ادگار ا. کروت

مبانی فیزیک ریاضی

دکتر تقی عدالتی - دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا

ادگار ا. کروت

مبانی فیزیک ریاضی

ترجمهٔ

دکتر تقی عدالتی ـ دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا

پیشگفتار مترجمان

کتاب حاضر که در نوع خود بی‌نظیراست سالهاست‌که به‌عنوان کتاب درسی ریاضی فیزیک در اغلب دانشگاهها تدریس می‌شود . مطالب کتاب می‌تواند برای دو نیمسال کامل با انتخاب مناسب فصلها برای رشته‌های فیزیک ، ریاضی ، ریاضی‌کاربردی وبخصوص مهندسی‌مورداستفاده قرارگیرد .

فصل اول به‌عنوان مقدمه‌ای برای فهم بیشتر مطالب فصلهای دیگر تنظیم‌گردیده است . سایرفصول را اساتید محترم می‌توانند به سلیقهٔ خود انتخاب و تدریس نمایند .

از همکار گرامی آقای دکتر حسن صادقی استادیار گروه ریاضی و آمار و کامپیوتر به‌خاطر ویرایش علمی ایشان تشکر می‌کنیم . همچنین از معاونت محترم فرهنگی و همکاران محترم گروه تخصصی علوم وابسته به مؤسسه چاپ وانتشارات آستان قدس رضوی که این‌کتاب رامورد تأیید قرارداده‌اند و از مسؤولان محترم مؤسسه ، که چاپ و نشر این اثر را به‌عهده گرفته‌اند صمیمانه سپاسگزاریم .

تقی عدالتی   ابوالقاسم بزرگ‌نیا

اعضای هیأت علمی دانشکده علوم

دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

پیشگفتار

هدف اصلی این کتاب فراهم آوردن مطالب ریاضی لازم برای دانشجویان دروس نظریه الکترومغناطیس و مکانیک کوانتم است.

تنها چیزی که از خواننده انتظار دارم دانستن ریاضی عمومی و فیزیک دو سال اول دانشکده است.

در UCLA، مطالب مربوط به **جبر ماتریسها**، آنالیز برداری، سری فوریه، و معادلات دیفرانسیل معمولی در گروه فیزیک در طول یک ترم تحصیلی تحت عنوان "روشهای ریاضی فیزیک" تدریس می‌شود. دانشجویان، این درس را معمولاً" بادروس فیزیک درسالهای آخردانشکده اختیارمی‌کنند. درسایرگروههای علوم نیز بسیاری از دانشجویان لیسانس و فوق لیسانس این درس را می‌توانند اختیار کنند. تمام مطالب کتاب را می‌توان در طول دو یا سه ترم تدریس کرد.

همان‌طور که در UCLA بیان شد، این درس روشهای ریاضی‌مقدماتی را که درسایر درسهای فیزیکی کاربرد دارند تشریح می‌کند. اگرمطالب این کتاب برای منظور فوق تدریس نشود، مدرس باید خود این انگیزه را در دانشجویان ایجاد کند. مقداری از مطالب فیزیکی در مثالها و مسائل آخر هر فصل گنجانده شده است. این موضوع بخصوص در نیمهٔ دوم کتاب صادق است. مسائل از ساده به مشکل تنظیم شده‌اند. حتی بهترین دانشجو نیز بایدبرای حل بعضی ازآنهاسعی زیادی بکند. دانشجویانی که تمرینهای نسبتاً" مشکل را حل می‌کنند درمی‌یابند که مطالب ارزشمندی را به خاطر سپرده‌اند.

فصل یک اساساً" مروری بر مطالب درسی است که خواننده احتمالاً" خیلی قبل دیده است. این کتاب درواقع از فصل ۲ شروع می‌شود. هدف در این جا آماده‌سازی سریع و مهارت کافی در کار کردن خواننده با ماتریسهای حقیقی و

مختلط است ، تا درموقع برخورد با آنهادر دروس مکانیک کلاسیک ومکانیک کوانتم دچار اشکال نشود . بیشتر دانشجویان فیزیک کنجکاوند که تانسورها چه هستندو کاربرد آنها چیست . من سعی کرده‌ام این حس کنجکاوی رادرفصل ۲ بدون آنکه عمیقاً" وارد جزییات شوم ارضا کنم . جبر برداری درفصل ۳ موردبحث قرارگرفته است ، و یکی از مهمترین وسایل جدید ریاضی است که دانشجویان طالب فیزیک بایدبیاموزند . درنوشتن این فصل بخصوص سعی‌کرده‌ام این ایده را که فرمولهای انتگرال مقادیری را که مشتق یک تابع در تمام یک ناحیه اختیار می‌کند بامقادیر خود تابع برمرزآن ناحیه مرتبط می‌سازد تأکید شود . دراین روش بسط یکنواخت و اصولی فرمولهای انتگرال در ابعاد بیشتری امکان‌پذیر است . محدودیتهای توپولوژیکی فرمولهای انتگرال نسبتاً" مفصلتر از کتابهای مقدماتی موردبحث قرار گرفته‌اند . در کاربردهای فیزیکی ، انتگرالهای حجم ، سطح ، منحنی‌الخط اغلب بر ناحیه‌هایی محاسبه می‌شوند که با زمان تغییر می‌کند . لازم‌است بدانیم ازاین انتگرالها چگونه نسبت به زمان مشتق بگیریم وفرمولهای مناسب راچطور به‌دست آوریم . سرانجام ، قضایای انتگرال شامل ناحیه‌های گسسته ، بایدبه‌طریقی اصلاح شوند که قضایا در این موارد نیز معتبر باشند . دراین ارتباط است‌که شرایط مرزی بطور طبیعی ظاهر می‌شوند . گرچه این مطلب درکارهای مقدماتی بندرت بحث می‌شود ، در این جا اصلاحات نواحی انتگرال‌گیری به‌دقت صورت گرفته است .

بحث مختصری ازمتغیرهای مختلط درفصل ۴ آمده است . ایدهٔ اصلی این فصل بسط توابع مختلط به سریهای توان یابه صورت انتگرالها برمسیر بسته است . همچنین نشان می‌دهیم که این قبیل توابع یک نگاشت همشکل ازیک رویه به رویهٔ دیگر است . درحقیقت سه مشخصهٔ فوق ، گرچه معادلند ، درواقع سه تعمیم جداگانهٔ یک موضوع هستند که اغلب در بحثهای مقدماتی همزمان برآنها تأکید نمی‌شود . ولی فکر می‌کنم با چند تذکر لازم می‌توان به مبتدیان کمک کرد که آنالیز مختلط را خیلی ساده‌تر درک کنند .

رویه‌های ریمان را با تأکید بیشتری بررسی می‌کنیم زیرا به نظر می‌رسد که برای مبتدیان درک آنها بادشواری زیادی همراه است . خاطرنشان می‌شودکه یک سطح ریمان لازم نیست توده‌ای از ورقه‌های مسطح باشند ، یک سطح منحنی بسته مانند تور نیز می‌تواند یک سطح ریمان محسوب شود . انتگرالها برمسیرهای بسته نیز به تفصیل بحث شده‌اند ، و اشاره شده است که محاسبهٔ بعضی انتگرالها با استفاده از مانده‌ها در خارج مسیر بسته بجای داخل آن ساده‌تر است .

در فصل ۵ از تبدیلات انتگرالی متناهی و نامتناهی بحث می‌شود . مفهوم یک تبدیل انتگرالی ممکن است کوتاهترین راه برای نمایش سری فوریه نباشد ، ولی استفاده‌های زیادی درکاربردها دارد . با استفاده ازانتگرال جزء بجزء با پوچیهای مناسب ، جواب بسیاری ازمسائل درمعادلات دیفرانسیل معمولی وجزئی به روشهای استاندارد محاسبهٔ یک تبدیل معین و وارون آن منجر می‌شود .

فصل ۶ دربارهٔ معادلات دیفرانسیل بحث می‌کند ، بخصوص معادلاتی که به توابع خاص ریاضی فیزیک منجر می‌شوند . خواص بیشتراین توابع خاص بررسی و نمودار آنها رسم می‌شود . اشاره می‌شود که بیشتر توابع خاص ریاضی فیزیک جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل استورم ــ لیوویل هستند و درنتیجه بعضی خواص مهم تعامد در مورد آنها صدق می‌کند . در فصل آخر یعنی فصل ۷ ، فرصتی پیدا می‌شود که تمام کارهای قبل رادرمورد حل معادلات دیفرانسیل جزئی به‌کاربریم . سعی‌کرده‌ام مطالب فصل ۶ ازاین‌لحاظ که یک راه کلی‌برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی وجود دارد به صورتی متحدالشکل درآید ، این روش شامل دومرحله است . در مرحلهٔ اول ، خانواده‌ای از توابع جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را برحسب یک تابع گرین ، یک یا دو قضیهٔ فصل ۳ نشان می‌دهد . در مرحله دوم این تابع‌گرین رابرای یک دستگاه مختصات خاص با استفاده ازتبدیلات انتگرالی یا با به‌کار بردن بسطهایی برحسب توابع خاص محاسبه می‌کند . این طرزعمل را تاحدودی به تفصیل برای معادلات دیفرانسیل کلاسیک ریاضی فیزیک و بسیاری از اتحادهای مفید تشریح کرده‌ام .

درخاتمه لازم‌به تذکراست‌که یک درس برمبنای این‌کتاب نمی‌تواند جانشین هر درس ریاضی محض شود . دانشجویان در مطالعهٔ کتابهای سخت‌تر ریاضی در هر زمینهٔ موردبحث مطالب بیشتری‌کسب می‌کنند . مسلما" هردانشجولااقل باید یکی از این کتابها را در دورهٔ لیسانس مطالعه کرده باشد .

بر خود لازم می‌دانم که از دانشجویان و همکارانم بخاطر پیشنهادهای مفید ، تذکرها وانتقادهایشان تشکرکنم . ازدریافت پیشنهادهای بعدی نیزبسیار ممنون خواهم شد .

ادگار ــ آ ــ کروت

جبر برداری

مقدمه

در فیزیک مقدماتی بردار را به‌عنوان کمیتی‌که دارای اندازه و جهت است یادمی‌گیریم . قاعده جمع بردارها به‌قسمی انتخاب می‌شودکه برای توصیف‌حرکت‌یک شیئ مادی مورداستفاده قرار گیرد .

به‌عنوان مثال ، سه نقطهٔ O، P_1، P_2 را که بر یک خط راست واقع نیستند درنظرمی‌گیریم . اگر جسمی روی خط مستقیمی از O به P_1 و سپس روی خط مستقیم دیگری از P_1 به P_2 تغییرمکان دهد ، نهایهٔ" در نقطهٔ P_2 قرار می‌گیرد . با وجوداین ، جسم رامی‌توان باتغییرمکانی درطول خط‌راست واصل O به P_2 در نقطه P_2 قرار داد . تغییر مکان $\mathbf{OP_2}$ ترکیب دو تغییرمکان $\mathbf{OP_1}$ و $\mathbf{P_1P_2}$ را نشان می‌دهد . برای نشان دادن تغییر مکانی مانند $\mathbf{OP_1}$ ، می‌توان آن را بوسیله یک پیکان با طول و امتداد معین نشان داد . (شکل ۱ — ۱) .

اگرتغییرمکان $\mathbf{P_1P_2}$ بعداز $\mathbf{OP_1}$ اعمال شود مبدأ پیکان $\mathbf{P_1P_2}$ رادرانتهای $\mathbf{OP_1}$ قرارمی‌دهیم ، به این ترتیب تغییرمکان مرکب $\mathbf{OP_2} = \mathbf{OP_1} + \mathbf{P_1P_2}$ پیکانی است که مبدأ $\mathbf{OP_1}$ را به منتهای $\mathbf{P_1P_2}$ وصل‌کند . پیکان حاصل قطرمتوازی‌الاضلاعی به اضلاع $\mathbf{OP_1}$ و $\mathbf{P_1P_2}$ است . این‌قاعدهٔ محاسبهٔ $\mathbf{OP_1} + \mathbf{P_1P_2}$ همان قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارهاست .

تغییرمکان $\mathbf{x} = \mathbf{OP_1}$ را می‌توان دو برابر کرد تا تغییرمکان جدید $2\mathbf{x}$ حاصل شود یا آن رانصف کرد تا تغییرمکان $\frac{1}{2}\mathbf{x}$ به‌دست آید . یک مضرب منفی مانند $-2\mathbf{x}$ تغییرمکانی دوبرابر $\mathbf{x}$ رادر جهت مقابل $\mathbf{x}$ نشان می‌دهد . بطورکلی اگر $\mathbf{x}$ در عدد حقیقی دلخواه c ضرب شود ، نتیجه $c\mathbf{x}$ ، تغییرمکانی c برابر بزرگتر از $\mathbf{x}$ را نشان می‌دهد . جهت $c\mathbf{x}$ به ازای $c>0$ همان جهت $\mathbf{x}$ و به ازای $c<0$ برخلاف آن است .

درصفحه ، بردار $\mathbf{A}$ رامی‌توان به صورت پیکانی به مبدأ $(0,0)$ وانتهای مناسب (a_1,a_2) نشان داد . در این صورت ، جمع بردارها و ضرب اسکالر را می‌توان برحسب مختصات و با استفاده

از قوانین زیر محاسبه کرد .

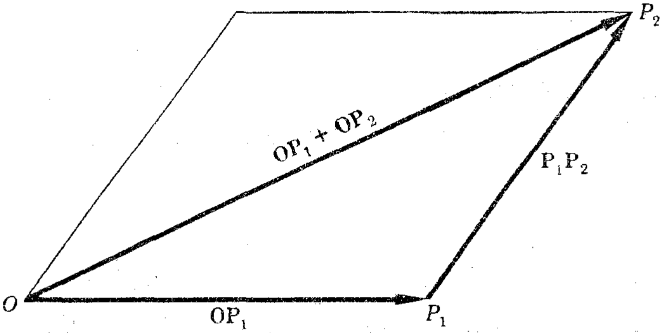
$$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2) \qquad (۱ - ۱)$$

$$c(a_1,a_2) = (ca_1,ca_2) \qquad (۲ - ۱)$$

از معادلات (۱ ــ ۱) و (۱ ــ ۲) معلوم می‌شود که بردارهای $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z}$ از قوانین زیر تبعیت می‌کنند .

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \qquad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \qquad (۳ - ۱)$$

$$c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y} \qquad 1\mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad (۴ - ۱)$$



شکل ۱ ــ ۱. قانون متوازی‌الاضلاع جمع برداری .

این قواعدبرای تعریف مجردبردارها به‌کارمی‌روند . فضای برداری مجموعه‌ای است‌مانند S که اعضایش بردار نامیده می‌شوند و در اصول زیر صدق می‌کنند :

۱ . به هر زوج $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از بردارهای S بردار $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ نسبت داده می‌شود . که آن رامجموع $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نامند ، و درخواص زیر صدق می‌کند :

الف) جمع تعویض‌پذیر است . $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

ب) جمع شرکت‌پذیر است . $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

ج) بردار منحصر بفرد $\mathbf{0}$ بنام بردار صفر در S وجود دارد به قسمی که به ازای هربردار $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ ، و

د) به هر بردار $\mathbf{x}$ در S یک بردار منحصر بفرد $\mathbf{x}-$ نسبت داده می‌شود به قسمی که $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

۲ . به هر زوج c و $\mathbf{x}$ که c یک عدد حقیقی (یا مختلط) و $\mathbf{x}$ یک بردار در S است یک بردار $c\mathbf{x}$ در S نسبت داده می‌شود ، **که آن را حاصلضرب** c و $\mathbf{x}$ نامند ، و در خواص زیر صدق **می‌کند :**

الف) ضرب اعداد حقیقی و مختلط شرکتپذیر است . $b(c\mathbf{x}) = (bc)\mathbf{x}$ و

ب) به ازای هر بردار $\mathbf{x}$ ، $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

ج) ضرب نسبت به جمع برداری توزیعپذیر است ، $c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ و

د) ضرب بردارها نسبت به جمع عددی توزیعپذیر است ، $(b+c)\mathbf{x} = b\mathbf{x} + c\mathbf{x}$

اگر اعداد c در اصل ۲ همه حقیقی باشند مجموعه S را فضای برداری حقیقی گویند ؛ و اگر اعداد c مختلط باشند S "فضای برداری مختلط " نامیده می‌شود .

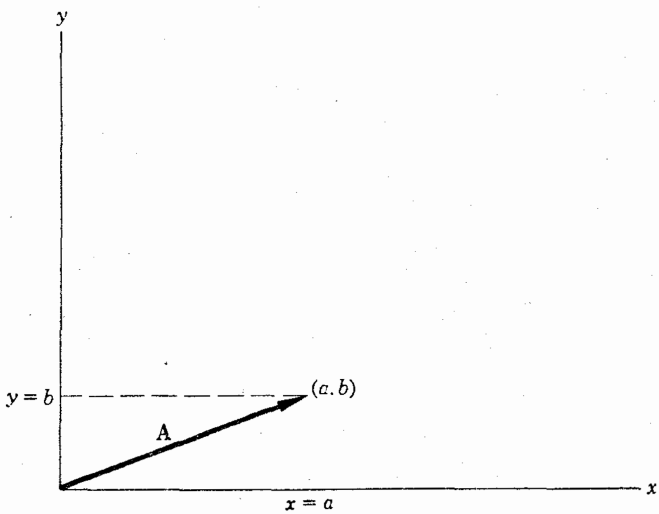
فرض کنید R^n، $n = 1,2,3,\ldots$ مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب از اعداد حقیقی باشد . اگر $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ اعضای R^n باشد ، آن‌گاه بنا به تعریف :

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n) \qquad (۵-۱)$$

$$c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \qquad (۶-۱)$$

$$\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0) \qquad (۷-۱)$$

$$-\mathbf{x} = (-x_1,-x_2,\ldots,-x_n) \qquad (۸-۱)$$



شکل ۱ ــ ۲. نمایش هندسی بردار دوبعدی $\mathbf{A} = (a,b)$.

به آسانی دیده می‌شود که درتمام اصول ۱ و ۲ صدق می‌کنند . بنابراین ، R^n یک فضای برداری حقیقی است معمولا" R^n را فضای برداری n بعدی با مختصات حقیقی گویند . خلاصه این‌که ، از دو جنبهٔ کاملا" معادل می‌توان به بردارها نگاه کرد . آنها را می‌توان به عنوان عناصری مجرد درنظر گرفت که با یکدیگر برطبق اصول ۱ و ۲ ترکیب می‌شوند ، یا به‌صورت n تاییهای مرتب ازاعدادحقیقی درنظرگرفت‌که ازقوانین (۱ ــ ۵) تا (۱ ــ ۸) تبعیت می‌کنند .

مفهوم‌اخیر به ایدهٔ هندسی اولیه نزدیکتراست ، به این دلیل ، آن راپذیرفته و به‌کارخواهیم برد .

۱ ــ ۱ تعاریف

اسکالرها :

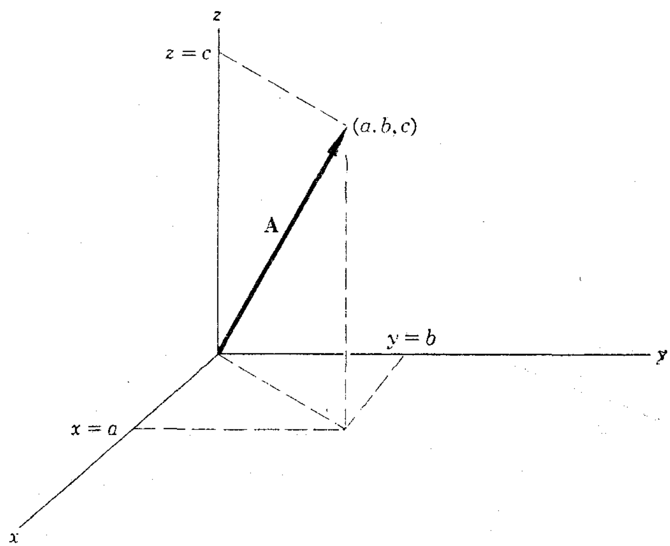
اسکالر عددی است حقیقی یا مختلط.

بردارها :

یک بردار دوبعدی (شکل ۱ ــ ۲) زوج مرتبی از اعداد حقیقی است مانند (۲ و ۱) یا (a,b) . ازنظر هندسی ، بردار (a,b) را می‌توان به‌عنوان بردار وضع نقطه $x = a$، $y = b$ در دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی شاهد درنظرگرفت که درآن x روی محور طولها و y روی محور عرضها اندازه‌گیری می‌شود . بردار (a,b) را با نماد زیر نشان می‌دهند .

$$\mathbf{A} = (a,b) \tag{۱ ــ ۹}$$

حروف a و b به ترتیب مختص اول و دوم یا مؤلفه‌های x و y بردار $\mathbf{A}$ نامیده می‌شوند .



شکل ۱ ــ ۳. نمایش هندسی بردار سه بعدی $\mathbf{A} = (a,b,c)$.

بردار سه بعدی (شکل ۱ ــ ۳) سه تایی مرتبی از اعداد حقیقی است مانند (۳ و ۲ و ۱) یا (a,b,c) . ازنظر هندسی ، بردار (a,b,c) را می‌توان به‌عنوان بردار وضع نقطه $x = a$، $y = b$، $z = c$ در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی شاهد درنظرگرفت که محورهایش x ، y ،

z باشد . بردار (a,b,c) را با نماد زیر نشان می‌دهند .

$$\mathbf{A} = (a,b,c) \qquad (۱-۱۰)$$

حروف a و b و c را مؤلفه‌های x و y و z بردار $\mathbf{A}$ گویند .

هر بردار n بعدی مجموعهٔ مرتبی از n عدد حقیقی است مانند (n . . . و ۲ و ۱) یا $(a_1,a_2, \ . \ . \ . \ ,a_n)$. ازنظر هندسی ، بردار $(a_1,a_2, . \ . \ . ,a_n)$ رامی‌توان به‌عنوان بردار وضع نقطه $x_1 = a_1$, . . . $x_n = a_n,$ دریک دستگاه مختصات دکارتی n بعدی شاهدتصورکرد که محورهایش x_1 , . . . $x_n,$ هستند . بردار $(a_1,a_2,. \ . \ . \ ,a_n)$را با نماد زیر نشان می‌دهند .

$$\mathbf{A} = (a_1,a_2, \ . \ . \ . \ ,a_n) \qquad (۱-۱۱)$$

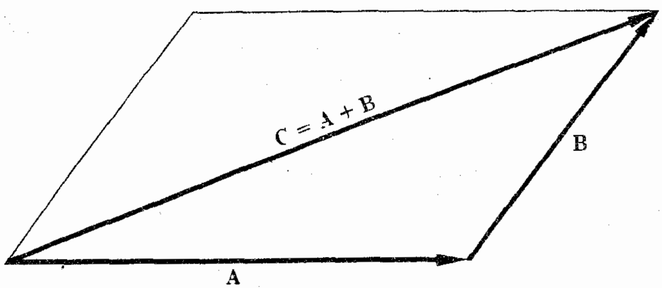
حرف a_1 مؤلفهٔ x_1 بردار $\mathbf{A}$ ، a_2 مؤلفهٔ x_2 بردار $\mathbf{A}$ است و الی آخر .

۱ ــ ۲ . بردارهای مساوی و بردارهای صفر

اگر $\mathbf{A} = (a_1,a_2,. \ . \ .,a_n)$ و $\mathbf{B} =(b_1,b_2, \ . \ . \ .,b_n)$ ، می‌نویسیم $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

اگر و فقط اگر

$$a_1 = b_1, \ a_2 = b_2, \ . \ . \ . \ , \ a_n = b_n \qquad (۱-۱۲)$$



شکل ۱ ــ ۴ . قانون متوازی‌الاضلاع جمع برداری .

اگرتمام مؤلفه‌های برداری صفرباشند ، درآن‌صورت آن را "بردارصفر" یا "بردارپوچ" گویند ، پس :

$$\mathbf{0} = (0,0) \qquad (۱-۱۳)$$

یا

$$\mathbf{0} = (0,0,0) \qquad (۱-۱۴)$$

یا

$$\mathbf{0} = (0,0, \ . \ . \ . \ ,0) \qquad (۱-۱۵)$$

۱ ــ ۳. اعمال برداری

بردارها را می‌توان با یکدیگر جمع ، تفریق یا درهم ضرب کرد . همچنین بردارها را می‌توان در اسکالرها ضرب کرد . اگر $\mathbf{A} = (a,b)$ ، $\mathbf{B} = (c,d)$ درآن صورت جمع بردارهای **A** و **B** به صورت جمع مؤلفه‌های متناظرشان در نمایشهای (a,b) و (c,d) تعریف می‌شود ، پس:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d) \tag{۱ ــ ۱۶}$$

بطورکلی اگر $\mathbf{A} = (a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_n)$ و $\mathbf{B} = (b_1,b_2,\ .\ .\ .\ ,b_n)$ آن گاه

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_n) + (b_1,b_2,\ .\ .\ .\ ,b_n)\\ &= (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ .\ .\ .\ ,\ a_n + b_n)\end{aligned} \tag{۱ ــ ۱۷}$$

تحقیق کنید که تعریف جمع برداری در معادله (۱ ــ ۱) با قانون متوازی‌الاضلاع جمع برداری (شکل ۱ ــ ۴) که در فیزیک مقدماتی فرا گرفته‌اید سازگار است .

اگر $\mathbf{A} = (a_1,a_2,.\ .\ .,a_n)$ درآن صورت فرم ، اندازه ، یا طول **A** به صورت

$$|\mathbf{A}| = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdot\cdot\cdot + a_n^2} \tag{۱ ــ ۱۸}$$

تعریف می‌شود . اگر λ یک اسکالر باشد ، ضرب بردار **A** در اسکالر λ عبارت است از:

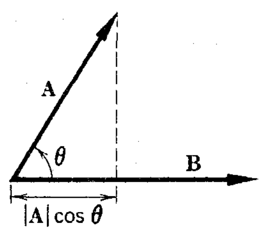
$$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} = (\lambda a_1,\lambda a_2,\ .\ .\ .\ ,\lambda a_n) \tag{۱ ــ ۱۹}$$

ضرب اسکالر:

ضرب اسکالر یا "داخلی" دو بردار $\mathbf{A} = (a_1,a_2,.\ .\ .,a_n)$ و $\mathbf{B} = (b_1,b_2,\ .\ .\ .\ ,b_n)$ به صورت

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdot\cdot\cdot + a_nb_n \tag{۱ ــ ۲۰}$$

تعریف می‌شود .



$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$

شکل ۱ ــ ۵. ضرب اسکالر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

توجه کنید که

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdot\cdot\cdot + a_n^2 \tag{۱ ــ ۲۱}$$

تعریف : کسینوس زاویه بین A و B به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|} \qquad (۲۲-۱)$$

پس

$$\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}} \qquad (۲۳-۱)$$

ضرب برداری :

ضرب برداری یا "خارجی" دو بردار سه بعدی مانند $\mathbf{A} = (a_1,a_2,a_3)$ و $\mathbf{B} = (b_1,b_2,b_3)$ برداری است به صورت زیر (شکل ۱ — ۷) .

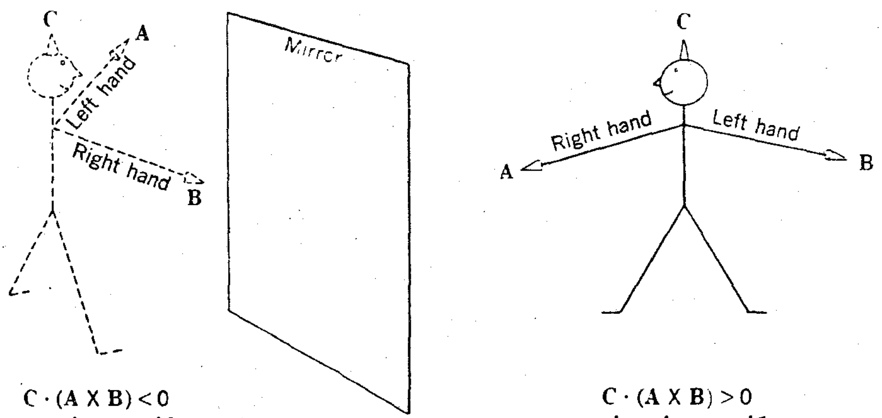
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) \qquad (۲۴-۱)$$

ضرب برداری فقط برای بردارهای سه بعدی تعریف می‌شود . حال می‌توان خواص زیر را درمورد ضرب برداری بررسی کرد .

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) \qquad (۲۵-۱)$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0 \qquad (۲۶-۱)$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0 \qquad (۲۷-۱)$$



$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) < 0$ دستگاه مختصات چپ $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$

$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) > 0$ دستگاه مختصات راست — $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$

شکل ۱ — ۶. تصویر یک دستگاه مختصات راست درآینه، یک دستگاه مختصات چپ است .

$$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0 \qquad (۱-۲۸)$$

بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را موازی(مقابل)گوییم اگرعددی مثبت(منفی) مانند λ یافت شود به قسمی که

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{B} \qquad (۱-۲۹)$$

اگر بردارهای فرضی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نه موازی ونه متقابل باشند ، آن‌گاه معادلات (۱-۲۲) ، (۱-۲۷) ، (۱-۲۸) نشان می‌دهند که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر هر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است . به‌عبارت دیگر $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ برصفحه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود خواهدبود . سه تایی مرتب $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ ازبردارها راسه تایی راست گوییم اگر و فقط اگر

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) > 0 \qquad (۱-۳۰)$$

سه تایی مرتب $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ از بردارها را سه تایی چپ گوییم اگر و فقط اگر

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) < 0 \qquad (۱-۳۱)$$

اگر $\mathbf{C}=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ و $\mathbf{C}$ بردار غیرصفر باشد ، آن‌گاه ، سه تایی $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ راست است . بردار $\mathbf{C}$ امتدادی را تعریف می‌کند که درآن امتداد اگر یک پیچ راست را از $\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$ بچرخانیم بجلو رود . این مبنای "قاعده راست" در فیزیک مقدماتی است . حال فرض کنید بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک صفحه‌ای را مشخص کنند . دستگاه محورهای مختصات دکارتی قائم x و y و z را به قسمی انتخاب می‌کنیم که بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحه x و y قرار گیرند . و محور x ها راطوری اختیار می‌کنیم که هم‌جهت $\mathbf{A}$ باشد . در این صورت

$$\mathbf{A} = (|\mathbf{A}|,0,0) \qquad (۱-۳۲)$$

$$\mathbf{B} = (|\mathbf{B}|\cos\theta, |\mathbf{B}\ \sin\theta, 0) \qquad (۱-۳۳)$$

بردار $\mathbf{A}$ تنها یک مؤلفهٔ درامتداد محور x ها دارد . اندازه این مؤلفهٔ برابر طول بردار $\mathbf{A}$ است . بردار $\mathbf{B}$ مؤلفهٔ z ندارد زیرابنابه تعریف درصفحه x و y واقع است . مؤلفه‌های x و y آن به ترتیب برابر $|\mathbf{B}|\cos\theta$ و $|\mathbf{B}|\sin\theta$ است .

زاویه θ ازمحور x به‌طرف‌بردار $\mathbf{B}$ درصفحه x ، y اندازه‌گیری‌می‌شود . چون $\mathbf{A}$ درامتداد محور x ها قرارمی‌گیرد زاویه θ برابر زاویه بین‌بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نیزخواهدبود . دراین دستگاه مختصات خاص (x,y,z) از معادلات (۱-۲۴) و (۱-۳۲) و (۱-۳۳) نتیجه می‌شود .

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = [0,0,|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})] \qquad (۱-۳۴)$$

با فرض

$$\mathbf{n} = (0,0,1) \qquad (۱-۳۵)$$

و باتوجه به معادله (۱-۱۹) می‌توان نوشت :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{n}|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) \qquad (۱-۳۶)$$

دقت کنیدکه بردار $\mathbf{n}$ برهردو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است و درنتیجه بر صفحه x و y عمودخواهد

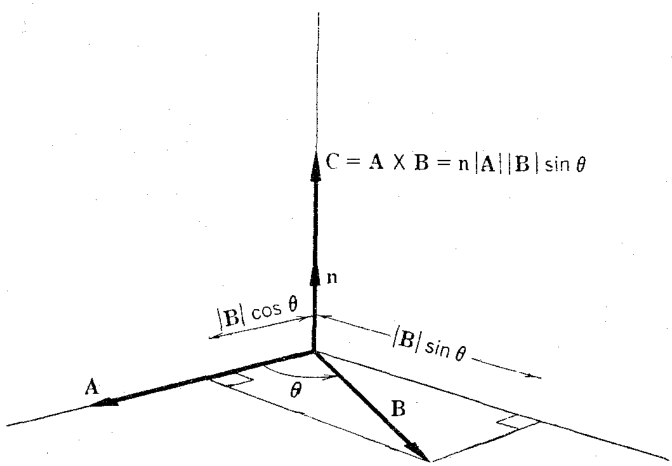
بود . در انتخاب زاویه بین A و B که در محاسبه (A,B) به‌کار می‌رود ابهام در امکان انتخاب زاویه داخلی‌یاخارجی‌بین A و B باتوجه به این‌که سه تایی {A,B,n} باید راست‌باشدبرطرف می‌شود . دراین‌صورت‌اگر $|A| > 0, |B| > 0$ و A و B موازی ومتقابل‌نباشند ، از رابطه (۱—۳۰) نتیجه می‌شود

$$\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) > 0 \qquad (۳۷-۱)$$

پس برای محاسبهٔ (۱ — ۳۶) همواره زاویهٔ داخلی بین A و B را انتخاب می‌کنیم اگر A و B موازی یا متقابل باشند ، ضرب برداری بموجب معادلات (۱ — ۳۵) و (۱ — ۳۶) صفر است . باتوجه به معادلات (۱ — ۳۲) و (۱ — ۳۳) از ضرب اسکالر نتیجه می‌شود

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}) \qquad (۳۸-۱)$$

که با معادله (۱ — ۲۲) مطابقت دارد . برای به‌دست آوردن معادلات (۱— ۳۶) و (۱— ۳۸) دستگاه خاصی از مختصات را به‌کار بردیم که در آن A فقط دارای یک مؤلفهٔ غیرصفر و B فقط دارای دو مؤلفهٔ غیرصفر بود . باوجود این ضربهای‌اسکالر و برداری‌فقط به طول دو بردار و زاویه بین آنهابستگی دارد و درنتیجه به دستگاه مختصات به‌کار رفته برای نمایش آنهاوابسته نیست .



شکل ۱ — ۷. ضرب برداری A × B

۱ — ۴ . بسط بردارها

منظور از بسط یک بردار نوشتن آن برحسب مجموع چند بردار دیگر است . همانطور که معلوم می‌شود ، این تعریف به اندازهٔ کافی دقیق نیست . بدیهی‌است تغییرمکان یک بردار در صفحه x ، y را می‌توان به صورت نتیجهٔ تغییر مکان زوجهای مختلفی ازبردارها درنظرگرفت ،

که آنها نیز در صفحه x ، y واقعند .
از طرف دیگر یک بردار عمود بر صفحه x ، y راهرگز نمی‌توان به صورت مجموع بردارهای واقع درصفحه x ، y نشان داد . درحالت اول به نظر می‌رسد بردارهای واقع درصفحه x ، y دارای بسطهای متعددی باشند ، حال آن‌که درحالت دوم هیچ بسطی برای آنها متصور نیست .
اشکال بسطهای مختلف را می‌توان با انتخاب بردارهای خاص و مقیدکردن تمام بسطها به آنها برطرف ساخت . اشکال عدم امکان هرگونه بسطی رامی‌توان با اطمینان ازاین‌که بردارموردنظر در فضای "راست" قرار گیرد برطرف ساخت . برای بیان دقیق این مطلب باید چند اصطلاح جدید را معرفی کنیم .

استقلال خطی

تعریف : بردارهای $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2, \ldots ,\mathbf{i}_n\}$ را "مستقل خطی" گویند اگر و فقط اگر معادله

$$c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + \cdots + c_n\mathbf{i}_n = 0 \qquad (۱-۳۹)$$

دارای تنها جواب

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots , c_n = 0 \qquad (۱-۴۰)$$

باشد، درغیر این صورت آنها را نامستقل خطی نامند .

ازاین‌تعریف دونتیجهٔ بدیهی زیربه‌دست‌می‌آید : — اگر $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2, \ldots ,\mathbf{i}_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی باشند ، آن‌گاه هیچیک از $\mathbf{i}_k$ ها صفر نیست ،
— هیچیک از $\mathbf{i}_k$ ها نمی‌توانند ترکیبی از بردارهای ماقبل باشد . (اثبات این گزاره‌ها به دانشجویان واگذار می‌شود .) مفاهیم بعدی رابرای تعمیم ایدهٔ فضای "راست" بیان می‌کنیم .

مانیفلد خطی (بلا یا چند گونا)

اگر زیرمجموعهٔ M از فضای برداری S به قسمی باشد که ، به ازای تمام اسکالرهای a و b بردار $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ به M متعلق باشد ، که در آن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به M متعلق‌اند ، در این صورت M را یک مانیفلد خطی گویند .
تبصره : بدیهی است که صفحه x ، y در فضای (x,y,z) یک مانیفلد خطی است . درواقع ، هر صفحه ماربر مبدأ در فضای R^3 یک مانیفلد خطی خواهد بود .
(هر مانیفلد خطی در R^n ، $n \geq 4$ را یک " ابرصفحه " گویند .) از این تعریف نتیجه می‌شودکه یک مانیفلد خطی باید همواره بردار صفر را دربر داشته باشد . زیرا اگر $\mathbf{x}$ عضوی از آن باشد $\mathbf{x} - \mathbf{x}$ نیز عضو آن است .

مجموعهٔ بردارهای $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2, \ldots ,\mathbf{x}_n\}$ در M مجموعه M راتولید می‌کنند اگر هربردار

$\mathbf{A}$ در M را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ نوشت ، یعنی اسکالرهایی مانند $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ وابسته به $\mathbf{A}$ وجود داشته باشند به قسمی که

$$\mathbf{A} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \qquad (۱-۴۱)$$

دیده می‌شودکه وقتی $\mathbf{A}$ در یک مانیفلد خطی قرارگیرد ، آن رابرحسب بردارهای مولد مانیفلد می‌توان بسط داد . باوجود این ، بسط $\mathbf{A}$ هنوز هم منحصر بفرد نیست . برای آن که این بسط را منحصر بفرد سازیم باید نه تنها فرض کنیم که $\mathbf{A}$ در مانیفلد تولید شده از بردارهای $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ قرار داردبلکه باید بردارهای $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مستقل خطی باشند .

اگر بردارهای $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای M راتولید کرده ومستقل خطی نیز باشند ، گوییم یک مبنا برای M تشکیل می‌دهند . دراین‌صورت نمایش (۱ ــ ۴۱) منحصر بفرداست . زیرا اگراین نمایش منحصر بفرد نباشد نمایش دیگری مانند

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n \qquad (۱-۴۲)$$

موجود خواهد بود ، از تفریق معادله (۱ ــ ۴۱) و (۱ ــ ۴۲) داریم :

$$\mathbf{0} = (a_1 - c_1)\mathbf{x}_1 + (a_2 - c_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (a_n - c_n)\mathbf{x}_n \qquad (۱-۴۳)$$

چون بردارهای مبنا بنابه فرض مستقل خطی هُستند ، نتیجه می‌شود

$$a_1 = c_1,\ a_2 = c_2,\ \ldots,\ a_n = c_n \qquad (۱-۴۴)$$

پس معادله (۱ ــ ۴۱) منحصر بفرد خواهد بود . به این ترتیب مشکل بسط یک بردار که در ابتدای کار به آن اشاره شد حل می‌شود . نشان دادیم‌که هر بردار دلخواه واقع در یک مانیفلد خطی را می‌توان بطورمنحصر بفرد درهر مبنای مانیفلد بسط داد . پس در مثال اول ، به‌عنوان مبنا بایددو بردار خاص را انتخاب کنیم که صفحه x و y را تولید کرده ومستقل خطی باشند . در این صورت فضای راست برداری که می‌خواهد درآن قرارگیرد ویک منحصربفرد داشته باشد همان صفحه x ، y خواهد بود،این مثال ازنظر هندسی در R^3 بدیهی به‌نظر می‌رسد ولی در R^n هرگز چنین نیست .

بعد

مانیفلد خطی تشکیل شده از صفحه x ، y دارای مبنایی است شامل دو بردار، لذا آن را دوبعدی گویند . بطورکلی یک مانیفلد خطی که مبنایش شامل n بردار باشد " n بعدی " نامیده می‌شود.بنابه تعریف بعد ، هر مانیفلد n بعدی باید شامل n بردار خطی مستقل باشد که یک مبنا برای مانیفلد تشکیل می‌دهند . می‌توان نشان‌دادکه هرمجموعه شامل $n+1$ بردار در یک مانیفلد خطی n بعدی باید نامستقل خطی باشند .

مثال ۱ ــ ۱ : R^n بدیهی است که فضای مختصات حقیقی n بعدی R^n ، یک مانیفلد

خطی‌است، زیرااگر $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ، n تاییهای‌مرتب ازاعدادمتعلق به R^n باشند آن‌گاه، $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ نیز باید یک n تایی مرتب از اعداد باشد . درنتیجه به R^n متعلق خواهد بود .

n تاییهای،

$$\mathbf{e}_1 = \{1,0,\ldots,0\},\ \mathbf{e}_2 = \{0,1,0,\ldots,0\},\ldots,\mathbf{e}_n = \{0,0,\ldots,1 \tag{۱ − ۴۵}$$

مجموعه‌ای از بردارهاست که R^n را تولید می‌کنند زیرا هر بردار $\mathbf{A} = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ در R^n یک n تایی مرتب است و آن را همواره می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A} = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\} = a_1\{1,0,\ldots,0\} + a_2\{0,1,0,\ldots,0\} + \cdots + a_n\{0,0,\ldots,1\} \tag{۱ − ۴۶}$$

یا

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n \tag{۱ − ۴۷}$$

علاوه براین ، بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ مستقل خطی هستند زیرا ازمعادله (۱ − ۴۵) نتیجه می‌شود که تنها جواب

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = 0 \tag{۱ − ۴۸}$$

عبارت است از

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_n = 0$$

بنابراین ، مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ فضای R^n را تولید می‌کند و مستقل خطی هستند . پس یک مبنا برای R^n تشکیل می‌دهند . چون مبنای R^n شامل n بردار است . بنابه تعریف R^n یک مانیفلد خطی n بعدی است .

اگرقاعدهٔ‌ضرب‌اسکالر (۱ − ۲۰) را درمورد $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ به‌کاربریم معلوم می‌شود که

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{۱ − ۴۹}$$

پس هر بردار مبنا دارای طول واحد و بر هر بردار مبنا بجز خودش عمود است . مبنایی‌که در معادله (۱ − ۴۹) صدق کند ، مبنای **متعامدیکه** نامیده می‌شود . انتخاب یک مبنای متعامدیکه برای مانیفلد خطی متناظر است با ارائه مجموعه‌ای ازمختصات دکارتی قائم در مانیفلد وبیان هر بردار برحسب مؤلفه‌هایش در طول محورهای مختصات .

در R^n هر بردار دلخواه $\mathbf{A}$ یک بسط منحصر بفرد به صورت زیر دارد

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{e}_k \tag{۱ − ۵۰}$$

ضرایب بسط، a_k ، از تصویر $\mathbf{A}$ بر هر محور مختصات بدست می‌آید ،

$$a_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k \tag{۱ − ۵۱}$$

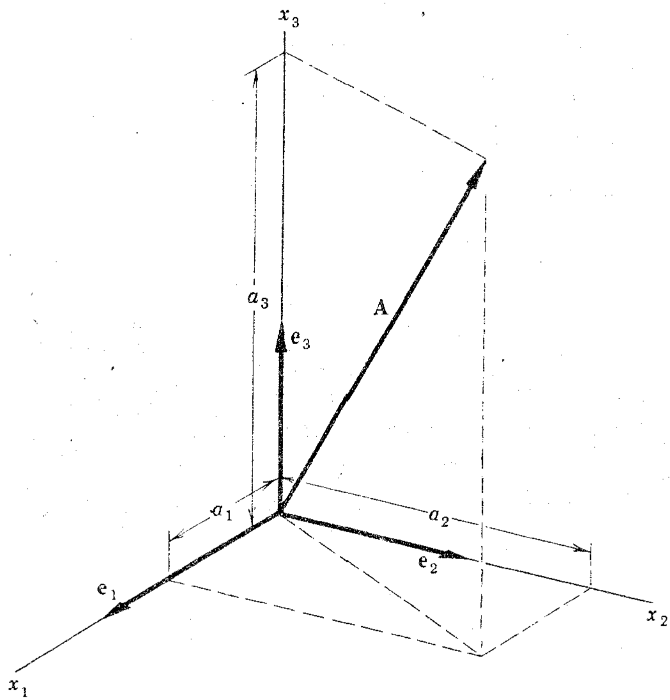
مثال ۱ ــ ۲ : R^3 هربردار A در R^3 یک سه تایی مرتب به‌صورت $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ است که آن را می‌توان به صورت

$$\mathbf{A} = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) \qquad (۱ - ۵۲)$$

یا

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \qquad (۱ - ۵۳)$$

نوشت .



شکل ۱ ــ ۸. بسط بردار A برحسب مبنای متعامدیکه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

بردارهای $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ و $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ و $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ که فضای R^3 راتولیدمی‌کنند ، مستقل خطی هستند ، و یک مبنای متعامدیکه برای R^3 تشکیل می‌دهند ، زیرا

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \qquad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \qquad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \qquad (۱ - ۵۴)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \qquad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \qquad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \qquad (۱ - ۵۵)$$

حال یک دستگاه مختصات دکارتی قائم رامی‌توان به قسمی معرفی‌کردکه محورهای x_1 ، x_2 ، x_3 به ترتیب هم‌جهت $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ باشند . مؤلفه‌های a_1 ، a_2 ، a_3 بردار A به ترتیب درامتداد

محورهای x_1 ، x_2 ، x_3 اندازه‌گیری می‌شوند . توجه کنید که

$$a_1 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1 \qquad a_2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2 \quad \text{و} \quad a_3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3 \tag{۱ — ۵۶}$$

زیرا

$$a_1 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1 = |\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{e}_1) \tag{۱ — ۵۷}$$

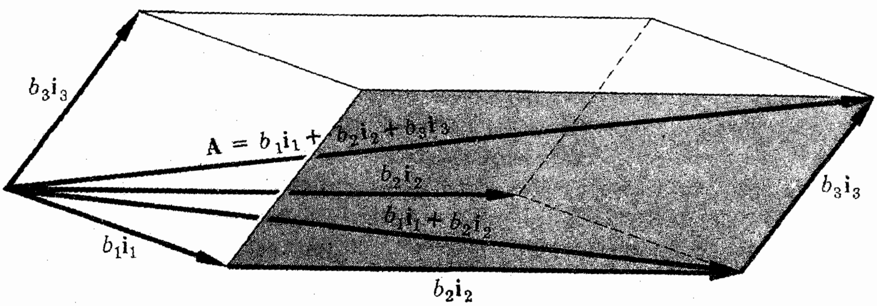
مؤلفه a_1 بردار $\mathbf{A}$ ازنظرهندسی تصویربردار $\mathbf{A}$ برامتدادمحور x_1 است . این تذکردرموردسایر مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ نیز قابل اجراست .

فضای R^3 فضای خالص است زیرا ضرب برداری فقط برای R^3 تعریف می‌شود . می‌توان تحقیق کرد که یک مبنای متعامدیکه در R^3 در شرایط زیر صدق می‌کند .

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \tag{۱ — ۵۸}$$

$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \tag{۱ — ۵۹}$$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = 0 \qquad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 = 0 \qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = 0 \tag{۱ — ۶۰}$$



شکل ۱ — ۹ . بسط بردار A برحسب یک مبنای غیرمتعامدیکه $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3\}$

مبناهای مایل

هرمبنای R^n که متعامد نباشد مبنای "مایل" نامیده می‌شود . مثلاً" هر زوج $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2\}$ ازبردارهای غیرمتعامد و مستقل خطی ، درصفحه R^2 یک مبنای‌مایل‌برای R^2 تشکیل می‌دهد . این مبنا متناظرا" یک دستگاه مختصات مایل در R^2 معرفی می‌کند زیرا هر بردار در R^2 را می‌توان به صورت زیر نوشت .

$$\mathbf{A} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 \tag{۱ — ۶۱}$$

که درآن b_1 و b_2 مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ هستندکه درامتدادمحورهای مایل‌اندازه‌گیری شده‌اند . اندازه $\mathbf{A}$ در مختصات مایل برابر است با

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos(\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2) \tag{۱ — ۶۲}$$

به شرط آن‌که $1 = |\mathbf{i}_1|$ و $1 = \mathbf{i}_2$.

تمرین: نشان دهید معادله (۱ ــ ۶۲) قانون کسینوسها برای یک مثلث غیرقائم است.

روش متعامد سازی اشمیت

با مفروض بودن مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n\}$ روش اشمیت ما را قادر می‌سازد که مجموعهٔ دیگری از n برداریکه مستقل خطی مانند $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ بسازیم به‌قسمی که $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = 0$ ، $i \neq j$.

روش اشمیت با این‌گزاره که بردارهای مجموعه $\{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n\}$ مستقل‌خطی‌هستند شروع می‌شود . در این صورت

$$c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + \cdots + c_n\mathbf{i}_n = 0 \qquad (۱ ــ ۶۳)$$

فقط وقتی برقرار است که $c_1 = 0$ و $c_2 = 0$ و $c_n = 0$ درنتیجه $\mathbf{i}_1 \neq 0$ زیرا اگر صفر باشد اعداد $c_1 = 1$ ، $c_2 = 0$ ، $c_3 = 0$ و ...

در معادله (۱ ــ ۶۳) صدق می‌کنند و بنابراین بردارها نامستقل خطی خواهند بود و این با فرض متناقض است . فرض کنید ،

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{i}_1}{|\mathbf{i}_1|}$$

در این صورت

$$|\mathbf{e}_1| = \frac{|\mathbf{i}_1|}{|\mathbf{i}_1|} = 1$$

و $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n\}$ نیز مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است . حال بردار زیر را انتخاب می‌کنیم

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{i}_2 - (\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$$

و توجه داریم که

$$\mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_1 = (\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{e}_1) - (\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{e}_1) = 0$$

بنابراین $\mathbf{e}_2$ بر $\mathbf{e}_1$ عمود است و با نوشتن

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2'}{|\mathbf{e}_2'|}$$

دو بردارمتعامدیکه $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_1$ حاصل‌می‌شود . مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_n\}$ نیزمستقل خطی است . حال بردار $\mathbf{e}_3'$ را به صورت

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{i}_3 - (\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

تعریف می‌کنیم . با محاسبه حاصلضرب داخلی $\mathbf{e}_3'$ با $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ معلوم می‌شود که $\mathbf{e}_3'$ بر دو بردار $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ عمود است . پس بردار

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_3'}{|\mathbf{e}_3'|}$$

برداری به‌طول واحد وبر $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ عموداست . بالاخره مجموعهٔ مستقل‌خطی $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{i}_4,\ldots,\mathbf{i}_n\}$ حاصل می‌شود که در آن

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{i}_1}{|\mathbf{i}_1|} \qquad (۱ ــ ۶۴)$$

و

$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{i}_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_m)\mathbf{e}_k}{\left| \mathbf{i}_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_m)\mathbf{e}_k \right|} \qquad (۱ - ۶۵)$$

for $2 \leq m \leq n$.

۱ ــ ۵. اتحادهای برداری

اتحادهای برداری مهمی وجود دارند که هر دانشجوی فیزیک باید آنها را بشناسد. ما بعضی از آنها را در این بخش معرفی خواهیم کرد. صحت آنها را بررسی کرده سپس به خاطر بسپارید. برای این کار کافی است نشان دهید که به ازای هر دسته از بردارهای تعریف شده تساویها برقرارند.

مثلاً برای تحقیق اینکه $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$
فرض می‌کنیم $\mathbf{A} = (a_1,a_2,a_3)$ و $\mathbf{B} = (b_1,b_2,b_3)$. در این صورت از معادله (۱ ــ ۲۴) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

و

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (b_2a_3 - b_3a_2,\ b_3a_1 - b_1a_3,\ b_1a_2 - b_2a_1)$$

بنابراین $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$. حال با فرض $\mathbf{A} = (a_1,a_2,a_3)$ و $\mathbf{B} = (b_1,b_2,b_3)$ و $\mathbf{C} = (c_1,c_2,c_3)$ و $\mathbf{D} = (d_1,d_2,d_3)$ اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (۱ - ۶۶)$$

که در آن $\mathbf{C} = (c_1,c_2,c_3)$ بخش ۱ ــ ۴ تعریف شدند.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (۱ - ۶۷)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \qquad (۱ - ۶۸)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \qquad (۱ - ۶۹)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} \\ &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{A}\end{aligned} \qquad (۱ - ۷۰)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}\end{aligned} \qquad (۱ - ۷۱)$$

۱ ــ ۶. مسائل و کاربردها

۱ ــ نشان دهید مساحت یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برابر $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ است .

۲ ــ ثابت کنیدکه حجم متوازی‌السطوحی به اضلاع‌قاعده $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ و یال $\mathbf{A}$ برابر $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ است .

۳ ــ نشان‌دهیدکه شرط استقلال خطی‌بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq 0$$

۴ ــ ثابت کنید شرط این که بردارهای $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n\}$ نامستقل باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \cdots & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_n \\ \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 & \cdots & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_2 & \cdots & \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_n \end{vmatrix} = 0$$

۵ ــ نشان دهید که نامساوی کوشی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

از تعریف ضرب اسکالر نتیجه می‌شود .

۶ ــ فرض کنید $\mathbf{A}$ بر فصل مشترک دو صفحه در فضا واقع باشد . اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک صفحه و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{D}$ صفحه دیگر را معین کنند ، معنی هندسی عبارت زیر چیست ؟

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) \qquad \text{و} \qquad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{D})?$$

۷ ــ چهار بردار بر چهار وجه یک چهاروجهی به سمت خارج عمودند . طول این چهار بردار برابر مساحت وجهی است که نشان می‌دهند . ثابت کنید مجموع این بردارها یک بردار صفر است .

۸ ــ ثابت کنید $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$ نمایش صفحه‌ای است که از نقطه $\mathbf{a}$ گذشته و بر بردار $\mathbf{b}$ عمود است .

۹ ــ معادله برداری خطی را پیدا کنیدکه ازنقطه مفروضی گذشته با بردار مفروضی موازی باشد .

۱۰ ــ معادله برداری خطی را پیدا کنید که از دو نقطه مفروض می‌گذرد .

۱۱ ــ معادله برداری خطی را پیدا کنید که از نقطه مفروض گذشته و بر دو بردار مفروض عمود باشد .

جبر ماتریسی و جبر تانسوری

۲ ـ ۱ . تعاریف

ماتریس آرایه‌ای مستطیل شکل از اعداد حقیقی یا مختلط است که به شکل جدولی از سطرها و ستونها مرتب شده باشد .

اعداد تشکیل دهنده یک ماتریس را اعضای آن ماتریس می‌نامند . هر عضو یک ماتریس با دو اندیس مشخص می‌شود ، اندیس اول برای سطر و اندیس دوم برای ستونی است که محل آن عضو را مشخص می‌کند . مثلاً : عضو a_{ij} در سطر i ام و ستون j ام واقع است . تعداد کل اعضای یک ماتریس برابر حاصلضرب تعداد سطرها و ستونهاست . پس یک ماتریس مستطیلی با n سطر و m ستون شامل $n\times m$ عضو است . اگر $n=m$، ماتریس را مربعی گویند در این صورت شامل n^2 عضو خواهد بود .

مثال ۲ ـ ۱ :

(۲ ـ ۱) ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(۲ ـ ۲) ماتریس 2×3،

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 13 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

(۲ ـ ۳) ماتریس $n \times m$،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

نمادگذاری

برای انجام محاسبات مربوط به ماتریسهای $n\times m$ مانند معادله (۲ ـ ۳) اغلب ازنوشتن

آرایهٔ $n\times m$ خودداری می‌شود . معمولاً" ماتریس $n\times m$ ، A رابه‌صورت علامتی زیرنشان می‌دهیم ،

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad (۲-۴)$$

این نماد را با حذف $i = 1,2, \ldots ,n$ ، $j = 1,2, \ldots ,m$ پرانتز (a_{ij}) می‌توان فشرده‌تر کرد . در این صورت می‌نویسیم

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad (۲-۵)$$

باید توجه داشت که علامت a_{ij} درعین حال که برای نشان دادن ماتریس $n\times m$ ، A به‌کار برده می‌شود عضو سطر i ام و ستون j ام را نیز نشان می‌دهد . اگر a_{ij} به‌عنوان عضو خاصی از ماتریس مورداستفاده قرار گیرد i و j مقادیرعددی معینی‌هستند . این مطلب درمورد بردارها نیز صادق است . مثلاً" یک بردار n بعدی مانند

$$\mathbf{A} = (a_1,a_2, \ldots ,a_n) \qquad (۲-۶a)$$

را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{A} = a_i = (a_1,a_2, \ldots ,a_n) \qquad (۲-۶b)$$

در این جا a_i بجای n تایی مرتب که بردار $\mathbf{A}$ را تشکیل می‌دهند نوشته شده است . در عین حال a_i مؤلفهٔ i ام بردار $\mathbf{A}$ را نیز نشان خواهد داد . در این صورت i یک عدد معین است . مثلاً"

$$a_i \qquad i = 1,2,3$$

یک بردارسه بعدی رانشان می‌دهد ، که a_2 مؤلفهٔ دوم آن است . با استفاده ازاین نمادگذاری جمع برداری (۱ ــ ۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$c_i = a_i + b_i \qquad i = 1,2, \ldots ,n \qquad (۲-۷)$$

و مؤلفهٔ دوم بردار مجموع c_i ، عبارت است از

$$c_2 = a_2 + b_2 \qquad (۲-۸)$$

۲ ــ ۲ . برابری ماتریسها و ماتریسهای صفر

دو ماتریس A و B برابرند اگر و فقط اگر اعضای متناظر آنها برابر باشند . پس $A=B$ اگر و فقط اگر به ازای هر i و j ،

$$A_{ij} = B_{ij} \qquad (۲-۹)$$

اگر تمام اعضای یک ماتریس صفر باشد، آن را ماتریس "صفر" یا "پوچ" نامند.

۲ ـ ۳. اعمال ماتریسی

ماتریسها را می‌توان باهم جمع یا ازهم تفریق و یا درهم ضرب کرد. ضرب ماتریسها در اسکالرها نیز مجاز است. اعمال ماتریسی تابع قواعد زیرند:

جمع ماتریسی

جمع یا تفریق دو ماتریس $m \times n$ از جمع یا تفریق اعضای متناظر آنها به‌دست می‌آید.

پس اگر

$$A = a_{ij}$$

$$B = b_{ij} \qquad C = c_{ij}$$

و

$$i = 1,2, \ldots ,n \quad , \quad j = 1,2, \ldots ,m$$

آنگاه

$$C = A \pm B \quad , \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad (۲-۱۰)$$

مثال ۲ ـ ۲:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 9 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \\ 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریسی

اگر λ یک اسکالر باشد، آن‌گاه

$$B = \lambda A \quad , \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

مثال ۲ ـ ۳:

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$$

درمورد یک جفت ماتریس دو نوع حاصلضرب می‌توان تعریف کرد که آنها را حاصلضرب "ماتریسی" و حاصلضرب "مستقیم" می‌گویند.

حاصلضرب ماتریسی

حاصلضرب ماتریسی دو ماتریس A و B فقط و فقط وقتی تعریف می‌شودکه تعدادستونهای

A برابرتعداد سطرهای B باشد . دراین‌صورت می‌نویسیم $C=AB$ وماتریسهای A و B را "متوافق" می‌گوییم . اگر A ماتریس $n\times s$ و B ماتریس $s\times m$ باشد آن‌گاه A و B متوافقند و حاصلضرب ماتریسی آنها $C=AB$ یک ماتریس $n\times m$ است که مطابق قاعده زیر تشکیل می‌شود .

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1,2, \ . \ . \ . \ ,n \text{ and } j = 1,2, \ . \ . \ . \ ,m \tag{۱۲-۲}$$

توجه کنید که حاصلضرب BA حتی ممکن است تعریف نشده باشد زیرا B ماتریس $n\times s$ و A ماتریس $s\times m$ است .پس B و A با ترتیب BA متوافق نیستند اما با ترتیب AB متوافقند . درنتیجه $AB\neq BA$. حتی‌اگر A و B هردو ماتریسهای مربعی وبهرترتیب متوافق باشند بازهم ، درحالت کلی $AB\neq BA$. اگر A و B دارای خاصیت $AB=BA$ باشند . آنها را " تعویضپذیر" گویند .

مثال ۲ ـ ۴:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times 3+2\times 7\\3\times 3+4\times 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\37\end{bmatrix} \tag{۱۳-۲}$$

یعنی حاصلضرب ماتریس 2×2 در ماتریس 2×1 یک ماتریس 2×1 است .

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\7 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times 3+2\times 7 & 1\times 2+2\times 3\\3\times 3+4\times 7 & 3\times 2+4\times 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17 & 8\\37 & 18\end{bmatrix} \tag{۱۴-۲}$$

ولی حاصلضرب یک ماتریس 2×2 در یک ماتریس 2×2 یک ماتریس 2×2 است

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix} \tag{۱۵-۲}$$

تبصره: یک ماتریس $1\times m$ فقط ازیک سطر و m ستون تشکیل می‌شود ودرواقع یک مجموعهٔ مرتب ازاعداداست . پس ماتریس $[a_1,a_2, \ . \ . \ . \ ,a_m]$ را که یک برداراست‌بردار"سطری" گوییم . ازطرف دیگر یک ماتریس ستونی $n\times 1$ فقط از یک ستون و n سطر تشکیل می‌شود و درواقع یک مجموعه مرتب از n عدد است که بجای افقی به صورت قائم مرتب شده است . پس ماتریس

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\a_n\end{bmatrix}$$

نیز یک بردار است و آن را بردار "ستونی" گوییم .

بنابراین سطرهای یک ماتریس را می‌توان به‌عنوان بردارهای سطری و ستونهای آن را به‌عنوان بردارهای ستونی‌درنظرگرفت . مثلا" ضرب‌اسکالر یک بردار سطری $n \times 1$ با یک بردار ستون متوافق $1 \times n$ به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$[a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n b_n \qquad (۱۶-۲)$$

ایده بردارهای سطری و ستونی محاسبه حاصلضرب ماتریسی (۲ – ۱۲) راساده می‌کند . معادله (۲ – ۱۵) را درنظر بگیرید . اولین عضو سطراول ماتریس حاصلضرب برابر حاصلضرب اسکالر $[a_{11} \quad a_{12}]$ در $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix}$ است . پس اولین عضو سطر اول ماتریس حاصلضرب ازضرب داخلی اولین بردار سطری سازه سمت چپ در اولین بردار ستونی سازه سمت راست تشکیل می‌شود . همین‌طوراولین عضو سطردوم ماتریس حاصلضرب برابرحاصلضرب داخلی سطر دوم سازه سمت چپ با اولین بردار ستونی سازه سمت راست است . و الی آخر . هر ستون سازه سمت راست‌در تشکیل یک سطر ماتریس حاصلضرب شرکت می‌کند .

مثال ۲ – ۵:

$$[a_1 \ \cdot \cdot \cdot \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \ \cdot \cdot \cdot \ + a_n b_n \qquad (۱۷-۲)$$

حاصلضرب ماتریس $n \times 1$ درماتریس $1 \times n$ یک ماتریس ۱ × ۱ خواهد بودکه یک اسکالر است . سازه سمت چپ دارای یک سطر است . پس حاصلضرب فقط یک سطر دارد ، و چون سازه سمت راست تنها دارای یک ستون است ، حاصلضرب فقط می‌تواند یک ستون داشته باشد .

یعنی هر سطر حاصلضرب تنها یک عضودارد . پس حاصلضرب یک اسکالرمی‌شود . قاعده رامی‌توان به‌صورت "هرسطر از یک سطر ، و هرستون از یک ستون به‌وجودمی‌آید" خلاصه کرد . حال حاصلضرب ماتریس $1 \times n$ رادر ماتریس $n \times 1$ درنظرمی‌گیریم . حاصلضرب دار ی n سطر و n ستون خواهد بود و درنتیجه یک ماتریس $n \times n$ است .بخصوص .

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۲)$$

حاصلضرب مستقیم

اگر A یک‌ماتریس $n \times n$ و B یک ماتریس $m \times m$ باشد ،آن‌گاه حاصلضرب‌مستقیم A و B را به‌صورت زیر می‌نویسیم .

$$C = A \times B \qquad (۱۹-۲)$$

که در آن C ماتریسی است با nm سطر و nm ستون .

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

چون A و B ماتریسهای 2×2 هستند ، $C = A \times B$ یک ماتریس 4×4 خواهد بود و طبق قاعده زیر محاسبه می‌شود .

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۲)$$

یا

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۲)$$

بدیهی است که حاصلضرب مستقیم درحالت کلی تعویضپذیر نیست زیرا

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} \neq B \times A = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A \\ b_{21}A & b_{22}A \end{bmatrix} \qquad (۲۲-۲)$$

بطورکلی A یک ماتریس $n \times n$ و B یک ماتریس $m \times m$ باشد .

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \qquad (۲۳-۲)$$

یک ماتریس $nm \times nm$ خواهد بود .

افراز ماتریسها

اگر یک ماتریس به زیرماتریسهای کوچکتر تقسیم شود گویند " افراز" شده است . مثلا" یک ماتریس 3×3 را می‌توان به چهار زیرماتریس به شکل

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۴)$$

افراز کرد که در آن

$$b_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad b_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۴a)$$
$$b_{21} = [a_{31} \quad a_{32}] \qquad b_{22} = a_{33}$$

عمل افراز در ساده کردن محاسبه حاصلضرب ماتریسها مفید است ، مثلا" با فرض

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{cc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right] \qquad (۲-۲۵)$$

ماتریس $AC = D$ را محاسبه کنید .ماتریسهای A و C به صورت زیر افراز می‌شوند

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۶)$$

و

$$C = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۷)$$

در این صورت حاصلضرب

$$D = AC = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۸)$$

به صورت زیر محاسبه خواهد شد :

$$D = \begin{bmatrix} b_{11}d_{11} + b_{12}d_{21} & b_{11}d_{12} + b_{12}d_{22} \\ b_{21}d_{11} + b_{22}d_{21} & b_{21}d_{12} + b_{22}d_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۲۹)$$

برای به‌دست آوردن (۲ ــ ۲۹) هر زیرماتریس (۲ ــ ۲۵) را به‌عنوان تنها یک عضو ماتریس درنظر می‌گیریم. نتیجه‌نهایی با استفاده‌از قواعد ضرب و جمع ماتریسها حاصل‌می‌شود .

۲ ــ ۴. دترمینانها

ماتریس $n \times n$

$A = a_{ij},\ i,j = 1,2, \ldots ,n,$

دارای یک دترمینان وابسته است که آن را با هریک از نهادهای زیر نشان می‌دهیم:

$|A|,\ |a_{ij}|,\ \det |A|,\ \text{or}\ \det |a_{ij}|$

پس

$$\det |A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (۲ ــ ۳۰)$$

کهادها و همسازه‌ها

همسازه عضو a_{ij} در دترمینان (۲ ــ ۳۰) برابر است با کهاد علامتدار a_{ij} . کهاد عضو a_{ij} برابر است با $\det |a_{ij}|$ دترمینانی که پس از حذف سطر iام و ستون jام باقی می‌ماند. کهاد علامتدار در این صورت $(-1)^{i+j}$ برابر این کهاد است. کهاد علامتدار یا همسازه a_{ij} را به شکل A^{ij} نشان خواهیم داد.

مثال ۲ ــ ۷:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (۲ ــ ۳۱)$$

کهاد علامتدار یا همسازه a_{11} عبارت است از

$$A^{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

کهاد علامتدار یا همسازه a_{12} برابر است با:

$$A^{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بالاخره کهاد علامتدار یا همسازه a_{13} عبارت است از

$$A^{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

دترمینان را به‌وسیله بسط آن نسبت به همسازه‌هایش محاسبه می‌کنند. این روش به نام بسط لاپلاس" مشهور است و به‌صورت زیر داده می‌شود.

$$\det |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A^{ij} \qquad (۳۲-۲)$$

در استفاده از معادله (۲ ـ ۳۲) اندیس i را به‌عنوان یک مقدار عددی ثابت متناظر با سطر ثابت ماتریس درنظر می‌گیریم . پس معادله (۲ ـ ۳۲) بطوری کاملا" دقیق به‌وسیله بسط $\det |A|$ برحسب همسازه‌های سطرiام ماتریس A توصیف می‌شود که در آن i عددی ثابت بین 1 و n است . مثلا" ، بسط معادله (۲ ـ ۳۲) برحسب همسازه‌های سطراول A به‌صورت زیر خواهد بود .

$$\det |A| = a_{11}A^{11} + a_{12}A^{12} + a_{13}A^{13} \qquad (۳۳-۲)$$

می‌توانید تحقیق کنید که

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A^{kj} = 0 \qquad i \neq k \qquad (۳۴-۲)$$

یعنی اگر اعضای سطرiام $|A|$ را برای بسط لاپلاس به‌کار بریم ولی تمام همسازه‌های اعضای سطر i ام راباهمسازه‌های اعضای سطردیگری ، مثلا" سطر k ام ، عوض کنیم درآن‌صورت مقدار بسط صفر می‌شود . حال می‌توان گفت که $\det |A| = 0$ اگر

۱) تمام اعضای یک سطر صفر باشند .

۲) دو سطر (یا دو ستون) برابر باشند .

۳) اعضای یک سطر (ستون) مضرب ثابتی از سطر (ستون) دیگر باشد .

همچنین می‌توان ثابت کرد که :

۴) اگر دو سطر (یا ستون) را تعویض کنیم علامت مقدار دترمینان عوض می‌شود .

۵) اگر سطرها و ستونهای یک دترمینان تعویض شوند مقدارآن ثابت می‌ماند .

۶) اگر هر عضو یک سطر (ستون) را در عدد ثابتی ضرب کنیم مقدار دترمینان در آن عدد ضرب می‌شود .

رتبه یک ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $\det |A| = 0$ ، A را ماتریس ویژه گویند . اگر A ماتریس مربعی نباشد ، در آن صورت $\det |A|$ تعریف نمی‌شود . پس تمام ماتریسهای غیرمربعی بنابه تعریف ویژه‌اند . تمام افزارهای ماتریس A را به زیرماتریسها درنظر می‌گیریم . زیرماتریسهایی که مربعی هستند دارای زیردترمینان خواهند بود . اگر حداقل یک زیردترمینان $r \times r$ مخالف صفر باشد و تمام زیردترمینانهای دیگر که بیش از r سطر و r ستون دارند صفر شوند ، در آن صورت r را رتبه A گویند . پس اگر A یک ماتریس ویژه $n \times n$ بارتبه r باشد درآن‌صورت $r < n$.

اگر A ناویژه باشد، $r = n$.

۲ ـ ۵ . ماتریسهای خاص

ماتریس واحد

ماتریس واحد I دارای این خاصیت است که به ازای هر ماتریس A، $IA = AI = A$. رابا دلتای کرونکر نشان می‌دهند .

$$I = \delta_{ij} \qquad (۲ - ۳۵)$$

که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (۲ - ۳۶)$$

ماتریسهای قطری

ماتریسی‌که فقط اعضای غیرصفرآن روی قطراصلی قرارداشته باشند ماتریس قطری نامیده می‌شود

$$D = D_i\delta_{ij} \qquad (۲ - ۳۷)$$

ماتریسهای قطری خاصیت تعویضپذیری دارند . پس اگر $D = D_i\delta_{ij}$ و $E = E_i\delta_{ij}$، آن‌گاه

$$DE = \sum_{k=1}^{n} D_k\delta_{ik}E_k\delta_{kj} = D_iE_i\delta_{ij}$$

$$ED = \sum_{k=1}^{n} E_k\delta_{ik}D_k\delta_{kj} = E_iD_i\delta_{ij}$$

درنتیجه $DE = ED$. ماتریسی که به صورت λI نوشته شود که در آن λ یک اسکالر و I ماتریس واحد است یک ماتریس " اسکالر" نامیده می‌شود . اگر دو ماتریس که یکی ازآنهاقطری و غیراسکالر است تعویضپذیر باشند ، آن‌گاه ماتریس دیگر لازم نیست قطری باشد .

اثر یک ماتریس مربعی

اثر یک ماتریس مربعی $n \times n$، $A = a_{ij}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \qquad (۲ - ۳۸)$$

یعنی اثر ماتریس A برابرمجموع اعضای قطراصلی آن است . اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند آن‌گاه

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \mathrm{Tr}\,(BA) \qquad (۲-۳۹)$$

همچنین توجه کنید که از

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود

$$\mathrm{Tr}\,(A \times B) = a_{11}\,\mathrm{Tr}\,(B) + a_{22}\,\mathrm{Tr}\,(B) + \cdots + a_{nn}\,\mathrm{Tr}\,(B)$$

یا

$$\mathrm{Tr}\,(A \times B) = \mathrm{Tr}\,(A) \cdot \mathrm{Tr}\,(B) \qquad (۲-۴۰)$$

ترانهاده یک ماتریس دلخواه

ترانهاده ماتریس $a_{ij} = A$ عبارت است از $A^T = a_{ji}$ که از تعویض سطرها با ستونهای A به‌دست می‌آید. اگر A یک ماتریس $s \times n$ و B یک ماتریس $m \times s$ باشد، آن‌گاه $C = AB$، یک ماتریس $n\times m$ است. ولی، A^T یک ماتریس $n \times s$ و B^T یک ماتریس $s \times m$ خواهد بود. درنتیجه، A^T و B^T فقط به‌صورت B^TA^T متوافقند، وحاصلضرب یک ماتریس $n \times m$ است. این مطلب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

قاعده عکس ترتیب برای حاصلضربهای ماتریسی

ترانهاده یک حاصلضرب ماتریسی برابر حاصلضرب ترانهاده، سازه‌ها به‌عکس ترتیب است.

$$C = AB \qquad C^T = B^TA^T \qquad (۲-۴۱)$$

$$Z = ABCD \cdots Y \qquad Z^T = Y^T \cdots D^TC^TB^TA^T \qquad (۲-۴۲)$$

ماتریس همسازه

اگر $A = a_{ij}$ یک ماتریس مربعی باشد، درآن‌صورت $A^C = A^{ij}$ را ماتریس همسازه گویند. عضو ماتریسی A^{ij} ماتریس A^C برابر همسازه عضو a_{ij} در دترمینان $|a_{ij}|$ است.

مثال ۲ــ۸:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^C = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad (۲-۴۳)$$

الحاقی یک ماتریس مربعی

الحاقی هر ماتریس مربعی به صورت ترانهاده ماتریس همسازه آن تعریف می‌شود و آن را به‌صورت A^{CT} نشان می‌دهند . می‌توان بررسی کرد که

$$A^{CT} = A^{TC} \qquad (۲-۴۴)$$

باتوجه به بسط لاپلاس $\det |A|$ که در بخش ۲ ــ ۴ بحث شد ،

$$\det |A| \, \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A^{kj} \qquad (۲-۴۵)$$

فرض کنید

$$B_{jk} = A^{kj} \qquad (۲-۴۶)$$

در این صورت

$$\det |A| \, \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} B_{jk} = C_{ik} \qquad (۲-۴۷)$$

را به‌عنوان یک حاصلضرب ماتریسی درنظر می‌گیریم . توجه کنید که سطر اول ماتریس $B = B_{jk}$ ستون اول A^{kj} وسطردوم آن ، ستون‌دوم A^{kj} است والی‌آخر . بنابراین $B = B_{jk}$ ترانهاده ماتریس همسازه A^{kj} است ، و می‌توان نوشت

$$B = A^{CT} \qquad (۲-۴۸)$$

پس معادله (۲ ــ ۴۷) را می‌توان چنین نوشت

$$I \det |A| = AB = AA^{CT} \qquad (۲-۴۹)$$

که در آن $I = \delta_{ik}$ ماتریس واحد است . عبارت (۲ ــ ۴۹) ازاهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است زیرا به مفهوم معکوس یک ماتریس مربعی منجر می‌شود .

معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی ناویژه باشد . آن‌گاه $\det |A| \neq 0$ ومعادله (۲ ــ ۴۹) رامی‌توان به‌صورت زیر نوشت .

$$A \left[\frac{A^{CT}}{\det |A|} \right] = I \qquad (۲-۵۰)$$

وقتی حاصلضرب دو سازه واحد است ، معمولا" یکی را "عکس" دیگری گویند .

پس بنابه تعریف ،

$$A^{-1} = \frac{A^{CT}}{|A|} \qquad (۲-۵۱)$$

را به‌عنوان معکوس ماتریس A درنظر می‌گیریم . در این صورت می‌توان نوشت .

$$AA^{-1} = I \tag{۲ – ۵۲}$$

با وجود آن‌که بسط لاپلاس (۲ – ۴۵) مقدار $\det|A|$ را برحسب همسازه‌های سطر i ام می‌دهد ، می‌توان $\det|A|$ را برحسب همسازه‌های ستون i ام نیز بسط داد .

$$\det|A|\,\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A^{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A^{jk} \tag{۲ – ۵۳}$$

با فرض

$$B = b_{ij} = a_{ji} \tag{۲ – ۵۴}$$

آخرین جملهٔ معادله (۲ – ۵۳) رامی‌توان به‌عنوان یک حاصلضرب ماتریسی‌درنظرگرفت .

پس

$$\det|A|\,\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}A^{jk} = C_{ik} \tag{۲ – ۵۵}$$

حال توجه کنید که اولین سطر ماتریس، ستون اول ماتریس $A = a_{ij}$ ، و دومین سطرآن ستون دوم A است و الی آخر .

بنابراین $B = b_{ij}$ ترانهاده ماتریس a_{ij} خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$B = A^{T} \tag{۲ – ۵۶}$$

به این ترتیب معادله (۲ – ۵۵) به‌صورت زیر درمی‌آید .

$$I\det|A| = A^{T}A^{C} \tag{۲ – ۵۷}$$

$$A^{TT} = A \tag{۲ – ۵۸}$$

$$(I\det|A|)^{T} = I\det|A| \tag{۲ – ۵۹}$$

بالاخره

$$I\det|A| = A^{CT}A \tag{۲ – ۶۰}$$

از مقایسه با معادله (۲ – ۴۹) ، نتیجه می‌شود .

$$AA^{CT} = A^{CT}A \tag{۲ – ۶۱}$$

که نشان می‌دهد A با ترانهاده ماتریس همسازه‌هایش تعویضپذیر است . همچنین از معادله (۲ – ۶۰) درصورتی که $|A|$ ناویژه باشد ، نتیجه می‌شود که

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{۲ – ۶۲}$$

قاعده عکس ترتیب در معکوس حاصلضرب ماتریسی

برای دو ماتریس A ، B داریم

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{۲ — ۶۳}$$

و بطورکلی

$$(ABC \cdots Z)^{-1} = (Z^{-1} \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1}) \tag{۲ — ۶۴}$$

زیرا باتوجه به اتحاد

$$BB^{-1}A^{-1}A = I$$

و ضرب آن در A از چپ و در B از راست نتیجه می‌شود ،

$$ABB^{-1}A^{-1}AB = AB$$

بالاخره ، اگر هر دو طرف را در $(AB)^{-1}$ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$ABB^{-1}A^{-1} = I \quad \text{یا} \quad B^{-1}A^{-1}AB = I$$

که هر دو به رابطه زیر منجر می‌شوند .

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

تعمیم ساده این استدلال برای اثبات معادله (۲ — ۶۴) کافی است .

ماتریسهای مختلط

ماتریسهایی که در مسایل فیزیکی پیش می‌آیند اغلب دارای اعضای مختلطند .

مثال ۲ — ۹:

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 4-5i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}$$

مزدوج مختلط ماتریس A را که به $\bar{A}$ نشان می‌دهیم ، به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-3i & 4+5i \\ 3 & -4i \end{bmatrix}$$

در حالت کلی مزدوج مختلط یک ماتریس با این طریق به‌دست می‌آید که به جای هر عضو ماتریس اولیه مزدوج مختلط آن عضو را قرار می‌دهیم . اگر

$$A = a_{ij} \tag{۲ — ۶۵}$$

آن‌گاه

$$\bar{A} = \bar{a}_{ij} \tag{۲ — ۶۶}$$

که در آن $\bar{a}_{12}$ مزدوج مختلط a_{12} را نشان می‌دهد ، و الی آخر . می‌توان نشان داد که اگر

$$X = ABC \cdots W \tag{۲ — ۶۷}$$

آن‌گاه

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cdots \bar{W} \tag{۲ — ۶۸}$$

پس مزدوج مختلط، ترتیب سازه‌های حاصلضرب ماتریسی را عوض نمی‌کند .

ماتریس مزدوج هرمیتی

اگر مزدوج مختلط یک ماتریس را به‌دست آورده ترانهاده آن را محاسبه کنیم ماتریس حاصل را "مزدوج هرمیتی" ماتریس اولیه گویند .

مزدوج هرمیتی A را به A^* نشان می‌دهند و به‌صورت

$$A^* = (\bar{A})^T = (\overline{A^T}) = \bar{A}^T \qquad (۲-۶۹)$$

تعریف می‌کنند . یعنی اگر $A = a_{ij}$ ، آن‌گاه $A^* = \bar{a}_{ji}$. از معادلات (۲ ـ ۶۷) و (۲ ـ ۶۲) نتیجه می‌گیریم که اگر

$$X = ABC \cdots W \qquad (۲-۷۰)$$

آن‌گاه

$$X^* = W^* \cdots C^*B^*A^* \qquad (۲-۷۱)$$

۲ ـ ۶ . دستگاههای معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی زیر را درنظر بگیرید .

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= c_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= c_n
\end{aligned} \qquad (۲-۷۲)$$

اگر $n < m$ ، تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر است و دستگاه "نامعین" خواهد بود اگر $n > m$ تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات است و دستگاه را "فوق معین" گویند .

ما در این جا منحصراً از دستگاههایی بحث خواهیم کرد که تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر باشد $n = m$ ، دراین حالت دستگاه (۲ ـ ۷۲) را "معین" نامند . وقتی دستگاه (۲ ـ ۷۲) معین است ، جواب آن با روشهای ماتریسی به آسانی به‌دست می‌آید فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۲-۷۳)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (۲-۷۴)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \qquad (۲-۷۵)$$

حال مسأله یافتن بردار ستونی X را که در معادله ماتریسی غیرهمگن

$$AX = C \qquad (۲-۷۶)$$

صدق کند بررسی کنید. مسألهٔ همگن متناظرآن عبارت است ازیافتن برداری ستونی مانند X که در شرط

$$AX = 0 \qquad (۲-۷۷)$$

صدق کند، که در آن

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲-۷۸)$$

اگر ماتریس مربع $n \times n$ از رتبه n باشد، آن‌گاه دترمینان آن ناویژه نیست، و جواب معادله (۲ ـ ۷۶) به‌صورت زیر داده می‌شود.

$$X = A^{-1}C = \frac{A^{CT}}{|A|}C \qquad (۲-۷۹)$$

چون

$$A^{CT} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{21} & \cdots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \cdots & A^{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A^{1n} & A^{2n} & \cdots & A^{nn} \end{bmatrix} \qquad (۲-۸۰)$$

مؤلفه i ام بردار ستونی X عبارت است از

$$X_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} c_k A^{ki} \qquad (۲-۸۱)$$

از مقایسه معادلهٔ (۲ ــ ۸۱) با معادلهٔ (۲ ــ ۳۲) نتیجه می‌شود که $\sum_{k=1}^{n} c_k A^{ki}$ بسط $\det |A|$ رابرحسب‌همسازه‌های ستون i اَم نشان‌می‌دهد . هرچند بجای $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ در ستون i ام $\det |A|$ مقادیر $c_1, c_2, \ldots, c_n$ در معادله (۲ ــ ۸۱) گذاشته می‌شود .

معادله (۲ ــ ۸۱) را قاعده "کرامر" گویند .

مثال ۲ ــ ۱۰ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

حال توجه خود را به مسأله همگن (۲ ــ ۷۷) معطوف می‌کنیم . اگر $|A| \neq 0$ آن‌گاه تنها جواب معادله (۲ ــ ۷۷) جواب بدیهی $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ و . . . و $x_n = 0$ است پس شرط لازم برای آن‌که دستگاه همگن (۲ ــ ۷۷) جواب غیربدیهی داشته باشد آن است که $|A| = 0$ (این شرط کافی‌نیست زیرا امکان‌داردکه تمام‌اعضای ماتریس A صفرباشند .) پس ، اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد ، آن‌گاه مسأله همگن (۲ ــ ۷۷) فقط وقتی دارای یک جواب غیرصفر است که رتبه ماتریس A کمتر از n باشد .

این‌نوع‌مسائل به فراوانی درفیزیک بخصوص درمحاسبه مسأله طبیعی‌لرزش پیش می‌آیند .

جواب پارامتری $AX = 0$

جواب مسألهٔ

$$AX = 0 \qquad (۸۲ ــ ۲)$$

$$|A| = 0 \qquad (۸۳ ــ ۲)$$

را با استفاده از نماد ماتریس می‌توان به‌آسانی به‌دست آورد . فرض کنید .

$$X = A^{CT}Y \qquad (۸۴ ــ ۲)$$

که در آن Y یک بردار ستونی n بعدی دلخواه است . در این صورت

$$AX = AA^{CT}Y \qquad (۸۵ ــ ۲)$$

اما از معادله (۲ ــ ۸۳) و (۲ ــ ۴۹) نتیجه می‌شود $AA^{CT} = 0$، درنتیجه

$$AX = AA^{CT}Y = 0 \qquad (۸۶ ــ ۲)$$

واین ثابت می‌کندکه معادله (۲ ــ ۸۴) یک جواب (۲ ــ ۸۲) و (۲ ــ ۸۳) است . بردارستونی Y در معادله (۲ ــ ۸۴) جواب را پارامتر می‌کند . بردار Y را به‌صورت

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۸۷ — ۲}$$

انتخاب می‌کنیم ، یعنی فقط یک مؤلفه آن مخالف صفر است . دراین صورت معادله (۲ — ۸۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{21} & \cdots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & \cdots & A^{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A^{1n} & A^{2n} & \cdots & A^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۸۸ — ۲}$$

درنتیجه

$$x_1 = A^{11}Y_1,\ x_2 = A^{12}Y_1,\ \ldots,\ x_n = A^{1n}Y_1 \tag{۸۹ — ۲}$$

حال می‌توان پارامتر Y_1 را حذف کرد . نتیجه عبارت است از

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{A^{11}}{A^{1n}},\ \frac{x_2}{x_n} = \frac{A^{12}}{A^{1n}},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{A^{1n-1}}{A^{1n}} \tag{۹۰ — ۲}$$

پس مؤلفهٔ x_n که در مخرج ظاهر می‌شود باید مخالف صفر باشد .
و بنابراین $A^{1n} \neq 0$. اگر $x_n = 0$ ، کافی است یک مؤلفهٔ دیگر X ، مثلاً x_k را به‌کار بریم ،

$$\frac{x_1}{x_k} = \frac{A^{11}}{A^{1k}} \qquad \frac{x_2}{x_k} = \frac{A^{12}}{A^{1k}}$$

و به‌همین ترتیب الی آخر . اگر پیدا کردن $x_k \neq 0$ به ازای هر k بین 1 و n ، غیرممکن باشد ، درآن صورت تمام همسازه‌های A^{ij} باید صفر باشند ، و مسأله همگن [معادلات (۲ — ۸۲) و (۲ — ۸۳)] فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ و $\cdots$ $x_n = 0$ است .

معادلهٔ (۲ — ۹۰) به این‌معنی است‌که وقتی مسأله همگن (۲ — ۸۲) و (۲ — ۸۳) دارای یک جواب غیربدیهی X است . فقط نسبت مؤلفه‌های این بردار ثابتند . پس، اندازه یکی از مؤلفه‌های X را می‌توان بطور دلخواه انتخاب کرد و سایر مؤلفه‌ها بلافاصله برحسب‌آن بوسیله (۲ — ۹۰) معین می‌شوند . و با شرطی مانند $X^TX = 1$ ،این آخرین‌درجه آزادی رانیزمی‌توان حذف کرد به‌قسمی که جواب غیربدیهی $AX = 0 \qquad |A| = 0$

که در شرط اضافی $X^TX = 1$ صدق کند منحصر بفرد شود .

تبصره: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ناویژه باشد. درمورد $|A^{CT}|$ چه می‌توان گفت؟ برای جواب به این سؤال لازم است ضرب دو ماتریس را بدانیم. ضرب دترمینانها برحسب دترمینان حاصلضرب ماتریسهای وابسته قابل بیان است. پس فرض کنید $|A|$ و $|B|$ دترمینانهای وابسته به ماتریسهای مربع A و B باشند. قاعده: $|A|\,|B| = |AB|$

دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر حاصلضرب دترمینانهاست. (تحقیق کنید) حال باتوجه به معادله (۲ ــ ۴۹)،

$$I|A| = AA^{CT} \tag{۹۱ ــ ۲}$$

دقت کنید که سمت چپ معادله (۲ ــ ۹۱) یک ماتریس $n \times n$ است که اعضای قطری آن $|A|$ است. بنابراین $\det |I|A|| = |A|^n$ و داریم.

$$|A|^n = |I|A|| = |AA^{CT}| = |A|\,|A^{CT}| \tag{۹۲ ــ ۲}$$

درنتیجه

$$|A^{CT}| = |A|^{n-1} \tag{۹۳ ــ ۲}$$

۲ ــ ۷. عملگرهای خطی

اگر ماتریس $n \times n$، A بر بردار ستون $n \times 1$، X عمل کند حاصل یک بردارستون جدید $n \times 1$ است: $Y = AX$. اگر k یک اسکالر و X و Z هر دو بردارهای ستون $n \times 1$ باشد، آن‌گاه ضرب ماتریسی دارای خواص زیر است.

$$\begin{aligned} A(kX) &= k(AX) \\ A(X+Z) &= AX + AZ \end{aligned} \tag{۹۴ ــ ۲}$$

به‌علت این‌که A از بردار "قدیمی" X یک بردار "جدید" Y می‌سازدآن راعملگر گویند. خواصی که در معادلات (۲ ــ ۹۴) بیان شد A را به‌عنوان یک عملگر خطی معرفی می‌کند.

تعبیر هندسی

اثر ماتریس A بر بردار X تغییرامتداد واندازهٔ آن‌است. پس بردار $Y = AX$ به‌امتدادی غیرازامتداد X اشاره دارد وطولش برابرطول X نیست. دربحث قبل فرض کردیم‌که مؤلفه‌های X و Y با تصاویرشان درامتداد محورهای مختصات دکارتی قائم معین شوند.

تبدیلات متشابه

فرض کنید سه نقطه ثابت و متمایز O, P_1, P_2 در یک فضای سه بعدی قرار دارند. شکل (۲ ــ ۱) برداری که نقطه O را به P_1 وصل می‌کند $\mathbf{OP}_1$ می‌نامیم، و برداری که نقطه O را به

P_2 وصل می‌کند به OP_2 نشان می‌دهیم . حال مجموعه‌ای ازمختصات دکارتی سه بعدی به مبدأ O درنظرمی‌گیریم و آن را چارچوب I می‌نامیم . دو چارچوب I داریم $X= OP_1$ و $Y=OP_2$ فرض کنید یک عملگر A نیز به این چارچوب وابسته باشد به قسمی که بردار X را به بردار Y درهمین چارچوب طبق معادله زیر تبدیل کند .

$$Y = AX \tag{۲-۹۵}$$

فرض کنید چارچوب I دوران کند و به وضع جدیدی درآید درحالی که مبدأ و مختصات در همان نقطه O و نقاط P_1 و P_2 در فضا ثابت بمانند . چارچوب I رادر وضع جدید چارچوب II می‌نامیم . توجه کنید که بردارهای OP_1 ، OP_2 در این عمل بدون تغییر باقی می‌مانند . زیرا نقاط O ، P_1 ، P_2 در فضا ثابتند با وجود این تصاویر OP_1 و OP_2 بر محورهای مختصات چارچوب II مقادیرعددی متفاوتی خواهندداشت .درچارچوب II می‌نویسیم $OP_1=X$ و $OP_2=Y'$. حال می‌خواهیم یک عملگر A' وابسته به چارچوب II پیدا کنیم که بردار X' را به بردار Y' و در چارچوب II طبق معادله زیر تبدیل کند .

$$Y' = A'X' \tag{۲-۹۶}$$

عملگر A' در چارچوب II رامتشابه عملگر A درچارچوب I گویند . پس A' بردار OP_1 در چارچوب II را به OP_2 در چارچوب II تبدیل می‌کند حال آن‌که A همین عمل را در چارچوب I انجام می‌دهد . برای‌محاسبه عملگر A' لازم‌است رابطه بین‌مؤلفه‌های OP_1 ، OP_2 درچارچوب I و II معلوم‌باشند . این اطلاعات رابا تبدیل مختصات بوسیله یک‌ماتریس ناویژه S داده می‌شود . پس

$$X = SX' \tag{۲-۹۷}$$

$$Y = SY' \tag{۲-۹۸}$$

و

$$Y = AX \tag{۲-۹۹}$$

به صورت زیر نشان داده می‌شود .

$$SY' = ASX' \tag{۲-۱۰۰}$$

چون بنابه فرض $|S| \neq 0$ ، S^{-1} وجود دارد و می‌توان نوشت

$$Y' = S^{-1}ASX' \tag{۲-۱۰۱}$$

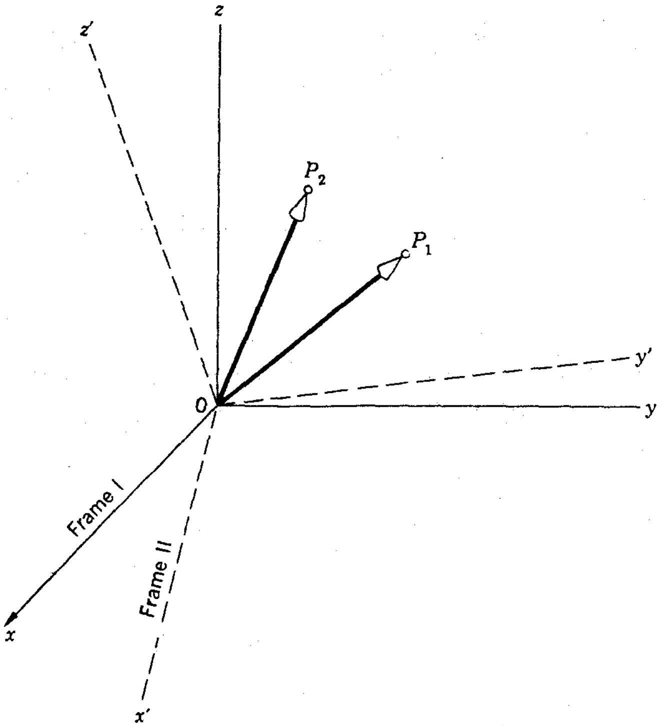
با فرض

$$Y' = A'X' \tag{۲-۱۰۲}$$

داریم

$$A' = S^{-1}AS$$

ماتریسهای متشابه A' و A بوسیله معادله (۲ ــ ۱۰۲) به‌هم مرتبطند ، که‌آن رایک تبدیل



شکل ۲ ــ ۱ . بردارهای OP_1 و OP_2 درفضا ثابتند ، ولی برمحورهای مختصات چارچوبهای I و II تصاویر متفاوتی دارند .

تشابه نامند . توجه کنید که :

$$\det|A'| = \det|S^{-1}AS| = \det|SS^{-1}|\det|A| = \det|A| \qquad (۲-۱۰۳)$$

و

$$\mathrm{Tr}\,(A') = \mathrm{Tr}\,(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}\,(SS^{-1}A) = \mathrm{Tr}\,(A) \qquad (۲-۱۰۴)$$

در این جا ، از معادله (۲ ــ ۳۹) برای به‌دست آوردن (۲ ــ ۱۰۴) استفاده می‌کنیم .
در این صورت اگر A' و A ماتریسهای مشابه باشند ، $|A'| = |A|$ و $\mathrm{Tr}\,(A') = \mathrm{Tr}\,(A)$

عملگرهای واحددار

عملگرهای ماتریسی که اندازه یک بردار را تغییر نمی‌دهند عملگرهای "واحددار" نامیده می‌شوند پس اگر

$$Y = AX$$

مربع اندازه Y عبارت است از

$$|Y|^2 = Y^*Y$$

که درآن Y^* مزدوج هرمیتی Y است . با استفاده از معادله (۲ ــ ۷۱) ، شرط $|Y|^2 = |X|^2$ ایجاب می‌کند که

$$A^*A = I \qquad (۱۰۵ - ۲)$$

$$A^{-1} = A^* \qquad (۱۰۶ - ۲)$$

ماتریسهایی که در معادله (۲ ــ ۱۰۶) صدق می‌کنند واحد دارند .

عملگرهای متقامد

یک عملگر ماتریسی که اعضای ماتریس‌آن حقیقی هستند واندازه یک بردار با مؤلفه‌های حقیقی را تغییر نمی‌دهد "متقامد" نامیده می‌شود . پس، اگر

$$Y = AX$$

آن‌گاه

$$|Y|^2 = Y^TY$$

و با استفاده از معادله (۲ ــ ۴۲)

$$Y^T = X^TA^T$$

بنابراین

$$|Y|^2 = Y^TY = X^TA^TAX$$

شرط $|X|^2 = |Y|^2$ ایجاب می‌کند که

$$A^TA = I \qquad (۱۰۷ - ۲)$$

$$A^{-1} = A^T \qquad (۱۰۸ - ۲)$$

ماتریسهایی که در معادله (۲ ــ ۱۰۸) صدق می‌کنند متقامدند .

تبصره: تبدیل تشابه (۲ــ ۱۰۲) که درآن ماتریس S واحداراست راتبدیل "واحددار" نامند . اگر A یک ماتریس حقیقی و S یک ماتریس متقامد باشد ، آن‌گاه معادله (۲ ــ ۱۰۲) را یک تبدیل "متقامد" نامند .

$$A = A^* \qquad (۱۰۹ - ۲)$$

عملگرهای هرمیتی

یک عملگر را "هرمیتی" (یاخودالحاق) گوییم اگر A دارای اعضای حقیقی باشد ، معادله (۲ ــ ۱۰۹) به‌صورت زیر درمی‌آید .

$$A = A^T \qquad (۱۱۰ - ۲)$$

اگر عملگر A هرمیتی و واحددار باشد ، آن‌گاه

$$A = A^* = A^{-1} \qquad (۲-۱۱۱)$$

که برای عملگرهای متقامد حقیقی به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$A = A^T = A^{-1} \qquad (۲-۱۱۲)$$

پس ماتریسهای وابسته به عملگرهای متقامد خودالحاق متقارن هستند .

تبصره : عملگرهای واحددار هرمیتی و عملگرهای متقامد متقارن باید درشرط صدق کنند .

پس $\quad A = A^{-1}$ یا $A^2 = I$

$|A|^2 = 1$ و $|A| = \pm 1$

اگر $|A| = +1$، عملگر A متناظر با یک دوران است . اگر $|A| = -1$، A متناظر با یک دوران و یک انعکاس است (یا بالعکس) یا متناظر با یک انعکاس است .

۲ ـ ۸ . مسائل مقدار ویژه

دیدیم که یک ماتریس معمولا" وقتی بر یک بردار ستون عمل می‌کند اندازه و امتداد آن را تغییر می‌دهد . باوجود این ، بردارهای وابسته به یک ماتریس وجود دارند که فقط اندازه آنها بوسیله ماتریس تغییر می‌کند ولی امتداد آنها ثابت می‌ماند . این بردارها را "بردارهای ویژه" یا "بردارهای مشخصه" ماتریس گویند . این بردارها جوابهای مسأله مقدار ویژه زیرند ،

$$Ax = \lambda x \qquad (۲-۱۱۳)$$

عدد مختلط λ را "مقدار ویژه" وابسته به بردار ویژه x گویند . فرض کنید

$$y = Ax = \lambda x \qquad (۲-۱۱۴)$$

درآن صورت ،

$$y^*y = x^*\lambda^*\lambda x = (\lambda\lambda^*)(x^*x) \qquad (۲-۱۱۵)$$

و چون

$$y^*y = |y|^2 \qquad x^*x = |x|^2 \qquad \text{and} \qquad \lambda^*\lambda = |\lambda|^2$$

نتیجه می‌گیریم ،

$$|y|^2 = |Ax|^2 = |\lambda|^2|x|^2 \qquad (۲-۱۱۶)$$

بنابراین ، اندازه $|\lambda|$ مقدار انقباض یا انبساط x را پس از عمل A معین می‌کند . توجه کنید که اگر

$$\lambda = a + ib \qquad (۲-۱۱۷)$$

آن‌گاه

$$|\lambda| = +(a^2 + b^2)^{1/2} \qquad (۲-۱۱۸)$$

یک عدد حقیقی مثبت است .

هرمسأله مقدار ویژه ازدو قسمت تشکیل می‌شود . قسمت اول محاسبهٔ مقادیر ویژه مربوط به A و قسمت دوم محاسبه یک بردار ویژه x برای هر مقدار ویژه‌ای است که قبلاً" به‌دست‌آمده است . اگر معادله (۲ ــ ۱۳) را به صورت

$$Ax = \lambda I x \qquad (۲-۱۱۹)$$

بنویسیم مسأله مقدار ویژه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad (۲-۱۲۰)$$

باتوجه به بحث بخش ۲ ــ ۶ ، برای آن‌که این‌معادله دارای جواب‌غیربدیهی باشدشرط

$$\det |A - \lambda I| = 0 \qquad (۲-۱۲۱)$$

لازم است . معادله (۲ ــ ۱۲۱) را معادله مقدار ویژه یا معادله مقدار مشخصه وابسته به مساله مقدار ویژه (۲ ــ ۱۲۰) گویند .

مثال ۲ ــ ۱۱ :

$$\det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲-۱۲۲)$$

معادله مقدار ویژه وابسته به ماتریس $n \times n$ ، $A = a_{ij}$ است . با استفاده از اندیسها دترمینان (۲ ــ ۱۲۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت .

$$\det |A - \lambda I| = \det |a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \qquad (۲-۱۲۳)$$

معادله (۲ ــ ۱۲۲) را پس از بسط دترمینان (۲ ــ ۱۲۲) می‌توان چنین نوشت

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad (۲-۱۲۴)$$

که در آن هریک از a_1، . . . ، a_n تابعی از اعضای a_{11}، . . . ، a_{ij} ماتریس A است n ریشه مختلط معادله (۲ ــ ۱۲۴) ، λ_1، . . . ، λ_n، مقادیر ویژه ماتریس A هستند . این مقادیر ویژه ممکن است متمایز نباشند ، ولازم‌است به‌خاطر داشته باشیم‌که مقادیر ویژه مختلط ممکن است حقیقی محض یا موهومی محض نیز باشند مجموعه n مقدار ویژه عملگر A را ممکن است متمایز نباشند ، "طیف" A نامند . معادله مقدار ویژه (۲ ــ ۱۲۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0 \qquad (۲-۱۲۵)$$

از بسط معادله (۲ ــ ۱۲۵) و مقایسه آن با معادله (۲ ــ ۱۲۴) نتیجه می‌شود

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \qquad (۲-۱۲۶)$$

$$a_2 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n) \qquad (۲-۱۲۷)$$

$$a_3 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n) \qquad (۲-۱۲۸)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n \qquad (۲-۱۲۹)$$

اثر یک تبدیل تشابه روی طیف یک عملگر

فرض کنید A و A' به وسیله تبدیل تشابه زیر به‌هم مربوط باشد.

$$A' = S^{-1}AS \qquad (۲-۱۳۰)$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$A = SA'S^{-1} \qquad (۲-۱۳۱)$$

و

$$A - \lambda I = SA'S^{-1} - \lambda I = S(A' - \lambda I)S^{-1} \qquad (۲-۱۳۲)$$

درنتیجه

$$\det|A - \lambda I| = \det|S(A' - \lambda I)S^{-1}| = \det|SS^{-1}| \det|A' - \lambda I|$$

پس

$$\det|A - \lambda I| = \det|A' - \lambda I| \qquad (۲-۱۳۳)$$

ازمعادله (۲ ــ ۱۳۳) نتیجه می‌شودکه اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، یک مقدار ویژه A' نیز خواهد بود (و بالعکس). پس A و A' دارای مقادیر ویژهٔ یکسانند. وقتی می‌گوئیم طیف یا عملگر تحت یک تبدیل تشابه پایاست
منظور همین است.

تبصره: فرض کنید A' ماتریس قطری زیر باشد.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$\det|A' - \lambda I| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = 0$$

و مقادیر ویژه A' دقیقاً" همان اعضایی هستند که روی قطر اصلی A' ظاهر می‌شوند.

اگر ماتریس A قطری نباشد ولی با یک تبدیل تشابه به A' مربوط باشد

$$A' = S^{-1}AS$$

آن‌گاه‌مقادیر ویژه A برابرمقادیر ویژه A'، یعنی λ_1، . . .، λ_nهستند. ازطرف‌دیگر λ_1، . . .، λ_n،

ریشه‌های معادلهٔ (۲ ــ ۱۲۴) نیزهستند . پس ، باتوجه به (۲ ــ ۱۰۳) ، (۲ ــ ۱۰۴) معادلات (۲ ــ ۱۲۶) و (۲ ــ ۱۲۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$a_1 = -\mathrm{Tr}\,(A) \qquad (۱۳۴-۲)$$

و

$$a_n = (-1)^n \det |A| \qquad (۱۳۵-۲)$$

۲ ــ ۹ . قطری کردن ماتریسها

حال به مسأله یافتن یک ماتریس ناویژه S که ماتریس مفروض A را تحت تبدیل تشابه ، به ماتریس قطری تبدیل کند می‌پردازیم ،

$$A' = S^{-1}AS \qquad (۱۳۶-۲)$$

از جنبه نظری این مسأله برای هر ماتریس A که در شرط زیر صدق کند می‌توان حل‌کرد .

$$A^*A = AA^* \qquad (۱۳۷-۲)$$

بخصوص اگر $A = A^*$ یا $A^{-1} = A^*$ ، آن‌گاه ، A در معادله (۲ ــ ۱۳۷) صدق می‌کند . بنابراین ، ماتریسهای هرمیتی و واحددار را همواره می‌توان با یک تبدیل تشابه قطری کرد .

حالت ۱ : مقادیر ویژه A همه با هم متفاوتند . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که درمعادله (۲ ــ ۱۳۷) صدق می‌کند، وتمام مقدار ویژه آن $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ باهم متفاوتند . ثابت خواهیم‌کردکه ماتریس قطری کنندهٔ S درمعادله (۲ ــ ۱۳۶) دقیقا" ماتریس است‌که بردارهای ستون آن بردارهای ویژه A هستند . و ثابت خواهیم کرد که اعضای قطری A' دقیقا" مقادیر ویژه A خواهند بود . فرض کنید .

$$A' = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} \qquad (۱۳۸-۲)$$

و

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nk} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۱۳۹-۲)$$

اگر معادله (۲ ــ ۱۳۸) را بطور کامل بنویسیم داریم :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} & \cdots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nk} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k} & \cdots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nk} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} \qquad (۱۴۰-۲)$$

توجه کنید که حاصلضرب A در بردار ستون k ام ماتریس سمت چپ (۲ ــ ۱۴۰) برابر حاصلضرب S در بردار ستون k ام سمت راست (۲ ــ ۱۴۰) است . به‌عبارت دیگر. (۲ــ۱۴۱)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1k} \\ s_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_k s_{1k} \\ \mu_k s_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_k s_{nk} \end{bmatrix} = \mu_k \begin{bmatrix} s_{1k} \\ s_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{nk} \end{bmatrix} \qquad (۱۴۱-۲)$$

اگر بردار ستون k ام S را به $\mathbf{s}_k$ نشان دهیم ، آن‌گاه ماتریس (۲ ــ ۱۴۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$A\mathbf{s}_k = \mu_k \mathbf{s}_k \qquad (۱۴۲-۲)$$

و این معادل است با

$$\{A - \mu_k I\}\mathbf{s}_k = 0 \qquad (۱۴۳-۲)$$

بنابراین برای آن‌که دستگاه همگن خطی (۲ ــ ۱۴۳) دارای جواب غیربدیهی باشد ، لازم است μ_k در معادله اسکالر

$$|A - \mu I| = 0 \qquad (۱۴۴-۲)$$

صدق کند پس μ_k ها n مقدار ویژه متمایز λ_1، . . . ،λ_n ماتریس A خواهند بود ، وآنها را می‌توان به‌قسمی اندیس‌گذاری کرد که داشته باشیم

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_k = \mu_k,\ \ldots,\ \lambda_n = \mu_n$$

برای محاسبه n بردار ویژه $\mathbf{s}_1$، $\mathbf{s}_2$، . . . ، $\mathbf{s}_n$ فرض کنید

$$B_k = \{A - \lambda_k I\} \qquad (۱۴۵-۲)$$

در این صورت ، k این بردار ویژه (ستون) جواب غیربدیهی دستگاه همگن

$$B_k\mathbf{s}_k = 0 \qquad (۱۴۶-۲)$$

است . این جواب را می‌توان به‌طور صریح با روشی که در معادلات (۲ــ۸۲) تا (۲ــ۹۰) معرفی کردیم ، به‌دست آورد .

$$\mathbf{s}_k = B_k{}^{CT}Y_k \qquad k = 1,2, \ . \ . \ . \ ,n \qquad (۱۴۷-۲)$$

که درآن Y_k بردارستون پارامتری‌دلخواه است و $B_k{}^{CT}$ ترانهاده ماتریس همسازه B_k است . فرمول (۲ ــ ۱۲۷) تمام n بردار ستون سازنده S را می‌دهد . حال باید نشان دهیم‌که S^{-1} وجود دارد . فرض کنید S^{-1} وجود نداشته باشد . در این صورت S ویژه است و $|S| = 0$ و درنتیجه ، بردارهای $\mathbf{s}_k$ در S باید وابسته خطی باشند . واعدادی ثابت‌مانند c_1، c_2، . . . ، c_n که همه صفر نیستند وجود دارند به قسمی که

$$c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \cdots + c_n\mathbf{s}_n = 0 \qquad (۱۴۸-۲)$$

فرض‌کنید اولین k مقدار c صفر نباشند ، درآن صورت می‌توان نوشت

$$c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \cdots + c_k\mathbf{s}_k = 0 \qquad k \leq n \qquad (۱۴۹-۲)$$

که هیچ یک از c ها یا $\mathbf{s}_k$ درمعادله (۲ ــ ۱۴۹) صفر نیست . ازمعادله مقادیرخاص (۲ــ۱۴۲) نتیجه می‌شود .

$$A^q\mathbf{s}_r = \lambda_r{}^q\mathbf{s}_r \qquad q = 1,2, \ . \ . \ .$$

حال اگر معادله (۲ ــ ۱۴۹) را متوالیا" $k - 1$ بار در A ضرب کنیم . نتیجه به‌صورت دستگاه زیر نوشته می‌شود .

$$\begin{aligned} &c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \cdots + c_k\mathbf{s}_k = 0 \\ &c_1\lambda_1\mathbf{s}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{s}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{s}_k = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_1\lambda_1{}^{k-1}\mathbf{s}_1 + c_2\lambda_2{}^{k-1}\mathbf{s}_2 + \cdots + c_k\lambda_k{}^{k-1}\mathbf{s}_k = 0 \end{aligned} \qquad (۱۵۰-۲)$$

چون هیچ یک از c ها یا $\mathbf{s}_r$ ها صفر نیست دستگاه (۲ ــ ۱۵۰) فقط‌وقتی دارای جواب است که داشته باشیم .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 & \cdots & \lambda_k{}^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \lambda_1{}^{k-1} & \lambda_2{}^{k-1} & \cdots & \lambda_k{}^{k-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (۱۵۱-۲)$$

دترمینان (۲ ــ ۱۵۱) را "واندرموند" نامند و مقدارش برابر است و

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdot & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdot & \lambda_k^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad (۱۵۲ - ۲)$$

$$= (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k-2}) \cdots (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})(\lambda_{k-1} - \lambda_{k-3}) \cdots (\lambda_2 - \lambda_1)$$

که اگر λ ها همه متفاوت باشد هرگز صفر نمی‌شود، بنابراین $|S|$ نمی‌تواند صفر شود و S^{-1} وجود دارد. پس ثابت می‌شود که هر ماتریس A که مقادیر ویژه‌اش همه متمایز باشند همواره با یک تبدیل تشابه قطری می‌شود. ضمناً" بردارهای ستون ماتریس S بردارهای ویژه A هستند. اعضای قطری $A' = S^{-1}AS$ دقیقاً" مقادیر ویژه A هستند.

حالت ۲: ماتریسهای با مقادیر ویژهٔ تکراری

اگرمقادیر ویژه یک‌ماتریس همه متفاوت‌نباشند درآن‌صورت‌قطری‌کردن ماتریس امکان‌پذیر نیست. باوجود این یک شرط کافی برای قطری شدن ماتریس A در (۲ ــ ۱۳۷) داده می‌شود. معادله (۲ ــ ۱۳۷) بیان می‌کند، هر ماتریسی که باماتریس الحاقی هرمیتی خودتعویض‌پذیری باشد می‌توان قطری کرد. بخصوص، ماتریسهای هرمیتی و واحددار را صرفنظر ازاین‌که مقادیر ویژه آنها متفاوت باشند یا نباشند می‌توان قطری کرد.

دراین‌جا نیز ماتریس S که A راقطری می‌کنداز n بردار ویژه مستقل A به‌عنوان‌بردارهای ستون S ساخته می‌شود. مسأله عبارت است از پیدا کردن n بردار ویژهٔ مستقل وقتی n مقدار ویژه A متفاوت نیستند. مثلاً" فرض کنید $\lambda_p = \lambda$ را با گزارهٔ زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{A - \lambda_p I\}^{k-1} s_p^{(k)} \neq 0 \qquad (۱۵۳ - ۲)$$

و

$$\{A - \lambda_p I\}^{k} s_p^{(k)} = 0 \qquad (۱۵۴ - ۲)$$

حال $k - 1$ بردار زیر را درنظر بگیرید

$$s_p^{(1)} = \{A - \lambda_p I\}^{k-1} s_p^{(k)} \qquad (۱۵۵ - ۲)$$

$$s_p^{(2)} = \{A - \lambda_p I\}^{k-2} s_p^{(k)} \qquad (۱۵۶ - ۲)$$

$$s_p^{(k-1)} = \{A - \lambda_p I\} s_p^{(k)} \qquad (۱۵۷ - ۲)$$

یا بطورکلی

$$s_p^{(j)} = \{A - \lambda_p I\}^{k-j} s_p^{(k)} \qquad j = 1,2, \ldots ,(k-1) \qquad (۱۵۸ - ۲)$$

نشان‌خواهیم دادکه بردار $s_p^{(j)}$ یک بردار ویژه تعمیم‌یافته‌از رتبه j متناظر با $\lambda = \lambda_p$ است . برای اثبات ، توجه کنید که

$$\{A - \lambda_p I\}^{j-1} s_p^{(j)} = \{A - \lambda_p I\}^{j-1}\{A - \lambda_p I\}^{k-j} s_p^{(k)} \qquad (۲-۱۵۹)$$

بنابراین

$$\{A - \lambda_p I\}^{j-1} s_p^{(j)} = \{A - \lambda_p I\}^{k-1} s_p^{(k)} \neq 0 \qquad (۲-۱۶۰)$$

درحالی که

$$\{A - \lambda_p I\}^{j} s_p^{(j)} = \{A - \lambda_p I\}^{k} s_p^{(k)} = 0 \qquad (۲-۱۶۱)$$

این‌ثابت‌می‌کندکه $s_p^{(j)}$ یک‌بردار ویژه تعمیم‌یافته رتبه j است . علاوه براین‌بردارهای ویژه تعمیم‌یافته با رتبه‌های متفاوت بایدمستقل خطی باشند . برای اثبات این مطلب‌مجموعهٔ k بردار ویژه تعمیم یافته زیر را درنظر بگیرید .

$$\{s_p^{(1)}, s_p^{(2)}, \ldots , s_p^{(k)}\} \qquad (۲-۱۶۲)$$

به‌آسانی دیده می‌شود که هیچ یک از $s_p^{(j)}$ ها را نمی‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از s_p های ماقبل نوشت ، درغیراین صورت‌اعدادی‌مانند c_1، c_2، . . . ، c_{j-1} وجود دارند که همه صفر نیستند . و

$$s_p^{(j)} = c_1 s_p^{(j-1)} + c_2 s_p^{(j-2)} + \cdots + c_{j-1} s_p^{(1)} \qquad (۲-۱۶۳)$$

اگر معادله (۲ ـ ۱۶۳) را در $\{A - \lambda_p I\}^{j-1}$ ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$\{A - \lambda_p I\}^{j-1} s_p^{(j)} = 0 \qquad (۲-۱۶۴)$$

که‌با(۲ ـ ۱۶۰)متناقض‌است .درنتیجه $\{s_p^{(1)}, s_p^{(2)}, \ldots , s_p^{(k)}\}$ یک‌مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهاست؛ در غیر این صورت اعدادی مانند c_1، . . . ، c_k وجود دارندکه همه صفرنیستند به قسمی که

$$c_1 s_p^{(1)} + c_2 s_p^{(2)} + \cdots + c_k s_p^{(k)} = 0 \qquad (۲-۱۶۵)$$

دراین‌صورت بزرگترین عددصحیح j وجود داردکه $c_j \neq 0$ درنتیجه می‌توان (۲ـ ۱۶۵) را نسبت به $s_p^{(j)}$ حل کرد وآن را به‌صورت ترکیبی از s_p های ماقبل نوشت و این با نتیجه قبل که بیان می‌کرد ، $s_p^{(j)}$ را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی از s_p های ماقبل نوشت متناقض است .

این تناقض نشان می‌دهد که $s_p^{(j)}$ را نمی‌توان برحسب s_p های قبل به‌صورت یک ترکیب خطی بیان کرد ، درنتیجه ، (۲ ـ ۱۶۵) فقط وقتی برقراراست که تمام c ها صفرباشد . و این ثابت می‌کند که s_p ها بطور خطی مستقلند .

مثال ۲ ـ ۱۲ : ماتریس زیر را درنظر بگیرید .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۶۶)$$

معادله مقدار ویژه عبارت است از

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲-۱۶۷)$$

یا

$$|A - \lambda I| = -1(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16) = -1(\lambda - 2)^2(\lambda - 4) = 0 \qquad (۲-۱۶۸)$$

پس، $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ یک‌مقدار ویژه مضاعف، و $\lambda_3 = 4$ یک‌مقدار ویژه ساده‌است. چون $A = A^*$، ماتریس A هرمیتی است. بنابراین A در معادله (۲ — ۱۳۷) صدق می‌کند و آن را می‌توان قطری کرد. لذا داریم.

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۶۹)$$

$$(A - 2I)^2 = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۷۰)$$

$$(A - 4I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۷۱)$$

حال‌فرض کنیدبخواهیم‌بردار ویژه تعمیم‌یافته رتبه۲مربوط به‌ریشهٔ مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ را بسازیم. اگر $s_1^{(2)}$ این بردار ستون باشد، آن‌گاه از عبارت (۲ — ۱۵۳) و (۲ — ۱۵۴) نتیجه می‌شود.

$$(A - 2I)^2 s_1^{(2)} = 0 \qquad (۲-۱۷۲)$$

ولی

$$(A - 2I)s_1^{(2)} = s_1^{(1)} \neq 0 \qquad (۲-۱۷۳)$$

با وجود این معادلات (۲ — ۱۶۹) و (۲ — ۱۷۰) نشان می‌دهند که

$$(A - 2I)^2 = 2(A - 2I) \qquad (۲-۱۷۴)$$

درنتیجه، (۲ — ۱۷۲) و (۲ — ۱۷۳) نمی‌توانند توأماً" برای ماتریس خاص A برقرار باشند. باوجوداین‌دو بردار ویژه مستقل‌خطی وابسته به ریشهٔ مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ معادلهٔ (۲—۱۶۸)

می‌توان یافت . یکی از این بردارها را می‌توان به‌صورت زیر پیدا کرد .

$$(A - 2I)s_1 = 0 \qquad (۱۷۵ - ۲)$$

که به ازای هر Y که دارای جواب زیر است

$$s_1 = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \\ -Y \end{bmatrix} \qquad (۱۷۶ - ۲)$$

توجه کنید که s_1 یا تقریب ضریب ثابت c منحصر بفرد است زیرا

$$(A - 2I)cs_1 = 0 \qquad (۱۷۷ - ۲)$$

به عبارت دیگر جواب

$$s_1 = \begin{bmatrix} -Y \\ 0 \\ Y \end{bmatrix} \qquad (۱۷۸ - ۲)$$

به همان خوبی (۲ – ۱۷۶) است . بردار ویژه مستقل خطی دیگر مربوط به $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ را می‌توان باتوجه به معادله زیر به‌دست آورد .

$$(A - 2I)s_2 = 0 \qquad (۱۷۹ - ۲)$$

که جواب آن به ازای هر مقدار Z به‌صورت زیر است

$$s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۸۰ - ۲)$$

بدیهی است که s_1 و s_2 مستقل خطی‌هستند زیرا بریکدیگرعمودند . بالاخره درمعادله

$$(A - 4I)s_3 = 0 \qquad (۱۸۱ - ۲)$$

هر بردار ستون

$$s_3 = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ X \end{bmatrix} \qquad (۱۸۲ - ۲)$$

صدق می‌کند و s_3 بر هر دو بردار s_2 و s_1 عمود است .

ماتریس S که بردارهای ستون آن از s_3 ، s_2 ، s_1 تشکیل می‌شود و عبارت است از

$$S = \begin{bmatrix} Y & 0 & X \\ 0 & Z & 0 \\ -Y & 0 & X \end{bmatrix} \qquad (۱۸۳ - ۲)$$

چون بردارهای متوسط (۲ ــ ۱۸۳) بر یکدیگر عمودند، $|S| \neq 0$ و S^{-1} وجود دارد. علاوه براین، چون هربردار ویژه ستون در (۲ ــ ۱۸۳) بایک ضریب ثابت معین‌می‌شود، بهتر است این ضرایب عددی را به‌قسمی انتخاب کنیم که طول هر بردارستون در (۲ ــ ۱۸۳) برابر واحد شود. در این صورت.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{۱۸۴ ــ ۲}$$

و

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۸۵ ــ ۲}$$

تبصره: اگر λ_k یک مقدار ویژه A با مرتبه تکرار m_k باشد، درآن صورت از معادلات (۲ ــ ۱۰۳) و (۲ ــ ۱۰۴) نتیجه می‌شود.

$$\mathrm{Tr}\ (A) = \sum_{k=1}^{r} m_k \lambda_k \tag{۱۸۶ ــ ۲}$$

$$\det |A| = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k} \tag{۱۸۷ ــ ۲}$$

$$\sum_{k=1}^{r} m_k = n \tag{۱۸۸ ــ ۲}$$

که درآن A یک ماتریس $n \times n$ است‌که در معادله (۲ ــ ۱۳۷) صدق می‌کند. و دارای $r \leq n$ مقدار ویژه متمایز است.

۲ ــ ۱۰. چند خاصیت ماتریسهای هرمیتی

ماتریسهای هرمیتی دارای دو خاصیت ویژه‌اند که باعث اهمیت آنها در مسایل فیزیکی

است . این خواص عبارتند از: مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی همه حقیقی‌هستند وبردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژه متمایز متقامدند .

پس اگر

$$AS_k = \lambda_k S_k \quad (۲-۱۸۹)$$

$$S_k^* A S_k = \lambda_k |S_k|^2 \quad (۲-۱۹۰)$$

$$S_k^* A^* S_k = \bar{\lambda}_k |S_k|^2 \quad (۲-۱۹۱)$$

یا

$$S_k^*(A - A^*)S_k = (\lambda_k - \bar{\lambda}_k)|S_k|^2 \quad (۲-۱۹۲)$$

زیرا

$$\text{Since } A = A^* \text{ and } |S_k|^2 > 0 \quad (۲-۱۹۳)$$

$$\lambda_k = \bar{\lambda}_k \quad (۲-۱۹۴)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی هستند .

همچنین با استفاده از (۲ ــ ۱۸۹) داریم .

$$S_j^* A S_k = \lambda_k S_j^* S_k \quad (۲-۱۹۵)$$

و

$$S_k^* A S_j = \lambda_j S_k^* S_j \quad (۲-۱۹۶)$$

پس

$$S_j^*(A - A^*)S_k = (\lambda_k - \bar{\lambda}_j)S_j^* S_k \quad (۲-۱۹۷)$$

و چون $A = A^*$ و $\lambda_j = \bar{\lambda}_j,$

$$(\lambda_k - \lambda_j)S_j^* S_k = 0 \quad (۲-۱۹۸)$$

پس اگر $\lambda_k \neq \lambda_j$

$$S_j^* S_k = 0 \quad (۲-۱۹۹)$$

و درنتیجه ثابت می‌شود که بردارهای ویژه یک ماتریس هرمیتی متناظر با مقادیر ویژه متمایز متقامدند .

۲ ــ ۱۱. جبر تانسوری

دیدیم هر مجموعهٔ مرتب از n عدد را می‌توان به‌صورت یک بردار ستون یا یک بردار سطر نوشت ، همچنین مجموعهٔ مرتبی از n^2 عدد رامی‌توان به‌صورت یک ماتریس مربع نوشت . با وجود این اگر بخواهیم مجموعهٔ مرتبی از n^3 عدد را به شکل ماتریسی بنویسیم ماتریس حاصل مکعبی خواهدبود وسه بعدخاص را اشغال می‌کند! اعمال با این قبیل ماتریسهای‌حجیم

دشوار خواهد بود.

هدف جبر تانسوری دو چیز است: یکی نمایش مجموعه‌هایی مرتب از n ، n^2 ، n^3 یا بطورکلی n^r عدد بر روی صفحه کاغذ است به‌قسمی‌که برای محاسبات باندازه کافی مفید باشد. هدف دوم، تعریف دقیق پایایی است.

نمادگذاری

جزء اصلی جبر تانسوری نمادگذاری زیرنویسی است که قبلاً در بخش ۲ ــ ۱ در ارتباط با ماتریسها معرفی شد. به خاطر دارید که "قسمت مشکل" این نمادگذاری به‌خاطرسپردن این ایده بود که علامت a_{ij} مجموعهٔ کاملی از n^2 عدد را وقتی i و j از ۱ تا n تغییر می‌کند، می‌سازد، و درعین حال a_{ij} عضو بخصوصی از مجموعهٔ n^2 عضوی را نیز وقتی i و j مقادیر عددی خاصی را مانند $i = 1$ و $j = 3$ اختیار می‌کنند نشان می‌دهد. ثابت می‌شود که به‌کار بردن اندیسهای فوقانی نیزمانند اندیسهای تحتانی درساختن تانسورها مفیدند. پس علامت a^{ij} وقتی i و j از ۱ تا n تغییر می‌کند مانند a_{ij} مجموعه‌ای از n^2 عضو را نشان می‌دهد. درحالت‌کلی، این دومجموعه n عضوی برابرنیستند، یعنی $a_{ij} \neq a^{ij}$. ازطرفی، می‌توانیم یک مجموعهٔ دیگر شامل n^2 عضو با علامت $a_j{}^i$ بسازیم به‌قسمی که $a_j{}^i \neq a^{ij} \neq a_{ij}$ تانسورهای با اندیس فوقانی را تانسورهای "ناهمورد" و تانسورهای با اندیس تحتانی را "همورد" نامند. تانسورهایی‌که هم‌دارای اندیس فوقانی وهم‌اندیس تحتانی‌باشندتانسورهای "مرکب" نامیده می‌شوند.

رتبهٔ یک تانسور همورد برابرتعداداندیسهای تحتانی آن است. پس رتبهٔ تانسورهمورد a_{ij} برابر ۲ است. همین‌طور، رتبهٔ یک تانسور ناهمورد برابر تعداد اندیسهای فوقانی آن است. بنابراین رتبهٔ تانسور ناهمورد a^{ij} برابر ۲ است. تانسور $a_j{}^i$ یک تانسور مرکب‌است رتبهٔ همورد و رتبهٔ ناهمورد آن هر دو برابر یک است. هر تانسور با رتبهٔ صفر یک عدد، و با رتبهٔ ۱ یک بردار است. در جبر تانسوری معمولی‌فرض می‌شودکه گستره تغییرات اندیسهای فوقانی وتحتانی‌یک‌مجموعه ازمقادیراست، مثلاً در a_{ij} ، $i = 1,2, \ldots ,n$ و $j = 1,2, \ldots ,n$، بنابراین، یک تانسور رتبهٔ ۲ مشابه یک ماتریس مربع است. توجه کنید که یک تانسور با s اندیس فوقانی و r اندیس تحتانی که هرکدام از ۱ تا n تغییرمی‌کند مجموعه‌ای شامل n^{r+s} عضو است.

مثال ۲ ــ ۱۳:

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} \qquad \begin{matrix} (i_1 = 1, \ldots ,n) \ldots (i_s = 1, \ldots ,n) \\ (j_1 = 1, \ldots ,n) \ldots (j_r = 1, \ldots ,n) \end{matrix} \;.$$

مجموعه‌ای از n^{r+s} عضو را نشان می‌دهد ، و $A^{i_1i_2\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_r}$ یک عضو خاص این مجموعه است .

۲ ــ ۱۲ . اعمال تانسوری

تانسورها را می‌توان باهم جمع یا تفریق یا درهم ضرب کرد . نتیجهٔ عمل یک تانسور دیگر خواهد بود .

$$C^{i_1i_2\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_r} = A^{i_1i_2\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_r} + B^{i_1i_2\cdots i_s}_{j_1j_2\cdots j_r} \qquad (۲ - ۲۰۰)$$

توجه کنید که رتبه‌های همورد و ناهمورد هر تانسور در معادلهٔ (۲ ــ ۲۰۰) برابرند .

ضرب : حاصلضرب خارجی :

حاصلضرب خارجی تانسور B^k_{rs} و تانسور $A_j{}^i$ به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$C^{ik}_{jrs} = A_j{}^i B^k_{rs} \qquad i,j,k,r,s = 1,2, \ldots ,n \qquad (۲ - ۲۰۱)$$

تانسورمرکب C^{ik}_{jrs} دارای رتبهٔ همورد ۳ و رتبهٔ ناهمورد ۲ است ، ودرنتیجه مجموعه‌ای شامل n^5 عضو را نشان می‌دهد . عضو C^{12}_{379} از C^{ik}_{jrs} برابرحاصلضرب عددی عضو $A_3{}^1$ تانسور $A_j{}^i$ در عضو B^2_{79} تانسور B^k_{rs} است .

برای تعریف حاصلضرب خارجی به‌صورت معادله (۲ ــ ۲۰۱) ، باید دقت کرد که هر اندیس خاص را در دو طرف معادله در یک سطح قرار دهیم .

ادغام کردن

حال عملی را بنام " ادغام کردن " معرفی می‌کنیم . این عمل از جایگذاری یک اندیس فوقانی و یک اندیس تحتانی تانسور مرکب به‌وسیله یک حذف مشترک و سپس جمع بستن روی این حرف تشکیل می‌شود . مثلا" برای ادغام تانسور $A_j{}^i$ بجای i و j حرف k راقرارمی‌دهیم . و سپس روی k جمع می‌بندیم ، پس

$$A_j{}^i = \sum_{k=1}^{n} A_k{}^k \qquad (۲ - ۲۰۲)$$

قرارداد جمع بستن

برای سادگی نوشتن معادلات تانسوری شامل ادغامها ، بهتر است از علامت جمع بستن برای هر اندیس ادغام‌شده صرفنظر شود . برای این کار قرار می‌گذاریم که هر اندیس تکراری در یک معادلهٔ تانسوری را روی تمام حوزه مقادیرش جمع ببندیم . مثلا" ،

$$A_k{}^k = A_i{}^i = A_j{}^j = A_1{}^1 + A_2{}^2 + A_3{}^3$$
$$A_iA_i = A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2$$
$$A^iA_i = A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3$$
$$A_{kk} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$
$$A_{ij}X_iX_j = A_{11}X_1{}^2 + A_{22}X_2{}^2 + A_{33}X_3{}^2 + (A_{12} + A_{21})X_1X_2 + (A_{13} + A_{31})X_1X_3 + (A_{23} + A_{32})X_2X_3$$
$$A^k_{kj} = A^1_{1j} + A^2_{2j} + A^3_{3j}$$

حاصلضرب داخلی

برای به‌دست آوردن حاصلضرب داخلی دو تانسور، ابتداحاصلضرب خارجی دو تانسور را تشکیل داده سپس ادغامی شامل اندیس فوقانی یکی از تانسورها و اندیس تحتانی تانسور دیگری را به‌دست می‌آوریم. مثلا" یکی از حاصلضربهای داخلی دو تانسور $A_j{}^i$ و B_{kr} عبارت است از

$$C_{jr} = A_j{}^kB_{kr} = A_j{}^1B_{1r} + A_j{}^2B_{2r} + A_j{}^3B_{3r} \qquad (۲-۲۰۳)$$

و یک حاصلضرب داخلی دیگر عبارت است از

$$D_{jk} = A_j{}^rB_{kr} = A_j{}^1B_{k1} + A_j{}^2B_{k2} + A_j{}^3B_{k3} \qquad (۲-۲۰۴)$$

به‌علت امکان ادغام کردن اندیسهای مختلف، حاصلضرب داخلی دو تانسور همان‌طور که در معادلات (۲ ــ ۲۰۳) و (۲ ــ ۲۰۴) تشریح شده همیشه منحصر بفرد نیست.

۲ ــ ۱۳. خواص تبدیلات تانسورها

واضح است که یک تانسور رتبه ۲ مانند A_{ij} مجموعه‌ای شامل n^2 عضو است. چیزی که تاکنون تذکرنداده‌ایم، این است‌که هرمجموعهٔ شامل n^2 عضو یک تانسور رتبهٔ ۲ نیست طرح مجموعه‌ای متشکل از n^2 عضوکه آن رایک تانسور رتبه ۲ می‌سازد وابسته به یک تبدیل‌مختصات است. این ایده را به‌وسیله بررسی چند مثال خاص تشریح خواهیم کرد.

مجموعه‌ای شامل n تابع از متغیرهای x^1 ، x^2 ، x^3 را درنظر بگیرید.

$$\{a_1(x^1,x^2,x^3),\ a_2(x^1,x^2,x^3),\ .\ .\ .\ ,\ a_n(x^1,x^2,x^3)\} \qquad (۲-۲۰۵)$$

این مجموعه مرتب بنابه تعریف بخش ۱ ــ ۱ یک بردار است. می‌خواهیم ببینیم هریک از n تابع (۲ ــ ۲۰۵) چه خواصی باید داشته باشد. تا یک تانسور رتبه ۱ نیز باشد. دستگاه مختصات y ، (y^1,y^2,y^3) را که با دستگاه مختصات x ، (x^1,x^2,x^3) به‌وسیله مجموعهٔ معادلات زیر بنام تبدیل مختصات درارتباط است درنظر بگیرید.

$$y^1 = f^1(x^1,x^2,x^3)$$
$$y^2 = f^2(x^1,x^2,x^3) \qquad (۲-۲۰۶)$$
$$y^3 = f^3(x^1,x^2,x^3)$$

سه تابع f^1 ، f^2 ، f^3 توابعی‌یک‌مقداری‌ودردامنه‌ای‌ازمقادیر x^1 ، x^2 ، x^3 مشتق‌پذیرند. تبدیل (۲ - ۲۰۶) را وارون‌پذیر گوییم اگر داشته باشیم

$$x^1 = h^1(y^1,y^2,y^3)$$
$$x^2 = h^2(y^1,y^2,y^3) \qquad (۲-۲۰۷)$$
$$x^3 = h^3(y^1,y^2,y^3)$$

که در آن h^1 ، h^2 ، h^3 نیز توابعی یک مقداری و مشتق‌پذیرند.

اگر تبدیل مختصات خطی باشد، آن‌گاه صورت ماتریسی معادلات (۲ - ۲۰۶) عبارت است از

$$y = Ax \qquad (۲-۲۰۸)$$

و برای آن‌که A^{-1} تعریف شود لازم است $\det|A| \neq 0$. هرچند با استفاده از قرارداد جمع بستن، صورت اندیسی معادله (۲ - ۲۰۸) عبارت است از

$$y^i = a_j{}^i x^j \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (۲-۲۰۹)$$
$$a_j{}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \qquad (۲-۲۱۰)$$

و درنتیجه

$$\det|A| = \det\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0 \qquad (۲-۲۱۱)$$

شرط وجود A^{-1} خواهد بود. عبارت

$$J = \det\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \qquad (۲-۲۱۲)$$

را ژاکوبی تبدیل فرم x^3 ، x^2 ، x^1 به y^3 ، y^2 ، y^1 گویند. ژاکوبی تبدیل (۲ - ۲۰۶) که باید شامل یک تبدیل خطی به‌عنوان یک حالت خاص باشد، باید مخالف صفر باشد تا وارون‌پذیر شود.

حال عضو مجردی را تصور کنید که در دستگاه مختصات x یا مجموعه‌ای مرتب از n تابع $\{a_1(x^1,x^2,x^3), \ldots , a_n(x^1,x^2,x^3)\}$ نشان داده شود.

اگر این عنصر در دستگاه مختصات y نیز به‌صورت مجموعه‌ای از n تابع نشان داده شود و مؤلفه‌های دو نمایش طبق قانون زیر بهم مرتبط باشند.

$$\{b_1(y^1,y^2,y^3), \ldots , b_n(y^1,y^2,y^3)\}$$

قانون تبدیل کوواریانت

$$b_i(y^1,y^2,y^3) = a_j(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \qquad i = 1,2,3 \qquad (۲-۲۱۳)$$

آن‌گاه عنصر مجرد "تانسور کوواریانت" رتبه ۱ نامیده می‌شود ،

$$a_i(x^1,x^2,x^3) = \{a_1(x^1,x^2,x^3), \; . \; . \; . \; , \; a_n(x^1,x^2,x^3)\}$$

یک تانسور کوواریانت رتبه ۱ در دستگاه مختصات x است درحالی که

$$b_i(y^1,y^2,y^3) = \{b_1(y^1,y^2,y^3), \; . \; . \; . \; , \; b_n(y^1,y^2,y^3)\}$$

نمایش همان تانسور کوواریانت رتبه ۱ در دستگاه مختصات y است .

برای محاسبه سمت راست معادله (۲ــ۲۱۳) باید از معادلات (۲ــ۲۰۷) استفاده کرد . فرم وارون این تبدیل به‌وسیله معادلات (۲ــ۲۰۶) داده می‌شود .

تبصره: در کاربردها معمولا" از تفاوت بین یک تانسور و نمایش آن در دستگاه مختصات مفروض صرفنظر می‌کنند . پس مجموعه

$$a_i(x^1,x^2,x^3) = \{a_1(x^1,x^2,x^3), \; . \; . \; . \; , \; a_n(x^1,x^2,x^3)\}$$

رابه‌عنوان یک تانسور کوواریانت درنظرمی‌گیریم به‌شرط آن‌که معادله (۲ــ۲۱۳) برقرارباشد ، گرچه $a_i(x^1,x^2,x^3)$ به‌عنوان نمایش یک تانسور کوواریانت در دستگاه مختصات x دقیقتر است .

قانون تبدیل کونتراواریانت

$$b^i(y^1,y^2,y^3) = a^j(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \qquad (۲-۲۱۴)$$

اگرمجموعه مرتبی‌از n تابع $a^i(x^1,x^2,x^3)$ طبق معادله (۲ــ۲۱۴) تبدیل شود ، آن‌گاه $a^i(x^1,x^2,x^3)$ را یک تانسور کونتراواریانت رتبه ۱ گوییم .

قانون تبدیل کوواریانت برای تانسورهای رتبه ۲ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$b_{ij}(y^1,y^2,y^3) = a_{kr}(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^r}{\partial y^j} \qquad (۲-۲۱۵)$$

حال آن‌که تانسورهای کونتراواریانت رتبه ۲ طبق رابطه زیر تبدیل می‌کنند .

$$b^{ij}(y^1,y^2,y^3) = a^{kr}(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial y^j}{\partial x^r} \qquad (۲-۲۱۶)$$

برای یک تانسور مرکب رتبهٔ ۲ قانون تبدیل عبارت است از

$$b_j{}^i(y^1,y^2,y^3) = a_r{}^k(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^r}{\partial y^j} \qquad (۲-۲۱۷)$$

قانون تبدیل اسکالر

تابع $a(x^1,x^2,x^3)$ را تابع " اسکالر" یا پایا گویند ، اگر طبق قانون زیر تبدیل کنند .

$$\begin{aligned} b(y^1,y^2,y^3) &= a(x^1,x^2,x^3) \\ \text{where } x^1 &= h^1(y^1,y^2,y^3) \\ x^2 &= h^2(y^1,y^2,y^3) \\ x^3 &= h^3(y^1,y^2,y^3) \end{aligned} \qquad (۲-۲۱۸)$$

پایایی معادلات تانسوری

همان‌طور که در بخش ۲ ـ ۱۱ گفته شد ، صورت تانسوری یک مفهوم پایایی را به شکل دقیق بیان می‌کند . آشکارا درمی‌یابیم که قوانین طبیعی نباید به دستگاه مختصات خاص که برای نمایش فیزیکی کمیتها به‌کار رفته بستگی داشته باشد . به‌عبارت‌دیگراگر یک قانون طبیعی را بتوان به‌صورت یک معادله نوشت . و این معادله در یک دستگاه مختصات برقرارباشد ، باید در تمام دستگاههای مختصات برقرار باشد . این مطلب دقیقا" خاصیتی است که معادلات تانسوری دارا هستند و اکنون آن را ثابت خواهیم‌کرد . به‌عنوان نمونه تانسوری را که به‌وسیله $A^p_{qr}(x^1,x^2,x^3)$ در دستگاه مختصات x نشان داده شده درنظر بگیرید . فرض کنید .

$$A^p_{qr}(x^1,x^2,x^3) = 0 \qquad (۲-۲۱۹)$$

که آن را می‌توان به این شکل تعبیر کردکه در دستگاه مختصات x هر مؤلفهٔ تانسور A^p_{qr} صفر می‌شود باید ثابت کنیم که

$$B^p_{qr}(y^1,y^2,y^3) = 0 \qquad (۲-۲۲۰)$$

به شرط آن‌که $B^p_{qr}(y^1,y^2,y^3)$ در دستگاه مختصات y همان تانسور را که به وسیله $A^p_{qr}(x^1,x^2,x^3)$ در دستگاه مختصات x نشان داده شده نشان‌دهد ، دراین‌صورت معادله (۲ ـ ۲۲۰) فورا" از قانون تبدیل تانسورها نتیجه می‌شود .

پس

$$B^p_{rq}(y^1,y^2,y^3) = A^i_{jk}(x^1,x^2,x^3)\,\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^q}\,\frac{\partial x^k}{\partial y^r} = 0 \qquad (۲-۲۲۱)$$

که نتیجه‌ای از معادله (۲ ـ ۲۱۹) است .

حال فرض‌کنید C^i_{jk} و D^i_{jk} نمایش دوتانسور در دستگاه مختصات x باشند ، وفرض‌کنید در دستگاه مختصات x

$$C^i_{jk} = D^i_{jk} \qquad (۲-۲۲۲)$$

در این صورت بموجب ملاحظات فوق

$$A^i_{jk}(x^1,x^2,x^3) = C^i_{jk} - D^i_{jk} \qquad (۲-۲۲۳)$$

تانسوری است که در دستگاه مختصات x صفر می‌شود ، و بنابراین $B^i_{jk}(y^1,y^2,y^3) = 0$

(۲ ــ ۲۲۴)

که درآن B^i_{jk} نمایش $A^i_{jk} = C^i_{jk} - D^i_{jk}$ دردستگاه مختصات y است . پس اگرمعادلهٔ تانسوری (۲ ــ ۲۲۲) در دستگاه مختصات x برقرارباشد ، آن‌گاه این معادله باید در دستگاه مختصات y نیز برقرار باشد ، به شرط آن‌که ابتدا $C^i_{jk}(x^1,x^2,x^3)$ و $D^i_{jk}(x^1,x^2,x^3)$ به دستگاه مختصات y با استفاده از قانون تبدیل مناسب تبدیل شوند .

درفیزیک ، فرمول هرقانون فیزیکی به‌صورت یک‌معادلهٔ تانسوری یک فرمول "کروواریانت" نامیده می‌شود . یک قانون فیزیکی که به شکل کروواریانت داده شده باشد ، مثلاً" اگر یکی از تانسورها صفر شود ، در تمام دستگاههای مختصات دارای شکل مشابه خواهدبود . به‌این‌معنی کلمه کروواریانت فقط به معنی تانسور است نه تانسور فاقد اندیسهای فوقانی .

۲ ــ ۱۴ . تانسورهای خاص

اگر باتعویض یک جفت ازاندیسهای کروواریانت یا کونتراواریانت تغییری در تانسور داده نشود تانسور را درآن اندیسها متقارن گوییم .

مثال ۲ ــ ۱۴ : تساویهای

$$g_{ij} = g_{ji} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \; . \; . \; . \; ,n \\ j = 1,2, \; . \; . \; . \; ,n \end{array}$$

نشان‌می‌دهندکه g_{ij} یک تانسورمتقارن است . توجه کنیدکه یک تانسور متقارن رتبهٔ ۲ دارای $\frac{1}{2}n(n+1)$ مؤلفه مستقل است .

تانسورهای پاد متقارن یا متقارن اریب

اگرتعویض یک جفت ازاندیسهای کروواریانت یا کونتراواریانت علامت یک تانسور راعوض کند ، گوییم تانسور درآن اندیسها "پادمتقارن" یا "متقارن اریب" علامت یک است .

مثال ۲ ــ ۱۶ : از تساویهای

$$g_{ij} = -g_{ji} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \; . \; . \; . \; ,n \\ j = 1,2, \; . \; . \; . \; ,n \end{array}$$

نتیجه می‌شود که g_{ij} یک تانسور پادمتقارن است . توجه کنیدکه یک تانسور پادمتقارن دارای $\frac{1}{2}n(n-1)$ مؤلفهٔ مستقل است .

تبصره : هرتانسور رتبه ۲ با n^2 مؤلفه رامی‌توان به‌صورت مجموع دوتانسور ، یکی‌متقارن با $\frac{1}{2}n(n+1)$ مؤلفه مستقل و دیگری پادمتقارن با $\frac{1}{2}n(n-1)$ مؤلفه مستقل نوشت :

$$g_{ij} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \tfrac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$$

تانسور متری

در فضای اقلیدسی سه بعدی فاصله کوچک بین دو نقطه ، ds به صورت زیرتعریف می‌شود

$$ds^2 = dx^k\, dx^k = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (۲-۲۲۵)$$

با استفاده از معادلات (۲ــ۲۰۷) ،

$$dx^k = \frac{\partial h^k}{\partial y^i}\, dy^i \qquad \begin{matrix} k = 1,2,3 \\ i = 1,2,3 \end{matrix}$$

بنابراین فرمول مجذور عنصر قوس در دستگاه مختصات y به‌صورت

$$ds^2 = g_{ij}(y^1,y^2,y^3)\, dy^i\, dy^j \qquad (۲-۲۲۶)$$

نوشته می‌شود که در آن

$$g_{ij}(y^1,y^2,y^3) = \frac{\partial h^k}{\partial y^i}\frac{\partial h^k}{\partial y^j} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{matrix} \qquad (۲-۲۲۷)$$

"تانسور متری" در دستگاه مختصات y نامیده می‌شود . بدیهی است که تانسور متری متقارن و با رتبهٔ ۲ است . و بنابراین می‌تواند در یک فضای سه بعدی تا شش مؤلفه مستقل داشته باشد .

چون تمام خواص متری فضا بطورکامل به‌وسیله تانسور متری معین می‌شود لذا اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد .

اگر مؤلفه‌های تانسور متری در یک دستگاه مختصات مفروض ثابت نباشند ، در آن‌صورت دستگاه مختصات مفروض را "منحنی‌الخط" نامند . اگر در دستگاه مختصات مفروض $g_{ij} = 0$ ، $j \neq i$ ، آن را دستگاه مختصات "متقامد" نامند .

تانسور متری وابسته

باتوجه به

$$g = \det |g_{ij}| \qquad (۲-۲۲۸)$$

و

$$G^{ij} = \text{cofactor of } g_{ij} \text{ in } \det |g_{ij}| \qquad (۲-۲۲۹)$$

می‌توان نشان داد که

$$g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g} \qquad (۲-۲۳۰)$$

یک تانسور کونترااواریانت رتبه ۲ است . تانسور g^{ij} را تانسور متری "وابسته" گویند . باتوجه به معادلات (۲ — ۳۲) و (۲ — ۳۴) می‌توان نوشت :

$$g^{ij}g_{ik} = \delta_k{}^j \tag{۲ — ۲۳۱}$$

که در آن

$$\delta_k{}^i = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

تانسور کرونکر مرکب است .

۲ — ۱۵ . مسائل و کاربردها

۱ — با فرض

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $A + B$ ، AB ، BA ، $\det |A|$ ، $\det |B|$ ، A^{-1} و B^{-1} . ثابت کنید .

$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$

۲ — فرض کنید

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$. روابط زیر را بررسی کنید .

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \qquad \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z \qquad \sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 = \sigma_z{}^2 = I$$

۳ — حاصلضربهای مستقیم ،

$$\sigma_x x \sigma_x \qquad \sigma_x x \sigma_y \qquad \sigma_x x \sigma_z \qquad \sigma_z x I$$

و مقدار عبارات زیر را به‌دست آورید

$$(\sigma_x x\sigma_x)(\sigma_x x\sigma_y) + (\sigma_y x\sigma_x)(\sigma_x x\sigma_x)$$
$$(\sigma_x x\sigma_x)(\sigma_z xI) + (\sigma_z x)I(\sigma_x x\sigma_x)$$
$$(\sigma_x x\sigma_x)^2 \qquad (\sigma_x x\sigma_y)^2 \qquad (\sigma_x x\sigma_z)^2 \qquad (\sigma_z xI)^2 \quad ،$$

۴ — صورت ماتریسی دستگاه خطی .

$$2x + 3y = -4$$
$$3x - y = 1$$

را نوشته و به کمک محاسبه عکس ماتریس آن را حل کنید . همین عمل را برای دستگاههای زیر انجام دهید .

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 2 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ 4x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 3 \\ 2x - 3y - z &= -3 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

۵ــ دستگاه ویژه

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

را با استفاده از روش پارامتری حل کنید.

۶ــ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

مفروض است. ماتریس الحاقی و معکوس آن را پیدا کنید. بردارهای ویژه A را به‌دست آورده آنها را استاندارد کنید و نشان دهید این بردارها متقامدند. با محاسبه مستقیم ثابت کنید ماتریس $S^{-1}AS$ قطری است‌که درآن S ماتریسی است که ستونهایش بردارهای ویژه A هستند.

۷ــ اگر H یک عملگر هرمیتی باشد، نشان دهید که e^{iH} یک عملگر واحددار است.
راهنمایی: با استفاده از تعریف می‌توان تابع نمایش، تابع نماییٔ یک ماتریس را تعریف کنید.

۸ــ ماتریسی را به‌دست آورید که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

را قطری کند. سپس مقادیر $\mathrm{Tr}\,(A)$ و $\det|A|$ را محاسبه کنید.

۹ــ ماتریسی را پیدا کنید که ماتریس زیر را قطر می‌کند

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۰ــ ثابت کنید که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متقامد است و در شرط $|A| = 1$ صدق می‌کند، و معادله ماتریسی

$$y = Ax$$

یک دوران محورهای مختصات را نشان می‌دهد.

۱۱ـ فرض کنید (x^1,x^2,x^3) دستگاه مختصات دکارتی قائم باشد. تبدیلی را پیدا کنید که این دستگاه را به دستگاه مختصات منحنی‌الخط (y^1,y^2,y^3) تبدیل کند و در آن تانسور متری به‌صورت $g_{ij}(y^1,y^2,y^3)$ درآید. ثابت کنید ژاکوبی

$$J = \det\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|$$

با تانسور متری به‌وسیله معادله زیر در ارتباط است

$$J^2 = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|^2 = \det|g_{ij}|$$

۱۲ـ نشان دهید اگر تبدیل

$$y^i = a_j{}^i x^j$$

متقامد باشد، آن‌گاه تمایز قوانین تبدیلات کوواریانت و کونتراواریانت ازبین می‌رود.

۱۳ـ تانسور را "دکارتی" گوییم اگر تبدیلات متناظر آن ازیک مجموعه مختصات دکارتی قائم به مجموعه دیگر باشد. ثابت کنید بین تانسورهای دکارتی کوواریانت و کونتراواریانت تمایزی وجود ندارد.

۱۴ـ دستگاه مختصات دکارتی قائم (x^1,x^2,x^3) وتبدیل به‌مختصات‌کروی زیر رادرنظر بگیرید.

$$(y^1,y^2,y^3) = (r,\theta,\Phi)$$
$$x^1 = y^1 \sin y^2 \cos y^3$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2 \sin y^3$$
$$x^3 = y^1 \cos y^2$$

مؤلفه‌های تانسورمتری $g_{ij}(y^1,y^2,y^3)$ و $ds^2 = g_{ij}\, dy^i\, dy^j$ را محاسبه کنید.

۱۵ـ دستگاه مختصات دکارتی قائم (x^1,x^2,x^3) وتبدیل استوانه‌ای زیر رادرنظربگیرید که در آن $(y^1,y^2,y^3) = (r,\theta,z)$

$$x^1 = y^1 \cos y^2$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2$$
$$x^3 = y^3$$

تانسورمتری $g_{ij}(y^1,y^2,y^3)$ و عنصر قطری $ds^2 = g_{ij}\, dy^i\, dy^j$ را محاسبه کنید.

۱۶ـ علامت ϵ کرونکر دارای خواص زیر است

اگر و فقط اگر اندیسها برابر باشند $e_{ijk} = 0$

اگر ijk یک جایگشت زوج از اعداد ۱۲۳ باشد $e_{ijk} = +1$

اگر ijk یک جایگشت فرد از اعداد ۱۲۳ باشد $e_{ijk} = -1$

نشان دهیدکه حاصلضرب خارجی دو بردار دکارتی A_i و B_i راباقرارداد جمع بستن می‌توان به صورت

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

یا

$$C_i = e_{ijk} A_j B_k \qquad i,j,k = 1,2,3$$

نوشت .

۱۷ ــ نشان دهید اندازهٔ بردار A^i به صورت

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{ij} A^i A^j$$

و حاصلضرب داخلی دو بردار A^i و B^i به صورت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{ij} A^i B^j$$

خواهد بود .

راهنمایی: یک دستگاه مختصات دکارتی قائم درنظر بگیرید که در آن $g_{ij} = \delta_{ij}$ و از خواص پایایی معادلات تانسوری و تبدیلی در مختصات منحنی‌الخط استفاده کنید .

۱۸ ــ تانسورهای g_{ij} و g^{ij} اندیسهای تانسورهایی را که‌با آنهایک حاصلضرب‌داخلی تشکیل می‌دهند بالا و پایین می‌برند پس

$$A_i = g_{ij} A^j \qquad A^i = g^{ij} A_j$$

نشان دهید که

$$|\mathbf{A}|^2 = g^{ij} A_i A_j = g_{ij} A^i A^j$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g^{ij} A_i B_j = g_{ij} A^i B^j$$

۱۹ ــ اگر $g_{ij} = 0$ برای $i \neq j$ ثابت کنید .

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \qquad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} \qquad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}$$

$$g^{23} = g^{12} = g^{13} = 0$$

۲۰ ــ اگر $i = 1,2,3$ و $y^i = f^i(x^1,x^2,x^3)$ ثابت‌کنید dy^i مانندیک بردارکونتراواریانت تبدیل می‌کند . اگر $V = V(x^1,x^2,x^3)$، نشان دهید که $\partial V/\partial x^i$ مانند یک بردار کوواریانت تبدیل می‌کند .

محاسبه برداری

۳ ـ ۱ . مشتق‌گیری از بردارها

بنابه تعریف بردار A داریم

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_n) \qquad (۳-۱)$$

مشتق این بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \ . \ . \ . \ , \frac{da_n}{dt}\right) \qquad (۳-۲)$$

با استفاده از روش بخش (۴ ـ ۱)، معادلات (۱ ـ ۳) و (۲ ـ ۳) را می‌توان چنین نوشت :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\mathbf{e}_k \qquad (۳-۳)$$

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{da_k}{dt}\,\mathbf{e}_k \qquad (۳-۴)$$

توجه کنیدکه عمل مشتق‌گیری بر بردارهای مبنا ، $\mathbf{e}_k$ ، اثری نمی‌گذارد زیرا این بردارها ثابتند . با استفاده از تعاریف بخش ۱ و باتوجه به معادلات (۳ ـ ۳) و (۳ ـ ۴) به آسانی می‌توان اتحادهای زیر را ثابت کرد .

