty} |\lambda|^{j} B^{j} \, \| f \| = \| f \| \sum_{j=۰}^{\infty} (|\lambda| B)^{j} = \frac{\| f \|}{۱ - |\lambda| B} \end{aligned}$$

اگر $|\lambda| B < ۱$. عبارت سمت راست وقتی معنی‌دار است که $\| f \| < \infty$؛ یعنی، وقتی $f(x)$ انتگرال‌پذیر مربعی باشد، و این همان چیزی است که فرض می‌کنیم.

فرمولبندی بالا را می‌توان به‌صورت یک قضیه جمعبندی کرد.

قضیهٔ ۱۳ـ۲ـ۱: معادلهٔ فردهولم نوع دوم، معادلهٔ (۱۳ـ۳)، دارای یک جواب یکتاست که توسط سری نویمان با همگرایی یکنواخت زیر داده می‌شود

$$u(x) = \sum_{j=۰}^{\infty} \lambda^{j} \int_{a}^{b} dt \; K^{j}(x,t) f(t)$$

مشروط بر اینکه

(الف) f انتگرال‌پذیر مربعی باشد

(ب) $\int_a^b dx \int_a^b dt [K(x,t)]^{۲} \equiv B^{۲} < \infty$

(ج) $|\lambda| B < ۱$ ■

مثال ۱۳ـ۲ـ۱: معادلهٔ انتگرالی زیر را در نظر بگیرید

$$u(x) - \int_{\circ}^{۱} K(x,t)u(t)dt = x$$

که در آن

$$K(x,t) = \begin{cases} x & \circ \le x < t \\ t & t < x \le ۱ \end{cases}$$

در اینجا، $۱ = \lambda$؛ از این‌رو اگر $۱ > B$، آنگاه یک جواب برای سری نویمان وجود دارد. حال $B^۲$ را محاسبه می‌کنیم. بهتر است K را برحسب تابع تتا بنویسیم:

$$K(x,t) = x\theta(t-x) + t\theta(x-t)$$

از این رابطه، می‌رسیم به:

$$K^۲(x,t) = x^۲\theta(t-x) + t^۲\theta(x-t)$$

زیرا $\theta^۲(x-t) = \theta(x-t)$ و $\theta(x-t)\theta(t-x) = \circ$. بنابراین، داریم:

$$B^۲ = \int_{\circ}^{۱} dx \int_{\circ}^{۱} dt\ K^۲(x,t) = \int_{\circ}^{۱} dt \int_{\circ}^{۱} dx\ x^۲ + \int_{\circ}^{۱} dx \int_{\circ}^{x} dt\ t^۲$$

$$= \int_{\circ}^{۱} dt \left(\frac{t^۳}{۳}\right) + \int_{\circ}^{۱} dx \left(\frac{x^۳}{۳}\right) = \frac{۱}{۶}$$

حاصل آن عبارت است از $B = ۱/\sqrt{۶}$، که کوچکتر از ۱ است. سری نویمان همگرا می‌شود، و داریم

$$u(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty} \int_{\circ}^{۱} K^j(x,t)f(t)dt$$

$$= \sum_{j=\circ}^{\infty} \int_{\circ}^{۱} K^j(x,t)tdt \equiv \sum_{j=\circ}^{\infty} u_j(x)$$

چند جملهٔ اول را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$u_0(x) = \int_0^1 K^0(x,t)t\,dt = \int_0^1 \delta(x-t)t\,dt = x$$

$$u_1(x) = \int_0^1 K(x,t)t\,dt = \int_0^1 [x\theta(t-x) + t\theta(x-t)]t\,dt$$

$$= x\int_x^1 t\,dt + \int_0^x t^2 dt = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$u_2(x) = \int_0^1 K^2(x,t)t\,dt = \int_0^1 [x^2\theta(t-x) + t^2\theta(x-t)]t\,dt$$

$$= -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$$

با افزودن این جملات، تقریبی برای $u(x)$ به‌دست می‌آوریم که به‌ازای $0 \leq x \leq 1$ صادق است.

$$u(x) \approx u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) = \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4}$$ ●

تمرینها

۱۳ـ۲ـ۱ نشان دهید:

$$\|\mathbb{K}^n f\| \leq B^n \|f\|$$

که در آن:

$$B^2 \equiv \int_a^b dx \int_a^b dt[K(x,t)]^2 \quad \text{و} \quad \|f\|^2 \equiv \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

[راهنمایی: از روش استقراء ریاضی بهره گیرید.]

۱۳ـ۲ـ۲ با استفاده از روش تقریبهای متوالی، معادله ولترای زیر را حل کنید:

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t)dt$$

۱۳ـ۳ جایگزین فردهولم

بحث معادلات انتگرالی، تا اینجا، با فرض وجود جواب، پیرامون این موضوع دور می‌زد که این جوابها را برحسب سری بیان کنیم. اکنون مسئلهٔ وجود جواب را بررسی می‌کنیم.

بهتر و لازم است که معادلهٔ انتگرالی و الحاقی آن را همزمان مورد بحث قرار دهیم. بنابراین، چهار معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$|\mathrm{u}\rangle - \lambda\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{f}\rangle \qquad \text{(۱۳ـ۹الف)}$$

$$|\mathrm{u}\rangle - \lambda\mathbb{K}|\mathrm{u}\rangle = ۰ \qquad \text{(۱۳ـ۹ب)}$$

$$|\mathrm{v}\rangle - \lambda^*\mathbb{K}^\dagger|\mathrm{v}\rangle = |\mathrm{h}\rangle \qquad \text{(۱۳ـ۱۰الف)}$$

$$|\mathrm{v}\rangle - \lambda^*\mathbb{K}^\dagger|\mathrm{v}\rangle = ۰ \qquad \text{(۱۳ـ۱۰ب)}$$

که در آن $\mathbb{K}^\dagger$، الحاقی $\mathbb{K}$، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\mathbb{K}^\dagger v(x) \equiv \int_a^b K^*(t,x)v(t)dt$$

و $f(x)$ و $h(x)$ توابع انتگرال‌پذیر مربعی دلخواه‌اند.

تحت چه شرایطی معادلات (۱۳ـ۹) و (۱۳ـ۱۰) دارای جواب‌اند؟ این سؤال نه تنها معقول، بلکه لازم است، زیرا توابع $f(x)$ و $h(x)$ کاملاً دلخواه نیستند. به‌عنوان مثال، در مور لغزش یک جرم نقطه‌ای بر روی سطح $y = g(z)$، که در ابتدای این فصل برسی کردیم، تابع $f(z)$، که نمایانگر مدت زمان حرکت است، نمی‌تواند کوچکتر از $\sqrt{۲z/g}$، مدت زمان سقوط آزاد، باشد. بنابراین، اگر $|\sqrt{۲z/g}| < |f(z)|$، معادلهٔ (۱۳ـ۲) دارای جواب نخواهد بود. بهترین راه برای پاسخ به سؤال وجود جواب برای معادلهٔ انتگرالی، به این قرار است که ابتدا به هسته‌های تفکیک‌پذیر، به‌نام هسته‌های واگن نگاهی بیندازیم.

۱۳ـ۳ـ۱ هسته‌های واگن

یادآوری می‌کنیم که هستهٔ واگن (یا به زبان فصل یازدهم، تفکیک‌پذیر) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$K(x,t) = \sum_{j=۱}^{n} \phi_j(x)\psi_j^*(t) \qquad \text{(۱۳ـ۱۱)}$$

که در آن ϕ_j و ψ_j مستقل خطی فرض شده‌اند. این فرض هیچ محدودیتی روی $K(x,t)$ قرار نمی‌دهد، زیرا اگر $\{\phi_j\}$ها و $\{\psi_j\}$ها وابستهٔ خطی باشند، همواره می‌توان آنها را به‌صورت ترکیبی خطی از مجموعهٔ کوچکتری از توابع مستقل خطی هرگروه بیان کرد. از طریق نشاندن از (۱۳ـ۱۱) در صورتهای انتگرالی (۱۳ـ۹الف) و (۱۳ـ۹ب)، می‌رسیم به

$$u(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) \int_a^b \psi_j^*(t) u(t) dt = f(x)$$

$$v(x) - \lambda^* \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) \int_a^b \phi_j^*(t) v(t) dt = 0$$

اگر تعریف کنیم:

$$u_j \equiv \int_a^b \psi_j^*(t) u(t) dt \quad \text{و} \quad v_j \equiv \int_a^b \phi_j^*(t) v(t) dt \qquad (۱۳\text{ـ}۱۲)$$

معادلات قبلی به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$u(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j(x) = f(x) \qquad (\text{۱۳ـ۱۳الف})$$

$$v(x) - \lambda^* \sum_{j=1}^{n} v_j \psi_j(x) = 0 \qquad (\text{۱۳ـ۱۳ب})$$

اگر (۱۳ـ۱۳الف) را در $\psi_i^*(x)$ ضرب کنیم، و روی x انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$u_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = f_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۳\text{ـ}۱۴)$$

که در آن

$$a_{ij} \equiv \int_a^b \psi_i^*(t) \phi_j(t) dt$$

$$f_i \equiv \int_a^b \psi_i^*(t) f(t) dt$$

اکنون می‌توانیم با حل دستگاه معادلات خطی (۱۳ـ۱۴)، u_iها را تعیین کنیم. وقتی u_iها تعیین شدند، می‌توانیم آنها را در (۱۳ـ۱۳الف) قرار دهیم و $u(x)$ را به‌دست آوریم:

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j(x) + f(x) \tag{۱۳ـ۱۵}$$

بنابراین، برای یک هستهٔ واگن، مسئلهٔ فردهولم به یک دستگاه معادلهٔ خطی تبدیل می‌شود.

برای بررسی این سیستم، فرض کنید $|\mathrm{U}\rangle$، $|\mathrm{F}\rangle$ و $\mathbb{A}$، به‌ترتیب، معرف بردارهای متناهی‌ـبعد با مؤلفه‌ای u_i، f_i و عملگر متناظر با (ماتریس) a_{ij} باشند. در این‌صورت، معادلهٔ (۱۳ـ۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\mathrm{U}\rangle - \lambda\mathbb{A}|\mathrm{U}\rangle = |\mathrm{F}\rangle \tag{۱۳ـ۱۶}$$

به‌علاوه، با ضرب (۱۳ـ۱۳ب) در $\phi_i^*(x)$ و انتگرال‌گیری روی xو استفاده از نمادگذاری مشابه با نمادگذاری به‌کار رفته در (۱۳ـ۱۶)، به‌دست می‌آوریم

$$|\mathrm{V}\rangle - \lambda^*\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{V}\rangle = 0 \tag{۱۳ـ۱۷}$$

برای اینکه شرایطی بیابیم که تحت آن معادلات (۱۳ـ۱۶) و (۱۳ـ۷) دارای جواب باشند، بهتر است این معادلات را همراه با هم مطالعه کنیم. وجود جواب برای آنها، در وهلهٔ اول به دترمینان زیر بستگی دارد:

$$\mathbb{B} = \mathbb{1} - \lambda\mathbb{A}$$

اگر $\det\mathbb{B} \neq 0$، در این‌صورت واضح است که

$$\det\mathbb{B}^\dagger \equiv \det(\mathbb{1} - \lambda^*\mathbb{A}^\dagger) \neq 0 .$$

و داریم

$$|\mathrm{U}\rangle = \mathbb{B}^{-1}|\mathrm{F}\rangle$$

و

$$|\mathrm{V}\rangle = \circ$$

از سوی دیگر، اگر $\det \mathbb{B} = \circ$، در این‌صورت معادلهٔ (۱۳ـ۱۷) دارای جوابهای غیربدیهی خواهد بود و معادلهٔ (۱۳ـ۱۶) فقط زمانی جواب خواهد داشت که شرایط معینی برقرار باشد.

برای بررسی این شرایط، الحاقی معادلهٔ (۱۳ـ۱۷) را می‌گیریم و نتیجه را در $|\mathrm{U}\rangle$ ضرب می‌کنیم:

$$\langle \mathrm{V}|\mathrm{U}\rangle - \lambda\langle \mathrm{V}|\mathbb{A}|\mathrm{U}\rangle = \circ$$

یا

$$\langle \mathrm{V}|(|\mathrm{U}\rangle - \lambda\mathbb{A}|\mathrm{U}\rangle) = \circ$$

اما، مطابق معادلهٔ (۱۳ـ۱۶)، بردار داخل پرانتز همان $|\mathrm{F}\rangle$ است. بنابراین، داریم:

$$\langle \mathrm{V}|\mathrm{F}\rangle = \circ$$

از این‌رو، برای اینکه $|\mathrm{U}\rangle$ جواب معادلهٔ (۱۳ـ۱۶) باشد، برای اینکه (۱۳ـ۱۶) جواب داشته باشد، باید جملهٔ ناهمگن $|\mathrm{F}\rangle$ آن لزوماً با جواب معادلهٔ الحاقی همگن متعامد باشد. آیا این شرط کافی نیز هست؟ یعنی، اگر $|\mathrm{F}\rangle$ با جواب معادلهٔ الحاقی همگن متعامد باشد، آیا مطمئنیم که معادلهٔ (۱۳ـ۱۶) جواب دارد؟ پاسخ مثبت است (برای اثبات، ر. ک. تمرین ۱۳ـ۳ـ۱). بنابراین، اگر $\det(\mathbb{1} - \lambda\mathbb{A}) = \circ$، جواب خواهیم داشت اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned}
\circ = \langle \mathrm{F}|\mathrm{V}\rangle \equiv \lambda^*\langle \mathrm{F}|\mathrm{V}\rangle \equiv \lambda^* \sum_{i=1}^{n} v_i f_i^* \\
&= \lambda^* \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \phi_i^*(x) v(x)dx\right)\left(\int_a^b \psi_i(t) f^*(t)dt\right) \\
&= \lambda^* \int_a^b dt f^*(t) \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\psi_i^*(t)\right)^* v(x)dx
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b dt f^*(t) \left[\lambda^* \int_a^b K^*(x,t)v(x)dx\right]$$
$$= \int_a^b dt\, f^*(t)\lambda^*\mathbb{K}^\dagger v(t)$$
$$= \int_a^b dt f^*(t)v(t)$$

تساوی آخر از معادلهٔ (۱۳ـ۱۰ب) نتیجه می‌شود. رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که $\langle \mathrm{F}|\mathrm{V}\rangle = 0$ با تعامد توابع $f(x)$ و $v(x)$ هم‌ارز است.

بحث بالا را می‌توان به‌صورت یک قضیه جمعبندی کرد.

قضیهٔ ۱۳ـ۳ـ۱: (جایگزین فردهولم) فرض کنید $\mathbb{K}$ یک عملگر انتگرالی با یک هستهٔ واگن، و λ عدد مختلط غیرصفر است. اگر معادلات (۱۳ـ۹ب) و (۱۳ـ۱۰ب) (معادلات همگن) فقط دارای جوابهای بدیهی باشند، در این‌صورت معادلات (۱۳ـ۹الف) و (۱۳ـ۱۰الف) (معادلات ناهمگن) به‌ازای تمام $|\mathrm{h}\rangle, |\mathrm{f}\rangle \in \mathscr{L}^2(a,b)$ به‌ترتیب دارای جوابهای یکتای $|\mathrm{u}\rangle$ و $|\mathrm{v}\rangle$ خواهند بود.

اگر معادلات همگن دارای جوابهای غیربدیهی باشند، یعنی، اگر صفرـفضاهای $\mathbb{1} - \lambda\mathbb{K}$ و $\mathbb{1} - \lambda^*\mathbb{K}^\dagger$ غیربدیهی باشند، در این‌صورت ابعاد این صفرـفضاها برابر است، و معادلات ناهمگن دارای جواب‌اند، اگر و فقط اگر $\langle \mathrm{v}|\mathrm{f}\rangle = 0$ و $\langle \mathrm{u}|\mathrm{h}\rangle = 0$. ■

با وجودی که شرح مختصر اثبات این قضیه فقط برای معادلات (۱۳ـ۹الف) و (۱۳ـ۱۰ب) در بالا آمد، اثبات معادلات (۱۳ـ۹ب) و (۱۳ـ۱۰الف) دقیقاً به همان صورت است. نیز توجه کنید که به‌طور کلی $\mathscr{N}(\mathbf{B}) \neq \mathscr{N}(\mathbf{B}^\dagger)$؛ بنابراین، جفت کردن معادلات به نحوی صحیح، یعنی جفت کردن معادلهٔ ناهمگن با معادلهٔ الحاقی همگن، امری اساسی است (تمرین ۱۳ـ۳ـ۱).

مثال ۱۳ـ۳ـ۱: می‌خواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$u(x) = x + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

در این معادله $K(x,t) \equiv xt$.

ابتدا جواب سری نویمان را می‌یابیم. توجه کنید که:

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b x^2 t^2 dx\, dt = \frac{1}{9}(b^3 - a^3)^2$$

و سری نویمان وقتی همگرا می‌شود که داشته باشیم:

$$|\lambda|(b^۳ - a^۳) < ۳$$

با فرض برقرار بودن این شرط، داریم

$$u(x) = x + \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K^n(x,t) t \, dt$$

به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$K^n(x,t) = \int_a^b K^{n-۱}(x,s) K(s,t) ds = xtB^{n-۱}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\int_a^b K^n(x,t) t \, dt = xB^{n-۱} \frac{۱}{۳}(b^۳ - a^۳) = xB^n$$

با جایگزین کردن این رابطه در عبارت $u(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= x + x\lambda B \sum_{n=۱}^{\infty} \lambda^{n-۱} B^{n-۱} \\ &= x\left(۱ + \lambda B \frac{۱}{۱ - \lambda B}\right) = \frac{x}{۱ - \lambda B} \\ &= \frac{۳x}{۳ - \lambda(b^۳ - a^۳)} \end{aligned}$$

حال، از جایگزین فردهولم استفاده می‌کنیم. در این حالت، معادلهٔ (۱۳ـ۱۱) به‌صورت $K(x,t) = xt$ درمی‌آید. بنابراین

$$u(x) = x + \lambda x \int_a^b t \, u(t) dt \equiv x + \lambda x A = x(۱ + \lambda A) \qquad (۱)$$

با ضرب کردن طرفین در x و انجام انتگرال‌گیری، می‌رسیم به:

$$\int_a^b x u(x) dx = (۱ + \lambda A) \int_a^b x^۲ dx = (۱ + \lambda A) B \qquad (۲)$$

عبارت سمت چپ همان A است. با حل معادلهٔ (۲)، مقدار A به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{B}{۱ - \lambda B}$$

که وقتی در معادلهٔ (۱) نشانده شود، می‌انجامد به:

$$u(x) = x\left(۱ + \frac{\lambda B}{۱ - \lambda B}\right) = \frac{x}{۱ - \lambda B}$$

این جواب همان جواب اولی است که به‌دست آوردیم. اما، در اینجا هیچ سری‌ای وارد نشد و از این‌رو هیچ شرطی در مورد $|\lambda B|$ لازم نیست. ●

مثال ۱۳ـ۳ـ۲: به‌عنوان مثالی قدری پیچیده‌تر، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

$$u(x) - \lambda \int_{۰}^{۱} (۱ + xt) u(t) dt = x \qquad (۱)$$

هستهٔ $K(x,t) = ۱ + xt$، واگن است با:

$$\phi_۱(x) = ۱ \qquad \phi_۲(x) = x$$
$$\psi_۱(t) = ۱ \qquad \psi_۲(t) = t$$

از اینجا به این ماتریس می‌رسیم:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{pmatrix}$$

(الف) فرض کنید $\lambda = ۱$. در این‌صورت عبارت:

$$\mathsf{B} = 1 - \lambda \mathsf{A} = \begin{pmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$$

دارای دترمینان مخالف صفر است. بنابراین، $B^{-۱}$ وجود دارد و عبارت است از:

$$\mathsf{B}^{-۱} = \begin{pmatrix} -\frac{۸}{۳} & -۲ \\ -۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

با:

$$f_۱ = \int_۰^۱ \psi_۱^*(t) f(t) dt = \int_۰^۱ t\, dt = \frac{۱}{۲} \text{ و } f_۲ = \int_۰^۱ \psi_۲^*(t) f(t) dt = \int_۰^۱ t^۲ dt = \frac{۱}{۳}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} = \mathsf{B}^{-۱} \begin{pmatrix} f_۱ \\ f_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

در این‌صورت معادلهٔ (۱۳ـ۵) منجر می‌شود به:

$$u(x) = u_۱ \phi_۱(x) + u_۲ \phi_۲(x) + x = -۲$$

(ب) حال فرض کنید $\lambda = ۸ + ۲\sqrt{۱۳}$. در این‌صورت

$$\mathsf{B} = 1 - \lambda \mathsf{A} = -\begin{pmatrix} ۷ + ۲\sqrt{۱۳} & ۴ + \sqrt{۱۳} \\ ۴ + \sqrt{۱۳} & (۵ + ۲\sqrt{۱۳})/۳ \end{pmatrix}$$

و $\det \mathsf{B} = ۰$. بنابراین، فقط وقتی که $f(x) \equiv x$ بر صفرـفضای B^T متعامد باشد جواب داریم. برای تعیین یک پایه برای این صفرـفضا، باید بردارهای $|\mathrm{v}\rangle$ را طوری بیابیم، که داشته باشیم $\mathsf{B}^\dagger |\mathrm{v}\rangle = ۰$، چون B حقیقی و متقارن است پس $\mathsf{B}^\dagger = \mathsf{B}$، و باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\begin{pmatrix} ۷ + ۲\sqrt{۱۳} & ۴ + \sqrt{۱۳} \\ ۴ + \sqrt{۱۳} & (۵ + ۲\sqrt{۱۳})/۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{pmatrix} = ۰$$

جواب این معادله مضربی است از بردار:

$$|\mathrm{v}\rangle \equiv \begin{pmatrix} ۳ \\ -۲ - \sqrt{۱۳} \end{pmatrix}$$

برای اینکه معادلهٔ انتگرالی، معادلهٔ (۱)، جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\langle \mathrm{v}|\mathrm{F}\rangle = ۰ \quad \Rightarrow \quad (۳ \quad -۲-\sqrt{۱۳})\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} \end{pmatrix} = ۰$$

که محال است. از این‌رو هیچ جوابی وجود ندارد. ●

شاید تا حدودی نگران‌کننده به‌نظر رسد که توابع $\phi_i(x)$ و $\psi_i(t)$ که در یک هستهٔ واگن ظاهر شده‌اند، تا حد یک ضریب ثابت، دلخواه باشند. گذشته از این می‌توانیم $\phi_j(x)$ را در یک ثابت غیرصفر، مثلاً γ_i، ضرب کنیم و $\psi_j(t)$ را بر همان ثابت تقسیم کنیم، و همان هسته را به‌دست آوریم. واضح است که چنین تغییری ماتریسهای A و B را تغییر می‌دهد، و از این‌رو، محتمل به‌نظر می‌رسد که جواب $u(x)$ را تغییر دهد. توجیه این امر که چنین نیست، در تمرین ۱۳ـ۳ـ۲ نشان داده شده است. در واقع، می‌توان به‌طور کاملاً کلی نشان داد تبدیلی که در بالا توصیف شد، جواب را تغییر نمی‌دهد. اثبات به‌عنوان یک مسئلهٔ ساده به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

۱۳ـ۳ـ۲ هسته‌های هیلبرت‌ـاشمیت

هسته‌های واگنی که در بخش پیش مورد بحث قرارگرفتند، شامل نوع خاصی‌اند که معادلهٔ انتگرالی را به آسانی قابل حل می‌کنند. در مورد سایر هسته‌ها چه می‌توانیم بگوییم؟ بدیهی است که انتظار نداریم یک معادلهٔ انتگرالی برای همهٔ هسته‌ها دارای جواب باشد. بنابراین، معادلاتی انتگرالی‌ای را می‌خواهیم که هسته‌هایی داشته باشند که از یک هستهٔ واگن کلی‌ترند و در عین حال چندان محدود باشند که وجود جواب را تضمین کنند.

خاصیت محدودکنندگی اساسی که بر یک هسته (یا بر عملگر انتگرالی وابسته به آن) تحمیل می‌شود، فشرده بودن آن است. عملگر را در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ فشرده (یا کاملاً پیوسته) می‌نامیم هرگاه هر دنباله‌ای از بردارهای کراندار در $\mathscr{H}$ (دنباله‌ای از بردارها که نرم آنها از یک عدد مثبت متناهی معین کوچکتر باشد) را به یک دنباله که دارای یک زیردنبالهٔ همگراست، تبدیل کند. برای فضاهای برداری متناهی‌ـبعد، فشردگی ضروری نیست، زیرا هر دنبالهٔ کراندار از بردارها یک دنباله کوشی است (این نکته را ثابت کنید)، و مطابق مطالب فصل پنجم، دنبالهٔ کوشی همواره به یک فضای برداری متناهی‌ـبعد همگرا می‌شود. فشردگی فقط برای فضاهای برداری نامتناهی‌ـبعد مهم است.

ما با عملگرهای فشرده، به‌طور کلی، سروکار نخواهیم داشت، بلکه فقط دستهٔ خاصی از این عملگرها را بررسی خواهیم کرد. با همهٔ اینها، دو قضیهٔ زیر را ارائه می‌کنیم تا نقش مهم عملگرهای فشرده در معادلات انتگرال و نظریهٔ عملگری را نشان دهیم.[۱]

قضیهٔ ۱۳ـ۳ـ۲: جایگزین فردهولم برای هر عملگر فشرده که روی فضای هیلبرت عمل می‌کند، برقرار است. ■

قضیهٔ ۱۳ـ۳ـ۳: فرض کنید $\mathbb{K}$ یک عملگر هرمیتی روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. در این‌صورت یک پایهٔ راست‌هنجار $\{|\mathrm{u}_n\rangle\}$ در $\mathscr{H}$ چنان وجود دارد که $\mathbb{K}|\mathrm{u}_n\rangle = \lambda_n|\mathrm{u}_n\rangle$ و وقتی $n \to \infty$ آنگاه $\lambda_n \to ۰$. ■

دستهٔ بعدی از معادلات انتگرالی که از نظر خواهیم گذراند، عبارت‌اند از معادلاتی که می‌توانیم آنها را با هسته‌های تفکیک‌پذیر تقریب بزنیم.

تعریف ۱۳ـ۳ـ۴: عملگر انتگرالی $\mathbb{K}$، که روی $\mathscr{L}^۲(a,b)$ عمل می‌کند، و هستهٔ $K(x,t)$ آن انتگرال‌پذیر مجذوری است، یعنی برای آن داریم:

$$\int_a^b dx \int_a^b dt|K(x,t)|^۲ < \infty$$

عملگر هیلبرت‌ـاشمیت نامیده می‌شود، و هستهٔ آن را هستهٔ هیلبرت‌ـاشمیت می‌گویند.

عملگر هیلبرت‌ـاشمیت کراندار، یعنی نرم آن متناهی است. در واقع به گزارهٔ زیر می‌رسیم:

گزارهٔ ۱۳ـ۳ـ۵: فرض کنید $\mathbb{K}$ یک عملگر هیلبرت‌ـاشمیت با هستهٔ $K(x,t)$ باشد. در این‌صورت:

$$\|\mathbb{K}\| \leq \left[\int_a^b dt \int_a^b dx|K(x,t)|^۲\right]^{۱/۲}$$

اثبات . فرض کنید $u \in \mathscr{L}^۲(a,b)$. در این‌صورت بنابه نامساوی شوارتز داریم:

$$|\mathbb{K}u(x)|^۲ = \left|\int_a^b dt K(x,t)u(t)\right|^۲ \leq \int_a^b |u(t)|^۲ dt \int_a^b |K(x,t)|^۲ dt$$

---

۱. برای اثبات این قضیه نگاه کنید به:

Byron and Fuller, 1969, chapter 9 and Reed and Simon, 1980, chapter VI.

