



مبانی نظریه

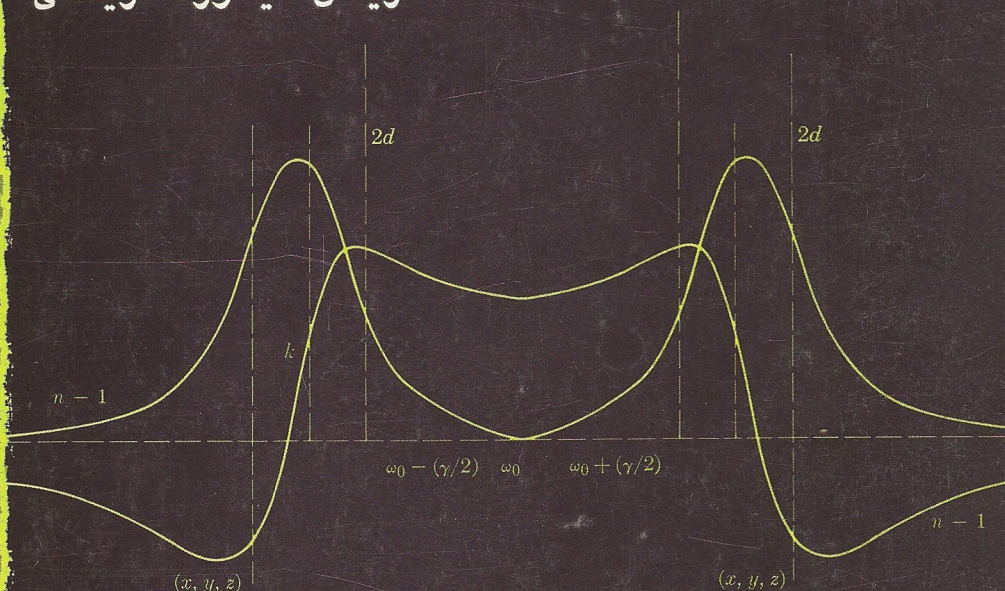
الکترومغناطیس

FOUNDATIONS OF ELECTROMAGNETIC THEORY

ویراست چهارم

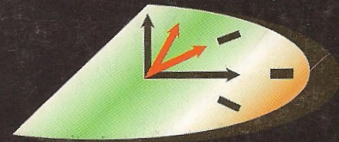
(با تجدید نظر در ترجمه و ویرایش)

ریتس، میلفورد، کریستی



ترجمه دکتر جلال صمیمی،

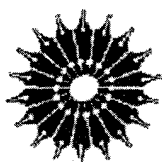
مهندس ناصر علیزاده قمصری، دکتر مجتبی آقامیر



سال جهانی فیزیک - ایران ۱۳۸۴
WORLD YEAR OF PHYSICS - IRAN 2005

این کتاب حاصل تدریس درسهایی دربارهٔ الکتروسیسته و مغناطیس به دانشجویان رشتهٔ فیزیک است. به اعتقاد مؤلفان روش صحیح آموزش در سطحی که در نظر گرفته شده است، توسعهٔ گام به گام الکتروسیسته و مغناطیس بر مبنای قوانین تجربی است که در این جا به همین روش عمل شده است. از آنجا که درک کامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در داخل ماده تنها پس از درک ماهیت اتمی مواد امکان پذیر است، در تکوین نظریهٔ ماکروسکوپی از مفاهیم مقدماتی اتمی به طور آزادانه ای استفاده شده است.

مهم ترین تفاوت های این ویراست نسبت به ویراست قبلی عبارت اند از: افزودن بحث همه جانبه ای از حل عددی مسائل الکترومغناطیس به کمک کامپیوتر شخصی، افزودن بخشهایی مختص حل عددی معادلهٔ لاپلاس و سایر معادلات دیفرانسیل، و مسائل مدارهای الکتریکی. مثالهای حل شدهٔ بیشتر، افزوده شدن به تعداد شکلها، و روزآمد کردن فصول مربوط به مواد از جمله دیگر تغییرات این ویراست جدید است.



مبانی نظریه الکترومغناطیس

ویراست چهارم

(با تجدیدنظر در ترجمه و ویرایش)

ریتس، میلفورد، کریستی

ترجمه

جلال صمیمی، ناصر علیزاده قمصری، مجتبی آقامیر

مرکز نشر دانشگاهی



Foundations of Electromagnetic Theory

Fourth Edition

John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy

Addison-Wesley, 1993

مبانی نظریه الکترومغناطیس
ویراست چهارم (با تجدید نظر در ترجمه و ویرایش)
تألیف ریئتس، میلفورد، کریستی
ترجمه دکتر جلال صمیمی، مهندس ناصر علیزاده قمصری، دکتر مجتبی آقامیر
ویراسته دکتر جلال صمیمی
طراح جلد: سمیه عابدینی
نمونه خوان: نادیا فرهادتوسکی
حروفچین و صفحه آرا: مینا مهرابی فرد
ناظر چاپ: خشایار نصیری منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۴
چاپ پنجم (با تجدید نظر) ۱۳۸۸
ویراست سوم ۱۳۶۸ (۱۲ بار چاپ)
تعداد ۳۰۰۰
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: وسمه
۱۳۰۰۰ تومان
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است
فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

ریئتس، جان

مبانی نظریه الکترومغناطیس / جان آر. ریئتس، فردریک جی. میلفورد، رابرت دبلیو کریستی؛
ترجمه جلال صمیمی، ناصر علیزاده قمصری، مجتبی آقامیر. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۴.
ده، ۷۹۸ ص.؛ مصور، جدول، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۲۸. فیزیک؛ ۱۲۳)

ISBN 978-964-01-1228-1

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی: Foundations of electromagnetic Theory, 4 rd ed.
این کتاب در سال ۱۳۵۵ تحت عنوان «اصول تئوری الکترومغناطیسی» توسط دانشگاه
فردوسی مشهد منتشر شده است.

چاپ پنجم: ۱۳۸۸

۱. نظریه الکترومغناطیس. الف. میلفورد، فردریک، ج. Milford, Frederick J. ب. کریستی،
رابرت، Christy, Robert W. ج. صمیمی، جلال، ۱۳۱۹. — مترجم، د. علیزاده قمصری،
ناصر. ه. آقامیر، مجتبی. و. مرکز نشر دانشگاهی. ز. عنوان. ح. عنوان: اصول تئوری الکترومغناطیس.
۵۲۰/۱۴۱ QC ۶۷۰/۹

۱۳۸۴

۳۵۹۸۷-۸۴

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱ آنالیز برداری
۳	۱-۱ تعریفها
۴	۲-۱ جبر برداری
۸	۳-۱ گرادیان
۱۳	۴-۱ انتگرال گیری برداری
۱۵	۵-۱ دیورژانس
۱۸	۶-۱ تاو
۲۱	۷-۱ عملگر دیفرانسیلی برداری ▽
۲۳	۸-۱ توسعه و تعمیمهای بیشتر
۲۷	۹-۱ خلاصه مطالب
۳۲	۲ الکتروستاتیک
۳۲	۱-۲ بار الکتریکی
۳۳	۲-۲ قانون کولن
۳۸	۳-۲ میدان الکتریکی
۴۱	۴-۲ پتانسیل الکتروستاتیکی

۴۴	رساناها و عایقها	۵-۲
۴۵	قانون گاؤس	۶-۲
۴۸	کاربرد قانون گاؤس	۷-۲
۵۱	دوقطبی الکتریکی	۸-۲
۵۴	بسط میدانهای الکتریکی برحسب چندقطبیهها	۹-۲
۵۷	تابع دلتای دیراک	۱۰-۲
۵۹	خلاصه مطالب	۱۱-۲
۶۶	حل مسائل الکتروستاتیک	۳
۶۷	معادله پواسون	۱-۳
۶۸	معادله لاپلاس	۲-۳
۷۱	معادله لاپلاس با یک متغیر مستقل	۳-۳
۷۱	پاسخهای معادله لاپلاس در مختصات کروی: هماهنگهای منطقه‌ای	۴-۳
۷۴	کره رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت	۵-۳
۷۶	پاسخهای معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای: هماهنگهای استوانه‌ای	۶-۳
۷۸	معادله لاپلاس در مختصات قائم	۷-۳
۷۹	معادله لاپلاس در دو بعد: پاسخ عمومی	۸-۳
۸۱	تصویرهای الکتروستاتیکی	۹-۳
۸۶	بارهای خطی و تصویرهای خطی	۱۰-۳
۸۹	دستگاه‌رساناها و ضرایب پتانسیل	۱۱-۳
۹۰	حل عددی مسائل الکتروستاتیک	۱۲-۳
۱۰۶	پاسخهای معادله پواسون	۱۳-۳
۱۰۷	خلاصه مطالب	۱۴-۳
۱۱۳	میدان الکتروستاتیک در محیطهای دی‌الکتریک	۴
۱۱۴	قطبش	۱-۴
۱۱۵	میدان خارجی یک محیط دی‌الکتریک	۲-۴
۱۲۰	میدان الکتریکی در داخل یک دی‌الکتریک	۳-۴
۱۲۴	قانون گاؤس در دی‌الکتریکها: جابه‌جایی الکتریکی	۴-۴
۱۲۶	پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی‌الکتریک	۵-۴
۱۲۹	بار نقطه‌ای در یک شاره دی‌الکتریک	۶-۴

۱۳۱	شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان	۷-۴
۱۳۴	مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی‌الکتریکها	۸-۴
۱۳۷	نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای واقع در یک دی‌الکتریک	۹-۴
۱۳۹	روش تصویری برای مسائل شامل دی‌الکتریکها	۱۰-۴
۱۴۱	خلاصه مطالب	۱۱-۴
۱۴۷	نظریه میکروسکوپی دی‌الکتریکها	۵
۱۴۷	میدان مولکولی در دی‌الکتریکها	۱-۵
۱۵۲	دوقطبیهای القایی. یک مدل ساده	۲-۵
۱۵۴	مولکولهای قطبی: فرمول لاترن-دبی	۳-۵
۱۵۷	قطبش دائمی: فروالکترسیته	۴-۵
۱۶۰	خلاصه مطالب	۵-۵
۱۶۳	انرژی الکتروستاتیکی	۶
۱۶۴	انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای	۱-۶
۱۶۶	انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار	۲-۶
۱۶۹	چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی	۳-۶
۱۷۲	انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل	۴-۶
۱۷۴	ضرایب ظرفیت و ضرایب القا	۵-۶
۱۷۵	خازنها	۶-۶
۱۷۸	نیروها و گشتاور نیروها	۷-۶
۱۸۲	خلاصه مطالب	۸-۶
۱۸۸	جریان الکتریکی	۷
۱۸۹	ماهیت جریان	۱-۷
۱۹۱	چگالی جریان: معادله پیوستگی	۲-۷
۱۹۴	قانون اهم: رسانندگی	۳-۷
۱۹۷	جریانهای پایا در محیطهای پیوسته	۴-۷
۲۰۱	نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی	۵-۷
۲۰۳	شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف	۶-۷
۲۱۰	نظریه میکروسکوپی رسانش	۷-۷

۲۱۴	۸-۷ خلاصه مطالب
۲۲۱	۸ میدان مغناطیسی جریانهای پایا
۲۲۲	۱-۸ تعریف میدان مغناطیسی
۲۲۵	۲-۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان
۲۲۹	۳-۸ قانون بیو و ساوار
۲۳۱	۴-۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیو و ساوار
۲۳۸	۵-۸ قانون مداری آمپر
۲۴۱	۶-۸ پتانسیل برداری مغناطیسی
۲۴۳	۷-۸ میدان مغناطیسی یک مدار در فواصل دور
۲۴۶	۸-۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی
۲۴۸	۹-۸ شار مغناطیسی
۲۴۸	۱۰-۸ خلاصه مطالب
۲۵۶	۹ خواص مغناطیسی ماده
۲۵۷	۱-۹ مغناطش
۲۶۰	۲-۹ میدان مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیده
۲۶۴	۳-۹ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی و چگالی قطب مغناطیسی
۲۶۵	۴-۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی: شدت مغناطیسی
۲۶۶	۵-۹ معادلات میدان
۲۶۸	۶-۹ پذیرفتاری، تراوایی مغناطیسی و پسماند
۲۷۶	۷-۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان
۲۷۸	۸-۹ مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی
۲۸۴	۹-۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی
۲۸۸	۱۰-۹ مدارهای مغناطیسی
۲۹۱	۱۱-۹ مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم
۲۹۴	۱۲-۹ خلاصه مطالب
۳۰۱	۱۰ نظریه میکروسکوپی مغناطیس
۳۰۲	۱-۱۰ میدان مولکولی درون ماده
۳۰۴	۲-۱۰ منشأ دیامغناطیس

۳۰۷	۳-۱۰	مشأ پارامغناطیس
۳۰۹	۴-۱۰	نظریه فرومغناطیس
۳۱۲	۵-۱۰	حوزه‌های فرومغناطیسی
۳۱۴	۶-۱۰	فریتها
۳۱۵	۷-۱۰	خلاصه مطالب
۳۱۸	۱۱	القای الکترومغناطیسی
۳۱۹	۱-۱۱	القای الکترومغناطیسی
۳۲۵	۲-۱۱	خودالقا
۳۲۷	۳-۱۱	القای متقابل
۳۲۹	۴-۱۱	فرمول نویمان
۳۳۰	۵-۱۱	القاگرها در اتصالهای متوالی و موازی
۳۳۲	۶-۱۱	خلاصه مطالب
۳۳۹	۱۲	انرژی مغناطیسی
۳۴۰	۱-۱۲	انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده
۳۴۳	۲-۱۲	چگالی انرژی در میدان مغناطیسی
۳۴۵	۳-۱۲	نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر مدارهای صلب
۳۵۰	۴-۱۲	اتلاف پسماند
۳۵۳	۵-۱۲	خلاصه مطالب
۳۵۹	۱۳	جریانهای کند تغییر
۳۶۰	۱-۱۳	رفتار گذرا و رفتار حالت پایا
۳۶۱	۲-۱۳	قوانین کیرشهوف
۳۶۳	۳-۱۳	رفتار گذرای مقدماتی
۳۶۷	۴-۱۳	رفتار حالت پایای مدار ساده متوالی
۳۷۰	۵-۱۳	اتصالهای متوالی و موازی مقاومتهای ظاهری
۳۷۲	۶-۱۳	توان و ضرایب توان
۳۷۳	۷-۱۳	تشدید
۳۷۶	۸-۱۳	القاهاى متقابل در مدارهای ac
۳۸۱	۹-۱۳	معادلات حلقه‌ای و گره‌ای

۳۸۶	۱۰-۱۳ مقاومت ظاهری نقطه تحریک و توابع انتقال
۳۸۷	۱۱-۱۳ حل معادلات شبکه با کامپیوتر
۳۹۴	۱۲-۱۳ خلاصه مطالب
۴۰۱	۱۴ فیزیک پلاسما
۴۰۲	۱-۱۴ رویکردهای نظری به دینامیک پلاسما
۴۰۳	۲-۱۴ خنثایی الکتریکی در پلاسما
۴۰۵	۳-۱۴ مدارهای ذره و حرکت رانشی (سوقی) در پلاسما
۴۱۰	۴-۱۴ آینه‌های مغناطیسی
۴۱۲	۵-۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی
۴۱۵	۶-۱۴ اثر تنگش
۴۱۸	۷-۱۴ دستگاههای محصورسازی مغناطیسی برای همجوشی گرما هسته‌ای کنترل شده
۴۲۰	۸-۱۴ نوسانهای پلاسما و حرکت موجی
۴۲۵	۹-۱۴ خلاصه مطالب
۴۲۹	۱۵ خواص الکترومغناطیسی ابررساناها
۴۲۹	۱-۱۵ تاریخ ابررسانایی
۴۳۵	۲-۱۵ رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل ابررسانا
۴۳۶	۳-۱۵ مثالهایی شامل طرد کامل شار
۴۴۰	۴-۱۵ معادلات لندن
۴۵۱	۵-۱۵ خلاصه مطالب
۴۵۴	۱۶ معادلات ماکسول
۴۵۴	۱-۱۶ تعمیم قانون آمپر: جریان جابه‌جایی
۴۵۸	۲-۱۶ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها
۴۵۹	۳-۱۶ انرژی الکترومغناطیسی
۴۶۳	۴-۱۶ معادله موج
۴۶۴	۵-۱۶ امواج تکفام
۴۶۸	۶-۱۶ شرایط مرزی
۴۷۲	۷-۱۶ معادله موج با چشمه‌ها
۴۷۹	۸-۱۶ خلاصه مطالب

- ۱۷ انتشار امواج الکترومغناطیسی تکفام
- ۴۸۴ ۱-۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای نارسانا
- ۴۸۴ ۲-۱۷ قطبش
- ۴۹۱ ۳-۱۷ چگالی و شار انرژی
- ۴۹۵ ۴-۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا
- ۴۹۸ ۵-۱۷ امواج کروی
- ۵۰۶ ۶-۱۷ خلاصه مطالب
- ۵۱۵
- ۱۸ امواج تکفام در ناحیههای مرزدار
- ۵۱۹ ۱-۱۸ بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود عمودی
- ۵۱۹ ۲-۱۸ بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود مایل
- ۵۲۳ ۳-۱۸ زاویه بروستر: زاویه حد
- ۵۳۱ ۴-۱۸ ضرایب فرنل مختلط: بازتاب از یک سطح رسانا
- ۵۳۵ ۵-۱۸ بازتاب و انتقال توسط یک لایه نازک: تداخل
- ۵۴۵ ۶-۱۸ انتشار بین صفحات رسانای موازی
- ۵۵۳ موجبرها
- ۵۵۹ ۷-۱۸ مشددهای حفره‌ای
- ۵۶۳ ۸-۱۸ خلاصه مطالب
- ۵۶۵
- ۱۹ پاشندگی و میدانهای نوسان‌کننده در محیطهای پاشنده
- ۵۷۱ ۱-۱۹ خطی بودن و علیت
- ۵۷۲ ۲-۱۹ پاسخ فرکانس و روابط پاشندگی
- ۵۷۸ ۳-۱۹ مدل نوسانگر هماهنگ درود-لورنتس
- ۵۸۲ ۴-۱۹ جذب تشدید می توسط بارهای مقید
- ۵۸۸ ۵-۱۹ نظریه الکترون آزاد درود
- ۵۹۷ ۶-۱۹ واهلش دی‌الکتریکی
- ۶۰۵ ۷-۱۹ میدانهای نوسانی در محیطهای پاشنده
- ۶۰۹ ۸-۱۹ خلاصه مطالب
- ۶۱۴
- ۲۰ گسیل تابش
- ۶۱۹ ۱-۲۰ تابش از یک دو قطبی نوسان‌کننده
- ۶۱۹

۶۲۴	تابش از یک آنتن نیم موج	۲-۲۰
۶۲۶	تابش از یک گروه بار متحرک	۳-۲۰
۶۳۲	میدانهای منطقه‌های نزدیک و بینابین	۴-۲۰
۶۳۴	میرایی تابشی: سطح مقطع تامسون	۵-۲۰
۶۳۸	خلاصه مطالب	۶-۲۰

۲۱ الکترودینامیک

۶۴۳	پتانسیلهای لینارد-ویشرت	۱-۲۱
۶۴۳	میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت	۲-۲۱
۶۴۶	میدان بار نقطه‌ای شتابدار	۳-۲۱
۶۵۰	میدانهای تابش برای سرعتهای کم	۴-۲۱
۶۵۴	خلاصه مطالب	۵-۲۱

۲۲ نظریه خاص نسبیت

۶۵۸	فیزیک قبل از سال ۱۹۰۰	۱-۲۲
۶۵۹	تبدیل لورنتس و اصول موضوعی نسبیت خاص اینشتین	۲-۲۲
۶۶۲	هندسه زمان-مکان	۳-۲۲
۶۶۷	تبدیل لورنتس به عنوان یک تبدیل متعامد	۴-۲۲
۶۶۹	شکل هموردای معادلات الکترومغناطیس	۵-۲۲
۶۷۰	قانون تبدیل برای میدان الکترومغناطیسی	۶-۲۲
۶۷۴	میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت	۷-۲۲
۶۷۶	خلاصه مطالب	۸-۲۲

۶۷۸	پیوست ۱ کامپیوترها و نظریه الکترومغناطیس	
۶۸۲	پیوست ۲ تبدیل مختصات، بردارها و تانسورها	
۶۹۸	پیوست ۳ دستگاههای یکاها	
۷۰۴	پیوست ۴ عملگرهای دیفرانسیلی برداری	
۷۰۹	پیوست ۵ تابع دلتای دیراک	
۷۱۱	پیوست ۶ انتگرالهای فوریه (تبدیل‌های فوریه)	
۷۱۴	پیوست ۷ توابع متغیر مختلط: روابط پاشندگی	
۷۱۸	پاسخ مسائل شماره فرد	
۷۲۹	نمایه	
۷۴۲		

پیشگفتار

با اینکه معادلات ماکسول حدود یکصد سال پیش فرمولبندی شده است، ولی مبحث الکترومغناطیس همچنان در حال تغییر است. امروزه دانشجویان سالهای آخر دوره‌های کارشناسی علوم، که روی سخن ما با آنهاست، با درکی کیفی از پدیده‌های اتمی مطالعه این مبحث را شروع می‌کنند. در عین حال، این دانشجویان در ریاضیات نیز زمینه خوبی کسب کرده‌اند و برای اولین بار در موقعیتی هستند که بتوانند بعضی مسائل مهم فیزیک کلاسیک را حل کنند. به علاوه، بسیاری از این دانشجویان با کامپیوتر آشنایی دارند. این کتاب حاصل تدریس درسهایی دربارهٔ الکتریسیته و مغناطیس به دانشجویان رشته فیزیک در انستیتوی تکنولوژی کیس و کالج دارتموث است. درس الکترومغناطیس برای گسترش مفاهیم آنالیز برداری، معادلات با مشتقات جزئی، مسائل مقادیر مرزی و محاسبات عددی با کامپیوترهای شخصی بسیار مناسب است. بخشهایی از کتاب که به این مسائل مربوط می‌شود طوری نوشته شده‌اند که به معلومات قبلی چندانی نیاز ندارند.

به اعتقاد ما روش صحیح آموزش در این سطح توسعه گام به گام الکتریسیته و مغناطیس بر مبنای قوانین بنیادی تجربی است، و ما نیز با ارائه دقیق مبانی، همین روش را دنبال کرده‌ایم. همچنین، برای ایجاد ارتباط میان توسعه فرمولبندی مبحث و مسائل، تعدادی مثال مناسب، منظور کرده‌ایم. درک کامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در داخل ماده تنها پس از درک ماهیت اتمی مواد امکان‌پذیر است از این رو ما در تکوین نظریهٔ میکروسکوپی مفاهیم مقدماتی اتمی را آزادانه به کار برده‌ایم. رفتار الکترومغناطیس میکروسکوپی دی‌الکتریکهای همسانگرد، رساناها، مواد مغناطیسی، پلاسمها و ابررساناها در فصلهای جداگانه (به ترتیب فصلهای ۴، ۷، ۹، ۱۴ و ۱۵) مورد بحث قرار گرفته‌اند و بحث مقدماتی نظریهٔ میکروسکوپی این رده از مواد (بجز ابررساناها) نیز ارائه شده است (در فصلهای ۵، ۷، ۱۰ و ۱۴). در فصل ۱۹ این مباحث به میدانهای وابسته به زمان تعمیم داده شده‌اند.

قسمت عمده‌ای از فیزیک جدید (و مهندسی) را میدانهای الکترومغناطیسی وابسته به زمان که در آنها جریان جابه‌جایی ماکسول نقش مهمی ایفا می‌کند، تشکیل می‌دهد. فصلهای ۱۶ تا ۲۰ مربوط می‌شوند به کاربرد امواج الکترومغناطیسی و انتشار امواج از جمله ارتباط آنها با پدیده‌های اپتیکی که فرکانسی‌اند و از نظر علایق فنی جایگزین میکروموج شده است. فرمولبندی نسبیتی نظریه الکترومغناطیس در فصل آخر (فصل ۲۲) آورده شده است، هر چند که می‌توان مطالعه آن را از هر جایی پس از فصل ۱۶ آغاز کرد.

در این ویرایش چهارم کتاب چندین تغییر داده شده است. مهم‌ترین تغییر افزودن بحث همه‌جانبه‌ای است از حل عددی مسائل الکترومغناطیس به کمک کامپیوتر شخصی (پیوست ۱) و افزودن بخشهایی مختص حل عددی معادله لاپلاس و سایر معادلات دیفرانسیل، و مسائل مدارهای الکتریکی (بخشهای ۳-۱۲، ۱۳-۱۱ و ۱۵-۴). چندین برنامه کامپیوتری به زبان بیسیک (BASIC) داده شده‌اند؛ از جمله، برای حل دستگاهی از معادلات خطی و روش "تفاضلهای متناهی" برای حل معادلات دیفرانسیل. (اگر خواننده مایل باشد این مطالب مربوط به کامپیوتر را نخواند، به راحتی می‌توان آنها را کنار گذاشت، چون این مطالب در پیوست ۱ و در بخشهایی که ذکر شد متمرکز شده‌اند و برای سایر قسمتهای کتاب اساسی نیستند.) بخشهای مربوط به انتشار امواج الکترومغناطیسی تا حدودی بازنویسی شده‌اند و بخشهای جدیدی (در فصل ۱۹) درباره خطیّت و علیّت و انتشار در محیطهای پاشنده را شامل می‌شوند.

سایر تغییرات نسبت به ویرایشهای قبلی عبارت‌اند از مثالهای حل شده بیشتر، حدود سی شکل اضافی، و به‌روز کردن فصول مربوط به مواد (خصوصاً فصلهای ۱۴ و ۱۵). تمام جدولهای داده‌ها و مراجع به سایر کتب یا مقالات روزآمد شده‌اند. جدول جدیدی درباره خواص ابررساناها افزوده شده است. حدود پنجاه مسئله جدید به مجموعه مسائل در انتهای فصول اضافه شده است. برای کمک به خواننده، مسائل مشکل‌تر با ستاره مشخص شده‌اند. بخشها و فصلهایی از کتاب که با ستاره مشخص شده‌اند برای توسعه مطالب بعدی آنها اساسی نیستند و برای مطالعه اجمالی کتاب می‌توان آنها را حذف کرد. در بخش "خلاصه مطالب" در انتهای هر فصل، ایده‌ها و فرمولهای کلیدی آن فصل مشخص شده‌اند.



آنالیز برداری

در مطالعه الکتریسیته و مغناطیس می‌توانیم با به‌کار بردن نمادهای آنالیز برداری تا حد زیادی پیچیدگی نمادگذاریها را کاهش دهیم. آنالیز برداری، علاوه بر این کوتاه‌نویسی با ارزش، مفاهیم فیزیکی موجود در معادلات را هم نشان می‌دهد. هدف ما در این فصل آن است که مبانی آنالیز برداری را به‌طور مختصر، اما جامع، توضیح دهیم و اطلاعات کاربردی لازم برای مطالعه مبحث الکتریسیته و مغناطیس را فراهم کنیم. برای کسانی که با آنالیز برداری آشنا هستند این فصل مرور خوبی است و آنها را با نمادگذاریهای کتاب نیز آشنا می‌کند.

۱-۱ تعریفها

در فیزیک مقدماتی معمولاً با چندین نوع کمیّت مخصوصاً با تقسیم‌بندی کمیّتها به دو دسته برداری و نرده‌ای آشنا می‌شویم. در اینجا کافی است که کمیّت نرده‌ای را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

کمیّت نرده‌ای کمیّتی است که به کمک اندازه‌اش کاملاً مشخص می‌شود.

جرم، زمان، حجم و مانند آن چند نمونه از کمیّتهای نرده‌ای‌اند. میدان نرده‌ای که از تعمیم ساده

مفهوم کمیّت نرده‌ای نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی‌اش در آن نقطه کاملاً مشخص می‌شود.

بردار را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم.

بردار کمیّتی است که با استفاده از اندازه و جهتش کاملاً مشخص می‌شود.

به عنوان مثالهایی از بردار می‌توان از بردار مکان نسبت به یک مبدأ ثابت، سرعت، شتاب، نیرو و مانند آن نام برد. میدان برداری، که از تعمیم بردار نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی و جهتش کاملاً مشخص می‌شود.

این تعریفها را می‌توان دقیق‌تر و کامل‌تر ارائه کرد؛ در واقع، ما در پیوست ۲ تعریفهای دقیق‌تری مبتنی بر خواص تبدیل ارائه کرده‌ایم. به علاوه، کمیتهای پیچیده‌تری چون تانسورها را نیز می‌توان تعریف کرد. ولی برای منظور ما تا فصل ۲۲ کمیتهای نرده‌ای و برداری کاملاً مناسب و کافی‌اند.

۲-۱ جبر برداری

چون خواننده با جبر کمیتهای نرده‌ای آشناست، برای گسترش جبر برداری از آن استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا نمایشی از بردارها ارائه می‌دهیم و به همین منظور دستگاه مختصات سه‌بعدی دکارتی (قائم) را معرفی می‌کنیم. این دستگاه سه‌بعدی را با سه متغیر x, y, z و یا هنگامی که مناسب‌تر باشد با x_1, x_2, x_3 نمایش خواهیم داد. در این دستگاه هر بردار با مؤلفه‌های x, y و z مشخص می‌شود. از این رو، بردار \mathbf{V} با مؤلفه‌های V_x, V_y, V_z اش مشخص می‌شود، که در آن $V_x = |\mathbf{V}| \cos \alpha_1, V_y = |\mathbf{V}| \cos \alpha_2, V_z = |\mathbf{V}| \cos \alpha_3$ و α ها زاویه بین بردار \mathbf{V} و هر یک از محورهای مختصات‌اند. کمیّت نرده‌ای $|\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ ، برابر است با بزرگی یا طول بردار \mathbf{V} . در میدانهای برداری هر یک از مؤلفه‌ها را باید تابعی از x, y و z در نظر گرفت. در اینجا باید تأکید کنیم که فقط به منظور سادگی در فهم مطلب بردارها را در دستگاه مختصات دکارتی نمایش می‌دهیم. در واقع، کلیه تعریفها و عملیاتی که روی آنها انجام می‌دهیم به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند.

حاصل جمع دو بردار طبق تعریف برداری است که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از مجموع مؤلفه‌های مربوط به دو بردار اصلی. اگر حاصل جمع \mathbf{A} و \mathbf{B} را با \mathbf{C} نشان دهیم، داریم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (۱-۱)$$

۱. کمیتهای برداری با حروف سیاه غیرایتالیک مشخص می‌شوند.

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \quad (2-1)$$

این تعریف جمع برداری کاملاً معادل است با قاعدهٔ آشنای متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها. تفریق برداری را با استفاده از بردار منفی بردار تعریف می‌کنیم. بردار منفی هر بردار، برداری است که مؤلفه‌های آن با منفی مؤلفه‌های بردار اصلی برابرند. بنابراین، اگر \mathbf{A} یک بردار باشد، $-\mathbf{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x, \quad (-\mathbf{A})_y = -A_y, \quad (-\mathbf{A})_z = -A_z \quad (3-1)$$

بنابراین، عمل تفریق برداری را به کمک جمع یک بردار با منفی بردار دیگر تعریف می‌کنیم و به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (4-1)$$

از شرکت‌پذیری و جابه‌جایی‌پذیری اعداد حقیقی نتیجه می‌شود که جمع (و تفریق) برداری نیز شرکت‌پذیر و جابه‌جایی‌پذیر است. این مطلب با نمادگذاری برداری به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5-1)$$

به عبارت دیگر، همان‌طور که در آخرین شکل تساوی بالا دیده می‌شود، وجود پرانتزها غیرضروری است.

اکنون به فرایند ضرب می‌پردازیم و ملاحظه می‌کنیم که ساده‌ترین ضربها عبارت است از ضرب یک کمیّت نرده‌ای در یک بردار. نتیجه این عمل، برداری است که هر مؤلفه آن برابر است با حاصل ضرب کمیّت نرده‌ای در مؤلفه متناظر از بردار اصلی. اگر c کمیّت نرده‌ای و \mathbf{A} بردار باشد، حاصل ضرب $c\mathbf{A}$ بردار $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z \quad (6-1)$$

واضح است که هرگاه \mathbf{A} یک میدان برداری و c یک میدان نرده‌ای باشد، آن‌گاه \mathbf{B} یک میدان جدید برداری است که الزاماً مضرب ثابتی از میدان اصلی نخواهد بود.

حال اگر بخواهیم دو بردار را در یکدیگر ضرب کنیم، دو امکان پیش می‌آید که ضرب برداری و ضرب نرده‌ای نامیده می‌شوند. ابتدا ضرب نرده‌ای را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که این نام از

ماهیت نرده‌ای حاصل ضرب گرفته شده است، اگر چه گاهی ضرب داخلی و ضرب نقطه‌ای نیز به آن گفته می‌شود. تعریف ضرب نرده‌ای، که به صورت $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نوشته می‌شود، چنین است

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (۷-۱)$$

این تعریف معادل است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در کسینوس زاویه میان آنها، که تعریف دیگر و شاید آشناتری است. اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} برهم عمود باشند داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

ضرب نرده‌ای جابه‌جایی‌پذیر است. طول \mathbf{A} برابر است با

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

حاصل ضرب برداری دو بردار یک بردار است و به همین دلیل آن را ضرب برداری می‌گویند. نامهای دیگر آن ضرب خارجی و ضرب ضربداری است. ضرب برداری را به صورت $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ می‌نویسند. هرگاه \mathbf{C} حاصل ضرب برداری \mathbf{A} و \mathbf{B} باشد، آنگاه $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ، یا

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad (۸-۱)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

لازم به تذکر است که ضرب برداری دو بردار به ترتیب قرار گرفتن دو عامل ضرب بستگی دارد و با تعویض ترتیب آنها حاصل ضرب منفی می‌شود.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

در نتیجه،

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

این تعریف با تعریف زیر هم‌ارز است: بزرگی حاصل ضرب برداری برابر است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در سینوس زاویه میان آنها، و جهت آن با قاعدهٔ پیچ راستگرد مشخص می‌شود.^۱

۱. فرض کنید \mathbf{A} را از طریق کوچکترین زاویه‌ای که با \mathbf{B} می‌سازد به طرف \mathbf{B} می‌چرخانیم. اگر پیچ راستگردی به همین ترتیب بپیچد، در جهتی عمود بر دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} پیش می‌رود. این راستا راستای $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ است.

ضرب برداری را می‌توان به کمک دترمینان به راحتی به خاطر سپرد. اگر i, j, k بردارهای یکه، یعنی بردارهایی با بزرگی واحد و به ترتیب در جهات x, y و z باشند، داریم

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (9-1)$$

اگر این دترمینان را با قواعد معمولی حساب کنیم، نتیجه دقیقاً همان تعریف ما از ضرب برداری خواهد بود.

عملیات جبری بالا را می‌توان به صورت مختلف با یکدیگر ترکیب کرد. اکثر نتایجی که بدین طریق به دست می‌آیند بدیهی‌اند، اما دو نوع ضرب سه‌گانه برداری وجود دارد که به خاطر اهمیتشان لازم است از آنها صریحاً یاد کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که حاصل ضرب سه‌گانه نرده‌ای $D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ با دترمینان زیر برابر است

$$D = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (10-1)$$

این حاصل ضرب با تعویض جای علامت ضرب نرده‌ای و ضرب برداری و یا تعویض جای بردارها با جایگشت دوری تغییر نمی‌کند. توجه کنید که به پرانتزها نیازی نیست زیرا ضرب برداری کمیّت نرده‌ای در بردار تعریف نشده است.

ضرب سه‌گانه جالب توجه دیگر عبارت است از ضرب سه‌گانه برداری $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ با به‌کار بردن مکرر تعریف حاصل ضرب برداری، یعنی معادله (۸-۱)، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (11-1)$$

که غالباً به قاعده بک کب (*back cab*) مشهور است. توجه کنید که در ضرب سه‌گانه برداری وجود پرانتزها ضروری است، زیرا بدون آنها نمی‌توانیم ضرب را درست تعریف کنیم.

در اینجا ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا تقسیم برداری امکان‌پذیر است یا نه. بدیهی است که تقسیم یک بردار بر یک کمیّت نرده‌ای را می‌توانیم به صورت ضرب بردار در عکس آن کمیّت نرده‌ای تعریف کنیم. ولی تقسیم یک بردار بر بردار دیگر تنها وقتی ممکن است که دو بردار با هم موازی باشند. از طرف دیگر، می‌توانیم با نوشتن پاسخهای عمومی برای معادلات برداری

عملیاتی خیلی شبیه به تقسیم انجام دهیم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$c = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad (۱۲-۱)$$

که در آن c یک کمیت نرده‌ای معلوم، \mathbf{A} ، یک بردار معلوم، و \mathbf{X} یک بردار مجهول است. پاسخ عمومی این معادله به صورت زیر است

$$\mathbf{X} = \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{B} \quad (۱۳-۱)$$

که در آن \mathbf{B} برداری است با بزرگی اختیاری و عمود بر \mathbf{A} ؛ یعنی، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. عملیاتی که انجام دادیم به تقسیم c بر \mathbf{A} خیلی شبیه است، به عبارت درست‌تر ما صورت کلی بردار \mathbf{X} را طوری پیدا کرده‌ایم که در معادله (۱۲-۱) صدق کند. در اینجا پاسخ منحصر به فردی وجود ندارد، و این واقعیت وجود بردار \mathbf{B} را توجیه می‌کند. به همین طریق می‌توانیم معادله برداری زیر را در نظر بگیریم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{X} \quad (۱۴-۱)$$

که در آن \mathbf{A} و \mathbf{C} دو بردار معلوم و \mathbf{X} برداری مجهول است. پاسخ عمومی این معادله عبارت خواهد بود از

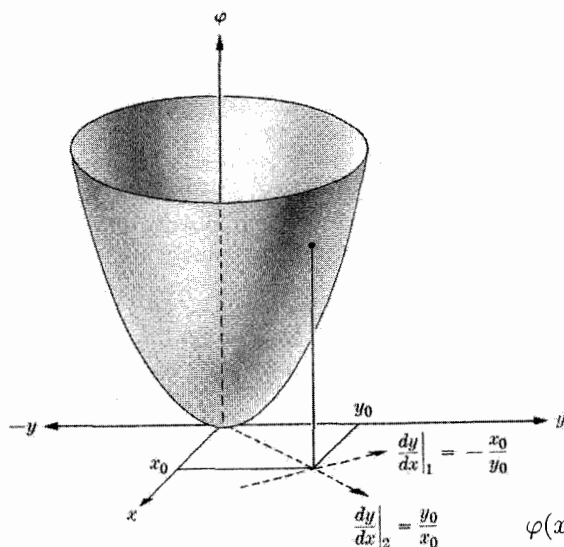
$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + k\mathbf{A} \quad (۱۵-۱)$$

که در آن k یک کمیت نرده‌ای اختیاری است. بنابراین، \mathbf{X} که توسط معادله (۱۵-۱) تعریف می‌شود تقریباً همان خارج‌قسمت \mathbf{C} بر \mathbf{A} است؛ ضریب k حاکی از آن است که پاسخ معادله منحصر به فرد نیست. اگر لازم باشد \mathbf{X} هم در معادله (۱۲-۱) و هم در معادله (۱۴-۱) صدق کند، آن وقت پاسخ (چنانچه پاسخی وجود داشته باشد) منحصر به فرد است و به صورت زیر خواهد بود

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \frac{c\mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (۱۶-۱)$$

۳-۱ گرادیان

اکنون مطالب بخش قبل را به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری، یعنی به حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری تعمیم می‌دهیم. ساده‌ترین تعمیم، رابطه میان یک میدان برداری خاص و مشتق‌های یک میدان نرده‌ای است. ابتدا بهتر است با مفهوم مشتق جهت‌ی یک تابع چند متغیری آشنا شویم.



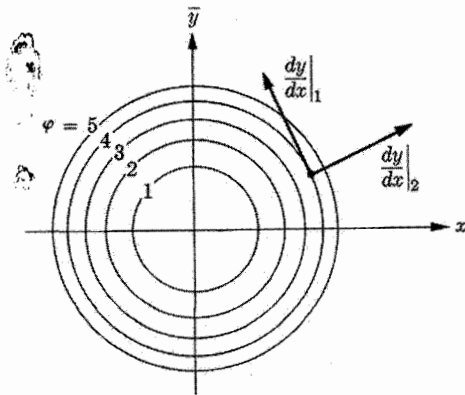
شکل ۱-۱ نمایش تابع $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ بر حسب x و y در نمودار سه بعدی.

مشتق جهتی عبارت است از آهنگ تغییر تابع در یک جهت مشخص و برای تابع نرده‌ای φ معمولاً آن را به صورت $d\varphi/ds$ نمایش می‌دهند؛ باید توجه کرد که ds تغییر مکان بی‌نهایت کوچکی است در جهت مورد نظر و ds بزرگی نرده‌ای ds است. هرگاه dx ، dy و dz مؤلفه‌های ds باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

برای روشن شدن مفهوم مشتق جهتی، یک تابع نرده‌ای دو متغیری را در نظر بگیرید. مثلاً $\varphi(x, y)$ یک میدان نرده‌ای دوبعدی را نمایش می‌دهد. φ را می‌توانیم به صورت تابعی از x و y رسم کنیم، همان‌طور که تابع $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ را در شکل ۱-۱ رسم کرده‌ایم. مقدار مشتق جهتی در نقطه x_0 ، y_0 به جهت بستگی دارد. اگر جهت متناظر با $dy/dx = -x_0/y_0$ را انتخاب کنیم، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0 \frac{x_0}{y_0} \right] \frac{dx}{ds} = 0 \quad (الف) \quad (۱۷-۱)$$



شکل ۱-۲ تابع $\varphi(x, y)$ مربوط به شکل ۱-۱ که به صورت نقشه خطوط تراز دوبعدی رسم شده است.

و چنانچه جهت متناظر با $dy/dx = y_0/x_0$ را انتخاب کنیم، خواهیم داشت

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \left(2x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0} \right) \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (ب-۱۷)$$

زیرا $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ به عنوان سومین امکان $dy/dx = \alpha$ را انتخاب می‌کنیم، در این صورت

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1 + \alpha^2)^{-1/2} \quad (ج-۱۷)$$

اگر از این عبارت نسبت به α مشتق بگیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار دهیم، مقدار α که به‌ازای آن مقدار مشتق جهتی بیشینه یا کمینه می‌شود، به‌دست می‌آید. پس از انجام عملیات رابطه $\alpha = y_0/x_0$ به‌دست می‌آید، یعنی جهتی که آهنگ تغییرات تابع $\varphi = x^2 + y^2$ بیشینه می‌شود جهت شعاعی است. اگر جهت شعاعی به سمت خارج باشد این بیشینه، بیشینه آهنگ افزایش و اگر به طرف داخل باشد، بیشینه آهنگ کاهش یا کمینه آهنگ افزایش است. در جهتی که با $dy/dx = -x_0/y_0$ مشخص می‌شود، آهنگ تغییر $x^2 + y^2$ برابر صفر است. این جهت بر دایره $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ مماس است. واضح است که روی این منحنی، تابع $\varphi = x^2 + y^2$ تغییر نمی‌کند. جهتی که در آن $d\varphi/ds$ صفر است جهت منحنی $\varphi = const.$ (یعنی، φ = ثابت) را در نقطه مورد نظر معین می‌کند. این خطوط، که در مورد تابع $x^2 + y^2$ دایره‌ای هستند با خطوط تراز یا خطوط ارتفاع ثابتی که در نقشه‌های توپوگرافی دیده می‌شود، کاملاً شبیه‌اند. شکل ۱-۲ تابع $\varphi = x^2 + y^2$ را نشان می‌دهد که به صورت نقشه خطوط تراز ترسیم شده است.

مفهوم خطوط تراز را می‌توانیم به یک تابع سه متغیری که در آن سطوح $\varphi(x, y, z) = const.$ سطوح تراز یا سطوح هم‌پتانسیل نامیده می‌شوند، تعمیم دهیم. قیاس سه‌بعدی شکل ۱-۲ تنها راه عملی ترسیم میدان نرده‌ای برای فضای سه‌بعدی است. اکنون می‌توانیم گرایان تابع نرده‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم.

گرایان تابع نرده‌ای φ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینه مشتق جهتی در نقطه مورد نظر است و جهت آن جهت بیشینه مشتق جهتی در آن نقطه است.

واضح است که جهت گرایان در هر نقطه عمود است بر سطح تراز φ در آن نقطه. متداول‌ترین نمادهای گرایان ∇ و grad است.^۱ مشتق جهتی برحسب گرایان با رابطه زیر داده می‌شود

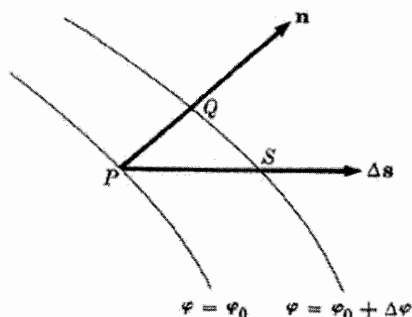
$$\frac{d\varphi}{ds} = |\text{grad } \varphi| \cos \theta \quad (18-1)$$

که در آن θ زاویه میان جهت ds و جهت گرایان است. این رابطه مستقیماً از روی شکل ۱-۳ نتیجه می‌شود. اگر ds را بردار تغییر مکانی که بزرگی آن ds است بگیریم، معادله (۱۸-۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad } \varphi \cdot \frac{ds}{ds} \quad (19-1)$$

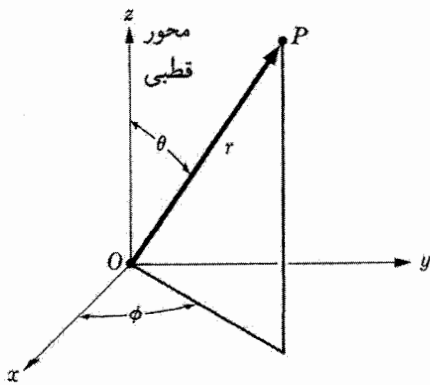
به کمک این معادله می‌توان شکل صریح گرایان را در هر دستگاه مختصاتی که در آن شکل ds معلوم باشد، پیدا کرد. در دستگاه مختصات قائم می‌دانیم که $ds = i dx + j dy + k dz$. همچنین می‌دانیم که

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$



شکل ۱-۳ قسمتهایی از دو سطح تراز تابع $\varphi(x, y, z)$. در اینجا $|\text{grad } \varphi|$ در نقطه P مساوی است با حد $\Delta\varphi/\overline{PQ}$ وقتی که $\overline{PQ} \rightarrow 0$ و $d\varphi/ds$ برابر است با حد متناظر $\Delta\varphi/\overline{PS}$.

۱. ما ابتدا از نماد grad استفاده خواهیم کرد.



شکل ۴-۱ تعریف مختصات قطبی r ، θ و ϕ .

از این معادله و معادله (۱۹-۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\text{grad } \varphi)_x dx + (\text{grad } \varphi)_y dy + (\text{grad } \varphi)_z dz$$

اگر ضریب دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل را در دو طرف این معادله مساوی هم قرار دهیم، در مختصات قائم خواهیم داشت

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (20-1)$$

در موارد پیچیده‌تر هم روش کار همین است. در مختصات قطبی کروی، که در آن r ، θ و ϕ مطابق شکل ۴-۱ تعریف می‌شوند، داریم

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi \quad (21-1)$$

و

$$ds = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin \theta d\phi \quad (22-1)$$

که در آن \mathbf{a}_r ، \mathbf{a}_θ و \mathbf{a}_ϕ به ترتیب بردارهای یگانه در جهات r ، θ و ϕ اند. با استفاده از معادله (۱۹-۱) و مساوی قرار دادن ضرایب متغیرهای مستقل، نتیجه می‌گیریم که در مختصات کروی

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad (23-1)$$

۱-۴ انتگرال گیری برداری

البته، جنبه های دیگری از مشتق گیری وجود دارد که در آنها نیز سروکار ما با بردار است، با وجود این بهتر است ابتدا انتگرال گیری برداری را بررسی کنیم. در اینجا بسته به نوع دیفرانسیلی که در انتگرال ظاهر می شود می توانیم سه نوع انتگرال را در نظر بگیریم که عبارت اند از انتگرالهای خطی، سطحی و حجمی. انتگرالده می تواند یک میدان برداری یا یک میدان نرده ای باشد؛ اما، بعضی ترکیبهای انتگرالده ها و دیفرانسیلها سبب پیدایش انتگرالهایی می شوند که جالب توجه نیستند. انتگرالهایی که در اینجا مورد نظراند عبارت اند از انتگرال نرده ای خطی بردار، انتگرال نرده ای سطحی بردار، و انتگرالهای حجمی بردارها و کمیت های نرده ای هر دو.

اگر \mathbf{F} بردار باشد، انتگرال خطی \mathbf{F} به صورت زیر نوشته می شود

$$\int_{a(C)}^b \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (24-1)$$

که در آن C منحنی است که انتگرال در امتداد آن محاسبه می شود، a و b نقاط ابتدا و انتها در روی این منحنی اند، و $d\mathbf{l}$ بردار تغییر مکان بی نهایت کوچکی است در امتداد منحنی C . چون $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ کمیتی نرده ای است، واضح است که نتیجه انتگرال گیری نیز کمیتی نرده ای خواهد بود. تعریف انتگرال خطی با تعریف ریمانی انتگرال معین مشابه است. آن قطعه از منحنی C را که میان a و b قرار دارد به تعداد زیادی عنصر کوچک Δl_i تقسیم می کنیم؛ در داخل هر عنصر نقطه ای را انتخاب می کنیم و مقدار \mathbf{F} را در آن نقطه به دست می آوریم. حاصل ضرب نرده ای هر عنصر را در \mathbf{F} متناظر با آن تعیین، و مجموع این حاصل ضربها را محاسبه می کنیم. سپس انتگرال خطی را به صورت حد این مجموع وقتی تعداد عناصر بی نهایت زیاد شود و هر عنصر به سمت صفر میل کند تعریف می کنیم. این تعریف را به طور فشرده می توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{a(C)}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta l_i$$

لازم به تذکر است که معمولاً انتگرال خطی نه تنها به نقاط حدی a و b بلکه به خود منحنی C ، که عمل انتگرال گیری روی آن انجام می شود نیز بستگی دارد، زیرا اندازه و جهت $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ و جهت $d\mathbf{l}$ به ترتیب به منحنی C و مماس آن بستگی دارند. انتگرال خطی روی یک منحنی بسته آنقدر مهم است که نماد خاصی، به صورت زیر، برای نمایش آن در نظر گرفته شده است

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (25-1)$$

انتگرال روی یک منحنی بسته معمولاً صفر نیست؛ آن دسته از بردارها که برای آنها انتگرال خطی روی هر منحنی بسته‌ای صفر است از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. از این رو غالباً به انتگرالهای خطی روی منحنیهای بسته نامشخص برمی‌خوریم، به‌عنوان مثال

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-1)$$

این نمادگذاری فقط در مواردی مفید است که انتگرال، در محدوده نسبتاً وسیعی، به مسیر منحنی C بستگی نداشته باشد. در صورت وجود ابهام، بهتر است منحنی مسیر را مشخص کنیم. روش اساسی برای محاسبه انتگرالهای خطی پیدا کردن توصیفی یک پارامتری از منحنی و آنگاه استفاده از این توصیف برای بیان انتگرال خطی به صورت مجموع سه انتگرال یک‌بعدی معمولی است. بجز در موارد بسیار ساده، این روش بسیار طولانی و پر دردسر است، لیکن خوشبختانه محاسبه انتگرالها با این روش به‌ندرت ضرورت پیدا می‌کند. همچنان که بعداً خواهیم دید، اغلب می‌توان نشان داد انتگرال خطی به مسیر میان دو حد انتگرال بستگی ندارد. در این صورت می‌توان برای سهولت انتگرال‌گیری مسیر ساده‌ای را انتخاب کرد.

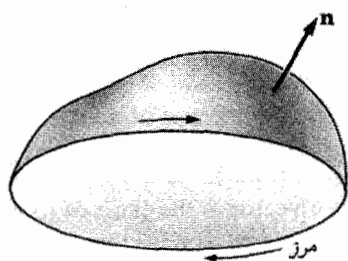
اگر باز هم \mathbf{F} بردار باشد، انتگرال سطحی \mathbf{F} به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (27-1)$$

که در آن S سطحی است که انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود، da سطح بی‌نهایت کوچکی است از S ، و \mathbf{n} بردار یکه عمود بر da است. در مورد انتخاب جهت \mathbf{n} ابهام دوگانه‌ای وجود دارد، که چنانچه سطح S بسته باشد، با انتخاب \mathbf{n} در راستای عمود بر سطح و در جهت خارج آن، این ابهام از بین می‌رود. هرگاه S بسته نباشد اما متناهی باشد، در آن صورت یک خط مرزی دارد و سوی عمود تنها نسبت به سوی دلخواهی که برای پیمودن این خط مرزی انتخاب می‌شود مهم است. در این صورت سوی مثبت عمود، جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است چنانچه پیچ در جهت سوی مثبت انتخابی روی منحنی مرزی بچرخد. این مطلب در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. انتگرال سطحی \mathbf{F} روی سطح بسته S ، را گاهی به صورت زیر می‌نویسند

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

آنچه را درباره انتگرال خطی گفتیم عیناً می‌توانیم برای انتگرال سطحی نیز تکرار کنیم. انتگرال سطحی کمیته نرده‌ای است؛ مقدار آن معمولاً به سطح S بستگی دارد و مواردی که در آنها این



شکل ۵-۱ رابطه بردار عمود بر سطح، \mathbf{n} ، و جهت گردش روی مرز.

بستگی وجود ندارد از اهمیت خاصی برخوردارند. انتگرال سطحی را دقیقاً همانند انتگرال خطی تعریف می‌کنیم. جزئیات فرمولبندی آن را به بخش مسائل ماکول کرده‌ایم. هرگاه \mathbf{F} بردار و φ یک کمیت نرده‌ای باشد، دو انتگرال حجمی مورد نظر ما عبارت‌اند از

$$J = \int_V \varphi \, dv \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} \, dv \quad (28-1)$$

بدیهی است که J یک کمیت نرده‌ای و \mathbf{K} بردار است. تعریف این انتگرالها مستقیماً به انتگرال ریمانی در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌شود؛ اما توجه داشته باشید که در مورد \mathbf{K} به‌ازای هر مؤلفه \mathbf{F} یک انتگرال وجود دارد. این انتگرالها به حد کافی آشنا هستند و نیازی به توضیح بیشتر آنها نیست.

۵-۱ دیورژانس

عملگر مهم دیگری که اساساً نوعی مشتق‌گیری محسوب می‌شود، دیورژانس است. دیورژانس بردار \mathbf{F} ، که به صورت $\text{div } \mathbf{F}$ نوشته می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

دیورژانس هر بردار حد انتگرال سطحی آن بردار در واحد حجم است هرگاه حجم محصورشده توسط آن سطح به سمت صفر میل کند، یعنی

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

واضح است که دیورژانس، یک تابع نرده‌ای نقطه‌ای (میدان نرده‌ای) است، و در نقطه‌ی حدی سطح انتگرال‌گیری تعریف می‌شود. تعریف بالا چندین امتیاز دارد: به انتخاب خاصی از دستگاه محوره‌ای مختصات بستگی ندارد و از آن می‌توان برای یافتن شکل صریح عملگر دیورژانس در هر دستگاه مختصات خاصی استفاده کرد.

در مختصات قائم، عنصر حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ مبنای مناسبی برای یافتن شکل صریح دیورژانس به دست می‌دهد. هرگاه یکی از گوشه‌های این مکعب مستطیل در نقطه x_0, y_0, z_0

قرار داشته باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 F_x(x_0 + \Delta x, y, z) &= F_x(x_0, y, z) + \Delta x \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{x_0, y, z} \\
 F_y(x, y_0 + \Delta y, z) &= F_y(x, y_0, z) + \Delta y \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{x, y_0, z} \quad (29-1) \\
 F_z(x, y, z_0 + \Delta z) &= F_z(x, y, z_0) + \Delta z \left. \frac{\partial F_z}{\partial z} \right|_{x, y, z_0}
 \end{aligned}$$

که در آن جمله‌هایی که نسبت به Δx ، Δy و Δz از مرتبه‌های بالاترند، حذف شده‌اند. چون عنصرهای سطح $\Delta y \Delta z$ بر محور x و $\Delta z \Delta x$ بر محور y و $\Delta x \Delta y$ بر محور z عمودند، تعریف دیورژانس به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{F} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ \int F_x(x_0, y, z) dy dz \right. \\
 &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z) dx dz \\
 &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0) dx dy \\
 &\quad + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} - \int F_x(x_0, y, z) dy dz \\
 &\quad \left. - \int F_y(x, y_0, z) dx dz - \int F_z(x, y, z_0) dx dy \right\} \quad (30-1)
 \end{aligned}$$

علامت منفی در سه انتگرال آخر به این دلیل آمده است که در این دو مورد بردار عمودی که به سمت خارج از حجم کشیده می‌شود، در جهت منفی محورهاست. گرفتن حد به راحتی انجام می‌شود و در نتیجه دیورژانس در مختصات قائم به صورت زیر در می‌آید

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (31-1)$$

در مختصات کروی نیز روش کار به همین طریق است. حجم محصور توسط بازه‌های مختصاتی Δr ، $\Delta \theta$ ، $\Delta \phi$ را به عنوان حجم انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. این حجم $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$ است. چون سطح محصور توسط این بازه‌های مختصاتی به مقادیر مختصات بستگی دارد (توجه کنید که در مورد مختصات قائم چنین نیست) بهتر است که $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a$ را به صورت صریح آن

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a = F_r r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi + F_{\theta r} \sin \theta \Delta \phi \Delta r + F_{\phi r} \Delta r \Delta \theta \quad (32-1)$$

بنویسیم. از این رابطه پیداست که به جای F_r باید $r^2 F_r \sin \theta$ را به صورت سری تیلور بسط دهیم. به همین ترتیب، در جمله‌های دیگر نیز باید ضریب حاصل ضریب‌های بازه‌های مختصاتی بسط داده شود. پس از انجام این بسطها و استفاده از آنها در محاسبه انتگرال سطحی موجود در تعریف دیورژانس، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (F_r r^2 \sin \theta) \Delta r \Delta \theta \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{\theta r} \sin \theta) \Delta \theta \Delta r \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_{\phi r}) \Delta \phi \Delta r \Delta \theta \right\} \quad (33-1)$$

بعد از محاسبه حد، شکل صریح دیورژانس در مختصات کروی چنین خواهد بود

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} \quad (34-1)$$

این روش یافتن شکل صریح دیورژانس در هر دستگاه مختصات قابل استفاده است؛ به شرطی که شکل عنصرهای حجم و سطح یا عنصرهای طول معلوم باشند.

معنی فیزیکی دیورژانس را می‌توان با ذکر مثالی از مکانیک شاره‌ها به راحتی توضیح داد. اگر \mathbf{V} ، سرعت شاره، تابعی از مکان و ρ چگالی شاره باشد، مقدار کل شاره‌ای است که در واحد زمان، حجم محصور به وسیله سطح S را ترک می‌کند. اگر شاره تراکم‌ناپذیر باشد، انتگرال سطحی مقدار کل چشمه شاره در درون سطح بسته را به دست می‌دهد. تعریف بالا برای دیورژانس نشان می‌دهد که دیورژانس را می‌توان به معنی حد قدرت چشمه در واحد حجم یا چگالی چشمه یک شاره تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت.

اکنون می‌توانیم قضیه فوق‌العاده مهمی را در مورد دیورژانس بیان و اثبات کنیم.

قضیه دیورژانس. انتگرال دیورژانس یک بردار در حجم V برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم آن بردار روی سطحی که V را در بر می‌گیرد؛ یعنی

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

حجم مورد نظر را به تعداد بسیار زیادی سلول کوچک تقسیم می‌کنیم. فرض کنید حجم سلول i ام برابر ΔV_i و به وسیله سطح S_i محصور شده باشد. آنگاه واضح است که

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۳۵-۱)$$

که در آن در هر انتگرال طرف چپ، جهت عمود به سمت خارج از جزء حجم مورد نظر است. چون جهت به سمت خارج یک سلول برای سلول مجاور جهت به سمت داخل است، جمع تمام جمله‌های طرف چپ معادله (۳۵-۱) صفر می‌شود مگر آن جمله‌هایی که از سطح S به وجود می‌آیند و معادله (۳۵-۱) در اساس ثابت می‌شود. اکنون برای اثبات قضیه دیورژانس تعداد سلولها را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم به طوری که حجم هر سلول به سمت صفر میل کند

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \right\} \Delta V_i \quad (۳۶-۱)$$

در حد، جمع روی i به انتگرال روی حجم V تبدیل می‌شود و نسبت انتگرال سطحی روی S_i به ΔV_i به دیورژانس \mathbf{F} تبدیل خواهد شد. بنابراین

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv \quad (۳۷-۱)$$

که همان قضیه دیورژانس است. ما از این قضیه در موقعیتهای فراوان هم در توسعه جنبه‌های نظری الکتریسیته و مغناطیس و هم به هنگام محاسبه انتگرالها استفاده خواهیم کرد.

۱-۶ تاو

سومین عملگر دیفرانسیلی برداری جالب توجه تاو است. تاو یک بردار را، که به صورت $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ نوشته می‌شود، چنین تعریف می‌کنند

تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرال سطحی ضرب برداری آن بردار در بردار یکه عمود بر سطح بسته (در جهت خارج از حجم)، به حجم محصور به وسیله آن سطح، وقتی که حجم به سمت صفر میل کند، یعنی

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \quad (۳۸-۱)$$

این تعریف و تعریف دیورژانس کاملاً به هم شبیه‌اند، با این تفاوت که به جای ضرب نرده‌ای بردار در بردار یکه عمود بر سطح در جهت خارج، از ضرب برداری استفاده شده است. غیر از این مورد، از هر جهت دیگری این دو تعریف یکسان‌اند. تعریف متفاوت ولی هم‌ارز دیگری از تاو وجود دارد که بیشتر مفید است. این تعریف به صورت زیر است.

مؤلفه $\text{curl } \mathbf{F}$ در راستای بردار یکه \mathbf{a} برابر است با حد انتگرال خطی در واحد سطح هنگامی که سطح محصور به خط (که بر \mathbf{a} عمود است) به سمت صفر میل کند؛ یعنی

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (39-1)$$

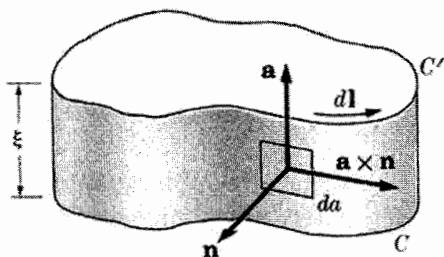
که در آن منحنی C که سطح S را در بر می‌گیرد، در صفحه عمود بر \mathbf{a} قرار دارد.

همان‌طور که در شکل ۶-۱ دیده می‌شود، با انتخاب منحنی تخت C و حجمی که در اثر جابه‌جایی این منحنی در فاصله ξ در راستای عمود بر صفحه خودش به وجود می‌آید، می‌توان به راحتی نشان داد که دو تعریف بالا هم‌ارزند. اگر \mathbf{a} بر این صفحه عمود باشد، از ضرب نرده‌ای \mathbf{a} در تعریف اول تاو، معادله (۳۸-۱)، به دست می‌آید

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (40-1)$$

چون \mathbf{a} با عمود بر تمام سطوح مرزی، بجز سطح نوار باریک محصور میان منحنیهای C و C' موازی است، فقط انتگرال روی سطح اخیر به محاسبه نیاز دارد. توجه کنید که برای این سطح $\mathbf{a} \times \mathbf{n} da$ درست برابر است با $d\mathbf{l} \xi$ ، که در آن $d\mathbf{l}$ جابه‌جایی بی‌نهایت کوچکی در امتداد C است. علاوه بر این، چون $V = \xi S$ ، حد انتگرال حجمی برابر است با

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\xi S} \oint \xi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$



شکل ۶-۱ حجمی که در اثر جابه‌جایی منحنی تخت C در راستای بردار یکه عمودش، \mathbf{a} ، جاروب می‌شود.

که با حذف ξ ها این رابطه به صورت تعریف دوم تاو در می آید. این هم‌ارزی را می‌توان بدون استفاده از حجم خاصی که در اینجا به‌کار بردیم نیز نشان داد، اما در این صورت سادگی اثبات بالا تا حدود زیادی از بین خواهد رفت.

شکلهای مختلف تاو در دستگاههای مختصات مختلف را می‌توان با روشی خیلی شبیه به همان روشی که در مورد دیورژانس به‌کار بردیم، محاسبه کرد. در دستگاه مختصات قائم‌راحت است که از حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ استفاده کنیم. برای مؤلفه x تاو فقط سطوح عمود بر محورهای y و z دخالت دارند. با یادآوری $\mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j}$ ، جمله‌های غیر صفر مؤلفه x تاو از سطوح مکعب مستطیل چنین نتیجه می‌دهند

$$(\text{curl } \mathbf{F})_x = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \{ [-F_y(x, y, z + \Delta z) + F_y(x, y, z)] \Delta x \Delta y + [F_z(x, y, +\Delta y, z) - F_z(x, y, z)] \Delta x \Delta z \} \quad (41-1)$$

با استفاده از بسط سری تیلور و محاسبه حد، مؤلفه x تاو به دست می‌آید

$$(\text{curl } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (42-1)$$

مؤلفه‌های y و z هم درست به همین ترتیب محاسبه می‌شوند

$$(\text{curl } \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (\text{curl } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (43-1)$$

تاو در مختصات قائم‌برابر بسط درمینان سه در سه زیر است. با توجه به این موضوع، شکل تاو در مختصات قائم را می‌توانیم به‌راحتی به خاطر بسپاریم

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (44-1)$$

پیدا کردن شکل تاو در سایر دستگاههای مختصات فقط اندکی پیچیده‌تر است و آن را به بخش مسائل موکول می‌کنیم.

مانند قضیه دیورژانس، در اینجا نیز به قضیه مفید و مهمی در مورد تاو برمی‌خوریم که به قضیه استوکس معروف است.

قضیه استوکس. انتگرال خطی یک بردار روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد؛ یعنی

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۴۵-۱)$$

که در آن C منحنی بسته‌ای است که سطح S را در بر می‌گیرد.

اثبات این قضیه کاملاً شبیه به اثبات قضیه دیورژانس است. سطح S را به تعداد زیادی سلول تقسیم می‌کنیم. مساحت سلول i ام را ΔS_i و منحنی محصورکننده آن را C_i می‌نامیم. چون همه این منحنیها را باید در یک جهت دور زد، واضح است که جمع کل انتگرالهای خطی روی C_i ها درست معادل است با انتگرال خطی روی منحنی مرزی اصلی، و سایر جملات با همدیگر حذف می‌شوند. بنابراین

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

آنچه باقی می‌ماند گرفتن حد است وقتی که تعداد سلولها نامتناهی شود، به نحوی که سطح هر سلول به سمت صفر میل کند. نتیجه فرایند گرفتن حد به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Delta S_i \\ &= \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \end{aligned}$$

که همان قضیه استوکس است. این قضیه، مانند قضیه دیورژانس، هم در توسعه نظریه الکترومغناطیس مفید است و هم در محاسبه انتگرالها به کار می‌آید. لازم به تذکر است که قضایای دیورژانس و استوکس، هر دو اساساً انتگرال‌گیری جزء به جزء هستند.

۷-۱ عملگر دیفرانسیلی برداری ∇

اکنون برای سه نوع مشتق‌گیری برداری — یعنی گرادیان، دیورژانس، و تاو — که درباره آنها بحث کردیم، نمادگذاری دیگری را معرفی می‌کنیم. این نماد جدید، عملگر دیفرانسیلی برداری ∇ نام دارد و در دستگاه مختصات قائم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۴۶-۱)$$

دل، از یک طرف عملگر دیفرانسیلی است، زیرا تنها در جلو تابعی از (x, y, z) که بر روی آن عمل مشتق‌گیری انجام می‌شود، قرار می‌گیرد و از طرف دیگر بردار است زیرا از قوانین جبر برداری پیروی می‌کند.^۱ معادله‌های (۲۰-۱)، (۳۱-۱)، و (۴۴-۱)، برحسب دل، به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\text{grad} = \nabla,$$

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (20-1)$$

$$\text{div} = \nabla \cdot,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (31-1)$$

$$\text{curl} = \nabla \times,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (44-1)$$

عملیاتی که با دل بیان می‌شوند خود به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند. هر اتحادی که با استفاده از نمایش دکارتی قابل اثبات باشد، مستقل از دستگاه مختصات برقرار است. دل را می‌توان در دستگاه مختصات متعامد غیردکارتی (منحنی‌الخط) به صورتی مشابه با معادله (۴۶-۱) با اجزای فاصله مناسب بیان کرد، اما باید توجه کرد که بردارهای یکه در چنین دستگاه مختصاتی خود تابعی از مکان‌اند و باید از آنها مشتق گرفته شود.^۲ قضیه‌های انتگرالی مهم، بر طبق معادلات (۱۹-۱)، (۴۵-۱)، و (۳۷-۱)، عبارت‌اند از

$$\int_{a(C)}^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b d\varphi = \varphi \Big|_a^b = \varphi_b - \varphi_a \quad (47-1)$$

۱. همچنان که در پیوست ۱ نشان داده شده است، دل از لحاظ خواص تبدیل نیز بردار محسوب می‌شود.
۲. نتایج مربوط به مختصات استوانه‌ای و کروی در پیوست ۴ آمده است. برای یک بحث مقدماتی در این باره رجوع

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (۴۵-۱)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (۳۷-۱)$$

از این معادلات، انتگرال مشتق یک تابع در یک ناحیه n بعدی، برحسب مقادیر خود تابع در مرز $(n - 1)$ بعدی آن ناحیه، به ازای n برابر با ۱، ۲ و ۳، به دست می‌آید. چون عملگر دل از قواعد جبر برداری پیروی می‌کند، بهتر است آن را در محاسباتی که شامل آنالیز برداری اند به کار ببریم، و از این به بعد گرادیان، دیورژانس، و تاو را برحسب ∇ بیان می‌کنیم. همچنین لازم به تذکر است که ∇ یک عملگر خطی است و اگر a و b کمیتهای نرده‌ای ثابت باشند، داریم

$$\nabla(a\varphi + b\psi) = a\nabla\varphi + b\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$$

۸-۱ توسعه و تعمیمهای بیشتر

عملیات تعیین گرادیان، دیورژانس، و تاو را می‌توان به‌طور تکراری روی انواع مناسبی از میدانها، انجام داد. به‌عنوان مثال می‌توانیم دیورژانس گرادیان یک میدان نرده‌ای را حساب کنیم. در واقع، این عمل ترکیبی آنقدر اهمیت دارد که نام خاص لاپلاسی برای آن انتخاب شده است. با وجود این، گرفتن تاو دیورژانس یک میدان برداری بی‌معناست زیرا این عملیات مستلزم گرفتن تاو یک کمیته نرده‌ای است که تعریف نشده است. رویهمرفته پنج عملگر مرتبه دوم با معنی وجود دارد و حاصل دوتای آنها صفر است. به هر جهت، همگی این پنج عملگر مرکب در مطالعه میدانهای الکترومغناطیسی از اهمیت زیادی برخوردارند.

اولین عملگر مرکب به عملگر لاپلاسی معروف است که به‌صورت دیورژانس گرادیان یک میدان نرده‌ای تعریف می‌شود و معمولاً آن را با نماد ∇^2 نمایش می‌دهند

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

در مختصات قائم داریم

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۴۸-۱)$$

این عملگر در مبحث الکتروستاتیک بسیار پراهمیت است و در فصل ۳ به تفصیل درباره آن صحبت خواهیم کرد.

تاوگرادیان هر میدان نرده‌ای صفر است. صحت این حکم را می‌توان با نوشتن آن در دستگاه مختصات قائم به راحتی تحقیق کرد. اگر میدان نرده‌ای را با φ نمایش دهیم، آنگاه

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \dots = 0 \quad (49-1)$$

که درستی حکم اصلی را اثبات می‌کند. برحسب نمادگذاری عملگرها

$$\nabla \times \nabla = 0$$

دیورژانس هر تاو نیز برابر صفر است. درستی این مطلب در دستگاه مختصات قائم با نوشتن

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \dots = 0 \quad (50-1) \end{aligned}$$

مستقیماً ثابت می‌شود. دو عملیات امکان‌پذیر مرتبه دوم دیگر عبارت‌اند از تاو تاو و گرادیان دیورژانس یک میدان برداری. به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (51-1)$$

که در آن لاپلاسی هر بردار، برداری است که مؤلفه‌های قائم آن لاپلاسیهای مؤلفه‌های قائم بردار اصلی‌اند. در هر دستگاه مختصاتی غیر از مختصات قائم، لاپلاسی یک بردار با معادله (51-1) تعریف می‌شود.

راه دیگری که به کمک آن می‌توان کاربرد عملگرهای دیفرانسیلی برداری را تعمیم داد استفاده از آنها در حاصل ضربهای مختلف دو کمیت برداری و نرده‌ای است. ترکیب عملگرهای دیفرانسیلی حاصل ضربها به شش صورت مختلف امکان‌پذیر است، که در جدول ۱-۱ آمده‌اند. این اتحادها

جدول ۱-۱ اتحادهای دیفرانسیلی برداری

$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$	(۱-۱-۱)
$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$	(۲-۱-۱)
$\nabla \times \nabla \varphi = 0$	(۳-۱-۱)
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$	(۴-۱-۱)
$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi\nabla\psi$	(۵-۱-۱)
$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$	(۶-۱-۱)
$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{F}$	(۷-۱-۱)
$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$	(۸-۱-۱)
$\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi\nabla \times \mathbf{F}$	(۹-۱-۱)
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$	(۱۰-۱-۱)

را می‌توان در مختصات قائم به‌راحتی اثبات کرد و این خود تضمینی خواهد بود برای صحت اعتبار آنها در هر دستگاه مختصات دیگر. با به‌کار بردن مکرر اتحادهای جدول ۱-۱، مشتق حاصل ضرب بیش از دو تابع، یا مشتق درجه دوم یا بالاتر هر تابع را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین، جدول ۱-۱ کامل است. از روی قواعد جبر برداری و مشتق‌گیری عادی، فرمولهای این جدول را می‌توان به‌راحتی به خاطر سپرد. تنها مورد ابهام ممکن است در (۶-۱-۱) باشد که در آن $\mathbf{F} \cdot \nabla$ ظاهر می‌شود (نه $(\nabla \cdot \mathbf{F})$).

چند نوع تابع خاص غالباً در نظریهٔ الکترومغناطیس به‌کار می‌روند و در اینجا مشتقهای مختلف

آنها را بررسی می‌کنیم. برای تابع $\mathbf{F} = \mathbf{r}$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{G} \quad (52-1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{r} = 0$$

برای تابعی که تنها به فاصله $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ بستگی دارد

$$\varphi(r) \quad \text{یا} \quad \mathbf{F}(r) : \quad \nabla = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \quad (53-1)$$

برای تابعی که به شناسه نرده‌ای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ بستگی دارد، و در آن \mathbf{A} بردار ثابتی است

$$\varphi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{یا} \quad \mathbf{F}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) : \quad \nabla = \mathbf{A} \frac{d}{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})} \quad (54-1)$$

برای تابعی که به شناسه $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ بستگی دارد، و در آن \mathbf{r}' بردار ثابت است

$$\begin{aligned} \nabla &= \nabla_R \\ \nabla_R &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z} \end{aligned} \quad (55-1)$$

که در آن $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$. اگر \mathbf{r} به جای \mathbf{r}' بردار ثابت در نظر گرفته شود

$$\nabla = -\nabla' \quad (56-1)$$

که در آن

$$\nabla' = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}$$

چندین امکان برای بسط قضیه دیورژانس و قضیه استوکس وجود دارد. جالب‌ترین آنها قضیه گرین است که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (57-1)$$

این قضیه نتیجه کاربرد قضیه دیورژانس، در مورد بردار زیر است

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi$$

با قرار دادن \mathbf{F} در قضیه دیورژانس، به دست می‌آوریم

$$\int_V \nabla \cdot [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (58-1)$$

با استفاده از اتحاد مربوط به دیورژانس ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار (جدول ۱-۱) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \quad (59-1)$$

جدول ۲-۱ قضایای انتگرالی برداری

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, da = \oint_C \varphi \, d\mathbf{l} \quad (۱-۲-۱)$$

$$\int_V \nabla \varphi \, dv = \oint_S \varphi \mathbf{n} \, da \quad (۲-۲-۱)$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \quad (۳-۲-۱)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) \, da \quad (۴-۲-۱)$$

از ترکیب روابط (۵۸-۱) و (۵۹-۱) قضیه گرین به دست می‌آید. چند قضیه انتگرالی دیگر در جدول ۲-۱ آمده است.

در اینجا بحث کوتاه آنالیز برداری به پایان می‌رسد. برای حفظ اختصار، اثبات بسیاری از نتایج را به بخش مسائل محول کرده‌ایم. کوششی در جهت حصول به درجه اعلاى دقت نکرده‌ایم. روش ما مبتنی بر سودمندی نتایج بوده است: آنچه را که لازم داریم، توسعه داده و بقیه را حذف کرده‌ایم.

۹-۱ خلاصه مطالب

سه نوع مشتق‌گیری برداری مختلف گرادیان، دیورژانس و تاو را می‌توان با عملگر دیفرانسیلی برداری ∇ ، بیان کرد:

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

دل عملگری خطی است. از کاربرد مکرر آن، یا کاربرد آن در حاصل ضرب توابع، فرمولهایی

به دست می آید که می توان آنها را در مختصات قائم اثبات کرد؛ اما این فرمولها به دستگاه مختصات بستگی ندارند. این فرمولها را می توان به کمک قواعد جبر برداری و مشتق گیری عادی به خاطر سپرد. به خاطر سپردن مشتق چند تابع خاص سودمند است. مهم ترین قضایای انتگرالی در مورد مشتقها عبارتند از

$$\int_{a(C)}^b \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi \Big|_a^b$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{قضیه استوکس})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\text{قضیه دیورژانس})$$

اینها تعمیمهایی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال اند.

مسائل

۱-۱ بردارهای زیر از مبدأ مختصات تا نقاط A, B, C و D داده شده اند

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{k} - \mathbf{j}$$

نشان دهید که خطوط \overline{AB} و \overline{CD} موازی اند و نسبت طول آنها را پیدا کنید.

۲-۱ ثابت کنید که بردارهای زیر برهم عمودند:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

۳-۱ نشان دهید که بردارهای زیر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند:

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

۴-۱ با به توان دو رساندن طرفین معادله $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$ و تفسیر هندسی نتیجه حاصل "قانون کسینوسها" را ثابت کنید.

۵-۱ (الف) نشان دهید که

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} \cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta$$

بردارهای یگه‌ای هستند که در صفحه xy قرار دارند و با محور x زوایای α و β می‌سازند. (ب) به کمک ضرب نرده‌ای فرمول مثلثاتی $\cos(\alpha - \beta)$ را به دست آورید. ۶-۱ اگر \mathbf{A} برداری ثابت و \mathbf{r} برداری از مبدأ مختصات تا نقطه (x, y, z) باشد، نشان دهید که رابطه زیر، معادله یک صفحه است

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

۷-۱ با تعریفی که از \mathbf{A} و \mathbf{r} در مسئله ۶-۱ داده شد، ثابت کنید که رابطه زیر معادله یک کره است.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

۸-۱ با استفاده از ضرب نرده‌ای، کسینوس زاویه میان قطر حجمی مکعب با یکی از اضلاع آن را پیدا کنید.

۹-۱ با استفاده از ضرب برداری با $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$ ، قانون سینوسها را در مثلث ثابت کنید. ۱۰-۱ اگر \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، \mathbf{C} بردارهایی از مبدأ مختصات تا نقاط A ، B ، C باشند، نشان دهید که بردار زیر بر صفحه ABC عمود است

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

۱۱-۱ با جا نشانی مستقیم ثابت کنید که معادله (۱۵-۱) پاسخ معادله (۱۴-۱) است. [توجه کنید که معادله (۱۴-۱) مستلزم عمود بودن \mathbf{C} بر \mathbf{A} است.] ۱۲-۱ (الف) ثابت کنید هرگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$$

باشد بردارهای \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} نسبت به هم استقلال خطی ندارند. (ب) آیا بردارهای زیر به طور خطی از یکدیگر مستقل‌اند؟

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

۱۳-۱ الف) نشان دهید که بردار یکه عمود بر سطح $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ عبارت است از

$$\mathbf{n} = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|$$

(ب) برای بیضیوار زیر \mathbf{n} را پیدا کنید

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2$$

۱۴-۱ گرادینان φ را در مختصات استوانه‌ای، با توجه به رابطه $ds = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + dz\mathbf{k}$ پیدا کنید. باید توجه داشت که معانی r و θ در اینجا با آنچه در معادلات (۲۱-۱) و (۲۲-۱) آمده است، متفاوت‌اند. در مختصات کروی r بزرگی بردار شعاعی از مبدأ و θ زاویه قطبی است. در مختصات استوانه‌ای r فاصله عمودی از محور استوانه و θ زاویه سمتی حول این محور است.

۱۵-۱ با استفاده از تعریف دیورژانس رابطه‌ای برای $\nabla \cdot \mathbf{F}$ در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۱۶-۱ الف) دیورژانس و (ب) تاو بردار زیر را به دست آورید

$$\mathbf{i}(x^2 + yz) + \mathbf{j}(y^2 + zx) + \mathbf{k}(z^2 + xy)$$

۱۷-۱ آیا $\nabla \times \mathbf{F}$ برای هر تابع برداری الزاماً بر \mathbf{F} عمود است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱۸-۱ برای دو تابع نرده‌ای φ و ψ ثابت کنید که

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$$

۱۹-۱ اگر \mathbf{r} بردار از مبدأ مختصات تا نقطه (x, y, z) باشد، روابط زیر را ثابت کنید

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{u}$$

[توجه: \mathbf{u} می‌تواند هر برداری باشد.]

۲۰-۱ اگر \mathbf{A} برداری ثابت باشد نشان دهید که

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$$

۲۱-۱ اتحادهای (۱-۱-۷) و (۱-۱-۹) از جدول ۱-۱ را ثابت کنید.

۲۲-۱ اگر r بزرگی بردار از مبدأ تا نقطه (x, y, z) ، و $f(r)$ یک تابع اختیاری برحسب r باشد،

ثابت کنید که

$$\nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr}, \quad \nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = \mathbf{0}$$

۲۳-۱ ثابت کنید که

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dr}$$

۲۴-۱ ثابت کنید که اگر $\xi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ باشد، داریم

$$\nabla \varphi(\xi) = \mathbf{A} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

۲۵-۱ صحت معادله (۵۱-۱) را در مختصات قائم تحقیق کنید. در این مختصات $\nabla^2 \mathbf{F}$ به صورتی است که در متن کتاب تعریف شده است.

۲۶-۱ اتحادهای (۲-۲-۱) و (۴-۲-۱) در جدول ۲-۱ را ثابت کنید. [راهنمایی: از قضیه دیورژانس و یک یا چند اتحاد از جدول ۱-۱ استفاده کنید].

الکتروستاتیک

در این فصل موضوع الکتریسیته با مفاهیم تجربی بار و قانون حاکم بر نیروی موجود بین بارها (قانون کولن) معرفی شده است. ولی، ما با استفاده از ابزارهای ریاضی فصل ۱، قانون کولن را به طریق دیگری در یک فرمولبندی بسیار مستدل بیان می‌کنیم: فرمولبندی پتانسیل الکتریکی و قانون گاوس، که هر دو در تعمیمهای بعدی موضوع الکتریسیته بسیار مهم خواهند بود.

۲-۱ بار الکتریکی

الکتریسیته‌دار شدن اجسام بر اثر مالش اولین بار در دوران باستان مشاهده شد و تاریخ دقیق آن معلوم نیست؛ اما این یک تجربه عادی است که وقتی یک شانه کاتوچویی سخت را با پارچه پشمی مالش دهیم، شانه ریزه‌های کوچک کاغذ را جذب کند. در اثر مالش این دو جسم به یکدیگر (به عبارت دقیق‌تر، بر اثر ایجاد تماس نزدیک میان این دو جسم) هم کاتوچو و هم پشم خاصیت جدیدی پیدا می‌کنند؛ یعنی باردار می‌شوند. از این آزمایش برای معرفی مفهوم بار الکتریکی استفاده می‌شود. اما، در این فرایند بار آفریده نمی‌شود؛ بارکل، یا مجموع بارهای دو جسم هنوز همان قدر

است که پیش از الکتروسیسته دار شدن بوده است. اکنون با مطالعه فیزیک نوین می دانیم که ذره های باردار میکروسکوپی، یعنی الکترونها، از پشم به کاتوچو منتقل می شوند، و پشم دارای بار مثبت و شانه کاتوچویی دارای بار منفی می شود.

بار، یکی از خواص اساسی و سرشتی ذره های میکروسکوپی سازنده ماده است. در واقع، تمام مواد از پروتون، نوترون و الکترون درست شده اند که دو تا از این ذره ها بار دارند. گرچه در مقیاس میکروسکوپی، ماده از تعداد بسیار زیادی ذره باردار درست شده است، ولی در مشاهدات ماکروسکوپی نیروهای الکتریکی قوی وابسته به این ذره ها کاملاً از نظر پنهان است. دلیل این مطلب آن است که دو نوع بار مثبت و منفی وجود دارد و در یک قطعه ماده معمولی از هر دو نوع تقریباً به یک اندازه موجود است. بنابراین، از دیدگاه ماکروسکوپی لفظ بار به بار خالص یا بار اضافی اطلاق می شود. وقتی می گویم جسمی باردار است، منظور ما این است که جسم بار اضافی، یعنی الکترون (بار منفی) یا پروتون (بار مثبت) اضافی دارد. در این فصل و فصلهای بعد، معمولاً بار الکتریکی را با نماد q نشان می دهیم.

مشاهدات تجربی نشان می دهند که بار نه به وجود می آید و نه نابود می شود. بار کل دستگاه بسته تغییر نمی کند. از دیدگاه ماکروسکوپی بارها را می توان به راههای مختلف دسته بندی و ترکیب کرد، اما به هر حال می توان حکم کرد که در یک دستگاه بسته بار خالص بقا دارد.

۲-۲ قانون کولن

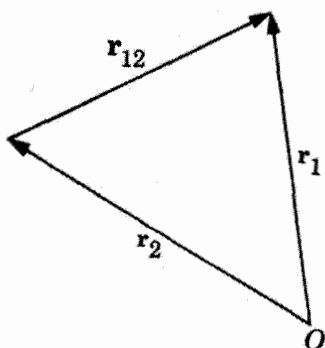
در اواخر قرن هجدهم علوم تجربی به درجه ای از رشد و پیشرفت رسیده بود که بتوان مشاهدات دقیقی درباره نیروهای میان بارهای الکتریکی به عمل آورد. نتایج این مشاهدات را، که در آن زمان فوق العاده مجادله آمیز بودند، می توان در سه حکم زیر خلاصه کرد:

۱. دو نوع و فقط دو نوع بار الکتریکی وجود دارد که اکنون به بارهای مثبت و منفی معروف اند.

۲. دو بار نقطه ای نیروهایی بر یکدیگر وارد می کنند؛ خط اثر این نیروها در امتداد خطی واقع است که آن دو بار را به هم وصل می کند و بزرگی این نیروها با عکس مجذور فاصله آنها متناسب است.

۳. این نیروها که با حاصل ضرب بارها نیز متناسب اند، برای بارهای همنام دافعه، و برای بارهای ناهمنام جاذبه هستند.

دو حکم آخر، به اضافه حکم اول به عنوان مقدمه، به افتخار شارل آگوستین کولن (۱۷۳۶-۱۸۰۶) از پیشروان الکتروسیسته در قرن هجدهم بود، به نام قانون کولن معروف اند.



شکل ۱-۲ بردار r_{12} که از انتهای بردار r_2 تا انتهای بردار r_1 امتداد دارد. واضح است که $r_{12} = -r_{21}$.

قانون کولن را برای بارهای نقطه‌ای می‌توان به کمک نمادهای برداری فصل اول به صورت خلاصه زیر فرمولبندی کرد

$$F_1 = C_u \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} \quad (۱-۲)$$

$$r_{12} = r_1 - r_2$$

که در آن F_1 نیروی وارد بر بار q_1 ، r_{12} بردار از q_2 به q_1 ، r_{12} بزرگی این بردار و C_u ضریب ثابت تناسب است که درباره آن بعداً به تفصیل صحبت خواهد شد. در معادله (۱-۲) با تقسیم بردار r_{12} بر بزرگی‌اش، بردار یکه‌ای در جهت r_{12} درست کرده‌ایم که به کرات از آن استفاده خواهیم کرد. اگر بخواهیم نیروی وارد بر q_2 را به دست آوریم، فقط لازم است شاخصهای پایین ۱ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنیم. درک این روش نمادگذاری مهم است، زیرا در آینده می‌توانیم به کمک آن متغیرهای میدان و چشمه را به‌طور جداگانه دنبال کنیم. شکل ۱-۲ بردار r_{12} را نسبت به مبدأ دلخواه O نشان می‌دهد.

قانون کولن در مورد بارهای نقطه‌ای به‌کار می‌رود. از لحاظ معنای ماکروسکوپی «بار نقطه‌ای» باری است که ابعاد فضایی آن در مقایسه با هر طول دیگری در مسئله مورد نظر بسیار کوچک است و ما نیز «بار نقطه‌ای» را به همین معنی به‌کار می‌بریم. تا آنجا که می‌دانیم، قانون کولن در مورد برهم‌کنشهای ذرات بنیادی، مانند پروتونها و الکترونها نیز صادق است. معادله (۱-۲) در مورد دفع الکتروستاتیکی میان هسته‌ها در فواصل بیش از 10^{-14} m نیز صدق می‌کند، در فواصل کمتر نیروهای پر قدرت و کوتاه‌برد هسته‌ای عمل می‌کنند.

معادله (۱-۲) یک قانون تجربی است. با وجود این شواهد نظری و تجربی هر دو نشان می‌دهند که قانون عکس مجذور فاصله دقیق است، یعنی نمای r_{12}^{-2} دقیقاً ۲ است. در یک تجربه

غیرمستقیم^۱ معلوم شده است که نمای $r_{۱۲}$ با ۲ نمی‌تواند بیش از یک در $۱۰^{۱۵}$ اختلاف داشته باشد.

مقدار ثابت C_u در معادله (۱-۲) به بحث مختصری نیازمند است، زیرا دستگاه یکاها توسط آن مشخص می‌شود. فرض کنید یکاهای نیرو و طول همانهایی هستند که به یکی از دستگاههای متداول در مکانیک تعلق دارند؛ در اینجا مستقیم‌ترین روش آن است که C_u را برابر با ۱ قرار دهیم و یکای بار الکتریکی را طوری انتخاب کنیم که معادله (۱-۲) با تجربه سازگار باشد. این روشی است که در دستگاه یکاهای گاوسی به‌کار می‌رود. از روشهای دیگری نیز می‌توان استفاده کرد و احتمالاً مزایایی هم خواهند داشت؛ مثلاً می‌توان یکای بار را از قبل مشخص کرد. در سال ۱۹۰۱ جورجی نشان داد که تمام یکاهای معمولی الکتریکی نظیر آمپر، ولت، اهم، هنری و مانند آنها را می‌توان با یکی از دستگاه یکاهای مکانیکی (مثلاً با دستگاه mks یا متر-کیلوگرم-ثانیه) ترکیب کرد و دستگاه یکاهایی برای کلیه مسائل الکتریکی و مغناطیسی تشکیل داد. مزیت این دستگاه آن است که نتایج محاسبات مدارهای الکتریکی برحسب همان یکاهای الکتریکی که در آزمایشگاهها به‌کار می‌روند، به‌دست می‌آید. در این کتاب ما دستگاه یکاهای گویاشده mks یا دستگاه جورجی را به آن صورتی که به نام SI (دستگاه بین‌المللی) معروف است به‌کار خواهیم برد. چون در این دستگاه q برحسب کولن (C)، r برحسب متر و F برحسب نیوتون (N) اندازه‌گیری می‌شود، واضح است که C_u باید ابعاد $N \cdot m^2 / C^2$ را داشته باشد.

اندازه یکای بار در دستگاه SI، یعنی کولن، با آزمایشهای مغناطیسی تعیین می‌شود. با انتخاب این دستگاه یکاها نتیجه می‌شود: $C_u = 8.9875 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2$. برای آنکه بعضی از معادلات دیگر ساده شوند، به جای ثابت C_u مقدار به ظاهر پیچیده $1/4\pi\epsilon_0$ را قرار می‌دهیم. ثابت ϵ_0 که گذردهی خلأ نام دارد، کراراً در معادلات ظاهر خواهد شد و مقدار عددی آن برابر است با $8.854 \times 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2$.

بنابراین می‌توان قانون کولن را برای نیروی بین دو بار نقطه‌ای در دستگاه mks به صورت زیر نوشت

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} \quad (۱-۲الف)$$

1. E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, *Physical Review Letters*, vol. 26, p. 721 (1971).

قبلاً نیز آزمایشهای مشابهی انجام شده است. ماکسول نمای ۲ را با تقریب یک در ۲۰۰۰۰ محرز ساخت.

۲. شاید به خاطر سپردن مقدار تقریبی $C_u \approx 9 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2$ خیلی ساده‌تر باشد.

در پیوست ۳ ما تعاریف کولن، آمپر، تراوایی و گذردهی خلاً را به صورتی منطقی به یکدیگر و به سرعت نور مربوط کرده‌ایم. چون فرمولبندی منطقی این تعاریف به شناخت پدیده‌های مغناطیسی و انتشار امواج الکترومغناطیسی احتیاج دارد، فعلاً در بحث آنها وارد نمی‌شویم. در پیوست ۳ ما دربارهٔ دستگاه گاوسی هم بحث کرده‌ایم. تا فصل ۴، هر فرمولی را می‌توانیم به راحتی با قرار دادن $1/4\pi$ به جای ϵ_0 به فرمولی در یکاهای گاوسی تبدیل کنیم.

اگر بیش از دو بار نقطه‌ای وجود داشته باشند، نیروهای متقابل را با به کار بردن مکرر معادله (۲-۱) به دست می‌آوریم. مخصوصاً اگر دستگاهی با N بار داشته باشیم، نیروی وارد بر بار i ام از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \quad (2-2)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

که در آن جمع طرف راست مربوط است به تمام بارها به استثنای بار i ام. معادله (۲-۲) همان اصل برهم‌نهی نیروهاست که می‌گوید کل نیروی وارد بر یک جسم برابر است با حاصل جمع برداری تک تک نیروهای وارد بر آن.

برهم‌کنش یک بار نقطه‌ای با یک توزیع پیوستهٔ بار، تعمیم ساده‌ای است از ایدهٔ N بار نقطه‌ای در حال برهم‌کنش. ما این پیکربندی را عمداً انتخاب می‌کنیم تا از برخی اشکالات موجود در بررسی برهم‌کنش دو توزیع بار پیوسته احتراز کنیم.

قبل از اینکه در این بحث بیشتر پیش برویم، باید مفهوم بار پیوسته را بررسی کنیم. می‌دانیم که بار الکتریکی به صورت مضربهایی از یک بار پایه، یعنی بار الکترون، یافت می‌شود. به عبارت دیگر، اگر هر بار الکتریکی را به دقت مطالعه کنیم معلوم می‌شود که مقدار آن مضرب درستی است از مقدار بار الکترون. در مطالعات فیزیک ماکروسکوپی، گسستگی بار هیچ اشکالی ایجاد نمی‌کند، زیرا مقدار بار الکترون 1.6×10^{-19} است، که مقداری فوق‌العاده کوچک است. کوچکی این واحد مبنا بدین معنی است که بارهای ماکروسکوپی بدون استثنا از تعداد فوق‌العاده زیادی بار الکترونی تشکیل شده‌اند؛ بنابراین، در یک توزیع بار ماکروسکوپی، هر جزء بسیار کوچک حجم، تعداد بسیار زیادی الکترون دارد.

می‌توان توزیع بار را با یک تابع چگالی بار توصیف کرد که تعریف آن عبارت است از حد بار در واحد حجم، وقتی که حجم بی‌نهایت کوچک شود. با وجود این، در کاربرد چنین تعریفی در مورد مسائل اتمی باید دقت کرد، زیرا در این موارد فقط تعداد کمی الکترون دخالت دارند و

فرایند محاسبه حد بی‌معنی است. چنانچه این موارد اتمی را کنار بگذاریم، می‌توانیم فرض کنیم که هر قطعه از بار را می‌توان بی‌نهایت مرتبه تقسیم و سپس توزیع بار را به کمک توابع نقطه‌ای زیر توصیف کرد:

چگالی بارِ حجمی که با رابطه

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (۳-۲)$$

و چگالی بارِ سطحی که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (۴-۲)$$

از آنچه درباره q گفته شد معلوم می‌شود که ρ و σ چگالیهای بار خالص یا بار اضافی‌اند. لازم به یادآوری است که در مواد جامد نوعی حتی چگالی بار بسیار بزرگ ρ ، تنها با تغییر چگالی موضعی الکترون به اندازه تقریباً یک قسمت در 10^9 قسمت به دست می‌آید.

اگر بار در حجم V با چگالی حجمی ρ ، و در روی سطح S که حجم V را محصور می‌کند با چگالی سطحی σ توزیع شده باشد، آنگاه نیروی وارد از طرف این توزیع بار بر بار نقطه‌ای q واقع در نقطه \mathbf{r} با استفاده از معادله (۲-۲)، و پس از قرار دادن $\rho_j dv'_j$ (یا $\sigma_j da'_j$) به جای q_j و محاسبه حد به دست می‌آید:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (۵-۲)$$

در این معادله متغیر \mathbf{r}' برای تعیین مکان نقطه‌ای در درون توزیع بار به کار رفته است، یعنی این متغیر نقش نقطه چشمه \mathbf{r}_j را در معادله (۲-۲) به عهده دارد. در نظر اول ممکن است چنین به نظر برسد که اگر نقطه \mathbf{r} در داخل توزیع بار باشد، اولین انتگرال معادله (۵-۲) باید واگرا شود، اما این‌طور نیست. سهم ناحیه انتگرال‌گیری در نزدیکی \mathbf{r} قابل چشمپوشی است و در نتیجه انتگرال خوش‌رفتار است (مسئله ۵-۲).

واضح است که نیروی وارد بر بار q که با معادله (۵-۲) داده شده است، با مقدار q متناسب است و همین مطلب نیز در مورد معادله (۲-۲) صادق است. این نکته سبب می‌شود که ما یک

میدان برداری مستقل از بار q ، یعنی نیروی وارد بر واحد بار را تعریف کنیم. این میدان برداری که به میدان الکتریکی معروف است، در بخش زیر به تفصیل بررسی می‌شود.

۳-۲ میدان الکتریکی

میدان الکتریکی در هر نقطه عملاً به صورت زیر تعریف می‌شود: حد نسبت نیروی وارد بر بار آزمون که در آن نقطه قرار داده شود به اندازهٔ این بار، هنگامی که مقدار بار آزمون به سمت صفر میل کند. نماد متداول برای میدان الکتریکی \mathbf{E} است.

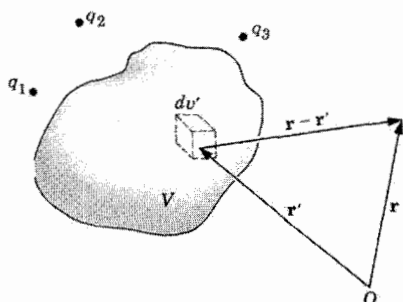
با نمادگذاری برداری، تعریف \mathbf{E} به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}q}{q} \quad (۶-۲)$$

در تعریف \mathbf{E} عمل حدگیری به این دلیل منظور می‌شود که اطمینان حاصل شود بار آزمون بر توزیع بار مولد \mathbf{E} اثر نمی‌گذارد. مثلاً، اگر بار مثبت روی سطح جسم رسانایی توزیع شده باشد (رسانا جسمی است که در آن بار به آزادی حرکت می‌کند)، آوردن بار آزمون به نزدیکی این رسانا موجب می‌شود که بار به صورت جدیدی روی رسانا توزیع شود. اگر میدان الکتریکی را به کمک نسبت نیرو به بار برای یک بار آزمون متناهی محاسبه کنیم، میدان حاصل به توزیع جدید بار مربوط می‌شود نه به توزیع بار اصلی.

در حالت خاص وقتی یکی از بارهای موجود در توزیع بار را بتوان به عنوان بار آزمون در نظر گرفت، عمل حدگیری دیگر ضرورتی نخواهد داشت. در این حالت میدان الکتریکی در محل بار آزمون میدانی است که سایر بارهای این توزیع بار تولید می‌کنند. در این حالت هیچ‌گونه تغییری در توزیع بار ایجاد نمی‌شود، زیرا توزیع بار مناسب همان است که تحت تأثیر تمامی توزیع بار، و از جمله خود باری که به عنوان بار آزمون انتخاب شده است، به وجود می‌آید. در برخی موارد خاص دیگر، مخصوصاً وقتی که توزیع بار مشخص شده باشد، نیرو با اندازهٔ بار آزمون متناسب خواهد بود. در این موارد نیز محاسبهٔ حد غیرضروری است؛ اما اگر تردیدی وجود داشته باشد، همیشه برای حصول اطمینان بهتر است که از عمل حدگیری استفاده شود.

معادله‌های (۲-۲) و (۵-۲) روش ساده‌ای برای محاسبهٔ میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار مفروض به دست می‌دهند (به شکل ۲-۲ مراجعه کنید). فرض کنید که توزیع بار عبارت باشد از N بار نقطه‌ای q_1, q_2, \dots, q_N که به ترتیب در نقاط $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ قرار دارند و یک توزیع حجمی بار با چگالی بار $\rho(\mathbf{r}')$ در حجم V ، و یک توزیع سطحی بار که با چگالی سطحی



شکل ۲-۲ شکل هندسی \mathbf{r} ، \mathbf{r}' و $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ بردار \mathbf{r} نقطه مشاهده (نقطه میدان) را نشان می‌دهد، و گستره \mathbf{r}' سرتاسر توزیع بار را از جمله تمام بارهای نقطه‌ای را شامل می‌شود.

$\sigma(\mathbf{r}')$ در روی سطح S مشخص شده است. اگر بار آزمون q در نقطه \mathbf{r} قرار داشته باشد، نیروی وارد بر آن از طرف این توزیع بارهای معلوم عبارت است از

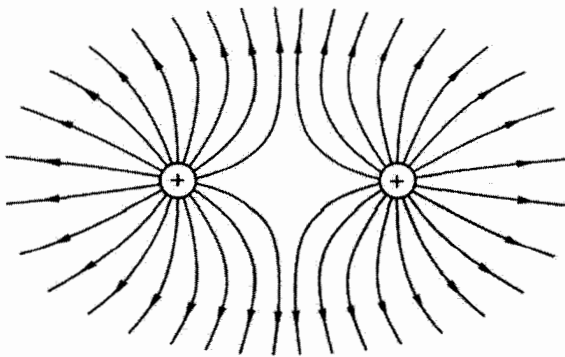
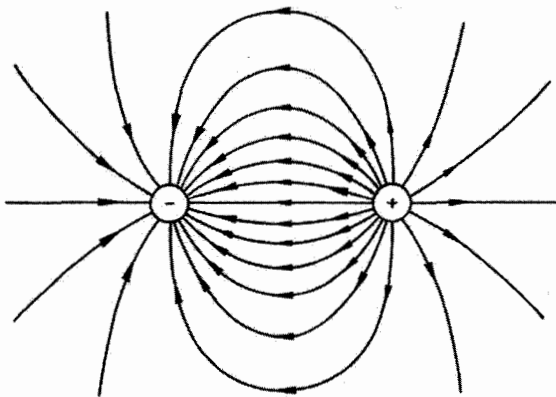
$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (۷-۲)$$

میدان الکتریکی در \mathbf{r} عبارت است از حد نسبت این نیرو بر مقدار بار آزمون q . چون این نسبت مستقل از q است، میدان الکتریکی در \mathbf{r} عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (۸-۲)$$

معادله (۸-۲) خیلی کلی است. در اغلب موارد به یک یا چند جمله از آن احتیاجی نخواهد بود.

کمیتی را که هم‌اکنون تعریف کردیم، می‌توان در هر نقطه از فضا در نزدیکی یک دستگاه بار یا یک توزیع بار محاسبه کرد. بدین ترتیب $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری نقطه‌ای یا یک میدان برداری است. این میدان چند خاصیت ریاضی جالب توجه دارد که ما آنها را در بخشهای بعد از این و در فصل بعد بررسی خواهیم کرد. مایکل فاراده (۱۸۶۷-۱۷۹۱) برای کمک به تجسم ساختار میدان الکتریکی وابسته به یک توزیع بار خاص مفهوم خطوط نیرو را مطرح کرد. خط نیرو یک



شکل ۲-۳ ترسیم میدان الکتریکی به کمک خطوط نیرو.

خط (یا یک منحنی) فرضی است که طوری رسم می‌شود که جهت آن (یا مماس بر آن) در هر نقطه معرف جهت میدان الکتریکی در آن نقطه است.

به عنوان مثال، ساختار میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای مثبت منفرد q_1 را در نظر بگیرید. خطوط نیرو، خطوطی شعاعی‌اند که از q_1 به طور شعاعی خارج می‌شوند. به همین طریق، خطوط نیروی مربوط به یک بار نقطه‌ای منفی منفرد نیز خطوطی شعاعی‌اند، ولی در این مورد جهت خطوط به سمت داخل (یعنی به سمت بار منفی) است. این دو مثال خیلی ساده‌اند ولی به هر حال خاصیت مهمی از خطوط میدان را نشان می‌دهند: خطوط نیرو به چشمه‌های میدان الکتریکی، یعنی به بارهایی که میدان را تولید می‌کنند، ختم می‌شوند.

شکل ۲-۳ دو میدان الکتریکی ساده را که به کمک خطوط نیرو رسم شده‌اند، نشان می‌دهد.

۴-۲ پتانسیل الکتروستاتیکی

همان‌طور که در فصل ۱ دیدیم، اگر تاو یک بردار صفر شود، آن بردار را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع نرده‌ای نوشت. میدان الکتریکی‌ای که با معادله (۸-۲) داده شده است، واجد این شرط است. باید توجه کرد که محاسبه تاو معادله (۸-۲) مستلزم مشتق‌گیری نسبت به r است. این متغیر در معادله فقط در توابعی به صورت $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ ظاهر می‌شود؛ پس کافی است که نشان دهیم توابعی که به این صورت‌اند، تاوشان صفر است. با استفاده از فرمول تاو حاصل ضرب (ضرب بردار در کمیت نرده‌ای) از جدول ۱-۱ به دست می‌آید

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}'] \quad (9-2)$$

یک محاسبه مستقیم (مسئله ۱۹-۱) نشان می‌دهد

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \quad (10-2)$$

و نیز مسئله (۲۲-۱)

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (11-2)$$

این نتایج، همراه با در نظر گرفتن اینکه حاصل ضرب برداری هر بردار در یک بردار موازی با آن صفر است، برای اثبات رابطه زیر کافی است

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (12-2)$$

چون سهم هر جمله از معادله (۸-۲) در ایجاد میدان الکتریکی به صورت تابع $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ است، بنابراین ثابت می‌شود که تاو میدان الکتریکی صفر است. معادله (۱۲-۲) نشان می‌دهد که یک تابع نرده‌ای وجود دارد که گرادیان آن با میدان الکتریکی برابر است. آنچه باید انجام داد، پیدا کردن این تابع است. یعنی، اکنون می‌دانیم که تابعی وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (13-2)$$

اما هنوز باید شکل این تابع φ را پیدا کنیم. بنا به قرارداد، علامت منها را در معادله (۱۳-۲) منظور می‌کنند و تابع φ را تابع پتانسیل الکتروستاتیکی می‌نامند.

پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای q_1 به صورت تابع زیر است

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (14-2)$$

که صحت آن با مشتق‌گیری مستقیم به راحتی قابل تحقیق است. بنابراین، پتانسیلی که میدان الکتریکی (۸-۲) را به وجود می‌آورد به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \end{aligned} \quad (۱۵-۲)$$

که صحت آن را هم با مشتق‌گیری مستقیم می‌توان تحقیق کرد.

شاید این طور به نظر برسد که معادله‌های (۱۴-۲) و (۱۵-۲) را به نحوی نسبتاً دلخواه به دست آورده‌ایم. اما چون تنها چیزی که از φ می‌خواهیم این است که در معادله (۱۳-۲) صدق کند، و چون صحت این مطلب هم مستقیماً تحقیق شده است، بنابراین روش پیدا کردن φ اهمیت چندانی ندارد.

به مجرد آنکه موجودیت پتانسیل الکتروستاتیکی φ محرز شد، می‌توان آن را مستقیماً به دست آورد. چون می‌دانیم φ وجود دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' \quad (۱۶-۲)$$

که در آن ref معرف نقطه مرجعی است که در آن مقدار φ برابر صفر است. بر طبق تعریف گرایان

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = d\varphi \quad (۱۷-۲)$$

با قرار دادن معادله (۱۷-۲) در معادله (۱۶-۲)، انتگرال سمت راست معادله (۱۶-۲) به انتگرال یک دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شود که به راحتی قابل محاسبه است. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$- \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}' = -\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (۱۸-۲)$$

که در واقع معکوس معادله (۱۳-۲) است. چنانچه میدان الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای را در معادله (۱۸-۲) به کار ببریم و نقطه مرجع یا حد پایین انتگرال را در بی‌نهایت فرض کنیم، و مقدار پتانسیل را در آنجا صفر اختیار کنیم، نتیجه می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۱۹-۲)$$

این معادله فقط حالت خاصی از معادله (۲-۱۴) است، یعنی حالتی که در آن \mathbf{r}_1 برابر صفر است. با اینکه این اثبات را برای به دست آوردن معادله (۲-۱۵) نیز می‌توان به کار برد، ولی این روش بسیار پیچیده‌تر از آن است که در اینجا توضیح داده شود.

جنبه جالب و مفید دیگر پتانسیل الکتروستاتیکی رابطه نزدیک آن با انرژی پتانسیل وابسته به نیروی الکتروستاتیکی پایستار است. انرژی پتانسیل وابسته به هر نیروی پایستار دلخواه به صورت زیر است

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2-20)$$

که در آن $U(\mathbf{r})$ انرژی پتانسیل نقطه \mathbf{r} است نسبت به مرجعی که انرژی پتانسیل آن را به دلخواه برابر با صفر گرفته‌ایم. چون در مورد الکتروستاتیک $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ، نتیجه می‌شود که اگر نقطه مرجع برای پتانسیل الکتروستاتیکی و برای انرژی پتانسیل یکی فرض شود، آنگاه پتانسیل الکتروستاتیکی درست برابر با انرژی پتانسیل در واحد بار الکتریکی خواهد بود. گاهی از این ایده برای معرفی پتانسیل الکتروستاتیکی استفاده می‌شود، ولی به نظر ما با تعریف پتانسیل الکتروستاتیکی با معادله (۲-۱۳) اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی در محاسبه میدان الکتروستاتیکی تأکید می‌شود. البته شکی نیست که هر دو روش در تحلیل نهایی یکسان‌اند.

سودمندی پتانسیل الکتروستاتیکی در محاسبه میدانهای الکتریکی از مقایسه معادلات (۲-۸) و (۲-۱۵) معلوم می‌شود. معادله (۲-۸) یک معادله برداری است و برای پیدا کردن میدان الکتریکی با استفاده از آن باید برای هر جمله سه مجموع، یا سه انتگرال را محاسبه کرد. حتی در ساده‌ترین موارد، این روش مشکل و پردردسر است و در برخی موارد محاسبه انتگرالها تقریباً کاری است ناممکن. از سوی دیگر، معادله (۲-۱۵) یک معادله نرده‌ای است و هر جمله آن شامل تنها یک مجموع یا یک انتگرال است. به علاوه، تمام مخرجها در این معادله به صورت $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ اند که محاسبه انتگرالها را در مقایسه با مخرجهای معادله (۲-۸) ساده می‌کند. این ساده کردن گاهی به اندازه تفاوت میان محاسبه کردن یا محاسبه نکردن انتگرالهاست. ممکن است ایراد گرفته شود که بعد از محاسبه انتگرالهای معادله (۲-۱۵) هنوز لازم است که از نتیجه حاصل مشتق گرفته شود؛ ولی با توجه به این نکته که اگر تابعی مشتق داشته باشد، مشتق‌گیری از آن همیشه ممکن است و در واقع مشتق‌گیری عموماً از انتگرال‌گیری به مراتب راحت‌تر است، به این ایراد پاسخ داده می‌شود. در فصل ۳ خواهیم دید که در مسائلی که در آنها توزیع بار الکتریکی مشخص نیست، بلکه باید آن را در جریان مسئله پیدا کرد، اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی حتی بیشتر خواهد بود.

در دستگاه mks یکای انرژی نیوتن-متر یا ژول است. یکای پتانسیل ژول بر کولن است، اما به

دلیل آن که این یکا زیاد به کار می‌رود، نام ویژه ولت (V) را به آن داده‌اند. یکای میدان الکتریکی نیوتون بر کولن یا ولت بر متر است.

۲-۵ رساناها و عایقها

تا آنجا که به رفتار الکتروستاتیکی مربوط می‌شود، مواد را می‌توان به دو رده تقسیم کرد: رساناهای الکتریکی و عایقها (دی‌الکتریکها). رساناها، مثل فلزها، موادی هستند که تعداد بسیار زیادی حامل بار اساساً آزاد دارند. این حاملهای بار (که در اکثر موارد الکترون‌اند) می‌توانند در سرتاسر جسم رسانا آزادانه حرکت کنند. میدانهای الکتریکی (حتی بی‌نهایت کوچک) بر این حاملها اثر می‌کنند و مادامی که میدان بر آنها اثر می‌کند، به حرکت خود ادامه می‌دهند. وقتی به کمک یک چشمه انرژی خارجی میدان الکتریکی پایا در رسانا برقرار می‌شود، این حاملهای آزاد جریان الکتریکی را حمل می‌کنند.

دی‌الکتریکها موادی هستند که در آنها تمام ذرات باردار به نحوی نسبتاً محکم به مولکولهای تشکیل‌دهنده این مواد مقید شده‌اند. این ذرات باردار ممکن است تحت تأثیر میدان الکتریکی اندکی جابه‌جا شوند، اما از مجاورت مولکولهایی که به آنها مقیدند دور نمی‌شوند. به بیان دقیق‌تر، این تعریف فقط در مورد یک دی‌الکتریک ایده‌آل، یعنی دی‌الکتریک که در حضور میدان الکتریکی خارجی به هیچ وجه رسانایی از خود نشان نمی‌دهد، صادق است. دی‌الکتریکهای فیزیکی واقعی، رسانایی ضعیفی از خود نشان می‌دهند، هر چند در یک دی‌الکتریک واقعی معمولی، رسانایی تقریباً 10^{20} مرتبه از رسانایی در یک رسانای خوب کمتر است. چون 10^{20} ضریب فوق‌العاده بزرگی است، بنابراین غالباً کافی است بگوییم که دی‌الکتریکها نارسانا هستند.

خواص الکتریکی برخی مواد (نیمرساناها و الکترولیتها) در حد فاصل میان رساناها و دی‌الکتریکها قرار دارد. رفتار این مواد در یک میدان الکتریکی ایستا خیلی به رفتار اجسام رسانا شبیه است. اما پاسخ‌گذاری آنها از پاسخ رساناها اندکی کندتر است (به بیان دیگر، برای این مواد مدت بیشتری طول می‌کشد تا در یک میدان الکتریکی ایستا به حالت تعادل برسند).

در این فصل و نیز در چهار فصل بعد رفتار مواد در میدانهای الکتروستاتیکی را بررسی می‌کنیم. قطبش دی‌الکتریکها، هر چند در اصل پدیده ساده‌ای است، ولی اثرات نسبتاً پیچیده‌ای ایجاد می‌کند. بنابراین، بحث درباره آن را تا فصل ۴ به تأخیر می‌اندازیم. اما رساناها را می‌توان برحسب مفاهیمی که تاکنون بسط داده‌ایم، مطالعه کرد.

چون بار می‌تواند آزادانه در جسم رسانا حرکت کند، حتی تحت تأثیر میدانهای الکتریکی بسیار ضعیف نیز حاملهای بار (الکترونها یا یونها) آنقدر به حرکت خود ادامه می‌دهند تا به موضعی

برسند که در آنجا برآیند نیروهای وارد بر آنها صفر شود. وقتی این ذرات به حال سکون رسیدند، در داخل جسم میدان الکتریکی وجود ندارد. این بدان علت است که داخل جسم هیچ‌گاه از تجمع حاملهای بار تهی نمی‌شود، و چنانچه میدانی وجود داشته باشد، حاملهای بار به حرکت خود ادامه خواهند داد. از این رو، در شرایط ایستا، میدان الکتریکی در درون جسم رسانا صفر است. به‌علاوه، چون در درون جسم رسانا $E = 0$ است، پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط درون جسم رسانا یکسان است. به عبارت دیگر، در شرایط ایستا، هر جسم رسانایی یک ناحیه هم‌پتانسیل را در فضا تشکیل می‌دهد.

۶-۲ قانون گاوس

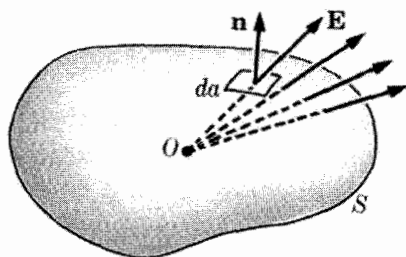
میان انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی بر روی یک سطح بسته و مقدار کل بارهای درون این سطح رابطه مهمی وجود دارد. اکنون این رابطه را که به قانون گاوس معروف است، به تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. میدان الکتریکی‌ای که بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات در نقطه \mathbf{r} تولید می‌کند، برابر است با

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (21-2)$$

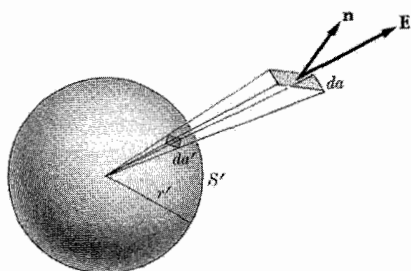
اگر انتگرال سطحی مؤلفه عمودی این میدان الکتریکی را بر روی سطح بسته‌ای (نظیر سطحی که در شکل ۴-۲ نشان داده شده است) که مبدأ مختصات و در نتیجه بار q را در بر می‌گیرد حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \, da \quad (22-2)$$

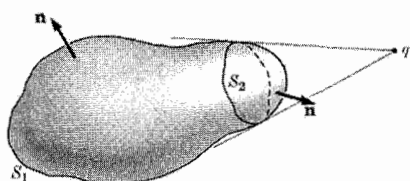
مقدار $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} \, da$ تصویر سطح da است بر صفحه‌ای عمود بر \mathbf{r} . از تقسیم تصویر سطح da بر r^2 زاویه فضایی‌ای که da را در بر می‌گیرد به دست می‌آید. این زاویه فضایی را با $d\Omega$ نشان



شکل ۴-۲ سطح بسته فرضی S که یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات را در بر گرفته است.



شکل ۵-۲ ترسیم سطح کروی S' برای کمک به محاسبه زاویه فضایی ای که سطح da را در بر می‌گیرد.



شکل ۶-۲ سطح بسته S را می‌توان به دو سطح S_1 و S_2 تقسیم کرد، به طوری که هر یک از آن دو با زاویه فضایی یکسانی به رأس q فرا گرفته شوند.

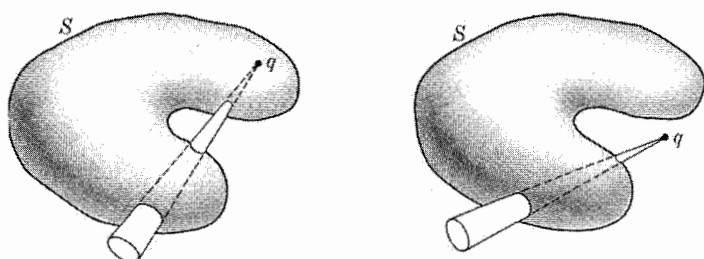
می‌دهیم. به طوری که از شکل ۵-۲ پیداست، زاویه فضایی ای که da را در بر می‌گیرد، برابر است با زاویه فضایی ای که da' را در بر می‌گیرد. در اینجا da' جزئی از سطح کره S' ، به شعاع r' و به مرکز مبدأ مختصات است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} da' = 4\pi$$

که نشان می‌دهد در حالت خاصی که در بالا توصیف شد، نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (۲۳-۲)$$

اگر q در خارج از سطح S باشد، از شکل ۶-۲ پیداست که می‌توان S را به دو ناحیه S_1 و S_2 تقسیم کرد، به طوری که هر یک از آن دو نسبت به بار نقطه‌ای q با زاویه فضایی یکسانی فرا گرفته شوند. اما برای S_2 جهت بردار عمود بر سطح به سمت q است، در حالی که برای S_1 به سمت دور از q است. بنابراین، در انتگرال سطحی سهمهای مربوط به S_1 و S_2 مساوی ولی مختلف‌العلامه‌اند، و در نتیجه مقدار کل انتگرال صفر می‌شود. پس اگر سطحی بار نقطه‌ای q را احاطه کند، انتگرال سطحی مؤلفه عمودی میدان الکتریکی برابر q/ϵ_0 است، در حالی که اگر q در خارج از سطح قرار گیرد، مقدار این انتگرال سطحی صفر خواهد بود. حکم بالا در مورد هر نوع سطح بسته‌ای، حتی سطوح کاو، نیز صادق است. شکل ۷-۲ صحت این گفته را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۷ جزء زاویه فضایی که سطح S را بیش از یک بار قطع می‌کند.

اگر سطح بسته S چندین بار نقطه‌ای q_1, q_2, \dots, q_N را در برگیرد، آنگاه میدان الکتریکی کل توسط جمله اول معادله (۲-۸) داده می‌شود. هر یک از بارها یک زاویه فضایی کامل (4π) را در بر می‌گیرد و بنابراین معادله (۲-۲۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (2-24)$$

این نتیجه را می‌توان به راحتی به توزیع پیوسته‌ای از بارها، که با یک چگالی بار مشخص شده است، نیز تعمیم داد. اگر هر جزء $\rho \, dv$ از بار را به منزله یک بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، در این صورت سهم چنین باری در انتگرال سطحی مؤلفه عمودی میدان الکتریکی روی هر سطح بسته برابر است با $\rho \, dv / \epsilon_0$ ، مشروط بر آنکه این بار در داخل سطح قرار داشته باشد. بنابراین، انتگرال سطحی کل مساوی است با جمع کلیه جمله‌هایی بدین صورت که از بارهای واقع در داخل سطح ناشی می‌شوند.

اگر S سطح بسته‌ای باشد که حجم V را در برگیرد، داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (2-25)$$

که به قانون گاوس معروف است.

جمله سمت چپ، یعنی انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی بر روی سطح S را، گاهی شار میدان الکتریکی از سطح S می‌نامند.

قانون گاوس را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس به صورت دیگری نیز بیان کرد. قضیه

دیورژانس، معادله (۱-۳۷)، حاکی از آن است که

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$$

اگر این قضیه را در مورد انتگرال سطحی مؤلفه عمودی \mathbf{E} به کار ببریم، نتیجه می شود

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv \quad (2-26)$$

و با قرار دادن در معادله (۲-۲۵) نتیجه خواهد شد

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (2-27)$$

معادله (۲-۲۷) باید برای همه حجمها، یعنی برای هر حجم V که انتخاب می کنیم، صادق باشد. این مطلب تنها در صورتی صادق است که انتگرالده های طرف راست و طرف چپ این معادله برابر باشند. بنابراین، برای آنکه معادله (۲-۲۷) برای هر حجمی که انتخاب شود معتبر باشد، باید داشته باشیم

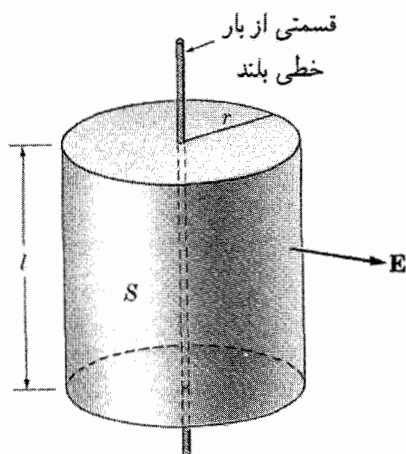
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2-28)$$

این نتیجه را می توان شکل دیفرانسیلی قانون گاوس در نظر گرفت.

۷-۲ کاربرد قانون گاوس

معادله (۲-۲۸)، یا به بیان دقیق تر، شکل تعمیم یافته ای از آن، که در فصل ۴ به دست خواهیم آورد، یکی از معادلات اساسی الکتریسیته و مغناطیس است. قانون گاوس در این نقش مهم است، ولی اهمیت آن به همین جا ختم نمی شود بلکه فایده عملی نیز دارد. جنبه عملی این قانون به طور عمده در آن است که در وضعیتهایی که تقارن کافی دارند، روش بسیار راحتی برای محاسبه میدان الکتریکی فراهم می آورد. به عبارت دیگر، در برخی وضعیتهای بسیار متقارن که از لحاظ فیزیکی حائز اهمیت اند، میدان الکتریکی را می توان به جای انتگرالهایی که در بالا داده شد یا روشهای فصل ۳، با استفاده از قانون گاوس محاسبه کرد. محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گاوس بسیار راحت است.

برای آنکه بتوانیم از قانون گاوس در محاسبه میدان الکتریکی استفاده کنیم، باید آن چنان سطح بسته ای انتخاب کنیم که مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در تمام نقاط آن سطح صفر یا یک تک مقدار ثابت باشد. به عنوان مثال، یک بار خطی بسیار بلند را که چگالی بار آن در واحد



شکل ۸-۲ سطح استوانه‌ای که به کمک قانون گاوس برای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک بار خطی بلند به کار می‌رود.

طول λ است، (شکل ۸-۲)، در نظر می‌گیریم. تقارن وضعیت به‌وضوح نشان می‌دهد که میدان الکتریکی شعاعی است و به مکان در امتداد سیم و نیز به مکان زاویه‌ای حول سیم بستگی ندارد. این مطالب سبب می‌شوند تا سطحی مانند شکل ۸-۲ را انتخاب کنیم. محاسبه انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی برای این سطح آسان است. دو سطح مستدیر در دو انتها در مقدار انتگرال سهمی ندارند، زیرا میدان الکتریکی با این سطوح موازی است. چون \mathbf{E} شعاعی است و به مکان سطح استوانه‌ای بستگی ندارد، سهم سطح جانبی استوانه در مقدار انتگرال برابر $2\pi r l E_r$ است. بنابراین قانون گاوس به صورت زیر در می‌آید

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (29-2)$$

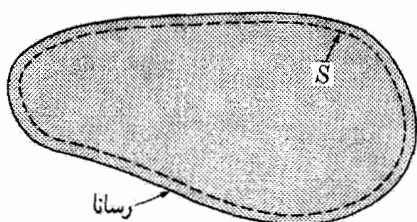
از معادله (۲۹-۲) می‌توانیم E_r را محاسبه کنیم

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (30-2)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله، می‌توانیم پتانسیل را به دست آوریم. نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

با حل مسئله ۴-۲، که متضمن کاربرد مستقیم معادله (۸-۲) است، می‌توانیم به مزیت استفاده از قانون گاوس برای صرفه‌جویی در کار پی ببریم.

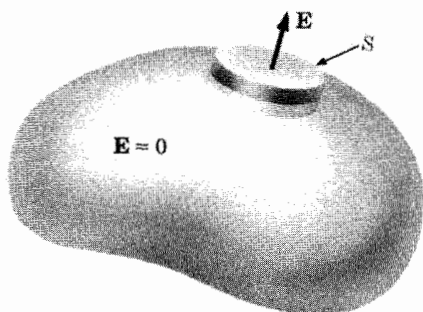


شکل ۹-۲. سطح گاوسی S که در داخل جسم رسانای باردار رسم شده است.

نتیجه مهم دیگری که از قانون گاوس به دست می‌آید، آن است که بار (بار خالص) در یک جسم رسانای باردار روی سطح خارجی آن قرار می‌گیرد. در بخش ۵-۲ دیدیم که میدان الکتریکی در داخل اجسام رسانا صفر است. در هر جایی در درون جسم رسانا می‌توان یک سطح گاوسی رسم کرد. مطابق قانون گاوس، بار خالص محصور در هر یک از این سطوح صفر است. بالاخره، سطح گاوسی S را مطابق شکل ۹-۲ رسم می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که بار خالص درون این سطح نیز صفر است. تنها جایی که بارها می‌توانند بدون نقض قانون گاوس در آنجا قرار گیرند، سطح جسم رساناست. چون در داخل، باری وجود ندارد، می‌توانیم قسمتی از ماده را بدون آنکه چیزی تغییر کند حذف کنیم. بنابراین، باریک پوسته رسانا باید تماماً در سطح خارجی آن قرار بگیرد.

میدان الکتریکی درست در خارج از یک جسم رسانای باردار باید بر سطح رسانا عمود باشد. این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است و $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. فرض کنید σ تابع چگالی سطحی بار در سطح جسم رسانا باشد. اگر قانون گاوس را برای سطح کوچک قرصی شکل S در شکل ۱۰-۲ به کار ببریم، داریم

$$E \Delta S = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \Delta S$$



شکل ۱۰-۲ کاربرد قانون گاوس برای سطح بسته قرصی شکل S که سطح جسم رسانای بارداری را قطع می‌کند.

که در آن ΔS سطح یکی از قاعده‌های قرص کوچک است. در نتیجه میدان الکتریکی درست در خارج از جسم رسانا برابر است با

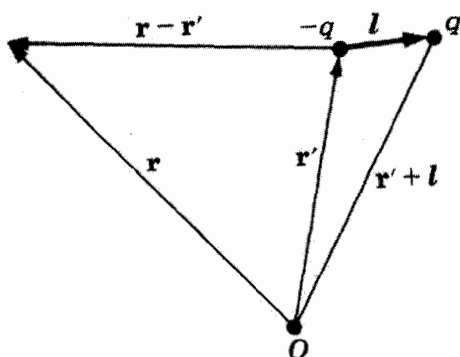
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۳۱-۲)$$

۸-۲ دوقطبی الکتریکی

دو بار الکتریکی مساوی و مختلف‌العلامه که در فاصله کمی از یکدیگر قرار گیرند، یک دوقطبی الکتریکی تشکیل می‌دهند. توزیع میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از چنین پیکربندی باری را می‌توان با استفاده از فرمولهای بخشهای ۳-۲ و ۴-۲ به دست آورد. فرض کنید مطابق شکل ۱۱-۲ بار $-q$ در نقطه \mathbf{r}' و بار q در نقطه $\mathbf{r}' + \mathbf{l}$ قرار گرفته است؛ در این صورت میدان الکتریکی را در نقطه اختیاری \mathbf{r} می‌توان با کاربرد مستقیم معادله (۸-۲) به دست آورد. میدان الکتریکی در \mathbf{r} عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (۳۲-۲)$$

معادله (۳۲-۲) شکل صحیح میدان الکتریکی به ازای هر مقدار از q و هر مقدار از فاصله l است؛ اما تعبیر آن چندان راحت نیست. آنچه مورد نظر ما است میدان دوقطبی است، و در دوقطبی فاصله l در مقایسه با $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ کوچک است؛ بنابراین، می‌توان معادله (۳۲-۲) را بسط داد و تنها اولین جمله غیرصفر آن را نگه داشت. چون استفاده از این شیوه عمومیت دارد، آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم. اشکال عمده در بسط این عبارت از مخرج اولین جمله معادله (۳۲-۲) ناشی می‌شود. معکوس این مخرج را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۱۱-۲ شکل هندسی لازم برای محاسبه میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ناشی از دو بار نقطه‌ای.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-3} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l} + l^2]^{-\frac{3}{2}} \\
 &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{l^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

شکل اخیر این عبارت را به راحتی می‌توان با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای بسط داد و فقط جمله‌هایی از آن را که بر حسب l خطی‌اند، نگه داشت. نتیجهٔ این بسط به صورت زیر است

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-3} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left\{ 1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \dots \right\} \quad (33-2)$$

که در آن از جمله‌هایی که شامل l^2 ‌اند صرف نظر شده است. با قرار دادن معادلهٔ (33-2) در معادلهٔ (32-2) و دوباره با نگه داشتن جمله‌هایی که بر حسب l خطی‌اند، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right\} \quad (34-2)$$

این معادله آن قسمت از میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی متناهی را به دست می‌دهد که با فاصلهٔ میان دو بار متناسب است. جمله‌های دیگری نیز وجود دارند که با توانهای دوم، سوم و بالاتر فاصله متناسب‌اند. اما چنانچه فاصلهٔ میان دو بار کوچک باشد، سهم مربوط به جمله‌های توانهای بالاتر بسیار کم خواهد بود. در حد، وقتی l به سمت صفر میل می‌کند، تمام جمله‌ها صفر می‌شوند، مگر آنکه بار بی‌نهایت شود. در این حد، هنگامی که حاصل ضرب ql ثابت بماند، تمام جمله‌ها بجز آنهایی که بر حسب l خطی‌اند، صفر می‌شوند. در این حد یک دوقطبی نقطه‌ای تشکیل می‌شود. دوقطبی نقطه‌ای بار خالص ندارد، در فضا گسترش ندارد و فقط با گشتاور دوقطبی‌اش به طور کامل مشخص می‌شود؛ این گشتاور برابر است با حد ql وقتی l به سمت صفر میل کند. برای نمایش گشتاور دوقطبی الکتریکی نماد \mathbf{p} را به کار می‌بریم و می‌نویسیم

$$\mathbf{p} = ql \quad (35-2)$$

می‌توانیم معادلهٔ (34-2) را، بر حسب گشتاور دوقطبی به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (36-2)$$

توزیع پتانسیل ناشی از یک دوقطبی نقطه‌ای نیز حائز اهمیت است و برای به دست آوردن این پتانسیل می‌توانیم تابعی پیدا کنیم که گرادیان آن با سمت راست معادلهٔ (36-2) برابر باشد، اما، راه

ساده‌تر آن است که معادله (۲-۱۵) را در مورد توزیع بار متشکل از دو بار نقطه‌ای که به فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند، به‌کار ببریم. با استفاده از نمادگذاری معادله (۲-۳۲)، توزیع پتانسیل با معادله زیر داده می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (۲-۳۷)$$

با بسط جمله اول، درست به همان طریقی که در مورد جمله اول معادله (۲-۳۲) انجام شد و نگه داشتن فقط آن جمله‌هایی که برحسب l خطی‌اند، معادله (۲-۳۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۲-۳۸)$$

این معادله با همان درجه تقریب معادله (۲-۳۴) معتبر است؛ یعنی از جمله‌های متناسب با l^2 و توانهای بالاتر l صرف‌نظر شده است. برای دوقطبی نقطه‌ای \mathbf{p} ، معادله (۲-۳۸) دقیق است؛ ولی بهتر است آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۲-۳۹)$$

معادله (۲-۳۹) پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ حاصل از یک دوقطبی الکتریکی را به دست می‌دهد و به کمک این پتانسیل می‌توانیم میدان الکتریکی (معادله ۲-۳۶) را حساب کنیم. پیدا کردن انرژی پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی که در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گرفته است، نیز جالب توجه است. در مورد دو بار $-q$ در نقطه \mathbf{r} و q در نقطه $\mathbf{r} + \mathbf{l}$ ، واقع در میدان الکتریکی که با تابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می‌شود، انرژی پتانسیل برابر است با

$$U = -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \quad (۲-۴۰)$$

چنانچه l در مقایسه با r کوچک باشد، تابع $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ را می‌توان برحسب l بسط داد و فقط دو جمله اول را نگه داشت. نتیجه این بسط عبارت است از

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (۲-۴۱)$$

که در آن باید مقدارگرادیان در نقطه \mathbf{r} منظور شود. اگر حاصل این بسط را در معادله (۲-۴۰) به‌کار ببریم، نتیجه می‌شود

$$U = q \cdot \mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (۲-۴۲)$$

در حالت حدی، برای یک دوقطبی نقطه‌ای داریم

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (۴۳-۲)$$

که، البته رابطه دقیق است. با توجه به اینکه میدان الکتریکی برابر است با منفی گرادیان پتانسیل الکتروستاتیکی، شکل دیگر معادله (۴۳-۲) به صورت زیر است

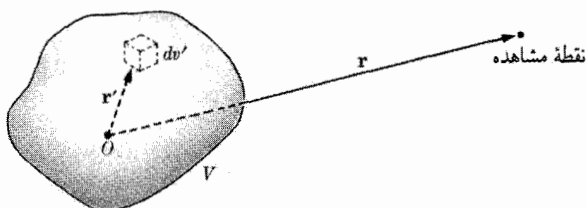
$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (۴۴-۲)$$

$U(\mathbf{r})$ ، انرژی پتانسیل دوقطبی \mathbf{p} در میدان الکتریکی خارجی \mathbf{E}_{ext} است، که در آن \mathbf{E}_{ext} در محل دوقطبی محاسبه می‌شود.

لازم به تذکر است که در این بخش ما در مورد دو پتانسیل متفاوت بحث کردیم. در معادله‌های (۳۷-۲)، (۳۸-۲) و (۳۹-۲) درباره پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از یک دوقطبی الکتریکی بحث شد. در معادله‌های (۴۰-۲) تا (۴۳-۲) فرض کردیم که دوقطبی در میدان الکتریکی موجودی که با تابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می‌شود، قرار گرفته است. این میدان الکتریکی از بارهای دیگری غیر از بارهای تشکیل‌دهنده دوقطبی ناشی می‌شود. در واقع برای احتراز از نتیجه بی‌نهایت، باید از میدان حاصل از خود دوقطبی چشم‌پوشی شود. این مطلب ممکن است ما را به مسائل پیچیده مربوط به خود نیروها و خود انرژیها بکشاند که فعلاً نمی‌توانیم درباره آنها بحث کنیم؛ اما باید توجه داشت که انرژی پتانسیل حاصل از برهم‌کنش یک دوقطبی الکتریکی با میدان خودش از اثر نیروهای وارد بر دوقطبی از جانب خود دوقطبی ناشی می‌شود. این گونه نیروها، که در مبحث دینامیک به نیروهای داخلی معروف‌اند، در حرکت کلی دوقطبی تأثیر نمی‌گذارند. فعلاً بررسی بیشتر این موضوع برای ما ضروری نیست.

۹-۲ بسط میدانهای الکتریکی برحسب چندقطبیها

از تعریفی که در بالا برای گشتاور دوقطبی الکتریکی کردیم پیداست که برخی از جنبه‌های توزیع پتانسیل ناشی از یک توزیع بار مشخص را می‌توان برحسب گشتاور دوقطبی الکتریکی آن به راحتی بیان کرد. برای انجام این کار، البته ضروری است که گشتاور دوقطبی الکتریکی یک توزیع بار دلخواه را تعریف کنیم. بهتر است به جای اینکه بدون منظور خاصی تعریفی به دست بدهیم، بسط معینی از پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از یک توزیع بار دلخواه را در نظر بگیریم. برای کاستن از تعداد مختصات مکانی، توزیع باری را در حوالی مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. شرط دیگری که منظور خواهیم کرد، این است که توزیع بار کلاً توسط کره‌ای به شعاع a احاطه شده است و



شکل ۱۲-۲ بار در حجم V با چگالی $\rho(\mathbf{r}')$ جایگزیده شده است. میدان الکتریکی را باید در نقطه \mathbf{r} محاسبه کرد.

در آن مقدار a در مقایسه با فاصله مبدأ تا نقطه مشاهده کوچک است. یک نقطه اختیاری در داخل توزیع بار را با \mathbf{r}' ، چگالی بار در آن نقطه را با $\rho(\mathbf{r}')$ و نقطه مشاهده را با \mathbf{r} نشان می‌دهیم (شکل ۱۲-۲). پتانسیل در نقطه \mathbf{r} عبارت است از

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۴۵-۲)$$

که در آن dv' برای نمایش جزء حجم در توزیع بار به کاررفته و V حجم کل اشغال شده توسط توزیع بار است. با توجه به شرطی که در بالا قائل شدیم، مبنی بر آنکه نقطه مشاهده دور از مبدأ مختصات قرار دارد، مقدار $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ را می‌توان به صورت رشته‌ای از توانهای صعودی r'/r بسط داد. نتیجه این بسط عبارت است از

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{3}{2} [\quad]^2 + \dots \right\} \quad (۴۶-۲)$$

که در اینجا تنها سه جمله اول را صریحاً نوشته‌ایم. توجه کنید که هر چند $(r'/r)^2$ در مقایسه با $2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/r^2$ قابل چشمپوشی است، با وجود این نمی‌توان آن را از داخل کروشه اول حذف کرد، زیرا مرتبه آن با مرتبه بزرگترین جمله در کروشه بعدی یکی است. با قرار دادن معادله (۴۶-۲) در معادله (۴۵-۲) و حذف جمله‌های با توان سوم و بالاتر \mathbf{r}' ، نتیجه می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (۴۷-۲)$$

چون \mathbf{r} به منغیر انتگرال گیری یعنی به \mathbf{r}' بستگی ندارد، می توان همه آنچه را که به \mathbf{r} وابسته است از زیر نماد انتگرال بیرون آورد. در نتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \right\} \quad (48-2)$$

که در آن x_i و x_j مؤلفه های قائم \mathbf{r} و x'_i و x'_j مؤلفه های قائم \mathbf{r}' اند و δ_{ij} به صورت زیر تعریف می شود

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

تعبیر معادله (48-2) آسان است. اولین انتگرال در این معادله عبارت است از بار کل و اولین جمله عبارت است از پتانسیل حاصل از آن اگر بار کل در مبدأ مختصات متمرکز می بود.

دومین انتگرال بیانگر تعمیم مستقیمی از مفهوم گشتاور دوقطبی یک توزیع بار پیوسته است و در نتیجه آن را گشتاور دوقطبی توزیع بار می نامند. جمله دوم در معادله (48-2) پتانسیلی است که از یک دوقطبی نقطه ای حاصل می شود، چنانچه در مبدأ مختصات قرار داشته و گشتاور آن با گشتاور دوقطبی توزیع بار برابر باشد. توجه به این نکته جالب است که اگر بار کل صفر باشد، گشتاور دوقطبی توزیع بار به مبدأ مختصات بستگی نخواهد داشت. برای تحقیق صحت این مطلب، دستگاه مختصات جدیدی را در نظر بگیرید که مبدأ آن نسبت به دستگاه مختصات قدیم در \mathbf{R} قرار داشته باشد. اگر نقطه ای را نسبت به دستگاه قدیم با \mathbf{r}' و همان نقطه را نسبت به دستگاه جدید با \mathbf{r}'' نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{R} \quad (49-2)$$

گشتاور دوقطبی نسبت به دستگاه قدیم برابر می شود با

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V (\mathbf{r}'' + \mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{r}'' \rho dv' + \mathbf{R}Q \quad (50-2)$$

بنابراین، اگر Q برابر صفر باشد، \mathbf{p} به مبدأ مختصات بستگی نخواهد داشت.

جمله سوم معادله (۴۸-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (51-2)$$

که در آن

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (52-2)$$

Q_{ij} نه مؤلفه متناظر با i و j (برابر با ۱، ۲، ۳) دارد. از این نه مؤلفه، شش مؤلفه آن دو به دو برابرند و بنابراین فقط شش مؤلفه متمایز باقی می‌ماند. مجموعه این کمیته‌ها تانسور گشتاور چهارقطبی^۱ را تشکیل می‌دهد که معرف بسط مفهوم گشتاور دوقطبی است. گشتاورهایی از مرتبه‌های بالاتر نیز وجود دارند که از نگه داشتن جمله‌های مرتبه بالاتر در بسط معادله (۴۸-۲) به دست می‌آیند. این چندقطبیهای مرتبه بالاتر در فیزیک هسته‌ای اهمیت دارند، اما در این کتاب بیش از این درباره آنها گفتگو نخواهد شد.

چنان‌که معادله (۴۸-۲) نشان می‌دهد، چندقطبیهای الکتریکی برای محاسبه تقریبی پتانسیل (و میدان الکتریکی) توزیع بار به کار می‌روند. با وجود این، کاربردهای متعدد دیگری نیز دارند، ولی همه این کاربردها بر این اساس اند که یک توزیع بار گسترده واقعی را با بارهای نقطه‌ای، دوقطبیهای نقطه‌ای و غیره به طور تقریبی برابر بگیریم. این تقریبات غالباً حل مسائل بسیار مشکل را ممکن می‌سازند.

۲-۱۰ تابع دلتای دیراک

در عبارتهای کلی مربوط به میدان و پتانسیل الکتریکی، در معادله‌های (۸-۲) و (۱۵-۲)، میان بارهای نقطه‌ای و توزیعهای پیوسته بار تمایز قائل شده‌ایم. به خاطر صرفه‌جویی در نمادگذاری، حتی اگر دلیل دیگری هم نباشد، بهتر است بارهای نقطه‌ای را به صورت حالت خاصی از تابع چگالی بار کلی $\rho(\mathbf{r})$ بیان کنیم. تابع دلتای دیراک، $\delta(\mathbf{r})$ ، از عهده انجام این کار برمی‌آید و علاوه بر آن، این تابع ابزار ریاضی با ارزشی برای انجام بسیاری از محاسبات است. برای این منظور می‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{بار نقطه‌ای}) \quad (53-2)$$

که در آن

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \neq 0 \quad \text{برای}$$

۱. تانسورها تعمیمی از بردارها هستند و در پیوست ۲ یحشی‌مقدماتی درباره آنها ارائه شده است.
۲. سایر خواص تابع دلتا در پیوست ۵ توضیح داده شده است.

و

$$\int \delta(\mathbf{r}') dv' = 1 \quad (۵۴-۲)$$

بنابراین، تابع دلتا یک بیان ریاضی برای مفهوم فیزیکی بار نقطه‌ای در $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ به دست می‌دهد؛ انتگرال چگالی بار برابر q است، اما تمامی بار درست در مبدأ قرار دارد. اگر تابع دلتا، همه جا، بجز در یک تک نقطه صفر باشد و در عین حال انتگرال غیرصفر داشته باشد، یک تابع ریاضی کاملاً تکین است. با این وجود، این تابع یک شیء ریاضی مجاز است که کاربرد آن به مشکلاتی نمی‌انجامد، به شرط آنکه دقت کنیم و از آن، مثلاً مانند یک تابع پیوسته مشتق‌گیری نکنیم. یک نوع از این تابع می‌تواند چگالی سطحی بار $\delta(\mathbf{r})$ ، یعنی توزیع باری که بجز در روی سطحی معین همه جا صفر است، را نمایش دهد. با این تعمیمها، گرفتن انتگرال تنها بر روی $\rho(\mathbf{r})$ در معادله‌های (۸-۲) و (۱۵-۲) کافی است. برای این کاربرد توجه کنید که

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}') dv' = F(\mathbf{0}) \quad (۵۵-۲)$$

که در آن F تابعی برداری یا نرده‌ای است، زیرا انتگرالده بجز در $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ صفر می‌شود، به علاوه

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dv' = F(\mathbf{r}_0) \quad (۵۶-۲)$$

بنابراین اگر $\rho(\mathbf{r}') = q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$ باشد، برای بار نقطه‌ای q_i در \mathbf{r}_i داریم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

و

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

با وجود این خصوصیات برای بارهای نقطه‌ای، دیگر لازم نیست جمع‌بندی خاصی روی q_i در معادله‌های (۸-۲) و (۱۵-۲) انجام شود.

خواص دیگری از تابع دلتا را می‌توان به‌عنوان نتایجی از صورت دیفرانسیلی قانون گاوس

به دست آورد:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (۲۸-۲)$$

برای بار نقطه‌ای q در $r = 0$ ، با استفاده از معادله (۲۱-۲) داریم

$$\nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\mathbf{r})$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (57-2)$$

همچنین، چون

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

بنابراین

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (58-2)$$

معادله‌های (۵۷-۲) و (۵۸-۲) آنقدر مهم‌اند که ارزش دارد آنها را به‌طور مستقیم‌تری به‌دست آوریم. مشتق‌گیری مستقیم نشان می‌دهد که دیورژانس همه‌جا صفر است، مگر در مبدأ، یعنی

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0, \quad r \neq 0$$

و به‌ازای $r = 0$ نتیجه برابر است با $-\infty + \infty$ ، که نامعین است؛ ولی از کاربرد قضیه دیورژانس در مورد یک کره کوچک به شعاع R در اطراف مبدأ نتیجه خواهد شد

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv = \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \frac{1}{R^2} \oint_S da = 4\pi$$

چون شعاع R هر قدر هم که کوچک باشد، انتگرال حجمی 4π است، انتگرالده را می‌توان به‌صورت $4\pi\delta(\mathbf{r})$ نمایش داد و این امر با معادله (۵۷-۲) سازگار است. به بیان دیگر، تابع دلتا این امکان را فراهم می‌کند که قضیه دیورژانس را در مورد \mathbf{r}/r^3 به‌کار ببریم، حتی در ناحیه‌ای که حاوی نقطه تکین در مبدأ است. هر جا که به انتگرال روی دیورژانس \mathbf{r}/r^3 ، یا روی لاپلاسی $1/r$ برمی‌خوریم، تابع دلتا بسیار سودمند خواهد بود.

۱۱-۲ خلاصه مطالب

الکتروستاتیک بر قانون کولن مبتنی است. طبق این قانون نیروی الکتروستاتیکی وارد بر بار نقطه‌ای q در \mathbf{r} ، از طرف بار نقطه‌ای q_1 در مبدأ، به‌صورت زیر است

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

که در آن ϵ_0 در دستگاه یکاهای mks برابر با $8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ و در دستگاه گاوسی برابر $1/4\pi$ است. بهتر آن است که بار q را به عنوان بار آزمون در نظر بگیریم و میدان الکتریکی \mathbf{E} متناظر با نیروی الکتریکی \mathbf{F}_e را به کمک آن از رابطه زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

میدان الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای q_1 واقع در $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ ، در نقطه \mathbf{r} عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

تاو و دیورژانس \mathbf{E} هر دو حائز اهمیت اساسی اند:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

که در آن تابع دلتای دیراک با روابط زیر تعریف می‌شود

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{به ازای}$$

$$\int \delta(\mathbf{r}) dv = 1$$

تابع دلتا این خاصیت را دارد که برای هر تابع F داریم

$$\int F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = F(\mathbf{r}_0)$$

• قانون کولن را می‌توان به دستگاههایی که چندین بار نقطه‌ای دارند، یا به توزیع پیوسته‌ای با چگالی بار $\rho(\mathbf{r})$ تعمیم داد. در اینجا $\rho(\mathbf{r})$ به صورتی تعریف می‌شود که در آن جزء بار در جزء حجم dv عبارت خواهد بود از

$$dq = \rho(\mathbf{r}) dv$$

برای بار نقطه‌ای q_i در \mathbf{r}_i ، داریم

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

چون نیروها و میدانها جمع‌پذیرند، بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv'$$

از آنجا که ∇ عملگری خطی است، داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

اینها معادلات دیفرانسیلی اساسی اند که باید همه میدانهای الکتروستاتیکی در هر نقطه به طور موضعی در آنها صدق کنند (در واقع، معادله دیورژانس حتی برای میدانهای وابسته به زمان نیز صادق است و یکی از چهار معادله اساسی ماکسول به حساب می آید).

• قانون گاوس با انتگرال گرفتن از دو طرف معادله دیورژانس روی حجم اختیاری V و به کار بردن قضیه دیورژانس به دست می آید و به صورت زیر است

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

که در آن

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

و Q بار کل موجود در داخل حجم V است، حجمی که توسط S محصور شده است. در موارد خاصی که بتوان با دلایل کافی استدلال کرد که بزرگی و راستای \mathbf{E} نسبت به سطح انتخابی S ثابت است، قانون گاوس عملاً برای محاسبه E به کار می رود. این قانون همچنین نشان می دهد که بار یک رسانا باید روی سطح بیرونی آن قرار گیرد و اینکه درست در خارج از سطح خواهیم داشت $E = \sigma/\epsilon_0$.

• وجود تابع پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ از معادله تاو نتیجه می شود، به طوری که

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

برای میدان مفروض \mathbf{E}

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

در مورد یک توزیع بار مشخص

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

محاسبه این انتگرال از محاسبه انتگرال مربوط به \mathbf{E} راحت تر است. پتانسیل نرده‌ای φ با رابطه زیر به انرژی پتانسیل U ، مربوط به نیروی الکتروستاتیکی پایستار، ربط پیدا می‌کند

$$U = q\varphi$$

• درفاصله دور از ناحیه‌ای که در آن بارهای چشمه ρ قرار گرفته‌اند، بسط φ برحسب چندقطبیهها مفید است:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right]$$

که در آن

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

گشتاور دوقطبی توزیع بار است. معمولاً اولین جمله غیرصفر در بسط بیشترین اهمیت را دارد. ما تنها دو جمله اول را بررسی می‌کنیم.

مسائل

۱-۲ دو ذره هر یک به جرم m و به ترتیب با بار q و $2q$ با دو نخ هر یک به طول l از نقطه‌ای مشترک آویزان شده‌اند. زاویه θ را که هر نخ با خط قائم می‌سازد، پیدا کنید.

۲-۲ بار دوکرة رسانای کوچک همسان به ترتیب برابر است با $2.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ و $4.0 \times 10^{-9} \text{ C}$. (الف) وقتی این دو کرة در فاصله ۴ سانتی‌متری از یکدیگر قرار گیرند، چه نیرویی به یکدیگر وارد می‌کنند؟ (ب) اگر آنها را به هم نزدیک کنیم تا تماس حاصل کنند و بعد به اندازه ۴ سانتی‌متر آنها را از یکدیگر دور کنیم، چه نیرویی به یکدیگر وارد خواهند کرد؟

۳-۲ سه بار نقطه‌ای که بار هر یک از آنها $4 \times 10^{-9} \text{ C}$ است در سه رأس مربعی به ضلع 15 cm قرار گرفته‌اند. مقدار و جهت میدان الکتریکی را در رأس بدون بار این مربع پیدا کنید.

۴-۲ بار خطی بسیار طولی با چگالی باریکناخت λ در واحد طول مفروض است. با انتگرال‌گیری مستقیم، میدان الکتریکی را در فاصله r از این بار خطی پیدا کنید.

۵-۲ (الف) قرصی مدور به شعاع R ، دارای چگالی سطحی بار یکنواخت σ است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر محور قرص و در فاصله z از صفحه پیدا کنید. (ب) استوانه‌ای قائم به شعاع R و ارتفاع L در امتداد محور z قرار دارد. چگالی حجمی بار این استوانه نسبت به مبدایی واقع در مرکز آن نایکناخت است و به صورت تابع $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$ داده می‌شود. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را که در مرکز این استوانه قرار گرفته است، محاسبه کنید.

۶-۲ یک پوستهٔ کروی رسانای نازک به شعاع R به طور یکنواخت باردار شده است و بار کل آن Q است. با انتگرال‌گیری مستقیم، پتانسیل را در نقطه‌ای اختیاری واقع در (الف) داخل پوسته و (ب) خارج پوسته پیدا کنید.

۷-۲ (الف) دو بار نقطه‌ای $-q$ و $+\frac{1}{3}q$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه $(a, 0, 0)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌شود؟ (ب) در صفحه x, y سطح هم‌پتانسیلی را که از این نقطه می‌گذرد، رسم کنید. آیا این نقطه، نقطهٔ کمیتهٔ واقعی پتانسیل است؟

۸-۲ نشان دهید که سطح هم‌پتانسیل $\varphi = 0$ در مسئلهٔ قبل کروی شکل است. مختصات مرکز این کره را پیدا کنید.

۹-۲ استوانه‌ای قائم به شعاع R و ارتفاع L ، با چگالی بار یکنواخت ρ ، مفروض است. پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه‌ای واقع بر محور استوانه ولی خارج از توزیع بار محاسبه کنید.

۱۰-۲ میدان الکتریکی در تمام نقاط یک ناحیه از فضا موازی محور x است. ثابت کنید که در این ناحیه میدان الکتریکی به مختصات y و z بستگی ندارد. اگر در این ناحیه از فضا باری وجود نداشته باشد، ثابت کنید که میدان به متغیر x نیز بستگی نخواهد داشت.

۱۱-۲ قدرت دی‌الکتریکی هوا (یعنی آن مقدار میدان الکتریکی که در بالاتر از آن هوا رسانا می‌شود) مساوی $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ است. (الف) حداکثر پتانسیلی را که یک کرهٔ رسانای منزوی به شعاع 8 cm می‌تواند داشته باشد چقدر است؟ (ب) شعاع یک رسانای کروی که بتواند یک کولن بار داشته باشد، چقدر است؟

۱۲-۲ حفره‌ای با شکل دلخواه در درون یک جسم رسانا موجود است. اگر بار نقطه‌ای q را در داخل حفره قرار دهیم، ثابت کنید باری به مقدار $-q$ در سطح حفره القا می‌شود [راهنمایی: از قانون گاوس استفاده کنید].

۱۳-۲ میدان الکتریکی در جو در نزدیکی سطح زمین تقریباً 200 V/m و جهت آن به طرف پایین است. در ارتفاع 1400 m از سطح زمین میدان الکتریکی در جو فقط 20 V/m و باز هم به سمت پایین است. (الف) چگالی متوسط بار در جو در ارتفاع کمتر از 1400 m چقدر است؟ (ب) آیا این بار بیشتر از یونهای مثبت تشکیل شده است یا از یونهای منفی؟

۱۴-۲ دو صفحهٔ رسانای نامتناهی و موازی به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. چگالی سطحی بار در سطوح داخلی این صفحات به ترتیب σ و $-\sigma$ و یکنواخت است. (الف) میدان الکتریکی را در فضای میان دو صفحه به دست آورید. (ب) ثابت کنید که میدان الکتریکی در فضای خارج دو صفحه صفر است. [توجه: میدان الکتریکی‌ای که دو صفحهٔ رسانای باردار موازی و متناهی در

فضای میان دو صفحه تولید می‌کنند اساساً با میدان الکتریکی‌ای که در بالا به دست آمد، یکسان است، مشروط بر آنکه ابعاد سطوح این صفحه‌ها در مقایسه با فاصله d میان آنها بزرگ باشند، چنین آرایشی را خازن می‌نامند (به فصل ۶ رجوع شود).

۱۵-۲ چگالی حجمی بار در یک توزیع بار کروی تابعی است که فقط به r ، فاصله از مرکز توزیع، بستگی دارد. به عبارت دیگر $\rho = \rho(r)$. اگر $\rho(r)$ به صورت تابعی که در زیر می‌آید باشد، میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r به دست آورید. با فرض اینکه پتانسیل الکتریکی در بی‌نهایت صفر است، یعنی $\varphi(\infty) = 0$ ، با انتگرال‌گیری از نتیجه بالا، پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(r)$ را پیدا کنید. (الف) به ازای $0 \leq r \leq R$ و $\rho = A/r$ مقدار ثابتی است؛ به ازای $r > R$ ، $\rho = 0$. (ب) به ازای $0 \leq r \leq R$ ، $\rho = \rho_0$ (یعنی ثابت است)؛ به ازای $r > R$ ، $\rho = 0$.

۱۶-۲ میله‌ای گرد با طول بی‌نهایت و شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فواصل $r < R$ و $r > R$ به دست آورید.

۱۷-۲ (الف) تاو و دیورژانس بردار \mathbf{r}/r^a را حساب کنید. (ب) کدام چگالی بار، $\rho(r)$ ، میدان الکتریکی زیر را تولید می‌کند؟

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^a}$$

(ج) پتانسیل این میدان کدام است؟

۱۸-۲ فرض کنید که نما در میدان کولنی دقیقاً ۳ نیست، بلکه برابر با $a = 3 - \delta$ است که در آن $\delta \ll 1$. انتگرال $\nabla \cdot \mathbf{E}$ را در حجم کره‌ای به شعاع R که بار q در مرکز آن قرار دارد، حساب کنید.

۱۹-۲ پتانسیل استتار شده کولنی، که به صورت زیر است

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

پتانسیل مناسب برای بار q در محیط نیم‌رساناست. میدان الکتریکی و چگالی بار مربوط به این پتانسیل را به دست آورید.

۲۰-۲ کره‌ای رسانا به شعاع R و بار Q توسط پوسته‌ای کروی و متحدالمرکز با آن و به شعاع $2R$ احاطه شده است. این پوسته با بار $2Q$ - به طور یکنواخت باردار شده است. (الف) با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا محاسبه کنید. (ب) پتانسیل را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

۲۱-۲ بار خطی مستقیم طویلی با بار λ در واحد طول از a تا ∞ در امتداد محور z قرار گرفته است. بار خطی دیگری با بار $-\lambda$ در واحد طول، از $-a$ تا $-\infty$ در امتداد محور z قرار دارد.

(الف) با انتگرال‌گیری مستقیم، پتانسیل الکتریکی را در مختصات استوانه‌ای به دست آورید. (ب) مؤلفه r میدان الکتریکی را به دست آورید.

۲۲-۲ با استفاده از معادله (۲-۳۹) برای پتانسیل حاصل از دوقطبی \mathbf{p} ، طرحی از مقاطع سطوح هم‌پتانسیل را در صفحه‌ای که حاوی دوقطبی باشد، رسم کنید. برای سهولت می‌توان دوقطبی را در مبدأ مختصات قرار داد. با استفاده از نتایج به دست آمده بعضی از خطوط نیرو را رسم کنید. نتیجه را با شکل ۳-۲ مقایسه کنید.

۲۳-۲ (الف) نشان دهید که بر دوقطبی \mathbf{p} ، که در میدان خارجی \mathbf{E}_{ext} قرار گرفته است، نیرویی برابر با $\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{\text{ext}}$ وارد می‌شود. (ب) نشان دهید که گشتاور نیروی وارد بر این دوقطبی در این میدان عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times [(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}] + \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

که در آن \mathbf{r} بردار فاصله دوقطبی از نقطه‌ای است که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود. کمیت $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$ ، که به مختصات نقطه‌ای که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد، جفت چرخشی وارد بر دوقطبی نامیده می‌شود.

۲۴-۲ سه بار در یک آرایش خطی قرار گرفته‌اند. بار $-2q$ در مبدأ مختصات و دو بار دیگر که مقدار هر یک $+q$ است، به ترتیب در نقاط $(l, 0, 0)$ و $(-l, 0, 0)$ واقع‌اند. (الف) رابطه نسبتاً ساده‌ای برای پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ که در فواصل $l \gg |\mathbf{r}|$ صادق باشد، پیدا کنید. (ب) سطوح هم‌پتانسیل آن را در صفحه x, z رسم کنید.

۲۵-۲ تانسور گشتاور چارقطبی توزیع بار مسئله ۲۴-۲ را پیدا کنید.

۲۶-۲ با استفاده از توابع دلتا در مورد توزیع بارهای نقطه‌ای، نشان دهید که گشتاور دوقطبی یک جفت بار نقطه‌ای، یعنی $\mathbf{p} = ql$ ، از تعریف کلی زیر نتیجه می‌شود

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

۲۷-۲ فرض کنید مولکولی عبارت است از بار $-2q$ در مبدأ مختصات و دو بار $+q$ که در نقاط l_1 و l_2 قرار دارند و $l_1 = l_2 = l$ است. (الف) گشتاور دوقطبی مولکول را پیدا کنید. (ب) برای مولکول H_2O ، $l = 0.958 \times 10^{-10} \text{ m}$ و زاویه میان l_1 و l_2 برابر با 105° است. اگر $p = 6.14 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ باشد، بار مؤثر q را به دست آورید.

۲۸-۲ میدان الکتریکی دوقطبی نقطه‌ای را با محاسبه گرادیان تابع زیر به دست آورید

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

حل مسائل الکتروستاتیک

حل مسائل الکتروستاتیک برای حالتی که در آن توزیع بار در همه جا مشخص شده کاملاً ساده است، زیرا همان‌طور که دیدیم، پتانسیل و میدان الکتریکی مستقیماً با انتگرالهایی بر روی این توزیع بار محاسبه می‌شوند:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۱-۳)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۲-۳)$$

ولی بسیاری از مسائل که در عمل به آنها برمی‌خوریم از این نوع نیستند. چنانچه توزیع بار از قبل مشخص نشده باشد، ممکن است لازم شود قبل از تعیین توزیع بار ابتدا میدان الکتریکی را محاسبه کنیم. مثلاً، یک مسئله الکتروستاتیک ممکن است شامل چند جسم رسانا باشد که پتانسیل یا بار کل هر یک از آنها معلوم باشد، اما توزیع بارهای سطحی به‌طور کلی معلوم نخواهد بود و باید به‌عنوان قسمتی از حل مسئله آنها را به‌دست آورد.

هدف ما در این فصل معرفی راه دیگری برای حل مسائل الکتروستاتیک است. برای انجام این کار، نخست معادله دیفرانسیل اصلی را که پتانسیل φ باید در آن صدق کند به دست می آوریم. در اینجا از بحث درباره اجسام دی الکتریک چشم می پوشیم. این گونه مسائل را در فصل ۴ حل خواهیم کرد.

۱-۳ معادله پواسون

کلید روابط اساسی لازم برای مطالعه این فصل را در فصل گذشته به دست آورده ایم. یکی از این روابط اساسی شکل دیفرانسیلی قانون گاوس است که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3-3)$$

به علاوه، در یک میدان الکتروستاتیکی محض، \mathbf{E} را می توان به صورت منفی گرادیان پتانسیل φ نوشت:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (4-3)$$

از ترکیب روابط (۳-۳) و (۴-۳) نتیجه می شود

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5-3 \text{ الف})$$

همان طور که در فصل ۱ دیدیم، بهتر است دیورژانس گرادیان را به صورت یک تک عملگر دیفرانسیلی، مثلاً به صورت $\nabla \cdot \nabla$ یا ∇^2 در نظر بگیریم که به لاپلاسی معروف است.

لاپلاسی یک عملگر دیفرانسیلی نرده ای و معادله (۳-۵ الف) یک معادله دیفرانسیلی است که به معادله پواسون مشهور است:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5-3 \text{ ب})$$

عملگر ∇^2 شامل مشتق گیری نسبت به بیش از یک متغیر است. بنابراین، معادله پواسون معادله ای با مشتقات جزئی است که با در دست داشتن بستگی تابعی $\rho(x, y, z)$ و شرایط مرزی مناسب می توان آن را حل کرد.

عملگر ∇^2 درست نظیر ∇ ، $\nabla \times$ و $\nabla \cdot$ به دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارد. برای حل یک مسئله معین باید عملگر ∇^2 را بر حسب x ، y و z یا r ، θ ، ϕ و یا مانند آنها نوشت. انتخاب هر دستگاه بخصوصی از مختصات اختیاری است، اما چنانچه با در نظر گرفتن تقارن

خاص موجود در مسئله، دستگاه مختصات مناسبی انتخاب شود، حل آن بسیار راحت خواهد بود. شکل $\nabla^2 \varphi$ را در دستگاههای مختصات مختلف می‌توان به راحتی ابتدا با پیدا کردن گرادیان φ و سپس با تأثیر دادن علمگر $\nabla \cdot$ بر آن، به دست آورد. با به کار بردن عبارتهای مخصوص فصل ۱ (یا از پیوست ۴) نتایج زیر به دست می‌آید^۱:

در دستگاه مختصات قائم:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۶-۳)$$

در دستگاه مختصات کروی:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (۷-۳)$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۸-۳)$$

باید توجه داشت که r و θ در معادلات (۷-۳) و (۸-۳) معانی متفاوتی دارند. در مختصات کروی، r بزرگی بردار شعاعی نسبت به مبدأ مختصات و θ زاویه قطبی است. در مختصات استوانه‌ای، r فاصله عمود از محور استوانه و θ زاویه سمت در حول این محور است.

۲-۳ معادله لاپلاس

در بعضی از مسائل الکتروستاتیک که شامل رساناها هستند، تمام بارها یا در روی سطح رساناها یافت می‌شوند و یا به صورت بارهای نقطه‌ای ثابت‌اند. در این موارد ρ در اکثر نقاط فضا مساوی صفر است.

هر جا که چگالی بار صفر باشد، معادله پواسون به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (۹-۳)$$

که به معادله لاپلاس معروف است.

۱. برای یافتن شکل لاپلاسی در دستگاههای مختصات پیچیده‌تر دیگر، خواننده می‌تواند به منابع پایان این فصل مراجعه کند.

فرض کنید N رسانا در پتانسیلهای $\varphi_I, \varphi_{II}, \dots, \varphi_N$ قرار دارند. مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم، پیدا کردن پتانسیل در تمام نقاط فضای خارج از رساناهاست. برای انجام این کار باید پاسخی برای معادله لاپلاس پیدا کنیم که مقدار آن در روی سطح رساناها به $\varphi_I, \varphi_{II}, \dots, \varphi_N$ تبدیل شود. می‌توان نشان داد که چنین پاسخی برای معادله لاپلاس پاسخی یکتاست، یعنی هیچ پاسخ دیگری برای معادله لاپلاس وجود ندارد که در همان شرایط مرزی صدق کند. اثبات این حکم در زیر خواهد آمد. پاسخ معادله لاپلاس که بدین طریق به دست می‌آید، در درون رساناها صدق نمی‌کند، زیرا رساناها بار سطحی دارند و این بدان معناست که گرادیان φ از یک طرف به طرف دیگر سطح ناپوستگی دارد (بخش ۲-۷). اما قبلاً دیدیم که فضای داخل هر رسانا، ناحیه‌ای است با پتانسیل ثابت و بنابراین پاسخ مسئله ما کامل است.

دو روش را برای حل معادله لاپلاس به تفصیل شرح می‌دهیم. روش اول پیدا کردن یک پاسخ عمومی برای معادله (۳-۹) است، به وسیله ترکیب پاسخهای خصوصی (توابع پایه) معادله در دستگاه مختصاتی که تقارن موجود در مسئله آن را ایجاد می‌کند؛ روش دوم روش تصویرهاست. علاوه بر این، پاسخ عمومی کامل مسئله را در فضای دوبعدی به دست می‌آوریم. ولی قبل از پرداختن به این روشهای خاص، به اثبات بعضی خواص مهم پاسخ معادله لاپلاس می‌پردازیم.

قضیه اول. اگر $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ همگی پاسخهای معادله لاپلاس باشند، آنگاه

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n \quad (3-10)$$

که در آن C ها ثابتهای اختیاری‌اند، نیز پاسخ این معادله خواهد بود.

اثبات این قضیه مستقیماً از تساویهای زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= \nabla^2 C_1\varphi_1 + \nabla^2 C_2\varphi_2 + \dots + \nabla^2 C_n\varphi_n \\ &= C_1\nabla^2\varphi_1 + C_2\nabla^2\varphi_2 + \dots + C_n\nabla^2\varphi_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه اول می‌توان دو یا چند پاسخ از معادله لاپلاس را طوری با هم ترکیب کرد که پاسخ حاصل در مجموعه‌ای از شرایط مرزی مفروض صدق کند. در بخشهای آینده مثالهایی در این مورد خواهید دید.

قضیهٔ دوم: قضیهٔ یکتایی. دو پاسخ معادلهٔ لاپلاس که در شرایط مرزی یکسانی صدق کنند، یا با هم برابرند، یا اختلافشان حداکثر یک عدد ثابت جمعی است.

برای اثبات این قضیه، ناحیهٔ بسته‌ای به حجم V_0 را که در خارج از سطوح رساناهای گوناگون موجود در مسئله، یعنی S_I, S_{II}, \dots, S_N قرار گرفته و توسط سطح S محصور شده است، در نظر می‌گیریم. سطح اخیر می‌تواند یا در بی‌نهایت قرار داشته باشد یا سطحی واقعاً فیزیکی باشد که حجم V_0 را در میان گرفته است. فرض کنید φ_1 و φ_2 دو پاسخ معادلهٔ لاپلاس در فضای V_0 باشند و علاوه بر این شرایط مرزی یکسانی بر روی سطوح $S, S_I, S_{II}, \dots, S_N$ داشته باشند. این شرایط مرزی با تعیین مقدار φ و یا $\partial\varphi/\partial n$ بر روی این سطوح مرزی مشخص می‌شوند. تابع جدید $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ را تعریف می‌کنیم. بدیهی است که در فضای V_0 ، $\nabla^2\Phi = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$ است. به علاوه، Φ و یا $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$ در روی سطوح مرزی صفر می‌شود. اکنون قضیهٔ دیورژانس را در مورد بردار $\Phi\nabla\Phi$ به کار می‌بریم:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dv = \int_{S+S_1+\dots+S_N} \Phi\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} da = 0$$

نتیجه صفر است زیرا انتگرال دوم مساوی صفر می‌شود. دیورژانس را می‌توان بر طبق معادلهٔ (۷-۱-۱) از جدول (۱-۱) طوری بسط داد که نتیجهٔ زیر به دست آید

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2$$

اما $\nabla^2\Phi$ در تمام نقاط V_0 صفر است، پس قضیهٔ دیورژانس در این حالت به صورت زیر در می‌آید

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 dv = 0$$

اکنون $(\nabla\Phi)^2$ در هر نقطه در V_0 باید مثبت یا صفر باشد، و چون انتگرال آن مساوی صفر است، واضح است که فقط $(\nabla\Phi)^2 = 0$ امکان‌پذیر خواهد بود.

قضیه در اساس ثابت شده است. تابعی که گرادیان آن در تمام نقاط صفر باشد، نمی‌تواند تغییر کند؛ پس در تمام نقاط V_0 مقدار Φ همان مقداری است که در روی سطوح مرزی دارد. اگر شرایط مرزی با مشخص کردن φ_1 و φ_2 در روی سطوح مرزی S, S_I, \dots, S_N داده شده باشند، آنگاه چون Φ در روی این سطوح صفر است، مقدار آن در سراسر V_0 مساوی صفر خواهد بود.

چنانچه شرایط مرزی برحسب $\partial\varphi/\partial n$ و $\partial\varphi/\partial n$ داده شده باشند، آنگاه $\nabla\Phi$ در همه نقاط V برابر صفر است و در روی مرزها، $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ خواهد بود. تنها پاسخ موافق با حکم اخیر این است که Φ برابر با عدد ثابتی باشد.

۳-۳ معادله لاپلاس با یک متغیر مستقل

اگر φ فقط تابعی از یک متغیر باشد، معادله لاپلاس به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. حالتی را در نظر بگیرید که φ به صورت $\varphi(x)$ ، یعنی تابعی از تنها مختصه قائم x باشد. در این صورت معادله لاپلاس و پاسخ عمومی آن عبارت است از

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{و} \quad \varphi(x) = ax + b \quad (11-3)$$

که در آن a و b ثابتهایی هستند که با در نظر گرفتن شرایط مرزی انتخاب می‌شوند. این همان نتیجه‌ای است که در فصل قبل برای پتانسیل میان دو صفحه رسانای باردار که بر محور x عمود بودند، پیدا کردیم.

در سایر دستگاههای مختصات، وقتی φ تابعی از یک متغیر باشد، وضع از این پیچیده‌تر نخواهد بود. در مختصات کروی که در آن φ به صورت $\varphi(r)$ است، معادله لاپلاس و پاسخ عمومی آن چنین می‌شود

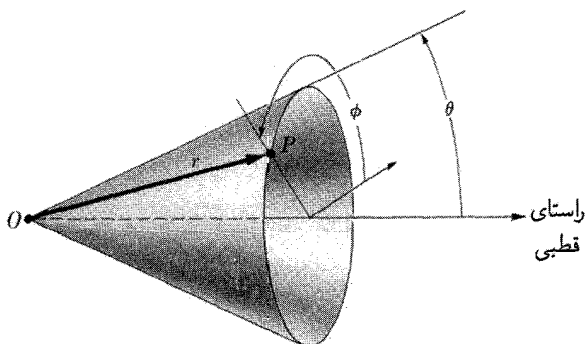
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad \varphi(r) = -\frac{a}{r} + b \quad (12-3)$$

پاسخ عمومی معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای را برای تابعی که مستقل از θ و z است، یعنی برای $\varphi(r)$ ، به عنوان تمرین به بخش مسائل ماکول کرده‌ایم.

۳-۴ پاسخهای معادله لاپلاس در مختصات کروی: هماهنگهای

منطقه‌ای

اکنون به حل معادله لاپلاس که در آن φ تابعی از بیش از یک متغیر است، می‌پردازیم. بسیاری از مسائل مورد علاقه ما رساناهایی به شکل کره یا استوانه هستند، و بنابراین به پاسخهای معادله لاپلاس در مختصات کروی یا استوانه‌ای نیاز دارند. ابتدا مسئله را در مختصات کروی حل می‌کنیم، اما بهتر است این بحث را به مواردی محدود کنیم که در آنها φ به زاویه سمت ϕ بستگی نداشته باشد. چنین شرطی رده مسائلی را که می‌توانیم حل کنیم محدود می‌کند. با این وجود، بسیاری از



شکل ۱-۳ محل نقطه P بر حسب مختصات کروی r, θ, ϕ .

مسائل جالب فیزیک در این رده قرار می‌گیرند و مسائل پیچیده‌تر نیز در واقع از محدوده این کتاب خارج‌اند.

برای مورد کروی، φ به صورت $\varphi(r, \theta)$ است که در آن r بردار شعاع از مبدأ ثابت O و θ زاویه قطبی است (شکل ۱-۳). در این مورد، با استفاده از معادله (۷-۳)، معادله لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

این معادله با مشتقات جزئی به روشی حل می‌شود که به جداسازی متغیرها معروف است. پاسخی را به صورت $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ فرض می‌کنیم و آن را در معادله (۱۳-۳) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \quad (۱۴-۳)$$

توجه کنید که مشتقات جزئی با مشتقات کلی جایگزین شده‌اند، زیرا Z و P هر یک فقط تابعی از یک متغیرند. معادله (۱۴-۳) را پس از تقسیم کردن آن بر $\varphi(r, \theta)$ و ضرب کردن آن در r^2 به صورت زیر در می‌آوریم

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (۱۵-۳)$$

سمت چپ این معادله فقط تابعی از r و سمت راست آن فقط تابعی از θ است. تنها راه برای آنکه تابعی از r بتواند با تابعی از θ به‌ازای همه مقادیر r و θ برابر باشد، این است که هر دو تابع

جدول ۱-۳ چند جمله‌ایهای لژاندر به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3$

n	$P_n(\theta)$
۰	۱
۱	$\cos \theta$
۲	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
۳	$\frac{1}{4}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

مقداری ثابت باشند. پس هر یک از دو طرف معادله (۱۵-۳) را مساوی k قرار می‌دهیم؛ k "ثابت جداسازی" است.

همه مقادیر k لزوماً پاسخهایی که از نظر فیزیکی قابل قبول باشند، به‌دست نمی‌دهند. ابتدا معادله θ را در نظر بگیرید، که به معادله لژاندر معروف است:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (16-3)$$

تنها پاسخهای قابل قبول فیزیکی تعریف‌شده آن درگستره کامل θ (از صفر تا π) به $k = n(n+1)$ مربوط می‌شوند، که در آن n عددی صحیح و مثبت است. پاسخ مربوط به مقدار خاص n را با $P_n(\theta)$ نشان خواهیم داد. پاسخهای معادله (۱۶-۳) به‌ازای مقادیر دیگر k ، در حوالی $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ بد رفتارند و به‌ازای این مقادیر θ بی‌نهایت یا حتی نامعین می‌شوند.^۱ این پاسخها با شرایط مرزی فیزیکی سازگار نیستند و در نتیجه باید آنها را کنار گذاشت.^۲

پاسخهای قابل قبول، یعنی $P_n(\theta)$ ، چندجمله‌ایهایی هستند برحسب $\cos \theta$ که معمولاً چندجمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شوند. چهار تابع اول لژاندر در جدول ۱-۳ آمده است. از معادله (۱۶-۳) پیداست که می‌توان P_n را در هر عدد ثابت دلخواهی ضرب کرد.

۱. بحث در اینجا خیلی خلاصه بود. خواننده علاقه‌مند به بحث مفصل معادله لژاندر می‌تواند به کتابهایی که بیشتر جنبه ریاضی دارند، مثلاً به کتابهایی که در فهرست پایان این فصل آمده است، مراجعه کند. معادله لژاندر، با تغییر متغیر $x = \cos \theta$ معمولاً به‌صورتی متفاوت نوشته می‌شود و در این صورت پاسخهای آن را با $P_n(x)$ یا $P_n(\cos \theta)$ نمایش می‌دهند.

۲. این حکم نیازمند توضیح بیشتری است. در برخی مسائل الکتروستاتیکی نواحی اطراف $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ را می‌توان به‌طور طبیعی، مثلاً به کمک سطوح رسانای مخروطی‌شکل، کنار گذاشت. تحت این شرایط، ممکن است پاسخهای معادله (۱۶-۳) به‌ازای سایر مقادیر k قابل استفاده باشند. این قبیل مسائل را در اینجا بررسی نمی‌کنیم.

اکنون به معادله شعاعی برمی‌گردیم

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z \quad (17-3)$$

در این معادله ما صورت صریح k را که به پاسخهای قابل قبولی برای θ منجر می‌شود، به‌کار برده‌ایم. بررسی معادله (۱۷-۳) نشان می‌دهد که دو پاسخ مستقل آن عبارت‌اند از

$$Z_n = r^n \quad \text{و} \quad Z_n = r^{-(n+1)}$$

پاسخهای معادله لاپلاس به‌صورت حاصل ضرب $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r)P_n(\theta)$ به‌دست می‌آیند، که در آن باید مخصوصاً دقت شود تا Z و P هر دو مربوط به یک مقدار n باشند. رعایت این امر الزامی است، زیرا هر دو طرف معادله (۱۵-۳) با یک مقدار ثابت، یعنی $n(n+1)$ برابرند. اکنون ما معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی حل کرده‌ایم و پاسخهایی را که به هماهنگهای منطقه‌ای معروف‌اند، به‌دست آورده‌ایم:

$$\varphi_n = r^n P_n(\theta) \quad \text{یا} \quad \varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (18-3)$$

در این پاسخها $P_n(\theta)$ یکی از چندجمله‌ایهای جدول (۱-۳) است و n عدد صحیح مثبت یا صفر است. هماهنگهای منطقه‌ای مجموعه‌ای از توابع را تشکیل می‌دهند که برای حل معادله لاپلاس با مرزهای کروی و تقارن سمتی، مناسب‌اند. برای انجام این کار می‌توان این پاسخها را بر طبق قضیه اول ترکیب کرد. اکنون چندتایی از این هماهنگها را به‌خوبی می‌شناسیم: یکی از پاسخهای مربوط به $m=0$ ، یعنی $\varphi = \text{const}$ ، پاسخ بدیهی معادله لاپلاس است که در هر دستگاه مختصاتی معتبر است. هماهنگ منطقه‌ای r^{-1} پتانسیل بار نقطه‌ای است؛ و $r^{-2} \cos \theta$ پتانسیل دوقطبی است.

۳-۵ کرهٔ رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت

مفید بودن هماهنگهای منطقه‌ای برای حل مسائل الکتروستاتیکی با تقارن سمتی را با حل مسئله کرهٔ رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی \mathbf{E}_0 ، که در آغاز یکنواخت است، نشان می‌دهیم. خطوط میدان یکنواخت موازی یکدیگرند، لیکن حضور جسم رسانا میدان را طوری تغییر می‌دهد که خطوط میدان بر سطح جسم رسانا، که یک سطح هم‌پتانسیل است، عمود شوند. اگر راستای میدان الکتریکی یکنواخت آغازی را راستای قطبی (راستای z) اختیار کنیم و مبدأ مختصات را بر مرکز کره منطبق بگیریم، آنگاه از تقارن مسئله پیداست که پتانسیل به زاویهٔ سمتی ϕ بستگی ندارد و می‌توان آن را به‌صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت.

رسانای کروی به شعاع a ، یک سطح هم‌پتانسیل است. پتانسیل آن را با φ_0 نشان می‌دهیم. مسئله ما یافتن پاسخی است برای معادله لاپلاس در ناحیه خارجی این کره، که مقدار آن در روی خود کره به φ_0 تبدیل شود و در فواصل خیلی دور صورت حدی صحیح داشته باشد

$$\varphi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{3} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{5} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (19-3)$$

که در آن A ها و C ها ثابتهای دلخواه‌اند. وقتی که r بزرگ باشد، میدان الکتریکی تنها اندکی نسبت به صورت اولیه خود تغییر شکل می‌یابد و پتانسیل آن همان پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی یکنواخت خواهد بود:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{k} \\ [\varphi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= -E_0 z + \text{constant} \\ &= -E_0 r \cos \theta + \text{constant} \end{aligned} \quad (20-3)$$

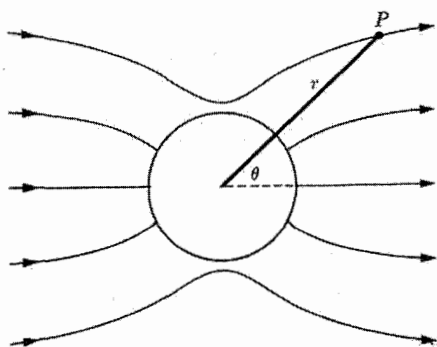
بنابراین، برای آنکه معادله‌های (19-3) و (20-3) به‌ازای مقادیر بزرگ r در توافق باشند، باید $A_2 = -E_0$ باشد. به‌علاوه تمام A ها، از A_3 به بالا باید مساوی صفر قرار داده شوند.

جمله $C_1 r^{-1}$ یک میدان الکتریکی شعاعی تولید می‌کند که، همان‌گونه که انتظار می‌رود، فقط با جسم رسانای کروی دارای بار خالص کل در توافق است. چون در این مسئله با جسم کروی بی‌بار سروکار داریم، ثابت C_1 را باید مساوی صفر قرار دهیم. روی سطح کره، $\varphi = \varphi_0$ و پتانسیل باید از زاویه θ مستقل باشد. می‌توان کاری کرد که دو جمله شامل $\cos \theta$ یکدیگر را خنثی کنند، لیکن جمله‌هایی را که شامل توانهای معکوس بالاتری از r هستند نمی‌توان با یکدیگر حذف کرد زیرا توابع لژاندر متفاوتی دارند.

تنها امکان آن است که تمام C_i ها به‌ازای $i \geq 3$ مساوی صفر قرار داده شوند. در این صورت معادله (19-3) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= A_1 - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta, \quad r \geq a \quad \text{برای} \\ \varphi(a, \theta) &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (21-3)$$

چون هر دو عبارت باید به‌ازای $r = a$ مساوی شوند، پس $A_1 = \varphi_0$ و $C_2 = E_0 a^2$.



شکل ۲-۳ خطوط شار الکتریکی برای موردی که در آن کره رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت قرار دارد.

از رابطه‌ی نهایی پتانسیل نه تنها می‌توان میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا حساب کرد (شکل ۲-۳)، بلکه چگالی سطحی بار روی کره‌ی رسانا را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ برای } r \geq a \quad (22-3)$$

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (23-3)$$

واضح است که جمع کل بار روی سطح کره، یعنی

$$Q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

مساوی صفر است و این با فرض اولیه‌ی ما سازگاری دارد.

۶-۳ پاسخهای معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای: هماهنگهای

استوانه‌ای

معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای را نیز می‌توانیم با روش جداسازی متغیرها حل کنیم. در اینجا هم مناسب خواهد بود که فقط به یافتن پاسخهای رده‌ی محدودی از مسائل بپردازیم؛ یعنی به مسائلی که در آنها پتانسیل به مختصه‌ی z بستگی ندارد. این پاسخها برای مسائلی که شامل رسانا یا سیم مستقیم استوانه‌ای دراز هستند، مناسب‌اند، نه برای مسائلی که شامل یک قطعه‌ی کوتاه استوانه‌ای هستند.

چنانچه پتانسیل به z بستگی نداشته باشد، معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (24-3)$$

با قرار دادن $\varphi = Y(r)S(\theta)$ معادله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (25-3)$$

که در اینجا نیز k نقش ثابت جداسازی را ایفا می‌کند. معادله θ بسیار ساده است؛ پاسخهای آن عبارت‌اند از $\cos k^{1/2} \theta$ و $\sin k^{1/2} \theta$. اما برای اینکه این پاسخها از لحاظ فیزیکی معنی داشته باشند، هر یک باید تابع تک‌مقداری از متغیر θ باشند. بنابراین

$$\cos k^{1/2} (\theta + 2\pi) = \cos k^{1/2} \theta$$

$$\sin k^{1/2} (\theta + 2\pi) = \sin k^{1/2} \theta$$

یا، به عبارت دیگر، پس از آنکه θ همه گستره خود را از صفر تا 2π طی کرد، تابع باید به‌طور هموار به مقدار خود در $\theta = 0$ برسد. این در صورتی امکان‌پذیر است که $k = n^2$ و n عددی صحیح باشد. به علاوه می‌توانیم n را مثبت (یا صفر) قرار دهیم بی‌آنکه هیچ‌یک از این پاسخها را از دست بدهیم.

حال به معادله r برمی‌گردیم. به راحتی می‌توانیم تحقیق کنیم که $Y(r)$ مساوی r^n یا r^{-n} است، بجز در حالت $n = 0$ که در این صورت $Y(r) = \ln r$ یا $Y(r) = \text{constant}$. بنابراین، پاسخهای لازم برای معادله لاپلاس، یا به اصطلاح هم‌انگهای استوانه‌ای، عبارت‌اند از

1	$\ln r$
$r^n \cos n\theta$	$r^{-n} \cos n\theta$
$r^n \sin n\theta$	$r^{-n} \sin n\theta$

این توابع مجموعه کاملی برای متغیرهای r و θ در مختصات استوانه‌ای تشکیل می‌دهند و پتانسیل $\varphi(r, \theta)$ را می‌توان مطابق قضیه اول به صورت برهم‌نهی هم‌انگهای استوانه‌ای نوشت.

* ۷-۳ معادله لاپلاس در مختصات قائم

در مختصات قائم، می‌توان با قرار دادن*

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

متغیرها را از یکدیگر جدا کرد که بدین وسیله معادله لاپلاس به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = - \frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2} \quad (۳-۲۶ الف)$$

طرف چپ این معادله تابعی است از x و y ، و طرف راست آن فقط تابع z است؛ در نتیجه هر دو طرف باید مساوی یک مقدار ثابت مثل k باشند. این اولین ثابت جداسازی است. دو معادله‌ای که از معادله (۳-۲۶ الف) به دست می‌آیند، عبارت‌اند از

$$\frac{d^2 f_2}{dz^2} + k f_2 = 0 \quad (۳-۲۶ ب)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = k - \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$

معادله دوم طوری نوشته شده است که در آن متغیرهای x و y از هم جدا شده‌اند. اینک هر یک از دو طرف این معادله را مساوی $-m$ (دومین ثابت جداسازی) قرار می‌دهیم. بنابراین،

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} + m f_2 = 0 \quad (۳-۲۶ ج)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - (k + m) f_1 = 0 \quad (۳-۲۶ د)$$

معادلات (۳-۲۶ ب)، (۳-۲۶ ج) و (۳-۲۶ د) به راحتی قابل حل‌اند. یک نمونه از پاسخها برای $\varphi(x, y, z)$ به صورت زیر است

$$\varphi(x, y, z) = A e^{-(k+m)^{1/2} x} \cos m^{1/2} y \cos k^{1/2} z \quad (۳-۲۷)$$

هفت پاسخ مستقل دیگر برای یک زوج ثابت جداسازی (k, m) را با یکی از جانشانیهای زیر می‌توان به دست آورد: $(k+m)^{1/2} x$ به جای $-(k+m)^{1/2} x$ ، $\sin m^{1/2} y$ به جای $\cos m^{1/2} y$ و $\sin k^{1/2} z$ به جای $\cos k^{1/2} z$.

* بخشهای ستاره‌دار را می‌توان حذف کرد، بی‌آنکه به پیوستگی مطالب خدشه وارد شود.

تاکنون هیچ محدودیتی برای k و m قائل نشدیم، ولی شرایط مرزی مسئله معمولاً k (یا m) را به مجموعه گسسته‌ای از مقادیر مثبت یا منفی، محدود می‌کند. لازم به توضیح است که این شرایط مرزی هستند که در واقع پاسخهای مناسب را برای معادله‌ای با مشتقات جزئی تعیین می‌کنند. تابع

$$\varphi(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2}x} \cos py \cos qz$$

به‌ازای مقادیر ثابت x و y ، درست بسط رشته فوریه تابع زوج دلخواهی از z است.

پاسخهای خصوصی، یعنی معادله (۲۷-۳)، نمایانگر پتانسیلهای مربوط به وضعیتهای ساده فیزیکی نیستند. ولی، حالتی که هر دو ثابت جداسازی صفر باشند، به یک وضعیت فیزیکی جالب مربوط می‌شود؛ لذا توجه خود را به این حالت معطوف می‌کنیم. از معادله (۳-۲۶) روشن است $f_1(x) = a_1x$ ، یا $f_1(x) = \text{const.}$ پاسخی برای آن معادله است. از معادله (۳-۲۶) ج، پاسخ $f_2(y)$ را به‌دست می‌آوریم و به همین ترتیب تا به آخر. بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & A_1xyz + A_2xy + A_3yz + A_4xz \\ & + A_5x + A_6y + A_7z + A_8 \end{aligned} \quad (۳-۲۸\text{الف})$$

که در آن A ها اعداد ثابت دلخواهی هستند. این پاسخ را می‌توانیم برای حالتی که سه صفحه رسانا یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کنند، به‌کار ببریم. هرگاه این سه صفحه، صفحات مختصات xy ، yz و zx بوده و هر سه در پتانسیل یکسانی باشند، آنگاه

$$\varphi(x, y, z) = A_1xyz + A_8 \quad (۳-۲۸\text{ب})$$

تعیین چگالی سطحی بار روی صفحات مختصات، به‌طوری که با معادله (۳-۲۸) سازگار باشد، به‌صورت تمرین به عهده خواننده واگذار می‌شود.

*۳-۸ معادله لاپلاس در دو بعد: پاسخ عمومی

اگر پتانسیل فقط تابعی از دو مختصه قائم باشد، معادله لاپلاس به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (۳-۲۹\text{الف})$$

پاسخ عمومی این معادله را می‌توانیم از طریق تبدیل به مجموعه جدیدی از متغیرهای مستقل به‌دست آوریم. در عین حال، باید تأکید کنیم که چنین تبدیلی فقط در حالت دوبعدی به ساده

شدن معادله اصلی منجر می‌شود. فرض کنید

$$\xi = x + iy \quad \eta = x - iy$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ عدد موهومی واحد است. برحسب این متغیرها

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

و

$$\nabla^2 \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (29-3)$$

بدهی است که عمومی‌ترین پاسخ معادله (29-3) عبارت است از

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x + iy) + F_2(x - iy) \quad (30-3)$$

که در آن F_1 و F_2 توابعی دلخواه هستند که به‌طور مناسبی^۱ پیوسته و قابل مشتق‌گیری‌اند. توابع F_1 و F_2 به‌طور کلی کمیتهای مختلطی هستند، ولی به کمک آنها می‌توان به طریق زیر دو تابع حقیقی به دست آورد. اول فرض می‌کنیم $F_2(x - iy) = F_1(x - iy)$ ، یعنی فرض می‌کنیم وابستگی دو تابع F_1 و F_2 به شناسه‌هایشان یکسان باشد، در این صورت

$$\varphi_1 = F_1(x + iy) + F_1(x - iy) = 2 \operatorname{Re} [F_1(x + iy)]$$

که Re نمایش قسمت حقیقی تابع است. به‌علاوه، دومین تابع پتانسیل حقیقی عبارت است از

$$\varphi_2 = -i[F_1(x + iy) - F_1(x - iy)] = 2 \operatorname{Im} [F_1(x + iy)]$$

که در آن Im نمایش قسمت موهومی تابع است. پس هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی هر تابع مختلط $F(x + iy)$ پاسخهای معادله لاپلاس‌اند.

پاسخهایی که بدین طریق پیدا می‌شوند به هیچ دستگاه مختصات خاصی منحصر نیستند. مثلاً، هماهنگهای استوانه‌ای بخش (۷-۳) از توابع مختلط^۲ $(x + iy)^n = r^n e^{in\theta}$ و

۱. تابع F باید در ناحیه (x, y) مورد نظر "تحلیلی" باشد. به پیوست ۷ معادله (۳-۷) مراجعه کنید.
 ۲. مختصات استوانه‌ای و قائم، به طریق معمول با روابط: $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ به یکدیگر مربوط می‌شوند.

به دست می‌آیند. از طرف دیگر وقتی لازم شود که مسئله خاصی را در فضای دوبعدی حل کنیم، هیچ روش متداولی برای پیدا کردن تابع مختلط مناسب نداریم. این روش آنقدر پاسخهای متعدد تولید می‌کند که نمی‌توان همه را برشمرد و پاسخهایی را که در شرایط مرزی مسئله صدق نمی‌کنند جدا کرد و کنار گذاشت. در موارد ساده، توابع مورد لزوم را می‌توان به روش آزمایش و خطا به دست آورد؛ در موارد دیگر، روش نگاشت همذیس می‌تواند مفید باشد (بررسی این روش از محدوده این کتاب خارج است).

۹-۳ تصویرهای الکتروستاتیکی

برای مجموعه‌ای از شرایط مرزی مفروض پاسخ معادله لاپلاس یکتاست، به طوری که اگر بتوانیم به هر طریق پاسخی به صورت $\varphi(x, y, z)$ پیدا کنیم، و چنانچه این φ در تمام شرایط مرزی صدق کند، آنگاه پاسخ کامل معادله به دست آمده است. در روش تصویرها بی‌آنکه به طور مشخص معادله دیفرانسیلی را حل کنیم، راهی برای به دست آوردن این پاسخ به دست می‌آوریم. این روش به طور کلی در حل تمام مسائل الکتروستاتیک قابل استفاده نیست، اما آنقدر مسائل جالب در محدوده آن قرار می‌گیرد که جا دارد در اینجا در مورد آن بحث کنیم.

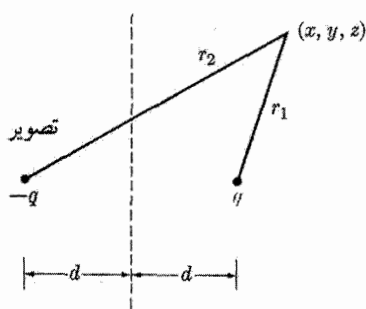
فرض کنید بتوان پتانسیل را به صورت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (31-3)$$

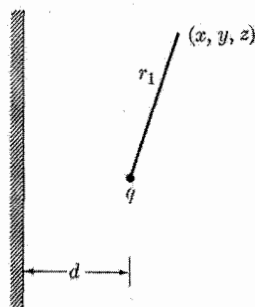
نوشت، که در آن φ_1 یا تابعی است مشخص و یا به راحتی قابل محاسبه است و انتگرال معرف پتانسیلی است که بارهای سطحی تمام رساناهای موجود در مسئله به وجود می‌آورند. تابع σ مجهول است. در مواردی ممکن است بتوان به جای جمله آخر معادله (۳۱-۳)، پتانسیل φ_2 را قرار داد که به توزیع بار مشخصی، معمولاً بارهای نقطه‌ای یا خطی، مربوط می‌شود و اساس روش بار تصویری همین است. این جایگزینی هنگامی امکان‌پذیر است که سطح تمام رساناها بر سطوح هم‌پتانسیل حاصل از ترکیب $\varphi_1 + \varphi_2$ منطبق باشند. بارهای مشخصی که φ_2 را ایجاد می‌کنند به بارهای تصویری معروف‌اند. بدیهی است که این بارها وجود خارجی ندارند. مکان ظاهری آنها در داخل رساناهای مختلف است و پتانسیل $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ فقط برای ناحیه خارج از این رساناها پاسخ قابل قبول مسئله است.

مثال ۱-۳ بار نقطه‌ای در نزدیکی یک صفحه رسانا

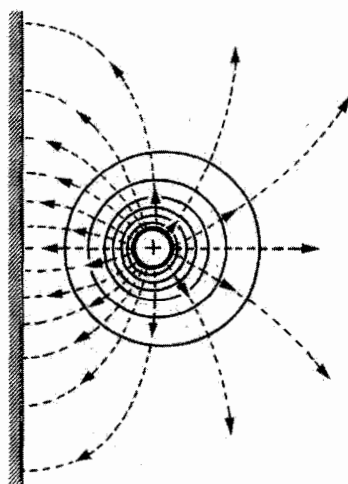
اکنون چند مثال مشخص را مطرح می‌کنیم تا مزیت‌های روش بار تصویری معلوم شود. باید خاطر نشان کنیم که اگر مجبور بودیم از سایر روشهای تحلیلی برای حل این مسائل نمونه استفاده کنیم،



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۳-۳ مسئله بار نقطه‌ای و صفحه رسانا که به روش تصویری حل شده است؛ (الف) مسئله اصلی، (ب) مکان بار تصویری، (ج) خطوط نیرو (خط‌چینها) و سطوح هم‌پتانسیل (خطوط پیوسته).

کار بسیار مشکل می‌شد. ابتدا مسئله یک بار نقطه‌ای q را در نظر می‌گیریم که در نزدیکی یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد. برای فرمولبندی ریاضی مسئله، فرض کنید که صفحه نامتناهی بر صفحه yz منطبق و بار نقطه‌ای روی محور x و به فاصله $x = d$ از مبدأ مختصات قرار داشته باشد (شکل ۳-۳ الف). پتانسیل این مسئله به‌ازای رابطه زیر با معادله (۳-۳۱) سازگار است

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-32)$$

حل: حال مسئله دیگری را در نظر می‌گیریم و آن مسئله دو بار نقطه‌ای $(-q, q)$ است که به فاصله $2d$ از یکدیگر قرار دارند (شکل ۳-۳ ب). پتانسیل مربوط به این دو بار، یعنی

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (۳۳-۳)$$

نه تنها در همه نقاط خارج از بارها در معادله لاپلاس صدق می‌کند، بلکه مقدار آن روی صفحه عمود منصف خط واصل میان دو بار، به مقدار ثابتی (یعنی صفر) تبدیل می‌شود. پس معادله (۳۳-۳) در شرایط مرزی مسئله اصلی صدق می‌کند. چون پاسخهای معادله لاپلاس منحصر به فردند، معادله (۳۳-۳) پتانسیل صحیح برای سراسر نیم‌فضای سمت راست صفحه رساناست. بار $-q$ پتانسیل زیر را تولید می‌کند:

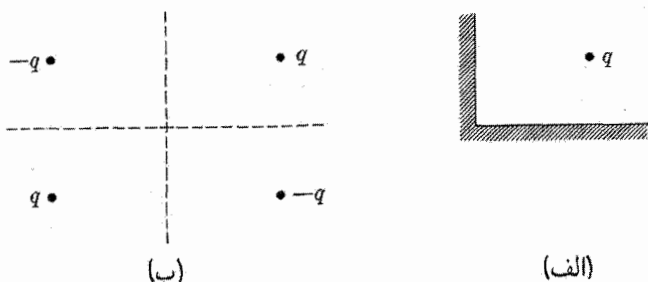
$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (۳۴-۳)$$

این بار، تصویر بار نقطه‌ای q نامیده می‌شود. طبعاً این تصویر واقعیت خارجی ندارد و معادله (۳۲-۳) پتانسیل مربوط به سمت چپ صفحه رسانای شکل ۳-۳ (الف) را به درستی به دست نمی‌دهد. در فضای سمت راست صفحه رسانا، میدان الکتریکی \mathbf{E} را می‌توان با محاسبه منفی گرادینان معادله (۳۳-۳) به دست آورد. از آنجا که سطح صفحه رسانا معرف فصل مشترکی است که دو پاسخ معادله لاپلاس، یعنی $\varphi = 0$ و معادله (۳۳-۳) را به یکدیگر مربوط می‌کند، ناپوستگی میدان الکتریکی توسط چگالی بار سطحی σ در روی این صفحه تأمین می‌شود:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (۳۵-۳)$$

خطوط نیرو و سطوح هم‌پتانسیل مربوط به مسئله اصلی در شکل (۳-۳ ج) نشان داده شده‌اند. اینها درست همان خطوط نیرو و سطوح هم‌پتانسیل مربوط به مسئله دو بار نقطه‌ای (شکل ۳-۳ ب) هستند، با این تفاوت که در مورد مسئله اخیر خطوط شار در فضای سمت چپ صفحه نیز ادامه دارند. از روی شکل پیداست که تمام خطوط شار الکتریکی که در شرایط عادی می‌بایست روی بار تصویری متمرکز شوند، به وسیله صفحه رسانای شکل ۳-۳ (ج) قطع می‌شوند. بنابراین کل بار واقع بر صفحه رسانا با $-q$ یعنی با بار تصویری برابر است. همین نتیجه را می‌توان از طریق ریاضی، با انتگرال‌گیری از معادله (۳۵-۳) روی تمامی سطح به دست آورد (مسئله ۳-۱۴).

بدیهی است که بار نقطه‌ای q نیروی جاذبه‌ای بر صفحه وارد می‌کند، زیرا علامت بار سطحی القایی مخالف با علامت بار نقطه‌ای q است. مطابق قانون کنش و واکنش نیوتون، این نیرو از



شکل ۳-۴ بار نقطه‌ای در داخل گوشه قائمه.

لحاظ مقدار برابر است با نیرویی که صفحه بر بار q وارد می‌کند. از آنجا که میدان ناشی از بار نقطه‌ای بر خود این بار نیرویی وارد نمی‌کند، در نتیجه

$$\mathbf{F} = -q \nabla \varphi_2 \quad (3-36)$$

که این درست همان نیرویی است که از طرف بار تصویری به بار نقطه‌ای وارد می‌شود.

مثال ۲-۳ بار نقطه‌ای در نزدیکی یک گوشه قائمه

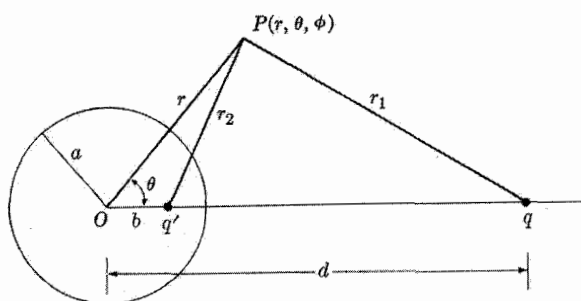
مسئله دیگری که با روش تصویری به راحتی قابل حل است، تعیین میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q است که در نزدیکی محل تقاطع دو صفحه رسانای عمود برهم قرار گرفته است (شکل ۳-۴ الف).

حل: مکان بارهای تصویری لازم در شکل ۳-۴ (ب) نشان داده شده است. به راحتی مشاهده می‌شود که دو صفحه نقطه‌چین در این شکل سطوحی با پتانسیل صفراند که از ترکیب پتانسیلهای بار q و سه بار تصویری ناشی می‌شوند.

مشکل اساسی در حل مسائل با شگرد تصویری، پیدا کردن گروهی از بارهای تصویری است که همراه با بارهای مشخص شده اصلی، سطوح هم‌پتانسیلی را بر روی رساناها تشکیل بدهند. مسئله فقط در مواردی سرراست است که شکل هندسی آنها ساده است. به هر حال، چنین موردی در مثال بعدی ارائه شده است.

مثال ۳-۳ بار نقطه‌ای و کره رسانا

مسئله بار نقطه‌ای q در نزدیکی کره رسانا را در نظر می‌گیریم. در این مورد فقط یک بار تصویری منفرد لازم است تا سطح کره را به سطح پتانسیل صفر تبدیل کند. برای آنکه پتانسیل کره به مقدار ثابت دیگری تبدیل شود، به بار تصویری دیگری احتیاج است.



شکل ۵-۳ بار نقطه‌ای q در نزدیکی کره رسانا. q' بار تصویری است.

حل: ابتدا ما مقدار و مکان بار تصویری آن q' را به دست می‌آوریم که همراه با بار نقطه‌ای q در همه نقاط سطح کره پتانسیل صفر را تولید کند. در شکل ۵-۳ وضع هندسی مسئله نشان داده شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز کره به شعاع a قرار گرفته است. از تقارن مسئله پیداست که بار تصویری q' باید بر روی خطی قرار بگیرد که بار نقطه‌ای q را به مرکز کره وصل می‌کند. با استفاده از مختصات کروی و قرار دادن مبدأ مختصات در مرکز کره، نتایج مطلوب به دست می‌آید. محور قطبی را خطی می‌گیریم که بار q را به مبدأ وصل می‌کند. فاصله b و مقدار بار q' را باید برحسب مقادیر معلوم q ، d و a پیدا کنیم. پتانسیلی که بارهای q و q' در نقطه دلخواه P تولید می‌کنند، برابر است با

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right] \quad (37-3) \end{aligned}$$

در روی سطح کره، $r = a$ و برای تمام مقادیر θ و ϕ ، پتانسیل $\varphi(a, \theta, \phi) = 0$ است. اما بنا بر معادله (۳۷-۳)، پتانسیل $\varphi(a, \theta, \phi)$ فقط وقتی می‌تواند به ازای تمام مقادیر صفر شود که دو جذر با یکدیگر متناسب باشند و این در صورتی ممکن است که $b = a^2/d$ باشد، زیرا در این صورت

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \frac{a}{d} \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$$

در نتیجه

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (38-3)$$

و به علاوه

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad (39-3)$$

از این معادلات می‌توان برای مشخص کردن مکان و مقدار بار تصویری اول استفاده کرد.

می‌توان بی‌آنکه ماهیت هم‌پتانسیل بودن سطح کروی برهم بخورد، بار تصویری دیگری مثل q'' را در مرکز کره قرار داد. مقدار q'' اختیاری است و می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که با شرایط مرزی مسئله سازگار باشد. لذا پاسخ کاملی برای مسئله بار نقطه‌ای و کره رسانا به دست آمده است. پتانسیل در همه نقاط خارج از کره عبارت است از

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \quad (40-3)$$

پتانسیل خود کره رسانا عبارت است از

$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (41-3)$$

و چگالی بار سطحی روی کره برابر است با

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (42-3)$$

همه خطوط میدان که به طور عادی می‌بایست روی بارهای تصویری متمرکز شوند، به وسیله کره قطع می‌شوند. بنابراین بار کل Q روی سطح کره، با جمع بارهای تصویری برابر است:

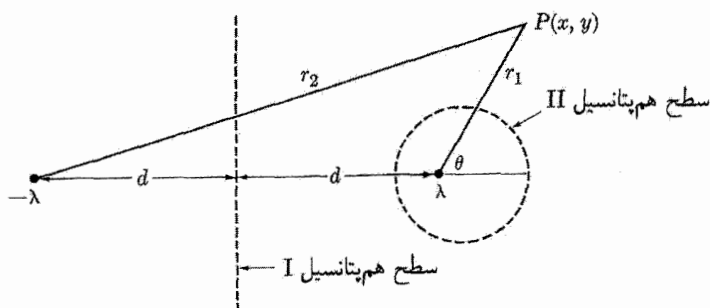
$$Q = q' + q'' \quad (43-3)$$

این نتیجه را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (42-3) تحقیق کرد.

دو مورد خاص و جالب این مسئله عبارت‌اند از کره رسانای متصل به زمین، یعنی موردی که: $\varphi(a) = 0$ و $q'' = 0$ است؛ و کره رسانای بدون بار، یعنی موردی که $q'' = -q'$ است.

۱۰-۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی

تاکنون روش تصویری ما به مسائل مربوط به بارهای نقطه‌ای و در نتیجه تصویرهای نقطه‌ای محدود بود. در این بخش چند مسئله را بررسی می‌کنیم که در حل آنها می‌توان از روش بارهای تصویری خطی استفاده کرد. دو خط موازی و بی‌نهایت دراز را در نظر می‌گیریم که بار در واحد طول آنها



شکل ۶-۳ دو بار خطی موازی و بی‌نهایت دراز (با بارهای λ و $-\lambda$ در واحد طول) که بر صفحه کاغذ عمودند.

به ترتیب برابر با λ و $-\lambda$ است (شکل ۶-۳). در هر نقطه پتانسیل از معادله زیر به دست می‌آید

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (44-3)$$

که در آن r_1 و r_2 فواصل عمودی نقطه مورد نظر از دو بار خطی‌اند. برای پیدا کردن سطوح همپتانسیل، معادله (۴۴-۳) را مساوی مقدار ثابتی قرار می‌دهیم که مستلزم برقراری شرط زیر است

$$\frac{r_1}{r_2} = M \quad (45-3)$$

که در آن M مقداری است ثابت. پس سطوح همپتانسیل را می‌توان با معادله (۴۵-۳) مشخص کرد. سطح همپتانسیل متناظر با $M = 1$ صفحه‌ای است که درست در وسط فاصله میان دو بار خطی قرار گرفته است و در شکل ۶-۳ به صورت سطح همپتانسیل I نشان داده شده است. پتانسیل این صفحه صفر است. بنابراین، مسئله مربوط به بار خطی بسیار درازی که موازی یک صفحه رسانا قرار گرفته است، حل شده تلقی می‌شود. در نیم‌فضای مقابل صفحه رسانا، پتانسیل به درستی از معادله (۴۴-۳) به دست می‌آید. فرض کنید بار خطی که در سمت راست شکل دیده می‌شود، همان بار خطی باشد که به فاصله d از صفحه رسانا قرار گرفته است. در این صورت بار خطی سمت چپ در حکم تصویر آن است. در اینجا نیز بار کل روی صفحه رسانا مساوی است با بار تصویری.

حال سطوح همپتانسیلی را بررسی می‌کنیم که با سایر مقادیر M متناظرند. صورت عمومی چنین سطوحی با نوشتن r_1 و r_2 در دستگاه مختصات قائم به دست می‌آید. برای سهولت، مبدأ مختصات را روی بار خطی مثبت می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این بار بر محور z منطبق است و

خط باردار دیگر در $x = -2d$ و $y = 0$ قرار دارد. در این صورت

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

و

$$r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2$$

بنابراین معادله (۴۵-۳) پس از کمی عملیات جبری به صورت زیر در می آید

$$x^2 + y^2 - \frac{4M^2xd}{1-M^2} = \frac{4M^2d^2}{1-M^2} \quad (46-3)$$

این معادله، معادله یک استوانه مستدیر است که به موازات محور z قرار گرفته است. اگر M کمتر از یک باشد، آنگاه استوانه بار خطی مثبت را در میان می گیرد، درست مانند سطح هم پتانسیل II در شکل ۶-۳. محور استوانه از نقطه ای با مختصات زیر می گذرد

$$x = \frac{2M^2d}{1-M^2}, \quad y = 0 \quad (47-3)$$

و شعاع استوانه مساوی است با

$$R_c = \frac{2Md}{1-M^2} \quad (48-3)$$

مثال ۴-۳ استوانه رسانای بارداری که به موازات یک صفحه رسانا قرار گرفته است اکنون می توانیم مسائل جالب توجه متعددی را که با رساناهای استوانه ای سروکار دارند حل کنیم؛ ولی در اینجا فقط به بحث درباره یکی از آنها می پردازیم. مسئله ای را در نظر بگیرید که در آن رسانای استوانه ای طولی در نزدیکی یک صفحه رسانا و موازی با آن قرار گرفته است. بار استوانه در واحد طول λ است. می توان از شکل ۶-۳ برای بحث در مورد این مسئله استفاده کرد؛ در اینجا دو جسم رسانا بر سطوح نقطه چین منطبق اند.

حل: در این مورد هر دو بار خطی بارهای تصویری اند و پتانسیل در ناحیه خارج از استوانه، در سمت راست صفحه رسانا، از معادله (۴۴-۳) به دست می آید. واضح است که بار القایی در صفحه برابر است با $-\lambda$ در واحد طول، در امتداد محور z .

۱۱-۳ دستگاه‌رساناها و ضرایب پتانسیل

در بخشهای گذشته دربارهٔ چند روش مهم برای پیدا کردن پاسخهای معادلهٔ لاپلاس بحث کردیم. اگر چه این روشها کلی هستند، اما در عمل به مسائلی محدود می‌شوند که در آنها رساناها شکلهای نسبتاً ساده‌ای دارند. وقتی شکل رساناها پیچیده باشد، موضوع حل کامل ریاضی آنها به شکل تحلیلی منتفی است. با وجود این تنها به این دلیل که پتانسیل در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، می‌توان برخی از نتایج را دربارهٔ دستگاه به‌دست آورد. در واقع در اینجا نشان خواهیم داد که میان پتانسیل هر یک از رساناها و بارهای رساناهای مختلف دستگاه، رابطه‌ای خطی وجود دارد. ضرایب این رابطه، که به ضرایب پتانسیل مشهورند، فقط تابع شکل هندسی دستگاه‌اند (مخصوصاً، این ضرایب به بارها یا پتانسیلها بستگی ندارند) و با اینکه همیشه به‌طور تحلیلی قابل محاسبه نیستند، ولی می‌توان آنها را به‌طور عددی یا مستقیماً به‌وسیلهٔ آزمایش تعیین کرد.

فرض کنید N رسانا با وضع هندسی ثابت وجود دارند. همچنین فرض کنید تمام رساناها بدون بارند، بجز رسانای j ام که دارای بار Q_j است. پاسخ مناسب معادلهٔ لاپلاس را در فضای خارج از سطوح رساناها با نماد $\varphi^{(j)}(x, y, z)$ و پتانسیل هر یک از رساناها را با $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \dots, \varphi_N^{(j)}, \dots$ نشان می‌دهیم. حال بار رسانای j ام را به λQ_j تغییر می‌دهیم. چون λ عددی ثابت است، تابع $\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند؛ این تابع در شرایط مرزی جدید نیز صدق می‌کند که این نکته را می‌توان از استدلال زیر نتیجه گرفت. پتانسیل در تمام نقاط فضا در λ ضرب شده است؛ پس تمام مشتقات پتانسیل (و بخصوص گرادیان آن) در λ ضرب شده‌اند. چون $\sigma = \varepsilon_0 E_n$ نتیجه می‌شود که تمام چگالیهای بار در λ ضرب شده‌اند. بنابراین بار رسانای j ام λQ_j است و بقیه رساناها همچنان بی‌بار می‌مانند.

پاسخی از معادلهٔ لاپلاس که با مجموعه‌ای از شرایط مرزی خاص تطبیق کند، یکتاست؛ پس پاسخ صحیح، یعنی $\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z)$ ، را برای مسئلهٔ تغییر یافتهٔ خود پیدا کرده‌ایم. نتیجهٔ جالب توجهی که از این بحث می‌گیریم، این است که پتانسیل هر رسانا متناسب است با Q_j ، یا بار رسانای j ام، یعنی

$$\varphi_i^{(j)} = p_{ij} Q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (49-3)$$

که در آن p_{ij} ثابتی است که فقط به شکل هندسی بستگی دارد.

همین استدلال را می‌توان برای موردی که رسانای k ام باردار باشد، یعنی $Q_k = \nu Q_k$ ، و بقیه رساناها بی‌بار باشند، به‌کار برد. در اینجا پاسخ مناسب معادلهٔ لاپلاس $\nu \varphi^{(k)}(x, y, z)$ است که در آن $\varphi^{(k)}$ پاسخ برای مورد $\nu = 1$ است. بنابراین آشکار است که

$$\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z) + \nu \varphi^{(k)}(x, y, z) \quad (50-3)$$

پاسخ مناسبی است برای موردی که هر دو رسانای j ام و k ام باردار باشند. بار دیگر به یکتا بودن پاسخ معادله لاپلاس برای مجموعه مفروض از شرایط مرزی برمی گردیم. از این رو، معادله (۳-۵۰) پاسخ منحصر به فرد این مورد است و پتانسیل هر رسانا را می توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi_i = p_{ij}Q_j + p_{ik}Q_k, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (51-3)$$

این نتیجه را می توان مستقیماً به موردی که در آن همه N رسانا، باردار باشند، تعمیم داد:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij}Q_j \quad (52-3)$$

این همان رابطه خطی میان پتانسیل و بار است که در جستجویش بودیم؛ ضرایب p_{ij} را ضرایب پتانسیل می نامند. در فصل ۶ نشان خواهیم داد که آرایه (ماتریس) این ضرایب متقارن است، یعنی $p_{ij} = p_{ji}$.

۱۲-۳ حل عددی مسائل الکتروستاتیک

در مباحث قبل درباره حل معادله لاپلاس همواره دستگاه مختصاتی به کار برده شد که به خوبی با شرایط مرزی سازگار باشد؛ یعنی مختصات قائم برای شرایط مرزی قائم، مختصات استوانه ای برای مرزهای استوانه ای و غیره. تمام مرزها با یک دستگاه مختصات مناسب جور نیستند. علاوه بر آن، حتی اگر جور باشند، صدق کردن شرایط مرزی به طور تحلیلی ممکن است بسیار دشوار باشد. اینها برخی از دلایلی است که چرا تقریبهای عددی برای حل معادله لاپلاس مهم است. با اینکه موضوع تاریخچه طولانی دارد، دسترسی آسان به رایانه های دیجیتال با مقیاس بزرگ در این اواخر بوده است که توجه تازه به روشهای عددی را به همراه داشته است.

از میان راههای بسیاری که به کار گرفته شده اند، دو نوع عمومی غالب اند: روشهای تفاضلهای متناهی و روشهای جزء متناهی. روشهای تفاضلهای متناهی توسط یک شبکه منظم پهن شده بر روی ناحیه ای که پاسخ باید در آن جستجو شود توصیف می شوند. در هر نقطه روی شبکه پاسخی معادله لاپلاس توسط تقریب مشتق دوم تخمین زده می شود. سپس معادلات جبری حاصل معمولاً توسط روش تکرار، برای مقادیر پتانسیل در نقاط شبکه، حل می شوند. از طرف دیگر، روش جزء متناهی، ناحیه (یا در برخی روشها مرز ناحیه) را که در آن پاسخ باید جستجو شود به زیر جزءهایی فوق داده شده با مرزها و در برگیرنده تمام ناحیه بدون همپوشانی تقسیم می کند. در هر یک از این اجزای متناهی، یک تقریب تحلیلی ساده برای پاسخ در نظر گرفته می شود. پاسخها باید در شرایط

مرزی صدق کنند و در عبور از مرز بین دو عنصر باید پیوسته باشند. بعضی پارامترهای قابل تنظیم در تقریب باقی گذاشته می‌شود، و این پارامترها با کمینه کردن انرژی سیستم تعیین می‌شوند. کمی مشکل است این توصیف تجریدی را دنبال کنیم، بنابراین هر یک از دو روش را برحسب حل معادله لاپلاس در یک بُعد بحث خواهیم کرد. معادله و شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (53-3)$$

این معادله در بخش (۳-۳) مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ دقیق آن به سادگی پیدا می‌شود که $\varphi(x) = x$ است. ابتدا روش تفاضلهای متناهی را برای پیدا کردن پاسخ تقریبی به کار خواهیم برد.

اولین قدم تقسیم محدوده از $x = 0$ ، $x = 1$ به N قسمت مساوی به طول $1/N$ است. در نقطه i ام از این تقسیمات، معادله لاپلاس توسط رابطه زیر تقریب زده می‌شود

$$[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})]/(1/N)^2 = 0 \quad (54-3)$$

در نقاط انتهایی $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(1) = 1$. تعداد $(N - 1)$ معادله (۵۴-۳) را می‌توان دقیقاً حل کرد (پاسخ $\varphi_i = i/N$ است)، اما معمول‌ترین است که روش تکرار را برای یافتن رشته‌ای از پاسخهای تقریبی که به پاسخ دقیق همگرا شوند به کار برد. پایه‌ای برای روش تکرار، دوباره مرتب کردن معادله (۵۴-۳) به شکل زیر است

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}}{2} \quad (55-3)$$

حل مسئله با فرض مجموعه‌ای مقادیر برای φ_i ها شروع می‌شود. غالباً انتخاب $\varphi_i = 0$ برای تمام نقاط داخلی و البته مقادیر مرزی تعیین شده، $\varphi_0 = 0$ و $\varphi_1 = 1$ بر روی مرز در نظر گرفته می‌شود. مجموعه جدیدی از φ_i ها، با شروع کردن از $i = 1$ و یا $i = N - 1$ و همواره به کار بردن آخرین مقدار موجود φ_i ها در طرف دست راست معادله (۵۵-۳)، با استفاده از این معادله محاسبه می‌شود. ما "تفاضل" بین دو تکرار را به عنوان بیشینه مقدار مطلق تفاوت بین مقادیر پتانسیل محاسبه شده توسط دو تکرار برای تمام نقاط روی شبکه تعریف می‌کنیم. تکرار ادامه می‌یابد تا تفاضل بین دو تکرار آخر به مقدار معینی تقلیل یابد. این فرایند دو نارسایی دارد: به آهستگی همگرا می‌شود، و تفسیر تفاضل بین دو تکرار آخر (یعنی، تفاضل بین آخرین تکرار و پاسخ دقیق) به عنوان اندازه خطا سؤال برانگیز است.

آهنگ همگرایی را با "فراواهلش" می‌توان بهبود بخشید. برای فراواهلش، معادله (۵۵-۳) به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\varphi_i = w \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}}{2} + (1-w) \varphi_i \quad (56-3)$$

که w یک ثابت غیرصفر اختیاری است. اگر معادلات (۵۵-۳) و (۵۶-۳) به عنوان معادلات تفاضلی در نظر گرفته شوند، هم‌ارزند. در نتیجه پاسخهای دقیق آنها برابرند. اما وقتی که معادله (۵۶-۳) به عنوان پایه برای تخمین زدن پاسخ با روش تکرار به‌کار برده شود — یعنی وقتی که آخرین مقادیر موجود برای کمیتهای دست راست معادله جهت محاسبه مقدار جدید برای دست چپ مورد استفاده قرار گیرد — تغییرات اساسی در آهنگ همگرایی و دقت تقریب پیدا می‌شود. با استفاده از شاخصهای بالا برای ردگیری کردن تکرارها، معادله (۵۶-۳) را برای $(n+1)$ امین تکرار برای مقدار پتانسیل در نقطه i به صورت زیر می‌نویسیم (با فرض اینکه با $i = 1$ شروع کنیم)،

$$\varphi_i^{n+1} = w \frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n}{2} + (1-w) \varphi_i^n \quad (57-3)$$

مقدار w آهنگ همگرایی را معین می‌کند، و معمولاً مقدار بهینه متمایزی برای آن وجود دارد. این مقدار به معادله در حال حل شدن، به مرز، به اندازه شبکه، و به مقدار پارامتر تکرار، D_m ، بستگی دارد. مکلف می‌کنیم که تفاضل (به همان‌گونه که در بالا تعریف شده) بین دو تکرار آخر از D_m کوچکتر باشد. مقدار بهینه w را فقط در موارد اندکی می‌توان از پیش تعیین کرد، اما به‌طور کلی مقدار تقریبی ۱/۵ سرعت همگرایی را به شدت افزایش می‌دهد. گرچه ضمانتی وجود ندارد، اما مقدار w که سریع‌ترین همگرایی را تولید کند اغلب دقیق‌ترین پاسخ را به‌ازای مقدار پارامتر تکرار داده شده نیز تولید می‌کند.

این روش تکرار را می‌شود به سهولت برنامه‌نویسی کامپیوتری کرد، و انجام آن به بخش مسائل واگذار شده است. اما آموزنده است بدون در نظر گرفتن جزئیات برنامه به برخی نتایج نگاه کنیم. جدول ۲-۳ تعداد تکرارهای لازم برای برقراری شرایط تکرار مختلف، $\max\{|\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n|\} < D_m$ ، برای ۱۰ قسمت را نشان می‌دهد. اگر $w = 1$ باشد تعداد زیادی تکرار برای صادق بودن معیار بالا حتی $w = 0.1$ (مقداری نسبتاً بزرگ) احتیاج داریم. همچنین $w = 1$ دقت (حد بالای اندازه تفاضل بین مقدار دقیق و مقدار محاسبه‌شده) تقریباً یک مرتبه بزرگی بدتر از D_m است. برای $w = 1/5$ که مقدار بهینه نیست، تنها حدود یک سوم تعداد تکرارها برای صدق کردن یک معیار تکرار داده شده لازم است و جالب‌تر اینکه، دقت یک مرتبه بزرگی بهتر از حالت $w = 1$ برای همان مقدار D_m است. اگر N بزرگتر باشد بالا رفتن همگرایی به دست آمده توسط انتخاب

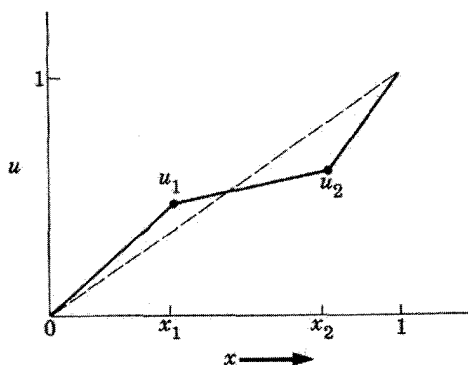
جدول ۲-۳ تعداد تکرارها برای صدق کردن معیار تکرار D_m در تقریب تفاضلهای متناهی برای معادله لاپلاس یک بعدی، ($\varphi(0) = 0$ ، $\varphi(1) = 1$ ؛ تعداد قسمتها $N = 10$)

$D_m = 0.1$					
0.00001	0.0001	0.001	0.01		$w = 1.0$
87	64	41	18	3	تعداد تکرار
0.000085	0.00086	0.0086	0.087	0.42	بیشینه خطا
					$w = 1.5$
25	19	14	9	2	تعداد تکرار
1.3×10^{-5}	0.00017	0.0015	0.012	0.20	بیشینه خطا

مقدار بهینه w شگفت آور است. برای مثال، اگر $N = 50$ و $D_m = 0.001$ باشد، به ۲۳۳ تکرار با $w = 1$ احتیاج است در حالی که فقط به ۵۲ تکرار برای $w = 1.9$ احتیاج است. در مسائل عملی البته پاسخ دقیق ناشناخته است. برای مشخص کردن اینکه عمل تکرار چه موقع به اندازه کافی جلو رفته است تا دقت لازم را بدهد، باید از برخی آزمونها نظیر معیار تکرار ذکر شده استفاده کرد. قبل از اینکه سعی کنیم پاسخی نهایی مسئله جدیدی را پیدا کنیم، معمولاً به زحمتش می‌ارزد که با کمی صرف وقت همگرایی را به طور عددی ملاحظه کنیم. تجربه کمک می‌کند و برای این منظور تعدادی مسئله برای آزمایش در آخر این فصل تدارک دیده شده است.

سپس روش جزء متناهی را برای همین مسئله در نظر می‌گیریم. دوباره می‌خواهیم مسئله مقادیر مرزی معادله (۵۳-۳) را حل کنیم، اما این بار با استفاده از روش ساده جزء متناهی. برای انجام فرایند، بازه $x = 0$ تا $x = 1$ به وسیله مجموعه معینی از نقاط $0 < x_1 < \dots < 1$ به تعدادی جزء تقسیم شده است. تعداد نقاط و همچنین موقعیت نقاط، اختیاری است. ما برای مسئله، بازه را به وسیله نقاط x_1 و x_2 به سه جزء تقسیم می‌کنیم. در هر جزء، پتانسیل φ به وسیله تابع مناسبی تقریب زده می‌شود. توابع تقریبی لازم نیست در معادله لاپلاس صدق کنند، اما آنهایی که ما برای این مسئله انتخاب می‌کنیم در معادله لاپلاس صادق خواهند بود. در واقع، ما تقریبهای خطی (که با u نشان می‌دهیم) برای پتانسیل φ انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 u &= b_1 x & 0 &\leq x \leq x_1 \\
 u &= a_2 + b_2 x, & x_1 &\leq x \leq x_2 \\
 u &= a_3 + b_3 x, & x_2 &\leq x \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{58-3}$$



شکل ۷-۳ تابع آزمایشی برای استفاده در روش جزء متناهی برای تعیین پتانسیل الکتروستاتیکی.

رابطه اول این معادلات شامل شرط مرزی $u(0) = 0$ است. با ملزم کردن اینکه $u(1) = 1$ و جفت کردن مقادیر پتانسیل در x_1 و x_2 داریم

$$b_1 = \frac{u_1}{x_1}$$

$$a_2 = u_1 - \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} x_1, \quad b_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad (59-3)$$

$$a_3 = u_2 - \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} x_2, \quad b_3 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}$$

در اینجا $x_3 = 1$ ، $u_3 = 1$ و u_1 و u_2 هنوز مقادیری نامشخص اند. این پتانسیل آزمایشی در شکل ۷-۳ نشان داده شده است.

حال فرض کنیم $\varphi(x)$ پاسخ واقعی معادله لاپلاس باشد و تعریف کنیم $e(x) = u(x) - \varphi(x)$ ؛ به طوری که $e(x)$ خطای پاسخ تقریبی باشد. چون $u(x)$ انتخاب شده است که همان شرایط مرزی $\varphi(x)$ برای آن صادق باشد، $e(0) = e(1) = 0$. حال از $(du/dx)^2$ (که برابر است با $[d(\varphi + e)/dx]^2$) بر روی بازه 0 تا 1 انتگرال می‌گیریم

$$F = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + 2 \int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{de}{dx} dx + \int_0^1 \left(\frac{de}{dx} \right)^2 dx \quad (60-3)$$

انتگرال دوم با نوشتن $d^2\varphi/dx^2 = d/dx[e(d\varphi/dx)] - e d^2\varphi/dx^2$ نشان داده خواهد شد که برابر صفر است. چون φ در معادله لاپلاس صدق می‌کند $d^2\varphi/dx^2 = 0$. جمله

دیگر دیفرانسیل کامل است. در نتیجه

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(e \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = e \frac{d\varphi}{dx} \Big|_0^1 = 0 \quad (۶۱-۳)$$

چون بر روی مرزها $e = 0$. بنابراین معادله (۶۰-۳) به صورت زیر در می آید

$$F = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (۶۲-۳)$$

حال از معادلات (۵۸-۳) و (۵۹-۳) می بینیم du/dx تابعی از b ها و یا به طور معادل تابعی از u_1 و u_2 است. اگر انتگرال طرف دست چپ معادله (۶۲-۳) با تغییر پارامترهای تابع آزمایشی کمینه شود، متوسط مجذور تفاضل بین میدان الکتریکی $(-du/dx)$ مربوط به تابع آزمایشی و میدان الکتریکی واقعی نیز کمینه خواهد شد. بدین معنی ما بهترین تقریب نزدیک به پاسخ واقعی $\varphi(x)$ را به دست می آوریم.^۱

در مورد ساده ای که در حال حاضر بررسی می کنیم، انتگرال F را می توان به راحتی محاسبه کرد. برحسب b ها به این صورت است که:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{x_1} b_1^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} b_2^2 dx + \int_{x_2}^1 b_3^2 dx \\ &= b_1^2 x_1 + b_2^2 (x_2 - x_1) + b_3^2 (1 - x_2) \\ &= \frac{u_1^2}{x_1} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{x_2 - x_1} + \frac{(1 - u_2)^2}{1 - x_2} \end{aligned} \quad (۶۳-۳)$$

با مشتق گیری نسبت به u_1 و u_2 و قرار دادن دو مشتق برابر با صفر، دو معادله حاصل می شود که از آنها u_1 و u_2 را می توان تعیین کرد. نتیجه این است که $u_2 = x_2$ و $u_1 = x_1$. به عبارت دیگر، این تقریب جزء منتهای خاص پاسخ دقیق را به دست می دهد. این اقبال نیک اصولاً به سادگی مسئله مرتبط است. اگر، مثلاً شکل تقریبی $u = a + bx^2$ را به کار برده بودیم باز هم پاسخی تقریبی یافته بودیم، اما پاسخ دقیق نمی بود. اگر بازه به اجزای بیشتری تقسیم شده بود (یا اگر توابع تقریب پارامترهای بیشتری داشتند) معادلات بیشتری برای حل u_i ها (و پارامترهای دیگر) وجود می داشت، در نتیجه

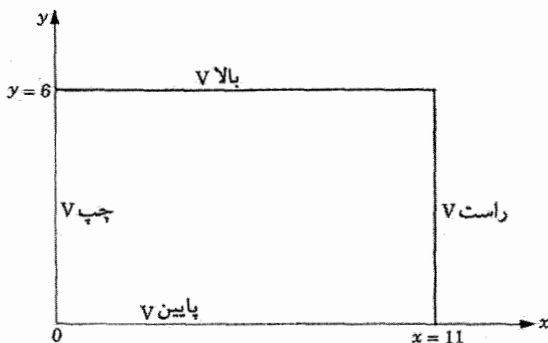
۱. این تجزیه و تحلیل می تواند دقیقاً به همین شکل در مختصات سه بعدی انجام شود (با استفاده از قضیه دیورژانس)؛ در این مورد کمیتی که باید کمینه شود انتگرال $\nabla u \cdot \nabla u$ روی حجم دستگاه است. اگر روی قسمتی از مرز پتانسیل مشخص شده باشد و روی بقیه مرز مقدار میدان الکتریکی (مشتق در راستای عمود پتانسیل) مشخص شده باشد، باز هم می توان تجزیه و تحلیل را انجام داد.