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (۳-۵)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (۳-۶)$$

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{A}) = \frac{dk}{dt}\mathbf{A} + k\frac{d\mathbf{A}}{dt} \qquad (۳-۷)$$

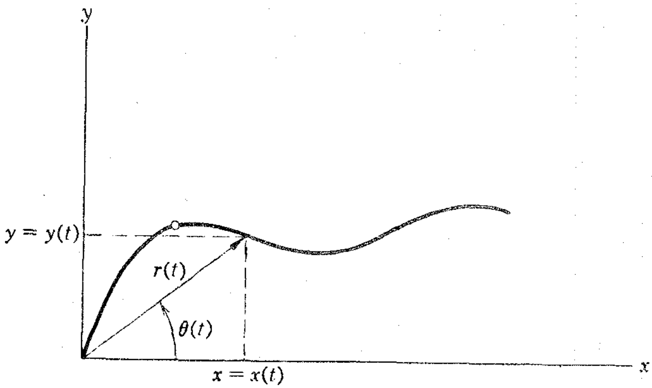
مثال ۳ـ۱: انرژی سنتیک ذره‌ای به جرم m که بابردار سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ حرکت می‌کند عبارت است از:

$$E(t) = \tfrac{1}{2}m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2$$

اگرحرکت به‌قسمی باشدکه‌انرژی سنتیک ثابت‌بماند ،آن‌گاه $dE/dt = 0$ درنتیجه:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

این معادله بیان می‌کندکه شتاب لحظه‌ای ذره $d\mathbf{v}/dt$ ،برابرصفر یا بر بردار سرعت عموداست.



شکل ۳ـ۱. حرکت یک ذره در امتداد یک منحنی مسطحه.

مثال ۳ـ۲: ذره‌ای را درنظر بگیرید که در صفحه y و x به‌قسمی حرکت می‌کند که مختصاتش $x = x(t)$ و $y = y(t)$ بردارهای موضع ، سرعت و شتاب عبارتند از:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{e}_y$$

حال در مختصات قطبی (r,θ) موضوع لحظه‌ای ذره را به‌صورت $r = r(t)$ و $\theta = \theta(t)$ درنظر می‌گیریم. این مختصات قطبی و قائم به وسیله معادلات تبدیل زیر درارتباطند.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

بردار موضع $\mathbf{r}$ در این صورت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r} = r(\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y)$$

فرض می‌کنیم

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y$$

بدیهی است که

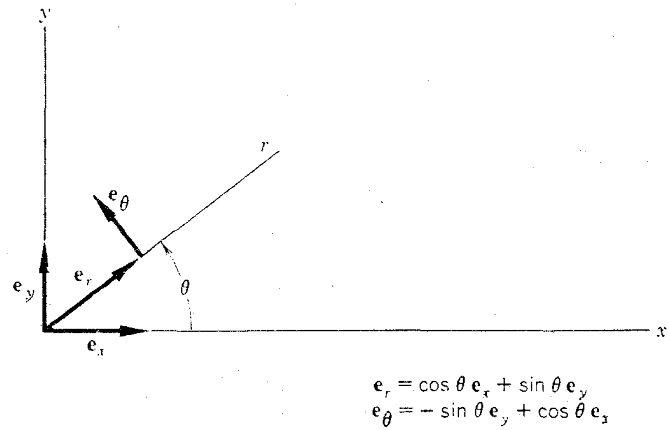
$$|\mathbf{e}_r| = 1$$

وبردار $\mathbf{e}_r$ یک زاویه θ با محور x در دستگاه مختصات (x,y) می‌سازد. حال می‌توانیم بردارهای موضع ، سرعت و شتاب ذره را به‌صورت زیر بنویسیم .

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\,\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\mathbf{e}_r + 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + r\,\frac{d^2\mathbf{e}_r}{dt^2}$$



شکل ۳ ــ ۲ . بردارهای مبنا در مختصات قائم و قطبی .

توجه کنید که باید از بردار $\mathbf{e}_r$ مشتق بگیریم . زیرا اگرچه $\mathbf{e}_r$ دارای اندازه ثابت واحد است ، اما چون $\theta = \theta(t)$ در تعریفش مستتر است ، امتدادش با زمان تغییرمی‌کنند . حال آن‌که بردارهای مبنا $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ ، از لحاظ اندازه و امتداد تغییر نمی‌کنند .

با استفاده از "قاعده زنجیری" حساب دیفرانسیل می‌توان نوشت :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}$$

در این صورت $\mathbf{e}_\theta$ عبارت است از

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y$$

توجه داشته باشید که $|\mathbf{e}_\theta| = 1$ و $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$. بنابراین $\mathbf{e}_\theta$ یک بردار واحد بوده و

بر $\mathbf{e}_r$ عمود است . بردار $\mathbf{e}_\theta$ با محور y ها زاویه θ می‌سازد . با استفاده از خواص سینوس و کسینوس داریم :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

دراین صورت داریم :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_\theta\,,$$
$$\frac{d^2\mathbf{e}_r}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$
$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_r$$

بنابراین :

$$\frac{d^2\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\mathbf{e}_\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbf{e}_r$$

بالاخره می‌توان نوشت :

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{e}_\theta$$

زوج بردارهای $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$,مجموعه کاملی برای بسط هر بردار در صفحهٔ دوبعدی است ، دقیقاً" مانند دو بردار $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$. ولی امتدادهای $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ درحالت کلی ثابت نیست حال آن‌که امتدادهای دو بردار $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ ثابت بودند .

مثال ۳ــ۳: ذره‌ای را درنظر بگیرید که در یک صفحه حرکت می‌کند به‌قسمی‌که موقعیت لحظه‌ای آن به‌وسیله $x = x(t)$ و $y = y(t)$ مشخص می‌شود . در فاصله زمانی dt ذره به اندازه ds حرکت می‌کند به‌قسمی که :

$$ds^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]dt^2$$

سرعت لحظه‌ای ذره عبارت است از :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

و می‌توانیم بردارهای موضع ، سرعت و شتاب ذره را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$$

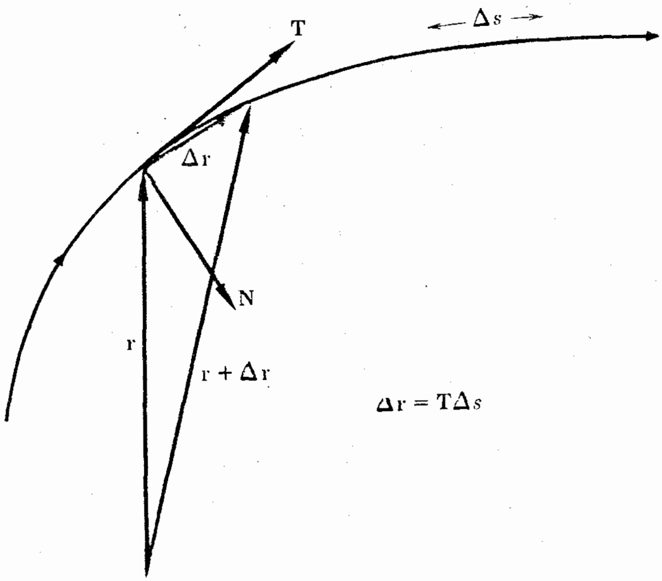
بردار

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

باید بر منحنی مسیر که درامتداد آن ذره حرکت می‌کند مماس باشد ، زیرا :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}\, ds$$

یک تغییر مکان بینهایت کوچک ذره را در فاصله زمانی dt نشان می‌دهد .



شکل ۳ ــ ۳. بردارهای مبنای وابسته به ذرهٔ متحرک (N و T) .

از طرف دیگر :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$$

$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = (dx)^2 + (dy)^2 = ds^2$$

و

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\mathbf{T}$ بردار واحد مماس بر مسیر ذره در موضع لحظه‌ای است. با مشتق‌گیری از $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

یعنی $d\mathbf{T}/ds$ بر $\mathbf{T}$ عمود است، به شرط آن‌که مسیر خط مستقیم نباشد.
عبارت زیر را چنان تعریف می‌کنیم

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

که در آن $|\mathbf{N}| = 1$ و $\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0$ پارامتر k "انحنای" مسیرنامیده می‌شود. وقدرمطلق آن برابر اندازه $d\mathbf{T}/ds$ است،

$$|k| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

امتداد $d\mathbf{T}/ds$ همواره درجهت تقعرمنحنی است. مثلا" اگر ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، در آن صورت $d\mathbf{T}/ds$ به سمت مرکز دایره متوجه است. معکوس انحنای $r = 1/k$ را "شعاع انحناء" گویند. برای یک مسیر دایره‌ای شکل، شعاع انحناء دقیقا" برابر شعاع دایره است. دستگاه‌مختصات $(\mathbf{T},\mathbf{N})$ وابسته‌به‌مسیر $x = x(t)$، $y = y(t)$ رادستگاه مختصات "وابسته" گوییم، و در این جا دستگاه مختصات بردارهای موضع، سرعت و شتاب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{T}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\mathbf{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

که در آن $k = 1/r$ انحنای مسیر است.

۳ ــ ۲. مشتق نسبی یک بردار

فرض کنید x، y، z دستگاه مختصات دکارتی‌قائم‌باشد. فرض کنید $\mathbf{r} = (x,y,z)$ بردار هر موضع یک نقطه دلخواه را در این دستگاه مختصات نشان دهد. فرض کنید یک تابع عددی مانند f وجود دارد که به هر نقطه از فضا یک مقدار عددی را نسبت می‌دهد. این تابع را به شکل

$$f = f(x,y,z) \qquad (۸ - ۳)$$

یا به شکل فشرده‌تر

$f = f(\mathbf{r})$

نشان می‌دهیم حوزهٔ مقادیر f یک میدان اسکالر تشکیل می‌دهد اگر یک تابع برداری وجود داشته باشد که به هر نقطه فضا یک بردار نسبت دهد در آن صورت آن را به شکل

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z) \qquad (۳-۱۰)$$

یا به‌صورت فشرده‌تر

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad (۳-۱۱)$$

نشان‌می‌دهیم . حوزه مقادیر $\mathbf{A}$ یک میدان برداری تشکیل می‌دهد . درفیزیک ، اغلب‌لازم‌است میدانهای اسکالر و برداری را که با یک پارامتر t تغییر می‌کند درنظر بگیریم . در این صورت می‌نویسیم :

$$f = f(\mathbf{r},t) \qquad (۳-۱۲)$$

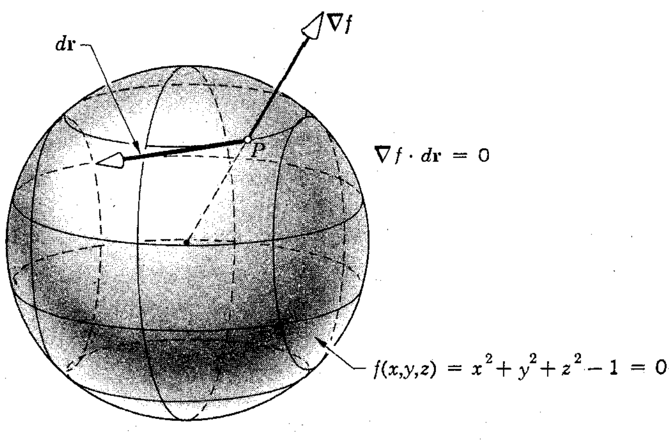
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \qquad (۳-۱۳)$$

دما و فشار یک مایع مثالهایی از میدانهای اسکالرند ، حال آن که میدانهای الکتریکی ، مغناطیسی و شکل میدانهای برداری هستند .

گرادیان یک میدان اسکالر

اگر مشتقات نسبی $f(x,y,z)$ موجود بود و در ناحیه‌ای از فضا پیوسته باشد آن‌گاه در این ناحیه دیفرانسیل f به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \qquad (۳-۱۴)$$



شکل ۳ — ۴ . تعبیر هندسی گرادیان $f(x,y,z)$

توجه کنیدکه معادله (۳ ــ ۱۴) رامی‌توان به‌عنوان حاصلضرب داخلی دو بردار درنظر گرفت .

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (dx,dy,dz) \tag{۳ ــ ۱۵}$$

یا

$$df = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (\mathbf{e}_x\, dx + \mathbf{e}_y\, dy + \mathbf{e}_z\, dz) \tag{۳ ــ ۱۶}$$

عملگر

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{۳ ــ ۱۷}$$

را عملگر "دل" یا "گرادیان" و عبارت

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) f \tag{۳ ــ ۱۸}$$

را گرادیان f یا به‌عبارت ساده $\text{del}\ f$ گوییم .

در این صورت دیفرانسیل f را می‌توان چنین نوشت :

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \tag{۳ ــ ۱۹}$$

زیرا

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$$

و

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\, dx + \mathbf{e}_y\, dy + \mathbf{e}_z\, dz$$

تعبیر هندسی عملگر ∇

معادله $f(x,y,z) = 0$ معادله یک رویه در فضاست . مثلاً

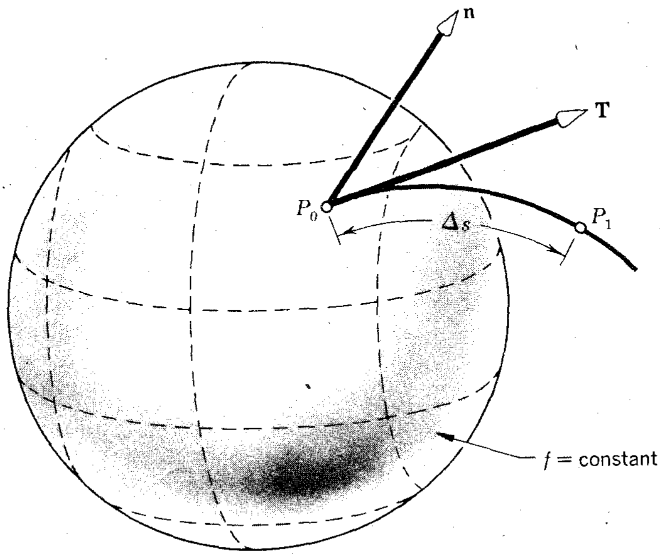
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

معادله‌یک‌رویهٔ کروی باشعاع واحداست . برای‌نقاطی‌از رویه که $f(x,y,z) = 0$ داریم $df = 0$، درنتیجه باتوجه به معادله (۳ ــ ۱۹) می‌توان نوشت

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{۳ ــ ۲۰}$$

معادله (۳ ــ ۲۰)

حال نقطه P را بر رویهٔ $f(x,y,z) = 0$ اختیار کرده و آن را در تمام بحث ثابت فرض می‌کنیم . فرض‌کنیدبردار $d\mathbf{r}$ تغییرمکان‌بینهایت‌کوچک رانشان‌دهدکه بر رویهٔ $f(x,y,z) = 0$ در این نقطه مماس است .



$$f(p_1) = f(p_0) + \left(\frac{\Delta f}{\Delta s}\right)_{p_0} \Delta s$$

$$\lim_{p \to p_0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta s}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right)_{p_0} = (\nabla f \cdot \mathbf{T})_{p_0}$$

شکل ۳ ــ ۵ . (a) مشتق تابع $f(x,y,z)$ درامتداد $\mathbf{T}$.

دراین‌صورت معادله (۳ــ ۲۰) بیان می‌کندکه ∇f باید براین بردار تغییرمکان بینهایت کوچک $d\mathbf{r}$ عمود باشد . ولی $d\mathbf{r}$ با این قید که بر رویه در نقطه P مماس است اختیاری خواهد بود . درنتیجه ∇f بر رویهٔ $f = 0$ در هر نقطه عمود خواهد بود .

مشتق درامتداد مفروض

نقطه دلخواه P رادر فضا درنظربگیرید و فرض کنید مشتقات نسبی f در نقطه P محاسبه شده باشد . در این جا قید مماس بودن تغییرمکان بینهایت‌کوچک $d\mathbf{r}$ در P رابر رویهٔ $f = 0$ حذف می‌کنیم ، و اجازه می‌دهیم در فضا هر امتدادی را اختیارکند به شرطی‌که انتهای آن در نقطه P ثابت بماند .

فرض کنید $\mathbf{T}$ یک بردار واحد درامتداد $d\mathbf{r}$ باشد و $|d\mathbf{r}| = ds$ در این صورت

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds \qquad |\mathbf{T}| = 1$$

و

$$df = \nabla f \cdot \mathbf{T}\,ds$$

نتیجه می‌دهند

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{T} \tag{۳-۲۱}$$

مشتق معمولی df/ds رامشتق "جهت‌دار" f درامتداد $\mathbf{T}$ گوییم . توجه‌کنیدکه وقتی‌امتداد $\mathbf{T}$ بردار $d\mathbf{r}$ موازی ∇f باشد .
f سریعتر افزایش پیدا می‌کند زیرا

$$\nabla f \cdot \mathbf{T} = |\nabla f| \cos (\mathbf{T}, \nabla f)$$

دیورژانس یک میدان برداری

دیورژانس یک میدان برداری به‌صورت حاصلضرب داخلی عملگر و میدان تعریف می‌شود پس با فرض

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \tag{۳-۲۲}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{۳-۲۳}$$

لاپلاسین یک میدان اسکالر یا برداری

لاپلاسین تابع اسکالر f به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{۳-۲۴}$$

اگر

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \tag{۳-۲۵}$$

آن‌گاه لاپلاسین $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z \tag{۳-۲۶}$$

توجه کنید که برای یک تابع اسکالر

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \tag{۳-۲۷}$$

کرل یک میدان برداری

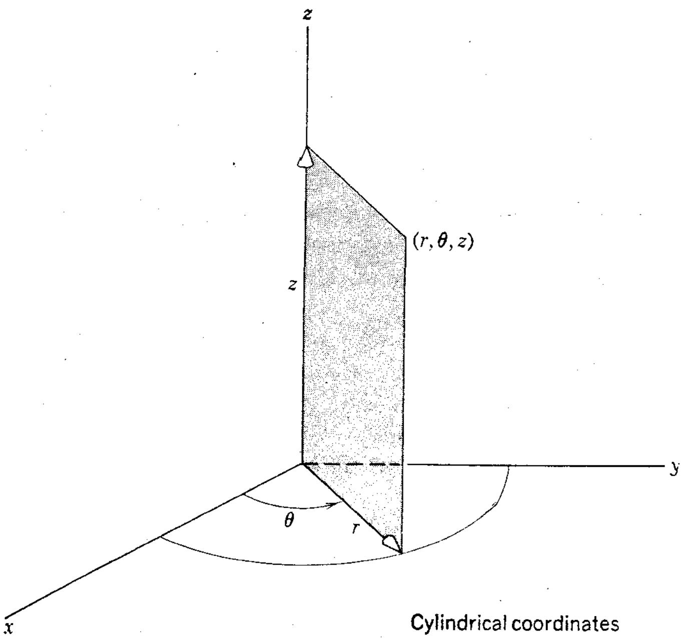
اگر

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \tag{۳-۲۸}$$

آن‌گاه کرل A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{curl} \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (۲۹-۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \qquad (۳۰-۳)$$



شکل ۳ ــ ۵. مختصات استوانه‌ای .

تبصره: با دو بار استفاده از معادله (۳ ــ ۳۰) اتحاد زیر را ثابت کنید .

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \qquad (۳۱-۳)$$

عبارت (۳ ــ ۳۱) لاپلاسین یک بردار را تعریف می‌کند حتی اگر بردار در مختصات دکارتی قائم بیان نشده باشد .

۳ ـ ۳. اعمال برداری در دستگاههای مختصات کروی و استوانه‌ای

عملگرهای گرادیان، دیورژانس، و کرل معنی ثابتی دارندکه مستقل ازدستگاه مختصاتی است که در آن تعریف شده‌اند. این عملگرها مخصوص در دستگاه مختصات قائم بخش ۳ ـ ۲ صورتهای ساده‌ای بخود می‌گیرند. صورتهای متناظر آنها در مختصات استوانه‌ای و کروی را می‌توان با استفاده مستقیم از قاعده زنجیری حساب دیفرانسیل به‌دست آورد.

مثال ۴ ـ ۳: مختصات‌استوانه‌ای (r,θ,z) . مختصات‌استوانه‌ای (r,θ,z) یک نقطه با مختصات دکارتی قائم (x,y,z) همان نقطه به‌صورت زیر باهم متناسبند.

$$x = r\cos\theta \qquad (۳۲-۳)$$

$$y = r\sin\theta \qquad (۳۳-۳)$$

$$z = z \qquad (۳۴-۳)$$

فرض کنید تابع اسکالر $f = f(x,y,z)$ وابسته به x ، y ، z باشد، مقادیر $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ و $z = z$ را در f قرار می‌دهیم. در این صورت f تابعی از r ، θ ، z خواهد بود، برای محاسبه $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ از قاعده زنجیری حساب دیفرانسیل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (۳۵-۳)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad (۳۶-۳)$$

از معادلات (۳ ـ ۳۲) تا (۳ ـ ۳۴) نتیجه می‌شود

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (۳۷-۳)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (۳۸-۳)$$

درنتیجه

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \qquad (۳۹-۳)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \qquad (۴۰-۳)$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (۴۱-۳)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (۴۲-۳)$$

در مثال ۳ ــ ۲ عبارات زیر را برای بردارهای واحد مبنا در امتدادهای r و θ به دست آوردیم .

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\, \mathbf{e}_x + \sin\theta\, \mathbf{e}_y \tag{۴۳ ــ ۳}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\, \mathbf{e}_x + \cos\theta\, \mathbf{e}_y \tag{۴۴ ــ ۳}$$

می‌توانیم این معادلات را برحسب $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ حل کنیم ،

$$\mathbf{e}_x = \cos\theta\, \mathbf{e}_r - \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta \tag{۴۵ ــ ۳}$$

$$\mathbf{e}_y = \sin\theta\, \mathbf{e}_r + \cos\theta\, \mathbf{e}_\theta \tag{۴۶ ــ ۳}$$

گرادیان یک اسکالر در مختصات قائم عبارت است از

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{۴۷ ــ ۳}$$

و باجانشین کردن معادلات (۳ ــ ۴۱) و (۳ ــ ۴۲) و (۳ ــ ۴۵) و (۳ ــ ۴۶) در (۳ــ ۴۷) نتیجه می‌شود

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{۴۸ ــ ۳}$$

که گرادیان یک تابع اسکالر در مختصات استوانه‌ای است .

حال دیورژانس یک تابع اسکالر را در مختصات استوانه‌ای پیدامی‌کنیم یک بردارمفروض مانند A را می‌توان در مختصات قائم و مختصات استوانه‌ای نوشت . چون یک بردار را به دو شکل مختلف نمایش داده‌ایم باید داشته باشیم

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_z\mathbf{e}_z \tag{۴۹ ــ ۳}$$

درنتیجه باتوجه به معادلات (۳ ــ ۴۳) و (۳ ــ ۴۴) و (۳ ــ ۴۹) داریم

$$A_x = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{۵۰ ــ ۳}$$

$$A_y = A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta \tag{۵۱ ــ ۳}$$

$$A_z = A_z \tag{۵۲ ــ ۳}$$

با استفاده از معادلات (۳ ــ ۴۱) و (۳ ــ ۴۲) می‌توان نوشت

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial A_x}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial A_x}{\partial \theta} \tag{۵۳ ــ ۳}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial A_y}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial A_y}{\partial \theta} \tag{۵۴ ــ ۳}$$

و چون

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{۵۵ ــ ۳}$$

باجایگذاری معادلات (۳ ـ ۵۰) و (۳ ـ ۵۱) در (۳ ـ ۵۳) و (۳ ـ ۵۴) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳ - ۵۶)$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳ - ۵۷)$$

حال به‌آسانی لاپلاسین یک تابع اسکالر را در مختصات استوانه‌ای می‌توان محاسبه کرد چون

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \qquad (۳ - ۵۸)$$

می‌توان نوشت

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (۳ - ۵۹)$$

با استفاده از همین روش از معادله (۳ ـ ۳۰) نتیجه درمورد معادله (۳ ـ ۳۰) می‌شود که در مختصات استوانه‌ای داریم .

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{x}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_z \qquad (۳ - ۶۰)$$

تمرین: معادله (۳ ـ ۶۰) را از معادله (۳ ـ ۳۰) با روش اخیر به‌دست آورید .

مثال ۳ ـ ۵: مختصات کروی (R,θ,ϕ) . مختصات کروی (R,θ,ϕ) یک نقطه‌بامختصات قائم (x,y,z) به صورت زیر درارتباطند :

$$x = R\sin\theta\cos\phi \qquad (۳ - ۶۱)$$

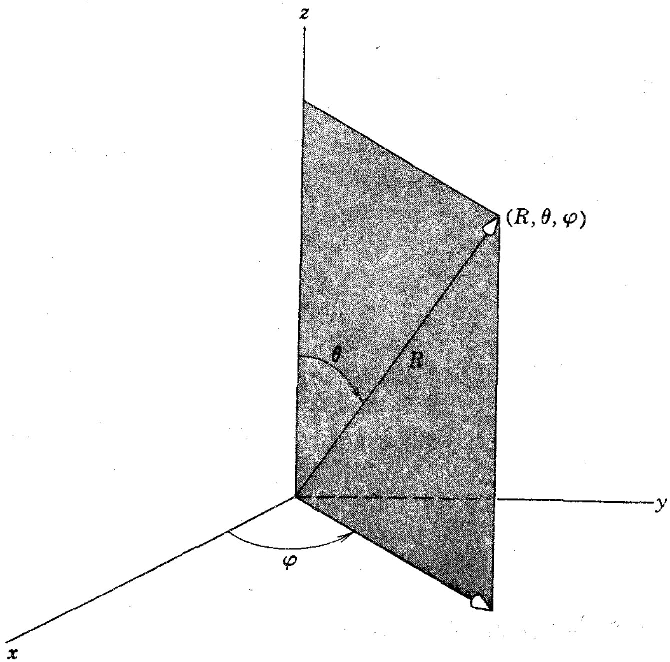
$$y = R\sin\theta\sin\phi \qquad (۳ - ۶۲)$$

$$z = R\cos\theta \qquad (۳ - ۶۳)$$

در این جا R فاصله شعاعی نقطه مفروض از مبدأ مختصات است ، θ عرض نقطه است که ازمحور z ها اندازه‌گیری‌می‌شود و ϕ طول نقطه است‌که ازمحور x ها درصفحه x و y اندازه‌گیری می‌شود . تبدیل مختصات (۳ ـ ۶۱) تا (۳ ـ ۶۳) رامی‌توان به‌صورت دو تبدیل متوالی‌درنظر گرفت :

$$x = r\cos\phi \qquad (۳ - ۶۴)$$

$$y = r\sin\phi \qquad (۳ - ۶۵)$$



Spherical coordinates

شکل ۳ ــ ۵ (b) مختصات کروی .

و

$$z = R \cos \theta \qquad (۶۶ - ۳)$$

$$r = R \sin \theta \qquad (۶۷ - ۳)$$

که هر دو به شکل تبدیل (۳ ــ ۳۲) و (۳ ــ ۳۳) هستند که مختصات قائم را به مختصات استوانه‌ای مبدل می‌کرد . بنابراین می‌توانیم عملگرهای گرادیان ، دیورژانس و لاپلاسین و کرل را در مختصات کروی با استفاده مکرر از نتایج تمرین ۳ ــ ۴ به‌دست آوریم . مثلاً ، گرادیان یک اسکالر تحت مجموعه اول تبدیلات (۳ ــ ۶۴) و (۳ ــ ۶۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \qquad (۶۸ - ۳)$$

با به‌کار بردن مجموعه دوم تبدیلات (۳ ــ ۶۶) و (۳ ــ ۶۷) درمورد

$$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{\partial f}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (۳-۶۹)$$

جمله باقیمانده در معادله (۳ ــ ۶۸) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \qquad (۳-۷۰)$$

و درنتیجه

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \qquad (۳-۷۱)$$

که گرادیان یک تابع اسکالر را در مختصات کروی می‌دهد.

برای محاسبه

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳-۷۲)$$

درمختصات‌کروی‌توجه‌داریم‌که تحت‌مجموعه اول از تبدیلات(۳ ــ ۶۴)و(۳ــ ۶۵)داریم.

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳-۷۳)$$

حال مجموعه دوم تبدیلات (۳ ــ ۶۶) و (۳ ــ ۶۷) را می‌توان برای

$\partial A_r/\partial r + \partial A_z/\partial z$

در معادله (۳ ــ ۷۳) به‌کار برد نتیجه عبارت است از

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_R}{\partial R} + \frac{A_R}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \qquad (۳-۷۴)$$

در این صورت معادله (۳ ــ ۷۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_R}{\partial R} + \left(\frac{A_R}{R} + \frac{A_r}{r}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad (۳-۷۵)$$

از معادلات (۳ ــ ۶۱) تا (۳ ــ ۶۳) نتیجه می‌شود.

$$\mathbf{e}_R = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \qquad (۳-۷۶)$$

برای بردار واحدمبنا درامتدادشعاع‌نتیجه می‌شود. بردارواحدمبنا درامتداد θ را $\mathbf{e}_\theta$ می‌نامیم. این بردار باید بر R و θ واقع شود. چون $\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{e}_R = 1$ ، داریم.

$\mathbf{e}_R\cdot d\mathbf{e}_R/d\theta = 0$

درنتیجه $\mathbf{e}_\theta$ را به‌صورت زیر اختیار می‌کنیم.

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_R}{d\theta} \tag{۳-۷۷}$$

باین ترتیب می‌توان نوشت .

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \tag{۳-۷۸}$$

بردار واحد مبنا $\mathbf{e}_\phi$ درامتداد ϕ بر $\mathbf{e}_r$ عمود است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\phi\,\mathbf{e}_y \tag{۳-۷۹}$$

یک بردار دلخواه $\mathbf{A}$ را می‌توان در مختصات استوانه‌ای یا کروی نوشت ، :

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_z\mathbf{e}_z = A_R\mathbf{e}_R + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi \tag{۳-۸۰}$$

که در آن

$$\mathbf{e}_r = \cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\,\mathbf{e}_y \tag{۳-۸۱}$$

همچنین معادلات (۳ – ۷۶) و (۳ – ۷۸) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{e}_R = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_z \tag{۳-۸۲}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_z \tag{۳-۸۳}$$

حال باتوجه به (۳ – ۸۰) داریم

$$\begin{aligned} A_R &= A_r(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_R) + A_z(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_R) \\ A_\theta &= A_r(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta) + A_z(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \tag{۳-۸۴}$$

و به کمک معادلات (۳ – ۸۲) و (۳ – ۸۳) می‌توان نوشت

$$(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_R) = \sin\theta \qquad (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_R) = \cos\theta \tag{۳-۸۵}$$

$$(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta) = \cos\theta \qquad (\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_\theta) = -\sin\theta \tag{۳-۸۶}$$

بنابراین

$$A_R = \sin\theta\,A_r + \cos\theta\,A_z \tag{۳-۸۷}$$

$$A_\theta = \cos\theta\,A_r - \sin\theta\,A_z \tag{۳-۸۸}$$

از حذف A_z بین معادلات (۳ – ۸۷) و (۳ – ۸۸) نتیجه می‌شود .

$$\sin\theta\,A_R + \cos\theta\,A_\theta = A_r \tag{۳-۸۹}$$

بنابراین :

$$\frac{A_r}{r} = \frac{A_R}{R} + \frac{A_\theta}{R}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{۳-۹۰}$$

باتوجه به معادله (۳ – ۷۵) داریم

$$\frac{A_R}{R} + \frac{A_r}{r} = \frac{2A_R}{R} + \frac{A_\theta}{R}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{۳-۹۱}$$

و بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_R}{\partial R} + \frac{2A_R}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{R}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad (۳-۹۲)$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \qquad (۳-۹۳)$$

حال محاسبهٔ لاپلاسین در مختصات کروی آسان است ، زیرا

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \qquad (۳-۹۴)$$

درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \qquad (۳-۹۵)$$

محاسبه کرل به‌همین طریق انجام می‌شود و می‌توان نشان داد که

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_R + \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi \qquad (۳-۹۶)$$

تبصره: رابطهٔ بین مؤلفه‌های یک بردار مفروض در مختصات قائم و مؤلفه‌های همان بردار درمختصات‌استوانه‌ای یا کروی رامی‌توان به‌آسانی به‌صورت‌ماتریسی نوشت . درمختصات استوانه‌ای داریم

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (۳-۹۷)$$

و برای مختصات کروی می‌توان نوشت .

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (۳-۹۸)$$

۳ ـ ۴. اتحادهای برداری دیفرانسیل

تعداد زیادی از اتحادهای برداری دیفرانسیل در فیزیک اهمیت زیادی دارند. آنها را فهرست می‌کنیم، ابتدا مهمترین آنها را می‌نویسیم، دانشجویان باید آنها را در مختصات قائم ثابت کرده و به‌خاطر بسپارند.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0$$ (۳ ـ ۹۹)

$$\nabla\times(\nabla f) = 0$$ (۳ ـ ۱۰۰)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$$ (۳ ـ ۱۰۱)

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\text{Б}$$ (۳ ـ ۱۰۲)

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$$ (۳ ـ ۱۰۳)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\mathbf{A} + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})$$ (۳ ـ ۱۰۴)

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\times\mathbf{A} + f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$$ (۳ ـ ۱۰۵)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$ (۳ ـ ۱۰۶)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r} = 3$$ (۳ ـ ۱۰۷)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r} = 0$$ (۳ ـ ۱۰۸)

$$(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \mathbf{A}$$ (۳ ـ ۱۰۹)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$ (۳ ـ ۱۱۰)

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)f + \frac{\partial f}{\partial t}$$ (۳ ـ ۱۱۱)

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$$ (۳ ـ ۱۱۲)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\,\boldsymbol{\nabla}g) = f\,\nabla^2 g + \boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{\nabla}g$$ (۳ ـ ۱۱۳)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\{f\,\boldsymbol{\nabla}g - g\,\boldsymbol{\nabla}f\} = (f\,\nabla^2 g - g\,\nabla^2 f)$$ (۳ ـ ۱۱۴)

$$\boldsymbol{\nabla}r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$ (۳ ـ ۱۱۵)

که درآن

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\boldsymbol{\nabla}(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$$ (۳ ـ ۱۱۶)

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\,\boldsymbol{\nabla}f - f\,\boldsymbol{\nabla}g)$$ (۳ ـ ۱۱۷)

که درآن f و g میدانهای اسکالرند

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|r|^3}\right)=\nabla\cdot\nabla\left(\frac{-1}{r}\right)=\nabla^2\left(\frac{-1}{r}\right)=0\qquad r\neq 0 \tag{۳-۱۱۸}$$

تبصره: اثبات اتحادهای (۳-۹۹) تا (۳-۱۱۸) دربعضی حالات با استفاده مناسب از اصل خطی بودن به آسانی صورت می‌گیرد می‌توان فرض کرد که هر زوج از بردارها که دریک اتحاد دخالت دارند کاملا" متصلند، یا بطور خطی وابسته‌اند این توجه انتخاب بردارهای لازم برای اثبات اتحادها راساده می‌سازد. می‌توان نشان دادکه یک اتحاد وقتی‌ثابت می‌شود که آن را برای یک جفت از بردارهای مستقل خطی و یک جفت از بردارهای وابسته خطی ثابت کنیم. این ایده را به شکل زیر می‌توان به‌کار بست: اگر دو بردار انتخاب شده مستقل خطی باشد، آن‌گاه بنابه روش اشمیت که در فصل ۱ بحث شدمی‌توانیم یک جفت ازبردارهای متقامد انتخاب کنیم. به‌عنوان نمونه، اتحاد (۳-۱۰۲) را درنظر بگیرید فرض کنید.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}&=A_x\mathbf{e}_x\\
\mathbf{B}&=B_y\mathbf{e}_y\\
\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_xB_y)\mathbf{e}_z\\
\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y)-\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial x}(A_xB_y)\\
\mathbf{B}\cdot\nabla&=B_y\frac{\partial}{\partial y}\\
\mathbf{A}\cdot\nabla&=A_x\frac{\partial}{\partial x}\\
\nabla\cdot\mathbf{B}&=\frac{\partial B_y}{\partial y}\\
\nabla\cdot\mathbf{A}&=\frac{\partial A_x}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}&\\
=\mathbf{e}_xB_y\frac{\partial A_x}{\partial y}-\mathbf{e}_yA_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+\mathbf{e}_xA_x\frac{\partial B_y}{\partial y}-\mathbf{e}_yB_y\frac{\partial A_x}{\partial x}&\\
=\mathbf{e}_x\left(B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)-\mathbf{e}_y\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)&\\
=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y)-\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(A_xB_y)&\\
=\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})&
\end{aligned}$$

پس معادله (۳-۱۰۲) برای بردارهای مستقل خطی ثابت شد.

برای حالت وابسته خطی فرض می‌کنیم.

$$\mathbf{B}=f\mathbf{A}$$

آنگاه

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$$

و

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

ازطرفی با دوران مناسب محورهای مختصات می‌توان نوشت :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{B} = (fA_x)\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla = fA_x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x}(fA_x)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} \\ = \mathbf{e}_x f A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - \mathbf{e}_x A_x \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \mathbf{e}_x A_x \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) - \mathbf{e}_x f A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ = 0\end{aligned}$$

به این ترتیب معادله (۳ــ۱۰۲) برای بردارهای مستقل خطی ثابت می‌شود . پس (۳ــ۱۰۲) به‌ازای هر زوج از بردارها برقرار است .

۳ــ۵. انتگرال برداری بر یک رویهٔ بسته

مکعبی را در مختصات دکارتی درنظر بگیرید . دستگاه مختصات را به‌قسمی اختیار کنید که وجوه مکعب بر محورهای مختصات عمود باشند ، و مبدأ مختصات داخل مکعب قرار گیرد . مکعب دارای شش وجه به شماره ۱ تا ۶ است عنصرسطح را روی هریک از وجوه می‌توان به‌وسیله یک کمیت برداری نشان داد . امتداد این کمیت برداری همان امتداد قائم و جهت آن متوجه خارج است . پس، شش عنصر سطح وابسته به مکعب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند .

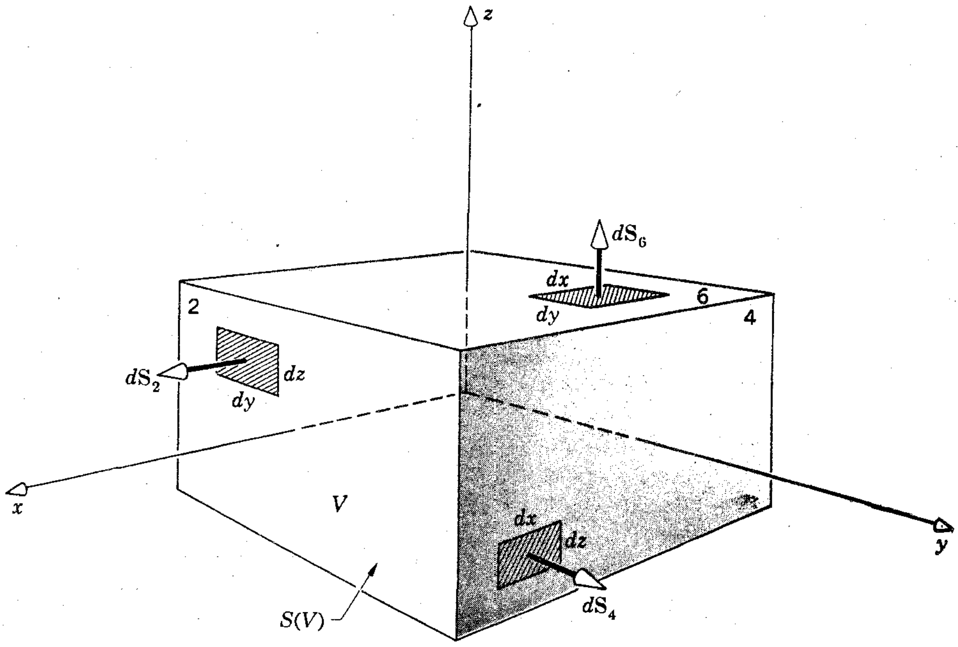
$$d\mathbf{S}_1 = -\mathbf{e}_x\, dy\, dz \qquad d\mathbf{S}_2 = \mathbf{e}_x\, dy\, dz \tag{۳ــ۱۱۹}$$

$$d\mathbf{S}_3 = -\mathbf{e}_y\, dx\, dz \qquad d\mathbf{S}_4 = \mathbf{e}_y\, dx\, dz \tag{۳ــ۱۲۰}$$

$$d\mathbf{S}_5 = -\mathbf{e}_z\, dx\, dy \qquad d\mathbf{S}_6 = \mathbf{e}_z\, dx\, dy \tag{۳ــ۱۲۱}$$

که در آن $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ و $\mathbf{e}_z$ بردارهای مبنا در دستگاه مختصات قائم وابسته به مکعب است .

می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر $A = A(x,y,z)$ به‌قسمی باشد که $\partial A/\partial x$ بر V انتگرال‌پذیر باشد ، آن‌گاه



$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A \qquad (۳-۱۲۲)$$

در این جا V حجم مکعب است (شکل ۳ ــ ۶) . در هر نقطه داخل یک وجه مکعب $d\mathbf{S}$ درامتداد قائم و به سمت خارج رویه متوجه است وعنصر سطح حول آن نقطه رانشان می‌دهد .

برهان: به سمت راست معادله (۳ ــ ۱۲۲) توجه کنید .

$$\iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A = \sum_{k=1}^{6} \iint_{S_k} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S}_k)A \qquad (۳-۱۲۳)$$

که درآن

$$S(V) = \sum_{k=1}^{6} S_k \qquad (۳-۱۲۴)$$

معادله (۳ ــ ۱۲۳) بیان می‌کند که سطح کل مکعب برابر است با مجموع شش سطح که وجوه آن را تشکیل می‌دهند .

معادله (۳ ــ ۱۲۳) نتیجه‌ای از (۳ ــ ۱۲۴) و خطی بودن عملگر انتگرال است . وبه‌این

معنی است که انتگرال $(\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A$ بر یک رویهٔ بسته که از چند قسمت جدا تشکیل شده است برابر است با مجموع انتگرالهای $(\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A$ روی هریک از قطعات به‌عنوان نتیجه‌ای از (۳ـ ۱۱۹) تا (۳ ـ ۱۲۱) می‌توان نوشت .

$$\iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A = \iint_{S_1} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S}_1)A_1 + \iint_{S_2} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S}_2)A_2 \qquad (۱۲۵-۳)$$

و از معادلات (۳ ـ ۱۱۹)

$$\iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A = \iint_{S_2} A_2\, dy\, dz - \iint_{S_1} A_1\, dy\, dz \qquad (۱۲۶-۳)$$

اگر معادله S_2 به صورت $x = x_2 =$(ثابت) معادله S_1 به صورت (ثابت)$= x = x_1$ باشد آن‌گاه، مقدار A_2 و A بر S_2 به شکل زیر نوشته می‌شوند .

$$A_2 = A(x_2,y,z) \qquad (۱۲۷-۳)$$

حال آن‌که

$$A_1 = A(x_1,y,z) \qquad (۱۲۸-۳)$$

پس معادله (۳ ـ ۱۲۶) به‌صورت زیر درمی‌آید .

$$\iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A = \iint_{S_2} A(x_2,y,z)\, dy\, dz - \iint_{S_1} A(x_1,y,z)\, dy\, dz \qquad (۱۲۹-۳)$$

چون بحث درمورد یک مکعب است مساحت وجوه S_1 و S_2 برابرند . بنابراین، حدود انتگرال بر y و z برای هر جمله در معادله (۳ ـ ۱۲۹) یکسان است . ما این مطلب رابانوشتن $S_1 = S_2 = S$ نشان‌می‌دهیم، که درآن S سطح هر مقطع مکعب عمود بر محور x است . دراین صورت معادله (۳ ـ ۱۲۹) به شکل زیر نوشته می‌شود .

$$\iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A = \iint_{S} A(x_2,y,z)\, dy\, dz - \iint_{S} A(x_1,y,z)\, dy\, dz \qquad (۱۳۰-۳)$$

از طرف دیگر از

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S dy\, dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial x}\, dx \qquad (۱۳۱-۳)$$

نتیجه می‌شود

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S A(x_2,y,z)\, dy\, dz - \iint_S A(x_1,y,z)\, dy\, dz \qquad (۱۳۲-۳)$$

و بنابراین

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{S(V)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S})A \qquad (۳-۱۳۳)$$

و حکم ثابت می‌شود .

تعمیم

نتیجه حاصل از معادله (۳ــ۱۳۳) نه تنها برای مکعب به‌کار می‌رود ، بلکه برای یک جسم بهر شکلی قابل استفاده است . این مطلب را در این جا ثابت نمی‌کنیم ، ولی اثبات آن کاملاً ساده است . ایده اساسی از این قراراست که هر جسم باشکل دلخواه رامی‌توان به مقدار زیادی از مکعبهای کوچک تقسیم کرد ، و معادله (۳ــ۱۳۳) رابرای هریک ازاین مکعبها به‌کار برد . انتگرال سطح حاصل از مکعبهای مجاور یکدیگر را حذف می‌کنند ، زیرا قائمهای خروجی وجوه مجاور متقابلند . سپس کمیت حاصل از هر مکعب را جمع می‌کنیم درحالی که ابعاد آنها را بینهایت کوچک و تعداد آنها را نامتناهی اختیار می‌کنیم . درحد معادله (۳ــ۱۳۳) را مجدداً به‌دست می‌آوریم .

که درآن V حجم جسم‌دلخواه ، $S(V)$ سطح کل و $d\mathbf{S}$ عنصرمساحت است که درهر نقطه $S(V)$ درامتداد قائم و متوجه خارج است .

تبصره: با تعریف ،

$$dS_x = \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} \qquad (۳-۱۳۴)$$

و

$$dV = dx\,dy\,dz$$

معادله (۳ــ۱۳۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\,dV = \iint_{S(V)} dS_x A \qquad (۳-۱۳۵)$$

معمولاً نماد فوق را به‌صورت فشرده‌تر

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x}\,dV = \int_{S(V)} dS_x A \qquad (۳-۱۳۶)$$

می‌نویسیم .

تدابیر لازم برای تقویت حافظه

یک تدبیر تقویتی طرحی است که به حافظه کمک می‌کند تا یک عبارت پیچیده ریاضی را

در خود حفظ کند ، هریک از این تدابیر اگر باعث به‌خاطرسپردن تعداد زیادی ازفرمولها‌شود بسیار مفید خواهد بود ، زیرا در این صورت کافی است فقط آن تدبیر را برای به‌خاطر آوردن چندین فرمول به یاد داشت .

مثال ۳ ـ ۶: معادله زیر را برای تقویت حافظه درنظر بگیرید

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dS_x}{dV} \qquad (۳-۱۳۷)$$

این معادله را با ضرب طرفین از راست در تابع اسکالر دلخواه تعبیر می‌کنیم . در این صورت ،

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dS_x}{dV} A \qquad (۳-۱۳۸)$$

با منظور کردن dS_x/dV به‌عنوان یک کسر می‌توان نوشت .

$$\frac{\partial A}{\partial x} dV = dS_x A \qquad (۳-۱۳۹)$$

بنابراین

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV = \int_{S(V)} dS_x A$$

۳ ـ ۶ . قضیهٔ دیورژانس

اگر معادله (۳ ـ ۱۲۲) را برای مؤلفه‌های A_x و A_y ، A_z بردار

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \qquad (۳-۱۴۰)$$

به‌کار بریم ، نتیجه می‌شود .

$$\int_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot A_x\mathbf{e}_x \qquad (۳-۱۴۱)$$

$$\int_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot A_y\mathbf{e}_y \qquad (۳-۱۴۲)$$

$$\int_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot A_z\mathbf{e}_z \qquad (۳-۱۴۳)$$

از جمع معادلات (۳ ـ ۱۴۱) تا (۳ ـ ۱۴۳) تساوی

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳-۱۴۴)$$

حاصل می‌شودکه به قضیه "دیورژانس" معروف‌است . قضیه دیورژانس انتگرال حجم دیورژانس یک میدان برداری را به انتگرال سطح مؤلفه نرمالش مربوط می‌سازد . با استفاده از معادله (۳ ــ ۱۴۴) می‌توانیم یک تعبیر فیزیکی از مفهوم دیورژانس یک میدان برداری ارائه دهیم . انتگرال سطح سمت راست معادله (۳ ــ ۱۴۴) فلوی بردار $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود .

$$\Phi(\mathbf{A}) = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \tag{۱۴۵ ــ ۳}$$

ازسمت چپ معادله (۳ ــ ۱۴۴) نتیجه می‌شودکه ابعاد$\nabla \cdot \mathbf{A}$ بایدبرابر ϕ در واحد حجم یا چگالی فلو باشد . بنابراین$\nabla \cdot \mathbf{A}$ را چگالی فلو یا فلوی در واحدحجم‌میدان $\mathbf{A}$ گویند . وقتی تأکید روی این معنی است ، معادله (۳ ــ ۱۴۴) را معمولاً" به صورت زیر می‌نویسیم .

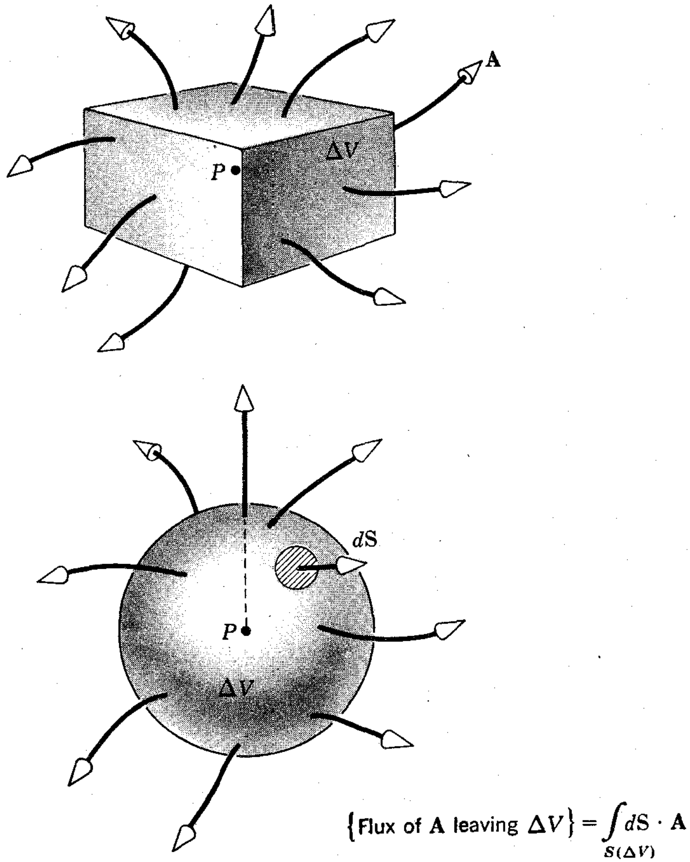
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{S(\Delta V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}}{\Delta V} \tag{۱۴۶ ــ ۳}$$

و معنایش این است که برای هر نقطه P دیورژانس $\mathbf{A}$ را در P با محصور کردن P در یک حجم کوچک به‌دست آورده و سپس نسبت فلو به حجم را وقتی عنصر حجم به سمت صفر میل می‌کند محاسبه می‌کنیم (شکل ۳ ــ ۷) . این حد ، درصورت وجود ، دیورژانس $\mathbf{A}$ در P خواهد بود ، اگر $\mathbf{A}$ میدان سرعت سیالی را محدود به رویه[۶] $S(V)$ را نشان دهد ، آن‌گاه $\Phi(\mathbf{A})$ برابر حجم فلویی است که سطح $S(V)$ را در واحد زمان قطع می‌کند . فلوی مثبت باین معنی است‌که سیال ناحیه‌ای از فضا را که بوسیله $S(V)$ محصور شده ترک می‌کند . درصورتی که فلوی منفی باین معنی است که سیال به‌آن ناحیه داخل می‌شود . درحالت اول می‌گوییم‌چشمه‌ها داخل $S(V)$ هستند ، ولی در حالت دوم می‌گوییم $S(V)$ دارای حفره است . دیورژانس $\mathbf{A}$ حجم‌سیال تولید شده یا نابود شده در واحد حجم فضا را در واحد زمان در داخل $S(V)$ نشان می‌دهد . پس دیورژانس $\mathbf{A}$ چگالی چشمه یا حفره داخل $S(V)$ است . اگر فلوی $\mathbf{A}$ صفر باشد درآن‌صورت هیچ سیالی رویه $S(V)$ را قطع نمی‌کند یا باندازه‌ای که داخل می‌شود همان اندازه خارج می‌شود . اگر در تمام حجم یک سیال $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$، آن‌گاه‌میدان $\mathbf{A}$رادرآن حجم سولنوبیدال گوییم ، در این صورت هیچ چشمه یا حفره‌ای وجود ندارد .

۳ ــ ۷. قضیه گرادیان

با استفاده ازمعادله (۳ ــ ۱۲۲) وتوجه به این‌که $\mathbf{e}_x$ ، $\mathbf{e}_y$ ، $\mathbf{e}_z$ بردارهای ثابتند ، می‌توان نوشت :

$$\int_V \mathbf{e}_x \frac{\partial A}{\partial x}\, dV = \int_{S(V)} \mathbf{e}_x (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_x) A \tag{۱۴۷ ــ ۳}$$



شکل ۳ ــ ۷. دیورژانس A در P را با محصور کردن P در حجم کوچک ΔV به‌دست‌آورده سپس نسبت فلوی A به حجم محصور را وقتی $\Delta V \to 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$\int_V \mathbf{e}_y \frac{\partial A}{\partial y}\, dV = \int_{S(V)} \mathbf{e}_y (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_y) A \qquad (۱۴۸ - ۳)$$

$$\int_V \mathbf{e}_z \frac{\partial A}{\partial z}\, dV = \int_{S(V)} \mathbf{e}_z (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_z) A \qquad (۱۴۹ - ۳)$$

که پس از جمع نتیجه می‌شود.

$$\int_V \nabla A\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S}\, A \qquad (۱۵۰ - ۳)$$

که در آن

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS = \mathbf{e}_x(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_y) + \mathbf{e}_z(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_z) \qquad (۳-۱۵۱)$$

یا

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS = \mathbf{e}_x\, dS_x + \mathbf{e}_y\, dS_y + \mathbf{e}_z\, dS_z \qquad (۳-۱۵۲)$$

در این جا $\mathbf{n}$ بردار واحد قائم را در هر نقطه $S(V)$ نشان می‌دهد .

۳ـ۸ . قضیه کرل

از معادله (۳ـ۱۲۲) نتیجه می‌شود .

$$\int_V \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dV = \int_{S(V)} dS_y A_z - dS_z A_y \qquad (۳-۱۵۳)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dV = \int_{S(V)} dS_z A_x - dS_x A_z \qquad (۳-۱۵۴)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dV = \int_{S(V)} dS_x A_y - dS_y A_x \qquad (۳-۱۵۵)$$

و با فرض

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x\, dS_x + \mathbf{e}_y\, dS_y + \mathbf{e}_z\, dS_z \qquad (۳-۱۵۶)$$

و

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \qquad (۳-۱۵۷)$$

از معادله (۳ـ۱۲۹) نتیجه می‌شود که معادلات (۳ـ۱۵۳) و (۳ـ۱۵۵) را می‌توان به صورت یک معادله برداری واحد نوشت .

$$\int_V (\nabla\times\mathbf{A})\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S}\times\mathbf{A} \qquad (۳-۱۵۸)$$

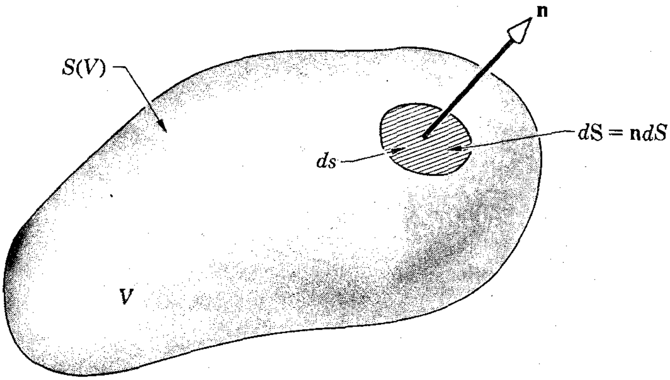
که در آن

$$d\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \mathbf{n}\times\mathbf{A}\, dS \qquad (۳-۱۵۹)$$

یا

$$d\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ dS_x & dS_y & dS_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (۳-۱۶۰)$$

توجه: به خاطر داشته باشید که $d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$ بر رویه $S(V)$ مماس است .بنابراین معادله (۳ـ۱۵۸) انتگرال حجم کرل یک میدان برداری را به انتگرال سطح مؤلفه‌های مماس آن مرتبط می‌سازد .



شکل ۳ ــ ۸. حوزهٔ انتگرال‌گیری قضایای کرل ، دیورژانس و گرادیان عبارت‌است‌ازحجم V که به سطح $S(V)$ محدود است . بر $S(V)$ ، عنصر متوجه سطح برابراست با $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$.

تبصره: قضایای انتگرال را برای عملگرهای دیورژانس، گرادیان و کرل تعمیم دادیم و دیدیم که همه در یک خاصیت مشترکند . این انتگرالها یک میدان اسکالر یا برداری بر یکرویه بسته درفضا رابه مشتقات نسبی میدان که ازحجم محدود به این رویه می‌گذرد مرتبط می‌سازد . به‌همین طریق می‌توان قضایای انتگرال رابرای دیورژانس، گرادیان وکرل تعمیم‌داد این قضایا مقادیر یک میدان بر یک منحنی بسته در فضا را به مشتقات نسبی میدانی که ازسطح محدودبه این منحنی می‌گذرد مرتبط می‌سازد .

۳ ــ ۹ . انتگرال برداری بر یک منحنی بسته

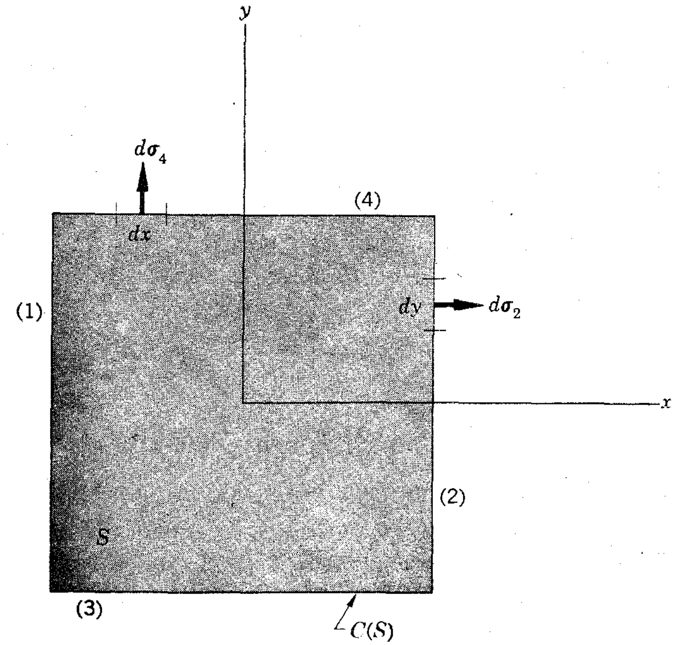
مربعی را در مختصات دکارتی قائم درنظر بگیرید . دستگاه مختصات را به‌قسمی اختیار می‌کنیم که اضلاع مربع بر محورهای مختصات عمود باشند و مبدأ داخل این مربع قرار گیرد . چهار ضلع مربع را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم . عنصر قوس را روی هریک از چهار ضلع می‌توانیم به‌صورت یک کمیت برداری نشان دهیم . این‌کمیت برداری بابردار قائم متوجه به خارج بر ضلع موردنظر هم‌جهت است . پس، چهار عنصر قوس وابسته به مربع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت .

$$d\mathbf{s}_1 = -\mathbf{e}_x\, dy \qquad d\mathbf{s}_2 = \mathbf{e}_x\, dy \tag{۱۶۱ ــ ۳}$$

$$d\mathbf{s}_3 = -\mathbf{e}_y\, dx \qquad d\mathbf{s}_4 = \mathbf{e}_y\, dx \tag{۱۶۲ ــ ۳}$$

که در آن $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ بردارهای پایه در دستگاه مختصات قائم به مبدا مرکز مربع است .

ثابت خواهیم کرد که اگر $A = A(x,y)$ به قسمی باشد که $\partial A/\partial x$ بر S انتگرال‌پذیرباشد ،



شکل ۳ ــ ۹ . سطح مربعی S و تمام منحنی مرزی $C(S)$.

آن‌گاه

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\boldsymbol{\sigma})A \qquad (۳-۱۶۳)$$

دراین‌جا S قسمتی از رویه است‌که داخل مربع قراردارد و $C(S)$ تمام مرز مربع رانشان می‌دهد (شکل ۳ ــ ۹) . در هر نقطهٔ روی یک ضلع مربع (غیر ازاضلاع قائم) ، $d\boldsymbol{\sigma}$ درامتداد قائم بر ضلع و به سمت خارج و عنصر قوس حول آن نقطه را نشان می‌دهد .

اثبات : سمت راست معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۳) را درنظر می‌گیریم ،

$$\int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\boldsymbol{\sigma})A = \sum_{k=1}^{4} \int_{C_k} (\mathbf{e}_x \cdot d\boldsymbol{\sigma})A \qquad (۳-۱۶۴)$$

که در آن

$$C(S) = \sum_{k=1}^{4} C_k \qquad (۳-۱۶۵)$$

معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۴) بیان می‌کند که تمام منحنی مرزی مربع برابر مجموع چهارخط است که اضلاع مربع را تشکیل می‌دهند .

معادلهٔ (۳ــ ۱۶۴) نتیجه‌ای از معادلهٔ (۳ــ ۱۶۵) وخطی بودن عملگرانتگرال است. یعنی انتگرال $A(\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})$ بریک منحنی‌بستهٔ متشکل ازچند قطعهٔ مجزا برابرمجموع انتگرالهای $A(\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})$ بر هریک از قطعات است.

از معادلات (۳ــ ۱۶۱) و (۳ــ ۱۶۲) نتیجه می‌شود:

$$\int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})A = \int_{C_1} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma}_1)A + \int_{C_2} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma}_2)A \qquad (۱۶۶-۳)$$

و از معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۱)،

$$\int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})A = \int_{C_2} A_2\, dy - \int_{C_1} A_1\, dy \qquad (۱۶۷-۳)$$

اگرمعادلهٔ C_2 به صورت (ثابت)$= x_2 = x$ومعادلهٔ C_1 به صورت(ثابت)$= x_1 = x$باشد، آن‌گاه مقدار A_2 از A بر C_2 برابر

$$A_2 = A(x_2,y) \qquad (۱۶۸-۳)$$

و مقدار A_1 برابر است با

$$A_1 = A(x_1,y) \qquad (۱۶۹-۳)$$

بنابراین معادله (۳ــ ۱۶۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})A = \int_{C_2} A(x_2,y)\, dy - \int_{C_1} A(x_1,y)\, dy \qquad (۱۷۰-۳)$$

چون شکل مورد بحث یک‌مربع است، طول‌اضلاع C_1 و C_2 برابرند. پس حدودانتگرال‌گیری بر y برای هر جملهٔ معادلهٔ(۳ ــ ۱۷۰)برابراست .این‌مطلب رابا انتخاب$C_1 = C_2 = C$نشان می‌دهیم، که درآن C قطعه خط واقع داخل مربع است که ازتقاطع خط‌موازی محور y هابه‌دست آمده باشد. در این صورت معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۰) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{\sigma})A = \int_{C} A(x_2,y)\, dy - \int_{C} A(x_1,y)\, dy \qquad (۱۷۱-۳)$$

از طرف دیگر،

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial x}\, dx \qquad (۱۷۲-۳)$$

نتیجه می‌دهد

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C A(x_2,y)\, dy - \int_C A(x_1,y)\, dy \qquad (۱۷۳-۳)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\iint\limits_S \frac{\partial A}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{C(S)} (\mathbf{e}_x \cdot d\boldsymbol{\sigma})A \qquad (۱۷۴-۳)$$

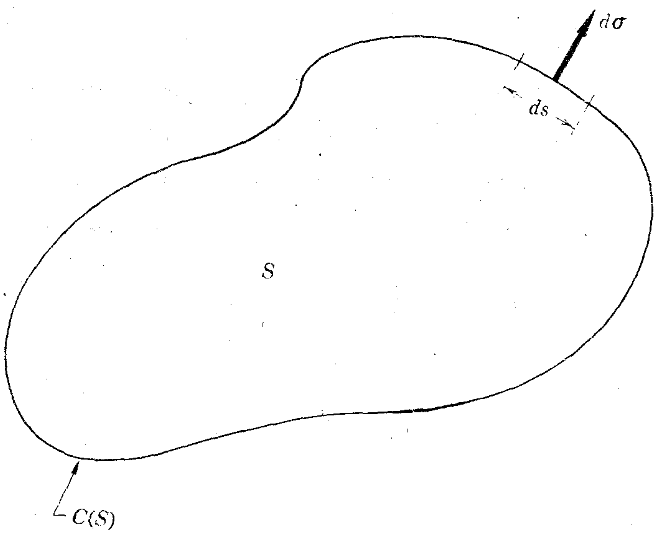
و حکم ثابت می‌شود .

تعمیم

نتیجهٔ حاصل از معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۴) را می‌توان برای یک ناحیهٔ دلخواه به جای مربع تعمیم داد . ناحیه‌ای با شکل دلخواه را می‌توانیم به تعداد زیادی مربع کوچک تقسیم کرده و معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۴) را برای هریک از این مربعها به‌کار بریم . انتگرالهای منحنی‌الخط روی اضلاع مجاور مربعها با یکدیگر حذف می‌شوند زیرا قائم متوجه به خارج اضلاع مجاور متقابل خواهند بود . سپس مقادیر حاصل از هر مربع کوچک را جمع می‌کنیم درحالی که اضلاع آنها به سمت صفر میل کرده و تعداد آنها بدون حد و مرز افزایش می‌یابد . در حد مجدداً" معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۴) به‌دست می‌آید . حال S سطح یک رویهٔ دلخواه و $C(S)$ تمام منحنی مرزی ، و $d\boldsymbol{\sigma}$ عنصر قوس درجهت قائم متوجه به خارج در هر نقطهٔ $C(S)$ است .

تبصره : اگر تعریف کنیم ،

$$d\sigma_x = \mathbf{e}_x \cdot d\boldsymbol{\sigma} \qquad (۱۷۵-۳)$$



شکل ۳ ــ ۱۰ . رویهٔ مسطح S و تمام منحنی مرزی $C(S)$. بردار $d\boldsymbol{\sigma}$ بر $C(S)$ عمودبوده و متوجه خارج S است . اندازهٔ $|d\boldsymbol{\sigma}| = ds$ ، که درآن ds دیفرانسیل عنصرطول قوس بر $C(S)$ است .

و

$$dS = dx\,dy \tag{۱۷۶ - ۳}$$

در آن صورت معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}\,dS = \int_{C(S)} d\sigma_x A \tag{۱۷۷ - ۳}$$

برای بیان مختصرتر این مطلب معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۷) را چنین می‌نویسیم

$$\int_S \frac{\partial A}{\partial x}\,dS = \int_{C(S)} d\sigma_x A \tag{۱۷۸ - ۳}$$

حال معادلهٔ حفظی

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dS} \tag{۱۷۹ - ۳}$$

معادلهٔ (۳ ــ ۱۷۸) را نتیجه می‌دهد درصورتی که آن را به صورت زیر تعبیر کنیم :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dS} A \tag{۱۸۰ - ۳}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}\,dS = d\sigma_x A \tag{۱۸۱ - ۳}$$

۳ ــ ۱۰ . قضیهٔ دیورژانس دوبعدی

اگر معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۳) را درمورد مؤلفه‌های A_x و A_y

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y \tag{۱۸۲ - ۳}$$

به‌کار بریم نتیجه می‌شود ،

$$\int_S \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dS = \int_{C(S)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot A_x\mathbf{e}_x \tag{۱۸۳ - ۳}$$

$$\int_S \frac{\partial A_y}{\partial y}\,dS = \int_{C(S)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot A_y\mathbf{e}_y \tag{۱۸۴ - ۳}$$

از جمع معادلات (۳ ــ ۱۸۳) و (۳ ــ ۱۸۴) داریم

$$\int_S \nabla\cdot\mathbf{A}\,dS = \int_{C(S)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A} \tag{۱۸۵ - ۳}$$

که قضیهٔ دیورژانس دوبعدی است . این قضیه انتگرال سطح دیورژانس یک میدان برداری را به انتگرال منحنی‌الخط مؤلفهٔ قائم میدان حول منحنی مرزی مرتبط می‌سازد .

۳ ــ ۱۱ . قضیه گرادیان دوبعدی

با استفاده از معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۳) و توجه به این مطلب که $\mathbf{e}_x$ و $\mathbf{e}_y$ بردارهای ثابتند، می‌توان نوشت:

$$\int_S \mathbf{e}_x \frac{\partial A}{\partial x}\, dS = \int_{C(S)} \mathbf{e}_x(d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_x)A \qquad (۱۸۶ - ۳)$$

$$\int_S \mathbf{e}_y \frac{\partial A}{\partial y}\, dS = \int_{C(S)} \mathbf{e}_y(d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_y)A \qquad (۱۸۷ - ۳)$$

از جمع این معادلات نتیجه می‌شود

$$\int_S \nabla A\, dS = \int_{C(S)} d\boldsymbol{\sigma} A \qquad (۱۸۸ - ۳)$$

که در آن

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{e}_x(d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_y(d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_y) \qquad (۱۸۹ - ۳)$$

یا

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_x\, d\sigma_x + \mathbf{e}_y\, d\sigma_y \qquad (۱۹۰ - ۳)$$

در این جا $\mathbf{n}$ بردار قائم متوجه به خارج $C(S)$ در هر نقطه روی $C(S)$، و $d\sigma$ عنصر طول قوس $C(S)$ است.

۳ ــ ۱۲ . قضیهٔ کرل دوبعدی

یک کاربرد معادلهٔ (۳ ــ ۱۶۳) نتیجه می‌دهد

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dS = \int_{C(S)} d\sigma_x A_y - d\sigma_y A_x \qquad (۱۹۱ - ۳)$$

و اگر بنویسیم

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_x\, d\sigma_x + \mathbf{e}_y\, d\sigma_y = \mathbf{n}\, d\sigma \qquad (۱۹۲ - ۳)$$

و

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y \qquad (۱۹۳ - ۳)$$

آن‌گاه ازمعادلهٔ (۳ ــ ۲۹) نتیجه‌می‌شودکه معادلهٔ (۳ ــ ۱۹۱) رامی‌توان‌به‌صورت یک معادلهٔ برداری نوشت:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A}\, dS = \int_{C(S)} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A} \qquad (۱۹۴ - ۳)$$

که در آن

$$d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A} = \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, d\sigma \tag{۳-۱۹۵}$$

یا

$$d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d\sigma_x & d\sigma_y & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} \tag{۳-۱۹۶}$$

فرض کنید $\mathbf{e}_z$ بردار واحد ثابت عمود بر صفحهٔ x ، y باشد که $C(S)$ برآن واقع است . از حاصلضرب اسکالر $\mathbf{e}_z$ در معادلهٔ (۳ ــ ۱۹۴) نتیجه می‌شود

$$\int_S \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dS = \int_{C(S)} \mathbf{e}_z \cdot (d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}) \tag{۳-۱۹۷}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۱ ــ ۷۱) داریم

$$\int_S \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dS = \int_{C(S)} (\mathbf{e}_z \times d\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{A} \tag{۳-۱۹۸}$$

توجه کنیدکه $\mathbf{e}_z$ بر $d\boldsymbol{\sigma}$ درهرنقطهٔ منحنی $C(S)$ عمود است . پس $\mathbf{e}_z \times d\boldsymbol{\sigma}$ برداری‌است که بر منحنی $C(S)$ در هر نقطه عمود است . چون

$$|\mathbf{e}_z \times d\boldsymbol{\sigma}| = |\mathbf{e}_z|\,|d\boldsymbol{\sigma}| = d\sigma \tag{۳-۱۹۹}$$

دیده می‌شود که اندازهٔ $\mathbf{e}_z \times d\boldsymbol{\sigma}$ برابر $d\sigma$ است ، در این جا عنصر دیفرانسیل قوسی از $C(S)$ است . پس

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}\, d\sigma = \mathbf{e}_z \times d\boldsymbol{\sigma} \tag{۳-۲۰۰}$$

بردار تغییرمکان بی‌نهایت کوچک بر $C(S)$ مماس است . اگر معادلهٔ (۳ ــ ۲۰۰) را در معادلهٔ (۳ ــ ۱۹۸) قرار دهیم نتیجه می‌شود

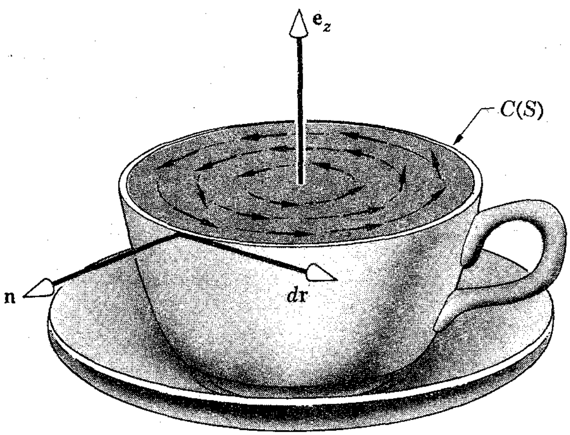
$$\int_S \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dS = \int_{C(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{۳-۲۰۱}$$

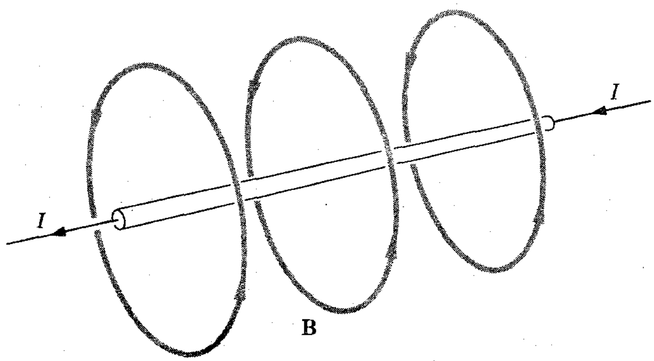
معادلهٔ (۳ ــ ۲۰۱) یک تعبیر هندسی کرل میدان برداری است و انتگرال سمت راست معادلهٔ (۳ ــ ۲۰۱) ،

$$\psi(\mathbf{A}) = \int_{C(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{۳-۲۰۲}$$

را "جریان" میدان‌برداری $\mathbf{A}$ حول منحنی‌بستهٔ $C(S)$ گویند . جریان $\psi(\mathbf{A})$ اندازه‌ای ازدوران یا سرعت وابسته به میدان $\mathbf{A}$ است .

به‌عنوان مثال ، یک فنجان قهوه را درنظر بگیرید که آن را بهم زده باشیم . فرض کنید $\mathbf{A}$ میدان چرخشی‌قهوه درفنجان باشد . اگر $C(S)$ منحنی مرزی فنجان باشد ، قائم $\mathbf{n}$ به سمت

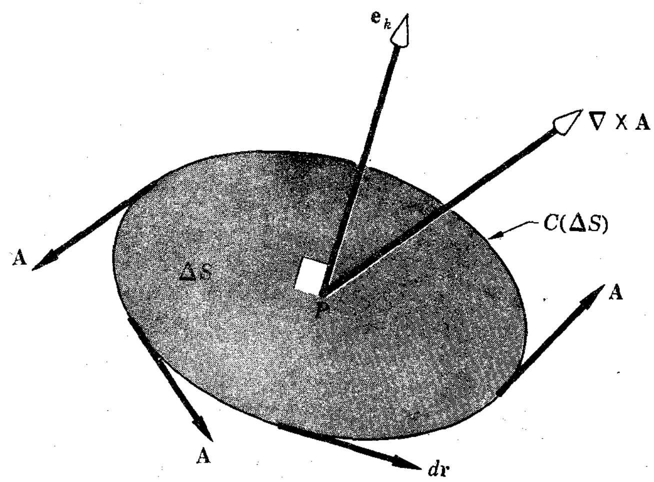




شکل ۳ ــ ۱۱ . حرکت دورانی قهوه درفنجان **قهوه** و یک میدان القایی الکتریکی **B** حول یک میلهٔ هادی .

خارج یک بردار کاملا" معین است . بنابراین امتداد $d\mathbf{r}$ با انتخاب $\mathbf{e}_z$ به سمت خارج یاداخل فنجان در سطح فوقانی مشخص می‌شود .

فرض کنید بردار $\mathbf{e}_z$ را به سمت خارج فنجان قهوه در سطح فوقانی اختیار کنیم . دراین صورت امتداد $d\mathbf{r}$ اگر از بالا به سطح قهوه نگاه کنیم درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است . یک جریان مثبت $\psi(\mathbf{A})$ ، به این‌معناست‌که قهوه درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بهم‌زده شده است ، ویک جریان منفی به این‌معناست‌که قهوه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند . فقدان جریان $\psi(\mathbf{A}) = 0$، یعنی قهوه بهم زده نشده یا به حالت سکون‌درآمده است . (میدان مغناطیسی حول یک میلهٔ هادی مثال دیگری از میدان برداری با کرل مخالف



شکل ۳ ــ ۱۲ . کرل A در P با محاسبهٔ حرکت دورانی A حول سه قرص متعامد بی‌نهایت کوچک متقاطع در P معین می‌شود .

صفر است .)

در معادلهٔ (۳ ــ ۲۰۱) دیده می‌شود که مؤلفهٔ کرل A که بر صفحه مفروض عمود است باید چگالی جریان رانشان دهد ، یعنی ، جریان واحد سطح آن صفحه خاص . ازطرفی چون کرل A یک برداراست ، اطلاع ازجریان A دریک صفحه فقط شامل یک مؤلفه کرل خواهد بود . برای تعیین کامل کرل A در یک نقطهٔ فضا باید سه صفحه عمود برهم انتخاب کنیم که یکدیگر رادر نقطهٔ مفروض قطع کنند . دراین صورت جریان حول نقطه برای تمام صفحات به‌عنوان سه منحنی مرزی که به سمت صفر میل می‌کنند محاسبه می‌شود .

$$\mathbf{e}_k \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\int_{C(\Delta S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S} \qquad k = 1,2,3 \qquad (۲۰۳-۳)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{3} [\mathbf{e}_k \cdot (\nabla \times \mathbf{A})]\mathbf{e}_k \qquad (۲۰۴-۳)$$

که درآن $\mathbf{e}_k$ بردار واحد عمود بر صفحهٔ k ام است .

اگر A سرعت یک سیال را نشان دهد ، $\mathbf{e}_k \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ جریان تولید شده یا نابود شده در واحد سطح را در واحد زمان در صفحه عمود بر $\mathbf{e}_k$ نشان می‌دهد . اگر در تمام نقاط حجمی از فضا $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ، آن‌گاه میدان برداری A را درآن حجم "غیرچرخشی" ودرغیراین صورت منابع

یا حفره‌های داخل حجم را "چرخشی" گوییم .

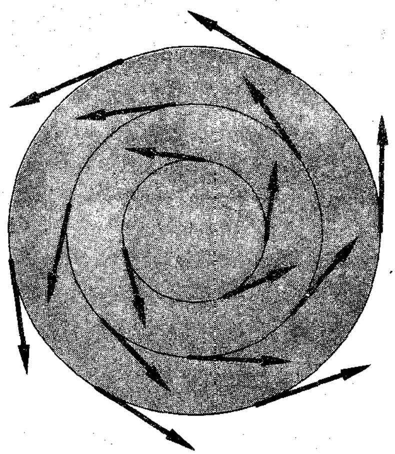
تبصره: دانشجویان باید توجه داشته باشند که

$$\int_{S(V)} d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = 0 = \int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV \qquad (۳-۲۰۵)$$

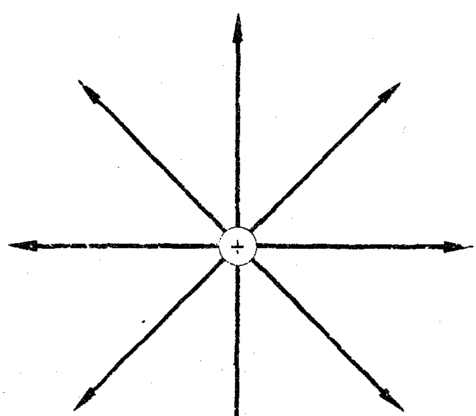
مستلزم

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \qquad (۳-۲۰۶)$$

در تمام حجم V نخواهد بود .



$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$



$\nabla \times \mathbf{A} = 0$

شکل ۳ ــ ۱۳ . میدانهای برداری سلنوییدال و غیرچرخشی .

بلکه فقط مستلزم این است که برای هر منبع چرخشی در V با قوت مفروض یک حفرهٔ چرخشی در V با همان قوت وجود دارد. برای آن‌که

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = 0 \qquad (۳-۲۰۷)$$

مستلزم

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \qquad (۳-۲۰۸)$$

در تمام حجم V باشد باید معادلهٔ (۳ــ۲۰۷) برای هر حجم دلخواه داخل V برقرار باشد.

به‌همین طریق

$$\int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV \qquad (۳-۲۰۹)$$

مستلزم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad (۳-۲۱۰)$$

در تمام حجم V نخواهد بود. این معادله فقط نشانگر این است که در هر منبع با قوت مفروض که سیال داخل V را به‌وجود می‌آورد، یک حفره در V باقوت مساوی وجود دارد که سیال را نابود می‌کند.

برای آن‌که

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0 \qquad (۳-۲۱۱)$$

مستلزم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

در تمام حجم V باشد باید معادلهٔ (۳ــ۲۱۱) برای هر حجم دلخواه داخل V برقرار باشد.

۳ــ۱۳. عملگرهای خطی

دومجموعه ازقضایای دیورژانس، گرادیان وکرل را بسط دادیم. آنها را به‌آسانی می‌توان به‌خاطر سپرد اگر از عملگرهای خطی زیر استفاده کنیم:

$$\nabla = \frac{d\mathbf{S}}{dV} \qquad (۳-۲۱۳)$$

برای معادلاتی که شامل عملگردل هستند و انتگرال‌گیری بر یک رویهٔ بسته است، و

$$\nabla = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dS} \qquad (۳-۲۱۴)$$

برای معادلات شامل عملگردل و انتگرال‌گیری روی یک منحنی بسته .

اگر بنویسیم

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{۳–۲۱۵}$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های معادلات (۳ ـ ۲۱۳) و (۳ ـ ۲۱۴) معادلاتی مشابه

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{dS_x}{dV} \tag{۳–۲۱۶}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dS} \tag{۳–۲۱۷}$$

به‌دست می‌آیند که قبلا" معرفی شده‌اند . برای استفاده ازمعادلات (۳ ـ ۲۱۳) و (۳ ـ ۲۱۴) آنها را از راست در میدانهای برداری یا اسکالر ضرب کرده و $d\mathbf{S}/dV$ یا $d\mathbf{\sigma}/dS$ را به‌عنوان یک تابع درنظر می‌گیریم . مثلا" ، از

$$\nabla = \frac{d\mathbf{\sigma}}{dS}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{\sigma}}{dS} \times \mathbf{A}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A}\, dS = \int_{C(S)} d\mathbf{\sigma} \times \mathbf{A}$$

معادلهٔ (۳ ـ ۱۹۴) نتیجه می‌شود .

۳ ـ ۱۴ . حرکت‌شناسی عناصر حجم ، سطح و خط بی‌نهایت کوچک

یک عنصر بی‌نهایت کوچک حجم به‌وسیله زیر داده می‌شود

$$dV = dx\, dy\, dz \tag{۳–۲۱۸}$$

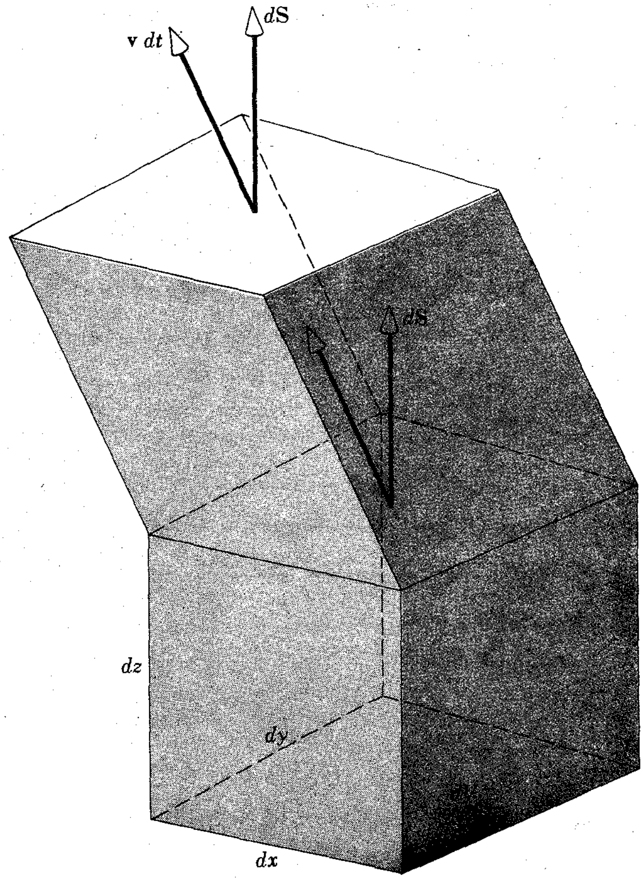
فرض کنید یکی از شش وجه مکعب بی‌نهایت کوچکی به حجم dV به اندازه

$$\mathbf{v}\, dt \tag{۳–۲۱۹}$$

جابجا شود ، درحالی که پنج وجه باقیمانده ثابت بمانند . اگرعنصرسطح این وجه با $d\mathbf{S}$ نشان داده شود حجم جارو شده بوسیلهٔ $d\mathbf{S}$ وقتی به اندازهٔ $\mathbf{v}\, dt$ جابجا شود یک متوازی‌السطوح کوچک به حجم

$$(\mathbf{v}\, dt) \cdot (d\mathbf{S}) \tag{۳–۲۲۰}$$

است . حجم داده شده بوسیلهٔ (۳ ـ ۲۲۰) تغییر حجم مکعب بی‌نهایت کوچک اولیه را نشان می‌دهد (شکل ۳ ـ ۱۴) . بنابراین ، می‌توان نوشت :



شکل ۳ ــ ۱۴ . تغییر حجم یک مکعب بی‌نهایت کوچک .

$$d(dV) = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\, dt \tag{۳ ــ ۲۲۱}$$

ولی از معادلهٔ (۳ ــ ۲۱۳) نتیجه می‌شود

$$d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\, dt = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})\, dV\, dt \tag{۳ ــ ۲۲۲}$$

بنابراین

$$d(dV) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})\, dV\, dt$$

یا

$$\frac{d}{dt}(dV) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})\, dV \tag{۳ ــ ۲۲۳}$$

حال فرض کنید $d\mathbf{S}$ یک عنصر سطح واقع در یک صفحه را که با یک منحنی مسطح دلخواه محدود شده نشان دهد . امتداد $d\mathbf{S}$ براین صفحه عمود است و داریم

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS \tag{۳−۲۲۴}$$

که درآن

$$|\mathbf{n}| = 1 \tag{۳−۲۲۵}$$

فرض کنید

$$d\mathbf{r} = \mathbf{T}\, ds \qquad |\mathbf{T}| = 1 \tag{۳−۲۲۶}$$

بردار مماسی تغییرمکان در هر نقطهٔ منحنی مرز $d\mathbf{S}$ باشد.

در صفحهٔ $d\mathbf{S}$ ، فرض کنید ،

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\, ds \tag{۳−۲۲۷}$$

$$|\mathbf{N}| = 1 \tag{۳−۲۲۸}$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0 \tag{۳−۲۲۹}$$

که درآن $d\boldsymbol{\sigma}$ درامتداد قائم متوجه به خارج هر عنصر قوس مرز $d\mathbf{S}$ قرار دارد.

بردارهای واحد $(\mathbf{n},\mathbf{N},\mathbf{T})$ یک دستگاه متعامد راست تشکیل می‌دهند.

پس،

$$\mathbf{n} \times \mathbf{N} = \mathbf{T} \tag{۳−۲۳۰}$$

و

$$\mathbf{N} \times \mathbf{T} = \mathbf{n} \tag{۳−۲۳۱}$$

فرض کنید قسمتی از مرز $d\mathbf{S}$ که به $d\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم به‌اندازهٔ $\mathbf{v}\, dt$ جابجاشود. ناحیهٔ جاروشده بوسیلهٔ $d\mathbf{r}$ وقتی به‌اندازهٔ $\mathbf{v}\, dt$ تغییر کند یک متوازی‌السطوح بی‌نهایت کوچک به ابعاد $\mathbf{v}\, dt$ و $d\mathbf{r}$ خواهد بود. ناحیهٔ جهت‌دار این متوازی‌السطوح برابر است با

$$(\mathbf{v}\, dt) \times d\mathbf{r} \tag{۳−۲۳۲}$$

جهت ناحیهٔ (۳ − ۲۳۲) به‌قسمی انتخاب می‌شود که باجهت $d\mathbf{S}$ وقتی $\mathbf{v}$ موازی $\mathbf{N}$ است منطبق باشد زیرا دراین‌صورت ناحیهٔ $d\mathbf{S}$ افزایش‌می‌یابد. پس اندازهٔ dS نیزبایدافزایش یابد. ناحیهٔ داده شده بوسیله (۳ − ۲۳۲) تغییر عنصر اولیهٔ سطح بی‌نهایت کوچک $d\mathbf{S}$ را نشان می‌دهد. بنابراین می‌نویسیم

$$d(d\mathbf{S}) = (\mathbf{v}\, dt) \times d\mathbf{r} \tag{۳−۲۳۳}$$

ولی باتوجه به معادلات (۳ − ۲۲۷)، (۳ − ۲۳۰) و (۳ − ۲۲۶) داریم

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n} \times d\boldsymbol{\sigma} \tag{۳−۲۳۴}$$

بنابراین،

$$d(d\mathbf{S}) = (\mathbf{v}\, dt) \times (\mathbf{n} \times d\boldsymbol{\sigma}) \tag{۳−۲۳۵}$$

یا

$$d(d\mathbf{S}) = (\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}\,dt - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,d\boldsymbol{\sigma}\,dt \qquad (۳ – ۲۳۶)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = (\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,d\boldsymbol{\sigma} \qquad (۳ – ۲۳۷)$$

با استفاده از (۳ – ۲۱۴)، معادلهٔ (۳ – ۲۳۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}\,dS - \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \qquad (۳ – ۲۳۸)$$

و با استفاده از معادلهٔ (۳ – ۲۲۴)، داریم

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\,d\mathbf{S} - \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \qquad (۳ – ۲۳۹)$$

بالاخره، عنصر خطی زیر را درنظر بگیرید

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x\,dx \qquad (۳ – ۲۴۰)$$

داریم

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e}_x\frac{dx}{dt} = v_x\mathbf{e}_x \qquad (۳ – ۲۴۱)$$

فرض کنید

$$dV = S\,dx \qquad (۳ – ۲۴۲)$$

که درآن (ثابت) = S. در این صورت با استفاده از معادلهٔ (۳ – ۲۲۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}(dV) = S\frac{d}{dt}(dx) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})S\,dx \qquad (۳ – ۲۴۳)$$

ولی

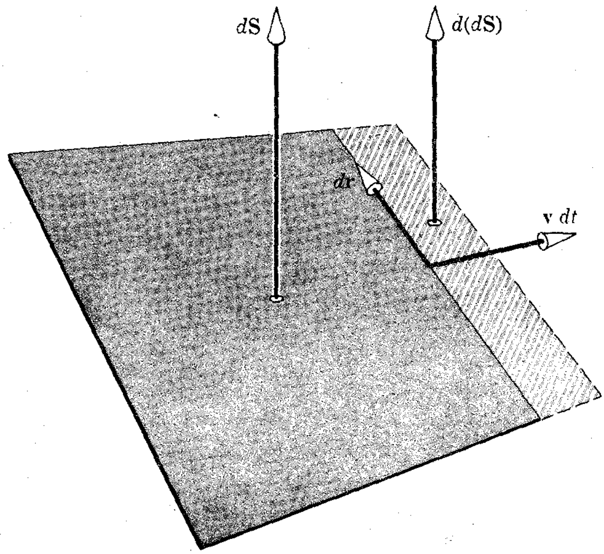
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad (۳ – ۲۴۴)$$

بنابراین،

$$\frac{d}{dt}(dx) = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x}\right)v_x \qquad (۳ – ۲۴۵)$$

که آن را می‌توان به صورت برداری نوشت:

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) = (d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \qquad (۳ – ۲۴۶)$$



شکل ۳ ــ ۱۵ . تغییر یک عنصر سطح جهت‌دار.

۳ ــ ۱۵ . حرکت‌شناسی یک انتگرال حجم

فرض کنید $\rho(\mathbf{r},t)$ هر خاصیت ماده را در واحد حجم مثلاً ، جرم واحد حجم را نشان دهد . جرم کل یک جسم که چگالی جرم آن $\rho(\mathbf{r},t)$ باشد عبارت است از

$$m(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{r},t)\, dV \qquad (۳ - ۲۴۷)$$

جرم $m(t)$ که با انتگرال حجم (۳ ــ ۲۴۷) داده شده به دو دلیل تابعی از زمان است : یکی این‌که چگالی مادهٔ متشکل جسم ممکن است با زمان تغییر کند ، و دیگر این که حتی اگر چگالی مستقل از زمان باشد ، حجم جسم می‌تواند با زمان تغییر کند .

به‌عنوان مثال ، یک صدف متخلخل کروی معلق در هوا را درنظر بگیرید . چگالی هوای داخل کره لزومی ندارد با زمان تغییر کند . ولی همان‌طور که کره بزرگ می‌شود هوا به داخل آن وارد می‌شود ، درنتیجه کل جرم هوای داخلی افزایش پیدا می‌کند .

مشتق کلی $m(t)$ نسبت به زمان برابر است با

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V(t)} \left\{ \frac{d\rho}{dt}\, dV + \rho\, \frac{d}{dt}(dV) \right\} \qquad (۳ - ۲۴۸)$$

دراین معادله دوجمله وجود دارد . جمله اول ناشی از وابستگی چگالی ρ به فضا و زمان است .

جملهٔ دوم ریشه در تغییرات حجم هر جزء بی‌نهایت کوچک جسم نسبت به زمان دارد.

با استفاده از معادلهٔ (۳ — ۲۲۳)،

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V(t)} \left\{\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v})\right\} dV \qquad (۳-۲۴۹)$$

و چون

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho \qquad (۳-۲۵۰)$$

و

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \qquad (۳-۲۵۱)$$

معادلهٔ (۳ — ۲۴۹) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V(t)} \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right\} dV \qquad (۳-۲۵۲)$$

پس

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho(\mathbf{r},t)\, dV = \int_{V(t)} \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right\} dV \qquad (۳-۲۵۳)$$

مشتق کلی یک انتگرال حجم را نسبت به زمان می‌دهد.

تبصره: اگر جرم کل یک جسم با زمان تغییر نکند، آن‌گاه

$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad (۳-۲۵۴)$$

با وجود این از

$$\int_{V(t)} \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right\} dV = 0 \qquad (۳-۲۵۵)$$

نتیجه نمی‌شود که

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (۳-۲۵۶)$$

معادلهٔ (۳ — ۲۵۵) فقط نشان می‌دهد که به ازای هر منبع جرم باقوت مفروض داخل V یک حفرهٔ جرم با همان قوت در V وجود دارد. برای آن‌که معادلهٔ (۳ — ۲۵۶) در تمام حجم $V(t)$ صادق باشد، معادلهٔ (۳ — ۲۵۵) باید نه تنها برای $V(t)$ برقرار باشد بلکه باید برای تمام حجمهای داخل $V(t)$ نیز صادق باشد. اگر چگالی منابع و حفره‌های تولیدکننده یا نابودکننده جرم در واحد زمان با $q(\mathbf{r},t)$ داده شود، آن‌گاه

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = q(\mathbf{r},t) \qquad (۳-۲۵۷)$$

که در آن معادلهٔ (۳ ــ ۲۵۷) را "معادلهٔ پیوستگی" گویند.

اگر در داخل V هیچ منبع یا حفره‌ای وجود نداشته باشد، در تمام نقاط داخل V، $q(\mathbf{r},t) = 0$، ومعادلهٔ (۳ ــ ۲۵۷) به‌صورت معادلهٔ (۳ ــ ۲۵۶) خلاصه می‌شود. دراین‌حالت جرم داخل $V(t)$ ثابت می‌ماند.

۳ ــ ۱۶. حرکت‌شناسی یک انتگرال سطح

فلوی میدان برداری $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ را درنظر می‌گیریم. این فلو بوسیله انتگرال سطح زیر داده می‌شود

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \qquad (۳-۲۵۸)$$

فلوی $\Phi(t)$ که رویهٔ $S(t)$ راقطع می‌کند، تابعی از زمان است زیرا $\mathbf{A}$ بطور صریح به زمان بستگی‌دارد. حتی‌اگر $\mathbf{A}$ از زمان مستقل باشد، وقتی رویهٔ S تغییرشکل می‌دهد یادرفضاحرکت می‌کند به‌عنوان تابعی از زمان بازهم به زمان بستگی دارد. مشتق کلی $\Phi(t)$ نسبت به زمان عبارت است از

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) \right\} \qquad (۳-۲۵۹)$$

جمله اول انتگرال معادلهٔ فوق از تغییرات فضایی و زمانی $\mathbf{A}$ ناشی‌می‌شود. جمله دوم‌از حرکت وابسته به زمان هر عنصر بی‌نهایت کوچک رویهٔ $S(t)$ سرچشمه می‌گیرد. انتگرال سطح (۳ ــ ۲۵۹) را برای هر رویهٔ چندوجهی محاسبه خواهیم کرد یعنی، رویه‌ای که وجوهش چندضلعی است. نتیجه‌ای که به‌دست می‌آوریم‌نه‌تنها برای رویه‌های چندوجهی قابل استفاده است بلکه درمورد تمام رویه‌های با انحنای ملایم صادق خواهد بود؛ زیرا یک رویه با انحنای ملایم را می‌توان با یک چندوجهی محاطی یامحیطی تقریب‌گرفت. مساحت هر وجه چندوجهی به صفر نزدیک می‌شود وقتی‌تعداد وجوه به سمت بی‌نهایت‌میل می‌کند. رویه چندوجهی حدی به سمت رویهٔ با انحنای ملایم همگراست.

با استفاده از معادلهٔ (۳ ــ ۲۳۹) داریم

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - dS(\mathbf{A} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \qquad (۳-۲۶۰)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{n} \qquad (۳-۲۶۱)$$

فرض می‌کنیم رویهٔ $S(t)$ یک چندوجهی محدب است . بنابراین قائم واحد $\mathbf{n}$ به سمت خارج در هر نقطهٔ داخلی بر یک وجه چندوجهی یک بردارثابت است ؛ زیراهر وجه یک صفحه است . بنابراین ،

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{n} = 0 \qquad (۳-۲۶۲)$$

و

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = (\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} - d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} \qquad (۳-۲۶۳)$$

$$d\mathbf{S}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\cdot\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = d\mathbf{S}\cdot\left\{\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right\} \qquad (۳-۲۶۴)$$

توجه کنید که

$$(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{v} - \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{A} \qquad (۳-۲۶۵)$$

بنابراین ،

$$d\mathbf{S}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\cdot\frac{d}{dt}(d\mathbf{S}) = d\mathbf{S}\cdot\left\{\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{A}) + (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{v}\right\} \qquad (۳-۲۶۶)$$

از معادلهٔ (۳ ــ ۲۶۶) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S(t)} d\mathbf{S}\cdot\left\{\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{A}) + (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{v}\right\} \qquad (۳-۲۶۷)$$

علاوه براین ، معادلهٔ (۳ ــ ۲۶۷) نه تنهابرای رویه‌های چندوجهی بلکه برای هر رویهٔ با انحنای ملایم $S(t)$ نیز صادق است .

۳ ــ ۱۷ . حرکت‌شناسی انتگرال منحنی‌الخط

چرخش میدان برداری $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ را درنظر می‌گیریم . این چرخش بوسیلهٔ انتگرال منحنی‌الخط زیر داده می‌شود

$$\psi(t) = \int_{C(t)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \qquad (۳-۲۶۸)$$

چرخش $\psi(t)$ حول منحنی $C(t)$ تابعی است از زمان زیرا $\mathbf{A}$ به زمان بستگی دارد . حتی اگر $\mathbf{A}$ به زمان بستگی نداشته باشد ، وقتی منحنی C درفضا تغییرشکل دهد یاحرکت کندبازهم ψ تابعی از زمان خواهد بود .

مشتق کلی $\psi(t)$ نسبت به زمان عبارت است از

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_{C(t)} \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) \right\} \tag{۲۶۹-۳}$$

جملهٔ اول انتگرال معادلهٔ (۳ــ ۲۶۹) ازتغییرات فضایی و زمانی A ناشی می‌شود . جمله دوم از وابستگی هر قطعه بی‌نهایت کوچک منحنی $C(t)$ به زمان سرچشمه می‌گیرد . انتگرال منحنی‌الخط (۳ــ ۲۶۹) را برای هرمنحنی چندضلعی $C(t)$ محاسبه خواهیم‌کرد ، یعنی ، یک منحنی که هرقسمت آن یک خط راست است . نتیجهٔ حاصل نه تنهابرای منحنیهای چندضلعی بلکه برای تمام منحنیهای ملایم نیز صادق خواهد بود . زیرا یک منحنی‌ملایم رامی‌توان بایک چندضلعی محاطی یا محیطی تقریب گرفت . اگر طول هر قسمت چندضلعی محاطی یا محیطی به سمت صفر و تعداد آنها به سمت بی‌نهایت میل کندآن‌گاه چندضلعیها به سمت منحنی‌ملایم همگراست .

برای یک منحنی چندضلعی هر ضلع یک خط مستقیم‌است . بنابراین معادلهٔ (۳ــ ۲۴۶) قابل‌استفاده خواهدبود ؛ زیرا آن رابرای عنصرخطی مشتق‌پذیر به‌دست‌آوردیم . دراین‌صورت معادلهٔ (۳ ــ ۲۶۹) به شکل زیر نوشته می‌شود ،

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C(t)} \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right\} \tag{۲۷۰-۳}$$

یا

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right\} \tag{۲۷۱-۳}$$

علاوه براین ، معادلات (۳ــ ۲۷۰) و (۳ ــ ۲۷۱) نه تنها برای منحنیهای چندضلعی بلکه درمورد هر منحنی ملایم $C(t)$ صادقند . با استفاده از معادلهٔ (۳ ــ ۲۷۱) ، می‌توانیم قاعده لایب نیتز را برای محاسبه عبارت زیر به‌دست آوریم

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} A(x,t)\, dx \tag{۲۷۲-۳}$$

فرض کنید

$$\mathbf{A} = A(x,t)\mathbf{e}_x \tag{۲۷۳-۳}$$

و

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_x \tag{۲۷۴-۳}$$

در این صورت

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x = v_x \mathbf{e}_x \tag{۲۷۵-۳}$$

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A(x,t)\,dx \tag{۲۷۶ – ۳}$$

$$d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v} = dx\,v_x\frac{\partial A}{\partial x} + dx\,A\,\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{۲۷۷ – ۳}$$

یا

$$d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v} = dx\,\frac{\partial}{\partial x}(v_xA) \tag{۲۷۸ – ۳}$$

پس،

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} A(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial A}{\partial t}\,dx + \int_{a(t)}^{b(t)} dx\,\frac{\partial}{\partial x}(v_xA) \tag{۲۷۹ – ۳}$$

بالاخره،

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} A(x,t)\,dx = A[b(t),t]b'(t) - A[a(t),t]a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial A}{\partial t}\,dx \tag{۲۸۰ – ۳}$$

۳ – ۱۸ . زاویهٔ صلب

یک عنصر رویهٔ را به صورت زیر درنظر می‌گیریم :

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS \tag{۲۸۱ – ۳}$$

که‌دارای یک بردار وضعیت $\mathbf{r}$ نسبت‌به نقطه دلخواه P باشد . بردار واحد عمود بر dS با $\mathbf{n}$ نشان داده می‌شود . اگر خطوط راستی از نقطه P به نقاط مرزی $d\mathbf{S}$ رسم کنیم ، این خطوط مولدهای یک مخروط بی‌نهایت کوچک را به رأس P و قاعده $d\mathbf{S}$ تشکیل خواهند داد . زاویهٔ صلب $d\Omega$ این‌مخروط رازاویه صلب روبروی $d\mathbf{S}$ در P نامند (شکل ۳ــ۱۶) ، وبه‌صورت زیرتعریف می‌شود :

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{۲۸۲ – ۳}$$

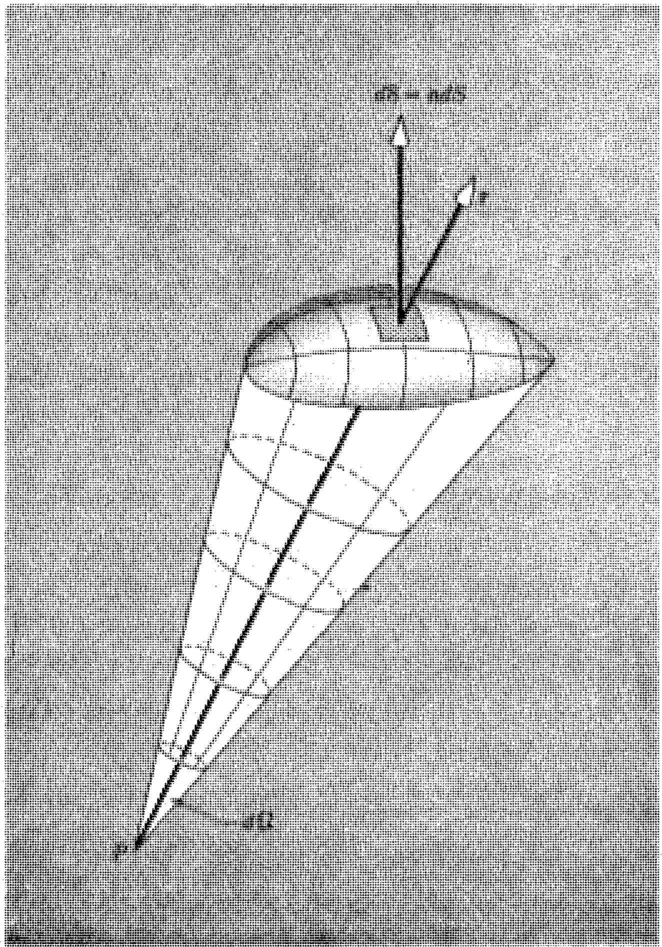
بنابراین ، تمام زاویهٔ صلب رویهٔ S برابر است با

$$\Omega = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{۲۸۳ – ۳}$$

یا

$$\Omega = \iint_S \nabla\left(\frac{-1}{r}\right)\cdot d\mathbf{S} \tag{۲۸۴ – ۳}$$

مثال ۳ ــ ۷: فرض کنید S یک کره و P مبدأ آن باشد ؛ درآن صورت



شکل ۳ ــ ۱۶. زاویهٔ صلب $d\Omega$ روبرو به $d\mathbf{S}$ در P.

$$\Omega(P) = \iint\limits_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\, dS \right)$$

و

$$\Omega(P) = \iint\limits_S \frac{dS}{|\mathbf{r}|^2}$$

برای کره‌ای به مرکز P داریم

$$dS = |\mathbf{r}|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

پس

$$\Omega(P) = \iint_S \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi \qquad (۳-۲۸۵)$$

از این معادله دیده می‌شود که زاویهٔ صلب یک مخروط ازنظر عددی برابر مساحت قسمی از رویهٔ کره‌ای است که بوسیله مخروط بریده می‌شود درصورتی که رأس مخروط در مرکز کره و قاعده‌اش بر سطح کره باشد.

۳ ـ ۱۹. تجزیهٔ یک میدان برداری به اجزای سلنوییدال و غیرچرخشی

اغلب بهتراست یک میدان برداری $\mathbf{u}$ رابه صورت مجموع یک میدان سلنوییدال $\mathbf{u}_S$ ویک میدان غیرچرخشی $\mathbf{u}_I$ نشان دهیم. در این صورت

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_I \qquad (۳-۲۸۶)$$

که درآن

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_S = 0 \qquad (۳-۲۸۷)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{u}_I = 0 \qquad (۳-۲۸۸)$$

در این جا سه سؤال مطرح می‌شود:

۱ ـ تحت چه شرایطی تجزیهٔ (۳ ـ ۲۸۶) امکان پذیر است؟

۲ ـ میدانهای مجهول $\mathbf{u}_S$ و $\mathbf{u}_I$ را چگونه می‌توان از میدان مفروض $\mathbf{u}$ محاسبه کرد؟

۳ ـ تحت چه شرایطی تجزیهٔ (۳ ـ ۲۸۶) منحصر به فرد خواهد بود؟

در این جا منظور از منحصر به فرد بودن این است که به ازای هر $\mathbf{u}$ فقط و فقط یک جفت بردار $(\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_I)$ وجود دارد که در معادلهٔ (۳ ـ ۲۸۶) صدق کند.

همان‌طورکه اغلب‌در ریاضیات اتفاق‌می‌افتد، برای حل مسأله، متغیرهای جدیدی معرفی کرده سپس مسألهٔ اولیه را برحسب این متغیرهای جدید بیان می‌کنیم. درنتیجه یک جواب معادلهٔ (۳ ـ ۲۸۷) به صورت،

$$\mathbf{u}_S = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۳-۲۸۹)$$

و یک جواب معادلهٔ (۳ ـ ۲۸۶) به صورت،

$$\mathbf{u}_I = \nabla \phi \qquad (۳-۲۹۰)$$

داده می‌شود. فرض می‌کنیم $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ و $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

از معادلات (۳ ـ ۲۸۶) تا (۳ ـ ۲۸۸) نتیجه می‌شود که

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_I = \nabla \cdot \mathbf{u} \qquad (۳-۲۹۱)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{u}_S = \nabla \times \mathbf{u} \qquad (۳-۲۹۲)$$

بنابراین معادلات (۳ ـ ۲۸۹) و (۳ ـ ۲۹۰) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{u} \qquad (۳-۲۹۳)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{u} \qquad (۳-۲۹۴)$$

سمت راست معادلات (۳ ـ ۲۹۳) و (۳ ـ ۲۹۴) معلوم فرض می‌شود زیرا $\mathbf{u}$ معلوم‌است.

سه مؤلفهٔ معادلهٔ (۳ـ۲۹۴) با معادلهٔ (۳ـ ۲۹۳) مجموعه‌ای از چهار معادله دیفرانسیل جزئی با چهار مجهول تشکیل می‌دهند. این مجهولها سه مؤلفه $\mathbf{A}$ و اسکالر مجهول ϕ است. وقتی معادلات (۳ ـ ۲۹۳) و (۳ ـ ۲۹۴) را بتوانیم نسبت به ϕ و $\mathbf{A}$ حل کنیم،

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \qquad (۳-۲۹۵)$$

تجزیهٔ مطلوب را خواهد داد. تابع ϕ را پتانسیل "اسکالر" $\mathbf{u}$ و $\mathbf{A}$ را پتانسیل "برداری" $\mathbf{u}$ گویند. پس تجزیهٔ (۳ ـ ۲۸۶)، امکان دارد بشرط‌آن‌که پتانسیلهای اسکالر و برداری مربوط به $\mathbf{u}$ را بتوانیم محاسبه کنیم. سپس میدانهای $\mathbf{u}_S$ و $\mathbf{u}_I$ ازمعادلات (۳ ـ ۲۸۹) و (۳ ـ ۲۹۰) محاسبه می‌شوند.

تجزیهٔ (۳ ـ ۲۸۶) لزوماً منحصر به‌فرد نیست زیراهمواره انتخاب زیر امکان‌پذیراست:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \qquad (۳-۲۹۶)$$

و

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \qquad (۳-۲۹۷)$$

که درآن ϕ_0 و $\mathbf{A}_0$ جوابهای معادلات (۳ ـ ۲۹۳) و (۳ ـ ۲۹۴) و ϕ_1 و $\mathbf{A}_1$ جوابهای دلخواه معادلات زیرند

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \qquad (۳-۲۹۸)$$

و

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0 \qquad (۳-۲۹۹)$$

در فصل ۷ نشان خواهیم داد که اگر کرل و دیورژانس $\mathbf{u}$ در تمام نقاط داخلی یک کره معلوم باشند، درآن صورت تجزیهٔ (۳ ـ ۲۸۶) منحصر به فرداست بشرط‌آن‌که مؤلفه **قائم** $\mathbf{u}$ بر مرز کره معلوم باشد.

۳ ـ ۲۰. قضایای انتگرال برای توابع گسسته و بدون کران

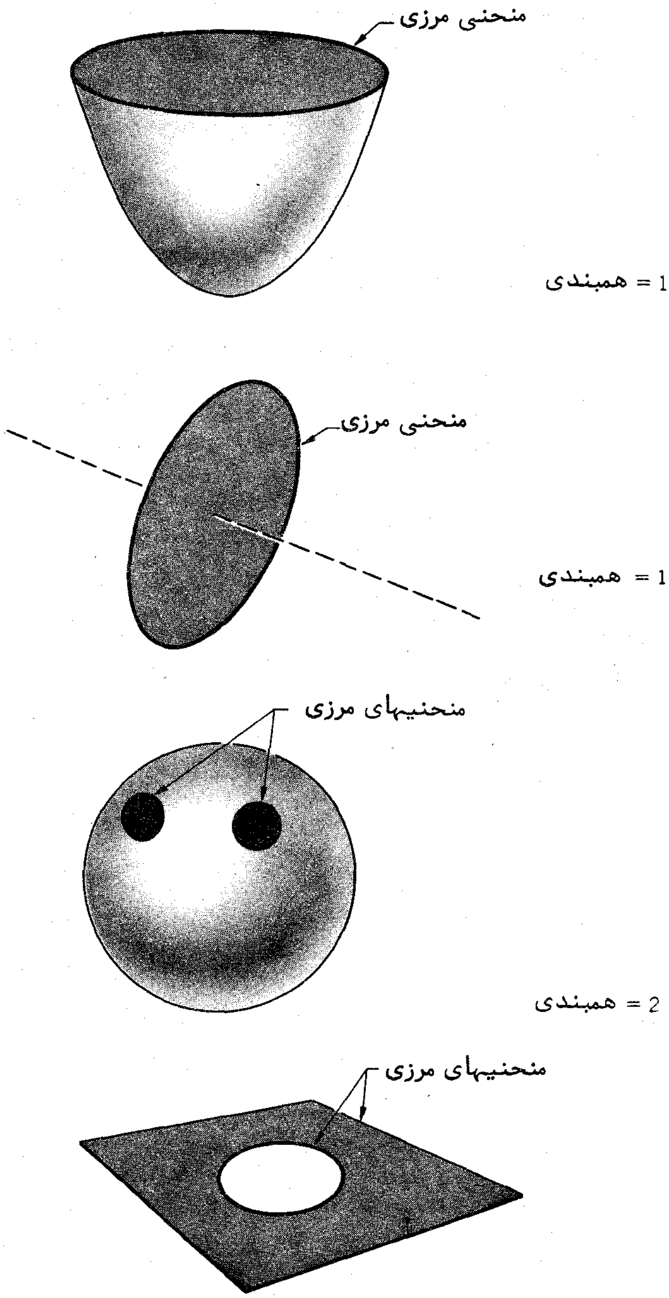
در بخش ۳ ـ ۵ تا ۳ ـ ۱۲ چند قضیه انتگرال برای انتگرال‌گیری بریک مسیربسته تعمیم داده شد. برای قضایایی که شامل انتگرال‌گیری **بر یک مسیر بسته**اند فرض می‌شود که این مسیر

مرز یک رویهٔ باز را مانند یک فنجان یا قرص تشکیل می‌دهد. یک کره مجوف با دو سوراخ بر سطح آن نیز یک رویهٔ باز است. تمام منحنی مرزی این کرهٔ دارای دو سوراخ را می‌توان با یک برش قیچی از یک سوراخ به سوراخ دیگر ساخت. در این صورت تمام منحنی مرزی از لبه‌های دو سوراخ و دو لبهٔ قیچی شده تشکیل می‌شود. امتدادی که در آن منحنی مرزی باید پیموده شود به قسمی است که اگر بر سطح خارجی کره و در طول مرز قدم بزنیم رویه راهمواره درسمت چپ می‌بینیم. این قرارداد با فرمول بخش ۳ ــ ۱۲ سازگار است. اگر کرهٔ مجوف دارای n سوراخ باشد، درآن صورت تمام‌مرز رویهٔ سوراخ شده شامل لبه‌های n سوراخ و $2(n-1)$ لبهٔ مربوط به $n-1$ برش قیچی است. این برشها به قسمی‌مرتب می‌شوندکه اولین برش سوراخ اول را به سوراخ دوم و دومین برش سوراخ دوم را به سوم و الی آخر وصل می‌کند. آخرین برش به شماره $n-1$، سوراخ$n-1$ام را به سوراخ nام وصل می‌کند.

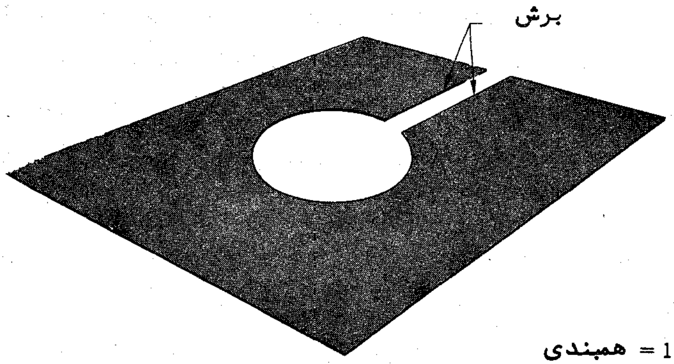
یک رویهٔ باز را "همبند ساده" گوییم اگر دارای این خاصیت باشد که هر برش قیچی که از یک نقطه مرزی شروع شده و به نقطهٔ مرزی دیگر ختم می‌شود رویه رابه دو قسمت جداتقسیم کند. پس هم‌کره مجوف و هم‌یک سکه سوراخدارمثالهایی از رویه‌های همبندساده‌اند. همبندی یک رویهٔ باز برابر است با 1 به اضافهٔ تعداد برشهایی است که می‌توان داد **بدون** آن‌که رویه به دو قسمت مجزا تقسیم شود. پس رویهٔ کروی با n سوراخ بدون هیچ برش دارای همبندی n است. بنابراین آن را "همبند چندگانه" گوییم اگر $n \geq 2$ بعد از $n-1$ برش همبندی به یک تقلیل پیدا می‌کند، رویه در این حالت "همبند ساده" $(n = 1)$ نامیده می‌شود. زیرا هیچ برش دیگری نمی‌توان داد بدون آن‌که رویه به دو قسمت مجزا تقسیم شود.

همین‌ملاحظات برای رویه‌های مسطح نیز به‌کارمی‌رود. مثلاً" درحالی‌که یک قرص، همبند ساده است، ولی حلقه همبند مضاعف $(n = 2)$ است. زیرا یک برش بین دو دایره مرزی حلقه به دو قسمت مجزا تقسیم نمی‌شود. این ملاحظات توپولژیکی قابل اهمیت هستند زیرادر نتایج بخشهای ۳ ــ ۹ تا ۳ ــ ۱۲ لازم است منحنیهای بسته انتگرال‌گیری تمام مرز یک رویهٔ همبند ساده باشد. پس باید درصورت لزوم برشهاداده شوند تا رویهٔ باز رابه یک رویه همبند ساده تبدیل کند.

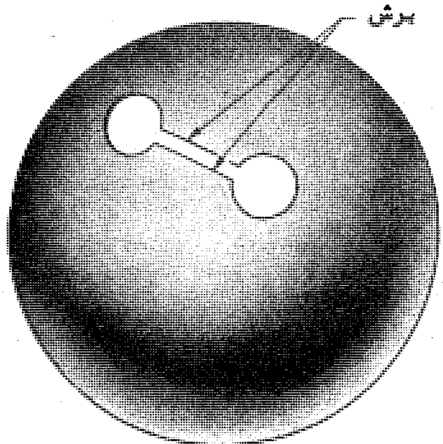
در تمام قضایای انتگرال بخشهای ۳ ــ ۵ تا ۳ ــ ۱۲ فرض شد که تابع زیر انتگرال تابعی *انتگرال‌پذیر* است. به‌عبارتی‌غیردقیق، تابعی انتگرال‌پذیراست‌که رفتارش زیادنامنظم‌نبوده، و مقادیرش در نقاط زیادی بسیار بزرگ نباشد. یک توصیف دقیقتر این مفهوم نیاز به نظریه اندازه دارد که خارج از حوزهٔ این کتاب است. باوجود این، بعضی از نتایج مقدماتی نظریه اندازه را می‌پذیریم. این نتایج برای بیان شرایطی که تحت آنها قضایای انتگرال بخشهای ۳ ــ ۵ تا ۳ ــ ۱۲ همواره قابل استفاده باشند ضروری است.



شکل ۳ ــ ۱۷ . مثالهائی از چند رویهٔ باز و منحنیهای مرزی آنها .



1 = همبندی



1 = همبندی

اندازهٔ مجموعه‌ای از نقاط عددی است که اغلب یک تعبیر هندسی طبیعی دارد. مثلاً، اندازه مجموعهٔ نقاط تشکیل دهنده یک قوس برابر طول آن است. اندازهٔ مجموعهٔ نقاط تشکیل دهندهٔ یک رویه مساحت آن است، و اندازهٔ مجموعهٔ نقاط تشکیل دهنده یک جسم برابر حجم آن است. برای منظور ما، مجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی یعنی یک منحنی با طول متناهی، رویه‌ای با مساحت متناهی، یا جسمی با حجم محدوداست. تمام‌انتگرالهای قضایای انتگرال بخشهای ۳ ــ ۵ تا ۳ ــ ۱۲ در کل حجمها، رویه‌ها، یادرطول قوسها تعریف شده‌اند. این توابع (یامؤلفه‌هایشان اگر برداری باشند) در *شرایط دیرکله* براین مجموعه‌ها صدق می‌کنند **اگر**:

۱ ــ در تمام مجموعه کراندار باشد.

۲ ــ تعداد ماکزیمم و می‌نیمم آنها براین مجموعه متناهی باشد .

۳ ــ بیش از تعداد متناهی نقاط انفصال (متناهی) نداشته باشند .

یک نتیجهٔ اساسی نظریهٔ اندازه که بدون اثبات آن رامی‌پذیریم این است که " اگرتابعی در شرایط دیرکله برمجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی صدق کند ، برآن مجموعه انتگرال‌پذیر خواهد بود . "

مثلا" ، اگر هر مؤلفهٔ یک میدان برداری داخل کره‌ای به حجم متناهی در شرایط دیرکله صدق کند ، در آن صورت انتگرال حجم این میدان برداری برای کرهٔ مفروض موجود است .

برای دیدن این‌که یک قضیهٔ انتگرال وقتی شرایط دیرکله برقرارنیست چگونه بایداصلاح شود ، چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم . به‌عنوان مثال ، قضیه گرادیان سه بعدی ،

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳ - ۳۰۰)$$

برای یک کرهٔ صلب به حجم V برقرار است اگر $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در تمام حجم V و $\mathbf{A}$ در هر نقطهٔ $S(V)$ درآن شرایط دیرکله صدق کند . در بسیاری از کاربردها ، $\nabla \cdot \mathbf{A}$ دربعضی نقاط یا درطول قسمی از منحنی یا سطح یا حتی در تمام حجم معینی از V بی‌نهایت می‌شود . در این صورت $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در حجم V کراندار نخواهد بود ، و درنتیجه شرط اول دیرکله برقرار نیست .

حتی در این حالت معادلهٔ (۳ ــ ۳۰۰) برقرار است اگر انتگرال حجم و سطح آن وجود داشته و متناهی باشند . ولی ، کاربرد (۳ ــ ۳۰۰) لازمه‌اش این است که نسبت به سرعت بی‌نهایت شدن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در هر نقطه منزوی V اطلاعاتی داشته باشیم . این اطلاعات برای تعیین این که انتگرال حجم متناهی است یا خیر ضروری خواهد بود .

در یک روش دیگر نقطه یا نقاطی که در آنها $\nabla \cdot \mathbf{A}$ نامتناهی است از انتگرال حجم حذف می‌شوند . نقاطی را که در آنها $\nabla \cdot \mathbf{A}$ بی‌نهایت می‌شود بامحصور کردن در یک حباب کوچک با شعاع متناهی از V جدا کرده و محتوای هر حباب را از ناحیهٔ V حذف می‌کنیم . آنچه باقی می‌ماندکره‌ای است باتعدادی حفرهٔ داخلی . حجم‌باقیمانده کره V' است که ازنظر عددی برابر کره اولیه منهای حجم کل حفره‌هاست .

حال $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در حجم V' و $\mathbf{A}$ بر $S(V')$ در شرایط دیرکله صدق می‌کند ؛ بنابراین ،

$$\int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S(V')} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳ - ۳۰۱)$$

حجم V' از خارج با رویهٔ کروی $S(V)$ و از داخل بوسیلهٔ دیوارهٔ حفره‌های تولیدشده از حذف حبابها محدود می‌شود . نکته قابل توجه این است که بریک رویهٔ مرزی $d\mathbf{S}$ متوجه **سمت خارج ناحیه انتگرال‌گیری** است ؛ بنابراین ، بر رویه خارجی V' ، $d\mathbf{S}$ همواره به سمت خارج V' و

بر رویهٔ داخلی V' ، $d\mathbf{S}$ همواره به سمت داخل حفرهٔ رویه داخلی متوجه است .

رویهٔ انفصال

اگر میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ، در دو سمت رویهٔ باز مفروضی داخل V مقادیر متفاوت اختیار کند ، درآن صورت از معادلهٔ (۳ ـ ۱۴۶) نتیجه می‌شود که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ بر رویهٔ مفروض نامتناهی است . فرض کنید این رویهٔ انفصال $S(d)$ نامیده شود . اگر V حجم دلخواهی باشد که شامل $S(d)$ است ، آن‌گاه $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در V کراندار نیست . بنابراین ، برای به‌کار بردن قضیهٔ دیورژانس برای $\mathbf{A}$ ، با ایجاد یک حفره حول $S(d)$ آن را از V جدا می‌کنیم . دراین جا البته فرض می‌شود که اندازهٔ $S(d)$ متناهی است . حجم جدید انتگرال‌گیری را V' می‌نامیم . این حجم از خارج به‌وسیله یک رویهٔ محدب با شکل دلخواه و از داخل بوسیله دیوارهٔ حفره شامل $S(d)$ محدود می‌شود . اگر $S(E)$ مرزخارجی رویهٔ V' و $S(I)$ مرزداخلی رویهٔ V' باشد از معادلهٔ (۳ ـ ۳۰۱) نتیجه می‌شود :

$$\int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S(E)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} + \int_{S(I)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳ - ۳۰۲)$$

کمیت اولیه که ازنظر فیزیکی موردتوجه است عبارتست از

$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV \qquad (۳ - ۳۰۳)$$

که وقتی دیوارهٔ $S(I)$ حفرهٔ داخلی بر رویهٔ باز انفصال $S(d)$ منطبق می‌شود به‌دست می‌آید . در این صورت $V' \to V$ ، و داریم

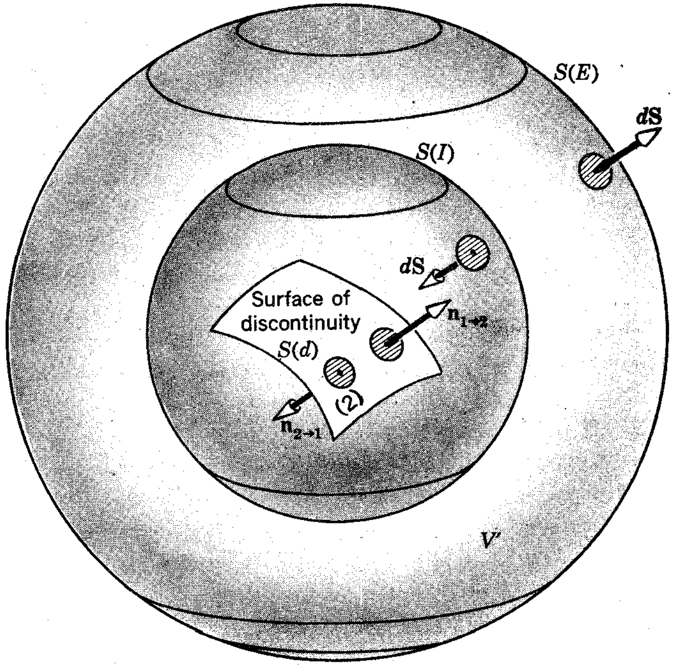
$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_{S(E)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} + \int_{S_1(I)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} + \int_{S_2(I)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳ - ۳۰۴)$$

که در آن $S(I) = S_1(I) + S_2(I)$. رویهٔ انفصال دارای دو سمت ۱ و ۲ است ، بردار واحد قائم در هر نقطهٔ سمت ۲ را به $\mathbf{n}_{1\to 2}$ نشان می‌دهیم و بیان می‌کند که این قائم واحد از سمت ۱ به سمت ۲ متوجه است . همین‌طور قائم واحد بر سمت ۱ ، با $\mathbf{n}_{2\to 1}$ نشان داده می‌شود و از سمت ۲ به سمت ۱ ، اشاره دارد .

بر $S(I)$ ، بردار $d\mathbf{S}$ به سمت داخل حفرهٔ حول $S(d)$ متوجه است . قسمتی از $S(I)$ که با $S_2(I)$ نشان داده می‌شود به سمت ۲ رویهٔ $S(d)$ میل می‌کند و بر آن ،

$$d\mathbf{S} = -\mathbf{n}_{1\to 2}\, dS \qquad (۳ - ۳۰۵)$$

قسمت دیگر $S(I)$ که با $S_1(I)$ نشان داده می‌شود به سمت ۱ رویهٔ $S(d)$ میل می‌کند وبر آن ،



شکل ۳ــ۱۹. حذف یک رویه‌انفصال با محاط‌کردن آن در یک حباب.

$$d\mathbf{S} = -\mathbf{n}_{2\to1}\, dS \qquad (۳ــ۳۰۶)$$

علامت منفی درمعادلات (۳ــ۳۰۵) و (۳ــ۳۰۶) برای آن که $d\mathbf{S}$ همواره متوجه خارج ناحیهٔ انتگرال‌گیری و داخل حفرهٔ محدودکننده $S(I)$ باشد ضروری است. باتوجه به رابطهٔ

$$\mathbf{n}_{1\to2} = -\mathbf{n}_{2\to1} \qquad (۳ــ۳۰۷)$$

معادلهٔ (۳ــ۳۰۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} + \int_{S(d)} dS\, \mathbf{n}_{1\to2}\cdot(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2) \qquad (۳ــ۳۰۸)$$

که‌درآن $\mathbf{A}_1$ مقدار $\mathbf{A}$ برسمت ۱ رویه $S(d)$، و $\mathbf{A}_2$ مقدار $\mathbf{A}$ برسمت ۲ رویهٔ $S(d)$ است. معادلهٔ (۳ــ۳۰۸) را اغلب به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV + \int_{S(d)} dS\, \mathbf{n}_{1\to2}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1) = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} \qquad (۳ــ۳۰۹)$$

اگردرتمام‌حجم V، $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$، آن‌گاه فلویی که $S(E)$ را قطع می‌کند بوسیله جهش $\mathbf{A}$ در عبور از رویه انفصال تولید می‌شود. جهش مؤلفهٔ قائم $\mathbf{A}$ بر $S(d)$ به‌علت منابع‌رویه بر $S(d)$

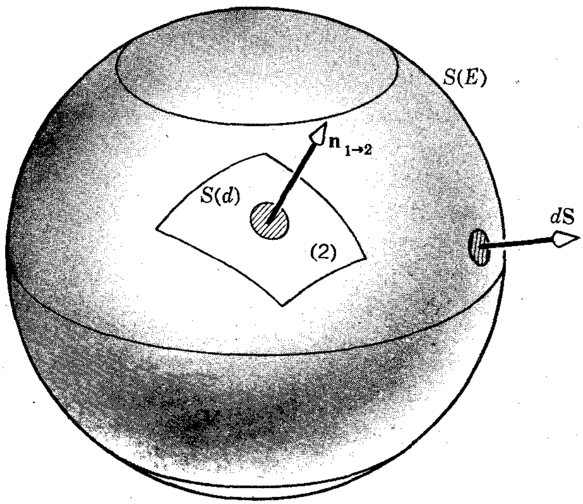
به‌وجود می‌آید . در تأیید این نظریه رویهٔ دیورژانس یا فلوی واحدسطح را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\text{Div}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2}\cdot(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \qquad (۳-۳۱۰)$$

و با استفاده از (۳ ــ ۳۱۰) معادلهٔ (۳ ــ ۳۰۹) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV + \int_{S(d)} \text{Div}\,\mathbf{A}\,dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} \qquad (۳-۳۱۱)$$

حرف بزرگ D در $\text{Div}\,\mathbf{A}$ برای این به‌کار می‌رود که نشان دهد منظور یک دیورژانس رویه است . دیورژانس حجم ، $\text{div}\,\mathbf{A}$ یا $\nabla\cdot\mathbf{A}$ چگالی‌حجم منابع فلو و دیورژانس سطح ، $\text{Div}\,\mathbf{A}$ ، چگالی سطح منابع فلو را اندازه می‌گیرد .



شکل ۳ ــ ۲۰ . قلمرواصلاح شدهٔ انتگرال‌گیری برای قضیه انتگرال سه بعدی که شامل یک رویهٔ انفصال است .

جهش در $\mathbf{A}$ که $S(d)$ را قطع می‌کند ممکن است باعث شود که $\nabla\times\mathbf{A}$ بر $S(d)$ بی‌نهایت شود . بحث فوق به تعمیم قضیهٔ کرل سه بعدی به‌صورت زیر منجر می‌شود :

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\,dV + \int_{S(d)} \text{Curl}\,\mathbf{A}\,dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\times\mathbf{A} \qquad (۳-۳۱۲)$$

کرل رویه با حرف بزرگ C نوشته می‌شود ، و برابر است با

$$\text{Curl}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2}\times(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \qquad (۳-۳۱۳)$$

جهشها در مؤلفه‌های مماسی A به‌علت وجود منابع سطحی چرخشی یا دورانی به‌وجود می‌آیند. کرل رویه چگالی رویهٔ این قبیل منابع را بر $S(d)$ اندازه می‌گیرد.

اگر ϕ تابعی اسکالر باشد که بر دو سمت رویهٔ باز مفروض $S(d)$ داخل V، مقادیر متفاوت اختیار کند، آن‌گاه $\nabla\phi$ ممکن است بر $S(d)$ بی‌نهایت شود. تعمیم قضیهٔ گرادیان سه بعدی متناظر با همان استدلال قبل به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\int_V \nabla\phi\, dV + \int_{S(d)} \mathrm{Grad}\ \phi\, dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\ \phi \tag{۳-۳۱۴}$$

گرادیان رویه با حرف بزرگ G نوشته می‌شود، و برابر است با

$$\mathrm{Grad}\ \phi = \mathbf{n}_{1\to 2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{۳-۳۱۵}$$

خلاصه

نشان دادیم که قضیهٔ انتگرال سه بعدی را وقتی حجم انتگرال‌گیری شامل یک رویه باز انفصال باشد چگونه باید اصلاح شود. این اصلاح لازمه‌اش معرفی عملگرهای دیورژانس، کرل و گرادیان رویه است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{Div}\ \mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2}\cdot(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \tag{۳-۳۱۶}$$

$$\mathrm{Curl}\ \mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2}\times(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \tag{۳-۳۱۷}$$

$$\mathrm{Grad}\ \phi = \mathbf{n}_{1\to 2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{۳-۳۱۸}$$

قضایای انتگرال اصلاح شدهٔ متناظر عبارتند از:

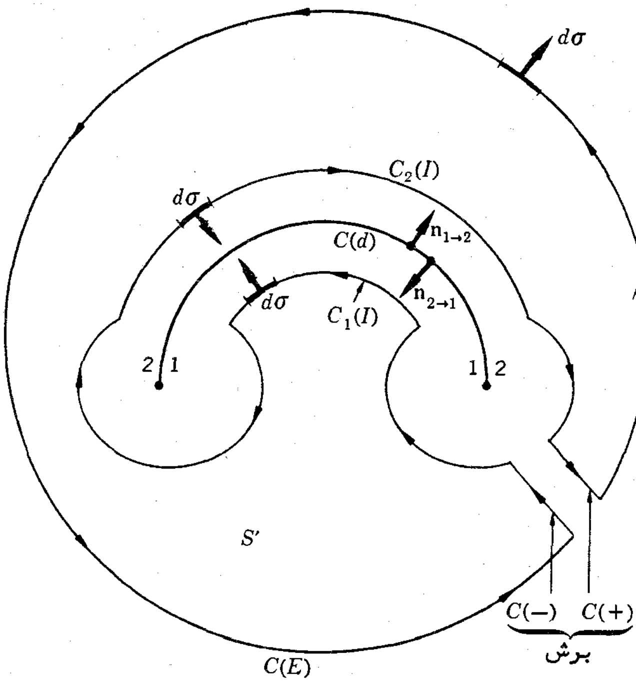
$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV + \int_{S(d)} \mathrm{Div}\ \mathbf{A}\, dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} \tag{۳-۳۱۹}$$

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\, dV + \int_{S(d)} \mathrm{Curl}\ \mathbf{A}\, dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\times\mathbf{A} \tag{۳-۳۲۰}$$

$$\int_V \nabla\phi\, dV + \int_{S(d)} \mathrm{Grad}\ \phi\, dS = \int_{S(E)} d\mathbf{S}\ \phi \tag{۳-۳۲۱}$$

خط انفصال

فرمولهای متناظر با معادلات (۳-۳۱۶) تا (۳-۳۲۱) رامی‌توان برای قضایای انتگرال دوبعدی نیز به‌دست آورد. مثلاً، اگر میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ بر دو سمت یک منحنی باز مفروض واقع بر یک رویه همبند ساده مقادیر متفاوت اختیار کند، در آن صورت $\nabla\cdot\mathbf{A}$ بر منحنی داده شده بی‌نهایت می‌شود. این منحنی انفصال را $C(d)$ می‌نامیم. اگر S سطح دلخواهی شامل



شکل ۳ ــ ۲۱. برش منحنی انفصال $C(d)$.

$C(d)$ باشد ، درآن‌صورت $\mathbf{A}$. ∇ در S کراندارنیست . بنابراین ، برای به‌کاربردن قضیهٔ دیورژانس دوبعدی برای $\mathbf{A}$ ، $C(d)$ را از S حذف خواهیم‌کرد . برای‌آن‌که $C(d)$ را از S حذف‌کنیم ، قسمی از رویه S را که شامل $C(d)$ است جدا می‌کنیم . منحنی $C(d)$ دارای طول متناهی است و فرض می‌شود خودش راقطع نکند . مثلاً ، S می‌تواند قرصی به شعاع R ، و $C(d)$ می‌تواند قوسی ازیک نیمدایره به شعاع $r < R$ باشد .

رویهٔ جدید S' که پس ازحذف $C(d)$ از S به‌دست می‌آید همبندمضاعف $(n = 2)$ است . زیرا ساختن یک سوراخ در یک رویهٔ باز همبندساده $(n = 1)$ همبندی رابه اندازهٔ ۱ افزایش می‌دهد . برای به‌کار بردن قضیهٔ انتگرال دوبعدی درمورد رویهٔ باز همبند مضاعف S' ، باید ابتدا آن را به‌صورت همبند ساده درآورد . این کار بوسیله برشی با قیچی از لبهٔ اولیهٔ S تا لبهٔ جدید ایجاد شده از حذف $C(d)$ از S به‌دست می‌آید . جهت حرکت روی مرز S' به قسمی است که S' همواره در سمت چپ قرار گیرد . رویهٔ باز همبند سادهٔ انتگرال‌گیری S' از خارج بوسیلهٔ منحنی محدب دلخواه و از داخل بوسیلهٔ لبهٔ سوراخ شامل $C(d)$ محدود می‌شود . علاوه براین ، دولبهٔ مرزی حاصل ازبرش قیچی دومرز خارجی وداخلی S' رابهم‌وصل می‌کند .

فرض کنید $C(E)$ مرز خارجی S' و $C(I)$ مرز داخلی S' باشد. اگر دو لبهٔ بریده شده با قیچی را به $C(+)$ و $C(-)$ نشان دهیم قضیهٔ دیورژانس دوبعدی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{S'} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS = \int_{C(S')} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳-۳۲۲}$$

که در آن

$$\int_{C(S')} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_{C(E)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(I)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(+)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(-)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳-۳۲۳}$$

جهت حرکت بر $C(S')$ به قسمتی است که S' همواره درسمت چپ واقع شود. توجه کنیدکه

$$\int_{C(+)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_{C(+)} d\mathbf{\sigma}_+ \cdot \mathbf{A}_+ \tag{۳-۳۲۴}$$

و

$$\int_{C(-)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_{C(-)} d\mathbf{\sigma}_- \cdot \mathbf{A}_- \tag{۳-۳۲۵}$$

که در آن $\mathbf{A}_+$ مقدار $\mathbf{A}$ بر $C(+)$ و $\mathbf{A}_-$ مقدار $\mathbf{A}$ بر $C(-)$ است. روی یک مرز، بردار $d\sigma$ همواره به سمت خارج ناحیهٔ انتگرال‌گیری متوجه است. بنابراین، روی مرز خارجی S' ، $d\sigma$ به طرف خارج S' رسم می‌شود. برمرز داخلی S' ، $d\sigma$ به طرف داخل سوراخ بسته متوجه است. درمحل برش فرض می‌کنیم که دو لبهٔ بریده شده تا اندازه‌ای ازهم جدا هستند. قائمهای مرسوم بردو لبهٔ $C(+)$ و $C(-)$ باید متقابل باشند؛ بنابراین

$$d\mathbf{\sigma}_+ = -d\mathbf{\sigma}_- \tag{۳-۳۲۶}$$

چون دو لبه بریده شده با یکدیگر رسم شده‌اند،

$$C(+) = C(-) = C' \tag{۳-۳۲۷}$$

درنتیجه باتوجه به معادلات (۳-۳۲۴) تا (۳-۳۲۷)،

$$\int_{C(+)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(-)} d\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_{C'} d\mathbf{\sigma}_+ \cdot (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) \tag{۳-۳۲۸}$$

درمعادلهٔ (۳-۳۲۸)، $\mathbf{A}_+$ مقدار $\mathbf{A}$ رادرهر نقطهٔ C' نشان می‌دهد وقتی نقطه ازجهت مثبت C' نزدیک می‌شود. همین‌طور $\mathbf{A}_-$ مقدار $\mathbf{A}$ رادرهر نقطهٔ C' نشان می‌دهد وقتی ازجهت منفی C' نزدیک می‌شود. چون $\mathbf{A}$ بر تمام S' یک مقداری و پیوسته است،

$$\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_- \text{ on } C' \tag{۳-۳۲۹}$$

پس سمت راست معادلهٔ (۳-۳۲۸) صفر می‌شود. مقادیر دو لبهٔ بریده شده بوسیله قیچی

یکدیگر را حذف می‌کنند، باقی مانده عبارت است از:

$$\int_{S'} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(I)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳–۳۳۰}$$

کمیت اولیه که ازنظر فیزیکی موردتوجه است برابر است با

$$\int_{S} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS \tag{۳–۳۳۱}$$

عبارت (۳ – ۳۳۱) با حذف منحنی داخلی $C(I)$ که سوراخ S را محدود می‌کندمجدداً به‌دست می‌آید. این عمل ادامه می‌یابد تا $C(I)$ بر منحنی باز $C(d)$ که بر آن $\mathbf{A}$ منفصل است منطبق شود. در این صورت$S' \to S$ و داریم

$$\int_{S} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C_1(I)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C_2(I)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳–۳۳۲}$$

که درآن $C(I) = C_1(I)+C_2(I)$. منحنی انفصال $C(d)$ دارای دوسمت ۱ و ۲ است. فرض می‌کنیم قائم واحد درهرنقطهٔ سمت ۲ منحنی $C(d)$ بر رویهٔ S واقع‌است. این قائم واحد را $\mathbf{n}_{1\to 2}$ می‌نامیم و نشان می‌دهد که از سمت ۱ به سمت ۲ متوجه است. همین‌طور قائم واحد سمت ۱ را $\mathbf{n}_{2\to 1}$ می‌نامیم وازسمت ۲ به سمت ۱ منحنی $C(d)$ اشاره دارد. بر $C(I)$، بردار $d\boldsymbol{\sigma}$ به‌سمت داخل سوراخ شامل $C(d)$ رسم می‌شود. قطعهٔ $C_2(I)$ از $C(I)$ به سمت ۲ نزدیک می‌شود وبرآن داریم:

$$d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n}_{1\to 2}\, d\sigma \tag{۳–۳۳۳}$$

قطعهٔ $C_1(I)$ از $C(I)$ به سمت ۱ نزدیک می‌شود و برآن داریم:

$$d\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n}_{2\to 1}\, d\sigma \tag{۳–۳۳۴}$$

علامتهای منفی در معادلات (۳ – ۳۳۳) و (۳ – ۳۳۴) برای‌آن‌که $d\boldsymbol{\sigma}$ همواره به سمت خارج ناحیهٔ انتگرال‌گیری و داخل سوراخ حول $C(I)$ توجه باشد ضروری است. باتوجه به

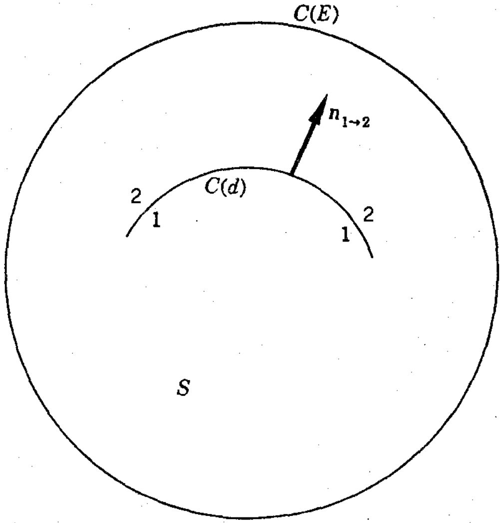
$$\mathbf{n}_{1\to 2} = -\mathbf{n}_{2\to 1} \tag{۳–۳۳۵}$$

معادلهٔ (۳ – ۳۳۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{S} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} + \int_{C(d)} d\sigma \mathbf{n}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \tag{۳–۳۳۶}$$

که درآن $\mathbf{A}_1$ مقدار $\mathbf{A}$ برسمت ۱ و $\mathbf{A}_2$ مقدار $\mathbf{A}$ برسمت ۲ منحنی $C(d)$ است. معادلهٔ (۳–۳۳۶) اغلب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{S} \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS + \int_{C(d)} d\sigma\, \mathbf{n}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳–۳۳۷}$$



اگردرتمام سطح S، $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ آن‌گاه فلویی‌که از $C(E)$ می‌گذرد بوسیلهٔ جهش $\mathbf{A}$ برمنحنی انفصال $C(d)$ تولید می‌شود. این جهش را به‌علت منابع نقطه‌ای که روی منحنی توزیع شده‌اند می‌دانیم. درتأیید این مطلب دیورژانس خط یا فلوی هر واحد طول قوس رابه‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \qquad (۳۳۸-۳)$$

و با استفاده از (۳ ــ ۳۳۸) معادلهٔ (۳ ــ ۳۳۷) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS + \int_{C(d)} \mathrm{Div}\,\mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \qquad (۳۳۹-۳)$$

حرف بزرگ D در $\mathrm{Div}\mathbf{A}$ برای این است که نشان دهیم دیورژانس خط به‌کار رفته است. دیورژانس حجم $\mathrm{div}\ \mathbf{A}$ یا $\nabla \cdot \mathbf{A}$ چگالی‌حجم منابع فلو، دیورژانس رویه $\mathrm{Div}\ \mathbf{A}$ چگالی سطح منابع فلو و بالاخره دیورژانس خط چگالی خطی منابع فلو را اندازه می‌گیرد.

جهش $\mathbf{A}$ در طول $C(d)$ ممکن‌است بر $\nabla \times \mathbf{A}$ اثر کرده آن را بر $C(d)$ بی‌نهایت کند. بحث قبل به قضیهٔ کرل دوبعدی تعمیم یافته منجر می‌شود:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A}\, dS + \int_{C(d)} \mathrm{Curl}\,\mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A} \qquad (۳۴۰-۳)$$

کرل رویه با حرف بزرگ C نوشته می‌شود و برابر است با

$$\text{Curl}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \tag{۳۴۱ — ۳}$$

اگر n بردار واحدعمود برسطح انتگرال‌گیری دریک نقطهٔ رویه باشد، معادلهٔ (۳ — ۳۴۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{C(d)} \mathbf{n} \cdot \text{Curl}\,\mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{۳۴۲ — ۳}$$

که درآن عنصر متوجه مساحت رویهٔ S عبارتست از:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS \tag{۳۴۳ — ۳}$$

بردار تغییرمکان $d\mathbf{r}$ بر $C(E)$ مماس است و درجهتی است که ناحیهٔ S در سمت چپ آن قرارمی‌گیرد. توجه کنیدکه Curl **A** فقط شامل مؤلفه‌هایی‌است که برمنحنی $C(d)$ مماس هستند. وقتی‌درتمام S، $\nabla \times \mathbf{A}=0$، درآن‌صورت چرخش **A** حول $C(E)$ باید بوسیله جهشهای مؤلفه‌های **A** که بر $C(d)$ مماس هستند تولید شود. این قبیل جهشها به منابع نقطه‌ای چرخش یا دوران مربوط می‌شودکه درطول $C(d)$ توزیع شده‌اند. کرل خط چگالی خطی این قبیل منابع روی $C(d)$ را اندازه می‌گیرد.

اگر ϕ یک تابع اسکالر باشد که بر دو سمت منحنی باز مفروض $C(d)$ در S مقادیر متفاوت اختیار می‌کند، درآن‌صورت $\nabla\phi$ ممکن است بر $C(d)$ بی‌نهایت شود. تعمیم قضیهٔ گرادیان دوبعدی متناظر با همان استدلال قبل به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_S \nabla \phi\, dS + \int_{C(d)} \text{Grad}\,\phi\, d\sigma = \int_{C(E)} d\sigma\, \phi \tag{۳۴۴ — ۳}$$

گرادیان خط با حرف بزرگ G نوشته می‌شود و برابر است با:

$$\text{Grad}\,\phi = \mathbf{n}_{1\to 2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{۳۴۵ — ۳}$$

خلاصه

نشان دادیم قضیهٔ انتگرال دوبعدی راوقتی رویهٔ باز انتگرال‌گیری شامل یک منحنی‌باز انفصال است چگونه باید اصلاح کرد. این اِصلاح لازمه‌اش معرفی عملگر دیورژانس، کرل و گرادیان خطی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Div}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \tag{۳۴۶ — ۳}$$

$$\text{Curl}\,\mathbf{A} = \mathbf{n}_{1\to 2} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \tag{۳۴۷ — ۳}$$

$$\text{Grad}\,\phi = \mathbf{n}_{1\to 2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{۳۴۸ — ۳}$$

قضایای انتگرال اصلاح شده متناظر عبارتند از:

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS + \int_{C(d)} \mathrm{Div}\, \mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \tag{۳–۳۴۹}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A}\, dS + \int_{C(d)} \mathrm{Curl}\, \mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A} \tag{۳–۳۵۰}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{C(d)} \mathbf{n} \cdot \mathrm{Curl}\, \mathbf{A}\, d\sigma = \int_{C(E)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{۳–۳۵۱}$$

$$\int_S \nabla \phi\, dS + \int_{C(d)} \mathrm{Grad}\, \phi\, d\sigma = \int_{C(E)} d\boldsymbol{\sigma}\, \phi \tag{۳–۳۵۲}$$

۳ – ۲۱. مسائل و کاربردها

۱ ــ نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2a\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega^2\mathbf{r} = 0$$

که درآن a و ω بردارهای ثابتند دارای جواب زیر است:

(a) $\mathbf{r} = e^{-at}\{\mathbf{c}_1 e^{\sqrt{a^2-\omega^2}\,t} + \mathbf{c}_2 e^{-\sqrt{a^2-\omega^2}\,t}\}$

اگر $a^2 - \omega^2 > 0$ و $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ ثابتهای اختیاری باشند.

(b) $\mathbf{r} = e^{-at}\{\mathbf{c}_1 \sin \sqrt{\omega^2 - a^2}\, t + \mathbf{c}_2 \cos \sqrt{\omega^2 - a^2}\, t\}$

اگر $a^2 - \omega^2 < 0$.

(c) $\mathbf{r} = e^{-at}\{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t\}$

اگر $a^2 - \omega^2 = 0$.

۲ ــ ثابت کنید

(الف)

$$\mathbf{A} = \mathbf{m}_0 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \qquad i = \sqrt{-1}$$

یک جواب معادلهٔ

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \qquad r = |\mathbf{r}| \neq 0$$

است که درآن $\mathbf{m}_0$ بردار ثابت دلخواه، و ω و c اعداد حقیقی ثابت هستند.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{A}$ در معادله

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = 0 \qquad r = |\mathbf{r}| \neq 0$$

صدق می‌کند به شرط‌آن‌که $\omega = kc$.

[**راهنمایی:** از عملگر لاپلاس در مختصات کروی استفاده کنید.]

۳ ـ ثابت کنید که

$$(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = 2\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{r} \cdot (\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + k^2\mathbf{A})$$

۴ ـ ثابت کنید اگر

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \qquad \text{and} \qquad \nabla \times \mathbf{a} = 0$$

آن‌گاه به ازای $\mathbf{r}$ $= \mathbf{a}$ یا $\mathbf{a} =$ (ثابت)، و

$$\mathbf{L} = \nabla\psi$$
$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}\psi)$$
$$\mathbf{N} = \frac{1}{k}(\nabla \times \mathbf{M})$$

داریم:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{L} = 0 \qquad (\nabla^2 + k^2)\mathbf{M} = 0 \qquad \text{and} \qquad (\nabla^2 + k^2)\mathbf{N} = 0$$

۵ ـ نشان دهید اگر

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

و

$$\nabla_1 = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_1}$$

آن‌گاه به ازای

$$F(R) = F(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2})$$
$$\nabla F(R) = -\nabla_1 F(R)$$

که در آن $F(R)$ یک تابع مشتق‌پذیر دلخواه است.

۶ ـ عبارت زیر را درنظر بگیرید

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_x\,dx + A_y\,dy$$

اگر یک تابع اسکالر $\phi(x,y,z)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$A_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad A_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

آن‌گاه

$$d\phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy$$

و می‌گوییم که $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل است. از قضیهٔ کرل دوبعدی نتیجه می‌شود که اگر در تمام رویهٔ دوبعدی همبندسادهٔ باز: $\nabla \times \mathbf{A} = 0$، آن‌گاه $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل است. بنابراین

ϕ وجود دارد، و

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}$$

(الف) گزاره فوق را ثابت کنید.

(ب) اگر $\nabla\times\mathbf{A}\neq 0$، آن‌گاه $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل نیست. ولی، اگر یک تابع اسکالر $\mu=\mu(x,y,z)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\nabla\times(\mu\mathbf{A})=0$$

آن‌گاه $\mu\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل است. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که $\mu\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل باشد آن است که

$$\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$$

در هر نقطهٔ یک رویهٔ همبند سادهٔ باز، تابع اسکالر $\mu=\mu(x,y,z)$ را "**عامل انتگرال‌گیری**" نامند.

۷ ــ تعبیر هندسی معادلات (۳ ــ ۹۷) و (۳ ــ ۹۸) را مورد بررسی قرار دهید.

۸ ــ تبدیلات معکوس متناظر با معادلات (۳ ــ ۹۷) و (۳ ــ ۹۸) را بنویسید.

۹ ــ فرض کنید $S(V)$ رویهٔ حجم V باشد. ثابت کنید

$$\int_{S(V)}\nabla\left(-\frac{1}{r}\right)\cdot d\mathbf{S}=\begin{cases}0 & \text{اگر مبدأ } r=0 \text{ خارج } V \text{ باشد}\\ 4\pi & \text{اگر مبدأ } r=0 \text{ داخل } V \text{ باشد}\end{cases}$$

که در آن $r^2=x^2+y^2+z^2$

[راهنمایی: از $\nabla^2(1/r)=0$، $r\neq 0$ و قضیهٔ دیورژانس سه بعدی و تعریف زاویهٔ صلب روبرو به $S(V)$ استفاده کنید.]

۱۰ ــ فرض کنید

$$\mathbf{A}=y\mathbf{e}_x+(x+z)^2\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z$$

انتگرال

$$I=\int_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

را بر منحنی C که به صورت زیر تعریف می‌شود محاسبه کنید

$$y=2x\quad,\quad z=0$$

از $x=0$، $y=0$ تا $x=2$ و $y=4$.

۱۱ ــ قطعه‌ای از صفحه $2x+2y+z=1$ را که در خارج $x\geq 0$، $y\geq 0$، $z\geq 0$ قرار دارد درنظر می‌گیریم. اگر آن را S بنامیم و

$$A=y\mathbf{e}_x+z\mathbf{e}_y$$

انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

۱۲ ــ فرض کنید V حجم کره‌ای به شعاع $r = a$ باشد. انتگرال حجم زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_V \left(\frac{1}{r}\right) dx\, dy\, dz$$

۱۳ ــ دیورژانس متوجه

$$f = x^2yz \qquad \text{at } (3,0,1)$$

را در نقطهٔ (۱ و ۰ و ۳) درامتداد بردار $\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ پیدا کنید. بزرگترین میزان تغییر f وجهت ماکزیمم میزان افزایش f را محاسبه کنید.