که با انتگرال گرفتن طرفین روی x، خواهیم داشت

$$\int_a^b |Ku(x)|^2 dx \leq \int_a^b |u(t)|^2 dt \int_a^b dt \int_a^b dx |K(x,t)|^2$$

با استفاده از تعریف نرم، می‌رسیم به:

$$\| \mathbb{K}u \|^2 \leq \| u \|^2 \int_a^b dt \int_a^b dx |K(x,t)|^2$$

برای یک عملگر، $\| \mathbb{K} \|$ کوچکترین عدد از بین اعداد حقیقی M به‌شمار می‌آید که برای آنها نامساوی $M \| u \| \leq \| \mathbb{K}u \|$ برقرار است. چون این نامساوی برای انتگرال دوگانه برقرار است، $\| \mathbb{K} \|$ نمی‌تواند از انتگرال دوگانه بزرگتر باشد. ■

قضیهٔ زیر اهمیت عملگرهای هیلبرت‌ـاشمیت را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۳ـ۳ـ۶: عملگر هیلبرت‌ـاشمیت را می‌توان از نظر نرم، با دقت دلخواه با یک هستهٔ واگن مناسب تقریب زد. ■

اثبات . فرض کنید $\{e_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایهٔ راست‌هنجار برای $\mathscr{L}^2(a,b)$ باشد. چون $K(x,t)$ نسبت به هر دو متغیرش انتگرال‌پذیر مربعی است، داریم

$$K(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} e_i(x) e_j^*(t)$$

که در آن

$$k_{ij} = \int_a^b dt \int_a^b dx e_i^*(x) e_j(t) K(x,t)$$

از نامساوی پارسوال می‌رسیم به:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2 = \int_a^b dx \int_a^b dt |K(x,t)|^2 < \infty$$

که نشان می‌دهد حاصل‌جمع دوگانهٔ نامحدود، همگراست. عملگر $\mathbb{K}_n$ را که هستهٔ آن عبارت است از $K_n(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} k_{ij} e_i(x) e_j^*(t)$، تعریف می‌کنیم. واضح است که $\mathbb{A} \equiv \mathbb{K} - \mathbb{K}_n$ یک عملگر هیلبرت‌ـاشمیت است. در واقع، با نشان دادن هستهٔ $\mathbb{A}$ با $K_{\mathbb{A}}(x,t)$، می‌رسیم به:

$$\int_a^b dx \int_a^b dt |K_{\mathbb{A}}(x,t)|^2 = \int_a^b dx \int_a^b dt \left|K(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} e_i(x) e_j^*(t)\right|^2$$

$$= \int_a^b dx \int_a^b dt \left| \sum_{i,j=n+1}^{\infty} k_{ij} e_i(x) e_j^*(t) \right|^2$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^{\infty} |k_{ij}|^2 < \infty$$

با استفاده از گزارهٔ ۱۳ـ۳ـ۵، داریم

$$\|\mathbb{K} - \mathbb{K}_n\| \equiv \|\mathbb{A}\| \leq \int_a^b dx \int_a^b dt |K_{\mathbb{A}}(x,t)|^2 = \sum_{i,j=n+1}^{\infty} |k_{ij}|^2$$

همگرایی مجموع دوگانه در نامساوی پارسوال ایجاب می‌کند که مجموع طرف راست این معادله، وقتی n به‌سمت بینهایت میل کند، به سمت صفر میل کند. بنابراین، می‌توانیم با انتخاب مقداری از n که به‌قدر کافی بزرگ باشد، $\|\mathbb{K} - \mathbb{K}_n\|$ را تا هر حد دلخواهی کوچک کنیم. ■

می‌توانیم با نشان دادن این نکته که $\mathbb{K}_n$ فشرده است و اینکه $\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_n$ فشرده است، اثبات بالا را به پیش ببریم. نتیجهٔ این روند، خودش قضیهٔ دیگری به‌شمار می‌آید.

قضیهٔ ۱۳ـ۳ـ۷: هر عملگر هیلبرت‌ـاشمیت فشرده است. ■

قضیه ۱۳ـ۳ـ۶ این امکان را فراهم می‌آورد که یک معادلهٔ انتگرالی هیلبرت‌ـاشمیت (و یک معادلهٔ انتگرالی با هسته هیلبرت‌ـاشمیت) را مطابق بخش ۱۳ـ۳ـ۱، به یک دستگاه n معادلهٔ خطی تبدیل کنیم. البته، برای اینکه این دستگاه خطی نمایش مناسبی از معادلهٔ انتگرالی اصلی باشد، n باید تا حد ممکن بزرگ باشد. این شرط، باعث می‌شود که این روش مخصوصاً برای کامپیوتر مناسب باشد.

آن عملگرهای هیلبرت‌ـاشمیتی که هسته‌هایشان خودالحاقی (در مورد توابع حقیقی، متقارن) هستند، از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا قضیه‌های ۱۳ـ۳ـ۳ و ۱۳ـ۳ـ۷ ایجاب می‌کنند که

داشته باشیم

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i(x)u_i^*(t)$$

که در آن $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ویژه‌مقادیر (حقیقی) و ویژه‌توابع راست‌هنجار متناظر عملگر هیلبرت‌ـاشمیت خودالحاقی $\mathbb{K}$ هستند. به‌علاوه، هر تابع در فضای هیلبرت را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از $\{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ها بسط داد. بنابراین، معادلهٔ انتگرالی هیلبرت‌ـاشمیت هرمیتی زیر را:

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt+f(x)$$

می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_iu_i(x)=\lambda\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_ju_j(x)u_j^*(t)\right]\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_iu_i(t)\right]dt+\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i(x)$$

که در آن

$$a_i\equiv\int_a^b u_i^*(s)u(s)ds \qquad \text{و} \qquad b_i\equiv\int_a^b u_i^*(s)f(s)ds$$

به‌ترتیب، ضرایب بسط u و f هستند. با استفاده از راست‌هنجاری $u_i(t)$ها، معادلهٔ قبلی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_iu_i(x)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_ia_iu_i(x)+\sum_{i=1}^{\infty}b_iu_i(x)$$

از استقلال خطی u_iها نتیجه می‌گیریم:

$$(1-\lambda\lambda_i)a_i=b_i \qquad i=1,2,\ldots \qquad (۱۸\text{ـ}۱۳)$$

اگر λ وارون هیچکدام از ویژه‌مقدارهای (λ_iها) نباشد، در این‌صورت داریم

$$a_i=\frac{b_i}{1-\lambda\lambda_i} \qquad i=1,2,\ldots$$

و جواب $u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x)$، می‌دهد

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{1 - \lambda\lambda_i} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b u_i^*(s) f(s) ds}{1 - \lambda\lambda_i} u_i(x) \quad (۱۳\_۱۹)$$

بنابراین، اگر ویژه‌مقدارها و ویژه‌توابع $\mathbb{K}$ را بدانیم، می‌توانیم معادله‌ای انتگرالی را که دارای هستهٔ هیلبرت‌ـاشمیت است، حل کنیم.

اگر به‌ازای یک عدد صحیح r داشته باشیم: $\lambda = \lambda_r$، در این‌صورت b_r باید صفر شود؛ یعنی $f(x)$ باید با $u_r(x)$ متعامد باشد (در غیر این‌صورت، معادله دارای جواب نیست). با فرض برقرار بودن این شرط می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x) = a_r u_r(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{\infty} \frac{\int_a^b u_i^*(s) f(s) ds}{1 - \lambda\lambda_i} u_i(x) \qquad (۱۳\_۲۰)$$

که در آن a_r یک ثابت نامعین است.

مثال ۱۳ـ۳ـ۳: می‌توانیم از روش بالا برای حل معادلهٔ زیر استفاده کنیم

$$u(x) = 3 \int_{-1}^{1} K(x, t) u(t) dt + x^2$$

که در آن

$$K(x, t) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u_l(x) u_l(t)}{(\sqrt{2})^l}$$

$$u_l(x) \equiv \sqrt{\frac{2l + 1}{2}} P_1(x)$$

و $P_l(x)$ یک چندجمله‌ای لژاندر است.

ابتدا توجه کنید که $\{u_l\}$ها یک مجموعه توابع راست‌هنجار، $K(x, t)$ حقیقی و متقارن (و

بنابراین هرمیتی) است، و

$$\int_{-۱}^{+۱} dt \int_{-۱}^{+۱} dx |K(x,t)|^۲ = \int_{-۱}^{۱} dt \int_{-۱}^{۱} dx \sum_{l,m=۰}^{\infty} \frac{۱}{(\sqrt{۲})^l} \left[\frac{۱}{(\sqrt{۲})^m}\right]$$
$$[u_m(x)u_l(x)u_m(t)u_l(t)]$$
$$= \sum_{l=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^l} = ۲ < \infty$$

بنابراین، $K(x,t)$ یک هستهٔ هیلبرت‌ـاشمیت است. واضح است که u_lها ویژه‌توابع $K(x,t)$ با ویژه‌مقادیر $۱/(\sqrt{۲})^l$ هستند. چون به‌ازای هر عدد صحیح l، عبارت $۱/(\sqrt{۲})^l \neq ۳$ برقرار است، می‌توانیم از معادلهٔ (۱۳ـ۱۹) استفاده کنیم و بنویسیم:

$$u(x) = \sum_{l=۰}^{\infty} \frac{\int_{-۱}^{۱} u_l(s)s^۲ ds}{۱ - [۳/(\sqrt{۲})^l]} u_l(x)$$

اما به‌ازای $l \geq ۳$ داریم $\int_{-۱}^{۱} u_l(s)s^۲ds = ۰$. به‌ازای $l \leq ۲$ داریم

$$\int_{-۱}^{۱} u_۰(s)s^۲ds = \sqrt{\frac{۱}{۲}} \int_{-۱}^{۱} P_۰(s)s^۲ds = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$
$$\int_{-۱}^{۱} u_۱(s)s^۲ds = ۰$$

و

$$\int_{-۱}^{۱} u_۲(s)s^۲ds = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \int_{-۱}^{۱} P_۲(s)s^۲ds = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

بنابراین

$$u(x) = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۳}}{-۲} u_۰(x) + \frac{\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۵}}}{-\frac{۱}{۲}} u_۲(x) = \frac{۱}{۲} - ۲x^۲$$

●

مثال ۱۳ـ۳ـ۴: هستهٔ $K(x,t)=e^{-xt}$ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد:

$$e^{-xt}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-xt)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x)^m}{\sqrt{m!}}\left(\frac{t^m}{\sqrt{m!}}\right)$$

بنابراین، ممکن است روش تشریح شده در بالا برای حل معادلهٔ انتگرالی زیر وسوسه‌انگیز باشد

$$u(x)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-xt}u(t)dt+f(x)$$

اما، جانب احتیاط را باید نگه داشت، زیرا این روش فقط برای عملگرهای هیلبرت‌ـاشمیت به‌کار می‌رود، و e^{-xt} هسته هیلبرت‌ـاشمیت نیست، زیرا

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}dx|e^{-xt}|^2&=\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}dxe^{-2xt}\\&=\int_0^{\infty}dt\left(-\frac{1}{2t}\right)\end{aligned}$$

که متناهی نیست. ●

تمرینها

۱۳ـ۳ـ۱ فرض کنید $\mathscr{V}$ یک فضای حاصلضرب داخلی N بعدی باشد. فرض کنید $\mathbb{B}\in\mathscr{L}(\mathscr{V})$ یک عملگر خطی باشد. دو معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbb{B}|\mathrm{U}\rangle=|\mathrm{F}\rangle \quad \text{و} \quad \mathbb{B}^{\dagger}|\mathrm{V}\rangle=0 \qquad (1)$$

فرض کنید $\mathscr{N}(\mathbb{B})$ و $\mathscr{N}(\mathbb{B}^{\dagger})$ به‌ترتیب صفرـفضاهای $\mathbb{B}$ و $\mathbb{B}^{\dagger}$، و $\mathscr{M}_{\perp}$ مجموعه بردارهای متعامد بر $\mathscr{N}(\mathbb{B})$ باشند.

(الف) نشان دهید $\mathscr{M}_{\perp}$ با برد $\mathbb{B}$، که $\mathbb{B}(\mathscr{V})$ باشد، یکریخت است. [راهنمایی: تحدید $\mathbb{B}$ به $\mathscr{M}_{\perp}$ را در نظر بگیرید.]

(ب) نشان دهید $\mathscr{V}=\mathscr{M}_{\perp}\oplus\mathscr{N}(\mathbb{B})$ و $\mathscr{V}=\mathbb{B}(\mathscr{V})\oplus\mathscr{N}(\mathbb{B})$، و از این‌رو $\mathscr{M}_{\perp}=\mathbb{B}(\mathscr{V})$.

(ج) نشان دهید $\mathscr{N}(\mathbb{B})=\mathscr{N}(\mathbb{B}^{\dagger})$.

(د) نشان دهید، به‌ازای $\det \mathbb{B} = 0$، یک جواب برای (۱) وجود دارد اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\langle \mathrm{V}|\mathrm{F}\rangle = 0 \qquad \forall |\mathrm{V}\rangle \in \mathscr{N}(\mathbb{B}^\dagger)$$

۱۳ـ۳ـ۲ قسمت (الف) مثال ۱۳ـ۳ـ۲ را با استفاده از

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2} \qquad \phi_2(x) = x$$
$$\psi_1(t) = 2 \qquad \psi_2(t) = t$$

تکرار کنید؛ بنابراین $K(x,t)$ باز هم برابر $\phi_1(x)\psi_1(t) + \phi_2(x)\psi_2(t)$ است.

۱۳ـ۳ـ۳ به‌ازای چه مقادیری از λ معادلهٔ انتگرالی زیر دارای جواب است؟

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)u(t)dt + x$$

این جواب چیست؟

۱۳ـ۴ معادلات انتگرالی و توابع گرین

معادلات انتگرالی در ترکیب با توابع گرین به بهترین وجهی به‌کار می‌روند. در واقع، می‌توانیم از تابع گرین بهره گیریم و نشان دهیم که هر معادلهٔ دیفرانسیلی را می‌توان به یک معادلهٔ انتگرالی تبدیل کرد. اگر هستهٔ این معادلهٔ انتگرالی متقارن و هیلبرت‌ـاشمیتی باشد، در این‌صورت می‌توان از روشهای تقریبی تشریح شده در آخر بخش ۱۳ـ۳ـ۲ استفاده کرد.

فرض کنید $\mathbb{L}_\mathbf{x}$ یک عملگر دیفرانسیلی جزئی مرتبهٔ دوم از m متغیر باشد. می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم زیر را، تحت شرایط مرزی معینی، حل کنیم:

$$\mathbb{L}_\mathbf{x}[u] + \lambda V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad (۱۳\text{ـ}۲۱)$$

در اینجا λ یک ثابت دلخواه و $V(\mathbf{x})$ یک تابع خوش‌رفتار از $(x_1, \ldots, x_m)$ است. اگر جملهٔ دوم سمت چپ را به سمت راست ببریم و سپس عبارت سمت راست را به عنوان یک جملهٔ

ناهمگن در نظر بگیریم، می‌توانیم "جواب" (۱۳ـ۲۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$u(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) + \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \lambda V(\mathbf{y})u(\mathbf{y})]$$

که در آن D حوزهٔ $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$ و $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ تابع گرین برای $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}$، با شرایطی مرزی است که هنوز معین نشده است. تابع $H(\mathbf{x})$ جواب معادلهٔ همگن $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}[u] = 0$ است، و برای این حضور دارد که شرایط مرزی مناسب را تضمین کند. اگر شرایط مرزی همگن باشند (یا با شرایط مرزی تابع گرین یکسان باشند)، در این‌صورت $H(\mathbf{x}) = 0$، و می‌توانیم بنویسیم:

$$u(\mathbf{x}) = -\lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) + \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \qquad \text{(۱۳ـ۲۲الف)}$$

از سوی دیگر، اگر $u(\mathbf{x})$ در یک شرط مرزی ناهمگنی صدق کند، می‌توانیم $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ را یک تابع گرین مناسب اختیار کنیم (مثلاً، جزء تکین تابع گرین تمام) و $H(\mathbf{x})$ را جواب دلخواهی از معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن بگیریم و بنویسیم:

$$u(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) + \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \qquad \text{(۱۳ـ۲۲ب)}$$

در این‌صورت $H(\mathbf{x})$ را چنان تنظیم می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند.

توجه کنید که معادلات (۱۳ـ۲۲)، هر دو می‌توانند به‌صورت زیر نوشته شوند

$$u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y G(\mathbf{x},\mathbf{y}) V(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \qquad \text{(۱۳ـ۲۳)}$$

با شرایط مرزی همگن، $F(\mathbf{x})$ معلوم است؛ در حالت ناهمگن، این تابع دارای یک جزء قابل تنظیم است. معادلهٔ (۱۳ـ۲۳) یک معادلهٔ فردهولم mبعدی است، که جواب آن را می‌توان به شکل سری نویمان به‌دست آورد.

۱۳ـ۴ـ۱ استفاده از توابع گرین برای یافتن جوابهای سری نویمان

برای یافتن جواب سری نویمان می‌توانیم روش تشریح شده در بخش ۱۳ـ۲ را دنبال کنیم. لیکن روش دیگری هم وجود دارد که مستقیم‌تر است. می‌توانیم عبارت u را که در سمت راست معادلهٔ (۱۳ـ۲۳) داده شده است، در انتگرالِ آن معادله قرار دهیم. برای این منظور می‌نویسیم:

$$u(\mathbf{y}_1) = F(\mathbf{y}_1) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y_2 G(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2) u(\mathbf{y}_2)$$

متغیر انتگرال‌گیری در (۱۳ـ۲۳) را از $\mathbf{y}$ به $\mathbf{y}_1$ تبدیل می‌کنیم، و معادلهٔ قبلی را در (۱۳ـ۲۳) قرار می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) \\
&\quad \left[F(\mathbf{y}_1) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y_2 G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2) u(\mathbf{y}_2)\right] \\
&= F(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) F(\mathbf{y}_1) \\
&\quad + (-\lambda)^2 \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 \int_{\mathrm{D}} d^m y_2 [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1)][G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2)] u(\mathbf{y}_2)
\end{aligned}
$$

به‌جای $u(\mathbf{y}_2)$ مقدار قرار می‌دهیم، می‌رسیم به:

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) F(\mathbf{y}_1) \\
&\quad + (-\lambda)^2 \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 \int_{\mathrm{D}} d^m y_2 [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1)][G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2)] F(\mathbf{y}_2) \\
&\quad + (-\lambda)^3 \int_{\mathrm{D}} d^m y_1 \int_{\mathrm{D}} d^m y_2 \int_{\mathrm{D}} d^m y_3 [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1)] \\
&\quad [G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2)][G(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \times V(\mathbf{y}_3)] u(\mathbf{y}_3)
\end{aligned}
$$

حال از یک نمادگذاری جدید بهره می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \\
K^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \int_{\mathrm{D}} d^m t K^{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) K(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \qquad n \geq 2
\end{aligned}
$$

با n تکرار، می‌توانیم بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{N-1} (-\lambda)^n \int_{\mathrm{D}} d^m y_n K^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) F(\mathbf{y}_n) \\
&\quad + (-\lambda)^N \int_{\mathrm{D}} d^m y_N K^N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_N) u(\mathbf{y}_N)
\end{aligned}
$$

سرانجام، با فرض $N \to \infty$، می‌رسیم به:

$$u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n \int_{\mathrm{D}} d^m y_n K^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) F(\mathbf{y}_n) \qquad \text{(۱۳ـ۲۴الف)}$$

جز این واقعیت که در اینجا انتگرال‌گیریها روی m متغیر انجام می‌گیرند، معادلهٔ (۱۳ـ۲۴الف) همان معادلهٔ (۱۳ـ۷ب) است. پس، با شباهتی دقیق می‌توانیم (۱۳ـ۲۴الف) را به‌صورت زیر نمایش دهیم:

$$|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{F}\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n \mathbb{K}^n |\mathrm{F}\rangle \qquad \text{(۱۳ـ۲۴ب)}$$

معادلات (۱۳ـ۲۴) فقط وقتی معنی دارند که سری نویمان همگرا باشد. اما، شرط

$$|\lambda| \left[\int_{\mathrm{D}} d^m y \int_{\mathrm{D}} d^m x |K(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2\right]^{1/2} < 1 \qquad \text{(۱۳ـ۲۵)}$$

مانند حالت یک‌بعدی، همگرایی سری را تضمین می‌کند.

مثال ۱۳ـ۴ـ۱: معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi = E\Psi$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi - \frac{2\mu}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\Psi = 0$$

که در آن $k^2 \equiv 2\mu E/\hbar^2$. از مقایسهٔ این معادله با (۱۳ـ۲۱) تناظرهای زیر را تشخیص می‌دهیم: $\mathbb{L}_{\mathbf{x}} \equiv \nabla^2 + k^2$ و $\lambda = -2\mu/\hbar^2$. با این فرض که هیچ مرزی وجود نداشته باشد، می‌توانیم $F(\mathbf{r}) \equiv Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را یک جواب همگن اختیار کنیم و جزء تکین تابع گرین زیر را (که در مثال ۱۲ـ۵ـ۲ به‌دست آمد) در نظر بگیریم:

$$G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ik|\mathbf{r},\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)$$

در این‌صورت، می‌توانیم (۱۳ـ۲۳) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathrm{R}^3} d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}') \qquad (1)$$

این معادله دارای جوابی به‌صورت یک سری همگرا خواهد بود، مشروط بر آنکه داشته باشیم:

$$\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\left(\int_{\mathrm{R}^3} d^3r \int_{\mathrm{R}^3}\left|\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}V(\mathbf{r}')\right|^2\right)^{1/2} < 1$$

برای محاسبهٔ این انتگرال، متغیر انتگرال‌گیری را از $\mathbf{r}$ به $\boldsymbol{\rho}$ چنان تبدیل می‌کنیم که $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. در این‌صورت، انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{\mathrm{R}^3}|V(\mathbf{r}')|^2 d^3r' \int_{\mathrm{R}^3} d^3\rho \frac{e^{-2\mathrm{Im}(k)\rho}}{\rho^2} = 4\pi \frac{1}{-2\mathrm{Im}(k)} e^{-2\mathrm{Im}(k)\rho}\Big|_0^\infty \int_{\mathrm{R}^3}|V(\mathbf{r}')|^2 d^3r'$$

$$= \frac{2\pi}{\mathrm{Im}(k)}\int_{\mathrm{R}^3}|V(\mathbf{r}')|^2 d^3r'$$

و سری همگراست، اگر داشته باشیم:

$$\int_{\mathrm{R}^3}|V(\mathbf{r}')|^2 d^3r' < \frac{2\pi\hbar^4\mathrm{Im}(k)}{\mu^2}$$

اما، در اغلب موارد مورد نظر، مثلاً در مسائل پراکندگی، داریم $E > 0$ و $\mathrm{Im}(k) = 0$. پس، این نامساوی برقرار نیست. از سوی دیگر، موضوع مورد توجه در مسائل پراکندگی عبارت است از دامنهٔ پراکندگی $f(\theta,\varphi)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\theta,\varphi) \equiv -\frac{\mu}{2\pi^2\hbar^2}\int_{R^3} d^3r e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}}V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \qquad (2)$$

که در آن $\hbar\mathbf{k}_f$ تکانهٔ نهایی ذره (موج) پراکنده است که جهتش در مختصات کروی با θ و φ مشخص می‌شود. این رابطه شبیه به یک ضرب داخلی با تابع وزن $V(\mathbf{r})$ است. در واقع، اگر بنابر تعریف داشته باشیم $\Phi_f(\mathbf{r}) \equiv e^{i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}}$، جزء انتگرالی معادلهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت $\langle\Phi_f|\Psi\rangle$ نوشت.

با توجه به اینکه هدف ما پیدا کردن دامنهٔ پراکندگی، و حاصلضرب اسکالر جدید به عنوان یک ابزار برای رسیدن به این هدف است، دیگر کاری به $\Psi(\mathbf{r})$ نداریم. در واقع، معادلهٔ (۲) نشان می‌دهد که تنها در نواحیی که $V(\mathbf{r})$ مقدار چشمگیری دارد، لازم است $\Psi(\mathbf{r})$ را بدانیم. با تعبیر V به عنوان یک تابع وزن و یادآوری $\mathbb{1} = \int d^m x |\mathbf{x}\rangle V(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}|$، معادلهٔ (۱۳ـ۲۳) را به‌عنوان یک معادلهٔ عملگرـبرداری مجرد می‌نویسیم:

$$|\mathrm{u}\rangle = |\mathrm{F}\rangle - \lambda \mathbb{G} |\mathrm{u}\rangle$$

که برای آن شرط (۱۳ـ۲۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\left[\int_{\mathbf{R}^3} d^3r \int_{\mathbf{R}^3} d^3r' V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')|G(\mathbf{r},\mathbf{r}')|^2\right]^{1/2} < 1 \qquad (3)$$

انتگرال (۳) را برای حالت مهم پتانسیلهای مرکزی، که در آن $V(\mathbf{r})$ فقط تابعی از $r = |\mathbf{r}|$ است، محاسبه می‌کنیم. با نوشتن تابع گرین، داریم:

$$\iiint r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \iiint r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' \frac{e^{-2\mathrm{Im}(\mathbf{k})|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} V(r)V(r')$$

در انتگرال‌گیری نسبت به $\mathbf{r}'$، کمیت $\mathbf{r}$ ثابت است؛ آن را در امتداد z' در نظر می‌گیریم، در این‌صورت:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 = 2rr'\cos\theta'$$

بنابراین، می‌توان انتگرالهای φ، φ'، و θ را بلافاصله گرفت؛ حاصل این انتگرالها می‌شود $8\pi^2$. با معرفی $\eta \equiv \cos\theta'$، انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$8\pi^2 \iiint_{\mathbf{R}^3} r^2 r'^2 dr \, dr' \, d\eta \frac{e^{-2\mathrm{Im}(k)\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\eta}}}{r^2+r'^2-2rr'\eta} V(r)V(r')$$

متغیرهای انتگرال‌گیری جدید زیر را معرفی می‌کنیم

$$u \equiv r + r'$$

$$v \equiv r - r'$$

و

$$w \equiv \sqrt{r^{۲} + r'^{۲} - ۲rr'\eta}$$

تبدیل معکوس بالا، عبارت است از:

$$r = \frac{۱}{۲}(u+v) \qquad r' = \frac{۱}{۲}(u-v) \qquad \eta = \frac{u^{۲} + v^{۲} - ۲w^{۲}}{u^{۲} - v^{۲}}$$

که می‌توان ژاکوبی این تبدیل را به آسانی به‌دست آورد:

$$J = \frac{۲w}{u^{۲} - v^{۲}}$$

از آنجا می‌رسیم به:

$$dr\, dr'\, d\eta = J\, du\, dv\, dw = \frac{۲w}{u^{۲} - v^{۲}} du\, dv\, dw$$

بنابراین، انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۸\pi^{۲} \iiint \frac{(u^{۲} - v^{۲})^{۲}}{۱۶} \left(\frac{۲w}{u^{۲} - v^{۲}}\right) du\, dv\, dw \frac{e^{-۲\mathrm{Im}(k)w}}{w^{۲}} V(r)V(r')$$

از تعریفهای u، v، و w، نتیجه می‌شود $-w \le v \le w$، $۰ \le w \le u$، و $۰ \le u \le \infty$. از این‌رو نتیجه نهایی برای معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$\left(\frac{\mu}{۲\hbar^{۲}}\right)^{۲} \int_{۰}^{\infty} du \int_{۰}^{\infty} dw \int_{-w}^{w} dv (u^{۲} - v^{۲}) \frac{e^{-۲\mathrm{Im}(k)w}}{w} V \left[\frac{۱}{۲}(u+v)\right] V \left[\frac{۱}{۲}(u-v)\right] < ۱ \qquad (۴)$$

مثلاً، در مورد پتانسیل یوکاوا با شدت $g^{۲}$، داریم $V(r) = g^{۲}e^{-\alpha r}/r$. در این‌صورت

$$V\left[\frac{۱}{۲}(u+v)\right] V\left[\frac{۱}{۲}(u-v)\right] = g^{۴} \frac{e^{-(\alpha/۲)(u+v)}}{\frac{۱}{۲}(u+v)} \left[\frac{e^{-(\alpha/۲)(u-v)}}{\frac{۱}{۲}(u-v)}\right]$$

$$= ۴g^{۴} \frac{e^{-\alpha u}}{u^{۲} - v^{۲}}$$

و معادلهٔ (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{\mu g^۲}{\hbar^۲}\right)^۲ \int_۰^\infty du e^{-\alpha u} \int_۰^u dw \frac{e^{-۲\mathrm{Im}(k)w}}{w} \int_{-w}^{w} dv < ۱$$

این انتگرالها ساده‌اند و به رابطهٔ زیر می‌انجام‌اند:

$$\left(\frac{\mu g^۲}{\hbar^۲ \alpha}\right)^۲ \frac{۲}{۱ + \frac{۲\mathrm{Im}(k)}{\alpha}} < ۱$$

با فرض $\mathrm{Im}(k) = ۰$، داریم:

$$g^۲ < \frac{\hbar^۲ \alpha}{\sqrt{۲}\mu}$$

بنابراین، برای پتانسیلهایی که به اندازهٔ کافی ضعیف باشند، سری نویمان همگرا می‌شود.