ما تقریباً به طور حتم برای حل آنها باید به برنامه عددی متوسل می‌شدیم. پیچیدگیهای مسائل جزء متناهی انجام تجزیه به جزءهای متناهی، یافتن معادلات خطی، و سپس حل آنها را مطرح می‌نماید. با در نظر گرفتن مسئله بسیار ساده قبل، چندین نکته آشکار می‌شود. فهم و آماده‌سازی مسئله تفاضلهای متناهی ساده‌تر است، اما احتیاج به یک شبکهٔ یکنواخت دارد. به دلیل اینکه محدودیتی بر روی اندازه اجزا وجود ندارد، روش جزء متناهی ساده‌تر بر روی شکل‌های هندسی نامنظم انطباق داده می‌شود، و شبکه را به راحتی می‌توان جایی که پتانسیل به شدت تغییر می‌کند ظریف‌تر و جایی که به آرامی تغییر می‌کند ضخیم‌تر ساخت. نتیجه حصول دقت بهتر برای مقدار محاسبه معین است. روش جزء متناهی یک تقریب تحلیلی برای پتانسیل در هر جزء نیز می‌دهد. روش تفاضلهای متناهی پتانسیل را فقط در نقاط مجزا می‌دهد و بنابراین درونیابی و یا تقریبهای دیگری برای محاسبهٔ میدان احتیاج دارد. لیکن به خاطر داشته باشیم، که آماده‌سازی در روش جزء متناهی به طور قابل توجه‌ای مشکل‌تر است. درباره هر یک از این روشها مطالب به مراتب بیشتری وجود دارد که می‌توان بیان کرد، و مراجع جامعی درباره آنها وجود دارد.

در قسمت بعد چند مثال روشهای عددی واقعی‌تر و نسبتاً ساده را در نظر می‌گیریم. در برنامه‌های کامپیوتری مثالهای از زیر زبان برنامه‌نویسی معروف به BASIC استفاده شده است. مقدمه کوتاهی درباره BASIC در پیوست ۱ داده شده است.

مثال ۵-۳ پتانسیل در ناحیه‌ای مستطیل شکل

مسئله یافتن تقریبی برای پتانسیل دوبعدی در ناحیه‌ای مستطیل شکل است با مرزهایی که پتانسیلهای نشان داده‌شده در شکل ۸-۳ با $V = 1$ بالا، $V = 3$ چپ، $V = 7$ راست و $V = 0$ پایین را داراست.



شکل ۸-۳ ناحیه مستطیل شکل با شرایط مرزی که باید برای پتانسیل الکتروستاتیکی به طور عددی حل شود.

```

100 '*****
110 '*
120 '* LAPLAC4A: NUMERICAL SOLUTION OF LAPLACE'S EQUATION IN 2D RECTANGLE *
130 '* NO ESSENTIAL LINE NUMBERS *
140 '*
150 '*****
160 'The rectangle is 7x12 including the boundaries. The mesh is 1x1 squares.
170 DIM V(10, 20)
180 CLS : SCREEN 0
190 '
200 'ENTER DATA
210 PRINT "Enter values between 0 and 1 for the potentials on the four sides."
220 INPUT "VTOP = ", VT: INPUT "VBOT = ", VB
230 INPUT "VLEFT = ", VL: INPUT "VRIGHT = ", VR
240 PRINT "Enter value of iteration parameter, DM.": INPUT "DM = ", DM
250 PRINT "Enter the value of the relaxation parameter, w.": INPUT "w = ", W
260 '
270 LOCATE 23, 1: PRINT "Press any key to continue"
280 C$ = INPUT$(1): CLS : IT = 0
290 '
300 'Enter starting values for the potential at the grid points and on the bdy.
310 FOR J = 2 TO 11
320 JP = 6 * J - 6
330 V(1, J) = VT: LOCATE 1, JP: PRINT VT
340 V(7, J) = VB: LOCATE 19, JP: PRINT VB
350 NEXT J
360 FOR I = 2 TO 6
370 V(I, 1) = VL: V(I, 12) = VR: IP = 3 * I - 2
380 FOR J = 2 TO 11: V(I, J) = 0: NEXT
390 LOCATE IP, 1: PRINT V(I, 1)
400 FOR J = 2 TO 12: JP = 6 * J - 6: LOCATE IP, JP: PRINT V(I, J): NEXT
410 NEXT I
420 '
430 'Iteration procedure
440 IT = 0
450 DW = 1
460 WHILE DW > DM
470 IT = IT + 1
480 DW = 0
490 LOCATE 22, 5: PRINT "Iteration no. = "; IT
500 FOR I = 2 TO 6
510 FOR J = 2 TO 11
520 IP = 3 * I - 2: JP = 6 * J - 6: IA = IP + 1
530 VIJ = W * ((V(I - 1, J) + V(I + 1, J) + V(I, J - 1) + V(I, J + 1))
/ 4) + (1 - W) * V(I, J)
540 DC = ABS(VIJ - V(I, J)): 'Residual at point I,J.
550 IF DC > DW THEN DW = DC: 'Largest residual in a given iteration.
560 V(I, J) = VIJ
570 LOCATE IP, JP: PRINT USING "####"; V(I, J)
580 LOCATE IA, JP: PRINT USING "####"; DC
590 NEXT J
600 NEXT I
610 WEND
620 '
630 LOCATE 22, 25: PRINT "- Value of DW achieved <="; DW
640 LOCATE 21, 1: PRINT "DM = "; DM, "w = "; W
650 END

```

شکل ۹-۳ برنامه BASIC برای تقریب تفاضلهای متناهی برای معادله لاپلاس دوبعدی.

حل: روش تفاضلهای متناهی را به کار خواهیم برد. معادله تکرار برای این مسئله به صورت زیر است

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{w}{4} [\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n] + (1-w)\varphi_{i,j}^n \quad (۶۴-۳)$$

شاخصهای بالا شماره تکرار را نشان می دهند، و w دوباره پارامتر واهلش است. فرایند تکرار برای برنامه نویسی ساده است و فهرستی (در BASIC) برای یک برنامه ساده در شکل ۹-۳ داده شده است. خطوط ۱۰۰ تا ۲۵۰ عنوان و خطوط داده های ورودی را شامل می شود. خطوط ۲۷۰

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.6269	0.7445	0.7724	0.8146	0.8265	0.8344	0.8405	0.8447	0.8419	0.8140
0.4630	0.5588	0.6105	0.6393	0.6572	0.6706	0.6831	0.6962	0.7088	0.7141
0.3665	0.4170	0.4516	0.4750	0.4923	0.5077	0.5250	0.5484	0.5830	0.6335
0.2859	0.2912	0.3038	0.3169	0.3294	0.3428	0.3607	0.3895	0.4412	0.5370
0.1860	0.1581	0.1553	0.1595	0.1656	0.1735	0.1854	0.2076	0.2555	0.3731
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

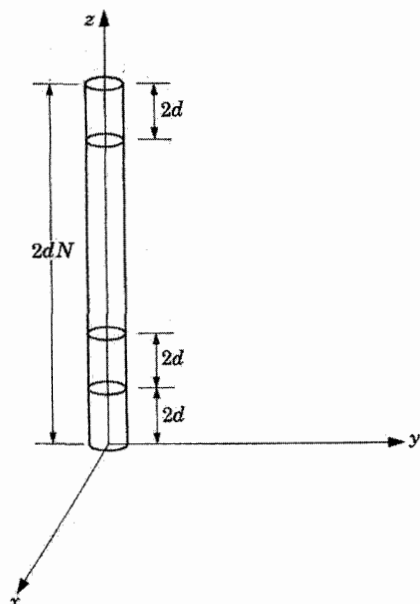
شکل ۳-۱۰ پتانسیل در ناحیه‌ای مستطیل شکل محاسبه شده توسط روش تفاضلهای متناهی (مثال ۳-۵).

تا 41° مقادیر اولیه را انتخاب می‌کند و آنها را به صورت یک آرایه بر روی صفحه نمایش نشان می‌دهد (آرایه هفت در دوازده انتخاب شده به دلیل اینکه بزرگترین آرایه است که برای پتانسیل و تفاضلهای بین دو تکرار آخر چهار رقم با معنا را بر روی صفحه نمایش استاندارد نشان خواهد داد). خطوط 43° تا 61° سلسله دستورهای عمل تکرار است. داخل بیرونی‌ترین حلقه، خط 46° رسیدگی می‌کند که آیا میزان تکرار رضایت بخش است؛ اگر نشده باشد، تکرار دیگری ساخته می‌شود. خطوط 57° و 58° مقدار پتانسیل و باقیمانده را برای هر تکرار، همین که کامل شد، نشان می‌دهد. اگر مقدار بزرگترین باقیمانده — که تفاضل بین دو تکرار آخر است — کمتر از پارامتر تکرار تعیین شده باشد، خط 63° تعداد آن را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده برای پارامتر تکرار 10^{-6} با 1.5 در $w = 3-10$ نشان داده شده است. فقط 24 تکرار لازم است تا به این نتایج برسیم و آنها قطعاً در معادلات تفاضلی با دقت زیادی صادق‌اند. متأسفانه، تضمینی وجود ندارد که پاسخ تقریبی به همان خوبی حل معادله لاپلاس باشد. ما در این بخش رسیدگی بیشتر به این مطلب مهم را تا بعد به تعویق می‌اندازیم.

مثال بعد روش گشتاورها را برای محاسبه توزیع بار روی یک رسانای استوانه‌ای نازک بلند به کار می‌گیرد. این روش از بسیاری جهتها شبیه روش جزء متناهی است.

مثال ۳-۶ توزیع بار روی یک رسانای استوانه‌ای نازک بلند

مسئله یافتن توزیع بار بر روی یک رسانای استوانه‌ای نازک بلند است. اگر بار بر روی یک رسانا قرار گیرد، طوری روی آن پخش خواهد شد که رسانا را هم پتانسیل سازد. چنانچه این توزیع بار را بتوان مشخص کرد، پتانسیل را در هر نقطه از فضا با استفاده از معادله (۲-۱۵) می‌توان یافت. پیدا کردن توزیع بار با استفاده از روشهای تحلیلی پیچیده است. در نتیجه با روش عددی معروف به روش گشتاورها را مورد استفاده قرار می‌دهیم، که همچنین روش جزء مرزی نیز نامیده می‌شود و



شکل ۱۱-۳ یک سیم باردار برای مقاصد محاسباتی به N قسمت تقسیم شده است.

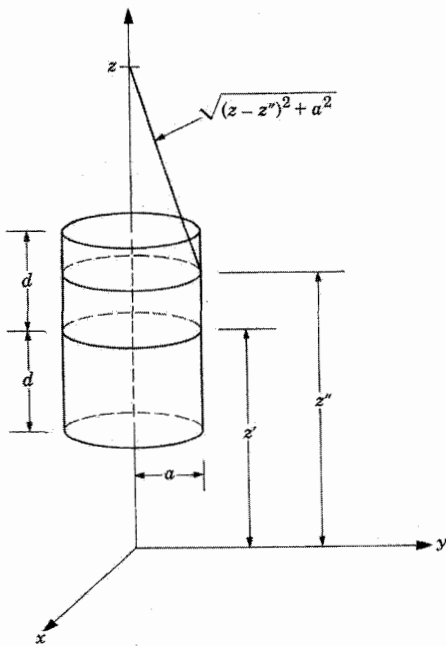
بعضی اوقات به عنوان روش جزء متناهی به آن ارجاع می‌شود. استوانه دارای سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a است و در راستای محور z قرار دارد. ما استوانه را به N جزء، هر یک به طول $2d$ همان‌گونه که در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده تقسیم خواهیم کرد، و فرض می‌کنیم $d \ll a$. کل بار روی استوانه Q است اما توزیع آن ناشناخته است.

حل: بار روی جزء i ام را با q_i نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که به طور یکنواخت روی سطح جزء توزیع شده است. این قسمتهای استوانه‌ای باردار اجزای متناهی هستند — در این مورد اجزای مرزی — و تابع آزمونی مجموعه‌ی مقادیر بار روی قطعه‌های مختلف است. حال جزئی را که بر روی محور z واقع شده و مرکزش در z' است (شکل ۱۲-۳) در نظر می‌گیریم. پتانسیل در نقطه‌ی z روی محور برابر است با

$$\varphi(z) = \frac{q'}{\lambda\pi\epsilon_0 d} \int_{z'-d}^{z'+d} \frac{dz''}{\sqrt{(z''-z)^2 + a^2}} \quad (۶۵-۳)$$

تبدیل $\xi = z - z''$ را به شکل استاندارد برمی‌گرداند که مقدار آن برابر است با

$$\varphi(z) = \frac{q'}{\lambda\pi\epsilon_0 d} \ln \left[\frac{z - z' + d + \sqrt{(z - z' + d)^2 + a^2}}{z - z' - d + \sqrt{(z - z' - d)^2 + a^2}} \right] \quad (۶۶-۳)$$



شکل ۱۲-۳ شکل هندسی برای پتانسیل تولیدشده توسط جزء باری از یک سیم مستقیم طولی. به معادله (۶۵-۳) رجوع شود.

مقدار این انتگرال در $z = z'$ (یعنی، سهم بار روی یک جزء به پتانسیل خود آن) تقریباً برابر است با

$$\varphi(z') = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d} \ln\left(\frac{2d}{a}\right) \quad (۶۷-۳)$$

که فقط جمله با پایین‌ترین مرتبه در a/d نگه‌داشته شده است. سهم بار روی جزء واقع در z' به پتانسیل در z برابر است با (برای $z' > z$)

$$\varphi(z) = \frac{q'}{\lambda\pi\epsilon_0 d} \ln\left(\frac{z - z' + d}{z - z' - d}\right) \quad (۶۸-۳)$$

که از a در مقایسه با d صرف‌نظر شده است. پتانسیل جزء شماره ۱ را حالاً می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \ln\left(\frac{2d}{a}\right) + \frac{1}{\lambda\pi\epsilon_0 d} \sum_{j=2}^N q_j \ln\left(\frac{2j-1}{2j-3}\right) \\ &= \sum_{j=1}^N A_{ij} q_j \end{aligned} \quad (۶۹-۳)$$

جمله اول سهم بار روی خود جزء است و بقیه جملات سهم $N - 1$ جزء دیگر را می‌دهد.

برای جزء دوم؛ $A_{22} = A_{11}$ و $A_{21} = A_{12}$ و $A_{2,j} = A_{1,j-1}$ برای $j \geq 3$ پتانسیل به همین صورت است. به عبارت دیگر، معادله برای φ_1 شامل تمام مقادیر برای A_{ij} های ظاهر شده در تمام معادلات است. عمومیت دادن به اجزای بعدی رابطه بازگشتی مفیدی را برای محاسبه ماتریس ضرایب در بقیه معادلات فراهم می‌سازد. به علاوه، توجه داریم که به علت تقارن، بار روی جزء j همان باری است که روی جزء $(1 + N - j)$ است. بنابراین، تعداد معادلات می‌تواند اگر N زوج باشد یا با ضریبی قدری کوچکتر اگر N فرد باشد، با ضریب دو کاهش یابد. حالا مجموعه معادلات خطی همزمان را به شکل معادله (پ-۱) در پیوست ۱ داریم که طرفهای دست راست (D_i ها) آنها همه مساوی یک مقدارند. دوباره توجه داشته باشیم که این تساوی به این دلیل است که با سطح هم‌پتانسیل (یعنی یک رسانا) روبه‌رو هستیم.

برنامه BASIC، به نام CYLCON فهرست شده در شکل ۳-۱۳، این نتایج را برای فراهم ساختن معادلات برای بارهای روی اجزا، با فرض اینکه تعداد اجزا زوج باشد مورد استفاده قرار می‌دهد. معادلات با برنامه G-J2KA (فراخوانده شده توسط خط ۴۳۰) که در پیوست ۱ فهرست شده حل می‌شوند. برای سیمی به طول ۱ متر، قطر ۱ میلی‌متر، در پتانسیل ۱ ولت، نتایج عددی با استفاده از ۴۰ جزء در جدول ۳-۳ فهرست شده است. این محاسبه حتی با یک کامپیوتر سریع وقت‌گیر است، اما به خاطر داشته باشیم که ماتریسی با ۲۱۰ جزء را محاسبه می‌کنیم و بیست معادله خطی با ضرایب غیرصفر را حل می‌کنیم. در این روش پتانسیل در همه جا محاسبه نمی‌شود که بعد از آن با مشتق‌گیری بار معین شود، بلکه بار مستقیماً تعیین می‌شود. این روش خاصه در تعیین ظرفیت آرایه‌ای از رساناها، همان‌گونه که در فصل ۶ بحث شده، مفید است. همچنین، همان‌گونه که قبلاً ذکر شد، دانستن توزیع بار، محاسبه پتانسیل و میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضا امکان‌پذیر می‌سازد. این روش همان‌طور که مسئله ۶-۲۸ نشان می‌دهد به خوبی در سه بُعد عمل می‌کند. مطابق معمول، در مسائل جزء متناهی، در نوشتن معادلات و حل آنها پیچیدگی نهفته است. هیچ‌یک از ضرایب معادلات برای این مسئله صفر نیستند، و بنابراین فرایند حل مسئله حتی با شدت بیشتری با محاسبه توأم است.

این دو مثال فقط خراشی سطحی در این مقوله است. روش تفاضلهای متناهی به اندازه کافی ساده است که برنامه‌های عمومی به‌ندرت یافت می‌شوند. برنامه‌ها عموماً برای گروههای خاصی از مسائل و ملزومات ورودی و خروجی خاص طراحی شده‌اند. یک استثنا برنامه کلی مختصات قائم فهرست شده توسط کونین^۱ است، که در مرزهای اختیاری و مقادیر مرزی اختیاری به صورت بسیار جالب توجه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. از طرف دیگر، آماده کردن روش جزء متناهی

```

100 *****
110 *
120 *          CYLCON: CONTROL PROGRAM TO CALCULATE CHARGE DISTRIBUTION *
130 *          ON A CYLINDRICAL CONDUCTOR - USE WITH G-J2KA *
140 *          LINE NUMBER 510 IS ESSENTIAL *
150 *
160 *****
170 '
180 'Identifiers:
190 '   L   length of wire
200 '   A   radius of wire
210 '   N   number of segments (even)
220 '   2D = L/N length of segments
225 CLS
230 INPUT; "L = ", L; INPUT "   A = ", A
240 INPUT; "Even number of segments, N = ", N%
250 INPUT "   Array dimension M1>N/2, M1 = ", M1%
260 DIM A(M1%, M1%), D(M1%), W(M1%)
270 N1% = N% / 2: N2% = N% / 2
280 'Equation A(I,J)*Q(J) = V(I), V(I) = 1 for all I
290 '
300 'Compute coefficients, A(I,J)'S
310 FOR I = 1 TO N% / 2
320   FOR J = I + 1 TO N% / 2
330     A(I,J) = (1/2)*(LOG( (J-I+1/2) / (J-I-1/2) ) +
                 LOG( (N%-I-J+3/2) / (N% - I - J + 1/2) ))
340   NEXT J
350   FOR J = 1 TO I - 1
360     A(I,J) = A(J,I)
370   NEXT J
380   A(I,I) = LOG(L/(N%*A))+(1/2)*LOG( (2*(N%-2*I)+3) / (2*(N%-2*I)+1) )
390   D(I) = 1
400 NEXT I
410 '
420 'Solve equations
430 GOSUB 2000
440 '
450 'Print results
460 IF N% / 2 > 20 THEN 510
470 FOR I = 1 TO N% / 2
480   PRINT "Q("I") = " TAB(11):PRINT USING "#.#####"; W(I)
490 NEXT I
500 END
510 FOR I = 1 TO 20
520   PRINT "Q("I") = " TAB(11):PRINT USING "#.#####"; W(I),
530   PRINT TAB(25) "Q("I + 20") = " TAB(36):PRINT USING "#.#####"; W(I + 20)
540 NEXT I
550 END

```

شکل ۱۳-۳ برنامه بیسیک برای محاسبه ماتریس ضرایب برای سیم استوانه‌ای باردار (مثال ۳-۶).

پیچیده است، و احتیاج به حل آرایه بزرگی از معادلات خطی دارد. در نتیجه برنامه‌های بسیاری موجود است. سیلوستر و فراری^۱ تعدادی برنامه (به زبان فورترن ۷۷) برای مسائل دوبعدی فهرست کردند. همچنین، بسته‌های تجاری بسیاری موجودند و در واقع، روش جزء متناهی به‌عنوان وسیله طراحی مهندسی چنان با اهمیت شده است که برخی شرکتها نرم‌افزار اختصاصی برای مقاصدشان تدوین کرده‌اند.

لازم به ذکر نیست که کاربردهای بسیار ارزشمندی برای کامپیوترها در مسائل الکتروستاتیک وجود دارد. ما دو تا از آنها را شرح خواهیم داد. در مثال قبل، روش گشتاورها برای محاسبه توزیع بار

1. Sylvester, P. P., and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

جدول ۳-۳ حل مسئله سیم باردار (مثال ۳-۶). ($i = 1$) قطعه انتهایی است، $i = 20$ یکی از قطعات میانی است.)

q	i	q	i
۰٫۱۴۶۱۴	۱۱	۰٫۲۰۴۰۱	۱
۰٫۱۴۵۴۵	۱۲	۰٫۱۷۲۱۰	۲
۰٫۱۴۴۸۷	۱۳	۰٫۱۶۳۴۰	۳
۰٫۱۴۴۴۰	۱۴	۰٫۱۵۸۳۸	۴
۰٫۱۴۴۰۰	۱۵	۰٫۱۵۵۰۲	۵
۰٫۱۴۳۶۹	۱۶	۰٫۱۵۲۵۶	۶
۰٫۱۴۳۴۴	۱۷	۰٫۱۵۰۶۸	۷
۰٫۱۴۳۲۶	۱۸	۰٫۱۴۹۱۹	۸
۰٫۱۴۳۱۴	۱۹	۰٫۱۴۷۹۷	۹
۰٫۱۴۳۰۹	۲۰	۰٫۱۴۶۹۷	۱۰

توجه: سیم به طول m و قطر 1 m و 0.001 m ، با $N = 40$ قسمت است. برای تمام i ها $\varphi_i = D_i = \text{ولت}$ است. مقادیر داده شده در واقع $q_i / (4\pi\epsilon_0 d)$ هستند، برای به دست آوردن بار روی هر قسمت برحسب کولن، مقدار داده شده را در d (به متر) ضرب و بر 9×10^9 تقسیم می‌کنیم، با در نظر گرفتن اینکه $d = (2N) / \text{طول}$.

روی استوانه‌ای طولی به کار برده شد. با داشتن این توزیع بار، می‌توان پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از آن را با استفاده از معادلات (۲-۸) و (۲-۱۵) به ترتیب محاسبه نمود. این محاسبه برای هر نقطه، جمع سهمهای مجزا را از هر یک از آنچه که ممکن است تعداد بسیار زیادی جزء باشد، در بر می‌گیرد و این کاری است دشوار که می‌توان به سهولت به کامپیوتر واگذار کرد. پیدا کردن سطوح هم‌پتانسیل یا خطوط شار حتی به مراتب کسل‌کننده‌تر است، اما با قدری خلاقیت کامپیوتر را می‌توان برای انجام این محاسبات نیز برنامه‌نویسی کرد. بنابراین، محاسبه مستقیم پتانسیلها و میدانها یکی دیگر از کاربردهای ماست. کامپیوتر را می‌توان برای محاسبه پاسخ تحلیلی معادله لاپلاس، همان‌گونه که در مثال زیر نشان داده شده نیز به کار برد.

مثال ۳-۷ محاسبه عددی بسط سری فوریه برای پتانسیل در ناحیه‌ای مستطیل شکل مسئله به دست آوردن بسط سری فوریه برای پتانسیل در ناحیه‌ای مستطیل شکل است، همان‌گونه که در مسئله ۳-۱۸ تعیین شده است. در آن مسئله، پاسخ معادله لاپلاس در ناحیه‌ای مستطیل شکل در

```

100 '*****
110 '*
120 '*          FOUCOEF2:POTENTIAL IN RECTANGULAR REGION USING FOURIER SERIES
130 '*          NO ESSENTIAL LINE NUMBERS
140 '*
150 '*****
160 'Region is 0<=X<=12, 0<=Y<=7; potential on X =0, X=12, and Y=7 boundaries is
161 'zero; potential on y=0 boundary is one.
170 PI = 4*ATN(1)
180 DIM S(50)
190 CLS
200 INPUT "Number of terms less than 26, M =";M
210 CLS
220 DEF FNSINH(Z) = (EXP(Z)-EXP(-Z))/2
230 FOR Y=6 TO 0 STEP -1
240   FOR X = 1 TO 10
250     S(1) = (4/PI)*SIN(PI*X/11)*FNSINH(PI*(6-Y)/11)/FNSINH(PI*6/11)
260     FOR N = 1 TO M - 1
270       S(N+1) = S(N) + (4/PI)*(1/(2*N+1))*SIN((2*N+1)*PI*X/11)*FNSINH(PI
          *(2*N+1)*(6-Y)/11)/FNSINH(PI*(2*N+1)*6/11)
280     NEXT N
290   PRINT USING "#.#### "; S(M),
300   NEXT X
310   PRINT
320 NEXT Y
330 PRINT
340 PRINT "Number of terms =";M
350 END

```

شکل ۱۴-۳ برنامه بیسیک برای محاسبه پتانسیل نقاط روی شبکه داخل یک مستطیل.

دو بُعد، محدود به خطوط $x = 0, y = 0, x = 11, y = 6$ و با شرایط مرزی $\varphi(0, y) = 0, \varphi(11, y) = 0, \varphi(x, 6) = 0, \varphi(x, 0) = 1$ به صورت زیر مشخص شده است،

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{\sin \left[\frac{(2i+1)\pi x}{11} \right] \sinh \left[\frac{(2i+1)\pi(6-y)}{11} \right]}{\sinh \left[\frac{(2i+1)\pi 6}{11} \right]}$$

این پاسخ دقیق است، اما اگر مقادیر عددی پتانسیل را در نقاط بسیاری لازم داشته باشیم، محاسبات دشوار می‌شوند.

حل: برنامه بسیار کوتاهی که در شکل ۱۴-۳ نشان داده شده است پتانسیل را در هر نقطه روی شبکه به فاصله‌های واحد در داخل مستطیل حساب خواهد کرد. نتایج حاصل برای جمع ۲۵ جمله اول سری در شکل ۱۵-۳ (الف) نشان داده شده است.

سازنده است که نتایج به دست آمده با استفاده از سری فوریه را با نتایج به دست آمده توسط روش تفاضلهای متناهی مقایسه کنیم. ناحیه مستطیلی شکل به کاررفته در مثال ۷-۳ همانی است که قبلاً در محاسبه تفاضلهای متناهی، مثال ۵-۳ مورد استفاده قرار گرفت. بنابراین، می‌توانیم برنامه شکل ۹-۳ را برای به دست آوردن پاسخی تقریبی به کار ببریم. نتیجه در شکل ۱۵-۳ (ب) نشان داده شده است. مقادیر به دست آمده توسط دو روش عموماً تا دو رقم با معنا با هم سازگارند. این

(الف) بسط به توابع پایه										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	.0425	.0790	.1062	.1235	.1317	.1317	.1235	.1062	.0790	.0425
0	.0915	.1680	.2225	.2559	.2715	.2715	.2559	.2225	.1680	.0915
0	.1573	.2801	.3603	.4060	.4264	.4264	.4060	.3603	.2801	.1573
0	.2638	.4375	.5324	.5806	.6008	.6008	.5806	.5324	.4375	.2638
0	.4844	.6736	.7484	.7813	.7944	.7944	.7813	.7484	.6736	.4844
	1.003	1.023	.9933	.9882	1.008	1.008	.9882	.9933	1.023	1.003

(ب) روش تفاضلهای متناهی										
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	.0433	.0797	.1063	.1230	.1309	.1309	.1230	.1063	.0797	.0433
0	.0935	.1694	.2224	.2547	.2698	.2698	.2547	.2224	.1694	.0935
0	.1615	.2818	.3592	.4037	.4237	.4237	.4037	.3592	.2818	.1615
0	.2706	.4369	.5292	.5771	.5976	.5976	.5771	.5292	.4369	.2706
0	.4842	.6661	.7433	.7781	.7919	.7919	.7781	.7433	.6661	.4842
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

شکل ۳-۱۵ مقایسه تقریب پتانسیل دوبعدی در ناحیه‌ای مستطیل شکل محاسبه شده با استفاده از بسط سری فوریه و با استفاده از روش تفاضلهای متناهی.

سازگاری اطمینان مجدد می‌دهد ولی قدری ناامیدکننده است. مشکل این است که ما در حقیقت دو مسئله مختلف را با مرتبه بالایی از دقت حل کرده‌ایم. معادلات تفاضلهای متناهی تقریبی برای معادله لاپلاس هستند. به عبارت دیگر، ما مسئله جدیدی را تعریف کرده‌ایم که مسئله حل معادله لاپلاس را تقریب می‌زند. تقریب می‌تواند تنها با تعریف مسئله دیگری با استفاده از شبکه‌ای ظریف‌تر و قبول زحمت محاسبات بزرگتر بهتر شود. پاسخ سری فوریه وقتی دقیق است که تعداد بیشماری جمله منظور شود، اما اگر سری ناقص باشد، تقریبی است. به معنی دیگر این ناقص بودن، تقریبی را برای پاسخ دقیق (شناخته شده) برای مسئله‌ای معین تولید می‌کند. در مورد روش تفاضلهای متناهی ما مسئله را تقریب می‌زنیم و مسئله تقریبی را تا هر درجه دقت دلخواه حل می‌کنیم. روش سری فوریه پاسخ دقیق را پیدا می‌کند و سپس پاسخ را تا هر وقت دلخواه تقریب می‌زند. وقتی که برای حل مسائل روشهای محاسباتی به‌کار می‌رود، فرق بین تقریب زدن مسئله و تقریب زدن پاسخ دقیق غالباً مهم است.

مبادا فکر کنید که بسط به سری توابع پایه متعامد همواره روش بهتری است، در نظر داشته

باشید که برای شرایط مرزی نامناسب‌تر به دست آوردن بسط سری بسیار دشوار است، در حالی که در روش تفاضلهای متناهی، تنها لازم است که مقادیر روی مرز را وارد کنیم. بقیه کار توسط کامپیوتر انجام می‌شود. همچنین، در برخی نواحی، سری فوریه فوق‌العاده آرام همگرا می‌شود. انتخاب روش به مسئله خاص و کاربردی که برای پاسخ منظور شده بستگی دارد.

۳-۱۳ پاسخهای معادله پواسون

در بخشهای گذشته منحصراً درباره معادله لاپلاس و حل آن گفتگو کردیم. معادله لاپلاس در مورد آن دسته از مسائل الکتروستاتیک به کار می‌رود که در آنها همه بار روی سطوح رساناها قرار گرفته، یا به صورت بارهای نقطه‌ای یا بارهای خطی متمرکز است. (در فصل آینده خواهیم دید که هرگاه ناحیه میان رساناها با یک یا چند محیط دی‌الکتریک ساده پر شده باشد، در این صورت نیز معادله لاپلاس در این محیطها صادق خواهد بود).

اینک به مسئله‌ای از الکتروستاتیک می‌پردازیم که در آن قسمتی از بار (بار مشخص شده از قبل) با تابع معلوم $\rho(x, y, z)$ داده شده است و بقیه بار (بار القایی) روی سطوح رساناها قرار دارد. چنین مسئله‌ای احتیاج به حل معادله پواسون دارد. پاسخ عمومی این معادله را می‌توان به صورت حاصل جمع انتگرالی از نوع معادله (۳-۱) روی بار مشخص شده از قبل و پاسخ عمومی معادله لاپلاس نوشت. اما پاسخ معادله لاپلاس را باید طوری انتخاب کرد که کل پتانسیل در تمام شرایط مرزی مسئله صدق کند.

هنگامی که همه بار از قبل مشخص شده باشد، یعنی وقتی که $dq = \rho(x, y, z) dv$ در همه نقاط فضا معلوم باشد، آنگاه معادله (۳-۱) نماینده پاسخ کامل معادله پواسون است و این انتگرال را می‌توان (یا به صورت تحلیلی یا به صورت عددی) محاسبه کرد. اما موردی وجود دارد که در آن پاسخ معادله پواسون را می‌توان به طریقی مستقیم‌تر از حل کردن معادله (۳-۱) به دست آورد؛ این مورد هنگامی پیش می‌آید که هم ρ و هم φ فقط توابعی از یک متغیر مستقل باشند. به عنوان مثالی از این مورد، فرض می‌کنیم در دستگاه مختصات کروی، ρ فقط تابعی از متغیر r است و فرض می‌کنیم تمامی بار با تقارن کروی توزیع شده است. در این صورت معادله (۳-۵) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (70-3)$$

فرض می‌کنیم که بار کل محدود است، یعنی یا بار تا بی‌نهایت ادامه ندارد و یا چگالی بار برای مقادیر بزرگ r سریعاً به سمت صفر میل می‌کند. در این صورت، با در دست داشتن $\rho(r)$ ، می‌توان

از معادله (۳-۷) مستقیماً انتگرال گرفت و دو ثابت انتگرال‌گیری را به کمک دو مطلب زیر معین کرد: (۱) استفاده از قانون گاوس برای میدان الکتریکی در شعاع معین، (۲) استفاده از این واقعیت که $\varphi \rightarrow 0$ هنگامی که $r \rightarrow \infty$.

۱۴-۳ خلاصه مطالب

معادلات اساسی دیفرانسیل برداری مرتبه اول برای میدان الکتروستاتیک، یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ را می‌توان با هم ادغام کرد و به صورت یک معادله دیفرانسیل ندره‌ای مرتبه دوم، یعنی معادله پواسون، در آورد:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که در آن $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. اگر $\rho(\mathbf{r})$ تابعی مفروض در ناحیه V باشد، معادله پواسون دارای پاسخ خصوصی زیر است

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

و این موضوع را می‌توان با عمل کردن ∇^2 بر سمت راست این عبارت در زیر انتگرال، ملاحظه کرد. به این پاسخ خصوصی می‌توان هر پاسخی از معادله همگن متناظر آن، یعنی معادله لاپلاس:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

را افزود. پاسخ مناسب معادله لاپلاس پاسخی است که در شرایط مرزی روی مرز V صدق کند. اگر φ یا $\partial\varphi/\partial n$ روی یک مرز بسته مشخص شده باشد، پاسخ در حد یک مقدار ثابت جمعی، یکتاست.

• اگر همه جا در داخل V ، $\rho = 0$ باشد، پاسخ کامل عبارت است از آن پاسخی از معادله لاپلاس که در داخل V پیوسته باشد و در مرز V در شرایط تعیین شده صدق کند. در صورتی که مرز از رساناها تشکیل شده باشد، شرایط تعیین شده در روی مرز به صورت $\varphi = constant_1$ ، $constant_2$ و مانند آن خواهد بود.

• پاسخهای تحلیلی معادله لاپلاس می‌توانند از ترکیبهای خطی مجموعه‌ای از توابع پایه ساخته شوند، که این توابع با در نظر گرفتن تقارنهای موجود در مسئله بخصوص انتخاب می‌شوند. مجموعه هماهنگهای منطقه‌ای برای مرزهای کروی و تقارن سمتی مفیدند و هماهنگهای استوانه‌ای برای مرزهای استوانه‌ای.

• روش تصویرها شگردی است که به کمک آن یک پیکربندی از بارهای تصویری مجازی در

خارج از V چنان طرح‌ریزی می‌شود که میدان پتانسیل ناشی از این بارها و بارهای حقیقی داخل V ، روی مرزهای مفروض V در شرایط مرزی مربوط به φ صدق کند. قضیهٔ یکتایی تضمین می‌کند که میدان داخل V میدان صحیحی است. این شگرد را تنها می‌توان در موارد معدودی به‌کار برد که در آنها تقارن مناسب وجود داشته باشد. ساده‌ترین مثال، عبارت است از بار نقطه‌ای در مقابل صفحه‌ای رسانا.

• هنگامی که همهٔ بارها روی سطوح رساناها قرار دارند، معادلهٔ لاپلاس حکم می‌کند که پتانسیل رساناها تابعی خطی از بار رساناها باشند:

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

• دو روش مفید برای حل عددی معادلهٔ لاپلاس عبارت‌اند از: روش تفاضل‌های متناهی و روش جزء متناهی. در روش تفاضل‌های متناهی، پتانسیل در نقاط شبکه در ناحیهٔ مورد نظر، با یک فرایند تکرار تعیین می‌شود؛ در روش جزء متناهی، ناحیهٔ مورد نظر به زیر ناحیه‌هایی تقسیم می‌شود که در آنها تقریبهای تحلیلی به‌عنوان اصل موضوعی تلقی می‌شود و سپس آنها را با پارامترهایی مشخص و بهینه‌سازی می‌کنند.

منابع

کتابهای درسی زیر به منظور (۱) بحث کامل‌تر دربارهٔ معادلهٔ لژاندر، (۲) صورت کلی معادلهٔ لاپلاس در مختصات متعامد منحنی‌الخط و (۳) بحث کامل‌تر دربارهٔ حل معادلهٔ لاپلاس، توصیه می‌شوند: *Mathematical Physics* by E. Butkov (Reading, Mass: Addison-Wesley, 1968).

Electromagnetic Theory, by J. A. Stratton (New York: McGraw-Hill, 1941).

An Introduction to Differential Equations and Their Applications, 2nd ed., by S. L. Campbell (Belmont, CA: Wadsworth, 1990).

مسائل

۱-۳ دو پوستهٔ رسانای باردار کروی هم‌مرکز به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب دارای پتانسیلهای φ_a و φ_b هستند. اگر $r_b > r_a$ باشد، مطلوب است پتانسیل در نقاط واقع میان دو پوسته و در نقاط $r > r_b$.

۲-۳ دو پوستهٔ طویل استوانه‌ای باردار و هم‌محور به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب دارای پتانسیلهای

φ_a و φ_b هستند. پتانسیل را در نقاط میان دو پوسته پیدا کنید.

۳-۳ اگر φ_1 یکی از پاسخهای معادله لاپلاس باشد، ثابت کنید که مشتق جزئی φ_1 نسبت به یک یا چند مختصه از مختصات قائم (نظیر $\partial\varphi_1/\partial x$ ، $\partial^2\varphi_1/\partial x^2$ ، $\partial^2\varphi_1/\partial x \partial y$ و مانند آنها) نیز پاسخ معادله لاپلاس است.

۴-۳ فرض کنید φ در تمامی ناحیه V_0 ، در معادله لاپلاس صدق می‌کند. (الف) ثابت کنید که مقدار φ در هر نقطه O برابر است با میانگین مقادیر آن بر روی سطح کره‌ای به مرکز O که تماماً در V_0 قرار داشته باشد:

$$\varphi(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi da$$

در این رابطه R شعاع کره است. [راهنمایی: در معادله (۱-۵۷) فرض کنید $\psi = 1/r$]. (ب) نشان دهید که در نتیجه φ در V_0 هیچ بیشینه یا کمینه‌ای ندارد.

۵-۳ تابع

$$F(u) = (1 - 2xu + u^2)^{-1/2}$$

را تا جمله u^3 ، به صورت رشته تیلور برحسب u بسط دهید. توجه کنید که ضرایب این بسط، چهار چندجمله‌ای نخستین از چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ هستند. در واقع $F(u)$ تابع مولد تمام چندجمله‌ایهای لژاندر است:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n$$

۶-۳ نشان دهید که نیمی از هماهنگهای منطقه‌ای با مشتق‌گیری پی‌درپی از r^{-1} نسبت به مختصه قائم z تولید می‌شوند ($z = r \cos \theta$).

۷-۳ $\nabla^2 \varphi$ در مختصات استوانه‌ای (معادله ۳-۸) را از صورت آن در مختصات قائم (معادله ۳-۶)، به کمک تغییر متغیر $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ به دست آورید.

۸-۳ یک چارقطبی محوری متشکل است از مجموعه بارهای نقطه‌ای q ، $-2q$ و q واقع بر محور z ، در فواصل l ، 0 ، $-l$ از مبدأ مختصات. (الف) پتانسیل این چارقطبی را حساب کنید. (ب) پتانسیل را فقط در فواصل $l \gg r$ حساب کنید. (ج) نشان دهید که پتانسیل با یکی از هماهنگهای منطقه‌ای متناسب است.

۹-۳ فرض کنید که یک دوقطبی نقطه‌ای در مرکز یک پوسته رسانای کروی متصل به زمین قرار گرفته است. پتانسیل را در داخل پوسته پیدا کنید. [راهنمایی: برای برآوردن شرایط مرزی بر روی پوسته، از هماهنگهای منطقه‌ای که در مبدأ منتظم‌اند، استفاده کنید].

۳-۱۰ یک کره رسانای بی‌بار در یک میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت، قرار گرفته است. (الف) نشان دهید که پتانسیل ناشی از کره برابر است با پتانسیل یک دوقطبی نقطه‌ای. (ب) گشتاور دوقطبی القایی کره را پیدا کنید.

۳-۱۱ یک کره رسانا به شعاع a را که حاوی بار کل Q است، در یک میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است، قرار می‌دهیم. پتانسیل را در تمام نقاط واقع در خارج از کره پیدا کنید.

۳-۱۲ یک استوانه رسانای طویل به شعاع a را که بار خالص ندارد، در میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است، قرار می‌دهیم. راستای E_0 بر محور استوانه عمود است. (الف) پتانسیل را در نقاط خارج استوانه پیدا کنید. (ب) چگالی بار را در سطح استوانه محاسبه کنید.

۳-۱۳ یک پوسته استوانه‌ای بی‌نهایت طویل (به شعاع R) را تقریباً با تعداد زیادی سیم موازی که می‌توانند در پتانسیلهای دلخواه قرار گیرند، مشابه فرض می‌کنیم. (الف) اگر پتانسیل پوسته برابر با $V_0 \sin \theta$ باشد، پتانسیل و میدان الکتریکی را در داخل و خارج پوسته به دست آورید. (ب) خطوط نیرو را رسم کنید.

۳-۱۴ بار نقطه‌ای q در فاصله d از یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. بار القایی در صفحه را، با انتگرال‌گیری مستقیم از تابع چگالی سطحی بار، محاسبه کنید.

۳-۱۵ دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نزدیکی یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین، قرار دارند. (الف) بارهای تصویری لازم را برای آنکه این صفحه به یک سطح با پتانسیل ثابت تبدیل شود، پیدا کنید. (ب) آیا از نتیجه‌ای که در قسمت (الف) به دست آورده‌اید، می‌توانید توزیع بار تصویری مورد لزوم را برای موردی که یک جسم باردار به شکل دلخواه با چگالی ρ در مقابل یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد، پیشگویی کنید؟

۳-۱۶ دو صفحه رسانای متصل به زمین با یکدیگر زاویه 60° می‌سازند و بار نقطه‌ای q میان آنها قرار دارد. مکان بارهای تصویری که میدان الکتریکی میان این دو صفحه را می‌دهند، تعیین کنید.

۳-۱۷ بار نقطه‌ای q میان دو صفحه رسانای موازی متصل به زمین قرار گرفته است. فاصله دو صفحه از یکدیگر d است. (الف) مکان تعداد بی‌نهایت بارهای تصویری را پیدا کنید. (ب) نیروی وارد بر بار q را برحسب یک رشته نامتناهی بیان کنید.*

* ۳-۱۸ (الف) با استفاده از روشی که در بخش ۳-۷ توضیح داده شد، پاسخی برای معادله لاپلاس در ناحیه دویعدی مستطیل‌شکلی که با خطوط $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 11$ و $y = 6$ احاطه شده است، با در نظر گرفتن شرایط مرزی $\varphi(0, y) = \varphi(x, 6) = \varphi(11, y) = 0$ و $\varphi(x, 0) = 1$ به دست آورید. [راهنمایی: با استفاده از شرط مرزی $\varphi = 0$ ، نشان دهید که

پاسخ را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جملات، شامل حاصل ضربهای توابع سینوسی x و توابع سینوس هیپربولیکی (هذلولوی) y نوشت که در آن هر کدام از جملات در هر سه شرط مرزی $\varphi = 0$ صدق کنند. (ب) ضرایب را با این شرط به دست آورید که به ازای تمام x ها، در این مسئله متداول رشته فوریه، $\varphi(x, 0) = 1$ باشد.

۱۹-۳ نشان دهید که مسئله کره رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی E_0 را که در آغاز یکنواخت است، می‌توان به کمک تصاویر حل کرد [راهنمایی: میدان الکتریکی یکنواخت در حوالی مبدأ مختصات را می‌توان تقریباً با میدان دو بار نقطه‌ای Q و $-Q$ که روی محور z و به ترتیب در نقاط $z = +L$ و $z = -L$ قرار دارند، مساوی فرض کرد. هر چه L بزرگتر باشد ($L \rightarrow \infty$)، میدان یکنواخت‌تر می‌شود. واضح است که $Q/2\pi\epsilon_0 L^2 = E_0$].

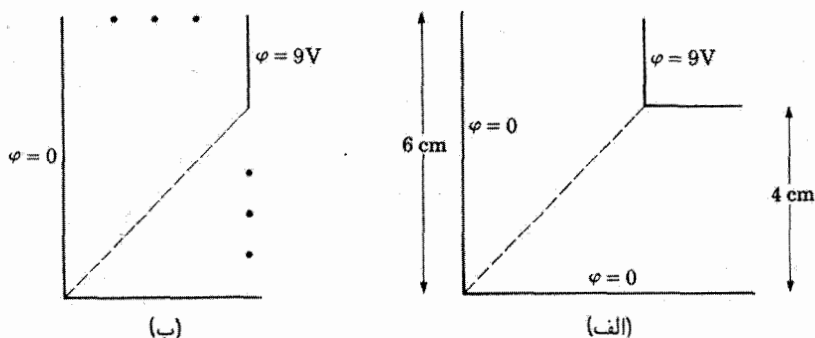
۲۰-۳ بار نقطه‌ای q در داخل یک پوسته رسانای کروی و به فاصله r از مرکز آن قرار دارد. شعاع داخلی پوسته a است. (الف) نشان دهید که این مسئله را می‌توان با شگرد تصویری حل کرد. (ب) چگالی سطحی بار σ را که در روی سطح داخلی پوسته القا می‌شود، پیدا کنید. (توجه: پتانسیل پوسته کروی را نمی‌توان کاملاً برحسب q و تصویر آن مشخص کرد، زیرا بارهای ثابت خارج از کره نیز می‌توانند در ایجاد پتانسیل کره سهمیم باشند. با وجود این، سهم بارهای خارجی فقط افزودن جمله ثابتی به پتانسیل کره است). (ج) بار کل القا شده در سطح داخلی پوسته را به دو طریق به دست آورید: (۱) با استدلال فیزیکی و (۲) با انتگرال‌گیری از σ بر روی سطح.

۲۱-۳ استوانه رسانای بلندی که بار در واحد طول آن λ است، موازی با یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. فاصله محور استوانه از صفحه برابر x_0 و شعاع استوانه برابر a است. (الف) مکان بار تصویری خطی را پیدا کنید. (ب) مقدار ثابت M را (که تعیین‌کننده پتانسیل استوانه است) برحسب a و x_0 به دست آورید.

۲۲-۳ توزیع کروی باری با چگالی بار ثابت ρ به ازای $r \leq R$ مشخص شده است. برای شعاعهای بزرگتر از R بار صفر است. (الف) با انتگرال‌گیری از معادله پواسون، پتانسیل $\varphi(r)$ را حساب کنید. (ب) نتیجه را با محاسبه انتگرال معادله (۱-۳) امتحان کنید [راهنمایی: برای محاسبه انتگرال (۱-۳) ناحیه بار را به پوسته‌های کروی هم‌مرکز به ضخامت dr تقسیم کنید].

۲۳-۳ دوقطبی p عمود بر یک صفحه رسانای نامتناهی و به فاصله d از آن قرار دارد. صفحه به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است). نیروی وارد بر صفحه از طرف این دوقطبی را محاسبه کنید.

۲۴-۳ مثال یک‌بعدی را که در بخش (۱۲-۳) توضیح داده شد، در نظر بگیرید. (الف) با توجه به اینکه $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(1) = 1$ است، برنامه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان معادله لاپلاس



شکل ۱۶-۳

را با روش تفاضلهای متناهی حل کرد. (ب) هم‌گرایی را در چند تکرار نخست، بررسی کنید
 ($w = 1, 1.5$ و $N = 10, 20$).

۲۵-۳ ناحیه‌ای دوبعدی به شکل مثلث قائم‌الزاویه است که اضلاع آن هر کدام به طول ۵ cm و به موازات محور x و محور y قرار دارند و طول وتر این مثلث $5\sqrt{2}$ است. وتر این مثلث در پتانسیل 50 V و دو ضلع دیگر در پتانسیل صفر قرار دارد. (الف) با استفاده از روش تفاضلهای متناهی و با در نظر گرفتن اینکه نقاط شبکه هر کدام به فاصله یک سانتی‌متر از یکدیگر در هر راستا قرار گرفته‌اند، و انجام عمل تکرار، پتانسیلها را در هر نقطه از شبکه تا نزدیک‌ترین ولتاژ مربوط به دست آورید. (ب) سطوح هم‌پتانسیل را رسم کنید.

* ۲۶-۳ ناحیه‌ای دوبعدی و L شکل توسط دو سطح رسانا در دو طرفش با پتانسیلهای $\varphi = 0$ و $\varphi = 9\text{ V}$ ، مطابق شکل ۱۶-۳ (الف)، احاطه شده است. (الف) با استفاده از روش تفاضلهای متناهی، پتانسیل را در نقاط داخلی شبکه و میدان الکتریکی را در زاویه 45° در نزدیکی زاویه داخلی 270° به دست آورید. (توجه: طبق تقارن مسئله، می‌توان پاسخ را در یک ساق ناحیه L شکل، از طریق بازتاب نسبت به خط چین، از ساق دیگر به دست آورد. بنابراین، می‌توان مسئله را با پیکربندی شکل ۱۶-۳ (ب) حل کرد، بجز آنکه پس از هر تکرار باید به نقاط شبکه سمت راست خط چین، مقادیر تصاویر آینه‌ای‌شان در بالای خط، داده شود). (ب) ابتدا مسئله را با یک شبکه $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ حل کنید. (ج) سپس با یک شبکه $\frac{1}{2}\text{ cm} \times \frac{1}{2}\text{ cm}$ کار را تکرار کنید.

میدان الکتروستاتیک در محیطهای دی الکتریک

تاکنون مسائلی را که شامل محیطهای دی الکتریکی بودند، بررسی نکردیم و تنها مواردی را که در آنها میدان الکتریکی منحصراً یا به وسیلهٔ بارهای درون یک توزیع مشخص یا در اثر بارهای آزاد واقع بر سطوح رساناها تولید می‌شود، مورد بحث قرار داده‌ایم. در این فصل می‌خواهیم مورد عمومی‌تری را بررسی کنیم.

مادهٔ دی الکتریک کامل آن است که بار آزاد نداشته باشد. با وجود این، تمام محیطهای مادی از مولکولها و مولکولها نیز به نوبهٔ خود از موجودات بارداری (هسته‌های اتمی و الکترونها) تشکیل شده‌اند و مولکولهای دی الکتریک یقیناً تحت تأثیر میدانهای الکتریکی قرار می‌گیرند. میدان الکتریکی موجب می‌شود که نیرویی به هر ذرهٔ باردار وارد شود، ذرات با بار مثبت در جهت میدان رانده می‌شوند و ذرات با بار منفی در جهت مخالف آن، به گونه‌ای که قسمتهای مثبت و منفی هر مولکول از مواضع حالت تعادل خود خارج و در دو جهت مخالف جابه‌جا می‌شوند. اما مقدار این جابه‌جاییها (که در بیشتر موارد از کسر کوچکی از قطر یک مولکول تجاوز

نمی‌کنند) به علت ایجاد نیروهای قوی بازگرداننده‌ای که در اثر تغییر پیکربندی بار در مولکولها به وجود می‌آیند، محدود است. گاه از اصطلاح "بار مقید" در مقابل "بار آزاد" یک رسانا استفاده می‌شود تا تأکید شود که این بارهای مولکولی نمی‌توانند خیلی دور بروند، یا از ماده‌ی الکترونیک جدا شوند. تأثیر کلی از لحاظ ماکروسکوپی را می‌توان این‌طور تجسم کرد که تمامی بار مثبت دی‌الکترونیک نسبت به بار منفی آن جابه‌جا شده است. در این صورت گفته می‌شود دی‌الکترونیک قطبیده است.

دی‌الکترونیک قطبیده، با وجودی که به‌طور متوسط از لحاظ الکترونیکی خنثاست، اما هم در نقاط خارج و هم در داخل دی‌الکترونیک، میدان الکترونیکی ایجاد می‌کند. در نتیجه، با وضعی روبه‌رو می‌شویم که به ظاهر ناهنجار است: قطبش دی‌الکترونیک به میدان الکترونیکی کل موجود در محیط بستگی دارد، در حالی که قسمتی از این میدان الکترونیکی به‌وسیله‌ی خود دی‌الکترونیک ایجاد می‌شود. از این گذشته، میدان الکترونیکی دی‌الکترونیک در نقاط دور از آن ممکن است توزیع بار آزاد در روی اجسام رسانا را تغییر بدهد و این به‌نوبه‌ی خود میدان الکترونیکی را در درون دی‌الکترونیک عوض خواهد کرد. هدف اصلی این فصل پیدا کردن روشهایی کلی برای بررسی این وضعیت پیچیده است.

۱-۴ قطبش

جزء حجم کوچکی چون Δv از محیطی دی‌الکترونیک را که روی‌هم‌رفته از لحاظ الکترونیکی خنثاست، در نظر می‌گیریم. هرگاه محیط قطبیده شود، جدایی میان بارهای مثبت و منفی تحقق می‌یابد و جزء حجم با گشتاور دوقطبی الکترونیکی

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta v} \mathbf{r} dq \quad (1-4)$$

مشخص می‌شود. مطابق آنچه در بخش ۲-۹ دیدیم، این کمیت ($\Delta \mathbf{p}$)، میدان الکترونیکی ایجادشده به‌وسیله‌ی Δv را در نقاط دور (یعنی در فواصلی از Δv که نسبت به ابعاد جزء حجم، بسیار بزرگ‌اند)، تعیین می‌کند.

چون $\Delta \mathbf{p}$ به اندازه‌ی جزء حجم بستگی دارد، بهتر است با \mathbf{P} ، یعنی گشتاور دوقطبی الکترونیکی در واحد حجم کار کنیم. \mathbf{P} را معمولاً قطبش الکترونیکی محیط، یا فقط قطبش محیط می‌نامند.

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v} \quad (2-4)$$

به بیان دقیق تر، P باید به عنوان حد این کسر تعریف شود، هنگامی که حجم Δv از لحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچک شود. بدین ترتیب P به یک تابع نقطه‌ای $P(x, y, z)$ تبدیل می‌شود.

ابعاد P ، بار بر واحد سطح و یکای آن در دستگاه mks، کولن بر مترمربع است.

واضح است که $P(x, y, z)$ کمیّتی برداری است که در هر جزء حجم، با Δp هم جهت است. Δp به نوبه خود با جهت جابه‌جایی بار مثبت نسبت به بار منفی هم جهت است (شکل ۱-۴).

اگر چه Δv از لحاظ، ماکروسکوپی بسیار کوچک فرض می‌شود، ولی با وجود این، تعداد بسیار زیادی مولکول دارد. چون مولکول یکی از موجودات کوچک و خنثای الکتریکی است که ماده دی الکتریک را تشکیل می‌دهد، گاهی مطلوب است که درباره گشتاور دوقطبی الکتریکی p_m یک تک مولکول صحبت شود، یعنی

$$p_m = \int_{\text{مولکول}} r dq \quad (3-4)$$

از معادله (۱-۴) پیداست که گشتاور دوقطبی مربوط به جزء Δv از رابطه $\Delta p = \sum p_m$ به دست می‌آید، که در آن عمل جمع‌بندی شامل تمام مولکولهای درون جزء Δv است. بنابراین

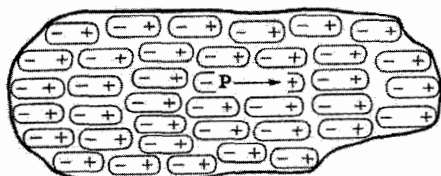
$$P = \frac{1}{\Delta v} \sum_m p_m \quad (4-4)$$

این رویکرد در فصل ۵ با تفصیل بیشتر دنبال خواهد شد.

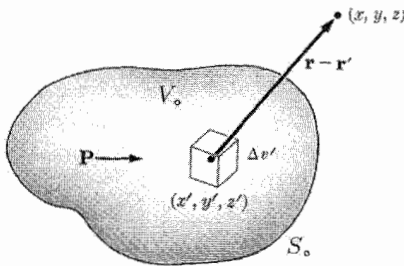
با اینکه شکل ۱-۴ هر جزء حجم یک دی الکتریک قطبیده را به صورت یک دوقطبی کوچک نشان می‌دهد، شاید آموزنده تر باشد که دی الکتریک را مرکب از مولکولهایش تجسم کنیم و فرض کنیم که هر دوقطبی شکل ۱-۴ یک تک مولکول است.

۲-۴ میدان خارجی یک محیط دی الکتریک

قطعه‌ای متناهی از یک ماده دی الکتریک قطبیده را، یعنی ماده‌ای که در هر نقطه r' با قطبش $P(r')$ مشخص می‌شود، در نظر می‌گیریم. قطبش باعث ایجاد میدان الکتریکی می‌شود و هدف



شکل ۱-۴ قطعه‌ای از ماده دی الکتریک قطبیده. هر جزء حجم به صورت یک دوقطبی Δp نشان داده شده است.



شکل ۲-۴ میدان الکتریکی در (x, y, z) را می‌توان با جمع کردن سهم مربوط به اجزای حجمی مختلف $\Delta v'$ در V_0 به دست آورد. سطح V_0 با S_0 نشان داده شده است.

ما این است که این میدان را در نقطه \mathbf{r} ، خارج از جسم دی‌الکتریک پیدا کنیم (شکل ۲-۴). همان‌طور که در فصل ۲ انجام شد، بهتر است ابتدا پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را پیدا کنیم و سپس میدان الکتریکی را با محاسبه منفی گرادیان φ به دست آوریم.

هر جزء حجم $\Delta v'$ از محیط دی‌الکتریک، با گشتاور دوقطبی $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} \Delta v'$ مشخص می‌شود، و چون فاصله نقطه (x, y, z) از جزء $\Delta v'$ نسبت به ابعاد $\Delta v'$ بسیار بزرگ است، این گشتاور دوقطبی به طور کامل سهم $\Delta v'$ را در ایجاد پتانسیل تعیین می‌کند

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta v'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۵-۴)$$

در اینجا $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ برداری است که جهت آن به طرف خارج از حجم $\Delta v'$ است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (۶-۴)$$

پتانسیل کل در نقطه \mathbf{r} از جمع سهم‌های مربوط به تمام قسمت‌های دی‌الکتریک به دست می‌آید:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۷-۴)$$

این نتیجه درست است و φ را می‌توان مستقیماً از معادله (۷-۴) به دست آورد، مشروط بر آنکه شکل تابعی \mathbf{P} معلوم باشد. اما بهتر است معادله (۷-۴) را با یک تبدیل ریاضی ساده به شکل نسبتاً متفاوتی بنویسیم.

اگر $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ با معادله (۶-۴) داده شده باشد، آنگاه

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۸-۴)$$

است که صحت آن را می‌توان با به‌کار بردن مستقیم عملگر گرادیان در دستگاه مختصات قائم امتحان کرد. در عملگر ∇' مشتق‌های نسبت به مختصات پریم‌دار دخیل‌اند. در شرایطی ممکن است محاسبهٔ گرادیان نسبت به مختصات بدون پریم مطلوب باشد که ما آن را مطابق معمول با ∇ نشان می‌دهیم. واضح است که نتیجهٔ عمل ∇' بر روی هر تابعی از $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ برابر است با عمل $-\nabla$ بر روی همان تابع. عملگر ∇ را بعداً برای محاسبهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ \mathbf{r} لازم خواهیم داشت. اما در محاسبهٔ انتگرال معادلهٔ (۷-۴) در حجم دی‌الکتریک، یعنی V_0 ، نقطهٔ \mathbf{r} ثابت نگه‌داشته می‌شود؛ لذا انتگرالده معادلهٔ (۷-۴) را می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۸-۴) به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (۹-۴)$$

معادلهٔ (۹-۴) را می‌توان با استفاده از اتحاد برداری (۷-۱-۱) از جدول (۱-۱) به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f \quad (۱۰-۴)$$

که در آن f یک تابع نقطه‌ای نرده‌ای و \mathbf{F} یک تابع نقطه‌ای برداری اختیاری است. در اینجا نیز پریم معرف مشتق‌گیری نسبت به مختصات پریم‌دار است. فرض کنید $f = (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ و $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ ، در این صورت انتگرالده، یعنی معادلهٔ (۹-۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۱۱-۴)$$

و سرانجام پتانسیل، یعنی معادلهٔ (۷-۴)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۱۲-۴)$$

که در آن با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، انتگرال حجمی جملهٔ $\nabla' \cdot (\mathbf{P}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ به یک انتگرال سطحی تبدیل شده است و \mathbf{n} بردار یکهٔ عمود بر جزء سطح da' است که جهت آن به سمت خارج (خارج دی‌الکتریک) است.

کمیت‌های $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ و $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ که در انتگرالهای معادلهٔ (۱۲-۴) دیده می‌شوند، دو تابع نرده‌ای‌اند که از بردار قطبش \mathbf{P} نتیجه می‌شوند. بهتر است که این مقادیر را با نمادهای خاصی مشخص کنیم. چون این مقادیر به ترتیب دارای ابعاد بار الکتریکی در واحد سطح و بار الکتریکی در واحد

حجم هستند، می‌توان نوشت

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \quad (۱۳-۴)$$

و

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۱۴-۴)$$

σ_P و ρ_P را چگالیهای بار قطبشی می‌نامیم.

چگالی سطحی بار قطبشی از آن مؤلفهٔ قطبش به دست می‌آید که بر سطح مربوط عمود است، و چگالی حجمی بار قطبشی معیاری از نایکنواختی قطبش در داخل ماده است. اکنون پتانسیل ناشی از مادهٔ دی‌الکتریک را به طریق زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (۱۵-۴)$$

که به وضوح نشان می‌دهد این پتانسیل ناشی از یک توزیع بار است. به عبارت دیگر، مادهٔ دی‌الکتریک به وسیلهٔ توزیع مناسبی از بارهای قطبشی جایگزین شده است.

اگر چه معادلهٔ (۱۵-۴) با استفاده از تبدیلهای ریاضی به دست آمده است، با وجود این باید بتوانیم σ_P و ρ_P را صرفاً بر مبنای استدلال فیزیکی درک کنیم. اینکه یک چگالی بار سطحی σ_P وجود دارد، از شکل ۱-۴ پیداست. از روی این شکل دیده می‌شود که این بارهای سطحی از انتهای دو قطبیهایی که سمتگیری مشابهی دارند، تشکیل شده است. بدین ترتیب بر روی هر سطحی که با بردار قطبش موازی نیست، یک چگالی بار الکتریکی به وجود می‌آید. اکنون به ρ_P برمی‌گردیم؛ انتظار می‌رود که $\rho_P \Delta v'$ بار اضافی یا بار خالص ایجادشده در جزء $\Delta v'$ را نشان بدهد. این موضوع را به صورت زیر توضیح می‌دهیم: چگالیهای بار ρ^+ و ρ^- را طوری تعریف می‌کنیم که به ترتیب نشان‌دهندهٔ بار مثبت کل و بار منفی کل در واحد حجم باشند. یعنی ρ^+ نشان‌دهندهٔ تمام هسته‌های اتمی در واحد حجم دی‌الکتریک، و به‌طور مشابه ρ^- نشان‌دهندهٔ تمام الکترونها در واحد حجم دی‌الکتریک است. در حالت ناقطبیده، هر جزء حجمی دی‌الکتریک از لحاظ الکتریکی خنثاست؛ پس

$$\rho_0^+(x', y', z') + \rho_0^-(x', y', z') = 0 \quad (۱۶-۴)$$

شاخصهای پایین (صفر) نشان دهنده چگالیها در حالت ناقصیده‌اند. فرض کنید بارهای مثبت به علت قطبیده شدن به اندازه $\delta^+(x, y, z)$ و بارهای منفی به اندازه $\delta^-(x, y, z)$ جابه‌جا شوند. مقدار بار مثبتی که از جزء سطح da' عبور می‌کند، برابر است با $\rho_0^+ \delta^+ \cdot \mathbf{n} da'$. بنابراین، افزایش بار مثبت حاصل از فرایند قطبش در حجم $\Delta v'$ برابر است با

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ \delta^+ \cdot \mathbf{n} da' \quad (17-4)$$

که در آن ΔS سطحی است که حجم $\Delta v'$ را در بر می‌گیرد. به همین ترتیب، جابه‌جا شدن بارهای منفی باعث ازدیاد بار (یا نقصان بار منفی) در حجم $\Delta v'$ می‌شود که مقدار آن برابر است با

$$\oint_{\Delta S} (-\rho_0^-) \delta^- \cdot \mathbf{n} da \quad (18-4)$$

افزایش کلی بار در حجم $\Delta v'$ مساوی حاصل جمع معادله‌های (۱۷-۴) و (۱۸-۴) است که، با استفاده از معادله (۱۶-۴)، آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-) \cdot \mathbf{n} da' = -\nabla \cdot [\rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)] \Delta v' \quad (19-4)$$

اما $\delta^+ - \delta^-$ تغییر مکان نسبی چگالی بارهای مثبت و منفی است، و در نتیجه $\rho_0^+ (\delta^+ - \delta^-)$ معادل همان چیزی است که ما آن را قطبش \mathbf{P} نامیدیم. پس $\rho \Delta v'$ برابر است با بار خالص جزء حجم دی الکتریک قطبیده.

در نظر اول ممکن است تا اندازه‌ای عجیب به نظر بیاید که اگر چه در آغاز با اجزای حجمی از لحاظ الکتریکی خنثی شروع کردیم، اما در پایان به اجزای حجمی حاوی بار خالص رسیدیم. طبق گفته قبلی ما، دی الکتریک تشکیل شده است از اجزای دو قطبی $\Delta \mathbf{p}$ و لازم بود که هر $\Delta \mathbf{p}$ از لحاظ الکتریکی خنثی باشد تا معادله (۵-۴) به طور صحیح پتانسیل را به دست بدهد. حال می‌بینیم تا وقتی که $\nabla \cdot \mathbf{P}$ صفر نشود، هریک از اجزای حجم به طور انفرادی باردار به نظر می‌آیند. منشأ این تناقض ظاهری در تبدیل ریاضی معادله (۱۱-۴) نهفته است. در این معادله سهم هر جزء حجم به یک جمله حجمی متفاوت و یک جمله سطحی تبدیل می‌شود. جمع کل بار در حجم و بر روی سطح جزء حجم هنوز هم صفر است، اما وقتی جزءهای حجمی مختلف را روی هم می‌گذاریم تا یک قطعه ماکروسکوپی از ماده دی الکتریک را تشکیل بدهند، متوجه می‌شویم که پتانسیل حاصل از "سطوح داخلی" مختلف یکدیگر را حذف می‌کنند. سرانجام آنچه برای ما باقی می‌ماند، سهم آن اجزای حجمی است که به طور مؤثر بار دارند و سهم آن سطحی است که مربوط به مرز واقعی جسم دی الکتریک است.

مقدار کل بار قطبشی یک جسم دی‌الکتریک، یعنی

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da' \quad (20-4)$$

باید مساوی صفر شود، زیرا فرض اولیه ما این بود که دی‌الکتریک، روی هم‌رفته، از لحاظ الکتریکی خنثی است. این نتیجه مستقیماً از صورت معادله (۲۰-۴)، که به وضوح در نتیجه قضیه دیورژانس صفر می‌شود، پیداست.

اکنون برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ ناشی از یک نمونه دی‌الکتریک قطبیده، دو عبارت متمایز داریم، یعنی معادلات (۷-۴) و (۱۵-۴). این دو معادله هر دو درست‌اند، لیکن برای ما در بیشتر موارد رابطه دوم مناسب‌تر است. میدان الکتریکی \mathbf{E} را می‌توان از روی منفی گرادیان معادله (۱۵-۴) حساب کرد. چون φ تابعی است از مختصات (x, y, z) ، گرادیان مربوط به آن $-\nabla$ است. مختصات بی‌پریم فقط به صورت تابع $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ظاهر می‌شود. بنابراین، با توجه به اینکه $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ و با به‌کار بردن معادله (۸-۴)، نتیجه می‌گیریم که

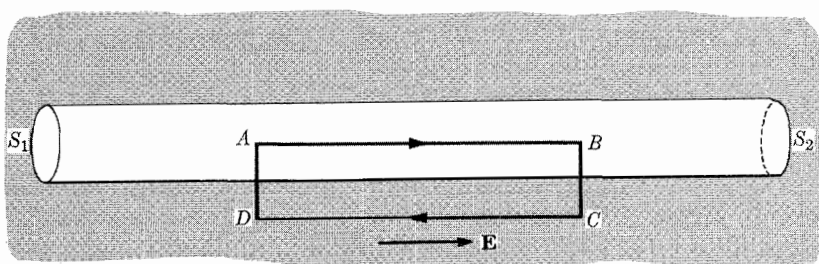
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_0} \sigma_P \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \int_{V_0} \rho_P \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right] \quad (21-4)$$

۳-۴ میدان الکتریکی در داخل یک دی‌الکتریک

پیش از آن که بتوانیم عبارتی برای میدان الکتریکی در داخل یک محیط قطبیده به‌دست آوریم، لازم است این میدان را دقیقاً تعریف کنیم. آنچه مورد نظر ماست، میدان الکتریکی ماکروسکوپی است، یعنی میدان الکتریکی میانگین در ناحیه کوچکی از دی‌الکتریک که با وجود کوچکی شامل تعداد زیادی مولکول است. راه دیگری که شاید راه بهتری باشد، این است که میدان الکتریکی را مستقیماً برحسب یک آزمایش ماکروسکوپی تعریف کنیم.

میدان الکتریکی (ماکروسکوپی) عبارت است از حد نیروی وارد بر واحد بار یک بار آزمون واقع در داخل دی‌الکتریک، هنگامی که بار آزمون آنقدر کوچک باشد که خودش بر توزیع بار تأثیری نداشته باشد.

این بار آزمون باید از لحاظ ماکروسکوپی ابعاد بسیار کوچکی داشته باشد (یعنی همان چیزی که "بار نقطه‌ای" می‌نامیم)، اما در مقایسه با اندازه یک مولکول بزرگ خواهد بود.



شکل ۳-۴ مسیر $ABCD$ که بخشی از آن در داخل حفره سوزنی شکل و بخش دیگر آن در داخل دی الکتریک قرار دارد. در یک محیط دی الکتریک همسانگرد (بخش ۴-۵) قطبش P با E هم جهت است، به طوری که بر روی دیواره های استوانه ای حفره سوزنی در امتداد نشان داده شده در شکل، $\sigma_P = 0$ است. در یک دی الکتریک ناهمسانگرد، σ_P الزاماً صفر نیست، اما مقدار آن در مؤلفه طولی میدان الکتریکی در داخل حفره تأثیری ندارد.

با اینکه عبارت بالا تعریف اساسی میدان الکتریکی ماکروسکوپی E است، به کار بردن مستقیم این تعریف برای به دست آوردن عبارتی برای میدان الکتریکی کاری است مشکل، زیرا ابتدا باید نیروی وارد بر یک جسم باردار با ابعاد بزرگ را حساب کنیم و بعد وقتی اندازه آن جسم کوچک می شود، حد آن را به دست آوریم. بنابراین، لازم است برای یافتن عبارتی تحلیلی که در جستجوی آن هستیم، خاصیت دیگری از میدان الکتریکی را به کار ببریم. بدین ترتیب E را برحسب بارهای قطبشی محیط به دست خواهیم آورد. بعداً (در بخش ۴-۹)، نشان خواهیم داد که مقداری را که E نامیده ایم، با "تعریف اساسی نیرو" به خوبی مطابقت دارد.

میدان الکتروستاتیکی در دی الکتریک باید همان خواص اساسی را داشته باشد که در مورد E در خلأ صادق بود؛ به خصوص اینکه E میدانی پایستار است و در نتیجه می توان آن را از پتانسیل نرده ای به دست آورد. بنابراین

$$\nabla \times E = 0$$

یا، به طور معادل

$$\oint E \cdot dl = 0$$

حال رابطه اخیر را برای مسیر $ABCD$ که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، به کار می ببریم. در این شکل AB در حفره سوزنی شکلی قرار دارد که در دی الکتریک به وجود آورده ایم، و CD در داخل خود محیط دی الکتریک قرار دارد. چون قطعات AD و BC را می توان به طور دلخواه

کوچک فرض کرد، انتگرال خطی تبدیل می شود به

$$\mathbf{E}_v \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0$$

یا به طور معادل

$$E_{vt} = E_{dt} \quad (22-4)$$

که در آن شاخصهای v و d به ترتیب نشان دهندهٔ خلأ و دی الکتریک اند و شاخص t نمایندهٔ مؤلفهٔ مماسی است.

حفرهٔ سوزنی شکل در هر امتدادی که باشد، معادلهٔ (۲۲-۴) معتبر است. اگر "سوزن" در امتداد \mathbf{E} قرار گیرد، $E_{dt} = E_d$. به علاوه، به علت بقارن، میدان در داخل حفره در امتداد سوزن است، یعنی $E_{vt} = E_v$. بنابراین به این نتیجهٔ مهم^۱ می رسیم که:

میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک برابر است با میدان الکتریکی در داخل یک حفرهٔ سوزنی شکل در داخل دی الکتریک، مشروط بر آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی باشد.

از این رو واضح است که مسئلهٔ محاسبهٔ میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک، به مسئلهٔ تعیین میدان در داخل یک حفرهٔ سوزنی شکل واقع در داخل دی الکتریک تبدیل می شود. لیکن میدان الکتریکی داخل حفره، میدان خارجی دی الکتریک است و بنابراین برای تعیین آن می توان از نتایج بخش ۲-۴ استفاده کرد. درست مانند بخش ۲-۴، فرض می کنیم قطبش دی الکتریک با تابع مفروض $P(x', y', z')$ داده شده باشد و پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را حساب می کنیم. اگر نقطهٔ \mathbf{r} که پتانسیل و میدان را در آن محاسبه می کنیم در مرکز حفره باشد، با استفاده از معادلهٔ (۱۵-۴)، پتانسیل الکتریکی را به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0 - V_1} \frac{\rho_P(x', y', z') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0 + S'} \frac{\sigma_P(x', y', z') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (23-4) \end{aligned}$$

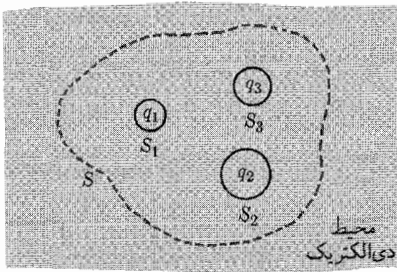
۱. چنین بیانی فقط برای دی الکتریکهای همسانگرد دقیقاً درست است (بخش ۵-۴). برای دی الکتریکهای ناهمسانگرد، استدلال تقارن با شکست روبه رو می شود و نتیجه گیری بالا باید چنین تعمیم داده شود: میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک برابر است با مؤلفهٔ طولی میدان الکتریکی در داخل یک حفرهٔ سوزنی شکل در دی الکتریک، مشروط بر آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی داخل دی الکتریک باشد.

در این معادله، $V_0 - V_1$ حجم دی الکتریک است که حجم "سوزن" از آن کم شده است، S_0 سطح خارجی دی الکتریک و $S' = S_1 + S_2 + S_c$ سطح کل سوزن است. از شکل ۳-۴ پیداست که بر روی سطح جانبی S_c سوزن، $\sigma_P = 0$ است. به علاوه، سوزن را می توان به دلخواه نازک ساخت به گونه ای که از سطوح S_1 و S_2 آن نیز بتوان چشمپوشی کرد. بنابراین فقط سطوح خارجی دی الکتریک مؤثر خواهند بود و انتگرال سطحی معادله (۴-۲۳) از نظر شکل با انتگرال سطحی معادله (۴-۱۵) یکی خواهد شد. در انتگرال حجمی معادله (۴-۲۳)، حجم حفره کنار گذاشته می شود. با وجود این، همچنان که به راحتی دیده می شود، سهم حجم حفره در مقدار این انتگرال قابل چشمپوشی است. چگالی بار ρ_P محدود است؛ کمیت $dv'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ در نقطه میدان (یعنی، در $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$) واگرا نمی شود، زیرا حجم یک نقطه، صفری است از مرتبه ای بالاتر از $\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ و سرانجام حجم سوزن V_1 را می توان با نازک کردن حفره به دلخواه کوچک کرد. بنابراین، نیازی هم به کنار گذاشتن حجم V_1 نیست و معادله (۴-۲۳) به صورت معادله (۴-۱۵) در می آید. به عبارت دیگر، معادله (۴-۱۵)، اعم از اینکه نقطه \mathbf{r} در داخل دی الکتریک واقع باشد یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را به دست می دهد.

میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را با محاسبه منفی گرادیان معادله (۴-۲۳) می توان به دست آورد. اما این میدان با آنچه از معادله (۴-۲۱) حاصل می شود، تفاوت ناچیزی دارد. بنابراین معادله (۴-۲۱) میدان الکتریکی ناشی از محیط را در نقطه \mathbf{r} تعیین می کند، خواه \mathbf{r} در داخل دی الکتریک باشد یا در خارج آن.

محاسبات مربوط به معادلات (۴-۱۵) و (۴-۲۱) در مواردی که $\mathbf{P}(x, y, z)$ تابع مکانی معلومی باشد، بسیار راحت است. (چند نمونه از این قبیل موارد را می توان در میان مسائل آخر این فصل پیدا کرد). اما در بیشتر موارد، قطبش از اعمال میدان الکتریکی خارجی بر روی محیط دی الکتریک ناشی می شود (یعنی، $\mathbf{P}(x', y', z')$ تابعی است از میدان الکتریکی ماکروسکوپی کل $(\mathbf{E}(x', y', z'))$ و در چنین شرایطی وضع بسیار پیچیده تر خواهد بود. ابتدا لازم است که شکل تابعی $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ را بدانیم؛ اما این شکل تابعی را در اکثر موارد به طور تجربی می دانیم و از این لحاظ هیچ اشکالی وجود ندارد. اشکال اصلی از اینجا ناشی می شود که \mathbf{P} به میدان الکتریکی کل، از جمله به آن قسمت از میدان که خود محیط دی الکتریک تولید می کند، بستگی دارد و این همان قسمت از میدان است که ما می خواهیم آن را محاسبه کنیم. پس نمی توانیم \mathbf{P} را حساب کنیم زیرا \mathbf{E} را نمی دانیم، و برعکس.

واضح است که برای حل این مسئله باید راه دیگری انتخاب کنیم. در بخشهای آینده در این باره صحبت خواهیم کرد.



شکل ۴-۴ ترسیم سطح گاؤسی S در داخل محیط دی الکتریک.

۴-۴ قانون گاؤس در دی الکتریکها: جابه جایی الکتریکی

در فصل ۲ رابطه مهمی میان شار الکتریکی و بار، موسوم به قانون گاؤس، به دست آوردیم. طبق این قانون، عبور شار الکتریکی از هر سطح بسته دلخواه متناسب است با بار کل واقع در داخل این سطح. در کاربرد قانون گاؤس در مورد ناحیه‌ای که دارای بارهای جاداده شده در دی الکتریک است، باید دقت کرد که تمام بارهایی که در داخل سطح گاؤس قرار دارند، اعم از بار قطبشی و باری که ما جا داده‌ایم، منظور شوند.

در شکل ۴-۴ سطح خط چین S یک سطح فرضی بسته است که در داخل محیط دی الکتریک قرار دارد. مقداری بار (Q) در حجم محصور شده توسط S جا داده‌ایم، فرض می‌کنیم که این بارها بر روی سطوح سه رسانا با مقادیر q_1 ، q_2 و q_3 توزیع شده‌اند. بنا بر قانون گاؤس داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P) \quad (۲۴-۴)$$

که در آن Q مقدار کل بار جاداده شده در دی الکتریک است، یعنی

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

و Q_P بار قطبشی کل است

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv \quad (۲۵-۴ \text{ الف})$$

در اینجا V حجم دی الکتریک محاط در S است. در S هیچ مرز ماده دی الکتریکی وجود ندارد، بنابراین انتگرال سطحی در معادله (۲۵-۴ الف) شامل سطح S نخواهد شد.

چنانچه انتگرال حجمی در معادله (۲۵-۴ الف) را با استفاده از قضیه دیورژانس به یک انتگرال سطحی تبدیل کنیم، باید دقت کنیم که سهم تمام سطوحی که حجم V را در بر گرفته‌اند، یعنی

سطوح S_1, S_2, S_3 را در نظر بگیریم. واضح است که سه سطح آخر، جمله اول معادله (۲۵-۴) را حذف می‌کنند، به گونه‌ای که

$$Q_P = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da \quad (۲۵-۴ \text{ ب})$$

از ترکیب این نتیجه با معادله (۲۴-۴) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (۲۶-۴)$$

معادله (۲۶-۴) بیان می‌کند که شار بردار $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ از یک سطح بسته، برابر است با بار خالصی که ما در حجم محصور توسط این سطح، جا داده‌ایم. این کمیت برداری آنقدر مهم است که نام و نماد جداگانه‌ای برای آن انتخاب شده است.

بنابراین ما یک بردار میدان ماکروسکوپی جدید \mathbf{D} ، به نام جابه‌جایی الکتریکی تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (۲۷-۴)$$

که یکای آن همان یکای \mathbf{P} یعنی یکای بار در واحد سطح است.^۱ معادله (۲۶-۴) برحسب \mathbf{D} چنین می‌شود

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (۲۸-۴)$$

این نتیجه را معمولاً قانون گاوس برای جابه‌جایی الکتریکی، یا به طور ساده قانون گاوس می‌نامند.

معادله (۲۸-۴) را می‌توان برای ناحیه‌ای از فضا که با هر سطح بسته S محصور شده باشد، به کار برد؛ هرگاه آن را برای ناحیه کوچکی که در آن بارهای محصور با چگالی ρ توزیع شده‌اند به کار ببریم، آنگاه قانون گاوس به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \rho \Delta V$$

از تقسیم این معادله بر ΔV و محاسبه حد آن نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۲۹-۴)$$

۱. در دستگاه یکه‌های گاوسی، \mathbf{D} به صورت $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ تعریف می‌شود؛ \mathbf{D} ، \mathbf{E} و \mathbf{P} ، همگی یکای یکسانی دارند که عبارت است از یکای بار در واحد سطح و در خلا $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

این نتیجه را گاهی صورت دیفرانسیلی قانون گاوس می‌نامند.

مزیت بیان صورتهای انتگرالی و دیفرانسیلی قانون گاوس، یعنی معادلات (۲۸-۴) و (۲۹-۴)، برحسب بردار \mathbf{D} در این است که فقط بار Q یا چگالی بار ρ که در محیط دی‌الکتریک جا داده‌ایم، صریحاً در معادلات ظاهر می‌شوند. از این پس ما معمولاً بار Q (یا ρ) را به‌طور ساده بار (یا چگالی بار) خواهیم نامید. هرگاه لازم شود که میان این بار و بار قطبشی Q_P محیط یا بار کل $Q + Q_P$ تمایز قائل شویم، بار Q را بار خارجی خواهیم نامید. مقصود ما از "خارجی" این نیست که این بار الزاماً در خارج از مرکز فیزیکی قطعه ماده مورد نظر ما قرار دارد. منظور ما این است که این بار، اضافه بر بارهایی است که اجزای اتمی ماده خنثی را تشکیل می‌دهند.^۱ از آنجا که در بسیاری از مسائل بارهای خارجی معلوم‌اند، خوب است میدان الکتروستاتیکی کلی در هر نقطه در داخل محیط دی‌الکتریک برحسب مجموع دو قسمت زیر بیان شود:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(x, y, z) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(x, y, z) \quad (۳۰-۴)$$

که جمله اول، \mathbf{D} ($1/\epsilon_0$)، از طریق دیورژانس به چگالی بار خارجی مربوط می‌شود و جمله دوم، یعنی \mathbf{P} ($-1/\epsilon_0$) متناسب است با قطبش محیط. در خلأ میدان الکتریکی کلاً به‌وسیله جمله اول (۳۰-۴) داده می‌شود.

۴-۵ پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی‌الکتریک

در مقدمه این فصل گفتیم که قطبش هر محیط دی‌الکتریک در اثر میدان الکتریکی موجود در محیط ایجاد می‌شود. درجه قطبش نه تنها به میدان الکتریکی، بلکه به خواص مولکولهای سازنده ماده دی‌الکتریک نیز بستگی دارد. از لحاظ ماکروسکوپی، رفتار ماده با یک رابطه تجربی به نام معادله ساختمندی، یعنی $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ ، که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی ماکروسکوپی است، کاملاً مشخص می‌شود. این رابطه یک رابطه نقطه‌ای است و اگر \mathbf{E} در ماده از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند، \mathbf{P} هم به تبعیت از آن تغییر می‌کند.

۱. بار خارجی را غالباً بار "آزاد" می‌نامند و بار قطبشی را گاهی مترادف با بار مقید به‌کار می‌برند. در الکتروستاتیک این ابهام در دسر زیادی موجود نمی‌آورد، زیرا بار خارجی بر روی یک رسانا آزاد است (یعنی، آزاد است که به اطراف حرکت کند) و بار قطبشی در دی‌الکتریک مقید است. اما، در دی‌الکتریک بار خارجی آزاد نیست، اگر آزاد بود، فوراً به سمت سطح می‌رفت و به خارج نشت می‌کرد. همچنین، بیشتر محیطهای رسانا علاوه بر بارهای آزادی که رفتار الکتروستاتیکی شیء رسانا را معین می‌کنند، بارهای مقیدی دارند که در شرایط دیگر به قطبش کمک می‌کنند (فصل ۷). در میدانهای وابسته به زمان (فصل ۱۹)، بسیار مهم است که موضوع تمایز میان بارهای خارجی و قطبشی با موضوع تمایز میان بارهای آزاد و مقید اشتباه نشود. لذا ما در این بحث منحصرأ از اصطلاح بار خارجی استفاده خواهیم کرد.

برای بیشتر مواد وقتی E صفر شود، P صفر خواهد شد، که این رفتار معمولی مواد است. در نتیجه، ما بحث خود را در اینجا به موادی محدود می‌کنیم که از این نوع هستند. (درباره دی الکتریکهایی که قطبش دائمی دارند، در بخش ۴-۵ به اختصار بحث خواهد شد). به علاوه، اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی را داشته باشد که میدان الکتریکی مولد آن دارد.

این نتایج را می‌توان در معادلهٔ ساختمندی زیر

$$P = \chi(E)E \quad (۳۱-۴)$$

که در آن کمیت نرده‌ای $\chi(E)$ پذیرفتاری الکتریکی ماده نام دارد، خلاصه کرد.

سیاری از مواد از لحاظ الکتریکی همسانگردند؛ این دسته شامل شاره‌ها و مواد جامد چندبلوری و بی‌شکل، و برخی بلورها می‌شوند. بررسی خواص الکتریکی مواد ناهمسانگرد، خارج از محدودهٔ این کتاب است.

از ترکیب معادلات (۳۱-۴) و (۲۷-۴)، رابطه‌ای برای D در یک محیط همسانگرد به دست می‌آوریم

$$D = \varepsilon(E)E \quad (۳۲-۴)$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \chi(E) \quad (۳۳-۴)$$

که در آن کمیت $\varepsilon(E)$ گذردهی ماده نامیده می‌شود. بدیهی است که یکاهای ε ، ε_0 و χ همگی یکسانند.

با اینکه دقت کردیم χ و ε را به صورت $\chi(E)$ و $\varepsilon(E)$ بنویسیم، با وجود این تجربه نشان داده است که به استثنای مواردی که میدان بسیار قوی است، غالباً χ و ε به میدان الکتریکی بستگی ندارند.

به عبارت دیگر، χ و ε اغلب اوقات ثابتهای مشخصهٔ ماده‌اند. این نوع مواد دی الکتریکهای خطی نام دارند و از روابط زیر تبعیت می‌کنند

$$P = \chi E \quad (\text{الف } ۳۱-۴)$$

$$D = \varepsilon E \quad (\text{الف } ۳۲-۴)$$

بنابراین، رفتار الکتریکی هر ماده یا با گذردهی ε و یا با پذیرفتاری χ به‌طور کامل مشخص می‌شود. لیکن مناسب‌تر آن است که کمیت بی‌بعد K را که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود، به‌کار ببریم

$$\varepsilon = K\varepsilon_0 \quad (۳۴-۴)$$

K را ضریب دی‌الکتریک یا ثابت دی‌الکتریک می‌نامند. از رابطه (۴-۳۳) دیده می‌شود که

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (4-35)$$

تابتهای دی‌الکتریک چند ماده متداول در جدول ۴-۱ داده شده‌اند. مسائل این کتاب بجز چند مورد که برای آنها بردار قطبش P مشخص شده است، به دی‌الکتریکهای خطی محدود می‌شوند. اگر میدان الکتریکی در یک دی‌الکتریک را خیلی قوی کنیم، این میدان الکترونها را به‌طور

جدول ۴-۱ خواص مواد دی‌الکتریک

استقامت دی‌الکتریک E_{max} برحسب ولت بر متر	ثابت دی‌الکتریک K	ماده
6×10^6	۴٫۵	آلومینیم اکسید
9×10^6	۵-۱۰	شیشه*
19×10^6	۳٫۵	نایلون
18×10^6	۲٫۳	پلی‌اتیلن
	۴٫۳	کوارتز (SiO_2)
	۶٫۱	نمک طعام
	۴٫۰	گوگرد
	۲٫۵-۸٫۰	چوب*
	۲۸٫۴	اتیل‌الکل (0°C)
	۲٫۳	بنزن (0°C)
	۸۷٫۸	آب مقطر (0°C)
	۸۰٫۱	آب مقطر (20°C)
3×10^6	۱٫۰۰۰۵۹	هوا (۱ جو)
	۱٫۰۵۴۸	هوا (۱۰۰ جو)
	۱٫۰۰۰۹۸۵	کربن دی‌اکسید (۱ جو)

* برای اجسامی نظیر شیشه و چوب، ترکیب شیمیایی متغیر است؛ بنابراین برای تابتهای دی‌الکتریک گستره‌ای وجود دارد. از این مطلب نباید نتیجه گرفت که دی‌الکتریک غیرخطی است. مأخذ: داده‌ها از کتاب زیر گرفته شده‌اند:

کامل از مولکولها بیرون می‌کشد و ماده به رسانا تبدیل می‌شود. حداکثر میدان الکتریکی که یک دی‌الکتریک می‌تواند تحمل کند بی‌آنکه در هم بشکند، استقامت دی‌الکتریک نامیده می‌شود. استقامت دی‌الکتریک، E_{\max} ، برای تعدادی از مواد در جدول ۴-۱ آمده است.

۴-۶ بار نقطه‌ای در یک شاره دی‌الکتریک

یکی از ساده‌ترین مسائل مربوط به دی‌الکتریک که می‌توان مورد بررسی قرار داد، مسئله بار نقطه‌ای q است در یک محیط دی‌الکتریک نامتناهی همسانگرد همگن. فرض می‌کنیم که محیط دی‌الکتریک خطی است و با ثابت دی‌الکتریک K مشخص می‌شود. با اینکه این مسئله خیلی ساده است، اما به هر حال آموزنده خواهد بود.

مثال ۴-۱ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در یک شاره دی‌الکتریک

فرض کنید که بار نقطه‌ای q در یک شاره دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک K در مبدأ مختصات قرار داشته باشد. میدان الکتریکی \mathbf{E} را در این شاره به دست آورید.

حل: اگر بار نقطه‌ای q در خلأ قرار داشت، میدان الکتریکی یک میدان شعاعی خالص بود. اما چون \mathbf{E} ، \mathbf{D} و \mathbf{P} در هر نقطه با هم موازی‌اند، ماهیت شعاعی بودن میدان بر اثر وجود محیط تغییر نمی‌کند. به علاوه، بر اثر تقارن موجود در مسئله \mathbf{E} ، \mathbf{D} و \mathbf{P} فقط می‌توانند به فاصله از بار نقطه‌ای بستگی داشته باشند، نه به مختصات زاویه‌ای. اکنون قانون گاوس، معادله (۴-۲۸)، را برای یک سطح کروی به شعاع r که q در مرکز آن قرار دارد، به کار می‌بریم. در این صورت

$$4\pi r^2 D = q$$

و

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

یا

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad (۴-۳۶)$$

اکنون میدان الکتریکی و قطبش را به راحتی می‌توانیم به دست آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi K \epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (۴-۳۷)$$

$$\mathbf{P} = \frac{(K-1)q}{4\pi K r^3} \mathbf{r} \quad (۴-۳۸)$$

بنابراین، میدان الکتریکی در مقایسه با حالتی که محیط دی الکتریکی وجود ندارد، به نسبت ضریب K کوچک می‌شود.

اکنون آموزنده است که این مسئله را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم تا ببینیم چرا وجود دی الکتریک میدان الکتریکی را تضعیف می‌کند. کلیه بارها، اعم از بارهای خارجی یا بارهای قطبشی، منشأ میدان الکتریکی هستند. بار خارجی همان بار نقطه‌ای q است. اما بار قطبشی از دو قسمت تشکیل می‌شود: یک قسمت مربوط است به چگالی حجمی $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ و قسمت دیگر مربوط است به چگالی سطحی $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ در روی سطح الکتریک، که با بار نقطه‌ای در تماس است. با به‌کار بردن معادله (۳۸-۴)، می‌بینیم که $\nabla \cdot \mathbf{P}$ به‌ازای $r \neq 0$ صفر می‌شود و در نتیجه در این حالت هیچ چگالی حجمی بار قطبشی وجود ندارد.

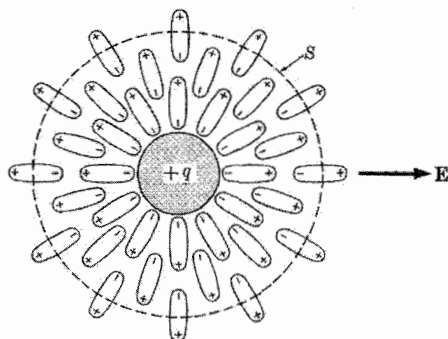
بار نقطه‌ای q از نظر ماکروسکوپی نقطه‌ای است. فرض کنید در مقیاس مولکولی این نقطه بزرگ است و می‌توانیم برای آن یک شعاع مانند b در نظر بگیریم که سرانجام آن را به سمت صفر میل خواهیم داد. در این صورت بار قطبشی سطحی کل از معادله زیر به‌دست می‌آید

$$Q_P = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})_{r=b} = -\frac{(K-1)q}{K} \quad (39-4)$$

بار کل که عبارت است از

$$Q_P + q = \frac{1}{K} q \quad (40-4)$$

از لحاظ ماکروسکوپی مانند یک بار نقطه‌ای ظاهر می‌شود، و اکنون معلوم می‌شود که چرا میدان الکتریکی در مقایسه با حالتی که محیط دی الکتریک وجود ندارد، به نسبت K کوچکتر می‌شود. نمودار طرحواره‌ای از بار نقطه‌ای q در محیط دی الکتریک در شکل ۵-۴ نشان داده شده است.



شکل ۵-۴ نمودار طرحواره‌ای که نحوهٔ سمتگیری مولکولهای قطبیده را در محیط دی الکتریکی که "بار نقطه‌ای" q را در میان گرفته است، نشان می‌دهد.

۴-۷ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

قبل از آنکه بتوانیم مسائل پیچیده‌تر را حل کنیم، باید بدانیم که بردارهای میدان \mathbf{E} و \mathbf{D} در عبور از فصل مشترک دو محیط چگونه تغییر می‌کنند. دو محیط ممکن است دو دی‌الکتریک با ویژگیهای متفاوت، یا یک دی‌الکتریک و یک رسانا باشند. خلاصاً را می‌توان دی‌الکتریکی با گذردهی ϵ_0 در نظر گرفت.

دو محیط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که به نحوی که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، با هم در تماس‌اند. فرض می‌کنیم یک چگالی سطحی بار خارجی، σ ، وجود دارد که می‌تواند بر روی فصل مشترک دو محیط از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند. سطح قرصی شکل کوچکی مانند S را در نظر می‌گیریم که فصل مشترک را قطع کند و مساحتی برابر ΔS از آن را در برگیرد. ارتفاع این قرص در مقایسه با شعاع قاعده‌هایش، آنقدر کوچک فرض می‌شود که می‌توان از آن چشمپوشی کرد. مقدار بار محصور در سطح S برابر است با

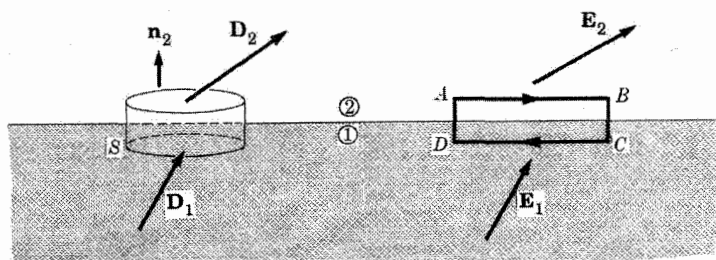
$$\sigma \Delta S + \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_1 + \rho_2) \times \text{حجم}$$

اما حجم قرص بسیار کوچک است و می‌توان از جمله آخر چشمپوشی کرد. با به‌کار بردن قانون گاوس برای سطح S نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$D_2 \cdot n_2 \Delta S + D_1 \cdot n_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

یا

$$(D_2 - D_1) \cdot n_2 = \sigma \quad (۴-۱۴الف)$$



شکل ۴-۶ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان در فصل مشترک دو محیط را می‌توان با به‌کار بردن قانون گاوس برای سطح S و انتگرال‌گیری از $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ بر روی مسیر $ABCD$ به‌دست آورد.

چون \mathbf{n}_2 می‌تواند معرف بردار عمود بر فصل مشترک باشد، داریم

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4-41)$$

بنابراین، ناپوستگی مؤلفه عمود \mathbf{D} با چگالی سطحی بار خارجی در روی فصل مشترک مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، اگر باری بر روی فصل مشترک بین دو محیط وجود نداشته باشد، مؤلفه عمود \mathbf{D} پیوسته است.

چون میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E} را می‌توان از منفی گرادیان پتانسیل به دست آورد، انتگرال خطی $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ بر روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. این نتیجه را در مسیر مستطیلی $ABCD$ در شکل ۴-۶ به کار می‌بریم. در این مسیر، طولهای AB و CD مساوی Δl و قطعه‌های AD و BC بسیار کوچک و قابل چشمپوشی فرض می‌شوند؛ بنابراین

$$\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = 0$$

یا

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (4-42 \text{ الف})$$

پس نتیجه مطلوب عبارت است از

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (4-42 \text{ ب})$$

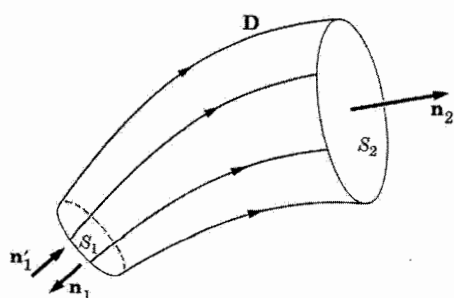
یعنی، مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در عبور از فصل مشترک پیوسته است.

نتایج بالا برای دو محیط دلخواه به دست آمده‌اند، لیکن جالب است ببینیم که این معادلات برای موردی که یکی از دو محیط رسانا باشد، به چه صورت در می‌آیند. چون هیچ نیروی مولکولی بازگرداننده‌ای به بارهای آزاد جسم رسانا وارد نمی‌شود، به نظر می‌رسد که برای رسانا در معادله (۴-۳۱) داریم $\chi = \infty$ ، و نیز طبق معادله (۴-۳۳)، $\epsilon = \infty$. اگر محیط ۱ را رسانا فرض کنیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که مقادیر (متناهی) \mathbf{P}_1 و \mathbf{D}_1 هر چه باشند، $\mathbf{E}_1 = 0$ است، همچنان که قبلاً در فصل ۲ نیز با استدلال متفاوتی به همین نتیجه رسیدیم. چون \mathbf{E}_1 صفر است، معادله (۴-۲۲) به صورت زیر در می‌آید

$$E_{2t} = 0 \quad (4-43)$$

ولی جابه‌جایی \mathbf{D}_1 با این روش تعیین نمی‌شود؛ اگر ما فعلاً آن را به طور دلخواه صفر بگیریم، معادله (۴-۴۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$D_{2n} = \sigma \quad (4-44)$$



شکل ۷-۴ لوله شار جابه‌جایی.

که در آن σ چگالی بار سطحی کل روی سطح رساناست، ولی شامل بار سطحی قطبشی روی سطح دی‌الکتریک نمی‌شود. روش دیگر آن است که مسئله‌ی دی‌الکتریک را حل کنیم و آنگاه K_1 را به سمت بی‌نهایت میل دهیم (به مسئله‌های ۱۲-۴ و ۱۴-۴ رجوع کنید). در این صورت σ معرف بار قطبشی رسانا (به‌علاوه هر بار خارجی واقع بر سطح رسانا) خواهد بود. از لحاظ فیزیکی نتیجه این دو روش یکسان خواهد بود. معادله (۴-۴۴) نیز با همان استدلالی که به معادله (۲-۳۱) رسیدیم، از معادله (۴-۲۸) به دست می‌آید (به شکل ۲-۱۰ رجوع کنید). توجه کنید که بنا به معادله (۴-۴۳)، میدان در داخل دی‌الکتریک همواره بر سطح رسانا عمود است.

بنا به دلایل فیزیکی محض، واضح است که پتانسیل φ در عبور از فصل مشترک دو محیط باید پیوسته باشد. این مطلب ناشی از آن است که اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ میان دو نقطه خیلی نزدیک به هم برابر با $-\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l}$ است، که در آن $\Delta\mathbf{l}$ فاصله دو نقطه است، و طبق آنچه در بالا گفته شد، دلیلی وجود ندارد که انتظار داشته باشیم \mathbf{E} در فصل مشترک بی‌نهایت شود. در واقع، پیوستگی پتانسیل یک شرط مرزی است، ولی این شرط از شرایطی که قبلاً به دست آوردیم مستقل نیست. این شرط در بیشتر موارد با معادله (۴-۴۲) معادل است.

از بحث بالا و بخشهای گذشته می‌توان نتیجه گرفت که جابه‌جایی الکتریکی \mathbf{D} با بار خارجی رابطه نزدیک دارد. حال می‌خواهیم خاصیت مهمی از \mathbf{D} را ثابت کنیم، یعنی این خاصیت را که شار \mathbf{D} در ناحیه‌هایی از فضا که در آن بار خارجی وجود ندارد، پیوسته است. برای این کار مجدداً از قانون گاوس کمک می‌گیریم و خطوط جابه‌جایی را در ناحیه‌ای از فضا رسم می‌کنیم. خطوط جابه‌جایی خطوطی موهومی‌اند و به طریقی رسم می‌شوند که جهت هر یک از آنها در هر نقطه با جهت \mathbf{D} در آن نقطه یکی باشد. حال یک لوله جابه‌جایی را در نظر می‌گیریم، یعنی حجمی را که از اطراف با خطوط \mathbf{D} محصور شده ولی به وسیله این خطوط قطع نشده است (شکل ۷-۴). لوله از دو انتها به سطوح S_1 و S_2 ختم می‌شود. با به‌کار بردن قانون گاوس خواهیم داشت

$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da - \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' da = Q \quad (45-4)$$

هرگاه در ناحیه محصور شده بار خارجی وجود نداشته باشد، آنگاه $Q = 0$ است و همان مقدار شاری که از S_1 وارد لوله می‌شود، از S_2 خارج می‌شود. هنگامی که بار خارجی وجود داشته باشد، این بار ناپوستگی در شار جابه‌جایی را تعیین می‌کند؛ از این رو خطوط جابه‌جایی به بارهای خارجی منتهی می‌شوند. از طرف دیگر، خطوط نیرو یا به بارهای خارجی ختم می‌شوند و یا به بارهای قطبشی.

۸-۴ مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی‌الکتریکها

معادله اساسی که در این فصل به دست آمده است، عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (46-4)$$

که در آن ρ چگالی بار خارجی است. اگر دی‌الکتریکهایی که با آنها سروکار داریم، خطی، همسانگرد و همگن باشند، آنگاه $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ می‌شود که در آن ϵ ثابت مشخصه ماده است و می‌توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (47-4)$$

اما میدان الکتروستاتیکی \mathbf{E} را می‌توان از یک پتانسیل نرده‌ای φ به دست آورد، یعنی

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

به طوری که

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (48-4)$$

از این رو پتانسیل در دی‌الکتریک در معادله پواسون صدق می‌کند. تنها تفاوت میان معادله (۴۸-۴) و رابطه نظیر آن برای پتانسیل در خلأ آن است که ϵ جانشین ϵ_0 شده است (و ρ چگالی بار خارجی است، نه چگالی بار کل).

در بیشتر موارد جالب توجه، دی‌الکتریک شامل باری که در حجم آن توزیع شده باشد، نیست. یعنی در داخل ماده دی‌الکتریک $\rho = 0$ است. بارها بر سطوح رساناها قرار دارند یا به صورت بارهای نقطه‌ای در داخل دی‌الکتریک جمع شده، که برای اطمینان می‌گوییم در آن جای داده شده‌اند. تحت این شرایط، در سراسر جسم دی‌الکتریک، پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می‌کند

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (49-4)$$

در بعضی مسائل ممکن است یک چگالی سطحی بار، σ ، بر روی سطح جسم دی الکتریک یا بر روی فصل مشترک دو ماده دی الکتریک وجود داشته باشد، لیکن این حالت تغییری در وضع موجود ایجاد نمی کند و معادله (۴-۴۹) باز هم تا هنگامی که $\rho = 0$ باشد، صادق است.

بنابراین مسئله الکتروستاتیکی برای محیطهای دی الکتریک خطی، همسانگرد و همگن، به مسئله پیدا کردن پاسخهای معادله لاپلاس در هر یک از این محیطها و متصل کردن پاسخهای مربوط به محیطهای مختلف به یکدیگر به وسیله شرایط مرزی بخش گذشته تبدیل می شود. مسائل متعددی وجود دارند که می توان آنها را به این طریق حل کرد. یک نمونه از این مسائل را در اینجا حل می کنیم و نمونه های دیگر را می توان در مسائل انتهایی فصل یافت.

مثال ۴-۲ کره دی الکتریک در یک میدان الکتریکی یکنواخت

یک کره دی الکتریک به شعاع a را در ناحیه ای از فضا قرار می دهیم که در آن میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت E_0 وجود دارد. می خواهیم نحوه تغییر شکل خطوط نیرو را تعیین کنیم. فرض کنید دی الکتریک خطی همسانگرد و همگن است و با ثابت دی الکتریک K مشخص می شود و علاوه بر آن، بار هم ندارد. مبدأ مختصات را می توانیم مرکز کره فرض کنیم و جهت E_0 را به عنوان جهت قطبی (محور z) در نظر بگیریم.

حل: در این حال پتانسیل را می توان به صورت مجموع هماهنگهای منطقه ای نوشت. درست نظیر آنچه در بخش ۳-۵ دیدیم، با انتخاب دو هماهنگ اول، تمام شرایط مرزی می توانند برآورده شوند. برای ناحیه خلا (ناحیه ۱) در خارج کره می نویسیم

$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (50-4)$$

و برای ناحیه دی الکتریک (ناحیه ۲) می نویسیم

$$\varphi_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (51-4)$$

ضرایب A_1, A_2, C_1, C_2 مجهول اند و باید به کمک شرایط مرزی محاسبه شوند. هماهنگ r^{-1} ضروری نیست، زیرا وجود آن مستلزم وجود بار خالص بر روی کره است. می توانیم به معادلات (۵۰-۴) و (۵۱-۴) یک عدد ثابت اضافه کنیم، ولی چون خواهیم دید که در هر دو معادله عدد ثابت یکسانی لازم داریم، می توانیم بدون از دست رفتن عمومیت مطلب، آن ثابت را صفر بگیریم. در فاصله های دور از کره، میدان الکتریکی حالت یکنواختی خود را حفظ می کند و $\varphi_1 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$. بنابراین $A_1 = -E_0$. به علاوه، بجز در موردی که $C_2 = 0$ ، پتانسیل و

میدان الکتریکی مربوط به آن در مرکز کره بی نهایت می شوند و این بدان معنی است که در مرکز باید یک دوقطبی نقطه‌ای وجود داشته باشد، یعنی یک دوقطبی که گشتاور آن با ΔV متناسب نباشد. در این مسئله دوقطبی نقطه‌ای ماکروسکوپی موجود نیست؛ زیرا همان طور که در بخش ۴-۳ گفته شد، پتانسیل و میدان الکتریکی ماکروسکوپی در یک دی الکتریک بدون بار نقطه‌ای، بی نهایت نمی شوند. بنابراین، $C_2 = 0$ ، و ضرایب باقیمانده A_2 و C_1 از شرایط مرزی بخش ۴-۷ به دست می آیند.

لازمه پیوستگی پتانسیل در فصل مشترک میان دی الکتریک و خلأ این است که در $r = a$ داشته باشیم $\varphi_1 = \varphi_2$ ، یا

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a \quad (52-4)$$

چون مؤلفه قائم D در فصل مشترک $D_r = -\varepsilon(\partial\varphi/\partial r)$ است، پیوستگی D_r (اینکه هیچ گونه باری در سطح دی الکتریک وجود ندارد) مستلزم این است که در $r = a$ ، $D_{1r} = D_{2r}$ باشد، یا

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2 \quad (53-4)$$

پیوستگی E_t در $r = a$ با معادله (52-4) معادل است.

با ترکیب معادلات (52-4) و (53-4) نتیجه می گیریم که

$$A_2 = -\frac{3E_0}{K+2} \quad (54-4)$$

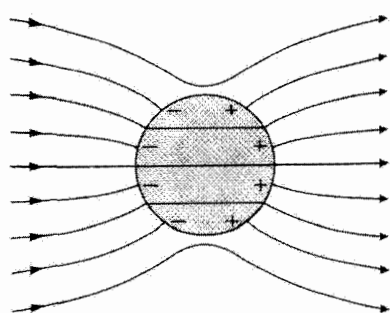
و

$$C_1 = \frac{(K-1)a^3 E_0}{K+2} \quad (55-4)$$

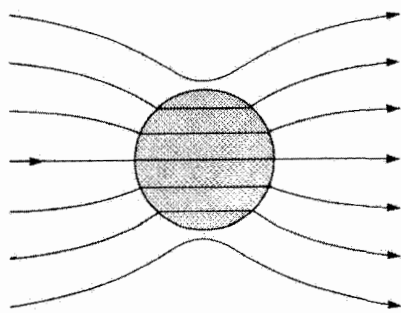
پس مسئله حل شده است. پتانسیل از معادلات (50-4) یا (51-4) به دست می آید و ثابتهای A_1 ، C_1 ، A_2 و C_2 همگی معلوم اند. مؤلفه های E و D را در هر نقطه (r, θ, ϕ) می توان با مشتق گیری به دست آورد. از معادله (54-4) و با توجه به اینکه $C_2 = 0$ ، چنین نتیجه می شود که میدان الکتریکی در داخل کره با E_0 هم جهت است و با رابطه زیر داده می شود

$$E_2 = \frac{3}{K+2} E_0 \quad (56-4)$$

خطوط جابه جایی و خطوط نیرو در شکل ۸-۴ نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۸-۴ میدان الکتریکی یکنواخت در اثر حضور یک کره دی‌الکتریک تغییر شکل یافته است: (الف) خطوط جابه‌جایی الکتریکی، (ب) خطوط میدان الکتریکی.

* ۹-۴ نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای واقع در یک دی‌الکتریک

اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم نیروی وارد بر یک رسانای باردار کوچک کروی را که در داخل یک دی‌الکتریک خطی و همسانگرد جا داده شده است، حساب کنیم. در حد، هنگامی که جسم رسانا از لحاظ ماکروسکوپی بی‌اندازه کوچک است، نتیجه این محاسبات نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای را به دست می‌دهد.

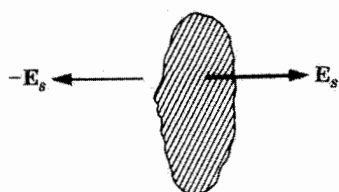
ابتدا میدان الکتریکی و چگالی بار سطحی در یک نقطه معین از سطح رسانا را با روش شرایط مرزی که در بخش پیش گفته شد، به دست می‌آوریم و سپس نیروی \mathbf{F} را با انتگرال‌گیری از میدان بر روی سطح رسانا محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{E}' \sigma da \quad (۵۷-۴)$$

در اینجا \mathbf{E}' میدان الکتریکی روی جزء سطح da است منهای آن قسمت از میدان که توسط خود جزء سطح تولید می‌شود. به عبارت دیگر

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s \quad (۵۸-۴)$$

که در آن \mathbf{E}_s میدان الکتریکی ناشی از خود جزء سطحی بار، یعنی σda است. این نکته که میدان \mathbf{E}' شامل \mathbf{E}_s نباشد مهم است، زیرا کمیت $\mathbf{E}_s \sigma da$ نماینده برهم‌کنش جزء بار σda است با میدان خودش. این خود برهم‌کنش طبعاً هیچ نیروی خاصی بر جزء وارد نمی‌کند، اما تنش سطحی تولید می‌کند



شکل ۹-۴ خود میدان یک جزء سطحی باردار.

$$\mathcal{F}_s = \sigma E_s \quad (۵۹-۴)$$

این تنش ناشی از دفع متقابل الکترونها (یا یونهای مثبت اضافی) در لایه سطحی است. این تنش با نیروهای قوی چسبندگی در ماده سازنده جزء، خنثی می‌شود. باید متذکر شد که در فصلهای ۲ و ۳، وقتی نیروهای وارد بر اجسام باردار را محاسبه می‌کردیم، به طور ضمنی خود میدان \mathbf{E}_s را کم می‌کردیم؛ از این رو، هنگام محاسبه نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای، میدان ناشی از بار نقطه‌ای را منظور نمی‌کردیم. ممکن است چنین به نظر رسد که خود میدان جزء سطحی باردار σda به دلیل بی‌نهایت کوچک بودن این جزء، قابل چشمپوشی است. اما این میدان متناهی است. مطمئناً جزء از لحاظ ماکروسکوپی کوچک است، لیکن با همه کوچکی ابعادش به حد صفر نمی‌رسند. برای نقطه‌ای که مستقیماً در روی جزء سطح است، این جزء مثل قسمتی از یک صفحه به نظر می‌رسد (شکل ۹-۴). میدان \mathbf{E}_s بر جزء سطح عمود است ولی در دو طرف جزء سطح جهتهای مخالف دارد. میدان کل در داخل رسانا صفر است؛ بنابراین

$$\mathbf{E}' - \mathbf{E}_s = 0 \quad (\text{داخل رسانا}) \quad (۶۰-۴)$$

این معادله رابطه‌ای بین \mathbf{E}' و \mathbf{E}_s در روی سطح و در نتیجه، رابطه‌ای بین \mathbf{E}' و میدان الکتریکی ماکروسکوپی \mathbf{E} ، درست در نزدیکی سطح به دست می‌دهد

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (۶۱-۴)$$

نیروی وارد بر رسانا عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \mathbf{E} \sigma da \quad (۵۷-۴ \text{ الف})$$

اکنون یک رسانای کروی کوچک را در نظر می‌گیریم که در درون یک دی‌الکتریک با ابعاد نامتناهی جا داده شده است. بار کل بر روی این رسانا Q و شعاع آن a فرض می‌شود. چون سرانجام می‌خواهیم نتیجه را در حدی محاسبه کنیم که در آن a بسیار کوچک می‌شود و چون

تغییرات میدان الکتریکی (اگر وجود داشته باشند) در یک مقیاس ماکروسکوپی صورت می‌گیرند، کافی است حالتی را بررسی کنیم که در آن میدان الکتریکی در حوالی رسانا در آغاز یکنواخت است. این میدان یکنواخت را با E_0 نشان می‌دهیم. این مسئله شبیه است به مسئله مقادیر مرزی که در بخش ۳-۵ حل کردیم، با این تفاوت که در اینجا کره رسانا در یک دی‌الکتریک با گذردهی ϵ جا داده (یا غوطه‌ور) شده است و به علاوه بار خالص آن Q است. در مقایسه با بخش ۳-۵ عبارات زیر به راحتی تعیین می‌شوند.

برای پتانسیل،

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (۶۲-۴)$$

برای میدان الکتریکی

$$E_r = E_0 (1 + 2a^3/r^3) \cos \theta + Q/4\pi\epsilon r^2 \quad (۶۳-۴)$$

$$E_\theta = -E_0 (1 - a^3/r^3) \sin \theta$$

برای چگالی سطحی بار بر روی سطح کره

$$\sigma(\theta) = \epsilon E_r|_{r=a} = 3\epsilon E_0 \cos \theta + Q/4\pi a^2 \quad (۶۴-۴)$$

اکنون می‌توان نیرو را از معادله (۴-۵۷الف) به دست آورد. به علت تقارن، تنها مؤلفه غیرصفر نیرو در جهت $\theta = 0$ است، یعنی در جهت محور z

$$F_z = \frac{1}{4} \int_0^\pi (E_r)_{r=a} \cos \theta \sigma(\theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = E_0 Q \quad (۶۵-۴ \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_0 \quad (۶۵-۴ \text{ ب})$$

این نتیجه در حد، هنگامی که a بسیار کوچک شود، تغییر نمی‌کند. بنابراین، میدان الکتریکی در دی‌الکتریک، \mathbf{E}_0 ، با تعریف بنیادی، یعنی نیروی وارد بر یک بار آزمون کوچک Q تقسیم بر بزرگی بار Q ، سازگار است.

۴-۱۰ روش تصویری برای مسائل شامل دی‌الکتریکها

روش تصویری بحث شده در فصل قبل را می‌شود برای به دست آوردن پاسخهای معادله لاپلاس برای موردی که دو یا چند محیط دی‌الکتریک در مسئله وجود دارد تعمیم داد. به خاطر بیاوریم وقتی که روش بار تصویری را به کار می‌بریم تصور می‌شود پتانسیل در ناحیه‌ای از فضا توسط

بارهای "نقطه‌ای" و رساناهای باردار شده داخل ناحیه و توسط بارهای تصویری مجازی بیرون ناحیه تولید می‌شود. بارهای تصویری به نظر می‌آید داخل یک یا چند رسانا قرار گرفته‌اند. تنها تفاوتی که وقتی دو یا چند دی‌الکتریک موجودند این است که بارهای تصویری مجازی را می‌شود داخل یکی از دی‌الکتریک‌های دیگر (نه آنکه پتانسیل برای آن محاسبه می‌شود) جا داد، و شرایط مرزی در هر فصل مشترک دی‌الکتریک-دی‌الکتریک باید صدق کند.

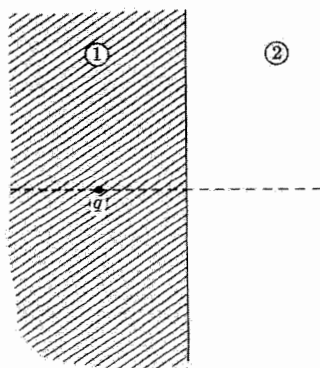
مثال ۳-۴ میدان یک بار نقطه‌ای نزدیک فصل مشترک دی‌الکتریک-دی‌الکتریک دو محیط دی‌الکتریک با گذردهی الکتریکی ثابت ϵ_1 و ϵ_2 را که توسط یک فصل مشترک تخت از هم جدا شده‌اند، در نظر می‌گیریم. بار خارجی بر روی فصل مشترک وجود ندارد. بار نقطه‌ای q داخل محیطی که با ϵ_1 مشخص شده به فاصله d از فصل مشترک جا داده شده است (شکل ۴-۱۰). مسئله مطرح: میدانهای الکتریکی در محیطهای ۱ و ۲ چقدر هستند؟

حل: برای سهولت، می‌شود صفحه yz را که از مبدأ می‌گذرد، فصل مشترک فرض کنیم، و q را روی محور x در $x = -d$ قرار دهیم. اگر مسئله شرح داده شده در بخش ۳-۹ را به‌عنوان راهنما به‌کار ببریم، انتظار داریم پتانسیل در هر محیط به‌صورت جمع پتانسیل بار نقطه‌ای q و پتانسیل یک بار تصویری بیان شود. به‌علاوه حدس می‌زنیم بار تصویری در همان فاصله d از فصل مشترک که بار نقطه‌ای اصلی قرار گرفته واقع شده است. فرض کنیم

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2} \quad \text{و} \quad r' = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

پس در محیط ۱

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right] \quad (4-66)$$



شکل ۴-۱۰ دو محیط دی‌الکتریک با یک بار نقطه‌ای در محیط ۱.

به عبارت دیگر، بار تصویری q' در محیط ۲ در مکان $(d, 0, 0)$ قرار دارد.

برای پتانسیل φ_2 در محیط ۲، بار تصویری باید در محیط ۱ واقع شود، در همان محیط که بار اصلی q واقع است، هر دو در موقعیت $(-d, 0, 0)$. جمع این بارها را با q'' نشان می‌دهیم. پس در محیط ۲

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r} \quad (67-4)$$

کمیت‌های q' و q'' را می‌توان از شرایط مرزی در فصل مشترک به دست آورد. کمیت $D_{1n} = -\epsilon_1 \partial\varphi_1 / \partial x|_{x=0}$ را محاسبه می‌کنیم و همین‌طور تا آخر، و بر طبق معادله (۴۱-۴) تساوی $D_{1n} = D_{2n}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{(q - q')d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{q''d}{[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (68-4)$$

سپس $E_{1y} = -\partial\varphi_1 / \partial y|_{x=0}$ و کمیت‌های مشابه را محاسبه می‌کنیم و بر طبق معادله (۴۲-۴) $E_{1y} = E_{2y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{(q + q')y}{\epsilon_1 [d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{q''y}{\epsilon_2 [d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (69-4)$$

چیز تازه‌ای از پیوستگی φ در فصل مشترک به دست نمی‌آید. از حل کردن معادلات (۶۸-۴) و (۶۹-۴) برای q' و q'' ، به دست می‌آوریم

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (70-4)$$

معادله لاپلاس در هر دو محیط صادق است و شرایط مرزی نیز برقرارند. پاسخ منحصر به فرد است.

۱۱-۴ خلاصه مطالب

رفتار الکتروستاتیکی یک محیط دی‌الکتریک به کمک گشتاور دوقطبی در واحد حجم، یا قطبش آن کاملاً مشخص می‌شود:

$$\mathbf{P} = \lim \frac{\Delta p}{\Delta v}$$

این کمیت، چگالی بار قطبشی تولید می‌کند

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P})$$

که در اثر آنها پتانسیل زیر حاصل می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho_P(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint \frac{\sigma_P(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

میدان E ی کل، ناشی از بارهای خارجی و بار قطبشی در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P)$$

مناسب است که میدان برداری جابه‌جایی الکتریکی را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

به گونه‌ای که

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

که در آن تنها بارهای خارجی به عنوان چشمه در نظر گرفته می‌شوند. در معادله تاو

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

تغییری حاصل نمی‌شود، زیرا این معادله حاوی چگالی بار نیست. برای حل معادلات میدان باید معادله ساختمندی

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

نیز برای هر ماده به خصوصی معلوم باشد. در آن صورت چهار معادله آخر، با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \text{و} \quad E_{2t} - E_{1t} = 0$$

برای تعیین \mathbf{E} و \mathbf{D} در داخل و خارج دی‌الکتریکها کافی‌اند.

• شکل انتگرالی قانون گاوس به صورت زیر در می‌آید

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q$$

که در آن Q فقط بار خارجی مستقر در داخل سطح S را شامل می‌شود. (در نتیجه، درست در خارج از سطح ماده رسانایی که در محیط دی‌الکتریک جا داده شده است، $D_n = \sigma$). معادله تاو هنوز هم تعریف پتانسیل را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

• اکثر مواد دی‌الکتریک خطی‌اند و پذیرفتاری χ در آنها ثابت است:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

هنگامی که این معادله ساختمندی با تعریف \mathbf{D} ترکیب شود، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

که در آن

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$$

ثابت دی‌الکتریک

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

برای اکثر دی‌الکتریکهای معمولی مقداری بین ۱ و ۱۰۰ دارد؛ و برای تمام دی‌الکتریکها $K \geq 1$ ($\chi \geq 0$). در خلا، $K = 1$ ($\chi = 0$). رفتار الکتروستاتیکی رساناها را می‌توان با فرض اینکه K بی‌نهایت است، به دست آورد.

• در یک محیط خطی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho \quad \text{و} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

روشهای ریاضی برای حل معادلات پواسون و لاپلاس، شبیه به روشهای بیان شده در فصل ۳ است، به شرط آنکه شرایط مرزی مناسب در فصل مشترک دی‌الکتریک در نظر گرفته شوند. این شرایط عبارت‌اند از

$$K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \quad \text{و} \quad \varphi_2 = \varphi_1$$

(معادله اخیر با شرط $E_{2t} = E_{1t}$ هم‌ارز است).

مسائل

۱-۴ یک میله دی‌الکتریک باریک که سطح مقطع آن A است، روی محور x از $x = 0$ تا $x = L$ قرار دارد. قطبش میله در امتداد طول آن با رابطه $P_x = ax^2 + b$ داده می‌شود. (الف) چگالی حجمی بار قطبشی و چگالی سطحی بار قطبشی را در هر یک از دو سر میله حساب کنید. (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبشی کل در این حالت صفر است.

۲-۴ یک مکعب دی الکتریک به ضلع L دارای قطبشی شعاعی به صورت $\mathbf{P} = A\mathbf{r}$ است، که در آن A یک ضریب ثابت و $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ است. مبدأ مختصات در مرکز مکعب است. (الف) همه چگالیهای بار قطبشی را محاسبه کنید و (ب) صریحاً نشان دهید که بار قطبشی کل صفر است.

۳-۴ میله دی الکتریک استوانه‌ای شکل قائمی به طول L و به شعاع R در امتداد طولش قطبیده شده است. اگر قطبش یکنواخت و بزرگی آن P باشد، میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را در نقطه‌ای بر روی محور میله محاسبه کنید.

۴-۴ ثابت کنید که در یک جسم دی الکتریک به حجم V و سطح خارجی S رابطه زیر میان قطبش \mathbf{P} و چگالیهای بار قطبشی ρ_P و σ_P برقرار است

$$\int_V \mathbf{P} dv = \int_V \rho_P \mathbf{r} dv + \int_S \sigma_P \mathbf{r} da$$

در اینجا $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ بردار مکان از هر مبدأ مختصات ثابتی است [راهنمایی: $\nabla \cdot (x\mathbf{P})$ را طبق معادله (۴-۱۰) بسط دهید].

۵-۴ دو قطعه دی الکتریک نیم نامتناهی را تقریباً در وضع تماس قرار داده‌ایم، به طوری که میان آنها شکاف باریکی با فاصله ثابت وجود دارد. قطبش \mathbf{P} در سراسر قطعه‌ها مقداری ثابت و با بردار عمود بر سطوحی که شکاف میان دو قطعه را در برمی‌گیرند، زاویه γ می‌سازد. میدان الکتریکی را در شکاف میان دو قطعه محاسبه کنید.

۶-۴ یک رسانای استوانه‌ای طویل به شعاع a را که بار الکتریکی در واحد طول آن λ است، در یک محیط دی الکتریک با گذردهی ثابت ϵ قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی را در فاصله $r > a$ از محور استوانه محاسبه کنید.

۷-۴ دو محیط دی الکتریک با ثابتهای دی الکتریک K_1 و K_2 با فصل مشترک تختی از یکدیگر جدا شده‌اند. فصل مشترک آنها بار خارجی ندارد. رابطه‌ای میان زوایای θ_1 و θ_2 ، که زوایای میان یک خط اختیاری جابه‌جایی و خط عمود بر فصل مشترک‌اند، پیدا کنید: θ_1 در محیط ۱ و θ_2 در محیط ۲.

۸-۴ یک کابل هم‌محور با مقطع دایره‌ای دارای یک دی الکتریک مرکب است. شعاع خارجی رسانای داخلی آن برابر a است، که با ورقه‌ای از یک ماده دی الکتریک با ثابت دی الکتریک K_1 و شعاع خارجی b احاطه شده است. روی این لایه ورقه‌ای از یک دی الکتریک دیگر با ثابت دی الکتریک K_2 و شعاع خارجی c قرار دارد. پوسته رسانای خارجی دارای شعاع داخلی c است. اگر اختلاف پتانسیل φ میان دو رسانا برقرار شود، قطبش را در هر نقطه از دو محیط دی الکتریک محاسبه کنید.

۹-۴ یک رسانای کروی به شعاع R_1 توسط پوستهٔ کروی دی‌الکتریک جامدی با شعاع خارجی R_2 ، شعاع داخلی R_1 و ثابت دی‌الکتریک K_1 احاطه شده است. این جسم مرکب در سیالی با ثابت دی‌الکتریک K_2 فرو برده شده و تحت تأثیر یک میدان الکتریکی در آغاز یکنواخت E_0 قرار گرفته است. میدان الکتریکی را در دو محیط دی‌الکتریک به دست آورید.

۱۰-۴ یک دی‌الکتریک استوانه‌ای طویل به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک K در یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 قرار داده شده است. محور استوانه بر راستای E_0 عمود است. استوانه بار خارجی ندارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج استوانه به دست آورید.

۱۱-۴ دوقطبی نقطه‌ای p در مرکز یک دی‌الکتریک جامد کروی به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک K قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج کره پیدا کنید. [راهنمایی: میدان در نقاط خارج میدانی دوقطبی است؛ در داخل، علاوه بر میدان دوقطبی یک جملهٔ دیگر نیز لازم است.]
 ۱۲-۴ نشان دهید که در پاسخ به دست آمده در بخش ۴-۸، برای دی‌الکتریک کروی در میدانی که در آغاز یکنواخت است، اگر K به سمت بی‌نهایت میل کند، نتیجه با آنچه در بخش ۳-۵ برای کرهٔ رسانا به دست آمد، یکی است.

۱۳-۴ بُرهٔ تختی از یک ماده با ثابت دی‌الکتریک K_1 از هر دو طرف توسط ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک K_2 محصور شده است. میدان الکتریکی E_2 در محیط ۲، به صورت یکنواخت و عمود بر مرزها داده شده است. (الف) میدان E_1 ، (ب) قطبش P_1 و (ج) بار قطبشی را در محیط ۱ پیدا کنید.
 ۱۴-۴ نشان دهید که اگر در مسئلهٔ (۴-۱۳) K_1 به سمت بی‌نهایت میل کند، نتیجه از لحاظ فیزیکی با معادلهٔ (۴-۴۴) سازگار است.

۱۵-۴ دو صفحهٔ رسانای موازی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. یک بُره از جسم دی‌الکتریکی را که ثابت دی‌الکتریک آن K و ضخامت یکنواخت آن t است ($t < d$)، میان این دو صفحه قرار می‌دهیم. بردارهای میدان E و D در دی‌الکتریک و همچنین در خلأ میان دی‌الکتریک و یکی از صفحات را پیدا کنید. از اثرهای لبه که از متناهی بودن صفحات ناشی می‌شود، چشمپوشی کنید.

۱۶-۴ دو صفحهٔ رسانای موازی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند، در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. یک بُره از جسم دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک K و ضخامت d را میان دو صفحه وارد می‌کنیم، اما این بُره حجم میان صفحات را کاملاً پر نمی‌کند. مطلوب است محاسبهٔ میدان الکتریکی: (الف) در دی‌الکتریک، (ب) در ناحیهٔ خلأ میان صفحات. چگالی بار σ را در آن قسمتی از صفحه پیدا کنید که (ج) با دی‌الکتریک، و (د) با خلأ در تماس است. (ه) σ_P را بر روی سطح بُرهٔ دی‌الکتریک پیدا کنید.

۱۷-۴ یک کرهٔ رسانا به شعاع R در یک محیط دی‌الکتریک مایع با گذردهی ϵ_1 تا نیمه غوطه‌ور است. در ناحیهٔ بالای مایع، گازی است با گذردهی ϵ_2 . بار کل بر روی کره Q است. (الف) یک میدان الکتریکی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله به دست آورید که در تمام شرایط مرزی صدق کند. چگالی بارهای آزاد، مقید و کل را برای تمام نقاط واقع بر سطح کره پیدا کنید. (ب) نشان دهید که این میدان الکتریکی، میدان واقعی است.

۱۸-۴ میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در محیطی با ثابت دی‌الکتریک K برقرار شده است. ثابت کنید که میدان در حفره‌ای کروی در درون این محیط عبارت است از

$$E = \frac{3KE_0}{2K + 1}$$

* ۱۹-۴ یک کرهٔ دی‌الکتریک به شعاع R قطبش دائمی برابر P دارد که از حیث مقدار و جهت یکنواخت است. این کرهٔ قطبیده، یک میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان را (الف) در داخل و (ب) در خارج کره پیدا کنید. در داخل کره، میدان الکتریکی را که در جهت مخالف قطبش است، میدان واقطبش می‌گویند [راهنمایی: چون $\nabla \cdot P$ در تمام نقاط صفر است، پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. فرض نکنید که دی‌الکتریک با یک ثابت دی‌الکتریک مشخص می‌شود].

۲۰-۴ در متن کتاب نشان داده شد که قطبش به صورت $P = \rho_0^+(\delta^+ - \delta^-)$ است. این رابطه را در مورد کرهٔ مسئلهٔ ۱۹-۴ که به‌طور یکنواخت قطبیده شده است، به‌کار ببرید و میدان خارجی دوقطبی را مستقیماً پیدا کنید.

نظریه میکروسکوپی دی الکتریکها

در فصل پیش به جنبه‌های ماکروسکوپی قطبش دی الکتریکها پرداختیم و نشان دادیم که چگونه در موارد متعدد می‌توان قطبش را با معرفی ثابت دی الکتریک به حساب آورد. از این راه توانستیم میدان الکتریکی را مستقیماً با بررسی توزیع بار خارجی محاسبه کنیم. اگر چه در فصل ۴ چند بار به مولکول دی الکتریک اشاره شد، ولی مطالعه رفتار میکروسکوپی ماده به تفصیل صورت نگرفت و تصویری کلی عرضه شد که از دید ماکروسکوپی بود. اکنون می‌خواهیم ماهیت مولکولی دی الکتریک را بررسی کنیم و بینیم میدان الکتریکی‌ای که مولکول را قطبیده می‌کند، چگونه به میدان الکتریکی ماکروسکوپی مربوط می‌شود. همچنین، بر اساس یک مدل ساده مولکولی می‌توان رفتار خطی مشخصه رده بزرگی از مواد دی الکتریک را درک کرد.

۱-۵ میدان مولکولی در دی الکتریکها

میدان الکتریکی‌ای که یک مولکول دی الکتریک را قطبیده می‌کند، به میدان مولکولی E_m موسوم است.

میدان مولکولی عبارت است از میدان الکتریکی در محل هر یک از مولکولها در دی الکتریک و این میدان از همه چشمه‌های خارجی و همه مولکولهای قطبیده در دی الکتریک، به استثنای مولکولی که در نقطه مورد مطالعه قرار دارد، ناشی می‌شود.

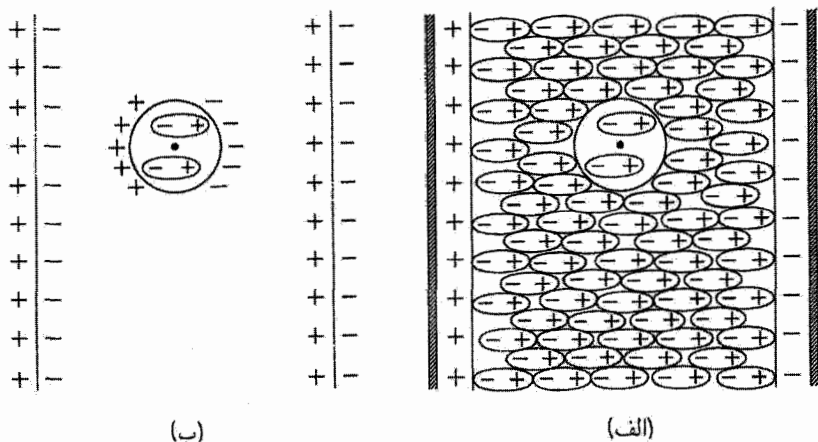
واضح است که لزومی ندارد E_m همان میدان الکتریکی ماکروسکوپی باشد، زیرا همان‌طور که در بخش ۳-۴ بحث شد، میدان الکتریکی ماکروسکوپی به نیروی وارد بر بار آزمونی مربوط می‌شود که در مقایسه با ابعاد مولکولی بسیار بزرگ است.

میدان مولکولی را می‌توان به روش زیر محاسبه کرد. ابتدا قطعه کوچکی از ماده دی الکتریک را می‌بریم و از آن خارج می‌کنیم تا در اطراف نقطه‌ای که می‌خواهیم میدان مولکولی را در آنجا محاسبه کنیم، یک حفره کروی ایجاد شود. آنچه را که از جسم دی الکتریک به جا می‌ماند، به منزله محیطی پیوسته در نظر خواهیم گرفت؛ یعنی آن را از دید ماکروسکوپی بررسی می‌کنیم. حال دی الکتریک را مولکول به مولکول دوباره در حفره سرچایش قرار می‌دهیم، بجز مولکول مرکز حفره که در آنجا می‌خواهیم میدان مولکولی را محاسبه کنیم. مولکولهایی را که بدین ترتیب سر جایشان می‌گذاریم نه به منزله یک محیط پیوسته، بلکه به صورت دو قطبیهای مجزا در نظر خواهیم گرفت. روشی که مختصراً به آن اشاره شد، فقط در صورتی قابل توجیه است که نتیجه محاسبات آن به اندازه حفره بستگی نداشته باشد؛ خواهیم دید که در واقع تحت شرایط خاصی این امر صحت دارد.

فرض کنید قطعه نازکی از یک دی الکتریک را با قرار دادن آن در میدان الکتریکی یکنواخت موجود میان دو صفحه موازی با بارهای مخالف، نظیر شکل ۱-۵ (الف) قطبیده کرده‌ایم. فرض می‌شود قطبش در مقیاس ماکروسکوپی یکنواخت باشد (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$) و \mathbf{P} موازی میدان مولدش باشد. می‌توان آن قسمت از دی الکتریک را که در خارج حفره قرار دارد، با دستگاهی از بارهای قطبشی نظیر شکل ۱-۵ (ب) جایگزین کرد. بنابراین، میدان الکتریکی در مرکز حفره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}' \quad (1-5)$$

در اینجا \mathbf{E}_x میدان الکتریکی اصلی مربوط به صفحات موازی باردار، \mathbf{E}_d میدان واقطنبده مربوط به بار قطبشی روی سطوح خارجی دی الکتریک، \mathbf{E}_s مربوط به بار قطبشی روی سطح S حفره و \mathbf{E}' مربوط به تمامی دو قطبیهای داخل حفره است. گرچه با شکل صریح \mathbf{E}_x کاری نداریم، ولی واضح است که اگر ابعاد صفحات در مقایسه با فاصله میان آنها بزرگ باشد، $E_x = (\sigma / \epsilon_0)$



شکل ۱-۵ جایگزین کردن دی الکتریک خارج از "حفره" با دستگاهی از بارهای قطبشی.

خواهد بود که در آن σ چگالی سطحی بار است. میدان واقطنبده نیز با دو صفحه موازی بار به وجود می آید که چگالی سطحی آنها برابر است با σ_p . چون $\sigma_p = P_n = \pm P$ پس

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (2-5)$$

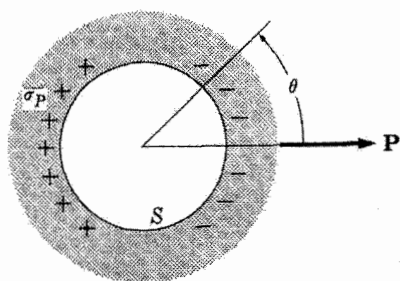
میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون دی الکتریک را بدون شاخص پایین، یعنی به صورت \mathbf{E} می نویسیم. از آنجا که مؤلفه قائم جابه جایی الکتریکی \mathbf{D} در فصل مشترک خلأ و دی الکتریک پیوسته است، و چون در خلأ و درست نزدیک به قطعه دی الکتریک $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_x$ است، پس

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d \quad (3-5)$$

از ترکیب معادلات (۱-۵)، (۲-۵) و (۳-۵) نتیجه می شود که

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}' \quad (4-5)$$

معادله فوق میدان مولکولی را به میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون ماده دی الکتریک ربط می دهد. این نتیجه کاملاً عمومیت دارد و به وضع هندسی حفره کروی و صفحه الکتروود شکل ۱-۵ محدود نمی شود. با وجود این، روش ساده بالا آموزنده است و برای موضوعی که در بخش ۴-۵ درباره آن بحث خواهد شد، مفید است.



شکل ۲-۵ محاسبه سهم سطح "حفره" در ایجاد E_m .

میدان E_s از چگالی بار قطبشی $\sigma_P = P_n$ واقع بر سطح کروی S نتیجه می‌شود. استفاده از مختصات کروی و انتخاب جهت قطبی در جهت P ، نظیر شکل ۲-۵، نتیجه می‌شود

$$dE_s = \frac{(-P \cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} da \quad (۵-۵)$$

که در آن r برداری است از سطح کره به مرکز آن. از روی تقارن به وضوح نتیجه می‌شود که در انتگرال معادله (۵-۵) بر روی تمامی سطح، فقط آن مؤلفه از dE_s که در امتداد P قرار دارد، سهم خواهد بود. چون $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ پس

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (۶-۵)$$

بالاخره به جمله آخر معادله (۴-۵) می‌رسیم که به دوقطبیهای الکتریکی داخل سطح S مربوط می‌شود. چند مورد مهم وجود دارد که در آنها این جمله صفر می‌شود. اگر تعداد دوقطبیها در حفره زیاد و سمتگیری آنها موازی با یکدیگر، ولی توزیع آنها در فضا کاتوره‌ای باشد و هیچ همبستگی‌ای میان مکان دوقطبیها وجود نداشته باشد، در آن صورت $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. این وضعی است که در گازها و مایعات ممکن است حکمفرما باشد. همین‌طور اگر دوقطبیهای داخل حفره در مکانهای منظم اتمی یک بلور مکعبی قرار گرفته باشند، باز هم $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. در این ارتباط، خواننده می‌تواند به مسئله ۲-۵ مراجعه کند.

در حالت کلی، \mathbf{E}' صفر نیست و اگر ماده شامل چندین نوع مولکول باشد، \mathbf{E}' ممکن است در مکانهای مولکولی مختلف متفاوت باشد. به عنوان مثال، وجود این جمله سبب می‌شود که

۱. به فصل دوم کتاب زیر مراجعه کنید:

کلسیم کربنات رفتار الکتریکی ناهمسانگرد داشته باشد. چون منظور ما در اینجا بسط نظریهٔ مواد ناهمسانگرد نیست، مطالعات بعدی خود را به گروه نسبتاً بزرگی از مواد که در آنها $\mathbf{E}' = 0$ است محدود می‌کنیم. بنابراین، معادلهٔ (۴-۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \quad (۷-۵)$$

لازم به تذکر است که اگر حفرهٔ کروی را فقط با برداشتن یک مولکول ایجاد می‌کردیم، این نتیجه مستقیماً با روش بالا به دست می‌آمد. ولی در آن صورت حفره آنقدر کوچک بود که جایگزین کردن بقیهٔ دی‌الکتریک با دستگاهی از بارهای قطبشی قابل توجیه نبود. گشتاور دوقطبی یک مولکول با میدان الکتریکی‌ای که بر روی آن اثر می‌کند (میدان قطبنده) متناسب است.

نسبت گشتاور دوقطبی یک مولکول به میدان قطبنده را قطبش‌پذیری مولکولی، α ، می‌نامند. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \quad (۸-۵)$$

اگر N مولکول در واحد حجم موجود باشد، در آن صورت $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_m$ است. از ترکیب این نتیجه با معادلات (۷-۵) و (۸-۵) معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{P} = N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) \quad (۹-۵)$$

این معادله را می‌توان برحسب ثابت دی‌الکتریک K بازنویسی کرد، زیرا

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (K - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

بدین ترتیب معادلهٔ (۹-۵) به صورت زیر در می‌آید

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0 (K - 1)}{N(K + 2)} \quad (۱۰-۵)$$

که به معادلهٔ کلازیوس-موساتی^۲ معروف است.

واضح است که معادلهٔ (۱۰-۵) یک خاصیت مولکولی، یعنی قطبش‌پذیری مولکولی را برحسب مقادیری بیان می‌کند که می‌توان آنها را بر مبنای ماکروسکوپی تعیین کرد.

۱. همان‌طور که در بخش ۳-۵ خواهیم دید، می‌توان با استفاده از مفهوم قطبش‌پذیری، مولکولهای قطبی را نیز توصیف کرد.

۵-۲ دوقطبيهای القايی. یک مدل ساده

مولکولهای دی‌الکتريکها را در دو گروه قطبی و غیرقطبی رده‌بندی می‌کنند. مولکول قطبی آن است که حتی در غياب میدان قطبنده E_{im} ، یک گشتاور دوقطبی دائمی داشته باشد. در بخش بعد پاسخ دی‌الکتريک قطبی در برابر میدان الکتريکی خارجی مطالعه خواهد شد. ولی در این بخش ما با یک مسئله تا حدودی راحت‌تر، شامل مولکولهای غیرقطبی، که در آنها «گرانگ‌های» توزیع بارهای مثبت و منفی به‌طور عادی بر یکدیگر منطبق‌اند، سروکار داریم. مولکولهای متقارن H_2 ، O_2 و N_2 ، یا مولکولهای تک‌اتمی He ، Ne و Ar ، جزو این گروه‌اند.

اعمال میدان الکتريکی بر دی‌الکتريک سبب جابه‌جایی نسبی بارهای مثبت و منفی در مولکولهای غیرقطبی می‌شود و دوقطبيهای مولکولی‌ای که بدین نحو پدید می‌آیند، به دوقطبيهای القايی موسوم‌اند. ساده‌ترین نوع مولکولی که می‌توان تصور کرد، مولکولی است که از یک اتم خنثی تشکیل شده باشد. می‌توان یک مدل کلاسیک ساده برای اتم ساخت و از این مدل عبارتی برای گشتاور دوقطبی القايی و بنابراین، عبارتی برای قطبش‌پذیری آن به‌دست آورد. اگر چه این مدل مخصوص بررسی مولکولهای تک‌اتمی است، ولی می‌توان آن را برای مولکولهای دواتمی متقارن نیز، با به‌کار بردن آن به‌طور جداگانه برای هر یک از اتمهای مولکول و به‌دست آوردن قطبش‌پذیریهای اتمی، به‌کار برد. در این صورت قطبش‌پذیری مولکولی عبارت است از حاصل جمع آنها، یا دو برابر قطبش‌پذیری اتمی.

هر اتم متشکل است از یک هسته فوق‌العاده کوچک با بار مثبت که الکترونهای مداری که دائم در حال حرکت‌اند، آن را در میان گرفته‌اند. چون الکترونها مدار خود را در مدتی فوق‌العاده کوتاه (در حدود 10^{-15} ثانیه) طی می‌کنند، واضح است که در اتم «ایستای» معادل، بار هر الکترون در سراسر مدار خودش «توزیع» شده است. مکانیک کوانتومی به ما می‌آموزد که هر چند این تصویر اساساً صحیح است، ولی تا حدودی ساده و خام است؛ الکترونها در واقع در مدارهایی جایگزیده نشده‌اند، بلکه با احتمالی متناهی در هر قسمت از اتم می‌توانند واقع باشند. بنابراین، پاسخ اتم به یک میدان الکتروستاتیکی یا به میدانهای الکتريکی با تغییرات کند را بدین‌گونه می‌توان بررسی کرد که تصور کنیم هر الکترون در سراسر مدار خود در اتم توزیع شده است، و هر مدار قسمت قابل توجهی از حجم اتم را در بر گرفته است. خلاصه کلام، مدل کلاسیک ساده‌ای از اتم که با این تصویر سازگار باشد، عبارت است از یک بار نقطه‌ای مثبت (هسته) که در ابری از بارهای منفی با تقارن کروی احاطه شده است و در این ابر چگالی بار تا شعاع اتمی R_0 اساساً یکنواخت و برای شعاعهای بزرگتر صفر است.

اکنون در وضعی هستیم که بتوانیم قطبش‌پذیری این «اتم» را محاسبه کنیم. فرض کنید بار

الکتریکی هسته Ze است، که در آن e قدرمطلق بار الکترون و Z عدد اتمی است. چون اتم از لحاظ الکتریکی خنثی است، بار کل در ابر الکترونی $-Ze$ خواهد بود. اگر اتم در میدان قطبیده \mathbf{E}_m قرار داده شود، هسته نسبت به مرکز ابر جابه‌جا می‌شود که مقدار این جابه‌جایی را x می‌نامیم. این جابه‌جایی در امتداد \mathbf{E}_m خواهد بود. فرض کنید در اثنای این جابه‌جایی ابر بار مثل یک جسم صلب حرکت کند، یعنی در اثر میدان قطبیده، ابر تغییر شکل ندهد. جابه‌جایی x را می‌توان از روی تعادل نیروهای وارد بر هسته محاسبه کرد؛ این نیروها عبارت‌اند از نیروی ZeE_m که در جهت میدان عمل می‌کند، و نیروی الکتروستاتیکی میان هسته و ابر بار که می‌کوشد پیکربندی اولیه را حفظ کند. بنا بر قانون گاوس، بار منفی‌ای که هسته را جذب می‌کند، آن بخش از ابر است که درون کره به شعاع x قرار دارد، و اگر چگالی الکترونی در ابر یکنواخت باشد، این بار برابر می‌شود با Zex^3/R_0^3 . پس

$$\frac{(Ze)(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = ZeE_m \quad (11-5)$$

یا

$$Zex = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 E_m \quad (12-5)$$

چون گشتاور دوقطبی اتمی که در این فرایند ایجاد می‌شود، عبارت است از $\mathbf{p}_m = Zex$ ، مقایسه این معادله با معادله (۸-۵) نتیجه می‌شود

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \quad (13-5)$$

مدل اتمی بالا را می‌توانیم از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از منابع دیگر بیازماییم. مثلاً، از ترکیب معادله (۱۳-۵) با معادله کلایوس-موساتی (معادله ۱۰-۵) می‌توان α را حذف کرد. معادله حاصل شعاع اتمی R_0 را برحسب کمیت‌های معلوم تجربی پیشگویی می‌کند. R_0 که به این طریق به دست می‌آید با نتایج حاصل از آزمایش‌های دیگر، در مواردی که مدل بالا برای آنها مخصوصاً مناسب است، به نحوی معقول توافق دارد. مرتبه بزرگی R_0 در حدود یک آنگستروم، یعنی 10^{-10} m است (به مسئله ۱-۵ رجوع کنید).

قطبش‌پذیری که در معادله (۱۳-۵) به دست آمد، ثابت و مستقل از میدان قطبیده است. بنابراین، معادله (۱۳-۵) به مقدار ثابتی برای K منجر می‌شود و دی‌الکتریکی که بدین‌گونه توصیف شود، خطی است.

۳-۵ مولکولهای قطبی: فرمول لانژون-دبی^۱

همان طور که در بخش گذشته اشاره شد، هر مولکول قطبی دارای یک گشتاور دو قطبی دائمی است. هر مولکول قطبی از حداقل دو نوع اتم مختلف تشکیل شده است. در اثنای تشکیل مولکول، ممکن است برخی از الکترونهاى یک اتم به طور کامل یا به طور جزئی به اتم دیگر منتقل شوند و پس از این انتقال آرایش الکترونی حاصل به نحوی باشد که مراکز بارهای مثبت و منفی در مولکول برهم منطبق نباشند. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، یک قطعه میکروسکوپی از دی الکتریک قطبی قطبیده نخواهد بود، زیرا همان طور که در شکل ۳-۵ دیده می شود، سمتگیری تک تک دو قطبها کاتوره ای است. این قطبش به صورت زیر تعریف می شود

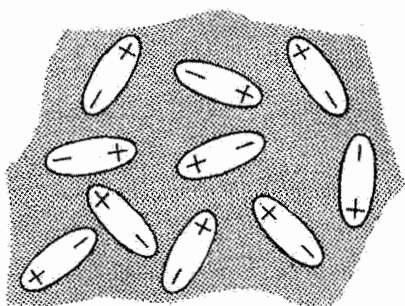
$$P = \frac{1}{\Delta v} \sum p_m \quad (14-5)$$

که در آن جمع بندی روی تمام مولکولهای موجود در عنصر Δv صورت می گیرد. هنگامی که p_m ها دارای سمتگیری کاتوره ای باشند، حاصل جمع صفر می شود.

چنانچه دی الکتریک قطبی تحت تأثیر میدان الکتریکی قرار گیرد، بر هر یک از دو قطبهای آن گشتاور نیرویی وارد می شود و گرایش این گشتاورها چنان است که می خواهند دو قطبها را با میدان همسو کنند. اگر میدان به اندازه کافی قوی باشد، ممکن است دو قطبها کاملاً همسو شوند که در آن صورت قطبش به مقدار اشباع خود خواهد رسید:

$$P_s = N p_m \quad (15-5)$$

که در آن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. این اثر سمتگیری علاوه بر اثرهای دو قطبی القایی است که معمولاً هم موجودند. فعلاً ما از سهم مربوط به دو قطبی القایی صرف نظر می کنیم، ولی بعداً اثر آن را نیز خواهیم افزود.



شکل ۳-۵ توزیع کاتوره ای دو قطبهای دائمی.

در شدت میدانهایی که به طور معمول به آنها برمی خوریم، قطبش هر دی الکتریک قطبی معمولاً از مقدار اشباع آن بسیار کمتر است، و اگر دمای جسم افزایش داده شود، قطبش آن حتی کمتر هم می شود. فقدان همسویی کامل دوقطبیها ناشی از انرژی گرمایی مولکولهاست که در جهت ایجاد سمتگیریهای کاتوره ای برای دوقطبیها عمل می کند. میانگین گشتاور دوقطبی مؤثر مولکولی را می توان به کمک یکی از اصول مکانیک آماری محاسبه کرد. بر طبق این اصل، در دمای T احتمال اینکه مولکولی با انرژی مولکولی بخصوص E یافت شود، متناسب است با ضریب بولتزمن:

$$e^{-E/kT} \quad (۱۶-۵)$$

که در آن k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. در اینجا از ارائه بحث کاملی درباره مبنای این اصل خودداری می کنیم؛ چنانچه خواننده با توزیع ماکسولی سرعت در گاز کامل آشنایی داشته باشد، قبلاً با این اصل برخورد کرده است. طبق قانون توزیع ماکسول، احتمال اینکه سرعت مولکول v باشد، متناسب است با $e^{-mv^2/2kT}$. ولی در گاز کامل ماکسول، مولکولها فقط انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ دارند. در حالت کلی، E در معادله (۱۶-۵) باید هم انرژی جنبشی E_k و هم انرژی پتانسیل U را شامل شود و ضریب بالا به صورت زیر در آید

$$e^{-E_k/kT} e^{-U/kT} \quad (۱۷-۵)$$

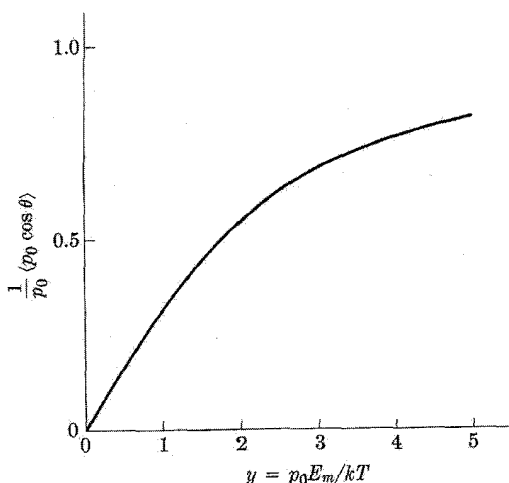
انرژی پتانسیل یک دوقطبی دائمی p_0 در میدان الکتریکی \mathbf{E}_m عبارت است از

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_m = -p_0 E_m \cos \theta \quad (۱۸-۵)$$

که در آن θ زاویه میان \mathbf{p}_0 و میدان الکتریکی است. چون انرژی جنبشی مولکولی به میدان الکتریکی بستگی ندارد، می توان توزیع سرعت را در محاسبات زیر کاملاً نادیده گرفت. گشتاور دوقطبی مؤثر یک دوقطبی مولکولی عبارت است از مؤلفه آن در امتداد میدان، یعنی $p_0 \cos \theta$. با استفاده از رابطه بولتزمن، مقدار میانگین این کمیت به صورت زیر در خواهد آمد

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = \frac{\int p_0 \cos \theta e^{+p_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega}{\int e^{+p_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega} \quad (۱۹-۵)$$

که در آن $d\Omega$ جزء زاویه فضایی است که می توان به جای آن $2\pi \sin \theta d\theta$ را قرار داد و حدود θ بین صفر و π است. چون p_0 ، E_m و kT در انتگرال گیری مقادیر ثابتی هستند، به آسانی می توان



شکل ۴-۵ ترسیم تابع لانژون. مقدار مجانبی به ازای $y \rightarrow \infty$ برابر یک است.

انتگرالها را محاسبه کرد. برای سهولت نماد زیر را تعریف می‌کنیم

$$y = \frac{p_0 E_m}{kT} \quad (۲۰-۵)$$

پس معادله (۱۹-۵) نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = p_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (۲۱-۵)$$

که به فرمول لانژون معروف است. این تابع در شکل ۴-۵ رسم شده است.

از روی شکل پیدا است که معادله (۲۱-۵) در واقع، در میدانهای خیلی قوی از خود اثر اشباع نشان می‌دهد. ولی به ازای مقادیر کوچک y منحنی خطی است و همین ناحیه خطی است که در دماهای معمولی حائز اهمیت است. گشتاور دوقطبی مولکولی p_0 برای اکثر مواد قطبی طوری است که به ازای همه مقادیر شدت میدان، حتی به ازای شدتهایی که نزدیک به استقامت دی الکتریک ماده‌اند، تا زمانی که دما بالاتر از 250 K باشد، داریم $y \ll 1$. از این رو، هر ماده دی الکتریکی که شامل مولکولهای قطبی باشد، عموماً خطی است.

چون فقط ناحیه خطی معادله (۲۱-۵) مهم است، بهتر است که $\coth y$ را به صورت یک سری نمایی بسط دهیم و فقط جملات اول آن را نگه داریم (مسئله ۴-۵). جمله اول سری، جمله

آخر را در معادله (۲۱-۵) حذف می‌کند. در نتیجه

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle \approx \frac{1}{3} p_0 y = \frac{p_0^2 E_m}{3kT} \quad (۲۲-۵ \text{ الف})$$

چون $\langle p_0 \cos \theta \rangle$ میانگین گشتاور دوقطبی مؤثر هر مولکول است، بنابراین قطبش مساوی است با $P = N \langle p_0 \cos \theta \rangle$ و در جهت E_m خواهد بود. بدین ترتیب معادله (۲۲-۵ الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{N} P = \frac{p_0^2}{3kT} E_m \quad (۲۲-۵ \text{ ب})$$

از مقایسه این معادله با معادله (۸-۵) آشکار می‌شود که قطبش‌پذیری α (یعنی گشتاور دوقطبی مولکولی در واحد میدان قطبنده)، برابر است با

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT} \quad (۲۳-۵)$$

این نتیجه را با چشم‌پوشی از گشتاورهای دوقطبی القایی به دست آورده‌ایم و معرف چیزی است که ما آن را قطبش‌پذیری سمت‌گیری می‌نامیم. اثرات دوقطبیهای القایی نظیر آنچه در بخش قبل بررسی شد، منجر به چیزی می‌شوند که می‌توان آن را قطبش‌پذیری تغییر شکل، α_0 ، نامید. پس در حالت کلی، قطبش‌پذیری مولکولی کل برابر است با

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \quad (۲۴-۵)$$

رابطه بالا به معادله لانتزون-دبی موسوم است و در تعبیر ساختارهای مولکولی اهمیت بسیاری دارد.

* ۴-۵ قطبش دائمی: فروالکتریسیته

در بخش ۱-۵ دیدیم که میدان مولکولی E_m سبب قطبیدگی تک‌تک مولکولها می‌شود. رابطه میان E_m و میدان الکتریکی ماکروسکوپی E در معادله (۷-۵) داده شده است. در اکثر موارد قطبش با E متناسب است، لذا وقتی که E به سمت صفر میل کند، E_m هم صفر می‌شود. ولی تحت بعضی شرایط معادله (۷-۵) با یک قطبش دائمی (یا خودبه‌خودی) نیز سازگار است. وقتی E را برابر با صفر قرار دهیم، خواهیم داشت

$$E_m = \frac{1}{3\epsilon_0} P_0 \quad (۲۵-۵)$$

یا، به عبارت دیگر، اگر قطبش P_0 وجود داشته باشد، این قطبش سبب ایجاد میدان الکتریکی در محل مولکول می شود و این میدان به نوبه خود سبب قطبیده شدن مولکول خواهد شد. به طور قطع یک میدان قطبنده وجود دارد، اما چنانچه این میدان باعث به وجود آمدن قطبشی غیر از P_0 شود، در آن صورت پاسخ خودسازگار نخواهد بود. لذا، اگر N تعداد مولکولها در واحد حجم باشد، خواهیم داشت

$$P_0 = N\alpha E_m = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} P_0 \quad (26-5)$$

این رابطه هنگامی صادق خواهد بود که یا

$$P_0 = 0$$

یا

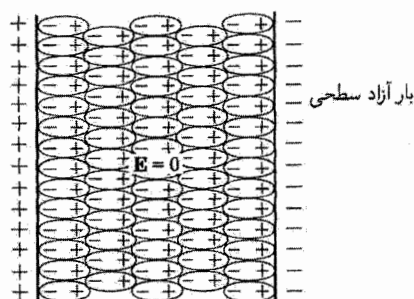
$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1 \quad (27-5)$$

از این رو، معادله (27-5) شرط قطبش دائمی است.

در اکثر مواد، $N\alpha/3\epsilon_0$ کوچکتر از واحد است و در نتیجه رفتار دی الکتریک معمولی حاصل می شود. با وجود این، در معدودی از مواد جامد بلورین شرط (27-5) صادق است. این قبیل مواد را فروالکتریک می نامند، زیرا خواص الکتریکی آنها شبیه به خواص مغناطیسی مواد فرومغناطیس است. باریم تیتانات، $BaTiO_3$ ، بهترین نمونه شناخته شده مواد فروالکتریک است که در دمای کمتر از $120^\circ C$ گشتاور دوقطبی خودبه خودی دارد. این دما به نقطه کوری^۲ ماده معروف است.

حالت قطبیده ماده فروالکتریک نسبتاً پایدار است و حالتی است که می تواند برای مدت زیادی دوام داشته باشد. این امر ممکن است تا حدی شگفت آور باشد، زیرا یک نمونه ماده قطبیده تحت تأثیر میدان واقطنبده خود قرار می گیرد و بسته به شکل هندسی نمونه ماده، این میدان واقطنبده ممکن است نسبتاً بزرگ هم باشد. برای نمونه ماده ای به شکل بُره تخت که در جهت عمود بر وجوهش قطبیده شده است، میدان واقطنبده دارای بزرگترین مقدار است. همان طور که در

۱. به بیان دقیق تر، معادله (27-5) برای موادی به دست آمده است که فقط از یک نوع مولکول تشکیل شده اند و برای آنها جمله E' بخش ۱-۵ صفر می شود. در یک نظریه کمی، که قابل کاربرد در حالت کلی باشد، معادله (27-5) با مجموعهای از دستگاههای معادلات جایگزین می شود. برای درک اساسی منشأ فروالکتریسیته به چنین پیچیدگیهایی نیاز نیست و در نتیجه درباره آنها در اینجا بحث نخواهد شد.



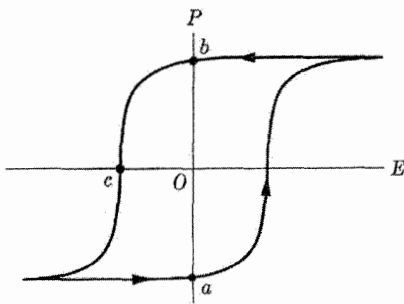
شکل ۵-۵ یک قطعه ماده فروالکتريک قطبيده.

بخش ۱-۵ دیده شد، اگر ابعاد وجوه بره نسبت به ضخامت آن خیلی بزرگ باشند، خواهیم داشت

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (28-5)$$

در واقع، پایداری زیاد یک فروالکتريک قطبيده به این سبب است که بر روی آن هیچ میدان واقطنبندهای اثر نمی‌کند، حتی در موردی که جسم از لحاظ هندسی به شکل بره باشد. برای قطبی کردن ماده، آن را میان دو صفحه رسانای موازی قرار می‌دهیم و سپس به این صفحات اختلاف پتانسیل نسبتاً زیادی اعمال می‌کنیم. در این فرایندها بار آزاد صفحه‌ها تا حد زیادی با بار قطبشی سطحی خنثی خواهد شد، درست شبیه به آنچه در اثنای قطبی کردن یک دی‌الکتريک معمولی رخ می‌دهد. حال اگر صفحات موازی را با اتصال کوتاه هم‌پتانسیل کنیم، باز هم حالت قطبيده فروالکتريک از لحاظ انرژی مناسب است، به طوری که بار آزاد در جای خود باقی خواهد ماند و باز هم سبب خنثی کردن بار قطبشی خواهد شد. وضعیت تقریباً به آنچه در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، که در آن بار آزاد توسط بار قطبشی سطحی در جای خود نگه داشته شده است، شبیه خواهد بود. میدان ماکروسکوپی در داخل فروالکتريک صفر است. به علاوه، میدان الکتريکی خارجی نیز صفر است و به سختی می‌توان نمونه ماده فروالکتريک قطبيده را از یک ماده دی‌الکتريک ناقطبيده متعارف تمیز داد.

حال اگر یک اختلاف پتانسیل زیاد و با علامت مخالف میان صفحاتی که فروالکتريک قطبيده را احاطه کرده‌اند برقرار کنیم، نمونه ماده جهت قطبش خود را تغییر می‌دهد و بار آزاد با علامت مخالف از مدار خارجی به طرف صفحات به مقدار کافی جاری می‌شود، یعنی به مقداری که نه تنها بار آزاد موجود در آنجا، بلکه بار قطبشی جدید را نیز خنثی کند. از این رو، بره فروالکتريکی که میان دو صفحه موازی واقع است، می‌تواند به منزله جزء اصلی یک دستگاه حافظه به‌کار رود؛ این بره فروالکتريک قادر است بارها را روی دو صفحه که ماده فروالکتريک را احاطه کرده‌اند، به صورت \pm یا \mp ذخیره کند، و تا وقتی که میدان الکتريکی خارجی وجود نداشته باشد، قطبش



شکل ۵-۶ منحنی پسماند برای یک نمونه فروالکتریک.

آن یا برجا خواهد ماند. "عدد" \pm یا \mp را با اعمال یک اختلاف پتانسیل میان دو سر نمونه می توان خواند. اگر میدان اعمال شده در جهت قطبش اولیه باشد، باری از مدار خارجی عبور نخواهد کرد؛ اگر میدان در خلاف جهت قطبش اولیه باشد، در ضمن آنکه قطبش فروالکتریک جهت خود را تغییر می دهد، مقداری بار الکتریکی از مدار خارجی عبور خواهد کرد.

فروالکتریک قطبیده در برابر یک میدان الکتریکی معکوس پایدار است، به شرطی که این میدان خیلی شدید نباشد. شکل ۵-۶ منحنی کامل قطبش را برحسب میدان الکتریکی نشان می دهد. واضح است که برای میدانهای ضعیف به ازای هر مقدار E دو مقدار برای P وجود دارد. منحنی شکل ۵-۶ را حلقه پسماند می نامند. پسماند یعنی "عقب ماندن"، و واضح است که بردار قطبش نسبت به بردار میدان الکتریکی عقب می ماند. نقاط a و b وضعیتهای پایدار به ازای $E = 0$ هستند؛ و به ترتیب قطبشهای \pm و \mp را نشان می دهند. نقطه c معرف میدان الکتریکی ای است که به ازای مقادیر بیشتر از آن، جهت قطبش عوض می شود.

۵-۵ خلاصه مطالب

قطبش ماکروسکوپی P ی هر ماده دی الکتریک همسانگرد، بستگی دارد به گشتاور دو قطبی مولکولی p_m (یا مؤلفه مؤثر آن) که در پاسخ به میدان الکتریکی موضعی در مکان مولکول، یعنی میدان مولکولی E_m به وجود می آید:

$$P = Np_m$$

معمولاً p_m با تقریب خوبی با E_m متناسب است

$$p_m = \alpha E_m$$

که در آن α قطبش پذیری مولکولی است. میدان مولکولی به میدان اعمال شده E و همچنین به

خود قطبش (یعنی، میدانهای دوقطبی تمامی مولکولهای دیگر) بستگی دارد. در ساده‌ترین موارد

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

در حالت عادی \mathbf{E}_m را می‌توان از این معادلات حذف کرد و نوشت

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

که در آن χ پذیرفتاری ثابت و برابر است با

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

اما هنگامی که قطبش‌پذیری مولکولها زیاد باشد ($N\alpha > 3\epsilon_0$)، پاسخ دیگری با $\mathbf{E} = 0$ ، $\mathbf{P} \neq 0$ امکان‌پذیر است (یعنی، ممکن است موقعی که میدان اعمال شده صفر است، ماده مثل جسم فروالکتریک، به‌طور خودبه‌خود قطبیده شود).

• در میدان الکتریکی ناشی از تغییر شکل توزیع بار الکترونی، تمام مولکولها گشتاور دوقطبی القایی پیدا می‌کنند. از تحلیل یک مدل خطی ساده، قطبش‌پذیری اتمی ثابتی نتیجه می‌شود که با حجم اتم متناسب است

$$\alpha_0 = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

• مولکولهای قطبی، که گشتاور دوقطبی دائمی p_0 دارند، علاوه بر این قطبش‌پذیری سمتگیری نیز از خود نشان می‌دهند؛ این قطبش‌پذیری با تابع لانژون که در مکانیک آماری به‌دست می‌آید، توصیف می‌شود. در دمای بالا سهم مربوط به این قطبش‌پذیری نیز خطی است و داریم

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT}$$

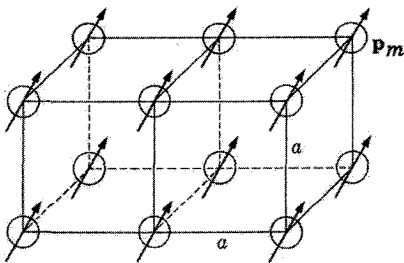
- معادله لانژون-دبی قطبش‌پذیریهای سمتگیری و تغییر شکل را با هم ترکیب می‌کند.
- معدودی از مواد، مثل باریم تیتانات، از خود خاصیت فروالکتریکی بروز می‌دهند.

مسائل

۱-۵ الف) با به‌کار بردن معادله کلایزیوس-موساتی، قطبش‌پذیری اتمها را در مولکولهای هوا (یعنی N_2 و O_2) محاسبه کنید. [توجه کنید که از معادله (۵-۱۰) فقط میانگین وزنی قطبش‌پذیریهای

نیترژن و اکسیژن به دست می آید]. (ب) از ترکیب این نتیجه و نظریه بخش ۲-۵ شعاع متوسط آنها را در یک مولکول هوا محاسبه کنید.

۲-۵ شکل ۷-۵ شبکه مکعبی ساده ای از مولکولها را نشان می دهد که تمام مولکولهای آن گشتاور دو قطبی p_m یکسانی (از حیث جهت و مقدار) دارند. مولکول معینی را در نظر می گیریم و آن را z می نامیم. واضح است که نزدیک ترین همسایه های z شش مولکول اند که در فاصله a واقع اند، نزدیک ترین همسایه های بعدی آن دوازده مولکول در فاصله $\sqrt{2}a$ و به همین ترتیب. میدان الکتریکی ناشی از شش p_m مولکولهای نزدیک ترین همسایه ها را به ازای جهتی دلخواه برای p_m در محل z به دست آورید. (خطوطی که z را به نزدیک ترین همسایه هایش متصل می کنند، محورهای x ، y و z اختیار کنید. برای سهولت p_m را در صفحه xz بگیرید به طوری که با محور x زاویه θ بسازد).



شکل ۷-۵ قسمتی از آرایه مکعبی ساده مولکولها که گشتاور دو قطبی هر یک p_m است.

۳-۵ (الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۱-۵ برای قطبش پذیری اتم نیترژن، جابه جایی هسته نیترژن را نسبت به ابر الکترونی آن در میدانی به شدت $E_m = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ محاسبه کنید. (ب) این جابه جایی را با شعاع اتم که در مسئله ۱-۵ به دست آمد، مقایسه کنید.

۴-۵ (الف) با استفاده از بسط سری معروف e^y ، عبارت $\coth y$ را بسط دهید و معادله (۲۲-۵) را از معادله (۲۱-۵) به دست آورید. (ب) یک مرحله بیشتر جلو بروید و جمله دیگری از سری معادله (۲۲-۵) را پیدا کنید.

۵-۵ آب مولکولی قطبی است که برای آن معادله کلایوس-موساتی به درستی قابل کاربرد نیست. با وجود این، فرض کنید که این معادله در مورد آب صادق است و p_0 را برای مولکول آب محاسبه کنید.

انرژی الکتروستاتیکی

بسیاری از مسائل مکانیک با توجه به نکات مربوط به انرژی خیلی ساده می‌شوند. بنابراین، وقتی رفتار مکانیکی یک دستگاه الکتریکی را مطالعه می‌کنیم، به‌کار بردن روشهای انرژی می‌تواند مفید باشد. به‌طور کلی انرژی هر دستگاه بار الکتریکی را، درست نظیر هر دستگاه مکانیکی دیگر، می‌توان به سهمهای مربوط به جنبشی و پتانسیل تقسیم کرد. اما در شرایط ایستا، همه انرژی دستگاه بار به‌صورت انرژی پتانسیل است و ما در این فصل مخصوصاً با آن انرژی پتانسیلی سروکار داریم که از برهم‌کنش الکتریکی بارها ناشی می‌شود، یعنی انرژی موسوم به انرژی الکتروستاتیکی.

در بخش ۲-۴، نشان دادیم که انرژی الکتروستاتیکی یک بار نقطه‌ای، U ، رابطه نزدیکی با پتانسیل الکتروستاتیکی φ در مکان آن بار نقطه‌ای دارد. در واقع، هرگاه q مقدار بار نقطه‌ای بخصوصی باشد، کار انجام‌شده توسط نیروی وارد بر بار هنگامی که بار از مکان A به B می‌رود، برابر است با

$$\begin{aligned} \text{کار} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -q \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \end{aligned} \quad (۱-۶)$$

در اینجا فرض شده است که در هر نقطه در طول مسیر نیروی \mathbf{F} تنها نیروی الکتریکی $q\mathbf{E}$ باشد. تحت این شرایط ذره باردار شتاب می‌گیرد. برای اینکه شتاب نگیرد، باید نیروی الکتریکی در هر نقطه با نیرویی مساوی و مخالف که توسط عامل دیگری اعمال می‌شود، خنثی شود. بنابراین کار کل صفر است و انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند. کاری که این نیروی دیگر انجام می‌دهد برابر است با

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (۲-۶)$$

این نتیجه با افزایش انرژی الکتروستاتیکی بار در طول مسیر A به B برابر است.

نظیر این استدلال را می‌توان در مورد دستگاه‌های پیچیده‌تر بار به‌کار برد. در واقع، انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه را می‌توان به صورت کار لازم برای گردهم‌آوردن این توزیع بار در برابر برهم‌کنش کولنی بارها محاسبه کرد، بی‌آنکه انرژی به صورتهای دیگری به آن داده شود. انجام این محاسبه و بررسی بعضی از نتایج حاصل از آن، موضوع فصل حاضر است.

۱-۶ انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای

منظور از انرژی الکتروستاتیکی گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آن دستگاه نسبت به حالتی است که در آن همه بارهای نقطه‌ای از یکدیگر بی‌نهایت دورند. این انرژی را می‌توان به آسانی با محاسبه مقدار کار لازم برای گردهم‌آوردن بارها، طبق معادله (۲-۶)، به دست آورد؛ در این محاسبه بارها را یکی پس از دیگری می‌آوریم. اولین بار، یا q_1 ، را می‌توان بدون صرف انرژی در جای خود قرار داد، یعنی $W_1 = 0$ ؛ برای آنکه دومین بار، یا q_2 ، را در جای خود قرار دهیم، مقدار کار لازم برابر است با

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$$

که در آن $r_{21} = |r_2 - r_1|$ است. مقدار کار لازم برای سومین بار، یا q_3 ، برابر است با

$$W_3 = q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right]$$

مقدار کار لازم برای آوردن بارهای چهارم، پنجم و مانند آن را می‌توان با همین روش نوشت. انرژی الکتروستاتیکی کل دستگاه مرکب از m بار، برابر است با مجموع W ها، یعنی

$$U = \sum_{j=1}^m W_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \quad (۳-۶)$$

نتیجهٔ بالا را می‌توان به صورت کوتاه زیر نوشت

$$U = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{j-1} W_{jk}$$

حال اگر W_{jk} ها را به شکل یک ماتریس مرتب کنیم و توجه داشته باشیم که $W_{jk} = W_{kj}$ و $W_{jj} = 0$ ، آنگاه واضح است که می‌توانیم U را به صورت زیر بنویسیم

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m W_{jk} \quad (W_{jj} = 0)$$

در این شکل جمع‌بندی که متقارن‌تر است، ضریب $1/2$ را به این دلیل می‌آوریم که برهم‌کنش میان هر زوج از بارها دو بار حساب نشود. از این رو، شکل دیگر و مناسب‌تر معادلهٔ (۳-۶) چنین است

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m ' \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (۴-۶)$$

که علامت پریم بر روی جمع‌بندی دوم به معنی آن است که دقت کنیم در آن جملهٔ $k = j$ کنار گذاشته می‌شود.

با توجه به اینکه مقدار نهایی پتانسیل φ در محل زامین بار نقطه‌ای ناشی از سایر بارهای دستگاه، به صورت زیر است

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^m ' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (۵-۶)$$

معادلهٔ (۴-۶) را می‌توان به صورت دیگری نوشت. از این رو، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j \varphi_j \quad (۶-۶)$$

هرگاه بارهای نقطه‌ای به جای خلأ در یک محیط دی‌الکتریک خطی نامتناهی گردهم آورده شوند، آنگاه در معادله‌های (۴-۶) و (۵-۶) گذردهی ϵ جانشین ϵ_0 می‌شود، لیکن معادلهٔ (۶-۶) بدون تغییر باقی می‌ماند. در بخش بعد نشان داده خواهد شد که معادلهٔ آخر نسبتاً اعتبار عمومی دارد. این معادله در مورد گروهی از بارهای نقطه‌ای که در محیطهای دی‌الکتریکی مختلفی قرار گرفته‌اند، و حتی در مورد رساناهای با ابعاد متناهی نیز صادق است. تنها محدودیت در اعتبار معادلهٔ (۶-۶) این است که تمام دی‌الکتریکها در دستگاه الکتریکی باید خطی باشند.

۲-۶ انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار

در این بخش انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه با چگالی حجمی ρ و چگالی سطحی σ را محاسبه می‌کنیم. برخی از بارها ممکن است بر روی سطوح رساناها قرار داشته باشند. در واقع، صریحاً فرض می‌کنیم که در دستگاه مورد نظر رساناهایی وجود دارند. به علاوه، فرض می‌کنیم که دی‌الکتریکهای موجود در دستگاه خطی باشند. آوردن این قید از آن روست که کار لازم برای آوردن دستگاه به حالت باردار نهایی آن، به روش رسیدن به این حالت نهایی بستگی نداشته باشد. فرض کنید که برای گردهم آوردن توزیع بار، نمونه‌های بار δq را از جایی که در آن پتانسیل مرجع $\varphi_A = 0$ است، به مکان نهایی آنها بیاوریم. اگر هنگامی که بخشی از توزیع بار را گردهم آورده‌ایم، پتانسیل در نقطه معینی از دستگاه مساوی $\varphi'(x, y, z)$ باشد، آنگاه از معادله (۲-۶)، کار لازم برای قرار دادن δq در این نقطه برابر خواهد بود با

$$\delta W = \varphi'(x, y, z) \delta q \quad (۷-۶)$$

نمونه بار δq ممکن است به یک جزء حجم واقع در نقطه (x, y, z) افزوده شود، به طوری که $\delta q = \delta \rho \Delta v$ یا ممکن است به یک جزء سطح در نقطه مورد بحث افزوده شود، که در آن صورت $\delta q = \delta \sigma \Delta a$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی توزیع بار گردهم آمده، از جمع سهمهایی که هر کدام به صورت معادله (۷-۶) هستند، به دست می‌آید.

چون کار لازم برای گردهم آوردن بارها به ترتیب گردهم آوری آنها بستگی ندارد، می‌توان روش گردهم آوری خاصی را به کار برد که با آن حاصل جمع δW ها به سهولت قابل محاسبه باشد. در این روش همه قسمت‌های دستگاه با هم به مقادیر نهایی بار خود رسانده می‌شوند، یعنی در هر مرحله از فرایند باردار کردن، مقادیر همه چگالیهای بار کسر یکسانی از مقادیر نهایی آنهاست. این کسر را با α نشان می‌دهیم. چنانچه مقادیر نهایی چگالیهای بار با تابعهای $\rho(x, y, z)$ و $\sigma(x, y, z)$ داده شده باشند، آنگاه چگالیهای بار در مرحله‌ای دلخواه عبارت خواهند بود از $\alpha \rho(x, y, z)$ و $\alpha \sigma(x, y, z)$. به علاوه، نمونه‌های این چگالیها عبارتند از $\delta \rho = \rho(x, y, z) d\alpha$ و $d\sigma = \sigma(x, y, z) d\alpha$ و مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی که از جمع‌بندی معادله (۷-۶) به دست می‌آید، برابر است با

$$U = \int_0^1 d\alpha \int_V \rho(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) dv \\ + \int_0^1 d\alpha \int_S \sigma(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) da$$

اما چون مقدار تمام بارها کسر یکسانی، α ، از مقدار بار نهایی آنهاست، پتانسیل برابر است با $\varphi(\alpha; x, y, z) = \alpha\varphi(x, y, z)$ ، که در آن φ مقدار نهایی پتانسیل در نقطه (x, y, z) است. با قرار دادن این رابطه در انتگرال بالا، انتگرال‌گیری روی α به آسانی انجام می‌شود و نتیجه زیر به دست می‌آید

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv + \frac{1}{4} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) da \quad (۸-۶)$$

که نتیجه مطلوب برای انرژی یک توزیع بار است. توجه داشته باشید که اولاً حجم انتگرال‌گیری V باید به حد کافی بزرگ باشد تا همه چگالی بار موجود در مسئله را در بر بگیرد و ثانیاً پتانسیل φ همان پتانسیل ناشی از چگالی بار ρ (و σ) است. معمولاً چگالی بار در خارج از یک ناحیه کراندار صفر است و در این صورت می‌توان V را چنان اختیار کرد که تمامی فضا را شامل شود. اگر تمامی فضا، به استثنای رساناهای معین، با یک محیط دی‌الکتریک منفرد پر شده باشد، پتانسیل با معادله زیر داده می‌شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۹-۶)$$

اگر چندین دی‌الکتریک موجود باشند، شرایط مرزی مناسب باید برآورده شود؛ این کار مثلاً با افزودن پاسخهای مناسب از معادله لاپلاس به معادله (۹-۶) انجام می‌شود. معادلات (۸-۶) و (۹-۶) تعمیمهایی از معادلات (۶-۶) و (۵-۶) برای بارهای نقطه‌ای محسوب می‌شوند. معادلات قبلی را می‌توان به عنوان موردی خاص به دست آورد. برای این کار فرض می‌کنیم که

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^m q'_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k)$$

که در آن علامت پریم در جمع‌بندی دوم نشان می‌دهد که باید هنگام انجام جمع دوگانه، جمله $k = j$ کنار گذاشته شود. وقتی توزیع ρ پیوسته است، صفر شدن مخرج در معادله (۹-۶) سبب واگرا شدن انتگرال نمی‌شود، لذا کنار گذاشتن نقطه $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ ضروری نیست.

قبلاً گفتیم که دستگاه شامل رساناهاست. با اینکه معادله (۸-۶) این مورد را نیز به خوبی در بر می‌گیرد، مناسب‌تر این است که سهم مربوط به رساناها را در آن صریحاً جدا کنیم. قسمتی از

انتگرال آخر، شامل انتگرال گیری بر روی سطح این رساناهاست. چون هر رسانا یک ناحیه هم پتانسیل است، هر یک از این انتگرالها را می توان محاسبه کرد:

$$\frac{1}{4} \int_{\text{رسانای } j} \sigma \varphi da = \frac{1}{4} Q_j \varphi_j \quad (10-6)$$

که در آن Q_j بار رسانای j ام است.

معادله (۸-۶) برای انرژی الکتروستاتیکی توزیع باری که شامل رساناهاست، به صورت زیر در می آید

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho \varphi dv + \frac{1}{4} \int_{S'} \sigma \varphi da + \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (11-6)$$

که جمع بندی آخر بر روی تمام رساناهاست و انتگرال سطحی منحصر به سطوح نارسانا است.

همان طور که در فصل ۳ دیدیم، در بسیاری از مسائل که از لحاظ عملی جالب توجه اند، همه بارها بر روی سطوح رساناها قرار می گیرند. در این شرایط معادله (۱۱-۶) تبدیل می شود به

$$U = \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (12-6)$$

بعداً در همین فصل این معادله را با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد.

اکنون می خواهیم معادله (۱۲-۶) را با معادله (۶-۶)، که برای دستگاهی مرکب از بارهای نقطه ای به دست آمد، مقایسه کنیم. در وهله اول به نظر می رسد که هر دو معادله یکسان اند، لیکن تفاوت مهمی میان آنها وجود دارد. هنگام به دست آوردن معادله (۱۲-۶)، از رساناهای ماکروسکوپی بدون باری شروع کردیم که با افزودن نمو های بار به آنها به تدریج باردار می شدند. بنابراین، انرژی به دست آمده در معادله (۱۲-۶)، هم شامل انرژی برهم کنش میان رساناهای مختلف است و هم شامل خود انرژیهای بار هر رسانای جداگانه. اگر تنها یک رسانا وجود داشته باشد، خود انرژی آن، $U = \frac{1}{4} Q_1 \varphi_1$ ناشی از برهم کنش بارهای گردهم آمده بر روی آن رسانا خواهد بود. ولی در به دست آوردن معادله (۶-۶)، هر یک از بارهای نقطه ای را به صورت یک واحد در نظر گرفتیم. پس در این معادله انرژی لازم برای تشکیل بارهای نقطه ای از نمو های بار کوچکتر، یعنی به اصطلاح خود انرژی بارهای نقطه ای، منظور نشده است. هرگاه بار را یک نقطه ریاضی فرض کنیم و بخواهیم خود انرژی رآن را محاسبه کنیم، نتیجه بی نهایت می شود؛ اما این انرژی در فرمول بندی قانون کولن برای نیروی میان بارهای نقطه ای منظور نشده است، و در اینجا نیز نباید آن را به حساب آورد. می توان نشان داد که از معادله (۱۲-۶) در حد،

هنگامی که رساناها خیلی کوچک می شوند و به سمت بارهای "نقطه‌ای" میل می کنند، همان نتیجه قبلی به دست می آید. برای این منظور پتانسیل زمین رسانا را می توان به صورت مجموع دو جمله نوشت

$$\varphi_j = \varphi_{j1} + \varphi_{j2} \quad (۱۳-۶)$$

که در آن φ_{j1} پتانسیل ناشی از بار موجود بر روی خود زمین رسانا، و φ_{j2} پتانسیل ناشی از بار موجود بر روی سایر رساناهاست. پس معادله (۱۲-۶) می شود

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j1} + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j2} \quad (۱۴-۶)$$

اولین جمله این معادله خودانرژیهای مختلف رساناها را نشان می دهد. خودانرژی هر رسانا، $\frac{1}{2} Q_j \varphi_{j1}$ ، به محیط اطراف آن رسانا بستگی دارد (زیرا توزیع بار بر روی هر رسانا، خود را با محیط اطراف تطبیق می دهد). به علاوه، تنها پتانسیل مربوط به رسانای j که از لحاظ فیزیکی مفهوم دارد، همان پتانسیل کل φ_j است. از این رو، تفکیکی که در معادله (۱۴-۶) صورت گرفته است به طور کلی خیلی بامعنی نیست. اما اگر رساناها به قدری کوچک باشند که از دید ماکروسکوپی بتوان آنها را به صورت بارهای نقطه‌ای در نظر گرفت، آنگاه تغییر توزیع بار بر روی یک "نقطه" نمی تواند قابل اهمیت باشد و هر خودانرژی را می توان مستقل از محیط اطراف دانست. به علاوه، چون منظور ما از پتانسیل در نقطه j همان φ_{j2} است، انرژی لازم برای قرار دادن تعدادی رسانای بسیار کوچک که قبلاً باردار شده اند، در مکانهای مفروض همان جمع بندی دوم در معادله (۱۴-۶) است که با معادله (۶-۶) هم ارز است.

۳-۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

در بخش گذشته، برای انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه عبارتی به دست آوردیم. این عبارت، معادله (۸-۶)، شامل انتگرال گیری صریح بر روی توزیع بار است. اما می توان انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را به نحو دیگری نیز بیان کرد و این روش غالباً مفید است. بنابراین، با یک تبدیل ریاضی (انتگرال گیری جزء به جزء)، معادله (۸-۶) را به انتگرالی تبدیل می کنیم که در برگیرنده بردارهای میدان \mathbf{E} و \mathbf{D} دستگاه باشد.

مجدداً توزیع بار دلخواهی را در نظر می گیریم که با چگالیهای ρ و σ مشخص می شود. برای سهولت فرض می کنیم که دستگاه بار کراندار است، یعنی می توانیم سطح بسته ای مثل S' با ابعاد متناهی رسم کنیم که همه بارهای آزاد را در بر بگیرد. به علاوه، فرض می کنیم که همه چگالیهای سطحی بار، σ ، بر روی سطوح رساناها قرار گرفته باشند. این فرض در حقیقت هیچ گونه

محدودیتی ایجاد نمی‌کند، زیرا چنانچه چگالی سطحی بار در فصل مشترک دو دی‌الکتریک واقع باشد، می‌توان آن را اندکی گسترش داد و سپس به صورت یک چگالی حجمی ρ در نظر گرفت. چگالیهای ρ و σ به جابه‌جایی الکتریکی وابسته‌اند. در تمامی نواحی دی‌الکتریک داریم

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

و بر روی سطوح رساناها

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

پس معادله (۸-۶) به صورت زیر در می‌آید

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۱۵-۶)$$

در اینجا انتگرال حجمی روی قسمتی از فضا گرفته می‌شود که در آن $\nabla \cdot \mathbf{D}$ صفر نیست، و این ناحیه‌ای است در خارج از رساناها. انتگرال سطحی بر روی سطوح رساناها گرفته می‌شود. در انتگرال اول در معادله (۱۵-۶)، انتگرالده را می‌توان با استفاده از یکی از اتحادهای برداری که تاکنون چندین بار به کار برده‌ایم، یعنی [معادله (۷-۱-۱)] از جدول ۱-۱، به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$$

از دو انتگرال حجمی که از این تبدیل به دست می‌آیند، اولی را با به کار بردن قضیه دیورژانس به یک انتگرال سطحی تبدیل می‌کنیم. بالاخره، با توجه به اینکه $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ، معادله (۱۵-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۱۶-۶)$$

این معادله را می‌توان تا حد زیادی ساده کرد. سطح $S + S'$ که انتگرال اول از معادله (۱۶-۶) باید بر روی آن حساب شود، تمامی سطحی است که حجم V را محصور کرده است. این سطح متشکل است از S (سطوح تمام رساناهای موجود در دستگاه) و همچنین S' (سطوحی که دستگاه را از سمت خارج محصور کرده است و می‌توان آن را در بی‌نهایت فرض کرد). در هر دوی این سطوح بردار عمود \mathbf{n}' به سمت خارج از حجم V خواهد بود. در انتگرال آخری بردار عمود \mathbf{n} به سمت خارج از رسانا، یعنی به سمت داخل حجم V است. پس دو انتگرال سطحی بر روی سطح S همدیگر را خنثی می‌کنند. حال نشان خواهیم داد که انتگرال بر روی سطح S' نیز صفر می‌شود.

اگر توزیع بار مفروض، که دلخواه ولی کراندار است، مقداری بار خالص داشته باشد، آنگاه در فواصل زیاد از دستگاه بار، پتانسیل به نسبت عکس فاصله کاهش می‌یابد، یعنی به صورت r^{-1} . همچنین \mathbf{D} متناسب با r^{-2} کاهش می‌یابد. مساحت یک سطح بسته که از نقطه‌ای به فاصله r می‌گذرد، با r^2 متناسب است. پس مقدار انتگرال بر روی S' ، که سطح محصورکننده دستگاه در فاصله r است، با r^{-1} متناسب است و هنگامی که S' به بی‌نهایت برده شود، مقدار این انتگرال صفر می‌شود.

اگر مقدار بار خالص توزیع بار صفر باشد، در آن صورت پتانسیل در فواصل دور مانند یک چندقطبی رفتار می‌کند و سریع‌تر از r^{-1} کاهش می‌یابد. در این حال نیز می‌توان دید که انتگرال بر روی S' صفر می‌شود. پس برای انرژی الکتروستاتیکی داریم

$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (17-6)$$

که در آن انتگرال بر روی حجمی از دستگاه گرفته می‌شود که خارج از رساناها واقع است، یعنی بر روی دی‌الکتریکهای مختلف موجود در دستگاه. البته انتگرال‌گیری را می‌توان به تمامی فضا گسترش داد، زیرا میدان الکتریکی \mathbf{E} در داخل رساناها صفر است. چنانچه این فرمولبندی برای میدانهایی که بخشی از آنها در اثر بارهای نقطه‌ای به وجود آمده‌اند به‌کار رود، لازم است که "خودانرژی" بی‌نهایت این بارها را صریحاً تفریق کنیم. (به مسئله ۷-۶ رجوع شود.)

انرژی الکتروستاتیکی دستگاه الکتریکی در کجا قرار دارد؟ این سؤالی است که مشخص کردن معنای دقیق آن مشکل است؛ با وجود این، برای سهولت می‌توان تصور کرد که انرژی در میدان الکتریکی ذخیره شده است. معادله (۱۷-۶) نشان می‌دهد که چنین روشی دست‌کم نامعقول نیست، علاوه بر این، معادله مذکور مشخص می‌کند که انرژی باید با چگالی $\frac{1}{4} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ در واحد حجم توزیع شده باشد.

بدین ترتیب مفهوم چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیکی می‌رسیم:

$$u = \frac{1}{4} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (الف ۱۸-۶)$$

چون معادله (۱۷-۶) را برای دی‌الکتریکهای خطی به‌دست آورده بودیم، هر دی‌الکتریک با یک گذردهی ثابت ϵ مشخص می‌شود. وانگهی، بحث فصلهای قبل فقط به دی‌الکتریکهای همسانگرد

محدود بود. از این رو، معادله (۱۸-۶) معادل است با

$$u = \frac{1}{4} \varepsilon E^2 = \frac{1}{4} \frac{D^2}{\varepsilon} \quad (18-6)$$

۴-۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل

در بخش ۱۱-۳ نشان داده شد که یک رابطه خطی میان پتانسیلها و بارهای مجموعه‌ای از رساناها وجود دارد. در واقع، در دستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هر یک از رساناها با معادله زیر داده می‌شود

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad (52-3)$$

معادله (۵۲-۳) را برای N رسانا در خلأ به دست آوردیم. لیکن واضح است که وقتی دی‌الکتریکهایی نیز در دستگاه حضور داشته باشند، این استنتاج باز هم صادق خواهد بود، مشروط بر آنکه این دی‌الکتریکها خطی و بدون بار خارجی باشند. ضرایب p_{ij} ، آن قسمت از پتانسیل i امین رساناست که از وجود بار واحد بر روی رسانای j ام ناشی می‌شود. این ضرایب معمولاً ضرایب پتانسیل نامیده می‌شوند.

در بخش ۲-۶ عبارتی برای انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از N رسانای باردار، یعنی معادله (۱۲-۶)، به دست آوردیم. از ترکیب این نتیجه با معادله (۵۲-۳) معادله زیر به دست می‌آید

$$U = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j \quad (19-6)$$

از این رو، انرژی تابع درجه دومی از بارهای رساناهای مختلف است.

سه حکم کلی و مهم را می‌توان در مورد ضرایب p_{ij} بیان کرد: (۱) $p_{ij} = p_{ji}$ ، (۲) همه p_{ij} ها مثبت‌اند و (۳) j هر چه باشد $p_{ii} \geq p_{ij}$. اولین حکم از معادله (۱۹-۶) نتیجه می‌شود که U را بر حسب $U(Q_1, \dots, Q_N)$ بیان می‌کند. بنابراین

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q_N} \right) dQ_N$$

هرگاه فقط dQ_1 تغییر کند، آنگاه

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (p_{1j} + p_{j1}) Q_j dQ_1 \quad (20-6)$$

این نمو انرژی الکتروستاتیکی را می توان مستقیماً از معادله (۲-۶) نیز به دست آورد. با آوردن dQ_1 از منبعی با پتانسیل صفر، نتیجه می شود

$$dU = dW = \varphi_1 dQ_1 = \sum_{j=1}^N p_{1j} Q_j dQ_1 \quad (21-6)$$

معادلات (۲-۶) و (۲۱-۶) به ازای تمام مقادیر ممکن Q_j باید معادل باشند، و این مستلزم آن است که

$$\frac{1}{\varphi} (p_{1j} + p_{j1}) = p_{1j}$$

و یا

$$p_{j1} = p_{1j} \quad (22-6)$$

برای اثبات احکام دوم و سوم، توجه می کنیم که تمام پتانسیلها نسبت به پتانسیل منبعی با پتانسیل صفر اندازه گیری می شوند. به علاوه فرض می کنیم رسانای i دارای بار مثبت Q_i است و تمام رساناهای دیگر بدون بارند. چون منشأ شار جابه جایی بار رسانای i است، می توانیم هر یک از خطوط جابه جایی را که از رسانای i خارج می شوند، از طریق رساناهای دیگر به طرف منبع دنبال کنیم. بنابراین $\varphi > 0$ و $p_{ii} > 0$. به همین ترتیب، بجز در حالتی که رسانای i از طرف یکی دیگر از رساناها حفاظ پیدا کرده است، می توانیم هر یک از خطوط جابه جایی را که به رسانای i وارد می شوند به طرف عقب تا رسانای i ، و هر یک از خطوط که از رسانای i خارج می شوند، تا منبعی که پتانسیل آن صفر است، دنبال کنیم. بنابراین

$$p_{ii} > p_{ij} > 0$$

حال باید موردی را بررسی کنیم که یک رسانا توسط رسانای دیگر کاملاً حفاظ پیدا کرده است. فرض کنید رسانای i از طرفی که بدون بار است، تماماً در داخل پوسته رسانایی قرار گرفته است که رسانای i را تشکیل می دهد. واضح است که میدان الکتریکی در ناحیه داخلی صفر است؛ در نتیجه پتانسیل هر دو رسانا یکسان است و $p_{ij} = p_{ii}$. این تحلیل احکام (۲) و (۳) را اثبات می کند، که می توان آنها را به صورت زیر با هم ترکیب کرد

$$p_{ii} \geq p_{ij} > 0 \quad (23-6)$$

مفید بودن ضرایب p_{ij} را می توان با ذکر یک مثال ساده نشان داد.

مثال ۱-۶ کاربرد ضرایب پتانسیل در محاسبه پتانسیل الکتروستاتیکی

می‌خواهیم پتانسیل یک رسانای کروی بی‌بار را که یک بار نقطه‌ای q به فاصله r از مرکز آن قرار دارد، پیدا کنیم. در اینجا $r > R$ و شعاع کره رساناست.

حل: بار نقطه‌ای و کره رسانا را به‌عنوان دستگاهی مرکب از دو رسانا در نظر می‌گیریم و از تساوی $p_{12} = p_{21}$ استفاده می‌کنیم. اگر کره بار Q داشته باشد و "نقطه" بی‌بار باشد، پتانسیل "نقطه" برابر $Q/4\pi\epsilon_0 r$ خواهد بود؛ از این رو

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

آشکار است که وقتی "نقطه" بار q داشته باشد و کره بی‌بار باشد، پتانسیل کره برابر $q/4\pi\epsilon_0 r$ خواهد بود.

۵-۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

معادله (۳-۵۲)، که در فصل ۳ به‌دست آمد و در بخش ۴-۶ دوباره به آن اشاره شد، دستگاهی از N معادله خطی است که پتانسیل رساناها را برحسب بارهایشان به‌دست می‌دهد. این دستگاه معادلات را می‌توان برای تعیین بارهای Q_i حل کرد تا رابطه زیر به‌دست آید

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j \quad (۲۴-۶)$$

که در آن c_{ii} ضریب ظرفیت و c_{ij} ($i \neq j$) ضریب القا نامیده می‌شود. حل واقعی معادله (۳-۵۲)، که ضرایب c را برحسب p_{ij} ها بیان می‌کند، می‌تواند با وارونه کردن ماتریس انجام شود.

خواص c ها از خواص مربوط به p ها، که قبلاً درباره‌شان صحبت شد، نتیجه می‌شوند. بدین ترتیب: (۱) $c_{ij} = c_{ji}$ ، (۲) $c_{jj} > 0$ ، (۳) ضرایب القا صفر و یا منفی‌اند (به مسئله ۶-۱۰ رجوع شود).

می‌توان معادله‌های (۲۴-۶) و (۱۲-۶) را با هم ترکیب کرد تا رابطه دیگری برای انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا به‌دست آید:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (۲۵-۶)$$

۶-۶ خازنها

در این بخش وسیله مهمی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که می‌تواند انرژی الکتروستاتیکی را در خود ذخیره کند؛ این وسیله خازن نام دارد.

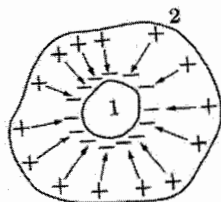
دو رسانا که بتوانند بارهای مساوی و مخالف ($\pm Q$) را در خود ذخیره کنند، و اختلاف پتانسیل بین آنها به باردار بودن سایر رساناهای دستگاه بستگی نداشته باشد، وسیله‌ای را تشکیل می‌دهند که خازن نامیده می‌شود.

این بستگی نداشتن به بارهای دیگر به معنی آن است که یکی از این دو رسانا حفاظ رسانای دیگری شده است. به عبارت دیگر، پتانسیلی که بارهای دیگر در هر یک از رساناهای این زوج رسانا ایجاد می‌کنند، باید یکسان باشد. چنین وضعی در شکل ۱-۶ نشان داده شده است و در آن رساناهای ۱ و ۲ وسیله‌ای از این نوع را تشکیل می‌دهند. به‌طور کلی، اگر دو رسانای ۱ و ۲ خازنی تشکیل بدهند، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11}Q - p_{12}Q + \varphi_x \\ \varphi_2 &= p_{12}Q - p_{22}Q + \varphi_x \end{aligned} \quad (۲۶-۶)$$

که در آن $+Q$ بار روی رسانای ۱ و $-Q$ بار روی رسانای ۲ و φ_x پتانسیل مشترکی است که سایر بارها ایجاد می‌کنند.

۴



شکل ۱-۶ رساناهای ۱ و ۲ تشکیل یک خازن می‌دهند. در اینجا $p_{12} = p_{21}$ ، زیرا مطابق قانون گاوس، وقتی ۱ و ۲ بدون بارند، باید صرف‌نظر از بار روی ۳، پتانسیل یکسانی داشته باشند. به همین ترتیب $p_{12} = p_{21}$.

۱. آنچه که توصیف کرده‌ایم، یک خازن ایده‌آل است. خازنهای عملی تا حدودی تحت تأثیر بارهای موجود در محیطشان قرار می‌گیرند.

از تفریق معادلات (۲۶-۶) نتیجه می‌شود

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \quad (27-6)$$

بنابراین اختلاف پتانسیل میان دو رسانای یک خازن متناسب است با بار ذخیره‌شده، Q . (بدیهی است که بار کل ذخیره‌شده صفر است، لیکن برحسب قرارداد، مقدار مطلق بار بر روی هر یک از دو رسانا بار خازن نامیده می‌شود.)

معادله (۲۷-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Q = C \Delta\varphi \quad (28-6)$$

که در آن $C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$ ظرفیت خازن نام دارد.

بدیهی است که C مقدار بار ذخیره‌شده به ازای واحد اختلاف پتانسیل است. در دستگاه C , mks برحسب کولن بر ولت و یا فاراد ($1F \equiv 1C/V$) سنجیده می‌شود.

با استفاده از معادلات (۱۲-۶) و (۲۸-۶)، انرژی یک خازن باردار را می‌توان به صورت زیر

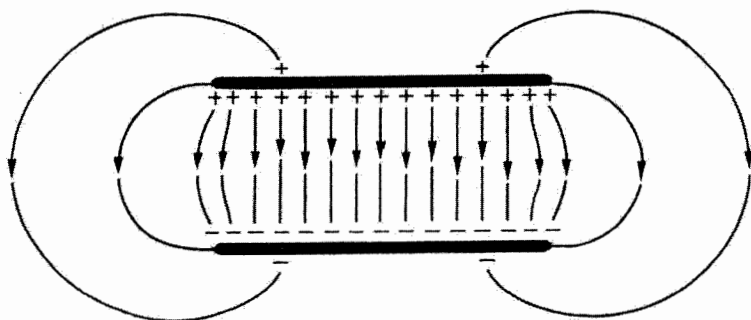
نوشت

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (29-6)$$

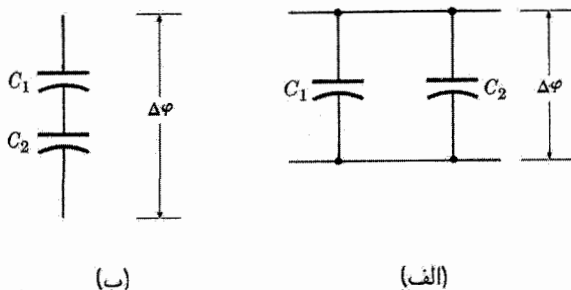
چنانچه رساناهای تشکیل‌دهنده یک خازن اشکال هندسی ساده‌ای داشته باشند، ظرفیت خازن را می‌توان به روش تحلیلی به دست آورد. از این رو، مثلاً محاسبه ظرفیت دو صفحه رسانای موازی، دو استوانه هم‌محور، دو کره هم‌مرکز، یا یک استوانه و یک صفحه آسان است. ظرفیت خازنی متشکل از دو صفحه موازی (شکل ۲-۶) را در اینجا به دست می‌آوریم. سایر موارد ساده به صورت تمرین در انتهای فصل آمده است.

میدان الکتریکی بین دو صفحه موازی، به غیر از میدان حاشیه‌ای در لبه صفحات، یکنواخت است. یک خازن ایده‌آل با صفحات موازی خازنی است که فاصله d میان صفحات آن در مقایسه با ابعاد این صفحات خیلی کوچک باشد. پس در خازن ایده‌آل می‌توان از میدان حاشیه‌ای صرف‌نظر کرد. چنانچه فضای بین دو صفحه خازن از دی‌الکتریکی با گذردهی ϵ پر شده باشد، میدان الکتریکی میان صفحات برابر خواهد بود با

$$E = \frac{1}{\epsilon} \sigma = \frac{Q}{\epsilon A}$$



شکل ۲-۶ میدان الکتریکی میان دو صفحه موازی با بارهای مخالف و ابعاد متناهی.



شکل ۳-۶ (الف) اتصال موازی و (ب) اتصال متوالی دو خازن.

که در آن A مساحت هر یک از صفحات است. اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi = Ed$ است. در نتیجه ظرفیت این خازن عبارت است از

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (۳-۶)$$

هنگامی که بخواهند خازنی را به عنوان قسمتی از یک مدار الکتریکی ترسیم کنند، معمولاً آن را با علامت ϵ نشان می‌دهند. دو یا چند خازن را می‌توان به همدیگر متصل کرد. برای این کار یکی از رساناهای خازن اول را به یک رسانای خازن دوم وصل می‌کنیم، و به همین ترتیب تا به آخر. راههای ممکن برای اتصال خازنها عبارت‌اند از اتصال به روش موازی (شکل ۳-۶ الف) و اتصال به روش متوالی (شکل ۳-۶ ب). پس از اتصال خازنها به یکدیگر معمولاً بهتر است ظرفیت معادل ترکیب حاصل را تعیین کنیم. در مورد اتصال موازی، همان ولتاژ $\Delta\varphi$ که در دو سر هر یک

از خازنها وجود دارد، در دو سر خازن معادل نیز موجود است. پس ظرفیت معادل بارابطه زیر داده می‌شود

$$C = \frac{Q_{\text{کل}}}{\Delta\varphi} = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} + \frac{Q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2 \quad (۳۱-۶ \text{ الف})$$

در صورتی که دو خازن بدون بار به‌طور متوالی به یکدیگر بسته و سپس باردار شوند، پایداری بار ایجاب می‌کند که هر یک از خازنها بار یکسانی به‌دست آورند. بنابراین میان ظرفیت خازن معادل C با C_1 و C_2 رابطه زیر برقرار است

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{Q} = \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (۳۱-۶ \text{ ب})$$

۷-۶ نیروها و گشتاور نیروها

تاکنون در این فصل روشهای مختلفی را برای محاسبه انرژی الکتروستاتیکی دستگاه بار بررسی کردیم. حال نشان خواهیم داد که چگونه نیروی وارد بر یکی از اجسام واقع در دستگاه بار را می‌توان با دانستن این انرژی الکتروستاتیکی محاسبه کرد.

فرض کنید با دستگاهی منزوی مرکب از قسمتهای متعدد (رساناها، بارهای نقطه‌ای، دی‌الکتریکها) سروکار داریم و یکی از این قسمتها تحت تأثیر نیروهای الکتریکی \mathbf{F} وارد بر آن به اندازه $d\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود. کاری که نیروی الکتریکی در این شرایط بر روی دستگاه انجام می‌دهد، عبارت است از

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (۳۲-۶)$$

چون دستگاه منزوی است، این کار در مقابل صرف انرژی الکتروستاتیکی U انجام می‌شود. به عبارت دیگر، طبق معادله (۱-۶)

$$dW = -dU \quad (۳۳-۶)$$

از ترکیب معادلات (۳۲-۶) و (۳۳-۶) نتیجه می‌شود

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

و

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (۳۴-۶)$$

با عباراتی مشابه برای F_y و F_z . یعنی، در این مورد \mathbf{F} نیرویی پایستار است، و داریم $\mathbf{F} = -\nabla U$

هرگاه جسم مورد بررسی به نحوی مقید باشد که در حول محوری دوران کند، آنگاه به جای معادله (۳۲-۶) می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$dW = \tau \cdot d\theta \quad (۳۵-۶)$$

که در آن τ گشتاور نیروی الکتریکی و $d\theta$ جابه‌جایی زاویه‌ای دیفرانسیلی است. با نوشتن τ و $d\theta$ برحسب مؤلفه‌های آنها (τ_1, τ_2, τ_3) و $(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$ و ترکیب معادلات (۳۳-۶) و (۳۵-۶)، نتیجه می‌گیریم که

$$\tau_1 = -\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \quad (۳۶-۶)$$

و به همین ترتیب برای سایر مؤلفه‌ها.

بدین ترتیب به هدف خود رسیده‌ایم:

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \quad (\text{الف } ۳۴-۶)$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_Q \quad (\text{الف } ۳۶-۶)$$

در معادلات بالا شاخص Q اضافه شده است تا نشان دهد که دستگاه منزوی است و در نتیجه بار کل آن در اثنای جابه‌جایی dr یا $d\theta$ ثابت می‌ماند. برای استفاده بیشتر از این روش ضروری است که U به صورت تحلیلی بیان شود و بستگی خاص U به مختصه x یا θ_1 نیز باید در دست باشد. به زودی برای نمایش مفید بودن این روش مثالی خواهیم آورد.

اما معادلات (الف ۳۴-۶) و (الف ۳۶-۶) تمام موارد مورد توجه را در بر نمی‌گیرند، زیرا همان‌طور که هنگام اثبات آنها اشاره شد، این معادلات به دستگاه‌های منزوی که در آنها بار ثابت می‌ماند محدود هستند. در گروهی دیگر از مسائل مهم، کلیه بارهای بر روی سطوح رساناها قرار می‌گیرند و این رساناها به کمک منابع خارجی انرژی (مثلاً به وسیله باتریها) در پتانسیلهای ثابتی نگه داشته می‌شوند. در اینجا نیز می‌توانیم به یکی از قسمتهای دستگاه مجال دهیم تا تحت تأثیر نیروهای الکتروستاتیکی وارد بر آن حرکت کند و کار انجام شده (در این حالت به وسیله دستگاه و باتریها) باز هم از طریق معادله (۳۲-۶) به نیرو مربوط خواهد شد. اما کار در این حالت عبارت است از

$$dW = dW_b - dU \quad (۳۷-۶)$$

که در آن dW_b کاری است که باتریها انجام می‌دهند. قبل از آنکه بتوانیم برای این مورد رابطه‌ای که U را به نیروی وارد بر قسمتی از دستگاه مربوط می‌کند، به دست آوریم، لازم است که dW_b را از معادله (۳۷-۶) حذف کنیم.

انرژی الکتروستاتیکی U برای دستگاهی از رساناهای باردار، قبلاً با معادله (۱۲-۶) داده شده است. اکنون اگر قسمتی از دستگاه جابه‌جا شود، در حالی که پتانسیلهای کلیه رساناهای دستگاه همچنان ثابت بمانند، خواهیم داشت

$$dU = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (38-6)$$

علاوه بر این، کاری که باتریها انجام می‌دهند، dW_b ، با کاری که لازم است تا هر یک از نمونه‌های بار dQ_j از پتانسیل صفر به پتانسیل مربوط به رسانای مورد نظر برسند برابر است. با استفاده از معادله (۲-۶)، این مقدار کار برابر است با

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (39-6)$$

بنابراین

$$dW_b = 2dU \quad (40-6)$$

با به‌کار بردن این معادله برای حذف dW_b از معادله (۳۷-۶) و ترکیب نتیجه حاصل با معادله (۳۲-۶)، خواهیم داشت

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_x dz$$

یا

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi \quad (41-6)$$

در اینجا شاخص φ برای آن به‌کار رفته است که نشان دهد در اثنای جابه‌جایی مجازی $d\mathbf{r}$ ، همه پتانسیلها ثابت نگه داشته می‌شوند. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_\varphi \quad (42-6)$$

به منظور توضیح روش انرژی، مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۶-۲ نیروی بازگرداننده وارد بر قطعه‌ای دی‌الکتریک که قسمتی از آن از میان خازن بیرون کشیده شده است.

خازنی با صفحات موازی در دست است که فاصله بین صفحات آن d و ناحیه بین آنها با یک قطعه دی‌الکتریک جامد با گذردهی ϵ پر شده است. ابعاد هر صفحه خازن عبارت‌اند از طول l و عرض w . صفحه‌ها در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. اگر قطعه دی‌الکتریک در امتداد بُعد l آنقدر بیرون کشیده شود که فقط طول x آن در بین صفحات باقی بماند (شکل ۶-۴)، نیرویی را که می‌کوشد قطعه دی‌الکتریک را سر جایش بازگرداند، محاسبه کنید.

حل: انرژی دستگاه را می‌توان با هر یک از چند روش مختلف محاسبه کرد. مثلاً چون $E = \Delta\varphi/d$ در همه جای فضای بین صفحه‌ها یکسان است، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$$

که لازم است ناحیه انتگرال‌گیری فقط شامل قسمتهایی از فضا باشد که در آن جاها $E \neq 0$ است. با چشمپوشی از اثرات حاشیه‌ای در لبه‌های خازن، خواهیم داشت

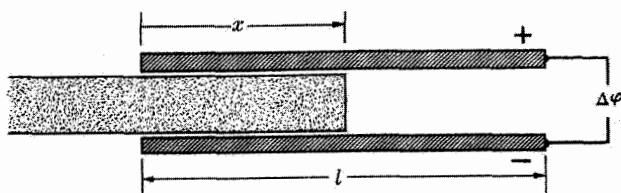
$$U = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dwx + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dw(l-x)$$

نیرو را می‌توان از معادله (۶-۴۱) محاسبه کرد:

$$F_x = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) w \frac{(\Delta\varphi)^2}{d} = \frac{1}{2} (K - 1) \epsilon_0 E^2 wd$$

که در جهت افزایش x است.

موردی که در آن صفحات منزوی‌اند (بار ثابت Q) در مسائل ۶-۱۹ و ۶-۲۴ بررسی می‌شود.



شکل ۶-۴ قطعه دی‌الکتریک که قسمتی از آن از میان دو صفحه باردار بیرون کشیده شده است.

۸-۶ خلاصه مطالب

انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از بارهای نقطه‌ای به صورت کاری محاسبه می‌شود که باید توسط یک عامل خارجی در مقابل نیروهای کولنی بین بارها انجام شود تا اینکه پیکربندی مفروض گردهم آورده شود. این انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$U = \frac{1}{4} \sum q_j \varphi_j$$

که در آن φ_j ، یعنی پتانسیل ناشی از همه بارهای دیگر در مکان q_j ، برابر است با

$$\varphi_j = \sum' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

که در این جمع‌بندی جمله $k = j$ منظور نمی‌شود. برای یک توزیع بار کلی، به شرط آنکه همه دی‌الکتریکهای موجود خطی باشند، انرژی الکتروستاتیکی به صورت زیر در می‌آید

$$U = \frac{1}{4} \int \rho \varphi dv$$

که در آن پتانسیل φ عبارت است از پتانسیلی که چگالی بار خارجی ρ در حضور محیطهای دی‌الکتریک تولید می‌کند. (ρ ممکن است بار متمرکز در یک توزیع سطحی بار یا بارهای نقطه‌ای را شامل شود). با انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی دی‌الکتریکهای خطی به انتگرال زیر تبدیل می‌شود

$$U = \int u dv$$

که این انتگرالی است بر روی چگالی انرژی میدان الکتریکی، یعنی

$$u = \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{4} \epsilon E^2 = \frac{1}{4} \frac{D^2}{\epsilon}$$

هنگامی که این فرمولبندی برای بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود، "خودانرژی" نامتناهی آنها باید تفریق شود.

• وقتی تمام بار به صورت یک توزیع سطحی بر روی رساناها قرار داشته باشد که سطح این رساناها سطوحی هم‌پتانسیل‌اند، انرژی الکتروستاتیکی به صورت خاص زیر بیان می‌شود

$$U = \frac{1}{4} \sum Q_j \varphi_j$$

سپس نتیجه می‌شود که ضرایب موجود در تابعهای خطی زیر

$$\varphi_i = \sum p_{ij} Q_j$$

و در تابعهای معکوس

$$Q_i = \sum c_{ij} \varphi_j$$

در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}$$

(به علاوه، $c_{ii} > 0 \geq c_{ij}$ و $p_{ii} \geq p_{ij} > 0$).

• در حالت خاص، هنگامی که دو رسانا یک خازن تشکیل می‌دهند

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi$$

با

$$Q = C \Delta\varphi$$

برای خازنی با صفحات موازی

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

• نیروی الکتریکی وارد بر قسمتی از یک دستگاه منزوی که هر رسانای آن باری ثابت دارد، برابر است با منفی گرادیان انرژی الکتروستاتیکی

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_Q$$

در صورتی که دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض پتانسیل هر رسانا به وسیله یک عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شده باشد، نیرو با رابطه زیر بیان می‌شود

$$F_x = + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi$$

مسائل

۱-۶ یک الکترون سریع ($J = 10^{-17} \times 5$ انرژی جنبشی) به فضایی وارد می‌شود که دارای میدان الکتریکی یکنواخت $E = 800 \text{ V/m}$ است. میدان موازی راستای حرکت الکترون و در

جهتی است که حرکت آن را کند می‌کند. الکترون قبل از آنکه به حال سکون در آید چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ ($C = 10^{-19} \times 1.60 =$ بار الکترون)

۲-۶ یک پوسته‌ی الکترونیک کروی (به شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و ثابت دی‌الکتریک K) و یک بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی بی‌نهایت از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه‌ای را به مرکز پوسته‌ی الکترونیک منتقل می‌کنیم. تغییر انرژی دستگاه را محاسبه کنید.

۳-۶ دو قطبی ql عمود بر صفحه‌ای رسانا قرار گرفته است به طوری که بار $-q$ در فاصله‌ی d و بار $+q$ در فاصله‌ی $d+l$ از صفحه واقع است. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه بار را محاسبه کنید [راهنمایی: انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی به علاوه بارهای تصویری در خلأ را در نظر بگیرید. بارهای تصویری را طوری انتخاب کنید که میدان E ی درست را در جلوی صفحه تولید کنند].

۴-۶ یک پوسته‌ی کروی بردار به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ مفروض است. خود انرژی این توزیع را به دو روش محاسبه کنید: (الف) با انتگرال‌گیری مستقیم از معادله (۸-۶)؛ (ب) با انتگرال‌گیری بر روی میدان، $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$.

۵-۶ یک توزیع بار کروی به شعاع R و چگالی بار یکنواخت ρ مفروض است. خود انرژی توزیع را به دو روش محاسبه کنید: (الف) با انتگرال‌گیری مستقیم از معادله (۸-۶)؛ (ب) با انتگرال‌گیری بر روی میدان، $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$.

۶-۶ فرض کنید الکترون یک ذره‌ی کروی با بار یکنواخت به شعاع R باشد. باز هم فرض کنید که انرژی سکون mc^2 (m جرم سکون الکترون و c سرعت نور است) منشأ الکتروستاتیکی دارد و با نتیجه مسئله ۵-۶ برابر است. با قرار دادن مقادیر عددی مناسب برای بار و جرم الکترون، "شعاع کلاسیک" الکترون، یعنی R را محاسبه کنید.

۷-۶ دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی d از یکدیگر قرار دارند. اگر میدانهای مربوط به آنها در نقطه‌ی r به ترتیب \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 باشند، در آن صورت

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

(الف) نشان دهید که انتگرالهای E_1^2 و E_2^2 بر تمامی فضا واگرا هستند. این همان "خودانرژی" نامتناهی است که باید از انرژی U کاسته شود. (ب) انتگرالی برای سهم مربوط به $2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ در U بنویسید و نشان دهید که این انتگرال واگرا نیست.

۸-۶ (الف) ظرفیت خازنی که می‌تواند J ۱۰۰۰ را در V ۱۰۰۰ ذخیره کند، چقدر است؟ (ب) فرض کنید که خازن صفحاتی موازی و به فاصله‌ی m 10^{-5} از یکدیگر دارد و با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ۲ پر شده است. مساحت مورد نیاز صفحات چقدر است؟

۹-۶ دستگاه برق‌ساز (الکتروفور) از صفحهٔ مدور تختی از موم و صفحهٔ مشابهی از فلز که دسته‌ای از جنس عایق دارد تشکیل شده است. به صفحهٔ مومین، از طریق مالش آن با پارچهٔ پشمی یا پوست، بار مقید Q داده می‌شود. سپس صفحهٔ فلزی روی صفحهٔ مومین قرار داده می‌شود و موقتاً به زمین متصل می‌شود تا بار $-Q$ را به دست آورد. صفحهٔ فلزی سرانجام از صفحهٔ مومین جدا می‌شود و در عین حال بار $(-Q)$ خود را حفظ می‌کند. فرض کنید که شعاع صفحات 10 cm و $Q = 3\text{ }\mu\text{C}$ و فاصلهٔ اولیهٔ دو صفحه 10^{-5} m باشد. اختلاف پتانسیل بین صفحات و انرژی ذخیره‌شده را هنگامی که فاصلهٔ بین دو صفحه (الف) $d = 10^{-5}\text{ m}$ و (ب) $d = 2\text{ m}$ است، پیدا کنید.

۱۰-۶ دستگاهی متشکل است از تنها دو رسانا. ضرایب ظرفیت و القا را صریحاً برحسب ضرایب پتانسیل p_{ij} به دست آورید.

۱۱-۶ دو رسانای کروی در خلأ قرار دارند. رسانای ۱ به شعاع R_1 به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است). رسانای ۲ به قدری کوچک است که می‌توان آن را یک بار نقطه‌ای تصور کرد. بار این رسانا q است و به فاصلهٔ d از کرهٔ متصل به زمین قرار دارد. چه مقدار بار روی کرهٔ متصل به زمین القا می‌شود؟ (از مفهوم ضرایب پتانسیل استفاده کنید.)

۱۲-۶ دستگاهی مرکب از دو جسم رسانا را در نظر بگیرید که در یک محیط دی‌الکتریک خطی قرار دارد. رسانای ۱ بار ندارد و رسانای ۲ به زمین متصل است. ثابت کنید پتانسیل رسانای ۱ نیز با پتانسیل زمین برابر است.

۱۳-۶ خازنی با صفحات موازی با یک دی‌الکتریک مرکب ساخته شده است. ورقه‌ای از یک دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_1 و ضخامت d_1 در بالای ورقهٔ دی‌الکتریک دیگری با گذردهی ϵ_2 و ضخامت d_2 قرار داده شده است. ترکیب این دو دی‌الکتریک بین دو صفحهٔ موازی رسانا قرار گرفته است که فاصلهٔ آنها از یکدیگر $d_1 + d_2$ است. ظرفیت خازن را در واحد سطح صفحات آن به دست آورید.

۱۴-۶ استوانه‌ای طویل و رسانا به شعاع a به موازات یک صفحهٔ رسانای نامتناهی و به فاصلهٔ h از آن قرار دارد. نشان دهید که ظرفیت دستگاه در واحد طول استوانه با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$C = 2\pi\epsilon_0 / \cosh^{-1}(h/a)$$

(به بخش ۱۰-۳ رجوع شود.)

۱۵-۶ دو خازن مشابه را که بین صفحات آنها هواست، به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم و ترکیب حاصل را در اختلاف پتانسیل ثابت 50 V نگه می‌داریم. اگر یک ورقهٔ دی‌الکتریک را که ثابت دی‌الکتریک آن 10 و ضخامتش یک دهم فاصلهٔ صفحات است، در داخل یکی از خازنها قرار دهیم، اختلاف پتانسیل دو سر این خازن را محاسبه کنید.

۶-۱۶ ظرفیت یک الکتروسکوپ با برگهٔ طلا کاملاً ثابت نیست، زیرا وقتی $\Delta\varphi$ افزایش یابد، برگه به طرف محفظه نزدیک‌تر می‌شود. ظرفیت مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$C = a + b(\Delta\varphi)^2$$

چگونه می‌توانید ثابت‌های a و b را برای یک دستگاه بخصوص تعیین کنید؟ هنگامی که الکتروسکوپ باردار است، انرژی آن چقدر است؟ آیا این انرژی تماماً الکتریکی است؟

۶-۱۷ دو پوستهٔ رسانای کروی هم‌مرکز به شعاعهای r_1 و r_2 را به ترتیب در پتانسیلهای φ_1 و φ_2 نگه داشته‌ایم. فضای بین دو پوسته را از یک مادهٔ دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریک برابر است با $C(\varphi_1 - \varphi_2)^2/2$ و در نتیجه C یا ظرفیت دستگاه را تعیین کنید.

۶-۱۸ دو رسانای استوانه‌ای هم‌محور که شعاع آنها تقریباً یکی است، به اندازهٔ فاصلهٔ کوچک d در بعد شعاعی از یکدیگر جدا هستند. استوانه‌ها را به طور قائم در یک دی‌الکتریک مایع که پذیرفتاری الکتریکی آن χ و چگالی جرمی آن ϵ است، فرو می‌بریم. استوانه‌ها را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم. مایع دی‌الکتریک تا چه ارتفاعی (h) در فضای بین رساناها بالا می‌آید؟ (از کشش سطحی صرف نظر کنید).

۶-۱۹ فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی به وسیلهٔ بُرهٔ دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک K پر شده است. ابعاد صفحهٔ خازن عبارت‌اند از عرض w و طول l و فاصلهٔ صفحات d . خازن را در حالی که به منبعی با اختلاف پتانسیل $(\Delta\varphi)$ متصل است باردار و سپس آن را از منبع جدا می‌کنیم. حال قسمتی از بُرهٔ دی‌الکتریک را در امتداد بُعد l بیرون می‌کشیم به طوری که فقط طول x از آن در داخل خازن باقی بماند. (الف) اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن چقدر است؟ (ب) نیرویی که می‌خواهد بُرهٔ دی‌الکتریک را دوباره به داخل خازن بکشد چقدر است؟

۶-۲۰ ظرفیت یک خازن متغیر که بین صفحات آن هواست، هنگامی که یکی از صفحات آن از 0° تا 180° بچرخد، به طور خطی از 5° pF تا 364 pF تغییر می‌کند. صفحهٔ چرخان را در زاویهٔ 75° تنظیم کرده و دو سر خازن را در اختلاف پتانسیلی برابر با 4° ولت نگه می‌داریم. جهت و اندازهٔ گشتاور نیروی الکتروستاتیکی وارد بر صفحهٔ خازن را پیدا کنید.

* ۶-۲۱ یک پوستهٔ رسانای کروی، بدون بار و به جرم m ، در یک دی‌الکتریک مایع با ثابت دی‌الکتریک K شناور است، به طوری که یک چهارم حجم آن در مایع غوطه‌ور است. تا چه پتانسیلی باید کره را باردار کنیم تا نیمی از حجم آن غوطه‌ور شود؟ [راهنمایی: فرض کنید میدان الکتریکی پوستهٔ باردار که تا نیمه غوطه‌ور است، یک میدان شعاعی خالص باشد و بعداً نشان دهید که جمع $\sigma + \sigma_P$ روی سطح کره به‌گونه‌ای است که فرض بالا را تأیید می‌کند.]

۲۲-۶ یک تیغه دی الکتریک به ضخامت d و ثابت دی الکتریک K فضای بین صفحات خازنی با صفحات موازی را پر کرده است. مساحت صفحه خازن A است. نیروی الکتروستاتیکی وارد بر یکی از صفحات را برای دو مورد زیر محاسبه کنید: (الف) با فرض اینکه دی الکتریک مستقیماً با آن صفحه در تماس باشد و (ب) با فرض اینکه بین دی الکتریک و آن صفحه شکاف باریکی از هوا وجود داشته باشد. در هر دو مورد صفحات را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می داریم.

۲۳-۶ مثال مربوط به شکل ۴-۶ را با انرژی الکتروستاتیکی به صورت $U = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2$ حل کنید؛ در اینجا $C = C(x)$ ظرفیت خازن است هنگامی که قطعه دی الکتریک تا فاصله x فرورفته است. ۲۴-۶ فرض کنید انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی $U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi$ است که در آن $Q = C \Delta\varphi$. ظرفیت را به صورت $C = C(x)$ ، که به پارامتر هندسی x بستگی دارد، در نظر بگیرید. در اینجا پارامتر x مکان قسمتی از دستگاه را مشخص می کند. نشان دهید که نیروی وارد بر آن قسمت، برای مقدار بخصوصی از Q و $\Delta\varphi$ ، طبق معادله (۴-۶ الف) با Q ی ثابت، با نیروی وارد بر آن طبق معادله (۴-۶ ب) با $\Delta\varphi$ ی ثابت، یکسان است.

۲۵-۶ مثال مربوط به شکل ۴-۶ را چنانچه ضخامت t بُره دی الکتریک از فاصله d ی بین صفحات بسیار کمتر باشد، حل کنید. [راهنمایی: در این حالت، بنا بر نتیجه مسئله ۴-۱۵، D در تمامی فضای بین صفحات تقریباً یکسان است، نه E].

۲۶-۶ سیم استوانه ای طولی به شعاع R_1 ، توسط یک پوسته استوانه ای بلند به شعاع R_2 ($R_2 > R_1$) به طور هم محور احاطه شده است. این دو رسانا "صفحات" یک خازن را تشکیل می دهند و فضای بین آنها توسط ماده نارسانایی با گذردگی ϵ پر شده است. (الف) ظرفیت در واحد طول این خازن را به دست آورید. (ب) نشان دهید که این نتیجه تنها به نسبت R_2/R_1 بستگی دارد. ۲۷-۶ حداکثر بار Q که یک خازن می تواند ذخیره کند، هم توسط ظرفیت خازن و هم توسط استقامت دی الکتریک ماده دی الکتریک، یعنی E_{max} (به جدول ۴-۱ رجوع شود) تعیین می شود. (الف) Q_{max} را بر حسب ϵ و E_{max} برای خازنی با صفحات موازی تعیین کنید. (ب) کدام دی الکتریک، اکسید آلومینیم یا شیشه، بار بیشتری در خازنی با صفحات موازی و مساحت صفحات یکسان، ذخیره می کنند؟

۲۸-۶ (الف) با استفاده از روش گشتاورها که در بخش ۳-۱۲ توضیح داده شده، ظرفیت خازنی با صفحات مربعی را محاسبه کنید. حداقل آرایه های 1×1 ، 2×2 ، 3×3 و 4×4 را انجام دهید. (ب) نتایج را با ظرفیت به دست آمده از تقریب صفحه نامتناهی مقایسه کنید.



