انتشارات دانشگاه اراک

۶/۴

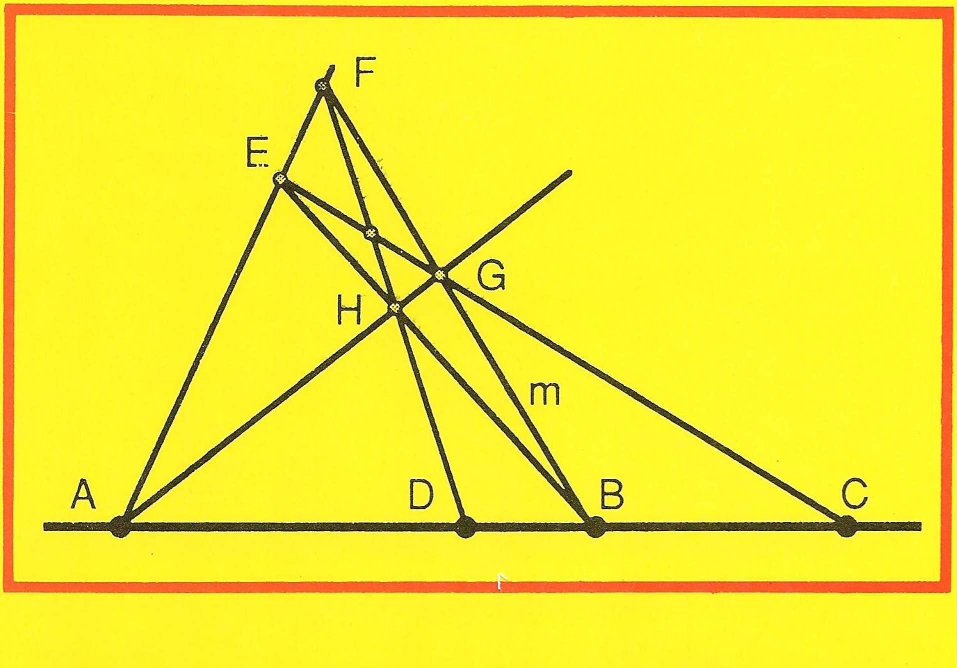
مبحثی

در

هندسه نوین

مؤلف : جودیت ان. سدربرگ

مترجم : محمود پارچه‌طلب



مبحثی

در

هندسه نوین

مؤلف : جودیت ان. سدربرگ

مترجم : محمود پارچه‌طلب

انتشارات دانشگاه اراک

۱۳۷۷

فهرست

فصل سوم

فصل چهارم

پیش‌گفتار

چگونگی پیدایش هندسه در پرده‌ی ابهام پوشیده مانده است. ولیکن شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد از بیش از بیست قرن تاکنون، همواره هندسه سهم برجسته‌ای از ریاضیات یونان را به خود اختصاص داده و بدین لحاظ، موضوع عمده‌ی کتاب "اصول" اقلیدس بدان مربوط است. کتابِ اصول، نخستین و اصیل‌ترین نمونه از یک دستگاه بنداشتی صوری بود که الگویی برای نتیجه‌گیری ریاضی‌گونه به بار آورد؛ به هرحال، کشف هندسه‌های نااقلیدسی در فهم فلسفی و ریاضی طبیعت ریاضیات، بسیار مؤثر بود. رابطهٔ بین هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی با بسط هندسه‌ی تصویری -که متأثر از سؤالات هنرمندان در مورد پرسپکتیو است - آشکار می‌شود.

این پیشینه‌ی تاریخی جالب و سؤالات فلسفی عمده‌ای که از توسعه‌ی هندسه ناشی شده‌اند، برای جریان دانشجویی و کسانی که اغلب، هندسه را به عنوان موضوعی منسوخ و پر از اثبات‌های چندستونی از نتایجی آشکار می‌پندارند، واقعاً ناشناخته می‌باشد. این عجیب نیست که "مری‌کانتوسکی[1]" در مقاله‌ای تحت عنوان "تصادم محاسبه با هندسه"، هندسه را امروزه پرزحمت‌ترین و بحث‌آمیزترین مبحث ریاضیات مدرسه‌ای نامیده است (*Fey, 1984, p.31*). البته این مقاله و مقالات جدید دیگر، دلایلی بر رشد تجسم مفاهیم و الگوهای هندسی، که در عصر کنونی گرافیک کامپیوتری بیش از پیش مورد اهمیت واقع شده را فراهم آورده‌اند. هندسه‌ی هنرمندان و هندسه‌ی تصویری، ابزاری در دست علوم کامپیوتر و مهندسی در کاربر سرحدات تکنولوژی *CAD/CAM* (*Computer-aided design/ Computer-aided manufacturing*) شده است.

تأکید اصلی این متن، بر هندسه‌ای است که بعد از کتاب اصول اقلیدس (حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد) توسعه یافته است. علاوه بر هدف عمده که مطالعه‌ی هندسه‌های جدیدتر می‌باشد، این مطالعه مجال بسیار مناسبی را برای کاوش در سیر تاریخ ریاضیات

---

1. *Mary Kantowski*

را فراهم می‌آورد. همچنین به دلیل استفاده مکرر از روش‌های جبری، مطالعه‌ی این کتاب توجیهی بر تأثیر متقابل شاخص‌هایی از ریاضیات بوده و در بسط بینشی هندسی در نتایجی ریاضی که قبلاً برای کامل کردن تجرید طبیعت ظاهر شده‌اند، نقش مؤثری دارد.

چون هندسه‌ی اقلیدس به طور تاریخی نخستین مثال از یک دستگاه بنداشتی بوده و همچنین یکی از اهداف اصلی آموزش هندسه در دبیرستان، قرار دادن دانش‌آموزان در معرض دلایل قیاسی است، فصل ۱، با توصیف عمومی دستگاه‌های بنداشتی (یا قیاسی) آغاز می‌شود. سپس به عنوان مثال‌هایی از این دستگاه‌ها، چند هندسه‌ی متناهی مطرح شده‌اند. این هندسه‌های متناهی، نه تنها توجیهی بر مفاهیمی است که در هندسه‌های فصل ۲ تا ۴ به کار رفته‌اند، بلکه بر وسعت دیدگاه‌های هندسی نیز گواهی دارند.

در فصل ۲ ، باتوجه به روال تاریخی و به منظور تدارکی ریاضی برای مبحث اصلی که هندسه نااقلیدسی است، ابتدا به هندسه‌ی اقلیدس پرداخته‌ایم. این موضوع هم نقش یادآوری نتایج آشنای هندسه‌ی اقلیدسی و هم چگونگی تغییرات ذاتی در هندسه‌ی اقلیدسی را که از زمان اقلیدس تابه‌حال رخ داده است، عهده‌دار می‌باشد. سپس معرفی هندسه‌های نااقلیدسی برای توجیه هندسه‌هایی که می‌توانند همانند هندسه‌ی اقلیدسی ولی با خواصی که نسبت به خاصیت‌های نظیر در هندسه‌ی اقلیدسی اساس مختلفی دارند، صورت می‌پذیرد.

آغاز فصل ۳ مرحلهٔ تغییر از ره‌یافتی ساختنی در فصول قبل به رفتاری تحلیلی در این فصل و فصول آینده را عهده‌دار است. این شیوه، از تعریف "کلاین" درباره هندسه که تأکید بر تبدیلات هندسی دارد، پیروی می‌کند. مطالعه‌ی تبدیلات صفحه‌ی اقلیدسی با طولپای‌ها و تشابهی‌ها شروع شده و تا تبدیلات عمومی‌تری به نام آفینی‌ها ادامه می‌یابد.

با استفاده از ره‌یافتی بنداشتی و تعمیم تبدیلات صفحه‌ی اقلیدسی، فصل ۴ به معرفی هندسه تصویری اشاره داشته و توجیه‌گر این است که این هندسه چهارچوبی کلی فراهم می‌آورد تا جایی که هندسه‌های فصول ۲ و ۳ را شامل می‌شود.

به طور ریاضی گام منطقی بعدی در ادامه‌ی آخر این کتاب، مطالعه‌ی توپولوژی است

که در درس مجزایی پوشش داده می‌شود.

این کتاب برای دروس هندسه‌ی دانشگاهی و دانش‌آموزانی که در رشته‌های مربوط قصد ادامهٔ تحصیل دارند تألیف شده است. از طرفی با دلبستگی جدید در هندسه، دیگر دانشجویان علاقه‌مند به کار در ریاضیات یا علوم کامپیوتر، با این دروس ارزشمند، زمینه‌ای مناسب خواهند یافت. بررسی این دروس، وسیله‌ای بسیار مناسب برای توجیه رابطه‌ی بین ریاضیات و دیگر هنرهای مترقی و نظام‌مند است. در کوشش برای تشویق دانشجویانی که خواهان مطالعه‌ی بیش‌تر این روابط هستند، هر فصل، شامل بخشی است که کتب منبع راجع به مباحثی در هنر، تاریخ، کاربردی و غیره در آن فهرست شده‌اند. من دانشجویانی داشته‌ام که پژوهش و تحقیق در این مباحث را نه تنها برای اضافه شدن معلومات ریاضی خویش پی گرفته‌اند، بلکه به دنبال دست‌یابی بر بینشی در ریاضیات با طبیعت هنرهای مترقی بوده‌اند.

موادی که این کتاب از آنها سود می‌برد چه برای ریاضی کارهای حرفه‌ای و چه مبتدی، آشناست؛ تنها ملزوم هندسی، آشنایی با هندسه‌ی مقدماتی دبیرستانی است. چون در این کتاب اغلب، به جبر ماتریس‌ها و گاه‌گاهی به مفهوم عمومی‌تر از جبر خطی اشاره شده است؛ داشتن زمینه‌ای در جبر خطی نیز مفید است. از طرفی، چون در این کتاب به معرفی مفهوم گروه و پی‌گیری خواص هندسی تبدیلات پرداخته شده می‌تواند آمادگی بسیار مناسبی را برای ارائه‌ی درسی در جبر مجرد، در مقطع لیسانس، فراهم آورد[۱].

جودیت ان. سدربرگ

۱- قسمتی که در پایان پیشگفتار مؤلف به تشکر از اشخاص و مؤسسات پرداخته ترجمه نشده است.م.

پیش‌گفتار مترجم

از چند سال پیش در جستجوی کتابی مناسب در زمینه‌ی هندسه‌ی جدید با ره‌یافتی اصل موضوعی بودم، با این امید که بتواند موضوعات عمده‌ی درس مبانی هندسه‌ی رشته‌ی ریاضی را در مقطع کارشناسی بپوشاند. کتاب حاضر با این هدف ترجمه شده است.

کتابی که پیش‌رو دارید کتابی خودآموز، ساده و روان است. مطالعه‌ی آن به ریاضیات پیشرفته‌ای نیاز ندارد. نویسنده به سادگی با دیدی نیمه‌تحلیلی توانسته است بدون ورود به مباحث پردردسر، طولانی و معمول مسائل هندسی به گونه موجز، بنایی زیبا از ساختارهای نااقلیدسی در کنار ساختارهای اقلیدسی سامان دهد. بعضی مواقع شاهد اصرار بر نتایج جالب کاربردی مباحث خواهیم بود ولی کمی جلوتر یا عقب‌تر زیبایی خیره‌کننده بنای محض هندسی شما را به تحسین واخواهد داشت.

امیدوارم خوانندگان عزیز در صورت برخورد با لغزش‌هایی که احتمالاً کم نیز نخواهد بود، بر من منّت نهاده اینجانب را به منظور تصحیح چاپ‌های بعدی مطلع سازند، تا کتابی کم‌نقص‌تر در اختیار مشتاقان قرار گیرد.

در پایان از همه‌ی سروران و بزرگانی که در چاپ این کتاب اینجانب را یاری نموده‌اند کمال تشکر را دارم.

محمود پارچه‌طلب

۷۷/۶/۲۹

دانشگاه اراک

فصل اول

دستگاه‌های بنداشتی و هندسه‌های متناهی

۱-۱. چشم‌انداز

هندسه‌های متناهی در اواخر قرن نوزدهم با آزمون و "توجیه" خواص کمال، سازگاری و استقلال گسترش پیدا کردند. در این فصل، با ارائه‌ی نقش تاریخچه‌ای توسعه و اهمیت شناختی که با به‌وجود آمدن هندسه‌های نااقلیدسی، منجر به انقلابی شگرف در ریاضیات و فلسفه شد، این اصطلاحات را معرفی می‌کنیم. علاوه بر این، هندسه‌های متناهی، دستگاه بنداشتی نسبتاً ساده‌ای فراهم می‌آورد که ما را در پیشبرد مهارت‌ها و تکنیک‌های استدلال‌های هندسی کمک می‌کند. ضمن هندسه‌های متناهی، همچنین مثال‌های شهودی از خواص هندسه‌ی تصویری و نااقلیدسی، در بخش‌های ۳-۱ و ۵-۱ آورده شده‌اند.

اگرچه هندسه‌های متناهی به عنوان دستگاه‌های مجرد پیشرفت کرده‌اند، ریاضی‌دانان این ایده‌های مجرد را در طراحی تجربیات آماریِ به‌کار رفته در مربع‌های لاتین و توسعهٔ کدهای تصحیح‌کننده‌ی خطا در علم کامپیوتر به کار بسته‌اند. در بخش ۴-۱ شاهد یک کد ساده‌ی تصحیح‌کننده‌ی خطا و ارتباطش با هندسه‌های تصویری خواهیم بود. کاربرد هندسه‌های آفینی متناهی برای ساختن مربع‌های لاتین نیز به همان اندازه زیرکانه و هیجان‌انگیز است. چون مربع‌های لاتین در چندین منبع که به‌سادگی

قابل دسترسی هستند به خوبی توضیح داده شده‌اند خواننده را به ادامه‌ی مطالعه‌ی این مبحث با مراجعه به منابع آخر فصل تشویق می‌کنیم.

۲-۱. دستگاه‌های بنداشتی

هر شاخه از ریاضیات نیاز به شناختی از ماهیت استدلال قیاسی دارد، و هندسه برای معرفی این روش به دانش‌آموزان دورهٔ دوم تحصیلی برگزیده شده است. دلایل تاریخچه‌ای مهمی برای این نقش هندسه وجود دارد؛ ولی این دلایل، به ندرت توسط دانش‌آموزان مبتدی این دوره مورد توجه قرار می‌گیرد. این بخش، به معرفی اصطلاحات اساسی، برای یک بحث مستدّل قیاسی می‌پردازد تا تأثیر فوق‌العاده‌ی تاریخچه‌ی هندسه روی مفاهیم جدید دستگاه‌های استنتاجی آشکار گردد.

استدلال قیاسی که در جای‌جای یک ساختار منطقی منظم ظاهر می‌شود، دستگاهی **بنداشتی** (قیاسی) ارائه می‌دهد. این چنین دستگاهی متشکل از اجزای زیر است:

۱- اصطلاحات تعریف‌نشده

۲- اصطلاحات تعریف شده

۳- بنداشت‌ها

۴- یک دستگاه منطقی

۵- قضایا

آوردن اصطلاحات تعریف‌نشده به دلیل عدم امکان تعریف همهٔ اصطلاحات بدون توسل به تعاریف دوری است. اصطلاحات تعریف نشده در دستگاه‌های هندسی اغلب، اما نه لزوماً، "نقطه"، "خط"، "صفحه" و "روی" را دربر دارد. به اصطلاحات تعریف شده واقعاً نیازی نیست؛ اما در کنار هر دستگاه بنداشتی به کرات، عباراتی معین از اصطلاحات تعریف نشده استفاده می‌شود؛ پس بهتر این که یک اصطلاح جدید به عنوان اصطلاحات تعریف شده برای هریک از عباراتی این‌چنین، جایگزین شود؛ به طور مثال، در هندسه‌ی اقلیدسی اصطلاح "خطوط موازی" به جای "خطوطی که همدیگر را قطع نمی‌کنند" جایگزین می‌شود. علاوه بر این اثبات همه‌ی عبارات ساخته شده از

اصطلاحات تعریف شده و نشدهٔ دستگاه، بدون استدلال دوری همانند تعریف همه‌ی اصطلاحات، غیرممکن است؛ بنابراین، یک مجموعه از عبارات را باید بدون اثبات پذیرفت؛ عباراتی که بدون اثبات پذیرفته می‌شوند به **بنداشت** معروفند. از روی بنداشت‌ها با توجه به قواعد استنتاج یک دستگاه منطقی (معمولاً - ارسطویی) عبارات دیگری ثابت می‌شوند که این عبارات را **قضیه** می‌نامیم.

همان‌طور که ذکر شد، بنداشت‌های یک دستگاه باید عبارت‌هایی باشند که توسط اصطلاحات دستگاه ساخته شوند؛ اما آن‌ها را نمی‌توان به دل‌خواه ساخت؛ چرا که یک دستگاه بنداشتی باید سازگار باشد.

تعریف ۱-۱. یک دستگاه بنداشتی را **سازگار** گوییم اگر در آن هیچ دو بنداشت، هیچ قضیه و بنداشت و یا هیچ دو قضیه ناقض یکدیگر نباشند.

واضح است که یک دستگاه بنداشتی باید سازگار باشد؛ زیرا دستگاهی که در آن یک عبارت و نقیض آن را بتوان ثابت کرد بی‌ارزش است. روشن است که بررسی مستقیم سازگاری از روی تعریف، مشکل خواهد بود، چرا که همه‌ی قضایای ممکن را باید درنظر گرفت. در عوض این کار، مدل‌ها را برای برقراری سازگاری به کار می‌گیرند. یک **مدل** دستگاهی بنداشتی، بدین ترتیب حاصل می‌شود که تعابیری به اصطلاحات تعریف نشده، نظیر کرده به گونه‌ای که بنداشت‌ها به عباراتی صحیح در تعبیر بدل گردند. اگر مدلی که به صورت تعابیری از اشیا و روابط آن‌ها حاصل شده منطبق بر جهان واقع باشد، گوییم **سازگاری مطلق**، برقرار است؛ در این صورت، عبارات نظیر به قضایای متناقض، به عبارات متناقض در مدل بدل می‌شوند؛ ولی تناقض‌ها در جهان واقع ناممکن فرض می‌شود. از طرف دیگر، اگر تعابیر نظیر شده، از دستگاه بنداشتی دیگری گرفته شوند ما فقط سازگاری را نسبت به سازگاری دستگاه بنداشتی دوم می‌سنجیم؛ یعنی دستگاه مورد آزمایش سازگار است، به شرطی که دستگاهی که تعابیر در آن نظیر شده‌اند سازگار باشد. در حالت دوم، گوییم یک **سازگاری نسبی** از دستگاه بنداشتی اول به ثبوت رسیده است. به واسطه‌ی تعداد اعضاء، در بیش‌تر دستگاه‌های بنداشتی

سازگاری نسبی بهترین چیزی است که می‌توان به دست آورد؛ به عنوان مثال، کاربرد مدل‌ها را برای مشخص کردن سازگاری دستگاه بنداشتی برای هندسه‌ی چهارنقطه‌ای بیان می‌کنیم.

بنداشت‌هایی برای هندسه‌ی چهارنقطه‌ای

اصطلاحات تعریف نشده، نقطه، خط، روی،
بنداشت ۱. دقیقاً چهار نقطه وجود دارد
بنداشت ۲. دو نقطه‌ی متمایز دقیقاً روی یک خطّند.
بنداشت ۳. هر خط دقیقاً روی دو نقطه است.

قبل از به ثبوت رسانیدن سازگاری این دستگاه، بد نیست نظری به این سه عبارت که در دیگر بنداشت‌های این متن نیز به کار رفته‌اند بیفکنیم. بنداشت اول، صریحاً وجود ۴ نقطه را ضمانت می‌کند. اگرچه از خطوط در بنداشت‌های ۲ و ۳ یاد کرده‌ایم؛ ولی بدون اثبات قضایا نمی‌توان راجع به وجود خطوط، ادعایی کرد؛ چراکه هیچ بنداشتی وجود آن‌ها را تضمین نکرده است. هرچند در این دستگاه، اثبات وجود خطوط بی‌درنگ میسّر است ولی نیاز به قضایا در این مورد صحیح است. بنداشت‌های ۲ و ۳ به مانند بیش‌تر عبارات ریاضی به عباراتی به شکل "اگر...آن‌گاه" بدل می‌شوند. بنداشت ۲ باید به شکل زیر تفسیر شود: اگر دو نقطه‌ی مجزا وجود داشته باشد آن‌گاه دو نقطه روی یک و فقط یک خط قرار دارند؛ به شکل مشابه، بنداشت ۳ این‌گونه تفسیر می‌شود: اگر خطی وجود داشته باشد، آن خط دقیقاً روی دو نقطه است. در دستگاه‌های بنداشتی دیگر، به بنداشت‌هایی می‌رسیم که از قضایای مربوط به آن‌ها وجود نقاط و خطوطی بیش‌تر از آنچه توسط بنداشت‌های دیگر طلب شده‌اند تضمین می‌شود.

بدین ترتیب، ساخت هر مدل از هندسهٔ چهار نقطه‌ای باید از اشیای موجود آن، یعنی ۴ نقطه شروع شود. در مدل ۱ نقاط به صورت حروف A، B، C و D تعبیر می‌شوند و

حال آن که در مدل ۲ نقاط به صورت نقطه‌هایی در شکل ۱-۱ تعبیر شده‌اند. در ادامه‌ی ساخت هر مدل، بقیه‌ی اصطلاحات تعریف نشده طوری تعبیر می‌شوند که بنداشت‌های ۲ و ۳ در دستگاه حاصله صادق باشند.

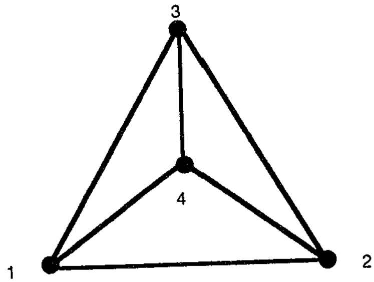
مدل ۱

اصطلاحات تعریف نشده	تعبیر
نقاط	حروف A، B، C، D
خطوط	ستون‌هایی از حروف داده شده در زیر
روی	شامل یا مشمول شدن در

$$\begin{matrix} A & A & A & B & B & C \\ B & C & D & C & D & D \end{matrix}$$

مدل ۲

اصطلاحات تعریف نشده	تعبیر
نقاط	نقاط مشخص شده‌ی 1، 2، 3، 4
خطوط	پاره‌خط‌های شکل ۱-۱
روی	یک‌نقطه‌ی انتهایی از یک پاره‌خط است یا برعکس



شکل ۱-۱

خواص مهم دیگری نیز هستند که یک دستگاه بنداشتی ممکن است شامل آن‌ها باشد.