توجه کنید که در شرط داده شده توسط (۱۳ـ۲۵)، پیش فرض انتگرال‌پذیر مربعی توابع در نظر گرفته شده است. لیکن، موج آزاد $F = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ که در $\Psi(\mathbf{r})$ داده شده است، فقط و فقط وقتی انتگرال‌پذیر مربعی است که داشته باشیم $\langle \mathrm{F}|\mathrm{F}\rangle < \infty$، یا:

$$|A|^۲ \int_{\mathrm{R}^۳} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^۳r = |A|^۲ \int_{\mathrm{R}^۳} V(\mathbf{r}) d^۳r < \infty$$

یعنی، باید $\int V(\mathbf{r}) d^۳r$ متناهی باشد. برای اغلب پتانسیلها این امر صادق است؛ اما در حالت مهم پتانسیل کولنی، چنین نیست. برای این پتانسیل، لازم است به‌جای $Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ از بسته موج سود جوییم. ●

مثال ۱۳ـ۴ـ۲: گاهی مفید است که پتانسیلهای غیرموضعی را در نظر بگیریم. برای چنین پتانسیلهایی، معادلهٔ شرودینگر به‌صورت زیر است:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲\mu} \nabla^۲ \Psi + \int_{R^۳} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^۳r' = E\Psi(\mathbf{r})$$

در این‌صورت، برای مسائل پراکندگی (مثلاً معادلهٔ (۱) از مثال ۱۳ـ۴ـ۱)، داریم:

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathbf{R}^3} d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{R^3} d^3r'' V(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'') \qquad (1)$$

برای یک پتانسیل تفکیک‌پذیر، که برای آن $V(\mathbf{r},\mathbf{r}'') \equiv -g^2U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}'')$، می‌توانیم (۱) را دقیقاً حل کنیم. به‌جای $V(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ در (۱) مقدار می‌گذاریم، می‌رسیم به:

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{\mu g^2}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathbf{R}^3} d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}U(\mathbf{r}')\int_{\mathbf{R}^3} d^3r'' U(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'') \qquad (2)$$

با معرفی کمیتهای زیر:

$$Q(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu g^2}{2\pi\hbar^2}\int_{\mathbf{R}^3} d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}U(\mathbf{r}')$$

$$C \equiv \int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'')d^3r'' \qquad (3)$$

و جایگزین کردن آنها در (۲)، خواهیم داشت:

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + CQ(\mathbf{r})$$

با ضرب طرفین در $U(\mathbf{r})$ و انتگرال‌گیری روی $\mathbb{R}^3$، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} C &= A\int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3r + C\int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})d^3r \\ &= (2\pi)^{3/2}A\tilde{U}(-\mathbf{k}) + C\int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})d^3r \end{aligned}$$

که از آن C به‌دست می‌آید:

$$C = \frac{(2\pi)^{3/2}A\tilde{U}(-\mathbf{k})}{1 - \int_{\mathbf{R}^3} U(\mathbf{r})Q(\mathbf{r})d^3r}$$

و از آن می‌توان جواب معادله را پیدا کرد:

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{(2\pi)^{3/2} A\widetilde{U}(-\mathbf{k})}{1 - \int_{\mathbb{R}^3} U(\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r'} Q(\mathbf{r}) \qquad (۴)$$

علی‌الاصول، وقتی شکل تابعی $U(\mathbf{r})$ معلوم باشد، می‌توانیم $\widetilde{U}(-\mathbf{k})$ [تبدیل فوریهٔ $U(\mathbf{r})$] و $Q(\mathbf{r})$ را محاسبه کنیم. معادلات (۳) و (۴) حل معادلهٔ شرودینگر را به‌صورت بسته می‌دهند. ●

۱۳ـ۴ـ۲ نمودارهای فاینمن

یک تعبیر شهودی فیزیکی از سری نویمان، منسوب به فاینمن را، به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم. با وجودی که فاینمن این روش نموداری را برای الکترودینامیک کوانتومی ابداع کرد، در سایر زمینه‌های فیزیکی، نظیر فیزیک آماری و نظریه‌های چند جسم نیز به‌کار رفته است. در اغلب موارد مورد نظر، معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم (۱۳ـ۲۱) همگن است، و بنابراین $f(\mathbf{x}) = 0$. در این‌صورت $\mathbb{L}_\mathbf{x}$ و $V(\mathbf{x})$ به‌ترتیب عملگر آزاد و پتانسیل برهم‌کنش نامیده می‌شوند، و جواب $\mathbb{L}_\mathbf{x}[u] = 0$ را جواب آزاد می‌گویند و با $u_\mathrm{f}(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهند.

ابتدا با معادلهٔ (۱۳ـ۲۳) شروع می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$u(\mathbf{x}) = u_\mathrm{f}(\mathbf{x}) - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} d^m y G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})V(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) \qquad (۱۳\text{ـ}۲۶)$$

که در آن $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ معرف تابع گرین برای عملگر $\mathbb{L}_\mathbf{x}$ است. تابع گرین تمام، یعنی، تابع گرین برای $\mathbb{L}_\mathbf{x} + V$ را با $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ نمایش خواهیم داد. به‌علاوه، مطابق معمول ناحیهٔ D را تمام $\mathbb{R}^m$ در نظر می‌گیریم. این امر ایجاب می‌کند که هیچ شرط مرزی بر $u(\mathbf{x})$ اعمال نشود، که این نیز به‌نوبهٔ خود به ما امکان می‌دهد از جزء تکین تابع گرین در انتگرال استفاده کنیم. به‌خاطر اهمیت تابع گرین تمام، آنچه مورد نظر ماست یافتن یک سری برای $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ برحسب $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ است. زیرا، این تابع دانسته فرض می‌شود. برای پیدا کردن این نوع سری توجه کنید که:

$$u(\mathbf{x}) = \int d^m z G(\mathbf{x}, \mathbf{z})u(\mathbf{z})$$
$$u_\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \int d^m z G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})u_\mathrm{f}(\mathbf{z})$$

به‌علاوه، اگر z به‌درستی انتخاب شده باشد، مثلاً، به‌طوری که مؤلفه زمانی آن به سمت $-\infty$ میل کند (قبل از اینکه برهم‌کنشی اتفاق بیفتد)، در این‌صورت $u(\mathbf{t}) \equiv u_{\mathrm{f}}(\mathbf{t})$، و داریم:

$$u(\mathbf{x}) = \int d^m z G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u_{\mathrm{f}}(\mathbf{z})$$

اگر به‌جای $u(\mathbf{x})$ و $u_{\mathrm{f}}(\mathbf{x})$ در (۱۳ـ۲۶) مقدار قرار دهیم:

$$\int d^m z G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u_{\mathrm{f}}(\mathbf{z}) = \int d^m z G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u_{\mathrm{f}}(\mathbf{z}) - \lambda \int d^m y G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \int d^m z G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) u_{\mathrm{f}}(\mathbf{z})$$

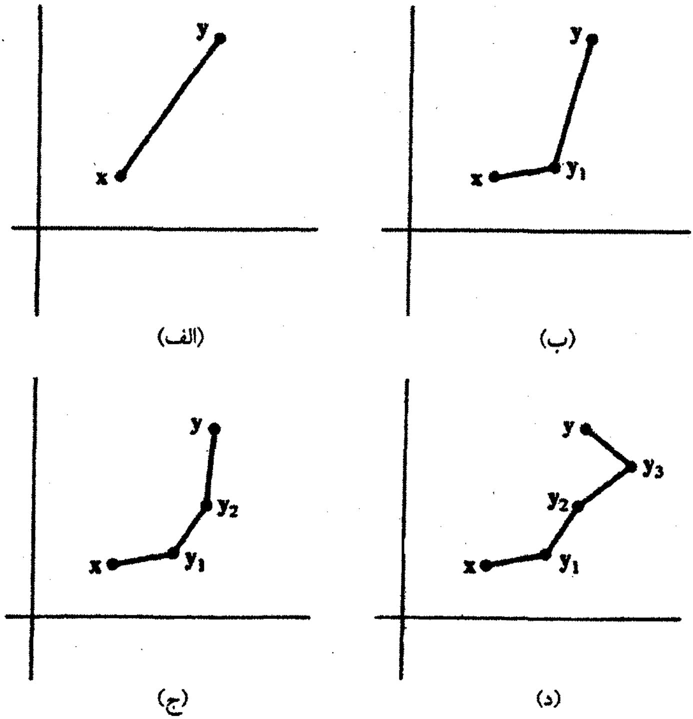
چون u_{f} دلخواه است، مآلاً خواهیم رسید به:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \lambda \int d^m y G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (۱۳\text{ـ}۲۷)$$

این معادله مشابه معادله (۱۳ـ۲۳) است و جواب آن را، درست مانند آن معادله، می‌توان به شکل سری نویمان به‌دست آورد. نتیجه به این قرار خواهد بود

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_n K^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) G_{\circ}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \\
&= G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \lambda \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_1 G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) G_{\circ}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}) \\
&+ (-\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_1 \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_2 G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) G_{\circ}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2) G_{\circ}(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}) \\
&+ (-\lambda)^3 \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_1 \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_2 \int_{\mathbb{R}^m} d^m y_3 [G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) V(\mathbf{y}_1) G_{\circ}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) V(\mathbf{y}_2) \\
&\times G_{\circ}(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) V(\mathbf{y}_3) G_{\circ}(\,, \mathbf{y})] + \cdots \qquad (۱۳\text{ـ}۲۸)
\end{aligned}$$

ایدهٔ فاینمن این است که $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ را به‌عنوان انتشارگر بین نقاط $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در نظر بگیریم و $G_{\circ}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ را انتشارگر آزاد تلقی کنیم. جملهٔ اول سمت راست (۱۳ـ۲۸) همان انتشارگر آزاد از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ است. از لحاظ نموداری، این جمله با خطی نمایش می‌دهد که نقاط $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را به هم



شکل ۱۳ـ۱ عوامل مؤثر در انتشارگر کامل در (الف) مرتبهٔ صفرم، (ب) مرتبهٔ اول، (ج) مرتبهٔ دوم، و (د) مرتبهٔ سوم. در هر رأس یک عامل $-\lambda V$ و یک انتگرال‌گیری روی تمام مقادیر متغیر در آن رأس وجود دارد.

متصل می‌کند (شکل ۱۳ـ۱الف). جملهٔ دوم عبارت است از انتشار آزاد از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}_1$ (که رأس نیز نامیده می‌شود) با پتانسیل $-\lambda V(\mathbf{y}_1)$، و متعاقباً انتشار به $\mathbf{y}$ (شکل ۱۳ـ۱ب). بر طبق جملهٔ سوم ذره یا موج (که با $u_f(\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود) آزادانه از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}_1$ انتشار می‌یابد، در $\mathbf{y}_1$ با پتانسیل $-\lambda V(\mathbf{y}_1)$ برهم‌کنش می‌کند، آزادانه از $\mathbf{y}_1$ به $\mathbf{y}_2$ منتشر می‌شود، برای بار دوم با پتانسیل $-\lambda V(\mathbf{y}_2)$ برهم‌کنش می‌کند و سرانجام، آزادانه از $\mathbf{y}_2$ به $\mathbf{y}$ انتشار می‌یابد (شکل ۱۳ـ۱ج). اکنون تعبیر بقیهٔ سری در (۱۳ـ۲۸) روشن است. جملهٔ مرتبهٔ nام سری، بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، دارای n رأس هرکدام با عامل $-\lambda V(\mathbf{y}_k)$ و انتگرال‌گیری روی $\mathbf{y}_k$ در رأس kام است و مابین هر دو رأس متوالی $\mathbf{y}_k$ و $\mathbf{y}_{k+1}$، یک عامل انتشارگر آزاد $G_0(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1})$ قرار دارد.

نمودارهای فاینمن در نظریهٔ میدانهای کوانتومی نسبیتی کاربرد فراوانی دارند که در آن $m = 4$ متناظر با چهار بعد فضاـزمان است در این نظریه λ را شدت برهم‌کنش تعیین می‌کند. مثلاً، برای الکترودینامیک کوانتومی λ ثابت ساختار ریز، $e^2/\hbar c = 1/137$، است.

ایدهٔ اساسی نمودارهای فاینمن که در بالا بیان شد، نگاهی بسیار سطحی بر مبحث بسیار

پیچیدهٔ میدانهای کوانتومی برهم‌کنش کننده است. برای تجزیه و تحلیل دقیق این مبحث باید ماهیت عملگری $u_I(\mathbf{x})$، این واقعیت که $V(\mathbf{x})$ خود حاصلضرب چند عملگر است، جابه‌جاپذیری و ناجابه‌جاپذیری عملگرهای مختلف، ماهیت تکینی اغلب انتگرالهایی که با آن مواجه می‌شویم، طریقهٔ برطرف کردن این تکینگیها (این موضوع ظاهراً به بازبهنجارش مربوط می‌شود) و مانند آن را در نظر گرفت. بررسی هر کدام از این مباحث یادشده از حوصلهٔ این کتاب خارج است.

تمرینها

۱۳ـ۴ـ۱ معادلهٔ شرودینگر یک‌بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲\mu}\frac{d^۲\Psi}{dx^۲}+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$$

(الف) معادلهٔ انتگرالی هم‌ارز معادلهٔ بالا را برای حالتهای مقید ($E<۰$)، با این فرض که جواب آزاد (به‌ازای $V=۰$) در $x\to\pm\infty$ متناهی باقی می‌ماند، بنویسید.

(ب) ویژه‌مقدارها (E) و ویژه‌توابع مربوطه را وقتی $V(x)$ یک تابع پتانسیل دلتای ربایشی به‌صورت زیر باشد، پیدا کنید:

$$V(x)\equiv -V_۰\,\delta(x-a) \qquad V_۰>۰$$

۱۳ـ۴ـ۲ تبدیل فوریه

$$\mathscr{F}[f](\mathbf{x})\equiv\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(y)dy$$

را به‌عنوان یک عملگر انتگرالی در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید $\mathscr{F}[f](x)=f(-x)$.

(ب) به این ترتیب، نتیجه بگیرید که تنها ویژه‌مقادیر این عملگر انتگرالی عبارت‌اند از $\lambda=\pm۱,\pm i$.

(ج) فرض کنید $f(x)$ یک تابع زوج از x باشد. نشان دهید می‌توان α را چنان انتخاب کرد که $u=f+\alpha\mathscr{F}[f]$ ویژه‌تابع $\mathscr{F}$ باشد. (این امر نشان می‌دهد که ویژه‌مقادیر $\mathscr{F}$ دارای چندگانگی نامتناهی است.)

مسائل

۱۳ـ۱ می‌توان توابع $\phi_j(x)$ را در γ_j و $\psi_j(t)$ را در $1/\gamma_j$ ضرب کرد و هستهٔ واگن مشابهی به‌صورت $K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x)\psi_j^*(t)$ به‌دست آورد. نشان دهید این عامل اختیاری با وجودی که ماتریسهای A و B را تغییر می‌دهد، جواب مسئلهٔ فردهولم زیر را تغییر نمی‌دهد:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$$

۱۳ـ۲ با استفاده از بسط سری نویمان، تمرین ۱۳ـ۳ـ۳ را تکرار کنید. تحت چه شرایطی سری همگراست؟

۱۳ـ۳ با جایگذاری مستقیم، نشان دهید که جواب به‌دست آمده در مثال ۱۳ـ۳ـ۳ در معادلهٔ انتگرالی صدق می‌کند.

۱۳ـ۴ معادلهٔ $u(x) = 1/2 \int_{-1}^{1}(x+t)u(t)dt + x$ را حل کنید.

۱۳ـ۵ معادلهٔ $u(x) = \lambda \int_0^1 xtu(t)dt + x$ را با استفاده از روش سری نویمان (به‌ازای چه مقادیری از λ، سری همگرا می‌شود)، روش هستهٔ واگن، و روش هیلبرت‌ـاشمیت (معادلات ۱۳ـ۱۹ و ۱۳ـ۲۰) را حل کنید.

۱۳ـ۶ معادله $u(x) = \lambda \int_0^\infty K(x,t)u(t)dt + x^\alpha$ را حل کنید، که در آن $\alpha \neq -1,-2,-3,\ldots$ و $K(x,t) = e^{-(x+t)}$. به‌ازای چه مقادیری از λ، معادله انتگرالی دارای جواب است؟

۱۳ـ۷ با استفاده از روش تقریبهای متوالی، معادلهٔ ولترا، $u(x) = \lambda \int_0^x u(t)dt$، را حل کنید. سپس یک معادلهٔ دیفرانسیل هم‌ارز با معادلهٔ ولترا به‌دست آورید (اطمینان یابید که شرط مرزی را وارد کرده‌اید)، و آن را حل کنید. آیا این جوابها با یکدیگر مطابقت دارند؟

۱۳ـ۸ شکل انتگرالی معادلهٔ شرودینگر برای پتانسیل تابع دلتای دوگانهٔ ربایشی زیر را حل کنید:

$$V(x) = -V_0\left[\delta(x-a_1) + \delta(x-a_2)\right]$$

ویژه‌توابع و یک معادلهٔ غیرجبری برای ویژه‌مقدارها به‌دست آورید (تمرین ۱۳ـ۴ـ۱).

۱۳ـ۹ با استفاده از شکل انتگرالی معادلهٔ شرودینگر در سه بعد، نشان دهید پتانسیل دلتای ربایشی $V(\mathbf{r}) = -V_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ دارای حالت مقید نیست $(E<0)$. این موضوع را با نتیجهٔ تمرین ۱۳ـ۴ـ۱ مقایسه کنید.

۱۳ـ۱۰ با در نظر گرفتن تبدیل فوریهٔ دو طرف شکل انتگرالی معادلهٔ شرودینگر نشان دهید که برای مسائل حالت مقید ($E < 0$)، این معادله در فضای تکانه می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = -\frac{2\mu}{(2\pi)^{3/2}\hbar^2}\left(\frac{1}{\kappa^2 + p^2}\right)\int \tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\tilde{\psi}(\mathbf{q})d^3q$$

که در آن $\kappa^2 = -2\mu E/\hbar^2$.

۱۳ـ۱۱ نشان دهید معادلهٔ انتگرالی وابسته به نوسانگر هماهنگ میرای

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

با شرایط مرزی $x(0) = x_0$، و $(dx/dt)_{t=0} = 0$ را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت

(الف) $$x(t) = x_0 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma}\int_0^t (1 - e^{-2\gamma(t-t')})x(t')dt'$$

(ب) $$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{2\gamma x_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - 2\gamma\int_0^t \cos\omega_0(t-t')x(t')dt'$$

[راهنمایی: به‌ترتیب $\omega_0^2 x$ یا $2\gamma\dot{x}$ را به‌عنوان جمله ناهمگن بگیرید.]

۱۳ـ۱۲ (الف) نشان دهید برای مسائل پراکندگی ($E > 0$) شکل انتگرالی معادلهٔ شرودینگر در یک بعد عبارت است از:

$$\psi(x) = e^{ikx} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-y|}V(y)\psi(y)dy$$

(ب) بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ را به سه ناحیهٔ $\{\mathbf{R}_i\}_{i=1}^3$ تقسیم کنید، که در آن $R_1 \equiv (-\infty, -a)$، $R_2 \equiv (-a, +a)$، $R_3 \equiv (a, \infty)$. فرض کنید $\psi_i(x)$ همان $\psi(x)$ در ناحیهٔ R_i باشد. فرض کنید پتانسیل $V(x)$ در R_1 و R_3 صفر شود. نشان دهید:

$$\psi_1(x) = e^{ikx} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k}e^{-ikx}\int_{-a}^{a} e^{ikx}V(y)\psi_2(y)dy$$

$$\psi_2(x) = e^{ikx} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k}\int_{-a}^{a} e^{ik|x-y|}V(y)\psi_2(y)dy$$

$$\psi_3(x) = e^{ikx} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k}e^{ikx}\int_{-a}^{a} e^{-ikx}V(y)\psi_2(y)dy$$

(این امر نشان می‌دهد که برای تعیین تابع‌موج در ناحیه‌ای فاقد پتانسیل، لازم است تابع‌موج را در ناحیه‌ای که پتانسیل عمل می‌کند، بدانیم.)

۱۳_۱۳ فرض کنید

$$V(x) = \begin{cases} V_\circ & |x| < a \\ \circ & |x| > a \end{cases}$$

و $\psi_۲(x)$ در مسئلهٔ ۱۳_۱۲ را با روش تقریبهای متوالی پیدا کنید. نشان دهید جملهٔ nام از $(۲\mu V_\circ a/\hbar^۲ k)^{n-۱}$ کوچکتر است؛ بنابراین سری نویمان در صورتی همگرا خواهد بود که داشته باشیم:

$$\frac{۲V_\circ a}{\hbar v} < ۱$$

که در آن v سرعت و $\mu v = \hbar k$ تکانهٔ موج است. از این‌رو، سری نویمان برای سرعتهای بالا برقرار است.

۱۳_۱۴ معادلهٔ انتگرالی شرودینگر حالت مقید را برای یک پتانسیل غیرموضعی بنویسید؛ توجه کنید که

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

و $\kappa^۲ = -۲\mu E/\hbar^۲$، که در آن μ جرم ذرهٔ مقید است. جواب همگن صفر است؛ موضوعی که همواره برای حالتهای مقید صادق است (مثال ۱۳_۴_۲).

(الف) با این فرض که پتانسیل تفکیک‌پذیر به شکل زیر باشد:

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -g^۲ U(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}')$$

نشان دهید معادلهٔ شرودینگر دارای جواب است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\frac{\mu g^۲}{۲\pi\hbar^۲} \int d^۳r \int d^۳r' \frac{e^{-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}') = ۱ \qquad (۱)$$

(ب) فرض کنید $U(\mathbf{r})$ یک پتانسیل مرکزی باشد که فقط به r بستگی دارد؛ نشان دهید می‌توان (۱) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\pi\mu g^{۲}}{۲\hbar^{۲}}\int_{۰}^{\infty}du\int_{۰}^{u}dw\int_{-w}^{w}dv(u^{۲}-v^{۲})e^{-\kappa w}U\left[\frac{۱}{۲}(u+v)\right]U\left[\frac{۱}{۲}(u-v)\right]=۱ \quad (۲)$$

(راهنمایی: مثال ۱۳ـ۴ـ۱).

(ج) با فرض $U(r)=e^{-\alpha r}/r$، نشان دهید شرط (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۴\pi\mu g^{۲}}{\alpha\hbar^{۲}}\left[\frac{۱}{(\alpha+\kappa)^{۲}}\right]=۱ \quad (۳)$$

(د) چون $\kappa > ۰$، ثابت کنید (۳) دارای جواب منحصر به‌فرد است اگر $g^{۲} > \hbar^{۲}\alpha^{۲}/۴\pi\mu$، که در آن صورت انرژی حالت مقید عبارت است از

$$E=-\frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}\left[\left(\frac{۴\pi\mu g^{۲}}{\alpha\hbar^{۲}}\right)^{۱/۲}-\alpha\right]^{۲}$$

۱۴

توابع گاما و بتا

در فصلهای پیشین، در موارد متعددی از خواص توابع گاما و بتا بهره جسته‌ایم. در این فصل کوتاه چند رابطهٔ مفید را در ارتباط با این توابع به‌دست می‌آوریم.

۱۴ـ۱ تابع گاما و مشتق آن

تابع گاما تعمیم فاکتوریلها (که فقط برای اعداد مثبت تعریف شده است) به دستگاه اعداد مختلط است. انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I(\alpha) \equiv \int_{\circ}^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{\text{۱}}{\alpha}$$

توجه کنید که

$$\frac{d^n I}{d\alpha^n} = \int_{\circ}^{\infty} \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}(e^{-\alpha t})\right] dt = (-\text{۱})^n \int_{\circ}^{\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$$

$$= \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\text{۱}}{\alpha}\right) = (-\text{۱})^n \frac{n!}{\alpha^{n+\text{۱}}}$$

به‌ازای $\alpha = ۱$ و صحیح و مثبت بودن n، از روابط بالا می‌رسیم به:

$$\int_{۰}^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

این واقعیت امکان تعمیم زیر را فراهم می‌آورد:

$$\Gamma(z) \equiv \int_{۰}^{\infty} t^{z-۱} e^{-t} dt \qquad \mathrm{Re}(z) > ۰ \tag{۱ـ۱۴}$$

که در آن Γ تابع گاما (یا فاکتوریل) نامیده می‌شود. به این تابع، انتگرال اویلر نوع دوم نیز می‌گویند. از تعریف بالا، واضح است که اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد:

$$\Gamma(n + ۱) = n! \tag{۲ـ۱۴}$$

نامتناهی بودن $\mathrm{Re}(z) > ۰$ همگرایی انتگرال را تضمین می‌کند. (این‌گونه همگرایی در تمرین ۱۴ـ۱ـ۱ مشاهده کرده‌ایم.)

با انتگرال‌گیری (۱۴ـ۱) به روش جزءبه‌جزء، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$\Gamma(z + ۱) = z\Gamma(z) \tag{۳ـ۱۴}$$

با روش تکرار، این رابطه به (۱۴ـ۲) نیز منجر می‌شود.