جریان الکتریکی

تاکنون بارهای ساکن را بررسی می‌کردیم؛ اکنون می‌خواهیم بارهای در حال حرکت یکنواخت را مطالعه کنیم. این گفته به این معناست که ما با مواد رسانای الکتریسیته سروکار داریم زیرا، برحسب تعریف، رسانا ماده‌ای است که در آن حاملهای بار تحت تأثیر میدانهای الکتریکی پایا، آزادی حرکت دارند (بخش ۲-۵). تعریف بالا نه تنها شامل رساناهای متعارف نظیر فلزها و آلیاژهاست، بلکه نیمرساناها، الکترولیتها، گازهای یونیده، دی‌الکتریکهای ناکامل، و حتی خلأ اطراف کاتد گسیلنده گرمایونی را نیز در بر می‌گیرد. در بسیاری از رساناها، حاملهای بار، الکترونها هستند، و در سایر موارد ممکن است یونهای مثبت یا منفی حامل بار باشند.

بارهای متحرک تشکیل جریان می‌دهند، و فرایندی که در آن بار انتقال می‌یابد رسانش نام دارد. به عبارت دقیق‌تر، جریان I به صورت آهنگ انتقال بار از سطح معینی در دستگاه رسانا (مثلاً از مقطع مفروضی از یک سیم) تعریف می‌شود. بنابراین

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (۱-۷)$$

که در آن $Q = Q(t)$ بار خالص منتقل شده در زمان t است. یکای جریان در دستگاه mks

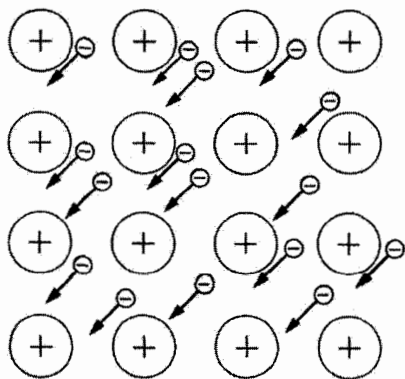
آمپر (A) است، که به افتخار فیزیکدان فرانسوی آندره ماری آمپر^۱ نامگذاری شده است. بدیهی است که

$$\text{یک کولن} \\ \text{یک ثانیه} = \text{یک آمپر}$$

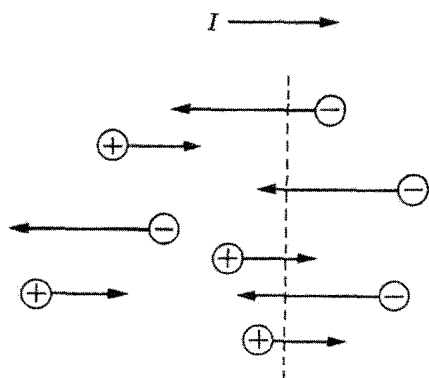
۱-۷ ماهیت جریان

در فلزات جریان تماماً توسط الکترون‌ها حمل می‌شود، در حالی‌که یونهای مثبت سنگین در مکانهای منظمی در ساختار بلوری، ثابت‌اند (شکل ۱-۷). از هراتم فقط الکترونهای ظرفیت آن (الکترونهای خارجی‌ترین مدار) آزادند که در فرایند رسانش شرکت کنند. سایر الکترونها به یونهای خود قویاً مقیدند. در شرایط حالت پایا، می‌توان الکترونها را از نقطه‌ای به فلز وارد و از نقطه‌ای دیگر از آن خارج کرد، که در این حال جریان تولید می‌شود، اما فلز رویهمرفته از لحاظ الکتروستاتیکی خنثی است. نیروهای قوی الکتروستاتیکی از تجمع الکترونهای اضافی در هر نقطه از فلز جلوگیری می‌کنند. همین‌طور، کمبود الکترونها به‌وسیلهٔ نیروهای الکتروستاتیکی با علامت مخالف جبران می‌شود. بعداً خواهیم دید که در رساناها بار اضافی با سرعت فوق‌العاده زیاد تلف می‌شود. از این رو، متوجه می‌شویم که می‌توان موضوع جریان الکتریکی را بدون در نظر گرفتن جزئیات اثرهای الکتروستاتیکی وابسته به حاملهای بار مطالعه کرد.

در الکترولیتها، هم یونهای مثبت و هم یونهای منفی، هر دو، جریان را حمل می‌کنند. با وجود این، چون بعضی یونها سریع‌تر از یونهای دیگر حرکت می‌کنند، معمولاً یک نوع یون در رسانش نقش غالب را ایفا می‌کند. توجه به این نکته مهم است که حرکت یونهای مثبت و منفی در جهات مخالف (شکل ۱-۷) سبب ایجاد جریان در جهت یکسانی می‌شود. صحت این گفته از روی



شکل ۱-۷ نمودار طرحوارهٔ حرکت الکترونهای رسانش در فلزات.



شکل ۲-۷ جریانی که در اثر حرکت حاملهای بار مثبت و منفی، هر دو، تولید می‌شود.

معادله (۱-۷) آشکار است زیرا بار خالص انتقال یافته از هر سطح مفروض، هم به علامت حامل بار و هم به جهت حرکت آن بستگی دارد. بنابراین، در شکل ۲-۷، هر دو گروه حامل بارهای مثبت و منفی، جریانی به سمت راست تولید می‌کنند. برحسب قرارداد، جهت حرکت بارهای مثبت (یا به طور معادل، جهت مخالف حرکت بارهای منفی) را به عنوان جهت یا سوی جریان انتخاب می‌کنند. به طور کلی، جریان الکتریکی در پاسخ به میدان الکتریکی به وجود می‌آید. اگر یک میدان الکتریکی بر جسم رسانایی اعمال شود، موجب خواهد شد که حاملهای بار مثبت در جهت کلی میدان و حاملهای منفی در خلاف جهت میدان حرکت کنند. بنابراین، تمام جریانهایی که در این فرایند تولید می‌شوند، با میدان هم جهت‌اند.

در تخلیه الکتریکی گازها، جریان توسط یونهای مثبت و منفی، هر دو، حمل می‌شود، لیکن چون الکترونها در مقایسه با یونهای سنگین تحرک خیلی بیشتری دارند، عملاً تمام جریان به وسیله الکترونها حمل می‌شود. رسانش در گازها تا حدودی پیچیده است، زیرا جمعیتهای الکترونی و یونی با تغییر شرایط تجربی به شدت تغییر می‌کنند (عامل تعیین کننده این شرایط در درجه اول فشار گاز و افت پتانسیل در دو سر گاز است). در شرایط معینی فرایند آبخاری به وقوع می‌پیوندد؛ در این فرایند یونهای معدودی که در آغاز حضور دارند، شتاب می‌گیرند و با اتمهای خنثی برخورد ناکشسان می‌کنند و در نتیجه یونها و الکترونهای بیشتری به وجود می‌آورند. این یونهای اضافی نیز می‌توانند سبب برخوردهای یوننده بشوند؛ در نتیجه چگالی حاملهای بار به شدت افزایش می‌یابد.

در شکلهای ۱-۷ و ۲-۷ حاملهای بار را در دو گروه تصویر کرده‌ایم که هر گروه حرکت مشترکی به نام حرکت سوقی دارد. اما چنین تصویری بیش از حد ساده شده است. هر گروه از حاملهای بار در واقع نماینده مجموعه‌ای از ذرات است که با محیط اطراف خود در تعادل گرمایی به سر می‌برند؛ از این رو هر ذره هم حرکت سوقی دارد و هم حرکت گرمایی. حرکت گرمایی اگر چه ممکن

است بزرگ باشد، اما چون کاتوره‌ای هم هست، به انتقال منظم بارها منجر نمی‌شود. از طرف دیگر، حرکت سوقی کاتوره‌ای نیست. پس در مطالعه فرایند رسانش، می‌توانیم از حرکت گرمایی که هیچ جریان خالصی ایجاد نمی‌کند، چشم پوشیم و همان تصویر ساده‌ای را که در شکل‌های ۷-۱ و ۷-۲ نشان داده شد، به‌کار ببریم. اما در برخی دیگر از فرایندهای انتقال، نظیر رسانش در گرادیان گرمایی (که اثر ترموالکتریک را موجب می‌شود)، باید حرکت گرمایی را با جزئیات آن به حساب آوریم تا بتوانیم این پدیده‌ها را کاملاً درک کنیم.

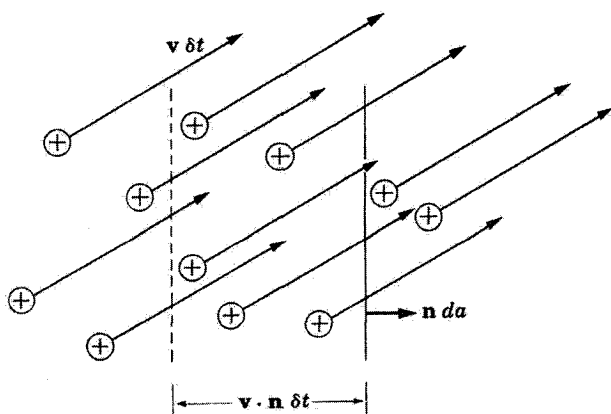
جریان‌هایی را که تاکنون در این بخش تشریح کردیم، به جریان‌های رسانشی موسوم‌اند. این جریان‌ها نمایانگر حرکت سوقی حامل‌های بار در یک محیط خنثی هستند، که خود این محیط ممکن است در کل ساکن باشد و معمولاً نیز چنین است. مایعها و گازها ممکن است حرکت هیدرودینامیکی نیز داشته باشند، و اگر محیط چگالی بار الکتریکی داشته باشد، این حرکت هیدرودینامیکی نیز خود، جریان‌هایی به‌وجود خواهد آورد. این جریان‌ها که از انتقال جرمی محیط باردار ناشی می‌شوند، جریان‌های همرفتی نامیده می‌شوند. جریان‌های همرفتی در مطالعه الکتریسیته جوی دارای اهمیت بسیاریند. در واقع، جریان‌های همرفتی رو به بالا در توفان‌های تندری برای حفظ گرادیان پتانسیل عادی جو در بالای زمین کافی‌اند. حرکت ذرات باردار در خلأ (نظیر حرکت الکترونها در فضای خلأ لامپ دوقطبی) نیز یک جریان همرفت تولید می‌کند. یکی از خصوصیات مشخصه جریان همرفتی آن است که از لحاظ الکتروستاتیکی خنثی نیست و معمولاً باید بار الکتروستاتیکی آن را به حساب آورد.

در بقیه این فصل منحصراً به بررسی جریان‌های رسانشی می‌پردازیم.

۷-۲ چگالی جریان: معادله پیوستگی

در این بخش ابتدا محیط رسانایی را که فقط یک نوع حامل بار الکتریکی، q ، دارد بررسی می‌کنیم. تعداد این حاملها را در واحد حجم با N نشان می‌دهیم. مطابق بخش پیش، از حرکت گرمایی کاتوره‌ای صرف‌نظر می‌کنیم و برای تمام حاملها سرعت سوق یکسان \mathbf{v} را در نظر می‌گیریم. اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم جریانی را که از عنصر سطح da (مطابق شکل ۷-۳) می‌گذرد، محاسبه کنیم. در زمان δt هر حامل به اندازه $\mathbf{v} \delta t$ حرکت می‌کند. از روی شکل پیداست که بار δQ که در مدت δt از سطح da می‌گذرد، برابر است با حاصل ضرب q در مجموع تمام حامل‌های بار موجود در حجم $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t da$ ؛ که در آن \mathbf{n} بردار یگانه عمود بر سطح da است. بنا بر معادله (۷-۱)، جریانی که از سطح da می‌گذرد، برابر است با

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qN\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t da}{\delta t} = Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (۷-۲)$$



شکل ۳-۷ حرکت سوقی حاملهای بار در گذر از صفحه da در زمان δt .

اگر بیش از یک نوع حامل بار وجود داشته باشد، هر یک از انواع حاملها سهمی نظیر رابطه (۲-۷) در تولید جریان خواهند داشت. در حالت کلی، جریانی که از سطح da می‌گذرد عبارت است از

$$dI = \left[\sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \right] \cdot \mathbf{n} da \quad (3-7)$$

جمع‌بندی بالا بر روی انواع حاملهای مختلف انجام می‌شود.

مقدار داخل کروشه برداری است که دارای بُعد جریان بر واحد سطح است؛ این کمیت را چگالی بار می‌نامند و با نماد \mathbf{J} نمایش می‌دهند:

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \quad (4-7)$$

چگالی جریان را می‌توان برای هر نقطه از محیط رسانا تعریف کرد و بنابراین، یک تابع نقطه‌ای برداری است. این بردار کمیتی است بسیار مفید که مستقیماً در معادلات دیفرانسیل اساسی نظریه الکترومغناطیس وارد می‌شود. یکای \mathbf{J} در دستگاه mks آمپر بر مترمربع (A/m^2) است. معادله (۳-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

و جریانی که از سطح S می‌گذرد، یعنی از سطحی با شکل دلخواه و با مساحتی که اندازه‌ای

ماکروسکوپی دارد، با انتگرال زیر داده می‌شود

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (5-7)$$

چگالی جریان \mathbf{J} و چگالی بار ρ کمیتهایی مستقل از یکدیگر نیستند، بلکه در هر نقطه با یک معادله دیفرانسیل به هم مربوط می‌شوند؛ این معادله به معادله پیوستگی معروف است. ارتباط آن دو از این حقیقت ناشی می‌شود که بار نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود. معادله پیوستگی را می‌توان با به کار بردن معادله (5-7) در مورد یک سطح بسته دلخواه S ، به دست آورد. جریان الکتریکی‌ای که به حجم V محصور در سطح S وارد می‌شود، از معادله زیر به دست می‌آید

$$I = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (6-7)$$

انتگرال دوم از به کار بردن قضیه دیورژانس حاصل شده است. علامت منها در معادله (6-7) به این خاطر آمده است که \mathbf{n} بردار یکه عمود به سمت خارج است، در صورتی که ما می‌خواهیم I را هنگامی مثبت بنامیم که جریان خالص بار از خارج V به سمت داخل آن باشد. از طرفی مطابق معادله (1-7)، I برابر است با آهنگ انتقال بار به داخل حجم V یعنی:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (7-7 \text{ الف})$$

چون ما با حجم ثابت V سروکار داریم، مشتق زمانی فقط بر روی تابع ρ عمل می‌کند. اما ρ تابعی است از مکان و زمان، پس مشتق زمانی وقتی به زیر علامت انتگرال برده می‌شود، به مشتق جزئی بر حسب زمان تبدیل می‌شود. بنابراین

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (7-7 \text{ ب})$$

اکنون با مساوی قرار دادن معادلات (6-7) و (7-7 ب) نتیجه می‌گیریم:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dv = 0 \quad (8-7)$$

اما حجم V کاملاً اختیاری است، و تنها راهی که معادله (8-7) می‌تواند برای هر بخش حجم اختیاری از محیط صادق باشد آن است که انتگرالده آن در تمام نقاط صفر شود و نتیجه زیر را به دست می‌دهد.

معادله پیوستگی عبارت است از

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (9-7)$$

۳-۷ قانون اهم: رسانندگی

تجربه نشان داده است که در هر فلز در دمای ثابت چگالی جریان \mathbf{J} به طور خطی با میدان الکتریکی متناسب است.

بنابراین معادله ساختمندی به صورت زیر است

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (10-7)$$

ثابت تناسب یعنی g را رسانندگی می نامند. معادله (۱۰-۷) که قانون اهم نامیده می شود، برای تعداد زیادی از مواد رسانای معمولی تقریباً صحیح است.

اما در حالت کلی برای مواد همسانگرد، به جای معادله (۱۰-۷) باید از معادله زیر استفاده کرد

$$\mathbf{J} = g(E)\mathbf{E}$$

که در آن $g(E)$ تابعی از میدان الکتریکی است. موادی که در معادله (۱۰-۷) در مورد آنها صدق می کند محیطهای خطی همسانگرد یا محیطهای اهمی نامیده می شوند. در اینجا نیز، مانند مبحث دی الکتریکها، ما بیشتر با موارد خطی سروکار خواهیم داشت. معکوس رسانندگی را مقاومت ویژه، η ، می نامند. بنابراین

$$\eta = \frac{1}{g} \quad (11-7)$$

یکای η در دستگاه mks ولت-متر بر آمپر یا به طور ساده اهم-متر است که در آن اهم (Ω) چنین تعریف می شود

$$\text{یک اهم} = \frac{\text{یک ولت}}{\text{یک آمپر}}$$

۱. نمادهای متداول برای مقاومت ویژه و رسانندگی به ترتیب ρ و σ است، لیکن برای اینکه با نمادهای مربوط به چگالی حجمی بار ρ و چگالی سطحی بار σ اشتباه نشوند، ما از نمادهای η و g استفاده خواهیم کرد.

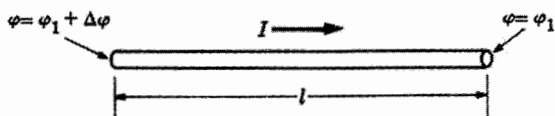
یکای رسانندگی g عبارت است از $\Omega^{-1}m^{-1}$ یا S/m . یک زیمنس (S) برابر است با عکس یک اهم. (زیمنس در گذشته مهو نامیده می شد.)

مقاومت ویژه تعدادی از مواد معمولی در جدول ۷-۱ آمده است. از روی این جدول پیداست که کلیه مواد تا حدی الکتریسیته را از خود عبور می دهند، اما موادی را که عایق (دی الکتریک) نامیدیم، درجه رساناییشان به نسبت ضریب فوق العاده بزرگی (به بزرگی 10^{23}) از فلزات ضعیف تر است. تفاوت بین رسانا و عایق را در بخش ۷-۷ به طور کمی مطالعه خواهیم کرد.

جدول ۷-۱ مقاومت ویژه η و ضریب گرمایی مقاومت α برای برخی از مواد معمولی در $20^\circ C$

ماده	η بر حسب Ωm	$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT}, (^\circ C)^{-1}$
آلومینیم	$2,65 \times 10^{-8}$	0.0043
مس	$1,67 \times 10^{-8}$	0.0039
طلا	$2,35 \times 10^{-8}$	0.004
آهن	$9,71 \times 10^{-8}$	0.0065
نیکل	$6,84 \times 10^{-8}$	0.0069
نقره	$1,59 \times 10^{-8}$	0.0041
جیوه	$95,8 \times 10^{-8}$	0.0009
تنگستن	$5,51 \times 10^{-8}$	0.0045
کنستانتین (مس، نیکل ۴۰)	$49,0 \times 10^{-8}$	0.0000
نیکروم	$100,0 \times 10^{-8}$	0.0004
ژرمانیم (خالص)	0.46	-0.048
ژرمانیم (5×10^{-6} ٪ آرسنیک)	0.11	
گرافیت	$1,4 \times 10^{-5}$	
محلول نمک طعام (اشباع شده)	0.44	-0.005
اکسید آلومینیم	1×10^{14}	
شیشه	$10^{10} - 10^{12}$	
ید	$1,3 \times 10^2$	
کوارتز (SiO_2)	1×10^{12}	
گوگرد	2×10^{15}	
چوب	$10^8 - 10^{11}$	

ماخذ: اطلاعات از کتاب زیر گرفته شده است



شکل ۷-۴ شکل هندسی قسمتی از سیم مستقیم.

جسم رسانایی را که از قانون اهم پیروی می‌کند در نظر بگیرید. این جسم سیم مستقیمی است با سطح مقطع یکنواخت که دو سر آن در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده است (شکل ۷-۴). فرض کنید که سیم همگن است و با رسانندگی ثابت g مشخص می‌شود. تحت این شرایط یک میدان الکتریکی در سیم وجود خواهد داشت که با رابطه زیر به $\Delta\varphi$ مربوط می‌شود

$$\Delta\varphi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (۷-۱۲ الف)$$

بدیهی است که میدان الکتریکی نمی‌تواند مؤلفه حالت پایایی در جهت عمود بر محور سیم داشته باشد، زیرا مطابق معادله (۷-۱۰) چنین مؤلفه‌ای سبب باردار کردن مداوم سطح سیم خواهد شد. بنابراین میدان الکتریکی صرفاً طولی خواهد بود.

به علاوه، به علت شکل هندسی رسانا، میدان الکتریکی در تمامی نقاط در طول سیم باید یکسان باشد. پس معادله (۷-۱۲ الف) به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta\varphi = El \quad (۷-۱۲ ب)$$

که در آن l طول سیم است. اما میدان الکتریکی E وجود جریانی به چگالی $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ را ایجاب می‌کند. جریانی که از هر مقطع سیم عبور می‌کند، برابر است با

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = JA \quad (۷-۱۳)$$

که در آن A سطح مقطع سیم است. از ترکیب معادله (۷-۱۳) با معادلات (۷-۱۰) و (۷-۱۲ ب) نتیجه می‌گیریم که

$$I = \frac{gA}{l} \Delta\varphi \quad (۷-۱۴)$$

که رابطه‌ای خطی بین I و $\Delta\varphi$ است.

کمیت l/gA را مقاومت سیم می‌نامند و با نماد R نشان داده خواهد شد. با به کار بردن نماد R می‌توانیم معادله (۷-۱۴) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\Delta\varphi = RI \quad (۷-۱۵)$$

که شکل آشنای قانون اهم است (بدیهی است که R را برحسب اهم می‌سنجند). معادله (۷-۱۵) را می‌توان به منزله تعریفی از مقاومت جسم یا وسیله‌ای که یک جریان ثابت را از خود عبور می‌دهد دانست. در حالت کلی، R به مقدار این جریان بستگی خواهد داشت. اما همان‌طور که قبلاً خاطر نشان شد، ما اصولاً به مواد رسانای خطی علاقه‌مندیم که مواد اهمی نامیده می‌شوند و در مورد این مواد R به جریان بستگی ندارد.

کار انجام‌شده توسط میدان، هنگامی که بار dQ در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ عبور کند، برابر است با $dW = dQ \Delta\varphi$. توان مربوط برابر است با

$$P = I\Delta\varphi = I^2 R = (\Delta\varphi)^2 / R$$

که دو صورت آخری از ترکیب با قانون اهم به دست می‌آیند. این توان به صورت گرمای ژول در جسم تلف می‌شود.

۴-۷ جریانهای پایا در محیطهای پیوسته

شباهت بسیار نزدیکی بین یک دستگاه الکتروستاتیکی مرکب از دی‌الکتریکهایی که توسط سطوح هم‌پتانسیل محصور شده‌اند از یک سو، و دستگاهی که جریان پایایی را هدایت می‌کند، از سوی دیگر، وجود دارد. در این بخش این شباهت را بررسی می‌کنیم.

محیطی رسانا، همگن و اهمی (خطی) را در نظر بگیرید که تحت شرایط رسانش حالت پایا قرار دارد. چون صرفاً با حالت پایا سروکار داریم، چگالی بار موضعی $\rho(x, y, z)$ مقدار حالت تعادل خود را دارد و در هر نقطه محیط $\partial\rho/\partial t = 0$ است. به این ترتیب معادله پیوستگی (۷-۹) به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{جریانهای پایا}) \quad (۷-۱۶)$$

از به کار بردن قانون اهم و ترکیب آن با رابطه (۷-۱۶) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \cdot g\mathbf{E} = 0$$

که برای محیط همگن به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

اما چون برای میدان ساکن $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، پس می‌توان \mathbf{E} را از یک پتانسیل ندره‌ای به دست آورد:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

از ترکیب دو معادله اخیر، نتیجه می شود

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (17-7)$$

که این معادله لاپلاس است.

بنابراین می بینیم که مسئله رسانش حالت پایا را می توان به همان روش مسائل الکتروستاتیکی حل کرد. معادله لاپلاس به کمک یکی از شیوه هایی که در فصل ۳ بحث کردیم حل و پاسخ مناسب، مثل همیشه، با شرایط مرزی تعیین می شود. شرایط مرزی کافی برای حل مسئله شرایطی است که φ یا \mathbf{J} را در هر نقطه روی سطح محیط رسانا مشخص می کند. چون دو بردار \mathbf{J} و \mathbf{E} با قانون اهم به هم مربوط می شوند، مشخص کردن \mathbf{J} بر روی سطح رسانا معادل است با مشخص کردن \mathbf{E} بر روی آن سطح. به مجرد آنکه پاسخ مناسب معادله لاپلاس پیدا شد، \mathbf{E} (و در نتیجه \mathbf{J}) را می توان در هر نقطه داخل محیط با محاسبه گرادیان تعیین کرد.

در رسانش حالت پایا، جریانی که از مساحت فصل مشترک بین دو رسانا عبور می کند، به دو طریق محاسبه می شود: برحسب چگالی جریان در محیط ۱ یا برحسب چگالی جریان در محیط ۲. چون نتیجه هر دو روش باید یکی باشد، پس مؤلفه قائم \mathbf{J} در عبور از فصل مشترک باید پیوسته باشد، یعنی

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (18-الف)$$

یا

$$g_{1n} E_{1n} = g_{2n} E_{2n} \quad (18-ب)$$

این معادله شبیه به معادله مربوط به پیوستگی D_n در عبور از فصل مشترک دی الکتریکها در مسائل الکتروستاتیکی است.

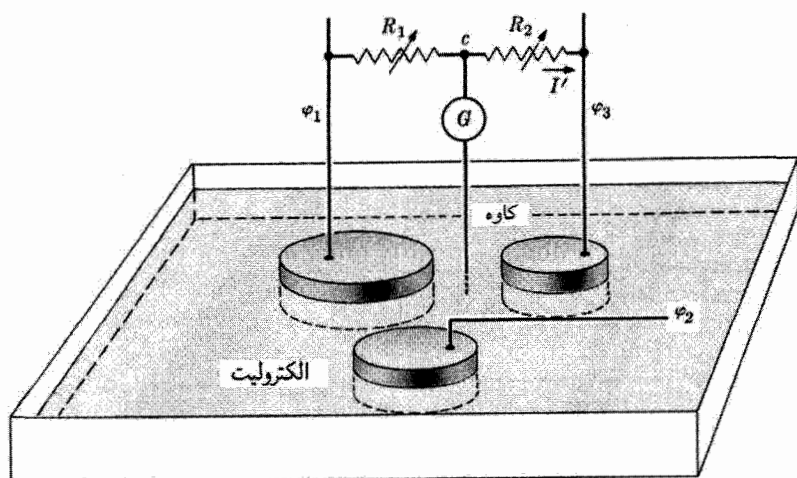
از آنجا که میدان در هر یک از دو محیط ساکن است، پس برای مسیر بسته ای که دو محیط را به هم مربوط کند، خواهیم داشت

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

و یا مطابق اثبات بخش ۴-۷

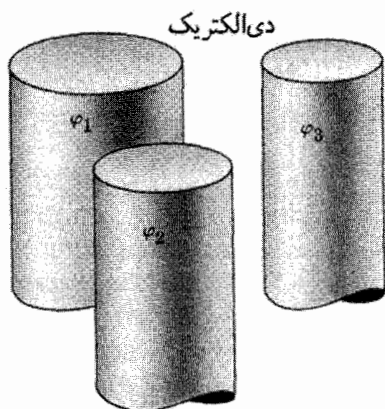
$$E_{1t} = E_{2t} \quad (19-7)$$

این معادله به وضوح برای هر دو نوع مسئله (الکتروستاتیک و رسانش پایا) یکسان است.



شکل ۵-۷ مخزن الکترولیت دوبعدی. سه الکتروود فلزی را در پتانسیلهای φ_1 ، φ_2 و φ_3 نگه می‌داریم و برای سهولت فرض می‌کنیم که $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$. نماد φ_c به معنای مقاومت متغیر است و G گالوانومتر است. فرض می‌کنیم که مقاومت سیمهای رابط قابل صرف نظر کردن است. اگر مقاومت‌های R_1 و R_2 طوری تنظیم شوند که جریان عبوری از G صفر شود، آن وقت $\varphi_c = \varphi_{\text{کاوه}}$ ، و از هر دو مقاومت R_1 و R_2 جریان یکسان I' عبور می‌کند. در این شرایط خواهیم داشت $\varphi_1 - I'R_1 = \varphi_2 + I'R_2 = \varphi_c$ یا $\varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)R_1 / (R_1 + R_2)$.

می‌توان مطالبی را که در بالا مطرح شد، به کمک "مخزن الکترولیتی" شکل ۵-۷ توضیح داد. در اینجا تعدادی الکتروود فلزی که به منابع خارجی پتانسیل متصل‌اند، در یک محیط مایع رسانا (که به‌طور ایده‌آل ابعاد آن بی‌نهایت فرض می‌شود) با رسانندگی متوسط (مثلاً، محلول آب نمک) قرار داده شده‌اند. چون رسانندگی محلول نمک بسیار کمتر از رسانندگی فلز است (جدول ۷-۱)، میدان الکتریکی در فلز از میدان الکتریکی در محلول (به‌ازای چگالی جریان یکسان) خیلی کمتر است. نسبت میدانها به قدری کوچک است که می‌توان در فلز از E چشم پوشید، و هر یک از الکتروودهای فلزی را سطحی هم‌پتانسیل فرض کرد. کاوه رسانای کوچکی را، مطابق شکل ۵-۷، می‌توان برای بررسی پتانسیل محلول به‌کار برد و به این طریق سطوح هم‌پتانسیل آن را رسم کرد. یکی از کاربردهای این روش تجربی، آن است که برای مواردی که شکل هندسی پیچیده‌ای دارند و تعیین پاسخهای معادله لاپلاس به روش تحلیلی مشکل است، پاسخ عددی معادله لاپلاس با این روش به دست می‌آید. پاسخی که به دست می‌آید، محدود به مسئله رسانش نیست، بلکه این پاسخ برای مسئله الکتروستاتیکی هم‌ارزی که در آن همان الکتروودهای فلزی با یک محیط دی‌الکتریک احاطه شده‌اند نیز معتبر است (شکل ۷-۶). در گذشته از روش "مخزن الکترولیتی" برای حل



شکل ۶-۷ مسئله الكتروستاتیکی هم‌ارز با مسئله رسانش در شکل قبل. چون شکل ۵-۷ نشان‌دهنده رسانش دوبعدی است، پس مسئله الكتروستاتیکی نیز دوبعدی است و هر رسانا از استوانه‌ای بی‌نهایت بلند تشکیل شده است.

مسائل الكتروستاتیک دوبعدی با شکل هندسی پیچیده، خیلی زیاد استفاده می‌شود. ولی در زمان حاضر، چنین مسائلی معمولاً به کمک کامپیوتر حل می‌شوند.

به‌عنوان دومین مثال برای رابطه بین رسانش و الكتروستاتیک، دو الكتروید فلزی را واقع در محیطی اهمی، همگن و نامتناهی با رسانندگی متوسط g در نظر می‌گیریم. اگر الكترویدها را در پتانسیلهای φ_1 و φ_2 نگه داریم، جریان I که بین آنها برقرار می‌شود، برابر خواهد بود با

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

که این رابطه مقاومت R بین دو الكتروید^۱ را تعریف می‌کند. این جریان را می‌توان برحسب چگالی جریان \mathbf{J} در محیط نوشت:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$$

در اینجا S هر سطح بسته‌ای است که یکی از الكترویدها را کاملاً در بر بگیرد (به استثنای سیم فلزی عایق‌شده‌ای که جریان را به الكتروید می‌رساند تا پتانسیل آن را ثابت نگه دارد). اما

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}$$

از ترکیب سه معادله آخر نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = g \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۲۰-۷)$$

۱. چون I مشابه Q در مسئله الكتروستاتیکی است، I با $\Delta\varphi$ متناسب است، و $1/R$ به‌عنوان ثابت تناسب تعریف می‌شود. معادله (۲۲-۷) را ببینید.

اگر این میدان الکتریکی ناشی از بارهای الکتروستاتیکی موجود بر روی دو الکتروود فلزی در یک محیط دی‌الکتریک بود، مطابق قانون گاوس داشتیم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon} Q \quad (21-7)$$

که در آن Q بار موجود بر روی الکتروودی است که با سطح S احاطه شده است، و ϵ گذردهی محیط است. در چنین شرایطی دو الکتروود یک خازن تشکیل می‌دهند:

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (22-7)$$

از قرار دادن معادلات (۲۱-۷) و (۲۲-۷) در معادله (۲۰-۷) نتیجه می‌شود

$$RC = \frac{\epsilon}{g} \quad (23-7)$$

این نتیجه، مقاومت بین دو رسانا را در محیطی با رسانایی ضعیف، به ظرفیت مسئله الکتروستاتیکی هم‌ارز آن مربوط می‌کند.

در واقع، این رابطه چیزی بیش از یک شباهت بین محیطهای رسانا و محیطهای دی‌الکتریک است. این رابطه برای هر محیط منفردی با رسانندگی g و ثابت دی‌الکتریک ϵ نیز صادق است. چون دی‌الکتریک ایده‌آل وجود ندارد، هر دی‌الکتریک واقعی دارای یک g است که هر قدر هم کوچک باشد، صفر نیست. از سوی دیگر، حتی رساناهای خوب هم، مقدار ϵ مربوط به خود را دارند. از این رو، هر خازنی یک مقاومت نشتی، و هر مقاومتی یک ظرفیت کم وابسته به خود دارد، و در هر مورد R و C برای دستگاه یا وسیله مورد نظر با معادله (۲۳-۷) به هم مربوط می‌شوند (به‌طور تقریبی، زیرا محیط نامتناهی نیست).

۵-۷ نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی

در فصل ۲ گفتیم که بار اضافی یک رسانا روی سطح آن قرار می‌گیرد. این وضعیت، حالت تعادل است. نزدیک شدن به حالت تعادل را در فصل ۲ بررسی نکردیم، ولی گفتیم که رساناهای خوب (فلزی) فوق‌العاده سریع به حالت تعادل می‌رسند. هر چه رسانایی کمتر باشد، نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی کندتر است. در واقع اگر رسانندگی جسم فوق‌العاده کم باشد، ممکن است برای رسیدن به تعادل الکتروستاتیکی سالها یا حتی بیشتر وقت لازم باشد.

یک محیط همگن و همسانگرد را که با رسانندگی g و گذردهی ϵ مشخص شده و چگالی حجمی بار از پیش تعیین شده آن برابر $\rho_0(x, y, z)$ است، در نظر می‌گیریم. اگر این دستگاه رسانا

را ناگهان از میدانهای الکتریکی وارد بر آن جدا کنیم، به سمت وضع تعادل که در آن هیچ بار اضافی در درون دستگاه وجود ندارد، میل می‌کند. بنا بر معادله پیوستگی داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (۹-۷)$$

که با کمک قانون اهم به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (۲۴-۷)$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{E}$ به چشمه‌های میدان بستگی دارد؛ در واقع، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ ، بنابراین

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon} \rho = 0 \quad (۲۵-۷)$$

به‌ازای g و ϵ ثابت، پاسخ این معادله با مشتق جزئی به صورت زیر است

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) e^{-gt/\epsilon} \quad (۲۶-۷)$$

و دیده می‌شود که نزدیک شدن به حالت تعادل به‌طور نمایی صورت می‌گیرد.

از معادله (۲۶-۷) پیداست که مقدار ϵ/g دارای بعد زمان است؛ این مقدار را ثابت زمانی و

یا زمان واهلش t_c محیط می‌نامند:

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon \eta \quad (۲۷-۷)$$

ثابت زمانی معیاری است که نشان می‌دهد محیط رسانا با چه سرعتی به حالت تعادل الکتروستاتیکی نزدیک می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، t_c مدت زمانی است که طی آن بار در هر ناحیه مشخصی به $1/e$ مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.

هر ماده‌ای می‌تواند در میدان بخصوصی که روی آن اعمال می‌شود، از خود رفتار رساناگونه نشان بدهد، مشروط بر آنکه ثابت زمانی‌اش به مراتب کوتاه‌تر از زمانی باشد که تغییرات میدان اعمال شده را مشخص می‌کند. در برخی از کاربردها تنها کافی است که ثابت زمانی کمتر از 10^{-9} ثانیه باشد، و چون گذرهای اکثر اجسام غیرفلزی^۱ در گستره بین 10^9 تا 10^{∞} قرار می‌گیرد، این امر مستلزم ماده‌ای است که مقاومت ویژه آن کمتر از 10^9 یا 10^{10} اهم-متر باشد. در کاربردهای

۱. معادله (۲۷-۷) را نمی‌توان در مورد یک فلز به‌کار برد، زیرا ما اندازه درست ϵ را نمی‌دانیم؛ در واقع، $10^{-14} \text{ s} \approx t_c \approx \tau$ که در آن τ زمان برخورد است که در بخش ۷-۷ آن را مطرح خواهیم کرد. چنان که خواهیم دید، برای زمانهای کوتاه‌تر از τ فرض $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ صادق نیست.

مربوط به فرکانسهای بالا، برای رفتار رساناگونه واقعی ثابت زمانی کوتاه‌تر و به همان نسبت مقاومت ویژه کمتری لازم است. در واقع باید شرط زیر برقرار باشد

$$t_c \ll \frac{1}{f}$$

که در آن f بالاترین فرکانس موجود در آزمایش است. برای رفتار دی‌الکتریک گونه درست شرط معکوس برقرار است.

۶-۷ شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف

تا به حال رسانش را اصولاً از لحاظ انتقال بار در یک محیط رسانا بررسی و مسئله را برحسب معادلات دیفرانسیلی که باید در هر نقطه صادق باشند، حل می‌کردیم. در این حالتها کمیّت مهمی که باید تعیین شود، چگالی جریان \mathbf{J} است. اما در بسیاری از مسائلی که از جنبه عملی مورد نظرند، حاملهای بار الکتریکی مقیدند از مسیری که مقاومت کمی دارد عبور کنند؛ چنین مسیری را مدار می‌نامند. در این مسائل کمیتهای مهم عبارت‌اند از جریان در هر قسمت از مدار. در این بخش فقط مدارهای حامل جریانهای پایا، یعنی مدارهای جریان مستقیم را بررسی می‌کنیم. هر مدار ممکن است از چندین انشعاب مختلف تشکیل شده باشد و در واقع، مدار را می‌توان به صورت شبکه‌ای از مسیره‌های رسانا تعریف کرد که هر یک می‌توانند ولتاژهای اعمال‌شده معینی داشته باشند. مسئله اساسی در تحلیل مدارها عبارت است از: پیدا کردن جریان در هر یک از انشعابهای مداری که مقاومت و ولتاژ اعمال‌شده در هر یک از انشعابهای آن داده شده باشند.

در فصل ۲ نشان دادیم که انتگرال مؤلفه مماسی میدان الکتروستاتیکی دور هر مسیر بسته‌ای صفر می‌شود؛ یعنی، برای میدان الکتروستاتیکی

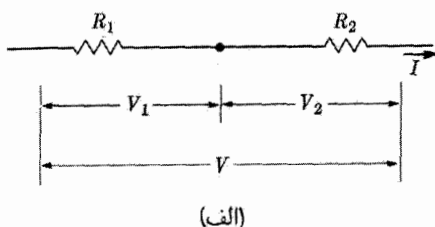
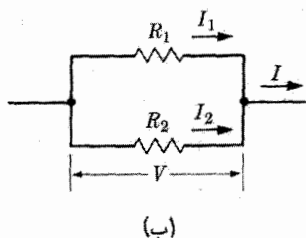
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (28-7)$$

برای مواد اهمی، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. در حالت همسانگردی کلی این رابطه به صورت $\mathbf{J} = g(E)\mathbf{E}$ در می‌آید، ولی $g(E)$ همواره کمیّتی مثبت است، به طوری که معادله (۲۸-۷) ایجاب می‌کند که $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$ باشد. پس نتیجه می‌گیریم که یک نیروی الکتروستاتیکی خالص نمی‌تواند سبب شود که جریان به دور تمامی مدار با سوی یکسانی بگردد. یا به عبارت دیگر، تنها به کمک نیروهای الکتروستاتیکی نمی‌توان جریان پایا برقرار کرد. ولی ممکن است بر ذره باردار q علاوه بر نیروهای ماکروسکوپی الکتروستاتیکی، نیروهای دیگر (مکانیکی، شیمیایی)، و مانند آن نیز اثر کنند، به طوری که در قسمتی از مدار بارها در خلاف جهت \mathbf{E} حرکت کنند. در بخشهای قبل

در مورد مسئلهٔ مربوط به علت ایجاد جریان الکتریکی بحث نکردیم و تنها فرض کردیم که دو نقطهٔ واقع بر یک شیء رسانا به کمک منابع انرژی خارجی در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته می‌شوند. در اینجا نیز کافی است که فرض کنیم چنین ولتاژهای اعمال شده‌ای^۱ وجود دارند، اما اکنون با کمی دور شدن از موضوع اصلی دربارهٔ چگونگی تولید واقعی این ولتاژها بحث خواهیم کرد.

در آزمایشگاه ولتاژ پایا را معمولاً یا به وسیلهٔ باتری و یا به وسیلهٔ یک منبع تغذیهٔ الکترونیکی (که ولتاژ برق شهر را یکسو و صاف می‌کند) تولید می‌کنند، ولی با وسایل گوناگون دیگر، مثلاً مولد وان دوگراف، نیز می‌توان آن را تولید کرد. تحلیل مولد وان دوگراف از لحاظ مفهومی خیلی ساده است. در مولد وان دوگراف بارها را در یک پایانه (سر) بر روی تسمهٔ حامل قرار می‌دهند و آنها را به زور به پایانهٔ دیگری که در انرژی پتانسیل بیشتری قرار دارد می‌برند و در آنجا از تسمه جدا می‌کنند. در کارکرد مولد در حالت پایا، برای هر مسیر بسته داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. مثلاً انتگرال در امتداد تسمه منفی و در امتداد یک مسیر خارجی بین پایانه‌ها به همان مقدار ولی با علامت مثبت است. می‌توانیم یک جریان پایای خارجی را از درون یک مقاومت متصل به دو پایانه عبور دهیم. توان ورودی درست برابر است با توان مکانیکی لازم برای گرداندن تسمه‌ای که بارها را علیه یک میدان الکتریکی منتقل می‌کند. طرز کار باتری نیز همین‌طور است (بجز آنکه «نیروهای» مؤثر در باتری به مکانیک کوانتومی حاکم بر الکتروشمی بستگی دارند)، و در امتداد هر مسیر بسته‌ای $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، حتی در امتداد مسیری که از درون الکترولیت باتری می‌گذرد. ولی آنچه برای تحلیل مدار مهم است صرفاً این است که برای مسیر بسته‌ای که حاوی پایانه‌های منبع ولتاژ است، داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، مشروط بر آنکه یک شاخه از مسیر از درون شبکهٔ مقاومتها بگذرد و شاخهٔ دیگر مستقیماً یک پایانه را به پایانهٔ دیگر، ولی در خارج از منبع وصل کند. هدف نظریهٔ مدارهای الکتریکی به دست آوردن روشی برای تحلیل شاخهٔ اول است، که از میان شبکهٔ مقاومتها می‌گذرد. نیازی نیست که ما به علت ایجاد اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های منبع توان (اعم از علل مکانیکی، شیمیایی، یا مانند آن) را تحلیل کنیم، بلکه تنها کافی است که آن را ولتاژ اعمال شده \mathcal{V} بنامیم. یک منبع ایده‌آل، ولتاژ اعمال شدهٔ \mathcal{V} را تولید می‌کند که به جریان گرفته شده از منبع بستگی ندارد؛ اما ولتاژ دو سر یک منبع حقیقی تا حدودی به جریان بستگی دارد، یعنی $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$. ساده‌ترین فرض که معمولاً صادق است، آن است که این بستگی خطی است:

۱. در کتابهای دیگر ولتاژ اعمال شده را معمولاً نیروی محرکهٔ الکتریکی (یا *emf*) می‌نامند، گرچه واژه مرسوم در آزمایشگاه برای این اختلاف پتانسیل همان ولتاژ اعمال شده است. واژه تاریخی *emf* و مفهوم آن گیج‌کننده و غیر ضروری است، بنابراین در اینجا از آن استفاده نمی‌کنیم. واژهٔ *emf* را برای مفهوم تقریباً متفاوتی، که بعداً معرفی خواهد شد (فصل ۱۱)، نگه می‌داریم.



شکل ۷-۷ (الف) اتصال متوالی و (ب) اتصال موازی دو مقاومت.

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_o - R_I I$$

ضریب R_I را مقاومت داخلی و \mathcal{V}_o را ولتاژ مدار باز (یا در بیشتر کتابهای دیگر، emf) می‌نامند. قبل از آنکه به مسئلهٔ عمومی شبکه پردازیم، ابتدا بحث اتصالهای سادهٔ متوالی و موازی مقاومتها را مرور می‌کنیم. مقاومت، که در بخش ۳-۷ تعریف شد، خاصیتی از شیء مادی مورد نظر است که هم به ماهیت مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ شیء و هم به شکل هندسی آن بستگی دارد. (در حالی که مقاومت ویژه تنها به ماهیت جسم رسانا بستگی دارد). شیء رسانایی به شکل مناسب را که مشخصهٔ اصلی آن مقاومتش است، مقاوم (یا اصطلاحاً مقاومت) می‌نامند و معمولاً آن را با نماد ρ نمایش می‌دهند. مقاومتها را می‌توان به یکدیگر متصل و شبکهٔ مقاومت درست کرد، و راههای متصل مقاومتها در شکل ۷-۷ نشان داده شده‌اند. شکل الف اتصال متوالی را نشان می‌دهد که در این حالت از هر دو مقاومت جریان یکسان I می‌گذرد. اگر معادلهٔ (۷-۱۵) را در مورد هر یک از مقاومتها به‌کار ببریم و توجه کنیم که اختلاف پتانسیل^۱ به صورت $V = V_1 + V_2$ است، نتیجه می‌گیریم که

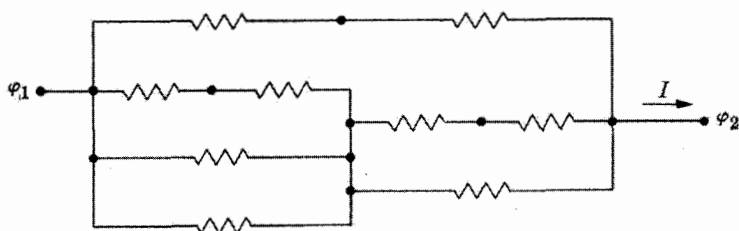
$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

بنابراین مقاومت معادل این ترکیب برابر است با

$$R = R_1 + R_2 \quad (\text{اتصال متوالی}) \quad (۲۹-۷)$$

در اتصال موازی (شکل ۷-۷ ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر مقاومت یکی است و جریان کلی که از این ترکیب می‌گذرد برابر است با $I = I_1 + I_2$. با به‌کار بردن معادلهٔ (۷-۱۵)، نتیجه می‌گیریم

۱. در این بخش به جای نماد $\Delta \varphi$ از V برای اختلاف پتانسیل استفاده خواهیم کرد تا با متداول‌ترین نمادگذاری مدارهای الکتریکی هماهنگ باشد.



شکل ۷-۸ یک شبکه مقاومت.

که

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V$$

و مقاومت معادل این ترکیب از رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{اتصال موازی}) \quad (۷-۳)$$

مقاومت معادل شبکه پیچیده تری مانند شبکه شکل ۷-۸ را می توان از ترکیب کردن دوبه دوی مقاومتها طبق معادله (۷-۲۹) یا (۷-۳۰) و تکرار این عمل تا زمانی که فقط یک مقاومت معادل باقی بماند، به دست آورد. این روش برای همه شبکه ها قابل استفاده خواهد بود؛ ولی هر شبکه ای را که دو پایانه داشته باشد، می توان به کمک روش زیر به یک مقاومت معادل تبدیل کرد.

هر مسئله شبکه را می توان به کمک دو قاعده که به قوانین کیرشهوف^۱ موسوم اند، با روشی منظم حل کرد. قبل از بیان این قوانین، به تعریف دو اصطلاح می پردازیم. نقطه انشعاب، نقطه ای از مدار است که در آن تعداد سه رسانا یا بیشتر به هم می پیوندند، مانند نقاط a, b, c و یا d در شکل ۷-۹. هر مسیر رسانای بسته را در شبکه، یک حلقه گویند.

حال می توان قوانین کیرشهوف را چنین بیان کرد:

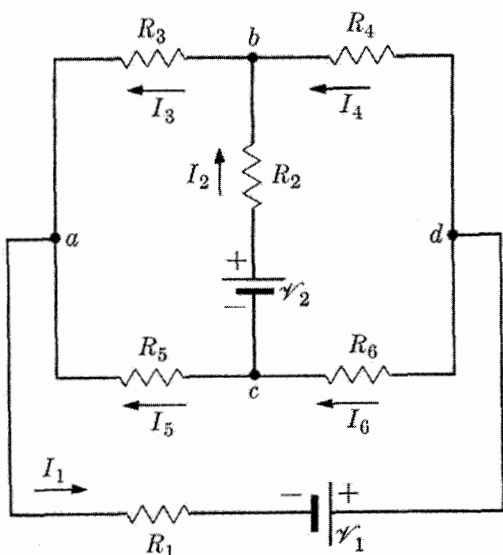
I. جمع جبری جریانهایی که به یک نقطه انشعاب وارد می شوند صفر است، یعنی:

$$\sum L_j = 0 \quad (I)$$

II. جمع جبری اختلاف پتانسیلهای دور هر حلقه از شبکه برابر است با صفر، یعنی:

$$\sum V_j = 0 \quad (II)$$

۱. به افتخار گوستاو رابرت کیرشهوف (Gustav Robert Kirchoff) (۱۸۲۴-۱۸۸۷).



شکل ۹-۷ یک مدار نمونه که کاربرد قوانین کیرشهوف در مورد آن ضروری است. نماد $\text{---} \parallel \text{---}$ برای نشان دادن ولتاژ اعمال شده به‌کار می‌رود. در یک مسئله مداری نمونه، V ها و R ها مشخص‌اند و جریانها را باید به‌دست آورد. دو معادله از شش معادلهٔ مربوط به جریانها در مدار بالا عبارت‌اند از $-I_1 + I_2 + I_5 = 0$ و $V_1 = I_2 R_2 + I_6 R_6 + I_1 R_1$.

قانون اول دقیقاً بیان صوری این واقعیت است که بارهای الکتریکی نمی‌توانند در نتیجهٔ یک جریان پایا، در یک نقطهٔ انشعاب در مدار جمع شوند. این قانون بیان مجدد معادلهٔ پیوستگی در شکل معادلات (۶-۷) و (۷-۷) است، و بدین‌سان هم‌ارز است با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{جریانهای پایا}) \quad (۱۶-۷)$$

قانون دوم صرفاً بیان مجدد معادلهٔ زیر است

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{میدانهای ساکن}) \quad (۲۸-۷)$$

برای به‌کار بردن قوانین کیرشهوف، لازم است که قانون اهم را یادآوری کنیم:
افت پتانسیل در مقاومت R_j برابر است با

$$V_j = I_j R_j \quad (\text{مقاومت}) \quad (۱۵-۷)$$

در اینجا فرض می‌شود که پتانسیل بالاتر در انتهای است که جریان مفروض از آنجا وارد مقاومت

می شود. معادله (۷-۱۵) شکل هم ارز معادله زیر است

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (\text{محیط داخلی}) \quad (۷-۱۰)$$

بالاخره، ولتاژهای اعمال شده را به صورت زیر نمادگذاری می کنیم

$$V_j = -\mathcal{V}_j \quad (\text{ولتاژ اعمال شده})$$

اگر این معادله را با معادله (۷-۱۵) ترکیب کنیم، می توانیم قانون II کیرشهوف را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\sum \mathcal{V}_j = \sum I_j R_j \quad (\text{II الف})$$

اگر لازم باشد که مقاومت های داخلی چشمه ها به حساب آیند، این مقاومتها می توانند به سمت راست (II الف) منتقل شوند.

قبل از اینکه قوانین کیرشهوف را در مورد مسئله خاصی به کار بریم، لازم است جهت هایی برای جریانهای هر یک از شاخه ها فرض کنیم. این جهت ها باید در نقشه مدار نشان داده شوند. آن وقت فرمولبندی معادلات (I) و (II الف) بر اساس این جهت های مفروض نوشته می شوند. چنانچه از حل عددی این معادلات برای جریان خاصی یک مقدار عددی منفی به دست آید، جهت صحیح این جریان مخالف جهت مفروض است. در مسئله ای که در شکل ۷-۹ نشان داده شده است، شش جریان مجهول وجود دارند. این جریانها با نمادهای I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 و I_6 نشان داده شده اند و برای هر یک جهت مفروضی منظور شده است.

قانون اول کیرشهوف را برای هر نقطه انشعاب می توان به کار برد، لیکن معادلاتی که به دست می آیند همگی مستقل نیستند. قاعده کلی آن است که چنانچه n نقطه انشعاب وجود داشته باشد، $n - 1$ نقطه آن معادلات مستقل دارند. در مسئله نشان داده شده در شکل ۷-۹ شش جریان مجهول وجود دارد. حل این مسئله به سه معادله نقطه انشعاب و سه معادله حلقه نیاز دارد.

جمع بندیها در روابط (I) و (II الف)، جمع جبری اند. در رابطه (I) اگر جهت مفروض جریان به سمت نقطه انشعاب مورد بحث باشد، جریان مثبت در نظر گرفته می شود و اگر این جریان به سمت دور شدن از نقطه اتصال باشد، منفی در نظر گرفته می شود. در به کار بردن معادلات حلقه، یک جهت (ساعتگرد یا پادساعتگرد) برای پیمودن حلقه باید انتخاب شود. هر ولتاژ اعمال شده ای را که بتواند (به خودی خود) در جهت پیمودن حلقه جریانی مثبت ایجاد کند، مثبت فرض می کنیم.

هر جمله IR را، چنانچه جریانی که از مقاومت وابسته به آن عبور می‌کند در جهت پیمودن حلقه باشد، مثبت در نظر می‌گیریم.

مثال ۷-۱ جریان در یک شبکه مقاومتی با دو ولتاژ اعمال شده

شبکه مقاومتی شکل ۷-۱۰ را در نظر بگیرید. مقاومت‌های R_1 ، R_3 و R_5 و ولتاژهای اعمال شده \mathcal{V}_1 و \mathcal{V}_2 معلوم‌اند. جریانش را در مقاومت‌های مذکور به دست آورید.

حل: شکل ۷-۱۰ عمداً به این صورت رسم شده و به گونه‌ای نمادگذاری شده است که با شکل قبلی، یعنی شکل ۷-۹ مطابقت داشته باشد. جریانهای مفروض را که از مقاومت‌های مورد بحث می‌گذرند، با I_1 ، I_3 و I_5 نشان می‌دهیم تا آنها هم با جریانهای شکل ۷-۹ هماهنگ باشند. با به کار بردن قوانین کیرشهوف، معادلات زیر را به دست خواهیم آورد

$$I_3 + I_5 - I_1 = 0$$

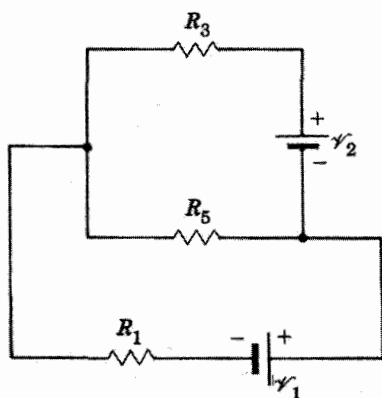
$$\mathcal{V}_1 = I_1 R_1 + I_5 R_5$$

$$\mathcal{V}_2 = I_3 R_3 - I_5 R_5$$

با استفاده از معادله اول، I_3 را از معادله آخر حذف می‌کنیم. سپس هر کدام از معادلات باقیمانده را برای I_5 حل می‌کنیم و آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم. اگر معادلات را برای I_1 حل کنیم، خواهیم داشت

$$I_1 = \frac{\mathcal{V}_2 + f \mathcal{V}_1}{R_3 + f R_5}$$

که در آن $f \equiv 1 + R_3/R_5$.



شکل ۷-۱۰ شبکه مقاومتی برای مثال ۷-۱.

۷-۷ نظریه میکروسکوپی رسانش

درک رفتار خطی که به صورت قانون اهم بیان می شود و نیز برخی جنبه های تجربی دیگر رسانش، بر اساس یک مدل میکروسکوپی ساده برای ماده ای رسانا امکان پذیر است. یک ذره آزاد محیط را با بار q و جرم m در نظر می گیریم. در اثر نیروی الکتریکی موضعی، $q\mathbf{E}$ ، سرعت سوق ذره طبق رابطه $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}$ افزایش خواهد یافت. اگر ذره باردار در خلأ بود، به شتاب گرفتن ادامه می داد. ولی در محیطی مادی که یک جریان پایا از خود عبور می دهد، سرعت سوق ثابت است و بنابراین نیروی کل وارد بر ذره باید برابر با صفر باشد. پس علاوه بر نیروی الکتریکی، یک نیروی دیگر ناشی از محیط نیز باید به ذره وارد شود. ساده ترین فرض ممکن، آن است که این نیروی کندکننده متناسب با سرعت باشد، لذا معادله حرکت به صورت زیر در می آید

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - G\mathbf{v} \quad (۳۱-۷)$$

مشاهده می شود که وقتی $d\mathbf{v}/dt = 0$ باشد، پاسخ حالت پایا برای سرعت سوق به صورت زیر است

$$\mathbf{v}_d = \frac{q}{G} \mathbf{E} \quad (۳۲-۷)$$

با وجود این، بررسی پاسخ کامل معادله (۳۱-۷) جالب است؛ این پاسخ عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{G} \mathbf{E} (1 - e^{-Gt/m}) \quad (۳۳-۷)$$

مشروط بر آنکه شرایط اولیه $\mathbf{v}(0) = 0$ برقرار باشد. این پاسخ نشان می دهد که سرعت سوق موضعی به طور نمایی به مقدار پایای خود نزدیک می شود، یعنی به صورت $e^{-t/\tau}$ که در آن τ ، زمان واهلش، برابر است با

$$\tau = \frac{m}{G} \quad (۳۴-۷)$$

اگر G را از دو معادله (۳۲-۷) و (۳۴-۷) حذف کنیم، برای سرعت سوق در حالت پایا مقدار زیر را به دست می آوریم

$$\mathbf{v}_d = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E} \quad (۳۵-۷)$$

هنگامی که این نتیجه را با معادله (۴-۷) برای تنها یک نوع حامل بار ترکیب کنیم، چگالی جریان را به دست می آوریم

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}_d = \frac{Nq^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad (۳۶-۷)$$

که بنا بر قانون اهم با میدان متناسب است. از مقایسه معادله بالا با معادله (۷-۱۰)، برای رسانندگی

مقدار زیر به دست می آید

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (۳۷-۷)$$

یا در حالتی که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشند، مقدار g به صورت زیر در می آید

$$g = \sum \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$$

برای یک رسانای الکتریکی نسبتاً خوب، نظیر یک نیمرسانا یا فلز (ولی نه الکترولیت)، τ را می توان از نظر فیزیکی به عنوان زمان میانگین بین برخوردهای الکترون رسانش تعبیر کرد. در چنین جسمی، الکترون برای مدتی کوتاه شتاب می گیرد و پس از آن با یکی از اتمهای جسم برخورد می کند. در نتیجه این برخورد، الکترون در جهتی کاتوره ای پرتاب می شود، به گونه ای که اثر میانگین هر برخورد، سرعت سوق الکترون را مجدداً به صفر کاهش می دهد. اگر میانگین زمان برخورد τ و میانگین سرعت سوق v باشد، آنگاه بعد از هر مدت زمان τ ، الکترونها به مقدار mv_d از تکانه خود، از دست می دهند. در حالت پایا، آهنگ اتلاف تکانه mv_d/τ با آهنگ کسب تکانه qE برابر قرار داده می شود، و نتیجه حاصل با معادله (۳۵-۷) یکی است. زمان میانگین τ با رابطه زیر به مسافت آزاد میانگین الکترون مربوط می شود

$$l = v_T \tau \quad (۳۸-۷)$$

که در آن v_T سرعت گرمایی الکترونهاست. در اینجا مجدداً تأکید می کنیم که v_T از سرعت سوق v_d بسیار بیشتر^۱ است (گرچه جهت آن کاتوره ای است). در اکثر فلزها v_T در حدود ۱۰^6 m/s (تقریباً مستقل از دما) است، و در نیمرساناها مقدار آن در دمای اتاق تقریباً یک مرتبه بزرگی کمتر است؛ از سوی دیگر سرعت سوق میانگین v_d در فلزهای معمولی از حدود ۱۰^{-2} m/s بیشتر نیست. در فلزها و نیمرساناها مسافت آزاد میانگین در دمای اتاق نوعاً از مرتبه ۱۰^{-8} m است، به طوری که در فلزها ۱۰^{-14} s $\approx \tau$. در نیمرساناها τ ممکن است یک مرتبه بزرگی طولانی تر باشد. در هر دو مورد، τ با زمان آغاز برقراری یا زمان فروافت جریان اهمی نیز برابر است. بنابراین هنگامی که میدان در مقاومتهای ساخته شده از این مواد برقرار و یا حذف می شود، جریان عملاً به طور لحظه ای، در هر موضع، تغییر می کند. این نکته را متذکر می شویم که در فلزات، زمان واهلش τ برای فروافت جریان، زمان برخورد و ثابت زمانی t_c برای اتلاف چگالی بار اضافی همه برابر می شوند، هر چند که از لحاظ مفهومی متفاوت اند.^۲

۱. تنها به همین دلیل است که می توان τ را از میدان شتاب دهنده E مستقل فرض کرد.

۲. در رساناهای ضعیف، زمان برخورد ممکن است بی معنی باشد، و یا t_c ممکن است مطابق معادلات (۲۷-۷) و (۳۷-۷)، به طور معکوس با τ متناسب باشد.

از جدول ۷-۱ پیداست که فلزات موادی هستند که بالاترین رسانندگی الکتریکی را دارند. رسانندگی این مواد به دو دلیل بسیار زیاد است، اول اینکه چگالی حاملهای بار در آنها زیاد است، یعنی در حدود یک حامل بار برای هر اتم فلز، و دیگر اینکه سرعت سوق برای واحد میدان الکتریکی در فلزات زیاد است. در فلزات فقط با یک نوع حامل بار، یعنی با الکترون، سروکار داریم. لذا در این مورد معادلات رسانش ساده‌اند:

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}_d \quad (۳۹-۷)$$

$$g = Ne(v/E) = Ne^2\tau/m \quad (۴۰-۷)$$

در اینجا e قدرمطلق بار الکترون است. سرعت سوق الکترون را برای واحد میدان الکتریکی (v_d/E) ، تحرک الکترون می‌گویند. تحرک زیاد بدان معناست که زمان برخورد، τ ، یا به عبارت دیگر، مسافت آزاد میانگین طولانی است. برای اینکه بتوانیم مسافت آزاد میانگین الکترونها را در فلز بهتر تجسم کنیم، باید از دینامیک برخورد الکترونها استفاده کنیم. می‌دانیم که رسانا از لحاظ الکتروستاتیکی فقط به‌طور متوسط خنثی است، و اینکه در ابعادی از مرتبه یک آنگستروم تغییرات زیادی در پتانسیل آن وجود دارد، و همچنین می‌دانیم که هر ذره باردار مانند الکترون، یا باید برخورد کند یا بر اثر تغییرات در پتانسیل پراکنده شود. اما به این نکته نیز واقفیم که در حرکت الکترون در مقیاس اتمی، ماهیت موجی آن نقش مهمی ایفا می‌کند. حل مسئله برخورد الکترونی با به‌کار بردن مفاهیم مکانیک موجی از حدود این کتاب خارج است. در اینجا صرفاً به ذکر یکی از نتایج آن می‌پردازیم: در یک بلور کامل که پتانسیل تناوبی سه‌بعدی دارد، یک موج الکترونی اصلاً برخوردی نمی‌کند؛ زمان برخورد τ برای آن بی‌نهایت است. از این رو، متناهی بودن رسانندگی فلزات ناشی از وجود ناکاملیهایی در ساختار کاملاً تناوبی آنهاست. این ناکاملیها بر دو نوع‌اند: (۱) ناخالصیها و نقصهای هندسی (نظیر مرزهای دانه‌ای در مواد چندبلوری) و (۲) ناکاملیهای ناشی از حرکت گرمایی اتمها در ساختار ماده. این هر دو نقص مستقل از یکدیگر به مقاومت ویژه کمک می‌کنند (قاعده ماتیسن^۱) به گونه‌ای که

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(T) \quad (۴۱-۷)$$

که در آن T دمای مطلق است.

در دماهای معمولی، پراکندگی امواج الکترونی توسط اتمهایی که در اثر گرما جابه‌جا شده‌اند، سهم اصلی را در مقاومت ویژه فلزات بسیار خالص دارد. بنابراین، $\eta \approx \eta_2(T)$. مقطع مؤثر

پراکندگی در یک اتم جابه‌جاشده متناسب است با مربع دامنه ارتعاش آن (x^2)، به عبارت دیگر، متناسب است با بیشینه انرژی پتانسیل آن. با فرض اینکه بر اتمهای جابه‌جاشده، نیروهای بازگرداننده کشسان وارد شود، داریم

$$(انرژی جنبشی)_{\max} = (انرژی پتانسیل)_{\max} \propto kT$$

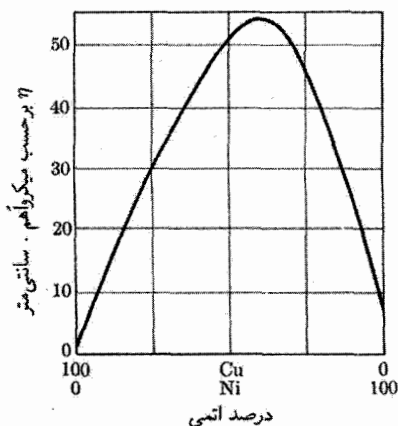
به طوری که

$$\eta \approx \eta_2 \propto (\tau_2)^{-1} \propto x^2 \propto T \quad (42-7)$$

یا اگر این رابطه را با کلمات بیان کنیم، مقاومت ویژه هر فلز خالص متناسب است با دمای مطلق. بنابراین ضریب گرمایی مقاومت، $(1/\eta)d\eta/dT$ ، برای فلزهای بسیار خالص، عبارت است از

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT} \approx \frac{1}{T} \quad (43-7)$$

که با ارقام مربوط به فلزات در جدول ۷-۱ تقریباً توافق دارد. به بیان دقیق‌تر، باید گفت که استدلال بالا فقط هنگامی معتبر است که دما از دمای دبی فلز (دمایی که در بالاتر از آن تمام مدهای ارتعاشی اتمی برانگیخته می‌شوند) بالاتر باشد. در دماهای کمی پایین‌تر از دمای دبی، η به زیر مقدار پیش‌بینی شده در رابطه خطی (۴۲-۷) سقوط می‌کند. در دماهای بسیار کم از سهم η_1 نمی‌توان صرف نظر کرد. افزودن مقدار کمی ناخالصی، همیشه مقاومت ویژه را افزایش می‌دهد. هر آلیاژ، که می‌توان آن را مانند فلز ناخالصی در نظر گرفت، مقاومت ویژه‌اش همیشه بیشتر از مقاومت ویژه آن فلز تشکیل‌دهنده آلیاژ است که مقاومت ویژه کمتری دارد (شکل ۷-۱۱). ضریب گرمایی α در هر



شکل ۷-۱۱ مقاومت ویژه آلیاژهای مس-نیکل بر حسب تابعی از نسبت ترکیب در 20°C .

آلیاژ آشکارا کمتر است از ضریب مربوط برای فلز خالص، درست به این دلیل که مقاومت ویژه آن بیشتر است. با وجود این تعدادی آلیاژ ساخته شده‌اند که ضرایب گرمایی آنها بسیار کم است.

۸-۷ خلاصه مطالب

مهم‌ترین موارد استفاده فنی الکتریسیته به جریان وابسته به بارهای متحرک مربوط است؛ همان‌طور که در فصل بعد توضیح داده خواهد شد، این جریانها در مبحث مغناطیس نیز اهمیت اساسی دارند. چگالی جریان، که در نقطه‌ای در فضا به‌طور موضعی تعریف می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{J} = \sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

از آنجا که چگالی بار برابر است با

$$\rho = \sum N_i q_i$$

در مواردی ممکن است چگالی بار صفر باشد، در عین آنکه چگالی جریان صفر نیست. جریان کل که از سطحی مثل S عبور می‌کند، عبارت است از

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

یا

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

بقای بار در هر نقطه با معادله پیوستگی به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(در حال حاضر ما عمدتاً جریانهای پایا را در نظر می‌گیریم که برای آنها $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ، و همچنین $\partial \mathbf{J} / \partial t = 0$). جریان رسانشی در یک محیط با یک معادله ساختمندی داده می‌شود که در ساده‌ترین مورد خطی، رسانندگی g به کمک آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}$$

که قانون اهم است.

• مقاومت یک رسانای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت برابر است با

$$R = l/gA$$

- هنگامی که در یک محیط رسانای پیوسته جریانهای پایا وجود داشته باشند، پتانسیل از معادله لاپلاس پیروی می‌کند

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

شرایط مرزی برای E همان شرایط مرزی در محیطی دی‌الکتریک است و شرایط مرزی مربوط به J با شرایط مربوط به D یکسان‌اند. در نتیجه بین دو الکتروود که در محیطی نامتناهی جا داده شده‌اند، داریم

$$RC = \frac{\varepsilon}{g} \quad (\text{یکاهای mks})$$

- اگر چگالی حجمی بار در محیطی رسانا در ابتدا صفر نباشد، با ثابت زمانی زیرافت می‌کند

$$t_c = \frac{\varepsilon}{g} \quad (\text{یکاهای mks})$$

این زمان برای فلزات در حدود 10^{-14} s است، و برای رساناهای ضعیف‌تر ممکن است به چندین ماه نیز برسد.

- برای مدارهای الکتریکی، معادلات ساکن $\nabla \cdot J = 0$ و $\nabla \times E = 0$ به قوانین کیرشهوف تبدیل می‌شوند

$$\sum I_j = 0 \quad \text{در یک نقطه انشعاب} \quad (I)$$

$$\sum V_j = 0 \quad \text{دور یک حلقه} \quad (II)$$

برای تأمین توان تلف‌شده توسط جریانهای پایا در مقاومتها، باید ولتاژهای معینی توسط بعضی وسایل (مثلاً باتریها) که بیان طرز کارشان در چارچوب مبحث الکتروستاتیک امکان‌پذیر نیست، اعمال شود. بنابراین، حل کامل مسئله مدار به کمک قانون اهم بسیار سراسر است.

- در نظریه میکروسکوپی رسانش اهمی، علاوه بر نیروی الکتریکی شتاب‌دهنده، یک نیروی کندکننده خطی که بر بارهای آزاد موجود در محیط وارد می‌شود نیز وارد می‌شود. اگر نتیجه این نظریه را برحسب زمان واهلش τ بیان کنیم، داریم

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

زمان τ عبارت است از ثابت زمانی مربوط به برقرار شدن موضعی یک جریان اهمی پس از اعمال میدان؛ در موارد عملی τ کوتاه است (10^{-14} s در فلزات). در رساناهای الکترونی خوب

(فلزات، نیمرساناها)، τ به عنوان فاصله زمانی میانگین بین برخوردها تعبیر می‌شود. در این موارد τ به مسافت آزاد میانگین الکترونی، به صورت زیر بستگی دارد

$$\tau = l/v_T$$

که در آن v_T سرعت گرمایی کاتوره‌ای است (نه سرعت سوق خالص).

مسائل

۷-۱ حداکثر جریانی که می‌تواند از سیمی مسی به سطح مقطع 2 mm^2 بگذرد، 20 A است. (الف) چگالی جریان مربوط، برحسب A/m^2 چقدر است؟ (ب) با این فرض که از هر اتم مس یک الکترون در رسانش شرکت می‌کند، سرعت سوق الکترونی مربوط به این چگالی جریان را محاسبه کنید. (عدد آووگادرو: اتم در مول $6.02 \times 10^{23} = N_0$ ؛ وزن اتمی مس: 63.5 ؛ چگالی مس: 8.92 g/cm^3). (ج) با استفاده از رسانندگی تجربی، زمان برخورد میانگین یک الکترون در مس را محاسبه کنید.

۷-۲ رسانندگی آب دریا تقریباً $43 (\Omega \text{ m})^{-1}$ است. چگالی جریان را در سلولی به طول 2 cm و سطح مقطع 1 cm^2 از آب دریا، هنگامی که اختلاف پتانسیل 47 V به دو سر آن اعمال شود، پیدا کنید. سرعت سوق میانگین را محاسبه کنید. فرض کنید که غلظت یونها 2 درصد غلظت مولکولهای آب است.

۷-۳ دو صفحه فلزی مسطح نامتناهی و موازی به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. فضای بین آنها با دو محیط رسانا پر شده است و فصل مشترک دو محیط صفحه‌ای است موازی با صفحات فلزی. محیط اول (رسانندگی g_1 ، گذردهی ϵ_1) به ضخامت a ، و محیط دوم (رسانندگی g_2 ، گذردهی ϵ_2) به ضخامت $d - a$ است. صفحات فلزی به ترتیب در پتانسیلهای φ_1 و φ_2 قرار دارند. در حالت پایا، (الف) پتانسیل فصل مشترک دو محیط چقدر است؟ و (ب) چگالی سطحی بار بر روی این فصل مشترک چقدر است؟

۷-۴ دستگاهی از بارها و جریانهای الکتریکی کاملاً در درون حجم ثابت V محصور است. گشتاور دوقطبی توزیع بار-جریان (بخش ۲-۹) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r} \rho \, dv$$

که در آن \mathbf{r} بردار مکان نسبت به یک مبدأ ثابت است. ثابت کنید که

$$\int_V \mathbf{J} \, dv = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$$

[راهنمایی: ابتدا اتحاد $\int_V \mathbf{J} \cdot \nabla r \, dv = \oint_S \mathbf{r} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_V \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv$ را ثابت کنید و توجه داشته باشید که \mathbf{J} بر روی سطح S صفر می‌شود.]

۵-۷ محیطی رسانا در میدان یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار دارد. حفره‌ای کروی به شعاع a در محیط ایجاد کرده‌ایم. (الف) پتانسیل داخل و خارج حفره را پیدا کنید. (ب) بار سطحی که بر سطح حفره ظاهر می‌شود، چقدر است؟ (ج) خطوط میدان را رسم کنید.

۶-۷ خازنی با صفحات موازی از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک K و رسانندگی g پر شده است. خازن با بار اولیه Q باردار شده است. (الف) نشان دهید که بار به صورت تابعی نمایی از زمان، از صفحات نشت می‌کند. (ب) نشان دهید که تولید گرمای ژول کل برابر است با انرژی الکتروستاتیکی ذخیره‌شده در آغاز. (ج) اگر ماده سیلیسیم اکسید باشد، ثابت زمانی تخلیه چقدر است؟ (رک. جدولهای ۱-۴ و ۱-۷).

۷-۷ دو پوسته استوانه‌ای فلزی طویل (به شعاعهای r_1 و r_2 ، $r_2 > r_1$)، به صورت هم‌محور قرار داده شده‌اند. پوسته‌ها در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ قرار دارند. (الف) فضای بین پوسته‌ها با محیطی به رسانندگی g پر شده است. با استفاده از قانون اهم، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ ، جریان الکتریکی میان واحد طول پوسته‌ها را محاسبه کنید. (ب) اگر فضای بین دو پوسته با محیطی نارسا با گذردهی ϵ پر شده باشد، می‌توان ظرفیت دستگاه را از تعریف $C = Q/\Delta\varphi$ حساب کرد. صریحاً نشان دهید که برای این وضعیت هندسی حاصل ضرب مقاومت در واحد طول و ظرفیت در واحد طول مساوی ϵ/g است.

۸-۷ مقاومت نشت کابلی با پوشش عایق لاستیکی به طریق زیر اندازه‌گیری می‌شود: طول l از کابل عایق‌دار را در محلول آب نمک فرو می‌بریم، اختلاف پتانسیلی بین قسمت رسانای کابل و محلول برقرار می‌کنیم و جریانی را که از کابل می‌گذرد اندازه می‌گیریم. در یک مورد خاص ۳ متر از کابل را در محلول فرو برده‌ایم و با اعمال اختلاف پتانسیل 200 ولت بین رسانا و محلول، جریانی برابر 2×10^{-9} آمپر اندازه‌گیری کرده‌ایم. ضخامت عایق برابر شعاع رسانای درون آن است. مقاومت ویژه الکتریکی عایق چقدر است؟

۹-۷ سیم مسی طویلی به شعاع a در فاصله h از یک صفحه نامتناهی مسی و به موازات آن کشیده شده است. فضای بالای صفحه و اطراف سیم با محیطی به رسانندگی g پر شده است. نشان دهید که مقاومت الکتریکی بین این دو الکتروود مسی در واحد طول سیم برابر است با

$$R = \frac{1}{2\pi g} \cosh^{-1} \frac{h}{a}$$

۱۰-۷ به تمام نقاط سطح یک کره همگن و همسانگرد با رسانندگی g ، پتانسیل $\cos\theta$ اعمال

شده است. در اینجا θ همان زاویه قطبی معمولی است که نسبت به یک محور که از مرکز کره می‌گذرد اندازه‌گیری می‌شود. چگالی جریان J را در تمام نقاط درون کره محاسبه کنید.

۱۱-۷ دو الكترود مسی استوانه‌ای به شعاع a بر صفحه دیسکی از جنس سیلیسیم به ضخامت s عمودند و فاصله محورهاى آن دو از یکدیگر b است. الكترودها تا عمق s در دیسک فرو رفته‌اند، به عبارت دیگر، کاملاً تا انتهای دیسک رفته‌اند. ابعاد سطوح دیسک نسبت به b خیلی بزرگ است، به طوری که می‌توان آن را نامتناهی انگاشت. اگر رسانندگی سیلیسیم g باشد، جریان بین الكترودها را، هنگامی که اختلاف پتانسیل آنها برابر $\Delta\varphi$ است، حساب کنید.

* ۱۲-۷ یک صفحه مسی مربع‌شکل به ضلع a و ضخامت s و رسانندگی g تحت تأثیر اختلاف پتانسیلی به نحو زیر قرار دارد: دو لبه مقابل هم صفحه به ترتیب در پتانسیلهای φ_0 و $-\varphi_0$ قرار داده شده‌اند. (الف) مقاومت الكتریکی صفحه چقدر است؟ (ب) سوراخ کوچکی به شعاع a در مرکز صفحه ایجاد می‌کنیم. نسبت تغییر مقاومت را به طور تقریبی محاسبه کنید [راهنمایی: توزیع پتانسیل را در صفحه با استفاده از هماهنگیهای استوانه‌ای $\cos\theta$ پیدا کنید. متأسفانه توزیعی که بدین نحو به دست می‌آورید کاملاً صحیح نیست، زیرا که دو لبه مقابل مربع دقیقاً منطبق بر خطوط هم‌پتانسیل این توزیع نیستند. پاسخ تقریبی را می‌توان با مساوی گرفتن پتانسیل متوسط دو لبه با $\pm\varphi_0$ به دست آورد].

۱۳-۷ نسبت اتلاف توان به مساحت سطح را برای رساناهای مذکور در (الف) مسئله ۱-۷ و (ب) مسئله ۲-۷، محاسبه کنید.

۱۴-۷ سه مقاومت ۱ اهمی و ۲ اهمی و ۳ اهمی داده شده‌اند. مقاومت شانزده ترکیب مختلف را که با این مقاومتها می‌توان ساخت پیدا کنید.

۱۵-۷ یک لامپ ۴ واتى چنان طراحی شده است که با اختلاف پتانسیل ۲ ولتى کار کند. مقاومت R را به طور موازی با لامپ می‌بندیم و ترکیب این دو را با یک مقاومت ۳ اهمی و یک باتری ۳ ولتى (با مقاومت داخلی $1/3$ اهم) به طور متوالی قرار می‌دهیم. مقدار R باید چقدر باشد تا لامپ در ولتاژ طرح کار کند؟

۱۶-۷ در مسئله ۱۱-۷، شعاع الكترودها 5 mm ، فاصله محوری الكترودها $b = 1.5\text{ mm}$ ، $s = 3\text{ mm}$ و η (مقاومت ویژه Si) برابر با $15\Omega\text{m}$ است. اگر یک باتری 100 ولتى بین دو الكترود وصل شود، جریانی را که از دیسک عبور می‌کند، به دست آورید.

۱۷-۷ سیمی از جنس نیکروم به قطر 2 mm در دست است. هنگامی که ولتاژی معادل 120 V به دو سر این سیم اعمال شود، 600 W انرژی در آن تلف می‌شود. طول سیم را تعیین کنید.

* ۱۸-۷ یک خط مقاومت با مقاومت کل nR بین پتانسیل φ_0 و زمین وصل شده است (منظور از زمین پتانسیل مرجع است). خط مقاومت روی $n - 1$ تیر با فواصل مقاومتی یکسان قرار گرفته است، به طوری که مقاومت بین هر دو تیر R است. مقاومت نشسته زمین در هر یک از تیرها βR است. اگر φ_m پتانسیل خط مقاومت در m امین تیر باشد، نشان دهید که

$$\varphi_{m+1} - (2 + \beta^{-1})\varphi_m + \varphi_{m-1} = 0$$

۱۹-۷ دو باتری را که به ترتیب دارای ولتاژهای مدار باز \mathcal{V}_1 و \mathcal{V}_2 و مقاومت‌های داخلی R_1 و R_2 اند، به طور موازی به یکدیگر و به مقاومت بار R می‌بندیم. (الف) جریان را در مقاومت بار پیدا کنید. (ب) اگر مقاومت بار تغییر کند ولی سایر کمیتها ثابت بمانند، R باید چه مقدار باشد تا توان تلف شده در آن حداکثر شود؟

۲۰-۷ یک گروه پیل n تایی مشابه با ولتاژ مدار باز \mathcal{V}_0 و مقاومت داخلی R_I را برای ایجاد جریان در مقاومت بار R به کار می‌بریم. نشان دهید که اگر این n پیل را به یکدیگر و با مقاومت R به طور متوالی ببندیم، آنگاه $I = n\mathcal{V}_0 / (R + nR_I)$ ؛ ولی هرگاه پیلها را موازی ببندیم و ترکیب آنها را به طور متوالی به مقاومت R وصل کنیم، آنگاه $I = \mathcal{V}_0 / (R + R_I/n)$.

۲۱-۷ شش مقاومت مشابه (R) را به هم می‌بندیم تا تشکیل یک شش ضلعی بدهند. شش مقاومت دیگر (همگی با همان مقاومت R) را بین شش رأس این شش ضلعی و مرکز آن وصل می‌کنیم. (الف) مقاومت معادل بین هر دو رأس مقابل چقدر است؟ (ب) مقاومت معادل بین هر دو رأس مجاور چقدر است؟

۲۲-۷ شش مقاومت یالهای یک چاروجهی را تشکیل می‌دهند. پنج تا از مقاومتها یکسان اند (R)، و ششمی برابر R_1 است. اختلاف پتانسیلی به دو سر یکی از مقاومت‌های مجاور R_1 اعمال می‌کنیم. نشان دهید که تولید گرمای ژول در R_1 هنگامی حداکثر است که $R_1 = (5/3)R$ باشد.

۲۳-۷ چنانچه در مدار شکل ۷-۹ ولتاژ \mathcal{V}_2 را صفر کنیم و گالوانومتر R_g را به جای مقاومت R_2 قرار دهیم، یک مدار پل وتستون^۱ خواهیم داشت. R_1 را نیز صفر می‌گیریم. این پل وقتی $R_3 R_6 = R_4 R_5$ باشد، به حالت تعادل می‌رسد (هیچ جریانی از گالوانومتر نمی‌گذرد). بدین ترتیب یک مقاومت مجهول، مثلاً R_6 ، را می‌توان برحسب مقاومت‌های معلوم تعیین کرد: در حالت تعادل $R_6 = R_4 R_5 / R_3$. (الف) جریان الکتریکی را که در حالت عدم تعادل از گالوانومتر می‌گذرد، حساب کنید. (ب) فرض کنید می‌خواهیم با تغییر دادن R_4 پل را به حالت تعادل در آوریم. حساسیت پل با رابطه $S = CR_4 (\partial I_T / \partial R_4)$ تعریف می‌شود، که در آن C مقدار انحراف

گالوانومتر به ازای عبور واحد جریان است و شاخص صفر به معنی آن است که مشتق باید در حالت تعادل محاسبه شود. ثابت کنید که

$$S = \frac{C \mathcal{V}}{R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_g(1 + R_5/R_6)(1 + R_4/R_3)}$$

* ۲۴-۷ پل وتستون مسئله قبل نزدیک به حالت تعادل است. فرض کنید $R_5/R_3 = \alpha$ و $R_6/R_4 = \alpha(1 - \varepsilon)$ ، که در آن $\varepsilon \ll 1$. اگر مقاومت R_g قابل چشمپوشی باشد، نشان دهید که $I_2/I_1 = \alpha\varepsilon/(\alpha + 1)^2$.

* ۲۵-۷ یک مقاومت تقریباً 10^6 اهمی را می‌خواهیم با مدار پل وتستون مسئله (۲۳-۷) اندازه بگیریم. تعداد بسیار متنوعی مقاومت معلوم استاندارد در دست داریم. حداکثر توان مجاز دستگاه ۵ وات است. اگر $R_g = 10^6 \Omega$ باشد، و گالوانومتر جریانهایی را که درست $4 \times 10^{-9} A$ یا بیشترند نشان بدهد، بالاترین دقتی که می‌توان در اندازه‌گیری یک مقاومت مجهول به دست آورد چقدر است؟ فرض کنید مقاومت‌های استاندارد کاملاً دقیق باشند و محدودیتی در دقت ایجاد نکنند.

* ۲۶-۷ یک محیط رسانای خطی در n نقطه به الکترودهایی با پتانسیل‌های ثابت: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ وصل شده است. نشان دهید که گرمای ژول تولیدشده در محیط از جمع‌بندی $\sum_{i=1}^n \varphi_i I_i$ به دست می‌آید، که در آن I_i جریانی است که از الکتروده i به محیط وارد می‌شود.



میدان مغناطیسی جریانهای پایا

دومین میدانی که در مبحث الکتریسیته و مغناطیس مطالعه می‌شود، میدان مغناطیسی است. این میدانها، یا به عبارت دقیق‌تر، آثار این میدانها از زمانهای بسیار قدیم ساخته شده‌اند، یعنی از همان وقتی که آثار ناشی از مغناطیسهای طبیعی سنگ آهنربا (Fe_3O_4) برای اولین بار مشاهده شد. خواص شمال و جنوب‌یابی این ماده تأثیر مهمی بر دریانوردی و اکتشاف گذاشت. با وجود این، جز در این مورد، مغناطیس پدیده‌ای بود که کم مورد استفاده قرار می‌گرفت و کمتر نیز شناخته شده بود، تا اینکه در اوایل قرن نوزدهم اورستد دریافت که جریان الکتریکی میدان مغناطیسی تولید می‌کند. این کار، توأم با کارهای بعدی گاوس، هنری، فاراده و دیگران، اهمیت میدان مغناطیسی را به‌عنوان شریک میدان الکتریکی نمایان ساخت. کارهای نظری ماکسول و دیگران (فصلهای ۱۱ و ۱۶) نشان دادند که این شراکت، همراهی است و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به صورتی جدایی‌ناپذیر در هم آمیخته‌اند. تلاش مردان عمل به توسعه ماشینهای الکتریکی، وسایل مخابرات و کامپیوترها منجر شد. این وسایل که پدیده مغناطیسی در آنها دخیل است، نقشی بس مهم در زندگی روزمره ایفا می‌کنند. در این فصل تعاریف اساسی مربوط به مغناطیس داده می‌شوند،

میدانهای مغناطیسی حاصل از جریان پایای الکتریکی مطالعه می‌شود و برخی پایه‌های اساسی برای مطالعات آینده گذارده خواهد شد.

۱-۸ تعریف میدان مغناطیسی

در فصل ۲ نیروی کولن ناشی از بار q_1 در مبدأ، که به هر بار q واقع در r وارد می‌شود، بار رابطه زیر داده شد

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1-8)$$

در آنجا به‌طور ضمنی فرض شد که هر دو بار در حال سکون‌اند.

اگر بارها به ترتیب با سرعت‌های ثابت \mathbf{v} و \mathbf{v}_1 در حرکت باشند، علاوه بر این نیرو، یک نیروی مغناطیسی \mathbf{F}_m نیز از طرف q_1 به q وارد می‌شود

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2-8)$$

عدد $\mu_0/4\pi$ در اینجا همان نقش $1/4\pi\epsilon_0$ در الکتروستاتیک را ایفا می‌کند؛ یعنی، این عدد ثابتی است که برای سازگاری یک قانون تجربی با مجموعه‌ای از یکاها لازم است. در دستگاه یکاهای mks، بنا به تعریف، دقیقاً داریم

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2$$

و این به تعریف اصلی کولن می‌انجامد (به بخش ۳-۸ مراجعه کنید). همچنین، مثل مورد نیروی الکتروستاتیکی، مناسب است که با تعریف میدان مغناطیسی، خواص "بار آزمون" را جدا کنیم؛ در این مورد نه تنها بار آزمون q ، بلکه سرعت آن \mathbf{v} نیز باید به‌صورت عاملی جدا نگه داشته شود

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-8)$$

که در آن میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4-8)$$

اگر تعدادی بار چشمه متحرک وجود داشته باشند، نیروها و میدانهای مغناطیسی جمع‌پذیرند. در تعریف \mathbf{B} نیز باید نوعی فرایند حدی منظور کنیم (همان‌گونه که در تعریف میدان الکتریکی عمل

کردیم) تا اطمینان حاصل کنیم که بار آزمون روی چشمه‌های مولد \mathbf{B} تأثیر نمی‌گذارد. در دستگاه mks یکای میدان مغناطیسی، بنا به معادله (۳-۸)، عبارت است از نیوتون ثانیه بر کولن متر، که تسلا (T) نامیده می‌شود.

چنانچه میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هر دو موجود باشند، نیروی کل وارد بر بار متحرک برابر است با $F_e + F_m$.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۵-۸)$$

که به نیروی لورنتس معروف است.

نیروی مغناطیسی بین دو بار، به دلیل وابستگی به سرعت و ضربهای برداری، از نیروی الکتریکی پیچیده‌تر است. در وهله نخست، شباهت این دو در آن است که بزرگی هر دو نیرو به حاصل ضرب بارها و عکس مجذور فاصله بین آنها بستگی دارد (علاوه بر این هر دو دارای یک ثابت بعددار هستند). اما جهت نیروی مغناطیسی در راستای خط واصل ذرات نیست (یعنی، یک نیروی مرکزی نیست)، مگر اینکه \mathbf{v} تصادفاً بر \mathbf{r} عمود باشد. نیرو همیشه در صفحه دربرگیرنده \mathbf{r} و \mathbf{v} قرار دارد. مهم‌تر اینکه نیرو همیشه بر \mathbf{v} عمود است؛ بنا بر معادله (۳-۸)، میدان \mathbf{B} هر چه باشد $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$ است، و در نتیجه نیروی مغناطیسی هرگز بر روی یک ذره باردار کار انجام نمی‌دهد. اگر صورت و مخرج معادله (۲-۸) را در ϵ_0 ضرب کنیم، مقایسه دیگری بین \mathbf{F}_e و \mathbf{F}_m ممکن می‌شود. مقایسه نتیجه این عمل با معادله (۱-۸) نشان می‌دهد که ابعاد $\epsilon_0 \mu_0$ باید برابر با ابعاد عکس مجذور سرعت باشد. اکنون می‌نویسیم

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (۶-۸)$$

که در آن c دارای بعد سرعت است، در این صورت

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

با استفاده از مقدار تعریف‌شده μ_0 و مقدار تجربی ϵ_0 ، خواهیم داشت

$$c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

که از لحاظ مقدار برابر است با سرعت تجربی نور.^۱ در فصل ۱۶ خواهیم دید که این تطابق عددی تصادفی نیست، بلکه چنانچه نور خود موج الکترومغناطیسی باشد، یک پیامد الزامی است. در معادله (۶-۸) باید در هر دستگاه یکای سازگاری برقرار باشد. در دستگاه یکاهای گاوسی، که در آن بنا به تعریف

اینجا لازم نیست به عمق معنی رابطه پردازیم، بلکه فقط از آن به منزله یک واقعیت تجربی استفاده می‌کنیم. این بدان معنی است که برای یک جفت ذره معین

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v}{c} \frac{v_1}{c}$$

یعنی، اگر سرعتهای ذره‌ها در مقایسه با سرعت نور کوچک باشند، برهم‌کنش مغناطیسی از برهم‌کنش الکتریکی بسیار کوچکتر خواهد بود. در حقیقت معادله‌های (۱-۸)، (۲-۸) و (۴-۸) فقط تقریبهای مرتبه اولی هستند از عبارتهای نسبیستی صحیحی که در فصل ۲۱ به دست خواهیم آورد، و این تقریبه‌ها تا وقتی برقرارند که $v_1 \ll c$ باشد. باید توجه داشت که میدانهای حاصل از بار q_1 که حرکت یکنواخت دارد، با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\mathbf{B} = \frac{v_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

(این رابطه برای سرعتهای به حد دلخواه بزرگ نیز برقرار است، با آنکه وقتی مقدار v_1 نزدیک به مقدار c است، عبارتهای \mathbf{E} و \mathbf{B} هر دو تغییر می‌کنند). بالاخره شایان توجه است که نیروی مغناطیسی تنها به سرعت نسبی دو بار بستگی ندارد، بلکه مقدار آن در یک دستگاه مختصات متحرک متفاوت است^۱؛ و اینکه با تعویض نشانه ذرات، تغییر حاصل در این نیرو صرفاً یک تغییر علامت نیست. ولی لازم نیست که فعلاً به این جنبه‌ها پردازیم، زیرا در کاربردهایی که در این فصل و فصلهای بعد خواهیم داشت، این اثرها حذف می‌شوند.

از آنجا که $F_m \ll F_e$ ، در وهله اول ممکن است چنین به نظر رسد که همواره می‌توان از نیروی مغناطیسی در مقایسه با نیروی الکتریکی صرف‌نظر کرد، اما دستگاههایی از ذرات وجود دارند که این امر در آنها مصداق پیدا نمی‌کند. به‌ویژه در جریان رسانشی، که در آن بارهای مثبت و منفی با چگالیهایی برابر موجودند، میدان الکتریکی ماکروسکوپی صفر است ولی میدان مغناطیسی

$\epsilon_0 = 1/4\pi$ است، مقدار $1/c^2 = \mu_0/4\pi$ را آزمایش تعیین می‌کند. تفاوت دیگر بین دو دستگاه پکا در آن است که در دستگاه یکاهای گاوسی دو تا c از یکدیگر جدا و با v ها همراه می‌شوند، به طوری که می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{B} = \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_m = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

مزیت این تعریفها در این است که \mathbf{E} و \mathbf{B} از لحاظ ابعادی یکسان‌اند (واینکه شکل نسبیستی v/c صریحاً ظاهر می‌شود).
۱. به‌ویژه، در دستگاه مختصاتی که با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند، این نیرو صفر می‌شود. این وابستگی به دستگاه مختصات با فرض اساسی مکانیک کلاسیک که بنا بر آن نیروها در تمام دستگاههای مختصات لخت یکسان‌اند، در تناقض است. این مطلب برای ما نخستین سر نخ است حاکی از آنکه نظریه نسبیت برای بررسی الکترومغناطیس ضروری است.

بارهای متحرک صفر نیست. در آهنرباهای الکتریکی، موتورها، مبدلها و سایر مواردی که نیروهای مغناطیسی از اهمیت عملی بسیار زیادی برخوردارند، چنین وضعیتی برقرار است. بنابراین ما با بررسی برهم‌کنشهای مغناطیسی بین جریانهای رسانشی موضوع را آغاز می‌کنیم. در بخش بعد نیروی وارد بر یک جریان رسانشی واقع در میدان مغناطیسی موجود، و در بخش ۸-۳ میدان مغناطیسی حاصل از یک جریان رسانشی معین را بررسی می‌کنیم.

۲-۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان

از روی نیروی لورنتس (معادله ۵-۸) می‌توانیم رابطه‌ای برای نیروی وارد بر یک جزء $d\mathbf{l}$ از رسانای حامل جریان به دست آوریم. اگر $d\mathbf{l}$ جزئی از رسانا باشد که جهت آن با جهت جریان I که از آن می‌گذرد یکی فرض شود، آن وقت $d\mathbf{l}$ با سرعت سوق حاملهای بار در رسانا، یعنی \mathbf{v} موازی خواهد بود. اگر در هر واحد حجم از رسانا N حامل بار وجود داشته باشد، نیروی وارد بر جزء $d\mathbf{l}$ عبارت است از

$$d\mathbf{F} = NA|d\mathbf{l}|q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۷-۸)$$

که در آن A مساحت سطح مقطع رسانا و q بار هر حامل بار است. در صورتی که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشد، آن وقت در معادله (۷-۸) باید یک جمع‌بندی منظور کنیم؛ لیکن نتیجه نهایی، یعنی معادله (۸-۸) تغییر نخواهد کرد. چون \mathbf{v} و $d\mathbf{l}$ موازی‌اند، صورت دیگری از معادله (۷-۸) چنین است

$$d\mathbf{F} = Nq|\mathbf{v}|A d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (۷-۸)$$

اما $Nq|\mathbf{v}|A$ درست همان جریان ناشی از یکی از انواع حاملهای بار است. بنابراین برای نیروی وارد بر جزء بی‌نهایت کوچکی از رسانای حامل جریان^۱ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (۸-۸)$$

از معادله (۸-۸) می‌توان انتگرال گرفت تا نیروی وارد بر یک مدار کامل (یا بسته) به دست آید. چنانچه مدار مورد نظر با منحنی C نشان داده شود، آنگاه

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (۹-۸)$$

۱. آزمایشهای اولیه که به درک نیروهای مغناطیسی منجرگردید، روی مدارهای حامل جریان انجام شد. از این آزمایشها معادلات (۸-۸) و (۹-۸) به دست آمد.

هرگاه \mathbf{B} تابعی از مکان باشد، تنها ساده‌سازی امکان‌پذیر در معادله (۸-۹)، بیرون آوردن I از زیر انتگرال است. اما اگر \mathbf{B} یکنواخت، یعنی مستقل از مکان باشد آن وقت می‌توان آن را نیز از زیر انتگرال بیرون آورد تا نتیجه زیر به دست آید

$$\mathbf{F} = I \left\{ \oint_C d\mathbf{l} \right\} \times \mathbf{B}$$

محاسبه انتگرال باقیمانده کار آسانی است. چون این انتگرال عبارت است از مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچکی که یک مدار کامل را تشکیل می‌دهند، نتیجه‌اش الزاماً صفر است. پس

$$\mathbf{F} \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{B} \text{ یکنواخت}) \quad (۱۰-۸)$$

کمیت جالب توجه دیگر گشتاور نیروی وارد بر یک مدار کامل است. عنصر گشتاور نیرو یعنی $d\boldsymbol{\tau}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۱-۸)$$

گشتاور نیروی وارد بر یک مدار کامل عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۲-۸)$$

در اینجا نیز چنانچه \mathbf{B} یکنواخت نباشد، ساده‌سازی بیشتری میسر نیست. اما اگر یکنواخت باشد، بسط سراسری به ترتیب زیر امکان‌پذیر است

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(dyB_z - dzB_y) + \mathbf{j}(dzB_x - dxB_z) + \mathbf{k}(dxB_y - dyB_x) \quad (۱۳-۸)$$

با استفاده از این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ را به راحتی می‌توان پیدا کرد

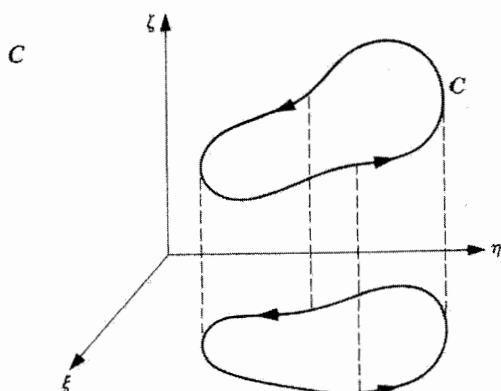
$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x = y dxB_y - y dyB_x - z dzB_x + z dxB_z$$

$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_y = z dyB_z - z dzB_y - x dxB_y + x dyB_x \quad (۱۴-۸)$$

$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_z = x dzB_x - x dxB_z - y dyB_z + y dzB_y$$

چون \mathbf{B} مستقل از \mathbf{r} فرض شده است (میدان یکنواخت) مؤلفه‌های \mathbf{B} را می‌توان از زیر انتگرالهایی که در بسط معادله (۸-۱۲) ظاهر می‌شوند، بیرون آورد. انتگرال‌گیرهای فضایی که باید انجام شوند از دو نوع کلی زیرند:

$$\oint \xi d\xi \quad (۱۵-۸ \text{ الف})$$

شکل ۱-۸ تصویر منحنی C بر روی صفحه $\xi\eta$.

و

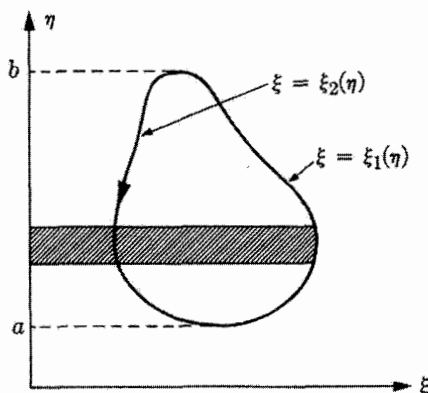
$$\oint \xi d\eta \quad (۱۵-۸)$$

که در آنها ξ نشان دهنده هر یک از مختصات است و η نمایانگر هر مختصه‌ای است که با ξ متفاوت باشد. انتگرال اول ساده است، زیرا نشان دهنده انتگرال $\xi d\xi$ است از حد پایینی ξ_1 تا حد بالایی ξ_2 ، به اضافه همین انتگرال از ξ_2 تا ξ_1 . چون جابه‌جا کردن حدود انتگرال یک علامت منها پدید می‌آورد، پس نتیجه صفر است و به این ترتیب انتگرالهای مربوط به شش جمله از معادله‌های (۱۴-۸) حذف می‌شوند. انتگرالهایی از نوع (۱۵-۸) فقط دو متغیر ξ و η را در بردارند، پس تفاوتی نمی‌کند که این انتگرالها دور منحنی واقعی C محاسبه شوند یا دور تصویر این منحنی بر روی صفحه $\xi\eta$ (شکل ۱-۸). با به‌کار بردن تصویر بر روی صفحه $\xi\eta$ به راحتی می‌توان دید که انتگرال (۱۵-۸) نشان دهنده چیست. در شکل ۲-۸ صفحه $\xi\eta$ همراه با سطح بی‌نهایت کوچک $\xi d\eta$ نشان داده شده است. انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\oint \xi d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta) d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta) d\eta \quad (۱۶-۸)$$

این انتگرال، همان مساحت سطح محصور به وسیله تصویر منحنی را نتیجه می‌دهد و در شکل مقدار آن مثبت است. اگر ξ و η در یک دستگاه مختصات راستگرد به ترتیب چرخه‌ای ظاهر شوند، آنگاه جهت دور زدن منحنی، بردار یکه عمودی در جهت مثبت ζ به دست خواهد داد. پس می‌توان نوشت

$$\oint \xi d\eta = A_{\zeta} \quad (۱۷-۸)$$



شکل ۲-۸ محاسبه انتگرال $\int_C \xi d\eta$

که در آن ξ ، η و ζ جایگشت چرخه‌ای x ، y و z هستند. با به‌کار بردن این نتایج در محاسبه انتگرالها، خواهیم داشت

$$\tau_x = I \oint_C [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x = I(A_y B_z - A_z B_y) \quad (18-8)$$

و رابطه مشابهی برای مؤلفه‌های y و z به‌دست می‌آید. سه رابطه حاصل را می‌توان به‌صورت ساده زیر خلاصه کرد

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (19-8)$$

در این رابطه \mathbf{A} برداری است که مؤلفه‌های آن برابرند با مساحت سطح محصورشده به‌وسیله تصویر منحنی C بر روی صفحات yz ، xz و xy . در نظریه مغناطیسی، بارها با کمیت $I \mathbf{A}$ برخورد می‌کنیم؛ این کمیت را گشتاور دوقطبی مغناطیسی مدار می‌نامیم. نماد \mathbf{m} را برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی به‌کار خواهیم برد:

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} \quad (20-8)$$

که \mathbf{A} به همان صورت بالا تعریف می‌شود.

با شیوه‌ای که در بالا به‌کار رفت، می‌توان به‌آسانی نشان داد که انتگرال $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ دور یک مسیر بسته، دو برابر مساحت محصورشده به‌وسیله منحنی مسیر است:

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \mathbf{A} \quad (21-8)$$

۱. توجه کنید که منحنی C به منحنیهای مسطح محدود نشده است و تعریف بالا برای \mathbf{A} هر محدودیتی از این قبیل را غیرضروری می‌سازد.

با استفاده از این رابطه داریم

$$m = \frac{1}{r} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (22-8)$$

که رابطه دیگری برای گشتاور دوقطبی مغناطیسی است.

اگر جریان به جای محصور بودن در سیمها، در محیط جریان داشته باشد، آنگاه همان طور که قبلاً نشان داده شد، بهتر است $I d\mathbf{l}$ را با $\mathbf{J} dv$ برابر بگیریم

$$I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} dv \quad (23-8)$$

در این صورت می نویسیم

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{J} dv \quad (24-8)$$

رابطه بالا در مبحث خواص مغناطیسی ماده سودمند خواهد بود.

۳-۸ قانون بیو و ساوار

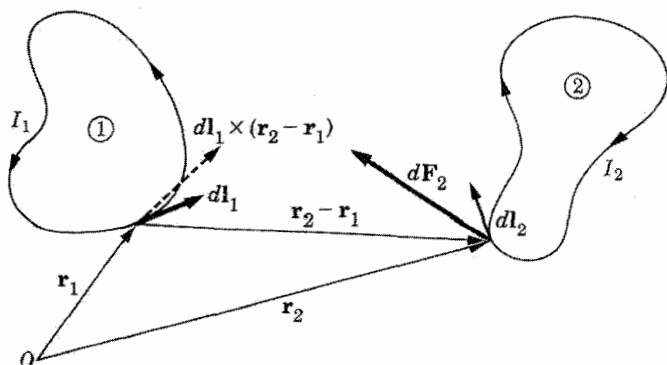
در سال ۱۸۲۰، درست چند هفته پس از اعلام کشف اورستد مینی بر ایجاد اثرهای مغناطیسی به وسیله جریانهای الکتریکی، آمپر نتایج یک رشته از آزمایشهای خود را عرضه کرد. نتایج آزمایشهای آمپر را می توان تعمیم داد و به زبان ریاضیات جدید به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (25-8)$$

این رابطه نسبتاً پیچیده را می توان به کمک شکل ۳-۸ توضیح داد. نیروی \mathbf{F}_2 نیرویی است که از طرف مدار ۱ به مدار ۲ وارد می شود، $d\mathbf{l}$ ها و \mathbf{r} ها در شکل مشخص شده اند. برحسب تعریف در دستگاه یکاهای mks داریم

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

معادله (۲۵-۸) به عنوان تعریف اصلی آمپر به کار می رود، و سپس کولن برحسب آمپر تعریف می شود. به نظر می رسد که معادله (۲۵-۸) از نظر ظاهری، به علت عدم تقارن، قانون سوم نیوتون را نقض می کند. لیکن با به کار بردن برخی قضایای آنالیز برداری، می توان نشان داد که در واقع تقارن وجود دارد، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ (مسئله ۴-۸).



شکل ۳-۸ برهم کنش مغناطیسی دو مدار حامل جریان.

از معادله (۹-۸) واضح است که معادله (۲۵-۸) ایجاب می‌کند:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (26-8)$$

این معادله تعمیمی است از قانون بیو و ساوار^۱، که ما این اسم را هم برای معادله (۲۶-۸) و هم برای صورت دیفرانسیلی آن، یعنی رابطه زیر به کار خواهیم برد

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (27-8)$$

اگر از استدلال مشابهی که به معادله (۷-۸) انجامید استفاده کنیم، معادله (۲۷-۸) مستقیماً از معادله (۴-۸)، چنانچه در مورد یک رسانا به کار برده شود، به دست می‌آید. به عنوان آخرین نکته، روابط (۲۶-۸) و (۲۷-۸) برای توزیع پیوسته جریانی که با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ توصیف شود، به صورت زیر در می‌آیند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (28-8)$$

و

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (29-8)$$

۱. لازم به تذکر است که بر سر نامگذاری قوانین مختلف تا حدی اختلاف نظر وجود داشته است. ما در اینجا وارد این بحث نمی‌شویم و خواننده علاقه‌مند را به کتاب تاریخ عالی زیر ارجاع می‌دهیم:

E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, vol. I (New York: Philosophical Library, 1951).

مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که تمام میدانهای مغناطیسی را می‌توان برحسب یک توزیع جریان توصیف کرد. یعنی، \mathbf{B} همواره به صورت معادله (۲۸-۸) با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$ است. این مشاهدات ایجاب می‌کند که

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (30-8)$$

و این معادله، به نوبه خود، بدان معنی است که قطبهای مغناطیسی منزوی وجود ندارند. معادله (۳۰-۸) برای هر نوع \mathbf{B} که به صورت (۲۸-۸) یا (۲۶-۸) نوشته شود، صحیح است و این مطلب را می‌توان از راه ریاضی به طریق زیر اثبات کرد: دیوژرانس معادله (۲۸-۸) را حساب می‌کنیم، با به‌کار بردن $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ داریم

$$\nabla_{\mathbf{r}_2} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2} \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

لیکن، $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ شیب $-1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ است نسبت به \mathbf{r}_2 . از آنجا که تاو شیب هر تابعی صفر است، نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla_{\mathbf{r}_2} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0$$

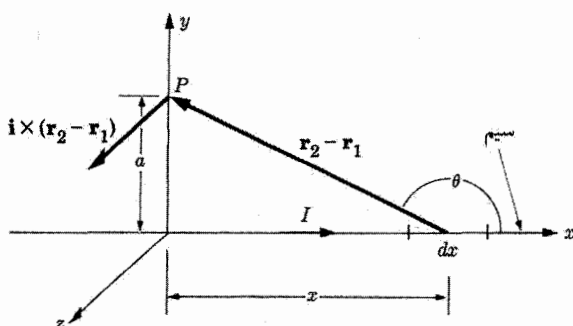
۴-۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیو و ساوار

به علت آنکه محاسبه انتگرالهای معادله (۲۸-۸) (یا معادله ۲۶-۸) با اشکال روبه‌رو می‌شود، دامنه مسائلی که در حل آنها این معادلات را می‌توان به‌کار برد محدود است. برخی از حالت‌های قابل محاسبه در این بخش بررسی می‌شوند. در بخشهای دیگر شیوه‌های دیگری برای به‌دست آوردن \mathbf{B} بررسی خواهد شد.

مثال ۱-۸ میدان مغناطیسی یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان فرض می‌کنیم که سیم در امتداد محور x ، از منهای بی‌نهایت تا به اضافه بی‌نهایت امتداد دارد و جریان I را حمل می‌کند. میدان در نقطه‌ای مثل \mathbf{r}_1 ، بر روی محور y محاسبه خواهد شد. وضعیت هندسی مسئله در شکل ۴-۸ نشان داده شده است.

حل: با استفاده از قانون بیو و ساوار، میدان مغناطیسی به صورت زیر است

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (31-8)$$



شکل ۴-۸ میدان مغناطیسی در نقطه P ناشی از یک سیم بلند و مستقیم.

چون $r_2 - r_1$ در صفحه xy قرار گرفته است، پس

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sin \theta \mathbf{k} \quad (۳۲-۸)$$

به علاوه

$$\frac{a}{x} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad (۳۳-۸)$$

و

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = a \csc(\pi - \theta) = a \csc \theta \quad (۳۴-۸)$$

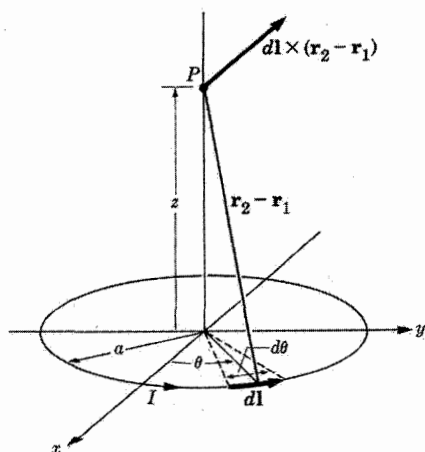
با به کار بردن این روابط برای تبدیل معادله (۳۱-۸) به صورت انتگرالی بر روی θ از صفر تا π ، نتیجه زیر به دست می آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k} \quad (۳۵-۸)$$

برای به کار بردن این نتیجه در حالت‌های کلی‌تر، تنها لازم است توجه شود که مسئله حول محور x تقارن آشکاری دارد. پس نتیجه می‌گیریم که خطوط \mathbf{B} در همه جا به صورت دایره‌هایی هستند که راسان در مرکز آنها قرار گرفته است. این نکته با نتیجه ساده‌ای که جهت \mathbf{B} را با قاعده دست راست معلوم می‌کند توافق کامل دارد.

مثال ۲-۸ میدان مغناطیسی محوری یک حلقه سیم دایره‌ای حامل جریان

یک حلقه سیم دایره‌ای را در نظر بگیرید که حامل جریان I است. محاسبه میدان مغناطیسی تولیدشده توسط این مدار در یک نقطه اختیاری از فضا بسیار مشکل است، ولی اگر فقط نقاط



شکل ۵-۸ میدان محوری یک حلقه سیم دایره‌ای.

واقع بر محور تقارن را در نظر بگیریم، عبارت مربوط به \mathbf{B} نسبتاً ساده می‌شود. در این مثال یک بررسی کاملاً برداری به‌کار برده می‌شود تا شیوه کار نشان داده شود. شکل (۵-۸) وضعیت هندسی و مختصات به‌کار برده شده را نمایش می‌دهد. می‌خواهیم میدان را در نقطه \mathbf{r}_2 واقع بر محور z را محاسبه کنیم؛ حلقه دایره‌ای در صفحه xy قرار دارد.

حل: میدان مغناطیسی با معادله (۲۶-۸) داده می‌شود که در آن، مطابق شکل ۵-۸، روابط زیر باید به‌کار برده شوند:

$$d\mathbf{l} = a d\theta (-\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta)$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{i}a \cos \theta - \mathbf{j}a \sin \theta + k z \quad (۳۶-۸)$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = (a^2 + z^2)^{1/2}$$

از قرار دادن این روابط در معادله (۲۶-۸) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{i}za \cos \theta + \mathbf{j}za \sin \theta + ka^2)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\theta \quad (۳۷-۸)$$

نتیجه انتگرال‌گیری دو جمله اول صفر می‌شود و باقی می‌ماند

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \quad (۳۸-۸)$$

که البته تماماً در امتداد محور z است.

یک دستگاه حامل جریان که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، پیچه هلمهولتز است. این دستگاه از دو پیچه مستدیر با شعاعهای مساوی و محور مشترک تشکیل شده است. فاصله بین دو صفحه پیچه‌ها طوری انتخاب می‌شود که مشتق دوم B در نقطه‌ای واقع بر محور پیچه‌ها به فاصله مساوی از هر یک از آنها صفر شود.

مثال ۳-۸ میدان محوری پیچه هلمهولتز

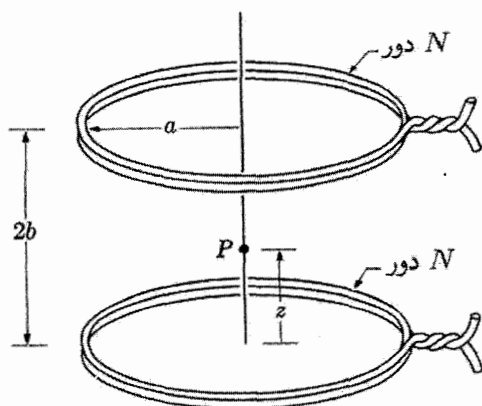
شکل ۶-۸ پیکربندی پیچه هلمهولتز را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای روی محور پیچه تعیین کنیم.

حل: میدان مغناطیسی در نقطه P عبارت است از

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (39-8)$$

که از به‌کار بردن معادله (۳۸-۸) برای هر یک از دو پیچه به دست می‌آید. منظور کردن ضریب N برای آن است که بتوانیم وضعیتی را بررسی کنیم که هر یک از پیچه‌ها N دور داشته باشند. مشتق اول B_z نسبت به z عبارت است از

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z - 2b)}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\} \quad (40-8)$$



شکل ۶-۸ میدان محوری پیچه هلمهولتز.

در نقطه $z = b$ این مشتق صفر است. مشتق دوم نسبت به z به صورت زیر است

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{2(z^2 + a^2)^{7/2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z - 2b)^2}{2[(2b - z)^2 + a^2]^{7/2}} \right\}$$

در نقطه $z = b$ این مشتق تبدیل خواهد شد به

$$\left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=b} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(b^2 + a^2)^{7/2}} \right\} \quad (41-8)$$

که به ازای $a^2 - 4b^2 = 0$ صفر می شود. پس انتخاب مناسب برای b عبارت است از

$$2b = a \quad (42-8)$$

یعنی، فاصله بین دو پیچه باید برابر با شعاع آنها باشد. با این فاصله، میدان مغناطیسی در نقطه وسط برابر است با

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{\lambda}{5^{3/2}} \quad (43-8)$$

پیچه‌های هلمهولتز نقش مهمی در تحقیق علمی دارند و غالباً برای تولید یک میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت در ناحیه کوچکی از فضا به کار می‌روند. حال میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای واقع بر محور در نزدیکی نقطه وسط بین دو پیچه بررسی می‌کنیم. میدان $B_z(z)$ را می‌توان برحسب رشته تیلور حول نقطه $z = \frac{1}{2}a$ بسط داد:

$$B_z(z) = B_z \left(\frac{1}{2}a \right) + \left(z - \frac{1}{2}a \right) \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}a} + \dots$$

چون سه مشتق اول صفر می‌شوند، پس

$$B_z(z) = B_z \left(\frac{1}{2}a \right) + \frac{1}{24} \left(z - \frac{1}{2}a \right)^4 \left. \frac{\partial^4 B_z}{\partial z^4} \right|_{z=\frac{1}{2}a} + \dots$$

اگر مشتق چهارم به‌طور صریح محاسبه شود، $B_z(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$B_z(z) = B_z \left(\frac{a}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - \frac{a}{2}}{a} \right)^4 \right\} \quad (44-8)$$

پس برای ناحیه‌ای که در آن $|z - a/2|$ کمتر از $a/10$ باشد، $B_z(z)$ با مقدار $B(a/2)$ به مقداری کمتر از یک و نیم در ده هزار تفاوت می‌کند.

تسلا، برای اندازه‌گیری اغلب میدانهای آزمایشگاهی، یکای نسبتاً بزرگی است؛ به همین دلیل عموماً برای میدان B از یکای دیگری به نام گاوس از دستگاه یکاهای گاوسی^۱ استفاده می‌شود: یک گاوس برابر با 10^{-4} تسلاست. به منظور سهولت در مراجعه، میدان مغناطیسی در نقطه وسط پیچه^۲ هلمهولتز را به صورت زیر می‌نویسیم

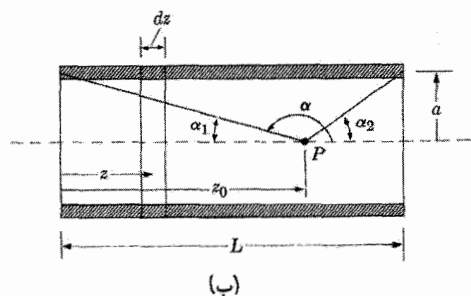
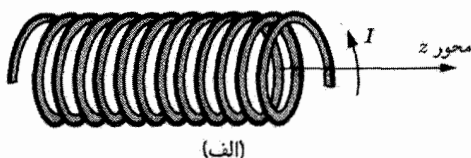
$$B_z = \frac{32\pi N I}{5^3/2 a^{10}} \quad (الف) \quad (۸-۴۳)$$

که در آن I برحسب آمپر، a برحسب سانتی‌متر و B برحسب گاوس است. بدیهی است که N همان تعداد دورها در هر یک از دو پیچه است.

مثال ۸-۴ میدان محوری یک سیملوله

وسیله دیگری که برای آن از معادله (۸-۳۸) استفاده می‌شود، سیملوله است. سیملوله سیمی است که آن را N دور با فاصله یکنواخت روی سطح استوانه‌ای به شعاع a و طول L پیچیده باشند. چنین وضعیتی در شکل ۸-۷ (الف) نشان داده شده است.

حل: از تقسیم طول L به عناصر dz ، به طوری که در شکل ۸-۷ (ب) نشان داده شده است، و



شکل ۸-۷ (الف) یک سیملوله؛ (ب) میدان مغناطیسی محوری سیملوله.

۱. این دستگاه یکاها در پیوست ۳ توضیح داده شده است.

به کار بردن معادله (۳۸-۸) برای هر عنصر، و سپس جمع کردن نتایج، میدان مغناطیسی در نقطه z_0 به دست می آید. با توجه به اینکه عنصر dz حاوی تعداد $N dz/L$ دور است، داریم

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L} \frac{a^2}{2} \int_0^L \frac{dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (45-8)$$

با تغییر متغیر $z - z_0 = a \cot \alpha$ نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} B_z(z_0) &= \frac{\mu_0 NI}{2L} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_1} \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2L} [-\cos(\pi - \alpha_1) + \cos \alpha_1] \end{aligned} \quad (46-8)$$

زاویه های α_1 و α_2 (هر دو کوچکتر از $\pi/2$) در شکل ۷-۸ (ب) نشان داده شده اند. بنابراین معادله (۴۶-۸) به صورت زیر در می آید

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L} \left[\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right] \quad (47-8)$$

اگر طول سیملوله در مقایسه با شعاع آن بلند باشد و z_0 به هیچ یک از دو مقدار صفر یا L نزدیک نباشد، آن وقت α_1 و α_2 هر دو زاویه های کوچکی خواهند بود و می توان آنها را به صورت های تقریبی زیر نوشت

$$\alpha_1 \cong \frac{a}{z_0}, \quad \alpha_2 \cong \frac{a}{L - z_0} \quad (48-8)$$

با بسط $\cos \alpha_1$ و $\cos \alpha_2$ و نگاه داشتن جملات تا درجه دوم، نتیجه زیر را به دست می آوریم

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left\{ 1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L - z_0)^2} \right\} \quad (49-8)$$

از این معادله نتیجه می گیریم که اگر $z_0 = L/2$ و $L/\alpha = 10^\circ$ باشد، چنانچه از جملات درجه دوم و بالاتر چشمپوشی و تنها از معادله مقدماتی استفاده کنیم، خطایی برابر با ۲ درصد حاصل می شود.

معادله کلی B ، یعنی معادله (۲۶-۸)، همواره رابطه صحیحی برای میدان مغناطیسی یک مدار حامل جریان است، ولی هنگامی که وضعیت هندسی پیچیده است، استفاده از معادله مذکور مشکل خواهد بود.

۵-۸ قانون مداری آمپر

برای میدانهای مغناطیسی داده شده با معادله (۲۶-۸) یا (۲۸-۸)، در صورتی که ناشی از جریانهای پایا باشند، یعنی ناشی از جریانهایی که در رابطه زیر صدق می کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5-8)$$

می توان معادله بسیار مهمی برای تاو \mathbf{B} به دست آورد. این کار به سادگی با محاسبه تاو معادله (۲۸-۸) انجام می گیرد. محاسبه تاو، مشتق گیری نسبت به \mathbf{r}_2 را در بر دارد، در نتیجه فقط بر روی عامل $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ عمل می کند:

$$\begin{aligned} \nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \left(\nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] dv_1 \end{aligned}$$

به علت وجود تقارن بین \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 مشتق گیری در جمله دوم را می توان به مشتق گیری نسبت به \mathbf{r}_1 (با منظور داشتن یک علامت منها) تغییر داد:

$$\nabla_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) 4\pi \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right] dv_1$$

جمله اول برحسب تابع دلتای دیراک نوشته شده است، همان طور که در معادله (۵۷-۲) داشتیم؛ انتگرال گیری این جمله که مستقیماً انجام می شود، نتیجه $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2)$ را می دهد. با انتگرال گیری جزء به جزء می توان نشان داد که جمله دوم صفر می شود. برای مؤلفه x داریم

$$\nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \right) = \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \nabla_1 \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla_1 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

به طور مشابه برای دیگر مؤلفه ها. جمله دارای $\nabla \cdot \mathbf{J}$ بنا به فرض (۵-۸) مساوی صفر است و با استفاده از قضیه دیورژانس می توان انتگرال حجمی سمت چپ را به یک انتگرال سطحی تبدیل کرد؛ وقتی سطح در خارج از ناحیه کراننداری که در آن \mathbf{J} غیر صفر است انتخاب شود، مقدار انتگرال سطحی صفر می شود. (همین نتیجه را می توان مستقیماً از اتحاد ۴-۲-۱ در جدول ۲-۱ به دست آورد). بنابراین نتیجه نهایی، که شکل دیفرانسیلی قانون آمپر نامیده می شود، به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_2) \quad (51-8)$$

در فصل ۹ این معادله را تا اندازه‌ای تغییر خواهیم داد تا برای مواردی که مواد مغناطیسی وجود دارد، سودمندتر باشد. لیکن، معادله (۵۱-۸)، مادامی که \mathbf{J} بیانگر جریان کل و $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ باشد، هنوز هم معتبر خواهد بود.

می‌توان با استفاده از قضیه استوکس، معادله (۵۱-۸) را به یک صورت انتگرالی تبدیل کرد که این صورت گاهی بسیار مفید واقع می‌شود. این کاربرد قضیه استوکس چنین نوشته می‌شود

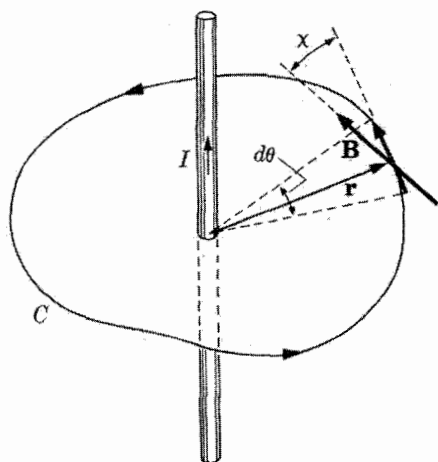
$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (45-1)$$

با استفاده از معادله (۵۱-۸) برای $\nabla \times \mathbf{B}$ ، قانون مداری آمپر به دست می‌آید

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (52-8)$$

بیان ساده این معادله این است که انتگرال خطی \mathbf{B} بر روی هر مسیر بسته برابر است با حاصل ضرب μ_0 در کل جریانی که از مسیر بسته عبور می‌کند.

تحقیق صحت معادله (۵۲-۸) در یک حالت ساده، آموزنده است. سیم مستقیم و بلند، مثال بسیار خوبی است. در این حالت اندازه \mathbf{B} در نقطه‌ای به فاصله r از رسانا، از رابطه $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$ به دست می‌آید و جهت آن مماس است بر دایره‌ای به شعاع r ، که مرکزش بر روی رسانا قرار گرفته باشد. شکل ۸-۸ وضع هندسی این مسئله را نشان می‌دهد. جریان در



شکل ۸-۸ تحقیق صحت قانون مداری آمپر برای سیم مستقیم و بلند.

جهت بالاست و C در جهت پاد ساعتگرد طی می‌شود. از شکل پیداست که

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos \chi = |\mathbf{B}| r d\theta \quad (53-8)$$

با به‌کار بردن $|\mathbf{B}|$ که در بالا ذکر شد، داریم

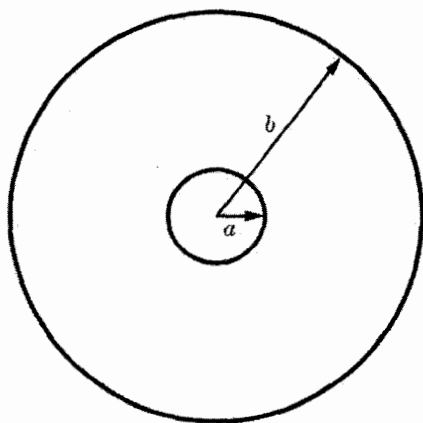
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I \quad (54-8)$$

که حالت خاصی از معادله (52-8) است.

قانون مداری آمپر، از بسیاری جهات هم‌تای قانون گاوس در الکتروستاتیک است. یعنی، از این قانون می‌توان برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریانی که تقارن کافی داشته باشد، استفاده کرد، بی آنکه به محاسبه انتگرالهای پیچیده قانون بیو نیاز داشته باشیم. یک مثال در زیر خواهد آمد.

مثال ۵-۸ میدان مغناطیسی یک کابل هم‌محور رسانا

یک کابل هم‌محور را در نظر بگیرید که از یک رسانای کوچک مرکزی به شعاع a و یک رسانای خارجی به شکل استوانه‌ای هم‌محور با سیم مرکزی به شعاع b تشکیل شده است، نظیر شکل ۹-۸. فرض کنید که هر دو رسانا جریان یکسان I را حمل می‌کنند و جهت جریان در آن دو عکس یکدیگر است. همچنین فرض کنید جریان سیم مرکزی به سمت بیرون از صفحه کاغذ باشد. میدان مغناطیسی را در نقاط داخل و خارج کابل تعیین کنید.



شکل ۹-۸ مقطع یک کابل هم‌محور.

حل: از تقارن مسئله روشن است که \mathbf{B} در همه جا باید مماس بر دایره‌ای باشد که مرکز آن منطبق بر مرکز رسانای مرکزی است و از نقطه‌ای که \mathbf{B} در آن خواسته شده است، می‌گذرد. به علاوه، \mathbf{B} نمی‌تواند به زاویه سمت بستگی داشته باشد. مسیرهای مناسب برای به‌کار بردن معادله (۸-۵۲) عبارت‌اند از دویری که مرکزشان بر رسانای مرکزی منطبق باشد. برای یک چنین دایره‌ای به شعاع r ، داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad (8-55)$$

که باید مساوی باشد با حاصل ضرب μ_0 در کل جریانی که از سطح دایره می‌گذرد. پس،

$$2\pi r B = \mu_0 I, \quad a < r < b \quad (8-56)$$

$$2\pi r B = 0, \quad b < r$$

این نتیجه به ظاهر بدیهی را می‌توان با انتگرال‌گیری از قانون بیو، البته با زحمت زیاد، به دست آورد.

۸-۶ پتانسیل برداری مغناطیسی

محاسبه میدانهای الکتریکی با معرفی پتانسیل الکتروستاتیکی بسیار ساده شد. امکان این ساده‌سازی از صفر شدن تاو میدان الکتریکی حاصل شد. تاو میدان مغناطیسی صفر نیست، لیکن دیورژانس آن صفر است.

چون دیورژانس هر تاو صفر است، پس منطقی است که میدان مغناطیسی را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8-57)$$

میدان برداری \mathbf{A} به نام پتانسیل برداری مغناطیسی خوانده می‌شود.

تنها شرطی که باید برای \mathbf{A} قائل شد، این است که

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (8-58)$$

با به‌کار بردن اتحاد زیر

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (8-59)$$

و با مشخص کردن اینکه $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ است، نتیجه می‌شود

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (8-60)$$

با انتگرالگیری از هر یک از مؤلفه‌های قائم و به‌کار بردن پاسخ معادلهٔ پواسون به‌عنوان راهنما، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \quad (61-8)$$

محاسبهٔ انتگرالهای موجود در این عبارت از محاسبهٔ انتگرالهای موجود در قانون بیو بسیار ساده‌تر است؛ لیکن، این انتگرالها نیز از آنهایی که در به‌دست آوردن پتانسیل الکتروستاتیکی به‌کار می‌روند، پیچیده‌ترند.

راه دیگر به‌دست آوردن معادلهٔ (61-8) تبدیل مستقیم صورت معادلهٔ (28-8) به صورت معادلهٔ (57-8) است. این کار را با توجه به رابطهٔ زیر می‌توان انجام داد

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (62-8)$$

که در آن ∇_2 به معنی مشتق‌گیری نسبت به \mathbf{r}_2 است. با استفاده از اتحاد برداری زیر

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi \quad (63-8)$$

که برای هر بردار \mathbf{F} و هر تابع نرده‌ای φ صادق است، معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\nabla_2 \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \right\} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (64-8)$$

زیرا $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$ به \mathbf{r}_2 بستگی ندارد. با قرار دادن این نتایج در معادلهٔ (28-8) به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \end{aligned} \quad (65-8)$$

با بیرون آوردن تاو از زیر انتگرال، معادلهٔ (65-8) عیناً به صورت معادلهٔ (57-8) در می‌آید. بدین ترتیب رابطهٔ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \quad (61-8)$$

از این راه نیز به‌دست می‌آید.

برای اجتناب از این گمان اشتباه که پتانسیل برداری می‌تواند در محاسبهٔ میدانهای ساده به اندازهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی مفید باشد، باید خاطر نشان ساخت که اصولاً هیچ موردی وجود

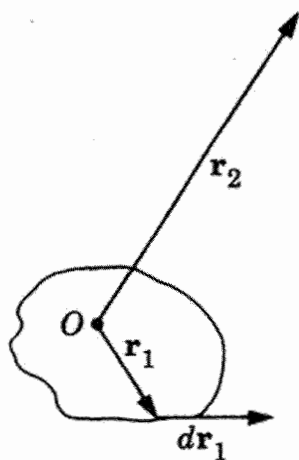
ندارد که در آن بتوان \mathbf{A} را به طور ساده و کامل محاسبه کرد (هر چند که محاسبه عددی این پتانسیل برای توزیعهای کراندار جریان همیشه امکان پذیر است). هنگامی که معادله (۸-۶۱) برای سیم مستقیم و بلند به کار برده شود، \mathbf{A} بی نهایت می شود.^۱ محاسبات مربوط به حلقه دایره‌ای شامل انتگرالهای بیضوی می شوند، و الی آخر. همچنین باید توجه کرد که محاسبه پتانسیل برداری در یک تک نقطه مفید نخواهد بود، زیرا میدان مغناطیسی از طریق مشتق‌گیری به دست می آید. کاربرد اصلی پتانسیل برداری در محاسبات تقریبی است، از قبیل تقریبهایی که در بخش بعد در باره آنها بحث می شود، و نیز در مسائل مربوط به تابش الکترومغناطیسی (فصلهای ۱۶ و ۲۰).

۷-۸ میدان مغناطیسی یک مدار در فواصل دور

پتانسیل برداری مغناطیسی مدار کوچکی را که در فواصل دور قرار گرفته باشد (شکل ۸-۱۰) می توان نسبتاً به آسانی محاسبه کرد. عبارت مربوط به پتانسیل برداری، معادله (۸-۶۱)، را می توان با قرار دادن $I dr$ به جای $\mathbf{J} dv$ ، در مورد مدارهای جریان به کار برد. بدین ترتیب

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (8-66)$$

برای مدارهایی که ابعادشان در مقایسه با r_2 کوچک است، می توان مخرج را به شکل تقریبی



شکل ۸-۱۰ میدان مغناطیسی در نقطه \mathbf{r}_2 ناشی از مداری که در فواصل دور قرار دارد. \mathbf{r}_1 مدار را می بیند. (مبدأ \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 در داخل یا نزدیک مدار است.)

۱. برای سیم مستقیم و بلند یک پتانسیل برداری متناهی وجود دارد. در مختصات استوانه‌ای برای سیمی که منطبق بر محور z است و جریان $I\mathbf{k}$ را حمل می کند، این پتانسیل برابر است با: $\mathbf{A} = -(\mu_0 I / 2\pi) \ln rk$. صحت این رابطه را می توان با محاسبه مستقیم $\nabla \times \mathbf{A}$ تحقیق کرد (به پیوست ۴ مراجعه کنید).

محاسبه کرد. برای انجام این کار، مانند معادله (۲-۴۶)، می‌نویسیم

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} \quad (67-8)$$

و این عبارت را برحسب توانهای r_1/r_2 تا درجه اول بسط می‌دهیم

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \dots \right] \quad (68-8)$$

با استفاده از این بسط در معادله (۸-۶۶) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_2} \oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^2} \oint d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \dots \right\} \quad (69-8)$$

در رابطه بالا انتگرال اول صفر می‌شود و انتگرالده دوم یکی از جمله‌های بسط برداری زیر است

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (70-8)$$

برای حذف جمله اول در طرف راست معادله (۸-۷۰)، دیفرانسیل $\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)$ را برای تغییر کوچکی در \mathbf{r}_1 به صورت زیر می‌نویسیم

$$d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \quad (71-8)$$

که رابطه‌ای دقیق است. با جمع کردن معادله‌های (۸-۷۰) و (۸-۷۱) و تقسیم حاصل جمع بر ۲ نتیجه می‌شود

$$d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \quad (72-8)$$

چون جمله آخر یک دیفرانسیل کامل است، در حاصل دومین انتگرال معادله (۸-۶۹) سهمی نخواهد داشت. پس نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \quad (73-8)$$

طبق معادله (۸-۲۲) عبارت داخل کروشه گشتاور دوقطبی مغناطیسی، \mathbf{m} ، مدار است. بنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (74-8)$$

در این محاسبات فرض شده است که همواره $r_1 \ll r_2$ است. پس معادله (۷۴-۸) برای هر مبدأ مختصات اختیاری معتبر نیست، بلکه فقط برای میدتی نزدیک به مدار صادق است.

میدان مغناطیسی را با محاسبهٔ تاور معادله (۷۴-۸) می‌توان به‌دست آورد. این کار با استفاده از اتحادهای برداری به‌آسانی انجام می‌شود. نخست داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right] \end{aligned} \quad (75-8)$$

جملهٔ اول داخل کروشه را می‌توان با توجه به رابطهٔ زیر

$$m_x \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = \frac{m_x \mathbf{i}}{r_2^3} - 3m_x x_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^5} \quad (76-8)$$

تبدیل کرد. بنابراین

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{\mathbf{m}}{r_2^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} \quad (77-8)$$

جملهٔ دوم فقط شامل محاسبهٔ زیر است

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = \frac{3}{r_2^3} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{3\mathbf{r}_2}{r_2^5} = 0 \quad (r_2 \neq 0) \quad (78-8)$$

پس، بالاخره خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r_2^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_2}{r_2^5} \right] \quad (\text{دوقطبی مغناطیسی}) \quad (79-8)$$

معادله (۷۹-۸) نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار در فاصلهٔ دور به جزئیات شکل هندسی آن بستگی ندارد، بلکه فقط به گشتاور مغناطیسی آن، یعنی \mathbf{m} ، مربوط می‌شود. مقایسهٔ این معادله با معادله (۳۶-۲) نشان می‌دهد که معادله (۷۹-۸) از نظر صوری همانند میدان

الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی است، و این توجیهی است برای اطلاق نام میدان دوقطبی مغناطیسی به آن.

۸-۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی

معادله (۸-۵۱) نشان می‌دهد که هر جا چگالی جریان صفر باشد، تاو میدان مغناطیسی در آنجا صفر است.

بنابراین، می‌توان میدان مغناطیسی را در ناحیه‌هایی که چگالی جریان در آنجا صفر است، به صورت گرادیان یک پتانسیل نرده‌ای نوشت:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^* \quad (8-51)$$

φ^* به نام پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی خوانده می‌شود.

اما دیورژانس \mathbf{B} نیز صفر است، و این بدان معنی است که

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (8-51)$$

بنابراین φ^* در معادله لاپلاس صدق می‌کند. بیشتر کارهای الکتروستاتیک را می‌توان در اینجا وارد کرد و برای محاسبه φ^* در وضعیت‌های مختلف به‌کار برد. اما در به‌کار بردن شرایط مرزی باید دقت کرد. به‌علاوه، φ^* در یک مدار حامل جریان تابع تک‌مقداری نیست. مثال ساده‌ای در مسئله (۸-۲۵) دیده می‌شود.

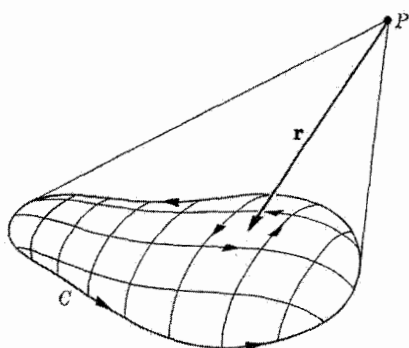
عبارت مربوط به پتانسیل نرده‌ای یک دوقطبی مغناطیسی، به‌ویژه مفید است. با توجه به اینکه معادله (۸-۷۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} \right) \quad (8-79)$$

آشکار است که برای دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} خواهیم داشت

$$\varphi^*(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} \quad (8-79)$$

به تشابه بین معادله (۸-۸۳) و پتانسیل دوقطبی الکتریکی، یعنی معادله (۲-۳۹)، توجه کنید. مدار بزرگ C را می‌توان به کمک یک شبکه‌بندی، نظیر شکل ۸-۱۱، به تعداد زیادی مدار



شکل ۱۱-۸ یک مدار ماکروسکوپی جریان که از اجزای دوقطبی مغناطیسی ساخته شده است.

کوچک تقسیم کرد. چنانچه هر حلقه کوچک حاصل از شبکه‌بندی حامل همان جریانی باشد که در اصل توسط مدار C حمل می‌شود، آنگاه به علت خنثی شدن جریانهای متقابل در شاخه مشترک حلقه‌های مجاور، اثر کلی با حالتی که در آن بار فقط در مدار C جریان داشته باشد، یکسان خواهد بود. برای هر یک از حلقه‌های کوچک، می‌توان گشتاور مغناطیسی را به صورت زیر نوشت

$$d\mathbf{m} = I \mathbf{n} da \quad (۸۴-۸)$$

زیرا هر یک از این حلقه‌ها آن قدر کوچک است که می‌توان آن را یک مدار مسطح فرض کرد. در اینجا \mathbf{n} بردار یکه عمود بر سطح حلقه da است. با استفاده از این عبارت در معادله (۸۳-۸) و انتگرال‌گیری بر روی سطح محصور به وسیله مدار C نتیجه می‌گیریم

$$\varphi^*(P) = \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} da}{r_2^3} \quad (۸۵-۸)$$

در این معادله \mathbf{r}_2 باید به عنوان برداری از da به نقطه P ، یعنی $-\mathbf{r}$ ، همان‌طور که در شکل ۱۱-۸ نشان داده شده است، تعبیر شود. با تغییر \mathbf{r}_2 به $-\mathbf{r}$ خواهیم داشت

$$\varphi^*(P) = -\frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da}{r^3} \quad (۸۶-۸)$$

کمیت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da$ درست برابر است با حاصل ضرب r در تصویر da بر روی صفحه‌ای عمود بر \mathbf{r} . بنابراین $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da / r^3$ زاویه فضایی در برگیرنده da از نقطه P است. پس معادله (۸۶-۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi^*(P) = -\frac{I\Omega}{4\pi} \quad (۸۷-۸)$$

که در آن Ω زاویه فضایی در برگیرنده منحنی C از نقطه P است.

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی را می‌توان برای محاسبه میدان مغناطیسی مدارهای حامل جریان، یا لایه‌های دوگانه مغناطیسی (لایه‌های دوقطبی) به‌کار برد. این روش گاهی برای بررسی مسائل مداری نیز سودمند است، اما کاربرد اصلی آن در بررسی مواد مغناطیسی است.

۹-۸ شار مغناطیسی

کمیت زیر

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۸۸-۸)$$

به شار مغناطیسی موسوم است و برحسب وبر (Wb) اندازه‌گیری می‌شود. این کمیت شبیه به شار الکتریکی است که قبلاً درباره آن بحث شد، لیکن اهمیت آن به مراتب بیشتر است.

شاری که از هر سطح بسته می‌گذرد، برابر با صفر است؛ این مطلب را می‌توان با محاسبه زیر نشان داد

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \quad (۸۹-۸)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که شاری که از هر مدار می‌گذرد، به سطح خاصی که برای محاسبه شار به‌کار می‌بریم، بستگی ندارد. در فصل ۱۱ هنگامی که در مورد القای الکترومغناطیسی بحث می‌کنیم، از نتایج بالا استفاده خواهیم کرد.

۱۰-۸ خلاصه مطالب

مغناطوستاتیک مبتنی است بر افزودن نیروی مغناطیسی به نیروی کولن، هنگامی که بارها در حال حرکت‌اند. در دستگاه یکای mks، نیروی لورنتس وارد بر بار آزمون q ، که سرعتش \mathbf{v} است، برابر است با

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

میدان مغناطیسی چشمه بار q_1 که با سرعت یکنواخت \mathbf{v}_1 در حرکت است، برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 و

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

۱. بنابراین، تسلا که قبلاً به‌عنوان یکای \mathbf{B} در دستگاه mks به‌کار می‌رفت، برابر است با یک Wb/m^2 .

سرعت نور است. (در دستگاه یکاهای گاوسی، به جای \mathbf{B} در این روابط از B/c استفاده می‌کنیم).
با توجه به روابط زیر، این نتایج را می‌توان در مورد جریانهای رسانشی به‌کار برد

$$Nq \, dv \, \mathbf{v} = \mathbf{J} \, dv = I \, dl$$

• در مورد هر یک از انواع ذرات باردار متحرک، $Nq = \rho$ و $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$.
• نیروی وارد بر جزء dl از سیمی واقع در میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با

$$d\mathbf{F} = I \, dl \times \mathbf{B}$$

گشتاور نیروی وارد بر مدار، برای یک میدان B ی ثابت، عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

• گشتاور دوقطبی مغناطیسی مدار عبارت است از

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times dl$$

انتگرال $\oint_C \mathbf{r} \times dl$ برداری است که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از مساحت‌های سطوح محورشده توسط تصاویر منحنی C بر صفحات مختصات.

• میدان مغناطیسی تولیدشده توسط عنصر جریان $I \, dl'$ برابر است با

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, dl' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

که در آن $\mu_0 / 4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$ در دستگاه یکاهای mks. با انتگرال‌گیری از این رابطه در یک مدار، میدان یک مدار کامل محاسبه می‌شود. برای یک توزیع جریان کلی $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ به منزله چشمه، داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

با مشتق‌گیری از این معادله درمی‌یابیم که هیچ تک‌قطبی مغناطیسی وجود ندارد:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

علاوه بر آن، برای یک توزیع جریان پایا با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

داریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

اینها معادلات دیفرانسیل اساسی اند که تمام میدانهای مغناطوستاتیکی در هر نقطه باید به طور موضعی در آنها صدق کنند. (معادله دیورژانس \mathbf{B} حتی برای میدانهای وابسته به زمان نیز صادق است و دومین معادله از چهار معادله اساسی ماکسول است.)

• با انتگرالگیری از دو طرف معادله تاو بر روی یک سطح اختیاری S و به کار بردن قضیه استوکس، قانون آمپر نتیجه می شود

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

که در آن

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

کلّ جریانی است که از S ، سطح محصورشده توسط C ، می گذرد. در محدودی از وضعیتهای خاص که در آنها تقارن کافی وجود دارد و بزرگی و جهت \mathbf{B} نسبت به یک منحنی مناسب مثل C ثابت است، استفاده از این قانون برای محاسبه B عملاً سودمند است.

• وجود تابع پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ، از معادله دیورژانس نتیجه می شود، به طوری که

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

برای یک توزیع جریان مشخص $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ،

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

• در فاصله بسیار دور از ناحیه استقرار چشمه جریانهای \mathbf{J} ، بسط چندقطبی \mathbf{A} نتیجه زیر

را به دست می دهد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (\text{جمله تک قطبی وجود ندارد})$$

• در ناحیه هایی که $\mathbf{J} = 0$ است، می توان یک پتانسیل نرده ای مغناطیسی $\varphi^*(\mathbf{r})$ تعریف

کرد (چون $\nabla \times \mathbf{B} = 0$)، به طوری که

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^*$$

φ^* ، مانند پتانسیل الکتروستاتیکی، در معادله لاپلاس صدق می‌کند

$$\nabla^2 \varphi^* = 0$$

لیکن شرایط مرزی متفاوت ممکن است دسته‌های متفاوتی از پاسخهای معادله لاپلاس را مطرح سازند. پاسخ دوقطبی با پاسخ دوقطبی الکتریکی یکسان است:

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

مسائل

۱-۸ ذره بارداري به جرم m و بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B}_0 حرکت می‌کند. نشان دهید که کلی‌ترین مسیر حرکت ذره، مارپیچی است که مقطع آن دایره‌ای به شعاع $R = mv_{\perp}/qB$ است. (در اینجا v_{\perp} مؤلفه سرعت ذره در امتداد عمود بر \mathbf{B}_0 است.)

۲-۸ هامیلتونی ذره باردار در حال حرکت در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B}_0 ، که موازی محور z است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{qB_0}{2m} (xp_y - yp_x) + \frac{q^2 B_0^2}{8m} (x^2 + y^2)$$

نشان دهید که معادلات حرکتی که از \mathcal{H} نتیجه می‌شوند، با نتیجه مسئله ۱-۸ سازگارند.

۳-۸ پروتونی با سرعت 10^7 متر بر ثانیه در امتداد عمود بر یک میدان مغناطیسی به شدت 10^6 تسلا پرتاب می‌شود. (الف) انحراف مسیر ذره از امتداد خط مستقیم پس از طی مسافت ۱ سانتی‌متر چقدر است؟ (ب) چه زمانی طول می‌کشد تا پروتون یک قوس 90° را بپیماید؟

۴-۸ نشان دهید که قانون نیرو، معادله (۸-۲۵)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

که آشکارا متقارن است، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

۵-۸ فرض کنید سیمولده بسیار درازی 1000 دور در سانتی‌متر دارد و جریان (ابر رسانشی) 10 آمپر را حمل می‌کند. نیروی شعاعی در واحد طول، یعنی f ، را که بر هر دور از سیم پیچ وارد می‌شود، به دست آورید. نشان دهید که کشش T در سیم برابر است با $T = fa$ ، که در آن a شعاع سیمولده است.

۶-۸ نشان دهید که نیروی بین دو سیم موازی با جریانهای هم‌جهت I_1 و I_2 ، از نوع نیروی جاذبه

است. اگر دو سیم موازی خیلی دراز و به فاصله a از یکدیگر باشند، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعه $d\ell_2$ از سیم ۲ را حساب کنید.

۷-۸ یک مدار جریان به شکل شش ضلعی منتظم به ضلع a را در نظر بگیرید. اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز شش ضلعی پیدا کنید.

۸-۸ نوار فلزی باریک و بسیار درازی به عرض w را در نظر بگیرید. جریان در این نوار یکنواخت و در امتداد طول آن بوده و مقدار کل آن I است. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای واقع در صفحه نوار و به فاصله b از لبه نزدیک‌تر آن حساب کنید.

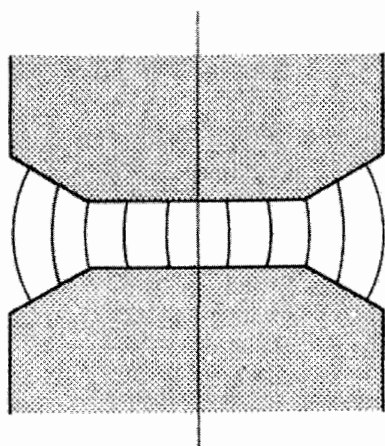
۹-۸ سیم نازکی N دور به صورت دایره‌های نزدیک به هم و در یک لایه بر روی سطح کره چوبینی به شعاع a پیچیده شده است؛ N عددی است بزرگ، صفحات دایره‌ها بر محور کره عمودند و سطح آن را کاملاً می‌پوشانند. اگر جریان در این سیم پیچ I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز کره محاسبه کنید.

۱۰-۸ سیمولوله‌ای به طول ۱۵ سانتی‌متر در دو لایه پیچیده شده است. هر لایه ۱۰° دور سیم دارد؛ لایه اول به شعاع ۲ سانتی‌متر و لایه دوم به شعاع ۲.۵° سانتی‌متر است. (الف) اگر این سیم پیچ حامل یک جریان ۳ آمپری باشد، میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف محور سیمولوله پیدا کنید. (ب) میدان مغناطیسی محوری را برحسب تابعی از فاصله بین مرکز سیمولوله تا یک انتهای آن رسم کنید.

۱۱-۸ سیمولوله‌ای با مقطع مربع شکل (یعنی سیمولوله‌ای که تمام دورهای آن به شکل مربع‌اند) N دور سیم در واحد طول دارد و حامل جریان I است. طول هر ضلع از مقطع این سیمولوله a است. اگر سیمولوله بسیار دراز فرض شود، میدان مغناطیسی محوری را در مرکز آن محاسبه کنید.

۱۲-۸ میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع بر محور (محور z) یک دور سیم دایروی که حامل جریان I است، با معادله (۸-۳۸) داده شده است. با استفاده از این واقعیت که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، یک رابطه تقریبی برای B_r (مؤلفه شعاعی میدان مغناطیسی) پیدا کنید که برای نقاط خیلی نزدیک به محور اعتبار داشته باشد.

۱۳-۸ مؤلفه قائم میدان مغناطیسی در ناحیه بین وجوه قطبهای یک شتاب‌دهنده ذرات، به صورت $B_z = B_z(r, z)$ داده شده است، که در آن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ فاصله از محور وجوه قطبهاست. (الف) اگر $|B_z|$ تابعی نزولی از r باشد، نشان دهید که خطوط شدت مغناطیسی به سمت خارج خم می‌شوند، نظیر شکل ۸-۱۲، اعم از اینکه قطب بالایی قطب شمال باشد یا قطب جنوب. [راهنمایی: از این واقعیت که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ است و در صفحه میانه $B_r = 0$



شکل ۱۲-۸

است، استفاده کنید.] (ب) اگر خطوط \mathbf{B} انحنایی نظیر آنچه در شکل آمده است داشته باشند، نشان دهید که ذرات شتابداری که از صفحه میانه دور می‌شوند، تحت تأثیر نیروی بازگرداننده‌ای قرار می‌گیرند که آنها را به طرف صفحه میانه برمی‌گرداند، اعم از اینکه این ذرات دارای بار مثبت باشند یا بار منفی.

* ۱۴-۸ از معادله (۸-۳) پیداست که تنها برخی از میدانهای برداری واجد شرایط لازم هستند تا از لحاظ فیزیکی به عنوان میدان مغناطیسی القایی قابل درک باشند. (الف) ثابت کنید که بردار $\mathbf{B} = (\mathbf{r}/r) \times \nabla g(x, y, z)$ که در آن $g(x, y, z)$ یک تابع اختیاری است، میدان مغناطیسی مناسبی است. (ب) چنانچه g جوابی از معادله لاپلاس باشد، چگالی \mathbf{J} را که این میدان مغناطیسی را تولید می‌کند، پیدا کنید.

۱۵-۸ نشان دهید که برای یک محیط همگن، همسانگرد و غیرمغناطیسی با رسانندگی g ، که در آن جریانهای پایا وجود دارند، \mathbf{B} در معادله برداری لاپلاس: $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$ صدق می‌کند.

۱۶-۸ با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی را در فاصله r از مرکز یک سیم طویل حامل جریان I محاسبه کنید. این محاسبه را برای هر دو حالت $r > R$ و $r < R$ انجام دهید؛ R شعاع سیم است. صریحاً نشان دهید که میدان مغناطیسی روی محور سیم صفر می‌شود.

۱۷-۸ یک رسانای استوانه‌ای به شعاع b حاوی سوراخ استوانه‌ای شکلی به شعاع a است. محور سوراخ موازی با محور استوانه و در فاصله s از آن قرار دارد، به طوری که $a < s < b - a$. رسانا حامل جریان یکنواختی به چگالی \mathbf{J} است. میدان \mathbf{B} را در داخل سوراخ، روی قطری که بر یکی از قطره‌های رسانا منطبق است، پیدا کنید. [راهنمایی: توزیع جریان معادلی را بررسی کنید که متشکل از چگالی \mathbf{J} در سرتاسر سوراخ و رسانا، به اضافه چگالی $-\mathbf{J}$ در داخل سوراخ است.]

۱۸-۸ طبق مسئله ۸-۱، مسیر حرکت یک ذره باردار به جرم m و بار q ، در صفحه‌ای عمود بر میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، دایره‌ای است به شعاع $R = mv_{\perp}/qB$. دوره‌های تناوب گردش یک الکترون و یک پروتون را در یک میدان مغناطیسی با شدت 5 r تسلا به دست آورید. (جرمهای الکترون و پروتون به ترتیب عبارت‌اند از $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$).

۱۹-۸ چنبره‌ای مانند شکل ۱۱-۲ به طور یکنواخت سیم‌پیچی شده است. این سیم‌پیچ N دور سیم دارد و حامل جریان I است. شعاع داخلی چنبره a و شعاع خارجی آن b است. (الف) میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف داخل سیم‌پیچ چنبره‌ای پیدا کنید. (ب) نسبت b/a را طوری تعیین کنید که \mathbf{B} در داخل چنبره بیش از ۲۵ درصد تغییر نکند.

۲۰-۸ نشان دهید که پتانسیل برداری مغناطیسی برای دو سیم طولی مستقیم و موازی که هر دو حامل جریان I در جهت‌های مخالف هستند، با $\mathbf{n} \ln(r_2/r_1) = (\mu_0 I / 2\pi) \mathbf{A}$ داده می‌شود که در آن r_1 و r_2 عبارت‌اند از فواصل نقطه میدان از سیمها، و \mathbf{n} بردار یگانه‌ای موازی با سیمهاست.

۲۱-۸ مجموعه رساناهای زیر را در نظر بگیرید: یک سیم مستقیم بی‌نهایت طولی و یک پوسته استوانه‌ای فلزی (به شعاع b) که سیم را احاطه کرده و با آن هم‌محور است. این دو رسانا جریان یکسان I را در جهات مخالف یکدیگر حمل می‌کنند. پتانسیل برداری مغناطیسی دستگاه را پیدا کنید.

۲۲-۸ (الف) نشان دهید که $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi$ ، که در آن Φ عبارت است از شار مغناطیسی گذرنده از سطحی که به وسیله مدار C محصور شده است. (ب) این نتیجه را همراه با قانون مداری آمپر به کار ببرید تا \mathbf{A} را در فاصله r در داخل و خارج یک سیمولوه بسیار دراز پیدا کنید.

۲۳-۸ (الف) با مشتق‌گیری مستقیم از معادله (۸-۶۱) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (ب) نشان دهید چنانچه \mathbf{A} پتانسیل برداری میدان B باشد، $\mathbf{A} + \nabla\psi$ نیز یک پتانسیل برداری برای همان میدان B محسوب می‌شود؛ ψ یک تابع اختیاری است. (ج) نشان دهید که با انتخاب یک ψ مناسب، پتانسیل برداری مربوط به \mathbf{B} می‌تواند هر دیورژانس مطلوبی را داشته باشد.

۲۴-۸ (الف) نشان دهید که تمام توابع زیر پتانسیلهای ممکن برای میدان یکنواخت $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ محسوب می‌شوند: $\mathbf{A}_1 = -By\mathbf{i}$ ، $\mathbf{A}_2 = Bxz\mathbf{j}$ و $\mathbf{A}_3 = -\frac{1}{r}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$. (ب) برای کدام یک از اینها $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ است؟ (ج) نشان دهید که $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ برابر است با گرادیان یک تابع، یعنی $\nabla\psi$.

۲۵-۸ نشان دهید که در مختصات استوانه‌ای، میدان B در خارج از سیم مستقیم درازی که حامل جریان I است، از پتانسیل زده‌ای $\theta = -(I/2\pi)\varphi^*$ به دست می‌آید و اینکه φ^* در معادله لاپلاس صدق می‌کند. چرا این φ^* یکی از هماهنگهای استوانه‌ای نیست (در صورتی که برای پتانسیل الکتروستاتیکی یک بار خطی چنین خواهد بود)؟

۲۶-۸ زاویه میل مغناطیسی طبق تعریف عبارت است از زاویه بین جهت میدان مغناطیسی زمین

و صفحه مماس بر سطح زمین در هر نقطه. رابطه‌ای برای زاویه میل برحسب تابعی از عرض ژئومغناطیسی به دست آورید. فرض کنید میدان مغناطیسی زمین یک میدان دوقطبی باشد.

۲۷-۸ یک مدار حامل جریان به شکل مربع (به ضلع a) در صفحه xy قرار گرفته است (مبدأ مختصات در مرکز مربع و اضلاع آن موازی محورهای مختصات است). اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی B را (الف) در مرکز مربع، (ب) در نقطه $(a/2, 0, a/2)$ ، (ج) در نقطه $(a, 0, 0)$ و (د) در نقطه $(a/2, 0, -a/2)$ ، محاسبه کنید.

۲۸-۸ (الف) طرح دقیقی برای سطوح هم‌پتانسیل پتانسیل نرده‌ای یک دوقطبی مغناطیسی (در صفحه $\phi = 0$) رسم کنید. (ب) بعضی از خطوط میدان مغناطیسی را رسم کنید. (ب) جهت میدان مغناطیسی را برحسب تابعی از r و θ تعیین کنید. (ج) r را برحسب بستگی‌اش به θ برای یک خط به خصوص میدان مغناطیسی تعیین کنید.

* ۲۹-۸ (الف) نشان دهید که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی برای نقطه‌ای واقع بر محور (محور z) یک حلقه جریان دایروی به شعاع a ، به صورت زیر است

$$\varphi^* = \frac{1}{4} I \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}$$

(ب) با بسط دادن رابطه بالا بر طبق قضیه دو جمله‌ای، عبارتی رشته‌ای به دست آورید که برای ناحیه $z < a$ صادق باشد. (ج) پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی φ^* باید در معادله لاپلاس صدق کند؛ به علاوه، به علت تقارن $\varphi^* = \varphi^*(r, \theta)$ ، که در آن r فاصله مرکز حلقه تا نقطه میدان و θ زاویه بین \mathbf{r} و محور z است. نشان دهید که با استفاده از هماهنگی‌های منطقه‌ای، معادله (۳-۱۸)، می‌توان جوابی برای φ^* به دست آورد که قابل تبدیل به پتانسیل قسمت (ب) برای نقاط واقع بر محور تقارن باشد. (د) با استفاده از φ^* در قسمت (ج)، B_r و B_θ را در نقاط خارج از محور تقارن حلقه به دست آورید.

* ۳۰-۸ کره‌ای به شعاع a را که چگالی بار سطحی آن σ است (بار محکم به کره متصل است) حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانیم. نشان دهید که میدان مغناطیسی در یک نقطه خارج از آن به صورت یک میدان دوقطبی است و گشتاور دوقطبی معادل آن را حساب کنید.

۳۱-۸ دو دوقطبی m_1 و m_2 در یک صفحه قرار دارند؛ m_1 ثابت است ولی m_2 می‌تواند حول مرکز خود بچرخد. نشان دهید که در حالت تعادل $\tan \theta_1 = -2 \tan \theta_2$ که در آن θ_1 و θ_2 به ترتیب عبارت‌اند از زاویه‌های بین \mathbf{r} و دوقطبیهای m_1 و m_2 (بردار جابه‌جایی بین m_2 و m_1 است).

خواص مغناطیسی ماده

در فصل ۸ روشهای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از توزیع مشخصی از جریانهای الکتریکی را بررسی کردیم. بنابراین، چنانچه با مدار حامل جریانی سروکار داشته باشیم که از یک حلقه سیم بسته تشکیل شده است، میدان مغناطیسی در ناحیهٔ خلأ اطراف سیم را می‌توانیم به کمک قانون بیو محاسبه کنیم. حال اگر فضای اطراف سیم را یک محیط مادّی پر کرده باشد، آیا میدان مغناطیسی به علت وجود ماده تغییر خواهد کرد؟ پاسخ "مثبت" است. در این فصل، در مورد تأثیر ماده روی میدان مغناطیسی تحقیق خواهیم کرد.

تمام مواد نهایتاً از اتمها ساخته شده‌اند، و هر اتم شامل الکترونها در حال حرکت است. این مدارهای الکترونی، که هر کدام به یک اتم تنها محدودند، جریانهای اتمی نام دارند. پس ظاهراً دو نوع جریان وجود دارد: (۱) جریان متعارف که از انتقال بار، یعنی حرکت الکترونها آزاد یا یونهاى باردار به وجود می‌آید؛ و (۲) جریانهای اتمی که جریانهای کاملاً دورانی‌اند و به انتقال بار منجر نمی‌شوند. اما، هر دو نوع جریان می‌توانند میدان مغناطیسی تولید کنند.

۹-۱ مغناطش

هر جریان اتمی مدار کوچک بسته‌ای است به ابعاد اتمی، پس منطقی به نظر می‌رسد که بتوان میدان مغناطیسی اتم را در "دوردست" به طرز مناسبی به صورت یک میدان دوقطبی مغناطیسی توصیف کرد. در واقع، مطالعات تجربی گسترده‌ای همراه با فرمولبندی مکانیک کوانتومی، که دقیق‌ترین روش برای محاسبات پدیده‌های اتمی است، به ما می‌آموزند که قسمت عمدهٔ میدان مغناطیسی ناشی از یک اتم تنها در دوردست، با مشخص کردن گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن، یعنی \mathbf{m} ، تعیین می‌شود.

فرض می‌کنیم که گشتاور مغناطیسی i امین اتم \mathbf{m}_i باشد. اکنون یک کمیّت برداری ماکروسکوپی را به نام مغناطش \mathbf{M} ، با همان روشی که در فصل ۴ برای تعریف قطبش به‌کار بردیم، تعریف می‌کنیم.

تمام گشتاورهای دوقطبی واقع در عنصر کوچک حجم Δv را با هم جمع برداری می‌کنیم و سپس نتیجه را بر Δv تقسیم می‌کنیم، کمیّت حاصل یعنی

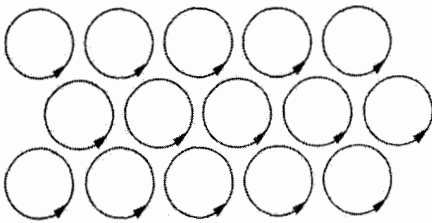
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (۹-۱)$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم، یا به عبارت ساده‌تر، مغناطش نامیده می‌شود.

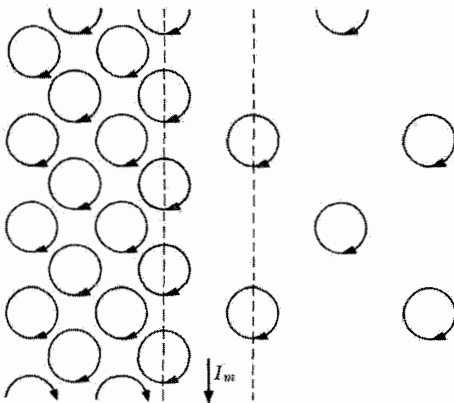
فزاینده حد در رابطهٔ (۹-۱) همان فزاینده حد ماکروسکوپی معمولی است؛ یعنی Δv را از دید ماکروسکوپی خیلی کوچک می‌کنیم، اما نه آنقدر کوچک که از لحاظ آماری تعداد زیادی اتم نداشته باشد. در این صورت کمیّت \mathbf{M} یک تابع برداری نقطه‌ای خواهد بود. در حالتی که ماده نامغناطیده است، چون جهت \mathbf{m}_i ها کاتوره‌ای است، مجموع $\sum \mathbf{m}_i$ صفر می‌شود، اما در صورت وجود یک میدان برانگیزندهٔ خارجی، معمولاً \mathbf{M} به این میدان بستگی دارد. بستگی خاص \mathbf{M} به \mathbf{B} در بخش ۹-۶ بررسی خواهد شد.

در حال حاضر، فرض می‌کنیم $\mathbf{M}(x, y, z)$ تابعی معلوم باشد و سهم مادهٔ مغناطیده را در ایجاد میدان مغناطیسی بر مبنای روابط بخش ۸-۷ محاسبه می‌کنیم.

تابع برداری \mathbf{M} ، توصیفی ماکروسکوپی از جریانهای اتمی درون ماده به‌دست می‌دهد. به‌طور مشخص، \mathbf{M} تعیین‌کنندهٔ حاصل‌ضرب تعداد مدارهای جریان اتمی در واحد حجم، در گشتاور مغناطیسی میانگین یا مؤثر هر مدار است. از دید صرفاً ماکروسکوپی، تمام اثرهای مغناطیسی مربوط به ماده را می‌توان به طرز مناسب برحسب \mathbf{M} و یا مشتقهای آن بیان کرد. یکی از



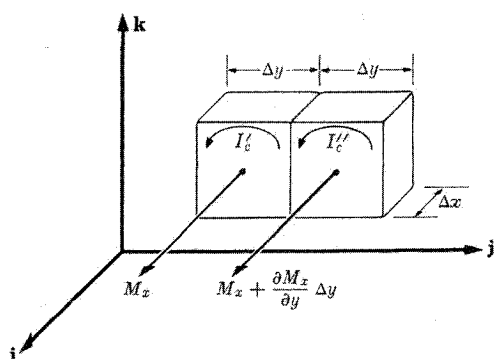
شکل ۱-۹ تصویر ساده‌ای از ماده مغناطیسی که حاوی جریانهای حلقه‌ای اتمی هم‌جهت است.



شکل ۲-۹ نمونه‌ای از تغییر ناگهانی در مغناطش.

این مشتقها، یعنی $\nabla \times \mathbf{M}$ ، معادل است با یک چگالی جریان انتقالی که بتواند همان میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیله خود \mathbf{M} را به وجود آورد؛ این بردار را چگالی جریان مغناطش \mathbf{J}_M می‌نامند. قبل از به دست آوردن رابطه مهمی که \mathbf{J}_M و \mathbf{M} را به هم مربوط می‌کند، مدل ساده‌ای از ماده مغناطیده را بررسی می‌کنیم که در آن جریانهای حلقه‌ای اتمی هم‌جهت در کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۱-۹). اگر مغناطش یکنواخت باشد، جریانهای حلقه‌های مختلف یکدیگر را حذف می‌کنند و در درون ماده هیچ جریان مؤثر خالصی وجود نخواهد داشت. چنانچه مغناطش یکنواخت نباشد، عمل حذف کامل نخواهد بود. به عنوان مثالی از مغناطیدگی غیریکنواخت، تغییر ناگهانی در مغناطش را که در شکل ۲-۹ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. اگر توجه خود را به ناحیه بین خطوط نقطه‌چین معطوف داریم، واضح است که باری که به سمت پایین در حرکت است از باری که به سمت بالا حرکت می‌کند، بیشتر است. پس، هر چند که انتقال باری در کار نیست، لیکن به‌طور موضعی، حرکت مؤثری از بار به سمت پایین وجود دارد، و این “جریان” می‌تواند یک میدان مغناطیسی تولید کند. این جریان را جریان مغناطش می‌نامند.

حال باقی می‌ماند اینکه رابطه بین \mathbf{J}_M و \mathbf{M} را به دست آوریم. دو جزء کوچک حجم در



شکل ۳-۹ جایگزینی اجزای حجم ماده مغناطیده توسط جریانهای دورانی I'_c و I''_c .

یک قطعه ماده مغناطیسی را در نظر می‌گیریم که حجم هر جزء $\Delta x \Delta y \Delta z$ است، و این دو جزء در جهت محور y در کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۳-۹). اگر مغناطش در اولین جزء حجم $\mathbf{M}(x, y, z)$ باشد، مغناطش در دومین جزء عبارت است از

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{جمله‌های مرتبه بالاتر}$$

مؤلفه x گشتاور مغناطیسی اولین جزء، یعنی $M_x \Delta x \Delta y \Delta z$ را می‌توان برحسب یک جریان دورانی I'_c به صورت زیر نوشت

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_c \Delta y \Delta z \quad (۲-۹)$$

به طریق مشابه، مؤلفه x گشتاور مغناطیسی جزء دوم، با چشمپوشی از جمله‌های مرتبه بالاتر، که در حد، با خیلی کوچک شدن اجزای حجم صفر می‌شوند، برابر است با

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z \quad (۳-۹)$$

مقدار خالص جریان رو به بالا در ناحیه وسط دو جزء حجم برابر است با

$$I'_c - I''_c = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (۴-۹)$$

در مرحله بعد دو جزء حجم مجاور را در امتداد محور x در نظر می‌گیریم و توجه خود را روی مؤلفه y بردار مغناطش در هر جزء متمرکز می‌کنیم. در ناحیه وسط دو جزء، مقدار خالص جریان رو به بالا، ناشی از جریانهای دورانی‌ای که معرف گشتاورهای مغناطیسی‌اند، به صورت زیر است

$$(I_c)_{\text{بالا}} = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (۵-۹)$$

اینها تنها جریانهای دورانی یک جزء بخصوص اند که سبب ایجاد جریان خالصی در راستای محور z می‌شوند. این جریان خالص که ناشی از یکنواخت نبودن مغناطش است، جریان مغناطش نامیده می‌شود. این جریان، نوعی جریان انتقالی نیست، بلکه همان‌طور که دیدیم، از جریانهای دورانی، یعنی از جریانهای اتمی درون ماده به وجود می‌آید. سطح مؤثر برای هر یک از جریانها در (۴-۹) و (۵-۹)، $\Delta x \Delta y$ است. پس

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (۹-۶الف)$$

یا

$$J_M = \nabla \times M \quad (۹-۶ب)$$

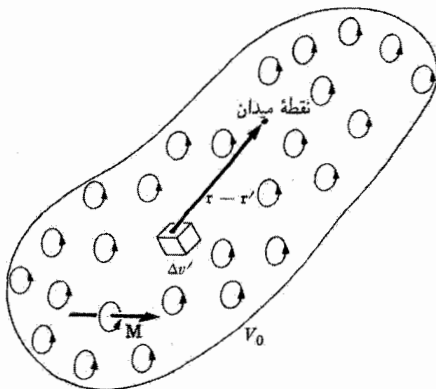
پس چگالی جریان مغناطش برابر است با تاو بردار مغناطش.

۲-۹ میدان مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیده

طبق معادله (۹-۱)، هر جزء حجم $\Delta v'$ از ماده مغناطیده با یک گشتاور مغناطیسی مشخص می‌شود

$$\Delta m = M(x', y', z') \Delta v' \quad (۹-۷)$$

با به کار بردن نتایج بخش ۷-۸، می‌توانیم سهم هر Δm (یا معادل آن، هر $\Delta v'$) را در ایجاد میدان مغناطیسی در نقطه (x, y, z) بنویسیم. بنابراین، میدان مغناطیسی با انتگرال‌گیری بر روی تمام حجم V_0 جسم، به دست می‌آید. این روش در شکل ۹-۴ نشان داده شده است.



شکل ۹-۴ سهم یک توزیع ماده مغناطیده در ایجاد میدان مغناطیسی.

به جای محاسبه مستقیم \mathbf{B} ، بهتر است ابتدا پتانسیل برداری \mathbf{A} را به دست آوریم و سپس با گرفتن تاو از آن، \mathbf{B} را حساب کنیم. مطابق روش بخش ۸-۷، پتانسیل برداری در نقطه (x, y, z) با رابطه زیر داده می شود

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(x', y', z') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (8-9)$$

به کمک اتحادهای برداری (۹-۱-۱) و (۳-۲-۱) از جدولهای ۱-۱ و ۲-۱، این انتگرال به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (9-9)$$

که در آن S_0 سطح محصورکننده حجم V_0 است. با استفاده از معادله (۹-۶) و تعریف کردن چگالی سطحی جریان مغناطش \mathbf{j}_M (یعنی، جریان مغناطش در واحد طول که در لایه سطحی جاری است) با رابطه

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (10-9)$$

معادله (۹-۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11-9)$$

می توانستیم از ابتدا رابطه نهایی، یعنی معادله (۱۱-۹) را حدس بزنیم. با وجود این، مشاهده اینکه نتیجه حاصل، از ریاضیات و آن هم به نحوی کاملاً طبیعی به دست آمده است، خشنودکننده است. بنابراین، پتانسیل برداری ناشی از توزیع جریانهای اتمی داخل ماده به همان صورت پتانسیل ناشی از توزیع جریانهای انتقالی واقعی است. باید خاطر نشان کرد که معادله (۱۰-۹) رابطه مناسب برای چگالی سطحی جریان است، عبارتی که با رابطه $\mathbf{j}_M = \nabla' \times \mathbf{M}$ سازگار است. \mathbf{j}_M را هنگامی باید به کار برد که \mathbf{M} به طور ناگهانی تغییر کند، چنانکه ممکن است در فصل مشترک بین دو محیط پیش آید، لیکن اگر ناحیه ناپیوستگی \mathbf{M} در فاصله $\Delta \xi$ گسترده شده باشد، آن وقت می توان نشان داد که \mathbf{j}_M جزء جمله $\mathbf{j}_M \Delta \xi$ است. (یا اگر ناحیه ناپیوستگی خیلی نازک باشد، \mathbf{j}_M را می توان با یک تابع دلتای سطحی نمایش داد).

با اینکه معادله (۹-۱۱) هم صحیح است و هم به صورتی است که با نتایج فصل ۸ به خوبی سازگاری دارد، ولی هنگامی که می‌خواهیم \mathbf{B} را برای توزیع مشخصی از مغناطش محاسبه کنیم، با برخی اشکالات عملی مواجه خواهیم شد. نخست باید عملیات $\nabla \times \mathbf{M}$ را انجام دهیم و آنگاه برای پیدا کردن \mathbf{B} از میدان \mathbf{A} ، محاسبهٔ تاو دیگری لازم است. در صورت امکان، کار کردن با کمیت‌های نرده‌ای مسلماً برتری دارد و محاسبهٔ گرادینان یک میدان نرده‌ای (نظیر آنچه در بحث الکتروستاتیک داشتیم) از محاسبهٔ تاو یک میدان برداری آسان‌تر است. به همین دلیل به معادله (۹-۸) باز می‌گردیم و راه دیگری را امتحان می‌کنیم. چون به هر حال \mathbf{B} مورد نظر ماست نه \mathbf{A} ، بنابراین تاو را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (۹-۱۲)$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به تاو بر مختصات بی‌پریم عمل می‌کنند. همان‌طور که ممکن است خواننده حدس زده باشد، کار بعدی ما تبدیل انتگرالده معادله (۹-۱۲) است. برای این کار از اتحادهای برداری جدول ۱-۱ استفاده می‌کنیم. بنا بر اتحاد (۱-۱-۱۰) داریم

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G}) \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

با فرض $\mathbf{F} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ و $\mathbf{G} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ و توجه به اینکه مشتق‌گیرها نسبت به مختصات بی‌پریم انجام می‌شوند، اتحاد بالا به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۹-۱۳)$$

زیرا $\nabla \cdot \mathbf{M}(x', y', z') = 0$ و مانند آن. بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) \quad (۹-۱۴)$$

که در آن

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (الف) \quad (۹-۱۴)$$

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (ب) \quad (۹-۱۴)$$

نخست انتگرال ساده‌تر \mathbf{B}_I را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله (۵۷-۲) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (۱۵-۹)$$

سپس به محاسبه انتگرال \mathbf{B}_{II} می‌پردازیم. انتگرالده آن را با استفاده از اتحاد دیگری (۱-۱-۶) می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \nabla \left[\mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] &= (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &+ \mathbf{M} \times \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \end{aligned} \quad (۱۶-۹)$$

جمله آخر در (۱۶-۹) شامل عبارت زیر است

$$\nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = -\nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

که عیناً مساوی صفر می‌شود. پس

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

که نظیر معادله (۸-۸) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (۱۷-۹)$$

کمیت $\varphi^*(\mathbf{r})$ یک میدان نرده‌ای، یعنی پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیسی است:

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (۱۸-۹)$$

با جمع کردن دو سهم، (۱۵-۹) و (۱۷-۹)، عبارت زیر را برای میدان مغناطیسی به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (۱۹-۹)$$

پس میدان مغناطیسی ناشی از یک توزیع ماده مغناطیده را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت: گرادیان یک میدان نرده‌ای به اضافه جمله‌ای متناسب با مغناطش موضعی. در یک نقطه خارجی، یعنی در خلا \mathbf{M} صفر است و بنابراین میدان مغناطیسی فقط گرادیان یک میدان نرده‌ای است، میدانی که خود انتگرال میدانهای دو قطبی دوردست (معادله ۸-۸) است.

۳-۹ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی و چگالی قطب مغناطیسی

پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی، معادله (۱۸-۹)، از نظر شکل ریاضی با پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از ماده‌ی الکتریک قطبیده مشابه است. از این رو در اینجا نیز از تبدیل ریاضی زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M} \quad (20-9)$$

بدین ترتیب معادله (۱۸-۹) به صورت زیر در می‌آید

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (21-9)$$

که در آن S_0 سطح ناحیه V_0 است.

با قیاس با بخش ۲-۴، مفید به نظر می‌رسد که کمیتهای نرده‌ای زیر را تعریف کنیم:

$$\rho_M(\mathbf{r}') \equiv -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (22-9)$$

که آن را چگالی قطب مغناطیسی می‌نامیم، و

$$\sigma_M(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (23-9)$$

که چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی است.

این کمیتهای با وجود آنکه نسبتاً تصنعی هستند، اما خیلی مفیدند، زیرا همان نقشی را در نظریه مغناطیس ایفا می‌کنند که ρ_P و σ_P در نظریه دی‌الکتریک ایفا می‌کنند. یکاهای ρ_M و σ_M به ترتیب عبارت‌اند از آمپر بر مترمربع و آمپر بر متر.

برای مثال، یک میله آهنربا را که به طور یکنواخت مغناطیده شده است در نظر می‌گیریم. چون مغناطش یکنواخت است، پس $\rho_M = 0$ است. چگالیهای سطحی تنها در سطوحی که بردار مغناطش روی آنها مؤلفه‌ای عمود بر سطح دارد، صفر نمی‌شوند؛ این سطوح را قطبهای آهنربا می‌نامند. این مثال تا حدی یک مثال ایده‌آل است، لیکن چندان هم با میله آهنربای آزمایشگاهی که با آن آشنا می‌باشیم، تفاوت ندارد. (در عمل، قطبهای یک آهنربا نوعی تأثیر و امغانظنده اعمال می‌کنند که این تأثیر، یکنواخت بودن \mathbf{M} را از بین می‌برد و در نتیجه هر قطب را در ناحیه‌ای وسیع‌تر از سطح قطب گسترش می‌دهد).

قدرت قطب مغناطیسی کل هر آهنربا صفر است. این حکم مستقیماً از قضیه دیورژانس نتیجه می‌شود:

$$\int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dv + \int_{S_0} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

اکنون محاسبه‌ای را که قبلاً شروع کردیم، کامل می‌کنیم. معادله (۱۸-۹) به صورت زیر در می‌آید

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (الف\ ۱۸-۹)$$

و $\mathbf{B}(x, y, z)$ برابر خواهد بود با $-\mu_0$ ضرب در گرادینان این پتانسیل نسبت به مختصات بی‌پریم، به اضافه جمله \mathbf{M} μ_0 :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (الف\ ۱۹-۹)$$

این رابطه سهم ماده مغناطیده در حجم V_0 را در ایجاد میدان مغناطیسی در نقطه (x, y, z) نشان می‌دهد.

۴-۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی: شدت مغناطیسی

در بخشهای گذشته دیدیم که چگونه ماده مغناطیده میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. به علاوه، در فصل ۸ اثرهای مغناطیسی جریانهای متعارف را بررسی کردیم. در حالت کلی، هر دو نوع چشمه مغناطیسی وجود دارند: جریانهای متعارف یا جریانهای انتقالی، که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری‌اند، و جریانهای اتمی درون ماده. درک این نکته جالب است که یک قطعه از ماده تحت شرایط خاصی می‌تواند هم به این علت که مغناطیده است و هم به این علت که دارای جریانی انتقالی از حاملهای بار است، میدان مغناطیسی تولید کند. پس، به عنوان مثال، یکی از بهترین مواد مغناطیسی، یعنی آهن، ممکن است از طریق الکترونهای آزاد خود حامل یک جریان انتقالی باشد، در حالی که یونهای مثبت آهن در شبکه بلوری آن دارای جریان اتمی‌اند و این جریانه‌ها می‌توانند جهت خاصی پیدا کنند و باعث ایجاد مغناطش شدیدی بشوند.

به طور کلی، میدان مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (۲۴-۹)$$

که در آن

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25-9)$$

حجم V تمام نواحی حامل جریان و تمام ماده را در برمی‌گیرد. سطح S شامل تمام سطوح و فصل مشترکهای بین محیطهای مختلف است. چگالی جریان \mathbf{J} تنها شامل جریانهای متعارف از نوع انتقال بار است، در حالی که اثر جریانهای اتمی در بردار مغناطش \mathbf{M} (و پتانسیل φ^*) یافت می‌شود. چنانچه \mathbf{J} و \mathbf{M} در تمام نقاط مشخص باشند، \mathbf{B} را می‌توان از حل معادله (۲۴-۹) به دست آورد. اما در بیشتر مسائل \mathbf{J} مشخص است، لیکن $\mathbf{M}(x', y', z')$ به $\mathbf{B}(x', y', z')$ بستگی دارد، پس حتی اگر شکل تابعی $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ معلوم باشد، معادله (۲۴-۹) حداکثر یک معادله انتگرالی برای \mathbf{B} فراهم می‌آورد.

برای احتراز از این مشکل یک بردار مغناطیسی کمکی، یعنی شدت مغناطیسی \mathbf{H} را معرفی می‌کنیم. این بردار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (26-9)$$

از ترکیب (۲۴-۹) و (۲۶-۹) خواهیم داشت

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (27-9)$$

ظاهراً با همه این کارها فایده‌ای عایدمان نشده است، زیرا \mathbf{H} هنوز از طریق ρ_M و σ_M به \mathbf{M} بستگی دارد؛ اما در بخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه \mathbf{H} از طریق یک معادله دیفرانسیل به چگالی جریان متعارف \mathbf{J} مربوط می‌شود. وضعیت در اینجا مانند حالت الکتروستاتیکی است، که در آن بردار کمکی \mathbf{D} از طریق دیورژانس خود به چگالی بار مشخص شده از قبل مربوط می‌شود. میدان برداری \mathbf{H} نقش مهمی را در نظریه مغناطیس ایفا می‌کند. بخصوص در مسائلی که شامل آهنرباهای دائمی‌اند. این مطالب را در بخشهای بعدی این فصل بررسی خواهیم کرد. یکای \mathbf{H} همان یکای \mathbf{M} است، یعنی آمپر بر متر.

۵-۹ معادلات میدان

در فصل ۸ معادلات اساسی توصیف‌کننده اثرهای مغناطیسی جریانها را به صورت دیفرانسیلی زیر بیان کردیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم چنانچه قسمتی از میدان مغناطیسی \mathbf{B} حاصل از ماده مغناطیده باشد، این معادلات چگونه تغییر می‌کنند.

در بخش ۳-۸ دیدیم که معادله دیورژانس ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) برای تمام میدانهای مغناطیسی که توسط یک توزیع جریان تولید می‌شوند، معتبر است. این نتیجه به میدانهای حاصل از جریانهای متعارف محدود نمی‌شود. در بخش ۲-۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیده می‌تواند برحسب تاو یک بردار (\mathbf{A}) بیان شود، و بنابراین $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ خودبه‌خود صادق است. این یک مشاهده تجربی است که معادله زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (28-9)$$

برای تمام میدانهای مغناطیسی القایی صادق است. بنابراین، همواره می‌توان منشأ \mathbf{B} را در یک توزیع بار پیدا کرد و هیچ گواهی دال بر وجود قطبهای مغناطیسی منزوی در دست نیست. "معادله تاو" شکل دیفرانسیلی قانون مداری آمپر است. در اینجا باید دقت کنیم که همه انواع جریانهایی که می‌توانند میدان مغناطیسی ایجاد کنند، منظور شوند. بنابراین در حالت کلی، این معادله را می‌توان به نحو مناسب چنین نوشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (29-9)$$

که در آن \mathbf{J} چگالی جریان انتقالی و \mathbf{J}_M چگالی جریان مغناطش است. معادلات (۹-۶) و (۹-۲۹) را می‌توان ترکیب کرد و نتیجه زیر را به دست آورد

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

که، بر طبق معادله (۹-۲۶)، با عبارت زیر هم‌ارز است:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (30-9)$$

یعنی، بردار مغناطیسی کمکی \mathbf{H} از طریق تاو خود به چگالی جریان انتقالی مربوط می‌شود. معادله فوق با گرفتن تاو از معادله (۹-۲۷) نیز به دست می‌آید. معادلات (۹-۲۸) و (۹-۳۰) معادلات اساسی میدان مغناطیسی با حضور ماده‌اند. این دو معادله، همراه با شرایط مرزی مناسب و یک رابطه تجربی بین \mathbf{B} و \mathbf{H} ، برای حل مسائل مغناطیس کفایت می‌کنند.

در برخی موارد، بهتر است از فرمولبندی انتگرالی این نظریه استفاده کنیم. به کمک قضیه استوکس

می‌توان معادله (۹-۳۰) را به صورت زیر تبدیل کرد

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

یا

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (۹-۳۱)$$

به بیانی دیگر، انتگرال خطی مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی دور مسیر بسته C برابر است با کل جریانهای انتقالی که از سطح محصور شده توسط منحنی C می‌گذرند.

به دلیل قضیه دیورژانس، معادله (۹-۲۸) هم‌ارز است با

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (۹-۳۲)$$

یعنی، شار مغناطیسی برای هر سطح بسته صفر است.

۹-۶ پذیرفتاری، تراوایی مغناطیسی و پسماند

برای حل مسائل مربوط به نظریه مغناطیس، داشتن رابطه‌ای بین \mathbf{H} و \mathbf{B} ، یا معادل آن، رابطه‌ای بین \mathbf{M} و یکی از بردارهای میدان مغناطیسی ضروری است. این روابط به ماهیت ماده مغناطیسی بستگی دارند و معمولاً از راه تجربه به دست می‌آیند.

در بسیاری از مواد یک رابطه تقریباً خطی بین \mathbf{M} و \mathbf{H} وجود دارد. اگر ماده همسانگرد و در عین حال خطی^۱ باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (۹-۳۳)$$

که در آن کمیت نرده‌ای و بی‌بعد χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی می‌نامند.

اگر χ_m مثبت باشد، ماده را پارامغناطیس می‌گویند و میدان مغناطیسی در اثر حضور ماده تقویت می‌شود. اگر χ_m منفی باشد، ماده را دیامغناطیس می‌نامند و میدان مغناطیسی در اثر حضور چنین

۱. اگر ماده ناهمسانگرد ولی خطی باشد، به جای معادله (۹-۳۳)، معادله تانسوری زیر

$$M_x = \chi_{m,11} H_x + \chi_{m,12} H_y + \chi_{m,13} H_z$$

و سایر معادلات مشابه به کار می‌روند. در این موارد \mathbf{M} و \mathbf{H} الزاماً هم‌جهت نخواهند بود. ما در این کتاب، بررسی خود را به محیطهای همسانگرد محدود می‌کنیم.

جدول ۹-۱ پذیرفتاری مغناطیسی برخی مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس در دمای اتاق

ماده	χ_m	$\chi_{m, \text{جرمی}}$ (m^3/kg)
آلومینیم	2.1×10^{-5}	0.77×10^{-8}
بیسموت	-1.64×10^{-5}	-1.68×10^{-8}
مس	-0.98×10^{-5}	-0.11×10^{-8}
الماس	-2.2×10^{-5}	-0.62×10^{-8}
گادولینیم کلرید (GdCl_3)	6.03×10^{-5}	133.3×10^{-8}
طلا	-3.5×10^{-5}	-0.18×10^{-8}
منیزیم	1.2×10^{-5}	0.68×10^{-8}
جیوه	-2.8×10^{-5}	-0.21×10^{-8}
نقره	-2.4×10^{-5}	-0.23×10^{-8}
سدیم	0.84×10^{-5}	0.87×10^{-8}
تیتانیم	1.8×10^{-5}	4.01×10^{-8}
تنگستن	7.6×10^{-5}	0.40×10^{-8}
کربن دیوکسید تنگستن (فشار یک جو)	-1.19×10^{-4}	-0.60×10^{-8}
هیدروژن (فشار یک جو)	-0.22×10^{-4}	-2.48×10^{-8}
نیترژن (فشار یک جو)	-0.67×10^{-4}	-0.54×10^{-8}
اکسیژن (فشار یا جو)	1.93×10^{-4}	135.4×10^{-8}

منبع: داده‌ها از کتاب

Handbook of Chemistry and Physics, 70th ed. (Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., 1990)

انتخاب شده‌اند. عملاً در تمام منابع، پذیرفتاری مغناطیسی برحسب یکاهای گاوسی (cgs) داده می‌شوند؛ اگر شاخص

(۱) برای نمایاندن کمیته‌ها در دستگاه گاوسی به‌کار رود، آنگاه: $\chi_m = 4\pi\chi_m^{(1)}$ و $\chi_{m, \text{جرمی}}^{(1)} = 4\pi \times 10^{-3} \chi_{m, \text{جرمی}}$.

ماده‌ای تضعیف می‌شود. با اینکه χ_m تابعی از دماست، و گاهی نیز به شدت با دما تغییر می‌کند، عموماً با اطمینان می‌توان گفت که χ_m برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس بسیار کوچک است؛ یعنی

$$|\chi_m| \ll 1 \quad (\text{برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس}) \quad (9-34)$$

پذیرفتاری مغناطیسی بعضی از مواد معمولی در جدول ۹-۱ آمده است.

در بیشتر کتابهای راهنما و جدولهای داده‌های فیزیکی χ_m را مستقیماً درج نمی‌کنند، بلکه

به صورت پذیرفتاری جرمی $\chi_{m, \text{جرمی}}$ یا پذیرفتاری مولی $\chi_{m, \text{مولی}}$ می‌نویسند، این کمیته‌ها با روابط

زیر تضعیف می‌شوند

$$\chi_m = \chi_{m, \text{جرمی}} d \quad (۳۵-۹)$$

$$\chi_m = \chi_{m, \text{مولی}} \frac{d}{A} \quad (۳۶-۹)$$

که در آن d چگالی جرمی ماده و A وزن مولکولی آن است. چون ابعاد \mathbf{M} و \mathbf{H} همان ابعاد گشتاور مغناطیسی در واحد حجم است، واضح است که \mathbf{H} جرمی، $\chi_{m, \text{جرمی}}$ و \mathbf{H} مولی، $\chi_{m, \text{مولی}}$ به ترتیب گشتاور مغناطیسی در واحد جرم و گشتاور مغناطیسی در مول را مشخص می‌کنند. برای سهولت، پذیرفتاری جرمی نیز در جدول ۹-۱ درج شده است.

وجود رابطه‌ای خطی بین \mathbf{M} و \mathbf{H} نیز وجود رابطه‌ای خطی بین \mathbf{B} و \mathbf{H} را به صورت زیر ایجاب می‌کند

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (۳۷-۹)$$

که در آن تراوایی (مغناطیسی) μ از ترکیب معادله‌های (۲۶-۹) و (۳۳-۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (۳۸-۹)$$

گاهی اوقات کمیّت بی بعد زیر را به جای χ_m در جدولها ذکر می‌کنند

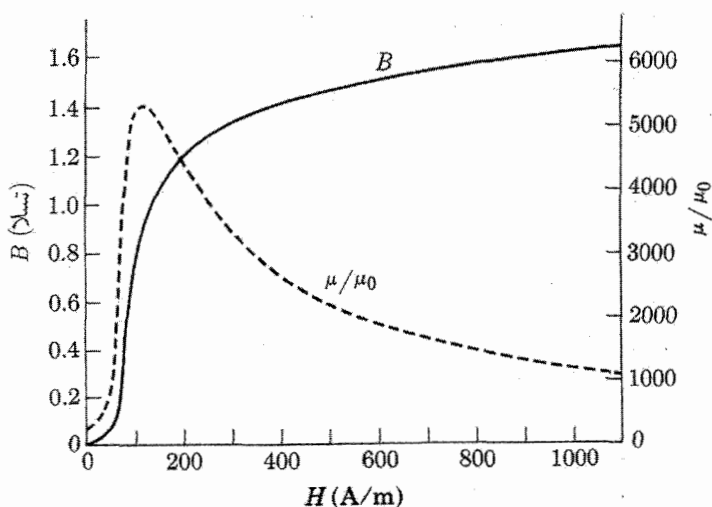
$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (۳۹-۹)$$

این کمیّت، یعنی K_m ، را تراوایی نسبی می‌نامند.

برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس که در جدول ۹-۱ آمده‌اند، به خوبی دیده می‌شود که K_m خیلی به واحد نزدیک است.

فرّومغناطیسها رده دیگری از مواد مغناطیسی را تشکیل می‌دهند. وجه مشخصه چنین موادی آن است که می‌توانند مغناطش دائم داشته باشند و هم آنکه عموماً حضورشان تأثیر زیادی در میدان مغناطیسی دارد. مواد فرّومغناطیس خطی نیستند، در نتیجه معادله‌های (۳۳-۹) و (۳۷-۹) با مقادیر ثابت χ و μ در مورد آنها صدق نمی‌کند.^۱ به هر حال، مناسب به نظر می‌رسد که معادله (۳۷-۹) را به عنوان معادله‌ای برای تعریف μ به کار ببریم، یعنی $\mu = \mu(\mathbf{H})$ ، اما باید در این خصوص احتیاط کرد، چه این کار در بعضی موارد ممکن است به اشکالاتی منجر شود. اگر کمیّت μ یک ماده فرّومغناطیس با معادله (۳۷-۹) تعریف شود، آن وقت برحسب مقدار \mathbf{H} ، کمیّت μ

۱. با وجود این، نوع خاصی از آهن، موسوم به آهن نرم، را تقریباً می‌توان خطی به حساب آورد.



شکل ۵-۹ منحنی مغناطش و تراوایی نسبی آهن تجارتي (تابکاری شده).

تمام مقادیر بین صفر تا بی‌نهایت را قبول خواهد کرد و ممکن است مثبت یا منفی باشد. بهترین کار این است که هر یک از مسائل مربوط به فرومغناطیسها را جداگانه بررسی کنیم و ناحیه‌ای از منحنی $B-H$ را که برای مسئله مفروض مهم است تعیین کنیم، و تقریبهای مناسب را برای آن ناحیه به کار ببریم، خواص مغناطیسی بعضی از مواد فرومغناطیس در جدول ۲-۹ درج شده است. (کمیت‌هایی که با H_c ، M_s و غیره نشان داده شده‌اند، در ادامه بحث تعریف خواهند شد).

ابتدا نمونه‌ای از یک ماده فرومغناطیس نامغناطیده را بررسی می‌کنیم. اگر شدت مغناطیسی، در آغاز صفر است، به‌طور یکنواخت افزایش داده شود، منحنی حاصل از ترسیم رابطه $B-H$ ، مانند منحنی شکل ۵-۹ خواهد بود، که منحنی مغناطش ماده نام دارد. واضح است که μ هایی که از منحنی مغناطش، با استفاده از رابطه $\mu = B/H$ به دست می‌آیند، همواره علامت یکسانی دارند (مثبت)، لیکن مقادیرشان بسیار متفاوت است. بیشترین مقدار تراوایی در "زانوی" منحنی رخ می‌دهد. در بعضی مواد این تراوایی بیشینه تا $10^5 \mu_0$ می‌رسد، ولی در سایر مواد از این مقدار بسیار کمتر است. علت وجود زانو در منحنی این است که مغناطش M در ماده به مقدار بیشینه‌ای می‌رسد و برای مقادیر بسیار زیاد H ، افزایش میدان مغناطیسی

$$B = \mu_0 (H + M)$$

تنها به علت وجود جمله H μ_0 ادامه می‌یابد. مقدار بیشینه M را مغناطش اشباع ماده می‌نامند (جدول ۲-۹).

جدول ۹-۲ خواص مواد فرومغناطیس در دمای اتاق

ماده	درصد ترکیب	$\mu_0 M_s (T)$	$H_s (A/m)$	$K_m (max)$
عناصر				
آهن (تابکاری شده)		۲,۱۵	$۱,۶ \times ۱۰^۵$	۵۵۰۰
کبالت		۱,۷۹	$۷,۰ \times ۱۰^۵$	
نیکل		۰,۶۱	$۵,۵ \times ۱۰^۵$	
آلیاژها و مواد مرکب			$H_c (A/m)$	
آهن-سیلیسیم	۹۶ Fe, ۴ Si	۱,۹۷	۵۶	۸۰۰۰
پریمالوی (Permalloy)	۵۵ Fe, ۴۵ Ni	۱,۶۰	۵,۶	۵۰۰۰۰
مومتال (Mumetal)	۵ Cu, ۲ Cr ۷۷ Ni, ۱۶ Fe	۰,۷۵	۱,۲	۱۰۰۰۰۰
پرمندور (Permendur)	۵۰ Co, ۵۰ Fe	۲,۴۵	۱۵۹	۵۰۰۰
فریت منگنز	$MnFe_2O_4$	۰,۴۹		۲۵۰۰
فریت نیکل	$NiFe_2O_4$	۰,۳۲		۲۵۰۰
		$B_r (T)$		
فولاد کبالت	۵۲ Fe, ۳۶ Co, ۴ W, ۶ Cr, ۰,۸ C	۰,۹۷	۱۹×۱۰^۲	
آلنیکو ۵	۵۱ Fe, ۸ Al, ۱۴ Ni, ۲۴ Co, ۳ Cu	۱,۲۵	۵۲×۱۰^۲	
پلاتین-کبالت	۷۷ Pt, ۲۳ Co	۰,۶	$۳,۴ \times ۱۰^۵$	
ساماریوم-کبالت	SmCo	۰,۸۴	$۶,۷ \times ۱۰^۵$	
نئودیمیم-آهن	۱۳ Nd, ۸۱ Fe, ۶ B	۰,۸۰	$۱,۲ \times ۱۰^۶$	

توجه: مغناطش اشباع = M_s , شدت مغناطیسی لازم برای اشباع = H_s , وادارندگی مغناطیسی = H_c , پسمانده = B_r .
منبع: داده‌ها از کتابهای زیر گرفته شده‌اند:

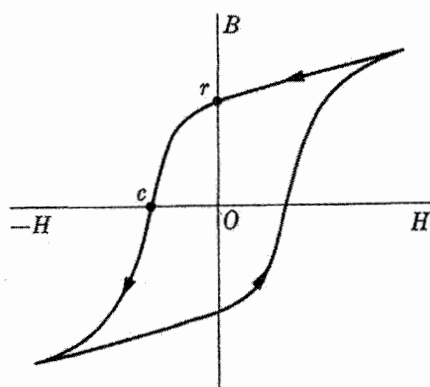
American Institute of Physics Handbook, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1972).

Handbook of Chemistry and Physics, 70th ed. (Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., 1990).

داده‌ها برای Nd - Fe - B از:

J. J. Croat et al., *Journal of Applied Physics* 55, 2079 (1985).

گرفته شده‌اند.

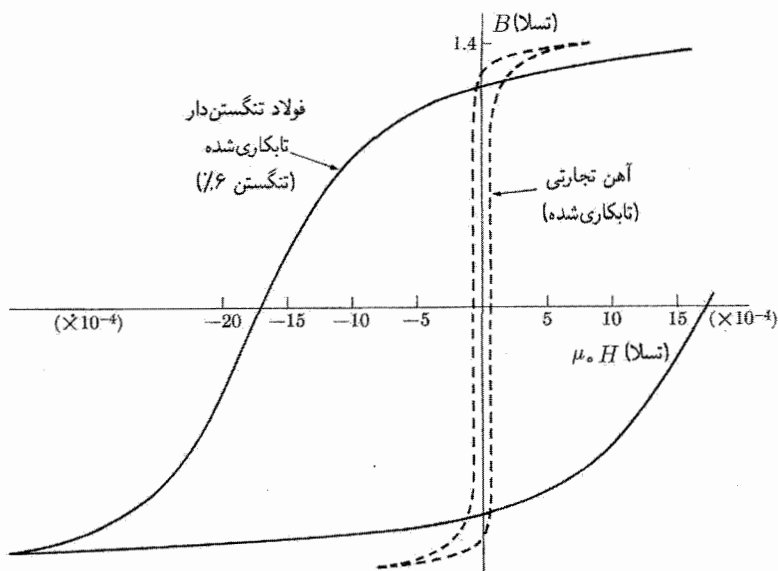


شکل ۹-۶ نمونه حلقه پسماند برای یک ماده فرومغناطیسی.

اکنون یک نمونه فرومغناطیس را که به روش بالا مغناطیده شده است در نظر می‌گیریم. اگر شدت مغناطیسی H را کاهش دهیم، رابطه $B-H$ از روی همان منحنی شکل ۹-۵ برنمی‌گردد، بلکه از روی منحنی جدید شکل ۹-۶ حرکت می‌کند و به نقطه r می‌رسد. مغناطش، پس از برقرار شدن، دیگر با حذف H از بین نمی‌رود؛ در واقع باید یک شدت مغناطیسی معکوس به‌کار گرفته شود تا مغناطش به صفر کاهش یابد. اگر افزایش H در جهت معکوس ادامه یابد، آن وقت M (و در نتیجه B) در جهت معکوس برقرار خواهد شد و در شکل ۹-۶ حالت تقارن معینی آغاز می‌شود. سرانجام، وقتی بار دیگر H افزایش یابد، نقطه کار در شکل ۹-۶ منحنی پایینی را طی می‌کند. پس منحنی $B-H$ وقتی H در حال افزایش است، با منحنی مربوط به هنگام کاهش H ، کاملاً متفاوت است. این پدیده را پسماند می‌گویند، که به معنی "عقب ماندن" است؛ مغناطش در واقع از میدان محرک خود عقب می‌ماند.

منحنی شکل ۹-۶ حلقه پسماند ماده نامیده می‌شود. مقدار B در نقطه r را باقیماندگی یا پسمانده می‌نامند و اندازه H در نقطه c به نیروی وادارنده یا وادارندگی مغناطیسی ماده موسوم است. از شکل ۹-۶ پیداست که مقدار μ ، که با معادله (۹-۳۷) تعریف می‌شود، در ربع دوم و چهارم نمودار منفی است. شکل حلقه پسماند نه تنها به ماهیت ماده فرومغناطیسی بستگی دارد (شکل ۹-۷)، بلکه به مقدار بیشینه H که بر ماده اعمال می‌شود نیز بستگی دارد (شکل ۹-۸). با وجود این، وقتی H_{max} برای ایجاد اشباع در ماده کافی باشد، حلقه پسماند با افزایش H_{max} تغییر شکل نمی‌دهد. برای آهن نرم، پسماند نسبتاً کوچک است.

برای بعضی کاربردها، دانستن تراوایی مؤثر ماده‌ای که تحت تأثیر مجموع یک میدان کوچک متناوب H و یک میدان بزرگ ثابت قرار گرفته، لازم است. بنابراین، اگر ΔB تغییر میدان مغناطیسی حاصل از تغییر ΔH در شدت مغناطیسی باشد، تراوایی نموی، μ ، به صورت زیر



شکل ۷-۹ مقایسه منحنیهای پسماند چند ماده^۱. (توجه کنید که $\mu_0 H$ روی محور افقی به جای H رسم شده است. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.)

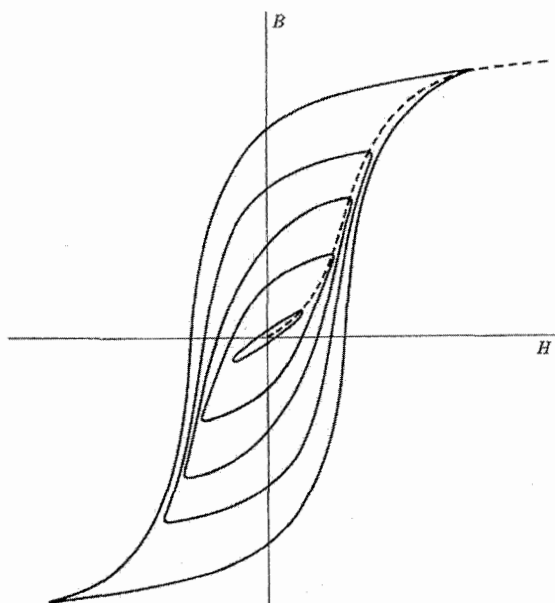
تعریف می شود

$$\mu_{\text{نوی}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (۴۰-۹)$$

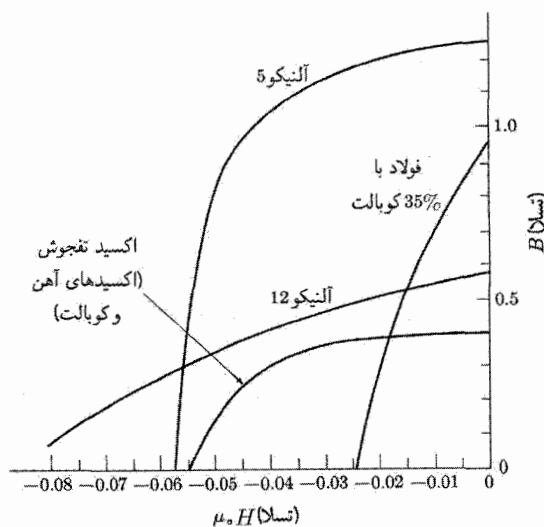
و تقریباً برابر است با شیب منحنی پسماندی که از نقطه مورد نظر می گذرد.^۱

مواد فرومغناطیسی را یا برای (۱) افزایش شار مغناطیسی یک مدار جریان، یا (۲) به عنوان منابع میدان مغناطیسی (آهنرباهای دائم) به کار می برند. برای استفاده به عنوان آهنربای دائم، ابتدا ماده را با قرار دادن آن در یک میدان مغناطیسی قوی تا حد اشباع مغناطیده می کنند (یعنی، با قرار دادن آن بین قطبهای یک آهنربای الکتریکی یا گذاردن آن در یک سیمولوله که جریان زیادی برای یک لحظه از آن عبور می کند). به هر حال، هنگامی که آهنربای دائم از میدان خارجی بیرون آورده می شود، به طور کلی تحت تأثیر یک میدان و امغانطنده قرار می گیرد؛ درباره این مطلب در بخشهای ۸-۹ و ۱۱-۹ به تفصیل بحث خواهد شد. بنابراین ربع دوم نمودار حلقه پسماند، قسمت حائز اهمیت رابطه $B-H$ برای یک ماده آهنربای دائم است (شکل ۹-۹).

^۱ داده ها از کتاب زیر انتخاب شده اند:



شکل ۸-۹ حلقه پسماند اصلی و چند حلقه پسماند فرعی برای یک ماده نمونه.



شکل ۹-۹ منحنی پسماند برای مواد آهنربای دائم (توجه کنید که $\mu_0 H$ به جای H در روی محور افقی رسم شده است).

۷-۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان

قبل از آنکه بخواهیم مسائل مغناطیس، حتی مسائل ساده آن، را حل کنیم باید بدانیم که چگونه بردارهای میدان \mathbf{B} و \mathbf{H} در عبور از فصل مشترک دو محیط تغییر می‌کنند. فصل مشترک مورد نظر ممکن است بین دو محیط با خواص مغناطیسی متفاوت و یا بین یک محیط مادی و خلأ باشد. دو محیط مجاور ۱ و ۲ را، همان‌طور که در شکل ۹-۱۰ نشان داده شده‌اند، در نظر بگیرید. یک سطح کوچک قرصی شکل S می‌سازیم که فصل مشترک را قطع کند و ارتفاع آن نسبت به قطر قاعده‌هایش ناچیز باشد. با به‌کار بردن انتگرال شار، یعنی معادله (۹-۳۲) برای سطح S ، خواهیم داشت

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = 0$$

که در آن \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 بردارهای یکه عمود بر سطوح بالا و پایین قرص‌اند. چون $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ و چون هر یک از این بردارها را می‌توان به‌عنوان بردار یکه عمود بر فصل مشترک منظور کرد، پس

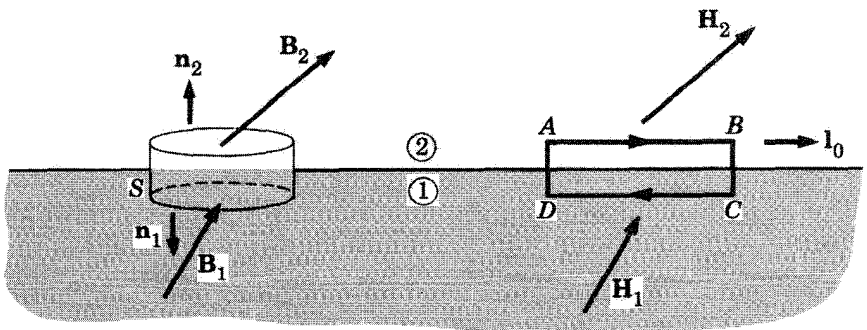
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (۹-۴۱\text{الف})$$

یا

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0 \quad (۹-۴۱\text{ب})$$

پس مؤلفه قائم \mathbf{B} در عبور از فصل مشترک پیوسته است.

شرط مرزی در مورد میدان \mathbf{H} را می‌توان با به‌کار بردن قانون مداری آمپر، یعنی معادله (۹-۳۱)، برای مسیر مستطیلی $ABCD$ در شکل ۹-۱۰ به‌دست آورد. بر روی این مسیر، طولهای AB و



شکل ۹-۱۰ شرایط مرزی برای بردارهای میدان در فصل مشترک بین دو محیط را می‌توان با به‌کار بردن قانون گاوس در مورد S و انتگرال‌گیری از $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ بر روی مسیر $ABCD$ به‌دست آورد.

CD را برابر با Δl می‌گیریم و قسمتهای AD و BC را قابل چشمپوشی فرض می‌کنیم. جریانی که از درون مستطیل می‌گذرد قابل چشمپوشی است، مگر اینکه یک جریان سطحی واقعی وجود داشته باشد. از این رو

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{l}_0.$$

یا

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \quad (9-42 \text{ الف})$$

که در آن \mathbf{j} چگالی جریان سطحی است (جریان انتقالی در واحد طول در لایه سطحی) و \mathbf{l}_0 بردار یکه‌ای است در جهت Δl . بنابراین مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی در عبور از یک فصل مشترک پیوسته است، مگر اینکه یک جریان سطحی واقعی وجود داشته باشد. سرانجام، با محاسبه ضرب برداری (9-42 الف) در \mathbf{n}_2 ، خواهیم داشت

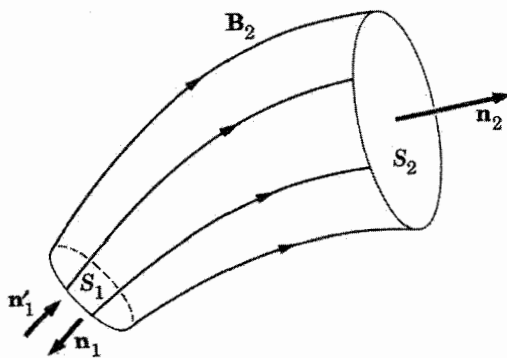
$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j} \quad (9-42 \text{ ب})$$

هرگاه \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 معلوم باشند، رابطه بالا برای تعیین \mathbf{j} مناسب است.

قبل از اتمام این بخش، یکی دیگر از خواص مهم میدان مغناطیسی \mathbf{B} را ثابت می‌کنیم، و آن اینکه شار مغناطیسی \mathbf{B} در همه جا پیوسته است. توجه خود را به ناحیه‌ای از فضا معطوف و خطوط میدان مغناطیسی را در آنجا رسم می‌کنیم، یعنی، خطوطی فرضی که طوری رسم می‌شوند که جهت هر خط در هر نقطه با جهت \mathbf{B} در آن نقطه یکی باشد. حال یک لوله از شار مغناطیسی را در نظر می‌گیریم، یعنی حجمی را که از اطراف با خطوط \mathbf{B} محصور شده باشد، و در هیچ جا این خطوط را قطع نکند (شکل ۹-۱۱). لوله در دو انتها به سطوح S_1 و S_2 ختم می‌شود. با به‌کار بردن قضیه دیورژانس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv &= 0 \\ &= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' \, da \\ &= \Phi(S_2) - \Phi(S_1) \end{aligned} \quad (9-43)$$

پس همان مقدار شار مغناطیسی که از سطح S_1 وارد لوله می‌شود، از سطح S_2 خارج می‌شود. خطوط شار هرگز به جایی ختم نمی‌شوند، بلکه باید سرانجام به خودشان ملحق شوند و حلقه‌های بسته‌ای تشکیل دهند.



شکل ۹-۱۱ لوله‌ای از میدان مغناطیسی.

احکام بالا در مورد میدان \mathbf{B} صدق می‌کنند، و شاید ذکر این موضوع لازم باشد که این احکام در مورد میدان \mathbf{H} صادق نیستند، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ، که در همه جا صفر نیست. پس با به‌کار بردن قضیه دیورژانس در مورد لوله‌ای از شدت مغناطیسی، خواهیم داشت

$$\int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}' \, da = \int_V \rho_M \, dv \quad (۹-۴۴)$$

نابوستگی در شار شدت مغناطیسی برابر است با کل قدرت قطب مغناطیسی که درون لوله شار واقع است.

۹-۸ مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی

چون \mathbf{B} و \mathbf{H} از شرایط مرزی‌ای مشابه با شرایط مرزی مربوط به \mathbf{D} و \mathbf{E} تبعیت می‌کنند، مسائل محیط‌های خطی با مغناطش مشخص، به مسائل دی‌الکتریکها که در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفتند، شباهت دارند. در این بخش ما با رده‌بخصوصی از مسائل، یعنی محاسبه میدانهای مغناطیسی در داخل ماده مغناطیسی بدون جریان انتقالی سروکار خواهیم داشت. این وضعیت از نظر صوری با دی‌الکتریک بدون چگالی بار خارجی، یکسان است.

هنگامی که $\mathbf{J} = 0$ باشد، معادله‌های اساسی مغناطیس، (۹-۲۸) و (۹-۳۰)، به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۹-۲۸)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (۹-۴۵)$$

معادله (۹-۴۵) نشان می‌دهد که \mathbf{H} را می‌توان به صورت گرادین یک میدان نرده‌ای نوشت. این امر نباید باعث تعجب شود، زیرا مطابق معادله چشمه، یعنی معادله (۹-۲۷)، سهم ماده مغناطیسی در ایجاد \mathbf{H} از پیش به همین صورت بیان شده است، و در بخش ۸-۸ نشان دادیم که میدان حاصل از جریانهای انتقالی هنگامی که چگالی موضعی جریان صفر باشد، از همین طریق به دست می‌آید (در واقع اثباتی که در آنجا آمده است باید برای میدان \mathbf{H} تعمیم داده شود). طبق معادله (۹-۴۵) می‌توان نوشت

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi^* \quad (۹-۴۶)$$

که در اینجا φ^* پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی حاصل از تمام چشمه‌هاست. دو نوع ماده مغناطیسی وجود دارد که محاسبه میدان مغناطیسی در آنها به مسئله ساده مقادیر مرزی تبدیل می‌شود: (۱) ماده مغناطیسی خطی و یا تقریباً خطی که در آن $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ، و (۲) یک قطعه از ماده‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده است و در آن $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. در هر دو حالت معادله (۹-۲۸) به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (۹-۴۷)$$

از ترکیب این معادله با معادله (۹-۴۶) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla^2\varphi^* = 0 \quad (۹-۴۸)$$

که همان معادله لاپلاس است. بنابراین مسئله مغناطیس تبدیل می‌شود به مسئله یافتن جوابی برای معادله لاپلاس که در شرایط مرزی صدق کند. آنگاه \mathbf{H} را می‌توان با محاسبه منفی گرادین پتانسیل مغناطیسی به دست آورد، و \mathbf{B} از رابطه

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

یا

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

هر کدام که مناسب مسئله ما باشد، به دست می‌آید.

دو مثال زیر سودمندی روشی را که در بالا تشریح شد نشان می‌دهند، و تمرینهای بیشتری از این نوع در مسائل آخر فصل یافت می‌شوند.

مثال ۹-۱ کره تراوای مغناطیسی در میدان مغناطیسی یکنواخت

کره‌ای از جنس یک ماده مغناطیسی خطی به شعاع a و تراوایی μ را در نظر بگیرید. این کره در ناحیه‌ای از فضا قرار دارد که حاوی یک میدان مغناطیسی \mathbf{B}_0 است و این میدان در آغاز یکنواخت بوده است. می‌خواهیم بدانیم چگونه میدان مغناطیسی بر اثر وجود کره تغییر می‌کند، و بخصوص، می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در داخل خود کره به دست آوریم.

حل: مسئله خیلی شبیه است به حالت مربوط به کره دی‌الکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت که در بخش ۴-۹ حل شد. بنابراین، با انتخاب مبدأ مختصات در مرکز کره و جهت \mathbf{B}_0 به عنوان جهت قطبی (جهت z)، می‌توان پتانسیل را به صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت. در اینجا نیز تمام شرایط مرزی را می‌توان با هماهنگهای $\cos \theta$ برآورده کرد:

$$\varphi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (49-9)$$

برای ناحیهٔ خلا (۱) در خارج کره، و

$$\varphi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (50-9)$$

برای ناحیهٔ مادهٔ مغناطیسی (۲). ثابتهای A_1, A_2, C_1, C_2 را باید از روی شرایط مرزی به دست آورد.

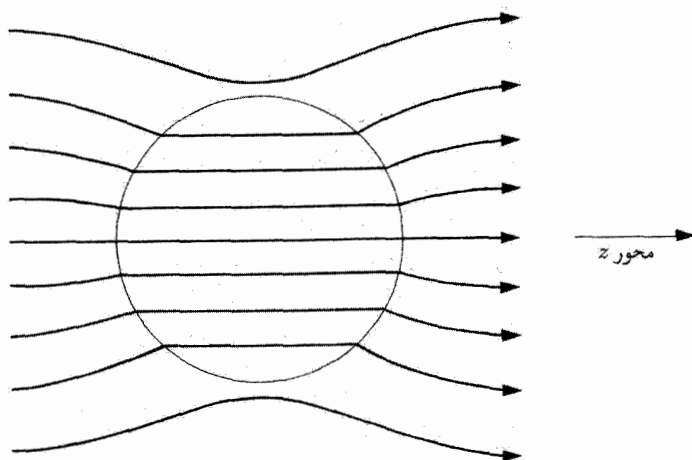
در فواصل بسیار دور از کره، میدان مغناطیسی خصوصیت یکنواختی خود را حفظ می‌کند: $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ ، $\varphi_1^* \rightarrow -(B_0 / \mu_0) r \cos \theta$ پس $A_1 = -(B_0 / \mu_0)$. چون φ_1^* و میدان مغناطیسی مربوط به آن نمی‌توانند در هیچ نقطه‌ای بی‌نهایت شوند، ضریب C_2 را باید مساوی صفر قرار داد. حال که شرایط مرزی را در $r = 0$ و $r = \infty$ اعمال کردیم، توجه خود را به فصل مشترک دو محیط در $r = a$ معطوف می‌کنیم

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}, \quad B_{1r} = B_{2r}$$

یا

$$-\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right) \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \quad (51-9)$$

$$B_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_1}{a^3} \cos \theta = -\mu A_2 \cos \theta \quad (52-9)$$



شکل ۹-۱۲ خطوط میدان مغناطیسی B در حوالی کره‌ای با تراوایی زیاد μ .

از حل همزمان دو معادله فوق نتیجه می‌شود

$$A_2 = -\frac{3B_0}{(\mu + 2\mu_0)}$$

و

$$C_1 = [(\mu/\mu_0) - 1] \frac{B_0 a^3}{(\mu + 2\mu_0)}$$

و بنابراین میدانهای مغناطیسی در داخل و خارج از کره با معادلات زیر داده می‌شوند

$$B_2 = \frac{3B_0 k}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \quad (53-9)$$

و

$$B_1 = B_0 k + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2a_r \cos \theta + a_\theta \sin \theta) \quad (54-9)$$

خطوط میدان مغناطیسی در شکل ۹-۱۲ رسم شده‌اند.

مسئله دیگری که می‌خواهیم حل کنیم، به آهنربای دائم مربوط می‌شود.

مثال ۹-۲ میدان کره مغناطیده یکنواخت

می‌خواهیم میدان مغناطیسی حاصل از کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است، با بردار مغناطش M و شعاع a را هنگامی که هیچ‌گونه میدان مغناطیسی دیگری وجود ندارد، پیدا کنیم.

حل: چنانچه بردار مغناطش را در امتداد محور z و مبدأ مختصات را در مرکز کره اختیار کنیم، می‌توانیم پتانسیل را برحسب هماهنگهای منطقه‌ای بسط دهیم:

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (55-9)$$

برای ناحیهٔ خلأ (۱) در خارج از کره، و

$$\varphi_2^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} r^n P_n(\theta) \quad (56-9)$$

برای ناحیهٔ آهنربای دائمی (۲). در اینجا ما عمداً هماهنگهای مربوط به توانهای مثبت r را از بسط (۵۵-۹) کنار گذاشته‌ایم، زیرا این هماهنگها در فواصل زیاد بزرگ می‌شوند، و توانهای منفی r را از بسط (۵۶-۹) کنار گذاشته‌ایم زیرا آنها در مبدأ مختصات مقدارشان بی‌نهایت می‌شود. از شرایط مرزی در $r = a$ ، یعنی از

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}$$

$$B_{1r} = B_{2r}$$

نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n} a^{-(n+1)} - A_{2,n} a^n) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\theta) = 0 \quad (57-9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1,n} a^{-(n+1)} - A_{2,n} a^n) P_n(\theta) = \text{constant} \quad (57-9 \text{ الف})$$

یا

و

$$\begin{aligned} \mu_0 C_{1,0} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta) [C_{1,n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2,n} n a^{n-1}] \\ - \mu_0 M \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (58-9)$$

از آنجا که $P_n(\theta)$ ها توابع متعامدی هستند، هرکدام از جمله‌های معادلات (۵۷-۹ الف) و (۵۸-۹) باید به‌طور جداگانه مساوی صفر شوند. برای $n = 0$ داریم

$$C_{1,0} a^{-1} - A_{2,0} = \text{constant}, \quad \mu_0 C_{1,0} a^{-2} = 0$$

بنابراین $C_{1,0} = 0$ و $A_{2,0}$ یک ثابت دلخواه است که می‌توان آن را مساوی صفر قرار داد، بی‌آنکه بر روی \mathbf{H} یا \mathbf{B} تأثیری داشته باشد.

از جمله‌های مربوط به $n = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$C_{1,1}a^{-3} - A_{2,1} = 0$$

و

$$2C_{1,1}a^{-3} + A_{2,1} - M = 0$$

از حل این دستگاه معادلات به‌طور همزمان، می‌توان نتیجه گرفت

$$C_{1,1} = \frac{1}{3}Ma^3$$

و

$$A_{2,1} = \frac{1}{3}M$$

برای تمام مقادیر $n \geq 2$ ، تنها مقادیر برای $C_{1,n}$ و $A_{2,n}$ که با هر دو معادله سازگاری داشته باشند، عبارت‌اند از $C_{1,n} = 0$ و $A_{2,n} = 0$.

با قرار دادن این نتایج در معادله‌های (۵۵-۹) و (۵۶-۹)، به‌دست می‌آوریم

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \frac{1}{3}M(a^3/r^3) \cos \theta \quad (59-9)$$

و

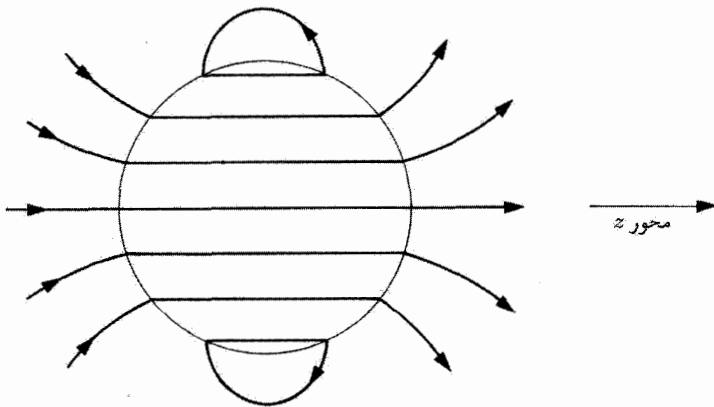
$$\varphi_2^*(r, \theta) = \frac{1}{3}Mr \cos \theta \quad (60-9)$$

شدت مغناطیسی \mathbf{H} را می‌توان با محاسبه گرادیان به‌دست آورد و نتیجه به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3}M(a^3/r^3) [2\mathbf{a}_r \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta] \quad (61-9)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3}M\mathbf{k} \quad (62-9)$$

بنابراین میدان خارجی کره‌ای که به‌طور یکنواخت مغناطیده است، دقیقاً یک میدان دوقطبی است، که از گشتاور دوقطبی $\frac{4}{3}\pi a^3 M$ نتیجه می‌شود. شدت مغناطیسی داخل کره میدانی و امغانطنده است، و این نتیجه با میدان الکتریکی داخل ماده‌ی الکتریکی که به‌طور یکنواخت قطبیده شده باشد، در توافق است. پس می‌بینیم که کره مغناطیده تحت تأثیر میدان و امغانطنده خود قرار می‌گیرد.



شکل ۹-۱۳ خطوط میدان مغناطیسی برای کره‌ای که به‌طور یکنواخت مغناطیده است.

ضریب $\frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{4\pi}\right)$ در معادله (۹-۶۲) صریحاً به شکل هندسی کره بستگی دارد. کمیت $\frac{4\pi}{3}$ به ضریب و امغانش کره موسوم است. ضرایب و امغانش برای سایر شکلهای هندسی محاسبه و جدولبندی شده‌اند.^۱

میدان مغناطیسی خارجی B_1 مساوی است با μ_0 ضرب در معادله (۹-۶۱). میدان مغناطیسی در داخل کره برابر است با

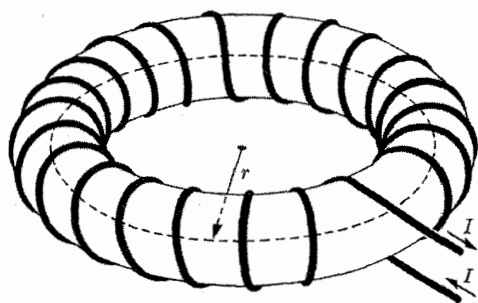
$$B_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M \quad k = \frac{2}{3} \mu_0 M \quad (9-63)$$

خطوط میدان مغناطیسی در شکل ۹-۱۳ نشان داده شده‌اند.

۹-۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی

در فصل ۸ با میدانهای مغناطیسی حاصل از مدارهای جریان در خلأ سروکار داشتیم. یکی از مثالهایی که در بخش مسائل بررسی شد (مسئله ۸-۱۹)، مسئله سیمپیچ چنبره‌ای با N دور یکنواخت بود که جریان I از آن می‌گذشت (شکل ۹-۱۴). حال بار دیگر مسئله سیمپیچ چنبره‌ای را حل می‌کنیم، ولی این بار فرض می‌کنیم ناحیه داخلی سیمپیچ با یک ماده فرومغناطیسی پر شده باشد که همگن و همسانگرد بوده و در آغاز مغناطیده نباشد. بردار میدانی که خیلی به‌آسانی

۱. مثلاً به کتاب زیر مراجعه کنید:



شکل ۹-۱۴ یک سیم پیچ چنبره‌ای.

به دست می‌آید شدت مغناطیسی است، زیرا این بردار با قانون مداری آمپر، یعنی معادله (۹-۳۱)، به جریان درون سیم مربوط می‌شود. اگر معادله (۹-۳۱) را در مورد یک مسیر دایره‌ای که با سوراخ درون چنبره هم‌محور است، نظیر مسیر نقطه چین در شکل به کار ببریم، تقارن مسئله حکم می‌کند که H در تمام نقاط واقع بر مسیر، یکسان باشد:

$$H_t l = NI$$

یا

$$H_t = \frac{NI}{l} \quad (۹-۶۴)$$

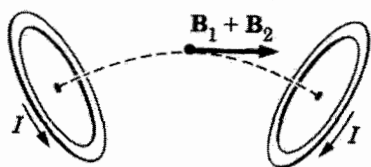
در اینجا شاخص t معرف مؤلفه مماس بر مسیر، و $l = 2\pi r$ طول کل مسیر است. از معادله (۹-۲۶) نتیجه می‌شود

$$B_t = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_t \quad (۹-۶۵)$$

بنابراین میدان مغناطیسی با حالتی که در خلأ داشتیم به اندازه جمله اضافی M_t μ_0 تفاوت دارد.

با روش بالا فقط مؤلفه مماسی B (و H) به دست می‌آید؛ با وجود این، تنها مؤلفه‌ای که انتظار وجودش می‌رود، همین مؤلفه مماسی است. مطابق معادله (۹-۲۷) دو نوع چشمه شدت مغناطیسی وجود دارد. جریانهای انتقالی و مواد مغناطیده. به آسانی می‌توان نشان داد که جریان در سیم پیچ چنبره‌ای فقط یک میدان مماسی ایجاد می‌کند. سیم پیچ معادل است با N حلقه مستدیر جریان؛ اگر حلقه‌ها را دو به دو ترکیب کنیم (شکل ۹-۱۵) واضح است که هر جفت حلقه یک میدان مماسی در نقطه مورد نظر تولید می‌کند.

چشمه دوم H ، یعنی خود ماده مغناطیده، ممکن است احتمالاً از طریق چگالیهای قطبهای مغناطیسی، یعنی $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ در ایجاد میدان سهمی داشته باشد. از

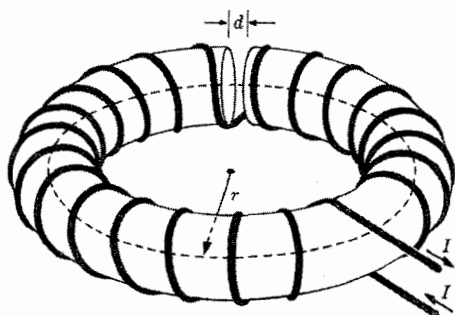


شکل ۹-۱۵ ماهیت محوری میدان در یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با ترکیب میدان مغناطیسی جفت حلقه‌های جریان نشان داده شده است.

آنجا که ماده فرومغناطیسی درون چنبره همسانگرد است، M در همان جهت H خواهد بود. اما H در اثر جریانهای درون سیم‌پیچ چنبره‌ای به‌وجود آمده است، و این میدان مماسی است. از این رو انتظار داریم تنها مؤلفه M_t داشته باشیم و می‌توانیم شاخص t را حذف کنیم. بر این اساس، در نمونه چنبره‌ای هیچ سطحی یافت نمی‌شود که بر M عمود باشد، و بنابراین σ_M وجود ندارد. بالاخره ρ_M باید برابر صفر باشد. با اینکه M ممکن است تابعی از r باشد (یعنی تابعی از فاصله تا محور چنبره)، ولی جمله $\partial M_t / \partial r$ در به‌وجود آوردن $\nabla \cdot M$ سهمی ندارد. نتیجه جالب آن است که ماده مغناطیسی در این حالت هیچ سهمی در ایجاد H ندارد و معادله (۹-۶۵) تمامی میدان مغناطیسی را به‌دست می‌دهد.