تعریف ۲-۱. در یک دستگاه بنداشتی، بنداشتی را **مستقل** گوییم که با کمک بنداشت‌های دیگر نتوان آن را ثابت کرد. اگر هر بنداشت یک دستگاه مستقل باشد آن دستگاه را مستقل گوییم.

واضح است یک دستگاه مستقل مناسب‌تر است؛ چراکه فرضیات غیرضروری در آن به کار نرفته‌اند. اما هنگامی که عبارات کم‌تری را بدون اثبات بپذیریم عبارات بیش‌تری را باید ثابت کنیم؛ پس مشکلات کار کردن در یک دستگاه مستقل، به وضوح افزایش می‌یابد. به همین دلیل، دستگاه‌های بنداشتی‌ای که در هندسه‌ی دبیرستان آورده می‌شوند به ندرت مستقلند.

بررسی استقلال یک دستگاه بنداشتی نیز با مدل‌ها صورت می‌گیرد؛ استقلال بنداشت A در دستگاه بنداشتی S با یافتن مدل دستگاه S' که، S' دستگاه حاصله از S با تعویض بنداشت A با نقیض A است، صورت می‌گیرد. به این ترتیب، برای اثبات استقلال یک دستگاه سازگار با n بنداشت باید n مدل ارائه داد (برای هر بنداشت یکی). استقلال دستگاه بنداشتی هندسه‌ی چهارنقطه‌ای با سه مدل زیر ثابت شده است؛ در همه‌ی آن‌ها نقاط به صورت حروف و خطوط به صورت ستون‌هایی از حروفِ مشخص، تعبیر شده‌اند.

مدل‌های اثبات استقلال بنداشت‌های هندسه‌ی چهارنقطه‌ای

مدل آ-۱. مدلی که در آن نقیض بنداشت ۱ درست است (یعنی ۴ نقطه وجود ندارد):

نقاط	خطوط
A , B	A
	B

چون این مدل فقط شامل دو نقطه است به وضوح نقیض بنداشت ۱ درست بوده و به راحتی می‌توان نشان داد که در این تعبیر بنداشت‌های ۲ و ۳ گزاره‌هایی درست هستند.

مدل آ-۲. مدلی که در آن نقیض بنداشت ۲ درست است (یعنی دو نقطه‌ی متمایز وجود دارند که روی یک خط نیستند):

نقاط	خطوط	
A,B,C,D	A	C
	B	D

توجه کنید که در این مدل، هیچ خطی روی نقاط A و C نیست. کدام زوج دیگر از نقاط روی یک خط نیستند؟

مدل آ-۳. مدلی که در آن نقیض بنداشت ۳ درست است (یعنی خطوطی وجود دارند که روی دقیقاً دو نقطه نیستند).

نقاط	خطوط			
A,B,C,D	A	A	B	C
	B	D	D	D
	C			

در این مدل، یکی از خطوط روی سه نقطه است؛ در صورتی که بقیه‌ی خطوط روی دو نقطه هستند. پس بدین تعبیر نقیض بنداشت ۳ درست است.

چون استقلال هر بنداشت هندسه‌ی چهارنقطه‌ای به ثبوت رسید، استقلال این دستگاه بنداشتی نتیجه می‌شود.

خاصیت دیگری که در یک دستگاه بنداشتی ممکن است به وجود آید "کمال" می‌باشد.

تعریف ۳-۱. دستگاه بنداشتی‌ای را **کامل** گوییم هرگاه هر گزاره، شامل اصطلاحات تعریف شده و نشده از دستگاه را بتوان ثابت یا رد کرد، یا به بیان دیگر نتوان بنداشت مستقل جدیدی به آن اضافه کرد.

در حالت کلی، اثبات مستقیم کامل بودن یک دستگاه ممکن نیست؛ اما اگر دستگاهی کامل باشد نمی‌تواند دو مدل اساساً مختلف داشته‌باشد. این امر، بدین معنی است که باید همه‌ی مدل‌های دستگاه دو به دو **یکریخت** باشند.

تعریف ۴-۱. دو مدل α و β از یک دستگاه بنداشتی را یکریخت گوییم هرگاه یک تناظر یک به یک φ از مجموعه‌ی نقاط و خطوط α به مجموعه نقاط و خطوط β که حافظه همه‌ی روابط است، موجود باشد. خصوصاً اگر اصطلاحات تعبیر نشده‌ی دستگاه، شامل اصطلاحات "نقطه"، "خط" و "وقوع" باشند؛ آن‌گاه φ باید در شرایط زیر صدق کند:

۱- برای هر نقطه‌ی P و خط l در α، $\varphi(P)$ و $\varphi(l)$ نقطه و خط در β باشند.

۲- اگر P بر l واقع است، $\varphi(P)$ بر $\varphi(l)$ واقع باشد.

واضح است اگر همه‌ی مدل‌های یک دستگاه دوبه‌دو یکریخت باشند می‌بایست تعداد نقاط و خطوط آنها یکی باشد. علاوه بر این، اگر بنداشت مستقل دیگری را بتوان به دستگاه اضافه کرد دو مدل مختلف وجود خواهند داشت: یک مدل α که در آن، این بنداشت معتبر است و مدل دیگر β که در آن این بنداشت معتبر نیست. مدل α و β یکریخت نخواهند بود. از این‌رو اگر همه‌ی مدل‌های دستگاه لزوماً یکریخت باشند می‌توان نتیجه گرفت دستگاه کامل است.

در مثال هندسه‌ی چهارنقطه‌ای یکریختی، مدل ۱ و ۲ واضح است. بررسی یکریخت بودن همه‌ی مدل‌های این دستگاه را می‌توان به راحتی از قضیه‌ی زیر نتیجه گرفت (تمرین‌های ۵ و ۶).

قضیه ۱-۱. در هندسه‌ی چهار نقطه‌ای دقیقاً ۶ خط وجود دارد.

سرانجام هربحث ازخواص دستگاه‌های‌بنداشتی باید شامل نتیجه‌ی‌مهمی‌از قضیه‌ی گودل باشد؛ به طور کاملاً خلاصه، این نتیجه بیان می‌کند که هر دستگاه بنداشتی سازگارِ به قدر کافی جامع که شامل نتایجی از نظریه‌ی اعداد مقدماتی باشد، کامل نیست.

تمرین:

در تمرین‌های ۱ تا ۴ دستگاه بنداشتی زیر را درنظر بگیرید:

بنداشت‌هایی برای هندسه‌ی سه‌نقطه‌ای

اصطلاحات تعریف نشده. نقطه، خط، روی
بنداشت ۱. دقیقاً سه نقطه وجود دارد.
بنداشت ۲. دو نقطهٔ متمایز دقیقاً روی یک خط هستند.
بنداشت ۳. همه‌ی نقاط روی یک خط نیستند.
بنداشت ۴. دو خط متمایز روی حداقل یک نقطه مشترکند.

۱- (آ) ثابت کنید این دستگاه سازگار است. (ب) اثبات قسمت (آ) کدام‌یک از سازگاری نسبی یا سازگاری مطلق را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.

۲- آیا این دستگاه مستقل است؟ چرا؟

۳- قضایای زیر را در این دستگاه ثابت کنید: (آ) دو خط متمایز دقیقاً در یک نقطه مشترکند. (ب) هر خط دقیقاً روی دو نقطه است. (پ) دقیقاً سه خط وجود دارد.

۴- آیا این دستگاه کامل است؟ چرا؟

۵- قضیه ۱-۱ را ثابت کنید.

۶- ثابت کنید هر دو مدل از هندسه‌ی چهارنقطه‌ای یکریختند.

تعریف زیر را در تمرین‌های ۷ و ۸ به‌کار برید.

تعریف: دوگان عبارت p در هندسه‌ی چهارنقطه‌ای با تبدیل اصطلاحات "نقطه" و "خط" در p به ترتیب با اصطلاحات "خط" و "نقطه" حاصل می‌شود.

۷- با تبدیل بنداشت‌های هندسه‌ی چهارنقطه‌ای با دوگانشان یک دستگاه بنداشتی برای هندسه‌ی چهارخطی به‌دست آورید.

۸- تحقیق کنید که دوگان قضیه ۱-۱ قضیه‌ای در هندسه‌ی چهارخطی است. آیا اثبات آن با اثبات قضیه ۱-۱ در تمرین ۵ متفاوت است؟

۱-۳. صفحه‌های تصویری متناهی

همان‌گونه که در مثال‌های بخش قبل مشخص شد هندسه‌هایی متشکل از تعدادی متناهی نقطه و خط موجودند. در این بخش، می‌خواهیم یک دستگاه بنداشتی برای گردایه‌ی مهمی از هندسه‌های متناهی موسوم به صفحه‌های تصویری متناهی بنا کنیم. این هندسه‌ها در بدو امر، ممکن است شبیه نسخه‌هایی متناهی از هندسه‌ی اقلیدسی مسطحه به‌نظر آیند؛ اما اختلاف مهمی وجود دارد. در یک صفحه‌ی تصویری متناهی هر

دو خط همدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی خطوط موازی وجود ندارند، متقاطع بودن هردو خط منجر به اختلافات دیگری بین صفحه‌های تصویری و صفحه‌های اقلیدسی می‌شود. چند اختلاف را در این بخش خواهیم آورد و بقیه تا مطالعه‌ی کلی هندسه‌ی تصویری مسطحه در فصل ۴ واضح نخواهد شد.

بعضی از اولین نتایج در مطالعه‌ی صفحه‌های تصویری متناهی، در سال ۱۸۵۶ توسط ون‌اشتودت[1] به دست آمد؛ اما تا اوایل این قرن، تصور نمی‌شد که هندسه‌های متناهی نقش مهمی در ریاضیات ایفا می‌کنند. از آن به بعد مطالعه‌ی این هندسه‌ها رشد قابل توجهی یافته، ولی هنوز مسائل حل نشده‌ای در این زمینه، محققان را پیوسته به خود مشغول کرده است.

بنداشت‌هایی برای صفحه‌های تصویری متناهی

اصطلاحات تعریف نشده. نقطه، خط، وقوع

اصطلاحات تعریف شده. نقاط واقع بر یک خط را **هم‌خط** گوییم. خطوط واقع بر یک نقطه را هم‌رس خوانیم.

بنداشت ت-۱. حداقل چهار نقطهٔ متمایز وجود دارد به‌طوری که هیچ سه نقطه از آن‌ها هم‌خط نیستند.

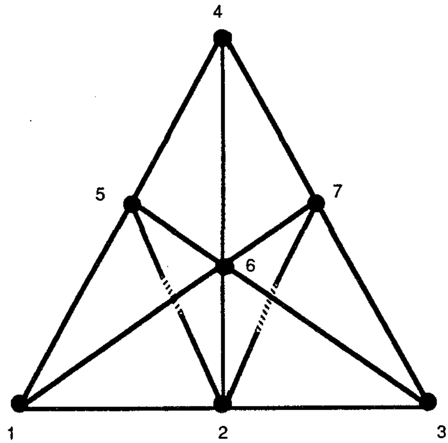
بنداشت ت-۲. حداقل یک خط با دقیقاً $n+1$ $(n>1)$ نقطه واقع بر آن موجود است.

بنداشت ت-۳. به ازای هر دو نقطه متمایز، دقیقاً یک خط واقع بر هردوی آن‌ها موجود است.

بنداشت ت-۴. به ازای هر دو خط متمایز، حداقل یک نقطه واقع بر هردوی آن‌ها وجود دارد.

---

1. *Von Staudt*



شکل ۲-۱

هر مجموعه از نقاط و خطوط راکه در بنداشت‌های فوق صدق کنند، یک **صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی** n می‌نامیم. توجه کنید که کلمهٔ "وقوع" به عنوان اصطلاح تعریف نشده‌ی سوم در این دستگاه بنداشتی به کار برده شده است. در مطالعه‌ی کلی صفحه‌های تصویری، استفاده از این کلمه مناسب‌تر از کلمه "روی" می‌باشد.

سازگاری این دستگاه بنداشتی را می‌توان با هریک از مدل‌های زیر نشان داد که از همان تعبیرهای مدل‌های ۱ و ۲ در بخش ۲-۱ استفاده شده است.

مدل ۱

نقاط	خطوط
A,B,C,D,E,F,G	$A\ A\ B\ A\ B\ C\ C$
	$B\ D\ D\ F\ E\ D\ E$
	$C\ E\ F\ G\ G\ G\ F$

مدل ۲ .

نقاط	خطوط
نقطه‌های نشان داده شده با $1،2،3،4،5،6،7$	پاره‌خط‌های شکل ۲-۱

توجه کنید که این‌ها مدل‌هایی از صفحه‌های تصویری مرتبه‌ی ۲ هستند و هر دو دقیقاً سه نقطه روی هر خط دارند، اما همان‌طور که در مدل زیر نشان داده شده است، مدل‌هایی با بیش از سه نقطه روی یک خط نیز وجود دارند.

مدل ۳

نقاط	خطوط
A,B,C,D,E	$A\ A\ A\ A\ B\ B\ B\ C\ C\ C\ D\ D\ D$
F,G,H,I,J	$B\ E\ H\ K\ E\ F\ G\ E\ F\ G\ E\ F\ G$
K,L,M	$C\ F\ I\ L\ H\ I\ J\ I\ J\ H\ J\ H\ I$
	$D\ G\ J\ M\ K\ L\ M\ M\ K\ L\ L\ M\ K$

در حالی که مدل ۱ و ۲ سه نقطه روی هر خط و سه خط روی هر نقطه و جمعاً هفت نقطه و هفت خط دارند، مدل ۳ چهار نقطه روی هر خط و چهار خط روی هر نقطه و جمعاً سیزده نقطه و سیزده خط دارد. اگر صفحه‌های تصویری با نقاط و خطوط بیش‌تر وجود داشته باشند، آشکارا به کار گرفتن روش سعی و خطا برای معین کردن آن عملی نیست. در عوض یک سری از قضایا را بیان می‌کنیم که منجر به یک نتیجه‌ی کلی راجع به تعداد نقاط و خطوط در یک صفحه‌ی تصویری متناهی از مرتبه‌ی n می‌شوند.

اثبات این قضایا با توجه به این که این دستگاه بنداشتی در **اصل دوگانی** که کاکستر[1] آن را به عنوان یکی از زیباترین خواص هندسه‌ی تصویری بیان کرده است ساده می‌شود (کاکستر ۱۹۶۹ صفحهٔ ۲۳۱). همان‌طور که در تمرین‌های بخش ۲-۱ ذکر شد، **دوگان** یک عبارت با تعویض لغات "نقطه" و "خط" به ترتیب با "خط" و "نقطه" و برعکس حاصل می‌شود (در نتیجه کلمات "هم‌رس" و "هم‌خط" نیز باید با هم تعویض شوند).

تعریف ۵-۱. گوییم یک دستگاه بنداشتی در **اصل دوگانی** صدق می‌کند هرگاه در آن دوگان هر قضیه نیز یک قضیه باشد.

1. Coxeter

بدین ترتیب، در یک دستگاه بنداشتی که در اصل دوگانی صدق می‌کند اثبات هر قضیه را می‌توان صرفاً با دوگان‌سازی اثبات اولیه بهِ اثبات یک قضیه‌ی دوگان، تبدیل کرد. برای نشان دادن این که یک دستگاه بنداشتی خاصیت دوگانی دارد، اثبات این که دوگان‌های هر بنداشت قضایایی از دستگاه هستند لازم است. فهرست قضایایی که احکام دوگانْ چهار بنداشت این دستگاه هستند در ذیل آمده‌اند. اثبات دوگان‌های بنداشت‌های ت-۱ ، ت-۳ و ت-۴ را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

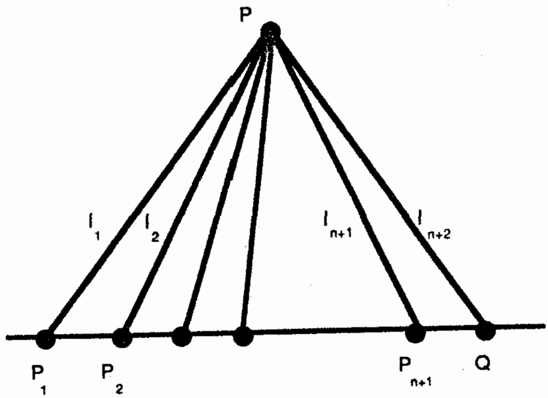
قضیه ت-۱ (دوگان بنداشت ت-۱). **حداقل چهار خط متمایز وجود دارند که هیچ سه‌تای آن‌ها هم‌رس نیستند.**

قضیه ت-۲ (دوگان بنداشت ت-۳). **به ازای هر دو خط متمایز مفروض دقیقاً یک نقطه واقع بر هردوی آن‌ها موجود است.**

قضیه ت-۳ (دوگان بنداشت ت-۴). **به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز مفروض حداقل یک خط واقع بر هردوی آن‌ها وجود دارد.**

قضیه ت-۴ (دوگان بنداشت ت-۲). **حداقل یک نقطه با دقیقاً $n+1$ $(n>1)$ خط متمایز واقع بر آن وجود دارد.**

اثبات. بنا بر بنداشت ت-۲ خطی مانند l با $n+1$ نقطه‌ی P_1، P_2، ... ، P_{n+1} روی آن و بنابر بنداشت ت-۱ نقطه‌ای مانند P غیرواقع بر l وجود دارد. در این صورت بنابر بنداشت ت-۳ خطوط l_1، l_2، ... ، l_{n+1} که نقطه‌ی P را به ترتیب به نقاط P_1، P_2، ... ، P_{n+1} وصل می‌کند موجودند (شکل ۳-۱). کافی است نشان دهیم این خطوط متمایزند و خط دیگری که از P بگذرد وجود ندارد. اگر برای $i\neq j$ داشته باشیم $l_i=l_j$، آن‌گاه دو نقطهٔ P_i و P_j بر دو خط l و $l_i=l_j$ خواهند بود و بنابر بنداشت ت-۳ ، $l=l_i=l_j$؛ اما P روی l_i بوده و روی l نیست و این یک تناقض است؛ بنابراین، اگر $i\neq j$ آن‌گاه $l_i\neq l_j$، حال فرض



شکل ۳-۱

کنیم خط اضافی $l_{n+۲}$ از P بگذرد. این خط باید l را در یک نقطه‌ی Q قطع کند (بنداشت ت-۴). چون l دقیقاً $n+۱$ نقطه دارد Q باید یکی از نقاط $P_۱$، ...، $P_{n+۱}$ باشد. فرض کنید $Q=P_۱$، بنابراین، چون $Q=P_۱$ و P دو نقطه‌ی متمایزند که هم روی خط $l_۱$ و هم روی خط $l_{n+۲}$ قرار دارند نتیجه می‌گیریم $l_{n+۲}=l_۱$. بنابراین، نقطه‌ی P بر دقیقاً $n+۱$ خط واقع است. □

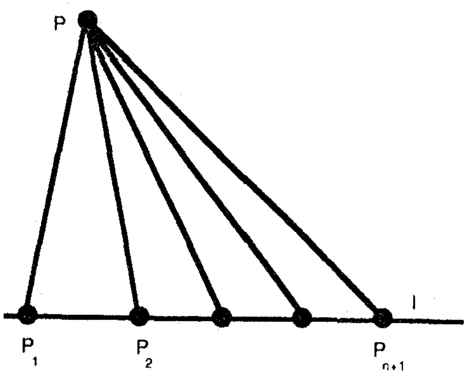
در اثبات قبل، از چند قرارداد هندسی کمک گرفتیم؛ اولاً برای زیبایی جملات، عبارت "واقع است بر" اغلب با اصطلاحاتی از قبیل "روی"، "شامل" و "گذشتن" جایگزین می‌شود. معانی این اصطلاحات جایگزین شده باید برحسب موقعیتشان در جمله بیان شوند. دوم آن که حروف بزرگ برای مشخص کردن نقاط به کار رفته‌اند؛ در صورتی که برای مشخص کردن خطوط از حروف کوچک استفاده کرده‌ایم. سرانجام چون نمودار برای ساختن و پی‌گیری اثبات بسیار مفید است هر جا مناسب باشد شکل‌ها یک قسمت از اثبات را به خود اختصاص می‌دهند؛ اما قسمت‌های تشریحی یک اثبات باید به گونه‌ای ساخته شوند که کاملاً مستقل از شکل باشند.

در مدل‌های ۱ تا ۳ تعداد نقاط روی هرخط و تعداد خطوط روی هرنقطه، در هر مدل یکی است. درستی این مطالب در حالت کلی به وسیله‌ی قضایای زیر تحقیق شده است.

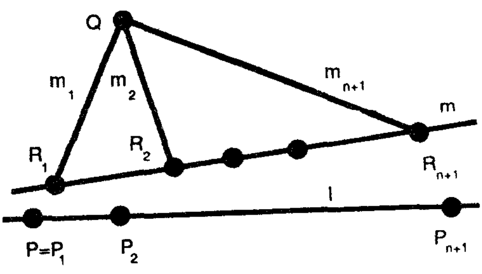
قضیه ت-۵. در یک صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی n هرنقطه دقیقاً بر $n+۱$ خط واقع است.

اثبات. گیریم P نقطه‌ای از صفحه باشد، بنداشت ت-۲ وجود خط l را شامل $n+۱$ نقطه‌ی $P_۱$، $P_۲$، ... ، $P_{n+۱}$ تضمین می‌کند. بسته به این‌که P روی l هست یا نه، دو حالت درنظر می‌گیریم (شکل ۴-۱ و ۵-۱).

حالت ۱ (نقطه‌ی P روی l نیست). اگر P بر l نباشد، حداقل $n+۱$ خط از P می‌گذرند؛ یعنی، خطوط واصل بین نقاط $P_۱$، $P_۲$ ، ... ، $P_{n+۱}$ و P. همانند اثبات قضیه‌ی قبل می‌توان نشان داد این خطوط متمایزند و خط دیگری بر P نمی‌گذرد؛ لذا در این حالت دقیقاً $n+۱$ خط از P می‌گذرد.



شکل ۴-۱



شکل ۵-۱

حالت ۲ (P روی l است). فرض کنیم $P=P_۱$ بنداشت ت-۱ وجود نقطه‌ی Q ناواقع بر l را تضمین می‌کند. همچنین می‌توان وجود خطی را مانند m که شامل P و Q نیست را ثابت کرد (تمرین ۷). با توجه به حالت ۱ ، Q دقیقاً روی $n+۱$ خط $m_۱$، $m_۲$، ... ، $m_{n+۱}$ واقع است؛ اما هریک از این خطوط m را در یک نقطه‌ی R_i ، $i=۱$و ۲، ...، $n+۱$، قطع می‌کنند. می‌توان به‌راحتی نشان داد که این نقاط متمایزند و تنها نقاط روی خط m هستند. بدین‌ترتیب، P روی خط m که شامل دقیقاً $n+۱$ نقطه می‌باشد نیست و بنابر حالت ۱ ، P دقیقاً بر $n+۱$ خط واقع است. □

قضیه‌ی زیر بلافاصله با دوگان‌گیری از قضیه‌ی قبل حاصل می‌شود.