نتیجهٔ دیگری که می‌گیریم، تحلیلی بودن $\Gamma(z)$ است. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۱۴ـ۳) نسبت به z، خواهیم داشت

$$\frac{d\Gamma(z + ۱)}{dz} = \Gamma(z) + z\frac{d\Gamma(z)}{dz}$$

بنابراین، $d\Gamma(z)/dz$ وجود دارد و متناهی است اگر و فقط اگر $d\Gamma(z + ۱)/dz$ متناهی باشد (یادآوری می‌کنیم که $z \neq ۰$). (تمرین ۱۴ـ۱ـ۲ این نکته را مشاهده می‌کنیم.) از این‌رو، $\Gamma(z)$ تحلیلی است، لیکن، به‌ازای تمام اعداد مختلط تحلیلی نیست. برای ملاحظهٔ تکینگیهای $\Gamma(z)$، توجه کنید که:

$$\Gamma(z + n) = z(z + ۱)(z + ۲) \cdots (z + n - ۱)\Gamma(z)$$

یا

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+۱)(z+۲)\cdots(z+n-۱)}$$

مادام که $\operatorname{Re}(z+n) > ۰$، یا $\operatorname{Re}(z) > -n$، صورت کسر تحلیلی است. بنابراین، به‌ازای $\operatorname{Re}(z) > -n$، تکینگیهای $\Gamma(z)$ قطبهای واقع در $z = ۰, -۱, -۲, \ldots, -n+۱$ به‌شمار می‌آیند. چون n دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $\Gamma(z)$ در تمام ناحیهٔ $z \in \mathbb{C}$، جز $z = ۰, -۱, -۲, \ldots$، که در آنها $\Gamma(z)$ قطبهای ساده‌ای دارد، تحلیلی است.

با قرار دادن $z = ۱/۲$ در معادلهٔ (۱۴ـ۱)، یک نتیجهٔ مفید به‌دست می‌آوریم:

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (۱۴\text{ـ}۴)$$

این نتیجه با جایگزین کردن $u = \sqrt{t}$ به‌دست می‌آید. به کمک تابع گاما می‌توانیم فاکتوریل دوگانه از اعداد فرد را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$(۲k-۱)!! \equiv (۲k-۱)(۲k-۳)(۲k-۵)\cdots ۵.\ ۳.\ ۱ = \frac{۲^k}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{۲k+۱}{۲}\right)$$

(به بخش ۵ـ۳ بنگرید.)

می‌توانیم عبارتی برای مشتق لگاریتمی تابع گاما به‌دست آوریم که شامل یک سری نامتناهی است. ابتدا، به یک نتیجهٔ کلی نیاز داریم که برای توابع برخه‌ریخت (توابعی که تنها تکینگیهای آنها قطبها هستند) برقرار باشد. فرض کنید $f(z)$ دارای قطبهای ساده در $\{z_i\}_{j=۱}^{N}$ باشد، که در آن N می‌تواند بینهایت باشد. در این‌صورت، اگر به‌ازای تمام jها داشته باشیم: $z \neq z_j$، قضیه مانده‌ها منجر می‌شود به:

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = f(z) + \sum_{j=۱}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{f}{\xi - z}\right)_{\xi = z_j}$$

که در آن C_n دایره‌ای است شامل n قطب اول، و فرض شده است که

$$۰ \leq |z_۱| \leq |z_۲| \leq \cdots \leq |z_n| \leq \cdots$$

چون قطبهای f ساده فرض شده‌اند، پس داریم:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{f}{\xi-z}\right)_{\xi=z_j} &= \lim_{\xi\to z_j}(\xi-z_j)\frac{f(\xi)}{\xi-z} \\ &= \frac{۱}{z_j-z}\lim_{\xi\to z_j}(\xi-z_j)f(\xi) \\ &= \frac{۱}{z_j-z}\operatorname{Res}[f(\xi)]_{\xi=z_j} \equiv \frac{r_j}{z_j-z}\end{aligned}$$

که در آن r_j، بنابه تعریف، ماندهٔ $f(z)$ در $z_j = \xi$ است. با قرار دادن در معادلهٔ قبل، می‌رسیم به:

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = f(z) + \sum_{j=۱}^{n}\frac{r_j}{z_j-z}$$

با محاسبهٔ این معادله به‌ازای $z = ۰$ (که فرض می‌شود هیچکدام از قطبها نباشد) و تفریق دو معادله از یکدیگر، می‌توانیم بنویسیم

$$f(z)-f(۰) = \frac{z}{۲\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-z)} + \sum_{j=۱}^{n} r_j\left(\frac{۱}{z-z_j}+\frac{۱}{z_j}\right)$$

اگر $\lim_{|\xi|\to\infty}|f(\xi)| < \infty$، انتگرال برای دایرهٔ بینهایت صفر می‌شود، و داریم

$$f(z) = f(۰) + \sum_{j=۱}^{N} r_j\left(\frac{۱}{z-z_j}+\frac{۱}{z_j}\right) \qquad (۱۴\_۵)$$

این رابطه، بسط میتاگ‌ـلفلر تابع برخه‌ریخت f (با قطبهای ساده) نامیده می‌شود.

حال فرض کنید $g(z)$ یک تابع تام با صفرهای ساده باشد. در این‌صورت $(dg/dz)/g(z)$ برخه‌ریختی است که قطبهای سادهٔ آن مثلاً در $\{z_j\}_{j=۱}^{N}$ قرار دارند. به آسانی می‌توان نشان داد که تابع به‌ازای $|z| \to \infty$ کراندار است، و همهٔ مانده‌هایش واحدند. از این‌رو، معادلهٔ (۱۴ـ۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dz}[\ln g(z)] = c + \sum_{j=۱}^{N}\left(\frac{۱}{z-z_j}+\frac{۱}{z_j}\right) \qquad (۱۴\_۶)$$

که جواب آن (که در تمرین ۱۴ـ۱ـ۳ به‌دست می‌آید) عبارت است از:

$$g(z) = g(0)e^{cz}\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{z/z_j} \qquad (۱۴\text{ـ}۷)$$

که در آن

$$c \equiv \frac{(dg/dz)|_{z=0}}{g(0)}$$

و فرض شده است که به‌ازای تمام jها داریم $z_j \neq 0$.

حال به تابع اما برمی‌گردیم؛ توجه کنید که $1/\Gamma(z+1)$ یک تابع تام با صفرهای ساده در $\{-k\}_{k=1}^{\infty}$ است. از معادلهٔ (۱۴ـ۷) می‌رسیم به:

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

که در آن γ یک ثابت است که باید تعیین شود. با استفاده از معادلهٔ (۱۴ـ۳)، به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \qquad (۱۴\text{ـ}۸)$$

برای تعیین γ، معادلهٔ (۱۴ـ۸) را به‌ازای $z = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$e^{-\gamma} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-1/k}$$

یا

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] \qquad (۱۴\text{ـ}۹)$$

ثابت γ، ثابت اویلرـماشرونی نامیده می‌شود، و مقدار آن عبارت است از $\gamma = 0{,}57721566\ldots$.

با مشتق گرفتن از لگاریتم طرفین معادلهٔ (۱۴ـ۸)، می‌رسیم به

$$\frac{d}{dz}\ln[\Gamma(z)] = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right) \qquad (۱۴\text{ـ}۱۰)$$

در مثال ۷ـ۵ـ۱ خاصیت دیگری از تابع گاما، شکل مجانبی آن را به‌دست آوردیم. نتیجه‌ای که به‌ازای zهای بزرگ صادق است، عبارت است از:

$$\Gamma(z+۱) \approx \sqrt{۲\pi}e^{-z}z^{z+۱/۲} \qquad (۱۱\text{ـ}۱۴)$$

سایر خواص تابع گاما را می‌توان از نتایج به‌دست آمده در اینجا یافت. این کار به‌عنوان مسئله برعهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

تمرینها

۱۴ـ۱ـ۱ نشان دهید انتگرال موجود در معادلهٔ (۱۴ـ۱) همگراست.

۱۴ـ۱ـ۲ با ثابت کردن موارد زیر، نشان دهید $d\Gamma(z+۱)/dz$ وجود دارد و متناهی است.

(الف) به‌ازای $t > ۰$، داریم $|\ln t| \le t + ۱/t$ [راهنمایی: نشان دهید به‌ازای $t \ge ۱$، $t - \ln t$ یک تابع صعودی یکنواست. به‌ازای $t < ۱$، جایگزینی $t = ۱/s$ را اعمال کنید].

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) در انتگرال $d\Gamma(z+۱)/dz$، نشان دهید که $|d\Gamma(z+۱)/dz|$ متناهی است.

۱۴ـ۱ـ۳ از معادلهٔ (۱۴ـ۶)، معادلهٔ (۱۴ـ۷) را به‌دست آورید.

۱۴ـ۲ تابع بتا

تابع بتا یا انتگرال اویلر نوع اول به‌ازای اعداد مختلط a و b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}(a,b) \equiv \int_۰^۱ t^{a-۱}(۱-t)^{b-۱}dt \qquad \mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > ۰ \qquad (۱۲\text{ـ}۱۴)$$

با تغییر t به $۱/t$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{B}(a,b) \equiv \int_۱^\infty t^{-a-b}(t-۱)^{b-۱}dt \qquad (۱۳\text{ـ}۱۴)$$

چون در معادلهٔ (۱۴ـ۱۲)، داریم $۰ \le t \le ۱$، می‌توانیم θ را به‌صورت $t = \sin^۲\theta$ تعریف کنیم. در این‌صورت

$$\mathbf{B}(a,b) = ۲\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲a-۱}\theta \, \cos^{۲b-۱}\theta \, d\theta \qquad (۱۴\text{ـ}۱۴)$$

از این رابطه می‌توان ارتباط بین توابع گاما و بتا را یافت. توجه کنید که

$$\Gamma(a) = \int_۰^\infty t^{a-۱} e^{-t} dt = ۲\int_۰^\infty x^{۲a-۱} e^{-x^۲} dx$$

که در مرحلهٔ آخر تغییر متغیر $x = \sqrt{t}$ را انجام داده‌ایم. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= ۴\int_۰^\infty x^{۲a-۱}\, e^{-x^۲}\, dx \int_۰^\infty y^{۲b-۱}\, e^{-y^۲}\, dy \\ &= ۴\int_۰^\infty \int_۰^\infty dx\, dy\, e^{-(x^۲+y^۲)}\, x^{۲a-۱}\, y^{۲b-۱}\end{aligned}$$

با تغییر به مختصات قطبی، می‌رسیم به

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= ۴\int_۰^\infty r\, dr \int_۰^{\pi/۲} d\theta\, e^{-r^۲} (r\cos\theta)^{۲a-۱}(r\sin\theta)^{۲b-۱} \\ &= \int_۰^\infty d(r^۲) e^{-r^۲} (r^۲)^{a+b-۱} \left(۲\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲b-۱}\theta \cos^{۲a-۱}\theta\, d\theta\right) \\ &= \Gamma(a+b)\, \mathbf{B}(b,a)\end{aligned}$$

یا

$$\mathbf{B}(b,a) \equiv \mathbf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (۱۴\text{-}۱۵)$$

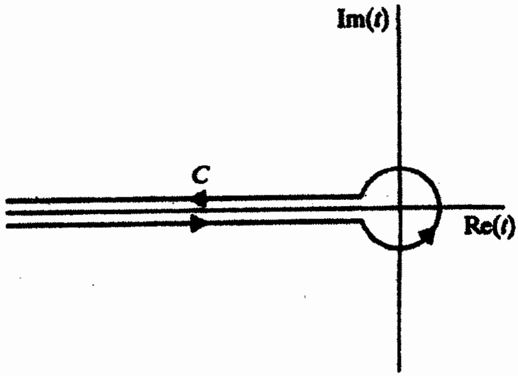
تقارن $\mathbf{B}(a,b)$ نسبت به شناسه‌هایش از سمت راست (۱۴ـ۱۵) یا از تعریف آن [معادله (۱۴ـ۱۲)] نتیجه می‌شود.

حال یک رابطهٔ مهم را که در فصلهای گذشته به‌کار برده‌ایم، اثبات می‌کنیم:

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (۱۴\text{-}۱۶)$$

با قرار دادن $a = z$ و $b = ۱ - z$ در معادلهٔ (۱۴ـ۱۵)، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \mathbf{B}(a, ۱-z) &= ۲\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۲z-۱}\theta\, \cos^{-۲z+۱}\theta\, d\theta \\ &= ۲\int_۰^{\pi/۲} \tan^{۲z-۱}\theta\, d\theta \qquad \mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(۱-z) > ۰\end{aligned}$$



شکل ۱۴ـ۱ پربند C که در محاسبهٔ وارون تابع گاما مورد استفاده قرار گرفت.

اگر قرار دهیم $u = \tan\theta$، در این‌صورت داریم

$$\Gamma(z)\Gamma(۱ - z) = ۲\int_{۰}^{\infty} \frac{u^{۲z-۱}}{u^{۲}+۱}du \qquad ۰ < \mathrm{Re}(z) < ۱$$

این انتگرال در مثال ۷ـ۳ـ۱ محاسبه شد است. با استفاده از نتیجهٔ به‌دست آمده در آن مثال، بلافاصله معادلهٔ (۱۴ـ۱۶) را به‌دست می‌آوریم که به‌ازای $۱ > \mathrm{Re}(z) > ۰$ صادق است. سپس با ادامهٔ تحلیلی، (۱۴ـ۱۶) را به مقادیری از z تعمیم می‌دهیم که برای آنها هر دو طرف تحلیلی باشند.

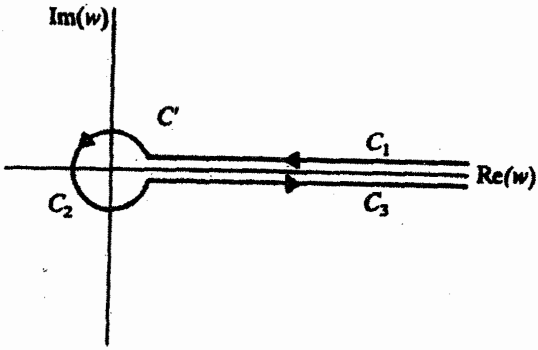
مثال ۱۴ـ۲ـ۱: برای نشان دادن کاربرد معادلهٔ (۱۴ـ۱۶)، نشان می‌دهیم که $\Gamma(z)$ می‌تواند به‌صورت زیر نیز نوشته شود:

$$\frac{۱}{\Gamma(z)} = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C} \frac{e^{t}}{t^{z}}dt \qquad (۱)$$

که در آن C پربند نشان داده شده در شکل ۱۴ـ۱ است. به خاطر وجود عامل t^{z}، انتگرالده دارای یک برش در امتداد محور حقیقی منفی است. پربند روی برگهٔ ریمان به‌صورت $-\pi < \arg(z) < \pi$ انتخاب شده است.

واضح است که اگر بخواهیم معادلهٔ (۱۴ـ۱) را از (۱) به‌دست آوریم، باید تغییر متغیر $w \equiv -t = e^{-i\pi}t$ را اعمال کنیم. این عمل باعث می‌شود که پربند C در صفحهٔ t به C' در صفحهٔ w تبدیل شود شکل (۱۴ـ۲). به‌ازای $z - ۱$ برحسب w، معادلهٔ (۱) می‌دهد:

$$\frac{۱}{\Gamma(۱ - z)} = -\frac{e^{-i\pi(z-۱)}}{۲\pi i}\int_{C'} e^{-w}w^{z-۱}dw \qquad (۲)$$



شکل ۱۴ـ۲ پربند تبدیل‌یافتهٔ C' که با تبدیل $w = \exp(-i\pi)t$ از C به‌دست آمده است.

پربند C' تشکیل شده است از $C_۱$، که برای آن $\arg(w) = ۰$؛ $C_۲$، که می‌توان نشان داد که وقتی شعاع دایره به سمت صفر میل کند، سهمش صفر می‌شود، و $C_۳$ که برای آن $\arg(w) = ۲\pi$. از این‌رو می‌توانیم، معادلهٔ (۲) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\Gamma(۱-z)} &= -\frac{e^{-i\pi(z-۱)}}{۲\pi i}\left(\int_{\infty}^{۰} e^{-r}r^{z-۱}dr + \int_{۰}^{\infty} e^{-r}e^{۲\pi i(z-۱)}r^{z-۱}dr\right)\\ &= -\frac{۱}{۲\pi i}(e^{i\pi(z-۱)} - e^{-i\pi(z-۱)})\int_{۰}^{\infty} e^{-r}r^{z-۱}dr\\ &= -\frac{۱}{\pi}\sin[\pi(z-۱)]\int_{۰}^{\infty} e^{-r}r^{z-۱}dr\\ &= \frac{\sin\pi z}{\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-r}r^{z-۱}dr\\ &= \frac{۱}{\Gamma(z)\Gamma(۱-z)}\int_{۰}^{\infty} e^{-r}r^{z-۱}dr\end{aligned}$$

در مرحله آخر، از (وارون) معادلهٔ (۱۴ـ۱۶) بهره برده‌ایم. اینک، معادلهٔ (۱۴ـ۱) بلافاصله به‌دست می‌آید. ●

از ترکیب معادلات (۱۴ـ۳) و (۱۴ـ۱۶) رابطهٔ مفید دیگری به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \Gamma(z)\Gamma(-z+۱) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

بنابراین

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z} \qquad (۱۴\text{ـ}۱۷)$$

از این نتیجه در فصل نهم (تمرین ۹ـ۵ـ۸) بهره گرفته‌ایم.

وقتی $\Gamma(x)$ را به‌ازای مقادیر مثبت x حقیقی بدانیم، می‌توانیم از (۱۴ـ۱۷) استفاده کنیم و $\Gamma(x)$ را به‌ازای $x < ۰$ پیدا کنیم: بنابراین، مثلاً، داریم:

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right) = -۲\sqrt{\pi}$$

معادلهٔ (۱۴ـ۱۷) همچنین نشان می‌دهد که هرگاه z یک عدد صحیح منفی باشد، تابع گاما دارای قطب ساده است.

مسائل

۱۴ـ۱ معادله (۱۴ـ۳) را از معادلهٔ (۱۴ـ۱) به‌دست آورید.

۱۴ـ۲ نشان دهید $\Gamma(۱/۲) = \sqrt{\pi}$.

۱۴ـ۳ نشان دهید:

$$\Gamma(z) = \int_۰^۱ \left[\ln\left(\frac{۱}{t}\right)\right]^{z-۱} dt \qquad \mathrm{Re}(z) > ۰$$

۱۴ـ۴ نشان دهید:

$$\int_۰^\infty e^{-x^\alpha} dx = \Gamma\left(\frac{\alpha+۱}{\alpha}\right)$$

۱۴ـ۵ تابع $f(z) = (۱+z)^\alpha$ را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید که

$$\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z=۰} = \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\Gamma(\alpha-n+۱)}$$

و با استفاده از آن، رابطهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$(۱+z)^\alpha = \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

که در آن

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{n!\Gamma(\alpha-n+۱)}$$

(ب) نشان دهید به‌ازای هر دو عدد مختلط a و b می‌توانیم به‌طور صوری بنویسیم

$$(a+b)^\alpha = \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n b^{\alpha-n}$$

(ج) نشان دهید اگر α یک عدد صحیح مثبتِ m باشد، سری قسمت (ب) در $n=m$ خاتمه می‌یابد.

۱۴ـ۶ ثابت کنید ماندهٔ $\Gamma(z)$ در $z=-k$ برابر است با $r_k = (-۱)^k/k!$. [راهنمایی: معادلهٔ (۱۴ـ۳) را تکرار کنید تا عبارتی برحسب $\Gamma(z+n)$ به‌دست آورید، سپس $\Gamma(z)$ را برحسب $\Gamma(z+n)$ بنویسید. با انتخاب مناسب n مانده را محاسبه کنید و نتیجه را به‌دست آورید.]

۱۴ـ۷ رابطهٔ زیر را برحسب $z=x+iy$ به‌دست آورید:

$$|\Gamma(z)| = \Gamma(x)\prod_{k=۰}^{\infty}\left[۱+\frac{y^۲}{(x+k)^۲}\right]^{-۱/۲}$$

۱۴ـ۸ با استفادهٔ از تعریف $\mathbf{B}(a,b)$، معادلهٔ (۱۴ـ۱۲)، نشان دهید $\mathbf{B}(a,b)=\mathbf{B}(b,a)$.

۱۴ـ۹ از معادلهٔ (۱) در مثال ۱۴ـ۲ـ۱ با روش جزءبه‌جزء انتگرال بگیرید و معادلهٔ (۱۴ـ۳) را به‌دست آورید.

۱۴ـ۱۰ نشان دهید به‌ازای اعداد صحیح مثبت n، داریم:

$$\Gamma(۱/۲-n)\Gamma(۱/۲+n) = (-۱)^n\pi$$

۱۴ـ۱۱ نشان دهید:

(الف) $\mathbf{B}(a,b) = \mathbf{B}(a+۱,b)+\mathbf{B}(a,b+۱)$

(ب) $\mathbf{B}(a, b+1) = \left(\frac{b}{a+b}\right)\mathbf{B}(a, b)$

(ج) $\mathbf{B}(a, b)\mathbf{B}(a+b, c) = \mathbf{B}(b, c)\mathbf{B}(a, b+c)$

۱۴ـ۱۲ ثابت کنید

$$\int_{-1}^{+1}(1+t)^a(1-t)^b dt = 2^{a+b+1}\mathbf{B}(a+1, b+1)$$

۱۴ـ۱۳ نشان دهید حجم حاصل از سطح $z = x^a y^b$، صفحات $-xy$، $-yz$ و $-xz$، و صفحه‌ای که موازی محور zهاست و از نقاط $(x_0, 0)$ و $(0, y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از

$$\frac{x_0^{a+1} y_0^{b+1}}{a+b+2}\mathbf{B}(a+1, b+1)$$

۱۴ـ۱۴ رابطهٔ زیر را اثبات کنید

$$\int_0^\infty \frac{\sinh^a x}{\cosh^b x}dx = \frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \qquad -1 < a < b$$

[راهنمایی: تغییر متغیر $t = \tanh^2 x$ را اعمال کنید.]

۱۵

روشهای عددی

تعدادی ناچیز از مسائل فیزیک و ریاضی کاربردی را می‌توان به‌طور تحلیلی حل کرد. به‌علاوه، تنها از طریق ایده‌آل‌سازی و فرضهای اضافی (گاهی غیرواقعی) می‌توان یک مسئلهٔ واقعی را به مسئله‌ای تبدیل کرد که دارای جواب تحلیلی باشد. البته اینگونه ایده‌آل‌سازی‌ها برای فهم اساسی مسئله مهم‌اند. به‌عنوان مثال، این ایده‌آل‌سازی که زمین و ماه کره‌های کامل هستند، برای به‌دست آوردن قانون گرانش عمومی کمکهای فوق‌العاده زیادی به نیوتون کرد.

لیکن، در مورد وضعیتهای عملی، که ممکن است فرضهای اضافی مسئله را بیش از حد ایده‌آلی کند، جوابهای تحلیلی می‌توانند، حداکثر یک "پیش‌نویس تقریبی" از جواب واقعی باشند. در چنین مواردی باید تمام پارامترهای مناسب و مربوطه وارد شوند، همین فرایند است که روش تحلیلی حل را با دشواری روبه‌رو می‌کند. چنین مواردی حل عددی را طلب می‌کند. امروزه که کامپیوتر به تمام گوشه‌های بازارها راه‌یافته است، حل عددی از همیشه آسانتر شده است.

در این فصل پیرامون متداولترین روشهای عددی که در ریاضیات کاربردی می‌آیند، به اختصار بحث می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به مراجع بسیاری که در خصوص این مبحث یافت می‌شود، مراجعه کنید.

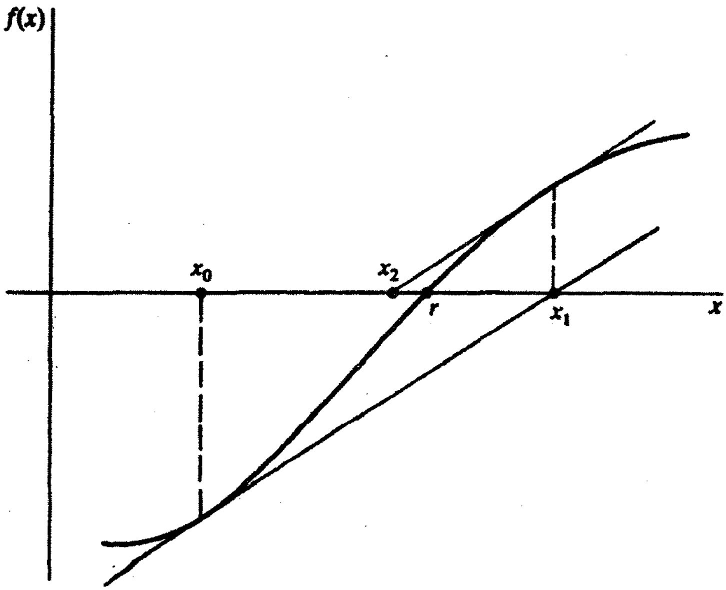
۱۵ـ۱ ریشه‌های معادلات

ابتدا به یکی از ساده‌ترین و قدیمی‌ترین مسائل عددی، یعنی حل یک معادلهٔ دلخواه، می‌پردازیم. مسئله را می‌توان به‌صورت زیر مطرح کرد: تابع حقیقی‌ـمقدار $f(x)$ مفروض است، به‌ازای چه مقدار حقیقی r، در صورت وجود، رابطهٔ $f(r) = \circ$ برقرار است؟

روشی که معمولاً برای یافتن r (که ریشهٔ f نامیده می‌شود) به‌کار می‌رود، عبارت است از روش نیوتون. بهترین راه برای فهم این روش توجه به منحنی نمایش تغییرات $f(x)$ است. در شکل ۱۵ـ۱ قسمتی از منحنی نمایش تغییرات f را در نزدیکی یکی از ریشه‌هایش، r، مشاهده می‌کنید. ابتدا از $x_\circ$، یکی از حدسهای صفرم ریشه، شروع می‌کنیم. اگر بخت با ما یار باشد و $f(x_\circ) = \circ$، به مقصود خود نایل آمده‌ایم. در غیر این‌صورت، محل تلاقی مماس بر منحنی در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ را با محور x می‌یابیم، که به کمک رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$y - f(x_\circ) = f'(x_\circ)(x - x_\circ)$$

این نقطهٔ تلاقی را $x_۱$ می‌نامیم. بنابراین، با فرض $f'(x_\circ) \neq \circ$ (در غیر این‌صورت، $x_\circ$ دیگری



شکل ۱۵ـ۱ روش نیوتون برای پیدا کردن ریشهٔ r تابع $f(x)$.