۱۴ ــ بردار قائم واحد متوجه به خارج رویهٔ زیر را در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) پیدا کنید.

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 = 5 \qquad \text{at } (1,1,1)$$

۱۵ ــ با استفاده از قضیهٔ دیورژانس سه بعدی اتحاد اول گرین،

$$\int_V (u\, \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dV = \int_{S(V)} u\, \nabla v \cdot d\mathbf{S}$$

همچنین اتحاد دوم گرین،

$$\int_V (u\, \nabla^2 v - v\, \nabla^2 u)\, dV = \int_{S(V)} (u\, \nabla v - v\, \nabla u) \cdot d\mathbf{S}$$

را ثابت کنید.

۱۶ ــ انتگرال

$$I = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS$$

را بر رویهٔ S که بوسیلهٔ بیضی‌های زیر محدود شده محاسبه کنید

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{and} \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وقتی

$$\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

۱۷ ــ کره‌ای به شعاع R، حجم V، و سطح $S(V)$ و به مرکز P رادرنظربگیرید. فرض کنید Q یک نقطهٔ دیگر داخل همین کره باشد. حال اگر حجم کره به سمت صفر میل کند به‌قسمی‌که Q به P نزدیک شود و $f(Q)$ در تمام V پیوسته باشد ثابت کنید

$$\lim_{V\to 0}\int_{S(V)}\frac{f(Q)}{R^n}\,dS=\begin{cases}4\pi f(P) & n=2\\ 0 & n<2\end{cases}$$

۱۸ ـ فرض کنید $f(\mathbf{r})$ در ناحیهٔ V پیوسته و نامنفی باشد .

(الف) اگر $I=\int f(\mathbf{r})\,dV=0$، ثابت کنید در V، $f\equiv 0$.

(ب) اگر $I=\int f(\mathbf{r})\,dS=0$ و $f(\mathbf{r})$ بر رویهٔ S پیوسته ونامنفی باشدثابت کنیدبر S، $f\equiv 0$.

(ج) اگر $f(\mathbf{r})$ در شرایط دیرکله در V صدق کند و اگر بر هر $V'\subseteq V$،

$$I=\int f(\mathbf{r})\,dV=0$$

آن‌گاه در V، $f\equiv 0$.

۱۹ ـ بردار تغییرمکان الکتریکی مربوط به چند بار نقطه‌ای q_k عبارت است از

$$\mathbf{D}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\mathbf{r}_k|^3}\,\mathbf{r}_k$$

که در آن r_k بردار شعاعی است که از بار k ام اندازه‌گیری می‌شود . قانون گاوس را ثابت کنید

$$\int_{S(V)}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\sum_{k=1}^{n}q_k$$

که در آن $S(V)$ یک سطح محدب هموار است که تمام بارها را دربر می‌گیرد .

۲۰ ـ بردارشدت میدان‌مغناطیسی حاصل ازهادیهای بسیاربلند موازی که از آنها جریان I_k می‌گذرد عبارتست از:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{I_k}{r_k}\,\mathbf{e}_{\theta k}$$

که در آن r_k فاصلهٔ شعاعی هادی k ام در صفحه عمود برآن است . بردار واحد $\mathbf{e}_{rk}$ و $\mathbf{e}_{\theta k}$ بردارهای مبنا را در یک دستگاه مختصات قطبی تشکیل می‌دهند که بر هادی k ام عمود بوده و شامل مبدأ است . ثابت کنید:

$$\int_{C(S)}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r}=\sum_{k=1}^{n}I_k$$

که در آن $C(S)$ منحنی‌بسته مرزی هرقرص مسطح S است‌که‌هریک از n هادی‌موازی ازآن می‌گذرد . مسیر $C(S)$ به قسمی طی می‌شود که سمت مثبت قرص در طرف چپ قرار گیرد .

۲۱ ـ ثابت کنید که

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(v^2)+(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}$$

۲۲ــ قضیهٔ دیورژانس سه بعدی برای تانسورهای دکارتی عبارت است از:

$$\int_V \tau_{ij,j}\, dV = \int_{S(V)} \tau_{ij} n_j\, dS$$

که درآن $d\mathbf{S} = n_j\, dS$ عنصرمساحت رویهٔ $S(V)$ است. نماد $\tau_{ij,j}$ دیورژانس تانسور τ_{ij} رانشان می‌دهد. با استفاده از قرارداد خلاصه نویسی یا $i,j = 1,2,3,$ ، داریم

$$\text{div } (\tau_{ij}) = \tau_{ij,j} = \tau_{i1,1} + \tau_{i2,2} + \tau_{i3,3}$$

که برای تانسورهای دکارتی به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\text{div } (\tau_{ij}) = \tau_{ij,j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} \qquad i = 1,2,3$$

قضیهٔ دیورژانس سه بعدی را برای تانسورهای دکارتی ثابت کنید.

] راهنمایی: قضیه دیورژانس سه بعدی معمولی را برای هر مؤلفه بردار $\text{div } (\tau_{ij})$ به‌کار برید. [

۲۳ــ جسمی به حجم V محدود به رویه $S(V)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید بردار قائم واحد درهرنقطه $S(V)$ ، n_i ، $i = 1,2,3$ باشد. درهرنقطهٔ $S(V)$ ، نیروی واحد سطح کمیتی برداری است که جهت آن درحالت کلی با جهت بردار قائم متفاوت است. این نیرو با بردار فشار S_i و با قائم n_i به صورت زیر درارتباط است.

$$S_i = \tau_{ij} n_j \qquad i,j = 1,2,3$$

در این جا تانسور τ_{ij} به صورت یک عملگر درنظر گرفته می‌شود که بردارقائم واحد n_i را دوران می‌دهد تادرجهت بردارفشار S_i قرارگیرد. تانسور τ_{ij} را "تانسورفشار" و S_i را "بردار فشار" یا کشش رویهٔ $S(V)$ نامند. فرض کنید جسمی تحت نیروی F_i در واحد حجم و تحت نیروی S_i در واحد سطح تغییرشکل می‌دهد. فرض کنید ρ چگالی جسم و v_i بردار سرعت هر نقطهٔ جسم باشد. از قانون دوم نیوتن نتیجه می‌شود،

$$\int_{V(t)} F_i\, dV + \int_{S(V)} S_i\, dS = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_i\, dV$$

با استفاده از نتیجه مسألهٔ ۲۲، نشان دهید که از صورت انتگرالی قانون دوم نیوتن معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات نسبی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{div } (\tau_{ij}) + \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

جرم داخل V برابر است با

$$m(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{r},t)\, dV$$

اگر حجم $V(t)$ از منابع و حفره‌های جرم آزاد باشد، وجرم محفوظ بماند، نشان دهیدکه

$$\operatorname{div}(\tau_{ij}) + \mathbf{F} = \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}\right]$$

۲۴ ــ کره کوچکی رادرنظربگیرید که در مایعی غوطه‌ور است. فرض کنید n_i قائم برسطح این‌کره ومتوجه خارج باشد. اگرفشار برسطح کره همواره درجهت داخل و درامتداد $-n_i$ باشد، صرفنظر از حرکت کره، مایع را ایده‌آل یا بدون چسبندگی گویند. بنابراین، اثر فشاربر رویهٔ یک کره در یک مایع ایده‌آل برابر است با:

$$S_i = -pn_i$$

که در آن

$$|S_i| = p =$$

و$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$تانسور فشار متناظر است، زیرا

$$S_i = \tau_{ij}n_j = -p\delta_{ij}n_j = -pn_i$$

نشان دهید که برای یک مایع ایده‌آل تغییرشکل با فرض ثابت بودن جرم، داریم

$$\mathbf{F} - \nabla p = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

و

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

اگر مایع تراکم‌پذیر نباشد، نشان دهید که

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

۲۵ ــ یک گاز ایده‌آل قابل تراکم را درنظر بگیرید که در آن نیروی جسمی$\mathbf{F} = 0$ فرض کنید معادلهٔ آدیاباتیک حالت گاز به‌صورت زیر باشد

$$p = p(\rho)$$

که در آن p فشار و ρ چگالی است. سرعت آدیاباتیک صدا در این گاز چنین تعریف می‌شود:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

نشان دهید که معادلهٔ نوسانات فشار با دامنه کوچک در گاز عبارتست از:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

[راهنمایی: برای ناهنجاریهای با دامنهٔ کوچک از جملات غیرخطی مانند $\mathbf{v}\cdot(\nabla p)$ و

$$\tfrac{1}{2}\nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

صرفنظرمی‌کنیم. علاوه براین، چگالی ρ و آدیاباتیک سرعت صدا c، رامی‌توان تقریبا" ثابت فرض کرد.]

۲۶ــ فرض کنید بردار u_i تغییرمکان نقطه‌ای از جسم همگن را ازحالت تعادل آن نشان دهد. رابطهٔ بین فشار τ_{ij} و تغییرمکان u_i با قانون هوک به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$$

که درآن λ و μ "ثابتهای لامه" نامیده می‌شوند و

$$u_{k,k} = \nabla\cdot\mathbf{u}; \quad u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$$

نشان دهید که ارتعاشات جسم قابل ارتعاش با دامنهٔ کوچک در یک جسم ازمعادلهٔ زیر پیروی می‌کنند.

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$$

۲۷ــ چون در یک جسم گرما از درجات بالا به پایین در جریان است. گرمای حاصل از میدان حرارتی T با عبارت زیر داده می‌شود،

$$\mathbf{q} = -k\,\nabla T \qquad k = \text{cal/cm-sec °C}$$

که درآن k ضریب هدایت گرمایی جسم است. اگر H گرمای هر واحد حجم جسم را نشان دهد درآن صورت از ترمودینامیک نتیجه می‌شود:

$$dH = \rho c\,dT$$

که درآن ρ چگالی برحسب گرم بر سانتیمتر مکعب، و c گرمای معین جسم برحسب کالری درهر گرم و هر سانتیگراد است. از این معادله معلوم می‌شود که تغییر dT در درجه حرارت به ازای افزایش گرمای $dH/\rho c$ ایجاد می‌شود. پس

$$\frac{dH}{dt} = \rho c\frac{dT}{dt}$$

اگر جسم صلب باشد، $\mathbf{v} = 0$، و داریم

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

نقصان گرما در ناحیهٔ V در واحد زمان عبارت است از:

$$-\int_V \frac{\partial H}{\partial t}\,dV$$

و اگر گرما ثابت بماند ، آن‌گاه

$$-\int_V \frac{\partial H}{\partial t}\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S}\cdot \mathbf{q}$$

و بیان می‌کند که نرخ کاهش گرما در ناحیهٔ V برابر است با فلوی گرمایی که از مرز V داخل می‌شود . معادلهٔ انتشار گرما که توزیع درجهٔ حرارت جسم ازآن پیروی می‌کند عبارت است از :

$$\nabla\cdot(k\,\nabla T) = \rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

که وقتی ضریب هدایت حرارتی ثابت است به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

که درآن $\alpha = k/\rho c$ ضریب انتشار جسم نامیده می‌شود .

۲۸ ــ حلقهٔ بسته‌ای از سیم را درنظربگیریدکه می‌تواند به‌صورت تابعی از زمان دوران ، انتقال و تغییرشکل داشته باشد . سطح حلقه را به $S(t)$ و مرز آن را به $C(t)$ نشان می‌دهیم . فرض کنید یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ داخل سیم و یک میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ درتمام‌فضای اطراف‌آن وجود دارد . میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ، داخل سیم را می‌توان با اتصال حلقه به یک باطری به‌وجود آورد . ولی میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ به علت یک منبع خارجی مثلاً" زمین تولیدشده است . جریان حاصل در حلقه ، یک میدان مغناطیسی دیگرعلاوه برمیدان خارجی $\mathbf{B}$ تولید می‌کند . درنتیجهٔ فلوی مغناطیسی کل که از $S(t)$ عبور می‌کند برآیند دو منبع است .

(الف) جریان الکتریسیته در حلقه ، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و

(ب) میدان مغناطیسی خارجی ، که قسمتی از آن سطح حلقه را قطع می‌کند .

به دو علت فلوی مغناطیسی گذرنده از $S(t)$ با زمان تغییر می‌کند . علت اول این است که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به بارهای حلقه شتاب می‌دهد . درنتیجه جریان سیم تشدید می‌شود ، و فلوی مغناطیسی حاصل افزایش می‌یابد . علت دوم ، حرکت مکانیکی حلقه درمیدان مغناطیسی خارجی است که فلوی گذرنده از حلقه را تغییر می‌دهد . این ایده‌ها در قانون فاراده خلاصه می‌شود ،

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{C(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}$$

که درآن $\mathbf{v}$ سرعت هر نقطه از حلقهٔ $C(t)$ را نشان می‌دهد ، و

$$\Phi = \int_{S(t)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

ثابت کنید

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

و

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_{t=0} \exp - \int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v}\, dt$$

اگر فرض کنیم

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_{t=0} = 0$$

آن‌گاه قانون فاراده دو معادلهٔ ماکسول را می‌دهد ، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

۲۹ ـ همان حلقهٔ بستهٔ مسألهٔ ۲۸ را درنظر می‌گیریم . فرض کنید یک میدان الکتریکی داخل سیم وجود دارد . این میدان الکتریکی را می‌توان با اتصال حلقه به یک باطری مانند قبل تولید کرد . فرض کنید یک میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{D}$ در تمام فضا هست که حلقه در آن واقع است . فرض می‌کنیم این میدان الکتریکی جابجایی $\mathbf{D}$ از بارهای الکتریکی دور که درابتدا نسبت به حلقه درحال سکون هستند تولید شود . باطری باعث جریان I در حلقه می‌شود ، و درنتیجه یک میدان مغناطیسی اطراف حلقه به‌وجود می‌آورد . حال فرض کنید حلقه یک حرکت مکانیکی انجام دهد . در این صورت حرکت نسبی بین بارهای دور مولد میدان $\mathbf{D}$ و خود حلقه وجود دارد . حرکت حلقه درحالت کلی از یک انتقال ، یک دوران ، و یک تغییرشکل ترکیب می‌شود . تغییرشکل فرم‌حلقه راعوض می‌کند . با درنظرگرفتن یک دستگاه متصل به حلقه ، اثر ، دوران و انتقال را می‌توان حذف کرد . ولی ، در این دستگاه جدید بارهای دور دیگر درحال سکون نیستند . یک ناظربردستگاه مختصات‌متصل به حلقه بارهای‌دور رادرحال‌حرکت می‌بیند ، درنتیجه یک جریان الکتریکی تولید می‌کند . این جریان یک میدان مغناطیسی علاوه برمیدان حاصل از جریان حلقه به‌وجود می‌آورد .

حال یک کرهٔ مجوف تصور کنیدآن‌قدر بزرگ باشدکه حلقه و بارهای دور را که میدان $\mathbf{D}$ را تولید می‌کند دربر بگیرد . برای این کره از قانون گاوس نتیجه می‌شود ،

$$\int_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

که در آن q تمام بار موجود در داخل حجم V است . ثابت کنید در داخل

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

که در آن

$$\int_V \rho\, dV = q$$

حال یک سوراخ در سطح این کره به‌وجود می‌آوریم . فرض کنید منحنی مرزی این سوراخ $P(t)$ وسطح کره سوراخ شده $S(t)$ باشد . حلقه سیمی رابه شکلی‌درمی‌آوریم‌که با منحنی $P(t)$ که لبهٔ $S(t)$ را تشکیل می‌دهد متصل شود . دراین‌صورت جریان I در حلقه رویهٔ $S(t)$ رافقط در یک نقطه قطع می‌کند . قانون آمپر بیان می‌کند که

$$I + \frac{d}{dt}\int_{S(t)} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{P(t)} [\mathbf{H} - (\mathbf{v}\times\mathbf{D})]\cdot d\mathbf{r}$$

در این معادله I شدت جریان باطری در حلقه ، و $\mathbf{v}$ سرعت یک نقطه منحنی $P(t)$ است که باید همواره به حلقهٔ متحرک متصل باشد . قانون آمپر تمام چرخش دو میدان مغناطیسی مجزا را حول مسیری که یک حلقه سیمی حامل الکتریسیته را دور می‌زند منظور می‌کند . میدان مغناطیسی اول ، $\mathbf{H}$ ، دراثر جریان I باطری در حلقه و میدان مغناطیسی دوم ، $\mathbf{v}\times\mathbf{D}$ ، در اثر حرکت نسبی بین بارهای دور و مسیر $P(t)$ به‌وجود می‌آید . قانون آمپر بیان می‌کندکه چرخش کلی برابر است با جریان کل که سطح $S(t)$ را قطع می‌کند . این جریان کل ازدو قسمت تشکیل می‌شود که عبارتند از جریان I حلقه و جریان

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

که از حرکت نسبی سطح $S(t)$ و بارهای الکتریکی به‌وجود می‌آید . اگرحلقه و بارهای دورنسبت بهم درحال سکون باشند ، در آن صورت قانون آمپر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$I = \int_p \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r}$$

معمولاً" بردار چگالی جریان $\mathbf{J}$ را به قسمی تعریف می‌کنند که

$$\int_{S(t)} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = I$$

که در آن I جریان حلقهٔ سیمی و $S(t)$ سطحی است که بوسیله I مشخص می‌شود .

با استفاده از قانون گاوس و قانون آمپر ، نشان دهید که

$$\nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_T$$

که‌در آن $\mathbf{J}_T = \mathbf{J} + \rho\mathbf{v}$. دراین جا $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$ چگالی‌بار الکتریکی است .جملهٔ $\rho\mathbf{v}$ را " چگالی

جریان انتقالی" گویند ، وچگالی‌کل جریان $\mathbf{J}_T$ ، ازمجموع چگالیهای انتقالی وهدایتی تشکیل می‌شود . ثابت کنید :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

که همان معادلهٔ بار ثابت است .

۳۰ ــ مجموعهٔ کامل معادلات ماکسول عبارت است از :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

با فرض $\mathbf{J} = 0$ و $\rho = 0$ و

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

ثابت کنید

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

و

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

که در آن

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

۳۱ ــ نشان دهید که بر رویهٔ انفصال در یک میدان الکترومغناطیسی شرایط مرزی سازگار با معادلات ماکسول عبارتند از :

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{D} = \omega$$

$$\operatorname{Curl} \mathbf{H} = \mathbf{K}$$

$$\operatorname{Curl} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

در این جا چگالی ω بار رویهٔ انفصال ، و $\mathbf{K}$ چگالی جریان رویه است . عملگرهای Div و Curl دیورژانس و کرل رویه را نشان می‌دهند .

[**راهنمایی** : به بخش ۳ ــ ۲۰ مراجعه کنید .]

۳۲ ــ اگر در تمام رویهٔ دوبعدی همبند سادهٔ باز، $\nabla \times \mathbf{A} = 0$، آن‌گاه از مسألهٔ ۶ نتیجه می‌شود که $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل است. ثابت کنید که

$$I = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

از مسیر بین P_0 و P_1 مستقل است.

۳۳ ــ اگر بدانیم $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل است، آیا همواره گزارهٔ "انتگرال

$$I = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

از مسیر بین P_0 و P_1 مستقل است" صحیح خواهد بود؟ چرا؟

۳۴ ــ انتگرال حجم تابع $f(\mathbf{r})$ را که درناحیهٔ محدود به رویه‌های زیرپیوسته است درنظر بگیرید

$$g(\mathbf{r}) = ct_0 \qquad \text{و} \qquad g(\mathbf{r}) = ct$$

فرض کنید c و t_0 ثابت و t متغیر است. ثابت کنید

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{ct_0 \leq g(\mathbf{r}) \leq ct} f(\mathbf{r})\, dV = \int_{g(\mathbf{r}) = ct} \frac{f(\mathbf{r})}{|\nabla g|}\, dS$$

توابعی از یک متغیر مختلط

۴ ــ ۱ . مقدمه

اطلاعاتی ازآنالیزمختلط، حتی بمقدار محدود ، درمطالعهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و نسبی تبدیلات انتگرالی و توابع ریاضی فیزیک در درجه اول اهمیت است .

این مقدمهٔ مختصر درباره آنالیز مختلط به منظور آشنا ساختن دانشجویان با اصول این موضوع مهم است .

۴ ــ ۲ . تعاریف

آنالیز مختلط جدید اجتماع نهایی و تکامل سه روشی را که در ابتدا جدا ومتمایز بودند نشان می‌دهد . ایده‌های اساسی توسط وایرشتراس، کوشی، ریمان، بطورجداگانه‌به‌وجودآمدند و تعمیم داده شدند . وایرشتراس توابعی از یک متغیر حقیقی را درنظرمی‌گیرد که در دامنه‌ای از متغیر مستقل به یک سری متغیر نامتناهی متقارب قابل بسط باشند؛ مانند

$$w = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad |x| < \infty \qquad (۱-۴)$$

$$w = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad |x| < 1 \qquad (۲-۴)$$

$$w = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \qquad (۳-۴)$$

$$w = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \qquad (۴-۴)$$

(توجه کنید $0! = 1$)

$$w = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad |x| \leq R \qquad (۵-۴)$$

برای به‌دست‌آوردن‌توابعی ازیک متغیرمختلط وایرشتراس عملی رابه‌نام "تداوم‌تحلیلی" معرفی می‌کند . برای این کار ، بجای متغیر حقیقی x در هریک از فرمولهای (۴ ــ۱) یا (۴ــ ۵) یک متغیر مختلط $z = x + iy$ قرار می‌دهد . که در آن $i = \sqrt{-1}$. در این صورت فرمولها به صورت زیر درمی‌آیند .

$$w = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (۴-۶)$$

$$w = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad (۴-۷)$$

$$w = \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (۴-۸)$$

$$w = \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \qquad (۴-۹)$$

$$w = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad (۴-۱۰)$$

تابع $f(z)$ را تداوم تحلیلی تابع $f(x)$ در صفحه مختلط z گوییم (شکل ۴ ــ ۱). منظور از یک "صفحه مختلط z " این است که معادلهٔ

$$z = x + iy \qquad (۴-۱۱)$$

به هر زوج مرتب از اعداد حقیقی (x,y) یک عدد مختلط z را نسبت می‌دهد بنابراین، هرنقطه درصفحه حقیقی x و y متناظراست با یک عدد مختلط متمایز. به عکس هر عددمختلط یک نقطه متمایز در صفحه x و y را مشخص می‌سازد .

x را جزء حقیقی و y را جزء موهومی z گوییم ، و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$x = \operatorname{Re}(z) \qquad (۴-۱۲)$$

$$y = \operatorname{Im}(z) \qquad (۴-۱۳)$$

پس

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \qquad (۴-۱۴)$$

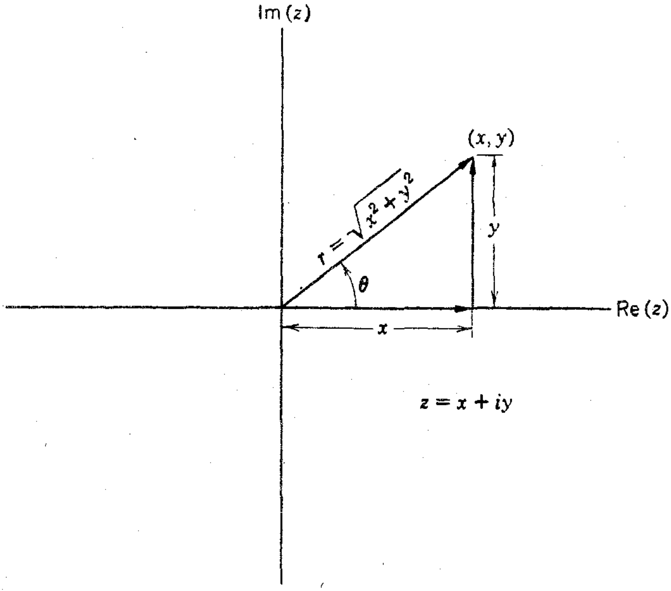
در مختصات قطبی داریم .

$$x = r\cos\theta \qquad (۴-۱۵)$$

$$y = r\sin\theta \qquad (۴-۱۶)$$

درنتیجه

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (۴-۱۷)$$



شکل ۴ ــ ۱ . صفحه مختلط z .

مدول یا قدرمطلق z را به صورت

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad (۴-۱۸)$$

تعریف می‌کنیم پیمانه یا هنگ عدد z عبارت است از

$$\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\ (z)}{\mathrm{Re}\ (z)} \quad (۴-۱۹)$$

دانشجویان معادله اولر را به خاطر دارند ،

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (۴-۲۰)$$

با استفاده از این معادله می‌توان نوشت :

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (۴-۲۱)$$

که در آن $z = re^{i\theta}$ را صورت قطبی عدد z گوییم .

۴ ــ ۳ . جبر مختلط

برای تعبیر معادلات (۴ ــ ۶) تا (۶ ــ ۱۰) لازم است قواعد جبر مختلط را که کاملا" ساده‌اند بدانیم . به‌عنوان نمونه ، اگر

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad (۴-۲۲)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \tag{۴-۲۳}$$

آن‌گاه

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{۴-۲۴}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{۴-۲۵}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{۴-۲۶}$$

توجه کنید که در ضرب از $i = \sqrt{-1}$ برای به‌دست آوردن $i^2 = -1$ استفاده می‌کنیم.

عدد مختلط $z = 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$z = 0 + i0 = 0 \tag{۴-۲۷}$$

پس عدد مختلط 0 دارای پیمانه نامعین و قدرمطلق صفر است. از تساوی

$$z_1 = z_2 \tag{۴-۲۸}$$

نتیجه می‌شود که

$$z_1 - z_2 = 0 \tag{۴-۲۹}$$

پس $z_1 = z_2$ اگر و فقط اگر

$$x_1 = x_2 \tag{۴-۳۰}$$

$$y_1 = y_2 \tag{۴-۳۱}$$

مزدوج مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ از جانشین کردن $-i$ بجای i، به‌دست می‌آید، یعنی

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1 \tag{۴-۳۲}$$

و همینطور،

$$\bar{z}_2 = x_2 - iy_2 \tag{۴-۳۳}$$

توجه کنید که

$$z_1 \bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2 \tag{۴-۳۴}$$

تقسیم اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \tag{۴-۳۵}$$

که در آن

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}. \qquad |z_2| \neq 0. \tag{۴-۳۶}$$

درصورت قطبی می‌توان نوشت

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad \bar{z}_1 = r_1 e^{-i\theta_1} \tag{۴-۳۷}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \qquad \bar{z}_2 = r_2 e^{-i\theta_2} \tag{۳۸ — ۴}$$

درنتیجه

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{۳۹ — ۴}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{۴۰ — ۴}$$

دانشجویان می‌توانند ازنظر هندسی ، اعمال جبر مختلط را بررسی کنند .

۴ ـ ۴ . دامنهٔ تقارب

در ریاضیات مقدماتی یاد می‌گیریم که اگر سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{۴۱ — ۴}$$

به ازای مقدار خاص $x = x_0$ متقارب باشد ،آن‌گاه سری به ازای $|x| < |x_0|$ مطلقا" متقارب است و در فاصله $|x| \leq |x_1|$ به ازای هر x_1 ثابت به قسمی که $|x_1| < |x_0|$ بطور یکنواخت متقارب خواهد بود . اگر سری به ازای $x = x_0$ متباعد باشد آن‌گاه به ازای تمام مقادیر x ، $|x| > |x_0|$، متباعد است .

حال اگر تداوم تحلیلی عبارت (۴ ـ ۴۱) را درنظر بگیریم ، داریم :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{۴۲ — ۴}$$

ثابت می‌شودکه اگرعبارت (۴ ـ ۴۲) به ازای $z = z_0$ متقارب باشد ، آن‌گاه به ازای تمام z هایی که در شرط $|z| < |z_0|$ صدق کنند بطور مطلق [یعنی بجای z در (۴ ـ ۴۲) $|z|$ قرار دهیم] و به ازای $|z| \leq |z_1| < |z_0|$ بطور یکنواخت متقارب است .

این نشان می‌دهد که تقارب مطلق (۴ ـ ۴۱) در فاصله ،

$$|x| < R \tag{۴۳ — ۴}$$

تقارب مطلق تداوم‌تحلیلی (۴ ـ ۴۲) و (۴ ـ ۴۱) رادرداخل دایره زیرایجاب می‌کند .

$$|z| < R \tag{۴۴ — ۴}$$

این دایره را دایره یا دامنهٔ تقارب ، و شعاعش R را شعاع تقارب گوییم .

توجه کنید که لازم نیست R ماکزیمم شعاع تقارب باشد . مثلا" چون معادلهٔ (۴ ـ ۲) به ازای $x = 1/2$ متقارب است ، معادله (۴ ـ ۷) به ازای $|z| < 1/2$ حتما" متقارب خواهد بود . ولی معادله (۴ ـ ۲) به ازای $x = 3/4$ نیز متقارب است واین مطلب تقارب معادله (۴ ـ ۷) را به ازای $|z| < 3/4$ تعیین می‌کند و الی آخر .

برای یک سری توان مانند (۴ ــ ۴۲) بزرگترین ناحیه تقارب نیز دایره‌ای است با شعاع متناهی یا نامتناهی که مرکز آن در $z = 0$ قرار دارد. وقتی ماکزیمم شعاع تقارب سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{۴ ــ ۴۵}$$

متناهی است و

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{۴ ــ ۴۶}$$

آن‌گاه $f(z)$ حداقل یک ویژگی دربزرگترین دایره تقارب‌دارد. به‌عبارت دیگر بزرگترین دایره تقارب سری توان نشان می‌دهد که $f(z)$ از نقطه ویژه $f(z)$ که نزدیکترین نقطه به $z = 0$ است می‌گذرد.

از سری توان حقیقی (۴ ــ ۵) می‌توان جمله به جمله در هر فاصله داخل فاصله تقارب مشتق یا انتگرال گرفت. سری حاصل دارای همان فاصله تقارب سری اولیه است و مشتق (یا انتگرال) تابع تابعی است‌که سری اولیه به آن متقارب‌است. این‌مطالب برای سری توان‌مختلط نیز صادق است.

۴ ــ ۵. توابع تحلیلی

اگر تابعی یک مقداری در هر نقطه دامنهٔ D بجز احتمالاً درتعداد متناهی ازنقاط **منزوی** مشتق‌پذیر باشد، آن را در D "تحلیلی" گوییم.

اگر هیچ یک از نقاط D نقطه ویژهٔ تابع تحلیلی نباشد،آن‌گاه‌تابع تحلیلی‌را در D "منظم" یا "هلومرف" گوییم. از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر یک سری توان دارای شعاع تقارب غیرصفر باشد، مجموع سری در داخل دایره تقارب یک تابع تحلیلی منظم (هلومرف) است. فرض کنید شعاع دایره تقارب

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{۴ ــ ۴۷}$$

$R = |z_0|$ باشد. دامنه تقارب را گاهی می‌توان با تکرار تداوم تحلیلی بزرگتر کرد. مثلاً، با انتخاب هر نقطه a در داخل دایره تقارب

$$|a| < |z_0| = R \tag{۴ ــ ۴۸}$$

و محاسبه $f(a)$ ، $f'(a)$ ، $f''(a)$ ، . . . این عمل را با تکرار مشتق‌گیری از (۴ ــ ۴۷) می‌توان انجام داد. به این ترتیب که بسط تابع $f(z)$ را به یک سری تیلر در نقطه $z = a$ می‌نویسیم،

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \tag{۴ ــ ۴۹}$$

این سری مسلما"درهردایره به‌مرکز a واقع در داخل دایره اولیه $R = |z_0|$ تقارب است . و ممکن است در یک دایره بزرگتر نیز متقارب باشد ، و به این ترتیب یک تداوم تحلیلی‌ازتابع در دامنه‌های بزرگتر از دایره اولیه به‌دست می‌آوریم . دامنهٔ جدید تقارب ازاجتماع دو دایره تقارب به‌دست می‌آید یکی به مرکز $z = 0$ و دیگری به مرکز $z = a$. با استفاده مکرر از این اصل می‌توان تابع $f(z)$ را به ازای تمام مقادیر z، یا همه جا بجز نقاط منزوی یا فقط در ناحیه محدودی از صفحه z که از آن دورتر نتوان رفت تعریف کنیم . این ناحیه را "ناحیهٔ وجود" و تابع و مرز آن را "مرز طبیعی" تابع گوییم .

بموجب قضیه وایرشتراس تابع تحلیلی کامل مجموعهٔ *تمام سریهای توان* حاصل از سری توان اولیه بوسیلهٔ تداوم تحلیلی است .

هریک از *سریهای توان* رایک **عنصر** تابع تحلیلی کامل گوییم . می‌توان نشان‌دادکه تداوم تحلیلی به معنی زیرمنحصر بفرداست . اگردوتابع تحلیلی‌کامل یک عضومشترک داشته باشند ، برابر خواهند بود . این اصل یکتایی را به چند طریق معادل و مفید می‌توان بیان کرد .

مثلا" ، نتیجه می‌شود که هر تابع تحلیلی در ناحیه A در تمام ناحیه بطور کامل معین می‌شود ، اگر در یک ناحیه حول نقطه a در داخل A هرقدر کوچک یاحتی اگردرتمام نقاط قوسی از یک منحنی کوچک که به a ختم می‌شود معلوم‌باشد . به‌عبارت دیگر ، مقادیر یک تابع تحلیلی نمی‌تواند به‌دلخواه تغییر کند اگر هریک از اعضایش از قبل توصیف شود . این مطلب با رفتار یک تابع حقیقی در تضاد است که مقادیرش را می‌توان در هر فاصله‌ای معین کرده و در خارج آن فاصله مقدارش را به‌دلخواه تعریف کرد .

۴ ــ ۶. روش کوشی

کوشی بررسی را با تابعی شروع می‌کند که در دامنهٔ معلومی تحلیلی و منظم باشد . این تابع در هر نقطه از دامنهٔ مورد بحث مشتق دارد . سپس نشان می‌دهد که یک تابع تحلیلی منظم رامی‌توان به‌وسیله یک انتگرال نشان داد . این صورت انتگرالی رابعدا" می‌توان به سری تیلر بسط دادکه دریک دایرهٔ کوچک حول هرنقطه دردامنهٔ فوق متناوب باشد . به این‌ترتیب ارتباط روش کوشی با قضیه وایرشتراس برقرار می‌شود .

معادلات کوشی ــ ریمان

فرض کنید

$$w = f(z) \tag{۵۰ ــ ۴}$$

یک تابع تحلیلی از z در هر نقطه دامنه D باشد . در این صورت بنا به تعریف ، $f(z)$ در نقطه

D مشتق دارد . مثلا" ، در $z = z_0$ از D مشتق $f(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شود .

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (۵۱-۴)$$

درمعادله (۴ ـ ۵۱) $z = z_0 + \Delta z$ می‌تواندهرنقطه در یک دیسک مدور به مرکز z_0، و Δz می‌تواند در طول هریک از بی‌نهایت مسیری که z را به z_0 وصل می‌کند به سمت صفر میل کند . به این ترتیب ، اگر مقدار $f'(z_0)$ منحصر بفرد باشد لازم است حد معادله (۵۱ ـ ۴) مشتق‌در مسیری باشد که در آن Δz به سمت صفر میل می‌کند ، و معادلات کوشی ـ ریمان مجموعه‌ای از شرایط لازم را برای جزء حقیقی و موهومی

$$w = f(z) \equiv u(x,y) + iv(x,y) \qquad (۵۲-۴)$$

که باید برقرار باشند تا $f(z)$ دارای مشتق‌منحصر بفرد در نقطه مفروض $z = x + iy$ باشد فراهم می‌سازند . چون

$$\Delta w = \Delta u + i\,\Delta v \qquad (۵۳-۴)$$

و

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y} \qquad (۵۴-۴)$$

حال اگر $\Delta z \to 0$، به این طریق که ابتدا $\Delta y = 0$ و $\Delta x \to 0$ سپس $\Delta x = 0$ و $\Delta y \to 0$، آن‌گاه

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (۵۵-۴)$$

و

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{i\,\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۵۶-۴)$$

و از مساوی قرار دادن معادلات (۴ ـ ۵۵) و (۴ ـ ۵۶) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (۵۷-۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (۵۸-۴)$$

که معادلات کوشی ـ ریمان نامیده می‌شوند .

معادلات (۴ ـ ۵۷) و (۴ ـ ۵۸) شرایط لازم بـرای وجود مشتق منحصر بفرد تابع

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه $z = x + iy$ است .

اگر مشتقات نسبی معادلات (۴ــ۵۷) و (۴ــ۵۸) در نقطه (x,y) پیوسته باشند . می‌توان نشان داد که این معادلات کافی نیز هستند .

۴ــ۷. قضیهٔ انتگرال کوشی

برای بسط تابع تحلیلی به وسیله انتگرال کوشی یک صورت سادهٔ قضیه انتگرال کوشی را ثابت خواهیم کرد .

قضیه : اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی و $f'(z)$ درهرنقطه داخل و روی منحنی بستهٔ C پیوسته باشد ، آن‌گاه

$$\oint_C f(z)\, dz = 0 \tag{۴ــ۵۹}$$

تبصره : اگرچه در اثبات زیر فرض می‌کنیم $f'(z)$ پیوسته است . ولی قضیه رامی‌توان‌فقط با فرض وجود $f'(z)$ ثابت کرد . پیوستگی $f'(z)$ بعداً" از قضیه کوشی نتیجه می‌شود . درواقع از قضیه انتگرال کوشی لزوم وجود و پیوستگی مشتقات تمام مراتب نتیجه می‌شود ("نظریه‌توابع" صفحه ۸۳ ــ ۷۵) .

اثبات : فرض کنید S دامنهٔ بسته‌ای شامل تمام نقاط داخل و روی C باشد . اگر بنویسیم $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ که در آن x، y، u، v حقیقی هستند ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\oint_{C(S)} f(z)\, dz &= \oint_{C(S)} (u + iv)(dx + i\, dy) \\ &= \oint_{C(S)} (u\, dx - v\, dy) + i \oint_{C(S)} (v\, dx + u\, dy)\end{aligned} \tag{۴ــ۶۰}$$

برای محاسبه دو انتگرال منحنی‌الخط در معادله (۴ــ۶۰) از قضیه کرل دوبعدی (۳ــ۲۰۱) استفاده می‌کنیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم .

$$\oint_{C(S)} (A_x\, dx + A_y\, dy) = \int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{۴ــ۶۱}$$

که در آن

$$v = A_x \tag{۴ــ۶۲}$$

$$u = A_y \tag{۴ــ۶۳}$$

در این صورت می‌توان نوشت :

$$\oint_{C(S)} (v\, dx + u\, dy) = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{۴ــ۶۴}$$

و به ازای

$$u = A_x \tag{۶۵ – ۴}$$

$$v = -A_y \tag{۶۶ – ۴}$$

داریم

$$\oint_{C(S)} (u\,dx - v\,dy) = -\int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{۶۷ – ۴}$$

پس

$$\oint_{C(S)} f(z)\,dz = -\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \tag{۶۸ – ۴}$$

بموجب معادلات کوشی – ریمان (۴ – ۵۷) و (۴ – ۵۸) که در تمام S برقرار است .

تبصره: منحنی بسته $C(S)$ مرز ساده رویهٔ دوبعدی مرتبط را تشکیل می‌دهد . مرز باید به قسمی طی شود که ناحیه S همواره در سمت چپ واقع شود . این مطلب رابا پیکانی درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی انتگرال درمعادله (۴ – ۶۰) نشان داده‌ایم . اگر ناحیه S در اصل بطور ساده مرتبط نباشند . آن‌گاه با برشهای مناسب همان‌طور که در بخش (۳ – ۲۰) بحث شد آن را به‌صورت مرتبط ساده درمی‌آوریم . باید به‌خاطر داشت که $C(S)$ همواره مرزکل رویهٔ مرتبط ساده S است . مثلاً" حلقه‌ای را درنظر بگیرید که از خارج به دایره C_2 و از داخل به دایره C_1 محدود است . فرض کنید $f(z)$ در حلقه هلومرف باشد . این‌حلقه رامی‌توان بایک برش از C_1 به C_2 به صورت مرتبط ساده درآورد . فرض کنید دو لبه بریده شده $C(+)$ و $C(-)$ باشند .

در این صورت قضیهٔ انتگرال کوشی به‌صورت زیر درمی‌آید

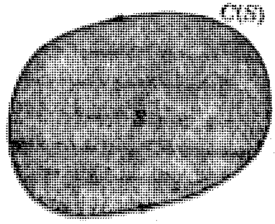
$$\oint_{C(S)} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C(+)} f(z)\,dz + \int_{C(-)} f(z)\,dz = 0 \tag{۶۹ – ۴}$$

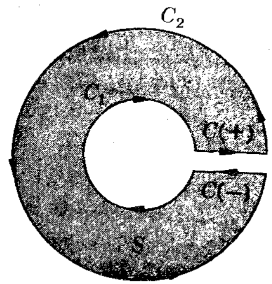
اگر a و b نقاط انتهایی $C(+)$ و $C(-)$ به ترتیب روی C_1 و C_2 باشند آن‌گاه

$$\int_{C(+)} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz \tag{۷۰ – ۴}$$

و

$$\int_{C(-)} f(z)\,dz = \int_b^a f(z)\,dz \tag{۷۱ – ۴}$$





شکل ۴ ــ ۲. حوزهٔ انتگرال‌گیری برای قضیهٔ انتگرال کوشی عبارت است از مرز کل رویه باز، و مرتبط ساده S.

ولی

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz \qquad (۴-۷۲)$$

درنتیجه مقادیر مربوط به $C(+)$ و $C(-)$ یکدیگر را خنثی می‌کنند و آنچه باقی می‌ماند عبارت است از:

$$\oint_{C(S)} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0 \qquad (۴-۷۳)$$

توجه کنید که دایره خارجی C_2 درجهت عکس‌عقربه‌های ساعت و دایره داخلی C_1 در جهت عقربه‌های ساعت طی می‌شود. این مطلب برای‌آن‌که داخل حلقه همواره در سمت چپ قرار گیرد ضروری است.

۴ ــ ۸. نمایش یک تابع تحلیلی بوسیله انتگرال کوشی

فرض کنید $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد که در داخل مسیر بسته C_E منظم و در داخل ورودی C_E پیوسته است. اگر a نقطه‌ای داخل C_E باشد آن‌گاه

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{۷۴ – ۴}$$

و اگر a نقطه‌ای خارج C_E باشد، آن‌گاه

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{۷۵ – ۴}$$

برهان: منظم بودن $f(z)$ در داخل C_E باین معنی است که $f(z)$ در $z = a$ یک مقدار داشته و مشتق‌پذیر است. این مطلب با فرض پیوستگی $f(z)$ در $z = a$ نتیجه می‌دهد،

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + g(z)(z-a) \tag{۷۶ – ۴}$$

که در آن $g(z)$ داخل C_E تابعی منظم و تحلیلی است به قسمی که

$$\lim_{z\to a} g(z) = 0 \tag{۷۷ – ۴}$$

به‌عنوان نتیجه‌ای ازمعادله (۴ – ۷۷) به ازای هرعددمثبت ϵ، یک همسایگی $|z-a| < \delta$ وجود دارد به قسمی که

$$|g(z)| < \epsilon \qquad \text{for} \qquad |z-a| < \delta \tag{۷۸ – ۴}$$

دایره C_I رابه شعاع r و بمرکز $z = a$ درنظرمی‌گیریم. شعاع $r < \delta$ رابه‌قدری کوچک اختیار می‌کنیم که C_I بطور کامل داخل C_E واقع شود. در این صورت

$$\frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(a)}{z-a} + f'(a) + g(z) \tag{۷۹ – ۴}$$

که در داخل مقطع حلقوی محدود به C_E و C_I هلومرفیک است.

با استفاده از معادله (۴ – ۷۳) وانتگرال‌گیری روی تمام مرز $C(S)$ داریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(S)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_I} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0 \tag{۸۰ – ۴}$$

اگر جهت حرکت روی C_I را عوض کنیم معادله (۴ – ۸۰) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_I} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{۸۱ – ۴}$$

حال با منظور کردن معادله (۴ – ۷۹) در (۴ – ۸۱) داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{f(a)}{2\pi i}\oint_{C_I} \frac{dz}{z-a} + \frac{f'(a)}{2\pi i}\oint_{C_I} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_I} g(z)\,dz \tag{۸۲ – ۴}$$

روی C_I، مقدار r ثابت است، و می‌توان نوشت:

$$z - a = re^{i\theta} \tag{۴ – ۸۳}$$

$$dz = rie^{i\theta}\, d\theta \tag{۴ – ۸۴}$$

$$\frac{dz}{z-a} = i\, d\theta \tag{۴ – ۸۵}$$

درنتیجه

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_I} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \tag{۴ – ۸۶}$$

علاوه براین ، از

$$\oint_{C_I} dz = ir \oint_{C_I} e^{i\theta}\, d\theta = ir \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0 \tag{۴ – ۸۷}$$

و معادلات (۴ – ۸۲) و (۴ – ۸۶) معادله زیر به‌دست می‌آید .

$$\left| \oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \oint_{C_I} g(z)\, dz \right| \tag{۴ – ۸۸}$$

باتوجه به معادله (۴ – ۸۴) داریم

$$\left| \oint_{C_I} dz \right| \leq \oint_{C_I} |dz| = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r \tag{۴ – ۸۹}$$

و چون $\delta > r$، می‌توان نوشت

$$|g(z)| < \epsilon \text{ on } C_I \tag{۴ – ۹۰}$$

و

$$\left| \oint_{C_I} g(z)\, dz \right| \leq \oint_{C_I} |g(z)|\, |dz| < \epsilon \oint_{C_I} |dz| = 2\pi r \epsilon \tag{۴ – ۹۱}$$

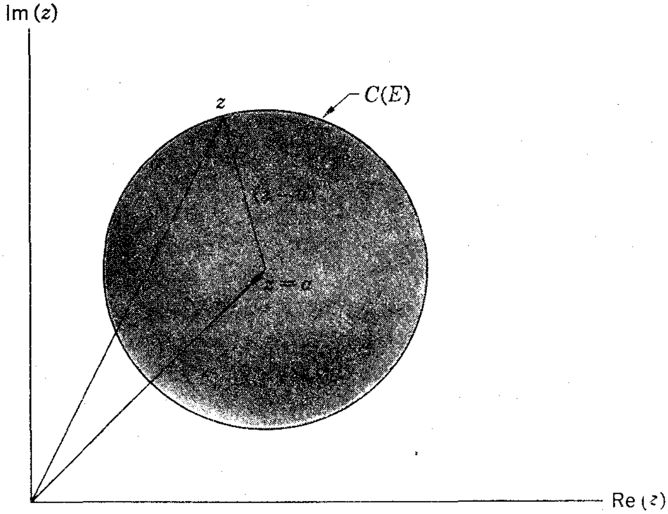
از معادله (۴ – ۹۱) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{r \to 0} \oint_{C_I} g(z)\, dz = 0 \tag{۴ – ۹۲}$$

از طرف دیگر ، سمت چپ معادله (۴ – ۸۸) از r مستقل است و بنابراین باید متحد با صفر باشد . پس ،

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_E} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \tag{۴ – ۹۳}$$

مقدار تابع تحلیلی در نقطه $z = a$ داخل یک مسیر بسته را برحسب مقادیرش روی مسیر می‌دهد . وقتی $a = z$ خارج C_E است . تابع $f(z)/(z-a)$ در ناحیه‌ای که بطور ساده با C_E محدود می‌شود هلومرف است . و از معادله (۴ – ۶۰) نتیجه می‌شود



شکل ۴ ــ ۳. نمایش یک تابع تحلیلی به وسیله انتگرال کوشی.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_E}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0 \qquad (۹۴ - ۴)$$

و به این ترتیب اثبات قضیه انتگرال کوشی کامل می‌شود.

اگر متغیر انتگرال‌گیری در فرمول کوشی را به ζ نشان دهیم، داریم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (۹۵ - ۴)$$

که در آن z یک نقطه دلخواه در داخل C است.

باتوجه به مقدار

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \qquad (۹۶ - ۴)$$

و استفاده از معادلهٔ (۴ ــ ۹۵) می‌توان نوشت:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \qquad (۹۷ - ۴)$$

که معادل است با مشتق‌گیری از تابع زیر علامت انتگرال معادله (۴ ــ ۹۵)، همان‌طور که در ابتدای منحنی (۴ ــ ۷) یادآور شدیم، از قضیه انتگرال کوشی نتیجه می‌شود که اگر $f(\zeta)$ در داخل مسیر بستهٔ C یک تابع تحلیلی، منظم (یعنی یک مقداری و مشتق‌پذیر) و روی C پیوسته

باشد ، آن‌گاه دارای مشتقات تمام‌مراتب خواهد بودکه داخل C منظم هستند . و مشتق n ام آن به صورت زیر است .

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (۹۸ - ۴)$$

۴ ـ ۹ . سری تیلر

حال می‌توانیم ارتباط بین تعریف یک تابع تحلیلی به‌صورت سری توان و نمایش انتگرالی تابع تحلیلی را برقرار کنیم .

قضیه : فرض کنید $f(z)$ برمسیر بستهٔ ساده C و داخل آن تحلیلی و C نقطه‌ای داخل آن باشد . در این صورت

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \qquad (۹۹ - ۴)$$

سری به ازای $|z - a| < \delta$ متقارب است ،که در آن δ فاصله نقطه a از نزدیکترین نقطه C است .

برهان : فرض کنید

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (۱۰۰ - ۴)$$

C دایره‌ای است به مرکز a وشعاع $\delta > r$. معادله (۴ ـ ۱۰۰) وقتی برقراراست که z داخل C باشد . یعنی

$$|z - a| < r \qquad (۱۰۱ - ۴)$$

فرض کنید که

$$k = \frac{z - a}{\zeta - a} \qquad (۱۰۲ - ۴)$$

در این صورت

$$1 - k = \frac{\zeta - z}{\zeta - a} \qquad (۱۰۳ - ۴)$$

و

$$\frac{1}{1 - k} = \frac{\zeta - a}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \qquad |k| < 1 \qquad (۱۰۴ - ۴)$$

پس با تقسیم معادله (۴ ـ ۱۰۴) بر $\zeta - a$ می‌توان نوشت .

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z - a}{(\zeta - a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \cdots \qquad (۱۰۵ - ۴)$$

که به ازای $1 > |k_1| \geq |k|$ بطور یکنواخت متقارب است . روی دایره C

$$|k| = \left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| = \frac{r}{\delta} < 1 \qquad (۱۰۶-۴)$$

بنابراین معادله (۴ ـ ۱۰۵) بر C بطور یکنواخت متقارب است . درنتیجه معادله (۴ ـ ۱۰۵) را می‌توان در $f(\zeta)/2\pi i$ ضرب کرد . سپس جمله به جمله روی C انتگرال گرفت ،

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{z-a}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta \\ &\quad + \cdots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \cdots \end{aligned} \qquad (۱۰۷-۴)$$

حال باتوجه به معادلات (۴ ـ ۹۷) تا (۴ ـ ۱۰۷) معادله (۴ ـ ۹۹) به‌دست می‌آید .

۴ ـ ۱۰ . نامساویهای کوشی

دیدیم که منظم بودن تابع در یک ناحیه تابع را بطور جدی مقید می‌سازد . مثلا" ، اگر $f(\zeta)$ در داخل دایره C به مرکز z و شعاع R تحلیلی و منظم‌باشد، ازنامساوی $M \geq |f(\zeta)|$ روی C نتیجه می‌شود که

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{R^n} M \qquad (۱۰۸-۴)$$

برای اثبات این نامساوی معادله (۴ ـ ۹۷) را درنظر می‌گیریم . بر C داریم

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{R^{n+1}} \qquad (۱۰۹-۴)$$

و

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| |d\zeta| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} \oint_C |d\zeta| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} (2\pi R) = \frac{n!}{R^n} M \end{aligned} \qquad (۱۱۰-۴)$$

و حکم ثابت است .

۴ ـ ۱۱ . توابع کامل

یک تابع تحلیلی که در هر ناحیه متناهی از صفحه z منظم باشد ، "تابع کامل" یا گاهی "تابع انتگرال" نامیده می‌شود . بسیاری از توابع مقدماتی موردتوجه در فیزیک کامل هستند .

مثلاً چند جمله‌ایها، $\sin z$ و $\cos z$ ، و e^z ، $\sinh z$ و $\cosh z$ همه توابع کامل هستند.

مجموعهٔ توابع کامل دارای یک خاصیت جالب است که به صورت قضیه لیوویل خلاصه می‌شود:

"تنها تابع تحلیلی محدود که همه جا منظم باشد تابع ثابت است."

اثبات ازمعادله (۴ ــ ۱۰۸) نتیجه می‌شود. اگر a نقطه دلخواهی ازصفحه z باشد آن‌گاه $f(z)$ به ازای $|z-a|<R$ تحلیلی‌است، R می‌تواند هرعددبزرگی باشد. چون $f(z)$ محدوداست داریم

$$|f(z)| \leq M \tag{۴ ــ ۱۱۱}$$

ازطرفی از نامساوی (۴ ــ ۱۰۸) نتیجه می‌شود

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{R} \tag{۴ ــ ۱۱۲}$$

و اگر $R \to \infty$، آن‌گاه

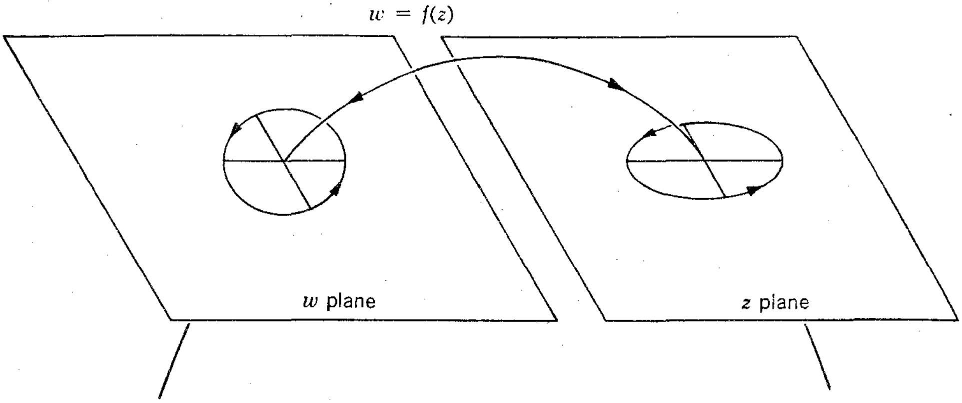
$$f'(a) = 0 \tag{۴ ــ ۱۱۳}$$

و چون a اختیاری است، نتیجه می‌گیریم که به ازای تمام مقادیر z، $f'(z) = 0$ بنابراین $f(z)$ باید ثابت باشد.

۴ ــ ۱۲. نظریهٔ ریمان درباره توابعی از یک متغیر مختلط

روش ریمان درمورد توابع مختلط یک متغیر تا حد زیادی باروشهای تحلیلی وایراشتراس و کوشی متفاوت است. ریمان به یک تابع تحلیلی یک مقداری مختلط به‌عنوان یک نگاشت یا متناظریک به یک بین نقاط دورویه دوبعدی متمایزنگاه می‌کند. یک خاصیت‌مشخصهٔ این‌نگاشت این است‌که زاویه دومنحنی متقاطع روی یک رویه درست برابر زاویهٔ بین نقشهای آنها بر رویهٔ دوم است. نگاشتی که زوایا را به این معنی ثابت نگهدارد، یک نگاشت "همشکل" نامیده می‌شود.

بموجب‌قضیه معروف نگاشت ریمان، یک تابع تحلیلی‌یک مقداری رامی‌توان ازنظرهندسی تعبیر کرد. به این ترتیب که یک دایره بی‌نهایت کوچک یک رویه را به یک بیضی بی‌نهایت کوچک رویه دیگرنقش می‌کند. واین عمل را به قسمی انجام می‌دهدکه داخل دو منحنی متناظر بوده و مرکز دایره به مرکز بیضی تبدیل می‌شود. درنتیجه یک جفت خط راست که یکدیگر رابه زاویهٔ قائمه در مرکز دایره قطع می‌کنند، به یک جفت خط راست که یکدیگر را در مرکز بیضی به زاویه قائمه قطع می‌کنند تبدیل می‌شوند. یعنی این نگاشت همشکل است. ولی محیط بیضی درحالت کلی برابر محیط دایره نیست، و درنتیجه می‌گوییم: نگاشتهای همشکل درحالت کلی هم‌متر نیستند، یعنی طول را ثابت نگه نمی‌دارند.



شکل ۴ ــ ۴. مفهوم هندسی قضیه نگاشت ریمان.

اساس روش ریمان انتخاب یک رویهٔ دوبعدی و نقش خانواده‌ای از منحنی‌های مرسوم بر آن است. ضمناً" توابع تحلیلی یک مقداری برحسب این که چگونه رویه اول و خانواده‌ای از منحنیهایش رابه رویه دوم وخانواده متناظرازمنحنیهایش نقش می‌کندازنظرهندسی دسته‌بندی می‌شوند.

به این ترتیب تجزیه و تحلیل هندسی این نگاشت صورت تحلیلی لازم برای نگاشت را بیان می‌کند. پس همان‌طور که یک تابع تحلیلی را می‌توان به صورت انتگرال نشان داد. آن را می‌توان بسط داده و نگاشتی همشکل از یک رویه به رویه دیگر فراهم آورد.

۴ ــ ۱۳. تعبیر فیزیکی

نظریهٔ هندسی ریمان دربارهٔ توابع از جنبه فیزیکی تعبیر ساده و مهمی دارد.

سیال غیرقابل انقباضی را درنظر بگیرید. که از حالت سکون بر صفحه x و y جاری شود. فرض کنید $\mathbf{v}$ بردار سرعت سیال در هر نقطه صفحه باشد، چون سیال غیرقابل انقباض است، اگر در هیچ ناحیهٔ A در صفحه x و y منبع یا حفره‌ای موجود نباشد، داریم:

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx\, dy = 0 \qquad (۴-۱۱۴)$$

بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (۴-۱۱۵)$$

درنتیجه میدان‌سرعت‌این سیال سلنوئیدال است. جریان یک سیال بریک منحنی‌بستهٔ C بنابه تعریف عبارت است از:

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C v_x\,dx + v_y\,dy \qquad (۱۱۶-۴)$$

این جریان را که به وسیله v تعریف شده است غیردورانی گوییم اگر برهرمنحنی بسته صفرباشد . در این حالت

$$v_x\,dx + v_y\,dy \qquad (۱۱۷-۴)$$

یک دیفرانسیل کامل است ، و تابعی مانند $u(x,y)$ وجود دارد به قسمی که

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۱۱۸-۴)$$

$$v_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱۱۹-۴)$$

با قرار دادن (۴ — ۱۱۸) و (۴ — ۱۱۹) در معادله (۴ — ۱۱۵) نتیجه می‌شود

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (۱۲۰-۴)$$

که همان معادله لاپلاس است . هر جواب معادله لاپلاس را یک تابع هارمونیک گویند . وجواب خصوصی $\mathbf{v}$ که بردارسرعت u را ازمعادلات (۴ — ۱۱۸) و (۴ — ۱۱۹) نتیجه می‌دهد ، پتانسیل سرعت جریان نامیده می‌شود . منحنیهای(ثابت)= $u(x,y)$ ، "منحنیهای تراز" یا "مسیرهای هم‌پتانسیل" نامیده می‌شوند . برای یافتن زاویه‌مماس بریک مسیرهم‌پتانسیل بامحور x هاچون (ثابت) = $u(x,y)$ می‌توان نوشت :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (۱۲۱-۴)$$

پس

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} \qquad (۱۲۲-۴)$$

از معادله (۴ — ۱۲۱) با شرط

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 = |\mathbf{v}|^2 \neq 0 \qquad (۱۲۳-۴)$$

نتیجه می‌شود بردار

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nabla u \qquad (۱۲۴-۴)$$

با محور x ها زاویه β می‌سازد به قسمی که

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x} \qquad (۱۲۵-۴)$$

از مقایسه معادلات (۴ – ۱۲۲) و (۴ – ۱۲۵) معلوم می‌شود که

$$\tan\alpha\tan\beta = -1 \qquad (۱۲۶-۴)$$

یعنی تفاوت α و β برابر ۹۰درجه‌بوده جریان بر مسیرهای هم‌پتانسیل درجهت افزایش v عمود است. اگر تابع هارمونیک v مفروض می‌باشد، می‌توانیم تابع هارمونیک مزدوج v را به وسیله معادلات کوشی – ریمان (۴ – ۵۷) و (۴ – ۵۸) تعریف کنیم. در این صورت

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = f(z) \qquad (۱۲۷-۴)$$

یک تابع تحلیلی از z است، و پتانسیل مختلط جریان نامیده می‌شود.

مماس بر منحنی $v(x,y) =$ (ثابت)

با محور x ها زاویه γ می‌سازد که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\gamma = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y} \qquad (۱۲۸-۴)$$

با استفاده مجدد از معادلات کوشی – ریمان می‌توان نوشت:

$$\tan\gamma = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y} = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x} = \tan\beta \qquad (۱۲۹-۴)$$

یا $\tan\gamma=\tan\beta$ چون β زاویه بردارسرعت $\mathbf{v}$ بامحور x هاست، نتیجه می‌گیریم‌که سیال درامتداد منحنیهای (ثابت) $= v(x,y)$ جریان پیدامی‌کند به این دلیل‌آنهارا "مسیل" نامند. باتوجه به معادلات (۴ – ۵۵) و (۴ – ۵۷) می‌توان نوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱۳۰-۴)$$

پس فرض

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \neq 0 \qquad (۱۳۱-۴)$$

با شرط

$$|f'(z)| \neq 0 \qquad (۱۳۲-۴)$$

معادل است. یعنی بر مسیلها بر مسیرهای هم‌پتانسیل بجز در نقاطی که

$$f'(z) = 0 \qquad (۱۳۳-۴)$$

عمودند. توجه کنید که اگر $u + iv$ تحلیلی باشد، آن‌گاه معادلات کوشی – ریمان را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-u) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(-u)$$

که نشان می‌دهند $v - iu$ نیز تحلیلی است . پس منحنیهای (ثابت) $= v$ می‌توانند مسیرهای هم‌پتانسیل ، ومنحنیهای (ثابت) $= u$ می‌توانند مسیلها باشند . جریانی را که با $v - iu$ مشخص می‌شود مزدوج جریان $u + iv$ گوییم . اگرتابع تحلیلی $w = f(z)$ متناهی ودر z_0 مشتق‌پذیرباشد ، $f'(z_0) = 0$، آن‌گاه $z = z_0$ " نقطه زینی " تابع $f(z)$ نامیده می‌شود . خطوط

$u =$ (ثابت)

$v =$ (ثابت)

در نقاط زمین برهم عمود نیستند . برای نمونه ، فرض کنید

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots \qquad (۱۳۴ - ۴)$$

که درآن $a_k \neq 0$ دراین صورت k مسیر هم‌پتانسیل و k مسیل از z_0 می‌گذرد زاویه بین مسیرهای هم‌پتانسیل برابر π/k ، و زاویه بین مسیلها نیز برابر π/k است .

مسیرهای هم‌پتانسیل و مسیلها نیمسازهای یکدیگرند بنابراین خطوط

$u =$ (ثابت)

$v =$ (ثابت)

یکدیگر را در z_0 به زاویه $\pi/2k$ قطع می‌کنند . نقطه z_0 را در معادلهٔ (۴ ــ ۱۳۴) نقطه زینی مرتبه $k - 1$ تابع $f(z)$ گوییم . این گزاره‌ها را می‌توان با قرار دادن

$$z - z_0 = re^{i\theta} \qquad (۱۳۵ - ۴)$$

در معادله (۴ ــ ۱۳۴) و بررسی رفتار $\operatorname{Re} f(z)$ و $\operatorname{Im} f(z)$ و وقتی $z \to z_0$ ثابت کرد .

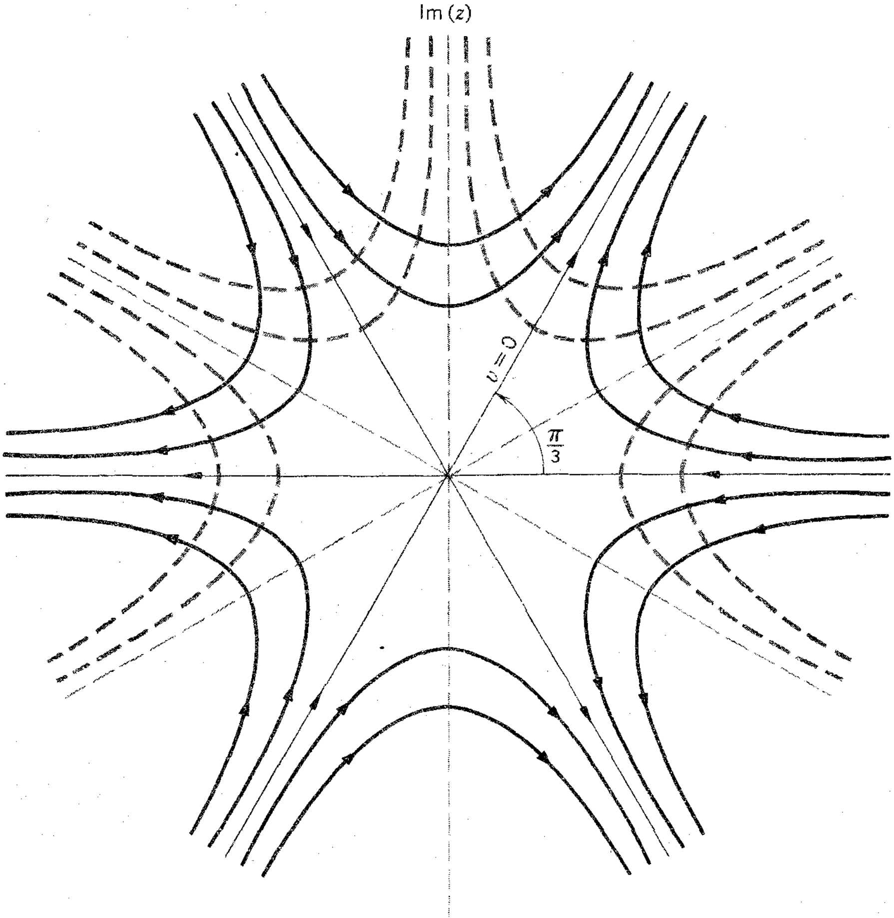
۴ ــ ۱۴ . توابع بر رویه‌های غیرمستوی

دیدیم چگونه می‌توان یک تناظر یک به یک بین نقاط (x,y) یک صفحه مستوی و اعداد مختلط با استفاده ازمعادله $z = x + iy$ برقرارکرد . تابع مختلط $w = f(z)$ در این صورت بهرنقطه z از صفحه x ، y عدد مختلط w را نسبت می‌دهد . دیدیم که منحنیهای

$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) =$ ثابت

$\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) =$ ثابت

رادرصفحه y و x می‌توان ازنظرفیزیکی به‌عنوان خطوط هم‌پتانسیل و مسیلهای یک جریان سیال در صفحه x ، y تعبیر کرد . که طرح آن به انتخاب $f(z)$ بستگی دارد .



$$w = u + iv = z^3 = r^3 e^{3i\theta}$$
$$u = r^3 \cos 3\theta$$
$$v = r^3 \sin 3\theta$$

شکل ۴ ــ ۵. خطوط پررنگ مسیلهای (ثابت) $= v$ وخطوط نقطه‌چین مسیرهای‌هم‌پتانسیل (ثابت) $= u$ تابع $z^3 = w$ هستند. پیکانهاجهت افزایش مقادیر v و $0 = z$ نقطه زین مرتبهٔ دوم را نشان می‌دهند.

یک سیال بر رویهٔ غیرمستوی در فضا مانند یک کره یا یک تور می‌تواند دقیقا" مانند یک صفحه مستوی جریان پیدا کند. علاوه براین، جریان یک سیال بر یک رویه غیرمستوی بسته‌در فضا به یک تابع پتانسیل مختلط وابسته است که جزٔ حقیقی آن منحنیهای هم‌پتانسیل را بر رویه می‌دهد و جزٔ موهومی آن مسیلها را مشخص می‌سازد.

ریمان کشف کرد که بین طبیعت جریانهای ممکن بر یک رویه مفروض و مرتبط ساده بودن رویه رابطه نزدیکی وجود دارد .

یک رویه بسته در فضا را مرتبط ساده گوییم اگر هر منحنی بسته که بر آن رسم شود رویه را به دو قطعهٔ جدا ازهم تفکیک کند . مثلا" یک رویه مرتبط سادهٔ بسته است ولی تور یا کره دسته‌دار چنین نیستند .

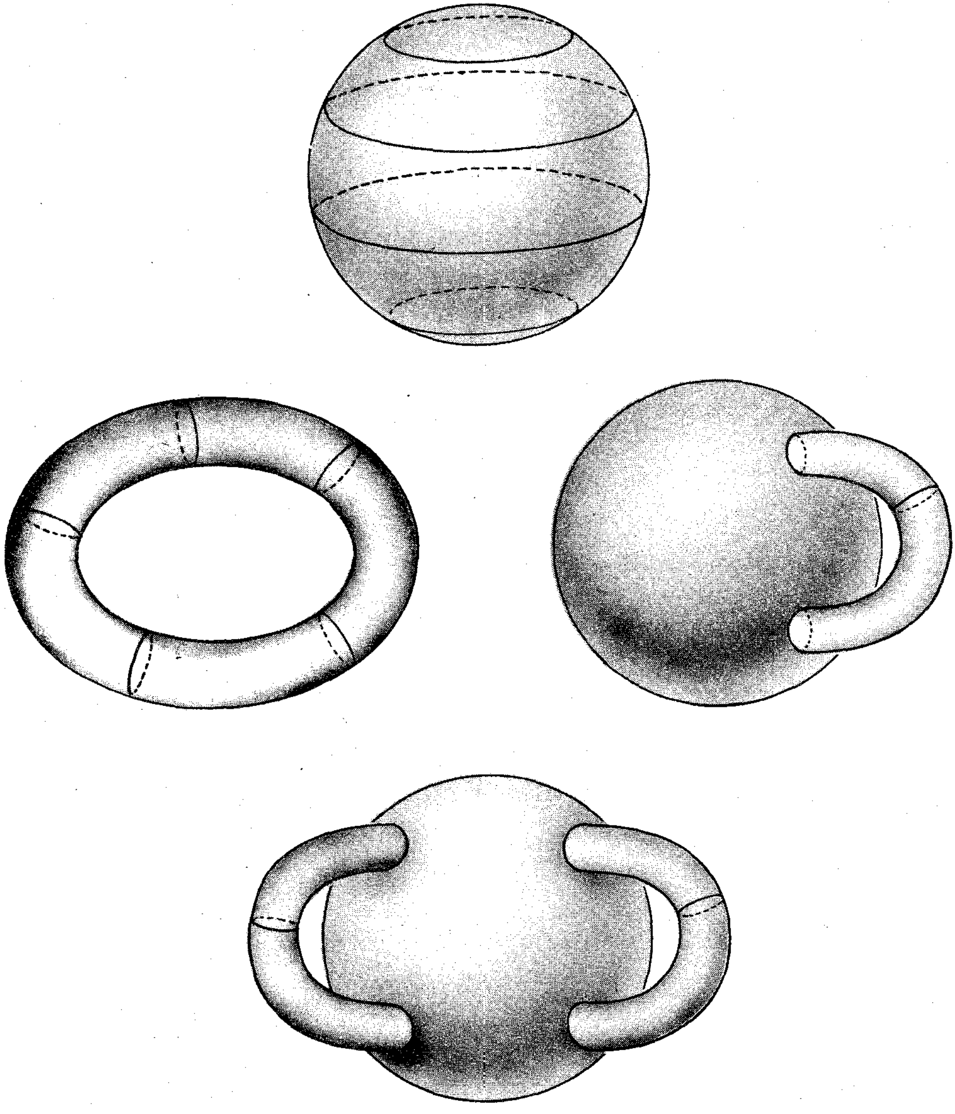
ریمان رویه‌های بسته مانند کره بدون دسته یا با دو دسته ، سه دسته ، . . . ، n دسته را بطور اصولی بررسی می‌کند (شکل ۶ ـ ۴) تا مشخص سازد چه توابعی بر رویه مفروض با توابع تحلیلی در صفحه z متناظرند . از این دسته از توابع آنهایی را جدا می‌سازد که یک مقداری هستند . به این ترتیب به یک دسته‌بندی توابع تحلیلی برمبنای "رویه‌های ریمان" می‌توان دست یافت . ریمان ثابت کرد که بریک کرهٔ S با $g<m$ دسته لااقل یک تابع پتانسیل مختلط یک مقداری w وجود دارد که جزء حقیقی و موهومی آن خطوط هم‌پتانسیل و مسیلهای یک جریان هیدرودینامیک بر S رافراهم می‌سازند . او نشان دادکه اگر جریان دارای m منبع و حفره باشد ، و به قسمی مرتب شده باشندکه استحکام آنهابرای حفظ جرم متعادل باشد . آن‌گاه تابع پتانسیل مختلط یک‌مقداری w هرمقدارمختلط مفروض باشد $2 + 3i$ رادقیقا" m مرتبه بر S اختیارمی‌کند . که هرکدام در یک نقطهٔ S قرار دارد .

حال m صفحه مختلط درنظربگیریدکه رویهم‌چسبیده باشند . برای آن‌که از این ورقه جدا یک رویه مرتبط بسازیم ، r نقطه انتخاب کرده در آنها دو ورقه یا بیشتر از m ورقه را به‌یکدیگر الصاق می‌کنیم . این کار را به طریقی انجام می‌دهیم که هریک از m ورقه مجزا دست‌کم در یک محل با لااقل یکی از $m-1$ ورقه دیگر الصاق شده باشد . رویهٔ حاصل را S^* می‌نامیم و نقاط الصاق ورقه‌ها را نقاط انشعاب S^* گوییم .

ریمان نشان داد که تعداد نقاط انشعاب بر S^* ، به تعداد کل حفره‌ها و منابع روی S و تعداد کل دسته‌ها برطبق رابطه زیر بهم مربوطند .

$$r = 2m + 2g - 2 \qquad (۱۳۶-۴)$$

علاوه براین ، او نشان داد که پتانسیل مختلط یک مقداری w بر S یک تناظر یک به یک‌وهمشکل بین نقاط S و نقاط S^* برقرار می‌سازد . هرنقطه زینی w بر S بایکی از r نقطه انشعاب روی S^* متناظر است . این تناظر به قسمی است که یک نقطه زینی w از مرتبه $k-1$ روی S به یک نقطه انشعاب بر S^* نقش می‌شود که در آن k ورقه از m ورقه بهم الصاق شده‌اند . بدیهی است که $k<m$. برای الصاق k ورقه از m ورقه S^* در هر نقطه انشعاب مرتبه $k-1$ دلیلی وجود دارد به این ترتیب که نظیر هر نقطه انشعاب مرتبه $k-1$ بر S^* یک نقطه زینی مرتبه $k-1$ بر S وجود دارد ، ودر این نقطه زینی تابع یک مقداری w مقدار w_0 را دقیقا" k مرتبه اختیارمی‌کند



شکل ۴ ـ ۶. چند کره با ۰، ۱ و ۲ دسته.

این مطلب از معادله (۴ ـ ۱۳۴) بطور آشکار دیده می‌شود.

پس رویهٔ اولیه ریمان، S که یک کره با g دسته است بطور همشکل با یک رویهٔ ریمان متشکل از m ورقهٔ S^* که در $r = 2m + 2g - 2$ نقطه انشعاب بهم وصل شده‌اند معادل است.

در فیزیک نظری اغلب لازم است رفتار تابعی از یک متغیر مختلط که بر یک رویهٔ ریمان

تعریف شده بررسی شود . می‌توانیم S^* یا S را به‌عنوان رویهٔ ریمان به‌کار بریم . منظور از تابع یک مقداری که بر یک رویه ریمان تعریف شده باشد ، این است که به هر نقطه P از S یک سری توان متناهی نسبت دهد . این تابع یک مقداری از تمام سریهایی تشکیل شده ، که از نسبت دادن یک سری به هرنقطه P از S به‌دست‌آمده است . فرض کنید تابع حاصل به صورت زیرباشد .

$$z = z(P) \qquad P \in S \tag{۱۳۷-۴}$$

حال دو تابع یک مقداری که بر رویه ریمان S تعریف شده وجود دارند . رویه اول عبارت است از :

$$w = w(P) \tag{۱۳۸-۴}$$

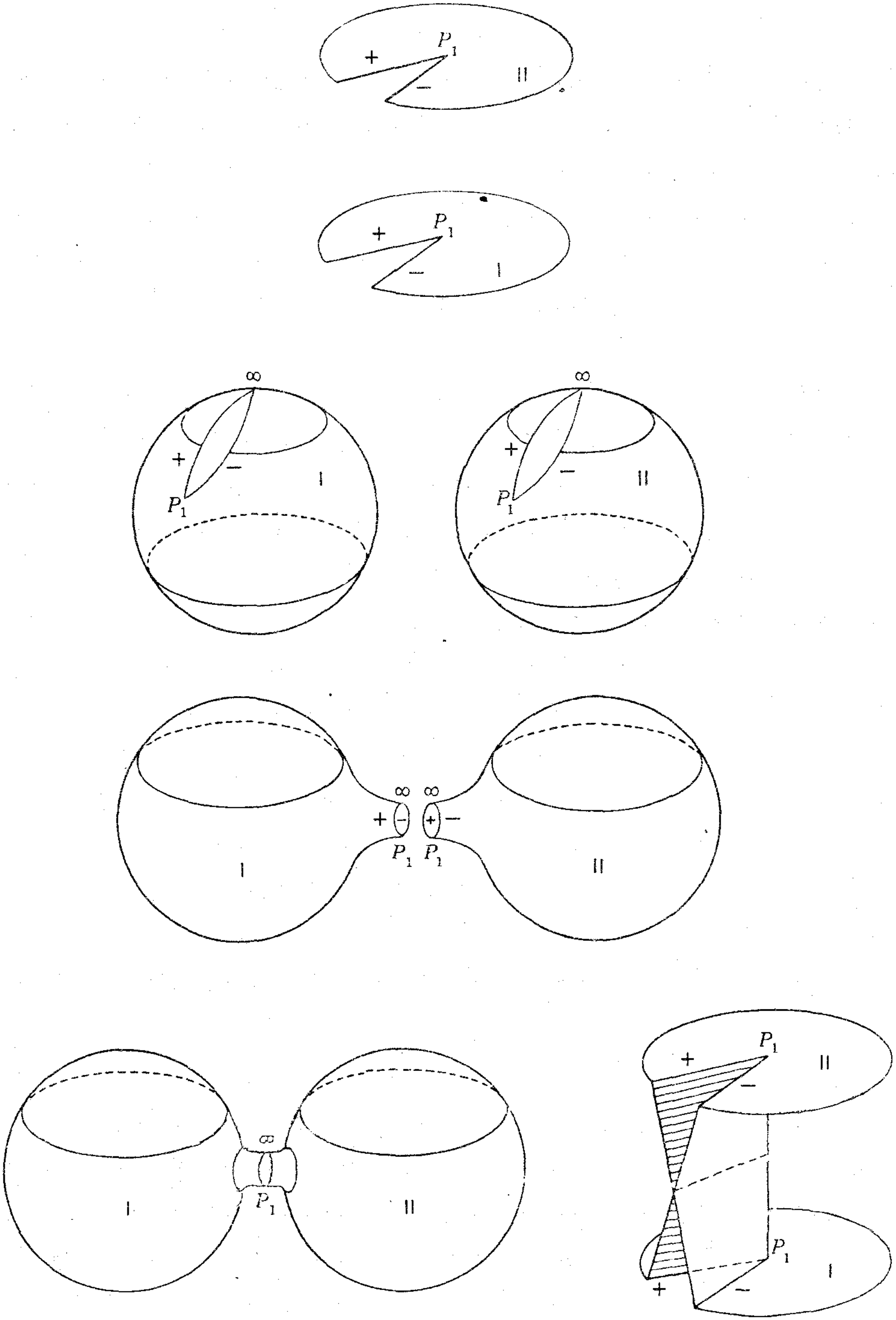
که پتانسیل مختلطی است که S را بطور یک به یک و همشکل بر روی S^* نقش می‌کند ، که درآن S^* رویهٔ ریمان m برگی است که در نقاط انشعاب به‌یکدیگر الصاق شده‌اند .

وجود w بر S توسط ریمان به اثبات‌رسیده‌است .تابع دوم یک مقداری $z = z(P$ ازنسبت دادن یک سری توان به هر نقطه P از S ساخته می‌شود . توابع z و w چگونه باهم درارتباطند ؟ برای جواب دادن به این سؤال ، نقطه P_1 را بر S که یک نقطه زینی w نیست انتخاب می‌کنیم در این صورت نقطه نظیرش بر S^* یک نقطه انشعاب نخواهد بود . فرض کنید مقدار w در P_1 برابر w_0 باشد . مقدار w_0 به وسیله w در $m-1$ نقطه دیگر بر S نیزاختیارمی‌شود، مثلاً" P_1، P_2 و . . . ، P_m ازنظرتشابه تابع $\sin x$ مقدارصفر را در $x_1 = 0$ و در $m-1$ نقطه دیگر ، یعنی $x_2 = \pi$، $x_3 = 2\pi$، $x_m = (m-1)\pi$ برمحور xها که در این حالت نقش S را دارد ، اختیار می‌کند . چون $z = z(P)$ یک تابع یک مقداری بر S نیزهست نتیجه می‌شود z دارای m مقدار $z(P_1)$ ، . . . ، $z(P_m)$ است که با یک مقدار w مثلاً" w_0 متناظرند .

به این دلیل می‌گوییم z یک تابع m مقداری از wاست ، و آنرا با نوشتن m سری توان جداگانه از z نشان می‌دهیم که درآنها w به‌عنوان متغیر مستقل به‌کار برده می‌شود .

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kq} w^k \qquad q = 1,2,\ldots,m \tag{۱۳۹-۴}$$

z رابه‌عنوان یک تابع m مقداری از w نشان‌می‌دهد . ولی ، z بر S یک مقداری‌است به این معنی که به ازای هر نقطه P از S فقط یک مقدار z وجود دارد ، به قسمی که $z = z(P)$. چون w رویهٔ S را بطور یک به یک و همشکل بر رویه m برگی S^* نقش می‌کند ، نتیجه می‌گیریم که z نیز بر S^* یک مقداری است . پس به این نتیجه رسیدیم‌که تابع مختلط z ،اگرچه m مقداری است ولی وقتی به‌عنوان تابعی از w درنظر گرفته شود ، یک تابع یک مقداری بر رویه ریمان m برگی S است . کشف این مطلب که یک تابع m مقداری را می‌توان به یک تابع یک مقداری بریک رویه چندبرگی یا یک کرهٔ دسته‌دار تبدیل کرد و توسط ریمان انجام شد از پیشرفتهای بزرگ ریاضیات است .



شکل ۴ ــ ۷. دو برگ الصاق شده در نقاط انشعاب P و ∞ و از داخل در طول لبه‌های متصل به P_1 و ∞ تشکیل یک رویه ریمان می‌دهند که ازنظر توپولژی با کره‌ای بدون دسته معادل است.

فرض کنید z و w هردو توابع پتانسیل مختلط باشندکه جریانهای هیدرودینامیک را برکره S با g دسته می‌دهند . فرض کنید تعداد کل حفره‌ها و منبعهای وابسته به w برابر m و برای z برابر n باشد . در این صورت می‌توان نشان داد که z و w در یک معادلهٔ جبری درجه m از z و درجه n از w مانند

$$f(z,w) = a_0(w)z^m + a_1(w)a^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(w)z + a_m(w) = 0 \qquad (۱۴۰-۴)$$

به هرنقطه S^* یا S یک جفت‌ازمقادیر (z,w) که ازمعادلهٔ $f(z,w) = 0$ صدق می‌کند متناظر است ، و به‌عکس به هر نقطه (z,w) در حالت کلی یک نقطه از رویه S یا S^* نسبت داده می‌شود پس S یا S^* رویه ریمان معادله جبری $f(z,w) = 0$ خواهد بود . و می‌گوییم :

$$w = w(z) \qquad (۱۴۱-۴)$$

یک تابع جبری از z و

$$z = z(w) \qquad (۱۴۲-۴)$$

یک تابع جبری از w است . توابع z و w هر دو بر رویهٔ ریمان S یا S^* یک مقداری هستند که بوسیله $f(z,w) = 0$ باهم درارتباطند .

وقتی پتانسیل‌مختلط $w=w(P)$ بر S همراه m حفره و منبع داده شود ، هنوز برای انتخاب تابع یک مقداری دوم $z=z(P)$ که بر S تعریف شده باشد وسعت قابل ملاحظه‌ای داریم ، در این صورت z در یک معادلهٔ جبری درجه m از z مانند

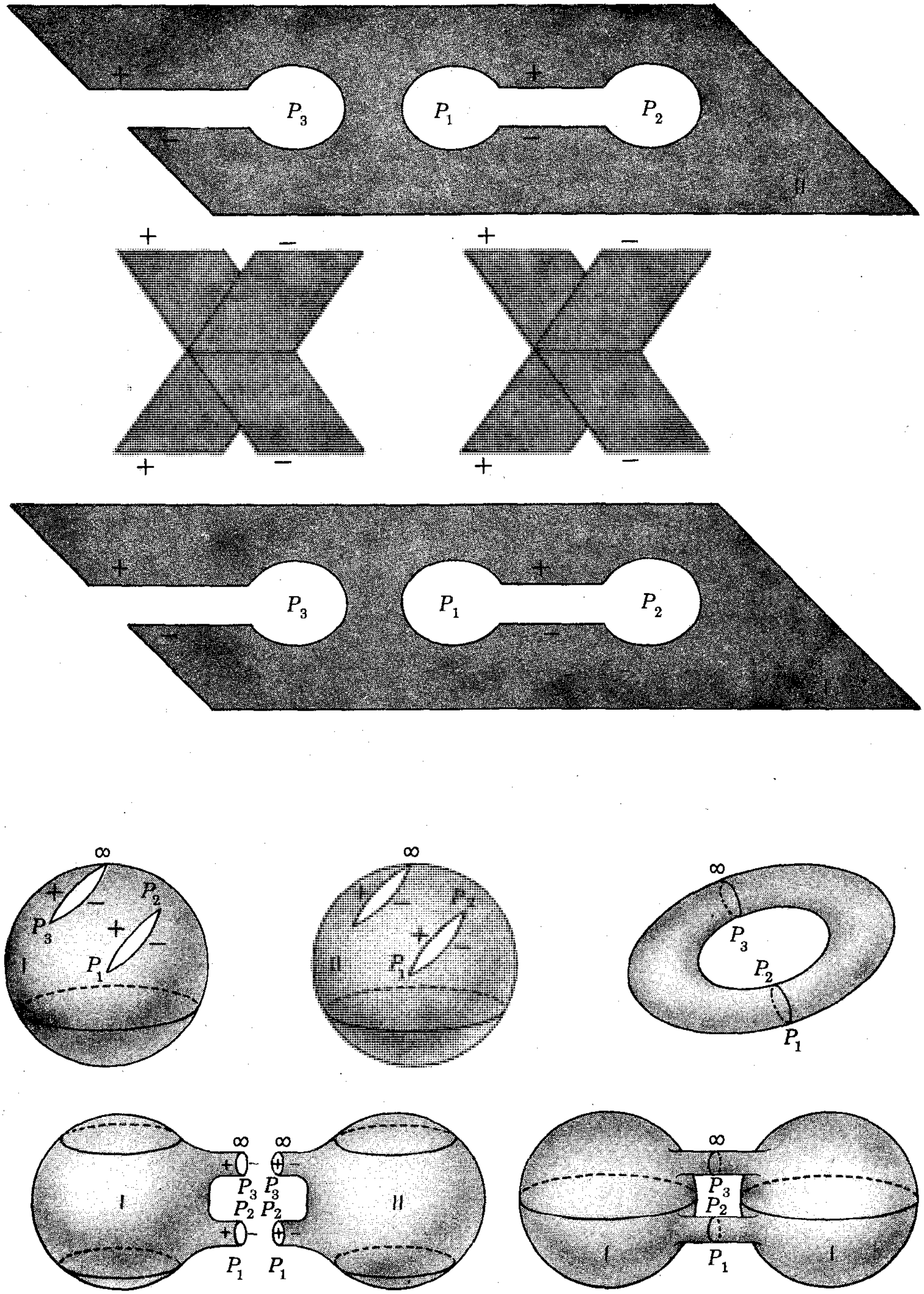
$$f(z,w) = z^m + r_1(w)z^{m-1} + \cdots + r_{m-1}(w)z + r_m(w) = 0 \qquad (۱۴۳-۴)$$

صدق می‌کند که درآن $r_k(w)$ ، $k=1,2,\ldots,m$ توابع گویا از w هستند. علاوه‌براین‌اگر $w=w(P)$ یک تابع پتانسیل مختلط بر S باشدکه ، هرمقدار را m مرتبه اختیارمی‌کند . تابع پتانسیل مختلط دیگری مانند $z=z(P)$ وجودداردبه‌قسمی‌که‌معادله جبری درجهٔ m که z درآن‌صدق می‌کندبرحسب w تحویل‌ناپذیر باشد . منظور از تحویل‌ناپذیر این است که $f(z,w)$ را نمی‌توان به حاصلضرب دو تابع جبری دیگر بادرجه مثبت برحسب z تجزیه کرد ، به‌قسمی‌که ضرایب هردوعامل توابعی گویا از w باشند . به عبارت دیگر ، نمی‌توانیم دو تابع جبری $f_1(z,w)$ و $f_2(z,w)$ پیدا کنیم به قسمی که

$$f(z,w) = f_1(z,w)f_2(z,w) \qquad (۱۴۴-۴)$$

که رویهم n حفره ومنبع وابسته به $z=z(P)$ وجود داشته باشد ، آن‌گاه $f(z,w)$ برحسب w ازدرجه n است ، و معادله (۴ ـ ۱۴۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت .

$$f(z,w) = w^n + R_1(z)w^{n-1} + \cdots + R_{n-1}(z)w + R_n(z) = 0 \qquad (۱۴۵-۴)$$



شکل ۴ — ۸. دو ورقه متصل بهم در چهار نقطه P_1، P_2، P_3 و ∞ از یک رویهٔ ریمان که از نظر توپولژیکی معادل است با یک کره دسته‌دار، یعنی یک تور.

که در آن $R_k(z)$، n, . . . $k = 1.2,$ توابعی منطق از z هستند .

هریک از m سری توان در معادله (۴ ـ ۱۳۹) را یک " انشعاب متمایز " از تابع جبری m مقداری $z=z(w)$ گوییم . این سری توان m جواب معادله (۴ ـ ۱۴۳) را نشان می‌دهد ، به این معنی که

$$f(z(w),w) \equiv 0 \qquad (۴ - ۱۴۶)$$

چون فرض شده که رویهم n حفره و منبع به $z=z(P)$ وابسته‌اند ، می‌توان فرض کرد که $z=z(P)$ مقدار $z=\infty$ را بر S دقیقا" n بار اختیار می‌کند . درنتیجه هر مقدار $z=a$ را دقیقا" n بار اختیار خواهد کرد . پس $z=z(P)$ رویه S را بطور یک به یک و همشکل به‌رویه ریمان n- برگی S^* نقش می‌کند . n نقطه روی S^* که در آنها $z(P)=a$، لازم نیست متمایز باشند اگردر نقطه P، بر S^* تابع $z(P)$ مقدار a را r بار اختیار کند ، برحسب پارامتر موضعی t حول P_0 داریم

$$z(t) - a = C_r t^r + C_{r+1} t^{r+1} + \cdots \qquad (۴ - ۱۴۷)$$

پارامتر t را یکنواخت کننده موضعی ، بر S^* در نقطه P_0 گوییم .

بطورکلی $w(P)$ بر رویه ریمان S^* تابعی تحلیلی و یک مقداری است . یعنی تابعی است تحلیلی از یکنواخت‌کننده موضعی t در هر نقطه S^* . مثلا" ، در نقطه P_0 ، تابع w مقدار b را یکبار اختیار می‌کند ، داریم

$$w(t) - b = g_1 t + g_2 t^2 + \cdots + g_n t^n + \cdots \qquad (۴ - ۱۴۸)$$

توجه کنید که $\sqrt[r]{z-a}$ را می‌توان به‌عنوان یک پارامتر موضعی حول P_0 درنظر گرفت .

نقطه P_0 یک نقطه انشعاب مرتبه $(r-1)$ام در نقطه S^* است . یعنی در همسایگی نقطه انشعاب P_0 رویهٔ S^* که در آن z مقدار a را r بار اختیار می‌کند $w-b$ را می‌توان به صورت یک سری توان برحسب ریشهٔ بار rام $z-a$ یعنی $(z-a)^{1/r}$ بسط داد . پس

$$w - b = d_1(z-a)^{1/r} + d_2(z-a)^{2/r} + \cdots + d_n(z-a)^{n/r} + \cdots \qquad (۴ - ۱۴۹)$$

که درآن فرض کرده‌ایم که w مقدار b رادر P_0 یکبار اختیار می‌کند . اگر w مقدار b را k باردر P_0 اختیار کند ، آن‌گاه معادله (۴ ـ ۱۴۹) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$w - b = d_k(z-a)^{k/r} + d_{k+1}(z-a)^{k+1/r} + \cdots \qquad (۴ - ۱۵۰)$$

اگر مقدار $z=\infty$ را در نقطه P_0، S بار اختیار کند ،داریم

$$z(t) = c_{-s} t^{-s} + c_{-s+1} t^{-s+1} + \cdots \qquad (۴ - ۱۵۱)$$

در این جا پارامتر یکنواخت‌کننده موضعی را می‌توانیم $\sqrt[s]{1/z}$ نیز درنظر بگیریم .توجه کنید که $z=\infty$ یک نقطه انشعاب مرتبه $s-1$ رویه S^* است .

این یک حقیقت قابل توجه است که اگر رویهٔ ریمان S یا S^* که با آن بوسیله تابع جبری

$f(z,w)=0$ وابسته است داده شود، همواره می‌توانیم یک پارامتر یکنواخت کننده t حول هرنقطه S پیدا کنیم به قسمی که

$$f(z(t),w(t)) \equiv 0 \qquad (۱۵۲-۴)$$

که در آن $z(t)$ و $w(t)$ سریهای توان برحسب t هستند.

۴ — ۱۵. سری لوران

اگر $f(z)$ در تمام حلقه بسته محدود به دایره خارجی C_2 در دایره داخلی C_1 تحلیلی و یک مقداری باشد، آن‌گاه $f(z)$ را می‌توان به یک سری مثبت ومنفی برحسب توانهای $z-a$ بسط داد. این سری در تمام نقاط حلقه متقارب است.

برهان: با فرض این که z یک نقطه از این حلقه باشد، انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (۱۵۳-۴)$$

که در آن C مرز کل حلقه است و جهت حرکت به قسمی اختیار می‌شودکه داخل همواره درسمت چپ واقع شود را می‌توان چنین نوشت.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (۱۵۴-۴)$$

که درآن علامت منفی جمله دوم به‌علت این است که دایره داخلی باید درجهت حرکت عقربه‌های ساعت طی شود تا قسمت داخلی در سمت چپ قرار گیرد. چون z داخل حلقه است به موجب قضیه انتگرال کوشی (۴ — ۷۴)، داریم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (۱۵۵-۴)$$

از بخش ۴ — ۹ نتیجه می‌شود،

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (۱۵۶-۴)$$

که درآن a مرکز مشترک C_1، C_2 است. و

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (۱۵۷-۴)$$

توجه کنیدکه a_n درحالت‌کلی برابر $f^{(n)}(a)/n!$ است زیرا $f(z)$ الزاماً" درتمام‌نقاط داخلی C_2 تحلیلی نیست.

از معادله (۴ — ۱۵۵) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} + \frac{\zeta - a}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \cdots \qquad (۴-۱۵۸)$$

با تعویض z و ζ . سری (۴ — ۱۵۸) بر C_1 بطور یکنواخت متقارب است ، بنابراین

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\oint_{C_1} f(\zeta)\, d\zeta + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\oint_{C_1} (\zeta-a)^n f(\zeta)\, d\zeta + \cdots \qquad (۴-۱۵۹)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \qquad (۴-۱۶۰)$$

در این جا

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (۴-۱۶۱)$$

از ترکیب معادلات (۴ — ۱۵۵) ، (۴ — ۱۵۶) و (۴ — ۱۶۰) سری لوران $f(z)$ به‌دست می‌آید :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (۴-۱۶۲)$$

که در آن به ازای هر n

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (۴-۱۶۳)$$

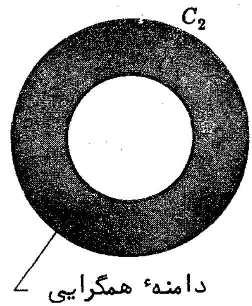
مسیر بسته C در معادلهٔ (۴ — ۱۶۳) می‌تواند هرمسیر بسته ساده باشد که حلقه را دور می‌زند و بین C_1 و C_2 قرار گیرد . (ثابت کنید ؟)

توجه کنید که وقتی $f(z)$ درتمام نقاط داخلی دایرهٔ C_1 تحلیلی باشدتمام جملات شامل n منفی درمعادله (۴ — ۱۶۲) به موجب‌قضیه کوشی‌حذف می‌شوند . سری شامل توانهای مثبت $z-a$ نه تنها در داخل حلقه بلکه در هر نقطه دایره C_2 متقارب است . همین‌طور سری شامل توانهای منفی درهرنقطه خارج C_1 متقارب است . دامنه مشترک تقارب همان نقاط داخلی حلقه است .

۴ — ۱۶ . ویژگیهای یک تابع تحلیلی

ویژگیهای منفرد

اگر $f(z)$ دریک‌همسایگی‌نقطه a تحلیلی‌باشد، مثلاً" در $|z-a| < R$ ولی درنقطه a تحلیلی



شکل ۴ — ۹ . دامنهٔ همگرایی برای سری لران .

نباشد ، در آن صورت نقطه a را یک ویژگی منفرد $f(z)$ گوییم .

دسته‌بندی ویژگیهای منفرد

وسیله اصلی در دسته‌بندی ویژگیهای توابع تحلیلی یک مقداری سری لوران است .

اگر a یک نقطه ویژه منفرد $f(z)$ باشد ، همواره می‌توانیم $f(z)$ را در این نقطه به یک سری لوران بسط دهیم و دایره داخلی C_1 را می‌توانیم بطور دلخواه کوچک اختیار کنیم زیرا نقطه ویژه a منفرد است . باتوجه به این مطلب سه حالت متمایز امکان‌پذیر است .

۱) اگر هر a_n به ازای $n < 0$ در معادله (۴ — ۱۶۲) صفر باشد ، آن‌گاه $f(z)$ به ازای $|z-a|<R$ تحلیلی است ، مگر در نقطه a . نقطه a را در این صورت نقطه ویژه "قابل رفع" گوییم . این نوع ویژگی با تعریف $f(z)$ در $z = a$ به قسمی که $f(z)$ در آن نقطه تحلیلی شود قابل رفع است . مثلاً اگر $f(z)=z$ ، $0<|z|<1$ و $f(0)=1$ ، آن‌گاه $f(z)$ در $z = 0$ دارای یک نقطه ویژه قابل رفع است . برای رفع آن تابع را برای $0 \le |z| < 1$ به صورت $f(z) = z$ تعریف می‌کنیم . به این ترتیب $f(z)$ در $z = 0$ تحلیلی خواهد بود .

۲) اگر معادله (۴ — ۱۶۲) فقط شامل تعداد متناهی جملاتی با توانهای منفی از $z - a$ ، باشد . می‌دانیم $f(z)$ در نقطه $z = a$ دارای یک قطب است .

مثلاً ، اگر

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (۴ - ۱۶۴)$$

$z = a$ را یک قطب مرتبهٔ k گوییم .

۳) اگر معادله (۴ — ۱۶۲) شامل تعداد نامتناهی جملاتی با توانهای منفی از $z - a$ باشد ، آن‌گاه گوییم $f(z)$ در $z = a$ دارای یک ویژگی اصلی است . مثلاً $e^{1/z}$ ، در $z = 0$ دارای یک ویژگی

اصلی است . رفتار $f(z)$ در همسایگی یک ویژگی اصلی بسیار پیچیده است . می‌توان نشان داد که در همسایگی یک ویژگی اصلی ، $f(z)$ هرعدد مختلط رابه استثنای یکی بی‌نهایت بار اختیار می‌کند ، $e^{1/z}$ هر مقدار غیرصفر را بی‌نهایت بار درهر قرص کوچک دلخواه به مرکز $z=0$ اختیار می‌کند .

۴ ـ ۱۷ . توابع چندمقداری

ساده‌ترین توابع چندمقداری وقتی به‌دست می‌آیندکه بخواهیم یک معادله جبری به‌صورت زیر را حل کنیم

$$f(z,w) = 0 \qquad (۴-۱۶۵)$$

مثلا" ، معادله زیر را درنظر بگیرید

$$w^2 - (z-a) = 0 \qquad (۴-۱۶۶)$$

به ازای هر مقدار z مخالف $z=a$ دو مقدار متمایز برای w ، مثلا" $w_1(z)$ و $w_2(z)$ به‌دست می‌آید . این دو تابع ، $w_1(z)$ و $w_2(z)$ در معادله (۴ ـ ۱۶۶) صدق می‌کند ، آنهارا انشعابهای یک مقداری تابع جبری دو مقداری گوییم .

$$w(z) = \sqrt{z-a} \qquad (۴-۱۶۷)$$

$w(z)$ جواب رسمی معادله (۴ ـ ۱۶۶) است . اگر ابتدا w ، z و a را حقیقی تصور کنیم و به معادله (۴ ـ ۱۶۷) به‌عنوان یک منحنی در صفحه مختصات z و w نگاه کنیم ، مفهوم $w_1(z)$ و $w_2(z)$ بهتر درک خواهد شد . بدیهی است که معادله (۴ ـ ۱۶۷) یک سهمی است که محور z ها را در $z=a$ قطع می‌کند و درجهت مثبت رسم می‌شود . شاخه فوقانی سهمی نظیر $w_1(z)$ و شاخه تحتانی سهمی نظیر $w_2(z)$ خواهد بود . البته این دسته‌بندی ، اختیاری است و می‌توان بترتیب آن را معکوس نمود .

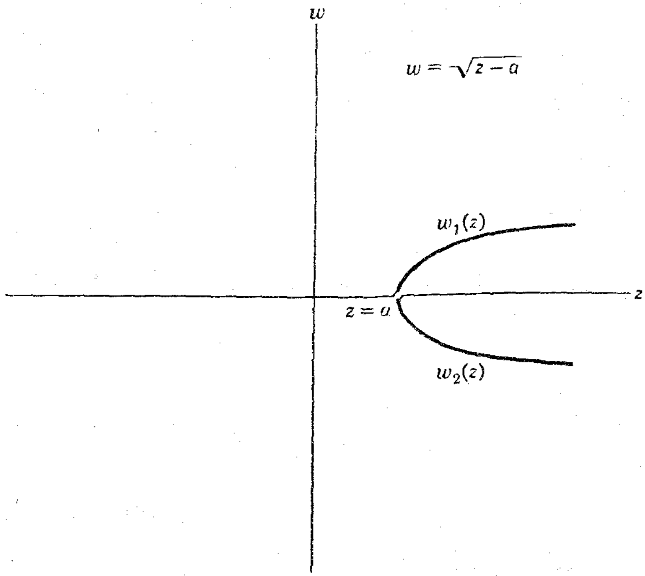
مفهوم کامل $w_1(z)$ و $w_2(z)$ را می‌توان با تداوم تحلیلی هریک ازاین توابع حقیقی به‌دست آورد . به این ترتیب که z را مختلط درنظر بگیریم . در این صورت نمی‌توانیم به تصاویری در صفحه حقیقی z ، w نگاه کنیم زیرا z و w هر دو متغیرهای مختلط هستند . با وجود این بجز در نقطه $z=a$ بازهم دوتابع یک مقداری $w_1(z)$ و $w_2(z)$ وجود دارندکه همان انشعابهای یک مقداری $w(z) = \sqrt{z-a}$ هستند . مثلا" z را می‌توان به صورت زیر نوشت .

$$z - a = re^{i\theta} \qquad (۴-۱۶۸)$$

و درنتیجه

$$w_1(z) = |\sqrt{r}|\, e^{i\theta/2} \qquad (۴-۱۶۹)$$

$$w_2(z) = |\sqrt{r}|\, e^{i(\theta/2+\pi)} \qquad (۴-۱۷۰)$$



شکل ۴ ــ ۱۰ . نمودار $w = \sqrt{z-a}$ به ازای مقادیر حقیقی w و z .

در $z=a$ داریم $r=0$ و توابع $w_1(z)$ و $w_2(z)$ از نقاط $w_1(a) = 0$ و $w_2(a) = 0$ می‌گذرند .

نقطه $z=a$ که در آن دو انشعاب w_1 و w_2 برابرند یک نقطه ویژه تابع جبری $w(z)$ است که در معادله (۴ ــ ۱۶۷) داده می‌شود .

این نوع نقطه ویژه $w(z)$ را نقطه انشعاب گوییم .

درمعادله (۴ ــ ۱۶۷) نقطه انشعاب $z=a$ نقطه‌ای است که درآن انشعاب فوقانی وتحتانی سهمی ، که برای حالت حقیقی z توصیف شد به یکدیگر می‌رسند . برای مطالعه رفتار معادله (۴ ــ ۱۶۷) در همسایگی نقطه انشعاب $z=a$ فرض کنید

$$w = \rho e^{i\phi} \qquad (۴ ــ ۱۷۱)$$

و فرض کنید z حول نقطه a بر یک منحنی ساده دور بزند . در این صورت وقتی $\theta = \arg(z-a)$ ازمقداراولیه θ_0 تا $\theta_0 + 2\pi$ افزایش یابد $\phi = \arg(w)$ ازمقدار اولیه $\phi_0 = \theta_0/2$ تا $\theta_0/2+\pi$ افزایش پیدا خواهد کرد . پس اگر از یک مقدار انشعاب مثلاً w_1 شروع کنیم پس از یک دور کامل حول نقطه انشعاب در صفحه z به مقدار انشعاب دیگر مثلاً w_2 می‌رسیم .

برای رسیدن مجدد به مقداراولیه w_1 ، باید θ_0 را از θ_0 تا $\theta_0 + 4\pi$ تغییر دهیم . همان‌طور که در معادله (۴ ــ ۱۹۶) دیده می‌شود . پس برای آن که فقط w_1 به مقدار اولیه خود برگردد دو دورکامل حول نقطه $z=a$ لازم است . به عبارت دیگر یک دورمضاعف درصفحه z حول $z=a$

با یک دورساده در صفحه w حول $w=0$ متناظر است .

رویه ریمان برای معادله (۴ ــ ۱۶۷) دامنه جدیدی برای تغییرات z فراهم می‌سازد . بر رویه ریمان ، $w(z)$ تابعی یک مقداری از z است . رویه ریمان معادله (۴ ــ ۱۶۷) از دو صفحه مختلط یکسان تشکیل می‌شود که روی یکدیگر به قسمی چسبیده‌اند که مقادیر z برهم منطبقند . این دو برگ در نقطه انشعاب $z=a$ به یکدیگر الصاق می‌شوند تا یک رویه رابه‌وجودآورند . برگ فوقانی را I می‌نامیم . وبه‌هر نقطه z روی آن مقدارمعین $w_1(z)$ را نسبت می‌دهیم . برگ تحتانی را II نامیده و بهر نقطه z روی آن مقدار معین $w_2(z)$ را نسبت می‌دهیم . برای تحقیق این که مقادیر اولیه w فقط بعد از دو دور حول نقطه انشعاب $z=a$ حاصل می‌شوند به شکل زیر عمل می‌کنیم :

با قیچی هر برگ را از $z=a$ تا ∞ برش می‌دهیم . دو لبه بریده شده هر برگ رابه ترتیب لبهٔ مثبت و لبهٔ منفی می‌نامیم این عمل را به قسمی انجام می‌دهیم که لبه‌های مثبت و منفی برگ I مستقیما" روی لبه‌های مثبت و منفی برگ II قرار گیرد . این دو برش را برشهای انشعاب می‌نامیم . حال رویه ریمان را با اتصال لبه مثبت بالایی به لبه منفی پایین و لبه منفی بالایی رابه لبه مثبت پایینی‌کامل می‌کنیم . به هرنقطه ازاین رویه ریمان فقط وفقط یک مقدار $w(z)$ متناظر است . فرض کنید ازنقطه $z=z_0$ دربرگ فوقانی حول نقطه انشعاب $z=a$ یک دور بزنیم . بعداز یک دورکامل حول $z=a$ خود رادرنقطه $z=z_0$ برگ تحتانی خواهیم یافت ، زیرا برگهای فوقانی و تحتانی در لبه‌های برشهای انشعاب برگهای I و II به یکدیگر متصل شده‌اند .

اگر در نقطه $z=z_0$ روی برگ تحتانی حول نقطه انشعاب $z=a$ دوربزنیم به نقطه $z=z_0$ روی برگ فوقانی خواهیم رسید درحالی که تبدیل برگها در قسمت برش صورت می‌گیرد .

به عنوان یک مثال دیگر تابع زیر را درنظر بگیرید

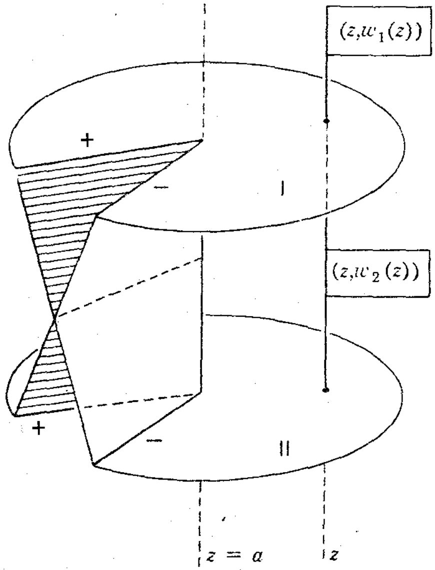
$$w(z) = \sqrt[m]{z-a} \qquad (۱۷۲ ــ ۴)$$

به ازای $z \neq a$ ، $w(z)$ یک تابع m مقداری از z است . در $z=a$ ، m انشعاب $w(z)$ در مبدأ بهم متصل می‌شوند . و $w(z)$ در $z=a$ یک نقطه انشعاب مرتبه m دارد ، رویه ریمان متناظر از m برگ متمایزتشکیل می‌شودکه اولین برگ با m برگ درطول برش انشعاب که از $z=a$ شروع شده بهم وصلند .

به‌عنوان آخرین مثال تابع چندمقداری غیرجبری زیر را درنظر می‌گیریم .

$$w(z) = \log z = \log |z| + i\,[\arg (z) + 2\pi k] \qquad (۱۷۳ ــ ۴)$$

که درآن $k = 0$ و ± 1 و ± 2 و . . . این تابع بی‌نهایت مقدار دارد ، $z=0$ یک نقطه انشعاب مرتبه بی‌نهایت است . رویهٔ ریمان متناظر از تعداد نامتناهی برگ تشکیل می‌شودکه در $z=0$ به یکدیگر متصل شده‌اند . یک نقطه انشعاب یک نقطه ویژه واقعی است که درآن تابع تحلیلی



شکل ۴ — ۱۱ . رویه ریمان برای $w = \sqrt{z-a}$ در نزدیکی $z = a$.

نیست . مثلا" اگر $w = \sqrt{z-a}$ آن‌گاه

$$\frac{dw}{dz} = \tfrac{1}{2}(z-a)^{-1/2}$$

نشان می‌دهد که w در $z = a$ تحلیلی نیست .

۴ — ۱۸ . مانده‌ها

فرض کنید $f(z)$ بر دامنه مرتبط D تابعی یک مقداری و تحلیلی باشد ، مگر در نقطه ویژه $z = a$ داخل D . فرض کنید مرز D یک منحنی ساده C باشد . انتگرال $f(z)$ را روی C در جهت مثبت درنظر بگیرید .

$$I = \oint_C f(z)\, dz \qquad (۱۷۴-۴)$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که مقدار I برای تمام منحنیها C که نقطه $z = a$ را دربر می‌گیرد برابر است .

این مقدار مشترک I را به عنوان مضربی از مانده $f(z)$ در $z = a$ تعریف می‌کنند . معمولا' ضریب $1/2\pi i$ را در تعریف اختیار می‌کنند ، درنتیجه

$$\text{Res}\,[f(z),\, z = a] = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, dz \qquad (۱۷۵-۴)$$

محاسبه‌مانده‌ٔتابع‌در یک ویژگی منفرد اگر بسط به سری لوران تابع حول نقطه ویژه معلوم باشد خیلی آسان است . مثلا" ، اگر $f(z)$ یک قطب مرتبه k در $z = a$ داشته باشد ، آن‌گاه

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (۱۷۶-۴)$$

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n \oint_C (z-a)^n\, dz \qquad (۱۷۷-۴)$$

و

منحنی Cرا دایره‌ای به مرکز $z = a$ و شعاع r اختیار می‌کنیم . در این صورت می‌توان نوشت :

$$\oint_C (z-a)^n\, dz \qquad (۱۷۸-۴)$$

با

$$z - a = re^{i\theta} \qquad (۱۷۹-۴)$$

$$dz = ire^{i\theta}\, d\theta \qquad (۱۸۰-۴)$$

در این صورت

$$\oint_C (z-a)^n\, dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta \qquad (۱۸۱-۴)$$

ولی

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \qquad (۱۸۲-۴)$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz = a_{-1} \qquad (۱۸۳-۴)$$

نتیجه می‌دهد

$$\text{Res}\,[f(z),\, z = a] = a_{-1} \qquad (۱۸۴-۴)$$

توجه کنید در معادله (۴ — ۱۶۴) تنها جمله‌ای که در مانده $f(z)$ دخالت دارد جمله $a_{-1}/(z-a)$ است . اگر $a_{-1} = 0$ آن‌گاه ماندهٔ $f(z)$ در $z = a$ برابرصفراست . ولی‌به ازای $k \geq 2$، $f(z)$ در $z = a$ دارای ویژگی خواهد بود .

مثال ۴ ـ ۱:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3(1-z)}, z=0\right]=1$$

زیرا

$$\frac{1}{z^3(1-z)}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots+z^{n-3}+\cdots \qquad 0<|z|<1$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(1-z^2)}, z=0\right]=0$$

زیرا

$$\frac{1}{z^2(1-z^2)}=\frac{1}{z^2}+1+z^2+\cdots+z^{2n-2}+\cdots \qquad 0<|z|<1$$

اگر C دایره‌ای به مرکز $z=0$ و شعاع کوچکتر از یک باشد، آن‌گاه

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(1-z)}=2\pi i \qquad (۱۸۵-۴)$$

و

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(1-z^2)}=0 \qquad (۱۸۶-۴)$$

معادله (۴ ـ ۱۸۳) یکی از مفیدترین قضایای آنالیز مختلط است:

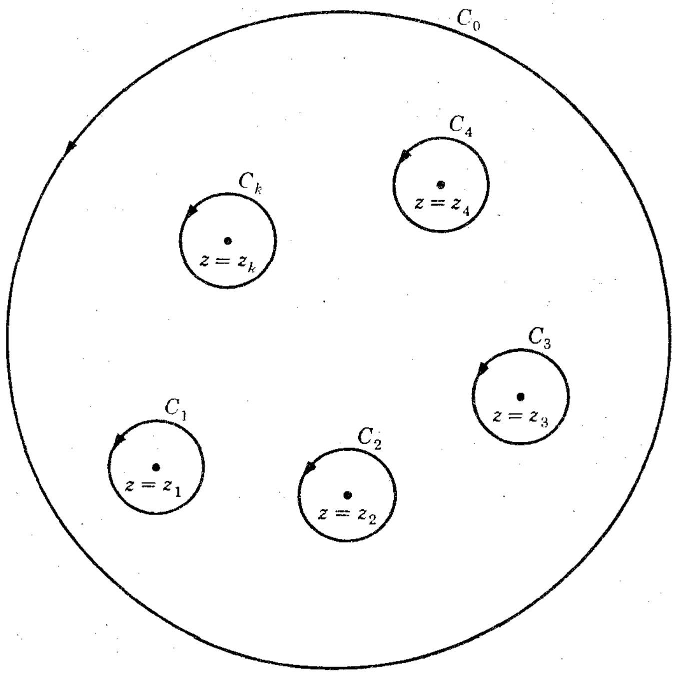
قضیه مانده کوشی

فرض کنید $f(z)$ بر D تابعی یک مقداری و تحلیلی باشد مگر در تعداد متناهی نقاط ویژه منفرد z_1، z_2، . . . ، z_n در داخل D. اگر مرز D منحنی بسته ساده C_0 باشد، آن‌گاه

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\,[f(z), z=z_k] \qquad (۱۸۷-۴)$$

برهان: برای اثبات این قضیه دامنهٔ جدید D' را به قسمی می‌سازیم که $f(z)$ درتمام‌نقاط آن تحلیلی‌باشد. این‌عمل بوسیله حذف تمام‌نقاط ویژه z_k از D انجام‌می‌شود، به این ترتیب که هریک از z_k ها را در دایره کوچک C_k محاط کرده آن را از D حذف می‌کنیم. ناحیهٔ D' به ظاهر شبیه یک قطعه پنیر سویسی با n حفره و حاشیه C_0 است.

حال $f(z)$ در تمام نقاط D' تحلیلی است، ولی D' مرتبط ساده نیست. لذادربه‌کاربردن قضیه انتگرال کوشی (۴ ـ ۶۰) برای $f(z)$ باید احتیاط لازم به عمل آید تا انتگرال‌گیری روی



شکل ۴ ــ ۱۲. کاربرد قضیهٔ مانده.

تمام مرز D' ، یعنی روی C_0 وهریک از n دایره C_k صورت‌گیرد. انتگرال‌گیری باید به‌قسمی‌انجام شود که داخل D' همواره در سمت چپ واقع شود. داریم:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0 \qquad (۱۸۸-۴)$$

که درآن

$$C = \sum_{k=0}^{n} C_k \qquad (۱۸۹-۴)$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\oint_{C_0} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz \qquad (۱۹۰-۴)$$

با استفاده از معادله (۴ ــ ۱۷۵) داریم:

$$\oint_{C_0} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\, [f(z),\, z = z_k] \qquad (۱۹۱-۴)$$

قضیه مانده محاسبه انتگرالها رابرمسیرهای بسته به سرعت امکان‌پذیر می‌سازد دراین‌جا چند نتیجه مفید را برای محاسبه مانده‌ها یادآور می‌شویم :

۱) اگر $z=a$ قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد، آن‌گاه

$$\operatorname{Res}[f(z), z=a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{۱۹۲-۴}$$

۲) اگر $z=a$ قطب مرتبه nام تابع $f(z)$ باشد آن‌گاه

$$\operatorname{Res}[f(z), z=a] = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}h(z) \tag{۱۹۳-۴}$$

که در آن

$$h(z) = (z-a)^n f(z)$$

۳) اگر $A(z)$ و $B(z)$ در یک‌همسایگی $z=a$ تحلیلی‌باشد، $A(a) \neq 0$ و $B(z)$ به‌عنوان یک‌عدد ثابت بر $(z-a)$ در $z=a$ به سمت صفر میل کند، آن‌گاه

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{۱۹۴-۴}$$

$z=a$ دارای قطب مرتبه اول است، و

$$\operatorname{Res}[f(z), z=a] = \lim_{z\to a}\frac{A(z)}{B'(z)} \tag{۱۹۵-۴}$$

این نتایج را با محاسبهٔ ضریب a_{-1} در بسط سری لوران درهر حالت می‌توان ثابت‌کرد .

۴ ــ ۱۹ . مانده در بی‌نهایت

تعریف : فرض کنید $f(z)$ به ازای $R < |z|$ تابعی یک مقداری و تحلیلی باشد مگر در نقطه $z=\infty$ که در آن $f(z)$ دارای یک ویژگی منفرد است .

فرض کنید C یک مسیر بستهٔ ساده در دامنهٔ تحلیلی $f(z)$ باشد ، در این صورت

$$\operatorname{Res}[f(z), z=\infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz \tag{۱۹۶-۴}$$

مانده $f(z)$ رادر ∞ تعریف می‌کند . توجه کنیدکه‌مسیر C درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت (منفی) پیموده می‌شود . دلیلش این است که دامنه تحلیلی $f(z)$ (درحالت $R < |z|$) باید همواره در سمت چپ هر جزء از منحنی مرز قرار گیرد .

اگر سری لوران $f(z)$ به صورت زیر داده شود

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \tag{۱۹۷-۴}$$

آن‌گاه به دلیلی مشابه بخش ۴ ــ ۱۸ داریم :

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z = \infty] = -a_{-1} \qquad (۱۹۸ - ۴)$$

توجه کنیدکه وجود یک مانده در $z = \infty$ بستگی به وجودیک قطب یاویژگی اصلی‌در $z = \infty$ ندارد ، اگر قطبی در بی‌نهایت باشد داریم :

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \qquad (۱۹۹ - ۴)$$

واین به خاطر جمله $a_n z^n$ ، $n > 0$ درمعادله (۴ ــ ۱۹۷) است ، حال آن که مانده از جمله a_{-1}/z حاصل می‌شود همین‌طور ، $e^{1/z}$ در $z = \infty$ تحلیلی است ولی چون

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \qquad (۲۰۰ - ۴)$$

نتیجه می‌شود

$$\mathrm{Res}\,[e^{1/z}, z = \infty] = -1 \qquad (۲۰۱ - ۴)$$

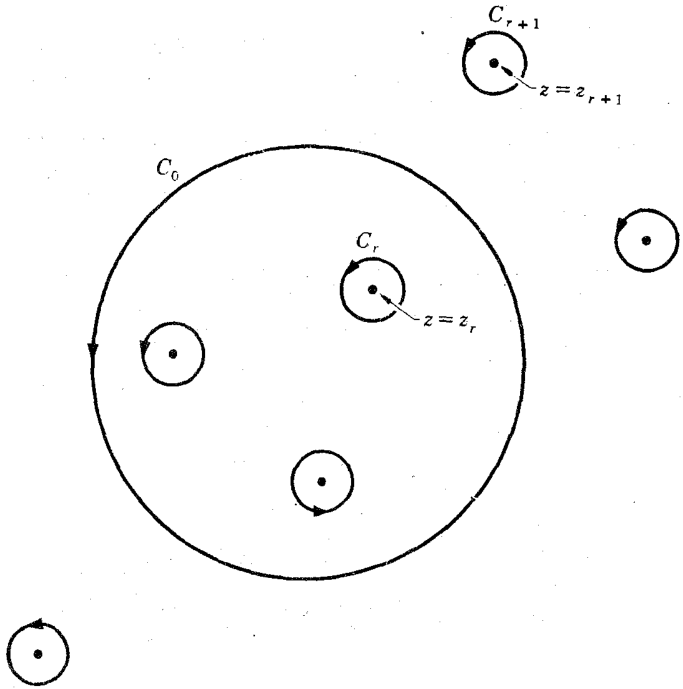
خلاصه ، اگر تابعی در بی‌نهایت یک مانده داشته باشد ، معنایش این نیست که این تابع دارای یک قطب یا ویژگی اصلی است ، همچنین مانع تحلیلی بودن تابع در بی‌نهایت نخواهد بود .

۴ ــ ۲۰ . تعمیم قضیهٔ ماندهٔ کوشی

فرض کنید $f(z)$ تابعی یک مقداری و تحلیلی باشد ، مگر در تعداد متناهی نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ واقع در صفحه مختلط z . فرض کنید C_0 یک منحنی بستهٔ ساده در صفحه z باشد به قسمی که هیچ یک از ویژگیهای منفرد روی آن واقع نباشد ، داخل C_0 را به D و خارج آن را به D' نشان می‌دهیم . نقطه $z = \infty$ به D' متعلق است . بعضی از n ویژگی منفرد ، مثلا" r تا در D و $n - r$ ویژگی در D' قرار می‌گیرند . در این صورت عبارت

$$\oint_{C_0} f(z)\, dz = \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}\,[f(z), z = z_k] \\ -2\pi i \left\{ \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n} \mathrm{Res}\,[f(z), z = z_k] \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathrm{Res}\,[f(z), z = \infty] \right\} \end{cases} \qquad (۲۰۲ - ۴)$$

دو معنی متفاوت در محاسبه انتگرال روی منحنی بسته C_0 حول D دارد . یکی این که آن را به‌عنوان $2\pi i$ برابر مجموع مانده‌های داخل C_0 درنظر می‌گیریم و دیگر این که $-2\pi i$ برابر مجموع مانده‌های خارج C_0 به اضافه مانده در بی‌نهایت (شکل ۴ ــ ۱۳) یک انتگرال را به هر دو طریق می‌توان محاسبه کرده و نتایج حاصل را با هم مقایسه کنیم اغلب یک روش محاسبه ، ازنظر عملیات ساده تراز دیگری خواهد بود .



شکل ۴ ــ ۱۳. یک انتگرال رابه کمک مانده به دوطریق می‌توان محاسبه‌کرد. با استفاده از قطبهای داخل C_0 یا خارج C_0.

اثبات این قضیه دراساس مانند اثبات معادله (۴ ــ ۱۸۷) است. محاسبه مانده‌ها در بی‌نهایت اغلب با به‌کار بردن نتایج زیر ساده می‌شود:

۱) اگر $\lim_{z\to\infty} f(z)$ مانند مقدار ثابتی تقسیم بر z به سمت صفر میل کند، آن‌گاه

$$\text{Res}\,[f(z),\, z = \infty] = -\lim_{z\to\infty} zf(z) \tag{۴ ــ ۲۰۳}$$

۲) اگر $\lim_{z\to\infty} f(z)$ مانند مقدار ثابتی تقسیم بر z^n، $n \geq 2$به سمت صفر میل کند،

$$\text{Res}\,[f(z),\, z = \infty] = 0 \tag{۴ ــ ۲۰۴}$$

۳) آن‌گاه

$$\text{Res}\,[f(z),\, z = \infty] = -\,\text{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right),\, z = 0\right] \tag{۴ ــ ۲۰۵}$$

مثال ۴ ــ ۲:

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z\,dz}{1 - z^3}$$

ابتدا I،را با استفاده از ویژگیهای منفرد تابع زیر انتگرال داخل دایره $|z| = 4$ محاسبه

می‌کنیم . به ازای $z = 1$ ، $z = e^{2\pi i/3}$ و $z = e^{4\pi i/3}$ داریم :

$1 - z^3 = 0$

این سه مقدار z هرکدام یک قطب مرتبه اول تابع $z/(1-z^3)$ است. بنابر قاعده (۴ ــ ۱۹۵) برای هریک از سه قطب داریم :

$$\frac{A(z)}{B'(z)} = -\frac{z}{3z^2}$$

و در هریک از سه قطب $z^3 = 1$ ، می‌توان نوشت :

$$\text{Res}\,[f(z),z] = -\frac{z}{3z^2} = -\frac{z^2}{3}$$

درنتیجه

$$I = 2\pi i\,\{\text{Res}\,[f(z),\,z = 1] + \text{Res}\,[f(z),\,z = e^{2\pi i/3}] + \text{Res}\,[f(z),\,z = e^{4\pi i/3}]\}$$

یا

$$I = -\frac{2\pi i}{3}\,(1 + e^{4\pi i/3} + e^{8\pi i/3})$$

یا

$$I = -\frac{2\pi i}{3}\,(1 - e^{\pi i/3} + e^{2\pi i/3})$$

توجه کنید

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1$$

سپس

$$e^{2\pi i/3} + 1 = e^{i\pi/3}$$

درنتیجه

$$I = 0 \qquad (۲۰۶ - ۴)$$

حال مقدار I را با استفاده از ویژگیهای خارج $|z| = 4$ محاسبه می‌کنیم تنها ویژگی خارج این دایره در بی‌نهایت است . داریم

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1-z^3} \to -\frac{1}{z^2}$$

و از قاعده (۴ ــ ۲۰۴) نتیجه می‌شود

$$I = 0$$

مثال ۴ــ۳:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^5(z^2-16)(z+5)} \qquad (۴-۲۰۷)$$

در این حالت یک قطب مرتبه پنجم در $z = 1$ داخل دایره $|z| = 2$ و قطبهای مرتبه یک در $z = \pm 4$ و $z = -5$ خارج این دایره وجود دارد. مقدار مانده در بی‌نهایت صفراست. برای به‌دست آوردن یک مانده در قطب مرتبه پنجم محاسبه بیشتری از قطب مرتبه یک لازم است. درنتیجه مقدار I را با استفاده از ویژگیهای خارج $|z| = 2$ به‌دست می‌آوریم.

$$I = -2\pi i\left[\frac{1}{3^5 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1}{(-5)^5 \cdot (-8)} + \frac{1}{(-6)^5 \cdot 9}\right] \qquad (۴-۲۰۸)$$

مثال ۴ــ۴: انتگرال حقیقی،

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \qquad (۴-۲۰۹)$$

که در آن $f(x)$ کسر منطقی از x است، فقط و فقط وقتی متقارب است که درجهٔ مخرج لااقل دو واحد از درجه صورت بیشتر باشد، با این شرط که هیچ قطبی روی محور x ها قرار نگیرد. حال اگربطور تحلیلی $f(x)$ رابرصفحه مختلط z تعریف کنیم،و بجای x مقدار $z = x + iy$ راقراردهیم داریم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz \qquad (۴-۲۱۰)$$

مسیر انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$-\infty \leq x \leq +\infty \qquad (۴-۲۱۱)$$

$$y = 0 \qquad (۴-۲۱۲)$$

برای محاسبه انتگرال (۴ــ۲۱۰) با استفاده ازقضیه مانده، انتگرال راروی یک منحنی بسته متشکل از پاره خط $(-r,r)$ و نیمدایره‌ای از r تا $-r$ در نیمصفحه فوقانی محاسبه می‌کنیم. اگر r به اندازه کافی بزرگ باشد، این منحنی تمام قطبهای واقع در نیمصفحه فوقانی را دربر می‌گیرد وانتگرال متناظر برابر $2\pi i$ درمجموع مانده‌ها درنیم‌صفحه فوقانی خواهدبود. می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال نیمدایره وقتی شعاع r بی‌نهایت شود به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,(z)>0} \mathrm{Res}\, f(z) \qquad (۴-۲۱۳)$$

مثال ۴ــ۵: همین روش را می‌توان برای محاسبه انتگرالی به صورت زیر به‌کار برد

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx \qquad (۲۱۴-۴)$$

با تداوم تحلیلی تابع زیر انتگرال در صفحه مختلط z داریم ،

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izt}\, dz \qquad (۲۱۵-۴)$$

که باید روی مسیر (۴ ـ ۲۱۱) و (۴ ـ ۲۱۲) محاسبه شود . چون

$$|e^{iz}| = e^{-y} \qquad (۲۱۶-۴)$$

در نیمصفحه فوقانی محدود است ، می‌توانیم نتیجه بگیریم‌که انتگرال روی نیمدایره وقتی‌تابع منطق $f(z)$ مانند مقدار ثابتی تقسیم بر z^n، $n \geq 2$در$z=\infty$به سمت صفر میل کند برابر صفر است.پس می‌توان نوشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iz}\, dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,(z)>0} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{iz}] \qquad (۲۱۷-۴)$$

درواقع قضیه‌ای (لم جردن) که در بسیاری از کتابهای درسی متغیرهای مختلط وجود دارد ، ثابت می‌کند که معادله (۴ ـ ۲۱۷) حتی وقتی $f(z)$ مانند مقداری ثابت تقسیم بر z وقتی z بی‌نهایت می‌شود به سمت صفر میل کند ، نیز برقرار است . توجه کنید که (۴ ـ ۲۱۷) فقط وقتی برقرار است که هیچ قطبی در $f(z)$ بر محور حقیقی z قرار نگیرد .

مثال ۴ ـ ۶: همین روش را می‌توان برای محاسبه انتگرال زیر به‌کار برد

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\, dx \qquad (۲۱۸-۴)$$

که در آن $f(x)$ یک تابع منطق از xاست . در این جا t یک پارامتر حقیقی است .

باز هم‌تابع‌زیر علامت‌انتگرال‌را با قرار دادن$z = x + iy$ بجای x بر صفحه مختلط z تعریف می‌کنیم . پس

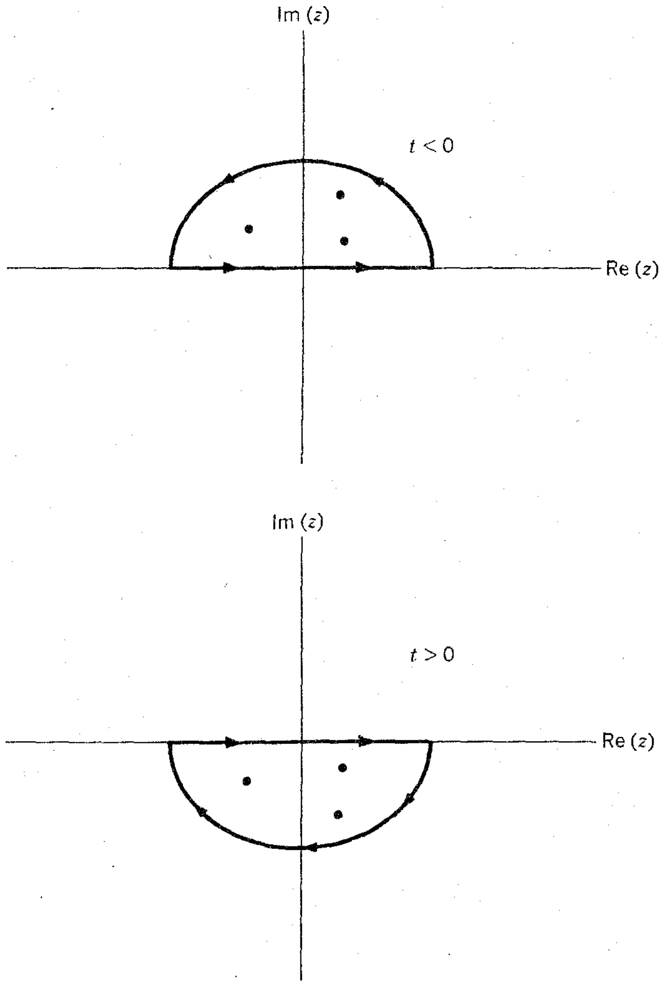
$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izt}\, dz \qquad (۲۱۹-۴)$$

باید روی مسیر (۴ ـ ۲۱۱) و (۴ ـ ۲۱۲) محاسبه شود . توجه کنید .

$$|e^{-izt}| = e^{yt} \qquad (۲۲۰-۴)$$

بنابراین‌به ازای$t < 0$، e^{yt} در نیم‌صفحه فوقانی محدوداست‌درنتیجه به ازای$t < 0$ نیمدایره‌ای در نیم‌صفحه فوقانی انتخاب می‌کنیم تا مسیر انتگرال‌گیری بسته شود . با شرط

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{\text{const}}{z} \qquad (۲۲۱-۴)$$



شکل ۴ ــ ۱۴ . اگر $I(t) = 0$ ، $t \le 0$ ، آن‌گاه $f(z)$ باید در هر نقطه نیم‌صفحه فوقانی $\mathrm{Im}\,(z) \ge 0$، تحلیلی باشد .

داریم :

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-izt}\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{\mathrm{Im}\,(y) > 0 \\ t<0}} \mathrm{Res}\,[f(z) e^{-izt}] \qquad (۲۲۲-۴)$$

ازطرف‌دیگر، معادله (۴ ــ ۲۲۰) نشان می‌دهدکه e^{yt} به ازای $t > 0$ در نیم‌صفحه تحتانی $y < 0$ محدوداست .درنتیجه برای $t > 0$ مسیرانتگرال‌گیری رابانیمدایره‌ای‌در نیمصفحه تحتانی

می‌بندیم . توجه کنیدکه مسیرها درنیم‌صفحه تحتانی درجهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند(جهت منفی) . بنابراین وقتی $t > 0$، می‌توان نوشت :

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izt}\,dz = -2\pi i \sum_{\substack{\mathrm{Im}\,(y)<0 \\ t>0}} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{-izt}] \qquad (۲۲۳-۴)$$

بطورخلاصه

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izt}\,dz = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}\,(y)>0} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{-izt}] & t < 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}\,(y)<0} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{-izt}] & t > 0 \end{cases} \qquad (۲۲۴-۴)$$

به شرط‌آن‌که

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{\mathrm{const}}{z} \qquad (۲۲۵-۴)$$

۴ ــ ۲۱ . مسائل و کاربردها

۱ ــ با فرض $z = x + iy$ نشان دهید که :

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sinh iz &= i \sin z \\ \cosh iz &= \cos z \\ e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ \sin iz &= i \sinh z \\ \cos iz &= \cosh z \end{aligned}$$

۲ ــ ثابت کنید که

$$\sqrt{x+iy} = \pm \left\{ \left[\frac{x + (x^2+y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} + (sgn\ y) i \left[\frac{-x + (x^2+y^2)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} \right\}$$

که در آن

$$sgn\ y = \begin{cases} +1 & y > 0 \\ 0 & y = 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

۳ ــ ثابت کنید که ریشه‌های مختلط یک معادله جبری با ضرایب حقیقی، دو بدو مزدوج هستند .

۴ ــ نشان دهید که

$$\ln (1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

و ناحیه تحلیلی سری را معین کنید.

۵ ــ نشان دهید که $u + iv = (x+iy)^n$ یک جواب معادلات کوشی ــ ریمان است.

۶ ــ معادلات کوشی ــ ریمان زیر را در مختصات قطبی به‌دست آورید.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \qquad r \neq 0$$

۷ ــ فرض کنید t یک‌پارامتر حقیقی‌به قسمی باشد که $a \le t \le b$. وقتی t تغییر می‌کند تابع $z(t)$ منحنی C را در صفحه مختلط z با ابتدای $z_0 = z(a)$ و انتهای $z_1 = z(b)$ رسم می‌کند. ثابت کنید

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)] \frac{dz}{dt}\, dt$$

۸ ــ فرض کنید C مسیر زیر باشد،

$$z(t) = e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

و $f(z)=1/z$ با استفاده از مسأله ۷ نشان دهید که

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i$$

۹ ــ فرض کنید C دایره‌ای به‌مرکز 0 درصفحه z و $f(z)$ تابعی‌تحلیلی برنیمدایرهٔ فوقانی باشد که بر هر قسمت از محور xها داخل این دایره حقیقی است.
نشان دهید که

$$f(z^*) = f^*(z)$$

پارامتر حقیقی t را در فاصله $a \le t \le b$ درنظر بگیرید.

۱۰ ــ وقتی t تغییر می‌کند $z(t)$ منحنی C را در صفحه مختلط z رسم می‌کند که ابتدای آن $z_0 = z(a)$ و انتهای آن $z_1 = z(b)$ است. فرض کنید C یک منحنی ساده است که کاملاً در نیم‌صفحه فوقانی $\text{Im}(z)>0$ قرار دارد. قرنیهٔ C را نسبت به محور حقیقی، C^* می‌نامیم. نشان دهید که اگر $f(z)$ به قسمی باشد که

$$f(z^*) = f^*(z)$$

آن‌گاه

$$\int_{C-C^*} f(z)\, dz = 2i\, \text{Im} \int_a^b f[z(t)] \frac{dz}{dt}\, dt$$

۱۱ ــ مسیلها و مسیرهای هم‌پتانسیل تابع زیر را در صفحه مختلط z رسم کنید .

$$w = z^3$$

مرتبه نقطه زینی در $z = 0$ چیست ؟

۱۲ ــ مسیلها و منحنیهای هم‌پتانسیل توابع زیر را در صفحه مختلط z رسم کنید .

$$w = \log z \quad \text{و} \quad w = \frac{A}{z}$$

۱۳ ــ نشان دهید اگر

$$u + iv = f(x + iy)$$

یک تابع تحلیلی باشد آن‌گاه

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{و} \quad \nabla^2 v = 0$$

۱۴ ــ توابع زیر را در $z = 0$ به سری تیلر بسط دهید .

(a) e^z
(b) $\sinh z$
(c) $\cosh z$
(d) $\sin z$
(e) $\cos z$
(f) $\log (1 + z)$
(g) $1/(1 - z^2)$

و شعاع تقارب هریک را به‌دست آورید .

۱۵ ــ توابع زیر را در $z = 0$ به سری لوران بسط دهید .

(a) e^z/z^2
(b) $e^{1/z}$
(c) $(1 - \sin z)/z^2$
(d) $1/\sin z$

و دامنهٔ تقارب هریک را به‌دست آورید .

۱۶ ــ تابع

$$f(z) = \frac{z}{(2 - z)(4 - z)}$$

را در نقاط زیر به سری لوران بسط دهید .

(a) $z = 2$
(b) $z = 4$

و دامنهٔ تقارب هریک را به‌دست آورید :

۱۷ ــ نقاط ویژه توابع زیر را معین کنید

$$w = \sqrt{(z - 1)(z + 1)}$$

و

$$w = \sqrt{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

همچنین نوع و مرتبه آنها را مشخص نمایید.

رویه‌های ریمان این توابع را بسازید. نقاط انشعاب، برشهای انشعاب، و محل اتصال برگها را مشخص کنید.

۱۸ ــ انتگرالهای زیر را به کمک مانده‌ها محاسبه کنید.

$$(a)\quad \oint_{|z|=5} \frac{ze^z}{1-z^2}\,dz$$

$$(b)\quad \oint_{|z|=4} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^2}$$

$$(c)\quad \oint_{|z|=1} \frac{(z+2)}{z(4-z)}\,dz$$

$$(d)\quad \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\,dz$$

$$(e)\quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz$$

۱۹ ــ انتگرالهای حقیقی زیر را با جایگذاریهای

$$z = e^{i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

و با استفاده از روش مانده‌ها محاسبه کنید.

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

$$(b)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$$

۲۰ ــ ثابت کنید اگر $R(\sin\theta$ و $\cos\theta)$ نسبت به دو مؤلفه‌اش تابعی حقیقی باشد، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}$$

۲۱ ــ به کمک مانده‌ها انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$(b)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}\,dx$$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + z^2}\, dx$

(d) $\int_0^\infty \frac{\cos kx}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$

۲۲ ــ فرض کنید $f(z)$ داخل دایره C تحلیلی باشد . مگر در نقاط منفرد $z = z_k$، که در آنها $f(z)$ دارای یک قطب مرتبه k ام است اگر C دارای شعاع $|z_k| < r$ باشد . نشان دهید که

$$I(t) = \oint_{|z|=r} f(z) e^{-izt}\, dz = 2\pi \exp\left[\frac{i(3k - 2)\pi}{2}\right] \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-iz_k t}$$

$$f(z) = 1\ (z - z_k)^k \qquad k \geq 1$$

توجه کنید که مرتبه قطب توان t و موقعیت آن نوع تابع توانی را مشخص می‌کند . پس ، چون

$$|e^{-iz_k t}| = e^{y_k t}$$

جدول زیر را می‌توانیم تنظیم کنیم .

طبیعت $I(t)$	مرتبه قطب	محل قطب
ثابت	$k = 1$	مبدأ : $z_k = 0$
t^{k-1} (ثابت)	$k > 1$	مبدأ : $z_k = 0$
$t > 0$، مستهلک شونده نمایی ونوسانی $t < 0$، افزاینده نمایی و نوسانی	$k = 1$	نیم‌صفحه تحتانی $\text{Im}\,(z_k) = y_k < 0$
t^{k-1} (ثابت) { اگر $t > 0$ مستهلک شونده نمایی و نوسانی اگر $t < 0$ افزاینده نمایی‌ونوسانی	$k > 1$	نیم‌صفحه تحتانی $\text{Im}\,(z_k) = y_k < 0$
اگر $t > 0$، افزاینده نمایی و نوسانی اگر $t < 0$، مستهلک شونده نمایی و نوسانی	$k = 1$	نیم‌صفحه فوقانی $\text{Im}\,(z_k) = y_k > 0$
t^{k-1} (ثابت) { اگر $t > 0$، افزاینده نمایی و نوسانی اگر $t < 0$، مستهلک شونده نمایی و نوسانی .	$k > 1$	نیم‌صفحه فوقانی $\text{Im}\,(z_k) = y_k > 0$

تبدیلات انتگرالی

۵ ــ ۱ . مقدمه

مسأله ارائه تابع اختیاری $A(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه نامتناهی از توابع مانند $\{e_1(x), e_2(x), \ . \ . \ . \ , e_n(x), \ . \ . \ .\}$ تا حد زیادی شباهت به مسأله بیان یک بردار در فضای n بعدی به صورت یک ترکیب خطی از n بردار مستقل خطی است.

پس درحالتی که $\mathbf{A}$ یک بردار است، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{e}_k \qquad (۱ - ۵)$$

و اگر A یک تابع اسکالر از x باشد، نمایش مطلوب عبارت است از،

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) \qquad (۲ - ۵)$$

در هر حالت مسأله موردتوجه محاسبه ضرایب a_k می‌باشد. در حالت‌برداری (۵ ــ ۱) دیده‌ایم که وقتی $\{\mathbf{e}_k\}$ یک مبنای متعامد است می‌توانیم‌حل کنیم، به این صورت‌که حاصلضرب اسکالر $\mathbf{A}$ را با هریک از $\mathbf{e}_k$ ها به ترتیب محاسبه می‌کردیم. نتایج حاصل درمعادلات (۱ ــ۴۲) و (۱ ــ ۴۳) خلاصه شده‌اند.

وقتی $A(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر باشد، یک جواب حالت (۵ ــ ۲) با انتخاب

$$e_k(x) = x^{k-1} \qquad (۳ - ۵)$$

به‌دست می‌آید، به این ترتیب داریم

$$\{e_1(x), e_2(x), \ . \ . \ . \ , e_n(x), \ . \ . \ .\} = \{1, x, x^2, \ . \ . \ . \ , x^n, \ . \ . \ .\} \qquad (۴ - ۵)$$

سپس

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (۵ - ۵)$$

که تابع $A(x)$ را به صورت یک سری توان از x نشان می‌دهد. ضرایب a_k از فرمول آشنای تیلر به‌دست می‌آید،

$$a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}A(x)\Big|_{x=0} \qquad (۶-۵)$$

مع ذالک، باید ثابت کنیم که سری سمت راست معادله (۵-۵) به ازای هر x در فاصله $a \le x \le b$ به تابع سمت چپ همگراست.

اغلب بسط به سری توان امکان‌پذیر نیست زیرا $A(x)$ یا بعضی از مشتقات آن در تعداد متناهی از نقاط فاصله $a\le x\le b$ دارای انفصالهای متناهی هستند. در این حالت بیشتر امکان‌پذیر است که فاصله $a \le x \le b$ را به چند زیرفاصله به قسمی تقسیم کنیم که در هریک از آنها $A(x)$ متصل باشد. این قبیل توابع را قسمت به قسمت متصل گویند و اگر علاوه بر این مشتق اول آن نیز قسمت به قسمت متصل باشد، آن‌گاه $A(x)$ را قسمت به قسمت هموار نامند. برای یک تابع قسمت به قسمت متصل می‌توانیم نمایشی به صورت (۵-۲) با استفاده از خواص یک مجموعهٔ توابع متعامد به‌دست آوریم.

۵-۲. توابع متعامد

فرض کنید $A(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ یک تابع قسمت به قسمت متصل باشد. بسط این تابع را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) \qquad (۷-۵)$$

که در آن هر $e_k(x)$ یک تابع مختلط از متغیر حقیقی x است. حال اگر هردوطرف معادله (۵-۷) را در $e_j^*(x)$ ضرب کرده و نسبت به x انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\int_a^b e_j^*(x)A(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b e_j^*(x)e_k(x)\,dx \qquad (۸-۵)$$

که در آن $e_j^*(x)$ مزدوج مختلط $e_j(x)$ است. درحال حاضربررسی امکان تعویض ترتیب انتگرال وحاصلجمع رابرای رسیدن به (۵-۸) از معادله (۵-۷) به تعویق می‌اندازیم، معادله (۵-۸) را می‌توانیم نسبت به a_j حل کنیم. اگر

$$\int_a^b e_j^*(x)e_k(x)\,dx = \lambda_k \delta_{jk} \qquad (۹-۵)$$

آن‌گاه،

$$\int_a^b e_j^*(x)A(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\lambda_k\delta_{jk} = a_j\lambda_j \qquad (۵-۱۰)$$

که در آن

$$a_j = \frac{1}{\lambda_j}\int_a^b e_j^*(x)A(x)\,dx \qquad (۵-۱۱)$$

معمولا" تعاریف و نمادگذاری را وقتی بحث مربوط به تبدیلات انتگرالی است کمی تغییر می‌دهیم . در این صورت می‌نویسیم

$$\mathbf{A}(j) = \int_a^b e_j^*(x)A(x)\,dx \qquad (۵-۱۲)$$

وآن راتبدیل انتگرالی متناهی $A(x)$ می‌گویند . بسط پیشنهادشده (۵ ـ ۷) درارتباط باتبدیل انتگرالی متناهی "قضیه وارون" نامیده می‌شود . چون

$$a_j = \frac{\mathbf{A}(j)}{\lambda_j} \qquad (۵-۱۳)$$

قضیه وارون برای معادله (۵ ـ ۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}(k)}{\lambda_k}\, e_k(x) \qquad (۵-۱۴)$$

دو تابع مختلط مانند $e_j(x)$ و $e_k(x)$ را در فاصله $a \le x \le b$ متعامدگوییم، اگر روابط زیر

$$\int_a^b e_j^*(x)e_k(x)\,dx = \int_a^b e_j(x)e_k^*(x)\,dx = 0 \qquad (۵-۱۵)$$

به ازای $j \neq k$ برقرار باشد . بنابراین ، معادله (۵ ـ ۹) نشان می‌دهدکه $e_j(x)$ به ازای $j \neq k$ بر $e_k(x)$ عموداست. چون j و k اندیسهای اختیاری‌هستند، نتیجه‌می‌شودکه $\{e_k(x); k = 1,2, \ldots\}$ مجموعه متعامدی از توابع است . همچنین اگر این حقیقت وجود داشته باشد که $\lambda_j = 1$ برای $j = 1,2, \ldots$ در آن صورت $\{e_k(x); k = 1,2, \ldots\}$ مجموعه‌ای متعامد از توابع است .

مثال ۵ ـ ۱: فاصله $[-a,a]$:

$$\int_{-a}^{+a} \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = a\delta_{nm} \qquad (۵-۱۶)$$

$$\int_{-a}^{+a} \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = a\delta_{nm} \qquad (۵-۱۷)$$

$$\int_{-a}^{+a} \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = 0 \qquad (۵-۱۸)$$

$$\int_{-a}^{+a} e^{i(n-m)\pi x/a}\, dx = 2a\delta_{nm} \tag{۱۹ − ۵}$$

فاصله

$$\int_{0}^{+a} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}\,\delta_{nm} \tag{۲۰ − ۵}$$

$$\int_{0}^{a} \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}\,\delta_{nm} \tag{۲۱ − ۵}$$

$$\int_{0}^{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{an}{\pi(n^2 - m^2)}\,[1 - (-1)^{n-m}] \tag{۲۲ − ۵}$$

۵ ــ ۳. نماد دیراک

نماد زیر توسط دیراک پیشنهاد شد و بزودی فیزیکدانها آن را تعمیم دادند. این نماد تشابه بین بسط یک تابع برحسب مجموعه‌ای ازتوابع متعامد و بسط یک بردار برحسب مجموعه‌ای از بردارهای متعامد را نشان می‌دهد. می‌نویسیم:

$$e_k(x) \equiv e_k(x)\rangle \tag{۲۳ − ۵}$$

نماد $e_k(x)\rangle$ را "بردارتز" می‌نامیم. به این‌ترتیب مزدوج مختلط $e_k^*(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$e_k^*(x) \equiv \langle e_k(x) \tag{۲۴ − ۵}$$

همچنین علامت $\langle e_k(x)$ را "بردارپران" می‌نامیم. عبارت

$$\int_a^b e_j^*(x) e_k(x)\, dx \tag{۲۵ − ۵}$$

"حاصلضرب داخلی" بردارپران $\langle e_j(x)$ با بردارتز $e_k(x)\rangle$ است، یا بطوراختصار "پران‌تز" نامیده می‌شود. باتوجه به نماد دیراک عبارت (۵ ــ ۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\langle e_j(x)|e_k(x)\rangle \equiv \int_a^b e_j^*(x) e_k(x)\, dx \tag{۲۶ − ۵}$$

خط قائم سمت چپ عبارت (۵ ــ ۲۶) عملگر یک حاصلضرب داخلی را نشان می‌دهد. اغلب متغیر ظاهری انتگرال‌گیری حذف می‌شود، زیرا پس از انتگرال‌گیری خود به خود حذف خواهد شد. در این شرایط عبارت (۵ ــ ۲۶) به صورت ساده زیر درمی‌آید

$$\langle e_j|e_k\rangle \equiv \int_a^b e_j^*(x) e_k(x)\, dx \tag{۲۷ − ۵}$$

با استفاده از نماد دیراک، معادله (۵ ــ ۷) به صورت

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵-۲۸)$$

و معادله (۵ ــ ۸) به صورت

$$\langle e_j|A\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle e_j|e_k\rangle \qquad (۵-۲۹)$$

نوشته می‌شود. ویژگی متعامد (۵ ــ ۹) به شکل زیر درمی‌آید،

$$\langle e_j|e_k\rangle = \lambda_k \delta_{jk} \qquad (۵-۳۰)$$

و از تعریف تعامد (۵ ــ ۱۵) نتیجه می‌شود

$$\langle e_j|e_k\rangle = \langle e_k|e_j\rangle = 0 \qquad j \neq k \text{ و} \qquad (۵-۳۱)$$

پس

$$\langle e_j|A\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \delta_{jk} = a_j \lambda_j \qquad (۵-۳۲)$$

نتیجه می‌دهد

$$a_j = \frac{1}{\lambda_j}\langle e_j|A\rangle \qquad (۵-۳۳)$$

که ضریب بسط را نشان می‌دهد. تبدیل انتگرال معین (۵ ــ ۱۲) به صورت

$$\mathbf{A}(j) = \langle e_j|A\rangle \qquad (۵-۳۴)$$

و قضیه وارون (۵ ــ ۱۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle e_k|A\rangle}{\lambda_k} e_k(x)\rangle \qquad (۵-۳۵)$$

توجه کنید که

$$\frac{\langle e_k|A\rangle}{\lambda_k} e_k(x)\rangle = e_k(x)\rangle \frac{\langle e_k|A\rangle}{\lambda_k} \qquad (۵-۳۶)$$

از این رو، معادله (۵ ــ ۳۵) را می‌توان چنین نوشت

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e_k(x)\rangle\langle e_k|A\rangle \qquad (۵-۳۷)$$

مشاهده کنید که عبارت جبری اصلی

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} e_k(x)\rangle\langle e_k(x) \qquad (۵-۳۸)$$

دارای این خاصیت است که اگر آن را از راست در $\langle A$ ضرب کنیم ، معادله (۵ ـ ۳۸) به‌دست می‌آید . در این جا یک ضرب داخلی منظور است و از تعریف زیر استفاده می‌شود :

$$1A\rangle = A\rangle \tag{۵ ـ ۳۹}$$

ضمناً" از معادله (۵ ـ ۳۹) نتیجه زیر نیز به‌دست می‌آید

$$\langle A1 = \langle A \tag{۵ ـ ۴۰}$$

مثال ۵ ـ ۲:

$$A(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{۵ ـ ۴۱}$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} A(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ ـ ۴۲}$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} A(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ ـ ۴۳}$$

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\pi x/a} \tag{۵ ـ ۴۴}$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} A(x)e^{-in\pi x/a}\,dx \tag{۵ ـ ۴۵}$$

$$A(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} \tag{۵ ـ ۴۶}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a A(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ ـ ۴۷}$$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{۵ ـ ۴۸}$$

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a A(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ ـ ۴۹}$$

۵ ـ ۴. تشابه بین بسط توابع به صورت توابع متعامد و بردارهای متعامد

فرض کنید $\{e_k(x):\ k=1,2,\ldots,\infty\}$ مجموعه‌ای نامتناهی وشمارا ازتوابع متعامد یکه در فاصله $a \leq x \leq b$ باشد . بنابراین ،

$$\langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk} \tag{۵ ـ ۵۰}$$

همین‌طور ، فرض کنید $\{\mathbf{e}_k;\ k = 1,2,\ldots,n\}$ مجموعه‌ای از n برداروا‌حد متعامد در یک فضای

با بعد متناهی باشد . سپس ،

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \qquad (۵۱-۵)$$

وهربردار n بعدی دلخواه $\mathbf{A}$ رامی‌توان برحسب بردارهای $\{\mathbf{e}_k; k=1,2, \ldots, n\}$ به شکل زیرنوشت

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{e}_k \qquad (۵۲-۵)$$

و ضرایب بسط a_k ها را می‌توان از *حاصلضرب داخلی* $\mathbf{A}$ در هریک از $\mathbf{e}_k$ ها به ترتیب به‌دست آورد ،

$$a_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A} \qquad (۵۳-۵)$$

هر تابع $A(x)$ که بطور قسمت به قسمت درفاصله $a \leq x \leq b$ متصل است را می‌توان برحسب مجموعه‌ای نامتناهی از توابع $\{e_k(x); k = 1,2, \ldots, \infty\}$ به‌صورت زیر نوشت :

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵۴-۵)$$

وضرایب بسط a_k رامی‌توان توسط *حاصلضرب داخلی* $A(x)\rangle$ درهر $\langle e_k$ به ترتیب به‌دست‌آورد ،

$$a_k = \langle e_k | A\rangle \qquad (۵۵-۵)$$

ضرایب a_k در معادله (۵ ـ ۵۴) را می‌توان به‌عنوان مؤلفه‌های یک بردار درنظرگرفت . چون توابع $e_k(x)\rangle$ یک مجموعه نامتناهی شمارا از توابع متعامدیکه در فاصله $a \leq x \leq b$ تشکیل می‌دهند مؤلفه‌های a_k رامی‌توان مانندیک‌برداری سطری $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ با بعدنامتناهی درنظرگرفت که $A(x)$ رامشخص می‌کنند . این نمایش مشابه نمایش یک بردار n بعدی دلخواه $\mathbf{A}$ برحسب مؤلفه‌هایش می‌باشد .