قضیه ت-٦. دریک صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی n هرخط بر دقیقاً $n+۱$ نقطه واقع است.

با استفاده از این نتایج می‌توانیم تعداد نقاط و خطوط در یک صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی n را، تعیین کنیم.

قضیه ت-۷. یک صفحه تصویری مرتبه‌ی n شامل دقیقاً $n^۲+n+۱$ نقطه و $n^۲+n+۱$ خط است.

اثبات. گیریم P نقطه‌ای در صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی n باشد. در این صورت هر نقطه‌ی دیگر روی دقیقاً یک خط است که آن نقطه را به P وصل می‌کند. بنا بر قضیهٔ ت-۵ دقیقاً $n+۱$ خط از P می‌گذرند و بنابر قضیه ت-۶ هریک از این خطوط شامل $n+۱$ نقطه هستند؛ یعنی، علاوه بر P، n نقطه‌ی دیگر. بدین ترتیب، تعداد کل نقاط عبارت است از: $(n+۱)n+۱=n^۲+n+۱$. با یک بحث دوگان، تعداد کل خطوط نیز $n^۲+n+۱$ خواهد شد. □

بدین ترتیب، یک صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی دو باید ۷ نقطه، ۷ خط و یک صفحه‌ی

تصویری مرتبه‌ی سه باید ۱۳ نقطه و ۱۳ خط داشته باشد؛ اما یکی از مسائل حل نشده در هندسه‌های متناهی تشخیص مرتبه‌هایی است که صفحه‌ی تصویری برای آن وجود داشته باشد. یک پاسخ جزئی این مسئله هنگامی که وبلن[1] و بازِی[2] در سال ۱۹۰۶ ثابت کردند، "صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی n وقتی n توانی از یک عدد اول باشد وجود دارد" داده شد. تا مدت مدیدی حدس زده می‌شد که این‌ها تنها مرتبه‌هایی هستند که برای آن‌ها صفحه‌ی تصویر متناهی وجود دارد. در سال ۱۹۴۹ بروک[3] و ریسر[4] ثابت کردند که اگر n هم نهشت با ۱ یا ۲ به هنگ ۴ باشد و اگر n را نتوان به صورت مجموعه‌ی دو مربع کامل نوشت، آنگاه صفحه‌ی تصویری از مرتبه‌ی n وجود ندارد. این اثبات حدس فوق را برای تعداد نامتناهی از اعداد مثل ۲۲و۲۱و۱۴و۶=n به یقین تبدیل می‌کند؛ اما هنوز راجع به تعداد نامتناهی از اعداد مانند ۲۴و۱۸و۱۵و۱۲و۱۰=n حکمی نبود. در اواخر سال ۱۹۸۸ یک گروه محقق در دپارتمان علوم کامپیوتر دانشگاه کنکورد در منترئال یک تحلیل کامپیوتری حالت به حالت را با صرف چندین هزار ساعت وقت کامپیوتر، کامل کردند. این تحقیق که در راستای بررسی وجود یک صفحه‌ی تصویری مرتبه‌ی ۱۰ انجام شد صحت حدس فوق را برای ۱۰=n به ثبوت رسانید؛ یعنی، صفحه‌ی تصویری از مرتبه‌ی ۱۰ موجود نیست. بدین ترتیب، ۱۲=n کوچک‌ترین عددی است که حدس فوق برای آن ثابت نشده است (سیپرا، ۱۹۸۸).

مطالعه‌ی صفحه‌ی تصویری متناهی هم از نقطه نظر تحلیلی و هم از نقطه‌نظر استنتاجی، خواص هندسی جالبی را به ارمغان می‌آورند که همانا تعمیم خواص اقلیدسی و نااقلیدسی است. ما پس از معرفی هندسه‌ی نااقلیدسی (فصل ۲)، و بسط یک مدل تحلیلی برای هندسه‌ی اقلیدسی (فصل ۳)، مطالعه‌ی این قسمت را در فصل ۴ پی می‌گیریم. ولی در دنباله‌ی این بخش خواهیم دید که حتی یکی از ساده‌ترین هندسه‌های تصویری؛ یعنی، صفحه‌ی تصویری متناهی مرتبه‌ی دو کاربردی دارد که رابطه‌ی بین هندسه و عرصه‌های جدید و مهیج ریاضیات را نشان می‌دهد.

---

1. *Veblen* 2. *Bussey*

3. *Bruck* 4. *Ryser*

تمرین:

۱-کدامیک از بنداشت‌های صفحه‌ی تصویری متناهی در هندسه‌ی اقلیدسی معتبر است؟ کدامیک معتبر نیست؟

۲- ثابت‌کنید دستگاه بنداشتی برای صفحه‌های تصویری متناهی کامل نیست.

۳- یکریختی مدل‌های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

۴- قضیه ت-۱ را ثابت کنید.

۵- قضیه ت-۲ را ثابت کنید.

۶- قضیه ت-۳ را ثابت کنید.

۷- وجود خط m را که در حالت دوم اثبات قضیه ت-۵ از آن استفاده شد بررسی کنید.

۸- یک صفحه‌ی تصویری متناهی مرتبه‌ی هفت چند نقطه و خط دارد؟

بنداشت‌هایی برای **صفحه‌ی آفین متناهی مرتبه‌ی n** داده شده است. اصطلاحات تعریف نشده و تعریف شده در آن، با این اصطلاحات در صفحه‌ی تصویری متناهی یکی است.

بنداشت‌های صفحه‌های آفین متناهی

بنداشت آ-۱. حداقل چهار نقطه‌ی متمایز که هیچ سه نقطه‌ای از آن هم‌خط نیستند، وجود دارد.
بنداشت آ-۲. حداقل یک خط با دقیقاً n $(n>1)$ نقطه روی آن موجود است.
بنداشت آ-۳. به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز داده شده دقیقاً یک خط واقع بر هردوی آن‌ها وجود دارد.
بنداشت آ-۴. خط l و نقطه P غیرواقع بر آن مفروضند، دقیقاً یک خط وجود دارد که از P می‌گذرد و l را قطع نمی‌کند.

۹- بنداشت‌های یک صفحه‌ی آفین متناهی با بنداشت‌های یک صفحه‌ی تصویری متناهی چه فرقی دارند؟

۱۰- نشان دهید که صفحه‌ی آفین متناهی در اصل دوگانی صدق نمی‌کند.

۱۱- مدل‌هایی از صفحه‌های آفین مرتبه‌ی ۲ و ۳ بیابید.

در تمرین‌های زیر از شما خواسته شده است که یک سری قضیه راجع به صفحه‌های آفین متناهی ثابت کنید. اثبات این قضایا را به ترتیب انجام دهید؛ چراکه در بعضی استفاده از نتایج قضایای قبلی لازم است.

۱۲- ثابت کنید: در یک صفحه‌ی آفین مرتبه‌ی n هر نقطه دقیقاً روی $n+1$ خط واقع است. (راهنمایی: همانند اثبات قضیه ت-۵ دو حالت درنظر بگیرید.)

۱۳- ثابت‌کنید: در یک صفحه‌ی آفین مرتبه‌ی n، هر خط شامل دقیقاً n نقطه است.

۱۴- ثابت‌کنید: در یک صفحه‌ی آفین مرتبه‌ی n، برای هر خط، دقیقاً $n-1$ خط وجود دارد که آن را قطع نمی‌کنند.

۱۵- ثابت کنید در یک صفحه‌ی آفین مرتبه‌ی n، دقیقاً n^2 نقطه و n^2+n خط وجود دارد.

۱۶- تحقیق کنید که اگر از صفحه‌ی تصویری متناهی مرتبه ۲ در مدل ۱ یا ۲ ، یک خط و نقاط روی آن را حذف کنیم، باقیمانده نقاط و خطوط تشکیل یک مدل از یک صفحه‌ی آفینی را می‌دهند. مرتبه‌ی آن چیست؟

۴-۱. کاربردی در کدهای تصحیح‌کننده‌ی خطا

صفحه‌های تصویری متناهی مرتبه‌ی دو که در مدل‌های ۱ و ۲ بخش پیش آورده شد، به **صفحات فانو** *(Fano)* معروفند. یک راه نمایش مختصر آن‌ها و دیگر صفحات متناهی نمایشی است معروف به جدول وقوع. در جدول ۱-۱ خطوط صفحه توسط ستون‌ها نمایش داده شده‌اند؛ در حالی که نقاط صفحه با سطرها نمایش داده شده‌اند. درایه‌های 0 و 1 به ترتیب معرف غیرواقع بودن و واقع بودن هستند.

این جدول بیانگر این است که هر نقطه در صفحه‌ی فانو را می‌توان به طور منحصر به فرد توسط برداری شامل درایه‌های سطر نظیرش در جدول وقوع، نمایش داد. بدین ترتیب نقطه‌ی A را می‌توان توسط بردار (۱,۱,۰,۰,۰,۰,۱) نمایش داد. به طور مشابه هر نقطه در صفحه‌ی فانو را می‌توان توسط یک ۷-تایی دودویی نمایش داد؛ یعنی، برداری

با هفت درایه که یا ۰ هستند یا ۱. توجه کنید که بردار هر نقطه دقیقاً شامل سه، ۱ است؛ با زبان تئوری کدنگاری گوییم **وزن** هر بردار ۳ است. در صفحات آینده، آشنایی مختصری در مورد نظریه‌ی کدنگاری پیدا می‌کنیم و خواهیم دید که این بردارهای ۷-تایی در یک کد تصحیح‌کننده‌ی خطای مقدماتی نقشْ مهمی ایفا می‌کنند.

تئوری کدنگاری به کشف و تصحیح خطاهای پیام‌های ارسال شده اختصاص یافته است. این کدها در فرستادن تصاویر برگشتی از فضا و توسعه‌ی دیسک‌های فشرده کاربرد پیدا کرده‌اند. انگیزه پیشبرد کدنگاری ناشی از عجز ریچارد وهمینگ[1] در سال ۱۹۴۷ هنگام کار با یک رله کامپیوتر مکانیکی پیش آمد که هرگاه غلطی پیدا می‌شد برنامه‌اش از بین می‌رفت. از آن موقع تابه‌حال کدنگاری یکی از زمینه‌های مهم تحقیق شده است که در آن از نتایجی در هندسه‌ی تصویری، نظریه‌ی گروه‌ها، نظریه‌ی میدان‌های متناهی و برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شود.

عجز نخست همینگ با کامپیوترش که می‌توانست خطایی را کشف کند ولی از تصحیح آن عقیم بود، منجر به توسعه‌ی کدهای تصحیح‌کننده‌ی خطا شد. کدنگاری تصحیح‌کننده‌ی خطا این‌چنین تعریف شده است "هنر جمع زواید به‌طوری مؤثر که اکثر پیغام‌ها را، اگر بد جلوه داده شده‌اند، بتوان به طور صحیح کشف نمود" (پلس ۱۹۸۲ ص ۲).

جدول ۱-۱. جدول وقوع برای صفحه‌ی فانو

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
A	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
B	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
C	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
D	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
E	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰
F	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
G	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

1. *Richard W.Hamming*

یکی از ساده‌ترین کدهای تصحیح‌کننده‌ی خطا یک کد هندسه‌ی تصویری معروف به کد (۴ و ۷) همینگ است. این کد می‌تواند توسط چهار سطر ماتریس G که در زیر خواهد آمد، تولید شود. این ماتریس به ماتریس مولد کد معروف است. در این ماتریس بردار سطر اول کلمه‌ی کد برای ۱۰۰۰ است، نمایش دودویی عدد ده‌دهی ۸، سطر دوم کلمه‌ی کد برای ۰۱۰۰ است، نمایش دودویی عدد ده‌دهی ۴، و غیره.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

کلمه‌های کد دیگر با جمع این سطرها، که جمع معمولاً جمع مؤلفه‌وار برداری به هنگ ۲ است، حاصل می‌شود. توجه کنید هنگامی که همه‌ی جمع‌های ممکن این سطرها را بیابیم (جدول ۲-۱)، در چهار جایگاه اول همه‌ی ۱۶ حالت ممکن از ۰ و ۱ها را به دست می‌آوریم؛ یعنی، همه‌ی نمایش‌های دودویی اعداد ده‌دهی از ۰ تا ۱۵.

جدول ۲-۱ : کلمه‌های کد ممکن

جمع هیچ کلمه.	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
جمع یک کلمه	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
جمع دو کلمه	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱
	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰
	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
جمع سه کلمه	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰
جمع چهار کلمه	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

چهار رقم واقع شده در اول این کلمه‌های کد جایگاه‌های اطلاعات نامیده می‌شوند؛ زیرا آن‌ها اعداد واقعی یا پیغام‌های فرستاده شده را نمایش می‌دهند. سه جایگاه باقیمانده جایگاه‌های اضافی نام دارند. ارقام در این جایگاه‌های آخر امکان تصحیح خطای تکی را می‌دهند؛ یعنی، اگر پیغام ارسالی شامل یک خطای رقمی تکی باشد این رقم‌های اضافی اجازه‌ی یافتن و تصحیح غلط را می‌دهند؛ برای مثال، پیغام $x=$۱۰۱۰۰۱۰ به‌عنوان کلمه‌ی کد ممکن در جدول ۲-۱ نیامده‌است. با پذیرفتن این که یک غلط تکی در مراسله‌ی یک کلمه کد پیش آمده است، می‌توان محل خطا و سپس تصحیح آن را به کمک ماتریس مقایسه‌ی تطبیقی انجام داد. این ماتریس مقایسه تطبیقی شامل هفت بردار ستونی است که نمایش دودویی اعداد ده‌دهی از ۱ تا ۷ می‌باشند.

$$Hx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون نتیجه (۱،۰،۰) است یعنی، نمایش دودویی عدد ده‌دهی ۴، اشتباه در محل چهارم واقع شده است؛ از این‌رو، کلمه‌ی کد اصلی باید ۱۰۱۱۰۱۰ باشد؛ به طریق مشابه می‌توان نشان داد که هریک از 2^7 دودویی ممکن ۷-تایی‌ها با یک کلمه‌ی کد ممکن حداکثر در یک رقم اختلاف دارند و اگر اختلافی وجود داشته باشد محل رقم خطا را می‌توان توسط ماتریس مقایسه‌ی تطبیقی مشخص کرد. ولی هنگامی که یک کلمه‌ی کد واقعی در ماتریس مقایسه‌ی تطبیقی ضرب شود نتیجه (۰،۰،۰) است (تمرین ۶ و ۷).

این ماتریس مقایسه‌ی تطبیقی، H، را می‌توان به عنوان ماتریس معرف برای این کد قلمداد کرد. توجه کنید که ماتریس H به روشنی با رتبه‌ی ۳ است و چون H یک ماتریس ۷×۳ است بیانگر یک تبدیل خطی از فضای برداری ۷ بعدی به یک فضای برداری ۳ بعدی است همان‌طور که از جبر خطی می‌دانیم هسته این تبدیل خطی مجموعه‌ی

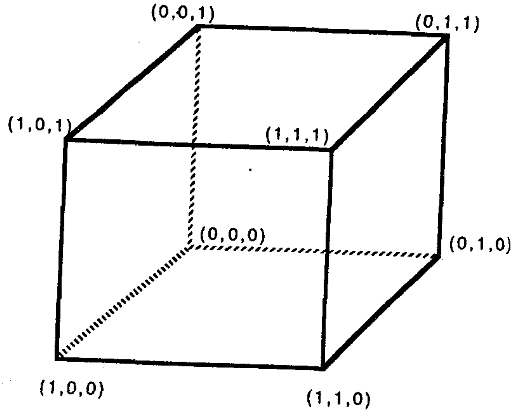
جواب‌های $Hx=0$ است و بعد این هسته ۴=۳−۷ می‌باشد. همان‌طور که در بالا دیدیم $Hx=0$ اگر که x یک کلمه‌ی کد باشد و می‌توان نشان داد که بردارهای سطری ماتریس مولد G بردارهایی پایه برای این هسته هستند. بدین‌ترتیب، کلمه‌های کد از کد (۷,۴) همینگ تشکیل یک زیرفضای یک فضای برداری می‌دهند. هر کد که کلمه‌های آن تشکیل یک زیرفضا دهند را خطی نامند.

کلمه‌های کد، از کد (۷,۴) همینگ را می‌توان به عنوان نقطه‌هایی در یک فضای هفت بعدی درنظر گرفت که تمام فضای متشکل از نقطه‌هایی نظیر 2^7 پیغام ممکن است؛ یعنی، دودویی‌های ممکن ۷−تایی‌ها. فاصله در این فضا برحسب تابعی تعریف می‌شود که به فاصله‌ی همینگ مشهور است.

تعریف: فاصله‌ی همینگ بین دو n−تایی x و y، یعنی $d(x,y)$، با تعداد مؤلفه‌هایی که n−تایی‌ها در آن مختلف هستند، تعریف می‌شود.

بدین ترتیب اگر $x=1001110$ و $y=1011101$ آن‌گاه $d(x,y)=3$. به وضوح ماکزیمم فاصله‌ی بین ۷−تایی‌های دودویی هفت است و همان‌طور که شما می‌توانید به راحتی بررسی کنید، می‌نیمم فاصله‌ی بین هر زوج کلمه‌ی کد غیرصفر در کد (۷,۴) همینگ ۳ است. چون می‌نیمم این فاصله ۳ است. این کد به کد (۷,۴,۳) همینگ نیز معروف است. همچنین، توجه کنید که فاصله‌ی بین 0000000 و هر ۷−تایی دودویی دیگر x درست برابر تعداد یک‌ها در x است؛ یعنی، برابر وزن x بدین سبب می‌گویند می‌نیمم **وزن** این کد ۳ است.

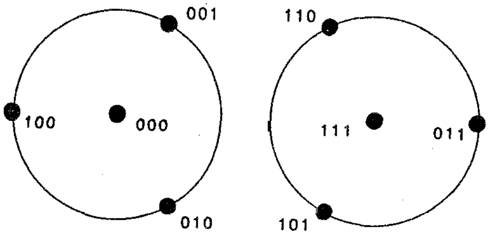
برای کار کردن با این فاصله می‌توانیم کلمه‌های کد را به عنوان رؤوس یک مکعب هفت‌بعدی انتخاب کنیم که یال‌ها دورأسی را که دقیقاً در یک مؤلفه مختلف هستند به هم وصل می‌کند؛ یعنی، زوج‌هایی از رؤوس که فاصله‌ی همینگ آن‌ها ۱ است. نمودار یک مکعب ۳ بعدی در شکل ۶−۱ آمده است. همان‌طور که از شکل معلوم است، فاصله‌ی همینگ بین دو رأس در مکعب سه‌بعدی تعداد یال‌هایی از مکعب‌اند که باید برای رفتن از یک رأس به رأس دوم حداقل از آن‌ها گذشت.



شکل ۶-۱

برای تشریح نقش فاصله‌ی همینگ در کد (۷,۴,۳) همینگ، ابتدا کد مقدماتی‌ای را شامل کلمه‌های کد ۰۰۰ و ۱۱۱ درنظر می‌گیریم. به عنوان الگویی برای این‌ها می‌توان مکعب سه‌بعدی را درنظر داشت. واضح است که فاصله‌ی همینگ بین این دو کلمه‌ی کد ۳ است. علاوه بر این، اگر دقیقاً یک خطا در ارسال کد به وجود آید پیغام‌هایی که از ارسال کلمه‌ی کد ۰۰۰ می‌توانند پیش آیند ۰۰۱، ۰۱۰ و ۱۰۰ هستند. این‌ها توسط رؤوسی با فاصله‌ی همینگ دو از رأس نمایشگر کلمهٔ کد ممکن ۱۱۱ نمایش داده می‌شوند. مجموعه‌ی کلمات کد {۱۰۰ و ۰۱۰ و ۰۰۱} را می‌توان به عنوان مجموعه‌ی نقاطی با فاصله‌ی ۱ از نقطه‌ی ۰۰۰ درنظر گرفت. بدین‌صورت گویند این مجموعه تشکیل یک ۱-کره به مرکز کلمه‌ی کد ۰۰۰ می‌دهد. به طور مشابه، باقی، سه پیغام خطای ممکن برای کلمه‌ی کد ۱۱۱ تشکیل ۱-کره‌ای به مرکز کلمه کد ۱۱۱ را می‌دهند (شکل ۷-۱). این دو کره مجموعه‌ی ۳-تایی‌های دودویی را طوری افراز می‌کنند که هر ۳-تایی دودویی ممکن دقیقاً در یک ۱-کره است. بدین ترتیب اگر بپذیریم یک پیغام شامل حداکثر یک خطا است، می‌توان آن را با تعیین نزدیک‌ترین کلمه‌ی کد ممکن به طور یکتا کشف نمود.

به طور مشابه در کد (۷,۴,۳) همینگ، می‌نیمم فاصله‌ی بین دو کلمه‌ی کد نیز ۳



شکل ۷-۱ :کره‌های ۳-تایی‌های دودویی

است و همه‌ی ۷-تایی‌ها دودویی ممکن در یک مجموعه از ۱-کره‌های نامتقاطع واقعند که افرازی از یک مکعب ۷-بعدی‌اند (تمرین۶). با استفاده از تعیین نزدیک‌ترین کلمه‌ی کد ممکن، فرایند کشف کد انجام می‌پذیرد. کدهایی با این خاصیت را که همه‌ی پیغام‌های ممکن درون یا روی کره‌هایی نامتقاطع به شعاع t قرار داشته باشند کدهای t-**تصحیح‌کننده‌ی خطای تام** نامند.

نتیجه‌ای از تئوری کدنگاری (بِلک، ۱۹۷۵ ص ۱۸۵) نشان می‌دهد که یک کد خطی تام توسط بردارهای با وزن می‌نیممش تولید می‌شود. پس بردارهای با وزن ۳، کد (۷,۴,۳) همینگ را تولید می‌کنند. همچنین می‌توان به راحتی بررسی کرد که این‌ها بردارهای سطری جدول وقوع برای صفحه‌ی فانو هستند. علاوه بر این، سطرهای ماتریس مولد، تشکیل یک پایه برای این مجموعه می‌دهد.

تمرین:

۱- نشان دهید نقاط و خطوط جدول وقوع (جدول ۱-۱) در بنداشت‌های یک صفحه‌ی تصویری صدق می‌کند.