اختیار می‌کنیم)، داریم:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

و x_1 حدس جدید دیگری است که امیدواریم حدس بهتری نیز باشد. معادلهٔ مماس در $(x_1, f(x_1))$ عبارت است از:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

که به براورد جدید زیر منجر می‌شود:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

این فرایند را می‌توانیم چندان ادامه بدهیم تا به دقت دلخواه برسیم. بنابراین، برای براورد nام، که به کمک براورد $(n-1)$ام قابل حصول است، داریم:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (۱۵\text{ـ}۱)$$

مثال ۱۵ـ۱ـ۱: ریشهٔ سوم ۲ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد. فرض می‌کنیم $f(x) = x^3 - 2$، و از روش نیوتون برای براورد ریشهٔ $f(x)$ بهره می‌گیریم:

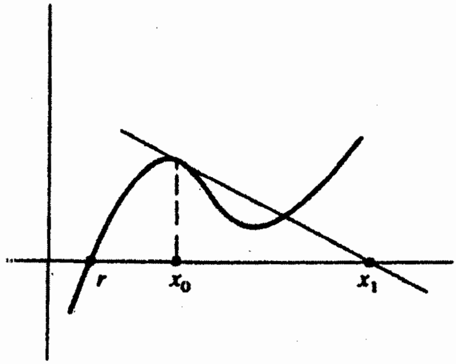
معادلهٔ (۱۵ـ۱) عبارت خواهد بود از

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 2}{3x_{n-1}^2} = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3x_{n-1}^2} \qquad (1)$$

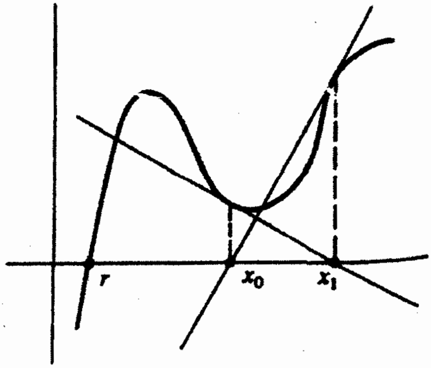
چون $1 < 2^{1/3} < 2$، فرض می‌کنیم $x_0 = 1{,}5$. با جایگزین کردن پیاپی در (۱)، می‌رسیم به:

$$x_1 = \frac{2}{3}(1{,}5) + \frac{2}{3(1{,}5)^2} = 1{,}296296296$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3x_1^2} = 1{,}260932225$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۵ـ۲ (الف) در اینجا روش نیوتون از حل مسئله عاجز می‌ماند، زیرا x_1 خیلی دور از r است (شاید به صفر دیگر تابع نزدیکتر است). (ب) در اینجا براورد ما میان x_0 و x_1 نوسان می‌کند و هرگز به r نزدیک نخواهد شد.

$$x_3 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3x_2^2} = 1{,}259921861$$

$$x_4 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3x_3^2} = 1{,}259921050$$

$$x_5 = \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3x_4^2} = 1{,}259921050$$

چون تا نه رقم معنی‌دار $x_5 = x_4$، نمی‌توانیم براوردمان را بهبود بخشیم. بنابراین، می‌توانیم بگوییم تا نه رقم معنی‌دار یا تا هشت رقم اعشار: $2^{1/3} = 1{,}259921050$. ●

فرض شده است که در هر تکرار جدید معادلهٔ (۱۵ـ۱)، به ریشهٔ واقعی نزدیکتر می‌شویم. دو وضعیتی را که در آنها این فرض برقرار نیست، و از این‌رو برای آنها (۱۵ـ۱) قابل اعمال نیست، در شکل ۱۵ـ۲ مشاهده می‌کنید.

۱۵ـ۲ کاربرد عملگرها در آنالیز عددی

به‌طور کلی، در محاسبات عددی به‌جای صفرها و بینهایتها، مقادیر متناهی جایگزین می‌شوند. مثلاً، به‌جای گرفتن حد واقعی برای

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

می‌گیریم ۲۰ یا ۱۰ $= n$، یا هر عدد متناهی مطلوب دیگر. به همین ترتیب، برای یافتن مشتق تابع $f(x)$ به روش عددی در $x_\circ$ از رابطهٔ زیر بهره می‌گیریم

$$f'(x_\circ) \approx \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

که در آن h یک عدد متناهی (ولی کوچک) است.

بسیاری از مسائل تحلیلی مستلزم اجرای بعضی عملیات حدگیری روی توابع‌اند. مثلاً، دیفرانسیل‌گیری مستلزم اختلاف مابین مقادیر یک تابع در دو نقطهٔ همسایه است، وقتی این دو نقطه به یکدیگر نزدیک و نزدیکتر شوند؛ به همین ترتیب، انتگرال‌گیری حد مجموع است. چون اجرای چنین عملیات حدی برای محاسبات عددی ناممکن است، آنها را با عملگرهایی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند تقریب می‌زنند.

۱۵ـ۲ـ۱ عملگرهای تفاضلی متناهی

در آنالیز عددی تابع را به‌صورت جدولی با دو ستون در نظر می‌گیرند. در ستون اول مقادیر (گسسته) متغیر مستقل x، و در ستون دوم مقدار تابع f به‌ازای مقادیر مختلف آن متغیر آورده می‌شود. به‌طور کلی $f_i \equiv f(x_i)$ عبارت است از مقدار f در x_i.

سه عملگر (گسسته) که در آنالیز عددی به‌کار می‌روند، عبارت‌اند از عملگر تفاضلی پیشرو، Δ، عملگر تفاضلی پسرو، ∇ (نباید با گرادیان اشتباه شود)، و عملگر تفاضلی مرکزی، δ. این عملگرها، بنابر تعریف عبارت‌اند از:

$$\Delta f_i \equiv f_{i+1} - f_i \tag{۱۵ـ۲}$$

$$\nabla f_i \equiv f_i - f_{i-1} \tag{۱۵ـ۳}$$

$$\delta f_i \equiv f_{i+1/2} - f_{i-1/2} \tag{۱۵ـ۴}$$

معادلهٔ (۱۵ـ۴) فقط از زاویهٔ نظری اهمیت دارد زیرا در جدولبندی توابع یا در محاسبات کامپیوتری عملگر نیم‌پله به‌کار نمی‌رود. نوعاً، داده‌ها متساوی‌الفاصله‌اند، بنابراین $x_{i+1} - x_i = \Delta x = h$ به‌ازای تمام iها یکسان است. در این‌صورت $f_{i\pm 1} = f(x_i \pm \Delta x)$، و تعریف می‌کنیم $f_{i\pm 1/2} \equiv f(x_i \pm \Delta x/2)$.

می‌توانیم حاصلضربهای این سه عملگر را تعریف کنیم. در حالت خاص Δ^2 به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\Delta^2 f_i \equiv \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$
$$= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$$
$$= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \qquad (۵\_۱۵)$$

به همین ترتیب

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \qquad (۶\_۱۵)$$

و

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \qquad (۷\_۱۵)$$

توجه کنید که

$$\delta^2 f_i = (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = \Delta f_i - \nabla f_i = (\Delta - \nabla) f_i$$

که، می‌دهد

$$\delta^2 = \Delta - \nabla$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که مابین این سه عملگر رابطه برقرار است. بعداً روابط دیگری هم به‌دست خواهیم آورد.

از این پس فرض خواهیم کرد تمام داده‌ها متساوی‌الفاصله و به فاصلهٔ h از یکدیگرند. از این فرض، به‌خصوص، نتیجه می‌گیریم که

$$f_{i+r} = f(x_1 + rh)$$

بهتر است که عملگر تغییر جا را به‌صورت:

$$\mathbb{E}f(x) \equiv f(x+h) \tag{۱۵_۸}$$

و عملگر میانگین‌گیری را به‌صورت

$$\mu f(x) \equiv \frac{۱}{۲}\left[f\left(x+\frac{h}{۲}\right)+f\left(x-\frac{h}{۲}\right)\right] \tag{۱۵_۹}$$

تعریف کنیم. توجه کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، داریم:

$$\mathbb{E}^n f(x) \equiv f(x+nh)$$

با تعمیم این عملگر به هر عدد حقیقی α، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbb{E}^\alpha f(x) \equiv f(x+\alpha h) \tag{۱۵_۱۰}$$

سایر عملگرهای تفاضلی متناهی را می‌توان برحسب E نوشت:

$$\Delta = \mathbb{E} - \mathbb{1} \tag{۱۵_۱۱الف}$$

$$\nabla = \mathbb{1} - \mathbb{E}^{-۱} \tag{۱۵_۱۱ب}$$

$$\delta = \mathbb{E}^{۱/۲} - \mathbb{E}^{-۱/۲} \tag{۱۵_۱۱ج}$$

$$\mu = \frac{۱}{۲}(\mathbb{E}^{۱/۲} + \mathbb{E}^{-۱/۲}) \tag{۱۵_۱۱د}$$

مثال ۱۵_۲_۱: می‌توان از معادلات (۱۵_۱۱) سود جست و رابطه‌ای را که قبلاً برای δ، ∇ و Δ به‌دست آمده، استنتاج کرد:

$$\begin{aligned}\delta^۲ &= (\mathbb{E}^{۱/۲} - \mathbb{E}^{-۱/۲})(\mathbb{E}^{۱/۲} - \mathbb{E}^{-۱/۲}) = \mathbb{E} - \mathbb{1} - \mathbb{1} + \mathbb{E}^{-۱}\\ &= \Delta - \nabla\end{aligned}$$

سایر روابط را نیز می‌توان به‌دست آورد؛ مثلاً

$$\begin{aligned}\Delta\nabla &= (\mathbb{E}-\mathbb{1})(\mathbb{1}-\mathbb{E}^{-1}) = \mathbb{E}-\mathbb{1}-\mathbb{1}+\mathbb{E}^{-1}\\ &= \Delta-\nabla\end{aligned}$$

به این ترتیب، داریم:

$$\delta^{2} = \Delta\nabla$$

که می‌توان آن را مستقیماً هم به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\Delta\nabla f_i &= \Delta(f_i - f_{i-1}) = \Delta f_i - \Delta f_{i-1} = f_{i+1} - f_i - (f_i - f_{i-1})\\ &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\end{aligned}$$

این رابطه با معادلهٔ (۱۵ـ۷) مطابقت دارد. ●

معادلات (۱۵ـ۱۱الف) و (۱۵ـ۱۱ب) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{E} = \mathbb{1} + \Delta \qquad \text{(۱۵ـ۱۲الف)}$$

$$\mathbb{E} = (\mathbb{1} - \nabla)^{-1} \qquad \text{(۱۵ـ۱۲ب)}$$

می‌توانیم یک فرمول مفید برای عملگر تغییر جا، وقتی روی چندجمله‌ایهای درجهٔ n یا کمتر عمل می‌کند، پیدا کنیم. توجه کنید که:

$$\mathbb{1} - \nabla^{n+1} = (\mathbb{1} - \nabla)(\mathbb{1} + \nabla + \nabla^{2} + \cdots + \nabla^{n})$$

اما ∇^{n+1} تمام چندجمله‌ایهای درجهٔ n یا کمتر را حذف می‌کند (تمرین ۱۵ـ۲ـ۱). از این‌رو، برای چنین چندجمله‌ایهایی داریم:

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} - \nabla)(\mathbb{1} + \nabla + \nabla^{2} + \cdots + \nabla^{n})$$

که نشان می‌دهد:

$$\mathbb{E} = (\mathbb{1} - \nabla)^{-۱} = \mathbb{1} + \nabla + \nabla^{۲} + \cdots + \nabla^{n}$$

با فرض $n \to \infty$، می‌توانیم برای چندجمله‌ایها از هر درجه‌ای بنویسیم:

$$\mathbb{E} = (\mathbb{1} - \nabla)^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} \nabla^{k} \qquad (۱۳\text{\_}۱۵)$$

مثال ۱۵ـ۲ـ۲: درون‌یابی عددی کاربرد فرمولهایی را که در بالا به‌دست آوردیم، نشان می‌دهد. فرض کنید جدول مقادیر یک تابع را داریم. تا وقتی دقیقاً مقادیر x_i داده شده در جدول مورد نظر ما باشد، هیچ مشکلی نداریم. اما، اگر مقدار تابع به‌ازای یک مقدار x، بین دو مقدار موجود در جدول، مورد نظر ما باشد، چکار می‌کنیم؟ در چنین حالتی از روش زیر بهره می‌گیریم.

فرض کنید مقادیر تابع f به‌ازای $x_۱, x_۲, \ldots, x_i, \ldots$ داده شده‌اند و مقدار تابع به‌ازای x مورد نظر ماست، به‌طوری که $x_i < x < x_{i+۱}$. این مقدار متناظر با f_{i+r}، که در آن $۰ < r < ۱$. داریم:

$$f_{i+r} = \mathbb{E}^{r} f_i = (\mathbb{1} + \Delta)^{r} f_i = \left[\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\Gamma(r+۱)}{\Gamma(k+۱)\Gamma(r-k+۱)} \Delta^{k}\right] f_i$$

$$= \left(\mathbb{1} + r\Delta + \frac{r(r-۱)}{۲}\Delta^{۲} + \frac{r(r-۱)(r-۲)}{۳!}\Delta^{۳} + \cdots\right) f_i \qquad (۱)$$

اگر تمام جملات را نگه داریم، این معادله دقیق است. اما، در عمل مجموع نامتناهی قطع می‌شود و تنها تعداد محدودی از جملات نگه داشته می‌شوند.

اگر فقط دو جمله نگه داشته شوند، داریم

$$\begin{aligned} f_{i+r} &\approx (\mathbb{1} + r\Delta) f_i = f_i + r(f_{i+۱} - f_i) \\ &= (۱ - r) f_i + r f_{i+۱} \end{aligned} \qquad (۲)$$

در حالت خاص، به‌ازای $r = ۱/۲$، از معادلهٔ (۲) می‌رسیم به

$$f_{i+۱/۲} \approx \frac{۱}{۲}(f_i + f_{i+۱})$$

که بنابرآن مقدار تابع در نقطهٔ وسط تقریباً با میانگین مقدار تابع در دو سر برابر است.

اگر جمله سوم سری در معادلهٔ (۱) را نیز نگه داریم، در این‌صورت خواهیم داشت

$$f_{i+r} \approx \left[\mathbb{1} + r\Delta + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2\right] f_i = f_i + r\Delta f_i + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_i$$
$$= f_i + r(f_{i+1} - f_i) + \frac{r(r-1)}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i)$$
$$= \frac{(2-r)(1-r)}{2} f_i + r(2-r) f_{i+1} + \frac{r(r-1)}{2} f_{i+2} \qquad (3)$$

به‌ازای $r = 1/2$، یعنی نقطهٔ وسط x_i و x_{i+1}، معادلهٔ (۳) منجر می‌شود به

$$f_{i+1/2} \approx \frac{3}{8} f_i + \frac{3}{4} f_{i+1} - \frac{1}{8} f_{i+2}$$

تقریبی که معادلهٔ (۳) می‌دهد، از تقریب معادلهٔ (۲) بهتر است. اما، نه تنها دو نقطهٔ طرفین x را شامل می‌شود، بلکه نقطهٔ دورتر x_{i+2} را نیز در بر می‌گیرد.

اگر می‌خواستیم جملات تا Δ^k را نگه داریم، دراین‌صورت f_{i+r} برحسب $f_i, f_{i+1}, \ldots, f_{i+k}$ داده می‌شد و نتیجه دقیقتر از (۳) می‌بود. بنابراین، هر چه اطلاعات بیشتری دربارهٔ رفتار یک تابع در نقاط دور داشته باشیم، بهتر می‌توانیم آن را در $x \in (x_i, x_{i+1})$ تقریب بزنیم.

تجزیه و تحلیل پیشین براساس درون‌یابی پیشرو انجام شد. شاید بخواهیم درون‌یابی پسرو به‌کار بریم، که در آن بخواهیم f_{i-r} را، به‌ازای $0 < r < 1$ بیابیم. در چنین حالتی، می‌توانیم از عملگر تفاضلی پسرو بهره گیریم:

$$f_{i-r} = \mathbb{E}^{-r} f_i = (\mathbb{E}^{-1})^r f_i = (\mathbb{1} - \nabla)^r f_i$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(r+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r-k+1)} \nabla^k\right] f_i \qquad (3)$$
$$= \left(\mathbb{1} - r\nabla + \frac{r(r-1)}{2}\nabla^2 - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\nabla^3 + \cdots\right) f_i \qquad \bullet$$

مثال ۱۵ـ۲ـ۳: حال نتیجهٔ به‌دست آمده در مثال ۱۵ـ۲ـ۲ را که با استفاده از ماشین حساب و یک تابع مشخص، $\sin x$، به‌دست آمد، بررسی می‌کنیم. به کمک ماشین‌حساب، می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم:

x	$\sin x$
۰	۰
۰٫۱	۰٫۰۹۹۸۳۳۴۱۶۶
۰٫۲	۰٫۱۹۸۶۶۹۳۳۰۸
۰٫۳	۰٫۲۹۵۵۲۰۲۰۶۷

فرض کنید از طریق درون‌یابی می‌خواهیم $\sin(۰٫۱۵)$ را بیابیم. با استفاده از معادلهٔ (۲) و مثال ۱۵ـ۲ـ۲، با $r = ۱/۲$ می‌رسیم به:

$$\sin(۰٫۱۵) \approx \frac{۱}{۲}[\sin(۰٫۱) + \sin(۰٫۲)] = ۰٫۱۴۹۲۵۱۳۷۳۷$$

از سوی دیگر، با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳) با $r = ۱/۲$، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}\sin(۰٫۱۵) &\approx \frac{۳}{۸}\sin(۰٫۱) + \frac{۳}{۴}\sin(۰٫۲) - \frac{۱}{۸}\sin(۰٫۳)\\ &= ۰٫۱۴۹۴۹۹۴۹۵۹\end{aligned}$$

مقدار $\sin(۰٫۱۵)$ که با استفاده از ماشین‌حساب به‌دست آمده، عبارت است از ۰٫۱۴۹۴۳۸۱۳۲۵. واضح است که معادلهٔ (۳) نسبت به معادلهٔ (۲) براورد بهتری به‌دست می‌دهد. ●

۱۵ـ۲ـ۲ عملگرهای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری

دو عمل بسیار مهم فیزیک ریاضیاتی را می‌توان برحسب عملگرهای تفاضلی متناهی نوشت. فرض کنید $\mathbb{D}$ و $\mathbb{J}$ نمایانگر مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری باشند، یا به بیان دقیقتر، بنابر تعریف عبارت باشند از

$$\begin{aligned}\mathbb{D}f(x) &\equiv \frac{df}{dx}(x) \equiv f'(x)\\ \mathbb{J}f(x) &\equiv \int_x^{x+h} f(x)dx \equiv F(x+h) - F(x) \qquad (۱۴ـ۱۵)\end{aligned}$$

که در آن $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ است.

با فرض وجود $\mathbb{D}$ توجه کنید که $f(x) = \mathbb{D}^{-۱}[f'(x)]$. این رابطه نشان می‌دهد که $\mathbb{D}^{-۱}$

عمل پادمشتق‌گیری، یا انتگرال‌گیری نامعین است. یعنی،

$$\mathbb{D}^{-1} f(x) = F(x) + \text{const.}$$

از سوی دیگر:

$$\Delta F(x) \equiv F(x+h) - F(x) \equiv \mathbb{J} f(x)$$

این دو معادله نشان می‌دهند که:

$$\Delta \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{J} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \mathbb{J}\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{J} = \mathbb{E} - \mathbb{1} \qquad (۱۵\_۱۵)$$

از این نکته که $[\mathbb{J}, \mathbb{D}] = 0$، و می‌توان درستی آن را به آسانی اثبات کرد، بهره گرفته‌ایم.

برای دستیابی به رابطه‌ای مابین $\mathbb{D}$ و عملگر تفاضلی پیشرو، از بسط تایلور سود می‌جوییم:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots \\ &= \left[\mathbb{1} + h\mathbb{D} + \frac{h^2}{2!}\mathbb{D}^2 + \cdots\right] f(x) = [e^{h\mathbb{D}}] f(x) \end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$f(x+h) \equiv \mathbb{E} f(x)$$

بنابراین، به اتحاد مهم زیر می‌رسیم:

$$\mathbb{E} = e^{h\mathbb{D}} \qquad (۱۶\_۱۵)$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم $h\mathbb{D} = \ln\mathbb{E}$، یا

$$\mathbb{D} = \frac{1}{h}\ln(\mathbb{1} + \Delta) = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right] \qquad (۱۷\_۱۵)$$

این عبارت فقط یکی از صورتهای عبارت $\mathbb{D}$ به‌شمار می‌آید. در سایر عبارتها $\mathbb{D}$ برحسب عملگرهای تفاضلی دیگر بیان می‌شوند. مثلاً از $\delta = \mathbb{E}^{۱/۲} - \mathbb{E}^{-۱/۲}$ می‌رسیم به:

$$\delta = e^{(۱/۲)h\mathbb{D}} - e^{(-۱/۲)h\mathbb{D}} = ۲\sinh\left(\frac{۱}{۲}h\mathbb{D}\right)$$

یا

$$\frac{۱}{۲}h\mathbb{D} = \sinh^{-۱}\left(\frac{\delta}{۲}\right)$$

بسط $\sinh^{-۱}(\delta/۲)$ برحسب سری تایلور، منجر می‌شود به:

$$\mathbb{D} = \frac{۲}{h}\left[\frac{\delta}{۲} - \frac{۱}{۳!}\left(\frac{\delta}{۲}\right)^{۳} + \frac{۳^۲}{۵!}\left(\frac{\delta}{۲}\right)^{۵} - \frac{۳^۲۵^۲}{۷!}\left(\frac{\delta}{۲}\right)^{۷} + \cdots\right] \qquad (۱۸\text{_}۱۵)$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \frac{۱}{h}[-\ln\mathbb{E}^{-۱}] = -\frac{۱}{h}\ln(\mathbb{1} - \nabla)\\ &= \frac{۱}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^۲}{۲} + \frac{\nabla^۳}{۳} + \cdots\right] \qquad (۱۹\text{_}۱۵)\end{aligned}$$

اگر مشتقهای بالاتر مورد نظر ما باشند، می‌توانیم $\mathbb{D}$ را به توانهای گوناگون برسانیم. مثلاً، برحسب عملگر تفاضلی پیشرو، داریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^۲ &= \frac{۱}{h^۲}\left[\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳} - \frac{\Delta^۴}{۴} + \cdots\right]^۲\\ &= \frac{۱}{h^۲}\left[\Delta^۲ - \Delta^۳ + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ - \frac{۵}{۶}\Delta^۵ - \cdots\right] \qquad (۲۰\text{_}۱۵)\end{aligned}$$

وقتی $\mathbb{D}$ را به‌صورت یک سری نمایی برحسب عملگر تفاضلی یافتیم، می‌توانیم $\mathbb{D}^{-۱}$ را از

طریق عمل تقسیم طولانی محاسبه کنیم. مثلاً می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{-۱} &= \frac{h}{\ln(\mathbb{1}+\Delta)} = \frac{h}{\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳} - \frac{\Delta^۴}{۴} + \cdots} \\ &= h\Delta^{-۱}\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - \frac{\Delta}{۲} + \frac{\Delta^۲}{۳} - \frac{\Delta^۳}{۴} + \cdots} \\ &= h\Delta^{-۱}\left(\mathbb{1} + \frac{\Delta}{۲} - \frac{\Delta^۲}{۱۲} + \frac{\Delta^۳}{۲۴} - \cdots\right)\end{aligned}$$

این عملیات به یک رابطهٔ مهم منجر می‌شوند:

$$\mathbb{J} = \Delta\mathbb{D}^{-۱} = h\left(\mathbb{1} + \frac{\Delta}{۲} - \frac{\Delta^۲}{۱۲} + \frac{\Delta^۳}{۲۴} - \cdots\right) \qquad (۱۵\text{ـ}۲۱)$$

عملگر $\mathbb{J}$ حالت خاصی از عملگر کلی‌تری است که بنابر تعریف عبارت است از:

$$\mathbb{J}_\alpha f(x) \equiv \int_x^{x+\alpha h} f(x)dx \qquad (۱۵\text{ـ}۲۲)$$

این تعریف، بلافاصله به فرمول زیر می‌انجامد:

$$\mathbb{J}_\alpha = (\mathbb{E}^\alpha - \mathbb{1})\mathbb{D}^{-۱} \qquad (۱۵\text{ـ}۲۳)$$

به‌ازای $\alpha = ۱$، معادلهٔ (۱۵ـ۲۱) به‌دست می‌آید. برای انتگرال‌گیری عددی گاهی مفید است که بگیریم $\alpha \neq ۱$. در چنین مواردی برای رسیدن به یک فرمول مناسب به‌ازای $\mathbb{J}_\alpha$ برحسب یک عملگر تفاضلی، از معادلهٔ (۱۵ـ۲۳) استفاده می‌شود.

تمرینها

۱۵ـ۲ـ۱ نشان دهید وقتی عملگر تفاضلی پیشرو بر یک چندجمله‌ای اعمال شود، درجهٔ چندجمله‌ای یک واحد کم می‌شود. [راهنمایی: ابتدا x^α را در نظر بگیرید]. سپس نشان دهید $\Delta^{n+۱}$ تمام چندجمله‌ایهای درجهٔ n و کمتر را حذف می‌کند. فاصله‌ها را یکسان فرض کنید.

۱۵ـ۲ـ۲ عبارتهایی برای $\mathbb{E}^{۱/۲}$، Δ، ∇ و μ برحسب δ بنویسید.

۳ـ۱۵ خطای برش

دو نوع خطا در محاسبات عددی پیش می‌آید. نوع اول که خطاهای گردکردن نامیده می‌شود، با چند استثناء به این علت اتفاق می‌افتد که وقتی یک عدد حقیقی به شکل اعشاری (یا دوتایی) نمایش داده می‌شود، به بینهایت رقم احتیاج است. مثلاً $1/3 = ۰٫۳۳۳۳\ldots$ ، $\sqrt{2} = ۱٫۴۱۴\ldots$ و $\pi = ۳٫۱۴۱۵۹\ldots$ که نقطه‌ها حاکی از آن‌اند که بینهایت عدد دیگر وجود دارد که در نمایش وارد نشده است. خطاهای گرد کردن وقتی پیش می‌آیند که (به‌طور اجتناب‌ناپذیری) چنین دنبالهٔ بینهایت رقمی را با چند رقم محدود جایگزین کنیم. برای یک محاسبهٔ معمولی که با کامپیوتر انجام می‌شود، برنامه‌نویس برای جلوگیری از این خطاها اختیار چندانی ندارد. لیکن، دقت دوگانه یا سه‌گانه خطاهای گرد کردن را کاهش می‌دهد.

خطاهای نوع دوم، که خطاهای برش نامیده می‌شوند، بیشتر به این بحث مربوط‌اند زیرا توسط برنامه‌نویس قابل کنترل‌اند. خطای برش وقتی اتفاق می‌افتد که به‌جای یک مجموع نامتناهی یک مجموع متناهی جایگزین شود. می‌توان با افزودن جملات بیشتر به مجموع متناهی (در قبال افزودن زمان کامپیوتر) یا با انتخاب مناسب جملات مجموع متناهی (به‌طوری که سریعتر همگرا شود) چنین خطایی را کاهش داد.

نکتهٔ مهم آن است که بتوانیم خطای مرتکب شده را، وقتی یک مجموع نامتناهی به یک مجموع متناهی برش داده می‌شود، براورد کنیم. چنین براوردی به بهترین وجه با استفاده از تابع مرتبه که در فصل دهم مورد بحث قرار گرفت، تشریح می‌شود. مثلاً فرض کنید، این سری در جملهٔ سوم برش داده شده است:

$$e^{۰٫۰۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۰٫۰۱)^n}{n!} = ۱ + ۰٫۰۱ + \frac{(۰٫۰۱)^۲}{۲!} + \cdots$$

در این‌صورت می‌گوییم، خطای پیش‌آمده عبارت است از $O((۰٫۰۱)^۳)$ یا $O(۱۰^{-۶})$. البته این بدان معنی نیست که خطا دقیقاً $۱۰^{-۶}$ است، بلکه تقریباً یا از مرتبه $۱۰^{-۶}$، است. در اینجا وارد جزئیات مربوط به آنالیز خطا نمی‌شویم، مرتبه‌های بزرگی خطاها برای مقاصد فعلی ما کافی است.