حال با فرض

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵۶-۵)$$

و

$$B(x)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n(x)\rangle \qquad (۵۷-۵)$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \langle A|B\rangle &= \int_a^b A^*(x) B(x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_k^* b_n e_k^*(x) e_n(x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k^* b_n \delta_{kn} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k \end{aligned} \qquad (۵۸-۵)$$

اکنون مسأله تعویض ترتیب مجموع وانتگرال رابه تعویق می‌اندازیم . پس عبارت $\langle A|B\rangle$ یک تعمیم طبیعی حاصلضرب اسکالر در فضای n بعدی است ،

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad (۵-۵۹)$$

صورت

$$\langle A|B\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k \qquad (۵-۶۰)$$

تعمیمی است که بحث درباره توابع مختلط را مانند حالت توابع حقیقی ممکن می‌سازد به‌قسمی‌که

$$\langle A|A\rangle \geq 0 \qquad (۵-۶۱)$$

۵ ــ ۵ . توابع مستقل خطی

تعداد r تابع $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، . . . ، $f_r(x)$ را مستقل خطی گوییم اگر و فقط اگر معادله

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_rf_r = 0 \qquad (۵-۶۲)$$

به ازای جمیع مقادیر x جوابی غیر از

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_r = 0 \qquad (۵-۶۳)$$

نداشته باشد .

دستگاه متعامد $\{e_k(x);\ k = 1,2,\ \ldots,\ \infty\}$ را درنظر می‌گیریم .به‌آسانی دیده‌می‌شود که هرتعدادمتناهی از $e_k(x)$ های‌متمایز همیشه‌مجموعه‌ای از توابع مستقل تشکیل می‌دهند . زیرا اگر اتحاد

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e_k(x)\rangle = 0 \qquad (۵-۶۴)$$

برقرار باشد ، آن‌گاه

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\langle e_j|e_k\rangle = 0 \qquad (۵-۶۵)$$

ولی

$$\langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk} \qquad (۵-۶۶)$$

لذا

$$c_k = 0 \qquad (۵-۶۷)$$

برای $k=1,2,\ \ldots,n$ مطلب مهم آن است که اگریک دستگاه نامتناهی ازتوابع $i_1(x)$ ، $i_2(x)$ و . . . . . مفروض باشد و هر r تابع دلخواه ازآنها مستقل خطی باشند ، یک دستگاه متعامد مانند

. . . ,$e_1(x), e_2(x)$ به کمک متعامدسازی اشمیت که برای بردارها در بخش ۱ موردبحث قرار گرفت ، می‌توان ساخت .

مثلا" ، با انتخاب

$$e_1(x)\rangle = \frac{i_1(x)\rangle}{|\langle i_1|i_1\rangle|^{1/2}} \qquad (۵-۶۸)$$

و

$$e_2'(x)\rangle = i_2(x)\rangle - e_1(x)\rangle\langle e_1|i_2\rangle \qquad (۵-۶۹)$$

می‌توان نوشت

$$\langle e_1|e_2'\rangle = \langle e_1|i_2\rangle - \langle e_1|e_1\rangle\langle e_1|i_2\rangle \qquad (۵-۷۰)$$

ولی

$$\langle e_1|e_1\rangle = 1 \qquad (۵-۷۱)$$

بنابراین ،

$$\langle e_1|e_2'\rangle = 0 \qquad (۵-۷۲)$$

برای تبدیل $\langle e_2(x)$ به یک بردار واحد ، فرض می‌کنیم

$$e_2(x)\rangle = \frac{e_2'(x)\rangle}{|\langle e_2'|e_2'\rangle|^{1/2}} \qquad (۵-۷۳)$$

با ادامه این روش، مشابه معادله (۱ ــ ۴۹) به‌دست می‌آید ،

$$e_m'(x)\rangle = i_m(x)\rangle - \sum_{k=1}^{m-1} e_k(x)\rangle\langle e_k|i_m\rangle \qquad (۵-۷۴)$$

که در آن

$$e_m(x)\rangle = \frac{e_m'(x)\rangle}{|\langle e_m'(x)|e_m'(x)\rangle|^{1/2}} \qquad (۵-۷۵)$$

درنتیجه فرمولهای (۵ ــ ۷۴) و (۵ ــ ۷۵) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان از یک مجموعه مفروض شامل r تابع مستقل خطی $\{e_k(x); k = 1,2, . . . ,r\}$ مجموعه‌ای از توابع متعامد مانند $\{i_k(x); k = 1,2, . . . ,r\}$ ساخت .

تبصره: توجه کنید که از (۵ ــ ۲۳) و (۵ ــ ۲۴) نتیجه می‌شود که

$$(e_k(x)\rangle)^* = \langle e_k(x) \qquad (۵-۷۶)$$

و

$$(\langle e_k(x))^* = e_k(x)\rangle \qquad (۵-۷۷)$$

همین‌طور عبارت (۵ — ۲۶) نشان می‌دهد که

$$(\langle e_j|e_k\rangle)^* = \langle e_k|e_j\rangle \qquad (۵-۷۸)$$

۵ ــ ۶. همگرایی در میانگین مربع عبارتی از توابع متعامد

حال با دقت بیشتری به علامت تساوی عبارت زیر توجه می‌کنیم

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵-۷۹)$$

این معادله در بخش (۵ — ۲) معرفی شد. باتوجه به تعریف

$$_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵-۸۰)$$

معادله (۵ — ۷۹) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$A(x)\rangle = \lim_{n\to\infty} S_n(x)\rangle \qquad (۵-۸۱)$$

درنتیجه $S_n(x)\rangle$ را می‌توان به‌عنوان تقریبی برای $A(x)\rangle$ درنظرگرفت‌که وقتی n بی‌نهایت بزرگ می‌شود، این تقریب بهتر می‌شود. یک اندازه مفید برای انحراف $S_n(x)\rangle$ از $A(x)\rangle$ که در تمام فاصله $a \leq x \leq b$ بطور همزمان مفید است، با حاصلضرب داخلی زیر داده می‌شود.

$$E_n = \langle\{A(x) - S_n(x)\}|\{A(x) - S_n(x)\}\rangle \qquad (۵-۸۲)$$

توجه کنیدکه برای یک تابع اختیاری مانند $f(x)$ که بر $a \leq x \leq b$ تعریف‌شده‌است، داریم:

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b f^*f\,dx = \int_a^b |f|^2\,dx \qquad (۵-۸۳)$$

و

$$\mathrm{Av}(\langle f|f\rangle) = \frac{1}{b-a}\langle f|f\rangle = \mathrm{Av}(|f|^2) \qquad (۵-۸۴)$$

پس مشاهده می‌کنیم که $E_n/(b-a)$ میانگین‌مربع خطای $\{A(x) - S_n(x)\}$ را که در فاصله $[a,b]$ انتگرال گرفته شده، نشان می‌دهد. معمولاً E_n را باختصار " میانگین مربع خطا "ی تقریب $A(x)\rangle$ با $S_n(x)\rangle$ گویند.

اگر

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0 \qquad (۵-۸۵)$$

می‌گوییم $S_n(x)\rangle$ در **میانگین** به سمت $A(x)\rangle$ **همگراست**. این نوع همگرایی‌را "همگرا درمیانگین مربع" گویند و چنین می‌نویسند،

$$A(x)\rangle = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, S_n(x)\rangle \qquad (۵-۸۶)$$

که خوانده می‌شود "$A(x)\rangle$ **برابر حد** $S_n(x)\rangle$ **در میانگین مربع است** وقتی n بی‌نهایت می‌شود.

فرض کنید n تابع $e_1(x)\rangle, e_2(x)\rangle, \ . \ . \ . \ , e_n(x)\rangle$ مجموعه‌ای متعامد باشد، می‌خواهیم معادله (۵ – ۸۲) را بررسی کنیم . این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E_n = \left\langle \left\{ A(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x) \right\} \middle| \left\{ A(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x) \right\} \right\rangle \qquad (۵-۸۷)$$

که پس از بسط نتیجه می‌شود ،

$$\begin{aligned} E_n = \langle A|A\rangle - \Big\{ \Big\langle \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big| A \Big\rangle + \Big\langle A \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\rangle \Big\} \\ + \Big\langle \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\rangle \end{aligned} \qquad (۵-۸۸)$$

فرض کنید

$$c_k = \langle e_k|A\rangle \qquad (۵-۸۹)$$

و

$$c_k^* = \langle A|e_k\rangle \qquad (۵-۹۰)$$

در این صورت معادله (۵ – ۸۸) را می‌توان چنین نوشت :

$$E_n = \langle A|A\rangle - \sum_{k=1}^{n} (a_k^* c_k + a_k c_k^*) + \sum_{k=1}^{n} a_k^* a_k \qquad (۵-۹۱)$$

که در آن از واقعیت زیر استفاده شده است

$$\langle e_j|e_k\rangle = \langle e_k|e_j\rangle = \delta_{jk} \qquad (۵-۹۲)$$

توجه کنید که

$$(a_k - c_k)^*(a_k - c_k) = a_k^* a_k - (a_k^* c_k + a_k c_k^*) + c_k^* c_k \qquad (۵-۹۳)$$

بنابراین

$$E_n = \langle A|A\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k^* c_k + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^*(a_k - c_k) \qquad (۵-۹۴)$$

معلوم می‌شود که

$$(a_k - c_k)^*(a_k - c_k) \geq 0 \qquad (۵-۹۵)$$

پس میانگین مربع خطا در تقریب $A(x)\rangle$ با $S_n(x)\rangle$ آن‌طور که در معادله (۵ – ۸۰) داده شده با انتخاب زیر می‌نیمم می‌شود

$$a_k = c_k \qquad (۵-۹۶)$$

یا

$$a_k = \langle e_k|A\rangle \qquad (۹۷-۵)$$

درنتیجه با انتخاب a_k به‌عنوان ضریب بسط معادله (۵ـ ۸۰) که یک تبدیل انتگرالی‌متناهی $A(x)$ است دقیقا" میانگین مربع خطا را در تقریب $A(x)$ با $S_n(x)$ می‌نیمم می‌سازد.

داریم

$$\min\,(E_n) = \langle A|A\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k^* c_k \qquad (۹۸-۵)$$

با مراجعه به معادله (۵ـ ۸۲)، می‌توان نوشت:

$$E_n = \int_a^b |\{A(x) - S_n(x)\}|^2\, dx \qquad (۹۹-۵)$$

به این ترتیب به ازای $b \geq a$، $E_n \geq 0$ و درنتیجه

$$\min\,(E_n) \geq 0 \qquad b \geq a \qquad (۱۰۰-۵)$$

پس می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^* c_k \leq \langle A|A\rangle \qquad (۱۰۱-۵)$$

یا

$$\sum_{k=1}^{n} \langle A|e_k\rangle\langle e_k|A\rangle \leq \langle A|A\rangle \qquad (۱۰۲-۵)$$

چون $c_k^* c_k \geq 0$، دنباله

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^* c_k \qquad (۱۰۳-۵)$$

غیرنزولی است. پس به شرط‌آن که عدد ثابتی مثل $M < \infty$ وجود داشته باشد که

$$0 < \langle A|A\rangle = \int_a^b |A(x)|^2\, dx < M \qquad (۱۰۴-۵)$$

از عبارت (۵ـ ۱۰۱) نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 < M \qquad (۱۰۵-۵)$$

که مستقل از n است. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \qquad (۱۰۶-۵)$$

باید وجود داشته باشد، و داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_a^b |A(x)|^2\, dx \tag{۱۰۷-۵}$$

که در آن

$$c_k = \int_a^b e_k^*(x) A(x)\, dx \tag{۱۰۸-۵}$$

عبارت (۵-۱۰۷) را "نامساوی بسل" نامند. چون سری $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ همگراست، نتیجه می‌شود

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \langle e_k|A\rangle = 0 \tag{۱۰۹-۵}$$

حال یک شرط لازم وکافی برای همگرایی میانگین مربع خطا (۵-۸۲) به سمت صفر وقتی $n\to\infty$ به‌دست‌خواهیم آورد. چون هر دو خطای E_n و می‌نیمم خطا $\min\,(E_n)$ نامنفی هستند، داریم

$$0 \leq \min\,(E_n) \leq E_n \tag{۱۱۰-۵}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0 \tag{۱۱۱-۵}$$

فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} \min\,(E_n) = 0 \tag{۱۱۲-۵}$$

و باتوجه به معادله (۵-۱۱۲) و استفاده از معادله (۵-۹۸) داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \int_a^b |A(x)|^2\, dx \tag{۱۱۳-۵}$$

که آن را "تساوی پارسوال" گویند. با نماد دیراک تساوی پارسوال به صورت زیرنوشته می‌شود

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle A|e_k\rangle\langle e_k|A\rangle = \langle A|A\rangle \tag{۱۱۴-۵}$$

یا

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k|A\rangle|^2 = \langle A|A\rangle \tag{۱۱۵-۵}$$

تساوی پارسوال یک شرط لازم و کافی برای همگرایی سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k(x)\rangle\langle e_k|A\rangle \tag{۱۱۶-۵}$$

به سمت $\langle A(x)$ درحالت میانگین مربع می‌دهد . توجه به این ایده است که معنی تساوی را در معادله زیر دقیق می‌سازد

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x)\rangle\langle e_k|A\rangle \qquad (۵-۱۱۷)$$

اگر هر تابع قسمت به قسمت متصل $A(x)$ رابتوان به معنی‌میانگین مربع به یک سری مانند (۵ــ ۱۱۷)بسط داد،درآن صورت مجموعه توابع متعامد $\{e_k(x); k=1,2, \ldots, \infty\}$ رابسته‌گوییم . این مجموعه را کامل گوییم اگر تابع غیربدیهی $B(x)$ وجود نداشته باشد که برهر $e_k(x)$ عمود باشد . به‌عبارت دیگر$\{e_k(x)\,;\, k = 1,2, \ldots, \infty\}$مجموعه‌ای کامل از توابع است اگر از

$$\langle e_k|B\rangle = 0 \qquad k = 1,2, \ldots, \infty \qquad (۵-۱۱۸)$$

نتیجه شود

$$\langle B|B\rangle = 0 \qquad (۵-۱۱۹)$$

که درآن معادله (۵ــ ۱۱۹) منظور ما راازتابع بدیهی $B(x)$ معین می‌کند . از تساوی پارسوال (۵ــ ۱۱۵) نتیجه می‌شود که یک مجموعهٔ بسته متعامد کامل نیز هست . عکس این مطلب نیز صحیح است . هر مجموعه کامل بسته است . مع‌ذالک ، ما این حکم رادراین جا اثبات نخواهیم کرد . بسادگی دیده شده است که مفهوم بسته بودن وکامل بودن درمجموعه بردارهامعادلند . پس مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ درصورتی بسته است‌که هر بردار $\mathbf{A}$ را به ازای مجموعه‌ای از اعداد a_1 ، a_2 و a_3 بتوان به صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \qquad (۵-۱۲۰)$$

مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ را " کامل " گوییم اگر هیچ برداری وجود نداشته باشدکه بر همه آنها عمود باشد . به‌عبارت دیگر $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ کامل است اگر

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad k = 1,2,3 \qquad (۵-۱۲۱)$$

نتیجه دهد ،

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad (۵-۱۲۲)$$

پس درمورد فضای برداری با بعد متناهی ، بسته بودن و کامل بودن بیان می‌کنندکه بردارهای $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ در یک صفحه واقع نیستند و درنتیجه مستقل خطی خواهند بود .

تبصره: توجه کنید که نکته اصلی در تمام بحث فوق عبارت است از:

$$0 < \int_a^b |A(x)|^2\, dx < M \qquad (۵-۱۲۳)$$

توابع $A(x)$ که درنامساوی (۵ــ ۱۲۳) صدق می‌کنند " انتگرال‌پذیر مربع یا انتگرال‌پذیر درجه دوم " نامیده می‌شوند . این توابع نقش عمده‌ای در مسایل فیزیکی دارند . دلیلش این

است که در بسیاری از دستگاهها مربع یک تابع می‌تواند با انرژی دستگاه برابر باشد . در این قبیل موارد انتگرال‌پذیر درجه دوم یعنی کل انرژی دستگاه باید متناهی باشد .

۵ ـ ۷ . انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از بسطهای متعامد

اکنون ما قادر هستیم که جمع و انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۵ ـ ۸) را با استفاده از تساوی پارسوال (۵ ـ ۱۱۵) تغییر دهیم . بسط عمودی $A(x)\rangle$ را در مجموعهٔ کامل توابع $\{e_k(x); k = 1,2, \ldots, \infty\}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و

$$A(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle \tag{۱۲۴ ـ ۵}$$

عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned}\langle A \mid \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\langle A|e_k\rangle &= \langle A|A\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\langle A|e_k\rangle \\ &= \langle A|A\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_k^* = 0\end{aligned} \tag{۱۲۵ ـ ۵}$$

معادله فوق تساوی پارسوال است که درآن مجموعه کامل توابع $\{e_k(x); k=1,2, \ldots, \infty\}$ به‌کارمی‌رود .

بطورکلی ، بسط متعامد یک تابع قسمت به قسمت متصل $A(x)$ دریک مجموعه کاملی ازتوابع $\{e_k(x)\}$ می‌تواند همیشه به‌صورت جمله به‌جمله انتگرال‌گیری شود . سریهای انتگرال‌گیری شده به حالت میانگین مربع به انتگرال $A(x)$ همگرا می‌شوند .

مع ذالک ، دیفرانسیل‌گیری جمله به جمله مطلب دقیقی است که بایدبا احتیاط عمل شود : بطورکلی دیفرانسیل‌گیری جمله به جمله یک بسط متعامد همگرا مجاز است اگر بتوان نشان داد که بسط دیفرانسیل‌گیری شده بطور یکنواخت در فاصله معینی همگرا ست .

۵ ـ ۸ . همگرایی نقطه‌ای یک بسط متعامد

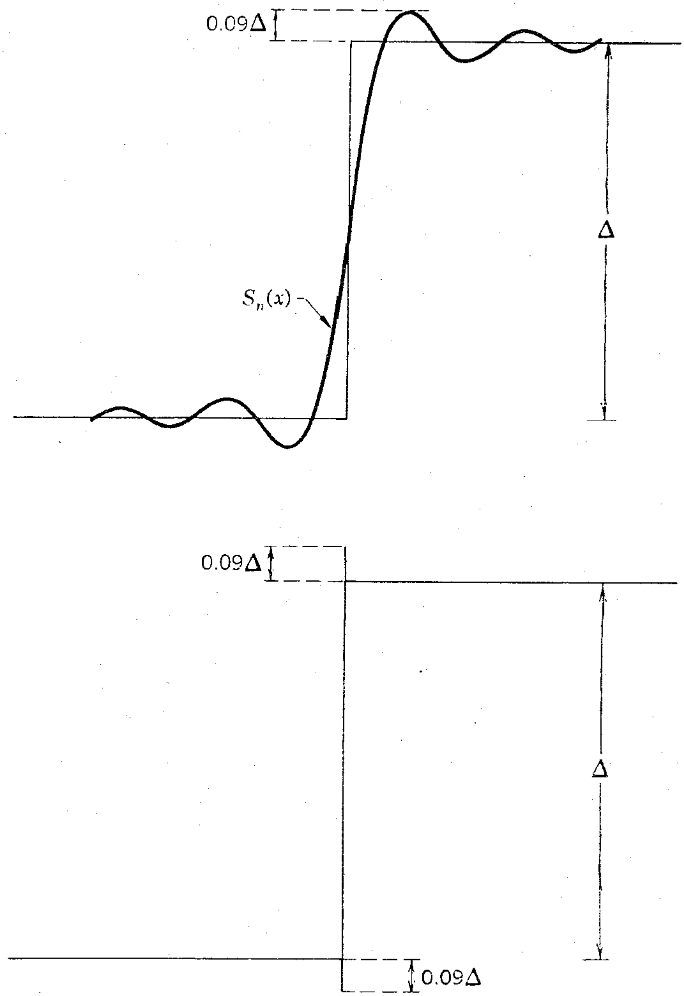
بجای درنظر گرفتن میانگین مربع خطا مانند معادله (۵ ـ ۸۲) می‌توانیم خطای واقعی را بررسی کنیم

$$E_n(x)\rangle = \{A(x) - S_n(x)\}\rangle \tag{۱۲۶ ـ ۵}$$

یعنی خطای حاصل از تقریب $A(x)\rangle$ توسط معادله (۵ ـ ۸۰) . توجه کنید که $E_n(x)$ تابعی از مقدار خاص x در فاصله $a \leq x \leq b$ است . اگر بتوان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0 \tag{۱۲۷ ـ ۵}$$

آن‌گاه می‌گوییم $S_n(x)\rangle$ در فاصله $[a,b]$ به سمت $A(x)\rangle$ بطور نقطه‌ای همگراست . شرایط دقیق



شکل ۵ ــ ۱ . پدیده گیبس.

ریاضی که تحت آنها یک بسط در مجموعهٔ کاملی از توابع متعامد بطور نقطه‌ای همگراست خارج از حوزه بحث ما می‌باشد . ما فقط چند تبصرهٔ کلی را درنظر می‌گیریم و توضیحات بیشتر رابه چند مثال خاص که بعداً" بررسی می‌شوند ، موکول می‌کنیم .

۵ ــ ۹ . پدیده گیبس

ثابت کردیم که بسط متعامد یک تابع قسمت به قسمت متصل انتگرال‌پذیر درجه دوم در

میانگین مربع همگراست . مع هذا ، تابع قسمت به قسمت متصل $A(x)$ می‌تواند تعداد متناهی انفصال متناهی در فاصله $a \le x \le b$ داشته باشد . در مجاورت این قبیل انفصالهای متناهی تابع تقریب

$$S_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x)\rangle \qquad (۵-۱۲۸)$$

باجهش $\langle A(x)$ سازگار نیست . این موضوع درشکل (۵ — ۱) تشریح می‌شود وبنام پدیده گیبس معروف است . رفتار فوق را ازنظر کیفی می‌توان به‌صورت زیر قابل درک کرد : درنقطه x_0 که‌در آن $A(x)$ منفصل است ، شیب $A(x)$ یعنی $A'(x)$ ، بی‌نهایت می‌شود ، ولی $S_n(x)$ که مجموع تعداد متناهی از *توابع با تغییرات ملایم* است ، n جمله اول یک سری همگرا راتشکیل می‌دهد . بنابراین ، $S'_n(x)$ نیزبایددرفاصله $a \le x \le b$ تابعی کراندار و باتغییرات ملایم‌باشد . پس S'_n نمی‌تواند با شیب بی‌نهایت تابع $A(x)$ در نقطهٔ انفصال $x = x_0$ متعلق به $[a,b]$ سازگار باشد . سری‌متناهی $S_n(x)$ رفته رفته به شیب‌نامتناهی $A(x)$ در $x = x_0$ میل می‌کند ، لذافقط به اندازهٔ معینی در نقطهٔ انفصال از حد خارج می‌شود . این خطا حتی در حد $n \to \infty$ نیز وجود خواهد داشت ، و سری نامتناهی کامل برای $A(x)$ درانتهای انفصالها دارای میله‌هایی‌به ضخامت صفر است ، و این مطلب اثری در همگرایی میانگین مربع یک سری نامتناهی برای $A(x)$ ندارد ، ولی محدودیتهای فرآیند نمایش $A(x)$ را به وسیلهٔ یک بسط متعامد نشان می‌دهد . مقدار انحراف $\operatorname{Sin} S_n(x)$ از $A(x)$ درنقطهٔ انفصال $x = x_0$ به فرمهای دقیق $A(x)$ وتوابع $e_k(x)$ بستگی‌دارد . درحالت کلی جهش $A(x)$ در $x = x_0$ از مرتبهٔ ۹ درصد است .

۵ — ۱۰ . تبدیل سینوسی متناهی

حال چندمثال خاص ازبسطهای متعامد رابررسی می‌کنیم . انتگرال زیر رادرنظر بگیرید :

$$\int_0^a \sin rx \sin sx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^a [\cos (r-s)x - \cos (r+s)x] \, dx \qquad (۵-۱۲۹)$$

با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$\int_0^a \sin rx \sin sx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (r-s)a}{r-s} - \frac{\sin (r+s)a}{r+s}\right] \qquad (۵-۱۳۰)$$

سمت راست معادلهٔ (۵ — ۱۳۰) را باتوجه به اتحادهای مثلثاتی برای $\sin(r-s)a$ و $\sin(r+s)a$ ، می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_0^a \sin rx \sin sx \, dx = \frac{\sin ra \sin sa}{r^2 - s^2}(s \cot sa - r \cot ra) \qquad (۱۳۱-۵)$$

به این ترتیب توابع $\sin\ rx$ به ازای مقادیر مختلف r یک مجموعهٔ متعامد می‌سازند اگر:

الف) $r = n\pi/c$ ، که در آن n عددی صحیح است ، یا

ب) $r = p_n$ ،که در آن $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ متعالی زیرند

$$p \cot pa + h = 0 \qquad h = (\text{ثابت}) \qquad (۱۳۲-۵)$$

اعتبار معادلهٔ (۵ــ۱۳۲) را باآسانی می‌توان تحقیق کرد. مثلاً فرض کنید p_1 و p_2 دو ریشهٔ متمایز مثبت (۵ــ۱۳۲) باشند. در آن صورت

$$p_1 \cot p_1a + h = 0 \qquad (۱۳۳-۵)$$

و

$$p_2 \cot p_2a + h = 0 \qquad (۱۳۴-۵)$$

با تفریق معادلهٔ (۵ــ۱۳۳) از معادلهٔ (۵ــ۱۳۴) نتیجه می‌شود

$$p_2 \cot p_2a - p_1 \cot p_1a = 0 \qquad (۱۳۵-۵)$$

حال فرض کنید $r = p_1$ و $s = p_2$، در این صورت معادلهٔ (۵ــ۱۳۱) را می‌توان چنین نوشت،

$$\int_0^a \sin p_1x \sin p_2x \, dx = 0 \qquad (۱۳۶-۵)$$

استاندارد کردن

ثابتهای عمل استاندارد با استفاده از معادلهٔ (۵ــ۹) به صورت زیر خلاصه می‌شود،

$$\int_0^a \sin^2 rx \, dx = \lambda_r \qquad (۱۳۷-۵)$$

برای محاسبهٔ λ_r توجه کنید که

$$\sin^2 rx = \frac{1 - \cos 2rx}{2} \qquad (۱۳۸-۵)$$

بنابراین

$$\int_0^a \sin^2 rx \, dx = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\sin 2ra}{2ra}\right) \qquad (۱۳۹-۵)$$

به ازای $r = n\pi/a$، داریم

$$\lambda_n = \frac{a}{2} \qquad (۱۴۰-۵)$$

به ازای $r = p_n$،

$$\lambda_n = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\sin 2p_n a}{2p_n a}\right) \qquad (۱۴۱-۵)$$

برای خلاصه کردن معادلهٔ (۵ ــ ۱۴۱) از معادلهٔ (۵ ــ ۱۳۲) استفاده می‌کنیم،

$$\cot p_n a = -\frac{h}{p_n} \qquad (۱۴۲-۵)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\sin p_n a = \frac{p_n}{\sqrt{p_n{}^2 + h^2}} \qquad (۱۴۳-۵)$$

و

$$\cos p_n a = \frac{-h}{\sqrt{p_n{}^2 + h^2}} \qquad (۱۴۴-۵)$$

با وجود این،

$$\sin 2p_n a = 2 \sin p_n a \cos p_n a \qquad (۱۴۵-۵)$$

بنابراین

$$\sin 2p_n a = \frac{-2hp_n}{p_n{}^2 + h^2} \qquad (۱۴۶-۵)$$

و

$$\lambda_n = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\sin 2p_n a}{2p_n a}\right) \qquad (۱۴۷-۵)$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\lambda_n = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{h}{a(p_n{}^2 + h)}\right] \qquad (۱۴۸-۵)$$

یا

$$\lambda_n = \frac{a(h^2 + p_n{}^2) + h}{2(h^2 + p_n{}^2)} \qquad (۱۴۹-۵)$$

بنابراین، اگر یک تبدیل محدود سینوسی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\bar{A}_s(n) = \int_0^a A(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (۱۵۰-۵)$$

قضیهٔ وارون متناظر (۵ ــ ۱۴) یک بسط متعامد به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$A(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_s(n) \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad (۱۵۱-۵)$$

بسط متعامد (۵ ــ ۱۵۱) را "سری فوریهٔ سینوس" گویند و در میانگین مربع به ازای $0 \leq x \leq a$ به سمت $\mathring{A}(x)$ متقارب است .

باتوجه به همگرایی نقطه‌ای معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۱) می‌توان این گزاره را دقیقتر بیان کرد .

تابع $A(x)$ در شرایط دیریکله در $0 \leq x \leq a$ صدق می‌کند اگر:

الف) $A(x)$ تقریبا" همه جا روی $[0,a]$ پیوسته باشد .

ب) $A(x)$ روی $[0,a]$ فقط دارای تعداد متناهی‌نقاط انفصال باشد (وهیچ اتصال نامتناهی نباشد .)

ج) $A(x)$ روی $[0,a]$ فقط دارای تعداد متناهی ماکزیمم و می‌نیمم باشد . اگر $A(x)$ روی $[0,a]$ در شرایط دیریکله صدق کند آن‌گاه ،

$$\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_s(n) \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad (۱۵۲-۵)$$

در هر نقطهٔ x در $[0,a]$ به سمت تابع زیر همگراست .

$$\tfrac{1}{2}\{A(x+0) + A(x-0)\} \qquad (۱۵۳-۵)$$

نماد $A(x \pm 0)$ به معنی زیر به‌کار برده می‌شود ،

$$\lim_{\epsilon \to 0} A(x \pm \epsilon) \qquad (۱۵۴-۵)$$

با روشی مشابه می‌توانیم تبدیل سینوسی پرتو متناهی را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\bar{A}_{sr}(n) = \int_0^a A(x) \sin (p_n x)\, dx \qquad (۱۵۵-۵)$$

که در آن p_n یک ریشهٔ مثبت معادلهٔ متعالی

$$p \cot pa + h = 0 \qquad (۱۵۶-۵)$$

و h مقداری ثابت است . قضیهٔ وارون نظیر (۵ ــ ۱۴) باتوجه به (۵ ــ ۱۴۹) نتیجه می‌دهد ،

$$A(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 + p_n{}^2}{a(h^2 + p_n{}^2) + h} \bar{A}_{sr}(n) \sin p_n x \qquad (۱۵۷-۵)$$

۵ ــ ۱۱ . تبدیل کسینوسی متناهی

با دلایلی مشابه آنچه برای معادلهٔ (۵ ــ ۱۳۱) به‌کار برده شد ، نتیجه می‌شود

$$\int_0^a \cos rx \cos sx\, dx = \frac{\cos ra \cos sa}{r^2 - s^2} (r \tan ra - s \tan sa) \qquad (۱۵۸-۵)$$

بنابراین توابع $\cos rx$ مجموعه‌ای متعامد را می‌سازند اگر

الف) $r = n\pi/a$، که در آن n عددی صحیح است

ب) $r = q_n$، که در آن q_n ریشهٔ مثبت معادلهٔ متعالی زیر است.

$$q \tan qa = h \tag{۵–۱۵۹}$$

$$h = (\text{ثابت}) \tag{۵–۱۶۰}$$

در این صورت انتگرال استاندارد را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_0^a \cos^2 rx\, dx = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sin 2ra}{2ra}\right) \tag{۵–۱۶۱}$$

پس به ازای $r = n\pi/a$،

$$\lambda_n = \frac{a}{2} \tag{۵–۱۶۲}$$

یا به ازای $r = q_n$،

$$\lambda_n = \frac{a(h^2 + q_n{}^2) + h}{2(h^2 + q_n{}^2)} \tag{۵–۱۶۳}$$

تبدیل کسینوسی متناهی را به صورت

$$\bar{A}_c(n) = \int_0^a A(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۵–۱۶۴}$$

تعریف می‌کنیم. فرمول وارون متناظر عبارتست از

$$A(x) = \frac{1}{a}\ \bar{A}_c(0) + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_c(n) \cos \frac{n\pi x}{a} \tag{۵–۱۶۵}$$

و تبدیل کسینوسی پرتو متناهی چنین تعریف می‌شود.

$$\bar{A}_{cr}(n) = \int_0^a A(x) \cos q_n x\, dx \tag{۵–۱۶۶}$$

که در آن q_n یک ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$q \tan qa = h$$

و h مقداری ثابت است. فرمول وارون متناظر عبارتست از

$$A(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2 + q_n{}^2}{a(h^2 + q_n{}^2) + h}\, \bar{A}_{cr}(n) \cos q_n x \tag{۵–۱۶۷}$$

ملاحظه کنید که در معادلات (۵–۱۵۷) و (۵–۱۶۷) حاصل جمعها به ترتیب روی تمام ریشه‌های مثبت p_n و q_n درنظر گرفته می‌شوند.

۵ ـ ۱۲. خواص تبدیلات فوریهٔ متناهی

باتوجه به

$$\bar{A}_s(n) = \int_0^a A(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (۱۶۸-۵)$$

و

$$\bar{A}_c(n) = \int_0^a A(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (۱۶۹-۵)$$

معادلات (۵ ـ ۱۶۸) و (۵ ـ ۱۶۹) را ازنظر علامتی می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\bar{A}_s(n) = T_s\{A(x)\} \qquad (۱۷۰-۵)$$

و

$$\bar{A}_c(n) = T_c\{A(x)\} \qquad (۱۷۱-۵)$$

با استفاده از این نماد، بسیاری از خواص تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه رامی‌توان به صورت فشرده‌ای نشان داد. مثلا" اگر انتگرال

$$\int_0^a \frac{\partial A}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (۱۷۲-۵)$$

را ازطریق جزء به جزء محاسبه کنیم خواهیم داشت

$$A(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} - \frac{n\pi}{a} \int_0^a A(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (۱۷۳-۵)$$

جملهٔ اول عبارت (۵ ـ ۱۷۳) درحدود انتگرال $x = 0$ و $x = a$ صفرمی‌شود. پس از (۵ـ ۱۷۲) و (۵ ـ ۱۷۳) نتیجه می‌شود،

$$T_s\left\{\frac{\partial A}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{a} T_c\{A\} \qquad (۱۷۴-۵)$$

و با همین استدلال خواهیم داشت

$$T_c\left\{\frac{\partial A}{\partial x}\right\} = (-1)^n A(a) - A(0) + \frac{n\pi}{a} T_s\{A\} \qquad (۱۷۵-۵)$$

یک کاربرد دیگر انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$T_s\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right\} = \frac{n\pi}{a}[(-1)^{n+1} A(a) + A(0)] - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 T_s\{A\} \qquad (۱۷۶-۵)$$

و

$$T_c\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right\} = (-1)^n A'(a) - A'(0) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 T_c\{A\} \qquad (۱۷۷-۵)$$

تبدیلات پرتو نیز فرمولهای مشابه می‌دهد . پس

$$\bar{A}_{sr}(n) = T_{sr}\{A(x)\} \qquad (۵-۱۷۸)$$

و

$$\bar{A}_{cr}(n) = T_{cr}\{A(x)\} \qquad (۵-۱۷۹)$$

و باتوجه به انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نوشت

$$T_{sr}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right\} = p_n A(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + hA\right)_{x=a} \sin p_n a - p_n{}^2 T_{sr}\{A\} \qquad (۵-۱۸۰)$$

و

$$T_{cr}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right\} = -A'(0) + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + hA\right)_{x=a} \cos q_n a - q_n{}^2 T_{cr}\{A\} \qquad (۵-۱۸۱)$$

۵ ـ ۱۳ . ارتباط با نظریهٔ کلاسیک سری فوریه

نظریهٔ کلاسیک سری فوریه باتوجه به یک تابع $A(x)$ که به‌ازای $0 \le x \le 2\pi$ تعریف شده شروع می‌شود . تابع $A(x)$ را به یک سری فوریه به صورت

$$A(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (۵-۱۸۲)$$

بسط می‌دهند . ضریب بسط از ضرب معادلهٔ (۵ ـ ۱۸۲) در $\cos nx$ و انتگرال‌گیری از $x = 0$ تا $x = 2\pi$ به‌دست می‌آید . با روشی مشابه و استفاده از $\sin nx$ ، ضریب b_n به‌دست خواهد آمد . پس:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A(x) \cos nx \, dx \qquad (۵-۱۸۳)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A(x) \sin nx \, dx \qquad (۵-۱۸۴)$$

سری فوریهٔ (۵ ـ ۱۸۲) به سمت $\frac{1}{2}\{A(x+0) + A(x-0)\}$ همگراست ، به شرط‌آن که $A(x)$ در شرایط دیریکله در $0 \le x \le 2\pi$ صدق کند . توجه کنید که سری فوریه (۵ ـ ۱۸۲) همگراست ، بنابراین $A(x)$ به ازای $2\pi \le x \le 4\pi$ و $-2\pi \le x \le 0$ تکرارمی‌شود والی آخر .

بعضی ازانواع توابع دارای بسط ساده‌ای به سری‌فوریه هستند. مثلاً" اگر $A(x) = A(-x)$ ، آن‌گاه $A(x)$ یک تابع زوج است ، و فقط جملات کسینوس در معادلهٔ (۵ ـ ۱۸۲) ظاهرمی‌شوند ، یعنی

$$b_n = 0 \qquad (۱۸۵-۵)$$

اگر $A(-x)$ $A(x) = -A(-x)$ ، آن‌گاه $A(x)$ یک تابع فرد از x است ، و فقط جملات سینوسی در معادلهٔ (۵ - ۱۸۲) ظاهر می‌شوند ، پس

$$a_n = 0 \qquad (۱۸۶-۵)$$

توجه کنید که هر تابع $A(x)$ را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. به‌عبارت دیگر

$$A(x) = A_e(x) + A_o(x) \qquad (۱۸۷-۵)$$

که در آن

$$A_e(x) = \frac{A(x) + A(-x)}{2} \qquad (۱۸۸-۵)$$

و

$$A_o(x) = \frac{A(x) - A(-x)}{2} \qquad (۱۸۹-۵)$$

بدیهی است که

$$A_e(x) = A_e(-x) \qquad (۱۹۰-۵)$$

و

$$A_o(x) = -A_o(-x) \qquad (۱۹۱-۵)$$

اگر یک تابع $A(x)$ ، که فقط روی $0 \le x \le 2\pi$ تعریف شده، مفروض باشد آن‌گاه هیچ اطلاعی از رفتار $A(x)$ در خارج فاصلهٔ $[0,2\pi]$ در دست نخواهد بود . درنتیجه می‌توان بی‌نهایت تابع تعریف کرد که در فاصلهٔ $0 \le x \le 2\pi$ دقیقاً با $A(x)$ برابر بوده و در خارج $[0,2\pi]$ شکل دلخواهی داشته باشد . مثلاً

$$A(x) = A(x + 2\pi) \qquad (۱۹۲-۵)$$

تعمیم متناوب $A(x)$ را تعریف می‌کند . همین‌طور

$$A(x) = A(-x) \qquad (۱۹۳-۵)$$

و

$$A(x) = -A(-x) \qquad (۱۹۴-۵)$$

بترتیب تعمیم زوج و فرد $A(x)$ را تعریف می‌کنند . فرمولهای (۵ - ۱۹۲) تا (۵ - ۱۹۴) محاسبهٔ $A(x)$ را به ازای نقاطی مانند x در خارج فاصلهٔ اولیهٔ $[0,2\pi]$ که به ازای آنها $A(x)$ تعریف شده است امکان‌پذیر می‌سازد . به این دلیل می‌گوییم معادلات (۵ - ۱۹۲) تا (۵ - ۱۹۴) کار تعمیم را انجام می‌دهند . پس اگر یک تابع دلخواه $A(x)$ مفروض بوده که در فاصلهٔ $0 \le x \le 2\pi$

تعریف شده باشد ، آن را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم :

الف) به یک سری فوریه سینوسی : که درآن حالت سری درفاصلهٔ $2\pi \geq x \geq 0$ با $A(x)$ برابر است و به ازای $0 \geq x \geq -2\pi$ بر بسط فرد $A(x)$ منطبق خواهد بود .

ب) به یک سری فوریهٔ کسینوسی : که درآن حالت سری در فاصلهٔ $2\pi \geq x \geq 0$ بر $A(x)$ به ازای $0 \geq x \geq -2\pi$ بر یک بسط زوج $A(x)$ منطبق است .

ج) به یک سری فوریهٔ کلاسیک (۵ — ۱۸۲) : در این حالت به ازای $2\pi \geq x \geq 0$ بر $A(x)$ و به ازای مقادیر x خارج ناحیهٔ $2\pi \geq x \geq 0$ بر بسط متناوب $A(x)$ منطبق است .

شکل مختلط سری فوریه

سری فوریهٔ (۵ — ۱۸۲) تا (۵ — ۱۸۴) را می‌توان با استفاده از فرمول اولر به صورت مختلط نوشت ،

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{۵—۱۹۵}$$

درنتیجه

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx} \tag{۵—۱۹۶}$$

و

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(x) e^{-inx}\, dx \tag{۵—۱۹۷}$$

از مقایسهٔ معادلات (۵ — ۱۹۶) و (۵ — ۱۹۷) با (۵ — ۱۸۲) تا (۵ — ۱۸۴) نتیجه می‌شود

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \tag{۵—۱۹۸}$$

$$C_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad n > 0 \tag{۵—۱۹۹}$$

$$C_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad n > 0 \tag{۵—۲۰۰}$$

در یک فاصلهٔ دلخواه $a \geq x \geq 0$ فرمولهای (۵ — ۱۹۶) و (۵ — ۱۹۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\pi x/a} \tag{۵—۲۰۱}$$

$$C_n = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} A(x) e^{-in\pi x/a}\, dx \tag{۵—۲۰۲}$$

۵ ـ ۱۴ ، کاربردهای تبدیلات فوریه

دو مورد کلی وجود دارد که در آنها تبدیل فوریه بسیار مناسب است . یکی نمایش تابع مفروض $A(x)$ روی فاصله‌ای معین مانند $0 \leq x \leq a$ و دیگری حل بعضی از معادلات دیفرانسیل بر مبنای شرایط اولیه‌ای که درنقاط انتهایی فاصلهٔ متناهی $0 \leq x \leq a$ گذاشته می‌شوند. این دو کاربرد را با چند مثال خاص تشریح می‌کنیم .

نمایش توابع دلخواه

نمایش ۵ ـ ۳: فرض کنید

$$A(x) = |x| \qquad |x| \leq a \tag{۵ـ۲۰۳}$$

فاصلهٔ اصلی $0 \leq x \leq a$ است بنابراین

$$A(x) = x \qquad 0 \leq x \leq a \tag{۵ـ۲۰۴}$$

توجه کنید که معادلهٔ (۵ ـ ۲۰۳) در شرط زیر صدق می‌کند

$$A(x) = A(-x) \tag{۵ـ۲۰۵}$$

درنتیجه از تبدیل متناهی کسینوس استفاده می‌کنیم ،

$$\bar{A}_c(n) = \int_0^a x \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۵ـ۲۰۶}$$

یا

$$\bar{A}_c(n) = \frac{ax}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} \Big|_0^a - \frac{a}{n\pi} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۵ـ۲۰۷}$$

چون جملهٔ انتگرال گرفته شده صفر می‌شود ، می‌توان نوشت :

$$\bar{A}_c(n) = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{a} \Big|_0^a \tag{۵ـ۲۰۸}$$

$$\bar{A}_c(n) = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1] \qquad n > 0 \tag{۵ـ۲۰۹}$$

به ازای $n = 0$، از معادلهٔ (۵ ـ ۲۰۶) نتیجه می‌شود

$$\bar{A}_c(0) = \frac{a^2}{2} \tag{۵ـ۲۱۰}$$

حال معادلات (۵ ـ ۲۰۹) و (۵ ـ ۲۱۰) باتوجه به قضیهٔ وارون (۵ ـ ۱۶۹) به ازای $0 \leq x \leq a$ نتیجه می‌دهد ،

$$A(x) = x = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \tag{۵ـ۲۱۱}$$

ولی، چون سمت راست معادلهٔ (۵ــ۲۱۱) برحسب x زوج است، دیده می‌شود که (۵ــ۲۱۱) درواقع $|x|$ را به ازای $|x| \leq a$ نشان می‌دهد.

مثال ۵ــ۴: فرض کنید

$$A(x) = x \qquad -a \leq x \leq a \tag{۵ــ۲۱۲}$$

در این جا نیز فاصلهٔ اصلی را در $0 \leq x \leq a$ درنظر می‌گیریم، به این ترتیب،

$$A(x) = x \qquad 0 \leq x \leq a \tag{۵ــ۲۱۳}$$

ولی، حالا از معادلهٔ (۵ــ۲۱۲) مشاهده می‌شود که،

$$A(x) = -A(-x) \tag{۵ــ۲۱۴}$$

بنابراین از تبدیل متناهی سینوس برای نمایش $A(x)$ در فاصلهٔ $0 \leq x \leq a$ استفاده می‌کنیم،

$$\bar{A}_s(n) = \int_0^a x \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۵ــ۲۱۵}$$

$$\bar{A}_s(n) = -\frac{ax}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{a} \Big|_0^a + \frac{a}{n\pi} \int_0^a \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۵ــ۲۱۶}$$

چون انتگرال سمت راست معادلهٔ (۵ــ۲۱۶) صفر می‌شود، داریم

$$\bar{A}_s(n) = \frac{a^2}{n\pi} (-1)^{n+1} \tag{۵ــ۲۱۷}$$

و از معادلات (۵ــ۲۱۷) و (۵ــ۱۵۱) به ازای $0 \leq x \leq a$ نتیجه می‌شود

$$A(x) = x = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{۵ــ۲۱۸}$$

ولی چون سمت راست معادلهٔ (۵ــ۲۱۸) تابعی فرد از x است، معلوم می‌شود که (۵ــ۲۱۸) تابع $x = A(x)$ را در تمام فاصلهٔ $-a \leq x \leq a$ نشان می‌دهد.

مثال ۵ــ۵: فرض کنید

$$A(x) = x \qquad 0 \leq x \leq a \tag{۵ــ۲۱۹}$$

و

$$A(x) = -b \qquad -a \leq x \leq 0 \tag{۵ــ۲۲۰}$$

در این حالت تابع $A(x)$ نه زوج است و نه فرد. درنتیجه دو راه در پیش داریم، یا این که $A(x)$ را به دو قسمت فرد و زوج تقسیم کنیم، سپس سریهای فوریهٔ سینوسی وکسینوسی متناظر را به‌دست آوریم و یا این‌که مستقیما" از شکل اصلاح شدهٔ معادلهٔ (۵ــ۱۸۲) استفاده کنیم. ما این شکل را انتخاب خواهیم کرد. فرض کنید

$$A(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{a} + b_n \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \tag{۵ــ۲۲۱}$$

با انتگرال‌گیری مستقیم می‌توان نشان داد که

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} A(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ − ۲۲۲}$$

و

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} A(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۵ − ۲۲۳}$$

بنابراین

$$a_n = \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0} -b\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx + \int_{0}^{a} x\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx\right) \tag{۵ − ۲۲۴}$$

نتیجه می‌دهد

$$a_0 = \frac{a-2b}{2} \tag{۵ − ۲۲۵}$$

$$a_n = \frac{a}{\pi^2}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \tag{۵ − ۲۲۶}$$

همین‌طور

$$b_n = \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0} -b\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx + \int_{0}^{a} x\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right) \tag{۵ − ۲۲۷}$$

نتیجه می‌دهد

$$b_n = \frac{b}{n\pi} - \frac{a+b}{n\pi}(-1)^n \tag{۵ − ۲۲۸}$$

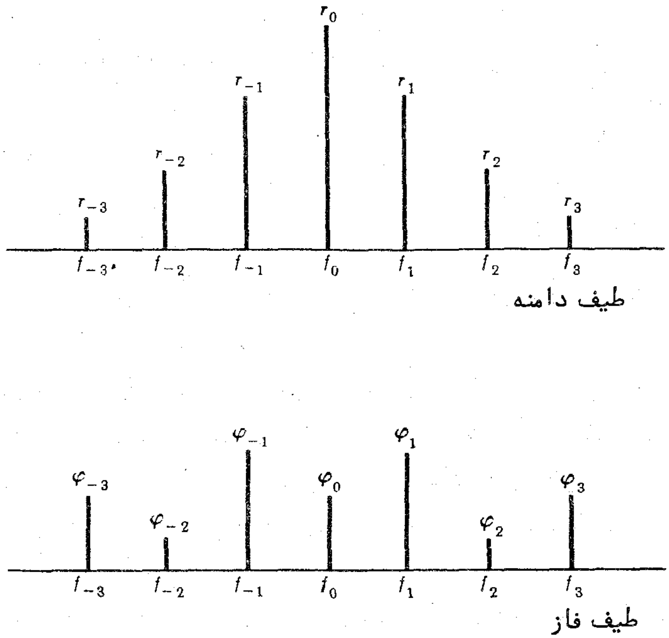
پس برای نمایش سری فوریهٔ معادلات (۵ − ۲۱۹) و (۵ − ۲۲۰) می‌نویسیم

$$\begin{aligned} A(x) = \frac{a-2b}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{&\frac{a}{\pi^2}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a} \\ &+ \left[\frac{b}{n\pi} - \frac{a+b}{n\pi}(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\Bigg\} \end{aligned} \tag{۵ − ۲۲۹}$$

تبصره: سری فوریه (۵ − ۲۲۱) را درنظر می‌گیریم . شکل مختلط معادلات (۵ − ۲۲۱) و (۵ − ۲۲۳) عبارتند از:

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i(n\pi x/a)} \tag{۵ − ۲۳۰}$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} A(x)e^{-i(n\pi x/a)}\,dx \tag{۵ − ۲۳۱}$$



شکل ۵ ــ ۲. طیف دامنه و فاز گسسته برای تابعی محدود.

معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۱) مانند معادلهٔ (۵ ــ ۲۰۲) است، برای اثبات کافی است $y=x+a$ را در (۵ ــ ۲۳۱) قراردهیم. با این جایگذاری معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۱) به صورت زیرنوشته می‌شود:

$$C_n = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} A(y-a)e^{-i(n\pi/a)(y-a)}\, d(y-a) \qquad (۵-۲۳۲)$$

که باتوجه به $y-a$ به‌عنوان یک‌متغیر ظاهری در انتگرال‌گیری، معلوم می‌شودکه بامعادلهٔ (۵ــ ۲۰۲) برابر است.

توجه کنید که اگر بنویسیم

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{n\pi}{a} \qquad (۵-۲۳۳)$$

آن‌گاه معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n x} \qquad (۵-۲۳۴)$$

ازنظرفیزیکی، معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۴) بیان می‌کندکه $A(x)$ یک برهمنهش نوسانات هارمونیکی بسامدهای $f_n = n/2a$ است، که در آن n، مقادیر زیر را اختیار می‌کند

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

چون C_n مختلط است برای دامنهٔ r_n و زاویهٔ فاز ϕ_n می‌توان نوشت:

$$C_n = r_n e^{-i(n\pi\phi_n)/a} \qquad (۵-۲۳۵)$$

در این صورت معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۴) به شکل زیر درمی‌آید

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{i\omega_n(x-\phi_n)} \qquad (۵-۲۳۶)$$

و دیده می‌شود که $A(x)$ برهمنهشی ازجملاتی است که جملهٔ عمومی‌آن دارای دامنهٔ r_n وبسامد زاویه‌ای ω_n و زاویهٔ فاز ϕ_n است.

اگر نموداری بادامنهٔ r_n بعنوان عرض و بسامد f_n بعنوان طول رسم کنیم، منحنی حاصل را "طیف دامنه" $A(x)$ گویند. چون بسامد f_0 ، f_1 ، f_2 ، . . . یک دنبالهٔ نامتناهی ازاعداد گسسته تشکیل می‌دهند، طیف دامنهٔ $A(x)$ به صورت تعداد نامتناهی خطوط قائم فاصله‌دار به‌نظر می‌رسد، که n امین آنهابه ارتفاع r_n است. به این‌دلیل، طیف‌دامنه دامنهٔ $A(x)$ را "گسسته" می‌گوییم.

نمودار مشابه برای ϕ_n نسبت به f_n را "طیف فاز" تابع $A(x)$ گوییم. این طیف فاز نیز گسسته است. اطلاعات کامل از طیف دامنه و فاز یک تابع آن را بطور کامل بوسیلهٔ معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۶) معین‌می‌سازد. فرآیندتعیین طیف دامنه وفاز یک تابع را "آنالیز فوریه" وفرآیند بازسازی تابع را بوسیلهٔ معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۶) "سنتز فوریه" نامند.

حل یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه

مثال ۵ ــ ۶: مسألهٔ مکانیک کوانتم ذره‌ای را که درداخل یک پتانسیل نامتناهی‌مشخص زیر بدام افتاده است درنظر بگیرید،

$$V(x) = 0 \qquad 0 < x < a \qquad (۵-۲۳۷)$$

$$V(x) = +\infty \qquad x = 0, x = a \qquad (۵-۲۳۸)$$

این ذره متناظر با ذره‌ای است که بین دو دیوارهٔ کاملاً سخت در نقاط $x = 0$ و $x = a$ بدام افتاده باشد. بطورکلی، یک افزایش ناگهانی در انرژی پتانسیل در نقاط فردی یک ناحیه ذره را بطرف داخل ناحیه می‌راند. نیروی $F_x = -dV/dx$ وابسته به ذره معادلات (۵ ــ ۲۳۷) و (۵ ــ ۲۳۸) صفر است بجزدر نقاط مرزی $x = 0$ و $x = a$ که در آنها $-dV/dx$ نامتناهی است. معادلات (۵ ــ ۲۳۷) و (۵ ــ ۲۳۸) را با درنظر گرفتن V و x بترتیب بعنوان طول و عرض هر نقطه رسم می‌کنیم. چاه مستطیلی حاصل رامی‌توانیم به‌عنوان شکل حدی یک سهمی که به‌طرف محورمثبت V بازمی‌شود تصورکرد. انتهای این سهمی راتسطیح می‌کنیم تا بر معادلهٔ (۵ ــ ۲۳۷) منطبق

شود ، ودرعین حال دو بازوی سهمی رامستقیم می‌سازیم تابامعادلهٔ (۵ ــ ۲۳۸) سازگار گردد . با این تصویر واضح است که

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -\infty \qquad x = a \tag{۵ ــ ۲۳۹}$$

$$F_x = -\frac{dV}{dx} = -\infty \qquad x = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۰}$$

بنابراین نیروی وارد بر ذره در$x = a$ بطرف چپ و در$x = 0$ بطرف راست متوجه است ، واثرش این است که ذره را در داخل چاه نگه می‌دارد . معادلهٔ شرودینگر که تابع موج این ذره درآن صدق می‌کند در مکانیک کوانتم داده می‌شود ،

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۱}$$

که‌درآن m جرم و E انرژی‌کل‌ذره است .ضریب $\hbar$ راثابت‌پلانک‌گویند ($\hbar = 1.054 \times 10^{-27}$ ارگ) . نیروی دافعهٔ نامتناهی که ذره در دیواره‌های$x = 0$ و$x = a$ دریافت می‌دارد به این معنی است که احتمال یافتن ذره در$x = 0$ یا$x = a$ صفر است ؛ بنابراین $\psi(x)$ باید به قسمی باشد که

$$\psi(0) = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۲}$$

و

$$\psi(a) = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۳}$$

شرایط (۵ ــ ۲۴۲) و (۵ ــ ۲۴۳) شرایط مرزی‌هستندکه جواب $\psi(x)$ معادلهٔ (۵ ــ ۲۴۱) باید درآنها صدق کند .

حال بخش ۵ ــ ۱۲ را بررسی می‌کنیم . دیده می‌شود که معادلهٔ (۵ ــ ۱۷۶) برای به‌کار بردن همراه با معادلهٔ (۵ ــ ۲۴۱) مناسب است ، زیرا

$$(-1)^{n-1}\psi(a) + \psi(0) = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۴}$$

که از معادلات (۵ ــ ۲۴۱) و (۵ ــ ۲۴۳) نتیجه می‌شود . باتبدیل متناهی سینوسی ، معادلهٔ (۴ ــ ۲۴۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$T_s\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\} + \frac{2mE}{\hbar^2}T_s\{\psi\} = 0 \tag{۵ ــ ۲۴۵}$$

و از معادلهٔ (۵ ــ ۱۷۶)

$$T_s\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 T_s\{\psi\} \tag{۵ ــ ۲۴۶}$$

بنابراین معادلهٔ (۵ ــ ۲۴۵) به صورت

$$\left[\frac{2mE}{\hbar^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]T_s\{\psi\}=0 \qquad (۲۴۷-۵)$$

درمی‌آید که در آن

$$T_s\{\psi\}=\Psi_s(n) \qquad (۲۴۸-۵)$$

از معادلهٔ (۵ ـ ۲۴۷) بی‌نهایت معادله دیگر به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\left[\frac{2mE}{\hbar^2}-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\right]\Psi_s(k)=0 \qquad (۲۴۹-۵)$$

که درآن k مقادیر $k=1,2,\ldots,\infty$ رااختیارمی‌کند. حال‌دوامکان وجود دارد. یکی این که یک یا چند مقدار برای k وجود دارد که به ازای آنها $\Psi_s(k)\neq 0$، ودیگراین‌که به‌ازای جمیع مقادیر $k=1,2,\ldots,\infty$، $\Psi_s(k)=0$. ابتدا فرض می‌کنیم به ازای جمیع مقادیر k، $\Psi_s(k)=0$. درنتیجه

$$\Psi_s(k)=\int_0^a\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx=0 \qquad k=1,2,\ldots,\infty \qquad (۲۵۰-۵)$$

یک‌جواب‌معادلهٔ(۵ ـ ۲۵۰)عبارت‌است‌از $\psi(x)=0$ ، $0\le x\le a$. این جواب در معادلات (۵ ـ ۲۴۱) تا (۵ ـ ۲۴۳) نیزصدق می‌کند. ولی ازنظرفیزیکی بایدآن را کنار گذاشت. این گزاره که ذره داخل چاهی با پتانسیل بی‌نهایت قرار دارد بدین معنی است که احتمال آن که آن را در فاصلهٔ $0\le x\le a$ پیدا کنیم، برابر یک است؛ درنتیجه

$$\int_0^a|\psi|^2\,dx=1 \qquad (۲۵۱-۵)$$

این مطلب جواب $\psi(x)=0$ را خارج می‌کند. آیا امکان دارد که تابع دیگری مانند $\psi(x)$ وجود داشته باشد که روی $[0,a]$ متحد با صفر نباشد و در معادلهٔ (۵ ـ ۲۵۰) صدق کند؟ جواب به این سؤال برمی‌گردد به مفهوم کامل بودن یک مجموعهٔ نامتناهی ازتوابع متعامد، مفهومی که در انتهای بخش ۵ ـ ۶ معرفی کرده‌ایم. اگربتوانیم‌نشان دهیم‌که مجموعه‌ای نامتناهی‌ازتوابع متعامد$\{\sin k\pi x/a\ k=1,2,\ldots,\infty\}$روی‌فاصلهٔ$0\le x\le a$کامل‌است‌ه‌درآن‌صورت‌هیچ‌تابع‌غیربدیهی $\psi(x)$ وجود ندارد که بر همهٔ‌این‌توابع‌عمودباشد.درنتیجه$\psi(x)\equiv 0$ روی فاصلهٔ $0\le x\le a$ تنها جواب معادلهٔ (۵ ـ ۲۵۰) است، و چون این جواب بوسیلهٔ معادلهٔ (۵ ـ ۲۵۱) خارج می‌شود، درنتیجه به ازای لااقل یک عدد صحیح k، $\Psi_s(k)\neq 0$.

از یک کاربرد قضیهٔ پارسوال (۵ ـ ۱۳۳) دربارهٔ (۵ ـ ۲۲۱) نتیجه می‌شودکه مجموعه توابع‌متعامد$\{\cos k\pi x/a,\ \sin k\pi x/a;\ k=1,2,\ldots,\infty\}$ روی فاصلهٔ $-a\le x\le a$ کامل است. از این مطلب قضیهٔ زیر ثابت می‌شود:

قضیه: مجموعهٔ توابع متعامد $\{\sin k\pi x/a; k=1,2,\ldots,\infty\}$ روی فاصلهٔ $0\leq x\leq a$ کامل است.

برهان: فرض کنید تابعی مانند $A(x)$ وجود دارد که روی $0\leq x\leq a$ تعریف شده و مجذور آن انتگرال‌پذیر باشد به قسمی که

$$\int_0^a |A|^2\, dx = 1 \tag{۵ − ۲۵۲}$$

و

$$\int_0^a A(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\, dx = 0 \tag{۵ − ۲۵۳}$$

به ازای $k = 1,2,\ldots,\infty$. اگر توسیع $A(x)$ را از $0 \leq x \leq a$ به $-a \leq x \leq 0$ به وسیلهٔ معادلهٔ زیر درنظر بگیریم

$$A(-x) = -A(x) \tag{۵ − ۲۵۴}$$

به ازای $k = 1,2,\ldots,\infty$ نتیجه می‌شود،

$$\int_{-a}^{+a} |A|^2\, dx = 2 \tag{۵ − ۲۵۵}$$

$$\int_{-a}^{a} A(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\, dx = 0 \tag{۵ − ۲۵۶}$$

$$\int_{-a}^{+a} A(x) \cos\frac{k\pi x}{a}\, dx = 0 \tag{۵ − ۲۵۷}$$

حال باتوجه به کامل بودن توابع

$$\left\{\cos\frac{k\pi x}{a}, \sin\frac{k\pi x}{a}; \qquad k = 1,2,\ldots,\infty\right\}$$

روی $-a \leq x \leq a$ و معادلات (۵ − ۲۵۶) و (۵ − ۲۵۷) نتیجه می‌شود،

$$\int_{-a}^{+a} |A|^2\, dx = 0 \tag{۵ − ۲۵۸}$$

که با معادلهٔ (۵ − ۲۵۵) متناقض است. بنابراین فرض اولیهٔ ما که یک تابع غیربدیهی $A(x)$ وجود دارد که مجذور آن انتگرال‌پذیر است و در معادلات (۵ − ۲۵۲) و (۵ − ۲۵۳) صدق می‌کند باید غلط باشد، و قضیه ثابت می‌شود.

تبصره: توجه کنید که کامل بودن مجموعه‌ای از توابع بطور ضمنی با فاصلهٔ تعریف آنها مرتبط است. پس، وقتی مجموعهٔ توابع $\{\sin k\pi x/a; k = 1,2,\ldots,\infty\}$ به ازای $0 \leq x \leq a$ کامل است. به ازای $-a \leq x \leq a$ کامل نخواهد بود.

حال می‌توانیم معادلهٔ (۵ — ۲۴۹) را درنظر بگیریم و مطمئن باشیم که لااقل یک مقدار k مانند $k=n$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\Psi_s(k) \neq 0$. بنابراین ازمعادلهٔ (۵ — ۲۴۹) نتیجه می‌شود ،

$$E = n^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \qquad (۲۵۹-۵)$$

که یک مقدار خاص انرژی ذره در چاه پتانسیل نامتناهی است . تابع موج ذره از قضیهٔ وارون (۵ — ۱۵۱) برای تبدیل سینوسی متناهی به صورت زیر به‌دست می‌آید .

$$\psi(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_s(n) \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad (۲۶۰-۵)$$

باتوجه به شرط استاندارد

$$\int_0^a |\psi|^2 \, dx = 1 \qquad (۲۶۱-۵)$$

و با استفاده از

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx = \frac{a}{2} \, \delta_{nm} \qquad (۲۶۲-۵)$$

نتیجه می‌شود

$$\int_0^a |\psi|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_s(n)|^2 = 1 \qquad (۲۶۳-۵)$$

که همان معادلهٔ پارسوال (۵ — ۱۱۳) است . تعبیر فیزیکی معادلهٔ (۵ — ۲۶۳) جالب توجه است . برطبق مکانیک کوانتم ، احتمال $P(E_n)$ برای آن‌که ذره‌ای دارای انرژی

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \qquad (۲۶۴-۵)$$

باشد عبارتست از

$$P(E_n) = |\Psi_s(n)|^2 \qquad (۲۶۵-۵)$$

معادلهٔ (۵ — ۲۶۳) دراین‌صورت بیان می‌کنداحتمال آن که ذره یکی ازبی‌نهایت مقدار خاص انرژی E_1، E_2، . . . ، E_∞ را داشته باشد برابر است با احتمال آن که ذره در یک فاصله $0 \le x \le a$ به دام بیفتد . بنابراین هر دو احتمال باید برابر واحد شوند .

مثال ۵ — ۷: به‌عنوان یک کاربرد تبدیل پرتوی سینوسی مسألهٔ ذره‌ای را در چاهی با پتانسیل نیمه نامتناهی درنظر می‌گیریم که به صورت زیر معین شده است

$$V(x) = 0 \qquad 0 < x < a \qquad (۲۶۶-۵)$$

$$V(x) = +\infty \qquad x = 0 \qquad (۲۶۷-۵)$$

$$V(x) = V_0 \qquad x \geq a \tag{۲۶۸–۵}$$

معادلهٔ شروداینگر که تابع موج ψ ذره در آن صدق می‌کند عبارتست از:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{۲۶۹–۵}$$

به ازای $0 < x < a$، و

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left[\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\right]\psi = 0 \tag{۲۷۰–۵}$$

به ازای $a \leq x \leq \infty$. شرایط مرزی که ψ در آنها صدق می‌کند عبارتند از:

$$\psi(0) = 0 \tag{۲۷۱–۵}$$

و در $x = a$

$$\frac{1}{\psi^-}\frac{\partial\psi^-}{\partial x} = \frac{1}{\psi^+}\frac{\partial\psi^+}{\partial x} \tag{۲۷۲–۵}$$

در معادلهٔ (۵ – ۲۷۲)

$$\psi^+ = \psi(x) \qquad x \geq a \tag{۲۷۳–۵}$$

$$\psi^- = \psi(x) \qquad x \leq a \tag{۲۷۴–۵}$$

مطالعهٔ یک ذره که انرژی کل آن E، کمتر از انرژی پتانسیل متناهی‌مانع V_0 است جالب توجه خواهد بود.

$$E < V_0 \tag{۲۷۵–۵}$$

در یک مسألهٔ کلاسیک، ذره‌ای که در نامساوی (۵ – ۲۷۵) صدق کند انرژی کافی برای فرار از مانع را نخواهد داشت. در مکانیک کوانتم می‌دانیم که با احتمال مثبت‌ذره از مانع فرار می‌کند، حتی اگر (۵ – ۲۷۵) برقرار باشد.

جوابی‌ازمعادلهٔ (۵ – ۲۷۰) راانتخاب می‌کنیم که‌امکان‌یافتن‌ذره‌رادرناحیهٔ $a < x < +\infty$ مجاز می‌سازدولی‌احتمال‌این که‌ذره‌در $x = +\infty$ باشد صفر است. به‌عبارت دیگر، جوابی از معادلهٔ (۵ – ۲۷۰) را اختیار می‌کنیم که در شرط‌اولیهٔ زیر صدق کند.

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0 \tag{۲۷۶–۵}$$

این جواب عبارتست از:

$$\psi^+(x) = Ce^{-\beta x} \tag{۲۷۷–۵}$$

که در آن C ثابت است و

$$\beta = +\left[\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\right]^{1/2} \tag{۲۷۸–۵}$$

جواب (۵ ــ ۲۷۷) را می‌توان با جایگزاری در معادلهٔ (۵ ــ ۲۷۰) امتحان کرد . توجه کنید که

$$\frac{1}{\psi^+}\frac{\partial\psi^+}{\partial x} = -\beta \qquad (۵-۲۷۹)$$

بنابراین معادلهٔ (۵ ــ ۲۷۰) در نقطهٔ $x = a$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial\psi^-}{\partial x} + \beta\psi^- = 0 \qquad (۵-۲۸۰)$$

حال باید معادلهٔ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi^- = 0 \qquad (۵-۲۸۱)$$

رابه ازای $a > x > 0$ حل کنیم در صورتی که شرایط مرزی عبارتند از $\psi^-(0) = 0$ و $\partial\psi^-/\partial x + \beta\psi^- = 0$ در $x = a$. با بررسی مجدد بخش ۵ ــ ۱۲ معلوم می‌شود که معادلهٔ (۵ ــ ۱۸۰) برای استفاده با معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۱) مناسب است زیرا

$$p_n\psi(0) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\psi\right)_{x=a}\sin p_n a = 0 \qquad (۵-۲۸۲)$$

به شرط آن‌که p_n ریشهٔ مثبت

$$p\cot pa + \beta = 0 \qquad (۵-۲۸۳)$$

باشد ومعادلات (۵ ــ ۲۷۱) و (۵ ــ ۲۸۰) مفروض باشند . با استفاده ازتبدیل پرتوی سینوسی متناهی درمورد معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۱) نتیجه می‌شود

$$T_{sr}\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\} + \frac{2mE}{\hbar^2}T_{sr}\{\psi\} = 0 \qquad (۵-۲۸۴)$$

و از معادلهٔ (۵ ــ ۱۸۰) ،

$$T_{sr}\left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\} = -p_n^2 T_{sr}\{\psi\} \qquad (۵-۲۸۵)$$

بنابراین معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - p_n^2\right)T_{sr}\{\psi\} = 0 \qquad (۵-۲۸۶)$$

که درآن

$$T_{sr}\{\psi\} = \bar{\psi}_{sr}(n) \qquad (۵-۲۸۷)$$

معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۶) تعداد نامتناهی معادله به صورت زیر به‌دست می‌دهد

$$\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - p_k^2\right) \bar{\psi}_{sr}(k) = 0 \qquad (۵-۲۸۸)$$

وقتی k مقادیر $k = 1,2, \ldots, \infty$ را اختیار می‌کند . اگر به ازای جمیع $k = 1,2, \ldots, \infty$ ، $\bar{\psi}_{sr}(k) = 0$ ، آن‌گاه

$$\bar{\psi}_{sr}(k) = \int_0^a \psi(x) \sin p_k x \, dx = 0 \qquad k = 1,2, \ldots, \infty \qquad (۵-۲۸۹)$$

بعلت کامل بودن مجموعه توابع متعامد $\{\cos p_k x, \sin p_k x; k = 1,2, \ldots, \infty\}$ روی فاصلهٔ $-a \le x \le +a$ نتیجه می‌شود که مجموعه توابع متعامد $\{\sin p_k x; k=1,2, \ldots, \infty\}$ روی فاصلهٔ $0 \le x \le a$ کامل است . بنابراین تنها جواب معادلهٔ (۵ــ۲۸۹) برابر است با $\psi(x) = 0$ ، $0 \le x \le a$ این جواب باید از جنبهٔ فیزیکی خارج شود زیرا نتیجه می‌دهد احتمال این‌که ذره داخل چاه نیمه نامتناهی واقع شود برابر صفر است . درنتیجه لااقل یک مقدار k مانند $k = n$ وجود دارد که به ازای آن $\bar{\psi}_{sr}(n) \neq 0$. بنابراین از معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۸) نتیجه می‌شود ،

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} p_n^2 \qquad (۵-۲۹۰)$$

برای مقادیر خاص انرژی یک ذره در چاه پتانسیل نیمه نامتناهی . درمعادلهٔ (۵ ــ ۲۹۰) ، p_n یکی از ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۵ ــ ۲۸۳) است . قضیهٔ وارون (۵ ــ ۱۴۷) نتیجه می‌دهد

$$\psi^-(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2 + p_n^2}{a(\beta^2 + p_n^2) + \beta} \bar{\psi}_{sr}(n) \sin p_n x \qquad (۵-۲۹۱)$$

شرط استاندارد به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_0^\infty |\psi|^2 \, dx = \int_0^a |\psi^-|^2 \, dx + \int_a^\infty |\psi^+|^2 \, dx = 1 \qquad (۵-۲۹۲)$$

و با استفاده از

$$\int_0^a \sin p_n x \sin p_m x = \lambda_n \delta_{nm} \qquad (۵-۲۹۳)$$

که در آن

$$\lambda_n = \frac{a(\beta^2 + p_n^2) + \beta}{2(\beta^2 + p_n^2)} \qquad (۵-۲۹۴)$$

به کمک معادلات (۵ ــ ۲۷۷) و (۵ ــ ۲۹۱) به‌دست می‌آید ،

$$\int_0^\infty |\psi|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\psi}_{sr}(n)|^2 = \frac{C^2}{2\beta} e^{-2\beta a} = 1 \qquad (۵-۲۹۵)$$

تبصره: توجه به این مطلب‌که معادلهٔ (۵ – ۲۸۳) دارای‌کوچکترین ریشهٔ مثبت p است مفید خواهد بود . درنتیجه مقدارمعینی انرژی مثبت حداقل (۵ – ۲۹۰) برای یک ذرهٔ مفروض و یک چاه پتانسیل نیمه نامتناهی وجود دارد .

مثال ۵ – ۸: تبدیل متناهی فوریه رامی‌توان برای حل بعضی‌مسائل ناهمگن مقادیراولیه نیز به‌کار برد . مثلاً" معادلهٔ

$$\frac{d^2A}{dx^2} + k^2A = f(x) \qquad (۵-۲۹۶)$$

را در فاصله $0 \leq x \leq a$ باتوجه به شرایط اولیهٔ

$$A'(0) = 0 \qquad (۵-۲۹۷)$$

و

$$A'(a) = 0 \qquad (۵-۲۹۸)$$

حل کنید . در این حالت از تبدیل متناهی کسینوس استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت

$$T_c\left\{\frac{d^2A}{dx^2}\right\} + k^2T_c\{A\} = T_c\{f\} \qquad (۵-۲۹۹)$$

دراین‌صورت معادلهٔ (۵ – ۱۷۷) همراه معادلات (۵ – ۲۹۷) و (۵ – ۲۹۸) نتیجه می‌دهند ،

$$\left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right] T_c\{A\} = T_c\{f\} \qquad (۵-۳۰۰)$$

فرض کنید

$$T_c\{A\} = \bar{A}_c(n) = \int_0^a A(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad (۵-۳۰۱)$$

و

$$T_c\{f\} = \bar{f}_c(n) = \int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad (۵-۳۰۲)$$

اگر فرض کنیم که $f(x)$ به ازای $0 \leq x \leq a$ متحدباصفر نیست، آن‌گاه کامل‌بودن مجموعهٔ متعامد $\{\cos n\pi x/a;\, n = 1,2,\ .\ .\ .\ ,\infty\}$ روی $0 \leq x \leq a$ تضمین می‌کند که تابع $\bar{f}_c(n)$ متحد باصفرنیست .پس با حل معادلهٔ (۵ – ۳۰۰) داریم

$$\bar{A}_c(n) = \frac{\bar{f}_c(n)}{k^2 - (n\pi/a)^2} \qquad (۵-۳۰۳)$$

و با استفاده از قضیهٔ وارون (۵ – ۱۶۵) نتیجه می‌شود

$$A(x) = \frac{\bar{f}_c(0)}{ak^2} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{f}_c(n)}{k^2 - (n\pi/a)^2}\cos\frac{n\pi x}{a} \qquad (۵-۳۰۴)$$

اگربه‌ازای مقداری از n ، $k^2=(n\pi/a)^2$ ، آن‌گاه‌درمعادلهٔ (۵ ــ ۳۰۴) حاصل‌جمع نامتناهی می‌شود . تعبیر فیزیکی این مطلب از این قرار است : فنر با وزنی را درنظر بگیریدکه یک سرآن به دیوارمحکمی متصل است و به انتهای دیگرش جرم m بطورآزادآویزان است . فرض کنیدثابت فنر K باشد . طبق قانون هوک ، تغییرمکان A به جرم m ازحالت تعادل مقابل نیروی ذخیره فنر $F=-KA$ می‌باشد . در این صورت قانون دوم نیوتن معادلهٔ حرکت جرم را می‌دهد

$$m\frac{d^2A}{dt^2}+KA=0 \qquad (۵-۳۰۵)$$

اگرجرم بوسیلهٔ یک نیروی‌خارجی $g(t)$ مجبوربه‌ارتعاش شود ، آن‌گاه‌معادلهٔ (۵ــ ۳۰۵) به صورت زیر نوشته می‌شود ،

$$m\frac{d^2A}{dt^2}+KA=g(t) \qquad (۵-۳۰۶)$$

با فرض

$$k^2=\frac{K}{m} \qquad (۵-۳۰۷)$$

و

$$f(t)=\frac{1}{m}g(t) \qquad (۵-۳۰۸)$$

معادلهٔ (۵ ــ ۳۰۶) به صورت

$$\frac{d^2A}{dt^2}+k^2A=f(t) \qquad (۵-۳۰۹)$$

نوشته می‌شودکه اگر x رابه‌عنوان زمان اختیارکنیم با معادلهٔ (۵ ــ ۲۹۶) برابراست . ازمعادلات (۵ ــ ۳۰۵) تا (۵ ــ ۳۰۷) دیده می‌شود که k تشدید طبیعی (زاویه‌ای) فرکانس نوسان سنج ساده است‌که بوسیلهٔ فنر ودستگاه جرم‌ارائه می‌شود . به‌عبارت‌دیگر ، جواب‌معادلهٔ (۵ــ۳۰۹) درحالت $f(t)=0$ عبارتست از :

$$A=c_1\cos kt+c_2\sin kt \qquad (۵-۳۱۰)$$

حال اگر $f(t)\neq 0$ و به ازای مقداری از n ، $k^2=(n\pi/a)^2$ آن‌گاه مؤلفهٔ‌فرکانس ویژه $f(t)$ با فراوانی طبیعی دستگاه جرم فنر بازتاب می‌نماید . نتیجه این است که انرژی از دستگاه مولد نیروی تابع $f(t)$ به حرکت جرم m منتقل می‌شود . ازآن جایی که دستگاه دارای بقاء است ، میدان نوسان حداکثر نوسان ، بدون انتقال محدودیت بیشتر و بیشتری مثل انرژی به دستگاه جرم ــ فنر ، افزایش می‌یابد . به این ترتیب مقدار بی‌نهایت در معادلهٔ (۵ ــ ۳۰۴) برای

$k^2=(n\pi/a)^2$ ایجاب می‌کند که‌نیروی تابع f ، فراوانی کمی دارد که با فراوانی طبیعی دستگاه انعکاس می‌یابد . شرایط مرزی (۵ ــ ۲۹۷) و (۵ ــ ۲۹۸) نشان می‌دهد که سرعت جرم m باید در زمانهای $t=0$ و $t=a$ صفر باشد . بنابراین ، این زمانها متناظرند؛ با لحظاتی که ارتعاش جرم m تغییرجهت می‌دهد ، البته به شرط آن‌که انعکاسی وجودنداشته باشد . اگرانعکاس دریک دستگاه فیزیکی واقعی اتفاق می‌افتاد ، یک اصطکاک ذاتی ، که در این جا درنظر گرفته نشده است ، مازاد انرژی را جذب می‌کند ، یا دستگاه خودش به قسمتهایی ارتعاش می‌کند .

۵ ــ ۱۵ . تبدیلات فوریه با دامنهٔ نامتناهی

صورت مختلط سری فوریهٔ (۵ ــ ۲۳۰) و (۵ ــ ۲۳۱) را درنظر می‌گیریم . برای راحتی این فرمولها را تکرار می‌کنیم

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i(n\pi x/a)} \tag{۵ ــ ۳۱۱}$$

$$C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} A(x) e^{-i(n\pi x/a)}\,dx \tag{۵ ــ ۳۱۲}$$

اگر تجزیهٔ فوریهٔ تابع $A(x)$ را که بر تمام خط حقیقی $-\infty \le x \le +\infty$ به‌جای فاصلهٔ متناهی $-a \le x \le +a$ بخواهیم ، باید در معادلات (۵ ــ ۳۱۱) و (۵ ــ ۳۱۲) ، $a \to \infty$. تبدیلات زیر را درنظر می‌گیریم :

$$k = \frac{n\pi}{a} = n\,\Delta k \tag{۵ ــ ۳۱۳}$$

$$\Delta k = \frac{\pi}{a} \tag{۵ ــ ۳۱۴}$$

$$\frac{\Delta k}{2\pi} = \frac{1}{2a} \tag{۵ ــ ۳۱۵}$$

$$2aC_n = \bar{A}(k) = \bar{A}(n\,\Delta k) \tag{۵ ــ ۳۱۶}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\bar{A}(k)\,\Delta k = \frac{1}{2\pi}\bar{A}(n\,\Delta k)\,\Delta k \tag{۵ ــ ۳۱۷}$$

وقتی $a \to \infty$، معادلهٔ (۵ ــ ۳۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx}\,dx \tag{۵ ــ ۳۱۸}$$

اگر معادلهٔ (۵ــ ۳۱۱) را به صورت

$$A(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{A}(n\,\Delta k) e^{in\Delta kx}\,\Delta k \qquad (۳۱۹-۵)$$

بنویسیم به ازای $a \to \infty$ داریم

$$A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k) e^{ikx}\,dk \qquad (۳۲۰-۵)$$

تحلیل دقیق شرایطی که تحت آنها معادلات (۵ــ ۳۱۸) و (۵ــ ۳۲۰) برقرارند خارج حوزهٔ کار ماست. دراین جافقط به بیان (بدون اثبات) چند شرط که لزوماً" کلی‌ترین شرایط نخواهند بود و تحت آنها معادلات (۵ــ ۳۱۸) و (۵ــ ۳۲۰) برقرارند اکتفا می‌کنیم.

توابع $\bar{A}(k)$ و $A(x)$ تبدیلات فوریهٔ یکدیگر نامیده می‌شوند. معمولاً" $\bar{A}(k)$ را به صورت معادلهٔ (۵ــ ۳۱۸) تبدیل فوریهٔ $A(x)$ به صورت (۵ــ ۳۲۰) قضیهٔ وارون $A(x)$ گویند. این اصطلاح کاملاً" شبیه اصطلاحی است که در معادلات (۵ــ ۱۲) و (۵ــ ۱۴) داده شد. گاهی تبدیل فوریه و قضیهٔ وارون به صورت‌متقارن زیر نوشته می‌شوند

$$\bar{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx}\,dx \qquad (۳۲۱-۵)$$

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k) e^{ikx}\,dk \qquad (۳۲۲-۵)$$

یا به صورت

$$\bar{A}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-2\pi ift}\,dt \qquad (۳۲۳-۵)$$

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(f) e^{2\pi ift}\,df \qquad (۳۲۴-۵)$$

فرمولهای (۵ــ ۳۲۱) و (۵ــ ۳۲۲) را می‌توان از تغییر معادلهٔ (۵ــ ۳۱۶) به صورت زیر به‌دست آورد

$$2aC_n = \sqrt{2\pi}\bar{A}(k) \qquad (۳۲۵-۵)$$

و معادلات (۵ــ ۳۲۳) و (۵ــ ۳۲۴) از جایگذاری

$$x = \sqrt{2\pi}\, t \qquad (۳۲۶-۵)$$

$$k = \sqrt{2\pi} \qquad (۳۲۷-۵)$$

در معادلات (۵ــ ۳۲۱) و (۵ــ ۳۲۲) نتیجه می‌شوند.

حال از ترکیب معادلات (۵ــ ۳۱۸) و (۵ــ ۳۲۰) نتیجه می‌شود:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)e^{-iky}\,dy \qquad (۵-۳۲۸)$$

که در آن متغیر ظاهری انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۵ ـ ۳۱۸) از x به y تغییر یافته است، یعنی

$$\bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)e^{-iky}\,dy \qquad (۵-۳۲۹)$$

فرض کنید بتوانیم ترتیب انتگرال‌گیری در (۵ ـ ۳۲۸) را عوض کنیم، در این صورت داریم:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)\,dy\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)}\,dk \qquad (۵-۳۳۰)$$

حال به "تعریف" تابع جدیدی به صورت زیر توجه کنید

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)}\,dk \qquad (۵-۳۳۱)$$

با استفاده از (۵ ـ ۳۳۱) معادلهٔ (۵ ـ ۳۳۰) را می‌توان چنین نوشت:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)\,\delta(x-y)\,dy \qquad (۵-۳۳۲)$$

خواص $\delta(x-y)$ چیست؟ باتوجه به‌مطلب زیر به این سؤال می‌توان جواب داد

$$\delta(x-y) = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} e^{ik(x-y)}\,dk \qquad (۵-۳۳۳)$$

انتگرال‌گیری مستقیم از معادلهٔ (۵ ـ ۳۳۳) نتیجه می‌دهد،

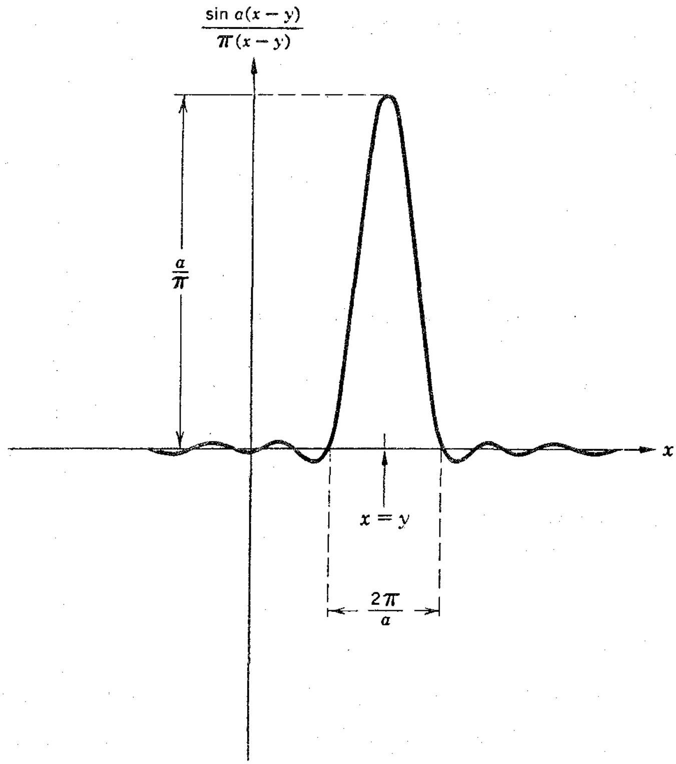
$$\delta(x-y) = \lim_{a\to\infty}\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} \qquad (۵-۳۳۴)$$

تابع

$$\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} \qquad (۵-۳۳۵)$$

را در مقابل x رسم می‌کنیم، a و y را به‌عنوان اعداد مثبت و ثابت درنظر می‌گیریم، معادلهٔ (۵ ـ ۳۳۵) در نقطهٔ $y = x$ یک تاج تیز دارد و دامنهٔ این تاج از قاعدهٔ هوپیتال برابر a/π به دست می‌آید. وسعت تاج اصلی برابر $2\pi/a$ است. پس هرچه a بزرگترشود تاج مرتفعتر و باریکتر خواهد شد. درحد وقتی $a \to \infty$ تاج بی‌نهایت مرتفع می‌شود ولی وسعت آن صفر خواهد شد.

مساحت $= \frac{1}{2}$ طول $\times$ قاعده $= \frac{1}{2}\frac{a}{\pi}\frac{2\pi}{a} = 1$



شکل ۵ — ۳. تابع دلتا را می‌توان به صورت حد $\sin a(x-y)/\pi(x-y)$ وقتی $a \to \infty$ نشان داد.

که مستقل از a است. حال تاجهای مرتبهٔ دوم معادلهٔ (۵ — ۳۳۵) را بررسی می‌کنیم. اینها با مساحت زیر تاج اصلی به قسمی ترکیب می‌شوند که سطح زیر کل منحنی (۵ — ۳۳۵) دقیقاً برابر یک شود. درواقع،

$$\lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s|x|} \frac{\sin ax}{\pi x}\, dx = \lim_{s\to 0} \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{a}{s} = 1 \qquad (۳۳۶ — ۵)$$

به‌ازای هرمقدارثابت متناهی $a > 0$. توجه کنیدکه‌دورترین تاج از $x = y$ دامنه‌اش کوچکتراست، زیرا این‌دامنه بایدبه‌صورت $1/(x-y)$ مستهلک شوند. ازطرف دیگرفاصله تا k امین تاج بعدی برابر است با

$$x - y = \frac{(2k-1)\pi}{2a} \qquad (۳۳۷ — ۵)$$

بنابراین وقتی a بزرگ می‌شود، تاج k ام بطرف نقطهٔ $x = y$ حرکت‌می‌کند. درحد $a = \infty$ تمام

منحنی(۵ــ ۳۳۵) در $y = x$ متمرکز می‌شوند . نتیجهٔ حاصل عبارتست از :

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases} \qquad (۵-۳۳۸)$$

و باتوجه به معادلهٔ (۵ ــ ۳۳۶) ، به ازای هر $0 < \epsilon$ ،

$$\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta(x-y)\,dy = 1 \qquad (۵-۳۳۹)$$

بدیهی است که معادلهٔ (۵ ــ ۳۳۹) حالت زیر را نیز دربر می‌گیرد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\,dy = 1 \qquad (۵-۳۴۰)$$

علاوه براین ، چون

$$\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} = \frac{\sin a(y-x)}{\pi(y-x)} \qquad (۵-۳۴۱)$$

درنتیجه

$$\delta(x-y) = \delta(y-x) \qquad (۵-۳۴۲)$$

تابع زوج تعریف شده در معادلهٔ (۵ ــ ۳۳۱) بنام تابع دلتای دیراک معروف است ، که درواقع یک تابع نیست ، باوجود این در بسیاری از خواص توابع واقعی صدق می‌کند .

مهمترین و درواقع خاصیت اصلی تابع دلتا رفتار آن در زیر علامت انتگرال است . این تابع تنها یک مقدار انتگراند را اختیار می‌کند . مثلاً" معادلهٔ (۵ ــ ۳۳۲) به صورت زیرنوشته می‌شود

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(y)\,\delta(x-y)\,dy = A(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\,dy = A(x) \qquad (۵-۳۴۳)$$

که درآن از معادلات (۵ ــ ۳۳۸) و (۵ ــ ۳۳۹) استفاده شده است .

۵ ــ ۱۶ . شرایط به‌کارگیری تبدیل فوریه

شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریهٔ $A(x)$ رامی‌توان چنین‌بیان‌کرد : اگر $A(x)$ درفاصلهٔ $-\infty \leq x \leq +\infty$ در شرایط دیریکله صدق کند . (بخش ۵ ــ ۱۰) ، و علاوه براین

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|\,dx \leq M < \infty \qquad (۵-۳۴۴)$$

آن‌گاه

$$\tilde{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (۵-۳۴۵)$$

به ازای هر عدد حقیقی k وجود دارد . علاوه براین $\bar{A}(k)$ کراندار است زیرا

$$|\bar{A}(k)| \leq |\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\,dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|\,dx \leq M < \infty \qquad (۵-۳۴۶)$$

و می‌توان نشان داد که تابع $\bar{A}(k)$ بطور یکنواخت پیوسته است، $-\infty < k < +\infty$. همچنین می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{k\to\infty} \bar{A}(k) = 0 \qquad (۵-۳۴۷)$$

که به " لم ریمان ــ لبگ" مشهور است . قضیهٔ وارون برای معادلهٔ (۵ ــ ۳۴۵) به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k)e^{ikx}\,dk = \begin{cases} A(x) & \text{اگر } A(x) \text{ در } x \text{ پیوسته باشد} \\ \tfrac{1}{2}\{A(x+0)+A(x-0)\} & \text{اگر } A(x) \text{ در } x \text{ انفصال متناهی داشته باشد} \end{cases} \qquad (۵-۳۴۸)$$

چون تعداد نقاط انفصال $A(x)$ حداکثر متناهی است (بنا به فرض) ، دیده می‌شود که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k)e^{ikx}\,dk \qquad (۵-۳۴۹)$$

همه جا با $A(x)$ برابر است مگر در تعداد متناهی نقطه .

اگر

$$\bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (۵-۳۵۰)$$

و

$$A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k)e^{ikx}\,dk \qquad (۵-۳۵۱)$$

آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{A}(k)|^2\,dk \qquad (۵-۳۵۲)$$

معادلهٔ (۵ ــ ۳۵۲) را به صورت مناسبتر زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|^2\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^*(x)A(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}^*(n)e^{-inx}\,dn\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(k)e^{ikx}\,dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}^*(n)\bar{A}(k)\,\delta(k-n)\,dk\,dn \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{A}(k)|^2\,dk
\end{aligned} \qquad (۵-۳۵۳)$$

۵ — ۱۷ . تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه

تبدیل سینوسی فوریهٔ تابع $A(x)$ به صورت

$$\bar{A}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{A}(x) \sin kx \, dx \qquad (۵-۳۵۴)$$

تعریف می‌شود و قضیهٔ وارون متناظر برابر است با

$$A(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{A}_s(k) \sin kx \, dk \qquad (۵-۳۵۵)$$

همین‌طور، تبدیل کسینوس فوریهٔ تابع $A(x)$ به صورت

$$\bar{A}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(x) \cos kx \, dx \qquad (۵-۳۵۶)$$

تعریف می‌شود و قضیهٔ وارون آن برابر است با :

$$A(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{A}_c(k) \cos kx \, dk \qquad (۵-۳۵۷)$$

به‌شکل کاملاً" متقارن این فرمولها‌توجه کنید وبه یاد داشته باشیدکه‌معادلات (۵ —۳۵۴) و(۵ — ۳۵۶)رفتار $A(x)$ رافقط برای $0 \leq x \leq +\infty$ نشان‌می‌دهد.اگر ابتدا$A(x)$فقط برای فاصلهٔ $0 \leq x \leq +\infty$ داده‌شود،در آن‌صورت $A(x)$ را می‌توان به فاصلهٔ $-\infty \leq x \leq 0$ به صورت یک تابع زوج یا فرد از x تعمیم داد :

$$A(x) = A(-x) \qquad (۵-۳۵۸)$$

$$A(x) = -A(-x) \qquad (۵-۳۵۹)$$

وبه‌این‌ترتیب‌بسط $A(x)$ رابرتمام‌محورحقیقی $-\infty \leq x \leq +\infty$ به‌دست‌می‌آوریم. حال‌توجه کنیدکه

$$\bar{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx} \, dx \qquad (۵-۳۶۰)$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\bar{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)(\cos kx - i \sin kx) \, dx \qquad (۵-۳۶۱)$$

اگر معادلهٔ (۵ — ۳۵۸) برقرار باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \sin kx \, dx = 0 \qquad (۵-۳۶۲)$$

زیرا انتگرال یک تابع فرد روی یک فاصلهٔ متقارن صفر است . همچنین

$$\bar{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \cos kx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(x) \cos kx \, dx \qquad (۳۶۳-۵)$$

زیرا انتگرال یک تابع زوج روی یک فاصلهٔ متقارن دو برابر مقدار انتگرال روی نصف آن فاصله است . و این نشان می‌دهد که وقتی $A(x)$ یک تابع زوج است ، تبدیل مختلط فوریهٔ آن حقیقی است و با تبدیل کسینوس فوریهٔ آن برابر است .

$$\bar{A}(k) = \bar{A}_c(k) \qquad A(x) = A(-x) \qquad (۳۶۴-۵)$$

همین‌طور ، اگر $A(x)$ یک تابع فرد از x باشد به‌قسمی‌که معادلهٔ (۵ — ۳۵۹) برقرارباشد ، آن‌گاه

$$\bar{A}(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \sin kx \, dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(x) \sin kx \, dx \qquad (۳۶۵-۵)$$

زیرا انتگراند معادلهٔ (۵ — ۳۶۵) نیز زوج است ، یعنی ، برابر است با حاصلضرب توابع فرد از x . بنابراین اگر $A(x)$ یک تابع فرد از x باشد ،

$$\bar{A}(k) = -i\bar{A}_s(k) \qquad A(x) = -A(-x) \qquad (۳۶۶-۵)$$

بیان می‌کند که تبدیل مختلط فوریهٔ $A(x)$ برابر i— در تبدیل سینوسی فوریهٔ $A(x)$ است .

اگر تابع دلخواه $A(x)$ مفروض باشد ، دوحالت امکان‌پذیراست . یکی این‌که تبدیل فوریهٔ مختلط $A(x)$ را مستقیما" محاسبه کنیم ، یا این که ابتدا $A(x)$ را به دو جزٔ زوج و فرد تفکیک کرده ، سپس تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه را برای هریک از این دو جزٔ به‌دست آوریم . یعنی ، با داشتن $A(x)$ ، فورا" می‌توانیم $\bar{A}(k)$ را محاسبه کنیم ،

$$A(x) = E(x) + O(x) \qquad (۳۶۷-۵)$$

که در آن

$$E(x) = \tfrac{1}{2}\{A(x) + A(-x)\} \qquad (۳۶۸-۵)$$

$$O(x) = \tfrac{1}{2}\{A(x) - A(-x)\} \qquad (۳۶۹-۵)$$

درنتیجه

$$\bar{A}(k) = \bar{E}_c(k) - i\bar{O}_s(k) \qquad (۳۷۰-۵)$$

و قضیهٔ پارسوال (۵ — ۳۵۲) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\bar{E}_c^2(k) + \bar{O}_s^2(k)] \, dk \qquad (۳۷۱-۵)$$

۵ ــ ۱۸ . تبدیلات فوریه در فضاهای n بعدی

تبدیل فوریه را می‌توان به آسانی در فضاهای n بعدی تعمیم داد . مثلاً"

$$\bar{A}(k_1,k_2,\ \ldots\ ,k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n A(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n) e^{-i(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)} \qquad (۵-۳۷۲)$$

قضیهٔ وارون که متناظر معادلهٔ (۵ ــ ۳۷۲) است به صورت زیر نوشته می‌شود ،

$$A(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \bar{A}(k_1,\ \ldots\ ,k_n) e^{i(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)} \qquad (۵-۳۷۳)$$

و برای معادلات (۵ ــ ۳۷۲) و (۵ ــ ۳۷۳) داریم :

$$\bar{A}(\mathbf{k}) = \int A(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dV_x, \qquad (۵-۳۷۴)$$

و

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \bar{A}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dV_k \qquad (۵-۳۷۵)$$

می‌توان نشان داد که تابع دلتای دیریکله در فضای n بعدی عبارت است از :

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\, dV_k \qquad (۵-۳۷۶)$$

که در آن

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ \infty & \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases} \qquad (۵-۳۷۷)$$

و

$$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, dV_y = 1 \qquad (۵-۳۷۸)$$

باتوجه به این‌که

$$\int \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, dV_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_n\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (۵-۳۷۹)$$

تابع دلتای دیریکله در خاصیت (۵ ــ ۳۴۳) صدق می‌کند یعنی

$$\int A(\mathbf{y})\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, dV_y = A(\mathbf{x}) \qquad (۵-۳۸۰)$$

۵ ــ ۱۹ . خواص تبدیلات فوریه

چند خاصیت مهمتر تبدیل فوریه را در این بخش فهرست می‌کنیم .

قضیهٔ پیچش

پیچش دو تابع $A(x)$ و $B(x)$ به‌وسیلهٔ انتگرال پیچش زیر داده می‌شود:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y)B(y)\,dy \tag{۵ـ۳۸۱}$$

با فرض

$$z = x - y \tag{۵ـ۳۸۲}$$

$$dz = -dy \tag{۵ـ۳۸۳}$$

که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z)B(x-z)\,dz \tag{۵ـ۳۸۴}$$

فرض کنید

$$\bar{C}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(x)e^{-ikx}\,dx \tag{۵ـ۳۸۵}$$

$$\bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\,dx \tag{۵ـ۳۸۶}$$

$$\bar{B}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)e^{-ikx}\,dx \tag{۵ـ۳۸۷}$$

به ترتیب تبدیلات فوریهٔ $C(x)$، $A(x)$ و $B(x)$ می‌باشد. قضیهٔ پیچش بیان می‌کند که اگر

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y)B(y)\,dy \tag{۵ـ۳۸۸}$$

آن‌گاه

$$\bar{C}(k) = \bar{A}(k)\bar{B}(k) \tag{۵ـ۳۸۹}$$

معادلهٔ (۵ ـ ۳۸۹) را به‌صورت مناسب زیر می‌توان نوشت:

$$\bar{C}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} A(x-y)B(y)\,dy \tag{۵ـ۳۹۰}$$

و با فرض

$$z = x - y \tag{۵ـ۳۹۱}$$

و

$$dz = dx \tag{۵ـ۳۹۲}$$

معادلهٔ (۵ ـ ۳۹۰) چنین نوشته می‌شود

$$\bar{C}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(y+z)}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} A(z)B(y)\, dy \qquad (۵-۳۹۳)$$

و اگر بتوانیم ترتیب انتگرال‌گیری را تعویض کنیم ، از معادلهٔ (۵ ــ ۳۹۳) نتیجه می‌شود

$$\bar{C}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z)e^{-ikz}\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} B(y)e^{-iky}\, dy \qquad (۵-۳۹۴)$$

سپس با استفاده از معادلات (۵ ــ ۳۸۶) و (۵ ــ ۳۸۷) داریم

$$\bar{C}(k) = \bar{A}(k)\bar{B}(k) \qquad (۵-۳۹۵)$$

قضیهٔ پیچش انتگرال‌گیری در فضای x را به حاصلضرب در فضای k تبدیل می‌کند .

تبدیلات فوریهٔ مشتق

در تبدیل فوریهٔ $A(x)$ از نماد مختصر زیر استفاده می‌کنیم :

$$F\{A(x)\} = \bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\, dx \qquad (۵-۳۹۶)$$

با استفاده ازاین نمادبسیاری از خواص تبدیلات فوریه رامی‌توان به‌صورت فشرده نمایش داد . مثلاً" اگر انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial x}\, e^{-ikx}\, dx \qquad (۵-۳۹۷)$$

را با روش جزء به جزء محاسبه کنیم نتیجه می‌شود ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial x}\, e^{-ikx}\, dx = A(x)e^{-ikx}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + ik\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)e^{-ikx}\, dx \qquad (۵-۳۹۸)$$

و اگر

$$\lim_{|x|\to\infty} A(x) = 0 \qquad (۵-۳۹۹)$$

آن‌گاه

$$F\left\{\frac{\partial A}{\partial x}\right\} = ikF\{A(x)\} \qquad (۵-۴۰۰)$$

همین‌طور ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\, e^{-ikx}\, dx = \frac{\partial A}{\partial x}\, e^{-ikx}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + ik\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial x}\, e^{-ikx}\, dx \qquad (۵-۴۰۱)$$

که باتوجه به معادلهٔ (۵ ــ ۳۹۸) آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{-ikx}\, dx = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + ikA\right) e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + (ik)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx}\, dx \qquad (۴۰۲-۵)$$

و اگر

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{\partial A}{\partial x} + ikA(x)\right] = 0 \qquad (۴۰۳-۵)$$

آن‌گاه

$$F\left\{\frac{\partial^n A}{\partial x^2}\right\} = (ik)^2 F\{A(x)\} \qquad (۴۰۴-۵)$$

بطورکلی، با استفاده از انتگرال جزء به جزء داریم

$$F\left\{\frac{\partial^n A}{\partial x^n}\right\} = \left[\frac{\partial^{n-1} A}{\partial x^{n-1}} + ik\frac{\partial^{n-2} A}{\partial x^{n-2}} + (ik)^2 \frac{\partial^{n-3} A}{\partial x^{n-3}} + \cdots + (ik)^{n-1} A\right] e^{-ikx} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + (ik)^n F\{A\} \qquad (۴۰۵-۵)$$

درنتیجه اگر A و $n-1$ مشتق اول آن در $x = \pm\infty$ صفر شوند،

$$F\left\{\frac{\partial^n A}{\partial x^n}\right\} = (ik)^n F\{A(x)\} \qquad (۴۰۶-۵)$$

توجه کنید که مشتق‌گیری در فضای x به حاصلضرب توان مناسبی از k در فضای k تبدیل می‌شود.

تبدیل فوریهٔ یک انتگرال نامعین

انتگرال نامعین زیر را درنظر بگیرید

$$\int^x A(s)\, ds \qquad (۴۰۷-۵)$$

داریم

$$\frac{d}{dx}\int^x A(s)\, ds = A(x) \qquad (۴۰۸-۵)$$

بنابراین،

$$F\left\{\frac{d}{dx}\int^x A(s)\, ds\right\} = ikF\left\{\int^x A(s)\, ds\right\} = F\{A(x)\} \qquad (۴۰۹-۵)$$

درنتیجه

$$F\left\{\int^{x} A(s)\,ds\right\} = \frac{1}{ik}F\{A(x)\} \qquad (۴۱۰-۵)$$

به شرط آن‌که $k \neq 0$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(s)|\,ds < \infty \qquad (۴۱۱-۵)$$

از معادلهٔ (۵ ــ ۴۱۰) دیده می‌شود که انتگرال‌گیری در فضای x با تقسیم بر ik درفضای k تبدیل می‌شود .

۵ ــ ۲۰ . تعبیر فیزیکی تبدیل فوریه

تبدیل فوریهٔ

$$\bar{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۴۱۲-۵)$$

و قضیهٔ وارون

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (۴۱۳-۵)$$

را درنظر بگیرید .

بطورکلی، $\bar{A}(\omega)$ یک تابع مختلط از ω است و بنابراین آن را می‌توان به صورت قطبی زیر نوشت

$$\bar{A}(\omega) = r(\omega)e^{-i\phi(\omega)} \qquad (۴۱۴-۵)$$

در معادلهٔ (۵ ــ ۴۱۴) ،

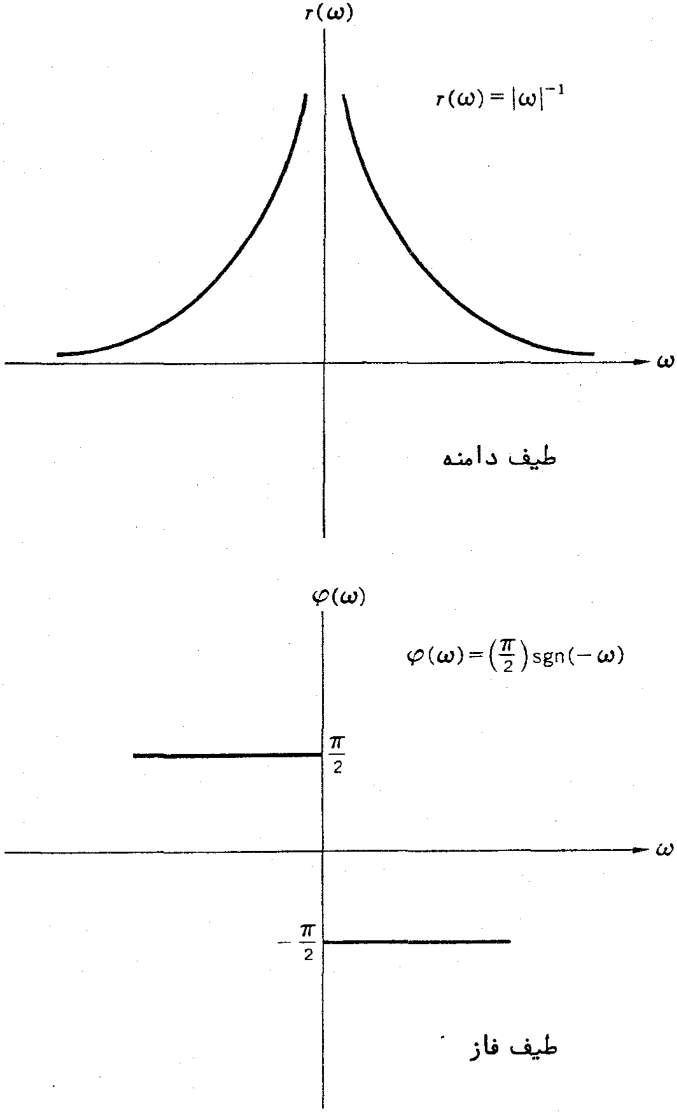
$$r(\omega) = |\bar{A}(\omega)| \qquad (۴۱۵-۵)$$

و

$$\varphi(\omega) = -\arg[\bar{A}(\omega)] \qquad (۴۱۶-۵)$$

توابعی حقیقی از ω هستند .

فرض کنید t معرف زمان و ω معرف فرکانس زاویه‌ای، $\omega = 2\pi f$، باشد . اگر نمودار تابع را با $r(\omega)$ به‌عنوان عرض و فرکانس زاویه‌ای ω را به‌عنوان طول رسم‌کنیم ، منحنی‌حاصل را "طیف دامنه" $A(t)$ گویند . بطورکلی ، $r(\omega)$ تابعی پیوسته از ω است و بنابراین طیف دامنهٔ یک تابع که روی فاصلهٔ نامتناهی $-\infty \leq t \leq +\infty$ تعریف‌شده‌باشد"طیف‌پیوسته" نامیده‌می‌شود . یک نمودارمشابه $\varphi(\omega)$ رادرمقابل ω "طیف فاز" $A(t)$ گوییم . این‌نمودارنیز یک طیف پیوسته است .



شکل ۵ — ۴. فاز و دامنهٔ طیف . $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

این نتایج با آنچه درارتباط با معادلهٔ (۵ — ۲۳۶) بحث شد متفاوت است . در آن جا دیدیم تابعی که روی یک فاصلهٔ متناهی $[0,a]$ تعریف شده دارای طیف فاز و دامنهٔ گسسته است .

قضیهٔ وارون (۵ — ۴۱۳) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r(\omega)e^{i[\omega t-\varphi(\omega)]}\,d\omega \qquad (۵-۴۱۷)$$

ونشان می‌دهدکه $A(t)$ حدفوقانی نوسانات هارمونیک ساده تغییرات پیوسته دامنهٔ $r(\omega)$ ، فاز $\varphi(\omega)$ و فرکانس زاویه‌ای ω است .

فرض کنید انرژی کل سیگنال $A(t)$ برابر باشد با

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(t)|^2\,dt \qquad (۵-۴۱۸)$$

از قضیهٔ پارسوال (۵ – ۳۵۳) داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r^2(\omega)\,d\omega \qquad (۵-۴۱۹)$$

معادلهٔ (۵ – ۳۱۷) تابع $A(t)$ رابه صورت حد فوقانی نوسانات هارمونیک پیوسته نشان می‌دهد ، درصورتی که معادلهٔ (۵ – ۴۱۹) بیان‌می‌کندکه یک نوسان‌کنندهٔ هارمونیک فرکانس زاویه‌ای ω و دامنهٔ $r(\omega)$ به اندازهٔ $r^2(\omega)\,d\omega$ در کل انرژی سیگنال $A(t)$ سهیم است .

۵ – ۲۱ . کاربردهای تبدیل فوریه با برد متناهی

تبدیل فوریه یکی از تواناترین وسایل در ریاضیات کاربردی است ، علت‌اصلی این است که عملیات مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را به ترتیب به ضرب و تقسیم تبدیل می‌کند . در بخش اخیر تعدادکمی ازمسائل فراوانی را که درآنها تبدیل فوریه به‌کار برده می‌شوند یادآورخواهیم شد . کاربردهای دیگر در فصلهای ۶ و ۷ یافت می‌شوند .

مثال ۵ – ۹ : جریانی را که از یک مدار الکتریکی ، مرکب ازیک خودالقاء L ، مقاومت R ، وظرفیت C ، می‌گذرد درنظرمی‌گیریم . این دستگاهها همه بطورسری با یک مولد به ولتاژ $V(t)$ بسته شده‌اند . جریان $I(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند :

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt} \qquad (۵-۴۲۰)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۵ – ۴۲۰) مرکب از دو جمله است :

$$I(t) = I_c(t) + I_{ss}(t) \qquad (۵-۴۲۱)$$

جملهٔ اول $I_c(t)$ در معادلهٔ

$$L\frac{d^2I_c}{dt^2} + R\frac{dI_c}{dt} + \frac{I_c}{C} = 0 \qquad (۵-۴۲۲)$$

وجملهٔ دوم $I_{ss}(t)$ درمعادلهٔ (۵ – ۴۲۰) صدق‌می‌کند . مجموع $I(t)$ درمعادلهٔ (۵ – ۴۲۰)

صدق می‌کند ، زیرا (۵ ــ ۴۲۰) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی است . به‌عبارت‌دیگر ، اگرعملگر A را به صورت زیر تعریف کنیم

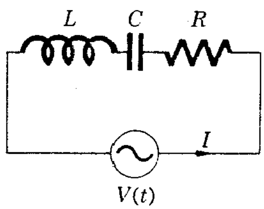
$$A = L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \qquad L, R, C = (\text{ثابت}) \tag{۵ ــ ۴۲۳}$$

در این صورت معادلهٔ (۵ ــ ۴۲۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$A\{I\} = \frac{dV}{dt} \tag{۵ ــ ۴۲۴}$$

و

$$A\{I\} = A\{I_c + I_{ss}\} = A\{I_c\} + A\{I_{ss}\} = \frac{dV}{dt} \tag{۵ ــ ۴۲۵}$$



شکل ۵ ــ ۵. مدار سری با جریان $a-c$.

ولی

$$A\{I_c\} = 0 \tag{۵ ــ ۴۲۶}$$

بنابراین

$$A\{I\} = A\{I_{ss}\} = \frac{dV}{dt} \tag{۵ ــ ۴۲۷}$$

جملهٔ $I_c(t)$ که درمعادلهٔ همگن (۵ ــ ۴۲۲) صدق می‌کند "تابع مکمل" نامیده می‌شود ؛ و جریان گذرایی را نشان می‌دهد که در مسیر بعد از باز یا بستن کلید جریان پیدا می‌کند . جملهٔ $I_{ss}(t)$ انتگرال خاص معادلهٔ (۵ ــ ۴۲۰) نامیده می‌شود ؛ و حالت پایدار جریان را در مسیر ، یعنی جریان در طول لحظات بعد از روشن شدن دستگاه ، نشان می‌دهد .

جریان $I_{ss}(t)$ درطول مسیر باعمل مولد به حرکت درمی‌آید . با استفاده ازتبدیل فوریه آن را نسبت به $I_{ss}(t)$ حل می‌کنیم . تابع مکمل $I_c(t)$ قبلاً" از روش دیگر محاسبه شده است ، و در این جا ازآن بحث نخواهیم کرد .

معادلهٔ (۵ ــ ۴۲۰) را در $e^{-i\omega t}$ ضرب کرده و ازطریق جزء به جزء نسبت به زمان از

$t=-\infty$ تا $t=+\infty$ انتگرال می‌گیریم. با مراجعه به معادله ۶(۵ – ۴۰۲) دیده می‌شود که باید کمیتهای زیر را به ازای $t \to \pm\infty$ بررسی کنیم .

$$\left(\frac{\partial I}{\partial t} + i\omega I\right) e^{-i\omega t} \qquad (۵-۴۲۸)$$

و

$$I(t)e^{-i\omega t} \qquad (۵-۴۲۹)$$

قابل توجه است که عبارات (۵ – ۴۲۸) و (۵ – ۴۲۹) در $t \to \pm\infty$ وقتی ω عدد حقیقی است صفر نمی‌شوند . حالت پایدار جریان و مشتقات آن نسبت به زمان به ازای $t \to \pm\infty$ صفر نمی‌شوند ، تا وقتی مولد از ابتدا تا انتهای زمان مشغول کار است .

یک راه رهایی از این بن‌بست این است که فرض کنیم جریان از زمان $t=-T$ در گذشته وصل شده ، و در زمانی طولانی مثلاً $t=+T$ قطع خواهد شد . در این حالت تمام جریانهای گذرا برای $t \ll T$ میرا خواهند شد و برای $t \gg -T$ جریانی وجود نخواهد داشت. زیرا کلید تا $t=-T$ باز باقی می‌ماند . درنتیجه (۵ – ۴۲۸) و (۵ – ۴۲۹) به ازای $t \to \pm\infty$ صفر خواهند شد . و معادله (۵ – ۴۲۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left[L(i\omega)^2 + (i\omega)R + \frac{1}{C}\right]\bar{I}(\omega) = i\omega\bar{V}(\omega) \qquad (۵-۴۳۰)$$

که در آن

$$\bar{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۵-۴۳۱)$$

و

$$\bar{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۵-۴۳۲)$$

اگر نسبت به $\bar{I}(\omega)$ حل کنیم داریم

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} \qquad (۵-۴۳۳)$$

فرض کنید

$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (۵-۴۳۴)$$

در این صورت در مختصات قطبی می‌توان نوشت :

$$R + i(X_L - X_C) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\, e^{i\tan^{-1}(X_L - X_C)/R} \qquad (۵-۴۳۵)$$

پس معادلهٔ (۵ــ ۴۳۳) به صورت

$$\bar{I}(\omega) = \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{Z}(\omega)} e^{-i\phi(\omega)} \qquad (۴۳۶-۵)$$

درمی‌آید که در آن

$$\bar{Z}(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (۴۳۷-۵)$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (۴۳۸-۵)$$

دانشجویان می‌دانندکه $\bar{Z}(\omega)$ تأخیردر جریان سری است و X_L و X_C به ترتیب واکنشهای القایی و ظرفیتی است . انتقال فاز در جریان با $\varphi(\omega)$ داده می‌شود . حالت پایدار عکس‌العمل درحوزهٔ زمان با استفاده ازقضیهٔ وارون (۵ــ ۴۱۳) درمعادلهٔ (۵ــ ۴۳۶) به‌دست می‌آید . نتیجه عبارت است از:

$$I_{ss}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{Z}(\omega)} e^{i[\omega t - \varphi(\omega)]} \, d\omega \qquad (۴۳۹-۵)$$

ازمعادلهٔ (۵ــ ۴۳۹) معلوم می‌شودکه چطورطیف مولد $\bar{V}(\omega)$ با تأخیر وانتقال فازجریان ترکیب می‌شود یا جریان حالت پایدار $I_{ss}(t)$ را نتیجه دهد .

مثال ۵ــ ۱۰: طیف یک ضربهٔ مستطیلی . فرض کنید $A(t)$ یک ضربهٔ مستطیلی بادوام به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \qquad (۴۴۰-۵)$$

طیف $A(t)$ عبارت است از:

$$\bar{A}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} \, dt = T \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \qquad (۴۴۱-۵)$$

اگر $\bar{A}(\omega)$ را به عنوان تابعی از ω رسم کنیم ، دیده می‌شود که $\bar{A}(\omega)$ دارای مقدار تاج T به مرکز $\omega = 0$ است . این تاج مرکزی محور ω را در $\omega = \pm 2\pi/T$ قطع می‌کند .

وقتی T تا بی‌نهایت صعود کند ، ضربه برحسب زمان افزایش پیدامی‌کند. درنتیجه ، تاج مرکزی درطیف دامنهٔ ضربه مرتفعتر و باریکتر خواهد شد . بیشترانرژی ضربه دراین تاج مرکزی قرارمی‌گیرد . بنابراین هرچه ضربه بادوامتر وعرض نوارطیف باریکتر باشد ، انرژی آن به‌داخل متمرکزتر می‌شود (شکل ۵ــ ۶) . اگر عرض نوار ضربهٔ $\Delta\omega$ را برابر فراوانی زاویه‌ای فاصله‌ای درنظر بگیریم که ماکزیمم مرکزی را در $\omega = 0$ از اولین صفر در $\omega = 2\pi/T$ جدا می‌سازد، آن‌گاه

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{۴۴۲ − ۵}$$

باوجوداین، T طول زمان ضربه رانشان‌می‌دهد ودرنتیجه می‌نویسیم $T = \Delta\tau$ ومعادلهٔ (۵ −۴۴۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود .

$$\Delta\omega\, \Delta\tau = 2\pi \tag{۴۴۳ − ۵}$$

یا

$$\Delta f\, \Delta\tau = 1 \tag{۴۴۴ − ۵}$$

معادلهٔ (۵ − ۴۴۳) و (۵ − ۴۴۴) رابطه‌ای بین‌طول ، زمان ، ضربه وعرض نوارفراوانیش فراهم می‌سازد .

این روابط طول ، زمان ، ضربه و عرض نوارفراوانی به‌صورت‌کلی‌تری بیان می‌کنندکه شکل یک ضربه وشکل طیف دامنه‌اش مستقل ازیکدیگرنیستند . درمکانیک کوانتم روابطی‌مانندمعادلهٔ (۵ − ۴۴۴) مبنای اصول عدم قطعیت قرار می‌گیرند . اندازهٔ مقدارثابت سمت راست معادلهٔ (۵ − ۴۴۴) به دقت جزئیات تعریف و عرض نوار یک ضربه بستگی دارد .

۵ − ۲۲ . تبدیل لاپلاس

تبدیل فوریهٔ

$$\bar{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{۴۴۵ − ۵}$$

و قضیهٔ وارون آن را درنظر بگیرید

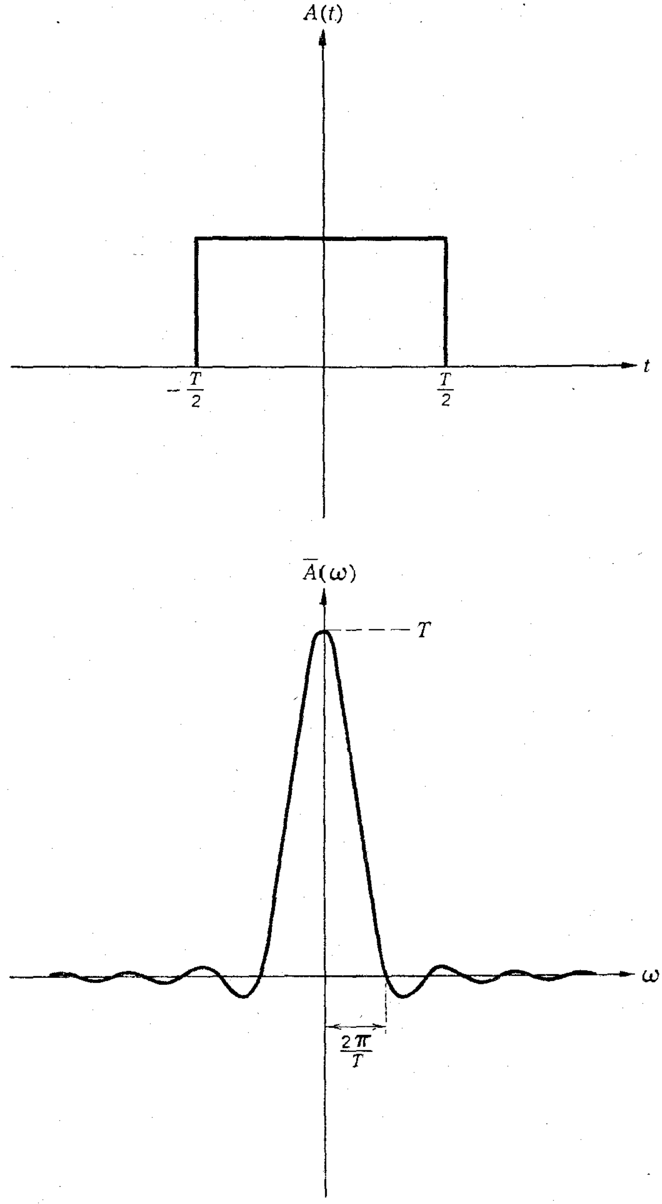
$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \tag{۴۴۶ − ۵}$$

تبدیل فوریهٔ (۵ − ۴۴۵) فقط برای توابعی مانند $A(t)$ وجود دارد که در شرط

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |A(t)|\, dt \leq M < \infty \tag{۴۴۷ − ۵}$$

صدق کنند . این مطلب قبلاً" در بخش ۵ − ۱۶ تذکر داده شد . حتی دربیشترحالتهای ساده ، $A(t) = 1$ یا $A(t) = e^{i\omega t}$، انتگرال (۵ − ۴۴۷) متقارب‌نیست . پس ، برای این‌توابع نمی‌توانیم نامساوی (۵ − ۳۴۶) رابرای برقراری تقارب (۵ − ۴۴۵) به‌کاربریم . درنتیجه این توابع ساده دارای تبدیلات فوریه به معنای کلاسی نیستند . البته در تبدیل فوریهٔ $A(t)$ می‌توان گفت که

$$2\pi\, \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \tag{۴۴۸ − ۵}$$



شکل ۵ ــ ۶. دوام یک ضربه و عرض نوار طیف فوریه آن رابطهٔ عکس دارند.

ولی، یک نتیجهٔ ضروری مانند معادلهٔ (۵ ــ ۴۴۸) باید ازنظر ریاضی موردتوجه بیشتری قرار گیرد. این مطلب را خواهیم پذیرفت که تبدیلات فوریه کلاسیک فقط وقتی تعریف می‌شوند که

انتگرال (۵ — ۴۴۵) متقارب‌باشد ، ودرنتیجه‌هرگونه تناقضی رادرارتباط بامعادلهٔ (۵ — ۴۴۸) مرتفع می‌سازیم .

مشکل مربوط به $A(t) = 1$ و $A(t) = e^{i\omega t}$ را می‌توان به‌صورت زیر حل کرد . به‌عنوان قدم اول ، درنظر داریم که اغلب فرآیندهای فیزیکی در یک زمان معینی شروع می‌شوند ، که آن را می‌توان $t = 0$ اختیارکرد.پس‌فاصلهٔ‌زمانی‌موردنظرعبارت‌است‌از $0 \leq t \leq \infty$ نه $-\infty \leq t \leq +\infty$. حال‌تابع $A(t)$ فقط برای‌فاصلهٔ $0 \leq t \leq +\infty$ تعریف شده‌است .می‌خواهیم‌تبدیل‌فوریهٔ (۵ — ۴۴۵) تابع $A(t)$ را به‌دست آوریم ولی این کار را وقتی می‌توانیم انجام دهیم که تابع $A(t)$ به ازای مقادیر منفی زمان معلوم باشد . چون $A(t)$ یک پدیدهٔ فیزیکی را نشان می‌دهد که در زمان $t = 0$ شروع شده است ، می‌توانیم توسیع $A(t)$ را برای مقادیر منفی زمان به‌صورت $A(t) = 0$ ، $t < 0$ تعریف کنیم . پس

$$A(t) = \begin{cases} A(t) & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{۴۴۹ — ۵}$$

در این صورت معادلهٔ (۵ — ۴۴۵) چنین نوشته می‌شود

$$\bar{A}(\omega) = \int_0^\infty A(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{۴۵۰ — ۵}$$

ولی معادلهٔ (۵ — ۴۵۰) نیز متقارب نیست زیرا

$$A(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{۴۵۱ — ۵}$$

و

$$A(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{۴۵۲ — ۵}$$

برای رفع این مشکل می‌توانیم بجای $A(t)$ خانوادهٔ کاملی ازتوابع را به‌صورت زیردرنظر بگیریم

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} A(t) & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{۴۵۳ — ۵}$$

که درآن پارامتر حقیقی σ در شرط $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ صدق می‌کند .تبدیل فوریهٔ معادلهٔ (۵ — ۴۵۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}[e^{-\sigma t} A(t)]\, dt \tag{۴۵۴ — ۵}$$

در معادلهٔ (۵ — ۴۵۴) اندیس σ در $\bar{A}_\sigma(\omega)$ نشان می‌دهد که این تبدیل فوریه همان‌طورکه

به ω بستگی‌دارد به σ نیز وابسته‌است . حال رابطهٔ (۵ ــ ۴۵۴) برای هردومعادلهٔ (۵ ــ ۴۵۱) و (۵ ــ ۴۵۲) متقارب است . برای حالت (۵ ــ ۴۵۱) داریم

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\omega)t}\,dt = \frac{-e^{-(\sigma+i\omega)t}}{\sigma+i\omega}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} \qquad (۴۵۵-۵)$$

درنتیجه

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \frac{1}{\sigma+i\omega} \qquad (۴۵۶-۵)$$

درصورتی‌که از معادلهٔ (۵ ــ ۴۵۲) نتیجه می‌شود

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-\sigma t}\,dt = \frac{-1}{\sigma}\,e^{-\sigma t}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\sigma} \qquad (۴۵۷-۵)$$

بطورکلی ، معادلهٔ (۵ ــ ۴۵۴) برای هرتابع زمان مانند $A(t)$ که سریعتراز e^{at}، $a>0$ نسبت به زمان بزرگ نشود وقتی $t\to\infty$ متقارب‌خواهد بود ،البته به شرط‌آن‌که

$$\sigma \geq \sigma_0 > a > 0 \qquad (۴۵۸-۵)$$

باتوجه به مطلب زیرمی‌توان‌دیدکه این‌حالت واقعا" پیش می‌آید : فرض کنید $A(t)$ برهرفاصلهٔ محدود قسمت به قسمت پیوسته باشد و

$$|A(t)| \leq Me^{at} \qquad (۴۵۹-۵)$$

به ازای مقداری از ثابتهای M و a . در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T e^{-i\omega t}\,[e^{-\sigma t}A(t)]\,dt\right| &\leq \int_0^T e^{-\sigma t}|A(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^T Me^{-(\sigma-a)t}\,dt \leq \int_0^\infty Me^{-(\sigma-a)t}\,dt = \frac{M}{\sigma-a}\end{aligned} \qquad (۴۶۰-۵)$$

به شرط‌آن‌که

$$\sigma - a > 0 \qquad (۴۶۱-۵)$$

چون معادلهٔ (۵ ــ ۴۶۰) به ازای هر $T>0$ برقرار است و

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}[e^{-\sigma t}A(t)]\,dt \leq \left|\int_0^\infty e^{-i\omega t}[e^{-\sigma t}A(t)]\,dt\right| \qquad (۴۶۲-۵)$$

نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۵ ــ ۴۵۴) متقارب است و درواقع مطلقا" متقارب است . می‌توان نشان داد که تقارب معادلهٔ (۵ ــ ۴۵۴) به‌ازای هر مقدار ثابت σ_0 که در شرط زیر صدق کند یکنواخت است .

$$\sigma \geq \sigma_0 > a \qquad (۴۶۳-۵)$$

با استفاده از معادلات (۵ ــ ۴۵۴) و (۵ ــ ۴۶۰) نتیجه می‌شود

$$\lim_{\sigma\to\infty} \bar{A}_\sigma(\omega) = 0 \qquad (۵-۴۶۴)$$

که همواره برقرار است درصورتی که معادلهٔ (۵ ــ ۴۵۴) برای هر مقدار متناهی$\sigma = \sigma_0$ متقارب باشد، حتی اگر نامساوی (۵ ــ ۴۵۹) مورداستفاده قرار نگیرد.

به خاطر دارید که به ازای$t < 0$، $A(t) = 0$ و

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}[e^{-\sigma t}A(t)]\,dt \qquad (۵-۴۶۵)$$

با استفاده از قضیهٔ وارون (۵ ــ ۳۴۸) برای تبدیلات فوریه نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}_\sigma(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\sigma t}A(t) & \text{اگر } A(t) \text{ در } t \text{ پیوسته باشد} \\ \tfrac{1}{2}e^{-\sigma t}\{A(t+0) + A(t-0)\} & \text{اگر } A(t) \text{ در } t \text{ انفصال متناهی داشته باشد} \end{cases} \qquad (۵-۴۶۶)$$

همچنین معادلات (۵ ــ ۴۶۵) و (۵ ــ ۴۶۶) رامی‌توان با کمی‌تغییر به‌صورت زیرنوشت:

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\omega)t}A(t)\,dt \qquad (۵-۴۶۷)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}_\sigma(\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}\,d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(t) & \text{اگر } A(t) \text{ در } t \text{ پیوسته باشد} \\ \tfrac{1}{2}\{A(t+0) + A(t-0)\} & \text{اگر } A(t) \text{ در } t \text{ انفصال متناهی داشته باشد} \end{cases} \qquad (۵-۴۶۸)$$

کمیت$\sigma + i\omega$درهر دومعادلهٔ(۵ ــ ۴۶۷) و (۵ ــ ۴۶۸) ظاهرمی‌شود. بخصوص، واضح است که $\bar{A}_\sigma(\omega)$ به σ و ω بطور دلخواه وابسته نیست بلکه این ارتباط فقط به صورت زیر است:

$$s = \sigma + i\omega \qquad (۵-۴۶۹)$$

یعنی دنباله دامنه‌های طیف $\bar{A}_\sigma(\omega)$ متناظر بامقادیر مختلف σ به قسمی ترکیب می‌شوندکه آنها را می‌توان به صورت تابعی از یک متغیر تصادفی نشان داد. پس داریم

$$\bar{A}_\sigma(\omega) = \bar{A}(\sigma + i\omega) = \bar{A}(s) \qquad (۵-۴۷۰)$$

ازنامساوی (۵ ــ ۴۶۳) نتیجه می‌شودکه دربحث مربوط به معادلات (۵ ــ ۴۶۷) تا (۵ ــ ۴۶۹) می‌توان فرض کرد، ثابت $= \sigma_0 = \sigma$

در این صورت

$$ds = i\,d\omega \qquad (۵-۴۷۱)$$

درحالی‌که‌حدودانتگرال‌گیری $\omega = -\infty$ و $\omega = +\infty$ به‌ترتیب‌متناظرندبا $s = \sigma_0 - i\infty$ و $s = \sigma_0 + i\infty$. برحسب‌متغیر s معادلات(۵ ــ ۴۶۷)و(۵ ــ ۴۶۸)به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\bar{A}(s) = \int_0^\infty e^{-st} A(t)\, dt \qquad (۵-۴۷۲)$$

و

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \bar{A}(s) e^{st}\, ds \qquad (۵-۴۷۳)$$

که درآن

$$F(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (۵-۴۷۴)$$

اگر $A(t)$ در t انفصال متناهی داشته باشد .

$$F(t) = A(t) \qquad (۵-۴۷۵)$$

اگر $A(t)$ در t پیوسته باشد و

$$F(t) = \tfrac{1}{2}\{A(t+0) + A(t-0)\}$$

مسیر انتگرال‌گیری معادلهٔ (۵ ــ ۴۷۳) درصفحهٔ مختلط s یک‌خط قائم به طول $\sigma = \sigma_0$ است . انتگرال (۵ ــ ۴۷۲) را **تبدیل *لاپلاس*** $A(t)$ و معادلهٔ (۵ ــ ۴۷۳) را قضیهٔ وارون متناظر گویند .

در اصطلاح فیزیک ، تبدیل فوریهٔ

$$\bar{A}(s) = \bar{A}_\sigma(\omega) = \bar{A}(\sigma + i\omega)$$

طیف دامنه در فرکانس ω و سیگنال میرای $e^{-\sigma t}A(t)$ است که در زمان $t = 0$ شروع می‌شود و به $1/e$ مقدار اولیه‌اش در زمان $t = 1/\sigma$ مستهلک می‌شود . قضیهٔ وارون (۵ ــ ۴۶۶) این سیگنال میرا رابه‌عنوان حدفوقانی نوسانات هارمونیک فرکانس ω ودامنهٔ $\bar{A}_\sigma(\omega)$ نشان‌می‌دهد . ازطرف دیگر ، قضیهٔ وارون (۵ ــ ۴۷۳) فقط تابع $A(t)$ را به‌عنوان حد بالای نوسانات هارمونیک فرکانسهای مختلف نشان می‌دهد . دامنهٔ هریک از نوسانات هارمونیک بطور نمایی برحسب زمان افزایش می‌یابد . نرخ رشد به قسمی است که هر دامنه در عاملی از e بعد ازفاصلهٔ زمانی $t = 1/\sigma$ ضرب می‌شود .

۵ ــ ۲۳ . خواص تبدیلات لاپلاس

قضیهٔ پیچش

فرض کنید $A(t)$ و $B(t)$ توابعی باشند که به ازای $t < 0$ متحد با صفرند . انتگرال پیچش (۵ ــ ۳۸۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$C(t) = \int_0^t A(t-\tau)B(\tau)\, d\tau \qquad (۴۷۷-۵)$$

و معادلهٔ (۵ــ ۳۸۴) نتیجه می‌دهد

$$C(t) = \int_0^t A(\tau)B(t-\tau)\, d\tau \qquad (۴۷۸-۵)$$

فرض کنید

$$\bar{C}(s) = \int_0^\infty C(t)e^{-st}\, dt \qquad (۴۷۹-۵)$$

$$\bar{A}(s) = \int_0^\infty A(t)e^{-st}\, dt \qquad (۴۸۰-۵)$$

$$\bar{B}(s) = \int_0^\infty B(t)e^{-st}\, dt \qquad (۴۸۱-۵)$$

به ترتیب تبدیلات لاپلاس $C(t)$ ، $A(t)$ و $B(t)$ باشند. قضیهٔ پیچش برای تبدیلات لاپلاس بیان می‌کند که اگر

$$C(t) = \int_0^t A(t-\tau)B(\tau)\, d\tau \qquad (۴۸۲-۵)$$

آن‌گاه

$$\bar{C}(s) = \bar{A}(s)\bar{B}(s) \qquad (۴۸۳-۵)$$

نتیجه (۵ــ ۴۸۳) را مانند معادلهٔ (۵ــ ۳۸۹) می‌توان به صورت مناسبتر درآورد. بنابراین معادلهٔ (۵ــ ۴۸۳) را در این جا اثبات نمی‌کنیم.

تبدیلات لاپلاس مشتق‌ها

برای تبدیل لاپلاس $A(t)$ صورتهای مختصر زیر را معرفی می‌کنیم

$$L\{A(t)\} = \bar{A}(s) = \int_0^\infty A(t)e^{-st}\, dt \qquad (۴۸۴-۵)$$

باتوجه به این نمادها، بسیاری از خواص تبدیلات لاپلاس بطور ساده درمی‌آیند. مثلاً" اگر انتگرال زیر را از طریق جزء به جزء محاسبه کنیم

$$\int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial t}\, e^{-st}\, dt \qquad (۴۸۵-۵)$$

نتیجه می‌شود،

$$\int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial t} e^{-st}\, dt = A(t)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty A(t)e^{-st}\, dt \qquad (۵-۴۸۶)$$

و اگر

$$\lim_{t\to\infty} A(t)e^{-st} = 0 \qquad (۵-۴۸۷)$$

آن‌گاه

$$L\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\right\} = sL\{A\} - A(0) \qquad (۵-۴۸۸)$$

همین‌طور،

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} e^{-st}\, dt = \frac{\partial A}{\partial t} e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial t} e^{-st}\, dt \qquad (۵-۴۸۹)$$

که با استفاده از معادلهٔ (۵ ـ ۴۸۶) نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} e^{-st}\, dt = \left[\frac{\partial A}{\partial t} + sA(t)\right] e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s^2\int_0^\infty A(t)e^{-st}\, dt \qquad (۵-۴۹۰)$$

و اگر

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + sA(t)\right] e^{-st} = 0 \qquad (۵-۴۹۱)$$

آن‌گاه

$$L\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right\} = s^2L\{A\} - sA(0) - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{t=0} \qquad (۵-۴۹۲)$$

بطورکلی، انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$L\left\{\frac{\partial^n A}{\partial t^n}\right\} = \left[\frac{\partial^{n-1} A}{\partial t^{n-1}} + s\frac{\partial^{n-2} A}{\partial t^{n-2}} + s^2\frac{\partial^{n-3} A}{\partial t^{n-3}} + \cdots + s^{n-1}A(t)\right] e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s^nL\{A\} \qquad (۵-۴۹۳)$$

بنابراین اگر

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{\partial^{n-1} A}{\partial t^{n-1}} + s\frac{\partial^{n-2} A}{\partial t^{n-2}} + s^2\frac{\partial^{n-3} A}{\partial t^{n-3}} + \cdots + s^{n-1}A(t)\right] e^{-st} = 0 \qquad (۵-۴۹۴)$$

آن‌گاه

$$L\left\{\frac{\partial^n A}{\partial t^n}\right\} = s^n L\{A\} - s^{n-1}A(0) - s^{n-2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_0 - s^{n-3}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)_0 - \cdots - s^{(n-1)-k}\left(\frac{\partial^k A}{\partial t^k}\right)_0 - \cdots - \left(\frac{\partial^{n-1} A}{\partial t^{n-1}}\right)_0 \qquad (۴۹۵-۵)$$

دیده می‌شود که مشتق‌گیری در فضای t به ضرب توان مناسبی از s در فضای s تبدیل می‌شود .

تبدیل لاپلاس یک انتگرال

باتوجه به معادلهٔ

$$\frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)\,d\tau = A(t) \qquad (۴۹۶-۵)$$

داریم

$$L\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)\,d\tau\right\} = sL\left\{\int_0^t A(\tau)\,d\tau\right\} \qquad (۴۹۷-۵)$$

به شرط‌آن‌که

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\int_0^t A(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (۴۹۸-۵)$$

با وجود این با درنظر گرفتن معادلهٔ (۵ ــ ۴۹۶) مستقیما" داریم

$$L\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)\,d\tau\right\} = L\{A\} \qquad (۴۹۹-۵)$$

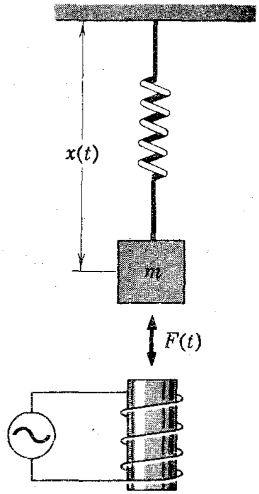
بنابراین

$$L\left\{\int_0 A(\tau)\,d\tau\right. = \frac{1}{s}L\{A\} \qquad (۵۰۰-۵)$$

به شرط‌آن‌که $s \neq 0$. پس انتگرال‌گیری در فضای t به تقسیم بر s در فضای s تبدیل می‌شود .

۵ ــ ۲۴. کاربرد تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس با تبدیل فوریه در این مطلب شریک هستند که مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را به ضرب و تقسیم در فضای جدید تبدیل می‌کنند . علاوه براین ، تبدیل لاپلاس بخصوص برای تابعی که به ازای $t<0$ صفر می‌شود و تابع ومشتق آن برحسب زمان باید درشرایط اولیه‌ای در $t = 0$ صدق کند ، مناسب خواهد بود .



شکل ۵ ــ ۷. نوسانات یک فنر دراثر نیروی الکترومانیتک.

مثال ۵ ــ ۱۱: نوسانات مفید فنرها. فنری را درنظر بگیرید که تغییر مکان اولیه آن از حالت تعادل در $t = 0$،

$$x = x(0) \tag{۵ ــ ۵۰۱}$$

و سرعت اولیهٔ آن

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = x'(0) \tag{۵ ــ ۵۰۲}$$

است. وقتی یک تابع نیرو مانند $F(t)$ بر واحد جرم متصل به فنر اثر می‌کند، معادلهٔ حرکت به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t) \tag{۵ ــ ۵۰۳}$$

معادلهٔ (۵ ــ ۵۰۳) رادر e^{-st} ضرب‌کرده و با روش جزء به جزء نسبت به زمان از $t = 0$ تا $t = \infty$ انتگرال می‌گیریم. از معادلهٔ (۵ ــ ۴۹۰) معلوم می‌شودکه باید حد زیر رابررسی کنیم

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{dx}{dt} + sx(t)\right]e^{-st} \tag{۵ ــ ۵۰۴}$$

اگر فرض کنیم که

$$|x(t)| < Me^{at} \tag{۵ ــ ۵۰۵}$$

به ازای مقداری ثابت مانند M و a ، در این صورت عبارت (۵ــ۵۰۴) صفر می‌شود ، وتبدیل لاپلاس

$$L\{x(t)\} = \bar{x}(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \qquad (۵ــ۵۰۶)$$

متقارب است ، به شرط‌آن‌که

$$\operatorname{Re}(s) > a \qquad (۵ــ۵۰۷)$$

درحالتی که بتوانیم معادلهٔ (۵ــ۴۹۲) را برای تبدیل معادلهٔ (۵ــ۵۰۳) به یک معادلهٔ جبری به‌کار بریم ، داریم

$$s^2\bar{x}(s) - sx(0) - x'(0) + \omega^2\bar{x}(s) = \bar{F}(s) \qquad (۵ــ۵۰۸)$$

به شرط‌آن‌که

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-st}\,dt \qquad (۵ــ۵۰۹)$$

متقارب باشد . اگر نسبت به $\bar{x}(s)$ حل کنیم داریم

$$\bar{x}(s) = \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{\bar{F}(s)}{s^2 + \omega^2} \qquad (۵ــ۵۱۰)$$

قضیهٔ وارون (۵ــ۴۷۳) محاسبهٔ $x(t)$ را ازمعلوم‌بودن $\bar{x}(s)$ امکان‌پذیر می‌سازد . پس

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{sx(0) + x'(0) + \bar{F}(s)}{s^2 + \omega^2}\, e^{st}\,ds \qquad (۵ــ۵۱۱)$$

که درآن σ_0 یک عدد حقیقی است به قسمی که

$$\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0 > a \qquad (۵ــ۵۱۲)$$

معمولاً معادلهٔ (۵ــ۵۱۱) را به صورت مجموع یک تابع تکمیلی $x_c(t)$ که در معادلهٔ (۵ــ۵۰۳) به ازای $F(t) \equiv 0$ صدق می‌کند و شرایط اولیه(۵ــ۵۰۱) و (۵ــ۵۰۲) را دربر می‌گیرد و یک انتگرال خاص (جواب حالت پایدار) $x_{ss}(t)$ که اثرات‌تابع‌نیروی $F(t)$ رانشان می‌دهد . پس می‌توان نوشت :

$$x(t) = x_c(t) + x_{ss}(t) \qquad (۵ــ۵۱۳)$$

که درآن

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + \omega^2}\, e^{st}\,ds \qquad (۵ــ۵۱۴)$$

و

$$x_{ss}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\bar{F}(s)}{s^2 + \omega^2}\, e^{st}\,ds \qquad (۵ــ۵۱۵)$$

انتگرالهای (۵ ـ ۵۱۴) و (۵ ـ ۵۱۵) را می‌توان مستقیما" با روش مانده‌ها که در فصل ۴ بحث شد محاسبه کرد . چون تبدیلات لاپلاس تا این حد کاربرد دارد ، جدولهایی از این تبدیلات و وارون آنها به چاپ رسیده است . اغلب باتوجه به این جدولها لازم نیست واقعا" انتگرالهای وارون را محاسبه کنیم . مثلا" درموردمعادلهٔ (۵ ـ ۵۱۴) باتوجه به جدولهاتابعی را که تبدیل لاپلاس آن

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{۵ ـ ۵۱۶}$$

و

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \tag{۵ ـ ۵۱۷}$$

است پیدا می‌کنیم .

معلوم می‌شود که

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin \omega t}{\omega} dt = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \tag{۵ ـ ۵۱۸}$$

و

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{۵ ـ ۵۱۹}$$

بنابراین

$$x_c(t) = x(0) \cos \omega t + x'(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} \tag{۵ ـ ۵۲۰}$$

درمورد معادلهٔ (۵ ـ ۵۱۵) با مشکل بیشتری مواجهیم زیرا با تابع کلی $\bar{F}(s)$ سر و کار داریم . برای فائق آمدن به این مشکل می‌توانیم از قضیهٔ پیچش (۵ ـ ۴۸۲) و (۵ ـ ۴۸۳) استفاده کنیم . ملاحظه می‌کنیم که تابع انتگرال در معادلهٔ (۵ ـ ۵۱۵) برابر حاصلضرب دو تبدیل لاپلاس، $\bar{F}(s)$ و $1/(s^2 + \omega^2)$است .بنابراین ،ازقضیهٔپیچش ، تابعی‌که تبدیل لاپلاس آن $\bar{F}(s)/(s^2 + \omega^2)$ است عبارت خواهد بود از

$$x_{ss}(t) = \int_0^t F(\tau) \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} d\tau \tag{۵ ـ ۵۲۱}$$

پس جواب کلی معادلات (۵ ـ ۵۰۱) تا (۵ ـ ۵۰۳) به صورت زیر است

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + x'(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) \, d\tau \tag{۵ ـ ۵۲۲}$$

مثال ۵ ــ ۱۲ : محاسبهٔ تبدیلات لاپلاس. به عبارت زیر توجه کنید

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt \tag{۵ ــ ۵۲۳}$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\,dt \tag{۵ ــ ۵۲۴}$$

یا

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-(s-i\omega)t}+e^{-(s+i\omega)t})\,dt \tag{۵ ــ ۵۲۵}$$

که پس از انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) \tag{۵ ــ ۵۲۶}$$

از ترکیب دو جملهٔ معادلهٔ (۵ ــ ۵۲۶) داریم

$$L\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{۵ ــ ۵۲۷}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\cos\omega t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{se^{st}}{s^2+\omega^2}ds \qquad t>0 \tag{۵ ــ ۵۲۸}$$

همین‌طور

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{-(s-i\omega)t}-e^{-(s+i\omega)t})\,dt \tag{۵ ــ ۵۲۹}$$

نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right) \tag{۵ ــ ۵۳۰}$$

یا

$$L\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{۵ ــ ۵۳۱}$$

پس می‌توان نوشت :

$$\sin\omega t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0+i\infty}^{\sigma_0-i\infty}\frac{\omega e^{st}}{s^2+\omega^2}ds \qquad t>0 \tag{۵ ــ ۵۳۲}$$

۵ ــ ۲۵. مسائل و کاربردها

۱ ــ با فرض $A(x)=-1$ و $-\pi\leq x\leq 0$، $A(x)=+1$ و $0\leq x\leq\pi$. نشان دهید که

$$A(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

۲ ــ با فرض $A(x)=\pi/2+x$ و $-\pi\leq x\leq 0$، $A(x)=\pi/2-x$ و $0\leq x\leq\pi$. ثابت کنید

$$A(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

نمودار مجموع سه جمله هر دو مسأله را رسم کنید.

۳ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2A}{dx^2}+k^2A=-\delta(x-x_1)\qquad 0\leq x\leq a$$

بنابرآن که شرایط اولیه عبارتند از $A(a)=0$ و $A(0)=0$

فرض کنید $\delta(x-x_1)$ تابع دلتای دیریکله باشد و $0\leq x_1\leq a$.

راهنمایی: از تبدیل متناهی سینوسی استفاده کنید.

۴ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2A}{dx^2}+k^2A=-\delta(x-x_1)\qquad 0\leq x\leq a$$

بنابرآن که شرایط اولیه عبارتند از:

$$A'(0)=0\qquad A'(a)=0$$

از تبدیل متناهی کسینوسی استفاده کنید.

۵ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2A}{dx^2}+k^2A=-\delta(x-x_1)\qquad 0\leq x\leq a$$

بنابرآن که شرایط اولیه عبارتند از:

الف) $A(0)=0$

$$\frac{\partial A}{\partial x}+hA=0\qquad x=a$$

با استفاده از تبدیل سینوسی متناهی و باتوجه به شرایط اولیه.

ب) $A'(0)=0$

$$\frac{\partial A}{\partial x}+hA=0\qquad x=a$$

با استفاده از تبدیل کسینوسی متناهی .

۶ ــ حل معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2A}{dx^2} + k^2A = -F(x)$$

را در فاصلهٔ $0 \leq x \leq a$ با شرایط اولیهٔ زیر درنظر می‌گیریم

$$A(0) = 0 \qquad A(a) = 0$$

الف) معادله را مستقیما" با استفاده از تبدیل سینوسی متناهی حل کنید .

ب) فرض کنید $G(x|x_1)$ جواب معادلهٔ زیر باشد .

$$\frac{d^2G}{dx^2} + k^2G = -\delta(x - x_1)$$

باتوجه به شرایط اولیهٔ

$$G(0) = 0 \qquad G(a) = 0$$

ثابت کنید

$$A(x) = \int_0^a F(x_1)G(x|x_1)\, dx_1$$

راهنمایی: از اتحاد زیر استفاده کنید

$$G\left(\frac{d^2A}{dx^2} + k^2A\right) - A\left(\frac{d^2G}{dx^2} + k^2G\right) = \frac{d}{dx}\left(G\,\frac{dA}{dx} - A\,\frac{dG}{dx}\right)$$

تابع $G(x|x_1)$ "تابع گرین" مسأله نامیده می‌شود .

۷ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0{}^2A = -f(t)$$

که درآن ω_0 مقداری است ثابت و شرایط اولیه عبارتند از:

$$\frac{dA}{dt} + i\omega A = 0 \qquad t = \pm\infty$$

از یک تبدیل فوریه با برد نامتناهی استفاده کنید .

۸ ــ فرض کنید

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0{}^2}\, d\omega$$

نشان دهید که جواب مسألهٔ زیر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$$

۹ ــ فرض کنید $g(t|\tau)$ جواب معادلهٔ زیر باشد

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \omega_0{}^2 g = -\delta(t-\tau)$$

با شرایط اولیهٔ

$$\frac{dg}{dt} + i\omega g = 0 \qquad t \pm \infty$$

ثابت کنید جواب معادلهٔ

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0{}^2 A = -f(t)$$

با شرایط اولیهٔ

$$\frac{dA}{dt} + i\omega A = 0 \qquad t \pm \infty$$

عبارت است از:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t|\tau)\, d\tau$$

از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$g\left(\frac{d^2A}{dt^2} + \omega_0{}^2 A\right) - A\left(\frac{d^2g}{dt^2} + \omega_0{}^2 g\right) = \frac{d}{dt}\left(g\,\frac{dA}{dt} - A\,\frac{dg}{dt}\right)$$

توجه داشته باشید که از مقایسه با مسألهٔ ۸ نتیجه می‌شود،

$$g(t|\tau) = g(t-\tau)$$

۱۰ ــ فرض کنید

$$\mathbf{F}\{\mathbf{A}(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

که در آن

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$$

ثابت کنید،

$$F\{\nabla\cdot\mathbf{A}\} = i\mathbf{k}\cdot F\{\mathbf{A}(\mathbf{x})\}$$

به شرط آن‌که

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

همچنین ثابت کنید تحت همان شرط

$$F\{\nabla \times \mathbf{A}\} = i\mathbf{k} \times \mathbf{F}\{\mathrm{A}(\mathbf{x})\}$$

اگر $g = g(\mathbf{x})$ تابعی اسکالر از $\mathbf{x}$ باشد ثابت کنید

$$F\{\nabla g\} = i\mathbf{k}F\{g(\mathbf{x})\}$$

به شرط آن‌که داشته باشیم

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

۱۱ ــ به معادلهٔ هلملتز

$$(\nabla^2 + k_0^2)A(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$$

در یک مستطیل در دستگاه مختصات دکارتی درفضای سه بعدی (x_1,x_2,x_3) توجه کنید . فرض کنید تبدیل فوریهٔ $A(\mathbf{x})$ به صورت

$$\tilde{A}(\mathbf{k}) = F\{A(\mathbf{x})\}$$

و تبدیل فوریهٔ $f(\mathbf{x})$ به صورت

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = F\{f(\mathbf{x})\}$$

نشان داده شوند .

الف) نشان دهید که

$$F\{\nabla^2 A(\mathbf{x})\} = -k^2 F\{A(\mathbf{x})\}$$

به شرط آن‌که

$$\lim_{|x_1|\to\infty}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} + ik_1 A\right) = 0$$

$$\lim_{|x_2|\to\infty}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} + ik_2 A\right) = 0$$

و

$$\lim_{|x_3|\to\infty}\left(\frac{\partial A}{\partial x_3} + ik_3 A\right) = 0$$

که در آن $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)$ و $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$.

ب) نشان دهیدکه یک جواب معادلهٔ هلملتز که درشرایط اولیه قسمت (الف) صدق کند به صورت زیر است :

$$A(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{\tilde{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 - k_0^2}\, dV_k$$

با $k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$ ، حجم انتگرال‌گیری در مسألهٔ ۱۱ داده شده است .

۱۲ ــ فرض کنید $G(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ تابعی است که در معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k_0^2)A = -f(\mathbf{x})$$

با شرایط اولیهٔ $(\nabla^2 + k_0^2)G = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} + ik_1 G\right) = 0$$

$$\lim_{|x_2|\to\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial x_2} + ik_2 G\right) = 0$$

$$\lim_{|x_3|\to\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial x_3} + ik_3 G\right) = 0$$

صدق می‌کند که در آن $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$، $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)$ و $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$.
نشان دهید

$$A(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})G(\mathbf{x}|\mathbf{y})\, dV_y$$

که در آن حجم انتگرال‌گیری تمام حجم فضای $\mathbf{y}$ درنظر گرفته می‌شود.
راهنمایی: از اتحاد

$$G(\nabla^2 + k_0^2)A - A(\nabla^2 + k_0^2)G = \nabla \cdot (G\,\nabla A - A\,\nabla G)$$

وقضیهٔ دیورژانس سه بعدی درتبدیل حجم‌انتگرال‌گیری به انتگرال سطح استفاده کنید. سپس جملات شامل انتگرال سطح را با استفاده ازشرایط اولیه دربی‌نهایت حذف کنید. توجه داشته باشید که شرایط اولیه در بی‌نهایت را می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} (\nabla A + i\mathbf{k}A) = 0$$

و

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} (\nabla G + i\mathbf{k}G) = 0$$

که در آن $\mathbf{k} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3$ و

$$\nabla = \mathbf{e}_1\partial/\partial x_1 + \mathbf{e}_2\partial/\partial x_2 + \mathbf{e}_3\partial/\partial x_3$$

تابع $G(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ را "تابع گرین" برای معادلهٔ هلملتز گویند.