۲- با دلیل نشان دهید صفحه‌ی فانو که با جدول وقوع (جدول ۱-۱) داده شده، با

مدل ۱ بخش ۳-۱ یکریخت است.

۳- بررسی کنید که هر زوج از بردارهای مختصاتی جدول وقوع (جدول ۱-۱) در دقیقاً چهار مؤلفه با هم فرق می‌کنند؛ یعنی، فاصله‌ی همینگ آن‌ها ۴ است.

۴- نمایش دودویی اعداد ده‌دهی ۱ تا ۱۵ را به تفصیل بنویسید.

۵- بررسی کنید که دقیقاً ۱۶$-$$۲^{۷}$ ، ۷ـ تایی دودویی وجود دارد که در کد (۷,۴,۳) همینگ کلمه‌های کد نیستند.

۶- (آ) نشان دهید دقیقاً هفت ۷ـ تایی دودویی وجود دارد که با کلمه‌ی کد ۱۰۰۰۰۱۱ دقیقاً در یک رقم تفاوت دارند. (ب) ماتریس مقایسه‌ی تطبیقی H را روی یکی از این هفت ۷ـ تایی اعمال کرده، تحقیق کنید که محل رقم متفاوت را تعیین می‌کند.

۷- نشان دهید که برای هر بردار سطری در ماتریس مولد G داریم: $Hx=۰$

۸- همه‌ی کلمات کد ممکن در کد دودویی (۵,۳) خطی با ماتریس مولد G' را به دست آورید.

$$G' = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۹- نشان دهید که فاصله‌ی همینگ یک متریک‌است؛ یعنی، در شرایط زیر صدق می‌کند:

آ) $d(x,y)=۰$ اگر و فقط اگر $x=y$

ب) $d(x,y)=d(y,x)$

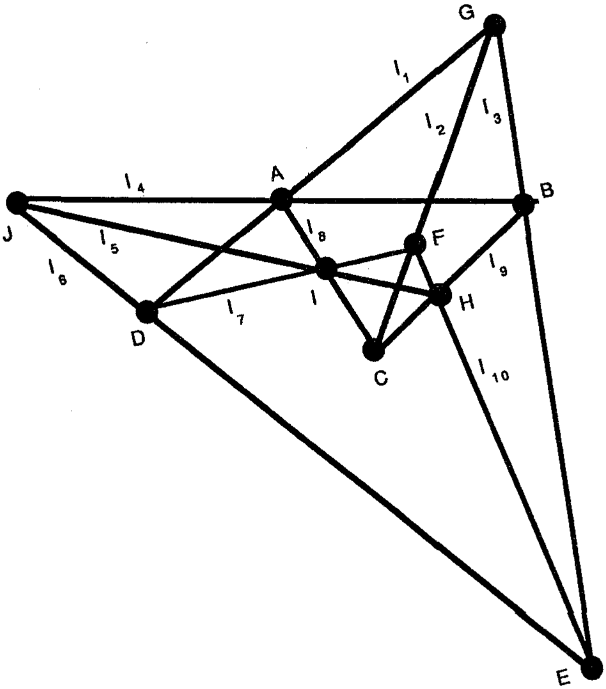
پ) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

۱۰- بررسی کنید که می‌نیمم فاصله‌ی بین هر زوج از کلمات کد در کد (۷,۴,۳) همینگ ۳ است.

۱۱- نشان دهید که مجموعه‌ی کلمه‌های کد در کد (۷,۴,۳) همینگ را همچنین می‌توان با جمع دو ۷-تایی ۰۰۰۰۰۰۰ و ۱۱۱۱۱۱۱ با چهارده ۷-تایی که یا در سطرهای جدول ۱-۱ آمده‌اند و یا در سطرهای جدول وقوعی که با تعویض صفرها و یک‌های جدول ۱-۱ به دست می‌آید، به‌دست آورد.

۱-۵. تشکّل‌های دزارگ

در این بخش، دستگاهی بنداشتی را برای یک ساختار متناهی دیگر درنظر می‌گیریم. خواهیم دید که این ساختار نه تنها در اصل دوگانی صدق می‌کند، بلکه رابطه‌ای جالب شبیه رابطه‌ی قطبیت در هندسه‌ی تصویری بین نقاط و خطوط آن برقرار است. این رابطه شامل نقاطی است که روی یک خط قرار ندارند. چون اصطلاح "هندسه" معمولاً مختص ساختارهایی است که هر زوج نقطه خطی یکتا را مشخص می‌کند، به ساختارهایی که در بنداشت‌های ما صدق کنند به عنوان تشکل‌های دزارگ اشاره می‌کنیم. بدین دلیل واژه‌ی تشکل‌های دزارگ را انتخاب کرده‌ایم که آن‌ها قضیه‌ای از هندسه‌ی تصویری حقیقی معروف به قضیه‌ی دزارگ را تشریح می‌کنند. این قضیه بیانگر خاصیتی مشخص است از دو مثلث؛ یعنی، مجموعه‌ی سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط. اگر دو مثلث ABC و DEF این خاصیت را داشته باشند که خطوط واصل بین رؤوس نظیر آن‌ها (یعنی AD ، BE ، CE) هم‌رس باشند، مثلث‌ها را **پرسپکتیو از یک نقطه** گویند. به طریق مشابه اگر مثلث‌ها این خاصیت دوگانی را داشته باشند که محل تلاقی اضلاع نظیر آن‌ها هم‌خط باشند، آن‌ها را **پرسپکتیو از یک خط** گوییم. با این تعاریف، قضیه دزارگ را می‌توان به طور مختصر به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۸-۱ : یک تشکل دزارگ

قضیه‌ی دزارگ. اگر دو مثلث پرسپکتیو از یک نقطه باشند، آن‌گاه پرسپکتیو از یک خطند.

مثالی از تشکل دزارگ و جدول وقوع نظیر آن، در شکل ۸-۱ و جدول ۳-۱ نشان داده شده‌است (به مانند بخش ۴-۱، درایه‌های ۰ و ۱ به ترتیب نماینده‌ی ناواقع بودن و واقع بودن هستند). همان‌طور که شما از جدول یا از تشکل می‌توانید ببینید، ABC و DEF مثلث‌هایی هستند که از نقطهٔ G و از خط l_5 پرسپکتیو هستند.

با توجه‌ای دقیق به ساختار نشان داده شده در شکل ۸-۱ یا جدول وقوع نظیرش (جدول ۳-۱) خواهیم دید که برای هر نقطه‌ی M در ساختار خط m وجود دارد که هیچ خطی M را به نقطه‌ای روی m وصل نمی‌کند. به نقطه‌ی M و خط m به ترتیب

جدول ۳-۱ : جدول وقوع برای یک تشکل دزارگ

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}
A	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
B	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰
C	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
D	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰
E	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱
F	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱
G	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
H	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
I	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰
J	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

به‌عنوان قطب و قطبی اشاره خواهد شد. رابطه‌ی **قطب و قطبی** در تعاریف و بنداشت‌های زیر به طور مفصل توصیف شده است.

بنداشت‌هایی برای تشکّل‌های دزارگ

اصطلاحات تعریف نشده. نقطه، خط، روی

اصطلاحات تعریف شده. اگر هیچ خطی نباشد که نقطه‌ی M را به نقاط روی خط m وصل کند (M روی m نیست)، m را **قطبی** M و M را **قطب** m می‌نامند.

بنداشت د-۱. حداقل یک نقطه وجود دارد.

بنداشت د-۲. هر نقطه حداقل یک قطبی دارد.

بنداشت د-۳. هر خط حداکثر یک قطب دارد.

بنداشت د-۴. دو نقطه متمایز روی حداکثر یک خط واقع‌اند.

بنداشت د-۵. روی هر خط دقیقاً سه نقطه متمایز وجود دارد.

بنداشت د-۶. اگر خط m شامل نقطه‌ی P نباشد، نقطه‌ای روی m و هر قطبی P وجود دارد.

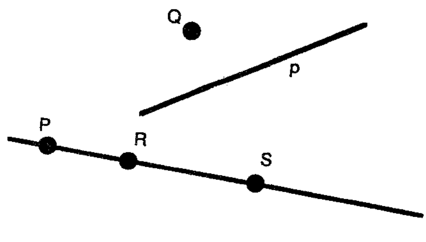
دور از انتظار نیست که تشکل دزارگ نشان داده شده در شکل ۸-۱ مدلی برای این دستگاه بنداشتی باشد. علاوه بر این، شما به‌راحتی می‌توانید بررسی کنید که این دستگاه بنداشتی در اصل دوگانی صدق می‌کند (تمرین ۳).

خواص دیگری از تشکل‌های دزارگ در قضایای زیر آمده‌اند. اولین قضیه، توصیف خاصیت مهمی از قطب‌ها و قطبی‌ها را بیان می‌کند. در فصل ۴ هنگام مطالعه‌ی رابطه‌ی قطبیت در هندسه‌ی تصویری باز هم با این خاصیت روبه‌رو خواهیم شد.

قضیه د-۱. اگر P روی یک قطبی از Q باشد، آن‌گاه Q روی هر قطبی P است.

اثبات. گیریم P روی q، که q یک قطبی Q است، واقع باشد (شکل ۹-۱). بدین ترتیب چون Q روی q نیست (چرا؟)، q باید شامل دو نقطه‌ی دیگر R و S باشد که متمایز از P و Q هستند (بنداشت د-۵). گیریم P یک قطبی از P باشد و فرض کنیم که Q روی P نباشد، بنابر بنداشت د-۶، p و q باید در یک نقطه متقاطع باشند مثل P، R یا S؛ اما بنابر تعریف P روی P نیست و اگر R یا S روی p باشند، آن‌گاه q خط واصل P به یک نقطه روی قطبی آن است که با تعریف تناقض دارد؛ بدین ترتیب Q روی p است. □

در اثبات دو قضیه‌ی زیر، که ثابت می‌شود تناظر بین قطب و قطبی یک به یک است، مفید بودن خاصیتی که در قضیه د-۱ بیان شد را شرح داده‌ایم.



شکل ۹-۱

قضیه د-۲. هر نقطه دقیقاً یک قطبی دارد.

اثبات. گیریم P نقطه‌ای دل‌خواه باشد. بنابر بنداشت د-۲ ، P حداقل یک قطبی p دارد. فرض کنید P قطبی دیگری مانند p' داشته باشد. بنابر بنداشت‌های د-۴ و د-۵، نقطه‌ی T روی p' موجود است که روی p نیست. گیریم t قطبی T باشد. آن‌گاه بنابر بنداشت د-۶ ، p و t متقاطعند؛ اما چون T روی p' است، بنابر قضیه‌ی قبل P روی t است و نتیجه t، P را به یک نقطه روی p وصل می‌کند و این با تعریف قطبی متناقض است. بدین ترتیب P دقیقاً یک قطبی دارد. □

قضیه د-۳. هر خط دقیقاً یک قطب دارد.

اثبات. بنابر بنداشت د-۳ هرخط حداکثر یک قطب دارد. از این‌رو، کافی است نشان دهیم که خط دل‌خواه p حداقل یک قطب دارد. گیریم R، S و T سه نقطه روی p باشند و گیریم r و s قطبی‌های منحصر به فرد R و S باشند (قضیه د-۲). به وضوح S روی r نیست (چرا؟). پس بنابر بنداشت د-۶ ، یک نقطه‌ی P روی r و s موجود است، اما P روی قطبی‌های R و S است، از این‌رو، بنابر قضیه‌ی د-۱ ، R و S روی قطبی منحصر به فرد p هستند. بنابراین p قطبی P است یا P قطب p است. □

این قضایا و تمرین‌های زیر نشان می‌دهند که اگرچه در یک ساختار متناهی تعداد خطوط و نقاط محدود است؛ ولی ممکن است خواص عجیبی همچون دوگانی و قطبیت در آن معتبر باشند که این خواص در هندسه‌ی اقلیدسی اعتبار ندارند. خاصیت غیرمنتظره‌ی دیگر که در تمرین‌ها آورده شده این است که در تشکّل‌های دزارگ یک خط دقیقاً سه خط موازی با خود دارد که از قطبین می‌گذرند؛ یعنی، نقاطی هستند که از آن‌ها می‌توان سه خط موازی با یک خط مفروض رسم کرد (تمرین ۶). با این خاصیت اخیر، تشکّل‌های دزارگ را می‌توان در زمره‌ی هندسه‌های نااقلیدسی طبقه‌بندی کرد.

تمرین:

۱- در تشکّل دزارگ نشان داده شده در شکل ۸-۱ قطب خط AB و قطبی نقطه C را بیابید.

۲- (آ) در تشکل دزارگ نشان داده شده در شکل ۸-۱ دو مثلث بیابید که پرسپکتیو از نقطه‌ی C باشند. این دو مثلث از کدام خط پرسپکتیو هستند؟ (ب) در تشکل دزارگ شکل ۸-۱ دو مثلث بیابید که پرسپکتیو از خط AB باشند. این دو مثلث از کدام نقطه پرسپکتیو هستند؟

در تمرین‌های زیر بررسی قضایایی در دستگاه بنداشتی تشکّل‌های دزارگ خواسته شده است. بدین معنی که اثبات‌های شما باید بر پایه‌ی بنداشت‌ها استوار شود. شما نمی‌توانید استدلالتان را بر پایه‌ی مدل یا جدول وقوعی که در این بخش آمده است بنا کنید.

۳- دوگان بنداشت‌های د-۱ تا د-۶ را تحقیق کنید.

۴- ثابت کنید: خطی گذرنده از دو نقطه‌ی متمایز موجود است اگر و فقط اگر قطبی‌های آن‌ها متقاطع باشند.

۵- ثابت کنید: اگر p و q دو خط موازی با m باشند (یعنی p و m همچنین q و m نقطه‌ی مشترکی ندارند) آن‌گاه p و q در قطب m همدیگر را قطع می‌کنند.

۶- ثابت کنید: بر نقطه‌ی P سه خط می‌گذرند که با خط p، قطبی P، موازی‌اند (یعنی، سه خط نقطه‌ی مشترکی با p ندارند).

۷- ثابت کنید: دقیقاً ۱۰ نقطه و ۱۰ خط در تشکل دزارگ وجود دارند.

۸- قضیه دزارگ را ثابت کنید؛ یعنی، نشان دهید که اگر ABC و $A'B'C'$ دو مثلث پرسپکتیو از نقطه‌ی P باشند، آن‌گاه پرسپکتیو از یک خط هستند (فرض کنید که نقاط A، B، C، A'، B'، C' و P همگی متمایزند و هیچ سه نقطه‌ای از نقاط A، B، C، A'، B'، C' هم‌خط نیستند).

در تمرین‌های زیر کار بر یک دستگاه بنداشتی برای ساختارهای متناهی معروف به تشکل‌های پاپوس خواسته شده‌است. این بنداشت‌ها به صورت زیر هستند:

بنداشت‌هایی برای تشکّل‌های پاپوس

اصطلاحات تعریف نشده. نقطه، خط، روی

اصطلاحات تعریف شده. دو خط بدون نقطه‌ی مشترک را **موازی** گوییم، دو نقطه بدون خطی مارّبر هردو را **موازی** گوییم.

بنداشت پ-۱. حداقل یک خط وجود دارد.

بنداشت پ-۲. دقیقاً سه نقطه‌ی متمایز روی هر خط وجود دارد.

بنداشت پ-۳. همه‌ی نقاط روی یک خط نیستند.

بنداشت پ-۴. حداکثر یک خط روی هردو نقطه‌ی متمایز وجود دارد

بنداشت پ-۵. اگر P نقطه‌ای باشد که روی خط m نیست، دقیقاً یک خط روی P و موازی با m وجود دارد.

بنداشت پ-۶. اگر m خطی باشد که بر روی نقطه‌ی P نیست دقیقاً یک نقطه روی m موازی با P وجود دارد.

۹- (آ) مدلی برای تشکل پاپوس بسازید. (ب) برای این مدل یک جدول وقوع بسازید.

۱۰- بررسی کنید که این دستگاه بنداشتی در اصل دوگانی صادق است.

۱۱- ثابت کنید: اگر m یک خط باشد، **دقیقاً** دو خط موازی با m وجود دارد.

۱۲- ثابت کنید: دقیقاً نه نقطه و نه خط در تشکل پاپوس وجود دارند.

۱۳- ثابت کنید: اگر m و n دو خط موازی با نقاط A، B، C روی m و A'، B'، C' روی n باشند، آنگاه سه نقطه‌ی تقاطع، AC' و CA'، AB' و BA'، BC' و CB' هم‌خطند (این نتیجه که در بعضی صفحه‌های تصویری معتبر است به قضیه‌ی پاپوس معروف است).

۶-۱. پیشنهاد برای مطالعه‌ی بیش‌تر

Albert, A.A., and Sandler, R. (1968). *An Introduction to Finite Projective Planes.* New York: Holt, Richart and Winston. (Contains a thorough group theoretic treatment of finite progective Planes.)

Anderson, I. (1974). *A First Course in Combinatorial Mathematics.* Oxford. England: Clarendon Press. (Chapter 6 discusses block designs and error-correcting codes.)

Beck, A., Bleicher, M.N., and Crowe, D.W. (1972). *Excursions into Mathematics.* New York: Worth. (Sections 4.9-4.15 give a very readable discussion of finite planes, including the development of analytic models.)

Benedicty, M., and Sledge, F.R. (1987). *Discrete Mathematical Structures.* Orlando, FL: Harcourt Brace Jovanovich. (Chapter 13 gives an elementary presentation of coding theory.)

Gensler, H.J. (1984). *Godel's Theorem Simplified.* Lanham, MD: University Press of America.

Hofstadter, D.R. (1984). Analogies and metaphors to explain Godel's Theorem. In: D.M. Campbell and J.C. Higgins (Eds.), *Mathematics: People, Problems, Results,* Vol. 2, pp. 262-275. Belmont, CA: Wadsworth.

Kolata, G. (1982). Does Godel's Theorem matter to mathematics? *Science 218: 779-780.*

Lockwood, J.R., and Runion, G.E. (1978). *Deductive Systems: Finite and non-Euclidean Geometries.* Reston, VA: N.C.T.M. (Chapter 1 contains and elementary discussion of axiomatic systems.)

Naqel, E., and Newman, J.R. (1956). Godel's proof. In: J.R. Newman (Ed.). *The World of Mathematics,* Vol. 3, pp. 1668-1695. New York:

Simon and Schuster.

Pless,V. (1982). *Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes.* New York: Wiley. (A well-written explanation of this new discipline and the mathematics involved.)

Smsrt, J.R. (1978). *Modern Geometries,* 2nd ed. Blemont. CA: Wadsworth (Chapter 1 contains an easily readable discussion of axiomatic systems and several finite geometries.)

Thompson, T.M. (1983). *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packings to Simple Groups.* The Carus Mathematical Monographs, No. 21. Ithaca, NY: M.A.A. (Incorporates numerous historical antecdotes while tracing 20th century mathematical developments involved in these tonics.)

منابعی برای مطالعه بر مربع‌های لاتین

Beck, A., Bleicher, M.N., and Crowe, D.W. (1972). *Excursions into Mathematics,* pp. 262-279. New York: Worth.

Crowe, D.W., and Thompson, T.M. (1987). Some modern uses of geometry, In: M.M. Lindquist and A.P. Schulte (Eds). *Learning and Teaching Geometry, K.* 12, 1987 *Yearbook,* pp. 101-112. Reston, VA: N.C.T.M.

Gardner, M. (1959). Euler's spoilers: The discovery of an order-10 Graeco-Latin square. *Scientific American* 201: 181-188.

Sawyer, W.W. (1971). Finite arithmetics and geometric. In: *Prelude to Mathematics,* Chap. 13. New York: Penguin Books.

فصل دوم

هندسه‌ی نااقلیدسی

۱-۲. چشم‌انداز

ریاضیات را معمولاً به عنوان منبع عجایب نمی‌نگرند؛ اما هندسه‌های نااقلیدسی شامل تعدادی از قضایای سهل‌الحصول است که برای هر فردی با زمینه‌ی هندسه اقلیدسی «بدعت‌آمیز» به نظر می‌آید. برخوردهای سطحی اولیه با این هندسه‌های عجیب، اغلب موجب سردرگمی می‌شود. ولی سرانجام این مواجهه نه‌تنها موجب درک عمیق‌تر هندسه‌ی اقلیدسی می‌شود، بلکه پشتوانه‌ی قوّی‌ای در جهت ارائه استدلال دقیق برای مطالبی که بدیهی به نظر رسیده‌اند، فراهم خواهد آورد. این تجربیات فردی مشکلات ریاضی‌دانانی را که در تاریخچه گسترش هندسه‌ی نااقلیدسی سهمی داشته‌اند، به طور مستقیم نشان می‌دهد. آشنایی با این تاریخ و شناخت اهمیت عقلانی و ریاضی هندسه‌ی اقلیدسی به منظور درکی مناسب از این پیشرفت تفکر فلسفی و ریاضی لازم است. بدین ترتیب مطالعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی و نااقلیدسی به عنوان دستگاه‌های ریاضی می‌تواند با مطالعات پاپاپای در تاریخ هندسه خیلی مؤثرتر واقع شود. چون ریاضیات یونانیان باستان هندسه‌ی مقدماتی بود، این درس‌ها معمولاً در مقدمه‌ای بر تاریخ ریاضیات گردآوری می‌شود.

منابع پیشنهادی آخر فصل برای فراهم آوردن بینشی در موضوعات زیر معرفی شده‌اند:

۱- طبیعت و استفاده‌ی هندسه در تمدن‌های باستان مانند بابل، چین و مصر.
۲- روش‌های مرموزی که توسط گروه‌هایی همچون فیثاغورسیان به روابط ریاضی و هندسی وابسته شده بود.
۳- اهمیت ساختن با ستاره و پرگار فروریختنی و بحرانی که بر سر سه مسأله‌ی ساختنی خاص پدید آمده بود.
۴- پیدایش استدلال قیاسی و درک ماهیت بنداشت در یونان باستان.
۵- اهمیت هندسه‌ی اقلیدس در فلسفه‌های افلاطون و کانت.
۶- دلایلی برای کوشش‌های مکرر اثبات اصل پنجم اقلیدس.
۷- شروع‌های غلط فراوان و دلایل به تأخیر افتادن بسط هندسه‌های نااقلیدسی.
۸- تأثیر بسط هندسه‌ی نااقلیدسی بر تفکر فلسفی و ریاضی.