مسئله دیگر، که تا حدی از مسئله قبلی پیچیده‌تر است، مسئله یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با N دور سیم پیچیده شده به دور یک ماده فرومغناطیسی است که در آن شکاف هوا به عرض d تعبیه شده باشد (شکل ۹-۱۶). در اینجا تمایزی بین شکاف هوا و شکاف خلأ قائل نمی‌شویم، زیرا از جدول ۹-۱ به وضوح پیداست که تفاوت بین تراوایی هوا و μ_0 ناچیز است. در این مسئله قانون مداری آمپر برای پیدا کردن H کافی نیست، زیرا دیگر نمی‌توانیم بر مبنای استدلال تقارن بگوییم که H در تمامی نقاط یک مسیر دایره‌ای یکسان است. پس ابتدا به سراغ معادله چشمه، یعنی معادله (۹-۲۷)، می‌رویم.

بار دیگر خاطر نشان می‌کنیم که شدت مغناطیسی شامل دو بخش است، یک بخش ناشی از



شکل ۹-۱۶ یک سیم‌پیچ چنبره‌ای که به دور حلقه‌ای از ماده مغناطیسی با یک شکاف هوا، پیچیده شده است.

جریانهای انتقالی و دیگری ناشی از مغناطش. چون سیم پیچ چنبره‌ای نظیر سیم پیچ مسئله قبلی است، سهم جریانهای انتقالی در ایجاد \mathbf{H} باید مانند این سهم در مسئله قبل باشد. با نمایش این سهم با شاخص ۱، می‌توان نوشت

$$H_1 = \frac{NI}{l} \quad (۶۶-۹)$$

پس مسئله عبارت است از محاسبه H_2 یا جمله $\nabla\varphi^*$ برای حفظ سادگی مسئله، این فرض منطقی را به‌کار می‌بریم که در سراسر ماده فرومغناطیسی بردار مغناطش M مماسی و یکنواخت است؛ این فرض همه مطالب فیزیکی اساسی را فراهم می‌آورد، بی آنکه محاسبات جبری مسئله را مشکل کند. در این صورت ρ_M مساوی صفر می‌شود، اما بر روی وجوه قطبهایی که با شکاف هم‌مرزند، $\sigma_M = \pm M$. این وضع خیلی تداعی‌کننده مسئله الکتروستاتیکی‌ای است که شامل خازنی با صفحات موازی بردار باشد. در واقع فرمولبندی ریاضی پتانسیل در هر دو حالت یکی است. اگر شکاف هوا فوق‌العاده باریک باشد، آنگاه تقریباً

$$H_2 = M \quad (\text{در شکاف هوا}) \quad (۶۷-۹)$$

$$H_2 = 0 \quad (\text{در سایر جاها})$$

اما این نتیجه با قانون مداری آمپر تطبیق نمی‌کند، زیرا

$$\oint H \, dl = \oint (H_1 + H_2) \, dl = NI + Md \neq NI$$

مگر اینکه d قابل چشمپوشی باشد. برای یک شکاف باریک که عرض آن در حد چشمپوشی کوچک نیست، تقریب زیر بهتر است

$$H_2 = M \left(1 - \frac{d}{l} \right) \quad (\text{در شکاف}) \quad (۶۸-۹)$$

$$H_2 = -M \frac{d}{l} \quad (\text{در ماده})$$

این تقریب نه تنها در قانون مداری آمپر صدق می‌کند، بلکه پیوستگی مؤلفه قائم \mathbf{B} در عبور از وجوه قطبها را نیز تضمین می‌کند.

از ترکیب معادلات (۶۶-۹) و (۶۸-۹)، و قرار دادن نتیجه در معادله (۲۶-۹)،

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{l} \right) \quad (۹-۶۹)$$

که هم برای درون شکاف و هم برای درون مادهٔ مغناطیسی صادق است. برای حل کامل مسئله، تنها دانستن رابطهٔ زیر لازم است

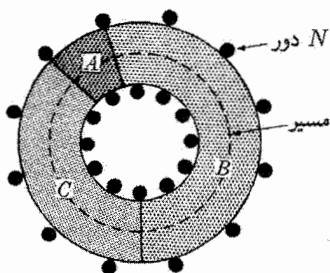
$$M = \chi_m (H) H$$

برای "آهن نرم" χ_m را می‌توان ثابت فرض کرد.

۹-۱۰ مدارهای مغناطیسی*

همان‌طور که دیدیم، خطوط شار مغناطیسی حلقه‌هایی بسته تشکیل می‌دهند. هرگاه تمام شار مغناطیسی (یا بخش عمدهٔ آن) مربوط به توزیع خاصی از جریانها در مسیر نسبتاً مشخصی محصور شده باشد، آنگاه می‌توان گفت که یک مدار مغناطیسی داریم. بدین ترتیب مثالهایی که در بخش ۹-۹ بررسی شدند مدارهای مغناطیسی‌اند، زیرا شار مغناطیسی در ناحیهٔ داخل سیم‌پیچ چنبره‌ای محصور شده است. در مثال اول، مدار فقط شامل یک نوع ماده، یعنی یک حلقهٔ فرومغناطیسی بود؛ اما در حالت دوم با مداری متوالی مرکب از دو ماده روبه‌رو شدیم: یک مادهٔ فرومغناطیسی و یک شکاف هوا.

اینک به بررسی یک مدار کلی‌تر، مرکب از چند ماده می‌پردازیم که با یک سیم‌پیچ چنبره‌ای شامل N دور و حامل جریان I ، احاطه شده است. چنین مداری در شکل ۹-۱۷ نشان داده شده است. از به‌کار بردن قانون مداری آمپر در مسیری که در امتداد مدار است (مسیر نقطه‌چین



شکل ۹-۱۷ یک مدار مغناطیسی.

در شکل)، نتیجه خواهد شد

$$\oint H dl = NI$$

بهتر است که H در هر نقطه از طول مسیر برحسب شار مغناطیسی Φ بیان شود؛ با به‌کار بردن $B = \mu H$ و $\Phi = BA$ ، که در آن A مساحت سطح مقطع مدار در نقطه مورد نظر است، خواهیم داشت

$$\oint \frac{\Phi dl}{\mu A} = NI$$

چون با یک مدار مغناطیسی سروکار داریم، انتظار می‌رود که Φ در تمام نقاط مدار اساساً مقدار ثابتی باشد، در نتیجه می‌توان Φ را به خارج از انتگرال برد:

$$\Phi \oint \frac{dl}{\mu A} = NI \quad (۷۰-۹)$$

این نتیجه، معادله اساسی مدار مغناطیسی است که به کمک آن می‌توانیم شار Φ را برحسب پارامترهای مدار پیدا کنیم.

معادله (۷۰-۹) یادآور معادله مشابه آن برای مدار متوالی جریان، یعنی $IR = \mathcal{V}$ ، است. با قیاس با مدارهای جریان، نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) و نیز مقاومت مغناطیسی \mathcal{R} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{mmf} = NI \quad (۷۱-۹)$$

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu A} \quad (۷۲-۹)$$

با به‌کار بردن این تعاریف می‌توانیم معادله (۷۰-۹) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Phi = \frac{\text{mmf}}{\mathcal{R}} \quad (۷۰-الف)$$

اگر مدار از چند قطعه همگن تشکیل شده باشد، و هر یک از قطعات مقطع یکنواختی داشته باشد، مقاومت مغناطیسی را می‌توان با تقریب زیر بیان کرد:

$$\mathcal{R} = \sum_j \frac{l_j}{\mu_j A_j} = \sum_j \mathcal{R}_j \quad (۷۲-الف)$$

پس مقاومت مغناطیسی کل مدار متوالی برابر است با جمع مقاومت‌های مغناطیسی عناصر تشکیل‌دهنده آن. شباهت مدارهای جریان و مدارهای مغناطیسی حتی از آنچه تاکنون اشاره شد

نیز بیشتر است، زیرا مقاومت یک مدار جریان با رابطه

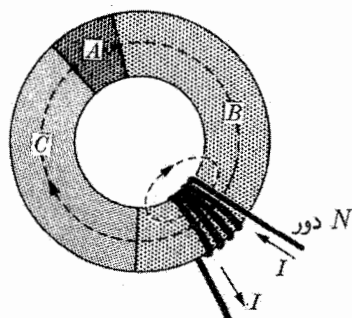
$$R = \oint \frac{dl}{gA}$$

داده می‌شود که تفاوتش با معادله (۹-۷۲) فقط در جانشین شدن g به جای μ است. به علت همین شباهت، بدیهی است که ترکیبهای موازی و متوالی مقاومتهای مغناطیسی را می‌توان درست نظیر ترکیبهای موازی و متوالی مقاومتهای الکتریکی به‌دست آورد.

مفهوم مدار مغناطیسی هنگامی بیشترین کاربرد را دارد که در مورد مدارهای شامل مواد فرومغناطیسی به‌کار برود، لیکن درست برای همین مواد است که تا حدودی با مشکل روبه‌رو می‌شویم. برای یک ماده فرومغناطیسی $\mu = \mu(H)$ است، و تا زمانی که مسئله مدار کاملاً حل نشده است و Φ را پیدا نکرده‌ایم، H در درون ماده معلوم نیست. در عین حال وضع چندان هم مایوس‌کننده نیست. در واقع مسئله را می‌توان نسبتاً به‌آسانی با روش تکرار حل کرد. در این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: (۱) در اولین مرحله فرض می‌کنیم $H = NI/l$ که در آن l طول کل مسیر است. (۲) تراوایی هر یک از مواد موجود در مدار را برای این مقدار H ، از روی منحنی مغناطش مربوط به‌دست می‌آوریم. (۳) مقاومت مغناطیسی کل مدار را حساب می‌کنیم، و (۴) شار Φ را از معادله (۹-۷۰ الف) محاسبه کنیم. (۵) از روی Φ شدت مغناطیسی را در عناصر مختلف مدار پیدا می‌کنیم و تراویهای آنها را دوباره معین می‌کنیم. (۶) همین روش را با شروع مجدد از مرحله (۳) تکرار می‌کنیم. معمولاً برای تعیین Φ تا حدود چند درصد تقریب، یک یا دو بار تکرار کفایت می‌کند.

مقاومت مغناطیسی \mathcal{R}_z با تراوایی μ_z به‌طور معکوس متناسب است. چون تراوایی ماده فرومغناطیسی ممکن است $10^5 \mu_0$ ، $10^3 \mu_0$ ، یا حتی در شرایط معینی 10^5 برابر μ_0 باشد، واضح است که ماده فرومغناطیسی در مقابل عبور شار مغناطیسی مسیری با مقاومت مغناطیسی کم تشکیل می‌دهد. اگر شار مغناطیسی با دو مسیر موازی روبه‌رو شود، یکی با مقاومت مغناطیسی زیاد \mathcal{R}_h و دیگری با مقاومت مغناطیسی کم \mathcal{R}_l ، در این صورت بیشترین شار از مسیر کم مقاومت عبور می‌کند، و مقاومت مغناطیسی معادل برای این ترکیب از رابطه $\mathcal{R} = \mathcal{R}_h \mathcal{R}_l / (\mathcal{R}_h + \mathcal{R}_l)$ به‌دست می‌آید. حال اگر به شکل ۹-۱۸ بنگریم، متوجه می‌شویم که وقتی مواد A ، B و C فرومغناطیسی باشند، بیشترین شار مغناطیسی از حلقه فرومغناطیسی می‌گذرد، زیرا مسیر هوا در بین دو انتهای سیمولوله مقاومت مغناطیسی نسبتاً زیادی دارد. بنابراین مدارهای مغناطیسی شکلهای ۹-۱۷ و ۹-۱۸ در واقع معادل‌اند.

چنانچه مواد B و C فرومغناطیس باشند، اما A شکافی از هوا باشد، دیگر دو مدار معادل



شکل ۹-۱۸ چنانچه تراویبهای A، B و C بزرگ باشند، این مدار مغناطیسی معادل مدار مغناطیسی شکل ۹-۱۷ است.

نیستند، زیرا از دو انتهای سیم پیچ شکل ۹-۱۸ مقداری شار مغناطیسی نشت می‌کند. اینکه چه مقدار از شار به بیرون نشت می‌کند، بستگی دارد به نسبت مقاومت مغناطیسی مدار مغناطیسی به مقاومت مغناطیسی مسیر نشت. هنگامی که عرض شکاف هوا در مقایسه با طول سیم پیچ کوچک باشد، شار نشتی کم است و در محاسبات تقریبی می‌توان از آن چشمپوشی کرد. مقاومت مغناطیسی مسیر نشت برای بسیاری از شکلهای هندسی معمولی محاسبه شده و در تعدادی از کتابهای مرجع متداول داده شده است.^۱ مفهوم مدار قطعاً در مورد مدارهای مغناطیسی به همان دقت مدارهای الکتریکی نیست زیرا (۱) نسبت مقاومت مغناطیسی مدار به مقاومت مغناطیسی نشتی به اندازه نسبت مقاومت‌های مربوط در مدارهای الکتریکی کوچک نیست، و (۲) ابعاد عرضی مدار مغناطیسی معمولاً در مقایسه با طول آن قابل چشمپوشی نیست؛ با وجود این، ثابت شده است که مفهوم مدار مغناطیسی فوق‌العاده مفید است.

* ۹-۱۱ مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم

کاربرد مفهوم مدار مغناطیسی در مورد مدارهای شامل آهنربای دائم، یعنی مدارهای شار مغناطیسی که در آنها منشأ Φ از مواد مغناطیبه دائمی است، نیز مفید است. برای سهولت کار، آهنربای دائم را با علامت اختصاری P-M نشان می‌دهیم. به سبب رابطه پیچیده B-H در ماده P-M، روشی که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت چندان برای مسئله موجود مفید نیست. به جای آن ما بار دیگر از قانون مداری آمپر شروع می‌کنیم و این بار آن را برای مسیر شار مدار P-M

۱. برای نمونه رجوع کنید به:

به کار می‌بریم:

$$\oint H dl = 0$$

یا

$$\int_a^b H dl = - \int_{b(P-M)}^a H dl \quad (۷۳-۹)$$

در نوشتن معادله (۷۳-۹) صریحاً فرض می‌کنیم که ماده P-M در فاصله بین نقاط a و b در مسیر شار قرار دارد، در حالی که از a تا b مسیر شار با ماده P-M مواجه نمی‌شود. با قرار دادن $B = \mu H$ و $\Phi = BA$ در طرف چپ معادله (۷۳-۹) نتیجه می‌گیریم

$$\Phi \int_a^b \frac{dl}{\mu A} = - \int_{b(P-M)}^a H dl \quad (۷۴-الف)$$

شار مغناطیسی Φ در سراسر طول مدار پیوسته است، بنابراین $\Phi = B_m A_m$ که در آن B_m میدان مغناطیسی درون آهنربای دائم و A_m سطح مقطع است. طرف راست معادله (۷۴-الف) را می‌توان به صورت $-H_m l_m$ نوشت که در آن H_m میانگین شدت مغناطیسی درون آهنربا، و l_m طول آهنرباست. پس

$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m l_m \quad (۷۴-ب)$$

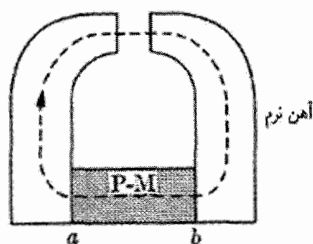
که این معادله‌ای است که کمیتهای مجهول B_m و H_m را به هم مربوط می‌کند. این معادله را می‌توان به‌طور همزمان با منحنی پسماند آهنربا حل کرد تا B_m و H_m ، هر دو، به‌دست آیند.

به‌عنوان مثالی از یک مدار P-M، مداری شامل یک آهنربا، یک شکاف هوا و یک قطعه آهن نرم (شکل ۹-۱۹) را در نظر بگیرید. توجه به این نکته مهم است که آهن نرم یک ماده P-M نیست. پسماند آهن نرم در مقایسه با پسماند آهنربا عملاً قابل چشمپوشی است و تراوایی آن، $\mu_i = B_i/H_i$ ، کمیته مثبت است. مقاومت مغناطیسی \mathcal{R}_{ab} از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} + \frac{l_g}{\mu_o A_g} \quad (۷۵-۹)$$

که در آن شاخصهای i و g به‌ترتیب برای آهن و شکاف هوا به‌کار برده شده‌اند. چنانچه شکاف هوا خیلی باریک نباشد، معادله (۷۵-۹) را می‌توان معمولاً به‌صورت تقریبی

$$\mathcal{R}_{ab} \approx \frac{l_g}{\mu_o A_g}$$



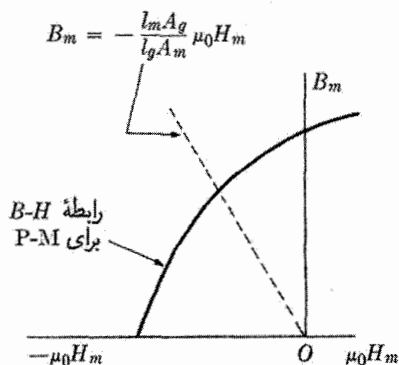
شکل ۹-۱۹ یک مدار آهنربای دائم. برای مداری که نشان داده شده است، آهنربا میدان و امغانطنده نسبتاً بزرگی دارد که برخوردش اثر می‌گذارد؛ با ازدیاد طول ماده P-M، مثلاً با قرار دادن آهنرباهای اضافی در دو بازوی مدار، می‌توان این میدان و امغانطنده را کاهش داد.

نوشت، که پس از ترکیب با (۹-۷۴ ب)، نتیجه می‌شود

$$B_m = -\frac{l_m A_g}{l_g A_m} \mu_0 H_m \quad (9-76)$$

و این رابطه‌ای است خطی بین B_m و H_m . منحنی این معادله همراه با منحنی پسماند مغناطیسی در شکل ۹-۲۰ رسم شده است. محل تقاطع دو منحنی نقطه کار آهنربا را معین می‌کند. اکنون مسئله در اصل حل شده است: با دانستن B_m ، شار Φ و چگالی شار B_g به آسانی محاسبه می‌شوند.

اما دو نکته شایان تذکر باقی مانده‌اند. اول اینکه: برای مساحت مؤثر سطح مقطع شکاف، یعنی A_g ، چه مقداری را باید به‌کار برد؟ به‌عنوان اولین تقریب، می‌توان A_g را برابر با مساحت سطح مقطع قطب آهن نرم فرض کرد، و در صورتی که شکاف هوا خیلی بزرگ نباشد، این تقریب کافی خواهد بود. در اینجا به بحث مفصل درباره این مطلب نمی‌پردازیم و خواننده علاقه‌مند را به خواندن مراجعی که در بخش قبل ذکر شد، دعوت می‌کنیم. دوم اینکه مسئله نشت شار به همان



شکل ۹-۲۰ خط و امغانطندگی برای یک مدار مغناطیسی. (شاخص m نمایانگر آهنرباست). چون $\mu_0 H_m$ به جای H_m رسم شده است، شیب خط و امغانطندگی برابر است با $-(l_m A_g / l_g A_m)$ ، به عبارت دیگر، این شیب یک عدد بی‌بعد است.

اندازه در مدار P-M مهم است که در سایر انواع مدارهای مغناطیسی. اما برای مسائل مربوط به این کتاب، معمولاً فرض می‌کنیم که شار ناشی قابل چشمپوشی است.

بالاخره، متذکر می‌شویم که H_m که از شکل ۹-۲۰ به دست می‌آید منفی است، یعنی شدت مغناطیسی درون آهنربا یک اثر وامغانطنده است، که نتیجه‌ای کلی است. هنگامی که منشأ شار مغناطیسی در یک آهنربای دائمی قرار داشته باشد، آنگاه خود آهنربا تحت تأثیر یک میدان وامغانطنده قرار می‌گیرد.

۹-۱۲ خلاصه مطالب

در فصل ۴ دیدیم که پاسخ یک محیط (دی‌الکتریک) به میدان الکتریکی عبارت است از چگالی بار قطبشی $\mathbf{P} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ ، که در آن $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ ؛ در فصل ۷، پاسخ یک محیط (رسانا) به میدان الکتریکی را به صورت چگالی جریان انتقالی $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ مشاهده کردیم. حال می‌بینیم که پاسخ یک محیط (مغناطیسی) به میدان مغناطیسی نوع دیگری از چگالی جریان، یعنی جریان مغناطش اتمی است

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (\mathbf{j}_M = -\mathbf{n} \times \mathbf{M})$$

که در آن $\mathbf{M} = \Delta \mathbf{m} / \Delta v$ عبارت است از گشتاور مغناطیسی در واحد حجم ماده. پتانسیل برداری ناشی از مغناطش به صورت زیر است

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

میدان مغناطیسی کل ناشی از جریانهای انتقالی پایا به اضافه جریانهای مغناطش در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$$

توجه داشته باشید که رابطه $\nabla \cdot \mathbf{J}_M = 0$ همواره به صورت اتحاد برقرار است. بهتر است که میدان برداری \mathbf{H} به صورت زیر تعریف شود

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

به طوری که در رابطه $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ تنها جریانهای انتقالی متعارف را به عنوان چشمه داشته باشیم. برای محیطی معین، باید پذیرفتاری مغناطیسی در معادله ساختندی زیر

$$\mathbf{M} = \chi_m(H) \mathbf{H}$$

معلوم باشد. وقتی این معادله را با تعریف \mathbf{H} ترکیب کنیم، رابطه زیر را به دست می آوریم

$$\mathbf{B} = \mu(H) \mathbf{H}$$

که در آن $\mu = \mu_0 [1 + \chi_m(H)]$. آنگاه این رابطه همراه با معادلات دیفرانسیلی زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

\mathbf{B} و \mathbf{H} را تعیین می کنند، که البته باید تابع شرایط مرزی زیر باشند

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0, \quad \mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2$$

• اکثر مواد یا دیامغناطیسی اند ($\chi_m < 0$) و یا پارامغناطیسی ($\chi_m > 0$). در هر دو مورد $|\chi_m| \ll 1$. مواد مغناطیسی که اهمیت عملی دارند، فرومغناطیسی اند. برای این مواد $|\chi_m|$ ممکن است بیش از 10^6 باشد، لیکن $\mathbf{B} = \mathbf{B}(H)$ نه خطی است و نه حتی تک مقدار (پسماند).

• در مسائلی که جریانهای انتقالی ندارند، از آنجا که $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ است، استفاده از پتانسیل زردهای مناسب است

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ، و از این رو φ^* در معادله پواسون صدق می کند

$$\nabla^2 \varphi^* = \nabla \cdot \mathbf{M}$$

یک پاسخ این معادله به صورت زیر است

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

که در آن $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$ (این پاسخ در صورتی قابل استفاده است که \mathbf{M} تابع معلومی باشد).

• در مسائلی که در آنها محیط خطی یا \mathbf{M} یکنواخت باشد، $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ و φ^* در معادله لاپلاس صدق می کند. این مسائل با مسائل الکتروستاتیکی متناظر که چگالی بار خارجی ندارند، یکسان اند.

• قانون آمپر میدان \mathbf{H} را به جریان انتقالی مربوط می‌کند:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

• پاسخ \mathbf{H} به دو قسمت تقسیم می‌شود: یکی مربوط به جریانهای انتقالی و دیگری مربوط به مواد مغناطیسی است:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla\varphi^*(\mathbf{r})$$

(محاسبه جمله دوم به معلوم بودن $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ بستگی دارد).

• در حضور مواد فرومغناطیسی با μ بزرگ، فرض اینکه تمامی شار Φ در حجم معلومی محصور است، شاید تقریب سودمندی باشد. در این صورت

$$NI = \Phi \mathcal{R}$$

که در آن مقاومت مغناطیسی

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

را می‌توان برای هر جزء از مدار مغناطیسی محاسبه کرد.

مسائل

۱-۹ یک آهنربای دائمی به شکل استوانه قائم به طول L مفروض است. مغناطش \mathbf{M} یکنواخت و در جهت محور استوانه است. (الف) چگالیهای جریان مغناطش \mathbf{J}_M و \mathbf{j}_M را پیدا کنید. (ب) این توزیع جریان را با توزیع جریان در یک سیمولوه مقایسه کنید.

۲-۹ (الف) توزیع جریانهای مغناطش را برای کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده و بردار مغناطش آن \mathbf{M} است، به دست آورید. بر طبق معادله (۹-۶۳) میدان مغناطیسی \mathbf{B} در داخل چنین کره‌ای یکنواخت است. (ب) آیا می‌توانید با استفاده از این اطلاعات یک سیم‌پیچ جریان طراحی کنید به طوری که در یک فضای کروی میدان مغناطیسی یکنواخت ایجاد کند؟

۳-۹ (الف) گشتاور مغناطیسی یک جسم ماکروسکوپی به صورت $\int_V \mathbf{M} dv$ تعریف می‌شود. رابطه زیر را ثابت کنید

$$\int_V \mathbf{M} dv = \int_V \mathbf{r} \rho_M dv + \oint_S \mathbf{r} \sigma_M da$$

در این رابطه S ، سطحی است که حجم V را در برمی‌گیرد. [راهنمایی: به مسئله مشابه مربوط به P در فصل ۴ مراجعه کنید]. (ب) یک آهنربای دائمی به شکل کره و به شعاع R دارای بردار مغناطش یکنواخت M در امتداد محور قطبی است. گشتاور مغناطیسی این آهنربا را هم از سمت راست و هم از سمت چپ معادله قسمت (الف) پیدا کنید.

۹-۴ (الف) آهنربایی را با بردار مغناطش مشخص $M(x, y, z)$ در نظر بگیرید. هر جزء حجم dv را می‌توان یک دوقطبی مغناطیسی کوچک $M dv$ فرض کرد. اگر آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دهیم، گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را برحسب گشتاور مغناطیسی آن (که در مسئله ۹-۳ تعریف شده است) پیدا کنید. (ب) آهنربایی به شکل استوانه قائم به طول L و سطح مقطع A به‌طور یکنواخت در امتداد موازی با محور استوانه، مغناطیده است و بردار مغناطش آن M است. آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار می‌دهیم. گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را برحسب چگالیهای قطب مغناطیسی آن محاسبه کنید.

۹-۵ بیضیواری که طول محوره‌های اصلی آن $2a$ ، $2a$ و $2b$ است، به‌طور یکنواخت در امتداد موازی با محور $2b$ مغناطیده است. بردار مغناطش بیضیوار M است. چگالیهای قطب مغناطیسی را برای این شکل هندسی پیدا کنید.

۹-۶ یک پوسته کروی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 در امتداد محور z به‌طور یکنواخت مغناطیده است. بردار مغناطش در پوسته برابر $M_0 = M_0 k$ است. پتانسیل زده‌ای φ^* را برای نقاط واقع بر محور z در داخل و خارج پوسته به دست آورید.

۹-۷ یک آهنربای دائمی به شکل استوانه قائم به طول L و به شعاع R طوری قرار داده شده که محور تقارن آن بر محور z منطبق است. مبدأ مختصات در مرکز آهنربا قرار دارد. اگر استوانه بردار مغناطش محوری یکنواختی برابر M داشته باشد، (الف) $\varphi^*(z)$ را بر روی نقاط واقع بر محور تقارن، هم در داخل و هم در خارج آهنربا محاسبه کنید، و (ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) میدان مغناطیسی B_z را بر روی محور تقارن، در داخل و خارج آهنربا محاسبه کنید.

۹-۸ کره‌ای از یک ماده مغناطیسی به شعاع R ، در مبدأ مختصات قرار دارد. بردار مغناطش به صورت $M = (ax^2 + b) i$ است که در آن a و b مقادیری ثابت‌اند. کلیه چگالیهای قطب مغناطیسی و جریانهای مغناطش را محاسبه کنید.

۹-۹ چنبره‌ای از جنس آهن نرم تابکاری شده دارای طول متوسط 1 m و 10° بوده و دور سیم به دور آن پیچیده شده است. جریان لازم برای مغناطیده کردن این چنبره تا میدانی به قدرت (الف) $B = 10^\circ T$ و (ب) $B = 105 T$ را محاسبه کنید.

۹-۱۰ حلقه‌ای از جنس آهن نرم که یک شکاف هوای یک سانتی‌متری دارد، مانند شکل ۹-۱۶

به صورت یک چنبره سیم پیچی شده است. طول متوسط حلقه آهن 20 سانتی متر، سطح مقطع آن 4 سانتی متر مربع و تراوایی آن $3000\mu_0$ است که فرض می شود ثابت است. از سیم پیچ چنبره ای که شامل 200 دور سیم است، یک جریان 10 آمپری می گذرد. H و B را در داخل حلقه آهن و در شکاف هوا به دست آورید.

۹-۱۱ استوانه ای طویل به شعاع a و تراوایی μ را در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار می دهیم، به طوری که محور استوانه عمود بر B_0 باشد. (الف) میدان مغناطیسی داخل استوانه را محاسبه کنید. (ب) با یک ترسیم نیمه کتی نمونه ای از خطوط میدان را در داخل استوانه نشان دهید. (از ابتدا فرض کنید که φ^* را می توانیم برحسب هماهنگیهای استوانه ای $\cos\theta$ به طور کامل مشخص کنیم. چنین فرضی موجه است زیرا تمام شرایط مرزی را می توان برحسب هماهنگیهای $\cos\theta$ برآورده کرد).

۹-۱۲ یک سیم مسی مستقیم و طویل و یک سیم آهنی مستقیم و طویل، هر یک جریان یکسان I را حمل می کنند و در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار دارند. نشان دهید که نیروی وارد بر سیم آهنی تقریباً دو برابر نیروی وارد بر سیم مسی است [راهنمایی: از نتیجه مسئله ۹-۱۱ استفاده کنید].

۹-۱۳ یک سیم حامل جریان I در یک لوله آهنی استوانه ای شکل قرار دارد. شعاعهای داخلی و خارجی لوله a و b ، پذیرفتاری ثابت آن χ و با سیم هم محور است. چگالی جریان مغناطش و کل جریان مغناطش را پیدا کنید.

۹-۱۴ دو محیط مغناطیسی با یک فصل مشترک مسطح از یکدیگر جدا شده اند. نشان دهید که زاویه های بین بردار عمود بر فصل مشترک و بردارهای میدانهای مغناطیسی در دو طرف آن، در رابطه زیر صدق می کنند

$$\mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2$$

۹-۱۵ سیمی مستقیم، که حامل جریان I است، موازی صفحه ای نامتناهی و به فاصله d از آن قرار گرفته است. یک طرف صفحه هواست و سیم در آن قرار دارد، و طرف دیگر صفحه محیطی است با تراوایی ثابت μ . جریان تصویری را پیدا کنید که میدان مغناطیسی صحیح را در هوا به دست می دهد، هنگامی که (الف) $\mu = \infty$ ، (ب) $\mu = 0$ باشد. (حالت (الف) تقریبی از ماده فرومغناطیسی است و (ب) ابررسانا را توصیف می کند).

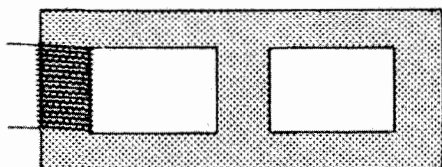
* ۹-۱۶ یک پوسته استوانه ای طویل (شعاع خارجی b ، شعاع داخلی a و تراوایی نسبی K_m) در امتداد عمود بر میدان مغناطیسی B_0 قرار گرفته است. (الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی B_i در ناحیه خلأ در داخل پوسته با B_0 موازی است. (ب) نشان دهید که ضریب حفاظ مغناطیسی

به صورت زیر است

$$h_m \equiv \frac{B_o}{B_i} = 1 + \frac{(K_m - 1)^2}{4K_m} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)$$

۱۷-۹ (الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۹-۱۶، ضریب حفاظ مغناطیسی h_m را برای یک پوسته استوانه‌ای با تراوایی نسبی $K_m = 5000$ ، شعاع خارجی b و شعاع داخلی a محاسبه کنید. b برابر a است. (ب) همچنین نشان دهید که میدان مغناطیسی در $\theta = 90^\circ$ روی سطح خارجی پوسته، تقریباً تا ۳۳۳ برابر میدان مغناطیسی اولیه افزایش می‌یابد (فرض کنید میدان اولیه در امتداد $\theta = 0^\circ$ قرار دارد).

۱۸-۹ یک مدار مغناطیسی مطابق شکل ۹-۲۱ با ۱۰۰ دور سیم پیچیده شده است و جریان یک آمپری از آن می‌گذرد. سیم‌پیچ در ساق سمت چپ مدار قرار دارد. ارتفاع مدار ۱۰ سانتی‌متر، طول آن ۲۰ سانتی‌متر، سطح مقطع هر ساق آن ۶ سانتی‌مترمربع و تراوایی آن برابر 5000μ است که ثابت فرض می‌شود. اگر از نشت شار چشمپوشی کنیم، شار مغناطیسی را در ساق وسط و در ساق سمت راست مدار محاسبه کنید.



شکل ۹-۲۱

۱۹-۹ یک مدار مغناطیسی، مانند شکل ۹-۱۹، از یک آهنربای دائمی به طول ۸ سانتی‌متر و مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتی‌متر و یک شکاف هوا به عرض ۸ سانتی‌متر تشکیل شده است. مساحت سطح مقطع متوسط آهن و آهنربا ۴ سانتی‌مترمربع است، حال آنکه سطح مقطع مؤثر شکاف هوا ۳ سانتی‌مترمربع است. تراوایی نسبی آهن ۵۰۰۰ است. (الف) چگالی شار مغناطیسی را در شکاف، هنگامی که آهنربا از هر یک از مواد مختلف زیر ساخته شده باشد، محاسبه کنید: اکسید نف‌جوش و فولاد کبالتی ۳۵ درصد. از نشت شار چشمپوشی کنید. (ب) ابعاد مدار مغناطیسی را از یک نظر تغییر می‌دهیم: شکاف هوا را به ۸ میلی‌متر کاهش می‌دهیم. محاسباتی را که در قسمت (الف) خواسته شده است، تکرار کنید.

۲۰-۹ میدان مغناطیسی را در کره‌ای که به‌طور یکنواخت مغناطیده شده است، برای هر یک از موادی که در شکل ۹-۹ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

۲۱-۹ یک مدار مغناطیسی مانند شکل ۹-۱۹ آهنریایی از جنس آلنیکو ۵ به طول ۱۰ سانتی‌متر، مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتی‌متر و شکاف هوایی به عرض یک سانتی‌متر دارد. همچنین این مدار ۸۰° آمپر-دور سیم‌پیچ دارد (در جهتی که به شار تولید شده توسط آهنربا کمک می‌کند). چگالی شار مغناطیسی را در شکاف هوا پیدا کنید (از نشت شار چشمپوشی کنید، برای آهن نرم $K_m = 5000$ است، و فرض کنید که سطح مقطعهای آهنربا، آهن نرم و شکاف هوا یکسان‌اند).

نظریه میکروسکوپی مغناطیس

در فصل قبل جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش بررسی شد. در آنجا خواص مغناطیسی ماده صریحاً به کمک تابع M مورد مطالعه قرار گرفتند، و این تابع خود به کمک پارامترهایی که با تجربه تعیین می‌شوند، به میدان مغناطیسی ربط داده شد. اکنون از دید میکروسکوپی به ماده نگاه می‌کنیم (یعنی به صورت مجموعه‌ای از اتمها یا مولکولها به آن می‌نگریم) تا ببینیم پاسخ مولکولهای جداگانه به میدان مغناطیسی وارد بر آنها چگونه است. اگر این روش به طور کامل انجام شود، نهایتاً می‌بایست به طور نظری عبارتهایی برای پذیرفتاری و روابط $B-H$ را برای تمام انواع مواد به دست آوریم. چنین روشی مسلماً بیرون از قلمرو این کتاب است؛ با وجود این، می‌توانیم نسبتاً به سادگی نشان دهیم که انواع مختلف رفتارهای مغناطیسی چگونه به وجود می‌آیند، و به علاوه، می‌توانیم عبارتهایی را به دست آوریم که در برخی حالتها مرتبه بزرگی صحیح را برای پذیرفتاری پیشگویی کنند. بحث کاملتری درباره مطالب این فصل در کتب مربوط به فیزیک حالت جامد یافت می‌شود.^۱

* این فصل را می‌توان حذف کرد بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب از دست برود.

۱. برای مثال به فصلهای ۱۴ و ۱۵ کتاب آشنایی با فیزیک حالت جامد اثر کیتل (از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی)

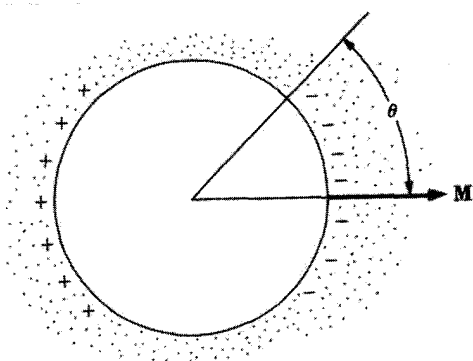
در فرمولبندیهای ماکروسکوپی در فصل ۹ ما با دو بردار میدان سروکار داشتیم، \mathbf{H} و \mathbf{B} که آنها را با رابطه $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ به هم مربوط کردیم. از دیدگاه میکروسکوپی تفاوت بین \mathbf{H} و \mathbf{B} به طور عمده از میان می‌رود، زیرا که با مجموعه‌ای از مولکولها (یعنی با مجموعه‌ای از دوقطبیهای مغناطیسی یا گروههای دوقطبی) در خلأ سروکار داریم. آنچه مورد نظر ماست میدان مغناطیسی یا گروههای دوقطبی) در خلأ سروکار داریم. آنچه مورد نظر ماست میدان مغناطیسی در نزدیکی یک مولکول در خلأ است و یا در مکان یک مولکول وقتی که آن مولکول از دستگاه خارج شده باشد. پس $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$. در اینجا شاخص m به معنای میکروسکوپی است ولی در بخشهای بعدی این فصل، نماد \mathbf{B}_m (و \mathbf{H}_m) به مقدار خاصی از میدان میکروسکوپی، یعنی میدان در مکان یک مولکول اطلاق خواهد شد.

رسم بر این است که به هنگام بحث در مورد میدان میکروسکوپی درون ماده به جای آنکه \mathbf{B}_m را به میدان \mathbf{B} ربط دهیم، \mathbf{H}_m را به میدان ماکروسکوپی \mathbf{H} مربوط کنیم، زیرا هم \mathbf{H} و هم \mathbf{H}_m را می‌توان به سادگی برحسب انتگرالهایی روی توزیع جریان و توزیع دوقطبی نوشت. ولی تفاوتی نمی‌کند که \mathbf{H}_m را حساب کنیم یا \mathbf{B}_m را، زیرا فرق این دو فقط در ضریب مقیاس μ_0 است.

۱-۱۰ میدان مولکولی درون ماده

آن میدان مغناطیسی را که برهم‌کنش آن با جریانهای اتمی در یک اتم یا مولکول مؤثر است، میدان مولکولی $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$ می‌نامند. در برخی کتب درسی آن را میدان موضعی می‌نامند. این میدان عبارت است از میدان مغناطیسی در یک موضع مولکولی (یا اتمی) در ماده. این میدان توسط چشمه‌های خارجی و تمام دوقطبیهای مولکولی درون ماده، به استثنای مولکول (یا اتم) واقع در نقطه مورد مطالعه، تولید می‌شود. واضح است که لزومی ندارد \mathbf{B}_m با میدان مغناطیسی ماکروسکوپی یکسان باشد، زیرا کمیت اخیر به نیروی وارد بر یک عنصر جریان، که ابعادش در مقایسه با ابعاد مولکولی بزرگ است، مربوط می‌شود.

میدان مغناطیسی مولکولی را می‌توان به روشی مشابه با روش بخش ۱-۵ مربوط به میدان الکتریکی مولکولی در دی‌الکتریکها، محاسبه کرد. یک جسم مادی به شکل اختیاری در نظر می‌گیریم و برای سهولت فرض می‌کنیم که به طور یکنواخت مغناطیده است و بردار مغناطش آن \mathbf{M} است. قطعه کوچکی از این جسم را برمی‌داریم و یک حفره کروی در اطراف نقطه‌ای که میدان مولکولی باید در آنجا محاسبه شود ایجاد می‌کنیم (به شکل ۱-۱۰ نگاه کنید). ماده‌ای را که باقی مانده است به مثابه یک پیوستار در نظر خواهیم گرفت، یعنی، آن را از دید ماکروسکوپی بررسی خواهیم کرد. سپس ماده‌ای را که برداشته‌ایم مولکول به مولکول در درون حفره می‌گذاریم،



شکل ۱-۱۰ محاسبه سهم سطح "حفره" در H_m . علائم + و - نمایانگر بارهای مغناطیسی است (یعنی، قطبهای رو به S و N).

بجز مولکولی که در مرکز حفره است و در آنجا می‌خواهیم میدان مولکولی را محاسبه کنیم. با مولکولهایی که بدین گونه به جای خود گذاشته می‌شوند باید به مثابه دوقطبیهای جداگانه یا گروههای دوقطبی رفتار کرد نه به مثابه یک پیوستار.

میدان ماکروسکوپی H ، یعنی شدت مغناطیسی در نمونه، را می‌توان بر طبق معادله (۹-۲۷)

به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'$$

که در آن انتگرالها تمام چشمه‌های: \mathbf{J} ، ρ_M و σ_M را در برمی‌گیرند. میدان مولکولی H_m را هم می‌توان به همین روش بیان کرد، جز اینکه در این مورد سهمهای مربوط به سطح حفره و تک‌تک دوقطبیهای درون حفره نیز باید اضافه شوند. کنار گذاشتن انتگرال $\rho_M (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ در حجم حفره ضرورت خاصی ندارد، زیرا برای نمونه‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ بدین ترتیب

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}' \quad (1-10)$$

که در آن H شدت مغناطیسی ماکروسکوپی در نمونه، H_s سهم چگالی سطحی قطب $M_n = \sigma_M$ بر روی سطح حفره (به شکل ۱-۱۰ رجوع شود) و H' سهم دوقطبیهای مختلف درون حفره‌اند. به کمک محاسبات مربوط در بخش ۱-۵ می‌بینیم که H_s برابر است با

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (2-10)$$

به علاوه، سهم دو قطبها در حفره به صورت زیر است

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (3-10)$$

این عبارت که در آن r_i فاصله دو قطبی نام از مرکز حفره است، همان شکل مربوط به جمله دو قطبی الکتریکی \mathbf{E}' در بخش ۱-۵ را دارد.

پس اگر توجهمان را به دسته نسبتاً بزرگی از مواد که برای آنها معادله (۳-۱۰) صفر می شود معطوف سازیم، معادله (۱-۱۰) به صورت زیر خلاصه می شود

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (4-10)$$

و

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (5-10)$$

معادله های (۴-۱۰) و (۵-۱۰) میدان مولکولی را بر حسب شدت مغناطیسی ماکروسکوپی و مغناطش درون جسم نمونه به دست می دهند. برای اکثر مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، عبارت $\frac{1}{3} \mathbf{M} = \frac{1}{3} \chi_m \mathbf{H}$ فوق العاده کوچک و قابل چشمپوشی است، ولی برای اجسام فرومغناطیس این جمله تصحیحی بسیار با اهمیت است.

۱-۲ منشأ دیامغناطیس

برای محاسبه پذیرفتاری دیامغناطیسی مجموعه ای از اتمها، باید از حرکت الکترونی درون خود اتم اطلاعی داشته باشیم. فرض می کنیم که هر الکترون در مداری به دور هسته اتمی خود گردش کند، و به منظور سادگی مدار را دایره ای به شعاع R در صفحه ای عمود بر میدان مغناطیسی اعمال شده انتخاب می کنیم. مکانیک کوانتومی به ما می آموزد که هر چند این تصویر به طور تقریبی درست است ولی الکترونها در مدارهای کاملاً معینی نمی گردند. برای حل دقیق مسئله باید معادله شرودینگر را برای الکترون اتم در میدان مغناطیسی حل کنیم؛ با این همه، محاسبات نسبتاً ساده "کلاسیکی" نیز مرتبه بزرگی پذیرفتاری دیامغناطیسی را به طور صحیح به دست می دهند.

قبل از آنکه میدان مغناطیسی اعمال شود، الکترون در مدار خود در حال تعادل است

$$F_q = m_e \omega_0^2 R \quad (6-10)$$

در این رابطه F_q نیروی الکتریکی ای است که الکترون را به دور اتم خود در گردش نگه می‌دارد، ω فرکانس زاویه‌ای الکترون در مدارش، و m_e جرم الکترون است. با اعمال میدان مغناطیسی نیروی اضافی $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ بر الکترون وارد می‌شود. با فرض اینکه الکترون در همان مدار قبلی باقی بماند، خواهیم داشت

$$F_q \pm e\omega R B_m = m_e \omega^2 R$$

که از ترکیب آن با معادله (۶-۱۰) نتیجه می‌شود

$$\pm e\omega B_m = m_e (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \quad (7-10)$$

مقدار $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ تغییر فرکانس زاویه‌ای الکترون است. پس بسته به جزئیات هندسی مدار الکترون (یعنی بسته به جهت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ نسبت به \mathbf{F}_q) سرعت الکترون در مدارش افزایش یا کاهش می‌یابد، ولی در هر حال تغییر گشتاور مغناطیسی مداری در جهت مخالف میدانی است که اعمال می‌شود. خواننده می‌تواند صحت این حکم را به آسانی تحقیق کند.

حتی برای قوی‌ترین میدانهایی که بتوان در آزمایشگاه به‌وجود آورد (در حدود 10^5 T)، $\Delta\omega$ در مقایسه با ω_0 بسیار کوچک است. پس معادله (۷-۱۰) را می‌توان همواره به‌صورت تقریبی زیر نوشت

$$\Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B_m \quad (8-10)$$

کمیت $(e/2m_e) B_m$ به فرکانس لازم^۱ معروف است.

تا اینجا تنها فرض کرده‌ایم که الکترون در همان مدار قبلی‌اش باقی می‌ماند. ما این فرض را همراه با تعادل نیروها به‌کار بردیم تا معادله (۸-۱۰) را به‌دست آوریم. برای آنکه الکترون در مدارش بماند، تغییر انرژی جنبشی آنکه از قانون القای فاراده به‌دست می‌آید، باید با معادله (۸-۱۰) سازگار باشد.^۲ وقتی که میدان مغناطیسی برقرار می‌شود، در مقدار شار مغناطیسی که از مدار می‌گذرد تغییری به‌وجود می‌آید که با $\pi R^2 \Delta B_m$ داده می‌شود. این شار از تعداد Δn حلقه الکترونی می‌گذرد، که Δn تعداد دورانهایی است که الکترون در اثنايي که در آن میدان تغییر می‌کند انجام می‌دهد. شار متغیر، طبق قانون فاراده، $\mathcal{E} = \text{emf}$ به‌صورت زیر تولید می‌کند:

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (9-10)$$

1. Larmor

۲. قانون القای فاراده و قانون لنز در فصل ۱۱، بخش ۱۱-۱ مورد بحث واقع شده است.

در این فرایند انرژی داده شده به الکترون برابر با $e\mathcal{E}$ است، که به صورت تغییری در انرژی جنبشی ظاهر می شود پس:

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = e\pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (10-10)$$

اما ΔB_m همان مقدار نهایی میدان B_m است، و مقدار متوسط dn/dt برابر است با $(\omega + \omega_0)/4\pi$. پس

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m_e} B_m$$

که با معادله (۸-۱۰) در توافق است. بنابراین، فرض ثابت بودن مدار به هیچ تناقضی بین معادله (۹-۱۰) و معادله نیرو منجر نمی شود. دیامغناطیس نتیجه عمل قانون لنز در مقیاس اتمی است. در اثر اعمال میدان مغناطیسی، جریانهای الکترونی درهر اتم به نحوی تغییر می کنند که اثر این میدان را تضعیف کنند.

تغییر سرعت زاویه ای که معادله (۸-۱۰) پیشگویی می کند، در گشتاور مغناطیسی تغییری ایجاد می کند که از رابطه زیر به دست می آید

$$\Delta\mathbf{m} = -\frac{e}{2\pi} \pi R^2 \frac{e}{2m_e} B_m = -\frac{e^2}{4m_e} R^2 \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (11-10)$$

برای پیدا کردن مغناطش این نتیجه باید برای تمام الکترونهاى واقع در واحد حجم جمع شود. برای ماده ای که دارای N مولکول در واحد حجم باشد و تمام مولکولهای آن از یک نوع باشند

$$\mathbf{M} = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \mathbf{H}_m \sum_i R_i^2 \quad (12-10)$$

که در آن جمع بندی روی الکترونهاى یک مولکول است. برای مواد دیامغناطیس تفاوت \mathbf{H}_m با \mathbf{H} خیلی کم است، پس پذیرفتاری دیامغناطیسی برابر است با

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2 \quad (13-10 \text{ الف})$$

این نتیجه بر مبنای این فرض به دست آمده است که تمام الکترونها در صفحات عمود بر میدان \mathbf{H}_m گردش می کنند. وقتی صفحه مدار مایل باشد، به طوری که بردار عمود بر مدار با میدان زاویه θ_i بسازد، فقط مؤلفه \mathbf{H}_m در امتداد این بردار عمود ($H_m \cos \theta_i$) در تغییر سرعت زاویه ای

الکترون مؤثر است. به علاوه، مؤلفه Δm در امتداد میدان به نسبت $\cos \theta_i$ کوچکتر است. پس تقریب بهتری برای پذیرفتاری دیامغناطیسی به صورت زیر است

$$\chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (۱۰-۱۳)$$

خاصیت دیامغناطیس ظاهراً در تمام انواع ماده یافت می شود، ولی اثر آن غالباً به وسیله آثار قوی تر پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی که می توانند با این خاصیت همراه باشند، مخفی می شود. خاصیت دیامغناطیس خصوصاً در موادی بارز است که کلاً از آنها یا یونهای با "پوسته های بسته الکترونی" تشکیل شده باشند، زیرا در این موارد تمام تأثیرات پارامغناطیسی حذف می شوند.

۱۰-۳ منشأ پارامغناطیس

حرکت مداری هر یک از الکترونها را در یک اتم یا مولکول می توان برحسب یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی توصیف کرد. این مطلب مستقیماً از معادله (۸-۲۲) نتیجه می شود. به علاوه، می دانیم که الکترون یک خاصیت فطری دارد که به چرخش ذاتی یا اسپین مشهور است، و یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی با این بار در حال چرخش همراه است. بنابراین، هر مولکول یک گشتاور مغناطیسی m_i دارد که عبارت است از جمع برداری گشتاورهای اسپینی و مداری الکترونهای مختلف مولکول. به طور خلاصه، پارامغناطیس نتیجه این امر است که این گشتاورهای مولکولی تمایل دارند خود را با جهت میدان اعمال شده همسو کنند، درست نظیر مدار جریان معادله (۸-۱۹) که تمایل دارد خود را با میدان همسو کند.

وضعیت آن قدر هم نظیر وضعیت مدار جریان سراسر نیست. در واقع دو اشکال وجود دارد: (۱) در حضور میدان مغناطیسی حرکت های الکترونی کوانتیده اند، به طوری که سمتگیری هر گشتاور اسپینی یا مداری نسبت به جهت میدان در یکی از امتدادهای مشخصی است که این امتدادها مجموعه گسسته ای را تشکیل می دهند. به علاوه، هیچ دو الکترونی در یک مولکول نمی توانند حالت کوانتومی یکسانی را اشغال کنند، به طوری که اگر در هر مولکول درست به تعداد کافی الکترون وجود داشته باشد طوری که تمام "پوسته های الکترونی" را پر کنند، آن وقت تمام سمتگیریهای ممکن باید اشغال شوند و m_i صفر می شود. البته پارامغناطیس تنها هنگامی می تواند ظاهر شود که $m_i \neq 0$ باشد. (۲) حرکت الکترونی درون اتم که باعث بروز m_i می شود همچنین یک اندازه حرکت زاویه ای نسبت به هسته اتمی ایجاد می کند؛ در واقع، m_i به طور خطی به این اندازه حرکت زاویه ای مربوط می شود. در این شرایط گشتاور نیروی مغناطیسی مستقیماً گشتاور دوقطبی m_i را با میدان همسو نمی کند، بلکه سبب می شود که این گشتاور حول میدان با زاویه میل ثابتی حرکت

تقدیمی انجام دهد.^۱ آنها (یا مولکولها) در دستگاه مادی ما با یکدیگر در تماس گرمایی اند. در گازها یا مایعات، آنها دائماً با یکدیگر برخورد می‌کنند و در جامدات آنها نوسانات گرمایی دارند. در چنین شرایطی m_i های مختلف می‌توانند انرژی مغناطیسی را با انرژی گرمایی محیط اطراف خود مبادله کنند و از یک حالت حرکت تقدیمی به حالتی دیگر با زاویهٔ میل متفاوت گذر کنند. انرژی گرمایی دستگاه می‌کوشد طوری عمل کند که برای m_i ها سمگتیری کاملاً کاتوره‌ای ایجاد کند، ولی سمگتیریهای هم‌راستا با میدان یا نزدیک به آن انرژیهای مغناطیسی کمتری دارند و در نتیجه مرجح‌اند. وضع کاملاً شبیه است به وضع مولکولهای قطبی در میدان الکتریکی که در بخش ۳-۵ مورد بحث قرار گرفت.

برای ماده‌ای که تماماً از یک نوع مولکول تشکیل شده است، و هر مولکول گشتاور مغناطیسی m_0 دارد، سمگتیری نسبی تقریباً از تابع لائزون (رابطهٔ ۵-۲۱) به دست می‌آید، که در آن

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} \quad (۱۴-۱۰)$$

مغناطش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$|M| = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (الف ۱۵-۱۰)$$

که در آن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. در هر دمایی به استثنای دماهای نزدیک صفر مطلق، تابع لائزون را می‌توان تقریباً با جملهٔ اول بسط رشتهٔ توانی آن، برابر دانست. بدین ترتیب

$$M = \frac{Nm_0^2}{3kT} \mu_0 H_m \quad (ب ۱۵-۱۰)$$

که از آن پذیرفتاری پارامغناطیسی به دست می‌آید

$$\chi_m = \frac{Nm_0^2 \mu_0}{3kT} \quad (۱۶-۱۰)$$

بر طبق نظریهٔ اتمی، m_0 در حدود چند مگنتون بور است (۱ مگنتون بور مساوی است با $eh/4\pi me$ ، که در آن h ثابت پلانک است). از معادله‌های (۱۶-۱۰) و (۱۳-۱۰) برای مرتبهٔ بزرگی χ_m مقادیری به دست می‌آید که با مقدارهای مندرج در جدول ۹-۱ در توافق است.

۱. بحث حرکت تقدیمی m_i در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در بسیاری از کتب درسی آمده است. به عنوان مثال رجوع کنید به صفحات ۱۷۷-۱۷۶ از کتاب

نتایج این بخش به طور خلاصه چنین است: برای آنکه دستگاهی خواص پارامغناطیسی از خود بروز دهد، آنها (یا مولکولها)ی آن دستگاه باید گشتاورهای مغناطیسی دائمی داشته باشند، و این گشتاورها تمایل دارند که با میدان اعمال شده همسو شوند. گشتاورهای مولکولی مختلف واجفتیده هستند. یعنی، هر یک حول میدان مغناطیسی به طور انفرادی (نه به طور هماهنگ) حرکت تقدیمی می کنند، ولی به علت تماس گرمایی با محیط اطراف خود می توانند مبادله انرژی کنند. بجز در دماهای نزدیک به صفر مطلق توأم با میدانهای بسیار قوی، مغناطش از مقدار مربوط به حالت اشباع آن، که در حالت تمام گشتاورهای دو قطبی همسو هستند، بسیار کمتر است.

۴-۱۰ نظریه فرومغناطیس

در مواد فرومغناطیسی گشتاورهای مغناطیسی اتمی (یا مولکولی) حتی با نبودن میدان مغناطیسی خارجی نیز تقریباً به طور کامل همسو هستند. علت این همسودگی وجود میدان مولکولی H_m است که، بر طبق معادله (۴-۱۰)، هنگامی که $H = 0$ می شود، صفر نمی شود مگر آنکه M نیز به طور همزمان صفر شود. مغناطش M باعث ایجاد یک میدان مولکولی می شود، ولی بجز در موردی که این میدان مولکولی همان مغناطش M را که بنا بر فرض در جسم موجود است، ایجاد کند پاسخ مسئله خود سازگار نیست. مسئله این است که تعیین کنیم تحت چه مجموعه ای از شرایط، مغناطش می تواند به وسیله میدان مولکولی که خودش به وجود می آورد برقرار بماند.

لازم است که معادله (۴-۱۰) را تا حدودی عمومیت دهیم. برای میدان مولکولی می نویسیم $H_m = H + \gamma M$ ، که به ازای $H = 0$ به صورت زیر در می آید

$$H_m = \gamma M \quad (۴-۱۰ \text{ الف})$$

بر طبق نظریه ساده بخش ۱-۱۰، داریم $\gamma = 1/3$. اگر مجموع جمله های معادله (۳-۱۰) صفر نشود، γ ممکن است $1/3$ نباشد؛ ولی در هر حال انتظار داریم که مقدار γ در حدود همین مرتبه بزرگی باشد.

ماده ای را در نظر می گیریم که کلاً از یک نوع اتم تشکیل شده باشد و گشتاور مغناطیسی هر اتم آن m_0 باشد. تعداد N اتم در واحد حجم وجود دارد. اگر قرار باشد که گشتاورهای اتمی تا حدود زیادی همسو شده باشند، M باید کسر قابل ملاحظه ای از Nm_0 باشد؛ به عبارت مشخص تر فرض می کنیم که رابطه زیر برقرار باشد

$$M > \gamma Nm_0 \quad (۱۷-۱۰)$$

این شرط، بر طبق معادله (۱۵-۱۰ الف) به این معنی است که $\gamma > [\coth y - (1/y)]$ ، یا

$y > 3$ (y در معادله (۱۰-۱۴) تعریف شده است). پس

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} > 3$$

که وقتی با معادلات (۱۰-۱۴ الف) و (۱۰-۱۷) ترکیب شود، نتیجه زیر را به دست می دهد

$$\gamma \frac{N \mu_0 m_0^2}{kT} > 3 \quad (10-18)$$

این نتیجه (تقریباً) شرط وقوع پدیده فرومغناطیس است.

در بخش گذشته گفته شد که بر طبق پیشگویی نظریه اتمی، m_0 در حدود چند مگنتون بور است. بر این اساس، معادله (۱۰-۱۸) نیاز به γ بی در حدود 10^3 (در نزدیکی دمای اتاق) دارد که چند مرتبه بزرگی از آنچه از محاسبات بخش ۱۰-۱ می توان به دست آورد بزرگتر است. از این رو، چنین برمی آید که منشأ فرومغناطیس به میزان قابل ملاحظه ای از وضعیت معادل آن در فروالکتریسته (که در بخش ۴-۵ بررسی شد) پیچیده تر است.

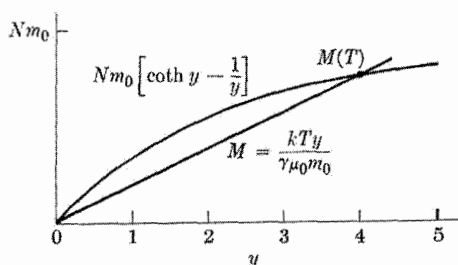
در سال ۱۹۰۷ پیروایس^۱ نظریه فرومغناطیس خود را فرمولبندی کرد. وایس به نقش اساسی میدان مولکولی پی برد. وی توانست بزرگ بودن γ را توضیح دهد، ولی آن را به عنوان یک واقعیت پذیرفت و بر مبنای آن به توسعه نظریه خود پرداخت. پیشگوییهای نظریه وی با آزمایش مطابقت نزدیکی داشت. به این دلیل میدان مولکولی معادله (۱۰-۱۴ الف) را غالباً میدان مولکولی وایس می نامند.

حدود بیست سال بعد هایزنبرگ^۲، منشأ بزرگ بودن مقدار γ را توضیح داد. هایزنبرگ نشان داد که اولاً تنها گشتاورهای مغناطیسی اسپینی در ایجاد میدان مولکولی سهم هستند. وی بر اساس مکانیک کوانتومی نشان داد که وقتی اسپینهای اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پادموازی تغییر می کنند، باید تغییرات همزمانی در توزیع بار الکترونی درون اتمها حاصل شود.^۳ تغییر توزیع بار، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را تغییر می دهد، و در برخی موارد، همسویی موازی (یعنی، فرومغناطیس) را برتر می دارد. انرژی وابسته به اسپین؛ یعنی آن انرژی که به پیکربندی اسپینی دستگاه مربوط است، را می توان برحسب نیرویی (یا گشتاور نیرویی) که در اثر تغییر این پیکربندی بر یکی از اتمها وارد می شود، بیان کرد. نتیجه آنکه میدان معادل متناسب خواهد بود با M ، اما با ضریبی که به جزئیات توزیع بار در اتم مورد بحث بستگی دارد.

1. P. Weiss, *Journal de Physique*, vol. 6, 667 (1907).

2. W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, 49, p. 619 (1928).

۳. این تغییر در توزیع بار نتیجه اصل طرد پاؤلی است.



شکل ۱۰-۲ تعیین مغناطش خودبه خود $M(T)$ به کمک تابع لانژون.

با به کار بردن نظریه وایس-هایزنبرگ می توان رابطه تغییر مغناطش یک جسم فرومغناطیس را با دما پیشگویی کرد. واضح است که این نظریه، فرومغناطیس را به صورت حالت حدی پارامغناطیس در یک میدان مغناطیسی فوق العاده قوی توصیف می کند، که البته این میدان باید از خود مغناطش به وجود آمده باشد. از ترکیب معادله (۱۰-۴الف) با معادله های (۱۰-۱۴) و (۱۰-۱۵الف) نتیجه می شود

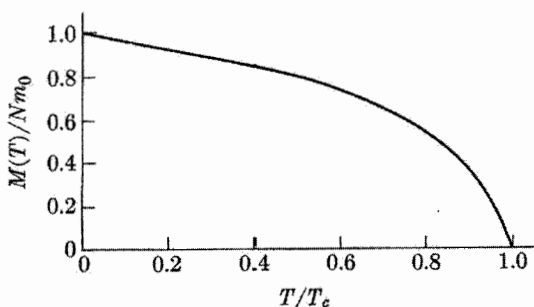
$$M = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (۱۰-۱۹)$$

و

$$M = \frac{kTy}{\gamma \mu_0 m_0} \quad (۱۰-۲۰)$$

مغناطش خودبه خود، یعنی مغناطش در میدان خارجی صفر، برای یک دمای مفروض از حل همزمان معادلات (۱۰-۱۹) و (۱۰-۲۰) نتیجه می شود. پاسخ را می توانیم به آسانی به روش ترسیمی به دست آوریم: M را برحسب y برای هر دو معادله (۱۰-۱۹) و (۱۰-۲۰)، نظیر شکل ۱۰-۲ رسم می کنیم. مغناطش $M(T)$ که از تقاطع دو منحنی به دست می آید با هر دو معادله سازگار است. با افزایش دما شیب منحنی خطی، معادله (۱۰-۲۰)، زیادتر می شود، ولی معادله (۱۰-۱۹) بی تغییر می ماند. لذا نقطه تقاطع در شکل به سمت چپ حرکت می کند و برای مغناطش خودبه خود مقدار کمتری به دست می آید. بالاخره به دمایی می رسیم که در آن معادله (۱۰-۲۰) در مبدأ مختصات با (۱۰-۱۹) مماس می شود؛ در این دما و دماهای بالاتر مغناطش خودبه خود، صفر است. این دما به نام دمای کوری T_c خوانده می شود، که در دماهای بالاتر از آن مغناطش خودبه خود، از بین می رود و خواص پارامغناطیسی معمولی نتیجه می شود.

ترسیمی از منحنی $M(T)$ برحسب دما، که به روش بالا به دست آمده است، در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده است. این منحنی با مقادیر تعیین شده تجربی مغناطش خودبه خود برای یک ماده فرومغناطیسی توافق تقریبی دارد.

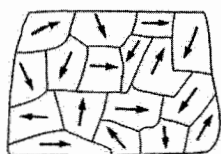


شکل ۱۰-۳ مغناطش یک ماده فرومغناطیسی به صورت تابعی از دما. T_c به دمای کوری موسوم است. (منحنی نمایش داده شده با کمک تابع کلاسیک لانتزون محاسبه شده است. تصحیحات مربوط به مکانیک کوانتومی شکل منحنی را تا حدودی تغییر می‌دهد و آن را با داده‌های تجربی در توافق کامل می‌آورد).

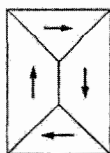
۱۰-۵ حوزه‌های فرومغناطیسی

مطابق آنچه در بخش قبل گفتیم، یک جسم فرومغناطیس در دماهایی کمتر از دمای کوری باید تقریباً تا حد اشباع مغناطیده باشد (صرف نظر از وضعیتهای گذشته آن). ظاهراً این مطلب با تجربه مغایرت دارد. مثلاً می‌دانیم که یک قطعه آهن می‌تواند هم در حالت مغناطیده و هم در حالت نامغناطیده موجود باشد. پاسخ این باطلنمای ظاهری این است که یک ماده فرومغناطیس به حوزه‌هایی تجزیه می‌شود. هر حوزه بر طبق نتایج بخش قبلاً کاملاً مغناطیده است ولی حوزه‌های مختلف می‌توانند سمتگیریهای کاتوره‌ای داشته باشند (شکل ۱۰-۴) و بنابراین از دیدگاه میکروسکوپی، ظاهری نامغناطیده عرضه می‌کنند. وجود این حوزه‌ها برای اولین بار توسط وایس در سال ۱۹۰۷ به‌عنوان فرض مسلم عرضه شد.

در عبور از یک حوزه به حوزه مجاور آن، در طی ۱۰° اتم، بردار گشتاور اتمی \mathbf{m}_0 به تدریج از جهت اصلی خود به جهت جدید می‌چرخد (شکل ۱۰-۵). این ناحیه بین حوزه‌ها را دیواره حوزه می‌نامند. به نظر می‌آید که گشتاور اسپینی اتمی در ناحیه دیواره تحت تأثیر میدان مولکولی ضعیف‌تری قرار می‌گیرد تا در درون خود حوزه. این مشاهده خود، وجود یک پیکربندی تک‌حوزه‌ای

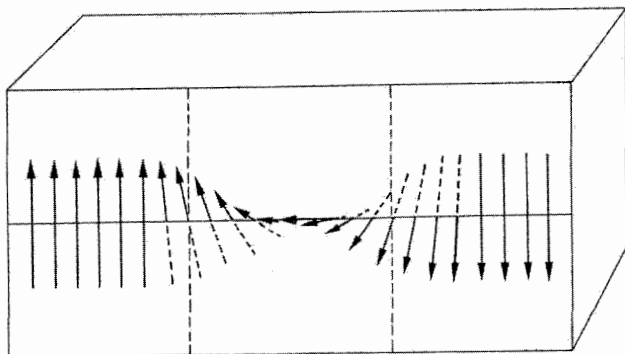


(ب)



(الف)

شکل ۱۰-۴ ساختارهای حوزه فرومغناطیسی، (الف) تک‌بلور، (ب) جسم چندبلوری. پیکانها معرف جهت مغناطش‌اند.



شکل ۱۰-۵ ساختار ناحیه گذار یا "دیواره بلوخ" بین حوزه‌ها در ماده فرومغناطیسی.

را تأیید می‌کند. از طرف دیگر، جسمی که تنها یک حوزه دارد باید میدان مغناطیسی خارجی شدیدی را برقرار نگه دارد، و حال آنکه "انرژی مغناطیسی" مربوط به ساختار میدان در یک جسم چندحوزه‌ای کمتر است. لذا ساختار چندحوزه‌ای از لحاظ انرژی معمولاً ارجح است.

جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش در مواد فرومغناطیسی به تغییرات در پیکربندی حوزه‌ها مربوط می‌شوند. افزایش مغناطش ناشی از تأثیر یک میدان خارجی با دو فرایند مستقل حاصل می‌شود: با افزایش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها با میدان مطابقت دارد در مقابل کاهش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها مطابق با جهت میدان نیست (حرکت دیواره حوزه) یا با چرخش مغناطش حوزه به طرف جهت میدان. این دو فرایند در شکل ۱۰-۶ به صورت ترسیمی نشان داده شده‌اند.

در میدانهای خارجی ضعیف مغناطش معمولاً با حرکت دیواره حوزه تغییر می‌کند. در مواد خالصی که فقط شامل یک فازند، در ناحیه میدان ضعیف حرکت دیواره تا حدود زیادی برگشت‌پذیر است. در میدانهای قوی‌تر مغناطیدگی با حرکت برگشت‌ناپذیر دیواره، و سرانجام با چرخش حوزه انجام می‌شود. در این حالتها وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، ماده به صورت مغناطیده باقی می‌ماند.

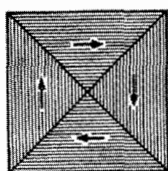
مطالعه تجربی حوزه‌ها با شیوه‌ای که اولین بار توسط بی‌تر^۲ ابداع شد، امکان‌پذیر شده است. مقداری گرد مغناطیسی بسیار نرم را روی سطح جسم نمونه می‌پاشیم، ذرات گرد را که در امتداد مرزهای حوزه‌ها جمع می‌شوند، با میکروسکوپ می‌توان مشاهده کرد. با این شیوه حتی مشاهده

1. Bloch

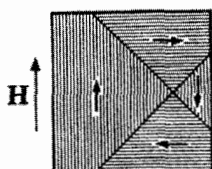
2. F. H. Bitter, *Physical Review* **41**, p, 507 (1932).

برای شرح مختصر شیوه وی مراجعه کنید به

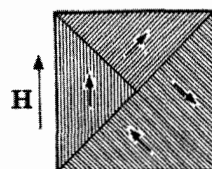
D. Jiles, *Magnetism and Materials* (London: Chapman and Hall, 1991), p 114.



(الف)



(ب)



(ج)

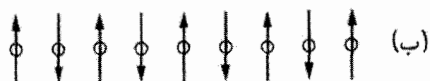
شکل ۱۰-۶ مغناطش یک ماده فرومغناطیسی: (الف) نامغناطیده، (ب) مغناطیدگی به وسیله حرکت دیواره حوزه، (ج) مغناطیدگی به وسیله چرخش حوزه.

حرکت دیواره حوزه تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی خارجی نیز امکان پذیر است. اندازه حوزه‌ها بسته به نوع ماده آنها، وضع سابقشان و عاملهای دیگر تفاوت می‌کند. اندازه‌های آنها نوعاً بین 10^{-6} تا 10^{-2} سانتی متر مکعب است.

۱۰-۶ فریتها

بر طبق نظریه فرومغناطیس هایزنبرگ، تغییر در اسپین اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پادموازی، تغییری در انرژی الکتروستاتیکی به همراه دارد. اگر با این تغییر انرژی آنها ایجاد همسویی موازی ارجح باشد، و در عین حال اندازه تغییر کافی باشد، ماده متشکل از چنین اتمهایی فرومغناطیس است. اگر با این تغییر انرژی ایجاد همسویی پادموازی ارجح باشد، باز هم امکان ایجاد یک ساختار اسپینی منظم وجود دارد، ولی در این مورد در سرتاسر بلور، جهت اسپینها به طور متناوب از اتمی به اتم دیگر تغییر می‌کند.

هر ساختار اسپینی منظم با برابند گشتاور مغناطیسی کل صفر را پاد فرومغناطیس می‌نامند (شکل ۱۰-۷). عمومی‌ترین ساختار اسپینی منظم شامل هر دو مؤلفه "اسپین بالا" و "اسپین پایین" است، ولی گشتاور مغناطیسی کل آن در یکی از این جهات مخالف صفر است؛ چنین ماده‌ای فری مغناطیس یا به عبارت ساده فریت نامیده می‌شود. ساده‌ترین فریتها که از لحاظ مغناطیسی مورد توجه‌اند عبارت‌اند از اکسیدهایی با فرمول شیمیایی $MOFe_2O_3$ ، که در آن M



شکل ۷-۱۰ نمایش طرحواره اسپینهای اتمی در ساختارهای اسپینی منظم: (الف) فرومغناطیس، (ب) یاد فرومغناطیس، (ج) فری مغناطیس.

یک یون فلز دوظرفیتی است، نظیر Ni ، Co ، Mn ، Cu ، Mg ، Zn ، Cd یا آهن دوظرفیتی. این فریتها به صورت ساختار بلوری نسبتاً پیچیده‌ای متبلور می‌شوند که به ساختار اسپینل موسوم است. مثال کلاسیک فریت، کانه آهن مغناطیسی یا مغناطیس معدنی (Fe_3O_4) است که از زمانهای قدیم شناخته شده است.

فریتها از نظر صنعتی اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند، زیرا علاوه بر مغناطش اشباع نسبتاً بزرگشان، از نظر رسانایی الکتریکی ضعیف‌اند. لذا در فرکانسهای بالا، که اتلاف ناشی از جریان گردابی در مواد رسانا مسئله‌ای جدی محسوب می‌شود، می‌توان از آنها استفاده کرد. مقاومت ویژه فریتها نوعاً در محدوده 10^4 تا 10^7 اهم متر است؛ به منظور مقایسه، مقاومت ویژه آهن تقریباً 10^{-7} اهم متر است.

۷-۱۰ خلاصه مطالب

مغناطش ماکروسکوپی M یک ماده مغناطیسی از گشتاور دوقطبی مغناطیسی مولکولی (یا مؤلفه آن) ناشی می‌شود، و این گشتاور در پاسخ به میدان موضعی در مکان مولکول، یعنی میدان مولکولی H_m ، به وجود می‌آید. میدان مولکولی به میدان خارجی H و نیز به خود مغناطش بستگی دارد. سهم مربوط به مغناطش، که از میدانهای مغناطیسی دوقطبی همه مولکولهای دیگر ناشی می‌شود، و در قیاس با مورد دی‌الکتریک نتیجه زیر را به دست می‌دهد،

$$H_m = H + \frac{1}{3} M$$

برای اکثر مواد خطی تا حد قابل چشمپوشی کوچک است. علت این امر کوچک بودن پذیرفتاری مغناطیسی در رابطه زیر است

$$M = \chi_m H$$

با این همه در مواد فرومغناطیسی چون سهم مغناطش در میدان مولکولی مؤثر ضریبی به مراتب بزرگتر از $1/3$ دارد، مغناطش خود به خود رخ می‌دهد.

• همه مولکولها در اثر تغییر شکل توزیع جریان الکترونی در یک میدان مغناطیسی گشتاور دوقطبی مغناطیسی القایی پیدا می‌کنند. پاسخ همیشه طوری است که میدان خارجی را تضعیف می‌کند، یعنی سهم (دیامغناطیسی) مربوط به پذیرفتاری همیشه منفی است. با یک تقریب خطی به پذیرفتاری دیامغناطیسی ثابت می‌رسیم

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i^2$$

• مولکولهایی که گشتاور دوقطبی مغناطیسی دائمی m_0 دارند، یک پاسخ اضافی مربوط به سمتگیری عرضه می‌کنند. مانند مورد مولکولهای قطبی در یک میدان الکتریکی، این پاسخ به طور تقریبی به وسیله تابع لانژون توصیف می‌شود. جز در نزدیکی صفر مطلق، پذیرفتاری پارامغناطیسی حاصل برابر است با

$$\chi_m = \frac{Nm_0^2\mu_0}{3kT}$$

• برای درک فرومغناطیس، فرض می‌شود

$$H_m = H + \gamma M$$

که در آن $1/3 \gg \gamma$. (این قسمت از یک انرژی مکانیک کوانتومی ناشی می‌شود، که به سمتگیری نسبی گشتاورهای مغناطیسی اسپینی بستگی دارد؛ این انرژی به انرژی مغناطیسی $m_0 \cdot H$ اضافه می‌شود و بنابراین می‌توان آن را برحسب یک میدان مغناطیسی مؤثر توصیف کرد، گرچه منشأ آن الکتروستاتیکی است). در این صورت تا وقتی که T کمتر از دمای کوری باشد، جوابی با $H = 0$ ، $M \neq 0$ در این معادله و معادله لانژون صدق می‌کند.

• حتی در دمایی پایین‌تر از دمای کوری، یک قطعه فرومغناطیس با ابعاد ماکروسکوپی ممکن است به خاطر ساختار حوزه‌های اش گشتاور مغناطیسی کل نداشته باشد.

مسائل

۱۰-۱ مگنتون بور به صورت گشتاور مغناطیسی الکترون در حال گردش در "مدار کلاسیک بور" در اتم هیدروژن، تعریف می‌شود. این مدار، مداری دایروی است که با طولی دقیقاً برابر یک طول موج دوبروی که شتاب جذب به مرکز حرکت دایره‌ای آن به وسیله نیروی جاذبه کولنی تأمین می‌شود.

نشان دهید که یک مگنتون بور برابر است با $eh/4\pi m_e$ که در آن m_e جرم الکترون و h ثابت پلانک است.

۱۰-۲ مگنتون بور واحد طبیعی اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی اتم است. گشتاور مغناطیسی در هر اتم را برحسب مگنتون بور برای آهن، نیکل، و کبالت در شرایط مغناطش اشباع محاسبه کنید. از داده‌های جدول ۹-۲ استفاده کنید.

۱۰-۳ شدت نسبی برهم‌کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی را در مقایسه با برهم‌کنش بین دو دوقطبی الکتریکی محاسبه کنید. به‌طور مشخص گشتاور نیروی وارد بر یک دوقطبی از طرف دوقطبی دیگر را حساب کنید، وقتی که آن دو عمود بر یکدیگر و به فاصله یک آنگستروم از یکدیگر قرار گرفته باشند؛ فرض کنید هر دوقطبی مغناطیسی مساوی ۱ مگنتون بور، و هر دوقطبی الکتریکی مساوی $e \times 10^{-9}$ آنگستروم باشد. این محاسبه نشان می‌دهد که مقدار برهم‌کنش مغناطیسی بنیادی در ماده چندین مرتبه بزرگی از برهم‌کنش الکتریکی کوچکتر است.

۱۰-۴ پذیرفتاری دیامغناطیسی نئون را در دما و فشار متعارف (صفر درجه سلسیوس و یک جو فشار) محاسبه کنید. فرض کنید فقط هشت الکترون خارجی در هر اتم در این امر سهیم باشند، و شعاع متوسط مدار این الکترونها $R = 4 \times 10^{-9}$ cm باشد.

۱۰-۵ مغناطش یک جسم فرومغناطیس در دمای کوری به صفر می‌رسد. در شکل ۱۰-۲ دمای کوری با خط راستی که در مبدأ مختصات بر تابع لانتون مماس است نمایش داده می‌شود. با استفاده از مقدار تجربی دمای کوری برای آهن، γ آهن را تعیین کنید.

۱۰-۶ طبق تعریف نسبت ژیرومغناطیسی یک توزیع جریان عبارت است از نسبت گشتاور مغناطیسی به اندازه حرکت زاویه‌ای آن. نسبت ژیرومغناطیسی کره‌ای به جرم M و بار Q را محاسبه کنید. فرض کنید کره با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد و جرم آن به‌طور یکنواخت در سراسر حجم، و بار الکتریکی آن به‌طور یکنواخت در سطح توزیع شده است.

القای الکترومغناطیسی

القای نیروی محرکه الکتریکی توسط تغییر شار مغناطیسی برای اولین بار در اوایل قرن نوزدهم توسط فاراده و هنری مشاهده شد. بر پایه آزمایشهای پیشگامانه این دانشمندان دستگاههای جدید از قبیل مولدها، مبدلها و مانند آنها ابداع شده‌اند. این فصل به‌طور عمده به فرمولبندی ریاضی قانون القای الکترومغناطیسی و کاربرد آن در موارد ساده می‌پردازد.

معادله مشخصه الکتروستاتیک عبارت بود از

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

یا به‌صورت انتگرالی،

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

این معادلات مستقیماً از قانون کولن نتیجه می‌شوند، و نیروی مغناطیسی ناشی از جریانهای پایا در آنها تغییری ایجاد نمی‌کند. لیکن، این معادلات برای میدانهای کلی‌تر که وابسته به زمان‌اند، صادق نیستند، و ما در این فصل همین میدانها را بررسی می‌کنیم.

۱-۱۱ القای الکترومغناطیسی

ابتدا مفهوم نیروی الکتروموتیو را معرفی می‌کنیم

ما نیروی محرکه الکتریکی، یا emf ، به دور یک مدار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (۱-۱۱)$$

این emf ، برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایستا همیشه برابر با صفر برود. اکنون مواردی را بررسی می‌کنیم که این کمیت صفر نیست. از آنجا که این میدان الکتریکی را نمی‌توانیم به کمک قانون کولن تعریف کنیم، لذا این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان آن را تعریف کرد. این میدان به گونه‌ای تعریف می‌شود که نیروی لورنتس، یعنی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

همیشه برابر با نیروی الکترومغناطیسی وارد بر بار آزمون q باشد.

نتایج حاصل از تعداد زیادی آزمایش را می‌توان چنین خلاصه کرد که همراه با تغییر شار مغناطیسی در هر مدار، emf ی به صورت زیر ایجاد می‌شود

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (۲-۱۱)$$

معلوم شده است که این نتیجه، که به قانون القای الکترومغناطیسی فاراده موسوم است، به روش تغییر شار مغناطیسی بستگی ندارد؛ مقدار \mathbf{B} را در نقاط مختلف داخل مدار می‌توان به هر شیوه‌ای تغییر داد.

تشخیص این نکته بسیار مهم است که معادله (۲-۱۱) معرف قانونی تجربی و مستقل است و نمی‌توان آن را از سایر قوانین تجربی به دست آورد، و برخلاف آنچه گاهی گفته می‌شود، این قانون محققاً از کاربرد قانون بقای انرژی در توازن انرژی جریانها در میدانهای مغناطیسی نتیجه نمی‌شود.

چون بنا به تعریف داریم

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (۱-۱۱)$$

و

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۳-۱۱)$$

معادله (۲-۱۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۴-۱۱)$$

اگر مدار صلب و ساکن باشد، مشتق زمانی را می‌توان به زیر انتگرال برد، که در این صورت به یک مشتق جزئی برحسب زمان مبدل می‌شود. به علاوه از قضیه استوکس می‌توان استفاده کرد و انتگرال خطی \mathbf{E} را به انتگرال سطحی $\nabla \times \mathbf{E}$ تبدیل کرد. نتیجه این تبدیلات به صورت زیر است

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (۵-۱۱)$$

چنانچه قانون فاراده به صورت معادله (۵-۱۱) برای تمام سطوح ثابت S صادق باشد، نتیجه می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۶-۱۱)$$

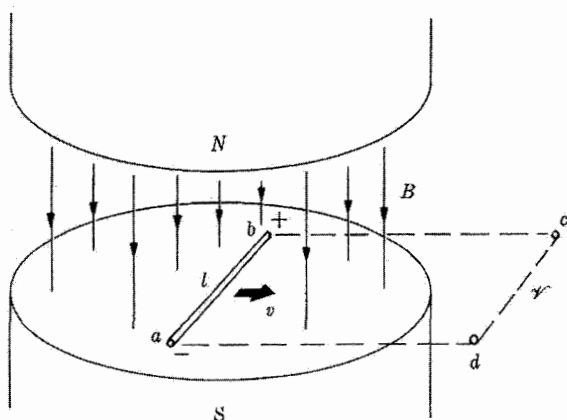
این نتیجه شکل دیفرانسیلی قانون فاراده است.

این شکل تعمیم ضروری $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است که در مورد میدانهای ایستا صادق بود. (حالتی که در آن محیط در حرکت است و سایر مسائل پیچیده‌تر، احتیاج به بررسی دقیق‌تری دارند که از سطح این کتاب خارج است).

علامت منفی در قانون فاراده حاکی از آن است که emf القایی در جهتی است که با تغییراتی که آن را تولید می‌کنند مخالفت می‌کند، و این امر را به آسانی می‌توان نشان داد. بنابراین، اگر سعی کنیم شار را در مداری افزایش دهیم، emf القایی تمایل دارد جریانهایی را در جهتی ایجاد کند که سبب کاهش شار شود. چنانچه سعی کنیم قطب آهنربایی را در حلقه پیچیده‌ای وارد کنیم، جریانهای تولیدشده به وسیله emf القایی میدانی مغناطیسی تولید می‌کنند که تمایل به دفع قطب مزبور خواهد داشت. تمام این پدیده‌ها را می‌توان در قانون زیر خلاصه کرد:

قانون لنز: در صورت بروز تغییر در یک دستگاه مغناطیسی، آن چیزی رخ می‌دهد که با آن تغییر مخالفت کند.

فایده عملی قانون لنز را نباید دست‌کم گرفت. در بسیاری از موارد این قانون سریع‌ترین راه برای کسب اطلاعات درباره واکنشهای الکترومغناطیسی محسوب می‌شود. حتی اگر روشهای دیگری در دسترس باشند، این قانون وسیله با ارزشی برای امتحان عرضه می‌کند.



شکل ۱-۱۱ ولتاژ تولیدشده توسط سیمی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند.

برای درک عمیق‌تر قانون فاراده، شاید مفید باشد مثالی را در نظر بگیریم که معمولاً به‌عنوان نمونه‌ای از این قانون تلقی می‌شود، لیکن می‌توان آن را به‌طور کامل برحسب نیروهای وارد بر بارها که در فصلهای پیش تکوین یافت، تحلیل کرد. فرض کنید که سیم فازی مستقیمی به طول l ، با سرعت v در راستایی عمود بر طولش حرکت می‌کند. مطابق شکل ۱-۱۱، فرض کنید یک میدان مغناطیسی B در جهت عمود بر صفحه‌ای که سیم در آن حرکت می‌کند، وجود دارد. بر بارهای آزاد سیم نیروی لورنتس وارد می‌شود:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7-11) \quad (5-8)$$

این نیرو به علت وجود جمله $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ، سبب می‌شود بارهای مثبت و منفی به دو انتهای متقابل سیم رانده شوند. در حالت پایا، وقتی بارهای آزاد نسبت به سیم حرکت نمی‌کنند، نیروی کل وارد بر هر یک از بارها باید برابر با صفر باشد؛ یعنی، نیروی مغناطیسی در هر نقطه از سیم باید با یک نیروی الکتریکی به همان بزرگی ولی با علامت مخالف، که ناشی از جدایی بارهاست، در توازن باشد

$$E = vB \quad (8-11)$$

اگر میدان مغناطیسی یکنواخت باشد، آنگاه میدان الکتریکی در امتداد سیم ثابت است، و اختلاف پتانسیل بین دو سر سیم برابر است با

$$\Delta\varphi = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El \quad (9-11)$$

اگر این اختلاف پتانسیل را \mathcal{V} بنامیم، آنگاه از ترکیب (۱۱-۸) با (۱۱-۹) رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$\mathcal{V} = Blv \quad (11-10)$$

در این مثال میدان مغناطیسی مستقل از زمان است، و بنابراین $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ همان‌طور که در الکتروستاتیک داشتیم. انتگرال $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ به مسیر بستگی ندارد؛ به‌ویژه، اگر مدار $abcd$ را در نظر بگیریم که تا خارج از میدان مغناطیسی ادامه دارد، آنگاه اختلاف پتانسیل در امتداد مسیر $bcda$ نیز \mathcal{V} است. در واقع، اگر b و c و همین‌طور d و a توسط سیم‌های کاملاً رسانا متصل شوند، \mathcal{V} برابر خواهد بود با ولتاژ بین دو سر c و d واقع در خارج میدان مغناطیسی.

طرف راست معادله (۱۱-۱۰) را می‌توان با توجه به اینکه شار Φ در مدار $abcd$ مطابق رابطه $d\Phi/dt = B dA/dt = Bl dx/dt = -Blv$ تغییر می‌کند، به طریق دیگری بیان کرد.

بنابراین

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-11)$$

که درست به صورت قانون فاراده، یعنی معادله (۱۱-۲) است، با این تفاوت که \mathcal{V} به مفهومی که در (۱۱-۱) تعریف شد emf نیست، زیرا برای هر مدار بسته‌ی مربوط به این مسئله $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ است. با نوشتن معادله (۱۱-۱۰) برحسب نمادگذاری برداری، این معادله را می‌توانیم تعمیم دهیم. اگر جهت \mathbf{v} نسبت به \mathbf{l} اختیاری باشد، آنگاه تنها آن مؤلفه از \mathbf{v} که بر \mathbf{l} عمود است در \mathcal{V} سهم خواهد بود. از این رو \mathcal{V} متناسب است با $\mathbf{v} \times \mathbf{l}$. برای $\mathbf{B} \times \mathbf{l}$ اختیاری، فقط مؤلفه‌ای که بر صفحه \mathbf{l} و \mathbf{v} عمود باشد در \mathcal{V} سهم خواهد بود. چون $\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ بر صفحه \mathbf{l} و \mathbf{v} عمود است، \mathcal{V} را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v} \quad (11-12)$$

ولتاژ داده شده در معادله (۱۱-۱۲) را گاهی emf حرکتی می‌نامند.

اکنون این مسئله را از دید سیم بررسی می‌کنیم؛ یعنی، فرض کنیم که در دستگاه مختصاتی باشیم که با سیم حرکت می‌کند؛ به این ترتیب در این دستگاه، سیم ساکن است و آهنربا با سرعت \mathbf{v} به سمت چپ در شکل ۱۱-۱ حرکت می‌کند. به آسانی می‌توان قبول کرد که اگر با سیم حرکت کنیم، باز هم همان جدایی بارها و همان اختلاف پتانسیل بین دو سر سیم را مشاهده خواهیم کرد. لیکن توضیح مسئله به کلی متفاوت است. در این دستگاه مختصات هیچ نیروی مغناطیسی نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا سیم ساکن است. از طرفی، میدان مغناطیسی دیگر نسبت به زمان ثابت نیست؛ در هر نقطه با عبور لوله متحرک آهنربا از آن نقطه، میدان مغناطیسی از B به

تقریباً صفر تغییر می‌کند. خواهیم دید که معادله تغییر یافته E ، یعنی معادله (۶-۱۱)، به تنهایی کافی است تا همین نتیجه \mathcal{V} را برای اختلاف پتانسیل در این دستگاه مختصات نیز به دست آوریم. در حالت پایا، نیروی وارد بر بار آزاد داخل سیم باید همچنان برابر صفر باشد

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 0$$

ولی نیروی مغناطیسی وجود ندارد زیرا $\mathbf{v} = 0$. بنابراین میدان الکتریکی باید در داخل سیم صفر باشد،

$$\mathbf{E} = 0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (13-11)$$

در این حالت نیز یک میدان \mathbf{E}_1 ناشی از جدایی بارها وجود دارد که با میدان مورد پیش یکسان است. این میدان در داخل سیم با میدان \mathbf{E}_2 وابسته به میدان مغناطیسی متغیر خنثی می‌شود،

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اگر مجدداً منحنی بسته $abcd$ را در نظر بگیریم

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 + \mathcal{V}$$

جمله اول در طرف راست صفر است زیرا \mathbf{E} در داخل سیم صفر می‌شود، و انتگرال دوم در امتداد مسیر $bcda$ چیزی است که ما آن را در مورد پیش، \mathcal{V} نامیدیم. بنابراین از اینجا و از رابطه (۲-۱۱) دوباره نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11-11)$$

پس معادله تعمیم یافته E ، یعنی (۶-۱۱)، همراه با معادله (۷-۱۱) برای نیروی لورنتس، در هر یک از دو دستگاه مختصات لخت نتیجه یکسان، یعنی معادله (۱۱-۱۱)، را به دست می‌دهد. بنابراین معادله (۶-۱۱) عموماً معتبر است.^۱ چون نتیجه انتگرالی معادله (۱۱-۱۱) در هر دو دستگاه مختصات صدق می‌کند، لذا غیرمنطقی نخواهد بود اگر آن را در هر دو مورد قانون فاراده بنامیم، اگر چه به معنی دقیق کلمه، فقط در مورد دوم است که یک emf، بنا به تعریف (۱-۱۱) وجود دارد. در برخی موارد ممکن است مستقیماً معلوم نباشد که برای محاسبه Φ در معادله

۱. در فصل ۲۲، از دیدگاهی دیگر، در خواهیم یافت که میدان $E_2 = vB$ که در معادلات (۸-۱۱) و (۳-۱۱) صدق می‌کند، از تبدیل نسبیتی لورنتس میدانهای E و B در دستگاه مختصات "متحرک" ناشی می‌شود. به جای نیروی مغناطیسی که در دستگاه "متحرک" صفر می‌شود، نیروی مربوط به میدان E_2 قرار می‌گیرد.

(۱۱-۱۱) چه مداری باید به کار رود، مسئله ۱۱-۴ مثالی است از این موارد. معادلاتی که همواره در تمام دستگاههای مختصات لخت برای میدانهای E و B صادق اند، عبارت اند از معادلات (۱۱-۶) و (۱۱-۷). چنانچه به هنگام تعیین emf یا "emf حرکتی" از این معادلات استفاده کنیم، هیچ ابهامی به وجود نخواهد آمد.

این مثال از آن رو که نخستین نمونه‌ای از ژنراتورهای (مولدهای) الکتریکی عملی است، در خور توجه بیشتری است. مجدداً به شکل ۱۱-۱ مراجعه می‌کنیم. اگر قطعه سیم ab در امتداد دو سیم bc و ad که رسانندگی بسیار زیادی دارند بلغزد (و با این دو سیم تماس الکتریکی کاملی داشته باشد) و اگر بین دو سر c و d مقاومتی قرار گیرد، جریان I در مدار برقرار می‌شود.^۱ در این مورد یک نیروی مکانیکی وارد بر سیم (یا بر آهنربا، در مورد دوم) لازم است تا سرعت ثابت v را حفظ کند، به طوری که مجموع نیروی خارجی و نیروی مغناطیسی BII وارد بر سیم برابر با صفر شود. توان ورودی نیروی مکانیکی اعمال شده، توان تلف شده I^2R را در مقاومت جبران می‌کند. تا آنجا که به ولتاژ دو سر c و d مربوط است، تفاوتی نمی‌کند که در مولد، سیم حرکت کند یا آهنربا (معمولاً سیم حرکت می‌کند). در هر یک از دو مورد، برای هر مسیری که میدان مغناطیسی مولد را احاطه نکند $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ است.

در دو مثال مورد بحث ما، معادلهٔ تعمیم یافتهٔ زیر

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱۱-۶)$$

برای هر دو مورد صادق است. در اینجا تصادفاً در دستگاه مختصات آهنربا $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ بود، و لذا یک تحلیل الکتروستاتیکی امکانپذیر شد. لیکن غلط خواهد بود اگر نتیجه‌گیری کنیم که همواره می‌توان دستگاه مختصاتی یافت که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t$ برابر صفر شود. مثال سومی که بر شکل ۱۱-۱ مبتنی است، این نکته را توضیح خواهد داد. فرض کنید که نه سیم حرکت کند و نه آهنربا؛ لیکن فرض کنید آهنربا یک آهنربای الکتریکی است که بزرگی میدان آن را می‌توان با افزایش یا کاهش جریان در سیم پیچهایش زیاد یا کم کرد. اکنون دیگر هیچ دستگاه مختصاتی یافت نمی‌شود که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t$ صفر شود. با این همه، معادلهٔ (۱۱-۶) باز هم صادق است، و قانون فاراده، یعنی معادلهٔ (۱۱-۲)، emf را دور هر مداری (مثلاً $abcd$) به دست می‌دهد. در مبدلها و سایر وسایل عملی که اجزای آنها حرکت مکانیکی ندارند، یعنی در وسایلی که موضوع بقیهٔ این فصل را تشکیل می‌دهند، وضعیت چنین است.

۱. این مولد، به سبب طول متناهی آهنربا، نمی‌تواند از نظر عملی یک مولد جریان مستقیم محسوب شود، اما اگر سیم به عقب و جلو حرکت کند، جریانی متناوب تولید خواهد شد (ر.ک مسئله ۱۱-۵).

۲-۱۱ خودالقا

در این بخش رابطه بین شار و جریان وابسته به یک مدار منزوی را بررسی می‌کنیم و از آن برای معرفی یک پارامتر مدار عملی، یعنی خودالقا، استفاده می‌کنیم. شار مغناطیسی که از یک مدار منزوی می‌گذرد (شار حاصل از جریان خود مدار) به شکل هندسی این مدار بستگی دارد، و مطابق معادله (۲۶-۸) تابعی است خطی از جریان مدار. بنابراین برای هر مدار صلب و ساکن تغییرات شار فقط از تغییرات جریان ناشی می‌شود. یعنی

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (۱۴-۱۱)$$

این معادله حتی وقتی که معادله (۲۶-۸) هم برقرار نباشد، صادق خواهد بود. تنها شرط لازم آن است که Φ فقط به جریان بستگی داشته باشد. اما اگر معادله (۲۶-۸) معتبر باشد، یا به طور کلی‌تر، چنانچه Φ مستقیماً با جریان متناسب باشد، در آن صورت $d\Phi/dI$ مقدار ثابتی است برابر با Φ/I .

در هر صورت، ضریب خودالقا، L ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (۱۵-۱۱)$$

وقتی تمیز بین این مقدار و Φ/I ضروری باشد، $d\Phi/dI$ را القای نموی می‌گویند. به هر حال بهتر است واژه ضریب القا (یا ضریب خودالقا) به معادله (۱۵-۱۱) اطلاق شود، مگر اینکه تعریف دیگری در نظر باشد. از معادله‌های (۱۴-۱۱)، (۱۵-۱۱) و (۲-۱۱) معلوم می‌شود که عبارت مربوط به emf القایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

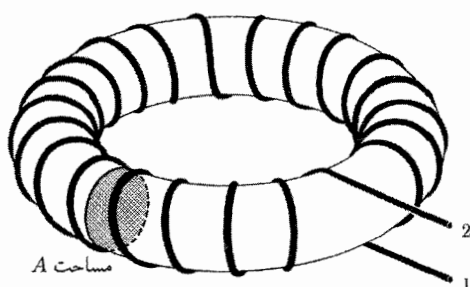
$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (۱۶-۱۱)$$

که ارزش عملی قابل توجهی دارد.

به عنوان مثالی از کاربرد معادله (۱۵-۱۱) برای محاسبه القا، خودالقای یک پیچۀ چنبره‌ای را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱-۱۱ ضریب خودالقای یک پیچۀ چنبره‌ای

این پیچۀ (با N دور) در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است. معادله (۱۵-۱۱) برای همه مدار به‌کار می‌رود. یعنی نه تنها برای پیچۀ چنبره‌ای در شکل ۲-۱۱، بلکه همچنین برای مدار خارجی که به دو سر ۱ و ۲ وصل می‌شود. با به‌کار بردن سرهای تاب‌خورده یا یک کابل هم‌محور، که



شکل ۱۱-۲ یک سیم پیچ چنبره‌ای.

اساساً هیچ میدان مغناطیسی خارجی تولید نمی‌کنند، آن قسمت از مدار خارجی را که میدان تولید می‌کند می‌توان به فواصل حتی الامکان دوردست انتقال داد تا در شار پیچۀ چنبره‌ای سهمی نداشته باشد.

حل: اگر چنبره را به این ترتیب منزوی کنیم، و اگر منظورمان از emf همان ولتاژ بین دو سر ۱ و ۲ باشد، آنگاه می‌توانیم از معادله (۱۱-۱۵) برای محاسبه ضریب القای پیچۀ چنبره‌ای استفاده کنیم. مطابق قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی در درون پیچۀ چنبره‌ای به صورت زیر است

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (11-17)$$

که در آن N تعداد دورها، l طول متوسط و I شدت جریان در سیم پیچ است. [معادله‌های (۱۱-۱۷) و (۱۱-۱۸) تقریبی هستند، زیرا در آنها از تغییرات میدان مغناطیسی در سطح مقطع صرف نظر شده است. در مسئله ۱۱-۱۰ جزئیات این تقریب در نظر گرفته شده است]. بنابراین شاری که از هر دور سیم پیچ می‌گذرد عبارت است از

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 NIA}{l} \quad (11-18)$$

و مقدار کل شار گذرنده از N دور برابر است با

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I \quad (11-19)$$

در نتیجه ضریب القا به آسانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (11-20)$$

یکای ضریب القا در دستگاه mks هنری (H) است، که بر طبق معادله (۱۱-۱۶) برابر است

با یک ولت ثانیه بر آمپر، زیرا واحد emf ولت است. معادله (۱۱-۲۰) نشان می‌دهد که یکای μ_0 را، که قبلاً به صورت وبر بر آمپر-مترا یا تسلا-متر بر آمپر داده شده بود، می‌توان برحسب هنری بر متر نیز نوشت.

۱۱-۳ القای متقابل

در بخش گذشته فقط مدارهای منزوی بررسی شد، به طوری که همه شارهای که از مدار می‌گذشت ناشی از جریان خود مدار بود. این محدودیت را با فرض اینکه n مدار به شماره‌های ۱، ۲ و ... وجود داشته باشند، می‌توان از بین برد. در این صورت شارهای را که از یکی از این مدارها، مثلاً مدار i ام، می‌گذرد می‌توان چنین نوشت

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \dots + \Phi_{ii} + \dots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (11-21)$$

یعنی، می‌توان آن را به صورت مجموع شارهای ناشی از هر یک از n مدار در نظر گرفت، که در آن Φ_{i1} شار ناشی از مدار است که از i امین مدار می‌گذرد و به همین ترتیب. بنابراین emf القاشده در i امین مدار، یعنی \mathcal{E}_i را می‌توان نوشت

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left\{ \frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_{ii}}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_{in}}{dt} \right\} = -\sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \quad (11-22)$$

اگر هر یک از مدارها ساکن و صلب باشند، تغییرات Φ_{ij} ها فقط ناشی از تغییرات جریانها خواهند بود، یعنی

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (11-23)$$

ضرایب $d\Phi_{ij}/dI_j$ چنانچه محیطهای مغناطیسی در مسئله مورد نظر خطی باشند، ثابتهایی مستقل از جریان خواهند بود.

در هر دو حالت خطی، یا غیرخطی، کمیت زیر به عنوان ضریب القای متقابل بین مدارهای i و j تعریف می‌شود

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j \quad (11-24)$$

بعداً خواهیم دید که $M_{ij} = M_{ji}$ و در نتیجه امکان هیچ‌گونه ابهامی در شاخصها به وجود نخواهد آمد. البته $d\Phi_{ii}/dI_i$ همان ضریب خودالقای مدار i ام است که با نمادهای L_i یا M_{ii} نشان داده می‌شود. یکای القای متقابل با یکای خودالقای یکی است، یعنی همان هنری است.

مثال ۱۱-۲ القای متقابل دو سیم‌پیچ چنبره‌ای

بیکربندی شکل ۱۱-۲ را در نظر می‌گیریم که یک سیم‌پیچ چنبره‌ای با N_1 دور دارد و سیم‌پیچ چنبره‌ای دومی با N_2 دور به آن اضافه شده است. برای این حالت وجود جریان I_1 در سیم‌پیچ اول، میدان مغناطیسی زیر

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

را به وجود می‌آورد. ضریب القای متقابل بین این دو مدار چیست؟

حل: شارهایی که از این دو مدار می‌گذرند، عبارت‌اند از:

$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{l} \quad \text{و} \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l}$$

از این شارها نتیجه می‌گیریم که

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \quad (۱۱-۲۵)$$

که همان نتیجه قبل است و با استفاده از معادله (۱۱-۲۴) داریم

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (۱۱-۲۶)$$

با معکوس کردن این روش و در نظر گرفتن جریان I_2 خواهیم داشت

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l} \quad (۱۱-۲۷)$$

و

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (۱۱-۲۸)$$

که نشان می‌دهد در این مورد $M_{12} = M_{21}$. این نتیجه یک نتیجه کلی است که در بخش ۱۱-۱۲ درباره آن بیشتر بحث خواهیم کرد. به علاوه، از ترکیب معادله‌های (۱۱-۲۵)، (۱۱-۲۶) و (۱۱-۲۷) نتیجه می‌گیریم

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (۱۱-۲۹)$$

معادله (۲۹-۱۱) حدی است که بر القای متقابل بین دو مدار اعمال می‌شود؛ بدین معنی که همیشه ضریب القای متقابل مساوی یا کمتر است از ریشهٔ دوم حاصل ضرب ضریب خودالقای دو مدار. با توجه به این حد، غالباً ضریب جفت‌شدگی k ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (۳۰-۱۱)$$

مقدار $k = 1$ بدان معناست که تمامی شار تولیدشده توسط مدار ۱ از مدار ۲ می‌گذرد و برعکس.

۴-۱۱ فرمول نویمان

برای دو مدار صلب و ساکن در یک محیط خطی (خلاً) ضریب القای متقابل به صورت زیر است:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (۳۱-۱۱)$$

این رابطه بدان جهت معتبر است که Φ_{21} با I_1 متناسب است، و به همین علت Φ_{21}/I_1 با $d\Phi_{21}/dI_1$ برابر می‌شود. در این حالت می‌توان معادله (۲۶-۸) را برای محاسبهٔ M_{21} به کار برد. شار مغناطیسی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right\} \cdot \mathbf{n} \, da_2 \quad (۳۲-۱۱)$$

اما

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۳۳-۱۱)$$

پس

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} \cdot \mathbf{n} \, da_2 \quad (۳۴-۱۱)$$

با به کار بردن قضیهٔ استوکس برای تبدیل انتگرال سطحی، خواهیم داشت

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۳۵-۱۱)$$

که به فرمول نویمان برای القای متقابل مشهور است. تقارنی که قبلاً بدان اشاره شد اکنون در معادله (۳۵-۱۱) ظاهر شده است.

فرمول نویمان برای خودالقا نیز به کار می‌رود، و در این صورت آن را به شکل زیر می‌نویسند

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_2|} \quad (۳۶-۱۱)$$

در کاربرد معادله (۳۶-۱۱) باید به دلیل تکنیکی در $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$ تا حدی دقت کرد، اما اگر توجه کافی شود، این معادله گاهی مفید خواهد بود.

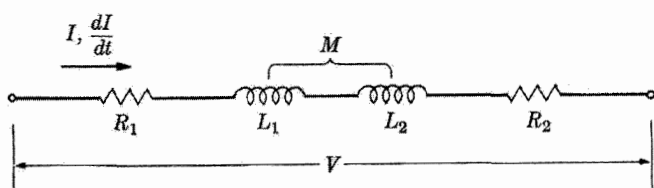
کاربرد معادله‌های (۳۵-۱۱) و (۳۶-۱۱) برای محاسبه ضرایب القا عموماً کار مشکلی است، مگر در مورد مدارهایی که شکل هندسی آنها ساده باشد. اما خصوصاً معادله (۳۵-۱۱) در مطالعه نیروها و گشتاور نیروهای وارد از طرف مداری به مدار دیگر بسیار اهمیت دارد. از این کاربرد در فصل ۱۲ استفاده خواهد شد.

۱۱-۵ القاگرها در اتصالهای متوالی و موازی

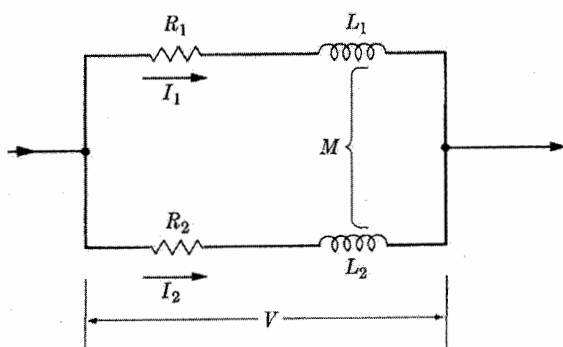
القاگرها را غالباً به طور متوالی و موازی به یکدیگر متصل می‌کنند، و نظیر اتصال مقاومتها و خازنها، دانستن نتیجه این نوع اتصالها مهم است. می‌توانیم از معادله $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ شروع کنیم و روابطی برای ضریب القای مؤثر دو القاگر در اتصال موازی یا متوالی را به دست آوریم. اما چنین کاری به معنی نادیده گرفتن این واقعیت عملی است که یک القاگر همیشه مقاومت داخلی معینی دارد. تقریب یک القاگر کامل از نظر عملی خیلی مشکل‌تر از تقریب یک خازن و یا یک مقاومت کامل است. به همین دلیل در این بخش در ترکیبهای متوالی و موازی القاگرها همواره مقاومتها را منظور می‌کنیم.

برای دو القاگر متوالی، مدار شکل ۳-۱۱ مناسب است. در تعیین حاصل جمع افت ولتاژها در طول مدار لازم است توجه شود که M می‌تواند مثبت یا منفی باشد (با تغییر جهت پیمودن هر یک از مدارهای C_1 یا C_2 ، علامت M در معادله (۳۵-۱۱) تغییر می‌کند). با در نظر گرفتن این نکته، مجموع افت ولتاژها برای شکل ۳-۱۱ چنین خواهد بود

$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I$$



شکل ۳-۱۱ اتصال متوالی دو القاگر.



شکل ۴-۱۱ اتصال موازی دو القاگر.

یا

$$V = R_1 I + L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} \quad (37-11)$$

این رابطه معادل است با

$$V = (R_1 + R_2) I + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \quad (38-11)$$

پس این مدار شبیه آن است که مقاومتی که مقدار آن برابر $R_1 + R_2$ است با القاگری که خودالقای آن برابر $L_1 + L_2 + 2M$ است، به طور متوالی بسته شده باشد. مقدار ضریب خودالقا برای جفت‌شدگی مثبت (یعنی برای حالتی که شارهای ناشی از I_1 و I_2 در دو پیچه هم‌جهت‌اند) مساوی $L_1 + L_2 + 2|M|$ است، و برای جفت‌شدگی منفی مساوی $L_1 + L_2 - 2|M|$ است. راه دیگری برای بیان ضریب القای متقابل عبارت است از

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1 \quad (39-11)$$

بنابراین ضریب القای مؤثر مدار متوالی برابر است با

$$L_{\text{مؤثر}} = L_1 + 2k\sqrt{L_1 L_2} + L_2 \quad (40-11)$$

اگر بتوانیم k را تغییر دهیم، می‌توانیم یک القاگر متغیر بسازیم (در اوایل پیدایش رادیو، این یکی از راههای متداول برای تنظیم مدارهای تشدید بود؛ فصل ۱۳ را ببینید).

اتصال موازی که در شکل ۴-۱۱ نشان داده شده است به‌سادگی مدار متوالی نیست. در

حقیقت، مداری که نشان داده شده است مانند یک مدار متوالی ساده LR رفتار نمی‌کند. بنابراین، نمی‌توان گفت که القای مؤثر و مقاومت مؤثر تابعی از L_1 ، L_2 ، R_1 ، و R_2 هستند. لیکن هرگاه R_1 و R_2 قابل چشمپوشی باشند، آنگاه خواهیم داشت

$$V = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad (41-11)$$

$$V = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

اگر ابتدا dI_1/dt و سپس dI_2/dt را بین دو معادله (41-11) حذف کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$V(L_2 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt} \quad (42-11)$$

$$V(L_1 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt}$$

پس از جمع کردن این دو، به دست می‌آوریم

$$V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (43-11)$$

بنابراین ضریب القای مؤثر دو القاگر موازی عبارت است از

$$L_{\text{مؤثر}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (44-11)$$

که در آن باز هم علامت M بستگی ه نحوه اتصال القاگرها دارد.

مهمترین مورد استفاده القاها در مدارهای جریان متناوب است. برای مداری که در فرکانس خاصی کار می‌کند، می‌توان مدار متوالی معادلی برای شکل 4-11 پیدا کرد؛ اما هم مقاومت معادل و هم خودالقای معادل، هر دو تابعی از فرکانس‌اند.

۱۱-۶ خلاصه مطالب

در این فصل گامی فراتر از میدانهای ایستا برمی‌داریم و به مورد موسوم به کند تغییر می‌پردازیم. تعمیم جدید معادلات میدان به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

این سومین معادله از معادلات چهارگانه ماکسول است، که همراه با دو معادله دیورژانس و نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

همیشه برقرار است. (در این مرحله از به دست آوردن معادلات اساسی الکتریسته و مغناطیس، سه تا از چهار معادله ماکسول را به صورت نهایی در دست داریم. تنها لازم است که معادله H نیز تعمیم داده شود). صورت دیفرانسیلی قانون فاراده (مذکور در بالا) را می توان به صورت انتگرالی زیر نوشت

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

که در آن \mathcal{E} عبارت است از emf به دو مدار ثابت C که با رابطه زیر تعریف می شود

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(ممکن است در برخی مسائل چنین پیش آید که بتوان دستگاه مختصات متحرکی یافت که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ باشد، و در نتیجه بتوان مسئله را به طریق الکتروستاتیکی تحلیل کرد، لیکن لزوماً چنین وضعی پیش نمی آید).

- آسان ترین راه برای تعیین قطبیت درست یک ولتاژ القایی، به کار بردن قانون لنز است.
- "emf حرکتی" سیم مستقیمی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می کند برابر است با

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$$

- ضریب خودالقای یک مدار ثابت (یا عنصر مدار). به صورت زیر تعریف می شود

$$L = \frac{d\Phi}{dI}$$

به طوری که

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

برای یک سیم بیچ چنبره ای (با یک سیملوله طویل)، L به آسانی به صورت زیر به دست می آید

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

• ضریب القای متقابل دو مدار به صورت زیر تعریف می شود

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}$$

به این ترتیب نتیجه می شود که

$$M_{ii} = L_i$$

و

$$M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1$$

• ضریب القای معادل برای اتصال متوالی یا موازی القاگرهای خالص مطابق با روابط مربوط به مورد مقاومتهاست، به شرط آنکه بتوان از القای متقابل و مقاومت ذاتی آنها صرف نظر کرد.

مسائل

۱-۱۱ یک رسانای فلزی به شکل قطعه سیمی به طول l و با سرعت v در میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می کند. با بررسی تفصیلی نیروی لورنتس وارد بر الکترونهای درون سیم، نشان دهید که اختلاف پتانسیل دو انتهای سیم برابر است با: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$.

۲-۱۱ یک میله فلزی به طول یک متر حول محوری که از یک انتهای میله و عمود بر آن می گذرد، با سرعت زاویه ای 12 rad/s می چرخد. صفحه دوران میله بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت 3 T عمود است. emf حرکتی القایی بین دو انتهای میله را پیدا کنید.

۳-۱۱ در یک دستگاه شتاب دهنده بتاترون، یونی به بار q و جرم m در یک مدار دایروی در فاصله R از محور تقارن دستگاه، گردش می کند. میدان مغناطیسی تقارن استوانه ای دارد، یعنی در صفحه مدار مؤلفه z میدان به صورت $B_z = B(r)$ است، که r فاصله تا محور تقارن است. (الف) نشان دهید که سرعت یون $v = qB(R)R/m$ است. (ب) اگر بزرگی میدان مغناطیسی به کندی افزایش یابد، نشان دهید که emf القایی در مدار یون طوری است که یون را شتابدار می کند. (ج) نشان دهید که برای اینکه یون در مدار یکسان خودش باقی بماند می بایست تغییرات شعاعی میدان مغناطیسی در نقاط داخل مدار در شرط زیر صدق کند: میانگین فضایی افزایش $B(r)$ (وقتی میانگین بر روی سطح محصور شده توسط مدار محاسبه شود) باید دو برابر افزایش $B(R)$ در همان بازه زمانی باشد.

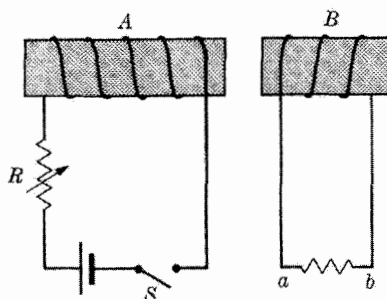
۴-۱۱ مولد همقطب فاراده متشکل است از دیسکی فلزی که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر صفحه دیسک، می چرخد. نشان دهید که اختلاف پتانسیل ایجاد شده بین مرکز دیسک

و محیط آن برابر است با $\mathcal{V} = f\Phi$ ، که در آن Φ شار گذرنده از دیسک و f فرکانس چرخش است. اگر f برابر با 3000 دور در دقیقه و $\Phi = 0.1 \text{ Wb}$ باشد، ولتاژ چقدر است؟

۵-۱۱ مولد جریان متناوب تشکیل شده است از پیچه‌ای با N دور سیم به مساحت A که در میدان B حول قطری عمود بر میدان با فرکانس دوران f می‌چرخد. (الف) emf را در پیچه پیدا کنید. (ب) اگر $N = 100$ ، $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ ، $B = 0.1 \text{ T}$ و f برابر 2000 دور در دقیقه باشد، دامنه ولتاژ متناوب چقدر است؟

۶-۱۱ یک استوانه‌ی دی‌الکتریک با گذردهی ϵ حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. اگر یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} ، موازی محور استوانه موجود باشد، بار قطبشی القایی در دی‌الکتریک را به دست آورید.

۷-۱۱ دو مدار جفت شده A ، B در وضعیت شکل ۵-۱۱ قرار گرفته‌اند. با استفاده از قانون لنز جهت جریان القایی در مقاومت ab را در موارد زیر پیدا کنید: (الف) پیچه B را به پیچه A نزدیک کنیم، (ب) مقاومت R را کاهش دهیم، (ج) کلید S را باز کنیم.



شکل ۵-۱۱

۸-۱۱ پیچه‌ای شامل 100 دور سیم با مقطع دایره‌ای به‌طور فشرده پیچیده شده است، به‌طوری که تمام حلقه‌ها تقریباً در یک صفحه قرار دارند. شعاع متوسط پیچه 3 سانتی‌متر است. پیچه حول یکی از قطرهایش با سرعت زاویه‌ای 90° دور در دقیقه می‌چرخد. هنگامی که محور دوران قائم است، جذر میانگین مربع emf حرکتی القایی در پیچه 0.5 میلی‌ولت است. چه نتیجه‌ای درباره میدان مغناطیسی زمین در محل استقرار پیچه می‌توانیم بگیریم؟

۹-۱۱ یک صفحه دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می‌چرخد. دیسک از فلزی با رسانندگی g ساخته شده، و ضخامت آن t است. دیسک چرخان را بین دو قطب آهنربایی قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی یکنواخت B را بر روی یک سطح مربع شکل کوچک به مساحت a^2 ،

و به فاصله متوسط r از محور دیسک، ایجاد می‌کند؛ B بر دیسک عمود است. گشتاور نیروی تقریبی وارد بر دیسک را محاسبه کنید. (برای مقاومت "مدار جریان گردابی" مقدار مناسبی فرض کنید.)

۱۱-۱۰ یک پیچۀ چنبره‌ای شامل N دور سیم، مطابق شکل ۱۱-۲، بر روی یک جسم نامغناطیسی پیچیده شده است. اگر شعاع متوسط پیچه b و شعاع سطح مقطع جسم a باشد، نشان دهید که ضریب خودالقای پیچه $L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$ است.

۱۱-۱۱ مداری از دو پوستۀ استوانه‌ای هم‌محور به شعاعهای R_1 و R_2 ($R_2 > R_1$) و طول یکسان L تشکیل شده است، که به وسیلۀ صفحات انتهایی تخت به هم متصل شده‌اند. بار الکتریکی از یک پوسته پایین می‌رود و از طریق پوستۀ دیگر برمی‌گردد. ضریب خودالقای این مدار چیست؟

۱۱-۱۲ پیچۀ چنبره‌ای مسئله ۱۱-۱۰ تعداد 150 دور سیم دارد، $b = 4 \text{ cm}$ و $a = 1.5 \text{ cm}$ است. ضریب خودالقای پیچه برحسب هنری چقدر است؟

۱۱-۱۳ دو حلقه سیم دایره‌ای کوچک (به شعاعهای a و b) در یک صفحه و به فاصله r از یکدیگر قرار دارند. چنانچه r آنقدر بزرگ باشد که بتوان از تقریب دوقطبی استفاده کرد، ضریب القای متقابل بین این دو حلقه را پیدا کنید.

۱۱-۱۴ دو حلقۀ دایره‌ای جریان با محور موازی به فاصله r از یکدیگر قرار دارند. فاصله r آنقدر زیاد است که می‌توان از تقریب دوقطبی استفاده کرد. نشان دهید چگونه باید یکی از حلقه‌ها را نسبت به دیگری قرار داد تا القای متقابل آنها صفر شود.

۱۱-۱۵ دو مدار زیر مفروض‌اند: یک سیم راست بسیار طویل، و یک مستطیل به ابعاد h و d . مستطیل در صفحه‌ای که از سیم می‌گذرد قرار دارد و اضلاع به طول h آن موازی سیم و به فاصله‌های r و $d + r$ از سیم قرار دارند. ضریب القای متقابل دو مدار را محاسبه کنید.

۱۱-۱۶ دو مدار زیر مفروض‌اند: یک سیم مستقیم بسیار طویل، و دایره‌ای به شعاع a . دایره در صفحه‌ای که از سیم می‌گذرد قرار دارد و فاصله مرکز آن تا سیم r است. ضریب القای متقابل بین دو مدار را محاسبه کنید.

۱۱-۱۷ خط انتقالی از دو سیم بسیار طویل به شعاع a و به فاصله d از یکدیگر تشکیل شده است. ضریب خودالقای این خط در واحد طول را حساب کنید. فرض کنید $a \gg d$ باشد تا بتوان از شار داخل خود سیمها صرف‌نظر کرد.

۱۱-۱۸ دو حلقه سیم دایره‌ای هم‌محور به شعاعهای a و b ، به فاصله محوری x از یکدیگر قرار دارند. با استفاده از فرمول نویمان نشان دهید که ضریب القای متقابل حلقه‌ها برابر است با

$$M = \mu_0 (ab)^{1/2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + x^2}$$

و $K(k)$ و $E(k)$ انتگرالهای کامل بیضوی اند که به صورت زیر تعریف می شوند

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

و

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

۱۱-۱۹ مسئله قبل را بار دیگر در نظر بگیرید. با بسط $1/|r_2 - r_1|$ در فرمول نویمان مطابق قضیه دوجمله‌ای از نتیجه جمله به جمله انتگرال گیری کنید و رابطه زیر را به دست آورید.

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2h^3} \left(1 + 3 \frac{ab}{h^2} + \frac{75}{8} \frac{a^2 b^2}{h^4} + \dots \right)$$

که در آن $h^2 = x^2 + (a+b)^2$ است.

۱۱-۲۰ دو مدار با ضرایب خودالقای L_1 و L_2 و مقاومتهای R_1 و R_2 نزدیک یکدیگر قرار دارند. اگر ضریب القای متقابل مدارها M باشد و یک ولتاژ اعمالی \mathcal{V} ناگهان به طور متوالی به یکی از آنها متصل شود، نشان دهید که یک بار الکتریکی به اندازه $Q = \mathcal{V}M/R_1 R_2$ در مدار دیگر به گردش در می آید.

۱۱-۲۱ (الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۱۱-۹ گشتاور نیروی وارده بر یک دیسک آلومینیومی چرخان را با سرعت زاویه‌ای 60° رادیان بر ثانیه که تحت تأثیر میدان مغناطیسی 3 T در ناحیه‌ای به مساحت 4 cm^2 در فاصله شعاعی 3 m قرار دارد، محاسبه کنید. ضخامت دیسک 2 cm است. (ب) اگر گشتاور لختی دیسک 2 kg m^2 باشد، زمان لازم برای کاهش سرعت زاویه‌ای آن را به 30° رادیان بر ثانیه به دست آورید.

۱۱-۲۲ دو پیچه دایره‌ای تخت در یک صفحه قرار دارند و هم‌محور هستند. پیچه بزرگ به شعاع 10 cm تعداد 20 دور سیم و پیچه کوچک به شعاع 1 cm تعداد 10 دور سیم دارد. (الف) ضریب القای متقابل این دو پیچه را محاسبه کنید. (ب) هنگامی که پیچه کوچکتر حول یکی از قطره‌های چرخانده شود، M به چه نحوی تغییر خواهد کرد.

۱۱-۲۳ یک محیط نامغناطیسی رسانا با رسانندگی g مفروض است و تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی تابع زمان $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ قرار گرفته است. (الف) از صورت دیفرانسیلی قانون فاراده، معادله

۱۱-۶) شروع کنید و نشان دهید که با فرض عدم تجمع بار (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$) چگالی جریان گردابی القایی در محیط در معادله دیفرانسیل $\nabla^2 \mathbf{J} = g\mu_0 (\partial \mathbf{J} / \partial t)$ صدق می‌کند. (ب) نشان دهید \mathbf{E} و \mathbf{B} نیز در همین معادله صدق می‌کنند.

۱۱-۲۴) نشان دهید که emf در یک مدار ثابت C از رابطه زیر به دست می‌آید

$$-\frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری است.

۱۱-۲۵) "میدان بی‌نیرو" میدانی است که برای آن $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ باشد. (الف) نشان دهید چنین میدانی در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\alpha^2 \mathbf{B}$$

که در آن α ثابت است. [راهنمایی: در میدان بی‌نیرو $\nabla \times \mathbf{B}$ با \mathbf{B} موازی است]. (ب) نشان دهید \mathbf{J} در همین معادله صدق می‌کند. (ج) با استفاده از نتیجه مسئله ۱۱-۲۳ وابستگی زمانی چگالی جریان و میدانها را پیدا کنید.

۱۱-۲۶) میدان الکتریکی القایی توسط $\dot{\mathbf{B}} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ را می‌توان به‌طور صریح به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

(الف) با مشتق‌گیری در داخل انتگرال صحت روابط $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ را تحقیق کنید. (ب) نشان دهید که گرادیان هر تابعی را که پاسخ معادله لاپلاس باشد، می‌توان به \mathbf{E} افزود.

انرژی مغناطیسی

برقراری میدان مغناطیسی مستلزم صرف انرژی است؛ این مطلب مستقیماً از قانون القای فاراده نتیجه می‌شود. هرگاه چشمه ولتاژ \mathcal{V} به مداری متصل شود، آنگاه، به‌طور کلی جریان در مدار با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{V} + \mathcal{E} = IR \quad (۱-۱۲)$$

که در آن \mathcal{E} مقدار emf القایی و R مقاومت مدار جریان است. کاری که \mathcal{V} در حرکت نمو بار $dq = Idt$ در مدار انجام می‌دهد برابر است با

$$\mathcal{V} dq = \mathcal{V} I dt = -\mathcal{E} I dt + I^2 R dt = I d\Phi + I^2 R dt \quad (۲-۱۲)$$

به شکل آخر آن با استفاده از قانون فاراده، معادله (۲-۱۱)، به‌دست آمده است. جمله $I^2 R dt$ نشان‌دهنده تبدیل برگشت‌ناپذیر انرژی الکتریکی به گرماست توسط مدار، لیکن این جمله فقط در مواردی برابر با تمامی کار ورودی است که تغییر شار صفر باشد. جمله اضافی، $I d\Phi$ کاری است که علیه emf القاشده در مدار انجام می‌شود، و عبارت است از آن قسمت از کار انجام‌شده

به وسیله \mathcal{V} که در تغییر ساختار میدان مغناطیسی مؤثر است. با کنار گذاشتن جمله $\int I^2 R dt$ می توان نوشت

$$dW_b = I d\Phi \quad (3-12)$$

که در آن شاخص b نشان می دهد که این کار را چشمه های خارجی انرژی الکتریکی (مثلاً باتریها) انجام داده اند. نمو کار، معادله (۳-۱۲)، ممکن است مثبت یا منفی باشد. این نمو وقتی مثبت است که تغییر شار $d\Phi$ مدار با شاری که در آن به وسیله جریان I ایجاد می شود هم جهت باشد. برای یک مدار صلب و ساکن که بجز اتلاف گرمای ژول هیچ انرژی دیگری از دست نمی دهد (مثلاً پسماند ندارد)، جمله dW_b برابر است با تغییر انرژی مغناطیسی مدار. در این فصل، ما چندین عبارت معادل برای انرژی مغناطیسی دستگاهی از مدارهای جفت شده، و معادلاتی برای تعیین نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر یک مدار صلب را به دست خواهیم آورد. درباره اتلاف پسماند در بخش ۱۲-۴ بحث می شود، لیکن در حال حاضر بررسی خود را به دستگاههای برگشت پذیر مغناطیسی محدود می کنیم. روش بررسی در اینجا به آنچه که در فصل ۶ داشتیم بسیار نزدیک است.^۱

۱۲-۱ انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده

در این بخش رابطه ای برای انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان که با یکدیگر برهم کنش دارند، به دست خواهیم آورد. اگر n مدار وجود داشته باشد، آنگاه مطابق معادله (۳-۱۲)، کار انجام شده علیه emfهای القایی با رابطه زیر داده می شود، که یک رابطه کلی است

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (4-12)$$

این رابطه بدون بستگی به چگونگی تولید نوهای شار $d\Phi_i$ معتبر است. اما بخصوص حالتی مورد توجه ماست که در آن $d\Phi_i$ با تغییرات جریان در خود n مدار به وجود می آیند. در چنین شرایطی تغییرات شار مغناطیسی مستقیماً با تغییرات جریانها مربوط اند

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (5-12)$$

۱. یک تذکر برای احتیاط: در اثباتهای این فصل به طور غیر صریح فرض شده است که مدارها انرژی الکترومغناطیسی تابش نمی کنند. به عبارت دیگر، جریانهای درون مدارها می بایست "تغییرات کند" داشته باشند (برای بحثی درباره این اصطلاح به بخش ۱۳-۱ مراجعه کنید). اگر بخواهیم مورد کلی را مورد بحث قرار دهیم، بدون قید محدودیتی بر جریانها و اندازه مدارها، می بایست از روابط انرژی که از معادلات ماکسول به دست می آید، استفاده کنیم (به بخش ۱۶-۳ مراجعه شود).

چنانچه مدارها صلب^۱ و ساکن باشند، هیچ کار مکانیکی با این تغییرات شار مغناطیسی $d\Phi_i$ همراه نخواهد بود، و dW_b درست برابر است با تغییر در انرژی مغناطیسی دستگاه، یعنی برابر است با dU . توجه کنید که در اینجا ما خود را به مدارهای ساکن محدود می‌کنیم تا بتوانیم انرژی مغناطیسی را به‌عنوان یک جمله کار محاسبه کنیم. بعداً موردی را که مدارها نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند مطالعه خواهیم کرد، اما در آن صورت دیگر نخواهیم توانست dU را با dW_b یکی بدانیم.

انرژی مغناطیسی U برای دستگاهی متشکل از n مدار صلب و ساکن با انتگرال‌گیری از معادله (۱۲-۴)، از وضع شار صفر (متناظر با همه I_i ها برابر صفر) تا مقادیر نهایی شارها، به دست می‌آید. برای گروهی از مدارهای صلب که حاوی محیطهای مغناطیسی خطی باشند، یا در چنین محیطهایی قرار داشته باشند، Φ_i ها به‌طور خطی با جریان مدارها مربوط‌اند و انرژی مغناطیسی به این‌که جریانها چگونه به مقادیر نهایی خود رسیده‌اند بستگی ندارد. چون مورد مدارهای صلب و محیطهای خطی اهمیت بسیاری دارد، توجه خود را به این مورد معطوف می‌کنیم.

چون انرژی نهایی به ترتیب تغییر جریانها بستگی ندارد، می‌توانیم طرح خاصی را اختیار کنیم که در آن W را به‌آسانی بتوان محاسبه کرد. در این طرح تمام جریانها (و در نتیجه تمام شارها) را به‌طور هماهنگ به مقدار نهایی‌شان می‌رسانیم، یعنی در هر لحظه از زمان تمام جریانها (و تمام شارها) کسر یکسانی از مقادیر نهایی خود خواهند بود. مقدار این کسر را α می‌نامیم. اگر مقادیر نهایی جریانها با نمادهای

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

نمایش داده شوند، آن وقت در هر مرحله $I_i' = \alpha I_i$ ؛ به‌علاوه، $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$. انتگرال‌گیری از معادله (۱۲-۴) نتیجه می‌دهد

$$\int dW_b = \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^n I_i' \Phi_i = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

بنابراین انرژی مغناطیسی n مدار جفت‌شده برابر است با

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (\text{مدارهای صلب، محیطهای خطی}) \quad (6-12)$$

۱. منظور ما از مدار صلب مداری است که شکل آن ثابت است ولی می‌تواند به‌طور یکپارچه حرکت داده شود.

به کمک معادله (۱۲-۵)، که برای یک مدار صلب و دستگاه خطی مستقیماً قابل انتگرال‌گیری است، انرژی مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \\
 &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_n I_n^2 \\
 &\quad + M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \dots + M_{1n} I_1 I_n \\
 &\quad + M_{23} I_2 I_3 + \dots + M_{n-1,n} I_{n-1} I_n
 \end{aligned}
 \tag{۷-۱۲}$$

(مدارهای صلب، محیطهای خطی)

در اینجا نتایج و علائم مربوط به بخشهای ۱۱-۳ و ۱۱-۴، یعنی $M_{ij} = M_{ji}$ و $M_{ii} = L_i$ را به‌کار برده‌ایم.

برای دو مدار جفت‌شده، معادلهٔ اخیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \tag{۸-۱۲}$$

در اینجا برای سادگی، M را به جای M_{12} نوشته‌ایم. جملهٔ $M I_1 I_2$ ممکن است مثبت یا منفی باشد، اما انرژی کل مغناطیسی U باید به‌ازای کلیهٔ مقادیر جریانهای I_1 و I_2 مثبت (و یا صفر) باشد. اگر نسبت I_1/I_2 را با x نشان دهیم، خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{2} I_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0$$

برای محاسبهٔ مقدار x ، که به‌ازای آن U کمینه (یا بیشینه) می‌شود، باید مشتق U را برحسب x محاسبه کرد و مساوی صفر قرار داد. نتیجه چنین خواهد بود

$$x = -\frac{M}{L_1} \tag{۹-۱۲}$$

مشتق دوم U نسبت به x مثبت است، و این نشان می‌دهد که رابطهٔ (۹-۱۲) شرط کمینه بودن است. برای تمام مقادیر x انرژی مغناطیسی بزرگتر یا مساوی صفر است، بخصوص مقدار کمینهٔ U (که به‌ازای $x = -M/L_1$ به‌دست می‌آید) بزرگتر یا مساوی صفر است پس

$$\frac{M^2}{L_1} - \frac{2M^2}{L_1} + L_2 \geq 0$$

$$L_1 L_2 \geq M^2 \quad (10-12)$$

و این نتیجه‌ای است که در بخش ۱۱-۳ بیان شد ولی ثابت نشده بود. برای یک تک‌مدار

$$\Phi = LI$$

$$U = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (11-12)$$

۱۲-۲ چگالی انرژی در میدان مغناطیسی

معادله (۷-۱۲) انرژی مغناطیسی یک دستگاه جریان را برحسب پارامترهای مدار، یعنی جریانها و القاها به دست می‌دهد. این فرمولبندی بسیار مفید است، زیرا این پارامترها را می‌توان با اندازه‌گیری مستقیم به دست آورد. از طرف دیگر، فرمولبندی دیگری از انرژی مغناطیسی برحسب میدانهای برداری \mathbf{B} و \mathbf{H} بسیار جالب توجه خواهد بود، زیرا تصویری را عرضه می‌کند که در آن انرژی در خود میدان مغناطیسی ذخیره شده است. این تصویر را می‌توان تعمیم داد، همان‌گونه که در فصل ۱۶ انجام شده است، تا نشان داده شود که چگونه در فرایندهای غیرساکن، انرژی از طریق میدان الکترومغناطیسی منتقل می‌شود.

یک دسته مدار صلب حامل جریان را در نظر بگیرید که هیچ‌یک از آنها تا بی‌نهایت ادامه ندارند، و در محیطی با خواص مغناطیسی خطی قرار گرفته‌اند. انرژی این دستگاه از معادله (۶-۱۲) به دست می‌آید. در بحث فعلی، برای سهولت، فرض می‌کنیم که هر مدار فقط از یک تک‌حلقه تشکیل شده است؛ در این صورت شار Φ_i به صورت زیر بیان می‌شود

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (12-12)$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری موضعی است. با قرار دادن این نتیجه در معادله (۶-۱۲) به دست می‌آوریم

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (12-13 \text{ الف})$$

می‌خواهیم معادله (۱۲-۱۳ الف) را به صورت کلی‌تری بیان کنیم. فرض کنید که مدارهای جریان مشخص شده با سیم نداریم، بلکه در عوض هر "مدار" مسیر بسته‌ای است در محیط (فرض می‌شود که محیط رساناست) که بر یک خط چگالی جریان منطبق است. معادله (۱۲-۱۳ الف)

را می‌توان با تقریب خوبی برای این وضع به‌کار برد، مشروط بر اینکه تعداد بسیار زیادی از مدارهای فرضی (C_i) را در نظر بگیریم و جایگزینی $\mathbf{J} dv \rightarrow I_i d\mathbf{l}_i$ را انجام دهیم، و بالاخره با جایگزینی

$$\sum_i \oint_{C_i} \quad \text{به جای} \quad \int_V$$

بدین ترتیب

$$U = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \quad (12-13 \text{ ب})$$

معادلهٔ اخیر را با استفاده از معادلهٔ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ و اتحاد برداری (1-1-8):

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد

$$U = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dv - \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (12-14)$$

در اینجا S سطحی است که حجم V را محصور می‌کند. چون مطابق فرض هیچ‌یک از مدارهای جریان تا بی‌نهایت ادامه ندارند، بهتر است که سطح S را به فواصل بسیار دور ببریم تا تمام قسمتهای این سطح از جریانها دور باشند. طبعاً حجم دستگاه نیز باید متناسباً افزایش یابد. اما \mathbf{H} دست‌کم به نسبت $1/r^2$ کوچک می‌شود، که در آن r فاصلهٔ مبدائی است در حوالی وسط توزیع جریان تا نقطهٔ معینی بر روی سطح S . همچنین \mathbf{A} دست‌کم به نسبت $1/r$ با فاصلهٔ کوچک می‌شود؛ و مساحت سطح S با r^2 متناسب است. بنابراین، سهم انتگرال سطحی در معادلهٔ (12-14) با افزایش r ، به نسبت $1/r$ و یا تندتر کاهش می‌یابد، و اگر S به سمت بی‌نهایت میل کند، این انتگرال صفر می‌شود.

با حذف انتگرال سطحی در معادلهٔ (12-14) و بسط انتگرال حجمی بر روی تمام فضا، نتیجه می‌گیریم که

$$U = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (12-15)$$

در این رابطه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ منظور شده است. این نتیجه کاملاً مشابه انرژی الکتروستاتیکی، یعنی معادلهٔ (6-17)، است. معادلهٔ (12-15) براساس معادلهٔ (12-6) به دست آمد، بنابراین این معادله به دستگاههایی محدود می‌شود که شامل محیطهای خطی مغناطیسی باشند.

با دلایلی مشابه آنچه در بخش ۳-۶ آمد، به مفهوم چگالی انرژی در میدان مغناطیسی می‌رسیم، یعنی به

$$u = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (۱۲-۱۶\text{الف})$$

برای اجسام مغناطیسی همسانگرد و خطی این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$u = \frac{1}{\mu} \mu H^2 = \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (۱۲-۱۶\text{ب})$$

۳-۱۲ نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر مدارهای صلب

تا اینجا چندین عبارت بدیل برای انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان به دست آوردیم. این عبارتها با معادلات (۱۲-۶)، (۱۲-۷)، و (۱۲-۱۵) بیان شده‌اند. حال نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان نیرو، یا گشتاور نیروی وارد بر یکی از اجزای چنین دستگاهی را با دانستن انرژی مغناطیسی به دست آورد.

فرض کنید یکی از قسمتهای دستگاه، بدون تغییر شکل، تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی وارد بر آن به اندازه $d\mathbf{r}$ جابه‌جا شود، در حالی که همه جریانها ثابت بمانند. کار مکانیکی انجام شده توسط نیروی \mathbf{F} وارد بر دستگاه، مانند معادله (۳۲-۶)، عبارت است از

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۲-۱۷)$$

مانند معادله (۳۷-۶)، در این شرایط کار از دو قسمت تشکیل شده است

$$dW = dW_b - dU \quad (۱۲-۱۸)$$

که در آن dU تغییر انرژی مغناطیسی دستگاه، و dW_b کار انجام شده توسط منابع خارجی انرژی علیه emf‌های القایی است برای ثابت نگه داشتن جریانها.

قبل از آنکه بتوانیم برای پیدا کردن رابطه‌ای که U را به نیروی وارد بر قسمتی از دستگاه مربوط می‌سازد قدم دیگری برداریم، لازم است که dW_b را از معادله (۱۲-۱۸) حذف کنیم. این کار را برای دستگاهی متشکل از مدارهای صلب که در محیطهای خطی مغناطیسی قرار گرفته‌اند به آسانی می‌توان انجام داد. هرگاه وضع هندسی دستگاه را با حرکت دادن یک یا چند

جزء از دستگاه به صورت واحدهای صلب تغییر دهیم بی آنکه هیچ جریانی تغییر کند، آنگاه بر طبق معادله (۶-۱۲)

$$dU = \frac{1}{\mu_0} \sum_i I_i d\Phi_i$$

اما، از معادله (۴-۱۲) داریم

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i$$

بنابراین

$$dW_b = \mu_0 dU \quad (۱۹-۱۲)$$

با استفاده از این معادله برای حذف dW_b از معادله (۱۸-۱۲)، و پس از ترکیب نتیجه حاصل با معادله (۱۷-۱۲)، نتیجه زیر را به دست می آوریم

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

یا

$$\mathbf{F} = \nabla U$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I \quad (۲۰-۱۲)$$

یعنی نیروی وارد بر مدار برابر است با گرادیان انرژی مغناطیسی، وقتی I ثابت نگه داشته شود. هرگاه مدار مورد نظر طوری مقید باشد که فقط حرکتی دورانی حول یک محور انجام دهد، آنگاه می توان به جای معادله (۱۷-۱۲) از معادله زیر استفاده کرد

$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3$$

که در آن $\boldsymbol{\tau}$ گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر مدار و $d\boldsymbol{\theta}$ تغییر مکان زاویه ای است. تحت این شرایط داریم

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_I \quad (۲۱-۱۲)$$

و به همین ترتیب برای بقیه مؤلفه ها. نتایج (۲۰-۱۲) و (۲۱-۱۲) برای جریان ثابت به مورد الکتروستاتیکی با پتانسیل ثابت شباهت دارند. در آنجا انجام کار توسط باتری لازم بود تا پتانسیلها ثابت نگه داشته شوند.

در بعضی موارد جالب دیگر می‌توان شار گذرنده از مدارها را ثابت در نظر گرفت. در این صورت مطابق معادله (۱۲-۴)، $dW_b = 0$ ، و بنابراین می‌توان دستگاه را منزوی فرض کرد.^۱ در نتیجه

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU$$

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\Phi} \quad (۲۲-۱۲)$$

$$\tau_1 = - \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_{\Phi} \quad (۲۳-۱۲)$$

درست نظیر مورد الکتروستاتیکی، برای اینکه بتوانیم از روش انرژی استفاده کنیم لازم است که U را به صورت تحلیلی بیان کنیم، یعنی، بستگی خاص U به مختصات متغیر $(x, y, z, \theta_1, \theta_2)$ یا (θ_3) باید داده شده باشد. وقتی U را بتوانیم به این طریق بیان کنیم، روش انرژی در محاسبه نیروها و گشتاور نیروها روشی بسیار مؤثر خواهد بود.

با ذکر دو مثال، کاربرد این روش را نشان می‌دهیم. تمرینهای دیگری از این قبیل در مسائل آخر فصل آمده است.

مثال ۱-۱۲ نیروی بین دو مدار حامل جریان

می‌خواهیم نیروی بین دو مدار صلب حامل جریانهای ثابت را محاسبه کنیم و از انرژی مغناطیسی که با معادله (۱۲-۸) داده شده است، استفاده کنیم.

حل: نیروی وارد بر مدار ۲ عبارت است از

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M$$

در اینجا القای متقابل M طوری باید نوشته شود که بستگی آن به \mathbf{r}_2 مشخص باشد. فرمول نویمان، معادله (۱۱-۳۵) این بستگی را صریحاً نشان می‌دهد، پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \end{aligned} \quad (۲۴-۱۲)$$

۱. در یک مدار معمولی باز هم به یک باتری نیاز داریم تا اتلاف توان $I^2 R$ را تأمین کند، اما ما این اتلاف را نادیده می‌گیریم. اگر سیمها ابرسانا باشند ($R = 0$)، دستگاه را می‌توان واقعاً منزوی انگاشت.

این رابطه تقارن مورد نظر، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ، را به وضوح نشان می‌دهد.

اما توجه کنید که ما قبلاً نیز رابطه‌ای برای نیروی بین دو مدار، معادله (۲۵-۸)، داشتیم که با آنچه در بالا به دست آوردیم ظاهراً فرق می‌کند. در واقع این دو رابطه معادل‌اند و می‌توان صحت این موضوع را به آسانی بررسی کرد. ضرب سه‌گانه موجود در انتگرالده معادله (۲۵-۸) را بسط می‌دهیم

$$d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{l}_1 [d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

انتگرالی که شامل جمله آخر در سمت راست باشد با معادله (۲۴-۱۲) یکی است؛ انتگرالی را که شامل جمله اول است می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (25-12)$$

اما $d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ برابر است با حاصل ضرب $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ در تصویر $d\mathbf{l}_2$ بر روی بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. اگر $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ را با r_{21} نشان دهیم، آن وقت تصویر $d\mathbf{l}_2$ همان dr_{21} است. انتگرال بر روی C_2 را می‌توان برای مقدار ثابت $d\mathbf{l}_1$ حساب کرد

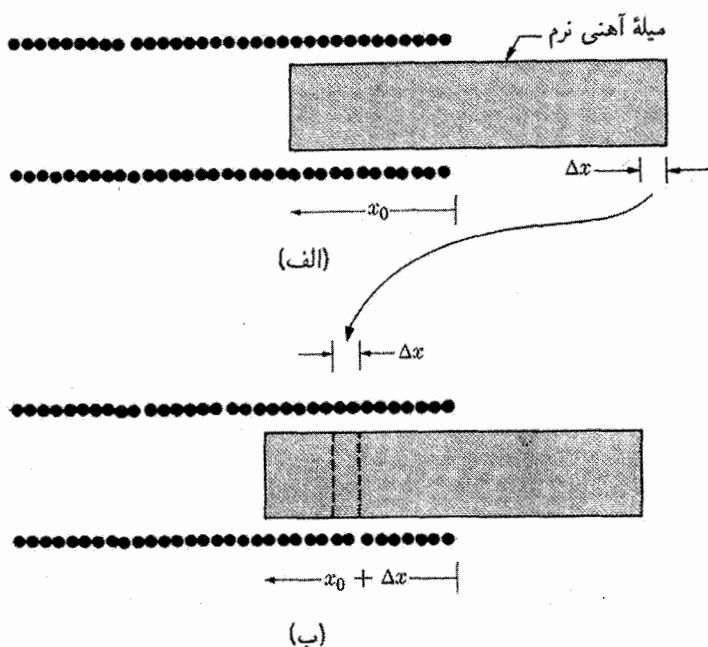
$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = -\frac{1}{r_{21}} \Big|_a^a$$

حدود بالا و پایین انتگرال یکی است، زیرا مدار بسته است. پس عبارت (۲۵-۱۲) صفر می‌شود، و معادله (۲۴-۱۲) هم‌ارز است با معادله (۲۵-۸).

مثال ۱۲-۲ نیروی وارد بر میله آهنی در یک سیم‌لوله

سیم‌لوله طولی به طول l را که N دور سیم‌پیچ دارد و جریان I از آن می‌گذرد در نظر می‌گیریم. میله آهنی نازکی با تراوایی ثابت μ و سطح مقطع A را در امتداد محور سیم‌لوله وارد آن می‌کنیم. چنانچه میله را بیرون بکشیم تا جایی که تقریباً نیمی از طول آن در سیم‌لوله باقی بماند (شکل ۱۲-۱ الف)، نیرویی که می‌کوشد میله را به داخل سیم‌لوله برگرداند به طور تقریب محاسبه کنید.

حل: چنانچه اثرهای لبه‌ای منظور شود، ساختار میدان مغناطیسی مربوط به این مسئله بسیار بغرنج است. اما خوشبختانه احتیاجی به پیدا کردن تمامی انرژی مغناطیسی دستگاه نیست، بلکه فقط محاسبه تفاوت انرژی برای دو پیکربندی دستگاه که در شکل ۱۲-۱ الف و ب) نشان داده



شکل ۱۲-۱ نیروی وارد بر میله‌ای از آهن نرم که وارد یک سیملوله شده است (با استفاده از روش انرژی).

شده‌اند، کافی است. ساختار میدان در نقاط دور از دو انتهای میله و دو انتهای سیملوله نسبتاً یکنواخت است. تفاوت اصلی میان پیکربندیهای (الف) و (ب) در این است که به‌طور مؤثر قسمتی به طول Δx از انتهای راست میله (که در خارج میدان قرار دارد) به ناحیه میدان یکنواخت داخلی سیملوله وارد می‌شود، و در جایی دور از تأثیر و امغانطنده قطب آهن با قرار می‌گیرد. لذا، چون \mathbf{H} در ناحیه Δx تقریباً طولی است، و چون مؤلفه مماسی \mathbf{H} در مرز استوانه‌ای میله پیوسته است، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$U = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv$$

در این رابطه \mathbf{H} در داخل و خارج از میله ثابت است زیرا I ثابت است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{2} \int_{A \Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dv \\ &= U(x_0) + \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x \end{aligned}$$

و بنا بر معادله (۱۲-۲۰)، مؤلفه x نیرو در جهت افزایش x برابر است با

$$F_x \approx \frac{1}{\mu_0} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{l^2} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mu_0 H^2 A \quad (۱۲-۲۶)$$

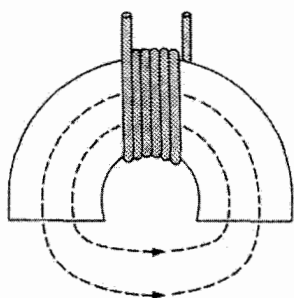
در مسئله ۱۲-۷، مثالی با Φ ثابت بررسی می‌شود.

* ۱۲-۴ اتلاف پسماند

در بخشهای گذشته بحث خود را به دستگاههای مغناطیسی برگشت‌پذیر، و در اکثر موارد به دستگاههای خطی، محدود کردیم. اینک می‌خواهیم درباره تغییرات انرژی در دستگاههای حاوی مواد آهنربای دائم، یعنی دستگاههایی که پسماند در آنها نقش مؤثری ایفا می‌کند، صحبت کنیم. یک مدار الکتریکی به صورت پیچهای مرکب از N دور نزدیک به هم را در نظر می‌گیریم که یک جسم فرومغناطیسی را احاطه کرده است (شکل ۱۲-۲). اگر پیچه به یک چشمه انرژی خارجی متصل شود، کاری که در مقابل emf القایی در پیچه انجام می‌گیرد با معادله (۱۲-۳) داده می‌شود. ولی در معادله (۱۲-۳) تغییر شار $\delta\Phi$ عبارت است از کل تغییر شار از درون مدار. برای منظور فعلی مناسب این است که نماد $\delta\Phi$ را برای نشان دادن تغییر شار از درون یک تک‌دور از پیچه به‌کار ببریم. لذا، با فرض اینکه شار عبوری از تمام دورها یکی است، داریم

$$\delta W_b = NI \delta\Phi \quad (۱۲-۳الف)$$

حال جسم فرومغناطیسی را به‌عنوان جزئی از یک مدار مغناطیسی در نظر می‌گیریم. در این صورت NI را می‌توان با $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ ، به دور یک مسیر شار نوعی تعویض کرد، و معادله



شکل ۱۲-۲ یک جسم فرومغناطیسی که قسمتی از یک مدار مغناطیسی را تشکیل می‌دهد.

(۱۲-۳الف) را به شکل زیر نوشت^۱

$$\delta W_b = \oint \delta \Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

که در آن A سطح مقطع مربوط به عنصر طولی $d\mathbf{l}$ از مدار مغناطیسی است. چون $d\mathbf{l}$ همیشه بر مسیر شار مماس است، معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\delta W_b = \oint A \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (۱۲-۲۷)$$

که در آن V حجم مدار مغناطیسی است، یعنی، ناحیه‌ای از فضا که میدان مغناطیسی در آنجا صفر نیست.

اگر جسم فرومغناطیسی موجود در دستگاه خاصیت مغناطیسی برگشت پذیر داشته باشد، می‌توان از معادله (۱۲-۲۷)، از $\mathbf{B} = 0$ تا مقدار نهایی آن، انتگرال گرفت تا انرژی مغناطیسی دستگاه به دست آید. برای مواد خطی، انرژی به دست آمده با انرژی بیان شده توسط معادله (۱۲-۱۵) یکی است. ولی معادله (۱۲-۲۷) از این خیلی کلی تر است؛ این معادله کار انجام شده بر روی دستگاه مغناطیسی را، حتی در مواردی که پسماند وجود داشته باشد، به درستی پیشگویی می‌کند.

بنا بر معادله (۱۲-۲۷)، هر تغییری در ساختار میدان مغناطیسی مستلزم مقدار

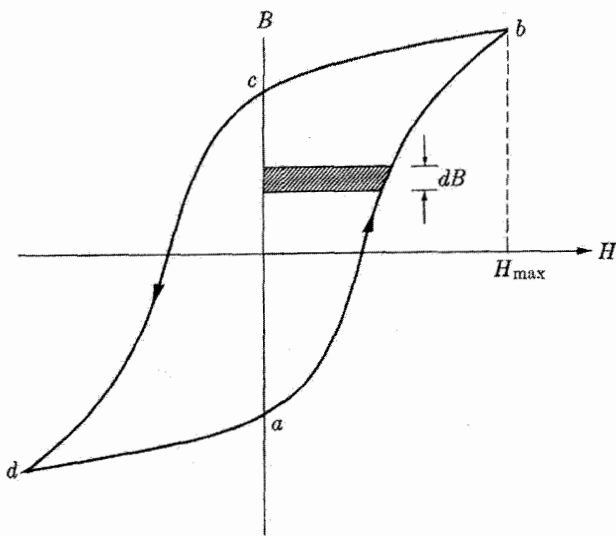
$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (۱۲-۲۸)$$

کار در واحد حجم ماده مغناطیسی (یا خلا) در دستگاه است. یک حالت جالب توجه آن است که ماده یک چرخه را طی کند، مثل وقتی که پیچهای که جسم را احاطه کرده است تحت تأثیر یک جریان متناوب قرار می‌گیرد. در یک چرخه شدت مغناطیسی H (برای یک نقطه نوعی در جسم نمونه) از صفر شروع می‌شود، به بیشینه خود H_{\max} افزایش می‌یابد، به $-H_{\max}$ کاهش می‌یابد، و سپس به صفر باز می‌گردد. میدان مغناطیسی B نیز تغییرات مشابهی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که برای یک فرومغناطیس نوعی نسبت به H عقب افتادگی خواهد داشت، و در نتیجه یک منحنی پسماند را طی می‌کند (شکل ۱۲-۳). کار ورودی لازم (در واحد حجم) برای تغییر میدان

۱. می‌توان تحلیلی را که در اینجا ارائه شده است با جانشین کردن مدار مغناطیسی به وسیله تعداد زیادی مسیرهای شار مغناطیسی (مدارهای مغناطیسی موازی) با طولهای مختلف، بر پایه استوارتری قرار داد. در این صورت معادله (۱۲-۳الف) به شکل زیر در می‌آید

$$\delta W_b = NI \sum_j \delta \Phi_j = \sum_j \oint \delta \Phi_j \cdot \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_j$$

که در آن $\delta \Phi_j$ عبارت است از تغییر شار مربوط به یکی از این مسیرها. نتیجه نهایی، معادله (۱۲-۲۷)، تغییر نمی‌کند.



شکل ۳-۱۲ کار انجام شده در واحد حجم در طی یک چرخه در ماده فرومغناطیسی.

مغناطیسی بر روی منحنی پسماند از نقطه a به نقطه b ، یعنی

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB$$

درست مساوی است با مساحت سطح محصور بین قطعه ab از منحنی پسماند و محور B . این مساحت مثبت است، زیرا H و dB هر دو مثبت‌اند. سهم $(w_b)_{bc}$ نیز مساوی مساحت سطح بین قطعه دیگری از منحنی پسماند (bc) و محور B است، ولی باید منفی به حساب آید، زیرا که H و dB دارای جهات مخالف‌اند. مطالب مشابهی می‌توان در مورد $(w_b)_{cd}$ و $(w_b)_{da}$ بیان کرد. لذا در طی یک چرخه به دور حلقه پسماند ماده، کار لازم در واحد حجم عبارت است از

$$w_b = \oint H dB \quad (۲۹-۱۲)$$

که مساوی است با مساحت محصور به وسیله حلقه پسماند.

در پایان یک چرخه کامل، حالت مغناطیسی جسم همان است که در شروع چرخه بود؛ بنابراین "انرژی مغناطیسی" جسم به همان اندازه قبلی آن است. پس واضح است که معادله (۲۹-۱۲) معرف اتلاف انرژی است. این انرژی ازدست‌رفته به صورت گرما ظاهر می‌شود، و از تغییرات برگشت‌ناپذیر در ساختار حوزه‌ای ماده نتیجه می‌شود. اتلاف پسماند عامل مهمی در

مدارهای دارای جریان متناوب محسوب می‌شود. معادله (۱۲-۲۹) معرف اتلاف انرژی در واحد حجم در هر چرخه است؛ پس اتلاف انرژی در واحد زمان مستقیماً با فرکانس جریان متناوب متناسب است.

طبق معادله (۱۲-۲۸)، کار لازم جهت تغییر میدان مغناطیسی در واحد حجم ماده برابر است با

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (الف\ ۱۲-۲۸)$$

گاهی مناسب است در مورد جمله $\mu_0 H dH$ (کار انجام شده بر روی خلأ) چنین بیندیشیم که چه ماده‌ای در کار باشد و چه نباشد، وجود خواهد داشت. با این دید، جمله $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ کار ویژه انجام شده بر روی ماده خواهد بود. این روشی است که معمولاً در کتابهای ترمودینامیک به کار می‌رود، و مبنای بحث فرایندهایی نظیر "سردسازی مغناطیسی" است.

چون انتگرال $H dH$ در یک چرخه کامل صفر می‌شود، معادله (۱۲-۲۹) معادل است با

$$w_b = \mu_0 \oint H dM \quad (الف\ ۱۲-۲۹)$$

با استفاده از $d(MH) \equiv H dM + M dH$ ، معادله بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$w_b = -\mu_0 \oint M dH \quad (ب\ ۱۲-۲۹)$$

۱۲-۵ خلاصه مطالب

کاری که یک عامل خارجی (مثلاً یک باتری) برای تغییر میدان مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان انجام می‌دهد برابر است با

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i$$

(در اینجا کاری را که برای تأمین اتلاف گرمای ژول در مدارهای مقاومت دار انجام می‌شود، منظور نکرده‌ایم). انرژی پتانسیل مغناطوستاتیکی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان و محیطهای مغناطیسی خطی عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

که در آن

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j$$

برای یک توزیع جریان پیوسته در محیطهای خطی، انرژی مغناطیسی عبارت است از

$$U = \frac{1}{\mu} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dv$$

که در آن پتانسیل برداری \mathbf{A} پتانسیلی است که چگالی جریان \mathbf{J} تولید می‌کند. با انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی در مواد مغناطیسی خطی به یک انتگرال بر روی چگالی انرژی میدان مغناطیسی تبدیل می‌شود

$$U = \int u \, dv$$

که در آن چگالی انرژی میدان مغناطیسی برابر است با

$$u = \frac{1}{\mu} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mu H^2 = \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{\mu}$$

• برای یک تک‌مدار

$$U = \frac{1}{\mu} I \Phi$$

با

$$\Phi = LI$$

• نیروی مغناطیسی وارد بر قسمتی از یک دستگاه منزوی، با شار ثابت از درون هر مدار، برابر است با منفی گرادیان انرژی مغناطیسی

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\Phi}$$

اگر دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض جریان در هر مدار توسط یک عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شود، نیرو با رابطه زیر داده می‌شود

$$F_x = + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I$$

• با حضور ماده غیرخطی، و وجود پسماند، داریم

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

در یک چرخه کامل از یک فرایند چرخه‌ای، داریم

$$w_b = \oint H \, dB = \mu_0 \oint H \, dM = -\mu_0 \oint M \, dH$$

۱۲-۱ یک مدار جریان (که لزوماً صلب نیست) در میدان مغناطیسی مفروضی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر هر جزء $d\mathbf{l}$ از مدار برابر است با $I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. اگر مدار تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی وارد بر آن به حرکت در آید به طوری که هر جزء مدار به اندازه $\delta\mathbf{r}$ جابه‌جا شود و جریان I در عین حال ثابت نگه داشته شود، یا محاسبه مستقیم نشان دهید که کار مکانیکی انجام‌شده توسط نیرو برابر است با $\delta W = I \delta\Phi$ که در آن شار اضافه‌ای است که از درون مدار می‌گذرد.

۱۲-۲ یک دسته مدار جریان که با یکدیگر برهم‌کنش دارند، در یک محیط مغناطیسی خطی قرار دارند. تمام مدارها بجز مدار ۱ ثابت نگه داشته می‌شوند، ولی مدار ۱ می‌تواند مثل یک جسم صلب حرکت کند. تمام جریانها توسط باتریهایی ثابت نگه داشته می‌شوند. با ترکیب معادلات (۱۲-۴)، (۱۲-۶) و (۱۲-۸) نشان دهید که کار مکانیکی انجام‌شده توسط مدار متحرک برابر است با $dW = I_1 d\Phi_1$ که تغییر شار در مدار ۱ است.

۱۲-۳ دو مدار جریان که با یکدیگر برهم‌کنش دارند با القاهای $L_1 = \beta I_1^s$ و $L_2 = \beta I_2^s$ ، $M_{12} = M_{21} = \beta I_1^{s/2} I_2^{s/2}$ مشخص می‌شوند، که در آنها β و s ثابت‌اند. این دستگاه یک دستگاه مغناطیسی برگشت‌پذیر است ولی خطی نیست. انرژی مغناطیسی دستگاه را برحسب جریانهای نهایی I_1 و I_2 محاسبه کنید. این کار را به دو روش انجام دهید: (الف) جریانها را با هم به مقادیر نهایی‌شان ببرید و (ب) در حالی که I_1' را برابر با صفر نگه می‌دارید I_1' را به مقدار نهایی آن ببرید، و سپس I_1' را تغییر دهید.

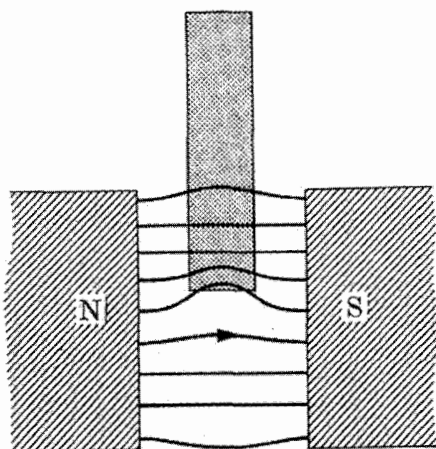
۱۲-۴ مداری به شکل یک حلقه دایره‌ای از سیم به شعاع b در مرکز حلقه بزرگتری به شعاع a قرار گرفته است، $b \ll a$. مدار کوچکتر طوری نصب شده است که می‌تواند حول یکی از قطرهایش که در صفحه مدار بزرگتر واقع است بچرخد. از این مدارها جریانهای پایایی I_a و I_b می‌گذرند. (الف) اگر زاویه بین بردارهای عمود بر دو مدار θ باشد، گشتاور نیروی وارد بر مدار چرخنده را پیدا کنید. (ب) جهت این گشتاور وقتی که جهات جریانهای I_a و I_b یکسان باشند، چیست؟

* ۱۲-۵ یک آهنربای الکتریکی به شکل U و به طول l ، که فاصله دو قطب آن d است، دارای تراوایی μ ، و مقطع مربعی به مساحت A است. این آهنربا N دور سیم‌پیچ حامل جریان I است. قطبهای این آهنربا با چه نیرویی میله‌ای از همان جنس و همان مقطع را می‌توانند نگه دارند؟

۱۲-۶ یک آهنربای دائم با مغناطش ثابت، و مداری که به یک باتری متصل است، تشکیل یک دستگاه منزوی را می‌دهند. مدار نسبت به آهنربا می‌تواند حرکت کند، در عین حال جریان I درون

مدار ثابت نگه داشته می‌شود. کار مکانیکی انجام شده به وسیله مدار در مسئله ۱۲-۱ داده شده است. چه نتیجه‌ای درباره تغییر انرژی مغناطیسی این دستگاه می‌توانید بگیرید؟

۱۲-۷ میدان مغناطیسی بین دو قطب یک آهنربای الکتریکی نسبتاً یکنواخت است و در مقدار ثابت B_0 نگه داشته می‌شود. یک تیغه پارامغناطیسی که فقط می‌توان به طور عمودی حرکت کند، مطابق شکل ۱۲-۴، در این میدان قرار داده می‌شود. پذیرفتاری میله χ_m و سطح مقطع آن A است. (الف) نیروی وارد بر تیغه را محاسبه کنید. (ب) مقدار عددی نیرو را چنانچه جنس میله از تیتانیوم باشد پیدا کنید؛ $A = 1 \text{ cm}^2$ و $B_0 = 0.25 \text{ T}$.



شکل ۱۲-۴ یک تیغه پارامغناطیسی که بین صفحات دو قطب یک آهنربا قرار داده می‌شود.

* ۱۲-۸ مطابق نتیجه مسئله ۱۲-۱، نیروی وارد بر یک مدار جریان در یک میدان مغناطیسی مفروض با رابطه $\mathbf{F} = I \nabla \Phi$ داده می‌شود. اگر مدار خیلی کوچک باشد، میدان مغناطیسی \mathbf{B} بر روی سطح محصور به وسیله مدار را می‌توان ثابت فرض کرد. به علاوه، خود مدار را نیز می‌توان با گشتاور دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} مشخص کرد. نشان دهید که وقتی میدان مغناطیسی مفروض در محل دوقطبی چشمه‌ای نداشته باشد (یعنی \mathbf{J} و \mathbf{J}_M صفر باشد)، نیروی وارد بر دوقطبی عبارت است از

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

۱۲-۹ مدار صلبی که شامل یک دور حلقه سیم است، در یک میدان مغناطیسی شعاعی و متناسب با عکس مجذور فاصله، $\mathbf{B} = Kr/r^3$ ، قرار دارد. نشان دهید نیروی وارد بر مدار برابر است با $\mathbf{F} = JI \nabla \Omega$ ، که در آن Ω زاویه فضایی‌ای است که توسط مدار از مرکز میدان در بر گرفته می‌شود، و I شدت جریان در مدار است.

۱۲-۱۰ مرکز یک مدار مسطح دایروی به شعاع R که یک دور سیمپیچ دارد روی محور x و به فاصله x از مبدأ قرار دارد. مدار حامل جریان I است و جهت مثبت عمود بر صفحه آن در جهت $-x$ است. نیروی وارد بر مدار از طرف یک میدان شعاعی و واگرا از مبدأ، یعنی $\mathbf{B} = K\mathbf{r}/r^3$ را حساب کنید.

۱۲-۱۱ یک سیملوله بسیار طویل، با N/l دور سیمپیچ در واحد طول و به شعاع R را در نظر بگیرید که میدان در داخل آن تقریباً یکنواخت و در خارج صفر است. نیروی شعاعی وارد بر یک دور از سیمپیچ، در واحد طول محیط، را از روی انرژی مغناطیسی پیدا کنید. (الف) فرض کنید که جریان I توسط یک باتری ثابت نگه داشته شود. (ب) با فرض اینکه شار ثابت بماند و دستگاه منزوی باشد (با سیمپیچهای ابررسانا) محاسبات را تکرار کنید.

۱۲-۱۲ مثال شکل ۱۲-۱۱ را برای انرژی مغناطیسی به صورت $U = \frac{1}{2}LI^2$ حل کنید. در اینجا $L = L(x_0)$ عبارت است از ضریب خودالقای سیملوله وقتی میله آهنی تا فاصله x_0 به درون سیملوله وارد شده باشد. فرض کنید که قطر میله تقریباً به بزرگی قطر سیملوله باشد، و هر دو را به قدری طویل فرض کنید که اثرهای انتهایی قابل چشمپوشی باشند.

۱۲-۱۳ برای چنبره مسئله ۱۱-۱۰ (الف) نیروی شعاعی وارد بر پیچه را وقتی که حامل جریان I است پیدا کنید. (ب) آیا این نیرو در جهتی است که پیچه را منبسط کند یا تنگ؟

۱۲-۱۴ نیروی بین سیم مستقیم و مدار مربعی شکل مسئله ۱۱-۱۵ را، وقتی جریانهای I_1 و I_2 هستند، پیدا کنید.

۱۲-۱۵ دو مدار ابررسانای منزوی که جریانهایی از آنها می‌گذرد، طوری قرار گرفته‌اند که القای متقابلشان برابر با صفر است. اینک آنها را حرکت می‌دهیم به طوری که القای متقابلشان برابر M شود. اگر مدارها یکسان باشند و جریان اولیه هر دو I_0 باشد، جریانهای نهایی I را پیدا کنید. خودالقای هر مدار L است.

۱۲-۱۶ (الف) اگر V حجم تمامی فضا باشد، و چنانچه میدانها تنها توسط آهنرباها تولید شده باشند (یعنی جریانهای انتقالی وجود نداشته باشند)، ثابت کنید که $\oint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv = 0$. (ب) آیا انرژی مغناطیسی برابر با صفر است؟

۱۲-۱۷ (الف) مساحت محصور با دو منحنی پسماند شکل ۹-۷ را تخمیناً تعیین کنید و (ب) توان اتلاقی ناشی از پسماند را در واحد حجم برای این مواد، به هنگام کار با جریان متناوب 60 Hz ، محاسبه کنید.

۱۲-۱۸ هستهٔ آرمیچر یک مولد از آهنی ساخته شده است که حلقهٔ پسماند متوسط آن تحت شرایط کاری، مساحتی برابر با 2000 ژول بر مترمکعب دارد. هستهٔ استوانه‌ای است به طول 4 در

متر و قطر ۱۵° متر. اگر آرمیچر با ۱۸۰° دور در دقیقه بچرخد، آهنک تولید گرما در هسته را محاسبه کنید.

۱۲-۱۹ یک آهنربای دائمی به شکل U (سطح مقطع 4 cm^2 و طول 3 m ، 30°) قطعه آهن نرمی را (با همان سطح مقطع) مقابل قطبهایش به محکمی نگه داشته است. با استفاده از معادله (۱۲-۲۸) کار لازم برای جداسازی این مدار مغناطیسی را محاسبه کنید. به طور اخص، کار لازم را برای هر یک از مواد نشان داده شده در شکل ۹-۹ محاسبه کنید. (فرض کنید در ابتدا $B = B_r$ و پس از جداسازی آهنربا تحت خط وامغناطش با شیب 40° قرار بگیرید.)

جریانهای گُند تغییر

در فصل ۷ با ایده مدار الکتریکی آشنا شدیم و جریانهایی را که در این مدارها به علت اعمال ولتاژهای ثابت ایجاد می‌شد، تحلیل کردیم. در این فصل می‌خواهیم این ایده‌ها را طوری بسط بدهیم که ولتاژهای گُند تغییر و جریانهای گُند تغییر حاصل از آنها را نیز در بر بگیرد. برای آنکه به‌طور صحیح درک کنیم منظور از "گُند تغییر" چیست، باید معادلات ماکسول را به‌کار ببریم. اگر چه ایده‌های کلی را می‌توان بدون توسل به جزئیات این معادلات درک کرد.

برای تغییرات سینوسی ولتاژ در مدارهایی که شامل اجزای خطی هستند، و این اساس نظریهٔ مقدماتی مدار است، رفتار هر مدار با یک فرکانس ω مشخص می‌شود.^۱ یک موج الکترومغناطیسی با این فرکانس در خلأ دارای طول موج $\lambda = 2\pi c/\omega$ است که در آن c سرعت نور است. شرط اصلی برای آنکه جریان گذرنده از یک مدار را گُند تغییر بنامیم، این است که مدار مقدار قابل توجهی توان تابش نکند. برقراری این شرط مستلزم آن است که حداکثر بُعد خطی دستگاه، l_{\max} ، خیلی

۱. کمیت ω گاهی فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود و 2π برابر فرکانس است. به‌کار بردن ω به جای $2\pi f$ در بسیاری از بخشهای فیزیک مزیت قابل ملاحظه‌ای دارد. به‌ویژه در بحث حاضر تعداد زیادی از مضربهای 2π از معادلات مداری حذف می‌شوند.

جدول ۱-۱۳

فرکانس f (Hz)	ω (rad/s)	طول موج λ (m)	ℓ_{\max} (m)
۶۰	۳۷۶	5×10^6	5×10^5 (۵۰۰ کیلومتر)
۱۰۶	6.28×10^6	۳۰۰	۳۰
۱۰۸	6.28×10^8	۳	۰٫۳
۱۰۱۰	6.28×10^{10}	۰٫۰۳	۰٫۰۰۳

کوچکتر از طول موج وابسته به فرکانس محرک در خلأ باشد،

$$\omega \ll \frac{2\pi v}{\ell_{\max}} \quad \text{یا} \quad \ell_{\max} \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad (1-13)$$

اگر این شرط برقرار باشد، برای هر جزء $d\ell$ مدار که حامل جریان I است، در فاصله‌ای خیلی کمتر از یک طول موج، جزء متناظر $-d\ell$ وجود دارد که حامل همان جریان است. بنابراین، میدانهایی که این اجزا در فواصلی در حدود چند طول موج در تمام جهات تولید می‌کنند، یکدیگر را حذف می‌کنند و این نشان می‌دهد که میدانهای وابسته به مدار به ناحیه‌ای در نزدیکی مدار محدود خواهند بود. برای اینکه ببینیم چه محدودیتهای عملی توسط معادله (۱-۱۳) ایجاد می‌شود، در تهیه جدول ۱-۱۳ حداکثر بعد خطی مدار $\ell_{\max} \sim \lambda/10$ به کار برده شده است. فرکانسهایی که انتخاب شده‌اند عبارت‌اند از: فرکانس برق شهر، یک فرکانس پایین رادیویی (باند پخش AM)، یک فرکانس بالای رادیویی (F · M و تلویزیون) و یک فرکانس ریزموج. واضح است که برای سه فرکانس اول مدارهای عادی شرط فوق را برآورده می‌کنند. اما برای فرکانس آخر باید مدار در مکعبی به ضلع ۳ میلی‌متر ساخته شود، در نتیجه کاربرد آن به مدارهای مجتمع (ICها) محدود می‌شود. باید توجه داشت که در ۱۰۰ مگاهرتز طول موج و ابعاد مدار در حدود اندازه‌های آزمایشگاهی‌اند، و بنابراین در به کار بردن نظریه معمولی مدار در این فرکانس و فرکانسهای بالاتر باید دقت لازم به عمل آید. در بقیه این فصل بدون اینکه صراحتاً تذکر بدهیم، فرض می‌شود که شرط تغییرات کند برقرار است.

۱-۱۳ رفتار گذرا و رفتار حالت پایا

اگر شبکه‌ای متشکل از اجزای غیرفعال دفعتاً به یک یا چند منبع ولتاژ وصل شود، جریان برقرار می‌شود. ماهیت ولتاژهای به کار رفته هر چه باشد، تغییرات اولیه جریانها نسبت به زمان غیرتناوبی

است. ولی اگر ولتاژها نسبت به زمان به طور تناوبی تغییر کنند^۱، در آن صورت بعد از گذشتن مدت زمان نسبتاً طولانی از اعمال ولتاژها ملاحظه خواهد شد که جریانها نیز نسبت به زمان تغییرات تناوبی دارند. (در واقع جریانها بعد از گذشت زمان بی‌نهایت، دقیقاً تناوبی خواهند شد؛ ولی هر گونه تقریب مطلوبی را برای تناوبی بودن آنها می‌توانیم با صبر کردن به حد کافی به دست آوریم).

مناسب است که رفتار مدارها را بسته به اینکه رفتار تناوبی مهم‌تر باشد یا رفتار غیرتناوبی، از دو جنبه بررسی کنیم. رفتار تناوبی را رفتار حالت پایا و رفتار غیرتناوبی را رفتار گذرا می‌نامیم. در هر دو جنبه یک نوع معادلات انتگرال-دیفرانسیلی حاکم است؛ ولی، روشهای مقدماتی که برای حل این دو مورد به‌کار می‌روند، با هم فرق اساسی دارند.

تحلیلی که ما در اینجا ارائه خواهیم کرد، به تحلیل مقدماتی حالت گذرا (عمدتاً تحریک توسط ولتاژهای ثابت)، و تحلیل حالت پایا برای تحریکهای سینوسی محدود می‌شود. برای مطالعه جزئیات بیشتر، به خواننده توصیه می‌شود که به کتابهای کلاسیک گیل‌مین و بود^۲، و به کتابهای درسی مهندسی جدیدتر^۳ مراجعه کنند.

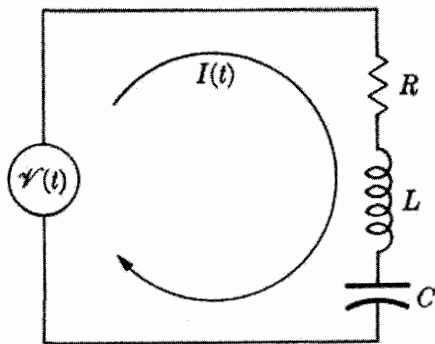
۱۳-۲ قوانین کیرشهوف

در فصل ۷ قوانین کیرشهوف را برای مدارهای جریان مستقیم (dc) معرفی کردیم. اکنون این قوانین را باید به جریانهای کند تغییر تعمیم دهیم. اولین تعمیم این است که توجه کنیم نه تنها مقاومتها، بلکه خازنها و القاگرها نیز باید به‌عنوان اجزای مدار منظور شوند. بین دو سر هر کدام از این اجزا اختلاف پتانسیلی موجود است که باید در قانون مدار کیرشهوف در نظر گرفته شوند. نام "افت IR" دیگر برای تمام این اختلاف پتانسیلها مناسب نیست، بنابراین نام ولتاژ مخالف را برای مشخص کردن اختلاف پتانسیل بین دو سر هر جزء غیرفعال مدار به‌کار می‌بریم. تعمیم دیگر، اینکه باید ملاحظه کنیم تا هر دو قانون کیرشهوف در هر لحظه از زمان برقرار باشند. به عبارت دیگر، قوانین

۱. ولتاژ ثابت باید به‌عنوان حالت خاصی از ولتاژ متناوب در نظر گرفته شود، حالتی که دوره تناوب آن بی‌نهایت یا فرکانس آن صفر است.

2. E. A. Guillemin, *Communication Networks*, 2 vols. (New York: Wiley, 1931 and 1935); and H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1945), (Huntington, N. Y.: Krieger, 1975, reprint of 1945 edition).

3. F. P. Yatsko and D. M. Hata, *Circuits: Principles, Analysis and Simulation* (New York: Saunders College Publishing, 1992).



شکل ۱۳-۱ یک مدار متوالی متشکل از اجزای مدار.

کیرشهوف باید برای مقادیر لحظه‌ای جریانها، ولتاژهای اعمال شده و ولتاژهای مخالف، به کار روند. اکنون می‌توانیم قوانین کیرشهوف را به صورت زیر بیان کنیم.

قانون کیرشهوف I. جمع جبری جریانهای لحظه‌ای که به سمت یک نقطه اتصال جریان دارند، صفر است.

قانون کیرشهوف II. جمع جبری ولتاژهای اعمال شده لحظه‌ای در یک حلقه بسته مساوی است با جمع جبری ولتاژها مخالف در آن حلقه.

مفهوم قانون اول روشن است: اگر جریانهایی که به سمت یک اتصال جریان دارند مثبت نامیده شوند، در آن صورت جریانهایی را که در جهت مخالف اند باید منفی بنامیم و این قانون می‌گوید که همان مقدار جریانی که به نقطه اتصال وارد می‌شود، باید از آن خارج شود. قانون دوم، اصولاً بیان‌کننده انتگرال میدان الکتریکی به دور حلقه است؛ اما لازم است که قرارداد علامت‌گذاری آن روشن شود. قرارداد علامت‌گذاری‌ای که ما در اینجا به کار می‌بریم به بهترین وجهی با ارجاع به یک حلقه تنهای ساده، مانند شکل ۱۳-۱، روشن می‌شود. در این شکل یک ولتاژ اعمال شده $\mathcal{V}(t)$ نشان داده شده است که به طور متوالی به مقاومت R ، خودالقای L و خازن C متصل است. پیکانی که با $I(t)$ مشخص شده، در شکل رسم شده است تا جهت مثبتی را که (به طور اختیاری) برای جریان فرض می‌شود، نشان دهد. تمام علامتها سرانجام نسبت به این جهت مشخص می‌شوند. ولتاژ $\mathcal{V}(t)$ در صورتی مثبت است که جریانی که ایجاد می‌کند در همان جهت فرض شده حرکت کند. به عبارت دیگر، اگر انتهای بالایی در شکل ۱۳-۱ نسبت به انتهای پایینی آن مثبت باشد، $\mathcal{V}(t)$ مثبت است. ولتاژ مخالف در مقاومت، درست مانند حالتی که جریان مستقیم داریم، مساوی با IR است. اگر dI/dt مثبت باشد، در خودالقای L القا می‌شود که جریانی در جهت مخالف

با جهت فرضی جریان I به وجود می‌آورد، به عبارت دیگر، انتهای بالایی L باید نسبت به انتهای پایینی آن مثبت باشد. چون این جهت در مقایسه با جهت I همان جهت IR است، ولتاژ مخالف آن درست مساوی $L(dI/dt)$ است.^۱ ولتاژ مخالف در خازن بستگی به بار روی خازن دارد، که بسته به اینکه صفحه بالایی یا پایینی خازن را در نظر بگیریم، ممکن است مثبت یا منفی باشد. این اشکال را می‌توان با نوشتن معادله زیر برطرف کرد

$$Q = \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (2-13)$$

در اینجا t_0 طوری انتخاب می‌شود که $Q(t_0)$ مساوی صفر باشد. با این انتخاب برای Q ، بار مثبت Q انتهای بالایی خازن را مثبت می‌کند و در نتیجه یک ولتاژ مخالف در خازن ایجاد می‌کند که برابر است با $+Q/C$. قانون ولتاژ کیرشهوف برای مدار شکل ۱-۱۳ عبارت است از

$$\mathcal{V}(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt \quad (3-13)$$

که نمونه‌ای از معادله‌های انتگرال-دیفرانسیلی در نظریه مدار است.

۱۳-۳ رفتار گذرای مقدماتی

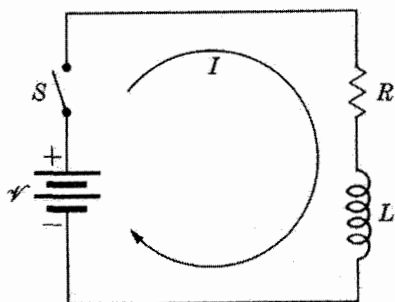
تنها رفتار گذرایی را که در اینجا بررسی می‌کنیم، مربوط است به اعمال ناگهانی یک ولتاژ ثابت \mathcal{V} به شبکه‌ای از مقاومتها، خازنها و القاگرها. اولین مثال در این مورد مدار ساده RL در شکل ۱۳-۲ است. برای این مدار بعد از این که کلید S بسته می‌شود، معادله (۳-۱۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (4-13)$$

قبل از اینکه کلید بسته شود، پاسخ معادله مزبور به صورت بدیهی $I = 0$ است. معادله (۴-۱۳) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت است و بنابراین همواره می‌توان با یک ثابت دلخواه در پاسخ، آن را حل کرد. پاسخ آن عبارت است از

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} - Ke^{-tR/L} \quad (5-13)$$

۱. باید به این نکته توجه داشت که emf القایی به صورت $-L(dI/dt)$ نوشته می‌شود؛ ولی چون این یک emf است، معمولاً در معادله در طرف مقابل با ولتاژهای مخالف نوشته می‌شود. بنابراین با نوشتن $+L(dI/dt)$ برای ولتاژ مخالف، هیچ‌گونه تناقضی به وجود نمی‌آید.



شکل ۲-۱۳ مدار RL . پاسخ گذرای مدار بعد از بسته شدن کلید حاصل می‌شود.

که در آن K ثابت دلخواه است. چون مدار شامل یک خودالقاست که از تغییرات ناگهانی و سریع جریان جلوگیری می‌کند، مقدار جریان درست بعد از اتصال کلید باید مساوی مقدار جریان درست قبل از اتصال کلید باشد. به عبارت دیگر، باید مساوی صفر باشد. اگر در لحظه $t = t_0$ کلید وصل شود، لازم است که

$$\frac{\mathcal{V}}{R} - K e^{-t_0 R/L} = 0 \quad (۶-۱۳)$$

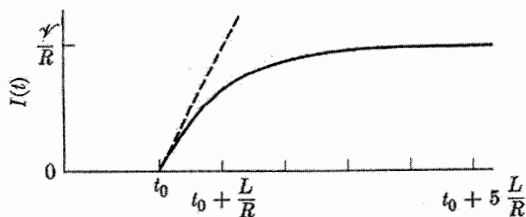
یا

$$K = \frac{\mathcal{V}}{R} e^{t_0 R/L} \quad (۷-۱۳)$$

در نتیجه پاسخ کامل به صورت

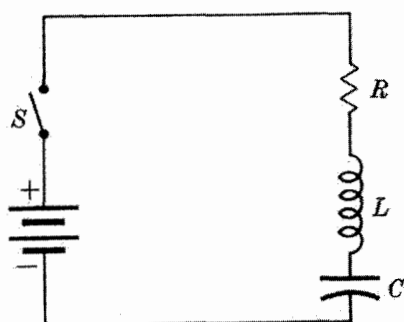
$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} [1 - e^{-R(t-t_0)/L}] \quad (۸-۱۳)$$

است که منحنی آن در شکل (۳-۱۳) رسم شده است. چند حقیقت مفید را می‌توان به سادگی از معادله (۸-۱۳) و شکل (۳-۱۳) به دست آورد. نخست، L/R دارای بعد زمان است و به نام ثابت زمانی خوانده می‌شود. چون $1/e \cong 0.۳۶۸$ است، ثابت زمانی عبارت است از مدت زمان



زمان

شکل ۳-۱۳ پاسخ گذرای مدار RL .



شکل ۴-۱۳ مدار RLC . پاسخ گذرای مدار پس از بسته شدن کلید حاصل می‌شود.

لازم برای آنکه جریان به 63.2% برابر مقدار نهایی‌اش (\mathcal{V}/R) برسد. در مدت پنج برابر ثابت زمانی جریان به 99.3% برابر مقدار نهایی‌اش می‌رسد که برای سهولت به خاطر سپردن آن را 99% در نظر می‌گیریم. مقدار اولیه dI/dt درست همان جریان نهایی \mathcal{V}/R تقسیم بر ثابت زمانی L/R است. به عبارت دیگر، مقدار مزبور طوری است که اگر افزایش جریان با همین آهنگ ادامه می‌داشت، جریان در مدت یک ثابت زمانی به مقدار نهایی‌اش می‌رسید. سودمندی حقایق فوق در این است که با کمک آنها می‌توانیم به‌سادگی با رسم یک منحنی نمایی استاندارد، تابع نمایی مسائل ساده حالت گذرا را با تقریب یکی دو درصد محاسبه کنیم. بسیاری از جنبه‌های دیگر مدار شامل مقاومت و خودالقا را می‌توان بررسی کرد و همین روش را می‌توان برای مدارهای شامل خازن و مقاومت نیز به‌کار برد. در آخر این فصل مسائل متعددی برای این منظور اختصاص داده شده است.

دومین مثالی که بررسی می‌شود، یک مدار متوالی RLC است که به‌طور ناگهانی به یک ولتاژ ثابت \mathcal{V} متصل می‌شود. چنین مداری در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده است. بعد از بسته شدن کلید، معادله مناسبی که در مورد این مدار می‌توان نوشت به‌صورت زیر است

$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (9-13)$$

که در آن باز هم t_0 زمانی است که بار خازن صفر است. برای سهولت فرض می‌شود که خازن در ابتدا بدون بار است و کلید S در لحظه $t_0 = 0$ بسته می‌شود. معادله (۹-۱۳) ممکن است نامأنوس باشد؛ ولی با یک بار مشتق‌گیری از آن نسبت به زمان به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} \quad (10-13)$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم معمولی با ضرایب ثابت است (معادله نوسانگر هماهنگ).

روش حل چنین معادلاتی مشهور است، در واقع برای حالت موجود، $d\mathcal{V}/dt = 0$ ، به شرط آنکه L و C هیچ یک صفر نباشند، پاسخ آن عبارت است از^۱

$$I = \{Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\} e^{-Rt/2L} \quad (11-13)$$

که در آن

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

اگر L یا C صفر باشد، ابهامی در معادله (۱۱-۱۳) به وجود می آید؛ ولی هنوز معادله (۱۰-۱۳) را می توان برای $L = 0$ حل کرد. در واقع پاسخ آن از معادله (۱۱-۱۳) ساده تر است. به علاوه، حالت $C = 0$ مربوط به حالت مدار باز است که جالب توجه نیست. برای کامل کردن این بحث، اگر $C = \infty$ باشد، که مربوط است به اتصال کوتاه کردن خازن، معادله (۱۱-۱۳) تبدیل می شود به معادله (۵-۱۳) که در این حال باید دو ثابت دلخواه را با توجه به شرایط مرزی انتخاب کنیم. البته این مطلب این حقیقت را منعکس می کند که وقتی از معادله (۹-۱۳) به معادله (۱۰-۱۳) می روییم، تمام اطلاعات راجع به \mathcal{V} را از دست می دهیم.

اکنون به حل معادله (۱۱-۱۳) برمی گردیم، که باید در آن ثابتهای A و B را تعیین کنیم. برای اینکه جریان مقداری حقیقی باشد، باید B مزدوج مختلط A باشد. چون کلید در لحظه $t = 0$ بسته می شود، در لحظه $t = 0$ جریان باید صفر باشد، یعنی دو تابع نمایی موهومی باید با یکدیگر ترکیب شوند تا نتیجه یک تابع سینوسی شود. با در نظر این ملاحظات به نتیجه زیر می رسیم

$$I(t) = De^{-Rt/2L} \sin \omega_n t \quad (12-13)$$

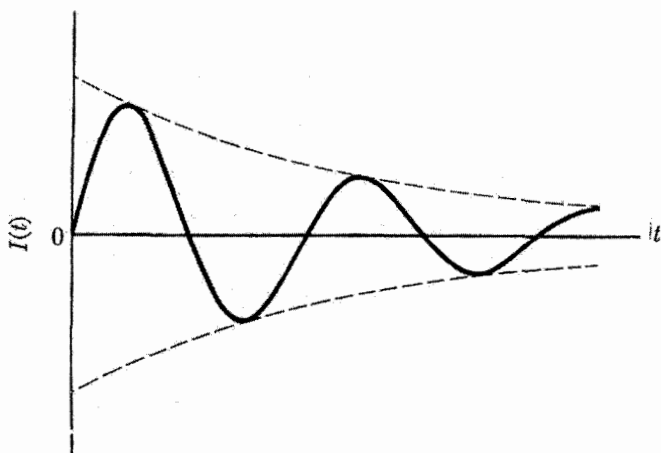
که در آن D تنها ثابت حقیقی است که هنوز باید آن را حساب کنیم. این محاسبه با توجه به اینکه در $t = 0$ مقادیر I و Q هر دو صفرند، انجام پذیر است. در نتیجه

$$\mathcal{V} = L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} \quad (13-13)$$

با به کار بردن این شرط اولیه، نتیجه می شود

$$D = \frac{\mathcal{V}}{\omega_n L} = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \quad (14-13)$$

۱. در اینجا i عدد موهومی واحد است، یعنی، $i \equiv \sqrt{-1}$.



شکل ۵-۱۳ پاسخ گذرای مدار RLC .

اکنون حل معادله کامل است. شدت جریان با فرکانس طبیعی

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

نوسان می‌کند ولی دامنه‌اش با گذشت زمان کاهش می‌یابد و با $De^{-Rt/2L}$ داده می‌شود. این تغییرات در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است. اگر در لحظه بستن کلید، t_0 صفر نباشد، تنها لازم است که t را با $t - t_0$ جایگزین کنیم.

اکنون تحلیل مقدماتی حالت گذرا که در اینجا عرضه شد، کامل است. بقیه این فصل به حالت پایای مدارهایی اختصاص دارد که با ولتاژهای سینوسی تحریک می‌شوند، یعنی حالتی که در آن بعد از گذشتن زمانی نسبتاً طولانی از لحظه اعمال ولتاژ محرک، اطمینان حاصل می‌شود که اثرهای گذرا قابل چشمپوشی‌اند.

۴-۱۳ رفتار حالت پایای مدار ساده متوالی

اکنون رفتار مدار شکل ۱-۱۳ را در حالتی که به ولتاژ محرک زیر وصل شده است، بررسی می‌کنیم

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t \quad (۱۵-۱۳)$$

در اینجا ω فرکانس مفروضی است که الزاماً با ω_n برابر نیست. به سادگی می‌توانستیم این ولتاژ $\mathcal{V}(t)$ را در معادله (۳-۱۳) یا معادله (۱۰-۱۳) به کار ببریم و معادله حاصل را حل کنیم. ولی

برای حل آن بهتر است که توجه کنیم $\mathcal{V}_0 \cos \omega t$ مساوی قسمت حقیقی $\mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ است، و روشی برای پیدا کردن جریان فیزیکی از حل معادله (۱۳-۱۰) با ولتاژ محرک مختلط به دست بیاوریم. اگر یک ولتاژ مختلط فرضی مثل $\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2$ به یک مدار اعمال شود، جریان حاصل نیز حتماً به صورت $I_1 + iI_2$ خواهد بود (باید توجه داشت که $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, I_1, I_2$ در اینجا مقادیر حقیقی هستند). با گذاشتن این مقادیر فرضی در معادله (۱۳-۱۰) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathcal{V}_1}{dt} + i \frac{d\mathcal{V}_2}{dt} = \left(L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C} \right) + i \left(L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C} \right) \quad (13-16)$$

این معادله تنها در موردی صادق است که قسمتهای حقیقی دو طرف آن با هم و قسمتهای موهومی دو طرف آن نیز با هم مساوی باشند. بنابراین اگر ولتاژ محرک فیزیکی $\mathcal{V}_P(t)$ قسمت حقیقی یک تابع مختلط باشد، کافی است معادله (۱۳-۱۰) را با ولتاژ محرک مختلط $\mathcal{V}(t)$ حل کنیم و سپس قسمت حقیقی $I(t)$ حاصل را برای جریان فیزیکی منظور کنیم. در مواردی ممکن است بهتر باشد که $e^{i(\omega t + \phi)}$ را به کار ببریم تا نتیجه تأثیر $\cos(\omega t + \phi)$ را به دست آوریم، که در آن ϕ یک زاویه فاز مفروض است. در بقیه این فصل ما عمدتاً با ولتاژها و جریانهای مختلط کار خواهیم کرد. در جایی که تمیز دادن کمیتهای فیزیکی از کمیتهای مختلط نظیرشان اهمیت دارد، از شاخص P ، مانند $\mathcal{V}_P(t)$ در بالا، استفاده خواهیم کرد.

اگر $\mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ را در معادله (۱۳-۱۰) به کار ببریم، در این صورت جریان $I_0 e^{i\omega t}$ خواهد بود، که در اینجا I_0 یک ثابت مختلط است. با گذاشتن این مقادیر در معادله خواهیم داشت

$$i\omega \mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (13-17)$$

از تقسیم دو طرف معادله بالا به $i\omega$ داریم

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (13-18)$$

که به صورت زیر است

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = Z I_0 e^{i\omega t} \quad (13-19)$$

که در آن

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (13-20 \text{ الف})$$

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (۱۳-۲۰)$$

کمیت Z مقاومت ظاهری مدار نامیده می‌شود و شامل دو قسمت است: قسمت حقیقی یا مقاومت (R) ، و قسمت موهومی یا واکنایی (X) . واکنایی نیز به دو قسمت، واکنایی القایی $X_L = \omega L$ و واکنایی خازنی $X_C = -1/\omega C$ ، تقسیم می‌شود. اینکه مقاومت ظاهری مختلط است، بدان معناست که جریان با ولتاژ اعمال شده همفاز نیست.

گاهی بهتر است مقاومت ظاهری را به صورت قطبی آن بنویسیم:

$$Z = |Z|e^{i\theta} \quad (۱۳-۲۱)$$

که در آن

$$|Z| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \quad (۱۳-۲۲)$$

و

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right) \quad (۱۳-۲۳)$$

با به‌کار بردن این صورت برای مقاومت ظاهری، جریان مختلط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} \quad (۱۳-۲۴\text{الف})$$

و جریان فیزیکی برابر است با

$$I_P(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \quad (۱۳-۲۴\text{ب})$$

اگر θ بزرگتر از صفر باشد، جریان بعد از ولتاژ به یک فاز معین خواهد رسید و می‌گوییم که از ولتاژ عقب مانده است. در حالت عکس، جریان از ولتاژ جلو می‌افتد. جریانهایی که تغییراتشان به صورت $e^{i\omega t}$ یا $\cos(\omega t - \theta)$ است، به نام جریانهای متناوب (ac) خوانده می‌شوند. این محاسبات مطالعه مدار ساده متوالی را رسماً کامل می‌کند، گرچه در بخش ۱۳-۷ معادله (۱۳-۲۴) را به تفصیل بررسی خواهیم کرد تا درک فیزیکی بیشتری درباره این وضعیت به دست آوریم.

۱۳-۵ اتصالهای متوالی و موازی مقاومتهای ظاهری

اگر دو مقاومت ظاهری به طور متوالی به هم وصل شوند، از هر دوی آنها جریان یکسانی می‌گذرد. ولتاژهای^۱ دو سر آنها عبارت است از $V_1 = Z_1 I$ و $V_2 = Z_2 I$. اختلاف پتانسیل دو سر این ترکیب $V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2)I$ است. بنابراین، واضح است که اگر مقاومتهای ظاهری به صورت متوالی به هم وصل شوند، مقاومتهای ظاهری آنها با هم جمع می‌شوند، به عبارت دیگر

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots \quad (\text{اتصال متوالی}) \quad (۱۳-۲۵)$$

بدین ترتیب معادله (۱۳-۲۰ الف) عبارت است از مجموع مقاومتهای ظاهری یک مقاومت R ,

$$Z_1 = R$$

یک خودالقای L

$$Z_2 = i\omega L$$

و یک خازن C

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C}$$

که هر سه به طور متوالی به یکدیگر وصل شده‌اند. باید به این نکته مهم توجه داشت که مقاومتهای ظاهری به صورت اعداد مختلط جمع می‌شوند. اگر $Z_1 = R_1 + iX_1$ و $Z_2 = R_2 + iX_2$ باشد، در این صورت داریم

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2) \quad (۱۳-۲۶)$$

به شکل قطبی داریم

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \quad |Z| = [(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \quad (۱۳-۲۷)$$

توجه کنید که بزرگی Z مساوی مجموع بزرگیهای Z_1 و Z_2 نیست.

اگر مقاومتهای ظاهری را به طور موازی به هم وصل کنیم، اختلاف پتانسیل دو سر تمام آنها یکسان خواهد بود و جریانهای آنها عبارت خواهند بود از $I_1 = V/Z_1$ و $I_2 = V/Z_2$ و الی^۱. در این قسمت و در بقیه این فصل، علامت V را به جای $\Delta\varphi$ برای اختلاف پتانسیل دو سر یک جزء مدار یا یک گروه از اجزای مدار به کار می‌بریم.

آخر. جریان کل برابر است با

$$I = I_1 + I_2 + \dots = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \dots = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \right)$$

که از آن روشن است که

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \quad (\text{اتصال موازی}) \quad (28-13)$$

در اینجا نیز جمع ما جمع اعداد مختلط است. معادلات (۲۵-۱۳) و (۲۸-۱۳) اساس حل مسائلی هستند، که شامل ترکیبات پیچیده‌تری با یک ولتاژ اعمال‌شده منفرد می‌باشند.

مثال ۱۳-۱ یک شبکه مقاومت ظاهری

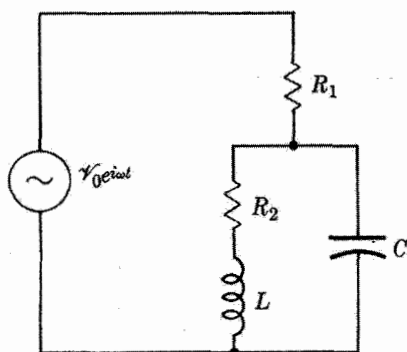
شکل ۱۳-۶ را در نظر بگیرید. مقاومت ظاهری شامل یک مقاومت است که به‌طور متوالی به ترکیب موازی یک خازن و یک القاگر متصل شده است. جریانی را که از این شبکه می‌گذرد، به‌دست آورید.

حل: به‌راحتی می‌توان عبارت زیر را برای مقاومت ظاهری نوشت

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + i\omega L} + 1/i\omega C} \quad (29-13)$$

یا به‌صورتی دیگر داریم

$$Z = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C(R_2 + i\omega L)} \quad (30-13)$$



شکل ۱۳-۶ نمونه‌ای از یک مدار ac.

یا

$$Z = R_1 + \frac{(R_2 + i\omega L)[(1 - \omega^2 LC) - i\omega R_2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (31-13)$$

تنها کار بالارزش دیگری که می‌توان در اینجا انجام داد، جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی از یکدیگر است

$$Z = R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} + i \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R_2^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (32-13)$$

اکنون که Z به دست آمد، می‌توانیم با تقسیم $\mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ به Z ، جریان را تعیین کنیم. مطالعه این مدار بعداً در ارتباط با پدیده تشدید دنبال خواهد شد.

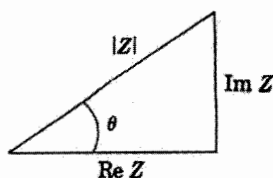
۱۳-۶ توان و ضرایب توان

توانی را که به یک مقاومت می‌رسد، می‌توان از حاصل ضرب اختلاف پتانسیل دو سر آن مقاومت در جریانی که از آن می‌گذرد به دست آورد. با وجود این، در حالت کلی‌تر، مثل مقاومت ظاهری که در شکل ۱۳-۷ (الف) نشان داده شده است، روش دقیق‌تری لازم است.

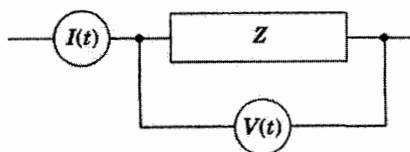
اگر همان‌طور که نشان داده‌ایم، $V(t)$ و $I(t)$ به ترتیب ولتاژ و جریان مختلط باشند، در این صورت توان لحظه‌ای عبارت است از

$$P(t) = \text{Re } I(t) \text{ Re } V(t) \quad (33-13)$$

توان متوسط کمیت مهم‌تری است که مقدار متوسط را در یک دوره تناوب کامل یا در مدت طولانی (تعداد زیادی دوره تناوب) محاسبه می‌کنند. اگر فازها طوری انتخاب شوند که V_0 حقیقی باشد



(ب)



(الف)

شکل ۱۳-۷ اندازه‌گیری توان.

و مطابق معمول، $Z = |Z| e^{i\theta}$ ، در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد که (مسئله ۱۳-۱۱)

$$\overline{P} = \overline{\operatorname{Re} I(t) \operatorname{Re} V(t)} = \frac{1}{4} |I_0| |V_0| \cos \theta \quad (34-13)$$

ضریب $1/2$ در معادله (۳۴-۱۳) نشان‌دهنده این حقیقت است که متوسط $\sin^2 \omega t$ یا $\cos^2 \omega t$ مساوی $1/2$ است. ضریب جالب دیگر $\cos \theta$ است که نشان می‌دهد جریان و ولتاژ همفاز نیستند. غالباً $\cos \theta$ را ضریب توان مدار ac می‌نامند. در بخش ۱۷-۳ نشان داده خواهد شد که

$$\overline{\operatorname{Re}(I_0 e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(V_0 e^{i\omega t})} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(I_0^* V_0) \quad (35-13)$$

که در آن I_0^* مزدوج مختلط I_0 است. این رابطه که به راحتی می‌توان آن را به خاطر سپرد، مستقیماً به معادله (۳۴-۱۳) منجر می‌شود.

چون $\cos \theta = \operatorname{Re} Z / |Z|$ (به شکل ۱۳-۷ مراجعه کنید)، می‌توان معادله (۳۴-۱۳) را

به صورت زیر نوشت

$$\overline{P} = \frac{1}{4} \frac{|V_0|^2}{|Z|^2} \operatorname{Re} Z \quad (36-13)$$

در خاتمه، خاطر نشان می‌کنیم که مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان اغلب با معادلات زیر تعریف

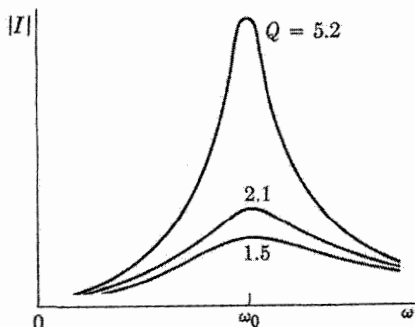
می‌شوند

$$V_{\text{مؤثر}} = \frac{\sqrt{2}}{4} |V_0|, \quad I_{\text{مؤثر}} = \frac{\sqrt{2}}{4} |I_0| \quad (37-13)$$

اهمیت تعاریف بالا در این است که چنانچه ولتاژی متناوب با مؤثر V معینی به یک مقاومت اعمال شود، همان مقدار توان تلف خواهد کرد که یک ولتاژ ثابت با همان بزرگی به آن اعمال شود. مشخص کردن مقادیر مؤثر خیلی متداول است؛ مثلاً خطوط 220° ولت ac یعنی خطوطی که ولتاژ مؤثر آنها 220° ولت است.

۱۳-۷ تشدید

معادله (۲۲-۱۳) نشان می‌دهد که مقاومت ظاهری یک مدار ساده متوالی LRC به فرکانس بستگی دارد و مقدار آن به ازای $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ کمینه است. در این فرکانس مقاومت ظاهری درست مساوی R ، زاویه فاز صفر و جریان بیشینه و بزرگی آن مساوی V_0/R است. این یک پدیده تشدید است که خیلی شبیه به پدیده تشدید است که در نوسانگرهای واداشته میرای مکانیکی مشاهده می‌شود. چنانچه بزرگی جریان حالت پایا را برای مدار شکل ۱۳-۱ (با



شکل ۸-۱۳ منحنیهای تشدید برای یک مدار متوالی RLC.

برحسب تابعی از فرکانس رسم کنیم، یک منحنی مانند شکل ۸-۱۳ به دست می‌آید. در این شکل تعدادی منحنی رسم شده است که در تمام آنها مقادیر L و C یکی است ولی مقاومت متوالی با آنها از یک منحنی به منحنی دیگر فرق می‌کند. مشاهده می‌شود که هر چه مقاومت متوالی کوچکتر باشد، منحنی تیزتر است.

معیاری از تیزی منحنی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. ابتدا "پهنای" منحنی تشدید را به صورت بازه فرکانس بین "فرکانسهای نیم‌توان" تعریف می‌کنیم، که این دو فرکانسهایی هستند که توان تلف شده در آنها نصف توان تلف شده در فرکانس ω_0 قله است. بنابراین ما به دنبال مقادیری از ω هستیم که در معادله زیر صدق کنند

$$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{2} \bar{P}(\omega_0)$$

یا با استفاده از معادلات (۲۲-۱۳) و (۳۶-۱۳) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2} \frac{|V_0|^2 R}{|Z(\omega)|^2} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{R^2} R$$

بنابراین

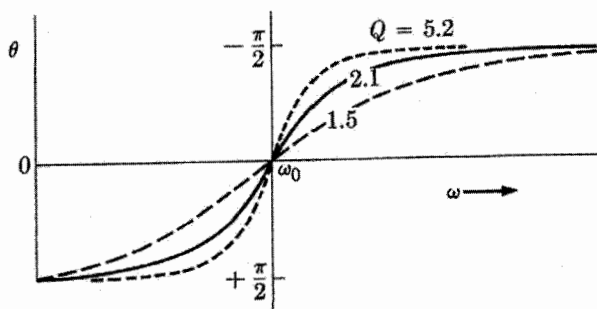
$$|Z(\omega)|^2 = 2R^2$$

یا

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R \quad (38-13)$$

برای منحنیهایی که قله نسبتاً تیزی دارند، معادله (۳۸-۱۳) در مقادیری از ω که از ω_0 فاصله زیادی ندارند، صدق می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت، $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$\left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right| = R$$



شکل ۹-۱۳ زاویه فاز مقاومت ظاهری در یک نمونه از مدار متوالی RLC .

حال اگر $\omega_0^2 = 1/LC$ و $\omega_0 \approx 1 - \Delta\omega/\omega_0$ و $(1 + \Delta\omega/\omega_0)^{-1} \approx 1 - \Delta\omega/\omega_0$ را به کار ببریم، نتیجه خواهد شد

$$2|\Delta\omega|L = R$$

یا

$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (۳۹-۱۳)$$

بنابراین پهنای منحنی تشدید که در بالا تعریف شد، تقریباً با $2|\Delta\omega|$ برابر است. کمیت

$$Q = \omega_0 L/R \quad \text{یا} \quad Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} \quad (۴۰-۱۳)$$

مشخص‌کننده تیزی تشدید است و به ضریب کیفیت یا ضریب Q مدار^۱ مشهور است. از نظر عملی، می‌توان Q را تنها به عنوان خاصیت القاگر در نظر گرفت، زیرا بیشتر مقاومت متوالی‌ای که نمی‌توان از آن اجتناب کرد، مربوط به سیمی است که القاگر را با آن می‌پیچند. اما در یک بررسی دقیق‌تر معلوم می‌شود که در محاسبه Q ها اتلاف در خازنها را نیز باید در نظر گرفت. منحنیهای شکل ۸-۱۳ با مقادیر Q ی مربوط مشخص شده‌اند.

با تغییر دادن فرکانس منبع محرک، نه تنها بزرگی بلکه فاز جریان نیز تغییر می‌کند. این تغییرات فاز برای همان مقادیر Q ی شکل ۸-۱۳ در شکل ۹-۱۳ نشان داده شده‌اند. در فرکانسهای کمتر از فرکانس تشدید، زاویه فاز تابع مقاومت ظاهری منفی است. بنابراین فاز جریان مثبت است و جریان از ولتاژ جلو می‌افتد. در فرکانسهای بیشتر از فرکانس تشدید، برعکس است و جریان از ولتاژ عقب می‌افتد.

۱. این Q به بار الکتریکی ربطی ندارد.

جالب است توجه کنیم که مدارهای تشدید فرکانس رادیویی که در وسایل ارتباطی وجود دارند، برخلاف اینکه ظاهراً موازی به نظر می‌رسند، مدارهای تشدید متوالی‌اند. در ساده‌ترین حالت این بدان علت است که توان محرک از طریق القا با L جفت می‌شود و در نتیجه به صورت یک emf ظاهر می‌شود که با L به‌طور متوالی وصل شده است.

پدیده تشدید به مدارهای متوالی، نظیر آنچه هم‌اکنون بررسی شد، محدود نمی‌شود؛ مدارهای موازی نیز ممکن است مشخصات تشدید از خود بروز دهند. مدار شکل ۱۳-۶ چنین تشدیدی از خود بروز می‌دهد. تعریف فرکانس تشدید برای یک مدار تشدید موازی به‌سادگی تعریف فرکانس تشدید برای یک مدار متوالی نیست. بعضی از امکانات برای این تعریف عبارت‌اند از $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ، (۲) فرکانسی که در آن مقدار مقاومت ظاهری [که از معادله (۱۳-۳) به دست می‌آید] بیشینه است، یا (۳) فرکانسی که در آن ضریب توان مساوی با یک است. از هر یک از این سه انتخاب، فرکانس متفاوتی به دست می‌آید. ولی برای مدارهایی که Q ی بزرگ دارند، این فرکانسها تقریباً یکسان‌اند. اولین انتخاب به مراتب از دو انتخاب دیگر در عمل مفیدتر است، زیرا مستقیماً بسیاری از نتایج مدارهای تشدید متوالی را برای حالت تشدید موازی قابل کاربرد می‌سازد. با به‌کار بردن معادله (۱۳-۳۱) برای محاسبه Z و قرار دادن $R_1 = \infty$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ، نتیجه جالبی به دست می‌آید. این نتیجه عبارت است از

$$Z = \omega_0 L \left[\frac{\omega_0 L}{R} - i \right], \quad (\omega = \omega_0) \quad (13-41)$$

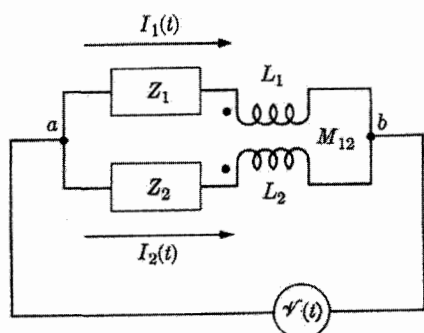
برای مداری با Q ی بزرگ می‌توان از i صرف نظر کرد، نتیجه اینکه مقاومت ظاهری در حالت تشدید مساوی است با Q برابر واکنایی القایی در حالت تشدید.

موضوع مدارهای تشدید را می‌توان به تفصیل دنبال کرد. ولی دنبال کردن آن در اینجا قابل توجه نیست. بعضی از مسائل آخر فصل موضوع این بخش را گسترش می‌دهند.

*۱۳-۸ القاهای متقابل در مدارهای ac

در حل مسائل مدار ac که شامل القاهای متقابل‌اند، مشکل کوچکی در تعیین علامت صحیح برای القای متقابل وجود دارد. این مشکل را می‌توانیم به‌سادگی بدین ترتیب حل کنیم که توجه کنیم علامت وابسته به القای متقابل به جهت مفروض برای جریانها در دو مدار به طریقه‌ای که دو سیم‌پیچ به هم متصل شده‌اند، بستگی دارد. نماد M_{ij} را برای ضریب القای متقابل خالص بین دو مدار به‌کار خواهیم برد.

در فصل ۱۱ نشان دادیم که بزرگی emf تولیدشده در سیم‌پیچ ۲ ناشی از تغییر جریان در



شکل ۱۳-۱۰ مدار با القای متقابل.

سیم‌پیچ ۱ عبارت است از

$$\mathcal{E}_1 = M_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (۴۲-۱۳)$$

برای جریانهای سینوسی، با استفاده از نمادگذاری اعداد مختلط داریم

$$\mathcal{E}_1 = i\omega M_{21} I_2 \quad (۴۳-۱۳)$$

یا

$$\mathcal{E}_1 = i\omega M_{21} I_2 \quad (۴۴-۱۳)$$

در ادامه بحث نماد M_{21} را به عنوان یک کمیت مثبت در نظر خواهیم گرفت و علامت \mathcal{E}_1 را به طور صریح نشان خواهیم داد. به عبارت دیگر، در معادله (۴۴-۱۳) به جای M_{21} مقدار $\pm M_{21}$ را قرار خواهیم داد و M_{21} را یک کمیت مثبت در نظر خواهیم گرفت.

برای توضیح روش تعیین علامت، اکنون مدار شکل ۱۳-۱۰ را در نظر می‌گیریم که در آن دو مقاومت ظاهری Z_1 و Z_2 با یک القای متقابل ترکیب شده‌اند و به ولتاژ $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ وصل شده‌اند. ضریب القای متقابل را با نماد M_{12} نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که عدد مثبتی است. نقاط سیاه در شکل، پایانه‌هایی از دو سیم‌پیچ را نشان می‌دهند که به طور همزمان مثبت‌اند؛ به بیان دیگر، اگر یک جریان سینوسی از سیم‌پیچ پایینی طوری عبور کند که پایانه چپ آن را در زمان t_1 مثبت کند، در آن صورت ولتاژی که در سیم‌پیچ بالایی القا می‌شود، در زمان t_1 پایانه چپ آن را مثبت خواهد کرد. معادله شاخه بالایی بر طبق قانون کیرشهوف عبارت است از

$$Z_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M_{12} I_2 = \mathcal{V} \quad (۴۵-۱۳)$$

برای القای متقابل علامت مثبت را در نظر گرفته‌ایم زیرا جریان مثبت I_2 در شاخهٔ بالایی ولتاژی ایجاد می‌کند که جهتش با جهتش با جهت یک افت $I_1 R$ یکسان است. معادلهٔ دوم عبارت است از

$$i\omega M_{21}I_1 + Z_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 = \mathcal{V} \quad (46-13)$$

که در آن به دلیل تقارن $M_{12} = M_{21}$ نوشته شده است.

تعیین علامت بر همان مبنای قبلی انجام شده است و می‌توان آن را بدین نحو بررسی کرد که توجه کنیم که M_{12} در معادلهٔ شاخهٔ یک و M_{21} در معادلهٔ شاخهٔ دو باید با علامت یکسانی ظاهر شوند. دستگاه معادلات (۴۵-۱۳) و (۴۶-۱۳) را می‌توان با روشهای استاندارد حل کرد و نتایج زیر را به‌دست آورد

$$I_1 = \mathcal{V} \frac{Z_2 + i\omega L_2 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (47-13)$$

$$I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}$$

از جمع دو معادلهٔ فوق جریان کل $I_1 + I_2$ به‌دست می‌آید

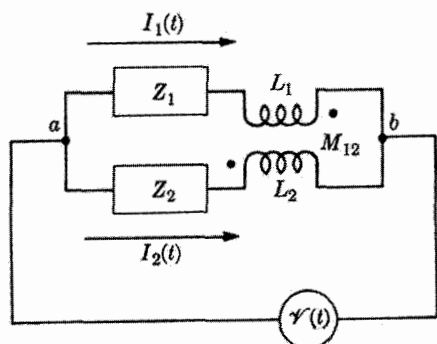
$$I = I_1 + I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 - 2i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (48-13)$$

ضریب \mathcal{V} در طرف راست معادلهٔ بالا، عکس مقاومت ظاهری‌ای است که به دو سر مولد وصل شده است، یا عکس مقاومت ظاهری ویژهٔ بین دو نقطهٔ a و b . واضح است که اگر M_{12} صفر باشد، مقاومت ظاهری همان ترکیب موازی مقاومت‌های ظاهری دو شاخه است. برای نحوهٔ اتصالی که در شکل نشان داده شده است، وقتی M_{12} افزایش یابد، مقاومت ظاهری نیز افزایش می‌یابد. شکل ۱۱-۱۳ با تعویض دو انتهای یکی از سیم‌پیجهایی که القای متقابل دارند، از مدار شکل ۱۰-۱۳ به‌دست آمده است. توجه کنید که تنها اختلاف آن با شکل ۱۰-۱۳ در آن است که نقطهٔ سیاه در سیم‌پیچ بالایی از انتهای چپ آن به انتهای راست منتقل شده است. نتیجه این است که باید علامت جملهٔ M_{12} را در معادلات (۴۵-۱۳) و (۴۶-۱۳) عوض کرد، پس

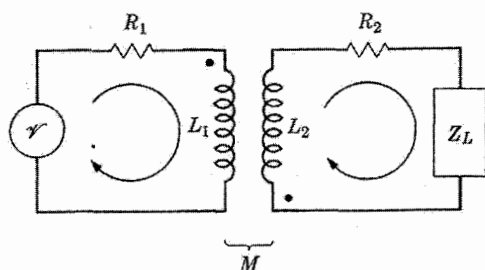
$$(Z_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M_{12}I_2 = \mathcal{V}$$

و

$$-i\omega M_{12}I_1 + (Z_2 + i\omega L_2)I_2 = \mathcal{V} \quad (49-13)$$



شکل ۱۱-۱۳ مدار شکل ۱۳-۱۰ که در آن علامت القای متقابل معکوس شده است.



شکل ۱۲-۱۳ مدار مبدل.

حال جریانهها به راحتی به دست می آیند و با ترکیب آنها مقاومت ظاهری به دست می آید:

$$Z_{ab} = \frac{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 + 2i\omega M_{12}} \quad (50-13)$$

این نتیجه هنگامی که القای متقابل صفر باشد، همان نتیجه حالت قبل است. رابطه بین Z_{ab} به ازای M_{12} معین و Z_{ab} به ازای $M_{12} = 0$ به طریق نسبتاً پیچیده ای به این پارامتر بستگی دارد. در اینجا فقط به بیان این مطلب اکتفا می کنیم که $|Z_{ab}|$ ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از $|Z_{ab}|$ به ازای $M_{12} = 0$ باشد.

مدار اصلی برای متداول ترین دستگاه القای متقابل، یعنی مبدل، در شکل ۱۳-۱۲ نشان داده شده است. R_1 و R_2 مقاومت های سیم پیچ های اولیه (محرک) و ثانویه (تحریر شده) هستند، L_1 و L_2 ضرایب خود القای آنهاست و M ضریب القای متقابل (مثبت) بین آنهاست. Z_L مقاومت ظاهری باری است که به ثانویه متصل است و $V = V_0 e^{i\omega t}$ ولتاژ دو سر سیم پیچ اولیه است. اگر فرض کنیم که جریانه های $I_1 e^{i\omega t}$ و $I_2 e^{i\omega t}$ در جهات نشان داده شده باشند، در آن صورت

قانون کیرشهوف ایجاب می‌کند که معادلات زیر برقرار باشند

$$\mathcal{V}_0 = I_1 R_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \quad \text{و} \quad (51-13)$$

$$0 = I_2 R_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 + I_2 Z_L$$

پاسخهای این دو معادله عبارت‌اند از

$$I_1 = \frac{Z_L + R_2 + i\omega L_2}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0 \quad \text{و} \quad (52-13)$$

$$I_2 = \frac{-i\omega M}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0$$

این معادلات نسبتاً پیچیده، معرف پاسخ دقیقی برای مدار شکل ۱۲-۱۳ هستند. در بسیاری از موارد، خیلی ساده‌تر است که یک مبَدَل ایده‌آل را در نظر بگیریم، یعنی مبَدَلی که برای آن روابط زیر صادق است

$$V_L = a\mathcal{V}_0, \quad I_2 = -\frac{I_1}{a} \quad (53-13)$$

که در آن ثابت a مستقل از فرکانس است، V_L ولتاژ دو سر Z_L است، و سایر مقادیر همانهایی هستند که در شکل ۱۲-۱۳ نشان داده‌ایم. با ضرب کردن دو معادله (۵۳-۱۳) در یکدیگر و با فرض اینکه ضرایب توان در دو سیم‌پیچ برابرند، می‌بینیم که توان منبع یعنی $\mathcal{V}_0 I_1 \cos \theta_1$ تماماً به بار $V_L I_2 \cos \theta_2$ می‌رسد. به عبارت دیگر، در مبَدَل هیچ اتلافی وجود ندارد.^۱ برای تضمین برقراری دومین رابطه از روابط (۵۳-۱۳) باید شرط زیر صادق باشد

$$\frac{Z_L + R_2 + i\omega L_2}{i\omega M} = a \quad (54-13)$$

این شرط در حالتی صادق خواهد بود که $\omega L_2 \gg |Z_L + R_2|$ باشد. اگر $\omega L_2 \gg R_2$ باشد، $|Z_L| \gg R_2$ باشد، از معادله (۵۴-۱۳) خواهیم داشت $a \approx L_2/M - iZ_L/\omega M$. برای آنکه معادله اول (۵۳-۱۳) برقرار باشد، کافی است: $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$ ، $\omega L_1 \gg R_1$ ، $|Z_L| \gg R_2$ و $|Z_L| \gg a^2 R_1$.

۱. در تقریب مبَدَل ایده‌آل، می‌توان نشان داد که ضرایب توان در دو سیم‌پیچ تقریباً برابرند (یعنی، $\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2$). اگر Z_L مقاومت خالص باشد، در آن صورت هر کدام از ضرایب توان تقریباً برابر با یک خواهند بود.

باشد. اکنون به سادگی می‌توان نشان داد که معادلهٔ دوم از معادلات (۱۳-۵۲) همراه با معادلهٔ (۱۳-۵۴) ایجاب می‌کنند که $V_L/\mathcal{V}_0 = a$ باشد، که در آن $V_L \equiv -I_2 Z_L$:

$$\begin{aligned} \frac{V_L}{\mathcal{V}_0} &= -\frac{I_2 Z_L}{\mathcal{V}_0} \approx \frac{i\omega M Z_L}{i\omega L_1(i\omega M a) + \omega^2 M^2} \\ &= \frac{iZ_L}{\omega(M - L_1 a)} \approx \frac{iZ_L M}{\omega(M^2 - L_1 L_2) + iZ_L L_1} \\ &\approx M/L_1 \approx L_2 L_1 / (M L_1) \approx a \end{aligned}$$

به نظر می‌رسد که در محاسبات فوق خیلی تقریب به‌کار رفته است، ولی مبدل‌های عملی‌ای وجود دارند که در گسترهٔ نسبتاً وسیعی از فرکانسها، تقریباً با مبدل‌های ایده‌آل برابری می‌کنند. برای چنین دستگاههایی داریم

$$I_2 = -\frac{I_1}{a}, \quad V_L = a\mathcal{V}_0$$

و

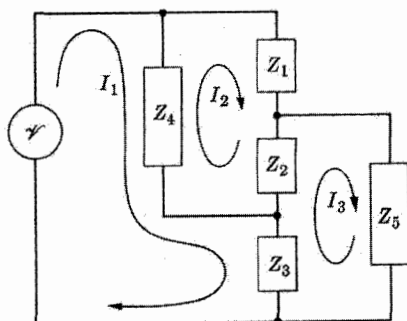
$$\frac{\mathcal{V}_0}{I_1} = -\frac{V_L}{a^2 I_2} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (۱۳-۵۵)$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که یک مبدل به‌عنوان مبدل مقاومت ظاهری نیز عمل می‌کند و نسبت تبدیل آن a^{-2} است. به‌عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که برای دو سیم‌پیچ که خیلی نزدیک به هم جفت شده باشند، $a = N_2/N_1$ است؛ به عبارت دیگر، a مساوی نسبت تعداد دورهای دو سیم‌پیچ است.

*۱۳-۹ معادلات حلقه‌ای و گره‌ای

مدارهای ac پیچیده‌تر را می‌توان به دو طریق بررسی کرد: یکی بر اساس قانون ولتاژ کیرشهوف که به تحلیل حلقه‌ای معروف است، و دیگری بر اساس قانون جریان کیرشهوف که به تحلیل گره‌ای مشهور است. هر یک از این روشها به نوبهٔ خود مزایا و معایبی دارد. چون انتخاب روش مناسب، حل خیلی از مسائل را ساده‌تر می‌کند، در این بخش هر دو روش را بررسی خواهیم کرد.

اولین قدم در به‌کار بردن تحلیل حلقه‌ای، مشخص کردن حلقه‌هاست. این کار را می‌توان به این ترتیب انجام داد که حلقه‌های بسته‌ای از جریان را در نظر بگیریم به طوری که حداقل یک جریان از هر جزء مدار بگذرد. مثلاً در شکل (۱۳-۱۳) سه حلقه نشان داده شده‌اند که با I_1 ، I_2 و I_3 مشخص شده‌اند. البته این تنها انتخاب ممکن نیست؛ چندین انتخاب دیگر نیز امکان‌پذیر و مفید



شکل ۱۳-۱۳ مثال کاربرد تحلیل حلقه‌ای در مدارهای ac.

است. با به‌کار بردن قانون ولتاژ کیرشهوف (II) برای هر یک از این سه حلقه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_1(Z_3 + Z_4) & - I_2 Z_4 & - I_3 Z_3 & = \mathcal{V} \\ -I_1 Z_4 & + I_2(Z_1 + Z_2 + Z_4) & - I_3 Z_2 & = 0 \\ -I_1 Z_3 & - I_2 Z_2 & + I_3(Z_2 + Z_3 + Z_5) & = 0 \end{aligned} \quad (56-13)$$

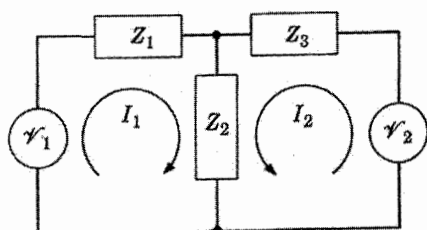
توجه کنید که علامتهای منها به این علت ظاهر می‌شوند که مثلاً در حلقه یک، I_2 در Z_4 برخلاف جهت I_1 جریان دارد. معادلات (۵۶-۱۳) را می‌توان به‌آسانی با استفاده از روشهای ماتریسی حل کرد، که نتیجه آن عبارتی است برای هر یک از جریانهای حلقه‌ای در یک مدار. تذکر این نکته مفید است که معادلات حلقه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{j=1}^n Z_{ij} I_j = \mathcal{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (57-13)$$

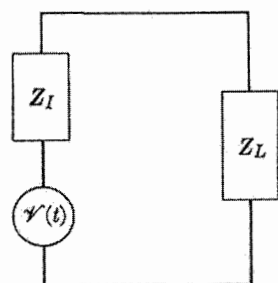
(در مدار بالا $n = 3$ است). در این نمادگذاری، $Z_{ij} = Z_{ji}$ است، که برای امتحان معادلات حلقه‌ای سودمند است.

به‌عنوان دومین مثال از تحلیل حلقه‌ای، مدار شکل ۱۳-۱۴ را در نظر بگیرید. معادلات مناسب برای این مدار عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} I_1(Z_1 + Z_2) & + I_2 Z_2 & = \mathcal{V}_1 \\ I_1 Z_2 & + I_2(Z_2 + Z_3) & = \mathcal{V}_2 \end{aligned} \quad (58-13)$$



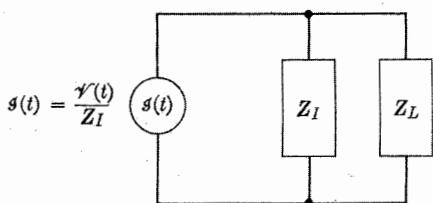
شکل ۱۳-۱۴ کاربردهای بیشتری از معادلات حلقه‌ای.



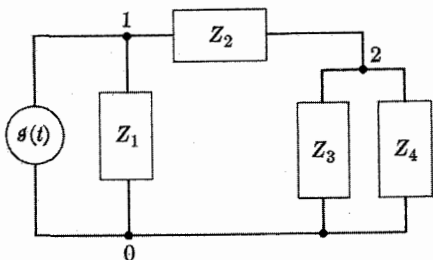
شکل ۱۳-۱۵ مولد عملی که به یک بار Z_L متصل شده است.

هیچ دلیلی وجود ندارد که V_1 و V_2 همفاز باشند؛ اغلب همفاز نیستند ولی می‌توان آنها را به صورت $V_1 = |V_{10}|e^{i\omega t}$ و $V_2 = |V_{20}|e^{i(\omega t + \phi)}$ نوشت. در هر صورت، مشخص کردن فازها به‌طور صحیح بسیار مهم است و این کار خیلی ساده انجام می‌شود، بدین ترتیب که فازهای نسبی را در $t = 0$ بررسی و جهت‌ها (مثبت و منفی) را نسبت به جهت‌های جریانهای مشخص‌شده حلقه‌ای تعیین می‌کنیم. باید به این نکته مهم نیز توجه کنیم که بجز در حالتی که تمام مولدها فرکانس یکسانی دارند، در حالات دیگر این روش به‌طور کامل با شکست روبه‌رو می‌شود (به بیان صحیح‌تر، این مسئله به ترکیب دو مسئله مستقل تبدیل می‌شود که هر کدام شامل یک مولد و یک فرکانس هستند).

قبل از اینکه وارد بحث معادلات گره‌ای بشویم، بهتر است درباره مولدهای ولتاژ و جریان صحبت کنیم. در قسمتهای قبل، مسائل مداری برحسب منابع خالص ولتاژ به‌کاررفته، بیان شده بودند. البته، چنین دستگاه‌های ایده‌آلی را نمی‌توان ساخت، زیرا دستگاه‌های عملی همواره مقاومت ظاهری داخلی معینی دارند. بنابراین، یک مولد عملی شامل یک منبع ولتاژ $V(t)$ است که به‌طور متوالی به یک مقاومت ظاهری Z_I ، یعنی مقاومت ظاهری داخلی، متصل شده است. چنین مولدی در شکل ۱۳-۱۵ نشان داده شده است که به بار Z_L متصل است. در مورد این مدار چند نکته را می‌توان تذکر داد. اولاً، برای آنکه حداکثر توان به بار خارجی منتقل شود، باید $Z_L = Z_I^*$



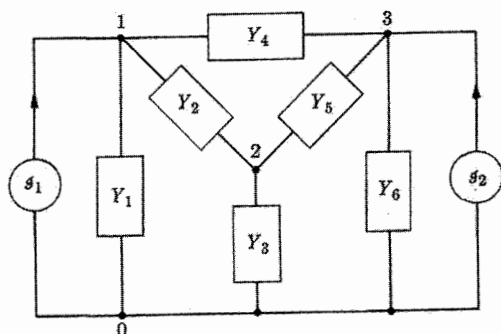
شکل ۱۳-۱۶ یک "مولد جریان" که معادل مولد ولتاژ شکل ۱۳-۱۵ است.



شکل ۱۳-۱۷ مثالی از روش تحلیل گره‌ای در مدارهای ac.

باشد؛ به عبارت دیگر، قسمت‌های حقیقی Z_L و Z_I باید مساوی باشند و قسمت‌های موهومی آنها نیز باید با هم مساوی ولی علامت آنها مخالف باشد. اثبات این مطلب به‌عنوان یک مسئله داده شده است. ثانیاً، یک مولد ولتاژ، معادل یک مولد جریان است که با مقاومت ظاهری داخلی به‌طور موازی متصل شده است و جریانی برابر با $\mathcal{I}(t) = \mathcal{V}(t)/Z_I$ می‌دهد. این وضعیت معادل برای مدار شکل ۱۳-۱۵ در شکل ۱۳-۱۶ نشان داده شده است. برای نشان دادن معادل بودن دو مدار، تنها کافی است توجه کنیم که یک مولد جریان ایده‌آل در هر باری که به دو سر آن وصل شود، جریانی برابر با $\mathcal{I}(t)$ برقرار می‌کند. علاوه بر این، معادل بودن آن دو بدین معنی است که در مسائل مدار، مولدها را می‌توان بسته به راحتی کار به‌عنوان مولد ولتاژ یا به‌عنوان مولد جریان به حساب آورد.

معادلات گره‌ای برای یک مدار را می‌توان با به‌کار بردن قانون جریان کیرشهوف (I) برای هر گره در شبکه به‌دست آورد. در اینجا گره به معنی نقطه‌ای است که در آن سه جزء مدار یا بیشتر به یکدیگر متصل می‌شوند. در این روش قانون ولتاژ کیرشهوف (II) خودبه‌خود صادق خواهد بود. می‌توان شکل ۱۳-۱۷ را به‌عنوان مثالی ساده در مورد کاربرد معادلات گره‌ای در نظر گرفت. با فرض اینکه جمع جبری جریان‌هایی که به هر یک از گره‌ها می‌رسند برابر صفر است، معادلات گره‌ای به‌دست می‌آیند. گره‌ها شماره‌گذاری می‌شوند، و شماره صفر از گره‌ای شروع می‌شود که پتانسیل آن برای مدار، پتانسیل مرجع است. اگر پتانسیل گره \circ را صفر فرض کنیم، در این صورت در گره



شکل ۱۳-۱۸ مدار دیگری که مثالی است از روش تحلیل گره‌ای.