۱۳ ــ با استفاده از تبدیل فوریه مستقیما" نشان دهید که جواب

$$(\nabla^2 + k_0^2)G = -\delta(\mathbf{x})$$

عبارت است از:

$$G(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 - k_0^2}\, dV_k$$

حال از قضیهٔ پیچش برای تبدیلات فوریه استفاده کنید و نشان دهید که جواب مسألهٔ ۱۱ را می‌توان چنین نوشت:

$$A(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})G(\mathbf{x}|\mathbf{y})\, dV_y$$

و ثابت کنید که

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = G(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

۱۴ ــ با فرض

$$\bar{A}(s) = \int_0^\infty A(t)e^{-st}\, dt$$

ثابت کنید به ازای $A(t) = \cosh at$ ،

$$\bar{A}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

و به ازای $A(t) = \sinh at$ ،

$$\bar{A}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

۱۵ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{d^2A}{dt^2} - \alpha^2 A = f(t)$$

که در آن α ثابت است و شرایط اولیه عبارتند از:

$$A = A(0) \qquad t = 0$$
$$\frac{dA}{dt} = A'(0) \qquad t = 0$$

و با فرض

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{dA}{dt} + sA(t)\right] e^{-st} = 0$$

از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.

۱۶ ــ فرض کنید

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{st}}{s^2 - \alpha^2}\, ds$$

نشان دهید که انتگرال خاص مسألهٔ ۱۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

۱۷ ــ با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{dV}{dt}$$

را با شرایط اولیهٔ زیر حل کنید.

$$I = I(0) \qquad t = 0$$
$$\frac{dI}{dt} = I'(0) \qquad t = 0$$

انتگرال‌های وارون را برای تمام روابط ممکن بین R ، L و C محاسبه کنید.

راهنمایی: از قضیهٔ پیچش و جدول تبدیلات لاپلاس استفاده کنید.

۱۸ ــ معادلهٔ موج زیر را درنظر بگیرید

$$\nabla^2 A = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

و فرض کنید

$$\bar{A}(\mathbf{r},s) = \int_0^\infty A(\mathbf{r},t)e^{-st}\,dt$$

نشان دهید که اگر

$$A(\mathbf{r},0) = 0 \qquad t = 0$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(\mathbf{r},0) = 0 \qquad t = 0$$

و

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + sA\right)e^{-st} = 0$$

آن‌گاه $\bar{A}(\mathbf{r},s)$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$(\nabla^2 - k^2)\bar{A}(\mathbf{r},s) = 0$$

که در آن

$$k^2 = \frac{s^2}{v^2}$$

۱۹ ــ تابع یک پله‌ای هوی ساید به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

تبدیل فوریهٔ آن را محاسبه کنید و با استفاده از قضیهٔ وارون برای تبدیل لاپلاس نمایش انتگرالی $H(t)$ و تابع دلتای دیریکله $\delta(t)$ را به‌دست آورید .

راهنمایی :

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}H(t)$$

۲۰ ــ معادلهٔ موج اسکالر

$$\nabla^2 A = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

رادرمختصات کروی (R,θ,Φ) درنظر بگیرید . فرض کنید A فقط به R و t به صورت $A = A(R,t)$ بستگی دارد ، ثابت کنید :

الف) معادلهٔ موج را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RA) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(RA)$$

(توجه کنید که R یک متغیر مستقل است .)

ب) اگر

$$A(R,0) = 0 \qquad t = 0,\ R \neq 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(R,0) = 0 \qquad t = 0,\ R \neq 0$$

آن‌گاه

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} - k^2\right) R\bar{A}(R,s) = 0$$

که در آن $\bar{A}(R,s)$ تبدیل لاپلاس $A(R,t)$ است و $k^2 = s^2/v^2$.

ج) درحالت کلی

$$R\bar{A}(R,s) = F(s)e^{-kR} + G(s)e^{+kR}$$

در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} - k^2\right) R\bar{A} = 0$$

که در آن $F(s)$ و $G(s)$ توابع اختیاری از s هستند.

د) $F(s)e^{-sR/v}$ تبدیل لاپلاس $f(t - R/v)$ است، اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ و $G(s)e^{sR/v}$ تبدیل لاپلاس $g(t + R/v)$ و $G(s)$ تبدیل لاپلاس $g(t)$ باشد.

هـ) تابع

$$A(R,t) = \frac{f(t - R/v)}{R}$$

در معادلهٔ قسمت (الف) و شرایط اولیهٔ قسمت (ب) صدق می‌کند به شرط‌آن‌که $f(t) = 0$، $t < 0$.

معادلات دیفرانسیل خطی

۶ ــ ۱ . مقدمه

یک معادلهٔ جبری با دو متغیر عبارتی است به صورت :

$$\Omega(y,x) = y^n + R_1(x)y^{n-1} + \cdots + R_{n-1}(x)y + R_n(x) = 0 \qquad (۶-۱)$$

که درآن $R_1(x)$، $R_2(x)$، . . . ، $R_n(x)$ هریک تابعی منطق ،یعنی نسبت دوچند جمله‌ای از x است . اگر علامت y^n را به جای توان n ام y به معنی مشتق n ام y نسبت به x درنظر بگیریم ، داریم

$$y^n = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad y = \frac{d^0 y}{dx^0} \qquad (۶-۲)$$

و معادلهٔ (۶ ــ ۱) به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + R_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + R_n(x)y = 0 \qquad (۶-۳)$$

که آن را معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی معمولی مرتبهٔ n با ضرایب متغیر گویند . معادلهٔ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + R_1(x)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + R_n(x)y = f(x) \qquad (۶-۴)$$

که درآن $f(x)$ تابعی دلخواه از x است ، یک معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن خطی‌معمولی رتبهٔ n با ضرایب متغیر است . اگر تمام ضرایب $R_1(x), \ldots, R_n(x)$ ثابت و مستقل از x باشد ، آن‌گاه معادلهٔ (۶ ــ ۳) همگن و معادلهٔ (۶ ــ ۴) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن می‌شود . معادلات (۶ ــ ۳) و (۶ ــ ۴) را معادلات دیفرانسیل " خطی" گوییم زیرا هیچ کدام از y ، $\frac{dy}{dx}$ . . . $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، . . . $\frac{d^ny}{dx^n}$ دربرگیرنده‌توانی بالاتر از یک‌نبوده‌و همچنین شامل حاصل ضرب‌هایی به صورت

$y\frac{d^ny}{dx^n}$ یا $\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}\frac{dy^n}{dx^n}$ و غیره نمی‌باشد

مثلاً

$$y^2 \frac{dy}{dx} + R_1(x) = 0$$

و

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + Ry\,\frac{dy}{dx} + \omega^2 y = 0$$

معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی هستند .

معادلات دیفرانسیل خطی مانند معادلهٔ (۶ ــ ۳) دارای یک ویژگی بسیارمهم‌است . اگر $y_C(x)$ جواب‌عمومی‌معادلهٔ همگن (۶ ــ ۳) و $y_P(x)$ جواب خصوصی‌معادلهٔ ناهمگن آن‌باشد ، آن‌گاه

$$y(x) = y_C(x) + y_P(x) \tag{۶ ــ ۵}$$

یک جواب عمومی معادلهٔ (۶ ــ ۴) است . تابع $y_C(x)$ را "تابع مکمل" و $y_P(x)$ را " انتگرال خصوصی" وابسته به معادلهٔ (۶ ــ ۴) گویند .

در این جا بحث را به معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت یا متغیر محدود کرده و در هر حالت صورتهای همگن و ناهمگن رابررسی می‌کنیم . دانشجویان فیزیک باحل این نوع معادلات دیفرانسیل آشنا هستند ، و به این دلیل روی روشهای حل آنها در حالات مختلف تأکید خواهیم کرد .

۶ ــ ۲ . معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

قبلاً درفصل ۵ دیدیم‌که چگونه فنهای قدرتمند تبدیلات فوریه و لاپلاس می‌توانندبرای یافتن جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به‌کار روند . روشهایی‌که می‌خواهیم در این جا تکرار کنیم تاحد زیادی مقدماتی بوده و دانشجویان آنها را در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل مقدماتی آموخته‌اند .

معادلهٔ(۶ ــ ۳)را درنظر بگیریدکه‌در آن‌ضرایب $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ثابتند . فرض کنید عملگر D به صورت زیر تعریف شود

$$D = \frac{d}{dx} \tag{۶ ــ ۶}$$

پس معادلهٔ (۶ ــ ۳) را می‌توان چنین نوشت

$$L(D)y = (D^n + R_1 D^{n-1} + \cdots + R_n)y = 0 \tag{۶ ــ ۷}$$

که در آن $L(D)$ یک عملگر چندجمله‌ای از D است . چندجمله‌ای $L(D)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد :

$$L(D) = (D - k_1)(D - k_2) \cdots (D - k_n) \tag{۶ ــ ۸}$$

که در آن k_1، k_2، . . . ، k_n، n ریشه معادلهٔ جبری مرتبه nام زیر است

$$k^n + R_1 k^{n-1} + \cdots + R_n = 0 \qquad (۶-۹)$$

معادلهٔ (۶ ــ ۹) را "معادلهٔ مشخصه" معادلهٔ دیفرانسیل (۶ ــ ۷) گویند. جوابهای k_n معادلهٔ (۶ ــ ۹) ثابتند، و بنابراین عملگرهای

$$(D - k_1), (D - k_2), \ldots, (D - k_n) \qquad (۶-۱۰)$$

را می‌توان جابجا کرد.

معادلهٔ (۶ ــ ۷) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$L(D)y = (D - k_1)(D - k_2) \cdots (D - k_n)y = 0 \qquad (۶-۱۱)$$

و چون عملگرهای (۶ ــ ۱۰) تعویض‌پذیرند، جواب هریک از n معادلهٔ مرتبهٔ اول،

$$(D - k_1)y = 0, (D - k_2)y = 0, \ldots, (D - k_n)y = 0 \qquad (۶-۱۲)$$

در معادلهٔ همگن صدق می‌کند.

حل معادلهٔ همگن

حالت ۱: n ریشهٔ مشخصهٔ k_1، k_2، . . . ، k_n همه متمایزند. فرض کنید y_r جواب عمومی معادلهٔ زیر باشد

$$(D - k_r)y = 0 \qquad (۶-۱۳)$$

در آن صورت

$$y_r = C_r e^{k_r x} \qquad (۶-۱۴)$$

و درنتیجه جواب عمومی معادلهٔ (۶ ــ ۷) چنین نوشته می‌شود

$$y = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{k_r x} \qquad (۶-۱۵)$$

که‌در آن $C_1, C_2, \ldots, C_n$، مجموعه‌ای از n ثابت دلخواه است. توجه کنیدکه‌جواب‌عمومی‌یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ n با ضرایب ثابت شامل n ثابت دلخواه است.

اگر ضرایب $R_1, \ldots, R_n$ در معادلهٔ (۶ ــ ۹) اعداد حقیقی باشند آن‌گاه ریشه‌های مختلط معادلهٔ (۶ ــ ۹) باید به صورت زوجهای مزدوج باشند. مثلاً، فرض کنید

$$k_r = \alpha_r + i\beta_r \qquad k_s = \alpha_r - i\beta_r \qquad (۶-۱۶)$$

یک زوج از ریشه‌های مزدوج معادلهٔ (۶ ــ ۹) باشد، دراین‌صورت معادلهٔ (۶ ــ ۱۵) شامل یک جفت جملات به صورت زیر است:

$$y_r = C_r e^{(\alpha_r + i\beta_r)x} + C_s e^{(\alpha_r - i\beta_r)x} \qquad (۶-۱۷)$$

که آن را می‌توان چنین نوشت:

$$y_r = e^{\alpha_r x}\{C_r e^{i\beta_r x} + C_s e^{-i\beta_r x}\} \tag{۶ــ۱۸}$$

یا

$$y_r = e^{\alpha_r x}\{(C_r + C_s)\cos\beta_r x + i(C_r - C_s)\sin\beta_r x\} \tag{۶ــ۱۹}$$

با فرض

$$A_r = C_r + C_s \tag{۶ــ۲۰}$$

و

$$B_r = i(C_r - C_s) \tag{۶ــ۲۱}$$

در این صورت جملاتی از معادلهٔ (۶ــ۱۵) که شامل k_r و k_s هستند باهم ترکیب می‌شوند تا جملهٔ زیر به‌دست آید:

$$y_r = e^{\alpha_r x}\{A_r\cos\beta_r x + B_r\sin\beta_r x\} \tag{۶ــ۲۲}$$

و جواب عمومی (۶ــ۱۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$y = \sum_{r=1}^{n} e^{\alpha_r x}\{A_r\cos\beta_r x + B_r\sin\beta_r x\} \tag{۶ــ۲۳}$$

توجه کنید که گرچه به نظر می‌رسد که معادلهٔ (۶ــ۲۳) شامل $2n$ مقدار ثابت دلخواه است، ولی درحقیقت چنین نیست. اگر n مقدار ثابت اولیهٔ $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ معلوم باشند معادلات (۶ــ۲۰) و (۶ــ۲۱) بطورکامل هر دو دستهٔ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ و $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ را معین می‌کند. **بنابراین**، معادلهٔ (۶ــ۲۳) فقط شامل n مقدار ثابت دلخواه است.

حالت ۲: n ریشهٔ مشخصه $k_1, k_2, \ldots, k_n$ همه متمایز نیستند. فرض کنید p ریشهٔ مشخصه مثل k_1، ...، k_p همه مساوی باشند، به طوری که

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = k \tag{۶ــ۲۴}$$

شکل سازه‌گیری معادله (۶ــ۸) از $L(D)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$L(D) = (D-k)^p(D-k_{p+1})(D-k_{p+2})\cdots(D-k_n) \tag{۶ــ۲۵}$$

جواب عمومی عبارت

$$(D-k)^p y = 0 \tag{۶ــ۲۶}$$

باید جزء جواب عمومی $L(D)y = 0$ باشد. برای حل معادلهٔ (۶ــ۲۶) فرض کنید

$$y = ve^{kx} \tag{۶ــ۲۷}$$

که در آن v تابعی است که باید معین شود. به عبارت زیر توجه کنید

$$(D-k)^p ve^{kx} \tag{۶ــ۲۸}$$

می‌توان نوشت:

$$(D-k)^{p-1}(D-k)ve^{kx} \tag{۶ــ۲۹}$$

با وجود این داریم

$$(D-k)ve^{kx} = e^{kx}Dv \tag{۶ — ۳۰}$$

درنتیجه

$$(D-k)^p ve^{kx} = (D-k)^{p-1}e^{kx}Dv \tag{۶ — ۳۱}$$

با تکرار متوالی این عمل معلوم می‌شود

$$\begin{aligned}(D-k)^p ve^{kx} &= (D-k)^{p-1}e^{kx}Dv = (D-k)^{p-2}e^{kx}D^2v \\ &= (D-k)^{p-3}e^{kx}D^3v = \cdots = e^{kx}D^pv\end{aligned} \tag{۶ — ۳۲}$$

و درنتیجه

$$y = ve^{kx} \tag{۶ — ۳۳}$$

در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$(D-k)^p y = 0 \tag{۶ — ۳۴}$$

مشروط بر آن که v یک جواب عبارت زیر باشد

$$D^p v = 0 \tag{۶ — ۳۵}$$

و بنابراین یک چندجمله‌ای دلخواه از x با درجهٔ $p-1$ است . پس

$$y = \{C_1 + C_2x + \cdots + C_px^{p-1}\}e^{kx} \tag{۶ — ۳۶}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۶ — ۳۴) و شامل p مقدار ثابت دلخواه است . توجه کنید که اگر یک جفت از ریشه‌های مختلط مزدوج مانند معادلات (۶ — ۱۶) وجود داشته باشد ، و هرکدام در یک سازه p بار تکرار شود ، آن‌گاه

$$L(D) = (D-k_r)^p(D-k_s)^p(D-k_{2p+1})(D-k_{2p+2})\cdots(D-k_n) \tag{۶ — ۳۷}$$

که در آن

$$k_r = \alpha_r + i\beta_r \tag{۶ — ۳۸}$$

و

$$k_s = \alpha_r - i\beta_r \tag{۶ — ۳۹}$$

جواب عمومی $L(D)y = 0$ ، شامل جواب عمومی

$$(D-k_r)^p y = 0 \tag{۶ — ۴۰}$$

و

$$(D-k_s)^p y = 0 \tag{۶ — ۴۱}$$

است . این جوابها پس از ترکیب ، عبارتی به‌صورت زیر خواهند داد ،

$$\begin{aligned}y_r = e^{\alpha_r x}\{&(A_1 + A_2x + \cdots + A_px^{p-1})\cos\beta_r x \\ &+ (B_1 + B_2x + \cdots + B_px^{p-1})\sin\beta_r x\}\end{aligned} \tag{۶ — ۴۲}$$

در معادلهٔ (۶ ـ ۴۲) ثابتهای $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ و $\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ از حل دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ p ام به‌دست می‌آیند. بنابراین، از n مقدار ثابت مستقل $2p$ مقدار لازم برای جواب عمومی $L(D)y = 0$ به‌دست می‌آید.

انتگرال خصوصی یک معادلهٔ ناهمگن

چند روش برای ساختن انتگرال خصوصی یک معادلهٔ ناهمگن وجود دارد،

$$L(D)y = f(x) \qquad (۶-۴۳)$$

ساده‌ترین روش "حدس زدن" انتگرال خصوصی است، و برای معادلات ساده این راه کاملاً عملی است. مثلاً،

$$(D^2 + D + 1)y = x + 2 \qquad (۶-۴۴)$$

به وضوح دارای انتگرال خصوصی است.

$$y_p(x) = x + 1 \qquad (۶-۴۵)$$

اگر

$$(D^2 + D + 1)y = Be^{ikx} \qquad (۶-۴۶)$$

آن‌گاه می‌توانیم

$$y_p(x) = Ae^{ikx} \qquad (۶-۴۷)$$

را به‌عنوان انتگرال خصوصی معادلهٔ (۶ ـ ۴۶) امتحان کنیم، این به شرطی انتگرال خصوصی معادله (۶ ـ ۴۶) خواهد بود که داشته باشیم

$$A = \frac{B}{1 - k^2 + ik} \qquad (۶-۴۸)$$

بطورکلی

$$L(D)y = Be^{ikx} \qquad (۶-۴۹)$$

دارای انتگرال خصوصی زیر است،

$$y_p(x) = \frac{B}{L(ik)}\, e^{ikx} \qquad (۶-۵۰)$$

نتیجهٔ (۶ ـ ۵۰) رابطهٔ نزدیکی با تبدیل فوریه برای به‌دست‌آوردن انتگرالهای خصوصی دارد، که در فصل ۵ بحث شد. البته در فرمولهایی مانند معادلات (۶ ـ ۴۸) و (۶ ـ ۵۰) باید مخرجها غیرصفر باشد.

روش تلخیص به یک چهارمها

معادلهٔ ناهمگن مرتبهٔ اول زیر را که در آن k ثابت فرض می‌شود درنظر بگیرید .

$$(D - k)y = f(x) \tag{۶ – ۵۱}$$

داریم ،

$$D(ye^{-kx}) = e^{-kx}(D - k)y = f(x)e^{-kx} \tag{۶ – ۵۲}$$

و بنابراین ،

$$\int_0^x D(ye^{-kx})\, dx = \int_0^x f(z)e^{-kz}\, dz \tag{۶ – ۵۳}$$

که متغیر ظاهری z را به جای x در انتگرال سمت راست معادلهٔ (۶ – ۵۳) به کار برده‌ایم . پس

$$y(x)e^{-kx} - y(0) = \int_0^x f(z)e^{-kz}\, dz \tag{۶ – ۵۴}$$

و

$$y(x) = y(0)e^{kx} + \int_0^x f(z)e^{-k(z-x)}\, dz \tag{۶ – ۵۵}$$

که جواب (۶ – ۵۱) در $x = 0$ به صورت $y(0)$ خلاصه می‌شود . چون تابع مکمل معادلهٔ (۶ – ۵۱) عبارت $y(x) = Ae^{kx}$ است ، لذا از مقایسه با معادلهٔ (۶ – ۵۵) نتیجه می‌شود که

$$y_p(x) = \int_0^x f(z)e^{-k(z-x)}\, dz \tag{۶ – ۵۶}$$

یک انتگرال خصوصی معادلهٔ (۶–۵۱) است . فرمول (۶–۵۶) ، مسألهٔ یافتن انتگرال خصوصی معادلهٔ (۶ – ۵۱) رابه مسألهٔ یافتن یک انتگرال یابه‌عبارت‌دیگر به مسألهٔ تشکیل یک چهارم خلاصه می‌کند .

تعمیم

تبدیل به یک چهارمها را می‌توان به‌آسانی به معادلات مراتب بالاتر با ضرایب ثابت تعمیم داد . به‌عنوان مثال ، معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$(D^2 - k^2)y = f(x) \tag{۶ – ۵۷}$$

ابتدا عملگر $D^2 - k^2$ را تجزیه می‌کنیم ،

$$(D - k)(D + k)y = f(x) \tag{۶ – ۵۸}$$

با فرض

$$(D+k)y = w \qquad (۶-۵۹)$$

داریم

$$(D-k)w = f(x) \qquad (۶-۶۰)$$

بنابراین،

$$w(x) = w(0)e^{kx} + \int_0^x f(z)e^{-k(z-x)}\,dz \qquad (۶-۶۱)$$

حال معادلهٔ

$$(D+k)y = w(x) \qquad (۶-۶۲)$$

را حل می‌کنیم،

$$y(x) = y(0)e^{-kx} + \int_0^x w(u)e^{k(u-x)}\,du \qquad (۶-۶۳)$$

چون فقط به انتگرال خصوصی معادلهٔ (۶ – ۵۷) توجه داریم، برای حذف توابع وابسته به تابع مکمل معادلهٔ (۶ – ۵۷) می‌توان نوشت:

$$y(0) = 0 \qquad (۶-۶۴)$$

و

$$w(0) = 0 \qquad (۶-۶۵)$$

سپس با استفاده ازمعادلات (۶ – ۶۱) و (۶ – ۶۳) درمورد انتگرال خصوصی معادله (۶–۵۷) داریم

$$y_p(x) = \int_0^x e^{k(u-x)}\,du \int_0^u f(z)e^{-k(z-u)}\,dz \qquad (۶-۶۶)$$

با تکرار متوالی روش تلخیص به یک چهارم درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ nام با ضرایب ثابت،

$$(D-k_1)(D-k_2)\cdots(D-k_n)y = f(x) \qquad (۶-۶۷)$$

انتگرال خصوصی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_p(x) = \int_0^x e^{-k_n(z_n-x)}\,dz_n \int_0^{z_n} e^{-k_{n-1}(z_{n-1}-z_n)}\,dz_{n-1} \cdots \int_0^{z_2} e^{-k_1(z_1-z_2)} f(z_1)\,dz_1 \qquad (۶-۶۸)$$

مثلاً،

$$(D-k_1)(D-k_2)y = f(x) \qquad (۶-۶۹)$$

دارای انتگرال خصوصی زیر است:

$$y_p(x) = \int_0^x e^{-k_2(z_2-x)}\, dz_2 \int_0^{z_2} e^{-k_1(z_1-z_2)} f(z_1)\, dz_1 \qquad (۶-۷۰)$$

و با فرض

$$\begin{aligned} k_2 &= -k \qquad & k_1 &= +k \\ z_2 &= u \qquad & z_1 &= z \end{aligned} \qquad (۶-۷۱)$$

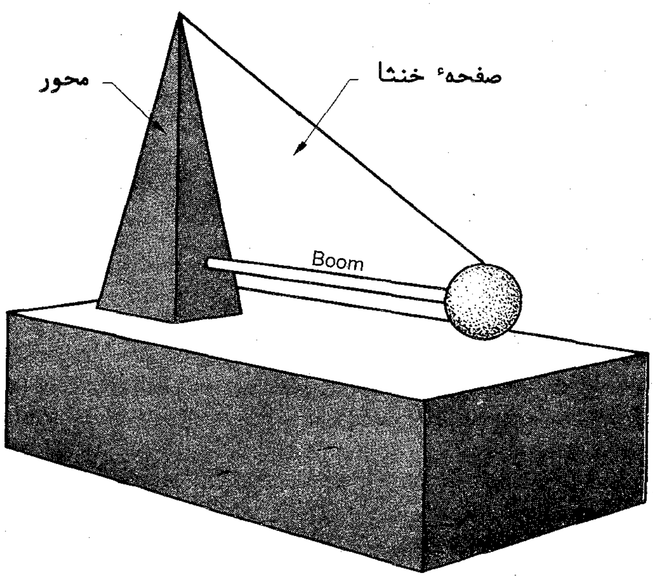
معادلهٔ (۶ ـ ۷۰) به صورت

$$y_p(x) = \int_0^x e^{k(u-x)}\, du \int_0^u e^{-k(z-u)} f(z)\, dz$$

خلاصه می‌شود که همان نتیجهٔ حاصل از معادلهٔ (۶ ـ ۶۶) است.

۶ ـ ۳. نظریهٔ لرزه‌نگار

لرزه‌نگار وسیله‌ای برای اندازه‌گیری حرکات زمین ناشی از زلزله یا انفجارهای داخلی است (شکل ۶ ـ ۱). نظریه مربوط به آن یک کاربرد خاص بسیار جالب معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را نشان می‌دهد.



شکل ۶ ـ ۱. مؤلفه‌های یک لرزه‌نگار برای اندازه‌گیری حرکات افقی زمین.

ساده‌ترین شکل لرزه‌نگار، عبارت‌است ازیک پاندول میرا که محورش محکم به زمین متصل است و طبق مؤلفهٔ خاصی مثلاً $u(t)$ ، باحرکت‌انتقالی زمین نوسان می‌کند. درعمل، $u(t)$ راحرکت نقطه‌ای بر روی سطح زمین درنظرمی‌گیریم‌که درجهت‌شمال به جنوب، مشرق به‌مغرب، یاامتداد قائم(z) اندازه‌گیری می‌شود. صفحهٔ‌تعادل از محور نگهدارندهٔ پاندول و محور پاندول که به زمین متصل است می‌گذرد و به قسمی تنظیم می‌شود که بر امتداد اندازه‌گیری $u(t)$ عمود باشد.

مقادیر پارامتری مانند $\theta(t)$ که متناسب با زاویهٔ تغییرمکان محور افقی باشد بر روی یک لرزه‌نگار ثبت می‌شود که از اثری‌بر کاغذ عکاسی واقع بر طبلی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند تشکیل یافته است. دریک لرزه‌نگار ایده‌آل شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ ، پاندول دقیقاً" بایدمتناسب با شتاب زاویه‌ای زمین، $\ddot{u}$ ، باشد درنتیجه:

$$\ddot{\theta} = -K\ddot{u} \tag{۶–۷۳}$$

که در آن K ، ثابت مربوط به وسیله است. باوجود این، در یک وسیلهٔ واقعی بایدفنری وجود داشته باشد تا پاندول رابعد ازانجام ارتعاش به حال تعادل برگرداند وضمناً" دامنهٔ نوسانات را ثبت کند. به‌علاوه، در هر دستگاه مکانیکی نیروهای اصطکاک وجود دارند. به‌عنوان اولین تقریب، می‌توان این نیروهای اصطکاک را متناسب با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ پاندول درنظر گرفت. پس شتاب زاویه‌ای یک لرزه به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \omega_0^2\theta - K\ddot{u} \tag{۶–۷۴}$$

یا

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = -K\frac{d^2u}{dt^2} \tag{۶–۷۵}$$

که در آن λ ضریب استهلاک، $2\pi/\omega_0$ دورهٔ تناوب طبیعی و Kبزرگنمایی استاتیک وسیله است.

جواب عمومی معادلهٔ (۶ – ۷۵) شامل یک تابع مکمل ودو مقدار ثابت دلخواه به اضافهٔ یک انتگرال خصوصی است. برای یافتن تابع مکمل از روش بخش (۶ – ۲) استفاده می‌کنیم. معادلهٔ مشخصهٔ (۶ – ۹) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$k^2 + 2\lambda k + \omega_0^2 = 0 \tag{۶–۷۶}$$

که دارای جوابهای

$$k_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{۶–۷۷}$$

$$k_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{۶–۷۸}$$

است. باید سه حالت زیر را تشخیص داد،

$$\lambda^2 < \omega_0^2 ،\ \lambda^2 > \omega_0^2 ،\ \lambda^2 = \omega_0^2.$$

حالت I: $\lambda^2 < \omega_0^2$. در این حالت k_1 و k_2 ریشه‌های مختلط مزدوج هستند

$$k_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{۶-۷۹}$$

$$k_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{۶-۸۰}$$

درنتیجه

$$\theta_c(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t}) \tag{۶-۸۱}$$

که شامل دو مقدار ثابت است.

معادلهٔ (۶ – ۸۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\theta_c(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t - \beta) \tag{۶-۸۲}$$

که درآن A و β دو ثابت دلخواه دیگر است و

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{۶-۸۳}$$

معادلهٔ (۶–۸۲) نوسانات آزاد لرزه‌نگار را نشان می‌دهد. با به‌حساب آوردن سازهٔ نمایی، دامنه با زمان به اندازهٔ $1/e$ مقدار اولیه‌اش پس از فاصلهٔ زمانی $t = 1/\lambda$ کاهش پیدا می‌کند. از معادلهٔ (۶ – ۸۳) معلوم می‌شود که فرکانس طبیعی نوسان کمتر از فرکانس طبیعی ω_0 فنر است، علتش وجود استهلاک مکانیکی λ است. انحراف زاویه‌ای بیشینه پاندول در زمانهایی اتفاق می‌افتد که

$$\frac{d\theta_c}{dt} = -Ae^{-\lambda t}[\lambda\cos(\omega t - \beta) + \omega\sin(\omega t - \beta)] = 0 \tag{۶-۸۴}$$

درنتیجه

$$\tan(\omega t - \beta) = -\frac{\lambda}{\omega} \tag{۶-۸۵}$$

فرض کنید t_1 کوچکترین مقدار مثبت t باشد که در معادلهٔ (۶ – ۸۵) صدق می‌کند. در این صورت

$$t = t_1 + \frac{n\pi}{\omega} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{۶-۸۶}$$

نیز در معادلهٔ (۶ – ۸۵) صدق خواهد کرد.

مقادیر ایستای $\theta_c(t)$ برای مقادیر t که در معادلهٔ (۶ – ۸۶) صدق می‌کنند با دوره‌های تناوب بیشینه و کمینه به‌دست می‌آیند. فاصلهٔ زمانی T بین یک جفت از بیشینه‌های متوالی (کمینه‌ها) برابر دورهٔ تناوب طبیعی $T = 2\pi/\omega$ لرزه‌نگار است. سازه کسینوس درمعادلهٔ (۶–۸۲) در تمام نقاط بیشینه یک مقدار اختیار می‌کند. بنابراین، اگر $\theta_c(t)$ و $\theta_c(t+T)$ دو بیشینه متوالی با انحراف زاویه‌ای باشند، آن‌گاه

$$\frac{\theta_c(t)}{\theta_c(t+T)} = e^{-\lambda t}/e^{-\lambda(t+T)} \tag{۸۷ – ۶}$$

یا

$$\frac{\theta_c(t)}{\theta_c(t+T)} = e^{\lambda T} \tag{۸۸ – ۶}$$

کمیت δ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta \equiv \log\frac{\theta_c(t)}{\theta_c(t+T)} = \lambda T = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \lambda^2}} \tag{۸۹ – ۶}$$

"دکرمانت لگاریتمی" نامیده می‌شود. این مقدار اندازه‌ای از اثر اصطکاک دستگاه است. اگر δ و دورهٔ تناوب T اندازه‌گیری شوند، آن‌گاه ثابت استهلاک λ را می‌توان از فرمول (۶ – ۸۹) محاسبه کرد.

حالت II: $\lambda^2 > \omega_0{}^2$. در این حالت

$$k_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0{}^2} \tag{۹۰ – ۶}$$

$$k_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0{}^2} \tag{۹۱ – ۶}$$

اعداد حقیقی هستند، به قسمی که

$$\theta_c(t) = c_1 e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0{}^2})\,t} + c_2 e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0{}^2})\,t} \tag{۹۲ – ۶}$$

و c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهند. جملات نمایی در معادلهٔ (۶ – ۹۲) همواره مثبت هستند. بنابراین، جواب پاندول به یک ضربهٔ ناگهانی کوتاه، غیرمتناوب خواهدبود. یعنی اگر پاندول از حالت تعادل به‌وسیلهٔ یک ضربهٔ ناگهانی زمین منحرف شود، در آن صورت به‌علت مقدار زیاد استهلاک به حالت سکون درمی‌آید، بدون آن‌که حول نقطهٔ تعادل $\theta_c = 0$ نوسان کند. جواب پاندول در این حالت "ابر میرایی" نامیده می‌شود، حال آن‌که برای حالت $\lambda^2 < \omega_0{}^2$، مانند حالت I، "فرو میرایی" خوانده می‌شود. یک پاندول فرو میرا قبل از آن‌که به حالت سکون درآید نوسانات زیادی انجام خواهد داد.

حالت III: $\lambda^2 = \omega_0{}^2$. در این حالت، گفته می‌شود که پاندول میرای بحرانی است. دو ریشه k_1 و k_2 ائتلاف می‌کنند تا عبارت زیر حاصل گردد.

$$k_1 = k_2 = -\lambda \tag{۹۳ – ۶}$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۶ – ۳۶) درموردانحراف یک پاندول میرای بحرانی نتیجه می‌شود:

$$\theta_c(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t} \tag{۹۴ – ۶}$$

ثابتهای c_1 و c_2 درمعادلات (۶ – ۸۱)، (۶ – ۹۲) و (۶ – ۹۴) به‌وسیلهٔ شرایط اولیه بر $\theta(t)$ و $d\theta/dt$ در زمان، مثلاً $t = t_0$ معین می‌شود. نکتهٔ عملی مهم این است که جوابهای گذرای

(۶ــ ۸۱) ، (۶ــ ۹۲) و (۶ــ ۹۴) به حرکت زمین که بعداز $t=t_0$ اتفاق می‌افتد نامربوطند. جواب عمومی معادلهٔ (۶ــ ۷۵) از یکی ازسه تابع مکمل (۶ــ ۸۱) ، (۶ــ ۹۲) و یا (۶ــ ۹۴) به اضافهٔ یک انتگرال خصوصی $\theta_p(t)$ تشکیل می‌شود:

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t) \qquad (۶ــ ۹۵)$$

درصورتی که بخواهیم $\theta_c(t)$ بعد از زمان $t=t_0$ به حرکات زمین وابسته نباشد آن را باید تا آن جا که ممکن است به کمک جملهٔ $\theta_p(t)$ که به این حرکات جواب می‌دهد، کوچک کرد.

اگر میرایی خیلی بزرگ شود، آن‌گاه وسیله به علائم ضعیف جواب نمی‌دهد، ولی اگر خیلی‌کوچک شود، $\theta_c(t)$ باعلامت مشخص $\theta_p(t)$ تداخل‌می‌کند. درعمل، لرزه‌نگار رابه‌قسمی تنظیم می‌کنند که

$$\lambda = \alpha\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T_0} \qquad (۶ــ ۹۶)$$

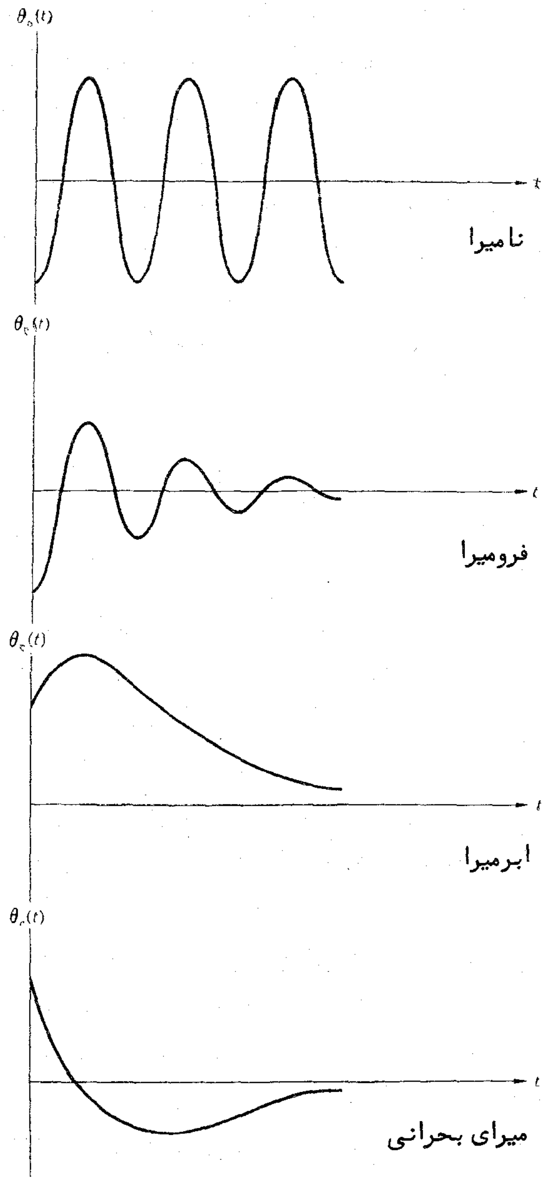
و در آن

$$0.7 \leq \alpha \leq 1 \qquad (۶ــ ۹۷)$$

که T_0 دورهٔ تناوب آزاد پاندول است. با استفاده از معادلهٔ (۶ــ ۹۶)، سازه $e^{-\lambda t}$ که در معادلهٔ (۶ــ ۸۲) ظاهرمی‌شود به‌این‌صورت درمی‌آید $e^{-2\pi\alpha(t/T_0)}$ پس اگرفاصله زمانی $t = T_0$ برابر یک دورهٔ تناوب آزاد پاندول باشد، دامنهٔ $\theta_c(t)$ که در معادلهٔ (۶ــ ۸۲) داده شده به صورت $e^{-2\pi\alpha}$ ، یعنی مقدار اولیه خلاصه می‌شود. دامنه α در نامساوی (۶ــ ۹۷) به این معنی است که دامنهٔ حرکات گذرای پاندول به اندازهٔ دو یاسه برابراندازهٔ فاصلهٔ زمانی یک دورهٔ تناوب آزاد پاندول تنزل می‌کند. همچنین بزرگترین سازهٔ نمایی در معادلهٔ (۶ــ ۹۲) وقتی $\alpha \to 1$ ، تنزل می‌کند.

نقطه‌ای از سطح زمین را درنظر بگیرید. فرض کنید این نقطه مستقیما" در بالای مبدأ یا نقطه کانون یک زلزله که "مرکز زلزله" نامیده می‌شود قرار دارد. حرکت زمین در فواصل زیاد متحدالمرکز از کانون زلزله کاملا" پیچیده است.

بطورکلی، این فواصل دربرگیرنده جایگزینی امواجی‌است که ازدرون زمین سیرکرده‌اند، درصورتی‌که سایرامواج از روی‌سطح زمین آمده‌اند. یک زلزله که ازیک مرکز زلزله دورفرا می‌رسد یک حرکت زمینی را نشان می‌دهد که در آن تعدادی تغییرات ناگهانی‌ضعیف یاتکانهای تندی در جابجایی زمین و سرعت زمین وجود دارد. اینها به انرژی‌ای که ازطریق داخل زمین به لرزه‌نگارمی‌رسد، مربوط می‌گردد. آخرین حرکت زمین همراه‌بایک‌دامنهٔ بزرگ، غلطش آهسته یا حرکت سینوسی با دوره بسیار طولانی می‌باشد. مقدار انرژی که در این آخرین حرکت زمین به لرزه‌نگار می‌رسد توسط امواجی صورت می‌گیرد که از روی سطح زمین طی طریق نموده‌اند.



شکل ۶ ــ ۲. مدهای طبیعی یک نوسان‌کننده هماهنگ ساده میرا.

دورهٔ علامت موج سطحی درمقایسه بادورهٔ جابجایی زمینی اصلی درکانون طولانی است. بیان این اختلاف بدین‌صورت است‌که امواج بابسامدهای مختلف باتندیهای متفاوت حرکت‌می‌کنند.

یک واحد زمان اصلی عبارت است از مدت جابجایی زمین اصلی در کانون . اغلب این فاصله زمانی آنقدر کوتاه است که جابجایی زمین تقریبا" یک تابع دلتابرحسب زمان‌است . لذا ، طیف فوریه جابجایی زمین باید دربر گیرنده تمام بسامدها باشد . این یک ویژگی میلیونـهاتن صخره است‌که ازآن انرژی زلزله بایدبگذرد وبه ناظر برسدبدین وسیله بسامدهای مختلف باسرعتهای متفاوت منتشر می‌شوند ، یعنی صخره‌ها مواد تفکیک‌کننده خواهند بود .

نقطه‌ای را بر روی سطح زمین مورد بررسی قرار می‌دهیم . فرض کنید این نقطه از مرکز زلزله به اندازه کافی دورباشد به نحوی که زمانی را که انرژی سطحی زلزله باهربسامدی سپری می‌کند تا به نقطه موردنظر برسد در مقایسه با مدت جابجایی زمین در کانون طولانی باشد . اگر ضربه‌ای ازانرژی لرزشی درکانون و به شکل جابجایی ناگهانی زمین تولیدشده ، واگر انرژی سطحی لرزه‌ای با هر بسامدی به یک نقطه و با همان تندی سیر نماید ، آن‌گاه با صرفنظر کردن از کمبود حاصل از اصطکاک در زمین ، تمام انرژی موج سطحی مربوط به ضربهٔ مفروض به نقطه مشاهده دقیقا" در همان زمان خواهد رسید . این زمان ورود با زمان سپری شده بوسیله انرژی از مرکز زلزله به نقطه مشاهده مطابقت دارد . مع ذالک چون زمین تفکیک کننده است ، امواج با بسامدهای بالا آهسته‌تر طی طریق می‌کنند . انرژی موج سطحی از مرکز زلزله برای یک فاصله زمانی که از ورود سریعترین موج شروع می‌شود دریافت می‌شود ، یعنی پربسامدترین موج . اگر T_s زمان رسیدن انرژی‌موج سطحی و v_L و v_H تندیهایی بابسامدهای کم و زیادباشند ، آن‌گاه برای یک فاصله مرکزی Δ داریم :

$$T_s = \frac{\Delta}{v_L - v_H} \qquad (۶-۹۸)$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که هرچه لرزه‌نگار از مرکز زلزله دورتر باشد ، زمان ورود T_s طولانی‌تر خواهد شد .

چون حرکت زمین تقریبا" سینوسی است که موج سطحی را همراهی می‌کند ، بررسی پاسخ یک لرزه‌نگار برای حرکات زمین به شکل ویژه زیر جالب می‌شود :

$$u(t) = a \cos (pt - \Phi) \qquad (۶-۹۹)$$

که در آن حالت معادله (۶ — ۷۵) چنین می‌شود :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \omega_0{}^2\theta = aKp^2 \cos (pt - \Phi) \qquad (۶-۱۰۰)$$

که a ، p ، K و Φ ثابت‌هستند . روش از معادلات (۶ — ۴۹) و (۶ — ۵۰) نتیجه می‌شود

$$\theta_p(t) = Ma \cos (pt - \beta) \qquad (۶-۱۰۱)$$

برای انتگرال ویژه معادله (۶ — ۱۰۰) . در معادله (۶ — ۱۰۱)

$$M = Kp^2[(p^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4\lambda^2 p^2]^{-1/2} \qquad (۶-۱۰۲)$$

و

$$\beta = \Phi + \tan^{-1}\frac{2\lambda p}{\omega_0{}^2 - p^2} \qquad (۶-۱۰۳)$$

مقدار M با K مشابه نبوده و به دورهٔ تناوب $2\pi/p$ حرکت زمین همچنین به ثابتهای وسایل بستگی دارد. چون دامنه $\theta_p(t)$ با M متناسب است، M را "بزرگنمایی دینامیکی" لرزه‌نگار می‌نامیم. یک حرکت زمین با دامنهٔ a یک نوسان بیشینه پاندولی با دامنهٔ Ma را تولید خواهد کرد.

فاز $\beta - \Phi$ نیز به دوره تناوب حرکت زمین و پارامترهای وسائل بستگی دارد. چون M به دوره تناوب $2\pi/p$ حرکت زمین وابسته است، یک لرزه‌نگار دوره‌های تناوب غالب در قسمتهای مختلف مسیر دامنه‌های u را در قسمت صحیح مصور نمی‌سازد. بنابراین گفته می‌شود که دامنهٔ بابسامد وابسته و فاز پاسخ یک لرزه‌نگار باعث تغییرشکل دامنه و فازعلامت ثبت شده می‌شود.

۶ ـ ۴. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

وقتی ضرایب معادلهٔ (۶ ـ ۳) یا (۶ ـ ۴) همه ثابت نباشد، حل آنها مشکلتر خواهد شد. گرچه بازهم حالات کلی مشابه با ضرایب ثابت وجود دارد.

به‌عنوان مثال، تبدیلات فوریه و لاپلاس که همواره جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت رامی‌دهند، می‌توانند برای حل بسیاری ازمعادلات دیفرانسیل خطی باضرایب متغیر به‌کار روند. جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌ناهمگن باضرایب ثابت، تشکیل می‌شود از یک تابع مکمل که در معادلهٔ همگن صدق می‌کند به اضافهٔ یک انتگرال خصوصی؛ این مطلب حتی وقتی ضرایب متغیرند نیز صادق است.

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ام همواره دارای n جواب مستقل خطی است (به قسمت (۵ ـ ۵) مراجعه کنید). صرفنظر ازاین که ضرایب متغیر یا ثابتند، جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را می‌توان همواره به صورت سری توانی نوشت. این مطلب وقتی ضرایب متغیرند نیز صحیح است.

جوابهای سری و توابع خاص

بعضی توابع که اغلب در عمل با آنها سر و کار داریم نامهای بخصوصی دارند. مثلاً، e^x "نام" تابع مخصوصی از x است که به وسیلهٔ سری نامتناهی زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (۶-۱۰۴)$$

همین‌طور ، $\sin x$ "نام " تابعی است که به وسیلهٔ سری توانی زیر تعریف می‌گردد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{۶-۱۰۵}$$

همین تذکرات درمورد بقیهٔ توابع آشنای "مقدماتی" مانند $\cos x$ ، $\tan x$ ، $\log x$ ، $\sinh x$ ، $\cosh x$ و الی آخر صادق است .

نکتهٔ قابل ذکراین است که توابع "مقدماتی" درمعادلات دیفرانسیل خطی *همراه شرایط اولیه* صدق می‌کنند . اگر این حقیقت را بپذیریم که جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با شرایط اولیهٔ مشخص منحصر به فرد است ، آن‌گاه نتیجه می‌شودکه معادلهٔ دیفرانسیل ، *همراه شرایط اولیه‌اش* واقعا" یک تابع خاص را تعریف می‌کند . تعریف یک تابع به‌این‌طریق ، به همان خوبی تعریف آن با یک سری توان خواهد بود .

به عنوان مثال ، تابعی مانند $y(x)$ را درنظر بگیرید که در معادلهٔ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \tag{۶-۱۰۶}$$

و شرایط اولیهٔ زیر صدق کند

$$y(0) = 1 \tag{۶-۱۰۷}$$

$$y'(0) = 1 \tag{۶-۱۰۸}$$

معادلات (۶ ـ ۱۰۶) و (۶ ـ ۱۰۸) منحصرا" تابع $y = y(x)$ راتعریف می‌کنند . حال ثابت می‌کنیم $y(x) = e^x$، که در آن e^x با عبارت (۶ ـ ۱۰۴) تعریف می‌شود . پس تابع نمایی را می‌توان به شکل سری توان (۶ ـ ۱۰۴) یا به وسیلهٔ معادلات (۶ ـ ۱۰۶) تا (۶ ـ ۱۰۸) تعریف کرد . وقتی e^x با (۶ ـ ۱۰۴) تعریف می‌شود می‌گوییم سری توان (۶ ـ ۱۰۴) جواب معادلات (۶ ـ ۱۰۶) تا (۶ ـ ۱۰۸) است . وقتی e^x به‌عنوان‌جواب‌معادلات (۶ ـ ۱۰۶) تا (۶ ـ ۱۰۸) تعریف می‌شود ، می‌گوییم جواب را می‌توان به‌صورت سری توان (۶ ـ ۱۰۴) نمایش داد .

مشتق n ام y نسبت به x ، در $x = 0$ رامی‌توان بامشتق‌گیری متوالی‌ازمعادلهٔ (۶ ـ ۱۰۶) به‌دست آورد . مثلا" ،

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} \tag{۶-۱۰۹}$$

در نقطهٔ $x = 0$ باتوجه به معادلهٔ (۶ ـ ۱۰۸) نتیجه می‌دهد ،

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0} = 1 \tag{۶-۱۱۰}$$

همین‌طور

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dx^2} = y \qquad (۶-۱۱۱)$$

به ازای $x = 0$ باتوجه به معادلهٔ (۶ــ۱۰۷)، نتیجه می‌دهد ،

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} = 1 \qquad (۶-۱۱۲)$$

بطورکلی،

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = \frac{d^ny}{dx^n} \qquad (۶-۱۱۳)$$

به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ وتوجه به معادلات (۶ــ۱۰۷) و (۶ــ۱۰۸) نتیجه می‌شود

$$y^{(n)}(0) = 1 \qquad n = 0,1,2, \ldots \qquad (۶-۱۱۴)$$

تابع $y(x)$ که درمعادلات (۶ــ۱۰۶) و (۶ــ۱۰۸) صدق می‌کند را می‌توان حول $x = 0$ به سری تیلر بسط داد . نتیجهٔ کلی عبارت است از :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(0)\,\frac{x^n}{n!} \qquad (۶-۱۱۵)$$

و با استفاده ازمعادلهٔ (۶ــ۱۱۴) همان‌طورکه قبلاً" گفته شدبرای‌محاسبهٔ مشتقات $y^{(n)}(0)$ داریم :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad (۶-۱۱۶)$$

برای یک معادلهٔ دیفرانسیل مفروض، هرمجموعه ازشرایط اولیه یک تابع خاصی راتعریف می‌کند . سری متناظر را می‌توان با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط اولیه مانند قبل به‌دست آورد . پس

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \qquad (۶-۱۱۷)$$

$$y(0) = 1 \qquad (۶-۱۱۸)$$

$$y'(0) = 0 \qquad (۶-۱۱۹)$$

تابع خاص

$$y = \cosh x \qquad (۶-۱۲۰)$$

را تعریف می‌کند . همچنین

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \qquad (۶-۱۲۱)$$

$$y(0) = 0 \qquad (۶-۱۲۲)$$

$$y'(0) = 1 \qquad (۶-۱۲۳)$$

تابع خاص زیر را تعریف می‌کنند ،

$$y = \sinh x \qquad (۶-۱۲۴)$$

بدیهی است تابع خاصی را که به وسیلهٔ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \qquad (۶-۱۲۵)$$

$$y(0) = a \qquad (۶-۱۲۶)$$

$$y'(0) = b \qquad (۶-۱۲۷)$$

تعریف می‌شود می‌توان به صورت ترکیب خطی ازتوابع خاص (۶ ــ ۱۲۰) و (۶ ــ ۱۲۴) نوشت . به عبارت دیگر معادلات (۶ ــ ۱۲۵) تا (۶ ــ ۱۲۷) درمورد

$$y = a \cosh x + b \sinh x \qquad (۶-۱۲۸)$$

صادقند . این مطلب پیشنهاد می‌کند که باید به حالتهای (۶ ــ ۱۱۷) تا (۶ ــ ۱۱۹) و (۶ ــ ۱۲۱) تا (۶ ــ ۱۲۳) که توابع خاص مبنا راتعریف می‌کنند و آنها را می‌توان بطور خطی ترکیب کرد تا جواب مسألهٔ کلی (۶ ــ ۱۲۵) تا (۶ ــ ۱۲۷) به‌دست آید ، توجه داشت . اگر e^{-x} را به عنوان جواب منحصر به فرد

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \qquad (۶-۱۲۹)$$

$$y(0) = 1 \qquad (۶-۱۳۰)$$

$$y'(0) = -1 \qquad (۶-۱۳۱)$$

تعریف کنیم با انتخاب تقریبی a و b در معادلات (۶ ــ ۱۲۵) تا (۶ ــ ۱۲۸) به‌آسانی نشان داده می‌شود که

$$e^x = \cosh x + \sinh x \qquad (۶-۱۳۲)$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \qquad (۶-۱۳۳)$$

۶ ــ ۵. توابع خاص ریاضی فیزیک

توابع خاص فیزیک را می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط اولیه که تابع باید درآنها صدق کند تعریف کرد . برای فراهم ساختن جدولی ازمقادیرعددی هریک ازاین توابع خاص، لازم است سری توان هریک ازآنها را داشته باشیم . روش تعریف یک تابع خاص مستقل از ضرایب ثابت یا متغیر معادلهٔ دیفرانسیل متناظر است . باوجود این ، روش ساختن سری

متناظر، همان‌طور که در بخش (۶ ــ ۴) بیان شد، وقتی‌ضرایب متغیرندقابل استفاده نخواهد بود.

ما ویژگیها، تعاریف و بسط سریهای توابع خاص را بعدا" مورد بررسی قرار خواهیم‌داد و جزئیات چگونگی به‌دست آوردن بسطهای سری را به ضمیمهٔ B محول می‌کنیم.

۶ ــ ۶. تابع گاما

تابع گامای $\Gamma(z)$ در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر با شرط اولیهٔ $\Gamma(1) = 1$ صدق می‌کند

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} - \psi(z)\Gamma(z) = 0 \qquad (۶-۱۳۴)$$

ضریب متغیر $\psi(z)$ چنین تعریف می‌شود

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n}\right) \qquad (۶-۱۳۶)$$

که درآن $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ و

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.577215\ \ldots \qquad (۶-۱۳۷)$$

را "ثابت اولر ــ ماچرونی" گویند. بسط سری $\ln \Gamma(z)$ و استفاده از رابطهٔ

$$\Gamma(z) = e^{\ln \Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\ln \Gamma(z)]^n}{n!} \qquad (۶-۱۳۸)$$

ساده‌تر از بسط مستقیم $\Gamma(z)$ است.

می‌توان نشان داد:

$$\ln \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2})\ln z - z + \tfrac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(z+n)^{-(k+1)}}{(k+1)(k+2)}\right] \qquad (۶-۱۳۹)$$

باتوجه به معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۸) بسط سری $\Gamma(z)$ را نتیجه می‌دهد. ضریب متغیر $\psi(z)$ که در معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۴) ظاهر می‌شود دارای خاصیت جالبی است. باقراردادن $z + 1$ به جای z در معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۶) داریم

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n+1}\right) \qquad (۶-۱۴۰)$$

از حل معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۶) نسبت به $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ، نتیجه می‌شود :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \psi(z) + \gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z+n} \qquad (۶-۱۴۱)$$

بنابراین ،

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z+n+1} \right) \qquad (۶-۱۴۲)$$

سری سمت راست معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۲) به $1/z$ ساده می‌شود ، زیرا

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) + \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right) + \cdots \qquad (۶-۱۴۳)$$

درنتیجه

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \qquad (۶-۱۴۴)$$

که در آن $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۴) را معادلهٔ تابعی نامند و جواب آن با شرط

$$\psi(1) = -\gamma \qquad (۶-۱۴۵)$$

ازمعادلهٔ (۶ ــ ۱۳۶) به‌دست‌می‌آید . فرض کنید $z = n$ و n یک عددصحیح مثبت باشد ، دراین صورت از معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۴) نتیجه می‌شود

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (۶-۱۴۶)$$

حال با استفاده از معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۹) ، داریم

$$\ln \Gamma(z+1) = \ln \Gamma(z) + \ln z \qquad (۶-۱۴۷)$$

بنابراین ،

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (۶-۱۴۸)$$

که در آن $\mathrm{Re}\,(z)>0$.

معادلهٔ تابعی (۶ ــ ۱۴۸) با شرط $\Gamma(1) = 1$ گاهی به‌عنوان تعریف تابع گاما اختیار می‌شود . به ازای $z = n$ ، از معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۸) نتیجه می‌شود ،

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 1\Gamma(1) = n! \end{aligned} \qquad (۶-۱۴۹)$$

پس

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{۶−۱۵۰}$$

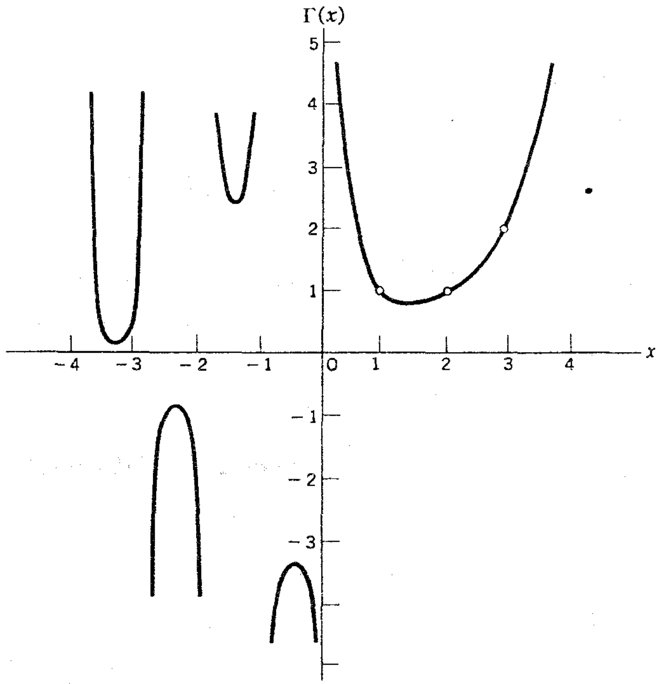
برای مقادیر صحیح n تابع گاما به ازای $n+1$ برابر همان n فاکتوریل است .

تابع گاما اغلب به‌وسیلهٔ یک انتگرال معین تعریف می‌شود ، مثلاً

$$\Gamma(1+z) = \int_0^\infty e^{z \ln u - u}\, du \tag{۶−۱۵۱}$$

معادلهٔ (۶ـ ۱۵۱) را برای به‌دست آوردن نمایش سری تابع گاما می‌توان به‌کار برد : ابتدا با قرار دادن $z = 0$ در معادلهٔ (۶ـ ۱۵۱) تساوی $\Gamma(1) = 1$ راتحقیق می‌کنیم . سپس با قرار دادن

$$w(z) = \Gamma(1+z) \tag{۶−۱۵۲}$$



شکل ۶ ـ ۳. نمودار تابع گاما .

تابع $w(z)$ را به یک سری توان حول $z = 0$ بسط می‌دهیم :

$$w(z) = w(0) + w'(0)z + \cdots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots \tag{۶−۱۵۳}$$

از معادلهٔ (۶ — ۱۵۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \int_0^\infty (\ln u)^n e^{z \ln u - u}\, du \tag{۶ — ۱۵۴}$$

بنابراین ،

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n w}{dz^n}\right)_{z=0} z^n = \int_0^\infty \frac{(z \ln u)^n}{n!} e^{-u}\, du \tag{۶ — ۱۵۵}$$

ازطرفی

$$(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(z \ln u)^n}{n!}\; e^{-u}\, du \tag{۶ — ۱۵۶}$$

با فرض تعویض‌پذیر بودن ترتیب مجموع و انتگرال در معادلهٔ (۶ — ۱۵۶) می‌توان از تساوی زیر استفاده کرد .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \ln u)^n}{n!} = e^{z \ln u} \tag{۶ — ۱۵۷}$$

بالاخره نتیجه می‌شود

$$w(z) = \Gamma(1 + z) = \int_0^\infty e^{z \ln u - u}\, du \tag{۶ — ۱۵۸}$$

۶ — ۷. تابع بتا

تابع بتا به وسیلهٔ یک انتگرال معین به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}\,(1 - u)^{y-1}\, du \tag{۶ — ۱۵۹}$$

می‌توان نشان داد که توابع بتا و گاما با رابطهٔ زیر به‌هم وابسته‌اند

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \tag{۶ — ۱۶۰}$$

بخصوص اگر $y = 1 - x$ ،

$$B(x, 1 - x) = \Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{(1 - u)^x}\, du \tag{۶ — ۱۶۱}$$

با فرض

$$w = \frac{u}{1 - u} \tag{۶ — ۱۶۲}$$

$$u = \frac{w}{1+w} \tag{۶-۱۶۳}$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{du}{1-u} = \frac{w}{u}\,du &= (1+w)\,d\left(\frac{w}{1+w}\right)\\ &= \frac{(1+w)\,dw - w\,dw}{1+w} = \frac{dw}{1+w}\end{aligned} \tag{۶-۱۶۴}$$

درنتیجه

$$B(x, 1-x) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad 0 < x < 1. \tag{۶-۱۶۵}$$

مقدار انتگرال معین در معادله (۶ــ۱۶۵) از جدول انتگرالهای معین به‌دست می‌آید. باوجود این، آن را می‌توان مستقیماً با استفاده از انتگرال‌گیری مختلط محاسبه کرد. باتوجه به معادلات (۶ــ۱۶۱) و (۶ــ۱۶۵) داریم

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{۶-۱۶۶}$$

این یک معادلهٔ تابعی دیگراست که درتابع گاما صدق می‌کند. باقرار دادن $x = \frac{1}{2}$ درمعادلهٔ (۶ــ۱۶۶) نتیجهٔ مفید زیر به‌دست می‌آید

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{۶-۱۶۷}$$

انتگرال معین

$$\int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw = \pi \csc \pi x \tag{۶-۱۶۸}$$

را می‌توان مستقیماً با روش مقدماتی زیر محاسبه کرد. ابتدا توجه کنید که

$$\pi \csc \pi x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - x^2} \tag{۶-۱۶۹}$$

سپس تابع انتگرال (معادلهٔ (۶ــ۱۶۸)) را به سری تیلر بسط می‌دهیم تا معادلهٔ (۶ــ۱۶۹) پس از انتگرال‌گیری جمله به جمله به‌دست آید. جزئیات مسأله به قرار زیر است: فرض کنید

$$I = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw = \int_0^1 \frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw + \int_1^\infty \frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw \tag{۶-۱۷۰}$$

و

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k \qquad 0 < w < 1 \tag{۶-۱۷۱}$$

همچنین

$$\frac{1}{1+w}=\frac{1}{w}\frac{1}{1+w^{-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}w^{-k} \qquad 1<w<\infty. \tag{۱۷۲ − ۶}$$

اگر معادلات (۶ ــ ۱۷۱) و (۶ ــ ۱۷۲) را در (۶ ــ ۱۷۰) قرار دهیم و ترتیب مجموع و انتگرال را عوض کنیم نتیجه می‌شود ،

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^k w^{k+x-1}\,dw+\sum_{k=1}^{\infty}\int_1^{\infty}(-1)^{k-1}w^{x-k-1}\,dw \tag{۱۷۳ − ۶}$$

و

$$\int_0^1 (-1)^k w^{x+k-1}\,dw=\frac{(-1)^k}{x+k} \tag{۱۷۴ − ۶}$$

به شرط آن‌که $k\geq 0$ و $0<x<1$. همین‌طور ، با شرط $k\geq 1$ ، $0<x<1$ ،

$$\int_1^{\infty}(-1)^{k-1}w^{x-k-1}\,dw=\frac{(-1)^k}{x-k} \tag{۱۷۵ − ۶}$$

پس

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x-k} \tag{۱۷۶ − ۶}$$

که آن را می‌توان چنین نوشت

$$I=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right) \tag{۱۷۷ − ۶}$$

یا

$$I=\frac{1}{x}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x}{x^2-k^2} \tag{۱۷۸ − ۶}$$

بالاخره ،

$$I=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-x^2} \qquad 0<x<1 \tag{۱۷۹ − ۶}$$

حال از معادلهٔ (۶ ــ ۱۶۹) نتیجه می‌شود

$$\int_0^{\infty}\frac{w^{x-1}}{1+w}\,dw=\pi\csc\pi x \qquad 0<x<1. \tag{۱۸۰ − ۶}$$

۶ ـ ۸. توابع بسل

توابع بسل ، جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل بسل زیر

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (۶-۱۸۱)$$

هستند که در ابتدا توسط بسل در ارتباط با حرکت سیاره‌ای به‌دست آمده‌اند . از زمان بسل مطالعهٔ این معادله در مختصات استوانه‌ای درارتباط با مسائل صوت ، نظریه الکترومانیتیک و حرارت ضروری بوده است .

تابع بسل مرتبهٔ صفر

با قرار دادن $n=0$ در معادلهٔ (۶ ـ ۱۸۱) ، نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (۶-۱۸۲)$$

معادلهٔ (۶ ـ ۱۸۲) با شرایط اولیهٔ

$$y(0)=1 \qquad (۶-۱۸۳)$$

$$y'(0)=0 \qquad (۶-۱۸۴)$$

منحصراً تابع بسل مرتبهٔ صفر را که به $J_0(x)$ نشان می‌دهیم تعریف می‌کند . سری توانی‌که در معادلات (۶ ـ ۱۸۲) تا (۶ ـ ۱۸۴) صدق می‌کند عبارت است از:

$$y=J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots \qquad (۶-۱۸۵)$$

و بطورکلی

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \qquad (۶-۱۸۶)$$

که آن را با قرار دادن معادلهٔ (۶ ـ ۱۸۵) یا (۶ ـ ۱۸۶) در معادلات (۶ ـ ۱۸۲) تا (۶ ـ ۱۸۴) می‌توان تحقیق کرد .

اگر u_r جملهٔ r ام این سری باشد ،

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{-x^2}{(2r)^2} \qquad (۶-۱۸۷)$$

هنگامی‌که r به ازای هرمقدارمتناهی x بی‌نهایت شودبه سمت‌صفرمیل می‌کند . درنتیجه ، سری به ازای تمام‌مقادیر x متقارب‌است ، وچون یک سری توان است ، تابع $J_0(x)$ وتمام‌مشتقات آن به ازای تمام مقادیر x ، حقیقی یا مختلط متقارب خواهد بود .

توجه کنید که

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (۱۸۸-۶)$$

"چیزی شبیه" $J_0(x)$ است ، و این پیشنهاد می‌کند که شکلهای $J_0(x)$ و $\cos x$ باید در بعضی جنبه‌ها مشابه باشند و این مطلب صحیح است . هر دو تابع $J_0(x)$ و $\cos x$ یکه بوده وشیب آنها در $x = 0$ برابرصفراست . هردو با تنزل x نوسان می‌کنند ؛ با وجود این ، $J_0(x)$ کاملا" نوسانی نیست ، و دامنه‌های بیشینه آن با افزایش x به کندی ازمقدار واحد تنزل می‌کنند . باقراردادن

$$w = y\sqrt{x} \qquad (۱۸۹-۶)$$

در معادلهٔ (۶ــ ۱۸۲) ، دیده می‌شود که w در معادلهٔ زیر صدق می‌کند .

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) w = 0 \qquad (۱۹۰-۶)$$

برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ x ، معادلهٔ (۶ــ ۱۹۰) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{d^2w}{dx^2} + w = 0 \qquad (۱۹۱-۶)$$

و دارای جواب کلی

$$w = A\cos(x - \Phi) \qquad (۱۹۲-۶)$$

است که در آن A و Φ ثابتند . از این رابطه باتوجه به معادلهٔ (۶ــ ۱۸۹) نتیجه می‌شود

$$y = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(x - \Phi) \qquad (۱۹۳-۶)$$

توجه کنید که با استفاده از تبدیل (۶ــ ۱۸۹) ضرایب w در معادلهٔ (۶ــ ۱۹۰) را می‌توان به قسمی مرتب کرد که به ازای $x \to \infty$ ، صفر نشوند .

یک تحلیل دقیقتر نشان می‌دهد که برای $x > 0$

$$J_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + p(x)\right] \qquad (۱۹۴-۶)$$

که در آن

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = 0 \qquad (۱۹۵-۶)$$

به ازای مقادیر خیلی بزرگ x به آسانی نوشته می‌شود

$$J_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (۱۹۶-۶)$$

که درآن علامت ~ نشان می‌دهد که $J_0(x)$ به طور مجانبی برابر عبارت سمت راست (۶ـ۱۹۶) است .

توابع بسل مرتبهٔ صحیح مثبت

در معادلهٔ (۶ ـ ۱۸۱) فرض کنید $n = +1$. جواب

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0 \qquad (۶-۱۹۷)$$

که در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 0 \qquad (۶-۱۹۸)$$

$$y'(0) = \tfrac{1}{2} \qquad (۶-۱۹۹)$$

صدق می‌کند ، بنابه تعریف ، *تابع بسل مرتبهٔ یک* نامیده شده وبه‌صورت زیرنشان داده می‌شود

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots \qquad (۶-۲۰۰)$$

از مقایسهٔ سری توان $\sin x$ ،

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (۶-۲۰۱)$$

با معادلهٔ (۶ ـ ۲۰۰) معلوم می‌شود که $J_1(x)$ مشابه $\sin x$ است . درواقع مقایسهٔ معادلهٔ (۶ـ ۱۸۵) با (۶ ـ ۲۰۰) آشکار می‌سازد که

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \qquad (۶-۲۰۲)$$

دقیقاً" مانند

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad (۶-۲۰۳)$$

تابع $J_1(x)$ رفتارش شبیه $\sin x$ است که در $x = 0$ صفرمی‌شود و وقتی x صعود می‌کند نوسانی است . ولی ، نوسانات $J_1(x)$ کاملاً" متناوب نیستند ، وبیشینه دامنه با افزایش x به کندی تنزل می‌کند . برای مقادیر صحیح $n \geq 2$ جوابهای

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (۶-۲۰۴)$$

که در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 0 \qquad (۶-۲۰۵)$$

$$y'(0) = 0 \tag{۶-۲۰۶}$$

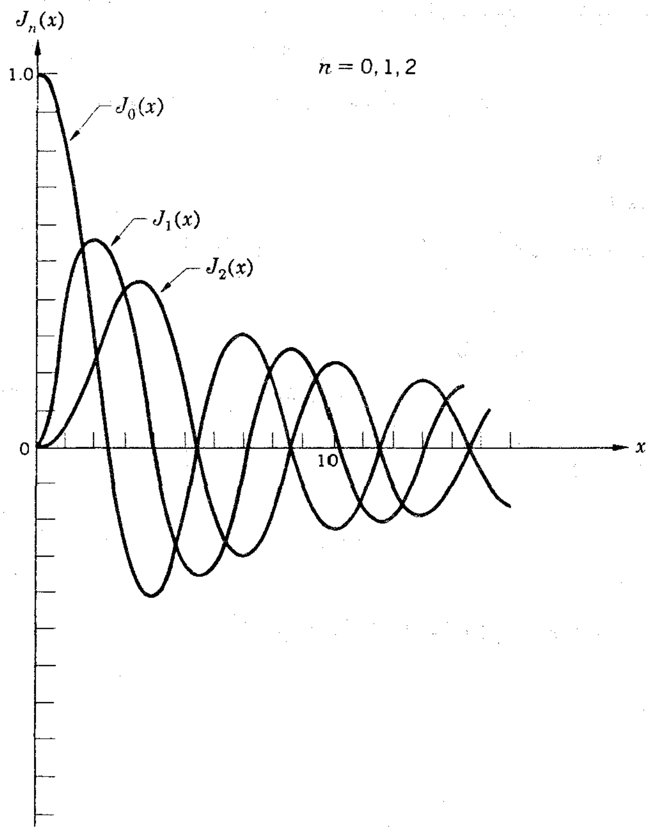
صدق می‌کنند توابع بسل مرتبهٔ $n \geq 2$ نامیده می‌شوند. بسط سری توان یک تابع بسل هرمرتبهٔ غیرمنفی شامل $n = 0$ و $n = 1$ را می‌توان به صورت

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \cdots\right] \tag{۶-۲۰۷}$$

یا به صورت کلی‌تر

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)} \qquad n \neq -1, -2, -3, \ldots \tag{۶-۲۰۸}$$

نوشت.



شکل ۶ــ۴. توابع بسل مرتبهٔ ۰، ۱ و ۲.

تمام توابع بسل مرتبهٔ $n \geq 1$، مانند $\sin x$ هستند به قسمی که از $x = 0$ شروع شده و وقتی x صعود می‌کند نوسان می‌کنند، ولی نوسانات آنها متناوب نیست، وبیشینه دامنه‌ها با افزایش x تنزل می‌کند.

توابع بسل مرتبهٔ صحیح منفی

وقتی n عددی صحیح است، از معادلهٔ (۶ ــ ۲۰۸) پس از اختصار نتیجه می‌شود

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 1,2,3, \ . \ . \ . \qquad (۶-۲۰۹).$$

۶ ــ ۹. توابع نیومن

به معادلهٔ بسل (۶ ــ ۱۸۲) توجه کنید. تابع بسل $J_0(x)$ یک جواب آن است. انتظار داریم جواب دیگری پیدا کنیم که به صورت مضرب $J_0(x)$ دریک عددثابت نباشد، زیرامعادلهٔ (۶ ــ ۱۸۲) یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم‌است. این تابع را "تابع نیومن مرتبهٔ صفر" برای یک تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ صفر گویند.

فرض کنید u این تابع باشد و $v = J_0(x)$. در این صورت

$$xu'' + u' + xu = 0 \qquad (۶-۲۱۰)$$

$$xv'' + v' + xv = 0 \qquad (۶-۲۱۱)$$

اگر معادلهٔ (۶ ــ ۲۱۰) را در v و معادلهٔ (۶ ــ ۲۱۱) را در u ضرب کرده ازهم کم کنیم داریم،

$$x(u''v - v''u) + u'v - v'u = 0 \qquad (۶-۲۱۲)$$

ازطرفی معادلهٔ (۶ ــ ۲۱۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = 0 \qquad (۶-۲۱۳)$$

که پس از انتگرال‌گیری عبارت زیر به‌دست می‌آید،

$$x(u'v - v'u) = B \qquad (۶-۲۱۴)$$

که در آن B مقداری است ثابت. از تقسیم معادلهٔ (۶ ــ ۲۱۴) بر v^2x نتیجه می‌شود،

$$\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{B}{v^2x} \qquad (۶-۲۱۵)$$

یا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{B}{v^2x} \qquad (۶-۲۱۶)$$

انتگرال معادلهٔ (۶ ــ ۲۱۶) عبارت است از:

$$\frac{u}{v} = A + B \int \frac{dx}{v^2 x} \tag{۲۱۷ ــ ۶}$$

و چون $v = J_0(x)$ ،

$$u = AJ_0(x) + BJ_0(x) \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} \tag{۲۱۸ ــ ۶}$$

که در آن A و B ثابتهای اختیاری هستند.

با استفاده از معادلهٔ (۶ ــ ۱۸۵) می‌توان نوشت:

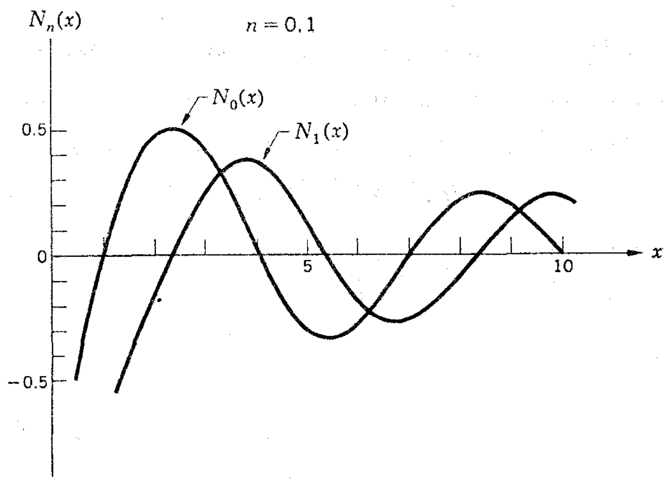
$$\frac{1}{xJ_0^2(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \cdots \tag{۲۱۹ ــ ۶}$$

درنتیجه

$$J_0(x) \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} = J_0(x) \left(\log x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \cdots \right) \tag{۲۲۰ ــ ۶}$$

با استفادهٔ مجدد از معادلهٔ (۶ ــ ۱۸۵) داریم،

$$\begin{aligned} J_0(x) \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} &= J_0(x) \log x \\ &\quad + \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \cdots \right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \cdots \right) \end{aligned} \tag{۲۲۱ ــ ۶}$$



شکل ۶ ــ ۵. توابع نیومن مرتبهٔ ۰ و ۱.

که به رابطهٔ زیر منجر می‌شود ،

$$u = AJ_0(x) + B\left[J_0(x)\log x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \cdots\right] \quad (۶-۲۲۲)$$

تابع نیومن مرتبهٔ صفر با قرار دادن

$$A = \frac{-2}{\pi}(\log 2 - \gamma) \quad (۶-۲۲۳)$$

$$B = \frac{2}{\pi} \quad (۶-۲۲۴)$$

در معادلهٔ (۶ ــ ۲۲۱) تعریف می‌شود ، که در آن γ ثابت اولر است و در معادلهٔ (۶ ــ ۱۳۷) تعریف شده است . با این جایگذاری ، معادلهٔ (۶ ــ ۲۲۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$u = N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)\right] + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \cdots\right) \quad (۶-۲۲۵)$$

سری کامل را می‌توان با روشهای دیگر نیز به‌دست آورد ،

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}a_m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \quad (۶-۲۲۶)$$

که در آن

$$\sigma_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \quad (۶-۲۲۷)$$

تابع نیومن مرتبهٔ صفر نیز یک تابع نوسانی غیرمتناوب است که دامنهٔ بیشینه آن به سمت صفر میل می‌کند ، ولی به‌عوض آن که به ازای $x \to 0$ متناهی‌بماندمانند $\log x$ به $-\infty$ میل می‌کند . همچنین ویژگی لگاریتم درمعادلهٔ (۶ ــ ۲۲۶) دارای این اثراست‌که x باید غیرمنفی باشد تا $N_0(x)$ حقیقی شود . می‌توان نشان داد که به ازای $x > 0$ ،

$$N_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + q(x)\right] \quad (۶-۲۲۸)$$

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = 0 \quad (۶-۲۲۹)$$

درنتیجه ، برای مقادیر مثبت بزرگ x داریم

$$N_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (۶-۲۳۰)$$

توابع نیومن با مرتبهٔ صحیح و مثبت

همان‌طور که ترکیب خطی مستقل $N_0(x)$ جواب $J_0(x)$ معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر است یک ترکیب خطی مستقل $N_1(x)$ وابسته به $J_1(x)$ ، $N_2(x)$ وابسته به $J_2(x)$ و الی آخر وجود دارد. این توابع نیومن به‌صورت زیر داده می‌شوند

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(a_m + a_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m} \qquad x > 0, n = 1,2,3, \ldots \tag{۶ – ۲۳۱}$$

که در آن

$$a_0 = 1 \tag{۶ – ۲۳۲}$$

$$a_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \qquad m = 1,2,3, \ldots \tag{۶ – ۲۳۳}$$

و در رابطه‌ای به صورت زیر صدق می‌کنند

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x) \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{۶ – ۲۳۴}$$

کلی‌ترین جواب معادلهٔ بسل (۶ – ۱۸۱) عبارت است از:

$$y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x) \tag{۶ – ۲۳۵}$$

۶ – ۱۰ . توابع بسل مرتبهٔ دلخواه

معادلهٔ بسل برای مرتبهٔ دلخواه ν عبارت است از:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{۶ – ۲۳۶}$$

که در آن ν یک عدد صحیح نیست . جواب سری (۶ – ۲۰۸) وقتی به جای n از ν استفاده کنیم بازهم صادق است . به ازای $n = ½$، از معادلهٔ (۶ – ۲۰۸) نتیجه می‌شود

$$J_{½}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{۶ – ۲۳۷}$$

و بطورکلی داریم ،

$$J_{n+½}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+½}\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x}{x} \qquad n = 1,2,3, \ldots \tag{۶ – ۲۳۸}$$

اگر $\nu=-n$ را در معادلهٔ(۶ ــ ۲۰۸)قرار دهیم ، به‌علت این که معادلهٔ بسل شامل ν^2 است توابع J_ν و $J_{-\nu}$ نیزباید جوابهای معادلهٔ (۶ ــ ۲۳۶) باشد . ولی ، برای‌مقادیرغیرصحیح ν ، J_ν و $J_{-\nu}$ بطور خطی مستقل هستند ، زیرا معادلهٔ (۶ ــ ۲۰۸) نشان می‌دهدکه جملهٔ اول J_ν با x^ν متناسب‌است‌درصورتی‌که جملهٔ اولی $J_{-\nu}$ با $x^{-\nu}$ متناسب خواهد بود . درنتیجه (۶ ــ ۲۰۸) برقرار نیست ، و کلی‌ترین جواب معادلهٔ بسل با مرتبهٔ غیرصحیح به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \tag{۶ ــ ۲۳۹}$$

با استفاده از (۶ ــ ۲۰۸) می‌توان نشان داد که

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{۶ ــ ۲۴۰}$$

و ، بطورکلی

$$J_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+1/2} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \tag{۶ ــ ۲۴۱}$$

مثلاً ، کلی‌ترین جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ $1/2$ عبارت است از :

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A \sin x + B \cos x) \tag{۶ ــ ۲۴۲}$$

توابع نیومن مرتبهٔ دلخواه

به نظر می‌رسد که جواب دوم معادلهٔ بسل وقتی n صحیح است برابر $N_n(x)$ و وقتی ν صحیح نیست برابر $J_{-\nu}(x)$ است . برای رفع این ابهام $N_\nu(x)$ رابرای مقادیردلخواه ν به قسمی تعریف می‌کنیم که :

(۱) در معادلهٔ بسل صدق کند

(۲) وقتی $\nu \to n$ ، به $N_n(x)$ تبدیل شود

پس ، فرض می‌کنیم

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu} [J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)] \tag{۶ ــ ۲۴۳}$$

و

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x) \tag{۶ ــ ۲۴۴}$$

وقتی ν صحیح است ، $N_\nu(x)$ در معادلهٔ بسل صدق می‌کند زیرا $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ در آن

صادقند . علاوه‌براین ، وقتی ν یک عددصحیح نیست ، باتوجه‌به‌معادلهٔ (۶ ـ ۲۴۲) واستقلال J_ν و $J_{-\nu}$ معلوم می‌شود J_ν و N_ν مستقل خطی هستند . اگرمعادلهٔ (۶ ـ ۲۰۸) (با ν به جای n) را در معادلهٔ (۶ ـ ۲۴۳) قرار دهیم و حد (۶ ـ ۲۴۴) را محاسبه کنیم همان‌طور که انتظار داریم معادلهٔ (۶ ـ ۲۳۱) به‌دست می‌آید . ازبررسی (۶ ـ ۲۳۱) معلوم می‌شودکه مانندمعادلهٔ (۶ ـ ۲۰۸) شامل یک جملهٔ لگاریتمی‌است . بنابراین ، $J_n(x)$ و $N_n(x)$ حتی وقتی n یک عدد صحیح است مستقل خطی خواهند بود . درنتیجه به ازای هر عدد حقیقی ν

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \tag{۶ ـ ۲۴۵}$$

جواب عمومی معادله (۶ ـ ۲۴۶) است .

۶ ـ ۱۱ . توابع هنکل

فرمولهای مجانبی (۶ ـ ۱۹۶) و (۶ ـ ۲۳۰) را می‌توان ترکیب کرد :

$$J_0(x) + iN_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{۶ ـ ۲۴۶}$$

$$J_0(x) - iN_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{۶ ـ ۲۴۷}$$

یا بطور ساده

$$J_0(x) + iN_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i(x-\pi/4)} \tag{۶ ـ ۲۴۸}$$

$$J_0(x) - iN_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{-i(x-\pi/4)} \tag{۶ ـ ۲۴۹}$$

برای $x \gg 0$ صورتهای مجانبی دوترکیب خطی خاص J_0 و N_0 آن‌قدر در ریاضیات کاربردی مفیدند که توابع

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iN_0(x) \tag{۶ ـ ۲۵۰}$$

و

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iN_0(x) \tag{۶ ـ ۲۵۱}$$

را به صورت جدول محاسبه شده‌ای تنظیم کرده‌اند .

تابع $H_0^{(1)}(x)$ را "تابع هنکل نوع اول مرتبهٔ صفر" و تابع $H_0^{(2)}(x)$ را "تابع هنکل نوع دوم مرتبهٔ صفر" نامند . همین‌طور

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{۶-۲۵۲}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{۶-۲۵۳}$$

را توابع هنکل نوع اول و دوم مرتبهٔ ν گویند. توابع $H_\nu^{(1)}(x)$ و $H_\nu^{(2)}(x)$ مستقل خطی هستند زیرا J_ν و N_ν مستقل خطی‌اند. پس جواب عمومی معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν را به جای (۶-۲۴۵) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = CH_\nu^{(1)}(x) + DH_\nu^{(2)}(x) \tag{۶-۲۵۴}$$

بطور مجانبی داریم

$$\lim_{x\to+\infty} H_0^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i(x-\pi/4)} \tag{۶-۲۵۵}$$

$$\lim_{x\to+\infty} H_0^{(2)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{-i(x-\pi/4)} \tag{۶-۲۵۶}$$

علاوه براین، با استفاده از نمایش سری J_n و N_n می‌توان نشان داد که

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{۶-۲۵۷}$$

$$\lim_{x\to\infty} J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left[x - (\pi/2)(n + 1/2)\right] \tag{۶-۲۵۸}$$

$$\lim_{x\to 0} N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2} + 0.5772\ \cdots\right) \tag{۶-۲۵۹}$$

$$\lim_{x\to 0} N_n(x) = \frac{-(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad n = 1,2,3,\ \ldots \tag{۶-۲۶۰}$$

$$\lim_{x\to\infty} N_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left[x - (\pi/2)(n + 1/2)\right] \tag{۶-۲۶۱}$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 0} H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi}\log\frac{x}{2} \tag{۶-۲۶۲}$$

$$\lim_{x\to 0} H_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{i(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad n = 1,2,3,\ \ldots \tag{۶-۲۶۳}$$

$$\lim_{x\to+\infty} H_n^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i[x-(\pi/2)(n+1/2)]} \tag{۶-۲۶۴}$$

که خواص مفیدی از تابع هنکل مرتبهٔ اول را نشان می‌دهند . مجموعهٔ مشابهی از روابط حدی $H_n^{(2)}$ با قرار دادن i– به جای i در معادلات (۶ ــ ۲۶۲) و (۶ ــ ۲۶۴) به‌دست می‌آید .

۶ ــ ۱۲ . توابع بسل هذلولی

توابع بسل هذلولی (شکل (۶ ــ ۶)) به توابع بسل معمولی دقیقاً" همان‌طور که سینوس هذلولی و کسینوس هذلولی با سینوس و کسینوس معمولی در ارتباطند با یکدیگر رابطه دارند . مثلاً" $\sin x$، و $\cos x$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad (۶ - ۲۶۵)$$

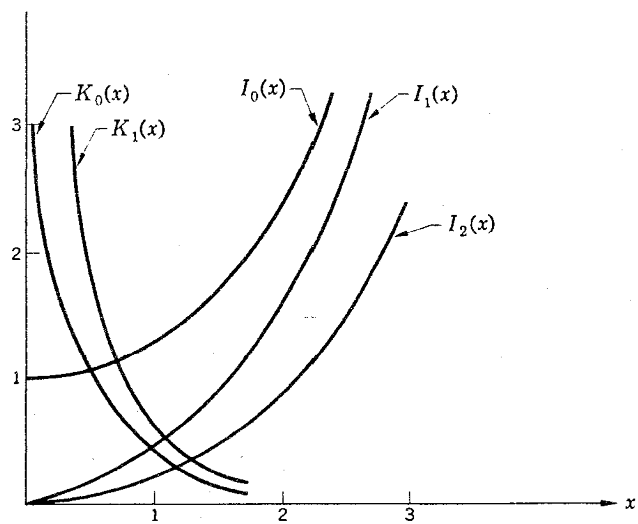
و اگر در معادلهٔ (۶ ــ ۲۵۶) ix را به جای x قرار دهیم ، رابطهٔ (۶ ــ ۲۶۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0 \qquad (۶ - ۲۶۶)$$

که دارای جوابهای $\sinh x$ و $\cosh x$ است .

بطور مشابه ، اگر در معادلهٔ (۶ ــ ۲۳۶) ix را به جای x قرار دهیم به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (۶ - ۲۶۷)$$



شکل ۶ ــ ۶. توابع بسل هذلولی .

معادله فوق دارای دو جواب مستقل خطی است که به $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ نشان می‌دهیم که آنها را به ترتیب توابع بسل "هذلولی" یا "اصلاح شده" نوع اول و دوم (مرتبهٔ ν) نامند.

برحسب این توابع بسل هذلولی، جواب عمومی معادلهٔ (۶ ــ ۲۶۷) به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x) \tag{۶ – ۲۶۸}$$

از نحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ (۶ ــ ۲۶۷) معلوم می‌شود که I_ν و K_ν به توابع بسل معمولی‌با متغیر مختلط درارتباطند، بخصوص دو عبارت زیر:

$$I_\nu(x) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ix) \tag{۶ – ۲۶۹}$$

و

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi i}{2}\right) e^{i\pi\nu/2} H_\nu^{(1)}(ix) \tag{۶ – ۲۷۰}$$

توابع بسل هذلولی با مرتبهٔ صحیح نوسانی نیستند و درنتیجه نمودارآنها با نمودار توابع بسل معمولی متفاوت است. این تفاوت را باتوجه به تعبیر مشابه بین سینوس و کسینوس معمولی وهذلولی می‌توان دریافت. چندخاصیت حدی مهم‌توابع‌بسل هذلولی بامرتبهٔ صحیح عبارتند از:

$$\lim_{x\to 0} K_0(x) = -\left(\log\frac{x}{2} + 0.5772\ .\ .\ .\right) \tag{۶ – ۲۷۱}$$

$$\lim_{x\to 0} I_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{۶ – ۲۷۲}$$

$$\lim_{x\to \infty} I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \tag{۶ – ۲۷۳}$$

$$\lim_{x\to 0} K_n(x) = \frac{\Gamma(n)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad n \neq 0 \tag{۶ – ۲۷۴}$$

$$\lim_{x\to \infty} K_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \tag{۶ – ۲۷۵}$$

۶ ــ ۱۳. توابع لژاندر وابسته

توابع لژاندر وابسته جوابهای معادله دیفرانسیل زیر

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - x^2}\right] y = 0 \tag{۶ – ۲۷۶}$$

هستندکه به‌عنوان "معادله وابسته لژاندر" شناخته شده‌اند. بطورکلی، μ و ν دوثابت مختلط دلخواهند. معادلهٔ دیفرانسیلی‌هنگامی به‌وجود می‌آید که سعی کنیم انتشار موج، پتانسیل، یا مسائل پراش را در مختصات کروی حل کنیم

جوابهای معادلهٔ (۶ ــ ۲۷۶) زمانی مهم است که μ یا ν یا هر دو اعداد صحیحی باشند. بخصوص موردی که $\mu = 0$، ظاهر شدن عامل $1 - x^2$ در معادلهٔ (۶ ــ ۲۷۶) ما را به این گمان رهبری می‌کند که برای $x = \pm 1$ جوابها به بعضی روشهای "ویژه" رفتارمی‌کنند. این موردی واقعی‌است. جواب عمومی‌درگستره $-1 \le x \le +1$ مجموع دوتابع مستقل خطی است، پس

$$y = AP_\nu^\mu(x) + BQ_\nu^\mu(x) \qquad (۶ - ۲۷۷)$$

که $P_\nu^\mu(x)$ یک "تابع لژاندر وابستهٔ نوع اول" و $Q_\nu^\mu(x)$ یک "تابع لژاندر وابستهٔ نوع دوم" نامیده می‌شود.

توابع $P_\nu^\mu(x)$ و $Q_\nu^\mu(x)$ برای مقادیر صحیح ν و μ چنان که $|\mu| \le |\nu|$ "نسبةً" ساده می‌شوند. این واقعیت جالب ومهمی برای این مورد خاص که $P_\nu^\mu(x)$ می‌تواند برحسب $P_\nu^0(x)$ و $Q_\nu^\mu(x)$ برحسب $Q_\nu^0(x)$ بیان شود، می‌باشد.

توابع $P_\nu^0(x)$ و $Q_\nu^0(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیلی لژاندر می‌باشند:

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu + 1)y = 0 \qquad (۶ - ۲۷۸)$$

وبرای سادگی‌درنوشتن، مرسوم‌است صفری که در P_ν^0 و Q_ν^0 ذکرگردیده، حذف شود. بنابراین وقتی که ν عددی صحیح است، $\nu = n$، جواب عمومی معادلهٔ (۶ ــ ۲۷۸) به صورت

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \qquad (۶ - ۲۷۹)$$

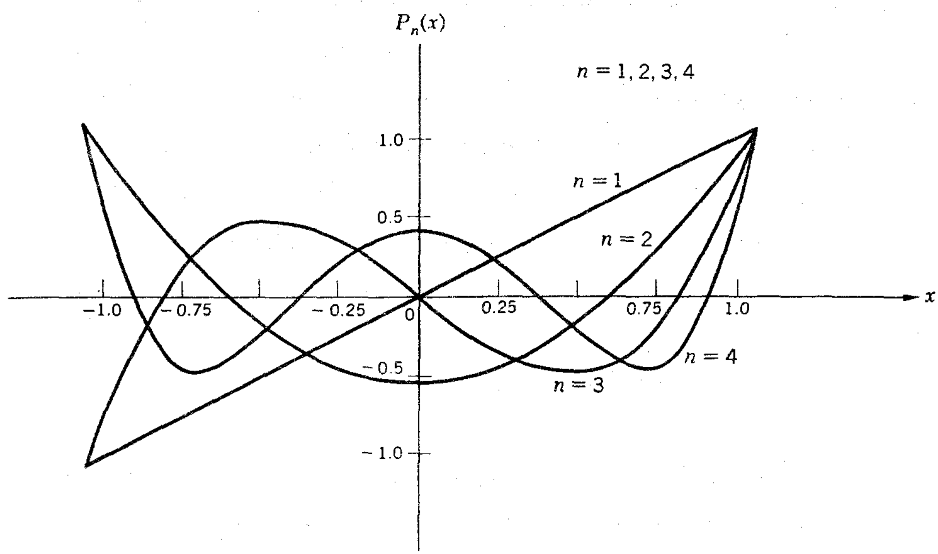
باشد. تابع $P_n(x)$ یک کثیرالجملهٔ درجهٔ n است و *کثیرالجملهٔ لژاندر از درجهٔ n* نامیده می‌شود. جواب همراه مستقل خطی $P_n(x)$، یعنی $Q_n(x)$ کثیرالجمله نیست. این شامل جمله‌ای لگاریتمی بوده اغلب بیشترین $Q_n(x)$ تابع لژاندر نوع دوم نامیده می‌شود (شکل (۶ ــ ۷)). تاجایی که به گسترهٔ $-1 \le x \le 1$ مربوط می‌شودمی‌توان با معادلهٔ (۶ ــ ۸۰) یک زاویهٔ θ را تعریف کرد:

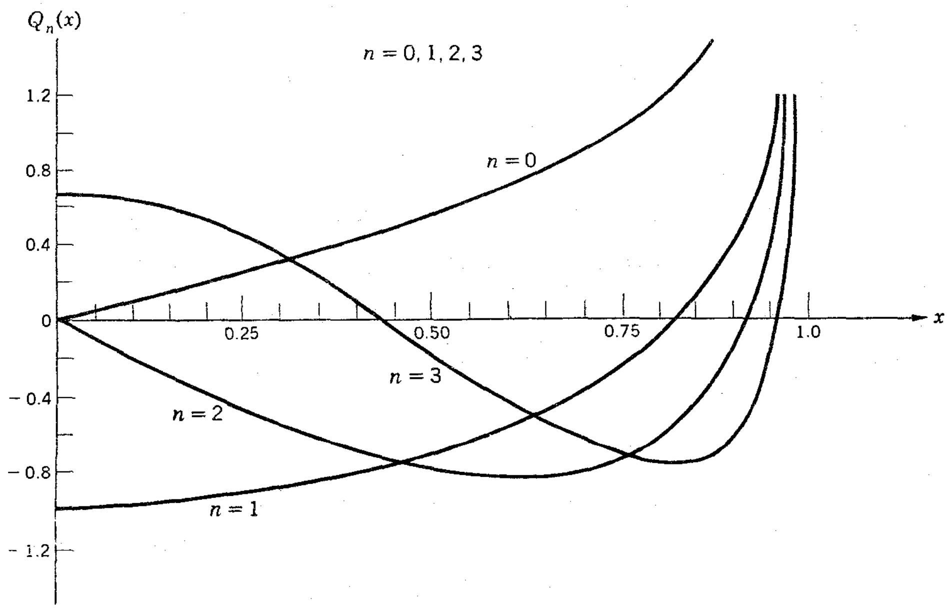
$$x = \cos\theta \qquad (۶ - ۲۸۰)$$

سپس برحسب x یا $\cos\theta$ اولین کثیرالجمله‌های لژاندر و توابع لژاندر نوع دوم به‌وسیلهٔ روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$P_0(x) = 1 \qquad (۶ - ۲۸۱)$$

$$P_1(x) = x = \cos\theta \qquad (۶ - ۲۸۲)$$





شکل ۶ ــ ۷. چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ و توابع لژاندر نوع دوم $Q_n(x)$.

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) = \tfrac{1}{4}(3\cos 2\theta - 1) \qquad (۲۸۳-۶)$$

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \tfrac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta) \qquad (۲۸۴-۶)$$

$$Q_0(x) = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (۲۸۵-۶)$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 \qquad (۲۸۶-۶)$$

$$Q_2(x) = \tfrac{1}{4}(3x^2 - 1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{3}{2}x \qquad (۲۸۷-۶)$$

$$Q_3(x) = \tfrac{1}{4}(5x^3 - 3x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{2}{3} \qquad (۲۸۸-۶)$$

با جایگذاری مستقیم در معادلهٔ (۶ ـ ۲۷۸) دیده می‌شود که معادلات (۶ ـ ۲۸۲) تا (۶ ـ ۲۸۸) به ازای مقادیر مناسب n جوابهای معادله‌اند. چون Q ها شامل جملات لگاریتمی و P ها فاقد آن هستند، نتیجه می‌شود که به ازای مقدار مفروض n، $P_n(x)$ و $Q_n(x)$، مستقل خطی هستند.

یک عبارت خیلی ساده کلی برای P_n و Q_n می‌توان به‌دست آورد. مثلاً" فرمول رودریگز برای $P_n(x)$ عبارت است از:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad (۲۸۹-۶)$$

در این صورت Q_n را می‌توان چنین نوشت:

$$Q_n(x) = \tfrac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x) \qquad (۲۹۰-۶)$$

که در آن $n = ۱،۲،۳،\ldots$ و

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3\cdot(n-1)}P_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5\cdot(n-2)}P_{n-5}(x) + \cdots \qquad (۲۹۱-۶)$$

در معادلهٔ (۶ ـ ۲۹۱) داریم $W_{-1}(x) \equiv 0$ و سری $W_{n-1}(x)$ برحسب مقادیر خاص n، به $P_0(x)$ یا $P_1(x)$ ختم می‌شود.

چندجمله‌ایهای لژاندر اغلب به صورت ضرایب بسط عبارت $(1 - 2r\cos\theta + r^2)^{-1/2}$ برحسب قوای r به‌دست می‌آیند. پس به ازای $r < ۱$،

$$(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)r^n \qquad (۶-۲۹۲\ \text{الف})$$

درصورتی که به ازای $r>1$

$$(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\frac{(\cos\theta)}{r^{n+1}} \qquad (۶-۲۹۲\ \text{ب})$$

چندجمله‌ایهای لژاندر گاهی "هماهنگ منطقه‌ای" و تابع $(1-2r\cos\theta+r^2)^{-1/2}$ به تناسب تابع مولد آن نامیده می‌شود.

یک بررسی معادلهٔ (۶ ـ ۲۹۲ الف) به ازای $\theta=0$ و $\theta=\pi$ در مقایسه با سری هندسی نشان می‌دهد که

$$P_n(1)=1 \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (۶-۲۹۳)$$

و

$$P_n(-1)=(-1)^n \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (۶-۲۹۴)$$

۶ ـ ۱۴ . نمایش توابع لژاندر وابسته برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر

وقتی ν و μ مقدار صحیح اختیار می‌کنند، معادلهٔ وابستهٔ لژاندر به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{(1-x^2)}\right]y=0 \qquad (۶-۲۹۵)$$

یک جواب این معادله $y=P_n^m(x)$ که یک چندجمله‌ای برحسب x است و باچندجمله‌ایهای لژاندر معمولی $(m=0)$ بوسیلهٔ فرمول زیر درارتباط است.

$$y=P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \qquad -1\le x\le +1 \qquad (۶-۲۹۶)$$

همین‌طور، معادلهٔ (۶ ـ ۲۹۵) دارای جواب دیگری مانند $y=Q_n^m(x)$ که با توابع Q_n به وسیلهٔ عبارت زیر درارتباط است

$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m} \qquad -1\le x\le +1 \qquad (۶-۲۹۷)$$

وقتی n و m اعداد صحیح غیرمنفی هستند و $|x|\le 1$، جواب عمومی معادلهٔ (۶ ـ ۲۹۵) به صورت زیر است

$$y=AP_n^m(x)+BQ_n^m(x) \qquad (۶-۲۹۸)$$

با استفاده از معادلات (۶ ـ ۲۹۷) و (۶ ـ ۲۹۸) و باتوجه به عبارت $P_n(x)$ و $Q_n(x)$

در بخش (۶ ــ ۱۳) می‌توان نوشت :

$$P_1{}^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} \tag{۶ ــ ۲۹۹}$$

$$P_2{}^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2} \tag{۶ ــ ۳۰۰}$$

$$P_2{}^2(x) = 3(1 - x^2) \tag{۶ ــ ۳۰۱}$$

$$Q_1{}^1(x) = (1 - x^2)^{1/2}\left(\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{x}{1-x^2}\right) \tag{۶ ــ ۳۰۲}$$

$$Q_2{}^1(x) = (1 - x^2)^{1/2}\left(\tfrac{3}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{3x^2-2}{1-x^2}\right) \tag{۶ ــ ۳۰۳}$$

$$Q_2{}^2(x) = (1 - x^2)\left[\tfrac{3}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{5x-3x^3}{(1-x^2)^2}\right] \tag{۶ ــ ۳۰۴}$$

چون $Q_n{}^m(x)$ شامل جملات لگاریتمی ولی $P_n{}^m(x)$ مستقل ازآن‌است ، نتیجه می‌شودکه $P_n{}^m(x)$ و $Q_n{}^m(x)$ به ازای هر زوج (n,m) از اعداد صحیح غیرمنفی مستقل خطی هستند . برای آن که معادلهٔ (۶ ــ ۲۹۸) جواب عمومی معادلهٔ (۶ ــ ۲۹۵) باشد باید شرط فوق برقرار باشد .

۶ ــ ۱۵ . هارمونیکهای کروی

جوابهای معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{۶ ــ ۳۰۵}$$

را "توابع هارمونیک" گویند .

مختصات کروی (r,θ,φ) را درنظر بگیرید ، که درآن r فاصلهٔ شعاعی، φ زاویهٔ طولی و θ زاویهٔ متمم عرض است که نسبت به قطب شمال کره اندازه‌گیری می‌شود . اگر معادلهٔ لاپلاس در این دستگاه مختصات نوشته شود در عبارات زیر نیز صدق می‌کند :

$$r^n P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{۶ ــ ۳۰۶}$$

$$r^n P_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{۶ ــ ۳۰۷}$$

$$r^{-n-1} P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{۶ ــ ۳۰۸}$$

$$r^{-n-1} P_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{۶ ــ ۳۰۹}$$

و

$$r^n Q_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{۶ ــ ۳۱۰}$$

$$r^n Q_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{۶ ــ ۳۱۱}$$

$$r^{-n-1} Q_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{۶ ــ ۳۱۲}$$

$$r^{-n-1} Q_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi \tag{۶ ــ ۳۱۳}$$

می‌توان ثابت کرد که عبارات (۶ــ۳۰۶) تا (۶ــ۳۱۳) جوابهای معادلهٔ (۶ــ۳۰۵) هستند. برای این‌کارکافی‌است مستقیما عبارات نوشته شده درمختصات‌کروی رادر (۶ــ۳۰۵) قرار داد. سپس با مشتقات داده شده دیده می‌شود که $P_n{}^m(\cos\theta)$ و $Q_n{}^m(\cos\theta)$ با $x = \cos\theta$ جوابهای معادلهٔ لژاندر وابسته‌اند.

عبارات (۶ــ۳۰۶)، (۶ــ۳۰۷)، (۶ــ۳۱۰) و (۶ــ۳۱۱) "هرمونیکهای کروی فضایی نوع اول درجهٔ n مرتبهٔ m" نامیده می‌شوند. همین‌طور (۶ــ۳۰۸)، (۶ــ۳۰۹)، (۶ــ۳۱۲) و (۶ــ۳۱۳) "هارمونیکهای کروی فضایی نوع دوم درجهٔ ۱ــnــ مرتبهٔ m" می‌باشند.

در اغلب کاربردها با توابعی مانند $f(r,\theta,\varphi)$ سر و کار داریم که در هر نقطه متناهی وبر سطح کره‌ای مشتق‌پذیرند. می‌خواهیم این توابع رابه صورت مجموع هارمونیکهای کروی فضایی بیان کنیم. ولی هارمونیکهای کروی فضایی نوع دوم شامل توابعی به‌صورت $Q_n{}^m(\cos\theta)$ هستند که درقطب شمال هرکره ($\theta = 0$) بی‌نهایت می‌شود. این اتفاق به خاطرجملهٔ لگاریتمی‌موجود در $Q_n{}^m(\cos\theta)$ صورت می‌گیرد. به این دلیل، هارمونیکهای کروی فضایی نوع دوم اغلب برای نمایش توابع $f(r,\theta,\varphi)$ که باید بر سطح یک کرهٔ متناهی باشند به‌کار برده نمی‌شوند.

خواص هارمونیکهای کروی

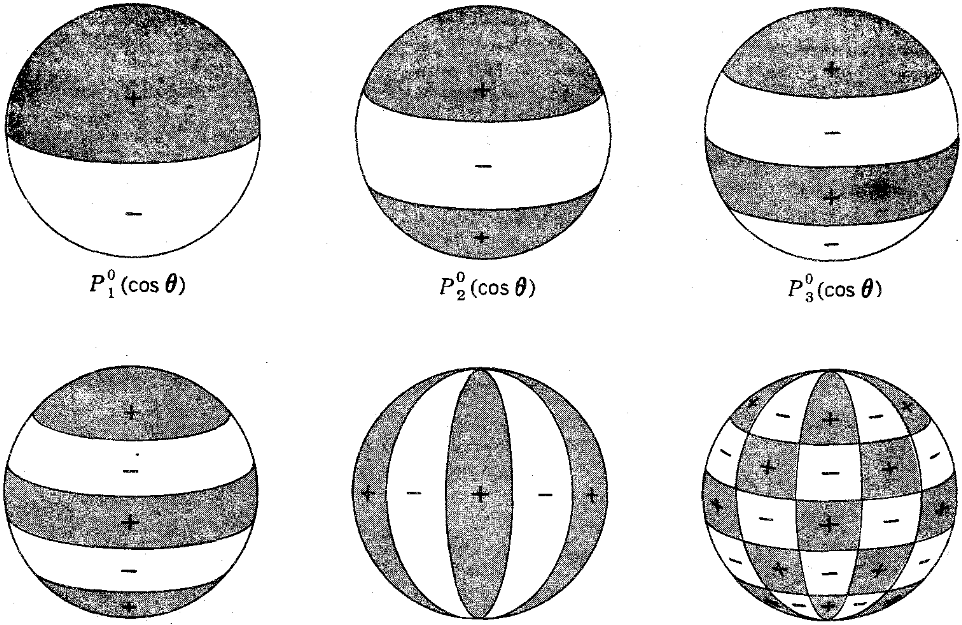
توابع $\cos m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ و $\sin m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ برسطح یک کرهٔ‌واحد متناوبند. مکان نقاط، $\varphi = 0$ بر سطح کرهٔ واحد دایرهٔ عظیمه‌ای است که از قطب شمال و جنوب می‌گذرد. هارمونیک کروی $\sin m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ در هر نقطهٔ این دایرهٔ‌عظیمه صفر می‌شود. بنابراین، مکان دایرهٔ $\varphi = 0$ را" خط گره‌ای "یا" دایرهٔ‌گره‌ای "وابسته به $\sin m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ و $\cos m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ می‌نامند که برای تمام مقادیر φ متحد با صفر است، همچنین

$$\cos m\varphi\, P_n{}^m(\cos\theta) = P_n^0(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$$

از زاویهٔ طولی φ مستقل می‌شود. اگر n نیز صفر شود آن‌گاه $\cos m\varphi P_n{}^m(\cos\theta) = P_0(\cos\theta) = 1$ درهر نقطه‌از سطح کره‌ثابت‌است. به‌ازای $m = 0$ و $n = 1$ تابع $\cos m\varphi P_n{}^m(\cos\theta) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ دارای تنها یک خط گره‌ای درامتداد $(\theta = \pi/2)$ خواهد بود که در طول آن مقدار تابع صفرمی‌شود.

به ازای $m = 0$ و $n = 2$، $\cos m\varphi\, P_n{}^m(\cos\theta) = P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$ دارای دو خط گره‌ای موازی بازاویهٔ عرضی تقریبا" $\theta = 55$ درجه و $\theta = 125$ درجه است، پس کره به سه منطقه تقسیم می‌شود. $P_2(\cos\theta)$ درمنطقه قطبی مثبت ودرمنطقه استوایی منفی‌است.

بطورکلی، به ازای $m = 0$، $\cos m\varphi\, P_n{}^m(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)$ و $P_n(\cos\theta)$ دارای n خط گره‌ای است که کره را به $n+1$ منطقه تقسیم می‌کند که داخل آنها



$P_1^0(\cos\theta)$ $P_2^0(\cos\theta)$ $P_3^0(\cos\theta)$

$P_4^0(\cos\theta)$ $P_3^3(\cos\theta)\cos 3\varphi$ $P_8^3(\cos\theta)\cos 3\varphi$

شکل ۶ ـــ ۸. هارمونیکهای منطقه‌ای، قطعه‌ای و چهارگوش.

$P_n(\cos\theta)$ بطور تناوبی مثبت و منفی است. به این دلیل است که $P_n(\cos\theta)$ را "هارمونیکهای منطقه‌ای درجهٔ n" گویند.

حال فرض کنید m مقداری صحیح وبزرگتر از صفر باشد، ورفتار $P_n{}^m(\cos\theta)$ و $\sin m\varphi P_n{}^m(\cos\theta)$ را درنظر بگیرید. از معادلهٔ (۶ ـــ ۲۹۶) دیده می‌شود که سازهٔ $(1-x^2)^{m/2}$ این دو هارمونیک را درقطب شمال وجنوب کره صفرمی‌کند. چون $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n از x است، معادلهٔ $P_n(x)=0$، دارای n ریشهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$، است که هرکدام به یک زاویهٔ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ متناظر با یک خط گره‌ای بر کره است. این متناظر با رابطهٔ $\cos\theta_n = x_n$ مشخص می‌شود و بیان می‌کند که چرا $P_n(x)$ دارای n خط گره‌ای کره است. ازمعادلهٔ (۶ ـــ ۲۹۶) معلوم می‌شودکه $P_n{}^m(x)=0$ یک معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ $n-m$ از x است، دلیلش این است که $P_n(x)$، m بار مشتق پذیر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که تعداد خطوط گره‌ای $P_n{}^m(\cos\theta)$ که با استوا موازیند برابر $n-m$ است. همچنین $\cos m\varphi\, P_n{}^m(\cos\theta)$ و $\sin m\varphi\, P_n{}^m(\cos\theta)$ برخطوط طولی که به‌وسیلهٔ زاویهٔ φ معین می‌شوند که به ازای آنها $\cos m\varphi$ و $\sin m\varphi$ صفرند. مثلا"، در دامنهٔ $0 \leq \varphi < \pi$، تابع $\sin m\varphi$ به ازای مقادیر زیر صفر می‌شود:

$$m\varphi = [0, \pi, 2\pi, \ldots, (m-1)\pi]$$

پس $\sin m\varphi$ دارای m گره طولی است که دوایر عظیمه‌ای بر کره هستند و گره‌های موازی عرضی را بطور عمودی قطع می‌کنند ، درنتیجه رویهٔ کره به منطقه‌های قائم‌الزاویه یا چهارگوش تقسیم می‌شود ، که داخل هریک $\sin m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)$ دارای نوسانات مثبت و منفی است . تذکری مشابه درمورد $\cos m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)$ صادق‌است، وبه‌این‌دلیل توابع $\sin m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)$ و $\cos m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)$ را "هارمونیکهای چهارگوش" درجهٔ n مرتبهٔ m گویند .
چون $0 \leq |m| \leq n$ نتیجه می‌شودکه‌دقیقاً" ۲n + ۱ هارمونیک‌چهارگوش درجهٔ n وجود دارد .

هارمونیکهای رویهٔ کروی

اگر هارمونیکهای چهارگوش را در مجموعهٔ دلخواهی از ثوابت ضرب کرده و جمع کنیم ، هارمونیکهای رویهٔ کروی درجهٔ n به‌دست می‌آید . پس

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi)\ P_n{}^m(\cos\theta) \qquad (۶-۳۱۴)$$

یک هارمونیک رویهٔ کروی درجهٔ n را نشان می‌دهد .

می‌توان ثابت کرد که هارمونیکهای چهارگوش مجموعهٔ کاملی ازتوابع متعامد بر رویهٔ یک کره را تشکیل می‌دهند .

با استفاده ازمعادلات (۶ ــ ۲۸۸) و (۶ ــ ۲۹۶) و انتگرال‌گیری جزء به جزء ، به ترتیب به ازای $k \neq n$ یا $k \neq m$ ، داریم

$$\int_{-1}^{+1} P_n{}^m(x) P_k{}^m(x)\, dx = 0 \qquad (۶-۳۱۵)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n{}^m(x) P_n{}^k(x)\, \frac{dx}{1-x^2} = 0 \qquad (۶-۳۱۶)$$

همچنین

$$\int_{-1}^{+1} [P_n{}^m(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (۶-۳۱۷)$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n{}^m(x)]^2\, \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (۶-۳۱۸)$$

با استفاده از این روابط می‌توانیم بسط یک تابع دلخواه از هارمونیکهای رویهٔ کروی را به‌دست آوریم . طرز محاسبه از این قراراست : فرض کنید $u(\theta,\varphi)$ تابعی‌دلخواه بریک کره باشد که با تمام مشتقات اول و دوم پیوسته است . درآن‌صورت $u(\theta,\varphi)$ رامی‌توان به یک سری مطلقاً"

همگرا از هارمونیکهای رویه بسط داد:

$$u(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)P_n{}^m(\cos\theta)] \qquad (۶-۳۱۹)$$

ضرایب بسط به وسیلهٔ روابط متعامد (۶ – ۳۱۵) تا (۶ – ۳۱۸) معین می‌شوند وعبارتند از:

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\theta,\phi)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (۶-۳۲۰)$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\theta,\phi)P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\phi\sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (۶-۳۲۱)$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(\theta,\phi)P_n{}^m(\cos\theta)\sin m\phi\sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (۶-۳۲۲)$$

۶ – ۱۶ . توابع بسل کروی

توابع بسل کروی جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیرند:

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dy}{dr} + \left[k^2 - \frac{p(p+1)}{r^2}\right]y = 0 \qquad (۶-۳۲۳)$$

با جایگذاری $y = \frac{z(r)}{\sqrt{r}}$ معادلهٔ (۶ – ۳۲۳) به‌صورت

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} + \left[k^2 - \frac{(p+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right]z = 0 \qquad (۶-۳۲۵)$$

درمی‌آیدکه همان معادلهٔ بسل (۶ – ۲۳۶) است با $\nu = p + \frac{1}{2}$ و $x = kr$. پس جواب عمومی (معادلهٔ (۶ – ۳۲۳)) را می‌توان چنین نوشت:

$$y = \frac{A}{\sqrt{kr}}\, J_{p+\frac{1}{2}}(kr) + \frac{B}{\sqrt{kr}}\, N_{r+\frac{1}{2}}(kr) \qquad (۶-۳۲۶)$$

که در آن A و B ثابتهای دلخواهند.

توابع بسل کروی به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$j_p(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{p+\frac{1}{2}}(kr) \qquad (۶-۳۲۷)$$

و توابع نیومن کروی عبارتند از:

$$n_p(kr) = (-1)^{p+1}\left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{-p-1/2}(kr) \qquad (۶-۳۲۸)$$

برحسب این توابع جواب (۶ ـ ۳۲۶) چنین نوشته می‌شود

$$y = Cj_p(kr) + Dn_p(kr) \qquad (۶-۳۲۹)$$

که در آن C و D ثابتهای دلخواهند . از معادلات (۶ ـ ۲۳۸) و (۶ ـ ۲۴۱) معلوم می‌شودکه

$$j_p(x) = (-x)^p\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^p \frac{\sin x}{x} \qquad (۶-۳۳۰)$$

$$n_p(x) = -(-x)^p\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^p \frac{\cos x}{x} \qquad (۶-۳۳۱)$$

معمولاً" توابع هنکل کروی را به صورت زیر می‌نویسند

$$h_p^{(1)}(kr) = j_p(kr) + in_p(kr) \qquad (۶-۳۳۲)$$

$$h_p^{(2)}(kr) = j_p(kr) - in_p(kr) \qquad (۶-۳۳۳)$$

که نوشتن جواب عمومی معادلهٔ (۶ ـ ۳۲۳) را به صورت

$$y = Eh_p^{(1)}(kr) + Fh_p^{(2)}(kr) \qquad (۶-۳۳۴)$$

امکان‌پذیر می‌سازد .

توابع بسل کروی مهم هستند ، زیرا به کمک آنها می‌توانیم جوابهای معادلهٔ هلملتز ،

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \qquad (۶-۳۳۵)$$

را در مختصات کروی بنویسیم . این جوابها به صورت زیرند :

$$j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix} \qquad (۶-۳۳۶)$$

$$n_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix} \qquad (۶-۳۳۷)$$

$$j_n(kr)Q_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix} \qquad (۶-۳۳۸)$$

$$n_n(kr)Q_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix} \qquad (۶-۳۳۹)$$

وقتی $k \to 0$ معادلهٔ $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$ به سمت $\nabla^2\psi = 0$ میل می‌کند ، و انتظار می‌رود که جوابهای (۶ ـ ۳۳۶) تا (۶ ـ ۳۳۹) به جوابهای متناظر (۶ ـ ۳۰۶) تا (۶ ـ ۳۱۳) معادلهٔ لاپلاس خلاصه شوند .

از معادلات (۶ ـ ۳۳۰) و (۶ ـ ۳۳۱) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to 0} j_p(x) = \frac{x^p}{(2p+1)!!} \qquad (۶-۳۴۰)$$

$$\lim_{x\to 0} n_p(x) = -\frac{(2p-1)!!}{x^{p+1}} \qquad (۶-۳۴۱)$$

که در آن

$$(2p+1)!! = (2p+1)(2p-1)(2p-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 \qquad (۶-۳۴۲)$$

پس غیر از سازه‌های عددی، جوابهای (۶-۳۳۶) تا (۶-۳۳۹) به جوابهای قبلی معادلهٔ لاپلاس میل می‌کند $k \to 0$.

خواص مجانبی زیر نیز از توابع بسل کروی اغلب مفید هستند.

به ازای $x \gg p$،

$$j_p(x) \sim \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{p\pi}{2}\right) \qquad (۶-۳۴۳)$$

$$n_p(x) \sim -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{p\pi}{2}\right) \qquad (۶-۳۴۴)$$

$$h_p^{(1)}(x) \sim (-i)^{p+1}\frac{e^{ix}}{x} \qquad (۶-۳۴۵)$$

۶-۱۷. چندجمله‌ایهای هرمیت

هنگامی چندجمله‌ایهای هرمیت در فیزیک حاصل می‌شوند که رفتار یک نوسان‌کننده هارمونیک مکانیک کوانتم بررسی می‌شود. انرژی پتانسیل یک فنرایده‌آل که ضریب ثابت آن k باشد عبارت است از:

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (۶-۳۴۶)$$

انرژی هامیلتونین یا انرژی کل دستگاهی متشکل ازفنربه اضافهٔ ذره‌ای با انرژی جنبشی $\tfrac{1}{2}mv^2$ که با فنر به صورت کوپل درآمده باشد عبارت است از:

$$H = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (۶-۳۴۷)$$

که آن را می‌توان چنین نوشت

$$H = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad (۶-۳۴۸)$$

که در آن

$$p = mv \qquad (۶-۳۴۹)$$

و

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۶ – ۳۵۰}$$

به‌ترتیب ، همان‌اندازه حرکت خطی‌ذره وفرکانس زاویه‌ای نوسان‌کننده‌است . معادلهٔ شرودینگر برای نوسان‌کننده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H\psi = \left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\psi = E\psi \tag{۶ – ۳۵۱}$$

که درآن به جای p اکنون عملگر $-i\hbar\, d/dx$ گذاشته می‌شود .

پس معادلهٔ (۶ – ۳۵۱) چنین نوشته خواهد شد

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi \tag{۶ – ۳۵۲}$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2)\psi = 0 \tag{۶ – ۳۵۳}$$

معمولاً این معادله را با تعویض متغیرهای مستقل و تابع به صورتی استاندارد درمی‌آورند .

ابتدا فرض می‌کنیم

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x \tag{۶ – ۳۵۴}$$

که معادلهٔ (۶ – ۳۵۳) را به شکل زیر خلاصه می‌کنند

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - z^2\right)\psi = 0 \tag{۶ – ۳۵۵}$$

سپس مقدار

$$\psi = e^{-z^2/2}v(z) \tag{۶ – ۳۵۶}$$

را در معادلهٔ (۶ – ۳۵۵) قرار می‌دهیم ، نتیجه می‌شود که $v(z)$ باید در معادلهٔ

$$\frac{d^2v}{dz^2} - 2z\frac{dv}{dz} + 2nv = 0 \tag{۶ – ۳۵۷}$$

صدق کند و درآن n با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود ،

$$E = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) \tag{۶ – ۳۵۸}$$

معادلهٔ (۶ – ۳۵۷) را "معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت" گویند . جواب عمومی آن عبارت است از :

$$v(z) = Av_1(z) + Bv_2(z) \tag{۶ – ۳۵۹}$$

که در آن

$$v_1(z) = \left(1 - \frac{2n}{2!}z^2 + \frac{2^2n(n-2)}{4!}z^4 - \frac{2^3n(n-2)(n-4)}{6!}z^6 + \cdots + (-2)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)}{(2k)!}z^{2k} + \cdots\right) \qquad (۶-۳۶۰)$$

و

$$v_2(z) = z\left[1 - \frac{2(n-1)}{3!}z^2 + 2^2\frac{(n-1)(n-3)}{5!}z^4 - \cdots + (-2)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)}{(2k+1)!}z^{2k} + \cdots\right] \qquad (۶-۳۶۱)$$

وقتی n صحیح نیست ، عددی مانند K وجود ندارد که تمام جملات معادلهٔ (۶ــ ۳۶۰) یا (۶ــ ۳۶۱) به ازای $k>K$ هم‌علامت باشند . ازمقایسهٔ سریهای حاصل ازجملات (۶ــ ۳۶۰) یا (۶ــ ۳۶۱) به ازای $k>K$ و بسط سری e^{z^2} دیده می‌شود که

$$v_1(z) \sim e^{z^2} \qquad z \to \pm\infty \qquad (۶-۳۶۲)$$

و

$$v_2(z) \sim \pm e^{z^2} \qquad z \to +\infty \qquad (۶-۳۶۳)$$

$$v_2(z) \sim \mp e^{z^2} \qquad z \to -\infty \qquad (۶-۳۶۴)$$

از عبارت (۶ــ ۳۶۲) تا (۶ــ ۳۶۴) نتیجه می‌شود که در معادلهٔ (۶ــ ۳۵۹) A و B راهرچه اختیارکنیم ، $v(z)$ مانند e^{z^2} به‌ازای مقادیربزرگ منفی یامقادیر بزرگ مثبت واگراست . درنتیجه اگر n صحیح نباشد ، آن‌گاه تابع موج

$$\psi(z) = e^{-z^2/2}v(z) \qquad (۶-۳۶۵)$$

مانند $e^{z^2/2}$ به ازای مقادیر بزرگ مثبت یا منفی z واگراست .

لازمهٔ فیزیکی این که احتمال یافتن یک ذرهٔ مقید در بی‌نهایت صفر شود این است که

$$\lim_{|z|\to\infty} \psi(z) = 0 \qquad (۶-۳۶۶)$$

پس جوابهای معادلهٔ هرمیت (۶ــ ۳۵۷) برای مقادیر غیرصحیح n را نمی‌توان برای ساختن توابع موج نوسان‌کنندهٔ هارمونیک به‌کار برد .

وقتی n عددصحیح مثبت یامنفی‌است ، سری مربوط به $v_1(z)$ ادامه پیدانمی‌کند ، و $v_1(z)$ یک چندجمله‌ای زوج بادرجهٔ n از z خواهدبود . همین‌طور ، وقتی n یک عددصحیح فردنامنفی است ، سری مربوط به $v_2(z)$ ادامه پیدا نمی‌کند ، و $v_2(z)$ به صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ n از z درمی‌آید . پس

$$\psi_n(z) = A_n e^{-z^2/2}v_1(z) \qquad n = 0,2,4,\ldots \qquad (۶-۳۶۷)$$

و

$$\psi_n(z) = B_n e^{-z^2/2} v_2(z) \qquad n = 1,3,5, \ldots \tag{۶ − ۳۶۸}$$

را به‌عنوان فرمهای مطلوب توابع موج انتخاب می‌کنیم.

یک چندجمله‌ای هرمیت درجهٔ n به صورت

$$H_n(z) = (2z)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2z)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2z)^{n-4} - \cdots \tag{۶ − ۳۶۹}$$

تعریف می‌شود و برحسب آن سری (۶ − ۳۶۰) برای $v_1(z)$ چنین نوشته می‌شود:

$$v_1(z) = (-1)^{n/2}\frac{(n-2)!}{n!} H_n(z) \qquad n = 0,2,4, \ldots \tag{۶ − ۳۷۰}$$

درصورتی که سری (۶ − ۳۶۱) برای $v_2(z)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$v_2(z) = (-1)^{(n-1)/2}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2\cdot(n!)} H_n(z) \qquad n = 1,3,5 \tag{۶ − ۳۷۱}$$

چون A_n ها و B_n ها در معادلهٔ (۶ − ۳۶۷) و (۶ − ۳۶۸) ثابتهای اختیاری هستند، این معادلات را می‌توان به صورت دیگری نوشت:

$$\psi_n(z) = C_n e^{-z^2/2} H_n(z) \qquad n = 0,1,2,3, \ldots \tag{۶ − ۳۷۲}$$

با استفاده از معادلات (۶ − ۳۷۰) و (۶ − ۳۷۱)، درمعادلهٔ (۶ − ۳۷۲) ضرایب C_n ثابتهای دلخواهندکه بایداز بهنجار کردن ψ_n بایک مقدارثابت معین شوند. برحسب متغیرهای اولیه،

$$\psi_n(x) = C_n e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right) \tag{۶ − ۳۷۳}$$

تابع ویژه انرژی متعلق به مقدار ویژهٔ انرژی

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \tag{۶ − ۳۷۴}$$

است. با استفاده از معادلهٔ (۶ − ۲۳۹)، چندجمله‌ایهای هرمیت اولیه عبارتند از:

$$H_0(z) = 1$$

$$H_1(z) = 2z$$

$$H_2(z) = 4z^2 - 2$$

$$H_3(z) = 8z^3 - 12z$$

$$H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$$

$$H_5(z) = 32z^5 - 160z^3 + 120z$$

ملاحظه کنید که تمام چندجمله‌ایهای هرمیت را می‌توان با فرمول زیر نشان داد:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \qquad (۶-۳۷۵)$$

و

$$H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$$
$$\frac{dH_n}{dz} = 2nH_{n-1}(z) \qquad (۶-۳۷۶)$$

خواص تعامد

اگر معادلهٔ هرمیت (۶ــ ۳۶۷) را در e^{-z^2} ضرب کنیم، آن را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}\right) + 2ne^{-z^2}H_n = 0 \qquad (۶-۳۷۷)$$

از ضرب معادلهٔ (۶ــ ۳۷۷) در $H_m(z)$ و انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود،

$$-2n\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}\right)\right]H_m(z)\,dz \qquad (۶-۳۷۸)$$

اگر از سمت راست معادلهٔ (۶ــ ۳۷۸) انتگرال بگیریم و آن را با روش جزء به جزء حل کنیم داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}\right)\right]H_m(z)\,dz = \left[e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}H_m(z)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}\frac{dH_m}{dz}\,dz = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\frac{dH_n}{dz}\frac{dH_m}{dz}\,dz \qquad (۶-۳۷۹)$$

برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۶ــ ۳۷۹) از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که جزء اصلی $e^{-z^2}H'_nH_m$ عبارت‌از e^{-z^2} دریک چندجمله‌ای‌درجهٔ $n+m-1$ از z است وبنابراین‌در $z \to \pm\infty$ صفر می‌شود.

در این حالت معادلهٔ (۶ــ ۳۷۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2n\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}H'_n(z)H'_m(z)\,dz \qquad (۶-۳۸۰)$$

اگر با معادلهٔ هرمیت

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dH_m}{dz}\right) + 2me^{-z^2}H_m = 0 \qquad (۶-۳۸۱)$$

مانند قبل عمل کنیم ، نتیجه می‌شود

$$2m\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}H_n'(z)H_m'(z)\,dz \qquad (۶-۳۸۲)$$

و از مقایسهٔ معادلات (۶ ــ ۳۸۰) و (۶ ــ ۳۸۲) دیده می‌شود که

$$(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = 0 \qquad (۶-۳۸۳)$$

درنتیجه به ازای $n \neq m$ ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\,dz = 0 \qquad (۶-۳۸۴)$$

نشان می‌دهدکه چند جمله‌ایهای هرمیت نسبت به تابع سنگینی e^{-z^2} مجموعه‌ای متعامدتشکیل می‌دهند .

تابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت

چندجمله‌ایهای هرمیت را می‌توان به وسیلهٔ یک تابع مولد $F(x,y)$ به صورت زیر نیز تعریف کرد :

$$F(x,y) = e^{-y^2+2xy} = e^{x^2}e^{-(y-x)^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}y^n \qquad (۶-۳۸۵)$$

برای نشان دادن این که ضریب $H_n(x)$ یک چندجمله‌ای هرمیت است ، ثابت می‌کنیم که $H_n(x)$ در معادلهٔ هرمیت صدق می‌کنند . از تابع F نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2yF \qquad (۶-۳۸۶)$$

و درنتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}y^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)y^{n+1}}{n!} \qquad (۶-۳۸۷)$$

که با مساوی قرار دادن توانهای y نتیجه می‌شود ،

$$H_n'(x) = 2n\,H_{n-1}(x) \qquad (۶-۳۸۸)$$

همین‌طور ،

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x-y)F \tag{۶ – ۳۸۹}$$

نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nH_n(x)}{n!} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2xH_n(x)}{n!} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(x)y^{n+1}}{n!} \tag{۶ – ۳۹۰}$$

که با مساوی قرار دادن توانهای y خواهیم داشت

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \tag{۶ – ۳۹۱}$$

یا

$$H_{n+1} = 2xH_n - H_n'(x) \tag{۶ – ۳۹۲}$$

از معادلهٔ (۶ – ۳۹۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$H_{n+1}' = 2H_n + 2xH_n' - H_n'' \tag{۶ – ۳۹۳}$$

و باتوجه به تساوی

$$H_{n+1}' = 2(n+1)H_n \tag{۶ – ۳۹۴}$$

معادلهٔ هرمیت زیر به‌دست می‌آید

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \tag{۶ – ۳۹۵}$$

از معادلات (۶ – ۳۷۷) و (۶ – ۳۸۸) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n^2(z)\, dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} [H_n'(z)]^2\, dz \\ &= (2n)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_{n-1}^2(z)\, dz \end{aligned} \tag{۶ – ۳۹۶}$$

پس

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n^2(z)\, dz &= 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_{n-1}^2(z)\, dz \\ &= 2n \cdot 2(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_{n-2}^2(z)\, dz = \cdots \\ &= 2^n(n!) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_0^2(z)\, dz \\ &= 2^n(n!) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz \end{aligned} \tag{۶ – ۳۹۷}$$

برای تکمیل ارزیابی معادلهٔ (۶ – ۳۹۷) ، باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم

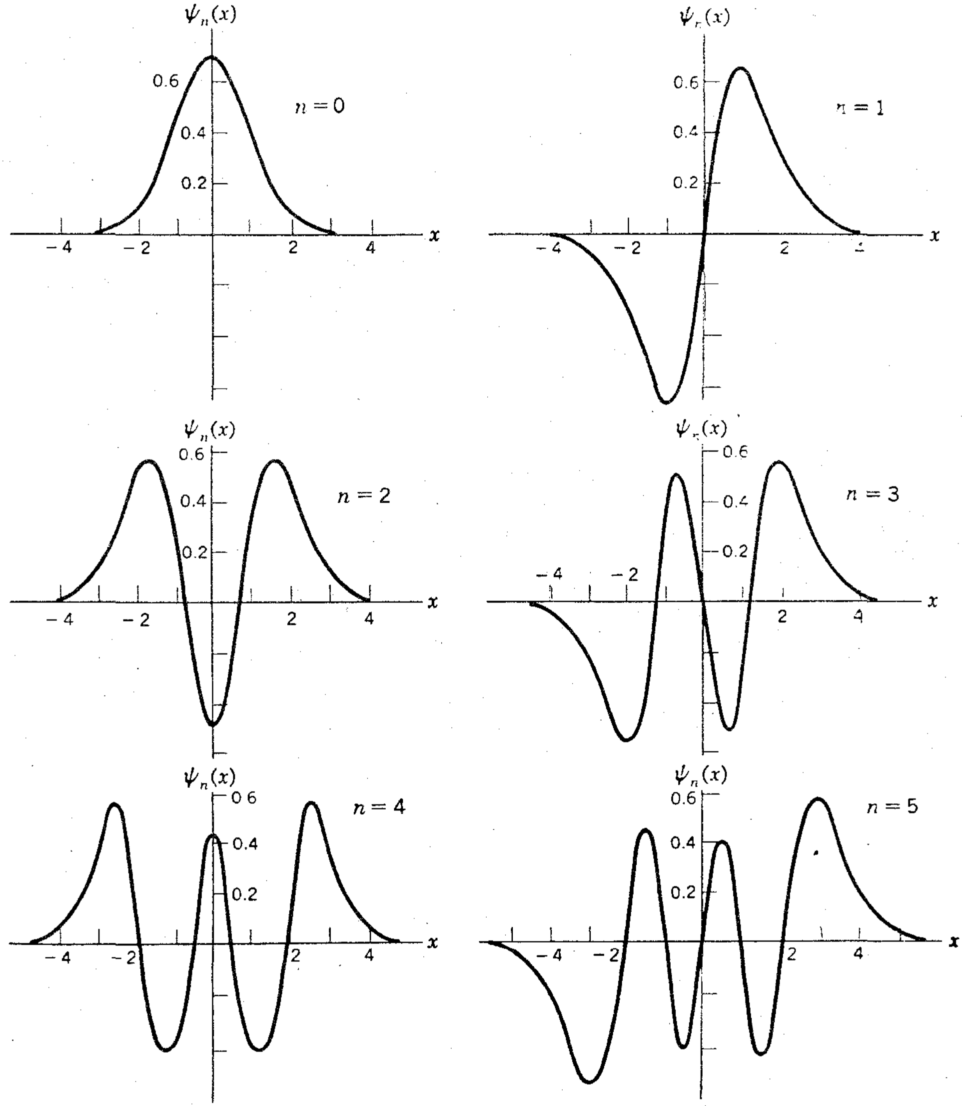
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz \tag{۶ – ۳۹۸}$$

همان‌طور که می‌دانیم برای این کار به جای I از I^2 استفاده می‌کنیم :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (۶-۳۹۹)$$

وآن را در مختصات قطبی می‌نویسیم

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta \qquad (۶-۴۰۰)$$



شکل ۶ــ۹. توابع ویژهٔ نوسان‌کنندهٔ هارمونیک $(m\omega/\hbar)^{1/2}x$

$$I^2 = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \pi \tag{۶-۴۰۱}$$

$$I = \sqrt{\pi} \tag{۶-۴۰۲}$$

و بنابراین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} H_n^2(z)\, dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \tag{۶-۴۰۳}$$

پس دستگاه توابع

$$\psi_n(z) = \{2^n (n!) \sqrt{\pi}\}^{-1/2} e^{-z^2/2} H_n(z) \tag{۶-۴۰۴}$$

در روابط متعامد زیر صدق می‌کنند

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(z)\psi_m(z)\, dz = \delta_{nm} \tag{۶-۴۰۵}$$

که مجموعه‌ای متعامد بر بازهٔ $[-\infty, +\infty]$ تشکیل می‌دهد.

توابع ویژهٔ نوسان‌کنندهٔ هارمونیک متعامد (شکل ۶ ــ ۹) به صورت زیرداده خواهندشد

$$\psi_n(x) = C_n e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right) \tag{۶-۴۰۶}$$

که درآن

$$C_n = \{2^n (n!) \sqrt{\pi}\}^{-1/2} \tag{۶-۴۰۷}$$

۶ ــ ۱۸. خواص عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دو با ضرایب متغیر

بیشتر توابع خاص فیزیک ریاضی جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل به صورت زیرهستند:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{۶-۴۰۸}$$

بنابراین، مطالب کلی دربارهٔ معادلهٔ (۶ ــ ۴۰۸) درعمل مفید خواهد بود. ازقبل می‌دانیم که این معادله دارای دو جواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ است. مستقل خطی بودن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در فاصلهٔ $a \le x \le b$ به این معنی است که

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \tag{۶-۴۰۹}$$

نمی‌تواندبه‌ازای همهٔ مقادیر $a \le x \le b$ برقرار باشد مگر $c_1 \equiv 0$ و $c_2 \equiv 0$. توجه کنیدکه عبارت فوق در همهٔ مقادیر x بین a و b واقعاً ضروری است. مثلاً اگر $y_2(1/2) \neq 0$، آن‌گاه معادلهٔ (۶ ــ ۴۰۶) در $x = 1/2$ با انتخاب $c_1 = 1$ و $c_2 = \dfrac{-y_1(\frac{1}{2})}{y_2(\frac{1}{2})}$ برقرارخواهدبود. باوجوداین، چیزی

دربارهٔ مستقل بودن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ بیان نمی‌کند. برای آن که نتیجه بگیریم $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در فاصله‌ای شامل نقطهٔ $\frac{1}{2}$ مستقل خطی هستند، باید تحقیق کنیم که معادلهٔ (۶ ــ ۴۰۹) نه تنها در $x = \frac{1}{2}$، بلکه در هر نقطهٔ دیگرفاصلهٔ مطلوب برقرار است. به‌علاوه، این تساوی وقتی c_1 و c_2 ثابت و یکی از آنها مخالف صفر است باید برقرار باشد.

گاهی به آسانی می‌توان فهمیدکه توابع مفروض نمی‌توانند مستقل خطی باشند. مثلاً در بخش (۶ ــ ۹) مشاهده کردیم که $N_0(x)$ و $J_0(x)$ باید برهرفاصله $a \leq x \leq b$ مستقل خطی باشند زیرا $N_0(x)$ شامل یک جملهٔ لگاریتمی از x است درصورتی که $J_0(x)$ چنین جمله‌ای ندارد. به عبارت دیگر، جزء لگاریتمی $N_0(x)$ تضمین می‌کند که

$$c_1J_0(x) + c_2N_0(x) = 0 \qquad (۶ - ۴۱۰)$$

به‌ازای تمام مقادیر $a \leq x \leq b$ برقرار نیست مگر آن که $c_1 \equiv 0$ و $c_2 \equiv 0$. پس برای توابع معلوم که با فرمولهای صریح نشان داده شده باشد، اغلب به سؤال مستقل خطی بودن می‌توان با تجسس جواب داد.

همچنین می‌توان وابستگی خطی را به صورتی قابل توجه بسط داد. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشندو بدانیم که در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ وابستهٔ خطی هستند. دراین صورت ثابتهای c_1 و c_2 وجود دارند که لااقل یکی از آنها صفر نیست و داریم

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \qquad (۶ - ۴۱۱)$$

حال اگر از معادلهٔ (۶ ــ ۴۱۱) مشتق بگیریم، می‌توان نوشت:

$$c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0 \qquad (۶ - ۴۱۲)$$

اگر x مقداری ثابت مانند x_0 درفاصلهٔ $[a,b]$ اختیارکند، دومعادلهٔ (۶ ــ ۴۱۱) و (۶ ــ ۴۱۲) را می‌توان به‌عنوان دو معادلهٔ دومجهولی درنظر گرفت. مجهولها عبارتنداز c_1 و c_2 وضرایب عبارتنداز $y_1(x_0)$ ، $y_2(x_0)$ ، $y_1'(x.y)$ و $y_2'(x_0)$. به‌عبارت دیگرمعادلات (۶ ــ۴۱۱) و (۶ ــ ۴۱۲) دستگاهی به صورت زیر تشکیل می‌دهند

$$Ax + By = 0 \qquad (۶ - ۴۱۳)$$

$$Cx + Dy = 0 \qquad (۶ - ۴۱۴)$$

به‌این‌معنی‌که به‌جای x و y از c_1 و c_2 وبه جای $\{A,B,C,D\}$ از $\{y_1(x_0), y_2(x_0), y_1'(x_0), y_2'(x_0)\}$ استفاده شده است.

ازمطالب قبل درمورد دستگاههای جبری خطی می‌دانیم که شرط آن‌که دستگاه (۶ــ۴۱۳) و (۶ ــ۴۱۴) دارای یک جواب غیربدیهی‌باشد (یعنی جوابها برای x و y که هردو صفرنیستند) آن است که دترمینان دستگاه صفر شود:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \qquad (۶-۴۱۵)$$

دراین جا c_1 و c_2 نقش x و y رادارند ومی‌دانیم که هردو آنهاصفر نیستند زیرا $y_1(x)$ و $y_2(x)$ غیرمستقل خطی‌هستند. درنتیجه دستگاه (۶ — ۴۱۱) و (۶ — ۴۱۲) بایدیک جواب غیربدیهی برای مجهولات c_1 و c_2 داشته باشد، بنابراین، به ازای هر x_0 در فاصلهٔ $[a,b]$ ،

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۶-۴۱۶)$$

دترمینان

$$W\{y_1,y_2;x\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \qquad (۶-۴۱۷)$$

را "رونسکین" دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نامند و ثابت کردیم که اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ بر فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ مستقل‌خطی‌باشند، آن‌گاه رونسکین آنها $W\{y_1,y_2;x\}$ به‌ازای‌هر x در بازهٔ $a \leq x \leq b$ صفر می‌شود.

توجه کنید که گرچه وابستگی خطی مستلزم صفر شدن رونسکین است، صفرشدن رونسکین مستلزم نامستقل بودن خطی نخواهد بود.

مثلاً باتوجه‌به‌نمودار $y_1 = x^2$ و $y_2 = x|x|$ دیده‌می‌شود که این دو تابع نمی‌توانند به‌ازای $-1 \leq x \leq 1$ وابسته‌خطی‌باشند. علاوه‌براین، این دو تابع روی $-1 \leq x \leq 1$ مشتق‌پذیرند.

رونسکین زیر را درنظر بگیرید

$$W\{x;x|x|;x\} = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & \dfrac{d}{dx}(x|x|) \end{vmatrix} \qquad (۶-۴۱۸)$$

دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dx}(x|x|) = 2|x| \qquad (۶-۴۱۹)$$

این معادله باتوجه به نمودار $x|x|$ بدیهی است. پس داریم

$$W\{x^2,x|x|;x\} = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} \qquad (۶-۴۲۰)$$

و از آن نتیجه می‌شود که به ازای هر x در بازهٔ $[-1,1]$ ، $W\{x^2,x|x|;x\} = 0$ ، حتی‌اگر x^2 و $x|x|$ روی $[-1,1]$ نامستقل خطی نباشند!

برای اطمینان از این که صفر شدن رونسکین y_1 و y_2 بر یک بازه وابستگی خطی y_1 و y_2 را تضمین می‌کنند به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

اطلاعات ضروری را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد :

قضیه : شرط لازم وکافی برای این‌که‌دوتابع مشتق‌پذیر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ روی بازهٔ $a \le x \le b$ وابسته خطی باشند آن است که رونسکین $W\{y_1,y_2;x\} = 0$ به ازای هر مقدار x در بازهٔ $[a,b]$ صفر شود ، به شرط آن‌که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (۶-۴۲۱)$$

باشند که در آن توابع $p(x)$ و $q(x)$ روی $a \le x \le b$ پیوسته‌اند .

تبصره : توابع x^2 و $x|x|$ درشرایط این‌قضیه صدق‌نمی‌کنند زیرادریک معادلهٔ دیفرانسیل مانند (۶ــ۴۲۱) با توابع پیوسته $p(x)$ و $q(x)$ صدق نمی‌کنند .

اثبات قضیه : برای اثبات لزوم شرط باید نشان دهیم که اگر رونسکین صفرنشود ، آن‌گاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نمی‌توانند وابستهٔ خطی باشند . ولی این مطلب را قبلاً نشان داده‌ایم زیرا ثابت‌کرده‌ایم‌که وقتی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وابستهٔ خطی باشند ، رونسکین باید صفرشود . بنابراین ، صفر نشدن رونسکین تضمین می‌کند که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ نمی‌توانند وابستهٔ خطی باشند : برای کفایت شرط می‌توان ثابت کرد که صفر شدن رونسکین درواقع وابستگی خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را تضمین نمی‌کند .

فرض کنید برای $a \le x \le b$ ، $W\{y_1,y_2;x\} = 0$. ثابت خواهیم کرد که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ روی $[a,b]$ وابستهٔ خطی هستند . اگر به ازای هر x بین a و b ، $y_1(x) = 0$ ، آن‌گاه y_1 و y_2 باید بر $a \le x \le b$ وابستهٔ خطی باشند زیرا در این حالت روی $[a,b]$ می‌توان نوشت :

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

با $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$.

بنابراین ، کافی است حالت باقیماندهٔ $y_1(x_0) \neq 0$ را به ازای مقداری از x مانند x_0 بین a و b درنظر بگیریم . از مشتق‌پذیری $y_1(x)$ نتیجه می‌شود که $y_1(x)$ پیوسته است . چون $y_1(x)$ پیوسته است و $y_1(x_0) \neq 0$ ، می‌توان گفت که یک همسایگی مانند $N_\epsilon(x_0)$ وجود داردکه شامل x_0 بوده و به ازای هر x متعلق به آن $y_1(x) \neq 0$ ، بنابه فرض روی $[a,b]$ ، $W = 0$ ، درنتیجه به ازای هر x متعلق به $N_\epsilon(x_0)$ داریم ،

$$W\{y_1,y_2;x\} = y_1y_2' - y_1'y_2 = 0 \qquad (۶-۴۲۲)$$

این مطلب صحیح است زیرا $N_\epsilon(x_0)$ خود یک زیربازهٔ $[a,b]$ است . چون به ازای هر x در $N_\epsilon(x_0)$ ، $y_1(x) \neq 0$ ، می‌توانیم معادلهٔ (۶ــ۴۲۲) را بر $[y_1(x)]^2$ تقسیم کنیم ،

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{[y_1(x)]^2} = 0 \qquad (۶-۴۲۳)$$

نتیجه می‌دهد $y_2(x) = Ay_1(x)$ ، که در آن A ثابت است .

فرض کنید به ازای هر x در $\{x: a \leq x \leq b\}$،

$$y_3(x) = y_2(x) - Ay_1(x) \qquad (۶-۴۲۴)$$

دراین صورت به موجب نتیجهٔ فوق، به ازای هر x متعلق به $N_\epsilon(x_0)$، $y_3(x) = 0$. پس نه تنها $y_3(x_0) = 0$، بلکه $y_3'(x_0) = 0$.

همچنین $y_3(x)$ یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 است، درنتیجه y_3 یک جواب معادلهٔ (۶-۴۳۱) است که در معادله $y_3(x_0) = 0$ و $y_3'(x_0) = 0$ صدق می‌کند.

حال فرض کنید $y_4(x)$ تابع دیگری باشد که در معادلهٔ (۶-۴۲۱) با همان شرایط y_3 صدق می‌کند، وعلاوه برآن نه تنها برهمسایگی $N_\epsilon(x_0)$ صفرمی‌شود بلکه برتمام بازهٔ $a \leq x \leq b$ نیز صفر است.

چون جواب معادلهٔ (۶-۴۲۱) با مشتق اولش در x_0 صفر می‌شود باید منحصر به فرد باشد، درنتیجه به ازای هر $\{x: a \leq x \leq b\}$،

$$y_3(x) = y_4(x) \qquad (۶-۴۲۵)$$

چون $y_4(x)$ بر تمام بازهٔ $a \leq x \leq b$ صفر می‌شود، $y_3(x)$ نیز باید صفر شود. پس باتوجه به یکتایی جواب معادلهٔ (۶-۴۲۱) که درشرایط اولیه در x_0 صدق می‌کند می‌توانیم این نتیجه را که $y_3(x)$ روی بازهٔ کوچک $N_\epsilon(x_0)$ جزء $[a,b]$ صفر است به تمام بازهٔ $[a,b]$ بسط دهیم.

چون به ازای هر $\{x: a \leq x \leq b\}$،

$$y_3(x) = y_2(x) - Ay_1(x) = 0 \qquad (۶-۴۲۶)$$

با فرض $c_1 = -A$ و $c_2 = 1$ به ازای هر $\{x: a \leq x \leq b\}$ می‌توان نوشت:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \qquad (۶-۴۲۷)$$

این معادله نشان می‌دهد که صفرشدن رونسکین y_1 و y_2 مستلزم وابستگی خطی آنهاست. پس کفایت شرط نیز ثابت شد.

۶-۱۹. محاسبهٔ رونسکین

رونسکین $W\{y_1, y_2; x\}$، دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ معادلهٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)\, y = 0 \qquad (۶-۴۲۸)$$

در یک رابطهٔ مهم صدق می‌کنند که برای اولین بار توسط ریاضی‌دان نروژی نیلز آبل به‌دست آمده است. این رابطه، به نام "فرمول آبل" برای رونسکین مشهور است و آن را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد.

فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ هر دو روی $a \leq x \leq b$ پیوسته، و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادلهٔ (۶-۴۲۸) باشند $a \leq x \leq b$. بنابه فرض

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \qquad (۶ - ۴۲۹)$$

$$(۶ - ۴۳۰)$$

اگرمعادلهٔ (۶ ـ ۴۲۹) رادر y_2 ـ ومعادلهٔ (۶ ـ ۴۳۰) رادر y_1 ضرب‌کرده و نتایج حاصل را جمع کنیم ، داریم

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \qquad (۶ - ۴۳۱)$$

باوجود این ،

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' = \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_2y_1') \qquad (۶ - ۴۳۲)$$

و چون

$$W\{y_1,y_2;x\} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad (۶ - ۴۳۳)$$

معادلهٔ (۶ ـ ۴۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0 \qquad (۶ - ۴۳۴)$$

برای انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۶ ـ ۴۳۴) ، فرض می‌کنیم

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\,dz \qquad (۶ - ۴۳۵)$$

که در آن $a \le x_0 \le x \le b$ ، و توجه کنید که

$$\frac{d}{dx}(We^{I(x)}) = e^{I(x)}\left(\frac{dW}{dx} + \frac{dI}{dx}W\right) \qquad (۶ - ۴۳۶)$$

اگر از معادلهٔ (۶ ـ ۴۳۵) مشتق بگیریم ، داریم

$$\frac{dI(x)}{dx} = p(x) \qquad (۶ - ۴۳۷)$$

درنتیجه

$$\frac{d}{dx}(We^{I(x)}) = e^{I(x)}\left[\frac{dW}{dx} + p(x)W\right] = 0 \qquad (۶ - ۴۳۸)$$

یا

$$We^{I(x)} = C \qquad (۶ - ۴۳۹)$$

برای محاسبهٔ ثابت انتگرال‌گیری C ، فرض کنید $x = x_0$ ،

$$W\{y_1,y_2;x_0\}e^{I(x_0)} = C \qquad (۶ - ۴۴۰)$$

و چون $I(x_0) = 0$ ،

$$C = W\{y_1,y_2;x_0\} \tag{۶ – ۴۴۱}$$

در این صورت فرمول آبل برای رونسکین به صورت زیر درمی‌آید

$$W\{y_1,y_2;x\} = W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-\int_{x_0}^{x}p(z)dz} \tag{۶ – ۴۴۲}$$

۶ ــ ۲۰. جواب عمومی یک معادلهٔ همگن، با استفاده از فرمول آبل

دربخش (۶ ــ ۹) دیدیم‌که چگونه می‌توانیم‌جواب دوم‌معادلهٔ بسل را وقتی یک جواب داده شود به‌دست آوریم. روش به‌کار برده شده حالت خاصی از روش کلی زیر است.

فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ روی $a \le x \le b$ پیوسته‌باشند،و همچنین فرض کنید یک جواب $y_1(x)$ ، معادلهٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{۶ – ۴۴۳}$$

از قبل معلوم باشد

اگر $y_2(x)$ جواب دوم معادله باشد، با استفاده ازمعادلات (۶ ــ ۴۳۳) و (۶ ــ ۴۴۲)، نتیجه می‌شود

$$y_1y_2' - y_2y_1' = W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-I(x)} \tag{۶ – ۴۴۴}$$

حال اگر $y_1(x)$ یک جواب غیربدیهی معادلهٔ (۶ ــ ۴۴۳) روی $[a,b]$ باشد، نمی‌تواند براین بازه متحد با صفر باشد. فرض کنید $[a',b']$ زیربازه‌ای از $[a,b]$ باشد به قسمی که $a \le a' \le b' \le b$ ، و $y_1(x) \neq 0$ ، $a' \le x \le b'$. نقطهٔ x_0 را در بازهٔ $[a',b']$ انتخاب می‌کنیم که در آن $y_1(x)$ صفر نمی‌شود. سپس با تقسیم معادلهٔ (۶ ــ ۴۴۴) بر $[y_1(x)]^2$ ، داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right] = \frac{W\{y_1,y_2;x_0\}}{[y_1(x)]^2}\, e^{-I(x)} \tag{۶ – ۴۴۵}$$

که به ازای هر x در $[a',b']$ برقرار است و در آن

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\, dz \tag{۶ – ۴۴۶}$$

انتگرال معادلهٔ (۶ ــ ۴۴۵) نتیجه می‌دهد

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = c_1 + W\{y_1,y_2;x_0\} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-I(s)}}{[y_1(s)]^2}\, ds \tag{۶ – ۴۴۷}$$

یا

$$y_2(x) = c_1y_1(x) + W\{y_1,y_2;x_0\}y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-I(s)}}{[y_1(s)]^2}\, ds \tag{۶ – ۴۴۸}$$

که به ازای هر x در بازهٔ زیر صادق است :

$$a \leq a' \leq x_0 \leq x \leq b' \leq b \qquad (۶-۴۴۹)$$

۶ ـ ۲۱. جواب یک معادلهٔ ناهمگن با استفاده از فرمول آبل

فرض‌کنید $p(x)$، $q(x)$ و $f(x)$ روی $a \leq x \leq b$ توابعی پیوسته باشند و بخواهیم معادلهٔ ناهمگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (۶-۴۵۰)$$

را حل کنیم . این کار را می‌توانیم به کمک فرمول آبل انجام دهیم به شرط آن که دو جواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ معادلهٔ همگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (۶-۴۵۱)$$

از قبل معلوم باشند .

دو معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \qquad (۶-۴۵۲)$$

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (۶-۴۵۳)$$

اگر معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۳) را در y_1 و معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۲) رادر y ضرب کرده ازهم کم‌کنیم نتیجه می‌شود

$$y_1y'' - yy_1'' + p(x)(y_1y' - y_1'y) = y_1f(x) \qquad (۶-۴۵۴)$$

یا

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = y_1(x)f(x) \qquad (۶-۴۵۵)$$

که در آن

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} \qquad (۶-۴۵۶)$$

اگر معادله (۶ ـ ۴۳۸) را درمورد (۶ ـ ۴۵۵) به‌کار بریم ، داریم

$$\frac{d}{dx}(We^{I(x)}) = e^{I(x)}\left[\frac{dW}{dx} + p(x)W\right] = y_1(x)f(x)e^{I(x)} \qquad (۶-۴۵۷)$$

که در آن

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\, dz \qquad (۶-۴۵۸)$$

جواب عمومی‌معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۷) ازیک انتگرال خصوصی ویک تابع مکمل تشکیل می‌شود .