۲-۲. هندسه‌ی اقلیدسی

برای درک مفهوم هندسه‌ی نااقلیدسی آشنایی با هندسه‌ای که توسط یونانیان قدیم شرح و بسط داده شده، ضروری است. این هندسه با ظهور کتاب اصول اقلیدس در ۳۰۰ سال قبل از میلاد به اوج خود می‌رسد. در این رساله‌ی ۱۳گانه، اقلیدس ۴۶۵ گزاره تدوین کرد که نتایج باب آن دوران را نه‌تنها در هندسه بلکه در نظریه‌ی اعداد و جبر (هندسه) مقدماتی خلاصه می‌کرد.

اصول اقلیدس، به جهت غنای مفاهیم ریاضی حائز اهمیت است و به سبب قدیمی‌ترین نمونه‌ی گسترده در استفاده از روش بنداشتی، این روش، نمونه بارزی در تاریخ ریاضی شده است. اقلیدس پی برده بود که همه‌ی گزاره‌های ریاضی را نمی‌توان ثابت کرد و به طور قطع باید عباراتی به عنوان مفروضات پایه پذیرفته شوند. اقلیدس از این مفروضات به اصول متعارف و مفاهیم متعارف یاد کرده است؛ ولی اکنون آن‌ها را بنداشت می‌نامیم.

کار اقلیدس بی‌درنگ به عنوان شاهکاری با کمال احترام طوری به رسمیت شناخته شد که کارهای قبلی در هندسه تقریباً به طور کامل فراموش شد و اکنون به جز اطلاعات ناچیزی از آن دوره چیزی در دست نیست. از اهمیت این کار، همین بس که **اصول** قرن‌ها به عنوان درس هندسی استاندارد و به نظر تغییرناپذیر استفاده می‌شد. (هندسه‌ای که در **اصول** آمده به هندسه‌ی اقلیدسی معروف شده است.)

تعاریف، اصول متعارف، مفاهیم متعارف و ۳۰ گزاره‌ی اول اقلیدس به صورتی که توسط سرتوماس هیث ترجمه شده، در پیوست (آ) آمده است ملاحظه‌ی دقیق بر آن‌ها مشاهدات زیر را به دنبال خواهد داشت.

۱- اگرچه اقلیدس ضرورت وجود بنداشت را باور داشت ظاهراً لزوم وجود اصطلاحات تعریف نشده را باور نداشته است با وجود این، با توجه‌ی دقیق به هفت تعریف اول پیشنهادی او پی خواهیم برد که آن‌ها لزوماً تعریف نشده هستند.

۲- اقلیدس در فهرست بنداشت‌هایش، اختلافی بین اصول متعارف و مفاهیم متعارف قائل است؛ بدین صورت که فرض می‌کردند اولی ذاتاً هندسی است؛ در صورتی که دومی بین همه‌ی ریاضیات مشترک است.

۳-گزاره‌ی اصل متعارف پنجم اقلیدس بسیار پیچیده‌تر از چهار گزاره‌ی دیگر است.

مشاهده‌ی سوم، این سوءظن را در هندسه‌دانان برانگیخت که اصل متعارف پنجم از چهار اصل متعارف اول مستقل نبوده و امکان اثبات آن توسط مفاهیم مشترک و چهار اصل متعارف اول می‌باشد و این که اقلیدس ۲۸ گزاره‌ی (قضیه) اول خود را بدون کمک از این اصل متعارف اثبات کرده است، به این طرز تفکر کمک می‌کرد. کوشش برای اثبات اصل متعارف به‌زودی بعد از نشر **اصول** شروع شد. در این کوشش‌ها هندسه‌دانان اغلب از فرضی استفاده می‌کردند که این فرض، اصل متعارف پنجم را اثبات می‌کرد؛ ولی سرانجام ثابت می‌شد که این فرضیات هم‌ارز اصل متعارف پنجمند (و در حضور بنداشت‌های دیگر انتخاب اصل اقلیدس شایسته‌تر می‌نمود). این صورت‌های هم‌ارز بعضاً جالب و عبرت‌انگیز است. یکی از این عبارات، شامل اصطلاح خطوط هم‌فاصله است. برای یادآوری متذکر می‌شویم که **فاصله‌ی نقطه‌ی P تا خط m** عبارت است از

درازای پاره‌خط عمود از P به m اگر فاصله‌ی هر نقطه روی خط l تا خط m یکی باشد گوییم l از m هم‌فاصله است.

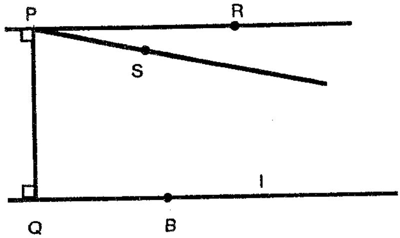
عبارات هم‌ارز اصل متعارف پنجم اقلیدس

۱- **بنداشت پلی‌فایر.** از یک نقطه‌ی داده شده، ناواقع بر خطی مفروض دقیقاً یک خط به موازات آن قابل رسم است.
۲- مجموع زوایای هر مثلث مساوی دو زاویه‌ی قائمه است.
۳- یک جفت مثلث متشابه وجود دارد.
۴- یک جفت خط موجودند؛ به طوری که همه جا از یکدیگر هم‌فاصله‌اند.
۵- بر هر سه نقطه ناواقع بر یک خط یک دایره می‌گذرد.
۶- اگر سه زاویه از یک چهارضلعی قائمه باشند، آن‌گاه زاویه‌ی چهارم نیز قائمه است.

اثبات هم‌ارزی اصل متعارف پنجم و بنداشت پلی‌فایر در بند بعد آمده است. برای اثبات این هم‌ارزی دو گام لازم است: (۱) باید اثباتی برای بنداشت پلی‌فایر با کمک پنج اصل اقلیدس و (۲) باید اثباتی از اصل متعارف پنجم اقلیدس با استفاده از چهار اصل متعارفِ اول اقلیدس و بنداشت پلی‌فایر ساخت. توجه کنید که چه در (۱) و چه در (۲) از گزاره‌های ۱ تا ۲۸ اقلیدس می‌توان کمک گرفت. اثبات هم‌ارزی اصل متعارف پنجم و عبارات ۲ تا ۶ در "**مقدمه‌ای بر هندسه‌ی نااقلیدسی**" اثر هارولد.ای.ولف (۱۹۴۵) آمده است.

اثبات هم‌ارزی بنداشت پلی‌فایر و اصل متعارف پنجم اقلیدس

اثبات بنداشت پلی‌فایر با استفاده از اصول متعارف اقلیدس. نقطه‌ی P و خط l مفروض

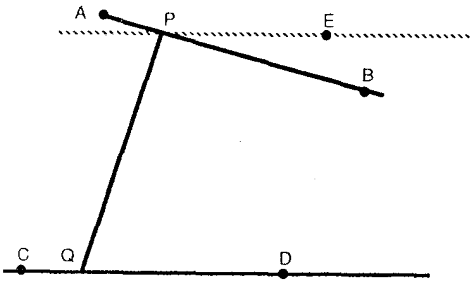


شکل ۱-۲

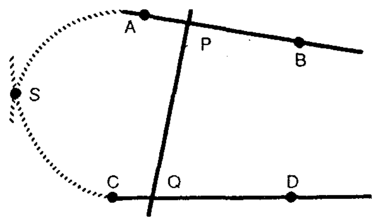
است (شکل ۱-۲). خطی مار بر P و عمود بر l در Q را می‌سازیم (گزاره ۱۲). سپس خط PR مار بر P و عمود بر PQ را بنا می‌کنیم (۱۱). خطوط PR و l موازیند (۲۷). حال فرض می‌کنیم PS خط دیگری مار بر P چنان که در شکل آمده، باشد. آن‌گاه $\angle QPS$ کوچک‌تر از $\angle QPR$ است (م‌م۵). از این رو $\angle BQP$ و $\angle QPS$ (همان‌طور که در شکل نشان داده شده B نقطه‌ای روی l است) با هم از $\angle BQP$ و $\angle QPR$ کوچک‌ترند (م‌م۱) اما $\angle BQP$ و $\angle QPR$ زوایای قائمه هستند و بنا بر اصل متعارف پنجم PS و l موازی نیستند.

اثبات اصل متعارف پنجم با استفاده از اصل متعارف ۱ تا ۴ و اصل موضوع پلی‌فایر. گیریم AB و CD خطوطی باشند که توسط PQ طوری قطع شده‌اند که $\angle DQP$ و $\angle QPB$ با هم از دو زاویه‌ی قائمه کوچک‌ترند. در P خط PE را طوری می‌سازیم که $\angle DQP$ و $\angle QPE$ با هم دو قائمه شوند (گزاره ۲۳). پس PE موازی QD است (۲۸). بنابر اصل موضوع پلی‌فایر AB موازی با CD نیست و بدین ترتیب AB و CD همدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۲-۲). حال فرض کنید AB و CD همدیگر را در نقطه‌ی S در طرف دیگر PQ قطع کنند (شکل ۳-۲). آن‌گاه $\angle SPQ$ و $\angle SQP$ با هم از دو قائمه بزرگ‌ترند. و این با گزاره ۱۷ تناقض دارد. بنابراین AB و CD در همان طرف همدیگر را قطع می‌کنند. □

باز توجه خود را به کار اقلیدس متمرکز می‌کنیم؛ بدین منظور بررسی بعضی اثبات‌های کتاب‌های ۱۳گانه‌ی اصول اقلیدس ترجمه‌ی هیث مفید است. خصوصاً اثبات گزاره‌های ۱، ۱۶، ۲۱ و ۲۷ را که با اجازه‌ی انتشارات دانشگاه کمبریج آورده شده است، درنظر می‌گیریم. این اثبات‌ها بعضی خواص هندسی را نشان می‌دهد که اقلیدس



شکل ۲-۲



شکل ۳-۲

پذیرفته است. یعنی خواصی که او مفروض می‌گرفت، بدون این که آن‌ها را صریحاً به عنوان اصول متعارف یا مفهوم متعارف آورده باشد. نقش این خواص در هندسه‌ی اقلیدسی با توسعهٔ هندسه‌های نااقلیدسی هویدا گشت.

گزاره ۱ اقلیدس

روی یک خط مستقیم متناهی یک مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید.

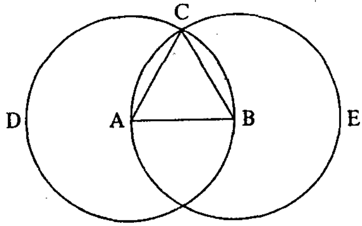
گیریم AB خط مستقیم متناهی مفروض باشد.

بدین ترتیب باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع روی خط مستقیم AB بسازیم.

دایره‌ی BCD را به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم؛ [اصل متعارف ۳]

همچنین، دایره‌ی ACE را به‌مرکز B و شعاع BA رسم می‌کنیم؛ [اصل متعارف ۳]

و از نقطه‌ی C محل تلاقی دو دایره خطوط مستقیم CA و CB را رسم می‌کنیم؛ [اصل متعارف ۱]



حال چون نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی CDB است؛

(AC با AB مساوی است [تعریف ۱۵])

باز چون نقطه‌ی B مرکز دایره‌ی CAF است؛

(BC با BA مساوی است [تعریف ۱۵])

اما ثابت شده بود CA با AB مساوی است؛ بنابراین، خطوط مستقیم CA و CB با AB مساویند

و چیزهایی که با یک چیز مساویند با یکدیگر نیز مساویند. [م‌م ۱]

(بنابراین CA نیز معادل CB است.)

بدین ترتیب سه خط مستقیم CA، AB و BC مساوی یکدیگرند.

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و روی پاره‌خط متناهی مفروض AB ساخته شده است.

(و این همان است که لازم بود انجام شود)

در اثبات گزاره ۱، اقلیدس پذیرفته بود که دایره ها در نقطه‌ی C متقاطعند؛ یعنی پیوستگی دایره‌ها را دانسته فرض کرده بود؛ بدون این‌که قبلاً آن را به عنوان یک گزاره ثابت کرده یا آن را در لیست اصول متعارف قرار دهد. دستگاه‌های بنداشتی که بعداً برای هندسه‌ی اقلیدسی وضع شد بنداشت‌هایی مشخص برای پیوستگی مثل بنداشت پیوستگی ددکیند را دربر گرفتند (پیوست «ب» را ببینید). توجه کنید که بنداشت ددکیند نیاز به مفهوم بینیت دارد که باز اقلیدس آن را دانسته فرض کرده بود.

گزاره ۱۶ اقلیدس

در هر مثلث اگر یکی از اضلاع امتداد داده باشد، زاویه‌ی خارجی پدیده آمده از هریک از زوایای داخلی غیرمجاور بزرگتر است.

گیریم ABC مثلث دلخواهی باشد و همچنین ضلع BC تا D امتداد داده شده باشد؛

به نظر من زاویه‌ی خارجی ACD بزرگ‌تر از هریک از زوایای داخلی غیرمجاور

CBA و BAC است.

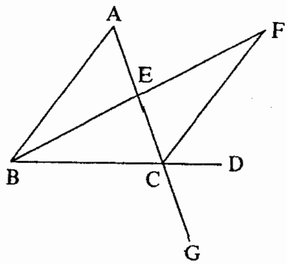
فرض کنید AC و E نصف شده باشد [۱-۱۰]،

و گیریم BE وصل شده و در یک خط راست تا F امتداد داده شده باشد؛

گیریم EF با BE ساخته شده باشد؛ [۱-۳]،

گیریم FC وصل شده باشد؛ [اصل متعارف-۱]،

و گیریم AC تا G امتداد داده شده باشد؛ [اصل متعارف-۲]،



در این صورت، چون AE با EC و BE با EF مساویند، اضلاع AE و EB به ترتیب با دو ضلع CE و EF مساویند؛ و زاویه AEB با زاویه‌ی FEC به‌دلیل متقابل به رأس بودن باهم مساویند. [۱-۱۵]

بنابراین، قاعده‌ی AB با قاعده‌ی FC و مثلث ABE با مثلث CFE مساوی بوده و همچنین زاویه‌های باقی‌مانده نیز به ترتیب با زاویه‌های باقی‌مانده، یعنی آن‌هایی که روبه‌روی اضلاع مساویند، با هم مساویند. [۱-۴]

بنابراین زاویه‌ی BAE با زاویه‌ی ECF مساوی است.

اما زاویه‌ی ECD بزرگ‌تر از زاویه‌ی ECF است؛ [م‌م۵]

بنابراین زاویه‌ی ACD از زاویه‌ی BAF بزرگ‌تر است.

به طور مشابه اگر BC نصف می‌شد، می‌توان ثابت کرد زاویه‌ی BCG؛ یعنی، زاویه‌ی ACD [۱-۱۵]، بزرگ‌تر از زاویه‌ی ABC است.

به همین ترتیب برای بقیه. و هوالمطلوب

در گزاره ۱۶ اقلیدس پاره خط BE را به پاره‌خطی دو برابر خودش (BF) امتداد داده است. این عمل، بدین ترتیب انجام شد که او به طور ضمنی پذیرفته بود که یک پاره‌خط را می‌توان امتداد داد بدون این که بر خودش برگردد و لذا F روی BE قرار نمی‌گیرد. اقلیدس، اغلب در زبان صوری پذیرفته بود، خطی که بی‌مرز است بی‌پایان نیز می‌باشد، به عنوان مثالی از خطی که بی‌مرز بوده ولی بی‌پایان نیست. "خط" را به عنوان دایره‌ی عظیمه روی یک کره تعبیر می‌کنیم.

گزاره ۲۱ اقلیدس

اگر روی یکی از اضلاع مثلثی، از دو سر آن، دو خط راست طوری خارج کنیم که همدیگر را در درون مثلث قطع کنند خطوط راستی که این‌چنین ساخته می‌شوند از دو ضلع باقی‌مانده‌ی مثلث کمترند؛ اما زاویه‌ی بزرگ‌تری را شامل خواهند شد.

فرض کنید روی BC، یکی از اضلاع مثلث ABC، و از دو سرش B و C، دو خط BD، DC که در داخل مثلث همدیگر را قطع کرده‌اند، رسم شده باشد.

به نظر من BD و DC از دو ضلع باقی‌مانده‌ی مثلث، BA و AC کم‌تر است؛ اما شامل زاویه‌ی BDC است که از زاویه‌ی BAC بزرگ‌تر است.

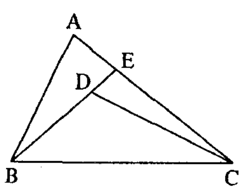
برای این منظور گیریم BD تا E امتداد داه شده باشد.

آن‌گاه چون در هر مثلثی دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است [۲۰-۱]

بنابراین در مثلث ABE، دو ضلع AB و AE بزرگ‌تر از BE است.

EC را به هریک اضافه می‌کنیم

بنابراین، BA و AC بزرگ‌تر از BE و EC است.



باز، چون، در مثلث CED:

دو ضلع CE و ED از CD بزرگ‌تر است

DB را به هریک اضافه می‌کنیم

بنابراین CE و EB از CD و DB بزرگ‌ترند

اما ثابت شده بود BA و AC بزرگ‌تر از BD و DC است

بنابراین: BA و AC بزرگ‌تر از BD و DC است

همچنین، چون در هر مثلث زاویه‌ی خارجی از زوایای داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است [۱-۱۶]

بنابراین در مثلث CDE،

زاویه‌ی خارجی BDC بزرگ‌تر از زاویه‌ی CED است.

به همان دلیل در مثلث ABE نیز، زاویه‌ی CEB از زاویه‌ی $B\hat{A}C$ بزرگ‌تر است. اما ثابت شده بود زاویه‌ی BDC از CEB بزرگ‌تر است.

بنابراین زاویه‌ی BDC از زاویه BAC بزرگ‌تر است.

برای بقیه نیز به همین ترتیب. و هوالمطلوب

در گزاره ۲۱ اقلیدس فرض کرده است که خطی شامل یک رأس (B) از یک مثلث (ΔABC) و یک نقطه‌ی درونی (D) باید ضلع مقابل (AC) را در یک نقطه‌ای (E) قطع کند. این فرض یا هم‌ارز آن که توسط پاش (*Pasch*) در قرن نوزدهم فرمول‌بندی شد، به بنداشت پاش معروف است. صورت‌های هم‌ارز این بنداشت در زیر آمده است.

بنداشت پاش (۱). یک خط شامل یک رأس از مثلثی و یک نقطه‌ی درونی آن ضلع مقابل مثلث را قطع می‌کند.

بنداشت پاش (۲). گیریم A، B و C سه نقطه‌ی ناواقع بر یک خط باشند و l خطی در صفحه‌ی شامل A، B و C بوده که از A، B یا C نمی‌گذرد. در این صورت، اگر l از نقطه‌ای بر پاره‌خط AB بگذرد شامل نقطه‌ای درونی از ΔABC گردد آنگاه از نقطه‌ای بر پاره‌خط AC یا پاره‌خط BC نیز خواهد گذشت.

می‌توان هم‌ارزی بنداشت پاش را با خواص جداسازی نقاط و خطوط ثابت‌کرد، خواصی که اقلیدس دانسته انگاشته بود؛ یعنی، پذیرفته بود که یک نقطه یک پاره‌خط را به دو مجموعه‌ی جدا از هم تفکیک می‌کند و یک خط نیز صفحه را به دو مجموعه‌ی جدا از هم تفکیک می‌کند.

گزاره ۲۷ اقلیدس

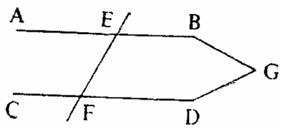
اگر خط راستی روی دو خط راست طوری بیفتند که زوایای متبادل داخلی با هم مساوی باشند، خطوط راست با هم موازیند.

برای این منظور گیریم خط راست EF روی دوخط راست AB و CD افتاده و زوایای متبادل AEF و EFD با یکدیگر مساوی باشند.

به نظر من AB موازی CD است.

زیرا در غیر این صورت، AB و CD در صورت امتداد یافتن همدیگر را در جهت B و D یا سوی A و C قطع می‌کنند.

فرض کنید آن‌ها را امتداد داده و در جهت B و D همدیگر را در G قطع کنند، آن‌گاه در مثلث GEF زاویه‌ی خارجی AEF معادل زاویه‌ی غیرمجاور EFG است؛ که این غیرممکن است.



بنابراین، AB و CD در صورت امتداد یافتن همدیگر را در جهت B و D قطع نمی‌کنند، به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که یکدیگر را در سمت A و C نیز قطع نمی‌کنند.

اما خطوط راستی که در هیچ جهتی همدیگر را قطع نکنند موازی هستند. [تعریف -۲۳]

بنابراین، AB با CD موازی است.

و به همین ترتیب برای بقیه. و هوالمطلوب

نکته‌ای که در اثبات گزاره ۲۷ نقش اساسی داشته تضمین وجود خطوط موازی به اعتبار گزاره ۱۶ بود، در صورتی که اثبات این گزاره به بی‌پایان بودن خطوط نیاز داشت.

این بی‌دقتی‌ها در کار اقلیدس تا توسعه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی مورد توجه واقع نشد؛ اما بعداً شکافی واقعی را آشکار ساختند که باید برطرف می‌شد و بسط تعدادی دستگاه بنداشتی جدید برای هندسه‌ی اقلیدسی نتیجه‌ای از آن بود. پرواضح است که این دستگاه‌ها لزوماً طولانی‌تر و پیچیده‌تر از دستگاه بنداشت‌های اقلیدس بودند. پیوست ب، پ و ت به ترتیب شامل دستگاه‌های توسعه‌یافته توسط هیلبرت، بیرخُف و گروه مطالعه‌ی ریاضی دبیرستانی *(S.M.S.G.)* است. دقت کنید که هریک از این‌ها چگونه نواقصی راکه در کار اقلیدس با آن روبه‌رو بودیم برطرف کرده‌اند. توجه کنید که پیوست ج شامل اثبات‌هایی از یک قضیه (قضیه‌ی زاویه-ضلع-زاویه) در هریک از این سه دستگاه است.

تمرین:

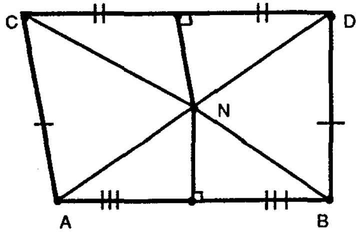
۱- ثابت کنید گزاره‌های زیر با اصل متعارف پنجم اقلیدس هم‌ارزند.

(آ) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد.

(ب) خطوط راستی که با یک خط راست موازیند با یکدیگر موازی خواهند بود (این گزاره ۳۰ است).

۲- ثابت کنید هر دو صورت بنداشت پاش هم‌ارزند.