۱ خواهیم داشت

$$\mathcal{I}(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \quad (۵۹-۱۳)$$

که در آن V_1 و V_2 به ترتیب پتانسیل‌های گره‌های ۱ و ۲ هستند. در گره ۲ داریم

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4} \quad (۶۰-۱۳)$$

قبل از اینکه به حل مسئله ادامه دهیم، مشاهده می‌کنیم که کمیتی که عکس مقاومت ظاهری باشد، برای سهولت انجام محاسبات بسیار مناسب است. چنین کمیتی را رسانایی ظاهری می‌نامند و با نماد Y نشان می‌دهند: $Y = 1/Z$. رساناییهای ظاهری در اتصال موازی با هم جمع می‌شوند، در صورتی که در اتصال متوالی معکوس آنها با هم جمع می‌شود. اگر معادلات (۵۹-۱۳) و (۶۰-۱۳) را برحسب رساناییهای ظاهری بنویسیم، نتیجه خواهد شد

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t) &= (Y_1 + Y_2) V_1 - Y_2 V_2 \\ 0 &= -Y_2 V_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4) V_2 \end{aligned} \quad (۶۱-۱۳)$$

که تا اندازه‌ای ساده‌ترند. اگر این معادلات را با هم حل کنیم، ولتاژهای گره‌ها، یعنی V_1 و V_2 ، به دست می‌آیند.

مثال دیگری از کاربرد معادلات گره‌ای را در نظر می‌گیریم و آن حل مدار است که در شکل ۱۳-۱۸ نشان داده شده است. در این مورد معادلات گره‌ای را می‌توان به سادگی به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= Y_1 V_1 + Y_2 (V_1 - V_2) + Y_4 (V_1 - V_3) \\ 0 &= Y_2 (V_2 - V_1) + Y_3 V_2 + Y_5 (V_2 - V_3) \\ \mathcal{I}_2 &= Y_6 V_3 + Y_5 (V_3 - V_2) + Y_4 (V_3 - V_1) \end{aligned} \quad (۶۲-۱۳)$$

این معادلات را می‌توان با روشهای استاندارد حل کرد و ولتاژها را در گره‌ها به دست آورد. اینکه با حل این معادلات ولتاژها به جای جریانها به دست می‌آیند، مزیت بزرگی است، مخصوصاً در مدارهای ارتباطاتی.

*۱۳-۱۰ مقاومت ظاهری نقطه تحریک و توابع انتقال

اکنون می‌خواهیم تعاریف ساده‌ای برای مقاومت ظاهری نقطه تحریک و توابع انتقال برای یک شبکه چهار سر ارائه کنیم. این تعاریف را بدین علت در اینجا ارائه می‌کنیم که این واژه‌ها به کرات در کتابهای فنی به چشم می‌خورند و گاهی برای افراد مبتدی اشکال جدی ایجاد می‌کنند. یک شبکه چهار سر در نظر بگیرید، و دو سر ۱ و ۲ را ورودی، و دو سر ۳ و ۴ را خروجی بنامید. اگر چنانکه در شکل ۱۳-۱۹ نشان داده شده است، یک مولد با ولتاژ \mathcal{V} و مقاومت ظاهری داخلی Z_I به دو سر ۱ و ۲ متصل شود و یک مقاومت ظاهری Z_L بین دو سر ۳ و ۴ وصل شود، جریانی برابر با I_I از Z_I ، و جریانی برابر با I_L از Z_L عبور خواهد کرد، و ولتاژ دو سر Z_L برابر با V_L خواهد بود. مقاومت ظاهری نقطه تحریک، Z_D ، عبارت است از

$$Z_D = \frac{\mathcal{V}}{I_t} \quad (۱۳-۶۳)$$

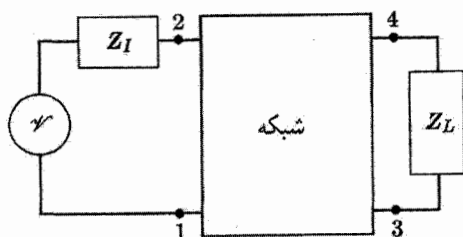
چهار تابع انتقال که متغیرهای ورودی را به متغیرهای خروجی مربوط می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

مقاومت ظاهری انتقال:

$$Z_T = \frac{\mathcal{V}}{I_L} \quad (۱۳-۶۴)$$

رسانایی ظاهری انتقال:

$$Y_T = \frac{I_I}{V_L} \quad (۱۳-۶۵)$$



شکل ۱۳-۱۹ یک شبکه چهار سر.

بهره جریان:

$$G_T = \frac{I_L}{I_I} \quad (۶۶-۱۳)$$

بهره ولتاژ:

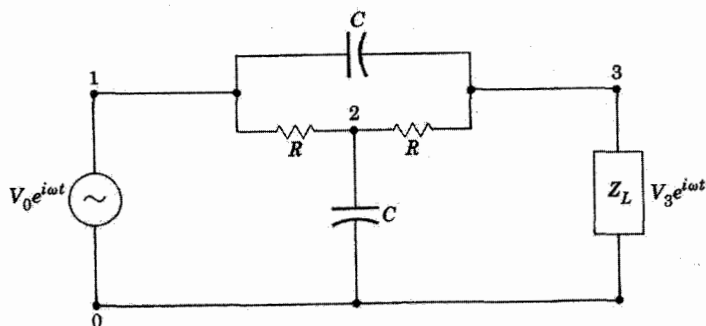
$$A_T = \frac{V_L}{V_I} \quad (۶۷-۱۳)$$

باید توجه داشت که مقاومت ظاهری نقطه تحریک و توابع انتقال، علاوه بر ساختار داخلی شبکه، به مقاومت‌های ظاهری منبع و بار نیز بستگی دارند. ولی در بسیاری موارد، می‌توان با استفاده از فرض منبع ولتاژ با مقاومت ظاهری صفر یا منبع جریان با مقاومت ظاهری بی‌نهایت و فرض باری با مقاومت ظاهری بی‌نهایت یا مقاومت ظاهری صفر، به تقریبهایی کافی دست یافت.

بحث مختصر بالا نمی‌تواند حق مطلب را درباره نظریه شبکه‌ها ادا کند؛ برای جزئیات این موضوع پیچیده، باید به کتابهای کلاسیک مانند کتاب گیل‌مین^۱ و کتابهای متعدد جدیدتر مراجعه شود.

* ۱۱-۱۳ حل معادلات شبکه با کامپیوتر

پیدا کردن ولتاژهای گره یا جریانهای حلقه در یک شبکه پیچیده برای تعداد متفاوتی فرکانس آشکارا امر دشواری است و شایسته است که کامپیوتر را به‌کار ببریم. برای مثال، مدار ساده‌ای به نام شبکه پل T ، نشان داده شده در شکل ۱۳-۲۰ را در نظر می‌گیریم. این مدار، که حالت خاص آنهایی است که در شکل ۱۳-۱۳ یا ۱۸-۱۳ نشان داده شده است، فرکانسهایی را که در باندی حول $\omega_0 = 1/RC$



شکل ۲۰-۱۳ شبکه پل T .

قرار دارد تضعیف می‌کند در حالی که فرکانسهایی را که از ω فاصله دارند با تضعیف نسبتاً کمی عبور می‌دهد. بنابراین، به عنوان صافی برای برداشتن فرکانسهای ناخواسته می‌تواند به کار رود. با وجودی که مدارهای صافی به مراتب بهتری موجود است، پل T ساده است و جنبه‌های بسیاری از تحلیل مدار را نشان می‌دهد. معادلات گره‌ای برای این مدار را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{1}{R}(V_2 - \mathcal{V}_0) + \frac{1}{R}(V_2 - V_3) + i\omega CV_2 = 0 \quad (۱۳-۶۸الف)$$

$$\frac{1}{R}(V_3 - V_2) + i\omega C(V_3 - \mathcal{V}_0) + \frac{1}{Z_L} V_3 = 0 \quad (۱۳-۶۹الف)$$

با معرفی فرکانس بدون بُعد $F = \omega RC$ و دوباره مرتب کردن معادلات به طوری که ورودی معلوم را طرف دست راست بگذاریم به دست می‌آید

$$(2 + iF)V_2 - V_3 = \mathcal{V}_0 \quad (۱۳-۶۸ب)$$

$$-V_2 + \left(1 + iF + \frac{R}{Z_L}\right)V_3 = iF\mathcal{V}_0 \quad (۱۳-۶۹ب)$$

فرض کنیم Z_L بی‌نهایت باشد، پاسخ برای V_3/\mathcal{V}_0 برابر است با

$$\frac{V_3}{\mathcal{V}_0} = \frac{(1 - F^2)^2 + 6F^2 - iF(1 - F^2)}{(1 - F^2)^2 + 9F^2} = A_r + iA_i = Ae^{i\theta} \quad (۱۳-۷۰)$$

این شکل بسته پاسخ را می‌توان برای هر مقدار $F = \omega RC$ محاسبه کرد. به هر حال آنچه خواسته می‌شود نمودار V_3/\mathcal{V}_0 بر حسب تابعی از فرکانس است. برای این منظور معادله (۱۳-۷۰) باید مکرراً محاسبه شود. این تکلیف برای کاربرد کامپیوتر کمال مطلوب است. با برنامه ساده BRIDGET2 در شکل ۱۳-۲۱، قسمتهای حقیقی و موهومی بهره ولتاژ و اندازه و فاز آن محاسبه می‌شود.

چون مناسب‌ترین روش ترسیم پاسخهای فرکانس ترسیم با مقیاس لگاریتمی است، برنامه ابتدا کمینه مقدار F ، تعداد نقاط در یک دهه فرکانس، و تعداد دهه‌ها را سؤال می‌کند. محاسبات و چاپ کردن در خطوط 32° تا 41° انجام شده است. خط 33° یک گروه از N فرکانس در یک دهه را با فواصل یکسان روی مقیاس لگاریتمی تولید می‌کند. باقی برنامه محاسبه ساده و چاپ کردن استاندارد است.^۱ نتایج برای $F_{MIN} = 0.1$ ، $N = 10$ نقطه در هر دهه و $M = 3$ دهه در

۱. خطوط 21° و 22° مشخصات دیسک و پرونده داده‌هایی را که در خط 30° باز شده، در 39° فرمان چاپ داده شده، و در خط 45° بسته شده، تأمین می‌کند. چون این خطوط برای ساختن پرونده داده‌ها برای رسم کردن پاسخ


```

100 '*****
110 '*
120 '*          TRANSFER FUNCTION FOR A SIMPLE BRIDGED T (BRIDGET)
125 '*          NO ESSENTIAL LINE NUMBERS
130 '*
140 '*****
150 '
160 CLS
170 'Variable F = OMEGA*R*C is a dimensionless frequency.
180 '
190 INPUT "Low end of frequency range, FMIN = ", FMIN
200 INPUT "Number of points per decade, N = ", N
210 INPUT "Number of decades, M = ", M
220 'PRINT "Enter drive 'D' & file name 'BRIDT##' in format shown for data file"
230 'INPUT "D:\BRIDT## =", F$
240 PRINT
250 PRINT "For lineprinter output LP = 1": INPUT "LP = ", LP
260 '
270 PRINT "      F          AR          AI          A          THETA": PRINT
280 IF LP = 1 THEN LPRINT "      F          AR          AI          A          THETA"
290 IF LP = 1 THEN LPRINT
300 'OPEN F$ FOR OUTPUT AS #1
310 '
320 FOR K = 0 TO N * M
330 F = FMIN * (10 ^ (K / N))
340 AR = ((1 - F ^ 2) ^ 2 + 6 * F ^ 2) / ((1 - F ^ 2) ^ 2 + 9 * F ^ 2)
350 AI = (-F * (1 - F ^ 2)) / ((1 - F ^ 2) ^ 2 + 9 * F ^ 2)
360 A = SQR(AR ^ 2 + AI ^ 2)
370 THETA = ATN(AI / AR): 'radians
380 PRINT USING "###.### " ; F; AR; AI; A; THETA
390 'PRINT #1, USING "###.### " ; F, A
400 IF LP = 1 THEN LPRINT USING "###.### " ; F; AR; AI; A; THETA
410 NEXT K
420 '
430 'CLOSE #1
440 END

```

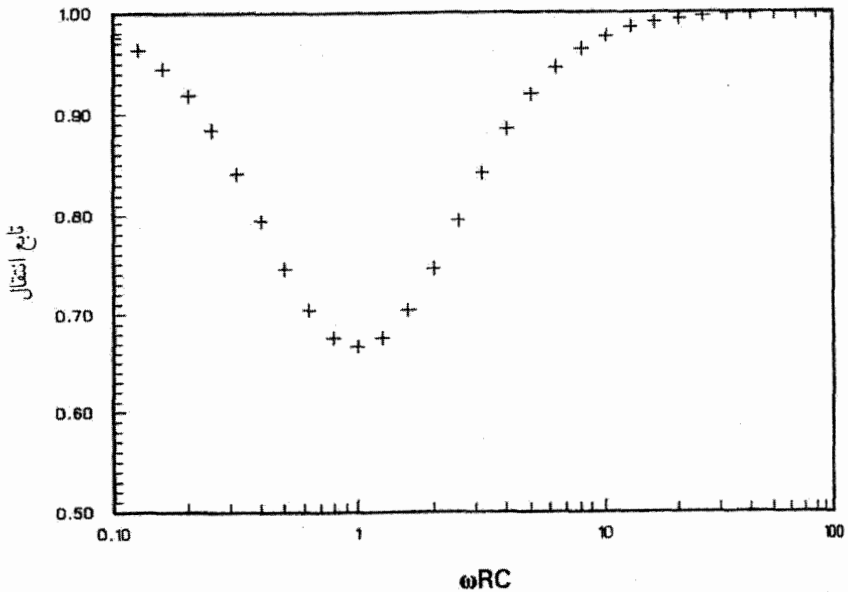
شکل ۱۳-۲۱ برنامه بسیک برای محاسبه بهره و لتاژ شبکه پل T.

شکل ۱۳-۲۲ رسم شده است. این منحنی با به وجود آوردن یک پرونده داده‌ها و استفاده از یک بسته رسام فنی تجاری تولید شده است.^۱ برنامه شکل ۱۳-۲۱، ۱۰۰ گروه از مقادیر را تقریباً در ۲۰ ثانیه (روی کامپیوتری با تراشه پردازشگر ۸۰۸۸، بدون کمک هم‌پردازشگر) محاسبه می‌کند. این بی‌شک صرفه‌جویی بسیار زیادی در وقت در مقایسه با محاسبه دستی است. دیگر مزیت اصلی کامپیوتر پرهیز از خطاهای محاسباتی است. در آینده، ما به این روش به‌عنوان روش جبری ارجاع خواهیم کرد.

اگر بیش از دو معادله درگیر باشد، به‌دست آوردن شکل بسته، پاسخ جبری دشوار است و محاسبه آن به برنامه‌ای پیچیده‌تر نیاز دارد. به‌علاوه، برنامه جدیدی باید برای هر مدار جدید نوشته شود. چاره سودمند دیگر این است که برنامه‌ای برای حل معادله خطی برای به‌دست

^۱ فرکانس به‌کار برده شده‌اند، آنها با آستروف آغازین در شکل ۱۳-۲۱ از کار انداخته شده‌اند. خطوط ۲۴۰ و ۲۵۰ خروجی چاپگر خطی را تأمین می‌کند. فقط پاسخ $LP = 1$ موجب خواهد شد که برنامه یک نسخه چاپ شده از نتایج را تولید کند.

۱. بسته خاص به‌کار رفته شده TECH * GRAPH * PAD بود، متعلق به شرکت



شکل ۱۳-۲۲ اندازه بهره ولتاژ برای شبکه پل T.

آوردن نتایج لازم به‌کار بریم. این روش روش ماتریس نامیده خواهد شد. معادلات را می‌توان با استفاده از برنامه G-J2KA، که ما قبلاً در فصل ۳ به‌کار برده‌ایم (فهرست آن در شکل I-۳ ضمیمه I داده شده است) حل کرد. دو نکته ابتدایی وجود دارد: ورودیهای G-J2KA باید عدد باشند و اعداد باید حقیقی باشند. در معادلات (۱۳-۶۸ب) و (۱۳-۶۹ب)، ضرایب و طرف دست راست که شامل ورودیهاست به F بستگی دارند و مختلط‌اند. تدبیر کلی برای حل این چنین مجموعه معادلات این است که ابتدا تعدادی را برای F انتخاب کنیم و ضرایب و ثابتها را محاسبه کنیم. معادلات سپس شامل ضرایب عددی مختلط می‌شوند. بعد معادلات را برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی جدا می‌کنیم. درست کردن یک برنامه کامپیوتری برای انجام جداسازی ساده است. بنابراین تعداد معادلات دو برابر می‌شود اما همه ضرایب و طرفهای دست راست حقیقی‌اند. یک برنامه استاندارد برای حل معادلات خطی نظیر G-J2KA را سپس می‌توان برای به‌دست آوردن پاسخ عددی به‌کار برد. مقدار بعدی F را بنابراین انتخاب کرده و فرایند ادامه می‌یابد.

برای مورد ساده شبکه پل T می‌توانیم به‌سادگی ضرایب مختلط وابسته به فرکانس را مورد تحلیل قرار دهیم. معادلات (۱۳-۶۸ب) و (۱۳-۶۹ب) را به‌صورت چهار معادله با ضرایب ثابتهای

```

1000 *****
1010 **
1020 **      CONTIK: CONTROL PROGRAM FOR THE SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR **
1030 **      EQUATIONS WITH MATRIX ELEMENTS THAT DEPEND ON A PARAMETER **
1040 **      (E.G. FREQUENCY) USING GAUSS-JORDAN ELIMINATION **
1050 **      NO ESSENTIAL LINE NUMBERS **
1060 **
1070 *****
1080 '
1090 'The equations are   A(I%,J%)W(J%) = D(I%)
1100 '
1110 'Identifiers:
1120 '   W           W           solution vector
1130 '   M1%        MAX%        maximum dimension of matrices
1140 '   N1%        NROW%       number of rows
1150 '   N2%        NCOL%       number of columns
1160 'End of identifiers.
1170 'Formats:
1180 A$ = " ##.###^####"; B$ = "##.####"; C$ = " ##.###"
1190 INPUT "Maximum number of equations M1% = ", M1%
1200 DIM A(M1%,M1%), D(M1%), W(M1%)
1210 '
1220 GOSUB 4000:'Use SUB 4000 to read A1, A2, D1 and D2
1230 'Specify the frequency range in terms of lowest frequency,
1240 'number of points per decade and number of decades.
1250 INPUT "Low end of frequency range, FMIN = ", FMIN
1260 INPUT "Number of points per decade, N=" , N
1270 INPUT "Number of decades, M = ", M
1280 PRINT "      F      W1      W2      W3      W4      W5      W6"
1290 FOR K = 0 TO N*M
1300   F = FMIN*(10^(K/N))
1310   GOSUB 5000:'Use SUB 5000 to compute matrix elements
1320   'Matrix elements and constants have been evaluated for F. Now solve.
1330   GOSUB 2000:'SUB 2000 is the Gauss-Jordan elimination program.
1340   PRINT USING C$; F,
1350   FOR I% = 1 TO N2%
1360     PRINT USING C$; W(I%),
1370   NEXT I%
1380   PRINT
1390 NEXT K
1400 END

```

شکل ۱۳-۲۳ برنامه ناظر (به زبان بیسیک) برای حل شبکه‌ها توسط روش ماتریس.

حقیقی وابسته به فرکانس به صورت زیر می‌نویسیم

$$2W_1 - FW_2 - W_3 = 1 \quad (71-13)$$

$$FW_1 + 2W_2 - W_4 = 0 \quad (72-13)$$

$$-W_1 + W_3 - FW_4 = 0 \quad (73-13)$$

$$-W_2 + FW_3 + W_4 = F \quad (74-13)$$

که مانند گذشته $F = \omega RC$ ، و $V_2/V_0 = W_1 + iW_2$ ؛ $V_3/V_0 = W_3 + iW_4$. این معادلات به شکل $\sum A_{ij}W_j = D_i$ هستند و بعضی از کمیتها، A_{ij} و D_i ، به F بستگی دارند. مقادیر عددی این کمیتها برای هر مقدار F باید به دست آورده شود، قبل از اینکه بتوان معادلات را برای آن مقدار F حل کرد. دستورالعمل مورد نیاز و ورودیها توسط چهار زیر برنامه کوتاه آماده شده است. اولین، برنامه کنترل، CONTIK است که در شکل ۱۳-۲۳ فهرست شده است. این برنامه حداکثر بعد آرایه‌ها را قرار می‌دهد، زیر برنامه INP4K، شکل ۱۳-۲۴ را فرا می‌خواند

```

4000 /*****
4010 /*
4020 /* INP4K: SUBROUTINE TO INPUT A1(I%,J%); A2(I%,J%); C1(I%); C2(I%)
4030 /*           USE WITH: CONT1K, INP5K, DAT6K
4040 /*           LINE NUMBER 4000 IS ESSENTIAL
4050 /*
4060 /*****
4070 DIM A1(M1%,M1%), A2(M1%,M1%), C1(M1%), C2(M1%)
4080 INPUT "How many equations? N1% = ", N1%
4090 'N1 is the number of equations with real coefficients, i.e., twice
4100 'the number of equations with complex coefficients.
4110 IF (N1% > M1%) THEN PRINT "Subscript out of range": STOP
4120 IF (N1% < 2) THEN PRINT "Only one equation": STOP
4130 N2% = N1%
4140 'A(I%,J%) = A1(I%,J%) + F*A2(I%,J%); D(I%) = D1(I%) + F*D2(I%)
4150 PRINT
4160 PRINT "Coefficients A1, A2, D1 and D2 should be stored in lines 6000-"
4170 PRINT "If not, exit, type LIST 6000- and enter data."
4180 PRINT "Press CTRL BRK to exit. Press any key to continue."
4190 K$ = INPUT$(1)
4200 PRINT
4210 FOR I% = 1 TO N1%
4220   FOR J% = 1 TO N1%
4230     READ A1(I%,J%)
4240     READ A2(I%,J%)
4250   NEXT J%
4260   READ D1(I%)
4270   READ D2(I%)
4280 NEXT I%
4290 RETURN

```

شکل ۱۳-۲۴ زیربرنامه (به زبان بیسیک) برای استفاده با CONT1K و G-J2KA.

که تعداد معادلاتی را که بناست حل شود بنا نهد، و زیربرنامه DAT6K، شکل ۱۳-۲۵، را برای به دست آوردن ثابتهای * $A_1(I, J)$ ، $A_2(I, J)$ ، $D_1(I)$ و $D_2(I)$ فرا می خواند. از این ثابتها زیربرنامه INP5K نشان داده شده در شکل ۱۳-۲۵، هر دو مخصوص این برنامه هستند و اگر مدار تغییر کند باید اصلاح شوند. زمانی که کنترل به برنامه اصلی برمی گردد، بازه فرکانس و تعداد نقاط در هر دهه وارد می شوند و سربرگ برای جدول خروجی چاپ می شود. سپس زیربرنامه INP5K (شکل ۱۳-۲۵) برای محاسبه مقادیر عددی برای $A(I, J)$ و $D(I)$ اجرا می شود. با این اجرا تعیین پارامترهای معادلاتی که باید حل شوند کامل می شود، و در مراجعت با برنامه اصلی، کنترل بلافاصله به G-J2KA انتقال پیدا می کند که معادلات را حل می کند، و سپس یک بار دیگر به برنامه اصلی برمی گردد. برنامه اصلی (CONT1K) نتایج را چاپ می کند، به F' بعد گام برمی دارد، و فرایند را تکرار می کند. خروجی از این برنامه مجموعه مؤلفه های حقیقی و موهومی ولتاژها در گره های دو (W_1 و W_2) و سه (W_3 و W_4) است. جفت W_3 و W_4 برای گره سه همان A_r و A_i هستند که در بالا [معادله (۱۳-۷۰)] با استفاده از روش جبری محاسبه شدند.

* ما برای کمیّت نمادین A_{ij} ، و برای مقدار عددی $A(I, J)$ را به همان شکل که در برنامه کامپیوتر ظاهر می شود، به کار بردیم.

```

5000 /*****
5010 /*
5020 /*      INP5K: SUBROUTINE TO COMPUTE A(I%,J%) and D(I%)
5030 /*      LINE NUMBER 5000 IS ESSENTIAL
5040 /*
5050 /*****
5060 /
5070 FOR I% = 1 TO N1%
5080   FOR J% = 1 TO N1%
5090     A(I%,J%) = A1(I%,J%) + F*A2(I%,J%)
5100   NEXT J%
5110   D(I%) = D1(I%) + F*D2(I%)
5120 NEXT I%
5130 RETURN
6000 /*****
6010 /*
6020 /*      DAT6K: DATA ENTRY FOR G-J INPUT SUBROUTINES INP4K and INP5K
6030 /*      NO ESSENTIAL LINE NUMBERS
6040 /*
6050 /*****
6060 'Enter data A1(I%,J%),A2(I%,J%),D1(I%),D2(I%) .
6070 'Use a separate line for each I.
6080 'There will be N1 lines with 2*N1 + 2 data items per line.
6090
6100 'The following data are for the four equations for the Bridge T filter.
6110 /
6120 DATA 2.0, 0.0, 0.0, -1.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
6130 DATA 0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0
6140 DATA -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, -1.0, 0.0, 0.0
6150 DATA 0.0, 0.0, -1.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0

```

شکل ۲۵-۱۳ زیربرنامه‌هایی (به زبان بیسیک) برای وارد کردن و دستکاری داده‌ها برای استفاده با CONTIK.

با این روش در حدود ده برابر بیشتر طول می‌کشد تا مقادیر برای یک مقدار منفرد F حساب شود. برنامه‌نویسی نیز به مراتب پیچیده‌تر است (حتی بدون استفاده از یک زیربرنامه برای تبدیل از معادلات با ضرایب مختلط به معادلات با ضرایب حقیقی). BRIDGET2 کمتر از 20° خط اساسی دارد، و حال آنکه روش ماتریس با استفاده از G-J2KA بیش از 100° خط اساسی دارد. پس اصلاً چرا خودمان را با روش ماتریس به دردسر بیندازیم؟ پاسخ این پرسش آن است که در روش ماتریس، لازم نیست پاسخهای جبری را برای معادلات گره بیاییم. در عوض معادلات به‌طور عددی برای هر فرکانس توسط کامپیوتر حل می‌شوند. برای دو تا معادله، پرهیز از پاسخ معادلات جبری مزیت خاصی نیست. لیکن مزیت روش ماتریس هنگامی که تعداد معادلات افزایش یابد به سرعت آشکار می‌شود. مزیت دیگر این است که یک برنامه کاملاً جدید برای محاسبه هر پاسخ جبری باید نوشته شود (وگرنه عملیات جبری قابل اشتباه بسیاری باید به‌عنوان مقدمات انجام شوند)، در صورتی‌که در روش ماتریس کافی است برنامه‌های نسبتاً ساده ورودی و داده‌ها را تغییر دهیم. در برخی مسائل آخر فصل این نکته‌ها با جزئیات بیشتری بررسی می‌شوند.

سومین و آخرین روش برای حل معادلات شبکه به‌کارگیری نرم‌افزار تجاری است. معمول‌ترین نرم‌افزار به‌کار برده شده ویرایشی از SPICE^۱ است. همان‌گونه که اسم برنامه نشان می‌دهد،

SPICE منحصر به شبکه‌های غیرفعال نیست، اما به‌طور بسیار مؤثر با آنها روبه‌رو می‌شود. در SPICE، تمام گره‌ها در یک مدار شماره‌گذاری شده‌اند و تمام عناصر مدار اسم دارند، به‌طور مثال C4، R1 و غیره. هر عنصر مدار در یک "فهرست شبکه" وارد می‌شود که حاوی اسم عنصر، گره‌هایی که بین آنها عنصر وصل شده، و پارامترهای عددی مشخص‌کننده عنصر است. ولتاژها و جریانهای محرک، همچنین نوع تحلیلی که باید انجام شود: dc، ac، یا گذرا مشخص می‌شوند. شکل خروجی مشخص می‌شود و نرم‌افزار بقیه را انجام می‌دهد. در یک تحلیل ac، معادل روش ماتریس فوق، SPICE تمام مقاومت‌های ظاهری را محاسبه می‌کند، معادلات لازم را می‌سازد، و آنها را برای هر مقدار فرکانس در بازه مورد نظر حل می‌کند. خروجی به شکل جدول یا منحنی ارائه می‌شود و فهرستهای داده‌ها مناسب برای پردازشهای دیگر می‌تواند نوشته شود. یادگیری استفاده از SPICE احتیاج به قدری کوشش دارد، ولی اگر مدارهای پیچیده باید تحلیل شود — خصوصاً اگر مدارهای فعال (مدارهای شامل لامپهای خلأ و قطعات نیم‌رسانا) و یا عناصر غیرخطی مدار باید در نظر گرفته شود — کوششی کاملاً ارزشمند است. اطلاعات بیشتر دربارهٔ SPICE را می‌توان در مرجع زیر^۱ پیدا کرد.

۱۳-۱۲ خلاصهٔ مطالب

مشابه مدارهای dc، تحلیل مدارهایی که حامل جریانهای گند تغییرند، متکی به قوانین جریان و ولتاژ کیرشهوف است که در اینجا این قوانین باید در هر لحظه از زمان به‌کار برده شوند. جریان و ولتاژ یک مقاومت خطی به‌طور لحظه‌ای، مطابق قانون اهم به یکدیگر مربوط‌اند:

$$V_R = RI$$

قوانین مشابه برای یک خودالقای خطی و یک خازن خطی عبارت‌اند از

$$V_L = L \frac{dI}{dt}, \quad V_C = \frac{1}{C} Q$$

که در آن $I = dQ/dt$ برای مداری شامل تنها یک حلقه که حاوی ولتاژ اعمال‌شده $\mathcal{V}(t)$ باشد، قوانین کیرشهوف معادلهٔ دیفرانسیل زیر را نتیجه می‌دهد

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{V}(t)$$

1. L. G. Meares and C. E. Hymowitz, *Simulating with SPICE* (San Pedro, CA: Intusoft, 1988).

برای شبکه‌ای پیچیده‌تر، دستگاهی از یک چنین معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی نتیجه می‌شود. پاسخ عمومی این معادله ترکیبی است از پاسخ خصوصی آن (پاسخ حالت پایا)، با پاسخ عمومی معادله همگن متناظر آن که از قرار دادن $\mathcal{V}(t) = 0$ به دست می‌آید (پاسخ گذرا). ثابتهای دلخواه در پاسخ گذرا چنان انتخاب می‌شوند که شرایط اولیه را برآورده کنند.

• پاسخ گذرا تابعی نمایی از t است؛ اگر نما مختلط باشد، قسمت موهومی از نظر فیزیکی نمایانگر نوسان Q و I است. قسمت حقیقی نمایانگر رفتار فروافتی (رفتار گذرا) است با یک زمان فروافت که هر چه R بزرگتر باشد، این زمان کوچکتر است. برای اکثر مدارهای عملی، زمان فروافت نوعاً در حدود کسری از ثانیه است.

• رفتار حالت پایا تنها برای یک ولتاژ اعمال شده سینوسی (ac) مورد بحث قرار گرفته است. (ولتاژ ثابت حالت خاص فرکانس صفر است؛ بستگی دلخواه به زمان را می‌توان با ترکیب فوریه نمایش داد). چنانچه ولتاژ اعمال شده $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t$ را به صورت مختلط زیر نشان دهیم

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$$

جریان حالت پایا دارای همان فرکانس ω است و به صورت زیر خواهد بود

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

مقاومت ظاهری مختلط Z به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{V} = ZI$$

هنگامی که Z به صورت قطبی بیان شود

$$Z = |Z| e^{i\theta}$$

بزرگی آن، $|Z|$ ، دامنه جریان را به دست می‌دهد

$$|I_0| = \mathcal{V}_0 / |Z|$$

و θ زاویه فاز جریان را نسبت به ولتاژ اعمال شده می‌دهد. قانون اهم و تعمیمهای آن روابط زیر را می‌دهند

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

زیرا $I = i\omega Q$ است.

- تحلیل رفتار حالت پایای مدارهای خطی ac دقیقاً مشابه تحلیل مدارهای dc است و مقاومت ظاهری مختلط به صورت تعمیمی از مقاومت dc به کار می‌رود.
- اتلاف توان لحظه‌ای عبارت است از $P(t) = \text{Re } I(t) \text{Re } V(t)$. برای محرک ac در یک فرکانس منفرد، میانگین زمانی اتلاف توان برابر است با

$$\bar{P} = \frac{1}{T} |I_0| |V_0| \cos \theta$$

ضریب توان، $\cos \theta$ ، برای یک مقاومت خالص یک، و برای یک خودالقای خالص یا یک خازن خالص صفر است. ولتاژ و جریان "مؤثر" عبارتند از $|V_0|/\sqrt{2}$ و $|I_0|/\sqrt{2}$. عبارت معادلی برای میانگین زمانی توان ac عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \text{Re}(I^* V)$$

- به‌عنوان تابعی از فرکانس، یک مدار متوالی در نزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدید می‌شود و بروز می‌دهد که در این حال $|Z|$ کمینه است و $|I_0|$ بیشینه. تیزی تشدید با رابطه زیر داده می‌شود

$$Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

- یک مدار موازی نیز در نزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدید دارد که در آنجا $|Z|$ بیشینه است و $|I_0|$ کمینه.

- مبدل متداول‌ترین عنصر مدار با القای متقابل است. مبدل ایده‌آل مبدلی است که برای آن نسبت جریان ثانویه به جریان اولیه برابر است با عکس نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ اولیه.
- مسائل پیچیده شبکه ac به سادگی به وسیله کامپیوتر حل می‌شوند. دو روش نسبتاً سراسر است که می‌توان در کامپیوترهای شخصی از آنها استفاده کرد، عبارت‌اند از روش جبری و روش ماتریسی. بهترین روش حل مسائل مدارهای پیچیده‌تر که شامل عناصر غیرخطی یا فعال مدار هستند، استفاده از نرم‌افزارهای تجارتي است.

مسائل

- ۱۳-۱ یک خودالقا به ضریب خودالقای ۲ هنری و یک مقاومت ۳ اهمی با یک باتری ۵ ولتی و یک کلید به‌طور متوالی به هم متصل شده‌اند. جریان و آهنگ تغییرات جریان (dI/dt) را در مدار در زمانهای زیر بعد از اتصال کلید به دست آورید: (الف) ۳^{ره} ثانیه، (ب) ۱ ثانیه، (ج) ۴ ثانیه.
- ۱۳-۲ مداری شامل خودالقای L_0 ، مقاومت R_0 و باتری \mathcal{V}_0 ، جریان پایایی به صورت $I = \mathcal{V}_0/R_0$

دارد. کلیدی در این مدار وجود دارد که در لحظه $t = 0$ باز می‌شود و جرعه‌ای در دو سر کلید ایجاد می‌کند. (الف) اگر مقاومت جرعه با k/I داده شده باشد، که در آن $k < \mathcal{V}$ است (k ثابت است)، جریانی را که از جرعه می‌گذرد برحسب تابعی از زمان تعیین کنید. (ب) مقدار نهایی جریان پایایی که از جرعه می‌گذرد چقدر است؟

۱۳-۳ خازن C ، مقاومت R و باتری \mathcal{V} با یک کلید به‌طور متوالی به هم متصل شده‌اند. کلید در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. (الف) معادله دیفرانسیل حاکم بر بار Q روی خازن را بنویسید. (ب) Q را برحسب تابعی از زمان تعیین کنید.

۱۳-۴ خازن C با بار Q_0 دفعتاً به‌طور متوالی به مقاومت R و خودالقای L متصل می‌شود. (الف) جریان را برحسب تابعی از زمان تعیین کنید. (ب) نشان دهید که سه نوع حل مختلف وجود دارد، که بستگی به این دارد که $R^2 - 4L/C$ کوچکتر، مساوی یا بزرگتر از صفر باشد. حالت اول به نام کندمیرا، حالت دوم به نام میرای بحرانی و حالت سوم به نام تندمیرا خوانده می‌شود.

۱۳-۵ خازن واقعی C دارای یک مقاومت نشتی R به‌صورت موازی است و به‌طور متوالی به یک خودالقای ایده‌آل L وصل شده است. (الف) $|Z|$ را محاسبه کنید. (ب) با فرض آنکه R بزرگ است، مقادیر تقریبی آن را در فرکانسهای زیاد و در فرکانسهای کم و در حالت تشدید به‌دست آورید. (ج) منحنی تقریبی $|Z|$ را برحسب ω رسم کنید.

۱۳-۶ مسئله ۱۳-۵ را با فرض آنکه یک خازن نشتی با خودالقای کامل در اتصال موازی باشد، تکرار کنید.

۱۳-۷ مدار شکل ۱۳-۱ شامل یک خازن اضافی C' است که با ترکیب کامل RLC به‌طور موازی متصل شده است. $R = 100 \Omega$ ، $L = 1 \text{ H}$ ، $C = 100 \mu\text{F}$ و $C' = 10 \mu\text{F}$. منحنی مقاومت ظاهری $|Z|$ را برحسب فرکانس از صفر تا $f = 10^4 \text{ Hz}$ رسم کنید.

۱۳-۸ یک ترکیب متوالی از مقاومت R و خودالقای L به‌طور موازی به ترکیبی متوالی از مقاومت R و خازن C متصل شده است. نشان دهید که اگر $R^2 = L/C$ باشد، مقاومت ظاهری مستقل از فرکانس است.

۱۳-۹ مقاومتی به‌صورت یک سیم‌پیچ دارای مقاومت 900Ω dc و ضریب خودالقای 8 میکروهنری است. (الف) زاویه فاز مقاومت ظاهری آن در 1000 Hz چیست؟ (ب) یک خازن، بدون آنکه تغییر زیادی در مقاومت ایجاد کند، به‌طور موازی با مقاومت متصل می‌شود تا زاویه فاز را در 1000 Hz به صفر کاهش دهد. به‌ازای چه مقادیری از فرکانس زاویه فاز کمتر از موقعی است که خازن اضافه نشده بود؟

۱۳-۱۰ (الف) خازن C در اتصال موازی با مقاومت R است و مقاومت ظاهری این ترکیب Z

است. فرض کنید مقاومت ظاهری ترکیب متوالی خازن C' با مقاومت R' همان Z باشد. برای یک ω مفروض، مقادیر C' و R' را برحسب R و C به دست آورید. (ب) چنانچه ضریب اتلاف به صورت $D = \omega R' C'$ تعریف شود، نشان دهید که $D = 1/\omega RC$ و اینکه فاز جریان $\theta = \tan^{-1}(-1/D)$ است.

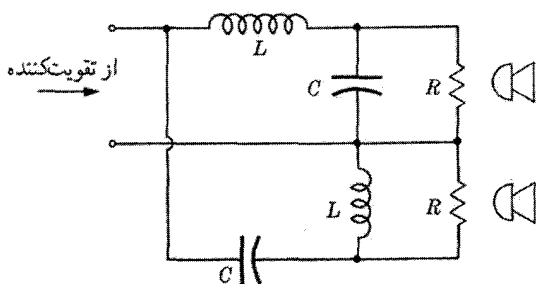
۱۳-۱۱ معادله (۱۳-۳۴) را برای متوسط زمانی اتلاف توان در مداري که جریان i_{ac} آن $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ بوده و $V(t) = ZI(t)$ است، ثابت کنید.

۱۳-۱۲ یک مولد ac با مقاومت ظاهری داخلی Z_I به یک بار با مقاومت ظاهری متغیر Z_L به طور متوالی وصل شده است. ثابت کنید موقعی حداکثر توان به مقاومت ظاهری بار منتقل می شود که $Z_L = Z_I^*$ باشد.

۱۳-۱۳ در مدار شکل ۱۳-۶ مقادیر $L = 4 \text{ mH}$ ، $C = 2 \mu\text{F}$ ، $R_1 = 25 \Omega$ و $R_2 = 40 \Omega$ داده شده اند. فرکانسهای مربوط به وضعیتهای زیر را پیدا کنید: (الف) هنگامی که $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ، (ب) هنگامی که مقاومت ظاهری حداکثر است، (ج) هنگامی که جریانی که از R_1 می گذرد با ولتاژ مولد همفاز است.

۱۳-۱۴ نشان دهید که ضریب کیفیت را، که در متن درس تعریف شد، می توان به صورت زیر بیان کرد: 2π برابر حداکثر انرژی ذخیره شده در مدار، تقسیم بر انرژی تلف شده در یک سیکل. این بیان گاهی به عنوان تعریف Q به کار می رود و مستقل از پارامترهای ویژه مدار است.

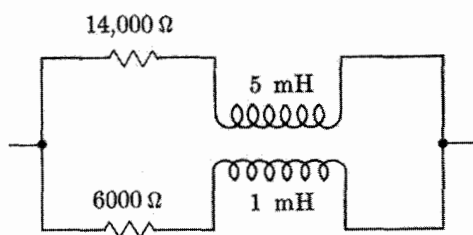
۱۳-۱۵ شبکه متقاطع برای یک دستگاه استریو (hi-fi) باید طوری طرح شود که دو بلندگو (هر یک به مقاومت R) به خروجی یک تقویت کننده بسته شوند. یکی از بلندگوها باید بیشتر فرکانسهای بالا و دیگری بیشتر فرکانسهای پایین را بگیرد. این شبکه در شکل ۱۳-۲۶ نشان داده شده است. دو خازن هر یک به ظرفیت C و دو القاگر هر یک به ضریب خودالقای L اند. (الف) برای هر R معلوم، رابطه ای بین L و C پیدا کنید به طوری که شبکه برای تقویت کننده در تمام فرکانسها یک بار مقاومتی خالص ($= R$) باشد. (ب) فرکانس تقاطع، ω_c ، طبق تعریف فرکانسی است که در آن



شکل ۱۳-۲۶

فرکانس هر یک از دو بلندگو نصف توان تقویت‌کننده را دریافت کند. اگر R و ω_c معلوم باشند، L و C را به دست آورید.

۱۳-۱۶ خازنی به ظرفیت ۱ میکروفاراد را ابتدا با وصل کردن به یک باتری تا ۱۰۰ ولت باردار می‌کنیم؛ سپس آن را از باتری قطع می‌کنیم و بی‌درنگ بار آن را داخل یک سیم‌پیچ 300° دوری که به دور یک چنبره حلقوی پیچیده شده است، تخلیه می‌کنیم. شعاع متوسط چنبره 20° سانتی‌متر و سطح مقطع آن ۴ سانتی‌مترمربع است و یک شکاف هوای ۲ میلی‌متری دارد (به شکل ۹-۱۶ مراجعه کنید). با چشمپوشی از اتلاف در سیمهای مسی، پسماند و اتلاف در حاشیه‌ها، حداکثر میدان مغناطیسی را که در شکاف هوا ایجاد می‌شود، حساب کنید. تراوایی نسبی چنبره را 5000° بگیرید. ۱۳-۱۷ یک اختلاف پتانسیل ۱ ولتی در فرکانس $f = 10^6 / \pi$ Hz به دو سر مدار شکل ۱۳-۲۷ اعمال می‌شود. القای متقابل سیم‌پیچها به نحوی است که مخالف یکدیگرند. جریان را در شاخه بالایی پیدا کنید.



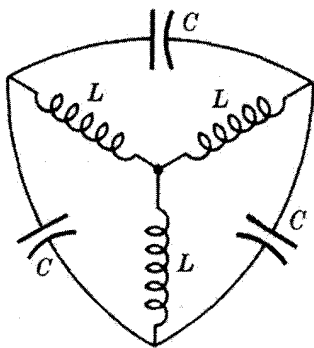
$M = 2 \text{ mH}$

شکل ۱۳-۲۷

۱۳-۱۸ در یک مبدل توان 60° هرتزی (که نسبت دورهای آن ۲ به ۱ است) ضریب خودالقای سیم‌پیچ اولیه 100° هنری و مقاومت dc آن 20° اهم است. ضریب جفت‌شدگی بین اولیه و ثانویه نزدیک به یک است. اگر اولیه به اختلاف پتانسیل 1000° ولت وصل شود، جریان را در سیم‌پیچ اولیه در دو حالت زیر حساب کنید (الف) وقتی مدار ثانویه باز است، (ب) وقتی یک مقاومت 20° اهمی در مدار ثانویه وجود دارد.

* ۱۳-۱۹ سه خازن مشابه و سه القاگر مشابه، آن‌طور که در شکل ۱۳-۲۸ نشان داده شده است، به هم متصل‌اند. فرکانسهای طبیعی این دستگاه را به دست آورید [راهنمایی: تحلیل حلقه‌ای را در مورد جریانها برای یک فرکانس فرضی ω به کار ببرید و نشان دهید که سه معادله حاصل فقط برای یک مقدار معین ω با یکدیگر سازگارند].

۱۳-۲۰ در مدار شکل ۱۳-۱۴ داریم $Z_1 = 2 + 5i$ ، $Z_2 = 8 - i$ ، $Z_3 = 4 + 3i$. مولدهای ولتاژ با یکدیگر هم‌فازند و $V_1 = 10 \text{ V}$ ، $V_2 = 2 \text{ V}$. جریانهای I_1 و I_2 را تعیین کنید.



شکل ۱۳-۲۸

۲۱-۱۳ مدار شکل ۱۳-۱۷ را در نظر بگیرید. $Z_1 = R$; Z_2 ترکیب موازی مقاومت R و خازن C است؛ و $Z_3 = R$ و $Z_4 = 1/(i\omega C)$ است. Z_4 و Z_2 با هم مقاومت ظاهری بار Z_L را تشکیل می‌دهند. تابع انتقال G_T را برحسب تابعی از $F = \omega RC$ به دست آورید و بزرگی آن را از $F = 0$ تا $F = 10$ رسم کنید.

۲۲-۱۳ برای مدار شکل ۱۳-۲۰، $Z_L = 10R$ است. معادله‌ای برای $V_3/\%$ برحسب $F = \omega RC$ به دست آورید.

۲۳-۱۳ مدار شکل ۱۳-۲۰ را به این صورت در نظر بگیرید که در آن Z_L از ترکیب موازی $2R$ و $3C$ تشکیل شده باشد. معادلاتی به صورت (۱۳-۷۱) تا (۱۳-۷۴) برای نسبت‌های ولتاژ و $V_2/\%$ و $V_3/\%$ به دست آورید.

فیزیک پلاسما

پلاسما گاز بسیار یونیده‌ای است با خواص بسیار خاص که گاهی به آن حالت چهارم ماده می‌گویند. گازهایی که تا حد زیادی یونیده باشند، رساناهای خوبی برای الکتریسیته هستند. ذرات باردار در چنین گازی با میدان الکترومغناطیسی موضعی برهم‌کنش می‌کنند؛ به‌علاوه، حرکت متشکل این حاملهای بار (جریانها، افت و خیزهای چگالی بار) می‌تواند میدانهای مغناطیسی و الکتریکی تولید کند. هنگامی که گاز یونیده تحت تأثیر یک میدان الکتریکی ساکن قرار بگیرد، حاملهای بار در این گاز به سرعت طوری خود را توزیع می‌کنند که قسمت اعظم گاز در مقابل میدان محافظت می‌شود. لانگمیر^۱ ناحیه‌هایی از گاز را که نسبتاً خالی از میدان است، و در آنجا بارهای فضایی مثبت و منفی تقریباً در توازن‌اند، پلاسما خواند، و بار فضایی با نواحی میدان قوی روی مرز پلاسما را پوشینه نامید.

به‌طور معادل، می‌توان گفت که یک گاز یونیده که تعداد زیادی ذرات باردار داشته باشد که بتواند در یک فاصله کوچک نسبت به سایر طولهای فیزیکی مورد نظر برای خود حفاظ الکتروستاتیکی * این فصل را می‌توان بدون آنکه به تداوم بحث لطمه‌ای بخورد حذف کرد.

درست کند، پلاسماست. یک تعریف نسبتاً دقیق‌تر برحسب فاصله حفاظت در بخش ۱۴-۱ داده خواهد شد. در ابتدا پلاسما در ارتباط با الکترونیک گازی مورد نظر بود (تخلیه الکتریکی در گازها، قوسهای الکتریکی، شعله‌ها)؛ اما اکنون بیشتر در جهت مسائل اختر فیزیک نظری و مسئله مهار یونها در راکتورهای گرما هسته‌ای (همجوشی) مورد توجه قرار گرفته است. در این فصل ما بعضی از خواص بنیادی پلاسما را بررسی می‌کنیم و چند ایده ساده را برای مطالعه کاربردهای پلاسما توسعه خواهیم داد. بحث کامل‌ترین موضوع در کتابهای مربوط به فیزیک پلاسما یافت می‌شود.^۱

۱۴-۱ رویکردهای نظری به دینامیک پلاسما

زمینه کلی مطالعاتی که برهم‌کنش گازهای یونیده با میدانهای الکترومغناطیسی تابع زمان را در بر می‌گیرند، دینامیک پلاسما خوانده می‌شود. برای بسیاری از مسائل در این زمینه که از مهم‌ترین و جالب‌ترین مسائل اند، غیرممکن است که بتوان پلاسما را کاملاً با یک فرمولبندی مطلقاً ماکروسکوپی، بررسی کرد. در عوض، لازم است آنچه را که اصطلاحاً نظریه جنبشی خوانده می‌شود، به‌کار ببریم. حرکت یونها و الکترونهای منفرد را باید مطالعه کرد؛ و برخورد آنها با ذرات دیگر را باید از طریق حل معادله انتقال بولتزمن به حساب آورد. بنابراین برای مسائل پلاسما یک فرمولبندی دقیق وجود دارد ولی به‌طور کلی حل آنها بجز در مواردی که تعدادی از جملات معادله بولتزمن قابل چشمپوشی باشند، بسیار مشکل است. با وجود این، سه نوع فرمولبندی تقریبی وجود دارد که به کمک آنها می‌توان بیش از زیادی درباره آنچه در داخل پلاسما اتفاق می‌افتد، به‌دست آورد.

اولین روش، نظریه تعادل است. این روش مبتنی بر این فرض است که برخوردهای بین ذرات باردار برای برقراری توزیع سرعت مشهور ماکسول-بولتزمن در داخل پلاسما کافی است:

$$N_j(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = N_{o_j} \left(\frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_p v^2 / 2kT} dv_x dv_y dv_z$$

که در آن N_{o_j} تعداد ذرات نوع j موجود در واحد حجم پلاسماست، v_x, v_y, v_z مؤلفه‌های سرعت‌اند، m_p جرم ذرات نوع j و T دمای مطلق است. بنابراین خواص انتقال و خواص جنبشی را می‌توان برحسب این توزیع سرعت محاسبه کرد.

دومین روش تقریبی عبارت است از نظریه مدار که حرکت ذرات باردار (یونها و الکترونها) را در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مشخص شده از قبل بررسی می‌کند. این میدانها می‌توانند

۱. برای مثال به این منابع مراجعه کنید:

J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, (Oxford: Pergamon Press, 1986),

F. F. Chen, *Introduction of Plasma Physics* 2nd ed. (New York: Plenum Press, 1984).

هم تابع مکان و هم تابع زمان باشند. هنگامی که برخورد‌های بین ذرات نقش عمده ندارند، به عبارت دیگر، هنگامی که مسافت آزاد میانگین برای برخوردها در مقایسه با ابعاد مشخصه مدار بزرگ است، نظریه مدار تقریب خوبی برای حرکت ذره در پلاسماست. تحت این شرایط اثر برخوردها می‌تواند به عنوان یک اختلال در نظر گرفته شود، و مسئله عمده این است که کاری کنیم که میدان الکترومغناطیسی "مشخص شده از قبل" خود سازگار باشد؛ به بیان دیگر، میدان مشخص شده از قبل باید برابر مجموع میدانهای خارجی و میدان ایجاد شده توسط ذرات دوران‌کننده باشد.

سومین روش تقریبی، فرمولبندی هیدرومغناطیسی است که در آن از معادلات الکترومغناطیس کلاسیک (معادلات ماکسول) همراه با معادلات کلاسیک حرکت سیالات استفاده می‌شود. واضح است که فرمولبندی هیدرومغناطیسی تنها یک توصیف ماکروسکوپی از پلاسماست؛ این بحث هنگامی که مسافت آزاد میانگین در مقایسه با فواصل فیزیکی مورد نظر در سیستم پلاسما خیلی کوچک باشد، تقریب خوبی است. تصویر هیدرومغناطیسی برای مبحث حرکت جمعی ذرات در پلاسما، مثلاً مبحث نوسانات پلاسما، برای شروع خیلی خوب است.

روش دقیق نظریه جنبشی برای پلاسما خارج از محدوده این کتاب است. از طرفی دیگر، با استفاده از تقریبهایی که در بالا مطرح شد می‌توان درباره بسیاری از خواص مهم پلاسماها بحث کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم که پلاسما متشکل است از الکترون‌ها (بار، $-e$) و یون‌هایی که در مجموع تنها یک بار مثبت دارند (بار، $+e$)؛ ممکن است اتم‌های خنثی نیز وجود داشته باشند، ولی ما از پیچیدگی‌هایی مثل برخوردهای یوننده و باز ترکیب الکترون‌ها و یون‌ها چشمپوشی می‌کنیم.

در بخش ۱۴-۲ ما به پلاسمایی که در شرایط ساکن یا حالت پایاست برمی‌خوریم که برای آن نظریه تعادل کاملاً مناسب است. از طرف دیگر، در بخش‌های ۱۴-۳ و ۱۴-۴ بیشتر با حرکت مجزای ذرات سروکار خواهیم داشت که در آن نظریه مدار قابل استفاده است. بالاخره در بخش‌های ۱۴-۵ تا ۱۴-۸ درباره بعضی از جنبه‌های دینامیکی پلاسما بحث خواهیم کرد و این کار را در چارچوب هیدرومغناطیسی انجام خواهیم داد.

۱۴-۲ خنثایی الکتریکی در پلاسما

یکی از مهم‌ترین خواص پلاسما این است که می‌کوشد از نظر الکتریکی خنثی بماند؛ به عبارت دیگر، پلاسما می‌کوشد که بارهای مثبت و منفی فضایی را در هر جزء حجم ماکروسکوپی متوازن کند. یک عدم توازن جزئی در چگالیهای بار فضایی، باعث ایجاد نیروهای قوی الکتروستاتیکی می‌شود که هر جا که مقدور باشد در جهت حفظ خنثایی عمل می‌کنند. از طرفی، اگر پلاسما عمداً

تحت تأثیر یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، چگالیهای بار فضایی طوری خود را تنظیم می‌کنند که قسمت عمده پلاسما از تأثیر میدان محافظت شود.

حال یک مثال نسبتاً ساده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید بار نقطه‌ای $+Q$ را داخل یک پلاسما بکنیم و در نتیجه پلاسما را تحت تأثیر یک میدان الکتریکی قرار دهیم. از نظر انرژی برای الکترونها بهتر خواهد بود که به طرف این بار نزدیک شوند، در صورتی‌که یونهای مثبت سعی می‌کنند از این بار دور شوند. تحت شرایط تعادل (به بخش ۵-۳ رجوع کنید)، احتمال وجود ذره‌ای باردار در ناحیه‌ای به خصوص که انرژی پتانسیل آن U است، متناسب است با ضریب بولتزمن، $\exp(-U/kT)$. بنابراین چگالی الکترون N_e با معادله زیر داده می‌شود

$$N_e = N_0 \exp\left(e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۱-۱۴)$$

که در آن φ پتانسیل موضعی، φ_0 پتانسیل مرجع (پتانسیل پلاسما)، T دمای مطلق پلاسما و k ثابت بولتزمن است. N_0 چگالی الکترونی در ناحیه‌هایی است که در آنجا $\varphi = \varphi_0$ است. اگر در ناحیه‌هایی که در آنجا پتانسیل برابر φ_0 است، چگالی یون مثبت نیز N_0 باشد، چگالی یون مثبت N_i با معادله زیر داده می‌شود

$$N_i = N_0 \exp\left(-e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۲-۱۴)$$

پتانسیل φ از حل معادله پواسون به دست می‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} (N_i e - N_e e) = \frac{2N_0 e}{\epsilon_0} \sinh\left(e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۱۴-۳ الف)$$

این معادله دیفرانسیل غیرخطی است، بنابراین باید به طور عددی انتگرال‌گیری شود. از طرف دیگر، یک پاسخ تقریبی برای معادله (۱۴-۳ الف) که در دمای زیاد دقیق است، برای منظور ما در اینجا کافی است. اگر $kT > e\varphi$ باشد، $\sinh(e\varphi/kT) \approx e\varphi/kT$ است و

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 kT} (\varphi - \varphi_0) \quad (۱۴-۳ ب)$$

پاسخ این معادله به صورت زیر است

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{h}\right) \quad (۴-۱۴)$$

در اینجا r فاصله از بار نقطه‌ای $+Q$ است و h فاصله حفاظ دبی (یا طول دبی) است که با معادله زیر داده می‌شود

$$h = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2N_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (5-14)$$

بنابراین، توزیع مجدد الکترونها و یونها در گاز به نحوی است که بار Q را کاملاً در فاصله‌ای چند برابر h مستور می‌کند.

یک گاز یونیده در صورتی پلاسما خوانده می‌شود که طول دبی، h در مقایسه با سایر ابعاد فیزیکی مورد نظر کوچک باشد. مادامی که گاز تا اندازه زیادی یونیده باشد، این امر محدودیت چندانی ایجاد نمی‌کند. برای مثال، در $T = 2000 \text{ K}$ و N_0 برابر با 10^{18} الکترون یا یون بر مترمکعب، طول دبی $2.2 \times 10^{-6} \text{ m}$ به دست می‌آید.

۱۴-۳ مدارهای ذره و حرکت رانشی (سوقی) در پلاسما

مدار یک ذره باردار q را که در میدان الکتریکی و مغناطیسی از قبل مشخص شده‌ای حرکت می‌کند، می‌توان مستقیماً از معادله نیرو به دست آورد

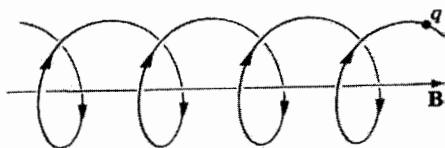
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6-14)$$

خواهیم دید که بهتر است با میدانهایی که پیکربندی نسبتاً ساده‌ای دارند شروع کنیم و سپس محاسبات را به میدانهایی که در فضا به‌کندی تغییر می‌کنند تعمیم دهیم.

اعمال یک میدان الکتریکی ثابت روی پلاسما خیلی جالب توجه نیست زیرا پلاسما با ایجاد پوشینه نازکی از بار فضایی که قسمت عمده پلاسما را از تأثیر میدان حفاظت می‌کند، خود را با میدان تنظیم می‌کند. از طرفی، یک میدان مغناطیسی ثابت باعث می‌شود که ذرات بدون تغییری در توزیع بار فضایی حول خطوط میدان بچرخند.

مورد اول: میدان مغناطیسی یکنواخت ($\mathbf{E} = 0$)

این همان حرکتی است که در مسئله ۸-۱ شرح داده شد، ولی چون این حرکت اساس حرکت‌های پیچیده‌تر مداری را در پلاسماها تشکیل می‌دهد، ما آن را در اینجا به تفصیل بررسی می‌کنیم. اما، تأکید می‌کنیم که مورد اول برای خیلی از وضعیتهای دیگر، علاوه بر پلاسماها، قابل کاربرد است. مثلاً این مورد اساس عمل شتاب‌دهنده‌های ذرات مثل سیکلوترون و بتاترون است.



شکل ۱۴-۱ حرکت ذره در یک میدان مغناطیسی یکنواخت.

نیروی لورنتس همواره بر سرعت v ذره باردار عمود است؛ بنابراین انرژی جنبشی ذره ثابت باقی می ماند

$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 = \text{constant} \quad (7-14)$$

که در آن m_p جرم ذره است. بهتر است سرعت v را به دو مؤلفه تجزیه کنیم: $v_{||}$ موازی با B و v_{\perp} در سطح عمود بر B . چون میدان روی $v_{||}$ تأثیری ندارد $K_{||} = \frac{1}{2} m_p v_{||}^2$ نیز ثابت باقی می ماند. در نتیجه

$$K_{\perp} = \frac{1}{2} m_p v_{\perp}^2 = K - K_{||} \quad (8-14)$$

نیز ثابت حرکت است.

نیروی لورنتس شتاب رو به مرکز فراهم می آورد. بنابراین

$$qv_{\perp}B = \frac{m_p v_{\perp}^2}{R}$$

و R (شعاع مدار) با معادله زیر داده می شود

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{qB} \quad (9-14)$$

شعاع R اغلب به نام شعاع لارمور ذره خوانده می شود. حرکت کامل ذره باردار به صورت چرخش ذره در یک مدار (مدار لارمور) همراه با حرکت یکنواخت مرکز مدار، یا مرکز راهنما، در امتداد خط میدان مغناطیسی، توصیف می شود. حرکت مارپیچی حاصل در شکل ۱۴-۱ نشان داده شده است. میدان مغناطیسی طوری عمل می کند که با خم کردن مسیر ذرات در مدارهای دایره ای، پلاسما را محصور نگه دارد. البته در امتداد میدان محصورشدگی مشاهده نمی شود. برای یونها و الکترونها که انرژی جنبشی یکسان K_{\perp} دارند، الکترونها در مدارهای خیلی کوچکتری دوران می کنند، نسبت شعاع لارمور یون به الکترون برابر است با جذر نسبت جرم آنها.

یک کمیت جالب که بعداً آن را به کار خواهیم برد گشتاور مغناطیسی ذره چرخان است. برحسب تعریف، گشتاور مغناطیسی، m ، حاصل ضرب جریان در مساحت است:

$$m = \frac{qv_{\perp}}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{K_{\perp}}{B} \quad (10-14)$$

با توجه به شکل ۱-۱۴ می‌بینیم که m در جهت مخالف میدان مغناطیسی است و بنابراین یک گشتاور دیامغناطیسی است.

مورد دوم: میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت ($\mathbf{E} \perp \mathbf{b}$)

اگر یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی به‌طور همزمان روی پلاسما اعمال شوند و \mathbf{E} عمود بر \mathbf{B} باشد، پلاسما تمایلی به ایجاد پوشینه ندارد. در واقع، خواهیم دید که بارهای فضایی مثبت و منفی با یکدیگر در یک جهت رانده می‌شوند. برای سادگی سرعت v ذره را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}' \quad (11-14)$$

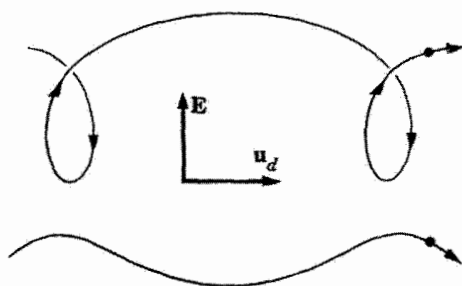
در این صورت می‌توان معادله (۶-۱۴) را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \quad (12-14)$$

می‌توان \mathbf{u} را طوری انتخاب کرد که دو جمله اول طرف راست این معادله یکدیگر را حذف کنند:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \equiv \mathbf{u}_d \quad (13-14)$$

نیروی باقیمانده، $q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ ، درست برابر همان نیرویی است که در مورد اول بررسی شد. بنابراین حرکت کلی ذره از سه جمله تشکیل شده است: (الف) سرعت ثابت $\mathbf{v}'_{||}$ موازی با \mathbf{B} ، (ب) چرخش حول خطوط میدان مغناطیسی با فرکانس زاویه‌ای $qB/m_p = v'_{\perp}/R$ و (ج) یک سرعت رانشی ثابت $u_d = E/B$ عمود بر هر دو بردار \mathbf{E} و \mathbf{B} . دو مثال از این نوع حرکت در شکل ۲-۱۴ نشان داده شده است.



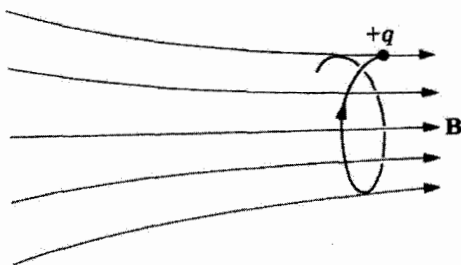
شکل ۲-۱۴ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود بر هم با حرکت ذره در صفحه عمود بر میدان مغناطیسی. این شکل مسیر دو یون با اندازه حرکت‌های اولیه مختلف را نشان می‌دهد.

سرعت u_d که با معادله (۱۳-۱۴) تعریف شده است، سرعت رانشی پلاسما یا سرعت رانشی الکتریکی نامیده می‌شود. باید به این نکته مهم توجه داشت که u_d به بار، جرم، یا سرعت ذره بستگی ندارد؛ بنابراین تمام اجزای پلاسما با یکدیگر در یک امتداد رانده می‌شوند، گرچه چرخش انفرادی آنها ممکن است بسیار متفاوت باشد.

معادله (۱۳-۱۴) به صورت غیرنسبیتی به دست آمد؛ اگر u_d یا v به c (سرعت نور) نزدیک شوند، در آن صورت، معادله (۱۱-۱۴) باید با عبارتی که با تبدیل لورنتس سازگار است، جایگزین شود. از طرفی، از این جایگزینی نتیجه خواهد شد که معادله (۱۳-۱۴) برای سرعت رانشی مادامی که $|E| < c|B|$ باشد همواره صحیح است.^۱ اگر $|E| > |B|$ باشد، میدان مغناطیسی نمی‌تواند از حرکت ذره در جهت E جلوگیری کند.

مورد سوم: میدان مغناطیسی نسبت به زمان ثابت، ولی تابع فضا ($E = 0$)
فرض کنیم که ذره‌ای باردار در یک میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت حرکت می‌کند که در آن خطوط میدان به تدریج در فضا همگرا می‌شوند. حرکت ذره را می‌توان به‌عنوان اختلالی از مدار مارپیچی شکل ۱-۱۴ بررسی کرد.

حرکت شبیه است به آنچه در شکل ۳-۱۴ نشان داده شده است. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که نیرویی وجود دارد که می‌کوشد ذره را به داخل ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی آن ضعیف‌تر است بکشد. برای آنکه مسئله به‌طور دقیق مشخص شود، فرض می‌کنیم که خط شاری که از مرکز



شکل ۳-۱۴ حرکت ذره در ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی بستگی به مکان دارد.

۱. ساده‌ترین راه بحث دربارهٔ موردی که در آن $|E|$ کمتر از $c|B|$ است ولی در مقایسه با آن کوچک نیست، این است که با یک تبدیل لورنتس هم سرعت ذره و هم میدانها را تبدیل کنیم. سرعت دستگاه متحرک با u_d [معادله (۱۳-۱۴)] و نیرو در دستگاه متحرک با معادله زیر داده می‌شود.

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \left(\frac{c^2 - u_d^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

راهنما می‌گذرد، بر محور z منطبق و میدان مغناطیسی حول محور z تقارن سمتی داشته باشد. از مؤلفه z معادله (۱۴-۶) داریم

$$F_z = m_p \frac{dv_z}{dt} = qv_\theta B_r|_{r=R} \quad (14-14)$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ یا برای حالت مورد نظر

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

چون خطوط میدان به تدریج همگرا می‌شوند، می‌توان $\partial B_z / \partial z$ را روی سطح مقطع مدار ثابت گرفت، در نتیجه خواهیم داشت

$$B_r|_{r=R} = -\frac{1}{2} R \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (15-14)$$

به‌علاوه، v_θ شبیه به v_\perp در مورد اول است. با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱۴-۱۴) نتیجه خواهد شد

$$m_p \frac{dv_{||}}{dt} = -\frac{1}{2} qRv_\perp \frac{\partial B_z}{\partial z} = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (16-14)$$

که شکل اخیر با استفاده از معادله (۱۴-۱۰) به‌دست آمده است.

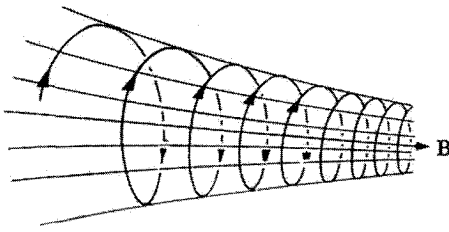
انرژی جنبشی کل ذره، K ، در میدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند، زیرا نیروی لورنتس که همواره عمود بر سرعت است هیچ کاری انجام نمی‌دهد. K_\perp که در معادله (۱۴-۸) تعریف شد، و همچنین $K_{||}$ ، در اینجا هیچ‌یک ثابت نیستند، ولی می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_{||}^2 \right) = \frac{d}{dt} (K - K_\perp) = -\frac{dK_\perp}{dt} = -\frac{d}{dt} (mB_z) \quad (17-14)$$

که شکل اخیر از معادله (۱۴-۱۰) نتیجه می‌شود. از طرفی، می‌توان معادله (۱۴-۱۶) را در $v_{||} = \partial z / \partial t$ ضرب کرد و نتیجه زیر را به‌دست آورد

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_{||}^2 \right) = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -m \frac{dB_z}{dt} \quad (18-14)$$

که در آن d/dt نماینده مشتق زمانی‌ای است که در طول مسیر دینامیکی گرفته می‌شود. از مقایسه معادله‌های (۱۴-۱۷) و (۱۴-۱۸) ملاحظه می‌شود که گشتاور مغناطیسی m یک ثابت حرکت است. ولی باید تأکید کرد که این یک نتیجه تقریبی است و تا مادامی که B_z به‌کندی تغییر کند،



شکل ۴-۱۴ ذره در مسیری مارپیچی که مرتباً تنگ‌تر و فشرده‌تر می‌شود، می‌چرخد و سرانجام باز می‌تابد.

صادق است. اگر B در فواصلی از مرتبه R زیاد تغییر کند، تقریبهایی که در اثبات معادله (۱۴-۱۸) به کار رفت، صادق نخواهد بود.

مطلب جالب بعدی این واقعیت است که ذره مجبور است روی سطح لوله شار حرکت کند. دلیل این مطلب این است که شار مغناطیسی که از مدار عبور می‌کند، عبارت است از:

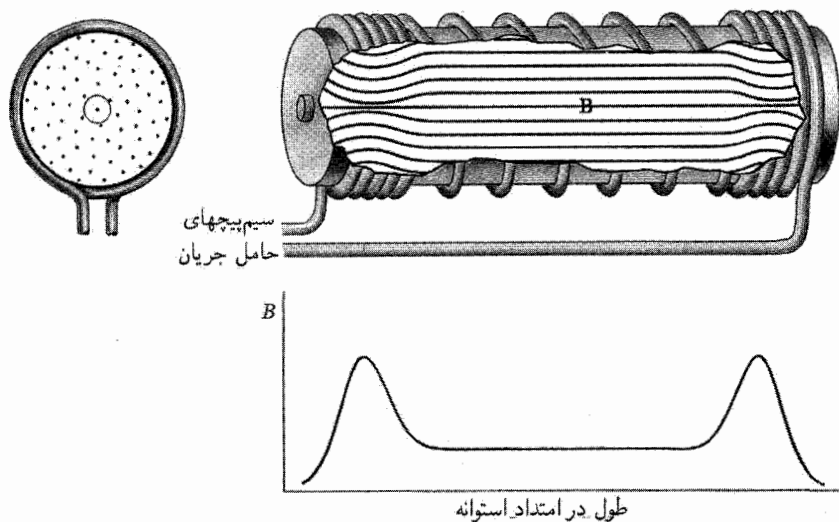
$$\Phi = B_z \pi R^2 = \pi B_z \frac{m_p^2 v_{\perp}^2}{q^2 B_z^2} = \frac{2\pi m_p}{q^2} \frac{K_{\perp}}{B_z} = \frac{2\pi m_p}{q^2} m \quad (14-19)$$

که در آن m ثابت است. حرکت ذره در شکل ۴-۱۴ به طور طرحوار نشان داده شده است. مؤلفه z (مؤلفه موازی) نیرو، معادله (۱۴-۱۶)، همواره در جهتی است که ذره را به داخل قسمت ضعیف‌تر میدان شتاب می‌دهد. بدین ترتیب ذرات چرخانی که به نواحی قوی‌تر میدان نزدیک می‌شوند، کند می‌شوند، به عبارت دیگر v_{\parallel} کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، اصل بقای انرژی ایجاب می‌کند که همزمان با کاهش v_{\parallel} حرکت مداری، v_{\perp} باید سریع‌تر شود. اگر میدان مغناطیسی به حد کافی همگرا باشد، ذره در مسیری مارپیچی که مرتباً تنگ‌تر می‌شود می‌چرخد تا سرانجام به ناحیه میدان ضعیف‌تر بازتابیده شود.

۴-۱۴ آینه‌های مغناطیسی

نتایج بخش قبل نشان می‌دهد که یک میدان مغناطیسی که تدریجاً همگرا می‌شود، در اصل، می‌تواند پلاسما را محصور کند. در امتداد عمود بر جهت اصلی میدان، مسیر ذرات در مدارهای دایره‌ای خم می‌شود؛ در امتداد جهت اصلی میدان، سرعت ذرات تدریجاً کم می‌شود تا سرانجام ذرات توسط خطوط میدان همگرا بازتابیده شوند. این پیکربندی میدان را آینه مغناطیسی می‌نامند. در هر دستگاه محصورسازی حداقل باید دو آینه به کار رود؛ دستگاهی از این نوع در شکل ۴-۱۵ نشان داده شده است.

با وجود این، دستگاه آینه نمی‌تواند تمام ذرات را محصور کند. خطوط میدان را نمی‌توان تا حد یک نقطه همگرا کرد؛ بنابراین یک میدان مغناطیسی، B_m بزرگ (ولی نه بی‌نهایت) در روی



شکل ۵-۱۴ دستگاه آینه مغناطیسی.

آینه وجود دارد. اگر ذره "انرژی جنبشی محوری" بسیار زیادی داشته باشد، میدان آینه آن را برنمی‌گرداند، و ذره می‌تواند از دستگاه خارج شود.

چون گشتاور مغناطیسی یک ثابت حرکت است، بنا بر معادله (۱۴-۱۰) خواهیم داشت

$$\frac{K_{\perp}}{B_0} = \frac{K_{\parallel}}{B_1}$$

در اینجا شاخص \perp به ناحیه مرکزی شکل ۵-۱۴ و شاخص \parallel به نقطه بازتاب مربوط می‌شود. در هر صورت، در نقطه بازتاب، $K_{\perp} = K_{\parallel}$ است. به علاوه، K_{\perp} انرژی جنبشی کل، یک ثابت حرکت است. برای اینکه ذره بازتابیده شود، میدان آینه B_m باید بزرگتر از B_1 باشد؛ یعنی

$$B_m > B_1 = \frac{K}{K_{\perp}} B_0$$

یا

$$\frac{K_{\perp}}{K} > \frac{B_0}{B_m} \quad (۱۴-۲۰ \text{ الف})$$

اگر سرعت اولیه v_0 با امتداد میدان زاویه θ_0 بسازد، در این صورت $v_{\parallel} = v_0 \cos \theta_0$ و $v_{\perp} = v_0 \sin \theta_0$. بنابراین، معادله (۱۴-۲۰ الف)، به عنوان شرط بازتاب، به شکل زیر در می‌آید

$$\sin^2 \theta_0 > \frac{B_0}{B_m} \quad (۱۴-۲۰ ب)$$

مثلاً اگر میدان آینه صد برابر شدیدتر از B_0 باشد، در این صورت ذراتی که بردار سرعتشان زاویه‌ای کمتر از 6° درجه با امتداد میدان می‌سازد، از دستگاه خارج می‌شوند.

برخورد میان ذرات در ناحیه مرکزی دستگاه آینه یک توزیع سرعت همسانگرد تولید می‌کند. بنابراین نتیجه نهایی این برخوردها این است که تعدادی از ذرات دائماً به ناحیه‌ای از فضای سرعت پراکنده می‌شوند که بتوانند از دستگاه خارج شوند. در نتیجه این برخوردها ذرات می‌توانند به طور عمود بر امتداد میدان نیز "پخش" و سرانجام خارج شوند.

۵-۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی

حرکتهای جمعی ذرات در پلاسما، مانند "اثر تنگش" و نوسانات پلاسما به بهترین وجه در فرمولبندی هیدرومغناطیسی بررسی می‌شوند. بنابر این توصیف، پلاسما به عنوان یک سیال کلاسیک در نظر گرفته می‌شود که از معادلات متعارف هیدرودینامیک پیروی می‌کند. ولی، این سیال از نظر الکتریکی رساناست و بنابراین باید نیروهای الکترومغناطیسی را صریحاً به حساب آورد. نیروی وارد بر واحد حجم پلاسما را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (21-14)$$

که در آن \mathbf{J} چگالی جریان و p فشار سیال است. نیروهای دیگر، مثل نیروهای گرانشی و چسبندگی را نیز می‌توان منظور کرد، اما در اینجا برای سادگی از آنها چشمپوشی می‌کنیم. به علت آنکه پلاسما از نظر الکتریکی تقریباً خنثاست، لازم نیست جمله $\rho \mathbf{E}$ را همراه با جملات دیگر نیرو در معادله (۲۱-۱۴) منظور کنیم. البته، در معادله پواسون باید انحراف از خنثی بودن را در نظر گرفت، ولی اغلب در معادلات دینامیکی از آنها چشمپوشی می‌شود. برای توازن اندازه حرکت لازم است که

$$\zeta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \zeta \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (22-14)$$

که این معادله حرکت (یا معادله اوایلر) سیال است. در اینجا ζ ، چگالی جرمی پلاسما و \mathbf{v} سرعت سیال آن است. در مسائلی که حرکت هیدرودینامیکی خیلی بزرگ نیست، می‌توان غالباً از جمله‌ای که شامل $\mathbf{v} \cdot \nabla$ است، صرف نظر کرد.^۱

گاهی ساده‌تر است که جمله $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ در معادله (۲۱-۱۴) را به عنوان جمله‌ای تعبیر کرد که قسمتی از آن ناشی از "فشار مغناطیسی" است. این کار را می‌توان به کمک قانون مدارای آمپر، اگر چه در مسائل جریان پایا که در آنها جمله $\partial \mathbf{v} = \partial t$ صریحاً صفر می‌شود، نمی‌توان از آن صرف نظر کرد.

معادله (۹-۲۹)، که برای حالت پلازما به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۱۴-۲۳)$$

و به کمک اتحاد برداری زیر

$$\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (۱۴-۲۴)$$

انجام داد. بدین ترتیب

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (۱۴-۲۵)$$

و

$$\mathbf{F}_v = -\nabla p - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (۱۴-۲۱الف)$$

بنابراین، کمیت $B^2/2\mu_0$ که همان چگالی انرژی مغناطیسی است، نقش فشار مغناطیسی p_m را نیز بازی می‌کند:

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (۱۴-۲۶)$$

به هر حال، باید تأکید کرد که $-\nabla p_m$ در اغلب موارد فقط قسمتی از نیروی مغناطیسی را به دست می‌دهد؛ باقیمانده نیرو از جمله $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0$ به دست می‌آید. هنگامی که $\mathbf{J} = 0$ است، دو جمله طرف راست معادله (۱۴-۲۵) یکدیگر را حذف می‌کنند.

به عنوان مثالی از سودمندی مفهوم فشار مغناطیسی، یک میدان مغناطیسی تک‌جهت را در نظر بگیرید. معادله $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ تضمین می‌کند که \mathbf{B} در امتداد میدان تغییر نکند. چون تغییرات مکانی فقط می‌توانند در امتدادهای عمود بر \mathbf{B} صورت گیرند، برای این مورد نتیجه می‌شود که $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0$. بنابراین معادله (۱۴-۲۱) به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F}_v = -\nabla (p + p_m)$$

و شرط لازم برای تعادل حالت ساکن هر جزء حجم عبارت است از

$$p + p_m = \text{constant}$$

به عبارت دیگر، برای این مثال مجموع فشار سیال و فشار مغناطیسی باید مستقل از مکان باشد.

علاوه بر معادله (۱۴-۲۲) و معادلات ماکروسکوپی حاکم بر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی^۱، ما به دو رابطه اضافی دیگر احتیاج داریم تا فرمولبندی هیدرومغناطیسی را کامل کنیم. این دو رابطه عبارتند از (۱) معادله پیوستگی برای سیال پلاسما

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta \mathbf{v}) = 0 \quad (۱۴-۲۷)$$

و (۲) معادله‌ای که \mathbf{J} را به کمیت‌های میدان مربوط سازد. رابطه اخیر صرفاً تعمیمی از قانون اهم است که تحت شرایط معین می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۱۴-۲۸\text{الف})$$

در اینجا $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ میدان الکتریکی حرکتی است که بر اثر حرکت هیدرودینامیکی پلاسما در میدان مغناطیسی به وجود آمده است، و g رسانندگی پلاسماست.

تقریبی که غالباً در نظر گرفته می‌شود تقریب رسانندگی بی‌نهایت است. مزیت این تقریب در آن است که می‌توان معادلات هیدرومغناطیسی را به کمک آن خیلی ساده کرد و تصویری بسیار واضح‌تر از فرایندهایی که در پلاسما صورت می‌گیرد ارائه کرد. بعضی مسائل، بخصوص در مسائل اختر فیزیکی این تقریب کاملاً خوب است. برای حالت رسانندگی بی‌نهایت، قانون اهم به شکل زیر در می‌آید

$$g \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (۱۴-۲۸\text{ب})$$

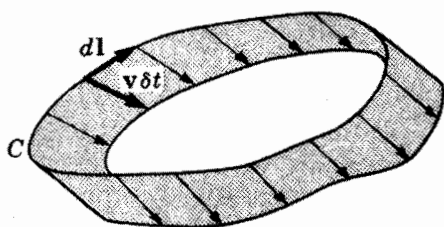
رسانندگی بی‌نهایت (یا، برای مقاصد عملی، رسانندگی خیلی زیاد) پیامد بسیار مهمی دارد. این پیامد آن است که شار مغناطیسی در داخل پلاسما منجمد می‌شود. اگر معادله (۱۴-۲۸ب) با شکل دیفرانسیلی قانون القای فاراده ترکیب شود، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۱۴-۲۹)$$

با انتگرال‌گیری از مؤلفه عمودی این معادله روی یک سطح ثابت S نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, da$$

۱. معادلات ماکسول در بخش ۱۶-۲ آمده‌اند. خواننده توجه خواهد کرد که در معادله (۱۶-۱۰)، قانون اصلی مداری آمپر، با منظور داشتن جریان جابه‌جایی تغییر یافته است. عملاً جریان جابه‌جایی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ نقش مهمی در اغلب پدیده‌های هیدرومغناطیسی بازی نمی‌کند.



شکل ۶-۱۴ تفسیر هندسی $\oint_C dl \times v$.

یا

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C v \times B \cdot dl = \oint_C B \cdot (dl \times v) \quad (۱۴-۳۰)$$

که در آن C منحنی بسته ثابتی در فضا است که پلازما در اثر حرکت هیدرودینامیکی از آن عبور می‌کند. از شکل ۶-۱۴ می‌بینیم که $\oint_C dl \times v$ را می‌توان به عنوان افزایش در واحد زمان مساحت سطح کلاهکی در نظر گرفت که منحنی C محصور می‌کند، و $\oint_C B \cdot dl \times v$ شار مغناطیسی مربوط به این افزایش مساحت است. طبق معادله (۱۴-۳۰) تغییر در واحد زمان شار از میان منحنی بسته C درست همان چیزی است که ما باید از نظر هندسی بر این اساس که تمام خطوط شار همراه با سیال حرکت می‌کرد، محاسبه می‌کردیم. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که خطوط میدان مغناطیسی در داخل ماده رسانای کامل، "منجمد" شده‌اند.

۶-۱۴ اثر تنگش

تمایل یک جریان الکتریکی شدید به فشرده ماندن در جهت عرضی، هنگام تخلیه در داخل پلازما، به "اثر تنگش" معروف است. عامل اصلی ایجاد تنگش برهم‌کنش جریان با میدان مغناطیسی خودش، یا به عبارت دیگر، نیروی جاذبه بین رشته‌های موازی جریان است. اثر تنگش اولین بار توسط پنت، و بعداً به طور مستقل توسط تانکس پیش‌بینی شد.^۱ تصویر دیگری از تنگش را که تا اندازه‌ای با تصویر پنت اختلاف دارد و ناپایداری ذاتی آن را نشان می‌دهد، توسط رزنبلات داده شده است.^۲

یک تخلیه جریان با تقارن استوانه‌ای را در داخل پلازما در نظر بگیرید. جریان در تخلیه محوری است و میدان مغناطیسی آن تقارن سمتی دارد. از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی

1. W. Bennett, *Physical Review*, vol. 45, p. 890 (1934); L. Tonks, *Physical Review*, vol. 56, p. 369 (1939).

2. M. Rosenbluth, "Dynamics of a Pinched Gas", from *Magnetohydrodynamics*, edited by Rolf Landshoff (Stanford: Stanford University Press, 1957).

در فاصله r از محور تخلیه با معادله زیر داده می‌شود

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r J(r') r' dr' \quad (۳۱-۱۴)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial B}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{r^2} \int_0^r J(r') r' dr' + \mu_0 J(r) = -\frac{1}{r} B(r) + \mu_0 J(r) \quad (۳۲-۱۴)$$

نیروی مغناطیسی در واحد حجم عبارت است از

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -J(r) B(r) \mathbf{a}_r \quad (۳۳-۱۴)$$

که در آن \mathbf{a}_r بردار یکه‌ای در جهت r است. با حذف $\mathbf{J}(r)$ بین (۳۲-۱۴) و (۳۳-۱۴) نتیجه می‌شود

$$F_v = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{\mu_0 r} B^2 \quad (۳۴-۱۴)$$

این نیرو را می‌توان به یک فشار معادل، p_{eq} تبدیل کرد، به این صورت که بنویسیم $F_v = -\partial p_{eq} / \partial r$ و سپس از آن انتگرال بگیریم

$$p_{eq} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{\mu_0} \int_0^r \frac{B^2}{r} dr \quad (۳۵-۱۴)$$

آنچه مخصوصاً مورد نظر ماست، فشار روی مرزهای عرضی تخلیه است. به پیروی از پیشنهاد رزنبلات، ما بررسی خود را به موردی که در آن رسانندگی زیاد است یعنی، موردی که در آن خطوط میدان مغناطیسی نمی‌توانند زیاد به داخل سیال رسانا نفوذ کنند محدود می‌کنیم.^۱ در این مورد، انتگرال موجود در معادله (۳۵-۱۴) شامل هیچ سهمی از ناحیه تخلیه نیست. در مرز تخلیه ($r = R$) فشار درست همان مقداری است که ما آن را فشار مغناطیسی، p_m نامیدیم

$$p_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R) \quad (۳۶-۱۴)$$

از معادله (۳۵-۱۴) واضح است که فشار مغناطیسی در ناحیه خارج یکنواخت، ولی در داخل تخلیه صفر یا خیلی کوچک است. بنابراین اثر تنگش را می‌توان ناشی از ایجاد ناگهانی یک فشار مغناطیسی در ناحیه خارج از تخلیه دانست.

۱. عدم نفوذ خطوط میدان از نتایج بخش قبل و از این حقیقت نتیجه می‌شود که هم جریان و هم میدان مغناطیسی در داخل تخلیه هر دو در ابتدا خیلی کوچک‌اند.

تنگش تخلیه به تراکم پلاسما منجر می‌شود. اگر تنگش می‌توانست به نحو پایداری منقبض شود، این عمل تا جایی ادامه می‌یافت که فشار مغناطیسی در ناحیهٔ خارج با فشار سیال در داخل تخلیه برابر شود. حال پلاسما را مانند یک گاز کامل در نظر می‌گیریم که فشار سیال آن $p = NkT$ است. از این رو، در شعاع نهایی تخلیه، R داریم

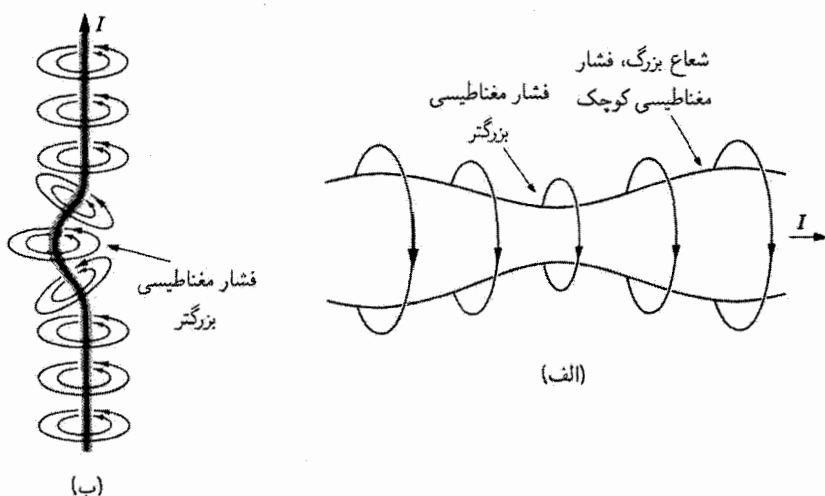
$$\frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} I^2 = NkT$$

که در آن I عبارت است از جریان در داخل تخلیه. این عبارت را می‌توان برای جریان حل کرد:

$$I^2 = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} \pi R^2 NkT = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} A_0 N_0 kT$$

که در آن با توجه به اصل بقای ذرات از رابطهٔ $A_0 N_0 = \pi R^2 N$ استفاده کرده‌ایم. در اینجا A_0 سطح مقطع اولیه تخلیه، N_0 مقدار اولیهٔ چگالی ذره، $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ و $k = 1/38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ثابت بولتزمن است. به دست آوردن دمایی 10^8 کلوین، که برای یک راکتور گرمای هسته‌ای (همجوشی) لازم است، با A_0 برابر 0.4° مترمربع و N_0 برابر 10^{21} ذره بر مترمکعب، مستلزم جریان تنگشی حدود یک میلیون آمپر است.

به‌سادگی می‌توان دید که تنگش پدیده‌ای ذاتاً ناپایدار است. فشار مغناطیسی روی مرز تخلیه به شعاع تخلیه و همچنین به جزئیات هندسی آن بستگی دارد. اگر تغییرات فشار ناشی از اختلالات



شکل ۱۴-۷ ناپایداریها در پلاسما تنگیده (الف) ناپایداری سوسیسی، (ب) ناپایداری تابی.

کوچک چنان باشند که باعث افزایش آنها شوند، آن اختلالات رشد خواهند کرد. چینهای کوچک روی سطح احاطه‌کننده تخلیه، همچنین تابها جزو این گروه از اختلالات هستند که باعث به وجود آمدن ناپایداریهای موسوم به سوسیسی و تابی در پلاسمای تنگیده می‌شوند (شکل ۱۴-۷).

۱۴-۷ دستگاههای محصورسازی مغناطیسی برای همجوشی گرما هسته‌ای کنترل شده

بیشتر توجه کنونی ما به فیزیک پلاسما از نیاز به توسعه منابع به دلیل انرژی و امکان استفاده از پلاسمای گرما هسته‌ای دوتریم و تریتم به عنوان منبع انرژی ناشی می‌شود. اثر تنگش که در بخش قبل درباره آن بحث شد و مفهوم آینه مغناطیسی (بخش ۱۴-۳) هر دو، به منظور محصورسازی پلاسمای گرما هسته‌ای به روش مغناطیسی، در دستگاههای راکتور همجوشی آزمایشی به کار می‌روند. هر چند که اثر تنگش فطرتاً ناپایدار است، ولی می‌توان با افزودن مؤلفه‌های دیگری به میدان مغناطیسی و با بهینه‌سازی پارامترهای طرح، پایداری آن را بهبود بخشید.

یکی از کمیت‌های مهم برای طرح دستگاههای راکتور همجوشی نسبت فشار جنبشی $(p = NkT)$ است به فشار کل (فشار جنبشی به علاوه فشار مغناطیسی p_m). این نسبت را با نماد β نشان می‌دهند

$$\beta = \frac{p}{[B^2/2\mu_0 + p]} = \frac{NkT}{[B^2/2\mu_0 + NkT]} \quad (۱۴-۳۷)$$

که در آن N مجموع چگالیهای یون و الکترون در پلاسماست. راکتورهای همجوشی را عموماً با مقدار β آنها مشخص می‌کنند. مقادیر کمتر از ۱° را β کم و مقادیر بین ۱° تا ۱۰° را β زیاد می‌گویند. پلاسما یا دوتریم است یا دوتریم-تریتم با دمایی بیش از ۱۰^8 K و چگالی آن بین ۱۰^{19} m^{-3} تا ۱۰^{22} m^{-3} است. محصورسازی لازم نیست که مطلق و دائمی باشد، ولی باید دوره آن (τ) به حد کافی طولانی باشد به طوری که انرژی تولیدشده در واکنش گرما هسته‌ای از انرژی مصرف‌شده در برقراری شرایط پلاسمایی بیشتر شود. اعتقاد بر این است که در صورت برقرار شدن شرط لاوسون محصورسازی در حد مناسبی است. این شرط عبارت است از

$$N_i \tau > ۱۰^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}, \quad T > ۱۰^8 \text{ K} \quad (۱۴-۳۸)$$

که در آن N_i چگالی یون در پلاسماست.

فعال‌ترین زمینه تحقیقات مربوط به محصورسازی مغناطیسی شامل رده‌ای از راکتورهاست که برای محصورسازی پلاسماهای چنبره‌ای شکل طراحی شده‌اند، و در این رده راکتورهای توکامک

بسیار نویدبخش‌اند. نام این راکتور برگرفته از یک رشته آزمایشهای توکامک است که در سازمان انرژی اتمی کورخاتوف^۱ در مسکو انجام شده است. ولی اکنون این نام به‌طور عام به آن رده از راکتورهای آزمایش اطلاق می‌شود که با تنگش پخشی چنبره‌ای مشخص می‌شوند. توکامک دستگاهی است با مقدار β کم تا متوسط. میدان مغناطیسی در پلاسمای این راکتور یک مؤلفه قطبوار^۲ و یک مؤلفه چنبره‌ای دارد. مؤلفه قطبوار ناشی از جریانی است که در پاسخ به میدان الکتریکی چنبره‌ای برقرار می‌شود، و مؤلفه چنبره‌ای توسط پیچه‌های خارجی ایجاد می‌شود. لذا خطوط میدان برابند، منحنیهای مارپیچی را درون پلاسمای چنبره‌ای شکل تشکیل می‌دهند. تعداد زیادی دستگاه توکامک در حال کار در جهان وجود دارد: بعضی از توکامکهای با طراحی پیشرفته‌تر که در اواسط دهه ۱۹۸۰ میلادی در حال کار بودند عبارت‌اند از "چنبره مشترک اروپایی Joint European Torus (JET)"، "راکتور آزمایشی همجوشی توکامک Tokamak Fusion Test Reactor (TFTR)" در پرنستون، "آلکاتور Alcator C" در دانشگاه MIT و "D III-D" در شرکت "GA Technologies" این دستگاهها با حداکثر جریان پلاسمایی در حدود چند میلیون آمپر کار می‌کردند، میدان مغناطیسی آنها از مرتبه ۲ تسلا بود و β ی در گستره ۰.۳ تا ۰.۶ داشتند، هر چند که از آن زمان تا کنون روشهایی برای حصول به عملکرد پایدار در β های زیاده‌تر توسعه یافته است. بعضی از این دستگاهها عملکردشان تا نقطه سربه‌سر شرط لائوسون تنها یک ضریب ده فاصله داشت؛ برای مثال TFTR در $N_i T = 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s}$ در $T = 2 \times 10^8 \text{ K}$ عمل می‌کرد و دستگاه دیگری در $N_i T = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}$ در $T = 2 \times 10^7 \text{ K}$.

مرحله بعدی در توسعه توکامک دستگاهی است موسوم به "توکامک جرقه فشرده Compact Ingrition Tokamak (CIT)" که طبق برنامه‌ریزی اولیه قرار بود در سال ۱۹۹۰ شروع به کار کند ولی به دلیل مسائل مالی به تأخیر افتاده است. این دستگاه قرار است یک میدان مغناطیسی چنبره‌ای ۱۰ تسلا و حداکثر جریان پلاسمای ۹ میلیون آمپری داشته باشد. هدف آن $N_i T$ برابر با $2 \times 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}$ و دمایی برابر $2 \times 10^8 \text{ K}$ و حصول به جرقه احتراق پلاسمای دوتریم-تریتیم است، یعنی، حصول به احتراق گرماسته‌ای خودنگه‌داری که پس از خاموش شدن کلیه گرمایشهای خارجی ادامه بیابد. قرار است دستگاه CIT برای مطالعه فیزیک گرمایش پلاسمای توسط ذرات آلفای تولیدشده در واکنش همجوشی اولیه، به‌کار برود.

راکتور همجوشی تتا-تنگش و راکتور آینه مغناطیسی مثالهایی از وسایل آزمایشی‌اند که مقدار

1. I. V. Kurchatov

۲. اگر پلاسمای چنبره‌ای را قطع کنیم (مثلاً در شکافی که در شکل ۹-۱۴ با d مشخص شده است) و آن را به‌صورت استوانه مستقیمی در آوریم، آنگاه مؤلفه قطبوار همان مؤلفه سمتی و مؤلفه چنبره‌ای همان مؤلفه محوری خواهد بود.

β ی آنها زیاد است. در مفهوم تانگش از پلاسمای چنبره‌ای شکل استفاده می‌شود، ولی چگالی پلاسمای آن به مراتب از توکامک بیشتر است. آینه مغناطیسی یک دستگاه محصورسازی کامل نیست، زیرا پلاسما از انتهای آن به خارج نشت می‌کند؛ با وجود این، این دستگاه می‌تواند توان باریکه‌ای را که به آن تزریق می‌شود تقویت کند. آینه مغناطیسی وسیله‌ای با مقدار β ی زیاد است ولی چگالی پلاسمایی که در آن به‌کار می‌رود از راکتور تانگش کمتر است.

برای بحث مفصلتری درباره دستگاه‌های راکتور همجوشی آزمایشی خواننده می‌تواند به یکی از مقالات جامع زیر رجوع کند:

“Fusion Reactor Systems” by F. L. Ribe, in *Reviews of Modern Physics*, vol. 47, p. 7 (1975).

“Fusion Energy in Context: Its Fitness for the Long Term,” by J. P. Holdren, in *Science*, vol. 200, p. 168 (April 1978).

“Progress in Toroidal Confinement and Fusion Research” by H. F. Furth in *From Particles to Plasmas*, edited by J. W. Van Dam (Reading: Addison-Wesley Publishing Co., 1989).

Fusion: The Search for Endless Energy by Robin Herman (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

۱۴-۸ نوسانهای پلاسما و حرکت موجی

یکی از خواص جالب پلاسما توانایی آن در حفظ نوسانات و انتشار امواج است. انواع مختلف رفتار نوسانی امکان‌پذیر است، و به علت مشخصه غیرخطی معادلات هیدرودینامیک، این نوسانات می‌توانند کاملاً پیچیده باشند. با وجود این، لازم است ما توجه خود را به موارد نسبتاً ساده‌ای محدود کنیم که در آزمایش‌های تحت کنترل مشاهده شده‌اند.

مورد ۱. نوسانهای الکتروستاتیکی الکترون پلاسما

نوسانهای الکتروستاتیکی در پلاسما اولین بار توسط تانکس و لانگمیر^۱ بررسی شدند. در واقع، دو نوع نوسان الکتروستاتیکی ممکن وجود دارد: نوسانهای با فرکانس زیاد که آن‌قدر سریع‌اند که یونهای سنگین نمی‌توانند انجام دهند، و نوسانهای یونها که آن‌قدر آهسته‌اند که الکترونها همواره به‌طور آماری در اطراف یونها توزیع می‌شوند. ما تنها مورد اول را که به نوسانهای الکترون معروف است بررسی می‌کنیم.

1. L. Tonks and I. Langmuir, *Physical Review*, vol. 33, p. 195 (1929).

توجه خود را به ناحیه‌ای از پلاسما معطوف می‌کنیم که حاوی چگالی یکنواختی از یونهای مثبت، N ، باشد. یون منفی وجود ندارد. در ابتدا، الکترونها نیز چگالی یکنواخت N دارند، ولی فرض کنید که هر الکترون به اندازه ξ در جهت x تغییر مکان می‌یابد؛ که این تغییر مکان مستقل از مختصات y و z و در مرزهای پلاسما صفر است. تغییر مکان الکترونها باعث ایجاد آشفتگی در پلاسمای خنثی می‌شود و در نتیجه آن یک بار الکتریکی در هر جزء حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ به وجود می‌آید

$$\begin{aligned} \delta\rho \Delta x \Delta y \Delta z &= -Ne \Delta y \Delta z \left[\xi - \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z Ne \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}$$

تغییر مکان الکترونها یک میدان الکتریکی $E(x, t)$ ایجاد می‌کند که به علت تقارن مسئله در جهت x است. بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \delta\rho$$

یا

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} Ne \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

که اگر از معادلهٔ اخیر انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$E = \frac{Ne}{\epsilon_0} \xi \quad (۳۹-۱۴)$$

در اینجا، ثابت انتگرال‌گیری صفر در نظر گرفته شده است، زیرا تشکیل پوشینه، پلاسما را از میدان الکتریکی یکنواخت محافظت می‌کند.

نیروی وارد بر هر الکترون برابر است با $-eE$ ، که بر طبق معادلهٔ (۳۹-۱۴)، با تغییر مکان ξ متناسب است. همچنین دیده می‌شود که این یک نیروی برگرداننده است. بنابراین، هر الکترون در اطراف مکان اصلی خود با یک حرکت هماهنگ ساده نوسان می‌کند. معادلهٔ حرکت برای هر الکترون به صورت زیر است

$$m_e \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{Ne^2}{\epsilon_0} \xi = 0 \quad (۴۰-۱۴)$$

بنابراین، "فرکانس پلاسما" $\omega_p = 2\pi f_p$ با معادله زیر تعریف می‌شود

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (۴۱-۱۴)$$

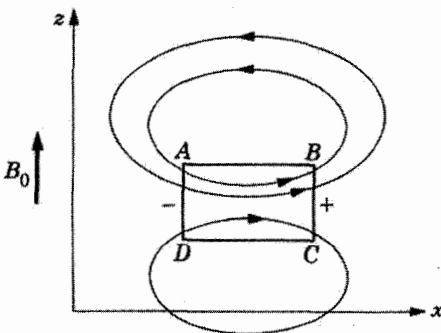
که در آن m_e جرم الکترون است.

به عنوان یک مثال عددی، چنانچه چگالی ذره برابر با 10^{18} الکترون بر مترمکعب باشد، خواهیم داشت: $f_p = 9.0 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$.

مورد ۲. امواج هیدرومغناطیسی یا امواج آلفن^۱

امواج هیدرومغناطیسی نشان‌دهنده انتشار واقعی موج در محیط رسانایی است که تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی ثابت قرار گرفته باشد. این رفتار، که اولین بار توسط آلفن در سال ۱۹۴۲ پیش‌بینی شد، با فرمولبندی هیدرومغناطیسی پلاسما که در بخش ۱۴-۵ بررسی شد سازگار است. قبل از شروع به بررسی و حل معادلات دیفرانسیل می‌خواهیم فرایندهای فیزیکی پلاسما را تا آنجا که امکان دارد از یک دیدگاه مقدماتی بررسی کنیم. یک پلاسمای نامتناهی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B_0 که در امتداد محور z است، قرار گرفته است. اگر به قسمتی از پلاسما، قسمت مستطیلی $ABCD$ در شکل ۱۴-۸ که به موازات محور y امتداد دارد، سرعت v در جهت مثبت محور y داده شود، آنگاه به حاملهای بار (یونها و الکترونها) نیرویی معادل

$$q_i(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$



شکل ۱۴-۸ قسمت $ABCD$ ی پلاسما در جهت مثبت y حرکت می‌کند. جریانهایی که به وجود می‌آیند به صورت طرحواره رسم شده‌اند.

1. H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, 2nd ed. (New York: Oxford University Press, 1963).

وارد می‌شود و این نیرو سعی می‌کند حاملهای مثبت و منفی را از یکدیگر جدا کند. بنابراین، قسمت $ABCD$ به صورت یک منبع emf حرکتی در می‌آید، و انتهای سمت راست آن تمایل دارد به طور مثبت و انتهای سمت چپ آن به طور منفی باردار شود. ولی چون ما با یک محیط رسانا سروکار داریم، پلاسمایی که در ناحیه خارجی $ABCD$ قرار گرفته است، مدار الکتریکی را کامل می‌کند. تعدادی از خطوط جریان در شکل نشان داده شده‌اند.

اکنون جریان القایی با میدان مغناطیسی \mathbf{B}_0 برهم‌کنش می‌کند. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که چگالی نیروی $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$ در قسمت $ABCD$ طوری است که با حرکت آن مخالفت می‌کند، در صورتی که نیروی وارد بر قسمتهای خارجی پلاسما طوری است که در جهت مثبت y به آن شتاب می‌دهد. سرانجام $ABCD$ کند می‌شود و حرکت خود را به قسمتهای مجاور پلاسما منتقل می‌کند. این عمل همین‌طور ادامه می‌یابد، و تمام فرایند تکرار می‌شود. بدین ترتیب آشفتگی هر چه فراتر در جهت $z \pm$ انتشار می‌یابد.

اکنون به معادلات دیفرانسیل رو می‌آوریم. فرض کنید $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ، که در آن \mathbf{B}_0 میدان ثابت یکنواخت موازی با محور z است، و \mathbf{B}_1 میدان مغناطیسی است که توسط جریانهای القایی به وجود آمده است. با به‌کار بردن نتایج بند قبل به‌عنوان راهنما، می‌خواهیم ساده‌ترین نوع حرکت موجی‌ای را پیدا کنیم که مؤلفه‌های J_x ، E_x ، v_y و B_{1y} آن غیرصفر و سایر مؤلفه‌های آن صفر باشند. از قانون مداری آمپر داریم

$$-\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} = \mu_0 J_x \quad (۴۲-۱۴)$$

و معادلهٔ اوایلر سیال، معادلهٔ (۲۲-۱۴)، دو رابطهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$\xi \frac{\partial v_y}{\partial t} = -J_x B_0 \quad (۴۳-۱۴) \text{ الف}$$

و

$$\circ = J_x B_{1y} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۴۳-۱۴) \text{ ب}$$

می‌توان معادلات (۴۳-۱۴) را با معادلهٔ (۴۲-۱۴) ترکیب کرد و نتایج زیر را به دست آورد

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0 \xi} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \quad (۴۴-۱۴)$$

و

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B_{1y}^2)}{\partial z} \quad (۴۵-۱۴)$$

قانون تعمیم یافته اهم را می توان به صورت زیر نوشت

$$E_x = -v_y B_o + \frac{1}{g} J_x = -v_y B_o - \frac{1}{g\mu_o} \frac{\partial B_{\backslash y}}{\partial z} \quad (۴۶-۱۴)$$

بالاخره، قانون فاراده نتیجه زیر را به دست می دهد

$$\frac{\partial B_{\backslash y}}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (۴۷-۱۴)$$

اگر v_x را بین معادلات (۴۴-۱۴) و (۴۶-۱۴)، و E_x را بین معادله حاصل و معادله (۴۷-۱۴) حذف کنیم، با فرض اینکه ξ ثابت است، خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 B_{\backslash y}}{\partial t^2} = \frac{B_o^2}{\mu_o \xi} \frac{\partial^2 B_{\backslash y}}{\partial z^2} + \frac{1}{g\mu_o} \frac{\partial^3 B_{\backslash y}}{\partial z^2 \partial t} \quad (۴۸-۱۴)$$

که این معادله حاکم بر انتشار امواج آلفن است.

اگر رسانندگی g ی پلاسما بی نهایت می بود، در آن صورت (۴۸-۱۴) با معادله موجی که درباره حل آن در بخشهای ۴-۱۶ و ۵-۱۶ بحث خواهیم کرد، یکسان می شد. در این شرایط، معادله (۴۸-۱۴) موج تخت غیر میرایی را توصیف می کند که به موازات محور z با سرعت فاز زیر در حرکت است

$$v_p = \frac{B_o}{\sqrt{\mu_o \xi}} \equiv v_A \quad (۴۹-۱۴)$$

به عنوان یک مثال عددی، فرض کنید 0.1 T ، $B_o = 10^{-8} \text{ g/cm}^3 = 10^{-5} \text{ kg/m}^3$ ؛
در این صورت $v_p = 2800 \text{ m/s}$.

برای آنکه ببینیم در صورت بی نهایت نبودن رسانندگی نتیجه حاصل چیست، پاسخی را به شکل زیر برای معادله (۴۸-۱۴) در نظر می گیریم

$$B_{\backslash y} = b_{\backslash y} \exp[\alpha z + i\omega t]$$

این پاسخ در صورتی قابل قبول است که

$$\alpha^2 = \frac{-\omega^2}{v_p^2 + i\omega/g\mu_o} \quad (۵۰-۱۴)$$

و v_p همان باشد که در معادله (۴۹-۱۴) تعریف شد. برای میرایی کوچک

$$\alpha \approx \pm \left(i \frac{\omega}{v_p} + \frac{\omega^2}{2g\mu_o v_p^2} \right) \quad (۵۱-۱۴)$$

بنابراین پاسخ معادله (۱۴-۴۸) یک موج تخت میراست که در جهت $\pm z$ انتشار می‌یابد. فاصله δ که در آن دامنه موج به $1/e$ مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد، عبارت است از

$$\delta = \frac{2g\mu_0 v_p^2}{\omega^2} = \frac{2gB_0^2}{\mu_0^{1/2} \xi^{1/2} \omega^2} \quad (14-52)$$

۹-۱۴ خلاصه مطالب

گازهای بسیار یونیده رساناهای الکتریکی خوبی هستند؛ پلاسما آن ناحیه‌ای از یک گاز بسیار یونیده است که در آنجا میدان الکتریکی ساکن و چگالی بار خالص تقریباً صفر است. سه شیوه متفاوت برای تحلیل پلاسما عبارت‌اند از نظریه جنبشی تعادل، نظریه مدار، و نظریه هیدرومغناطیسی ماکروسکوپی.

• نظریه تعادل، که مبتنی بر عامل آماری بولتزمن است، نشان می‌دهد که چنانچه بار خارجی Q در پلاسما قرار داشته باشد در فاصله‌ای موسوم به طول دبی توسط پلاسما محافظت می‌شود. یعنی، پتانسیل کولنی حفاظت نشده $Q/4\pi\epsilon_0 r$ با رابطه زیر

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/h}$$

تعویض می‌شود، که در آن طول دبی h عبارت است از

$$h = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2N_0 e^2}}$$

• نظریه مدار مبتنی است بر حرکات ذره تحت تأثیر نیروی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

در یک میدان مغناطیسی یکنواخت، ذره‌ای به جرم m_p به آزادی در امتداد خط میدان حرکت می‌کند و در عین حال به دور آن می‌چرخد. مدار حاصل مارپیچی است که شعاع آن، معروف به شعاع لارمور، برابر است با

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{qB}$$

گستاور مغناطیسی یک ذره آزاد از نوع دیامغناطیسی است. اگر میدان نایکنواخت باشد، هنگامی که ذره در امتداد خطوط همگرایی میدان به درون میدان قوی‌تر حرکت کند به دور مارپیچ تنگ‌تری

خواهد چرخید؛ و در عین حال حرکت محوری آن کند و نهایتاً معکوس خواهد شد. نتیجه حاصل یک آینه مغناطیسی است.

• رویکرد هیدرومغناطیسی مبتنی است بر قانون نیروی ماکروسکوپی برای حجم واحد

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

که در آن p فشار سیال است. گاهی جمله اول را می‌توان به تقریب برابر با $-\nabla p_m$ گرفت که در آن "فشار مغناطیسی" برابر است با چگالی انرژی

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

اثر تنگش مغناطیسی را می‌توان به صورت تراکم پلاسما در اثر فشار مغناطیسی خارج آن بررسی کرد. • رویکرد ماکروسکوپی به امواج پلاسما نیز منجر می‌شود. امواج "الکتروستاتیکی" نوساناتی هستند که (برای الکترونها) در طول موج بی‌نهایت با فرکانس پلاسما

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}$$

نوسان می‌کنند. امواج "آلفن" در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 ، با سرعت فاز زیر حرکت

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \xi}} \quad \text{می‌کنند}$$

مسائل

۱-۱۴ شرط لازم برای آنکه نظریه مدار تقریب خوبی برای حرکت الکترون در پلاسما باشد، عبارت است از $\tau \gg 2\pi m_e / Be$ ، که در آن τ زمان متوسط میان دو برخورد است (به فصل ۷ رجوع کنید) و $2\pi m_e / Be$ دوره تناوب سیکلوترون در میدان مغناطیسی B است. نشان دهید که این بیان معادل است با $\eta \ll \eta_H$ که در آن $\eta \equiv B/N_0 e$ مقاومت ویژه هال^۱ است.

۲-۱۴ در یک مسئله هیدرومغناطیسی با جریان پایا \mathbf{v} ، \mathbf{J} ، و \mathbf{B} دو به دو بر یکدیگر عمودند. فرض کنید \mathbf{v} در جهت x ، \mathbf{v} ، \mathbf{J} ، و \mathbf{B} فقط توابعی از x اند. همچنین فرض کنید سطح مقطع کانال (عمود بر x) مستقل از x است. نشان دهید که

$$v = v_0 - \frac{1}{2\xi_0 v_0} \left[2B_0 \int J dx + \mu_0 \left(\int J dx \right)^2 \right]$$

که در آن v_0 سرعت است هنگامی که $\xi = \xi_0$ و $B = B_0$ باشد.

۳-۱۴ فاصله حفاظ دبی و فرکانس پلاسما ω_p را برای موارد زیر محاسبه کنید. (الف) فام سپهر خورشید ($T = 5000 \text{ K}$ و چگالی الکترون $= 3 \times 10^{19} / \text{m}^3$)؛ (ب) یون سپهر ($T = 300 \text{ K}$) و چگالی الکترون $= 10^{12} / \text{m}^3$) و (ج) یک قوس تخلیه ($T = 4000 \text{ K}$) و چگالی الکترون $= 10^{22} / \text{m}^3$.

۴-۱۴ ضریب مقاومت یک پلاسمای گاز رقیق که در آن جریان به طور غالب توسط الکترونها حمل می شود، از رابطه زیر [به کتاب *Physics of Fully Ionized Gases* اثر Lyman Spitzer (New York: Interscience, 1956) مراجعه کنید] به دست می آید:

$$\eta = 6.53 \times 10^5 Z \frac{\ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ ohm} \cdot \text{m}$$

در اینجا $\Lambda = 1.28 \times 10^7 T^{3/2} / (Z N_e)^{1/2}$ که در آن T دما بر حسب K ، N_e چگالی الکترون در مترمکعب و Z عدد بار یون غالب است. فرض کنید $Z = 1$ و η را برای سه مورد مسئله ۳-۱۴ محاسبه کنید.

۵-۱۴ یک میدان الکتریکی 10^4 V/m در جهت عمود بر یک میدان مغناطیسی $B = 0.1 \text{ T}$ قرار دارد. (الف) سرعت سوق پلاسما را برای ذرات باردار محاسبه کنید. (ب) در صفحه عمود بر B ، مسیر چرخاره‌ای پروتونی با سرعت $V_{\perp} = 10^5 \text{ m/s}$ و پروتونی با سرعت $V_{\perp} = 10^6 \text{ m/s}$ را ترسیم کنید.

۶-۱۴ سیارکی فاقد جو، یک میدان مغناطیسی دو قطبی دارد که در فاصله 200 km از مرکزش و در $\theta = 90^\circ$ میدان مغناطیسی 10^{-6} T است. یک پروتون در این نقطه در این میدان به دام می افتد. سرعت مداری پروتون و سرعت موازی با میدان آن هر دو برابر با 10^5 m/s است. (الف) حرکت آن را از این لحظه به بعد توصیف کنید. (ب) در چه زاویه θ ای ذره بازمی تابد؟ (از نتایج به دست آمده در مسئله ۸-۲۸ استفاده کنید).

۷-۱۴ سرعت آلفن و فاصله تضعیف را برای موارد زیر محاسبه کنید (الف) فام سپهر خورشید ($\xi = 10^{-7} \text{ kg/m}^3$ ، $T = 5000 \text{ K}$ ، $B = 10^{-4} \text{ T}$) و (ب) مایع جیوه در دمای 20° درجه سانتی گراد ($\xi = 13600 \text{ kg/m}^3$ ، $B = 0.1 \text{ T}$).

* ۸-۱۴ کره همگنی به شعاع a و رسانندگی الکتریکی σ' با سرعت v_0 در داخل سیال ناچسبنده و تراکم ناپذیری با رسانندگی σ ، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت می کند. سرعت v_0 موازی B است. (الف) اتلاف ژول را که در اثر جریانهای القایی در سیستم نتیجه می شود، محاسبه کنید و (ب) با مساوی قرار دادن نتیجه با میزان هدر رفتن انرژی مکانیکی توسط کره ($F_1 v_0$)، نیروی کششی F_1 را محاسبه کنید. فرض کنید که جریان سیال جریان

پتانسیلی است؛ یعنی فرض کنید در دستگاه مختصاتی که در آن کره در حال سکون است، سرعت سیال نسبت به مرکز کره با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{r^3} a^3 \nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} / r^3)$$

برای بحث این مسئله و مسائل مربوط، به مقاله زیر رجوع کنید.

J. R. Reitz and L. L. Foldy, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 11, p. 133, (1961).

خواص الکترومغناطیسی ابررساناها

در این فصل، رده خاص دیگری از مواد (جامدات ابررسانا) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که به لحاظ نظری بسیار جالب هستند و به لحاظ علمی اهمیت آنها رو به افزایش است. رساناهایی که مقاومت آنها صفر باشد و بتوانند بدون اتلاف توان که در فصلهای ۷ و ۱۳ مورد بحث قرار گرفت، جریان حمل کنند بالقوه کاربردهای فراوانی دارند که بعضی از آنها تاکنون عملی شده‌اند. رفتار مغناطیسی ابررساناها نیز به همان اندازه مهم است، هر چند که اهمیت آن کمتر واضح است. دلیل این اهمیت محدودیتهایی است که بر کاربردها اعمال می‌شود. در اینجا کانون توجه ما عمدتاً خواص مغناطیسی حالت ابررسانایی است.

۱-۱۵ تاریخ ابررسانایی

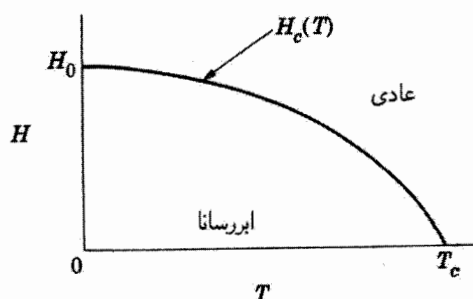
ابررسانایی را اولین بار کمترین اونس^۱ در سال ۱۹۱۱ در شهر لیدن (هلند) کشف کرد. اونس مشاهده کرد هنگامی که نمونه‌ای از جیوه سرد می‌شد، در دمای 4.2 K مقاومتش ناگهان از بین می‌رفت و ظاهراً کاملاً بدون مقاومت می‌شد. در یک آزمایش حساس‌تر که در آن از یک جریان پایدار القاشده در یک حلقه سیم ابررسانا استفاده شد، اونس برآورد کرد که مقاومت در حالت ابررسانایی

حداکثر 10^{-12} برابر مقاومت در حالت معمولی است. در آزمایشهای بعدی در انستیتو تکنولوژی ماساچوست معلوم شد که یک جریان القایی چند صد آمپری در یک حلقه سربی ابررسانا، در مدت لااقل یک سال، تغییری در اندازه جریان نشان نمی‌دهد؛ این نتیجه دلیل محکمی است بر این موضوع که مقاومت در حالت ابررسانایی در واقع صفر است. با این آزمایشهای اولیه، یک زمینه کامل تحقیقات برای تعیین مشخصات این اثر جدید گشوده شده است. تا کنون معلوم شده است که بیش از 20° عنصر و صدها آلیاژ و ترکیبات بین فلزی ابررسانا وجود دارد. گستره دمای گذار ابررساناها از خیلی کمتر از 1 K (12 K برای هافنیم) تا حدود 23 K است. همچنین ترکیبات پروسیت که حاوی باندهای مس-اکسیژن هستند در بعضی موارد دمای گذاری بیش از 100 K دارند. دمای گذار، یا دمای بحرانی، دمایی است که در آن ماده از حالت معمولی به حالت ابررسانایی می‌رسد و مشخصه ماده به خصوص مورد نظر است. دمای بحرانی تا حدودی، هم به درجه خلوص شیمیایی و هم به درجه کامل بودن تبلور نمونه مورد آزمایش بستگی دارد. در واقع، ناهمگنیها در خلوص و کرنش نمونه به‌طور کلی باعث پهن‌شدگی گستره دمای گذار بین حالات معمولی و ابررسانایی می‌شود؛ گستره دمای گذار نمونه خالصی که به خوبی تابکاری شده باشد، می‌تواند کمتر از 1 K 0.001 باشد.

اگر یک میدان مغناطیسی به اندازه کافی بزرگ موازی با یک سیم ابررسانا اعمال شود، مشاهده می‌شود که نمونه به حالت معمولی باز می‌گردد. اندازه میدانی که باعث این گذار می‌شود هم به جنس ماده و هم به دما بستگی دارد و میدان بحرانی نامیده می‌شود. اگر میدان در جهات دیگری اعمال شود، نمونه هنگامی که میدان واقعی در هر نقطه روی سطح آن به میدان بحرانی برسد، شروع به رسیدن به حالت معمولی می‌کند. نمودار دما-میدان مربوط را که می‌توان رسم کرد، اصولاً از نظر ترمودینامیکی همان معنای نمودار دما-فشار را دارد که برای گذارهای فاز معمولی رسم می‌کنیم، و خود منحنی را می‌توان به عنوان مرز فاز بین دو حالت ترمودینامیکی معمولی و ابررسانایی در نظر گرفت (شکل ۱۵-۱). این منحنی معمولاً سهمی شکل است و با تقریب خوبی با معادله زیر داده می‌شود

$$H_c = H_0 [1 - (T/T_c)^2]$$

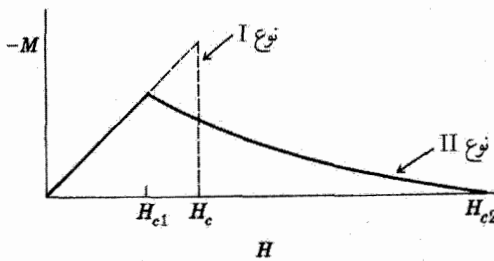
که در آن H_c میدان بحرانی، T دمای مطلق (یا کلونین) مشاهده است، و T_c و H_0 نشان‌دهنده مشخصات نمونه هستند (دمای بحرانی در میدان صفر و میدان بحرانی در دمای صفر مطلق). ناهمگنیها علاوه بر گسترش مرحله گذار، می‌توانند تأثیر محسوسی روی H_0 نیز داشته باشند و گاهی اندازه آن را چندین مرتبه بزرگی افزایش می‌دهند. چنین تأثیرهایی در کاربردهای میدانهای مغناطیسی قوی، حائز اهمیت فوق‌العاده است.



شکل ۱۵-۱ ترسیم میدان بحرانی H بر حسب دما برای ابرسانی نوع I.

در اوایل تاریخ ابرسانی، کاربرد معادلات ماکسول در مورد رسانای کامل به این نتیجه منجر شد که تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به زمان در داخل ابرسانا باید صفر باشد. بنابراین، بسته به اینکه نمونه در حضور یا غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی یا پایین‌تر از دمای گذارش سرد شود، شار مغناطیسی می‌بایست یا حبس شود و یا طرد. این ایده آن‌قدر پذیرفته شده بود که تنها مدت‌ها بعد در سال ۱۹۳۳ (۲۲ سال بعد از کشف ابرسانی) مایسنر و اوکسنگلد^۱ برای اولین بار آن را به صورت تجربی آزمایش کردند. نتایج تجربیات آنها ثابت کرد که این فرضیه غلط است و در تمام حالات، صرف‌نظر از اینکه سرد کردن نمونه در حضور یا غیاب میدان مغناطیسی باشد، میدان مغناطیسی درون ابرسانا صفر است. این اثر به طرد شار مغناطیسی، یا آن‌طور که متداول‌تر است به اثر مایسنر معروف است. یک بیان دیگر، که اصولاً با بیان بالا معادل است، این است که بگوییم ابرسانا چنان رفتار می‌کند که گویی تراوایی مغناطیسی آن صفر است، یا آنکه پذیرفتاری دیامغناطیسی کامل دارد. اهمیت اصلی اثر مایسنر این است که نشان می‌دهد ابرسانا تنها دارای خاصیت رسانندگی بی‌نهایت نیست، بلکه خواص الکترومغناطیسی پیچیده‌تری دارد. هر توجیه رضایتبخشی از ابرسانی باید به طریق طبیعی ضریب مقاومت صفر و اثر مایسنر را توأم توضیح دهد.

به علت اثر مایسنر، چنانچه میدان مغناطیسی اعمال شده کمتر از میدان بحرانی H_c باشد، میدان به داخل نمونه نفوذ نمی‌کند و نمونه ابرسانا باقی می‌ماند و برای میدان‌هایی بزرگتر از H_c (که در جهت موازی با سیم نمونه باشند)، میدان به داخل آن نفوذ می‌کند و حالت ابرسانی آن را از بین می‌برد. به بیان دقیق‌تر، این مطلب رفتار مغناطیسی ابرساناهای مشهور به نوع I را توصیف می‌کند. ابرسانی نوع دیگری (نوع II) وجود دارد که رفتار مغناطیسی پیچیده‌تری دارد: در میدان‌های مغناطیسی کم، شار به‌طور کامل طرد می‌شود (درست مثل رفتار نوع I)، و این طرد تا میدان مغناطیسی بحرانی پایینی H_{c1} تداوم دارد. در میدان‌هایی بیش از این مقدار، شار تا حدودی نفوذ می‌کند ولی ابرسانی تا زمانی که شار به‌طور کامل در میدان بحرانی بالایی H_{c2} نفوذ



شکل ۱۵-۲ مغناطش M بر حسب شدت مغناطیسی H برای ابررساناهای نوع I و II.

کند از بین نمی‌رود. بین H_{c1} و H_{c2} ماده نوع II اثر مایسنر کامل از خود بروز نمی‌دهد. رفتار مغناطیسی هر دو ماده نوع I و نوع II در شکل ۱۵-۲ نشان داده شده است.

از زمان کشف ابررسانایی توسط کمرلین اونس تاکنون کوشش مستمری برای یافتن مواد ابررسانایی با دمای گذار بالاتر اختصاص یافته است (امید آن بود که ماده‌ای یافت شود که T_c آن بیش از دمای نقطه جوش نیتروژن مایع باشد). ولی پس از چندین دهه تحقیق بالاترین T_c به دست آمده در حدود 23 K بود. بعد در سال ۱۹۸۶ بدنورز و میولر^۱ ابررساندگی را در رده جدیدی از مواد (یک ترکیب پروسکایت حاوی لایه‌هایی از اتمهای مس و اکسیژن) با T_c بیش از 30 K کشف کردند. این کشف تحقیقات شدیدی را در مورد این رده جدید از ابررساناهای سرامیکی برانگیخت و تا اوایل سال ۱۹۸۷ موادی با T_c بیش از 90 K کشف کردند. جایزه نوبل فیزیک سال ۱۹۸۷ به خاطر کشف این رده جدید از مواد ابررسانا به بدنورز و میولر اعطا شد.

در جدول ۱-۱۵ فهرستی از مواد ابررسانا همراه با خواص آنها داده شده است. توجه خواهید کرد که بعضی از مواد نوع II میدان بحرانی H_{c2} خیلی بزرگی دارند. کاربردهای فنی ابررسانا عموماً مستلزم ماده‌ای است که در میدانهای مغناطیسی زیاد ابررسانا باقی بمانند و بنابراین این مواد نوع II هستند که خصوصاً سودمندند. کمیتی که در ستون آخر جدول آمده است مقدار عمق نفوذی است که به طور تجربی تعیین شده است $\lambda \exp$ (عمق نفوذ در بخش ۱۵-۴ تعریف شده است). کارهای زیادی از لحاظ نظری تاکنون انجام شده است. شروع این مطالعات نظری با کاربرد ترمودینامیک در مورد گذار ابررسانا توسط کی‌سام^۲ در سال ۱۹۲۴ بوده است. سپس در سال ۱۹۳۴ گورتر و کاسیمیر^۳ گذار مرتبه دوم و خواص دیگر را بر اساس مدل دو شماره‌ای از لحاظ پدیده شناختی توجیه کردند. این کار در سال ۱۹۳۵ با توجیه اثر مایسنر توسط اف. لندن و اچ. لندن^۴ دنبال شد. در این فصل ما عمدتاً با معادلات لندن کار خواهیم داشت. ولی تا سال ۱۹۵۰ که

1. J. G. Bednorz and K. A. Muller 2. W. H. Keesom
3. C. J. Gorter and H. B. G. Casimir 4. F. London and H. London

جدول ۱-۱۵ خواص مواد ابررسانا

$\lambda_{exp} (10^{-10} \text{ m})$	$\mu_0 H_c (تسلا)^*$	$T_c (K)$	ماده
۵۰۵	۰.۰۱۰۵	۱٫۱۸	آلومینیم
۳۹۰	۰.۰۸۰۳	۷٫۲۰	سرب
۴۰۰	۰.۰۴۱۱	۴٫۱۵	جیوه
۳۴۵	۰.۰۸۲۹	۴٫۴۷	تانتالیم
۵۱۰	۰.۰۳۰۵	۳٫۷۲	قلع
نوع II			
	$\mu_0 H_{c1}, \mu_0 H_{c2} (تسلا)^*$		ابررساناها
۳۸۰	$۰.۱۴, ۰.۲۴$	۹٫۲۵	نیوبیم
۴۰۰	$۰.۰۱۷, ۷.۰$	۱۸٫۰	Nb ₃ Sn
	$۰.۰۴, ۳۵.۰$	۱۶٫۸	V ₃ Ga
۳۱۰	—, > ۹.۰	۹٫۳	Nb _{0.6} Ti _{0.4}
۲۲۰۰	$۰.۱۵, —$	۳۸٫۵	LaSrCuO _{4-δ}
۱۴۰۰	$۰.۱۲, ۱۵.۰$	۹۲٫۵	YBa ₂ Cu ₃ O _{6.9}
۷۵۰۰ ⊥			
> ۲۵۰۰	$۰.۰۲, ۶۰.۰$	۹۰	Bi ₂ Sr ₂ CaCu ₂ O ₈
> ۲۵۰۰	$۰.۰۱۵, ۱۰۰.۰$	۱۲۲	Tl ₂ Ba ₂ Ca ₂ Cu ₃ O ₁₀

* میدان بحرانی H_c در $T = 0 \text{ K}$; H_{c1} و H_{c2} اندازه‌گیری شده در ۴٫۲ K به جز برای V₃Ga (°K) و Nb₃Sn (۱۴ K) و ابررساناهای Cu - O با دمای T_c زیاد (۷۷ K). || به معنای موازی با سطح Cu - O و ⊥ به معنای عمود بر این سطح است.
منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 70th ed. (Boca Raton, FL: CRC Press, 1989); Copper Oxid Superconductors by C. P. Poole, T. Datta, and H. A. Farach (New York: John Wiley & Sons, 1988); and Proceedings of the IEEE 77 (No. 8), issue on High T_c Superconductivity (August 1989).

اثر ایزوتوپ کشف شد^۱، کارهای نظری موفق عمده‌ای در جهت یک نظریه میکروسکوپی برای ابررسانایی صورت نگرفت. ولی، در سال ۱۹۵۰، فرولیش^۲ بر اساس برهم‌کنش میان الکترون‌ها و اتم‌های مرتعش در شبکه بلور، نظریه‌ای را توسعه داد که اثر ایزوتوپ را توجیه می‌کرد، اما در پیش‌بینی دیگر خواص حالت ابررسانایی با شکست روبه‌رو می‌شد. بعد (در ۱۹۷۵) باردین، کوپر و شریف^۳ یک نظریه میکروسکوپی یا کوانتوم مکانیکی برای ابررسانایی مطرح کردند که کاملاً موفق بوده است. جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۷۲ به خاطر این کار تحقیقاتی به باردین، کوپر، و شریف اعطا شد. آخرین نظریه‌ای که در بالا ذکر کردیم (نظریه BCS) به نحوی کاملاً طبیعی گذار فاز مرتبه دوم، اثر مایسنر، و دیگر خواص ترمودینامیکی و الکترومغناطیسی ابررساناها را توضیح می‌دهد. بر اساس نظریه BCS، ابررسانایی به صورت گذار فازی جلوه می‌کند که ناشی از زوج شدن الکترون‌هاست. این زوج شدن از برهم‌کنش الکترون‌ها با ارتعاشهای شبکه‌ای ماده حاصل می‌شود. از جهاتی، ابررسانایی مشابه چگالش بوز-اینشتین زوج الکترون‌های مقید است، هر دو اثر (ابررسانایی و چگالش بوز-اینشتین) در اساس اثرهایی کوانتوم مکانیکی‌اند و تعبیر کلاسیک ساده ندارند. ظاهراً نظریه BCS می‌تواند تمامی نتایج تجربی مربوط به ابررسانایی را، لااقل به طور کیفی، بجز احتمالاً ابررسانایی در T_c زیاد در پروسکایت‌های اکسید مس، پیشگویی کند. حتی در مورد اخیر نیز به نظر می‌رسد گذار فاز ناشی از زوج شدن الکترون‌هاست هر چند منشأ زوج شدن ممکن است برهم‌کنش الکترون با نوع دیگری از برانگیختگی بلور باشد به جای ارتعاشات شبکه موضوع ابررسانایی آن‌قدر توسعه یافته که به یکی از شاخه‌های غنی تحقیقات تبدیل شده است؛ با وجود این، دو نظریه پدیده‌شناختی مکمل (نظریه دو سیالی کاسیمیر-گورتر و نظریه لندن) همراه با هم برای مطالعه بسیاری از مسائل شامل ابررسانا کافی هستند. نظریه کاسیمیر-گورتر اصولاً درباره مسائل ترمودینامیکی بحث می‌کند و در نتیجه در اینجا فقط به طور جنبی مورد نظر ماست. ولی در نظریه لندن کار عمده افزایش تعداد معادلات ماکسول است، به منظور ساختن یک نظریه الکترومغناطیسی مناسب برای توضیح وضعیتهایی که شامل ابررساناهاست. (به طور دقیق‌تر، نظریه لندن برای ابررساناهای نوع I توسعه داده شده است، ولی آن را می‌توان به طور کیفی برای وضعیتهای شامل مواد نوع II نیز به کار برد.) مابقی این فصل به توسعه نظریه لندن و کاربردش در مورد تعداد کمی از وضعیتهای ساده مربوط می‌شود.

۱. آزمایشهایی که روی عناصر ابررسانا با ترکیب ایزوتوپی مختلف انجام شده است، نشان می‌دهند که $T_c M^{1/2} \approx \text{const.}$ در آن M جرم ایزوتوپی است. اولین کارهای تجربی را ای. ماکسول و سی. ا. رینولدز و همکارانش انجام دادند. اکنون این اثر به اثر ایزوتوپ معروف است و نشان‌دهنده این است که برهم‌کنشهای میان الکترون‌های ابررسانایی و مغزه یونی در یک شبکه بلوری نقش مهمی در ابررسانایی بازی می‌کنند.

۱۵-۲ رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل ابررسانا

در بخش قبل متذکر شدیم که ابررساناها دو خاصیت منحصر به فرد از خود بروز می دهند. رسانندگی آنها، اساساً بی نهایت است و همچنین شار مغناطیسی را همان طور که آزمایش مایسنر-اوکسفلد نشان می دهد، به طور کامل طرد می کنند (به شرطی که میدان مغناطیسی در روی سطح ابررسانا در هیچ جا از میدان بحرانی بیشتر نباشد). این خواص از این لحاظ که هیچ یک از دیگری نتیجه نمی شود مستقل از یکدیگرند، ولی البته هر دو باید از نظریه های رضایتبخش ابررسانایی نتیجه شوند، که می شوند. برای اینکه به طور روشن تر ببینیم که مستقل بودن آن دو خاصیت از یکدیگر چه معنایی دارد، می توانیم رفتار یک رسانای کامل را که اثر مایسنر از خود بروز نمی دهد، در یک میدان مغناطیسی بررسی کنیم.

کره ای را در نظر بگیرید که رسانندگی آن را بتوان به نحوی از یک مقدار معین به بی نهایت تغییر داد، مثلاً، ما می توانیم رسانندگی یک ابررسانا را با تغییر دمایش تغییر دهیم. هنگامی که رسانندگی بی نهایت است، میدان الکتریکی در تمام نقاط داخل ابررسانا صفر است و در نتیجه تاو آن و $\partial B / \partial t$ نیز صفرند. بنابراین اگر کره در یک میدان یکنواخت B سرد شود (یعنی رسانندگی کامل به دست آورد)، تا زمانی که رسانندگی کامل از بین نرود، حتی اگر میدان اعمال شده را صفر کنیم، چگالی شار داخل کره B باقی می ماند. از طرف دیگر، اگر کره در میدان صفر سرد شود، چگالی شار تا زمانی که رسانندگی کامل از بین نرود، صفر باقی می ماند. بنابراین رسانندگی کامل طرد شار را ایجاد نمی کند، و در نتیجه $B = 0$ فرضی است که باید به طور جداگانه به صورت یک اصل موضوع معرفی شود. به طریق مشابه $B = 0$ دلیل بر رسانندگی کامل نیست، زیرا در ماده ای با پذیرفتاری $\chi_m = -1$ همواره $B = 0$ است، و این امر امکان رسانندگی ماده را محدود نمی کند.

در این فصل در درجه اول جنبه های مغناطیسی ابررسانا مورد نظر ماست (رسانندگی بی نهایت بیشتر بررسی خواهد شد ولی نقش مهمی در مسائلی که در اینجا بررسی می شوند، نخواهد داشت)، و فرمولبندی مناسب برای آن به دست خواهد آمد. نخستین روش، که با آنچه تاکنون انجام شده است (به فصل ۹ مراجعه کنید) فرق چندانی ندارد، این است که بگوییم در داخل ابررسانا $\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}] = 0$ و در مرزهای بین ابررساناها و محیطهای دیگر، مؤلفه مماسی \mathbf{H} و مؤلفه عمودی \mathbf{B} پیوسته هستند. در این روش، ما به ابررسانا به مثابه ماده ای مغناطیسی با پذیرفتاری $\chi_m = -1$ ، یعنی محیطی که خاصیت دیامغناطیسی کامل دارد، می نگریم. در سطح ابررسانا، جریانهای مغناطش با چگالی سطحی [داخل \mathbf{M} - خارج \mathbf{M}] $\mathbf{j}_M = \mathbf{n} \times [\mathbf{M}_{\text{داخل}} - \mathbf{M}_{\text{خارج}}]$ جریان می یابند، که در آن \mathbf{n} بردار یگانه عمود بر سطح به طرف خارج است (توجه کنید که خارج \mathbf{M} معمولاً صفر است)؛

در داخل ابررسانا، جریانهای مغناطش حجمی با چگالی $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ جریان می‌یابند (به فصل ۹، مخصوصاً بخش ۹-۱ مراجعه کنید).

در توصیفی مشابه، فرض می‌کنیم در داخل ابررسانا $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ و یک جریان سطحی حقیقی خارج $\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ (چون فرض می‌شود که داخل \mathbf{H} صفر است) جریان دارد. در این توصیف، هیچ نوع جریانی در داخل ابررسانا وجود ندارد. این دو توصیف از ابررسانا آن قدر از یکدیگر متفاوت به نظر می‌آیند که بی‌مورد نیست بپرسیم چگونه به یکدیگر مربوط می‌شوند. بیان معمول در این مورد آن است که بگوییم این دو توصیف هنگامی که به‌طور مناسبی تعبیر شوند، با یکدیگر معادل‌اند. با وجود این، مناسب به نظر می‌رسد که مسئله را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم. نخست توجه می‌کنیم که بین جریانهای حقیقی انتقالی و جریانهای مغناطشی دو اختلاف وجود دارد. نخستین اختلاف این است که جریانهای انتقالی چشمه‌هایی برای \mathbf{H} هستند در صورتی که جریانهای انتقالی و مغناطشی هر دو چشمه‌هایی برای \mathbf{B} هستند. چون \mathbf{B} کمیت میدان مغناطیسی قابل دسترسی است در صورتی که \mathbf{H} اصولاً به این خاطر تعریف شد که یک میدان مغناطیسی داشته باشیم که توسط جریانهای انتقالی مشخص شود، این نخستین تمایز بین دو نوع جریان به‌وضوح مناسب ولی تا حدودی ساختگی است. دومین اختلاف این است که جریانهای انتقالی در مواد معمولی اتلافی هستند (به عبارت دیگر، باعث گرمایش ژولی می‌شوند)، در صورتی که جریانهای مغناطشی چنین نیستند. ولی برای ابررساناها، حتی این اختلاف نیز از بین می‌رود. به‌علاوه، چون می‌توان نشان داد که مغناطش ابررسانا ناشی از اسپینها نیست (و در نتیجه مربوط به حرکت‌های مداری حامل‌های بار می‌شود)، به نظر می‌رسد که دو توصیف معادل باشند. یک بیان فشرده دیگر این است که بگوییم چون تنها \mathbf{B} قابل اندازه‌گیری است، ما می‌توانیم \mathbf{M} و \mathbf{H} را بر طبق قواعد نسبتاً دلخواهی انتخاب کنیم، به شرطی که مقادیر \mathbf{J} و \mathbf{J}_M را بر طبق این انتخاب مشخص کنیم و توجه داشته باشیم در یک ابررسانا نمی‌توان این جریانها را از یکدیگر تمیز داد.

برای بیشتر کاری که در زیر انجام خواهیم داد، توصیف $\mathbf{H}, \mathbf{M} \neq 0$ مناسب است. این بدان دلیل است که این روش تعمیم طبیعی آن چیزی است که قبلاً در مورد مواد معمولی انجام شده است و نیز به این دلیل که این فرمولبندی به مسائل با مقادیر مرزی معمولی‌تر منجر می‌شود. ولی در بخش بعد، دو مسئله را و هریک از آن دورا در هر دو فرمولبندی بررسی خواهیم کرد تا معادل بودن آنها روشن شود.

۱۵-۳ مثالهایی شامل طرد کامل شار

برای درک بیشتر ایده‌هایی که در بخش قبل بیان شد، دو مثال مقدماتی را مطالعه خواهیم کرد: یک کره ابررسانا در یک میدان مغناطیسی که به‌طور مجانبی یکنواخت است و یک استوانه ابررسانای

بی‌نهایت طویل حامل جریان. هر دو فرمولبندی بخش ۱۵-۲ را به‌کار خواهیم برد تا معادل بودن آنها را در این دو مورد به‌طور صریح نشان دهیم.

مثال ۱۵-۱ کره ابررسانا در میدان مغناطیسی یکنواخت

کره ابررسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که در میدان خارجی یکنواخت $B_0 k$ قرار گرفته است. می‌خواهیم میدان مغناطیسی \mathbf{B} را در داخل و خارج کره تعیین کنیم.

حل: در فرمولبندی اول، که در آن ابررسانا به‌مثابه یک ماده مغناطیسی در نظر گرفته می‌شود، مسئله با مقادیر مرزی به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow B_0 k & r &\rightarrow \infty & \text{در خارج: هنگامی که} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1-15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{H} &= -\mathbf{M} & \text{در داخل:} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$

$$B_r \text{ پیوسته} \quad \text{در } r = a \quad (3-15)$$

$$H_\theta \text{ پیوسته}$$

تنها معادله غیرعادی $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ است که برای این اساس مبتنی است که در داخل کره ابررسانا هیچ‌گونه قطب مغناطیسی وجود ندارد. با این معادلات می‌توان دو پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی φ^* در خارج و φ^* در داخل را معرفی کرد. هر دو معادله در معادله لاپلاس صدق می‌کنند و از آنها می‌توان با گرفتن منفی گرادیان، میدان \mathbf{H} را به‌دست آورد. با استفاده از مختصات کروی و با به حساب آوردن اولین معادله (۱-۱۵) به‌طور صریح، خواهیم داشت

$$\varphi^* = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos \theta) \quad (4-15)$$

از این معادله داریم

$$B_r = B_0 \cos \theta + \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) c_\ell r^{-(\ell+2)} P_\ell(\cos \theta) \quad (\text{در خارج}) \quad (5-15)$$

چون \mathbf{B} در داخل صفر است و B_r در عبور از $r = a$ پیوسته است، هر یک از c_l ها به استثنای c_1 باید صفر باشند و $c_1 = -B_0 a^3 / 2\mu_0$. بدین ترتیب مسئله به ازای $r > a$ بدون توسل به شرط مرزی روی مؤلفه مماسی \mathbf{H} ، به طور کامل حل می شود؛ تنها چیزی که وارد شده است، $\mathbf{B} = 0$ در داخل و پیوستگی مؤلفه عمودی \mathbf{B} در $r = a$ است. در داخل کره، پتانسیل φ^* باید در $r = 0$ منظم باشد، و برای آنکه با شرایط مرزی سازگار باشد، تنها می تواند شامل $P_1(\cos \theta)$ باشد. بنابراین، $\varphi^* = d_2 r \cos \theta$ و d_2 عدد ثابتی است که باید تعیین شود. با مشتق گیری، $H_\theta = d_2 \sin \theta$ و $H_r = -d_2 \cos \theta$ چون در خارج $H_\theta = -\frac{3}{4}(B_0 / \mu_0) \sin \theta$ نتیجه می شود که $d_2 = -\frac{3}{4} B_0 / 2\mu_0$. هیچ گونه جریان سطحی حقیقی وجود ندارد، ولی به علت ناپیوستگی \mathbf{M} ، یک جریان مغناطش سطحی برابر با $\mathbf{j}_M = -\frac{3}{4}(B_0 / \mu_0) \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ وجود دارد. این نتایج را می توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = B_0 \mathbf{k} - B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \mathbf{a}_r - \frac{1}{4} B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad \text{در خارج:}$$

$$B = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{k}, \quad \mathbf{M} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{k} \quad \text{در داخل:} \quad (6-15)$$

$$\mathbf{j}_M = -\frac{3}{4} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \mathbf{a}_\phi \quad \text{در } r = a$$

فرمولبندی دوم برای ناحیه خارجی با فرمولبندی اول یکسان است ولی برای ناحیه داخلی به شکل $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ در می آید. در سطح نیز یک جریان حقیقی به صورت

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{خارج}} = -\frac{3}{4}(B_0 / \mu_0) \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

وجود دارد. این توصیف را می توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = B_0 \mathbf{k} - B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \mathbf{a}_r - \frac{1}{4} B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad \text{در خارج:}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0 \quad \text{در داخل:} \quad (7-15)$$

$$\mathbf{j}_S = -\frac{3}{4} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \mathbf{a}_\phi \quad \text{در } r = a$$

اکنون شاید ارتباط بین دو توصیف روشن شده باشد. در خارج، هر دو یکسان اند، همان طور که باید باشند، و گرنه می توانستیم آزمایش ساده ای طرح کنیم تا توسط آن توصیف صحیح انتخاب شود. در داخل، هر دو توصیف نتیجه $\mathbf{B} = 0$ را می دهند، ولی \mathbf{H} و \mathbf{M} در یک توصیف، مقداری

متناهی دارند و در توصیف دیگر هر دو صفرند. اما از نظر تجربی \mathbf{H} و \mathbf{M} هیچ کدام قابل مشاهده نیستند، و در نتیجه این اختلاف حائز اهمیت نیست. در هر دو مورد جریانهای سطحی یکسانی وجود دارند؛ ولی در یک مورد جریان به عنوان جریان انتقالی در نظر گرفته می شود، در صورتی که در حالت دیگر آن را جریان مغناطش می نامیم. نامگذاری جریان تنها از این لحاظ که باید در داخل ابررسانا این نامگذاری با \mathbf{H} و \mathbf{M} سازگار باشد، حائز اهمیت است. مثلاً هنگامی که ما گشتاور مغناطیسی کره ابررسانا را محاسبه می کنیم، یا باید از \mathbf{j}_M استفاده کنیم یا از \mathbf{M} ، ولی نه از هر دو؛ در صورتی که یک \mathbf{j}_S حقیقی همیشه در ایجاد گشتاور مغناطیسی وارد می شود.

مثال ۱۵-۲ سیم طویل حامل جریان

دومین مثالی که باز هم تمیزناپذیری جریانهای انتقالی ابررسانایی و جریانهای مغناطش را نشان می دهد، مثال یک استوانه بی نهایت طویل ابررسانای حامل جریان است. ولی قبل از اینکه این مسئله را به تفصیل مطالعه کنیم، باید توجه کنیم که همواره مجموع \mathbf{J} و \mathbf{j}_M در داخل یک ابررسانای کامل، صفر است. این مطلب از $\mathbf{B} = 0$ نتیجه می شود، که آن هم نتیجه می دهد: $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ، و این، به نوبه خود، نتیجه می دهد $\nabla \times \mathbf{M} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{j}_M = 0$ این بحث را در مورد یک سطح ناپوستگی نمی توان به کار برد، و ممکن است در آنجا یک جریان سطحی کل معین $\mathbf{j}_S + \mathbf{j}_M$ جاری باشد. لیکن، این بحث به وضوح نشان می دهد که جریان کل همواره یک جریان سطحی است. حال به مثال سیم طویل باز می گردیم و فرض می کنیم شعاع آن a و حامل جریان I_0 (در جهت مثبت z) است.

حل: از قانون آمپر ملاحظه می کنیم که در خارج از سیم (در مختصات استوانه ای) $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = (\mu_0 I_0 / 2\pi r) \mathbf{a}_\theta$. اگر اولین توصیف $\mathbf{H} \neq 0$ در داخل به کار رود، ما باید در مورد چگالی جریان در سیم فرضهایی بکنیم. از طرف دیگر چون مؤلفه مماسی \mathbf{H} در سطح پیوسته است، این فرض نباید شامل جریانهای سطحی شود. ساده ترین امکان چگالی یکنواخت است: $\mathbf{J} = (I_0 / \pi a^2) \mathbf{k}$ در این صورت در داخل داریم

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \mathbf{a}_\theta \quad \text{و} \quad \mathbf{M} = -\frac{I_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \mathbf{a}_\theta$$

چگالی جریان مغناطش عبارت است از $\mathbf{j}_M = -(I_0 / \pi a^2) \mathbf{k}$ ، و در سطح یک چگالی جریان مغناطش سطحی وجود دارد

$$\mathbf{j}_M = +\mathbf{a}_r \times \left(\frac{I_0}{2\pi a} \mathbf{a}_\theta \right) = \frac{I_0}{2\pi a} \mathbf{k}$$

جدول ۲-۱۵ سیم ابرسانای حامل جریان

فرمولبندی ۱ (ابرسانا به عنوان یک ماده مغناطیسی با $\chi = -1$)	فرمولبندی ۲ (طرد شار به وسیله جریانهای انتقالی سطحی)
$\mathbf{M} = -\mathbf{H} \neq 0$	$\mathbf{M} = \mathbf{H} = 0$
$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \mathbf{a}_\theta$ در خارج:
$\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = 0$ در داخل:
$\mathbf{H} = \frac{I_0 r}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{H} = 0$
$\mathbf{M} = -\frac{I_0 r}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{M} = 0$
$\mathbf{J} = \frac{I_0}{\pi a^2} \mathbf{k}$	$\mathbf{J} = 0$
$\mathbf{J}_M = -\frac{I_0}{\pi a^2} \mathbf{k}$	$\mathbf{J}_M = 0$
$\mathbf{j}_M = (I_0 / 2\pi a) \mathbf{k}$	$\mathbf{j}_M = 0$
$\mathbf{j}_S = 0$	$\mathbf{j}_S = (I_0 / 2\pi a) \mathbf{k}$ در $r = a$

که درست برای حمل جریان کل I_0 کافی است. در توصیف دیگر فرض می‌شود که در داخل $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ ، و بنابراین لازم است که جریان کلاً روی سطح، با چگالی جریان سطحی حقیقی $\mathbf{j}_S = (I_0 / 2\pi a) \mathbf{k}$ جاری باشد. این دو توصیف در جدول ۲-۱۵ آمده‌اند. این دو توصیف با یکدیگر معادل‌اند، مگر اینکه بتوانیم روشی برای جدا کردن جریانهای انتقالی از جریانهای مغناطیسی در ابرساناها، یا طریقی برای اندازه‌گیری مستقیم \mathbf{H} یا \mathbf{M} در داخل ابرسانا پیدا کنیم. در دو مسئله‌ای که هم اکنون بررسی شد، فرمولبندی $\mathbf{M} = \mathbf{H} = 0$ از لحاظ سادگی مزیت آشکاری دارد. ولی، برای مسائل پیچیده‌تر، به‌ویژه آنهایی که شامل ضرایب بزرگ و امگناطش‌اند، فرمولبندی مغناطش توزیع‌شده، سودمند است. هر یک از این دو روش را می‌توان به‌کار برد و نتایج آنها معادل خواهند بود، ولی نباید آنها را در یک مسئله منفرد مخلوط کرد.

۲-۱۵ معادلات لندن

در بخش قبل، طرد شار بر اساس توصیف بسیار ایده‌آلی از ابرسانا، بررسی شد. این توصیف بسیاری از ویژگیهای قابل مشاهده ابرسانایی را به‌دست می‌دهد، ولی نمی‌تواند توجیه مناسبی

برای بعضی جزئیات که به سادگی قابل مشاهده هستند ارائه کند. با شروع از مفهوم رسانندگی کامل و انجام یک اصلاح مناسب برای منظور کردن اثر مایسنر، می‌توانیم نظریهٔ بهتری را مطرح کنیم. در یک رسانای کامل (نه یک ابررسانا) حاملهای بار تحت تأثیر هیچ‌گونه نیروی کندکننده‌ای نیستند؛ در نتیجه در میدان الکتریکی \mathbf{E} ، بر طبق رابطه زیر حرکت می‌کنند

$$m_p \dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \quad (۸-۱۵)$$

که در آن m_p جرم حامل بار و $\dot{\mathbf{v}}$ شتاب آن است. ولی اگر \mathbf{v} میانگین سرعت حاملهای بار باشد و n حامل بار در واحد حجم وجود داشته باشد، چگالی جریان $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ است. بنابراین، شکل دیگری برای معادلهٔ (۸-۱۵) عبارت است از

$$\mathbf{j} = (nq^2/m_p) \mathbf{E} \quad (۹-۱۵)$$

که در آن $\mathbf{j} = d\mathbf{J}/dt$ با محاسبهٔ تو این معادله و با استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ خواهیم داشت

$$\nabla \times \mathbf{j} = -(nq^2/m_p) \dot{\mathbf{B}} \quad (۱۰-۱۵)$$

با فرض اینکه میدانها آهسته تغییر می‌کنند^۱ و با به‌کار بردن $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ برای حذف \mathbf{j} خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -(nq^2/m_p) \dot{\mathbf{B}} \quad (۱۱-۱۵)$$

با فرض $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ و با استفاده از تعریف لاپلاسی بردار (و با $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) نتیجه خواهد شد

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = (\mu_0 nq^2/m_p) \dot{\mathbf{B}} \quad (۱۲-۱۵)$$

اهمیت این معادله وقتی کاملاً معلوم می‌شود که یک رسانای کامل نیمه نامتناهی را که با صفحهٔ $z = 0$ محدود شده است و در جهت مثبت z امتداد دارد، در نظر بگیریم. فرض کنید که درست روی سطح $\dot{B}_x = \dot{B}_{x0}$ ، $\dot{B}_y = \dot{B}_z = 0$ و به x و y بستگی ندارد. در این صورت معادله‌ای که \dot{B}_x را تعیین می‌کند، عبارت است از

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} = \frac{\mu_0 nq^2}{m_p} \dot{B}_x \quad (۱۳-۱۵)$$

۱. این فرض ایجاب می‌کند که از جریان جابه‌جایی، $\partial\mathbf{D}/\partial t$ که در بخشهای ۱-۱۶ و ۲-۱۶ بحث می‌شود، چشمپوشی کنیم.

پاسخ عمومی این معادله به صورت زیر است

$$\dot{B}_x = Ae^{-\sqrt{\mu_0 n q^2 / m_p z}} + Be^{\sqrt{\mu_0 n q^2 / m_p z}}$$

پاسخ به صورت نمایی افزایش یابنده را به این علت که تعبیر فیزیکی ندارد، کنار می‌گذاریم، و A را طوری انتخاب می‌کنیم که در $z = 0$ مقدار صحیح \dot{B}_x را بدهد؛ در این صورت

$$\dot{B}_x = \dot{B}_{x0} e^{-\sqrt{\mu_0 n q^2 / m_p z}} \quad (۱۴-۱۵)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\sqrt{m_p / \mu_0 n q^2}$ دارای بعد طول است، و برای q و m_p مربوط به الکترون و n مربوط به یک الکترون در اتم، این طول در حدود 10^{-8} متر است. بنابراین معادله (۱۲-۱۵) نشان می‌دهد که در داخل یک رسانای کامل، مشتق زمانی B با فاصله از سطح به طور نمایی به سمت صفر میل می‌کند. بدین ترتیب، در داخل یک رسانای کامل، بجز در یک لایه سطحی نازک، \dot{B} خیلی کوچک است. این یک اصلاح قابل قبول برای نتیجه‌گیری قبلی است که در داخل یک رسانای کامل در همه جا $\dot{B} = 0$ است.

تحلیلی که هم اکنون مطرح شد، دوباره نشان می‌دهد که رسانندگی کامل به طرد شار منجر نمی‌شود. با وجود این، این تحلیل همچنین نشان می‌دهد که چگونه طرد شار را می‌توان در یک نظریه وارد کرد. اگر معادله (۱۲-۱۵) رفتار B را به جای \dot{B} توصیف می‌کرد، در این صورت خود B به طور نمایی از مقدارش در روی سطح به صفر در داخل ابررسانا کاهش می‌یافت. این ایده انگیزه طرح نظریه‌ای توسط اف. لندن و اج. لندن برای رفتار الکترومغناطیسی ابررساناها بود.^۱ در این نظریه فرض می‌شود که جریان کل می‌تواند به یک ابرجریان J_S ، یک جریان اتلافی J_{diss} و یک جریان جابه‌جایی J_{disp} تجزیه شود^۲

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{diss} + \mathbf{J}_{disp} \quad (۱۵-۱۵)$$

جریانهای اتلافی و جابه‌جایی از معادلات $\mathbf{J}_{diss} = g\mathbf{E}$ و $\mathbf{J}_{disp} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ پیروی می‌کنند. ارتباط دادن جریان J_S به میدان الکترومغناطیسی با استفاده از معادله (۱۵-۱۵)، معادلات ماکسول، و معادله ساختمندی لندن [که شکل آن شبیه به معادله (۱۵-۱۰) است ولی به جای مشتقات B و J شامل خود آنهاست]، انجام‌پذیر است. اگر این روش به دقت دنبال شود، می‌توان

1. F. London and H. London, *Proceedings of the Royal Society*, vol. A 149, p. 71 (1935).

۲. جریان جابه‌جایی و معادلات ماکسول در فصل ۱۶ مطرح شده‌اند.

نشان داد که برای فرکانسهای کمتر از حدود 10^{11} سیکل بر ثانیه، هم \mathbf{J}_{diss} و هم \mathbf{J}_{disp} در مقایسه با \mathbf{J}_S قابل چشمپوشی اند. می‌خواهیم بدون اینکه وارد جزئیات بحث شویم، این نتیجه را مسلم فرض کنیم، یعنی، $\mathbf{J}_{\text{diss}} \approx 0$ و $\mathbf{J}_{\text{disp}} \approx 0$ ؛ چنین فرضی حداقل برای مسائل جریان پایا از نوع مورد بحث در این فصل قابل قبول است. جریان باقیمانده \mathbf{J}_S هم شامل جریانهای انتقالی است و هم شامل جریانهای مغناطشی و در نتیجه، از معادلهٔ ماکسول (۵۱-۸)، داریم

$$\mathbf{J}_S = (1/\mu_0) \nabla \times \mathbf{B} \quad (16-15)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ای که شامل متغیرهای میدان به جای مشتقات آنها باشد، لندن رابطه زیر را به‌عنوان یک اصل موضوع در نظر گرفت

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_S = -(1/\lambda^2) \mathbf{B} \quad (17-15)$$

اختلاف این معادله با معادلهٔ (۱۵-۱۰) در این است که این معادله \mathbf{J}_S و \mathbf{B} را به جای \mathbf{j} و $\dot{\mathbf{B}}$ در بر می‌گیرد. بنابراین، این معادله به معادله‌ای منجر می‌شود شبیه به معادلهٔ (۱۵-۱۲) برای خود میدانها به جای مشتق آنها. همچنین یک عمق نفوذ پدیده‌شناختی (λ) به‌عنوان یک پارامتر مخصوص معرفی شده است که مشخصهٔ ماده ابررساناست (μ_0 به این دلیل ظاهر می‌شود که λ بعد طول داشته باشد). معادله (۱۷-۱۵) به اثر مایسنر منجر خواهد شد ولی برای منظور کردن رسانندگی بی‌نهایت، باید به‌طور جداگانه فرض کنیم که

$$\mu_0 \mathbf{j}_S = (1/\lambda^2) \mathbf{E} \quad (18-15)$$

البته معادلهٔ اخیر نقش دیگری در مسائل مورد مطالعه در اینجا بازی نمی‌کند. می‌توان از ترکیب معادلات (۱۵-۱۶) و (۱۷-۱۵) نتیجه زیر را به‌دست آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -(1/\lambda^2) \mathbf{B} \quad (19-15)$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B} \quad (20-15)$$

معادلهٔ (۱۵-۲۰) را می‌توان در مورد یک بُرهٔ نیمه نامتناهی، درست مثل معادلهٔ (۱۵-۱۳)، حل کرد. پاسخ آن، یعنی،

$$B_x(z) = B_{x_0} e^{-z/\lambda} \quad (21-15)$$

نشان می‌دهد که هنگام نفوذ در بره، B به جای \vec{B} به طور نمایی کاهش می‌یابد و این تعمیم مطلوبی برای $B = 0$ در داخل ابررساناست.

عمق نفوذ λ در اینجا به عنوان یک پارامتر پدیده شناختی معرفی شده است؛ ولی نظریه‌های متعددی ساخته شده است که در آنها سعی می‌شود اندازه λ را تخمین بزنند. ما بیشتر به تعیین λ از طریق آزمایش علاقه‌مندیم. یک روش واضح آن خواهد بود که یک سیمولوله با یک مغزی ابررسانا ساخته شود. ضریب القای چنین سیمولوله‌ای اگر ابررسانای آن کامل باشد و کاملاً تمام حجم احاطه‌شده توسط سیمولوله را پر کند، خیلی کوچک خواهد بود. از طرف دیگر، اگر عمق نفوذ غیر صفر می‌بود، در آن صورت ضریب القا تا حدودی بزرگتر می‌شد. اگر عمق نفوذ کسر قابل ملاحظه‌ای از شعاع سیمولوله باشد، عمق نفوذ را می‌توان از اندازه‌گیرهای ضریب القا استنتاج کرد. امکان انجام دادن چنین کاری بستگی دارد به نسبت حجمی که میدان در آن نفوذ می‌کند، به حجم کل نمونه. واقعیت آن است که λ حدود چند میلیونیم سانتی‌متر است، و در نتیجه آزمایش ساده‌ای که در بالا مطرح شد نتایج قابل ملاحظه‌ای به بار نخواهد آورد. لیکن می‌توان با استفاده از نمونه‌ای که نسبت سطح به حجم آن بزرگ باشد، بر این اشکال فایز آمد. اولین آزمایشهای موفقیت‌آمیز از این نوع، توسط شوئنبرگ^۱ در سال ۱۹۳۹ با یک کلوتید جیوه انجام شد. این آزمایشها به طور قاطع نشان دادند که میدان مغناطیسی به داخل کره‌های کوچک ابررسانای جیوه‌ای نفوذ می‌کند و عمق نفوذ به دما بستگی دارد. آزمایشهای اصلی شوئنبرگ، که تاکنون توسعه و تکامل بیشتری یافته‌اند، نشان داد که مفهوم عمق نفوذ معتبر و مهم است.

معادلات (۱۵-۱۵)، (۱۵-۱۷)، و (۱۵-۱۸)، همراه با چهار معادله ماکسول را اغلب به طور جمعی معادلات ماکسول-لندن می‌نامند و برای بحث در مسائل الکترومغناطیس شامل ابررساناها بسیار سودمندند.

همان‌طور که از بحث بالا آشکار است، مفهوم طرد کامل شار، یک ایده‌آل‌سازی است. به جای طرد کامل، شار مغناطیسی در لایه نازکی از سطح ابررسانا نفوذ می‌کند، و بر طبق نظریه لندن، به طرف داخل به طور نمایی کاهش می‌یابد. چگالی جریان سطحی، \vec{J}_M (یا بر حسب موردی که داریم، \vec{J}_S) نیز یک ایده‌آل‌سازی است. در این مورد نیز چگالی ابر جریان \vec{J}_S در یک لایه سطحی نازک گسترش و به طرف داخل به طور نمایی کاهش می‌یابد. از آنجا که ابر جریان در فاصله چند عمق نفوذ از سطح محدود است، در اکثر نمونه‌های ابررسانا به یک جریان سطحی شباهت دارد. بدین ترتیب، در نظریه لندن \vec{J}_M وجود ندارد و فقط یک چگالی کل ابر جریان \vec{J}_S موجود است.

اکنون دو مسئله‌ای را که قبلاً مطالعه کردیم، با به‌کار بردن معادلات ماکسول-لندن حل خواهیم کرد تا درک بهتری از این معادلات به‌دست آوریم.

مثال ۱۵-۳ بررسی کرهٔ ابررسانا در میدان یکنواخت بر پایه نظریهٔ لندن
در این مثال، همان مسئله‌ای که در مثال ۱۵-۱ توصیف شد با استفاده از معادلات ماکسول-لندن بررسی می‌شود.

حل: معادلاتی که میدانها در آنها صدق می‌کنند عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{در خارج:} \quad (۲۲-۱۵)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (\nu/\lambda^2) \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{در داخل:}$$

که در آن λ (عمق نفوذ) به‌عنوان یک پارامتر پدیده‌شناختی در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی‌ای که باید برآورده شوند عبارت‌اند از

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} \quad \text{در } r = \infty \quad (۲۳-۱۵)$$

$$B_\theta \text{ و } B_r \text{ پیوسته} \quad \text{در } r = a$$

از این شرایط مرزی تنها شرطی که به تفسیر بیشتر احتیاج دارد پیوستگی B_θ در $r = a$ است. این شرط از این فرض نتیجه می‌شود که ابر جریانها (هم انتقالی و هم مغناطشی) هرگز بی‌نهایت نیستند، که با بحثی که در پایان بخش قبل مطرح شد سازگار است، یعنی، هیچ‌گونه جریان سطحی \mathbf{j}_M یا \mathbf{j}_S وجود ندارد. در این مورد مؤلفه‌های مماسی \mathbf{H} و \mathbf{M} هر دو پیوسته‌اند، و بنابراین مؤلفه مماسی B نیز پیوسته است.

حل معادلات برای میدان در خارج از کره هیچ‌گونه دشواری‌ای تولید نمی‌کند. درست مثل بخش ۱۵-۳ می‌توان یک پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی معرفی کرد که در معادلهٔ لاپلاس صدق کند و یک پاسخ عمومی به‌دست آورد. ولی برای ناحیهٔ داخلی باید معادله $\nabla^2 \mathbf{B} = (\nu/\lambda^2) \mathbf{B}$ را حل کرد. اگر در مختصات کروی لاپلاسی یک بردار را می‌توانستیم تنها با گرفتن لاپلاسی هر یک از مؤلفه‌های آن به‌دست آوریم، در آن صورت پاسخهای این معادله نیز به‌آسانی پیدامی‌شدند. ولی این مطلب صادق نیست، و در عوض باید تاو تاو بردار محاسبه شود. نتیجتاً، حتی در این مسئله ساده مؤلفه‌های r و θ معادلهٔ $\nabla^2 \mathbf{B} = (\nu/\lambda^2) \mathbf{B}$ هم شامل B_r و هم شامل B_θ هستند. این پیچیدگی نسبتاً مشهور است و روشهای جامعی برای حل معادلهٔ برداری هلمهولتز

توسعه یافته است.^۱ ولی توسعه و کاربرد این روشها تا حدودی خارج از حوزه این کتاب است. در نتیجه از نتایج بخش ۱۵-۳ استفاده می‌کنیم تا شکل پاسخ را به صورت یک فرض آغازین حدس بزنیم. پاسخ نهایی که بدین ترتیب حاصل می‌شود قابل توجیه است، زیرا در معادلات و شرایط مرزی صدق می‌کند و پاسخ این معادلات و شرایط مرزی یکتاست. البته یکتا بودن پاسخ را می‌توان اثبات کرد، ولی در اینجا دانسته فرض خواهد شد.

در بخش ۱۵-۳ دیدیم که تنها جمله $P_1(\cos \theta)$ در φ^* برای پاسخ ناحیه خارج از کره باقی ماند. فرض می‌کنیم که این مطلب برای نظریهٔ ماکسول-لندن نیز صادق است و فرض می‌کنیم که

$$\mathbf{B}(r, \theta) = B_0 \mathbf{k} - b \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[\cos \theta \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \right] \quad (\text{در خارج}) \quad (24-15)$$

این معادله خیلی شبیه به اولین معادله از معادلات (۱۵-۷) است، تنها تفاوت میان آن دو در این است که به جای B_0 در آن قسمت از میدان که مربوط به مغناطش کره می‌شود، b آمده است. مقدار B از روی شرایط مرزی تعیین می‌شود. برای ناحیه داخل کره، بخش ۱۵-۳ راه حل چندانی به دست نمی‌دهد؛ با وجود این از شکل M که در آنجا یافت شد، و از این حقیقت که در معادله (۱۵-۲۴) B_r از طریق $\cos \theta$ به θ بستگی پیدا می‌کند در صورتی که B_θ از طریق $\sin \theta$ به θ بستگی دارد، یک فرض قابل قبول می‌تواند به صورت زیر باشد

$$B_r = u(r) \cos \theta \quad (\text{در داخل}) \quad (15-25 \text{ الف})$$

$$B_\theta = v(r) \sin \theta \quad (\text{در داخل}) \quad (15-25 \text{ ب})$$

دو تابع $u(r)$ و $v(r)$ باید طوری تعیین شوند که $\nabla^2 \mathbf{B} = (\mathbf{1}/\lambda^2) \mathbf{B}$ و نیز شرایط مرزی در $r = a$ برآورده شوند. این شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$u(a) = B_0 - b \quad (15-26 \text{ الف})$$

$$v(a) = -B_0 - b/2 \quad (15-26 \text{ ب})$$

با بسط $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ و با استفاده از شکلهای فرض شده (۱۵-۲۵)، معادلات زیر را برای u و v به دست خواهیم آورد

$$r \frac{dv}{dr} + v + u = -\frac{r^2}{2\lambda^2} u \quad (15-27 \text{ الف})$$

1. Cf. Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (New York: McGraw-Hill, 1953), Chapter 13.

$$r^2 \frac{d^2 v}{dr^2} + 2r \frac{dv}{dr} + r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} v \quad (15-27) \text{ ب}$$

حال با استفاده از معادلات (15-25) در $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ نتیجه زیر به دست می‌آید

$$u' + (2/r)(u + v) = 0 \quad (15-28)$$

با به کار بردن این نتیجه برای حذف v و dv/dr از معادله (15-27 الف)، معادله‌ای برای u به دست می‌آید

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 4r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} u \quad (15-29)$$

برای حل این معادله، متغیر وابسته جدید زیر را تعریف می‌کنیم

$$\psi \equiv r(u - 2v) \quad (15-30)$$

و از آن مشتق می‌گیریم تا ψ' و ψ'' را بر حسب u و v و مشتقات آنها به دست آوریم. حال دو برابر معادله (15-27 ب) را از معادله (15-29) کم می‌کنیم. خواهیم دید که معادله حاصل به صورت زیر است

$$r\psi'' = (r/\lambda^2)\psi \quad (15-31)$$

که پاسخهای آن به صورت $\sin(r/\lambda)$ و $\cos(r/\lambda)$ یا $\exp(r/\lambda)$ و $\exp(-r/\lambda)$ است. چون می‌خواهیم ψ/r در مبدأ متناهی باشد، پاسخ زیر را انتخاب می‌کنیم

$$\psi = c_1 \sinh(r/\lambda) \quad (15-32)$$

حال معادله (15-28) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$u' + \frac{3u}{r} = \frac{\psi}{r^2} = \frac{c_1 \sinh(r/\lambda)}{r^2} \quad (15-33)$$

این معادله حاکی از آن است که u به صورت زیر خواهد بود

$$u(r) = c_2 (\lambda/r)^n [\sinh(r/\lambda) - (r/\lambda) \cosh(r/\lambda)] \quad (15-34)$$

(که این پاسخ چنانچه $n \leq 3$ باشد در مبدأ متناهی است). ثابت n را می‌توان با جایگزینی معادله (15-34) در معادله (15-33) [یا معادله (15-29)] به دست آورد. خواهیم یافت که $n = 3$. با قرار دادن این نتیجه در معادله (15-28)، و حل آن برای v به دست می‌آوریم

$$v = \frac{c_2}{2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^3 \left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r}{\lambda}\right) \cosh\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right] \quad (15-35)$$

فقط می‌ماند استفاده از معادلات (۱۵-۲۶)، (۱۵-۳۴) و (۱۵-۳۵) برای تعیین b و c_2 . نتیجه عبارت است از

$$c_2 = -3B_0 (a/\lambda) / \sinh(a/\lambda) \quad (۱۵-۳۶)$$

$$b = B_0 [1 + 3(\lambda/a)^2 - 3(\lambda/a) \coth(a/\lambda)] \quad (۱۵-۳۷)$$

انتظار می‌رود که به‌ازای مقادیر کوچک λ/a میدانها با آنچه در بخش ۱۵-۳ برای کره ابررسانای کامل به‌دست آمد، تفاوت زیادی نداشته باشند. می‌توان صحت این مطلب را با استفاده از این حقیقت تحقیق کرد که مقدار $\coth x$ برای مقادیر بزرگ x به‌صورت نمایی به یک میل می‌کند. بنابراین

$$b \approx B_0 \left(1 - 3\frac{\lambda}{a} + 3\frac{\lambda^2}{a^2} + \dots \right), \quad \frac{\lambda}{a} \ll 1 \quad (۱۵-۳۸)$$

که نشان می‌دهد اولین جمله تصحیح برای میدان خارج از کره از مرتبه λ/a است.

مثال ۱۵-۴ بررسی سیم طویل حامل جریان بر پایه نظریه لندن

دومین مثال برای حل معادلات لندن سیم طویل حامل جریان است. فرض می‌کنیم شعاع سیم a ، عمق نفوذ آن λ ، و جریان کل انتقال آن I_0 است.

حل: در خارج از سیم، \mathbf{H} با معادله آمپر داده می‌شود و $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. بنابراین

$$H_r = H_z = B_r = B_z = 0, \quad B_\theta = \mu_0 H_\theta = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi r} \quad (\text{در خارج}) \quad (۱۵-۳۹)$$

در داخل، \mathbf{B} در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (۱۵-۴۰)$$

از روی تقارن، \mathbf{B} تنها یک مؤلفه θ دارد و این مؤلفه فقط به r بستگی دارد. در این صورت معادله (۱۵-۴۰) به‌صورت زیر در می‌آید

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B_\theta + r \frac{d}{dr} B_\theta - \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right) B_\theta = 0 \quad (۱۵-۴۱)$$

که این درست معادله بسل است به‌ازای شاخص یک و شناسه ir/λ . جوابی که در مبدأ بی‌نهایت نیست عبارت است از

$$B_\theta = AJ_1(ir/\lambda) \quad (۱۵-۴۲)$$

ضریب A از مساوی قرار دادن B_θ در داخل با B_θ در خارج، در $r = a$ ، تعیین می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{J_1(ir/\lambda)}{J_1(ia/\lambda)} \quad (\text{در داخل}) \quad (۴۳-۱۵)$$

چون $J_1(ir/\lambda) = iI_1(r/\lambda)$ که در آن تابع بسل تغییر یافته است، معادله (۴۳-۱۵) را می‌توان برحسب توابع استاندارد جدولبندی شده نوشت. راه حل دیگر حل معادله (۴۱-۱۵) انتگرال‌گیری مستقیم عددی آن است که به راحتی با کامپیوترهای شخصی قابل انجام است. کار را با معرفی متغیر بدون بعد $w = r/\lambda$ شروع می‌کنیم و معادله (۴۱-۱۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$B'' = \frac{1}{w^2} [(\lambda + w^2) B - wB'] \quad 0 \leq w \leq a/\lambda \quad (۴۴-۱۵)$$

در اینجا برای B_θ از B استفاده کرده‌ایم و $B'' = d^2 B/dw^2$ و $B' = dB/dw$. فاصله بین صفر تا a/λ را به تعداد N قسمت هر یک به طول $\Delta w = a/N\lambda$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید در w_{n-1} و w_n مقدار B ، B' و B'' معلوم باشند. آنگاه مقدار B_{n+1} ، B'_{n+1} و B''_{n+1} را می‌توانیم به طریق زیر پیش‌بینی کنیم

$${}^{(1)}B_{n+1} = B_{n-1} + 2(\Delta w) B'_n \quad (۴۵-۱۵)$$

$${}^{(1)}B'_{n+1} = B'_n + 2(\Delta w) B''_n \quad (۴۶-۱۵)$$

$${}^{(1)}B''_{n+1} = \frac{1}{w_{n+1}^2} [(\lambda + w_{n+1}^2) {}^{(1)}B_{n+1} - w_{n+1} {}^{(1)}B'_{n+1}] \quad (۴۷-۱۵)$$

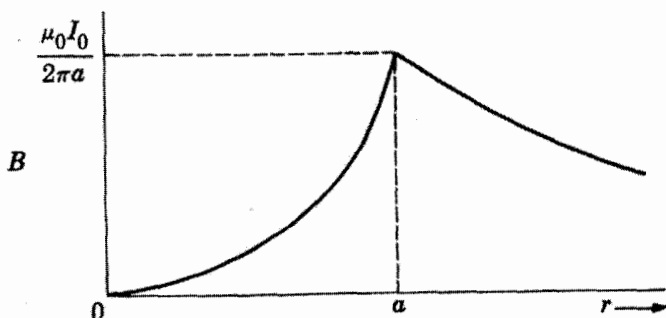
با استفاده از این مقادیر پیش‌بینی شده، همراه با مقادیر آنها به ازای w_n ، مقادیر تقریبی برای B' و B'' را در نقطه وسط بین w_n و w_{n+1} محاسبه می‌کنیم و سپس مقادیر را از روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$${}^{(2)}B_{n+1} = B_n + \frac{\Delta w}{2} (B'_n + {}^{(1)}B'_{n+1}) \quad (۴۸-۱۵)$$

$${}^{(2)}B'_{n+1} = B'_n + \frac{\Delta w}{2} (B''_n + {}^{(1)}B''_{n+1}) \quad (۴۹-۱۵)$$

$${}^{(2)}B''_{n+1} = \frac{1}{w_{n+1}^2} [(\lambda + w_{n+1}^2) {}^{(2)}B_{n+1} - w_{n+1} {}^{(2)}B'_{n+1}] \quad (۵۰-۱۵)$$

سه مقدار اخیر تقریب خوبی برای B ، B' و B'' در w_{n+1} خواهند بود. تمام این فرایندها تکرار می‌شود تا مقادیر B ، B' و B'' در نقطه بعدی شبکه محاسبه شود.



شکل ۳-۱۵ نفوذ میدان مغناطیسی به درون یک ابررسانا بر طبق نظریه لندن. شعاع سیم $a = 5\lambda$ است.

تنها مسئله باقیمانده آن است که مقادیر B ، B' و B'' را در دو نقطه پشت سر هم برای شروع فرایند محاسبه، چگونه پیدا کنیم. این کار را با بسط B به صورت سری

$$B = w^m (c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \dots)$$

و جایگزینی آن در معادله (۳-۱۵)، انجام می‌دهیم. با مساوی قرار دادن ضرایب w ، به دست می‌آوریم $m = \pm 1$. پاسخی که در مبدأ منتهای است، عبارت است از $m = 1$. از مساوی قرار دادن توانهای بالاتر w ضرایب c_1/c_0 ، c_2/c_0 و غیره به دست می‌آیند. پاسخ عبارت است از

$$B = c_0 w \left(1 + \frac{1}{8} w^2 + \frac{1}{192} w^4 + \dots \right)$$

از این پاسخ که به صورت سری است، می‌توان برای محاسبه B ، B' و B'' برای دو نقطه مجاور در نزدیکی مبدأ، استفاده کرد.

با این روش، ما نفوذ "نمایی" شار به درون ابررسانایی با شعاع $a = 5\lambda$ را محاسبه کرده‌ایم؛ نتیجه در شکل ۳-۱۵ نشان داده شده است. ما از $w = 0.1$ استفاده کردیم و انتگرال‌گیری عددی را با پاسخ به صورت سری از نزدیکی $w = 0.3$ آغاز کردیم. با انتخاب Δw ی کوچکتر دقت محاسبه عددی را می‌توان بالا برد، ولی دریافتیم که با $w = 0.1$ دقت کاملاً خوب است. (منحنی شکل ۳-۱۵ از پاسخ دقیق تابع بسل قابل تمیز نیست). مقدار ثابت اختیاری C_0 با سازگار کردن B در سطح با مقدار خارجی آن محاسبه می‌شود.

در این بحث خواص الکترومغناطیسی ابررساناها الزاماً به صورت ناقص ارائه شد، به ویژه اینکه از مسائل شامل میدانهای تابع زمان و از نظریه میکروسکوپی ابررسانایی چشمپوشی شده است.

خواننده علاقه‌مند می‌تواند به یکی از مقالات متعدد خوب مقدماتی درباره ابررسانایی مراجعه کند.^۱ دو کتاب قدیمی‌تر برای تکمیل مطالب این فصل، عبارت‌اند از کتاب لندن^۲ و کتاب شوئبرگ.^۳

۵-۱۵ خلاصه مطالب

ابررساناها رده نسبتاً بزرگی از مواد را تشکیل می‌دهند که در دماهای کم، معمولاً کمتر از 2°K ، گذار فازی به حالت ابررسانایی دارند. این گذار علاوه بر بستگی به دما به میدان مغناطیسی نیز بستگی دارد، و در میدانهای شدیدتر از میدان بحرانی H_c ماده به حالت معمولی برمی‌گردد. به طور ایده‌آل

$$H_c = H_0 [1 - (T/T_c)^2]$$

رفتار الکتریکی و مغناطیسی در حالت ابررسانایی را به ساده‌ترین وجه می‌توان توسط معادلات ساختمندی $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ و $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ توصیف کرد که در آنها پارامترهای مواد، مقادیر فرین زیر را دارند

$$g = 0, \quad \chi_m = -1 \quad (\mu = 0)$$

این مقادیر، رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل را نشان می‌دهند. خاصیت دیامغناطیسی کامل ایجاب می‌کند که در درون ابررسانا چگالی شار \mathbf{B} و چگالی جریان \mathbf{J} هر دو صفر باشند و جریانهای ابررسانایی در سطح جاری باشند. معادلات لندن توصیف دقیق‌تری به دست می‌دهند. در این معادلات، معادلات خطی ساختمندی با معادلات دیفرانسیل زیر جایگزین می‌شوند

$$\mu_0 \mathbf{J} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{E}, \quad \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{B}$$

از این معادلات، همراه با معادلات ماکسول در خلا، چنین نتیجه می‌شود که چگالی شار و چگالی جریان در درون ابررسانا به جای آنکه به‌طور ناگهانی به صفر نزول کنند، با فاصله از سطح به‌طور نمایی با عمق نفوذ λ کاهش می‌یابند.

1. N. H. March and M. Parrinello, *Collective Effects in Solids* (Bristol: Adam Hilger, 1982), Chapter 5; and *Earlier and Recent Aspects of Superconductivity, Solid State Sciences 90*, edited by J. G. Bednorz and K. A. Müller (New York: Springer Verlag, 1990).

2. F. London, *Superfluids. The Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. I. (New York: Wiley, 1950; New York: Dover Publications, 1961).

3. D. Shoenberg, *Superconductivity*, 2nd ed. (London: Cambridge University Press, 1965).

• برای مسائلی که در آنها ابررسانا در میدان مغناطیسی واقع است، فرمولبندی ساده $\chi_m = -1$ ، $\mu = 0$ بسیار مناسب است. نتایج با آنچه توسط روشهای فصل ۹ به دست آمد، تنها با جایگزین کردن $\mu = 0$ ، یکسان است.

• در یک فرمولبندی مشابه، که می تواند برای مسائلی شامل ابررساناهای حامل جریان خارجی مناسب تر باشد، فرض می شود که در داخل ابررسانا $\chi_m = 0$ و $\mu = \mu_0$ است. شرط $\mathbf{B} = 0$ با قرار دادن $\mathbf{H} = 0 = \mathbf{M}$ در داخل ابررسانا برقرار می شود، و شرایط مرزی با این فرض که جریانهای ابررسانایی مناسبی در سطح ابررسانا جریان دارند برآورده می شوند. این دو فرمولبندی با یکدیگر معادل اند، ولی در یک مسئله مفروض تنها یکی از آن دو باید انتخاب و دنبال شود.

مسائل

۱-۱۵ استوانه ابررسانای بی نهایت بلندی به شعاع a را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته است. در فواصل دور از استوانه میدان یکنواخت و اندازه اش B_0 است. (الف) میدانها را در داخل و در خارج استوانه و (ب) چگالی جریان را در داخل استوانه و روی سطح آن محاسبه کنید. فرض کنید که خواص ابررسانایی توسط خاصیت دیامغناطیسی کامل و رسانندگی کامل توصیف می شوند. دو فرمولبندی معادل را مقایسه کنید.

۲-۱۵ برة ابررسانای بی نهایت بزرگی به ضخامت d را در نظر بگیرید که دو سطح آن در $z = 0$ و $z = d$ قرار دارند. در خارج از برة میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با سطوح آن است و $B_x = B_0$. با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ ، میدان و چگالی جریان را در داخل برة به دست آورید.

۳-۱۵ با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ ، محاسبات مسئله ۱-۱۵ را انجام دهید.

۴-۱۵ کره ابررسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته و این میدان در فواصل دور از کره یکنواخت و اندازه اش B_0 است. با استفاده از فرمولبندی مثال ۳-۱۵ به عنوان مبنا، مطالب زیر را فراهم آورید: (الف) بسطی برای $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ و از آن معادلاتی را که مؤلفه های \mathbf{B} در داخل کره در آن صدق می کنند. (ب) اثباتی برای معادله (۱۵-۲۷). (ج) یک بحث کمی درباره کاهش نمایی \mathbf{B} در ناحیه نزدیک به سطح کره.

۵-۱۵ یک سیم بلند و مستقیم ابررسانا به شعاع r_0 میلی متر حامل جریان است. (الف) میدان مغناطیسی روی سطح سیم چیست؟ (ب) مقدار جریان I را که شار مغناطیسی ناشی از آن بتواند به درون سیم نفوذ کند، چنانچه جنس آن از Pb ، Ta یا Nb در $4/2\text{K}$ باشد، محاسبه کنید.

۶-۱۵ یک دوقطبی مغناطیسی به فاصله d بالای یک بُره ابرسانا و به موازات بُره قرار دارد. (برای سادگی فرض کنید بُره در ابعاد عرضی بی نهایت گسترده است.) (الف) ابرسانا را به صورت یک ماده مغناطیسی با $\chi_m = -1$ در نظر بگیرید و دوقطبی تصویری (یا دسته‌ای از دوقطبیهای تصویری را بیابید که موجب برقراری شرایط مرزی در فصل مشترک بین ماده و هوا بشود. [به مسئله ۹-۱۵ (ب) نیز رجوع کنید]. (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر دوقطبی را محاسبه کنید. (ج) اگر جرم دوقطبی m_D باشد، در چه فاصله d نیروی مغناطیسی با نیروی وزن دوقطبی در توازن خواهد بود.

۷-۱۵ نفوذ "نمایی" میدان مغناطیسی به درون سیم استوانه‌ای با شعاع 5λ (شکل ۱۵-۳) را با نتیجه مربوط به وضعیت هندسی یک بعدی بُره نیمه نامتناهی مقایسه کنید. برای استوانه از پاسخ تابع بسل بر پایه $I_1(r/\lambda)$ استفاده کنید.

معادلات ماکسول

اکنون می‌خواهیم که مهرة اصلی نظریه الکترومغناطیس موسوم به جریان جابه‌جایی را معرفی کنیم. هر چند که آثار قابل مشاهده این جریان غالباً ناچیز است (در واقع، در کلیه پدیده‌هایی که تاکنون بررسی کردیم، ناچیز بوده است)، ولی برای تکمیل نظریه بسیار اساسی است و در موضوعاتی که بقیه این کتاب را تشکیل می‌دهند (امواج، اپتیک، نسبیت) نقش بسیار حساسی را بازی می‌کند.

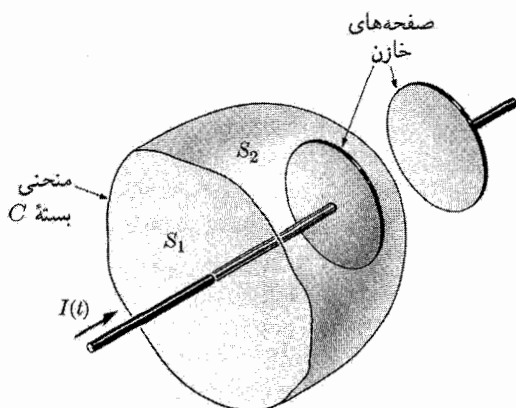
۱-۱۶ تعمیم قانون آمپر: جریان جابه‌جایی

در فصل ۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان، در قانون مداری آمپر صدق می‌کند

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱-۱۶)$$

اکنون ما این قانون را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که گاهی با شکست روبه‌رو می‌شود، و برای آن تعمیمی پیدا می‌کنیم که همیشه معتبر باشد.

مداری را که در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است در نظر بگیرید، این مدار شامل یک خازن کوچک با صفحات موازی است که با جریان ثابت I باردار می‌شود (احتیاجی نیست علت



شکل ۱-۱۶ منحنی بسته C و دو سطح S_1 و S_2 برای بررسی قانون مداری آمپر.

به‌وجود آمدن جریان را بدانیم). چنانچه قانون آمپر را درباره منحنی بسته C و سطح S_1 به‌کار ببریم، خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = I \quad (2-16)$$

از طرف دیگر، چنانچه قانون آمپر را در مورد منحنی بسته C و سطح S_2 به‌کار ببریم، چون J در تمام نقاط روی سطح S_2 مساوی صفر است خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (3-16)$$

معادلات (۲-۱۶) و (۳-۱۶) با یکدیگر متناقض‌اند و بنابراین هر دو نمی‌توانند صحیح باشند. اگر فرض کنیم که منحنی بسته C به فاصله خیلی زیادی از خازن قرار گرفته است، واضح است که این وضعیت با موارد استاندارد قانون آمپر که در فصل ۸ مطالعه کردیم، فرق زیادی ندارد. بدین ترتیب می‌توان تصور کرد که معادله (۲-۱۶) صحیح است، زیرا این معادله به خصوصیت جدید، یعنی خازن بستگی ندارد. از طرفی به‌دست آوردن معادله (۳-۱۶) مستلزم در نظر گرفتن خازن است، بنابراین چنین به نظر می‌رسد که معادله (۳-۱۶) احتیاج به تصحیح دارد.

با ترکیب کردن معادلات (۲-۱۶) و (۳-۱۶) این مشکل را می‌توان به‌صورت دیگری نشان داد. سطح S_2 با سطح S_1 ، روی هم سطح بسته S را تشکیل می‌دهند. با استفاده از \mathbf{n} که همه

جا عمود بر این سطح و به سمت خارج از آن باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = -I \quad (۴-۱۶)$$

که علامت منفی ناشی از تغییر جهت بردار عمود در معادله (۲-۱۶) است. از طرفی دیگر، انتگرالهای سطحی در معادله‌های (۲-۱۶) و (۳-۱۶) هر دو برابرند با انتگرال خطی \mathbf{H} دور منحنی یکسان C . با دنبال کردن این رویکرد داریم

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (۵-۱۶)$$

که در آن علامت منفی ناشی از تغییر جهت پیمودن منحنی C در مورد سطح S است. اکنون تناقض به این صورت در می‌آید که جریان متناهی I ، که فرض کرده بودیم به درون حجم محصور با S جریان دارد، برابر صفر است. بدین ترتیب بین قانون آمپر، معادله (۱-۱۶)، که از آن صفر شدن را به دست آوردیم و فرض اولیه جریان I تعارضی وجود دارد. در حقیقت جریانی که به داخل حجم وارد می‌شود صفر نیست و واقعاً برابر است با آهنگ تغییر بار روی صفحه خازن (مطابق با قانون بقای بار).

در فرمولبندی دیفرانسیلی که قانون آمپر به صورت معادله (۳-۹)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (۳-۹)، (۶-۱۶)$$

نوشته می‌شود، این تناقض را می‌توان آسان‌تر بررسی و مرتفع کرد. معادله (۲-۱۶) درست نتیجه انتگرال‌گیری از معادله (۶-۱۶) روی سطح S است. اگر دیورژانس معادله (۶-۱۶) را محاسبه کنیم، نتیجه صفر خواهد شد چون دیورژانس تاو هر برداری صفر است. ولی ما عبارت دیگری هم برای دیورژانس \mathbf{J} داریم، یعنی معادله بقای بار، معادله (۹-۷):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۷-۱۶)، (۹-۷)$$

یک بار دیگر تناقض بزرگی وجود دارد: دیورژانس \mathbf{J} نمی‌تواند هم صفر باشد و هم $-\partial \rho / \partial t$. معادله (۷-۱۶) ظاهراً مسئله‌ای ندارد، تصور آنکه بتوانیم این معادله را به‌گونه‌ای تغییر دهیم که ناسازگاری رفع شود، مشکل است. به نظر می‌رسد لازم است معادله (۶-۱۶) اصلاح شود، به‌گونه‌ای که سمت راست آن به برداری با دیورژانس صفر تغییر یابد. یک راه برای انجام این کار استفاده از قانون گاوس به صورت معادله (۲۹-۴)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۲۹-۴)، (۸-۱۶)$$

برای جایگزین کردن ρ در معادله (۱۶-۷) با $\nabla \cdot \mathbf{D}$ است. آنگاه

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0 \quad (۱۶-۹)$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم \mathbf{D} تابع به حد کافی پیوسته‌ای از زمان و مکان است به طوری که بتوان ترتیب مشتق‌گیری‌ها را عوض کرد. اکنون واضح است چنانچه $\partial \mathbf{D} / \partial t$ به سمت راست معادله (۱۶-۹) اضافه شود تناقض از بین خواهد رفت (یعنی آنکه، دیورژانس هر دو طرف صفر خواهد بود).

بنابراین ما به این نتیجه می‌رسیم که قانون آمپر را تغییر دهیم و آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۱۶-۱۰)$$

و مشتق زمانی \mathbf{D} را به‌عنوان جریان جابه‌جایی اطلاق کنیم.

همان طوری که به‌زودی خواهیم دید، وارد کردن جریان جابه‌جایی امواج الکترومغناطیسی را امکان‌پذیر می‌سازد و اساس سهم بزرگ ماکسول در توسعه نظریه الکترومغناطیس همین است. آنچه ما در اینجا توسعه دادیم مشابه کار اوست. باید تأکید کنیم که این یک اثبات نیست بلکه فرضیه‌ای است برانگیخته از مشاهدات تجربی. آزمایشهای بیشتر این فرضیه را به یک اصل ارتقاء داده‌اند که توسعه بعدی بر مبنای آن استوار شده است.

در فصلهای قبل ما از جریان جابه‌جایی چشمپوشی کردیم. این چشمپوشی به خاطر یکی از سه دلیل زیر امکان‌پذیر بود: میدانها نسبت به زمان ثابت بودند و نتیجتاً مشتقهای زمانی صفر بودند؛ مواد رساناهای الکتریکی خوبی بودند به طوری که جریان جابه‌جایی در مقایسه با جریان رسانش کوچک بود؛ یا آنکه جریان جابه‌جایی محدود به ناحیه کوچکی از فضا می‌شد که لازم نبود به‌طور صریح در نظر گرفته شود (مثلاً در خازنها). وضعیت میدان ثابت، سراسر است ولی دو وضعیت دیگر به مختصر بررسی بیشتری نیاز دارند. در فرکانسهای کمتر از فرسرخ دور، رسانندگی یک رسانای خوب (یک فلز) از مرتبه 10^8 S/m است. بنابراین، جریان رسانش از مرتبه 10^8 E است. در تعیین اندازه جریان جابه‌جایی عامل غالب $\epsilon \omega$ است. چون $10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = \epsilon_0$ ، این عامل بجز در فرکانسهای خیلی زیاد (فرسرخ دور) که در آنجا این بحث ساده به دلایل دیگر با شکست روبه‌رو می‌شود، بسیار کوچک است. برای مثال فرکانسهایی تا 10^{11} Hz از جریان جابه‌جایی در فلزات می‌توان چشمپوشی کرد. در مورد دی‌الکتریکهای خوب، جریان رسانش بسیار کوچک یا صفر است، بنابراین از جریان جابه‌جایی هرگز نمی‌توان چشمپوشی کرد. حتی در 50 Hz ،

تمامی جریانی که از یک خازن در یک مدار ac می‌گذرد جریان جابه‌جایی است. در فصل ۱۳ لازم نبود که جریان جابه‌جایی به‌طور صریح در نظر گرفته شود، زیرا به هنگام تحلیل مدارهای ac میدانهای متغیر با زمان را در درون خازنها بررسی نمی‌کردیم.

اکنون ما به بررسی مجموعه کامل معادلات ماکسول و پیامدهای آنها باز می‌گردیم.

۱۶-۲ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

معادلات ماکسول شامل معادله (۱۶-۱۰) و سه معادله دیگر است که قبلاً با آنها آشنایی پیدا کردیم، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (16-10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (16-11), (11-16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (16-12), (4-29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (16-13), (8-30)$$

هر کدام از این معادلات نماینده تعمیم یک دسته از مشاهدات تجربی‌اند: معادله (۱۶-۱۰) تعمیم قانون آمپر است، معادله (۱۶-۱۱) صورت دیفرانسیلی قانون الکترومغناطیسی فاراده است، معادله (۱۶-۱۲) تعمیم قانون گاوس است که خود از قانون کولن نتیجه می‌شود، معادله (۱۶-۱۳) را معمولاً می‌گویند نماینده این واقعیت است که هرگز قطب تنهای مغناطیسی مشاهده نشده است.

واضح است که معادلات ماکسول بیان ریاضی نتایج تجربی خاصی هستند. از این رو نمی‌توان آنها را اثبات کرد؛ با وجود این، می‌توان قابلیت کاربرد آنها را برای هر وضعیتی تحقیق کرد. در نتیجه کارهای بسیار گسترده، اکنون معلوم شده است که معادلات ماکسول را می‌توان تقریباً در کلیه وضعیتهای ماکروسکوپی به‌کار برد و این معادلات اغلب خیلی شبیه به اصل پایستگی تکانه، به‌عنوان اصول فیزیک به‌کار می‌روند. اینها معادلات بنیادی‌ای هستند که بر میدانهای الکترومغناطیسی حاصل از چگالیهای چشمه بار و جریان (\mathbf{J} و ρ) حاکم‌اند. اگر موادی موجود باشند، برای آنکه بتوانیم معادلات ماکسول را به‌کار ببریم، باید معادلات ساختمندی مناسب را نیز بدانیم (یا به‌طور تجربی و یا از نظریه میکروسکوپی مربوط به ماده نوع به‌خصوص). این معادلات بدین صورت‌اند: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. همچنین چگالی جریان \mathbf{J} در ماده شامل سهمی است که از معادله ساختمندی سومی، $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$ ، به‌دست می‌آید، و این معادله نیز باید به‌طور تجربی یا

به طور نظری معلوم باشد. این معادلات توأم با معادله نیروی لورنتس، $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ، که اثر میدانها بر روی ذرات باردار را توصیف می‌کند، مجموعه قوانین توصیف کلاسیکی کاملی برای ذرات با برهم‌کنش الکترومغناطیسی فراهم می‌آورد.

هم اکنون دیدیم که جریان جابه‌جایی که در بخش قبل معرفی شد، برای آنکه بقای بار داشته باشیم ضروری است، و هنگامی که آن را در معادلات ماکسول وارد کردیم، این معادلات معادله پیوستگی را ایجاب می‌کنند، به‌گونه‌ای که لازم نیست که این معادله را به مجموعه معادلات بنیادی بیفزاییم. معادلات ماکسول دو پیامد جالب دیگر نیز دارند که در بخش بعد به آنها خواهیم پرداخت. خواهیم دید که این پیامدها نیز به‌طور قاطعی به جریان جابه‌جایی بستگی دارند.

۱۶-۳ انرژی الکترومغناطیسی

در فصل ۶ نشان دادیم که کمیت زیر

$$U_E = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv \quad (14-16)$$

را می‌توان انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی ساکن دستگاه بارهایی دانست که میدان الکتریکی مربوط را ایجاد می‌کنند. این نتیجه را با محاسبه کار انجام‌شده برای ایجاد میدان، به دست آوردیم. به طریق مشابه، در فصل ۱۲، کمیت زیر

$$U_M = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (15-16)$$

را به‌عنوان انرژی ذخیره‌شده در میدان مغناطیسی معرفی کردیم. اکنون قابلیت کاربرد این عبارات را در مورد وضعیتهای غیرساکن بررسی می‌کنیم.

اگر حاصل‌ضرب نرده‌ای معادله (۱۶-۱۰) را با \mathbf{E} به دست آوریم و معادله حاصل را از حاصل‌ضرب نرده‌ای معادله (۱۶-۱۱) در \mathbf{H} کم کنیم، نتیجه معادله زیر خواهد بود

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (16-16)$$

می‌توان با استفاده از اتحاد زیر، طرف چپ معادله بالا را به صورت دیورژانس یک تابع نوشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (17-16)$$

اگر در محیطی که معادله (۱۶-۱۷) را در مورد آن به کار می‌بریم $\mathbf{D}(t)$ متناسب با $\mathbf{E}(t)$ و $\mathbf{B}(t)$ متناسب با $\mathbf{H}(t)$ باشد، و ثابتهای تناسب مربوط به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشند، در این صورت مشتقهای زمانی طرف راست معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} = \frac{1}{\gamma} \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

۱. منظور ما از متناسب بودن آن است که ϵ ، μ و به طور صریح به مقدار میدان یا زمان بستگی نداشته باشند. چنین محیطی را خطی و غیرپاشنده می‌نامند. درباره خطی بودن و غیرپاشنده بودن هر دو، در فصل ۱۹ بیشتر بحث خواهیم کرد. فصلهای ۱۷ و ۱۸ مربوط به تابش تکفام است که برای آن لازم نیست پاشندگی به طور صریح در نظر گرفته شود. همچنین در این فصلها ما تنها محیطهای خطی را در نظر خواهیم گرفت. حتی اگر یک موج تکفام در یک محیط غیرخطی انتشار یابد فرکانسهای هماهنگ تولید خواهد کرد. ما این پدیده را گرچه اهمیت عملی زیادی دارد، در نظر نمی‌گیریم. هنگامی که محدودیتهای اضافی دیگری لازم باشند به طور صریح ذکر خواهند شد. با وجود این، باید توجه داشت که ناهمسانگردی به تنهایی نمی‌تواند روابط زیر را از اعتبار بیندازد

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad \text{و} \quad \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

در مورد محیطهای ناهمسانگرد، رابطه بین \mathbf{E} و \mathbf{D} را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \left(E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j \right)$$

استدلالی ساده براساس پایستگی انرژی (Wooster, *Crystal Physics*, Cambridge University Press, 1938, p. 227) نشان می‌دهد که $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ با استفاده از این نتیجه برای تعویض i و j در جمله آخر خواهیم داشت

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_i \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t}$$

اگر $[\epsilon_{ij}]$ مجموعه‌ای از اعداد ثابت مستقل از t باشد، آنگاه

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j = \sum_{i=1}^3 E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناهمسانگردی به تنهایی محدودیتی برای این اثبات ایجاد نمی‌کند.

با استفاده از این روابط، معادله (۱۶-۱۷) به صورت زیر در می آید

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (16-18)$$

اولین جمله سمت راست معادله بالا، عبارت است از مشتق زمانی مجموع چگالیهای انرژی الکتریکی و مغناطیسی؛ جمله دوم، در اکثر موارد، به ویژه چنانچه $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ باشد، درست برابر منفی گرمای ژول ایجادشده در واحد حجم است.

با انتگرالگیری از معادله بالا روی حجم ثابت V که با سطح بسته S مسدود شده باشد، خواهیم داشت

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (16-19)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس در سمت چپ این معادله، نتیجه زیر را به دست می آوریم

$$\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$$

با نوشتن معادله بالا به صورت زیر

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv + \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (16-20)$$

واضح است که جمله $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ از دو قسمت تشکیل شده است. یکی آهنگ تغییر انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده در حجم V نسبت به زمان، و دیگری یک انتگرال سطحی. طرف چپ معادله (۱۶-۲۰) توان انتقال یافته به میدان الکترومغناطیسی از طریق حرکت بارهای آزاد در حجم V است. چنانچه در حجم V منبع emf وجود نداشته باشد، طرف چپ معادله (۱۶-۲۰) منفی و برابر است با منفی گرمای ژول تولیدشده در واحد زمان. با وجود این، در بعضی موارد، طرف چپ معادله (۱۶-۲۰) ممکن است مثبت باشد. فرض کنید که ذره باردار q با سرعت \mathbf{v} تحت تأثیر نیروهای مکانیکی، الکتریکی، و مغناطیسی حرکت می کند؛ آهنگ کاری که نیروی مکانیکی روی ذره انجام می دهد برابر است با

$$\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{n} = -q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

اما بنا بر معادله (۷-۴)، چگالی جریان عبارت است از

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i$$

بنابراین آهنگ کاری که نیروی مکانیکی (در واحد حجم) انجام می‌دهد برابر است با

$$\sum_i N_i \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

و این چگالی توان به میدان الکترومغناطیسی انتقال می‌یابد.

چون انتگرال سطحی در معادله (۱۶-۲۰) تنها شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است، می‌توان این جمله را به‌عنوان آهنگ عبور انرژی از این سطح تعبیر کرد. بنابراین معادله (۱۶-۲۰) بیان‌کننده بقای انرژی در حجم ثابت V است.

اکنون به معادله دیفرانسیل مربوط (۱۶-۱۸) برمی‌گردیم که بیان‌کننده پایستگی موضعی انرژی در هر نقطه است. اگر علامتهای اختصاری زیر را به‌کار ببریم

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (21-16)$$

$$u = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (22-16)$$

که در آن \mathbf{S} به بردار پوینتینگ موسوم است، آنگاه معادله (۱۶-۱۸) ایجاب می‌کند که در هر نقطه معادله زیر برقرار باشد

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (23-16)$$

شکی نیست که $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ کاری است که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می‌دهد. قبلاً ما u را به‌عنوان چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تعبیر کرده بودیم. اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ باشد، در آن صورت معادله (۱۶-۲۳) بقای موضعی انرژی را بیان خواهد کرد. در هر نقطه آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان در واحد حجم. از طرف دیگر، اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$ ولی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ باشد (برای مثال در یک محیط نارسانا)، آنگاه

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (24-16)$$

این معادله از نظر ریاضی دقیقاً همانند معادله پیوستگی بار الکتریکی (۱۶-۷) است، بجز آنکه چگالی انرژی u به جای چگالی بار ρ نشسته است. اگر بنا باشد معادله (۱۶-۲۴) نیز بقای انرژی را توصیف کند، $\nabla \cdot \mathbf{S}$ می‌بایست نمایانگر دیورژانس چگالی جریان انرژی، یا به بیان دیگر، آهنگ جریان انرژی در واحد سطح باشد. معمولاً خود بردار $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ را به‌عنوان جریان موضعی

انرژی در واحد زمان در واحد سطح در نظر می‌گیرند.^۱ ما این تعبیرها را برای u و S به‌کار خواهیم برد، هر چند که می‌دانیم آنچه تعبیرش مستقیماً به معادلات ماکسول برمی‌گردد، مشتق زمانی u و دیورژانس S است. به هر جهت غالباً تنها این کمیتهای اخیر از نظر فیزیکی قابل اندازه‌گیری‌اند. اما، همان‌طور که معادله (۱۶-۲۰) بیان‌کننده پایستگی انرژی به‌صورت انتگرالی است، معادله (۱۶-۲۳) نیز به‌طور موضعی بقای انرژی را بیان می‌کند.

۴-۱۶ معادله موج

یکی از مهم‌ترین پیامدهای معادلات ماکسول، معادلات انتشار موج الکترومغناطیسی در محیط خطی است. معادله موج برای \mathbf{H} را می‌توان با گرفتن تاو از (۱۶-۱۰) به‌دست آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

با قرار دادن $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ با این فرض که g و ϵ ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

فرض می‌کنیم \mathbf{E} تابع خوشرفتاری باشد، و از این رو در اینجا ترتیب مشتق‌گیری زمانی و مکانی را عوض کرده‌ایم. اکنون می‌توانیم معادله (۱۶-۱۱) را به‌کار ببریم و $\nabla \times \mathbf{E}$ را حذف کنیم و بدین ترتیب معادله زیر را به‌دست آوریم

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -gu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (۱۶-۲۵)$$

که در آن رابطه $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ با μ ثابت به‌کار رفته است. حال با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2 \quad (۱۶-۲۶)$$

معادله زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (۱۶-۲۷)$$

چون μ ثابت است

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

^۱ هنوز بحث و جدل در این باره ادامه دارد. برای بحث جالبی در این باره به مقاله زیر رجوع کنید

در نتیجه جمله اول سمت چپ معادله (۲۷-۱۶) صفر می‌شود و معادله نهایی موج به صورت زیر به دست می‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (28-16)$$

بردار \mathbf{E} نیز در همین معادله موج صدق می‌کند، این مطلب را می‌توان به سادگی با گرفتن تاو از معادله (۱۱-۱۶) تحقیق کرد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱۶) برای حذف میدان مغناطیسی و با این فرض که g ، μ و ε ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

با به کار بردن اتحاد برداری (۲۶-۱۶) و محدود کردن کاربرد معادله به فضای تهی از بار آزاد، به طوری که $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ باشد، نتیجه خواهد شد

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (29-16)$$

میدان الکترومغناطیسی در یک محیط خطی و همگن که چگالی بار در آن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، از معادلات موجی که در بالا به دست آمد پیروی می‌کند. با وجود این، تنها کافی نیست که میدان در این معادلات صدق کند، بلکه باید در معادلات ماکسول نیز صادق باشد. واضح است که معادلات (۲۸-۱۶) و (۲۹-۱۶) الزاماً از معادلات ماکسول نتیجه می‌شوند، ولی عکس این مطلب صحیح نیست. در حل معادلات موج، باید مخصوصاً دقت کرد که پاسخی برای معادلات ماکسول به دست آوریم.

۵-۱۶ امواج تکفام

امواج تکفام را می‌توان به صورت امواجی توصیف کرد که در آن تمام میدانها با یک فرکانس منفرد مشخص می‌شوند. در آن صورت می‌توان \mathbf{E} را از حل معادله (۲۹-۱۶) به دست آورد و سپس با استفاده از معادلات ماکسول و معادلات ساختمندی میدانهای دیگر را به دست آورد. واضح است که این روش برقراری معادلات ماکسول را تضمین می‌کند.

برای انجام این کار، روشهای تحلیل متغیرهای مختلط بسیار مناسب‌اند. بستگی زمانی میدان (برای مشخص بودن، بردار \mathbf{E} را در نظر می‌گیریم) به صورت $e^{-i\omega t}$ فرض می‌شود، لذا

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (30-16)$$

باید به خاطر داشت که میدان الکتریکی فیزیکی با گرفتن قسمت حقیقی^۱ معادله (۱۶-۳۰) به دست می آید؛ به علاوه $\mathbf{E}(r)$ در حالت کلی مختلط است، به طوری که میدان الکتریکی واقعی با $\cos(\omega t + \phi)$ که در آن ϕ فاز $\mathbf{E}(r)$ است، متناسب می شود. با استفاده از معادله (۱۶-۳۰) در معادله (۱۶-۲۹) خواهیم داشت

$$e^{-i\omega t} \{ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} + i\omega g \mu \mathbf{E} \} = 0 \quad (31-16)$$

این معادله ای است که تغییرات فضایی میدان الکتریکی باید از آن پیروی کند (البته می توان ضریب مشترک $e^{-i\omega t}$ را حذف کرد). کار بعدی ما، حل معادله (۱۶-۳۱) است برای تعیین تغییرات فضایی میدان الکتریکی در حالات ویژه گوناگون مورد نظر. این کار در فصل بعد انجام خواهد شد؛ در اینجا تنها بعضی از ساده ترین موارد ممکن را بررسی می کنیم.

ابتدا فرض کنید که "محیط" فضای تهی است، به طوری که $g = 0$ ، $\epsilon = \epsilon_0$ و $\mu = \mu_0$. به علاوه، فرض کنید که $\mathbf{E}(r)$ تنها در یک راستا، برای مثال در راستای z ، تغییر می کند، و به x و y بستگی ندارد. در این صورت معادله (۱۶-۳۱) به صورت زیر در می آید

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + (\omega/c)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (32-16)$$

که در آن ما رابطه

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

را که در فصل ۸ به دلایل بعدی مطرح شد، به کار برده ایم؛ c بعد سرعت دارد. این معادله (که به معادله هلمهولتز معروف است) از نظر ریاضی با معادله نوسانگر هماهنگ یکسان است. پاسخهای این معادله عبارت اند از

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\kappa z}$$

که در آن \mathbf{E}_0 بردار ثابتی است و

$$\kappa = \omega/c \quad (33-16)$$

با قرار دادن این پاسخ برای $\mathbf{E}(r)$ در معادله (۱۶-۳۰) پاسخ کامل را به دست می آوریم

۱. همان طور که در فصل سیزدهم بحث شد، می توان از یک توصیف ریاضی که به طور مناسب بر حسب متغیرهای مختلط بیان می شود، با انتخاب قسمت حقیقی یا قسمت موهومی کمیت مختلط، به کمیت های فیزیکی رسید. انتخاب قسمت حقیقی یا موهومی، کاملاً دلخواه است. این دو انتخاب فقط به اندازه $\pi/2$ با یکدیگر اختلاف فاز دارند، ولی در یک مسئله داده شده، همواره باید یکی از آنها را انتخاب کرد. در این فصل و در فصل های بعد، قسمت حقیقی کمیت های مختلط نماینده کمیت های فیزیکی است، مگر اینکه صریحاً به نحو دیگری ذکر شود.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp \kappa z)} \quad (۳۴-۱۶)$$

که با گرفتن قسمت حقیقی آن داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \pm \kappa z) \quad (۱۶-۳۵ الف)$$

با استفاده از معادله (۱۶-۳۳)، صورت دیگری برای معادله بالا عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \pm z/c) \quad (۱۶-۳۵ ب)$$

این معادله نمایانگر یک موج سینوسی است که در راستای z به سمت راست یا به سمت چپ (بسته به آنکه کدام یک از دو علامت مثبت یا منفی به کار گرفته شوند) حرکت می‌کند. سرعت انتشار موج c است. اگر نور صورتی از تابش الکترومغناطیسی باشد، آنگاه معادلات ماکسول پیش‌بینی می‌کنند که سرعت نور در خلأ برابر است با ۲.۹۹۷۹×۱۰^8 m/s. $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ هر چند که ما انتظار چنین نتیجه‌ای را داشتیم، ولی هنگامی که ماکسول برای اولین بار نتیجه را اعلان کرد پیروزی بزرگی برای نظریه‌اش به شمار می‌رفت، زیرا تا آن زمان ماهیت الکترومغناطیسی نور چیزی بیش از یک تصور ذهنی تلقی نمی‌شد. معادله (۱۶-۳۵ الف) نشان می‌دهد که فرکانس موج $f = \omega/2\pi$ و طول موج آن $\lambda = 2\pi/\kappa$ است. بدین ترتیب معادله (۱۶-۳۳) نتیجه آشنایی است در مورد موج، یعنی

$$\lambda f = c$$

در یک محیط دی‌الکتریک نارسانای غیرمغناطیسی، باز هم $g = 0$ و $\mu = \mu_0$ ، ولی $\epsilon = K\epsilon_0$ است. در این حالت اثباتی را که در بالا دنبال کردیم دقیقاً به همان شکل خواهد بود، بجز آنکه اکنون معادله (۱۶-۳۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\kappa = \sqrt{K}\omega/c \quad (۱۶-۳۳ الف)$$

اگر n را به صورت $n = \sqrt{K}$ تعریف کنیم، می‌بینیم که نتایج با حالت مربوط به خلأ یکسان‌اند، بجز آنکه اکنون سرعت انتشار موج به جای c برابر است با c/n . کمیّت n ضریب شکست محیط دی‌الکتریک نامیده می‌شود؛ برای خلأ $n = 1$ است. همان‌طور که در فصل ۱۸ خواهیم دید، این مطلب اثرهای شکست در مواد شفاف را توجیه می‌کند.

۱. اگر نفوذپذیری مغناطیسی نسبی به جای ۱ برابر K_m باشد، معادله (۱۶-۳۳ الف) تبدیل می‌شود به $n = \sqrt{KK_m}$ و $\kappa = \sqrt{KK_m}\omega/c$. برای بسیاری از مقاصد تنها کافی است مورد $K_m = 1$ در نظر گرفته شود و ما در بقیه کتاب همین کار را خواهیم کرد.

اگر محیط رسانا باشد، $g > 0$ ، جمله سوم در معادله (۳۱-۱۶) را باید نگه داریم. هنگامی که g کوچک است، همان طور که در فصل بعد خواهیم دید، نتیجه صرفاً آن خواهد بود که موج میرا می شود. منظور از کوچک بودن g آن است که جمله سوم معادله (۳۱-۱۶) در مقایسه با جمله دوم آن، که به پاسخ موجی منجر شد، کوچک باشد، به عبارت دیگر

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \epsilon \mu, \quad g \ll \omega \epsilon$$

در حد فرین دیگر هنگامی که $g \gg \omega \epsilon$ باشد می توانیم از جمله دوم معادله (۳۱-۱۶) چشمپوشی کنیم. مجدداً چنانچه توجه خود را به مورد یک بعدی محدود کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + i\omega g \mu \mathbf{E} = 0$$

چنانچه فرض کنیم $\alpha = i\omega$ حقیقی باشد یا، به بیان دیگر، اگر فرض کنیم فرکانس موهومی باشد، ضریب \mathbf{E} در جمله دوم حقیقی خواهد بود. در آن صورت، اگر

$$\kappa = \sqrt{\alpha g \mu}$$

بستگی فضایی پاسخ، $\mathbf{E}(\Gamma)$ ، درست به همان شکل قبل است. ولی اختلاف در آن است که بستگی زمانی (۳۰-۱۶) به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-\alpha t}$$

یعنی، میدان نسبت به زمان به جای آنکه به طریقی موج گونه نوسان کند، به طور نمایش کاهش می یابد. گذار بین رفتار موجی و رفتار کاهش یابنده هنگامی رخ می دهد که

$$|\omega| = |\alpha| \cong \left| \frac{g}{\epsilon} \right| = 1/t_c$$

که در اینجا t_c همان زمان واهلش ماده است که در فصل ۷ بحث شد. (مجدداً یادآور می شویم که برای کاربست این شرط در مورد فلزات باید دقت شود، زیرا g/ϵ خود قویاً به ω بستگی دارد.) در پایان متذکر می شویم که اگر به عقب برگردیم و نحوه به دست آوردن معادله (۳۱-۱۶) را از معادلات ماکسول بررسی کنیم متوجه می شویم که جمله دوم، یعنی $\partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2$ در معادله (۲۹-۱۶)، از جریان جابه جایی $\partial \mathbf{D}/\partial t$ در معادله (۱۰-۱۶) ناشی می شود، در صورتی که جمله سوم، یعنی $\partial \mathbf{E}/\partial t$ در معادله (۲۹-۱۶)، از جریان انتقالی \mathbf{J} در معادله (۱۰-۱۶) ناشی می شود. بنابراین وجود انتشار موج الکترومغناطیسی به جریان جابه جایی که توسط ماکسول وارد نظریه شده است، بستگی دارد. بدون آن، تنها کاهش نمایی میدانها می توانست به وقوع بپیوندد.

۱۶-۶ شرایط مرزی

شرایط مرزی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط باید در آنها صدق کنند، درست مانند حالت ساکن، از معادلات ماکسول استنتاج می‌شوند. عمومی‌ترین و سراسرترین شرط مرزی در مورد میدان مغناطیسی \mathbf{B} است که در معادله ماکسول زیر صدق می‌کند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳۶-۱۶)$$

در هر فصل مشترکی بین دو محیط می‌توان یک سطح بسته به شکل قرص مثل شکل ۱۶-۲ در نظر گرفت. می‌توان قضیه دیورژانس را برای دیورژانس \mathbf{B} در حجمی که این سطح در برگرفته است به کار برد و معادله زیر را به دست آورد

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 da + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 da + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3 da = 0 \quad (۳۷-۱۶)$$

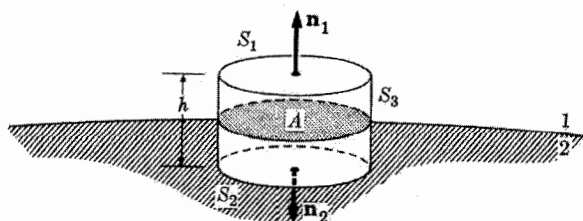
اگر \mathbf{B} تابعی متناهی باشد، با به سمت صفر میل دادن h ، جمله آخر صفر می‌شود و S_1 از نظر هندسی به S_2 نزدیک می‌شود. با در نظر گرفتن اینکه جهت‌های \mathbf{n}_2 و \mathbf{n}_1 مخالف یکدیگرند، مستقیماً به نتیجه زیر می‌رسیم

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (۳۸-۱۶)$$

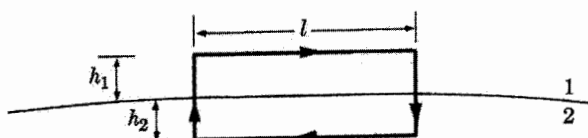
که دقیقاً مشابه حالت ساکن است.

مؤلفه مماسی میدان الکتریکی را نیز می‌توان به طریق ساده‌ای بررسی کرد. باز هم معادله اصلی یکی از معادلات ماکسول است

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (۳۹-۱۶)$$



شکل ۱۶-۲ برای به دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان می‌توان از یک سطح قرصی مثل شکل در فصل مشترک بین دو محیط استفاده کرد.



شکل ۱۶-۳ می‌توان از مسیر مستطیل‌شکلی که در فصل مشترک دو محیط نشان داده شده است، برای به‌دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان استفاده کرد.

با انتگرال‌گیری از این معادله روی سطحی که مرز آن مانند شکل ۱۶-۳ یک مسیر مستطیل‌شکل است، خواهیم داشت

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۴۰-۱۶)$$

و با به‌کار بردن قضیه استوکس در طرف چپ معادله نتیجه خواهد شد

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۴۱-۱۶)$$

اکنون اگر با به سمت صفر میل دادن h_1 و h_2 ، سطح را کوچک کنیم، چهار جمله آخر طرف چپ، و همچنین طرف راست تنها به شرط آنکه $\partial \mathbf{B} / \partial t$ متناهی باشد، صفر می‌شوند. در معادله حاصل l یک ضریب مشترک است و با حذف آن نتیجه خواهد شد

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (۴۲-۱۶)$$

بنابراین مؤلفه مماسی \mathbf{E} باید در فصل مشترک دو محیط پیوسته باشد.

شرط مرزی برای مؤلفه عمودی جابه‌جایی الکتریکی پیچیده‌تر است؛ با وجود این، این شرط نیز از یکی از معادلات ماکسول به‌دست می‌آید. در این مورد معادله مناسب به‌صورت زیر است

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۴۳-۱۶)$$

اگر مطابق شکل ۱۶-۲ یک حجم قرصی شکل بنا کنیم و از (۴۳-۱۶) در این حجم انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

با به‌کار بردن قضیه دیورژانس و به سمت صفر میل دادن h ، خواهیم داشت

$$(D_{1n} - D_{2n}) = \sigma \quad (۴۴-۱۶)$$

که در آن σ چگالی بار سطحی در فصل مشترک است. این واقعیت که، در حالت کلی، σ صفر نیست باعث ایجاد پیچیدگیهایی در این شرط مرزی می‌شود؛ با وجود این، با توجه به اینکه بار الکتریکی باید بقا داشته باشد، به عبارت دیگر

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۴۵-۱۶)$$

ساده کردن این شرط امکان‌پذیر است. اگر مانند معادله (۴۳-۱۶) از معادله بالا نیز انتگرال بگیریم و حجم قرصی شکل را به همان طریق قبل کوچک کنیم، خواهیم داشت

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (۴۶-۱۶)$$

اگر تنها تابش تکفام را در نظر بگیریم، چگالی بار سطحی باید به صورت $e^{-i\omega t}$ تغییر کند؛ بنابراین می‌توانیم طرف راست معادله (۴۶-۱۶) را به صورت $i\omega\sigma$ بنویسیم. با به‌کار بردن روابط ساختمندی $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ معادله‌های (۴۴-۱۶) و (۴۶-۱۶) به صورت زیر در می‌آیند

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (۴۷-۱۶)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega\sigma \quad (۴۸-۱۶)$$

چند مورد جالب عملی را می‌توان مورد توجه قرار داد. اگر σ مساوی صفر باشد، آنگاه

$$\frac{\varepsilon_1}{g_1} = \frac{\varepsilon_2}{g_2}$$

که این رابطه می‌تواند یا برای موادی که به‌طور مناسب انتخاب شده‌اند و یا چنانچه g_1 و g_2 هر دو صفر یا بی‌نهایت باشند، صادق باشد. موردی که در آن رسانندگیها هر دو بی‌نهایت هستند، زیاد جالب نیست؛ ولی موردی که در آن رسانندگیها هر دو صفر می‌شوند تقریباً در مرز بین دو دی‌الکتریک خوب به‌وجود می‌آید. اگر σ صفر نباشد، که شاید بیشتر هم این‌طور باشد، در این صورت می‌توان آن را از معادلات (۴۷-۱۶) و (۴۸-۱۶) حذف کرد. نتیجه این عمل حذف به صورت زیر است

$$\left(\varepsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right) E_{1n} - \left(\varepsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right) E_{2n} = 0 \quad (۴۹-۱۶)$$

آخرین مورد جالبی که اتفاق می‌افتد، هنگامی است که یکی از رسانندگیها، مثلاً g_2 بی‌نهایت است. در این مورد E_{2n} باید صفر و E_{1n} باید مساوی σ/ε_1 شود تا معادلات (۴۸-۱۶) و (۴۷-۱۶) صادق باشند.

آخرین شرط مرزی آن است که روی مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی \mathbf{H} اعمال می‌شود. این شرط مرزی با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (50-16)$$

روی سطح محدود به مسیری مانند آنچه در شکل ۱۶-۳ نشان داده شده است، به دست می‌آید. اگر پس از انتگرال‌گیری مثل مورد قبل سطح را کوچک کنیم، شرط مرزی حاصل به صورت زیر در خواهد آمد

$$H_{1t} - H_{2t} = j_{\perp} \quad (51-16)$$

که در آن j_{\perp} آن مؤلفه از چگالی جریان سطحی است که بر امتداد آن مؤلفه از \mathbf{H} که در معادله ظاهر می‌شود، عمود است. مفهوم چگالی جریان سطحی خیلی شبیه به مفهوم چگالی بار سطحی است. چگالی جریان سطحی نشان‌دهندهٔ یک جریان متناهی در یک لایه سطحی بی‌نهایت نازک است. بجز در موردی که رسانندگی بی‌نهایت باشد، چگالی جریان سطحی صفر است؛ بنابراین برای رسانندگی غیر بی‌نهایت داریم

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (52-16)$$

یعنی، مؤلفهٔ مماسی \mathbf{H} پیوسته است، مگر آنکه رسانندگی یکی از دو محیط بی‌نهایت باشد. اگر رسانندگی محیط ۲ بی‌نهایت باشد، در آن صورت همان‌طور که قبلاً نشان دادیم، $E_{2n} = 0$ می‌توان با در نظر گرفتن معادلهٔ ماکسول (۵۰-۱۶) در محیط ۲، نتیجه کلی‌تری به دست آورد

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} = \mathbf{J}_2 \quad (53-16)$$

با به کار بردن روابط ساختمندی و با فرض اینکه \mathbf{E}_2 به صورت $e^{-i\omega t}$ نسبت به زمان تغییر می‌کند، نتیجه خواهد شد

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{g_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2 \quad (54-16)$$

اگر این فرض قابل قبول را بکنیم که \mathbf{H}_2 هم متناهی و هم مشتق‌پذیر است، در این صورت معادلهٔ (۵۴-۱۶) ایجاب می‌کند که \mathbf{E}_2 در محیطی با رسانندگی بی‌نهایت، صفر باشد. با همان فرضیهایی که قبلاً کردیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (55-16)$$

و صفر شدن \mathbf{E}_2 ایجاب می‌کند که \mathbf{H}_2 نیز صفر شود. اگر \mathbf{H}_2 صفر شود، در این صورت شرط

جدول ۱-۱۶ شرایط مرزی

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$	$H_{2t} = 0$	$B_{2n} = 0$
	$E_{1t} = 0$	$D_{1n} = \sigma$	$H_{1t} = j_{\perp}$	$B_{1n} = 0$
$g_1, g_2 \neq \infty$ اختیاری	$E_{1t} = E_{2t}$	$(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}) E_{1n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
		$= (\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}) E_{2n}$		

مرزی روی مؤلفه مماسی H در فصل مشترک دو محیط که رسانندگی یکی از آنها بی نهایت است، عبارت خواهد بود از

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (۱۶-۵۶)$$

اکنون شرایط مرزی به دست آمده اند؛ برای سهولت، این شرایط مرزی در جدول ۱-۱۶ به ازای $g = \infty, g = 0$ و g اختیاری آمده است.

۷-۱۶ معادله موج با چشمه‌ها

در بخشهای قبل نشان داده شد که معادلات ماکسول انتشار امواج الکترومغناطیسی را در یک محیط خطی پیش‌بینی می‌کنند و همچنین نشان دادیم که انطباق میدانها در فصل مشترک بین دو محیط متفاوت می‌بایست بر طبق شرایط مرزی مناسب انجام شود. فرض کردیم که چگالی بار در محیط صفر است و تنها چگالی جریان موجود حاصل از پاسخ غیرفعال محیط اهمی به میدان الکتریکی موج است. ما درباره آنکه این امواج چگونه تولید می‌شوند پرس‌وجو نکردیم، ولی اکنون در خواهیم یافت که این امواج میدانهای تولیدشده توسط بارهای چشمه‌هایی در فواصل دورند که تحت حرکت شتابدار قرار دارند.

حال می‌خواهیم مسئله توزیع بار $\rho(\mathbf{r}, t)$ و توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ مشخص را بررسی کنیم و میدانهایی را که این توزیعها ایجاد می‌کنند، به دست آوریم. چندین روش برای حل این مسئله وجود دارد که بهترین آنها روش پتانسیل است که شبیه به روشهایی است که در الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک به کار بردیم. چون دیورژانس میدان مغناطیسی صفر است، همواره آن را به صورت تاو یک پتانسیل برداری می‌توان نوشت، به عبارت دیگر

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۱۶-۵۷)$$

اگر از این معادله برای \mathbf{B} در معادله (۱۶-۱۱) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (58-16)$$

چنانچه فرض کنیم توابع بردارهای میدان به حد کافی پیوسته هستند، می‌توانیم ترتیب مشتق‌های زمانی و مکانی را عوض کنیم و بنویسیم

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (59-16)$$

بنابراین تاو بردار $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ صفر است و می‌توان این بردار را به صورت گرادیان یک کمیت زده‌ای نوشت

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (60-16)$$

معادلات (۱۶-۵۷) و (۱۶-۶۰) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب یک پتانسیل برداری \mathbf{A} و یک پتانسیل زده‌ای φ به دست می‌دهند. این پتانسیلها در معادلات موجی صدق می‌کنند که بسیار به معادلات موج بردارهای میدان شبیه‌اند. معادله موج برای \mathbf{A} را با قرار دادن عبارات داده شده در معادله‌های (۱۶-۵۷) و (۱۶-۶۰) برای \mathbf{B} و \mathbf{E} در معادله (۱۶-۱۰) می‌توان به دست آورد، نتیجه این عمل به صورت زیر است

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{J} \quad (61-16)$$

چنانچه در این معادله $\nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ را به جای $\nabla \times \nabla \times$ قرار دهیم و آن را در μ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \mathbf{J} \quad (62-16)$$

تاکنون فقط تاو \mathbf{A} را مشخص کرده‌ایم ولی هنوز انتخاب دیورژانس \mathbf{A} دلخواه است. از معادله (۱۶-۶۲) واضح است که چنانچه شرط زیر را که شرط لورنتس (یا پیمانه لورنتس، به صفحه ۴۹۹ نگاه کنید) نامیده می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (63-16)$$

به کار ببریم، نتیجه به طور قابل ملاحظه‌ای ساده خواهد شد. اگر شرط لورنتس صادق باشد، \mathbf{A} در معادله موج زیر صدق خواهد کرد

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (64-16)$$

به علاوه با استفاده از معادله (۱۶-۶) و (۱۶-۱۲) خواهیم داشت

$$-\varepsilon \left[\nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho \quad (۱۶-۶۵)$$

با عوض کردن ترتیب عمل دیورژانس و مشتق‌گیری زمانی روی \mathbf{A} و به‌کار بردن شرط لورنتس (معادله ۱۶-۶۳) خواهیم داشت

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho \quad (۱۶-۶۶)$$

بدین ترتیب با استفاده از شرط لورنتس، پتانسیلهای برداری و نرده‌ای هر دو مجبورند در معادلات موج غیرهمگن مشابهی صدق کنند.

مسئله پیدا کردن پاسخ عمومی معادله موج نرده‌ای غیرهمگن شبیه به پیدا کردن پاسخ عمومی معادله پواسون است. در مورد معادله پواسون، به خاطر می‌آوریم که پاسخ عمومی شامل یک پاسخ خصوصی معادله غیرهمگن به اضافه یک پاسخ عمومی معادله همگن است. منظور کردن پاسخ عمومی معادله همگن بدان جهت است که شرایط مرزی مناسب دلخواه را بتوان برآورده کرد، در صورتی که پاسخ خصوصی ما را مطمئن می‌کند که تابع کل در معادله غیرهمگن صدق می‌کند. در واقع ملاحظاتی کاملاً مشابه با ملاحظات بالا (یعنی، پاسخ عمومی شامل یک پاسخ خصوصی است به اضافه یک پاسخ عمومی معادله همگن) در مورد معادله غیرهمگن موج نیز صادق است. در فصل ۱۷ روشهایی برای به‌دست آوردن پاسخهای معادله همگن بررسی خواهد شد. می‌توان با توسعه و تکمیل این روشها تقریباً پاسخهای کلیه مسائل قابل حل را به‌دست آورد. مسائلی را که برحسب توابع معلوم حل نمی‌شوند، با روشهای تقریبی می‌توان حل کرد. در این صورت باقی می‌ماند که پاسخ خصوصی لازم را برای معادله غیرهمگن پیدا کنیم. در حالت ساکن، یعنی $\partial \varphi / \partial t = 0$ معادله موج نرده‌ای غیرهمگن (۱۶-۶۶) به معادله پواسون تبدیل می‌شود. یک پاسخ خصوصی معادله پواسون را از معادله (۱-۳) (برای Δ) می‌دانیم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۱۶-۶۷)$$

معادله موج برداری (۱۶-۶۴) نیز در حالت ساکن (در Δ) پاسخ مشابهی دارد که در معادله (۸-۶۱) داده شده است. متأسفانه، به دلایلی که خواهیم دید، تنها با گذاشتن $\rho(\mathbf{r}', t)$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ در پاسخهای حالت ساکن پاسخهای وابسته به زمان را به‌دست نمی‌آوریم.