همان‌طوری که در بخش ۱۵ـ۲ گفته شد، تمام عملگرهای مورد نظر ما، می‌توانند با عبارتهایی شامل عملگرهای تفاضلی متناهی تقریب زده شوند. به‌طورکلی، این کار یک سری نمایی نامتناهی از یک عملگر تفاضلی متناهی می‌دهد. چون در محاسبات عملی مجموع نامتناهی برش داده می‌شود، نکتهٔ مهم این است که خطای پیش‌آمده در این برش را براورد کنیم. اگر خطا برای هر نما

از عملگر تفاضلی را بدانیم می‌توانیم مرتبهٔ بزرگی این خطا را به‌دست آوریم. عملگر تفاضلی پیشرو را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Delta = \mathbb{E} - \mathbb{1} = e^{h\mathbb{D}} - \mathbb{1}$$
$$= h\mathbb{D} + \frac{(h\mathbb{D})^۲}{۲} + \cdots = O(h)$$

زیرا بزرگترین جملهٔ سری از مرتبهٔ h است. با یادآوری خواص تابع O، ملاحظه می‌کنیم که $\Delta^n = O(h^n)$. این نشان می‌دهد که برش یک سری توان در Δ در جملهٔ nام خطایی مساوی با $O(h^{n+۱})$ پدید می‌آورد، که به‌صورت $e = O(h^{n+۱})$ نوشته می‌شود. نیز، می‌توان نشان داد که $\nabla^n = O(h^n)$ و $\delta^n = O(h^n)$.

مثال ۱۵ـ۳ـ۱: با نوشتن $\mathbb{D} = (۱/h)\Delta$ درگیر خطایی شده‌ایم که مرتبهٔ بزرگی آن عبارت است از $(۱/h)O(h^۲) = h$، زیرا سری نامتناهی معادلهٔ (۱۵ـ۱۷) را در جملهٔ Δ برش داده‌ایم. از سوی دیگر، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbb{D} = \frac{۱}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲}\right) \qquad \mathrm{e} = O(h^۲) \tag{۱}$$

که به این معناست که وقتی عبارت $\mathbb{D}$ در $\Delta^۲$ برش داده شود، خطای مربوطه از مرتبهٔ $h^۲$ است. به همین ترتیب، می‌توان معادلهٔ (۱۵ـ۲۱) را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbb{J} = h\left(\mathbb{1} + \frac{\Delta}{۲} - \frac{\Delta^۲}{۱۲}\right) \qquad \mathrm{e} = O(h^۴) \tag{۲}$$

●

یکی از راههای به حداقل رساندن خطای برش این است که اندازهٔ گامهای h را حتی‌الامکان کوچک بگیریم و تا حد معقولی جملات بیشتری را نگه داریم. اما این کار، عملاً خطای گرد کردن را افزایش می‌دهد.

مثال ۱۵ـ۳ـ۲: می‌خواهیم با گرفتن $\cos x$ به‌صورت $(d/dx)(\sin x)$ و استفاده از جدول مثال ۱۵ـ۲ـ۳، با $e = O(۰٫۰۱)$، مقدار $\cos(۰٫۱)$ را محاسبه کنیم. با اعمال معادلهٔ (۱) از

مثال ۱۵ـ۳ـ۱، می‌رسیم به

$$\begin{aligned}\mathbb{D}f_i &= \frac{۱}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲}\right)f_i = \frac{۱}{h}\left(\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i\right)\\ &= \frac{۱}{h}\left[f_{i+۱} - f_i - \frac{۱}{۲}(f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i)\right]\\ &= \frac{۱}{۲h}(-f_{i+۲} + ۴f_{i+۱} - ۳f_i)\end{aligned}$$

در این حالت، $h = ۰٫۱$ و $f(x) = \sin x$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\cos(۰٫۱) &\approx \frac{۱}{۰٫۲}[-۰٫۲۹۵۵۲۰۲۰۶۷ + ۴(۰٫۱۹۸۶۶۹۳۳۰۸) - ۳(۰٫۰۹۹۸۳۳۴۱۶۶)]\\ &= ۰٫۹۹۸۲۸۴۳۳۳۵ \qquad \mathrm{e} = O(۰٫۰۱)\end{aligned}$$

در مقابل، مقداری که به کمک ماشین‌حساب مستقیماً به‌دست می‌آید، عبارت است از ۰٫۹۹۵۰۰۴۱۶۵۳. ●

تمرین

۱۵ـ۳ـ۱ (الف) برای $\mathbb{D}^۳$ عبارتهایی برحسب Δ با $\mathrm{e} = O(h)$ و $\mathrm{e} = O(h^۲)$ بنویسید.
(ب) به‌ازای $\mathrm{e} = O(h^۲)$ مشتق سوم یک تابع f در x_i را تقریب بزنید و آن را برحسب مقادیرش در نقاط گسستهٔ همسایه بنویسید.

۱۵ـ۴ انتگرال‌گیری عددی

فرض کنید می‌خواهیم انتگرال زیر را به‌صورت عددی محاسبه کنیم:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

فرض کنید $x_۰ \equiv a$ و $x_N \equiv b$ و بازهٔ $[a, b]$ را به N قسمت مساوی، طول هر کدام $h = (b-a)/N$، تقسیم کنید. روش متداول برای محاسبهٔ انتگرالها به این قرار است که انتگرال $\int_{x_i}^{x_i+\alpha h} f(x)$ را که در آن α یک عدد مناسب است، بیابیم و سپس تمام این انتگرالها را با هم

جمع کنیم تا I به‌دست آید. بنابراین، داریم:

$$I = \int_{x_\circ}^{x_\circ+\alpha h} f(x)dx + \int_{x_\circ+\alpha h}^{x_\circ+\text{۲}\alpha h} f(x)dx + \cdots + \int_{x_\circ+(M-\text{۱})\alpha h}^{x_\circ+M\alpha h} f(x)dx$$

که در آن M عددی است که به‌طور مناسبی انتخاب شده است. در واقع، چون

$$x_N = x_\circ + Nh$$

آنگاه $N = M\alpha$. سپس از معادلهٔ (۱۵ـ۲۳) استفاده می‌کنیم تا برسیم به:

$$I = \mathbb{J}_\alpha f_\circ + \mathbb{J}_\alpha f_\alpha + \cdots + \mathbb{J}_\alpha f_{(M-\text{۱})\alpha} = \mathbb{J}_\alpha \left(\sum_{k=\circ}^{M-\text{۱}} f_{k\alpha} \right) \qquad (\text{۱۵ـ۲۴})$$

که در آن $f_{k\alpha} \equiv f(x_\circ + k\alpha h)$. به این ترتیب، به عبارتی برای $\mathbb{J}_\alpha$ نیاز داریم تا بتوانیم انتگرال را محاسبه کنیم. چنین عبارتی را می‌توانیم به‌دست آوریم (تمرین ۱۵ـ۴ـ۱):

$$\mathbb{J}_\alpha = h\frac{(\mathbb{1}+\Delta)^\alpha - \mathbb{1}}{\ln(\mathbb{1}+\Delta)} = \alpha h \left[\mathbb{1} + \frac{\alpha}{\text{۲}}\Delta + \frac{\alpha(\text{۲}\alpha-\text{۳})}{\text{۱۲}}\Delta^{\text{۲}} + \frac{\alpha(\alpha-\text{۲})^{\text{۲}}}{\text{۲۴}}\Delta^{\text{۳}} \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(\text{۶}\alpha^{\text{۳}} - \text{۴۵}\alpha^{\text{۲}} + \text{۱۱۰}\alpha - \text{۹۰})}{\text{۷۲۰}}\Delta^{\text{۴}} + \cdots \right] \qquad (\text{۱۵ـ۲۵})$$

معادلات (۱۵ـ۲۴) و (۱۵ـ۲۵) مقدار مطلوب انتگرال را می‌دهند.

حال چند نکته‌ای در خصوص این روش را ذکر می‌کنیم. اولاً، وقتی h مشخص شد، تابع فقط می‌تواند در $x_\circ + nh$ تعیین شود، که در آن n یک عدد صحیح است. یعنی، f_n فقط به‌ازای عدد صحیح n داده می‌شود. بنابراین، در مجموع (۱۵ـ۲۴)، $k\alpha$ باید یک عدد صحیح باشد. چون k یک عدد صحیح است، نتیجه می‌گیریم که α باید یک عدد صحیح باشد. ثانیاً، چون به‌ازای یک عدد صحیح M داریم $N = M\alpha$، باید N را چنان برگزینیم که مضربی از α باشد. ثالثاً، اگر قرار باشد بتوانیم $\mathbb{J}_\alpha f_{(M-\text{۱})\alpha}$، جملهٔ آخر در (۱۵ـ۲۴)، را محاسبه کنیم $\mathbb{J}_\alpha$ نمی‌تواند توانهایی از Δ داشته باشد که بالاتر از α هستند، زیرا $\Delta^n f_{(m-\text{۱})\alpha}$ دارای جمله‌ای به‌صورت زیر است

$$f[x_\circ + (M-\text{۱})\alpha h + nh] = f[x_N + (n-\alpha)h]$$

که به‌ازای $\alpha > n$، f را در نقطه‌ای بیرون از حد بالای $x_N = b$ می‌دهد. بنابراین، در بسط سری نمایی $\mathbb{J}_\alpha$، باید اطمینان یابیم که هیچ توانی از Δ، بیش از α، نداشته باشیم. رابعاً، هر چه خطای هر جملهٔ منفرد در (۱۵ـ۲۴) کوچکتر باشد، خطای کل برای I کوچکتر خواهد بود.

چند $\mathbb{J}_\alpha$ مشخص وجود دارند که معمولاً در انتگرال‌گیری عددی به‌کار می‌روند. در بخش بعد این $\mathbb{J}$ها را بررسی می‌کنیم.

۱۵ـ۴ـ۱ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

قاعده ذوزنقه‌ای تصریح می‌کند که $\alpha = ۱$. بنابراین مطابق مطالب پیش‌گفته، جمله‌ها تا توان یک در بسط $\mathbb{J}_\alpha$ را نگه می‌داریم. بنابراین، $\mathbb{J}_۱ \approx h\left(\mathbb{1} + \frac{۱}{۲}\Delta\right)$، یا

$$\mathbb{J}_۱ = h\left(\mathbb{1} + \frac{۱}{۲}\Delta\right) \qquad \mathrm{e} = O(h^۳)$$

با نشاندن در معادلهٔ (۱۵ـ۲۴)، می‌رسیم به

$$I = h\left(\mathbb{1} + \frac{۱}{۲}\Delta\right)\left(\sum_{k=۰}^{N-۱} f_k\right) = h\sum_{k=۰}^{N-۱}\left[f_k + \frac{۱}{۲}(f_{k+۱} - f_k)\right]$$

$$= \frac{h}{۲}\sum_{k=۰}^{N-۱}(f_k + f_{k+۱}) \qquad \mathrm{e} = O(h^۲) \tag{۱۵ـ۲۶}$$

این رابطه را گاهی به‌صورت زیر می‌نویسند

$$I = \frac{h}{۲}(f_۰ + ۲f_۱ + ۲f_۲ + \cdots + ۲f_{N-۱} + f_N) \qquad \mathrm{e} = O(h^۲)$$

توجه کنید که $\mathrm{e} = O(h^۲)$، زیرا هر جمله دارای یک خطای $O(h^۳)$ است. بنابراین، خطای کل عبارت است از $N[O(h^۳)]$. اما $N = O(۱/h)$، بنابراین، خطای کل عبارت است از:

$$O(۱/h)O(h^۳) = O(h^۳/h) = O(h^۲)$$

۱۵ـ۴ـ۲ قاعدهٔ یک سوم سیمپسون

طبق قاعدهٔ یک سوم سیمپسون قرار می‌دهیم $\alpha = ۲$. بنابراین، باید تا جملهٔ $\Delta^۲$ را نگه داریم. اما، به‌ازای $\alpha = ۲$، توان سوم Δ نیز در معادلهٔ (۱۵ـ۲۵) حذف می‌شود. بنابراین، یک "توانِ"

اضافی ناشی از بی‌دقتی به‌دست می‌آوریم! از این‌رو، معادلهٔ (۱۵ـ۲۵) می‌دهد

$$\mathbb{J}_۲ = ۲h\left(\mathbb{1} + \Delta + \frac{۱}{۶}\Delta^۲\right) \qquad \mathrm{e} = O(h^۵)$$

که نشان می‌دهد مرتبهٔ بزرگی خطا از آنچه که انتظار می‌رفت به اندازهٔ یک واحد کوچکتر است. به همین علت است که قاعدهٔ یک سوم سیمسن برای انتگرال‌گیریهای عددی خیلی طرفدار دارد. با نشاندن عبارت $\mathbb{J}_۲$ در (۱۵ـ۲۴) می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{۳}\sum_{k=۰}^{N/۲-۱}(۶\mathbb{1} + ۶\Delta + \Delta^۲)f_{۲k} \\ &= \frac{h}{۳}\sum_{k=۰}^{N/۲-۱}[۶f_{۲k} + ۶(f_{۲k+۱} - f_{۲k}) + f_{۲k+۲} - ۲f_{۲k+۱} + f_{۲k}] \\ &= \frac{h}{۳}\sum_{k=۰}^{N/۲-۱}[f_{۲k+۲} + ۴f_{۲k+۱} + f_{۲k}] \qquad \mathrm{e} = O(h^۴) \end{aligned} \qquad (۱۵\text{ـ}۲۷)$$

البته، این نکتهٔ قابل فهم است که N عدد صحیح زوجی است. به اعتبار مجموع، توان h در خطا در اینجا به اندازهٔ واحد کم شده است. معادلهٔ (۱۵ـ۲۷) را گاهی به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\begin{aligned} I =& \frac{h}{۳}(f_۰ + ۴f_۱ + ۲f_۲ + ۴f_۳ + ۲f_۴ + ۴f_۵ + ۲f_۶ + \cdots \\ & + ۲f_{N-۲} + ۴f_{N-۱} + f_N) \qquad \mathrm{e} = O(h^۴) \end{aligned}$$

نام این روش از ضریب ۱/۳ گرفته شده است.

۱۵ـ۴ـ۳ قاعدهٔ سه‌هشتم سیمپسون

بنابر قاعدهٔ سه‌هشتم سیمپسون قرار می‌دهیم $\alpha = ۳$، و جملات تا $\Delta^۳$ را نگه می‌داریم و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_۳ &= ۳h\left(\mathbb{1} + \frac{۳}{۲}\Delta + \frac{۳}{۴}\Delta^۲ + \frac{۱}{۸}\Delta^۳\right) \\ &= \frac{۳h}{۸}(۸\mathbb{1} + ۱۲\Delta + ۶\Delta^۲ + \Delta^۳) \qquad \mathrm{e} = O(h^۵) \end{aligned}$$

با نشاندن در معادلهٔ (۱۵ـ۲۴)، می‌رسیم به:

$$I = \frac{۳h}{۸} \sum_{k=۰}^{N/۳-۱} (۸\mathbb{1} + ۱۲\Delta + ۶\Delta^۲ + \Delta^۳) f_{۳k}$$

$$= \frac{۳h}{۸} \sum_{k=۰}^{N/۳-۱} [۸f_{۳k} + ۱۲(f_{۳k+۱} - f_{۳k}) + ۶(f_{۳k+۲} - ۲f_{۳k+۱} + f_{۳k})$$

$$+ (f_{۳k+۳} - ۳f_{۳k+۲} + ۳f_{۳k+۱} - f_{۳k})]$$

$$= \frac{۳h}{۸} \sum_{k=۰}^{N/۳-۱} (f_{۳k+۳} + ۳f_{۳k+۲} + ۳f_{۳k+۱} + f_{۳k}) \quad \mathrm{e} = O(h^۴) \qquad (۱۵\text{ـ}۲۸)$$

که معمولاً به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$I = \frac{۳h}{۸}(f_۰ + ۳f_۱ + ۳f_۲ + ۲f_۳ + ۳f_۴ + ۳f_۵ + ۲f_۶ + \cdots + ۲f_{N-۳}$$

$$+ ۳f_{N-۲} + ۳f_{N-۱} + f_N) \quad \mathrm{e} = O(h^۴)$$

۱۵ـ۴ـ۴ کران خطاها

می‌توانیم حدود بالا و پایین خطای دخیل در تقریب‌زدن یک انتگرال را به کمک مجموعی محاسبه کنیم که در بخشهای پیش تشریح کردیم. این کار را برای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای انجام می‌دهیم.

ابتدا خطا برای یک تک بازهٔ به طول h را محاسبه می‌کنیم. به‌ازای $t \equiv x_i + h$، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای می‌انجامد به:

$$I = \int_{x_i}^{t} f(x)dx = \frac{h}{۲}[f(x_i) + f(t)] + e_i(t)$$

که در آن $e_i(t)$ خطای دقیق متناظر با بازهٔ $[x_i, t]$ است. این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$e_i(t) = \int_{x_i}^{t} f(x)dx - \frac{t - x_i}{۲}[f(x_i) + f(t)]$$

با مشتق‌گیری نسبت به t، می‌رسیم به:

$$e_i'(t) = f(t) - \frac{۱}{۲}[f(x_i) + f(t)] - \frac{t - x_i}{۲} f'(t)$$

به همین ترتیب:

$$e_i''(t) = -\frac{t-x_i}{۲}f''(t)$$

اگر مقادیر کمینه و بیشینه $f''(t)$ در بازهٔ $[x_i, t]$ را، به‌ترتیب، $(f''_{\min})_i$ و $(f''_{\max})_i$ بنامیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{t-x_i}{۲}(f''_{\min})_i \leq -e_i''(t) \leq \frac{t-x_i}{۲}(f''_{\max})_i$$

با یکبار پادمشتق‌گیری، می‌رسیم به:

$$\frac{(t-x_i)^۲}{۴}(f''_{\min})_i \leq -e_i'(t) \leq \frac{(t-x_i)^۲}{۴}(f''_{\max})_i$$

با یکبار پادمشتق‌گیری دیگر، خواهیم داشت:

$$\frac{(t-x_i)^۳}{۱۲}(f''_{\min})_i \leq -e_i(t) \leq \frac{(t-x_i)^۳}{۱۲}(f''_{\max})_i$$

یا، چون $t - x_i = h$، پس

$$\frac{h^۳}{۱۲}(f''_{\min})_i \leq -e_i \leq \frac{h^۳}{۱۲}(f''_{\max})_i$$

پس از یافتن کران برای یک تک بازه، می‌توانیم به محاسبات خود تا کل بازهٔ $[a, b]$ ادامه دهیم. فرض کنید، $f''_{\min}$ و $f''_{\max}$ به‌ترتیب معرف کمینه و بیشینه f'' درکل بازهٔ $[a, b]$ باشند. در این‌صورت واضح است که:

$$\frac{h^۳}{۱۲}f''_{\min} \leq -e_i \leq \frac{h^۳}{۱۲}f''_{\max} \quad \forall i$$

با جمع کردن تمام خطاها به‌ازای مقادیر مختلف i، سرانجام، نامساوی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{h^۳}{۱۲}Nf''_{\min} \leq -e \leq \frac{h^۳}{۱۲}Nf''_{\max}$$

چون $N = (b-a)/h$، سرانجام کرانهای زیر را برای خطا در قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{h^{۲}(b-a)}{۱۲}f''_{\min} \le -e \le \frac{h^{۲}(b-a)}{۱۲}f''_{\max} \qquad (۱۵\_۲۹)$$

در بعضی کتابها، e را نتیجهٔ تقریبی منهای نتیجهٔ دقیق تعریف می‌کنند؛ در آن‌صورت علامت منها در جلوی e در معادلهٔ (۱۵ـ۲۹) حذف می‌شود.

تعیین حدود خطاهای قواعد سیمپسون دشوارتر است. اما، می‌توان به‌طور بسیار کلی نشان داد که:

$$\int_{x_\circ}^{x_\circ+nh} f(x)dx = h\sum_{k=\circ}^{n} c_k f(x_k) + e_n(\xi) \qquad (۱۵\_۳۰\text{الف})$$

که در آن ξ عددی بین $x_\circ$ و $x_\circ + nh$ است:

$$c_k = \int_\circ^n \frac{s(s-۱)\cdots(s-k+۱)(s-k-۱)\cdots(s-n)}{k(k-۱)\cdots(k-k+۱)(k-k-۱)\cdots(k-n)}ds \qquad (۱۵\_۳۰\text{ب})$$

و

$$e_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{h^{n+۲}f^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}\int_\circ^n s(s-۱)\cdots(s-n)ds & n \text{ زوج} \\[2ex] \dfrac{h^{n+۳}f^{(n+۲)}(\xi)}{(n+۲)!}\int_\circ^n \left(s-\dfrac{n}{۲}\right) s(s-۱)\cdots(s-n)ds & n \text{ فرد} \end{cases}$$

(۱۵ـ۳۰ج)

توجه کنید که در (۱۵ـ۳۰ب)، جملهٔ $(s-k)$ در صورت حضور ندارد و جملهٔ $(k-k) = \circ$ از مخرج حذف شده است.

اعمال فرمول (۱۵ـ۳۰الف) به قاعدهٔ یک‌سوم سیمپسون (تمرین ۱۵ـ۴ـ۲) می‌دهد:

$$e_{۲}(\xi) = -\frac{h^{۵}f^{(\text{iv})}(\xi)}{۹\circ}$$

که به کران‌های زیر برای خطای کل در انتگرال‌گیری عددی با آن قاعده، می‌انجامد:

$$\frac{h^{۴}(b-a)}{۹\circ}f^{(\text{iv})}_{\min} \le -e \le \frac{h^{۴}(b-a)}{۹\circ}f^{(\text{iv})}_{\max} \qquad (۱۵\_۳۱)$$

مثال ۱۵ـ۴ـ۱ : از قاعدهٔ یک سوم سیمپسون با چهار بازه بهره می‌گیریم تا انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$I = \int_{0}^{1} e^x dx$$

با $h = 0.25$، $N = 4$ و $f(x) = e^x$، معادلهٔ (۱۵ـ۲۷) منجر می‌شود به:

$$I \approx \frac{0.25}{3}(1 + 4e^{0.25} + 2e^{0.5} + 4e^{0.75} + e)$$
$$= \frac{0.25}{3}(20.62) = 1.71832$$

این حکم به نتیجهٔ به‌دست آمده به کمک ماشین‌حساب، $e - 1 = 1.71828$، بسیار نزدیک است. توجه کنید که مقدار تقریبی بزرگتر است. بنابراین، اگر بنویسیم*:

$$I = I_{\text{approx}} + e_4^{\text{tot}}(\xi)$$

باید برای $e_4^{\text{tot}}(\xi)$ یک مقدار منفی به‌دست آوردیم. این مقدار با عبارت

$$e_4^{\text{tot}}(\xi) = Ne_4(\xi) = -\left[\frac{(0.25)^5 e^{\xi}}{90}\right]$$

مطابقت دارد، زیرا e^{ξ} همواره مثبت است. چون $0 \le \xi \le 1$، داریم $1 \le e^{\xi} \le e$، که می‌دهد

$$\frac{(0.25)^5(4)}{90} \le -e_4^{\text{tot}} \le \frac{(0.25)^5(4)}{90}e$$

یا

$$4.34 \times 10^{-5} \le -e_4^{\text{tot}} \le 1.18 \times 10^{-4}$$ ●

تمرینها

۱۵ـ۴ـ۱ عبارتی برای $\mathbb{J}_\alpha$ برحسب توانهای Δ پیدا کنید. کلیهٔ جملات تا توان چهارم را نگه دارید.

۱۵ـ۴ـ۲ نشان دهید معادلهٔ (۱۵ـ۳۰الف)، به‌ازای $n = 1$، به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و به‌ازای $n = 2$ به قاعده یک‌سوم سیمپسون تبدیل می‌شود. در هر یک از این حالتها، جملهٔ خطا را پیدا کنید.

* approx نشانهٔ تقریب و tot نشانهٔ کل است.م.

۵ـ۱۵ حل عددی معادلات دیفرانسیل

به احتمال بسیار زیاد، پردامنه‌ترین کاربردهای روشهای عددی در حل معادلات دیفرانسیل است. این روشها مختلف‌اند، که از لحاظ آسانی و دقت با هم تفاوت دارند. در این بخش، چند نمونه از این روشها را که در حل معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار می‌روند، ملاحظه می‌کنیم.

در فصل نهم دیدیم که یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی از مرتبه‌های بالا را می‌توان همواره به‌صورت یک دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول با چند متغیر نوشت. بنابراین، یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

که در آن f تابع خوش‌رفتاری از دو متغیر حقیقی است.

عملاً، به دو نوع مسئلهٔ کلی برخورد می‌کنیم. یکی از آنها مسئلهٔ مقدار اولیه، مقدار $x(t)$ را در زمان اولیهٔ $t_\circ$ می‌دهد، و مقدار x در سایر لحظات را می‌خواهد. نوع دوم، مسئلهٔ مقدار مرزی است، که فقط در مورد معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌های بالاتر از یک به‌کار می‌رود. مسئلهٔ مقدار مرزی مرتبهٔ دوم مقدار $x(t)$ و (یا) $\dot{x}(t)$ در یک یا چند نقطه را مشخص می‌کند و x و $\dot{x}$ در سایر مقادیر t را می‌خواهد.

۱ـ۵ـ۱۵ استفاده از عملگر تفاضلی پسرو

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad x(t_\circ) = x_\circ \tag{۳۲ـ۱۵}$$

حل عددی (۱۵ـ۳۲) به‌معنی محاسبهٔ تابع $x(t)$ در $\{t_k\}_{k=1}^{N}$ است که در آن $t_k = t_\circ + kh$ و h یک فاصلهٔ مناسب است. یعنی، مسئله عبارت است از یافتن $\{x_k = x(t_\circ + kh)\}_{k=1}^{N}$، وقتی $x_\circ$ و معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول در (۱۵ـ۳۲) معلوم باشند.

حال، از انتگرال‌گیری (۱۵ـ۳۲) بین t_n و $t_n + h$ شروع می‌کنیم:

$$x(t_n + h) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+h} \dot{x}(t)dt$$

با تغییر متغیر انتگرال‌گیری به $s = (t - t_n)/h$، و استفاده از فرمول انتگرال $\int a^s ds = a^s/\ln a$ می‌رسیم به

$$x_{n+1} - x_n = h\int_0^1 \dot{x}(t_n + sh)ds = h\int_0^1 [\mathbb{E}^s \dot{x}(t_n)]ds$$

$$= h\left(\int_0^1 \mathbb{E}^s ds\right)\dot{x}(t_n) = h\left(\frac{\mathbb{E} - \mathbb{1}}{\ln\mathbb{E}}\right)\dot{x}(t_n) \qquad (۱۵\text{-}۳۳\text{الف})$$

از آنجا که وضعیتی نوعی مستلزم محاسبهٔ x_{n+1} از روی مقادیر $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ درگامهای قبلی است، عبارتی می‌خواهیم که در آن سمت راست حاوی چنین جملاتی باشد. از اینجا ایجاب می‌شود که $\mathbb{E}$ را برحسب عملگر تفاضلی پسرو بیان کنیم: $\mathbb{E} = (\mathbb{1} - \nabla)^{-1}$. در این‌صورت معادلهٔ (۱۵ـ۳۳الف) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x_{n+1} - x_n = h\left(\int_0^1 (\mathbb{1} - \nabla)^{-s} ds\right)\dot{x}_n$$

$$= h\left[\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-s+1)ds}{k!\Gamma(-s-k+1)}(-\nabla)^k\right]\dot{x}_n$$

$$\equiv h\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \nabla^k\right)\dot{x}_n \qquad (۱۵\text{-}۳۳\text{ب})$$

که در آن:

$$a_k \equiv \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 \frac{\Gamma(-s+1)}{\Gamma(-s-k+1)}ds$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 s(s+1)(s+2)\cdots(s+k-1)ds \qquad (۱۵\text{-}۳۳\text{ج})$$

با حفظ چند جملهٔ اول بسط، می‌رسیم به:

$$x_{n+1} \approx x_n + h\left(\mathbb{1} + \frac{\nabla}{2} + \frac{5\nabla^2}{12} + \frac{3\nabla^3}{8} + \frac{251\nabla^4}{720} + \frac{95\nabla^5}{288} + \cdots\right)\dot{x}_n$$

(۱۵ـ۳۴)

به‌خاطر حضور ∇ در معادلهٔ (۱۵ـ۳۴)، برای یافتن مقدار $x(t)$ در t_{n+1}، لازم است $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ را فقط در نقاط $t_0, t_1, \ldots, t_n$ بدانیم. به همین علت، (۱۵ـ۳۴) فرمولی از نوع باز نامیده می‌شود. برعکس، در فرمولهای نوع بسته، سمت راست شامل مقادیر در t_{n+1} نیز هست. می‌توانیم با تغییر $\mathbb{E}^s \dot{x}_n$ به شکل هم‌ارز آن، $\mathbb{E}^{s-1}\dot{x}_{n+1}$ یک فرمول نوع بسته را به‌دست آوریم:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\int_0^1 \mathbb{E}^{s-1} ds\right)\dot{x}_{n+1} = x_n + h\left(\int_0^1 (\mathbb{1} - \nabla)^{-s+1} ds\right)\dot{x}_{n+1}$$

$$= x_n + h\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \nabla^k\right)\dot{x}_{n+1} \qquad \text{(۱۵ـ۳۵الف)}$$

که در آن:

$$b_k \equiv \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 \frac{\Gamma(-s+2)}{\Gamma(-s-k+2)} ds = \frac{1}{k!}\int_0^1 (s-1)s(s+1)\cdots(s+k-2) ds \qquad \text{(۱۵ـ۳۵ب)}$$

چند جملهٔ اول را حفظ می‌کنیم و در این‌صورت خواهیم داشت:

$$x_{n+1} \approx x_n + h\left(\mathbb{1} - \frac{\nabla}{2} - \frac{\nabla^2}{12} - \frac{\nabla^3}{24} - \frac{19\nabla^4}{720} - \frac{3\nabla^5}{160} - \cdots\right)\dot{x}_{n+1} \qquad \text{(۱۵ـ۳۶)}$$

که مستلزم مقداریابی به‌ازای t_{n+1} در عبارت سمت راست است.