۳- در هریک از مثال‌های زیر اصول متعارف و گزاره‌هایی از اقلیدس (پیوست آ را ببینید) را برای تعیین اعتبار هر مرحله به کار بگیرید. سپس نقص هریک را بیابید [مثال‌های (آ) تا (پ) از دوبُنو (۱۹۶۳) با اجازه‌ی د.س هیث و شرکا در این‌جا آمده است. مثال (ت) از ماکسول (۱۹۶۱) با اجازه‌ی انتشارات دانشگاه آکسفورد آمده است.]



شکل ۴-۲

مثال (آ). یک زاویه‌ی قائمه با یک زاویه‌ی منفرجه قابل انطباق است.

اثبات. از دو سر پاره‌خط AB دو پاره‌خط قابل انطباق AC و BD را در یک طرف AB به طوری که $\angle DBA$ قائمه و $\angle CAB$ منفرجه باشد، رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم $\angle CAB \cong \angle DBA$. CD را بسازید. به وضوح AB و CD موازی نیستند. عمود منصف پاره‌خط‌های AB و CD را کشیده، محل تلاقی آن‌ها را N بنامید NA، NB، NC و ND را بسازید.

حالت ۱. نقطه‌ی N در طرفی از AB قرار دارد که C و D هستند (شکل ۴-۲)

به وضوح: $\Delta NAC \cong \Delta NBD$ بنابراین: $\angle NAC \cong \angle NBD$ (۱)

علاوه بر این: $\angle NAB \cong \angle NBA$ (۲)

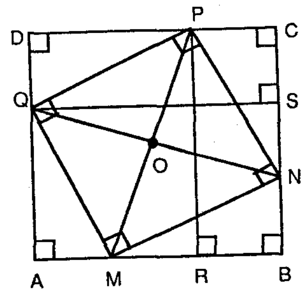
بدین ترتیب با جمع (۱) و (۲) $\angle CAB \cong \angle DBA$.

حالت ۲. نقطه‌ی N روی AB قرار دارد، یعنی، N نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB است. پس همانند حالت ۱ $\Delta NAC \cong \Delta NBD$ و باز $\angle NAC \cong \angle NBD$. با جای‌گزاری داریم: $\angle BAC \cong \angle ABD$.

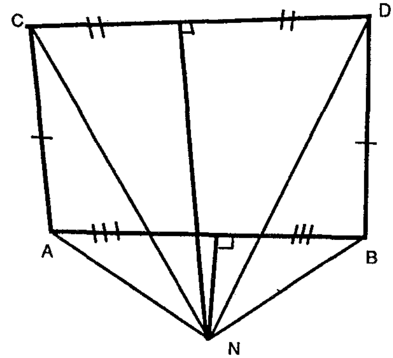
حالت ۳. نقطه‌ی N در طرفی از AB قرار دارد که C و D نیستند (شکل ۵-۲). همانند حالت ۱، $\Delta NAC \cong \Delta NBD$ و باز: $\angle NAC \cong \angle NBD$ (۱)

علاوه بر این $\angle NAB \cong \angle NBA$ (۲)

و با تفریق (۲) از (۱) داریم: $\angle CAB \cong \angle DBA$. □



شکل ۶-۲



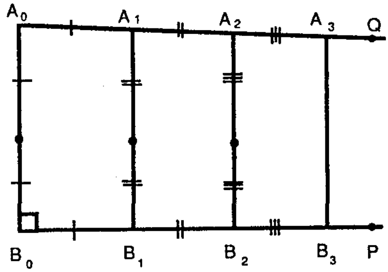
شکل ۵-۲

مثال (ب). یک مستطیل محاط در یک مربع، یک مربع است.

اثبات. گیریم مستطیل $MNPQ$ همچنان که در شکل ۶-۲ دیده می‌شود، در مربع $ABCD$ محاط باشد. از نقطه‌ی P عمودی بر AB و از Q عمودی بر BC وارد کرده نقاط پای عمود را به ترتیب R و S می‌نامیم. به وضوح $PR\cong QS$ علاوه بر این $PM\cong QN$ بنابراین $\Delta PMR\cong\Delta QNS$ و از این‌رو $\angle PMR\cong\angle QNS$. چهار ضلعی $MBNO$ را که O نقطه‌ی برخورد QN و PM است، درنظر بگیرید. زاویه‌ی خارجی در رأس N با زاویه‌ی داخلی در رأس M قابل‌انطباق است؛ بنابراین، دو زاویه‌ی داخلی در رؤوس M و N مکملند. بدین ترتیب، زوایای داخلی در رؤوس B و O نیز باید مکمل باشند. اما $\angle ABC$ یک زاویه‌ی قائمه است و از این‌رو $\angle NOM$ نیز باید قائمه باشد؛ بنابراین، اقطار مستطیل $MNPQ$ بر یکدیگر عمودند. از این‌رو $MNPQ$ مربع است.

مثال (پ). دو خط که دقیقاً یکی از آن‌ها به خط سومی عمود است، همدیگر را قطع نمی‌کنند.

اثبات. در نقاط A_0 و B_0 از خط l، A_0Q و B_0P رسم شده‌اند به طوری که Q و P در یک طرف A_0B_0 بوده و $\angle QA_0B_0$ حاده و $\angle PB_0A_0$ قائمه باشد (شکل ۷-۲). می‌خواهیم



شکل ۷-۲

ثابت کنیم نیم‌خط‌های A_0Q و B_0P همدیگر را قطع نمی‌کنند. A_1 را روی A_0Q و B_1 را روی B_0P طوری انتخاب می‌کنیم که $d(A_1,A_0)=d(B_1,B_0)=\frac{1}{2}[d(A_0,B_0)]$. آن‌گاه برای $i\geq 1$ نقاط A_i را روی A_0Q به طوری که A_i بین A_{i-1} و A_{i+1} بوده و $d(A_{i+1},A_i)=\frac{1}{2}[d(A_i,B_i)]$، انتخاب می‌کنیم. همچنین، انتخاب نقاط B_i روی B_0P طوری انجام می‌شود که B_i بین B_{i-1} و B_{i+1} بوده و $d(B_{i+1},B_i)=\frac{1}{2}[d(A_i,B_i)]$. به وضوح برای هر i پاره‌خط‌های $A_{i+1}A_i$ و $B_{i+1}B_i$ نمی‌توانند نقاط مشترکی داشته باشند؛ چون اگر K یک نقطه‌ی مشترک باشد مثلث A_iKB_iای به‌وجود می‌آید که مجموع دو ضلع آن A_iK و B_iK، از ضلع سوم کوچک‌تر یا مساوی طول ضلع سوم، A_iB_i، است.

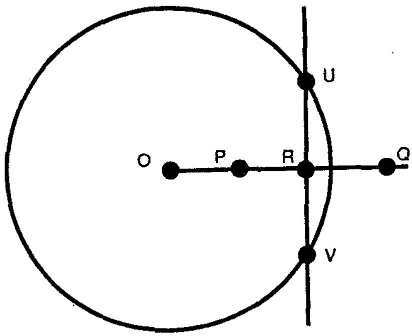
مثال (ت). هر نقطه‌ی درونی دایره به جز مرکز آن، بر محیط دایره واقع است.

اثبات. دایره‌ای دل‌خواه به مرکز O و شعاع r و نقطه‌ی دل‌خواه $O\neq P$ درون آن را درنظر بگیرید، گیریم Q یک نقطه روی OP باشد. به طوری که P بین O و Q است به طوری که $d(O,P).d(O,Q)=r^2$ (شکل ۸-۲). گیریم عمود منصف پاره‌خط PQ در R دایره را در نقاط U و V قطع کند. آن‌گاه:

$$d(O,P) = d(O,R) - d(R,P)$$

و

$$d(O,Q) = d(O,R) + d(R,Q) = d(O,R) + d(R,P)$$



شکل ۸-۲

بنابراین

$$d(O,P).d(O,Q)=[d(O,R)-d(R,D)].[d(O,R)-d(R,P)]$$
$$= d^{۲}(O,R) - d^{۲}(R,P)$$
$$= [d^{۲}(O,U) - d^{۲}(R,U)] - [d^{۲}(P,U)-d^{۲}(R,U)]$$
$$= d^{۲}(O,U) - d^{۲}(P,U)$$
$$= d(O,P).d(O,Q) - d^{۲}(P,U)$$

بنابراین $d(P,U)=۰$ و لذا $P=U$.

۳-۲. هندسه‌ی نااقلیدسی

تلاش برای اثبات اصل متعارف پنجم اقلیدس که کمی بعد از نشر **اصول** (سال ۳۰۰ قبل از میلاد) به طور مستمر تا قرن هیجدهم ادامه داشت. اما سرانجام ریاضی‌دانان را به این نتیجه رسانید که اصل متعارف پنجم از چهارتای اول مستقل است. به عبارت دیگر، می‌توانند هندسه‌هایی موجود باشند که نقیض اصل متعارف پنجم در آن‌ها یک بنداشت

باشد. این هندسه‌ها به هندسه‌های نااقلیدسی شهرت دارند. برای شروع مطالعه‌ی هندسه‌های نااقلیدسی می‌خواهیم صورت هم‌ارزی از اصل متعارف پنجم اقلیدس معروف به اصل موضوع پلی‌فایر را درنظر بگیریم.

اصل متعارف ′۵ (اصل موضوع پلی‌فایر). از یک نقطه مفروض خارج خطی مفروض دقیقاً یک خط می‌توان رسم کرد که خط مفروض را قطع نکند.

بدین ترتیب، هندسه‌ی اقلیدسی را می‌توان براساس اصول متعارف ۱ تا ۴ و ′۵ بیان کرد. از طرف دیگر، هندسه نااقلیدسی برپایه‌ی اصول متعارف ۱ تا ۴ و نقیض بنداشت پلی‌فایر مبتنی است. دو امکان برای نقیض اصل موضوع پلی‌فایر ممکن است که به هندسه‌های نااقلیدسی هذلولوی و بیضوی که تفاوت بسیار با هم دارند منجر می‌شود (برای هندسه‌ی بیضوی باید تغییری در اصل متعارف ۲ نیز داده شود).

بنداشت هذلولوی. از یک نقطه مفروضِ ناواقع بر خطی مفروض حداقل دو خط می‌توان رسم کرد که خط مفروض را قطع نکند.

بنداشت بیضوی. دو خط همواره متقاطعند.

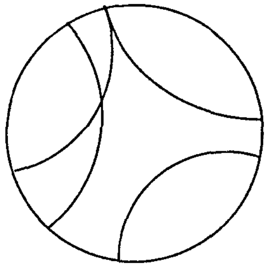
معرفی هندسه‌ی هذلولوی که در بخش بعد شروع می‌شود به راهی که این موضوع به طور تاریخی طی کرده است برمی‌گردد. اثبات‌های مبتنی بر اصول متعارف ۱ تا ۴ اقلیدس و اصل موضوع هذلولوی همراه با توجیه‌های اضافی است که برای مفروضات ناگفته‌ای که قبلاً ذکر شد پیشنهاد شده است. این ره‌یافت به دلیل دور بودن از طبیعت بسیار دقیق ریاضیات جدید، بی‌فایده به‌نظر می‌رسد، اما راه تحقیق بسیاری از نتایج غیرمنتظره‌ی این موضوع فریبنده را باز می‌کند. چون اثبات‌های گزاره‌های ۱ تا ۲۸ اقلیدس فقط بر پایه‌ی اصول متعارف ۱ تا ۴ است پس به طور عادی ۲۸ قضیه از هندسه‌ی هذلولوی در دست است. با این قضایا قادر خواهیم بود به قلب هندسه‌ی

هذلولوی مسطحه وارد شده و تقریباً فوراً چند نتیجه‌ی جالب و عجیب در این موضوع را مطرح کنیم. توسعه‌ی این نتایج اگرچه در چند قضیه لازم، در مقایسه با هندسه‌ی اقلیدسی مشکل‌تر است؛ ولی در اکثر قسمت‌ها با کمال تعجب ساده است. (اغلب، اثبات‌های دقیق هریک از نتایج ما را می‌توان با استفاده از دستگاه بنداشتی هیلبرتی که بنداشت هذلولوی جای‌گزین بنداشت پلی‌فایر شده است، انجام داد.)

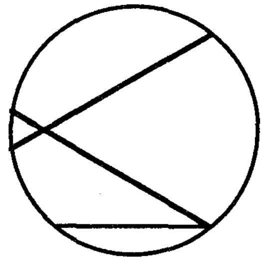
اغلب قضایایی که مطرح خواهیم کرد توسط ریاضی‌دان ایتالیایی جیرولامو ساکری (۱۷۷۳-۱۶۶۷) در حالی که به دنبال یافتن یک **برهان خلف** برای اثبات اصل متعارف پنجم اقلیدس بود، طرح شده است. ساکری تحت تأثیر عمیق نظرات زمانی که هندسه‌ی اقلیدسی تنها هندسه‌ی ممکن به شمار می‌رفت و با مواجه شدن به نتایجی اساساً مختلف با هندسه‌ی اقلیدسی، بر این باور بود که تناقضی بر هندسه‌ی هذلولوی یافته است و بر این باور، فهرستی از قضایای هذلولوی را تهیه کرد. (او همچنین فرض پیشنهادی دوم را با ملاحظه‌ی کاملاً مختصری ردکرد.) او کارهای خود را در کتاب با عنوان فریبنده‌ی ***Euclides ab Omni Naevc Vindicatus*** (اقلیدس عاری از هر عیب) جمع‌آوری کرد.

افتخار کشف هندسه‌ی هذلولوی معمولاً به ریاضی‌دان روسی نیکلای ایوانویچ لوباچفسکی (۱۸۵۶-۱۷۹۳) و ریاضی‌دان مجارستانی یانوش بویوئی (۱۸۶۰-۱۸۰۲) که کارشان را به طور مستقل به ترتیب در سال‌های ۱۸۲۹ و ۱۸۳۲ منتشر کردند، برمی‌گردد. امیر عالم ریاضی، کارل فردریش گوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) نیز بسیار در هندسه‌ی هذلولوی کار کرد ولی نتایجش را منتشر نساخت. جزئیات کشف این سه مرد و مقاومت آن‌ها در این راه یکی از جذاب‌ترین صحنه‌های تاریخ ریاضی به شمار می‌رود.

همچنان که نتایج هندسه‌ی هذلولوی فاش شود، تجسم این نتایج در دنیایی که بیش‌تر ما آن را به صورت اقلیدسی می‌بینیم، به طور فزاینده‌ای مشکل می‌شود. دو مدل هندسی هست که اغلب برای کمک به تصور هندسه‌ی صفحه‌ی هذلولوی از آن‌ها استفاده می‌شود. این‌ها به مدل پوانکاره و مدل کلاین معروفند (شکل ۹-۲ و ۱۰-۲). در هردوی این مدل‌ها تعبیر اصطلاحات هذلولوی با کمک هندسه‌ی اقلیدسی صورت می‌گیرد.



شکل ۹-۲ مدل پوانکاره



شکل ۱۰-۲ مدل کلاین

مدل پوانکاره

اصطلاح هذلولوی	تعبیر
نقطه	نقطه‌ی درونی یک دایره‌ی مفروض اقلیدسی $\mathscr{C}$
خط	بخشی از یک قطر $\mathscr{C}$، یا
	دایره‌ای عمود بر $\mathscr{C}$ که درون $\mathscr{C}$ است.
صفحه	درون $\mathscr{C}$

تحت این تعبیرها بنداشت‌ها و قضایای هندسه‌ی هذلولوی قضایایی از هندسه‌ی اقلیدسی خواهد شد. مدل پوانکاره ازنظر تاریخی مهم است؛ چراکه در به‌ثبوت رساندن سازگاری هندسه‌ی هذلولوی نسبت به هندسه‌ی اقلیدسی از آن استفاده شده است.

در این مدل، اندازه‌ی یک زاویه هذلولوی همان اندازه در هندسه‌ی اقلیدسی است. اما تناظر بین طول‌های اقلیدسی و هذلولوی بدین راحتی نیست. لزوماً متر اقلیدسی‌ای که در این مدل قرار می‌گیرد باید طوری درنظر گرفته شود که هرچه به محیط $\mathscr{C}$ نزدیک‌تر شود طولش بیش‌تر شود. توصیفی از زندگی اهالی یک مدل پوانکاره در *Trudeau* (۱۹۸۷، صفحه ۲۳۵ تا ۲۴۴) داده شده است.

مدل کلاین از یک تعبیر مشابه در اصطلاح نقطه استفاده کرده ولی تصور تعبیر خط، در آن ساده‌تر است. اما در این مدل نه فاصله‌ی هذلولوی با فاصله‌ی اقلیدسی سازگار است و نه اندازه‌ی هذلولوی زاویه با اندازه‌ی اقلیدسی آن.

مدل کلاین

اصطلاح هذلولوی	تعبیر
نقطه	نقطه‌ی درون دایره‌ی اقلیدسی مفروض $\mathscr{C}$
خط	وترهای باز دایره
صفحه	درون $\mathscr{C}$

این مدل، در فصل ۴ هنگام استفاده از تعریف کلاین برای هندسه در بسط هندسه‌ی هذلولوی به عنوان زیر هندسه‌ای از هندسه‌ی تصویری کلی‌تر نقش مهمی ایفا می‌کند.

معرفی هندسه‌ی بیضوی با استفاده از درک شهودی از طریق مدل‌های کروی به جای تکیه بر یک بسط بنداشتی در آخر فصل ارائه شده است. هدف از معرفی هردو آشنایی خواننده با خواص هندسه‌ی نااقلیدسی است.

۲-۴. هندسه‌ی هذلولوی - موازی‌های جهت‌دار

چون هندسه‌ی هذلولوی از جای‌گزینی اصل متعارف پنجم با بنداشت هذلولوی نتیجه می‌شود، مطالعه‌ی این هندسه را با مشخص کردن نتایج این بنداشت جدید آغاز می‌کنیم. در عمل بلافاصله نیاز به استفاده از یکی از خواص به‌طور ضمنی فرض شده‌ی اقلیدس یعنی پیوستگی خطوط داریم. در بررسی‌های زیر بنداشت ددکیند را به عنوان یک عبارت صریح از این خاصیت می‌پذیریم.

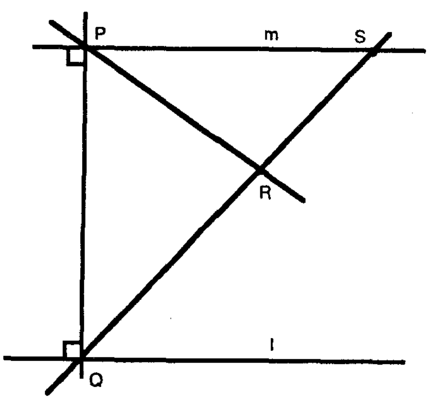
بنداشت پیوستگی ددکیند. برای هر افراز از نقاط روی یک خط به دو مجموعه‌ی ناتهی به طوری که هیچ نقطه‌ای از یکی بین دو نقطه‌ی دیگری نباشد نقطه‌ای در یکی از مجموعه‌ها موجود است که بین هر نقطه‌ی دیگر آن مجموعه و هر نقطه از مجموعه‌ی دیگر قرار دارد.

همان‌طور که در بنداشت هذلولوی فرض شده، گیریم P یک نقطه و l خطی باشد که شامل P نیست. از P خطی عمود بر l در Q وارد می‌کنیم (۱۲). همچنین، خط m مار بر P را در P عمود بر PQ می‌سازیم (۱۱). S را نقطه‌ی دومی روی خط m گرفته و QS را می‌سازیم (شکل ۱۱-۲). سپس نقاط QS را همان‌طور که می‌آید می‌توان به دو مجموعه‌ی A و B افراز کرد:

(i) گیریم: $A=\{X$:X روی QS بوده و PX، l را قطع می‌کند$\}$

(ii) گیریم: $B=\{Y$:Y روی QS بوده و PY، l را قطع نمی‌کند$\}$

به وضوح Q در مجموعه‌ی A و S در مجموعه‌ی B است (چرا؟) بنابراین، مجموعه‌ها ناتهی هستند و اگر X و X' اعضای A و Y و Y' اعضای B باشند Y نمی‌تواند بین X، X' باشد و X نمی‌تواند بین Y و Y' باشد (تمرین ۱). بنابر بنداشت ددکیند یک نقطه‌ی T در مجموعه‌ی A یا مجموعه‌ی B می‌باشد که بین X و Y است طوری که X می‌تواند هر نقطه در A و Y می‌تواند هر نقطه در B باشد به راحتی مشخص می‌شود که T در B است (تمرین ۲). اگر نقطه R روی QS از Q به S حرکت کند خط PR حول نقطه‌ی P دوران کرده $m\angle QPR$ مقادیر بین 0° تا 90° را خواهد گرفت (در شکل ۱۱-۲ دوران در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود). به وضوح هنگامی که R بر Tی داد شده در



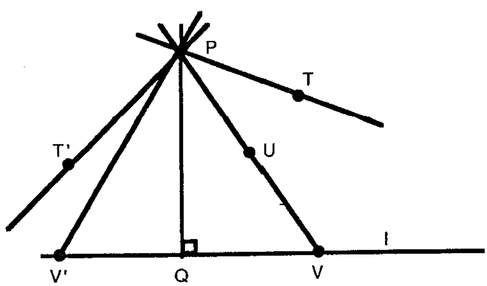
شکل ۱۱-۲

بنداشت ددکیند منطبق باشد $m\angle QPR=m\angle QPT<90^\circ$ و خط PT را می‌توان به عنوان اولین خطی که در فرایند دوران l را قطع نمی‌کند، توصیف کرد. توجه کنید که وضعیت مشابهی در سمت دیگر PQ رخ می‌دهد؛ یعنی، اولین خط دیگری که L را قطع نمی‌کند؛ مثل: PT'، وجود دارد. برای سهولت در کار، اینها را اولین خطوط راست و چپ PQ که l را قطع نمی‌کنند می‌نامیم؛ علاوه بر این، $\angle QPT\cong\angle QPT'$. در غیر این‌صورت فرض کنید $\angle QPT$ از $\angle QPT'$ بزرگ‌تر باشد (شکل ۱۲-۲). PU را طوری می‌سازیم که $\angle QPU\cong\angle QPT'$، که U در سمت راست PQ است. آن‌گاه چون PT اولین خط سمت راست PQ است که l را قطع نمی‌کند. PU باید l را در نقطه‌ای مانند V قطع کند گیریم V' نقطه‌ای روی l در سمت چپ PQ طوری باشد که پاره‌خط $V'Q$ با پاره‌خط VQ قابل‌انطباق باشد PV' را می‌سازیم. چون PQ عمود بر l است $\angle PQV'\cong\angle PQV$. بدین ترتیب، $\angle QPV'\cong\angle QPV$ (۴) و بنابراین: $\angle QPV'\cong\angle QPT'$. بنابراین V' روی PT' بوده و PT'، l را قطع می‌کند؛ ولی این یک تناقض است؛ بنابراین: $\angle QPT'\cong\angle QPT'$.