حال معادله (۱۶-۶۶) را برای Δ با استفاده از $c/n = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ و ضریب شکست $n = 1$

به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۶۸-۱۶)$$

این معادله را می‌توان به طریق بسیار ساده‌ای حل کرد، بدین ترتیب که ابتدا پاسخی برای یک بار نقطه‌ای به دست می‌آوریم و سپس تمام اجزای بارهای $\rho \Delta v$ را در توزیع بار مربوط با یکدیگر جمع می‌کنیم. مناسب‌ترین محل برای قرار دادن بار نقطه‌ای مبدأ مختصات است. بنابراین، معادله زیر

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (۶۹-۱۶)$$

باید در تمام نقاط بجز در مبدأ صادق باشد، در صورتی که در حجم کوچک Δv که مبدأ را احاطه می‌کند، معادله زیر باید صادق باشد

$$\int_{\Delta v} dv \left[\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} q(t) \quad (۷۰-۱۶)$$

فرض می‌شود که تابع $q(t)$ ، تنها به صورت یک وسیله ریاضی برای حل معادله، نمایانگر یک بار نقطه‌ای به بزرگی q است که در زمان t در مبدأ مختصات قرار دارد، بدون هیچ فرضی در این باره که یک بار واقعی بقادر در زمان قبل از آن یا بعد از آن در کجا بوده یا خواهد بود. (این تابع نمایانگر بار نقطه‌ای متحرک فیزیکی نیست، و پاسخ حاصل برای φ پتانسیل صحیح برای بار نقطه‌ای متحرک نخواهد بود. پتانسیل بار نقطه‌ای متحرک پیچیده‌تر از این است و در فصل ۲۱ بررسی خواهد شد.) از روی تقارن توزیع بار واضح است که φ باید از لحاظ فضایی فقط به r بستگی داشته باشد. با استفاده از این مطلب می‌توانیم معادله (۶۹-۱۶) را حل کنیم. چون φ به زاویه سمتی و زاویه قطبی بستگی ندارد، معادله (۶۹-۱۶) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (۷۱-۱۶)$$

حال با قرار دادن

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (۷۲-۱۶)$$

معادله (۷۱-۱۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (۷۳-۱۶)$$

این معادله، معادله موج یک‌بعدی است که هر تابعی از $r - ct$ یا $r + ct$ در آن صدق می‌کند. برای تحقیق این مطلب می‌نویسیم

$$u = r - ct$$

و فرض می‌کنیم $f(u)$ تابعی از u است که بتوان دوبار از آن مشتق گرفت؛ آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{d^2 f}{du^2} \quad (۷۴-۱۶)$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \quad (۷۵-۱۶)$$

با قرار دادن نتایج معادلات (۷۴-۱۶) و (۷۵-۱۶) در معادله (۷۳-۱۶) نتیجه می‌شود که هر تابعی از $(r - ct)$ که دوبار مشتق‌پذیر باشد، پاسخ معادله (۷۳-۱۶) است. با محاسباتی نظیر محاسبات بالا می‌توان نتیجه گرفت که تابعی از $(r + ct)$ نیز یک پاسخ است. بنابراین

$$\chi = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (۷۶-۱۶)$$

یک پاسخ کاملاً دلخواه برای معادله (۷۳-۱۶) است. خواهیم دید که در کاربردهای ما برای معادله موج، $g(r + ct)$ ظاهر نمی‌شود. بدین علت این پاسخ را کنار می‌گذاریم، و فقط جمله اول معادله (۷۶-۱۶) را در نظر می‌گیریم، لذا این کار معادلات بعدی را ساده می‌کند و سبب از دست دادن چیز خاصی نمی‌شود. توجه کنید که $f(r - ct)$ نمایشگر موجی است که از بار چشمه واقع در مبدأ به سمت خارج منتشر می‌شود، در حالی که $g(r + ct)$ نمایشگر موجی است که از بی‌نهایت به طرف داخل به سمت بار چشمه منتشر می‌شود. ما تابع اولی را نگه می‌داریم و تابع دوم را رها می‌کنیم، درست به همان دلیل که اگر در سمت راست یک چشمه می‌بودیم پاسخ موج تختی را که به سمت راست منتشر می‌شود نگه می‌داشتیم و پاسخی را که به سمت چپ منتشر می‌شود رها می‌کردیم.

اکنون پاسخی برای معادله (۶۹-۱۶) با تقارن کروی در دست است

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (۷۷-۱۶)$$

به‌علاوه، این پاسخ شامل یک تابع اختیاری است که می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که معادله (۷۰-۱۶) نیز صادق باشد. انتخاب مناسب را می‌توان بدین ترتیب به‌دست آورد که توجه کنیم

پتانسیل یک بار در حال سکون که با معادلات (۱۶-۶۹) و (۱۶-۷۰) سازگار باشد، عبارت است از

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۷۸-۱۶)$$

توابع (۱۶-۷۷) و (۱۶-۷۸) را می‌توان با انتخاب رابطه زیر، همساز کرد

$$f(r-ct) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (۷۹-۱۶)$$

بنابراین پاسخ معادلات (۱۶-۶۹) و (۱۶-۷۰) به صورت زیر خواهد بود

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۸۰-۱۶)$$

با این نتیجه به سادگی می‌توان دید که پاسخ زیر

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۸۱-۱۶)$$

در معادله (۱۶-۶۶) صدق می‌کند، که در آن $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ زمان تأخیری نامیده می‌شود و φ به پتانسیل زده‌ای تأخیری معروف است.

معادله (۱۶-۶۴) را نیز می‌توان به طریق کاملاً مشابهی حل کرد. ابتدا بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{J} را برحسب مؤلفه‌هایشان در مختصات قائم می‌نویسیم. سه معادله حاصل خیلی شبیه به معادله (۱۶-۶۶) خواهند بود، مثلاً معادله مربوط به مؤلفه x ، به صورت زیر است

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x \quad (۸۲-۱۶)$$

هر یک از این معادلات را می‌توان درست مثل معادله (۱۶-۶۶) حل کرد، مثلاً پاسخ مؤلفه x به صورت زیر است

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۸۳-۱۶)$$

با ترکیب سه مؤلفه خواهیم داشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۸۴-۱۶)$$

که به پتانسیل برداری تأخیری معروف است.

تعبیر فیزیکی پتانسیلهای تأخیری جالب است. معادلات (۱۶-۸۱) و (۱۶-۸۴) نشان می‌دهند که در یک نقطه مشخص \mathbf{r} در یک زمان معین t ، پتانسیلها را بارها و جریانهایی که در زمانهای پیشتر t' در سایر نقاط فضا \mathbf{r}' وجود داشته‌اند، تعیین می‌کنند. زمان مناسب متناظر با هر یک از نقاط چشمه به اندازه مدت لازم برای رفتن از نقطه چشمه به نقطه میدان \mathbf{r} با سرعت c ، از زمان t پیشتر است. مثلاً اگر یک جزء بار که در مبدأ مختصات قرار دارد ناگهان تغییر کند، تأثیر این تغییر در نقطه‌ای به فاصله r تا مدتی (به اندازه r/c) بعد از انجام تغییر، احساس نخواهد شد. تأثیر این تغییر تقریباً به صورت یک سطح موج کروی به طرف خارج منتشر می‌شود (برای یک بار نقطه‌ای در واقع وضع پیچیده‌تر از این است، زیرا چگالی بار و چگالی جریان از طریق معادله $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$ به هم مربوط‌اند، به فصل ۲۱ رجوع کنید).

با پیدا کردن پتانسیلهای نرده‌ای و برداری، میدانها را با گرفتن گرادیان φ و مشتق زمانی و تاو \mathbf{A} به دست می‌آوریم. انجام این اعمال در اصول راحت است؛ ولی خواهیم دید که در عمل نسبتاً پیچیده است.

در روش بالا اعمال شرط لورنتس (۱۶-۶۳) بر روی پتانسیلها گامی اساسی بود؛ در غیر این صورت پتانسیلها مجبور نبودند در معادلات موج ساده صدق کنند. برای آنکه ببینیم که ما همواره در اعمال این شرط آزادی داریم، فرض کنید که \mathbf{A} و φ انتخاب خاصی برای توزیع توابع پتانسیل‌اند که میدانهای صحیح \mathbf{E} و \mathbf{B} را بر طبق معادلات (۱۶-۵۷) و (۱۶-۶۰) به دست می‌دهند. در این صورت، چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \xi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (۱۶-۸۵)$$

این پتانسیلها نیز هنگامی که در معادلات (۱۶-۵۷) و (۱۶-۶۰) قرار داده شوند، بدون توجه به آنکه تابع ξ چه نوع تابعی است (این تابع کاملاً اختیاری است)، دقیقاً همان میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را به دست خواهند داد. این تغییر در پتانسیلهای جدیدی که از نظر فیزیکی معادل‌اند، تبدیل پیمانه‌ای نامیده می‌شود. حال با قرار دادن \mathbf{A}' و φ' در معادله (۱۶-۶۳) برای آنکه \mathbf{A}' و φ' در شرط لورنتس صدق کنند، پس از مرتب کردن جملات، معادله موج نرده‌ای زیر برای ξ به دست می‌آید

$$\nabla^2 \xi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

بنابراین، چنانچه پتانسیلهای اصلی در شرط لورنتس صدق کنند، پتانسیلهای جدید نیز صدق خواهند کرد، مشروط بر آنکه ξ در معادله موج نرده‌ای همگن صدق کند. اگر \mathbf{A} و φ اصلی

در شرط لورنتس صدق نکنند، باز هم می‌توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن صورت ϵ باید به صورت پاسخ معادله موج نرده‌ای غیرهمگن انتخاب شود که عبارت زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

چشمه معادله غیرهمگن است. در همین بخش دیده‌ایم که چگونه می‌توان پاسخ چنین معادله‌ای را پیدا کرد. انتخاب پتانسیلها به‌گونه‌ای که در شرط لورنتس صدق کنند، پیمانه لورنتس نامیده می‌شود. در وضعتهای دیگر سایر انتخابها برای پیمانه (یعنی، سایر انتخابها برای $\nabla \cdot \mathbf{A}$) سودمندند.

با در دست داشتن پتانسیلهای تأخیری کار اساسی درباره تابش کامل شده است. باقی می‌ماند که این مطالب را برای حل مسائل عملی به‌کار ببریم. این کار را در پنج فصل بعد خواهیم کرد.

۱۶-۸ خلاصه مطالب

این فصل حاوی مبانی نظریه الکترومغناطیس کلاسیک است. معادلات ماکسول معادلات دیفرانسیلی هستند که (همراه با شرایط مرزی برای هر وضعیت خاص) میدانهای تولیدشده به‌وسیله چشمه‌های بار و جریان را تعیین می‌کنند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned}$$

میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} از نظر عملیاتی با نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

تعریف می‌شوند، و میدانهای \mathbf{D} و \mathbf{H} از طریق معادلات ساختندی محیط، $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$ ، به آن میدانها مربوط می‌شوند.

معادلات ماکسول پیامدهای مهم زیر را در بردارند:

• بار الکتریکی پایسته است و پایستگی آن بر طبق معادله پیوستگی است

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

• انرژی پایسته است، بر طبق

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

که در آن چگالی انرژی میدان، u ، عبارت است از (در محیط خطی)

$$u = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

و \mathbf{S} شار انرژی در واحد سطح بردار پوئینتینگ است

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- امواج الکترومغناطیسی با سرعت نور، $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ، در خلأ منتشر می‌شوند.
- در فصل مشترک بین دو محیط متفاوت شرایط مرزی روی میدانها اعمال می‌شود، مهم‌ترین این شرایط عبارت‌اند پیوستگی مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} .
- میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را می‌توان از توابع پتانسیل به دست آورد

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

• چنانچه شرط لورنتس

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

اعمال شود، پتانسیلها در معادلات موج غیرهمگن زیر صدق می‌کنند

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

این پتانسیلها امواج الکترومغناطیسی ناشی از توزیع بار و توزیع جریان از پیش مشخص شده را تعیین می‌کنند. پاسخهای خاص این معادلات (در خلأ) عبارت‌اند از

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

که در آن

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

زمان تأخیری نامیده می‌شود. این پتانسیلها، پتانسیلهای تأخیری نامیده می‌شوند.

مسائل

۱-۱۶ ناحیه بین صفحات دایروی متوازی یک خازن از دی‌الکتریک با گذردهی ε پر شده است. دی‌الکتریک ناکامل است و رسانندگی آن g است. ظرفیت این خازن C است. این خازن را با اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ باردار و سپس آن را از این اختلاف پتانسیل قطع می‌کنیم. (الف) بار روی خازن را بر حسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) جریان جابه‌جایی در دی‌الکتریک را پیدا کنید. (ج) میدان مغناطیسی در دی‌الکتریک را به دست آورید.

۲-۱۶ برای یک محیط دی‌الکتریک، Q به صورت نسبت چگالی جریان جابه‌جایی به چگالی جریان رسانایی تعریف می‌شود. برای انتشار موج تکفام، این کمیت به $Q = \omega\varepsilon/g$ تبدیل می‌شود. برای کوارتز و گوگرد Q را در فرکانسهای 10^9 ، 10^6 ، 10^3 Hz به دست آورید.

۳-۱۶ دو صفحه مسطح دایره‌ای به شعاع a که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، یک خازن ایده‌آل تشکیل می‌دهند: فرض کنید که دی‌الکتریک خازن عایقی کامل و میدان \mathbf{D} یکنواخت است (یعنی از میدان حاشیه‌ای در لبه صفحات چشمپوشی کنید). خازن با جریان ثابت I در حال باردار شدن است. (الف) میدان H را در نقطه P روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریک پیدا کنید. (ب) اندازه و جهت بردار پوئین‌تینگ \mathbf{S} را در نقطه P پیدا کنید. (ج) از $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریک انتگرال بگیرید، و نشان دهید که نتیجه برابر است با آهنگ زمانی تغییر انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در خازن.

۴-۱۶ یک سیم مستقیم فلزی با رسانندگی g و سطح مقطع A حامل جریان پایای I است. اندازه و جهت بردار پوئین‌تینگ را در روی سطح این سیم به دست آورید. از مؤلفه عمودی بردار پوئین‌تینگ در روی سطح قسمتی از سیم به طول L انتگرال بگیرید و نتیجه را با گرمای ژولی که در این قسمت تولید می‌شود، مقایسه کنید.

۵-۱۶ فرض کنید که در ناحیه‌ای از فضا یک میدان الکتروستاتیکی و همچنین یک میدان مغناطوستاتیکی وجود دارد. نشان دهید که هر چند ممکن است بردار پوئین‌تینگ غیر صفر باشد، ولی انتگرال سطحی $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ بر روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر می‌شود.

۶-۱۶ معادله موج یک‌بعدی زیر داده شده است

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

که در آن E اندازه بردار میدان الکتریکی است. فرض کنید E در امتداد یک جهت ثابت، مثل جهت y باشد. با تغییر متغیرهای زیر

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon\mu}z, \quad \eta = t - \sqrt{\varepsilon\mu}z$$

نشان دهید که معادله موج به صورت ساده‌ای در می‌آید که می‌توان به سادگی از آن انتگرال گرفت. از معادله موج انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر حاصل شود

$$E(z, t) = E_1(\xi) + E_2(\eta)$$

که در آن E_1 و E_2 توابع دلخواهی هستند.

۷-۱۶ موج الکترومغناطیسی زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \cos \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + \mathbf{j}E_0 \sin \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$$

که در آن E_0 مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی و بردار پوینتینگ آن را پیدا کنید. * ۸-۱۶ با شروع از عبارتی برای نیروی وارد بر واحد حجم در ناحیه‌ای از خلأ که حاوی بارها و

جریانهایی است

$$\mathbf{F}_v = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

و با استفاده از معادلات ماکسول و اتحاد برداری معادله (۱۴-۲۴)، نشان دهید

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v = & -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4} \epsilon_0 \nabla (E^2) + \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ & + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (B^2) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

(کمیت $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ گاهی چگالی اندازه حرکت میدان الکترومغناطیسی نامیده می‌شود.)

۹-۱۶ یک موج تخت با E_x و B_y مشخص شده است و در جهت مثبت z انتشار می‌یابد

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct)$$

(الف) نشان دهید که می‌توان پتانسیل نرده‌ای φ را مساوی صفر گرفت. (ب) یک پتانسیل برداری \mathbf{A} پیدا کنید که برای آن شرط لورنتس صادق باشد.

۱۰-۱۶ نشان دهید در خلأ با $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ ، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری \mathbf{A} که در معادلات زیر صدق کند، به دست می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

پیمانه‌ای که در آن $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد پیمانه کولن نامیده می‌شود.

۱۱-۱۶ نشان دهید که در یک محیط خطی رسانا می‌توان پیمانه مناسبی انتخاب کرد به طوری که φ و \mathbf{A} هر دو در معادله موج میرا (۱۶-۲۹) صدق کنند. فرض کنید $\rho = 0$ است.

۱۲-۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\mu = \mu_0$ است، ولی بردار قطبش \mathbf{P} به صورت تابعی از مکان و زمان، یعنی $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z, t)$ داده شده است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری \mathbf{Z} (بردار هرتز) به دست می‌آیند که در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

و

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

۱۳-۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\epsilon = \epsilon_0$ است ولی بردار مغناطش، $\mathbf{M}(x, y, z, t)$ تابع داده شده‌ای است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری \mathbf{Y} که در معادله زیر صدق می‌کند، به دست می‌آیند

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

و

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Y}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$$

۱۴-۱۶ نشان دهید که معادلات ماکسول را برای محیطی همسانگرد، همگن، نارسانا و بدون بار به وسیله یکی از دو دسته معادلات زیر می‌توان برقرار کرد

۱. $\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقی

$\mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقی

یا

۲. $\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقی

$\mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (F\mathbf{a})$ قسمت حقیقی

که در آن \mathbf{a} یک بردار یگانه ثابت است و F در معادله نرده‌ای موج صدق می‌کند.

انتشار امواج الکترومغناطیسی تکفام

همچنانکه هنگام به دست آوردن معادله موج از روی معادلات ماکسول دیدیم، بعضی از پاسخهای خاص معادلات ماکسول امواج الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند. در این فصل پاسخها را به تفصیل بررسی می‌کنیم. ابتدا انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطی خطی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که محیط تا بی‌نهایت گسترش دارد. این سؤال را که امواج در وهله اول چگونه تولید می‌شوند و چگونه به محیط وارد می‌شوند در فصلهای بعد بررسی می‌کنیم.

عبارت انتشار امواج الکترومغناطیسی گستره وسیعی از پدیده‌های فیزیکی را شامل می‌شود از جمله امواج رادیویی، نور مرئی و پرتوهای ایکس. در خلأ تمام امواج با سرعت c منتشر می‌شوند و با فرکانسهای مختلفشان f (یا طول موجهایشان λ) از یکدیگر متمایز می‌شوند. در جدول ۱۷-۱ فهرستی از گستره‌های مشخصه طیف فرکانسی الکترومغناطیسی از امواج رادیویی فرکانس کم (10^4 Hz) تا پرتوها گامای سخت (10^{22} Hz) آورده شده است.

۱۷-۱ امواج تخت تکفام در محیطهای نارسانا

بررسی آن دسته از پاسخهای معادله (۱۶-۳۱) که به پاسخهای موج تخت مشهورند از هر پاسخ دیگری آسانتر است. موج تخت به صورت موجی تعریف می‌شود که در هر لحظه از زمان، فاز آن

جدول ۱۷-۱ طیف الکترومغناطیسی

طول موج λ (m)	فرکانس f (Hz)	نوع تابش الکترومغناطیسی
3×10^4 تا 3	10^8 تا 10^4	امواج رادیویی
3	10^8	FM, TV
3×10^{-1} تا 3×10^{-3}	10^{11} تا 10^9	میکروموج، رادار
3×10^{-4}	10^{12}	فروسرخ دور
3×10^{-5} تا 8×10^{-7}	4×10^{14} تا 10^{13}	تابش فروسرخ
8×10^{-7} تا 4×10^{-7}	8×10^{14} تا 4×10^{14}	نور مرئی
4×10^{-7} تا 3×10^{-9}	10^{17} تا 8×10^{14}	تابش فرابنفش
3×10^{-9} تا 3×10^{-11}	10^{19} تا 10^{17}	پرتوهای ایکس نرم
3×10^{-11} تا 3×10^{-12}	10^{20} تا 10^{19}	پرتوهای ایکس
3×10^{-12} تا 3×10^{-14}	10^{22} تا 10^{20}	پرتوهای گاما

در تمام نقاط واقع بر هر یک از صفحات عمود بر راستای مشخصی یکسان است.^۱ برای مثال چنانچه این راستا، راستای z باشد، آنگاه E باید در تمام نقاطی که مقدار z آنها یکسان است، یعنی در تمام نقاط واقع در صفحه‌ای موازی با صفحه xy ، فاز یکسانی داشته باشد. بنابراین پاسخ (۱۶-۳۴) که قبلاً درباره آن بحث شد یک موج تخت است، زیرا $(wt - kz)$ برای t و z مفروض، بدون توجه به آنکه x و y چه مقادیری داشته باشند، ثابت است. امواج تختی که در راستای z در حرکت‌اند برای مسائلی که در آن انتخاب راستای z اختیاری است، مناسب‌اند. اما، در بسیاری مسائل دستگاه محور مختصات به دلایل دیگری انتخاب می‌شود، برای مثال به دلیل شرایط مرزی؛ در چنین مواردی لازم است که امواج تختی بسازیم با جهتهای انتشار اختیاری. فرض کنید می‌خواهیم موج تختی بسازیم که جهت انتشار آن بردار یگه \mathbf{u} باشد. در این صورت

۱. ممکن است طبیعی‌تر به نظر برسد که موج تخت را به صورت موجی تعریف کنیم که برای آن میدانهای E و B در تمام نقاط هر سطحی عمود بر جهت مشخص یکسان باشد. برای محیطهای نارسانا این دو تعریف معمولاً معادل‌اند. برای محیطهای رسانا یک \mathbf{u} حقیقی به یک $k\mathbf{u}$ مختلط منجر می‌شود و در خواهیم یافت که ممکن است با این تعریف امواج تخت واقعی وجود نداشته باشند. با وجود این، چنانچه تعریف فاز ثابت را به کار ببریم همواره امواج تخت وجود خواهند داشت و ما به نحوی سازگار از این تعریف استفاده خواهیم کرد.

به جای متغیر z باید $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ ، یعنی تصویر \mathbf{r} در جهت \mathbf{u} را در نما بگذاریم. بنابراین موج تختی با جهت انتشار \mathbf{u} توسط

$$e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

توصیف می‌شود. اکنون برداری را که بردار انتشار نامیده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$$

و بستگی فضایی و زمانیِ نماییِ موجِ تخت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}$$

اگر $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ باشد (\mathbf{k} بردار یکه در امتداد z است)، آنگاه $z = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ ، همان‌طور که در حالت خاص داشتیم؛ البته در تمام موارد طول موج $\lambda = 2\pi/\kappa$ است. سرعت انتشار یک موج تخت تکفام، دقیقاً همان سرعت حرکت صفحات با فاز ثابت است. البته، فاز ثابت بدان معناست که

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{constant} \quad (۱-۱۷)$$

اگر $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}$ را به صورت $k\xi$ بنویسیم (κ اندازه $\boldsymbol{\kappa}$ و ξ تصویر \mathbf{r} در جهت $\boldsymbol{\kappa}$ است)، آنگاه معادله (۱-۱۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\kappa \xi - \omega t = \text{constant}$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان، سرعت فاز به دست می‌آید

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{n} \quad (۲-۱۷)$$

که در آن از نتیجه معادله (۱۶-۳۳ الف)، $\kappa = n\omega/c$ استفاده کرده‌ایم. در خلا داریم

$$v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

حال برای به دست آوردن پاسخهای تفصیلی موج تخت برای \mathbf{E} و \mathbf{B} ، می‌توانیم به معادله (۱۶-۳۳) برگردیم، ولی در واقع بهتر است که از خود معادلات ماکسول شروع کنیم. در محیط ما، توزیعهای

جریان و بار از پیش مشخص شده‌ای وجود ندارند و رسانندگی $g = 0$ است، پس معادلات عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3-17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4-17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5-17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6-17)$$

از بحثی که قبلاً دربارهٔ معادله موج داشتیم، بستگی فضایی و زمانی مورد انتظار در موج تخت را می‌دانیم، پس فرض می‌کنیم که میدانها به صورت زیر هستند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}, \dots \quad (7-17)$$

که در آن $\hat{\mathbf{E}}$ بردار دامنهٔ ثابتِ مختلطِ موج تخت است (که به تفصیل در بخش بعد درباره آن بحث خواهد شد) حال این پاسخها را در معادلات ماکسول (۳-۱۷) تا (۶-۱۷) قرار می‌دهیم. با این کار معلوم می‌شود که ثابتهای مفروض $\boldsymbol{\kappa}$ ، و $\hat{\mathbf{E}}$ و مانند آن باید در چه شرایطی صدق کنند تا توابع موج تخت واقعاً پاسخهای معادلات ماکسول باشند.

با مشتق‌گیری از تابعی به صورت $\hat{\mathbf{E}} e^{-i\omega t}$ نسبت به زمان می‌بینیم که برای تابعی به این صورت خاص، عملگر $\partial/\partial t$ معادل است با ضرب کردن در $-i\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

همین‌طور، می‌بینیم (مسئلهٔ ۱-۱۷) که برای تابعی به صورت $\hat{\mathbf{E}} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}$ ، عملگر ∇ معادل است با

$$\nabla = i\boldsymbol{\kappa}$$

بدین ترتیب برای امواج تخت، معادلات ماکسول (پس از حذف i و تابع نمایی) به صورت زیر در می‌آیند

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad (8-17)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (9-17)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (10-17)$$

$$\kappa \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} \quad (۱۱-۱۷)$$

اگر فرض کنیم که محیط خطی است، معادلات ساختمندی عبارت خواهند بود از

$$\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon \hat{\mathbf{E}} \quad (۱۲-۱۷)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}} \quad (۱۳-۱۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که محیط همگن و همسانگرد است، بنابراین ε و μ کمیت‌های نرده‌ای ثابتی هستند. تمام کاربردهای ما در مورد محیط‌های غیرمغناطیسی^۱ هستند، بنابراین برای سادگی فرض می‌کنیم $\mu = \mu_0$. حال با استفاده از روابط $\varepsilon = K\varepsilon_0$ و $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ معادلات ماکسول را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$K \kappa \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (۱۴-۱۷)$$

$$\kappa \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (۱۵-۱۷)$$

$$\kappa \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (۱۶-۱۷)$$

$$\kappa \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{\mathbf{E}} \quad (۱۷-۱۷)$$

اگر فرض کنیم ω فرکانسی مفروض و K یک ثابت مفروض ماده باشد، آنگاه باید κ ، $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را طوری انتخاب کنیم که این مجموعه معادلات برداری جبری برقرار باشند. ابتدا، اگر فرض کنیم $K \neq 0$ می‌بینیم که $\kappa \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ است؛ البته همواره $\kappa \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$. این بدان معناست که $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ هر دو باید بر κ عمود باشند. چنین موجی را عرضی می‌نامند. (حالت $K = 0$ در واقع امکان‌پذیر و غیر بدیهی است، ولی ما بحث آن را فعلاً به تأخیر می‌اندازیم.) به علاوه، چون $\hat{\mathbf{B}}$ متناسب با $\hat{\mathbf{E}} \times \kappa$ است، $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ بر یکدیگر نیز عمودند. بردارهای κ ، $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ (با همین ترتیب) یک مجموعه متعامد راستگرد تشکیل می‌دهند. اندازه نسبی $\hat{\mathbf{B}}$ و $\hat{\mathbf{E}}$ نیز با معادله (۱۶-۱۷) تعیین می‌شود $\hat{\mathbf{B}} = (\kappa/\omega) \hat{\mathbf{E}}$. سرانجام با محاسبه ضرب برداری κ با معادله (۱۶-۱۷) و استفاده از معادله (۱۷-۱۷) برای $\kappa \times \hat{\mathbf{B}}$ ، اندازه κ را به دست می‌آوریم

$$\kappa \times (\kappa \times \hat{\mathbf{E}}) = \omega \kappa \times \hat{\mathbf{B}} = -K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}}$$

۱. تنها محیط‌هایی که برای آنها در فرکانسهای کم μ به طور قابل ملاحظه‌ای با μ_0 متفاوت است، محیط‌های فرومغناطیسی هستند، که به هر جهت محیط‌هایی خطی نیستند. برای فرکانسهای نوری، برای تمام مواد، $\mu \cong \mu_0$ است. ما در اینجا تشدید پارامغناطیسی را، که تحت شرایط خاصی در فرکانسهای رادیویی و میکروموجی قابل مشاهده است، در نظر نمی‌گیریم.

با استفاده از اتحاد برداری زیر

$$\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}) = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \boldsymbol{\kappa} - \kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

و اینکه برای موج عرضی $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ خواهیم داشت

$$-K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}} = -\kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

این رابطه هم‌ارز است با معادله موج برای پاسخهایی که با معادله (۷-۱۷) داده شده باشند. با حذف $\hat{\mathbf{E}}$ از دو طرف معادله فوق خواهیم داشت

$$\kappa = \sqrt{K}\omega/c \quad (۱۸-۱۷)$$

این رابطه، که رابطه پاشندگی عرضی نامیده می‌شود، اندازه بردار موج $\boldsymbol{\kappa}$ را برحسب ω و K مفروض تعیین می‌کند.

خلاصه، یک موج تخت عرضی تکفام که در جهت مثبت \mathbf{u} انتشار می‌یابد با معادلات زیر توصیف می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} \quad (۷-۱۷)$$

که در آن $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$ جهت \mathbf{u} و فرکانس ω کاملاً اختیاری‌اند. دامنه $\hat{\mathbf{E}}$ دلخواه است بجز آنکه باید بر \mathbf{u} عمود باشد

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (۱۹-۱۷)$$

اندازه κ ، برای فرکانس ω مفروض، با ضریب شکست ماده تعیین می‌شود

$$\kappa = n\omega/c \quad (۲۰-۱۷)$$

که در آن n به‌صورت زیر تعریف شده است

$$n = \sqrt{K} \quad (۲۱-۱۷)$$

بدین ترتیب هم اندازه و هم جهت $\hat{\mathbf{B}}$ کاملاً تعیین می‌شود

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (۲۲-۱۷)$$

توجه کنید که در خلأ ($n = 1$) برحسب یکاهای mks، داریم $c\hat{B} = \hat{E}$. سرعت فاز موج c/n است. با داشتن این نتایج می‌توانیم بعضی از مسائل اپتیکی مهم و فوق‌العاده جالب را بررسی کنیم. با وجود این، این بررسیها را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

در این بحث ما مورد $K = 0$ را به‌طور صریح کنار گذاشتیم. به‌علاوه با این فرض ضمنی که κ حقیقی است، مجموعه‌ای از پاسخهای موج تخت را که در بعضی موارد برای برقراری شرایط مرزی در فصل مشترک بین دو محیط نارسانا لازم است کنار گذاشتیم. اگر κ حقیقی نباشد، داریم

$$\kappa = \kappa_r + i\kappa_i$$

به‌طوری که معادله (۱۷-۱۸) می‌بایست به‌صورت زیر نوشته شود

$$\kappa_r \cdot \kappa_r - \kappa_i \cdot \kappa_i + 2i\kappa_r \cdot \kappa_i = K \frac{\omega^2}{c^2}$$

قسمت موهومی سمت چپ این معادله باید صفر شود و برای آنکه قسمتهای حقیقی برابر شوند، κ_r^2 می‌بایست بزرگتر از κ_i^2 باشد. قسمت موهومی κ یعنی κ_i ، می‌تواند صفر باشد یا می‌تواند بر κ_r عمود باشد. مورد اول به‌طور کامل در بالا مورد بحث قرار گرفت. مورد دوم شامل امواجی می‌شود که برای آنها صفحات فاز ثابت بر صفحات دامنه ثابت عمودند، همان‌طور که در بخش ۱۷-۴ توضیح خواهیم داد. (این امواج را در ارتباط با بازتاب کلی در بخش ۱۸-۴ به تفصیل مورد بحث قرار خواهیم داد.) در هر دو مورد $\kappa \cdot \kappa$ حقیقی است و نتیجتاً یک مقدار حقیقی برای اندازه κ می‌توان تعریف کرد که در معادله (۱۷-۱۸) صدق کند. در بخش ۱۷-۴ درباره بردارهای امواج مختلط بیشتر بحث خواهیم کرد.

هر چند که پاسخهای موج تخت تنها رده محدودی از پاسخهای معادلات ماکسول‌اند، ولی این پاسخها بسیار مهم‌اند، زیرا مبنای رده به مراتب وسیعتری از پاسخها را تشکیل می‌دهند. چون معادلات خطی‌اند، ترکیبی خطی از پاسخها (برهم‌نهی امواج تخت) نیز یک پاسخ است. بنابراین از جمع امواج تخت می‌توانیم پاسخهای دیگری به‌دست آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \hat{\mathbf{E}}(\kappa_i, \omega_i) \exp[-i(\omega_i t - \kappa_i \cdot \mathbf{r})] \quad (17-23)$$

که در آن هر یک از ضرایب $\hat{\mathbf{E}}$ به κ_i و ω_i بستگی خواهند داشت. این برهم‌نهی امواج تخت به‌صورت یک سری فوریه (مختلط) است و بنابراین، می‌تواند نمایانگر هر پاسخی باشد که تناوبی

۱. برحسب یکاهای گاوسی، بنا بر بحث فصل ۸ ما B را با B/c عوض می‌کنیم. لذا $B = E$. به عبارت دیگر اندازه میدانهای E و B برای یک موج تخت در خلأ یکسان است.

است (نه الزاماً سینوسی). هر یک از جملات این سری باید به طور جداگانه در شرایط معادلات (۱۷-۱۴) تا (۱۷-۱۷) صدق کنند. برای پاسخی که حتی تناوبی هم نیست، علامت جمع را در معادله (۱۷-۲۳) می‌توان به علامت انتگرال تبدیل کرد (انتگرال فوریه^۱) که در آن تابع $\hat{\mathbf{E}}(\kappa, \omega)$ تابع پیوسته‌ای از κ و ω است. تابع $\hat{\mathbf{E}}(\kappa, \omega)$ تبدیل فوریه $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ نامیده می‌شود. در این حالت باید این امکان را نیز در نظر بگیریم که n به κ و ω بستگی دارد

$$n = n(\kappa, \omega)$$

این اثر، که به پاشندگی مشهور است، در فصل ۱۹ بحث خواهد شد.

۱۷-۲ قطبش

دامنه‌های برداری مختلط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را با تفصیل بیشتری می‌توان بررسی کرد. در واقع، تا کنون به طور صریح نگفته‌ایم که از نظر ما بردار مختلط به چه معناست. دو معنای کاملاً واضح می‌توان مطرح کرد: کمیته مختلط که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن بردارهای حقیقی هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i$$

یا آنکه برداری که مؤلفه‌های آن (نسبت به بردارهای پایه حقیقی) کمیته‌های نرده‌ای مختلطی هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u}$$

در مواقعی که لازم است کمیته‌های مختلط را مشخص کنیم ما از علامت مد در بالای آن کمیته‌ها استفاده خواهیم کرد. کمیته‌های \mathbf{p} ، \mathbf{s} و \mathbf{u} در صورت دوم $\hat{\mathbf{E}}$ مجموعه راستگردی از بردارهای یک‌متعامد حقیقی هستند. با نوشتن صورت اول برحسب مؤلفه‌ها و صورت دوم برحسب قسمت‌های حقیقی و موهومی، به آسانی دیده می‌شود که چنانچه تساویهای زیر برقرار باشند، این دو فرمولبندی، معادل خواهند بود

$$E_{p_r} = E_{r_p}, \quad E_{p_i} = E_{i_p}, \quad E_{s_r} = E_{r_s} \quad \text{و غیره}$$

برای مقاصد فعلی ما صورت دوم مناسب‌تر است. فرض می‌کنیم که جهت انتشار موج تخت در امتداد \mathbf{u} است. پس بنا بر نتیجه $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ از معادله (۱۷-۱۹) داریم $\hat{E}_u = 0$ ولی \hat{E}_p و \hat{E}_s اختیاری هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (۱۷-۲۴)$$

۱. به پیوست ۶ مراجعه کنید.

بردار یکه \mathbf{p} را می‌توان در هر جهتی که بر \mathbf{u} عمود باشد انتخاب کرد، در فصل بعد انتخاب خاصی به عمل خواهیم آورد که نمادگذاری‌ای را که در اینجا به‌کار برده‌ایم، توجیه خواهد کرد. همچنین مناسب‌تر است که مؤلفه‌های مختلط را به جای آنکه برحسب قسمتهای حقیقی و موهومی بنویسیم به صورت قطبی آنها بیان کنیم. فرض کنید

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p}, \quad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (25-17)$$

آنگاه، برای مثال داریم

$$\hat{E}_s e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})} = E_s e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi_s)}$$

این بدان معناست که ϕ_s فاز مؤلفه میدان E در امتداد \mathbf{s} است. با فرض روابط زیر

$$\phi_p - \phi_s = \phi \quad \phi_s = 0$$

هیچ‌گونه محدودیتی وارد نمی‌شود، زیرا انتخاب $\phi_s = 0$ تنها بدان معناست که برای t مبدأ خاصی انتخاب کنیم. با این انتخاب داریم

$$\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}$$

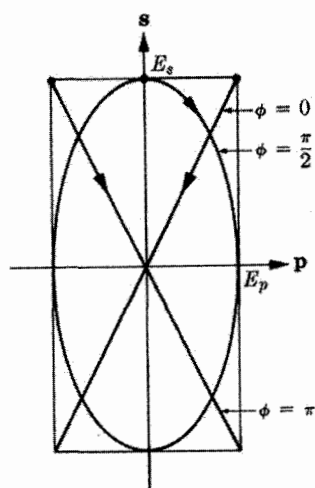
که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) \quad (26-17)$$

میدان \mathbf{E} به مؤلفه‌هایی در دو جهت، با دامنه‌های E_p و E_s که می‌توانند هر مقداری را داشته باشند، تجزیه شده‌اند. به‌علاوه این دو مؤلفه ممکن است با اختلاف فاز ϕ نسبت به یکدیگر نوسان کنند: یعنی، در هر نقطه مفروض \mathbf{r} ، بیشینه E در جهت \mathbf{p} و بیشینه E در جهت \mathbf{s} ممکن است در زمان یکسانی حاصل نشود.

با در نظر گرفتن بعضی حالات خاص، تصویر تفصیلی میدان نوسان‌کننده \mathbf{E} را در نقطه‌ای مشخص، مثلاً در $\mathbf{r} = 0$ ، بهتر می‌توان دید. ابتدا، فرض کنید $\phi = 0$. آنگاه

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$



شکل ۱۷-۱ نمایش مسیری که نوک بردار E در نقطه مفروضی در فضا به صورت تابعی از زمان طی می‌کند. بردار انتشار \mathbf{u} به طرف خارج از صفحه کاغذ است. مسیرهای $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ مربوط به قطبش خطی است. مسیر $\phi = \pi/2$ مربوط به قطبش بیضوی راستگرد است؛ برای $\phi = -\pi/2$ مسیر در جهت عکس طی می‌شود.

میدان E متناوباً از مقدار $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ به صفر و از صفر به $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ کاهش می‌یابد و مجدداً به مقدار اولیه‌اش می‌رسد، و همواره میدان E در امتداد جهت $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$ قرار دارد. این حالت که قطبش خطی^۱ نامیده می‌شود در شکل ۱۷-۱ نشان داده شده است. اگر $E_p = 0$ یا $E_s = 0$ باشد، باز هم قطبش خطی داریم، ولی در آن صورت ϕ تعریف نشده است. برای $\phi = \pi$

$$\mathbf{E}(\pi, t) = (-E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$

مجدداً قطبش خطی داریم، همان‌طور که در شکل ۱۷-۱ نشان داده شده است. برای $\phi = \pi/2$

$$\mathbf{E}(\pi/2, t) = E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t$$

نوک بردار E یک مسیر بیضوی را در جهت ساعتگرد طی می‌کند، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است. این حالت را قطبش بیضوی راستگرد^۲ می‌نامند. برای $\phi = -\pi/2$ مسیر همان مسیر است ولی به‌طور پادساعتگرد طی می‌شود و قطبش را قطبش بیضوی چپگرد می‌نامند. در حالت خاص $E_p = E_s$ و $\phi = \pm\pi/2$ قطبش دایروی (راستگرد یا چپگرد) است. برای سایر

۱. استفاده از واژه "قطبش" در اینجا به‌کاربرد این واژه در فصل ۴ هیچ ربطی ندارد. باعث تأسف است که به‌طور سنتی از لغت یکسانی استفاده شده است، ولی ابهامی بروز نخواهد کرد، زیرا یک کاربرد آن در موارد امواج است و کاربرد دیگری در مورد محیطها.

۲. توجه کنید "قانون دست راست" در مورد حرکت E در شکل ۱۷-۱ صادق نیست. در عوض این واژه از مسیر بردار E در فضا در امتداد جهت انتشار، در هر لحظه از زمان، گرفته شده است. برای قطبش راستگرد، نوک بردار E از هر سمتی که به آن نگاه کنیم، یک ماریچ راستگرد، یا یک پیچ راستگرد را می‌بینیم.

مقادیر ϕ ، باز هم قطبش بیضوی خواهیم داشت (حتی اگر $E_p = E_s$ باشد). مسیر طی شده باز هم یک بیضی است که در مستطیل شکل ۱۷-۱ محاط است، ولی محورهای اصلی و فرعی بیضی با محورهای p و s زاویه می‌سازند. برای قطبش بیضوی اندازه بردار E هرگز صفر نمی‌شود، هر چند که مؤلفه آن در هر یک از جهات مفروض صفر می‌شود. دامنه مختلط بردار B از معادله (۱۷-۲۲) به دست می‌آید

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (22-17)$$

با ضرب نرده‌ای این رابطه در $\hat{\mathbf{E}}$ ، و جابه‌جا کردن ضرب نرده‌ای و برداری، خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$$

در حالت کلی صفر شدن ضرب نرده‌ای دو بردار مختلط بدان معنا نیست که قسمتهای حقیقی آن دو برهم عمودند، ولی در این حالت قسمتهای حقیقی بر یکدیگر عمودند. از معادله (۱۷-۲۶) با نوشتن $\mathbf{E}(\circ, t) = \mathbf{E}$ ، برای قسمت حقیقی آن داریم

$$\mathbf{E} = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (27-17)$$

برای $\mathbf{B}(\circ, t)$ ، یعنی قسمت حقیقی $\hat{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}$ با استفاده از معادله (۱۷-۲۲) داریم

$$\mathbf{B} = (n/c)[E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) - E_s \mathbf{p} \cos \omega t] \quad (28-17)$$

چون ضرب نرده‌ای معادله (۱۷-۲۸) با (۱۷-۲۷) صفر است، بردارهای حقیقی \mathbf{E} و \mathbf{B} در هر لحظه بر یکدیگر عمودند. همچنین $\text{Re } \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(\circ, \circ)$ و $\text{Re } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\circ, \circ)$ ، بنابراین قسمتهای حقیقی $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ برهم عمودند. مسیری که نوک بردار \mathbf{B} طی می‌کند همان مسیر شکل ۱۷-۱ است که 90° پاد ساعتگرد چرخیده باشد.

از آنجا که محورهای p و s در صفحه عمود بر \mathbf{u} به طور دلخواه انتخاب شده بودند، هر انتخاب دیگری نیز مجاز است. هر انتخاب جدیدی محورهای مختصات شکل ۱۷-۱ را می‌چرخاند و مقادیر جدیدی برای E_p ، E_s و ϕ به دست می‌دهد، ولی مسیری که بردار در شکل ۱۷-۱ طی می‌کند، نمایشگر یک واقعیت فیزیکی است و در اثر تبدیل مختصات تغییر نخواهد کرد. ولی در اینجا، حتی حالت فیزیکی قطبش خود بخشی از آزادی در انتخاب پاسخهای موج تختی است که برای محیطی نامتناهی فرض کردیم. در فصل بعد خواهیم دید که چگونه می‌توان قطبش خاصی را تولید و اندازه‌گیری کرد.

۳-۱۷ چگالی و شار انرژی

ما عبارتهای مختلط را برای میدانهای E و B آزادانه به کار برده‌ایم، منتها با این توجه که کمتهای فیزیکی واقعی قسمتهای حقیقی کمتهای مختلط‌اند. توجه ریاضی این امر آن است که معادلات ماکسول معادلاتی خطی‌اند و قسمتهای حقیقی و موهومی یک پاسخ مختلط هر یک جداگانه در این معادلات صدق می‌کنند. ولی عبارتهای زیر

$$u = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (29-17)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (30-17)$$

برای چگالی انرژی و شار انرژی در واحد سطح، برحسب میدانها عباراتی غیرخطی‌اند. بنابراین در این عبارت لازم است قبل از آنکه میدانها را در یکدیگر ضرب کنیم، قسمت حقیقی آنها را استخراج کنیم (مسئله ۱۷-۶). از آنجا که مبدأ مختصات اختیاری است، مجدداً می‌توانیم مقادیر نوعی را برای $\mathbf{r} = 0$ محاسبه کنیم. با مجذور کردن معادلات (۱۷-۲۷) و (۱۷-۲۸)، داریم

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2 \omega t \quad (31-17)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (32-17)$$

چون $D = \epsilon E$ و $B = \mu_0 H$ ، می‌بینیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در چگالی انرژی سهم یکسانی دارند

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$u = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \quad (33-17)$$

به‌علاوه، $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{u}$ ، بنابراین بردار پوئین‌تینگ در راستای جهت انتشار است و اندازه آن برابر است با

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (34-17)$$

برای امواج تخت عبارات چگالی انرژی و شار انرژی در واحد سطح، به‌صورت بسیار ساده‌ای در آمده‌اند. به‌علاوه، این دو عبارت را می‌توان ترکیب کرد و نتیجه جالبی به‌دست آورد که مستقل از مقدار خاص میدان E است

$$S = \frac{c}{n} u \quad (35-17)$$

چنانچه سرعت فاز موج تخت را به صورت برداری در جهت انتشار با بزرگی v_p

$$v_p = \frac{c}{n}$$

بنویسیم، آنگاه

$$\mathbf{S} = u\mathbf{v}_p$$

این معادله مشابه رابطه

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

است که چگالی جریان الکتریکی همرفتی را برحسب چگالی بار الکتریکی و سرعت بار تعریف می‌کند. این تشابه، تعبیر \mathbf{S} به عنوان چگالی جریان انرژی، یعنی، به عنوان چگالی انرژی u را که با سرعت فاز موج تخت \mathbf{v}_p انتقال می‌یابد، قوت می‌بخشد.

بستگی u و \mathbf{S} به زمان توسط E^2 از معادله (۱۷-۳۱) تعیین می‌شود که به قطبش موج بستگی دارد. برای قطبش دایروی ($\phi = \pm\pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2$$

که نسبت به زمان ثابت است؛ برای قطبش خطی ($\phi = 0, \pi$)

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t$$

که با فرکانسی دو برابر فرکانس موج بین صفر و بیشینه مقدارش تغییر می‌کند، البته، در همه موارد E^2 همواره مثبت است. به هر جهت، در فرکانسهای زیاد بستگی به زمان قابل اندازه‌گیری نیست و آنچه بیشتر مورد توجه است میانگین زمانی است. از آنجا که میانگین زمانی $\cos^2(\omega t - \phi)$ در یک دوره تناوب برابر $1/2$ است، برای هر قطبشی داریم

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} (E_p^2 + E_s^2) \quad (۱۷-۳۶)$$

این رابطه و نتایجی مشابه آن را با استفاده از قضیه‌ای که در فصل ۱۳ بدون اثبات ارائه شد، می‌توان به سرعت به دست آورد. اثبات آن قضیه را در اینجا می‌آوریم.

اگر $f = f_0 e^{i\omega t}$ و $g = g_0 e^{i\omega t}$ که در آن f_0 و g_0 به زمان بستگی ندارند، هر چند ممکن است به متغیرهای دیگری بستگی داشته باشند، آنگاه

$$\overline{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} f^* g \quad (۱۷-۳۷)$$

خط بالای کمیت سمت چپ به معنای میانگین زمانی است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\bar{w} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt$$

برای اثبات این رابطه فرض کنید $f_0 = u + iv$ و $g_0 = \xi + i\eta$. آنگاه

$$\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g = (u \cos \omega t - v \sin \omega t)(\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t) \quad (38-17)$$

از طرفی

$$\operatorname{Re} f^* g = u\xi + v\eta \quad (39-17)$$

انتگرالهای زیر به آسانی قابل اثبات اند

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

به کمک این انتگرالها به آسانی می توان دید که میانگین زمانی معادله (38-17) عبارت است از

$$\overline{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} f} = \frac{1}{2} (u\xi + v\eta) \quad (40-17)$$

از مقایسه (40-17) با (39-17) قضیه مذکور در معادله (37-17) اثبات می شود. این قضیه برای حاصل ضرب هر دو کمیت مختلطی که به صورت هماهنگ با فرکانس یکسان به زمان بستگی داشته باشند، ولی لزوماً فاز یکسانی نداشته باشند، صادق است. اگر این کمیتها برداری باشند، این ضرب می تواند یا ضرب نرده ای باشد یا ضرب برداری. می توان به آسانی بررسی کرد که با گذاشتن بردار مختلط E از معادله (26-17) در رابطه زیر

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E})$$

عبارت (36-17) فوراً به دست می آید.

۱۷-۴ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا

در مورد یک محیط رسانا نیز می‌توانیم روش توصیف شده در بخش ۱۷-۱ را به کار ببریم تا پاسخهای موج تختی را به دست آوریم که به طور صوری به پاسخهایی که در مورد محیط نارسانا پیدا کردیم، بسیار شبیه‌اند. می‌توانیم با معادلات (۱۷-۳) تا (۱۷-۶) و پاسخ مفروض، معادله (۱۷-۷)، شروع کنیم بجز آنکه معادله (۱۷-۶) با معادله زیر جایگزین می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E}$$

با وجود این، تعبیر فیزیکی پاسخ در اینجا به مراتب مشکل‌تر خواهد بود. رهیافت دیگری وجود دارد که تعبیر فیزیکی را ساده‌تر نمی‌کند ولی به‌ویژه در محیطهای رسانا بینش بیشتری درباره امواج الکترومغناطیسی فراهم می‌آورد.

در فصل ۳، ما از روش جداسازی متغیرها برای تبدیل معادله لاپلاس به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی، استفاده کردیم. همان روش را می‌توان در مورد معادله موج زیر به کار ببریم.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (16-29)$$

واضح است که در این مورد دو اختلاف وجود دارد، یکی آنکه متغیر وابسته \mathbf{E} یک بردار است و دیگر آنکه یکی از متغیرهای مستقل، زمان t است. ولی هیچ‌یک از این اختلافها مشکلی ایجاد نمی‌کند. تعبیر معادله (۱۶-۲۹) آن است که هر یک از مؤلفه‌های \mathbf{E} در دستگاه مختصات قائم می‌بایست در این معادله صدق کنند. ما یکی از این مؤلفه‌ها را با $E(\mathbf{r}, t)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$E(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t)$$

با جایگزینی این حاصل ضرب در معادله (۱۶-۲۹) و تقسیم کردن آن بر $R(\mathbf{r})T(t)$ دو جمله به دست می‌آید که یکی مستقل از \mathbf{r} است و دیگری مستقل از t . از آنجا که معادله باید به ازای تمام مقادیر \mathbf{r} و t صادق باشد، هر یک از این دو جمله می‌بایست برابر با ثابت یکسانی باشند که ما آن را با A نشان می‌دهیم. تا اینجا، A تنها یک ثابت جداسازی است ولی با کامل شدن جزئیات پاسخ، معنای فیزیکی‌اش را به دست خواهد آورد. نتیجه دو معادله دیفرانسیل است:

$$\varepsilon\mu \frac{d^2 T}{dt^2} + g\mu \frac{dT}{dt} + AT = 0 \quad (17-41\text{الف})$$

$$\nabla^2 R + AR = 0 \quad (17-41\text{ب})$$

مجدداً مناسب است که $R(\mathbf{r})$ و $T(t)$ را به صورت کمیتهای مختلط در نظر بگیریم، با این قرارداد که کمیتهای فیزیکی، $E(\mathbf{r}, t)$ ، قسمت حقیقی کمیتهای مختلط $\hat{E}(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t)$ است. از اینجا به بعد ما پیوسته از علامت بالای حروف برای مشخص کردن کمیتهای مختلط استفاده خواهیم کرد. معادله (۱۷-۴۱ الف) یک معادله دیفرانسیل عادی درجه دوم با ضرایب ثابت است که پاسخ آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{T} = \hat{T}_1 e^{-i\hat{\omega}_1 t} + \hat{T}_2 e^{-i\hat{\omega}_2 t} \quad (42-17)$$

که در آن $\hat{\omega}_1$ و $\hat{\omega}_2$ پاسخهای مستقل معادله درجه دوم زیر هستند

$$\epsilon\mu\hat{\omega}^2 + i g \mu \hat{\omega} - \hat{A} = 0 \quad (43-17)$$

معادله (۱۷-۴۱ ب) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (موسوم به معادله هلمهولتز) است که پاسخهای آن یک مجموعه بسیار غنی را تشکیل می‌دهند. از این مجموعه ما تنها آنهایی را انتخاب می‌کنیم که احتمال می‌دهیم بتوان پاسخهای شبیه موج تخت از آنها ساخت. به طور اخص، ما پاسخی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\hat{R}(\mathbf{r}) = \exp(\pm i \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{A} \quad (44-17)$$

با استفاده از معادله (۱۷-۴۴) برای حذف \hat{A} از معادله (۱۷-۴۳)، داریم

$$\epsilon\mu\hat{\omega}^2 + i g \mu \hat{\omega} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (45-17)$$

اگر $\hat{\mathbf{k}}$ و $\hat{\omega}$ هر دو حقیقی باشند، معادله (۱۷-۴۵) برقرار نخواهد بود. با وجود این پاسخهای جالبی وجود دارند که برای آنها یکی از این دو حقیقی باشد. به طور اخص، امواج تکفام به مقادیر حقیقی ω (که آن را با فرکانس زاویه‌ای یکی می‌دانیم) مربوط می‌شوند. ما بدین طریق مجموعه پاسخهای خود را محدود می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E} e^{i(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (46-17)$$

که در آن $\hat{\mathbf{k}}$ و ω در معادله (۱۷-۴۵ الف) صدق می‌کنند، یعنی در

$$\epsilon\mu\omega^2 + i g \mu \omega - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (الف ۱۷-۴۵)$$

توجه کنید که علامت بالای حرف ω را حذف کرده‌ایم. به‌طوری‌صوری معادله (۱۷-۴۶) با پاسخ مفروض هماهنگ برای محیط نارسانا، یعنی معادله (۱۷-۷)، یکسان است بجز آنکه اکنون $\hat{\kappa}$ یک بردار مختلط است.

معادله (۱۷-۴۵ الف) رابطه پاشندگی عمومی برای امواج تخت تکفام در محیط خطی همگن همسانگرد است. اگر g صفر نباشد و ω حقیقی باشد، معادله (۱۷-۴۵ الف) صادق نیست، مگر آنکه $\hat{\kappa}$ مختلط باشد و قسمتهای حقیقی و موهومی آن بر یکدیگر عمود نباشند.

اکنون علاوه بر معادله موج معادلات ماکسول نیز باید ارضا شوند و این الزام محدودیتهای بیشتری روی میدانهای برداری می‌گذارد. برای محیط غیرمغناطیسی معادلات ماکسول به‌صورت معادلات (۱۷-۱۴) تا (۱۷-۱۶) و شکل اصلاح‌شده (۱۷-۱۷)، به شکل معادلات زیر در می‌آیند

$$K \hat{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (۴۷-۱۷)$$

$$\hat{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (۴۸-۱۷)$$

$$\hat{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (۴۹-۱۷)$$

$$\hat{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{\mathbf{E}} - ig\mu_0 \hat{\mathbf{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \hat{K} \hat{\mathbf{E}} \quad (۵۰-۱۷)$$

ما در اینجا از ثابت دی‌الکتریک مختلط، \hat{K} ، باید تعریف زیر استفاده کرده‌ایم

$$\hat{K} = K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \quad (۵۱-۱۷)$$

مناسب است با قیاس با آنچه قبلاً در مورد ضریب شکست حقیقی و ثابت دی‌الکتریک حقیقی انجام دادیم، ضریب شکست مختلط \hat{n} را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\hat{n}^2 = \hat{K} \quad (۵۲-۱۷)$$

در این صورت داریم

$$\hat{\kappa} \cdot \hat{\kappa} = \hat{n}^2 \omega^2 / c^2 \quad (الف ۵۲-۱۷)$$

توجه کنید ترکیب معادلات (۵۱-۱۷)، (۵۲-۱۷) و (الف ۵۲-۱۷) معادل است با معادله (۱۷-۴۵ الف) برای محیطی با $\mu = \mu_0$.

اگر

$$\hat{\kappa} = \kappa_r + i\kappa_i \quad (۵۳-۱۷)$$

در آن صورت \mathbf{E} و \mathbf{B} را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{B}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

این پاسخ نشانگر موج تختی است که با طول موج $\lambda = 2\pi/k_r$ در جهت κ_r انتشار می‌یابد، ولی دامنه آن به جای آنکه ثابت باشد، کاهش می‌یابد و بیشترین کاهش آن در جهت κ_i است. سطوح فاز ثابت صفحاتی هستند عمود بر جهت انتشار κ_r . همچنین سطوح دامنه ثابتی وجود دارند که صفحاتی هستند عمود بر κ_i .

اکنون به منظور تسهیل در بررسی سرعت فاز و طول تضعیف موج \hat{n} را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\hat{n} = n + ik \quad (۵۴-۱۷)$$

که در آن کمیت‌های حقیقی n و k ثابت‌های ایتیکی نام دارند.

برای محیطی رسانا رابطه پاشندگی عبارت است از

$$\hat{\kappa} = \hat{n}\omega/c \quad (۵۵-۱۷)$$

که در آن کمیت نرده‌ای $\hat{\kappa}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\hat{\kappa} \cdot \hat{\kappa}} = \sqrt{\kappa_r^2 - \kappa_i^2 + 2i\kappa_r \cdot \kappa_i}$$

ابتدا فرض کنیم κ_r و κ_i جهت یکسانی دارند.^۱ این فرضی است که تنها در موارد محدودی صحیح است و در بعضی موارد مهم که در فصل بعد درباره آنها بحث خواهد شد معتبر نیست؛ ولی به هر جهت می‌تواند صادق باشد، مثلاً در موردی که موج از خارج عمود بر یک مرز تخت وارد محیط رسانا می‌شود. در آن صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\hat{\kappa} = (\kappa_r + i\kappa_i) \mathbf{u} = \hat{\kappa} \mathbf{u}$$

که در آن \mathbf{u} بردار یکه حقیقی در جهت مشترک κ_r و κ_i است. چون \mathbf{u} حقیقی است، معادلات زیر

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

۱. گاهی چنین امواجی را امواج یکنواخت یا همگن می‌نامند.

باز هم بدان معناست که بردارهای E و B بر جهت انتشار \mathbf{u} عمودند. ولی، معادله (۱۷-۲۲) تبدیل می‌شود به

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\hat{n}^2}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (۵۵-۱۷)$$

در اینجا \hat{n} مختلط بدین معناست که \mathbf{E} و \mathbf{B} با یکدیگر هم‌فاز نیستند، و همچنین بدین معناست که بردارهای E و B حقیقی بر یکدیگر عمود نیستند مگر برای حالت قطبش خطی (مسئله ۱۷-۹). برحسب ضریب شکست مختلط

$$\hat{n} = n + ik$$

روابط زیر را داریم

$$\kappa_r = n\omega/c, \quad \kappa_i = k\omega/c \quad (۵۶-۱۷)$$

با نوشتن $\xi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ ، در این حالت خاص عبارت زیر را برای میدان E به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-k\omega\xi/c}) e^{-i\omega(t - n\xi/c)}$$

موج با سرعت فاز c/n و ثابت تضعیف $k\omega/c$ انتشار می‌یابد. کمیت اخیر تعیین می‌کند که دامنه نوسان‌کننده میدان با چه سرعتی نسبت به فاصله افت می‌کند. معکوس ثابت تضعیف

$$\delta = c/k\omega \quad (۵۷-۱۷)$$

که عمق پوسته نامیده می‌شود، اندازه فاصله‌ای را به دست می‌دهد که در آن دامنه میدان به $1/e$ مقدارش در هر نقطه مفروض (مثلاً، در سطحی که موج وارد محیط می‌شود) افت می‌کند.

برای محیطی نارسانا ($k = 0$) عمق پوسته بی‌نهایت است. از آنجا که طول موج در محیط $\lambda = 2\pi c/n\omega$ (برابر با $1/n$ طول موج در خلأ برای همان فرکانس) است، عمق پوسته را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\delta = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (۵۸-۱۷)$$

در ماده‌ای که در آن اندازه k با اندازه n قابل قیاس است، "موج" در فاصله یک طول موج تضعیف می‌شود؛ ولی اگر $n \ll k$ باشد، مثلاً در یک دی‌الکتریک ناکامل که رسانندگی مختصری دارد، موج بدون تضعیف قابل ملاحظه‌ای چندین طول موج انتشار می‌یابد. در این حالت ماده شفاف است.

موقعی که K_r و K_i جهات متفاوتی داشته باشند، وضعیت پیچیده‌تر است. در آن صورت لازم نیست میدانهای حقیقی E و B بر K_r (یا بر K_i) عمود باشند، هر چند باز هم اگر $\hat{K} \neq 0$ باشد موج را "عرضی" می‌نامند، چون $\hat{k} \cdot \hat{B} = 0 = \hat{k} \cdot \hat{E}$ است. باز هم طول موج و تضعیف به ثابتهای ماده، n و k بستگی خواهند داشت، ولی به نحوی بسیار پیچیده‌تر از معادله (۱۷-۵۶). چنانچه دقت لازم درباره کمیتهای مختلط به عمل آوریم، روابط قطبش و انرژی را نیز می‌توانیم تعمیم دهیم. ولی، ما نیازی به این نتایج عمومی نخواهیم داشت.

از آنجا که انتشار موج را ثابتهای اپتیکی n و k تعیین می‌کنند، مهم است که رابطه آنها را با کمیتهای K و g ، که خواص ماده در اصل برحسب آن بیان شده بودند، به دست آوریم، تعاریف \hat{k} و \hat{n}

$$\hat{n} = n + ik \quad (۱۷-۵۴)$$

$$\hat{K} = K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \quad (۱۷-۵۱)$$

از طریق معادله زیر

$$\hat{K} = \hat{n}^2 \quad (۱۷-۵۲)$$

به یکدیگر مربوط می‌شوند. این رابطه به طور فریبنده‌ای ساده به نظر می‌آید، ولی هنگامی که آن را برحسب کمیتهای حقیقی n ، k و K ، g بیان کنیم، نسبتاً پیچیده می‌شود. \hat{K} را به صورت زیر می‌نویسیم^۱

$$\hat{K} = K_r + iK_i$$

که در آن

$$K_r = K, \quad K_i = g/\epsilon_0 \omega \quad (۱۷-۵۹)$$

با مجذور کردن $(n + ik)$ و مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی در معادله (۱۷-۵۲)، نتیجه می‌شود

$$K_r = n^2 - k^2$$

$$K_i = 2nk \quad (۱۷-۶۰)$$

۱. نمادگذاریهای متداول‌تر عبارت‌اند از $\hat{K} = K_1 + iK_2$ یا $\hat{K} = K' + iK''$ ، ولی ما می‌خواهیم شاخصهای عددی و پریم و دوپریم را برای مقاصد دیگری در فصل بعد نگه داریم.

این معادلات را می‌توان برای n و k حل کرد

$$n = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} [K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} [-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \quad (۶۱-۱۷)$$

در اینجا ریشه‌های مثبت انتخاب شده‌اند تا آنکه n و k ، همان‌طور که معنای آنها ایجاب می‌کند، همواره حقیقی و مثبت باشند. باید متذکر شد که $K_i = g/\epsilon_0 \omega$ ذاتاً مثبت است زیرا g مثبت است؛ اتلاف انرژی، $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = gE^2$ در یک محیط غیرفعال باید مثبت باشد؛ K_i همواره نماینده انرژی تلف شده است. از طرفی دیگر، $K_r = K$ می‌تواند هم مثبت باشد و هم منفی، و همین‌طور هم هست. برای محیط‌های نارسانا و میدانهای ساکن، K مثبت و بزرگتر از ۱ است، ولی برای میدانهای متناوب در فلزات، K ممکن است کمتر از ۱، صفر، یا منفی باشد. مثالهای خاصی از این موارد را می‌توان در فصل ۱۹ یافت؛ فعلاً ما K و g را به‌عنوان کمیت‌های مفروض در نظر می‌گیریم با این شناخت که در هر ماده‌ای ممکن است این کمیتها به فرکانس بستگی داشته باشند. معادلات بالا دقیق اما پیچیده‌اند؛ بنابراین بهتر است بعضی موارد تقریبی را بررسی کنیم. غالباً یکی از چند تقریب زیر معتبر است

$$K_i \ll |K_r|, K_r > 0 \left(\omega \gg \frac{g}{\epsilon} \right) : \quad ۱.$$

$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i/\sqrt{2}n \ll n \quad (۶۲-۱۷)$$

$$K_i \ll |K_r|, K_r < 0 \left(\omega \gg \frac{g}{-\epsilon} \right) : \quad ۲.$$

$$k \cong \sqrt{-K_r}, \quad n = K_i/\sqrt{2}k \ll k \quad (۶۳-۱۷)$$

$$K_i \gg |K_r| \left(\omega \ll \frac{g}{|\epsilon|} \right) : \quad ۳.$$

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/\sqrt{2}} \quad (۶۴-۱۷)$$

برای مثال، تقریب (۱) برای یک عایق خوب، تا حد فرکانسهای خیلی کم، اساساً تا حد dc (دقیقاً تا حد dc تنها برای عایق کامل با $g = 0$)، معتبر است و نتیجه $n = \sqrt{K}$ را مشابه محیط نارسانا به‌دست می‌دهد. تقریب (۲) برای فلزات در قسمت بالایی فرسوخ طیف فرکانس معتبر است،

در صورتی که تقریب (۳) برای فلزات در فرکانسهای میکروموج و پایین تر معتبر است. فرکانسی که حد فاصل بین تقریبهای (۲) و (۳) است عبارت است از $\omega \approx 1/\tau$ که در آن τ زمان برخورد الکترونهاى آزاد است. برای فلزات خالص در دمای اتاق $1/\pi \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

در مسائل الکتریکی که در آنها عمق پوسته مهم است، معمولاً تقریب (۳) معتبر است. معادله (۱۷-۵۸) نشان می دهد که برحسب طول موج "موج" شدیداً تضعیف می شود. برحسب فاصله مطلق، معادله (۱۷-۵۷) در مورد تقریب (۳) تبدیل می شود به

$$\delta \cong \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{K_i}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g}} \quad (17-65)$$

هنگامی که ω به سمت صفر میل می کند δ بی نهایت می شود، که این مطلب سازگار است با نتیجه قبلی ما مبنی بر آنکه میدان E و چگالی جریان در یک رسانا (ولی نه در یک ابررسانا^۱) برای جریانهای مستقیم و همچنین عملاً برای جریان متناوب 50° هرترزی، یکنواخت هستند. ولی در فرکانسهای بیشتر، در گستره اعتبار معادله (۱۷-۶۵)، δ بسیار کوچک می شود.

مثال ۱۷-۱ عمق پوسته مواد رسانا در فرکانسهای رادیویی

مایلم مقادیر عددی عمق پوسته را به کمک معادله (۱۷-۶۵) برای بعضی مواد رسانا محاسبه کنیم. موادی را که بررسی می کنیم عبارتند از نقره در فرکانسهای میکروموج و آب دریا در گستره فرکانسهای کم رادیویی.

حل: رسانندگی نقره مرغوب در فرکانسهای میکروموج برابر است با^۲

$$g = 3 \times 10^7 \text{ S/m}$$

در فرکانس 10^10 هرتز، که یک فرکانس معمولی میکروموج است، عمق پوسته برابر است با

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi \times 10^{10})(3 \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})}} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

بنابراین در فرکانسهای میکروموج عمق پوسته در نقره خیلی کم است و نتیجتاً انتظار می رود که اختلاف بین عملکرد یک عنصر مدار که از نقره خالص ساخته شده است و عنصری که از برنج

۱. عمق پوسته با عمق نفوذ که در فصل ۱۵ بحث شد هیچ ارتباطی ندارد.

۲. یک زمینس (S) برابر با معکوس یک اهم است؛ زیرا یکای رسانایی یا معکوس یکای مقاومت است (فصل ۷). زمینس در گذشته مهو نامیده می شد.

نقره‌اندود ساخته شده است، ناچیز باشد. در واقع همین طور هم هست و بدین جهت برای پایین آوردن هزینه ساخت قطعات موجبرهای خیلی خوب، از فن آب فلزکاری استفاده می‌شود. برای مورد آب دریا، ما فرکانسی را محاسبه می‌کنیم که برای آن عمق پوسته برابر یک متر باشد. برای آب دریا، $\mu = \mu_0$ و $g = 4.3 \text{ S/m}$. فرکانس برای عمق پوسته مفروض δ عبارت است از

$$\omega = \frac{2}{g\mu_0\delta^2} = \frac{2}{4.3 \times 4\pi \times 10^{-7}\delta^2} \text{ s}^{-1} = \frac{3.7 \times 10^5}{\delta^2} \text{ s}^{-1}$$

که نتیجه می‌شود

$$f = 58.6 \times 10^3 \text{ Hz}$$

به عبارت دیگر، برای یک عمق پوسته یک متری فرکانس 60 کیلوهرتز لازم است. اگر یک زیردریایی به یک گیرنده خیلی حساس مجهز باشد، و اگر از یک فرستنده خیلی قوی استفاده شود، می‌توان با این زیردریایی در زیر آب ارتباط برقرار کرد. ولی، باید از یک فرکانس رادیویی خیلی کم استفاده شود زیرا حتی در این فرکانس نیز تضعیف موج فوق‌العاده شدید خواهد بود. در عمقی که پنج برابر عمق پوسته باشد (در مورد محاسبات فوق، در عمق پنج متری)، فقط یک درصد از میدان الکتریکی اولیه، و یک صدم درصد از توان موج فرودی، باقی خواهد ماند.

مورد ناهنجار $\circ = \vec{K}$ ، که تا کنون آن را در بحث منظور نکرده‌ایم، وجود موج طولی (در مقابل موج عرضی) را مجاز می‌سازد (مسئله ۱۷-۱۴). در چنین موجی $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq \circ$ هر چند که $\nabla \cdot \mathbf{D} = \circ$ است، به طوری که چگالی بار قطبشی برخلاف مورد موج عرضی صفر نمی‌شود؛ تنها یک چگالی بار می‌تواند میدانی طولی ایجاد کند. چنین امواجی در پلاسماها اهمیت دارند؛ نوسان الکتروستاتیکی که در بخش ۱۴-۸) بحث شد مثالی از امواج طولی است.

* ۱۷-۵ امواج کروی

به عنوان مثالی از یک مسئله موج مشکل‌تر، که در واقع حتی امواج ساده را در آن مسئله نمی‌توان به سادگی به دست آورد، معادله موج را در مختصات کروی بررسی می‌کنیم. معادله موج برای میدان الکتریکی در خلأ به صورت زیر است

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \circ \quad (17-66)$$

برای امواج تکفام، قسمت مکانی معادله موج به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \circ \quad (17-67)$$

اشکال استفاده از مختصات کروی در این است که ما می‌خواهیم بردار $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را در این مختصات برحسب مؤلفه‌های شعاعی، سمتی، و قطبی بنویسیم، و هر کدام از این مؤلفه‌ها را به صورت تابعی از شعاع، زاویه سمتی، و زاویه قطبی بیان کنیم. اگر این عمل را انجام دهیم، به کار بردن عبارت لاپلاسی در مختصات کروی در معادله (۶۷-۱۷) کافی نیست؛ بلکه به جای آن لازم است لاپلاسی یک بردار با معادله زیر تعریف شود

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (68-17)$$

دیورژانس بردار \mathbf{E} باز هم صفر است؛ ولی، مؤلفه شعاعی، $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ نه تنها شامل مؤلفه شعاعی \mathbf{E} است، بلکه مؤلفه‌های سمتی و قطبی آن را نیز شامل می‌شود. مؤلفه‌های θ و ϕ نیز به طور مشابه پیچیده‌اند، و نتیجه نهایی سه معادله با مشتقات جزئی است که هر یک هر سه مؤلفه \mathbf{E} را شامل می‌شوند. جداسازی‌ای که برای معادله برداری لاپلاس در مختصات قائم انجام‌پذیر است، در مختصات کروی انجام‌پذیر نیست؛ در واقع این امتیاز خاص مختصات قائم است. ولی باید متذکر شویم که می‌توان مؤلفه‌های قائم \mathbf{E} را به کار برد؛ در این صورت این مؤلفه‌ها باید به صورت: $E_x(r, \theta, \phi)$, $E_y(r, \theta, \phi)$, $E_z(r, \theta, \phi)$ نوشته شوند.

با یک روش ساده می‌توان از برخورد با اشکال فوق احتراز کرد. معادله نرده‌ای هلمهولتز را در نظر بگیرید

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0 \quad (69-17)$$

همان‌طور که به زودی خواهیم دید پاسخهای آن به سادگی به دست می‌آیند. فرض کنید ψ یکی از پاسخهاست، آنگاه $\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi$ در معادله برداری هلمهولتز، یعنی معادله (۶۷-۱۷) صدق می‌کند

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (70-17)$$

برای تحقیق این مطلب، اتحاد زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{r} \times \nabla \psi = -\nabla \times (\mathbf{r} \psi) \quad (71-17)$$

این اتحاد از اتحاد برداری زیر

$$\nabla \times (\mathbf{F} \varphi) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi \quad (72-17)$$

و معادله

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (73-17)$$

نتیجه می‌شود. چون دیورژانس هر تاوی صفر است، فقط باید جملهٔ تاو را در معادلهٔ (۷۰-۱۷) در نظر بگیریم. تاو \mathbf{E} را می‌توان با استفاده از اتحاد برداری زیر به دست آورد

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} \quad (74-17)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - (\nabla \psi) \nabla \cdot \mathbf{r} + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi \quad (75-17)$$

همان‌طور که در مسئله ۱-۱۳ نشان داده شد، برای هر برداری مثل \mathbf{A} داریم $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{A}$ ؛ و همچنین دیورژانس بردار \mathbf{r} مساوی سه (۳) است. اولین جمله معادلهٔ (۷۵-۱۷) را می‌توان با توجه به اینکه ψ در معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز صدق می‌کند، به صورت دیگری تبدیل کرد، بنابراین فقط جمله آخر باقی می‌ماند که ممکن است ایجاد اشکال کند. اتحاد برداری

$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \nabla \times \mathbf{F} \quad (76-17)$$

با $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ و $\mathbf{G} = \nabla \psi$ نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$\nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (77-17)$$

دو جملهٔ آخر معادلهٔ (۷۶-۱۷) صفر می‌شوند زیرا تاو گرادیان هر تابعی و همچنین تاو \mathbf{r} ، صفر است. با به‌کار بردن این روابط در معادلهٔ (۷۵-۱۷)، خواهیم داشت

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{r} \psi - 3 \nabla \psi + \nabla \psi - \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi) + \nabla \psi \quad (78-17)$$

بالاخره با گرفتن تاو از معادلهٔ (۷۸-۱۷) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \nabla \times \mathbf{r} \psi = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (79-17)$$

که درست همان تاو معادلهٔ برداری هلمهولتز است. در اینجا صریحاً هیچ‌گونه استفاده‌ای از مختصات کروی نشده است. ولی چون \mathbf{r} بر سطحی به شعاع ثابت در مختصات کروی عمود است، انتظار

می‌رود که پاسخ $\mathbf{r} \times \nabla \psi$ به‌طور اخص در این مختصات قابل استفاده باشد. در واقع این پاسخ در سایر دستگاههای مختصات چندان قابل استفاده نیست.

حال که می‌دانیم $\mathbf{r} \times \nabla \psi$ یکی از پاسخهای معادله برداری هلمهولتز است، که در آن ψ یکی از پاسخهای معادله نرده‌ای هلمهولتز است، بهتر است بدانیم چگونه چنین پاسخهایی را می‌توان برای ساختن امواج الکترومغناطیسی به‌کار برد. روش آن خیلی ساده است. تغییرات مکانی میدان الکتریکی به‌صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (۷۱-۱۷)$$

میدان مغناطیسی باید طوری انتخاب شود که همراه با \mathbf{E} در معادلات ماکسول صدق کند. بدین منظور معادله (۵-۱۷) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (۸۰-۱۷)$$

که در آن بستگی زمانی استاندارد $e^{-i\omega t}$ فرض شده است. معادله (۷۸-۱۷) تا \mathbf{E} را به‌طور صریح به‌دست می‌دهد، یا به شکل خلاصه‌تر

$$\mathbf{B} = -i \frac{1}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (۸۱-۱۷)$$

چون دیورژانس هر تاوی صفر است، معادله (۴-۱۷) صادق است. از طرفی چون \mathbf{E} و \mathbf{B} هر دو پاسخهای معادله موج‌اند، و این معادله به‌نوبه خود ترکیبی از معادلات (۵-۱۷) و (۶-۱۷) است، واضح است که معادله (۶-۱۷) نیز صادق است.

معادلات (۷۱-۱۷) و (۸۱-۱۷) نشان‌دهنده عمومی‌ترین پاسخی هستند که از یک ψ ی مفروض می‌توان به‌دست آورد. پاسخ دیگری را با قرار دادن

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (۸۲-۱۷)$$

و به‌دست آوردن میدان الکتریکی از معادله (۶-۱۷)

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \quad (۸۳-۱۷)$$

می‌توان به‌دست آورد. با توجه به ملاحظاتی که در بالا به تفصیل بررسی شد معلوم می‌شود که \mathbf{E}' و \mathbf{B}' نیز مانند \mathbf{E} و \mathbf{B} پاسخی برای معادلات ماکسول‌اند. این پاسخها با یکدیگر این اختلاف را

دارند که \mathbf{E} در هر نقطه بر سطحی که از آن نقطه می‌گذرد و مرکزش در مبدأ مختصات است، مماس است؛ از طرف دیگر، \mathbf{B}' نیز همین خاصیت را دارد. این واقعیت موجب شده است که گاهی جوابهای \mathbf{E} و \mathbf{B} را الکتریکی عرضی (TE) بنامند و \mathbf{E}' و \mathbf{B}' را مغناطیسی عرضی (TM)؛ منظور از عرضی این است که این میدانها بر امتداد شعاعی عمودند.

در بحثی که ارائه شد حل معادله برداری هلمهولتز به حل معادله نرده‌ای هلمهولتز تبدیل شد. در مختصات کروی این معادله را با روش جداسازی متغیرها که از مسائل پتانسیل (فصل ۳) و بخش ۱۷-۴ با آن آشنایی داریم، می‌توان حل کرد. در مختصات کروی، معادله نرده‌ای هلمهولتز عبارت است از

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \kappa^2 \psi = 0 \quad (۸۴-۱۷)$$

که در آن $\kappa^2 = (\omega/c)^2$ و فرض می‌کنیم ψ به شکل زیر است

$$\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (۸۵-۱۷)$$

اگر ψ را با شکل فرض شده بالا در معادله (۸۴-۱۷) قرار دهیم و معادله را بر ψ تقسیم و در $r^2 \sin^2 \theta$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \kappa^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (۸۶-۱۷)$$

جمله سوم فقط به ϕ بستگی دارد و این جمله تنها جمله‌ای است که به ϕ بستگی دارد. نتیجتاً این جمله باید یک عدد ثابت باشد که این عدد ثابت را به صورت $-m^2$ انتخاب می‌کنیم. به عبارت دیگر

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (۸۷-۱۷)$$

که در آن شاخص m نشان می‌دهد که Φ به m بستگی دارد. با استفاده از معادله (۸۷-۱۷) می‌توان معادله (۸۶-۱۷) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (۸۸-۱۷)$$

دو جمله اول فقط به r و دو جمله آخر به θ بستگی دارند. بنابراین مجموع دو جمله آخر باید مساوی یک عدد ثابت باشد که آن را به صورت $l(l+1)$ انتخاب می‌کنیم. البته مجموع دو جمله اول باید $l(l+1)$ باشد. بنابراین دو معادله زیر نتیجه می‌شوند

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (۸۹-۱۷)$$

و

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - \kappa^2 r^2] R_l = 0 \quad (۹۰-۱۷)$$

پاسخهای معادله (۸۷-۱۷) مشهورند

$$\Phi_m = e^{\mp im\phi} \quad (۹۱-۱۷)$$

پاسخهای معادله (۸۹-۱۷) زیاد مشهور نیستند ولی تعدادی از آنها را در فصل ۳ دیدیم. در آنجا پاسخهای مربوط به $m = 0$ را بررسی کردیم. این پاسخها، چندجمله‌ایهای لژاندر $P_l(\cos \theta)$ هستند. پاسخهای (۸۹-۱۷) برای مقادیر دلخواه m که مساوی یا کوچکتر از l باشند، چندجمله‌ایهای وابسته لژاندر نامیده می‌شوند. این چندجمله‌ایها را می‌توان با معادله زیر تعریف کرد

$$P_l^m(u) = (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \quad (۹۲-۱۷)$$

که در آن $u = \cos \theta$ است. واضح است که $P_l^0(u) = P_l(u)$ همان چندجمله‌ایهای معمولی لژاندر است. به ازای $m \neq 0$ این توابع در جدول ۲-۱۷ داده شده‌اند.

سرانجام معادله (۹۰-۱۷) را باید بررسی کرد. در این معادله می‌توانیم متغیر r را به $\xi = kr$ تغییر دهیم و در نتیجه این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} R_l - [l(l+1) - \xi^2] R_l = 0 \quad (۹۳-۱۷)$$

با قرار دادن $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$ در معادله بالا، این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \xi^2 \right] Z_l = 0 \quad (۹۴-۱۷)$$

۱. در فصل ۳ این توابع را به صورت $P_l(\theta)$ نوشتیم. ولی چون چندجمله‌ایهای لژاندر، چندجمله‌ایهایی از $\cos \theta$ هستند، معمولاً آنها را به صورت $P_l(\cos \theta)$ می‌نویسیم. در این فصل و فصلهای بعد ما این روش را دنبال خواهیم کرد.

جدول ۱۷-۲ چند جمله‌ایهای وابسته لژاندر، $P_l^m(u)$ ، که در آن $u = \cos \theta$

علامت	تابع
$P_0(u)$	۱
$P_1(u)$	$u = \cos \theta$
$P_1^1(u)$	$(1 - u^2)^{\frac{1}{2}} = \sin \theta$
$P_2(u)$	$\frac{1}{2}(3u^2 - 1) = \frac{1}{2}(3 \cos 2\theta + 1)$
$P_2^1(u)$	$3u(1 - u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sin 2\theta$
$P_2^2(u)$	$3(1 - u^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$
$P_3(u)$	$\frac{1}{2}(5u^3 - 3u)$
$P_3^1(u)$	$\frac{3}{2}(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}(5u^2 - 1)$
$P_3^2(u)$	$15u(1 - u^2)$
$P_3^3(u)$	$15(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}$

این معادله که برای ریاضی فیزیکدانها خیلی آشناست، به معادلهٔ بیسل مشهور است. پاسخهای این معادله نیز مشهورند و به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته و در واقع جدول‌بندی شده‌اند. پاسخهای متداول این معادله با $J_{l+1/2}(\kappa r)$ و $N_{l+1/2}(\kappa r)$ نشان داده می‌شوند و به‌ترتیب تابع بیسل و تابع نویمان از درجه $l + 1/2$ نامیده می‌شوند. برای بررسی معادلهٔ موج بسیار مناسب است که توابع بیسل کروی را با معادلات زیر تعریف کنیم

$$j_l(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r} J_{l+1/2}(\kappa r), \quad n_l(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r} N_{l+1/2}(\kappa r) \quad (95-17)$$

از این توابع به‌نوبهٔ خود توابع زیر به‌دست می‌آیند

$$h_l^{(1)}(\kappa r) = j_l(\kappa r) + in_l(\kappa r), \quad h_l^{(2)}(\kappa r) = j_l(\kappa r) - in_l(\kappa r) \quad (96-17)$$

توابع $j_l(\kappa r)$ ، $n_l(\kappa r)$ ، $h_l^{(1)}(\kappa r)$ و $h_l^{(2)}(\kappa r)$ همگی پاسخهای معادلهٔ شعاعی، یعنی معادلهٔ (۹۰-۱۷) هستند. این توابع به‌ازای $l = 0, 1, 2$ در جدول ۱۷-۳ آمده‌اند. توابع h به‌طور اخص

جدول ۱۷-۳ توابع بسل کروی و توابع نویمان

تابع	نوع
$j_0(\rho)$	$(1/\rho) \sin \rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho) \cos \rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(i/\rho) e^{i\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(i/\rho) e^{-i\rho}$
$j_1(\rho)$	$(1/\rho^2) \sin \rho - (1/\rho) \cos \rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho) \sin \rho - (1/\rho^2) \cos \rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho) e^{i\rho} (1 + i/\rho)$
$h_1^{(2)}(\rho)$	$-(1/\rho) e^{-i\rho} (1 - i/\rho)$
$j_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \sin \rho - \frac{3}{\rho^2} \cos \rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2} \sin \rho - \left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] \cos \rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(i/\rho) e^{i\rho} \left(1 + \frac{3i}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} \right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(i/\rho) e^{-i\rho} \left(1 - \frac{3i}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} \right)$

برای مسائل تابش مناسب‌اند زیرا رفتار آنها برای مقادیر بزرگ r به صورت زیر است

$$h_l^{(1)}(\kappa r) \xrightarrow{\kappa r \rightarrow \infty} \frac{(-i)^{l+1} e^{i\kappa r}}{\kappa r} \quad h_l^{(2)}(\kappa r) \xrightarrow{\kappa r \rightarrow \infty} \frac{i^{l+1} e^{-i\kappa r}}{\kappa r}$$

و بدین ترتیب به امواج کروی خروجی و ورودی منجر می‌شوند.

یک صورت کلی برای ψ می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\psi_m = \sqrt{\pi/2\kappa r} Z_l(\kappa r) P_l^m(\cos \theta) e^{\mp im\phi} \quad (97-17)$$

میدانهای برداری مربوط را می‌توان با استفاده از معادلات (۷۱-۱۷) و (۸۱-۱۷) برای امواج TE و از معادلات (۸۲-۱۷) و (۸۳-۱۷) برای امواج TM، به دست آورد. ساده‌ترین انتخاب جالب

برای ψ عبارت از ψ_{10} به صورت زیر است

$$\psi_{10} = \frac{1}{\kappa r} e^{i\kappa r} \left[1 + \frac{i}{\kappa r} \right] \cos \theta \quad (98-17)$$

گرادیان ψ_{10} برابر است با

$$\begin{aligned} \nabla \psi_{10} = \mathbf{a}_r e^{i\kappa r} \left[\frac{i}{r} - \frac{2}{\kappa r^2} - \frac{2i}{\kappa^2 r^3} \right] \cos \theta \\ - \mathbf{a}_\theta e^{i\kappa r} \left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (99-17)$$

قسمت مکانی میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi_{10} = -\mathbf{a}_\phi E_0 e^{i\kappa r} \left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{\kappa^2 r^2} \right] \sin \theta \quad (100-17)$$

که در آن E_0 را بدین علت معرفی کرده‌ایم که معادله از لحاظ بُعد صحیح باشد. سطوح فاز ثابت، $\kappa r = \text{const.}$ ، سطوحی کروی‌اند. (ولی سطوح دامنه ثابت کروی نیستند) وابستگی فضایی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= i \frac{1}{\omega} E_0 e^{i\kappa r} \left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \mathbf{a}_r \\ &\quad - i \frac{1}{\omega} E_0 e^{i\kappa r} \left[\frac{i}{r} - \frac{1}{\kappa r^2} - \frac{i}{\kappa^2 r^3} \right] \sin \theta \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (101-17)$$

همان‌طور که بعداً خواهیم دید، اینها درست میدانهای هستند (TE) که یک دوقطبی مغناطیسی تابش‌کننده ایجاد می‌کند. جالب توجه است که تنها آن قسمتهایی از \mathbf{E} و \mathbf{B} که با $1/r$ متناسب‌اند در تابش خالص دخالت می‌کنند. از بقیه جملات، جملاتی در بردار پوئینتینگ به دست می‌آید که سریع‌تر از $1/r^2$ کاهش می‌یابند و نتیجتاً انتگرال آنها روی سطوح کروی هنگامی که شعاع این سطوح به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، صفر می‌شود. پاسخهای امواج کروی در مطالعه تابش از چشمه‌های کراندار، که در فصل ۲۰ آن را از دیدگاه دیگری بررسی خواهیم کرد، کاربرد دارند.

۱۷-۶ خلاصه مطالب

پاسخهای موج عرضی معادلات ماکسول به ساده‌ترین نحو برحسب امواج تخت بیان می‌شوند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}$$

این پاسخها، مادامی که $\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ باشد، برای هر فرکانس ω و هر دامنه $\hat{\mathbf{E}}$ وجود دارند. اندازه $\boldsymbol{\kappa}$ از رابطه پاشندگی عرضی تعیین می‌شود، هر چند که جهت آن دلخواه است. بردار $\boldsymbol{\kappa}$ (قسمت حقیقی) جهت انتشار و طول موج ($\lambda = 2\pi/\boldsymbol{\kappa}$) را مشخص می‌کند. میدان مغناطیسی موج را سایر کمیتها تعیین می‌کنند.

• در خلأ رابطه پاشندگی عبارت است از

$$\boldsymbol{\kappa} = \omega/c$$

که در آن $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ سرعت نور است. بردارهای \mathbf{B} ، \mathbf{E} ، $\boldsymbol{\kappa}$ یک مجموعه متعامد راستگرد را تشکیل می‌دهند. اندازه \mathbf{B} در هر لحظه از زمان عبارت است از

$$B = E/c$$

اگر دو مؤلفه \mathbf{E} (در صفحه عمود بر $\boldsymbol{\kappa}$) همفاز باشند، قطبش خطی است؛ اگر غیرهمفاز باشند قطبش بیضوی است. رابطه بین اندازه بردار پوئین تینگ و چگالی انرژی u عبارت است از

$$S = cu$$

و جهت S در امتداد $\boldsymbol{\kappa}$ است.

• در یک محیط دی‌الکتریک خطی (نارسانا و غیرمغناطیسی)، تمام نتایج بالا معتبر است مشروط بر آنکه c/n را به جای c بگذاریم. در چنین محیطی ضریب شکست n با ثابت دی‌الکتریک K به صورت زیر مربوط می‌شود

$$n = \sqrt{K}$$

(در یک محیط مغناطیسی خطی داریم، $n = \sqrt{KK_m}$ ولی این تعمیم کاربرد چندانی ندارد.)

• در یک محیط رسانا تمام نتایج بالا به‌طور صوری معتبرند مشروط بر آنکه به جای K از ثابت دی‌الکتریک مختلط \hat{K} استفاده شود که

$$\hat{K} = K + ig/\epsilon_0 \omega = K_r + iK_i$$

پیامد این امر آن است که ضریب شکست

$$\hat{n} = n + ik$$

و بردار انتشار

$$\hat{\kappa} = \kappa_r + i\kappa_i$$

نیز هر دو مختلط‌اند. موج تضعیف می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

در ساده‌ترین حالت، $\kappa_r = n\omega/c$ ، $\kappa_i = k\omega/c$ ؛ ولی در حالت کلی تمام روابط فیزیکی پیچیده‌تر هستند.

• به‌طور کلی

$$\hat{K} = \hat{n}^2$$

رابطهٔ بین ثابتهای اپتیکی حقیقی و ثابتهای دی‌الکتریک حقیقی عبارت‌اند از

$$K_r = n^2 - k^2, \quad K_i = 2nk$$

و معکوس این روابط را نیز می‌توان به‌طور صریح نوشت. نتیجه پیچیده است، مگر آنکه موارد حدی خاصی کاربرد داشته باشند، که معمولاً دارند.

• برای رساناها طول تضعیف

$$\delta = c/\omega k = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\pi}$$

که عمق پوسته نیز نامیده می‌شود، مهم است. می‌توان انتظار داشت که تقریب زیر

$$n \cong k \cong \sqrt{g/2\epsilon_0 \omega}$$

لااقل برای رساناهای نسبتاً خوب، در فرکانسهای کمتر از گسترهٔ فرسوخ، معتبر باشد، به‌طوری‌که

$$\delta \cong \sqrt{2/\mu_0 \omega g}$$

در اینجا برای g می‌توان رسانندگی dc را به‌کار برد.

• غیر از امواج تخت، جالب‌ترین مجموعه پاسخهای موج برداری عرضی، امواج کروی هستند.

این امواج بسیار پیچیده‌ترند، ولی در مسائل تابش کاربرد دارند.

۱-۱۷ اگر $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ باشد که در آن \mathbf{A} ثابت است، نشان دهید

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F} = i\mathbf{k} \times \mathbf{F}$$

۲-۱۷ نشان دهید برای موج تخت در خلأ داریم

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

این مقاومت را مقاومت ظاهری خلأ می‌نامند.

۳-۱۷ دو موج تخت ω ، \mathbf{k} ، و دامنه E یکسانی دارند ولی قطبش دایره‌ای آنها عکس یکدیگر است (چپ و راست). نشان دهید که از برهم‌نهی این دو موج، موجی با قطبش خطی و دامنه $2E$ به دست می‌آید.

۴-۱۷ به ازای $E_s = 2E_p$ با $\phi = 30^\circ$ و با $\phi = 60^\circ$ شکلی مانند شکل ۱-۱۷ رسم کنید.

۵-۱۷ زمین تقریباً 130° W/m^2 انرژی تابشی از خورشید دریافت می‌کند. با فرض آنکه این انرژی به صورت موج تکفامی با قطبش تخت باشد و با فرض فرود عمودی، اندازه بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

۶-۱۷ فرض کنید \mathbf{A} و \mathbf{B} بردارهای مختلطی هستند. (الف) کمیت $\text{Re } \mathbf{A} \cdot \text{Re } \mathbf{B}$ را محاسبه و با $\text{Re}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ مقایسه کنید. (ب) نشان دهید که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ایجاب نمی‌کند که $\text{Re } \mathbf{A} \cdot \text{Re } \mathbf{B} = 0$ باشد.

۷-۱۷ دو موج تخت را در خلأ در نظر بگیرید که ω ، \mathbf{k} ، و جهت قطبش p یکسانی دارند ولی دامنه‌ها و فازهای آنها متفاوت است: E_1 ، E_2 ، ϕ . میانگین زمانی بردار پوئین‌تینگ \mathbf{S} مربوط به برهم‌نهی این دو موج را محاسبه کنید. به اثر تداخل ناشی از اختلاف فاز ϕ توجه کنید. چنانچه جهتهای قطبش دو موج بر یکدیگر عمود بود، این اثر رخ نمی‌داد.

۸-۱۷ یک موج ایستا را در خلأ در نظر بگیرید که از برهم‌نهی دو موج با فرکانس، دامنه، و قطبش خطی یکسان، ولی با جهت انتشار \mathbf{k} مخالف تشکیل شده است. (الف) بردار پوئین‌تینگ $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ دو موج برهم‌نهاد را محاسبه کنید. (توجه کنید که مبدأ دلخواه نیست). (ب) مقدار $\overline{\mathbf{S}}$ چقدر است؟

۹-۱۷ برای موجی تخت در محیطی رسانا، داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{n}}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E}$$

فرض کنید \mathbf{E} قطبش بیضوی دارد و $\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. ثابت کنید در هر لحظه از زمان

$$\operatorname{Re} \mathbf{E} \cdot \operatorname{Re} \mathbf{B} = -\frac{k}{c} E_p E_s \sin \phi$$

۱۷-۱۰ برای فلزات در ناحیه طیفی فروسرخ، در فرکانس $\omega = g/(-\varepsilon) \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ داریم $K_i = -K_r$. برای این حالت ثابت اپتیکی n و k را برحسب K_i محاسبه کنید.

۱۷-۱۱ برای دی‌الکتریک‌های زیاد جذب‌کننده می‌شود، یا برای یک نیم‌رسانا داریم $K_i = K_r$. برای این مورد n و k را برحسب K_r محاسبه کنید. نسبت طول تضعیف به طول موج، δ/λ را پیدا کنید.

۱۷-۱۲ نشان دهید که در محیطی تقریباً شفاف با ضریب شکست n ، طول تضعیف δ به صورت زیر به رسانندگی g مربوط است.

$$\delta = \frac{2n}{g\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}$$

در اینجا $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\Omega$.

۱۷-۱۳ بردار پوئین‌تینگ که متناسب با E^2 است، به صورت $e^{-\alpha z}$ افت می‌کند. در اینجا $\alpha = 2/\delta$ ضریب جذب نامیده می‌شود. افت توان را غالباً برحسب دسی‌بل بر متر (dB/m) بیان می‌کنند و بنا بر تعریف یک دسی‌بل ده برابر لگاریتم معمولی نسبت شار انرژی اولیه به نهایی در واحد سطح است.

(الف) نشان دهید $4.34\alpha \text{ dB/m}$ = افت توان. (ب) از نتیجه مسئله ۱۷-۱۲، محاسبه کنید که رسانندگی (اپتیکی نه dc) یک محیط مخابرات امواج نوری چه مقدار باید باشد تا آنکه افت توانی کمتر از 1 dB/km حاصل شود. فرض کنید ضریب شکست $n = 1.5$ است.

۱۷-۱۴ فرض کنید ثابت دی‌الکتریک $K = 0$ است. (الف) نشان دهید معادلات ماکسول بدون چگالیهای بار خارجی و جریان، پاسخی به صورت موج طولی دارند که در آن $\mathbf{H} = 0$ و $\kappa \times \mathbf{E} = 0$ ، ولی $\kappa \cdot \mathbf{E} \neq 0$. (ب) نشان دهید که چگالی بار قطبشی به مقدار $\rho_p = ik\varepsilon_0 E$ وجود خواهد داشت. (معادله $K(\kappa, \omega) = 0$ ، را رابطه پاشندگی طولی می‌نامند).

۱۷-۱۵ بنا بر مکانیک کوانتومی، انرژی فوتون hf است که در آن h ثابت پلانک برابر است با $6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$. باریکه‌ای از نور مرئی در خلا ($f = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$) بر روی سطح مقطعی به مساحت 1 میلی‌متر مربع کانونی شده است و تقریباً یک موج تخت طویل است. اگر میدان الکتریکی موج یک ولت بر متر باشد، طول قطار موج هر "فوتون" را محاسبه کنید.

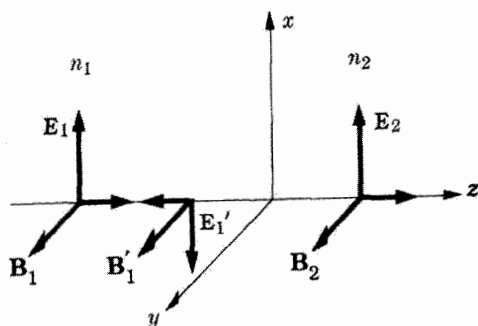
۱۷-۱۶ عمق پوسته در فلز جیوه در $f = 10^5 \text{ Hz}$ چقدر است؟

امواج تکفام در ناحیه‌های مرزدار

اکنون می‌خواهیم از پاسخهای معادلات ماکسول که در فصل قبل به دست آمد، برای حل مسائلی که از نظر عملی مورد توجه‌اند، استفاده کنیم. دو ردهٔ عمومی از مسائل را مطالعه خواهیم کرد: مسائل با مقادیر مرزی، و تابش از توزیعهای جریان و بار الکتریکی مشخص. در ردهٔ اول، پاسخهای معادلهٔ موج همگن را طوری ترکیب می‌کنیم که در شرایط مرزی مناسب صدق کنند. در ردهٔ دوم، پاسخهای معادلهٔ موج ناهمگن با چشمه‌های مشخص را لازم داریم و شرایط مرزی تا حدود زیادی نادیده گرفته می‌شوند، به جز آنکه بر مطالبی از این قبیل اصرار خواهیم ورزید که امواج خروجی باشند و میدانها در فواصل زیاد به نسبت $1/2$ تضعیف شوند. مسائل ردهٔ اول موضوع این فصل است. مسائل ردهٔ دوم در فصل ۲۰ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۱-۱۸ بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود عمودی
 امواج الکترومغناطیسی در حال انتشار در مواد^۱ معمولاً از مرز بین ماده و محیطی دیگر (مثلاً هوا یا خلأ) وارد ماده می‌شوند. بررسی این مسئله مستلزم کاربرد شرایط مرزی است که در

۱. در این فصل فرض می‌کنیم مواد همگی خطی‌اند.



شکل ۱-۱۸ بازتاب و انتقال در فرود عمودی.

فصل ۱۶ به دست آوردیم. این بررسی را با ساده‌ترین مورد ممکن آغاز می‌کنیم: موج تختی که به‌طور عمود بر فصل مشترک تخت یک دی‌الکتریک فرود می‌آید. تجربه به ما می‌گوید که موج فرودی با یک موج بازتابیده و یک موج انتقال‌یافته همراه خواهد بود؛ در واقع، خواهیم دید که تنها در صورت حضور این دو موج است که شرایط مرزی برقرار می‌شوند. در اینجا نیز ما تنها محیط‌های غیرمغناطیسی را بررسی خواهیم کرد و میدانها را به جای \mathbf{H} برحسب \mathbf{B} توصیف خواهیم کرد. هر سه موج مقیدند که در روابط بین \mathbf{E} و \mathbf{B} که در بخش ۱۷-۱ به دست آوردیم، صدق کنند. این وضع در شکل ۱-۱۸ توصیف شده است.

در این شکل $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ توصیف‌کننده موج فرودی است که در جهت مثبت z حرکت می‌کند، $\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1$ توصیف‌کننده موج بازتابیده‌ای است که در جهت منفی z حرکت می‌کند، و $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ توصیف‌کننده موج انتقال‌یافته است. فصل مشترک منطبق بر صفحه xy در $z = 0$ در نظر گرفته می‌شود که محیط ۱ در طرف چپ آن و محیط ۲ در طرف راست آن است. میدانهای الکتریکی، که در ابتدا فرض می‌شود در جهت x به‌طور خطی قطبی شده‌اند با روابط زیر توصیف می‌شوند

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= i E_{1x} e^{i(\kappa_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -i E'_{1x} e^{-i(\kappa_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= i E_{2x} e^{i(\kappa_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (1-18)$$

که در آن

$$\kappa_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \text{و} \quad \kappa_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (2-18)$$

و n_1 و n_2 ضریب شکست دو محیط است. از معادله (۱۷-۲۲)، یعنی

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}}$$

که در آن برای این مورد برای امواج فرودی و انتقالی $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ و برای موج بازتابیده $\mathbf{u} = -\mathbf{k}$ میدانهای مغناطیسی وابسته به میدانهای الکتریکی در معادله (۱۸-۱) به دست می‌آیند. نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned} c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{j} n_1 E_{1x} e^{i(\kappa_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{j} n_1 E'_{1x} e^{-i(\kappa_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{j} n_2 E_{2x} e^{i(\kappa_2 z - \omega t)} \end{aligned} \quad (3-18)$$

واضح است که امواج بازتابیده و انتقالی چنانچه بخواهیم شرایط مرزی در $z = 0$ برای تمام مقادیر t صادق باشند، باید با موج فرودی فرکانس یکسانی، ω داشته باشند. از آنجا که مؤلفه‌های عمودی میدانها صفرند، تنها لازم است که شرایط مرزی بر روی مؤلفه مماسی میدانها در نظر گرفته شوند. میدان E باید در مرز پیوسته باشد. بنابراین، از معادله (۱۸-۱) در $z = 0$ داریم

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \quad (4-18)$$

میدان H نیز باید پیوسته باشد، و برای محیطهای غیرمغناطیسی ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) میدان B نیز باید پیوسته باشد

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x} \quad (5-18)$$

معادلات (۴-۱۸) و (۵-۱۸) را می‌توان تماماً برای E'_{1x} و E_{2x} برحسب دامنه داده شده موج فرودی E_{1x} حل کرد

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}, \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}$$

نسبتهای دامنه‌های امواج بازتابیده و انتقالی به دامنه فرودی کلاً توسط ضریبهای شکست دو محیط تعیین می‌شوند. این دامنه‌ها به نوبه خود از طریق معادله (۳-۱۸) دامنه‌های میدانهای مغناطیسی را تعیین می‌کنند.

از آنجا که تنها نسبتها تعیین می‌شوند، مناسب است که علامتهای خاصی برای آنها معرفی کنیم

$$\frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = r_{12}, \quad \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = t_{12} \quad (6-18)$$

r_{12} و t_{12} به ترتیب، ضرایب فرنل بازتاب و انتقال برای فرود عمودی، نامیده می‌شوند. شاخصها نشان می‌دهند که موج از محیط ۱ به محیط ۲ فرود می‌آید. بدین ترتیب پاسخ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$r_{12} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (7-18)$$

چیزی را که معمولاً می‌توان اندازه‌گیری کرد میدانهای الکتریکی بازتابیده و انتقال یافته نیست، بلکه میانگین شارهای انرژی بازتابیده و انتقال یافته در واحد سطح است. این کمیتها با بردار پوئین تینگ داده می‌شوند و به شدت موج معروف‌اند. بنا بر معادلات (۱۷-۳۴) و (۱۷-۳۶)، در هر یک از دو محیط برای هر قطبش داریم

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \quad (8-18)$$

در اینجا بنا بر انتخاب ما، $E_s = 0$ و $E_p = E_x$.

حال ضریب بازتاب، R_n و ضریب انتقال، T_n ، را برای فرود عمودی بر حسب نسبت شدتها تعریف می‌کنیم

$$\frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1} = R_n, \quad \frac{\bar{S}'_2}{\bar{S}_1} = T_n, \quad (9-18)$$

پس، بنا بر معادلات (۱۸-۶) و (۱۸-۸) داریم

$$R_n = r_{12}^2 \quad \text{و} \quad T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \quad (10-18)$$

با توجه به آنکه ضرایب فرنل با معادله (۱۸-۷) داده می‌شوند، ضرایب بازتاب و انتقال در معادله (۱۸-۱۰)، برای هر دو محیطی از محیطهای نارسانا، در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$R_n + T_n = 1 \quad (11-18)$$

این رابطه بیان بقای انرژی در فصل مشترک است.

تاکنون فقط تابش قطبیده خطی را بررسی کردیم. اگر موج فرودی به طور بیضوی قطبیده باشد، باید علاوه بر مؤلفه‌های x در هر یک از محیطها مؤلفه‌های عمود $\hat{E}_y = \hat{E}_s$ را نیز در نظر بگیریم. این مؤلفه‌ها نیز در معادله‌هایی مانند (۱۸-۶)، با همان ضرایب فرنل، صدق می‌کنند. سه

مؤلفه y همگی با یکدیگر همفازند، هر چند که با سه مؤلفه x اختلاف فاز دارند. از معادله (۸-۱۸) می‌بینیم که شدتهای وابسته به مؤلفه‌های x (مؤلفه‌های p) و مؤلفه‌های y (مؤلفه‌های s) بدون توجه به اختلاف فاز بین این مؤلفه‌ها، یعنی بدون توجه به درجه قطبش بیضوی، به‌طور ساده با هم جمع می‌شوند

$$\bar{S} = \bar{S}_p + \bar{S}_s \quad (۱۲-۱۸)$$

بنابراین، معادله‌های (۹-۱۸) تا (۱۱-۱۸) به‌طور جداگانه برای هر یک از مؤلفه‌های قطبش و همچنین برای شدتهای کل معتبرند.

برای فصل مشترک هوا-شیشه که در آن $n_1 = ۱$ و $n_2 = ۱.۵$ است، ضریبهای بازتاب و انتقال عبارت‌اند از

$$R_n = ۰.۰۴, \quad T_n = ۰.۹۶$$

بنابراین، همان‌طور که از معادله (۱۱-۱۸) انتظار می‌رفت، تمام انرژی فرودی یا باز می‌تابد یا انتقال می‌یابد — هیچ جایی برای ذخیره انرژی در فصل مشترک وجود ندارد. حقیقت جالب توجه دیگری از بررسی معادله (۶-۱۸) به‌دست می‌آید و آن این است که اگر n_2 بزرگتر از n_1 باشد، نسبت اول یعنی $r_{۱۲}$ مثبت است و در مرز $E'_{۱x}$ با $E_{۱x}$ همفاز است.

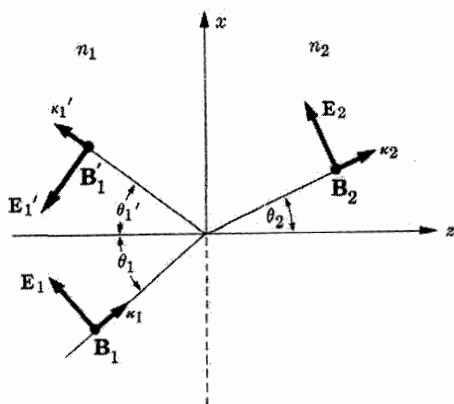
به‌عنوان دومین مثال، در آب برای نور مرئی $n_2 = ۱.۳۳$ ، پس $R_n = ۰.۰۲$ است. ولی برای فرکانسهای کمتر از $۱۰^{۱۱} \text{ s}^{-۱} \approx \omega$ ثابت دی‌الکتریک $K_2 = ۸۱$ است. برای فرکانسهای رادیویی، آب خالص تقریباً مانند یک نارسانا است (حالت ۱ در بخش ۴-۱۷) و لذا $n_2 = \sqrt{K_2} = ۹$ ، پس

$$R_n = ۰.۶۴$$

همان‌طور که در بخش ۴-۱۸ خواهیم دید برای آب دریا که رسانای بهتری است، ضریب بازتاب از این هم بسیار بزرگتر است.

۱۸-۲ بازتاب و شکست در مرز دو محیط نارسانا: فرود مایل

یک حالت عمومی‌تر از حالتی که در بخش قبل بحث شد، عبارت است از بازتاب امواج تخت از فصل مشترک یک عایق در حالتی که این امواج به‌طور مایل فرود بیایند. با مطالعه این حالت به سه قانون مشهور نور می‌رسیم: قانون اسنل^۱، قانون بازتاب، و قانون بروستر^۲ که حاکم بر قطبش ناشی از بازتاب است.



شکل ۲-۱۸ بازتاب و شکست — فرود مایل. صفحه xz صفحه فرود است. بردارهای B_1 ، B_1' و B_2 به طرف خارج از صفحه کتاب امتداد دارند.

وضعیت مورد بحث، در شکل ۲-۱۸ توصیف شده است و مربوط به حالتی است که بردارهای انتشار κ_1 ، κ_1' و κ_2 هم صفحه‌اند و همگی در صفحه xz قرار دارند و بردارهای میدان الکتریکی E_1 ، E_1' و E_2 نیز در این صفحه قرار گرفته‌اند.^۱ میدانهای الکتریکی امواج فرودی، بازتابیده و انتقال یافته با معادلات زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} E_1 &= \hat{E}_{1p} e^{i(\kappa_1 \cdot r - \omega t)} \\ E_1' &= \hat{E}_{1p}' e^{i(\kappa_1' \cdot r - \omega t)} \\ E_2 &= \hat{E}_{2p} e^{i(\kappa_2 \cdot r - \omega t)} \end{aligned} \quad (۱۳-۱۸)$$

که در آن $\hat{E}_{2p} = \hat{E}_{2p} p_2$ ، $\hat{E}_{1p}' = \hat{E}_{1p}' p_1'$ ، $\hat{E}_{1p} = \hat{E}_{1p} p_1$ از آن $\kappa_1 = \kappa_1 u_1$ و مانند آن، و بردار یکه عمود بر مرز $n = k$ است. صفحه‌ای که با κ_1 و n تعریف می‌شود صفحه فرود نامیده می‌شود، و بردار عمود بر آن صفحه در جهت $n \times \kappa_1$ است. در حقیقت، $j = (n \times \kappa_1) / |n \times \kappa_1|$ بردار یکه در جهت y است. مؤلفه p قطبش چنان انتخاب شده است که به موازات صفحه فرود قرار داشته باشد (نماد p برای «موازی»). در حالت کلی یک مؤلفه s (که در شکل ۲-۱۸ نشان داده نشده است) نیز برای دامنه هر یک از امواج وجود دارد $\hat{E}_{2s} = \hat{E}_{2s} s_2$ ، $\hat{E}_{1s}' = \hat{E}_{1s}' s_1'$ ، $\hat{E}_{1s} = \hat{E}_{1s} s_1$ برای هر یک از سه موج داریم $p = s \times u$ و $s = u \times p$ بنابراین،

$$s_1 = s_1' = s_2 = j \quad (۱۴-۱۸)$$

۱. ثابت خواهیم کرد که بردارهای انتشار همواره هم صفحه‌اند. کلی‌ترین بردار میدان الکتریکی را می‌توان به یک مؤلفه در صفحه xz (صفحه فرود) و یک مؤلفه عمود بر این صفحه تجزیه کرد. بازتاب و انتقال این دو مؤلفه از قوانین متفاوتی پیروی می‌کنند. انتخابی که در بالا شده است، برای به‌دست آوردن قانون بروستر است.

مؤلفه‌های s بر صفحهٔ فرود عمودند (نماد s برای لغت آلمانی "senkrecht" به معنای عمود است).

برای تابش مایل از معادلهٔ (۱۸-۱۳) روشن است که نه تنها امواج بازتابیده و انتقال یافته باید با موج فرودی فرکانس یکسانی داشته باشند، بلکه در تمام نقاط روی مرز فازها نیز باید با یکدیگر مطابقت داشته باشند، یعنی، برای هر بردار \mathbf{r}_0 روی مرز داریم

$$\kappa'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \kappa_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \kappa_2 \cdot \mathbf{r}_0. \quad (15-18)$$

این شرط به شرایط مرزی دقیق بستگی ندارد و سه پیامد جالب دارد. اولین پیامد آن است که چهار بردار κ_1 , κ'_1 , κ_2 و \mathbf{n} همگی هم‌صفحه‌اند. برای اثبات این مطلب اتحاد برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \quad (11-1)$$

اگر \mathbf{n} یک بردار یکه و \mathbf{R} عمود بر \mathbf{n} باشد، همان‌طور که برای بردار عمود بر فصل مشترک تخت و بردار \mathbf{r}_0 چنین است،

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0) = -\mathbf{r}_0.$$

با نوشتن این عبارت برای \mathbf{r}_0 در معادلهٔ (۱۸-۱۵) و جابه‌جا کردن ضرب نرده‌ای با اولین ضرب برداری نتیجه زیر به دست می‌آید

$$(\kappa_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0) = (\kappa'_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0) = (\kappa_2 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0)$$

چون \mathbf{r}_0 یک بردار اختیاری در روی مرز است، $\mathbf{n} \times \mathbf{r}_0$ نیز اختیاری است (طولش برابر طول \mathbf{r}_0 است ولی جهتش عمود بر آن است). نتیجتاً داریم،

$$\mathbf{n} \times \kappa_1 = \mathbf{n} \times \kappa'_1 = \mathbf{n} \times \kappa_2 \quad (16-18)$$

بردار یکه \mathbf{n}' صفحهٔ فرود را تعریف می‌کند، $\mathbf{n}' = (\mathbf{n} \times \kappa_1) / |\mathbf{n} \times \kappa_1| = \mathbf{j}$. صفحهٔ فرود صفحه‌ای است که بر \mathbf{n}' عمود است، یا به‌طور معادل صفحه‌ای است که \mathbf{n} و κ_1 را در بر می‌گیرد. از آنجا که برای هر دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} داریم $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ ، چنانچه معادلهٔ (۱۸-۱۶) را به ترتیب با κ_1 , κ'_1 , κ_2 و \mathbf{n} ضرب نرده‌ای بکنیم، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$\kappa_1 \cdot (\kappa_1 \times \mathbf{n}) = \kappa'_1 \cdot (\kappa_1 \times \mathbf{n}) = \kappa_2 \cdot (\kappa_1 \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\kappa_1 \times \mathbf{n}) = 0$$

بنابراین، چهار بردار $\kappa_1, \kappa'_1, \kappa_2$ و \mathbf{n}' همگی بر \mathbf{n} عمودند. در نتیجه این چهار بردار همگی در صفحهٔ فرود قرار دارند و هم‌صفحه‌اند.

نتیجهٔ دوم معادلهٔ (۱۵-۱۸) آن است که زاویهٔ فرود با زاویهٔ بازتاب برابر است. زاویهٔ فرود θ_1 با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\kappa_1 \cdot \mathbf{n} = \kappa_1 \cos \theta_1$$

و همچنین

$$\kappa'_1 \cdot \mathbf{n} = -\kappa'_1 \cos \theta'_1$$

$$\kappa_2 \cdot \mathbf{n} = \kappa_2 \cos \theta_2 \quad (۱۷-۱۸)$$

بنابراین

$$|\kappa_1 \times \mathbf{n}| = \kappa_1 \sin \theta_1$$

$$|\kappa'_1 \times \mathbf{n}| = \kappa'_1 \sin \theta'_1$$

$$|\kappa_2 \times \mathbf{n}| = \kappa_2 \sin \theta_2$$

و آنگاه معادلهٔ (۱۶-۱۸) ایجاب می‌کند که

$$\kappa'_1 \sin \theta'_1 = \kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_2 \sin \theta_2$$

بزرگی κ'_1 مربوط به موج بازتابیده برابر با بزرگی κ_1 مربوط به موج فرودی است، زیرا این دو موج با فرکانس یکسانی در محیطی یکسان انتشار می‌یابند. بدین ترتیب

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1$$

یا

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (۱۸-۱۸)$$

سومین پیامد قانون اسنل است. این قانون نیز از استدلال قبل و با استفاده از رابطهٔ پاشندگی،

معادلهٔ (۲-۱۸) برای تغییر κ ها به n ها نتیجه می‌شود. نتیجه عبارت است از قانون اسنل

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (۱۹-۱۸)$$

(برای ارجاعات آینده متذکر می‌شویم که هیچ‌یک از این اثباتهای جبری به اینکه محیط یک رسانه

یا یک دی‌الکتریک کامل است، بستگی ندارد. هر چند که چنانچه محیط رسانا باشد بردار انتشار مختلط خواهد بود. برای تعبیر صحیح معنای معادلات مختلط حاصل می‌بایست دقت به عمل آید.)

هیچ‌یک از این سه نتیجه به شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی که از معادلات ماکسول به دست آمدند، بستگی ندارند. دو نتیجه اول برای هر نوع موجی صادق است؛ نتیجه سوم، قانون اسنل، به رابطه خاص پاشندگی برای امواج بستگی دارد.

برای به دست آوردن ضرایب فرنل که نسبت دامنه‌های میدان را برای فرود مایل می‌دهند، ما به شرایط مرزی روی مؤلفه‌های مماسی میدانها نیاز داریم. (شرایط روی مؤلفه‌های عمودی خودبه‌خود برآورده خواهند شد) برای آنکه مؤلفه مماسی دامنه میدان E را به صورت برداری بیان کنیم، اتحاد برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}) = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \mathbf{n} - \hat{\mathbf{E}}$$

یا

$$\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}})$$

از آنجا که $(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \mathbf{n}$ درست همان مؤلفه عمودی $\hat{\mathbf{E}}$ است، جمله باقیمانده $(-\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}))$ باید مؤلفه مماسی $\hat{\mathbf{E}}$ باشد. پس شرط مرزی روی میدانهای E ، پس از حذف توابع نمایی [به دلیل معادله (۱۸-۱۵)] و حذف $\mathbf{n} \times$ ، تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}'_1) = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_2 \quad (20-18)$$

چون فرض می‌کنیم محیطها غیرمغناطیسی‌اند، لازم است مؤلفه مماسی میدان B نیز پیوسته باشد

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}'_1) = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{B}}_2 \quad (21-18)$$

دو معادله ماکسول که شامل تاوند در هر محیط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را به یکدیگر مربوط می‌کنند. با استفاده از روابط پاشندگی، معادله (۲-۱۸)، این معادله‌ها به صورت معادله (۱۷-۲۲) در می‌آیند

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (22-18)$$

یا به طور معادل به صورت زیر در می‌آیند

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{c}{n} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{B}} \quad (23-18)$$

اگر، برای مثال، معادله (۲۲-۱۸) را در معادله (۲۱-۱۸) بگذاریم، خواهیم داشت

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \hat{\mathbf{E}}'_1) = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \hat{\mathbf{E}}_2) \quad (24-18)$$

معادله‌های (۲۰-۱۸) و (۲۴-۱۸) یک جفت معادله برداری هستند که باید برای $\hat{\mathbf{E}}_2$ و $\hat{\mathbf{E}}'_1$ برحسب $\hat{\mathbf{E}}_1$ حل شوند. ضربهای سه‌گانه برداری را می‌توان بسط بدهیم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_1) = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) \hat{\mathbf{E}}_1$$

و به‌طور مشابه برای سایر ضربهای سه‌گانه. برای مؤلفه s ، یعنی $\hat{\mathbf{E}}_{1s}$ ، داریم $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{1s} = 0$ و رابطه فوق بسیار ساده می‌شود

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_{1s}) = -\cos \theta_1 \hat{\mathbf{E}}_{1s}$$

زیرا بنا بر معادله (۱۷-۱۸)، $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \cos \theta_1$ است. بنابراین مؤلفه s معادله (۲۴-۱۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$n_1 (\cos \theta_1 \hat{\mathbf{E}}_{1s} - \cos \theta'_1 \hat{\mathbf{E}}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{E}}_{2s}$$

و چون $\theta'_1 = \theta_1$ است، پس

$$n_1 \cos \theta_1 (\hat{\mathbf{E}}_{1s} - \hat{\mathbf{E}}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{E}}_{2s} \quad (25-18)$$

از ضرب برداری \mathbf{n} در معادله (۲۰-۱۸) برای مؤلفه s ، نتیجه می‌شود

$$\hat{\mathbf{E}}_{1s} + \hat{\mathbf{E}}'_{1s} = \hat{\mathbf{E}}_{2s} \quad (26-18)$$

برای مؤلفه p نمی‌توان معادلات را این چنین ساده کرد، و لذا این امر موجب می‌شود که دو مؤلفه قطبش را به‌طور جداگانه بررسی کنیم. از قرار دادن معادله (۲۳-۱۸) در معادله (۲۰-۱۸) ساده‌سازی متناظری برای قطبش p به‌دست خواهد آمد.

۱. قطبش s . دستگاه معادله‌های (۲۵-۱۸) و (۲۶-۱۸) را می‌توان به‌سادگی حل کرد. نتیجه

عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = r_{12s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{2s} = t_{12s} \hat{\mathbf{E}}_{1s} \quad (27-18)$$

که در آن

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (28-18)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (29-18)$$

۲. قطبش p . هنگامی که بردارهای E همگی در صفحهٔ فرود قرار داشته باشند، معادلهٔ (۲۲-۱۸) نشان می‌دهد که بردارهای B ی متناظر آنها همگی در امتداد جهت s قرار دارند. انتخاب بردارهای E در شکل ۲-۱۸ به‌گونه‌ای انجام شد که تمام بردارهای B ی متناظر رو به جهت z باشند. این بار معادلهٔ (۲۳-۱۸) را در معادلهٔ (۲۰-۱۸) قرار می‌دهیم. چون

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{1s} = 0 = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{2s}$$

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\hat{\mathbf{B}}_{1s} - \hat{\mathbf{B}}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \hat{\mathbf{B}}_{2s} \quad (30-18)$$

همچنین، معادلهٔ (۲۱-۱۸) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\hat{\mathbf{B}}_{1s} + \hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \hat{\mathbf{B}}_{2s} \quad (31-18)$$

پاسخ معادله‌های (۳۰-۱۸) و (۳۱-۱۸) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\hat{\mathbf{B}}'_{1s} = r_{12p} \hat{\mathbf{B}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \hat{\mathbf{B}}_{1s} \quad (32-18)$$

که در آن

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (33-18)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (34-18)$$

معادلهٔ (۳۲-۱۸) را بدان علت به طریق بالا نوشتیم که با محاسبهٔ اندازهٔ بردارهای E از معادلهٔ (۲۳-۱۸)، نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم

$$\hat{E}'_{1p} = r_{12p} \hat{E}_{1p}, \quad \hat{E}_{2p} = t_{12p} \hat{E}_{1p} \quad (35-18)$$

حال با این ضرایب فرنل پاسخ کاملی برای مسئله مقدار مرزی داریم، زیرا هر موجی فرودی با قطبشی دلخواه را می‌توان به مؤلفه‌های p و s تجزیه کرد. باید تأکید کنیم که واژه‌های قطبش p و s همیشه به جهت بردار E مربوط می‌شوند.^۱

برای فرود عمودی $\theta_1 = 0^\circ$ و همچنین، بنا بر قانون اسنل، $\theta_2 = 0^\circ$. بنابراین معادله‌های (۱۸-۳۳) تا (۱۸-۳۵) به معادله‌های (۱۸-۶) و (۱۸-۷) برای فرود عمودی تبدیل می‌شوند. معادله (۱۸-۲۹) با معادله (۱۸-۳۴) یکی می‌شود، ولی از معادله (۱۸-۲۸) می‌بینیم که برای فرود عمودی $n_2 \sin \theta_2 = -n_1 \sin \theta_1$ است. برای فرود عمودی صفحه فرود تعریف نشده است، و بنابراین نتیجه فیزیکی باید مستقل از جهت قطبش باشد. اختلاف تنها بدین علت بروز می‌کند که در شکل ۱۸-۲ هنگامی که θ_1 صفر شود E_{1p} و E'_{1p} در جهات عکس یکدیگر خواهند بود، در صورتی که E_{1s} و E'_{1s} هم‌جهت خواهند بود. برای قطبش p این ضرایب تنها روابطی هستند بین بزرگی آنها، معادله (۱۸-۳۵)، چون بردارهای E برای فرود مایل هر یک در جهت متفاوتی قرار دارند. با استفاده از قانون اسنل می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1}$$

و بدین وسیله ضرایب فرنل را کلاً برحسب پارامترهای ماده، n_1 ، n_2 و زاویه فرود مفروض، θ_1 ، بیان کنیم. از ضرایب فرنل روابط بین شدتها را نیز می‌توان به دست آورد. البته هر یک از دو جهت قطبش باید جداگانه بررسی شود. ضریب بازتاب و ضریب انتقال را به صورت نسبت میانگین زمانی مؤلفه عمود بر فصل مشترک بردارهای پوئینتینگ مربوطه به مؤلفه عمود بردار پوئینتینگ فرودی، تعریف می‌کنیم.^۲

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}'_{1s}}{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{1s}}, \quad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{2s}}{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{1s}} \quad (۱۸-۳۶)$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}'_{1p}}{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{1p}}, \quad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{2p}}{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{1p}} \quad (۱۸-۳۷)$$

۱. در کتابهای اپتیک قدیمی، با واژه "صفحه قطبش" نیز برخورد می‌کنیم، که طبق تعریف صفحه حاوی بردار B و بردار انتشار است، ما از به کار بردن این واژه کلاً احتراز خواهیم کرد.

۲. در محیط ۱ داریم $\mathbf{S} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) \times (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_1)$ می‌توان نشان داد که در محیطی نارسانا (تنها موردی که بررسی خواهیم کرد)

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}'_1 + \mathbf{E}'_1 \times \mathbf{H}_1) = 0$$

به طوری که $\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{S}}_1 + \bar{\mathbf{S}}'_1)$ و جدا ساختن بردارهای پوئینتینگ با معناست.

برحسب ضرایب فرنل داریم^۱

$$R_s = r_{12s}^2, \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (38-18)$$

$$R_p = r_{12p}^2, \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (39-18)$$

بنابراین اتحادهای

$$R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \quad (40-18)$$

برای مورد فرود مایل بر سطح یک جسم نارسانا نیز معتبرند.

در بعضی موارد بهتر است که ضرایب فرنل را به صورت زیر بنویسیم

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (41-18)$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (42-18)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (43-18)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (44-18)$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و قانون اسنل به آسانی می‌توان دید که صورتهای بالا با صورتهای قبلی آنها معادل است.

۱۸-۳ زاویه بروستر: زاویه حد

اکنون با استفاده از ضرایب فرنل که در بخش قبل به دست آوردیم، بستگی R و T را به زاویه فرود برای دو محیط نارسانا بررسی می‌کنیم. در هر حالت $T = 1 - R$ پس تنها درباره R بحث خواهیم کرد. قبلاً مورد فرود عمودی $\theta_1 = 0$ را بررسی کرده‌ایم: قطبش اهمیتی ندارد و هر چه اختلاف نسبت n_2/n_1 با یک بیشتر باشد، R بزرگتر است. برای فرود خراشان، یعنی $\theta_1 = \pi/2$ ، داریم $\cos \theta_1 = 0$ و به آسانی از معادله‌های (۱۸-۲۸) و (۱۸-۳۳) می‌توان دید که $R_s = 1 = R_p$. برای فرود تقریباً خراشان ضریب بازتاب بزرگ است؛ دلیل آنکه دریاچه‌ای

۱. گاهی ضرایب بازتاب و انتقال را به صورت دیگری تعریف می‌کنند که عبارت است از نسبت اندازه‌های بردارهای پوینتینگ به جای مؤلفه‌های عمودی آنها. این نحوه تعریف در R تفاوتی ایجاد نمی‌کند، ولی در T ضریب $(\cos \theta_2 / \cos \theta_1)$ را حذف می‌کند.

آرام همانند یک آینه است همین بزرگ بودن ضریب بازتاب است. در زوایای فرود بینابین دو زاویه فرود وجود دارد که به‌ویژه جالب هستند.

آیا موردی می‌تواند وجود داشته باشد که ضریب بازتاب آن صفر باشد؟ معادله‌های (۱۸-۴۱) و (۱۸-۴۳) نشان می‌دهند که چنین موردی می‌تواند وجود داشته باشد. اگر $\theta_1 = \theta_2$ باشد، $\tan(\theta_1 - \theta_2) = 0 = \sin(\theta_2 - \theta_1)$ و موج بازتابیده وجود نخواهد داشت. متأسفانه، این وضعیت تنها در صورتی رخ می‌دهد که $n_1 = n_2$ ، یعنی تنها در صورتی که دو محیط از نظر اپتیکی تمیزناپذیر باشند. از طرف دیگر، اگر $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ باشد، $\tan(\theta_1 + \theta_2)$ بی‌نهایت خواهد بود و دامنه موج بازتابیده قطبش p مجدداً صفر می‌شود. در این حالت محیطها از نظر اپتیکی تمیزپذیرند. چون موج قطبش s ، که E ی آن عمود بر صفحه فرود است، به‌طور جزئی بازتابیده می‌شود، نور غیرقطبیده‌ای که زاویه فرود آن در شرط $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ صدق کند بر اثر بازتاب قطبیده خواهد شد. به کمک قانون اسنل، یعنی

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

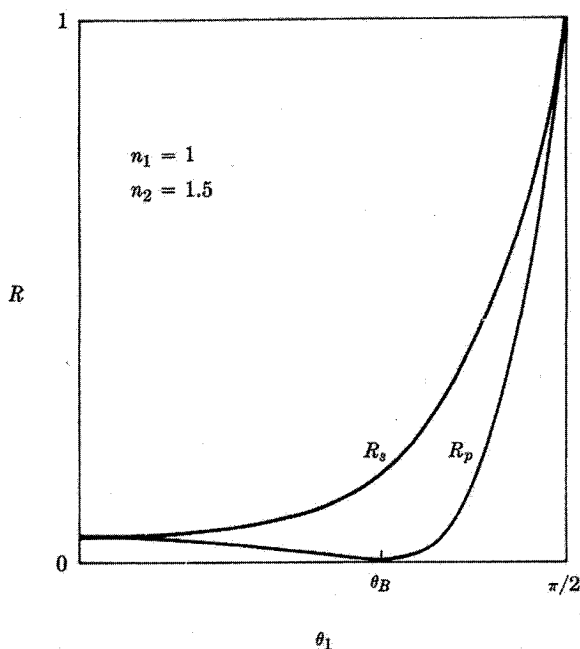
می‌توانیم مقدار θ_1 را تعیین کنیم. چنانچه $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ را در قانون اسنل به‌کار ببریم، داریم

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B$$

یا

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (۴۵-۱۸)$$

کمیت θ_B به زاویه بروستر مشهور است؛ رابطه بین این کمیت و ضرایب شکست که با معادله (۴۵-۱۸) داده می‌شود، به قانون بروستر مشهور است. قطبیده کردن نور در زاویه بروستر روشی عملی برای تولید تابش قطبیده است، هر چند که متداول‌ترین روش نیست. در شکل ۱۸-۳ مقادیر R_p و R_s برای تمام مقادیر θ_1 ، به‌ازای $n_1 = ۱$ و $n_2 = ۱.۵$ ، برای فصل مشترک هوا-شیشه، رسم شده است. زاویه بروستر برای این حالت ۵۶° است. اینکه ضریب بازتاب برای نور قطبیده p به‌طور کلی کوچکتر است، سودمندی عینکهای آفتابی پولاروید را توجیه می‌کند. چون اکثر سطوح بازتابنده در فضای باز افقی هستند، صفحه فرود بیشتر نورهای خیره‌کننده بازتابیده که به چشم ما می‌رسند، عمودی است. چون فرض می‌شود که معمولاً سرمان رو به بالاست، شیشه‌های عینکهای قطبنده (پولاروید) را طوری قرار می‌دهند که نوری را که بردار E ی آن در صفحه عمودی است عبور دهد و مؤلفه s را که شدیدتر بازتابیده شده است حذف کند.



شکل ۳-۱۸ ضریب بازتاب برای قطبشهای s و p در فصل مشترک هوا-شیشه. زاویه بروستر $\theta_B = 56^\circ$ است.

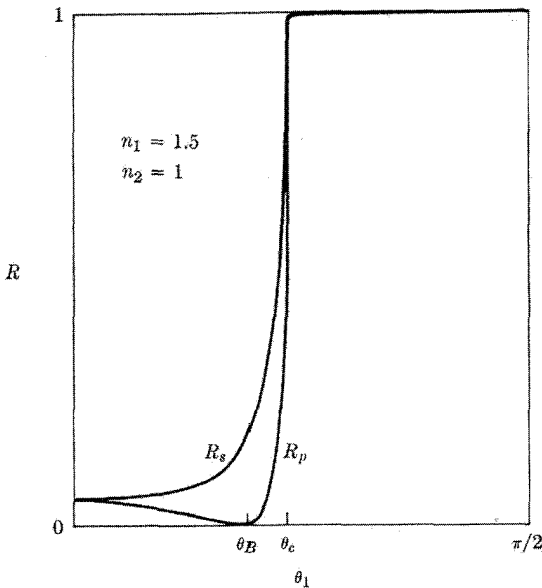
علاوه بر فرود خراشان حالت دیگری نیز وجود دارد که برای آن $R_s = R_p = 1$ است. از معادله‌های (۲۸-۱۸) و (۳۳-۱۸) دیده می‌شود که برای $\theta_2 = \pi/2$ نیز همانند حالت $\theta_1 = \pi/2$ بازتاب کامل رخ می‌دهد. زاویه فرودی که برای آن $\theta_2 = \pi/2$ است زاویه حد، $\theta_1 = \theta_c$ نامیده می‌شود. از قانون اسنل

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (46-18)$$

چنانچه $n_2 < n_1$ باشد، زاویه حد یک زاویه حقیقی است، ولی به هر جهت برای هر زوجی از مواد شفاف این نامساوی برای فرود از یکی از دو سمت فصل مشترک معتبر خواهد بود. بنا بر معادله‌های (۴۵-۱۸) و (۴۶-۱۸)،

$$\tan \theta_B = \sin \theta_c$$

چون مقدار $\tan \theta$ حدی ندارد، همواره یک زاویه بروستر حقیقی وجود دارد؛ به علاوه چون $\tan \theta > \sin \theta$ است نتیجه می‌شود که $\theta_B < \theta_c$. حالت فصل مشترک شیشه-هوا که برای آن $n_1 = 1.5$ و $n_2 = 1$ است در شکل ۴-۱۸ رسم شده است. برای حالت فرود از سمت شیشه،



شکل ۱۸-۴ ضریب بازتاب برای قطبشهای s و p در فصل مشترک شیشه-هوا. زاویه بروستر $\theta_B = 34^\circ$ و زاویه حد $\theta_c = 42^\circ$ است.

$\theta_c = 42^\circ$ و $\theta_B = 34^\circ$. برای زوایای فرودی بزرگتر از زاویه حد، $\theta_1 > \theta_c$ ، از قانون اسنل نتیجه می‌شود

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c$$

و چون $\sin \theta_c = n_2/n_1$ است، لازم است که

$$\sin \theta_2 > 1 \quad (47-18)$$

البته یک چنین زاویه واقعی‌ای که سینوس آن بزرگتر از یک باشد وجود ندارد، ولی این پیچیدگی جدی نیست و این مشکل در بخش بعد رفع خواهد شد. نتیجه آنکه برای تمام مقادیر $\theta_1 \geq \theta_c$ داریم $R_s = R_p = 1$. این بازتاب کامل را بازتاب کلی داخلی می‌نامند. اگر به داخل یک منشور یا آکواریوم نگاه کنیم یا هنگامی که در زیر آب شنا می‌کنیم به بالا نگاه کنیم، بازتاب کلی به آسانی مشاهده می‌شود. این پدیده کاربرد بسیار مهمی در فیبرهای نوری دارد. فیبر نوری الیاف شیشه‌ای، ظریفی است که از آن باریکه‌ای از نور انتقال می‌یابد، مانند موجبر برای میکروموجها (مسئله ۱۸-۴).

مثالهای ما در این بخش شامل فرکانسهای درگستره نور مرئی، و مواد شفاف بوده است که برای آنها $n = \sqrt{K}$. برای مواد غیرقطبی همین روابط در تمام فرکانسهای پایینتر معتبرند (ولی نه در فرابنفش و گستره‌های فرکانسهای بالاتر). این روابط برای مواد قطبی‌ای که از مولکولهای قطبی (مثلاً آب) یا از یونها (مثلاً سنگ‌نمک) ساخته شده‌اند و از نظر اپتیکی شفاف‌اند در تمام فرکانسهای پایینتر معتبر نخواهد بود، زیرا K به فرکانس بستگی دارد.

۱۸-۴ ضرایب فرنل مختلط: بازتاب از یک سطح رسانا

پپچیدگی‌ای که در بخش قبل برای زوایای بزرگتر از زاویه حد به وجود آمد، یعنی $\sin \theta_2 > 1$ موجب می‌شود که ضرایب فرنل مختلط را بررسی کنیم. چون $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ است، هنگامی که $\sin \theta$ مقداری حقیقی و بیش از ۱ داشته باشد مقدار $\cos \theta$ موهومی محض است، بنابراین، $\cos \hat{\theta}_2$ در ضرایب فرنل موهومی و این ضرایب مختلط خواهند بود. اگر محیط ۲ رسانا باشد نیز این ضرایب مختلط خواهند بود، زیرا در آن صورت \hat{n}_2 مختلط است. قانون اسنل

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2$$

نشان می‌دهد که در آن صورت $\sin \hat{\theta}_2$ نیز باید مختلط باشد. بنابراین، باید بررسی کنیم که آیا روابطی را که در بخش ۱۸-۲ به دست آوردیم برای زوایا و ضرایب شکست مختلط نیز معتبرند یا خیر. اگر زاویه $\hat{\theta}_2$ مختلط باشد، به هیچ طریقی نمی‌توانیم شکل ۱۸-۲ را رسم کنیم، و بنابراین باید در مورد معنای هندسی نتایج دقت کنیم. با وجود این، در به دست آوردن نتایج در بخش قبل ما به شکل هندسی شکل ۱۸-۲ متوسل نشدیم. روش ما کاملاً جبری بود، و چون تمام روابط برداری جبری برای کمیتهای مختلط نیز مانند کمیتهای حقیقی معتبرند، پس نتایج به‌طور صوری صحیح‌اند. حال موردی را در نظر می‌گیریم که محیط ۱، یعنی محیطی که در آن موج روی مرز فرود می‌آید، محیطی غیررسانا باشد. این محدودیت یک محدودیت فیزیکی است و بعضی از موارد بالقوه جالب را شامل نمی‌شود، ولی موردی است که از بیشترین اهمیت عملی برخوردار است. بدین ترتیب معادله (۱۸-۱۶) تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{n} \times \kappa_1 = \mathbf{n} \times \hat{\kappa}_2 = \mathbf{n} \times \kappa_{2r} + i\mathbf{n} \times \kappa_{2i} \quad (48-18)$$

که در آن $\kappa_2 = \kappa_{2r} + i\kappa_{2i}$. از آنجا که \mathbf{n} و κ_1 هر دو حقیقی هستند، بردار یکه عمود بر صفحه فرود حقیقی است و باز هم درست برابر است با $\hat{\mathbf{j}}$. آنگاه، مشابه قبل داریم

$$\hat{\kappa}_2 \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad (49-18)$$

و بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی κ_2 هر دو بر \hat{z} عمودند (یعنی، در صفحه فرود واقع‌اند). (همچنین، سمت راست معادله (۱۸-۴۸) می‌بایست حقیقی باشد، پس $\mathbf{n} \times \kappa_2 = 0$. بدین ترتیب، قسمت حقیقی κ_2 برداری است در جهت \mathbf{n} ، یعنی عمود بر فصل مشترک). زاویه مختلط $\hat{\theta}_2$ به‌طور جبری با معادله زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\kappa}_2 \cdot \mathbf{n} = \hat{\kappa}_2 \cos \hat{\theta}_2 \quad (50-18)$$

آنگاه قانون اسنل به‌صورت زیر در می‌آید

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2 \quad (51-18)$$

که در آن

$$\sin \hat{\theta}_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\theta}_2} \quad (52-18)$$

تمام عملیات جبری با شرایط مرزی روی میدانهای E و B معتبرند، بنابراین ضرایب فرنل مختلط باز هم با معادلات (۱۸-۲۸)، (۱۸-۲۹)، (۱۸-۳۳)، و (۱۸-۳۴) داده می‌شوند، با این تفاوت که در این معادلات \hat{n}_2 و $\cos \hat{\theta}_2$ مختلط‌اند. اگر این ضرایب مختلط را به‌صورت قطبی بنویسیم

$$\hat{r}_{12s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s}, \quad \hat{r}_{12p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p}, \dots$$

و نتیجه را در معادلات (۱۸-۲۷) و (۱۸-۳۵) به‌کار ببریم

$$\hat{E}'_{1s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \hat{E}_{1s}, \quad \hat{E}'_{1p} = |\hat{r}_{12p}| e^{i\alpha_p} \hat{E}_{1p}, \dots \quad (53-18)$$

روشن خواهد بود که میدانهای E بازتابیده و انتقال‌یافته نسبت به میدان E فرودی انتقال فاز خواهند داشت. ضرایب بازتاب حقیقی برای شدتها که با معادله‌های (۱۸-۳۶) و (۱۸-۳۷) تعریف شدند، به‌صورت زیر در می‌آیند

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2, \quad R_p = |\hat{r}_{12p}|^2 \quad (54-18)$$

زیرا فازها بر روی متوسط زمانی بردارهای پوئین‌تینگ که با معادله (۱۸-۸) داده می‌شوند، تأثیری ندارند. برای به‌دست آوردن ضرایب انتقال صحیح از کمیتهای مختلط خیلی باید دقت کرد، ولی

ما با این ضرایب کاری نداریم چون در اکثر موارد نمی‌توان آنها را در محیط رسانا اندازه‌گیری کرد. هنگامی که یکی از محیطها رساناست، به جای $R + T = 1$ اتحادهای زیر مفیدند

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21} \quad (55-18)$$

$$\hat{r}_{12}^2 + \hat{t}_{12}\hat{t}_{21} = 1 \quad (56-18)$$

این اتحادها هم برای قطبش s و هم برای قطبش p معتبرند.

برای فرود عمود از هوا بر روی محیطی رسانا، با $n_1 = 1$ ، $\hat{n}_2 = n + ik$ ضریب بازتاب عبارت است از

$$R_n = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \quad (57-18)$$

از آنجا که تمامی انرژی انتقالی در محیط رسانای نیمه نامتناهی نهایتاً جذب خواهد شد، ما ضریب جذب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A = 1 - R \quad (58-18)$$

برای فرود عمود

$$A_n = \frac{2n}{(n+1)^2 + k^2} \quad (59-18)$$

اگر $n \ll 1$ ، یا $n \gg 1$ یا $k \gg 1$ باشد، ضریب جذب کوچک است (ضریب بازتاب بزرگ است). هنگامی که $n \cong k \gg 1$ (حالت ۳ در بخش ۱۷-۴ با $K_i = g/\epsilon_0 \omega \gg 1$)، داریم

$$A_n \cong \frac{2}{k} \ll 1 \quad (60-18)$$

در این حالت $k \cong \sqrt{K_i/2} = \sqrt{g/2\epsilon_0 \omega}$ بنابراین

$$A_n \cong 2\sqrt{2\epsilon_0 \omega/g} \quad (61-18)$$

رابطه بالا را رابطه هاگن-روینزا می‌نامند. این رابطه باید برای رساناهای نسبتاً خوب در ناحیه میکروموج و زیر آن، و برای فلزات تا ناحیه فرسوخ، معتبر باشد. در اینجا g را می‌توان رسانندگی

dc گرفت. با همان مقادیری که در محاسبه عمق پوسته از معادله (۱۷-۵۶) استفاده شد، برای نقره در $f = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (طول موج ۳ سانتی‌متری) خواهیم یافت

$$A_n = 2\sqrt{2(8,854 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^{10})/3 \times 10^7} = 3,9 \times 10^{-4}$$

$$R_n = 0,99996$$

برای آب دریا، در $f = 6 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$

$$A_n = 25 \times 10^{-4}$$

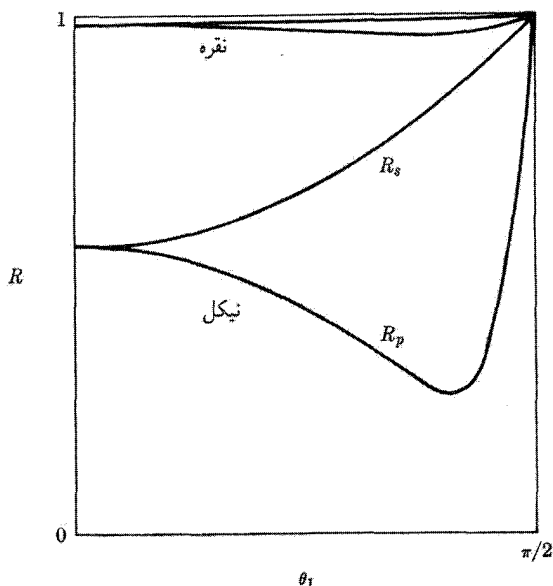
$$R_n = 0,99975$$

بزرگ بودن ضریب بازتاب مشکل ارتباط‌گیری با زیردریاییها را به خوبی نشان می‌دهد. در این موارد ضریب جذب بدان علت کوچک است که عمق پوسته نسبتاً کوچک است. از معادله (۱۷-۴۸) و (۱۸-۶۰) داریم

$$A_n = 4\pi \frac{\delta}{\lambda_1}$$

که در آن λ_1 طول موج در هواست. برای نقره، درگستره فرکانس نور مرئی، داریم $k \cong 0,5$ و $n \cong 0,98$ به‌ازای این مقادیر معادله (۱۸-۶۰) معتبر نیست، ولی از معادله (۱۸-۵۹) نتیجه می‌شود که $R_n \cong 0,98$. مقادیر مربوط به نیکل، $n \cong 2$ و $k \cong 3$ ، مقادیر معمولی‌تری برای فلزات است؛ با این مقادیر نتیجه می‌شود $R_n \cong 0,56$. این فلزات نیز کاملاً براق به نظر می‌آیند، چون چشم تقریباً مشابه یک آشکارساز لگاریتمی است. در شکل ۱۸-۵ مقادیر مربوط برای نقره و نیکل برحسب تابعی از زاویه فرود رسم شده‌اند. زاویه بروستری که در آن R_p صفر شود وجود ندارد، ولی باز هم R_p حداقلی دارد و همواره از R_s کمتر است. باز هم قطبش بر اثر بازتاب تا اندازه‌ای رخ می‌دهد. معادلات (۱۸-۵۳) نشان می‌دهند که \hat{E}'_p و \hat{E}'_s یک اختلاف فاز نسبی $\alpha_s - \alpha_p$ دارند. بنابراین حتی اگر موج فرودی به‌طور خطی قطبیده باشد، موج بازتابیده می‌تواند در فرود مایل به‌طور بیضوی قطبیده شود.

موج انتقالی، هر چند که نمی‌توان آن را مستقیماً مشاهده کرد، در مسائلی نظیر آنچه در بخش بعد بررسی شده‌اند مهم است. دامنه و فاز آن با \hat{t}_{12s} و \hat{r}_{12p} و بردار انتشار آن با \hat{k}_{12} داده می‌شود که در معادله‌های (۱۸-۴۸) تا (۱۸-۵۲) صدق می‌کند. کمیّت اخیر صفحات فاز ثابت و سرعت فاز، و همچنین صفحات دامنه ثابت و ثابت تضعیف را تعریف می‌کند. این نتایج را می‌توان با مقایسه دو عبارت معادل زیر برای \hat{k}_{12} به‌دست آورد



شکل ۵-۱۸ ضرایب بازتاب برای قطبشهای s و p در فصل مشترک هوا-فلز. مقادیر نوعی برای نور مرئی عبارت‌اند از 5° و $n \cong 3$ و $k \cong 3$ (برای نقره) و $n \cong 2$ و $k \cong 3$ (برای نیکل).

$$\hat{\kappa} = \hat{\kappa}_r + i\kappa_i \quad (۶۲-۱۸)$$

$$\hat{\kappa} = \hat{\kappa} \sin \hat{\theta} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\kappa} \cos \hat{\theta} \hat{\mathbf{k}} \quad (۶۳-۱۸)$$

در این بحث ما شاخص پایین ۲ را حذف می‌کنیم. صورت دوم برای $\hat{\kappa}$ با توجه به محدودیت موجود در معادله (۴۹-۱۸) توجیه می‌شود. معادله (۴۸-۱۸) بدین معناست که $\hat{\kappa} \times \mathbf{n}$ حقیقی است، و با استفاده از معادله (۴۸-۱۸) در معادله (۶۲-۱۸) داریم

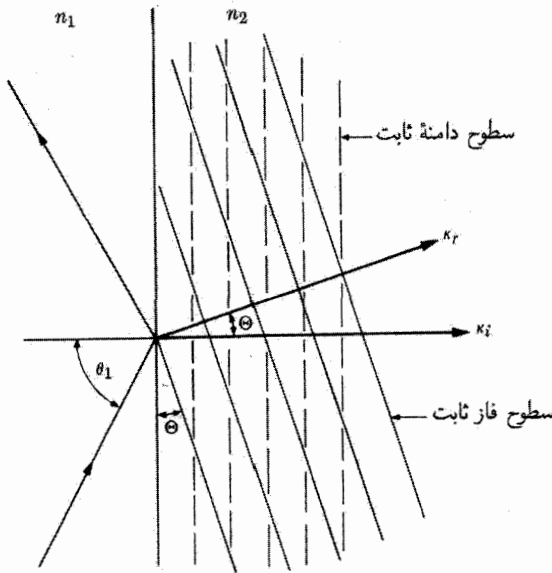
$$\kappa_r \times \mathbf{n} = \kappa_i \times \mathbf{n} \quad (۶۴-۱۸)$$

$$\kappa_i \times \mathbf{n} = 0 \quad (۶۵-۱۸)$$

معادله (۶۵-۱۸) نشان می‌دهد که κ_i با $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ موازی است، و معادله (۶۴-۱۸) عبارت است از

$$\kappa_e \sin \Theta = \kappa_i \sin \theta_i \quad (۶۶-۱۸)$$

که در آن Θ زاویه حقیقی بین κ_r و \mathbf{n} است. (شکل ۶-۱۸). این زاویه را می‌توانیم زاویه شکست حقیقی بنامیم، زیرا زاویه بین صفحات فاز ثابت و صفحه مرزی است. از طرف دیگر، صفحات



شکل ۶-۱۸ شکست به درون یک رسانا. سطوح فاز ثابت بر جهت انتشار عمودند و با مرز زاویه Θ می‌سازند، ولی سطوح دامنه ثابت با مرز موازی‌اند.

دامنه ثابت با صفحه مرزی موازی‌اند، لذا آهنگ تضعیف موج در امتداد مستقیماً عمود در درون رسانا از هر امتداد دیگری تندتر است. معادله (۶۲-۱۸) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned}\hat{\kappa} &= \kappa_r \sin \Theta \mathbf{i} + \kappa_r \cos \Theta \mathbf{k} + i\kappa_i \mathbf{k} \\ &= \kappa_1 \sin \theta_1 \mathbf{i} + (\kappa_r \cos \Theta + i\kappa_i) \mathbf{k}\end{aligned}$$

از مقایسه مؤلفه‌های معادله بالا با مؤلفه‌های معادله (۶۳-۱۸)، خواهیم دید که

$$\kappa_1 \sin \theta_1 = \hat{\kappa} \sin \hat{\theta} \quad (۶۷-۱۸)$$

$$\kappa_r \cos \Theta + i\kappa_i = \hat{\kappa} \cos \hat{\theta} \quad (۶۸-۱۸)$$

معادله اول در بالا همان قانون اسنل است، ولی معادله دوم، همراه با معادله (۶۶-۱۸)، رابطه κ_r ، κ_i و Θ را با n ، k ، و θ_1 به دست می‌دهد یعنی همان رابطه‌ای که در جستجوی آن بودیم. حال نمادهای p و q را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\hat{\kappa} \cos \hat{\theta} = \frac{\omega}{c} (p + iq)$$

به طوری که

$$\hat{n} \cos \hat{\theta} = p + iq \quad (۶۹-۱۸)$$

آنگاه از معادله (۶۸-۱۸) $\kappa_r \cos \Theta = (\omega/c)p$ ، و با استفاده از معادله (۶۶-۱۸) به دست می آوریم

$$\kappa_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (۷۰-۱۸)$$

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c} q \quad (۷۱-۱۸)$$

تنها باقی می ماند که مقادیر p و q را بیابیم، که آنها هم از مربع کردن معادله (۶۹-۱۸) نتیجه می شوند

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 + 2ipq &= \hat{n}^2 (1 - \sin^2 \hat{\theta}) = (n + ik)^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 \\ &= n^2 - k^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2ink \end{aligned}$$

که در اینجا مجدداً از قانون اسنل، $\hat{n} \sin \hat{\theta} = n_1 \sin \theta_1$ ، استفاده کرده ایم. برحسب ثابت دی الکتریک $\hat{K} = \hat{n}^2$ داریم

$$p^2 - q^2 + 2ipq = K_r - K_1 \sin^2 \theta_1 + iK_i$$

از مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی، خواهیم داشت

$$K_r - K_1 \sin^2 \theta = p^2 - q^2$$

$$K_i = 2pq$$

این معادلات تقریباً با معادلات (۶۷-۱۷) برای n و k یکسان‌اند و پاسخهای آنها، که با معادلات (۶۱-۱۷) برای n و k یکسان‌اند بجز آنکه به جای K_r داریم $(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1)$ ، عبارت‌اند از

$$p = \sqrt{\frac{1}{2} [(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1)^2 + k_i^2}]} \quad (۷۲-۱۸)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [-(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1)^2 + k_i^2}]}$$

بنابراین، p و q تعمیمی از n و k هستند که به زاویه تابش θ_1 بستگی دارند. هنگامی که $\theta_1 = 0$ باشد، $p = n$ و $q = k$. طول تضعیف مستقیماً توسط q بر طبق معادله (۷۱-۱۸)

داده می‌شود. معادله (۷۰-۱۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k_r = N \frac{\omega}{c} \quad (۷۳-۱۸)$$

معادله‌ای است برای تعریف ضریب شکست حقیقی $N(\theta_1)$

$$N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \quad (۷۴-۱۸)$$

و این تعریف سرعت فاز را به صورت c/N به دست می‌دهد. بنا بر معادله (۶۶-۱۸)، N در قانون اسنل به صورت حقیقی صدق می‌کند

$$N \sin \Theta = n_1 \sin \theta_1 \quad (۷۵-۱۸)$$

$$N \cos \Theta = p \quad (۷۶-۱۸)$$

هر یک از این دو معادله را می‌توان برای یافتن زاویه حقیقی Θ به کار برد. هر چند که نه N قسمت حقیقی \hat{n} است و نه Θ قسمت حقیقی $\hat{\theta}$ ، ولی $N \cos \Theta$ قسمت حقیقی $\hat{\theta} \cos \hat{\theta}$ است. با این نتایج ما پاسخ کلی را برای حالت مختلط در دست داریم. این نتایج تعمیمهای نسبتاً ساده‌ای از حالت حقیقی است، و کاربرد آن برای هر مسئله خاصی سراسر است. با وجود این، معادله‌های (۷۲-۱۸) به قدری پیچیده‌اند که درباره انتشار به درون محیطی رسانا در فرود مایل در حالت کلی مطلب چندان بیشتری نمی‌توان گفت، مگر برای حالات بسیار حدی. برای مثال، هنگامی که K_i خیلی بزرگ است، حالتی که به فرمول هاگن-روبنز منجر می‌شود، داریم

$$p \cong n \cong q \cong k \gg 1$$

از معادله (۷۴-۱۸)

$$N \gg 1$$

و از معادله (۷۵-۱۸)

$$\Theta \cong 0$$

بنابراین زاویه فرود هر چه باشد جهت انتشار تقریباً مستقیماً به درون محیط است، هر چند که تضعیف بسیار شدید است؛ سرعت و طول موج بسیار کاهش می‌یابند. عمق پوسته‌ای که برای فرود عمودی تعریف شد تقریباً برای هر زاویه فرودی معتبر خواهد بود.

با بازگشت به حالت بازتاب کلی داخلی، می‌توانیم با کاربرد این نتایج پاسخ آن مسئله را

نیز کامل کنیم. در اینجا، $n_2 = \sqrt{K_{2r}}$ ؛ ولی هنگامی که $\theta_1 > \theta_c$ باشد $\cos \hat{\theta}_2$ موهومی است. (در اینجا ما شاخص ۲ را مجدداً حفظ می‌کنیم).

$$\begin{aligned} \cos \hat{\theta}_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\theta}_2} = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1} \\ &= i \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} \end{aligned} \quad (77-18)$$

چون

$$\sin \theta_c = n_2/n_1$$

از ترکیب معادله‌های (۷۷-۱۸) و (۶۹-۱۸)، داریم

$$n_2 \cos \hat{\theta}_2 = in_2 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} = p + iq$$

بنابراین

$$p = 0, \quad q = n_2 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} \quad (78-18)$$

[معادله (۷۲-۱۸) نیز همین نتیجه را می‌دهد.] با داشتن معادله (۷۸-۱۸)، ضریب فرنل برای بازتاب قطبش s ، معادله (۲۸-۱۸)، به صورت زیر درمی‌آید

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - iq}{n_1 \cos \theta_1 + iq}$$

برای هر مقدار $\theta_1 > \theta_c$ ، صورت این کسر مزدوج مختلط مخرج آن است، بنابراین \hat{r}_{12s} به شکل زیر است

$$\hat{r}_{12s} = \frac{z^*}{z}, \quad \hat{r}_{12s}^* = \frac{z}{z^*}$$

در نتیجه

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2 = \hat{r}_{12s} \hat{r}_{12s}^* = 1$$

همین‌طور از معادله (۳۳-۱۸) روشن است که برای تمام زوایای $\theta_1 > \theta_c$ داریم $R_p = 1$. ما در حالت مختلط T را محاسبه نکردیم، ولی پایداری انرژی ایجاب می‌کند که هنگامی که $R = 1$ است، $T = 0$ باشد. از طرفی دیگر، ضرایب انتقال فرنل (\hat{t}_{12} ها) صفر نیستند؛ در محیط ۲ میدانهای E و B ی غیرصفر وجود دارند. این تناقض ظاهری را با یافتن K_{2r} به آسانی می‌توان رفع

کرد. با $p = 0$ در معادله (۷۴-۱۸) داریم

$$N = n_1 \sin \theta_1 = n_2 (\sin \theta_1 / \sin \theta_c) \quad (۷۹-۱۸)$$

ضریب شکست حقیقی محیط ۲، یعنی N ، هنگامی که θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش می‌یابد از n_2 تا n_1 تغییر می‌کند

$$n_2 \leq N \leq n_1 \quad (۸۰-۱۸)$$

از معادله (۷۶-۱۸) به‌ازای $p = 0$ و $N \neq 0$ ، برای هر زاویه فرود $\theta_1 \geq \theta_c$ ، داریم

$$\cos \Theta = 0 \quad (۸۱-۱۸)$$

یعنی κ_{z_2} همواره با مرز موازی است، و در نتیجه انرژی در محیط ۲ عمود بر مرز جریان ندارد. از قبل می‌دانیم که κ_{z_2} بر مرز عمود است. بدین ترتیب، در شکل ۶-۱۸ سطوح فاز ثابت بر سطح مرزی عمودند و سطوح دامنه ثابت با سطح مرزی موازی‌اند. این امواج مشهور به امواج محوشونده هستند و می‌توان آنها را در آزمایشهای مناسب مشاهده کرد.

موج محوشونده در جهت عمود بر مرز تضعیف می‌شود و طول تضعیف آن $\delta = 1/\kappa_{z_2}$ است. با استفاده از معادلات (۷۱-۱۸) و (۷۸-۱۸) طول تضعیف را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\delta = \frac{c}{\omega q} = \frac{c}{n_2 \omega} \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1}} \quad (۸۲-۱۸)$$

با قرار دادن n_2 به جای N از معادله (۷۹-۱۸) و وارد کردن طول موج، $\lambda_2/2\pi = c/N\omega$ به‌دست می‌آوریم

$$\delta = \frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{1 - (\sin \theta_c / \sin \theta_1)^2}}$$

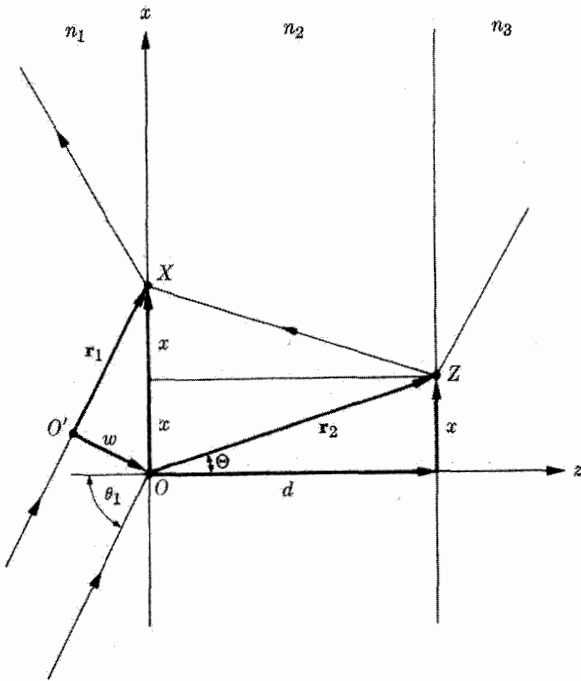
تا هنگامی که θ_1 از θ_c بزرگتر باشد، δ یک عدد حقیقی است و موج با عمق درون محیط ۲ به‌طور نمایی افت می‌کند. با کم شدن زاویه فرود، طول تضعیف زیاد می‌شود و در زاویه حدّ به بی‌نهایت می‌رسد. بنابراین، در این زاویه انتشار معمولی بدون تضعیف امکان‌پذیر می‌شود و به جای موج محوشونده، موج شکستی به درون محیط ۲ انتشار می‌یابد. از طرفی دیگر، هنگامی که θ_1 افزایش یافته و به $\pi/2$ میل کند، δ به $\lambda_2/2\pi \cos \theta_c$ میل می‌کند که برای شیشه به هوا مقدار آن $\lambda_2/4.68$ است. بنابراین رفتار به‌ازای $\theta_1 > \theta_c$ ادامه معقول رفتار به‌ازای $\theta_1 \leq \theta_c$ است. هنگامی که θ_1 تا θ_c افزایش می‌یابد، R و θ_2 افزایش می‌یابند، در θ_c داریم، $R = 1$

و $\theta_2 = \pi/2$. هنگامی که θ_1 به مقادیر بیش از θ_c افزایش می‌یابد، R برابر ۱ باقی می‌ماند و زاویه حقیقی شکست برابر با $\pi/2$ باقی می‌ماند، ولی نفوذ بی‌نهایت در محیط ۲ به تدریج کاهش می‌یابد و به کسری از طول موج می‌رسد. در عین حال سرعت فاز و طول موج در محیط ۲ از مقادیر مشخصه مربوط به محیط ۲ به مقادیر مربوط به محیط ۱ کاهش می‌یابند. دو ویژگی جالب دیگر عبارت‌اند از آنکه یک موج فرودی با قطبش خطی بر اثر بازتاب به طور بیضوی قطبیده می‌شود، که این به دلیل \hat{r}_{12s} و \hat{r}_{12p} مختلط (ولی متفاوت) است؛ و دیگر آنکه موج در محیط ۲ عرضی نیست (\hat{E}_{12p} یک مؤلفه طولی دارد).

۱۸-۵ بازتاب و انتقال توسط یک لایه نازک: تداخل

اکنون مسئله دو سطح تخت نامتناهی موازی یک ناپوستگی را، به عنوان یک مسئله مقادیر مرزی واقعی‌تر و پیچیده‌تر، بررسی خواهیم کرد. این وضعیت مربوط به بَره‌ای از یک ماده می‌شود که در دو طرف آن دو محیط نیمه‌نامتناهی قرار دارد و خواص دو محیط نیمه‌نامتناهی ممکن است با یکدیگر متفاوت باشد. فرض می‌کنیم در سمت چپ صفحه $z = 0$ ، محیط ۱؛ در سمت راست صفحه $z = d$ ، محیط ۳، و در بین آن دو، محیط ۲ قرار داشته باشد. کاربرد مستقیم شرایط مرزی در هر یک از دو سطح ناپوستگی، با دنبال کردن نحوه محاسبات بخش ۱۸-۲، به نتایجی درباره میدانهای E و B در هر یک از سه ناحیه منجر خواهد شد (مسئله ۱۸-۱۱). روشی دیگر، که به همان پاسخ منجر می‌شود، بر پایه نتایجی که قبلاً در بخش ۱۸-۲ به دست آمد مبتنی است، و این روش از بعضی جهات اطلاعات بیشتری به ما خواهد داد. اساس این روش عبارت از آن است که یک موج فرودی را در محیط ۱ در نظر بگیریم که در اولین فصل مشترک بخشی از آن باز می‌تابد و بخشی از آن عبور می‌کند. موج عبور کرده در دومین فصل مشترک بخشی از آن باز می‌تابد و بخشی از آن عبور می‌کند و موج بازتابیده آن مجدداً به فصل مشترک اول می‌رسد که در آنجا بخشی از آن باز می‌تابد و بخشی از آن عبور می‌کند؛ و به همین ترتیب تا آخر. چون ضرایب فرنی را که قبلاً به دست آوردیم در هر فصل مشترک کسری را که باز می‌تابد و کسری را که عبور می‌کند به ما می‌دهند، تنها باید تمام سهمهای مختلف را جمع کنیم تا موج بازتابیده به محیط ۱ و موج عبور کرده به محیط ۳ را به دست آوریم. هر چند که این روند به نظر بی‌انتهای می‌آید، ولی در واقع نسبتاً ساده است.

تنها مسئله جدیدی که در جمع کردن امواج به آن برمی‌خوریم آن است که دامنه‌های مختلف باید با اختلاف فازهای مناسبشان با یکدیگر جمع شوند.^۱ هر بار که موج مجدداً از لایه عبور می‌کند، فرض می‌کنیم لایه به حد کافی نازک و به حد کافی هموار است به طوری که اختلاف فازهای هم‌دوس بین تمام



شکل ۱۸-۷ موجی که در O وارد محیط ۲ می‌شود از سطح عقبی باز می‌تابد و مجدداً از محیط ۲ خارج می‌شود تا با پرتویی که در X بازتابیده است ترکیب شود.

به علت تغییر در $\kappa_2 \cdot \Gamma$ در نما فاز آن تغییر خواهد کرد. وضعیت در شکل ۱۸-۷ نشان داده شده است. دو موج فرودی که بر سطح موج تخت در محیط ۱ عمودند به سطح جلویی محیط ۲ برخورد می‌کنند. بخشی از یکی از آنها در X باز می‌تابد؛ بخشی از آن دیگری در O می‌شکند، سپس بخشی از آن از سطح عقبی در Z باز می‌تابد و بخشی از آن در X می‌شکند تا در محیط ۱ مجدداً بیرون بیاید و با پرتو اول ترکیب شود. چون فاز در دو نقطه O و O' در روی سطح موج یکسان است، باید اختلاف فاز بین دو مسیر $O'X$ و OZZ را محاسبه کنیم. چنانچه محیط ۲ رسانا باشد این محاسبات مشکل‌تر نخواهد بود و لذا ما فرض می‌کنیم که زاویه شکست Θ است، یعنی زاویه حقیقی که در بخش قبل یافتیم؛ برای محیط نارسانا $\Theta = \theta_2$. اختلاف فاز عبارت است از

$$\hat{\beta} = 2\kappa_2 \cdot \Gamma_2 - \kappa_1 \cdot \Gamma_1$$

امواج چندگانه با معناست. یکی از مزایای این روش آن است که اگر این فرض درست نباشد و اختلاف فازها کم و بیش کاتوره‌ای باشند، باز هم روش جمع مطرح‌شده در اینجا کاربرد خواهد داشت، البته به شرط آنکه این روش به جای دامنه‌ها در مورد شدت‌ها به‌کار گرفته شود.

اکنون بردار r_2 را برحسب مؤلفه‌هایش تجزیه می‌کنیم

$$r_2 = x\mathbf{i} + dk$$

و بردار r_1 را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$r_1 = 2x\mathbf{i} - wp_1$$

که در آن

$$p_1 = s \times u_1 = \mathbf{j} \times u_1 u_1$$

و بردار p_1 بر بردار انتشار $\kappa_1 = k_1 u_1$ عمود است. بنابراین

$$\hat{\beta} = 2x(\hat{\kappa}_2 \cdot \mathbf{i} - \kappa_1 \cdot \mathbf{i}) + 2d\hat{\kappa}_2 \cdot \mathbf{k}$$

حال، بنا بر قانون اسنل

$$\hat{\kappa}_2 \cdot \mathbf{i} - \kappa_1 \cdot \mathbf{i} = \hat{\kappa}_2 \sin \theta_2 - \kappa_1 \sin \theta_1 = 0$$

$$\text{و } \hat{\kappa}_2 \cdot \mathbf{k} = \hat{\kappa}_2 \cos \theta_2 \text{ پس داریم}$$

$$\hat{\beta} = 2d\hat{\kappa}_2 \cos \theta_2 = 2d \frac{\omega}{c} n_2 \cos \theta_2 \quad (۸۳-۱۸)$$

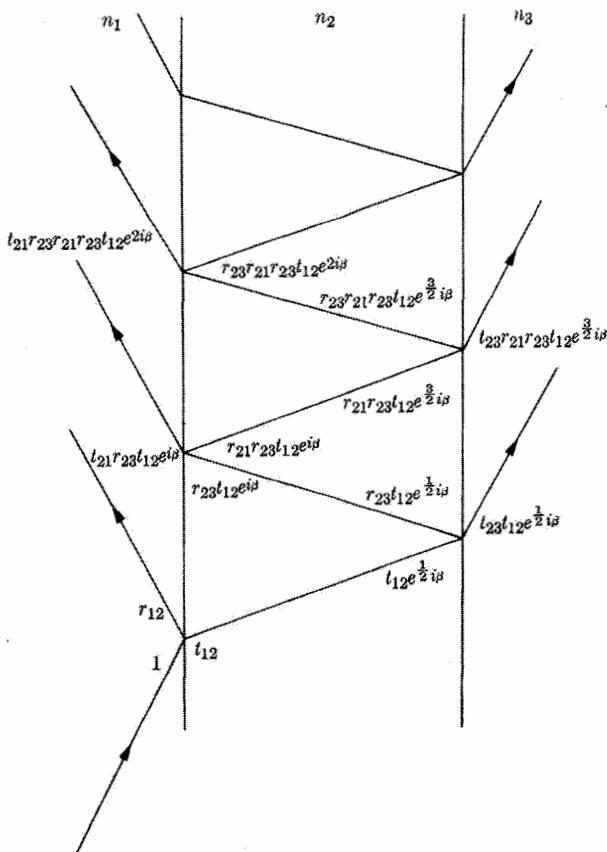
از معادله (۶۹-۱۸)، داریم

$$\hat{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} (p + iq) \quad (۸۴-۱۸)$$

در یک محیط رسانا $p = n_2 \cos \theta_2$ و برای تمام زوایای فرود $q = 0$. در یک محیط رسانا در تابش عمودی، $p = n$ و $q = k$. قسمت حقیقی $\hat{\beta}$ انتقال فاز حقیقی را به دست می‌دهد و قسمت موهومی $\hat{\beta}$ به تضعیف ناشی از دوبار پیمودن بره می‌انجامد.

برای جمع کردن تمام سهمهای دخیل در ضریب بازتاب دامنه کل (\hat{r}) از ضرایب فرنل برای هر یک از مرزها همراه با انتقال فاز $\hat{\beta}$ استفاده می‌کنیم. ضرایب فرنل برای قطبشهای p و s متفاوت‌اند، ولی فعلاً ما شاخصهای p و s را حذف می‌کنیم، ضمن آنکه به خاطر می‌سپاریم که دو حالت قطبش را باید جداگانه بررسی کنیم. از شکل ۸-۱۸ دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12} \hat{r}_{23} \hat{t}_{21} e^{i\hat{\beta}} + \hat{r}_{12} \hat{r}_{23} \hat{r}_{21} \hat{r}_{23} \hat{t}_{21} e^{2i\hat{\beta}} + \dots \\ &= \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12} \hat{r}_{23} \hat{t}_{21} e^{i\hat{\beta}} [1 + \hat{r}_{21} \hat{r}_{23} e^{i\hat{\beta}} + (\hat{r}_{21} \hat{r}_{23} e^{i\hat{\beta}})^2 + \dots] \end{aligned}$$



شکل ۱۸-۸ بازتاب و انتقال چندگانه یک پرتو فرودی، با دامنه واحد. هر یک از دامنه‌ها با ضرایب فرنل و تأخیر فاز β مشخص شده است.

چون

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} + \frac{\hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\hat{r}_{32}\hat{t}_{21}e^{i\beta}}{1 - \hat{r}_{21}\hat{r}_{12}e^{i\beta}} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}(\hat{t}_{12}\hat{r}_{32} - \hat{r}_{21}\hat{t}_{12})e^{i\beta}}{1 - \hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\beta}}$$

با استفاده از اتحادهای (۱۸-۵۵) و (۱۸-۵۶)، داریم

$$\hat{r} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}e^{i\beta}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \quad (۱۸-۸۵)$$

با محاسباتی مشابه محاسبات بالا دامنه کل انتقال یافته به محیط ۳ به دست می آید

$$\hat{t} = \frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{23}e^{(\frac{1}{2})i\beta}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \quad (۸۶-۱۸)$$

توجه کنید که صورتهای کسرها در دو معادله بالا فقط اثر سطوح جلویی و عقبی را می دهند، چنانچه هر یک به تنهایی عمل می کردند، و مخرجها تأثیر بازتابهای چندگانه واقعی را به حساب می آورند. از آنجا که فرض کردیم محیطهای ۱ و ۳ نارسانا هستند، می توانیم ضریب بازتاب و ضریب انتقال شدت کل را محاسبه کنیم

$$R = \hat{r}\hat{r}^*, \quad T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \hat{t}\hat{t}^* \quad (۸۷-۱۸)$$

این ضرایب برای قطبشهای p و s متفاوت اند. برای یک بَره نارسانا داریم

$$R + T = 1$$

ولی برای یک بَره رسانا

$$R + T + A = 1 \quad (۸۸-۱۸)$$

زیرا در رسانا انرژی می تواند به وسیله گرمایش ژول جذب شود.

برای بَره رسانا، معادله های (۸۷-۱۸) هنگامی که برحسب n و k بیان شوند، حتی برای تابش عمودی، فوق العاده پیچیده می شوند. ولی به هر جهت این روابط مهم اند، زیرا اندازه گیری R و T برای لایه های نازک فلزی یکی از روشهای تعیین تجربی ثابتهای اپتیکی است. به منظور حل معادلات برای n و k برحسب مقادیر تجربی R و T به محاسبات کامپیوتری نیاز است. ضریب انتقال T متناسب است با $\hat{t}\hat{t}^*$ و $\hat{t}\hat{t}^*$ متناسب است با

$$e^{(\frac{1}{2})i\beta} e^{-(\frac{1}{2})i\beta^*} = e^{(\frac{1}{2})i(\beta - \beta^*)} = e^{-2d(\omega/c)q}$$

در فرود عمودی، $q = k$ ، بنابراین T حاوی ضریب زیر است

$$e^{-2d/\delta}$$

که در آن $\delta = c/k\omega$ عمق پوسته است. اگر محیط ۱ هوا باشد، $\omega/c = 2\pi/\lambda_1$ ، بنابراین

$$e^{-2d/\delta} = e^{-2\pi kd/\lambda_1}$$

برای فلزات ($k \approx 2$) در نور مرئی ($\lambda_1 \approx 5000 \text{ \AA}$)، d باید کمتر از حدود 1000 \AA باشد تا نور قابل توجهی عبور کند. هنگامی که این عامل نمایی کوچک است، مخرج در معادله‌های (۱۸-۸۵) و (۱۸-۸۶) تقریباً ۱ است.

برای اجسام نارسانا $q = 0$ (بجز در مورد بازتاب کلی داخلی)، بنابراین تضعیفی در اثر این عامل وجود ندارد، ولی باز هم معادلات، بعضی اثرهای جالب را پیشگویی می‌کنند. برای حالتی که β و تمام ضرایب فرنل حقیقی باشند، داریم

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta} \quad (18-89)$$

در تابش عمودی داریم

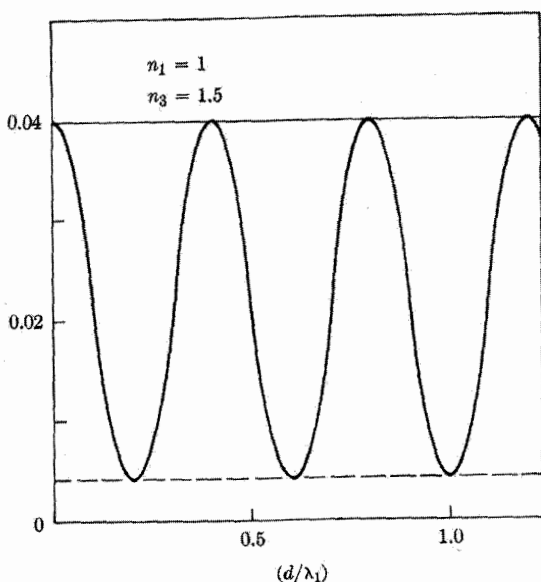
$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad \beta = 2d \frac{\omega}{c} n_2$$

فرض کنید محیط ۱ هواست با $n_1 = 1$ ، محیط ۳ شیشه است با $n_3 = 1.5$ ، و محیط ۲ لایه نازکی از ماده‌ای است با $n_2 = 1.3$. آنگاه

$$R = \frac{0.0221 + 0.0186 \cos \beta}{1.0001 + 0.0186 \cos \beta}$$

$$\beta = 4\pi n_2 (d/\lambda_1) = 163 (d/\lambda_1)$$

بنابراین R بین 0.40° تا 0.04° تغییر می‌کند و به‌ازای β برابر با مضربهای صحیحی از 2π (یا d/λ_1 برابر با مضربهای صحیحی از 39°) بیشینه‌هایی^۱ دارد، همان‌طور که در شکل ۱۸-۹ دیده می‌شود. جالب‌ترین ویژگی این نتیجه آن است که R می‌تواند از ضریب بازتاب سطح جلویی به تنهایی، $r_{12}^2 = 0.17^\circ$ ، کوچکتر باشد؛ این اثر تنها به دلیل تداخل مخرب می‌تواند رخ بدهد. R بین مقدار مربوط به نبود لایهٔ روپوش یعنی $r_{23}^2 = 0.40^\circ$ و چیزی کمتر از مقدار مربوط به سطح عقبی به تنهایی، یعنی $r_{23}^2 = 0.05^\circ$ تغییر می‌کند. در واقع چنانچه ماده‌ای بیابیم که برای آن $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ باشد، کمینه مقدار R را می‌توانیم به صفر برسانیم (مسئلهٔ ۱۸-۱۰). برای تولید عدسیهای بدون بازتاب از همین اثر استفاده می‌شود. عدسیهای دوربینهای عکاسی را غالباً با اندودی می‌پوشانند تا ضریب بازتاب آن در ناحیهٔ وسط طیف مرئی صفر شود؛ ولی شرط کمینه شدن در دو انتهای سرخ و آبی طیف برقرار نیست، و بنابراین هنگامی که این عدسیها را با نور ۱. توجه کنید که مکان بیشینه‌ها و کمینه‌های معادلهٔ (۱۸-۸۹) درست در همانجایی است که در یک محاسبهٔ مقدماتی که در آن تنها دو بازتاب به حساب آمده باشد، به دست می‌آید.



شکل ۹-۱۸ اثر تداخل در بازتاب از یک فصل مشترک هوا-شیشه که با لایه‌ای به ضخامت d از ماده‌ای با $n_2 = 1.3$ اندود شده است.

بازتابیده از آنها ببینیم تا اندازه‌ای بنفش‌رنگ دیده می‌شوند. رنگ این عدسیها به زاویه نگاه کردن نیز بستگی دارد، زیرا برای فرود مایل $\beta = 4\pi n_2 \cos \theta_2 (d/\lambda_1)$ است. اگر n_2 بزرگتر از n_1 و n_3 باشد، R بین کمینه‌ای که برابر با r_{23}^2 است و بیشینه‌ای که از r_{12}^2 و r_{23}^2 بزرگتر است، تغییر می‌کند. طول موجی که به‌ازای آن کمینه یا بیشینه رخ می‌دهد به ضخامت لایه (d) بستگی دارد. اگر ضخامت از یک نقطه به نقطه دیگر لایه تغییر کند، طول موجی که به‌ازای آن ضریب بازتاب بیشینه است نیز تغییر خواهد کرد. رنگهای گوناگونی که در حبابهای صابون و در لایه‌های روغن شناور روی آب دیده می‌شوند به علت همین تغییرات است.

در لایه‌های نارسانا چنانچه n_2 کوچکتر از n_1 باشد، اثر جالب دیگری نیز رخ می‌دهد. این همان موردی است که چنانچه تنها یک مرز وجود داشته باشد، به بازتاب کلی داخلی منجر می‌شود. در ابتدا ممکن است حدس بزنیم که چنانچه تمام انرژی باز می‌تابد، وجود مرز دوم نباید تفاوتی ایجاد کند. ولی، این حدس غلط است؛ میدان همواره در محیط ۲ به عمق متوسط δ نفوذ می‌کند. مرز دوم بازتاب کامل را از بین می‌برد و یک موج انتقالی وجود خواهد داشت با $T = 1 - R$. این اثر را بازتاب کلی تضعیف شده می‌نامند. هر چند که n_1 ، n_2 و n_3 حقیقی هستند، ولی هنگامی که $\theta_1 > \theta_c$ باشد θ_2 مختلط است و نتیجتاً ضرایب فرزنل مختلط خواهند بود. برای قطبش s

به دست آورده بودیم

$$\hat{r}_{12} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - iq}{n_2 \cos \theta_1 + iq} \quad (90-18)$$

که در آن، بنا بر معادله (۷۸-۱۸) (برای هریک از دو قطبش)، و با استفاده از $\sin \theta_c = n_2/n_1$ داریم

$$q = n_2 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} = \sqrt{(n_2 \sin \theta_1)^2 - n_2^2} \quad (91-18)$$

با نوشتن \hat{r}_{12} به صورت قطبی $\hat{r}_{12} = |\hat{r}_{12}| e^{i\alpha}$ دیدیم که $|\hat{r}_{12}| = 1$. بنابراین

$$r_{12} = e^{i\alpha}$$

که در آن

$$\tan \alpha = \frac{\text{Im}(\hat{r}_{12})}{\text{Re}(\hat{r}_{12})} = \frac{-2n_2 \cos \theta_1 q}{(n_2 \cos \theta_1)^2 - q^2} \quad (92-18)$$

با همین استدلال، نتیجه می‌گیریم که $|\hat{r}_{23}| = 1$. برای سادگی فرض کنیم که محیط ۳ با محیط ۱ یکسان است (برای مثال، دو منشور شیشه‌ای با لایه‌ای از هوا در بین آنها). آنگاه $\hat{r}_{23} = \hat{r}_{21}$ و چون

$$\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$$

$$\hat{r}_{23} = -\hat{r}_{12} = -e^{i\alpha} \quad (93-18)$$

از معادله (۸۴-۱۸)

$$\hat{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} (p + iq)$$

و در معادله (۷۸-۱۸) یافتیم که $p = 0$. لذا $\beta = i2dq(\omega/c)$ موهومی محض است. بنابراین می‌نویسیم

$$e^{i\hat{\beta}} = e^{-\gamma}$$

$$\gamma = 2dq(\omega/c) = 2 \frac{d}{\delta} \quad (94-18)$$

زیرا از معادله (۸۲-۱۸) داریم $q(\omega/c) = 1/\delta$. اکنون با قرار دادن این مقادیر در معادله (۸۵-۱۸) به دست می‌آوریم

$$\hat{r} = \frac{e^{i\alpha}(1 - e^{-\gamma})}{1 - e^{2i\alpha} e^{-\gamma}}$$

و بالاخره

$$R = \hat{r}\hat{r}^* = \frac{(1 - e^{-\gamma})^2}{1 + e^{-2\gamma} - 2e^{-\gamma} \cos 2\alpha} \quad (95-18)$$

$$T = 1 - R = \frac{2(1 - \cos 2\alpha) e^{-\gamma}}{1 + e^{-2\gamma} - 2e^{-\gamma} \cos 2\alpha}$$

توجه کنید که برای n_1 و n_2 مفروض، α تنها به زاویه فرود θ_1 بستگی دارد؛ وقتی θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش می‌یابد، α از 0° تا π تغییر می‌کند. نمای γ به ضخامت d (و همچنین از طریق δ به θ_1) بستگی دارد. اگر γ زیاده از حد کوچک نباشد، داریم

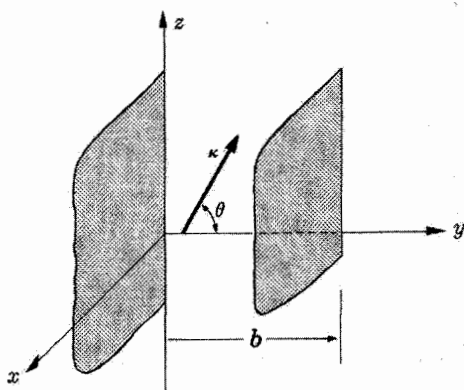
$$T \cong 2(1 - \cos 2\alpha) e^{-2d/\delta} \quad (96-18)$$

همچنین توجه کنید که δ با λ متناسب است، بنابراین بازتاب کلی تضعیف شده را با میکروموجها در مقیاس بزرگتری می‌توان مشاهده کرد.

۱۸-۶ انتشار بین صفحات رسانای موازی

هدایت امواج در موجبرها مسئله دیگری است که می‌توانیم آن را با بررسی تداخل میان موج فرودی و موج بازتابیده، یا به طریق دیگر با شروع از مسئله مقادیر مرزی جدیدی که در آن شرایط در مرزهای چندگانه به‌طور همزمان برآورده می‌شوند، بررسی کنیم. مجدداً بررسی را به روش اول آغاز می‌کنیم. در اینجا ما با انتشار موج در محیطی دی‌الکتریک (مثلاً هوا) سروکار داریم که با سطوحی رسانا محصور شده است. موجبرهای میکروموجها کاربردی از این مسئله‌اند. برای ساده شدن مطلب فرض می‌کنیم که رسانندگی فلز به‌طور ایده‌آل بی‌نهایت است. بی‌نهایت بودن g بدان معناست که K_z برای فلز بی‌نهایت است که این خود بدان معناست که n_2 در معادله‌های (۱۸-۲۸) و (۱۸-۳۳) بی‌نهایت است. بنابراین برای بازتاب از یک سطح رسانای کامل در هر زاویه فرودی $\hat{r}_{12s} = -1$ و $\hat{r}_{12p} = +1$. در واقع دیدیم که برای نقره در طول موج ۳ سانتی‌متر $R_n = 0.99996$ است، پس می‌توان انتظار داشت که این تقریب خوبی باشد. به‌علاوه فرض می‌شود که محیط دی‌الکتریک خلأ است.

اکنون می‌خواهیم به‌عنوان مقدمه‌ای بر مطالعه موجبرها، انتشار امواج الکترومغناطیسی را در ناحیه بین دو صفحه موازی کاملاً رسانا، بررسی کنیم. ناحیه‌ای که در آن انتشار موج بررسی می‌شود در شکل ۱۸-۱۰ نشان داده شده است. چون جهت‌های x و z از نظر فیزیکی تمیزناپذیرند، کلیت مطلب با در نظر گرفتن تنها امواجی که بردارهای موج آنها در صفحه yz است نقض نمی‌شود، به‌ویژه، امواجی را در نظر می‌گیریم که با محور y زاویه θ می‌سازند. چنین امواجی در $y = b$ به



شکل ۱۸-۱۰ انتشار موج بین دو صفحه موازی کاملاً رسانا.

سطح کاملاً رسانا برخورد می‌کنند و سپس به صورت امواجی که بردارهای انتشار آنها با محور منفی y زاویه θ می‌سازند، باز می‌تابند. هنگامی که این امواج در سطح رسانا در $y = 0$ برای بار دوم بازتابیده می‌شوند، دوباره به صورت امواج نوع اول در می‌آیند. بنابراین، ملاحظه می‌شود که می‌توان انتشار بین دو صفحه موازی رسانا را برحسب عملهای نمایی زیر توصیف کرد

$$e^{i[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

و

$$e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \quad (97-18)$$

برای چنین امواجی دو قطبش ممکن وجود دارد، که می‌توانیم این دو را بدین صورت توصیف کنیم که بگوئیم برای قطبش s میدان \mathbf{E} موازی محور x است، و برای قطبش p میدان \mathbf{H} موازی محور x است. این دو قطبش را اصطلاحاً در موجبرها به ترتیب امواج الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند. در اینجا فقط امواج TE مطالعه می‌شود. بررسی امواج TM به‌عنوان یک مسئله در انتهای فصل داده شده است.

میدان الکتریکی در ناحیه بین دو صفحه رسانا در حالت TE با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} \left\{ E_{\setminus} e^{i[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} + E'_{\setminus} e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \right\} \quad (98-18)$$

این میدان الکتریکی باید در $y = 0$ صفر شود، زیرا E_t در مرز یک رسانای کامل صفر می‌شود. واضح است که این شرط در صورتی به‌ارزی تمام مقادیر z و t صادق است که $E_{\setminus} = -E'_{\setminus} = E$ این نتیجه از $r_s = -1$ نیز به‌دست می‌آید. در این صورت \mathbf{E} با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} E (e^{i\kappa y \cos \theta} - e^{-i\kappa y \cos \theta}) e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)} \quad (99-18)$$

علاوه بر این E باید در $y = b$ به ازای تمام مقادیر z و t صفر شود. این الزام، شرط زیر را تحمیل می‌کند

$$\kappa b \cos \theta = n\pi \quad (100-18)$$

که در آن n یک عدد درست است. بنابراین برای فرکانس ω مفروض $\kappa = \omega/c$ ، و زاویه‌ای که امواج با محور y می‌سازند با معادله (۱۰۰-۱۸) مشخص می‌شود. چنانچه این زاویه مشخص باشد، سرعت ظاهری در امتداد z برابر با $c/\sin \theta$ برابر v_p است، که همواره بزرگتر از سرعت نور در خلأ است. درباره این تناقض ظاهری با نظریه نسبیت خاص بعداً به تفصیل بحث خواهد شد.

مناسب است تغییرات میدان الکتریکی را در جهت‌های y و z برحسب طول‌موج‌هایی بیان کنیم. این طول‌موجها عبارت‌اند از

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\kappa \sin \theta} = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \quad \left(\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \right) \quad (101-18)$$

برای جهت z و

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\kappa \cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad (102-18)$$

برای جهت y . میدان الکتریکی، معادله (۹۸-۱۸)، برحسب این طول‌موجها به صورت زیر است^۱

$$E = iE_0 \sin \frac{2\pi y}{\lambda_c} e^{i[(2\pi z/\lambda_g) - \omega t]} \quad (103-18)$$

و معادله (۱۰۰-۱۸) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{b}{\lambda_c} = \frac{n}{2} \quad (104-18)$$

از معادلات (۱۰۱-۱۸) و (۱۰۲-۱۸) مستقیماً نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (105-18)$$

اگر مقدار $\lambda_c = 2b$ ، مربوط به $n = 1$ در معادله (۱۰۴-۱۸)، را در نظر بگیریم، در آن صورت هنگامی که λ_0 افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر، هنگامی که ω کاهش می‌یابد، به نقطه‌ای می‌رسیم که در آن $1/\lambda_g^2$ باید منفی باشد تا در معادله (۱۰۵-۱۸) صدق کند. در این حالت ضریب z در

۱. E_0 به جای $2iE$ نوشته شده است.

معادله (۱۸-۱۰۳) موهومی است، و تابع نمایی به جای آنکه برحسب z نوسان کند به صورت یک تابع نمایی کاهش‌یابنده در می‌آید. به بیان دیگر: اگر $\lambda_0 > 2b$ باشد، موج الکترومغناطیسی در جهت z به جای منتشر شدن میرا می‌شود. اگر n مساوی ۲ گرفته شود، در این صورت $b = 2b/2 = \lambda_c = c$ است و بزرگترین طول موجی که منتشر می‌شود مساوی b است. اکنون دلیل استفاده از شاخص c که به معنای "قطع" است، روشن می‌شود. طول موج قطع بزرگترین طول موجی است که می‌تواند برای یک مد مفروض (مقدار n مفروض) انتشار بیابد.

سرعت v_p که قبلاً به‌دست آوردیم، همواره از سرعت نور بیشتر است و در واقع، هنگامی که طول موج در خلأ مساوی λ_c است، به عبارت دیگر، هنگامی که $\theta = 0^\circ$ است، بی‌نهایت است. این سرعت، که سرعت فاز نامیده می‌شود، عبارت است از سرعت نقطه‌ای با فاز ثابت روی موج. بدون بحث روی جنبه‌های نسبیتی موضوع، این مطلب نشان‌دهنده تناقض ظاهری این اصل مسلم است که هیچ سیگنالی نمی‌تواند با سرعتی بیشتر از سرعت نور انتشار یابد. رفع این اشکال ظاهری بدین ترتیب است که انرژی با سرعتی کمتر از سرعت نور در طول موجبر انتشار می‌یابد، یعنی، با سرعتی که به سرعت گروه مشهور است. سیگنالها با سرعت گروه انتقال می‌یابند، نه با سرعت فاز.

برای تعیین سرعت انتشار انرژی، چگالی انرژی را محاسبه خواهیم کرد. حاصل ضرب این چگالی انرژی در سرعت گروه، شار انرژی یا بردار پوئین‌تینگ را به‌دست می‌دهد. بنابراین از تقسیم بردار پوئین‌تینگ به چگالی انرژی می‌توان سرعت انتشار انرژی را به‌دست آورد. این نتیجه تعمیمی است از معادله (۱۷-۳۵).

میدان مغناطیسی در موجبر به‌آسانی از معادله زیر به‌دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (106-18)$$

با استفاده از معادله (۱۸-۱۰۳) برای \mathbf{E} و با فرض $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ ، سریعاً نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}E_0 \frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_g} \sin \frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} e^{i[(\gamma\pi z/\lambda_g) - \omega t]} \\ + ikE_0 \frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_c} \cos \frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} e^{i[(\gamma\pi z/\lambda_g) - \omega t]} \end{aligned} \quad (107-18)$$

چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (108-18)$$

و بردار پوئین تینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (109-18)$$

برای \mathbf{E} و \mathbf{B} از نمادگذاری مختلط استفاده شده است، با این فرض ضمنی که برای هر عبارتی باید قسمت حقیقی آن در نظر گرفته شود. بنابراین برای محاسبه u و S باید قسمتهای حقیقی را انتخاب و در هم ضرب کنیم. ولی چون کمیتهایی که برای محاسبه سرعت گروه به کار می روند، میانگینهای زمانی معادلات (108-18) و (109-18) هستند، می توانیم با استفاده از معادله (17-37)، گرفتن قسمتهای حقیقی را آسان کنیم.

میانگین زمانی چگالی انرژی عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{1}{T} \operatorname{Re} [\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H}] &= \frac{1}{T} \operatorname{Re} \left[\epsilon_0 E_0^* E_0 \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\mu_0} E_0^* E_0 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \\ &\left. + \frac{1}{\mu_0} E_0^* E_0 \left(\frac{2\pi}{\omega \lambda_c} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \right] \quad (110-18) \end{aligned}$$

با انتگرال گیری در جهت y ، یعنی در عرض موجبر، جمله های $\sin^2(2\pi y/\lambda_c)$ و $\cos^2(2\pi y/\lambda_c)$ به $b/2$ تبدیل می شوند. بنابراین

$$\int_0^b \bar{u} dy = \frac{1}{T} E_0^* E_0 \frac{b}{2} \left[\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \right] = \frac{1}{T} E_0^* E_0 \epsilon_0 b \quad (111-18)$$

میانگین زمانی مؤلفه z بردار پوئین تینگ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \bar{S}_z &= \frac{1}{T} \operatorname{Re} E_x^* H_y = \frac{1}{T} \operatorname{Re} \left[E_0^* \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \frac{1}{\mu_0} E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \sin \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{T} E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \sin^2 \left(\frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \quad (112-18) \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از این عبارت از $y = 0$ تا $y = b$ میانگین توان کل (در واحد طول در جهت x) که در امتداد موجبر انتقال می یابد، به دست می آید

$$\int_0^b \bar{S}_z dy = \frac{1}{T} E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} b \quad (113-18)$$

سرعت انتشار انرژی عبارت است از خارج قسمت تقسیم معادله (۱۸-۱۱۳) بر معادله (۱۸-۱۱۱).
از این رو

$$v_g = \frac{2\pi}{\epsilon_0 \mu_0 \omega \lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega \lambda_g} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (18-114)$$

با توجه به معادله (۱۸-۱۰۱) معلوم است که λ_g از λ_0 بزرگتر است، و بنابراین v_g از c کوچکتر است.

اکنون با توجه به اینکه از معادله (۱۸-۱۰۱) داریم $\lambda_g = \lambda_0 / \sin \theta$ ، می‌توانیم درک بیشتری دربارهٔ اختلاف بین سرعت گروه، v_g ، و سرعت فاز، v_p ، به دست آوریم. با به کار بردن این نتیجه در معادله (۱۸-۱۱۴) خواهیم داشت

$$v_g = c \sin \theta \quad (18-115)$$

و قبلاً مشاهده کردیم که

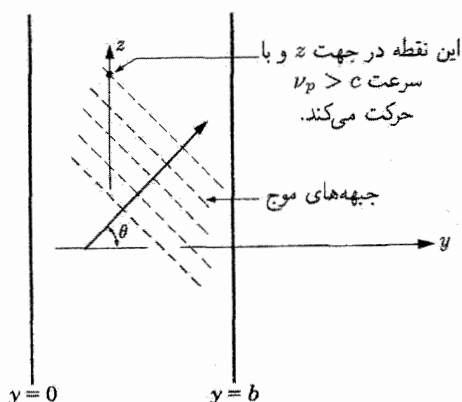
$$v_p = \frac{c}{\sin \theta} \quad (18-116)$$

بنابراین

$$v_g v_p = c^2 \quad (18-117)$$

این نتیجه‌ای است که عموماً برای انتشار در موجبرها صادق است: (توجه کنید که معادله (۱۸-۱۱۷) الزاماً برای انواع دیگری از انتشار موج صادق نیست، به‌ویژه معادله مذکور برای امواج تخت در محیطهای غیرپاشندهٔ بدون مرز صادق نیست، در این محیطها سرعتهای گروه و فاز یکی هستند.) با به یاد آوردن این مطلب که θ عبارت است از زاویهٔ بین امتداد انتشار یکی از امواج مؤلفه و محور y ، به‌سادگی می‌توان شکل ۱۸-۱۱ را رسم کرد. این شکل مقطعی از ناحیهٔ بین صفحات رسانا را در صفحهٔ yz نشان می‌دهد. محل تلاقی سطح موج با محور z با سرعت $v_p = c / \sin \theta$ حرکت می‌کند؛ در حالی که مؤلفهٔ c در امتداد محور z ، عبارت است از $v_g = c \sin \theta$.

بسیاری از نتایجی که برای موجبر ساده با صفحات موازی به دست آمد، برای حالات پیچیده‌تر نیز صادق است. به‌ویژه، موجبرهای متداول مستطیلی‌شکل خصوصیات کاملاً مشابهی دارند. در بخش بعد به بررسی جنبه‌های کلی دیگر موجبرها، با تأکید بر موجبرهای مستطیلی، خواهیم پرداخت.



شکل ۱۸-۱۱ جزئیات حرکت جبهه‌های موج در اثنای انتشار موج بین صفحات رسانا.

۷-۱۸ موجبرها

در بخش ۴-۱۶ نشان دادیم که \mathbf{E} و \mathbf{H} هر دو در معادلهٔ موج در خلا صدق می‌کنند، یعنی

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۱۸-۱۸)$$

برای امواج تک‌گام، به عبارت دیگر، برای امواجی به شکل $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ این معادلات به صورت زیر در می‌آیند

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0 \quad (۱۱۹-۱۸)$$

علاوه بر این معادلات، معادلات ماکسول هم باید برقرار باشند. برای انتشار امواج الکتریکی عرضی (TE) در جهت z ، $E_z = 0$ است؛ به علاوه، برای امواجی که در جهت z انتشار می‌یابند، پنج مؤلفهٔ باقیماندهٔ میدانها متناسب با $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ هستند. معادلات تاو ماکسول در این حالت به صورت زیرند

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\mu_0 \omega \mathbf{H} = 0 :$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - i\mu_0 \omega H_z = 0 \quad (\text{الف})$$

$$E_x = + \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_y \quad (\text{ب}) \quad (۱۲۰-۱۸)$$

$$E_y = - \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi i} H_x \quad (\text{ج})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\epsilon_0 \omega \mathbf{E} = 0 ;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\nu \pi i}{\lambda_g} H_y + i \varepsilon_0 \omega E_x = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\nu \pi i}{\lambda_g} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} + i \varepsilon_0 \omega E_y = 0 \quad (\text{ب}) \quad (121-18)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{ج})$$

واضح است که (الف) از معادله (۱۲۱-۱۸) و (ب) از معادله (۱۲۰-۱۸) نتیجه زیر را به دست می‌دهند

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \left(\frac{\nu \pi i}{\lambda_g} - i \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{\nu \pi} \right) H_y \quad (122-18)$$

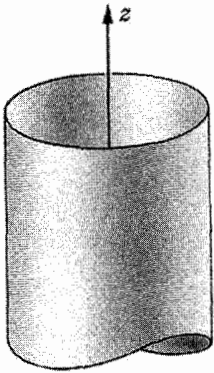
و بنابراین واضح است که اگر H_z معلوم باشد، H_y به دست می‌آید. به طریق مشابه، به کمک (ج) از معادله (۱۲۰-۱۸) و (ب) از معادله (۱۲۱-۱۸)، H_x را می‌توان از H_z به دست آورد. بالاخره، E_x و E_y با (ب) و (ج) از معادله (۱۲۰-۱۸) به H_z و H_y مربوط می‌شوند. بنابراین اگر H_z را پیدا کنیم، تمام کمیت‌های دیگر میدان را می‌توانیم با مشتق‌گیری به دست آوریم. خود H_z باید از معادله (۱۱۸-۱۸) صدق کند؛ بنابراین، با توجه به اینکه بستگی آن به z به شکل $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ است، می‌نویسیم

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\nu \pi^2}{\lambda_g^2} \right) H_z = 0 \quad (123-18)$$

آنچه باقی می‌ماند، تنها تعیین شرایط مرزی‌ای است که پاسخهای معادله (۱۲۳-۱۸) باید در آنها صدق کنند.

اگر یک موجبر استوانه‌ای را در نظر بگیریم که دیواره‌اش کاملاً رساناست، مانند آنچه در شکل ۱۲-۱۸ نشان داده شده است، آنگاه شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند از آنکه مؤلفه مماسی \mathbf{E} و مؤلفه عمودی \mathbf{B} روی S صفر شوند. مؤلفه مماسی \mathbf{H} و مؤلفه عمودی \mathbf{D} اختیاری‌اند. با اعمال این شرایط، رابطه‌ای به دست می‌آید که ω ، λ_g و ابعاد موجبر را به یکدیگر مربوط می‌کند، درست مانند رابطه‌ای که در معادله (۱۰۵-۱۸) برای مورد موجبر با صفحات موازی به دست آمد.

برای درک بهتر این روش، موجبر مکعب مستطیلی را که در شکل ۱۳-۱۸ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. می‌توان معادله (۱۲۳-۱۸) را با استفاده از روش معمول جداسازی متغیرها،



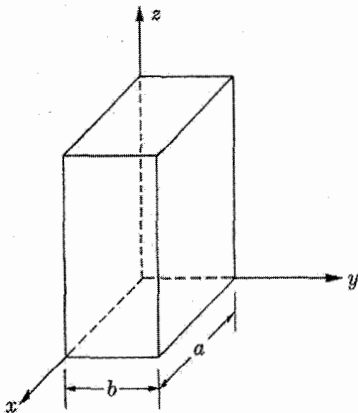
شکل ۱۸-۱۲ انتشار موج در داخل یک استوانهٔ رسانا.

تجزیه کرد. پاسخ کلی شامل مجموعه‌ای از جملات به شکل زیر است

$$\begin{aligned}
 H_z(x, y, z) = & (A \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y + B \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y \\
 & + C \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y + D \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y) \\
 & \times e^{\pm \pi i z / \lambda_g} \quad (124-18)
 \end{aligned}$$

با

$$-(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + [\omega^2 / c^2 - (\pi^2 / \lambda_g^2)] = 0 \quad (125-18)$$



شکل ۱۸-۱۳ یک موجبر مکعب مستطیلی.

E_x را از این H_z به دست می‌آوریم

$$E_x = -\frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left(\frac{2\pi i}{\lambda_g} - i \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (126-18)$$

با مشتق‌گیری جزئی، هر $\cos \kappa_y y$ به یک $\sin \kappa_y y$ تبدیل می‌شود و برعکس. با وجود این، چون E_x باید در $y = 0$ و در $y = b$ صفر شود، تنها جملاتی که شامل $\sin \kappa_y y$ هستند، در E_x باقی می‌مانند و ضمناً در این جملات باید $\kappa_y = n\pi/b$ باشد. بنابراین، فقط جملات $\cos \kappa_y y$ در معادله (۱۲۶-۱۸) باقی می‌مانند. با بحث مشابهی می‌توان نشان داد که فقط جملات $\cos \kappa_x x$ باقی می‌مانند، و ضمناً در این جملات باید $\kappa_x = m\pi/a$ باشد. پاسخهای مجاز برای H_z ، یعنی آنهایی که باعث می‌شوند مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} در مرز صفر شوند، به صورت زیرند

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{2\pi i z / \lambda_g} \quad (127-18)$$

هر زوج ممکن از مقادیر m و n را یک مد می‌نامند. نمادگذاری TE_{mn} برای مدهایی به کار می‌رود که از نوع (۱۲۷-۱۸) باشند؛ TE به معنی میدان الکتریکی عرضی است و n و m تعداد نیم‌موجهای در ابعاد باریک‌تر (n) و پهن‌تر (m) را نشان می‌دهند.

اکنون برمی‌گردیم به معادله (۱۲۵-۱۸). با استفاده از $\kappa_x = m\pi/a$ و $\kappa_y = n\pi/b$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (128-18)$$

که به وضوح نشان می‌دهد برای λ_0 ثابت، طول موج موجبر، و در نتیجه سرعت موج آن $v_g = c\lambda_0 / \lambda_g$ به مد انتشار بستگی دارد. همچنین می‌بینیم که طول موجهای بیشینه‌ای برای انتشار در مدهای مختلف وجود دارد. واضح است که اگر λ_0 به اندازه کافی بزرگ باشد، کمیّت $(2\pi/\lambda_0)^2$ از $(n\pi/b)^2 + (m\pi/a)^2$ کوچکتر خواهد بود. در این صورت طرف راست معادله (۱۲۸-۱۸) منفی می‌شود و در نتیجه مقدار λ_g موهومی است. این امر به جای انتشار موج باعث تضعیف موج می‌شود.

از موجبرهای مکعب‌مستطیلی شکل برای انتقال توان میکروموج به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. معمولاً اندازه موجبر را طوری انتخاب می‌کنند که فقط مد TE_{10} در فرکانس مورد نظر در موجبر منتشر شود. یکی از اندازه‌های متداول برای ابعاد داخلی موجبر عبارت است از

$1.0 \text{ cm} \times 2.28 \text{ cm}$ طول موج حداکثری که در مد TE_{10} در چنین موجبری منتشر می‌شود، با قرار دادن $m = 1$ ، $n = 0$ و $a = 2.28 \text{ cm}$ و $b = 1.0 \text{ cm}$ در معادله (۱۸-۱۲۸) به دست می‌آید. نتیجه آنکه: $\lambda_{0,max} = 4.57 \text{ cm}$ که با قرار دادن $\lambda_g = \infty$ به دست می‌آید؛ طول موجهای بزرگتر از این مقدار منتشر نمی‌شوند ولی آنهایی که کوچکترند انتشار می‌یابند. مد با طول موج قطع کوچکتر بعدی، بسته به ابعاد موجبر TE_{11} یا TE_{20} است. اگر $b < a/\sqrt{3}$ باشد، طول موج قطع TE_{20} بزرگتر از طول موج قطع TE_{11} خواهد بود. محاسبه طول موج قطع TE_{20} خیلی ساده است؛ طول موج مذکور درست نصف طول موج قطع TE_{10} ، یا 2.28 cm است. با توجه به نقیصی که در ساخت موجبرها به وجود می‌آید و اتلافهای زیاد در نزدیکی طول موج قطع TE_{10} ، لازم است که باند TE_{10} موجبرهای تجارتي عملاً به 2.42 تا 4.35 سانتی‌متر محدود شود.

۱۸-۸ مشدهای حفره‌ای

وسیله دیگری که ارتباط نزدیکی با موجبرها دارد و از لحاظ عملی بسیار مهم است، مشدد حفره‌ای است. مشدهای حفره‌ای از این لحاظ می‌توانند در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نوسان‌کننده انرژی ذخیره کنند، خواص مدارهای تشدید را از خود نشان می‌دهند. به علاوه، در مشدهای حفره‌ای عملی، مقداری از انرژی ذخیره شده در هر سیکل از نوسان تلف می‌شود. ولی از این لحاظ، مشدهای حفره‌ای اغلب از مدارهای LC متعارف حدود بیست برابر بهترند، به عبارت دیگر، کسری از انرژی ذخیره شده در مشدد حفره‌ای که در هر سیکل تلف می‌شود، حدود $1/20$ کسر تلف شده در مدار LC است. مزیت دیگر این است که مشدهای حفره‌ای (با اندازه‌های عملی) فرکانسهای تشدید دارند که گستره آن از چند صد مگاهرتز به بالاست، درست ناحیه‌ای که ساختن مدارهای LC متعارف تقریباً غیرممکن است.

ساده‌ترین مشدد حفره‌ای یک مکعب مستطیل قائم با دیواره‌های کاملاً رساناست. برای چنین حفره‌ای، شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند از صفر شدن مؤلفه مماسی E و مؤلفه عمودی B روی مرز. مؤلفه مماسی H و مؤلفه عمودی D اختیاری‌اند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید در معادلات موج (۱۸-۱۱۸) صدق کنند. بنابراین، E_x باید در معادله زیر صدق کند

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (129-18)$$

اگر حفره ناحیه‌ای را در بر بگیرد که سطوح مرزی آن شش صفحه $x = 0$ ، $x = a$ ، $x = \infty$ ، $y = 0$ ، $y = b$ ، $y = \infty$ باشند، آنگاه برای آنکه E_x در $y = 0$ ، $y = b$ ، $x = 0$ ، $x = a$ ، $z = d$ ، $z = \infty$ ، $y = b$ و در

$z = d$ صفر شود، باید E_x به صورت زیر باشد

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z e^{-i\omega t} \quad (130-18)$$

که در آن $\kappa_y = m\pi/b$ و $\kappa_z = n\pi/d$. برای E_y و E_z وضعیت مشابه است، و پاسخها به شکل زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned} E_y &= E_2 \sin \kappa_x x f_2(y) \sin \kappa_z z e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_3 \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y f_3(z) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (131-18)$$

که در آن κ_y و κ_z همانهایی است که در معادله (130-18) آمده‌اند و $\kappa_x = l\pi/a$ است. برای آنکه دیورژانس \mathbf{E} صفر شود، باید معادله زیر برقرار باشد

$$\begin{aligned} \left(E_1 \frac{df_1}{dx} \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z + E_2 \sin \kappa_x x \frac{df_2}{dy} \sin \kappa_z z \right. \\ \left. + E_3 \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \frac{df_3}{dz} \right) e^{-i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (132-18)$$

این معادله در صورتی برقرار است که $f_1 = \cos \kappa_x x$ ، $f_2 = \cos \kappa_y y$ ، $f_3 = \cos \kappa_z z$ و

$$\kappa_x E_1 + \kappa_y E_2 + \kappa_z E_3 = 0 \quad (133-18)$$

معادله فوق درست شرط عمود بودن \mathbf{K} بر \mathbf{E} است. باز می‌گردیم به معادله موج. واضح است که فرکانسهای تشدید حفره توسط معادله زیر داده می‌شوند

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (134-18)$$

یا

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2} - \frac{c^2 f^2}{c^2} = 0 \quad (135-18)$$

یک حفره معمولی که از موجبری با اندازه $9 \text{ in.} \times 4 \text{ in.}$ ساخته شده باشد، با $l = 1$ ، $m = 2$ ، $n = 0$ (حفره مشهور به TE_{102}). واضح است که فرکانس تشدید چنین حفره‌ای توسط بعد z آن، یعنی d ، تعیین می‌شود. بسیاری از جنبه‌های دیگر مسئله مشدد حفره‌ای مکعب مستطیلی را نیز می‌توان به تفصیل بررسی کرد؛ بعضی از این جنبه‌ها در مسائل پایان فصل آمده‌اند.

شکل‌های دیگری از مشددهای حفره‌ای را نیز می‌توان ساخت. ولی تنها حفره‌های استوانه‌ای و مکعب مستطیلی را می‌توان به آسانی ساخت و از نظر ریاضی دقیقاً بررسی کرد. در بررسی استوانه توابعی وارد می‌شود که از سینوس و کسینوس بسیار پیچیده‌ترند، یعنی به‌طور اخص توابع بسل. برای برقراری شرایط مرزی باید صفرهای این توابع را پیدا کنیم، به همان طریق که صفرهای سینوسها را در مسئله مکعب مستطیل پیدا کردیم. اما در اینجا در این بحث مفصل وارد نمی‌شویم و خواننده علاقه‌مند را به مطالعه کتاب کلاسیک مونتمویری^۱ ارجاع می‌دهیم؛ در صفحه ۲۹۷ آن کتاب یک تحلیل اجمالی ولی بسیار مفید از مشدد حفره‌ای استوانه‌ای آمده است.

۹-۱۸ خلاصه مطالب

مسائل عملی انتشار موج غالباً شامل مرز بین محیطهای مختلف است که در آن ثابت دی‌الکتریک مختلط \hat{K} به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند. وضعیت مربوط به یک مرز تخت منفرد، با قانون اسنل و ضرایب فرنل، که به $\hat{n} = \sqrt{\hat{K}}$ و زاویه فرود بستگی دارند، بیان می‌شود. مسائل شامل مرزهای تخت چندگانه را با برهم‌نهی پاسخهای مربوط به مرزهای منفرد می‌توان حل کرد و ایجاد اثرات تداخلی را مشاهده کرد. محیطهای نارسانا حالت خاصی از محیطهای رسانا هستند که برای آنها قسمتهای موهومی \hat{K} و \hat{n} صفر می‌شود.

• دامنه‌ها نمی‌توانند در شرایط مرزی صدق کنند مگر آنکه فرکانس موج در دو طرف مرز یکسان باشد و فاز آن در تمام نقاط روی مرز از دو طرف مطابقت داشته باشد. در آن صورت، بردارهای انتشار امواج فرودی، بازتابیده، و انتقال یافته همگی با بردار عمود بر مرز هم‌صفحه‌اند، و زاویه بازتاب با زاویه فرود برابر است، $\theta_1 = \theta_1'$. از رابطه پاشندگی قانون اسنل نتیجه می‌شود

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

• پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدانهای E و H با ضرایب فرنل بیان می‌شوند. این ضرایب عبارت‌اند از نسبت‌های دامنه‌های میدان E ی امواج بازتابیده و انتقال یافته به دامنه موج فرودی. این ضرایب برای قطبشهای s و p (به ترتیب، مربوط به بردار E ی عمود بر و موازی با صفحه فرود) متفاوت است. برای بازتاب

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \quad r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

- شدتهای بازتابیده و انتقال یافته از مؤلفه عمودی بردارهای پوئین-تینگ برحسب ضرایب فرنل محاسبه می‌شوند. ضریب بازتاب عبارت است از

$$R = r_{12} r_{12}^*$$

برای محیطهای نارسانا ضریب انتقال عبارت است از

$$T = 1 - R$$

و برای موردی که محیط ۲ رسانا باشد، ضریب جذب عبارت است از

$$A = 1 - R$$

که این هر دو باز بقای انرژی نتیجه می‌شوند. این معادله‌ها برای نارساناها یا برای فرود عمودی قابل حل‌اند. قطبش بر اثر بازتاب در زاویه بروستر، بازتاب کلی داخلی در زاویه حد، و فرمول هاگن-روبنز برای ضریب بازتاب رساناها در فرکانس رادیویی همگی از این معادله‌ها نتیجه می‌شوند.

- برای فرود مایل بر محیط رسانا، انتشار و تضعیف با $\kappa_r = N\omega/c$ و $\kappa_i = q\omega/c$ توصیف می‌شوند، سطوح فاز ثابت با مرز زاویه Θ می‌سازند و سطوح دامنه ثابت با مرز موازی‌اند:

$$N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1}, \quad \sin \Theta = n_1 \sin \theta_1 / N$$

کمیت‌های p و q تعمیم کمیت‌های n و k هستند و ارتباط آنها به $(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1)$ و K_i مانند ارتباط n و k است به آنها به‌ازای $\theta_1 = 0$. بازتاب کلی در زوایای بزرگتر از زاویه حد نیز با این کمیتها توجیه می‌شود.

- برای دو مرز تخت موازی، دامنه نسبی موج بازتابیده با روش برهم‌نهی به صورت زیر به دست

می‌آید

$$r = \frac{r_{12} + r_{23} e^{i\hat{\beta}}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i\hat{\beta}}}$$

که در آن

$$\hat{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} n_2 \cos \theta_2 = 2d \frac{\omega}{c} (p + iq)$$

که $\hat{\beta}$ انتقال فاز (و تضعیف) برای دو بار پیمودن لایه است. ضریب بازتاب کل عبارت است از

$$R = rr^*, \quad 1 - R = T + A$$

که در آن اگر لایه نارسانا باشد $A = 0$ است. از طریق R, β اثرات تداخلی از خود نشان می‌دهد که این اثرات به (d/λ_1) بستگی دارند. برای مورد لایهٔ رسانا یا بازتاب کلی تضعیف شده، اگر $d \gtrsim \delta$ باشد

$$T \sim e^{-2d/\delta}$$

که در آن δ طول تضعیف است.

• اگر طول موج در خلا $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ از طول موج قطع λ_c که به ابعاد موجبر بستگی دارد، کوتاه‌تر باشد امواج در موجبر بدون تضعیف انتشار می‌یابند (با این فرض که مرزها بازتابنده‌های کاملی هستند):

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

که در آن λ_g طول موج هدایت‌شده در موجبر است. سرعت گروه (سرعت انتشار انرژی) v_g است و

$$v_g v_p = c^2$$

برای یک موجبر مکعب‌مستطیل شکل که در آن $a > b$ است، در مد TE_{mn} داریم

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2$$

معمولاً λ_0 را به مقادیری محدود می‌کنند که تنها مد TE_{10} بتواند انتشار بیابد.

• برای امواج تختی که تضعیف می‌شوند یا در موجبری هدایت می‌شوند (و همچنین برای امواج کروی) در روی سطح فاز ثابت، دامنه الزاماً ثابت نیست. چنین امواجی ناهمگن نامیده می‌شوند. بردار پوئین‌تینگ برای این امواج پیچیده‌تر از امواج تخت همگنی است که در محیطی دی‌الکتریک انتشار می‌یابند.

مسائل

۱-۱۸ الف) برای موجی با قطبش s که از هوا تحت زاویهٔ بروستر، $\theta_1 = \theta_B$ ، بر روی یک دی‌الکتریک فرود می‌آید، ضریب بازتاب فرنل را محاسبه کنید. (ب) اگر $n = ۱.۵$ باشد، ضریب بازتاب چه مقدار خواهد بود؟

۲-۱۸ موجی با قطبش p از هوا بر روی سطح یک دی‌الکتریک تقریباً به‌طور خراشان، $\theta_1 = \frac{1}{4}\pi - \delta$ ، فرود می‌آید. شیپ منحنی $R_p(\theta_1)$ را هنگامی که δ به صفر میل می‌کند، برحسب ثابت دی‌الکتریک K پیدا کنید.

۳-۱۸ موجی با قطبش p از محیط شفاف با ثابت دی‌الکتریک K بر روی مرز هوا با زاویه‌ای اندکی کمتر از زاویه حد، $\theta_1 = \theta_c - \delta$ ، فرود می‌آید. به‌طور تقریبی R_p را به‌صورت تابعی از δ هنگامی که δ به صفر میل می‌کند به‌دست آورید، و نشان دهید که شیپ منحنی $R_p(\theta_1)$ در R_c بی‌نهایت است.

۴-۱۸ فرض کنید ضریب شکست یک فیبر نوری $n = ۱.۵۵$ است. (الف) اگر فیبر با هوا احاطه شده باشد، بزرگترین زاویه بین محور فیبر و پرتو نوری که بتواند در امتداد فیبر انتشار بیابد چقدر است؟ (ب) اگر فیبر را روکشی با ضریب شکست ۱.۵۳ احاطه کرده باشد، این زاویه چقدر است؟

۵-۱۸ یک موج نوری با قطبش p در هوا از یک سطح فلزی بازمی‌تابد. (الف) با فرض آنکه $\cos \theta_1 \cong ۱$ (فرضی که غالباً صحیح است) R_p را محاسبه کنید. (ب) مقدار θ_1 را که در آن R_p کمینه می‌شود پیدا کنید. (ج) این مقدار θ_1 و R_p ی مربوط را به‌ازای $n = ۱$ ، $k = ۶$ (مقادیر مناسب برای آلومینیم) محاسبه کنید.

۶-۱۸ موج تختی از هوا به‌طور عمود بر روی مرز تخت فلزی فرود می‌آید. فرض کنید فرکانس موج در گستره‌ای است که $n \cong k \gg ۱$. (الف) از ضریب انتقال فرنل، $|E_r|^2$ را درست در داخل سطح فلز محاسبه کنید. (ب) اتلاف انرژی در واحد حجم را در نزدیکی سطح محاسبه کنید، و مقدار آن را برای حالتی که دامنه فرودی $E_1 = ۱۰ \text{ V/cm}$ و فرکانس $f = ۱۰^{10} \text{ Hz}$ است، به‌دست آورید.

۷-۱۸ موجی با فرکانسی در گستره اعتبار رابطه‌هاگن-روبنز در هوا به‌طور مایل با زاویه θ_1 بر روی سطح رسانایی فرود می‌آید. نشان دهید به‌جای معادله (۱۸-۶) روابط زیر را خواهیم داشت

$$A_s = \frac{2 \cos \theta_1}{k}, \quad A_p = \frac{2}{k \cos \theta_1}$$

۸-۱۸ موجی در هوا به‌طور عمود بر سطح رسانایی فرود می‌آید و از آن بازمی‌تابد. (الف) از \hat{r}_{12s} نشان دهید که انتقال فاز بردار E برابر است با

$$\alpha_s = \tan^{-1} \frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}$$

(ب) نشان دهید این نتیجه برای حالت رسانندگی بی‌نهایت به $\alpha_s = \pi$ تبدیل می‌شود.

۹-۱۸ فرض کنید یک موج رادیویی با $\omega = ۱۰^7 \text{ s}^{-1}$ به‌طور عمود بر سطح زمین فرود می‌آید و از آن بازمی‌تابد. از نتیجه مسئله ۸-۱۸ انتقال فاز ناشی از بازتاب را محاسبه کنید. فرض کنید برای این ناحیه از زمین $K = ۹$ و $g = ۱۰^{-۲} (\Omega\text{m})^{-۱}$ است.

۱۰-۱۸ محیط دی الکتریکی با ضریب شکست n_3 با لایه‌ای به ضریب شکست n_2 اندود شده است، و موجی از محیط دی الکتریک n_1 بر روی آن فرود می‌آید. نشان دهید که به ازای $R = 0$ داریم $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ و بنابراین به ازای $\cos \beta = -1$ در فرود عمود، $R = 0$ است.

۱۱-۱۸ باریکه‌ای از نور تکفام (با فرکانس ω) در هوا بر روی لایه دی الکتریکی به ضریب شکست n به طور عمود فرود می‌آید. ضخامت لایه d است. با برآوردن شرایط مرزی در دو وجه لایه، ضرایب شکست و انتقال را بر حسب d و n به دست آورید. علاوه بر امواج فرودی E_1 ، بازتابیده E'_1 ، و انتقال یافته E_3 ، فرض کنید در داخل لایه امواجی وجود دارند که به سمت راست (E_2) و به سمت چپ (E'_2) در حرکت‌اند.

۱۲-۱۸ معادله ماتریسی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} E_m \\ E'_m \end{pmatrix} = (C_m) \begin{pmatrix} E_{m+1} \\ E'_{m+1} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$(C_m) = \frac{1}{t_{m,m+1}} \begin{pmatrix} e^{i(\nu/2)\beta_m} & r_{m,m+1} e^{i(\nu/2)\beta_m} \\ r_{m,m+1} e^{-i(\nu/2)\beta_m} & e^{-i(\nu/2)\beta_m} \end{pmatrix}$$

(الف) تحقیق کنید که نتایج مربوط به فصل مشترک بین دو دی الکتریک از رابطه زیر، با $\beta_1 = 0$ ، به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = (C_1) \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ب) تحقیق کنید که نتایج مربوط به دو فصل مشترک از رابطه زیر، با $\beta_2 = 2d_2(\omega/c)n_2 \cos \theta_2$ ، به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = (C_1)(C_2) \begin{pmatrix} E_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

این روش برای تعمیم به دستگاهی شامل لایه‌های چندگانه‌ای که با مرزهای تخت از هم جدا شده باشند، مناسب است.

۱۸-۱۳ یک سطح فلزی با لایه‌ای از دی‌الکتریک اندود شده است. با فرض آنکه فلز یک رسانای کامل است ($g = \infty$)، ضریب بازتاب حاصل را محاسبه کنید.

۱۸-۱۴ بر روی سطح یک لایه فلزی که بدون حائل در هوا واقع است، تابشی به‌طور عمودی فرود می‌آید. فرض کنید لایه به حد کافی ضخیم است به‌طوری که می‌توان از بازتابهای مکرر چشمپوشی کرد. ضریب انتقال T را برحسب n و k ی فلز محاسبه کنید.

۱۸-۱۵ بُره دی‌الکتریکی را در نظر بگیرید که به قدری ضخیم است که باریکه‌های بازتابیده چندگانه نمی‌توانند با هم به‌طور همدوس تداخل کنند. (الف) با جمع کردن تمام شدتها، ضریب بازتاب کل را برحسب ضرایب بازتاب $R_{۱۲}$ و $R_{۲۳}$ مربوط به هر یک از مرزها به‌دست آورید. (ب) نتیجه را در حالت خاص برای موردی که در آن محیطهای دو طرف بُره یکسان‌اند، به‌دست آورید.

۱۸-۱۶ چگالی بار سطحی و جریان در واحد پهنا بر روی سطح یک رسانای کامل را که امواج تخت الکترومغناطیسی بر آن فرود می‌آیند، برای دو مورد زیر به‌دست آورید. (الف) بردار الکتریکی عمود بر صفحه فرود، و (ب) بردار الکتریکی به موازات صفحه فرود.

۱۸-۱۷ برای امواج TM که در صفحه yz بین دو صفحه رسانای کامل، واقع در $y = 0$ و $y = b$ ، انتشار می‌یابند، \mathbf{E} و \mathbf{B} را تعیین کنید.

۱۸-۱۸ موج TMی را در نظر بگیرید که در یک موجبر مستطیلی ($H_z = 0$) در جهت z با طول موج λ_g انتشار می‌یابد. نشان دهید که معادله زیر

$$E_z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\pi iz/\lambda_g}$$

در معادله (۱۸-۱۲۳) و در شرایط مرزی صدق می‌کند. فرکانس قطع برای مد $TM_{۱۱}$ چیست؟ چرا مد $TM_{۱۰}$ وجود ندارد؟

۱۸-۱۹ برای موجبری با مقطعی مربع‌شکل به ضلع a ، مقادیر حدی a را برای آنکه موجبر بتواند موجی با طول موج λ را در مد $TE_{۱۰}$ انتقال دهد ولی در مدهای $TE_{۱۱}$ یا $TM_{۱۱}$ انتقال ندهد، تعیین کنید.

۱۸-۲۰ (الف) میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{H} را برای حفرة مکعب‌شکلی به ضلع a برای مد $TE_{۱۰۱}$ بنویسید. (ب) توزیعهای میدان را در سرتاسر مکعب به‌طور تقریبی رسم کنید.

۱۸-۲۱ ضرایب شکست برای شیشه صاف، شیشه بلوری و الماس به ترتیب $۱٫۵۲$ ، $۱٫۶۵$ و $۲٫۴۲$ است. (الف) برای امواج با قطبش s و p در فصل مشترک هوا با هر یک از مواد بالا، ضریب بازتاب R را محاسبه کنید. (ب) نمودارهایی مشابه شکل ۱۸-۳ ترسیم کنید. (ج) زاویه برونتر را محاسبه کنید.

پاشندگی و میدانهای نوسانی در مواد پاشنده

چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک محیط به ثابتهای اپتیکی n و k بستگی دارد. این ثابتها به نوبه خود به ثابتهای ماده؛ گذردهی الکتریکی ϵ ، تراوایی مغناطیسی μ ، و رسانندگی الکتریکی g بستگی دارند. تا به حال با این پارامترها به عنوان داده‌های مسئله رفتار می‌کرده‌ایم، اما قبلاً به این واقعیت اشاره شده بود که مقادیر آنها ممکن است در محدوده فرکانس تابشی از dc تا پرتوهای X خیلی تغییر کند (در واقع همیشه تغییر می‌کند). به منظور اینکه در به‌کارگیری نظریه الکترومغناطیس قضاوت کنیم، باید تا اندازه‌ای از قواعد کلی پس این وابستگی فرکانس که پاشندگی نامیده می‌شود آگاه باشیم.

در این فصل ابتدا تعریف کلی یک دستگاه خطی را مطرح می‌کنیم و سپس یک مدل میکروسکوپی ارائه می‌کنیم که رفتار اپتیکی مواد را پیشگویی می‌کند. این مدل تعمیم میدانهای نوسانی است که به اجمال در فصلهای ۵ و ۷ برای میدانهای استاتیک بررسی شد. نظریه درود-لورنتس^۲ که اسمی است که این مدل با آن معروف است، بر این پایه مبتنی است که بسته به

۱. در این فصل ما فقط محیطهایی با $\mu = \mu_0$ را در نظر می‌گیریم.

ماهیت مواد، ذرات باردار تشکیل دهنده ماده به صورت نوسانگرهای هماهنگ یا به صورت ذرات آزاد در نظر گرفته شوند.

۱-۱۹ خطی بودن و علیت

در فصول قبل، ما بارها محیطهای خطی را توصیف کرده‌ایم، بدین معنی که مثلاً $D(t)$ با یک ضریب تناسب ثابت که گذردهی الکتریکی نامیده می‌شود با $E(t)$ مرتبط است. در یک محیط پاشنده، چنین ارتباطی ممکن نیست، اما هنوز مفهوم محیط خطی خیلی مفید است.

ما محیط (یا دستگاه) خطی را به عنوان محیطی تعریف می‌کنیم که وقتی که تحریکی (یا ورودی، یا نیروی محرکی) مانند $I(t)$ به آن اعمال شود، پاسخی (یا خروجی) مانند $O(t)$ از آن حاصل شده که توسط رابطه زیر داده شده

$$O(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t-t') I(t') dt' \quad (الف\ ۱-۱۹)$$

که $R(t)$ تابع پاسخ نامیده می‌شود و به $I(t)$ بستگی ندارد (ضریب $1/\sqrt{2\pi}$ برای راحتی آتی معرفی شده است).