این جواب بطور صریح چنین نوشته می‌شود :

$$W\{y_1,y;x\}e^{I(x)} = A + \int_{x_0}^{x} y_1(s)f(s)e^{I(s)}\,ds \qquad (۶-۴۵۹)$$

چون همین استدلال برای y_2 به جای y_1 در معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۲) صادق است ، داریم :

$$W\{y_2,y;x\}e^{I(x)} = B + \int_{x_0}^{x} y_2(s)f(s)e^{I(s)}\,ds \qquad (۶-۴۶۰)$$

که در آن A و B دو مقدار ثابتند .

حال اگر معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۹) را در $y_2(x)$ و معادلهٔ (۶ ـ ۴۶۰) رادر $y_1(x)$ ـ ضرب‌کرده باهم جمع کنیم ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}[y_2W\{y_1,y;x\} - y_1W\{y_2,y;x\}]e^{I(x)} &= Ay_2(x) - By_1(x)\\ &+ \int_{x_0}^{x} f(s)e^{I(s)}[y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]\,ds\end{aligned} \qquad (۶-۴۶۱)$$

ازطرفی داریم

$$\begin{aligned}y_2W\{y_1,y;x\} - y_1W\{y_2,y;x\} &= y_2\begin{vmatrix} y_1 & y\\ y_1' & y'\end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} y_2 & y\\ y_2' & y'\end{vmatrix}\\ &= y(y_1y_2' - y_2y_1') = yW\{y_1,y_2;x\}\end{aligned} \qquad (۶-۴۶۲)$$

که معادلهٔ (۶ ـ ۴۶۱) را به صورت زیر خلاصه می‌کند :

$$\begin{aligned}y(x)W\{y_1,y_2;x\}e^{I(x)} &= Ay_2(x) - By_1(x)\\ &+ \int_{x_0}^{x} f(s)e^{I(s)}[y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]\,ds\end{aligned} \qquad (۶-۴۶۳)$$

حال اگر فرمول آبل (۶ ـ ۴۴۲)

$$W\{y_1,y_2;x\}e^{I(x)} = W\{y_1,y_2;x_0\} \qquad (۶-۴۶۴)$$

را در معادلهٔ (۶ ـ ۴۶۳) منظور کنیم ، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{A}{W\{y_1,y_2;x_0\}}\,y_2(x) - \frac{B}{W\{y_1,y_2;x_0\}}\,y_1(x)\\ &+ \frac{1}{W\{y_1,y_2;x_0\}}\int_{x_0}^{x} f(s)e^{I(s)}[y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]\,ds\end{aligned} \qquad (۶-۴۶۵)$$

توجه کنید که $W\{y_1,y_2;x_0\}$ یک مقدار ثابت است . اگراین مقدارثابت صفر باشد ، آن‌گاه معادلهٔ (۶ ـ ۴۶۴) یا فرمول آبل برای رونسکین ، نشان می‌دهدکه رونسکین y_1 و y_2 بایدبرای هر x در بازهٔ $[a,b]$ صفرشود . این مطلب بافرض این که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۶ ـ ۴۵۱) بر $[a,b]$ هستند در تناقض است . درنتیجه $W\{y_1,y_2;x_0\}\neq 0$ و می‌توانیم

ثابتهای جدیدی مانند c_1 و c_2 را به قسمی تعریف کنیم که

$$c_1 = -\frac{B}{W\{y_1, y_2; x_0\}} \tag{۶ — ۴۶۶}$$

$$c_2 = \frac{A}{W\{y_1, y_2; x_0\}} \tag{۶ — ۴۶۷}$$

برحسب این ثوابت جدید جواب عمومی معادلهٔ (۶ — ۴۵۰) به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \frac{1}{W\{y_1, y_2; x_0\}} \int_{x_0}^{x} f(s) e^{I(s)} \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds \tag{۶ — ۴۶۸}$$

که در آن

$$I(s) = \int_{x_0}^{s} p(z)\, dz \tag{۶ — ۴۶۹}$$

۶ — ۲۲. تابع گرین

معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن زیر را درنظر می‌گیریم

$$g'' + p(x)g' + q(x)g = -\delta(x - x') \tag{۶ — ۴۷۰}$$

که در آن $\delta(x-x')$ تابع دلتای دیراک است. جواب عمومی معادلهٔ (۶ — ۴۷۰) پاسخ یک منبع نقطه‌ای متمرکز در $x' = x$ را نشان می‌دهد. این تابع جواب را "تابع گرین" نامند. تابع گرین را می‌توان مستقیما" از معادلهٔ (۶ — ۴۶۸) با روش دیگری نیز به‌دست آورد. فرض کنید

$$e^{I(x)} = e^{\int_{x_0}^{x} p(z) dz} \tag{۶ — ۴۷۱}$$

اگر معادلهٔ (۶ — ۴۷۰) را در معادلهٔ (۶ — ۴۷۱) ضرب کنیم داریم

$$[g'' + p(x)g']e^{I(x)} + q(x)ge^{I(x)} = -\delta(x - x')e^{I(x)} \tag{۶ — ۴۷۲}$$

یا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dg}{dx} e^{I(x)}\right) + q(x)ge^{I(x)} = -\delta(x - x')e^{I(x)} \tag{۶ — ۴۷۳}$$

به جز در $x' = x$ ، معادلهٔ (۶ — ۴۷۰) همگن است،

$$g'' + p(x)g' + q(x)g = 0 \tag{۶ — ۴۷۴}$$

دارای دوجواب مستقل خطی $g_1(x)$ و $g_2(x)$ است. استقلال خطی جوابهای معادلهٔ (۶ — ۴۷۴) را می‌توان برای ساختن انتگرال خصوصی $G(x|x')$ معادلهٔ (۶ — ۴۷۰) به‌کاربرد. فرض کنیدکه

$$G = \begin{cases} Ag_1(x) & x < x' \\ Bg_2(x) & x > x' \end{cases} \qquad (۶-۴۷۵)$$

یک انتگرال خصوصی معادلهٔ (۶ـ۴۷۰) باشد که در $x = x'$ پیوسته است. در این صورت

$$Ag_1(x') = Bg_2(x') \qquad (۶-۴۷۶)$$

اگر از دو طرف معادلهٔ (۶ـ۴۷۳) نسبت به dx از $x = x' - \epsilon$ تا $x = x' + \epsilon$ انتگرال بگیریم، آن‌گاه با شرط این‌که $q(x)$ در $x = x$ پیوسته باشد، معادلهٔ (۶ـ۴۷۳) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{dG}{dx} e^{I(x)} \Big|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} = -e^{I(x')} \qquad (۶-۴۷۷)$$

اگر معادلهٔ (۶ـ۴۷۵) را در معادلهٔ (۶ـ۴۷۷) منظور کنیم نتیجه می‌شود

$$Bg_2'(x') - Ag_1'(x') = -1 \qquad (۶-۴۷۸)$$

و برای دو مجهول A و B دو معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} Bg_2'(x') - Ag_1'(x') &= -1 \\ Bg_2(x') - Ag_1(x') &= 0 \end{aligned} \qquad (۶-۴۷۹)$$

جواب این دستگاه عبارت است از:

$$A = \frac{-g_2(x')}{W\{g_1, g_2; x'\}} \qquad (۶-۴۸۰)$$

$$B = \frac{-g_1(x')}{W\{g_1, g_2; x'\}} \qquad (۶-۴۸۱)$$

که در آن

$$W\{g_1, g_2; x'\} = \begin{vmatrix} g_1(x') & g_2(x') \\ g_1'(x') & g_2'(x') \end{vmatrix} \qquad (۶-۴۸۲)$$

عبارت فوق رونسکین g_1 و g_2 است که در $x = x'$ محاسبه گردیده است.

به کمک معادلات (۶ـ۴۸۰) و (۶ـ۴۸۱)، از معادلهٔ (۶ـ۴۷۵) نتیجه می‌شود،

$$G(x|x') = \frac{-g_1(x)g_2(x')}{W\{g_1, g_2; x'\}} \qquad x < x' \qquad (۶-۴۸۳)$$

$$G(x|x') = \frac{-g_2(x)g_1(x')}{W\{g_1, g_2; x'\}} \qquad x > x' \qquad (۶-۴۸۴)$$

معادلات (۶ـ۴۸۳) و (۶ـ۴۸۴) را می‌توان با نماد جدیدی که در فیزیک معمول است به صورت یک معادله نوشت:

$$G(x|x') = \frac{-g_1(x_<)g_2(x_>)}{W\{g_1,g_2;x'\}} \qquad (۶-۴۸۵)$$

که در آن $x_>$ یعنی مقدار بزرگتر x یا x' و $x_<$ یعنی مقدار کوچکتر x یا x' است . به آسانی دیده می‌شودکه وقتی $x' > x$، معادله (۶ ــ ۴۸۵) به (۶ ــ ۴۸۳) خلاصه می‌شود ، درصورتی‌که به‌ازای $x > x'$ به صورت (۶ ــ ۴۸۴) درمی‌آید .

جواب عمومی معادله (۶ ــ ۴۷۰) از یک تابع مکمل

$$\{c_1g_1(x) + c_2g_2(x)\}$$

تشکیل می‌شود که شامل دو ثابت دلخواه c_1 و c_2 است و در معادلهٔ (۶ ــ ۴۷۴) صدق می‌کند به اضافهٔ انتگرال خصوصی (۶ ــ ۴۸۵) که در (۶ ــ ۴۷۰) صدق می‌کند . بنابراین ، به‌صورت زیر داده می‌شود

$$g(x|x') = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + G(x|x') \qquad (۶-۴۸۶)$$

۶ ــ ۲۳ . کاربرد تابع گرین $g(x|x')$

به جای استفاده از فرمول آبل (۶ ــ ۴۶۸) برای حل مستقیم مسأله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = -f(x) \qquad (۶-۴۸۷)$$

می‌توانیم جواب معادلهٔ (۶ ــ ۴۸۷) را برحسب تابع‌گرین $g(x|x')$ بنویسیم‌که در (۶ ــ ۴۸۶) صدق می‌کند .

برای این کار لازم است از اتحاد متقارن گرین استفاده کنیم

$$gy'' - yg'' = \frac{d}{dx}\{gy' - yg'\} \qquad (۶-۴۸۸)$$

تابع گرین $g(x|x')$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$g'' + p(x)g' + q(x)g = -\delta(x - x') \qquad (۶-۴۸۹)$$

و با استفاده از معادلات (۶ ــ ۴۸۷) و (۶ ــ ۴۸۹) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} g\{y'' + py' + qy\} - y\{g'' + pg' + q\}g &= -gf(x) + y(x)\,\delta(x - x') \\ &= \{gy'' - yg''\} + p\{gy' - yg'\} \end{aligned} \qquad (۶-۴۹۰)$$

به کمک معادلهٔ (۶ ــ ۴۸۸) این نتیجه به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{dx}\{gy' - yg'\} + p\{gy' - yg'\} = -gf + y\,\delta(x - x') \qquad (۶-۴۹۱)$$

باتوجه به این‌که $\{gy' - yg'\}$ رونسکین g و y است ، معادلهٔ (۶ــ۴۹۱) رامی‌توان چنین

نوشت

$$\frac{dW}{dx}+p(x)W\{g,y;x\} = -g(x|x')f(x) + y(x)\,\delta(x-x') \qquad (۴۹۲-۶)$$

ازطرفی ،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(We^{I(x)}) &= e^{I(x)}\left[\frac{dW}{dx}+p(x)W\right]\\ &= -g(x|x')e^{I(x)}f(x) + y(x)e^{I(x)}\,\delta(x-x')\end{aligned} \qquad (۴۹۳-۶)$$

که در آن طبق معمول

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} p(z)\,dz \qquad (۴۹۴-۶)$$

اگر از هر جملهٔ معادلهٔ (۶ ـ ۴۹۳) نسبت به x در فاصلهٔ $x=a$ و $x=b$ انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود ،

$$\int_a^b y(x)e^{I(x)}\,\delta(x-x')\,dx = \int_a^b g(x|x')f(x)e^{I(x)}\,dx + We^{I(x)}\Big|_a^b \qquad (۴۹۵-۶)$$

و اگر $a < x' < b$ ، معادلهٔ (۶ ـ ۴۹۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$y(x') = \int_a^b g(x|x')f(x)e^{-\{I(x')-I(x)\}}\,dx + W\{g,y\}e^{-\{I(x')-I(x)\}}\Big|_{x=a}^{x=b} \qquad (۴۹۶-۶)$$

آخرین جملهٔ معادلهٔ (۶ ـ ۴۹۶) را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned}W\{g,y\}e^{-\{I(x')-I(x)\}}\Big|_a^b &= \{g(b|x')y'(b) - g'(b|x')y(b)\}e^{-\{I(x')-I(b)\}}\\ &- \{g(a|x')y'(a) - g'(a|x')y(a)\}e^{-\{I(x')-I(a)\}}\end{aligned} \qquad (۴۹۷-۶)$$

دیده می‌شودکه فرمول (۶ ـ ۴۹۶) تابع $y(x')$ دریک نقطهٔ درونی x' بازهٔ $[a,b]$ برحسب مقادیر مرزی y و مشتق اول آن y' در a و b و یک انتگرال پیچش شامل تابع نیروی $f(x)$ و تابع گرین $g(x|x')$ را نشان می‌دهد . معرفی مقادیر اولیهٔ y و y' در a و b جنبهٔ مهمی ازمعادلهٔ (۶ ـ ۴۹۶) است . دقیقاً" همین خاصیت تابع گرین است که آن را تا این حد در حل مسائل مقادیر اولیه قابل استفاده کرده است .

درنتیجه $y(x)$ و $y'(x)$ هر دو درنقاط انتهایی $[a,b]$ معین نشده‌اند . معمولاً" فقط مقادیر $y(a)$ و $y(b)$ یا فقط $y'(a)$ و $y'(b)$ داده می‌شوند . باوجود این ، در بعضی ازمسائل یک ترکیب خطی $y' + \mu y$ در نقاط انتهایی بازهٔ $[a,b]$ معین می‌شود .

در هر حالت باید جملات نامعین را از معادلهٔ (۶ ـ ۴۹۶) حذف کرد . مثلاً" فرض‌کنید

بخواهیم مسأله‌ٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = -f(x) \qquad (۶-۴۹۸)$$

را با شرایط اولیه‌ٔ

$$y(a) = \alpha \qquad (۶-۴۹۹)$$

$$y(b) = \beta \qquad (۶-۵۰۰)$$

حل کنیم . تابع گرین $g(x|x')$ معادله‌ٔ (۶ — ۴۹۸) در رابطه‌ٔ زیر صدق می‌کند

$$g'' + p(x)g' + q(x)g = -\delta(x - x') \qquad (۶-۵۰۱)$$

و جواب عمومی معادله‌ٔ (۶ — ۵۰۱) از یک تابع مکمل به اضافه‌ٔ یک انتگرال خصوصی تشکیل می‌شود ،

$$g(x|x') = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) - \frac{g_1(x_<)g_2(x_>)}{W\{g_1,g_2;x'\}} \qquad (۶-۵۰۲)$$

با انتخاب مناسب ثابتهای c_1 و c_2 درمعادله‌ٔ (۶ — ۵۰۲) می‌توان جواب معادله‌ٔ (۶ — ۵۰۱) را به قسمی ساخت که در شرایط اولیه‌ٔ زیر صدق کند

$$g(a|x') = 0 \qquad (۶-۵۰۳)$$

$$g(b|x') = 0 \qquad (۶-۵۰۴)$$

برای این حالت ، معادله‌ٔ (۶ — ۴۹۶) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{aligned} y(x') = \int_a^b g(x|x')f(x)e^{-\{I(x')-I(x)\}}\,dx \\ - \{\beta g'(b|x')e^{I(b)} - \alpha g'(a|x')e^{I(a)}\}e^{-I(x')} \end{aligned} \qquad (۶-۵۰۵)$$

که شامل کمیتهای معلوم در سمت راست است . مسأله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = -f(x) \qquad (۶-۵۰۶)$$

$$y'(a) = \alpha \qquad (۶-۵۰۷)$$

$$y'(b) = \beta \qquad (۶-۵۰۸)$$

با انتخاب یک تابع گرین $g(x|x')$ که در شرایط اولیه‌ٔ همگن

$$g'(a|x') = 0 \qquad (۶-۵۰۹)$$

$$g'(b|x') = 0 \qquad (۶-۵۱۰)$$

صدق می‌کند حل می‌شود .

جواب (۶ — ۴۹۶) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{aligned} y(x') = \int_a^b g(x|x')f(x)e^{-\{I(x')-I(x)\}}\,dx \\ + \{\beta g(b|x')e^{I(b)} - \alpha g(a|x')e^{I(a)}\}e^{-I(x')} \end{aligned} \qquad (۶-۵۱۱)$$

بالاخره، برای حل مسألهٔ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = -f(x) \qquad (۶-۵۱۲)$$

$$y(a) + \mu y'(a) = \alpha \qquad (۶-۵۱۳)$$

$$y(b) + \mu y'(b) = \beta \qquad (۶-۵۱۴)$$

که در آن μ یک مقدار ثابت است، تابع گرین $g(x|x')$ را به قسمی اختیار می‌کنیم که در شرایط اولیهٔ همگن زیر صدق کند

$$g(a|x') + \mu g'(a|x') = 0 \qquad (۶-۵۱۵)$$

$$g(b|x') + \mu g'(b|x') = 0 \qquad (۶-۵۱۶)$$

دراین صورت جواب (۶ــ۴۹۶) عبارت است از:

$$y(x') = \int_a^b g(x|x')f(x)e^{-\{I(x')-I(x)\}}\,dx - \{\beta g'(b|x')e^{I(b)} - \alpha g'(a|x')e^{I(a)}\}e^{-I(x')} \qquad (۶-۵۱۷)$$

توجه کنید که در هریک از سه حالت فوق تابع گرین $g(x|x')$، در شرایط اولیهٔ همگنی صدق می‌کند که دقیقاً" مانند شرایط اولیهٔ ناهمگنی است که $y(x)$ در آنها صدق می‌کند.

۶ــ۲۴. مسألهٔ اشتورم ــ لیوویل

بسیاری از معادلات دیفرانسیل در فیزیک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad (۶-۵۱۸)$$

که در آن p، q و r توابعی حقیقی از x هستند به قسمی که p دارای مشتق پیوسته، q و r توابعی پیوسته‌اند، و پارامتر λ مستقل از x است. مثلاً"، اگر

$$p(x) = 1 - x^2, q(x) = 0, r(x) = 1, \quad \lambda = \nu(\nu + 1)$$

آن‌گاه معادلهٔ (۶ــ۵۱۸) به معادلهٔ لژاندر (۶ــ۲۶۷) خلاصه می‌شود، و اگر

$$p(x) = 1 - x^2,\ q(x) = -m^2/(1 - x^2),\ r(x) = 1, \quad \lambda = \nu(\nu + 1)$$

به معادلهٔ لژاندر وابستهٔ (۶ــ۲۷۶) خلاصه می‌شود. بالاخره، معادلهٔ بسل برحسب متغیر kx را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dy}{dx}\right) + \left(k^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0 \qquad (۶-۵۱۹)$$

همچنین معادلهٔ (۶ــ۵۱۹) به صورت اشتورم ــ لیوویل درمی‌آید، با

$$p(x) = x, q(x) = -\nu^2/x, r(x) = x, \qquad \lambda = k^2.$$

مسألهٔ اشتورم ـ لیوویل عبارت از حل معادلهٔ (۶ ـ ۵۱۸) تحت شرایط اولیهٔ

$$Ay(a) + By'(a) = 0 \qquad (۶-۵۲۰)$$

$$Cy(b) + Dy'(b) = 0 \qquad (۶-۵۲۱)$$

که در آن A ، B ، C و D ثابتهای حقیقی هستند به قسمی که A و B باهم و C و D باهم صفر نیستند . دو حالت خاص خیلی مهم وجود دارد ، یکی حالتی که در آن معادلات (۶ ـ ۵۲۰) و (۶ ـ ۵۲۱) به صورت

$$y(a) = 0 \qquad (۶-۵۲۲)$$

$$y(b) = 0 \qquad (۶-۵۲۳)$$

درمی‌آیند و دیگری حالتی که در آن (۶ ـ ۵۲۰) و (۶ ـ ۵۲۱) به صورت زیرخلاصه می‌شوند

$$y'(a) = 0 \qquad (۶-۵۲۴)$$

$$y'(b) = 0 \qquad (۶-۵۲۵)$$

یک مثال ساده و آشنا از مسأله اشتورم ـ لیوویل به قرار زیر است : معادلهٔ

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad (۶-۵۲۶)$$

را با شرایط مرزی

$$y(0) = 0 \qquad (۶-۵۲۷)$$

$$y(b) = 0 \qquad (۶-۵۲۸)$$

حل می‌کنیم . جواب کلی معادلهٔ (۶ ـ ۵۲۶) عبارت است از :

$$y = A \sin \sqrt{\lambda}\, x + B \cos \sqrt{\lambda}\, x \qquad (۶-۵۲۹)$$

وجواب خصوصی (۶ ـ ۵۲۶) که در شرایط مرزی (۶ ـ ۵۲۷) و (۶ ـ ۵۲۸) صدق می‌کندبرابر است با

$$y = A \sin \frac{n\pi x}{b} \qquad (۶-۵۳۰)$$

به شرط آن‌که

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad n = 1,2,3, \; . \; . \; . \qquad (۶-۵۳۱)$$

لازم‌است به سه نکته توجه‌داشته باشیم . اولا" اگربخواهیم مسأله اشتورم ـ لیوویل (۶ ـ ۵۲۶) تا (۶ ـ ۵۲۸) جواب غیربدیهی داشته باشد ، باید λ به بعضی مقادیر مشخصه یا مقادیر ویژه حاصل از معادلهٔ (۶ ـ ۵۳۱) محدود شود .

ثانیا" ، توابع ویژهٔ (۶ ـ ۵۳۰) متعلق به مقادیر ویژهٔ (۶ ـ ۵۳۱) بر $[0,b]$ متعامدند . این مطلب از معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{m\pi x}{b}\,dx = \frac{2}{b}\,\delta_{nm} \tag{۵۳۲ - ۶}$$

سرانجام ، از بحث دنبال معادلهٔ (۵ — ۲۵۱) نتیجه می‌شود که توابع ویژهٔ (۶ — ۵۳۰) مجموعهٔ کاملی بر بازهٔ $[0,b]$ تشکیل می‌دهند .

درواقع ، این نکات دربارهٔ مسألهٔ سادهٔ (۶ — ۵۲۶) تا (۶ — ۵۲۸) مشخصه مسأله کلی (۶ — ۵۱۸) تا (۶ — ۵۲۰) و (۶ — ۵۲۱) نیز خواهد بود . به‌عبارت دقیقتر ، می‌توان گفت که مسأله کلی تعریف شده با (۶ — ۵۱۸) ، (۶ — ۵۲۰) و (۶ — ۵۲۱) دارای خواص زیراست :

۱) مقادیر ویژهٔ λ_n مربوط به (۶ — ۵۱۸) ، (۶ — ۵۲۰) و (۶ — ۵۲۱) یک مجموعهٔ شمارا بنام "طیف" تشکیل می‌دهند . این طیف مقادیر ویژه را می‌توان به‌صورت صعودی مرتب کرد .

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \qquad \lambda_n \to \infty \text{ as } n \to \infty .$$

۲) نظیر هرمقدار ویژه λ_n ، یک تابع ویژه مانند y_n وجود داردکه بر $[a,b]$ تعریف شده است .

۳) هر دو تابع ویژه متعلق به یک مقدار ویژه ، مثلاً λ_n ، وابستهٔ خطی هستند .

۴) هر دو تابع ویژه متعلق به مقادیر ویژهٔ متفاوت ، مثلاً λ_n و λ_m ، نسبت به تابع وزن $r(x)$ بر بازهٔ $a \le x \le b$ متعامدند . یعنی ،

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)r(x)\,dx = C_{nm}\delta_{nm} \tag{۵۳۳ - ۶}$$

۵) هر تابع $A(x)$ را که در همان شرایط مرزی $y_1, y_2, \ldots$ صدق کند ، می‌توان بطور صوری به یک سری متعامد بسط داد :

$$A(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x) \tag{۵۳۴ - ۶}$$

معادلهٔ (۶ — ۵۳۴)به‌این‌معناست که $\sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x)$ به $A(x)$ در میانگین مربع همگراست ، یا به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[A - \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x)\right]^2 r(x)\,dx = 0 \tag{۵۳۵ - ۶}$$

این نوع همگرایی در بخش ۵ و ۶ بطورمفصل بحث شد .

متعامد بودن توابع ویژهٔ اشتورم ــ لیوویل

فرض کنید y_m یک جواب معادلهٔ (۶ — ۵۱۸) متناظر با مقدار ویژهٔ λ_m باشد ، و y_n یک جواب دیگر به ازای مقدار ویژهٔ متفاوت λ مثلاً λ_n ، باشد . در این صورت ،

$$(py_m')' + (q + \lambda_m r)y_m = 0 \qquad (۵۳۶-۶)$$
$$(py_n')' + (q + \lambda_n r)y_n = 0 \qquad (۵۳۷-۶)$$

اگرمعادلهٔ (۶ ــ ۵۳۶) رادر y_n ومعادله (۶ ــ ۵۳۷) رادر y_m ضرب کرده ازهم کم کنیم داریم ،

$$[y_n(py_m')' - y_m(py_n')'] + (\lambda_m - \lambda_n)ry_ny_m = 0 \qquad (۵۳۸-۶)$$

ولی ،

$$y_n(py_m')' - y_m(py_n')' = p'(y_ny_m' - y_my_n') + p(y_ny_m'' - y_my_n'') = \frac{d}{dx}[p(y_ny_m' - y_my_n')] \qquad (۵۳۹-۶)$$

و معادلهٔ (۶ ــ ۵۳۹) معادلهٔ (۶ ــ ۵۳۸) را به صورت زیر خلاصه می‌کند :

$$\frac{d}{dx}[p(y_ny_m' - y_my_n')] = (\lambda_n - \lambda_m)ry_ny_m \qquad (۵۴۰-۶)$$

اگر از معادلهٔ (۶ ــ ۵۴۰) از a تا b انتگرال بگیریم ، داریم

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n(x)y_m(x)r(x)\,dx = p(x)(y_ny_m' - y_my_n')\Big|_a^b \qquad (۵۴۱-۶)$$

چون دوتابع ویژه $y_n(x)$ و $y_m(x)$ باید درشرایط مرزی (۶ ــ ۵۲۰) و (۶ ــ ۵۲۱) صدق کنند ؛ باتوجه به معادلهٔ (۶ ــ ۵۴۱) ، داریم

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n(x)y_m(x)r(x)\,dx = 0 \qquad (۵۴۲-۶)$$

به ازای $n \neq m$ ، فرض می‌کنیم $\lambda_n \neq \lambda_m$ درنتیجه

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)r(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m \qquad (۵۴۳-۶)$$

و این ثابت می‌کند که توابع ویژه y_n و y_m نسبت به تابع وزن $r(x)$ بر $[a,b]$ متعامدند .

مثال ۶ ــ ۱ : معادلهٔ لژاندر. حال می‌توان نشان‌دادکه چندجمله‌ایهای لژاندر بر بازهٔ [۱ و ۱ــ] متعامدند . این چندجمله‌ایها در یک معادلهٔ اشتورم ــ لیوویل به صورت زیر صدق می‌کنند

$$[(1 - x^2)P_n']' + n(n + 1)P_n(x) = 0 \qquad (۵۴۴-۶)$$

که در آن

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad r(x) = 1, \qquad p(x) = 1 - x^2.$$

اکنون معادلهٔ (۶ ــ ۵۲۱) نتیجه می‌دهد

$$[n(n + 1) - m(m + 1)]\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = (1 - x^2)[P_nP_m' - P_mP_n'] \qquad (۵۴۵-۶)$$

و چون $x^2 - 1$ در $x = \pm 1$ صفر می‌شود ، داریم

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m \tag{۵۴۶ – ۶}$$

به ازای $n = m$ ثابت خواهیم کرد که

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \tag{۵۴۷ – ۶}$$

برای اثبات ، فرمول رودریگز را درنظر می‌گیریم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{۵۴۸ – ۶}$$

و می‌نویسیم

$$y_n = (x^2-1)^n \tag{۵۴۹ – ۶}$$

حال باتوجه به

$$\int_{-1}^{+1} y_n^{(n)}(x)y_n^{(n)}(x)\,dx$$

و انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه می‌شود .

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} y_n^{(n)}(x)y_n^{(n)}(x)\,dx &= -\int_{-1}^{+1} y_n^{(n-1)}y_n^{(n+1)}\,dx = \cdots \\ &= (-1)^n\int_{-1}^{+1} y_n y_n^{(2n)}\,dx = (2n)!\int_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}(2n)!\int_{-1}^{+1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx \\ &= \frac{n!(2n)!}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{2n}\,dx \\ &= \frac{(n!)^2}{2n+1}2^{2n+1}\end{aligned} \tag{۵۵۰ – ۶}$$

بنابراین

$$2^{2n}(n!)^2\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = 2^{2n}(n!)^2\frac{2}{2n+1} \tag{۵۵۱ – ۶}$$

درنتیجه

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{۵۵۲ – ۶}$$

مثال ۶ ــ ۲ : معادلهٔ بسل. معادلهٔ ۶ ــ ۵۱۹ صورت اشتورم ــ لیوویل معادلهٔ بسل است با

$$p(x) = x,\ \ q(x) = -\nu^2/x,\ \ r(x) = x,\ \ \lambda = k^2.$$

فرض کنید دنباله‌ٔ اعداد حقیقی k_1، k_2، . . . ریشه‌های مثبت و متمایز معادله‌ٔ زیر باشند

$$J_\nu(ka) = 0 \tag{۶ــ۵۵۳}$$

بنابراین به ازای . . . $n = 1,2,3,$ ، داریم $J_\nu(k_n a) = 0$

اثبات خواهیم کرد که توابع ویژه‌ٔ $y_n(x) = J_\nu(k_n x)$ بر بازه‌ٔ $[0,a]$ نسبت به تابع سنگینی x متعامدند.

در معادله‌ٔ (۶ــ۵۴۱) فرض کنید که $y_n(x)=J_\nu(kx)$ و $y_m(x) = J_\nu(k_m x)$ ،

$$(k^2 - k_m^2) \int_0^a J_\nu(kx)J_\nu(k_m x)x\, dx = x\left[J_\nu(kx)\frac{d}{dx}J_\nu(k_m x) - J_\nu(k_m x)\frac{d}{dx}J_\nu(kx)\right]\Bigg|_0^a \tag{۶ــ۵۵۴}$$

باتوجه به $J_\nu(k_m a) = 0$ ، معادله‌ٔ (۶ــ۵۵۴) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$(k^2 - k_m^2) \int_0^a J_\nu(kx)J_\nu(k_m x)x\, dx = k_m a J_\nu(ka)J'_\nu(k_m a) \tag{۶ــ۵۵۵}$$

حال اگر $k = k_n$ را در معادله (۶ــ۵۵۵) قرار دهیم ، با فرض $k_n \neq k_m$ نتیجه می‌شود:

$$\int_0^a J_\nu(k_n x)J_\nu(k_m x)x\, dx = 0 \qquad n \neq m \tag{۶ــ۵۵۶}$$

زیرا $J_\nu(k_n a) = 0$.

بالاخره، اگر از معادله‌ٔ (۶ــ۵۵۵) نسبت به k مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$2k \int_0^a J_\nu(kx)J_\nu(k_m x)x\, dx + (k^2 - k_m^2) \int_0^a x^2 J'_\nu(kx)J_\nu(k_m x)\, dx = k_m a^2 J'_\nu(ka)J'_\nu(k_m a) \tag{۶ــ۵۵۷}$$

و با فرض $k = k_m$ داریم ،

$$2 \int_0^a [J_\nu(k_m x)]^2 x\, dx = a^2[J'_\nu(k_m a)]^2 \tag{۶ــ۵۵۸}$$

معادلات (۶ــ۵۵۶) و (۶ــ۵۵۸) را می‌توان با یک رابطه متعامد تنها به صورت زیر خلاصه کرد

$$\int_0^a J_\nu(k_n x)J_\nu(k_m x)x\, dx = \frac{a^2}{2}[J'_\nu(k_m a)]^2\,\delta_{nm} \tag{۶ــ۵۵۹}$$

۶ــ۲۵. حل معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر با روش تبدیل

درفصل ۵ دیدیم که چگونه معادله‌ٔ دیفرانسیل باضرایب ثابت رامی‌توان با تبدیل فوریه

یا لاپلاس به صورت یک معادلهٔ جبری نوشت . حال خواهیم دید که چگونه تبدیل فوریه یا لاپلاس رامی‌توان برای تبدیل یک معادلهٔ دیفرانسیل باضرایب متغیربه یک معادلهٔ دیفرانسیل که خیلی ساده‌ترقابل حل است به‌کار برد . روشی را که تشریح خواهیم‌کرد برای بیشترمعادلات دیفرانسیل با ضرایب چندجمله‌ای قابل استفاده است و بر دو انتگرال زیر مبتنی است ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx = i^{(n+m)} \frac{d^n}{dk^n}[k^m \bar{A}(k)] \qquad (۶-۵۶۰)$$

که در آن

$$\bar{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx}\, dx \qquad (۶-۵۶۱)$$

و

$$\int_0^{\infty} x^n A^{(m)}(x) e^{-sx}\, dx = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[s^m \bar{A}(s) - s^{m-1}A(0) - s^{m-2}A'(0) - \cdots - A^{(m-1)}(0)] \qquad (۶-۵۶۲)$$

که در آن

$$\bar{A}(s) = \int_0^{\infty} A(x) e^{-sx}\, dx \qquad (۶-۵۶۳)$$

اثبات : برای اثبات معادلهٔ (۶ ــ ۵۶۰) فرض کنید $\int_{-\infty}^{+\infty} A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx$ بطوریکنواخت همگرااست ، بطوری که مشتق‌گیری ازعبارت زیر انتگرال مجاز است ، دراین‌صورت

$$\frac{d^n}{d(-ik)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx \qquad (۶-۵۶۴)$$

و از معادلهٔ (۵ ــ ۴۰۶) نتیجه می‌شود

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx = (ik)^m \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx}\, dx \qquad (۶-۵۶۵)$$

بنابراین ،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n A^{(m)}(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{(i)^m}{(-i)^n} \frac{d^n}{dk^n}[k^m \bar{A}(k)] \qquad (۶-۵۶۶)$$

که باتوجه به

$$\frac{i^m}{(-i)^n} = \frac{i^{m+n}}{(i)^n(-i)^n} = i^{m+n} \qquad (۶-۵۶۷)$$

معادلهٔ (۶ ــ ۵۶۰) ثابت می‌شود .

برای اثبات معادلهٔ (۶ ـ ۵۶۲) می‌دانیم که

$$\frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty A^{(m)}(x)e^{-sx}\,dx = (-1)^n\int_0^\infty x^n A^{(m)}(x)e^{-sx}\,dx \qquad (۶-۵۶۸)$$

و با استفاده از معادلهٔ (۵ ـ ۴۹۵)،

$$\int_0^\infty A^{(m)}(x)e^{-sx}\,dx = s^m\bar{A}(s) - s^{m-1}A(0) - s^{m-2}A'(0) - \cdots - A^{(m-1)}(0) \qquad (۶-۵۶۹)$$

معادلهٔ (۶ ـ ۵۶۸)،

$$\int_0^\infty x^n A^{(m)}(x)e^{-sx}\,dx = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}[s^m\bar{A}(s) - s^{m-1}A(0) - s^{m-2}A'(0) - \cdots - A^{(m-1)}(0)] \qquad (۶-۵۷۰)$$

و معادلهٔ (۶ ـ ۵۶۲) ثابت می‌شود،

مثال ۶ ـ ۳: معادلهٔ بسل اصلاح شدهٔ مرتبهٔ صفر

یک جواب معادلهٔ زیر را به کمک تبدیل فوریه به‌دست می‌آوریم .

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0 \qquad (۶-۵۷۱)$$

با استفاده از معادله (۶ ـ ۵۶۰) داریم،

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy\right)e^{-ikx} = -i\left[(k^2+1)\frac{d\bar{y}}{dk} + k\bar{y}\right] = 0 \qquad (۶-۵۷۲)$$

که در آن

$$\bar{y}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (۶-۵۷۳)$$

حل معادلهٔ

$$(k^2+1)\frac{d\bar{y}}{dk} + k\bar{y} = 0 \qquad (۶-۵۷۴)$$

ساده‌تر از حل معادلهٔ بسل (۶ ـ ۵۷۱) می‌باشد . جواب آن عبارت است از:

$$\int\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = -\frac{1}{2}\int\frac{2k}{k^2+1}\,dk + \text{ثابت} \qquad (۶-۵۷۵)$$

یا

$$\bar{y}(k) = \frac{c}{\sqrt{k^2+1}} \qquad (۶-۵۷۶)$$

که درآن c ثابت دلخواه است.

با استفاده از قضیهٔ وارون (۵ــ ۳۲۰)، برای تبدیلات فوریه نتیجه می‌شود

$$y(x) = \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2+1}}\,dk \qquad (۶-۵۷۷)$$

که نمایش انتگرالی یک جواب خصوصی معادلهٔ (۶ ــ ۵۷۱) است. بامراجعه به جدول تبدیلات فوریه، معلوم می‌شود که،

$$\frac{1}{\pi}K_0(|x|) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k^2+1}}\,dk \qquad (۶-۵۷۸)$$

پس، جواب (۶ ــ ۵۷۷) باید به صورت زیر باشد

$$y(x) = cK_0(|x|)$$

مثال ۶ ــ ۴: حل معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر با استفاده از تبدیل لاپلاس

مانند قبل می‌خواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0 \qquad (۶-۵۷۹)$$

ولی در این جا شرایط اولیه عبارتند از:

$$y(0) = 1 \qquad (۶-۵۸۰)$$

$$y'(0) = 0 \qquad (۶-۵۸۱)$$

اگر تبدیل لاپلاس معادلهٔ (۶ ــ ۵۷۹) را به‌دست آوریم به کمک معادلات (۶ ــ ۵۶۲)، (۶ ــ ۵۸۰) و (۶ ــ ۵۸۱) نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \left(x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy\right)e^{-sx} = -\left[(s^2+1)\frac{d\bar{y}}{ds} + s\bar{y}(s)\right] = 0 \qquad (۶-۵۸۲)$$

که درآن

$$\bar{y}(s) = \int_0^\infty y(x)e^{-sx}\,dx \qquad (۶-۵۸۳)$$

جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{d\bar{y}}{ds} + \frac{s}{s^2+1}\bar{y}(s) = 0 \qquad (۶-۵۸۴)$$

عبارت است از:

$$\bar{y}(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \tag{۶−۵۸۵}$$

که در آن c ثابت اختیاری است. با استفاده از قضیهٔ وارون (۵ − ۴۷۳) درمورد معادلهٔ (۶ − ۵۸۵) جواب به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$y(x) = \frac{c}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{e^{sx}}{\sqrt{s^2+1}}\, ds \tag{۶−۵۸۶}$$

که در آن σ_0 عدد مثبت کوچک اختیاری است.

از جدول تبدیلات لاپلاس دیده می‌شود که

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{e^{sx}}{\sqrt{s^2+1}}\, ds \tag{۶−۵۸۷}$$

و درنتیجه

$$y(x) = cJ_0(x) \tag{۶−۵۸۸}$$

چون $J_0(0) = 1$ ، ازشرایط اولیهٔ (۶ − ۵۸۰) معلوم می‌شودکه $c = 1$ و جواب معادلات (۶ − ۵۷۹) تا (۶ − ۵۸۱) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$y(x) = J_0(x) \tag{۶−۵۸۹}$$

۶ ــ ۲۶. مسائل و کاربردها

جوابهای عمومی معادلات زیر را به‌دست آورید.

۱ ــ $y'' - 2y' + y = 0$

۲ ــ $y'' + \omega^2 y = 0$

۳ ــ $y'' - k^2 y = 0$

۴ ــ $y'' - 4y' + 5y = 0$

۵ ــ $y'' - 5y' + 6y = 0$

۶ ــ $y'' = 0$

۷ ــ $y'' + 2y' = 0$

۸ ــ $yy' = 0$

۹ ــ $y'' - 4y' + 4y = 0$

۱۰ ــ $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0$

۱۱ ــ $y''' + y'' - 7y' - 15y = 0$

$y'''' + 2y'' + y = 0$ — ۱۲

$y'' + 3y' + 2y = 2e^{x}$ — ۱۳

$y'' + 2y' + y = e^{-x}$ — ۱۴

$y'' + 3y' + 2y = 1 + 2x$ — ۱۵

$y'' - 2y' + y = xe^{x}$ — ۱۶

$y'' - k^2 y = e^{ax}$ — ۱۷

$y'' + \omega^2 y = A \cos \omega_0 x$ — ۱۸

$3y'' + 2y' - 8y = 5 \cos x$ — ۱۹

$y'' - 4y = 16x^2 e^{2x^2}$ — ۲۰

هریک از معادلات زیر را باتوجه به شرایط داده شده حل کنید

$y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ — ۲۱

$y'' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ — ۲۲

$y'' = -g,\ y'(0) = v_0,\ y(0) = y_0$ — ۲۳

$y'' + y = x^3 + x,\ y(0) = a,\ y'(0) = b$ — ۲۴

$y'' + 5y' + 4y = e^{x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ — ۲۵

جواب عمومی دستگاه معادلات زیر را به‌دست آورید

— ۲۶

$$\frac{dy}{dt} = 2y + 3x$$
$$\frac{dx}{dt} = 2y + x$$

راهنمایی: فرض کنید $y = Ae^{\lambda t}$ و $x = Be^{\lambda t}$ جوابهای تجربی‌آن باشند . به‌این‌ترتیب مسأله به یک مسألهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریسی تبدیل‌می‌شود . پس ازحل این مسأله می‌توان مقادیر ویژهٔ λ و سپس بردارهای ویژه را که متناظرند با مقادیر مختلف λ پیدا کرد . بالاخره معلوم می‌شود که جوابها به صورت زیرند

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} \qquad x = -c_1 e^{-t} + \tfrac{2}{3} c_2 e^{4t}$$

— ۲۷

$$\frac{dy}{dt} = y + x$$
$$\frac{dx}{dt} = 4y + x$$

— ۲۸

$$m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = -k_2(y - x)$$
$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = k_2(y - x) - k_1 x$$

۲۹ــ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y$$

۳۰ــ

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 2y = t$$

$$\frac{dy}{dt} - 3x + y = e^t$$

راهنمایی: ابتداجواب عمومی صورت همگن دومعادله راپیدا می‌کنیم. سپس انتگرالهای خصوصی را محاسبه کرده، عملگر $\frac{1}{3}(d/dt + 2)$ را بر معادلهٔ دوم اثر می‌دهیم و نتیجه را به معادلهٔ اول‌اضافه می‌کنیم. به‌این‌ترتیب معادله‌ای از y تنهابه‌دست‌می‌آیدکه انتگرال خصوصی آن را می‌توان به‌دست آورد. نتیجهٔ حاصل را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم تامعادله‌ای از x حاصل شود.

۳۱ــ ذره‌ای به جرم m را درنظر بگیرید که بریک خط راست تحت نیروی کشش مناسب با عکس فاصلهٔ ذره ازمرکز کشش حرکت می‌کند. دراین میدان نیرو، معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-k}{y}$$

اگر سرعت ذره در $y = y_0$ برابر صفر باشد، ثابت کنید زمان لازم، برای رفتن از y_0 به مرکز کشش در $y = 0$ برابر است با

$$T = y_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = y_0\sqrt{\frac{m\pi}{2k}} \qquad \text{sec}$$

۳۲ــ ثابت کنید که

$$\int_0^\infty x^a e^{-bx^c}\,dx = \frac{\Gamma\left(\dfrac{a+1}{c}\right)}{cb^{(a+1)/c}}$$

که در آن b و c ثابتهایی مثبت هستند و $a > -1$

راهنمایی: فرض کنید $bx^c = y$

۳۳ــ معادلهٔ حرکت یک پاندول ساده به جرم m و طول L عبارت است از:

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

نشان دهید که زمان لازم برای حرکت از $0 = \theta$ تا $\theta_0 = \theta$ عبارت است از:

$$T = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

درضمن از تغییر متغیر

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\Phi = k\sin\Phi$$

و اتحاد

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

برای خلاصه کردن فرمول T به صورت زیر استفاده کنید

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Phi}}$$

تابع

$$F(k,\Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Phi}} \qquad k^2 < 1$$

" انتگرال بیضوی نوع اول" نامیده شده است. برطبق آن دوره تناوب دقیق پاندول عبارت است از $P = 4T$ یا

$$P = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\, F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

۳۴ ــ تابع $F(k,\Phi)$ را به سری توان بسط دهید، و از این بسط سری استفاده کرده ثابت کنید

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right\}$$

۳۵ ــ ثابت کنید که تابع بتا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$B(x,y) = \int_0^{\pi/2} 2\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

۳۶ ــ با استفاده از نتایج مسائل ۳۲ و ۳۵ ثابت کنید زمان لازم برای آن‌که پاندول ۹۰ درجه نوسان کند عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2g}}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

۳۷ ــ ثابت کنید توابع بسل در روابط برگشتی زیر صدق می‌کنند

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$
$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$
$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$$
$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x)$$
$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

۳۸ ــ ثابت کنید که رونسکین $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ عبارت است از:

$$W\{J_\nu, J_{-\nu}; x\} = \frac{-2 \sin \nu\pi}{\pi x}$$

۳۹ ــ ثابت کنید که

$$e^{(x/2)(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u^n J_n(x)$$

۴۰ ــ با استفاده از مسألهٔ ۳۹ ثابت کنید که

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(x)$$

۴۱ ــ با استفاده از مسألهٔ ۳۹ ثابت کنید که

$$e^{ix \sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta}$$

و از آن فرمول زیر را نتیجه بگیرید

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

۴۲ ــ ثابت کنید که توابع بسل هذلولی در روابط برگشتی زیر صدق می‌کنند

$$K'_0(x) = -K_1(x)$$
$$I'_0(x) = I_1(x)$$
$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x)$$
$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = \frac{-2\nu}{x} K_\nu(x)$$
$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x)$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x)$$

۴۳ ــ نشان دهید وقتی $r \to \infty$ ،

$$H_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \to \text{ثابت}\ \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{\sqrt{kr}}$$

و

$$H_0^{(2)}(kr)e^{-i\omega t} \to \text{ثابت}\ \frac{e^{-i(kr+\omega t)}}{\sqrt{kr}}$$

۴۴ ــ ثابت کنید جواب عمومی

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left\{(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - n^2c^2}{x^2}\right\}y = 0$$

به صورت زیر است

$$y = x^a\{AJ_n(bx^c) + BN_n(bx^c)\}$$

که در آن A و B ثابتهایی دلخواهند . با استفاده از این نتیجه نشان دهید که جواب عمومی

$$y'' + xy = 0$$

عبارت است از :

$$y = x^{1/2}\left\{AJ_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) + BN_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)\right.$$

و جواب عمومی

$$y'' + \frac{(2n+1)y'}{x} + y = 0$$

برابر است با

$$y = x^{-n}\{AJ_n(x) + BN_n(x)\}$$

۴۵ ــ روابط برگشتی زیر را برای چندجمله‌ایهای لژاندر به‌دست آورید :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$
$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$
$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

۴۶ ــ ثابت کنید که

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \le n-1 \\ 2^{n+1}(n!)^2/(n+1), & m = n \end{cases}$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\, dx = \frac{m!\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}{2^n(m-n)!\Gamma\left(\frac{m+n+3}{2}\right)}$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبت یا صفرند به قسمی که $m \geq n$ و

$m - n = 2k \quad , \quad k = 0,1,2,\ \ldots$

همچنین نشان دهید که

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\, dx = 0$$

اگر $m - n = 2k + 1$ ، $k = 0,1,2,\ \ldots$ یا وقتی $m < n$.

راهنمایی: از فرمول رودریگز و انتگرال جزء به جزء استفاده کنید . سپس تعریف تابع بتا را به‌کار برید .

۴۷ ــ ثابت کنید که

$$\int_{-1}^{+1} e^{ikx} P_n(x)\, dx = i^n \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(k)$$

راهنمایی: تابع e^{ikx} رابه سری توان بسط دهید وجمله به‌جمله انتگرال‌بگیرید وازنتیجهٔ مسألهٔ ۴۶ برای‌محاسبهٔ انتگرالها استفاده‌کنید . سپس برای‌تشخیص بسط سری‌توان $J_{n+1/2}(k)$ فرمول زیر را به‌کار برید :

$$\Gamma(n + 1/2)/(2n)! = \sqrt{\pi}/(2^{2n} n!)$$

۴۸ ــ فرمول زیر را به‌دست آورید

$$e^{ikz} \equiv e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)P_n(\cos\theta)j_n(kr)$$

که در آن $j_n(kr)$ یک تابع بسل کروی نوع اول است .

راهنمایی: تابع $e^{ikr\cos\theta}$ را به سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(r)P_n(\cos\theta)$$

بسط دهید ، و آن را نسبت به $C_n(r)$ حل کنید ، از روابط متعامد $P_n(\cos\theta)$ استفاده کنید .

۴۹ ــ ثابت کنید که

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_k^m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nk}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n{}^m(x) P_n{}^k(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mk}$$

راهنمایی: از انتگرال جزء به جزء استفاده کنید، ومعادلات (۶ـ۲۸۹) و (۶ـ۲۹۶) را به‌کار برید.

۵۰ـ دونقطه برسطح یک کره واحد رادرنظربگیرید. فرض کنیدنقطهٔاول‌دارای مختصات

$$(x,y,z) = (\sin\ \theta\ \cos\ \phi,\ \sin\ \theta\ \sin\ \phi,\ \cos\ \theta)$$

و نقطهٔ دوم دارای مختصات

$$(x',y',z') = (\sin\ \theta'\ \cos\ \phi',\ \sin\ \theta'\ \sin\ \phi',\ \cos\ \theta')$$

باشد. زاویهٔ بین بردارهای موضع دو نقطه از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\cos\gamma = xx' + yy' + zz' = \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') + \cos\theta\cos\theta'$$

رابطهٔ زیر را برای چندجمله‌ایهای لژاندر ثابت کنید:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta) P_n{}^m(\cos\theta') \cos m(\phi - \phi')$$

راهنمایی: بسط $P_n(\cos\gamma)$ را به صورت زیر فرض کنید

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{a_0}{2} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) P_n{}^m(\cos\theta)$$

سپس ضرایب مجهول را به‌وسیلهٔ روابط متعامد (مسألهٔ ۴۹) معین کنید.

۵۱ـ ثابت کنید توابع بسل کروی در رابطهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_n(x) j_m(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}$$

به شرط آن‌که n و m اعداد صحیح نامنفی باشند، صدق می‌کنند.

۵۲ـ ثابت کنید که توابع بسل کروی در فرمولهای دوری

$$\frac{2n+1}{x} j_n(x) = j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x)$$

$$j_n'(x) = \frac{1}{2n+1} \{n j_{n-1}(x) - (n+1) j_{n+1}(x)\}$$

و رونسکین آنها در رابطهٔ

$$W\{j_n,n_n\} = \frac{1}{i} W\{j_n,h_n{}^{(1)}\} = -W\{n_n,h_n{}^{(1)}\} = \frac{1}{x^2}$$

صدق می‌کنند.

۵۳ـ بار مثبت q را در نقطهٔ $x = 0$، $y = 0$ و $z = 1$ درنظر بگیرید. نشان دهید که پتانسیل الکتریکی Φ در نقطهٔ (x,y,z) با رابطهٔ زیر داده می‌شود،

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

که در آن

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

و

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r}$$

۵۴ـ نشان دهید که

$$Q_n(x) = P_n(x)\int\frac{dx}{(1 - x^2)[P_n(x)]^2}$$

یک جواب دیگر معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر است.

۵۵ـ تابع اسکالر دلخواه $F(R)$ را درنظر بگیرید که فقط به فاصلهٔ

$$R = [(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2]^{1/2} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

بین دو نقطهٔ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ بستگی دارد. بسط سری تیلر را برای $F(R)$ حول نقطهٔ $\mathbf{r} = (x_1,x_2,x_3)$ به‌دست آورید.

$$F(R) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\mathbf{r}'\cdot\nabla)^n F(r)\Big|_{r=(x_1,x_2,x_3)}$$

که در آن

$$(\mathbf{r}'\cdot\nabla)^n = \left(x_1'\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2'\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3'\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n$$

۵۶ـ فرض کنید که بار الکتریکی درمیان حجم معینی از فضا مثل V' باچگالی $\rho(\mathbf{r}')$ کولن بر مترمکعب توزیع شده باشد. در نظریه الکترومغناطیس نشان داده شده است که پتانسیل الکتریکی تولیدشده توسط $\rho(\mathbf{r}')$ عبارت است از،

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,dV'$$

که در آن $dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$ و

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2]^{1/2}$$

ثابت کنید که

$$\frac{(r')^n P_n(\cos\gamma)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\left(x_1'\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2'\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3'\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n \frac{1}{r}$$

که در آن

$$r = (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)^{1/2}, \quad r' = [(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2]^{1/2}$$

و

$$\cos\gamma = (x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')/rr'$$

بنابراین، نشان دهید،

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(\mathbf{r})$$

که در آن

$$\Phi^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{V'} P_n(\cos\gamma)(r')^n\rho(\mathbf{r}')\,dV'$$

فرض کنید V' حجم استوانه‌ای به شعاع r_0 و به طول L باشد. نشان دهید که پتانسیل $\Phi^{(n)}(\mathbf{r})$ در هر نقطهٔ $\mathbf{r}$ که از استوانه خیلی فاصله دارد تقریبا" برابر است با

$$\Phi^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} M^{(n)} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

که در آن θ زاویهٔ بین امتداد r و محور استوانه است، و

$$M^{(n)} = \int_{V'} (r')^n \rho(\mathbf{r}')\,dV'$$

آیا این نتایج را می‌توانید ازنظر فیزیکی تعبیر کنید؟

۵۷ــ نشان دهید که

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(\mathbf{r})$$

که در آن

$$\Phi^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\cdots\sum_{i_n=1}^{3} M_{i_1i_2\cdots i_n}\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$M_{i_1i_2\cdots i_n} = \int_{V'}\rho(\mathbf{r}')x_{i_1}'x_{i_2}'x_{i_3}'\cdots x_{i_n}'\,dV' \qquad n \geq 1$$

و به ازای $n = 0$

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

که در آن

$$Q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\, dV$$

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید ،

$$(y_1 + y_2 + y_3)^n = \sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3} \cdots \sum_{i_n=1}^{3} y_{i_1}y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

سپس فرض کنید

$$y_1 = x_1'\frac{\partial}{\partial x_1} \qquad y_2 = x_2'\frac{\partial}{\partial x_2}$$

و غیره . آیا می‌توانید این نتایج را ازنظر فیزیکی تعبیر کنید ؟

۵۸ ــ ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\, dx = \sqrt{\pi}\,[2^{n-1}(n!)\delta_{m,n-1} + 2^n(n+1)!\delta_{m,n+1}]$$

راهنمایی: از تابع مولد چندجمله‌ایهای هرمیت استفاده کنید .

۵۹ ــ نشان دهید اگر تابع گرین $g(x|x')$ ، در معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg}{dx}\right] + q(x)g(x) = -\delta(x - x')$$

با شرایط مرزی $g_2(a|x') = 0$ و $g_1(b|x') = 0$ صدق کند برابر است با

$$g(x|x') = -\frac{g_1(x_>)g_2(x_<)}{p(x')W\{g_1,g_2;x'\}}$$

به شرط‌آن که g_1 و g_2 جوابهای مستقل خطی معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)g(x) = 0$$

باشند که در $g_1(b) = 0$ و $g_2(a) = 0$ صدق می‌کنند .

۶۰ ــ جوابهای تابع گرین زیر را به‌دست آورید .

$$\frac{d^2g}{dx^2} = -\delta(x - x')$$

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = 0$$

جواب:

$$g(x|x') = (1 - x_>)x_<$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} + k^2g = -\delta(x - x')$$

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = 0$$

جواب:

$$g(x|x') = \frac{\sin k(1 - x_>)\sin kx_<}{k \sin k}$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} - k^2g = -\delta(x - x')$$

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = 0$$

جواب:

$$g(x|x') = \frac{\sinh k(1 - x_>)\sinh kx_<}{k \sinh k}$$

۶۱ـ نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت را می‌توان به صورت اشتورم ـ لیوویل نوشت، و از آن خواص متعامد بودن چندجمله‌ایهای هرمیت را نتیجه بگیرید.

۶۲ـ فرض کنید که تابع $f(x)$ که بر بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ تعریف شده به‌صورت سری فوریه ـ لژاندر بسط داده شده باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

یک فرمول برای ضرایب بسط a_k، به‌دست آورید. درمورد همگرایی این سری چه می‌توان گفت؟

۶۳ـ فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده و به صورت سری فوریه ـ بسل بسط داده شده باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu(k_n x)$$

که درآن k_n، $n = 0,1,2,\ldots$ ریشه‌های $J_\nu(k_n a) = 0$ رانشان‌می‌دهد. فرمولی برای ضرایب بسط، a_k، به‌دست آورید. درمورد همگرایی این سری بحث کنید.

۶۴ـ با استفاده از تبدیل فوریه معادلهٔ بسل زیر را حل کنید

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

۶۵ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که جواب

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

عبارت است از:

$$y = AxI_1(x) + BxK_1(x)$$

راهنمایی: از جدول تبدیلات لاپلاس برای تبدیل وارون استفاده کنید.

۶۶ـ معادلهٔ

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + 2x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$y = e^{-x}\{AI_0(x) + BK_0(x)\}$$

معادلهٔ با مشتقات جزئی

۷ ــ ۱ . مقدمه

در بسیاری از مسائل فیزیکی موضوع اصلی مورد بررسی یک میدان برداری یا اسکالراست و مطلوب مسائل این است که بتوانیم رفتار این میدان را در تمام فضا و برای تمام زمانها پیش بینی کنیم درصورتی که تنها رفتار موضعی آن درابتدا معلوم است .

یک روش تضمین این رفتار موضعی پیدا کردن رابطه‌ای است که باید در هر نقطهٔ فضا و زمان برقرار باشد و در هر نقطه میزان تغییرات میدان را درجهات مختلف به‌هم مرتبط سازد .

این نوع رابطه را "معادلهٔ با مشتقات جزئی" نامند و مسألهٔ پیش بینی رفتارمیدان در تمام فضا و زمان از انتگرال این معادلهٔ با مشتقات جزئی به‌دست می‌آید .

در این فصل نظریهٔ کلی معادلات با مشتقات جزئی موردبحث قرار نمی‌گیرد . درعوض توجه خود رابه بعضی‌معادلات‌با‌مشتقات جزئی‌که درفیزیک‌لازم می‌شوند و روشهای انتگرال‌گیری آنها محدود می‌کنیم .

۷ ــ ۲ . نقش عملگر لاپلاس (لاپلاسین)

عملگر لاپلاس ∇^2 ، وقتی در یک معادله با مشتقات جزئی ظاهرمی‌شودکه بخواهیم‌تفاضل بین مقدار موضعی تابع در یک نقطه را با مقدار متوسط تابع در یک همسایگی آن نقطه به‌دست آوریم .

برای روشن شدن مطلب مکعبی را درنظر بگیرید که طول هر ضلع آن a و مرکزش در مبدأ مختصات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ باشد . یک میدان اسکالر که در تمام فضا تعریف شده ممکن است مقادیر مختلفی در داخل مکعب اختیار کند ، وبخصوص مقدار $\phi_0 = \phi(0,0,0)$ را درمرکز مکعب اختیار می‌کند . مقدار متوسط $\bar{\phi}$ ، در داخل این مکعب از قضیهٔ مقدار میانگین به دست می‌آید :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (۱-۷)$$

اگرتابع $\phi(x,y,z)$ راحول نقطهٔ $x=0$ ، $y=0$ و $z=0$ به سری تیلوربسط دهیم ، داریم

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 z\\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 z^2\right]\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z}\right)_0 yz + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x}\right)_0 zx + \cdots\end{aligned} \qquad (۲-۷)$$

اگرمعادلهٔ (۷ ـ ۲) رادرمعادلهٔ (۷ ـ ۱) قرار داده‌انتگرالها را از $-a/2$ تا $a/2$ محاسبه کنیم توابع فرد حذف شده و از جملات مربع نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{+a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \qquad (۳-۷)$$

بنابراین ،

$$\bar{\phi} = \phi_0 + \frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 + \text{جملات مرتبهٔ بالاتر} \qquad (۴-۷)$$

برای یک مکعب بی‌نهایت کوچک کمیت زیر تعریف خوبی خواهد بود :

$$\bar{\phi} - \phi_0 = \frac{a^2}{24}(\nabla^2\phi)_0 \qquad (۵-۷)$$

و بنابراین کمیت $\nabla^2\phi$ اندازه‌ای از تفاوت بین مقدار اسکالر ϕ در یک نقطه و مقدار متوسط ϕ در یک همسایگی بی‌نهایت کوچک آن نقطه است .

۷ ـ ۳ . معادلهٔ لاپلاس

وقتی یک میدان اسکالر $\phi(x,y,z)$ ، دارای این خاصیت است که مقدارش درهرنقطه برابر مقدارمتوسط آن دریک همسایگی آن نقطه است ، آن‌گاه طبق معادلهٔ (۷ ـ ۵) این میدان باید در معادلهٔ لاپلاس زیر صدق کند :

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (۶-۷)$$

پتانسیلهای اسکالر وابسته به میدانهای ثقل ، الکتروستاتیک ، و منیتواستاتیک مثالهایی از توابعی هستند که باید در معادلهٔ لاپلاس صدق کنند .

۷ ـ ۴ . معادلهٔ پواسن

طبق قانون گاوس ، کل بار الکتریکی داخل حجم V که به سطح $S(V)$محدود شده بافلوی

الکتریکی جابجا شده در این سطح $S(V)$ ، داده می‌شود ، به‌عبارت دیگر

$$\int_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \qquad (۷-۷)$$

دراین حالت فلوی $\mathbf{D}$ باید همان ابعاد بار الکتریکی را داشته باشد . با استفاده از قضیهٔ دیورژانس سه بعدی ، می‌توان نوشت :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \int_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \qquad (۸-۷)$$

که درآن دیورژانس $\mathbf{D}$ فلوی واحد حجم V رانشان می‌دهد . سپس $\nabla \cdot \mathbf{D}$ ابعادبار در واحد حجم است و بنابراین چگالی بار را در V نشان می‌دهد . وآن را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \int_V \rho\, dV = q \qquad (۹-۷)$$

که اگر برای تمام حجمهای اختیاری جزء V برقرار باشد ، تساوی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (۱۰-۷)$$

در تمام حجم V برقرار خواهد بود .

اگرمیدان جابجایی الکتریکی رابه صورت گرادیان یک تابع اسکالر ϕ نشان دهیم ، داریم

$$\mathbf{D} = -\epsilon_0 \nabla \phi \qquad (۱۱-۷)$$

و درنتیجه تابع اسکالر ϕ باید در معادلهٔ پواسن

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (۱۲-۷)$$

در تمام حجم V صدق کند .

مثلا" ، وجود یک شبکهٔ بار مثبت الکتریکی در داخل حجم V مجبور می‌کند که پتانسیل در هر نقطهٔ داخل V بزرگتر از مقدار متوسط آن بر یک همسایگی کوچک آن نقطه باشد . درهر نقطه که درآن چگالی بار صفر می‌شود ، معادلهٔ پواسن به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود .

۷ــ۵ . معادلهٔ انتشار

میدانهای اسکالری که در معادلهٔ لاپلاس یا پواسن صدق می‌کنند ، درحالت کلی مستقل از زمان نیستند . ولی تعدادی از فرآیندهای فیزیکی وجود دارند که درآنها مقدار یک تابع اسکالر ϕ در هر نقطه ممکن است با مقدار متوسط آن در یک همسایگی در زمانی متفاوت باشد ، ولی نه در تمام زمانها . در وضعیتهای پایداربه مرور زمان این تقارب به سمت صفرمیل‌می‌کند . به‌عبارت دیگر ، برای رفتار پایدار مقدار موضعی ϕ بانرخی‌متناسب باتفاضل بین مقادیرمتوسط

و موضعی نزدیک می‌شود . ازنظر کمی این ارتباط به وسیلهٔ معادلهٔ انتشار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \phi \qquad (۱۳-۷)$$

بیان می‌شود ، که درآن پارامتر α را ضریب *انتشار* نامند . پس هرچه ضریب انتشاربزرگترباشد ، تفاوت بین مقادیر متوسط و موضعی ϕ سریعتر ازبین خواهد رفت .

هدایت حرارتی در یک جسم جامد یک مثال کلاسیک ازاین کشش به سمت یکسانی است . چون حرارت از درجات بالاتر به درجات پایین‌تر یک جسم جامد جریان پیدا می‌کند ، چگالی حرارت جاری یک میدان حرارتی T به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \qquad (۱۴-۷)$$

که درآن k ضریب "هدایت گرما" درجسم نامیده می‌شود و برحسب کالری درسانتیمتر ، ثانیه ، درجهٔ سانتیگراد اندازه‌گیری می‌شود . اگر H گرمای واحد حجم جسمی را نشان دهد ، آن‌گاه

$$dH = \rho c\, dT \qquad (۱۵-۷)$$

که در آن ρ چگالی برحسب گرم بر سانتیمترمکعب و c گرمای ویژهٔ جسم برحسب کالری بر گرم بردرجهٔ سانتیگراد اندازه‌گیری می‌شود . ازاین معادله نتیجه می‌شودکه تغییر dT دراثرافزایش مقدار گرمای $dH/\rho c$ در جسم به وجود می‌آید ؛ پس

$$\frac{dH}{dt} = \rho c \frac{dT}{dt} \qquad (۱۶-۷)$$

اگر جسم ثابت و محکم بماند ، در آن صورت $\mathbf{v} = 0$ و معادلهٔ (۷ ــ ۱۶) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱۷-۷)$$

تنزل درجهٔ حرارت در ناحیهٔ V در واحد زمان به صورت زیر داده می‌شود

$$-\int_V \frac{\partial H}{\partial t}\, dV \qquad (۱۸-۷)$$

و اگر گرما محفوظ بماند ؛ آن‌گاه

$$-\int_V \frac{\partial H}{\partial t}\, dV = \int_{S(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{q} \qquad (۱۹-۷)$$

که بیان می‌کند نرخ کاهش گرما درناحیهٔ V برابراست بافلوی گرمایی که از مرز V خارج می‌شود . اگرمعادلات (۷ ــ ۱۴) و (۷ ــ ۱۷) رادر (۷ ــ ۱۹) قرار دهیم و از قضیهٔ دیورژانس سه بعدی استفاده کنیم ، نتیجه می‌شود

$$-\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = -\int_{S(V)} d\mathbf{S}\cdot(k\,\nabla T) = -\int_V \nabla\cdot(k\,\nabla T)\, dV \qquad (۲۰-۷)$$

یا

$$\int_V \left[\rho c \frac{\partial T}{dt} - \nabla\cdot(k\,\nabla T)\right] dV = 0 \qquad (۲۱-۷)$$

و اگر معادلهٔ (۷ ــ ۲۱) برای تمام حجمهای جزء V برقرار باشد، آن‌گاه در هر نقطهٔ V،

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(k\,\nabla T) \qquad (۲۲-۷)$$

که برای توزیع حرارت در یک جسم همواره برقرار است. وقتی ضریب هدایت حرارتی k ثابت باشد، معادلهٔ (۷ ــ ۲۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۲۳-۷)$$

که درآن ضریب انتشار α برابر است با

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \qquad (۲۴-۷)$$

پس، همان طور که انتظار می‌رود، هرچه ضریب هدایت حرارتی یک جسم بزرگتر باشد، اختلاف درجهٔ حرارت سریعتر ازبین خواهد رفت.

۷ ــ ۶. معادلهٔ موج

دریک وسیلهٔ قابل ارتجاع‌درحال سکون، هرنقطه رامی‌توان درحال تعادل درنظرگرفت. وقتی ذرات تشکیل دهندهٔ وسیله، تحت مجموعه‌ای از اثرات متقابل قرار می‌گیرد یک حرکت موجی به وجود می‌آید. فرض کنید ذرهٔ مفروض از وضع تعادل پایدار خارج شده باشد. بنابه خاصیت اتصال جسم قابل ارتجاع، نزدیکترین همسایگیها نیزازحال تعادل خارج خواهندشد. و این نقاط به نوبهٔ خود نزدیکترین همسایگیهای خود را به حرکت درمی‌آورند و الی آخر، به این ترتیب حرکت اولیه در تمام وسیله منتشر می‌شود. جنبهٔ قابل درک این پدیده این است که علی‌رغم نامحدود بودن فاصله‌ای که انرژی می‌تواند منتشر شود، هیچ ذره‌ای از جسم تحت تأثیر بیش از یک انحراف کوچک حول نقطهٔ تعادل خود قرار نمی‌گیرد!

به‌عنوان مثال، پوستهٔ قابل ارتجاعی را که کشیده شده باشد مانند پوست طبل، درنظر بگیرید، اگر به نقطه‌ای از طبل مثلاً $x=0$ و $y=0$ تغییرمکانی برابر $\phi_0=\phi(0,0,t)$ بالا یا زیر

صفحهٔ تعادل‌داده شود ، دراین‌صورت به‌علت اتصال ارتجاعی ، نقاط نزدیک $x = 0$ ، $y = 0$ نیز ازحالت تعادل خارج می‌شوند هرچند اندازهٔ آن برابر ϕ_0 نیست . فرض کنید تغییرمکان متوسط در یک همسایگی بی‌نهایت کوچک $x = 0$ و $y = 0$ برابر $\bar{\phi}$ باشد . در این صورت $\bar{\phi}$ و ϕ_0 برابرنیستند وپوستهٔ قابل ارتجاع به قسمی عمل می‌کندکه تفاوت بین $\bar{\phi}$ و ϕ_0 کاهش پیدا کند . درنتیجه ،جرم در $x = 0$ و $y = 0$ باشتاب به‌سمت‌صفحه برمی‌گردد که در آن $\bar{\phi}=\phi_0$. این شتاب همواره وجود داشته و باصفرشدن تفاوت‌بین $\bar{\phi}$ و ϕ_0 به‌سمت صفرمیل می‌کند . وقتی‌جرم $x = 0$ و $y = 0$ از صفحه عبور می‌کند که در آن ϕ_0 و $\bar{\phi}$ برابرند ، شتابش صفر می‌شود . ولی ، سرعت‌آن در این نقطه ماکزیمم خواهد بود ، و بنابراین انرژی جنبشی باعث می‌شود که از صفحه خارج شود . درنتیجه ، مجدداً ϕ_0 از $\bar{\phi}$ فاصله می‌گیرد . ظاهراً ϕ_0 حول مقدار $\bar{\phi}$ با فرکانس ویژهٔ ω نوسان می‌کند . شتاب جرم را در $x = 0$ و $y = 0$ می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial t^2} + \phi_0 = \bar{\phi} \qquad (۷-۲۵)$$

که با استفاده از معادلهٔ (۷ ــ ۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial t^2} = \omega^2(\bar{\phi} - \phi_0) = \frac{\omega^2 a^2}{24}(\nabla^2\phi)_0 \qquad (۷-۲۶)$$

چون $c^2 = \frac{\omega^2 a^2}{24}$ ، بامجذور سرعت هم‌بعد است، عبارت‌شتاب قطعه‌ای از پوستهٔ قابل ارتجاع را در نقطهٔ $x = 0$ و $y = 0$ می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد :

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_0 = c^2(\nabla^2\phi)_0 \qquad (۷-۲۷)$$

ولی نقطهٔ $x = 0$ و $y = 0$ اختیاری است ، بنابراین شتاب جرم در هر نقطهٔ (x,y) باید در معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\,\nabla^2\phi \qquad (۷-۲۸)$$

صدق کند .

یک تحلیل دقیقتر از ارتعاشات پوستهٔ قابل ارتجاع نشان می‌دهد که

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (۷-۲۹)$$

که درآن T کشش یانیروی واردبر واحدطول درپوستهٔ قابل ارتجاع ، و ρ چگالی‌سطحی برحسب گرم بر مجذور سانتیمتر است . همان‌طورکه انتظارداریم دیده می‌شود هرچه کشش پوسته بیشتر باشد ، نوسان ذرات حول وضعیت تعادل سریعتر خواهد بود .

۷ ـ ۷. چند تبصره کلی

چهار معادلهٔ با مشتقات جزئی به‌دست آمده در فیزیک نظری اهمیت به سزایی دارند، و به این دلیل دربارهٔ حل آنها به تفصیل بحث خواهیم کرد. روی نکته‌ای که باید تأکید کرد این است که درمورد چهار معادله روش کلی حل یکسان است.

چه عملی را درواقع می‌خواهیم انجام دهیم؟ برای معادلات لاپلاس و پواسن دنبال جوابهای مستقل از زمان در فضای دوبعدی یا سه بعدی هستیم. برای موج وابسته به زمان و معادلات انتشار جوابهایی را جستجو می‌کنیم که به مختص زمان و یک یا دو یا سه مختص فضا بستگی داشته باشد. علاوه براین، می‌خواهیم جوابی را بسازیم که در بعضی شرایط خاص نیز صدق کند. مثلاً" در مسألهٔ پوستهٔ درحال ارتعاش ممکن است بخواهیم تابعی پیدا کنیم‌که نه تنها درمعادلهٔ دوبعدی موج صدق کندبلکه بامشتقش نسبت به زمان، تغییرمکان اولیه وسرعت هر نقطه سطح مرتعش را در $t = 0$ نیز نشان دهد. حتی تا این حد نیزممکن است‌کافی نباشد. اگر پوستهٔ طبل محدود و محکم به لبهٔ طبل متصل شده باشد، آن‌گاه می‌توان انتظارداشت که تابع تغییرمکان در معادلهٔ موج و شرایط اولیه صدق کند و در لبهٔ طبل درهر لحظه صفرشود. این نوع مسأله را "مسألهٔ مرکب مقداراولیه ومرزی" برای معادلهٔ موج دوبعدی نامند. همین‌طور، اگر دو انتهای یک میلهٔ محدود در دو درجهٔ حرارت نگه داشته شده و توزیع درجهٔ حرارت اولیهٔ میله در $t = 0$ معین باشد، می‌توانیم مسألهٔ مرکب مقدار اولیهٔ مرزی را برای معادلهٔ انتشار یک بعدی به‌دست آوریم.

جواب یک معادله با مشتقات جزیی باشرایط اولیه و مرزی یک مسألهٔ کامل است درمقابل یک جواب غیرکامل مسأله فقط جوابهای دلخواه معادلهٔ مفروض است. هرپدیدهٔ فیزیکی پایدار به مسائل کامل معادلات با مشتقات جزئی متناظرمنجرمی‌شود. دانشجویان بایداز ابتداعادت کنند نه تنها به فکر حل معادله با مشتقات جزئی باشند بلکه باید بتوانند جواب کامل آن رابا تمام شرایط موجود نیز به‌دست آورند.

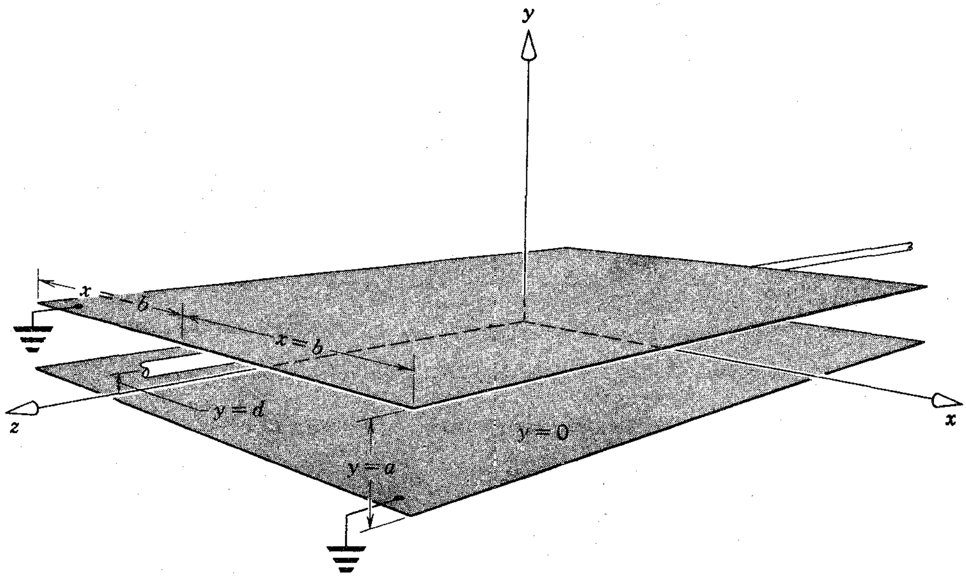
برای معادلات بامشتقات جزئی، انتقال و انتشار موج، فرآیند حل کامل مسأله راهمواره می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد. مرحلهٔ اول ارائهٔ جواب کامل برحسب انتگرالهایی است‌که شامل داده‌های مفروض با یک تابع گرین است. تابع گرین یک جواب خاص معادلهٔ با مشتقات نسبی است که‌پاسخ یک تابع دلتا را نشان می‌دهد. قدم اول عموماً" به کمک یک اتحاد مناسب گرین کامل می‌شود. مرحلهٔ دوم شامل ساختار واقعی تابع گرین است، و در این جاست که اشکالات عملی واقعی پیش می‌آیند.

۷ ـ ۸. حل مسائل پتانسیل دوبعدی

به‌عنوان مثال اول ، مسألهٔ محاسبهٔ پتانسیل الکتریکی مربوط به یک خط باردار به چگالی خطی q coul/m واقع بین دوصفحهٔ فلزی موازی را درنظر می‌گیریم (شکل ۷ ـ ۱) . خط باردار از $z=-\infty$ تا $z=\infty$ به‌موازات محور z ها ادامه دارد و از نقطهٔ x, y، صفحه در $x=0$ و $y=d$ می‌گذرد . صفحهٔ پایینی در $y=0$ و صفحهٔ بالایی در $y=a$ قرار دارد . این مثال به یک مسألهٔ کامل برای معادلهٔ پواسن منجر می‌شود که در آن چگالی خط باردار برابر است با

$$\rho(x,y) = q\delta(x)\delta(y-d) \ \text{coul/m}^3$$

که در آن δ تابع دلتای دیراک است .



شکل ۷ ـ ۱ . بار خطی واقع بین دو صفحهٔ موازی متصل به زمین .

حال باید معادلهٔ پواسن

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0} \qquad (۷-۳۰)$$

را با شرایط مرزی زیر حل کنیم

$$\phi(x,0) = 0 \qquad -\infty \le x \le +\infty \qquad (۷-۳۱)$$

$$\phi(x,a) = 0 \qquad -\infty \le x \le +\infty \qquad (۷-۳۲)$$

و بیان می‌کند که دو صفحهٔ موازی به زمین متصل شده‌اند ، بنابراین دارای پتانسیل صفرند . مسأله به کمک مراحل ۱ و ۲ بخش (۷ ــ ۷) حل خواهدشد . مرحلهٔ ۱ ایجاب می‌کندکه جواب معادلات (۷ ــ ۳۰) تا (۷ ــ ۳۲) را برحسب انتگرالهای شامل حاصل ضرب وابسته داده‌های (۷ ــ ۳۱) و (۷ ــ ۳۲) با تابع گرین که در زیر تعریف خواهد شد بیان کنیم . برای این کار باید اتحاد گرین را به صورتی مناسب بسط دهیم . چون یک مسألهٔ دوبعدی‌است ، از قضیهٔ دیورژانس دوبعدی استفاده می‌کنیم :

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A}\, dS = \int_{C(S)} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \qquad (۷-۳۳)$$

در معادلهٔ (۷ ــ ۳۳) فرض کنید $\mathbf{A}=G\,\nabla\phi$ ،و سپس $\mathbf{A}=\phi\,\nabla G$. اگرنتیجهٔ دوم را ازنتیجهٔ اول تفریق کنیم صورت مطلوب اتحاد متقارن گرین به‌دست می‌آید ،

$$\int_S \{G\,\nabla^2\phi - \phi\,\nabla^2 G\}\, dS = \int_{C(S)} \left\{G\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial G}{\partial n}\right\} ds \qquad (۷-۳۴)$$

در این‌جا $\partial\phi/\partial n$ میزان‌تغییر ϕ را درجهت‌قائم‌بر $C(S)$ به طرف خارج و ds عنصر طول قوس را بر $C(S)$ نشان می‌دهد . در مسألهٔ حاضر ، S داخل مستطیل است‌که به صورت زیرداده می‌شود

$$0 \le y \le a \qquad (۷-۳۵)$$

$$-b \le x \le +b \qquad (۷-۳۶)$$

و $C(S)$ محیط آن را مشخص می‌کند .و درحد اضلاع $x=\pm b$ مستطیل به سمت بی‌نهایت حرکت خواهد کرد .

تابع گرین برای معادلهٔ پواسن با جواب معادلهٔ زیر تعریف می‌شود ،

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y') \qquad (۷-۳۷)$$

و با استفاده از معادلات (۷ ــ ۳۷) ، (۷ ــ ۳۱) و (۷ ــ ۳۰) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_{-b}^b \phi(x,y)\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,dx\,dy &= \int_0^a\int_{-b}^b G(x,x';y,y')\,\frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}\,dx\,dy \\ &\quad + \int_{C(S)} \left\{G\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial G}{\partial n}\right\} ds\end{aligned} \qquad (۷-۳۸)$$

جملهٔ اول معادلهٔ (۷ ــ ۳۸) را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned}&\int_0^a \int_{-b}^b \phi(x,y)\,\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,dx\,dy \\ &= \phi(x',y')\int_0^a\int_{-b}^b \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,dx\,dy = \begin{cases}\phi(x',y') & (x',y') \in S\\ 0 & (x',y') \notin S\end{cases}\end{aligned} \qquad (۷-۳۹)$$

پس، اگر (x',y') نقطه‌ای از مستطیل S باشد معادلهٔ (۷ — ۳۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\phi(x',y') = \int_0^a \int_{-b}^{b} G(x,x';y,y') \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}\, dx\, dy + \int_{C(S)} \left\{ G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right\} ds \tag{۷ — ۴۰}$$

حال بایدانتگرال منحنی‌الخط موجود در (۷ — ۴۰) راتا آن جا که امکان‌پذیراست ساده کنیم، و درصورت امکان آنها رابه‌کلی حذف کنیم. شرایط مرزی (۷ — ۳۱) و (۷ — ۳۲) جملهٔ $\phi\, \partial G/\partial n$ رابرجز $y=0$ و $y=a$ مسیر $C(S)$ حذف می‌کنند. دربارهٔ رفتار $\phi(x,y)$ بر $x=\pm b$، $0 \leq y \leq a$ هیچ اطلاعی نداریم. ولی، چون خط باردار از $x = 0$ و $y=d$ می‌گذرد، معقول به‌نظر می‌رسدکه فرض کنیم، اگر هیچ منبعی در بی‌نهایت وجود نداشته باشد، هرچه b بزرگتر شود پتانسیل (b,y) کوچکتر خواهد شد. پس فرض می‌کنیم

$$\lim_{\substack{x\to \pm\infty \\ 0<y<a}} \phi(x,y) = 0 \tag{۷ — ۴۱}$$

ودرنتیجه، وجود انتگرال منحنی‌الخط دوم درمعادلهٔ (۷ — ۴۰) از انتگرال گرین $\phi\partial G/\partial n$ دردو انتهای مستطیل در $x = \pm b$ صفر می‌شود وقتی این دوانتها به بی‌نهایت میل می‌کنند. تحت این شرایط معادلهٔ (۷ — ۴۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(x',y') = \int_0^a \int_{-b}^{+b} G(x,x';y,y') \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}\, dx\, dy + \int_{C(S)} G \frac{\partial \phi}{\partial n}\, ds \tag{۷ — ۴۲}$$

و با فرض

$$G(x,0) = 0 \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{۷ — ۴۳}$$

$$G(x,a) = 0 \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{۷ — ۴۴}$$

$$\lim_{\substack{x\to \pm\infty \\ 0<y<a}} G(x,y) = 0 \tag{۷ — ۴۵}$$

همین‌طور، انتگرال منحنی‌الخط باقیمانده در دو انتهای مستطیل که به بی‌نهایت می‌روند صفر می‌شود و آنچه می‌ماند عبارت است از:

$$\phi(x',y') = \int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x';y,y') \frac{\rho(x,y)}{\epsilon_0}\, dx\, dy \tag{۷ — ۴۶}$$

معادلهٔ (۷ — ۴۶) جواب صوری مسألهٔ (۷ — ۳۰) تا (۷ — ۳۲) است، معادلهٔ (۷ — ۴۶) را باتوجه به حالت خاص و قرار دادن

$$\rho(x,y) = q\, \delta(x)\, \delta(y-d) \tag{۷ — ۴۷}$$

می‌توان ساده‌ترکرد، که درآن $a > d > 0$. به‌این ترتیب (۷ — ۴۶) به صورت زیرخلاصه می‌شود

$$\begin{aligned}\phi(x',y') &= \frac{q}{\epsilon_0}\int_0^a\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x';y,y')\;\delta(x)\;\delta(y-d)\;dx\,dy \\ &= \frac{q}{\epsilon_0}\,G(0,x';d,y')\int_0^a\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\;\delta(y-d)\;dx\,dy \\ &= q\,\frac{G(0,x';d,y')}{\epsilon_0}\end{aligned} \qquad (۴۸-۷)$$

درنتیجه،

$$\phi(x',y') = q\,\frac{G(0,x';d,y')}{\epsilon_0} \qquad (۴۹-۷)$$

پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ (x',y') حاصل از خط بارداری با چگالی خطی q واقع در $x=0$ و $y=d$ به وجود آمده نشان می‌دهد. به تشابه، $qG(x,x';y,y')/\epsilon_0$ باید پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ (x',y') که از خط بارداری با چگالی q واقع در (x,y) به وجود آمــده نشان دهد. این مشاهدات، تفسیر (۷-۴۶) را امکان‌پذیرمی‌سازند. معادلهٔ (۷ ـ ۴۶) بیان‌می‌کندکه **پتانسیل نقطهٔ** (x',y') که از یک توزیع چگالی بار *دلخواه* $\rho(x,y)$ به وجودآمده است رامی‌توان به صورت تلفیق پتانسیلهای تولیدشده به وسیلهٔ منابع خطی نامتناهی نشان داد، منبع خطی درنقطهٔ (x,y) دارای چگالی بار خطی $\rho(x,y)\;dx\;dy\,\mathrm{coul/m}$ خواهد بود. فقط به علت این که معادلهٔ پواسن یک معادلهٔ با مشتقات جزئی خطی است می‌توانیم پتانسیل مربوط به $\rho(x,y)$ رابه‌صورت تلفیق پتانسیلهای حاصل از قرار گرفتن مناسب بارهای خطی باچگالی بار خطی درست ارائه‌دهیم. برای تکمیل جواب مسأله (۷ ــ ۳۰) تا (۷ ــ ۳۲) باید مرحلهٔ 2 بخش (۷ ــ ۷) را اجرا کنیم، ولازمهٔ این کارساختن تابع گرین $G(x,x';y,y')$ است که درشرایط زیر صدق کند.

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\;\delta(y-y') \qquad (۵۰-۷)$$

$$G = 0 \text{ در } y = 0 \qquad -\infty \le x \le +\infty \qquad (۵۱-۷)$$

$$G = 0 \text{ در } y = a \qquad -\infty \le x \le +\infty \qquad (۵۲-۷)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} G = 0 \qquad 0 < y < a \qquad (۵۳-۷)$$

در این جا ممکن است دانشجویان سؤال کنند که اصولا" چرا مرحلهٔ 1 اجرا شد، زیرا باید معادلات (۷ ــ ۵۰) تا (۷ ــ ۵۳) را حل کنیم که همان مسألهٔ اصلی‌است. برای این‌کار سه دلیل وجود دارد: دلیل اول این که اگر به جای بار خطی توزیع بار $\rho(x,y)$ راداشته باشیم درآن صورت مرحلهٔ ۱ برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۷ ــ ۴۷) ضروری است، دلیل دوم این است که هرچند در حل مسألهٔ دو انتگرال منحنی‌الخط در معادلهٔ (۷ ــ ۴۰) صفر می‌شوند، مسائلی هستند که در آنها هر دو صفر نخواهد شد و این امکان را باید همواره درنظر داشته باشیم. بالاخره می‌خواهیم یک روش کلی برای حل مسائل مقدار مرزی در نظریهٔ پتانسیل،

انتقال وانتشارتابع موج به‌دست آوریم ، روش تابع‌گرین یکی ازتواناترین وعمومی‌ترین وسیله‌ای است که در دست است .

ساختن تابع گرین

ساده‌ترین وسریعترین راه برای ساختن تابع‌گرین که درمعادلات (۷ — ۵۰) تا (۷— ۵۳) صدق کنند استفاده ازتبدیلات انتگرالی‌است ، بخصوص که این مطالب قبلا" در بخش ۵ معرفی شده‌اند . روش کلاسیک دیگر که به وسیلهٔ آن ساختن جواب به سادگی قبلی نیست بر روش جداسازی متغیرها مبتنی است . برای مقایسه هر دو روش را تشریح خواهیم کرد . روش تبدیل انتگرالی به‌آسانی شرایط مرزی (۷ — ۵۱) و (۷ — ۵۲) را به‌کار می‌برد . پس صفر شدن G بر $y=0$ و $y=a$ پیشنهاد می‌کندکه از یک تبدیل متناهی سینوسی برای معادلهٔ (۷ — ۵۰) استفاده کنیم .معادلهٔ(۷— ۵۰)رادر $\sin n\pi y/a$ ضرب‌کرده دو بار باروش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم ، باتوجه به معادلات (۷ — ۵۱) و (۷ — ۵۲) معادلهٔ دیفرانسیل معمولی ،

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\bar{G}=-\delta(x-x')\sin\frac{n\pi y'}{a} \qquad (۵۴-۷)$$

برای محاسبهٔ $\bar{G}$ به‌دست می‌آید . در این جا

$$\bar{G}=\int_0^a G\sin\frac{n\pi y}{a}\,dy \; . \qquad (۵۵-۷)$$

تبدیل متناهی سینوسی G است . معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (۷ — ۵۴) را قبلا" در فصلهای ۵ و ۶ دیده‌ایم و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\bar{G}=Ae^{n\pi x/a}+Be^{-n\pi x/a}+\frac{e^{-n\pi x_>/a}e^{n\pi x_</a}}{W\{e^{-n\pi x'/a},e^{n\pi x'/a};x'\}}\sin\frac{n\pi y'}{a} \qquad (۵۶-۷)$$

و خواننده به خاطر دارد که

$$x_>=(x,x') \qquad (۵۷-۷)$$

$$x_<=(x,x') \qquad (۵۸-۷)$$

و

$W\{e^{-n\pi x'/a},e^{n\pi x'/a};x'\}$

رونسکین $e^{-n\pi x'/a}$ و $e^{n\pi x'/a}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$W=\begin{vmatrix} e^{-n\pi x'/a} & e^{n\pi x'/a} \\ -\frac{n\pi}{a}e^{-n\pi x'/a} & \frac{n\pi}{a}e^{n\pi x'/a}\end{vmatrix}=\frac{2\pi n}{a} \qquad (۵۹-۷)$$

شرط مرزی (۷ ــ ۵۳) بیان می‌کند که $\bar{G}$ باید در $x \to \pm\infty$ صفر شود یعنی باید A و B را در معادلهٔ (۷ ــ ۵۶) برابر صفر قرار دهیم ، درنتیجه

$$\bar{G} = \frac{a}{2\pi n} \sin \frac{n\pi y'}{a}\, e^{-n\pi x_>/a} e^{n\pi x_</a} \qquad (۷-۶۰)$$

و از قضیهٔ وارون برای تبدیل سینوسی داریم

$$G = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G} \sin \frac{n\pi y}{a} \qquad (۷-۶۱)$$

بالاخره ،

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi y'}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}\, e^{-n\pi x_>/a} e^{n\pi x_</a} \qquad (۷-۶۲)$$

که جواب تابع‌گرین مطلوب برای معادلات (۷ ــ ۵۰) تا (۷ ــ ۵۳) است . از معادلهٔ (۷ــ۴۹) نتیجه می‌شود ،

$$\phi(x',y') = \frac{q}{\epsilon_0} G(0,x';d,y') \qquad (۷-۶۳)$$

عبارت مربوط به پتانسیل (x',y') که از منبع خطی در $x = 0$، $y=d$ به‌وجودآمده به‌دست می‌آید . پس با قرار دادن $x = 0$ و $y=d$ در معادلهٔ (۷ ــ ۶۲) ، خواهیم داشت

$$\phi(x',y') = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi d}{a}\, e^{-n\pi x'/a} \sin \frac{n\pi y'}{a} \qquad (۷-۶۴)$$

و

$$\phi(x',y') = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi d}{a}\, e^{n\pi x'/a} \sin \frac{n\pi y'}{a} \qquad (۷-۶۵)$$

توجه کنیدکه جواب معادلهٔ (۷ ــ ۵۴) برحسب آن که x' بزرگتر یا کوچکتراز مختص $x = 0$ منبع باشد فضای بین دو صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند .

این تنها راهی نیست که در آن فضای بین صفحات می‌تواند به دو زیرفضا تقسیم شود . فضای بین صفحات را می‌توانیم به دو ناحیه برحسب این که y' بزرگتر یا کوچکتر از y مختص منبع باشد نیز تقسیم کنیم .

برای انجام این کارملاحظه می‌کنیم‌که تقسیم x وقتی اتفاق می‌افتدکه یک تبدیل متناهی سینوسی بر y برای حل معادلهٔ (۷ ــ ۵۰) به‌کار برده شود . بنابراین انتظارداریم‌که تقسیم y وقتی رخ دهد که یک تبدیل نسبت به x برای حل (۷ ــ ۵۰) مورد استفاده قرارگیرد . چون دراین مسأله مختص x دامنهٔ نامتناهی‌دارد ، $-\infty \le x \le \infty$ ، تبدیل مختلط فوریه مناسبترین تبدیل

برای حل مسأله خواهد بود .

اگرمعادلهٔ (۷ — ۵۰) رادر e^{-ikx} ضرب‌کرده‌و دوبار نسبت‌به x از $x=-\infty$ تا $x=\infty$ انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2\bar{G}}{dy^2} - k^2G = -e^{-ikx'}\,\delta(y-y') \qquad (۶۶-۷)$$

که درآن

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} Ge^{-ikx}\,dx$$

و به شرط‌آن که

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{\partial G}{\partial x} + ikG\right) = 0 \qquad (۶۷-۷)$$

معمولاً" انتظار داریم معادلهٔ (۷ — ۶۷) برقرار باشد زیرا از معادلهٔ (۷ — ۵۳) معلوم می‌شود که پتانسیل در فاصله‌های خیلی دور از منابع برابر صفر است ، پس میدان الکتریکی نیز ، که گرادیان پتانسیل است ، باید در این نقاط صفر شود .

جواب عمومی معادلهٔ (۷ — ۶۶) به صورت زیر داده می‌شود

$$\bar{G} = A\sinh ky + B\cosh ky + \frac{\sinh ky_{>}\cosh ky_{<}}{W\{\sinh ky', \cosh ky'; y'\}}\,e^{-ikx'} \qquad (۶۸-۷)$$

ازطرفی رونسکین $\sinh ky'$ و $\cosh ky'$ عبارت است از :

$$W = \begin{vmatrix} \sinh ky' & \cosh ky' \\ k\cosh ky' & k\sinh ky' \end{vmatrix} = -k \qquad (۶۹-۷)$$

درنتیجه

$$\bar{G} = A\sinh ky + B\cosh ky - (\sinh ky_{>}\cosh ky_{<})\frac{e^{-ikx'}}{k} \qquad (۷۰-۷)$$

که باید در شرایط مرزی (۷ — ۵۱) و (۷ — ۵۲) صدق کند . چون در $y=0$ داریم $\bar{G}=0$ ، درنتیجه ،

$$B = \frac{\sinh ky'}{k}\,e^{-ikx'} \qquad (۷۱-۷)$$

همچنین از $y=a$ ، $\bar{G}=0$ نتیجه می‌شود

$$A\sinh ka + B\cosh ka - \sinh ka\cosh ky'\,\frac{e^{-ikx'}}{k} = 0 \qquad (۷۲-۷)$$

بالاخره از ترکیب معادلات (۷ـ۷۱) و (۷ـ۷۲) خواهیم داشت:

$$A = \frac{\sinh k(a - y')}{k \sinh ka} e^{-ikx'} \qquad (۷۳-۷)$$

$$B = \sinh ky' \frac{e^{-ikx'}}{k} \qquad (۷۴-۷)$$

بنابراین $\bar{G}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\bar{G} = \frac{e^{-ikx'}}{k}\left[\frac{\sinh k(a - y')}{\sinh ka} \sinh ky + \sinh ky' \cosh ky - \sinh ky_{>} \cosh ky_{<}\right] \qquad (۷۵-۷)$$

معادلهٔ (۷ـ۷۵) بطور طبیعی فضای بین دو صفحه رابه دو ناحیه بنابراین که y بزرگتر یا کوچکتر از y' باشد تقسیم می‌کند.

به ازای $y < y'$

$$\bar{G} = \frac{e^{-ikx'}}{k}\left[\frac{\sinh k(a - y')}{\sinh ka} \sinh ky\right] \qquad (۷۶-۷)$$

و به ازای $y > y'$ ،

$$G = \frac{e^{-ikx'}}{k}\left[\frac{\sinh k(a - y')}{\sinh ka} \sinh ky - \sinh k(y - y')\right] \qquad (۷۷-۷)$$

قضیهٔ وارون (۵ـ۳۲۰) درموردتبدیلات فوریه عبارات زیر رابرای تابع گرین می‌دهد:

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \frac{\sinh k(a - y')}{k \sinh ka} \sinh ky\, dk \qquad y < y' \qquad (۷۸-۶)$$

و

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\, dk \left[\frac{\sinh k(a - y')}{k \sinh ka} \sinh ky - \frac{\sinh k(y - y')}{k}\right] \qquad (۷۹-۶)$$

پتانسیلها که به ازای $y'>d$ و $y'<d$ در معادلهٔ (۷ـ۴۹) به‌دست می‌آیند، عبارتند از:

$$\phi(x',y') = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx'} \frac{\sinh k(a - y')}{k \sinh ka} \sinh kd\, dk \qquad d \leq y' \leq a \qquad (۸۰-۷)$$

و

$$\phi(x',y') = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx'}\, dk \left[\frac{\sinh k(a - y')}{k \sinh ka} \sinh kd - \frac{\sinh k(d - y')}{k}\right] \qquad 0 \leq y \leq d \qquad (۸۱-۷)$$

عبارات (۷ــ۸۰) و (۷ــ۸۱) پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ (x',y') نشان می‌دهد که از یک منبع خطی در $x=0$ و $y=d$ به وجود می‌آید. عبارات پتانسیلها را می‌توان از این هم ساده‌تر کرد. مثلاً، تابع زیر انتگرال (۷ــ۸۱) را با استفاده از اتحاد زیر می‌توان خلاصه کرد

$$\frac{\sinh k(a-y')}{k\sinh ka}\sinh kd-\frac{\sinh k(d-y')}{k} = \frac{\sinh k(a-y')\sinh kd-\sinh ka\sinh k(d-y')}{k\sinh ka} = \frac{\sinh k(a-d)}{k\sinh ka}\sinh ky' \quad (۷ــ۸۲)$$

حال باتوجه به

$e^{-ikx'}=\cos kx'-i\sin kx'$

و درنظر گرفتن توابع زیر انتگرال معادلات (۷ــ۸۰) و (۷ــ۸۱) که غیر از عامل $e^{-ikx'}$ اکیداً برحسب k زوج هستند، نتیجه می‌شود که تنها جزء حقیقی (۷ــ۸۰) و (۷ــ۸۱) مخالف صفر است. علتش این‌است که $i\sin kx'$ در (۷ــ۸۰) و (۷ــ۸۱) وجود دارد، که فرد است و انتگرال آن بر بازهٔ متقارن k از $[-\infty,+\infty]$ صفر می‌شود. درنتیجه داریم

$$\phi(x',y')=\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh kd}{k\sinh ka}\cos kx'\sinh k(a-y')\,dk \quad d\le y'\le a \quad (۷ــ۸۳)$$

و

$$\phi(x',y')=\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh k(a-d)}{k\sinh ka}\cos kx'\sinh ky'\,dk \quad 0\le y'\le d \quad (۷ــ۸۴)$$

تبصره: وجود دو راه دیگربرای تقسیم‌فضای بین صفحات برای این مسأله منحصرنیست. درواقع، بیشتر مسائل دوبعدی در نظریهٔ پتانسیل، انتقال و انتشارموج، وقتی یک تابع‌گرین باید معین شود، پدیدهٔ مشابهی را نمایش می‌دهند.

چگونه باید درمورد انتخاب بهتر دو فرم جواب (۷ــ۶۳) و (۷ــ۶۵) یا (۷ــ۸۳) و (۷ــ۸۴) تصمیم‌گیری کنیم؟ جواب (۷ــ۶۴) و (۷ــ۶۵) به مسألهٔ جمع دوسری نامتناهی منجرمی‌شود درصورتی‌که (۷ــ۸۳) و (۷ــ۸۴) به محاسبهٔ دوانتگرال پیچیده منجرمی‌شود.

وقتی‌مختص $x=x'$، ناظر بامختص $x=0$ منبع تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای‌دارد، عامل پتانسیل $e^{-n\pi|x'|/a}$ درمعادلات (۷ــ۶۴) و (۷ــ۶۵) خیلی‌کوچک است و وقتی n صعود می‌کند بازهم کوچکترمی‌شود. پس (۷ــ۶۴) و (۷ــ۶۵) سریهای متناوبندکه به سرعت همگرا خواهندبود، و چند جمله اول آنها یک تقریب بسیار خوب برای $\phi(x',y')$ خواهد بود. ازطرف دیگر وقتی

$|x'|$ بزرگ است چون عامل $\cos kx'$ در هر دو معادلهٔ (۷ ــ ۸۳) و (۷ ــ ۸۴) ظاهر می‌شود با تغییر k توابع زیر انتگرال به سرعت نوسان می‌کنند . درنتیجه ، انتگرالها به کندی به $\phi(x',y')$ همگرا خواهند بود . بدیهی است وقتی مختص x ناظر با مختص x منبع تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد ، بهترین جواب (۷ ــ ۶۴) و (۷ ــ ۶۷) خواهدبود . اگر به‌جای x مختص y ناظر بامختص y منبع تفاوت چشم‌گیری داشته باشد ، آن‌گاه وضعیت برعکس می‌شود . جملات نمایی در (۷ ــ ۶۴) و (۷ ــ ۶۵) ، گرچه به تقارب کمک می‌کنند . ولی به اندازهٔ قبل مؤثر نخواهند بود ، و دوسری کندتراز قبل به $\phi(x',y')$ همگراست . علاوه براین ، عامل $\cos kx'$ باتغییر k به سرعت قبل نوسان نمی‌کند . درنتیجه ، انتگرالهای (۷ ــ ۸۳) و (۷ ــ ۸۴) سریعتراز قبل به سمت $\phi(x',y')$ همگراخواهندبود . پس وقتی‌مختص y ناظر بامختص y منبع تفاوت زیادی دارد ، بهترین جواب (۷ ــ ۸۳) و (۷ ــ ۸۴) است . این نتایج را می‌توانیم به صورت *قاعدهٔ* زیر خلاصه کنیم :

در مسائل دوبعدی نظریهٔ پتانسیل ، انتقال و انتشار موج ، دو نمایش متمایز برای تابع گرین وجود دارد . یکی از آنها از تبدیل انتگرال نسبت به مختص y و دیگری باتبدیل انتگرال نسبت به مختص x به دست می‌آید .

وقتی مختص x ناظر با مختص x منبع تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد ، تابع گرین از تبدیل انتگرال بر y خیلی سریعتر همگراست . ولی اگر مختص y ناظر با مختص y منبع تفاوت زیادی داشته باشد در آن صورت تابع گرین حاصل از تبدیل انتگرال بر x سریعتر همگرا خواهد بود .

اصل تقابل

تابع گرین $G(x,x';y,y')$ غیرازضریب ثابت q/ϵ_0 پتانسیل نقطهٔ (x',y') حاصل از منبع خطی واقع در (x,y) را نشان می‌دهد . ثابت می‌کنیم که تابع گرین در *رابطهٔ تقابل* زیرصدق می‌کند

$$G(x,x';y,y') = G(x',x;y',y) \qquad (۸۵ ــ ۷)$$

درنتیجه $G(x,x';y,y')$ باید پتانسیل نقطهٔ (x,y) را نیز که از منبع خطی واقع در (x',y') حاصل شده است نشان دهد .

به عبارت دیگر ، نقطهٔ (x,y) و (x',y') کاملاً" متقابلند ، به این معنا که پتانسیل درنقطهٔ دوم که از منبعی در نقطهٔ اول حاصل می‌شود درست برابر است با پتانسیل نقطهٔ اول که به وسیلهٔ همان منبع در نقطهٔ دوم به وجود می‌آید .

برای اثبات درستی معادلهٔ (۷ ــ ۸۵) ، اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم

$$2\sin\frac{n\pi y'}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} = \cos\frac{n\pi}{a}(y-y') - \cos\frac{n\pi}{a}(y+y') \qquad (۸۶ ــ ۷)$$

اگر معادلهٔ (۷ ــ ۸۶) را در (۷ ــ ۶۲) قرار دهیم و از رابطهٔ

$$e^{-n\pi x_>/a}e^{n\pi x_</a} = e^{(-n\pi/a)|x-x'|} \qquad (۸۷-۷)$$

استفاده کنیم معادلهٔ (۷ــ۶۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi}{a}(y-y') - \cos\frac{n\pi}{a}(y+y')\right]e^{(-n\pi/a)|x-x'|} \qquad (۸۸-۷)$$

و چون $|x'-x| = |x-x'|$ و کسینوس تابعی زوج است ثابت می‌شود که

$$G(x,x';y,y') = G(x',x;y',y)$$

همین‌طور معادلات (۷ــ۷۸) و (۷ــ۷۹) را می‌توان به یک معادله خلاصه کرد ،

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh k(a-y_>)}{k\sinh ka}\sinh ky_<\cos k(x-x')\,dk \qquad (۸۹-۷)$$

با استفاده از اتحاد

$$\frac{\sinh k(a-y)\sinh ky}{k\sinh ka} - \frac{\sinh k(y-y')}{k} = \frac{\sinh ky'\sinh k(a-y)}{k\sinh ka} \qquad (۹۰-۷)$$

و این که تابع زیر انتگرال غیر از عامل

$$e^{ik(x-x')} = \cos\ k(x-x') + \ \sin\ k(x-x')$$

نسبت به k زوج است ، تنها جملهٔ کسینوس در انتگرال‌گیری از ∞ــ تا ∞+ باقی می‌ماند. بالاخره ، چون

$$\sinh k(a-y_>)\sinh ky_< = \cosh k[a-(y_>-y_<)] - \cosh k[a-(y_>+y_<)] \qquad (۹۱-۷)$$

و

$$y_> - y_< = |y-y'| \qquad (۹۲-۷)$$

معادلهٔ (۷ــ۸۹) به صورت ،

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh k(a-|y-y'|) - \cosh k[a-(y+y')]}{k\sinh ka}\cosh k(x-x')\,dk \qquad (۹۳-۷)$$

نوشته می‌شود و بازهم ثابت می‌شود که

$$G(x,x';y,y') = G(x',x;y',y)$$

۷ ـ ۹ . جداسازی متغیرها

درمقابل تبدیلات‌انتگرالی یک روش دیگربرای ساختن تابع‌گرین وجود داردکه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y') \tag{۷ ـ ۹۴}$$

$$G = 0 \text{ ، } y = 0 \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{۷ ـ ۹۵}$$

$$G = 0 \text{ ، } y = a \qquad -\infty \leq x \leq +\infty \tag{۷ ـ ۹۶}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} G = 0 \qquad 0 < y < a \tag{۷ ـ ۹۷}$$

و در آن از روش کلاسیک جدا کردن متغیرها استفاده می‌شود .

این روش باتوجه به این مطلب که به جز نقطهٔ $x=x'$ و $y=y'$ تابع گرین G باید درمعادلهٔ لاپلاس:

$$\nabla^2 G = 0 \tag{۷ ـ ۹۸}$$

صدق کند شروع می‌شود . سپس یک جواب آزمایشی معادلهٔ (۷ ـ ۹۸) رابه صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$G = X(x)Y(y) \tag{۷ ـ ۹۹}$$

اگر معادلهٔ (۷ ـ ۹۹) را در معادلهٔ (۷ ـ ۹۸) قرار دهیم نتیجه می‌شود ،

$$YX'' + XY'' = 0 \tag{۷ ـ ۱۰۰}$$

که با تقسیم طرفین (۷ ـ ۱۰۰) بر معادلهٔ (۷ ـ ۹۹) ، داریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \tag{۷ ـ ۱۰۱}$$

چون x و y بطورمستقل تغییرمی‌کنندتنهاشرطی‌که تحت آن معادلهٔ (۷ ـ ۱۰۱) می‌تواند برقرار باشداین‌است‌که $X''(x)/X(x)$ و $Y''(y)/Y(y)$ هر دوثابت‌باشند .بخصوص‌می‌توان‌نوشت :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \tag{۷ ـ ۱۰۲}$$

که درآن پارامتر C راثابت جداسازی گویند . این‌طرزجداسازی متغیرهابه دومعادلهٔ دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود ،

$$X''(x) - CX(x) = 0 \tag{۷ ـ ۱۰۳}$$

و

$$Y''(y) + CY(y) = 0 \tag{۷ ـ ۱۰۴}$$

که X و Y را معین می‌سازند .

اگردرموردثابت جداسازی C هیچ محدودیتی‌نباشد ، حاصل‌ضرب جوابهای‌عمومی‌معادلات

دیفرانسیل معمولی یک جواب عمومی معادلهٔ لاپلاس دوبعدی را تشکیل می‌دهد .

همان‌طور که خواهیم دید ، شرایط مرزی مسأله طبیعت جوابها و مقادیر ثابت جداسازی را محدود می‌کنند . برای منظور ما فرض زیر مناسب خواهد بود .

$$C = \pm k^2 \tag{۷-۱۰۵}$$

با این شرایط معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت

$$X'' \pm k^2 X = 0 \tag{۷-۱۰۶}$$

و

$$Y'' \pm k^2 Y = 0 \tag{۷-۱۰۷}$$

نوشته می‌شوند. به‌ازای $C=+k^2$ جوابهای‌عمومی‌معادلات (۷ — ۱۰۵) و (۷— ۱۰۶) عبارتنداز :

$$X(x) = D(k)e^{kx} + E(k)e^{-kx} \tag{۷-۱۰۸}$$

$$Y(y) = A(k) \sin ky + B(k) \cos ky \tag{۷-۱۰۹}$$

و به ازای $C = -k^2$ جوابهای عمومی متناظر را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$X(x) = D(k) \cos kx + E(k) \sin kx \tag{۷-۱۱۰}$$

$$Y(y) = A(k) \sinh ky + B(k) \cosh ky \tag{۷-۱۱۱}$$

پس ،

$$G = X(x)Y(y) = \{D(k)e^{kx} + E(k)e^{-kx}\}\{A(k) \sin ky + B(k) \cos ky\} \tag{۷-۱۱۲}$$

و

$$G = X(x)Y(y) = \{D(k) \cos kx + E(k) \sin kx\} \{A(k) \sinh ky + B(k) \cosh ky\} \tag{۷-۱۱۳}$$

که هردوجوابهای ممکن معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 G = 0$ هستند . پارامترهای دلخواه A ، B ، D و E ممکن است به ثابت جداسازی k و x' و y' بستگی داشته باشند ولی از x یا y مستقل‌خواهندبود .

هر دو جواب (۷ — ۱۱۲) و (۷ — ۱۱۳) را می‌توان به قسمی نوشت که در شرایط مرزی $y = 0$ و $y=a$ صدق کنند .به‌عنوان‌مثال‌معادلهٔ (۷ — ۱۱۲) رادرنظربگیرید .فرض‌کنید $k = n\pi/a$ که در آن n یک عدد صحیح است ، و $B = 0$. در این صورت در صفحهٔ فوقانی و تحتانی صفر شده ، و (۷ — ۱۱۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$G_n = X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{a} \tag{۷-۱۱۴}$$

که در آن

$$X_n(x) = A\{De^{n\pi x/a} + Ee^{-n\pi x/a}\} \tag{۷-۱۱۵}$$

چون معادلهٔ لاپلاس خطی است و معادلهٔ (۷ — ۱۱۴) به ازای مقادیر دلخواه صحیح n یک

جواب آن است ، ترکیب جدید

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{a} \tag{۱۱۶ – ۷}$$

از جوابهای (۷ – ۱۱۴) نیز در $\nabla^2 G = 0$ صدق خواهد کرد .

توابع $X_n(x)$ و $Y_n(y) = \sin \ n\pi y/a$ را "توابع ویژه" معادلات جداشدهٔ

$$X_n'' = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X_n \tag{۱۱۷ – ۷}$$

$$Y_n'' = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n \tag{۱۱۸ – ۷}$$

نامند که از روش جداسازی متغیرها ومعادلهٔ لاپلاس بهدستآمدهاند .اعداد$n\pi/a$مقادیر ویژهٔ متناظر با توابع ویژهٔ$X_n(x)$ و $Y_n(y)$هستند . وقتی یک عملگر خطی بریک تابع اثرکند و نتیجه برابر مقدار ثابتی در خود تابع باشد ، عملگر را "مقدار ویژه" وتابع را "تابع ویژه" ومعادلهٔ حاصل را "معادلهٔ مقدار ویژه" نامند .

در روش جداسازی متغیرها ، مقادیر مجاز ثابت جداسازی مقادیر ویژه را تولید میکنند ، فرآیند جداسازی معادلات مقدار ویژه را میدهد ، و جوابهایشان توابع ویژهٔ متناظر را فراهم میسازند . مقادیرمجاز ثابت جداسازی معمولا" بوسیلهٔ شرایط مرزی معین میشوند . دراینجا ، بهعنوانمثال ،بافرض $k=n\pi/a$ ، که درآن n یک عددصحیح است ، تابع G میتوانددرصفحات فوقانی و تحتانی صفر شود .

معادلهٔ (۷ – ۱۱۶) یک جواب معادلهٔ لاپلاس را به صورت حاصل ضربهای توابع ویژهٔ معادلات جداشده نشان میدهد . گرچه (۷ – ۱۱۶) در$y = 0$ و$y=a$صفر میشود ، در شرط مرزی (۷ – ۹۷) در بینهایت صدق نمیکند . علاوه براین ، (۷ – ۱۱۶) یک جواب معادلهٔ همگن $\nabla^2 G = 0$ است ، وآنچه واقعا" میخواهیم جوابی از معادلهٔ ناهمگن

$$\nabla^2 G = -\delta(x - x')\, \delta(y - y')$$

است . بنابراین مسأله عبارت است از انتخاب$X_n(x)$به قسمی که در سه شرط صدق کند . اینها جواب معادلهٔ (۷ – ۱۱۷) خواهند بود مگر احتمالا" در$x = x'$ ؛ و باید به قسمی باشد که

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{a} \tag{۱۱۹ – ۷}$$

یک جواب

$$\nabla^2 G = -\delta(x - x')\, \delta(y - y')$$

باشد . و بالاخره$X_n(x)$باید در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{|x|\to\infty} X_n(x) = 0 \qquad (۱۲۰-۷)$$

برای تثبیت این X_n ها آنها را به صورت ضرایب نامعین در بسط (۷ـ ۱۱۹) درنظر می‌گیریم. اگر عبارت $\delta(x-x')\,\delta(y-y')$ ــ را بتوان برحسب $\sin n\pi y/a$ بسط داد، آن‌گاه می‌توانیم از معادلهٔ (۷ـ ۹۴) برای تعیین X_n ها استفاده کنیم. بسط زیر را درنظر می‌گیریم

$$-\delta(x-x')\,\delta(y-y') = -\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-x')A_n \sin\frac{n\pi y}{a} \qquad (۱۲۱-۷)$$

طرفین را در $\sin m\pi y/a$ ضرب کرده نسبت به y از صفر تا a انتگرال می‌گیریم و توجه داریم که

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\,dy = \frac{a}{2}\,\delta_{nm} \qquad (۱۲۲-۷)$$

تا مقدار زیر به‌دست آید:

$$A_n = \frac{2}{a}\sin\frac{n\pi y'}{a} \qquad (۱۲۳-۷)$$

پس،

$$-\delta(x-x')\,\delta(y-y') = \frac{-2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-x')\sin\frac{n\pi y'}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} \qquad (۱۲۴-۷)$$

از معادلات (۷ـ ۱۱۹) و (۷ـ ۱۲۴) و این که

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

نتیجه می‌شود،

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^2X_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X_n\right]\sin\frac{n\pi y}{a} = \frac{-2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x-x')\sin\frac{n\pi y'}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} \qquad (۱۲۵-۷)$$

اگر ضرایب $\sin n\pi y/a$ را در دو طرف معادلهٔ (۷ـ ۱۲۵) مساوی قرار دهیم، داریم

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 X_n = \frac{-2}{a}\sin\frac{n\pi y'}{a}\,\delta(x-x') \qquad (۱۲۶-۷)$$

این معادله دراصل همان معادلهٔ (۷ـ ۵۴) است و جواب خصوصی آن عبارت است از:

$$X_n(x) = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi y'}{a}\,e^{-n\pi x_>/a}e^{n\pi x_</a} \qquad (۱۲۷-۷)$$

ازمعادلهٔ (۷ـ ۱۲۷) دیده می‌شودکه بجزدرنقطهٔ $x=x'$، $X_n(x)$ درمعادلهٔ (۷ـ ۱۱۷) صدق می‌کند و در بی‌نهایت رفتار صحیح (۷ـ ۱۲۰) را دارد. اگر (۷ـ ۱۲۷) رادر معادلهٔ (۷ـ

۱۱۹) قرار دهیم نتیجه می‌شود ،

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y'}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\,e^{-n\pi x_>/a}e^{n\pi x_</a} \qquad (۱۲۸-۷)$$

که همان معادلهٔ (۷ ــ ۶۲) است .

به‌جای‌معادلهٔ (۷ ــ ۱۱۲) می‌توانستیم‌از(۷ ــ ۱۱۳) استفاده‌کنیم . ولی ، چون سینوس هذلولی وکسینوس هذلولی‌توابع متناوب نیستند ،با انتخاب $k = n\pi/a$ مقدار G رادیگرنمی‌توانیم صفرکنیم . پس پارامترجداسازی بایدیک پارامتر پیوسته باشد . با استفاده ازاصل تلفیق جواب معادلهٔ لاپلاس را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty}\{D(k)\cos kx + E(k)\sin kx\}\{A(k)\sinh ky + B(k)\cosh ky\}\,dk \qquad (۱۲۹-۷)$$

که درآن جمع روی پارامتر جداسازی‌گسسته‌مانند $n\pi/a$ به انتگرال روی پارامترجداسازی پیوسته تبدیل شده است .

حال باید ضرایب A ، B ، D و E را به قسمی تعیین کنیم که معادلات (۷ ــ ۹۴) تا (۷ــ ۹۷) صادق باشند . یک راه استفاده از انتگرال فوریهٔ تابع دلتای دیراک است :

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos k(x-x')\,dk \qquad (۱۳۰-۷)$$

با استفاده از معادلهٔ (۷ ــ ۱۳۰) عبارت $-\delta(x-x')\,\delta(y-y')$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$-\delta(x-x')\,\delta(y-y') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-y')\cos k(x-x')\,dk \qquad (۱۳۱-۷)$$

که با(۷ ــ ۱۲۹) معادل‌است .چون‌معادلهٔ(۷ ــ ۱۳۱) به $\cos k(x-x')$ بستگی دارد D و E را در معادلهٔ (۷ ــ ۱۲۹) به قسمی تعیین می‌کنیم که معادلهٔ (۷ ــ ۱۲۹) به صورت زیر درآید ،

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(k,y)\cos k(x-x')\,dk \qquad (۱۳۲-۷)$$

که درآن

$$Y(k,y) = \{A(k)\sinh ky + B(k)\cosh ky\} \qquad (۱۳۳-۷)$$

از معادلات (۷ ــ ۱۳۰) و (۷ ــ ۱۳۲) معلوم می‌شود که

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y\right)\cos k(x-x')\,dk = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-y')\cos k(x-x')\,dk \qquad (۱۳۴-۷)$$

که مشابه معادلهٔ (۷ ــ ۱۲۵) است .اگر ضرایب $\cos k(x - x')$ را در طرفین معادله (۷ ــ ۱۳۴) مساوی قرار دهیم ، معادلهٔ

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = -\frac{1}{2\pi}\,\delta(y - y') \tag{۱۳۵ – ۷}$$

برای تعیین $Y(k,y)$ به‌دست می‌آید .

جواب معادلهٔ (۷ ــ ۱۳۵) که در شرایط مرزی

$$Y = 0 \;\;,\;\; y = 0$$

و

$$Y = 0 \;\;,\;\; y = a$$

صدق کند به صورت زیر نوشته می‌شود ،

$$Y(k,y) = \frac{\sinh k(a - y_>)\,\sinh ky_<}{2\pi k \sinh ka} \tag{۱۳۸ – ۷}$$

اگر این عبارت را در (۷ ــ ۱۳۲) قرار دهیم ،

$$G(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh k(a - y_>)\,\sinh ky_<}{k \sinh ka}\cos k(x - x')\,dk \tag{۱۳۹ – ۷}$$

همان‌طور که انتظار داریم نتیجه معادلهٔ (۷ ــ ۸۹) مجددا" به‌دست می‌آید .

۷ ــ ۱۰ . جواب معادلهٔ لاپلاس در یک نیم‌فضا

مسألهٔ محاسبهٔ تابع پتانسیل $\phi(x,y)$ را بر نیم‌فضای $x \geq 0$ درنظر بگیرید ،به قسمی که بر $x = 0$ به صورت تابع خاص $f(y)$ خلاصه شود . ازنظر ریاضی جوابی از

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad x \geq 0 \tag{۱۴۰ – ۷}$$

را می‌خواهیم که در شرایط

$$\phi(0,y) = f(y) \text{ on } x = 0 \tag{۱۴۱ – ۷}$$

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x,y) = 0 \tag{۱۴۲ – ۷}$$

به ازای هر عدد حقیقی y ، و هر $x \geq 0$ صدق کند .

$$\lim \;\phi(x,y) = 0$$

این مسأله را می‌توانیم با روش تابع گرین بخش (۷ ــ ۸) حل کنیم . محاسبه با اتحاد متقارن گرین شروع می‌شود :

$$\int_S \{g\,\nabla^2\phi - \phi\,\nabla^2 g\}\,dS = \int_{C(S)} \left\{g\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial g}{\partial n}\right\} ds \tag{۱۴۴ – ۷}$$

در معادلهٔ (۷ــ ۱۴۴)، S جزئی از نیم‌فضای $x \geq 0$ را نشان می‌دهد که به منحنی $C(S)$ محدودشده است. این منحنی از محور yها و محیط یک نیم‌دایرهٔ خیلی بزرگ تشکیل می‌شود. می‌توان فرض کرد که پتانسیل در هر نقطهٔ نیم‌دایره در بی‌نهایت صفر است. تحت این شرایط فقط انتگرال منحنی‌الخط در طول y در معادلهٔ (۷ــ ۱۴۴) باقی خواهد ماند و آن را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{g\, \nabla^2\phi - \phi\, \nabla^2 g\}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{g\, \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi\, \frac{\partial g}{\partial n}\right\} dy \qquad (۱۴۵-۷)$$

انتگرال منحنی‌الخط سمت راست معادلهٔ (۷ــ ۱۴۵) را می‌توان در طول خط $x = 0$ محاسبه‌کرد. چون اطلاعی دربارهٔ $\partial\phi/\partial n$ بر $x = 0$ نداریم، جمله‌ای که این عبارت در آن ظاهر می‌شود باید حذف شود. ما آن را با انتخاب g به صورت

$$g = 0 \quad \text{و} \quad x = 0 \qquad (۱۴۶-۷)$$

حذف می‌کنیم.

یک راه برقراری معادلهٔ (۷ــ ۱۴۶) این است که g "نیم‌فضای" خاص تابع گرین باشد که نسبت به x متقارن فرد است. اگر g از این نوع باشد، آن‌گاه در شرط زیر باید صدق کند

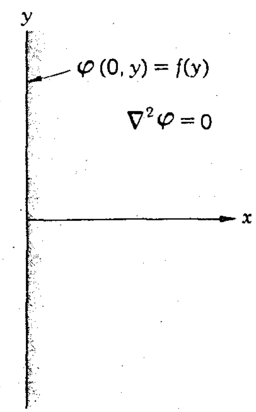
$$g(-x,x';y,y') = -g(x,x';y,y') \qquad (۱۴۷-۷)$$

درنتیجه g بر $x = 0$ صفر می‌شود. فرض کنید که

$$g(x,x';y,y') = G(x,x';y,y') - G(-x,x';y,y') \qquad (۱۴۸-۷)$$

و $G(x,x';y,y')$ در شرط

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y') \qquad (۱۴۹-۷)$$



شکل ۷ــ ۲. مسألهٔ پتانسیل برای یک نیم‌فضا

صدق کند . در این صورت G پتانسیل نقطهٔ (x',y') را که از منبع خطی با چگالی بارمثبت واحد در (x,y) به وجود آمده نشان می‌دهد . بدیهی است g آن‌طور که در معادلهٔ (۷ ــ ۱۴۸) داده شده دارای خاصیت (۷ ــ ۱۴۷) است و درنتیجه در معادلهٔ (۷ ــ ۱۴۶) صدق می‌کند . علاوه براین ، (۷ ــ ۱۴۸) یک تعبیر فیزیکی g را می‌دهد . به علت معادلهٔ (۷ ــ ۱۴۹) ، g باید در شرط زیر صدق کند .

$$\nabla^2 g = -\delta(x - x')\,\delta(y - y') + \delta(x + x')\,\delta(y - y') \qquad (۷-۱۵۰)$$

$$g = 0 \;,\; x = 0 \qquad (۷-۱۵۱)$$

و بنابراین $g(x,x';y,y')$ باید پتانسیل نقطهٔ (x',y') را نشان دهد درصورتی‌که یک صفحهٔ هادی متصل به زمین در وسط فاصلهٔ بین یک منبع خطی با چگالی بار مثبت واحد واقع در (x,y) و یک منبع خطی با چگالی بار منفی واحددر $(-x,y)$ واقع شده باشد . درنظریهٔ الکترومانیتیک ، این جواب به صورت زیر توصیف می‌شود که برای تعیین پتانسیل حاصل ازبارخطی‌مثبت درمجاورت صفحهٔ هادی متصل به زمین ، لازم است یک بار خطی موهومی با علامت مخالف معرفی کنیم . محل این بار فرضی به قسمی انتخاب می‌شود که ازنظر هندسی انعکاسی در صفحهٔ متصل به زمین بار خطی اولیه باشد .

حال می‌توانیم به معادلهٔ (۷ ــ ۱۴۷) مراجعه کنیم . چون $\partial g/\partial n$ میزان تغییر g رادر امتداد قائم بر $C(S)$ نشان می‌دهد ، باید داشته باشیم

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\partial g}{\partial x} \text{ on } x = 0 \qquad (۷-۱۵۲)$$

باتوجه به (۷ ــ ۱۴۰) ، (۷ ــ ۱۴۱) و (۷ ــ ۱۵۰) تا (۷ ــ ۱۵۲) ، از معادلهٔ (۷ ــ ۱۴۵) نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)[\delta(x - x')\,\delta(y - y') - \delta(x + x')\,\delta(y - y')]\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy \qquad (۷-۱۵۳)$$

تنها جملهٔ اول معادلهٔ (۷ ــ ۱۵۳) در طرف چپ به علت مثبت بودن x و باتوجه به

$$\phi(x',y') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy \qquad (۷-۱۵۴)$$

جواب صوری مسأله است . معادلهٔ (۷ ــ ۱۵۴) تابع $\phi(x',y')$ رابرحسب تابع گرین نیم‌فضانشان می‌دهد . درنتیجه مسألهٔ واقعی ساختن خود تابع گرین خواهد بود .

ساختن تابع گرین نیم‌فضا

دوباره به حل مسألهٔ زیر توجه کنید

$$\nabla^2 G = -\delta(x-x')\,\delta(y-y') \tag{۱۵۵ − ۷}$$

با این شرط که در فاصلهٔ بسیار دور از منبع، G و مشتقات آن به صفر نزدیک شوند. معادلهٔ (۷ − ۱۵۵) را در e^{-iky} ضرب کرده نسبت به y از $y=-\infty$ تا $y=+\infty$ انتگرال می‌گیریم،

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx^2} - k^2\bar{G} = -\delta(x-x')e^{-iky'} \tag{۱۵۶ − ۷}$$

که در آن

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{-iky}\,dy \tag{۱۵۷ − ۷}$$

با فرض این که

$$\lim_{|y|\to\infty}\left(\frac{\partial G}{\partial y} + ikG\right) = 0 \tag{۱۵۸ − ۷}$$

قبلاً معادلهٔ (۷ − ۱۵۶) و جواب عمومی آن را در معادلات (۷ − ۶۶) و (۷ − ۶۸) دیده‌ایم. ولی، به‌دست‌آوردن یک‌انتگرال خصوصی (۷ − ۱۵۶) با روش دیگر مورد توجه خواهد بود. پس، دو معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$\bar{G} = Ae^{-|k|(x-x')} \qquad x > x' \tag{۱۵۹ − ۷}$$

و

$$\bar{G} = Be^{|k|(x-x')} \qquad x < x' \tag{۱۶۰ − ۷}$$

هردو معادلهٔ (۷ − ۱۵۹) و (۷ − ۱۶۰) در (۷ − ۱۵۶) صدق می‌کنند اگر $x \neq x'$. جواب (۷ − ۱۵۹) دارای این خاصیت است که مختص منبع $x \to +\infty$، نوسانات $\bar{G}$ در x' به صفر میل می‌کند، زیرا دراین صورت منبع و ناظر از یکدیگر بی‌نهایت فاصله می‌گیرند. همین‌طور، وقتی $x \to -\infty$ در معادلهٔ (۷ − ۱۶۰) نوسانات در x' نیز صفر می‌شود. هر "نصف" جواب رفتارصحیح را در x' می‌دهد وقتی منبع درامتداد مناسبی به ∞ می‌رسد. خارج این دو قطعه (۷ − ۱۵۹) و (۷ − ۱۶۰)، یک جواب منحصر به فرد برای (۷ − ۱۵۶) خواهیم ساخت.

برای پیوسته بودن معادلات (۷ − ۱۵۹) و (۷ − ۱۶۰) در $x=x'$ باید $A = B$، و درنتیجه

$$\bar{G} = Ae^{-|k|(x-x')} \quad , \quad x > x' \tag{۱۶۱ − ۷}$$

و

$$\bar{G} = Ae^{|k|(x-x')} \quad , \quad x < x' \tag{۱۶۲ − ۷}$$

باهم یک جواب پیوستهٔ معادلهٔ (۷ − ۱۵۶) راتشکیل می‌دهند. اکنون هدف انتخاب A به‌قسمی است که معادلات (۷ − ۱۶۱) و (۷ − ۱۶۲) نه‌تنها برای $x > x'$ و $x < x'$ در (۷ − ۱۵۶) صدق کنند بلکه برای $x \geq x'$ و $x \leq x'$ نیز صادق باشد. برای این کار، انتگرال (۷ − ۱۵۶) را بر بازهٔ

کوچکی به طول 2ϵ به مرکز $x = x'$ محاسبه می‌کنیم

$$\int_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} \frac{d^2\bar{G}}{dx^2}\, dx - k^2 \int_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} \bar{G}\, dx = -e^{-iky'} \int_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} \delta(x - x')\, dx \qquad (۱۶۳-۷)$$

و سپس حد معادلهٔ (۷ – ۱۶۳) را وقتی $\epsilon \to 0$ به‌دست می‌آوریم . حاصل به قرار زیر است

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{d\bar{G}}{dx}\Big|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} = -e^{-iky'} \qquad (۱۶۴-۷)$$

جملهٔ دوم سمت چپ معادلهٔ(۷ – ۱۶۳) به‌ازای $\epsilon \to 0$ صفر می‌شود ، زیرا $\bar{G}$ در $x = x'$ پیوسته است .نتیجهٔ(۷–۱۶۴) بیان می‌کند که مشتق $\bar{G}$ باید در $x=x'$ گسسته بوده و جهتش $d\bar{G}/dx$ باید برابر $-e^{-iky'}$ باشد . با این شرط تعیین A از معادلات (۷ – ۱۶۱) و (۷ – ۱۶۲) امکان‌پذیر خواهد بود . زیرا با مشتق‌گیری داریم

$$\frac{d}{dx} Ae^{-|k|(x-x')} = -|k|Ae^{-|k|(x-x')} \qquad x > x' \qquad (۱۶۵-۷)$$

و

$$\frac{d}{dx} Ae^{|k|(x-x')} = |k|Ae^{|k|(x-x')} \qquad x < x' \qquad (۱۶۶-۷)$$

بنابراین ،

$$\frac{d\bar{G}}{dx}\Big|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} = -|k|Ae^{-|k|\epsilon} - |k|Ae^{-|k|\epsilon} = -2|k|Ae^{-|k|\epsilon} \qquad (۱۶۷-۷)$$

نتیجه می‌دهد

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{d\bar{G}}{dx}\Big|_{x=x'-\epsilon}^{x=x'+\epsilon} = -2|k|A = -e^{-iky'} \qquad (۱۶۸-۷)$$

و از آن جا که

$$A = \frac{e^{-iky'}}{2|k|} \qquad (۱۶۹-۷)$$

دو فرمول (۷ – ۱۶۱) و (۷ – ۱۶۲) را با درنظر گرفتن $|x - x'|$ در نمامی‌توان به صورت یک معادله نوشت ، در این صورت

$$\bar{G} = \frac{e^{-iky'-|k||x-x'|}}{2|k|} \qquad (۱۷۰-۷)$$

جواب مطلوب معادلهٔ (۷ – ۱۵۶) است . تبدیل فوریهٔ تابع گرین نیم‌فضای (۷ – ۱۴۸) ، باید در شرط زیر صدق کند

$$\bar{g}(x,x';y';k) = \bar{G}(x,x';y';k) - \bar{G}(-x,x';y';k) \quad (۱۷۱-۷)$$

که در آن

$$\bar{g}(x,x';y';k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,x';y,y')e^{-iky}\,dy \quad (۱۷۲-۷)$$

با استفاده از معادلهٔ (۷ــ ۱۷۰) نتیجه می‌شود ،

$$\bar{g}(x,x';y';k) = e^{-iky'}\left(\frac{e^{-|k||x-x'|} - e^{-|k||x+x'|}}{2|k|}\right) \quad (۱۷۳-۷)$$

و اگر فرمول وارون فوریه (۵ــ ۳۴۸) را برای معادله (۷ــ ۱۷۳) به‌کار بریم داریم

$$g(x,x';y,y') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(y-y')}\,\frac{e^{-|k||x-x'|} - e^{-|k||x+x'|}}{2|k|}\,dk \quad (۱۷۴-۷)$$

فرمول (۷ــ ۱۵۴) درمورد $\phi(x',y')$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\phi(x',y') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\frac{\partial g}{\partial x}\,dy \quad (۱۷۵-۷)$$

که با درنظر گرفتن $\partial g/\partial x$ بر $x = 0$ آن را می‌توان ساده کرد .

از معادلهٔ (۷ــ ۱۷۴) مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k(y-y')}\,\frac{-|k|e^{-|k||x-x'|} + |k|e^{-|k||x+x'|}}{2|k|}\,dk \qquad x > x' > 0 \quad (۱۷۶-۷)$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(y-y')}\,\frac{|k|e^{-|k||x-x'|} + |k|e^{-|k||x+x'|}}{2|k|}\,dk \qquad x' > x > 0 \quad (۱۷۷-۷)$$

وقتی $x \to 0$ ، ازدوانتخاب ممکن (۷ــ ۱۷۶) و (۷ــ ۱۷۷) برای $\partial g/\partial x$ باید عبارت مناسب را اختیار کرد . چون فرض می‌شود ناظر در نیم‌فضای $x > 0$ قراردارد ، نامساوی $x > x' > 0$ مربوط به (۷ــ ۱۷۶) این عبارت به ازای $x = 0$ از بحث خارج می‌شود . بنابراین (۷ــ ۱۷۷) باقی می‌ماند که به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(y-y')-|k||x'|}\,dk \quad , \quad x = 0 \quad (۱۷۸-۷)$$

انتگرال معادلهٔ (۷ــ ۱۷۸) را می‌توان مستقیما" محاسبه کرد :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(y-y')-|k||x'|}\,dk &= \int_{-\infty}^{0} e^{ik(y-y')-|k||x'|}\,dk \\ &+ \int_0^{\infty} e^{ik(y-y')-|k||x'|}\,dk = \int_0^{\infty} e^{-ik(y-y')-|k||x'|}\,dk \\ &+ \int_0^{\infty} e^{ik(y-y')-|k||x'|}\,dk = \frac{-1}{-i(y-y')-|x'|} \\ &- \frac{1}{i(y-y')-|x'|} = \frac{+2|x'|}{(x')^2+(y-y')^2}\end{aligned} \qquad (۷-۱۷۹)$$

درنتیجه

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{1}{\pi}\,\frac{|x'|}{(x')^2+(y-y')^2} \qquad (۷-۱۸۰)$$

پس، مسألهٔ محاسبهٔ یک تابع پتانسیل که در معادلهٔ لاپلاس در نیم‌فضای $x'\geq 0$ صدق کند و بر $x'=0$ به صورت $f(y')$ خلاصه شود با فرمول زیر حل می‌شود،

$$\phi(x',y') = \frac{x'}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{(x')^2+(y-y')^2}\,dy \qquad (۷-۱۸۱)$$

تبصره: مسالهٔ حل معادلهٔ $\nabla^2\phi = 0$ به قسمی که ϕ برمرز دامنهٔ مفروضی به‌صورت تابع معلوم خلاصه شود به "مسألهٔ دیریکله" مشهور است. می‌گوییم تابع روی مرز در شرط دیریکله ناهمگن صدق می‌کند. مثلاً، معادلهٔ (۷ــ ۱۸۱) جواب مسألهٔ دیریکله برای نیم‌فضای $x'\geq 0$ است، و $\phi(x',y')$ در شرط دیریکله ناهمگن $\phi(0,y') = f(y')$ بر مرز $x' = 0$ نیم‌فضا صدق می‌کند.

۷ــ ۱۱. معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی

در مختصات قطبی (r,θ)، معادلهٔ لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (۷-۱۸۲)$$

روش تابع گرین در حل مسائل مقدار مرزی برای معادلهٔ (۷ــ ۱۸۲) ازانتگرال استفاده می‌کند. فقط در ساختن تابع گرین است که باید از دستگاه مختصات خاصی استفاده کرد. پس معادلهٔ (۷ــ ۳۴) جواب صوری (۷ــ ۱۸۲) را می‌دهد.

$$\phi(r',\theta') = \int_{C(S)} \left\{G\,\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\,\frac{\partial G}{\partial n}\right\} ds \qquad (۷-۱۸۳)$$

حال تابع گرین $G(r,r';\theta,\theta')$ در (۷ــ ۱۸۳) به‌عنوان جواب معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')}{r} \qquad (۷-۱۸۴)$$

باتوجه به معادلات (۷ — ۱۸۳) و (۷ — ۱۸۴) چند تذکرلازم می‌شود. فرمول (۷—۱۸۳) پتانسیل ϕ رادرنقطهٔ (r',θ') برحسب مقادیر مرزی ϕ و $\partial\phi/\partial n$ بر منحنی $C(S)$ محیط بر (r',θ') نشان می‌دهد.

این شرایط درواقع برای تعیین مسأله بیش از حد لازم است زیرا ϕ و $\partial\phi/\partial n$ نمی‌توانند بطور مستقل بر $C(S)$ معین شوند. برای دیدن صحت این مطلب مشابه معادلهٔ لاپلاس را در فضای یک بعدی درنظر بگیرید،

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad ، \quad a \leq x \leq b \qquad (۱۸۵ - ۷)$$

نظیر معادلهٔ (۷ — ۱۸۳) داریم

$$\phi(x') = \left\{ G\frac{d\phi}{dx} - \phi\frac{dG}{dx} \right\}_{x=a}^{x=b} \qquad (۱۸۶ - ۷)$$

که در آن $G(x|x')$ جواب معادلهٔ زیر است

$$\frac{d^2G}{dx^2} = -\delta(x-x') \qquad (۱۸۷ - ۷)$$

درفرمول (۷ — ۱۸۶) لازم است ϕ و $d\phi/dx$ در $x=a$ و $x=b$ معین شوند. ولی، جواب معادلهٔ (۷ — ۱۸۵) بایدیک خط راست باشد، که ϕ و $d\phi/dx$ را در $x=a$ مشخص می‌کند. این کمیتهابطور کامل در $x=b$ معین می‌شوند و مقادیرآنهانمی‌تواند اختیاری باشد. برای رهایی ازاین بن‌بست G را به قسمی انتخاب می‌کنیم که در $x=a$ و $x=b$ صفر شود. دراین صورت معادلهٔ (۷ — ۱۸۶) تنها شامل مقادیر ϕ در a و b خواهد بود و البته این مقادیر نمی‌توانند اختیاری باشند.

همین استدلال نشان می‌دهد که ϕ و $\partial\phi \;\; \partial n$ هر دو نمی‌توانند بر $C(S)$ اختیاری باشند. این اشکال نیزمانند قبل قابل رفع است. معادلهٔ (۷ — ۱۸۴) راتحت شرط دیریکله همگن $G = 0$، بر $C(S)$ حل می‌کنیم که در فرآیند زیر به‌دست می‌آید

$$\phi(r',\theta') = -\int_{C(S)} \phi\frac{\partial G}{\partial n}\, ds \qquad (۱۸۸ - ۷)$$

امکانات دیگر نیز وجود دارد، ولی از آنها در این جا بحثی نخواهیم کرد.

با مراجعه به (۷ — ۱۸۴) توجه کنید که سمت راست شامل عبارت

$$-\delta(\theta-\theta')\,\delta(r-r')/r$$

است. عامل $1/r$ به‌علت این‌که عنصرمساحت درمختصات قطبی‌برابر $dS=r\,dr\,d\theta$ است به‌وجود می‌آید و باید داشته باشیم:

$$\int_S \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dS = \iint_S \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,dx\,dy$$
$$= \iint_S \frac{\delta(r-r')}{r}\,\delta(\theta-\theta')r\,dr\,d\theta \qquad (۱۹۰-۷)$$
$$= \begin{cases} 1 & (r',\theta') \ \epsilon\ S \\ 0 & (r',\theta') \ \epsilon\ S \end{cases}$$

۷ــ ۱۲ . ساختن تابع گرین در مختصات قطبی

مشکل واقعی در به‌کار بردن معادلهٔ (۷ــ ۱۸۸) یا (۷ــ ۱۸۹) ساختن یک تابع گرین مناسب است . برای این منظور از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم . اگر

$$\phi = R(r)\Theta(\theta) \qquad (۱۹۱-۷)$$

را در معادلهٔ

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (۱۹۲-۷)$$

قرار دهیم ، نتیجه می‌شود

$$r^2\,\frac{d^2R/dr^2 + (1/r)\,dR/dr}{R} = -\,\frac{d^2\Theta/d\theta^2}{\Theta} \qquad (۱۹۳-۷)$$

چون سمت چپ معادله (۷ــ ۱۹۳) فقط تابع r است ، ولی سمت راست فقط به θ بستگی دارد هر دو طرف باید مساوی یک مقدار ثابت مثلا" n^2 باشند . در این صورت

$$-\,\frac{d^2\Theta/d\theta^2}{\Theta} = n^2 \qquad (۱۹۴-۷)$$

$$r^2\,\frac{d^2R/dr^2 + (1/r)\,dR/dr}{R} = n^2 \qquad (۱۹۵-۷)$$

و معادلات جداشده عبارتند از :

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0 \qquad (۱۹۶-۷)$$

و

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2}R = 0 \qquad (۱۹۷-۷)$$

که در آن n عددی صحیح و Θ تابعی متناوب از θ با دورهٔ متناوب 2π است . جوابهای معادلات

(۷ــ ۱۹۶) و (۷ــ ۱۹۷) همواره به دو گروه تقسیم می‌شود برحسب آن که n صفر یا مخالف صفر باشد .

اگر n صفر نباشد ،

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \tag{۷ــ ۱۹۸}$$

و

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \tag{۷ــ ۱۹۹}$$

جوابهای عمومی معادلات (۷ــ ۱۹۶) و (۷ــ ۱۹۷) هستند . به ازای $n = 0$ جواب به صورت زیر درمی‌آید

$$\Theta_0 = A_0\theta + B_0 \tag{۷ــ ۲۰۰}$$

$$R_0(r) = C_0 \log r + D_0 \tag{۷ــ ۲۰۱}$$

اگر n عدد صحیح باشد ، یک مجموع نامتناهی از این جوابهای جداشده جواب عمومی $\nabla^2\phi = 0$ در مختصات قطبی خواهد بود :

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log r + D_0) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\}\{C_n r^n + D_n r^{-n}\}\end{aligned} \tag{۷ــ ۲۰۲}$$

جملهٔ

$$\{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\}\{C_n r^n + D_n r^{-n}\}$$

را "هارمونیک مستدیر درجهٔ n" و

$$\{A_0\theta + B_0\}\{C_0 \log r + D_0\}$$

را "هارمونیک مستدیر درجهٔ صفر" گویند .

ساختن تابع گرین

تابع گرین باید در شرط زیر صدق کند

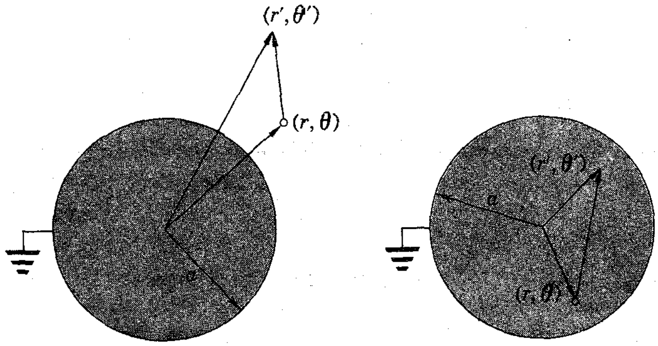
$$\nabla^2 G = -\frac{\delta(r - r')\,\delta(\theta - \theta')}{r} \tag{۷ــ ۲۰۳}$$

و اگر بخواهیم مسألهٔ دیریکله را برای یک دایره با استفاده از معادلهٔ (۷ــ ۱۸۸) حل کنیم ، G باید در شرط مرزی

$$G = 0 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{۷ــ ۲۰۴}$$

بر $r = a$ نیز صدق کند .

تابع درین $G(r,r';\theta,\theta')$ که با معادلهٔ (۷ ــ ۲۰۳) تعریف می‌شود پتانسیل (r',θ')را که از یک منبع خطی بار مثبت واقع در (r,θ) به وجودآمده نشان می‌دهد. معادلهٔ (۷ــ ۲۰۴) وجود یک هادی استوانه‌ای به شعاع $r=a$منتقل به زمین را تأیید می‌کند. اگر $r<a$، $r'<a$، منبع و ناظر هر دو داخل دایره$r=a$خواهند بود و (۷ ــ ۲۰۳) و (۷ ــ ۲۰۴) یک مسألهٔ دیریکله داخلی را تشکیل می‌دهند. اگر$r>a$و $r'>a$، عکس مطلب صحیح است، و(۷ ــ ۲۰۳) و (۷ــ ۲۰۴) یک مسألهٔ دیریکله خارجی را برای دایره تشکیل می‌دهند (شکل ۷ ــ ۳).



مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی   مسألهٔ دیریکلهٔ خارجی

شکل ۷ ــ ۳. مسائل خارجی و داخلی دیریکله برای یک دایره.

مانند روشی که در معادلات (۷ــ ۱۱۹) و (۷ ــ ۱۲۸) به‌کار بردیم، جواب

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')}{r} \qquad (۲۰۵ــ۷)$$

را برحسب بسط توابع ویژهٔ معادلهٔ جداشدهٔ (۷ ــ ۱۹۶) می‌نویسیم:

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n(r) e^{in\theta} \qquad (۲۰۶ــ۷)$$

سمت راست معادلهٔ (۷ ــ ۲۰۵) نیز باید برحسب این توابع ویژه بسط داده شود،

$$\frac{\delta(r-r')}{r}\frac{\delta(\theta-\theta')}{r} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(r-r')}{r} C_n e^{in\theta} \qquad (۲۰۷ــ۷)$$

برای محاسبهٔ C_n ها معادلهٔ (۷ ــ ۲۰۷) را در $e^{-im\theta}$ ضرب کرده واز دو طرف نسبت به θ انتگرال می‌گیریم و از تساوی زیر استفاده می‌کنیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = 2\pi\delta_{nm} \qquad (۲۰۸ــ۷)$$

نتیجه می‌شود

$$C_n = (1/2\pi)e^{-in\theta'}$$

و بنابراین،

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')}{r} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{in(\theta-\theta')} \qquad (۷-۲۰۹)$$

اگر معادلات (۷-۲۰۶) و (۷-۲۰۹) را در (۷-۲۰۵) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R_n\right)e^{in\theta} = \frac{-1}{2\pi}\frac{\delta(r-r')}{r}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{in(\theta-\theta')} \qquad (۷-۲۱۰)$$

ازمساوی قراردادن ضرایب $e^{in\theta}$ دردوطرف معادلهٔ (۷-۲۱۰) مقدار R_n معین می‌شود، که باید یک جواب معادلهٔ زیر باشد

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R_n = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{-in\theta'} \qquad (۷-۲۱۱)$$

این معادله را با استفاده از روش (۷-۱۵۹) حل می‌کنیم. فرض کنید r' عدد مثبت ثابتی باشد، و $n\neq 0$ و $r\neq r'$. در این صورت (۷-۲۱۱) در شرایط زیر صدق می‌کند

$$R_n = Ar^{|n|} \qquad 0\le r<r'<\infty \qquad (۷-۲۱۲)$$

و

$$R_n = Br^{-|n|} \qquad r'<r<\infty \qquad (۷-۲۱۳)$$

علامت قدرمطلق برای n در معادلات فوق متناهی بودن R_n را برای $r=0$ و $r=\infty$ تضمین می‌کند، صرفنظر از این که n یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.

چون R_n در $r=r'$ پیوسته است:

$$A(r')^{|n|} = B(r')^{-|n|} \qquad (۷-۲۱۴)$$

برای محاسبهٔ A و B در معادلهٔ (۷-۲۱۱) نسبت به r از $r=r'-\epsilon$ تا $r=r'+\epsilon$ انتگرال می‌گیریم، که در آن ϵ عدد مثبت کوچکی است:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}R_n = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{-in\theta'} \qquad (۷-۲۱۵)$$

و بنابراین

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)dr - n^2\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}\frac{R_n}{r}\,dr = -\frac{1}{2\pi}e^{-in\theta'} \qquad (۷-۲۱۶)$$

حد معادلهٔ (۷ــ ۲۱۶) را وقتی $\epsilon \to 0$ پیدا می‌کنیم. چون R_n در $r = r'$ پیوسته است، جملهٔ دوم (۷ــ ۲۱۶) صفر می‌شود و

$$\lim_{\epsilon\to 0} r\,\frac{dR_n}{dr}\Big|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -\frac{1}{2\pi}\,e^{-in\theta'} \tag{۲۱۷ــ۷}$$

باتوجه به معادلات (۷ــ ۲۱۲) و (۷ــ ۲۱۳) از معادلهٔ (۷ــ ۲۱۷) نتیجه می‌شود

$$-|n|B(r')^{-|n|} - |n|A(r')^{|n|} = -\frac{1}{2\pi}\,e^{-in\theta'} \tag{۲۱۸ــ۷}$$

از حل دو معادلهٔ (۷ــ ۲۱۸) و (۷ــ ۲۱۴) باهم A و B به‌دست می‌آیند:

$$A = \frac{e^{-in\theta'}}{4\pi|n|(r')^{|n|}} \tag{۲۱۹ــ۷}$$

$$B = \frac{(r')^{|n|}e^{-in\theta'}}{4\pi|n|} \tag{۲۲۰ــ۷}$$

به ازای $n \neq 0$،

$$R_n = \frac{1}{4\pi|n|}\left(\frac{r}{r'}\right)^{|n|} e^{-in\theta'} \qquad 0 \leq r \leq r' \tag{۲۲۱ــ۷}$$

و

$$R_n = \frac{1}{4\pi|n|}\left(\frac{r'}{r}\right)^{|n|} e^{-in\theta'} \qquad r' \leq r < \infty \tag{۲۲۲ــ۷}$$

این دو فرمول را طبق معمول می‌توان با یک معادله نوشت:

$$R_n = \frac{1}{4\pi|n|}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{|n|} e^{-in\theta'} \qquad n \neq 0 \tag{۲۲۳ــ۷}$$

برای حالت $n = 0$، معادلهٔ (۷ــ ۲۱۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR_n}{dr}\right) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{-in\theta} \tag{۲۲۴ــ۷}$$

برای ساختن انتگرال خصوصی‌معادلهٔ (۷ــ ۲۴۴) به دوجواب مستقل خطی‌صورت همگن (۷ــ ۲۴۴) نیاز داریم. این جوابها عبارتند از $C_0 \log r$ و ثابت D_0. اگر G در مبدأ $r = 0$، متناهی باشد باید انتخاب به شکل زیر صورت گیرد:

$$R_0(r) = D_0 \quad , \quad 0 \leq r < r' \tag{۲۲۵ــ۷}$$

$$R_0(r) = C_0 \log r \quad , \quad r' < r < \infty \tag{۲۲۶ــ۷}$$

و چون $R_0(r)$ در $r = r'$ پیوسته است:

$$C_0 \log r' = D_0 \qquad (۲۲۷-۷)$$

به ازای $n = 0$ معادلهٔ (۷ــ ۲۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\lim_{\epsilon \to 0} r \frac{dR_0}{dr}\Big|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -\frac{1}{2\pi} \qquad (۲۲۸-۷)$$

و نتیجه می‌دهد ،

$$C_0 = -1/2\pi$$

پس

$$R_0(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r' \qquad 0 \leq r \leq r' \qquad (۲۲۹-۷)$$

$$R_0(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r \qquad r' \leq r < \infty \qquad (۲۳۰-۷)$$

که جواب معادلهٔ (۷ــ ۲۱۵) به ازای $n = 0$ است . مانند قبل معادلات (۷ــ ۲۲۹) و (۷ــ ۲۳۰) را می‌توان به صورت یک معادله بیان کرد :

$$R_0(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r_> \qquad (۲۳۱-۷)$$

از معادلهٔ (۷ــ ۲۰۶) باتوجه به (۷ــ ۲۲۳) و (۷ــ ۲۳۱) تابع ویژهٔ بسط تابع‌گرین به‌دست می‌آید :

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') = -\frac{1}{2\pi} \log r_> + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{|n|} \frac{e^{in(\theta-\theta')}}{|n|} \qquad (۲۳۲-۷)$$

پرایم روی علامت جمع در معادلهٔ (۷ــ ۲۳۲) به این معنی است که مقدار $n = 0$ درنظر گرفته نمی‌شود . با استفاده از اتحاد اویلر ، (۷ــ ۲۳۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') = -\frac{1}{2\pi} \log r_> + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{n} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۲۳۳-۷)$$

که درآن طبق معمول

$r_> =$ بزرگتر of (r,r') (۲۳۴ــ۷)

$r_< =$ کوچکتر of (r,r') (۲۳۵ــ۷)

تابع‌گرین (۷ــ ۲۳۳) یک‌انتگرال‌خصوصی‌معادلهٔ (۷ــ ۲۰۵) است . این‌تابع ، پتانسیل حاصل از منبع خطی با چگالی بار مثبت واحد را نشان می‌دهد ، به شرط‌آن که هیچ‌گونه مرزی وجود نداشته باشد .

تابع گرین برای مسألهٔ دیریکله داخلی

تابع گرین برای مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی جواب معادلهٔ (۷ ــ ۲۰۵) است که متناظر یک منبع خطی با بار مثبت موجود در داخل هادی استوانه‌ای $r = a$ است. ما آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$G = G_i + G_\infty \qquad (۷-۲۳۶)$$

که در آن G_∞ پتانسیل را درغیاب استوانه نشان می‌دهد، وپتانسیل القایی G_i جواب معادلهٔ زیر است

$$\nabla^2 G_i = 0 \qquad (۷-۲۳۷)$$

که در داخل استوانه ثابت می‌ماند. شرط این که استوانه به زمین متصل باشد این است که بر $r = a$،

$$G = G_i + G_\infty = 0 \qquad (۷-۲۳۸)$$

از تحلیل قبل نتیجه می‌شود

$$G_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n r^{|n|} e^{in\theta} + \frac{1}{2\pi}\log a \qquad (۷-۲۳۹)$$

که در آن ثابتهای C_n از معادلهٔ (۷ ــ ۲۳۸) به‌دست می‌آیند. برای مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی، به ازای $r=a$ باید داشته باشیم $r' < r = a$ با استفاده از معادلات (۷ ــ ۲۳۲) و (۷ ــ ۲۳۹) از معادلهٔ (۷ ــ ۲۳۸) نتیجه می‌شود:

$$C_n a^{|n|} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{r'}{a}\right)^{|n|}\frac{e^{-in\theta'}}{|n|} = 0 \qquad (۷-۲۴۰)$$

یا

$$C_n = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{r'}{a^2}\right)^{|n|}\frac{e^{-in\theta'}}{|n|} \qquad (۷-۲۴۱)$$

ثابت جمعی $(1/2\pi)\log a$ در معادلهٔ (۷ ــ ۲۳۹) به قسمی انتخاب می‌شود که وقتی با

$-(1/2\pi)\log r_>$

در G_∞ ترکیب شود به صورت

$(1/2\pi)\log a/r_>$

خلاصه شود که در $r = a$ صفر می‌شود.