توجه کنید که هریک از بی‌نهایت خط ممکن واقع بین PT و PT' خط l را قطع نخواهند کرد.

بحث قبلی را در تعریف و قضیه‌ی زیر خلاصه می‌کنیم.

تعریف ۱-۲. اولین خط مار بر P که از دوران PQ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (در جهت عقربه‌های ساعت) طوری به وجود آمده که l را قطع نکند، موازی جهت‌دار راست (چپ) با l مار بر P نامند. هر خط دیگر مار بر P که l را قطع نکند فراموازی با l مار بر P یا نامتقاطع با l نامیده می‌شود.



شکل ۱۲-۲

قضیه ۲۹هـ اگر l خط دلخواهی و P نقطه‌ای ناواقع بر آن باشد، دقیقاً دو خط مار بر P موجودند که l را قطع نکرده و با عمود وارده از P بر l زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازند و طوری هستند که هر خط مار بر P که درون این زاویه‌ی شامل آن عمود قرارگیرد، l را قطع می‌کند، در حالی که هر خط دیگر مار بر P خط l را قطع نمی‌کنند.

فرع ۱. دو خط با یک عمود مشترک فراموازیند.

قبل از استفاده از این رابطه‌ی توازی جهت‌دار، بعضی خواص این رابطه را بررسی می‌کنیم. یادآور می‌شویم که در هندسه‌ی اقلیدسی رابطه‌ی توازی در خواص زیر صدق می‌کند:

۱- اگر l خط موازی با m مار بر P باشد، آن‌گاه در هر نقطه‌ی دیگر R روی l نیز l خط موازی با m است.
۲- اگر l موازی خط m باشد، آن‌گاه m نیز موازی l است (تقارن).
۳- اگر l موازی m و m موازی n باشد، آن‌گاه l موازی n است (ترایایی).

خاصیت اول مبین این استکه توازی مستقل از نقطه‌ی P است. دومین و سومین خاصیت، همان‌طور که مشخص شده، به خواص تقارنی و ترایایی معروفند. قبل از بررسی این که رابطه‌ی توازی حدی در همین خواص صدق می‌کند، روند اثبات این موضوع راکه l موازی جهت‌دار با m است توضیح می‌دهیم؛ بنابر تعریف ۱-۲ علاوه بر این که باید نشان داد l و m همدیگر را قطع نمی‌کنند، به وضوح باید نشان دهیم در هر نقطه‌ی P روی m، m اولین خط دوران‌یافته از عمود به l است که l را قطع نمی‌کند. در به ثبوت رساندن قسمت دوم، با توجه به شکل ۱۳-۲ باید نشان داد که هر خط PT که m را در P قطع کرد و درون $\angle QPS$ است باید P را قطع کند (در این‌جا PQ عمود بر l در Q و S نقطه‌ای روی m درجهت توازی از P است). این فرایند در اثبات سه قضیه‌ی بعد به کار گرفته می‌شود. هریک از این اثبات‌ها برای موازی‌های جهت‌دار راست نوشته شده

است. اثبات‌ها برای موازی‌های جهت‌دار چپ با جای‌گزینی اصطلاح چپ به جای راست حاصل می‌شود.

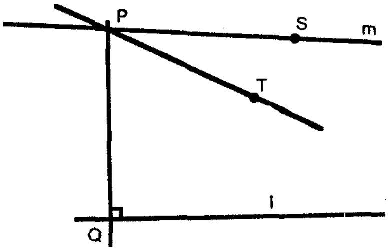
قضیه ۳۰ه اگر خط l موازی جهت‌دار راست (چپ) با m، مار بر P باشد در هر نقطه‌اش نیز موازی جهت‌دار راست (چپ) با خط m خواهد بود.

اثبات. فرض کنید که l موازی جهت‌دار راست با m مار بر P باشد گیریم R نقطه‌ی دیگری روی l باشد.

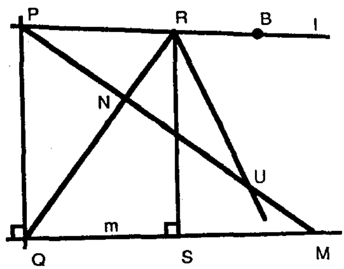
حالت ۱. R سمت راست P است. گیریم PQ و RS در Q و S به m عمود باشند (۱۲). فرض می‌کنیم B نقطه‌ای روی l سمت راست R باشد. کافی است نشان دهیم که هر خط RU که در $\angle BRS$ قرار دارد m را قطع می‌کند (شکل ۱۴-۲). PU را می‌سازیم به وضوح PU در $\angle QPR$ قرار دارد. از این رو، باید m را در نقطه‌ی M قطع کند (تعریف موازی‌های جهت‌دار). QR را می‌سازیم؛ بنابر بنداشت پاش برای مثلث ΔPQR ، PU باید پاره‌خط QR را در نقطه‌ی N قطع کند. در ΔQNM ، RU پاره‌خط NM را قطع می‌کند؛ اما پاره‌خط QN را قطع نمی‌کند. بنابر بنداشت پاش، باید پاره‌خط QM و از این‌رو خط m را قطع کند.

حالت ۲. R در طرف چپ P است (تمرین ۵). □

حال می‌توانیم بگوییم که l موازی جهت‌دار با m است. بدون این‌که مشخص کنیم از چه نقطه‌ای می‌گذرد. چراکه قضیه‌ی فوق نشانگر این است که تعریف از انتخاب نقطه مستقل است.



شکل ۱۳-۲



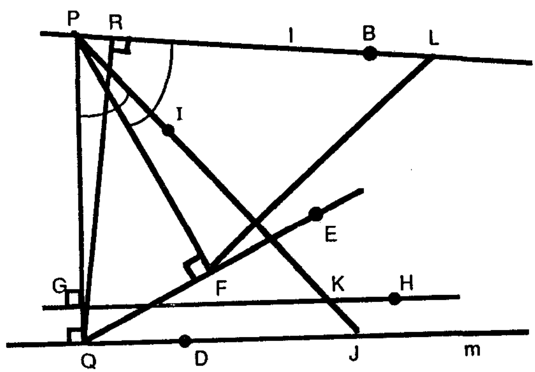
شکل ۱۴-۲

قضیه ۳۱ه اگر خط l موازی جهت‌دار راست (چپ) با m باشد آن‌گاه m موازی جهت‌دار راست(چپ) با l است.

اثبات. فرض کنیم که l موازی جهت‌دار راست با m است. گیریم P نقطه‌ای روی l بوده، PQ عمود بر m در نقطه‌ی Q و QR عمود بر l در R است.

لم. R در طرف راست PQ خواهد بود (تمرین ۶ را ببینید).

گیریم D روی m در طرف راست PQ باشد؛ کافی است نشان دهیم که هر خط QE که درون $\angle RQD$ واقع باشد باید l را قطع کند (شکل ۱۵-۲). گیریم PF در F بر QE عمود باشد. قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی تضمین می‌کند که F سمت راست PQ قرار خواهد داشت. علاوه بر این، پاره‌خط PF کوتاه‌تر از پاره‌خط PQ است (۱۹). بدین ترتیب، روی PQ نقطه‌ی G را می‌توان یافت به طوری که PG با PF قابل انطباق باشد (۳). GH را عمود بر PQ رسم می‌کنیم. گیریم B نقطه‌ای روی l باشد به طوری که B سمت راست R بوده و $\angle GPI$ را طوری می‌سازیم که $\angle GPI \cong \angle FPB$. سپس PI ، m را در J قطع خواهد کرد (تعریف موازی جهت‌دار). چون GH پاره‌خط PQ را در مثلث ΔPQJ قطع کرده و QJ را



شکل ۱۵-۲

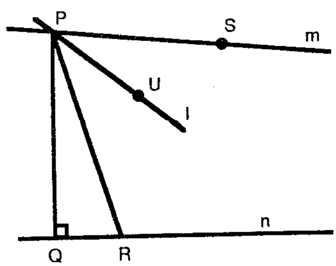
نمی‌تواند قطع کند باید پاره‌خط PJ را در نقطه‌ی K قطع کند. روی خط PB نقطه‌ی L را سمت راست PQ طوری می‌یابیم که پاره‌خط PL منطبق بر پاره‌خط PK بوده و FL را می‌سازیم. حال $\Delta PGK \cong \Delta PFL$ (۴). بنابراین $\angle PFL$ یک زاویه‌ی قائمه است، اما $\angle PFE$ نیز قائمه است. از این رو $FE=FL$، بنابراین QE، l را در L قطع می‌کند. □

بدین ترتیب رابطه‌ی توازی جهت‌دار متقارن است. تحقیق این‌که این رابطه متعدی نیز باشد با لم زیر ساده خواهد بود.

لم. **اگر m موازی جهت‌دار راست با n بوده، P و S نقاط روی m باشند (S سمت راست P) و R نقطه‌ای روی n، آن‌گاه هر خط l که وارد $\angle RPS$ شود، n را در نقطه‌ای مانند T در سمت راست R قطع خواهد کرد.**

اثبات. گیریم U نقطه‌ای روی خط l زیر خط m و PQ عمود بر n در Q باشد.

حالت ۱. Q بر R منطبق یا سمت چپ R است (شکل ۱۶-۲). پس به وضوح $\angle QPU$ کوچک‌تر از $\angle QPS$ است؛ بنابراین PU خط n را طرف راست Q قطع می‌کند (تعریف موازی جهت‌دار راست). چون PU نمی‌تواند پاره‌خط QR را قطع کند (تمرین ۷) باید n را در طرف راست R قطع کند.



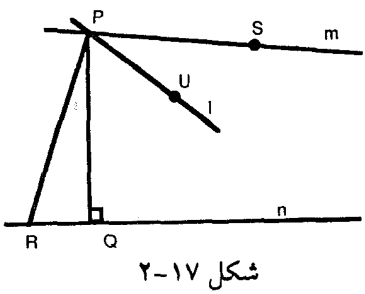
شکل ۱۶-۲

حالت ۲. Q سمت راست R قرار دارد (شکل ۱۷-۲). آن‌گاه خط l یا درون ΔPQR بوده و ضلع RQ را قطع می‌کند (بنداشت پاش) و بنابراین، خط n را هم همین‌طور، و یا $\angle UPQ$ کوچک‌تر از $\angle SPQ$ است و بدین ترتیب l خط n را بنا بر تعریف موازی‌های جهت‌دار در سمت راست R قطع خواهد کرد. □

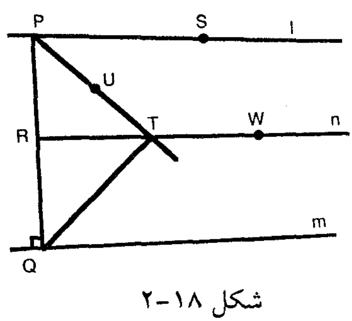
قضیه ۳۲ هـ اگر دو خط هردو موازی جهت‌دار راست (چپ) باخط سومی باشند آن‌گاه موازی جهت‌دار راست (چپ) با یکدیگرند.

اثبات. فرض کنیم l و m موازی جهت‌دار با n باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که l موازی جهت‌دار با m است.

حالت ۱. l و m در دو طرف n واقع‌اند. به وضوح l و m همدیگر را قطع نمی‌کنند چراکه آن‌ها در دو طرف n هستند. گیریم P و S نقاطی روی l و S سمت راست P باشد. PQ را عمود بر m در Q می‌سازیم، سپس چون l و m در دو طرف n هستند PQ خط n را در نقطه‌ی R قطع می‌کند. گیریم PU خطی داخل $\angle QPS$ باشد. کافی است نشان دهیم PU، m را در سمت راست Q قطع می‌کند (۱۸-۲). چون l موازی جهت‌دار راست با n است؛ بنا بر لم قبل PU ، n را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. خط TQ را می‌سازیم و فرض می‌کنیم W نقطه‌ای روی n در سمت راست T باشد. آن‌گاه خط PU در T وارد $\angle QTW$ می‌شود. چون m موازی جهت‌دار راست با n است. بنابر قضیه ۳۱ هـ، n موازی جهت‌دار با m است و استفادهٔ مجدد از لم نشان می‌دهد که PT خط m را قطع می‌کند.

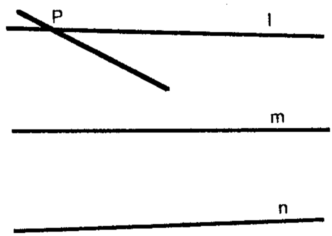


شکل ۱۷-۲

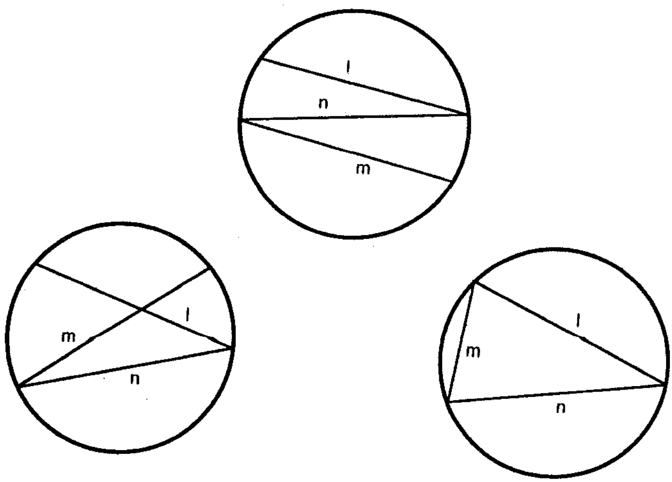


شکل ۱۸-۲

حالت ۲. m بین l و n است. فرض کنید که l موازی جهت‌دار راست با m نبوده و P یک نقطه روی l باشد (شکل ۱۹-۲). بنابر قضیه ۲۹ هـ. خط o مار بر P و موازی حدی راست با m موجود است. چون m موازی جهت‌دار راست به n است n موازی جهت‌دار راست به m است (قضیه ۳۱ هـ). علاوه بر این، o موازی جهت‌دار راست با m بوده و o و n در دو طرف m قرار دارند. بدین ترتیب، بنابر حالت ۱ ، o موازی جهت‌دار راست با n است. در نتیجه دو خط مار بر P به دست می‌آید که هر دو موازی جهت‌دار راست با n هستند، که با منحصر به فردی تضمین‌شده‌ی آن در قضیه ۲۹ هـ تناقض دارد. بدین صورت نتیجه می‌شود که l موازی جهت‌دار راست با m است.



شکل ۱۹-۲



شکل ۲۰-۲

از این‌رو رابطه‌ی توازی جهت‌دار ترایایی است. ولی توجه کنید که در فرض قضیه جهت توازی در هردو حالت یکی است؛ اما اگر برای مثال، l موازی جهت‌دار راست با n و m موازی جهت‌دار چپ با n باشند، ممکن است l و m موازی جهت‌دار نباشند، این مطلب با استفاده الگوهای کلاین نشان داده شده است (شکل ۲۰-۲).

تمرین:

۱- نشان دهید مجموعه‌های A و B، که در آغاز این بخش توصیف شده‌اند، دارای این خاصیت هستند که: هیچ نقطه‌ای از یکی بین دو نقطه از دیگری واقع نیست.

۲- بررسی کنید که نقطه‌ی Tی تضمین شده در بنداشت ددکیند نمی‌تواند در مجموعه‌ی A باشد و بدین ترتیب باید در B قرار گیرد (که مجموعه‌های A و B مجموعه‌های توصیف شده در آغاز این بخش هستند).

۳- (آ) با استفاده از مدل کلاین موازی‌های جهت‌دار راست و چپ با خط l، مار بر نقطه‌ی P، ناواقع بر l را نشان دهید. (ب) در همان مدل دو خط مار بر P. فراموازی با l را نشان دهید.

۴- (آ) با استفاده از مدل پوانکاره موازی‌های جهت‌دار راست و چپ با خط l، مار بر نقطه‌ی P، ناواقع بر l را نشان دهید. (ب) در همان مدل دو خط مار بر P. فراموازی با l را نشان دهید.

۵- حالت ۲ در قضیه ۳۰ه را ثابت کنید. [راهنمایی: U را بالای l انتخاب کنید.]

۶- لمی را که در اثبات قضیه ۳۱ه آمد، ثابت کنید.

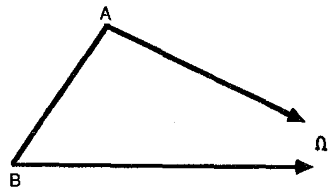
۷- در حالت ۱ ، در اثبات لم مربوط به اثبات قضیه ۳۲ه ثابت کنید که PU نمی‌تواند پاره‌خط QR را قطع کند. [راهنمایی: در صورت لزوم می‌توانید از این‌که یک صفحه توسط یک خط جدا می‌شود استفاده کنید.]

۲-۵. هندسه‌ی هذلولوی - مثلث‌های مجانبی

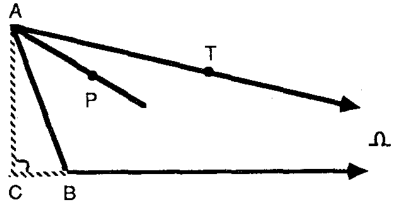
مطالعه‌ی موازی‌های جهت‌دار را با بررسی اشکال تشکیل شده توسط دو خط موازی جهت‌دار و یک قاطع ادامه می‌دهیم. این اشکال شبیه مثلث، به مثلث‌های مجانبی مشهورند (شکل ۲۱-۲). رسم است که یک مثلث رابا نامگذاری سه رأسش معرفی می‌کنند؛ بدین دلیل، مفهوم نقاط آرمانی را بیان می‌کنیم. اگر l و m خطوط موازی جهت‌دار باشند، گوییم آن‌ها یکدیگر را در یک نقطه‌ی آرمانی قطع می‌کنند. نقاط آرمانی را معمولاً با حروف یونانی، مثلاً، Ω نمایش می‌دهند؛ چون برای هر خط، موازی‌های جهت‌دار راست و چپ موجودند. هر خط l دقیقاً دو نقطه‌ی آرمانی دارد. در مدل‌های پوانکاره و کلاین نقاط آرمانی نقاط روی دایره‌ی C هستند. برای راحتی گوییم دو خط موازی جهت‌دار l و m در نقطه‌ی Ω متقاطعند. اما باید دقت نمود که این اصطلاح آشنا، باعث گمراهی نشود که، نقاط آرمانی خواص نقاط هذلولوی معمولی را دارا هستند.

تعریف ۲-۲. شکل متشکل از دوخط موازی جهت‌دار و یک قاطع که این خطوط را در نقاط A و B ببرد به عنوان یک مثلث مجانبی می‌شناسیم. اگر Ω نقطه‌ی آرمانی مشخص شده توسط موازی‌های جهت‌دار باشد ما این مثلث مجانبی رابا $\Delta AB\Omega$ نشان می‌دهیم.

این نکته مهم است که مثلث‌های مجانبی، با وجود اسمشان، مثلث‌هایی نیستند که ما بتوانیم قضایای قبلی در مورد مثلث‌ها را برای آن‌ها به‌کار گیریم. البته، مثلث‌های مجانبی در بعضی خواص با مثلث‌ها مشترکند. خصوصاً قضیه ۳۳ه و ۳۴ه نشان می‌دهد که یک



شکل ۲۱-۲ مثلث مجانبی $\Delta AB\Omega$



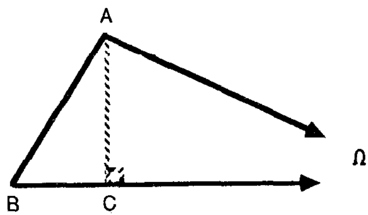
شکل ۲۲-۲

اصلاح بنداشت پاش برای مثلث‌های مجانبی برقرار است. توجه داشته باشید که قضیه ۳۳ه توسیعی از لم مورد استفاده در قضیه ۳۲ه است اما این‌جا با استفاده از نماد مثلث‌های مجانبی ثابت شده است.

قضیه ۳۳ه. اگر خطی از یک رأس مثلث مجانبی $\Delta AB\Omega$ (حتی Ω) وارد مثلث شود ضلع مقابل را قطع می‌کند.

اثبات. گیریم AP خطی باشد که از A گذشته و P نقطه‌ای در درون $\Delta AB\Omega$ باشد. همچنین، گیریم AC عمود بر $B\Omega$ مار بر A باشد.

حالت ۱. AC بر AB منطبق یا خارج $\Delta AB\Omega$ است (شکل ۲۲-۲). در آن صورت به وضوح $\angle PAC$ کوچک‌تر از $\angle TAC$ است که در زاویه‌ی اخیر T روی ضلع $A\Omega$ واقع است. از این‌رو AP ضلع $C\Omega$ را قطع می‌کند (تعریف موازی‌های جهت‌دار). چون AP نمی‌تواند پاره‌خط CB را قطع کند باید ضلع $B\Omega$ را قطع کند.



شکل ۲۳-۲

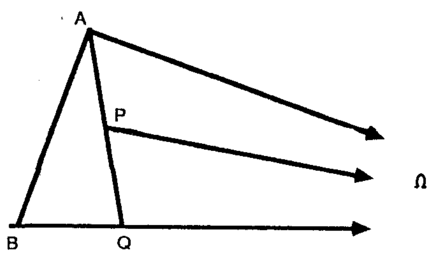
حالت ۲. AC درون $\Delta AB\Omega$ است (شکل ۲۳-۲). آن‌گاه P ممکن است درون ΔABC قرار گیرد. از این‌رو ضلع BC و بنابراین، ضلع $B\Omega$ را قطع می‌کند (بنداشت پاش) و یا P ممکن است درون $\Delta AC\Omega$ یا روی ضلع AC باشد. در این مورد، همچنان‌که در حالت ۱ دیدیم AP باید ضلع $C\Omega$ و از این‌رو ضلع $B\Omega$ را قطع کند.

اثبات برای خطی مار بر B نیز این‌گونه است. بنابراین، فرض می‌کنیم خطی از Ω بگذرد؛ یعنی، $P\Omega$ موازی جهت‌دار به $A\Omega$ و $B\Omega$ باشد (شکل ۲۴-۲). AP را می‌سازیم، آن‌گاه بنابر قسمت اول اثبات، AP ضلع $B\Omega$ را در نقطه‌ای مانند Q قطع می‌کند. اما $P\Omega$ ضلع AQ از ΔABQ را قطع کرده بنابراین، ضلع AB را قطع می‌کند (بنداشت پاش). □

قضیه ۳۴ هـ. اگر خط راستی یکی از اضلاع مثلث مجانبی ΔABC را قطع کند؛ اما از یک رأس آن نگذرد (حتی از Ω) دقیقاً یکی از اضلاع را قطع خواهد کرد.