برای دستگاههای فیزیکی واقعی، همان طور که به زودی خواهیم دید، محدودیتهایی روی $R(t-t')$ وجود دارد. خصوصاً، "علیت" می‌طلبد که برای $t' > t$ ، $R(t-t') = 0$. با عوض کردن متغیر انتگرالگیری از t' به $t' = t - t''$ ، معادله (الف ۱-۱۹) را می‌توان به شکل معادل زیر تبدیل کرد

$$O(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t'') I(t-t'') dt'' \quad (ب\ ۱-۱۹)$$

معادله (۱-۱۹) رابطه‌ای خطی بین $O(t)$ و $I(t)$ را بیان می‌کند از این جهت که اگر $I(t)$ را یک ثابت ضرب کنیم، $O(t)$ هم در آن ثابت ضرب می‌شود، و اگر دو ورودی هم‌زمان اعمال شود، خروجی جمع خروجیهای تولیدشده توسط دو ورودی مجزاست. این خواص ما را مطمئن می‌کند که می‌توانیم اصل برهم‌نهی را برای به دست آوردن حاصل اعمال چندین ورودی هم‌زمان به کار ببریم، یا پاسخ به یک ورودی پیچیده را با تجزیه آن به تحریکهای ساده‌تر و جمع پاسخها، تعیین کنیم. همچنین اینها خواص عمده عملگر خطی یا تبدیل خطی هستند که مقدار معتناهی ریاضیات مرتبط با آن موجود است. ما به این ریاضیات استناد نمی‌کنیم، اما معادلات (الف ۱-۱۹) و (ب ۱-۱۹) را به عنوان تعریف محیط خطی به کار خواهیم برد. مثلاً اگر جابه‌جایی الکتریکی

$D(t)$ توسط معادله‌ای به شکل معادله (۱-۱۹) با میدان الکتریکی $E(t)$ مرتبط باشد، محیط را به عنوان محیط خطی تعریف می‌کنیم. روابط مشابه‌ای بین چگالی جریان $J(t)$ و میدان الکتریکی $E(t)$ ، یا میدان مغناطیسی $B(t)$ و شدت مغناطیسی $H(t)$ را وقتی خطی می‌نامیم که در معادلات ذکر شده صدق کنند. توجه داشته باشیم که یک ماده مثلاً ممکن است رفتار دی‌الکتریکی خطی و رفتار مغناطیسی غیرخطی داشته باشد، مانند برخی فریتها. این روابط تعمیم معادلات (۳۲-۴ الف)، (۱۰-۷)، و (۳۷-۹) به میدانهای کلی وابسته به زمان و مواردی است که ماده را نتوان توسط پارامترهای ϵ ، μ و g ماده که ضرایب تناسب ساده‌اند توصیف کرد. در مورد محیطهای دی‌الکتریک، تابع پاسخ $R(t) = \sqrt{2\pi\epsilon}\delta(t)$ با ثابت ϵ معادله (۳۲-۴ الف) را به دست می‌دهد؛ اما این چنین تعریف ساده‌ای برای گزدرهی الکتریکی برای میدانهای کلی وابسته به زمان وجود ندارد.

معادلات (۱-۱۹) دو پیامد بسیار مهم دارند. اول اینکه تبدیل فوریه $O(t)$ ، $R(t)$ ، و $I(t)$ که ما با $\tilde{O}(\omega)$ ، $\tilde{R}(\omega)$ ، و $\tilde{I}(\omega)$ نشان می‌دهیم توسط رابطه زیر با هم مرتبط‌اند

$$\tilde{O}(\omega) = \tilde{R}(\omega)\tilde{I}(\omega) \quad (2-19)$$

برعکس، اگر تبدیلیهای فوریه این توابع توسط معادله (۲-۱۹) با هم مرتبط باشند، تبدیلیهای عکس آنها توسط معادله‌ای از نوع معادله (۱-۱۹) با هم مرتبط‌اند

$$\tilde{O}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} O(t) e^{i\omega t} dt, \quad O(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{O}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3-19)$$

و به همین نحو برای $\tilde{I}(\omega)$ و $\tilde{R}(\omega)$. معادله (۲-۱۹) را می‌توان به سهولت از معادله (۱-۱۹) با استفاده از تعاریف تبدیلیهای فوریه و نمایش تابع دلتا که به صورت زیر است

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \quad (VI-8)$$

به دست آورد. در واقع اینکه معادله (۱-۱۹) معادله (۲-۱۹) را ایجاب می‌کند و برعکس، قضیه‌ای کلی است که معروف به "قضیه پیچش" است.

۱. خلاصه کوتاهی از برخی مبانی انتگرالهای فوریه در بیوست ۶ ارائه شده است. ما علامت مد " ~ " را برای مشخص کردن تبدیل فوریه مرتبط با یک تابع متغیر با زمان معین، به کار می‌بریم: $\tilde{E}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int E(t) \exp(i\omega t) dt$. چنین تبدیلی عموماً مختلط است. ما برای مشخص کردن کمیتهای مختلط عموماً از علامت \wedge استفاده می‌کنیم. برای سازگار نگه داشتن علامتگذارها با فصول قبل، به کار بردن علامت \wedge را برای کمیتهایی مانند ضریب دی‌الکتریک مختلط $\tilde{K}(\omega)$ ، ضریب رسانایی مختلط $\tilde{g}(\omega)$ ، و غیره را ادامه می‌دهیم، گو اینکه وابستگی آنها روی ω دلالت بر این دارد که آنها تبدیلات فوریه‌اند.

معادله (۲-۱۹) بسیار مهم است به این دلیل که این مطلب را بیان می‌کند که در یک محیط خطی پاسخ به یک میدان تکفام فقط متناسب با میدان تأثیرگذار است، و بالعکس اگر یک چنین تناسبی وجود داشته باشد، محیط خطی است. این تناسب با وجود این وابسته به فرکانس است. اهمیت تناسب این است که نتایج به دست آمده در فصلهای ۱۷ و ۱۸ را می‌توان به وسیله تبدیلهای فوریه به محیطهای خطی پیچیده‌تری اعمال کرد. همچنین باید توجه داشت که معادله (۲-۱۹) برای فرکانس صفر ارتباط بین این فصل و فصول ۴ تا ۱۲ را برقرار می‌کند.

دومین پیامد مهم معادله (۱-۱۹) دلالت بر این دارد که $O(t)$ و $I(t)$ با یکدیگر توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبطند که ما آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n} O(t) = I(t) \quad (۴-۱۹)$$

درجه N معادله دیفرانسیل است. عکس این مطلب را فقط با نوشتن $O(t)$ و $I(t)$ به صورت عکس تبدیلهای جایگزینی در معادله (۴-۱۹) می‌شود به سادگی اثبات کرد. مشتق زمانی مرتبه m ، با $(-i\omega)^m$ ضرب می‌شود و به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^N a_n (-i\omega)^n \tilde{O}(\omega) = \tilde{I}(\omega) \quad (۵-۱۹ \text{ الف})$$

یا

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n (-i\omega)^n} \quad (۵-۱۹ \text{ ب})$$

معادلات (۵-۱۹) بدین ترتیب معادله‌ای به شکل معادله (۲-۱۹) را بیان می‌کند، و به استناد قضیه بیچش، رابطه‌ای بین $O(t)$ و $I(t)$ به شکل معادله (۱-۱۹) وجود دارد. اثبات اینکه معادله (۴-۱۹) از معادله (۱-۱۹) ناشی می‌شود مشکل‌تر است، و ارائه آن ما را از موضوع دور می‌کند.^۱ اهمیت این نتایج این است که برای یک محیط خطی، خروجی توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به ورودی مرتبط است و محیطی که در آن خروجی با ورودی توسط یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبط باشد خطی است.

۱. یک روش اثبات در

A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1965; Reprinted, New York: Dover, 1987), (p. 130, Ex. 5 in the Dover edition).

شرح داده شده است.

تا اینجا ما فقط مسئله خطی بودن را عنوان کرده‌ایم. شرطهای دیگری وجود دارد که باید توسط تابع پاسخ بر اساس دلایل فیزیکی برآورده شود. اول اینکه یک ورودی حقیقی باید یک خروجی حقیقی تولید کند، و در نتیجه $R(t)$ باید برای تمام مقادیر حقیقی t ، حقیقی باشد. توجه داشته باشیم الزامی نیست که $O(t)$ و $I(t)$ در معادله (۱۹-۱) حقیقی باشند (اگر چه ورودیهای فیزیکی واقعی و خروجی آنها حقیقی‌اند). این امر مسلم است که $R(t)$ حقیقی است بدین معنی است که

$$\tilde{R}^*(\omega) = \tilde{R}(-\omega) \quad (۱۹-۶)$$

آنچنانکه به سهولت آن را می‌توان از رابطه زیر نشان داد

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt$$

پس a_n ها در معادله (۱۹-۵الف) باید برای n های مزدوج حقیقی و برای n های فرد موهومی باشند. دومین شرط این است که معادله (۱۹-۱) باید علی باشد به این معنی که ورودی در زمان t نباید برای زمانهای کمتر از t (زودتر) خروجی تولید کند. این شرط ایجاب می‌کند^۱ که

$$R(t'') = 0, \quad t'' < 0 \quad (۱۹-۷)$$

بالاخره، ما باز بر اساس دلایل فیزیکی انتظار داریم که یک ورودی معین فقط یک خروجی معین را تولید کند، و اینکه یک ورودی در زمان t' خروجی در زمان t تولید کند که به‌طور یکنوا در مقادیر بزرگ $(t - t')$ تقلیل یابد.^۲ ایده‌هایی را که تا اینجا توسعه یافته است، می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. خطی بودن توسط معادله (۱۹-۱) تعریف می‌شود.

۲. تبدیلهای فوریه $O(t)$ ، $R(t)$ ، و $I(t)$ توسط معادله (۱۹-۲) با هم مرتبط‌اند و اگر معادله (۱۹-۲) برقرار باشد، محیط (دستگاه) خطی است.

۱. معادله (۱۹-۷) برای $R(\omega)$ پیامدهایی دارد، یعنی اینکه ریشه‌های ω_n معادله

$$\sum_{n=1}^N a_n (-i\omega)^n = 0$$

باید قسمتهای موهومی منفی داشته باشند. این را می‌توان با استفاده از قضیه انتگرال کوشی ثابت کرد (رجوع شود به پیوست ۰۷).

۲. این معادله این است که اجبارکنیم $R(t)$ به صورت مجذور قابل انتگرال‌گیری است که پیامد این را دارد که $\tilde{R}(\omega)$ نیز به صورت مجذور قابل انتگرال‌گیری است.

۳. برای یک محیط (دستگاه) خطی، $O(t)$ و $I(t)$ توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، معادله (۴-۱۹) به هم مربوط اند و بالعکس.

برای دستگاههای فیزیکی واقعی همچنین ملزم به داشتن شروط زیر هستیم:

۴. برای تمام t ها $R(t)$ حقیقی است.

۵. برای $t < 0$ ، $R(t) = 0$.

۶. بر روی محدوده $-\infty < t < \infty$ مجذور تابع $R(t)$ قابل انتگرال گیری است.

در یک محیط دی الکتریک خطی جابه جایی الکتریکی توسط رابطه زیر با میدان الکتریکی مرتبط است

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} R(\mathbf{r}, t') \mathbf{E}[\mathbf{r}, (t - t')] dt' \quad (۸-۱۹)$$

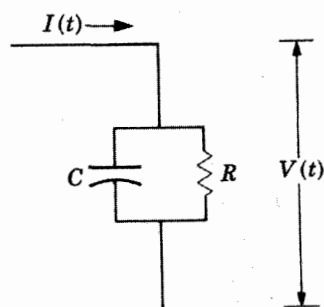
$R(\mathbf{r}, t)$ تابعی از t است که وابستگی به \mathbf{E} ندارد. به سبب معادله (۷-۱۹)، حد پایین انتگرال را می توان برابر صفر در نظر گرفت. معادله (۸-۱۹) شامل فرض اضافی دیگری است که $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ فقط به مقدار \mathbf{E} در همان نقطه وابسته است. این چنین رابطه ای معروف به موضعی فضایی است، و تنها چنین روابطی در نظر گرفته خواهد شد. ما همچنین فرض خواهیم کرد که $R(\mathbf{r}, t)$ تنها در فصل مشترکهای تیز مانند مرز بین دو جسم دی الکتریک همگن نیمه نامتناهی تغییر می کند. این فرض محدودکننده است و برخی موارد عملی مهم را مستثنی می کند.

بنابراین معادله (۸-۱۹) را می توان به صورت

$$D(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} R(t') E(t - t') dt' \quad (۸-۱۹ \text{ الف})$$

نوشت با این قرار که معادله به یک نقطه مجرد در فضا ارجاع می دهد و اینکه $D(t)$ و $E(t)$ مؤلفه های نظیر به نظیر کمیتهای برداری هستند. توجه داشته باشیم که $D(t)$ نه تنها به مقدار E در زمان t ، بلکه به مقدار E در تمام زمانهای گذشته وابسته است. بنابراین عموماً کمیته ساده ای وجود ندارد که بتوان آن را کاملاً در حوزه زمان گذشته نامید؛ گذشته مفهومی در حوزه فرکانس است.

همان طور که قبلاً ذکر شد، مورد ایده آلی که $R(t') = \sqrt{2\pi} \varepsilon \delta(t')$ و در آن ε مستقل از زمان است مستثنی از بیان بالاست. پس $D(t) = \varepsilon E(t)$ ، بنابراین این تنها موردی است که در آن رفتارهای استاتیک و کند تغییر فصول قبل کاملاً صادق است. به تکرار بیان آن می آرزو که محیطی که در آن رابطه بین E و D توسط معادله (۸-۱۹ الف) داده شده محیطی خطی است. اگر



شکل ۱-۱۹ مدار ساده RC ی موازی که جریان $I(t)$ را می‌کشد.

R صریحاً وابسته به E باشد، در آن صورت محیط غیرخطی است و پدیده‌های بیشتری رخ می‌دهد. معروف‌ترین آنها پدیده اختلاط است که در آن یک محرک تک فرکانس سبب پاسخی می‌شود که تک فرکانس نیست. ما پاسخ محیطهای غیرخطی به میدانهای وابسته به زمان را در نظر نخواهیم گرفت.

برای روشن شدن بیشتر مفهوم خطی بودن، مدار ساده RC نشان داده شده در شکل ۱-۱۹ را در نظر می‌گیریم. ورودی جریان شناخته شده $I(t)$ است و خروجی $V(t)$ است. معادله دیفرانسیل زیر حاکم بر رفتار این مدار است

$$\frac{1}{R} V(t) + C \frac{dV}{dt} = I(t) \quad (۹-۱۹)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب ثابت است. در نتیجه یک دستگاه خطی را توصیف می‌کند و هر آنچه در بالا برای یک چنین دستگاههایی نشان داده شد برای آن صادق است. $V(t)$ را خصوصاً می‌توان به شکل معادله (۱-۱۹) نوشت. با توجه به اینکه $(1/C) \exp(t/RC)$ ضریب انتگرال‌گیری است که طرف چپ را به دیفرانسیل کامل تبدیل می‌کند، شکل صریحی برای $R(t)$ می‌توان یافت. با قدری دست‌کاری ساده، پاسخ خصوصی معادله را به دست می‌آوریم

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} e^{-t'/RC} I(t-t') dt' \quad (۱۰-۱۹)$$

که دقیقاً به شکل معادله (۱-۱۹) است با تابع پاسخ $R(t) = (1/C)(2\pi)^{1/2} \exp(-t/RC)$ برای $t > 0$ و $R(t) = 0$ برای $t < 0$. تابع پاسخ، $R(t)$ ، مقاومت ظاهری مدار نیست؛ مقاومت ظاهری مفهومی است که مرتبط با یک فرکانس مجرد است. می‌توانیم $\tilde{R}(\omega)$ را با استفاده از

تبدیل معکوس فوریه از $R(t)$ محاسبه کنیم. به دست می‌آوریم

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{R - \frac{1}{(1/i\omega c)}} \quad (11-19)$$

اگر علامت مخرج معادله (۱۱-۱۹) مثبت می‌بود، $\tilde{R}(\omega)$ مقاومت ظاهری مقاومت R موازی با ظرفیت C در فرکانس ω می‌بود، به همان‌گونه که در معادله (۱۳-۲۸) داده شده است. منشأ عکس بودن علامت مربوط است به انتخاب $\exp(i\omega t)$ در فصل ۱۳ برای وابستگی زمانی (که با قرارداد مرسوم در مدارهای ac مطابقت داشته باشد) و انتخاب $\exp(-i\omega t)$ در نمایش تبدیلیهای فوریه $I(t)$ ، $R(t)$ ، و $O(t)$ طبق معادله (۱۹-۳)*. با برطرف شدن این نکته کوچک می‌توانیم بنویسیم

$$\tilde{V}(\omega) = \tilde{R}(\omega)\tilde{I}(\omega) = \tilde{Z}^*(\omega)\tilde{I}(\omega) \quad (12-19)$$

بنابراین $\tilde{R}(\omega) = \tilde{V}(\omega)/\tilde{I}(\omega)$ به‌سادگی با مقاومت ظاهری مرتبط است، و این را نشان می‌دهد که مفهوم مقاومت ظاهری در حوزه فرکانس نه در حوزه زمان معنی دارد. ملاحظات مشابهی دیگر روابط خطی بین متغیرهای فیزیکی را شامل می‌شود، و اغلب امکان دارد تابع پاسخ فرکانس، $\tilde{R}(\omega)$ را با پارامترهای فیزیکی یکی دانست. مهم است درک کنیم که خطی بودن دلالت بر یک تناسب ساده بین $I(t)$ و $O(t)$ ندارد، خطی بودن تناسب بین $\tilde{I}(\omega)$ و $\tilde{O}(\omega)$ را می‌رساند، اما حتی اینجا هم تناسب وابسته به ω است.

خطی بودن و علیت آن‌گونه که در بالا تعریف شد پیامدهای پراهمیتی را در بر دارند که در مورد میدانهای الکترومغناطیسی و بسیاری دیگر از دستگاههای فیزیکی کاربرد دارند. ما حالا برخی از این پیامدها را بررسی خواهیم کرد.

* ۱۹-۲ پاسخ فرکانس و روابط پاشندگی

یک نوسانگر کلاسیک میرای واداشته که از ذره‌ای به جرم m و بار e تشکیل شده را در نظر می‌گیریم، ذره توسط یک نیروی بازگرداننده خطی به موقعیت تعادلی خود مقید است و در معرض میدان الکتریکی $E(t)$ قرار دارد. معادله حاکم بر این دستگاه عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + Cx = eE(t)$$

* هر یک از انتخابها برای وابستگی زمانی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در نتایج فیزیکی تفاوتی نخواهد بود. در مقایسه کار با استفاده از وابستگی زمانی نمایی مختلط، باید مطمئن شد که همان وابستگی زمانی به‌کار رفته در غیر این صورت تنظیمهای مناسب را انجام دهیم.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E(t) \quad (۱۳-۱۹)$$

میدان الکتریکی $E(t)$ نیروی محرک برای نوسانگر را تأمین می‌کند. فرکانس طبیعی نوسانگر غیرمیرا برابر است با $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ و ثابت میرایی برابر است با $\gamma = G/m$. معادله (۱۳-۱۹) میدان دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است، بنابراین دستگاه خطی است و نتایج بخش (۱-۱۹) را می‌توان به‌کار برد. پاسخ فرکانسی از معادله (۱۹-۵) با $\omega_0^2 = a_0$ ، $\gamma = a_1$ و $a_2 = 1$ یا با استفاده از نمایش تبدیل فوریه $x(t)$ و $E(t)$ به‌دست می‌آید. از هر کدام از این روشها عاید می‌شود

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \tilde{E}(\omega) = \tilde{R}(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (۱۴-۱۹)$$

$\tilde{E}(\omega)$ و $\tilde{x}(\omega)$ مختلط‌اند. تابع پاسخ فرکانسی، $\tilde{R}(\omega)$ را می‌توان به قسمت‌های حقیقی و موهومی تفکیک کرد

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{e}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right] + i \frac{e}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (۱۵-۱۹)$$

این تابع پاسخ فرکانسی مختلط است، و هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن وابسته به فرکانس هستند. خاصیت فوق‌العاده جالب و در عین حال مفیدترین خاصیت قسمت‌های حقیقی و موهومی $\tilde{R}(\omega)$ ، همان‌طور که برای یک تابع پاسخ معین نشان خواهیم داد این است که اگر قسمت حقیقی آن برای تمام مقادیر حقیقی ω معلوم باشد، در این صورت می‌توان قسمت موهومی را معین کرد و بالعکس. رابطه بین قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع پاسخ را می‌توان با استفاده از تابع پاسخ فرکانس که در معادله (۱۹-۱۵) داده شده بیان کرد، با وجود این برخی از ریاضیات آن بسیار دشوار است. برای مقصود ما، به همان اندازه آموزنده است که تقریبی برای تابع پاسخ فرکانس برای نوسانگر هماهنگ میرای واداشته در نظر بگیریم. ابتدا توجه می‌کنیم به اینکه اگر γ کوچک باشد، آنگاه $\tilde{R}(\omega)$ بجز در $\omega \cong \omega_0$ کوچک است. بنابراین معادله (۱۹-۱۵) را تقریباً با $\tilde{T}(\omega)$ به صورت زیر یکی می‌گیریم

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\omega) &= \frac{e/m}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) - i\gamma\omega} \\ &\cong \tilde{T}(\omega) = \frac{e/m}{2\omega_0 \left[(\omega_0 - \omega) - i \frac{\gamma}{2} \right]} \end{aligned} \quad (۱۶-۱۹)$$

که تقریب شامل جایگزین کردن ω با ω_0 در همه جا است بجز محل‌هایی که ضریب $(\omega_0 - \omega)$ یافت می‌شود. لیکن تقریب $\tilde{R}(\omega)$ با $\tilde{T}(\omega)$ فقط برای $\omega > 0$ صادق است. اکنون $\tilde{T}(\omega)$ را به‌عنوان تقریب تابع پاسخ برای دستگاه دینامیکی برای محدوده $-\infty < \omega < \infty$ در نظر می‌گیریم.^۱ به‌سادگی می‌توانیم نشان دهیم که $\tilde{T}(\omega)$ تمام شرایط دستگاههای فیزیکی را برآورده می‌کند بجز اینکه $T(t)$ حقیقی نیست. (یک چنین شرطی برای تحلیل فعلی احتیاج نیست). با جدا کردن $\tilde{T}(\omega)$ به قسمتهای حقیقی و موهومی به‌دست می‌آوریم

$$\tilde{T}(\omega) = \frac{e}{2m\omega_0} \left[\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + i \frac{\gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \right] \quad (17-19)$$

معادله (۱۷-۱۹) بسیار ساده‌تر از معادله (۱۵-۱۹) است و کار با آن از نظر ریاضی آسان‌تر است. همان‌طور که اشاره کرده‌ایم، این معادله بیانگر نوسانگر میرایی واداشته کلاسیک نیست، بلکه دستگاهی را نشان می‌دهد که تقریبی است برای چنین نوسانگری.

با این اخطار، تابع $W(\omega)$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$W(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} \frac{d\omega'}{\left[(\omega_0 - \omega')^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right] (\omega' - \omega)} \right\} \quad (18-19)$$

به‌زودی خواهیم دید که این تابع با $\tilde{T}(\omega)$ مرتبط است. طرف دست راست معادله (۱۸-۱۹) که بازه کوچکی را حول موضع تکینگی تابع زیر انتگرال از محدوده انتگرال‌گیری مستثنی می‌کند و سپس حدگیری می‌کند، در حالی که این بازه کوچک به سمت صفر می‌کند، به‌عنوان مقدار جزء اصلی کوشی^۲ انتگرال از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت معروف است. مقدار جزء اصلی کوشی معمولاً با قرار دادن یک P در مقابل انتگرال نشان داده می‌شود. با عوض کردن متغیر انتگرال‌گیری

۱. بر دستگاه تقریبی که $\tilde{T}(\omega)$ را می‌دهد معادله دیفرانسیل زیر حاکم است

$$-2i\omega_0 \frac{dx}{dt} + (2\omega_0^2 - i\gamma\omega_0) x(t) = \frac{e}{m} E(t)$$

که جالب است به دلیل اینکه معادله دیفرانسیل از رتبه اولی است که معادله (۱۳-۱۹) را تقریب می‌زند.

به $x = \omega' - \omega_0$ ، انتگرالهای معادله (۱۹-۱۸) به شکل استاندارد زیر تبدیل می‌شوند

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2} \left[\ln(x+a) - \frac{1}{2} \ln(x^2+b^2) + \frac{a}{b} \tan^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) \right]$$

با استفاده از این نتیجه و محاسبه انتگرالها در حدود داده شده در معادله (۱۹-۱۸)، ترکیب دو جمله اول صفر می‌شود، در حالی که جمله باقیمانده عبارت زیر را می‌دهد

$$W(\omega) = \frac{\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\gamma/2)}$$

اکنون تابع زیر انتگرال برای $W(\omega)$ در معادله (۱۹-۱۸)، درست حاصل ضرب $[4m\omega_0/e\gamma](\omega' - \omega)^{-1}$ و قسمت موهومی $[\tilde{T}(\omega)]$ است. بنابراین

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{e}{2m\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \quad (۱۹-۱۹)$$

که برای ساده نمایش دادن معادله، ما علامت مقدار جزء اصلی را به‌کار برده‌ایم. طرف دست راست معادله (۱۹-۱۹) درست قسمت حقیقی $\tilde{T}(\omega)$ است، و معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$T_r(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_i(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (۱۹-۲۰ الف)$$

دقیقاً به روش مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که

$$T_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_r(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \quad (۱۹-۲۰ ب)$$

این دو معادله به روابط پاشندگی برای $\tilde{T}(\omega)$ معروف‌اند.^۱

معادلات (۱۹-۲۰ الف) و (۱۹-۲۰ ب) برای دستگاهی که به یک نوسانگر هماهنگ میرای کلاسیک نزدیک است به‌دست آمد، هر چند آنها برای هر دستگاه علی‌خطی اعتبار دارند، همان‌طور که در پیوست ۷ نشان داده شده است (توجه کنید که به شرط حقیقی بودن $T(t)$ استناد نشده است).

۱. عبارت "رابطه پاشندگی" در دو زمینه استفاده شده است. در فصل ۱۷ استفاده شد که وابستگی فرکانس به عدد موج لازمه برای برقراری معادله موج را نشان دهد. در زمینه فعلی، این عبارت رابطه بین قسمت‌های حقیقی و موهومی پارامتری از ماده مانند ثابت دی‌الکتریک را بیان می‌کند.

تنها فرکانسهای مثبت از نظر فیزیکی معنی دارند، بنابراین سؤال معنی انتگرالهای معادله (۱۹-۲۰) روی فرکانسهای منفی باقی می ماند. چون دستگاههای فیزیکی شامل توابع پاسخ حقیقی اند، $R_i(-\omega) = -R_i(\omega)$ و $R_r(-\omega) = R_r(\omega)$ ، و بنابراین انتگرالهای روی مقادیر منفی ω با انتگرالهای روی مقادیر مثبت ω به سادگی مرتبط اند. این روابط ما را قادر می سازند که مقادیر منفی ω را از محدوده انتگرالگیری روابط پاشندگی حذف کنیم. همان طور که در پیوست ۷ نشان داده شده است، نتیجه برابر است با

$$R_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' R_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (19-21 \text{ الف})$$

$$R_i(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{R_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (19-21 \text{ ب})$$

اگر تابع پاسخ پذیرفتاری الکتریکی محیط دی الکتریک باشد (یعنی اگر $\tilde{R}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)$)، در این صورت معادلات (۱۹-۲۱) به روابط پاشندگی کرامرز-کرونیگ^۱ مشهورند.

اولین کاربرد روابط پاشندگی تعیین ضریب شکست مواد جامد برای پرتوهای X بود. در این مورد، اندازه گیری جذب تابش توسط مواد نسبتاً ساده است، اما اندازه گیری شکست آن بسیار مشکل است. لیکن ضریب شکست را می توان با استفاده از روابط پاشندگی و اندازه گیری جذب پرتو X تعیین کرد. اکنون به بررسی محیطهای پاشنده برمی گردیم، که در آنها برای روشن شدن کاربرد روابط پاشندگی مثالهایی را خواهیم یافت.

۱۹-۳ مدل نوسانگر هماهنگ درود-لورنتس

کلیه مواد عادی از الکترونها منفی و هسته های مثبت تشکیل شده اند. در اینجا، اگر فرض کنیم تعدادی از الکترونها (کمتر یا بیشتر از بار هسته ای، Z) محکم به هسته مقیدند و با آن حرکت می کنند این شیء مرکب یک یون باردار خواهد بود. الکترونها و یونها را به صورت نوسانگرهای هماهنگ، یعنی ذراتی که با یک نیروی بازگرداننده به یک موضع تعادل مقید می شوند در نظر خواهیم گرفت. برای حفظ کلیت فرض می کنیم نوسانگرهای هماهنگ میرا هستند و برای هر یک نیروی میرانده ای متناسب با سرعت منظور می کنیم. هنگامی که موج الکترومغناطیسی وجود داشته باشد، هر نوسانگر با میدان الکتریکی موج رانده می شود.^۲ پاسخ محیط را با جمع زدن حرکتهای ذرات آن به دست

1. Kramers-Kronig

۲. نیروی لورنتس عبارت است از $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ، ولی برای امواج $B = (n/c)E$. نیروی مغناطیسی به مقدار $n(v/c)$ از نیروی الکتریکی کوچکتر است و ما از آن چشمپوشی می کنیم. به هر جهت نیروی مغناطیسی بر روی ذره کار انجام نمی دهد چون بر \mathbf{v} عمود است.

می‌آوریم؛ البته چون فرض کردیم که نیروها خطی‌اند، K و g که از این مدل نتیجه می‌شوند ثابت خواهند بود (یعنی، مستقل از E ، هر چند که به فرکانس بستگی خواهند داشت). چنانچه این مدل را برای الکترونها به‌کار ببریم، الکترونها ی مقید در آنها را توصیف خواهد کرد، ولی چنانچه فقط ثابت نیروی بازگرداننده را مساوی صفر قرار دهیم، الکترونها ی آزاد را نیز می‌توانیم به‌صورت حالت خاص منظور کنیم.

معادله حرکت کلاسیک^۱ برای نوسانگر یک‌بعدی میرای واداشته، همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m \quad (۱۹-۲۲ الف)$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m} \quad (۱۹-۲۲ ب)$$

که در آن e و m بار و جرم ذره، و E_m "میدان مولکولی" است که در فصل ۵ بحث شد. ابعاد ثابت میرایی، $\gamma = G/m$ ، با ابعاد فرکانس یکی است. فرکانس طبیعی مربوط به نوسانگر نامیرا، ω_0 ، از طریق رابطه $C = m\omega_0^2$ به ثابت نیرو، C ، مربوط می‌شود. در فصل ۵ ثابت نیرو برای الکترونها ی مقید پوسته‌های خارجی برحسب "شعاع" R_0 ، بیان شد. در حالت ایستا x به t بستگی ندارد، پس معادله (۱۹-۲۲) با معادله (۵-۱۲) یکی می‌شود که در آن

$$\omega_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R_0^3} \quad (۱۹-۲۳)$$

برای الکترونها ی آزاد، در معادله (۱۹-۲۲)، ω_0 را برابر صفر قرار می‌دهیم که در آن‌صورت با معادله (۷-۳۱) یکی می‌شود که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad (۱۹-۲۴)$$

که در آن τ زمان متوسط بین برخوردهاست. درباره مقادیر مناسب ω_0 و γ برای حالت‌های دیگر بعداً بحث خواهد شد. برای آنکه برهم‌کنش متقابل بین ذرات را به حساب آورده باشیم، فرض می‌کنیم میدان E_m بر طبق رابطه زیر به میدان الکتریکی موج، E ، مربوط می‌شود

$$E_m = E + \frac{v}{\epsilon_0} P \quad (۱۹-۲۵)$$

۱. البته برای الکترونها باید مکانیک کوانتومی به‌کار برده شود. ولی حل کلاسیک سودمند است زیرا تصادفاً با پاسخ حل کوانتومی، چنانچه فرکانس طبیعی ω_0 به نحو مناسب تفسیر شود، یکی است.

که در اینجا P قطبش محیط است. در معادله (۷-۵) نشان دادیم که برای دی‌الکتریکی همسانگرد و غیرقطبی، $\nu = 1/3$. برای فلزات $\nu = 0$. در اینجا قصد اصلی ما این نیست که مسئله دشوار تصحیح مناسب میدان موضعی را بررسی کنیم. بنابراین ما تنها آن را به صورت ν باقی می‌گذاریم و کوشش خواهیم کرد در بررسی زیر آن را از ملاحظات خود حذف کنیم.

توجه کنید که تغییرات فضایی E_m در ناحیه $2x_0$ ، در فاصله‌ای که بار نوسان‌کننده حرکت می‌کند، بسیار کم است. در مورد آنها، x_0 کسر کوچکی از "شعاع" اتم، R_0 ، است و نوعاً در حدود چند آنگستروم است. نور مرئی در خلأ طول موجش بیش از حدود 4000 \AA است و نتیجتاً طول موج آن در ماده حتی برای دی‌الکتریکی با ثابتی به بزرگی 400 ، بزرگتر از 10 \AA خواهد بود. بنابراین چشمپوشی از تغییرات E_m در فاصله $2x_0$ معقول خواهد بود. رابطه بین جابه‌جایی مکانیکی ذرات باردار میکروسکوپی تشکیل‌دهنده ماده (x) و پاسخ الکتریکی ماکروسکوپی محیط، با محاسبه قطبش (P) به دست می‌آید. گشتاور دوقطبی ناشی از جابه‌جایی بار e ، برابر است با ex (با فرض آنکه بار $-e$ که بار e را خنثی می‌کند، در سکون باقی بماند). بنابراین

$$P = Nex \quad (19-26)$$

که در آن N تعداد بارها در واحد حجم است. با استفاده از معادلات (۱۹-۲۵) و (۱۹-۲۶)، معادله (۱۹-۲۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P - \nu \omega_p^2 P = \varepsilon_0 \omega_p^2 E(t) \quad (19-27)$$

که در آن

$$\omega_p^2 = Ne^2 / \varepsilon_0 m \quad (19-28)$$

معادله (۱۹-۲۷) یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است. بنابراین پاسخ معادله (۱۹-۲۷) را می‌توان به صورت معادله (۱۹-۱) نوشت. همچنین می‌دانیم

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{R}(\omega) \tilde{E}(\omega)$$

که در آن

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{(-i\omega)^2 + \gamma(-i\omega) + \omega_0^2 - \nu \omega_p^2} \quad (19-29)$$

از آنجا که $\tilde{\chi}(\omega)$ ضریب تناسب بین $\tilde{P}(\omega)$ و $\tilde{E}(\omega)$ است. می‌توانیم بنویسیم

$$\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{R}(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega - \nu\omega_p^2} \quad (۳۰-۱۹)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این پذیرفتاری الزامهای یک تابع پاسخ حقیقی را برقرار می‌کند، یعنی آنکه، مادامی که $\gamma > 0$ باشد علی است و آنکه مربع آن انتگرال پذیر است. بنابراین، همان‌طور که انتظار می‌رود، تمام الزامهای تابع پاسخ یک دستگاه فیزیکی را برقرار می‌کند. از این راه پذیرفتاری به صورت تابعی از فرکانس تعریف می‌شود.

رابطه بین پذیرفتاری و پارامترهای مدل را غالباً به صورت‌های دیگری می‌نویسند. با مختصری جبر مقدماتی رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\tilde{\chi}(\omega)}{1 + \nu\tilde{\chi}(\omega)/\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (۳۱-۱۹)$$

و با استفاده از تعریف ثابت دی‌الکتریک، $\hat{K} = 1 + \tilde{\chi}/\varepsilon_0$ ، داریم

$$\frac{\hat{K} - 1}{1 + \nu(\hat{K} - 1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (۳۲-۱۹)$$

این معادله همان رابطه‌ای است که به دنبال آن بودیم: رابطه بین ثابت دی‌الکتریک ماکروسکوپی \hat{K} و خواص میکروسکوپی ذرات باردار تشکیل‌دهنده محیط. دو ویژگی مهم این نتیجه را باید متذکر شویم: اولاً \hat{K} مختلط است و ثانیاً به فرکانس بستگی دارد. بنابراین ساده‌ترین مدلی را که به‌طور خودکار می‌توانیم بسازیم ایجاب می‌کند که محیط رسانا و پاشنده باشد.

قبل از آنکه دربارهٔ پیامدهای این مدل بحث کنیم می‌بایست تعمیم ساده‌ای از آن را مطرح کنیم. این تعمیم موارد کاربرد مدل را به اکثر مواد واقعی گسترش می‌دهد. مواردی که در آن تمامی ذرات باردار ماده خواص یکسانی داشته باشند، نادر است. برای مثال، ذرات باردار را می‌توان به الکترون‌ها و یونها، یا به الکترون‌های متعلق به مدارهای مختلف داخلی و خارجی یک اتم تقسیم کرد. اگر تعداد N_i ذره به بار e_i ، جرم m_i ، فرکانس تشدید طبیعی ω_{0i} ، و فرکانس میرایی γ_i وجود داشته باشد، آنگاه با دنبال کردن همان اثباتی که در فوق آمد به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\frac{\hat{K} - 1}{1 + \nu(\hat{K} - 1)} = \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega} \quad (۳۳-۱۹)$$

اگر تمام ذرات، بار و جرم یکسانی داشته باشند (برای مثال، اگر همه الکترون باشند ولی در مدارهای مختلف توزیع شده باشند به‌طوری که نیروی بازگرداننده و ضرایب میرایی متفاوتی داشته باشند)،

این معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{\hat{K} - 1}{1 + \nu(\hat{K} - 1)} = \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (۳۴-۱۹)$$

که در اینجا $f_i = N_i/N$ کسری از نوسانگرهاست که از نوع i هستند. چون $\sum N_i = N$ ، بنابراین

$$\sum f_i = 1 \quad (۳۵-۱۹)$$

(در تعبیر کوانتوم مکانیکی این نتیجه، f_i به قدرت نوسانگر موسوم است و معادله (۳۵-۱۹) قاعده جمع f نامیده می‌شود.) ما در اینجا بحث خود را به حالت‌هایی محدود می‌کنیم که به ریزه‌کاریهای تصحیح میدان موضعی، ν ، بستگی ندارند. اگر میدان موضعی لورنتس ($\nu = 1/3$) صادق باشد، معادله (۳۴-۱۹) تبدیل می‌شود به

$$\frac{\hat{K} - 1}{\hat{K} + 2} = \frac{1}{3} \omega_p^2 \sum \frac{f_i}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (۳۶-۱۹)$$

از آنجا که ω_p^2 با N متناسب است، این معادله تعمیمی از معادله کلایوس-موساتی است. به دست آوردن \hat{K} از معادلات (۳۳-۱۹) یا (۳۶-۱۹) آسان، و در بعضی موارد نتیجه مفید است، ولی این کار نحوه بستگی \hat{K} به فرکانس را، که موضوع اصلی این فصل است به روشنی آشکار نخواهد کرد. ولی اگر $\nu = 0$ باشد، معادله (۳۳-۱۹) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\hat{K} - 1 = \sum \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{oi}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (۳۷-۱۹)$$

همچنین در فرکانسهایی که برای آن مقدار \hat{K} خیلی با ۱ تفاوت نداشته باشد، این معادله به ازای هر مقداری از ν معتبر است. به علاوه، در فرکانسهایی که به ازای آنها یکی از قله‌های تشدید معادله (۳۳-۱۹) بر تمامی قله‌های دیگر غالب می‌شود، می‌توانیم ν را از ملاحظات خود حذف کنیم:

$$(\hat{K} - 1)(\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) = [1 + \nu(\hat{K} - 1)]\omega_p^2$$

در نتیجه

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_o^2 - \nu\omega_p^2) - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (۳۸-۱۹)$$

این نتیجه با نتیجه مربوط به یک قله تشدید منفرد با تصحیح میدان موضعی صفر و فرکانس تشدید مؤثری برابر با $\sqrt{\omega_0^2 - \nu\omega_p^2}$ ، یکسان است. بنابراین، می‌توانیم بحث تفصیلی خود درباره بستگی \hat{K} به فرکانس را تنها به یک قله تشدید محدود کنیم

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (۳۹-۱۹)$$

و در عین حال می‌توانیم این نتایج را در مورد مسائل عملی بسیاری به‌کار ببریم. با نوشتن معادله (۳۹-۱۹) برحسب قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم

$$K_r = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (۱۹-۴۰الف)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (۱۹-۴۰ب)$$

حال این مقادیر را می‌توانیم به‌منظور به‌دست آوردن عبارات صریحی برای پاشندگی n و k برحسب فرکانس، در معادله‌های (۶۱-۱۷) قرار دهیم

$$n = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \quad (۱۹-۴۱)$$

ولی، این نتایج به‌قدری پیچیده‌اند که هیچ‌یک از ویژگی‌های کلی پاشندگی آشکار نخواهد شد. در بخش‌های ذیل ما موارد گوناگونی را بررسی خواهیم کرد که از نظر عملی مورد توجه‌اند و در آنها با در نظر گرفتن فرضیهایی می‌توانیم روابط را ساده کنیم.

قبل از آنکه به این مثالها بپردازیم، درباره ویژگی مهم دیگر این مدل نیز باید تذکری بدهیم، یعنی درباره این ویژگی که \hat{K} مختلط است. هر چند که مدل فوق را برای بارهای مقید ساختیم، ولی \hat{K} مختلطی که به‌دست آمد مشخصه محیط‌های رساناست. بدون آنکه عمداً چگالی جریان رسانش J را وارد کرده باشیم رسانندگی غیر صفری، $g = K_i \varepsilon_0 \omega$ ، وجود دارد. به‌علاوه، در حالت بارهای آزاد که $\omega_0 = 0$ است، باز هم ثابت دی‌الکتریکی، $K_r = K$ ، وجود دارد که مشخصه محیط‌های دی‌الکتریک است. در این مدل به‌طور خودکار قسمت حقیقی و قسمت موهومی \hat{K} ، که به جریان جابه‌جایی $\partial D / \partial t$ و جریان رسانش J در معادله ماکسول برای تاو H

مربوط می‌شوند، هر دو به‌طور مشابه وارد می‌شوند. در مدل خود می‌توانستیم به جای محاسبهٔ $P = Nex$ ، چگالی جریان را محاسبه کنیم

$$J = Ne \frac{dx}{dt} = -i\omega Nex$$

و از آن عبارتی برای رسانندگی g به‌دست آوریم. واضح است که در آن صورت نتایج زیر به‌دست می‌آمدند

$$J = \frac{dP}{dt} = -i\omega P$$

و

$$\hat{g} = -i\omega \hat{\chi} \quad (۴۲-۱۹)$$

برای هر یک از گروههای نوسانگرها در معادلهٔ (۴۲-۱۹)، ما باید یا P را محاسبه کنیم یا J را ولی نه هر دوی آنها را زیرا این دو عبارت معادلی برای این واقعیت‌اند که جابه‌جایی ذره یک مؤلفهٔ همفاز با میدان E و همچنین یک مؤلفهٔ با اختلاف فاز 90° دارد، یا آنکه سرعت ذره یک مؤلفهٔ غیرهمفاز و یک مؤلفهٔ همفاز دارد. برای میدانهای ساکن، جابه‌جایی بارهای مقید با میدان متناسب (همفاز) است و برای بارهای آزاد سرعت با میدان متناسب (همفاز) است؛ ولی در فرکانسهای زیاد جابه‌جایی و سرعت بارهای مقید و آزاد هر دو می‌توانند مؤلفه‌های همفاز و ناهمفاز با میدان داشته باشند. از طرفی بحث زیر را می‌توان تماماً برحسب رسانندگی مختلط مطابق معادلهٔ (۴۲-۱۹) فرمولبندی کرد و در بعضی موارد چنین فرمولبندی‌ای متداول‌تر است. رابطهٔ میان رسانندگی مختلط \hat{g} و ثابت دی‌الکتریک مختلط \hat{K} عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{g} &= -i\varepsilon_0 \omega (\hat{K} - 1) \\ g_r &= \varepsilon_0 \omega K_i, \quad g_i = -\varepsilon_0 \omega (K_r - 1) \end{aligned} \quad (۴۳-۱۹)$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، $g_r = g$ رسانندگی واقعی است، و g_i به ثابت دی‌الکتریک حقیقی مربوط است.

۴-۱۹ جذب تشدید توسط بارهای مقید

اکنون کاربرد بخش قبل را در مورد دستگاهی از بارهای مقید، یعنی در مورد موادی که برای dc نارسانا هستند، بررسی می‌کنیم. برای برآورد کردن اندازهٔ پارامترها در معادلات (۴۳-۱۹) الف و

(۱۹-۴۰) ب) برای الکترونهاى ظرفیت، فرض کنید در معادله (۱۹-۲۳) داریم $R_0 = 2\text{Å}$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi(8.854 \times 10^{-12})(0.91 \times 10^{-30})(2 \times 10^{-10})^3}}$$

$$= 5.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

این فرکانس تشدید الکترون متناظر است با طول موج 335Å (۳۳۵ nm) در هوا، که در ناحیه فرابنفش درست بعد از طیف مرئی واقع است. اگر R_0 بزرگتر یا کوچکتر از مقدار فوق باشد، طول موج تشدید بلندتر یا کوتاهتر خواهد شد. از ترکیب معادله (۱۹-۲۳) با معادله (۱۹-۲۸) که ω_p توسط آن تعریف می شود، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 4\pi R_0^3 N = 3NV_a \quad (19-44)$$

که در آن V_a حجم "اتم" است. بنابراین، اگر اتمها تنگاتنگ هم چیده شده باشند، مانند هنگامی که در مایعات یا جامدات چگالیده می شوند، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \approx 1 \quad (19-45)$$

هنگامی که اتمها با چگالی کمتری انبوهیده شوند، مثلاً در گازها (یا در محلولها)، این نسبت به تناسب کوچکتر است زیرا N کوچکتر است ولی معمولاً حالت انبوهش روی ω_0 تأثیر زیادی نمی گذارد. همچنین این نسبت برای الکترونهاى پوسته های داخلی که محکم تر مقیدند و مدارهای کوچکتری دارند، خیلی از 1 کوچکتر است. برآورد مقادیر معقول برای فرکانس میرایی γ مشکل تر است. برای به دست آوردن بینش بیشتری درباره معنای γ ، به معادله (۱۹-۲۲) برمی گردیم و حالت نوسانگر آزاد با $E_m = 0$ را بررسی می کنیم. حل این معادله نیز مشهور است

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega'_0 t} \quad (19-46)$$

که در آن

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$$

اگر γ کوچک باشد، ω'_0 با ω_0 تقریباً یکی است. دامنه نوسان به صورت $e^{-\gamma t/2}$ افت می کند، و انرژی نوسان که با مجذور دامنه متناسب است، به صورت $e^{-\gamma t}$ افت می کند. بنابراین،

می‌توانیم بنویسیم

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad (۴۷-۱۹)$$

که در آن τ زمان متوسط فروافت انرژی نوسانگر است. معنای τ در این معادله با معنای آن در معادله (۲۴-۱۹) برای الکترونهاي آزاد، یکی نیست ولی با هم مشابه‌اند: در هر دو مورد τ زمان متوسط اتلاف انرژی است (انرژی نوسانگر هماهنگ آزاد در یک مورد و انرژی پرواز آزاد در مورد دیگر). ذره نوسان‌کننده با از دست دادن انرژی نوسان خود الزاماً انرژی الکترومغناطیسی تابش می‌کند. در فصل بعد نشان خواهیم داد که آهنگ تابش به صورت زیر به آهنگ فروافت مربوط می‌شود

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda_0} \quad (۴۸-۱۹)$$

که در آن

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (۴۹-۱۹)$$

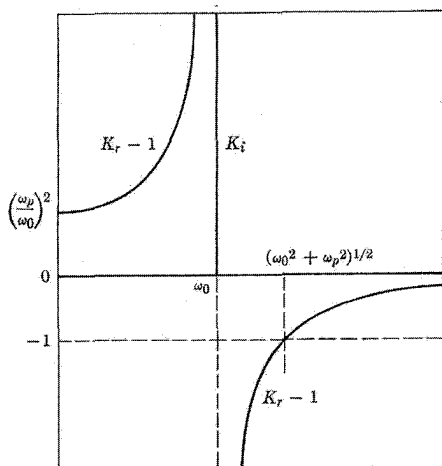
و $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ طول موج متناظر با ω_0 در خلا است. R_e مشهور به شعاع کلاسیک الکترون است (به مسئله ۶-۶ رجوع کنید).^۱ حتی برای پرتوهای X ($\lambda_0 \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) میرایی ناشی از این سازوکار نسبت به فرکانس تشدید فوق‌العاده کوچک است. معمولاً مدهای فروافت دیگری، ناشی از برهم‌کنش با سایر ذرات (برخوردها)، وجود دارد که باعث می‌شوند فرکانس میرایی از آهنگ فروافت تک‌ذره‌ای ناشی از تابش به مراتب بزرگتر باشد. با وجود این، برای کاربردهای این بخش، فرض می‌کنیم که

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$$

چون فرض شد γ کوچک است، به عنوان اولین تقریب از قرار دادن $\gamma = 0$ ، هرچند که غیرفیزیکی است، اطلاعاتی به دست خواهد آمد. معادله (۱۹-۴۰ الف) به ازای $\gamma = 0$ عبارت است از

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۵۰-۱۹)$$

که در شکل ۱۹-۲ نشان داده شده است. معادله (۱۹-۴۰ ب) به ازای $\gamma = 0$ نتیجه می‌دهد که در تمام فرکانسها $K_i = 0$ است بجز در فرکانس $\omega = \omega_0$ ، که در آنجا بی‌نهایت است. اگر به طور ۱. توزیع بار در الکترون از نظر فیزیکی مشاهده‌پذیر نیست، بنابراین معادله (۱۹-۴۹) تعریف مناسب‌تری است از تعریف مربوط به توزیع بار یکتواخت.



شکل ۲-۱۹ ثابتهای دی‌الکتریک برحسب تابعی از فرکانس برای یک خط جذب بسیار قوی و باریک در ω .

ساده γ را برابر صفر بگذاریم، نتیجه مفیدی برای K_i به دست نخواهد آمد. بنابراین، ما از معادله (۱۹-۴۰) استفاده می‌کنیم و حد آن را هنگامی که γ به سمت صفر میل می‌کند محاسبه می‌کنیم

$$K_i = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[\frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right] = \frac{\omega_p^2}{\omega} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)^2 + \gamma^2}$$

حد اخیر یکی از نمایشهای داده شده در پیوست ۵ برای تابع دلتای دیراک است. بنابراین K_i را می‌توان به صورت زیر نوشت (برای مقادیر مثبت ω):

$$K_i(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega} \pi \delta \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right) = \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\pi}{2} \delta(\omega_0 - \omega) \quad (۵۱-۱۹)$$

گام آخر در معادله (۱۹-۵۱) از این حقیقت نتیجه می‌شود که $\delta[(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega]$ تنها در حوالی $\omega = \omega_0$ غیر صفر است و بنابراین به‌طور تقریبی می‌توان آن را به صورت $\delta(2\{\omega_0 - \omega\})$ نوشت و داریم $\delta(2\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega)$ [به معادله ۵ پیوست ۵ نگاه کنید].

همان‌طور که می‌توان با محاسبه آهنگ تغییر انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی مشاهده کرد، $K_i \neq 0$ توصیف‌کننده اتلاف انرژی است. به‌طور بدیل $K_i \neq 0$ معادل است با $g_r \neq 0$ که به جریانی همفاز با میدان الکتریکی و نتیجتاً اتلاف انرژی منجر می‌شود. تقریب تابع دلتا برای $K_i(\omega)$ نمایشگر مورد خط جذب بی‌نهایت باریکی در $\omega = \omega_0$ است، همان‌طور که در شکل ۲-۱۹ نشان داده شده است. جالب‌ترین ویژگی این شکل آن است که در فرکانسهایی بسیار

دور از ω_0 که تنها فرکانسی است که در آن K_i غیرصفر است (برای خلا)، K_r مقادیری دارد که با ۱ (برای خلا) بسیار متفاوت است. تأثیر جذب انرژی در ناحیه اپتیکی در تمام فرکانسها، حتی در dc، در ثابت دی الکتریک K (ولی نه در رسانندگی g) تجلی پیدا می کند. برای $\omega = 0$

$$K_r(0) = K_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (52-19)$$

که بنابر معادله (۴۵-۱۹) می تواند با ۱ به طور فاحشی متفاوت باشد. به عنوان مثال، مقدار $\omega_0 = 5r5$ برای الماس قابل درک است، هر چند که الماس در فرکانسهای کمتر از فراینفش نارسانا است. برعکس، برای یک ماده نارسانا K تنها در صورتی می تواند با ۱ متفاوت باشد که این ماده در ناحیه دیگری از فرکانس رسانا (جذب کننده) باشد. برای محیطی که در تمام فرکانسها $g(\omega) = 0$ است الزاماً $K(\omega)$ نیز برابر ۱ است؛ یعنی، همان طور که در زیر خواهیم دید، چنین محیطی با خلا یکسان است. از طرفی دیگر، در فرکانسهایی بسیار بالاتر از فرکانس جذب، در تمام موارد K به سمت ۱ میل می کند.

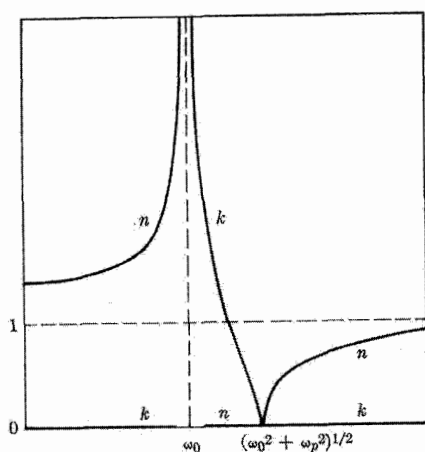
ثابت های اپتیکی n و k برای این حالت با استفاده از تقریبهای (۵۰-۱۹) و (۵۱-۱۹) در (۴۱-۱۹) به دست می آیند. بجز در $\omega = \omega_0$ داریم $K_i = 0$ ، پس تقریبهای (۶۲-۱۷) و (۶۳-۱۷) را می توان به کار برد. از معادله (۵۰-۱۹) در $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ داریم $K_r = 0$ ؛ در فرکانسهای بالاتر از این فرکانس و در فرکانسهای پایین تر از ω_0 ، K_r مثبت است. در این نواحی

$$n = \sqrt{K_r}, \quad k = 0 \quad (53-19)$$

در ناحیه میان این دو ناحیه K_r منفی است، بنابراین

$$n = 0, \quad k = \sqrt{-K_r} \quad (54-19)$$

این توابع در شکل ۱۹-۳ نشان داده شده اند. در فرکانسهای پایین تر از ω_0 و بالاتر از $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ ، ماده شفاف است ($k = 0$). پایین تر از فرکانس شدید، n بزرگتر از ۱ است و با افزایش فرکانس (طول موجهای کوتاه تر) افزایش می یابد. این رفتار همان "پاشندگی بهنجار" منشور شیشه ای در ناحیه نور مرئی است که نشان می دهد شکست نور آبی بیش از نور قرمز است، و این رفتار معمول کلیه مواد شفاف است. در بالاتر از فرکانس جذب تشدید، n با فرکانس افزایش می یابد ولی کمتر از یک است. این رفتار نیز مشخصه کلیه مواد در ناحیه پرتو X است. درست در بالاتر از تشدید، موج تضعیف می شود ($k > 0$) ولی این امر به دلیل تشدید نیست (بجز در دقیقاً ω_0 که در آنجا



شکل ۳-۱۹ ثابتهای ایتیکی برحسب تابعی از فرکانس که از ثابتهای دی الکتریک شکل ۱-۱۹ به دست آمده اند.

$K_i \neq 0$ است). تضعیف موج به علت انعکاس کامل در سطحی است که از آن وارد محیط می شود

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}$$

که به ازای $n = 0$ نتیجه $R = 1$ را می دهد. هر چند که ضریب بازتاب شیشه در نور مرئی تنها $R = 0.4$ است، ولی در فرابنفش شیشه می بایست بازتابنده بسیار خوبی باشد.

برای بررسی تفصیلی تغییرات در نزدیکی ω ، فرض کنید $\gamma > 0$ ولی هنوز $\omega \ll \gamma$. نزدیک به ω_0 (یعنی، در گستره ای چند برابر γ پایین تر یا بالاتر از ω_0)، تقریب زیر معتبر است

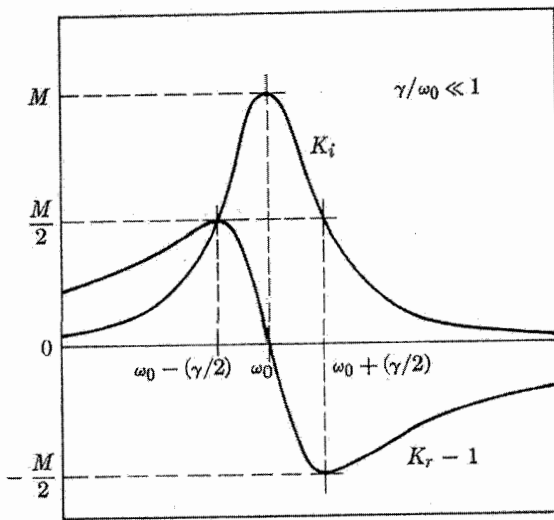
$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

و بنابراین ثابتهای دی الکتریک، معادلات (۱۹-۴الف) و (۱۹-۴ب)، به صورت زیر ساده می شوند

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (55-19)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (56-19)$$

تابع K_i به شکل مشهور به خط لورنتسی است، این تابع و همچنین $K_r - 1$ در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده اند. این توابع خواص بسیار ساده ای دارند: نسبت به $(\omega_0 - \omega)$ ، تابع K_i زوج و $K_r - 1$ فرد است. به سادگی می توان نشان داد که پهنای K_i در محل نصف بیشینه γ است و بیشینه و کمینه $K_r - 1$ در همین نقاط واقع اند. انتگرال K_i روی تمام فرکانسها را می توان محاسبه کرد و نتیجه



شکل ۱۹-۴ ثابتهای دی الکتریک برای خط باریکی در ω_0 . (مبدأ فرکانس در فاصله دور در سمت چپ واقع است.) برای خط ضعیفی با $M \ll 1$ ، مقدار $n - 1$ و k به ترتیب درست برابر با نصف $K_r - 1$ و K_i هستند.

آن به صورت $(\omega_p^2/\omega_0)/(\pi/2)$ است. مقدار بیشینه K_i در تشدید می تواند کاملاً بزرگ باشد

$$M = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\omega_0}{\gamma}$$

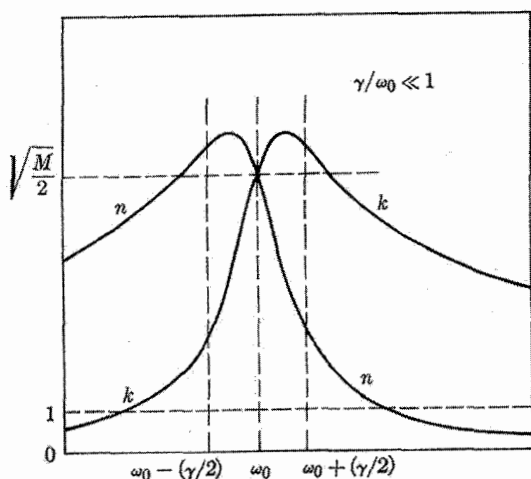
برای گازها در فشار جو، $(\omega_p/\omega_0)^2 \approx 10^{-3}$ ، ولی $(\omega_0/\gamma) \approx 10^5$ ، بنابراین M ممکن است بزرگتر از 10^2 باشد. این مقدار برای رسانندگی $g = \varepsilon_0 \omega K_i$ در تشدید مقداری را به دست می دهد که با رسانندگی dc فلزات قابل قیاس است.

شکل منحنیهای n و k مربوط به ثابتهای دی الکتریک لورنتسی بستگی بسیار زیادی به اندازه M دارد. اگر M بزرگ باشد، در ω_0 داریم $K_i \gg 1$ و از آنجا که در ω_0 داریم $K_r = 1$ ، بنابراین در ω_0 تقریب زیر معتبر است

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2}$$

شکل منحنیهایی که در شکل ۱۹-۵ نشان داده شده اند، با شکل لورنتسی متفاوت است. این شکل از شکل ۱۹-۳ تصویر واقعی تری از تغییرات در نزدیکی ω_0 به ما می دهد. در حد دیگر،

۱. این نتیجه مستقیماً از معادله تقریبی K_i ، معادله (۱۹-۵۱)، به دست می آید، ولی می توان آن را از شکل لورنتسی، معادله (۱۹-۵۶) نیز به دست آورد.



شکل ۱۹-۵ ثابتهای اپتیکی برای یک خط باریک قوی که از ثابتهای دی الکتریک شکل ۱۹-۳ با $M = 100$ به دست آمده‌اند. (مبدأ فرکانس در فاصله دور در سمت چپ واقع است.)

چنانچه $M \ll 1$ باشد، همه جا $K_i \ll 1$ است. چون در نزدیکی بیشینه $|K_r - 1| < K_i$ است، پس $|K_r - 1| \ll 1$ ، یا $K_r \cong 1$. در این حالت

$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i / 2n$$

چون اختلاف K_r با ۱ ناچیز است، رادیکال را می‌توان بسط داد

$$n - 1 \cong \frac{1}{2}(K_r - 1), \quad k \cong \frac{1}{2}K_i \quad (57-19)$$

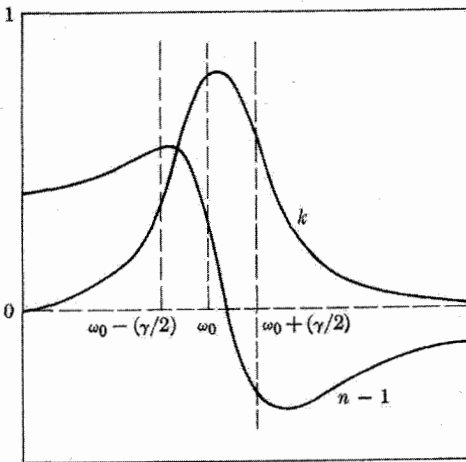
پس برای این حالت شکل منحنیهای n و k به ترتیب درست به همان شکل لورنتسی منحنیهای $n - 1$ و $K_r - 1$ است. این تقریب می‌تواند، برای مثال، در مورد محلولهای رقیق یا در مورد گازها در فشار نسبتاً کم معتبر باشد.

خیلی دور از خط تشدید، هنگامی که $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ است، می‌توان از γ در مخرج معادلات (۱۹-۴الف) و (۱۹-۴ب) چشمپوشی کرد، که در آن صورت معادلات فوق به صورت

زیر ساده می‌شوند

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (58-19)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0 - \omega^2)^2}$$



شکل ۶-۱۹ ثابتهای ابتیکی برای یک نوار جذب پهن نسبتاً قوی در ω_0 .

در این تقریب $|K_T| \ll K_i$ ، و در فاصله دور در سمت فرکانسهای کم $K_T > 0$. در این حالت معادلات (۵۷-۱۹) معتبرند، پس

$$n - 1 \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\cong \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

برحسب طول موج، داریم

$$n - 1 \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (۵۹-۱۹)$$

این معادله به رابطه کوشی معروف است و برای ضریب شکست مواد شفاف فرمول سودمندی است.

اگر γ کوچک نباشد، هیچ یک از روابط ساده فوق از نظر کمی معتبر نخواهد بود، ولی رفتار کیفی K و \hat{n} باز هم همین خواهد بود. حالت $\omega_p/\omega_0 = 1$ ، $\gamma/\omega_0 = 1/2$ در شکل ۶-۱۹ رسم شده است. قسمت موهومی همواره قله‌ای دارد که بیشینه آن در نزدیکی ω_0 است. در ناحیه این قله، قسمت حقیقی همواره ناحیه‌ای با شیب منفی دارد که به ناحیه پاشندگی بی‌هنجار معروف است. با افزایش فرکانس از صفر، به ترتیب نواحی شفافیت، جذب، انعکاس زیاد، و شفافیت وجود

دارند، درست به مانند ساده‌ترین حالت تقریب تابع دلتا. در موارد واقعی همواره قله‌های جذب الکترونی متعددی در فرابنفش، و شاید تا ناحیه مرئی، وجود دارند. در جامدات این قله‌ها ممکن است پهن باشند و به مقدار زیادی روی هم بیفتند.

اگر ذرات باردار مرتعش به جای الکترون یونهای سنگین باشند، فرکانس شدید ω_0 چند صد برابر کوچکتر خواهد بود: ثابت نیروی بازگرداننده خطی برای هر دو تقریباً یکی است، زیرا در مورد یونها نیز این ثابت مربوط به نیروی کولنی است، ولی جرم یون ۴ یا ۵ مرتبه بزرگی از جرم الکترون بزرگتر است. فرکانس ω_p نیز به تناسب کوچکتر است، زیرا آن نیز با معکوس جذر جرم متناسب است. برای مثال، در یک بلور یونی

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} \cong 1, \quad \frac{\gamma}{\omega_0} \cong 0.1$$

قله جذب مشابه قله الکترونی است، ولی این قله به جای آنکه در فرابنفش یا مرئی واقع باشد در فرورسوخ واقع است. K_T یا n مربوط به این قله در فرکانسهای بالاتر مشارکتی ندارند، ولی در فرکانسهای پایین‌تر مشارکت دارند. از این رو ثابت دی‌الکتریک ساکن برای نمک بلور در حدود ۶ است، در مقایسه با تقریباً ۲ ($= 1.5^2$) در نور مرئی. عدد ۲ ناشی از جذب الکترونی در فرابنفش است؛ عدد ۶ اثر جذب یونی در فرورسوخ را نیز شامل می‌شود.

۱۹-۵ نظریه الکترون آزاد درود

در بعضی از حالات مهم ماده، خصوصاً در فلزات و در پلاسماها، الکترونها متعلق به مدارهای خارجی اتمهای جایگزیده (مقید) نیستند، بلکه آزادند که در رسانش dc شرکت کنند. در فرکانسهای زیاد رفتار آنها به علت اثرات لختی تغییر می‌کند؛ ولی به هر جهت با همان مدل میکروسکوپی توصیف می‌شوند، مشروط به آنکه نیروی بازگرداننده مفروض را برای این الکترونها برابر با صفر قرار دهیم. در آن صورت، با $\omega_0 = 0$ ، معادله (۱۹-۳۹) به صورت زیر ساده می‌شود^۱

$$\hat{K} - 1 = - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (19-60)$$

۱. با قرار دادن $\omega_0 = 0$ یک تکینگی در $\hat{K} - 1$ در $\omega = 0$ وارد می‌شود. هر چند که این رفتار برای یک تابع پاسخ فرکانسی رضایت‌بخش نیست ولی غالباً چشمپوشی از تکینگی امکان‌پذیر است. وقتی تکینگی مسئله‌ساز باشد، یک مقدار مثبت برای ω_0 باید نگه داشت و در مرحله بعدتری از محاسبات، حد را هنگامی که ω_0 به سمت صفر میل می‌کند به دست آورد. به‌نحوی بدیل، مسئله را می‌توان برحسب رسانندگی $\hat{\sigma}$ فرمولبندی کرد تا از مسائل تکینگی اجتناب شود.

جدول ۱-۱۹ بعضی مقادیر نوعی برای چگالی ذرات، N ، و فرکانس پلاسما، ω_p ، برای پلاسماهای الکترونی

فرکانس پلاسما (s^{-1})	چگالی (m^{-3})	
۱۰۱۶	۱۰۲۸	فلز
۱۰۱۴	۱۰۲۴	نیمرسانا (آلاییده)
۱۰۱۲	۱۰۲۰	نیمرسانا (خالص)
۱۰۱۲	۱۰۲۰	آزمایش همجوشی
۱۰۷	۱۰۱۱	یون سیاهر
۱۰۵	۱۰۷	فضای میان سیاره‌ای

که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن عبارت‌اند از

$$K_r - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (۱۹-۶۱)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \quad (۱۹-۶۲)$$

در مبحث ذره آزاد، کمیت زیر

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad (۱۹-۲۸)$$

فرکانس پلاسما نامیده می‌شود^۱، و با آنچه در فصل ۱۴ تعریف شد یکی است. اکنون گستره‌های مختلف فرکانس که در آنها ویژگیهای جالب توجه پاشندگی رخ می‌دهند با ω_p مشخص می‌شوند. بعضی مقادیر نوعی آن در جدول ۱-۱۹ آمده است. این فرکانسها از فرکانس رادیویی تا نواحی فرابنفش را در بر می‌گیرند. همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم ثابت میرایی γ معکوس زمان برخورد است:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad (۱۹-۲۴)$$

۱. فرکانس پلاسما را معمولاً برحسب یکاهای گاوسی بیان می‌کنند، در یکاهای گاوسی $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$.

زمان τ همچنین برابر است با ثابت زمانی فروافت جریانی که میدان محرک نداشته باشد. این مطلب را با قرار دادن $\omega_0 = 0$ و $E_m = 0$ در معادله (۱۹-۲۲) می‌توان دید: $dx/dt = v$

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = 0 \quad (۱۹-۶۳)$$

$$v = v_0 e^{-\gamma t} = v_0 e^{-t/\tau}$$

برای فلزات در دمای اتاق داریم $\gamma \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ، بنابراین

$$\frac{\gamma}{\omega_p} \ll 1$$

این رابطه غالباً برای مواد الکترونیکی نیمرسانا و همچنین برای پلاسماهای گازی معتبر است. چنانچه معادله (۱۹-۶۰) را با استفاده از معادله (۱۹-۴۳) و $\gamma = 1/\tau$ برای رسانندگی مختلط \hat{g} بنویسیم، نتیجه به صورت ساده‌تری در می‌آید:

$$\hat{g} = \frac{g_0}{1 - i\omega\tau} \quad (۱۹-۶۴)$$

که در آن

$$g_0 = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau = \frac{Ne^2 \tau}{m}$$

رسانندگی dc است. با وجود این ما \hat{K} را بررسی خواهیم کرد، زیرا هدف ما پیدا کردن n و k به کمک \hat{K} است.

هنگامی که γ کوچک است، می‌توانیم حد را هنگامی که γ به صفر میل می‌کند، بررسی کنیم. بهترین راه برای این منظور آن است که در معادله‌های (۱۹-۵۰) و (۱۹-۵۱) مقدار ω_0 را صفر بگذاریم ولی برای γ مقدار مثبت کوچکی نگه داریم تا هنگامی که حد $\gamma \rightarrow 0$ را بگیریم. نتیجه عبارت است از

$$K_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (۱۹-۶۵)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\pi}{2} \delta(\omega)$$

که در اینجا از معادله (۱۹-۵۱) برای K_i استفاده شده است. باز هم شکل‌های ۱۹-۲ و ۱۹-۳ نشان‌دهندهٔ رفتار در این حالت هستند، مشروط بر آنکه مبدأ ω در $\omega_0 = 0$ انتخاب شود. ناحیهٔ شفاف در پایین‌تر از ω_0 حذف می‌شود، و ω_p فرکانسی است که در آن $K_r = 0$ است.

بین $\omega = \omega_p$ و $\omega = 0$ ماده کاملاً بازتابنده است ($n = 0$)، و در بالاتر از ω_p ماده شفاف است ($k = 0$). گذار بین بازتاب شدید و شفافیت دلیل این واقعیت مشهود است که یونسپهر امواج رادیویی را در نوار پخش AM ($f = \omega/2\pi \lesssim 1.5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$) باز می‌تاباند ولی برای امواج رادیویی FM و امواج تلویزیونی ($f \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$) شفاف است. در گستره دیگری از فرکانس، فلز سدیم برای نور مرئی بازتابنده خوبی است، ولی برای طول‌موجهای فرابنفش کوتاه‌تر از (210 nm) $\lambda_p = 2100 \text{ \AA}$ ، متناظر با فرکانس پلاسمای آن، شفاف است. درست در فرکانس پلاسما، $n = 0$ و $k = 0$ است؛ در این فرکانس بارها همگی به‌طور همفاز (با طول‌موج بی‌نهایت) بدون تضعیف به عقب و جلو حرکت می‌کنند. این حرکت همان نوسان آزاد پلاسماست که در فصل ۱۴ درباره آن بحث شد. این نوع حرکت مثالی است از موج طولی^۱ که در $K = 0$ می‌تواند رخ بدهد. هر چند که تقریب بدون میرایی اثرات جالبی را در نزدیکی فرکانس پلاسما توجیه می‌کند، ولی در فرکانسهای کمتر ساده‌سازی بیش از حدی است که پیشگویی می‌کند رسانندگی و ثابت دی‌الکتریک برای dc بی‌نهایت است. به‌علاوه، این تقریب نه فرمول هاگن-روبنز را به‌دست می‌دهد و نه عمق پوستهٔ مربوط به آن را.

برای اصلاح تقریب تابع دلتا، لازم است که به معادلات (۱۹-۶۱) و (۱۹-۶۲) برگردیم. فرض می‌کنیم که میرایی کوچک است، $\gamma \ll \omega_p$ ، بنابراین سه گستره فرکانس وجود دارد که باید بررسی کنیم

(الف) $\omega \ll \gamma$:

$$K_r \cong \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2} \quad (19-66)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2}{\omega \gamma} \quad (19-67)$$

ثابت دی‌الکتریک حقیقی K_r ، یک مقدار منفی (بزرگ) است؛ K_i با صفر شدن ω بی‌نهایت می‌شود، ولی رسانندگی

$$g = \varepsilon_0 \omega K_i = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\gamma} = \frac{N e^2 \tau}{m} = g_0$$

در این گستره ثابت است و برابر است با g_0 (رسانندگی dc). چون $1 \ll \gamma/\omega = |K_i/K_r|$ ، از آنجایی که طول‌موج بی‌نهایت است و سرعت انتشار صفر، اینکه بگوییم طولی است یا عرضی بی‌معناست. ولی ما $K(\kappa, \omega)$ را تنها برای $\kappa = 0$ محاسبه کرده‌ایم. محاسبات پیچیده‌تری که در آن اثرات فشار منظور می‌شود وجود امواج طولی در پلاسما با طول‌موج متناهی، $\kappa \neq 0$ ، را نشان می‌دهد.

معادله (۶۴-۱۷) نتیجه می‌شود

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}} \gg 1 \quad (۶۸-۱۹)$$

این حالتی است که به فرمول هاگن-روبنز برای ضریب جذب در فرکانسهای کم

$$A \cong \frac{2}{k} = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{g_0}}$$

و به عمق پوسته

$$\delta = \frac{c}{k\omega} \cong \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega g_0}}$$

منجر می‌شود.

(ب) $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$

$$K_r \cong -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (۶۹-۱۹)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2\gamma}{\omega^3} \quad (۷۰-۱۹)$$

چون $K_i/|K_r| = \gamma/\omega \ll 1$

$$k \cong \sqrt{-K_r} = \frac{\omega_p}{\omega} \quad (۷۱-۱۹)$$

$$n = \frac{K_i}{2k} \cong \frac{\gamma\omega_p}{2\omega^2}$$

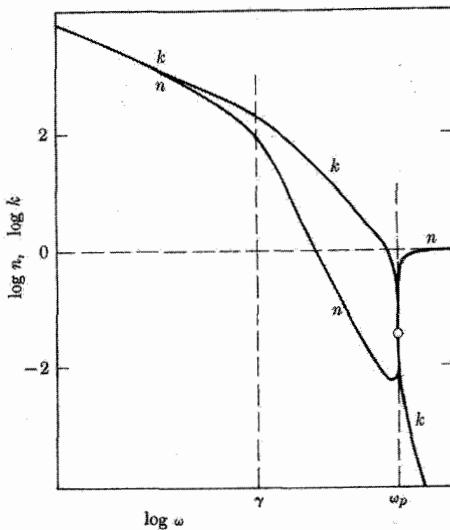
در این ناحیه $k/n = 2\omega/\gamma \gg 1$ ، بنابراین برای ضریب جذب از معادله (۵۹-۱۸) داریم

$$A \cong \frac{2n}{k^2} \cong \frac{2\gamma}{\omega_p} = \frac{2}{\omega_p\tau}$$

(این فرمول را گاهی فرمول مات-زینر^۱ می‌نامند)، و برای عمق پوسته داریم

$$\delta = \frac{c}{k\omega} = \frac{c}{\omega_p} = \lambda_p/2\pi$$

که در آن λ_p طول موج متناظر با فرکانس پلاسما در خلأ است. برای فلزات این نتایج تا ناحیه فرسوخ معتبرند. چون $\omega_p\tau$ بزرگ است، $A = 1 - R$ تنها چند درصد است؛ عمق پوسته خیلی کوچک و مستقل از فرکانس است.



شکل ۷-۱۹ نمودار ثابتهای اپتیکی بارهای آزاد برحسب فرکانس در مقیاس $\log\text{-}\log$ ، با $\gamma/\omega_p = 0.004$ در قسمت اعظم گستره فرکانس تقریبهای قانون توان معتبر است.

(ج) $\omega_p \ll \omega$:

$$K_r \cong 1 \quad (72-19)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^3} \quad (73-19)$$

$$n \cong \sqrt{K_r} \cong 1, \quad k = \frac{K_i}{2n} \cong \frac{\omega_p^2 \gamma}{2\omega^3} \quad (74-19)$$

در این گستره ماده تقریباً شفاف است. ولی در فلزات، بجز برای فلزات قلیایی، پیدایش این شفافیت بر اثر جذب تشدید الکترونیهای مقید متعلق به مدارهای داخلی، محو است. این جذب اضافی، که در بخش قبل بحث شد، مقادیر K_i و n را نیز برای اکثر فلزات در ناحیه مرئی افزایش می‌دهد که نتیجتاً ضریب بازتاب آنها را کاهش می‌دهد و موجب رنگهای مشخصه مس و طلا می‌شود.

نتایج مربوط به الکترون آزاد برای n و k در مقیاس $\log\text{-}\log$ در شکل ۷-۱۹ رسم شده است. مقادیر انتخاب شده برای پارامترها عبارتند از $\omega_p = 9 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ و $\gamma = 3.6 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ ؛ این مقادیر برای فلز سدیم در دمای اتاق مناسب که برای آن نظریه الکترون آزاد با آزمایش سازگار است. در این شکل سه ناحیه‌ای که در آنها منحنیها به صورت خطوط مستقیم‌اند، به معادلات (۶۸-۱۹)، (۷۱-۱۹)، و (۷۴-۱۹) مربوط‌اند. نقاط بینابین در $\omega = \gamma$ و $\omega = \omega_p$ را به آسانی

می‌توان از معادلات (۶۱-۱۹) و (۶۲-۱۹) محاسبه کرد، زیرا در این نقاط به ترتیب $K_i = -K_r$ و $K_i \gg K_r$ است. ناحیه خیلی بالاتر از γ با تقریب تابع دلتا ($\gamma = 0$) در توافق است، البته با گرد کردن شکنها در ω_p . مثالهای با $\omega_p \gtrsim \gamma$ کمتر متداول اند و ما نیز بررسی آنها را به‌عنوان یک مسئله واگذار می‌کنیم.

* مثال ۱۹-۱ کاربرد رابطه پاشندگی

از رابطه پاشندگی برای بررسی تقریب فرکانس کم (مورد الف) می‌توان استفاده کرد. این روش بعضی از مسائلی را که در کاربرد این روابط انتگرالی با آنها روبه‌رو می‌شویم، نشان خواهد داد. ما از تقریب فرکانس کم برای K_i که با معادله (۶۷-۱۹) داده شده است، استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم به کمک رابطه پاشندگی معادله (۶۶-۱۹) را برای K_r به‌دست آوریم.

حل: با استفاده از معادله (۶۷-۱۹) در رابطه پاشندگی کرامرز-کرونیگ، معادله (۱۹-۲۱ الف)، برای به‌دست آوردن قسمت حقیقی $K - 1$ ، خواهیم داشت

$$K_r - 1 = \frac{2}{\pi} \frac{\omega_p^2}{\gamma} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (۱۹-۷۵)$$

حد بالای انتگرال را A می‌گیریم که سپس بی‌نهایت خواهد شد. قسمت اصلی عبارت است از

$$P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left\{ - \int_0^{\omega-\delta} \frac{d\omega'}{\omega^2 - \omega'^2} + \int_{\omega+\delta}^A \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \right\} \quad (۱۹-۷۶)$$

هر دو انتگرال خوش‌تعریف هستند و می‌توان آنها را بدون مشکل محاسبه کرد تا نتیجه زیر به‌دست بیاید

$$P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left\{ -\frac{1}{2\omega} \ln \left(\frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega'} \right) \Big|_0^{\omega-\delta} + \frac{1}{2\omega} \ln \left(\frac{\omega' - \omega}{\omega' + \omega} \right) \Big|_{\omega+\delta}^A \right\} \quad (۱۹-۷۷)$$

در $\omega' = 0$ ، لگاریتم در جمله اول برابر است با $\ln(\omega/\omega) = 0$. در $\omega'/A = \omega'/\omega$ لگاریتم در جمله دوم عبارت است از $\ln(1 + \omega/A)/(1 - \omega/A)$ که هنگامی که A به سمت بی‌نهایت

میل کند، صفر می‌شود. از دو جمله باقیمانده داریم

$$P \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} \left(-\ln \frac{\delta}{2\omega + \delta} - \ln \frac{2\omega - \delta}{\delta} \right) = 0 \quad (19-78)$$

که در حد وقتی δ به سمت صفر میل کند، صفر می‌شود. بنابراین

$$P \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = 0 \quad (19-79)$$

و

$$K_T = 1 \quad (19-80)$$

این نتیجه ویژگیهای آموزنده‌ای در بردارد. اولاً، تکنیکی در انتگرالده، پاسخ انتگرال را بی‌نهایت نمی‌کند. (در واقع صفر است، ولی این پاسخ مشخصاً این حالت خاص است.) واضح است مادامی که K_i در ω پیوسته باشد، تکنیکی مشکلی ایجاد نمی‌کند. ثانیاً، نتیجه یعنی معادله (19-80) برای K_T مقدار ثابتی به دست می‌دهد، ولی مقدار ثابت آن با ثابت $(\omega_p/\gamma)^2 -$ که لازمه معادله (19-66) است، در توافق نیست. این اختلاف مؤکد آن است که برای به دست آوردن نتیجه صحیح از معادله (19-21الف)، مقدار $K_i(\omega)$ به ازای تمامی گستره مقادیر ω از 0 تا ∞ می‌بایست معلوم باشد. در این مثال معادله (19-67) در فرکانسهای کمتر از γ صحیح است، ولی در فرکانسهای بیشتر غلط است. مقدار صحیح K_T در فرکانسهای کم از این رفتار K_i در فرکانسهای زیاد ناشی می‌شود. انتگرال همواره مقدار صحیح K_T را هنگامی که ω بی‌نهایت می‌شود، به دست می‌دهد. یعنی، مقدار $K_T = 1$ همان‌طور که می‌توان مستقیماً از معادله (19-21الف) دید. بنابراین اگر K_T ثابت باشد، باید مقدار ثابت 1 را بدهد. هنگامی که انتگرال را با داده‌های تجربی به کار می‌بریم، لازم است در فرکانسهای بیشتر و فرکانسهای کمتر از گستره فرکانسهایی که در آن اندازه‌گیریهای تجربی انجام شده است، برون‌یابی معقولی انجام دهیم، حتی اگر بخواهیم K_T را تنها در این گستره به دست آوریم. یک دلیل واضح‌تر برای خطا آن است که قله جذب ناشناخته‌ای در فرکانسی بیش از گستره اندازه‌گیریها حذف شده باشد.

قابل ذکر است که روابط پاشندگی، معادلات (19-21) را می‌توان به‌گونه‌ای تغییر داد که برای محاسبات عددی، انجام‌پذیرتر باشند. معادله (19-21الف) را با $\hat{K} = K - 1$ در نظر بگیرید. انتگرال را در معادله (19-21الف) می‌توان به طرق مختلف تبدیل کرد. چون انتگرال در معادله (19-79) صفر است، هر مضرب ثابتی از آن را می‌توان از معادله (19-21الف) کم کرد بدون آنکه در نتیجه حاصل تأثیری داشته باشد. چنانچه $(2/\pi)\omega K_i(\omega)$ ضرب در آن انتگرال را کم

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\omega' K_i(\omega') - \omega K_i(\omega)] d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

این شکل برای انتگرال‌گیری عددی مناسب است زیرا انتگرالده آن تکینگی ندارد، صورت و مخرج آن در یک نقطه صفر می‌شوند. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از معادله (۱۹-۲۱ الف)، داریم

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dK_i(\omega')}{d\omega'} \ln \frac{1}{|\omega'^2 - \omega^2|} d\omega'$$

که این شکل ایده‌ای کیفی از رفتار مورد انتظار K_r فراهم می‌آورد. برای فرکانسهای نزدیک به ω ، عامل دوم در انتگرالده خیلی سنگین می‌شود، به طوری که شیب K_i در فرکانسهای حوالی ω در اندازه K_r قویاً تأثیر می‌گذارد.

تمام نتایج این بخش هنگامی که ذرات باردار به جای الکترون، یونهای سنگین باشند نیز معتبر است. چون فرض کردیم که محیط از نظر الکتریکی خنثی است، یونهای مثبت باید همواره با چگالی تعداد متوسطی N برابر با چگالی تعداد الکترونها، موجود باشند. البته در فلزات یونهای مثبت آزادانه در حرکت نیستند، ولی در پلاسماهای گازی متحرک‌اند و حرکت آنها غالباً مهم است. فرکانس پلاسما ω_p به طور معکوس متناسب است با جذر جرم ذره m ، و بنابراین، برای مثال، فرکانس پلاسمای یون تقریباً دو مرتبه بزرگی از فرکانس پلاسمای الکترون، که در جدول ۱۹-۱ آمده است، کوچکتر است.

* ۱۹-۶ واهلش دی الکتریکی

در فلزات در فرکانسهای کمتر از قله‌های مربوط به یون سنگین در ناحیه فروسخ، معمولاً جذب تشدیددی الکتریکی رخ نمی‌دهد (هر چند که در ساختار مصنوعی رخ می‌دهد). ولی، سازوکار جذب از نوع دیگری به نام، اتلاف دی الکتریک وجود دارد که می‌تواند در فرکانسهای کمتر (ولی نه در فرکانسهای بیشتر) رخ بدهد. این سازوکار غالباً در فرکانسهای میکروموج و کمتر، به عنوان یک سازوکار اتلاف مهم است و پاشندگی ملازم با ثابت دی الکتریک حقیقی آن، برای مثال، اختلاف بین ثابت دی الکتریک ساکن آب، ۸۱، و مقدار اپتیکی این ثابت، حدود ۱٫۸ (۳۳۲ =)، را توجیه می‌کند. این اثر تعمیم قطبش ساکن نوع دومی است که در فصل ۵ بحث شد (یعنی، قطبش در اثر سمگتری دوقطبهای دائمی) به میدانهای نوسانی. این مورد را نیز می‌توان بر پایه مدلی که با معادله (۱۹-۲۲ الف) توصیف می‌شود بنا نهاد، هر چند که تعبیر فیزیکی کمیتهای دخیل را

باید تا حدودی تعمیم داد. این حالت هنگامی ظاهری می شود که نیروهای بازگرداننده و میراننده هر دو مهم اند، ولی از اثرات لختی (شتاب) می توان چشمپوشی کرد. در این حالت معادله حرکت به صورت زیر در می آید

$$G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m \quad (۱۹-۸۱)$$

یا آنکه

$$\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = eE_m/m$$

پاسخ مناسب معادله بالا، از معادله (۱۹-۳۹) با چشمپوشی از ω^2 به دست می آید

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - i\gamma\omega}$$

در این پاسخ تمام پارامترها حاوی m هستند؛ با وجود این، m واقعاً در پاسخ وارد نمی شود زیرا در به دست آوردن پاسخ از جمله لختی چشمپوشی شده است. بهتر است پاسخ به صورت زیر بازنویسی شود

$$\hat{K} - 1 = \frac{Ne^2/\epsilon_o}{C - iG\omega}$$

که در اینجا m کلاً حذف شده است. با استفاده از معادله (۱۹-۸۱) با $E_m = 0$ ، برگشت به تعادل با معادله زیر توصیف می شود

$$x = x_o e^{-Ct/G}$$

بنابراین می نویسیم

$$\frac{C}{G} = \frac{1}{\tau} \quad (۱۹-۸۲)$$

که τ در این مفهوم زمان واهلش^۱ نامیده می شود. برحسب τ داریم

$$\hat{K} - 1 = \frac{K_o - 1}{1 - i\omega\tau} \quad (۱۹-۸۳)$$

که در آن

$$K_o - 1 = \frac{Ne^2}{\epsilon_o C} \quad (۱۹-۸۴)$$

۱. توجه کنید که در این فرایند $\gamma \neq 1/\tau$. ما به نحوی سازگار همواره τ را به معنای ثابت زمانی برای برگشت به تعادل به کار می بریم، بدون توجه به رابطه آن با γ یا با کمیتهای فیزیکی تعیین کننده.

واضح است که K_0 مقدار حالت ساکن K (به ازای $\omega = 0$) است. مقدار آن با مقدار ساکن حالت جذب تشدید یکی است. بجز آنکه در اینجا C معنای دیگری دارد. این مقدار را می توان از محاسبات فصل ۵ به دست آورد

$$K_0 - 1 = \frac{\chi_0}{\epsilon_0} = \frac{N}{\epsilon_0} \frac{p_0^2}{3k_B T}$$

که در آن k_B ثابت بولتزمن است. اگر فرض کنیم گشتاور دوقطبی دائمی به صورت زیر است

$$p_0 = ea$$

که در آن a فاصله مؤثر بارهای $\pm e$ است، آنگاه

$$K_0 - 1 = \frac{Ne^2 a^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (۸۵-۱۹)$$

مقدار عددی $K_0 - 1$ در دمای اتاق، حداکثر، می تواند از مرتبه 10^2 باشد. مقایسه معادله (۸۵-۱۹) با معادله (۸۴-۱۹) نشان می دهد که

$$C = \frac{3k_B T}{a^2} \quad (۸۶-۱۹)$$

بنابراین نیروی بازگرداننده، ناشی از انرژی گرمایی $k_B T$ است و نه ناشی از انرژی پتانسیل کشسان مکانیکی.^۱

آنچه در این بحث جدید است زمان واهلش τ است که رفتار را برای میدانهای نوسانی تعیین می کند. مقدار آن را به آسانی می توان برای بعضی مواد قطبی جامد برآورد کرد. در این مواد دوقطبیها تشکیل شده اند از زوجهای متحرکی از یونهای مثبت و منفی به بار e و با فاصله جدایی a . یونها موضع تعادل ثابت مشخصی در جامد دارند، ولی می توانند به سایر مواضع مجاز مجاور جهش کنند. با چنین جهشهایی دوقطبی می تواند بچرخد و با میدان اعمالی همسو شود، یا به هنگام برداشته شدن میدان به یک سمتگیری کاتوره ای برگردد. بنابراین زمان τ عبارت است از زمان متوسط مربوط به جهش که برای جامدات با معادله زیر داده می شود

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} e^{-\Delta U/k_B T} \quad (\text{جامدات}) \quad (۸۷-۱۹)$$

۱. نیروی بازگرداننده یک "نیروی ترمودینامیکی" تمیم یافته است، نه یک نیروی مکانیکی. آنچه پس از برداشتن نیرو (با زمان واهلش τ) واهلیده می شود (به وضع اول باز می گردد)، انرژی نیست بلکه آنتروپی است.

ضریب $1/\tau_0$ تقریباً برابر است با فرکانس ارتعاش یون حول موضع تعادلش، و عبارت $\exp(-\Delta U/k_B T)$ ضریب آماری بولتزمن است. با هر ارتعاش کوششی برای جهش به عمل می‌آید، ولی تنها کسری از یونها موفق می‌شوند و این کسر بستگی دارد به انرژی ΔU که برای عبور از سد و رفتن به موضع تعادل مجاور لازم است. فرکانس $\omega_0 = 1/\tau_0$ همان فرکانس ارتعاش یونی است که قبلاً بررسی شد، $\omega_0 \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$. برای آنکه این مدل معتبر باشد می‌بایست انرژی سد ΔU قابل ملاحظه باشد، زیرا فرض وجود موضعیهای تعادلی که بین آنها جهشها رخ می‌دهند، خود به وجود سدها بستگی دارد. بدین ترتیب

$$\frac{1}{\tau} \lesssim 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

و $1/\tau$ در درمهای خیلی پایین‌تر از دمای ذوب بسیار کوچکتر از این مقدار خواهد بود. برای مایعات محاسبه τ مشکل‌تر است. زمان واهلش دبی با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k_B T}{4\pi\eta R^3} \quad (\text{مایعات}) \quad (88-19)$$

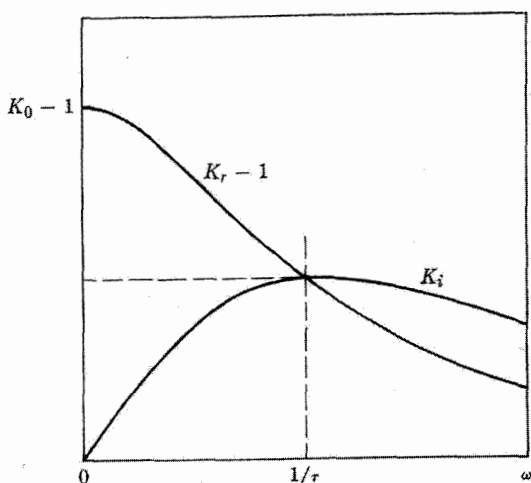
که در آن η چسبندگی است (نه مقاومت ویژه الکتریکی) و R_0 شعاع مولکول است. این فرمول با مقادیر تجربی η توافق معقولی دارد و برای اکثر مایعات قطبی در دمای اتاق فرکانسی در ناحیه میکروموج پیشگویی می‌کند، چون دوقطبها در مایعات با آزادی بیشتری می‌چرخند تا در جامدات. چسبندگی به دما بستگی دارد، ولی باز هم بستگی معادله (88-19) به دما ضعیف‌تر از بستگی معادله (87-19) است.

با جدا کردن معادله (83-19) به قسمتهای حقیقی و موهومی، بستگی آن را به فرکانس می‌توان دید. نتیجه معادلات زیر است که به معادلات دبی مشهورند

$$K_r - 1 = \frac{K_0 - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (89-19)$$

$$K_i = \frac{(K_0 - 1)\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (90-19)$$

اینها در شکل 8-19 رسم شده‌اند. این شکل قله جذبی در K_i نشان می‌دهد که بیشینه آن در $\omega = 1/\tau$ و ارتفاع آن $(K_0 - 1)/2$ است، و همچنین نشان می‌دهد که K_r از مقدار K_0 به 1 کاهش می‌یابد و نقطه نصف ارتفاع آن در $\omega = 1/\tau$ است. پاشندگی K_r شکلی دارد که به‌طور مشخص با شکل مربوط به جذب تشدیدی متفاوت است. شکل این منحنیها کاملاً شبیه است به



شکل ۱۹-۸ ثابتهای دی الکتریک به صورت تابعی از فرکانس برای واهلش دبی.

شکلهای مربوط به نوسانی که به شدت تدمیرا باشد. برای فرکانسهای خیلی کمتر یا خیلی بیشتر از $1/\tau$ داریم $K_i \ll K_r$ ($K_r > 0$)، بنابراین $n = \sqrt{K_r}$ و $k = K_i/2n$. به عنوان مثال، این نتایج را می توان برای آب شیرین به کار برد که برای آن رسانندگی در فرکانسهای کم یا در dc قابل چشمپوشی است و ضریب بازتاب با معادله (۱۸-۵۷) داده می شود. برای اندازه گیریهای الکتریکی روی نمونه هایی با اندازه های آزمایشگاهی، معمولاً نتایج را برحسب زاویه اتلاف θ بیان می کنند

$$\tan \theta = \frac{K_i}{K_r} = \frac{(K_0 - 1)\omega\tau}{K_0 + (\omega\tau)^2} \quad (19-91)$$

دلیل فیزیکی این نوع بستگی به فرکانس آن است که در بالاتر از $1/\tau$ واهلش نمی تواند تغییرات میدان اعمالی را دنبال کند.

* ۱۹-۷ میدانهای نوسانی در محیطهای پاشنده

برای میدانهای تک فرکانس تا به حال نشان داده ایم که گذردهی و رسانندگی حقیقی یک محیط خطی عموماً وابسته به فرکانس اند^۱. به علاوه، در نمایش مختلط، این وابستگی به فرکانس را می توان تنها با گذردهی یا با رسانندگی که تابع مختلط فرکانس است توضیح داد. لیکن برای بسیاری از مواد،

۱. بررسی مشابهی درباره پذیرفتاری مغناطیسی عامل وابسته به فرکانس دیگری را تولید می کند، اما خوشبختانه به ندرت همپوشانی قابل ملاحظه ای در محدوده های فرکانسی که ϵ و μ شدیداً تابع فرکانس اند رخ می دهد. در نتیجه، کماکان $\mu = \mu_0$ در نظر خواهیم گرفت.

محدوده گسترده‌ای وجود دارد که بر روی آن وابستگی به فرکانس آن قدر ناچیز است که در اغلب کاربردها از آن چشمپوشی می‌شود. مثلاً در یک ماده عایق، منظور ماده‌ای با رسانندگی حقیقی (تقریباً) صفر در فرکانس صفر، گذردهی حقیقی گرچه متفاوت با ϵ_0 ، تا نزدیک $\omega \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ممکن است ثابت باشد، رسانندگی حقیقی بر روی محدوده مشابه خیلی نزدیک به صفر است. در فلزات رسانندگی حقیقی برای فرکانسهای تا 10^{11} s^{-1} خیلی نزدیک به رسانندگی ساکن g_0 است. در دنیای فیزیکی، میدانهای الکترومغناطیسی در قطارهای موجی می‌آیند که در برخی موارد به اندازه کافی طویل هستند که بشود با تقریب مناسب با آنها به عنوان موج تکفام (تک فرکانس) رفتار کرد. لیکن اغلب قطار موج آن قدر کوتاه است که تقریب تکفام کفایت نمی‌کند. یک راه برای بررسی تپهای کوتاه، مثلاً نوشتن میدان الکتریکی به صورت برهم نهی میدانهای تکفام است. تا زمانی که فقط مواد خطی را در نظر بگیریم، پاسخها را می‌توان به این روش ساخت زیرا معادلات ماکسول خطی‌اند. اکنون دو مثال میدانهای وابسته به زمان در عایقها را ارائه می‌کنیم که در آن وابستگی فرکانسی گذردهی نقش مهمی را بازی می‌کند.

مثال ۱۹-۲ انتشار تپ الکترومغناطیسی: سرعت گروه

تپی از تابش الکترومغناطیسی مسطح (مستقل از x و y) در حال حرکت در راستای z را در نظر می‌گیریم که برای آن میدان الکتریکی در $t = 0$ به صورت تابع $E(z, 0)$ مشخص شده است. مسئله یافتن میدان الکتریکی $E(z, t)$ در زمانهای بعد است.

حل: میدان الکتریکی باید در رابطه زیر صدق کند

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 D(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (۹۲-۱۹)$$

اگر محیط خطی باشد، از قسمت ۱۹-۱ می‌دانیم که پاسخهای تکفام برای معادله (۹۲-۱۹) در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(z, \omega)}{\partial z^2} + \mu_0 \epsilon(\omega) \omega^2 \tilde{E}(z, \omega) = 0 \quad (۹۳-۱۹)$$

و در نتیجه، پاسخهای موج تخت تکفام برای این معادله به شکل زیرند

$$E(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (۹۴-۱۹)$$

با

$$\kappa^2 - \mu_0 \epsilon(\omega) \omega^2 = 0 \quad (۹۵-۱۹)$$

اکنون پاسخ معادله (۹۳-۱۹) را با برهم‌نهی پاسخهایی که توسط معادله (۹۴-۱۹) داده شده بنا می‌کنیم. این برهم‌نهی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_o(\kappa) e^{i(\kappa z - \omega t)} d\kappa \quad (۹۶-۱۹)$$

انتگرال‌گیری در معادله (۹۶-۱۹) بر روی κ اما نه بر روی ω است زیرا معادله (۹۵-۱۹) هر مقدار κ را با یک مقدار از ω مرتبط می‌سازد. انتگرال‌گیری می‌توانست به همان خوبی بر روی ω انجام شود ولی بهتر دانستیم κ را به عنوان متغیر انتگرال‌گیری به‌کار ببریم. امواج رونده در هر دو جهت مثبت z و منفی z منظور شده‌اند. در $t = 0$ معادله (۹۶-۱۹) برابر است با

$$E(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_o(\kappa) e^{i\kappa z} d\kappa \quad (۹۷-۱۹)$$

به طوری که $\tilde{E}_o(\kappa)$ درست تبدیل فوریه فضایی تپ در $t = 0$ است. اگر محدوده‌ای که κ برای نمایش کامل تپ احتیاج دارد خیلی گسترده نباشد، ω را می‌توان بسط داد

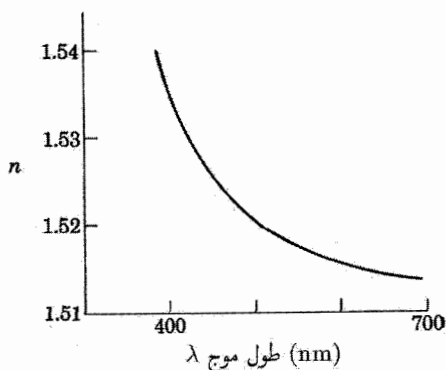
$$\omega = \omega_o + (\kappa - \kappa_o)v_g(\kappa_o) + \dots \quad (۹۸-۱۹)$$

با توجه به اینکه $v_g(\kappa_o) = (d\omega/d\kappa)|_{\kappa_o}$ و تنها دو جمله اول نگه‌داشته شود. با به‌کار بردن این تقریب در معادله (۹۶-۱۹)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(z, t) &= e^{-i(\omega_o - \kappa_o v_g)t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\kappa) e^{i\kappa(z - v_g t)} d\kappa \\ &= E(z - v_g t, 0) e^{-i(\omega_o - \kappa_o v_g)t} \end{aligned} \quad (۹۹-۱۹)$$

به عبارت دیگر، اگر این تقریب برای وابستگی ω به κ کافی باشد، تپ بدون تغییر شکل با سرعت $v_g(\kappa_o)$ و تغییر فاز وابسته به زمان که وابسته به عدد موج است انتشار می‌یابد. سرعت v_g سرعت گروه نامیده می‌شود و سرعتی است که با آن انرژی در تپ منتقل می‌شود.

اثرات پاشندگی عبارت‌اند از (۱) $v_g(\kappa_o)$ برخلاف آن‌طور که در محیط غیرپاشنده بود، برابر ω_o/κ_o نیست، و (۲) اختلاف فاز متناسب با زمان است (در محیط غیرپاشنده اختلاف فاز برابر با صفر است). اثر اول بدین معنی است که دو تپ که یکی با برهم‌نهی امواج تخت با بردارهای انتشار در باند باریکی اطراف κ_1 نمایش داده شده باشد و دیگری با بردارهای انتشار نزدیک به κ_2 در داخل محیط با سرعت‌های مختلف انتشار خواهند یافت. بنابراین اگر هر دوی آنها با هم از



شکل ۱۹-۹ ضریب شکست برای شیشه عینک.

$z = 0$ و $t = 0$ شروع کنند، همان طوری که در محیط حرکت می‌کنند، در فضا (یا زمان) از هم جدا خواهند شد.

در بسیاری از موارد تقریب نگه‌داشتن تنها دو جمله اول معادله (۱۹-۹۸) کافی نیست. بنابراین، شکل تپ حفظ نخواهد شد؛ معمولاً گسترده‌تری پیدا می‌کند، اما مواردی هم وجود دارد که تپ همان‌طور که انتشار می‌یابد باریک‌تر می‌شود. خصوصاً، تپ پیشروهایی دارد که از تپ اصلی سریع‌تر حرکت می‌کند.^۱

اثرات متداول دیگر پاشندگی ناشی از وابستگی ضریب شکست به فرکانس (یا طول موج) است. این تغییرات برای شیشه عینک در شکل ۱۹-۹ نشان داده شده است. در نتیجه این وابستگی به فرکانس، نورهای رنگی مختلف در محیط، با سرعت‌های قدری متفاوت حرکت می‌کنند. این پدیده در میان اثرهای به‌سادگی قابل مشاهده، مسئول تشکیل طیف توسط منشورها (”پاشندگی“ نور) و ابیراهی رنگی در عدسیهاست.

مثال ۱۹-۳ پاسخ قطبش به میدان الکتریکی تابع پله‌ای

قطبش $P(t)$ ناشی از میدان الکتریکی $E(t)$ را می‌توان بر طبق معادله (۱۹-۱) به صورت زیر نوشت

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} R(t'') E(t - t'') dt'' \quad (19-100)$$

۱. انتشار تپهای تابش الکترومغناطیسی در محیطهای پاشنده در منابع زیر مورد بحث قرار گرفته است:

Julius A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941), pp. 333-340, and in J. David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (New York: John Wiley and Sons, 1975), pp. 313-326.

می‌خواهیم تابع پاسخ $R(t'')$ را برای محیطی که توسط قله جذب تیز منفردی در ω_0 مشخص شده پیدا کنیم، و از آن پاسخ به میدان الکتریکی که برای t ‌های کوچکتر از صفر، صفر و برای t ‌های بزرگتر از صفر، E_0 است را معین کنیم.

حل: معادلات (۱۹-۵۰) و (۱۹-۶۱) را به‌کار برده و برای $\chi(\omega = 0) = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega_0^2$ از χ_0 استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi_r(\omega) + i\chi_i(\omega) = \frac{\chi_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} + i\frac{\pi}{2}\chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega} \delta(\omega - \omega_0) \quad (19-101)$$

تابع پاسخ $R(t)$ را می‌توان با استفاده از معادله (۱۹-۳) به‌دست آورد — یعنی معکوس تبدیل فوریه $\tilde{\chi}(\omega)$. چون $R(t)$ حقیقی است، تبدیل را می‌شود به‌صورت انتگرال روی تنها فرکانسهای مثبت بیان کرد

$$R(t'') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [\chi_r(\omega) \cos \omega t'' + \chi_i(\omega) \sin \omega t''] d\omega \quad (19-102)$$

وقتی انتگرال هر یک از این دو جمله را بگیریم، نتیجه یکسان می‌دهند. مثلاً

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \chi_i(\omega) \sin \omega t'' d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_0 \omega_0 \sin \omega_0 t'' \quad (19-103)$$

پس، معادله (۱۹-۱۰۰) می‌شود

$$P(t) = \chi_0 \omega_0 \int_0^\infty E(t - t'') \sin \omega_0 t'' dt'' \quad (19-104)$$

برای سهولت متغیر انتگرال‌گیری را به $t' = t - t''$ و حدود انتگرال‌گیری مربوطه را به $-\infty$ تا t تبدیل می‌کنیم. برای $t' < 0$ میدان الکتریکی صفر و پس از آن برابر E_0 است. انتگرال را می‌توان انجام داد، با این نتیجه که

$$P(t) = \chi_0 E_0 (1 - \cos \omega_0 t) \quad (t > 0) \quad (19-105)$$

بنابراین، بعد از اعمال ناگهانی میدان الکتریکی E_0 ، محیط در فرکانس تشدید ω_0 "به زنگ زدن" در می‌آید. اگر جمله میرایی را با استفاده از معادلات (۱۹-۴۰ الف) و (۱۹-۴۰ ب) به جای معادله (۱۹-۱۰۱) منظور کرده بودیم، نوسان $P(t)$ به تدریج از بین می‌رفت، و قطبش تنها قطبش حالت

ساکن، $\chi_0 E_0$ می‌بود. این محاسبات تأکید بر این حقیقت دارد که تناسب ساده‌ای بین $P(t)$ و $E(t)$ وجود ندارد و نسبت تناسب وابسته به زمان آنها از خواص مشخصه ماده نیست. پارامترهای ماده به نحو مناسب به صورت نسبت‌های تناسب بین پاسخهای تکفام و تحریکهای تکفام — یعنی، به صورت نسبت‌های تبدیلیهای فوریه میدانهای وابسته به زمان — در نظر گرفته می‌شوند.

۱۹-۸ خلاصه مطالب

اگر خروجی $O(t)$ و ورودی $I(t)$ محیطی از طریق زیر به یکدیگر مرتبط باشند

$$O(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t R(t-t') I(t') dt'$$

و تابع پاسخ $R(t)$ به $I(t)$ بستگی نداشته باشد، آن محیط خطی است. پاسخ این محیط علی است زیرا خروجی به آنچه در گذشته رخ داده است بستگی دارد ولی به آینده بستگی ندارد. با در نظر گرفتن الکترونها و یونها به صورت نوسانگرهای هماهنگ میرای کلاسیک یا به صورت ذرات آزاد، ثابت دی‌الکتریک مختلط ماده به‌عنوان تابعی از فرکانس میدان الکتریکی محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

که در آن ω_0 فرکانس طبیعی و γ فرکانس میرایی است، و ω_p (فرکانس پلازما برای ذرات آزاد) برابر است با

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

بر مبنای این تحلیل انواع بستگیهای ثابت دی‌الکتریک حقیقی و رسانندگی را به فرکانس، بسته به آنکه نیروی لختی، یا نیروی میرایی، و یا نیروی بازگرداننده قابل چشمپوشی باشد، می‌توان فهرست‌بندی کرد. اگر اثرات میدان موضعی را بتوانیم نادیده بگیریم، پاسخهای دی‌الکتریکی گروههای مختلف ذرات جمع‌پذیرند. بستگی ثابتهای دی‌الکتریک به فرکانس و همچنین اندازه‌های نسبی قسمتهای حقیقی و موهومی آن تعیین‌کننده بستگی ثابتهای اِبتیکی n و k به فرکانس است. قسمتهای حقیقی و موهومی از یکدیگر مستقل نیستند، بلکه از طریق روابط کرامرز-کرونیگ به یکدیگر مربوط می‌شوند.

• هنگامی که نیروهای لختی و بازگرداننده غالب‌اند، جذب تشدید رخ می‌دهد. برای میرایی کم ثابت دی‌الکتریک شکل لورنتسی ساده‌ای دارد. اگر K_0 کوچک باشد، ثابتهای اِبتیکی نیز به

همان شکل خواهند بود. در هر صورت، در ناحیه قله جذب "پاشندگی بی‌هنجار" رخ می‌دهد. قله‌ها برای الکترونها در مرئی یا فرابنفش واقع‌اند و برای یونها در فرورسرخ.

• چنانچه نیروی بازگرداننده (ω_0) را برابر با صفر قرار دهیم نظریه الکترون آزاد درود نتیجه خواهد شد. هنگامی که $\gamma \ll \omega$ باشد، عمق پوسته و ضریب جذب در فرکانسهای کم (فرمولهای هاگن-روبنز) با رسانندگی dc نتیجه می‌شود. برای $\gamma \gg \omega$ و $\omega \gg \omega_p$ ، ذرات آزاد سهم کوچکی در رسانش یا جذب دارند. اگر $\gamma \ll \omega_p$ باشد، ناحیه فرکانس بینابینی وجود دارد (برای فلزات در فرورسرخ) که در آن ضریب جذب کم است (ضریب انعکاس زیاد)،

$$A = 2/\omega_p \tau$$

در اینجا τ فرکانس برخورد است، و عمق پوسته در آن ناحیه کوچک است

$$\delta = \lambda_p / 2\pi$$

که در آن λ_p طول موج پلاسماست. فرکانس پلاسما برای فلزات در فرابنفش و برای سایر پلاسماهای الکترونی متداول در فرکانسهایی بسیار پایین‌تر، قرار دارد.

• در واهلش دی‌الکتریکی اثرات لختی قابل چشمپوشی‌اند. بستگی واهلش دی‌الکتریکی به فرکانس "تندمیرا"ست و ناحیه "پاشندگی بهنجار" برای آن وجود ندارد. سازوکار آن همان سازوکار قطبش‌پذیری سمتگیری دوقطبیهی دائمی است.

• رابطه کرامرز-کرونیگ

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

بین قسمتهای حقیقی و موهومی تابع پاسخ دی‌الکتریک تنها به خطی بودن محیط (و به علیت) بستگی دارد. این رابطه یا صورتهای دیگر آن در تمام دستگاههای خطی کاربردهای مفیدی دارد.

مسائل

۱-۱۹ چگالی و ضریب شکست بنزن مایع در 20°C به ترتیب 1.79 g/cm^3 و 1.50 (برای $\lambda = 589 \text{ nm}$) است. از معادله کلایوس-موساتی، (الف) ضریب شکست بخار بنزن را در 20°C ، که در آن فشار بخار برابر با 1° اتمسفر است، (ب) همچنین در نقطه جوش آن (80°C) محاسبه کنید.

۱۹-۲ نشان دهید که پهنای منحنی لورنتسی، معادله (۱۹-۵۶)، در ارتفاع نصف بیشینه، γ است. همچنین نشان دهید که مساحت زیر منحنی برابر است با

$$\frac{\pi \omega_p^2}{2 \omega_0}$$

۱۹-۳ ضریب شکست الماس در $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ برابر است با 2.417 ؛ فرض کنید ثابت دی الکتریک ساکن آن 5.0 است. این داده‌ها را در مورد مدل ساده‌ای با تنها یک جذب به صورت تابع δ در λ_0 به کار ببرید و λ_0 را تعیین کنید.

۱۹-۴ فرمول کوشی را برای برآورد ضریب شکست گاز هیدروژن در شرایط متعارف برای طول موجهای 4000 و 7000 آنگستروم، به کار ببرید. فرض کنید که $\lambda_0 = 1216 \text{ \AA}$ (خط α لیمان).

۱۹-۵ گاهی شکل قله‌های جذب تجربی به منحنی گاوسی نزدیکتر است تا به منحنی لورنتسی. برای نشان دادن اختلاف بین منحنیهای گاوسی و لورنتسی، یک منحنی گاوسی و یک منحنی لورنتسی با ارتفاع قله یکسان و پهنای یکسان در نصف ارتفاع بیشینه را در یک نمودار رسم کنید. ۱۹-۶ تابع دی الکتریک را برای یونهای مقیدی که با میرایی قابل چشمپوشی در نوسان‌اند، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K(\omega) = K_\infty + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

که در آن ω_T فرکانس تشدید برای ارتعاشات عرضی یونها با طول موج بلند است، و K_∞ به طور تقریبی سهم آن دسته از حرکت‌های الکترونی است که در فرکانسهایی بسیار بیشتر از ω_T به تشدید در می‌آیند. توجه کنید که برای $\omega = \omega_T$ ، $K(\omega) \rightarrow \infty$. اگر برای $\omega = \omega_L$ داشته باشیم $K(\omega) = 0$ ، به طوری که نوسانهای طولی با طول موج بلند با فرکانس ω_L بتوانند رخ بدهند، نشان دهید که

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{K_0}{K_\infty}$$

که در آن $K_0 = K(0)$ ثابت دی الکتریک dc است. این رابطه به رابطه لیدن-ساکس-تلر^۱ معروف است.

۱۹-۷ فرض کنید یک محلول رقیق شامل تعداد N نوسانگر اتمی در واحد حجم است که در محیطی شفاف با ضریب شکست n_∞ حل شده‌اند. با فرض آنکه در فرکانس تشدید $1 \ll K_0$ و $n = n_\infty$ است، (الف) k و ضریب جذب α را پیدا کنید. از اثرات میدان موضعی چشمپوشی

کنید. (ب) نشان دهید که

$$N = \frac{\epsilon_0 m c}{e^2} n_{\infty} \gamma \alpha$$

از چنین رابطه‌ای (که به معادلهٔ اسماکولا^۱ یا معادلهٔ چاکو^۲ معروف است) غالباً برای پیدا کردن N از اندازه‌گیریهایی ایتیکی ارتفاع جذب α و پهنای جذب γ استفاده می‌شود.

۱۹-۸ محیطی را در نظر بگیرید که حاوی ذرات آزادی با زمان برخورد τ است و رسانندگی dc آن برابر g_0 است. (الف) برای فرکانس $\omega = 1/\tau$ ، قسمتهای حقیقی و موهومی رسانندگی را محاسبه کنید. (ب) ثابت دی‌الکتریک حقیقی K چیست؟

۱۹-۹ برای یک پلاسمای الکترون آزاد با $\omega_p = 10^{-2}$ ، مقادیر تقریبی n و k را در $\omega = \omega_p$ محاسبه کنید.

۱۹-۱۰ فرض کنید در تابع دی‌الکتریک یک پلاسمای الکترون آزاد با میرایی قابل چشمپوشی، سهم الکترونهاً مقید مدارهای داخلی را که در فرکانسهای بالاتر به تشدید در می‌آیند، بتوان به طور تقریبی با K_{∞} برابر گرفت

$$K(\omega) = K_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

(الف) فرمولی برای فرکانس نوسانهای طولی پیدا کنید. (ب) در نقره مقدار محاسبه شده برای ω_p از چگالی الکترون آزاد (ظرفیت) برابر است با $\omega_p = 1.38 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ و نوسانهای طولی پلاسما در فرکانس $\omega = 5.8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ مشاهده می‌شوند. K_{∞} چقدر است؟

۱۹-۱۱ در یک پلاسمای الکترون آزاد، امواج طولی پلاسما در فرکانس $\omega = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$ تولید می‌شوند که در اینجا m جرم الکترون است. اگر یونهای مثبتی با جرم M نیز آزادانه در حرکت باشند، با فرض آنکه سهم الکترونهاً و یونهاً در K جمع‌پذیرند، نشان دهید که امواج طولی پلاسما در فرکانس $\omega = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 \mu}$ تولید می‌شوند. در اینجا $\mu = mM/(M+m)$ جرم کاهش یافته است.

۱۹-۱۲ دربارهٔ رفتار دی‌الکتریک ذرات آزاد برای مورد $\omega_p \gg \gamma$ بحث کنید. به عبارت دیگر عباراتی تقریبی برای \hat{K} و \hat{n} در نواحی مختلف فرکانس پیدا کنید. آیا رابطهٔ هاگن-روبنز معتبر است، و اگر معتبر است در چه گستره‌ای از فرکانس؟

۱۹-۱۳ زاویهٔ اتلاف دی‌الکتریک یک دی‌الکتریک قطبی برحسب تابعی از فرکانس، بیشینه‌ای دارد. فرکانسی را که در آن بیشینه رخ می‌دهد محاسبه کنید و، اگر $1 \gg K_0$ باشد، K_r و K_i را در این فرکانس پیدا کنید.

۱۴-۱۹ فرمولهای زیر را (که به قواعد جمع مشهورند) باری رسانندگی حقیقی g و پذیرفتاری χ با استفاده از روابط کرامرز-کرونینگ ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} \chi(\omega') d\omega' = \frac{\pi}{\gamma} \lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) = 0$$

$$\int_0^{\infty} g(\omega') d\omega' = -\frac{\pi}{\gamma} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \chi(\omega) = \frac{\pi N e^2}{2m}$$

۱۵-۱۹ فرض کنید محیطی تنها با یک قله جذب به صورت $\chi_i(\omega') = \frac{1}{\gamma} \pi \omega_0 \chi_0 \delta(\omega' - \omega_0)$ مشخص می‌شود. پاسخ $P(t)$ محیط را به میدان الکتریکی تپی زیر پیدا کنید

$$E(t) = \frac{E_0}{\omega_0} \delta(t)$$

۱۶-۱۹ با در نظر گرفتن $J(t)$ به جای $P(t)$ ، نشان دهید که رسانندگی مختلط از روابط پاشندگی زیر تبعیت می‌کند

$$g_r(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' g_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad g_i(\omega) = -\frac{\gamma}{\pi} \omega \int_0^{\infty} \frac{g_r(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

این روابط نه تنها برای عایقها بلکه برای رساناها نیز معتبرند، زیرا $\hat{g}(\omega)$ در $\omega = 0$ تکنیکی ندارد. (الف) با استفاده از رابطه $\hat{g} = -i\omega \hat{\chi}$ ، این روابط پاشندگی را با معادله‌های (۱۹-۲۱) که در آن $\tilde{R}(\omega) \equiv \hat{\chi}(\omega)$ مقایسه کنید. (ب) "قواعد جمع" زیر را به دست آورید

$$\int_0^{\infty} \chi(\omega') d\omega' = -\frac{\pi}{\gamma} g(0), \quad \int_0^{\infty} g(\omega') d\omega' = \frac{\pi}{\gamma} \frac{N e^2}{m}$$

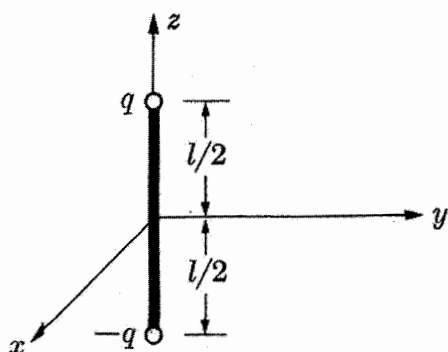
توجه کنید که این روابط با روابطی که در مسئله ۱۴-۱۹ برای عایقها [$g(0) = 0$] به دست آمد، سازگارند.

گسیل تابش

برای مطالعه تولید امواج الکترومغناطیسی ابتدا بهتر است پتانسیلهای برداری ای را بررسی کنیم که در معادله موج غیرهمگن با چشمه‌ها صدق می‌کنند. در این فصل چند چشمه تابش ایده‌آل و همچنین دستگاههای پیچیده‌تری را بررسی خواهیم کرد. به علت تقریبهایی که در این فصل به کار می‌بریم، اعتبار پاسخها محدود می‌شود به میدانهای تولیدشده توسط بارهای متحرک کند (غیرنسبیتی)، یعنی بارهایی که سرعتشان، v ، در مقایسه با سرعت نور، c ، کوچک است، $v \ll c$. ولی به هر جهت نتایج آن هم برای تابش امواج رادیویی از آنتنها کاربرد دارد و هم برای تابش از اتمها. بررسی خود را با ساده‌ترین مثال آتن آغاز می‌کنیم، و سپس روش کلی‌تری را توسعه خواهیم داد.

۱-۲۰ تابش از یک دوقطبی نوسان‌کننده

مثال ساده‌ای برای تابش از یک توزیع بار-جریان مشخص وابسته به زمان، محاسبه تابش از یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده است. فرض کنیم که دوقطبی، همان‌طور که در شکل ۱-۲۰ نشان داده‌ایم، شامل کره‌هایی است که در $z = \pm l/2$ قرار گرفته‌اند و توسط سیمی با ظرفیت قابل چشمپوشی به یکدیگر متصل شده‌اند. بار موجود بر روی کره بالایی $+q$ و روی کره پایینی $-q$



شکل ۱-۲۰ دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده.

است. اصل بقای بار ایجاب می‌کند که جریان موجود در سیم رابط با معادله زیر داده شود

$$I = +\dot{q} \quad (۱-۲۰)$$

که در آن I در جهت مثبت z ، مثبت است. باید توجه داشت که شرط قابل چشمپوشی بودن ظرفیت سیم و نتیجتاً یکنواخت بودن جریان، تنها در صورتی صادق است که طول l دوقطبی در مقایسه با طول تابش کوچک باشد (به بحث ابتدای فصل ۱۳ مراجعه کنید).

از معادله (۱۶-۸۴)، پتانسیل برداری مربوط به توزیع جریانی که با معادله (۱-۲۰) مشخص شده باشد، عبارت است از

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z', t - |\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|/c) dz'}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|} \quad (۲-۲۰)$$

این عبارت نسبتاً مشکل را می‌توان فوراً با بررسی کمیت $|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|$ ساده کرد. واضح است که

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}| = (r^2 - 2z'\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + z'^2)^{1/2} \quad (۳-۲۰)$$

اگر l در مقایسه با r کوچک باشد، به عبارت دیگر، اگر ما میدان را تنها در فواصل دور از دوقطبی در نظر بگیریم، طرف راست معادله (۳-۲۰) را می‌توانیم به شکل زیر بسط دهیم

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}| = r - z' \cos \theta \quad (۴-۲۰)$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{r} و محور z است. کمیت $|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|$ در معادله (۴-۲۰) دو بار در عبارت A آمده است. اگر r به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توانیم برای مخرج از $z' \cos \theta$ صرف نظر کنیم. ولی در جمله زمان تأخیری در صورتی می‌توان از $z' \cos \theta / c$ صرف نظر کرد که در مقایسه با

زمانی که در اثنای آن جریان به‌طور قابل توجهی تغییر می‌کند، برای مثال، در مقایسه با دوره تناوب برای جریان‌هایی که تغییرات هماهنگ دارند، قابل چشمپوشی باشد. چون $z' \cos \theta \ll l/2$ است، این بدان معنی است که در جمله زمان تأخیری تنها در صورتی می‌توان از $z' \cos \theta/c$ صرف‌نظر کرد که

$$\frac{l}{c} \ll cT = \lambda \quad (5-20)$$

بنابراین، اگر دوقطبی در مقایسه با طول‌موج کوچک و نقطه مشاهده در مقایسه با l ، از دوقطبی خیلی دور باشد آنگاه \mathbf{A} با معادله زیر داده می‌شود

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l}{r} I\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (6-20)$$

پتانسیل نرده‌ای φ را می‌توان یا با استفاده از شرط لورنتس یا با به‌کار بردن عبارت مناسب برای پتانسیل تأخیری، به‌دست آورد. هر دو روش نتیجه نهایی یکسانی می‌دهند؛ با وجود این، چون پتانسیل الکتریکی مربوط به یک دوقطبی عبارت است از اختلاف بین دو جمله بزرگ، باید در محاسبه تقریبی پتانسیل تأخیری فوق‌العاده دقت کرد. چون در محاسبه از شرط لورنتس با این اشکال مواجه نمی‌شویم، پتانسیل نرده‌ای را از حل معادله زیر به‌دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (7-20)$$

که در آن \mathbf{A} با معادله (۶-۲۰) داده می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} I\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ &= \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^3} I\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{z}{r^2 c} I'\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (8-20)$$

که در آن I' نشان‌دهنده مشتق I نسبت به شناسه خودش است. با توجه به اینکه $I = +q'$ معادله بالا قابل انتگرال‌گیری است و در نتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[\frac{q(t - r/c)}{r} + \frac{I(t - r/c)}{c} \right] \quad (9-20)$$

اکنون که پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری به‌دست آمدند، برای به‌دست آوردن میدان الکترومغناطیسی تنها باید از آنها مشتق بگیریم. قبل از انجام این کار، راحت‌تر است که تحلیل خود را به موردی

اختصاص دهیم که توزیع بار-جریان نسبت به زمان به صورت هماهنگ تغییر می‌کند. به ویژه تغییرات را به صورت تابع زیر انتخاب می‌کنیم

$$q\left(t - \frac{r}{c}\right) = q_0 \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$I = I_0 \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\omega q_0 \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (۱۰-۲۰)$$

با تجزیه \mathbf{A} به مؤلفه‌های کروی آن، خواهیم داشت

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \cos \theta \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \sin \theta \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (۱۱-۲۰)$$

$$A_\phi = 0$$

و از اینجا روشن می‌شود که تنها مؤلفه ϕ از میدان \mathbf{B} صفر نیست. این مؤلفه عبارت است از

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{c} \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \quad (۱۲-۲۰) \end{aligned}$$

محاسبه میدان الکتریکی تا اندازه‌ای پیچیده‌تر است، زیرا نه تنها \mathbf{A} ، بلکه φ نیز در آن دخیل است. نتیجه مشتق‌گیریها عبارت است از

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2II_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{\sin \omega(t - r/c)}{r^2 c} - \frac{\cos \omega(t - r/c)}{\omega r^3} \right]$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \\ &= -\frac{II_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega r^2} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = 0 \quad (۱۳-۲۰)$$

محاسبه آهنگ تابش انرژی از دوقطبی جالب است. این محاسبه را با انتگرال‌گیری از مؤلفه عمود بردار پوئین‌تینگ روی سطح کره‌ای به شعاع R انجام می‌دهیم

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin \theta d\theta \quad (14-20)$$

با استفاده از معادلات (۱۲-۲۰) و (۱۳-۲۰) می‌توانیم انتگرالی را که در معادله (۱۴-۲۰) دیده می‌شود به‌طور کامل محاسبه کنیم؛ با وجود این، شاید آموزنده‌تر باشد که تنها آن قسمت از آن را محاسبه کنیم که در $R \rightarrow \infty$ صفر نمی‌شود. این کار را با انتخاب جمله‌ای که در E_θ و در B_ϕ با $1/r$ متناسب است، انجام می‌دهیم. نتیجه به‌صورت زیر خواهد بود

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{(I_0 l)^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (15-20)$$

این معادله توان تابش شده لحظه‌ای را به‌دست می‌دهد؛ میانگین توان تابش شده (از آنجا که میانگین \cos^2 برابر یک دوم است) عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{l^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{I_0^2}{2} \quad (16-20)$$

شکل متداول‌تری برای معادله (۱۶-۲۰) به کمک معرفی $\lambda = 2\pi c/\omega$ و $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ به‌دست می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2} \quad (17-20)$$

یک مقاومت R که حامل جریان $I_0 \cos \omega t$ باشد، انرژی را با آهنگ میانگین $\bar{P} = RI_0^2/2$ تلف می‌کند.

از مقایسه این رابطه با معادله (۱۷-۲۰)، ملاحظه می‌شود که عاقلانه است مقاومت تابشی یک دوقطبی را با معادله زیر تعریف کنیم

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (18-20)$$

$$R_r = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (\text{در خلا})$$

برای محیط مادی μ_0 و ε_0 را باید با μ و ε جایگزین کنیم و $\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

ممکن است به این فکر بیفتیم که از معادله (۲۰-۱۸) برای توصیف تابش از یک آنتن رادیو استفاده کنیم. متأسفانه نقایصی وجود دارد که باعث می‌شود نتوانیم نتایج خوبی از این طریق به دست آوریم. نقایص اصلی عبارت‌اند از (۱) از اثر نزدیکی زمین چشمپوشی شده است، (۲) معمولاً آنتنها را به طریق خازنی در قسمتهای انتهایی باردار نمی‌کنند، و (۳) عموماً آنتنها در مقایسه با طول موجی که تابش می‌کنند، کوتاه نیستند. در بخش بعد، دربارهٔ رفع دو نقص آخر بررسی خواهیم کرد؛ ولی بررسی اثر اختلالی که زمین به وجود می‌آورد از حوزهٔ بحث این کتاب خارج است.

۲۰-۲۰ تابش از یک آنتن نیم موج

محدودیت کوچک بودن طولها در مقایسه با طول موج را می‌توان در بعضی موارد با روشهای نسبتاً ساده حذف کرد. به‌ویژه، یک سیم را که طولش درست نصف طول موج است، می‌توان به اجزای بی‌نهایت کوچک تقسیم کرد و روش بخش قبل را در مورد هر جزء به‌کار برد. فرض کنید سیم در امتداد محور z از $-\lambda/4$ تا $+\lambda/4$ قرار دارد و حامل جریان زیر است

$$I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda} \right) \quad (19-20)$$

مقدار این جریان در دو انتهای سیم برابر صفر است. نایک‌نواختی جریان ایجاب می‌کند که چگالی بار متغیر باشد. چگالی بار در دو انتهای سیم بیشترین مقدار است. یک جزء dz' در z' در ایجاد E_θ در خلا به مقدار زیر سهم است

$$dE_\theta = I_0 \frac{\sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 R c^2} \omega \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda} \right) dz' \quad (20-20)$$

در اینجا R عبارت است از فاصلهٔ dz' از نقطهٔ مشاهده، و از جملات از مرتبهٔ $1/R^2$ چشمپوشی شده است. به طریق مشابه داریم

$$dB_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega}{R c} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{2\pi z'}{\lambda} \right) dz' \quad (21-20)$$

مسئله محاسبه E_θ و B_ϕ به مسئله محاسبه انتگرال زیر تبدیل می‌شود

$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda}{R} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos u \, du \quad (22-20)$$

که در آن $u = 2\pi z'/\lambda$. مثل قبل، $R = r - z' \cos \theta$ ، و بنابراین با انتخاب r به اندازه کافی بزرگ، $z' \cos \theta$ قابل چشمپوشی می‌شود. ولی در شناسه کسینوس، دقت بیشتری لازم است و K به صورت زیر نوشته می‌شود

$$K = \frac{\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + u \cos \theta \right] \cos u \, du$$

می‌توان کسینوس را بسط داد تا نتیجه زیر به دست آید

$$K = \frac{\lambda}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u \cos \theta) \cos u \, du \\ - \frac{\lambda}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(u \cos \theta) \cos u \, du$$

انتگرال دوم صفر می‌شود، و انتگرال اول را می‌توان با نوشتن کسینوس به شکل نمایی یا با به‌کار بردن جدولهای استاندارد محاسبه کرد. نتیجه عبارت است از

$$K = \frac{\lambda}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \quad (23-20)$$

با به دست آوردن K ، خواهیم داشت

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 r c} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (24-20)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta}$$

میانگین بردار پوینتینگ انتگرالگیری شده عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta \, d\theta \quad (25-20)$$

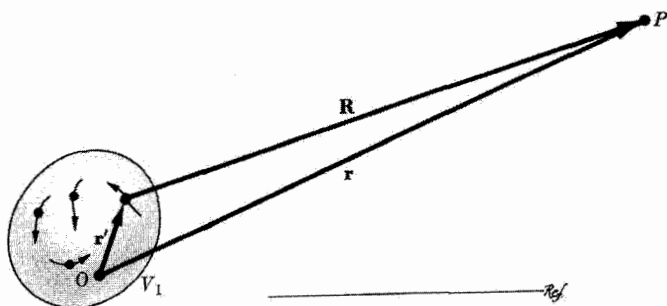
انتگرال باقیمانده را می‌توان به صورت یک سری نامتناهی یا با انتگرال‌گیری عددی محاسبه کرد. مقدار آن ۱٫۲۱۹ است و بنابراین برای یک آنتن نیم‌موج نتیجه عبارت است از

$$\bar{P} = 73.1 \Omega \frac{I_0^2}{4} \quad (\text{در خلا}) \quad (26-20)$$

این روش را می‌توان در مورد مسائل پیچیده‌تر به‌کار برد؛ اما، جزئیات فنی آن نسبتاً دشوار می‌شود. در این بررسی آنتن نیم‌موج، توزیع جریان مقروضی در نظر گرفته شد و سپس میدانها را محاسبه کردیم. یک آنتن نیم‌موج واقعی از نقطه وسط آن توسط یک ولتاژ یا جریان متغیر سینوسی، تحریک می‌شود. این تحریک توزیعهای جریان و بار وابسته به زمان در آنتن به وجود می‌آورد و این توزیعها به نوبه خود چشمه تولید میدانها هستند. با وجود این، توزیعهای جریان و بار باید با این میدانها سازگار باشند. این مسئله را می‌توان از طریق حل مسئله‌های مربوط به یک کره‌وار باریک یا آرایه‌ای از دو مخروط حل کرد و سپس پاسخ حدی را هنگامی که طول قطر کوچک کره‌وار یا زاویه مخروط به سمت صفر میل می‌کند، به دست آورد (در مورد این دو مسئله معادله موج به طریق جداسازی حل می‌شود). در هر دو مورد، مسئله پیچیده است. از طرفی دیگر، می‌توان مشابه روشی که در بخش ۳-۱۲ برای محاسبه توزیع بار روی سیم طویل به‌کار بردیم، روشی توسعه دهیم و برای محاسبه عددی توزیع جریان در آنتن به‌کار ببریم. به مجرد آنکه توزیع جریان معلوم شد میدانها را می‌توان محاسبه کرد، همان‌طور که در بالا انجام دادیم. متأسفانه، این روش نیز پیچیده است. تمام این روشهای محاسباتی به‌کار برده شده‌اند و نتایج یکسانی به دست آمده است. مفیدترین مطلبی را که می‌توانیم در اینجا متذکر شویم آن است که برای یک آنتن طویل نازک، میدانهایی که از طریق تقریبهای بخش ۲-۲۰ محاسبه شد تا حد چند درصد دقیق هستند.

۲-۳ تابش از یک گروه بار متحرک

در این بخش عبارتی را برای توان تابش شده توسط یک گروه بار متحرک، یا به‌طور معادل، توسط یک توزیع بار-جریان، به دست خواهیم آورد. حرکت بارها اختیاری است، مگر در محدودیتهای زیر: در اثنای زمانی که طول می‌کشد تا تابش از نزدیکی بارها تا نقطه مشاهده منتشر شود، می‌توان تصور کرد که تمام بارها و جریانهای توزیع در حجم V_1 جای دارند و ابعاد این حجم در مقایسه با فاصله چشمه تا نقطه مشاهده، کوچک است (شکل ۲-۲۰). به علاوه، ابعاد V_1 در مقایسه با طول موجهای عمده تابش گسیل شده، کوچک‌اند. محدودیتهای فوق همچنین ایجاب می‌کند که بارها در مقایسه با سرعت نور به‌کندی حرکت کنند. فرض می‌شود که بارها در خلا حرکت می‌کنند.



شکل ۲۰-۲. بارهایی که به طور دلخواه در حرکت اند و در حجم V_1 احاطه شده اند. میدانها باید در نقطه P محاسبه شوند.

به عنوان اولین قدم برای حل مسئله، باید پتانسیل‌های الکترومغناطیسی را محاسبه کنیم. اینها همان پتانسیل‌های تأخیری هستند که در بخش ۱۶-۶ درباره آنها بحث شد. مبدأ مختصات O را در داخل حجم V_1 می‌گیریم و محل یک جزء بار را با \mathbf{r}' نشان می‌دهیم (شکل ۲۰-۲). نقطه P به فاصله r از مبدأ قرار گرفته است. برای راحتی، فاصله کمکی \mathbf{R} را معرفی می‌کنیم که نشان‌دهنده محل نقطه میدان نسبت به یک جزء بار است. واضح است که

$$\mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r} \quad (27-20)$$

چون $r \gg r'$ است، می‌توان نوشت

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} \quad (28-20)$$

حال پتانسیل نرده‌ای تأخیری φ در نقطه P به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr) dv'}{r - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})/r} \end{aligned} \quad (29-20)$$

با استفاده از قضیه دو جمله‌ای

$$\left(r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} \right)^{-1} = r^{-1} + r^{-2} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} + \dots \quad (30-20)$$

و از بسط سری تیلور

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t - r/c} + \dots \quad (31-20)$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V_1} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \cdot \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' \\ &+ \text{جملات درجه بالاتر} \end{aligned} \quad (32-20)$$

انتگرال اول در معادله (۳۲-۲۰) عبارت است از بار کل توزیع (Q) که مقدار آن ثابت و مستقل از زمان است. انتگرال دوم (و نیز انتگرال سوم) عبارت است از گشتاور دوقطبی الکتریکی توزیع بار (p)، که در زمان $t - r/c$ محاسبه شده است. جملات درجه بالاتر با توان بیشتر r'/r افت می‌کنند و به گشتاورهای چندقطبی بالاتر توزیع بار بستگی دارند. به علت محدودیتهایی که در ابتدای این بخش اعمال شد، سهم این جملات در میدان الکترومغناطیسی در فاصله زیاد از توزیع بار قابل توجه نیست (به مطلب زیر توجه شود). بنابراین،

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right] \quad (33-20)$$

که در آن $\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$ در نتیجه استفاده از بسط سری تیلور تنها یک زمان تأخیری در جملاتی که به طور صریح نگاه داشته شده‌اند، به چشم می‌خورد.

پتانسیل برداری تأخیری \mathbf{A} در نقطه میدان با معادله زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr) dv'}{r - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})/r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_1} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' + \text{جملات درجه بالاتر} \end{aligned} \quad (34-20)$$

جملات درجه بالاتر را لازم نیست به صراحت نوشت، زیرا باز هم این جملات به گشتاورهای چندقطبی بالاتر توزیع بار بستگی دارند. به بیان دیگر، معادله (۳۴-۲۰) با معادله (۳۲-۲۰) سازگار است. با استفاده از نتیجه مسئله ۴-۷ می‌توان معادله قبل را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (35-20)$$

پتانسیل نرده‌ای (۲۰-۳۳) را نیز می‌توانستیم از (۲۰-۳۵) و شرط لورنتس به‌دست آوریم. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان از روابط معمول زیر به‌دست آورد

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

توجه خود را به میدانهای منطقه تابش محدود می‌کنیم؛ به عبارت دیگر، به آن قسمت از \mathbf{E} و \mathbf{B} که به‌صورت r^{-1} افت می‌کنند، چون تنها این قسمتها برای تعیین توان تابش‌شده توسط توزیع بار کفایت می‌کنند. محاسبه $\partial \mathbf{A} / \partial t$ سراسر است؛ برای به‌دست آوردن $\nabla \varphi$ توجه می‌کنیم که چون $\dot{\mathbf{p}}$ تابعی از $t - r/c$ است

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\mathbf{p}} \equiv -\frac{1}{c} \ddot{\mathbf{p}} \quad (۲۰-۳۶)$$

بنابراین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{c^2 r^3} \mathbf{r} + \text{(جملاتی که سریع‌تر از } 1/r \text{ افت می‌کنند)} \quad (۲۰-۳۷)$$

برای محاسبه $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ باید از معادله (۲۰-۳۵) تاو بگیریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

رابطه آخر با استفاده از معادله (۲۰-۳۶) به‌دست می‌آید. اولین جمله در تاو \mathbf{A} را می‌توانیم نادیده بگیریم زیرا این جمله سریع‌تر از r^{-1} افت می‌کند؛ پس

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (۲۰-۳۸)$$

بنابراین، میدانهای منطقه تابش با معادلات زیر داده می‌شوند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (۲۰-۳۹)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{p}}}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}) \\ &= -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (40-20)$$

که در آنها مقدار $\ddot{\mathbf{p}}$ در زمان تأخیری محاسبه می‌شود.

واضح است که \mathbf{E} و \mathbf{B} بر یکدیگر و هر دو بر \mathbf{r} نیز عمودند. از معادله (۱۷-۲۲) نیز می‌توانستیم انتظار چنین نتیجه‌ای را داشته باشیم، زیرا $\mathbf{r}/r = \boldsymbol{\kappa}/\kappa = \mathbf{u}$. بنابراین، هنگامی که تنها میدان تابش مورد نظر است ($r \gg \lambda$) تنها کافی است که \mathbf{A} را محاسبه کنیم. بردار پوینتینگ $\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ در جهت \mathbf{r} است و با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0 r} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{\mu_0 r} r B^2 \quad (41-20)$$

یا

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2$$

اگر محور z را در جهت $\ddot{\mathbf{p}}$ انتخاب کنیم، داریم

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (42-20)$$

می‌بینیم که حداکثر توان در جهت 90° نسبت به $\ddot{\mathbf{p}}$ تابش می‌شود. توان تابش شده کل را می‌توان با انتگرال‌گیری از بردار پوینتینگ روی یک سطح بسته که توزیع بار را احاطه کرده است، به دست آورد. یک انتخاب مناسب برای چنین سطحی، کره‌ای است که مرکزش در توزیع بار قرار گرفته و شعاعش آنقدر بزرگ باشد که تمام قسمتهای سطح آن در منطقه تابش قرار بگیرد.

بنابراین

$$\begin{aligned} P_R &= -\frac{dW}{dt} = \oint_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

که از آن به سادگی می‌توان نتیجه مهم زیر را برای توان تابش شده توسط یک گروه بار متحرک که در مقایسه با سرعت نور به‌کندی حرکت می‌کنند، به‌دست آورد

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{c^3} \quad (۴۳-۲۰)$$

معادله (۴۳-۲۰) عبارتی است برای توان تابش شده توسط بارهایی که به دلخواه حرکت می‌کنند برحسب گشتاور دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} ی بارهای مذکور. عبارتی که قبلاً برای تابش از یک دوقطبی نوسان‌کننده به‌دست آمد، معادله (۱۶-۲۰)، مثال خاصی از (۴۳-۲۰) است؛ در آن حالت $p = (I_0/\omega) \cos\omega(t - r/c)$. حال ممکن است به علت تقارن خاص دستگاه، گشتاور دوقطبی صفر شود یا مستقل از زمان باشد. در این مورد توان تابش شده الزاماً صفر نیست، بلکه باید جملات بیشتری برای محاسبه در بسطهای φ و \mathbf{A} [معادلات (۳۲-۲۰) و (۳۴-۲۰)] نگه داشته شوند. در واقع، درمی‌یابیم که در این حالت توان تابش شده به گشتاور یکی از چندقطبیهای درجه بالاتر دستگاه بستگی دارد. شدت تابش چندقطبیهای مختلف، با افزایش درجه چندقطبیهی به ترتیب کمتر می‌شوند؛ مثلاً، تابش چارقطبی تقریباً با مضرب $(a/\lambda)^2$ از تابش دوقطبی کوچکتر است، در اینجا a بعد دستگاه و λ طول موج تابش گسیل شده است. بنابراین اگر $\ddot{\mathbf{p}}$ برای دستگاه مورد مطالعه صفر نشود، معادله (۴۳-۲۰)، قسمت عمده توان تابش شده را به‌دست می‌دهد.

می‌توان معادلات (۳۹-۲۰)، (۴۰-۲۰)، و (۴۳-۲۰) را در مورد تابش از یک بار منفرد شتابدار q نیز به‌کار برد. گشتاور دوقطبی این بار $q\mathbf{r}'$ است، که در آن \mathbf{r}' از یک مبدأ دلخواه اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین

$$\dot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{r}}' = q\mathbf{v}$$

که در آن \mathbf{v} سرعت بار است که به انتخاب مبدأ بستگی ندارد. سرانجام

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}}$$

که در آن $\dot{\mathbf{v}}$ شتاب بار است. با قرار دادن نتیجه اخیر در معادله (۴۳-۲۰) خواهیم داشت

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^3} \quad (۴۴-۲۰)$$

که معادله‌ای است برای توان تابش شده توسط بار شتابدار که به‌کندی حرکت می‌کند.

* ۲۰-۴ میدانهای منطقه‌های نزدیک و بینابین

تنها جمله‌هایی در میدان که با $1/r$ متناسباند در انرژی تابشی سهمیند، ولی در ناحیه نزدیک به بارهای تابنده توانهای بالاتر $1/r$ غالباند. این میدانها از نظر مقایسه با میدانهای ساکن، و همچنین در مسائل عملی در ناحیه بسیار نزدیک به آنتن‌ها، مورد توجه‌اند. در این بخش ما میدانهای E و B یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای را به‌طور کامل محاسبه خواهیم کرد. برای انجام این کار، با پتانسیلهای دوقطبی، معادله‌های (۲۰-۳۳) و (۲۰-۳۵)، شروع می‌کنیم و در مشتق‌گیریها جملاتی را که در بخش قبل کنار گذاشتیم حفظ می‌کنیم. سهم $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ در \mathbf{E} قسمتی از میدان تابش است که قبلاً محاسبه کرده‌ایم. با به‌کار بردن اتحاد برداری (۱-۱-۶) در معادله (۲۰-۳۳) با $Q = 0$ خواهیم داشت

$$-\nabla\varphi = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \nabla \dot{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{cr^2} + \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]$$

که در اینجا جملات به ترتیب توانهای فزاینده $1/r$ مرتب شده‌اند. اولین دو جمله، هنگامی که با $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ جمع شوند، میدان تابش معادله (۲۰-۴۰) را می‌دهند

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \ddot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \right) \quad (۲۰-۴۰)$$

که به‌صورت $1/r$ تغییر می‌کند و به $\ddot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. جمله آخر، هنگامی که بسط داده شود، درست همان میدان دوقطبی ساکن معادله (۲-۳۶) است

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad (۲-۳۶)$$

که به‌صورت $1/r^3$ تغییر می‌کند و به \mathbf{p} بستگی دارد. البته در این مورد دوقطبی \mathbf{p} با زمان تغییر می‌کند، ولی بستگی مکانی \mathbf{E}_2 به‌طور لحظه‌ای همان بستگی میدان دوقطبی ساکن است. جملات سوم، چهارم، و پنجم (که شکل آنها مشابه شکل جملات اول، دوم، و آخر است) منجر به میدان گذار یا میدان القا می‌شوند

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \dot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad (۲۰-۴۵)$$

که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند و به $\dot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. پس میدان کل E عبارت است از

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

که در آن \mathbf{p} و مشتقاتش باید در زمان تأخیری $t' = t - r/c$ محاسبه شوند. میدان \mathbf{B} با محاسبهٔ تاو معادلهٔ (۳۵-۲۰) به دست می‌آید. اگر جمله‌ای را که هنگام به دست آوردن معادلهٔ (۳۹-۲۰) کنار گذاشتیم حفظ کنیم، از معادلات (۴۰-۲۰) و (۴۵-۲۰) می‌بینیم که

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{cr} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$$

بنابراین \mathbf{B} حاوی یک میدان تابش و یک میدان القاست. ولی میدان B ی “ساکن” وجود ندارد. از دومین عبارتی که در بالا برای $\mathbf{E}_{1,2,3}$ داده شد، روشن است که این میدانها، هر سه، مؤلفهٔ عرضی‌ای دارند که بر \mathbf{r} عمود است و در صفحهٔ تعریف شده با \mathbf{p} و \mathbf{r} واقع است. میدان تابش عرضی خالص است، ولی \mathbf{E}_2 و \mathbf{E}_3 علاوه بر مؤلفهٔ عرضی یک مؤلفهٔ طولی در امتداد \mathbf{r} نیز دارند. اگر مختصات کروی را انتخاب کنیم، با محور قطبی در امتداد \mathbf{p} ، آنگاه مؤلفه‌های عرضی، E_θ هستند و با $\sin \theta$ متناسب‌اند؛ مؤلفه‌های طولی، E_r هستند و با $\cos \theta$ متناسب‌اند. میدان B فقط مؤلفهٔ ϕ دارد (TM).

اکنون مورد خاصی را بررسی می‌کنیم که در آن دوقطبی در جهت \mathbf{k} واقع است و اندازهٔ آن به‌طور سینوسی نوسان می‌کند: $\mathbf{p}(t) = p\mathbf{k} e^{-i\omega t}$. آنگاه

$$\mathbf{p}(t') = p\mathbf{k} e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$

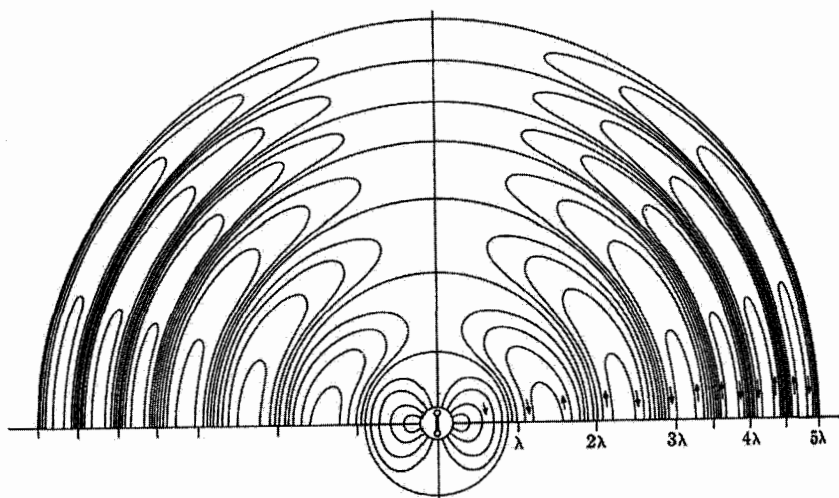
که در آن κ ثابت انتشار موج در منطقهٔ تابش است

$$\kappa = \omega/c$$

با قرار دادن $\mathbf{p}(t')$ در معادله‌های (۴۰-۲۰)، (۳۶-۲) و (۴۵-۲۰)، برای مؤلفه‌های $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$ عبارت‌های زیر را به دست می‌آوریم

$$E_\theta = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[-\frac{1}{\kappa r} - i \frac{1}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{(\kappa r)^3} \right] e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$

$$E_r = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[-i \frac{1}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{(\kappa r)^3} \right] e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$



شکل ۲۰-۳ خطوط میدان الکتریکی ایجادشده توسط یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده.

هنگامی که $1 \ll kR$ یا $kR \ll 1$ باشد، یعنی هنگامی که r در مقایسه با طول موج تابش گسیل‌شده بزرگ یا کوچک است، به ترتیب میدان تابش یا میدان ساکن غالب خواهند شد. گذار بین میدان دوقطبی "ساکن" و میدان تابش عرضی به‌طور طرحوار در شکل ۲۰-۳ با خطوط میدان نشان داده شده است. در منطقه تابش، میدان یک موج کروی است که به طرف خارج منتشر می‌شود.

۲۰-۵ میرایی تابشی: سطح مقطع تامسون

توان تابش‌شده که در بخش ۲۰-۳ محاسبه کردیم، توسط دستگاه بارها تلف می‌شود. در حالت پایا این توان تلف شده باید توسط منبع دیگری جبران شود. برای آنتن، این منبع فرستنده است، و اتلاف با مقاومت تابشی بیان می‌شود. برای الکترونی در محیطی مادی که موجی در آن در حال انتشار است، منبع توان میدان E ی موج است و اتلاف با فرکانس میرایی بیان می‌شود. اکنون می‌خواهیم فرکانس میرایی را که در فصل قبل به‌کار بردیم به آهنگ اتلاف انرژی ناشی از تابش توسط یک ذره باردار، که با معادله (۲۰-۴۴)

$$P = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{v}^2}{c^3} \quad (20-44)$$

داده شد، مربوط کنیم. توانی که نیروی F تلف می‌کند برابر است با $P = -Fv$ از مساوی

قرار دادن این توان با معادله (۴۴-۲۰)، برای نیروی میرایی داریم

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \quad (44-20)$$

نیروی میرایی خطی مفروض در معادله (۱۹-۱) به صورت $F = -Gv$ بود، لذا فرکانس میرایی $\gamma = G/m$ عبارت است از

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\dot{v}^2}{v^2}$$

برای یک بار نوسان‌کننده $v = v_0 \sin \omega t$ و

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t}$$

اشکال این نتیجه آن است که γ ثابت نیست، بلکه در یک دوره تناوب حرکت هماهنگ از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند. به هر جهت تأثیر میانگین میرایی در یک دوره تناوب بسیار کوچک است، و چون $\overline{P} = m\gamma \overline{v^2} \propto \overline{v^2}$

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t}$$

لذا فرض می‌کنیم که فرکانس میرایی مؤثر به صورت زیر است^۱

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (47-20)$$

برحسب "شعاع کلاسیک الکترون"، $R_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2 = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}$ ، داریم

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi R_e}{3 \lambda} \quad (48-20)$$

چون $\gamma = \Delta\omega$ پهنای یک قله جذب باریک است، و چون $\Delta\omega/\omega = \Delta\lambda/\lambda$ ، بنابراین

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} R_e = 1.16 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

۱. باید اعتراف کرد که این مرحله آخر استدلال تا حدودی نادقیق است. مسئله ناشی از شکست مکانیک کلاسیک نیست، زیرا از محاسبات مکانیک کوانتومی نیز همین نتیجه به دست می‌آید. از زمانی که لورنتس در سال ۱۹۰۹ معادله (۴۷-۲۰) را ارائه داد تا کنون مسئله وارد کردن صحیح نیروی واکنش تابش، معادله (۴۶-۲۰)، در نظریه دینامیکی به کرات مورد بحث قرار گرفته است. این یک مسئله بنیادی است، ولی ما نمی‌توانیم در اینجا در این مسئله وارد شویم.

این پهنای خط طبیعی باریک‌تر از پهنایی است که به‌طور عادی در طیفهای جذبی دیده می‌شود (حتی در گازها در فشارهای پایین)، زیرا سازوکارهای میرایی دیگری وجود دارد که معمولاً از میرایی تابشی بزرگترند. با وجود این، مقدار فوق حد پایینی برای میرایی است.

یکی از پیامدهای مستقیم معادله (۲۰-۴۴) که مشاهده آن متداول‌تر است، عبارت است از سطح مقطع تامسون برای پراکندگی پرتوهای ایکس. فرکانسهای پرتوهای ایکس (انرژیهای فوتونها) در مقایسه با فرکانسهای شدید بسیاری از الکترونها در ماده (یعنی در مقایسه با انرژیهای پیوند) بزرگ‌اند. بنابراین، این الکترونها را می‌توان به‌صورت الکترونهاي آزادی بررسی کرد که میدانهای پرتوهای ایکس آنها را شتاب می‌دهند

$$m\dot{v} = eE \quad (۲۰-۴۹)$$

لذا توان کل تابش‌شده توسط یک الکترون عبارت است از

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} E^2$$

طبق تعریف سطح مقطع پراکندگی تامسون σ_T عبارت است از P تقسیم بر بردار پوئین‌تینگ فرودی (توان در واحد سطح)

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad (۲۰-۵۰)$$

بنابراین

$$\sigma_T = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (۲۰-۵۱)$$

که در آن R_e شعاع کلاسیک الکترون است. کوچک بودن این سطح مقطع در مقایسه با اندازه اتم دلیل نافذ بودن پرتوهای ایکس است. بستگی زاویه‌ای تابش پراکنده با سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی داده می‌شود. سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d\sigma_T = \frac{dP}{S_0}$$

که در آن

$$dP = S da = S r^2 d\Omega$$

توان پراکنده شده (یعنی، بازتابیده شده) به درون عنصر زاویه فضایی $d\Omega$ است، و

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

با قرار دادن مقدار S از معادله (۲۰-۴۲)، برای سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی خواهیم داشت

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \sin^2 \theta \quad (۲۰-۵۲)$$

در اینجا θ زاویه بین جهت مشاهده است با بردار E ی موج فرودی (که بر جهت انتشار عمود است). اگر پرتوهای ایکس فرودی ناقطبیده باشند (که معمولاً این طور است)، میانگین معادله بالا روی تمام جهات قطبش عبارت سودمندتری به دست می دهد. نتیجه عبارت است از (مسئله ۲۰-۱۲)

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \frac{1 + \cos^2 \beta}{2} \quad (۲۰-۵۳)$$

که در اینجا β زاویه بین جهت مشاهده و جهت انتشار فرودی است. این سطح مقطع مؤثر در اثر کامپتون قابل اندازه گیری است. این اثر پراکندگی ناهمدوس^۱ پرتوهای ایکس است در فرکانسهایی بسیار بالاتر از فرکانس لازم برای جذب تشدید. در فرکانسهای بسیار زیاد این فرمول کلاسیک دیگر معتبر نیست؛ انرژی فوتون ($\hbar\omega$) باید از انرژی سکون الکترون mc^2 بسیار کمتر باشد، یا به عبارت دیگر باید داشته باشیم $\hbar\omega \ll mc^2$.

سطح مقطع مؤثر تامسون، معادله (۲۰-۵۱)، را همچنین می توان از نظریه فصل ۱۹ به دست آورد، مشروط بر آنکه به جای اندازه بردار پوئین تینگ پراکنده شده، تضعیف بردار پوئین تینگ فرودی را بررسی کنیم. از معادله (۲۰-۵۰) داریم

$$S_o = \frac{1}{\mu_o c} E^2 = \frac{1}{\mu_o c} E_o^2 e^{-2z/\delta}$$

که در آن

$$\delta = \frac{c}{k\omega}$$

”عمق پوسته“ است. در اینجا $\delta/2$ نقش مسیر میانگین آزاد را برای فوتونهای فرودی ایفا می کند. چون مسیر میانگین آزاد برابر است با $1/N\sigma$ ، که در آن N تعداد الکترونها در واحد حجم است، نتیجه می شود

$$\sigma_T = \frac{2}{N\delta} = \frac{2k\omega}{Nc} \quad (۲۰-۵۴)$$

۱. پراکندگی ناهمدوس در مقابل واژه پراکندگی همدوس به کار می رود (هر دو سطح مقطع مؤثر منفرد یکسانی دارند). پراکندگی همدوس در بلورها، تحت شرایط خاصی از نظر طول موج و زاویه فرود، موجب پراش پرتو ایکس می شود (قانون براگ).

حال هنگامی که $n \approx 1$ ، $k \ll 1$ ، همان طور که برای پرتوهای ایکس چنین است، داریم

$$k = \frac{1}{2} K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{2\omega^2}$$

این معادله مربوط است به نتیجه در فرکانسهای زیاد برای الکترونهای آزاد، و هنگامی که $\omega \gg \omega_p$ باشد برای الکترونهای مقید نیز معتبر است. با استفاده از $\omega_p^2 = Ne^2/\epsilon_0 m$ ، $\gamma = (4\pi/3)(R_e/\lambda)\omega$ از معادله (۴۸-۲۰)، و $\lambda = 2\pi c/\omega$ ، داریم

$$k = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{4\pi}{3} \frac{R_e \omega^2}{2\pi c \omega^3} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{4\pi \epsilon_0 m c \omega} R_e$$

و از معادله (۵۴-۲۰) نتیجه می شود

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (51-20)$$

فرکانس میرایی γ که سطح مقطع مؤثر تامسون را می دهد فرکانس میرایی تابشی است. در چنین فرکانسهای زیادی ($\omega \gtrsim 10^{19} \text{ s}^{-1}$) فرکانس میرایی تابشی بر فرکانس برخورد $1/\tau$ غالب می شود. البته هنگامی که انتشار تابش فرودی را با این روش در نظر می گیریم، بستگی زاویه ای تابش پراکنده شده را، معادله (۵۲-۲۰)، به دست نمی آوریم.

۶-۲۰ خلاصه مطالب

با استفاده از پاسخهای انتگرالی \mathbf{A} و φ میدانهای ایجاد شده توسط توزیعهای بار و جریان وابسته به زمان محاسبه می شوند. (تنها کافی است که \mathbf{A} بررسی شود، زیرا φ از شرط لورنتس به \mathbf{A} مربوط می شود.) برای پیدا کردن پاسخهایی که در فواصل دور معتبرند، یعنی برای $r \gg a$ که در آن a اندازه ناحیه ای است که جریانهای چشمه در آن واقع اند، انتگرالده با بسط چندقطبی بسط داده می شود. جمله دوقطبی الکتریکی که در اینجا بررسی شده مهم ترین جمله است، مگر در حالتی که اتفاقاً این جمله صفر باشد که در آن صورت جملات مرتبه بالاتر می بایست در نظر گرفته شوند. برای دوقطبی نقطه ای، $a \ll \lambda$ ، انتگرال باز هم ساده می شود، زیرا تمام عناصر جریان چشمه تقریباً همافزند. (این شرط بدان معناست که $v \ll c$.) نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

که در آن

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) dv'$$

از این روابط، با \mathbf{J} ی از پیش مشخص، می‌توانیم \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{S} را پیدا کنیم. پیدا کردن آنها در میدان تابش واقع در $r \gg \lambda$ به‌ویژه آسان است. آنگاه، درست مانند موج تخت داریم

$$\mathbf{E} = -c \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{B}$$

و

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(پیدا کردن φ ضروری نیست.)

• بردار پوئین‌تینگ یک دوقطبی نقطه‌ای در میدان تابش عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

با انتگرال‌گیری از این عبارت بر روی تمامی یک کره، توان کل تابشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{c^3}$$

• تابش از یک آنتن خطی کوتاه، آنتن (دوقطبی الکتریکی)، با معادله بالا داده می‌شود که در آن $p(t) = (I_0 l / \omega) \cos \omega t$. برحسب مقاومت تابشی R_r ، در خلا داریم

$$\bar{P} = \frac{1}{4} R_r I_0^2$$

$$R_r = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (l \ll \lambda)$$

• با فرض آنکه $v \ll c$ ، که همواره برای آنتنهای رادیویی صادق است، تابش از یک آنتن بزرگتر را با انتگرال‌گیری نتایج مربوط به آنتن کوچک می‌توان به‌دست آورد. برای یک آنتن نیم‌موج، داریم

$$R_r = 731 \Omega$$

• برای یک بار نقطه‌ای که به‌کندی حرکت می‌کند، $\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}}$

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3}$$

• برای یک الکترون نوسان‌کننده، نتیجهٔ بالا به فرکانس میرایی تابشی

$$\gamma = \frac{4\pi R_e}{3\lambda} \omega$$

و به سطح مقطع مؤثر تامسون برای الکترون آزاد

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} R_e^2$$

منجر می‌شود، که در این روابط R_e "شعاع کلاسیک الکترون" است

$$R_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}$$

مسائل

۲۰-۱ فرض کنید یک توزیع بار با تقارن کروی تنها در جهت شعاعی نوسان می‌کند، به طوری که در هر لحظه از زمان تقارن کروی خود را حفظ می‌کند. ثابت کنید که تابشی گسیل نمی‌شود.

۲۰-۲ (الف) چگالی توان تابش شدهٔ میانگین توسط یک دوقطبی نوسان‌کننده در خلأ را به صورت تابعی از زوایای θ و ϕ تعیین کنید. (ب) توان کل تابش شده توسط یک دوقطبی به طول ۳ متر را در فرکانس ۵۰۰ kHz محاسبه کنید، چنانچه جریان در دوقطبی ۲ آمپر باشد (مقدار مؤثر جریان).

(ج) مقاومت تابشی نوسانگر دوقطبی قسمت (ب) چقدر است؟

۲۰-۳ یک حلقهٔ سیم دایره‌ای حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ یک دوقطبی مغناطیسی نوسان‌کننده را تشکیل می‌دهد. میدانهای تابش \mathbf{E} و \mathbf{B} را برای این نوسانگر تعیین کنید و توان کل تابشی آن را محاسبه کنید. [راهنمایی: از معادلهٔ (۸-۶۶) شروع کنید و آن را برحسب پتانسیل تأخیری:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint \frac{\cos \omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1$$

بیان کنید. با توجه به تقارن، \mathbf{A} تنها مؤلفهٔ ϕ دارد:

$$A_\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \cos \phi d\phi$$

که در اینجا $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi)^{1/2}$ و شعاع حلقه است. [تقریب دوقطبی مستلزم آن است که $r \gg a$ و $\omega a \ll c$]

۴-۲۰ کارایی نسبی یک دوقطبی الکتریکی به طول ۲ متر را در مقایسه با یک دوقطبی مغناطیسی به همان قطر، به عنوان منابع تابش الکترومغناطیسی، در فرکانس ۱ MHz تعیین کنید.

۵-۲۰ (الف) بیشینه جریان ورودی آنتن نیم موجی را که ۱ kW تابش می کند، محاسبه کنید. (ب) میدان E مربوط به چگالی توان میانگین در فاصله ۱۰ km از این آنتن چقدر است؟ اثرات زمین را نادیده بگیرید.

۶-۲۰ تحقیق کنید که A و φ در معادلات (۳۵-۲۰) و (۳۳-۲۰) در شرط لورنتس صدق می کنند. ۷-۲۰ توان تابشی از یک آنتن در واحد زاویه فضایی (استرادیان) در جهتی که توان بیشینه است، تقسیم بر $1/(4\pi)$ برابر توان کل تابشی، معیاری است از جهتمندی یک آنتن. جهتمندی یک دوقطبی الکتریکی نوسان کننده را محاسبه کنید.

۸-۲۰ فرض کنید دوقطبی الکتریکی p با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری عمود برگشتاور دوقطبی دوران می کند. میدان تابش و بردار پوینتینگ را پیدا کنید. [راهنمایی: دوقطبی دوران کننده را به صورت برهم نهش دو دوقطبی در نظر بگیرید که بر یکدیگر عمودند و به طور سینوسی تغییر می کنند.]

۹-۲۰ در مدل کلاسیک اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره ای به شعاع r می گردد و انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(الف) کسر انرژی تابش شده در هر دور گردش، PT/E_k ، را محاسبه کنید. در اینجا T دوره تناوب مداری است. (ب) مکانیک کوانتومی حکم می کند که در تراز n

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n} \frac{1}{137}$$

PT/E_k را به ازای $n = 2$ محاسبه کنید.

۱۰-۲۰ الکترونی در یک سینکروترون به شعاع ۲ m تا نصف سرعت نور شتاب گرفته است. (الف) توان تابش شده توسط الکترون را محاسبه کنید (جرم سکون $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg). (ب) چه کسری از انرژی جنبشی آن در هر ثانیه تابش می شود.

۱۱-۲۰ مقاومت تابشی دوقطبی مغناطیسی نوسان کننده در مسئله ۳-۲۰ را به دست آورید. نتیجه به دست آمده را بر حسب a و λ بیان کنید تا بتوان آن را با معادله (۱۸-۲۰) مقایسه کرد.

۱۲-۲۰ باریکه ای از پرتوهای ایکس ناقطبیده با شدت I_0 بر ماده ای حاوی الکترونهاي آزاد فرود می آید. با در نظر گرفتن تنها یک الکترون و استفاده از عبارتهای بخش ۳-۲۰، نشان دهید که

شدت باریکه پراکنده شده عبارت است از

$$I_s = I_0 \frac{(1 + \cos^2 \beta) R_e^2}{2 r^2}$$

که در آن β زاویه بین خط OP و جهت باریکه پرتو ایکس اصلی است. نقطه O مکان الکترون است، و P نقطه‌ای است که در آنجا باریکه پراکنده شده مشاهده می‌شود.

$20-13$ پرتوهای ایکس با طول موج 2 \AA در آلومینیم عمده‌تاً توسط پراکندگی کامپتون تضعیف می‌شوند. ضریب جذب، $\alpha = 2/\delta$ ، را از سطح مقطع مؤثر تامسون محاسبه کنید. در هر مترمکعب تعداد $10^{28} \times 6 \times 10^6$ اتم آلومینیم وجود دارد.

الکترو دینامیک

میدان حاصل از یک بار متحرک سریع را می‌توان از پتانسیلهای تأخیری محاسبه کرد. لیکن در این روش چند اشکال وجود دارد. این اشکالات مربوط است به تأخیری بودن و آنکه توزیع بار فعلی (در فضا) باید برای زمان تأخیری مربوط به طرف عقب برونمایی شود. این روش می‌توانست خیلی ساده و پیش‌پا افتاده باشد، ولی در واقع این‌طور نیست چون قسمتهای مختلف توزیع بار احتیاج به زمانهای تأخیری مختلف دارند. اگرچه ممکن است فکر کنیم که این اثر در مورد بارهای نقطه‌ای از بین می‌رود، ولی در واقع چنین نیست. پتانسیلهای برداری و نرده‌ای مناسب برای یک بار نقطه‌ای متحرک به پتانسیلهای لینارد-ویشرت^۱ مشهورند که در این فصل آنها را به‌دست می‌آوریم.

۲۱-۱ پتانسیلهای لینارد-ویشرت

پتانسیلهای لینارد-ویشرت عبارت‌اند از پتانسیلهایی که یک بار نقطه‌ای متحرک تولید می‌کند. ممکن است فکر کنیم که $R = q/4\pi\epsilon_0$ ، که در آن R فاصله تأخیری مناسب است، پتانسیل نرده‌ای مربوط به یک بار نقطه‌ای متحرک را به‌دست می‌دهد. ولی همان‌طور که به طرق مختلف می‌توان نشان

1. Lienard-Wiechert

داد، این امر صحیح نیست. یکی از آموزنده‌ترین روشها این است که یک حجم متحرک را در نظر بگیریم که با خود یک توزیع بار ثابت را حمل می‌کند، مثلاً یک حجم کروی که به‌طور یکنواخت باردار شده و در مسیر معینی در حرکت است. میدان مربوط به یک بار نقطه‌ای، حد میدان مربوط به چنین توزیعی است هنگامی که به‌طور صحیح از آن حد گرفته شود.

پتانسیل نرده‌ای مربوط به توزیع بار متحرک، در نقطه ξ و زمان t ، با پتانسیل تأخیری^۱

زیر داده می‌شود

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\xi - \mathbf{r}'|} dv' \quad (1-21)$$

اکنون اشکال به‌وضوح نمایان است؛ اشکال در اینجاست که t' ثابت نیست و در نتیجه حجم انتگرال‌گیری، یعنی حجمی را که در آن ρ غیرصفر است نمی‌توان به سادگی مشخص کرد. برای رفع این اشکال می‌توانیم یک زمان ثابت t_1 را انتخاب و انتگرال‌گیری روی \mathbf{r}' را به انتگرال‌گیری روی \mathbf{r}_1 تبدیل کنیم. ساده‌ترین انتخاب برای t_1 عبارت است از زمان تأخیری برای یکی از نقاط داخل توزیع بار. اگر در زمان t_1 حجم باردار با سرعت $\mathbf{v}(t_1)$ در حرکت باشد، در این صورت روابط مهم عبارت‌اند از

$$\rho(\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}_1, t_1) \quad (2-21)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t')(t' - t_1) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}(t')(t' - t_1)^2 + \dots \quad (3-21)$$

که در آن $\dot{\mathbf{v}}$ مشتق زمانی \mathbf{v} است. باید به این نکته مهم توجه داشت که t' در معادله (۳-۲۱) ثابت نیست بلکه به \mathbf{r}' بستگی دارد. مسئله‌ای که باقی می‌ماند این است که رابطه‌ای بین dv_1 و dv' برقرار کنیم، که البته این کار به کمک دترمینان ژاکوبی انجام می‌شود. این رابطه عبارت است از

$$dv_1 = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(x', y', z')} dv' \quad (4-21)$$

که در آن ژاکوبی $\partial(x_1, y_1, z_1)/\partial(x', y', z')$ ، با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(x', y', z')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'} & \frac{\partial x_1}{\partial y'} & \frac{\partial x_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x'} & \frac{\partial y_1}{\partial y'} & \frac{\partial y_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x'} & \frac{\partial z_1}{\partial y'} & \frac{\partial z_1}{\partial z'} \end{vmatrix} \quad (5-21)$$

۱. در سراسر این فصل فقط خلاصه مورد نظر است.

و مشتقها عبارت‌اند از

$$\frac{\partial x_{\lambda}}{\partial x'} = 1 - v'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} - \dot{v}'_x (t' - t_{\lambda}) \frac{\partial t'}{\partial x'} + \dots$$

و

$$\frac{\partial x_{\lambda}}{\partial y'} = -v'_x \frac{\partial t'}{\partial y'} - \dot{v}'_x (t' - t_{\lambda}) \frac{\partial t'}{\partial y'} + \dots \quad (۶-۲۱)$$

که در آن $v'_x(t')$ ، v'_x است، یعنی مؤلفه x سرعت در زمان تأخیری t' . زمان تأخیری t' با رابطه ساده زیر به مکان تأخیری مربوط می‌شود

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}|}{c} \quad (۷-۲۱)$$

بنابراین

$$\frac{\partial t'}{\partial x'} = -\frac{n'_x}{c} \quad (۸-۲۱)$$

که در آن \mathbf{n}' بردار یگه‌ای در جهت $\mathbf{r}' - \boldsymbol{\xi}$ است. از بسط سراسرست ولی پر زحمت ژاکوبی، و با به‌کار بردن معادلات (۶-۲۱) و (۸-۲۱)، نتیجه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial(x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda})}{\partial(x', y', x')} = 1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c} + \frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{n}'(t' - t_{\lambda})}{c} + \dots \quad (۹-۲۱)$$

که در آن جملات بالاتر مشتقهای درجه دوم و بالاتر \mathbf{v}' را در بر دارند.

می‌توان معادله (۹-۲۱) را در معادله (۱-۲۱) قرار داد و پتانسیل نرده‌ای را به‌دست آورد. ولی چون اصولاً حجمهای باردار کوچک (بارهای نقطه‌ای) مورد نظر ماست، لازم است توجه کنیم که اگر

$$\frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{n}'}{c} (t' - t_{\lambda}) \cong \frac{\dot{v}d}{c^2} \ll 1$$

که در آن d اندازه توزیع بار است، در این صورت مسلماً می‌توان از این جمله در حد بار نقطه‌ای چشمپوشی کرد. معیارهای مشابهی برای جملاتی که شامل مشتقهای از درجات بالاترند، وجود دارد؛ ولی ما به بررسی آنها احتیاجی نداریم. بنابراین، سرانجام داریم

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t_1)}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}'|} \frac{dv_{\lambda}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c} \quad (۱۰-۲۱)$$

دوباره، اگر $d \ll |\xi - \mathbf{r}'|$ ، در این صورت به جای $|\xi - \mathbf{r}'|$ می‌توان R_{t_1} را قرار داد که عبارت است از فاصله نقطه داخلی (که قبلاً انتخاب شد) تا نقطه مشاهده در زمان t_1 بنابراین^۱

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_{t_1}(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)} \int \rho(\mathbf{r}_1, t_1) dv_1 \quad (۱۱-۲۱)$$

یا چون انتگرال اکنون روی یک حجم کاملاً معین است، داریم

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_{t_1}(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)} \quad (۱۲-۲۱)$$

پتانسیل بالا پتانسیل زده‌ای لیناردویشرت است. پتانسیل برداری را نیز می‌توان به دست آورد، نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\xi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}'}{R_{t_1}(1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'/c)} \quad (۱۳-۲۱)$$

این عبارات اغلب به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\varphi(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)} \right]_{\text{ret}} \quad (۱۴-۲۱)$$

$$\mathbf{A}(\xi, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{R(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)} \right]_{\text{ret}}$$

در اینجا شاخصها بدین معنی است که کمیتهای داخل کروشه‌ها باید در زمان t_1 محاسبه شوند.

۲-۲۱ میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت

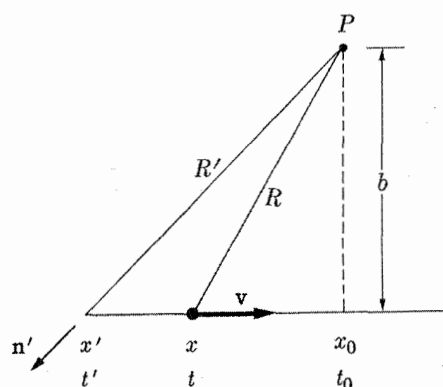
سراسرترین کاربرد پتانسیلهای لیناردویشرت محاسبه میدان یک بار نقطه‌ای است که در خط مستقیمی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. شکل هندسی این وضعیت در شکل ۱-۲۱ نشان داده شده است. می‌خواهیم میدان در نقطه P را در زمان t محاسبه کنیم که در آن لحظه بار در نقطه x است. مکان تأخیری x' و زمان تأخیری t' با معادله‌های زیر تعیین می‌شوند

$$R'^2 = c^2(t - t')^2 = (x_0 - x')^2 + b^2 \quad (۱۵-۲۱)$$

پتانسیل زده‌ای با معادله زیر داده می‌شود

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R'[1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}')/c]} \quad (۱۶-۲۱)$$

۱. توجه کنید که با تقریبی که در معادله (۱۱-۲۱) به کار رفته است، داریم $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{v}(t_1) \cdot \mathbf{n}(t_1)$



شکل ۱۷-۲۱ نموداری برای محاسبه میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای متحرک.

از روی شکل واضح است که

$$R' \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'}{c} = -R' \frac{v}{c} \frac{x_0 - x'}{R'} = -\frac{v(x_0 - x')}{c} \quad (17-21)$$

حتی بعد از قرار دادن معادله (۱۷-۲۱) در معادله (۱۶-۲۱)، تعداد زیادی متغیر در عبارت φ خواهیم داشت. در محاسبه میدان الکتریکی با گرفتن گرادیان φ و مشتق زمانی \mathbf{A} باید خیلی با دقت از این متغیرها مشتق‌گیری کنیم و همین موضوع موجب دشواری محاسبات می‌شود. به جای ادامه این روش، بهتر است متغیرهای ناخواسته را در φ حذف کنیم، و عبارتی به دست آوریم که فقط مختصات P ، زمان فعلی t ، و پارامترهایی را در بر داشته باشد که مسیر ذره باردار را توصیف می‌کنند.

چون بار در مدت زمان $t - t'$ از x_0 به x' می‌رود، واضح است که

$$c^2(t - t')^2 = v^2(t_0 - t')^2 + b^2 \quad (18-21)$$

اگر t' را از این معادله به دست آوریم، نتیجه عبارت خواهد بود از

$$t' = \frac{c^2 t - v^2 t_0 \pm \sqrt{v^2 c^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2} \quad (19-21)$$

باید در این معادله از علامت منها استفاده کنیم تا اطمینان حاصل شود که t' نسبت به t تأخیری است. برای تحقیق این مطلب، تنها لازم است ملاحظه کنیم که در زمان $t = t_0 = 0$ داریم: $t' = \pm \sqrt{b^2 (c^2 - v^2)} / (c^2 - v^2)$ و بنابراین فقط علامت منها زمان عقب‌تر را به دست

می دهد. با پیدا کردن t' ، x' - x_0 را از معادله زیر به دست می آوریم

$$x_0 - x' = v(t_0 - t')$$

$$= v \left(\frac{t_0(c^2 - v^2) - c^2 t + v^2 t_0 + \sqrt{v^2 c^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2} \right)$$

(۲۰-۲۱)

اکنون می توان نشان داد که R' به صورت زیر است

$$R' = c \left(\frac{t(c^2 - v^2) - c^2 t + v^2 t_0 + \sqrt{v^2 c^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2} \right)$$

(۲۱-۲۱)

با استفاده از معادلات (۲۰-۲۱) و (۲۱-۲۱) می توان مخرجی را که در معادله (۱۶-۲۱) وجود دارد، محاسبه کرد. این مخرج با به کار بردن معادله (۱۷-۲۱) به صورت زیر در می آید

$$R^* = R' - \frac{v(x_0 - x')}{c}$$

(۲۲-۲۱)

و سپس به کمک معادلات (۲۰-۲۱) و (۲۱-۲۱) به صورت زیر در می آید

$$R^* = (c^2 - v^2)^{-1} \left[v^2 c(t_0 - t) + c \sqrt{v^2 c^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (c^2 - v^2)} \right. \\ \left. - v^2 c(t_0 - t) - \frac{v^2}{c} \sqrt{v^2 c^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (c^2 - v^2)} \right]$$

$$= \sqrt{v^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (1 - v^2/c^2)}$$

(۲۳-۲۱)

بدین ترتیب پتانسیل نرده ای عبارت است از

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{v^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (1 - v^2/c^2)}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^*}$$

(۲۴-۲۱)

و پتانسیل برداری به صورت زیر است

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{v^2 (t_0 - t)^2 + b^2 (1 - v^2/c^2)}} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{R^*}$$

(۲۵-۲۱)

مهم است که به این نکته توجه شود که معادلات (۲۴-۲۱) و (۲۵-۲۱) تنها مکان و زمان نقطه مشاهده، و پارامترهای (\mathbf{v}, t_0) را که مسیر ذره باردار را توصیف می‌کنند، در بردارند.

برای روشن‌تر کردن این نکته و برای آنکه پتانسیلها را به شکلی در آوریم که برای محاسبه میدانها مناسب‌تر باشد، باید دستگاه مختصات را با دقت بیشتری مشخص کنیم. چون بار در امتداد محور x حرکت می‌کند، و چون محور x محور تقارن مسئله است، فقط لازم است که مبدأ را روی محور x مشخص کنیم. این عمل به‌نحو مناسبی با انتخاب $x = 0$ به‌عنوان موضع بار در زمان $t = 0$ انجام می‌شود. در این صورت $x = vt$ و به‌ویژه، $x_0 = vt_0$.

اگر نقطه P را با مختصات قائم ξ, η, ζ مشخص کنیم، در این صورت داریم

$$\xi = x_0 = vt_0 \quad \text{و} \quad \eta^2 + \zeta^2 = b^2 \quad (26-21)$$

با به‌کار بردن این نتایج در معادله (۲۵-۲۱) و قرار دادن (ξ, η, ζ) خواهیم داشت

$$\varphi(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(\xi - vt)^2 + (\eta^2 + \zeta^2)(1 - v^2/c^2)}} \quad (27-21)$$

$$\mathbf{A}(\xi, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(\xi - vt)^2 + (\eta^2 + \zeta^2)(1 - v^2/c^2)}}$$

باید به خاطر داشت که این معادلات فقط در صورتی معتبرند که \mathbf{v} در امتداد محور x باشد؛ برای امتدادهای دیگر لازم است تغییراتی در این فرمولها داده شود.

مطلب مهم در مورد معادلات (۲۷-۲۱) این است که آنها برای محاسبه میدانها به شکل مطلوبی در آمده‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla_{\xi} \varphi \\ &= -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \mathbf{v} \frac{v(\xi - vt)}{R^{*3}} \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^{*2}} [(\xi - vt)\mathbf{i} + \eta(1 - v^2/c^2)\mathbf{j} + \zeta(1 - v^2/c^2)\mathbf{k}] \end{aligned} \quad (28-21)$$

با توجه به اینکه $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ ، $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ و $x - vt = x_0 - x$ ، می‌توان معادله (۲۸-۲۱) را به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^{*3}} (1 - v^2/c^2) \quad (29-21)$$

که در آن \mathbf{R} برداری است از موضع بار در زمان t تا نقطه P و

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}}{c}$$

میدان مغناطیسی را می‌توان با محاسبه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ به دست آورد؛ ولی روش ساده‌تر این است که توجه کنیم

$$\mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \varphi \quad (۲۱-۳۰)$$

و بنابراین

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times (\mathbf{v} \varphi) = -\mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \nabla \varphi \quad (۲۱-۳۱)$$

چون \mathbf{v} در امتداد محور x است، تنها مؤلفه‌های y و z از $\nabla \varphi$ در ضرب برداری مهم‌اند. این مؤلفه‌ها درست منفی مؤلفه‌های y و z بردار \mathbf{E} هستند. بدین طریق خواهیم داشت

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (۲۱-۳۲)$$

بدین ترتیب محاسبه میدانها کامل می‌شود.

جالب است که توجه کنیم، اگر چه منبع تابش در مکان تأخیری واقع است، خطوط \mathbf{E} از مکان لحظه‌ای بار به طرف خارج کشیده شده‌اند. خطوط \mathbf{B} دوایری هستند که مراکز آنها روی مسیر بار واقع است. میدان E تقارن کروی‌ای را که در حالت بار ساکن داشت دیگر ندارد و در جهت عمود بر سرعت، قوی‌تر است (مسئله ۲۱-۱).

با به دست آوردن بردارهای میدان اکنون می‌توانیم دیگر کمیت‌های الکترومغناطیسی را محاسبه کنیم؛ ولی به جای این کار، خواننده را به کتب درسی پیشرفته‌تر^۱ که درباره این‌گونه مسائل به تفصیل بحث کرده‌اند، ارجاع می‌دهیم.

۲۱-۳ میدان بار نقطه‌ای شتابدار

اگر بار نقطه‌ای شتابداری را در نظر بگیریم، ساده‌سازی‌هایی که در حالت سرعت ثابت انجام شد، دیگر امکان‌پذیر نخواهد بود. در اینجا اشکال اصلی نتیجه مستقیمی از این حقیقت است که پتانسیل‌های لینارد-ویشرت را دیگر نمی‌توان برحسب مکان فعلی بار بیان کرد؛ در عوض، مکان و

۱. برای مثال کتاب الکتروپدینامیک کلاسیک جکسون:

زمان تأخیری به‌طور صریح ظاهر می‌شوند. هنوز هم پتانسیل‌های

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(\lambda + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)} \right]_{\text{ret}} \quad (۳۳-۲۱)$$

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{v}/c}{R(\lambda + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)} \right]_{\text{ret}}$$

صحیح‌اند؛ ولی در مشتق‌گیری از آنها برای به‌دست آوردن میدانها، باید توجه کرد که مشتق‌گیری نسبت به مکان نقطه میدان باید در زمان مشاهده ثابت، و مشتق‌گیری نسبت به زمان مشاهده باید در نقاط میدان ثابت انجام شود. چون زمان تأخیری به‌طور صریح در پتانسیلها آمده است، باید دقت کنیم که مشتقهای صحیح را به‌دست آوریم.

برای روشن کردن مسئله مشتق‌گیری، توجه می‌کنیم که پتانسیلها تابعی هستند از مختصات نقطه میدان ξ ، زمان مشاهده t ، مکان تأخیری بار، \mathbf{r}' ، و زمان تأخیری t' . مسیر ذره با دادن \mathbf{r}' به‌صورت تابعی از t' مشخص می‌شود، بنابراین بستگی به \mathbf{r}' را می‌توان حذف کرد. به‌علاوه، شرط تأخیر

$$(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2 = c^2(t - t')^2 \quad (۳۴-۲۱)$$

نیز رابطه‌ای بین متغیرهای باقیمانده برقرار می‌کند. بنابراین واضح است که اگر چه پتانسیلها به‌طور صوری به هشت متغیر بستگی دارند، ولی تنها چهار تا از اینها واقعاً مستقل‌اند. در محاسبه میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} لازم است که از پتانسیلها نسبت به هر یک از متغیرهای ξ ، η و ζ ، و t ، در حالی که سه‌تای آنها را ثابت نگه می‌داریم، مشتق بگیریم؛ مثلاً از \mathbf{A} باید نسبت به t مشتق گرفت، در حالی که ξ ، η ، و ζ ثابت نگه داشته می‌شوند. چون t' به‌طور صریح در پتانسیلها ظاهر می‌شود، محاسبه این مشتقها اشکالاتی را باعث می‌شود.

برای دنبال کردن متغیرهایی که در اثنای مشتق‌گیریهای مختلف ثابت نگه داشته می‌شوند، نمادگذاری زیر را به‌کار می‌بریم: یک مشتق جزئی که در آن تمام متغیرهای دیگر، اعم از مستقل یا وابسته، ثابت نگه داشته می‌شوند با علامت مشتق جزئی معمولی نشان داده خواهد شد. اگر تمام متغیرهای دیگر ثابت نگه داشته نشوند، در آن‌صورت آنهایی که ثابت نگه داشته می‌شوند با شاخص نشان داده خواهند شد. بنابراین، مشتق \mathbf{A} که در محاسبه \mathbf{E} مورد نیاز است؛ $(\partial\mathbf{A}/\partial t)_\xi$ است، در صورتی که مشتقهای φ عبارت‌اند از $(\partial\varphi/\partial\xi)_{\eta,\zeta,t}$ و مانند آن. برای تبدیل $(\partial\mathbf{A}/\partial t)_\xi$ به مشتقی برحسب t' ، می‌نویسیم

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)_\xi = \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)_\xi \quad (۳۵-۲۱)$$

و

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{\xi} \quad (۳۶-۲۱)$$

شرط تأخیر، معادله (۳۴-۲۱)، توأم با معادله مشخص‌کننده مسیر، $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t')$ ، معادل است با معادله‌ای به شکل زیر

$$f(\xi, t, t') = 0$$

این رابطه ایجاب می‌کند که $\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{\xi} = 1 / \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\xi}$ ، که اگر آن را با معادلات (۳۵-۲۱) و (۳۶-۲۱) ترکیب کنیم، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_{\xi} \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\xi} \quad (۳۷-۲۱)$$

در محاسبه مشتقات زمانی پتانسیلها، این معادله درست همان چیزی است که برای به دست آوردن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی لازم است. مشتقات دیگر همگی به شکل، $(\partial \varphi / \partial \xi)$ هستند. چنین مشتقاتی با توجه به معادله زیر به سادگی قابل محاسبه‌اند

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_{t,t'} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{\xi,t} \left(\frac{\partial t'}{\partial \xi}\right)_t \quad (۳۸-۲۱)$$

در این معادله تمام شاخصها منظور شده‌اند تا از امکان هرگونه ابهامی احتراز شود.

از معادلات (۳۷-۲۱) و (۳۸-۲۱) روشن است که برای محاسبه \mathbf{E} باید مشتقات $(\partial t' / \partial t)_{\xi}$ و $(\partial t' / \partial \xi)$ را محاسبه کرد. هر یک از اینها را می‌توان به سادگی با مشتق گرفتن از جذر معادله (۳۴-۲۱)

$$[(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2]^{1/2} = c(t - t') \quad (۳۹-۲۱)$$

به طریق مناسب محاسبه کرد. اگر نسبت به t مشتق بگیریم (با ثابت نگه داشتن ξ) معادله زیر نتیجه می‌شود

$$-\frac{1}{R'} \mathbf{R}' \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)_{\xi} = c \left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\xi}\right] \quad (۴۰-۲۱)$$

در این معادله، $\mathbf{r}' = i x' + j y' + k z'$ و $\mathbf{R}' = \xi - \mathbf{r}'$. چون به طور صریح تنها به t' بستگی دارد، مشتق طرف چپ به سادگی تغییر داده می‌شود تا نتیجه زیر به دست آید

$$-\frac{1}{R'} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}' \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\xi} = c \left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\xi}\right] \quad (۴۱-۲۱)$$

که در آن $\mathbf{v}' = \partial \mathbf{r}' / \partial t'$ سرعت بار در زمان تأخیری t' است. با حل این معادله برای $(\partial t' / \partial t)_\xi$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_\xi = \frac{R'}{R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}' / c} = \frac{R'}{R^*} \quad (42-21)$$

از محاسبه‌ای مشابه که در آن از معادله (۳۹-۲۱) نسبت به ξ با (η, ζ, t) ثابت مشتق گرفته شود، نتیجه زیر به دست خواهد آمد

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial \xi}\right)_t = -\frac{(\xi - x')}{(R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}' / c)c} \quad (43-21)$$

با محاسبه دو مؤلفه دیگر، و نوشتن نتیجه به صورت یک معادله برداری، خواهیم داشت

$$(\nabla_{\xi} t')_t = -\frac{\mathbf{R}' / c}{R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}' / c} = -\frac{\mathbf{R}'}{R^* c} \quad (44-21)$$

با در دست داشتن این مشتقها، میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای شتابدار به سادگی از پتانسیلهای لینارد-ویشرت محاسبه می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi, t) &= -(\nabla_{\xi} \varphi)_t - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_\xi \\ &= -(\nabla_{\xi} \varphi)_{tt'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{\xi t} (\nabla_{\xi} t')_t - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{xi} \end{aligned} \quad (45-21)$$

مشتقهای پتانسیلهایی که در این معادله ظاهر می‌شوند به آسانی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$(\nabla_{\xi} \varphi)_{tt'} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}' / R' - \mathbf{v}' / c}{(R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}' / c)^3} \quad (46-21)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'}\right)_{\xi t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{R'} - \frac{v'^2}{c} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \dot{\mathbf{v}}'}{c} \right] \frac{1}{R^{*2}} \quad (47-21)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\right)_\xi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\dot{\mathbf{v}}'}{R^* c^2} + \frac{\mathbf{v}'}{c^2} \frac{1}{R^{*2}} \left(\frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{R'} - \frac{v'^2}{c} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \dot{\mathbf{v}}'}{c} \right) \right] \frac{1}{R^{*2}} \quad (48-21)$$

با به‌کار بردن این نتایج در معادله (۴۵-۲۱)، خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R'^3} \left(\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \right) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) + \left(\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \right) \frac{\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{R}'}{R'^3 c^2} - \frac{\dot{\mathbf{v}}' R'}{R'^2 c^2} \right] \quad (49-21)$$

محاسبه مشابهی نتیجه زیر را به‌دست می‌دهد

$$\mathbf{B}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{R}'}{R'^3} \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) + \frac{1}{R'^3 c} \frac{\mathbf{R}'}{R'} \times \left[\mathbf{R}' \times \left(\left[\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \right] \times \dot{\mathbf{v}}' \right) \right] \right\} \quad (50-21)$$

این نتایج را می‌توان برای توضیح پدیده‌های مهم بسیاری مانند میرایی تابشی و تابش ترمزی کلاسیک به‌کار برد. بیشتر این محاسبات در کتابهای الکتروپدینامیک پیشرفته‌تر موجودند و به استثنای یک مورد در اینجا حذف می‌شوند.

۲-۴ میدانهای تابش برای سرعتهای کم

نتیجه محاسبه میدانها از پتانسیلهای مربوط به یک بار نقطه‌ای با حرکت دلخواه را که در بخش قبل انجام شد، می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\mathbf{E}(\xi, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R'^3} \left\{ \left(\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \right) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{R}' \times \left[\left(\mathbf{R}' - \frac{R'\mathbf{v}'}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}}' \right] \right\} \quad (51-21)$$

$$\mathbf{B}(\xi, t) = \frac{\mathbf{R}' \times \mathbf{E}}{R'c} \quad (52-21)$$

از معادله (۵۲-۲۱) دیده می‌شود که میدان B ی یک بار نقطه‌ای در خلأ همواره بر میدان E در همان نقطه و زمان عمود است، و همچنین این میدان بر خطِ واصل نقطه میدان و مکان تأخیری ذره، یعنی بر \mathbf{R}' نیز عمود است. میدانها حاوی دو جمله‌اند که جمله دوم با شتاب $\dot{\mathbf{v}}'$ متناسب است و جمله اول مستقل از شتاب است. هر دو جمله به v'/c بستگی دارند. برای حرکت یکنواخت

($\dot{\mathbf{v}}' = 0$) جمله اول در معادله (۵۱-۲۱) همانند نتیجه قبلی، معادله (۲۹-۲۱)، را می‌دهد، زیرا $R'/c = t - t'$ جمله اول، حتی برای حرکت غیریکنواخت در سرعت زیاد، در تابش از بار سهمی ندارد، چون اندازه آن با فاصله به صورت $1/R'^2$ افت می‌کند. قبلاً دیدیم که میدانها، برای آنکه در بردار پوینتینگ در فواصل زیاد سهمی داشته باشند، می‌بایست به صورت $1/R'$ افت کنند. جمله دوم که به شتاب بستگی دارد، در واقع به صورت $1/R'$ کاهش می‌یابد. می‌بینیم که این قسمت از میدان E ، مشابه میدان B ، بر \mathbf{R}' عمود است. پس در میدان تابش بردارهای \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{R}' بر یکدیگر عمودند، و $\mathbf{S} = (1/\mu_0 c) E^2 (\mathbf{R}'/R')$.

برای سادگی ما در اینجا تنها بار متحرک کند را بررسی می‌کنیم. اگر سرعت بار در مقایسه با سرعت نور کم باشد، به عبارت دیگر، اگر $v'/c \ll 1$ ، آنگاه تقریبهای زیر

$$\mathbf{R}' - \frac{R' \mathbf{v}'}{c} \approx \mathbf{R}'$$

و

$$R^* = R' - \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'}{c} \approx R'$$

را می‌توان در معادلات (۵۱-۲۱) و (۵۲-۲۱) به‌کار برد. به‌علاوه، اگر تنها میدان تابش یعنی، آن قسمت از میدان که با $1/R'$ متناسب است، مورد نظر باشد، معادلات (۵۱-۲۱) و (۵۲-۲۱) به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')}{R'^3 c^2} \quad (53-21)$$

و

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}' \times [\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')]}{R'^4 c^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}' \times \mathbf{R}'}{R'^2 c} \quad (54-21)$$

از این بردارهای میدان، بردار پوینتینگ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{a^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c^2} \frac{1}{R'^5 c^3} [\mathbf{R}' \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')] \times [\dot{\mathbf{v}}' \times \mathbf{R}'] \quad (55-21)$$

که با استفاده از اتحادهای برداری به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{R}' (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{v}}')^2}{R'^5} \quad (56-21)$$

توان تابش شده کل را می‌توان با انتگرال‌گیری از این بردار پوینتینگ روی سطح بسته‌ای که بار را احاطه می‌کند، به دست آورد. یک انتخاب راحت برای چنین سطحی، کره‌ای است به مرکز مکان تأخیری بار. به علاوه، اگر محور z در جهت $\dot{\mathbf{v}}$ انتخاب شود، آنگاه داریم

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{R'^2 \dot{\mathbf{v}}'^2 \sin^2 \theta}{R'^5} \mathbf{R}' \cdot \frac{\mathbf{R}'}{R'} R'^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (57-21)$$

از این معادله به راحتی می‌توان نتیجه زیر را برای توان تابش شده از بار شتابداری که به آهستگی حرکت می‌کند، به دست آورد

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{\mathbf{v}}'^2}{c^3} \quad (58-21)$$

که این نتیجه با نتیجه قبلی ما، معادله (۲۰-۴۴)، در توافق است.

در اینجا بررسی مختصر ما درباره تابش از بارهای متحرک به پایان می‌رسد. ایده‌های اصلی ارائه شده و بعضی از کاربردهای مقدماتی به تفصیل داده شده‌اند. برای جزئیات محاسبات دیگر، باید به کتب منتشر شده مختلف مراجعه شود.^۱

۵-۲۱ خلاصه مطالب

پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای برای یک بار نقطه‌ای متحرک سریع از پاسخهای انتگرالی پتانسیل‌های تأخیری به دست می‌آیند. نتایج برای نقطه P در زمان t عبارت‌اند از

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^*}$$

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mathbf{v}'}{c^2} \varphi(P, t)$$

که در آن

$$R^* = R' - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'/c$$

1. Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Second Edition, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1962; Landau and Lifshitz, *The Classical theory of Fields*, Second Edition, Reading, Mass: Addison-Wesley, 1962; Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, New York: Wiley, 1975.

\mathbf{R}' برداری است از مکان ذره باردار q در زمان تأخیری، $t' = t - R'/c$ ، به نقطه میدان P و \mathbf{v}' سرعت ذره است در زمان تأخیری. با مشتق‌گیری از این پتانسیلها به‌نحو صحیح، میدانها به‌دست می‌آیند

$$\mathbf{E}(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^{*3}} \left\{ (\mathbf{R}' - R'\mathbf{v}'/c)(1 - v'^2/c^2) + \frac{1}{c^2} \mathbf{R}' \times \left[\left(\mathbf{R}' - R' \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}}' \right] \right\}$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \mathbf{R}' \times \mathbf{E}(P, t)/R'c$$

- میدان E یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت ($\dot{\mathbf{v}} = 0$) نسبت به صفحه‌ای عمود بر \mathbf{v} (که از مکان فعلی بار در زمان t می‌گذرد) متقارن است و در جهت عمود بر \mathbf{v} شدیدتر است تا در جهت امتداد \mathbf{v} . این میدان همواره نسبت به مکان فعلی بار رو به خارج است.
- تنها جملات متناسب با شتاب در تابش سهمیم‌اند. در میدان تابش بردارهای \mathbf{E} ، \mathbf{R}' و \mathbf{B} بر یکدیگر عمودند. برای $v'/c \ll 1$ ، نتیجه با آنچه در فصل ۲۰ به‌دست آوردیم یکسان است.

مسائل

۱-۲۱ (الف) برای باری که با سرعت v در حرکت یکنواخت است، نشان دهید

$$R^* = R \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \sin \theta\right)^2}$$

- که در آن \mathbf{R} برداری از مکان فعلی بار به نقطه میدان است و $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = Rv \cos \theta$. (ب) با فرض $v/c = 0.8$ ، نمودار قطبی $|\mathbf{E}|$ را به‌صورت تابعی از θ برای R ثابت رسم کنید.
- ۲-۲۱ با استفاده از نتیجه مسئله ۱-۲۱ (الف) میدان مغناطیسی B را برای بار dq که با سرعت یکنواخت v در حرکت است، پیدا کنید. فرض کنید $v dq = Idx$ که در آن I جریان در یک سیم مستقیم طویل است، و از $d\mathbf{B}$ بر روی طول سیم انتگرال بگیرید. توجه کنید که نتیجه با آنچه از قانون آمپر به‌دست می‌آید در توافق است، حتی برای $v/c \approx 1$.
- ۳-۲۱ فرض کنید شتاب یک ذره سریع با سرعت آن در جهت یکسانی است. نشان دهید که تابش در امتداد جهت حرکت صفر است.

نظریهٔ خاص نسبیت

همان‌طور که در فصل‌های ۲ و ۸ گفته شد، برهم‌کنش بین گروه‌هایی از بارها (یا جریانها) غالباً با تقسیم این پدیده به دو قسمت توصیف می‌شود: (۱) ایجاد یک میدان الکترومغناطیسی توسط چشمه، و (۲) برهم‌کنش گروه دومی از بارها (یا جریانها) با میدان. یک ناظر، با به‌کار بردن بارها و جریانهای آزمون، خود می‌تواند میدان را امتحان کند. این نحوهٔ تجزیهٔ برهم‌کنش، منحصر به فرد نیست؛ در واقع، جزئیات ماهیت میدان الکترومغناطیسی بستگی به حالت حرکت ناظر دارد.

برای مثال، دو ناظر A و B را در نظر بگیرید. ناظر A نسبت به یک گروه بار ثابت در حال سکون است و تنها میدان الکتریکی مربوط به آنها را می‌بیند. ناظر B نسبت به A در حرکت است، بنابراین، او یک گروه بار در حال حرکت می‌بیند، و در نتیجه علاوه بر میدان الکتریکی، یک میدان مغناطیسی نیز می‌بیند.

آیا هر دو ناظر می‌توانند معادلات ماکسول را برای توصیف مشاهدات فیزیکی خود به‌کار ببرند؟ و اگر چنین است، چگونه یک ناظر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را در یک چارچوب مرجع برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های میدان در چارچوب مرجع دومی که نسبت به اولی در حرکت است، تبدیل می‌کند؟ اینها سوالاتی هستند که ما سعی خواهیم کرد در این فصل به آنها پاسخ بدهیم.

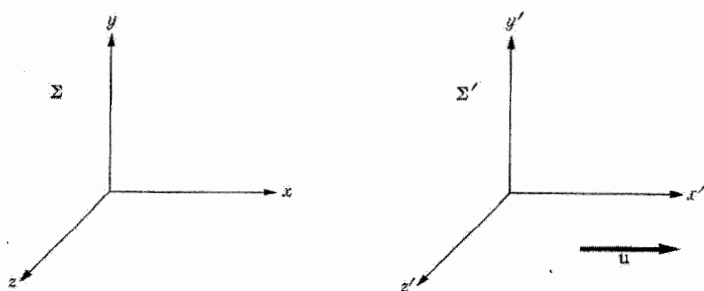
۱-۲۲ فیزیک قبل از سال ۱۹۰۰

ایده‌های اصلی ماکسول دربارهٔ میدان الکترومغناطیسی برای اولین بار در سال ۱۸۶۲ منتشر شد. در چهل سال بعد، ساختار ریاضی قوانین الکتریسیته و مغناطیس تدریجاً تکوین یافت (به خصوص توسط هندریک لورنتس)، و بسیاری از پیامدهای این نظریه به صورت تجربی مشاهده شدند. با وجود این، هنوز مسائل متعددی وجود داشت که موجب ناراحتی فیزیکدانهای نظری بود، به ویژه آنهایی که با ساختار ریاضی قوانین فیزیکی سروکار داشتند.

تمام تجربیات قبلی دربارهٔ حرکت موجی حاکی از آن بود که انتشار امواج نیازمند یک ملاً (محیط) است. در فصل ۱۶ ما توضیح دادیم که معادلات ماکسول در خلأ با یک معادلهٔ موج سازگارند که در آن معادلهٔ سرعت انتشار امواج $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ است و در واقع معادلات ماکسول به این معادلهٔ موج منجر می‌شوند. بنابراین، طبیعی بود که تصور شود نوعی محیط اتری تمام فضا (از جمله خلأ) را فرا گرفته است که امواج الکترومغناطیسی در آن انتشار می‌یابند. ماکسول خودش احتیاج به این ملاً را احساس کرد و نام آن را اتر گذاشت. ولی فرض وجود ملاً مسئله‌ای را ایجاد می‌کند زیرا ملاً مستلزم وجود یک چارچوب مرجع است، یعنی چارچوبی که در آن ملاً ساکن باشد.

در آن زمان این مطلب معلوم بود که تبدیل گالیله‌ای، یا به عبارت دیگر، تبدیل مختصات بین دو چارچوب مرجع (دستگاههای مختصات) که نسبت به یکدیگر در حرکت‌اند، روی قوانین حرکت نیوتون تأثیری ندارد. برای مثال، فرض کنید Σ یک دستگاه مختصات در حال سکون باشد، و Σ' یک دستگاه مختصات با سرعت یکنواخت \mathbf{u} در جهت x حرکت می‌کند (شکل ۱-۲۲). رابطهٔ بین مختصات و زمانهای دو دستگاه با معادلات زیر (تبدیل گالیله‌ای) داده می‌شود

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1-22)$$



شکل ۱-۲۲ دو دستگاه مختصات که نسبت به یکدیگر (در جهت x) با سرعت یکنواخت \mathbf{u} حرکت می‌کنند.

قوانین اساسی حرکت نیوتون در Σ و Σ' شکل مشابهی دارند. در واقع، تعیین سرعت مطلق چارچوبهای مرجع با آزمایشهای مکانیکی، غیرممکن است.

معادلات ماکسول در یک تبدیل گالیله‌ای به چه صورتی در می‌آیند؟ ما در وضعیتی نیستیم که بتوانیم پاسخ این سؤال را بدهیم، زیرا هنوز نمی‌دانیم میدانها چگونه تبدیل می‌شوند، ولی می‌توان از پاسخ دادن به این سؤال احتراز کرد و به جای آن معادله موج نرده‌ای را در نظر گرفت (معادله‌ای که همگن است و تنها شامل یک مؤلفه میدان است). در خلا داریم

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (۲-۲۲)$$

که در آن φ نشان‌دهنده یکی از مؤلفه‌های میدان است. اگر ما در معادله (۲-۲۲) جایگزینی زیر را انجام دهیم

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \dots$$

با استفاده از معادله (۱-۲۲) برای محاسبه $\partial x'/\partial t$ و مانند آن، درمی‌یابیم که معادله موج تبدیل شده، دیگر به شکل (۲-۲۲) نیست. این درست بیان ریاضی این حقیقت است که حرکت موجی با سرعت ثابتی نسبت به محیط ساکن منتشر می‌شود، و می‌دانیم که این حقیقت در مورد امواج مکانیکی صحیح است. ولی در چارچوب مرجعی که نسبت به محیط در حال حرکت باشد، انتشار موج پیچیده‌تر به نظر می‌آید.

در این صورت، در ارتباط با قوانین الکترواستاتیسیته و مغناطیس، وضع از چه قرار است؟ قبل از آنکه لورنتس و پوانکاره^۱ و مخصوصاً اینشتین در سال ۱۹۰۵ این موضوع را روشن کنند، امکانهای متعددی مطرح شدند. این امکانها به‌طور خلاصه عبارت بودند از

۱. معادلات ماکسول برای توضیح پدیده‌های الکترومغناطیسی مناسب نیستند.
۲. یک چارچوب مرجع به نام چارچوب اتر ساکن وجود دارد. معادلات ماکسول در چارچوبهای مرجع دیگر احتیاج به اصلاحاتی دارند.
۳. معادلات ماکسول در تمام چارچوبهای مرجعی که نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت در حرکت‌اند، شکل یکسانی دارند. تبدیل گالیله‌ای برای مربوط کردن چارچوبهای مرجع مختلف، هنگامی که میدانهای الکترومغناطیسی دخیل‌اند، مناسب نیست.

چنانکه اکنون می‌دانیم، انتخاب سوم صحیح است، و در واقع این انتخاب بیان قسمتی از اصل نسبیت است. پیش‌بینیهای معادلات ماکسول، حداقل در محیط کره زمین ما، از نظر تجربی

ثابت شده‌اند، و کوششهایی که برای پی بردن به چارچوب مطلق اتری به عمل آمده است، موفق نبوده‌اند. هیچ آزمایش منفردی وجود نداشت که "فرضیهٔ اتر" را رد کند و مار را مجبور به قبول نسبیت کند، ولی مجموع نتایج تعداد بسیاری آزمایش آن چنان بود که با هیچ امکان دیگری سازگاری نداشت. سه آزمایش اساسی عبارت بودند از^۱

۱. ابراهای نور ستارگان (تغییر مکان کوچک در مکان ظاهری ستاره‌های دور در جهت حرکت مداری زمین).

۲. اندازه‌گیری سرعت نور در شاره‌های متحرک (آزمایش فیزو، ۱۸۵۹).

۳. آزمایش مایکلسون-مورلی (۱۸۸۷).

مایکلسون و مورلی در آزمایش خود سعی کردند که سرعت زمین را نسبت به یک چارچوب مطلق (که در آن امواج نور با سرعت c منتشر می‌شوند) اندازه‌گیری کنند. نتایج این آزمایش نشان می‌داد که یا هیچ‌گونه چارچوب مرجحی وجود ندارد، یا اینکه کرهٔ زمین همواره در این چارچوب مرجح مرجح قرار دارد. به نظر می‌رسد که این آزمایش به تنهایی فرضیهٔ چارچوب اتر مطلق را رد می‌کند، زیرا زمین پیوسته سرعتش را در حرکت به دور خورشید تغییر می‌دهد. با وجود این، اگر زمین اتر را همراه خود بکشد، امکان دارد در چارچوب مرجح باقی بماند؛ به عبارت دیگر، یک جسم سنگین سماوی مثل کرهٔ زمین شاید بتواند اتر را در حرکتش همراه خود بکشد.

از طرف دیگر، دو آزمایش اول، با "کشیدن اتر" سازگار نیستند. از اندازه‌گیریهایی که در طول یک سال انجام می‌شود، مشاهده می‌شود که مکان ظاهری یک ستاره مسیر بیضوی کوچکی را روی کره سماوی می‌پیماید، تغییر مکان زاویه‌ای ستاره در حدود v/c است که در آن v سرعت حرکت مداری زمین است. اگر اتر همراه با زمین کشیده می‌شد، انتظار می‌رفت که این ابراهای نور ستارگان وجود نداشته باشد. آزمایشهایی که روی شاره‌های متحرک انجام می‌شوند، می‌توانند با فرضیهٔ "کشیدن اتر" سازگار باشند، به شرط اینکه فرض شود (یک فرض تا اندازه‌ای ساختگی) اجسام سبک‌تر از زمین تنها به‌طور جزئی به کشیدن اتر به همراه خود موفق می‌شوند.

۱. خواننده‌ای که علاقه‌مند است تاریخچهٔ این موضوع را با تفصیل بیشتری دنبال کند، می‌تواند به منابع زیر مراجعه کند.
R. S. Shankland, "Michelson-Morley Experiment," *American Journal of Physics*, vol. 32, p. 16 (1964); A. Einstein et al. *The Principle of Relativity* (New York: Dodd, Mead, 1923); E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, vol. II (New York: Philosophical Library, 1951).

۲-۲۲ تبدیل لورنتس و اصول موضوع نسبیت خاص اینشتین

در سال ۱۹۰۴ لورنتس تبدیل جالب و شایان توجه‌ای را کشف کرد که تحت آن چنانچه مؤلفه‌های میدان به نحو مناسبی تغییر داده شوند، شکل معادلات ماکسول بدون تغییر می‌ماند. دوباره دو دستگاه مختصات Σ و Σ' را در نظر می‌گیریم که نسبت به یکدیگر در جهت x با سرعت u یکنواخت در حرکت‌اند (شکل ۱-۲۲). اکنون به جای تبدیل گالیله‌ای تبدیلی به صورت زیر (تبدیل لورنتس) را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(x-ut) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)\end{aligned}\quad (۳-۲۲)$$

دوباره این سؤال را که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی چگونه تبدیل می‌شوند، فعلاً بی‌پاسخ می‌گذاریم و معادلهٔ موج (۲-۲۲) را بررسی می‌کنیم. اکنون روابط زیر را

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}$$

در معادلهٔ موج می‌گذاریم، و از معادلات (۳-۲۲) برای محاسبهٔ مشتقهای جزئی $(\partial x'/\partial x)$ ، و غیره، استفاده می‌کنیم. مثلاً

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

اگر جایگزینی‌هایی را که اشاره شد انجام دهیم، و سپس جملات را ترکیب و ضرایب مشترک دو طرف معادله را حذف کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \quad (۴-۲۲)$$

چون این معادله نسبت به φ همگن است، منطقی است انتظار داشته باشیم که بتوانیم φ را با φ' (مقدارش در دستگاه مختصات پریم دار) در معادله (۲۲-۴) تعویض کنیم بدون آنکه تساوی به هم بخورد. بنابراین، شکل معادله موج نسبت به تبدیل لورنتس ناورد (تغییرناپذیر) است.

اگر چه لورنتس با کشف تبدیل خود زیربنای تکوین نسبیت خاص را فراهم آورد، ولی وی پیامدهای دوررس نسبیت را کشف نکرد. در این زمان او هنوز به فرضیه اتر معتقد بود و سرسختانه سعی می‌کرد که تبدیل تازه کشف شده‌اش را در قالب فرضیه اتر الکترومغناطیس بگنجانند. تکوین نسبیت خاص به شکلی که اکنون آن را می‌شناسیم توسط هنری پوانکاره و آلبرت اینشتین انجام شد.

در سال ۱۸۹۹ و بار دیگر در ۱۹۰۰ و در ۱۹۰۴ پوانکاره پیشنهاد کرد که نتیجه تجربی مایکلسون و مورلی (به عبارت دیگر، شکست آنها در مشاهده چارچوب اتر مطلق) تجلی یک اصلی کلی است (اینکه حرکت مطلق را با هیچ نوع تجربیات آزمایشگاهی نمی‌توان آشکار کرد) و این امر ایجاب می‌کند که قوانین طبیعت باید برای دو ناظری که نسبت به یکدیگر حرکت یکنواختی دارند، یکسان باشند. او نام این اصل را اصل نسبیت گذاشت. پوانکاره همچنین نتیجه گرفت که باید یک نوع دینامیک جدیدی ساخته و پرداخته شود که از جمله مشخصاتش این قاعده باشد که هیچ سرعتی نمی‌تواند از سرعت نور بیشتر باشد. در سال ۱۹۰۵ اینشتین مقاله الکترو دینامیک اجسام متحرک خود را انتشار داد، که در آن نظریه خاص نسبیت را بر مبنای دو اصل موضوع بنیادی زیر بنا نهاد: (۱) اصل نسبیت و (۲) ثابت بودن سرعت نور. اینشتین نحوه تبدیل کمیتهای فیزیکی مختلف را هنگامی که از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگری می‌رویم، به دست آورد و چگونگی اصلاح قوانین مکانیک نیوتون را نشان داد.

اصول موضوع اینشتین عبارت‌اند از

۱. قوانین طبیعت در تمام دستگاههای مختصاتی که نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت در حرکت‌اند، یکسان‌اند.
۲. سرعت نور در خلأ در تمام دستگاههای مرجع یکسان است و به حرکت جسم گسیلنده نور بستگی ندارد.

دوباره ما دو دستگاه مختصات Σ و Σ' را در نظر می‌گیریم که نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت u در جهت x حرکت می‌کنند (شکل ۲۲-۱). در زمانهای $t = 0$ و $t' = 0$ ، مبدأهای دو دستگاه بر یکدیگر منطبق‌اند، و در آن لحظه یک منبع نور در مبدأ مشترک دو دستگاه یک علامت نوری (پالس) گسیل می‌کند. ناظری در دستگاه بدون پریم، با آشکارسازهای مناسب در

فواصل مختلف از مبدأ، علامت نوری را می‌بیند که به صورت یک جبههٔ کروی به طرف خارج انتشار می‌یابد. مختصات نقطهٔ (x, y, z) واقع در روی جبههٔ موج در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند،

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (5-22)$$

در صورتی که برای نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) که در جلوی جبهه موج قرار دارد (در همان زمان t) داریم

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t^2 > 0 \quad (6-22)$$

و برای نقطهٔ (x_2, y_2, z_2) که در عقب آن واقع است

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t^2 < 0 \quad (7-22)$$

ناظری که در دستگاه مختصات پریم‌دار قرار دارد نیز علامت نوری را می‌بیند که به طرف خارج منتشر می‌شود. و طبق دو اصل موضوع اینشتین، او یک جبههٔ موج کروی را می‌بیند که با سرعت c انتشار می‌یابد. بنابراین، معادلات (۵-۲۲)، (۶-۲۲)، و (۷-۲۲) در مختصات پریم‌دار نیز صادق‌اند. چون مختصات پریم‌دار و بدون پریم فرض می‌شود با یک تبدیل خطی به یکدیگر مربوط باشند، ما به نتیجهٔ زیر می‌رسیم^۱

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (8-22)$$

که در آن (x, y, z, t) یک نقطهٔ زمانی-مکانی اختیاری و (x', y', z', t') تبدیل آن در دستگاه پریم‌دار است. به طریق معادل، برای رابطهٔ بین یک فاصلهٔ زمانی-مکانی در Σ و فاصلهٔ مربوط در Σ' ، می‌توانستیم بنویسیم

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \\ &+ (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2 \end{aligned} \quad (9-22)$$

اکنون که کمیتی به دست آورده‌ایم که نسبت به تغییر چارچوب مرجع ناوردا (تغییرناپذیر) است، به دنبال تبدیلی می‌گردیم که روی "کمیت ناوردا" تأثیری نگذارد. تبدیل لورنتس درست چنین

۱. امکان زیر را

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = K(u)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$$

که در آن $K(u)$ ضریب تناسب ثابتی است که به u بستگی دارد، رد نکرده‌ایم. ولی با در نظر گرفتن تبدیل معکوس یک چنین تغییر مقیاسی را می‌توان رد کرد، و لذا $K(u) \equiv 1$.

تبدیلی است؛ تبدیل لورنتس، معادله (۲۲-۳)، روی کمیت

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

تأثیری نمی‌گذارد. این مطلب را می‌توان با جانشانی مستقیم تحقیق کرد. بنابراین، کاربرد دو اصل موضوع اینشتین مستقیماً به تبدیل لورنتس منجر می‌شود.

اگر تبدیل لورنتس تبدیل مناسب برای تبدیل مختصات از یک چارچوب مرجع به دیگری باشد، آنگاه واضح است که تبدیل گاليله‌ای، معادله (۲۲-۱)، که شهودی‌تر است، نمی‌تواند صحیح باشد. تبدیل گاليله‌ای هیچ‌گاه با دقت کامل صحیح نیست، ولی تقریب معتبری را در حد، هنگامی که سرعتها در مقایسه با سرعت نور کم هستند، تشکیل می‌دهد. مکانیک نیوتونی نیز باید اصلاح شود، زیرا قوانین صحیح حرکت باید تحت تبدیل لورنتس، نه تحت تبدیل گاليله‌ای، به‌طور مناسب تبدیل شوند. در بخشهای زیر، تبدیل نسبیتی به تفصیل بیشتر بررسی خواهد شد و قوانین تبدیل برای کمیت‌های فیزیکی دیگر به‌دست خواهد آمد. ولی قبل از انجام این کار، در مورد سه پیامد ناشی از تبدیل لورنتس بحث می‌کنیم: (۱) تغییر مفهوم همزمانی، (۲) انقباض لورنتس، و (۳) اتساع زمان. دو رویداد در صورتی به‌طور همزمان رخ می‌دهند که در یک زمان اتفاق بیفتند. چون ممکن است رویدادها در مکانهایی با فاصله فضایی زیاد از یکدیگر رخ بدهند، بیان چنین مطلبی ایجاب می‌کند که ما راهی برای همزمان کردن ساعتها داشته باشیم به‌طوری که بتوانیم زمان رخداد هر یک از رویدادها را به‌طور جداگانه تعیین کنیم. اکنون فرض کنیم دو رویداد در مکانهای x_1 و x_2 در چارچوب Σ به‌طور همزمان رخ می‌دهند، به عبارت دیگر، زمانهای t_1 و t_2 که در آنها این دو رویداد رخ می‌دهند، یکسان‌اند. ولی بنا بر تبدیل لورنتس (۲۲-۳) این زمانها در دستگاه Σ' یکسان نیستند

$$t'_1 - t'_2 = \frac{(u/c^2)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} [x_2 - x_1] \quad (۲۲-۱۰)$$

بنابراین ما باید مفهوم شهودی همزمانی را تغییر دهیم: اگر دو رویداد به‌طور همزمان در یک چارچوب مرجع رخ بدهند، در چارچوب دیگر الزاماً همزمان نیستند. با قبول تبدیل لورنتس، ما مجبوریم مفهوم "زمان جهانی" را رها کنیم.

ذکر یک مثال ساده شاید پذیرش این نکته را معقول‌تر بسازد. فرض کنید ناظر A در یک سفینه فضایی با سرعت u نسبت به ناظر B متصل به زمین، در حال حرکت است. ناظر A می‌خواهد آزمایشی در مورد آشکارسازی همزمان یک علامت نوری در دو مکان مختلف انجام دهد. برای این کار یک آشکارساز را در جلوی سفینه فضایی و یکی دیگر را در عقب آن قرار می‌دهد و به دقت

فاصلهٔ بین دو آشکارساز را اندازه می‌گیرد. سپس ناظر A یک منبع نوری در وسط دو آشکارساز قرار می‌دهد. چون علامت نوری به صورت امواج کروی انتشار می‌یابد، دو آشکارساز A در واقع علامت نوری را به طور همزمان آشکار می‌کنند. اما برای ناظر B چطور؟ ناظر B نیز در چارچوب متصل به زمین، علامت نوری را می‌بیند که از منبع به صورت امواج کروی به طرف خارج منتشر می‌شود، ولی آشکارساز جلویی سفینهٔ فضایی در حال دور شدن از جبههٔ موج در حال گسترش است، در صورتی که آشکارساز عقبی به طرف آن حرکت می‌کند. بنابراین، آشکارسازی در دستگاه او همزمان نیست.

انقباض ظاهری یک جسم متحرک در جهت حرکتش را انقباض لورنتس می‌نامند. در اندازه‌گیری طول، طول جسمی را که باید اندازه‌گیری شود با یک مقیاس استاندارد مقایسه می‌کنند. این موضوع، چنانچه جسم و مقیاس نسبت به یکدیگر در حال سکون باشند، هیچ مسئلهٔ به‌خصوصی ایجاد نمی‌کند. لیکن، فرض کنید که ناظری در چارچوب Σ می‌خواهد طول جسم متحرکی (جسمی که در چارچوب Σ' در حال سکون است) را اندازه‌گیری کند. چون جسم نسبت به ناظر و مقیاسش در حرکت است، مهم است که دو انتهای جسم در یک زمان با مقیاس مقایسه شوند؛ به عبارت دیگر، اگر مکان x_1 در زمان t_1 و x_2 در زمان t_2 تعیین شده باشند، آنگاه برای اینکه اندازه‌گیری طول معنی داشته باشد، باید t_1 مساوی t_2 باشد. اما بنا بر تبدیل لورنتس، معادلهٔ (۲۲-۳)، داریم

$$x'_1 - x'_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x_1 - x_2) \quad (11-22)$$

که در آن $\beta \equiv u/c$. اکنون می‌توان $l' = x'_1 - x'_2$ را به‌عنوان طول “حقیقی” جسم (طول جسم که توسط ناظری ساکن نسبت به آن، اندازه‌گیری شده است) در نظر گرفت. طول ظاهری آن l (طولی که ناظر در دستگاه Σ اندازه‌گیری می‌کند) منقبض شده به نظر می‌رسد

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (12-22)$$

به‌سادگی می‌توان اثبات کرد که حرکت روی ابعاد عرضی، یعنی ابعادی که در جهتهای y و z اند، تأثیری ندارد.

اتساع زمان، یا کند شدن ظاهری رویدادهای زمانی که به یک جسم متحرک وابسته‌اند، به بهترین وجهی از معادلهٔ (۲۲-۹) به‌دست می‌آید. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} (dt)^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \\ = (dt')^2 \left[c^2 - \left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 - \left(\frac{dy'}{dt'} \right)^2 - \left(\frac{dz'}{dt'} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13-22)$$

فرض کنید Σ' دستگاه ساکن جسم است، به عبارت دیگر، دستگاهی که جسم در آن در حال سکون است. در این صورت، $(dx'/dt') = 0$ (سرعت)، والی آخر؛ و

$$u^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

پس معادلهٔ (۲۲-۱۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (22-14)$$

بنابراین، به نظر می‌رسد که فاصلهٔ زمانی ظاهری Δt (فاصله‌ای که ناظر Σ اندازه‌گیری می‌کند) نسبت به فاصلهٔ زمانی فطری $\Delta t'$ طولانی‌تر شده است. راه دیگر تعبیر معادلهٔ (۲۲-۱۴) این است که بگوییم به نظر می‌رسد ساعتها هنگامی که نسبت به ناظر در حرکت اند، کند کار می‌کنند.

۲۲-۳ هندسهٔ زمان-مکان

تبدیل لورنتس (بخش قبل) یک تبدیل خطی است که مختصات فضا و زمان را در یک چارچوب مرجع به کمیتهای مربوط در چارچوب دیگر، نسبت به چارچوب اول حرکت یکنواختی دارد، تبدیل می‌کند. بنابراین به نظر می‌رسد که ممکن است بتوانیم یک هندسهٔ چهاربعدی بسازیم که در آن زمان و مختصات فضایی بر مبنایی یکسان ظاهر شوند و تبدیل لورنتس به عنوان نوعی عمل هندسی در این فضای چهاربعدی عمل کند. ملاحظه کردیم که تابع درجهٔ دوم معینی از مختصات و زمان، یعنی

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

کمیتی ناورداست، به عبارت دیگر، این کمیت در تمام چارچوبهای مرجع مقدار یکسانی دارد. این مطلب یادآور آن است که طول یک بردار، مخصوصاً طول l بردار مکان

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

در دوران محورهای مختصات در فضای معمولی (سه بعدی) ناورد است. (به پیوست ۲ رجوع کنید.) وقتی سعی کنیم این فرمولبندی را به چهار بعد بسط دهیم و $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ را به عنوان مربع "طول" در فضای زمانی-مکانی در نظر بگیریم، به این مسئلهٔ واضح برمی‌خوریم که مؤلفهٔ چهارم، یعنی ct ، با علامت منفی در عبارت وارد می‌شود. بنابراین فضای زمانی-مکانی

اصولاً فضای چهاربعدی غیراقلیدسی است. بسیاری از اشکالاتی را که از این طریق به وجود می‌آید، می‌توانیم با تعریف چهار "مختصه" به صورت زیر، رفع کنیم

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \quad (15-22)$$

در اینجا i عدد موهومی واحد است. این فضای چهاربعدی (که مینکوفسکی^۱ معرفی کرده است) به بیان دقیق، اقلیدسی نیست، زیرا شامل یک مختصهٔ موهومی است. با وجود این، بسیاری از خواص آن را می‌توان با در نظر گرفتن آن به عنوان یک فضای اقلیدسی، به دست آورد. در اینجا از این روش استفاده خواهد شد. کمیتهٔ زیر

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

تحت بعضی تبدیلهای معین، ناورداست. این تبدیلهای (که البته تبدیلهای لورنتس را نیز شامل می‌شوند) بسیاری از خواص تبدیلهای متعامد را دارند، ولی چون می‌توانند مؤلفه‌های موهومی داشته باشند، بدین مناسبت آنها را تبدیلهای متعامد مختلط نامیده‌اند. با وجود این، با توجه به آنچه که در زیر خواهد آمد، این اختلاف عواقب مهمی ایجاد نمی‌کند و بنابراین می‌توان تبدیل لورنتس در فضای مینکوفسکی را به عنوان یک تبدیل متعامد در نظر گرفت.^۲

کمیته‌ی که با (x_1, x_2, x_3, x_4) تعریف می‌شود، یک بردار چهاربعدی است. ما بعداً بردارهای چهار مؤلفه‌ای دیگری را تعریف خواهیم کرد [به عبارت دیگر، کمیتهایی که مؤلفه‌هایشان تحت

1. H. Minkowski

۲. به دلیل کاربرد زیاد فضاهای مجرد در فیزیک معاصر، بهتر است مشکلی را که در کاربرد واژه‌های "اقلیدسی" برای توصیف فضای مینکوفسکی و "متعامد" برای توصیف تبدیلهای لورنتس وجود دارد توضیح دهیم. این اشکال آن است که واژه‌های اقلیدسی و متعامد هر دو نمایانگر ایده‌هایی هستند که برای بررسی متغیرهای حقیقی به کار می‌روند. اگر بخواهیم با وارد کردن مختصات مختلط این مطلب را تعمیم دهیم، بهترین تعمیم برای طول یک بردار عبارت است از

$$\left\{ \sum_i x_i^* x_i \right\}^{\frac{1}{2}}$$

که در آن x_i^* مزدوج مختلط x_i است، تبدیلهایی که تحت آنها این طول ناوردا می‌ماند تبدیلهای یکانی‌اند، که در نمادگذاری پیوست ۲ با $\sum_i a_{ij} a_{ik}^* = \delta_{jk}$ مشخص می‌شوند. تبدیل لورنتس در این دسته‌بندی قرار نمی‌گیرد و نتیجتاً برای توضیح کامل آن یک بسط جداگانه ولی همانند، لازم است. اختلاف مهمی بین فضای مینکوفسکی و هر دو فضای دیگر، یکانی و متعامد، وجود دارد. برای دو فضای اخیر طول هر یک از مؤلفه‌های یک بردار کوچکتر یا مساوی است با طول خود بردار، در صورتی که "طول" مؤلفه یک چار-بردار در فضای مینکوفسکی چنین محدودیتی ندارد. به طریق مشابه، در تبدیلهای یکانی و متعامد، اندازهٔ تمام ضرایب کوچکتر از یا مساوی با واحدند، ولی این مطلب در مورد تبدیلهای لورنتس صادق نیست. این نکات حائز اهمیت‌اند، ولی بحث بیشتر در اینجا ما را خیلی از موضوع دور خواهد کرد.

تبدیل لورنتس مانند (x_1, x_2, x_3, x_4) تبدیل می‌شوند]. بردارهای چهاربعدی را چار-بردار یا جهان-بردار می‌نامند تا بتوان آنها را از بردارهای سه‌بعدی معمولی تمیز داد. کمیته‌ی را که در اثر یک تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند کمیته‌ی زده‌ای جهانی می‌نامند. هر نقطه در فضای زمانی-مکانی جهان نقطه، و مسیر یک ذره در فضای زمانی-مکانی جهان خط خوانده می‌شود.

۲۲-۴ تبدیل لورنتس به عنوان یک تبدیل متعامد

نتایج فرمولبندی تبدیلهای متعامد در مورد بردارهای سه‌بعدی معمولی را که در پیوست ۲ بسط داده شده است، می‌توان با افزودن مؤلفه چهارم، $x_4 = ict$ ، مستقیماً در فضای چهاربعدی زمانی-مکانی به‌کار برد. اکنون تمام جمع‌بندیها از ۱ تا ۴ خواهند بود. معمولاً برای توصیف کمیتهای چهاربعدی برای شاخصها از حروف یونانی، و برای توصیف کمیتهای سه‌بعدی از حروف لاتین، استفاده می‌کنند. از این رو، F_i نشان‌دهنده مؤلفه i ام یک بردار سه‌بعدی معمولی و $T_{\mu\nu}$ نشان‌دهنده مؤلفه μ, ν ام یک تانسور چهاربعدی است.

تبدیل لورنتس (۲۲-۳) برای تبدیل دستگاه بدون پریم به دستگاه پریم‌دار در شکل ۲۲-۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4 \\ x'_2 &= 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x'_4 &= -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4 \end{aligned} \quad (16-22)$$

که در آن $\beta \equiv u/c$. ماتریس این تبدیل عبارت است از

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \quad (17-22)$$

به سادگی می‌توانیم تحقیق کنیم که معادله (۱۷-۲۲) یک تبدیل متعامد^۱ است، یعنی مؤلفه‌هایش در معادله (پ ۲-۶) در پیوست ۲ صدق می‌کنند.

۱. ما به جای واژه دقیق‌تر "متعامد مختلط" واژه متعامد را به‌کار می‌بریم؛ به بحث بخش ۲۲-۳ مراجعه کنید.