اگر به‌جای انتگرال گرفتن عبارت (۱۵ـ۳۲) از t_n تا $t_n + h$، آن را از $t_n - ph$ تا $t_n + h$ انتگرال بگیریم (دلیل انجام این کار به‌زودی روشن خواهد شد)، خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_{n-p} + h\int_{-p}^{1} \dot{x}(t_n + sh) ds$$

بعد از انجام عملیاتی بسیار شبیه به آنچه در قبل انجام دادیم به فرمولی از نوع گشوده (باز) دست پیدا می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_{n-p} + h\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(p)} \nabla^k \dot{x}_n \qquad \text{(۱۵ـ۳۷)}$$

که در آن:

$$a_k^{(p)} \equiv \frac{(-1)^k}{k!}\int_{-p}^{1}\frac{\Gamma(-s+1)}{\Gamma(-s-k+1)}ds$$

به این ترتیب، برای فرمول نوع بسته خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_{n-p} + h\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(p)}\nabla^k \dot{x}_{n+1} \tag{۱۵ـ۳۸}$$

که در آن

$$b_k^{(p)} \equiv \frac{(-1)^k}{k!}\int_{-p}^{1}\frac{\Gamma(-s+2)}{\Gamma(-s-k+2)}ds$$

خطایی که در حین برش سری در $k = M$ برای این دو نوع فرمول مرتکب می‌شویم، عبارت است از:

$$e_M^{(p)}(\xi) = h^{M+2}\alpha_{M+1}^{(p)}x^{(M+2)}(\xi) \tag{۱۵ـ۳۹}$$

که در آن:

$$\alpha_k^{(p)} \equiv \begin{cases} a_k^{(p)} & \text{نوع باز (گشوده)} \\ b_k^{(p)} & \text{نوع بسته} \end{cases}$$

و:

$$t_{n+1} > \xi > t_{n-M}$$

اگر چند جملهٔ اول (۱۵ـ۳۷) و (۱۵ـ۳۸) را به‌ازای $p = 1$ و $p = 3$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$x_{n+1} \approx x_{n-1} + h\left(2 + 0\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{29}{90}\nabla^4 + \cdots\right)\dot{x}_n$$

$$x_{n+1} \approx x_{n-3} + h\left(4 - 4\nabla + \frac{8}{3}\nabla^2 + 0\nabla^3 + \frac{14}{45}\nabla^4 + \cdots\right)\dot{x}_n$$

$$x_{n+1} \approx x_{n-1} + h\left(2 - 2\nabla + \frac{1}{3}\nabla^2 + 0\nabla^3 + \frac{1}{90}\nabla^4 - \cdots\right)\dot{x}_{n+1}$$

$$x_{n+1} \approx x_{n-3} + h\left(4 - 8\nabla + \frac{20}{3}\nabla^2 - \frac{8}{3}\nabla^3 + \frac{14}{45}\nabla^4 - 0\nabla^5 - \cdots\right)\dot{x}_{n+1}$$

این معادلات علت انتخاب $p = 1$ و $p = 3$ را توجیه می‌کنند. ضریب ∇^p یا ∇^{p+2} صفر است. به این ترتیب، وقتی تا جملات توان $(p-1)$ام ∇ را نگه داریم، خودبه‌خود دقتی تا h^{p+2} به‌دست می‌دهد. مزیت استفاده از مقادیر غیرصفر p و علت در نظرگرفتن چنین حالتهایی همین امر است. می‌توانیم از (۱۵ـ۳۹) بهره گیریم و خطاها را محاسبه کنیم. در این‌صورت برای فرمول نوع باز داریم:

$$x_{n+1} = x_{n-1} + 2h\dot{x} + \frac{h^3}{3}\dddot{x}(\xi)$$

$$x_{n+1} = x_{n-3} + 4h\left(\dot{x}_n - \nabla\dot{x}_n + \frac{2}{3}\nabla^2\dot{x}_n\right) + \frac{14h^5}{45}\,\frac{d^5x}{dt^5}(\xi) \qquad \text{(۱۵ـ۴۰الف)}$$

به همین‌ترتیب برای فرمول نوع بسته

$$x_{n+1} = x_{n-1} + 2h\left(\dot{x}_{n+1} - \nabla\dot{x}_{n+1} + \frac{1}{6}\nabla^2\dot{x}_{n+1}\right) - \frac{h^5}{90}\,\frac{d^5x}{dt^5}(\xi)$$

$$x_{n+1} = x_{n-3} + 4h\left(\dot{x}_{n+1} - 2\nabla\dot{x}_{n+1} + \frac{5}{3}\nabla^2\dot{x}_{n+1} - \frac{2}{3}\nabla^3\dot{x}_{n+1} + \frac{7}{90}\nabla^4\dot{x}_{n+1}\right) - \frac{8h^7}{945}\,\frac{d^7x}{dt^7}(\xi) \qquad \text{(۱۵ـ۴۰ب)}$$

معادلات (۱۵ـ۴۰ب) نشان می‌دهند که چرا اصلاً فرمولهای نوع بسته مورد استفاده قرار می‌گیرند، هر چند که برای یافتن مقادیر به‌ازای t_{n+1} به تلاش بیشتری نیاز است. دلیل مقبولیت این فرمولها کوچکی خطاست. با مقایسهٔ خطاهای هم مرتبه در (۱۵ـ۴۰الف) و (۱۵ـ۴۰ب) ملاحظه می‌کنیم که ضریب جملهٔ خطا در فرمول بسته از ضریب مربوطه در فرمول باز به‌مراتب کوچکتر است (۱/۹۰ در مقابل ۱۴/۴۵).

شروع مرحلهٔ حل. تمام فرمولهایی که در این بخش به‌دست آمدند، شامل توانهایی از عملگر ∇، که روی $\dot{x}_n$ یا $\dot{x}_{n+1}$ بوده‌اند. معنای این امر آن است که برای یافتن x_{n+1} باید مقادیر $\dot{x}_k$ را به‌ازای $k \le n+1$ بدانیم. لیکن، $\dot{x} = f(x,t)$ دلالت بر این امر دارد که $\dot{x}_k = f(x_k, t_k)$.

بنابراین، برای دانستن $\dot{x}_k$ لازم است x_k را بدانیم. از این‌رو، برای یافتن x_{n+1} باید نه تنها مقادیر $\dot{x}$ بلکه مقادیر $x(t)$ در t_k به‌ازای $k \leq n + ۱$ را نیز بدانیم. در حالت خاص، نمی‌توانیم در فرمولهای داده شده توسط معادلات (۱۵ـ۴۰) از $n = ۰$ شروع کنیم، زیرا در سمت راست، به‌خاطر توانهای ∇، اندیسهای منفی برای x_n خواهیم داشت. یعنی، چند مقدار اول x_k را باید با استفاده از روش دیگری بیابیم.

یکی از روشهای متداول برای شروع حل این است که از بسط سری تایلور بهره گیریم:

$$x_k \equiv x(t_۰ + kh) = x_۰ + h\dot{x}_۰ k + \frac{h^۲ \ddot{x}_۰}{۲} k^۲ + \cdots$$
$$+ \frac{h^m \frac{d^m x}{dt^m}(t_۰)}{m!} k^m + \cdots \qquad (۱۵\text{ـ}۴۱)$$

که در آن

$$\dot{x}_۰ = f(x_۰, t_۰)$$

$$\ddot{x}_۰ = \frac{d\dot{x}}{dt}(t_۰) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_۰, t_۰} \dot{x}_۰ + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_۰, x_۰}$$

$$\dddot{x}_۰ = \frac{d\ddot{x}}{dt}(t_۰) = \left.\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}\right|_{x_۰, t_۰} \dot{x}_۰^۲ + ۲\left.\frac{\partial^۲ f}{\partial t \partial x}\right|_{x_۰, t_۰} \dot{x}_۰ + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_۰, t_۰} \ddot{x}_۰ + \left.\frac{\partial^۲ f}{\partial t^۲}\right|_{x_۰, t_۰}$$

در حالت کلی، واضح است که مشتقهای لازم برای عبارت سمت راست معادلهٔ (۱۵ـ۴۱)، شامل عبارتهای بسیار پیچیده‌ای‌اند. از این‌رو، در مثال زیر این روش را برای یک حالت خاص ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۱۵ـ۵ـ۱: از روش تشریح شده در این بخش برای حل معادلهٔ زیر سود می‌جوییم:

$$\frac{dx}{dt} + x + e^t x^۲ = ۰ \qquad x(۰) \equiv x_۰ = ۱ \qquad (۱)$$

با توجه به عبارتهای:

$$\dot{x} = -x - e^t x^۲$$
$$\ddot{x} = -\dot{x} - ۲x\dot{x}e^t - x^۲ e^t$$
$$\dddot{x} = \frac{d\ddot{x}}{dt} = -\ddot{x} - ۲\dot{x}^۲ e^t - ۲x\ddot{x}e^t - ۴x\dot{x}e^t - x^۲ e^t$$

می‌توانیم یک بسط‌سری تایلور برحسب x به‌دست آوریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\circ &= -x_\circ - x_\circ^۲ \\ \ddot{x}_\circ &= -\dot{x}_\circ - ۲x_\circ \dot{x}_\circ - x_\circ^۲ \\ \dddot{x}_\circ &= -\ddot{x}_\circ - ۲\dot{x}_\circ^۲ - ۲x_\circ \ddot{x}_\circ - ۴x_\circ \dot{x}_\circ - x_\circ^۲ \end{aligned} \qquad (۲)$$

با قرار دادن $x_\circ = ۱$ در معادلهٔ اول (۲)، می‌رسیم به $\dot{x}_\circ = -۲$. با جایگزین کردن این مقدار و $x_\circ = ۱$ در معادلهٔ دوم، داریم $\ddot{x}_\circ = ۵$. با ادامهٔ این کار می‌توانیم مشتقها را تا همهٔ مرتبه‌ها به‌دست آوریم. تا مرتبهٔ پنجم داریم:

$$\dot{x}_\circ = -۲ \quad \ddot{x}_\circ = ۵ \quad \dddot{x}_\circ = -۱۶ \quad \left(\frac{d^۴x}{dt^۴}\right)_\circ = ۶۵ \quad \left(\frac{d^۵x}{dt^۵}\right)_\circ = -۳۲۶$$

با جایگزین کردن این مقادیر در بسط سری تایلور به‌ازای $h = ۰٫۱$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_k = ۱ - ۰٫۲k + ۰٫۰۲۵k^۲ - ۰٫۰۰۲۷k^۳ \\ + (۲٫۷ \times ۱۰^{-۴})k^۴ - (۲٫۷ \times ۱۰^{-۵})k^۵ + \cdots \end{aligned}$$

بنابراین،

$$x_۱ = ۰٫۸۲۲۵۴ \quad x_۲ = ۰٫۶۸۱۸۶ \quad \text{و} \quad x_۳ = ۰٫۵۶۷۴۱$$

مقادیر متناظر $\dot{x}$ عبارت‌اند از

$$\dot{x}_۱ = -x_۱ - e^{t_۱}x_۱^۲ = -۱٫۵۷۰۲۶$$
$$\dot{x}_۲ = -x_۲ - e^{t_۲}x_۲^۲ = -۱٫۲۴۹۷۳$$

و

$$\dot{x}_۳ = -x_۳ - e^{t_۳}x_۳^۲ = -۱٫۰۰۲۰۰$$ ●

وقتی مقادیر شروع به‌دست آمد، از فرمول نوع باز و یا از فرمول نوع بسته برای مقدار بعدی x بهره می‌گیریم. در اینجا فقط پیرامون فرمولهای نوع باز بحث خواهیم کرد. اما، همان‌طور که قبلاً گفتیم، دقت فرمولهای نوع بسته بیشتر است. وجود $x_{n+۱}$ در عبارت طرف راست به این قیمت تمام می‌شود که با بهره‌گیری از فرمولهای نوع بسته به براورد کردن $x_{n+۱}$، قرار دادن آن در طرف راست، و یافتن براورد تعدیل‌یافته‌ای برای $x_{n+۱}$ نیاز پیدا می‌شود. این عمل چندان ادامه می‌یابد تا تعدیل بیشتری در براورد حاصل نشود.

استفاده از فرمولهای نوع باز. استفاده از فرمولهای نوع باز شامل جایگذاری سادهٔ کمیتهای معلوم $x_۰$، $x_۱$، ...، x_n در سمت راست برای به‌دست آوردن $x_{n+۱}$ است. معادلهٔ اصلی به‌ازای ($p = ۰$) عبارت است از معادلهٔ (۱۵ـ۳۴). بسته به تعداد توانهایی که از ∇ نگه می‌داریم، روشهای متفاوتی را در پیش خواهیم گرفت. مثلاً، وقتی هیچ توانی از ∇ نگه داشته نشود، روش به‌کار رفته را روش اویلر می‌نامیم که در آن از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+۱} \approx x_n + h\dot{x}_n \qquad e(\xi) = h^۲\ddot{x}(\xi)$$

روشی که بیشتر به‌کار می‌رود روش آدام است، که در آن تمام توانهای ∇ تا توان سوم نگه داشته می‌شوند. در این‌صورت داریم:

$$x_{n+۱} \approx x_n + h\left(1 + \frac{۱}{۲}\nabla + \frac{۵}{۱۲}\nabla^۲ + \frac{۳}{۸}\nabla^۳\right)\dot{x}_n \qquad e(\xi) = \frac{۲۵۱}{۷۲۰}\, h^۵\, \frac{d^۵x}{dt^۵}\,(\xi)$$

یا، برحسب مقادیر $\dot{x}$:

$$x_{n+۱} \approx x_n + \frac{h}{۲۴}\left(۵۵\dot{x}_n - ۵۹\dot{x}_{n-۱} + ۳۷\dot{x}_{n-۲} - ۹\dot{x}_{n-۳}\right) \qquad e(\xi) = \frac{۲۵۱}{۲۷۰}\, h^۵\, \frac{d^۵x}{dt^۵}(\xi)$$

(۱۵ـ۴۲)

یادآوری می‌کنیم که $\dot{x}_k = f(x_k, t_k)$. بنابراین، اگر مقادیر x_n، $x_{n-۱}$، $x_{n-۲}$، و $x_{n-۳}$ رابدانیم می‌توانیم $x_{n+۱}$ را پیدا کنیم.

مثال ۱۵ـ۵ـ۲: اگر $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ را بدانیم، می‌توانیم $x_۴$ را برای معادلهٔ (۱) از مثال ۱۵ـ۵ـ۱ محاسبه کنیم:

$$x_۴ \approx x_۳ + \frac{۰٫۱}{۲۴}\left(۵۵\dot{x}_۳ - ۵۹\dot{x}_۲ + ۳۷\dot{x}_۱ - ۹\dot{x}_۰\right)$$

$$= ۰٫۵۶۷۴۱ + \frac{۰٫۱}{۲۴}[۵۵(-۱٫۰۰۲) - ۵۹(-۱٫۲۴۹۷۳) + ۳۷(-۱٫۵۷۰۲۶) - ۹(-۲)] =$$

$$= ۰٫۴۷۷۹۳$$

با در دست داشتن $x_۴$، می‌توانیم $\dot{x}_۴ = -x_۴ - x_۴^۲ e^{t_۴}$ را محاسبه کنیم و آن را در رابطهٔ

$$x_۵ \approx x_۴ + \frac{۰٫۱}{۲۴}\left(۵۵\dot{x}_۴ - ۵۹\dot{x}_۳ + ۳۷\dot{x}_۲ - ۹\dot{x}_۱\right)$$

قرار دهیم و $x_۵$ را پیدا کنیم، و الی آخر. ●

یک نکتهٔ اساسی دربارهٔ این روشها این است که هر مقداری که به‌دست آید قدری خطا دارد، و بهره‌گیری از این مقادیر برای پیدا کردن مقادیر جدید خطا را منتشر می‌کند. بنابراین، خطا می‌تواند به‌سرعت انباشته شود و در هر مرحله تقریبها را بدتر کند. مبحث تکثیر خطا در نوشتارهای ریاضی به‌تفصیل آمده است.[1]

۱۵ـ۵ـ۲ روش رونگه‌ـکوتا

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (۱۵ـ۳۲) به یک سری تایلور یکتا منجر می‌شود:

$$x(t_۰ + h) = x_۰ + h\dot{x}_۰ + \frac{h^۲}{۲}\ddot{x}_۰ + \cdots$$

که در آن $\dot{x}_۰$ و $\ddot{x}_۰$ و سایر مشتقها را می‌توان از طریق مشتق‌گیری از $\dot{x} = f(x,t)$ به‌دست آورد. بنابراین، از لحاظ نظری سری تایلور جواب را به‌دست می‌دهد. (به‌ازای $t_۰ + h$؛ اما $t_۰ + ۲h$، $t_۰ + ۳h$ و مانند آنها را می‌توان به همین ترتیب به‌دست آورد.) اما در عمل سری تایلور به‌آرامی

1. Hildebrand, 1987, p. 267-268.

همگرا می‌شود و از دقت زیادی برخوردار نیست. از این‌رو، می‌توان به سایر روشهای حل، نظیر روشهایی که قبلاً تشریح شد، متوسل می‌شوند.

در روش دیگری، به نام روش رونگه‌ـکوتا، سری تایلور

$$x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_n + \frac{h^3}{3!}\dddot{x}_n + \cdots \qquad (۱۵\_۴۳)$$

را به‌جای سری زیر می‌نشاند

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n &+ h[\alpha_0 f(x_n, t_n) + \alpha_1 f(x_n + b_1 h, t_n + \mu_1 h) \\ &+ \alpha_2 f(x_n + b_2 h, t_n + \mu_2 h) + \cdots + \alpha_p f(x_n + b_p h, t_n + \mu_p h)] \end{aligned} \qquad (۱۵\_۴۴)$$

که در آن $\{\alpha_k, \mu_k, b_k\}_{k=1}^{p}$ ثابتهایی‌اند که چنان انتخاب می‌شوند که اگر سمت راست (۱۵ـ۴۴) برحسب توانهای گام h بسط داده شود، ضرایب چند جملهٔ غالب با ضرایب بسط متناظر در سمت راست (۱۵ـ۴۳) مطابقت داشته باشند.

بهتر است bها را به‌صورت ترکیبهای خطی مقادیر قبلی f بیان کنیم:

$$\begin{aligned} hb_1 &\equiv \lambda_{10}\, k_0 \\ hb_2 &\equiv \lambda_{20}\, k_0 + \lambda_{21}\, k_1 \end{aligned}$$

$$hb_m \equiv \lambda_{m0}\, k_0 + \lambda_{m1}\, k_1 + \cdots + \lambda_{m,m-1}\, k_{m-1}$$

که در آن k_r به‌گونهٔ بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, t_n) \\ k_r &= hf(x_n + \lambda_{r0}\, k_0 + \lambda_{r1}\, k_1 + \cdots + \lambda_{r,r-1}\, k_{r-1}, t_n + \mu_r h) \end{aligned}$$

در این‌صورت، معادله (۱۵ـ۴۴) می‌انجامد به

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_0 k_0 + \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_p k_p$$

که در آن باید α_i، μ_i، λ_{ij} تعیین شوند.

در حالت کلی، تعیین این ثابتها فوق‌العاده خسته‌کننده است. حالت بسیار ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن $p = ۱$، $\lambda \equiv \lambda_{۱۰}$ و $\mu \equiv \mu_۱$. در این‌صورت، می‌رسیم به:

$$x_{n+۱} = x_n + \alpha_۰ k_۰ + \alpha_۱ k_۱ \qquad \text{(۱۵ـ۴۵الف)}$$

که در آن

$$k_۰ = hf(x_n, t_n) \quad \text{و} \quad k_۱ = hf(x_n + \lambda k_۰, t_n + \mu h) \qquad \text{(۱۵ـ۴۵ب)}$$

بسط تایلور برحسب $k_۱$، یعنی تابع دو متغیری عبارت است از

$$k_۱ = h[f + (\mu h f_t + \lambda k_۰ f_x) + \frac{۱}{۲}(\mu^۲ h^۲ f_{tt} + ۲\lambda\mu h k_۰ f_{tx} + \lambda^۲ k_۰^۲ f_{xx}) + O(h^۳)]$$

که در آن $f \equiv f(x_n, t_n)$، $f_t \equiv (\partial f/\partial t)(x_n, t_n)$، $f_{tt} \equiv (\partial^۲ f/\partial t^۲)(x_n, t_n)$، $f_{tx} \equiv (\partial^۲ f/\partial t\,\partial x)(x_n, t_n)$، و $f_{xx} \equiv (\partial^۲ f/\partial x^۲)(x_n, t_n)$. اگر آن را برحسب توانهای h، با $k_۰ = hf$ بیان کنیم، داریم

$$k_۱ = hf + h^۲(\mu f_t + \lambda f f_x) + \frac{h^۳}{۲}(\mu^۲ f_{tt} + ۲\lambda\mu f f_{xt} + \lambda^۲ f^۲ f_{xx}) + O(h^۴)$$

با جایگزین کردن در معادلهٔ (۱۵ـ۴۵الف)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} x_{n+۱} = x_n &+ h(\alpha_۰ + \alpha_۱)f + h^۲\alpha_۱(\mu f_t + \lambda f f_x) \\ &+ \frac{h^۳}{۲}\alpha_۱(\mu^۲ f_{tt} + ۲\lambda\mu f f_{xt} + \lambda^۲ f^۲ f_{xx}) + O(h^۴) \qquad \text{(۱۵ـ۴۶)} \end{aligned}$$

از سوی دیگر با برقرار بودن این روابط:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f \\ \ddot{x} &= \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{x} f_x + f_t = f f_x + f_t \\ \dddot{x} &= f_{tt} + ۲ f f_{xt} + f^۲ f_{xx} + f_x(f f_x + f_t) \end{aligned}$$

معادلهٔ (۱۵ـ۴۳) می‌دهد

$$x_{n+1} = x_n + hf + \frac{h^2}{2}(ff_x + f_t) + \frac{h^3}{6}[f_{tt} + 2ff_{xx} + f^2 f_{xx} + f_x(ff_x + f_t)] + O(h^4) \quad (۱۵\text{ـ}۴۷)$$

اگر بخواهیم (۱۵ـ۴۶) و (۱۵ـ۴۷) تا جمله h^2 با یکدیگر توافق داشته باشند (برای h^3 یا توانهای بالاتر، به‌علت فرامتخصص بودن، نمی‌توانیم انتظار همان توافق را داشته باشیم علت آن هم عدم توانایی ما در تقریب‌زدن بیشتر است). باید برسیم به

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \quad \alpha_1\mu = \frac{1}{2} \quad \alpha_1\lambda = \frac{1}{2}$$

برای چهار مجهول فقط سه معادله داریم. پس یک پارامتر دلخواه β وجود خواهد داشت که می‌توان مجهولها را برحسب آن نوشت:

$$\alpha_0 = 1 - \beta \quad \alpha_1 = \beta \quad \mu = \frac{1}{2\beta} \quad \lambda = \frac{1}{2\beta}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات (۱۵ـ۴۵)، می‌رسیم به:

$$x_{n+1} = x_n + h\left[(1-\beta)f(x_n, t_n) + \beta f\left(x_n + \frac{hf}{2\beta}, t_n + \frac{h}{2\beta}\right)\right] + O(h^3)$$

اگر قرار دهیم $\beta = 1/2$، این فرمول مفید خواهد شد. در این‌صورت

$$t_n + h/2\beta = t_n + h = t_{n+1}$$

خواهد شد که محاسبهٔ جملهٔ دوم داخل کروشه را راحت می‌کند. به‌ازای $\beta = 1/2$، داریم:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(x_n, t_n) + f(x_n + hf, t_{n+1})] + O(h^3) \quad (۱۵\text{ـ}۴۸)$$

اتفاق خوبی که در مورد این معادله می‌افتد این است که نیاز به مقدار شروع ندارد. می‌توانیم کمیتهای معلوم t_n، t_{n+1}، و x_n را در سمت راست وارد کنیم و x_{n+1} را با شروع از $n = 0$،

به‌دست آوریم. اما، نتیجه خیلی هم دقیق نیست، و نمی‌توانیم با این خواسته که توافق تا توانهای بالاتر h را بخواهیم، دقت را از این بیشتر کنیم زیرا همان‌طوری که قبلاً گفتیم، چنین خواسته‌ای مجهولها را فرامتخصص می‌کند.

فرمولهایی که نتایج دقیقتری می‌دهند، می‌توانند از نگه داشتن جملاتی فراتر از $p = ۱$ به‌دست آیند. بنابراین به‌ازای $p = ۲$، اگر بنویسیم

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_0 k_0 + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

هشت مجهول خواهیم داشت (سه α و سه λ_{ij} و دو μ) و شرط توافق بین بسط تایلور و بسط f تا h^3 تنها شش معادله می‌دهد. به این ترتیب، دو پارامتر دلخواه خواهیم داشت که مشخص کردن آنها به فرمولهای مختلف منجر خواهد شد. جزئیات این نوع محاسبات جبری بسیار آشفته است و از این‌رو فقط دو فرمول به‌خصوص را در نظر می‌گیریم.

یکی از این فرمولها، منسوب به کوتا، عبارت است از

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) + O(h^4) \qquad \text{(۱۵ـ۴۹الف)}$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, t_n) \\ k_1 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_0, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ k_2 &= hf(x_n + 2k_1 - k_0, t_n + h) \end{aligned} \qquad \text{(۱۵ـ۴۹ب)}$$

فرمول دوم، منتسب به هیون، به شکل زیر است:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}(k_0 + 3k_2) + O(h^4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, t_n) \\ k_1 &= hf\left(x_n + \frac{1}{3}k_0, t_n + \frac{1}{3}h\right) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{2}{3}k_1, t_n + \frac{2}{3}h\right) \end{aligned}$$

حد دقت این دو فرمول یکسان است. اما از بعضی جهات هرکدام بر دیگری امتیازاتی دارد.