جواب تابع گرین داخلی عبارت است از:

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{a}{r_>} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{|n|} - \left(\frac{r_> r_<}{a^2}\right)^{|n|}\right]\frac{e^{in(\theta-\theta')}}{|n|} \qquad (۷-۲۴۲)$$

یا

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{a}{r_>} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n - \left(\frac{r_>r_<}{a^2}\right)^n\right]\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۷-۲۴۳)$$

به آسانی بررسی می‌شود که G بر $r = a$ به ازای $r' < a$ ، صفر می‌شود .

تفسیر $G(r,r';\theta,\theta')$

فرض کنید $r' < r$ ، در این صورت معادلهٔ (۷ـ ۲۳۳) ، نتیجه می‌دهد .

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') = -\frac{1}{2\pi}\log r + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۷-۲۴۴)$$

اگر به جای r در معادلهٔ (۷ ـ ۲۴۴) ، a^2/r قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$G_\infty\left(\frac{a^2}{r}, r';\theta,\theta'\right) = \frac{-1}{2\pi}\log\frac{a^2}{r} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^n\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۷-۲۴۵)$$

اگر معادلهٔ (۷ ـ ۲۴۵) را از (۷ ـ ۲۴۴) کم کنیم ، داریم

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') - G_\infty\left(\frac{a^2}{r}, r';\theta,\theta'\right) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^n - \left(\frac{rr'}{a^2}\right)^n\right]\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۷-۲۴۶)$$

و از معادلهٔ (۷ ـ ۲۴۳) معلوم می‌شود که

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{a}{r} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^n - \left(\frac{rr'}{a^2}\right)^n\right]\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \qquad (۷-۲۴۷)$$

حال از مقایسهٔ معادلات (۷ ـ ۲۴۶) و(۷ ـ ۲۴۷)معلوم می‌شودکه‌به‌ازای $r' < r \leq a$:

$$G(r,r';\theta,\theta') = G_\infty(r,r';\theta,\theta') - G_\infty\left(\frac{a^2}{r}, r';\theta,\theta'\right) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{a}{r} \qquad (۷-۲۴۸)$$

دو جملهٔ اول در معادلهٔ (۷ ـ ۲۴۸) پتانسیلهای نقطهٔ (r',θ') را که از یک منبع خطی مثبت در (r,θ) و یک منبع خطی منفی در $(a^2/r,\theta)$ به‌وجود آمده نشان می‌دهند . نقاط (r,θ) و $(a^2/r,\theta)$ تصاویر یکدیگر در دایرهٔ $r = a$ هستند .اگر بار خطی مثبت اولیه داخل دایرهٔ $r = a$ باشد ، بار منفی تصویر خارج دایره ، برهمان قطر و به‌فاصلهٔ a^2/r از مرکز $(r = 0)$ دایره قرار

می‌گیرد .

در معادلهٔ (۷ ــ ۲۴۴) به ازای $r' = 0$ ، داریم

$$G_\infty = -\frac{1}{2\pi}\log r \qquad (۲۴۹-۷)$$

که پتانسیل رادر فاصلهٔ r واحد از یک بارخطی مثبت واحد نشان می‌دهد . بنابراین ، می‌توان نوشت :

$$G_\infty = -\frac{1}{2\pi}\log R \qquad (۲۵۰-۷)$$

که در آن

$$R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = [(r)^2 + (r')^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')]^{1/2} \qquad (۲۵۱-۷)$$

فاصلهٔ بین منبع خطی و ناظر را اندازه می‌گیرد . یک نتیجهٔ فوری معادلات (۷ ــ ۲۵۰) و (۷ ــ ۲۳۳) بسط زیر است :

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R} = -\frac{1}{2\pi}\log r_> + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n \frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \qquad (۲۵۲-۷)$$

باتوجه به آن معادلهٔ (۷ ــ ۲۴۸) به صورت

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{rR'}{aR} \qquad (۲۵۳-۷)$$

خلاصه می‌شود که

$$R' = \left|\mathbf{r}' - \frac{a^2}{r^2}\mathbf{r}\right| = \left[\frac{a^4}{r^2} + (r')^2 - 2a^2\frac{r'}{r}\cos(\theta - \theta')\right]^{1/2} \qquad (۲۵۴-۷)$$

فاصلهٔ بین نقطهٔ $\mathbf{r}'$ و بار تصویر واقع در $(a^2/r^2)\mathbf{r}$ است .از ترکیب معادلات (۷ ــ ۲۵۱) و (۷ ــ ۲۵۴) معادلهٔ

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{4\pi}\log\frac{a^2 + (rr'/a)^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')}{(r')^2 + (r)^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')} \qquad (۲۵۵-۷)$$

برای صورت بستهٔ عبارت تابع گرین داخلی به‌دست می‌آید .

پتانسیل ϕ در (r',θ') داخل‌دایره برحسب مقادیرمرزی بردایرهٔ $r=a$ بامعادلهٔ (۷ــ۱۸۸) داده می‌شود :

$$\phi(r',\theta') = -\int_{r=a}\phi(a,\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \qquad (۲۵۶-۷)$$

چون قائم بر دایرهٔ $r = a$ به سمت خارج و درامتداد شعاع r است ، داریم

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{1}{2\pi}\frac{(r')^2 - a^2}{a[a^2 - 2ar'\cos(\theta - \theta') + (r')^2]} \qquad (۲۵۷-۷)$$

براین دایره عنصر طول قوس برابر است با $ds = a\,d\theta$؛ بنابراین از معادلات (۷ — ۲۵۶) و (۷— ۲۵۷) نتیجه می‌شود ،

$$\phi(r',\theta') = \frac{a^2 - (r')^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(a,\theta)\,d\theta}{a^2 - 2ar'\cos(\theta - \theta') + (r')^2} \qquad (۲۵۸-۷)$$

که مسأله را حل می‌کند . فرمول (۷ — ۲۵۸) را جواب انتگرال پواسن مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی برای یک دایره گویند .

۷ — ۱۳ . مسألهٔ دیریکلهٔ خارجی برای یک دایره

برای مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی ، یک تابع گرین G_∞ با این خاصیت ساختیم‌که اگر $r \to 0$ و $r' \neq 0$ ، G_∞ متناهی بود . این مطلب ازنظر فیزیکی معقول است و بیان می‌کندکه پتانسیل r' واحد دور از منبع خطی متناهی است . برای مسألهٔ دیریکله خارجی ، منبع وناظرخارج دایرهٔ $r = a$ واقعند . اگر بگذاریم منبع به بی‌نهایت میل کند ،یعنی $r \to \infty$، درحالی که ناظرثابت و به فاصلهٔ کم از مختصات اولیه باقی بماند ، آن‌گاه پتانسیل r' نیز بایدثابت بماند . این شرط لازمه‌اش تغییرمعادلهٔ (۷ — ۲۳۳) است زیرا درغیراین صورت اگر $r \to \infty$، بطور لگاریتمی واگرا خواهد بود . به جای (۷ — ۲۳۳) داریم

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta') = -\frac{1}{2\pi}\log r_< + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n\frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \qquad (۲۵۹-۷)$$

این شکل تابع گرین ، در معادلهٔ (۷ — ۲۰۵) صدق می‌کند واگر $r \to \infty$، متناهی‌باقی می‌ماند .

تابع گرین برای مسألهٔ دیریکلهٔ خارجی جواب معادلهٔ (۷ — ۲۰۵) است که متناظر یک منبع خطی از بار مثبت واقع در خارج استوانهٔ هادی $r = a$ است که به زمین متصل شده باشد . تابع گرین خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$G = G_i + G_\infty \qquad (۲۶۰-۷)$$

که درآن G_∞ بامعادلهٔ (۷ — ۲۵۹) داده می‌شود و پتانسیل رادرغیاب استوانه نشان می‌دهد . پتانسیل القایی G_i یک جواب

$$\nabla^2 G_i = 0 \qquad (۲۶۱-۷)$$

است . و اگر $r \to \infty$، ثابت می‌ماند و در شرط مرزی

$$G = G_i + G_\infty = 0 \quad , \quad r = a \tag{۷-۲۶۲}$$

صدق می‌کند . تابع G_i باید به صورت زیر باشد

$$G_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{-n} \cos n(\theta - \theta') + \frac{1}{2\pi} \log a \tag{۷-۲۶۳}$$

زیرا ، معادلهٔ (۷ ــ ۲۶۳) در معادلهٔ (۷ ــ ۲۶۱) صدق کرده و اگر $r \to \infty$، بطور صحیح عمل می‌کند . جملهٔ ثابت در (۷ ــ ۲۶۳) برای حذف جملهٔ

$$-(1/2\pi)\ \log\ r_<$$

در G_∞ انتخاب می‌شود که در آن $r = a$. درنتیجه با استفاده از معادلات (۷ ــ ۲۵۹) و (۷ــ ۲۶۳) و (۷ ــ ۲۶۲) برای محاسبهٔ C_n ها ، تابع‌گرین خارجی برای یک دایره عبارت‌است از :

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{r_<}{a}\right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n - \left(\frac{a^2}{r_> r_<}\right)^n\right] \frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \tag{۷-۲۶۴}$$

تفسیر $G(r,r';\theta,\theta')$

با فرض $a \leq r < r'$، از معادلهٔ (۷ ــ ۲۶۴) نتیجه می‌شود ،

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{a} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{r'}\right)^n - \left(\frac{a^2}{rr'}\right)^n\right] \frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \tag{۷-۲۶۵}$$

باتوجه به معادلهٔ (۷ ــ ۲۵۲) داریم

$$\frac{1}{2\pi} \log R = -\frac{1}{2\pi} \log r' = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n \frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \tag{۷-۲۶۶}$$

و

$$\frac{1}{2\pi} \log R' = -\frac{1}{2\pi} \log r' + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{rr'}\right)^n \frac{\cos n(\theta - \theta')}{n} \tag{۷-۲۶۷}$$

که در آن

$$R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \tag{۷-۲۶۸}$$

فاصلهٔ R' از R به‌دست می‌آید که در آن به جای r از a^2/r استفاده شده است :

$$R' = \left| \mathbf{r}' - \frac{a^2}{r^2}\mathbf{r} \right| \tag{۷ – ۲۶۹}$$

مقایسهٔ معادلات (۷ – ۲۶۵) و (۷ – ۲۶۷) نشان می‌دهد که

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R} - \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R'} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{a} \tag{۷ – ۲۷۰}$$

بنابراین

$$G(r,r';\theta,\theta') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{rR'}{aR} \tag{۷ – ۲۷۱}$$

و این نتیجه با معادلهٔ (۷ – ۲۵۳) تطابق دارد. پتانسیل ϕ در نقطهٔ (r',θ') در خارج دایرهٔ $r=a$ برحسب مقادیر مرزی بر دایره با معادلهٔ (۷ – ۱۸۸) داده می‌شود:

$$\phi(r',\theta') = -\int_{r=a}\phi(a,\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \tag{۷ – ۲۷۲}$$

توجه کنید که چون پتانسیل ناحیهٔ خارجی $a < r'$ را محاسبه می‌کنیم، قائم مرسوم بر دایرهٔ $r=a$، به سمت مرکز متوجه است. با این تبصره، از معادلهٔ (۷ – ۲۷۲) به ازای $a<r'$ نتیجه می‌شود،

$$\phi(r',\theta') = \frac{(r')^2 - a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(a,\theta)\,d\theta}{(r')^2 - 2ar'\cos(\theta-\theta') + a^2} \tag{۷ – ۲۷۳}$$

تابع زیر علامت انتگرال در معادلهٔ (۷ – ۲۷۳) را می‌توان به یک سری توان برحسب a/r' بسط داد. $a < r'$،

$$\begin{aligned}\frac{(r')^2 - a^2}{(r')^2 - 2ar'\cos(\theta-\theta') + a^2} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r'}\right)^n\cos n(\theta-\theta') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\left(\frac{a}{r'}\right)^n\cos n(\theta-\theta')\end{aligned} \tag{۷ – ۲۷۴}$$

که در آن

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2 & n = 1,2,\ldots \\ 1 & n = 0\end{cases} \tag{۷ – ۲۷۵}$$

با درنظر گرفتن معادلهٔ (۷ – ۲۷۴) پتانسیل $\phi(r',\theta')$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\phi(r',\theta') = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r'}\right)^n\epsilon_n\int_0^{2\pi}\phi(a,\theta)\cos n(\theta-\theta')\,d\theta \tag{۷ – ۲۷۶}$$

و این حل مسأله را کامل می‌کند.

۷ ــ ۱۴ . معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای

در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) ، معادلهٔ لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (۲۷۷-۷)$$

تابع گرین متناظر (۷ ــ ۲۷۷) جواب

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(z-z')}{r} \qquad (۲۷۸-۷)$$

است و $G(r,r';\theta,\theta';z,z')$ پتانسیل نقطهٔ (r,θ,z) را که از بارنقطه‌ای مثبت واحدواقع در (r',θ',z') به وجود آمده نشان می‌دهد .

طبق معمول ابتدا از روش جداسازی متغیرهای (۷ ــ ۲۷۷) استفاده می‌کنیم . درمعادلهٔ (۷ ــ ۲۷۷) فرض می‌کنیم

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

سپس نتیجه را بر $R\Theta Z/r^2$ تقسیم می‌کنیم ،

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dR}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{r^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \qquad (۲۷۹-۷)$$

سمت راست معادلهٔ (۷ ــ ۲۷۹) فقط به θ بستگی دارد درصورتی که سمت چپ تابعی از r و z است . درنتیجه ، سمت راست (۷ ــ ۲۷۹) باید ثابت باشد و داریم

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=n^2 \qquad (۲۸۰-۷)$$

و معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}=\frac{-1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \qquad (۲۸۱-۷)$$

که در آن سمت چپ معادلهٔ (۷ ــ ۲۸۱) فقط تابع r است درصورتی که سمت راست فقط به z بستگی دارد . درنتیجه هر دو طرف (۷ ــ ۲۸۱) باید برابر یک مقدار ثابت باشد . اگر این مقدار ثابت را k^2 فرض کنیم داریم

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=k^2 \qquad (۲۸۲-۷)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \qquad (۲۸۳-۷)$$

با استفاده از جداسازی متغیرها ، معادلهٔ (۷ ــ ۲۷۷) به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

خلاصه می‌شود ،

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \tag{۲۸۴ − ۷}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0 \tag{۲۸۵ − ۷}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \tag{۲۸۶ − ۷}$$

که دارای دو پارامتر جداسازی n و k است . جواب معادله(۷ − ۲۸۵)برای عامل Θ عبارت است از $\sin n\theta$ یا $\cos n\theta$ یا یک ترکیب خطی از اینها مانند $e^{in\theta}$. سرانجام ، مقادیر مجاز پارامترهای جداسازی n و k از طبیعت شرایط مرزی که ϕ باید در آنها صدق کند معین می‌شوند . مثلاً ، اگر هیچ مرزمسطح برای (ثابت) $= \theta$ وجود نداشته باشد ولی θ از 0 تا 2π تغییرکند ، آن‌گاه n باید صفر یا یک عددصحیح باشد ؛ درغیراین‌صورت ϕ دارای دورهٔ تناوب 2π نخواهدبود . معادلهٔ (۷ − ۲۸۴) دارای جوابهای مثلثاتی یا توابع هذلولی خواهدبودبرحسب آن‌که k عدد حقیقی یا موهومی باشد .

اگر بخواهیم ϕ یا $\partial\phi/\partial z$ بر دو انتهای مسطح یک‌استوانه صفر شود ولی روی آن مقدار معین را اختیار کند ، آنگاه باید ϕ برحسب z متناوب و k موهومی باشد . ازطرف دیگر، اگر بخواهیم وابستگی ϕ را به r بریک یا هر دو انتهای مسطح استوانه معین کنیم درصورتی که ϕ در سطح جانبی استوانه ثابت بماند k باید حقیقی باشد .

وقتی k یک عدد حقیقی است ، معادلهٔ $R(r)$ یک معادلهٔ بسل با جوابهای $J_n(kr)$ و $N_n(kr)$ است . تابع بسل $J_n(kr)$ در مبدأ متناهی است ؛ پس باید وقتی محور استوانه داخل رویهٔ مرزی است‌مورد استفاده قرار گیرد. که‌در آن جواب باید محاسبه‌شود تابع نیمن $N_n(kr)$ ، جواب دوم است این جواب در مبدأ $r = 0$ متناهی‌است. وقتی k موهومی است ، جوابهای معادلهٔ (۷ − ۲۸۶) توابع بسل هذلولیهای $I_n(kr)$ و $K_n(kr)$ هستند . ازاینها $I_n(kr)$ درمبدأ متناهی ودر بی‌نهایت نامتناهی است ، درصورتی که $K_n(kr)$ در مبدأ نامتناهی‌و در بی‌نهایت برابر صفر است.

جوابهای کامل معادلات (۷ − ۲۸۴) تا (۷− ۲۸۶) برای عدد حقیقی غیرصفر k عبارتند از:

$$Z(kz) = Ce^{kz} + De^{-kz} = C'\cosh kz + D'\sinh kz \tag{۲۸۷ − ۷}$$

$$\Theta(n\theta) = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} = A'\cos n\theta + B'\sin n\theta \tag{۲۸۸ − ۷}$$

$$R_n(kr) = EJ_n(kr) + FN_n(kr) = E'H_n^{(1)}(kr) + F'H_n^{(2)}(kr) \tag{۲۸۹ − ۷}$$

درصورتی که برای عدد موهومی k برابرند با

$$Z(kz) = C\cos kz + D\sin kz = C'e^{ikz} + D'e^{-ikz} \tag{۲۹۰ − ۷}$$

$$\Theta(n\theta) = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} = A' \cos n\theta + B' \sin n\theta \qquad (۷-۲۹۱)$$

$$R_n(kr) = EK_n(kr) + FI_n(kr) \qquad (۷-۲۹۲)$$

اگر $k = 0$ ، و n یک عدد حقیقی غیرصفر باشد ، داریم

$$Z(z) = Cz + D \qquad (۷-۲۹۳)$$

$$\Theta(n\theta) = A \cos n\theta + B \sin \theta \qquad (۷-۲۹۴)$$

$$R_n(r) = Er^n + Fr^{-n} \qquad (۷-۲۹۵)$$

درصورتی که اگر $k = 0$ و n عددی موهومی باشد داریم

$$Z(z) = Cz + D \qquad (۷-۲۹۶)$$

$$\Theta(n\theta) = A \cosh n\theta + B \sinh n\theta \qquad (۷-۲۹۷)$$

$$R(r) = E \cos (n \log r) + F \sin (n \log r) \qquad (۷-۲۹۸)$$

بالاخره ، اگر k و n هر دو صفر باشند ،

$$Z(z) = Cz + D \qquad (۷-۲۹۹)$$

$$\Theta(\theta) = A\theta + B \qquad (۷-۳۰۰)$$

$$R(r) = E \log r + F \qquad (۷-۳۰۱)$$

هر عبارت به صورت

$$\phi = R_n(kr)\Theta(n\theta)Z(kz) \qquad (۷-۳۰۲)$$

یک جواب معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای است . به این دلیل عباراتی مانند معادلهٔ (۷–۳۰۲) "هارمونیکهای استوانه‌ای" نامیده‌می‌شوند . باجمع یا انتگرال‌گیری روی پارامترهای جداسازی k و n ، می‌توانیم هارمونیکهای استوانه‌ای کلی‌تر به‌دست آوریم‌که درمعادلهٔ لاپلاس صدق کنند .

۷ ــ ۱۵ . ساختن تابع گرین

تابع گرین باید در معادلهٔ زیر صدق کند

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r - r')\, \delta(\theta - \theta')\, \delta(z - z')}{r} \qquad (۷-۳۰۳)$$

وماتابع G رابه وسیلهٔ بسط آن برحسب جوابهای‌جداشدهٔ معادلهٔ (۷ ــ ۲۷۷) خواهیم ساخت؛ پس فرض می‌کنیم

$$G = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(kr) e^{i(n\theta + kz)}\, dk \qquad (۷-۳۰۴)$$

سمت راست معادلهٔ (۷ ــ ۳۰۳) نیز باید برحسب همان جوابهای جداشده بسط داده

شود ، بنابراین می‌نویسیم

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(z-z')}{r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-r')}{r}\,C_n(k)e^{i(n\theta+kz)}\,dk \qquad (۳۰۵-۷)$$

برای محاسبهٔ ضرایب $C_n(k)$ ، دو طرف معادلهٔ (۷ ـ ۳۰۵) را در $e^{-i(m\theta+hz)}$ ضرب کرده نسبت به θ و z انتگرال می‌گیریم ، با استفاده از:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta = 2\pi\delta_{nm} \qquad (۳۰۶-۷)$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-h)z}\,dz = 2\pi\delta(k-h) \qquad (۳۰۷-۷)$$

نتیجه می‌شود

$$C_n(k) = \frac{1}{4\pi^2}\,e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad (۳۰۸-۷)$$

بالاخره می‌توان نوشت :

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(z-z')}{r} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{i[n(\theta-\theta')+k(z-z')]}\,dk \qquad (۳۰۹-۷)$$

اگر معادلات (۷ ـ ۳۰۴) و (۷ ـ ۳۰۹) را در (۷ ـ ۳۰۳) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n\right]e^{i(n\theta+kz)}\,dk = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-r')}{r}\,e^{i[n(\theta-\theta')+k(z-z')]}\,dk \qquad (۳۱۰-۷)$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب $e^{i(n\theta+kz)}$ در دو طرف معادلهٔ (۷ ـ ۳۱۰) جواب مربوط به $R_n(kr)$ به‌دست می‌آید

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\left(k^2+\frac{n^2}{r^2}\right)R_n = \frac{-\delta(r-r')}{4\pi^2r^2}\,e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad (۳۱۱-۷)$$

برای حل معادلهٔ (۷ ـ ۳۱۱) به ازای $k\neq 0$ توجه کنید که اگر $r\neq r'$ آن‌گاه

$$R_n(kr) = \begin{cases} AI_n(kr) \\ BK_n(kr) \end{cases} \tag{۳۱۲ – ۷}$$

جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۷ – ۳۱۱) هستند . چون منبع نه درمبدأ $r = 0$ و نه در بی‌نهایت است ، تابع گرین باید در $r = 0$ و $r = \infty$ متناهی بماند . این مطلب ما را مجبور می‌کند که دو جواب (۷ – ۳۱۲) را به قسمی درنظر بگیریم که

$$R_n = AI_n(kr) \qquad 0 \le r < r' \tag{۳۱۳ – ۷}$$

$$R_n = BK_n(kr) \qquad r' < r < \infty \tag{۳۱۴ – ۷}$$

از پیوستگی معادلات (۷ – ۳۱۳) و (۷ – ۳۱۴) در $r = r'$ نتیجه می‌شود :

$$AI_n(kr') = BK_n(kr') \tag{۳۱۵ – ۷}$$

که یک معادله برای A و B می‌دهد . معادلهٔ دوم از انتگرال معادلهٔ (۷ – ۳۱۱) نسبت به r از $r = r' - \epsilon$ تا $r = r' + \epsilon$ به‌دست می‌آید که در آن ϵ عدد مثبت کوچک است :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right) - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)R_n = -\frac{\delta(r - r')}{4\pi^2 r}\, e^{-i(n\theta' + kz')} \tag{۳۱۶ – ۷}$$

و بنابراین

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}\left(k^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)R_n\, dr = -\frac{1}{4\pi^2}\, e^{-i(n\theta' + kz')} \tag{۳۱۷ – ۷}$$

حد معادلهٔ (۷ – ۳۱۷) را به ازای $\epsilon \to 0$ پیدا می‌کنیم و به خاطر داریم که جملهٔ دوم در (۷ – ۳۱۷) اگر $\epsilon \to 0$ به علت پیوستگی صفر می‌شود ، درنتیجه

$$\lim_{\epsilon\to 0} r\frac{dR_n}{dr}\Bigg|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -\frac{1}{4\pi^2}\, e^{-i(n\theta' + kz')} \tag{۳۱۸ – ۷}$$

از معادلات (۷ – ۳۱۸) و (۷ – ۳۱۳) و (۷ – ۳۱۴) معادلهٔ درجهٔ دوم برای تعیین A و B به‌دست می‌آید .

$$\lim_{\epsilon\to 0} (kr)\frac{dR_n}{d(kr)}\Bigg|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = Bx\frac{dK_n(x)}{dx} - Ax\frac{dI_n(x)}{dx} \tag{۳۱۹ – ۷}$$

که در آن $x = kr'$ معادلات به‌دست آمده برای A و B به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$AI_n(x) - BK_n(x) = 0 \tag{۳۲۰ – ۷}$$

$$AxI_n'(x) - BxK_n'(x) = \frac{1}{4\pi^2}\, e^{-i(n\theta' + kz')} \tag{۳۲۱ – ۷}$$

دترمینان دستگاه عبارت است از:

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_n(x) & -K_n(x) \\ xI_n'(x) & -xK_n'(x) \end{vmatrix} = -x(I_nK_n' - K_nI_n') \qquad (۳۲۲-۷)$$

که تقریبا" همان رونسکین I_n و K_n است، یعنی

$$\Delta = -xW\{I_n,K_n;x\} \qquad (۳۲۳-۷)$$

فرمول آبل (۶ــ ۴۴۲) برای رونسکین نشان می‌دهد که

$$xW\{I_n,K_n;x\} = x_0W\{I_n,K_n;x_0\} \qquad (۳۲۴-۷)$$

چون سمت چپ معادلهٔ (۷ ــ ۳۲۴) تابعی از x تنهاست ولی سمت راست فقط تابع x_0 است، (۷ ــ ۳۴۴) فقط وقتی برقرار است که هر دو طرف برابر مقدار ثابت باشند؛ پس

$$W\{I_n,K_n;x\} = \frac{\text{ثابت}}{x} \qquad (۳۲۵-۷)$$

ثابت معادلهٔ (۷ ــ ۳۲۵) بامحاسبهٔ رونسکین دریک نقطهٔ دلخواه معلوم‌معین می‌شود. ساده‌ترین نقاط $x = 0$ یا $x = \infty$ است زیرا در این نقاط فرمولهای $I_n(kr)$ و $K_n(kr)$ خیلی ساده می‌شوند. مثلا" با استفاده از معادلات (۶ــ۲۷۳) و (۶ ــ ۲۷۴)، داریم

$$x\{I_nK_n' - K_nI_n'\} = x\left\{\frac{\pi e^x}{\sqrt{2\pi x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\right) - \frac{\pi e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right)\right\} \qquad (۳۲۶-۷)$$

یا

$$x\{I_nK' - K_nI_n'\} = -1 \qquad (۳۲۷-۷)$$

که رونسکین I_n و K_n را به صورت زیر می‌دهد

$$W\{I_n,K_n;x\} = -\frac{1}{x} \qquad (۳۲۸-۷)$$

حال دستگاه (۷ ــ ۳۲۰) و (۷ ــ ۳۲۱) را می‌توانیم نسبت به A و B حل کنیم:

$$A = \frac{1}{4\pi^2} K_n(kr')e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad (۳۲۹-۷)$$

$$B = \frac{1}{4\pi^2} I_n(kr')e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad (۳۳۰-۷)$$

بنابراین، جواب R_n به صورت زیر نوشته می‌شود

$$R_n = \frac{1}{4\pi^2} I_n(kr)K_n(kr')e^{-i(n\theta'-kz')} \qquad 0 \le r \le r' \qquad (۳۳۱-۷)$$

$$R_n = \frac{1}{4\pi^2} I_n(kr')K_n(kr)e^{-i(n\theta'+kz')} \qquad r' \leq r \leq \infty \tag{۷ − ۳۳۲}$$

طبق معمول، معادلات (۷ − ۳۳۱) و (۷ − ۳۳۲) رامی‌توانیم به‌صورت یک فرمول ترکیب کنیم:

$$R_n = \frac{1}{4\pi^2} I_n(kr_<)K_n(kr_>)e^{-i(n\theta'+kz')} \tag{۷ − ۳۳۳}$$

باتوجه به (۷ − ۳۳۳) معادلهٔ (۷ − ۳۰۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta';z,z') = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_<)e^{i[n(\theta-\theta')+k(z-z')]}\, dk \tag{۷ − ۳۳۴}$$

که با یکی از دو معادلهٔ زیر برابر است:

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta';z,z') = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>)e^{in(\theta-\theta')} \cos k(z-z')\, dk \tag{۷ − ۳۳۵}$$

یا

$$G_\infty = \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^\infty \cos k(z-z')\, dk\left[\frac{1}{2} I_0(kr_<)K_0(kr_>) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>) \cos n(\theta-\theta')\right]\right\} \tag{۷ − ۳۳۶}$$

ازطرف دیگر، می‌دانیم که معادلهٔ (۷ − ۳۰۳) به ازای

$$G_\infty = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \tag{۷ − ۳۳۷}$$

نیز برقرار است، زیرا (۷ − ۳۳۷) پتانسیل را در فاصله‌ای برابر Rواحد دورتر از بار مثبت نقطه‌ای واحد نشان می‌دهد؛ که از آن

$$\frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^\infty \cos k(z-z')\, dk\left[\frac{I_0(kr_<)K_0(kr_>)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>) \cos n(\theta-\theta')\right]\right\} \tag{۷ − ۳۳۸}$$

نتیجه می‌شود. در معادلهٔ (۷ − ۳۳۸) فرض کنید $x' = 0$ ، $y' = 0$ ، $z' = 0$ ؛ در این صورت چون

$$I_n(0) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1,2,3, \ldots \end{cases} \tag{۳۳۹ – ۷}$$

معادلهٔ (۷ – ۳۳۸) به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \cos kz\, K_0(kr)\, dk \tag{۳۴۰ – ۷}$$

اگر به جای r^2 در معادلهٔ (۷ – ۳۴۰) مقدار

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')$$

را قرار دهیم سمت چپ (۷ – ۳۴۰) برابر

$$1/[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}$$

می‌شود که در آن $r^2 = x^2 + y^2$ و $(r')^2 = (x')^2 + (y')^2$. می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_{z'=0} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \cos kz\, K_0(kR)\, dk \tag{۳۴۱ – ۷}$$

اما از معادلهٔ (۷ – ۳۲۸) نتیجه می‌شود ،

$$\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_{z'=0} = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^\infty \cos kz\, dk \left[I_0(kr_<)K_0(kr_>) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>) \cos n(\theta-\theta')\right]\right\} \tag{۳۴۲ – ۷}$$

ازطرفی با مقایسهٔ (۷ – ۳۴۱) و (۷ – ۳۴۲) داریم

$$K_0(kR) = I_0(kr_<)K_0(kr_>) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>) \cos n(\theta-\theta') \tag{۳۴۳ – ۷}$$

که در آن

$$R = [r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta-\theta')]^{1/2} \tag{۳۴۴ – ۷}$$

اگر $k \to 0$ ، باتوجه به حد معادلهٔ (۷ – ۳۴۳) از (۷ – ۲۳۳) نتیجه می‌شود ،

$$G_\infty = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r_>} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} \tag{۳۴۵ – ۷}$$

۷ – ۱۶ . یک روش دیگر برای حل مسائل مقادیر مرزی

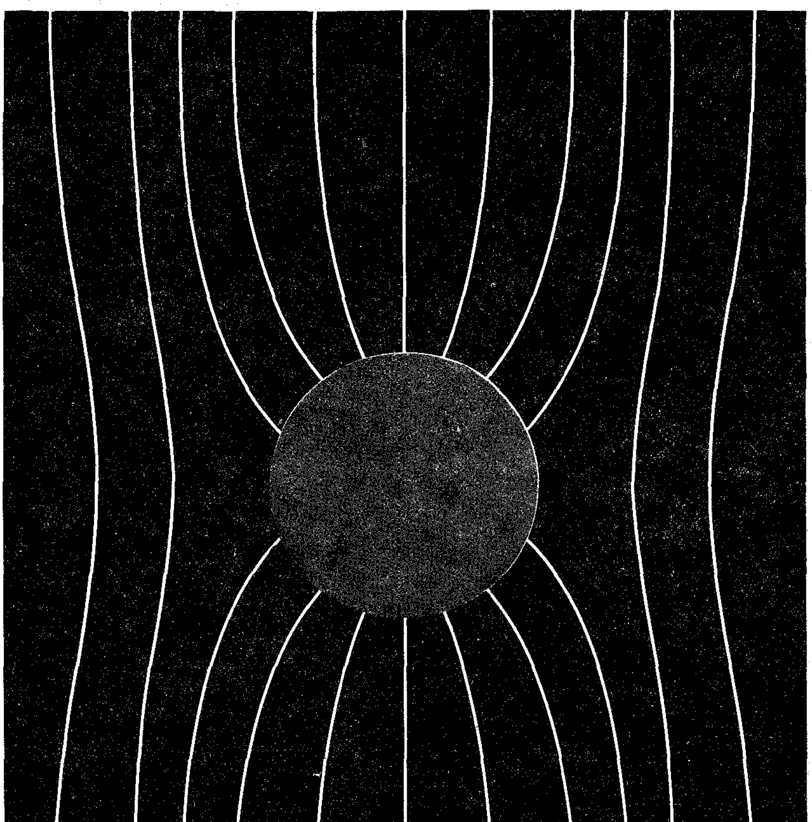
با ساختن تابع گرین (۷ – ۳۳۴) تا (۷ – ۳۳۶) برای معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای ، می‌توانیم توابع گرین را به قسمی بسازیم که درشرایط مرزی همگن نیمن یا دیریکله مثلاً براستوانهٔ $r=a$ صدق کند ، برای این‌کارکافی‌است فقط به G_∞ جوابهای‌مناسب $\nabla^2 G_i = 0$

را اضافه کنیم به قسمتی که بر $r = a$، $G = G_\infty + G_i = 0$ یا $\partial G/\partial n = 0$
جوابهای مسائل نیمن و دیریکله به ترتیب چنین نوشته می‌شوند:

$$\phi(r',\theta',z') = -\int_{S(V)} \phi \frac{\partial G}{\partial n}\, dS \qquad (۳۴۶-۷)$$

و

$$\phi(r',\theta',z') = \int_{S(V)} G \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS \qquad (۳۴۷-۷)$$



شکل ۷ــ۴. میدان الکتریکی رسم شده برای یک استوانهٔ هادی متصل به زمین که در یک میدان الکتریکی اولیهٔ یکنواخت قرار دارد.

وقتی در مسأله تقارن زیادی وجود داشته باشد یا منبع دربی‌نهایت باشد یک روش دیگر گاهی ساده‌تر خواهد بود. مثلاً، ممکن است بخواهیم پتانسیل هر نقطهٔ خارج یک استوانهٔ هادی با طول بی‌نهایت را که به زمین متصل است و در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_0$ قرار دارد که امتدادش عمود بر محور استوانه است (شکل ۷ ــ ۴) معین کنیم.

بطورخلاصه، میدان الکتریکی و پتانسیل باید فقط تابع فاصلهٔ r ازمرکز استوانه و زاویهٔ θ نسبت به میدان یکنواخت $\mathbf{E}_0$ باشد. پس ϕ باید از z مستقل باشد و معادلهٔ

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (۷-۳۴۸)$$

را باید با شرایط مرزی زیر حل کنیم

$$\phi = 0 \quad ، \quad r = a \qquad (۷-۳۴۹)$$

فرض کنید ϕ_0 پتانسیل‌میدان یکنواخت‌اولیهٔ $\mathbf{E}_0$ باشدکه درآن استوانه قراردارد. داریم

$$\phi_0 = E_0x = E_0r\cos\theta$$

که‌بایک میدان یکنواخت $\mathbf{E}_0 = -E_0\mathbf{e}_x$ در جهت منفی محور x ها متناظر است. پتانسیل ϕ باید از دو قسمت تشکیل شود، یک جزء القایی ϕ_i مربوط به وجود استوانه، و یکی میدان یکنواخت اولیهٔ ϕ_0. درنتیجه

$$\phi = \phi_0 + \phi_i \qquad (۷-۳۵۰)$$

باید در معادلات (۷ ــ ۳۴۸) و (۷ ــ ۳۴۹) صدق کند. پتانسیل ϕ_i بایداثر استوانه رانشان دهد، پس علاوه براین که در معادلهٔ $\nabla^2\phi_i = 0$ صدق می‌کندباید درفاصله‌های دور ازاستوانه نیز صفر شود. به‌عبارت دیگر

$$\lim_{r\to\infty} \phi_i(r,\theta) = 0 \qquad (۷-۳۵۱)$$

عبارتی به صورت

$$\phi(r,\theta) = E_0r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(C_n\cos n\theta + D_n\sin C\theta) \qquad (۷-۳۵۲)$$

باید یک جواب آزمایشی خوب باشد زیرا در معادلهٔ (۷ ــ ۳۴۸) صدق کرده و در بی‌نهایت بطور صحیح عمل می‌کند.

از تقارن مسأله می‌توان برای حذف جملات سینوسی معادلهٔ (۷ ــ ۳۵۲) استفاده کرد

$$\phi(r,\theta) = \phi(r, -\theta) \qquad (۷-۳۵۳)$$

و این معادله نمی‌تواند برقرار باشد مگر $D_n = 0$، $n = 1,2,3,\ldots$. درنتیجه

$$\phi(r,\theta) = E_0r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} C_nr^{-n}\cos n\theta \qquad (۷-۳۵۴)$$

باتوجه به معادلات (۷ – ۳۴۹) و (۷ – ۳۵۴) داریم

$$0 = aE_0 \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{-n} \cos n\theta \qquad (۷-۳۵۵)$$

و بنابراین

$$C_1 = -a^2E_0,\ C_2 = 0,\ C_3 = 0,\ \ldots,\ C_n = 0,\ \ldots$$

نتیجهٔ حاصل عبارت است از:

$$\phi(r,\theta) = E_0 r\cos\theta - \frac{a^2E_0}{r}\cos\theta = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)E_0 r\cos\theta \qquad (۷-۳۵۶)$$

و با درنظر گرفتن $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ داریم

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)E_0\cos\theta \qquad (۷-۳۵۷)$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)E_0\sin\theta \qquad (۷-۳۵۸)$$

که مؤلفه‌های شعاعی و مماسی میدان الکتریکی هستند.

۷ – ۱۷. معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی

معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی (r,θ,ϕ) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (۷-۳۵۹)$$

تابع گرین برای این معادله جواب

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} \qquad (۷-۳۶۰)$$

است و $G(r,r';\theta,\theta';\phi,\phi')$ پتانسیل نقطهٔ (r',θ',ϕ') حاصل از بار نقطه‌ای مثبت واقع در (r,θ,ϕ) را نشان می‌دهد. عامل $1/r^2\sin\theta$ درمعادلهٔ (۷ – ۳۶۰) لازم‌است زیراعنصرحجم درمختصات کروی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$dV = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$$

و انتگرال حجم سمت راست (۷ – ۳۶۰) وقتی منبع در داخل ناحیهٔ انتگرال‌گیری قرار دارد باید استاندارد شود.

با به‌کار بردن روش جداسازی متغیرها، جوابهای معادلهٔ (۷ – ۳۵۹) را به صورت زیر

به‌دست می‌آوریم

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

اگر $\psi = R\Theta\Phi$ را در (۷ـ۳۵۹) قرار دهیم و بر $R\Theta\Phi/r^2 \sin^2\theta$ تقسیم کنیم داریم

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \qquad (۳۶۱-۷)$$

سمت راست معادلهٔ (۷ـ۳۶۲) فقط به ϕ بستگی دارد درصورتی که سمت چپ تابعی از r و θ است. پس سمت راست (۷ـ۳۶۱) باید ثابت باشد و می‌توان نوشت:

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m^2 \qquad (۳۶۲-۷)$$

و آنچه باقی می‌ماند عبارت است از:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\left[\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] \qquad (۳۶۳-۷)$$

که در آن سمت چپ فقط تابع r است درصورتی که سمت راست تنها به θ بستگی دارد. پس هر دو طرف باید برابر یک مقدار ثابت مثلاً k باشند

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - kR = 0 \qquad (۳۶۴-۷)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (۳۶۵-۷)$$

پس با جداسازی متغیرها معادلهٔ (۷ـ۳۵۹) به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خلاصه می‌شود:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \qquad (۳۶۶-۷)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \qquad (۳۶۷-۷)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - kR = 0 \qquad (۳۶۸-۷)$$

که شامل دو پارامتر جداسازی m و k است. مقادیر مجاز این پارامترها بستگی به شرایط مرزی دارند که ψ باید در آنها صدق کند. مثلاً، اگر صفحات مرزی برای (ثابت) $=\phi$ وجود نداشته باشد، و ϕ از 0 تا 2π تغییر کند، آن‌گاه $\psi(r,\theta,\phi)$ باید برحسب ϕ متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد. درنتیجه m باید عدد صحیح مثبت یا منفی باشد.

اگردر معادلهٔ (۷ ــ ۳۶۸) قرار دهیم $R(r)=r^\lambda$ دیده می‌شود $R=r^\lambda$ در (۷ــ ۳۶۹) صدق می‌کند به شرط‌آن که

$$\lambda^2 + \lambda - k = 0 \qquad (۳۶۹-۷)$$

در معادلهٔ (۷ ــ ۳۶۹) به ازای $\lambda=n$، داریم $k = n(n+1)$. ولی اگر $\lambda = -(n+1)$، معادلهٔ (۷ ــ ۳۶۹) نتیجه مـی‌دهد $k = n(n+1)$. بنابراین، به ازای $k = n(n+1)$ این معادله‌دارای جوابهای‌مستقل خطی r^n و $r^{-(n+1)}$ است. تا این‌جا n یک پارامتراختیاری‌است. برای محدود کردن بیشتر n، باید معادلهٔ (۷ ــ ۳۶۷) را بررسی کنیم. درمعادلهٔ (۷ــ۳۶۷) فرض کنید

$$x = \cos\theta \qquad \Theta(\theta) = y(x)$$

چون $\dfrac{d}{d\theta} = \dfrac{dx}{d\theta}\dfrac{d}{dx}$، داریم

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] \qquad (۳۷۰-۷)$$

باتوجه به معادلهٔ (۷ ــ ۳۷۰) دستگاه (۷ ــ ۳۶۴) تا (۷ ــ ۳۶۸) را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \qquad (۳۷۱-۷)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0 \qquad (۳۷۲-۷)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0 \qquad (۳۷۳-۷)$$

معادلهٔ (۷ ــ ۳۷۱) دارای جوابهای مثلثاتی یا هذلولی است بنابرآن که m حقیقی یا موهومی باشد، و جوابهای معادلهٔ (۷ ــ ۳۷۳) را قبلا" یافته‌ایم r^n و $r^{-(n+1)}$. حال معادلهٔ (۷ ــ ۳۷۲) را به‌عنوان معادلهٔ دیفرانسیل وابستهٔ لژاندر درنظر می‌گیریم، که جوابهای‌آن عبارتند از $P_n{}^m(x)$ و $Q_n{}^m(x)$. درنتیجه جوابهای کامل معادلات (۷ ــ ۳۷۱) تا (۷ ــ ۳۷۳) به صورت زیر خواهند بود:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)} \qquad (۳۷۴-۷)$$

$$\Theta(\theta) = CP_n{}^m(\cos\theta) + DQ_n{}^m(\cos\theta) \qquad (۳۷۵-۷)$$

$$\Phi(\phi) = E\cos m\phi + F\sin m\phi \qquad (۳۷۶-۷)$$

قبلا" دیدیم‌که m بایدصحیح باشدتا $\psi(r,\theta,\phi)$ نسبت به ϕ متناوب شود. دربیشترمسائل **باید** $\psi(r,\theta,\phi)$ بر هر کره به شعاع معین، متناهی باشد. بنابراین، معادلهٔ (۷ ــ ۳۷۵) باید

به ازای $\pi \leq \theta \leq 0$ یا $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ متناهی باشد. پس D باید صفر شود و n فقط مقادیر صحیح را اختیارکند. دلیلش این است که وقتی $Q_n{}^m(x)$ درنقاط ± 1 ویژه و $P_n{}^m(x)$ به‌ازای $-1 \leq x \leq 1$ متناهی است که n و m هردو صحیح باشند و $n \geq m$. برای حالت خاص $m > 0$ و $n = 0$، معادلات (۷ ــ ۳۷۴) تا (۷ ــ ۳۷۶) به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$R(r) = A + Br^{-1} \tag{۷ ــ ۳۷۷}$$

$$\Theta(\theta) = C\cot^m \frac{\theta}{2} + D\tan^m \frac{\theta}{2} \tag{۷ ــ ۳۷۸}$$

$$\Phi(\phi) = E\cos m\phi + F\sin m\phi \tag{۷ ــ ۳۷۹}$$

و به ازای $n = 0$ و $m = 0$،

$$R(r) = A + Br^{-1} \tag{۷ ــ ۳۸۰}$$

$$\Theta(\theta) = C\log\tan\frac{\theta}{2} + D \tag{۷ ــ ۳۸۱}$$

$$\Theta(\phi) = D\phi + E \tag{۷ ــ ۳۸۲}$$

۷ ــ ۱۸ . ساختن تابع گرین

تابع گرین در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 G = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} \tag{۷ ــ ۳۸۳}$$

و از ساختن بسطی برحسب جوابهای جداشدهٔ معادلهٔ (۷ ــ ۳۵۹) وقرار دادن آن درمعادلهٔ (۷ ــ ۳۸۳) برای تعیین ضرایب به‌دست می‌آید. فرض کنید

$$G = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} R_n{}^{|m|}(r) P_n{}^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{۷ ــ ۳۸۴}$$

و طبق معادلهٔ (۷ ــ ۳۸۴) می‌نویسیم

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} C_n{}^{|m|} P_n{}^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{۷ ــ ۳۸۵}$$

برای محاسبهٔ ضرایب بسط $C_n{}^{|m|}$، دو طرف معادلهٔ (۷ ــ ۳۸۵) را در

$$P_\lambda{}^{|\mu|}(\cos\theta) e^{-i\mu\phi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

ضرب کرده نسبت به θ و ϕ بر رویهٔ کرهٔ واحد انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n{}^{|m|}(\cos\theta) P_\lambda{}^{|\mu|}(\cos\theta) e^{i(m-\mu)\phi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}\delta_{n\lambda}\delta_{m\mu} \tag{۷ ــ ۳۸۶}$$

از این معادله نتیجه می‌شود

$$C_n{}^{|m|} = \frac{\delta(r-r')}{4\pi r^2}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}(2n+1)P_m{}^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\phi'} \qquad (۳۸۷-۷)$$

و

$$\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\frac{\delta(r-r')}{r^2}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}(2n+1)P_n{}^{|m|}(\cos\theta)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\phi-\phi')} \qquad (۳۸۸-۷)$$

اگر معادلات (۷ــ ۳۸۴) و (۷ــ ۳۸۸) را در (۷ــ ۳۸۳) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n{}^{|m|}}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}R_n{}^{|m|}\right]P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\frac{\delta(r-r')}{r^2}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}(2n+1)P_n{}^{|m|}(\cos\theta)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\phi-\phi')} \qquad (۳۸۹-۷)$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب

$P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$

در دو طرف معادلهٔ (۷ــ ۳۸۹)، معادلهٔ مربوط به $R_n{}^{|m|}(r)$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n{}^{|m|}}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}R_n{}^{|m|} = \frac{-\delta(r-r')}{4\pi r^2}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}(2n+1)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\phi'} \qquad (۳۹۰-۷)$$

برای حل معادلهٔ (۷ــ ۳۹۰) توجه کنید که اگر $r \neq r'$،

$$R_n{}^{|m|} = \begin{cases} Ar^n \\ Br^{-(n+1)} \end{cases} \qquad (۳۹۱-۷)$$

جوابهای مستقل خطی (۷ــ ۳۹۰) هستند. وقتی منبع در مبدأ $r = 0$، ودر بی‌نهایت نباشد جواب تابع‌گرین در $r=0$ و $r = \infty$ متناهی‌می‌ماند. پس دوجواب معادلهٔ (۷ــ ۳۹۱) رابه‌قسمی تعیین می‌کنیم که

$$R_n{}^{|m|}(r) = Ar^n \qquad 0 \leq r < r' \qquad (۳۹۲-۷)$$

$$R_n{}^{|m|}(r) = Br^{-(n+1)} \qquad r' < r < \infty \qquad (۳۹۳-۷)$$

از پیوستگی معادلات (۷ــ ۳۹۲) و (۷ــ ۳۹۳) در $r = r'$ نتیجه می‌شود:

$$A(r')^n = B(r')^{-(n+1)} \qquad (۳۹۴-۷)$$

که یک معادله برحسب A و B است . برای به‌دست‌آوردن یک معادلهٔ دیگراز (۷ــ ۳۹۰) نسبت به r از $r=r'-\epsilon$ تا $r = r' + \epsilon$ انتگرال می‌گیریم که در آن ϵ عددی مثبت و کوچک است. معادلهٔ (۷ ــ ۳۹۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n{}^{|m|}}{dr}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2}R_n{}^{|m|} = -Q\frac{\delta(r-r')}{r^2} \qquad (۳۹۵-۷)$$

که در آن

$$Q = \frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\phi} \qquad (۳۹۶-۷)$$

و بنابراین

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n{}^{|m|}}{dr}\right)dr - n(n+1)\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon}R_n{}^{|m|}\,dr = -Q \qquad (۳۹۷-۷)$$

اگر $\epsilon \to 0$ ، جملهٔ دوم صفر می‌شود و خواهیم داشت

$$\lim_{\epsilon\to 0} r^2\frac{dR_n{}^{|m|}}{dr}\Big|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -Q \qquad (۳۹۸-۷)$$

از معادلات (۷ــ ۳۹۸) ، (۷ــ ۳۹۲) و (۷ ــ ۳۹۳) یک معادلهٔ دیگر برحسب A و B به‌دست می‌آید :

$$An(r')^{n+1} + B(n+1)(r')^{-n} = Q \qquad (۳۹۹-۷)$$

درنتیجه دستگاه معادلاتی که A و B را می‌دهند به صورت زیر نوشته می‌شود

$$A(r')^n - B(r')^{-(n+1)} = 0 \qquad (۴۰۰-۷)$$

$$An(r')^{n+1} + B(n+1)(r')^{-n} = Q \qquad (۴۰۱-۷)$$

اگر این دستگاه را نسبت به A و B حل کنیم داریم

$$A = \frac{Q}{2n+1}(r')^{-(n+1)} \qquad (۴۰۲-۷)$$

$$B = \frac{Q}{2n+1}(r')^n \qquad (۴۰۳-۷)$$

درنتیجه معادلات (۷ــ ۳۹۲) و (۷ ــ ۳۹۳) به صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$R_n{}^{|m|}(r) = \frac{Q}{2n+1}\frac{r^n}{(r')^{n+1}} \qquad 0 \le r \le r' \qquad (۴۰۴-۷)$$

$$R_n{}^{|m|}(r) = \frac{Q}{2n+1}\frac{(r')^n}{(r)^{n+1}} \qquad r' \le r < \infty \qquad (۴۰۵-۷)$$

از ترکیب معادلات (۷ ـ ۴۰۴) و (۷ ـ ۴۰۵) معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R_n{}^{|m|}(r) = \frac{Q}{2n+1}\frac{(r_<)^n}{(r_>)^{n+1}} \qquad (۴۰۶-۷)$$

و باتوجه به معادلات (۷ ـ ۴۰۶)، (۷ ـ ۳۹۶) و (۷ ـ ۳۸۴) تابع گرین

$$G_\infty = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\frac{(r_<)^n}{(r_>)^{n+1}}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n{}^{|m|}(\cos\theta)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\phi-\phi')} \qquad (۴۰۷-۷)$$

نتیجه می‌شود که برابر است با

$$G_\infty(r,r';\theta,\theta';\phi,\phi') \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r_<)^n}{(r_>)^{n+1}}\Big[P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + \frac{2(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n{}^{|m|}(\cos\theta)P_n{}^{|m|}(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi')\Big] \qquad (۴۰۸-۷)$$

ولی، می‌دانیم که

$$G_\infty = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2+(r')^2-2rr'\cos\gamma}} \qquad (۴۰۹-۷)$$

که در آن

$r = |\mathbf{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}, r' = |\mathbf{r}'| = [(x')^2+(y')^2+(z')^2]^{1/2}$
و $\gamma = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}'|$ کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ است. ازطرفی معادلهٔ (۷ ـ ۴۰۹) را می‌توان به صورت یک سری توان بسط داد،

$$G_\infty = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_<)^n}{(r_>)^{n+1}}P_n(\cos\gamma) \qquad (۴۱۰-۷)$$

باتوجه به این‌مطلب‌که معادلهٔ (۷ ـ ۴۰۹) یک فرمول مولدبرای چندجمله‌ایهای لژاندر است. از مقایسهٔ معادلات (۷ ـ ۴۰۸) و (۷ ـ ۴۱۰) فرمول دیگری برای چندجمله‌ایهای لژاندر به‌دست می‌آید:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \qquad (۴۱۱-۷)$$

که در آن مختصات کروی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ عبارتند از (r,θ,ϕ) و (r',θ',ϕ').

۷ ـ ۱۹ . جوابهای درونی و بیرونی مسائل دیریکله برای کرهٔ متصل به زمین

تابع گرین مسأله درونی بار واحد داخل کره‌ای متصل به زمین به شعاع $r=a$ را به‌دست می‌آوریم . با فرض

$$G = G_\infty - G_i \tag{۴۱۲ – ۷}$$

تابع G در معادلهٔ (۷ ـ ۳۸۳) با شرایط مرزی

$$G = 0 \;,\; r = a \tag{۴۱۳ – ۷}$$

صدق می‌کند و پتانسیل القاشدهٔ G_i یک جواب معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 G_i = 0 \tag{۴۱۴ – ۷}$$

است ، و برای مسألهٔ درونی ، G_i باید در داخل کرهٔ $r=a$ منظم باشد . بنابراین می‌نویسیم ،

$$G = \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A r^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{۴۱۵ – ۷}$$

که در آن

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m = 1,2,3 \end{cases} \tag{۴۱۶ – ۷}$$

و A از شرط مرزی (۷ ـ ۴۱۳) به‌دست می‌آید . باتوجه به معادلات (۷ ـ ۴۰۸) و (۷ ـ ۴۱۵) داریم ،

$$G = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r_<{}^n}{r_>{}^{n+1}} - A r^n\right) \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{۴۱۷ – ۷}$$

و با استفاده ازمعادلهٔ (۷ ـ ۴۱۳) و این که r' و r در مسأله داخلی باید کمتراز a باشند نتیجه می‌شود

$$\frac{(r')^n}{a^{n+1}} = A a^n \tag{۴۱۸ – ۷}$$

یا

$$A = \frac{(r')^n}{a^{2n+1}} \tag{۴۱۹ – ۷}$$

پس تابع گرین مسأله دیریکله داخلی عبارت است از:

$$G = \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{(rr')^n}{a^{2n+1}} P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{۴۲۰ – ۷}$$

تابع گرین خارجی به‌همین طریق به‌دست می‌آید بجز آن‌که نقطه باردار در این‌حالت‌در خارج کرهٔ متصل به زمین قرار دارد و پتانسیل القاشدهٔ G_i باید به‌ازای $r\to\infty$ به جای $r \to 0$ متناهی باقی بماند.

بنابراین می‌نویسیم،

$$G = \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A\epsilon_m}{r^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta) P_n{}^m(\cos\theta') \cos m(\phi - \phi') \qquad (۴۲۱-۷)$$

که باتوجه به معادلهٔ (۷ ــ ۴۰۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$G = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_<{}^n}{r_>{}^{n+1}} - \frac{A}{r^{n+1}}\right) \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta) P_n{}^m(\cos\theta') \cos m(\phi - \phi') \qquad (۴۲۲-۷)$$

اگر G را بر $r=a$ مساوی صفر قرار دهیم، و توجه داشته باشیم که r' و r در مسأله خارجی بزرگتر یا مساوی a هستند، از معادلهٔ (۷ ــ ۴۲۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{a^n}{(r')^{n+1}} = \frac{A}{a^{n+1}} \qquad (۴۲۳-۷)$$

پس

$$A = \frac{a^{2n+1}}{(r')^{n+1}} \qquad (۴۲۴-۷)$$

و تابع گرین برای مسألهٔ دیریکلهٔ خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$G = \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m a^{2n+1}}{(rr')^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n{}^m(\cos\theta) P_n{}^m(\cos\theta') \cos m(\phi - \phi') \qquad (۴۲۵-۷)$$

جملهٔ اضافی عبارت (۷ ــ ۴۲۵) که مقدار G را بر $r=a$ صفرمی‌کند برابراست باجمله‌ای که از باری‌به‌اندازهٔ a/r' در نقطهٔ $r = a^2/r'$ ، $\theta = \theta'$ ، $\phi = \phi'$ ناشی شده باشد.

اگر معادلات (۷ ــ ۴۲۵) و (۷ ــ ۴۲۰) را مقایسه کنیم دیده می‌شودکه تصویریک نقطه باردار q در نقطه (r',θ',ϕ') در یک سطح کروی متصل به زمین در $r= a$ (خواه a بزرگتر از r' باشد خواه کوچکتر) یک‌عددبزرگ $q(a/r')$ در نقطهٔ $(a^2/r',\theta',\phi')$ وجوددارد. وقتی بار خارج رویه قرار دارد $(r' > a)$ تصویر داخل رویه واقع شده و از مقدار اولیه کوچکتر است؛ ولی اگر بار در داخل باشد تصویر در خارج قرار می‌گیرد و از مقدار اولیه بزرگتر خواهد بود.

طبق این بحث ، هر دو تابع گرین داخلی و خارجی را می‌توان به صورت زیرنمایش داد

$$G = \frac{1}{4\pi R} - \frac{a/r'}{4\pi R'} \qquad (۷-۴۲۶)$$

که در آن

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos\gamma]^{1/2} \qquad (۷-۴۲۷)$$

$$R' = \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \mathbf{r}' \right| = \left[r^2 + \frac{a^4}{(r')^2} - \frac{2a^2 r}{r'}\cos\gamma\right]^{1/2} \qquad (۷-۴۲۸)$$

و

$$\frac{r'R'}{a} = \left[a^2 + \frac{(rr')^2}{a^2} - 2rr'\cos\gamma\right]^{1/2} \qquad (۷-۴۲۹)$$

به کمک این عبارت G به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$G = \frac{1}{4\pi[r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\gamma]^{1/2}} - \frac{1}{4\pi[a^2 + (rr')^2/a^2 - 2rr'\cos\gamma]^{1/2}} \qquad (۷-۴۳۰)$$

مسألهٔ دیریکلهٔ داخلی برای معادلهٔ لاپلاس دریک کره لازمه‌اش تعیین یک تابع $\psi(r,\theta,\phi)$ است که در شرایط

$$\nabla^2\psi = 0 \qquad r < a \qquad (۷-۴۳۱)$$

$$\psi = \psi(a,\theta,\phi) \quad , \quad r = a \qquad (۷-۴۳۲)$$

صدق کند . اگرمعادلات (۷ ــ ۴۳۰) و (۷ ــ ۴۳۱) رادر اتحاد متقارن گرین قرار دهیم جواب به آسانی به‌دست می‌آید :

$$\int_V \{G\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2 G\}\,dV = \int_{S(V)} \left\{G\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial G}{\partial n}\right\} dS \qquad (۷-۴۳۳)$$

در معادلهٔ (۷ ــ ۴۳۱) ناحیهٔ V به وسیلهٔ یک کره به شعاع $r=a$ و رویهٔ مرزی $S(V)$ محدود شده است . اگر توجه کنیم که خطوط قائم بر $S(V)$ درامتداد شعاع کرهٔ $r=a$ و به طرف خارج رسم شده‌اند ، نتیجه می‌شود که بر $S(V)$:

$$(\partial G/\partial n)_{r=a} = (\partial G/\partial r)_{r=a} \qquad (۷-۴۳۴)$$

چون در V ، $\nabla^2\psi = 0$ و بر $S(V)$ ، $G = 0$ ، از معادلهٔ (۷ ــ ۴۳۲) نتیجه می‌شود

$$\psi(r',\theta',\phi') = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(a,\theta,\phi)\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=a} a^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi \qquad (۷-۴۳۴)$$

اگر از معادلهٔ (۷ ــ ۴۳۰) نسبت به r مشتق بگیریم ،

$$\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{1}{4\pi a}\frac{(r')^2 - a^2}{[a^2 + (r')^2 - 2ar' \cos \gamma]^{3/2}} \qquad (۴۳۵-۷)$$

بنابراین

$$\psi(r',\theta',\phi') = \frac{a[a^2 - (r')^2]}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(a,\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{[a^2 + (r')^2 - 2ar' \cos\gamma]^{3/2}} \qquad (۴۳۶-۷)$$

جواب مطلوب معادلات (۷ـ ۴۳۱) و (۷ـ ۴۳۲) است .

در مسأله‌ٔ دیریکله‌ٔ خارجی باید تابعی بسازیم که در خارج کره $r=a$ هارمونیک بوده وبر مرز کروی مقادیر معینی اختیار کند . این مسأله دقیقا" همان مسأله‌ٔ (۷ـ ۴۳۱) و (۷ـ ۴۳۳) است به جز این که نامساوی (۷ـ ۴۳۱) برعکس نوشته شده است . جوابهای داخلی وخارجی مسأله‌ٔ دیریکله یکسانند به استثنای یک علامت منها ، زیرا قائم خارجی برای ناحیه‌ٔ خارج به طرف داخل کره‌ٔ $r=a$ متوجه است . پس

$$(\partial G/\partial n)_{r=a} = -(\partial G/\partial r)_{r=a}$$

و درنتیجه

$$\psi(r',\theta',\phi') = \frac{a[(r')^2 - a^2]}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(a,\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{[a^2 + (r')^2 - 2ar' \cos\gamma]^{3/2}} \qquad (۴۳۷-۷)$$

جانشین (۷ـ ۴۳۶) می‌شود . جوابهای (۷ـ ۴۳۶) و (۷ـ ۴۳۷) را "جواب پواسن" مسأله‌ٔ دیریکله نامند . انتگرالهای مضاعف مانند آن‌چه در (۷ـ ۴۳۶) و (۷ـ ۴۳۷) آمده است "انتگرالهای پواسن" نامیده می‌شوند و در نظریه‌ٔ پتانسیل نقش اساسی دارند .

۷ـ ۲۰ . معادله‌ٔ موج یک بعدی

فرض کنید فنرقابل ارتجاعی بین دو نقطه ازمحور x ها کشیده شده است ، (شکل ۷ـ ۵) . فرض کنید $u(x,t)$ جابجایی قائم فنر نسبت به محور x ها باشد . جرم جزئی از فنر به طول ds واقع بین x و $x + dx$ عبارت است از :

$$dm = \rho\, ds \qquad (۴۳۸-۷)$$

که در آن ρ جرم واحد طول فنر است . مؤلفه‌ٔ قائم نیروی وارد بر dm را می‌توان به دو جزء تقسیم کرد :

$$F_V = F_T + F_E \qquad (۴۳۹-۷)$$

در معادله‌ٔ (۷ـ ۴۳۹) ، F_T مؤلفه‌ٔ قائم وارد بر dm حاصل از کشش فنر ، و F_E مؤلفه‌ٔ قائم سایر نیروهای خارجی وارد بر dm است مانند نیروی ثقل و غیره . مؤلفه‌ٔ قائم شتاب dm ، برابر $\partial^2 u/\partial t^2$ است و بنابراین

$$F_V = \rho\, ds\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۷ − ۴۴۰}$$

برای محاسبهٔ F_T ، فرض کنید T کشش فنر و θ زاویهٔ بین بردارکشش و محور x ها باشد؛ در این صورت

$$F_T = (T\sin\theta)_{x+dx} - (T\sin\theta)_x \tag{۷ − ۴۴۱}$$

اگر نیروی خارجی در هر واحد طول که بطور قائم اثر می‌کندبا $F(x,t)$ داده شود ، آن‌گاه مقدار نیروی خارجی وارد بر dm برابر است با

$$F_E = F(x,t)\, ds \tag{۷ − ۴۴۲}$$

درنتیجه

$$F_V = [(T\sin\theta)_{x+dx} - (T\sin\theta)_x] + F(x,t)\, ds \tag{۷ − ۴۴۳}$$

با فرض این که جابجایی $u(x,t)$ همواره کوچک است و درنتیجه θ هیچ وقت زاویهٔ بزرگی نخواهد بود و برای زاویهٔ کوچک می‌توانیم از تعریف زیر استفاده کنیم

$$\sin\theta \cong \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{۷ − ۴۴۴}$$

فرمول فوق را می‌توان ساده‌تر کرد . علاوه براین

$$ds = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} dx \tag{۷ − ۴۴۵}$$

باتوجه به تعریف زاویهٔ کوچک $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$ ، می‌توانیم به جای ds از dx استفاده کنیم . درنتیجه معادلات (۷ − ۴۴۰) و (۷ − ۴۴۳) به صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$\rho\, dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + F(x,t)\, dx \tag{۷ − ۴۴۶}$$

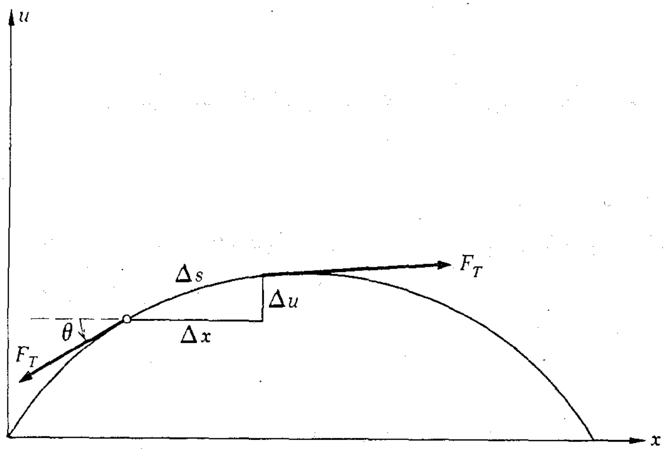
کشش ρ و چگالی خطی T ثابتند . بنابراین ، با فرض

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{۷ − ۴۴۷}$$

معادلهٔ موج ناهمگن یک بعدی

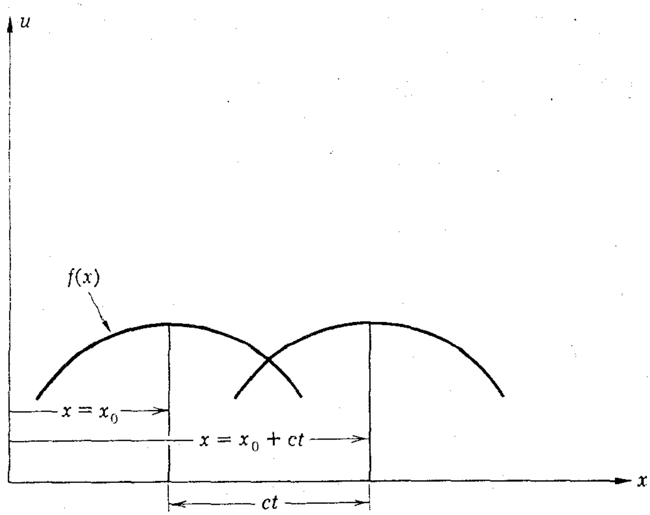
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x,t)}{\rho} \tag{۷ − ۴۴۸}$$

ازمعادلهٔ (۷ − ۴۴۶) به‌دست‌می‌آید . چون T دارای ابعاد نیرو و ρ دارای ابعاد جرم‌در واحد طول است کمیت c در معادلهٔ (۷ − ۴۴۷) باید باسرعت هم‌بعدباشد . درواقع ، ثابت می‌شود که c دقیقاً" برابر سرعت *انتقال* جابجایی $u(x,t)$ در طول مسیر است .



شکل ۷ ـ ۵. فنر مرتعش.

منحنی $u=f(x)$ را در صفحهٔ (u,x) درنظر بگیرید. در بحث فوق منحنی را ساکن فرض کردیم، ولی اگر به جای x عبارت $x-ct$ را قراردهیم، درآن صورت امکان حرکت وجود دارد. تابع جدید $u=f(x-ct)$ دارای این خاصیت است که وقتی t صعود می‌کند متغیر $x-ct$ را ممکن است با افزایش مناسب x ثابت نگهداشت. این عمل با انتقال تمام منحنی $u=f(x)$ به سمت راست با سرعت ثابت c معادل است (شکل ۷ ـ ۶). به عبارت دیگر نقطه‌ای که در وضع x_0 در زمان $t=0$ و در لحظهٔ t در نقطهٔ $x=x_0+ct$ قرار دارد همواره دارای دامنهٔ ثابت $u=f(x_0)$ است.



شکل ۷ ـ ۶. منحنی $u=f(x)$ که با سرعت c به سمت راست منتقل می‌شود.

اگر به جای x از $x - ct$ استفاده شود .

اگر در $f(x)$ به جای x از $x+ct$ استفاده کنیم همان استدلال بازهم برقراراست ، غیرازاین که $u=f(x)$ به سمت چپ منتقل خواهدشد . زیراوقتی t افزایش پیدا می‌کند ، x باید به‌طورمناسب کاهش بیابـد تا $x + ct$ ثابت بماند . نقطه‌ای که در لحظهٔ $t = 0$ در x_0 و در لحظهٔ t در $x = x_0 - ct$ قرار دارد باید همواره دارای دامنهٔ ثابت $u = f(x_0)$ باشد .

ازاین بحث نتیجه می‌شودکه درغیاب نیروهای خارجی $F(x,t)$ ، باید معادلهٔ (۷ــ۴۴۸) دارای یک جواب عمومی به صورت زیر باشد :

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{۷ − ۴۴۹}$$

که درآن f و g توابع دلخواهند . به‌آسانی دیده می‌شود که این حالت واقعاً" رخ می‌دهد . با فرض $r = x - ct$ و $s = x + ct$ داریم ،

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial r} + c\frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\right)$$

بنابراین ، کمیت

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۷ − ۴۵۰}$$

مسلماً" در معادلهٔ (۷ ــ ۴۴۹) صدق می‌کند .

مسألهٔ مقدار اولیه

مسألهٔ مقدار اولیه برای معادلهٔ موج یک بعدی عبارت است از حل معادلهٔ (۷ ــ ۴۵۰) برای فنری با طول نامحدود ، با فرض این که به شکل اولیهٔ فنر به صورت

$$u(x,0) = F(x) \tag{۷ − ۴۵۱}$$

باشد و سرعت اولیهٔ هر نقطه از فنر از رابطهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x) \tag{۷ − ۴۵۲}$$

به‌دست آید . از معادلات (۷ ــ ۴۴۹) ، (۷ ــ ۴۵۱) و (۷ ــ ۴۵۲) نتیجه می‌شود که

$$F(x) = f(x) + g(x) \tag{۷-۴۵۳}$$

$$G(x) = -cf'(x) + cg'(x) \tag{۷-۴۵۴}$$

و بنابراین

$$2cg'(x) = G(x) + cF'(x) \tag{۷-۴۵۵}$$

$$-2cf'(x) = G(x) - cF'(x) \tag{۷-۴۵۶}$$

اگر از معادلات فوق مستقیما" انتگرال بگیریم ، داریم

$$f(x) = \tfrac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c}\int^{x} G(s)\,ds + \text{ثابت} \tag{۷-۴۵۷}$$

$$g(x) = \tfrac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c}\int^{x} G(s)\,ds + \text{ثابت} \tag{۷-۴۵۸}$$

و اگردرمعادلهٔ (۷ - ۴۵۷) به جای x از $x-ct$ و درمعادلهٔ (۷ - ۴۵۸) از $x+ct$ استفاده‌کرده نتایج را باهم جمع کنیم معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) &= \tfrac{1}{2}F(x - ct) \\ &+ \tfrac{1}{2}F(x + ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds + (\text{ثابت}) \end{aligned} \tag{۷-۴۵۹}$$

مقدار ثابت در معادلهٔ (۷ - ۴۵۹) با قرار دادن $t = 0$ و توجه به معادلهٔ (۷ - ۴۵۱) برابر صفر به‌دست می‌آید . پس،

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}F(x - ct) + \tfrac{1}{2}F(x + ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds \tag{۷-۴۶۰}$$

که جواب دالامبر مسأله مقدار اولیه است ، و حرکت یک فنر راتحت جابجاییهای اولیه وسرعت دلخواه می‌دهد .

مسائل مرکب مقدار اولیه و مرزی

بطورکلی ، فنرها تابی‌نهایت بلندنیستند ، ونیروهای خارجی همواره صفر نخواهندبود . بنابراین اغلب جوابی از معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}f(x,t) \tag{۷-۴۶۱}$$

موردنظر است که نه تنها در شرایط اولیهٔ

$$u(x,0) = F(x) \tag{۷-۴۶۲}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x) \tag{۷-۴۶۳}$$

صدق کند بلکه در شرایط مرزی

$$u(0,t) = 0 \tag{۴۶۴ − ۷}$$

$$u(a,t) = 0 \tag{۴۶۵ − ۷}$$

در $x = 0$ و $x = a$ نیز صدق کند.

این مسألهٔ مرکب مقدار مرزی و اولیه، دربارهٔ ارتعاشات اعمال شده و فنر قابل ارتجاع انعطاف‌پذیری که بین دو دیوارهٔ محکم در $x = 0$ و $x = a$ وصل شده بحث می‌کند.

یکی از ساده‌ترین روشهای حل معادلهٔ (۷ − ۴۶۱) به‌کار بردن تبدیل متناهی سینوسی است که در بخش (۵ − ۱۰) معرفی شد. این تبدیل بخصوص برای مسألهٔ حاضرمناسب است، زیرا همان‌طور که معادلهٔ (۵ − ۱۷۶) نشان می‌دهد، شرایط مرزی (۷ − ۴۶۴) و (۷ − ۴۶۵) همان شرایطی هستند که برای تبدیل سینوسی متناهی مفید است.

معادلهٔ (۷ − ۴۶۱) را در $\sin n\pi x/a$ ضرب‌کرده‌نسبت‌به x از $x=0$ تا $x=a$ انتگرال می‌گیریم و از معادلات (۵ − ۱۷۶)، (۷ − ۴۶۴) و (۷ − ۴۶۵) استفاده می‌کنیم. نتیجه عبارت است از:

$$\frac{d^2\bar{u}_s}{dt^2}(n,t) + \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 \bar{u}_s(n,t) = \frac{1}{\rho}\bar{f}_s(n,t) \tag{۴۶۶ − ۷}$$

که در آن

$$\bar{u}_s(n,t) = \int_0^a u(x,t) \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۴۶۷ − ۷}$$

$$\bar{f}_s(n,t) = \int_0^a f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{۴۶۸ − ۷}$$

تبدیلات متناهی سینوسی u و f هستند. معادلهٔ (۷ − ۴۶۶) را باید با شرایط اولیهٔ زیر حل کنیم

$$\bar{u}_s(n,0) = \bar{F}_s(n) \tag{۴۶۹ − ۷}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_s}{\partial t}(n,0) = \bar{G}_s(n) \tag{۴۷۰ − ۷}$$

که از ضرب معادلات (۷ − ۴۶۲) و (۷ − ۴۶۳) در $\sin n\pi x/a$ وانتگرال‌گیری نسبت به x از $x = 0$ تا $x = a$ به‌دست آمده‌اند.

جواب معادلهٔ (۷ − ۴۶۶) باتوجه به شرایط فوق در بخش (۵ − ۲۴) داده شده است،

$$\bar{u}_s(n,t) = \bar{F}_s(n)\cos\omega_n t + \bar{G}_s(n)\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} + \frac{1}{\rho\omega_n}\int_0^t \bar{f}_s(n,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \tag{۴۷۱ − ۷}$$

که در آن $\omega_n = n\pi c/a$. برای محاسبهٔ $u(x,t)$ ، قضیهٔ وارون (۵ – ۱۵۱) باید در معادلهٔ (۷– ۴۷۱) مورد استفاده قرار گیرد. پس از این عمل نتیجه می‌شود

$$u(x,t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\bar{F}_s(n) \cos \omega_n t + \bar{G}_s(n) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}\right\} \sin k_n x + \frac{2}{\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n x}{\omega_n} \int_0^t \bar{f}_s(n,\tau) \sin \omega_n(t-\tau)\, d\tau \tag{۴۷۲ – ۷}$$

که در آن $k_n = n\pi/a$. معادلهٔ (۷ – ۴۷۲) مسألهٔ مرکب مقدار مرزی و اولیه را برای معادلهٔ موج یک بعدی برحسب ضرایب فوریهٔ نیروی خارجی و ضرایب فوریهٔ شرایط اولیه بیان می‌کند.

بررسی یافتن جواب (۷ – ۴۷۲) آموزنده است. آن را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع مکمل $u_C(x,t)$ و یک انتگرال خصوصی $u_P(x,t)$ نوشت:

$$u(x,t) = u_C(x,t) + u_P(x,t) \tag{۴۷۳ – ۷}$$

تابع مکمل u_C در معادلهٔ موج همگن

$$\frac{\partial^2 u_C}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_C}{\partial x^2} \tag{۴۷۴ – ۷}$$

و شرایط اولیهٔ ،

$$u_C(x,0) = F(x) \tag{۴۷۵ – ۷}$$

$$\frac{\partial u_C}{\partial t}(x,0) = G(x) \tag{۴۷۶ – ۷}$$

و شرایط مرزی

$$u_C(0,t) = 0 \tag{۴۷۷ – ۷}$$

$$u_C(a,t) = 0 \tag{۴۷۸ – ۷}$$

صدق می‌کند. انتگرال خصوصی u_P در معادلهٔ ناهمگن موج

$$\frac{\partial^2 u_P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_P}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(x,t) \tag{۴۷۹ – ۷}$$

و شرایط اولیهٔ ،

$$u_P(x,0) = 0 \tag{۴۸۰ – ۷}$$

$$\frac{\partial u_P}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{۴۸۱ – ۷}$$

و شرایط مرزی

$$u_P(0,t) = 0 \tag{۴۸۲ – ۷}$$

$$u_P(a,t) = 0 \tag{۴۸۳ – ۷}$$

صدق می‌کند . توجه کنید که u_P و u_C در شرایط مرزی در $x=0$ و $x=a$ بطور مستقل صدق می‌کنند . دلیلش این است که شرایط اولیه و جمله نیرو هر دو برحسب توابع ویژهٔ یکسان یعنی $\sin n\pi x/a$ بسط داده شده‌اند ، و این توابع ویژه همه در $x = 0$ و $x = a$ صفرند .

۷ – ۲۱ . معادلهٔ موج دوبعدی

معادلهٔ موج اسکالر ناهمگن اغلب به صورت زیر ظاهر می‌شود

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r},t) = -F(\mathbf{r},t) \tag{۴۸۴ – ۷}$$

که در آن ∇^2 عملگر لاپلاس دوبعدی است . یک روش اساسی برای حل معادلهٔ (۷ – ۴۸۴) به طبیعت منبع $F(\mathbf{r},t)$ بستگی دارد . اگر $F(\mathbf{r},t)$ به ازای جمیع مقادیر مثبت و منفی t تعریف شده باشد ، در آن صورت می‌توان $F(\mathbf{r},t)$ را به صورت انتگرال فوریه نشان داد ،

$$F(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\mathbf{r},\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{۴۸۵ – ۷}$$

و چون معادلهٔ (۷ – ۴۸۴) یک معادلهٔ خطی است ، می‌توان انتظار داشت که جواب (۷–۴۸۴) نیز به همان شکل باشد :

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\mathbf{r},\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{۴۸۶ – ۷}$$

اگر معادلات (۷ – ۴۸۵) و (۷ – ۴۸۶) را در (۷ – ۴۸۴) قرار دهیم یک معادله با مشتقات جزئی برای تبدیل فوریهٔ u به‌دست می‌آید :

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{u}(\mathbf{r},\omega) = -\bar{F}(\mathbf{r},\omega) \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{۴۸۷ – ۷}$$

معادلهٔ (۷ – ۴۸۷) را "معادلهٔ هلملتز ناهمگن" گویند .

یک موقعیت حقیقی‌تر آن است که در آن $u(\mathbf{r},t)$ با همهٔ مشتقات نسبی تا لحظهٔ معین ، مثلاً $t = 0$ متحد باصفر باشند . در $t = 0$ ، جملهٔ منبع $F(\mathbf{r},t)$ بطورناگهانی "ظاهرمی‌شود " ، و مقادیر اولیهٔ u ، $\partial u/\partial t$ توصیف می‌شوند .این نوع مسائل قبلاً به کمک تبدیل لاپلاس مورد بررسی قرارگرفته است . اگرمعادلهٔ (۷ – ۴۸۴) رادر e^{-st} ضرب‌کرده دو بار جزء به جزء نسبت به t از $t = 0$ تا $t = \infty$ انتگرال بگیریم نتیجه می‌شود ،

$$(\nabla^2 - k^2)\bar{u}(\mathbf{r},s) = -\bar{F}(\mathbf{r},s) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + su\right)_{t=0} \tag{۴۸۸ – ۷}$$

که معادله‌ای ازنوع هلملتز برای تبدیل لاپلاس u است . درمعادلهٔ (۷ ــ ۴۸۷) فرض می‌شودکه

$$\bar{u}(\mathbf{r},s) = \int_0^\infty u(\mathbf{r},t)e^{-st}\,dt \tag{۴۸۹ ــ ۷}$$

$$\bar{F}(\mathbf{r},s) = \int_0^\infty F(\mathbf{r},t)e^{-st}\,dt \tag{۴۹۰ ــ ۷}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + su(\mathbf{r},t)\right]e^{-st} = 0 \tag{۴۹۱ ــ ۷}$$

و $k = s/c$

اگر u و $\partial u/\partial t$ در $u \equiv 0$ پیوسته باشند باید داشته باشیم

$$u(\mathbf{r},0) = 0 \tag{۴۹۲ ــ ۷}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{۴۹۳ ــ ۷}$$

و معادلهٔ (۷ ــ ۴۸۷) به صورت زیر خلاصه می‌شود ،

$$(\nabla^2 - k^2)\bar{u}(\mathbf{r},s) = -\bar{F}(\mathbf{r},s) \tag{۴۹۴ ــ ۷}$$

دیده می‌شود که تبدیل فوریه یا لاپلاس معادلهٔ موج وابسته به زمان تحت شرایط مناسب به یک معادلهٔ هلملتز منجر می‌شود که باید حل شود .

جواب لازم را می‌توان به کمک روش آشنای تابع گرین به‌دست آورد . به حل معادلهٔ زیر توجه کنید

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{u}(\mathbf{r},\omega) = -\bar{F}(\mathbf{r},\omega) \tag{۴۹۵ ــ ۷}$$

ابتدا یک تابع گرین را که جواب معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{۴۹۶ ــ ۷}$$

را معرفی می‌کنیم که در آن تابع دلتای دیراک دارای خاصیت زیر است :

$$\int_V \bar{F}(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,dV = \begin{cases} \bar{F}(\mathbf{r}') & \text{اگر } \mathbf{r}' \text{ بردار منبع نقطه‌ای در } V \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } \mathbf{r}' \text{ خارج } V \text{ باشد} \end{cases} \tag{۴۹۷ ــ ۷}$$

ازطرفی اتحاد متقارن گرین را همواره می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_V \{\bar{G}(\nabla^2 + k^2)\bar{u} - \bar{u}(\nabla^2 + k^2)\bar{G}\}\,dV = \int_{S(V)} \left\{\bar{G}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\right\}dS \tag{۴۹۸ ــ ۷}$$

که درارتباط بامعادلات (۷ ــ ۴۹۵) و (۷ ــ ۴۹۶) مفیداست . به کمک این معادلات (۷ــ۴۹۸) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{u}(\mathbf{r}',\omega) = \int_V \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\bar{F}(\mathbf{r},\omega)\, dV + \int_{S(V)} \left\{\bar{G}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\right\} dS \qquad (۴۹۹-۷)$$

در این جا V حجم یک ناحیهٔ بسته از فضا، $\mathbf{r}'$ بردار موضع نقطه‌ای در V و $S(V)$ رویهٔ V را نشان می‌دهد.

وقتی درمورد یک مسألهٔ دوبعدی بحث می‌کنیم، به جای معادلهٔ (۷ـ۴۹۹) ازمعادلهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{u}(\mathbf{r}',\omega) = \int_S \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\bar{F}(\mathbf{r},\omega)\, dS + \int_{C(S)} \left\{\bar{G}\,\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{u}\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\right\} ds \qquad (۵۰۰-۷)$$

در این جا S به مساحت ناحیه‌ای از رویهٔ مرزی، $\mathbf{r}'$ نقطه‌ای از S و $C(S)$ منحنی کامل مرز S را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال اگر S رویهٔ یک حلقه یا "واشر" باشد، $\mathbf{r}'$ نقطه‌ای از واشر، S رویهٔ واشر، و $C(S)$ شامل محیط داخلی و خارجی واشر خواهد بود.

اگر به جای k^2 از k^2- در معادلات (۷ـ۴۹۶) و (۷ـ۴۹۸) استفاده کنیم درآن‌صورت می‌توانیم جواب سه بعدی (۷ـ۴۹۴) را به صورت زیر بنویسیم

$$\bar{u}(\mathbf{r}',s) = \int_S \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\bar{F}(\mathbf{r},s)\, dV + \int_{S(V)} \left\{\bar{G}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\right\} dS \qquad (۵۰۱-۷)$$

جواب دوبعدی متناظر چنین نوشته می‌شود:

$$\bar{u}(\mathbf{r}',s) = \int_S \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\bar{F}(\mathbf{r},s)\, dS + \int_{C(S)} \left\{\bar{G}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial n}\right\} d\sigma \qquad (۵۰۲-۷)$$

برای اجتناب ازاشتباه باپارامترتبدیل لاپلاس s، عنصرطول قوس درمعادلهٔ (۷ـ۵۰۲) به صورت $d\sigma$ نوشته شده است. معادلات (۷ـ۴۹۴) تا (۷ـ۵۰۲) جوابهای صوری معادلات (۷ـ۴۸۷) و (۷ـ۴۹۴) است. برای آن که آنها را به صورت مفیدی درآوریم نه تنها باید تابع گرین $\bar{G}$ رابدانیم، بلکه‌مقدار مرزی $\bar{u}$ و $\partial\bar{u}/\partial n$ نیز باید معلوم باشند. این شرایط برای تعیین جواب بیشتر از حدلازم خواهندبود، زیرا $\bar{u}$ و $\partial\bar{u}/\partial n$ بر $C(S)$ نمی‌توانند مقادیر اختیاری قبول کنند. وقتی $\bar{u}$ بر $C(S)$ تابعی معلوم باشد، بهتراست $\partial\bar{u}/\partial n$ را ازجواب حذف کنیم. برای این‌کار باید تابع گرین در شرط دیریکله همگن $\bar{G} = 0$ بر $C(S)$ صدق کند. همین‌طور، اگر مقدار $\partial\bar{u}/\partial n$ بر $C(S)$ لازم باشد مقادیر مرزی $\bar{u}$ رامی‌توان حذف کرد برای این‌کار باید $\partial\bar{G}/\partial n$ درشرط نیمن همگن $\partial\bar{G}/\partial n = 0$ بر $C(S)$ صدق کند. گاهی می‌خواهیم یک ترکیب بر $C(S)$ مانند

$$\partial\bar{u}/\partial n + \alpha\bar{u} = f$$

بدست آوریم. برای این کار باید $\bar{G}$ و $\partial\bar{G}/\partial n$ در شرط مرزی "امپدانس" زیر بر $C(S)$ صدق کند

$$\partial\bar{G}/\partial n + \alpha\bar{G} = 0$$

خواص تابع گرین

اگر تابع گرین در معادلهٔ (۷ ــ ۴۹۶) صدق کند باید دارای خواص زیر باشد:

۱ ــ $(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0$، مگر در $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

۲ ــ $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ پیوسته است، مگر در $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

۳ ــ $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ در شرایط مرزی همگن بر $C(S)$ صدق می‌کند.

۴ ــ تابع‌گرین در رابطهٔ وارون $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \bar{G}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})$ که ازتعویض $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ به‌دست می‌آید صدق می‌کند.

خاصیت وارون‌پذیری تابع گرین را درنظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال، این خاصیت بیان می‌کند که اگر یک منبع نقطه‌ای صدا در مرکز اتاقی و نقطهٔ ناظر در یک گوشهٔ اتاق قرار داشته باشد، آن چه ضبط می‌شود درست برابر است با آن چه با تعویض منبع و ناظر به‌دست خواهد آمد. این مطلب خیلی بدیهی‌نیست. ممکن است تصورشود که اثرگوشه برمنبع و ناظر متفاوت است. وارون‌پذیری تضمین می‌کند که مطلقا" تفاوتی در تعویض منبع و ناظر به وجود نمی‌آید.

برای اثبات خاصیت وارون‌پذیری $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ جواب نقطهٔ $\mathbf{r}$ را برای حرکتی در $\mathbf{r}'$ و همچنین $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')$ جواب $\mathbf{r}$ را برای حرکتی در نقطهٔ دیگر $\mathbf{r}''$ با شرط مرزی یکسان درنظر بگیرید. در این صورت،

$$\int_S \{\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\ \nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'') - \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')\ \nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\}\ dS$$
$$= \int_{C(S)} \left\{\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')\ \frac{\partial\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')}{\partial n} - \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')\ \frac{\partial\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n}\right\} ds \qquad (۷-۵۰۳)$$

حال اگر $\bar{G}$ بر $C(S)$ صفر شود، $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')$ نیز بنابه فرض صفر می‌شود. همین‌طور، اگر $\partial\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')/\partial n$ بر $C'(S)$ صفر شود $\partial\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')/\partial n$ نیز بنابه فرض صفر خواهد شد. در هر حالت،

$$\int_S \{\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\ \nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'') - \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')\ \nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\}\ dS = 0 \qquad (۷-۵۰۴)$$

با وجود این، از

$$\nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -k^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (۷-۵۰۵)$$

و

$$\nabla^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'') = -k^2\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'') - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') \qquad (۷-۵۰۶)$$

نتیجه می‌شود،

$$\int_S \{\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') - \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}'')\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\}\ dS = 0 \qquad (۷-۵۰۷)$$

و از آن اصل وارون‌پذیری به‌دست می‌آید

$$\bar{G}(\mathbf{r}''|\mathbf{r}') = \bar{G}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}'') \tag{۷−۵۰۸}$$

تابع گرین دوبعدی برای یک میانهٔ نامتناهی

تابع گرین میانهٔ نامتناهی دوبعدی برای یک منبع خطی به صورت جواب معادلهٔ زیردر مختصات قطبی تعریف می‌شود:

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{۷−۵۰۹}$$

تابع گرین $\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ نوسانات حاصل از منبع خطی که از نقطهٔ $\mathbf{r}'$ می‌گذرد را در $\mathbf{r}$ نشان می‌دهد و بالعکس. در میانهٔ یک بسط نامحدود، $\bar{G}$ فقط باید تابع فاصلهٔ بین منبع و گیرنده باشد. بنابراین

$$\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \bar{G}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \bar{G}(R) \tag{۷−۵۱۰}$$

و (۷ − ۵۰۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(R) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{۷−۵۱۱}$$

انتخاب دستگاه مختصات قطبی به مبدأ منبع، مناسب‌است دراین صورت $r=R$ و $r' = 0$ در این دستگاه مختصات

$$dS = R\, dR\, d\theta$$

و

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(R)}{R}\,\delta(\theta) \tag{۷−۵۱۲}$$

در این صورت

$$\int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')R\, dR\, d\theta = 1\,. \tag{۷−۵۱۳}$$

پس معادلهٔ (۷ − ۵۱۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial R}\right) + k^2\bar{G}(R) = \frac{-\delta(R)}{R}\,\delta(\theta) \tag{۷−۵۱۴}$$

اگر معادلهٔ (۷ − ۵۱۴) را در $d\theta$ ضرب کرده از طرفین در فاصله $\theta=-\pi$ تا $\theta=\pi$ انتگرال بگیریم، داریم

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial \bar{G}}{\partial R}\right) + k^2\bar{G}(R) = \frac{-\delta(R)}{2\pi R} \tag{۷−۵۱۵}$$

انتگرال هر طرف معادله نسبت به dR از $R=-\epsilon$ تا $R=\epsilon$ و حدآن وقتی $\epsilon \to 0$ عبارت است از

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial R} = -\frac{1}{2\pi R} \qquad (۵۱۶-۷)$$

معادلهٔ (۷ — ۵۱۵) را معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر نامند ، درنتیجه جوابهای آن را باید بین $J_0(kR)$ ، $N_0(kR)$ ، $H_0^{(1)}(kR)$ یا $H_0^{(2)}(kR)$ پیدا کرد . برای تحقیق جواب‌مناسب باتوجه به معادلهٔ (۷ — ۴۸۶) داریم

$$G(R,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(R,\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (۵۱۷-۷)$$

که نوسانات تولیدشده به وسیلهٔ منبعی را در R نشان می‌دهد . پس وقتی زمان افزایش پیدا می‌کند ، نوسانات باید از منبع دور شوند . بسط سیستماتیک بخش (۶ — ۱۱) به این نتیجه می‌رسد که $H_0^{(2)}(kR)$ تابع صحیح خواهد بود ، زیرا برای هر kR بزرگ ،

$$H_0^{(2)}(kR)e^{i\omega t} \sim \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{i\pi/4}e^{-i(kR-\omega t)} \qquad (۵۱۸-۷)$$

به عبارت دیگر ، برای هر kR بزرگ ، $H_0^{(2)}(kR)e^{i\omega t}$ به یک موج مسطح تبدیل می‌شود که از منبع دور می‌شود . پس G به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\bar{G}(kR) = AH_0^{(2)}(kR) \qquad (۵۱۹-۷)$$

که درآن مقدارثابت A ازمعادلهٔ (۷ — ۵۱۶) ونتایج بخش (۶ — ۱۱) به‌دست‌می‌آید . بالاخره خواهیم داشت

$$\frac{d}{dR}\left[\lim_{R\to 0} AH_0^{(2)}(kR)\right] = \frac{2iA}{\pi}\frac{d}{dR}(\log R) = \frac{-1}{2\pi R} \qquad (۵۲۰-۷)$$

یا

$$A = \frac{i}{4} \qquad (۵۲۱-۷)$$

درنتیجه

$$\bar{G}(kR) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(kR) \qquad (۵۲۲-۷)$$

به همین طریق می‌توان نشان داد که تابع گرین متوسط نامتناهی برای

$$(\nabla^2 - k^2)\bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (۵۲۳-۷)$$

به صورت زیر است

$$\bar{G}(kR) = \frac{1}{2\pi}K_0(kR) \qquad (۵۲۴-۷)$$

که مانند قبل داریم

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \qquad (۵۲۵-۷)$$

۷ ـ ۲۲. معادلهٔ هلملتز در مختصات استوانه‌ای

در این بخش مسأله حل معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (۵۲۶-۷)$$

را در مختصات قطبی (r,θ,z) بررسی می‌کنیم . باتوجه به رابطهٔ

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

تابع δ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')\ \delta(\theta - \theta')\ \delta(z - z')}{r} \qquad (۵۲۷-۷)$$

با فرض $\theta - \theta' = \phi$ معادلهٔ (۷ ـ ۵۲۶) را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{G}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial z^2} + k^2\bar{G} = \frac{-\delta(r - r')\ \delta(\phi)\ \delta(z - z')}{r} \qquad (۵۲۸-۷)$$

نوشت و یک جواب آن را می‌توان به شکل زیر درنظر گرفت

$$\bar{G} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{G}_n e^{in\phi} \qquad (۵۲۹-۷)$$

حال طرفین معادلهٔ (۷ ـ ۵۲۸) را در $e^{-in\phi}$ ضرب کرده‌نسبت‌به ϕ از $\phi = -\pi$ تا $\phi = \pi$ انتگرال می‌گیریم ،

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \phi^2} e^{-in\phi}\, d\phi = e^{-in\phi}\left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \phi} + in\bar{G}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - n^2\int_{-\pi}^{\pi} \bar{G}e^{-in\phi}\, d\phi \qquad (۵۳۰-۷)$$

چون در یک ماده نامحدود ، $\bar{G}$ بایدنسبت به ϕ متناوب باشد . بنابراین ، جزء انتگرال گرفته شده در معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۰) صفر می‌شود . به علت خواص متعامد بودن $e^{-in\phi}$ ،

$$\bar{G}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{G}e^{-in\phi}\, d\phi \qquad (۵۳۱-۷)$$

درنتیجه

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{G}_n}{\partial r}\right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\bar{G}_n + \frac{\partial^2 \bar{G}_n}{\partial z^2} = \frac{-\delta(r - r')\ \delta(z - z')}{r} \qquad (۵۳۲-۷)$$

که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. وابستگی معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۲) با یک تبدیل فوریه نسبت به z حذف می‌شود . معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۲) را در e^{-ihz} ضرب کرده نسبت به z از $z = -\infty$ تا $z = \infty$ انتگرال می‌گیریم . نتیجه عبارت است از :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{F}_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\bar{F}_n + (k^2 - h^2)\bar{F}_n = \frac{-\delta(r - r')}{r}\, e^{-ihz'} \qquad (۵۳۳ - ۷)$$

که در آن

$$\bar{F}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}_n e^{-ihz}\, dz \qquad (۵۳۴ - ۷)$$

و

$$\bar{G}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{ihz}\, dh \qquad (۵۳۵ - ۷)$$

برای به‌دست آوردن معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۳) فرض کردیم که

$$\left(\frac{\partial \bar{G}_n}{\partial z} + ih\bar{G}_n\right) e^{-ihz}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = 0 \qquad (۵۳۶ - ۷)$$

این مطلب را بعداً" اثبات خواهیم کرد .

استفاده از توابع هنکل

برای حل معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۳) بهتر است از یک تبدیل جدیدی بر مبنای خواص متعامد وکامل بودن توابع بسل استفاده کنیم . دقیقاً" مانند توابع مثلثاتی‌که برای تولید قضیهٔ انتگرال فوریه به‌کار رفت ،

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty f(y)\cos uy\, dy \qquad (۵۳۷ - ۷)$$

توابع بسل را می‌توان برای ارائهٔ نتیجه‌ای مشابه به‌کار برد .

درواقع ، اگر $f(x)$ یک تابع دلخواه باشد فقط با محدودیتهای کمی می‌توان نشان داد که به ازای $\nu \geq -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(xu)(xu)^{1/2}\, du \int_0^\infty f(y)J_\nu(uy)(uy)^{1/2}\, dy \qquad (۵۳۸ - ۷)$$

برای آن که معادلهٔ (۷ ـ ۵۳۸) برقرار باشد کافی است انتگرال

$$\int_0^\infty |f(y)|\, dy$$

همگرا و $f(y)$ در همسایگی x با تغییرات محدود باشد . اگر $f(x)$ در x گسسته باشد ، درآن‌صورت سمت چپ (۷ — ۵۳۸) به صورت

$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

نوشته می‌شود .

معمولاً $x^{1/2}f(x)$ به جای $f(x)$ در (۷ — ۵۳۸) استفاده‌می‌شود ونتیجه برحسب‌یک تبدیل و یک قضیهٔ وارون نوشته می‌شود . .

تبدیل ،

$$H_\nu(u) = \int_0^\infty yf(y)J_\nu(uy)\,dy \tag{۵۳۹ — ۷}$$

را تبدیل هنکل مرتبهٔ ν تابع $f(y)$ گویند ، و

$$f(x) = \int_0^\infty uH_\nu(u)J_\nu(ux)\,du \tag{۵۴۰ — ۷}$$

قضیهٔ وارون متناظر آن است .

با مراجعه به معادلهٔ (۷ — ۵۳۳) فرض کنید

$$\bar{H}_n(\lambda,r',h) = \int_0^\infty \bar{F}_n(r,r',h)J_n(\lambda r)r\,dr \tag{۵۴۱ — ۷}$$

تبدیل هنکل مرتبهٔ n جواب معادلهٔ (۷ — ۵۳۳) و

$$\bar{F}_n(r,r',h) = \int_0^\infty \bar{H}_n(\lambda,r',h)J_n(\lambda r)\lambda\,d\lambda \tag{۵۴۲ — ۷}$$

فرمول وارون متناظر است . در روش معمول تبدیل طرفین (۷ — ۵۳۳) را در $J_n(\lambda r)r\,dr$ ضرب‌کرده ، از $r=0$ تا $r=\infty$ انتگرال می‌گیریم . این کار باتوجه به معادلهٔ بسل (بخش ۶—۸) ساده‌تر می‌شود ،

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}J_n(\lambda r) = -\lambda^2 J_n(\lambda r) \tag{۵۴۳ — ۷}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\int_0^\infty &\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{F}_n}{\partial r}\right) - \left(\frac{n^2}{r^2}+h^2-k^2\right)\bar{F}_n\right]J_n(\lambda r)r\,dr \\ &= r\left[J_n(\lambda r)\frac{\partial \bar{F}_n}{\partial r} - \lambda\bar{F}_n J_n'(\lambda r)\right]\Big|_{r=0}^{r=\infty} - (\lambda^2+h^2-k^2)\bar{H}_n \\ &= -J_n(\lambda r')e^{-ihz'}\end{aligned} \tag{۵۴۴ — ۷}$$

جمله انتگرال گرفته شده

$$r\left[J_n(\lambda r)\frac{\partial \bar{F}_n}{\partial r} - \lambda \bar{F}_n J_n'(\lambda r)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=\infty} \qquad (۵۴۵-۷)$$

خود به خود در حد پایین $r = 0$ صفرمی‌شود . درحد بالا $r = \infty$، توجه داریم که برای استفاده از تبدیل هنکل ، فرض کرده‌ایم انتگرال

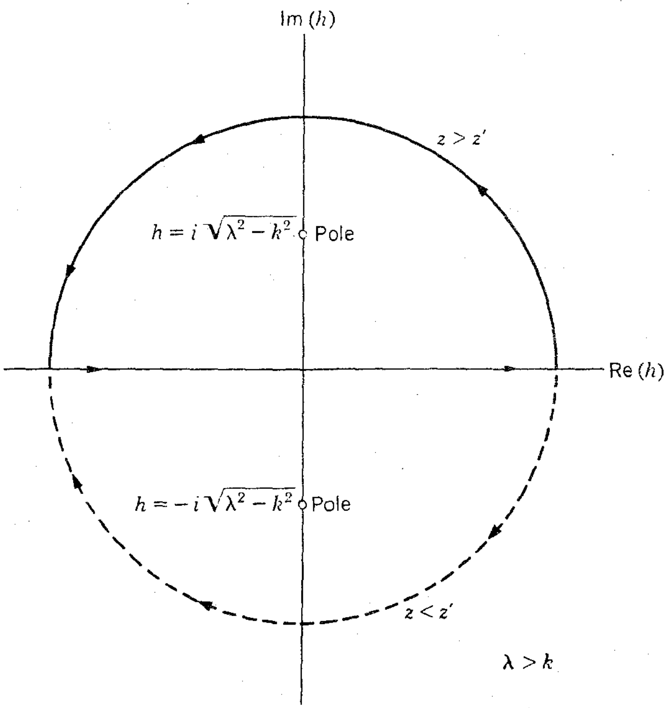
$$\int_0^\infty |\bar{F}_n|\sqrt{r}\,dr$$

موجود است . بنابراین $\bar{F}_n$ باید سریعتر از $r^{-1/2}$ صفر شود . ولی به ازای مقادیر بزرگ r

$$J_n(\lambda r) \sim \left(\frac{2}{\pi r\lambda}\right)^{1/2}\cos\left(\lambda r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (۵۴۶-۷)$$

ودرنتیجه ،هردوعبارت $J_n(\lambda r)\partial\bar{F}_n/\partial r$ و $\bar{F}_n J_n'(\lambda r)$ سریعتراز r^{-1}صفرمی‌شوند . پس جزء انتگرالی به ازای $r \to \infty$حذف خواهد شد ، و معادلهٔ (۷ ــ ۵۴۴) به صورت ساده

$$\bar{H}_n(\lambda,r',h,z') = \frac{J_n(\lambda r')e^{-ihz'}}{\lambda^2 + h^2 - k^2} \qquad (۵۴۷-۷)$$



شکل ۷ ــ ۷. صفحهٔ مختلط h .

درمی‌آید . فرمولهای وارون (۷ — ۵۴۲) و (۷ — ۵۳۵) را اکنون می‌توان درمورد معادلهٔ (۷— ۵۴۷) به‌کار برد ،

$$\bar{G}_n(r,r';z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih(z-z')}\,dh \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\lambda\,d\lambda}{h^2+(\lambda^2-k^2)} \qquad (۵۴۸-۷)$$

با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری در معادلهٔ (۷ — ۵۴۸) و تجزیهٔ مخرج می‌توان نوشت

$$\bar{G}_n = \int_0^\infty J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')\lambda\,d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ih(z-z')}\,dh}{(h+i\sqrt{\lambda^2-k^2})(h-i\sqrt{\lambda^2-k^2})} \qquad (۵۴۹-۷)$$

می‌خواهیم انتگرال

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ih(z-z')}\,dh}{(h+i\sqrt{\lambda^2-k^2})\,(h-i\sqrt{\lambda^2-k^2})} \qquad (۵۵۰-۷)$$

راباروش مانده‌ها (بخش ۴ — ۱۸) محاسبه‌کنیم . ظاهرا" انتگرال موجود در (۷ — ۵۵۰) دارای قطبهای مرتبهٔ اول در نقاط

$$h = \pm i\sqrt{\lambda^2-k^2} \qquad (۵۵۱-۷)$$

صفحهٔ مختلط h است (شکل ۷ — ۷) . دو حالت $z<z'$ و $z>z'$ را باید درنظرگرفت . فرض کنید $z' < z$. برای استفاده از قضیهٔ مانده (۴ — ۱۸۷) باید مسیر انتگرال‌گیری را در (۷ — ۵۵۰) با یک نیم‌دایره که شعاعش به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ، بست . این نیم‌دایره باید تماما" در نیم‌صفحهٔ بالایی یا پایینی صفحهٔ مختلط h واقع شود . انتخاب به قسمی صورت می‌گیرد که براین نیم‌دایره

$$|h| \to \infty \qquad e^{ih(z-z')} \to 0$$

پس، اگر $z' < z$، کافی است نیم‌دایره را در نیم‌صفحهٔ فوقانی اختیار کنیم که برآن $\mathrm{Im}(h)>0$ قطب موردنظر در (۷ — ۵۵۰) قطبی است که در نیم‌صفحهٔ فوقانی صفحهٔ مختلط h قرار دارد . برای تثبیت این قطب ،شاخه $\sqrt{\lambda^2-k^2}$ را در (۷ — ۵۵۰) درنظرمی‌گیریم که‌در شرط

$$\mathrm{Re}\,(\sqrt{\lambda^2-k^2}) > 0 \qquad (۵۵۲-۷)$$

صدق می‌کند . در این صورت ماندهٔ (۷ — ۵۵۰) در این قطب به ازای

$$h = i\sqrt{\lambda^2-k^2} \qquad (۵۵۳-۷)$$

به‌دست می‌آید ، و داریم

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ih(z-z')}\,dh}{(h+i\sqrt{\lambda^2-k^2})(h-i\sqrt{\lambda^2-k^2})} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}(z-z')}}{2\sqrt{\lambda^2-k^2}} \tag{۵۵۴ – ۷}$$

اگر $z<z'$، مسیر انتگرال‌گیری (۷ – ۵۵۰) باید با نیم‌دایره واقع در نیم‌صفحه تحتانی بسته شودکه درآن $\mathrm{Im}(h)<0$ دراین‌صورت‌مانده (۷ – ۵۵۰) از قطب‌واقع در $h=-i\sqrt{\lambda^2-k^2}$ به وجود می‌آید به شرط‌آن که شاخهٔ اصلی نامساوی (۷ – ۵۵۲) رادرنظر بگیریم . باتوجه به این‌که‌قطب $h=-i\sqrt{\lambda^2-k^2}$ در دایره‌ای‌محاط است که‌درجهت منفی (جهت عقربه‌های ساعت) پیموده می‌شود ، داریم

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ih(z-z')}\,dh}{(h+i\sqrt{\lambda^2-k^2})(h-i\sqrt{\lambda^2-k^2})} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}(z'-z)}}{2\sqrt{\lambda^2-k^2}} \tag{۵۵۵ – ۷}$$

هر دو معادلهٔ (۷ – ۵۵۴) و (۷ – ۵۵۵) را می‌توان به صورت یک فرمول ترکیب کرد . نتیجهٔ حاصل عبارت است از:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ih(z-z')}\,dh}{h^2+\lambda^2-k^2} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{2\sqrt{\lambda^2-k^2}} \tag{۵۵۶ – ۷}$$

پس معادلهٔ (۷ – ۵۴۸) به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{G}_n(r,r',z,z') = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\,d\lambda \tag{۵۵۷ – ۷}$$

که درآن $\mathrm{Re}\,(\sqrt{\lambda^2-k^2})>0$ بالاخره ، با استفاده از (۷ – ۵۲۹) جواب معادلهٔ (۷ – ۵۲۸) عبارت است از:

$$\bar{G}(r,r',\theta-\theta',|z-z'|) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{in(\theta-\theta')}\int_0^{\infty}\frac{J_n(\lambda r)J_n(\lambda r')e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\,d\lambda \tag{۵۵۸ – ۷}$$

تابع گرین (۷ – ۵۵۸) را می‌توان به‌عنوان جوابهای جداشدهٔ ویژهٔ معادلهٔ هلملتز درنظر گرفت:

$$(\nabla^2+k^2)\psi = 0 \tag{۵۵۹ – ۷}$$

فرض کنید

$$\psi_{n>} = J_n(\lambda r_>)e^{in\theta_>-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,z_>} \tag{۵۶۰ – ۷}$$

و

$$\psi_{n<} = J_n(\lambda r_<)e^{-in\theta_< + \sqrt{\lambda^2-k^2}\, z_<} \tag{۷ – ۵۶۱}$$

که درآن نماد $<$ مانندمعادلهٔ (۶ – ۴۸۵) تعریف می‌شود. معادلات (۷– ۵۶۰) و (۷–۵۶۱) جوابهای جداشده معادلهٔ (۷ – ۵۵۹) هستند که پارامترهای جداسازی آن عبارتند از n و λ.

با استفاده از (۷ – ۵۶۰) و (۷ – ۵۶۱) تابع گرین (۷ – ۵۵۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{G} = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_0^\infty \psi_{n>}\psi_{n<}\frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \tag{۷ – ۵۶۲}$$

اگر صفحه‌ای را درنظر بگیریم که از منبع گذشته بر محور z ها عمود باشد آن‌گاه معادلهٔ (۷ – ۵۶۲) متناظر است با بسط تابع گرین $\bar{G}$.

نمایش مستقل تابع گرین برای یک منبع نقطه‌ای

در مختصات کروی تابع گرین برای یک منبع نقطه‌ای باید متقارن کروی باشد و بنابراین باید فقط تابع مختص شعاعی R باشد. داریم

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G}(R) = -\delta(R) \tag{۷ – ۵۶۳}$$

یا

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}[R\bar{G}(R)] + k^2\bar{G}(R) = -\delta(R) \tag{۷ – ۵۶۴}$$

وقتی $R \neq 0$، معادلهٔ (۷ – ۵۶۴) با

$$R\bar{G}(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \tag{۷ – ۵۶۵}$$

حل می‌شود که در آن $k = \omega/c$

چون

$$G(R,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{G}(R)e^{i\omega t}\, d\omega \tag{۷ – ۵۶۶}$$

تنها جملهٔ Be^{-ikR} متناظر است با نوسانی که از منبع در $R = 0$ به مرور زمان خارج می‌شود. پس A برابر صفر است، و خواهیم داشت

$$\bar{G}(R) = \frac{Be^{-ikR}}{R} \tag{۷ – ۵۶۷}$$

برای تعیین B، ابتدا از معادلهٔ (۷ – ۵۶۳) بر کره‌ای به حجم V و مرکز $R = 0$ انتگرال بگیرید و سپس حجم V را به سمت صفر میل دهید. چون

$$\int_V \delta(R)\, dV = \iiint_{\text{Sphere}} \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1 \tag{۷ – ۵۶۸}$$

داریم ،

$$\int_V (\nabla^2 + k^2)\bar{G}(R)\, dV = -1 \qquad (۵۶۹-۷)$$

با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، معادلهٔ (۷ــ ۵۶۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{S(V)} \frac{\partial \bar{G}}{\partial R}\, dS + k^2 \int \bar{G}(R)\, dV = -1 \qquad (۵۷۰-۷)$$

برحسب زاویهٔ فضایی $d\Omega$ داریم

$$dS = R^2\, d\Omega \qquad dV = R^2 d\Omega\, dR$$

پس معادلات (۷ــ ۵۶۷) و (۷ــ ۵۷۰) را می‌توان چنین نوشت :

$$B \int_{S(V)} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) R^2\, d\Omega + k^2 B \int_V e^{-ikR} R\, d\Omega\, dR = -1 \qquad (۵۷۱-۷)$$

حال اگر $R \to 0$،حجم کره به سمت صفر میل می‌کند . چون

$$\lim_{R\to 0} k^2 B \int_V e^{-ikR} R\, d\Omega\, dR = 0 \qquad (۵۷۲-۷)$$

و

$$\lim_{R\to 0} B \int_{S(V)} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) R^2\, d\Omega = -4\pi B \qquad (۵۷۳-۷)$$

از معادلهٔ (۷ــ ۵۷۱) نتیجه می‌شود

$$B = \frac{1}{4\pi} \qquad (۵۷۴-۷)$$

پس

$$\bar{G}(R) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \qquad (۵۷۵-۷)$$

که یک صورت مهم‌دیگر تابع گرین برای یک منبع نقطه‌ای است . ازمقایسهٔ معادلات (۷ــ ۵۷۵) و (۷ــ ۵۵۸) که هر دو تابع گرین را برای یک منبع‌نقطه‌ای نشان می‌دهد عبارت زیر به‌دست می‌آید :

$$\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')} \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda r) J_n(\lambda r') e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda\, d\lambda \qquad (۵۷۶-۷)$$

درمعادلهٔ (۷ــ۵۷۶) ، (r,θ,z) مختصات‌استوانه‌ای و R فاصلهٔ‌بین نقطهٔ‌منبع (r',θ',z') و نقطهٔ ناظر (r,θ,z) است :

$R = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$

از (۷ ــ ۵۷۶) تعدادی نتایج جالب می‌توان به‌دست آورد. مثلاً، درحد استاتیک $k \to 0$، (۷ ــ ۵۷۶) به صورت،

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in(\theta-\theta')} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-z'|} J_n(\lambda r) J_n(\lambda r')\, d\lambda \tag{۵۷۷ — ۷}$$

درمی‌آید. برای یک منبع استاتیک در مبدأ $0 = r'$ و $z' = 0$، چون $J_n(0) = 0$، $n \neq 0$، معادلهٔ (۷ ــ ۵۷۷) به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{۵۷۸ — ۷}$$

که به " انتگرال لاپلاس" موسوم‌است. اگر $r = 1$، معادله (۷ ــ ۵۷۸) به‌صورت تبدیل لاپلاس $J_0(\lambda)$ درمی‌آید. قضیهٔ وارون (۵ ــ ۴۷۳) برای تبدیل لاپلاس را می‌توان برای (۷ ــ ۵۷۸) به‌کار برد تا صورت انتگرالی J_0 به‌دست آید، یعنی

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{e^{sx}}{\sqrt{1+s^2}}\, ds \tag{۵۷۹ — ۷}$$

برای یک منبع غیراستاتیک($k \neq 0$) در مبدأ، تبصره‌های قبل نشان می‌دهند که ازمعادلهٔ (۷ ــ ۵۷۶) عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|} \frac{J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \tag{۵۸۰ — ۷}$$

که در آن

$R = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = (r^2+z^2)^{1/2}$

معادلهٔ (۷ ــ ۵۸۰) به صورت یک تبدیل هنکل مرتبهٔ صفر از

$e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|}/\sqrt{\lambda^2-k^2}$

است. بنابراین، با استفاده‌ازقضیهٔ وارون تبدیل هنکل (۷ــ۵۴۲)، انتگرال زومرفلد به‌دست می‌آید

$$\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-ikR}}{R} J_0(\lambda r) r\, dr \tag{۵۸۱ — ۷}$$

که در آن مانند تمام این فرمولها، $\mathrm{Re}\,(\sqrt{\lambda^2-k^2}) > 0$

حال می‌توانیم به اثبات معادلهٔ (۷ ــ ۵۳۶) بپردازیم:

$$\left(\frac{\partial \bar{G}_n}{\partial z} + ih\bar{G}_n\right) e^{-ihz} \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = 0 \tag{۵۸۲ — ۷}$$

باتوجه به معادلهٔ (۷ ــ ۵۳۱) داریم

$$\left(\frac{\partial \bar{G}_n}{\partial z} + ih\bar{G}_n\right) e^{-ihz}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\phi}\left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial z} + ih\bar{G}\right) e^{-ihz}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} d\phi \qquad (۷-۵۸۳)$$

ولی

$$\bar{G}(R) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \qquad (۷-۵۸۴)$$

درنتیجه ،

$$\left(\frac{\partial \bar{G}_n}{\partial z} + ih\bar{G}_n\right) e^{-ihz}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = -\int_{\pi}^{\pi} e^{-in\phi}\, \frac{z(1+ikR)e^{-i(kR+hz)}}{4\pi R^3}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} d\phi \qquad (۷-۵۸۵)$$

چون برای هر مقدار بزرگ z فاصلهٔ شعاعی$z \sim R$، می‌توان نوشت :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z(1+ikR)}{4\pi R^3} = 0 \qquad (۷-۵۸۶)$$

درنتیجه معادلهٔ (۷ ــ ۵۸۲) برقرار است .

طبق تبصره‌های بعد از (۷ ــ ۸۴) ، انتظار داریم که دو راه برای تقسیم‌فضای حول منبع وجود داشته باشد .یکی‌راهی که به‌کار بردیم ودر آن فضا را بوسیلهٔ صفحهٔ مار بر مبدأ وعمود بر محور z ها تقسیم کردیم .

راه دوم که اکنون آن را بررسی می‌کنیم عبارت است از تقسیم فضا با یک استوانهٔ ماربر منبع که مولد آن موازی محور zها باشد . برای این منظوربه معادلهٔ (۷ ــ ۵۳۳) برمی‌گردیم ،

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{F}_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\bar{F}_n + (k^2 - h^2)\bar{F}_n = \frac{-\delta(r-r')}{r} e^{-ihz'} \qquad (۷-۵۸۷)$$

که همان معادلهٔ بسل است . درعوض به‌کار بردن یک تبدیل هنکل برای معادلهٔ (۷ ــ ۵۸۷) می‌توان آن را مانند معادلهٔ (۷ ــ ۳۱۱) حل کنیم . به ازای $r \neq r'$

$$\bar{F}_n = \begin{cases} AJ_n(\sqrt{k^2-h^2}\, r) \\ BH_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\, r) \end{cases} \qquad (۷-۵۸۸)$$

به شرط‌آن‌که جوابهای (۷ ــ ۵۸۷) مستقل خطی‌باشند . وقتی‌منبع نه درمبدأ و نه دربی‌نهایت است ، تابع گرین باید در$r = 0$و $r = \infty$متناهی باقی بماند . پس فرض می‌کنیم

$$\bar{F}_n = AJ_n(\sqrt{k^2-h^2}\, r) \qquad 0 \le r < r' \qquad (۷-۵۸۹)$$

$$\bar{F}_n = BH_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\, r) \qquad r' < r < \infty \qquad (۷-۵۹۰)$$

به‌دلیلی‌که درارتباط بامعادلهٔ (۷ـ ۵۶۰) گفته شد $H_n^{(2)}$ به جای $H_n^{(1)}$ انتخاب می‌شود .

ثابتهای A و B مانند بخش (۷ ــ ۱۵) معین می‌شوند و نتیجه عبارت است از :

$$\bar{F}_n = -\frac{J_n(\sqrt{k^2-h^2}\,r_<)H_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,r_>)e^{-ihz'}}{\sqrt{k^2-h^2}\,r'W\{J_n,H_n^{(2)};r'\}} \qquad (۵۹۱ - ۷)$$

که در آن

$W\{J_n,H_n^{(2)};r'\}$

رونسکین J_n و $H_n^{(2)}$ است . این رونسکین را مانند بخش (۷ ــ ۱۵) محاسبه می‌کنیم :

$$W\{J_n,H_n^{(2)};r'\} = \frac{-2i}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\,r'} \qquad (۵۹۲ - ۷)$$

بنابراین معادلهٔ (۷ ــ ۵۹۱) به صورت

$$\bar{F}_n = \frac{-i\pi}{2}J_n(\sqrt{k^2-h^2}\,r_<)H_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,r_>)e^{-ihz'} \qquad (۵۹۳ - ۷)$$

درمی‌آید و از معادلات (۷ ــ ۵۲۰) ، (۷ ــ ۵۳۵) و (۷ ــ ۵۹۳) رابطهٔ

$$\bar{G}(R) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \frac{-i}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(\sqrt{k^2-h^2}\,r_<)H_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,r_>)e^{ih(z-z')}\,dh \qquad (۵۹۴ - ۷)$$

برای تابع گرین متوسط نامتناهی به‌دست می‌آید .

تابع گرین (۷ ــ ۵۹۴) را می‌توان به‌عنوان نتیجهٔ جوابهای جداشدهٔ معادلهٔ هلملتز درنظر گرفت :

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \qquad (۵۹۵ - ۷)$$

فرض کنید

$$\psi_{n<} = J_n(\sqrt{k^2-h^2}\,r_<)e^{i(n\theta_< + hz_<)} \qquad (۵۹۶ - ۷)$$

و

$$\psi_{n>} = H_n^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\,r_>)e^{-i(n\theta_> + hz_>)} \qquad (۵۹۷ - ۷)$$

این عبارات جوابهای جداشدهٔ معادلهٔ (۷ ــ ۵۹۵) با پارامترهای جداسازی n و h است . با استفاده از (۷ ــ ۵۹۶) و (۷ ــ ۵۹۷) تابع گرین (۷ ــ ۵۹۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\bar{G} = \frac{-i}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{n>}\psi_{n<}\,dh \qquad (۵۹۸ - ۷)$$

حال اگر استوانه‌ای را درنظر بگیریم که از نقطهٔ (r',θ',z') بگذرد ومولدهایش با محور z ها

موازی باشد ، آن‌گاه معادلهٔ (۷ ـ ۵۹۵) فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کند ، یکی داخل استوانه و دیگری خارج آن . بسط (۷ ـ ۵۹۸) با بسط تابع گرین در مجموعه‌ای از امواج که در طول z منتقل می‌شوند به جای این که بطور نمایی در طول z مستهلک شود متناظر است .

دقیقاً" مانند معادلهٔ (۷ ـ ۵۷۶) تعدادی از فرمولهای جالب را می‌توان از (۷ ـ ۵۹۴) به‌دست آورد . مثلاً" ، درحد استاتیک $k \to 0$ ، (۷ ـ ۵۹۴) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{1}{R} = \frac{-i}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(-i|h|r_<) H_n{}^{(2)}(-i|h|r_>) e^{ih(z-z')}\, dh \qquad (۵۹۹-۷)$$

صورت حدی (۷ ـ ۵۹۹) به علت این‌که شاخهٔ $\sqrt{k^2-h^2}$ در (۷ ـ ۵۹۴) با شرط زیر معین می‌شود

$$\operatorname{Im}(\sqrt{k^2-h^2}) < 0 \qquad (۶۰۰-۷)$$

زیرا نامساوی (۷ ـ ۶۰۰) باید برقرار باشد ، توجه کنید که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{R} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} = 0 \qquad (۶۰۱-۷)$$

باید درمورد دو طرف معادلهٔ (۷ ـ ۵۹۹) به‌کار برده شود . اگر $x \to \infty$ ،

$$\lim_{x\to\infty} H_n{}^{(2)}(-i|h|r_>) \to \sqrt{\frac{-2}{\pi|h|r}}\, e^{-i\left\{-i|h|x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right\}} \to 0 \qquad (۶۰۲-۷)$$

دارای رفتار صحیح است ، ولی اگر

$$\operatorname{Im}(\sqrt{k^2-h^2}) > 0 \qquad (۶۰۳-۷)$$

آن‌گاه به ازای $k \to 0$ ، $\sqrt{k^2-h^2} \to i|h|$ و سمت راست معادلهٔ (۷ ـ ۵۹۴) وقتی x بی‌نهایت شود واگرا خواهد بود . به‌عنوان تمرین ثابت کنید که

$$\frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')} \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(\sqrt{k^2-h^2}\, r_<) H_n{}^{(1)}(\sqrt{k^2-h^2}\, r_>) e^{ih(z-z')}\, dh \qquad (۶۰۴-۷)$$

درحد استاتیک $k=0$ ، صورت مجانبی

$$x \to \infty\ H_n{}^{(1)}(\sqrt{k^2-h^2}\, r_>)$$

لازمه‌اش این است که

$$\operatorname{Im}(\sqrt{k^2-h^2}) > 0 \qquad (۶۰۵-۷)$$

پس از معادلهٔ (۷ ــ ۶۰۴) نتیجه می‌شود ،

$$\frac{1}{R}=\frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')}\int_{-\infty}^{+\infty} J_n(i|h|r_<)H_n^{(1)}(i|h|r_>)e^{ih(z-z')}\,dh \tag{۷ ــ ۶۰۶}$$

چون

$$J_n(i|h|r_<) = e^{in\pi/2}I_n(|h|r_<) \tag{۷ ــ ۶۰۷}$$

و

$$H_n^{(1)}(i|h|r_>) = \frac{2}{\pi i}e^{-in\pi/2}K_n(|h|r_>) \tag{۷ ــ ۶۰۸}$$

معادلهٔ (۷ ــ ۶۰۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta-\theta')}\int_{-\infty}^{+\infty} I_n(|h|r_<)K_n(|h|r_>)e^{ih(z-z')}\,dh \tag{۷ ــ ۶۰۹}$$

که مانند معادلهٔ (۷ ــ ۳۳۹) است . حد استاتیک $k = 0$ ، با منبع واقع در مبدأ $r' = 0$ ، $z' = 0$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ihz}K_0(hr)\,dh \tag{۷ ــ ۶۱۰}$$

یا

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K_0(hr)\cos hz\,dh \tag{۷ ــ ۶۱۱}$$

که با معادلهٔ (۷ ــ ۳۴۰) مطابق است . وقتی یک منبع کروی امواج در مبدأ وجود دارد ، در آن صورت $k \neq 0$ ، $r' = 0$ ، $z' = 0$ ، $R = (r^2+z^2)^{1/2}$ و

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{k^2-h^2}\,r)e^{ihz}\,dh \tag{۷ ــ ۶۱۲}$$

نتیجهٔ اخیر را "فرمول ویریچ" نامند .

۷ ــ ۲۳ . معادلهٔ هلملتز در مختصات دکارتی قائم

به مسألهٔ حل معادلهٔ

$$(\nabla^2+k^2)\bar{G} = -\delta(r-r') = -\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z') \tag{۷ ــ ۶۱۳}$$

در مختصات دکارتی قائم توجه کنید . از قبل می‌دانیم که یک جواب عبارت است از :

$$\bar{G}(R) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \tag{۷ ــ ۶۱۴}$$

ولی، به‌دست آوردن آن با استفاده از تبدیل سه گانهٔ فوریه جالب توجه است. داریم

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+k^2\right]\bar{G} = -\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z') \qquad (۷-۶۱۵)$$

اگر طرفین معادله را در

$e^{-i\xi x}\,dx e^{-i\eta y}\,dy e^{-i\zeta z}\,dz$

ضرب کرده در فاصله‌های $x=-\infty$ تا $x=\infty$، $y=-\infty$ تا $y=\infty$ و $z=-\infty$ تا $z=\infty$
انتگرال جزء به جزء بگیریم خواهیم داشت

$$[(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-k^2]\bar{F}(\xi,\eta,\zeta) = e^{-i(\xi x'+\eta y'+\zeta z')} \qquad (۷-۶۱۶)$$

با فرض

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}+i\xi\bar{G}\right)e^{-i\xi x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0 \qquad (۷-۶۱۷)$$

$$\left(\frac{\partial\bar{G}}{\partial y}+i\eta\bar{G}\right)e^{-i\eta y}\Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty}=0 \qquad (۷-۶۱۸)$$

$$\left(\frac{\partial\bar{G}}{\partial z}+i\zeta\bar{G}\right)e^{-i\zeta z}\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty}=0 \qquad (۷-۶۱۹)$$

معادلهٔ (۷ـ ۶۱۷) تا (۷ـ ۶۱۹) مانند معادلهٔ (۷ـ ۵۸۲) توجیه می‌شوند. تبدیل سه‌گانهٔ فوریهٔ $\bar{G}$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\bar{F}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{e^{-i(\xi x'+\eta y'+\zeta z')}}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-k^2} \qquad (۷-۶۲۰)$$

که در آن

$$\bar{F}(\xi,\eta,\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{G}e^{-i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\,dx\,dy\,dz \qquad (۷-۶۲۱)$$

قضیهٔ وارون متناظر عبارت است از:

$$\bar{G} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{F}(\xi,\eta,\zeta)e^{i(\xi x+\eta y+\zeta z)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (۷-۶۲۲)$$

درنتیجه،

$$\bar{G} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i[\xi(x-x')+\eta(y-y')+\zeta(z-z')]}}{(\xi^2+\eta^2+\xi^2)-k^2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (۷-۶۲۳)$$

تابع گرین جواب معادلهٔ (۷ـ ۶۱۵) است. در معادلهٔ (۷ـ ۶۲۳)، نقطهٔ (ξ,η,ζ)

را به صورت دستگاه مختصات دکارتی قائم در فضای $\mathbf{K}$ درنظر می‌گیریم .

با ملاحظات زیر معادلهٔ (۷ ـ ۶۲۳) را به صورت فشرده‌تری می‌توان نوشت

$$\mathbf{K} = (\xi,\eta,\zeta) \quad (۶۲۴-۷)$$

$$K^2 = |\mathbf{K}|^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (۶۲۵-۷)$$

$$\mathbf{R} = [(x - x'), (y - y'), (z - z')] \quad (۶۲۶-۷)$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad (۶۲۷-۷)$$

$$dV_K = d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad (۶۲۸-۷)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = \xi(x - x') + \eta(y - y') + \zeta(z - z') \quad (۶۲۹-۷)$$

بنابراین معادلهٔ (۷ ـ ۶۲۳) به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\text{All } K \text{ space}} \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}}{K^2 - k^2}\, dV_K \quad (۶۳۰-۷)$$

محاسبهٔ معادلهٔ (۷ ـ ۶۳۰) را به صورت زیر می‌توان ساده‌ترکرد . ابتدا $\mathbf{R}$ رایک بردار ثابت در فضا فرض می‌کنیم . سپس دستگاه مختصات (ξ,η,ζ) را آن قدر دوران می‌دهیم‌تامحور ζ درامتداد $\mathbf{R}$ قرار گیرد . حال مختصات کروی (K,α,β) را در فضای (ξ,η,ζ) معرفی می‌کنیم (شکل ۷ ـ ۸) . در این مختصات α که نسبت به محور ζ اندازه‌گیری شده و β که از محور ξ ها اندازه گرفته می‌شود و K فاصلهٔ شعاعی ازمبدأمختصات‌است . پس تبدیل (ξ,η,ζ) به (K,α,β) عبارت است از:

$$\xi = K \sin\alpha \cos\beta \quad (۶۳۱-۷)$$

$$\eta = K \sin\alpha \sin\beta \quad (۶۳۲-۷)$$

$$\zeta = K \cos\alpha \quad (۶۳۳-۷)$$

عنصر حجم $dV_K = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$dV_K = K^2 \sin\alpha\, dK\, d\alpha\, d\beta \quad (۶۳۴-۷)$$

و چون محور ζ را درامتداد $\mathbf{R}$ انتخاب کرده‌ایم ، زاویهٔ α برابر بازاویهٔ بین $\mathbf{K}$ و $\mathbf{R}$ است ؛ پس

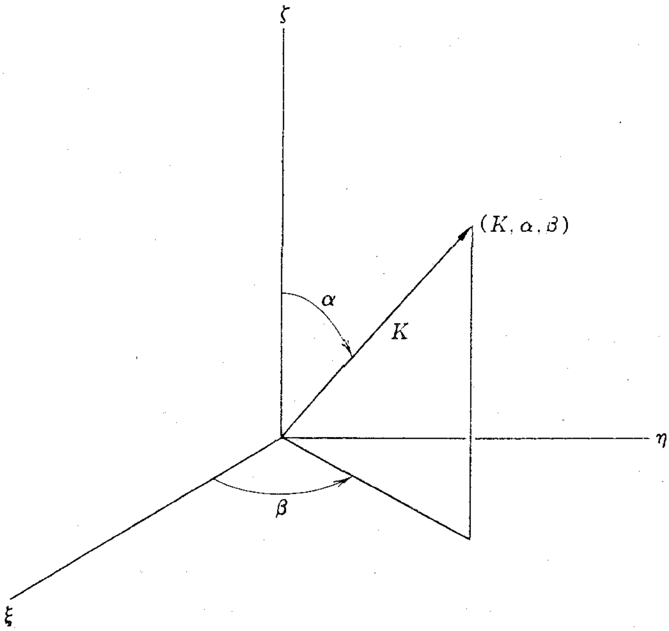
$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = KR \cos\alpha \quad (۶۳۵-۷)$$

با این تبصره‌ها ، معادلهٔ (۷ ـ ۶۳۰) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{iKR\cos\alpha}}{K^2 - k^2}\, K^2 \sin\alpha\, dK\, d\alpha\, d\beta \quad (۶۳۶-۷)$$

انتگرال‌گیری نسبت به α و β و باتوجه به رابطهٔ زیر فورا" محاسبه می‌شود

$$\int_0^\pi e^{ikR\cos\alpha} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{iKR} \quad (۶۳۷-۷)$$



شکل ۷ ــ ۸. مختصات کروی در فضای (ξ, η, ζ)

و

$$\int_0^{2\pi} d\beta = 2\pi \qquad (۷-۶۳۸)$$

نتیجه عبارت است از:

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{iKR} - e^{-iKR}}{iR(K^2 - k^2)} K\, dK \qquad (۷-۶۳۹)$$

یا

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{iKR}}{iR(K^2 - k^2)} K\, dK - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iKR}}{iR(K^2 - k^2)} K\, dK \qquad (۷-۶۴۰)$$

اگربه‌جای K، درجملهٔ اول معادلهٔ (۷ــ ۶۴۰)، Kــقرارداده وسپس حدودانتگرال‌گیری را عوض کنیم، داریم

$$\bar{G}(R) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iKR}}{iR(K^2 - k^2)} K\, dK \qquad (۷-۶۴۱)$$

که باید با روش مانده‌ها (بخش ۴ ـ ۱۸) حل شود. تابع زیر انتگرال در معادلهٔ (۷ ـ ۶۴۱) دارای قطبهای مرتبهٔ اول ساده در $K = k$ و $K = -k$ است. وقتی k یک عدد حقیقی است، این قطبها بر مسیر انتگرال‌گیری واقع می‌شوند، که محاسبهٔ (۷ ـ ۶۴۱) را مشکل می‌سازند. برای حل این مشکل یک راه حل این است که در (۷ ـ ۶۴۱) به جای k از $k + i\epsilon$ استفاده کنیم. در این‌صورت قطبها در $K = k + i\epsilon$ و $K = -k - i\epsilon$ واقع می‌شوند، و دیگر برمسیر انتگرال‌گیری نخواهندبود. محاسبهٔ (۷ ـ ۶۴۱) با روش‌مانده‌هامقداری‌می‌دهدکه‌تابع ϵ است و آن را به ازای $\epsilon = 0$ می‌توان محاسبه‌کرد. یک روش مشابه برمبنای جانشین‌کردن $k - i\epsilon$ به‌جای k در (۷ـ۶۴۱) به نتیجهٔ معین منجر می‌شود ولی وقتی $\epsilon \to 0$ نتیجه متفاوت خواهد بود. باید یکی ازاین دو نتیجه را باتوجه به ملاحظات فیزیکی حذف کنیم.

پس، درنظر بگیریم:

$$\bar{G}(R) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iKR}}{iR[K^2 - (k + i\epsilon)^2]}K\,dK \qquad (۶۴۲ - ۷)$$

که در آن ϵ عدد مثبت کوچکی است. توجه کنید که R یک فاصله بوده و همواره نامنفی است، همچنین

$$K = \mathrm{Re}\,(K) + i\,\mathrm{Im}\,(K)$$

بنابراین،

$$|e^{-iKR}| = e^{R\,\mathrm{Im}\,(K)} \qquad (۶۴۳ - ۷)$$

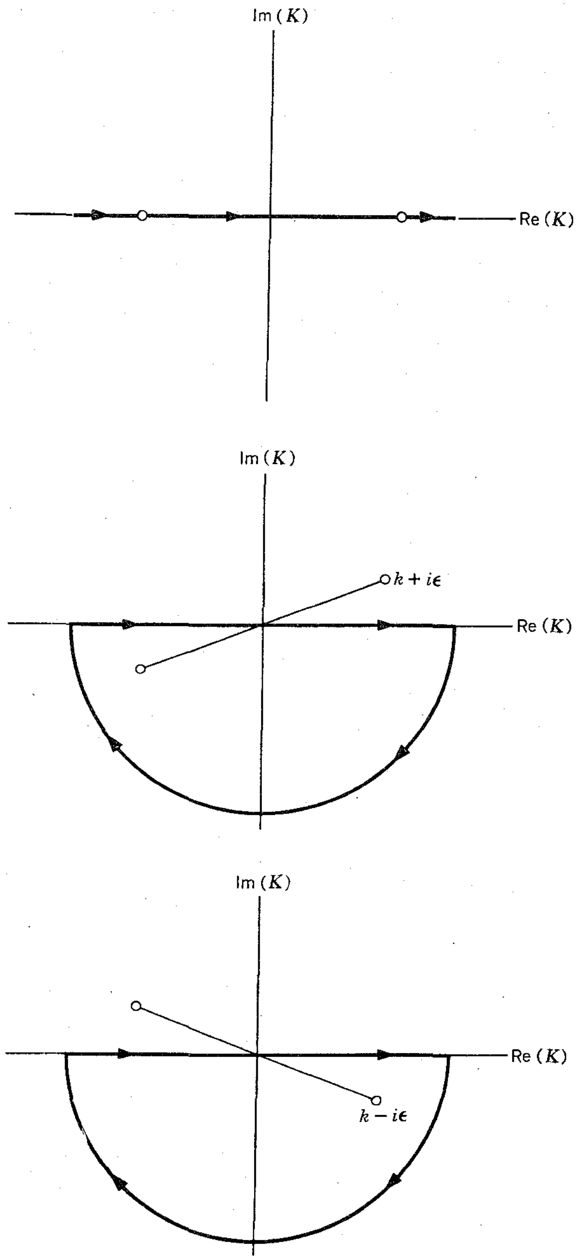
برای انتگرال‌گیری از (۷ ـ ۶۴۳) باروش مانده‌ها، مسیرانتگرال‌گیری باید بانیم‌دایره‌ای به شعاع نامتناهی بسته شود. معادلهٔ (۷ ـ ۶۴۳) نشان می‌دهد که این نیم‌دایره باید در نیم‌صفحهٔ تحتانی صفحهٔ مختلط K باشد(شکل ۸ ـ ۹). دراین صورت $\mathrm{Im}\,(K) < 0$ و انتگرال مربوط به آن درمعادلهٔ (۷ ـ ۶۴۲) بطورنمایی صفر می‌شود. قطب واقع در نیم‌صفحهٔ تحتانی در $K = -k - i\epsilon$ واقع است و در دایره‌ای با جهت منفی (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) محاط شده است. با استفاده از معادلات (۴ ـ ۱۹۱) و (۴ ـ ۱۹۵) داریم:

$$\bar{G}(R) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{i(k+i\epsilon)}}{4\pi R} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad (۶۴۴ - ۷)$$

حال اگر به جای k از $k - i\epsilon$ استفاده‌کنیم، معادلهٔ (۷ ـ ۶۴۱) به شکل زیرنوشته می‌شود

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iKR}}{iR[K^2 - (k - i\epsilon)^2]}K\,dK \qquad (۶۴۵ - ۷)$$

باوجود این، معادلهٔ (۷ ـ ۶۴۳) هنوزقابل استفاده است، و مسیر انتگرال‌گیری باید با یک نیم‌دایره در نیم‌صفحهٔ تحتانی کامل شود. قطب واقع در نیم‌صفحهٔ تحتانی‌در $K=k-i\epsilon$



شکل ۷ ــ ۹ . مسیرهای انتگرال‌گیری در صفحهٔ مختلط K .

واقع است ، و از قضیهٔ مانده نتیجه می‌شود :

$$\bar{G}(R) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-i(k-i\epsilon)R}}{4\pi R} = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \qquad (۶۴۶-۷)$$

برای اثبات این که (۷ــ۶۴۴) یا (۷ــ۶۴۶) صحیح است مقدار $G(R,t)$ را محاسبه می‌کنیم . داریم

$$G(R,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(R,\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (۶۴۷-۷)$$

و بنابراین از معادلهٔ (۷ــ۶۴۴) نتیجه می‌شود

$$G(R,t) = \frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(R/c+t)}\,d\omega \qquad (۶۴۸-۷)$$

که در آن $k = \omega/c$. باتوجه به (۵ــ۳۳۱) ، معادلهٔ (۷ــ۶۴۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$G(R,t) = \frac{\delta(t+R/c)}{4\pi R} \qquad (۶۴۹-۷)$$

درصورتی که معادلهٔ (۷ــ۶۴۶) به

$$G(R,t) = \frac{\delta(t-R/c)}{4\pi R} \qquad (۶۵۰-۷)$$

منجر می‌شود . همان‌طور که دیده می‌شود معادلهٔ (۷ــ۶۴۹) متناظر است با یک ضربهٔ کروی که به طرف مبدأ $R = 0$ ، به مرور زمان منقبض می‌شود ، درصورتی که (۷ــ۶۵۰) متناظر است با ضربه‌ای کروی که از مبدأ $R = 0$ که در $t = 0$ شلیک شده است متناظر است با (۷ــ۶۵۰) نه (۷ــ۶۴۹) . بنابراین اگر تبدیل فوریهٔ وارون $\bar{G}(R)$ مانند معادلهٔ (۷ــ۶۴۷) تعریف شده باشد :

$$\bar{G}(R) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \qquad (۶۵۱-۷)$$

نتیجه صحیح است .

به جای مختصات کروی ، می‌توانیم مستقیما" از معادلهٔ (۷ــ۶۲۳) استفاده کنیم :

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i[\xi(x-x')+\eta(y-y')+\zeta(z-z')]}}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-k^2}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (۶۵۲-۷)$$

حال انتگرال را نسبت به $d\zeta$ با روش مانده‌ها محاسبه می‌کنیم ، برای این کار معادلهٔ (۷ــ۶۵۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\bar{G} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\zeta(z-z')}\,d\zeta}{\{\gamma^2+\zeta^2\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\xi(x-x')+\eta(y-y')]}\,d\xi\,d\eta \qquad (۶۵۳-۷)$$

که در آن

$$\gamma^2 = (\xi^2 + \eta^2) - k^2 \qquad (۶۵۴-۷)$$

تابع زیر انتگرال $d\zeta$ در معادلهٔ (۷ ــ ۶۵۳) دارای قطبهای مرتبهٔ اول در $\zeta = \pm i\gamma$ است . با فرض $z > z'$ و $\zeta = \mathrm{Re}(\zeta) + i\,\mathrm{Im}(\zeta)$؛ عبارت

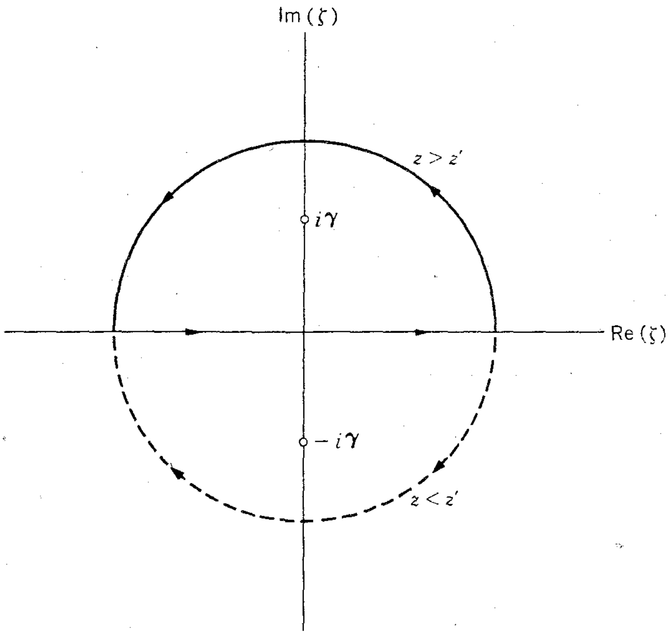
$$|e^{i\zeta(z-z')}| = e^{-(z-z')\,\mathrm{Im}(\zeta)} \qquad (۶۵۵-۷)$$

نشان می‌دهد که برای استهلاک نمایی در (۷ ــ ۶۵۳) ، نیم‌دایره باید در نیم‌صفحهٔ فوقانی قرار گیرد ، $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ (شکل ۷ ــ ۱۰) مسیر انتگرال‌گیری در

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(z-z')}}{\gamma^2 + \zeta^2}\, d\zeta \qquad (۶۵۶-۷)$$

با یک نیم‌دایره که بر آن $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ بسته می‌شود ، و شاخهٔ

$$\gamma = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) - k^2} \qquad (۶۵۷-۷)$$



شکل ۷ ــ ۱۰ . صفحهٔ مختلط ζ

در (۷ ــ ۶۵۶) ثابت می‌ماند اگر آن را به قسمی انتخاب کنیم که

$$\mathrm{Re}(\gamma) > 0 \qquad (۶۵۸-۷)$$

با این شرط ، قطب واقع در نیم‌صفحهٔ فوقانی در $\zeta=i\gamma$ واقع است به شرط آن که رادیکال معادلهٔ (۷ ــ ۶۵۷) حقیقی مثبت باشد . به ازای $z' < z$ قضیهٔ مانده (۴ ــ ۱۹۱) و (۴ــ ۱۹۵) درمورد (۷ ــ ۶۵۶) نتیجه می‌دهد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(z-z')}}{\gamma^2+\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\pi e^{-\gamma(z-z')}}{\gamma} \tag{۶۵۹ ــ ۷}$$

با $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$.

اگر $z' > z$، مسیر انتگرال‌گیری (۷ ــ ۶۵۶) باید با یک نیم‌دایرهٔ واقع در نیم‌صفحهٔ تحتانی $\operatorname{Im}(\zeta) < 0$ بسته‌شود . در این قطب $\zeta = -i\gamma$ با دایره‌ای درجهت منفی (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) محدود می‌شود و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(z-z')}}{\gamma^2+\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\pi e^{-\gamma(z'-z)}}{\gamma} \tag{۶۶۰ ــ ۷}$$

که در آن $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$. از ترکیب معادلات (۷ ــ ۶۵۹) و (۷ ــ ۶۶۰)، داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(z-z')}}{\gamma^2+\zeta^2}\,d\zeta = \pi\,\frac{e^{-\gamma|z-z'|}}{\gamma} \tag{۶۶۱ ــ ۷}$$

به کمک (۷ ــ ۶۶۱) ، معادلهٔ (۷ ــ ۶۵۳) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{G} = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma|z-z'|}}{\gamma}\, e^{i[\xi(x-x')+\eta(y-y')]}\,d\xi\,d\eta \tag{۶۶۲ ــ ۷}$$

و این عبارت مقدار $\bar{G}e^{i\omega t}$ را به‌عنوان صفحهٔ امواج که درامتداد x و y منتقل می‌شوند نشان می‌دهد وبطورنمایی درطول محور z دقیق‌می‌شود . برای‌محاسبهٔ (۷ ــ ۶۶۲) آن رادرمختصات قطبی می‌نویسیم

$$x - x' = r\cos\theta \tag{۶۶۳ ــ ۷}$$

$$y - y' = r\sin\theta \tag{۶۶۴ ــ ۷}$$

$$\xi = \lambda\cos\phi \tag{۶۶۵ ــ ۷}$$

$$\eta = \lambda\sin\phi \tag{۶۶۶ ــ ۷}$$

$$d\xi\,d\eta = \lambda\,d\lambda\,d\phi \tag{۶۶۷ ــ ۷}$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2} \tag{۶۶۸ ــ ۷}$$

درنتیجه

$$\bar{G} = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, e^{i\lambda\cos(\theta-\phi)}\,\lambda\,d\lambda\,d\theta \tag{۶۶۹ ــ ۷}$$

چون

$$J_0(\lambda r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r\cos\Phi}\, d\Phi \tag{۶۷۰ – ۷}$$

معادلهٔ (۷ – ۶۶۹) برابر است با عبارت

$$\bar{G} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda \tag{۶۷۱ – ۷}$$

که در معادلهٔ (۷ – ۵۸۰) به‌دست آمد . از معادلات (۷ – ۶۴۴) و (۷ – ۶۴۶) نتیجه می‌شود

$$\bar{G}(R) = \begin{cases} \dfrac{e^{ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \to 0^+ \\ \dfrac{e^{-ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \to 0^- \end{cases} \tag{۶۷۲ – ۷}$$

طبق معادلهٔ (۷ – ۶۷۲) ، وقتی k به‌عنوان یک متغیر مختلط درنظر گرفته شود ، تداوم تحلیلی (بخش ۴ – ۵) ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z-z'|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{e^{ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \geq 0 \\ \dfrac{e^{-ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \leq 0 \end{cases} \tag{۶۷۳ – ۷}$$

که‌درآن $R = \sqrt{r^2 + (z-z')^2}$. درمعادلهٔ (۷ – ۶۷۳) ، r و $z - z'$ حقیقی‌هستند ، و $\mathrm{Re}\ (\sqrt{\lambda^2 - k^2}) > 0$ درنتیجه

$$\bar{G} = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\gamma|z-z'|}}{\gamma}\, e^{i[\xi(x-x')+\eta(y-y')]}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \geq 0 \\ \dfrac{e^{-ikR}}{4\pi R} & \mathrm{Im}\ (k) \leq 0 \end{cases} \tag{۶۷۴ – ۷}$$

که در آن

$$\gamma = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) - k^2} \qquad \mathrm{Re}\ (\gamma) > 0$$

۷ – ۲۴ . معادلهٔ هلملتز در مختصات کروی

در مختصات کروی (r,θ,ϕ) معادلهٔ هلملتز ناهمگن

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{G} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{۶۷۵ – ۷}$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \bar{G}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\bar{G}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial\phi^2} + k^2\bar{G} = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{r^2\sin\theta} \tag{۶۷۶ — ۷}$$

بهتر است جزء r صورت لاپلاس را از اجزای θ و ϕ جدا کنیم ، برای این کار $\nabla_r{}^2$ و $\nabla^2_{\theta,\phi}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$r^2\nabla^2 = \nabla_r{}^2 + \nabla^2_{\theta,\phi} \tag{۶۷۷ — ۷}$$

که درآن

$$\nabla_r{}^2 = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{۶۷۸ — ۷}$$

و

$$\nabla^2_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{۶۷۹ — ۷}$$

نتیجه‌ٔ حاصل در بخش ۷ — ۱۸ پیشنهاد می‌کند که جواب $\bar{G}$ را به شکل

$$\bar{G}(r,r';\theta,\theta';\phi-\phi') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\bar{F}_n{}^m(r,r';\theta',\phi')P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{۶۸۰ — ۷}$$

درنظر بگیریم . چون

$$\nabla^2_{\theta,\phi}[P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}] = -n(n+1)P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{۶۸۱ — ۷}$$

از قرار دادن معادله‌ٔ (۷ — ۶۸۰) در

$$(\nabla_r{}^2+\nabla^2_{\theta,\phi}+k^2r^2)\bar{G} = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta} \tag{۶۸۲ — ۷}$$

عبارت زیر برای تعیین $\bar{F}_n{}^m\ (r,r';\theta',\phi')$ به‌دست می‌آید

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}[\nabla_r{}^2+k^2r^2 - n(n+1)]\bar{F}_n{}^m(r,r';\theta',\phi')P_n{}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} = \frac{-\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta} \tag{۶۸۳ — ۷}$$

برای محاسبه‌ٔ $\bar{F}_n{}^m$ طرفین معادله‌ٔ (۷ — ۶۸۳) را در

$P_\lambda{}^{|\mu|}(\cos\theta)e^{-i\mu\phi}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

ضرب کرده نسبت به θ و ϕ بر سطح کره‌ٔ واحد انتگرال می‌گیریم . با استفاده از متعامد بودن رابطه‌ٔ (۷ — ۳۸۶) خواهیم داشت :

$$[\nabla_r^2 + k^2r^2 - n(n+1)]\bar{F}_n^{|m|}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}\frac{4\pi}{2n+1} = -\delta(r-r')P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\phi'} \qquad (۶۸۴-۷)$$

برای سادگی تعریف می‌کنیم ،

$$\bar{F}_n^{|m|}(r,r',\theta',\phi') = \frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{-im\phi'}K_n(r,r') \qquad (۶۸۵-۷)$$

در این صورت معادلهٔ (۷ـ۶۸۴) چنین نوشته می‌شود :

$$[\nabla_r^2 + k^2r^2 - n(n+1)]K_n(r,r') = -\delta(r-r') \qquad (۶۸۶-۷)$$

یا

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dK_n}{dr}\right) + [k^2r^2 - n(n+1)]K_n(r,r') = -\delta(r-r') \qquad (۶۸۷-۷)$$

معادلهٔ (۷ـ۶۸۷) را می‌توان با قرار دادن

$$K_n(r,r') = \frac{v_n(r,r')}{\sqrt{kr}} \qquad (۶۸۸-۷)$$

به صورتی روشنتر بیان کرد . با استفاده از معادلهٔ (۷ـ۶۸۸) ،

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dK_n}{dr}\right) = \frac{1}{\sqrt{kr}}\left(r^2\frac{d^2v_n}{dr^2} + r\frac{dv_n}{dr} - \frac{1}{4}v_n\right) \qquad (۶۸۹-۷)$$

بنابراین به ازای $r \neq r'$، معادلهٔ (۷ـ۶۸۷) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$r^2\frac{d^2v_n}{dr^2} + r\frac{dv_n}{dr} - \frac{v_n}{4} + [k^2r^2 - n(n+1)]v_n = 0 \qquad (۶۹۰-۷)$$

باوجود این ،

$$-n(n+1) - \tfrac{1}{4} = -(n+\tfrac{1}{2})^2 \qquad (۶۹۱-۷)$$

درنتیجه ،

$$r^2\frac{d^2v_n}{dr^2} + r\frac{dv_n}{dr} + [k^2r^2 - (n+\tfrac{1}{2})^2]v_n = 0 \qquad (۶۹۲-۷)$$

معادله (۷ـ۶۹۲) در بخش (۶ـ۱۶) موردبحث قرارگرفت وجوابهای آن توابع بسل مرتبهٔ $n + \frac{1}{2}$ بودند . پس به ازای $r \neq r'$ جوابهای معادلهٔ (۷ـ۶۸۷) توابع بسل کروی خواهد بود . مثلاً

$$K_n(r,r') = \begin{cases} Aj_n(kr) \\ Bh_n^{(1)}(kr) \end{cases} \qquad (۶۹۳-۷)$$

مجموعه‌ای از جوابهای مستقل خطی (۷ـــ۶۸۷) هستند که در آن $r' \neq r$. چون منبع نه درمبدأ $r = 0$، و نه در بی‌نهایت قرار دارد، K_n باید در $r = 0$ و $r = \infty$ متناهی باشد. رفتار واقعی $h_n^{(1)}(kr)$ به وسیلهٔ معادلهٔ (۶ـــ۳۴۵) داده می‌شود،

$$h_n^{(1)}(kr) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (۶۹۴-۷)$$

از معادلهٔ (۷ـــ۶۹۴) معلوم می‌شود که K_n به ازای $r \to \infty$ متناهی باقی‌می‌ماند،به شرط آن که

$$\mathrm{Im}\,(k) \geq 0 \qquad (۶۹۵-۷)$$

پس دو جواب (۷ـــ۶۹۳) به صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند

$$K_n = Aj_n(kr) \qquad 0 \leq r < r' \qquad (۶۹۶-۷)$$

$$K_n = Bh_n^{(1)}(kr) \qquad r' < r < \infty \qquad (۶۹۷-۷)$$

چون K_n باید در $r = r'$ پیوسته باشد داریم

$$Aj_n(kr') - Bh_n^{(1)}(kr') = 0 \qquad (۶۹۸-۷)$$

اگر از طرفین معادلهٔ (۷ـــ۶۸۷) در فاصله‌ای به طول 2ϵ به مرکز $r = r'$ انتگرال بگیریم، داریم

$$\lim_{\epsilon \to 0} r^2 \frac{dK_n}{dr}\bigg|_{r=r'-\epsilon}^{r=r'+\epsilon} = -1 \qquad (۶۹۹-۷)$$

یا

$$Akr^2 \frac{dj_n}{d(kr)} - Bkr^2 \frac{dh_n^{(1)}}{d(kr)} = 1 \qquad (۷۰۰-۷)$$

از حل دستگاه معادلات (۷ـــ۶۹۸) و (۷ـــ۷۰۰) نتیجه می‌شود:

$$A = \frac{h_n^{(1)}(kr')}{\Delta} \qquad (۷۰۱-۷)$$

$$B = \frac{j_n(kr')}{\Delta} \qquad (۷۰۲-۷)$$

که در آن

$$\Delta = -kr^2 \begin{vmatrix} j_n & h_n^{(1)} \\ j_n' & h_n^{(1)\prime} \end{vmatrix} \qquad (۷۰۳-۷)$$

دترمینان معادلهٔ (۷ـــ۷۰۲) رونسکین j_n و $h_n^{(1)}$ است و بنابه فرض ثابت است. پس، آن را می‌توانیم با استفاده از حدهای (۶ـــ۳۳۸)، (۶ـــ۳۴۰) و (۶ـــ۳۴۱) برای j_n و

$h_n^{(1)}$ ، $kr \to 0$ محاسبه کنیم . نتیجه عبارت است از :

$$\Delta = -kr^2 \begin{vmatrix} \dfrac{(kr)^n}{(2n+1)!!} \left[\dfrac{(kr)^n}{(2n+1)!!} - \dfrac{i(2n-1)!!}{(kr)^{n+1}}\right] \\ \dfrac{n(kr)^{n-1}}{(2n+1)!!} \left[\dfrac{n(kr)^{n-1}}{(2n+1)!!} + \dfrac{i(n+1)(2n-1)!!}{(kr)^{n+2}}\right] \end{vmatrix} \qquad (۷۰۴-۷)$$

که به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta &= -kr^2 \left[\frac{i(n+1)(2n-1)!!}{(kr)^2(2n+1)!!} + \frac{i(2n-1)!!}{(2n+1)!!}\frac{n}{(kr)^2}\right] \\ &= -kr^2 \left[\frac{i(2n+1)}{(kr)^2}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}\right] = \frac{1}{ik} \end{aligned} \qquad (۷۰۵-۷)$$

و از ترکیب معادلات (۷ ــ ۶۹۶) ، (۷ ــ ۶۹۷) ، (۷۰۱ ــ ۷) ، (۷۰۲ ــ ۷) و (۷۰۵ ــ ۷) نتیجه می‌شود :

$$K_n(r,r') = ikj_n(kr_<)h_n^{(1)}(kr_>) \qquad (۷۰۶-۷)$$

که در آن

$$\mathrm{Im}\,(k) \geq 0 \qquad (۷۰۷-۷)$$

ازمعادلهٔ (۷ــ ۶۸۵) ، $F_n^{|m|}(r,r',\theta',\phi')$ رامحاسبه ودرمعادلهٔ (۷ ــ ۶۸۰) قرارمی‌دهیم ،

$$\begin{aligned} &\bar{G}(r,r';\theta,\theta';\phi-\phi') \\ &\qquad = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \frac{ik}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(kr_<)h_n^{(1)}(kr_>) \\ &\qquad \sum_{m=-n}^{n}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{|m|}(\cos\theta)P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{im(\phi-\phi)} \end{aligned} \qquad (۷۰۸-۷)$$

معادلهٔ (۷ ــ ۷۰۸) همان عبارت مطلوب درمختصات کروی تابع‌گرین است که به وسیلهٔ معادلهٔ (۸ ــ ۶۷۵) تعریف شده است .