ماتریس **A** در این مورد یک ماتریس خیلی ساده است (فقط شش مؤلفه غیرصفر دارد)، زیرا تبدیل لورنتس دو دستگاهی را به هم مربوط می‌کند که نسبت به یکدیگر در امتداد یکی از محورهای مختصات (یعنی محور x) در حرکت‌اند. بنابراین، x و t به x' و t' تبدیل می‌شوند ولی جهت‌های y و z تغییری نمی‌کنند. در حالت کلی، هنگامی که جهت حرکت نسبی در امتداد یکی از محورهای مختصات نیست، تبدیل پیچیده‌تر است، ولی مؤلفه‌های ماتریس باز هم در روابط تعامد صدق می‌کنند. چون جهت‌های مختصات را عموماً می‌توان برحسب احتیاجات مناسب یک مسئله به خصوص انتخاب کرد، ما در این کتاب خود را محدود می‌کنیم به تبدیلهای لورنتس از نوع (۲۲-۱۷)، یا به‌طور معادل، به تبدیلهایی که دستگاههای مختصات شکل ۲۲-۱ را به هم مربوط می‌کنند. تبدیل لورنتس (۲۲-۱۶) را می‌توان به‌عنوان دورانی در صفحه $x_1 x_4$ تعبیر کرد. اگر این‌طور باشد، آنگاه زاویه دوران θ از معادله زیر تعیین می‌شود

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_4 \sin \theta$$

یا

$$\tan \theta = i\beta = i(u/c) \quad (18-22)$$

بنابراین زاویه دوران یک زاویه حقیقی نیست.^۱ از نظر ریاضی، تبدیل لورنتس مثل یک دوران در فضای چهاربعدی تعامد ما عمل می‌کند، ولی دورانی با یک زاویه موهومی. تبدیل لورنتس معکوس، یعنی تبدیلی که ما را از دستگاه پریم‌دار به دستگاه بدون پریم می‌برد، توسط ماتریس ترانژاده ماتریس (۲۲-۱۷) داده می‌شود، یعنی

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \quad (19-22)$$

۲۲-۵ شکل هموردای معادلات الکترومغناطیس

معادلات اساسی نظریه الکترومغناطیس (معادلات ماکسول، فصل ۱۶)، برحسب مشتق‌های زمانی و مکانی میدانهای **E** و **B** نوشته شده‌اند. در دستگاه سه‌بعدی معمولی، زمان مثل یک کمیت

۱. این مطلب بیکران بودن تبدیل را که قبلاً به آن اشاره شد منعکس می‌کند.

زده‌ای وارد معادلات می‌شود، ولی سه مشتق مکانی در ترکیبات متقارن معینی (دیورژانس یا تاو) ظاهر می‌شوند. با نوشتن معادلهٔ دیورژانس (مثلاً قانون گاوس) به صورت

$$\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (20-22)$$

و معادلهٔ تاو (مثلاً قانون آمپر) به صورت زیر

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \mu_0 J_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t} \quad (21-22)$$

می‌توانیم تقارن مذکور را به‌طور مستقیم‌تر نشان دهیم. معادلهٔ اخیر در واقع نشان‌دهندهٔ سه معادله است (سه مؤلفهٔ معادلهٔ برداری تاو)، که در آن i, j, k و k نمایندهٔ جایگشت دوره‌های x, y, z هستند. ولی در بخش‌های قبل دیدیم که تبدیل لورنتس مختصات مکانی و زمانی را با یکدیگر مخلوط می‌کند و می‌توان آن را به‌عنوان یک دوران در فضای $x_1 x_2 x_3 x_4$ در نظر گرفت. بنابراین x_1, x_2, x_3, x_4 باید به‌نحوی متقارن در معادلات ماکسول وارد شوند. در واقع، ما باید بتوانیم معادلات ماکسول را برحسب تاوها و دیورژانس‌های چهاربعدی بنویسیم. فرمولبندی معادلات الکتروستاتیکی و مغناطیسی به طریقی که در آن زمان و مختصات مکانی بر مبنای یکسانی بررسی شوند، فرمولبندی هموردا نام دارد. با وجود این، ما باید در این مورد تا اندازه‌ای با احتیاط عمل کنیم، زیرا هر کمیت برداری در سه بعد الزاماً بخشی از یک بردار چهاربعدی نخواهد شد.

بحث را با معادلهٔ پیوستگی شروع می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (22-22)$$

چون J_x, J_y, J_z مستقل از چگالی بار ρ نیستند، این چهار کمیت یک چار-بردار طبیعی تشکیل می‌دهند. در واقع، اگر ما چگالی جریان چار-بردار \mathfrak{J}_ν را با مؤلفه‌هایش ($\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \mathfrak{J}_4 = ic\rho$) تعریف کنیم، می‌توانیم معادلهٔ پیوستگی را به شکل هموردا بنویسیم

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad (23-22)$$

که در این معادله بنا بر آنچه قبلاً گفته شد جمع‌بندی از $\nu = 1$ تا $\nu = 4$ است؛ یا به‌طور معادل

$$\square \cdot \mathfrak{J} = 0 \quad (\text{الف } 23-22)$$

که در آن $\square \cdot$ علامت دیورژانس چهاربعدی است.

پتانسیل برداری \mathbf{A} و پتانسیل نرده‌ای φ در معادلات موج ناهمگن صدق می‌کنند

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (24-22)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

چون \mathbf{J} و ρ مؤلفه‌های یک چار بردارند، معادله‌های (۲۴-۲۲) باید نشان‌دهنده چهار مؤلفه یک معادله چار-برداری باشند و \mathbf{A} و φ نیز باید با یکدیگر ترکیب شوند و یک چار-بردار تشکیل بدهند. اگر ما یک چار-پتانسیل یا جهان-پتانسیل \mathfrak{A}_λ را به کمک مؤلفه‌هایش، $\mathfrak{A}_1 = A_1$ ، $\mathfrak{A}_2 = A_2$ ، $\mathfrak{A}_3 = A_3$ و $\mathfrak{A}_4 = i\varphi/c$ تعریف کنیم، آنگاه معادلات (۲۴-۲۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\lambda}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 \tilde{\mathfrak{J}}_\lambda \quad (25-22)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\square^2 \mathfrak{A} = -\mu_0 \tilde{\mathfrak{J}} \quad (25-22 \text{ الف})$$

که در آن $\square^2 \equiv \nabla^2 - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2$ عملگر لاپلاس چهاربعدی، یا عملگر دالامبر، است. شرط لورنتس، معادله (۱۶-۶۳)، به صورت زیر در می‌آید

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$

یا

$$\square \cdot \mathfrak{A} = 0 \quad (26-22)$$

ما اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی را بررسی کنیم. این مؤلفه‌ها را می‌توان از معادلات سه‌بعدی زیر به دست آورد

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (57-16)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (60-16)$$

ولی \mathbf{A} و $i\varphi/c$ یک چار-بردار را تشکیل می‌دهند، بنابراین معادله اخیر را می‌توان به صورت زیر (به شکل مؤلفه‌ای) نوشت

$$i \frac{1}{c} E_1 = \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial x_1}, \dots \quad (27-22)$$

بنابراین \mathbf{B} و $i\mathbf{E}/c$ روی هم تاو چهاربعدی \mathcal{A} را تشکیل می‌دهند. در واقع هنگامی که عمل تاو بر روی برداری اعمال شود یک تانسور پاد متقارن تولید می‌کند.^۱ این مطلب از شکل معادله (۲۲-۲۷) آشکار است زیرا روشن است که یک کمیت دوشاخصی می‌بایست تولید کرد. ما تانسور میدان الکترومغناطیسی \mathbf{F} را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu} \quad (28-22)$$

در اینجا

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

$$F_{14} = -F_{41} = -iE_1/c$$

$$F_{24} = -F_{42} = -iE_2/c$$

$$F_{34} = -F_{43} = -iE_3/c$$

$$F_{12} = -F_{21} = B_3$$

$$F_{23} = -F_{32} = B_1$$

$$F_{31} = -F_{13} = B_2$$

به صورت ماتریسی داریم

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (29-22)$$

اکنون فرض کنید که می‌خواهیم دیورژانس تانسور میدان را محاسبه کنیم. به علت شکل این تانسور، معادله (۲۲-۲۸)، خواهیم داشت

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\nu \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\nu} - \sum_\nu \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu^2} \quad (30-22)$$

۱. در سه بعد یک تانسور پاد متقارن سه مؤلفه مستقل دارد، T_{12}, T_{13}, T_{23} ، و این مؤلفه‌ها تحت دورانهای فضایی مثل مؤلفه‌های یک بردار تبدیل می‌شوند. بنابراین اینکه تاو یک بردار را به صورت کمیتی برداری در نظر می‌گرفتیم رضایتبخش بود. برای یک تانسور پاد متقارن، توجه کنید که $T_{11} = 0, T_{21} = -T_{12}$ ، و الی آخر. در چهار بعد یک تانسور پاد متقارن شش مؤلفه مستقل دارد، و سرشت تانسوری این کمیت را نمی‌توان ساده کرد.

با توجه به معادلات (۲۵-۲۲) و (۲۶-۲۲)، معادله بالا به صورت زیر در می آید

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 \mathfrak{J}_{\mu} \quad (۳۱-۲۲)$$

یا

$$\square \cdot \mathbf{F} = \mu_0 \mathfrak{J} \quad (۳۱-۲۲ \text{ الف})$$

این یک معادله چار-برداری است که نمایانگر فرمولبندی هموردای دو تا از معادلات ماکسول است، یعنی، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ و $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + (\1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$ به علاوه اتحاد زیر را داریم

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (۳۲-۲۲)$$

که در اینجا μ, ν, λ و همگی با یکدیگر متفاوت اند و نماینده هر سه شاخصی از چهار شاخص ۱، ۲، ۳، و ۴ هستند. معادله (۳۲-۲۲) مستقیماً از شکل $F_{\mu\nu}$ [معادله (۲۸-۲۲)] نتیجه می شود. به آسانی می توان تحقیق کرد که معادله (۳۲-۲۲) نمایانگر دو معادله دیگر ماکسول است.

در اکثر کتابهای پیشرفته درباره نظریه الکترومغناطیس نسبیتی، با معرفی قرارداد جمع بندی، نمادگذاری را تا اندازه ای فشرده می کنند. در این قرارداد تمام علامتهای جمع بندی حذف می شوند، ولی وجود یک شاخص تکرار شده به معنای جمع بندی روی آن شاخص است. بدین ترتیب، مثلاً معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0$$

و معادله موج برای پتانسیل به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{\mu}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu}} = -\mu_0 \mathfrak{J}_{\mu}$$

معادلات دیگر را می توان به همین قیاس نوشت. ما در این کتاب از قرارداد جمع بندی صریحاً استفاده نخواهیم کرد، بلکه آن را برای کمک به مطالعات بعدی در اینجا معرفی کرده ایم.

۲۲-۶ قانون تبدیل برای میدان الکترومغناطیسی

چون میدان الکترومغناطیسی در فرمولبندی چهار بعدی یک کمیّت تانسوری است، مؤلفه های آن تحت تبدیل لورنتس مانند مؤلفه های یک تانسور مرتبه دوم تبدیل می شوند:

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (۳۳-۲۲)$$

این درست معادله (پ ۱۶.۲) در پیوست ۲ است که با منظور کردن این حقیقت که $(\tilde{a})_{\beta\nu} = a_{\nu\beta}$ بازنویسی شده است.

دوباره دستگاه پریم دار را به عنوان دستگاهی در نظر می‌گیریم که با سرعت u در جهت x نسبت به دستگاه بدون پریم در حرکت است. تبدیل لورنتس توسط معادله (۱۷-۲۲) داده شده است. بنابراین

$$B'_x = F'_{23} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{2\alpha} a_{3\beta} F_{\alpha\beta} = F_{23} = B_x \quad (34-22)$$

و

$$\begin{aligned} B'_y = F'_{31} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{3\alpha} a_{1\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{31} + i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{32} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [B_y + (\beta/c) E_z] \end{aligned} \quad (35-22)$$

به طریق مشابه، خواهیم داشت

$$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [B_z - (\beta/c) E_y] \quad (36-22)$$

تا آنجا که مربوط به میدان الکتریکی می‌شود خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E'_x = icF'_{12} &= ic \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{1\alpha} a_{2\beta} E_{\alpha\beta} \\ &= ic \left[-\frac{i\beta}{1-\beta^2} F_{11} + \frac{1}{1-\beta^2} F_{12} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} F_{21} + \frac{i\beta}{1-\beta^2} F_{22} \right] \\ &= \frac{ic}{1-\beta^2} \left[-i \frac{E_x}{c} + \beta^2 i \frac{E_x}{c} \right] = E_x \end{aligned} \quad (37-22)$$

و بالاخره ثابت می‌شود که

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [E_y - c\beta B_z] \quad (38-22)$$

$$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [E_z + c\beta B_y] \quad (39-22)$$

بنابراین مؤلفه‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} در جهت حرکت تغییر نمی‌کنند، ولی مؤلفه‌های عرضی تغییر می‌کنند. نتایج فوق را می‌توان به وسیله معادلات سه‌بعدی زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}] \quad (۴۰-۲۲)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \right]$$

در اینجا \parallel و \perp به معنای مؤلفه‌های موازی با و عمود بر سرعت \mathbf{u} در تبدیل لورنتس است. واضح است که تبدیل معکوس با معادلات زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}'] \quad (۴۱-۲۲)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}' \right]$$

این مطلب بحث ما را در مورد قانون تبدیل مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی تکمیل می‌کند. این نتایج در بخش بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۲۲-۷ میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت

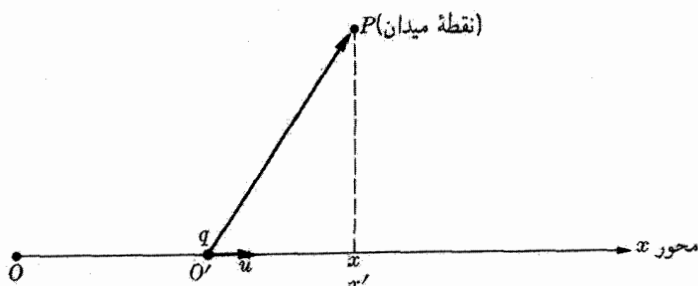
برای نشان دادن سودمندی تبدیل لورنتس، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت را محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم بار نقطه‌ای q با سرعت u در امتداد محور x حرکت می‌کند. وضعیت هندسی در شکل ۲۲-۲ نشان داده شده است. یک دستگاه مختصات دوم (دستگاه پریم‌دار) را بنا می‌کنیم که همراه با بار حرکت می‌کند؛ برای راحتی مبدأ این دستگاه یعنی O' را منطبق بر خود بار در نظر می‌گیریم. در دستگاه پریم‌دار بار ساکن است. بنابراین، در نقطه میدان، P ، داریم

$$\mathbf{B}' = 0$$

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3} \quad (۴۲-۲۲)$$

می‌توان میدانها را در دستگاه آزمایشگاه با استفاده از معادله (۴۱-۲۲) به دست آورد. بدین ترتیب

$$E_x = E_{\parallel} = E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 (r')^3}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 (r')^3} \quad (۴۳-۲۲)$$



شکل ۲-۲۲ دستگاه مختصات برای تعیین میدانهای \mathbf{E} و \mathbf{B} یک بار با حرکت یکنواخت. خط پررنگ qP بردار میدان-چشمه است (\mathbf{r}' در دستگاه پریم‌دار، \mathbf{R} در دستگاه آزمایشگاه). از اینجا x مختصه در دستگاه آزمایشگاه و x' مختصه در دستگاه پریم‌دار است.

که در آن $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$. اکنون از معادله (۳-۲۲) داریم

$$x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z$$

که در آن t عبارت است از زمان سپری شده (در دستگاه آزمایشگاه) از لحظه‌ای که دو مبدأ بر یکدیگر منطبق می‌شوند. بنابراین بردار \mathbf{r}' با مؤلفه‌های زیر داده می‌شود

$$\mathbf{r}' = \{\gamma(x - ut), y, z\} \quad (۴۴-۲۲)$$

مناسب است که کمیت \mathbf{R}^* را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\gamma \mathbf{R}^* = \{\gamma(x - ut), y, z\} \quad (۴۵-۲۲)$$

بنابراین معادله (۴۳-۲۲) به صورت زیر در می‌آید

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - ut)}{\gamma^3(R^*)^3}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{\gamma^3(R^*)^3} \quad (۴۶-۲۲)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}$$

یا

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3} (1 - \beta^2) \quad (۴۶-۲۲ \text{ الف})$$

که در آن \mathbf{R} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{R} = \{x - ut, y, z\} \quad (۴۷-۲۲)$$

امتداد میدان الکتریکی از مکان لحظه‌ای بار نقطه‌ای در جهت شعاعی به طرف خارج است، ولی برعکس حالت ساکن دیگر تقارن کروی ندارد. در واقع، برای باری که به سرعت حرکت می‌کند، میدان قویاً در صفحهٔ عمود بر امتداد حرکتش متمرکز است.

میدان مغناطیسی با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$B_x = B_{\parallel} = 0$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}' = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}_{\perp} \quad (۴۸-۲۲)$$

یا

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (\text{الف } ۴۸-۲۲)$$

خطوط میدان مغناطیسی دایره‌ای هستند که مراکزشان روی مسیر بار است.

۸-۲۲ خلاصهٔ مطالب

این یک نتیجهٔ تجربی است که در هر دستگاه مختصاتی با حرکت یکنواخت، تابش الکترومغناطیسی با سرعت ثابت c در خلأ منتشر می‌شود. بنابراین در تبدیل به دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت حرکت کند، باید معادلهٔ موج بدون تغییر باقی بماند. این کار با تبدیل لورنتس مختصات، که در آن صورت درجهٔ دوم $(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)$ ناورد می‌ماند، انجام می‌شود. این تبدیل برحسب هندسهٔ چهاربعدی مختلط (ناقلیدسی) فضای مینکوفسکی، که در آن ict بعد چهارم است، به نحو مناسبی بیان می‌شود. تبدیل لورنتس (و همچنین دوران در فضای معمولی) با ماتریس متعامد مختلطی نمایش داده می‌شود که بر روی یک چار-بردار، یا یک جهان-بردار، عمل می‌کند. ماتریس تبدیل لورنتس به دستگاهی که با سرعت \mathbf{u} در جهت x حرکت کند، عبارت است از

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ و $\beta = u/c$. (این ماتریس نمایانگر دورانی است با یک زاویه موهومی). معادلات ماکسول هموردا هستند — یعنی، اگر میدان E و میدان B با تبدیل لورنتس به طور مناسب تبدیل شوند، شکل این معادلات تغییر نخواهد کرد.

• چار-بردارهای اصلی الکترومغناطیس، تانسور میدان، و روابط بین آنها عبارت‌اند از چار-بردارها:

$$\mathbf{x} = (x, y, z, ict) \text{ زمان-مکان}$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = (J_x, J_y, J_z, ic\rho) \text{ بار-جریان}$$

$$\mathcal{A} = (A_x, A_y, A_z, i\varphi/c) \text{ پتانسیل}$$

تانسور میدان:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu} \quad \mathbf{F} = \square \times \mathcal{A}$$

معادلات ماکسول:

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 \tilde{J}_\mu, \quad \square \cdot \mathbf{F} = \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

معادله موج برای پتانسیل:

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 \tilde{J}_\mu \quad \square^2 \mathcal{A} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}$$

شرط لورنتس:

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \square \cdot \mathcal{A} = 0$$

معادله پیوستگی:

$$\sum_\nu \frac{\partial \tilde{J}_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \square \cdot \tilde{\mathbf{J}} = 0$$

• تانسور میدان مطابق رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\mathbf{F}' = \mathbf{AFA}^{-1} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{F}}$$

در سه بعد داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}\right) \end{aligned}$$

• با تبدیل از دستگاه ساکن بار به دستگاه متحرک، میدان یک بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت به آسانی به دست می‌آید.

مسائل

۱-۲۲ با استفاده از تبدیل گالیه‌ای، معادله (۱-۲۲)، معادلهٔ موج را به دستگاه مختصات پریم‌دار تبدیل کنید. نشان دهید که

$$\varphi = F\{x - (c - u)t\} + G\{x + (c + u)t\}$$

که در آن F و G توابع دلخواهی از شناسه‌هایشان هستند، پاسخی برای معادلهٔ تبدیل شده است. ۲-۲۲ با انجام دو تبدیل لورنتس پی‌درپی، ابتدا به دستگاه Σ' که نسبت به دستگاه Σ با سرعت u حرکت می‌کند و سپس به دستگاه Σ'' که با سرعت u' نسبت به Σ' حرکت می‌کند، قضیهٔ جمع نسبیتی سرعتها را ثابت کنید:

$$u'' = \frac{u + u'}{1 + uu'/c^2}$$

۳-۲۲ نیمه‌عمر ذاتی یک ذرهٔ ناپایدار 1.6×10^{-8} s است. اگر این ذره با سرعتی 0.9999 برابر سرعت نور حرکت کند، نیمه‌عمر ظاهری آن در دستگاه آزمایشگاه چقدر است؟ ۴-۲۲ نشان دهید که معادلهٔ نیروی لورنتس را می‌توان به صورت هموردای زیر نوشت:

$$f_{\mu} = \sum_{\nu} F_{\mu\nu} \tilde{J}_{\nu}$$

۵-۲۲ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت \mathbf{E} و \mathbf{B} داده شده‌اند. یک تبدیل لورنتس پیدا کنید که \mathbf{E} و \mathbf{B} را با یکدیگر موازی کند. [راهنمایی: سرعت \mathbf{u} ی دستگاه Σ' را در جهت عمود بر \mathbf{E} و عمود بر \mathbf{B} انتخاب کنید و اندازهٔ $u/(1 + \beta^2)$ را برحسب E^2 ، B^2 و $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ تعیین کنید]. ۶-۲۲ معادله (۲-۳) میدان الکتریکی یک سیم طویل مستقیم حاوی λ واحد بار در واحد طول را به دست می‌دهد. (الف) با یک تبدیل لورنتس به دستگاهی که با سرعت u در امتداد موازی

سیم حرکت می‌کند بروید. (ب) میدان B را در دستگاه جدید محاسبه کنید و آن را با میدان B ی یک سیم حامل جریان، معادله (۸-۳۵)، مقایسه کنید. (ج) آیا میدان E در دستگاه متحرک وجود دارد؟ (د) بین یک سیم بردار که در جهت طولش حرکت می‌کند و یک سیم حامل جریان چه اختلاف فیزیکی وجود دارد؟

۷-۲۲ (الف) نشان دهید که ضرب نرده‌ای $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ در اثر تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند. (ب) همین مطلب را در مورد $E^2 - c^2 B^2$ نشان دهید.

۸-۲۲ (الف) بردار پوینتینگ را برای بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت بخش ۷-۲۲ تعیین کنید. (ب) نشان دهید که توان کل تابش شده صفر است.

۹-۲۲ یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی نقطه‌ای \mathbf{m} ، در حال سکون پتانسیل برداری \mathbf{A} را به وجود می‌آورد که

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

اگر \mathbf{m} با سرعت ثابت \mathbf{v} ($v \ll c$) در حال حرکت باشد، نشان دهید که یک پتانسیل نرده‌ای وجود خواهد داشت که ظاهراً از یک گشتاور دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p} = (\mathbf{v} \times \mathbf{m})/c^2$ ناشی می‌شود.

پیوست ۱

کامپیوترها و نظریه الکترومغناطیس

در پنجاه سال گذشته، کامپیوتر دیجیتال، نه تنها در مؤسسات تحقیقاتی بلکه برای هر شخصی نیز که به آن احتیاج داشته، از یک وسیله نادر به وسیله‌ای که عموماً در دسترس است تحول یافته است. شاخه‌های علوم و مهندسی، به علاوه، بسیاری دیگر از فعالیتهای بشر، بهره‌برداران اصلی این قابل دسترس بودن رو به افزون بوده‌اند. اما تعداد بسیار معدودی از کتابهای درسی الکترومغناطیس و مغناطیس مطلبی درباره کامپیوترها دارند. در نتیجه، گذر از مسائل مرتبی که به طور تحلیلی بررسی می‌شوند به مسائل نامنظمی که در کاربردها رخ می‌دهند، اگر ضربتی نباشد قطعاً ناگهانی است. هدف از مطالب درباره کامپیوتر در این کتاب آسان کردن این ناپوستگی است و اینکه کاربرد کامپیوترها را در بهره‌برداری از نظریه الکترومغناطیس تسهیل کند. دو جزء مهم، علاوه بر نظریه الکترومغناطیس، تحلیل عددی و برنامه‌نویسی کامپیوتری است. اما، در حالی که این پیوست نسبتاً خودکفاست، کتاب درسی درباره تحلیل عددی، یا برنامه‌نویسی کامپیوتری، یا زبان کامپیوتری بیسیک^۱ نیست. فهرست کتابها در آخر این پیوست شامل گزیده مطالبی مربوط به هر یک از این عناوین است.

1. BASIC (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code)

پ ۱-۱ تکامل محاسبه

محاسبه تاریخی طولانی داشته است اما هیجان‌انگیزترین مرحله توسعه آن بعد از جنگ جهانی دوم شروع شد. قبل از ۱۹۴۰، کامپیوترهایی که اغلب فیزیکدانان استفاده می‌کردند سبزی بودند، وسایلی دستی که مقداری مهارت دستی برای کار با آنها لازم بود. در طول جنگ جهانی دوم، تعداد کمی کامپیوترهای دیجیتال الکترونیکی مقیاس-بزرگ (با استاندارد ۱۹۴۰) ساخته شد که اساساً احتیاجات پرتابه‌ها و رمزنویسی را مرتفع سازد. در اوایل ۱۹۵۰، کامپیوترهای جدید برای مصارف عمومی شروع به نمایان شدن کردند، و یکی از این نوع وسایل به نام ویرل‌وند^۱ سکوی افتخار را کسب کرد که در بلوغ سی سالگی‌اش در مؤسسه اسمیتسونین^۲ جای بگیرد. در اواخر دهه پنجاه، کامپیوترهای الکترونیکی بزرگ استاندارد از چندین شرکت فرسوده آماده فروش بودند. این سیستمها حجیم بودند و برای ضروریات سخت‌افزاری از لامپهای تخلیه الکتریکی در آنها استفاده می‌شد. اما توسعه شگفت‌آور وسایل نیم‌رسانا منتهی به کامپیوترهای کوچکتر و ظرفیتهای بزرگتر شد (و اتفاقاً هزینه محاسبه کمتر). این روند ادامه یافت، در سالهای ۱۹۷۰ به کامپیوترهای کوچک و در آخر آن دهه به ریزکامپیوترها منتهی شد. معرفی PC توسط IBM در اواسط ۱۹۸۱ رویداد مهمی بود برای اینکه منتهی به استاندارد شدن ساختار و سیستمهای عامل و همچنین توسعه نرم‌افزار مرحله سوم شد. در حال حاضر، کامپیوترهای تجاری در دسترس، محدوده‌ای از امر کامپیوترهای غول‌پیکر تا ریزکامپیوترهای جیبی بسیار قدرتمند را می‌پوشانند. کامپیوترهای رومیزی خصوصاً، قادر به انجام کاربردهای مهمی در نظریه الکترومغناطیس هستند و تهیه آنها بسیار کم‌هزینه است.

چون به کامپیوترها باید گفته شود که چه باید انجام دهند به یک زبان کامپیوتری احتیاج داریم. در روزهای نخست کامپیوترها، هر کدام زبان خود را داشتند، که نوعاً از دستورالعملهای بسیار ساده که در آرایه‌های بی‌شماری به‌کار می‌رفتند ساخته شده بودند. آموختن زبان جدید ملال‌آور و کند بود، و بنابراین پذیرفتن کامپیوترهای جدید را با کندی مواجه می‌کرد. در اواخر ۱۹۵۰، این مسئله با اختراع یک زبان استاندارد به نام فورترن (برگرفته از کلمات انگلیسی به معنای "مترجم فرمول"^۳) توسط جان باکوس^۴ و همکارانش در IBM حل شد. استفاده از فورترن این امکان را فراهم آورد تا به کامپیوتر با زبانی مشابه انگلیسی عادی دستور داد (برنامه‌هایی نوشت). این زبان توسط کامپیوتر قابل فهم نبود، اما می‌توانست با فرایندی که اکنون "گردآوری کردن" می‌نامیم به زبان ماشین ترجمه شود. چون گردآورنده‌ها را می‌شود عوض کرد به طوری که با زبانهای ماشین جدید بدون تأثیر بر زبان به‌کار گرفته شده توسط برنامه‌نویس تطبیق داشته باشد، برنامه‌نویسهای نخستین می‌توانستند

فورترن را برای برنامه‌نویسی هر ماشینی که مجهز به گردآورنده فورترن بود، بدون آموختن یک زبان جدید پیچیده، به‌کار برند. فورترن در میان دانشمندان و مهندسان به‌عنوان یک زبان سطح بالای بسیار مورد علاقه باقی مانده است. این زبان توسط مؤسسه ملی استاندارد امریکا استاندارد شده است، و نسخه فعلی آن فورترن ۷۷ است (ANSIX3.9-1978). نوع اصلاح‌شده آن، فورترن ۹۰ باید به‌زودی در دسترس باشد.

فورترن احتیاج به حافظه بسیار زیادی داشت که برای ریز کامپیوترهای اولیه مفید باشد. بنابراین، زبان دیگری به نام بیسیک (BASIC) توسط جان کمنی و توماس کورتس^۱ برای حل این مسئله و ساده‌سازی فرایند برنامه‌نویسی توسعه یافت. زبان بیسیک نیز به دقت با زبان انگلیسی مرتبط است و در بسیاری از جهات شبیه فورترن است. دو تفاوت آشکار این است که بیسیک استاندارد هر خط دستورالعمل را با یک شماره آشکار می‌کند، و هر خط به زبان ماشین تبدیل می‌شود و پشت سر هم با روشی که تفسیر کردن نامیده می‌شود اجرا می‌شود. گردآوری کردن، آن‌طور که در فورترن انجام می‌شود، تمامی برنامه را تبدیل می‌کند و قبل از اجرای برنامه و نسخه زبان ماشین آن را بهینه می‌کند. بیسیک آن‌قدر مفید بود که با اغلب کامپیوترهای رومیزی داده می‌شد و هنوز هم داده می‌شود. این زبان هم تکامل یافته است و جدیدترین نسخه‌های استاندارد آن نسخه ۳۲۲ و نسخه ۳۳۳ هستند. در سال ۱۹۹۰ نسخه جدیدی از بیسیک به نام بیسیک سریع (QBASIC) ظاهر شد. این نسخه با DOS 5.0 آمیخته شده است، و اکنون با بسیاری از کامپیوترهای رومیزی که از DOS استفاده می‌کنند برای متقاضیان فرستاده می‌شود. بیسیک Q از شماره‌های خط استفاده نمی‌کند و چندین مزیت دیگر دارد اما هنوز تفسیر می‌کند. نسخه‌های پیشرفته‌تر بیسیک از شماره‌های خط پرهیز می‌کنند و همچنین به‌جای تفسیر کردن، گردآوری می‌کنند. زبانهای دیگری تعمیم یافته است که مزایای برجسته‌ای برای برخی مقاصد دارند، اما بیسیک و فورترن هنوز زبانهای هستند که معمولاً توسط دانشمندان و مهندسان به‌کار برده می‌شوند.

کامپیوترها چه انجام می‌دهند

یک سیستم کامپیوتری، صرف‌نظر از اندازه، نوعاً از چهار واحد تشکیل می‌شود: ورودی، خروجی، پردازشگر مرکزی، و حافظه. دوتای اول ارتباطات با کامپیوتر را فراهم می‌کنند و از صفحه کلید، محرکهای نوار و لوح، صفحات نمایش ویدئو، چاپگرها، راسماها، و غیره تشکیل می‌شود. حافظه، مخزن ذخیره داده‌ها و دستورالعملهای داخل کامپیوتر را که در صورت نیاز بتوان به سرعت به آنها دسترسی پیدا کرد فراهم می‌سازد. حافظه معمولاً از دو قسمت مستقل تشکیل می‌شود: حافظه قابل دسترس اتفاقی (RAM)، که برای ذخیره کردن به‌کار می‌رود در زمانی که پردازشگر مرکزی کارهای مربوط

1. John Kemeny, Thomas Kurtz

به خود را انجام می‌دهد، و مخزنهای ذخیره نوار یا لوح برای ذخیره‌سازی بلندمدت استفاده می‌شود. حافظه‌های "فقط برای خواندن" (ROM) نسبتاً کوچک نیز وجود دارند که برای ذخیره مطالب مورد استفاده مکرر به‌کار می‌رود. مثلاً بیسیک بعضی اوقات در ROM جا داده می‌شود. واحد پردازشگر مرکزی (CPU) می‌تواند حسابهای ابتدایی و عملیات منطقی را در پاسخ به دستورالعملهایی که توسط کنترل‌کننده آن داده می‌شود انجام دهد. کنترل‌کننده به‌نوبه خود ارتباط با بقیه کامپیوتر و تبدیل دستورالعملها را به شکلی مناسب برای استفاده عناصر حسابگر و منطقی CPU فراهم می‌آورد. کارهای اساسی را می‌شود به‌عنوان ارتباطات ذخیره‌سازی، عملیات حسابگری، و عملیات منطقی تصور کرد. از این کارهای اساسی، ترتیبی را می‌توان بنا کرد که وظایف بسیار پیچیده‌ای را انجام دهند. برای مقاصد نظریه الکترومغناطیس و ریاضی فیزیک در کل، این قابلیت‌ها به توانایی برای انجام دستورالعملهای محاسباتی پیچیده، شامل هم عناصر حساب و هم عناصر منطقی، توانایی برای تکرار محاسبات برای مقادیر مختلف شناسه‌ها یا پارامترها، و توانایی برای انجام ریاضیات نمادین تبدیل می‌شود.

پ ۱-۲ کاربردهای کامپیوترها در نظریه الکترومغناطیس

قابلیت محاسبه بسیاری از وظایف مفید را تسهیل می‌کند، و اکنون تعدادی را با ارجاع به متن اصلی کتاب که در آن به‌کار رفته است مثال می‌زنیم. یکی از قابلیت‌هایی که مکرراً استفاده شد محاسبه مکرر عبارتهای ریاضی است. در فصل ۱۳، تابع انتقال یک مدار ساده به‌صورت عبارت جبری به‌دست آورده شد. یک برنامه ساده کامپیوتری این عبارت را بر روی محدوده معینی از فرکانس با گامهای معین محاسبه می‌کند. انجام دستی این محاسبه، برای تنها یک فرکانس مشکل نیست؛ اما برای ۱۰۰ فرکانس مختلف، کامپیوتر مزیت قطعی مهیا می‌سازد. در فصل ۳، معادله لاپلاس برای یک ناحیه مستطیل شکل با استفاده از بسط سری سینوسی و سینوس هذلولوی حل شد. یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه پتانسیل در نقاط معین به‌کار برده می‌شود. این برنامه از مزیت توانایی از قبل برنامه‌نویسی شده بیسیک برای محاسبه سینوسها و توابع نمایی سود می‌برد. در اینجا دوباره محاسبه ذاتاً پیچیده نیست، اما جمع کردن ۱۱ جمله متوالی حتی برای یک نقطه معین دشوار است. در فصل ۳ همچنین، مجموعه‌ای از معادلات تفاضلی متناهی با روش تکرار حل شد. هر بار محاسبه به تنهایی ساده است، اما برای هر بار تکرار باید محاسبات ۵۰ مرتبه دوباره انجام شود و برای به‌دست آوردن نتیجه به‌قدر کافی دقیق ممکن است ۵۰ تکرار یا بیشتر لازم باشد. کامپیوتر این محاسبات را بسیار سریع انجام می‌دهد. در پیوست ۷، انتگرالها به‌منظور استفاده در روابط پاشندگی به‌طور عددی محاسبه شده‌اند. این خودکار کردن کار دشواری که قبلاً

دستی انجام می‌شد در علوم و مهندسی بی‌نهایت اهمیت دارد. به‌علاوه، مدارها، مسائل مقادیر مرزی، و بسیاری کاربردهای دیگر شامل حل مجموعه‌های معادلات خطی همزمان هستند. این فرایند به اندازه کافی متداول است که بعداً در قسمت جداگانه‌ای از این پیوست آن را در نظر بگیریم. فصلهای ۳ و ۱۳ شامل مثالهایی است که احتیاج به حل معادلات خطی همزمان دارد.

رویکرد

رویکرد ما برای محاسبه در ارتباط با نظریه الکترومغناطیس در این جمله امری خلاصه می‌شود: "از نرم‌افزار خوبی که دیگران نوشته‌اند، استفاده کن". اکنون نرم‌افزارهای بسیار زیادی در دسترس است، بنابراین این سفارش با ارزش را باید با این تذکر همراه کرد که بعضی اوقات اصلاح کردن یک برنامه خوب، که آنچه لازم است را تقریباً انجام دهد، سریع‌تر از آن است که دنبال برنامه‌ای بگردیم که آنچه لازم است را دقیقاً انجام دهد. تعادل مناسب بین این دو به سلیقه برمی‌گردد و با تجربه رشد می‌کند. ما ادعای خوش‌سلیقگی برای برنامه‌های فهرست شده نمی‌کنیم. آنها تا حد امکان ساده و سراسر هستند و در عین حال مقاصد مورد نیاز را برآورده می‌کنند. تا آنجا که می‌دانیم، هیچ‌یک از برنامه‌های این کتاب در جایی دیگر به شکلی که ما استفاده کرده‌ایم نیامده‌اند. اما بسیاری از آنها، مدیون فهرست بلندی از افرادی است که برنامه‌هایی مشابه را نوشته و اصلاح کرده‌اند.

برای هر کاربردی در کتاب، سعی کرده‌ایم چندین روش رسیدن به هدف با عمومیت گوناگون و غنای محتوای گوناگون را ارائه کنیم. تا آنجا که می‌دانستیم همچنین فهرست برنامه‌های عمومی‌تر و پرمحتوایتری را که به‌آسانی در دسترس است ذکر کرده‌ایم. بالاخره، با همان ملاحظات، برخی نرم‌افزارهای تجاری موجود را ذکر کردیم. به دلیل اینکه نرم‌افزارهای تجاری به سرعت تغییر می‌کنند، سعی نکردیم فهرستی کامل و به‌روز بدهیم، بلکه تنها چند نمونه از آنچه موجود است را می‌دهیم.

حل مسائل احتیاج به اصلاح برنامه‌های فهرست‌شده در کتاب یا در برخی موارد، نوشتن برنامه‌های جدید دارند. این مسائل معمولاً در جهت گسترش مطالب کتاب است و اغلب جزئیات بیشتر را در کاوش مثال‌های ایده‌آل فراهم می‌سازند.

نرم‌افزار خاص

تصمیم گرفتیم از بیسیک استاندارد (منظور از بیسیک استاندارد هر نسخه‌ای است که در آن از شماره‌گذاری خط استفاده شده) برای نمایش برنامه‌های این کتاب استفاده کنیم. دلایل اصلی برای این انتخاب عبارت‌اند از: سادگی، در دسترس بودن، قابلیت تطبیق با انواع کامپیوترهای میزبان،

موجود بودن گردآورنده‌ها، و تشابه به فورترن. برنامه‌های بیسیک بر روی بیسیک Q که شماره‌گذاری خط در آن اختیاری است اجرا می‌شوند، اما عکس آن تابع محدودیت‌های قابل توجهی است. موجود بودن گردآورنده‌ها در خور توضیح مختصری است. به دلیل اینکه بیسیک برنامه‌ای تفسیرشدنی است، نسبتاً باکندی اجرا می‌شود، ولی نسخه‌های گردآوری شده بیسیک ابداع شده‌اند که اجرای سریع‌تری را فراهم می‌آورند. این برنامه‌ها نوعاً مشخصه‌های شماره‌گذاری خط بیسیک عادی را پنهان می‌کنند و تغییراتی در زبان به وجود می‌آورند که عموماً حتی آن را بیشتر شبیه فورترن می‌کند. نسخه‌های گردآوری شده بیسیک سریع‌تر اجرا می‌شوند، اما حقیقتاً برای مسائل این کتاب به آن احتیاجی نیست. نکته‌ای که اغلب مبهم مانده این است که برنامه‌هایی که با بیسیک عادی یا بیسیک Q (مثلاً برنامه‌های در این کتاب) نوشته شده‌اند را می‌توان گردآوری کرد. برای انجام گردآوری، برنامه کامل بیسیک شامل تمام زیربرنامه‌ها به عنوان یک پرونده ASCII ذخیره می‌شوند (در بیسیک با دستور SAVE و ذکر "اسم پرونده"؛ در بیسیک Q به طور خودکار). این پرونده سپس در گردآورنده جا داده می‌شود، و برنامه گردآورنده اجرا می‌شود. جایگزین با این می‌توان برنامه شامل شماره‌گذاری خطوط ضروری و تمام زیربرنامه‌ها را مستقیماً در بیسیک Q تایپ کرد. برنامه گردآوری شده بسته به برنامه و گردآورنده، معمولاً چندین برابر سریع‌تر از برنامه اصلی اجرا می‌شود. بیسیک Q شرکت میکروسافت^۱ تقریباً همواره سریع‌تر است (سه یا چهار مرتبه). برخی گردآورنده‌های دیگر به این خوبی عمل نمی‌کنند.

بیسیک برخی عیوب را نیز دارد. دوتا که ما به آن توجه کرده‌ایم عبارت‌اند از، اولاً زبان به اعداد مختلط به عنوان یک نوع استاندارد کمیته‌های عددی نمی‌پردازد. در نتیجه معادلات شامل اعداد مختلط باید صریحاً به قسمتهای حقیقی و موهومی تجزیه شوند. این فرایند خصوصاً در رابطه با مدارهای ac و انتشار امواج آزاردهنده است. دومین عیب این است که به نظر می‌رسد که گردآورنده جامع، سهل‌الوصول، سودمند برنامه‌های علمی و مهندسی در بیسیک وجود ندارد. کتابهای نوشته شده توسط *Miller و *Walker مفیدند، اما برای استفاده عمومی، آنها قابل قیاس با دستورات عملهای عددی^۲ که اکنون برای فورترن، پاسکال، و C موجود است نیستند. برای بیسیک Q میکروسافت، وضعیت با ظاهر شدن دستورات عملهای عددی در بیسیک که مکملی برای دستورات عملهای عددی است بهبود یافته است. برنامه‌ها در این مکمل بر روی بیسیک Q نسخه ۴٫۵ میکروسافت اجرا می‌شود و اغلب می‌توان به سادگی آن را با بیسیک Q تطبیق داد. مطابقت آنها را با بیسیک توصیه نمی‌کنیم. بیسیک نقایص دیگری هم دارد، اما در این سطح مزایای آن بیشتر می‌آرزد.

1. Microsoft

* به فهرست مراجع در انتهای این پیوست رجوع شود.

2. Numerical Recipes

خلاصه نرم افزارها

برنامه‌ها و کدهای این کتاب بدون هیچ تغییری تقریباً با هر نسخه‌ای از بیسیک، بیسیک Q، یا بیسیک سریع میکروسافت اجرا می‌شوند. شماره‌گذاری خط در بیسیک اجباری است و در دوتای دیگر اختیاری است. لیکن محدودیتهای بیسیک الزام می‌کند که برنامه‌ها طوری نوشته شوند که شماره‌گذاری برخی خطوط اجباری باشند. این شماره‌گذاری اجباری خطوط در کادری برای هر برنامه در بالای آن نشان داده شده است. اگر برنامه برای بیسیک Q بخواهد تایپ شود، تنها شماره‌گذاری اجباری خطوط احتیاج به وارد شدن دارد.

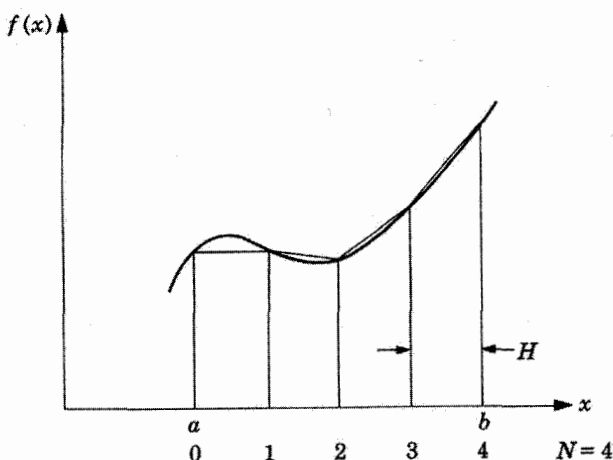
اگر برنامه‌ای در بیسیک (شامل شماره‌گذاری خط) تایپ شود، می‌توان آن را در بیسیک Q با استفاده از دستور SAVE ذخیره کرد و سپس آن را در نرم‌افزار دیگر به روشی که توصیه شده باز کرد. برنامه‌هایی که در اصل با بیسیک Q با شماره‌های خط (توجه کنید که شماره‌های خط به‌طور خودکار وارد نمی‌شوند) نوشته شده‌اند، در بیسیک اجرا خواهند شد، مگر اینکه دستورهایی که توسط بیسیک حمایت نمی‌شوند در برنامه به‌کار برده شده باشند. خصوصاً با زیر برنامه‌ها در بیسیک Q با روشهای پر محتواتری برخورد شده که اینها در بیسیک کار نخواهند کرد. این روش توصیه نمی‌شود.

پ ۱-۳ انجام کامپیوتری روشهای عددی برگزیده

در این قسمت، انجام دو روش کامپیوتری فوق‌العاده متداول، انتگرال‌گیری عددی و حل معادلات خطی را توضیح می‌دهیم.

انتگرال‌گیری عددی

نیاز ما برای انتگرال‌گیری عددی می‌تواند توسط یک فرمول ذوزنقه‌ای و یک برنامه که آن را اجرا کند، برآورده شود. اصل ایده در شکل پ ۱-۱ نشان داده شده است. انتگرال $f(x)$ بین حدود a و b باید محاسبه شود. برای تقریب زدن این انتگرال، محدوده به N فاصله مساوی به پهنای H تقسیم شده است. برای هر فاصله، مقدار $f(x)$ در ابتدای آن با مقدار آن در انتها جمع می‌شود و مجموع در $H/2$ ، که H پهنای فاصله است ضرب می‌شود. سهم این N فاصله با هم جمع می‌شوند تا مقدار تقریبی انتگرال به دست آید. در این مجموع همان‌طور که تعداد فواصل بی‌نهایت شود تعریف انتگرال ریمان است، بنابراین انتظار داریم که تعداد زیادی از فواصل کوچک بتواند تقریب خوبی برای انتگرال بدهد. به‌طور کلی، این انتظار صحیح است، اما اگر تابع زیر انتگرال تکینگی داشته



شکل پ ۱-۱ سطح زیر منحنی توسط ذوزنقه‌ها تقریب زده می‌شود.

باشد یا ایراد داشته باشد، ممکن است برای به دست آوردن نتیجه صحیح دقت قابل ملاحظه‌ای احتیاج باشد، اما ما این نکته را بیشتر دنبال نخواهیم کرد.

برنامه کوتاهی که در شکل پ ۱-۲ فهرست شده این روش را اجرا می‌کند. تابع زیر انتگرال در خط ۲۰۰ تعریف شده است؛ همان‌طور که نوشته شده، تابع زیر انتگرال برای محاسبه توان تابشی توسط یک آنتن نیم‌موج است به همان صورت که در قسمت (۲-۲۰) بحث شد. توابع زیر انتگرال دیگر، می‌توانند در خطوط ۲۰۱ تا ۲۰۹ نوشته شوند، تمام این خطوط به غیر از یکی از آنها را می‌شود به صورت ملاحظه (و نه دستور اجرایی) در آورد تا انعطاف‌پذیری برای انجام انتگرالهای گوناگون مورد نیاز فراهم شود. برنامه ابتدا حدود بالا و پایین و خطا را به صورت کسری از مقدار انتگرال سؤال می‌کند. تقریب برای $N = 1$ تعریف می‌شود. محدوده انتگرال‌گیری به وسیله یک حلقه FOR...NEXT پوشیده می‌شود، و انتگرال با جمع سطوح ذوزنقه، $I(2)$ تخمین زده می‌شود. اگر اختلاف این تعریف با $I(1)$ از خطا بیشتر باشد، برنامه به خط ۲۷۰ برمی‌گردد و تعداد فاصله‌ها را دو برابر می‌کند. این فرایند تا هنگامی که اختلاف بین $I(N)$ و $I(N/2)$ کمتر از خطا شود تکرار می‌شود. تعداد فواصل، مقدار انتگرال، و اختلاف بین $I(N)$ و $I(N/2)$ چاپ می‌شوند. اگر این برنامه به همین ترتیب ساده وارد شود و با حدود ۱- تا ۱ اجرا شود، کامپیوتر اعلام می‌کند که شما از آن تقاضا می‌کنید که بر صفر تقسیم کند. این مسئله در حدود رخ می‌دهد (با وجود اینکه تابع زیر انتگرال واقعاً در دو حد صفر می‌شود)، بنابراین می‌شود به سادگی با انتخاب حدود مختصری متفاوت با ۱- و ۱، مثلاً 0.999 و 0.999 به جای آن دو به مشکل فائق

```

100 /*****
110 /*
120 /*          INTEG3:INTEGRATION BY TRAPEZOIDAL RULE
130 /*          NO ESSENTIAL LINE NUMBERS
140 /*
150 /*****
160 /
170 CLS
180 DIM S(1024): DIM I(1024): DIM D(1024)
190 PI = 4 * ATN(1)
200 DEF FNF (X) = ((COS(PI * X / 2)) ^ 2) / (1 - X ^ 2)
210 INPUT "Lower limit =", LL
220 INPUT "Upper limit =", UL
230 INPUT "Tolerance, T =", T
240 N = 1
250 D(1) = 2 * T
260   WHILE D(N) > ABS(T * I(N))
270     N = 2 * N
280     H = (UL - LL) / N
290     S(0) = (UL - LL) * (FNF(UL) + FNF(LL)) / (2 * N)
300     FOR J = 1 TO N - 1
310       S(N) = S(N) + H * (FNF(LL + J * H))
320     NEXT J
330     I(N) = S(0) + S(N)
340     D(N) = ABS(I(N) - I(N / 2))
350   WEND
360 PRINT "N =", N, "I(N) =", I(N), "D(N) =", D(N)
370 END

```

شکل پ ۱-۲ برنامه بسیک برای انتگرالگیری به وسیله قاعده دوزنقه (تابع زیر انتگرال در خط ۲۰۰ تعریف شده است).

آمد. با این حدود، برنامه به راحتی اجرا می‌شود و پاسخ بسیار رضایتبخشی را برای ۵۱۲ فاصله می‌دهد. اما، مسئله بخش بر صفر همواره مشکلی است که به نوعی باید بر آن غلبه کرد.

معادلات خطی همزمان

حل مجموعه معادلات خطی همزمان یکی از مسائلی است که مکرر در ریاضی فیزیک با آن روبه‌رو می‌شویم. ما خود را به مجموعه معادلات بدون تکینگی (یعنی $|A_{ij}| \neq 0$) با ضرایب حقیقی به شکل زیر محدود می‌کنیم

$$\sum_i A_{ij} W_j = D_i \quad (\text{پ ۱-۱})$$

روش واضح این است که از قاعده کرامر^۱ برای یافتن معکوس ماتریس A استفاده کنیم و سپس معادله (پ ۱-۱) را در این معکوس ضرب کنیم تا W_j ها را به دست آوریم. اما، کاملاً شناخته شده است که اگر N ، تعداد معادلات نسبتاً زیاد باشد، این روش فوق‌العاده وقت‌گیر است، حتی برای کامپیوترهای سریع. خوشبختانه، روشهای سریع‌تر دیگری وجود دارد و ما در اینجا روش حذف گاوس-جردن^۲ با محوسازی کامل را توضیح می‌دهیم. به ساده‌ترین شکل آن، حذف شامل کم کردن مضربهای معادله اول از دیگر معادلات، برای حذف کردن W_1 از تمام معادلات بجز معادله

اول است. همین روش برای به‌کار بردن معادله دوم برای حذف W_2 از تمام معادلات بجز دومی، و غیره دنبال می‌شود. نتیجه مجموعه‌های معادلاتی به شکل $W_1 = C_1$ است، که C_i ها از D_i ها در فرایند حذف به‌دست می‌آیند. وقتی که برخی از اجزای قطری ماتریس ضرایب کوچک هستند، این روش به مشکل برمی‌خورد. در این مورد خطاهای مربوط به گرد کردن می‌تواند نتایج غلط حاصل کند. از این کار با محوسازی می‌شود پرهیز کرد، این عمل با عوض کردن سطرها به طوری که بزرگترین جزء ماتریس روی قطر قرار گیرد و سپس حذف کردن دیگر اجزای آن ستون حاصل می‌شود. با بزرگترین جزء باقیمانده در ماتریس همین رفتار می‌شود. بعد از N بار تکرار، یک ماتریس قطری باقی می‌ماند که می‌توان به سادگی آن را به ماتریس واحد تقلیل داد. در این فرایند، طرف دست راست به پاسخ تبدیل می‌شود. باید توجه داشت که محوسازی کامل همیشه لازم نیست، و اغلب حل‌کننده‌های با فکر معادله خطی فقط اگر جزء قطر از مقدار از پیش تعیین شده‌ای کوچکتر باشد محوسازی می‌کنند. فرایند محوسازی کامل توسط برنامه‌ای که در شکل (پ ۱-۳) فهرست شده انجام می‌شود. برنامه ابتدا بزرگترین جزء ماتریس را می‌یابد و سپس سطرها را تعویض می‌کند تا این بزرگترین جزء را بر روی قطر قرار دهد. هر جزء در آن سطر به بزرگترین جزء تقسیم می‌شود، برای اینکه جزء قطر به واحد تقلیل یابد. مضربهای آن سطر از دیگر سطرها کم می‌شود تا اجزای غیرقطری در ستون محور شده را صفر کنیم. فرایند با مستثنی کردن اولین سطر محور شده از جستجو، برای یافتن بزرگترین جزء ماتریس، ادامه می‌یابد. بعد از تعداد تکراری که برابر با تعداد معادلات باشد، ماتریس A به ماتریس واحد تبدیل می‌شود، و بردار D به بردار پاسخ تبدیل می‌شود. تنها چیزی که احتیاج به توضیح بیشتر دارد ماتریس ثبت‌کننده R است که سه ستون و به تعداد معادلات سطر دارد و محوسازی را دنبال می‌کند. سومین ستون این ماتریس با مقادیر صفر برای تمام اجزاء شروع می‌شود. بعد از اینکه بزرگترین جزء پیدا شد، مقادیر اولین سطر عوض می‌شود تا موقعیت سطر و ستونی بزرگترین جزء را نشان دهند و سومین ستون به واحد تبدیل می‌شود. شاخصهای سطر و ستونها همان‌طور که بزرگترین جزء به قطر انتقال می‌یابند تغییر می‌کنند. در دومین تکرار، این سطر جا گذاشته می‌شود و بزرگترین جزء باقیمانده پیدا می‌شود. اگر بعد از اینکه تمام سطرها عمل شدند، جزئی در ستون سوم ماتریس R یک نباشد، بدین معنی است که ماتریس تکینه است و پیغامی در این ارتباط ظاهر می‌شود. بسیاری از برنامه‌های روش گاوس-جردن همچنین درمیان ضرایب ماتریس را محاسبه می‌کنند و به‌طور صریح معکوس ماتریس را به‌دست می‌آورند. این برنامه را می‌توان برای انجام این قبیل محاسبات توسعه داد. اما چون ما در این کتاب از آنها استفاده نمی‌کنیم، نسخه کوتاه‌تری فهرست شده است. تحت برخی شرایط، ابعاد R و W را می‌شود با برنامه کنترل مشخص کرد، که در آن صورت برای پرهیز از

```

2000 /*****
2005 / *
2010 / *           G-J2KA: GAUSS-JORDAN ELIMINATION SUBROUTINE
2015 / *           LINE NUMBERS 2000, 2245, 2250, 2345 AND 2431 ARE ESSENTIAL
2020 / *
2025 /*****
2030 / Required inputs: M1%, N1%, N2%, A(I,J), D(I); Dimensions of A, D, W
2035 / should be specified by I-O program. Solution is generated as W(I) in
2040 / in the same order as input, but not printed. Main program should order
2045 / printing.
2050 /
2055 'Identifiers
2060 / A coefficient matrix
2065 / B1 biggest value
2070 / D constant vector
2075 / H1 work variable
2080 / IR% row index
2085 / IC% column index
2090 / M1% maximum dimension of matrices
2095 / N1% number of rows
2100 / N2% number of columns
2105 / P1 pivot element
2110 / R% work matrix
2115 / W solution matrix
2120 / Note - I,J,K & L with or without suffixes are indices
2125 / End of identifiers
2130 /
2135 DIM R%(M1%, 3)
2140 /
2145 'Initialize R%(I%,3) and W(I%)
2150 FOR I% = 1 TO N2%
2155 W(I%) = D(I%)
2160 R%(I%, 3) = 0:
2165 NEXT I%
2170 /
2175 'Diagonalize A(I%,J%)
2180 FOR I% = 1 TO N2%
2185 /
2190 'Search for largest (pivot) element, B1
2195 B1 = 0:
2200 FOR J% = 1 TO N2%
2205 IF (R%(J%, 3) = 1) THEN 2250
2210 FOR K% = 1 TO N2%
2215 IF (R%(K%, 3) > 1) THEN PRINT "Error1 - Matrix is singular"
2220 IF (R%(K%, 3) = 1) THEN 2245
2225 IF (B1 >= ABS(A(J%, K%))) THEN 2245
2230 IR% = J%
2235 IC% = K%
2240 B1 = ABS(A(J%, K%))
2245 NEXT K%
2250 NEXT J%
2255 /
2260 'Change R% to indicate biggest element in position IR%, IC%
2265 R%(IC%, 3) = R%(IC%, 3) + 1
2270 R%(I%, 1) = IR%
2275 R%(I%, 2) = IC%
2280 /
2285 'Interchange rows to put pivot element on diagonal
2290 IF (IR% = IC%) THEN 2345
2295 FOR L% = 1 TO N2%
2300 H1 = A(IR%, L%)
2305 A(IR%, L%) = A(IC%, L%)
2310 A(IC%, L%) = H1
2315 NEXT L%
2320 H1 = W(IR%)
2325 W(IR%) = W(IC%)
2330 W(IC%) = H1
2335 /
2340 'Divide pivot row by pivot element
2345 P1 = A(IC%, IC%)
2350 IF ABS(P1) < .0000001 THEN PRINT "Error2 - matrix is ill conditioned"
2355 A(IC%, IC%) = 1
2360 FOR L% = 1 TO N2%
2365 A(IC%, L%) = A(IC%, L%) / P1
2370 NEXT L%

```

شکل پ ۳-۱ برنامهٔ بیسیک برای روش حذف گاوس-جردن.


```

2375     W(IC%) = W(IC%) / P1
2380
2385 'Reduce elements in column IC% in non-pivot rows
2390     FOR L1% = 1 TO N2%
2395         IF (L1% = IC%) THEN 2430
2400             T = A(L1%, IC%)
2405             A(L1%, IC%) = 0
2410             FOR L% = 1 TO N2%
2415                 A(L1%, L%) = A(L1%, L%) - A(IC%, L%) * T
2420             NEXT L%
2425             W(L1%) = W(L1%) - W(IC%) * T
2430     NEXT L1%
2435
2440     NEXT I%
2445
2450 'Test for errors
2455     FOR K% = 1 TO N2%
2460         IF (R%(K%, 3) <> 1) THEN PRINT "Error3 - matrix is singular": STOP
2465     NEXT K%
2470
2475 RETURN: 'Return to main program from Gauss-Jordan subroutine
2480 END

```

شکل پ ۳-۱ (ادامه)

```

100 '*****
110 '*
120 '*           G-J_TEST: PROGRAM TO PROVIDE TEST INPUT AND PRINT OUTPUT FOR
130 '*           GAUSS-JORDAN EQUATION SOLVING PROGRAM
140 '*           NO ESSENTIAL LINE NUMBERS
145 '*
150 '*
160 '*****
170 INPUT "M1% =", M1%
180 DIM A(M1%, M1%), D(M1%), W(M1%)
190 N1% = 4: N2% = 4
200 A(1, 1) = 1: A(1, 2) = 2: A(1, 3) = 3: A(1, 4) = 4: D(1) = 15
210 A(2, 1) = 2: A(2, 2) = 3: A(2, 3) = 4: A(2, 4) = 1: D(2) = 12
220 A(3, 1) = 3: A(3, 2) = 4: A(3, 3) = 1: A(3, 4) = 2: D(3) = 11
230 A(4, 1) = 4: A(4, 2) = 1: A(4, 3) = 2: A(4, 4) = 3: D(4) = 12
240 GOSUB 2000
250 PRINT "X1 =", W(1), "X2 =", W(2), "X3 =", W(3), "X4 =", W(4)
260 END

```

شکل پ ۴-۱ برنامه ورودی-خروجی به زبان بیسیک برای آزمایش برنامه گاوس-جردن. (پاسخها برای امتحان مسئله: $X_1 = 0.5, X_2 = 1, X_3 = 1.5, X_4 = 2$).

گرفتن پیغامهای غلط، باید به ابتدای خطوط ۲۱۲۰ و ۲۱۲۵ علامت آپوستروف اضافه کرد. برای سهولت می‌شود برنامه را با مجموعه ساده‌ای از معادلات با پاسخهای شناخته شده آزمایش کرد. یک ورودی آزمایشی در شکل (پ ۴-۱) فهرست شده است. اگر این برنامه کوتاه جا داده شود و برنامه گاوس-جردن (شکل پ ۳-۱، G-J2KA) با آن ادغام شود، اجرای برنامه باید پاسخهای نشان داده شده را تولید کند.

ملاحظات در باره تحلیل عددی

تقریباً هیچ مطلبی درباره تحلیل عددی بیان نکرده‌ایم. تحلیل عددی آن قدر با اهمیت است که نمی‌توان با ذکر چند کلمه در کتابی که درباره موضوع دیگری است از کنار آن گذشت. اما، مهم

است که توجه کنیم که با توان کامپیوترهای عصر ما، بی‌نهایت ساده می‌شود به دردسر همگرایی، پایداری، و بسیاری دیگر از دامهای تحلیلهای عددی گرفتار شد. کتابهای بسیاری در ارتباط با تحلیل عددی در زمینه محاسبات جدید کامپیوتری وجود دارد؛ برخی از آنها در فهرست مراجع در آخر این پیوست داده شده‌اند. مفید است که یکی از آنها را به منظور مرجع برای زمانی که مشکلی پیش می‌آید در دسترس داشت.

پ ۱-۴ نکته‌های سودمند

چندین نکتهٔ سودمند که در مراجع متداول به سختی پیدا می‌شوند، در اینجا فهرست شده است.

- همواره ایده خوبی است که برنامه‌ها را با مسئله‌ای با پاسخهای معلوم آزمایش کرد. مسائلی که می‌توان دستی انجام داد اغلب بهترین مسائل برای آزمایش کردن هستند. فرایند حل با کامپیوتر را سپس می‌توان عاقلانه با گنجانیدن عبارتهای PRINT و STOP موقت دنبال کرد. به دلایل مشابه بهترین راه، استفاده از مجموعه داده‌هایی است که برای آزمایش تمام امکانات برنامه به اندازه کافی بزرگ باشند. مثلاً در فصل ۱۳، برای امتحان کردن برنامه، سه فرکانس کافی است. پس از اطمینان از آنکه برنامه به نحو مناسب اجرا می‌شود، کل مجموعه داده‌ها را می‌توان وارد کرد.

۲. دستور زیر

```
PRINT "Press any key to continue." : K$ = INPUT $(1)
```

برنامه را متوقف خواهد کرد تا کلیدی بر روی صفحه کلید فشار داده شود. K\$ یک متغیر رشته‌ای است که قبلاً استفاده نشده باشد. این متغیر برای توقف کوتاه و امتحان ورودیها روی صفحه نمایشگر بعد از اینکه آنها وارد شدند مفید است.

۳. برای نشان دادن انتخاب کاربر، خطوط زیر

```
INPUT "Do you wish to (statement) (Y/N)"; A$
IF A$ = "Y" GOTO (line number) [or THEN GOSUB (line
number) . . . RETURN (line number)]
```

کاربر را قادر می‌سازد که انتخاب کند آیا عبارت داخل پرانتز را اجرا کند یا خیر. این عبارت می‌تواند برای دست کشیدن از ادامه کار، چاپ کردن، یا اجرا کردن زیر برنامه، به دلخواه کاربر مورد استفاده قرار گیرد. مثل همیشه قدری احتیاط لازم است تا اطمینان حاصل شود که ورودها و خروجها برای اجرای منطق مطلوب در نقاط مناسب انجام شوند.

۴. جمع کردن سریها. ساده‌ترین راه محاسبه جمع N جمله اول سری T_j $S_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-1} T_j$

استفاده از رابطه بازگشتی $T_N = f(T_{N-1}, N-1)$; $S_N = S_{N-1} + T_N$ در یک حلقهٔ FOR NEXT یا یک حلقهٔ WHILE WEND است. مثلاً

```
INPUT "X=", X: INPUT "N=", N
S(0) = 1: T(0) = 1
FOR J = 1 TO N
T(J) = T(J-1) * X/J
S(J) = S(J-1) + T(J)
NEXT J
```

جمع، $S(N)$ ، $N+1$ جمله اول بسط سری $x \exp$ را محاسبه می‌کند. این فرایند چندین مرتبه در کتاب و پیوستها در برنامه‌های مختلف به‌کار برده شده است.

۵. متغیرها باید مقدار اولیه‌اشان مشخص شود؛ وگرنه آنها با آنچه در مخزن ذخیره تعیین شده باقی مانده است شروع خواهند شد. برای همین است که خط دوم در بند چهار برنامه کوتاه بالا آورده شده است.

۶. بسیاری از محاسبات به عدد π احتیاج دارند. با دستور

$$PI = 4 * ATN(1)$$

می‌توان هر زمان که π احتیاج است PI بنویسیم.

۷. به خاطر داشته باشیم که DEF FN را می‌توان برای تعریف کردن توابع برحسب توابع از پیش تعریف شده بیسیک به‌علاوه عبارات جبری به‌کار برد. بنابراین، مثلاً

$$DEF FN TANH(X) = (EXP(X) - EXP(-X)) / (EXP(X) + EXP(-X))$$

تائزانت هذلولوی را با عبارت FN TANH(X)، تهیه می‌کند.

۸. به خاطر داشته باشیم که آرایه‌ها باید به‌طور صریح ابعادشان مشخص شود اگر بعد از ۱۰ تجاوز کند، و همواره فکر خوبی است که بعد آنها را مشخص کنیم. توجه کنید، برای مثال $S(N)$ ، $I(N)$ ، و $D(N)$ همه در خط ۱۶۰ شکل پ ۱-۲ ابعادشان مشخص شده است. همچنین مشخص کردن ابعاد تمام مقادیر را در ابتدا برابر با صفر قرار می‌دهد.

۹. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، PRINT و STOP ابزار سودمندی برای غلط‌گیری‌اند.

۱۰. بعضی اوقات سودمند است خطوط کد را با گنجانیدن REM یا یک آپوستروف (') در ابتدای خط آن را از خط دستور تبدیل به "ملاحظات" کرد. این خطوط در اجرای برنامه چشمپوشی می‌شود، اما می‌توانند به سادگی با پاک کردن REM یا آپوستروف دوباره فعال شوند.

۱۱. بالاخره، سفارش قبلی را تکرار می‌کنیم که "از نرم‌افزارهای هوشمند نوشته شده توسط افراد دیگر استفاده کنید".

پ ۱-۵ مراجع

مراجع فهرست شده زیر با هدف کامل بودن نوشته نشده است، اما شامل برخی مراجع سودمند است.

تحلیل عددی

1. Hanning, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill, 1973; reprinted New York: Dover, 1986).
2. Stoer, J., and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis* (New York: Springer, 1983).

برنامه‌نویسی کامپیوتری

1. Kunth, Donald, *The Art of Computer Programming* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1969).
2. Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge: Cambridge University Press, 1986, 1989).

این کتاب به صورت نسخه‌های FORTRAN، پاسکال، و "C" موجود است، و یک جلد همراه برای استفاده با بیسیک سریع نسخه ۴٫۵ موجود است و در زیر فهرست شده است.

بیسیک و کاربرها

1. "Microsoft GW-BASIC: User's Guide and User's Reference," Redmond, WA, Microsoft Corporation, 1987.
2. Halvorson, Michael, and David Rygmyr, *Learn BASIC Now* (Redmond, WA: Microsoft Press, 1989).

این کتاب آموزنده بیسیک Q با لوحهای شامل بیسیک Q تمرینها می‌آید. ظاهراً دستورالعمل مرجعی وجود ندارد؛ پرونده‌های راهنمای جامع همراه با بیسیک Q این منظور را برآورده می‌کنند.

3. Rugg, T., and P. Feldman, *Using BASIC* (Carmel, IN: Que Corporation, 1990).

این کتاب یکی از نمونه‌های کتابهای فراوان در فروشگاههاست. این کتاب یک روش بسیار راحت آموختن زبان بیسیک را فراهم می‌سازد. این کتاب شامل مطالب زیادی درباره حل مسائل ریاضی نمی‌باشد.

4. Rugg, T., and P. Feldman, *Using BASIC* (Carmel, IN: Que Corporation, 1991).

همان مطالب فوق برای استفاده از بیسیک در مورد این کتاب صادق است.

5. Miller, Alan R., *BASIC Programs for Scientists and Engineers* (San Francisco: SYBEX Corporation, 1981).

این کتاب تقریباً شامل ۵۰ برنامه برای استفاده عمومی، و مثالهایی از کاربردهای آنهاست و مقدمه سودمندی برای نوشتن برنامه‌های تکنیکی بیسیک است.

6. Koonin, Steven E., *Computational Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1986).

مؤلف برای بحث درباره مسائل فیزیکی مورد علاقه واقعی بیسیک را به‌کار می‌برد. برخی از برنامه‌ها بسیار پر شاخ و برگ هستند. این کتاب ادامه خوبی برای مرجع ۵ است.

7. Walker, Robert D., *Numerical Methods for Engineers and Scientists* (Summit, PA: TAB Books, 1987).

مؤلف ۲۱ برنامه بیسیک را برای انجام کارهای ریاضی سودمند از جمله درونیابی، برازش منحنی، اعداد مختلط، جبر ماتریسها، حل مجموعه‌های معادلات خطی همزمان، و غیره را فهرست می‌کند. همچنین فهرست سودمندی از برنامه‌های موجود دارد که دسترسی راحت به هر یک از برنامه‌ها را فراهم می‌سازد. برنامه‌ها برای حل مسائل ریاضی مرتب شده‌اند، اما آنها را می‌توان در دیگر برنامه ادغام کرد.

8. Sprott, Julien C., *Numerical Recipes in BASIC* (Cambridge: Cambridge University Press, 1991).

جلد همراهی برای کتاب *Numerical Recipes*، این کتاب تمام مطالب از کتاب *Numerical Recipes* را شامل نمی‌شود؛ هر دو کتاب مورد نیاز است. برنامه‌ها و مثالها برای کار کردن با QuickBASIC 4.5 آماده شده است.

پیوست ۲

تبدیل مختصات، بردارها، و تانسورها

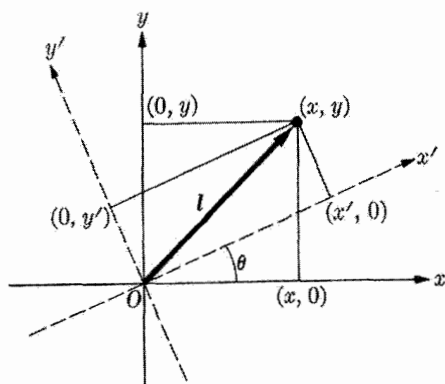
برای ایجاد اختصار در نمادگذاری، به جای مختصات دکارتی x, y, z نمادهای x_1, x_2, x_3 را به کار خواهیم برد. اگر در یک تبدیل مختصات بتوانیم مختصات جدید را به صورت ترکیبی خطی از مختصات قدیم بیان کنیم، آن تبدیل، تبدیل خطی نامیده می‌شود. بدین ترتیب

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}\quad (\text{پ ۲-۱})$$

یا

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j \quad (\text{پ ۲-الف})$$

یک تبدیل خطی است. جمع‌بندی از $j = 1$ است تا $j = 3$. به علاوه i می‌تواند هر یک از مقادیر $1, 2, 3$ را به خود بگیرد. مجموعه ضرایب $\{a_{ij}\}$ تبدیل را توصیف می‌کنند.



شکل پ ۱-۲ دوران محورهای مختصات در دو بعد. خط یر رنگ تصویر بردار l روی صفحه xy است.

برای مثال، تبدیل مختصاتی را که با روابط زیر توصیف می‌شود، در نظر بگیرید

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\text{پ ۲-۲})$$

$$z' = z$$

این تبدیل، دورانی حول محور z با زاویه θ را توصیف می‌کند، که در آن محورهای x و y به ترتیب به محورهای x' و y' تبدیل می‌شوند (شکل پ ۱-۲). طول بردار، یعنی، $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، در این تبدیل بدون تغییر (ناوردا) می‌ماند، زیرا از رابطه (پ ۲-۲) واضح است که

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (\text{پ ۳-۲})$$

معادله (پ ۲-۲) مثالی از یک تبدیل متعامد در سه بعد است. تبدیل متعامد تبدیلی است حقیقی که طول یک بردار را بدون تغییر باقی می‌گذارد. درباره خواص تبدیلهای متعامد در بندهای زیر به تفصیل بیشتر بحث خواهد شد.

یک تبدیل هنگامی متعامد است که در طول بردار جابه‌جایی (یا به طور معادل، در $\sum x_i^2$) تغییری ندهد. فرض کنیم که (پ ۱-۲ الف) یک تبدیل متعامد است، در این صورت

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_k x_k^2 \quad (\text{پ ۴-۲})$$

ولی

$$(x'_i)^2 = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} x_j x_k$$

و

$$\sum_i (x'_i)^2 = \sum_j \sum_k \sum_i a_{ij} a_{ik} x_j x_k \quad (\text{پ } ۵-۲)$$

معادلات (پ ۴-۲) و (پ ۵-۲) تنها در صورتی با یکدیگر سازگارند که داشته باشیم

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (\text{پ } ۶-۲)$$

معادله اخیر را می‌توان با وارد کردن دلتای کرونکر، δ_{jk} ، که در بخش ۹-۲ تعریف شد، به صورت خلاصه زیر نوشت

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (\text{پ } ۶-۲ الف)$$

معادله (پ ۶-۲ الف) شرطی است که باید اعمال شود تا تبدیل $\{a_{ij}\}$ را یک تبدیل متعامد بسازد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که دوران، (پ ۲-۲)، در این شرط صدق می‌کند.

تبدیل (پ ۱-۲) را می‌توان به‌طور نمادی به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (\text{پ } ۷-۲)$$

که در آن \mathbf{X}' بردار مکان با مؤلفه‌های تبدیل شده (x'_1, x'_2, x'_3) است، \mathbf{X} بردار مکان با مؤلفه‌های اصلی (x_1, x_2, x_3) است، و \mathbf{A} به‌عنوان یک عملگر ماتریسی در نظر گرفته می‌شود. در واقع \mathbf{A} ماتریس ضرایب $\{a_{ij}\}$ است

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{پ } ۸-۲)$$

اگر بردارهای \mathbf{X} و \mathbf{X}' را به صورت ماتریسهای ستونی نشان دهیم، می‌توانیم معادله (پ ۷-۲) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{پ } ۷-۲ الف)$$

تبدیل (پ ۱-۲) از معادله اخیر، با استفاده از قوانین معمولی ضرب ماتریسی، نتیجه می‌شود. بدین ترتیب، ماتریس \mathbf{A} که با (پ ۸-۲) داده شده است و معادله (پ ۱-۲ الف)، دو طریق معادل برای توصیف تبدیل مختصات‌اند.

معکوس یک تبدیل باید ما را دوباره به مجموعه مختصات اصلی برساند. بنابراین اگر $\{b_{ij}\}$ تبدیل معکوس $\{a_{ij}\}$ باشد، آنگاه

$$x_j = \sum_i b_{ji} x'_i \quad (\text{پ ۲-۹})$$

از ترکیب این معادله با (پ ۲-۱ الف)، خواهیم داشت

$$x_j = \sum_k \sum_i b_{ji} a_{ik} x_k$$

که این معادله، در صورتی که معادله زیر برقرار باشد، مانند یک اتحاد است

$$\sum_i b_{ji} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (\text{پ ۲-۱۰})$$

معادله (پ ۲-۱۰) شرطی است که بر روی \mathbf{B} گذاشته می شود تا \mathbf{B} تبدیل معکوس \mathbf{A} باشد. به علاوه، اگر \mathbf{A} یک تبدیل متعامد باشد، آنگاه (پ ۲-۱۰ الف) نیز صادق است. مقایسه (پ ۲-۱۰ الف) با (پ ۲-۱۰) نشان می دهد که اگر ماتریس \mathbf{B} طوری ساخته شود که

$$b_{ji} = a_{ij} \quad (\text{پ ۲-۱۱})$$

باشد، آنگاه \mathbf{B} در واقع تبدیل معکوس را توصیف خواهد کرد. بنا بر (پ ۲-۱۱)، ماتریس \mathbf{B} از تعویض جای سطرها با ستونهای \mathbf{A} ساخته می شود. ماتریس جدید ترانهاده \mathbf{A} نامیده می شود و آن را با نماد $\tilde{\mathbf{A}}$ نشان می دهند. بنابراین، معکوس یک تبدیل متعامد عبارت است از ترانهاده تبدیل اصلی. در فصل ۱ یک تابع برداری را به عنوان کمیتی تعریف کردیم که در هر نقطه از فضا دارای اندازه و جهت است. یک تعریف دیگر عبارت است از

بردار کمیتی است که مؤلفه های آن تحت یک تبدیل متعامد مثل مؤلفه های بردار مکان تبدیل شوند.

بنابراین، اگر \mathbf{F} یک تابع برداری باشد، تبدیل آن، \mathbf{F}' ، که از یک تبدیل متعامد \mathbf{A} نتیجه می شود، عبارت است از

$$\mathbf{F}' = \mathbf{A}\mathbf{F} \quad (\text{پ ۲-۱۲})$$

توابع نرده ای مکان، مثل طول یک بردار یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار، در یک تبدیل متعامد، تغییر نمی کنند (ناوردا هستند).

علاوه بر نرده‌ایها و بردارها، کمیت‌های پیچیده‌تر دیگری وجود دارند. یکی از اینها، که خواص تبدیل آن مورد نیاز ماست، تانسور مرتبهٔ دوم یا به زبان ساده‌تر، تانسور است. تانسور کمیتی است با مؤلفه‌های دو شاخصی؛ بنابراین T_{ij} یکی از مؤلفه‌های تانسور \mathbf{T} است که در آن i و j هر کدام می‌توانند مقادیر ۱، ۲، و ۳ را داشته باشند. خواننده با تانسور گشتاور چارکطبی Q_{ij} (بخش ۲-۹)، تانسور دی‌الکتریک ϵ_{ij} برای محیطهای ناهمسانگرد (بخش ۱۶-۳)، و تانسور چهاربعدی میدان $F_{\mu\nu}$ (فصل ۲۲) برخورد خواهد کرد. یک مثال مشهورتر از مکانیک، تانسور گشتاور لختی است. یک رابطهٔ خطی بین دو کمیت برداری را می‌توان برحسب یک تانسور مرتبهٔ دوم بیان کرد. بنابراین، اندازهٔ حرکت زاویه‌ای \mathbf{L} یک جسم صلب را می‌توان توسط تانسور گشتاور لختی \mathbf{I} به سرعت زاویه‌ای آن $\boldsymbol{\omega}$ ، مربوط کرد

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

یا

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

خود تانسور را می‌توان به شکل ماتریسی بیان کرد

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

فرض کنید دو بردار \mathbf{F} و \mathbf{X} از طریق رابطهٔ تانسوری زیر به‌طور خطی به یکدیگر مربوط باشند

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \mathbf{X} \quad (\text{پ } ۱۳-۲)$$

حال اگر یک تبدیل متعامد \mathbf{A} صورت گیرد، \mathbf{X} به \mathbf{X}' و \mathbf{F} به \mathbf{F}' تبدیل می‌شود. ما باید بتوانیم معادلهٔ (پ ۱۳-۲) را در دستگاه تبدیل‌شده به‌صورت زیر بیان کنیم

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}' \mathbf{X}' \quad (\text{پ } ۱۴-۲)$$

که در آن \mathbf{T}' تبدیل \mathbf{T} است. ولی

$$F'_i = \sum_j a_{ij} F_j = \sum_j \sum_k a_{ij} T_{jk} X_k$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_j \sum_k \sum_m a_{ij} T_{jk} (\tilde{a})_{km} X'_m \\
 &= \sum_m \left[\sum_j \sum_k a_{ij} T_{jk} (\tilde{a})_{km} \right] X'_m \quad (\text{پ } ۱۵-۲)
 \end{aligned}$$

که در آن $(\tilde{a})_{km} \equiv a_{mk}$. برای اینکه معادلات (پ ۱۴-۲) و (پ ۱۵-۲) با یکدیگر سازگار باشند، باید

$$T'_{im} = \sum_j \sum_k a_{ij} T_{jk} (\tilde{a})_{km} \quad (\text{پ } ۱۶-۲)$$

معادلهٔ اخیر قانون تبدیل یک تانسور مرتبهٔ دوم را تحت یک تبدیل متعامد، بیان می‌کند. معادلهٔ (پ ۱۶-۲) همچنین قاعدهٔ ضرب سه ماتریس را در یکدیگر برای یافتن مؤلفهٔ m و i ماتریس حاصل بیان می‌کند. بدین ترتیب، معادلهٔ (پ ۱۶-۲) را به‌طور نمادی به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{T}' = \mathbf{AT}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{ATA}^{-1} \quad (\text{پ } ۱۶-۲ \text{ الف})$$

در پایان می‌خواهیم قانون تبدیل را برای عملگر دیفرانسیلی برداری ∇ تعیین کنیم. مؤلفهٔ i ام گرادیان یک تابع ناوردای نرده‌ای φ را در نظر بگیرید؛ φ را به‌صورت تابعی از مختصات x_j در نظر می‌گیریم که x_j خود تابعی از مختصات جدید x'_i است. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتق‌گیری جزئی، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

از معادلهٔ (پ ۹-۲) داریم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum_j b_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (\text{پ } ۱۷-۲)$$

و با استفاده از (پ ۱۶-۲ الف) برای تبدیل متعامد، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{پ } ۱۸-۲)$$

بنابراین تحت یک تبدیل متعامد، مؤلفه‌های ∇ مانند مؤلفه‌های بردار مکان، (پ ۱۶-۲ الف)، تبدیل می‌شوند.^۱

۱. تحت تبدیلهای کلی‌تر، باید بین کمتهایی که بنا بر (پ ۱۷-۲) تبدیل می‌شوند با آنهایی که بنا بر (پ ۱۶-۲ الف) تبدیل می‌شوند، تمایز قائل شویم. این کمتهای، به ترتیب بردارهای هموردا و بردارهای یادوردا نامیده می‌شوند، ولی ما نیازی به این تمایز نداریم.

پیوست ۳

دستگاههای یکاها

در این کتاب از دستگاه یکاهای mks منطقی شده یار استفاده شده است. این دستگاه این مزیت را دارد که یکاهای الکتریکی عملی برای اختلاف پتانسیل (ولت)، جریان (آمپر)، مقاومت (اهم)، و مانند آن را شامل می شود. در نتیجه، مهندسان برق به سرعت این دستگاه را پذیرفتند و اکنون دستگاه استاندارد بین المللی است. در حوزه های دیگر، مخصوصاً در فیزیک اتمی، هسته ای، حالت جامد، و پلاسما، دستگاه دیگری، به نام دستگاه گاوسی، هنوز متداول تر است. دستگاههای دیگر اغلب کنار گذاشته شده اند و بنابراین در اینجا تنها دستگاه گاوسی به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در دستگاه یکاهای mks حضور اعداد ϵ_0 و μ_0 به ترتیب در فرمولبندی قانون کولن و قانون بیو ظاهراً باعث اشکال می شوند. این اشکال به طور ساده، این است که قانون کولن

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 r_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{پ ۱-۳})$$

را نمی توان برای تعریف کولن به کار برد، مگر آنکه ϵ_0 معلوم باشد. به طور مشابه نمی توان از آن برای تعریف ϵ_0 استفاده کرد مگر آنکه کولن قبلاً تعریف شده باشد. یک نکته فنی این است که چون ϵ_0

اصولاً عددی است که از طریق آزمایش تعیین می‌شود، به‌کار بردن رابطه (پ ۱-۳) برای تعریف کولن به مقداری برای کولن منجر خواهد شد که هر بار که تعیین ϵ_0 تجدید شود، تغییر خواهد کرد. بنابراین واضح است که باید رابطه (پ ۱-۳) برای تعریف ϵ_0 به‌کار رود و کولن به طریق دیگری تعریف شود. چنین اشکالی در مورد مغناطیس به‌وجود نمی‌آید، زیرا برحسب تعریف

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

اختیار می‌شود. بنابراین، عبارت

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{r} \quad (\text{پ ۲-۳})$$

برای نیرو در واحد طول بین دو سیم موازی حامل جریان را می‌توان به‌صورت زیر برای تعریف آمپر به‌کار برد:

یک آمپر آن مقدار جریان پایایی است که، هنگامی که در دو رسانای طویل موازی وجود دارد، که به فاصله یک متر از یکدیگر قرار دارند، نیرویی در هر متر از طول بین آنها به‌وجود می‌آید که از لحاظ عددی برابر است با 2×10^{-7} نیوتون بر متر.

البته می‌توان هر وضعیت هندسی دیگری را به‌کار برد و تعریف بدون ابهامی (و در واقع از لحاظ عددی یکسانی) برای آمپر به‌دست آورد.

بدین ترتیب با در دست داشتن آمپر، کولن طبق تعریف برابر باری است که یک جریان پایایی در مدت یک ثانیه منتقل می‌کند. این به‌نوبه خود استفاده از رابطه (پ ۱-۳) را برای تعریف ϵ_0 امکان‌پذیر می‌کند. بنابراین هیچ مسئله واقعی وجود ندارد، و تنها یک مسئله ساختگی وجود دارد که ناشی از آن است که ما خواسته‌ایم مبحث الکتروستاتیک را که از نظر ریاضی ساده‌تر است، قبل از بحث درباره برهم‌کنش مغناطیسی جریانه‌ها، بررسی می‌کنیم.

بعضی اوقات تصور می‌شود که اگر دستگاه یکاهای گاوسی cgs به‌کار رود این مسئله به‌وجود نمی‌آید. این مطلب تنها در اینکه ضریب موجود در قانون کولن برابر $1 \text{ dyn cm}^2 / \text{esu}^2$ انتخاب می‌شود صحیح است، ولی این انتخاب دشواری توافق با آزمایش را به روی برهم‌کنشهای مغناطیسی قرار می‌دهد. این بدان معنی است که در عبارت نیروی بین رساناهای حامل جریان، سرعت نور ظاهر می‌شود. چون در بررسی معمول ابتدا به کمیتی برمی‌خوریم که به‌طور مناسب تعریف شده است، مسئله در دستگاه گاوسی کمتر آشکار است تا در دستگاه mks.

دستگاه گاوسی ترکیبی از دو دستگاه قدیمی‌تر است: دستگاه الکتروستاتیکی، esu، و دستگاه الکترومغناطیسی، emu. دستگاه الکتروستاتیکی بدین ترتیب حاصل می‌شود که قانون کولن را به

شکل زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2 r_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{پ ۳-۳})$$

و واحد الکتروستاتیکی بار، esu، را به عنوان مقدار باری تعریف کنیم که هنگام قرار گرفتن در یک فاصله یک سانتی متری از یک بار کاملاً مشابه، نیرویی برابر یک دین بدان وارد شود. واضح است که esu خیلی کوچکتر از کولن است (در واقع $1 \text{ esu} = 3 \times 10^9$ یک کولن). از نوشتن قانون بیو، معادله (۸-۲۵)، بدون ضریب $4\pi/\mu_0$ و تعریف آبامپر به عنوان جریانی که هنگام عبور از یک سیم طویل مستقیم، نیرویی برابر یک دین بر سانتی متر بر یک رسانای موازی و حامل همان جریان که در فاصله یک سانتی متری قرار دارد وارد می‌کند، دستگاه الکترومغناطیسی نتیجه می‌شود. از $10^{-7} = 4\pi/\mu_0$ و $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn}$ معلوم می‌شود که 10 آمپر = 1 آبامپر.

هر کدام از دو طریقی که در بالا به آنها اشاره شد، می‌توانند برای ساختن دستگاه کاملی از یکاها به کار روند. ولی، از نظر تاریخی esu عمده‌تاً برای مسائل الکتروستاتیک و emu برای مسائل الکترومغناطیس به کار می‌رفت. از این رو، طبیعی بود که دستگاه دورگه‌ای با استفاده از esu برای کمیتهای الکتریکی و emu برای کمیتهای مغناطیسی ساخته شود. دستگاهی که به این ترتیب تکامل پیدا کرد به دستگاه گاوسی مشهور است. نقطه اصلی ارتباط esu و emu در دستگاه گاوسی در چگالی جریان است، که داریم

$$\mathbf{J}_{\text{emu}} = \frac{\mathbf{J}_{\text{esu}}}{c} \quad (\text{پ ۳-۴})$$

در دستگاه گاوسی \mathbf{J}_{esu} را به کار می‌بریم و در معادلات مغناطیسی صریحاً سرعت نور را نشان می‌دهیم. بدین ترتیب قانون بیو به صورت زیر در می‌آید

$$d\mathbf{F}_2 = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{dl_2 \times (dl_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (\text{پ ۳-۵})$$

که در آن I بر حسب esu/s است.

در یکاهای گاوسی معادلات ماکسول عبارت‌اند از

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{پ ۳-۶})$$

میدانها به صورت زیر از پتانسیلهای نرده‌ای و براری به دست می‌آیند

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{پ ۳-۷})$$

و نیروی لورنتس عبارت است از

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{پ ۳-۸})$$

\mathbf{D} و \mathbf{B} با روابط زیر به \mathbf{E} و \mathbf{H} مربوط می‌شوند

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \quad \text{و} \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (\text{پ ۳-۹})$$

که در آن \mathbf{P} گشتاور دوقطبی الکتریکی ($\mathbf{p} = q\mathbf{l}$) در واحد حجم، و \mathbf{M} گشتاور دوقطبی مغناطیسی ($\mathbf{m} = I\mathbf{A}\mathbf{n}/c$) در واحد حجم است. این معادلات اساساً برای تعریف دستگاه یکاهای گاوسی کافی هستند. به علاوه، چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

و بردار پوینتینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

برای سهولت مراجعه، در جدول پ ۳-۱ روابط عددی یکاهای گاوسی و یکاهای mks داده شده است.

بعضی از مزایای دستگاه گاوسی، که استمرار کاربرد آن را در کتابها و نشریات فیزیک توجیه می‌کنند، عبارت‌اند از (الف) ضریب $4\pi\epsilon_0$ در تمام معادلات فیزیک اتمی که در آنها پتانسیل کولنی نقش اساسی را بازی می‌کند ظاهر نمی‌شود، و (ب) سرعت v همواره در معادلات به شکل بدون بعد v/c وارد می‌شود که با دستورالعمل تبدیل لورنتس منطبق است. در نسبیت طبیعی است که \mathbf{E} و \mathbf{B} یکاهای یکسانی داشته باشند، زیرا مؤلفه‌های آنها درست عناصر مختلف تانسور میدان هستند. همچنین دلیلی ندارد که بردارهای کمکی \mathbf{D} و \mathbf{H} یکاهای دیگری داشته باشند.

جدول پ ۱-۳

یکاهای mks	یکاهای گاوسی*	نماد	کمیت
$\backslash F =$	$9 \times 10^{11} \text{ cm(esu/stV)}$	C	ظرفیت
$\backslash C =$	$3 \times 10^9 \text{ esu}$	Q	بار
$\backslash (\Omega \cdot \text{m})^{-1} =$	$9 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$	g	رسانندگی
$\backslash A =$	$3 \times 10^9 \text{ esu/s} (= 10^{-1} \text{ abA})$	I	جریان
$\backslash C/\text{m}^2 =$	$12\pi \times 10^5 \text{ dyn/esu}$	D	جابه‌جایی الکتریکی
$\backslash V/\text{m} =$	$\frac{1}{3} \times 10^{-4} \text{ dyn/esu}$	E	میدان الکتریکی
$\backslash J =$	10^7 erg	U	انرژی
$\backslash N =$	10^5 dyn	F	نیرو
$\backslash H$	$\frac{1}{9} \times 10^{-11} \text{ s}^2/\text{cm}$	L	ضریب القا
$\backslash Wb =$	10^8 Mx	Φ	شار مغناطیسی
$\backslash T =$	10^4 G	B	میدان مغناطیسی
$\backslash A/\text{m} =$	$4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe(G)}$	H	شدت مغناطیسی
$\backslash V =$	$1/300 \text{ erg/esu (stV)}$	φ	پتانسیل
$\backslash \Omega =$	$\frac{1}{9} \times 10^{-11} \text{ s/cm (stV} \cdot \text{s/esu)}$	R	مقاومت

* در تبدیلهای ضریبهای ۳ (یا $3^2 = 9$) از سرعت نور، $c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ، ناشی می‌شوند. برای دقت بیشتر به جای ۳ از ۲۹۹۷۹ استفاده کنید.

مطلب دیگر این است که در محیطهای مادی گذردهی و پذیرفتاری بدون بُعدند و با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$$

و همین امر در مورد کمیت‌های مغناطیسی متناظر نیز صادق است

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$$

پیوست ۴

عملگرهای دیفرانسیلی برداری

۱. مختصات قائم

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

۲. مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\theta \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \mathbf{k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right)$$

۳. مختصات کروی

$$\nabla\varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \mathbf{a}_r \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (F_\phi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi} \right] \\ & + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} \right] + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right] \end{aligned}$$

لاپلاسی یک کمیّت زده‌ای، $\nabla^2\varphi$ ، در بخش ۱-۳ برای سه دستگاه مختصات داده شده است. اتحادهای برداری در جدول ۱-۱ داده شده‌اند.

پیوست ۵

تابع دلتای دیراک

در یک بُعد، تابع دلتای دیراک با روابط زیر تعریف می‌شود

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad \text{به‌ازای}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{پ ۱-۵})$$

این تعریف را می‌توان به طریقی مقدماتی به صورت حد یک تابع پیوسته عادی درک کرد. برای مثال، تابع گاوسی

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

در $x = 0$ قله‌ای دارد که هر چه ε کوچکتر باشد باریک‌تر و بلندتر است، و انتگرال آن از $-\infty$ تا $+\infty$ به‌ازای هر مقداری برای ε برابر با ۱ است. بنابراین می‌توانیم تابع دلتای دیراک را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2} \quad (\text{پ ۲-۵})$$

نمایش سودمند دیگری عبارت است از

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{\sin^2 x/\varepsilon}{x^2} \quad (\text{پ ۳-۵})$$

به عنوان سومین مثال می‌توانیم از تابع لورنتسی که در فصل ۱۹ معرفی شد، استفاده کنیم

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{پ ۴-۵})$$

یکی از خواص مهم تابع δ عبارت است از

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{پ ۵-۵})$$

که در آن a یک ثابت است. این امر مستقیماً از معادله (پ ۱-۵) نتیجه می‌شود: ابتدا متغیر x را به u تبدیل می‌کنیم که این امر چیزی را تغییر نمی‌دهد. سپس u را برابر ax اختیار می‌کنیم و نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \quad (\text{پ ۶-۵})$$

بنابر قضیه مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\int_{-a}^{+a} F(x) f(x) dx \cong F(0) \int_{-a}^{+a} f(x) dx$$

بنابراین هنگامی که $f(x) \rightarrow \delta(x)$ داریم

$$\int F(x) \delta(x) dx = F(0) \quad (\text{پ ۷-۵})$$

در تمام معادلات فوق، متغیر x را می‌توان با $(x - x_0)$ جایگزین کرد؛ بالاخص

$$\int F(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0) \quad (\text{پ ۸-۵})$$

در هر معادله‌ای که شامل تابع دلتای دیراک باشد، حوزه انتگرال‌گیری را می‌توان به هر بازه‌ای حاوی نقطه‌ای که در آن شناسه تابع دلتای دیراک صفر می‌شود، کاهش داد.

با نوشتن رابطه زیر

$$\delta(\mathbf{r}) dv = \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz \quad (\text{پ ۹-۵})$$

تعریف تابع دلتای دیراک را می‌توان به سه بُعد تعمیم داد. در فصل ۲ پیدا کردیم که

$$\delta(\mathbf{r}) = \nabla^2 \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) \quad (\text{پ ۱۰-۵})$$

پیوست ۶

انتگرالهای فوریه (تبدیلهای فوریه)

یک تابع حقیقی را که بجز برای تعداد معینی از ناپیوستگیهای معین در محدوده $-l/2 < t < l/2$ پیوسته است، می‌توان به یک سری فوریه مختلط بسط داد

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-2\pi i n t / l} \quad (\text{پ ۱-۶ الف})$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(t) e^{2\pi i n t / l} dt \quad (\text{پ ۱-۶ ب})$$

برای اینکه $f(t)$ حقیقی باشد، a_n و a_{-n} باید مزدوج یکدیگر باشند. می‌خواهیم موردی را که $l \rightarrow \infty$ در نظر بگیریم. تعریف می‌کنیم $\omega = 2\pi n / l$ و $la_n = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega)$ ؛ پس می‌شود جمع رابطه (پ ۱-۶ الف) را به انتگرال تبدیل کنیم چون $\sum F_n = \int F_n dn \rightarrow (l/2\pi) \int F(\omega) d\omega$. معادلات (پ ۱-۶) به صورت زیر در می‌آیند

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{پ } ۲-۶)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

به این شکل $f(t)$ و $\tilde{f}(\omega)$ به صورت یک زوج تبدیلی ظاهر می‌شوند که به طور متداول "تبدیلهای فوریه" نامیده می‌شوند. ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ به طور متقارن تقسیم شده است، ما همواره از این قرارداد استفاده خواهیم کرد که گرچه برای راحتی است ولی ضروری نیست. در واقع، عوض کردن هر دو متغیر ω و t با تقسیم هر یک به $\sqrt{2\pi}$ احتیاج به این دارد که یک ضریب 2π در نماها وارد کنیم و ضریبهای $1/\sqrt{2\pi}$ را از جلوی انتگرالها برداریم (این روش برای کاربرد کامپیوترها مناسب است).

معادلات (پ ۲-۶) را می‌شود با هم ترکیب کرد که نتیجه می‌شود

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{-i\omega(t-t')} \quad (\text{پ } ۳-۶)$$

این معادله بیان قضیه انتگرال فوریه است.

تبدیلهای فوریه را می‌توان تنها با استفاده از فرکانسهای مثبت تعریف شده فیزیکی وقتی $f(t)$ تنها برای مقادیر مثبت t غیرصفر است، یا وقتی $f(t)$ زوج یا فرد است فرمولبندی کرد. در مورد آخر، ممکن است توابع جدید $f_e(t)$ و $f_o(t)$ را تعریف کنیم که توسط روابط زیر زوج یا فردند

$$f_e(t) = f_e(-t), \quad f_o(t) = -f_o(-t) \quad (\text{پ } ۴-۶)$$

هر تابعی می‌تواند به صورت جمع توابع زوج و فرد بیان شود. با استفاده از معادلات (پ ۴-۶) در معادلات (پ ۲-۶) برای تبدیل محدوده انتگرالگیری که بر روی مقادیر منفی t کشیده می‌شود، و توجه به اینکه $f(t)$ حقیقی است، به دست می‌آوریم

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} [\tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}] d\omega \quad (\text{پ } ۵-۶)$$

$$f_e(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_e(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (\text{پ } ۶-۶ \text{ الف})$$

$$\tilde{f}_e(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt$$

$$f_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_0(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (\text{پ ۶-۶})$$

$$\tilde{f}_0(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_0(t) \sin \omega t \, dt$$

می‌توانیم همچنین دومین معادله در (پ ۶-۲) را برای یافتن نمایش سودمندی از تابع دلتای دیراک به‌کار ببریم. قرار می‌دهیم $f(t) = \delta(t)$ به‌طوری که

$$\tilde{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{پ ۶-۷})$$

تبدیل فوریه تابع δ یک ثابت است. با استفاده از این نتیجه در اولین معادله (پ ۶-۲) به‌دست می‌آوریم

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \quad (\text{پ ۶-۸})$$

تبدیل فوریه یک ثابت تابع دلتاست. با تغییر دادن متغیر t به $t - t_0$ به‌دست می‌آوریم

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \quad (\text{پ ۶-۸ الف})$$

با گرفتن قسمت حقیقی رابطه فوق به‌دست می‌آوریم

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos \omega(t - t_0) \quad (\text{پ ۶-۸ ب})$$

و قسمت موهومی می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sin \omega(t - t_0) = 0 \quad (\text{پ ۶-۸ ج})$$

در این محاسبه، فرض درباره پیوستگی تابع $f(t)$ را نقض کرده‌ایم، اما قضیه اصلی می‌تواند برای رفع این مشکل تعمیم داده‌شود.

این نمایش تابع دلتای دیراک می‌تواند برای اثبات یک قضیه بسیار مهم به نام قضیه پیچش مورد استفاده قرارگیرد. این قضیه بیان می‌کند که اگر

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t'') h(t - t'') \, dt'' \quad (\text{پ ۶-۹})$$

خواهیم داشت

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \tilde{h}(\omega) \quad (\text{پ ۶-۱۰})$$

کاربردهای بسیاری برای انتگرالهای فوریه وجود دارد. یکی از آنها در بخش ۶-۱۹ و دیگری در پیوست ۷ ظاهر می‌شوند. انتگرالهای فوریه یکی از با ارزش‌ترین ابزارهای نظری فیزیکدانان و مهندسان است.

پیوست ۷

توابع متغیر مختلط: روابط پاشندگی

این پیوست حاوی برخی نکات درباره روشهای ریاضی در برگیرنده متغیرهای مختلط است. چون تمام کمیت‌های فیزیکی را می‌توان به‌عنوان توابعی حقیقی از متغیرهای حقیقی نمایش داد، چنین روشهایی برای فرمولبندی و فهمیدن نظریه الکترومغناطیس ضروری نیست، هر چند این روشها می‌توانند تجزیه و تحلیل را تسهیل و آسان کنند.

پ ۷-۱ توابع متغیر مختلط

فرض می‌کنیم که با جبر اعداد مختلط از قبیل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به نما رساندن، مزدوج مختلط گرفتن، و غیره آشنائیم. مفیدترین نتایج تجزیه و تحلیل در زیر معمولاً بدون اثبات بیان شده است.

تعریف تابع مختلط یک متغیر مختلط قاعده‌ای است که بنا بر آن هر جفت اعداد حقیقی x و y ، بیان‌کننده متغیر مختلط $z = x + iy$ را با جفت دیگری از اعداد حقیقی u و v بیان‌کننده کمیت مختلط $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ مرتبط می‌کند. این بیان تمهید ساده‌تری از تعریف تابعی از متغیر حقیقی است، اما به قدری کلی است که نتایج مفیدی در فیزیک از آن نمی‌توان به‌دست

آورد، مگر اینکه برخی محدودیتها روی توابع فرض شود. اگر شرط اینکه $w(z)$ نسبت به z قابل مشتق‌گیری باشد اضافه شود، سپس $u(x, y)$ و $v(x, y)$ به هم مرتبط می‌شوند. تعریف مشتق $w(z)$ نسبت به z صریحاً به همان‌گونه است که برای توابع حقیقی تعریف شده است

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} \right] \quad (\text{پ ۷-۱})$$

اگر این حد وجود داشته باشد و مستقل از جهتی که z به z_0 نزدیک می‌شود باشد، می‌گوییم تابع $w(z)$ مشتق‌پذیر است. مستقل از جهت بودن، فرق اساسی بین آنالیز مختلط و آنالیز حقیقی است؛ حال جهات نامحدود بسیاری وجود دارد که از آنها z در حد می‌تواند به سمت z_0 میل کند. تابع تک‌مقداری از یک متغیر مختلط که در ناحیه‌ای از صفحه مختصات مختلط پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این ناحیه تحلیلی یا منظم یا تابع هولومورفیک نامیده می‌شود. چون مشتق‌پذیری در آنالیز مختلط محدودیت جدی‌تری است، نتایج بیشتری را درباره توابع تحلیلی در مقایسه با توابع حقیقی می‌توان به دست آورد.

اولین نتیجه مهم برای تابع تحلیلی $w(z) = u + iv$ این است که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{پ ۷-۲})$$

لزوم این شرایط را که به عنوان معادلات دیفرانسیل کوشی-ریمان^۱ مشهورند، می‌توان به سادگی با مشتق‌گیری نسبت به $z - z_0$ که ابتدا برابر با δx و سپس برابر δy ، در نظر گرفته شود اثبات کرد. اگر قسمتهای حقیقی و موهومی مشتقهای محاسبه‌شده را در این دو جهت مساوی یکدیگر قرار دهیم، معادلات (پ ۷-۲) به دست می‌آیند. این معادلات u و v را به هم مرتبط می‌کنند، بنابراین توابع مستقلی از x و y نیستند. همچنین در این گذر توجه داشته باشیم که با مشتق‌گیری نسبت به x از اولین این معادلات و نسبت به y از دومین و سپس جمع آنها به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{پ ۷-۳})$$

بنابراین u (و v) در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. این خاصیت $w(z)$ اساس روش حل معادله لاپلاس در دو بُعد را تشکیل می‌دهد (رجوع شود به قسمت ۳-۸).

از توابع متغیر مختلط همچنین می‌توان طبق تعمیم مستقیم تعریف به‌کار برده شده برای توابع

حقیقی، انتگرال گرفت

$$\int_a^b w(z) dz = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \sum_i w(z_i) \delta z_i \quad (\text{پ ۷-۴})$$

که z_i نقطه‌ای داخل δz_i و حد بدین معنی است که تعداد زیر محدوده‌ها در محدوده a تا b بی‌نهایت شود، در حالی که همزمان هر δz_i به سمت صفر میل کند. علامت C چسبیده به انتگرال مسیری خاص را از مسیرهای بسیاری که از a به b در صفحه مختصات مختلط منتهی می‌شود، نشان می‌دهد (برخلاف فقط یک مسیر در مورد متغیر حقیقی)، چون تمام آنها لزوماً مقدار یکسانی برای انتگرال نتیجه نمی‌دهند. انتگرالی که توسط معادله (پ ۷-۴) تعریف شد هرگاه $w(z)$ پیوسته باشد، وجود دارد.

چندین قضیه مهم می‌تواند درباره تابع متغیر مختلط اثبات شود. اولین آنها قضیه انتگرال کوشی است (بعضی اوقات قضیه اساسی نظریه توابع نامیده می‌شود). که بیان می‌کند که برای تابع $w(z)$ که در ناحیه متصل ساده G و روی منحنی بسته C در این ناحیه تحلیلی است، داریم

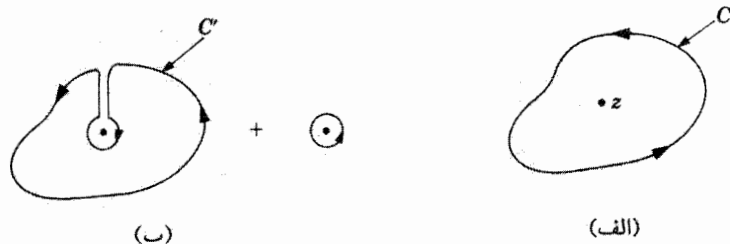
$$\oint_C w(z) dz = 0 \quad (\text{پ ۷-۵})$$

این قضیه با در نظر گرفتن یک منحنی مثلثی شکل ثابت می‌شود و با انجام مراحل زیر (۱) نشان دادن این انتگرال حول مثلث صفر است اگر تابع تحلیلی باشد، (۲) نشان دادن اینکه هر چندضلعی بسته‌ای می‌تواند به نواحی مثلثی شکل تجزیه شود، (۳) نشان دادن اینکه انتگرال دور مرز چندضلعی جمع انتگرالهای دور مثلث‌هاست و نتیجتاً برابر صفر است، و بالاخره (۴) نشان دادن اینکه هر ناحیه متصل ساده می‌تواند با هر دقتی که بخواهیم با یک چندضلعی تقریب زده شود.

از قضیه کوشی یک سری فرمولهایی نتیجه می‌شود که به فرمولهای انتگرال کوشی مشهورند. اولین آنها فرمول زیر است

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w(z')}{z' - z} dz' \quad (\text{پ ۷-۶})$$

که $w(z')$ در داخل ناحیه متصل ساده شامل C که منحنی بسته در برگیرنده نقطه z است، تحلیلی است. این نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید (رجوع شود به شکل پ ۷-۱): منحنی در (a) را با دو منحنی در (b) عوض کنید. انتگرال $w(z') dz' / (z' - z)$ دور C معادل انتگرال تابع دور C'



شکل پ ۷-۱ تجزیهٔ پربند C در صفحهٔ z' به جمع دو پربند. علامت \bullet نقطهٔ z را در تمام سه مورد نشان می‌دهد.

به علاوهٔ انتگرال اضافی دور دایره است، چون دو ساق عمودی در منحنی C' در جهات مخالف یکدیگر پیموده شده است و دو مسیر دایره‌ای دور نقطهٔ z مخالف یکدیگر انجام شده است. حال از قضیهٔ انتگرال کوشی، معادلهٔ (پ ۷-۵)، انتگرال $\int_C w(z') dz' / (z' - z)$ دور منحنی C' صفر است، چون تکینگی تابع زیر انتگرال درون C' وجود ندارد. بنابراین، تمام سهم در انتگرال معادلهٔ (پ ۷-۶) از جانب دایره کوچکی به مرکز z است، این انتگرال را می‌توان مستقیماً محاسبه کرد و جواب رابطهٔ (پ ۷-۶) را به دست آورد.

فرمولهای دیگر مربوط به مشتقات مرتبه m w است:

$$\frac{d^n}{dz^n} w(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{w(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz' \quad (\text{پ ۷-۷})$$

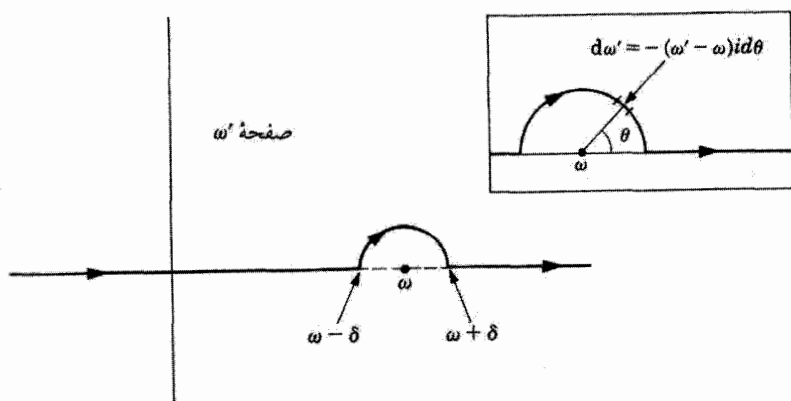
اثبات غیررسمی این فرمولها را می‌توان با مشتق‌گیری پیاپی از معادلهٔ (پ ۷-۶) نسبت به z به دست آورد، اما اثبات دقیق نیز ممکن است. بنابراین، یک تابع تحلیلی در برگیرنده مشتقات تمام مرتبه‌هاست (برای یک تابع مشتق‌پذیر از یک متغیر حقیقی الزاماً چنین نیست).

پ ۷-۲ اثبات روابط پاشندگی

در فصل ۱۹، نشان دادیم که روابط پاشندگی برای سیستمی که نوسانگر هماهنگ میرای کلاسیک (نمونه یک سیستم خطی) را تقریب می‌زند معتبر است و سپس فرض کردیم که آنها را می‌توان در مورد هر سیستم خطی علی‌به‌کار برد. حال اثبات آن را ارائه می‌کنیم. در نظر گرفتن انتگرال زیر شروع می‌کنیم

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (\text{پ ۷-۸})$$

که ω حقیقی است و انتگرال روی محور حقیقی در صفحه ω' گرفته می‌شود (با ω' به عنوان متغیر



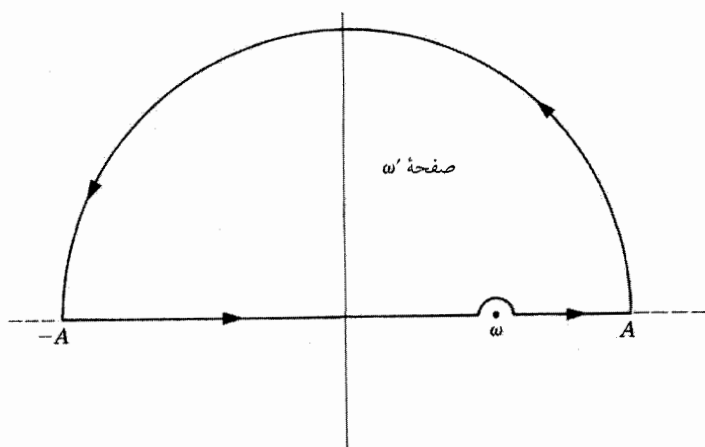
شکل پ ۷-۲ مسیر انتگرال‌گیری برای محاسبه $K(\omega)$ ، معادله (۷-۸).

مختلط رفتار می‌شود). تابع زیر انتگرال در ω' برابر ω می‌شود و بنابراین هر دو انتگرال در این نقطه، تعریف نشده‌اند. این مشکل را بدین صورت رفع می‌کنیم که تا نقطه $\omega - \delta$ انتگرال‌گیری می‌کنیم و سپس دور نیم‌دایره کوچکی بالای محور حقیقی مختصات تا نقطه $\omega + \delta$ دور می‌زنیم. از این نقطه انتگرال‌گیری ادامه می‌یابد تا حد بالا، همان‌گونه که در شکل پ ۷-۲ نشان داده شده است. انتگرال در معادله (۷-۸) اکنون به صورت حد انتگرال محاسبه شده‌ای که شرح آن داده شد، وقتی که δ به صفر میل کند، تعریف می‌شود. انتگرال دور نیم‌دایره کوچک می‌تواند مستقیماً با استفاده از شکل هندسی نشان داده شده در قسمت بزرگ‌شده شکل پ ۷-۲ محاسبه شود؛ که برابر است با $-i\pi\tilde{R}(\omega)$ ، و $K(\omega)$ به دست می‌آید که برابر است با

$$K(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega - \delta} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \delta}^{\infty} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} - i\pi\tilde{R}(\omega) \quad (\text{پ } ۷-۹)$$

آنچه ما انجام داده‌ایم این است که یک مسیر انتگرال‌گیری تعریف کرده‌ایم که تکینگی تابع زیر انتگرال را در زیر مسیر باقی می‌گذارد. دو انتگرال باقیمانده روی متغیر حقیقی خوش‌رفتارند و اگر $\tilde{R}(\omega)$ معلوم باشد، می‌توانند به وسیله روشهای استاندارد محاسبه شوند. حد عباراتی مانند جمع این دو انتگرال باقیمانده آنقدر مکرر پیش می‌آید که به‌عنوان مقدار اصلی کوشی نام‌گذاری شده است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_A^{\omega - \delta} f(\omega') d\omega' + \int_{\omega + \delta}^A f(\omega') d\omega' \right\} = P \int_A^A f(\omega') d\omega' \quad (\text{پ } ۷-۱۰)$$



شکل پ ۷-۳ پر بند بسته برای محاسبه تابع $K(\omega)$.

مقدار اصلی کوشی که غالباً آن را مقدار اصلی می‌نامند، توسط علامت P در جلوی علامت انتگرال مشخص شده است. با به هم پیوستن آنچه تا به حال انجام داده شده است، معادله (پ ۷-۹) به صورت زیر در می‌آید

$$K(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi \tilde{R}(\omega) \quad (\text{پ } 7-11)$$

حال می‌توانیم رابطه مورد نظر را ببینیم. اگر قسمت حقیقی معادله (پ ۷-۱۱) در نظر گرفته شود، طرف دست راست در جمله اول انتگرالی از قسمت حقیقی \tilde{R} و در جمله دوم قسمت موهومی \tilde{R} را شامل می‌شود. اگر $K(\omega)$ به طریق مستقلی معلوم باشد، مسئله رابطه پاشندگی حل می‌شود.

چون ω' به عنوان یک متغیر مختلط به حساب می‌آید، پس می‌توانیم پربندی همانند آنچه در شکل پ ۷-۳ نشان داده شده بنا کنیم. اگر $\tilde{R}(\omega')$ در نیمه بالایی صفحه مختصات تحلیلی باشد، بنا بر قضیه کوشی انتگرال $\tilde{R}(\omega')$ دور تمامی پربند نشان داده شده در شکل پ ۷-۳ صفر است.

آنچه باقی می‌ماند در نظر گرفتن انتگرال دور نیمدایره بزرگ است. اندازه این انتگرال کمتر از حاصل ضرب $\pi A / (A - \omega)$ در بیشینه مقدار $|\tilde{R}(\omega')|$ در هر نقطه روی پربند است. اگر $|\tilde{R}(\omega')|$ وقتی که A به سمت بی‌نهایت میل کند به هر طریقی صفر شود، انتگرال به صفر میل خواهد کرد. بنابراین انتگرال دور تمامی پربند صفر است، و انتگرال دور نیمدایره بزرگ صفر است.

در نتیجه، آنچه باقی می ماند، $K(\omega)$ ، نیز باید صفر باشد. بنابراین

$$K(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi \tilde{R}(\omega) = 0 \quad (\text{پ ۷-۱۲})$$

این عبارت را می توان به صورت زیر نوشت

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (\text{پ ۷-۱۳})$$

یا

$$R_r(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (\text{پ ۷-۱۴})$$

$$R_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

که روابط پاشندگی هستند.

این روابط پاشندگی در صورتی برقرارند که $\tilde{R}(\omega')$ در نظر گرفته شده به عنوان تابعی از یک متغیر مختلط در نیمه بالایی صفحه مختصات تحلیلی باشد و همچنین وقتی که $|\omega'|$ در نیمه بالایی صفحه مختصات به بی نهایت میل می کند، این تابع صفر شود. با نوشتن $\tilde{R}(\omega)$ به عنوان تبدیل فوریه $R(t)$ ، یعنی، تابع پاسخ شرح داده شده در قسمت ۱۹-۱

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{پ ۷-۱۵})$$

ما می توانیم ملاحظه کنیم وقتی $|\omega|$ به بی نهایت میل می کند، اگر $R(t)$ شرایط علی و محدود بودن معینی دارا باشد، $\tilde{R}(\omega)$ به صفر میل می کند. اگر $R(t)$ برای $t < 0$ صفر باشد، فقط $t > 0$ را احتیاج داریم که در نظر بگیریم. پس $i\omega t$ وقتی ω یک قسمت موهومی مثبت دارد، یک قسمت حقیقی منفی دارد — به این معنی که ω در نیمه بالایی صفحه ω باشد. بنابراین، تا زمانی که $R(t)$ محدود است، وقتی که ω در نیمه بالایی صفحه مختصات به بی نهایت میل کند $\tilde{R}(\omega)$ صفر خواهد شد. اینکه $\tilde{R}(\omega)$ تحلیلی است، می تواند با محاسبه مشتق نسبت به ω در معادله (پ ۷-۱۵) ملاحظه شود. مشتق می تواند در داخل انتگرال محاسبه شود چون ω تا آنجایی که به انتگرال گیری مربوط می شود پارامتری بیش نیست. تابع $\exp(i\omega t)$ همه جا تحلیلی است؛ در نتیجه مشتق منحصر به فردی را داراست، و در نتیجه $\tilde{R}(\omega)$ مشتق منحصر به فردی

را دارد. بنابراین، تمام شرایط لازم برای برقراری روابط پاشندگی $\tilde{R}(\omega)$ از شرایط محدود بودن و علیتِ اعمال شده روی تابع پاسخ $R(t)$ در قسمت ۱۹-۱ ناشی می‌شود.

با استفاده از این واقعیت که $R(t)$ حقیقی است، روابط پاشندگی می‌توانند به شکلی که تنها وابسته به مقادیر پاسخ فرکانسی در مقادیر فرکانسهای مثبت باشد، تبدیل شود. چون $R(t)$ حقیقی است، معادله (پ ۷-۱۵) نشان می‌دهد که

$$\tilde{R}(-\omega) = \tilde{R}^*(\omega) \quad (\text{پ ۷-۱۶})$$

یا

$$R_i(-\omega) = -R_i(\omega), \quad R_r(-\omega) = R_r(\omega) \quad (\text{پ ۷-۱۷})$$

با استفاده از این نتیجه برای تبدیل قسمتی از انتگرال در معادله (پ ۷-۱۴) که بر روی مقادیر منفی ω کشیده شده به انتگرال روی مقادیر مثبت ω' ، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$R_r(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} R_i(\omega') \left[\frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right] d\omega' \quad (\text{پ ۷-۱۸})$$

یا

$$R_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' R_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (\text{پ ۷-۱۹ الف})$$

به طریقی دقیقاً مشابه داریم

$$R_i(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{R_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (\text{پ ۷-۱۹ ب})$$

روابط پاشندگی به نوع دستگاه فیزیکی خطی در نظر گرفته شده وابسته نیست، دستگاه می‌تواند مکانیکی، الکتریکی، کوانتوم مکانیکی، یا حتی یک دستگاه اقتصادی باشد تا زمانی که بتوان برای آن یک تابع پاسخ خطی (با تبدیل فوریه آن) تعریف کرد. مثالهای ساده در زیر کاربرد روابط پاشندگی را نشان می‌دهند.

محاسبه $R_i(\omega)$ از رابطه پاشندگی

برای مشخص کردن این ایده‌ها، مدار ساده شکل ۱۹-۱ را بررسی می‌کنیم. تابع پاسخ فرکانس درست ولتاژ دو سر مدار ناشی از جریانی با وابستگی زمانی $\exp(-i\omega t)$ و دامنه واحد است که به صورت زیر داده می‌شود

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + i \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (\text{پ ۷-۲۰})$$

این معادله مزدوج مقاومت ظاهری است که معمولاً تعریف می‌شود، به دلیل اینکه ما وابستگی زمانی $\exp(-i\omega t)$ را به‌کار برده‌ایم. برای اینکه نشان دهیم معادله پاشندگی صادق است، $R_i(\omega)$ را با استفاده از معادله (پ ۷-۱۴) با $R_r(\omega')$ از معادله (پ ۷-۲۰) محاسبه می‌کنیم. ابتدا $R_r(\omega)/(\omega' - \omega)$ را در تابع زیر انتگرال جمع و تفریق می‌کنیم. پس داریم

$$R_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \left\{ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_r(\omega') - R_r(\omega)}{\omega' - \omega} d\omega' + R_r(\omega) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \right\} \quad (\text{پ } ۷-۲۱)$$

انتگرال دوم صرفاً $\ln|\omega' - \omega|$ محاسبه شده در حدود معین است. با استفاده از $-A$ و A به‌عنوان حدود انتگرال‌گیری داریم

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln(A - \omega) - \ln(A + \omega)] \\ + \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|\delta| - \ln|\delta|] = 0 \quad (\text{پ } ۷-۲۲)$$

حد در بی‌نهایت باید به‌طور متقارن در نظر گرفته شود که با مقدار اصلی مطابقت داشته باشد. مابقی انتگرال از ترکیب کردن $R_r(\omega)$ و $R_r(\omega')$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$R_r(\omega') - R_r(\omega) = R \left[\frac{1}{1 + \omega'^2 R^2 C^2} - \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right] \\ = -\frac{R^3 C^2 (\omega' - \omega)(\omega' + \omega)}{(1 + \omega'^2 R^2 C^2)(1 + \omega^2 R^2 C^2)} \quad (\text{پ } ۷-۲۳)$$

با استفاده از این نتیجه در معادله (پ ۷-۲۱) اولاً توجه می‌کنیم که $(\omega' - \omega)$ در صورت و مخرج حذف می‌شوند، به‌طوری که تابع زیر انتگرال در همه جا خوش‌رفتار است و مقدار اصلی را می‌توان حذف کرد و ثانیاً، انتگرال عبارت شامل ω' در صورت انتگرال یک تابع فرد روی بازه متقارن است و بنابراین صفر می‌شود. از ترکیب کردن این نتایج به‌دست می‌آوریم

$$R_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{R\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{RC d\omega'}{1 + \omega'^2 R^2 C^2} = \frac{R\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (\text{پ } ۷-۲۴)$$

که با مقایسه با معادله (پ ۷-۲۰) همان $R_i(\omega)$ است.

محاسبه انجام شده در این مثال خصوصاً سودمند نیست، و در حقیقت، محاسبه $R_i(\omega)$ از یک عبارت تحلیلی برای $R_r(\omega)$ تقریباً هیچ‌وقت سودمند نیست، چون معمولاً این دو به‌عنوان

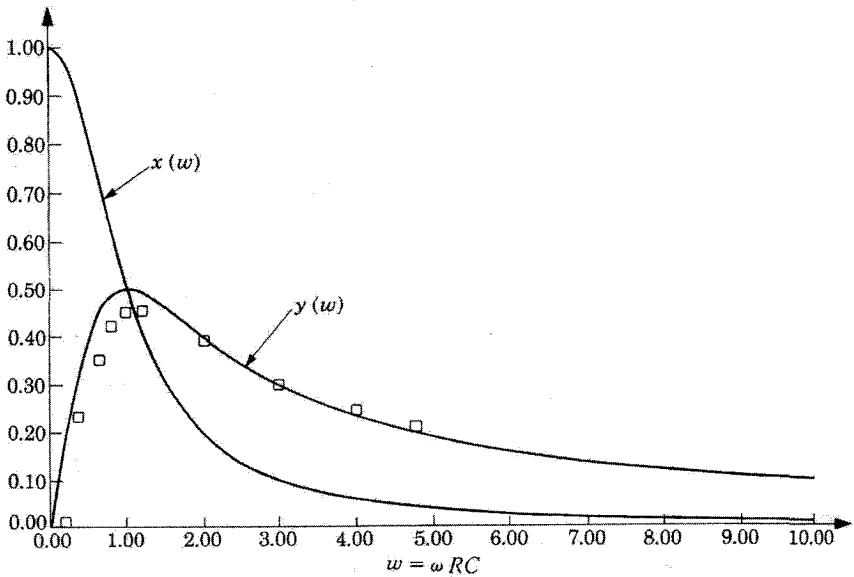
قسمتهای حقیقی و موهومی یک محاسبه منفرد به دست می آیند. هر چند، آنچه نشان داده شده است، این است که در این مورد ساده روابط پاشندگی دقیقاً ارضا شده اند. به علاوه، شگردی که برای حذف کردن تکینگی در $w' = w$ به کار بردیم کراراً در موارد دیگر مفید است — حتی (با مخصوصاً) اگر انتگرال باید به طور عددی محاسبه شود.

محاسبه $R_i(w)$ از داده های عددی برای $R_r(w)$

به عنوان دومین مثال قسمت موهومی یک تابع پاسخ را از داده های عددی برای قسمت حقیقی تابع پاسخ برای مدار ساده ای که به عنوان مثال به کار برده ایم، محاسبه می کنیم. فرض کنیم که قسمت حقیقی تابع پاسخ که در معادله (پ ۷-۲۰) داده شده روی گستره فرکانسی (که همه بزرگتر از صفرند) مثلاً از ω_1 تا ω_2 ، در بازه های یکنواخت اندازه گیری شده اند. (در عمل اندازه گیری احتمالاً در نسبت فرکانسی ثابت صورت می پذیرد، اما بازه های یکنواخت انتگرال گیرهای عددی را که ما ملزم به انجام آن هستیم ساده می کند.) می خواهیم این داده ها را برای تعیین قسمت موهومی تابع پاسخ به کار ببریم. ابتدا معادله (پ ۷-۲۰) با قرار دادن $w = RC\omega$ و $\tilde{R}(w) = R$ و $z(w) = x(w) - iy(w)$ می شود به شکل بدون بُعد نوشته می شود. سپس برای $y(w)$ معادله (پ ۷-۱۹) می شود

$$y(w) = -\frac{2}{\pi} wP \int_0^{\infty} \frac{x(w')}{w'^2 - w^2} dw' \quad (\text{پ ۷-۲۵})$$

انتگرال گیرهای عددی را می توان با استفاده از برنامه شکل پ ۱-۲ یا یک برنامه پیچیده تر انجام داد. اگر $x(w)$ برای $0 \leq w \leq 5$ در بازه های ۱° معلوم باشد و x حتماً برای $w > 5$ صفر باشد، از انتگرال عددی معادله (پ ۷-۲۵) تابع $y(w)$ نشان داده شده در شکل پ ۷-۴ تولید می شود. در این شکل مقادیر دقیق جهت مقایسه نشان داده شده اند. توجه داشته باشیم که در انجام انتگرال گیری عددی باید مواظب بود نقاطی انتخاب شوند که نسبت به مقدار w که $y(w)$ آن در حال محاسبه اند، حداقل برای ناحیه نزدیک به w ، به طور متقارن قرار داشته باشند. اگر این انتخاب صورت نپذیرد، حذفی که در مقدار اصلی اشاره شد عمل نمی شود و پاسخهای اشتباه به دست خواهد آمد. در مراجعه به شکل پ ۷-۴، ملاحظه می کنیم که توافق بسیار خوبی برای $w > 2^\circ$ وجود دارد، اما برای مقادیر کوچکتر w انحرافات چشمگیری موجود است. برای مقادیر کوچک w ، تابع زیر انتگرال برای w' نزدیک به w بسیار بزرگ است. (تابع زیر انتگرال برای w' نزدیک به w همواره بزرگ است، اما برای $w = 1$ ، در حدود ده مرتبه بزرگتر از مقداری است که برای $w = 4$ دارد.) اختلاف بین محاسبه و مقادیر دقیق $y(w)$ را می توان به برخورد نسبتاً ساده ما به این قسمت از انتگرال مربوط کرد. بالاخره توجه داشته باشیم که در این مثال ما در



شکل پ ۴-۷ محاسبه $R_i(w)$ از داده‌های $R_r(w)$ به معادله (پ ۷-۲۵) رجوع شود. علامت \boxplus مقادیر دقیق $y(w)$ هستند.

جهت مساعد قدم برداشته‌ایم — یعنی از قسمت حقیقی به قسمت موهومی. برعکس آن را طی کردن به دلیل دنباله بلند قسمت موهومی مشکل‌تر است. برای طی کردن راه معکوس، داده‌های مشخص شده کافی نمی‌باشند، و لازم است که $y(w)$ را برای مقادیر بزرگ w با تابعی مناسب تخمین بزنیم.

پاسخ مسائل شماره فرد

فصل ۱

$$۱-۱ \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad ۱:۳$$

$$۳-۱ \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

۷-۱ زاویه بین \mathbf{R} و $\mathbf{R} - \mathbf{A}$ را، که 90° درجه است، می‌توان در نیمدایره‌ای به قطر \mathbf{A} محاط کرد. با تغییر \mathbf{R} نیمدایره‌های مختلف سطح یک کره را توصیف خواهند کرد.

$$\mathbf{n} = (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}) / \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2} \quad ۱۳-۱$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (rF_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad ۱۵-۱$$

۱۷-۱ خیر.

فصل ۲

$$\tan^2 \theta / (1 + \tan^2 \theta) = q^2 / 4\pi\epsilon_0 mgl^2 \quad ۱-۲$$

$$\mathbf{E} = 3061 \text{ V/m (در امتداد قطر)} \quad ۳-۲$$

$$E = (\sigma/2\epsilon_0)(1 - z/\sqrt{z^2 + R^2}) \quad \text{(الف)} \quad ۵-۲$$

$$E = (\beta/2\epsilon_0) \left[\frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{4} + R^2} \right) \right. \quad \text{(ب)}$$

$$\left. + R^2 \log \left(\frac{L}{2R} \sqrt{1 + \frac{L^2}{4R^2}} \right) \right]$$

۷-۲ (الف) $x = a(3 + \sqrt{3})/2$ ، (ب) نقطهٔ زینی.

$$\begin{aligned} \varphi = (\rho/4\epsilon_0) & \left[\left(z + \frac{1}{4}L \right) \left\{ \left(z + \frac{1}{4}L \right)^2 + R^2 \right\}^{1/2} - 2zL \right. \\ & - \left. \left(z - \frac{1}{4}L \right) \left\{ \left(z - \frac{1}{4}L \right)^2 + R^2 \right\}^{1/2} \right. \\ & \left. + R^2 \log \left\{ \frac{z + \frac{1}{4}L + \sqrt{\left(z + \frac{1}{4}L \right)^2 + R^2}}{z - \frac{1}{4}L + \sqrt{\left(z - \frac{1}{4}L \right)^2 + R^2}} \right\} \right] \end{aligned} \quad 9-2$$

۱۱-۲ (الف) 240000 V ، (ب) 4730 km

۱۳-۲ (الف) 10^{-12} C/m^3 ، (ب) مثبت

۱۵-۲ (الف) $\varphi = (A/\epsilon_0) \left(R - \frac{1}{4}r \right)$ به ازای $r \leq R$

$\varphi = AR^2/2\epsilon_0 r$ به ازای $r \geq R$

(ب) $\varphi = (\rho_0/2\epsilon_0) \left(R^2 - \frac{1}{4}r^2 \right)$ به ازای $r \leq R$

$\varphi = R^2 \rho_0/3\epsilon_0 r$ به ازای $r \geq R$

۱۷-۲ (الف) $\nabla \cdot \mathbf{r}/r^a = (3-a)/r^a$ ، $\nabla \times \mathbf{r}/r^a = 0$

(ب) $\rho = (3-a)q/4\pi r^a$

(ج) $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 (a-2)r^{a-2}$ ($a \neq 2$)

۱۹-۲ $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} \mathbf{r}/r^2$

$\rho = q[\delta(\mathbf{r}) - 1/4\pi\lambda^2 r] e^{-r/\lambda}$

۲۱-۲ (الف) $\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{|z+a| + \sqrt{(z+a)^2 + r^2}}{|z-a| + \sqrt{(z-a)^2 + r^2}} \right\}$

(ب) $E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left[\frac{a+z}{\sqrt{(a+z)^2 + r^2}} - \frac{a-z}{\sqrt{(a-z)^2 + r^2}} \right]$

۲۳-۲ دوقطبی را به صورت دو بار نقطه‌ای با بار مخالف و به فاصله کم از یکدیگر در نظر بگیرد.

۲۵-۲ $Q_{۲۲} = 4ql^2$; $Q_{۱۱} = Q_{۲۲} = -2ql^2$ سایر مؤلفه‌ها صفر

۲۷-۲ (الف) $p = ql_1 + ql_2, p = 2ql \cos \theta/2$

(ب) $q = 5.26 \times 10^{-2} \text{ C} = 0.328e$

فصل ۳

۱-۳ برای نقاط بین: $\varphi = \frac{r_b \varphi_b - r_a \varphi_a + (\varphi_a - \varphi_b) r_a r_b / r}{r_b - r_a}$

به‌ازای $r > r_b$: $\varphi = \varphi_b r_b / r$

۹-۳ $r \leq a, \varphi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$

۱۱-۳ $\varphi = -(1 - a^3/r^3) E_0 r \cos \theta + Q/4\pi\epsilon_0 r$

۱۳-۳ در داخل $\varphi = (rV_0/R) \sin \theta$

در خارج $\varphi = (RV_0/r) \sin \theta$

۱۵-۳ تصویر آینه‌ای توزیع بار با $-\rho$ به جای ρ .

۱۷-۳ $F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+u)^2} - \frac{1}{(n-u)^2} \right) \right]$

$\cong -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{(1-u)^2} + 1 - 2u \right]$

که در آن $u = x/d$

۲۱-۳ (الف) تصویر در $(M^2 + 1)/(M^2 - 1)$

(ب) $M = (x_0/a) + \sqrt{(x_0/a)^2 - 1}$

۲۳-۳ $d^2/32\pi\epsilon_0 p^2$ ، جاذبه

۲۵-۳ مقادیر در نقاط گره‌ای داخلی (برحسب ولت):

	۳۰	
	۳۴	۱۸
۳۰	۱۸	۹

فصل ۴

۱-۴ $-bA, Q_p$ (در دو انتها) $= A(aL^2 + b)$; $\rho_p = -2ax$

$$E_z = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\frac{\frac{1}{2}L - z}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L - z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{1}{2}L + z}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L + z\right)^2 + R^2}} \right] \quad \text{۳-۴ در خارج میله:}$$

$$E = (1/\epsilon_0)P \cos \gamma \quad \text{۵-۴}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad \text{۷-۴}$$

$$\varphi_2 (\text{در ناحیه ۲}) = -E_0 \cos \theta \left\{ r - \frac{R_2^2}{r^2} + \frac{2(R_2^2 - R_1^2)}{r^2} \right. \quad \text{۹-۴}$$

$$\left. \times \frac{(K_2/K_1)}{[1 + 2(R_1/R_2)^2 + 2(K_2/K_1)(1 - R_1^2/R_2^2)]} \right\}$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی با مشتق‌گیری

$$\varphi_1 = \frac{3}{K+2} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a \quad \text{۱۱-۴}$$

$$\varphi_2 = \frac{p}{4\pi K\epsilon_0} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{K-1}{K+2} \frac{2}{a^2} r \cos \theta \right], \quad r \leq a$$

$$\sigma_{P_1} = \pm P_1 (\text{ج}): P_1 = \frac{K_1 - 1}{K_1} K_2 \epsilon_0 E_2 (\text{ب}); E_1 = \frac{K_2}{K_1} E_2 (\text{الف}) \quad \text{۱۳-۴}$$

$$D = K\epsilon_0 \Delta\varphi / [Kd - (K-1)t] \quad \text{۱۵-۴}$$

$$E = Q/2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2 \quad \text{۱۷-۴}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0 \quad \text{الف) داخل:} \quad \text{۱۹-۴}$$

$$E_r = \frac{2R^2 P}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad \text{ب) خارج:}$$

$$E_\theta = \frac{R^2 P}{3\epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

فصل ۵

$$R_0 = 0.96 \times 10^{-10} \text{ m (ب)}; \alpha = 9.7 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^2/\text{V (الف)} \quad \text{۱-۵}$$

$$2.6 \times 10^{-16} \text{ m} \quad \text{۳-۵}$$

$$2.94 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m} \quad \text{۵-۵}$$

فصل ۶

۱-۶ ۳۹ cm

$$U = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2l} - \frac{1}{2d+l} + \frac{1}{4d} + \frac{1}{4(d+l)} \right] \quad ۳-۶$$

(چون در پشت صفحه $E=0$ است).

$$4\pi R^2 \rho^2 / 15\epsilon_0 \quad ۵-۶$$

$$U = ۱,۶۱۸ \mu\text{J}, \Delta\varphi = ۱۰,۷۹ \text{ V (الف)} \quad ۹-۶$$

$$U = ۳,۲۴ \text{ mJ}, \Delta\varphi = ۲۱,۵۸ \text{ kV (ب)}$$

$$-(R/d)q \quad ۱۱-۶$$

$$\epsilon_1\epsilon_2 / (\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1) \quad ۱۳-۶$$

$$۲۳,۸ \text{ V} \quad ۱۵-۶$$

$$C = 4\pi\epsilon / \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ۱۷-۶$$

$$Kl(\Delta\varphi) / [l + (K-1)x] \quad \text{(الف)} \quad ۱۹-۶$$

$$(K-1)Q^2 d / 2\epsilon_0 w [l + (K-1)x]^2 \quad \text{(ب)}$$

$$[4mg / 2\pi\epsilon_0 (K-1)]^{1/2} \quad ۲۱-۶$$

$$F_x = \frac{1}{4} (1 - 1/K) \epsilon_0 E^2 A \quad ۲۵-۶$$

$$27-۶ \quad \text{(الف)} \quad Q_{\max} = \epsilon A E_{\max} \quad \text{که } A = \text{مساحت سطح صفحه}$$

(ب) شیشه

فصل ۷

$$v = ۰,۷۳۹ \times ۱۰^{-۳} \text{ m/s (ب)} \quad ۱-۷$$

$$\tau = ۲,۵ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ s (ج)}$$

$$\varphi_{\text{int}} = \frac{\varphi_1 g_1 (d-a) + \varphi_2 g_2 a}{g_2 a + g_1 (d-a)} \quad \text{(الف)} \quad ۳-۷$$

$$\sigma = \frac{(g_1 \epsilon_2 - g_2 \epsilon_1)(\varphi_1 - \varphi_2)}{g_2 a + g_1 (d-a)} \quad \text{(ب)}$$

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos\theta - \frac{1}{4} E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \quad \text{(الف) خارج:} \quad ۵-۷$$

$$\varphi_2 = -\frac{3}{4} E_0 r \cos\theta \quad \text{داخل:}$$

$$\sigma = -\frac{3}{4} K E_0 \cos\theta \quad \text{(ب)}$$

$$I = 2\pi g \Delta\varphi / \ln(r_2/r_1) \quad \text{(الف)} \quad ۷-۷$$

$$I = \pi g s \Delta\varphi / \cosh^{-1}(b/2a) \quad ۱۱-۷$$

$$۶۴۵ \text{ W/m}^2 \quad \text{(ب)}, ۶۷۵ \text{ W/m}^2 \quad \text{(الف)} \quad ۱۳-۷$$

$$۲۰ \Omega \quad ۱۵-۷$$

$$۷۵,۴ \text{ m} \quad ۱۷-۷$$

$$I = (\mathcal{V}_1 R_1 + \mathcal{V}_2 R_2) / (R_1 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_2) \quad \text{(الف)} \quad ۱۹-۷$$

$$R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad \text{(ب)}$$

$$(۱۱/۲۰)R \quad \text{(ب)}, ۴R/۵ \quad \text{(الف)} \quad ۲۱-۷$$

$$\frac{(R_2 R_5 - R_2 R_6) \mathcal{V}_1}{D + R_g (R_2 + R_4) (R_5 + R_6)} \quad \text{(الف)} \quad ۲۳-۷$$

$$D = R_2 R_4 R_5 + R_2 R_5 R_6 + R_5 R_6 R_2 + R_6 R_2 R_4$$

$$۲۵-۷ \quad \text{یک قسمت در } ۱۰^6 \times ۴ \text{ قسمت}$$

فصل ۸

$$۱,۰۹ \times ۱۰^{-7} \text{ s} \quad \text{(ب)}, ۰,۰۷۱ \text{ cm} \quad \text{(الف)} \quad ۳-۸$$

$$f = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{N}{L} I^2 = ۶,۲۸ \text{ N/m} \quad ۵-۸$$

$$B = \sqrt{3} \mu_0 I / \pi a \quad ۷-۸$$

$$\mu_0 IN / 4a \quad ۹-۸$$

$$\mu_0 NI \quad ۱۱-۸$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{2\partial r} \quad \text{(الف)} \quad ۱۳-۸$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = 0 \quad ۱۵-۸$$

$$B = \frac{1}{4} \mu_0 J s \quad ۱۷-۸$$

$$b/a = ۴/۳ \quad \text{(ب)}, B = \mu_0 NI / 2\pi r \quad \text{(الف)} \quad ۱۹-۸$$

$$A_z = (\mu_0 I / 2\pi) \ln(r/b) \quad \text{بین رساناها} \quad ۲۱-۸$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(ب)} \quad ۲۳-۸$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\psi) = f = \nabla^2 \psi, \psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f}{R} dv \quad \text{(ج)}$$

$$۲۵-۸ \quad \varphi^* \text{ یک تابع تک مقدار نیست.}$$

- ۲۷-۸ الف) $2\sqrt{2}\mu_0 I/(\pi a)$ عمود بر صفحه xy
 ب) $0.631\mu_0 I/(\pi a)$ موازی با صفحه xy
 ج) $0.647\mu_0 I/(\pi a)$ عمود بر صفحه xy
 د) $0.631\mu_0 I/(\pi a)$ موازی با صفحه xy
 $0.647\mu_0 I/(\pi a)$ عمود بر صفحه xy

$$B_r = (\mu_0 I/2a) \left[\cos\theta - \frac{3r^2}{4a^2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \dots \right] \quad \text{د) ۲۹-۸}$$

$$B_\theta = (\mu_0 I/2a) \left[-\sin\theta + \frac{3r^2}{4a^2} (5\cos^2\theta - 1)\sin\theta + \dots \right]$$

فصل ۹

۱-۹ الف) $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = 0$

$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$ در روی سطح جانبی M ، $\mathbf{j}_M = M$ در روی سطوح قاعده 0

۳-۹ ب) $(4/3)\pi R^3 M_0$

۵-۹ $\sigma_M M_0 x/[x^2 + (b^2/a^2)(y^2 + z^2)]^{1/2}$

$\rho_M = 0$

$$B_z = \frac{1}{2}\mu_0 M \left[\frac{\frac{1}{2}L-z}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L-z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{1}{2}L+z}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L+z\right)^2 + R^2}} \right] \quad \text{ب) ۷-۹}$$

۹-۹ الف) $0.14A$ ؛ ب) $0.53A$

۱۱-۹ $\mathbf{B}_i = 2(\mu/\mu_0)\mathbf{B}_0/(1 + \mu/\mu_0)$

۱۳-۹ $\mathbf{J}_M = 0$ (سطح داخلی) $\mathbf{j}_M = \frac{\chi I}{2\pi a}$ ، $\mathbf{j}_M = \frac{-\chi I}{2\pi b}$ (سطح خارجی)

داخلی) $\mathbf{J}_M = \chi I$ ، خارجی) $\mathbf{I}_M = -\chi I$

۱۵-۹ الف) $I, \theta_1 = 0$ موازی؛ ب) $I, \theta_1 = 90^\circ$ در خلاف جهت

۹۳۸ ۱۷-۹

۱۹-۹ الف) اکسید تف جوش، $0.4T$

فولاد با ۳۵ درصد Co ، $0.22T$

(ب) اکسید تف جوش، ۰.۵۳T

فولاد با ۳۵ درصد Co ، ۰.۹۶T

۲۱-۹ ۰.۶۴T

فصل ۱۰

$$۳-۱۰ \quad ۳.۶۹ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۵-۱۰ \quad \gamma = ۹۷۶$$

فصل ۱۱

$$۵-۱۱ \quad \mathcal{V}_0 = 2\pi f N A B = ۱۲.۵۶ \text{ (ب)}, \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cos \omega t \text{ (الف)}$$

$$۷-۱۱ \quad \text{(الف) از } b \text{ به } a; \text{ (ب) از } b \text{ به } a; \text{ (ج) از } a \text{ به } b$$

$$۹-۱۱ \quad \frac{1}{4} B^2 a^2 r^2 \omega g t$$

$$۱۱-۱۱ \quad (\mu_0 L / 2\pi) \ln(R_2 / R_1)$$

$$۱۳-۱۱ \quad \mu_0 \pi a^2 b^2 / 4r^3$$

$$۱۵-۱۱ \quad M = (\mu_0 h / 2\pi) \ln(1 + d/r)$$

$$۱۷-۱۱ \quad (\mu_0 / \pi) \ln(d/a)$$

$$۲۱-۱۱ \quad ۷۳.۴ \text{ Nm (الف)}, ۱.۳ \text{ s (ب)}$$

$$۲۵-۱۱ \quad \text{با فرض } \nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \text{ داریم, } \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-(\alpha^2 / g \mu_0) t}$$

فصل ۱۲

$$۳-۱۲ \quad U = \left(\frac{1}{2} s + 2 \right) [L_1 I_1^2 + 2M_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2]$$

$$۵-۱۲ \quad N^2 I^2 A \mu^2 / \mu_0 (l + d)^2$$

$$۷-۱۲ \quad F = B_0^2 \chi_m A / 2\mu_0 (1 + \chi_m) \text{ (الف)}$$

$$\text{(ب)} \quad ۱.۷۶ \times ۱۰^{-۴} \text{ N}$$

$$۱۱-۱۲ \quad \frac{1}{4} \mu_0 \frac{N}{l} I^2 \text{ (الف) و (ب)}$$

$$۱۳-۱۲ \quad \text{(الف)} \quad F = -\frac{1}{4} \mu_0 N^2 I^2 \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} - 1 \right) \text{ (ب) تنگ می شود و می رمبد.}$$

$$۱۵-۱۲ \quad I = I_0 \sqrt{\frac{L}{L + M}}$$

۱۲-۱۷ آهن تجارتي: 18 W/cm^3 °ر

فولاد تنگستن: 395 W/cm^3 °ر

۱۲-۱۹ (الف) آلنيكو ۵، ۴۵ ژول

(ب) آلنيكو ۱۲، ۱۲ ژول

(ج) فولاد Co، ۱۲ ژول

(د) اكسيد تف جوش، ۸ ژول

فصل ۱۳

۱۳-۱ (الف) $dI/dt = 159 \text{ A/s}$, $I = 605 \text{ A}$ °ر

(ب) $dI/dt = 558 \text{ A/s}$, $I = 295 \text{ A}$ °ر

(ج) $dI/dt = 0062 \text{ A/s}$, $I = 663 \text{ A}$ °ر

$$Q = C\mathcal{V}_0 [1 - e^{-t/RC}] \quad 3-13$$

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{(الف) } 5-13$$

(ب) به ازای $\omega = 0$, $|Z| = R$

به ازای $\omega = 1/\sqrt{LC}$, $|Z| \cong L/RC$

به ازای $\omega \rightarrow \infty$, $|Z| \cong \omega L$

$$Z = \frac{R\alpha - \omega C' R \frac{\omega L - 1}{\omega C} + i[\omega C' R^2 + \alpha(\omega L - 1)/\omega C]}{\alpha^2 + \omega^2 C'^2 R^2} \quad 7-13$$

که در آن $\alpha = 1 + \omega^2 C' L - C'/C$

۱۳-۹ (الف) 32×10^{-2} درجه؛ (ب) صفر تا 18 مگاهرتز

۱۳-۱۳ (الف) $f = 178 \times 10^3 \text{ Hz}$ ؛ (ب) $f = 178 \times 10^3 \text{ Hz}$ ؛

(ج) $f = 796 \times 10^3 \text{ Hz}$

۱۳-۱۵ (الف) $L/C = 2R^2$ ؛ (ب) $C = 1/\sqrt{2}R\omega_c$ ؛ $L = \sqrt{2}R/\omega_c$

۱۳-۱۷ $0.713 - 0.0034i \text{ mA}$

۱۳-۱۹ $1/\sqrt{3LC}$

$$G_T = \frac{3 + F^2 + 4iF}{(3 - F^2)^2 + 4F^2} \quad 21-13$$

$$\begin{aligned} 2W_1 - FW_2 - W_3 &= 1 & 23-13 \\ FW_1 + 2W_2 &= 0 \\ -W_1 + \frac{3}{2}W_3 - 2FW_4 &= 0 \\ -W_2 + 2FW_3 + \frac{3}{2}W_4 &= F \end{aligned}$$

که در آن $V_2/\mathcal{V}_0 = W_1 + iW_2$

$V_3/\mathcal{V}_0 = W_3 + iW_4$

فصل ۱۴

۳-۱۴ الف) $\omega_p = 9.7 \times 10^9 \text{ s}^{-1}, h = 0.62 \times 10^{-6} \text{ m}$

ب) $\omega_p = 1.8 \times 10^6 \text{ s}^{-1}, h = 0.84 \times 10^{-3} \text{ m}$

ج) $\omega_p = 1.8 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}, h = 3.1 \times 10^{-8} \text{ m}$

$u_d = 10^5 \text{ m/s}$ ۵-۱۴

۷-۱۴ الف) $\delta = 0.11/f^2 \text{ m}, v_p = 280 \text{ m/s}$ (بر حسب Hz)

ب) $\delta = 0.3/f^2 \text{ m}, v_p = 0.76 \text{ m/s}$

فصل ۱۵

۱-۱۵ الف) خارج $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{i} - B_0 (a/r)^2 (\mathbf{a}_r \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta)$

داخل $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$

ب) $\mathbf{j}_s = -2B_0 \mu_0^{-1} \sin \theta \mathbf{k}$

۳-۱۵ خارج $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{i} - b(a/r)^2 (\mathbf{a}_r \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta)$

$\mathbf{B} = c[\mathbf{a}_r (\lambda/r) I_1(r/\lambda) \cos \theta - \mathbf{a}_\theta I_1'(r/\lambda) \sin \theta]$

که در آن I_1 تابع بسل تغییر یافتهٔ نوع اول است و I_1' مشتق اول آن

$$b = B_0 \frac{[I_1'(a/\lambda) - (\lambda/a)I_1(a/\lambda)]}{I_1'(a/\lambda) + (\lambda/a)I_1(a/\lambda)}$$

$$c = 2B_0 / [I_1'(a/\lambda) + (\lambda/a)I_1(a/\lambda)]$$

۵-۱۵ الف) $B = 10^{-3} I$ (بر حسب تسلا I بر حسب A)

ب) $I = 140 \text{ A} : \text{Nb}, I = 9.7 \text{ A} : \text{Ta}, I = 53 \text{ A} : \text{Pb}$

B/B_0	B/B_0	r/λ	۷-۱۵
(شکل ۱۵-۳)	(یک بعدی)		
۰	۰٫۰۰۷	۰	
۰٫۰۲۳	۰٫۰۱۸	۱	
۰٫۰۶۵	۰٫۰۵۰	۲	
۰٫۱۶۲	۰٫۱۳۵	۳	
۰٫۴۰۱	۰٫۳۶۸	۴	
۱٫۰	۱٫۰	۵	

فصل ۱۶

۱-۱۶ الف) $Q = C(\Delta\varphi) e^{-gt/\varepsilon}$ ؛ ب) $-(g/\varepsilon) C(\Delta\varphi) e^{-gt/\varepsilon}$ ؛

(ج) صفر

۳-۱۶ الف) $H = \frac{1}{\mu_0} a \partial D / \partial t = I / 2\pi a$ ؛ ب) $S = \frac{1}{\mu_0} a E \partial D / \partial t$ به طرف داخل؛

(ج) $\pi a^2 dE \partial D / \partial t$

۷-۱۶ $\mathbf{B} = -iE_0 \sqrt{\varepsilon\mu} \sin \omega(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t) + jE_0 \sqrt{\varepsilon\mu} \cos \omega(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t)$

$$\mathbf{S} = \mathbf{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2$$

۹-۱۶ $\mathbf{A} = -i(\lambda E_0 / 2\pi c) \cos[2\pi(z - ct)/\lambda]$

۱۱-۱۶ $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu g \varphi$

فصل ۱۷

۵-۱۷ $E = 700 \text{ V/m}$; $B = 2,33 \times 10^{-6} \text{ T, rms}$

۷-۱۷ $\bar{S} = (1/c\mu_0) \bar{E}^2 = (1/c\mu_0) \frac{1}{\mu_0} (E_x^2 + E_y^2 + 2E_x E_y \cos \phi)$

۱۱-۱۷ $\delta/\lambda = 0,384$ ، $k = 0,455\sqrt{K_r}$ ، $n = 1,099\sqrt{K_r}$

۱۳-۱۷ $g = 0,92 \times 10^{-6} (\Omega\text{m})^{-1}$ (ب)

۱۵-۱۷ $l = 4,5 \text{ cm}$

فصل ۱۸

۱-۱۸ الف) $r_{12s} = \frac{1-n^2}{1+n^2}$ ؛ ب) به ازای $n = 1,5$ ، $R_s = 7,14,8$

$$R_p \cong 1 - 4K \sqrt{\frac{2\delta}{\sqrt{K-1}}} \quad 3-18$$

$$R_p \cong \frac{(n \cos \theta_1 - 1)^2 + k^2 \cos^2 \theta_1}{(n \cos \theta_1 + 1)^2 + k^2 \cos^2 \theta_1} \quad (\text{الف}) \quad 5-18$$

$$R_p = 7.72, \theta_1 = 8.5^\circ \quad (\text{ج}), \cos \theta_1 = 1/\sqrt{n^2 + k^2} \quad (\text{ب})$$

$$K_i = 1.13; n \cong 3, k \cong 0.188; \alpha = 2.7^\circ \quad 9-18$$

$$R = 1, \hat{r}_{22} = \pm 1 \quad 13-18$$

$$R = \frac{R_{12} + R_{22} - 2R_{12}R_{22}}{1 - R_{12}R_{22}} \quad (\text{الف}) \quad 15-18$$

$$R = \frac{2R_{12}}{1 + R_{12}}, R_{12} = R_{22} \quad \text{بهازای} \quad (\text{ب})$$

$$B_x = B_1 \cos(\kappa y \cos \theta) e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)} \quad 17-18$$

$$E_y = -cB_1 \sin \theta \cos(\kappa y \cos \theta) e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)}$$

$$E_z = icB_1 \cos \theta \sin(\kappa y \cos \theta) e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)}$$

$$\frac{\lambda}{2} < a < \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad 19-18$$

$$R_s = \left[\frac{\cos \theta_1 - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}} \right]^2 \quad (\text{الف}) \quad 21-18$$

$$R_p = \left[\frac{n_1^2 \cos \theta_1 - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}}{n_1^2 \cos \theta_1 + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}} \right]^2$$

$$\theta_B = 56.7^\circ \quad \text{شيشه} \quad (\text{ج})$$

$$\theta_B = 58.8^\circ \quad \text{شيشه}$$

$$\theta_B = 67.5^\circ \quad \text{الماس}$$

فصل ١٩

$$1-19 \quad (\text{الف}) \quad 1.63 \times 10^{-2} = n_v - 1 = 1.36 \times 10^{-2} \quad (\text{ب})$$

$$\lambda_0 = 1560 \text{ \AA} \quad 3-19$$

$$\alpha = 2k\omega_0/c, k \cong K_i/2n_\infty \quad (\text{الف}) \quad 7-19$$

$$n \cong k \cong 0.719 \quad 9-19$$

$$\omega = \sqrt{K_o}/\tau, K_i \cong \sqrt{K_o}, K_r \cong 1 \quad 13-19$$

$$P = \chi_o E_o \sin \omega_o t \quad 15-19$$

فصل ۲۰

$$B_\theta = \frac{\mu_o I_o}{4\pi} A \frac{\omega^2}{c^2 r} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad 3-20$$

$$E_\phi = -\frac{I_o A}{4\pi \epsilon_o} \frac{\omega^2}{c^2 r} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

که در آن A مساحت حلقه دایروی است.

$$P = \frac{\mu_o}{6\pi} I_o^2 A^2 \frac{\omega^4}{c^3} \cos^2 \omega \left(1 - \frac{r}{c} \right)$$

$$5-20 \quad 5.23 \text{ A (الف)}; 2.45 \times 10^{-2} \text{ V/m (ب)}$$

$$\frac{3}{2} \quad 7-20$$

$$9-20 \quad 8\pi/3 (v/c)^3 \text{ (الف)}; 4.07 \times 10^{-7} \text{ (ب)}$$

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} (2\pi)^2 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda^2} \right)^2 \quad 11-20$$

$$52.1 \text{ m}^{-1} \quad 13-20$$

فصل ۲۲

$$4.2 \times 10^{17} \text{ s} \quad 3-22$$

$$\frac{\mathbf{u}}{1 + u^2/c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{(E^2/c^2 + B^2)} \quad 5-22$$

نمایه

- آزمایش مایکلسون-مورلی ۶۶۱
 آنالیز برداری ۳-۳۱
 آنتن ۶۳۲
 جهت‌مندی ۶۴۱
 نیم‌موج، تابش از ۶۲۴-۶۲۶
 آهنربا
 پتانسیل نرده‌ای ۲۴۶
 قطبهای ۲۶۵، ۲۶۴، ۲۳۱
 آهنربای دائم ۲۸۲، ۲۸۱، ۲۷۵، ۲۷۴
 آهنگ گرمای ژول ۴۶۱
 آهن نرم ۲۹۳-۲۹۴، ۲۸۸، ۲۷۰
 آینه مغناطیسی ۴۱۰-۴۱۲
 همجوشی گرماهسته‌ای ۴۱۷-۴۱۸
 ابررسانا ۴۲۹-۴۵۳
 به‌عنوان ماده مغناطیسی ۴۴۰، ۴۳۹
 پذیرفتاری و تراوایی ۴۳۹، ۴۳۵، ۴۳۱
 دمای بحرانی ۴۳۱-۴۳۲، ۴۳۰
 دیامغناطیس کامل ۴۳۵-۴۳۶
 رسانش کامل ۴۳۵-۴۳۶، ۴۳۱
 نظریه رفتار الکترومغناطیسی ۴۴۲-۴۴۴
 ابررسانایی ۴۲۹-۴۵۳
 اثر ۶۵۰-۶۶۱، ۶۵۹
 اتساع زمان ۶۶۶
- اتصال متوالی
 القاگرها ۴۰۴-۴۰۳، ۳۳۱-۳۳۰
 خازنها ۱۷۸
 مقاومتها ۲۰۴
 مقاومت‌های ظاهری ۳۷۲-۳۶۹، ۳۷۳-۳۷۶
 اتصال موازی
 القاگرها ۳۳۱-۳۳۰
 خازنها ۱۷۸
 مقاومتها ۲۰۵، ۵۷۸-۵۷۶
 مقاومت‌های ظاهری ۳۷۲-۳۷۰، ۳۷۵
 ائتلاف
 پسماند ۳۵۳-۳۵۰
 دی‌الکتریک ۶۰۶-۶۰۵
 گرمایی ژول در مدار مغناطیسی ۳۴۰
 اثر
 ایزوتوپ و ابررسانایی ۴۳۵
 ترموالکتریک ۱۹۱
 تنگش ۴۱۲، ۴۱۸-۴۱۵
 کامپتون ۶۳۷
 مایسنر ۴۳۱، ۴۳۵، ۴۴۳
 و معادلات لندن ۴۴۰
 وامغناطیده ۲۹۵-۲۹۴
 اختلاف پتانسیل ۲۰۶-۲۰۴

یکاهای ۷۰۸
 الکترو دینامیک ۶۴۴-۶۵۷
 الکتروستاتیک ۳۲-۶۵
 الکتروفور (دستگاه برق ساز) ۱۸۵
 الکترو لیت ۴۳۳
 رسانش در ۱۸۹-۱۹۰
 الکترون
 بار ۳۶
 تحرک و سرعت سوق ۲۱۲
 توان تابش شده توسط الکترون شتابدار ۶۳۶
 حرکات مداری ۳۰۴-۳۱۰
 رسانش ۱۸۹، ۱۸۸، ۴۴-۴۵
 زمان برخورد ۲۰۲-۲۰۳، ۲۱۱-۲۱۲
 ۵۹۰-۵۹۱
 نوسان پلاسما ۴۲۰-۴۲۶، ۵۰۶
 الکتروستاتیک جو ۱۹۱
 الیاف نوری ۵۳۴
 امواج
 آلفن ۴۲۲
 پلاسما ۴۲۰-۴۲۷
 رادیویی ۴۸۵، ۴۸۴
 و عمق پوسته ۵۰۵
 محوشونده ۵۴۴
 انتشار تب الکترومغناطیسی ۶۱۰-۶۱۲
 انتشار موج ۶۵۹-۶۶۷، ۴۸۴-۵۱۸، ۴۶۳-۴۶۷
 بین صفحه‌های رسانای موازی ۵۵۳-۵۶۰
 در پلاسما ۴۲۳
 در دستگاه موج در حال حرکت ۶۵۹-۶۶۷
 در محیط رسانا ۴۸۴، ۴۶۷
 انتقال ۵۳۰، ۵۲۲
 ولایت نازک ۵۴۵-۵۵۳

سیم در حال حرکت ۳۲۱-۳۲۴
 نماد برای ۲۰۴
 اختلاف فاز
 در بازتاب ۵۴۵-۵۵۳، ۵۳۶
 مرتبه دوم در ابررساناها ۴۳۴
 و انتشار تپهای تابش ۶۱۲
 اسپین ۳۰۷
 و فرومغناطیس ۳۱۱، ۳۱۴
 استقامت دی الکتریک ۱۲۹-۱۳۰
 جدول ۱۲۸
 استوانه ابررسانا و طرد کامل شار ۴۳۸-۴۳۹
 استوانه رسانا ۸۸، ۵۶۱
 اصول نسبیت ۶۶۳، ۶۶۰
 القا
 در مدارهای ac ۳۳۲، ۳۸۱-۳۷۶
 سری ۳۳۰
 متقابل ۳۲۷-۳۳۱، ۳۸۱-۳۷۶
 موازی ۳۳۰
 نموی ۳۸۳
 یکاهای ۷۰۸، ۳۲۶
 القاگر
 اتصال متوالی ۳۳۰-۳۳۱
 اتصال موازی ۳۳۰-۳۳۱
 در مدارهای متوالی ۳۶۲-۳۶۳
 القای متقابل ۳۲۷-۳۳۱
 در مدارهای ac ۳۷۶-۳۸۱
 قرارداد علامت ۳۷۶-۳۷۸
 القای مغناطیسی ۲۲۱-۲۲۵
 بار نقطه‌ای در حال حرکت ۶۴۸-۶۵۰
 ۶۵۴-۶۵۵
 خطوط ۲۷۶-۲۷۷

- رابطه با بازتاب ۵۳۱
انقباض لورنتس ۶۶۵، ۶۶۶
انتگرال
- حجمی ۱۵
خطی ۱۳
سطحی ۱۴
- انتگرال گیری عددی ۶۸۸-۶۹۰
توسط کامپیوتر ۶۸۸-۶۹۰
انرژی، یکاها ۴۳، ۷۰۸
انرژی پتانسیل ۱۶۳
- بارهای نقطه‌ای ۱۶۵-۱۶۴
رابطه با پتانسیل الکتروستاتیکی ۴۳-۴۲
دوقطبی الکتریکی ۵۳
دوقطبی دائمی در میدان الکتریکی
۱۵۵-۱۵۴
- نیروی الکتروستاتیکی القایی ۴۳-۴۲
انرژی الکتروستاتیک ۱۸۷-۱۶۳
توزیع بار ۱۶۹-۱۶۶
انرژی الکترومغناطیسی ۴۶۳-۴۵۸
انرژی مغناطیسی ۳۵۸-۳۳۹
مدارهای جفت شده ۳۴۳-۳۴۰
- باتری ۲۰۴
بار ۳۳-۳۲
- آزاد ۱۲۶، ۳۲۵-۳۱۳
آزمون ۳۸-۳۹، ۱۲۰
بقا (پایستگی) ۳۳، ۱۷۸، ۴۵۶، ۴۵۷،
۴۷۰، ۶۱۹
- تصویری ۸۶-۸۱، ۱۴۱-۱۳۹
خارجی ۱۲۶
در حال حرکت یکنواخت ۶۵۰-۶۴۶،
۶۷۸-۶۷۶
- روی خازن ۱۷۶-۱۷۵
کل دردی الکتریک ۱۲۸-۱۲۲
مقیّد ۱۱۴، ۱۲۶، ۵۹۷-۵۸۸
نیروهای بین ۳۳
یکاها ۳۶-۳۵، ۷۰۸
بار آزاد ۱۱۳، ۵۸۷، ۵۸۸
- در سیم و نیروی لورنتس ۳۲۴-۳۲۱
و بار خارجی ۱۱۸-۱۱۷
و فزوالکتریسیته ۱۶۰-۱۵۸
بار خطی
- در رساناهای استوانه‌ای ۸۸
میدان الکتریکی ۵۰-۴۸
و سطح هم‌پتانسیل ۸۸-۸۷
بار قطبشی
- رابطه با کل بار ۱۲۶-۱۲۴
و بار آزاد ۱۲۶
بار مقیّد ۱۱۴، ۵۸۷
- جذب تشدیدی توسط ۵۹۷-۵۸۸
بار نقطه‌ای ۳۴-۳۳
انرژی پتانسیل گروه ۱۶۵-۱۶۴
پتانسیل ۷۴
- پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از ۴۱
پتانسیلهای لیناردویشرت ۶۴۴
خودانرژی ۱۶۹-۱۶۸، ۱۷۱
- دردی الکتریک ۱۳۰-۱۲۸، ۱۳۷-۱۳۸
رابطه با توزیع بار ۵۷
میدان الکتریکی ۴۰-۳۹
میدان، در حال حرکت یکنواخت ۶۵۰-۶۴۶،
۶۷۸-۶۷۶
میدان، شتابدار ۶۵۴-۶۵۰
نزدیک اجسام رسانا ۸۶-۸۱

بار نقطه‌ای شتابدار ۶۵۵
 در میدان تابشی دوقطبی نقطه‌ای ۶۳۱
 و چگالی انرژی و شار ۴۹۵
 و گسیل تابشی ۶۲۳، ۶۲۶، ۶۲۹، ۶۳۶،
 ۶۳۷
 یکاها ۷۰۷
 برنامه کامپیوتر ۶۸۳
 برای حل مسائل الکتروستاتیک ۱۰۶-۱۰۲
 برهم‌نهی امواج تخت ۴۹۰
 بسط سری فوریه ۷۱۵
 تبدیلهای فوریه ۱۰۶-۱۰۳، ۷۱۷-۷۱۴
 و امواج تخت ۴۹۰
 بسط میدانهای الکتریکی برحسب چندقطبی
 ۵۴-۵۷
 بقا (پایستگی) ۲۳، ۱۷۶، ۴۵۶، ۴۷۰-۴۶۹،
 ۴۷۱، ۶۱۹
 انرژی ۳۶۳، ۴۶۳-۳۹۴، ۵۲۲
 بهره جریان در شبکه چهار سر ۳۸۷
 بهره ولتاژ در شبکه چهار سر ۳۸۷
 یاد فرومغناطیس ۳۱۴
 پارامغناطیس، منشأ ۳۰۸-۳۰۷
 پاسخهای موج تخت ۴۸۹-۴۸۴
 پاشندگی ۴۹۱-۴۹۰
 بهنجار ۵۹۲
 بی‌هنجار ۵۹۶
 در محیط پاشنده ۵۲۵-۴۷۹
 و تپ تابشی ۶۱۲-۶۰۹
 پایستگی (بقا) ۳۶۳، ۴۶۳-۳۹۴، ۵۲۲
 پتانسیل ۲۴، ۴۴-۴۱، ۲۴۶
 استتار شده کولنی ۶۴
 برداری مغناطیسی ۲۴۲-۲۴۱، ۲۵۹، ۴۷۳

نزدیک فصل مشترک در دی‌الکتریک
 ۱۴۱-۱۴۰
 و پاسخ معادله موج ۴۷۴
 بازتاب ۵۳۰-۵۲۲
 از سطح رسانا ۵۴۵-۵۳۵
 برای فرود عمود ۵۲۴-۵۲۰
 داخلی کامل ۵۳۴، ۵۴۲، ۵۵۱
 در فصل مشترک هوا-فلز ۵۴۵-۵۳۵
 زاویه ۵۲۶
 کلی تضعیف شده ۵۵۲-۵۵۱
 کلی داخلی ۵۳۴، ۵۴۲، ۵۵۱
 وابستگی به زاویه فرود ۵۳۵-۵۳۱
 بازتابش و لایه نازک ۵۵۳-۵۴۵
 بتاترون ۴۰۵
 بردار ۳-۳، ۷۰۳-۶۹۸
 انتشار ۴۸۵، ۵۲۴
 مختلط ۴۹۱
 انتگرال‌گیری ۱۳
 پادوردا ۷۰۳
 تاو ۲۱-۱۸
 تبدیل ۷۰۲-۶۹۸
 جمع ۵
 دیورژانس ۱۷-۱۵
 ضرب ۶
 مختلط ۴۹۱، ۴۹۴
 منفی ۵
 هرتز ۴۸۳
 هموردا ۷۰۳
 یکه ۷، ۴۸۵
 متعام راستگرد ۴۸۸، ۴۹۱
 بردار پوئین‌تینگ ۴۶۲، ۵۲۲، ۵۳۰، ۵۵۷-۵۵۶

- تأخیری ۴۷۷، ۶۳۸-۶۳۴
صفر ۸۴
ضریب ۸۹-۹۰
نرده‌ای مغناطیسی ۲۴۸-۲۴۶، ۲۶۵-۲۶۴، ۲۷۹
یک‌اها ۴۳، ۷۰۷
پتانسیل الکتروستاتیک ۴۴-۴۱
توزیع حاصل از دوقطبی نقطه‌ای ۵۳-۵۲
رابطه با انرژی پتانسیل ۴۲-۴۱
محاسبه با قانون گاوس ۵۰-۴۸
ناشی از توزیع بار دلخواه ۵۶-۵۴
و قضیه دیورژانس ۹۵
پتانسیل برداری ۴۷۹-۴۷۳
تأخیر ۸-۶
مغناطیسی ۲۴۲-۲۴۱، ۴۷۳
یک‌اها ۷۰۷
پتانسیل لینارد-ویشرت ۶۴۶-۶۴۳
و میدان بار در حال حرکت یکنواخت ۶۵۰-۶۴۱
و میدان بار شتابدار ۶۵۴-۶۵۰
پتانسیل نرده‌ای ۴۷۸-۴۷۳
تأخیری ۴۷۷
مغناطیسی ۲۴۷-۲۴۶، ۲۶۵-۲۶۴
یک‌اها ۷۰۷
پذیرفتاری
ابرسانا ۴۳۵، ۴۴۲
الکتریکی ۱۲۸-۱۲۶، ۵۸۲، ۵۸۵
پارامغناطیسی ۲۶۹، ۳۰۷
دیامغناطیسی ۲۶۹، ۳۰۶-۳۰۵
مغناطیسی ۲۶۹، ۲۶۸، ۷۰۸
جدول ۲۶۹
- مولی ۲۶۹
و میدانهای مولکولی ۱۶۰
پذیرفتاری جرمی ۲۶۸، ۲۶۹
جدول ۲۶۹
پرتوگاما ۴۸۵، ۴۸۶
پرتو x ۴۸۴، ۴۸۵
پراکندگی
پرتو x ۶۳۶، ۶۳۷
ناهمدوس ۶۳۷
همدوس ۶۳۷
پسماند ۱۶۰، ۲۷۳، ۲۷۵-۲۷۴، ۳۵۲
پلاسما ۴۲۸-۴۰۱
برای راکتور همجوشی گرمابه‌سته‌ای
۴۲۰-۴۱۸
چگالی الکترونی در ۴۰۵-۴۰۴
ختنایی الکتریکی در ۴۰۴-۴۰۳
ضریب مقاومت ویژه ۴۲۷
مدارهای ذره در ۴۱۰-۴۰۵
پل وستون ۲۱۹
پوشینه ۴۰۱
پهنای خط طبیعی ۶۳۶
پیچه هلمهولتز ۲۳۶-۲۳۴
پیمانه ۴۷۹، ۴۸۲
کولن ۴۸۲
لورنتس ۴۷۹
و معادله موج ۴۷۳
تابش
از آنتن نیم‌موج ۶۲۶-۶۲۴
از بار نقطه‌ای شتابدار ۶۳۱، ۶۵۴-۶۵۰
از دوقطبی نوسانی ۶۲۴-۶۱۹
از گروهی بار در حال حرکت ۶۳۱-۶۲۶

- دوقطبی الکتریکی نوسانی ۶۱۹-۶۲۴
 فرانفیش ۴۸۵
 فرکانسها و طول موجها ۴۸۶، ۳۵۹-۳۶۰
 فروسخ ۴۸۵
 گسیل ۶۱۹-۶۴۲
- تابع
 بسل کروی ۵۱۲-۵۱۳
 پاسخ ۵۷۲-۵۷۷
 عادی ۵۸۳-۵۸۴
 مولد ۱۰۹
 نویمان کروی ۵۱۲-۵۱۳
 تابع پاسخ فرکانس
 در محیط خطی ۵۷۸
 مختلط ۵۷۹-۵۸۲
 و روابط پاشندگی ۵۷۸-۵۸۲
 تابع دلستای دیراک ۵۷۳، ۲۶۱، ۵۷-۵۹
 ۷۱۱-۷۱۲
 تبدیل فوریه ۷۱۵-۷۱۶
 و تقریب ثابت دی الکتریک ۵۹۰، ۵۹۱
 ۶۰۰
 و قانون آمپر ۲۳۸-۲۳۹
 و قانون گاؤس ۵۸
 و قضیه دیورژانس ۵۹
 تانسور ۶۹۹-۷۰۱، ۴
 پاد متقارن ۶۷۳
 تعریف ۷۰۲
 دی الکتریک ۴۵۹-۴۶۰
 گشتاور چهارقطبی ۵۷
 مرتبه دوم ۷۰۲
 میدان ۶۷۳-۶۷۴، ۶۶۸-۶۶۹
 ۷۰۶
 الکترومغناطیسی ۶۷۲
- چهاربعدی ۶۷۲
 تاو ۱۸-۲۱
 عمل کردن مرتبه دوم ۲۳-۲۴
 تأخیر فاز ۵۴۵-۵۵۲
 تبدیل
 پیمانهای ۴۷۹
 خطی ۶۹۹
 گالیه و قوانین نیوتون ۶۵۹، ۶۶۵
 متعامد ۶۷۰-۷۰۳، ۶۶۸-۶۷۰
 مختلط ۶۶۸-۶۶۹
 مختصات ۶۹۹-۷۰۳
 یکانی ۷۰
 تبدیل لورنتس ۶۶۷-۶۶۲، ۶۷۰
 برای میدان الکترومغناطیسی ۶۷۴-۶۷۶
 شکل هموردا ۶۷۲-۶۷۰
 و تبدیل متعامد ۶۷۰-۶۶۸
 و حرکت یکنواخت ذره ۶۷۶-۶۷۸
 و سرعت ذره در پلاسما ۴۰۸
 و هندسه زمان-مکان ۶۶۸-۶۶۷
 تحرک الکترون ۲۱۲
 تحلیل
 حلقهای ۳۸۱-۳۸۶
 عددی ۶۸۲، ۶۹۳
 گره‌ای ۳۸۴-۳۸۵، ۳۸۱
 تخلیه الکتریکی گاز و جریان ۱۹۰
 تداخل ۵۴۵-۵۵۳
 تراوایی نسبی ۲۷۰، ۴۶۶
 مواد فرّومغناطیسی ۲۷۵-۲۷۰
 تشدید ۳۷۳-۳۷۶
 پارامغناطیسی ۴۸۸
 تصویر الکتروستاتیک ۸۶-۸۱

- در دستگاه الکترون مقید ۵۸۴-۵۹۷
و نظریه درود-لورنتس ۵۸۳-۵۸۸
۵۹۱-۵۹۶
- جابه‌جایی الکتریکی ۱۲۴-۱۲۶
در فصل مشترک ۱۳۱-۱۳۳، ۱۳۶
رابطه با میدان الکتریکی ۵۷۱-۵۷۸
شار در ناحیه‌های بدون بار خارجی ۱۳۴
یک‌گانه ۱۲۵، ۷۰۸
جبر برداری ۴-۸
جداسازی متغیرها ۷۲، ۷۶، ۴۹۸، ۵۶۰
جذب ۵۳۷، ۶۰۱
تشدیدی توسط بارهای مقید ۵۸۸-۵۹۷
ضریب ۵۱۸، ۶۴۲
یونی ۵۹۷
جریان ۴۴، ۲۲۰-۲۲۰، ۱۸۸-۲۰۲، ۲۵۶، ۶۵۸
اتمی ۲۵۶-۲۵۸، ۲۵۷-۲۶۵
انتقالی ۲۵۶، ۲۶۷
انرژی ۴۶۲
تصویری ۲۹۸
تعریف ۱۸۸
جهت ۱۹۰
در ابررسانا ۴۳۹
در فلز ۱۸۹-۱۸۸
رسانشی ۱۹۰
سطحی ۲۶۱
کند تغییر ۳۳۲، ۳۵۹، ۴۰۰
گردابی ۳۳۶
متناوب ۳۶۰، ۳۶۱
مختلط ۳۶۹-۳۶۸
مقدار مؤثر ۳۷۳
میدان مغناطیسی ۲۵۱-۲۲۱
- و معادله لاپلاس ۸۴-۸۱
تصویر خطی ۸۸-۸۶
تعادل ۲۰۳-۲۰۱
الکتروستاتیک، نزدیک شدن ۲۰۳-۲۰۱
تعریف ۴۸۴
تعمیم برداری ۲۴
تقارن کروی ۷۴
تکرار
- برنامه‌های کامپیوتر برای ۹۲، ۹۸-۹۵،
۱۰۲-۱۰۱
در روش تفاضلهای متناهی ۹۴-۹۱
در مسائل مدار مغناطیسی ۲۹۰
تندمیرا ۳۹۷
تنش سطحی ۱۳۷
توابع انتقال ۳۸۷-۳۸۶، ۶۸۵
توابع بسط ۴۴۹-۴۴۸
کروی ۵۱۴-۵۱۳
توان ۱۹۸-۱۹۷
اندازه‌گیری ۳۷۳-۳۷۲
لحظه‌ای ۳۷۲
متوسط ۴۶۹-۴۶۸
توزیع ماکسول-بولتزمن ۱۵۵، ۴۰۲
ثابت(های)
- اپتیکی ۵۰۵-۵۰۱
زمانی محیط ۲۰۲، ۲۱۱
زمانی مدار ۳۶۶-۳۶۴
نیرو ۵۸۳-۵۷۹
ثابت تضعیف ۵۰۲-۵۰۱، ۵۴۶-۵۴۴
در مواد رسانا ۵۰۴
ثابت دی‌الکتریک مختلط ۵۰۵-۵۰۰
در دستگاه الکترون آزاد ۵۹۷

- اتلافی ۴۴۳-۴۴۴
 انتقالی ۲۶۵-۲۶۷
 جابه‌جایی ۴۴۳-۴۴۴
 چار-بردار ۶۷۱
 سطحی ۲۷۷، ۵۸، ۴۷۰
 مغناطشی ۲۶۷، ۲۶۱، ۲۶۰، ۲۵۷
 یکاها ۷۰۶، ۱۹۲
 چگالی حجمی بار، نمادگذاری برای ۱۹۴
 چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی ۲۶۴
 چگالی قطب مغناطیسی ۲۶۴-۲۶۵
 چنبره ۲۵۴
 پر شده از مواد فرّومغناطیس ۲۸۴-۲۸۵
 پلاσμα ۴۱۸، ۴۱۹
 خودالقا ۳۲۶-۳۲۵
 چندجمله‌ایهای لژاندر ۷۳، ۱۰۹، ۵۱۱
 حامل بار ۴۵-۴۴، ۱۸۸، ۱۸۹
 حرکت ذره در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ۳۴۴-۳۴۵
 حرکت رانشی (سوقی) ۱۹۱، ۱۹۰
 در پلاσμα ۴۱۱-۴۰۷
 حرکت موج در پلاσμα ۴۲۷-۴۲۰
 حفرهٔ سوزنی ۱۲۳-۱۲۰
 حلقه ۲۰۶
 حوزهٔ فرّومغناطیسی ۳۱۳-۳۱۲، ۳۱۵-۳۱۴
 خازن ۶۴، ۱۷۶-۱۷۵، ۲۰۱-۲۰۰، ۴۵۷-۴۵۵
 اتصالهای متوالی و موازی ۶۸۱
 در مدارهای متوالی ۳۶۳-۳۶۱، ۳۷۵-۳۶۵، ۳۹۶
 صفحه-موازی ۱۷۶، ۱۸۱
 و میرایی ۳۹۶
 خط پربند ۱۰-۹
- یکاها ۷۰۸
 جریان جابه‌جایی ۱۹۱-۱۹۰
 و انتشار موج ۴۶۷
 و بقای بار ۴۵۹
 و قانون آمپر ۴۵۷-۴۵۴
 و معادلات ماکسول ۴۸۳-۴۶۷
 جریان مغناطش ۲۵۶
 ابررساناها ۴۴۰-۴۳۵
 جریان ac ۳۷۶-۳۷۱
 تحلیل حلقه ۳۸۵-۳۸۲
 جهان-بردارها و نرده‌ای جهانی ۶۶۹
 جهان-نقطه ۶۶۹
 جهت‌مندی ۴۱۱
 چار-بردار ۶۶۹
 چسبندگی ۶۰۸
 چگالی انرژی ۱۷۱، ۴۶۲، ۴۹۷-۴۹۵
 در میدان مغناطیسی ۳۴۵-۳۴۳
 میدان الکتروستاتیک ۱۷۱-۱۶۹
 و انتشار انرژی در موج ۵۵۹-۵۵۶
 یکاها ۷۰۶
 چگالی بار ۳۸-۳۶، ۴۷
 رابطه با بار نقطه‌ای ۵۷-۵۶
 رابطه با چگالی جریان ۱۹۲
 روی رسانای استوانه‌ای نازک ۱۰۱-۹۸
 قطبشی ۱۲۰-۱۱۸
 چگالی بار سطحی ۳۷، ۵۸، ۱۱۸، ۱۳۳، ۲۷۷، ۴۷۰
 نماد برای ۲۰۵-۲۰۴
 و شرایط مرزی ۴۷۱-۴۷۰
 چگالی توان ۴۶۲
 چگالی جریان ۱۹۴-۱۹۱

- خطوط
 القای مغناطیسی ۲۷۸-۲۷۷، ۲۸۱، ۲۸۴
 جابه‌جایی ۱۳۳
 میدان مغناطیسی ۲۷۷-۲۷۶
 خطوط نیرو ۴۰، ۴۱
 و تصویرهای الکتروستاتیک ۸۱
 خطی بودن ۵۷۸-۵۷۲
 خلاً
 جریان در ۱۶۰-۱۵۹
 خواص الکتریکی ۱۳۱
 گذردهی ۳۵
 خواص مغناطیسی
 جدول ۲۷۲-۲۶۹
 ماده ۳۰۰-۲۵۷
 مواد فرومغناطیس ۲۷۲
 خودالقا ۳۳۶-۳۲۵
 خودانرژی ۱۷۱
 بار نقطه‌ای ۱۶۸، ۱۷۱، ۱۸۴
 رسانا ۱۶۸
 خودمیدان، بار نقطه‌ای ۱۳۷
 دامنه بردار ثابت مختلط موج تخت ۴۸۵،
 ۴۹۲-۴۹۱
 دستگاه در حال سکون ۶۶۶
 دستگاه محصورسازی مغناطیسی برای همجوشی
 گرما هسته‌ای کنترل شده ۴۲۰-۴۱۸
 دستگاه(های) مختصات
 متعام ۲۲
 منحنی‌الخط ۱۱، ۲۲
 در حرکت ۶۶۷-۶۵۹
 و شرایط مرزی ۹۲-۹۰
 دستگاه مختصات استوانه‌ای ۲۲
- معادله لاپلاس در ۷۸-۷۶
 معادله ماکسول در ۷۰۹
 دستگاه مختصات دکارتی ۴
 عملگر ∇ در ۲۲-۲۱، ۷۱۰
 دستگاه مختصات قائم ۷۰۹
 بررسی مشخصه‌های برداری در ۲۴
 تاو در ۲۰
 دیورژانس در ۱۶-۱۵
 عملگر لاپلاسی در ۲۳
 گرادیان در ۱۲-۱۱
 معادلات یواسون در ۶۷
 معادله لاپلاس در ۷۹-۷۸
 دستگاه مختصات کروی ۲۲، ۷۱۰
 مختصات قطبی ۱۲
 معادله یواسون در ۷۰-۶۷
 معادله لاپلاس در ۷۱
 معادله موج ۵۱۵-۵۰۶
 و تصویرهای الکتروستاتیکی ۸۴
 و دیورژانس ۱۶
 دستگاههای مغناطیسی برگشت‌پذیر ۳۵۰-۳۳۵
 دلتای کرونکر ۷۰۰
 دمای(ی)
 بحرانی ابرسانا ۴۳۰، ۴۳۲-۴۳۱
 دبی ۲۱۳
 کوری ۱۵۸، ۳۱۱-۳۱۰
 دوقطبی القایی، مدل ۱۵۳-۱۵۲
 دوقطبی الکتریکی ۵۲-۵۱، ۶۳۱
 القایی ۱۵۳-۱۵۲
 پتانسیل ۷۴، ۷۴-۶۲۲، ۶۲۱
 نوسانی ۶۲۴-۶۱۹
 دوقطبی مغناطیسی ۲۴۶، ۳۵۲

- پلاسما به عنوان ۴۰۱
 خودانرژی ۱۶۸
 در مسائل مقدار مرزی ۱۳۲-۱۳۳
 دستگاه ۱۷۰-۱۷۴، ۸۷-۹۰
 نیروهای حامل جریان ۲۲۵-۲۲۹
 رسانایی ظاهری ۳۸۶، ۳۸۵
 رسانش ۱۸۸-۱۸۹
 فلزی ۲۱۲، ۱۸۸
 نظریه میکروسکوپی ۲۱۰-۲۱۴
 رسانندگی ۵۸۸-۵۸۹، ۱۹۴-۱۹۷
 بی نهایت ۴۳۵-۴۳۸، ۴۲۴، ۴۱۴-۴۱۵،
 ۴۷۰-۴۷۲
 پلاسما ۴۲۴، ۴۱۳-۴۱۵
 جدول ۱۹۵
 حقیقی، وابستگی فرکانس ۶۰۸-۶۰۹
 دی الکتریکها ۲۰۱
 رابطه با ثابتهای اپتیکی ۵۰۳-۵۰۵
 مختلط ۵۹۹، ۵۸۸
 یکاها ۷۰۸
 رفتار
 تناوبی ۳۶۱
 غیرتناوبی ۳۶۱، ۳۶۰
 گذرا ۳۶۰-۳۶۱
 مقدماتی ۳۶۳-۳۶۷
 رفتار غیرتناوبی ۳۶۱
 روابط پاشندگی ۵۷۸-۵۸۲، ۵۲۷، ۵۲۵، ۵۲۰
 ۷۱۹-۷۲۷
 اثبات ۷۲۱-۷۲۵
 در محیط خطی ۴۹۹
 طولی ۵۱۸
 و محیط رسانا ۵۰۱
- تابش ۵۱۴، ۶۴۰
 دو قطبی نقطه ای ۵۲
 توزیع پتانسیل ۵۲-۵۴
 دیامغناطیس
 کامل ابررسانا ۴۳۵-۴۳۶
 منشأ ۳۰۴-۳۰۷
 و قانون لنز ۳۰۶
 دینامیک ۴۰۲-۴۰۳
 دیوار حوزه ۳۱۲
 دیورژانس ۱۵-۱۸
 تاو ۲۳
 چهار بعدی ۶۷۱
 عملهای مرتبه دوم ۲۳
 گرادیان ۲۴
 نماد برای ۲۱، ۱۴
 ذرات بنیادی
 بار ۳۲-۳۳
 و قانون کولن ۳۴
 رابطه
 پاشندگی عرضی ۴۸۹
 کوشی ۵۹۶
 لیدن-ساکس-تار ۶۱۶
 هاگن-روبنز ۵۳۷، ۵۴۲، ۶۰۲-۶۰۱
 راکتور(های)
 آینه مغناطیسی ۴۱۹
 توکامک ۴۱۸-۴۱۹
 گرما هسته ای ۴۰۲
 همجوشی ۴۱۸-۴۲۰
 تناهنگش ۴۱۹
 رسانا ۱۸۸، ۴۴-۴۵، ۳۸
 انرژی الکتروستاتیک ۱۶۸-۱۷۴

- روابط پاشندگی کرامرز-کرانینگ ۵۸۲
اصلاح ۶۰۴
برای تعریف فرکانس کم ۶۰۴
روش(های)
- تصویری ۱۳۹-۱۴۱، ۸۱
جزء منتهای ۱۰۲، ۹۸، ۹۳-۹۶، ۹۰
حذف گاؤس- جردن ۶۹۰-۶۹۲
عددی ۶۷۴-۶۸۹
محاسبه انرژی ۳۴۷، ۱۸۱
روش تفاضلهای منتهای ۹۰-۹۲
برنامه کامپیوتری برای ۹۲، ۹۷-۹۶،
۱۰۱-۱۰۳
ومعادله لاپلاس ۱۰۵
- زاویه
- اتلاف ۶۰۹
بازتاب ۵۲۶
حدّ ۵۲۳، ۵۳۱-۵۳۵
بروستر ۵۳۸-۵۳۹، ۵۳۱-۵۳۵
تابش (فرود) ۵۲۳-۵۳۱
عمود ۵۲۳-۵۳۰
چرخش در تبدیل لورنتس ۶۶۹-۶۷۰
شکست حقیقی ۵۳۹
میل ۲۵۴
زبان کامپیوتری ۶۸۳
زمان
تاخیری ۴۷۷
جهانی ۶۶۵
فروافت متوسط برای نوسانگر ۵۹۰
واهلش ۲۰۲، ۲۱۲-۲۱۰، ۴۶۷، ۶۰۶
زمان برخورد ۲۱۱-۲۱۲، ۲۰۲
و ثابت میرایی ۵۹۸
- میانگین برای الکترونهاى آزاد ۵۹۰
زوج شدن الکترون در ابرساناها ۴۳۴
ساختار اسپینی ۳۱۴
ساختار منظم اسپین ۳۱۴
سردسازى مغناطیسی ۳۵۳
سرعت
انتشار انرژی ۵۵۶-۵۵۸
گرمایی ۲۱۳
گروه ۶۱۰-۶۱۱
سرعت سوق (رانشی) ۱۹۱
الکترون ۲۱۲
الکتریکی ۴۰۸-۴۰۹
پلازما ۴۰۸-۴۰۹
حل پایا برای ۲۱۰-۲۱۱
سرعت فاز ۵۵۸، ۵۵۶، ۵۴۲
امواج تخت ۵۰۱-۵۰۳، ۴۹۵-۴۹۶، ۴۸۹
تعریف ۴۸۶
سرعت موج ۶۵۹
فاز ۵۵۶، ۴۸۶
گروه ۵۵۶
سرعت نور ۷۰۵-۷۰۷، ۵۵۶، ۴۶۵، ۲۲۳
ثابت بودن ۶۶۳-۶۶۴
سطح تراز ۱۱
سطح مقطع پراکندگی تامسون ۶۳۴-۶۳۸
سطح گاؤسی ۵۰، ۴۵-۵۱
دردی الکتریک ۱۲۴-۱۲۶
سطح همپتانسیل ۷۵، ۴۵، ۱۱
و تصویرهای الکتروستاتیکی ۸۱-۸۴
وقانون گاؤس ۵۰
سطوح مخروطی ۷۳
سنگ آهنربا ۳۱۵، ۲۲۱

حاکم بر بردارهای میدان ۱۳۱-۱۳۴،
 ۲۷۶-۲۷۷
 و دستگاه مختصات ۹۰-۹۲
 و معادله لاپلاس ۸۰، ۷۹
 و معادلات ماکسول ۴۶۸-۴۷۲
 شرط پایای لاوسون ۴۱۹، ۴۱۸
 شرط لورنتس ۶۲۸-۶۲۹
 و پتانسیل زردهای دوقطبی ۶۲۱-۶۲۲
 و معادله موج ۴۷۸، ۴۷۳
 شعاع
 اتم (ی) ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۵۲، ۵۸۳-۵۸۲
 الکترون ۵۹۰، ۶۳۵
 مولکول ۶۰۷-۶۰۸
 شکاف هوا ۲۸۷-۲۸۶، ۲۸۸، ۲۹۱، ۲۹۴-۲۹۲
 شکست
 زاویه حقیقی ۵۳۹، ۵۴۱
 فرود مایل ۵۳۱-۵۲۳
 شکل خط لورنتس ۵۹۴-۵۹۳
 صفحه
 تابش ۵۲۴-۵۲۳
 رسانا ۸۴-۸۱، ۸۸
 دامنه ثابت ۵۳۸، ۵۴۰، ۵۴۴
 فاز ثابت ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۴
 ضرب برداری
 سه‌گانه ۸-۷
 عملهای دل روی ۲۵-۲۴
 ضرب زردهای
 سه‌گانه ۷
 ضرایب فرنل مختلط ۵۴۵-۵۳۵
 ضریب
 اتلاف ۳۹۸

سیم
 ابررسانایی ۴۳۰، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۵۱-۴۲۹
 باردار ۱۰۱-۹۸
 در میدان مغناطیسی ۳۲۴-۳۲۱
 رسانش در ۱۹۷-۱۹۶
 سیمولو ۲۳۶، ۲۵۱، ۳۴۹-۳۴۸، ۴۴۶-۴۴۳
 شار
 الکتریکی ۴۷، ۲۴۸
 انرژی ۴۹۷-۴۹۵، ۵۵۸-۵۵۶
 نشی ۲۹۰
 شار مغناطیسی ۲۴۸، ۲۶۸، ۲۹۰-۲۸۸
 نشی ۲۹۰
 و ابررساناها ۴۳۵
 یکاها ۷۰۸
 شبکه پل T ۳۸۷-۳۸۹، ۳۹۰
 شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف ۲۰۹-۲۰۳
 شتابدهنده ذره ۴۰۵
 شدت مغناطیسی ۲۶۶-۲۶۵
 چهاربعدی ۶۷۲
 داخل مولکول در حفره ۳۰۳
 در غیاب جریان انتقالی ۲۷۹، ۲۸۳
 در مسائل مقدار مرزی ۲۷۸-۲۷۶،
 ۲۸۳-۲۸۲
 رابطه با مغناطش ۲۷۰-۲۶۸
 رابطه با میدان مغناطیسی ۲۷۵-۲۷۰
 قانون تبدیل برای ۶۷۶-۶۷۴
 و چگالی جریان انتقالی ۲۶۷
 یکاها ۷۰۸
 شدت موج ۵۲۳-۵۲۲
 شرایط مرزی
 جدول ۴۷۲

- الف ۱۷۴-۱۷۶
 بولترمن ۱۵۷-۱۵۴، ۴۰۴، ۶۰۷-۶۰۶
 توان ۳۷۳-۳۷۲، ۳۸۰
 پتانسیل ۱۷۲-۱۷۴، ۸۹-۹۰
 جفت‌شدگی ۳۲۹، ۳۳۱
 شکست مختلط ۵۰۴-۵۰۰، ۵۴۴-۵۴۱
 ظرفیت ۱۷۴-۱۷۶
 وادارندگی ۲۷۳
 وامغناطش کره ۲۸۴
 Qی محیط ۴۸۱
 Qی مدار ۳۷۳-۳۷۲، ۳۷۶-۳۷۴
 ضریب تراوایی مغناطیسی ۲۷۰، ۲۹۰، ۳۲۴
 ابعاد ۳۲۶، ۵۱۵، ۷۰۵
 نسبی ۴۶۶
 تقوی ۲۷۳
 ضریب دی‌الکتریک
 جدول ۱۲۸
 رابطه با ثابتهای ایتیکی ۵۰۶-۵۰۲
 رسانا ۲۷۸
 معادلات دبی برای ۶۰۹-۶۰۷
 و قطبش‌پذیری مولکولی ۱۵۳-۱۵۱
 ضریب شکست ۴۶۶، ۴۷۴، ۴۸۹، ۵۰۰
 برای آب ۵۲۳
 در محیط رسانا ۵۰۴
 ضریب فرنل ۵۲۲
 برای تابش مایل ۵۲۷، ۵۳۱-۵۲۸
 و تداخل موج ۵۵۳-۵۴۵
 ضریب گرمایی مقاومت ۲۱۵-۲۱۳
 جدول ۱۹۵
 ضریب مقاومت ۱۹۴، ۲۰۴
 پلاسما ۴۲۷
- جدول ۱۹۵
 در آلیاژ ۲۱۵-۲۱۳
 در فلزات ۲۱۳-۲۱۱
 فریتها ۳۱۴
 لازم برای رفتار شبه‌رسانا ۱۶۹-۱۶۸
 ضریب میرایی ۵۷۹، ۵۸۳، ۵۹۰-۵۸۹
 در دستگاه الکترون آزاد ۶۰۷-۶۰۶
 و آهنگ اتلاف انرژی ۶۳۸-۶۳۳
 و دستگاه بارهای مقید ۵۹۷-۵۸۸
 طرد شار ۴۳۱
 توسط جریانهای انتقال سطحی ۴۴۰، ۴۵۸
 کامل ۴۳۹-۴۳۶
 طول دبی و پلاسما ۴۰۵
 طول موج ۳۶۰-۳۵۹، ۴۶۶، ۴۸۶
 دوبروی ۳۱۶
 قطع ۵۰۶، ۵۶۳
 ظرفیت ۱۷۶-۱۷۵، ۱۷۸
 ضریب ۱۷۴-۱۷۳
 عایق
 جدول مقاومت ویژه ۱۹۵
 جذب تشدیدی توسط ۵۹۷-۵۸۸
 مقاومت ویژه ۱۹۴
 عدد موهمی ۸۰
 عمق پوسته ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۳۷
 تابش مایل ۵۴۱
 تعریف ۵۰۲
 عمق نفوذ، ابررساناها ۴۳۲، ۴۴۵-۴۴۳
 عملگر
 دالامیر ۶۷۲
 دیورژانس ۱۵

- عملگر دل (∇) ۲۷-۲۱، ۴۸۷
- در مختصات استوانه‌ای ۲۲، ۷۰۹
- در مختصات کروی ۲۲، ۷۱۰-۷۰۹
- در مختصات قائم ۲۲-۲۱، ۷۱۰
- عملگر خطی ۲۳، ۳۸
- عملگر لاپلاسی ۶۷، ۴۴۲-۴۴۱، ۵۰۷، ۷۱۰
- نماد ۲۳
- و تابع دلتای دیراک ۶۰
- و میدان برداری ۲۴
- و میدان زده‌ای ۲۴
- علیت ۵۷۴-۵۷۶
- فاصله حفاظت ۴۰۲، ۴۰۴-۴۰۳
- فاصله زمانی-مکانی ۶۶۴
- فرآیند آبخاری ۱۹۰
- فراواهنش ۹۲
- فرضهای اینشتین نسبت خاص ۶۶۷-۶۶۱
- فرکانس ۳۶۰-۳۵۹، ۴۶۶
- ارتعاشی یونی ۶۰۸
- تابش الکترومغناطیسی ۳۶۰-۳۵۹، ۴۸۵
- زاویه‌ای ۳۵۹
- طبیعی ۳۶۷
- لارمور ۳۰۵
- نیم‌توان ۳۸۲
- فرکانس پلاسما ۴۲۲، ۶۰۳-۵۹۸، ۶۰۵
- جدول ۵۹۸
- الکترون ۵۸۲، ۵۹۷-۵۸۸
- مدار متوالی ۳۷۶-۳۷۳
- مدار موازی ۳۷۶
- فرکانس تشدید الکترون
- الکترون آزاد ۵۸۳
- الکترون ظرفیت مفید ۵۹۰-۵۸۸
- در نارساناها ۵۹۷-۵۸۸
- فرمول
- لانژون-دبی ۱۵۶، ۳۰۸
- و مولکولهای قطبی ۱۵۷-۱۵۴
- مات-زینر ۶۰۱
- نویمان ۳۳۰-۳۲۹، ۳۴۸-۳۴۷
- فرمول بندی
- ماتریسی ۶۹۹، ۷۰۱-۷۰۰
- و معادلات شبکه ۳۹۰، ۳۹۳
- هموردا ۶۹۷-۶۹۶
- هیدرومغناطیسی در پلاسما ۴۰۳، ۴۱۲، ۴۲۲
- فروالکتروسیته و قطبش دائم ۱۶۰-۱۵۷
- فرومغناطیس ۲۷۴-۲۷۰، ۲۷۰، ۳۰۴
- تغییرات انرژی مغناطیسی در ۳۵۳-۳۴۹
- مسائل مدار ۲۹۰-۲۸۴
- قرتیت ۳۰۷، ۳۱۴، ۵۷۳
- قری مغناطیس ۳۱۴
- فشار مغناطیسی ۴۱۵-۴۱۲، ۴۱۷-۴۱۶
- فصل مشترک بین محیطها ۱۳۴-۱۳۱، ۱۹۹-۱۹۸
- فصل مشترک هوا-شیشه ۵۲۳، ۵۳۲، ۵۴۴، ۵۵۳-۵۴۹
- فضای چهاربعدی ۶۶۸-۶۶۷
- فضای مینکوفسکی ۶۶۸
- فلز ۲۱۹-۱۸۸، ۲۱۲-۲۱۱
- مقاومت ویژه ۱۹۴، ۲۱۴-۲۱۲
- فورترن (FORTRAN) ۱۰۲، ۶۸۴-۶۸۳
- فیبر نوری ۵۳۴
- قاعده
- بک‌بک (back cab) ۷

- در سیستم mks ۳۵، ۷۰۸
 و انرژی الکتروستاتیکی ۱۶۹
 و خود انرژی بار نقطه‌ای ۱۶۸
 قانون گاوس ۴۷-۴۵، ۱۰۷، ۴۵۸، ۶۷۱
 در دی‌الکتریک ۱۲۴-۱۲۴، ۱۲۹، ۲۰۱
 شکل دیفرانسیلی ۱۲۴
 و پتانسیل ۵۰-۴۹
 و تابع دلتای دیراک ۵۸
 و قضیهٔ دیورژانس ۴۷
 و معادلهٔ پواسون ۶۷
 قانون مداری آمپر ۲۴۳-۲۳۸، ۲۶۷، ۲۷۶
 شکل دیفرانسیلی ۲۳۸
 و ابررسانایی ۴۴۸
 و جریان جابه‌جایی ۴۵۸-۴۵۴
 و جریان در ابررساناها ۴۴۰
 و مدار مغناطیسی سری ۲۹۳-۲۸۸
 قانون ولتاژ کیرشهوف ۳۶۲، ۳۶۳
 و تحلیل حلقه‌ای ۳۸۵-۳۸۱
 قدرت نوسانگر ۵۸۶
 قرارداد جمع‌بندی ۶۷۴
 قضیه(های)
- انتگرال برداری ۲۷-۲۶، ۲۸
 انتگرال فوریه ۷۱۵
 انتگرال کوشی ۵۷۵، ۷۲۰-۷۱۹
 برهم‌نهی ۶۹
 پیچش ۵۷۳، ۵۷۴، ۷۱۶
 گرین ۲۷-۲۶
 یکتایی ۷۰
 قضیهٔ استوکس ۲۱-۲۰
 تعمیم ۲۴
 و جریان انتقالی ۲۶۷
- جمع-f ۵۸۶
 دست راست ۶، ۱۴، ۴۹۳
 دوزنقه‌ای ۶۹۰-۶۸۶
 ماتیس ۲۱۲
 قانون
- بازتاب ۵۲۳
 بروستر ۵۲۳، ۵۳۲
 بیوساوار ۲۳۱-۲۲۹، ۲۵۶، ۷۰۶، ۷۰۷
 جریان کیرشهوف و تحلیل گره‌ای ۳۸۵-۳۸۴
 سوم نیوتون و بیوساوار ۲۳۰
 عکس مجذور ۳۴
 لنز ۳۰۶، ۳۲۰
 قانون اسنل ۵۲۳، ۵۳۳
 و بازتاب در فصل مشترک ۵۲۶، ۵۳۰، ۵۳۲
 و ضرایب فرنل مختلط ۵۳۵، ۵۴۲-۵۴۰
 قانون القای الکترومغناطیسی فاراده ۳۰۵، ۳۱۹
 ۳۲۴-۳۲۰
 در دیامغناطیس ۳۰۵
 شکل دیفرانسیلی ۳۲۰، ۴۵۸
 قانون اهم ۱۹۷-۱۹۴
 و تعادل ۲۰۱
 و پلاسما ۴۱۴
 و رفتار خطی ۲۱۰
 و قوانین کیرشهوف ۲۰۷
 و معادلهٔ لاپلاس ۱۹۸
 قانون تبدیل ۷۰۳
 برای بردارها و تانسورها ۷۰۲-۷۰۰، ۷۰۳
 برای میدان الکترومغناطیسی ۶۷۶-۶۷۴
 قانون کولن ۳۸-۳۳، ۲۲۲، ۳۱۸، ۴۵۹-۴۵۸
 بیان ۳۳، ۷۰۴

- قوانین کیرشهوف ۲۰۳-۲۰۹، ۳۷۷-۳۹۴
 و القای متقابل در مدارها ۳۷۷-۳۸۰
 و جریانهای کند تغییر ۳۶۱-۳۶۲
 کابل هم محور ۱۴۴، ۲۴۰
 کاتد گسیلنده گرمایونی ۱۸۸
 کار
 برای انرژی دادن به مدارهای جریان
 ۳۴۰-۳۴۳
 برای چیدن توزیع بار ۱۶۳-۱۶۴
 کامپیوتر ۶۸۲-۶۹۳
 حل معادلات خطی ۶۸۸، ۳۸۹، ۶۹۳-۶۹۰
 نکته‌های سودمند ۶۹۴-۶۹۶
 و انتگرال عددی ۶۸۸-۶۹۰
 و معادلات شبکه ۳۸۷-۳۹۴
 کره
 دی الکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت
 ۱۳۴-۱۳۸
 متصل به زمین ۸۶
 یکنواخت مغناطیبه ۲۸۱
 کره ابررسانا ۴۳۵-۴۳۸
 و طرد کامل شار ۴۳۵-۴۳۸
 در میدان یکنواخت ۴۴۵-۴۴۸
 کره رسانا ۸۶-۸۴، ۱۱۰، ۱۴۶
 با رسانندگی بی نهایت ۴۳۵-۴۳۶
 ۴۳۹-۴۴۲
 در دی الکتریک ۱۳۷-۱۳۹
 در میدان الکتریکی یکنواخت ۷۴-۷۶
 کشش القایی روی کره ۴۲۷
 کمیت مختلط ۳۶۸، ۴۹۵-۴۹۶، ۵۳۵، ۵۵۷
 ۶۶۸، ۶۶۷
 و محیط خطی ۵۷۴
- و شرایط مرزی ۴۶۹
 و فرمول نویمان ۳۲۹
 و قانون مداری آمپر ۲۳۸
 قضیه دیورژانس ۱۷، ۷۱-۷۰، ۱۹۳
 بسط ۲۶-۲۷
 تابع دلتای دیراک ۵۹
 کاربردهای ۹۵، ۱۱۷، ۴۶۱-۴۵۹، ۴۶۹
 و شار مغناطیسی ۲۶۸
 و قانون گاوس ۴۷
 قطبش ۱۱۴، ۵۸۳-۵۸۵
 اشباع ۱۵۵
 امواج ۴۹۱-۴۹۴
 بیضوی ۴۹۳، ۵۲۳
 خطی ۴۹۳، ۴۹۶
 دایروی ۴۹۴، ۴۹۶
 دائمی ۱۵۷-۱۵۹
 راستگرد s و p ۵۲۸-۵۳۰
 محیط دی الکتریک ۴۴، ۱۲۰-۱۱۴
 و شرایط مرزی ۱۳۳-۱۳۴
 و قزو الکتریسیته ۱۶۰-۱۵۷
 یکاها ۱۱۵، ۱۲۵
 ۷۰۵ emu
 قطبش پذیر (ی)
 اتمی ۱۵۲
 تغییر شکل ۱۵۷
 سمگیری ۱۵۷
 مولکولی ۱۵۱
 قطب مغناطیسی منزوی ۲۳۱، ۴۵۸
 قطبهای آهنربا ۲۶۴
 قواعد جمع ۶۱۸
 قوانین حرکت نیوتون و تبدیل گالیله ۶۵۹

- کند میرا ۳۹۷
 ماده شفاف ۵۰۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۶۰۳، ۵۹۶
 گاز یونیده ۴۰۱
 رفتار پاشنده بهنجار ۵۹۲
 گذردهی ۱۶۵، ۲۰۲، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۸
 ضخامت بیشینه ۵۵۰
 ماده فزوالکتریک ۱۵۷-۱۵۹
 خلا ۳۵
 مبانی نظریه قضیه توابع ۷۲۰
 مواد دی الکتریک ۱۲۷
 مبدل ۳۸۱-۳۷۸
 وابستگی فرکانس ۵۷۶، ۶۰۹
 ایده آل ۳۸۱-۳۸۰
 گرادبان ۸-۱۲
 محصورسازی مغناطیسی برای همجوشی
 عمل کردن مرتبه دوم ۲۳-۲۴
 گرمای ژول ۱۹۷
 گرمایش ژول ۵۴۹
 گرما هسته ای ۴۲۱-۴۱۸
 گشتاور دوقطبی الکتریکی ۵۲، ۲۴۴-۲۴۴
 محیط
 توزیع بار ۵۴-۵۷
 اهمی ۱۹۴، ۱۹۷
 مولکول ۱۵۱
 باردار ۱۹۱
 و توان تابشی از بارهای در حال حرکت
 خنثی ۱۹۱
 ۶۲۶-۶۳۱
 مابع رسانا ۱۹۹
 یکناخت مغناطیده ۲۸۳-۲۸۰
 یگاها ۷۰۷
 همسانگرد ۱۲۷، ۳۶۳-۳۶۴
 گشتاور دوقطبی مغناطیسی ۲۲۹، ۲۴۴-۲۴۴
 یکتواخت مغناطیده ۲۸۳-۲۸۰
 محیط پاشنده
 در مواد پارامغناطیس ۳۰۹
 و میدانهای نوسانی ۶۱۴-۶۰۹
 در مواد فرومغناطیس ۳۰۹
 محیط خطی ۲۱۰، ۲۶۸، ۵۷۲-۵۷۳
 ذاتی ۳۰۷
 انتشار موج در ۴۶۴-۴۶۳، ۴۹۱-۴۸۴
 و حرکت مداری ۳۰۷
 مغناطیسی ۲۷۹، ۳۴۰
 گشتاور مغناطیسی ۲۲۹، ۲۴۴-۲۴۵، ۲۷۰-۲۶۸
 مولکولهای قطبی به عنوان ۱۵۷-۱۵۲
 ذاتی ۳۰۷
 همسانگرد ۱۹۴، ۱۹۷
 ذره چرخان ۴۰۶
 محیط دی الکتریک ۴۵-۴۴، ۱۴۶-۱۱۳
 گشتاور نیرو ۱۸۱-۱۷۸، ۲۲۶
 انتشار موج در ۴۶۷-۴۶۶
 وارد بر مدارهای صلب ۳۴۵-۳۴۵
 بار نقطه ای در ۱۳۰-۱۲۹، ۱۳۹-۱۳۷
 مغناطیسی ۳۴۵، ۳۴۶
 خطی ۱۲۷، ۱۶۵، ۱۷۰
 شرایط مرزی ۱۳۹-۱۳۴، ۴۷۱
 قطبش ۴۴، ۱۲۰-۱۱۴
 لایه بدون بازتاب ۵۵۱
 لوح ذخیره (کامپیوتر) ۶۸۴
 ماتریس ترانهاده ۷۰۰

- گذردهی ۱۲۷
- میدان الکتروستاتیک در ۱۲۰-۱۲۳
- میدان مولکولی در ۱۴۷-۱۵۱
- وروش تصویر ۱۳۹-۱۴۱
- و قانون گاوس ۲۰۱، ۱۲۹
- محیط رسانا ۲۱۰، ۱۹۷، ۱۹۱، ۱۸۹
- امواج تخت تکفام در ۴۹۸-۵۰۵
- انتشار موج در ۴۸۹، ۴۶۶-۴۶۷
- ثابت دی‌الکتریک مختلط ۵۸۷
- زمان واهلس ۲۰۲-۲۰۳
- محیط مغناطیسی
- برگشت‌پذیر ۳۴۰-۳۵۰
- خطی ۳۴۰، ۲۷۹
- و مدارهای جریان ۲۸۴-۲۸۷
- و مسائل مقدار مرزی ۲۷۸-۲۸۴
- محیط نارسانا، امواج تخت تکفام در ۴۸۴-۴۹۱
- مخزن الکترولیت ۱۹۹-۲۰۰
- مد ۵۶۲
- مدار(های) ۲۰۲-۲۱۰
- ثابت زمانی ۳۶۳-۳۶۵
- جفت‌شده ۳۴۰-۳۵۰، ۳۲۷-۳۳۲
- القایی ۳۴۰-۳۵۰، ۳۲۷-۳۳۲
- و انرژی مغناطیسی ۳۴۰-۳۴۲
- ذره، در پلاسما ۴۰۵-۴۰۶
- شامل آهنربای دائم ۲۹۱-۲۹۴
- ضریب کیفیت ۳۷۵-۳۷۶
- قرارداد علامت ۳۶۲-۳۶۳
- منزوی در emf القایی ۳۲۴-۳۲۵
- میدان مغناطیسی ۲۴۴-۲۴۷
- نیروهای مغناطیسی ۳۴۵-۳۵۰
- مدار متوالی ۳۷۳-۳۷۶، ۳۶۷-۳۷۱، ۲۰۵
- رفتار پایا ۳۶۷-۳۶۹
- فرکانس شدید ۳۷۳-۳۷۶
- مغناطیسی ۲۸۸-۲۸۹
- مدار مغناطیسی ۲۸۸-۲۹۱
- شامل آهنرباهای دائم ۲۹۱-۲۹۵
- مفهوم کاربرد ۲۸۹-۲۹۰
- مدار ac ۳۷۰-۳۷۶
- تحلیل حلقه‌ای ۳۸۴، ۳۷۳
- در القا ۳۳۳
- در القای متقابل ۳۷۶-۳۸۱
- ضریب توان ۳۷۲-۳۷۳
- مدار dc ۲۰۳
- مدل دوستیالی ابررسانا ۴۳۴
- مرکز راهنمای ذره در پلاسما ۴۰۶
- مرکز مدار ذره در پلاسما ۴۱۶-۴۱۷
- مسافت آزاد میانگین ۴۰۱، ۲۱۱-۲۱۲
- برای فوتونهای فرودی ۶۳۷
- مسائل الکتروستاتیک ۶۷-۱۱۲
- حلهای عددی ۹۰-۱۰۶
- مسائل رسانش حالت پایا ۱۹۷-۲۰۱
- مسائل مقادیرمرزی ۱۳۴-۱۳۵، ۷۴-۹۰
- ۴۷۳، ۴۶۸-۴۷۲
- برای ابررسانا ۴۳۶-۴۳۸
- شامل دی‌الکتریک ۱۳۴-۱۳۷
- شامل مواد مغناطیسی ۲۷۸-۲۸۴
- و معادلات ماکسول ۴۷۳، ۴۶۸-۴۷۱
- ۵۷۱
- مشتق جهتی ۸-۱۲
- مشدد حفره‌ای ۵۶۳-۵۶۵
- معادلات
- الکترومغناطیس، شکل هموردا ۶۷۵-۶۷۰

- پیوستگی ۱۹۴-۱۹۰، ۴۵۹
 کلازیوس-موساتی ۱۵۱، ۱۵۳، ۵۸۶
 لواندر ۷۴-۷۳، ۱۰۸
 موج برداری غیرهمگن، پاسخ ۴۷۴،
 ۴۷۵-۴۷۸
 نوسانگر هماهنگ ۳۶۵، ۴۶۵
 نیروی لورنتس ۴۵۹
 معادله یواسون ۶۸-۶۷
 حل‌های ۱۰۶-۱۰۵
 در مختصات استوانه‌ای ۶۸
 در مختصات قائم ۶۹-۶۸
 و پتانسیل در پلاسما ۴۰۴
 و پتانسیل برداری مغناطیسی ۲۴۱
 و دی‌الکتریکها ۱۳۴
 و معادله دیفرانسیل جزئی ۶۷
 و معادله لاپلاس ۶۸
 معادله پیوستگی ۱۹۲-۱۹۱، ۱۹۷، ۱۹۸، ۲۰۷،
 ۴۵۹، ۶۷۱
 و تعادل ۲۰۱
 معادله ساختندی ۱۲۶، ۱۹۴، ۲۶۸، ۴۸۸
 ابررسانایی ۴۵۱
 محیط ۴۵۸
 معادله لاپلاس ۷۱-۶۸
 با یک متغیر مستقل ۷۱
 حل‌های ۷۱-۶۸
 در ابررساناها ۳۳۷
 در مختصات استوانه‌ای ۷۷-۷۶
 در مختصات قائم ۷۹-۷۸
 در مختصات کروی ۷۴-۷۱، ۱۰۵،
 ۵۰۸-۵۰۶
 در مختصات منحنی الخط متعامد ۱۰۸
 دی برای ثابت‌های دی‌الکتریک ۶۰۹-۶۰۸
 دیفرانسیل کوشی-ریمان ۷۱۹
 لندن ۴۵۱-۴۴۰
 میدان مغناطیسی ۲۶۶-۲۶۵
 معادلات خطی، حل‌های کامپیوتری ۳۸۹، ۶۸۶،
 ۶۸۸-۶۹۲
 معادلات شبکه
 حل‌های کامپیوتری ۳۹۴-۳۸۷
 راه‌حل‌های ماتریس ۳۹۰
 روش جبری ۳۸۹
 معادلات ماکسول ۶۰، ۴۸۳-۴۵۴
 برای امواج تخت ۴۸۸
 در یکاهای گاوسی ۷۰۶
 شکل هم‌وردا ۶۷۱-۶۷۰
 مبانی تجربی ۴۵۹-۴۵۸
 و ابررسانایی ۴۳۰، ۴۳۳-۴۳۲، ۴۴۶-۴۴۵
 و امواج الکترومغناطیسی ۵۱۸-۴۸۴
 و امواج تکفام ۴۶۵-۴۶۳
 و امواج کروی ۵۱۰
 و انتشار موج ۵۰۱، ۵۵۹-۵۶۲، ۶۶۰-۵۵۹
 و تبدیلیهای لورنتس ۶۶۲
 و جریان جابه‌جایی ۴۸۳-۴۵۴
 و شرایط مرزی ۴۷۲-۴۶۸
 و کمیتهای مختلط ۴۹۷-۴۹۵
 و مسائل تابش ۵۱۹
 و مسائل مقدار مرزی ۵۷۰-۵۱۹
 معادله
 انتقال بولتزمن ۴۰۲
 اسماکولا ۶۱۷
 اوایلر ۴۱۲، ۴۲۳
 برداری هلمهولتز ۴۴۵، ۵۱۰-۵۰۷

- نظریهٔ ماکروسکوپی ۲۵۷-۳۰۰
 نظریهٔ میکروسکوپی ۳۰۱-۳۱۷
 مقاومت ۲۰۵، ۲۰۱، ۱۹۷
 القاگرها ۳۳۰-۳۳۲
 تابشی، دوقطبی ۶۲۳-۶۲۴
 توان ۳۷۲-۳۷۳
 داخلی ۲۰۵
 در ابررسانا ۴۳۱، ۴۲۹-۴۳۰
 در مدارهای سری ۳۶۲-۳۶۳
 ضریب دما ۲۱۲-۲۱۳
 و مقاومت ظاهری ۳۶۹
 هال ۴۲۶
 یکاها ۷۰۸، ۱۹۷
 مقاومت ظاهری ۵۷۸، ۳۶۸-۳۶۹
 اتصال سری ۳۷۰-۳۷۲
 اتصال موازی ۳۷۰-۳۷۲
 انتقال ۳۸۶
 بار ۳۷۸-۳۸۳
 شکل قطبی ۳۷۰، ۳۶۹
 فضای آزاد ۴۲۱، ۳۷۸-۳۸۳
 مختلط ۳۷۵-۳۸۱، ۳۶۹-۳۷۲
 نقطهٔ تحریک ۳۸۶-۳۸۷
 مقاومت مغناطیسی ۲۸۹-۲۹۰
 مسیر نشت ۳۳۰-۳۳۲
 مقدار اصلی کوشی ۷۲۳، ۵۰۸
 مقدار اصلی کوشی ۷۵۶، ۶۰۸
 مقدار β پلاسما ۴۱۸-۴۱۹
 مقیاس فرکانس لگاریتمی ۳۸۸-۳۸۹
 مکانیک نیوتونی ۶۶۵
 مگنتون بور ۳۱۶، ۳۱۰، ۳۰۸
 منبع تغذیه الکترونیک ۲۰۵
- دو بعدی ۷۱۹، ۹۶-۹۸، ۷۹-۸۱
 دو متغیر ۷۱-۷۴
 روش تصویری ۱۳۹-۱۴۱، ۸۱-۸۴
 شرایط مرزی ۸۱، ۷۹
 عددی ۹۰-۱۰۰
 و امواج تخت ۵۱
 و دی الکتریکها ۱۳۴
 و رسانش حالت پایا ۱۹۷
 و روش تفاضلهای متناهی ۱۰۴
 و کرهٔ رسانا ۷۴-۱۰۴
 و مسائل میدان مغناطیسی ۲۸۰
 یک بعدی ۹۰-۹۶
 معادلهٔ موج ۴۶۳-۴۶۴
 با چشمهها ۴۷۲-۴۷۸
 تبدیل لورنتس ۶۶۲-۶۶۳
 میرا ۴۶۴
 یک بعدی ۴۷۶
 معادلهٔ موج نردهای ۶۵۹-۶۶۳
 غیرهمگن، جواب ۴۷۴-۴۷۵
 معادلهٔ نردهای هلمهولتز ۵۰۷-۵۰۹
 معادلهٔ هلمهولتز ۴۹۹
 نردهای و برداری ۴۴۵، ۵۰۷-۵۱۰
 و امواج تکفام ۴۶۶
 مغناطش ۲۵۶-۲۶۰
 اشباع ۲۷۲، ۲۷۱
 خودبه خودی ۳۱۱
 و جریان اتمی ۲۶۵
 مغناطش خودبه خود ۳۱۱
 رفتار پایا ۳۶۰-۳۶۱، ۱۹۷-۲۰۱
 مدار متوالی ۳۶۷-۳۶۹
 مغناطیس

- مولد ۲۰۵، ۲۲۳، ۳۳۴، ۳۸۴-۳۸۳
 جریان ۳۲۳، ۳۸۴-۳۸۳
 ایده آل ۳۸۴
 ولتاژ ۳۸۴-۳۸۳
 ایده آل ۳۸۳
 وان دوگراف ۲۰۴
 هم قطب ۳۳۴
 مولکول قطبی ۱۵۲، ۵۳۵، ۶۰۸
 و فرمول لائزون-دبی ۱۵۷-۱۵۴
 مولکول غیرقطبی ۱۵۲
 مهار یون ۴۰۲
 میدان
 الکتریکی ماکروسکوپی ۱۲۰، ۱۴۷، ۱۴۹
 بی نیرو ۳۳۸
 تابشی برای سرعت‌های کم ۶۵۶-۶۵۴
 حفره ۱۲۳-۱۲۱، ۱۴۶، ۱۴۸، ۳۰۳-۳۰۲
 دو قطبی استاتیک ۶۳۱
 دو قطبی مغناطیسی ۲۴۶
 منطقه تابش ۶۳۰-۶۲۹، ۶۳۴-۶۳۱
 موضعی ۳۰۲، ۵۸۴
 لورنتس ۵۸۴، ۵۸۶
 میکروسکوپی ۳۰۲
 زده‌ای ۳، ۵، ۱۵
 نوسانی در محیط پاشنده ۶۱۸-۵۷۱،
 ۶۱۴-۶۰۹
 واقطبش (واقطبنده) ۱۴۶، ۱۵۹
 میدان الکتروستاتیک ۴۴
 در دی الکتریکها ۱۴۶-۱۱۳
 زمین ۶۳
 ماکروسکوپی کامل در یک دی الکتریک
 ۱۲۱-۱۲۰
- منحنی مغناطش ۲۷۱
 منشور پاشندگی ۶۱۱
 مواد
 ابررسانا، خواص ۴۳۵-۴۳۱
 پارامغناطیس ۲۶۸، ۲۶۹، ۳۰۴
 دیامغناطیس ۲۶۸
 پذیرفتاریهای مغناطیسی ۲۶۹
 ناهمسانگرد ۱۲۲، ۱۵۱، ۲۶۸، ۴۶۱
 موج
 الکتریکی عرضی ۵۱۰، ۵۱۴، ۵۵۴
 ۵۶۳-۵۵۹
 شدت ۵۲۲-۵۲۱
 طولی ۵۰۶، ۵۱۸، ۶۰۰
 کروی ۴۷۶، ۵۱۵-۵۰۶
 مغناطیسی عرضی ۵۱۰، ۵۱۴، ۵۵۴
 همگن ۵۰۱
 یکنواخت ۵۰۱
 موج الکترومغناطیسی ۵۱۸-۴۸۴، ۶۰۰
 طولی ۵۰۶، ۵۱۸، ۶۰۰
 عرضی ۴۸۸، ۵۰۳
 موج تخت
 در محیط رسانا ۵۰۶-۴۹۸
 در محیط نارسانا ۴۸۴
 ناهمگن ۵۶۷
 موج تکفام ۴۶۷-۴۶۴
 انتشار ۵۱۸-۴۸۴
 در نواحی بسته ۵۷۰-۵۱۹
 موجبر
 استوانه‌ای ۵۶۰
 صفحه-موازی ۵۶۲-۵۵۳
 مستطیلی ۵۶۲-۵۵۸

- میدان الکتریکی ۴۰-۳۷، ۴۳-۴۱
 بسط چندقطبی ۵۷-۵۴
 تعریف ۳۷، ۱۲۰
 رابطه با جابه‌جایی الکتریکی ۵۷۸-۵۷۱
 رساناها ۴۴، ۵۲-۵۱
 در حال حرکت ۴۱۴-۴۱۳
 در دی‌الکتریک ۱۲۳-۱۲۰
 دوقطبی الکتریکی ۵۴-۵۳
 زمین ۶۳
 ماکروسکوپی ۱۲۰، ۱۴۷، ۱۴۹
 و قانون گاوس ۴۸-۴۵
 یکاها ۴۳، ۸۰-۷۰
 میدان برداری ۴، ۵، ۱۳
 میدان الکتریکی به‌عنوان ۴۰-۳۹
 میدان مغناطیسی
 بحرانی ۴۳
 جریانهای پلاسما ۲۵۵-۲۲۱
 چشمه‌ها ۲۶۶-۲۶۵، ۲۶۷
 داخل مواد مغناطیسی ۲۸۳-۲۷۸
 رابطه با شدت مغناطیسی ۲۷۵-۲۷۳
 ماکروسکوپی ۳۰۲
 مدار دور ۲۴۶-۲۴۳
 ناشی از مواد مغناطیده ۲۶۳-۲۶۰
 یکسناوخت ۴۰۸-۴۰۵، ۴۲۷-۴۲۲،
 ۴۴۵-۴۳۶
 میدان مولکولی ۱۴۷، ۳۰۴-۳۰۲، ۵۸۳
 در دی‌الکتریک ۱۵۱-۱۴۷
 میرایی
 بحرانی ۳۹۷
 تابش ۵۹۰، ۶۳۸-۶۳۴
 معادله موج ۳۶۸
- میکروموج ۴۸۵، ۵۰۵
 نرده‌ای ۳
 تبدیل ۶۹۹
 ناوردا ۶۹۹
 نماد برای ۹
 نرم‌افزار ۶۸۸-۶۸۶
 آزمایش کردن ۶۹۴
 اصلاح برای نظریه الکترومغناطیس ۶۸۵
 نسبت دور ۳۸۱
 نسبت ژیرومغناطیس ۳۱۷
 نسبت ۲۲۴، ۲۲۳، ۶۸۱-۶۵۸
 خاص ۵۵۵، ۶۶۷-۶۶۰
 نظریه
 الکترون آزاد درود ۶۰۵-۵۹۷
 تعادل در پلاسما ۴۰۴-۴۰۳
 جنبشی و پلاسماها ۴۰۲، ۴۰۳
 درودلسورنتس ۵۷۱، ۵۸۸-۵۸۲
 ۶۰۵-۵۹۷
 شبکه ۳۸۷
 فرّومغناطیس ۳۱۲-۳۰۹، ۳۱۴
 هایزنبرگ ۳۱۴
 لندن، ابررسانایی ۴۳۵-۴۳۴
 مدار ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۱۰-۴۰۵
 میکروسکوپی دی‌الکتریکها ۱۶۲-۱۴۷
 میکروسکوپی رسانش ۲۱۴-۲۱۰
 نسیت خاص ۶۸۱-۶۵۸
 وایس-هایزنبرگ ۳۱۰
 میدان مولکولی وایس ۳۱۰
 BCS ۴۳۴
 نقصهای ناشی از حرکت گرمایی ۲۱۲
 نقصهای هندسی ۲۱۲

نقطه

- یکها ۳۲۶
- انشعاب ۲۰۶
- نیروی مغناطیسی ۳۴۵، ۳۲۳، ۲۲۲
- زمانی-مکانی ۶۶۴
- وارد بر مدار صلب ۳۴۵-۳۵۰
- میدان ۳۸
- نیروی لورنتس ۲۲۴، ۲۲۳
- نمودار مداری ۲۰۷-۲۰۹
- بر روی بارهای آزاد در سیم ۲۲۶-۲۲۹
- و پلاسما ۴۰۹، ۴۰۶
- نیرو ۲۲۲-۲۲۵، ۲۰۳-۲۰۵
- و رسانای حامل جریان ۲۲۵
- یکها ۷۰۶
- اصل برهم نهی ۳۶
- نیمرسانا ۴۴
- بازگرداننده ۶۰۷
- بین بارها ۳۳
- چگالی و فرکانس پلاسما ۵۹۹-۶۰۳
- بین هسته اتمی ۳۴
- رسانش در ۲۱۱-۲۱۲
- خطوط ۸۲
- نور مرئی ۴۸۵، ۴۸۴
- در تعریف آمپر ۷۰۳-۷۰۵
- نوسان
- روی توزیع بار ۱۶۳-۱۶۴
- الکترون پلاسما ۵۰۶، ۴۲۰-۴۲۶
- روی رساناهای حامل جریان ۲۲۵-۲۲۹
- پلاسما ۴۱۲
- محركه القای مغناطیسی ۲۸۸
- نوسانگر هماهنگ ۵۹۰، ۵۸۲-۵۸۸
- مکانیکی ۳۲۴، ۲۰۳-۲۰۵
- و ادارندگی ۲۷۳
- میرایی ۶۳۴-۶۳۵
- واکنایی
- و ادارندگی ۲۷۳
- القایی ۳۶۹
- وارد بر اشیایی واقع در دستگاه بار ۱۷۸-۱۸۱
- خازنی ۳۶۹
- وارد بر بار نقطه‌ای در دی‌الکتریک
- و مقاومت ظاهری ۳۶۹
- ۱۳۷-۱۳۹
- واهلش دی‌الکتریک ۶۰۵-۶۰۹
- ولتاژ
- ۳۶۱-۳۶۲، ۳۶۰، ۲۰۳
- ایعمال شده ۲۰۳، ۳۶۰، ۳۶۱-۳۶۲
- متناوب ۳۶۰-۳۶۱
- مختلط ۳۶۷-۳۷۰
- مدار باز ۲۰۴
- مؤثر ۳۷۳
- ولتاژ مخالف
- در قوانین کیرشهوف ۳۶۱
- قرار داد علامت ۳۶۳
- برای پتانسیل ۴۱-۴۲
- و جریان پایا ۲۰۳-۲۰۵
- نیروی محركه القایی ۲۰۳، ۲۰۵-۲۰۴
- القاشده ۳۶۲، ۳۲۰، ۳۱۸
- تعریف ۳۱۹-۳۲۰
- جهت ۳۲۰
- حرکتی ۳۲۴، ۳۲۲

عامل تبدیل ۲۲۲	هماهنگهای استوانه‌ای ۷۶-۷۷
یکاهای mks ۴۹۰، ۴۳، ۳۵	هماهنگهای منطقه‌ای ۷۴-۷۱، ۱۳۵، ۲۷۸،
جدول ۷۰۸	۲۸۲
یکاهای SI ۳۵	همزمانی ۶۶۶-۶۶۵
در محیطهای مختلف ۵۰۴-۵۰۶	همگرایی ۶۹۴
یون ۱۸۸، ۱۸۹	هندسه زمان-مکان ۶۶۸-۶۶۷
یون سپهر	یکاهای ۳۶-۳۵، ۷۰۷-۷۰۵
افت IR ۳۶۱	جدول ۷۰۸
بازتاب ۶۰۰	دوقطبی مغناطیسی ۷۰۶
BASIC ۶۸۶-۶۸۸، ۹۶	سیستم جورجی ۳۵
emf حرکتی ۳۱۴، ۳۱۳	یکاهای گاوسی ۱۲۵، ۲۲۳، ۲۳۶، ۴۹۰، ۷۰۴،
esu ۷۰۵	۷۰۵-۷۰۸
SPICE ۳۹۴-۳۹۳	جدول ۷۰۸