مثال ۱۵ـ۵ـ۳: حال معادلهٔ (۱) از مثال ۱۵ـ۵ـ۱ را با استفاده از روش رونگه‌کوتا با معادلات (۱۵ـ۴۹) حل می‌کنیم.

از معادلات (۱۵ـ۴۹)، با $t_0 = 0$، $x_0 = 1$، و $h = 0.1$ می‌رسیم به:

$$k_0 = 0.1(-2) = -0.2$$

$$k_1 = 0.1\left\{-\left[1 - \frac{1}{2}(0.2)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}(0.2)\right]^2 e^{(1/2)(0.1)}\right\} = -0.17515$$

$$k_2 = 0.1\left\{-[1+2(0.17515)+0.2]-[1+2(0.17515)+0.2]^2 e^{0.1}\right\} = -0.16476$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{6}[-0.2 - 4(0.17515) - 0.16476] = 0.82244$$

با جایگزین کردن این مقادیر x_1 و $h = 0.1$ و $t_1 = t_0 + h = 0.1$ در (۱۵ـ۴۹ب)، داریم:

$$k_0 = -0.15700 \qquad k_1 = -0.13870 \qquad k_2 = -0.13040$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.82244 + \frac{1}{6}[-0.15700 - 4(0.13870) - 0.13040] \\ &= 0.68207 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، خواهیم داشت

$$x_3 = 0.56964 \quad \text{و} \quad x_4 = 0.47858$$

با حل تحلیلی این معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، نتیجهٔ دقیق زیر به‌دست می‌آید:

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$$

در جدول ۱۵ـ۱ مقادیر به‌دست آمده در مثالهای ۱۵ـ۵ـ۱ و ۱۵ـ۵ـ۲، با مقادیر به‌دست

جدول ۱۵ـ۱ جوابهای معادله دیفرانسیل مثال ۱۵ـ۵ـ۱ که به سه طریق به‌دست آمده‌اند

t	حل تحلیلی	حل رونگه‌ـگوتا	حل روش‌آدام
۰	۱	۱	۱
۰٫۱	۰٫۸۲۲۵۸	۰٫۸۲۲۴۴	۰٫۸۲۲۵۴
۰٫۲	۰٫۶۸۲۲۸	۰٫۶۸۲۰۷	۰٫۶۸۱۸۶
۰٫۳	۰٫۵۶۹۸۶	۰٫۵۶۹۶۴	۰٫۵۶۷۴۱
۰٫۴	۰٫۴۷۸۸۰	۰٫۴۷۸۵۸	۰٫۴۷۷۹۳

آمده در اینجا، و مقادیر دقیق تا پنج رقم اعشار، مقایسه شده‌اند. واضح است که روش رونگه‌ـکوتا از روش قبلی دقیقتر است. ●

دقت روش رونگه‌ـگوتا (که در مثال ۱۵ـ۵ـ۳ برای یک حالت خاص نشان داده شد) و این واقعیت که نیاز به مقدار شروع ندارد، باعث شده است که این روش متداولترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل باشد.

با استفاده از مقادیر بالاتر p، می‌توان روش رونگه‌ـگوتا را دقیقتر کرد. مثلاً فرمولی که به‌ازای $p = ۳$ به‌کار می‌رود، عبارت است از:

$$x_{n+۱} = x_n + \frac{۱}{۶}\left(k_۰ + ۲k_۱ + ۲k_۲ + k_۳\right) + O(h^۵) \qquad \text{(۱۵ـ۵۰الف)}$$

که در آن

$$k_۰ = hf(x_n, t_n) \quad k_۱ = hf\left(x_n + \frac{۱}{۲}k_۰, t_n + \frac{۱}{۲}h\right)$$

$$k_۲ = hf\left(x_n + \frac{۱}{۲}k_۱, t_n + \frac{۱}{۲}h\right) \quad k_۳ = hf(x_n + k_۲, t_n + h) \qquad \text{(۱۵ـ۵۰ب)}$$

۱۵ـ۵ـ۳ حل معادلات مرتبه‌های بالاتر، مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی

هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nام هم‌ارز است با n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول با $(n + ۱)$ متغیر. بنابراین، به‌عنوان مثال، کلی‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، $F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = ۰$، را می‌توان

به‌صورت زیر به دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول تبدیل کرد. $\ddot{x}$ را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$\ddot{x} = G(\dot{x}, x, t)$$

تعریف می‌کنیم $u \equiv \dot{x}$، و می‌نویسیم

$$\dot{u} = G(u, x, t)$$

و

$$\dot{x} = u$$

این دو معادله و معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم اصلی کاملاً هم‌ارزند. بنابراین، بهتر است حل عددی دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول با چند متغیر را مورد بحث قرار دهیم. بحث اینجا به دستگاههایی شامل دو معادله محدود می‌شود، زیرا چنین دستگاهی هم‌ارز است با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی معادلات که در کاربردها بسیار متداول است. تعمیم به چند معادله کار را چندان دشوار نمی‌کند.

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \qquad \text{(۱۵ـ۵۱الف)}$$
$$\frac{du}{dt} = g(x, u, t)$$

فرض کنید شرایط اولیه به این قرار باشند:

$$x(t_\circ) \equiv x_\circ \qquad \text{(۱۵ـ۵۱ب)}$$
$$u(t_\circ) \equiv u_\circ$$

با استفاده از یک تعمیم بدیهی معادلات (۱۵ـ۵۰)، می‌توانیم بنویسیم:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_\circ + 2k_1 + 2k_2 + k_3) + O(h^5) \qquad \text{(۱۵ـ۵۲الف)}$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(m_\circ + 2m_1 + 2m_2 + m_3) + O(h^5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, u_n, t_n) \\ k_1 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_0, u_n + \frac{1}{2}m_0, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, u_n + \frac{1}{2}m_1, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 &= hf(x_n + k_2, u_n + m_2, t_n + h) \end{aligned} \qquad (۱۵\text{ـ}۵۲\text{ب})$$

و

$$\begin{aligned} m_0 &= hg(x_n, u_n, t_n) \\ m_1 &= hg\left(x_n + \frac{1}{2}k_0, u_n + \frac{1}{2}m_0, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ m_2 &= hg\left(x_n + \frac{1}{2}k_1, u_n + \frac{1}{2}m_1, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ m_3 &= hg(x_n + k_2, u_n + m_2, t_n + h) \end{aligned} \qquad (۱۵\text{ـ}۵۲\text{ج})$$

این فرمولها مقادیر متغیرهای وابستهٔ x و u را برحسب t_0، t_1 و ... و t_N می‌دهند.

فرمولهای معادلات (۱۵ـ۵۲) کلی‌تر از آن‌اند که برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم کلی ضرورت دارد؛ زیرا، همان‌طوری که در بالا گفتیم، چنین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی با دستگاه $\dot{x} = u$، $\dot{u} = g(x, u, t)$ هم‌ارز است. بنابراین، $f(x, u, t) \equiv u$، و معادلات (۱۵ـ۵۲) به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} k_0 &= hu_n = h\dot{x}_n \\ k_1 &= h\left(u_n + \frac{1}{2}m_0\right) = h\dot{x}_n + \frac{h}{2}m_0 \\ k_2 &= h\dot{x}_n + \frac{1}{2}hm_1 \\ k_3 &= h\dot{x}_n + hm_2 \end{aligned} \qquad (۱۵\text{ـ}۵۳\text{الف})$$

و

$$x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + \frac{h}{6}(m_0 + m_1 + m_2) + O(h^5)$$
$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + m_3) + O(h^5) \qquad (۱۵\text{ـ}۵۳\text{ب})$$

که در آن

$$m_0 = hg(x_n, \dot{x}_n, t_n)$$
$$m_1 = hg\left(x_n + \frac{1}{2}h\dot{x}_n, \dot{x}_n + \frac{1}{2}m_0, t_n + \frac{1}{2}h\right)$$
$$m_2 = hg\left(x_n + \frac{1}{2}h\dot{x}_n + \frac{1}{4}hm_0, \dot{x}_n + \frac{1}{2}m_1, t_n + \frac{1}{2}h\right) \qquad (۱۵\text{ـ}۵۳\text{ج})$$
$$m_3 = hg\left(x_n + h\dot{x}_n + \frac{1}{2}hm_1, \dot{x}_n + m_2, t_n + h\right)$$

برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ مفروض $\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t)$، $x(0) = x_0$، $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$، می‌توانیم با کاربرد پیاپی معادلات (۱۵ـ۵۳ب) به‌طور پی‌درپی بهره گیریم و x_1، x_2، ...، x_N را ایجاد و به این ترتیب مسئله را حل کنیم.

مثال ۱۵ـ۵ـ۴: جواب تحلیلی مسئلهٔ مقدار اولیه $\ddot{x} + x = 0$، $x(0) = 0$، و $\dot{x}(0) = 1$، عبارت است از $x(t) = \sin t$. لیکن، از معادلات (۱۵ـ۵۳) استفاده می‌کنیم تا روش رونگه‌ـگوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را نشان دهیم و نتیجه را با حل دقیق مقایسه کنیم.

برای این مسئله داریم $g(x, \dot{x}, t) = -x$. از این‌رو می‌توانیم mها را به آسانی محاسبه کنیم:

$$m_0 = -hx_n$$
$$m_1 = -h\left(x_n + \frac{1}{2}h\dot{x}_n\right)$$
$$m_2 = -h\left(x_n + \frac{1}{2}h\dot{x}_n - \frac{1}{4}h^2x_n\right)$$
$$m_3 = -h\left[x_n + h\dot{x}_n - \frac{1}{2}h^2\left(x_n + \frac{1}{2}h\dot{x}_n\right)\right]$$

جدول ۱۵ـ۲ مقایسه جوابهای رونگه‌ـگوتا و حل دقیق معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم مثال ۱۵ـ۵ـ۴

t	حل رونگه‌ـگوتا	$\sin t$
۰٫۱	۰٫۰۹۹۸۳	۰٫۰۹۹۸۳
۰٫۲	۰٫۱۹۸۶۷	۰٫۱۹۸۶۷
۰٫۳	۰٫۲۹۵۵۲	۰٫۲۹۵۵۲
۰٫۴	۰٫۳۸۹۴۲	۰٫۳۸۹۴۲
۰٫۵	۰٫۴۷۹۴۳	۰٫۴۷۹۴۳
۰٫۶	۰٫۵۶۴۶۶	۰٫۵۶۴۶۴
۰٫۷	۰٫۶۴۴۲۵	۰٫۶۴۴۲۲
۰٫۸	۰٫۷۱۷۴۱	۰٫۷۱۷۳۶
۰٫۹	۰٫۷۸۳۴۲	۰٫۷۸۳۳۳
۱٫۰	۰٫۸۴۱۶۱	۰٫۸۴۱۴۷

این مقادیر به عبارتهای زیر برحسب x_{n+1} و $\dot{x}_{n+1}$ منجر می‌شوند:

$$x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n - \frac{h^2}{6}\left(3x_n + h\dot{x}_n - \frac{h^2}{4}x_n\right) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n - \frac{h}{6}\left[6x_n + 3h\dot{x}_n - h^2\left(x_n + \frac{h}{4}\dot{x}_n\right)\right] \qquad (2)$$

با شروع از $x_0 = 1$ و $\dot{x}_0 = 1$، می‌توانیم با بهره‌گیری پی‌درپی از معادلات (۱) و (۲)، مقادیر x_1، x_2 و مانند آنها را تولید کنیم. نتیجه برحسب x_1، x_2، ...، x_{10} با $h = 0.1$ تا پنج رقم معنی‌دار در جدول ۱۵ـ۲ آمده است. توجه کنید که تا x_5 با نتیجهٔ دقیق توافق کامل برقرار است این مطلب دقت بالای روش رونگه‌ـگوتا را یک‌بار دیگر نشان می‌دهد. ●

توجه کنید که روش رونگه‌ـگوتا برای کاربرد در برنامه‌های کامپیوتری مناسب است. چون معادلات (۱۵ـ۵۳) هیچ نقطهٔ شروعی را لازم ندارند، می‌توان مستقیماً از آنها برای ایجاد جواب هر مسئله مقدار اولیه که شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است، سود جست.

روش مستقیمتر حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر به این قرار است که به‌جای عملگر مشتق در معادلهٔ دیفرانسیل قرار دهیم $\mathbb{D} = -(1/h)\ln(\mathbb{1} - \nabla)$ آن را برحسب ∇ بسط دهیم، و تعداد مناسبی از جملات را نگه داریم. در تمرین ۱۵ـ۵ـ۱ این نکته را برای یک معادلهٔ

دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی نشان می‌دهیم.

برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول فقط با مسائل مقدار اولیه برخورد می‌کنیم. مقدار اولیه $x(t_\circ)$ داده و $x(t)$ به‌ازای $t > t_\circ$ جستجو می‌شود. برای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر، به مسائل مقدار مرزی نیز برمی‌خوریم: دو ترکیب خطی مستقل از مقادیر x و $\dot{x}$ داده می‌شود. (در فصلهای ۹، ۱۰، و ۱۱ این مقادیر را با $\mathbb{R}_i[u] = \gamma_i$، به‌ازای $i = ۱, ۲$، نشان داده‌ایم.)

حالت معادلهٔ دیفرانسیل خطی را می‌توان با استفاده از اصل برهم‌نهی حل کرد. فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = r(t) \qquad a \le t \le b \tag{۱۵\_۵۴الف}$$

را با شرایط مرزی زیر حل کنیم:

$$x(a) = A \quad x(b) = B \tag{۱۵\_۵۴ب}$$

این‌گونه مسئله‌های مقدار مرزی را می‌توان به‌صورت زیر به دو مسئلهٔ مقدار اولیه تبدیل کرد. فرض کنید $u(t)$ یک جواب (که هنوز تعیین نشده است) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر باشد:

$$\ddot{u} + p\dot{u} + qu = r \quad u(a) = A$$

و فرض کنید $v(t)$ یک جواب (غیربدیهی) (که آن‌هم هنوز تعیین نشده است) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ زیر باشد:

$$\ddot{v} + p\dot{v} + qv = \circ \quad v(a) = \circ$$

در این‌صورت به‌ازای هر ثابت C، تابع:

$$x(t) = u(t) + Cv(t)$$

در معادلهٔ (۱۵_۵۴الف) و شرط مرزی اول (۱۵_۵۴ب) صدق می‌کند. برای اینکه شرط مرزی دوم را برقرار کنیم، C را چنان تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$x(b) = u(b) + Cv(b) = B$$

اگر $u(b) = B$، در این‌صورت $u(t)$ یک جواب است. بنابراین، فرض می‌کنیم $u(b) \neq B$. در این‌صورت ثابت C عبارت است از

$$C = \frac{B - u(b)}{v(b)}$$

توجه کنید که $v(b) \neq 0$، زیرا $v(b) = 0$ و $v(a) = 0$ ایجاب می‌کنند که $v \equiv 0$.

برای اینکه از روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده کنیم، باید به u و v یک شیب اولیه نسبت دهیم. این‌گونه انتساب شیب تا حد زیادی دلخواه است؛ تنها محدودیت آن این است که داشته باشیم $\dot{v}(a) \neq 0$ (چرا؟) یکی از انتخابهای مناسب عبارت است از $\dot{u}(a) = 0$ و $\dot{v}(a) = 1$. این کار مسئلهٔ مقدار مرزی اصلی را به دو مسئله مقدار اولیه تبدیل می‌کند که می‌توان آنها را با روشهایی که قبلاً توصیف کردیم، حل کرد.

برهم‌نهی در موارد غیرخطی قابل اعمال نیست، ولی راه‌حل‌های دیگری وجود دارد، که اکنون یکی از راه‌حلهای متداول را بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ مقدار مرزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t)$$
$$x(a) = A \qquad x(b) = B$$

مسئلهٔ مقدار اولیه وابسته به آن به این قرار است

$$\ddot{u} = g(u, \dot{u}, t)$$
$$u(a) = A \qquad \dot{u}(a) = \alpha$$

به‌ازای هر مقدار α می‌توانیم مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌طور عددی حل کنیم. با استفاده از $u(t, \alpha)$ برای نشان دادن جواب $u(t)$ متناظر با α، باید داشته باشیم:

$$u(b, \alpha) = B \qquad (۱۵\text{ـ}۵۵)$$

بنابراین، مسئله به حل معادلهٔ (۱۵ـ۵۵) برای α تبدیل می‌شود. می‌توانیم این کار را با استفاده از روش نیوتون با $f(\alpha) \equiv u(b, \alpha) - B$ انجام دهیم. لیکن، چون $f'(\alpha)$ معلوم نیست، لازم است

آن را با نسبت تفاضل تقریب بزنیم. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ (۱۵ـ۱)، می‌رسیم به:

$$\alpha_{n+۱} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{\left[\dfrac{f(\alpha_n) - f(\alpha_{n-۱})}{\alpha_n - \alpha_{n-۱}}\right]}$$

با قرار دادن به‌جای $f(\alpha)$، پس از ساده کردن می‌رسیم به:

$$\alpha_{n+۱} = \alpha_n - \frac{(\alpha_n - \alpha_{n-۱})[u(b,\alpha_n) - B]}{u(b,\alpha_n) - u(b,\alpha_{n-۱})} \qquad (۱۵\text{ـ}۵۶)$$

درعمل، معمولاً مسئلهٔ مقدار اولیه به‌ازای دو یا چند مقدار α حل می‌شود، سپس معادلهٔ (۱۵ـ۵۶) برای به‌دست آوردن مقادیر تعدیل‌یافته α مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فرایند چندان تکرار می‌شود تا معادله (۱۵ـ۵۵) به‌طور رضایتبخشی تقریب زده شود (با این فرض که تکرارها همگرا شوند).

روش سوم حل عددی مسائل مقدار مرزی خطی شامل تغییر معادلهٔ دیفرانسیل به یک معادلهٔ تفاضلی (تمرین ۱۵ـ۵ـ۱)، قرار دادن به‌جای مقادیر مختلف n، و حل دستگاه معادلات خطی حاصل است. بهترین راه برای درک این روش، حل کردن یک مثال است.

مثال ۱۵ـ۵ـ۵: معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم و شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = r(t)$$
$$x(۰) = ۰ \qquad x(۵) = ۰$$

می‌توان نشان داد که (تمرین ۱۵ـ۵ـ۱)، تا $O(h^۲)$، این معادله با معادلهٔ تفاضلی زیر هم‌ارز است:

$$\left(۲ - \frac{۳}{۲}hp_n + h^۲ q_n\right)x_n - (۵ - ۲hp_n)x_{n-۱}$$
$$+\left(۴ - \frac{۱}{۲}hp_n\right)x_{n-۲} - x_{n-۳} = h^۲ r_n \qquad n \geq ۳$$

اگر برای سهولت فرض کنیم $h = ۱$، در این‌صورت بیشینه مقدار n عبارت خواهد بود از ۵.

بنابراین، به‌ازای $n = ۳, ۴, ۵$، خواهیم داشت

$$\left(۲ - \frac{۳}{۲}p_۳ + q_۳\right)x_۳ - (۵ - ۲p_۳)x_۲ + \left(۴ - \frac{۱}{۲}p_۳\right)x_۱ - ۰ = r_۳$$

$$\left(۲ - \frac{۳}{۲}p_۴ + q_۴\right)x_۴ - (۵ - ۲p_۴)x_۳ + \left(۴ - \frac{۱}{۲}p_۴\right)x_۲ - x_۱ = r_۴ \qquad (۱)$$

$$۰ - (۵ - ۲p_۵)x_۴ + \left(۴ - \frac{۱}{۲}p_۵\right)x_۳ - x_۲ = r_۵$$

این عبارتها یک دستگاه سه معادله با چهار مجهول $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، و $x_۴$ است. به یک معادلهٔ دیگر احتیاج داریم، که می‌توان با تعیین $x_۱$ با استفاده از بسط سری تایلور آن را به‌دست آورد. ●

آشکارا می‌توان این روش را به هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی با هر شرایط مرزی تعمیم داد. بنابراین، شرایط مرزی به‌صورت $\mathbb{R}_i[u] = \gamma_i$ به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, N$ (که در آن N از مرتبه معادلهٔ دیفرانسیل است) معادلات دیفرانسیل خطی دیگری فراهم می‌آورند که می‌توان آنها را با معادلات (۱) مثال ۱۵ـ۵ـ۵ ترکیب کرد. البته، به‌ازای مقادیر کوچک h انتظار داریم تعداد زیادی دستگاه معادلهٔ خطی چندمجهولی به‌دست آوریم. لیکن برنامه‌های نرم‌افزاری متعددی برای حل معادلات خطی با کامپیوترها وجود دارند که می‌توانند تعداد زیادی (ولی با کمی محدودیت) از معادلات خطی همزمان را حل کنند.

این بررسی روشهای اساسی محاسبات عددی به هیچ‌وجه کامل نیست. به بسیاری از مباحث برمی‌خوریم که در آنالیز عددی از اهمیت برخوردارند و در اینجا به آنها اشاره نشده است. از جمله، آنالیز خطا، انتشار (تکثیر) خطا، درون‌یابی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مانند آنها. چنین مباحثی در انواع مختلفی از کتابهای آنالیز عددی بررسی می‌شوند. دوکتاب که ذکر نامشان مفید است عبارت‌اند از کتاب کلاسیک Hildberand (۱۹۸۷) و کتاب تألیف .Press et al (۱۹۸۷). کتاب اخیر حاوی برنامه‌های کامپیوتری زیادی برای حل عددی بسیاری از مسائل فیزیک ریاضیاتی است.

تمرین

۱۵ـ۵ـ۵ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم کلی را با یک معادلهٔ تفاضلی که شامل جملات تا مرتبهٔ سوم ∇ است، تقریب بزنید.

مسائل

۱ـ۱۵ با استفاده از ماشین‌حساب یا کامپیوتر ریشهٔ هر یک از معادلات غیرجبری زیر را تا شش

رقم اعشار پیدا کنید: $x^{۲} = e^{x}$ و $x = \tan x$.

۱۵ـ۲ برای هر یک از معادلات زیر یک ریشهٔ تا پنج رقم اعشار پیدا کنید:

(الف) $x + \ln x = ۵$ (ب) $x^{۵} + ۳x - ۵ = ۰$ (ج) $x^{۳} = ۳x - ۲$ (د) $\cos x = x$.

۱۵ـ۳ نشان دهید $\delta^{n+۱}$ یا $\nabla^{n+۱}$، $p(x)$، یک چندجمله‌ای از درجهٔ n، را حذف می‌کند.

۱۵ـ۴ نشان دهید تمام عملگرهای تفاضلی متناهی با یکدیگر جابه‌جاپذیرند.

۱۵ـ۵ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

(الف) $\nabla \mathbb{E} = \delta \mathbb{E}^{۱/۲} = \Delta$ (ب) $\nabla + \Delta = ۲\mu\delta$ (ج) $\mathbb{E}^{-۱/۲} = \mu - \frac{\delta}{۲}$

(د) $۲\mu\delta = \mathbb{E} - \mathbb{E}^{-۱}$.

۱۵ـ۶ عبارتی برای $\mathbb{D}^{۲}$ برحسب ∇ و δ به‌دست آورید.

۱۵ـ۷ معادلات (۱۵ـ۱۸)، (۱۵ـ۲۰)، (۱۵ـ۲۱)، و (۱۵ـ۲۳) را به‌دست آورید.

۱۵ـ۸ با استفاده از عملگر تفاضلی پسرو، عبارتی برای هر یک از حالتهای زیر بنویسید:

(الف) $\mathbb{D}^{۲} f_i$ با $e = O(h)$

(ب) $\mathbb{D}^{۲} f_i$ با $e = O(h^{۳})$

(ج) $\mathbb{D}^{۳} f_i$ با $e = O(h)$

(د) $\mathbb{D}^{۴} f_i$ با $e = O(h^{۲})$

۱۵ـ۹ با استفاده از جدول توابع بسل (جدول ۱۰ـ۱) مشتق دوم یک درایه در جدول با $e = O(h^{۳})$ را محاسبه کنید.

۱۵ـ۱۰ خطای $e_{۳}(\xi)$ برای قاعدهٔ سه هشتم سیمپسون را پیدا کنید.

۱۵ـ۱۱ با استفاده از شش گام با قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، قاعدهٔ یک‌سوم سیمپسون و قاعدهٔ سه‌هشتم سیمپسون، انتگرالهای زیر را به‌صورت عددی حل کنید. این نتایج را با نتایج دقیق، در صورت امکان، مقایسه کنید. همچنین حدود خطا در هر مورد را پیدا کنید:

(الف) $\int_{۰}^{۵} x^{۳}\, dx$ (ب) $\int_{۰}^{۲} e^{-x^{۲}}\, dx$ (ج) $\int_{۰}^{۱٫۲} x e^{x} \cos x\, dx$

(د) $\int_{۱}^{۴} \frac{dx}{x}$ (ه) $\int_{۱}^{۳} \ln x\, dx$ (و) $\int_{۱}^{۲} e^{x^{۲}} \sin x\, dx$

(ز) $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۱ + x^{۲}}$ (ح) $\int_{۰}^{۱} x e^{x^{۲}}\, dx$ (ط) $\int_{۰}^{۱} e^{x} \tan x\, dx$

۱۵ـ۱۲ یکی از پنج معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول فصل نهم را با استفاده از معادلات (۱۵ـ۴۲) و

(۱۵ـ۵۰) حل کنید. این نتایج را با جوابهای دقیق به‌دست آمده در آن فصل مقایسه کنید.

۱۵ـ۱۳ یک برنامه کامپیوتری بنویسید که معادلات دیفرانسیل زیر را با (الف) روش آدام [معادله (۱۵ـ۴۲)]؛ و (ب) روش رونگه‌ـکوتا معادلات (۱۵ـ۵۰)] حل کند:

$$\dot{x} = t - x^{۲} \qquad x(\circ) = ۱$$

$$\dot{x} = t + \sin x \qquad x(\circ) = \pi/۲$$

$$\dot{x} = e^{-xt} \qquad x(\circ) = ۱$$

$$\dot{x} = \sin xt \qquad x(\circ) = ۱$$

$$\dot{x} = x^{۲}t^{۲} + ۱ \qquad x(\circ) = ۱$$

۱۵ـ۱۴ مسائل مقدار اولیهٔ زیر را با $h = ۰٫۱$ به‌طور عددی حل کنید. اولین ده مقدار x را پیدا کنید:

(الف) $\ddot{x} + ۰٫۲\dot{x}^{۲} + ۱۰x = ۲۰t \qquad x(\circ) = \circ, \dot{x}(\circ) = \circ$

(ب) $\ddot{x} + ۴x = t^{۲} \qquad x(\circ) = ۱, \dot{x}(\circ) = \circ$

(ج) $\ddot{x} + \dot{x} + x = \circ \qquad x(\circ) = ۲, \dot{x}(\circ) = \circ$

(د) $t\ddot{x} + \dot{x} + xt = \circ \qquad x(\circ) = ۱, \dot{x}(\circ) = \circ$

(هـ) $\ddot{x} + \dot{x} + x^{۲} = t \qquad x(\circ) = ۱, \dot{x}(\circ) = \circ$

(و) $\ddot{x} + xt = \circ \qquad x(\circ) = \circ, \dot{x}(\circ) = ۱$

(ز) $\ddot{x} + \sin x = t \qquad x(\circ) = \pi/۲, \dot{x}(\circ) = \circ$

نمایه