فرض کنید منبع بر محور قطبی دستگاه مختصات قرار دارد . دراین صورت $\theta' = 0$ ، و θ زاویهٔ بین منبع و ناظر خواهد بود . این زاویه را برای مشخص شدن به $\gamma = \theta$ نشان می‌دهیم. از معادلات (۶ ــ ۲۹۶) و (۶ ــ ۲۹۳) نتیجه می‌شود که

$$P_n^{|m|}(1) = 0 \qquad m > 0 \qquad (۷۰۹-۷)$$

و

$$P_n^{|m|}(1) = 1 \qquad m = 0 \qquad (۷۱۰-۷)$$

پس به ازای $\theta = 0$ و $\theta' = \gamma$،

$$\sum_{m=-n}^{n} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n{}^{|m|}(\cos\theta) P_n{}^{|m|}(\cos\theta') e^{im(\phi-\phi')} = P_n(\cos\gamma) \qquad (۷-۷۱۱)$$

این نشان می‌دهد که مجموع پیچیدهٔ سمت چپ معادلهٔ (۷ـ۷۱۱) چیزی جز یک چندجمله‌ای لژاندر مرتبهٔ n نیست که متغیرآن کسینوس زاویهٔ بین منبع و ناظر است. با این تبصره معادلهٔ (۷ـ۷۵۸) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\bar{G} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr_<) h_n{}^{(1)}(kr_>) P_n(\cos\gamma) \qquad (۷-۷۱۲)$$

که بحث مربوط به بسط $\bar{G}$ را در مختصات قطبی کامل می‌کند.

۷ـ۲۵. تفسیر صورت انتگرالی جواب معادلهٔ هلملتز

صورت انتگرالی جواب معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{u}(\mathbf{r},\omega) = -\bar{F}(\mathbf{r},\omega) \qquad (۷-۷۱۳)$$

را بطور دقیقتر بررسی می‌کنیم. این جواب باتوجه به (۷ـ۴۹۹) عبارت است از:

$$\bar{u}(\mathbf{r}',\omega) = \int_V \bar{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\bar{F}(\mathbf{r},\omega)\,dV + \int_{S(V)} \left\{\bar{G}\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\frac{\partial\bar{G}}{\partial n}\right\} dS \qquad (۷-۷۱۴)$$

درضمن از بحثهای قبل نتیجه می‌شود که اگر

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۷-۷۱۵)$$

آن‌گاه

$$\bar{G} = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \qquad (۷-۷۱۶)$$

و اگر

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{i\omega t}\,dt \qquad (۷-۷۱۷)$$

آن‌گاه

$$\bar{G} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad (۷-۷۱۸)$$

به شرط‌آن‌که $G(R,t)$ فاصله راتایک منبع نقطه‌ای نشان دهد. اگرچه معمولاً" معادلهٔ (۷ـ۷۱۵) رابه‌عنوان تعریف G به‌کارمی‌بریم، (۷ـ۷۱۷) نیز معتبراست و احتمالاً" درنوشته‌های بیشتری

به‌چشم می‌خورد . اگر (۷ ـ ۷۱۷) به‌عنوان تعریف $\bar{G}$ اختیار شود ، آن‌گاه معادلهٔ (۷ ـ ۷۱۴) به صورت زیر خلاصه می‌شود ،

$$\bar{u}(\mathbf{r}',\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_V \bar{F}(\mathbf{r},\omega)\,\frac{e^{ikR}}{R}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)}\left[\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right]dS \tag{۷ ـ ۷۱۹}$$

که در آن $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

معادلهٔ (۷ ـ ۷۱۹) نوسانات $\bar{u}$ را در $\mathbf{r}'$ داخل V نشان می‌دهد که نتیجه‌ای از وضع فوق ، معادلهٔ منابع حجمی داخل V با چگالی $\bar{F}(\mathbf{r},\omega)$ ، و منابع سطحی که بر رویهٔ $S(V)$ توزیع شده می‌باشد . عبارت

$$\int_{S(V)} \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\,dS \tag{۷ ـ ۷۲۰}$$

سهم $\bar{u}$ را در $\mathbf{r}'$ نشان می‌دهد که از منابع نقطه‌ای توزیع شده بر $S(V)$ باچگالی سطح $\partial \bar{u}/\partial n$ به وجود آمده است . جملهٔ باقی مانده

$$\int_{S(V)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\right)(-\bar{u}\,dS) \tag{۷ ـ ۷۲۱}$$

سهم $\bar{u}$ را در $\mathbf{r}'$ نشان می‌دهد که از یک توزیع سطحی‌دوقطبی(دولا) با گشتاور $\bar{u}\,dS$ ـ تولید شده است . این مطلب به‌آسانی در شکل (۷ ـ ۱۱) دیده می‌شود . فرض کنید دوبارمختلف‌العلامه بطور متناوب نوسان می‌کنند . فرض کنید این دو بار به فاصلهٔ کوچک Δn از یکدیگر بر قائم $\mathbf{n}$ بر سطح $S(V)$ قرار گرفته‌اند . میدان دوقطبی تولید شده بوسیلهٔ مجموع‌تابع‌گرین هربارعبارت است از :

$$u_{\text{دو قطبی}} = \frac{qe^{ikR_1}}{4\pi R_1} - \frac{qe^{ikR}}{4\pi R} \tag{۷ ـ ۷۲۲}$$

اگر Δn به سمت صفرمیل کند اندازهٔ بار بطورنامحدودی افزایش پیدامی‌کند . فرض کنید که پیشامد به قسمی رخ می‌دهد که حاصل ضرب q و Δn ثابت می‌ماند ؛ یعنی

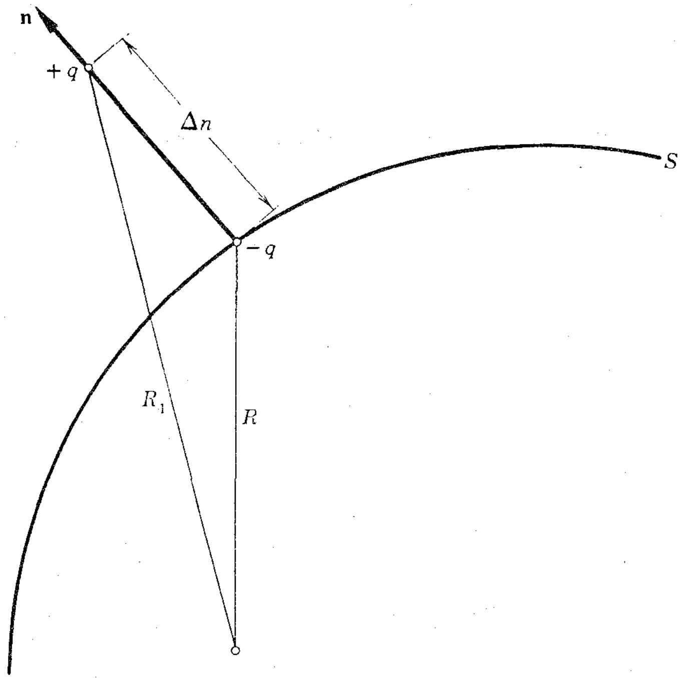
$$q\,\Delta n = m \quad (\text{ثابت})$$

در این صورت

$$\bar{u}_{\text{دو قطبی}} = q\Delta\left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\right) = m\,\frac{\Delta(e^{ikR}/4\pi R)}{\Delta n} \tag{۷ ـ ۷۲۴}$$

و وقتی دو بار به یکدیگر در طول قائم بر S نزدیک می‌شوند ،

$$\lim_{\Delta n \to 0} \bar{u}_{\text{دو قطبی}} = m \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\right) \qquad (۷-۷۲۵)$$



شکل ۷ — ۱۱. تعبیر لایهٔ مضاعف .

اثر تشعشعات منابع خارج V را با فرض توزیع یک پل و دوپل موهومی بر $S(V)$ می‌توان درنظرگرفت . وقتی‌رویهٔ $S(V)$ به‌بی‌نهایت می‌رسد ، مقدارحدی انتگرال‌سطح معادلهٔ (۷—۷۱۹) اثرمنابع رادربی‌نهایت نشان می‌دهد . وقتی منابعی دربی‌نهایت نباشد ، مقدارحدی انتگرال سطح باید صفر شود ، و این مطلب رفتار $\bar{u}$ را محدود می‌سازد . این حدود در شرایط تشعشع زومرفلد خلاصه می‌شوند ، و صورت دقیق آن را به‌دست خواهیم آورد .

۷ — ۲۶ . شرط تشعشع زومرفلد

قضیه: شرط کافی برای آن که انتگرال سطح

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)}\left[\frac{e^{ikR}}{R}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right) - \bar{u}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right] dS \qquad (۷-۷۲۶)$$

وقتی $S(V)$ به بی‌نهایت می‌رسد صفر شود این است که $\bar{u}(r,\theta,\phi)$ در شرایط زیرصدق کند:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) = 0 \qquad (۷۲۷-۷)$$

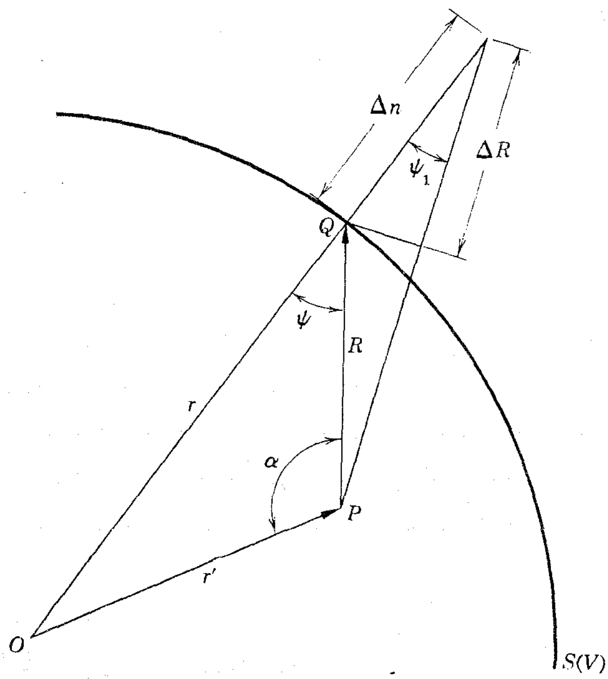
و بطور یکنواخت برحسب θ و ϕ،

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\bar{u}}{r} = 0 \qquad (۷۲۸-۷)$$

برهان: برای اثبات قضیه، به چند نتیجهٔ سادهٔ هندسی که ازشکل (۷ــ۱۲) به‌دست می‌آیند احتیاج داریم. باتوجه به شکل، معلوم می‌شود که چون

$$\frac{\Delta R}{\Delta n} = \cos\psi_1 \qquad (۷۲۹-۷)$$

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta n} = \cos\psi \qquad (۷۳۰-۷)$$



شکل ۷ ــ ۱۲. هندسه مربوط به شرط تشعشع زومرفلد.

باید داشته باشیم

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) = \frac{ikRe^{ikR} - e^{ikR}}{R^2}\cos\psi$$

و بنابراین معادلهٔ (۷ ــ ۷۲۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \frac{e^{ikR}}{R}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + ik\bar{u}(1-\cos\psi) + \frac{\bar{u}}{R}\cos\psi\right] dS \tag{۷۳۱ ــ ۷}$$

برای این که معادلهٔ (۷ ــ ۷۳۱) را خلاصه‌تر کنیم سه نتیجهٔ هندسی:

$$1 - \cos\psi = O(\epsilon^2) \tag{۷۳۲ ــ ۷}$$

$$\frac{\cos\psi}{R} = \frac{1}{r} + O(\epsilon^2) \tag{۷۳۳ ــ ۷}$$

$$\frac{r}{R} = 1 + O(\epsilon) \tag{۷۳۴ ــ ۷}$$

را که از شکل (۷ ــ ۱۲) به‌دست می‌آیند درنظر می‌گیریم. کمیت ϵ برابر است با

$$\epsilon = \frac{r'}{r} \tag{۷۳۵ ــ ۷}$$

که سرانجام یک عدد مثبت کوچک خواهد بود. زیرا r به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و r' ثابت می‌ماند. معادلات (۷ ــ ۷۳۲) و (۷ ــ ۷۳۳) رامی‌توان با استفاده ازقانون سینوسهاباتوجه به شکل (۷ ــ ۱۲) و معادلهٔ (۷ ــ ۷۳۴) را از نامساوی مثلث به‌دست آورد. دیده می‌شود که

$$\frac{\sin\psi}{r'} = \frac{\sin\alpha}{r} \tag{۷۳۶ ــ ۷}$$

و بنابراین،

$$1 - \cos^2\psi = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \sin^2\alpha \tag{۷۳۷ ــ ۷}$$

$$\cos\psi = \left[1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \sin^2\alpha\right]^{1/2} \tag{۷۳۸ ــ ۷}$$

یا

$$\cos\psi = (1 - \epsilon^2\sin^2\alpha)^{1/2} \tag{۷۳۹ ــ ۷}$$

از بسط (۷ ــ ۷۳۹) نتیجه می‌شود

$$\cos\psi = 1 - \tfrac{1}{2}\epsilon^2\sin^2\alpha - \tfrac{1}{8}\epsilon^4\sin^4\alpha - \cdots \tag{۷۴۰ ــ ۷}$$

پس به ازای مقادیر کوچک ϵ

$$1 - \cos\psi = O(\epsilon^2) \qquad (\text{۷—۷۴۱})$$

همچنین ، از معادلهٔ (۷ — ۷۳۸) ،

$$\frac{\cos\psi}{R} = \frac{1}{r}\frac{r}{R}\left[1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \sin^2\alpha\right]^{1/2} \qquad (\text{۷—۷۴۲})$$

با استفاده از نامساوی مثلث درمورد شکل (۷ — ۱۲) ، می‌توان نوشت :

$$r \leq r' + R \qquad (\text{۷—۷۴۳})$$

$$1 \leq \frac{r'}{r} + \frac{R}{r} \qquad (\text{۷—۷۴۴})$$

$$\frac{R}{r} \geq 1 - \epsilon \qquad (\text{۷—۷۴۵})$$

و بنابراین ،

$$0 \leq \frac{r}{R} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \qquad (\text{۷—۷۴۶})$$

ولی

$$\frac{1}{1-\epsilon} = 1 + \epsilon + \cdots \qquad (\text{۷—۷۴۷})$$

پس به ازای هر ϵ کوچک ، داریم

$$\frac{r}{R} = 1 + O(\epsilon) \qquad (\text{۷—۷۴۸})$$

فرض کنید $d\Omega$ عنصر زاویهٔ فضایی باشدکه به dS در 0 ختم شده است ، شکل (۷—۱۲) . در این صورت با استفاده از $dS = r^2\, d\Omega$ معادلهٔ (۷ — ۷۳۱) به صورت

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} r\, d\Omega \left(\frac{r}{R}\right) e^{ikR}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) + (1+ik)\bar{u}O(\epsilon^2)\right] \qquad (\text{۷—۷۴۹})$$

نوشته می‌شود . یا به عبارت معادل

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} d\Omega e^{ikR}[1 + O(\epsilon)]\left[r\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right)\right. \\ &\left. + (1+ik)\frac{\bar{u}}{r}O(1)\right] = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} d\Omega e^{ikR}\left[r\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) + (1+ik)\frac{\bar{u}}{r}O(1)\right] \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} d\Omega O(\epsilon) e^{ikR}\left[r\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) + (1+ik)\frac{\bar{u}}{r}O(1)\right]\end{aligned} \qquad (\text{۷—۷۵۰})$$

دیده می‌شود که $\bar{u}$ مجموع دو انتگرال است :

$$\bar{u} = I_1 + I_2 \tag{۷۵۱ – ۷}$$

درنتیجه

$$|\bar{u}| \leq |I_1| + |I_2| \tag{۷۵۲ – ۷}$$

ولی، به‌علت عامل اضافی $O(\epsilon)$ در انتگرال I_2 ،

$$|I_2| \leq |I_1| \tag{۷۵۳ – ۷}$$

و

$$|\bar{u}| \leq 2|I_1| \tag{۷۵۴ – ۷}$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین را برای I_1 به‌کار بریم ، داریم

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq 4\pi \max_{S(V)} \left| r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) + (1+ik)\,\frac{\bar{u}}{r}\,O(1) \right| \\ &\leq 4\pi \max_{S(V)} \left| r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right)\right| \\ &\quad + 4\pi \max_{S(V)} O(1)|1+ik|\,\frac{|\bar{u}|}{r} \end{aligned} \tag{۷۵۵ – ۷}$$

زیرا وقتی $r \to \infty$ به بی‌نهایت می‌رسد $S(V)$، از معادلات (۷ – ۷۲۶) و (۷ – ۷۵۴) و (۷ – ۷۵۵) نتیجه می‌شود ،

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S(V)} \left[\frac{e^{ikR}}{R}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right) - \bar{u}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right] dS = 0 \tag{۷۵۶ – ۷}$$

به شرط‌آن که

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - ik\bar{u} + \frac{\bar{u}}{r}\right) = 0 \tag{۷۵۷ – ۷}$$

و بطور یکنواخت نسبت به θ و ϕ ،

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\bar{u}}{r} = 0 \tag{۷۵۸ – ۷}$$

۷ – ۲۷ . مسائل وابسته به زمان

در بخش (۷ – ۲۱) پیشنهاد شد که حل معادلهٔ

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r},t) = -F(\mathbf{r},t) \tag{۷۵۹ – ۷}$$

معادل پیدا کردن تبدیل فوریهٔ آن ، حل معادلهٔ هلملتز حاصل وبرگرداندن نتیجه در

دامنهٔ زمان است . یک روش دیگر حل مستقیم معادلهٔ (۷ ــ ۷۵۹) با معرفی یک تابع گرین وابسته به زمان است .

می‌خواهیم معادلهٔ (۷ ــ ۷۵۹) را تحت شرایط اولیهٔ

$$u(\mathbf{r},0) = f(\mathbf{r}) \tag{۷ ــ ۷۶۰}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r},0) = g(\mathbf{r}) \tag{۷ ــ ۷۶۱}$$

و شرط مرزی مفروض حل‌کنیم . وقتی‌دامنه نامحدوداست‌این شرایط ازنوع شرایط تشعشعی است . تابع گرین وابسته به زمان به صورت جواب

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r},t;\, \mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \tag{۷ ــ ۷۶۲}$$

معرفی می‌شود و دارای خواص زیر است :

۱) به ازای $t < t'$ ، $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = 0$

۲) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ در معادلهٔ موج همگن صدق می‌کند ، مگر در $t = t'$، $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

۳) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',\mathrm{t}')$ در شرایط مرزی همگن بر $S(V)$ صدق می‌کند و

۴) شرایط اولیهٔ همگن

$$G = 0,\ \partial G/\partial t = 0 \quad ، \quad t < t'$$

۵) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ به ازای $t > t'$ در رابطهٔ وارون‌پذیر

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = G(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r},-t)$$

صدق می‌کند .

این تابع گرین را می‌توان با نوسانات در $\mathbf{r}$ که در زمان t به علت یک نوسان قبلی در $\mathbf{r}'$ که در زمان t' رخ داده تعبیر کرد . توجه کنید که در رابطهٔ وارون‌پذیری وابسته به زمان تنها مختصات پرایم‌دار را با مختصات بدون پرایم عوض نمی‌کنیم . علامتهای t و t' نیز باید عوض شوند . اگر این مراحل رعایت نشوند ، یک نوسان در $\mathbf{r}$ و t در $\mathbf{r}'$ و t' مشاهده خواهد شد اگر t' کمتر از t باشد . و این مستلزم آن است که یک نوسان قبل از وقوع بررسی شده باشد ! باتعویض علامتها نوسان حاصل در $\mathbf{r}$ و $-t$ در $\mathbf{r}'$ و $-t'$ مشاهده می‌شود که در آن $-t' > -t$.

اثبات خاصیت وارون‌پذیری ۵ مشابه اثبات معادله (۷ ــ ۵۰۸) است . دو تابع گرین $G_+(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ و $G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'')$ معرفی می‌شوند.هر دو تابع در شرایط مرزی همگن بر $S(V)$ و در شرایط اولیهٔ همگن ، و معادلات موج ،

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_+(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \tag{۷ ــ ۷۶۳}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,\delta(t-t'') \qquad (۷-۷۶۴)$$

صدق می‌کند . اگر قضیهٔ گرین :

$$\int_V \{G_+\nabla^2 G_- - G_-\nabla^2 G_+\}\,dV = \int_{S(V)}\left\{G_+\frac{\partial G_-}{\partial n} - G_-\frac{\partial G_+}{\partial n}\right\}dS \qquad (۷-۷۶۵)$$

را درمورد معادلات (۷ — ۷۶۳) و (۷ — ۷۶۴) به‌کار بریم ،

$$\int_V \{G_+\nabla^2 G_- - G_-\nabla^2 G_+\}\,dV = -G_+(\mathbf{r}'',t;\mathbf{r}',t')\,\delta(t-t'') + G_-(\mathbf{r}',-t;\mathbf{r}'',-t'')\,\delta(t-t') + \frac{1}{c^2}\int_V\left\{G_+\frac{\partial^2 G_-}{\partial t^2} - G_-\frac{\partial^2 G_+}{\partial t^2}\right\}dV = 0 \qquad (۷-۷۶۶)$$

انتگرال سطح حاصل از معادلهٔ (۷ — ۷۶۵) صفر می‌شود زیرا فرض کردیم که G_+ و G_- درشرایط مرزی‌همگن بر $S(V)$ صدق می‌کنند . جملهٔ آخرمعادلهٔ (۷ — ۷۶۶) راباتوجه به رابطهٔ زیر می‌توان نوشت :

$$\int_V\left\{G_+\frac{\partial^2 G_-}{\partial t^2} - G_-\frac{\partial^2 G_+}{\partial t^2}\right\}dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left\{G_+\frac{\partial G_-}{\partial t} - G_-\frac{\partial G_+}{\partial t}\right\}dV \qquad (۷-۷۶۷)$$

حال می‌توان هر دو طرف معادله (۷ — ۷۶۶) را نسبت به زمان از $t=-\infty$ تا $t=t$ ، $t>t'$ و $t>t''$ انتگرال گرفت . نتیجه عبارت است از :

$$G_+(\mathbf{r}'',t'';\mathbf{r}',t') - G_-(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r}'',-t'') = \frac{1}{c^2}\int_V\left\{G_+\frac{\partial G_-}{\partial t} - G_-\frac{\partial G_+}{\partial t}\right\}dV\,\Big|_{t=-\infty}^{t=t} \qquad (۷-۷۶۸)$$

درحد پایین $t=-\infty$ ،جملهٔ آخربه موجب خاصیت ۴ تابع‌گرین صفرمی‌شود . همچنین ، تابع گرین $G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'')$ تنها وقتی صفر نیست که $-t>-t''$ ، و این مطلب برای $\partial G_-/\partial t$ نیزصحیح‌است . ولی از $-t>-t''$ نتیجه می‌شود $t<t''$ و در معادلهٔ (۷ — ۷۶۸) فرض شده است که $t>t'$ و $t>t''$. بنابراین G_- و $\partial G_-/\partial t$ در حد فوقانی $t=t$ در معادلهٔ (۷ — ۷۶۸) صفر می‌شود ، و رابطهٔ وارون‌پذیری

$$G_+(\mathbf{r}'',t'';\mathbf{r}',t') = G_-(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r}'',-t'') \qquad (۷-۷۶۹)$$

برقرار می‌شود .

به مسألهٔ پیدا کردن یک جواب انتگرالی معادلات (۷ ــ ۷۵۹) تا (۷ ــ ۷۶۱) برمی‌گردیم . برای این منظور بهتر است (۷ ــ ۷۵۹) تا (۷ ــ ۷۶۲) را در مختصات پرایم بنویسیم ؛ پس

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) u(\mathbf{r}',t') = -F(\mathbf{r}',t') \qquad (۷۷۰ - ۷)$$

و

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \qquad (۷۷۱ - ۷)$$

که در آن

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \qquad (۷۷۲ - ۷)$$

با انتگرال‌گیری از قضیهٔ گرین نسبت به dt' ، داریم

$$\begin{aligned}\int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} \{G\,\nabla'^2 u - u\,\nabla'^2 G\}\,dV' \\ = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G\frac{\partial u}{\partial n'} - u\frac{\partial G}{\partial n'}\right\} dS'\end{aligned} \qquad (۷۷۳ - ۷)$$

که در آن ϵ یک عدد مثبت کوچک دلخواه و u و G در معادلات (۷ ــ ۷۷۰) و (۷ ــ ۷۷۱) صدق می‌کنند . از (۷ ــ ۷۷۰) ، (۷ ــ ۷۷۱) و (۷ ــ ۷۷۳) نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}-\int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')F(\mathbf{r}',t')\,dV' + u(\mathbf{r},t) \\ + \frac{1}{c^2}\int_{V'} \left\{G\frac{\partial u}{\partial t'} - u\frac{\partial G}{\partial t'}\right\}_{t'=0}^{t'=t+\epsilon} dV' \\ = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G\frac{\partial u}{\partial n'} - u\frac{\partial G}{\partial n'}\right\} dS'\end{aligned} \qquad (۷۷۴ - ۷)$$

به ازای $t' > t$ طبق خاصیت ۴ تابع G باید $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ و $\partial G/\partial t'\ (\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$ صفر شوند . پس جملهٔ سوم سمت چپ (۷ ــ ۷۷۴) درحد بالایی $t = t' + \epsilon$ باید صفر شود. اگر $\epsilon \to 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}u(\mathbf{r},t) = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\mathbf{F}(\mathbf{r}',t')\,dV' \\ + \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G\frac{\partial u}{\partial n'} - u\frac{\partial G}{\partial n'}\right\} dS' \\ + \frac{1}{c^2}\int_{V'} \left\{G\frac{\partial u}{\partial t'} - u\frac{\partial G}{\partial t'}\right\}\Big|_{t'=0} dV'\end{aligned} \qquad (۷۷۵ - ۷)$$

معادلهٔ (۷ ــ ۷۷۵) یک جواب مسألهٔ مرکب مقداراولیه و مقدار مرزی وابسته به معادلهٔ

(۷ ــ ۷۵۹) را می‌دهد . از (۷ ــ ۷۷۵) واضح است که $u(\mathbf{r},t)$ از منابع حجمی توزیع شده در V' با چگالی $F(\mathbf{r}',t')$ ، منابع سطحی یک‌لا یا دولا که بر $S(V')$ توزیع شده ، و یک جمله شامل شرایط اولیه در $t' = 0$ ساخته می‌شود .

حال رویهٔ $S(V')$ را به بی‌نهایت میل می‌دهیم . اگر منابعی در بی‌نهایت وجود نداشته باشد و محیط درابتدا درحال سکون باشد یعنی در $t' = 0$ ، $u = 0$ و درهر نقطه $\partial u/\partial t' = 0$ ، آن گاه معادلهٔ (۷ ــ ۷۷۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$u(\mathbf{r},t) = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{\text{All space}} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')F(\mathbf{r}',t')\, dV' \qquad (۷۷۶ - ۷)$$

در معادلهٔ (۷ ــ ۶۵۰) نشان دادیم که وقتی منبعی در بی‌نهایت وجود نداشته باشد ، آن‌گاه

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{4\pi R} \qquad (۷۷۷ - ۷)$$

که در آن $t - t'$ زمان سپری شده از لحظه‌ای است که از منبع رها شده و

$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

پس

$$u(\mathbf{r},t) = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{\text{All space}} \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{4\pi R} F(\mathbf{r}',t')\, dV' \qquad (۷۷۸ - ۷)$$

یا

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{All space}} \frac{F(\mathbf{r}',t - R/c)}{R}\, dV' \qquad (۷۷۹ - ۷)$$

توجه کنیدکه زمان t درتابع زیرعلامت انتگرال‌معادلهٔ (۷ ــ ۷۷۹) به اندازهٔ عامل R/c به تأخیر افتاده است . معمولاً" توابع تأخیر را در کروشه قرار می‌دهند :

$$[F(\mathbf{r}',t)] = F\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \qquad (۷۸۰ - ۷)$$

با این نماد

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{All space}} \frac{[F(\mathbf{r}',t)]}{R}\, dV' \qquad (۷۸۱ - ۷)$$

وجود کمیتهای تأخیر در جواب معادلهٔ موج وابسته به زمان نتیجه‌ای از سرعت متناهی انتقال است . به عبارت دیگر ، علامتی که درحال حاضر در این نقطه است باید قبلاً" درجای دیگری باشد . اختلاف زمانی یا تأخیر به اندازه‌ای است که برای رسیدن علامت از منبع به این

نقطه کفایت می‌کند .

برای فضای دوبعدی انتظار می‌رود که جوابها به صورت معادلات (۷ — ۷۷۵) و (۷—۷۷۶) باشند ، به استثنای این که حجم V' به یک سطح باز S' و مرز $S(V')$ به یک منحنی بستهٔ $C(S')$ تبدیل می‌شود . تبدیل لاپلاس زمان تابع گرین دوبعدی $G(R,t)$ با معادلهٔ (۷ — ۵۲۴) به صورت زیر داده می‌شود :

$$\bar{G}\left(\frac{sR}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{sR}{c}\right) \qquad (۷ - ۷۸۲)$$

از یک جدول تبدیلات لاپلاس

$$K_0\left(\frac{sR}{c}\right) = \int_0^\infty \frac{H[t - R/c]}{\sqrt{t^2 - R^2/c^2}} e^{-st}\, dt \qquad (۷ - ۷۸۳)$$

که در آن $H[t - R/c]$ تابع پله‌ای هویساید است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (۷ - ۷۸۴)$$

بنابراین تبدیل وارون لاپلاس $\bar{G}(sR/c)$ عبارت است از :

$$G(R,t) = \frac{H[t - R/c]}{2\pi\sqrt{t^2 - R^2/c^2}} \qquad (۷ - ۷۸۵)$$

و تابع گرین وابسته به زمان دوبعدی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \frac{H[(t - t') - R/c]}{2\pi\sqrt{(t - t')^2 - R^2/c^2}} \qquad (۷ - ۷۸۶)$$

که در آن $t - t'$ زمان سپری شده از لحظه‌ای است که از منبع رها شده ، و

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

۷ — ۲۸ . جواب پواسن معادلهٔ موج

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (۷ - ۷۸۷)$$

را با شرایط اولیهٔ

$$u = f(\mathbf{r}) \qquad t = 0 \qquad (۷ - ۷۸۸)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(\mathbf{r}) \qquad t = 0 \qquad (۷ - ۷۸۹)$$

حل کنیم . طبق معادلهٔ (۷ ــ ۷۷۵) جواب به صورت

$$u(\mathbf{r},t) = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{ G \frac{\partial u}{\partial n'} - u \frac{\partial G}{\partial n'} \right\} dS' \tag{۷ ــ ۷۹۰}$$

خواهد بود و چون

$$G = \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{4\pi R} \tag{۷ ــ ۷۹۱}$$

معادل است با

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(V')} dS' \int_0^{t+\epsilon} dt' \Bigg(& \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{R} \frac{\partial u}{\partial n'} \\ & - u \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{R} \right\} \Bigg) \end{aligned} \tag{۷ ــ ۷۹۲}$$

محاسبهٔ انتگرال جملهٔ اول معادلهٔ (۷ ــ ۷۹۲) نسبتاً" ساده است :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t+\epsilon} dt' \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{R} \frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial n'} \\ & \qquad = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n'} (\mathbf{r}',t') \Big|_{t'=t-R/c} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial n'} \right] \end{aligned} \tag{۷ ــ ۷۹۳}$$

در محاسبهٔ جملهٔ دوم معادلهٔ (۷ ــ ۷۹۲) با کمی اشکال روبرومی‌شویم زیرا لازم است از تابع دلتای دیریکله "مشتق" بگیریم . طبق معمول داریم

$$\begin{aligned} & - \int_0^{t+\epsilon} dt' u(\mathbf{r}',t') \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{\delta[(t-t') - R/c]}{R} \right\} \\ & \qquad = \int_0^{t+\epsilon} dt' u(\mathbf{r}',t') \\ & \qquad \frac{-(R/c)\, \delta'[(t-t') - R/c] + \delta[(t-t') - R/c]}{R^2} \frac{\partial R}{\partial n'} \end{aligned} \tag{۷ ــ ۷۹۴}$$

که باتوجه به شکل (۷ ــ ۱۲) ، داریم

$$\frac{\partial R}{\partial n'} = \cos(n',R) \tag{۷ ــ ۷۹۵}$$

و انتگرال جملهٔ دوم معادلهٔ (۷ ــ ۷۹۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$[u] \frac{\cos(n',R)}{R^2} \tag{۷ ــ ۷۹۶}$$

پس باید ،

$$- \int_0^{t+\epsilon} dt' u(\mathbf{r}',t') \frac{\cos(n',R)}{Rc} \delta' \left[(t-t') - \frac{R}{c} \right] \tag{۷ ــ ۷۹۷}$$

محاسبه شود . این کار را با انتگرال جزء به جزء و توجه به

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\,\delta'(x)\,dx = -\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x) f'(x)\,dx \tag{۷−۷۹۸}$$

می‌توان انجام داد:

$$\begin{aligned} -\int_0^{t+\epsilon} dt' u(\mathbf{r}',t')\,\frac{\cos\,(n',R)}{Rc}\,\delta'\left[(t-t')-\frac{R}{c}\right] \\ = \left[\frac{\partial u}{\partial t'}\right]\frac{\cos\,(n',R)}{Rc} \end{aligned} \tag{۷−۷۹۹}$$

پس

$$\begin{aligned} -\int_0^{t+\epsilon} dt' u(\mathbf{r}',t')\,\frac{\partial}{\partial n'}\left[\frac{\delta\{(t-t')-R/c\}}{R}\right] \\ = [u]\,\frac{\cos\,(n',R)}{R^2} + \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\cos\,(n',R)}{Rc} \end{aligned} \tag{۷−۸۰۰}$$

و معادلهٔ (۷ ــ ۷۹۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V')}\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial n'}\right] + [u]\,\frac{\cos\,(n',R)}{R^2}\right. \\ \left. + \left[\frac{\partial u}{\partial t'}\right]\frac{\cos\,(n',R)}{Rc}\right\} dS' \end{aligned} \tag{۷−۸۰۱}$$

یا به عبارت معادل،

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V')} dS'\left[\frac{1}{R}\,\frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial n'} + u(\mathbf{r}',t')\,\frac{\cos\,(n',R)}{R^2}\right. \\ \left. + \frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\,\frac{\cos\,(n',R)}{Rc}\right]_{t'=t-R/c} \end{aligned} \tag{۷−۸۰۲}$$

صورت برداری معادلهٔ (۷ ــ ۸۰۲) عبارت است از:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V')} d\mathbf{S}\cdot\left[\frac{1}{R}\,\nabla' u(\mathbf{r}',t') + \frac{\mathbf{R}}{R^3}\,u(\mathbf{r}',t')\right. \\ \left. + \frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\,\frac{\mathbf{R}}{cR^2}\right]_{t'=t-R/c} \end{aligned} \tag{۷−۸۰۳}$$

که در آن

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}'\,dS' \tag{۷−۸۰۴}$$

و

$$\cos\,(n',R) = \frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{R}}{R} \tag{۷−۸۰۵}$$

جواب پواسن معادلهٔ موج از معادلهٔ (۷ ــ ۸۰۲) یا (۷ ــ ۸۰۳) به صورت زیر به‌دست می‌آید. رویهٔ $S(V')$ را سطح کره‌ای به شعاع ct انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار موضع مرکز کره و $\mathbf{r}$ بردار موضع یک نقطهٔ دلخواه رویهٔ کره باشد. دراین صورت

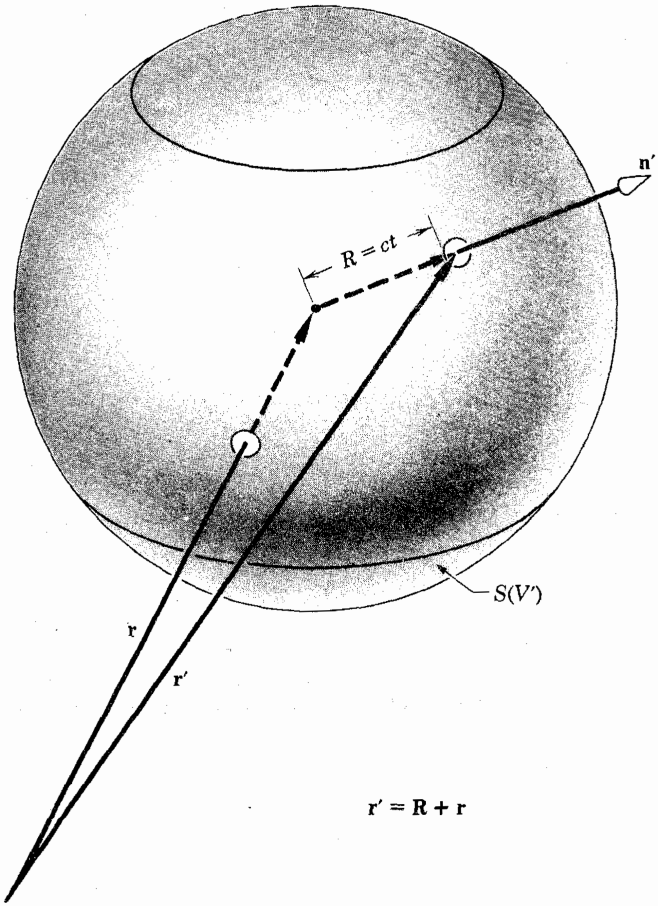
$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \qquad (۸۰۶-۷)$$

و بنابراین

$$t' = t - \frac{R}{c} = 0 \qquad (۸۰۷-۷)$$

همین‌طور توجه کنید که

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial R} \qquad (۸۰۸-۷)$$



شکل ۷ــ۱۲. کرهٔ به شعاع $R = ct$.

زیرا بر $S(V')$،

$$\cos\,(n',R) = 1 \tag{۸۰۹ــ۷}$$

با استفاده از این عبارات معادلهٔ (۷ ــ ۸۰۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{R=ct} dS' \left\{\frac{1}{R}\,\frac{\partial u(\mathbf{r}',0)}{\partial R} + \frac{u(\mathbf{r}',0)}{R^2} + \frac{1}{Rc}\left[\frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}\right\} \tag{۸۱۰ــ۷}$$

عنصر سطح را می‌توان برحسب زاویهٔ فضایی $d\Omega'$ باتوجه به رابطهٔ زیر نوشت:

$$dS' = R^2\, d\Omega' \tag{۸۱۱ــ۷}$$

درنتیجه معادلهٔ (۷ ــ ۸۱۰) به صورت

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{R=ct}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\,(Ru(\mathbf{r}',0)) + \frac{R}{c}\left[\frac{\partial u(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}\right\} d\Omega' \tag{۸۱۲ــ۷}$$

خلاصه می‌شود . ازطرفی داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \tag{۸۱۳ــ۷}$$

پس برای هر تابع دلخواه f

$$f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \tag{۸۱۴ــ۷}$$

و

$$\frac{1}{4\pi}\int_{R=ct} f(\mathbf{r}')\, d\Omega' = \frac{1}{4\pi}\int_{R=ct} f(\mathbf{R}+\mathbf{r})\, d\Omega' \tag{۸۱۵ــ۷}$$

ولی، بردارموضع مرکزکرهٔ $R = ct$ است ودرمعادلهٔ (۷ ــ ۸۱۵) ثابت باقی‌می‌ماند . درنتیجه، تنها $\mathbf{R}$ بر رویهٔ کره تغییر می‌کند . پس (۷ ــ ۸۱۵) میانگین f را برکره‌ای به شعاع $R=ct$ ومرکز $\mathbf{r}$ می‌دهد:

$$M_{ct}[f(\mathbf{r}')] = \frac{1}{4\pi}\int_{R=ct} f(\mathbf{r}')\, d\Omega' \tag{۸۱۶ــ۷}$$

و معادلهٔ (۷ ــ ۸۱۶) را برای ساده کردن (۷ ــ ۸۱۲) به‌کار می‌بریم . چون $R = ct$،

$$\frac{\partial}{\partial R}\,[Ru(\mathbf{r}',0)] = \frac{\partial}{\partial t}\,[tu(\mathbf{r}',0)] \tag{۸۱۷ــ۷}$$

و

$$\frac{R}{c}\left[\frac{\partial u(\mathbf{r},t')}{\partial t'}\right]_{t'=0} = t\,\frac{\partial u(\mathbf{r}',0)}{\partial t'} \tag{۸۱۸ــ۷}$$

از معادلات (۷ ــ ۸۱۲) و (۷ ــ ۸۱۶) نتیجه می‌شود

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} M_{ct}[tu(\mathbf{r}',0)] + tM_{ct}\left[\frac{\partial u(\mathbf{r}',0)}{\partial t'}\right] \qquad (۸۱۹-۷)$$

یا با استفاده از معادلات (۷ — ۷۸۸) و (۷ — ۷۸۹)،

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} M_{ct}[tf(\mathbf{r}')] + tM_{ct}[g(\mathbf{r}')] \qquad (۸۲۰-۷)$$

معادلهٔ (۷ — ۸۲۰) جواب پواسن مسألهٔ مقدار اولیهٔ کوشی (۷ — ۷۸۷) تا (۷ — ۷۸۹) معادلهٔ موج است.

یک جواب مشابه (۷ — ۸۲۰)، می‌توان برای مسألهٔ کوشی درفضای دوبعدی به‌دست‌آورد. برای این منظور لازم است معادلهٔ (۷ — ۸۱۶) را برحسب یک انتگرال بریک صفحه بیان کرد. فرض کنید کره‌ای به مرکز $\mathbf{r}$ با صفحه‌ای به فاصلهٔ z_1 بالای صفحهٔ استوا قطع شود، وفرض کنید θ_1 زاویهٔ طولی نسبت به محور z_1 عمود بر صفحه باشد. حال مختصات کروی (R,θ_1,ϕ_1) را برکره درنظر می‌گیریم. روابط زیر در مختصات قطبی در صفحهٔ مقطع برقرار است:

$$r_1 = R\sin\theta_1 = ct\sin\theta_1 \qquad (۸۲۱-۷)$$

$$z_1 = \sqrt{R^2 - r_1{}^2} = \sqrt{c^2t^2 - r_1{}^2} \qquad (۸۲۲-۷)$$

$$\theta_1 = \cot^{-1}\frac{z_1}{r_1} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{c^2t^2 - r_1{}^2}}{r_1} \qquad (۸۲۳-۷)$$

عنصر زاویهٔ فضایی $d\Omega'$ نسبت به مرکز کره عبارت است از:

$$d\Omega' = \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1 \qquad (۸۲۴-۷)$$

ولی،

$$dr_1 = ct\cos\theta_1\, d\theta_1 \qquad (۸۲۵-۷)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

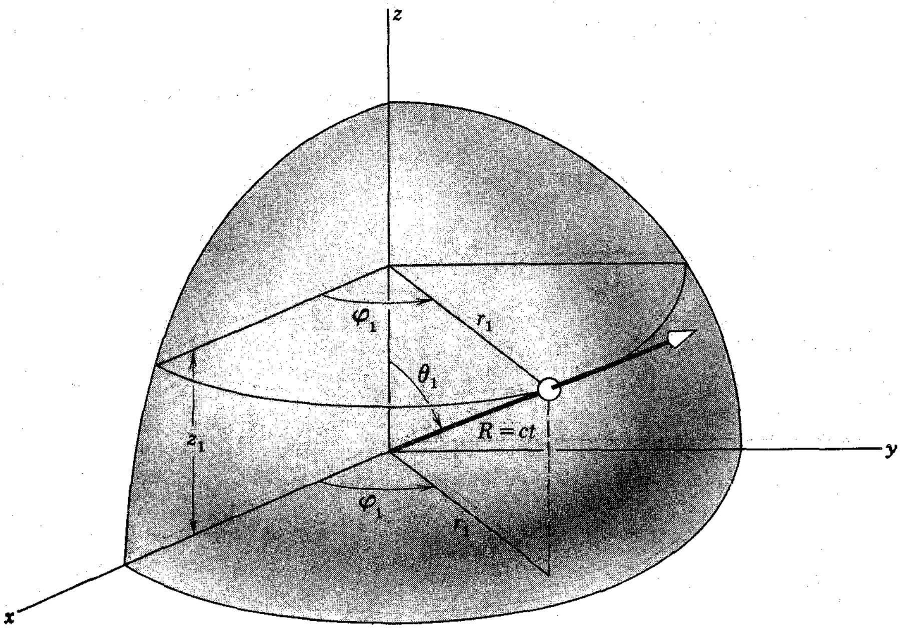
$$d\Omega' = \frac{dr_1\, d\phi_1 \sin\theta_1}{dt\cos\theta_1} = \frac{dr_1\, d\phi_1}{ct\cot\phi_1} \qquad (۸۲۶-۷)$$

یا

$$d\Omega' = \frac{dr_1\, d\phi_1}{ct\sqrt{c^2t^2 - r_1{}^2}} \qquad (۸۲۷-۷)$$

دامنهٔ $0 \le \phi_1 \le 2\pi$ و $0 \le \theta_1 \le \pi/2$ با یک نیم‌کره متناظر است، بنابراین معادلهٔ (۷ — ۸۱۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$M_{ct}[f(\mathbf{r}')] = \frac{2}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}+\mathbf{R})\sin\theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1 \qquad (۸۲۸-۷)$$



شکل ۷ ـ ۱۴. مقطع کرهٔ $R = ct$ با صفحهٔ $z = z_1$.

وقتی θ_1 از 0 تا $\pi/2$ تغییر کند، r_1 از صفر تا ct تغییر می‌کند زیرا z_1 ثابت است. پس، با استفاده از (۷ ـ ۸۲۴) تا (۷ ـ ۸۲۷)، معادلهٔ (۷ ـ ۸۲۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$M_{ct}[f(\mathbf{r}')] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct} \frac{f(\mathbf{r}+\mathbf{R})}{ct\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, r_1\, dr_1\, d\phi_1 \qquad (۷-۸۲۹)$$

اگر عنصر سطح $r_1\, dr_1\, d\phi_1$ در صفحهٔ مقطع را به

$$dS_1 = r_1\, dr_1\, d\phi_1 \qquad (۷-۸۳۰)$$

نشان دهیم معادلهٔ (۷ ـ ۸۲۹) به صورت

$$M_{ct}[f(\mathbf{r}')] = \frac{1}{2\pi c}\int_{r_1\le ct} \frac{f(\mathbf{r}+\mathbf{R})}{t\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, dS_1 \qquad (۷-۸۳۱)$$

و معادلهٔ (۷ ـ ۸۲۰) به صورت صریح

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1\le ct} \frac{f(\mathbf{r}+\mathbf{R})}{\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, dS_1 + \frac{1}{2\pi c}\int_{r_1\le ct} \frac{g(\mathbf{r}+\mathbf{R})}{\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, dS_1 \qquad (۷-۸۳۲)$$

نوشته می‌شوند. بردار $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}$ دارای مؤلفه‌های زیر است

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R} = [x + ct \sin\theta_1 \cos\phi_1), (y + ct \sin\theta_1 \sin\phi_1), (z + ct \cos\theta_1)] \tag{۸۳۳-۷}$$

به عبارت معادل

$$\begin{aligned} r' &= (x',y',z') \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{R} = [(x + r_1 \cos\phi_1), (y + r_1 \sin\phi_1), (z + z_1)] \end{aligned} \tag{۸۳۴-۷}$$

معادلهٔ موج در فضای دوبعدی را می‌توان همیشه به قسمی انتخاب کردکه جواب وشرایط اولیه از مختصات z' در یک دستگاه(x',y',z')مستقل باشد . به‌عنوان مثال فرض کنید ،

$$[u(\mathbf{r}',t')]_{t'=0} = u(x',y',0) = f(x',y') \tag{۸۳۵-۷}$$

و

$$\left[\frac{\partial u(r',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0} = \frac{\partial u(x',y',0)}{\partial t'} = g(x',y') \tag{۸۳۶-۷}$$

چون شرایط اولیهٔ (۷ ـ ۸۳۵) و (۷ ـ ۸۳۶) مستقل از z' هستند ، ازمعادلهٔ (۷ـ۸۳۴) نتیجه می‌شود که (۷ ـ ۸۳۲) را می‌توان به صورت صریح زیر نوشت :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{r_1 \le ct} \frac{f[(x + r_1\cos\phi_1), (y + r_1 \sin\phi_1)]}{\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, r_1\, dr_1\, d\phi_1 \\ &+ \frac{1}{2\pi c}\iint_{r_1 \le ct} \frac{g[(x + r_1\cos\phi_1), (y + r_1 \sin\phi_1)]}{\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\, r_1\, dr_1\, d\phi_1 \end{aligned} \tag{۸۳۷-۷}$$

که مسألهٔ مقدار اولیهٔ

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۸۳۸-۷}$$

را در فضای دوبعد با شرایط اولیهٔ زیر حل می‌کنند

$$u(x,y,0) = f(x,y) \tag{۸۳۹-۷}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) \tag{۸۴۰-۷}$$

از معادلات (۷ ـ ۸۲۰) و (۷ ـ ۸۳۷) می‌توان نتایج جالبی به‌دست آورد . برای این منظور تکیه‌گاه یک تابع را تعریف می‌کنیم . بنابه تعریف ، تکیه‌گاه تابع f عبارت است از بسط مجموعهٔ نقاطی که برآن$f \neq 0$. می‌گوییم تابع f دارای تکیه‌گاه فشرده است اگردامنه *کراندار* و بسته‌ای وجود داشته باشدکه برآن f صفرنشود . این‌دامنه راتکیه‌گاهf نامند . به‌عنوان مثال، اگر$f(x,y,z) = f$هیچ جا در داخل یا روی کرهٔ توپر

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$$

صفرنشود ولی درهرنقطه خارج آن برابرصفر باشد آن‌گاه f دارای تکیه‌گاه فشرده است وتکیه‌گاه فشرده آن کرهٔ بسته $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ خواهد بود.

از معادلهٔ (۷ــ ۸۲۰) معلوم می‌شود که اگر شرایط اولیهٔ

$$u(x',y',z',0) = f$$

$$\partial u/\partial t' \; (x',y',z',0) = g$$

توابعی باتکیه‌گاه فشرده باشند، آن‌گاه درهرنقطهٔ ثابت (x,y,z) یک بازهٔ متناهی زمان مانند $t_1 \leq t \leq t_2$ وجود دارد که در خارج آن

$$u(x,y,z,t) \equiv 0$$

برای دیدن این مطلب، توجه کنید که (۷ــ ۸۲۰)، تابع u را برحسب مقادیر متوسط بر رویه‌ای به شعاع $R = ct$ نشان می‌دهد. چون رویهٔ $R = ct$ با زمان منبسط می‌شود، مقاطع آن با تکیه‌گاه f و g فقط برای بازه‌های زمانی متناهی‌می‌تواند غیرصفرباشد. پس یک فاصلهٔ زمانی متناهی باید وجود داشته باشد که در خارج آن u متحد با صفر باشد.

این وضع برای یک مسألهٔ مقدار اولیهٔ دوبعدی متفاوت است. حتی اگر شرایط اولیه

$$u(x',y',0) = f$$

$$\partial u/\partial t' \; (x',y',0) = g$$

درصفحه x' و y' دارای تکیه‌گاه فشرده باشند، نوسانات $u(x,y,t)$ پس ازشروع هیچ‌وقت در زمان متناهی صفر نمی‌شود. علت پیش‌آمدن این حالت را می‌توان باتوجه به معادلهٔ (۷ــ ۸۳۷) که $u(x,y,t)$ رابرحسب انتگرال‌هایی داخل دایرهٔ درحال انبساط به شعاع $r_1 = ct$ محاسبه می‌کند دریافت. وقتی این‌دایره تکیه‌گاه f یا g رادربرمی‌گیرداین تکیه‌گاهها دریک انتگرال (۷ــ۸۳۷) سهیم هستند. و گفته می‌شود مسألهٔ مقدار اولیهٔ دوبعدی به یک جواب دارای کوهان منجر می‌شود. این مقدار کوهان را می‌توانیم برای حالت ساده‌ای که منبع خطی است بطور صریح محاسبه کنیم. در (۷ــ۸۳۷) فرض کنید $x = 0$ و $y = 0$. دراین صورت نقطه جایی قرارمی‌گیرد که v درمرکزدایره $r_1 = ct$ درصفحهٔ r_1 ، ϕ_1 محاسبه می‌شود. فرض کنیدیک منبع خطی‌نامحدود، عمود برصفحهٔ r_1 و ϕ_1 ، ازنقطهٔ $r_1 = r$ و $\phi_1 = \phi$ نسبت به‌مرکزدایره $r_1 = ct$ گذشته‌باشد. شرایط اولیهٔ متناظر بر u عبارتند از:

$$(u)_{t=0} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = \frac{\delta(r_1 - r)}{r_1}\,\delta(\phi_1 - \phi) \tag{۸۴۱ــ۷}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{۸۴۲ــ۷}$$

و با جایگزاری در معادلهٔ (۷ــ ۸۳۷) نتیجه می‌شود

$$u(0,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct}\frac{\delta(r_1 - r)\,\delta(\phi_1 - \phi)}{\sqrt{c^2t^2 - r_1^2}}\,dr_1\,d\phi_1 \qquad (۸۴۳-۷)$$

یا

$$u(0,t) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\right) & r < ct \\ 0 & r > ct\end{cases} \qquad (۸۴۴-۷)$$

بنابراین ،

$$u(0,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{H(ct - r)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{ctH(ct - r)}{(c^2t^2 - r^2)^{3/2}} + \frac{\delta(ct - r)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\right] \qquad (۸۴۵-۷)$$

که در آن $H(x)$ تابع پله‌ای هویساید است :

$$H(x) = \begin{cases}1 & x > 0 \\ 0 & x < 0\end{cases} \qquad (۸۴۶-۷)$$

و با تابع دلتای دیریکله به صورت زیر درارتباط است :

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx} \qquad (۸۴۷-۷)$$

از معادلهٔ (۷ ــ ۸۴۵) معلوم می‌شود که علامت در مبدأ تا زمان $t = r/c$ صفر است . این زمانی است که علامت از منبع واقع در $r_1 = r$ به مبدأ واقع در $r_1 = 0$ منتقل می‌شود . در $t = r/c$، ضربهٔ تابع دلتا درمبدأ می‌رسد ، که به دنبال آن یک کوهان وهمان‌طور که با جملهٔ تابع پله‌ای در (۷ ــ ۸۴۵) توصیف شده مستهلک می‌شود . وقتی $t \gg r/c$ دامنهٔ کوهان مشابه $1/c^2t^2$ مستهلک می‌شود . وجود یک کوهان مشخصه انتقال موج در محیط دوبعدی همگن است . انتقال موج در فضای یک یادوبعدی شامل کوهان نخواهدبود . چون منبع خطی دردوجهت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و بر صفحه‌ای که جواب رویش حاسبه می‌شود عمود است ، می‌توان تصورکردکه این کوهان متناظر است با ورود علایم متوالی از اجزاء دور و دورتر منبع .

۷ ــ ۲۹ . معادلهٔ انتشار

توزیع درجهٔ حرارت $T(\mathbf{r},t)$ در یک مادهٔ همگن که گره‌ی H باسرعت $\partial H/\partial t$ در واحد حجم تولید یا ازدست می‌رود با معادلهٔ انتشار ناهمگن زیر داده می‌شود

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)T(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{k}\frac{\partial H}{\partial t} = -h(\mathbf{r},t) \qquad (۸۴۸-۷)$$

که در آن α ضریب انتشار ، k ضریب هدایت ماده است (بخش ۷ ــ ۵) . تمام فنونی که برای

حل معادلهٔ موج ومعادلهٔ پتانسیل بسط دادیم درمورد معادلهٔ (۷ ــ ۸۴۸) قابل‌استفاده‌است . پس می‌توانیم‌تبدیلات انتگرالی ، جداسازی متغیرها یاروش تابع‌گرین رابرای ساختن جوابهای (۷ ــ ۸۴۸) به‌کار ببریم .

برای هماهنگی با مسائل موج و پتانسیل ، یک جواب عمومی (۷ ــ ۸۴۸) را برحسب یک تابع گرین به‌دست می‌آوریم . به این ترتیب اشکالات واقعی مربوط به حل معادلهٔ (۷ ــ ۸۴۸) را برای ساختن یک تابع گرین مناسب کنار می‌گذاریم .

تابع گرین برای (۷ ــ ۸۴۸) به صورت جواب معادلهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right) G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ \delta(t-t') \qquad (۸۴۹-۷)$$

که دارای خاصیت زیر است :

۱) به ازای $t < t'$ ،

$$1.\ G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = 0 \qquad (۸۵۰-۷)$$

۲) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ در معادلهٔ انتشار همگن صدق می‌کند مگر در $t = t'$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

۳) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ در شرایط مرزی همگن بر $S(V)$ صدق می‌کند .

۴) شرط اولیهٔ همگنی در $t = t'$

$$G = 0 \qquad (۸۵۱-۷)$$

۵) تابع $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ در رابطهٔ وارون‌پذیر زیر صدق می‌کند .

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = G(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r},-t) \qquad (۸۵۲-۷)$$

تابع گرین $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ را می‌توان به‌عنوان درجه حرارت $\mathbf{r}$ در زمان t منظورکرد که از اثر یک واحد گرما در زمان $t' < t$ که از قوهٔ محرکه یک منبع گرمایی واقع در $\mathbf{r}'$ به وجودآمده است . چون به ازای $t < t'$ ، $G = 0$. تابع گرین فقط درجه حرارت رابرای زمانهای آنی $t > t'$ می‌دهد و درنتیجه چگونگی انتشار گرما را از وضع اولیه توصیف می‌کند .

در رابطه وارون‌پذیری (۷ ــ ۸۵۲) علامت باید مانند حالت موج تغییر کند . با تغییر علامتهاگرمای‌تزریق‌شده‌در $\mathbf{r}$ و t در $\mathbf{r}'$ و t' ، $-t' > -t$ مشاهده‌می‌شود . اثبات رابطه وارون‌پذیری برای معادلهٔ انتشارازاثبات متناظر برای معادلهٔ موج تاحدودی‌متفاوت‌است . علتش این است که معادلهٔ موج جمله‌ای شامل مشتق دوم زمان دارد ، بنابراین ، اگر $u(\mathbf{r},t)$ در معادلهٔ موج صدق کند تابع $u(\mathbf{r},-t)$ نیز درآن صدق خواهدکرد . ازطرف دیگر ، معادلهٔ انتشارشامل مشتق اول نسبت به زمان است ونمی‌تواندهمان نقش تقارن را نسبت به زمان داشته باشد درواقع اگر

$$\nabla^2 T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad (۸۵۳-۷)$$

آن‌گاه،

$$\nabla^2 T(\mathbf{r},-t) = \frac{-1}{\alpha}\frac{\partial T(\mathbf{r},-t)}{\partial t} \tag{۷ – ۸۵۴}$$

به‌علت عدم تقارن موقتی در معادلهٔ انتشار، دو تابع گرین

$G_+(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ و $G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'')$

باید در معادلات متفاوت

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right) G_+(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \tag{۷ – ۸۵۵}$$

و

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right) G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,\delta(t-t'') \tag{۷ – ۸۵۶}$$

صدق کنند. بقیهٔ اثبات وارون‌پذیری مانند معادلات (۷ – ۷۶۵) تا (۷ – ۷۶۸) است. اگر قضیهٔ گرین،

$$\begin{aligned}\int_V \{G_+\nabla^2 G_- - G_-\nabla^2 G_+\}\, dV \\ = \int_{S(V)}\left\{G_+\frac{\partial G_-}{\partial n} - G_-\frac{\partial G_+}{\partial n}\right\} dS\end{aligned} \tag{۷ – ۸۵۷}$$

را درمورد معادلات (۷ – ۸۵۵) و (۷ – ۸۵۶) به‌کار ببریم، داریم،

$$\begin{aligned}\int_V \{G_+\nabla^2 G_- - G_-\nabla^2 G_+\}\, dV &= -G_+(\mathbf{r}'',t;\mathbf{r}',t')\,\delta(t-t'') \\ &+ G_-(\mathbf{r}',-t;\mathbf{r}'',-t'')\,\delta(t-t') \\ &+ \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\int_V\left\{G_+\frac{\partial G_-}{\partial t} + G_-\frac{\partial G_+}{\partial t}\right\} dV = 0\end{aligned} \tag{۷ – ۸۵۸}$$

که انتگرال سطح در آن صفر می‌شود زیرا G_+ و G_- هر دو بر $S(V)$ در شرایط مرزی یکسان صدق می‌کنند. حال ازهردو طرف معادلهٔ (۷ – ۸۵۸) نسبت به زمان از $t = -\infty$ تا $t = t$، $t > t'$ و $t > t''$ انتگرال می‌گیریم، نتیجه عبارت است از:

$$\begin{aligned}G_+(\mathbf{r}'',t'';\mathbf{r}',t') &- G_-(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r}'',-t'') \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{t} dt\int_V \frac{\partial}{\partial t}(G_+G_-)\, dV \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[G_+(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')G_-(\mathbf{r},-t;\mathbf{r}'',-t'')\right]\Big|_{t=-\infty}^{t=t} = 0\end{aligned} \tag{۷ – ۸۵۹}$$

چون G_+ در $t = -\infty$ و G_- در $t = t$ صفر می‌شود(زیرا $t > t''$ نتیجه می‌دهد $-t < -t''$) رابطهٔ وارون‌پذیری (۷ – ۸۵۲) برقرار خواهد بود.

۷ ـ ۳۰. جواب عمومی معادلهٔ انتشار

صورت انتگرالی جواب معادلهٔ انتشار ناهمگن طبق معمول برحسب تابع گرین مناسب به‌دست می‌آید . باتوجه به

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t'}\right) T(\mathbf{r}',t') = -h(\mathbf{r}',t') \tag{۷ ـ ۸۶۰}$$

ومعادلهٔ تابع گرین متناظر:

$$\left(\nabla'^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t'}\right) G_-(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r},-t) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \tag{۷ ـ ۸۶۱}$$

که در آن

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \tag{۷ ـ ۸۶۲}$$

از کاربرد قضیهٔ گرین درمورد معادلات (۷ ـ ۸۶۰) و (۷ ـ ۸۶۱) و انتگرال‌گیری روی dt' نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} \{G_-\nabla'^2 T - T\nabla'^2 G_-\}\, dV' \\ = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G_- \frac{\partial T}{\partial n'} - T\frac{\partial G_-}{\partial n'}\right\} dS'\end{aligned} \tag{۷ ـ ۸۶۳}$$

یا

$$\begin{aligned}-\int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')h(\mathbf{r}',t')\, dV' + T(\mathbf{r},t) \\ + \frac{1}{\alpha}\int_{V'} [G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')T(\mathbf{r}',t')]\Big|_{t'=0}^{t'=t+\epsilon} dV' \\ = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G\frac{\partial T}{\partial n'} - T\frac{\partial G}{\partial n'}\right\} dS'\end{aligned} \tag{۷ ـ ۸۶۴}$$

که در آن ϵ عدد دلخواه مثبت کوچک است ، و از وارون‌پذیری استفاده شده است .

$$G_-(\mathbf{r}',-t';\mathbf{r},-t) = G_-(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') \tag{۷ ـ ۸۶۵}$$

باتوجه به رابطه علیت (۷ ـ ۸۵۰)،

$$[G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')T(\mathbf{r}',t')]_{t'=t+\epsilon} = 0 \tag{۷ ـ ۸۶۶}$$

درنتیجه،

$$\begin{aligned}T(\mathbf{r},t) = \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{V'} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')h(\mathbf{r}',t')\, dV' \\ + \int_0^{t+\epsilon} dt' \int_{S(V')} \left\{G\frac{\partial T}{\partial n'} - T\frac{\partial G}{\partial n'}\right\} dS' \\ + \frac{1}{\alpha}\int_{V'} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0)T(\mathbf{r}',0)\, dV'\end{aligned} \tag{۷ ـ ۸۶۷}$$

معادلهٔ (۷ ــ ۸۶۷) جواب صوری مسألهٔ مرکب مقدار اولیه و مرزی برای معادلهٔ انتشار است . بدیهی است که ، $T(\mathbf{r},t)$ از روی منابع گرمایی حجمی توزیع شده در تمام V' با چگالی $h(\mathbf{r}',t')$ ، منابع سطحی گرمای توزیع شده بر $S(V')$ و توزیع درجه حرارت اولیه $T(\mathbf{r}',0)$ معین می‌شود .

۷ ــ ۳۱. ساختن تابع گرین محیط نامتناهی برای معادلهٔ موج

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ ،

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right) G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \qquad (۸۶۸ - ۷)$$

رادر یک محیط نامحدود بابعد دلخواه $n<\infty$، حل کنیم . این کار رامی‌توانیم کاملا" درحالت کلی به کمک تبدیل فوریهٔ n بعدی که در بخش ۵ ــ ۱۸ معرفی شد انجام دهیم . محاسبات تاحدودی ساده‌تر خواهند شد . اگرابتدا مسأله رابرای یک محیط نامتناهی ایزوترپ همگن حل کنیم ، تابع گرین در زمان $\tau = t - t'$ پس ازشروع‌عمل‌منبع فقط باید تابع فاصله بین منبع وناظر یعنی R باشد . با این تذکرات ،

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = G(R,\tau) \qquad (۸۶۹ - ۷)$$

که در آن :

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \text{ and } \tau = t - t'$$

و معادلهٔ متناظر برای $G(R,\tau)$ عبارت است از :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \tau}\right) G(R,\tau) = -\delta(R)\,\delta(\tau) \qquad (۸۷۰ - ۷)$$

طرفین معادلهٔ (۷ ــ ۸۷۰) را در

$$e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\,dV_{\mathbf{R}}$$

ضرب کرده بر تمام مختصات فضا انتگرال می‌گیریم ، توجه کنید که

$$dV_{\mathbf{R}} = dx_1\,dx_2\cdots dx_n \qquad (۸۷۱ - ۷)$$

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} = K_1(x_1 - x_1') + K_2(x_2 - x_2') + \cdots + K_n(x_n - x_n') \qquad (۸۷۲ - ۷)$$

$$R = [(x_1 - x_1')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2]^{1/2} \qquad (۸۷۳ - ۷)$$

چون x_iها تمام مقادیر ممکن را اختیار می‌کنند مقدار $R=0$ در دامنهٔ انتگرال‌گیری قرار می‌گیرد ، درنتیجه

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau} + \alpha K^2 \bar{G}(\mathbf{K},\tau) = \alpha\,\delta(\tau) \qquad (۸۷۴ - ۷)$$

به شرط آن‌که

$$\lim_{R\to\infty} [\nabla G(R,\tau) + i\mathbf{K}G(R,\tau)] = 0 \tag{۸۷۵ – ۷}$$

در معادلهٔ (۷ – ۸۷۴) تابع $\bar{G}(\mathbf{K},\tau)$ تبدیل فوریهٔ n بعدی $G(R,\tau)$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{G}(\mathbf{K},\tau) = \int_{\text{All R space}} G(R,\tau)e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}dV_R \tag{۸۷۶ – ۷}$$

قضیهٔ وارون $G(R,\tau)$ عبارت است از:

$$G(R,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\text{All K space}} \bar{G}(\mathbf{K},\tau)e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}dV_K \tag{۸۷۷ – ۷}$$

و معادلهٔ (۷ – ۸۷۴) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است که آن‌را باتبدیل به یک کوادراتور مانند معادلهٔ (۶ – ۵۵) می‌توان حل کرد:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(e^{\alpha K^2\tau}\bar{G}) = e^{\alpha K^2\tau}\left(\frac{\partial\bar{G}}{\partial\tau} + \alpha K^2\bar{G}\right) = \alpha e^{\alpha K^2\tau}\,\delta(\tau) \tag{۸۷۸ – ۷}$$

و با انتگرال‌گیری داریم

$$e^{\alpha K^2\tau}\bar{G}(K,\tau) - \bar{G}(K,0) = \alpha H(\tau) \tag{۸۷۹ – ۷}$$

یا

$$\bar{G}(K,\tau) = \bar{G}(K,0)e^{-\alpha K^2\tau} + \alpha H(\tau)e^{-\alpha K^2\tau} \tag{۸۸۰ – ۷}$$

و از علیت نتیجه می‌شود

$$G(R,\tau) = 0 \qquad \tau \le 0 \tag{۸۸۱ – ۷}$$

با تبدیل فوریه معادلهٔ (۷ – ۸۸۱)، داریم

$$\bar{G}(K,\tau) = 0 \qquad \tau \le 0 \tag{۸۸۲ – ۷}$$

بنابراین،

$$\bar{G}(K,\tau) = \alpha H(\tau)e^{-\alpha K^2\tau} \tag{۸۸۳ – ۷}$$

جواب مطلوب معادلهٔ (۷ – ۸۷۴) است.

باتوجه به قضیهٔ وارون فوریه (۷ – ۸۷۷)،

$$G(R,\tau) = \frac{\alpha H(\tau)}{(2\pi)^n}\int_{\text{کل فضا K}} e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{R})-\alpha K^2\tau}\,dV_K \tag{۸۸۴ – ۷}$$

که در آن

$$dV_K = dK_1\,dK_2\cdots dK_n \tag{۸۸۵ – ۷}$$

حال سعی‌می‌کنیم معادلهٔ (۷ – ۸۸۴) رابیشتر ارزیابی کنیم. برای این‌کار توجه کنیدکه

$$G(R,\tau) = \frac{\alpha H(\tau)}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(K_iR_i)-\alpha K_i^2\tau}\, dK_i \qquad (\text{۷}-\text{۸۸۶})$$

که در آن

$$R_i = x_i - x_i \qquad (\text{۷}-\text{۸۸۷})$$

و

$$K^2 = \sum_{i=1}^{n} K_i^2 \qquad (\text{۷}-\text{۸۸۸})$$

اگر بتوانیم مقدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iK_iR_i)-\alpha\tau K_i^2}\, dK_i = 2\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} \cos\,(K_iR_i)\, dK_i \qquad (\text{۷}-\text{۸۸۹})$$

را محاسبه کنیم مسألهٔ اصلی حل شده است . توجه کنید که

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} \cos\,(K_iR_i)\, dK_i = \int_0^\infty dK_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K_i^2R_i^2)^n}{(2n)!}\, e^{-\alpha\tau K_i^2} \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۰})$$

و اگر (۷ ــ ۸۹۰) بطور یکنواخت متقارب باشد داریم

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} \cos\,(K_iR_i)\, dK_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R_i^2)^n}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۱})$$

بنابراین ، باید انتگرال زیر محاسبه شود :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۲})$$

برای این منظوربهتراست نتایج معادلات (۶ ــ ۳۹۸) تا (۶ ــ ۴۰۲) را به‌خاطر داشته باشیم :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۳})$$

با فرض $x = \sqrt{\alpha\tau}\, K_i$ در معادلهٔ (۷ ــ ۸۹۳) داریم

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2}\, dK_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}} \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۴})$$

اگر از معادلهٔ (۷ ــ ۸۹۴) ، nبار نسبت به $\alpha\tau$ مشتق بگیریم نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{d^nI}{d(\alpha\tau)^n} &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(\alpha\tau)^{-\frac{1}{2}-n}\right] \end{aligned} \qquad (\text{۷}-\text{۸۹۵})$$

هر بار که از سمت راست معادلهٔ (۷ ــ ۸۹۴) نسبت به $\alpha\tau$ مشتق بگیریم یک عامل 1ــ

به‌دست می‌آید؛ پس

$$\frac{d^n I}{d(\alpha\tau)^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\,(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(\alpha\tau)^n} \quad (۷-۸۹۶)$$

از معادلهٔ (۷ ــ ۸۹۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(\alpha\tau)^n} \quad (۷-۸۹۷)$$

ولی،

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)\cdots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \quad (۷-۸۹۸)$$

و

$$2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n = 2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = n!\,2^n \quad (۷-۸۹۹)$$

بنابراین

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad (۷-۹۰۰)$$

و

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2} K_i^{2n}\, dK_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\,\frac{(2n)!}{n!(4\alpha\tau)^n} \quad (۷-۹۰۱)$$

با درنظر گرفتن این رابطه و توجه به معادلهٔ (۷ ــ ۸۹۱)، داریم

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau K_i^2}\cos(K_i R_i)\, dK_i = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-R_i^2)^n}{(2n)!}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\,\frac{(2n)!}{n!(4\alpha\tau)^n}\right] \quad (۷-۹۰۲)$$

یا

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau_i K^2}\cos(K_i R_i)\, dK_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{-R_i^2}{4\alpha\tau}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\, e^{-R_i^2/4\alpha\tau} \quad (۷-۹۰۳)$$

پس معادلهٔ (۷ ــ ۸۸۹) به نتیجه زیر منجر می‌شود

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(K_i R_i)-\alpha\tau K_i^2}\, dK_i = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\, e^{-R_i^2/4\alpha\tau} \quad (۷-۹۰۴)$$

و با استفاده از این نتیجه تابع گرین محیط نامتناهی (۷ ــ ۸۸۶) را می‌توان مستقیماً" محاسبه کرد،

$$G(R,\tau) = \frac{\alpha H(\tau)}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau}}\, e^{-R_i^2/4\alpha\tau}$$
$$= \frac{\alpha H(\tau)}{(2\pi)^n} \left(\frac{\pi}{\alpha\tau}\right)^{n/2} \exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha\tau \sum_{i=1}^{n} R_i^2\right)$$
$$= \alpha H(\tau) \left(\frac{1}{4\pi\alpha\tau}\right)^{n/2} e^{-R^2/4\alpha\tau} \qquad (۹۰۵-۷)$$
$$= \alpha H(\tau) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}}\right)^{n} e^{-R^2/4\alpha\tau}$$

که در آن

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} R_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2 \qquad (۹۰۶-۷)$$

بطور خلاصه، تابع گرین محیط نامتناهی n بعدی برای معادلهٔ انتشار عبارت است از:

$$G(R,\tau) = \alpha H(\tau) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}}\right)^{n} e^{-R^2/4\alpha\tau} \qquad (۹۰۷-۷)$$

که در آن $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ فاصلهٔ بین منبع و ناظر و $\tau = t - t'$ زمانی است که منبع "فعال" بوده است.

به‌عنوان یک مثال برای کاربرد معادلهٔ (۷ ـ ۹۰۷) مسألهٔ تعیین توزیع درجهٔ حرارت را در یک میلهٔ بی‌نهایت بلند درنظر بگیرید. با این فرض که توزیع اولیه درجهٔ حرارت $T(x',0)$ معلوم است. فرض کنید هیچ منبع حرارتی وجود ندارد و G و مشتقات آن در نقاط انتهایی بی‌نهایت دورمیله صفرمی‌شوند. دراین صورت از معادلات (۷ـ۸۶۷) و (۷ـ۹۰۷) برای مسألهٔ مقدار اولیه جواب

$$T(x,t) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x')^2/4\alpha t}\, T(x',0)\, dx' \qquad (۹۰۸-۷)$$

به‌دست می‌آید.

۷ ـ ۳۲. مسائل و کاربردها

۱ ـ جواب معادلهٔ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

را با شرایط مرزی زیر محاسبه کنید

$$\begin{array}{ll} \phi(x,0) = \phi(x,b) = 0 & 0 \le x \le a \\ \phi(0,y) = \phi_0 \ (\text{ثابت}) & 0 \le y \le b \\ \phi(a,y) = 0 & 0 \le y \le b \end{array}$$

و حد این جواب را به ازای $a \to \infty$ محاسبه کنید.

۲ ــ جواب معادلهٔ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0$$

را که در شرایط مرزی

$$\begin{aligned}&\phi(r,\alpha)=f(r) && 0\le r<\infty\\&\phi(r,-\alpha)=g(r) && 0\le r<\infty\\&\lim_{r\to\infty}\phi(r,\theta)=0 && -\alpha\le\theta\ge+\alpha\end{aligned}$$

بر وجوه یک گوه صدق می‌کند پیدا کنید.

یک جواب خصوصی را درحالتی که شرایط مرزی بر تمام وجوه یکسان باشند، یعنی

$$f(r)\equiv g(r)=\begin{cases}\phi_0 & 0\le r\le a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

به‌دست‌آوریدوسپس‌زاویهٔ‌گوه را برابر $\alpha=\pi/2$ اختیار کرده نتیجهٔ حاصل را با معادلهٔ (۷ــ۱۸۱) مقایسه کنید.

۳ ــ مکعب مستطیلی را به طول بی‌نهایت و متصل به زمین درنظر بگیرید به قسمی که مولدهایش موازی محور z ها باشند. فرض کنید وجوه مستطیلی دارای مختصات $x=0$، $x=a$ و $y=0$، $y=b$ باشند. اگر نقطه‌بارداری در $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$ داخل این استوانه قرارگیرد، پتانسیل حاصل داخل استوانه را محاسبه کنید.

۴ ــ محاسبات مسألهٔ ۳ را برای حالتی که استوانه فوق دوار باشد تکرار کنید.

۵ ــ یک کرهٔ هادی به شعاع $r=a$ و مرکز $r=0$ دریک محیط همگن عایق باظرفیت‌القایی ϵ_2 قرارمی‌گیرد. یک نقطهٔ باردار q در $z=z'>a$ برمحور z ها گذاشته‌می‌شود. پتانسیل‌الکتریکی را در خارج کره محاسبه کرده چگالی بار سطحی القاء شده به کره را به‌دست آورد.

۶ ــ فرض کنید کرهٔ مسألهٔ ۵ به صورت کره عایق با ظرفیت القایی ϵ_1 درآید. پتانسیل الکتریکی داخل و خارج این کره را محاسبه کنید.

۷ ــ فرض کنید منبع نقطه‌ای q درمسألهٔ ۶ بتواند به بی‌نهایت برسد. درنتیجه کره عایق با ظرفیت القایی ϵ_1 در یک محیط با ظرفیت القایی ϵ_2 قرار می‌گیرد که به وسیلهٔ یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 که مثلاً درامتدادمحور z ها امتداد دارد دربرگرفته می‌شود. پتانسیلها و میدانهای الکتریکی داخل و خارج کره را محاسبه کنید.

۸ ــ میدانهای مغناطیسی داخل وخارج سیم مستقیمی به طول بی‌نهایت وشعاع a وظرفیت القایی μ_1 را محاسبه کنید. درصورتی که از آن جریان I می‌گذرد، و سیم در یک محیط خارجی

با ظرفیت القایی μ_2 واقع در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_0$ درامتداد عرضی محور سیم قرار دارد.

۹ ــ تابع گرین وابسته به زمان را برای معادلهٔ موج یک بعدی

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(x,t,x',t') = -\delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

محاسبه کنید. فرض کنید که G و $\partial G/\partial t$ در شرط علیت زیر صدق می‌کنند:

$$G = 0 \qquad t \le t'$$
$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \qquad t \le t'$$

۱۰ ــ رابطهٔ وارون‌پذیری

$$G(x,t;x',t') = G(x',-t';x,-t)$$

را برای تابع گرین به‌دست آمده در مسألهٔ ۹ ثابت کنید.

۱۱ ــ صورت انتگرالی جواب مسألهٔ مرکب مقدار اولیه و مرزی را برای

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho c^2} f(x,t)$$

با استفاده از تابع گرین مسألهٔ ۹ و یک قضیهٔ گرین مناسب به‌دست آورید.

۱۲ ــ مسألهٔ مقدار اولیهٔ کوشی را برای معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
$$u(x,0) = F(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$$

در یک محیط یک بعدی با بسط نامتناهی حل کنید. با استفاده از نتایج مسألهٔ ۹ و ۱۱ جواب را به‌دست آورید، و آن را با معادلهٔ (۷ ــ ۴۶۰) مقایسه کنید.

۱۳ ــ معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = -F(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \qquad (A)$$

را در حجم V درنظر بگیرید، و فرض کنید که جوابهایش درشرایط مرزی خاصی بر رویهٔ $S(V)$ شامل V صدق می‌کنند. مقادیر k^2 که به ازای آنها این معادله را می‌توان باتوجه به شرایط مرزی معین بر u حل‌کرد "مقادیر ویژه" معادله نامند وآنها رابه $k_n{}^2$ نشان می‌دهند. به ازای هر k_n یک تابع ویژهٔ متناظر مانند $u_n(\mathbf{r})$ وجود دارد. طیف مقادیر ویژه k_n ممکن است یک مجموعهٔ گسسته یا پیوسته، یا از هر دو نوع باشد، و توابع ویژه باید در معادله زیرصدق کند:

$$(\nabla^2 + k_n{}^2)u_n(\mathbf{r}) = -F(\mathbf{r})u_n(\mathbf{r})$$

فرض کنید توابع ویژهٔ $u_n(\mathbf{r})$ استاندارد شوند به قسمی که

$$\int_V u_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r})\, dV = 1$$

که در آن $u_n^*(\mathbf{r})$ مزدوج مختلط $u_n(\mathbf{r})$ است .

ثابت کنید که

$$\int_V u_n^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r})\, dV = \delta_{nm}$$

و اگر n و m بطور پیوسته تغییر کنند :

$$\int_V u_n^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r})\, dV = \delta(n - m)$$

۱۴ ــ فرض کنید توابع ویژه $u_n(\mathbf{r})$ که در مسألهٔ ۱۳ تعریف شدند یک مجموعهٔ کامل تشکیل دهند . تابع گرین برای

$$(\nabla^2 + k^2) u(\mathbf{r}) = -F(\mathbf{r}) u(\mathbf{r})$$

به صورت جواب معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -F(\mathbf{r}) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (B)$$

با شرایط

الف) به ازای هر مقدار n ، $k^2 \neq k_n{}^2$ ، یعنی k باید هیچیک از مقادیر ویژه k_n نباشد .

ب) تابع $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ باید درهمان شرایط مرزی بر $S(V)$ صدق کندکه توابع ویژه $u_n(\mathbf{r})$ صدق می‌کنند ، تعریف می‌شود . نشان دهید که تابع گرین $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ را می‌توان برحسب توابع ویژهٔ $u_n(\mathbf{r})$ به صورت زیر بسط داد

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^*(\mathbf{r}') u_n(\mathbf{r})}{k_n{}^2 - k^2} \qquad (C)$$

به شرط آن که طیف مقادیر ویژه $\{k_n\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی شمارا تشکیل دهد . وقتی طیف پیوسته است ، نشان دهید که

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int_{V_K} \frac{u^*(\mathbf{r}',\mathbf{K}) u(\mathbf{r},\mathbf{K})}{K^2 - k^2}\, dV_K \qquad (D)$$

V_K در معادلهٔ (D) ناحیهٔ سه بعدی مرکب از تمام نقاط $K = |\mathbf{K}|$ است که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$(\nabla^2 + K^2) u(\mathbf{r},\mathbf{K}) = -F(\mathbf{r}) u(\mathbf{r},\mathbf{K}) \qquad (E)$$

و درنتیجه باید مقادیر ویژهٔ معادلهٔ (A) باشند . نقطهٔ k^2 بخصوص از V_K خارج شده است .

۱۵ ــ معادلهٔ هلملتز سه بعدی رادریک دامنهٔ نامحدود درنظربگیرید، وآن را ازجنبهٔ توابع ویژه ــ مقادیر ویژه بررسی کنید. برای این منظور در معادله (A) فرض کنید$F(\mathbf{r}) \equiv 0$. نشان دهید که توابع ویژه استاندارد شده عبارتند از:

$$u(\mathbf{r},\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

$$u^*(\mathbf{r}',\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

و تحقیق کنید که جواب معادلهٔ (B) که با معادلهٔ (D) داده شده با نتیجه‌ای که در معادلهٔ (۷ ــ ۶۳۰) به‌دست آمده برابر است.

۱۶ ــ با استفاده از معادلهٔ (C)، معادلهٔ

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

را با این فرض که G باید بر شش وجه یک مکعب مستطیل که وجوهش عبارتند از $x=y=z=0$ و $x = a$، $y = b$ و $z = c$.

۱۷ ــ معادلهٔ

$$(\nabla^2 - k^2)G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

را در مختصات قطبی حل کنید، و با استفاده از نتایج حاصل یک قضیهٔ دیگر برای توابع بسل هذلولی به‌دست آورید:

$$K_0(kR) = I_0(kr_<)K_0(kr_>) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(kr_<)K_n(kr_>) \cos n(\theta - \theta')$$

که در آن

$$R^2 = r_>{}^2 + r_<{}^2 - 2r_>r_< \cos(\theta - \theta')$$

۱۸ ــ ثابت کنید که

$$K_0\left(\frac{sR}{c}\right) = \int_0^\infty \frac{H(t - R/c)}{\sqrt{t^2 - R^2/c^2}} e^{-st}\, dt$$

و با استفاده از این نتیجه معادلهٔ

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ \delta(t - t')$$

را در یک صفحهٔ نامحدود با فرض

$$G = 0 \qquad t \leq t'$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \qquad t \leq t'$$

حل کنید.

۱۹ ــ نشان دهید که تابع گرین محیط نامتناهی g که در شرایط

$$\left(c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) g(x,y,t) = -\delta(t)\ \delta(x)\ \delta(y)$$
$$g(x,y,0) = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,y,0) = 0$$

صدق کند به صورت زیر است

$$g(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c_2^2} \frac{H[t - (R/c_1)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta)]}{\sqrt{t^2 - (R^2/c_1^2)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta)}}$$

که در آن

$$R^2 = x^2 + y^2$$
$$x = y \tan \theta$$

و c_1 و c_2 ثابتند به قسمی که

$$\epsilon = \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}\right)^{1/2}$$

این مسأله را ازنظر فیزیکی تعبیر کنید .

۲۰ ــ مسأله مقدار مرزی زیر را در نیم‌فضای $-\infty < x < +\infty$ با $y \geq 0$ حل کنید :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad -\infty < x < +\infty$$

۲۱ ــ محاسبات مسألهٔ ۲۰ را با استفاده از شرط مرزی زیر تکرار کنید

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = g(x) \qquad -\infty < x < +\infty$$

۲۲ ــ موج مسطح هارمونیک

$$u_i = e^{-ikr\cos\theta}$$

رادرنظر بگیرید که بر یک استوانه دوار $r=a$ واقع است ، که درآن r و θ مختصات قطبی‌دوبعدی است به قسمی که $0 \leq \theta < 2\pi$. موج پراکنده شده u_s باید در معادله

$$(\nabla^2 + k^2)u_s = 0 \qquad r \geq a$$

و شرط مرزی

$$u_s(a,\theta) = -u_i(a,\theta) = -e^{-ika\cos\theta} \quad , \ r = a$$

صدق می‌کند .

۲۳ ــ محاسبات مسألهٔ ۲۲ رابا فرض این که شرط مناسب مرزی بر $r=a$ عبارت است از :

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)_{r=a}$$

تکرار کنید .

۲۴ ــ موج مسطح هارمونیک

$$u_i = e^{ikr\cos\theta}$$

را بر کره‌ای به شعاع $r=a$ درنظر بگیرید که در آن (r,θ,ϕ) مختصات کروی است . موج پراکنده شده u_s باید در معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)u_s = 0 \qquad r \geq a$$

و شرط مرزی

$$u_s(a,\theta,\phi) = -u_i(a,\theta,\phi) = e^{ika\cos\theta}$$

بر کرهٔ $r=a$ صدق می‌کند نشان دهید که :

$$u_s(r,\theta,\phi) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\,\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}\,h_n^{(1)}(kr)$$

۲۵ ــ محاسبات مسألهٔ ۲۴ را برای شرط مرزی زیر تکرار کنید .

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial r}\right)_{r=a} = -\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}\right)_{r=a}$$

۲۶ ــ معادله هلملتز دوبعدی را در مختصات قطبی (r,θ) درنظر بگیرید .

$$(\nabla^2 - k^2)G(r,\theta;r_1,\theta_1) = \frac{-\delta(r-r_1)}{r}\,\delta(\theta-\theta_1)$$

نشان دهید که جواب این معادله در یک ناحیه کوهانی در فضای دوبعدی

$$\{0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta \leq \alpha\}$$

برابر است با :

$$G = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} K_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kr_>)I_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kr_<)\left\{\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\theta-\theta_1) - \cos\frac{n\pi}{\alpha}(\theta+\theta_1)\right\}$$

به شرط آن که :

$$G(r,0;r_1,\theta_1) = G(r,\alpha;r_1,\theta_1) = 0 \qquad 0 \leq r < \infty$$

۲۷ ــ محاسبات مسألهٔ ۲۶ را با استفاده از شرایط مرزی زیر تکرار کنید .

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \left(\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)_{\theta=\alpha} = 0 \qquad 0 \leq r < \infty$$

۲۸ ــ معادلهٔ

$$(\nabla^2 + k^2)u(x,y,z) = 0$$

را درنظر بگیرید و فرض کنید که وقتی $k \to \infty$:

$$u \sim e^{ik\psi(x,y,z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(x,y,z)}{(ik)^n}$$

که در آن $(\nabla\psi)^2 = 1$ فرض کنید $x = x(s)$ و $y = y(s)$ و $z = z(s)$. معادلهٔ پارامتری یک منحنی فضایی باشدکه: $\psi(x,y,z) =$ ثابت رادرامتداد نرمال یعنی درطول $\nabla\psi$. نشان دهید برحسب طول قوس s که درامتداد یک شعاع اندازه‌گیری شده،

$$V_n(s) = V_n(s_0)e^{-\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\nabla^2\psi ds'} - \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s} e^{-\frac{1}{2}\int_{\tau}^{s}\nabla^2\psi ds'}\, \nabla^2 V_{n-1}(\tau)\, d\tau$$

۲۹ ــ دو نیمکره سیال ۱ و ۲ را که درصفحهٔ $z = 0$ بایکدیگر درتماسند درنظر می‌گیریم. تولید یک ضربه آکوستیک بوسیلهٔ یک منبع نقطه‌ای از $r = 0$، $z = h$ درسیال ۱، به مسأله مقدار مرزی زیر منجر می‌شود:

معادلات:

$$(\nabla^2 - k_1^2)u_1 = \frac{-\delta(r)\,\delta(z-h)}{2\pi r}$$

$$(\nabla^2 - k_2^2)u_2 = 0$$

را با شرایط مرزی

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \qquad z = 0$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_{z=0}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 0 < r < \infty$$

حل کنید. نشان دهید که جواب این مسأله عبارت است از:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\nu_1\delta_1 \cosh \nu_1 z + \nu_2 \sinh \nu_1 z}{\nu_1(\nu_2 + \nu_1\delta_1)}\right\} e^{-\nu_1 h} J_0(kr)k\,dk \qquad 0 \le z \le h$$

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\nu_1\delta_1 \cosh \nu_1 h + \nu_2 \sinh \nu_1 h}{\nu_1(\nu_2 + \nu_1\delta_1)}\right\} e^{-\nu_1 z} J_0(kr)k\,dk \qquad z \ge h$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\nu_2 z - \nu_1 h}}{\nu_1\delta_1 + \nu_2} J_0(kr)k\,dk \qquad z \le 0$$

که در آن

$$\delta_1 = \rho_2/\rho_1$$

$$\nu_1 = \sqrt{k^2 - k_1^2}$$

$$\nu_2 = \sqrt{k^2 - k_2^2}$$

$\mathrm{Re}\,(\nu_1) \geq 0$

$\mathrm{Re}\,(\nu_2) \geq 0$

۳۰ ــ درجهٔحرارت $T(x,t)$ را در یک‌میلهٔ نامتناهی $0 < x < \infty$ درنظر بگیرید که یکی ازدو انتهای آن در یک منبع حرارتی با تغییرات سینوسی $T(0,t) = T_0 \cos \omega t$ نشان دهید که توزیع درجه حرارت در این میله به صورت زیر است :

$$T(x,t) = T_0 e^{-x\sqrt{\omega/2\alpha}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)$$

به نظر می‌رسد که جواب یک موج حرارتی میـــــرا است که سرعت انتقال آن وقتی ω به سمت بی‌نهایت میل می‌کند . بی‌نهایت می‌شود . آیا می‌توانید این مطلب را تعبیر کنید ؟

۳۱ ــ معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

را با شرایط مرزی

$$T(0,t) = 0 \qquad \text{به ازای هر } t ،$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \qquad \text{به ازای هر } t ،$$

و شرایط اولیه

$$T(x,0) = T_0\left(\frac{x}{a}\right) \qquad 0 \leq x \leq a$$

حل کنید .

۳۲ ــ معادلهٔ انتشار زیر را در مختصات قطبی (r,θ) حل کنید ،

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط مرزی برابر ،

$$T(r,0,t) = 0 \qquad r > 0,\ t > 0$$

$$T(r,\alpha,t) = T_0 \qquad r > 0,\ t > 0$$

و شرط اولیه عبارت است از :

$$T(r,\theta,0) = 0 \qquad 0 < \theta < \alpha,\ r > 0$$

۳۳ ــ معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

را در نیم‌فضای $0 < x$، با شرط مرزی

$$T = T_0 \text{ ، } x = 0 \text{ در } t > 0$$

و شرط اولیه:

$$T = 0 \text{ ، } t = 0 \text{ در } x > 0$$

حل کنید.

۳۴ــ معادلهٔ

$$(\nabla^2 - k)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

را در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) برای محیط نامحدود حل کنید.

۳۵ــ معادلهٔ

$$(\nabla^2 - k)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

را در مختصات کروی (r,θ,ϕ) برای محیط نامحدود حل کنید.

ضمیمهٔ A

سریهای نامتناهی

سریهای نامتناهی که اغلب درکاربردها با آنها مواجهیم در حالت کلی دونوعند: یکی سری نامتناهی که هر جمله آن یک عدد حقیقی یا مختلط است ، و دیگری سری نامتناهی‌که هر جمله آن تابعی از یک متغیر حقیقی یا مختلط است .

دو مسألهٔ متمایز درارتباط با این سریها وجود دارد . مسألهٔ اول تعیین همگرایی سری است ؛ وقتی معلوم شود که یک سری نامتناهی همگراست . مسأله بعدی تعیین عددی است که سری به آن همگراست . این حاصل جمع می‌تواند یک عدد یایک تابع باشد برحسب آن‌که سری ، اعداد یا توابع را جمع کند .

سری نامتناهی زیر از اعداد حقیقی را درنظر بگیرید :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A-1)$$

آزمونهای مختلفی برای تعیین همگرایی‌این قبیل سریها وجود دارد . بعضی ازآنهاشرط کافی همگرایی را می‌دهند ، و بعضی فقط شرایط لازم همگرایی را فراهم می‌سازند . یادآوری می‌شود که شرط کافی ، همگرایی را تضمین می‌کند . درصورتی که یک شرط لازم چنین نیست . ازطرف دیگر ، اگر شرط لازم برقرار نباشد ، مسلما" سری واگرا خواهد بود .

به‌عنوان مرجع ، تعدادی از آزمونهای مختلف همگرایی را خواهیم داد . اثبات آنها را در بیشتر کتابهای ریاضیات پیشرفته می‌توان یافت .

آزمون مقایسه برای سریهای با جمله‌های مثبت

اگر به ازای $n > m$، داشته باشیم $0 < a_n < b_n$، همگرایی Σa_n از همگرایی Σb_n نتیجه می‌شود . و واگرایی Σb_n از واگرایی Σa_n نتیجه می‌شود .

آزمون جملهٔ n ام

شرط لازم برای همگرایی Σa_n عبارت است از :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

همگرایی سری متناوب

اگر $a_n > 0$ و نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، آن‌گاه سری

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots = \Sigma(-1)^n a_n$$

همگراست . علاوه براین مجموع S یک سری متناوب در نامساوی زیر صدق می‌کند .

$$0 < S < a_0 \; .$$

همگرایی مطلق سری

سری Σa_n همگراست اگر سری $\Sigma|a_n|$ همگرا باشد . ولی همگرایی Σa_n لزوما" همگرایی $\Sigma|a_n|$ را ایجاب نمی‌کند ، مگر وقتی a_n ها نامنفی باشند .

اگر Σa_n همگرا و $\Sigma|a_n|$ واگرا باشد ، سری Σa_n را "همگرای مشروط" گویند . اگر $\Sigma|a_n|$ همگرا باشد ، سری Σa_n را همگرای مطلق نامند .

آزمون ریشهٔ n ام کوشی

فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}| = k$$

اگر $k < 1$ ، سری Σa_n همگرای مطلق است ، اگر $k > 1$ ، سری Σa_n واگرا و به ازای $k = 1$ ، این آزمون چیزی دربارهٔ همگرایی نمی‌گوید .

آزمون نسبت دالامبر

اگر به ازای مقادیر بزرگ n ،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < k < 1$$

آن‌گاه Σa_n همگرای مطلق است و اگر به ازای مقادیر بزرگ n ،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > h > 1$$

آن‌گاه Σa_n واگراست ، و اگر به ازای مقادیر بزرگ n ،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

این آزمون دربارهٔ همگرایی چیزی نمی‌گوید .

آزمون انتگرال ماکلرن برای سریهای مثبت و حقیقی

اگر تابع حقیقی $f(x)$ به ازای $x \geq a$ مثبت و به سمت صفر نزولی باشد ، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)$$

متقارب است اگر

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(s)\, ds$$

متناهی و برابر

$$\int_a^{\infty} f(s)\, ds$$

باشد و واگراست اگر

$$\int_a^{\infty} f(s)\, ds = \infty$$

قضیهٔ ریمان درمورد همگرایی سریها

یک سری همگرای مشروط را می‌توان با ترتیب مجدد جملات به یک سری همگرا به سمت عدد دلخواه تبدیل کرد .

تبصره: این خاصیت کاملا" به همگرایی مشروط سری وابسته است . می‌توان نشان داد که مجموع یک سری همگرای مطلق از ترتیب جملات مستقل است .

همگرایی یکنواخت

فرض کنید سری توابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \qquad (A-۲)$$

به ازای هرمقدار x دربازهٔ $a \leq x \leq b$ متقارب باشد مجموع (۲ − A) تابعی از x راتعریف می‌کند ،

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \qquad (A-۳)$$

حاصلجمع جزیی n جمله $\Sigma U_n(x)$ عبارت است از:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) \qquad (A-۴)$$

باقیماندهٔ سری بعد از n جمله برابر است با

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_n(x) \qquad (A-۵)$$

که r_n نیز خود یک سری نامتناهی است . چون سری به $S(x)$ همگراست ،

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \qquad (A-۶)$$

به عبارت دیگر، به ازای هر$0 < \epsilon$ مفروض، عددی مانند N وجود دارد به قسمی که اگر $n > N$،

$$|r_n(x)| < \epsilon \qquad (A-۷)$$

درحالت کلی N تابعی از ϵ و x است ، یعنی

$$N = N(\epsilon, x) \qquad (A-۸)$$

وقتی N به ازای تمام مقادیر $a \le x \le b$ مستقل از x باشد سری نامتناهی $\sum^{\infty} U_n(x)$ را دربازهٔ $a \le x \le b$ همگرای یکنواخت گویند . بخصوص:

سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ در بازهٔ $a \le x \le b$ همگرای یکنواخت است اگر به ازای هر $0 < \epsilon$ عددی مانند N مستقل از x وجود داشته باشد به قسمی که باقیماندهٔ $r_n(x)$ در شرط زیر صدق کند :

$$n > N \qquad |r_n(x)| < \epsilon$$

آزمونهای همگرایی یکنواخت

آزمونهای قبل در بازهٔ همگرایی را می‌توان برای همگرایی یکنواخت به‌کار برد به شرط آن‌که شرایط آنهابطور یکنواخت صادق باشند ، یعنی مستقل از x . مثلا" ، آزمون ریشه به‌صورت زیر درمی‌آید :

اگر عددی مانند k مستقل از x وجود داشته باشد به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{U_n(x)}| \le k < 1$$

آن‌گاه سری $\Sigma U_n(x)$ همگرای یکنواخت است .

همین‌طور ، آزمون مقایسه برای همگرایی یکنواخت چنین بیان می‌شود : اگر $\Sigma w_n(x)$ همگرای یکنواخت باشد و داشته باشیم ،

$$|U_n(x)| \le w_n(x)$$

آن‌گاه سری $\Sigma U_n(x)$ همگرای یکنواخت (ومطلق) خواهدبود . ساده‌ترین مثال ازیک سری همگرای یکنواخت $\Sigma w_n(x)$ ، سریهای همگرای ثابت است . این نوع سری رادرآزمون مقایسه به‌کارمی‌بریم ، آزمون حاصل به صورت زیر بیان می‌شود :

آزمون M وایرشتراس

اگر ΣM_n یک سری همگرا از اعداد ثابت باشد ، به قسمی که به ازای هر

$$a \le x \le b \qquad |U_n(x)| \le M_n$$

آن‌گاه سری $\Sigma U_n(x)$ بر $a \leq x \leq b$ همگرای یکنواخت (مطلق) است. باید به خاطرداشته باشیدکه یک سری ممکن است همگرای یکنواخت باشد ولی همگرای مطلق نباشد و بالعکس.

همگرایی یکنواخت درکاربردهای عملی بسیارمهم‌است زیرا این سریهادارای سه خاصیت زیرند:

۱) فرض کنید $\Sigma U_k(x)$ یک سری نامتناهی باشد که هر جملهٔ آن یک تابع پیوسته است، $a \leq x \leq b$ اگر این سری در $a \leq x \leq b$ همگرای یکنواخت باشد، آن‌گاه مجموع سری نیزدراین بازه یک تابع پیوسته است.

۲) از یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته می‌توان در داخل بازهٔ همگرایی‌جمله به جمله انتگرال گرفت. در این صورت مجموع انتگرالها نیز بطور یکنواخت به سمت انتگرال مجموع سری اصلی همگراست.

۳) اگر $\Sigma U_n(x)$ یک سری نامتناهی از توابع مشتق‌پذیر باشدکه در $a \leq x \leq b$ به $S(x)$ همگرا باشد، آن‌گاه وقتی سری $\Sigma U'_n(x)$ در $a \leq x \leq b$ همگرای یکنواخت باشد، مقدارآن برابر $S'(x)$ خواهد بود.

مسائل

۱ ـ به ازای چه مقادیر α سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

(الف) همگراست؟

(ب) واگراست؟

۲ ـ به ازای چه مقادیر α سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log^\alpha k}$$

(الف) همگراست؟

(ب) واگراست؟

۳ ـ اگر عدد اعشاری نامتناهی $a \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$ را به‌صورت یک سری نامتناهی بنویسیم:

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

ثابت کنید این سری همگراست.

۴ ـ سری توان زیر را درنظر بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}| = \frac{1}{R}$$

شعاع همگرایی مطلق این سری و دامنهٔ واگرایی آن را پیدا کنید .

۵ ــ به ازای چه مقادیر z سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

همگراست ؟

۶ ــ فرض کنید x یک متغیر حقیقی باشد . آیا به ازای چه مقادیر x سریهای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad ، \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

همگراست ؟

۷ ــ در همگرایی یکنواخت سریهای زیر بحث کنید :

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2}$

ضمیمهٔ B

سری توان جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل

در فصل ۶ دیدیم که بسیاری از معادلات دیفرانسیل لازم در فیزیک به صورت زیرند:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad (\text{B}-۱)$$

دیدیم که اگر یک جواب معادلهٔ (۱ ــ B) داده شود، جواب عمومی صورت ناهمگن (۱ ــ B) را می‌توانیم به کمک فرمول آبل برای رونسکین به‌دست آوریم. پس مسألهٔ اصلی به‌دست آوردن یک جواب (۱ ــ B) است. این کار را معمولاً با نمایش یک جواب (۱ ــ B) به صورت سری تیلر برحسب x می‌توان انجام داد. بجای درنظر گرفتن نظریهٔ کلی جوابهایی به این صورت برای (۱ ــ B)، فقط در حالتهای خاص بحث خواهیم کرد.

معادلهٔ لژاندر

معادلهٔ لژاندر عبارت است از:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (\text{B}-۲)$$

که سری توان جواب این معادله را به صورت زیر می‌خواهیم:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \qquad (\text{B}-۳)$$

باید تمام ضرایب a_k همچنین عدد m، کمترین توان x درسری (۳ ــ B) رامعین کنیم. برای این کار، فرض می‌کنیم معادلهٔ (۳ ــ B) در دامنهٔ معینی از x همگرای یکنواخت باشد. آن‌گاه (۳ ــ B) رادر معادلهٔ (۲ ــ B) قرارداده جمله به جمله مشتق می‌گیریم، با این فرض که x در دامنهٔ همگرایی باشد. پس ازیافتن تمام a_k ها، لازم‌است تحقیق کنیم‌که آیا (۳ــ B) واقعاً در دامنه‌ای از x همگرای یکنواخت است.

اگر معادلهٔ (۳ــ B) را در (۲ ــ B) قرار دهیم،

$$\begin{aligned}(1-x^2)&\sum_k^{\infty} a_k(k+m)(k+m-1)x^{k+m-2} \\ &- 2x\sum_k^{\infty} a_k(k+m)x^{k+m-1} + n(n+1)\sum_k^{\infty} a_k x^{k+m} = 0\end{aligned} \qquad (\text{B}-۴)$$

و توانهای مشابه را جمع کنیم نتیجه می‌شود:

$$\sum_k^\infty a_k(k+m)(k+m-1)x^{k+m-2} - \sum_k^\infty a_k[(k+m)(k+m-1)+2(k+m) - n(n+1)]x^{k+m} = 0 \qquad (B-۵)$$

توجه کنید که هنوز نقطهٔ شروع k را در مجموع معادلات (B ـ ۴) و (B ـ ۵) معین نکرده‌ایم . اگر توافق شود که این دامنه از $k = 0$ تا $k = \infty$ است ، آن‌گاه می‌توانیم مقادیر ممکن m را به وسیلهٔ استدلال زیر به‌دست آوریم . اگر k فقط مقادیر نامنفی صحیح را اختیار کند ، کمترین توان x در معادلهٔ (B ـ ۵) برابر x^{m-2} است . جملهٔ شامل x^{m-2} در ابتدای مجموع (B ـ ۵) خواهد بود و برابر است با

$$a_0 m(m-1)x^{m-2} \qquad (B-۶)$$

برای این‌که معادلهٔ (B ـ ۵) به ازای جمیع مقادیر x در یک بازهٔ معین برقرار باشد ، ضریب هر x در (B ـ ۵) باید صفر شود . درنتیجه ، ضریب x^{m-2} باید صفر شود ، و داریم

$$a_0 m(m-1) = 0 \qquad (B-۷)$$

که معادلهٔ مفسر نامیده می‌شود . به‌دلیل زیر می‌توان فرض کرد $a_0 \neq 0$. اگراین معادله متحد با صفر نباشد ، در آن صورت دارای جملهٔ اولی است که به ازای $x \neq 0$ صفر نیست . همیشه این جملهٔ اول رابه‌صورت $a_0 x^m$ می‌نویسیم . ازمعادلهٔ (B ـ ۷) مقدار m به‌دست‌می‌آید : $m = 0$ ، $m = 1$.

حال ضرایب a_k را با این شرط که ضرایب توانهای مشابه x در (B ـ ۵) بایدصفرشوند ، محاسبه می‌کنیم . معادلهٔ (B ـ ۵) راباجایگذاری $k + 2$ به‌جای k می‌توان به‌صورت زیرنوشت :

$$\sum_k^\infty [a_{k+2}(k+m+2)(k+m+1)]x^{k+m} - \sum_k^\infty a_k[(k+m)(k+m+1) - n(n+1)]x^{k+m} = 0 \qquad (B-۸)$$

از معادلهٔ (B ـ ۸) برای آن که (B ـ ۳) یک جواب (B ـ ۲) باشد شرط

$$a_{k+2} = a_k \frac{(k+m)(k+m+1) - n(n+1)}{(k+m+2)(k+m+1)} \qquad (B-۹)$$

به‌دست می‌آید . چون از فرمول (B ـ ۹) با داشتن a_k می‌توانیم a_{k+2} رامحاسبه کنیم ، آن را "رابطهٔ برگشتی" گویند . برای تعیین تمام a_k ها با استفاده از (B ـ ۹) باید دو ضریب اول معین a_0 و a_1 رابطوراختیاری انتخاب‌کنیم ؛ سپس رابطهٔ برگشتی‌بقیهٔ ضرایب رامی‌دهد . وجود دو ضریب دلخواه a_0 و a_1 درجواب معادلهٔ (B ـ ۲) دور ازانتظارنیست زیرا (B ـ ۲) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است .

$$a_{k+2} = a_k \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2} a_0$$
$$a_3 = \frac{2 - n(n+1)}{6} a_1 \qquad (B-۱۰)$$
$$a_4 = \frac{6 - n(n+1)}{12} a_2 = -\frac{6 - n(n+1)}{12} \frac{n(n+1)}{2} a_0$$
$$a_5 = \frac{12 - n(n+1)}{20} a_3 = \frac{12 - n(n+1)}{20} \frac{2 - n(n+1)}{6} a_1$$

توجه کنید که صورت a_4 یعنی $[6 - n(n+1)]n(n+1)$، چند جمله‌ای درجهٔ ۴ از n است. که به ازای 2 ، $1-$ ، 0 ، -3 $= n$ صفر می‌شود. بنابراین آن را می‌توان به صورت

$$n(n-2)(n+1)(n+3)$$

نوشت، و چون $4! = 24$ ، a_4 به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$a_4 = \frac{+n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

با همین استدلال مقادیر دیگر a بصورت زیر بدست می‌آیند

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0$$
$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1$$
$$a_4 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$
$$a_5 = \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

با تعیین چند جملهٔ دیگر و دقت در آنها معلوم می‌شود که ضریب x^{2r} ، یعنی a_{2r} باید به صورت زیر باشد:

$$a_{2r} = (-1)^r \frac{n(n-2)\cdots(n-2r+2)(n+1)\cdots(n+2r-1)}{(2r)!} a_0 \qquad (B-۱۱)$$

همین‌طور ضریب a_{2r+1} برابر است با

$$a_{2r+1} = (-1)^r \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2r+1)(n+2)\cdots(n+2r)}{(2r+1)!} a_1 \qquad (B-۱۲)$$

پس یک جواب معادلهٔ (B ـ ۲) به صورت

$$y_1 = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{a_{2r}x^{2r}}{a_0} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{a_{2r+1}x^{2r+1}}{a_1} + \cdots\right] \qquad (\text{B} - ۱۳)$$

نوشته می‌شود . جواب دیگر (B — ۲) متناظر با ($m = ۱$) معادلهٔ مفسر را می‌توان به‌دست آورد . به ازای $m = ۱$ ، رابطهٔ برگشتی به صورت زیر درمی‌آید .

$$b_{k+2} = b_k \frac{(k+1)(k+2) - n(n+1)}{(k+3)(k+2)} \qquad (\text{B} - ۱۴)$$

درنتیجه

$$y = x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \qquad (\text{B} - ۱۵)$$

اگر به جای k در معادلهٔ (B — ۱۴) از مقدار k استفاده کنیم ، داریم

$$b_{k+1} = b_{k-1}\frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)} \qquad (\text{B} - ۱۶)$$

از مقایسهٔ معادلات (B — ۱۶) و (B — ۱۰) بلافاصله نتیجه می‌شود :

$$\frac{b_{k+1}}{b_{k-1}} = \frac{a_{k+2}}{a_k} \qquad k \geq 1 \qquad (\text{B} - ۱۷)$$

پس

$$b_2 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}b_0$$

$$b_3 = -\frac{(n-2)(n+3)}{12}b_1$$

$$b_4 = \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}b_0$$

$$b_5 = \frac{(n-2)(n-4)(n+3)(n+5)}{360}b_1$$

و دیده می‌شود که جملات عمومی سری عبارتند از :

$$b_{2r} = (-1)^r \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2r+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2r)}{(2r+1)!}b_0$$

$$b_{2r+1} = (-1)^r \frac{(n-2)(n-4)\cdots(n-2r)(n+3)(n+5)\cdots(n+2r+1)}{(r+1)[(2r+1)!]}b_1 \qquad (\text{B} - ۱۹)$$

پس جواب معادلهٔ (۲ ــ B) متناظر با $m = 1$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} y_2 = b_0 \Big[& x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 \\ & + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \cdots \\ & + \frac{b_{2r} x^{2r+1}}{b_0} + \cdots \Big] + b_1 \Big[x^2 - \frac{(n-2)(n+3)}{12} x^4 \\ & + \frac{(n-2)(n-4)(n+3)(n+5)}{360} x^6 - \cdots + \frac{b_{2r+1} x^{2r}}{b_1} + \cdots \Big] \end{aligned} \qquad (\text{B} - ۲۰)$$

ضرایب معادلات (۱۳ ــ B) و (۲۰ ــ B) در روابط برگشتی مناسب حاصل از معادلهٔ لژاندر صدق می‌کنند. ولی دانشجویان باید توجه داشته باشند که این مطلب می‌رساند که لزوما" هردو عبارت (B ــ ۱۳) و (B ــ ۲۰) درمعادلهٔ لژاندر صدق می‌کنند. اگر مستقیما" (B ــ۱۳) را در معادلهٔ (B ــ ۲) قرار دهیم معلوم می‌شود که واقعا" در معادلهٔ لژاندر صدق می‌کند. چون معادلهٔ لژاندر خطی است، و a_0 و a_1 ثابتهای دلخواهند، نتیجه می‌گیریم که هردو سری موجود در (B ــ ۱۲) بطور جداگانه جوابهای معادلهٔ لژاندر هستند. علاوه براین، چون یک سری فقط شامل توانهای زوج x و دیگری شامل توانهای فرد x است نسبت آنها نمی‌تواند ثابت باشد. پس دو سری موجود در (B ــ ۱۳) باید مستقل خطی باشند. درنتیجه، (B ــ ۱۳) جواب عمومی (B ــ ۲) است! دربارهٔ (B ــ ۲۰) چه می‌توان گفت؟ اگر معادلهٔ (B ــ ۲۰) نیز یک جواب معادلهٔ لژاندر باشد، درآن‌صورت سری دوم (B ــ ۲۰) باید درمعادلهٔ (B ــ۲) صدق کند زیرا سری اول در آن صدق می‌کند. ولی، به ازای $n = 2$، سری دوم در معادلهٔ (B ــ ۲۰) برابر b_1x^2 مـی‌شود کـه در (B ــ ۲) به ازای $n = 2$ صدق نمی‌کند. بنابراین، ثابت شد که $y_2(x)$، طبق (B ــ ۲۰) جواب معادلهٔ لژاندر نخواهد بود! در حالت اخیر، تنها جواب $m = 0$ جواب عمومی (B ــ ۲) را معین می‌کند. جواب $m = 1$ اضافی خواهد بود.

برای تصمیم‌گیری درمورد انتخاب ریشهٔ مناسب چندقاعدهٔ کلی وجود دارد که دوقاعده را در این جا بیان می‌کنیم:

قاعده ۱: اگر ریشه‌های معادله مفسر برابرنباشند واختلاف آنها یک عدد صحیح نباشد، در آن صورت هر ریشهٔ معادلهٔ مفسر یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل را می‌دهد. این جوابها مستقل خطی هستند، و یک ترکیب خطی از آنها جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

قاعده ۲: اگر دو ریشهٔ معادله مفسر برابر نباشند و اختلاف آنها یک عدد صحیح باشد و ریشهٔ کوچکتر یک ضریب جواب سری را نامعین سازد، آن‌گاه این ریشه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل را معین می‌کند.

معادلهٔ لژاندر مثالی از قاعده ۲ است. معادلهٔ (B ــ ۵) را با دوجملهٔ اول که به‌صورت

صریح نوشته شده است را درنظر بگیرید :

$$a_0m(m-1)x^{m-2}+a_1(m+1)mx^{m-1}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(k+m)(k+m-1)x^{k+m-2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_k[(k+m)(k+m-1)+2(k+m)-n(n+1)]x^{k+m}=0 \quad (۲۱-\mathrm{B})$$

ضریب هر توان x در معادلهٔ (B – ۲۱) باید صفر شود . برای کمترین توان x این شرط معادله مفسر $a_0m(m-1)=0$ را نتیجه می‌دهد که ریشه‌های آن عبارتند از

$$m=0 \quad \text{و} \quad m=1$$

ریشهٔ کوچکتردارای این خاصیت‌است‌که ضریب x^{m-1} رابه ازای هر مقدار a_1 صفرمی‌کند . پس a_1 برای ریشهٔ $m=0$ نامعین است وبه موجب قاعدهٔ ۲ ریشهٔ $m=0$ جواب عمومی معادلهٔ لژاندر را مشخص می‌کند .

همگرایی

همگرایی جواب سری (B – ۱۳) راباید بررسی‌کرد . طبق آزمون نسبت (ضمیمه A) یک سری همگرای مطلق است اگر

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+2}}{u_k}\right|<1 \quad (\mathrm{B}-۲۲)$$

با استفاده ازآزمون (B – ۱۳) داریم

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \quad (\mathrm{B}-۲۳)$$

در حالت

$$\frac{a_{k+2}}{a_k}=\frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+1)(k+2)} \quad (\mathrm{B}-۲۴)$$

می‌توان نوشت :

$$\left|\frac{u_{k+2}}{u_k}\right|=\frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+1)(k+2)}\,x^2 \quad (\mathrm{B}-۲۵)$$

و

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+2}}{u_k}\right|=x^2 \quad (\mathrm{B}-۲۶)$$

بنابراین (B — ۱۳) به ازای $-1 < x < +1$ همگرای مطلق است .

مقداری برای x مانند x_0 اختیار می‌کنیم که $|x_0| < 1$. حال دنبالهٔ اعداد مثبت $M_k = |a_k x_0{}^k|$ را در نظر می‌گیریم . چون معادلهٔ (B — ۲۳) به ازای $|x| < 1$ همگرای مطلق است ، ΣM_k یک سری همگرا از اعداد ثابت خواهد بود به قسمی که به ازای $|x| \leq |x_0| < 1$ ،

$$|u_k(x)| = |a_k x^k| \leq M_k \tag{B — ۲۷}$$

حال باتوجه به آزمون M وایرشتراس که در ضمیمهٔ A بحث شد (B — ۲۳) و درنتیجه معادله (B — ۱۳) به ازای $|x| \leq |x_0| < 1$ بطور یکنواخت و مطلق همگرا خواهد بود . پس از (B — ۱۳) می‌توان جمله به جمله به ازای $|x| \leq |x_0| < 1$ مشتق گرفت . و فرض مربوط به مشتق‌پذیری سری آزمایشی محقق می‌شود .

فرض کنید بخواهیم یک جواب معادلهٔ (B — ۲) را به ازای $|x| > 1$ به‌دست آوریم . این کار را چگونه باید انجام‌داد ؟ جواب از این قرار است که دقیقا" مانند قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که اگر $x > 1$ ، آن‌گاه $1/x < 1$. به عبارت دیگر ، باید دنبال یک جواب سری باشیم که به جای توانهای x از توانهای $1/x$ تشکیل شود .

برای این منظور فرض کنید

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m-k} \tag{B — ۲۸}$$

به ازای $|x| > 1$ جواب معادلهٔ (B — ۲) باشد . اگر معادلهٔ (B — ۲۸) را در (B — ۲) قرار داده توانهای مشابه x را جمع کنیم ، داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(m-k)(m-k-1)x^{m-k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k[(m-k)(m-k+1) - n(n+1)]x^{m-k} = 0 \tag{B — ۲۹}$$

اگر دو جملهٔ معادلهٔ (B — ۲۹) را با بزرگترین توان x بنویسیم ، داریم

$$\begin{aligned} a_0[m(m+1) - n(n+1)]x^m &+ a_1[(m-1)m - n(n+1)]x^{m-1} \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} a_k[(m-k)(m-k+1) - n(n+1)]x^{m-k} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m-k)(m-k-1)x^{m-k-2} = 0 \end{aligned} \tag{B — ۳۰}$$

مانند قبل ، اگرمعادلهٔ (B — ۳۰) برای تمام مقادیر x برقرار باشد ، آن‌گاه ضریب توان x باید صفر شود . معادلهٔ مفسر برای سری با توانهای نزولی x از قرار دادن ضریب جمله بزرگترین توان مساوی صفر به‌دست می‌آید . درحال حاضر ، یک سری با توانهای نزولی x در

دست است و برای محاسبهٔ معادلهٔ مفسر، بایدضریب بزرگترین توان رامساوی صفرقراردهیم. نتیجه برای (B ـ ۳۰) عبارت است از:

$$a_0[m(m+1) - n(n+1)] = 0 \qquad (B-۳۱)$$

با جوابهای

$$m = n \qquad (B-۳۲)$$

یا

$$m = -n-1 \qquad (B-۳۳)$$

اگر ضریب x^{m-k} در معادلهٔ (B ـ ۲۹) را مساوی صفر قرار دهیم، داریم

$$a_{k-2}(m-k+2)(m-k+1) = a_k[(m-k)(m-k+1) - n(n+1)] \qquad (B-۳۴)$$

حال با گذاشتن $k+2$ به‌جای k درمعادلهٔ (B ـ ۳۴) رابطهٔ برگشتی زیربه‌دست می‌آید

$$a_{k+2} = a_k \frac{(m-k)(m-k-1)}{(m-k-2)(m-k-1) - n(n+1)} \qquad (B-۳۵)$$

توجه کنید که تفاوت دو ریشهٔ معادلات مفسر (B ـ ۳۲) و (B ـ ۳۳) به پارامتر n که در معادله لژاندر وجود دارد وابسته است و یک عدد صحیح نخواهد بود مگر n عدد صحیح باشد. درنتیجه، باید سری تولیدشده بوسیلهٔ هر دو ریشهٔ معادلهٔ مفسر را بررسی کرد. به ازای $n= m$ از معادلهٔ (B ـ ۳۵) نتیجهٔ

$$a_{k+2} = a_k \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-k-2)(n-k-1) - n(n+1)} \qquad (B-۳۶)$$

به‌دست می‌آید و بسط آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$a_{k+2} = a_k \frac{(n-k)(n-k-1)}{(k+2)(k-2n+1)} \qquad (B-۳۷)$$

درنتیجه،

$$a_2 = -a_0 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}$$

$$a_4 = a_0 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8(2n-1)(2n-3)}$$

$$a_6 = -a_0 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{48(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$

$$a_{2r} = (-1)^r a_0 \frac{n(n-1)\cdots(n-2r+2)(n-2r+1)}{(2\cdot 4\cdots 2r)[2n-(2r-1)][2n-(2r-3)]\cdots(2n-1)}$$

و

$$a_3 = -a_1 \frac{n-2}{6}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{60}(n-3)(n-4)$$

$$a_7 = \frac{-a_1}{840}(n-4)(n-5)(n-6)$$

پس به ازای $m = n$ داریم

$$y_1(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k} = a_0 x^n \left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8(2n-1)(2n-3)} x^{-4} - \cdots \right] + a_1 x^n \left[x^{-1} - \frac{(n-2)}{6} x^{-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{60} x^{-5} - \cdots \right] \tag{B – ۳۸}$$

جملهٔ بزرگترین توان درسری دوم معادلهٔ (B – ۳۸) x^{n-1} است . پس به ازای $a_0 = 0$ و $a_1 \neq 0$، $y_1(x)$ ، آن سری توان‌که جملهٔ بزرگترین توان‌آن x^n باشدنیست . این مطلب خلاف فرض اولیه‌ای است که برمبنای آن معادلهٔ (B – ۳۱) به‌دست آمد ؛ پس $a_1 \equiv 0$.

به ازای $|x| > 1$ داریم

$$y_1(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{-2k} \tag{B – ۳۹}$$

که در آن $a_0 \neq 0$ و

$$a_{2r} = (-1)^r a_0 \frac{n(n-1) \cdots (n-2r+2)(n-2r+1)}{(2 \cdot 4 \cdots 2r)[2n-(2r-1)][2n-(2r-3)] \cdots (2n-1)} \tag{B – ۴۰}$$

یک جواب معادلهٔ لژاندر است .

برای به‌دست آوردن یک جواب دیگر ، مانند قبل عمل می‌کنیم این بار از ریشهٔ دوم معادلهٔ مفسر $m = -(n+1)$ در معادلهٔ برگشتی (B – ۳۵) استفاده می‌کنیم ،

$$b_{k+2} = b_0 \frac{(k+n+1)(k+n+2)}{(k+2)(2n+k+3)} \tag{B – ۴۱}$$

بازهم یک جواب به صورت مجموع دوسری توان به‌دست می‌آوریم که در یکی از آنها $x^{-(n+1)}$ جملهٔ بزرگترین توان نیست . به‌همین دلیل مانند قبل این سری راباقراردادن ضرایب مساوی صفر حذف می‌کنیم . پس

$$y_2(x) = x^{-(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} x^{-2k} \tag{B – ۴۲}$$

که در آن $b_0 \neq 0$ و

$$b_{2r} = b_0 \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2r)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r)(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2r+1)} \qquad (\mathrm{B}-۴۳)$$

که به‌ازای $|x| < 1$ جواب‌دوم معادلهٔ (B ـ۲) است . ازمقایسهٔ معادلات (B ـ۴۲) و (B ـ۳۹) معلوم می‌شود که وقتی یکی زوج است ،دیگری‌فرد است‌و به‌عکس ، بنابراین $y_2(x)/y_1(x)$ نمی‌تواند ثابت باشد ، پس $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ازای $|x| < 1$ باید جوابهای مستقل خطی معادلهٔ لژاندر باشند . جواب عمومی به ازای $|x| < 1$ یک ترکیب خطی از $y_1(x)$ و $y_2(x)$ خواهد بود .

همگرایی

سری

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$$

همگرای مطلق است اگر

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k x^k}{a_{k+2} x^{k+2}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+2}} \right| |x|^{-2} < 1$$

با استفاده ازمعادلهٔ (B ــ ۳۶) ، معلوم می‌شودکه هر دو سری (B ــ ۳۹) و (B ــ ۴۲) به ازای $|x| < 1$ همگرای مطلق هستند و برای $1 > |x_0| \geq |x|$ همگرای‌یکنواخت‌و مطلق است‌اگر n به قسمی انتخاب شود که در (B ــ ۳۶) ،

$$|(n-k-2)(n-k-1) - n(n+1)| > 0$$

که در آن k عدد صحیح نامنفی است .

چند جمله‌ایهای لژاندر

جواب عمومی معادلهٔ (B ــ ۱۳) به ازای $|x| < 1$ برابر مجموع دو سری است . وقتی n یک عدد زوج مثبت یایک عددفردمنفی یاصفراست سری اول متناهی بوده وبه یک چندجمله‌ای از x تبدیل می‌شود .مثلاً" به ازای $n = 2r$ سری اول (B ــ ۱۲) به‌صورت چندجمله‌ای زیرخلاصه می‌شود :

$$y(x) = a\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n/2}\frac{n(n-2)\cdots 2(n+1)\cdots(2n-1)}{n!}x^n\right] \qquad (\mathrm{B}-۴۴)$$

همین‌طور ، به ازای $|x| > 1$ و $n = 2r$ ، معادلهٔ (B ــ ۳۹) را می‌توان چنین نوشت :

$$y_1(x) = a_0x^n\left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{-2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n/2}\frac{n!}{n(n-2)\cdots 2(n+1)\cdots(2n-1)}x^{-n}\right] \qquad (\text{B}-۴۵)$$

که اگر معادلهٔ (B ـ ۴۵) را در

$$(-1)^{n/2}\frac{n(n-2)\cdots 2(n+1)\cdots(2n-1)}{n!}$$

ضرب کنیم به صورت (B ـ ۴۴) خلاصه می‌شود. اگر $n=-(2r+1)$ آن‌گاه سری اول معادلهٔ (B ـ ۱۳) با معادلهٔ (B ـ ۴۲) برابر می‌شود. سری دوم (B ـ ۱۳) به ازای $n=2r+1$ یا $n=-2r$، $r\geq 1$ به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود. به ازای $n=2r+1$، $r\geq 1$ سری فرد در (B ـ ۱۳) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$y(x) = a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2(n+2)\cdots(2n-1)}{n!}x^n\right] \qquad (\text{B}-۴۶)$$

درصورتی‌که معادلهٔ (B ـ ۳۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$y(x) = a_0x^n\left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{-2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{(n-2)/2}\frac{n!}{2\cdot 4\cdots(n-1)(n+2)\cdots(2n-1)}x^{1-n}\right] \qquad (\text{B}-۴۷)$$

اگر معادلهٔ (B ـ ۴۷) را در عامل ثابت،

$$(-1)^{(n-1)/2}\frac{2\cdot 4\cdots(n-1)(n+2)\cdots(2n-1)}{n!}\frac{a_1}{a_0}$$

ضرب‌کنیم معادلهٔ (B ـ ۴۷) به (B ـ ۴۶) تبدیل‌می‌شود. سرانجام‌به ازای $n=-2r$، $r\geq 1$، سری فرد (B ـ ۱۳) با (B ـ ۴۲) برابر می‌شود.

چند جمله‌ایهای لژاندر با قرار دادن

$$a_0 = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{n!} \qquad (\text{B}-۴۸)$$

در معادلهٔ (B ـ ۳۹) به‌دست می‌آیند. چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ مرتبهٔ n به صورت زیر داده می‌شود

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right] \qquad (\text{B}-۴۹)$$

معادلهٔ بسل

جواب معادلهٔ بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{B-۵۰}$$

را به صورت یک سری از توانهای صعودی x:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} \tag{B-۵۱}$$

پیدا می‌کنیم . اگر معادلهٔ (B ـ ۵۱) را در (B ـ ۵۰) قرار دهیم ، داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)a_k x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^{k+m} = 0 \tag{B-۵۲}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k[(k+m)^2 - n^2]x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} = 0 \tag{B-۵۳}$$

با نوشتن دو جملهٔ اول معادلهٔ (B ـ ۵۳) داریم

$$a_0(m^2 - n^2)x^m + a_1[(m+1)^2 - n^2]x^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k[(k+m)^2 - n^2]x^{k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m+2} = 0 \tag{B-۵۴}$$

معادلهٔ مفسر

معادلهٔ مفسر مانند قبل از قرار دادن ضریب کمترین توان x مساوی صفر به‌دست‌می‌آید :

$$a_0(m^2 - n^2) = 0 \tag{B-۵۵}$$

که ریشه‌هایش برابرند با $m = \pm n$

اگر ضریب x^{k+m} را در معادلهٔ (B ـ ۵۳) مساوی صفر قرار دهیم معادلهٔ برگشتی

$$a_k[(k+m)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0 \tag{B-۵۶}$$

به‌دست می‌آید . پس

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{(m-n+k)(m+n+k)} \tag{B-۵۷}$$

این رابطه a_k را برحسب a_{k-2} ، $k \geq 2$ معین می‌کند به شرط‌آن‌که هیچ یک از دو مقدار $m-n$ و $m+n$ عدد صحیح منفی نباشند .با استفاده‌از ریشه‌های مفسر $m=\pm n$ دیده می‌شود این شرط معادل است با این که $2n$ عدد صحیح منفی نباشد اگر $m=n$ ، و $2n-$ عدد صحیح منفی نباشد اگر $m=-n$ این شرایط تضمین می‌کنندکه بعد معادلهٔ (B ـ ۵۷) هرگزصفر نیست . زیرا

جملهٔ دوم معادلهٔ (B ــ ۵۴)به ازای‌هریک از ریشه‌های معادلهٔ مفسر$m = n$ یا$m = -n$ نامعین نمی‌شود ، پس باید a_1 را مساوی صفر قرار دهیم ، ولی $a_1 = 0$ باتوجه به (B ــ ۵۷) نشان می‌دهد که تمام ضرایب فرد a_1 ، a_3 ، . . . و غیره ، باید صفر شوند .

از رابطهٔ برگشتی (B ــ ۵۷) نتیجه می‌شود که

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(m-n+2)(m-n+4)\cdots(m-n+2k)(m+n+2)(m+n+4)\cdots(m+n+2k)} \tag{B ــ ۵۸}$$

صورت معادلهٔ (B ــ ۵۸) را درنظر بگیرید . با انتخاب$m = n$، به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$(2\cdot 4\cdots 2k)\cdot 2(n+1)\cdot 2(n+2)\cdots 2(n+k) \tag{B ــ ۵۹}$$

و چون

$$2\cdot 4\cdots 2k = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots 2\cdot k = 2^k k! \tag{B ــ ۶۰}$$

و

$$2(n+1)\cdot 2(n+2)\cdots 2(n+k) = 2^k(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \tag{B ــ ۶۱}$$

معادلهٔ (B ــ ۵۸) را می‌توان چنین نوشت :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \tag{B ــ ۶۲}$$

و برای حالت$m = n$ ، معادلهٔ (B ــ ۵۱) برابر است با ،

$$y(x) = a_0 x^n\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right] \tag{B ــ ۶۳}$$

ولی برای حالت$m = -n$داریم ،

$$y(x) = b_0 x^{-n}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}\right] \tag{B ــ ۶۴}$$

بنابه تعریف :

$$a_0 = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)} \tag{B ــ ۶۵}$$

و

$$b_0 = \frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)} \tag{B ــ ۶۶}$$

پس سری (B ــ ۶۳) و (B ــ ۶۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$y(x) = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} \qquad (\text{B} - ۶۷)$$

$$y(x) = J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)} \qquad (\text{B} - ۶۸)$$

فرض کنید $2n$ عدد صحیح نباشد ، یک کاربرد آزمون نسبت مانند معادلهٔ (۶ ــ ۱۸۷) نشان می‌دهد که معادلات(B ــ ۶۷)و (B ــ ۶۸) به ازای $0 < x < \infty$ همگرای یکنواخت هستند ، پس می‌توان از آنها جمله به جمله مشتق گرفت تا این سری به‌دست آید .

سری توان (B ــ ۶۷) یک تابع بسل $J_n(x)$ مرتبهٔ n راتعریف می‌کند . این تعریف‌صرفنظر ازاین‌که $2n$ یک عددصحیح یا غیرصحیح باشد قابل استفاده است . ولی ، وقتی $2n$ عددصحیح نباشد ، نسبت دو سری (B ــ ۶۷) و (B ــ ۶۸) یک مقدار ثابت نخواهد بود ، و تحت این شرایط $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ باید جوابهای مستقل خطی معادلهٔ بسل باشد .

مسائل و کاربردها

۱ ــ معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

را معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی "گاوس" گویند . ثابت کنید تابع ابرهندسی

$$y = F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta x}{1!\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots$$

یک جواب خصوصی‌معادلهٔ گاوس است‌که درشرط اولیه $y(0) = 1$ صدق‌می‌کند . شعاع همگرایی این سری را محاسبه کنید .

بطورکلی نشان دهید :

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}$$

ثابت کنید که

$$y = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x)$$

یک جواب دیگر معادلهٔ ابرهندسی است که حول $x = 0$ برقرار است .

۲ ــ معادلهٔ دیفرانسیل ابرهندسی متلاقی ، حول $x = 0$ عبارت است از :

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$$

نمایش سری زیر را برای یک تابع ابرهندسی متلاقی حول 0 به‌دست آورید .

$$y = x^{1-\gamma}{}_1F_1(\alpha,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

وقتی γ یک عدد صحیح نیست ، نشان دهید که

$$\begin{aligned} y &= x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma; x) \\ &= x^{1-\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha-\gamma)\cdots(k+\alpha-\gamma)}{k!(2-\gamma)\cdots(k+1-\gamma)} x^{k+1-\gamma} \end{aligned}$$

یک تابع ابرهندسی مستقل خطی دیگر است . شعاع همگرایی را در هر حالت محاسبه کنید .

۳ ــ معادلهٔ دیفرانسیل زیر به نام "معادلهٔ وبر" را درنظر بگیرید :

$$y'' + (n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x^2)y = 0$$

دو جواب سری توان معادلهٔ وبر را حول $x = 0$ پیدا کنید . داریم

$$\begin{aligned} y_1 = e^{-\frac{1}{4}x^2}\Big[1 &- \frac{n}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)}{4!}x^4 \\ &- \frac{n(n-2)(n-4)}{6!}x^6 + \cdots\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 = e^{-\frac{1}{4}x^2}\Big[x &- \frac{(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{5!}x^5 \\ &- \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{7!}x^7 + \cdots\Big] \end{aligned}$$

راهنمایی : ابتدا از تبدیل $y = e^{-\frac{1}{4}x^2}v$ استفاده کنید و سپس معادلهٔ دیفرانسیل را برحسب v به‌دست آورید .

شعاع همگرایی هریک از سریها را محاسبه کنید .

مراجع

فصلهای ۱ و ۳ ــ جبر برداری و محاسبات برداری

BRAND, L., "Vector Analysis," 3d printing, Wiley, New York, 1961.

CHISHOLM, J., and R. MORRIS, "Mathematical Methods in Physics," Chap. 9, Saunders, Philadelphia, 1965.

HAY, G. E., "Vector and Tensor Analysis," Dover, New York, 1953.

KREYSZIG, E., "Advanced Engineering Mathematics," Chap. 5, Wiley, New York, 1962.

LASS, H., "Vector and Tensor Analysis," McGraw-Hill, New York, 1950.

MCQUISTAN, R. B., "Scalar and Vector Fields," Wiley, New York, 1965.

PROTTER, M., and C. MORREY, "Modern Mathematical Analysis," Chap. 7, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.

SOKOLNIKOFF, I. S., and R. M. REDHEFFER, "Mathematics of Physics and Modern Engineering," Chaps. 4 and 5, McGraw-Hill, New York, 1958.

فصل ۲ ــ جبر ماتریسها و تانسورها

BODEWIG, E., "Matrix Calculus," 2d ed., North Holland, Amsterdam, 1959.

FRAZER, R. A., W. J. DUNCAN, and A. R. COLLAR, "Elementary Matrices," Cambridge University Press, London, 1938.

GANTMACHER, F. R., "The Theory of Matrices," 2 vols., Chelsea, New York, 1959.

MARGENAU, H., and G. MURPHY, "The Mathematics of Physics and Chemistry," Chaps. 4, 5, and 10, 2d ed., Vol. I, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1956.

PERLIS, S., "Theory of Matrices," Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.

SOKOLNIKOFF, I. S.; "Tensor Analysis," Wiley, New York, 1951.

فصل ۴ ـ توابع مختلط

AHLFORS, L. V., "Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1966

CHURCHILL, R. V., "Complex Variables and Applications," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1960.

COPSON, E. T., "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1935.

HILLE, E., "Analytic Function Theory," 2 vols., Ginn, Boston, 1959, 1962.

KNOPP, K., "Theory of Functions," 2 vols., Dover, New York, 1945.

NEHARI, Z., "Conformal Mapping," McGraw-Hill, New York, 1952.

SPRINGER, G., "Introduction to Riemann Surfaces," Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

TITCHMARSH, E. C., "The Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, London, 1939.

WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON, "A Course in Modern Analysis," Chaps. 1–9, Cambridge University Press, London, 1940.

فصل ۵ ـ تبدیلات انتگرالی

CARSLAW, H. S., "Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals," 3d ed., Macmillan, London, 1930.

CHURCHILL, R. V., "Fourier Series and Boundary Value Problems," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1963.

IRVING, J., and N. MULLINEUX, "Mathematics in Physics and Engineering," Chap. X, Academic Bress, New York, 1959.

MATHEWS, J., and R. WALKER, "Mathematical Methods of Physics," Chap. 4, Benjamin, New York, 1964.

SNEDDON, I. N., "Fourier Transforms," McGraw-Hill, New York, 1951.

TITCHMARSH, E. C., "Introduction to the Fourier Integral," Oxford University Press, London, 1948.

TRANTER, C. J., "Integral Transforms in Mathematical Physics," 2d ed., Methuen, London, 1956.

فصل ۶ ـ معادلات دیفرانسیل خطی

AGNEW, R. P., "Differential Equations," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1960.

CODDINGTON, E. A., and N. LEVINSON, "Theory of Ordinary Differential Equations," McGraw-Hill, New York, 1955.

GRAY, A., G. B. MATHEWS, and T. M. MACROBERT, "Treatise on Bessel Functions," Macmillan, London, 1922.

HOBSON, E. W., "Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics," Cambridge University Press, London, 1931.

JOHNSON, D., and J. R. JOHNSON, "Mathematical Methods in Engineering and Physics," Ronald, New York, 1965.

MACROBERT, T. M., "Spherical Harmonics," Methuen, London, 1927; Dover, New York, 1948.

MORRIS, M., and O. E. BROWN, "Differential Equations," 3d ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1952.

ROSS, S., "Differential Equations," Blaisdell, New York, 1964.

WATSON, G. N., "Treatise on the Theory of Bessel Functions," Cambridge University Press, London, 1944.

فصل ۷ ـ معادلات دیفرانسیل جزیی

COURANT, R., and D. HILBERT, "Methods of Mathematical Physics," Vol. II, Interscience, New York, 1962.

DUFF, G. F. D., "Partial Differential Equations," Toronto University Press, Toronto, 1956.

GARABEDIAN, P. R., "Partial Differential Equations," Wiley, New York, 1964.

JEFFREYS, H., and B. JEFFREYS, "Methods of Mathematical Physics," 3d ed. Cambridge University Press, New York, 1956.

LANCZOS, C., "Linear Differential Operators," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961.

MORSE, P. M., and H. FESHBACK, "Methods of Theoretical Physics," Parts I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

PAGE, C. H., "Physical Mathematics," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

SAGAN, H., "Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics," Wiley, New York, 1961.

SNEDDON, I. N., "Elements of Partial Differential Equations," McGraw-Hill, New York, 1957.

SOMMERFELD, A., "Partial Differential Equations in Physics," Academic Press, New York, 1949.

"واژه‌نامه انگلیسی به فارسی"

A	
Addition theorem, for Bessel functions	قضیه جمع برای توابع بسل
for hyperbolic Bessel functions	برای توابع بسل هذلولی
for Legendre Polynomials	برای چندجمله‌ایهای لژاندر
Adjoint matrix	ماتریس الحاقی
Algebraic equation	معادله جبری
– irreducible	ـ تحویل‌ناپذیر
Ampere's law	قانون آمپر
Analytic continuation	تداوم تحلیلی
Angle, solid	زاویه فضائی
Argument	آرگومان
Asymptotic form, of Bessel functions	شکل مجانبی توابع بسل
– Hankel functions	ـ توابع هنکل
– Hyperbolic Bessel functions	ـ توابع بسل هذلولی
– Solution of Helmholtz' equation	ـ حل معادله هلملتز
– Spherical Bessel functions	ـ توابع بسل کروی
B	
Basis	مبنا
Bessel functions	توابع بسل
Bessel's inequality	نامساوی بسل

Beta function	تابع بتا
Boundary conditions	شرایط مرزی
Boundary – value problems	مسائل مقدار مرزی
Bra vector	بردار برا
Branch cuts	برشهای شاخه‌ای
Branch point	نقطه شاخه‌ای
Branches of an algebraic function	شاخه‌های یک تابع جبری

C

Cauchy inequality	نامساوی کوشی
Cauchy integral theorem	قضیه انتگرال کوشی
Canchy – Riemann equations	معادلات کوشی ــ ریمن
Circulation	دور برگشت جریان
Closed	بسته
Cofactor	همعامل
Cofactor matrix	ماتریس همعامل
Complete set	مجموعهٔ کامل
Complex algebra	جبر مختلط
Complex potential	پتانسیل مختلط
Complex variable	متغیر مختلط
Polar form	شکل قطبی
Conformal mapping	نگاشت همشکل
Conjugate law	قانون مزدوج
Coservation of mass	بقای جرم
Construction of Green's function	ساختمان تابع گرین
– in a half space	ــ در یک نیم‌فضا
– in polar coordinates	ــ در مختصات کروی
Convergence, circle of	دایره همگرایی
– domain of	ــ دامنهٔ همگرایی
– in the mean	ــ در میانگین

– pointwise	ـ نقطه‌ای
– radius of	ـ شعاع
– uniform	ـ یکنواخت
Coordinates, curvitlinears	مختصات منحنی‌الخط
intrinsic	ذاتی
orthogonal	عمودی
Cramer's rule	قانون کرامر
Curl	کرل
Curl theorem	قضیه کرل
Curvature of path	انحنای مسیر
– radius of	ـ شعاع
Cylinder in uniform electric field	استوانه در میدان الکتریکی یکنواخت

D

Del operator	عملگر دل
– geometric interpretation of	ـ تعبیر هندسی
Determinant	دترمینان
– Product rule for	ـ قانون ضرب
– Properties of	ـ خواص
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Diffrential, exact	دیفرانسیل کامل
Diffusion equation	معادله انتشار
– general solution of	ـ جواب عمومی
– Green's function for	ـ تابع گرین
infinite medium Green's function for	ـ تابع گرین محیط نامتناهی
– reciprocity relation for	ـ رابطهٔ عکس
– time asymmetry of	ـ تقارن زمانی
Diffusivity	انتشار
Dirac deta function	تابع دلتای دیراک
Dirac's notation	نماد دیراک

Direct product	ضرب مستقیم
Directional derivative	مشتق سریی
Dirichlet exterior problem, for circle	مسأله خارجی دیریکله برای دایره
for sphere	برای کره
Dirichlet interior problem,	مسألهٔ داخلی دیریکله
Dirichlet's conditions	شرایط دیریکله
Divergence	واگرایی
Divergence theorem	قضیه واگرایی

E

Eigenfunction expansion	بسط تابع ویژه
Eigenvalue	مقدار ویژه
energy	انرژی
multiplicity of	تکرار
Eigenvalue equation	معادلهٔ مقدار ویژه
Eigenvalue problems	مسائل مقدار ویژه
Eigenvector	بردار ویژه
Elliptical integral of the first kind	انتگرال بیضوی نوع اول
Entire functions	توابع کامل
Equality, parseval's	تساوی پارسوال
Equation, cauchy – Riemann	معادلهٔ کوشی ــ ریمن
– of charge conservation	ــ بقای بار
– of continuity	ــ پیوستگی
– of diffusion	ــ انتشار
– Euler	ــ اولر
– of heat transport	ــ انتقال گرما
– Helmholtz's	ــ هلمولتز
– of motion, in an elastic solid	ــ حرکت دریک جامد کشوار
– for a fluid	ــ برای یک مایع
– in a gas	ــ در یک گاز

Equipotential lines	خطوط هم‌پتانسیل
Euler equation	معادلهٔ اولر
Euler – Mascheroni constant	ثابت اولر ـ ماشرونی
Evaluation of integrals by residues	ارزیابی انتگرالها بوسیله مانده‌ها
Exact differential	دیفرانسیل کامل
Expansion, by cofactors	بسط با همعاملها
– of function in Taylor series	ـ تابع به سری تیلر
– in spherical harmonics	ـ در هارمونیکهای کروی
– of vectors	ـ بردارها
Expansion coefficient	ضریب بسط
Expansion theorem	قضیه بسط
Exterior Dirichlet problem	مسأله خارجی دیریکله

F

Factorial function	تابع فاکتوریل
Faraday's law	قانون فاراده
Field scalar	میدان اسکالر
Field vector	میدان برداری
Finite integral transform, applications of	کاربرد تبدیل انتگرالی معین
Cosine transform	تبدیل کسینوس
Sine radiation transform	تبدیل تشعشع سینوسی
sine transform	تبدیل سینوسی
Fluid flow, on a curved surface	جریان سیال بریک رویه
in a plane	در یک صفحه
Flux	فلو
Fourier analysis and synthesis	تجزیه و ترکیب فوریه
Fourier series, complex form	شکل مختلط سری فوریه
Fourier transform, applications of	کاربرد تبدیل فوریه
Condition for applicability	شرط قابلیت کاربرد
Convolution theorem	قضیه پیچش

of derivatives	از مشتقها
of indefinite integrals	از انتگرالهای نامعین
infinite – range	دامنهٔ نامتناهی
integral theorem	قضیهٔ انتگرال
inversion theorem	قضیهٔ وارون
in n dimension	در n بعد
Physical interpretation	تعبیر فیزیکی
sine and cosine transforms	تبدیلات سینوسی و کسینوسی
Function, analytic	تابع تحلیلی
Bessel	بسل
beta	بتا
entire	کامل
factorial	فاکتوریل
Hankel	هنکل
harmonic	هماهنگ
Hermite polynomials	چندجملهای هرمیت
hyperbolic Bessel	بسل هذلولی
integrable	قابل انتگرالگیری
Legendre polynomials	چندجملهای لژاندر
Linear independence of	مستقل خطی
multivalued	چند مقداری
Neumann	نیومن
orthogonal	متعامد
regular	منظم
spherical Bessel	بسل کروی
spherical harmonics	هماهنگهای کروی

G

Gauss's law	قانون گوس
General solution,	جواب عمومی

Generating function,	تابع تولید
for Hermite polynomials	برای چندجمله‌ایهای هرمیت
for Legendre polynomials	برای چندجمله‌ایهای لژاندر
Gibbs phenomenon	پدیده گیبس
Gradient, of scalar field	گرادیان میدان اسکالر
Green's functions	توابع گرین
for a point charge	برای یک بار نقطه‌ای
for a line source	برای یک منبع خطی
for a point source	برای یک منبع نقطه‌ای
Green's second iden. . . .	اتحاد دوم گرین

H

Hankel functions	توابع هنکل
Hankel transform	تبدیل هنکل
Harmonic function	تابع هماهنگ
Harmonic oscillations	نوسانات هماهنگ
Helmholtz equation	معادله هلمولتز
in cylindrical coordinates	در مختصات استوانه‌ای
dipole radiator	تشعشع کننده دوقطبی
double layer	لایه دوگانه
integral solution	حل انتگرالی
in rectangular cartesian coordinates	در مختصات قائم دکارتی
in spherical coordinates	در مختصات کروی
Hermitean conjugate matrix	ماتریس مزدوج هرمیتی
Hermitean matrices,	ماتریسهای هرمیتی

I

Images	تصاویر
Inpedance boundary condition	شرایط مرزی امپدانس
Indicial notation	نوتاسیون اندیسی

of derivatives	ـ مشتقها
of an integral	یک انتگرال
inversion theorem	قضیه وارون
properties	خواص
relation to Fourier transform	مربوط به تبدیل فوریه
Laplace's equation, in cylindrical coordinates	معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای
solution of in polar coordinates	جواب در مختصات قطبی
in spherical coordinates	در مختصات کروی
Laplacian	لاپلاسین
Laurent series	سریهای لورنت
Level curves	منحنی‌های سطح
Limit in the mean	حد در متوسط
Line, equipotential	خط هم‌پتانسیل
Line curl	کرل خطی
Line discontinuities	ناپیوسته‌های خطی
Line divergence	واگرای خطی
Line gradient	گرادیان خطی
Linear differential equations	معادلات دیفرانسیل خطی
characteristic equation	معادله مشخصه
characteristic roots	ریشه‌های مشخصه
complementary function	تابع تکمیلی
with constant coefficients	با ضرایب ثابت
homogeneous	همگنی
inhomogeneous	ناهمگنی
linearly independent solutions	جوابهای مستقل خطی
particular integral	انتگرال مخصوص
reduction to quadrature	تلخیص به فرم درجه دو
repeated roots	ریشه‌های تکراری
series solutions and special functions	جوابهای سری توابع ویژه
Linear differential equations	معادلات دیفرانسیل خطی

Linear independence, of functions	توابع مستقل خطی
of vector	بردار
Linear operator	عملگر خطی
geometric interpretation	تعبیر هندسی
Liouville's theorem	قضیهٔ لیویل
Lipshitz integral	انتگرال لیپشیتس

M

Mass, conservation of	بقای جرم
complex	مختلط
conformable	همشکل
diagonalization	قطری کردن
equality of	برابری
Hermitean, special properties of	خواص مخصوص هرمیتی
null	صفر
partitioned	افرازشده
Matrix	ماتریس
adjoint	الحاقی ــ
cofactor	هممعامل
diagonal	قطری
elements	عناصر
Hermitean conjugate	مزدوج هرمیتی
inverse	معکوس
rank	رتبه‌ای
unit	یکه
Matrix addition	جمع ماتریس
Matrix equation, homogeneous	معادلهٔ ماتریسی، همگن
inhomogeneous	ناهمگن
Matrix multiplication	ضرب ماتریسی
Matrix operations	عملگرهای ماتریسی

Matrix product	ضرب ماتریسی
Maxwell's equations	معادلات ماکسول
Measure theory	نظریه اندازه
Minor	کهاد
Modulus	مدول
Moments of Legendre polynomials	گشتاورهای چندجمله‌ای لژاندر
Multivalued function	تابع چندمقداری

N

Neumann boundary condition	شرط مرزی نیومن
Neumann functions	توابع نیومن
Normalization condition	شرط نرمالیزاسیون

O

Operator, Hermitean	عملگر هرمیتی
orthogonal	متعامد
reflection	انعکاس
rotation	چرخش
self – adjoint	خودمزدوج
Orthogonal functions	توابع متعامد
Orthogonality relations	روابط متعامد
for associated Legendre polynomials	برای چندجمله‌ای‌های لژاندر وابسته
for Bessel functions	برای توابع بسل
for Hermite polynomials	برای چندجمله‌ای‌های هرمیتی
for Legendre polynomials	برای چندجمله‌ای‌های لژاندر
for spherical Bessel functions	برای توابع بسل کروی
for spherical harmonics	برای هماهنگهای کروی
for Sturm – Liouville eigen functions	برای توابع ویژه استروم–لیویل
Orthonormal basis	مبنای متعامد
Orthonormal set of functions	مجموعهٔ توابع متعامد

P

Parseval's equality	تساوی پارسوال
Parserval's theorem	قضیه پارسوال
Partial differential equations	معادلات دیفرانسیل جزئی
the diffusion equation	معادله انتشار
Laplace's equation	معادله لاپلاس
Poisson's equation	معادله پواسن
role of the Laplacian	نقش لاپلاسین
the wave equation	معادله موج
Partial vector differentiation	مشتق جزئی برداری
Particle trapped in potential well	ذره محبوس در چاه پتانسیل
Piecewise – continuous function	تابع قسمت به قسمت پیوسته