اثبات. تمرین ۲ را ببینید. □

قضیه‌ای شبیه قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی برای مثلث‌های معمولی (گزاره ۱۶) را می‌توان برای مثلث‌های مجانبی بررسی کرد. ولی توجه کنید که در یک مثلث معمولی هر زاویهٔ خارجی دو زاویهٔ درونی غیرمجاور دارد؛ در حالی که در یک مثلث مجانبی هر زاویه‌ی خارجی فقط یک زاویه‌ی درونی غیرمجاور دارد.



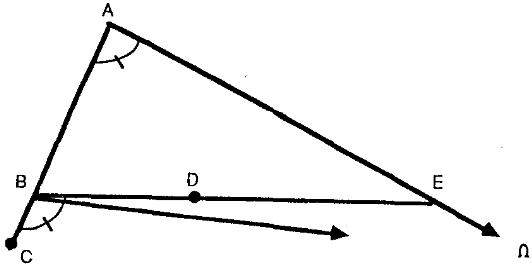
شکل ۲۴-۲

قضیه ۳۵ هـ. زوایای خارجی مثلث مجانبی $\Delta AB\Omega$ در A و B که با امتداد دادن AB ساخته می‌شوند، به ترتیب از زوایای داخلی B و A بزرگترند.

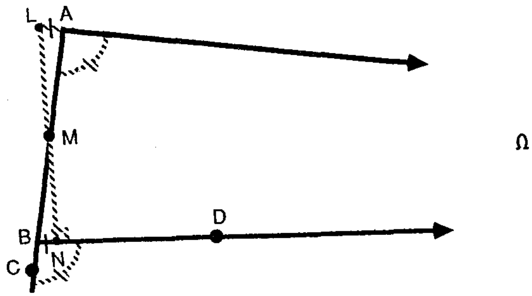
اثبات. گیریم AB از B تا C امتداد داده شده باشد. کافی است، نشان دهیم $\angle CB\Omega$ بزرگ‌تر از $\angle BA\Omega$ است. از B خط BD را طوری عبور می‌دهیم که D در سمتی از AB که موازی‌های جهت‌دار هستند واقع باشد، و $\angle CB\Omega \cong \angle BA\Omega$.

حالت ۱. D درون $\Delta AB\Omega$ باشد (شکل ۲۵-۲). آن‌گاه بنابر قضیه ۳۳ هـ خط BD خط $A\Omega$ را در نقطه‌ی E قطع می‌کند. ولی در آن صورت در ΔABE زاویه‌ی خارجی در B قابل انطباق با زاویه‌ی داخلی در A است که این با گزاره ۱۶ تناقض دارد.

حالت ۲. D روی $B\Omega$ قرار دارد (شکل ۲۶-۲) گیریم M نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB باشد (۱۰)، MN را عمود بر $B\Omega$ در N می‌سازیم. N به وضوح نمی‌تواند بر B منطبق باشد (چرا؟) می‌پذیریم که N سمت راست B می‌افتد (اگر $A\Omega$ و $B\Omega$ همان‌طور که در شکل ۲۶-۲ آمده، موازی‌های جهت‌دار راست باشند). اثبات برای حالتی که N سمت چپ B می‌افتد، به طور مشابه انجام می‌شود (تمرین ۳ را ببینید). $A\Omega$ را تا L امتداد داده به طوری که پاره‌خط LA با پاره‌خط BN قابل انطباق باشد. ML را می‌سازیم. آن‌گاه $\angle LAM \cong \angle NBM$ چراکه آن‌ها مکمل زوایای قابل انطباق هستند. از این‌رو $\Delta LAM \cong \Delta NBM$ و $\angle BMN \cong \angle AML$. بنابراین $LM = MN$. علاوه‌براین $\angle ALM \cong \angle BNM$. بنابراین $\angle ALM$ یک زاویه‌ی قائمه است. بدین ترتیب $A\Omega$ با $B\Omega$ فراموازی است؛ اما این موضوع با فرض تناقض دارد. در نتیجه هردو حالت به تناقض



شکل ۲۵-۲



شکل ۲۶-۲

می‌رسند و از این‌رو $\angle CB\Omega$ از $\angle BA\Omega$ بزرگ‌تر است. □

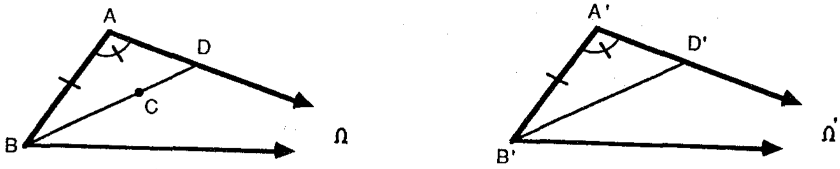
توجه کنید که حالت ۲ این‌اثبات قضیه زیر را به ثبوت می‌رساند.

قضیه ۳۶ ه. دو خط بریده شده توسط قاطعی که زوایای متبادل داخلی قابل انطباق پدید آورند فراموازیند.

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، گزاره‌های ۲۷ و ۲۸ اقلیدس به خطوط فراموازی اشاره می‌کند.

قضایای آشنای قابلیت انطباق مثلث‌ها در هندسه‌ی اقلیدسی در هندسه‌ی هذلولوی نیز شبیه دارد. در این‌جا چون دو ضلع از سه ضلع یک مثلث مجانبی بی‌پایان است، فقط دو زاویه و یک ضلع برای بررسی موجود است. از طرفی، دو مثلث مجانبی را قابل انطباق گوییم در صورتی که اضلاع متناهی آن‌ها و دو جفت زاویه‌ی نظیرشان قابل انطباق باشند.

قضیه ۳۷ ه. اگر پاره‌خط AB با پاره‌خط $A'B'$ و $\angle BA\Omega$ با $\angle B'A'\Omega'$ در مثلث‌های مجانبی $\Delta AB\Omega$ و $\Delta A'B'\Omega'$ قابل انطباق باشند، آن‌گاه $\angle AB\Omega$ با $\angle A'B'\Omega'$ قابل انطباق است.



شکل ۲۷-۲

اثبات. فرض کنیم $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ نباشد. خصوصاً فرض می‌کنیم $\angle AB\Omega$ از $\angle A'B'\Omega'$ بزرگ‌تر است. گیریم C در سمتی از AB که موازی‌های جهت‌دار هستند طوری باشد که $\angle ABC \cong \angle A'B'\Omega'$ (شکل ۲۷-۲). بنابر قضیه ۳۳ هـ BC ضلع $A\Omega$ را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. روی $A'\Omega'$، D' را طوری می‌یابیم که پاره‌خط AD با پاره‌خط $A'D'$ قابل انطباق باشد. $B'D'$ را می‌سازیم. آن‌گاه: $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$ بنابراین: $\angle A'B'D' \cong \angle ABD$. اما $\angle ABD \cong \angle A'B'\Omega'$ و در نتیجه: $\angle A'B'D' \cong \angle A'B'\Omega'$ و $B'D' = B'\Omega'$ اما این یک تناقض است در نتیجه $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$. □

دو قضیه‌ی قابل انطباق دیگر نیز برای مثلث‌های مجانبی برقرارند (تمرین‌های ۴ و ۵).

قضیه ۳۸ هـ. در مثلث‌های مجانبی $\Delta AB\Omega$ و $\Delta A'B'\Omega'$ اگر $\angle BA\Omega \cong \angle B'A'\Omega'$ و $\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega'$ آن‌گاه پاره‌خط AB با پاره‌خط $A'B'$ قابل انطباق است.

قضیه ۳۹ هـ. در مثلث‌های مجانبی $\Delta AB\Omega$ و $\Delta A'B'\Omega'$ اگر پاره‌خط AB با پاره‌خط $A'B'$ قابل انطباق باشد؛ همچنین: $\angle AB\Omega \cong \angle BA\Omega$ و $\angle A'B'\Omega' \cong \angle B'A'\Omega'$، آن‌گاه
$\angle AB\Omega \cong \angle A'B'\Omega' \cong \angle BA\Omega \cong \angle B'A'\Omega'$

این قضایای مثلث مجانبی به مفهوم یکتایی در هندسه‌ی هذلولوی منتهی می‌شود که آن را **زاویه‌ی توازی** می‌نامیم. در تعریف این مفهوم از نگاشتی بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت استفاده می‌شود.

گیریم PQ پاره‌خطی به طول h باشد، گیریم QS در Q بر PQ عمود و PQ خط موازی جهت‌دار بر QS مار بر P باشد (شکل ۲۸-۲). آن‌گاه قرار می‌دهیم: $a(h)=m\angle QPR$، که در آن $m\angle QPR$ معرف اندازهٔ $\angle QPR$ است.

با استفاده از قضایای ۳۷ هـ و ۲۹ هـ می‌توان نشان داد که نگاشت $a(h)$ خوش‌تعریف است. همان‌طور که در تمرین ۵ نشان داده شده است، این نگاشت یک به یک و همچنین عکس‌کننده‌ی ترتیب است [یعنی، اگر: $h<h'$ آن‌گاه $a(h)>a(h')$]، علاوه بر این، می‌توان نشان داد که $a(h)$ نگاشتی پیوسته است. این نتایج در قضیه‌ی زیر خلاصه شده است.

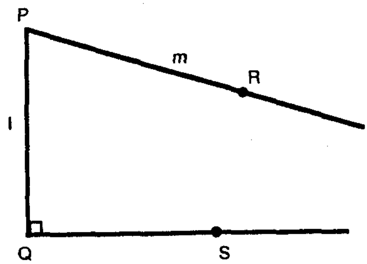
قضیه ۴۰ هـ. نگاشت $a(h)$ که در بالا توصیف شد، پیوسته، یک به یک و عکس‌کننده‌ی ترتیب است.

تعریف ۳-۲. هر زوایه با اندازه‌ی $a(h)$ را زاویه‌ی توازی h می‌نامند.

در "یک بررسی اجمالی هندسه" هاروارد‌ایوز[1] (۱۹۷۲) نشان داده است که هرگاه واحد طول همان فاصلهٔ نظیر به زاویه‌ی توازی $a = ۲arctan(e^{-1})$ انتخاب شود، آن‌گاه:

$$a(h) = ۲arctan(e^{-h})$$

این امر، منجر به خاصیت جالب دیگری از هندسه‌ی هذلولوی می‌شود که در



شکل ۲۸-۲

1. *Howard Eves (1972)*

هندسه‌ی اقلیدسی نیست. توجه کنید که در هندسه‌ی اقلیدسی و هذلولوی زوایا یک واحد اندازه‌گیری طبیعی دارند که می‌توان آن‌ها را به طور هندسی ساخت؛ چراکه زاویه‌های قائمه می‌توانند ساخته شوند. بدین دلیل، زاویه‌ها را در هر دو هندسه مطلق گویند. در هندسه‌ی اقلیدسی طول‌های مطلق نیستند؛ چراکه واحد طول طبیعی که به طور ساختاری با هندسه مرتبط باشد، موجود نیست؛ اما در هندسه‌ی هذلولوی طول‌ها مطلقند چراکه نگاشت $a(h)$ به هر زاویه (مثلاً ۴۵°) یک طول معین h نظیر می‌کند و همین‌که زاویه‌ای به اندازه‌ی ۴۵° ساخته شد، زاویه‌ی توازی نظیرش را می‌توان ساخت. [توجه کنید که در این عبارت، امکان ساخت یک خط عمود به یکی از دو خط متقاطع و موازی جهت‌دار به دیگری را پذیرفته است؛ یعنی، اگر خطوط l و m همانند شکل ۲۸-۲ در نقطه‌ی P متقاطع باشند، ساخت خط QS عمود بر l در Q و موازی جهت‌دار به m ممکن است. روش ساختن در ولف[1] (۱۹۴۵ صفحه‌ی ۹۹-۹۷) آمده است.]

تمرین:

۱- بیان کنید که چرا بیش از دو نقطه‌ی آرمانی روی یک خط هذلولوی وجود ندارد.

۲- قضیه ۳۴ ه را ثابت کنید.

۳- ادعای حالت ۲ در اثبات قضیه ۳۵ ه را با درنظر گرفتن حالتی که N سمت چپ B افتاده است کامل کنید.

۴- قضیه ۳۸ ه را ثابت کنید.

1. Wolfe

۵- قضیه ۳۹ ه را ثابت کنید.

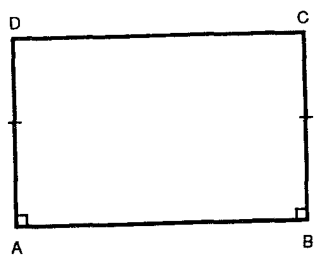
۶- ثابت کنید اگر: $h<h'$، آن‌گاه $a(h)>a(h')$

۷- ثابت کنید در هر مثلث مجانبی، مجموع اندازه‌های دو زاویه در رؤوس معمولی آن از $180°$ کم‌تر است. [راهنمایی: از قضیه ۳۵ ه استفاده کنید.]

۶-۲. هندسه‌ی هذلولوی - چهارضلعی‌های ساکری[1]

دومین شکل مهم در هندسه‌ی هذلولوی چهارضلعی ساکری (شکل ۲۹-۲) است، که به احترام تلاش‌های جیرولاموساکری که تقریباً هندسه نااقلیدسی را کشف کرد، چنین نامگذاری شده است.

تعریف ۴-۲. چهارضلعی ساکری یک چهارضلعی $ABCD$ است با دو زاویه‌ی قائمه‌ی مجاور در A و B و دو ضلع $AD\cong BC$. ضلع AB را **قاعده** و ضلع DC را **اوج** گویند.



شکل ۲۹-۲

1. *Saccheri*

به زودی خواهیم دید که یکی از نتایج بنداشت هذلولوی این است که زوایای C و D در این شکل، برخلاف هندسه‌ی اقلیدسی قائمه نیستند؛ اما چهارضلعی‌های ساکری خواص مشترکی در هندسه‌ی اقلیدسی و هذلولوی دارند که فقط از چهار اصل متعارف اول اقلیدس نتیجه می‌شوند؛ دو تا از این خواص مشترک، در قضیه ۴۱ هـ و فرع ۱ قضیه ۴۲ هـ آمده است.

قضیه ۴۱ هـ. خطی که اوساط قاعده و اوج یک چهارضلعی ساکری را به هم وصل می‌کند بر هردوی آن‌ها عمود است.

اثبات. تمرین ۱ را ببینید.

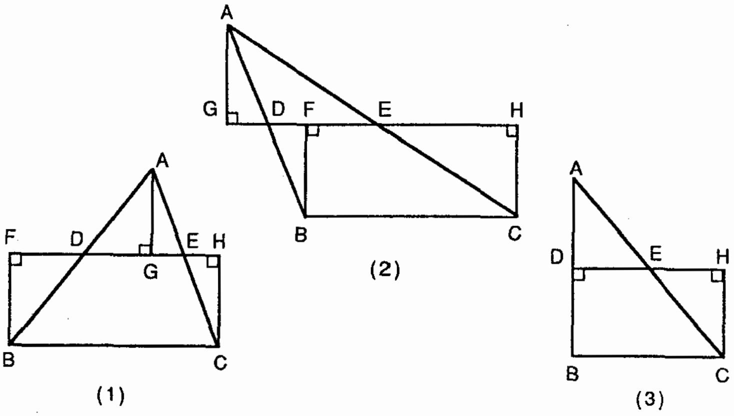
فرع. قاعده و اوج یک چهارضلعی ساکری فراموازیند.

قضیه ۴۲ هـ. زوایای اوج یک چهارضلعی ساکری اولاً قابل انطباق ثانیاً حاده‌اند.

اثبات. تمرین ۳ را ببینید.

همان‌طور که قبلاً تأکید شد، اثبات قسمت ثانیاً وابسته به بنداشت هذلولوی است. در هندسه‌ی اقلیدسی، این زوایا قائمه‌اند؛ در صورتی که در هندسه‌ی بیضوی این زوایا منفرجه‌اند. درحقیقت، قضیه ۴۲ هـ هم‌ارز بنداشت هذلولوی است؛ در صورتی که صورت اقلیدسی آن هم‌ارز اصل متعارف توازی اقلیدس است. این قضیه یکی از برجسته‌ترین نتایج هندسه‌ی هذلولوی را باعث می‌شود؛ یعنی، مجموع زوایای هر مثلث کم‌تر از 180° است. همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید مجموع زوایای مثلث‌ها حتی ثابت نیست.

قضیه ۴۳ هـ. مجموع زوایای هر مثلث کم‌تر از دو زاویه‌ی قائمه است.



شکل ۳۰-۲

اثبات. فرض کنیم ΔABC مثلثی دل‌خواه با قاعدهٔ BC باشد. گیریم D و E به ترتیب نقاط وسط اضلاع AB و AC باشند. همچنین گیریم BF، AG و CH عمود وارد از B، A و C بر DE باشند. در این صورت همچنان که در تمرین ۵ نشان داده شده است سه حالت ممکن وجود دارد (شکل ۳۰-۲).

حالت ۱. چون $\angle BDF \cong \angle ADG$ (۱۵)، نتیجه می‌شود $\Delta BDF \cong \Delta ADG$ و بدین ترتیب، $\angle FBD \cong \angle GAD$ و پاره‌خط BF با پاره‌خط AG قابل انطباق است (۲۶). به طور مشابه $\angle HCE \cong \angle GAE$ و پاره‌خط AG با پاره‌خط CH قابل انطباق. از این رو، پاره‌خط BF با CH قابل انطباق است و چهار ضلعی $BFHC$ یک چهارضلعی ساکری است؛ بنابر قضیه ۴۲ ه، $\angle FBC \cong \angle HCB$ و هردو حاده‌اند؛ بنابراین، مجموع آن‌ها کم‌تر از دو قائمه است؛ اما:

$$\begin{aligned} \angle FBC + \angle HCB &= \angle FBD + \angle DBC + \angle HCE + \angle ECB \\ &= \angle GAB + \angle ABC + \angle GAE + \angle ACB \\ &= \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB \end{aligned}$$

و نتیجه این که مجموع زوایای ΔABC کم‌تر از دو قائمه است.

حالت‌های ۲ و ۳. تمرین ۶ را ببینید. □

در اثبات قبل گفته می‌شود ΔABC هم‌ارز چهارضلعی $BFHC$ است.
در زیر چند فرع بلافاصل این قضیه آمده است.

فرع ۱. مجموع زوایای یک چهارضلعی کم‌تر از چهار قائمه است.

فرع ۲. دو خط بیش از یک عمود مشترک نمی‌توانند داشته باشند.

فرع ۳. خطوطی که در همه‌جا به یک فاصله باشند، وجود ندارند.

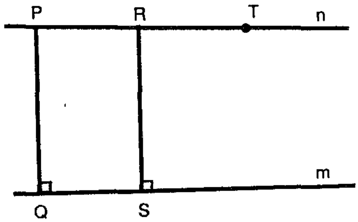
همان‌طور که در فرع ۳ بیان شد، خطوط هیچ‌گاه هم فاصله نیستند. در عوض چنان که در قضیه‌ی بعد می‌آید فاصله‌ی بین دو موازی جهت‌دار از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند.

قضیه ۴۴ ه. فاصله عمودی یک نقطه بر یکی از دو موازی جهت‌دار تا خط دیگر هرگاه نقطه در جهت توازی حرکت کند، کاهش می‌یابد.

اثبات. گیریم خطوط n و m موازی جهت‌دار راست باشند. نقاط P و R را روی n انتخاب می‌کنیم (شکل ۳۱-۲). عمودهای PQ و RS را بر m به ترتیب در P و R رسم می‌کنیم. (فرض می‌کنیم که R طرف راست PQ باشد) کافی است نشان دهیم $m(RS)<m(PQ)$ گیریم T طرف راست R باشد. حال: $m(\angle PRS)+m(\angle SRT)=180^\circ$ و بنابر فرع ۱، قضیه ۴۳ ه $m(\angle QPR)+m(\angle PRS)<180^\circ$ بدین ترتیب $m(\angle QPR)<m(\angle SRT)$.
بنابراین:

$m(PQ)=a^{-1}(m\angle QPR)>a^{-1}(m\angle SRT)=m(RS)$. □

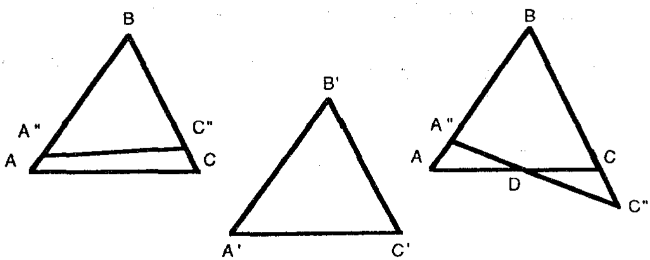
قضیه ۴۵ ه. اگر سه زاویه‌ی مثلثی به ترتیب با سه زاویه‌ی مثلث دیگری قابل انطباق باشند، آن‌گاه مثلث‌ها قابل انطباقند.



شکل ۳۱-۲

اثبات. گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ دو مثلث با زوایای نظیر قابل انطباق باشند. حال، اگر یک زوج از اضلاع نظیر قابل انطباق باشند، مثلث‌ها قابل انطباقند (گزاره ۲۶). از این رو، می‌پذیریم که هیچ زوج از اضلاع نظیر آن‌ها قابل انطباق نباشند. خصوصاً می‌پذیریم $AB \neq A'B'$ و علاوه براین $m(AB) > m(A'B')$؛ بنابراین، باید A'' روی AB طوری پیدا می‌کنیم که $A''B \cong A'B'$ و روی BC، C'' طوری پیدا می‌شود که $BC'' \cong B'C'$ (شکل ۳۲-۲). حال، بنابر گزاره ۴، $\Delta A''BC' = \Delta A'B'C'$. بنابراین: $\angle BA''C'' \cong \angle B'A'C'$ و $\angle BC''A'' \cong \angle B'C'A'$. بدین ترتیب $\angle BA''C'' \cong \angle BAC$ و $\angle BC''A'' \cong \angle BCA$.

حالت ۱. C بین B و C'' است، آنگاه بنابر بنداشت پاش، $A''C''$، AC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند؛ و در $\Delta DCC''$، داریم $\angle CC''D \cong \angle BCD$؛ اما $\angle BCD$ یک زوایه‌ی خارجی است و این با قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی تناقض دارد.



شکل ۳۲-۲

حالت ۲. C'' بین B و C است. در این صورت $A''ACC'$ یک چهارضلعی است و

$$
\begin{aligned}
&m\angle C''A''A + m\angle A''AC + m\angle ACC'' + m\angle CC''A'' \\
&= (180 - m\angle BA''C'') + m\angle A''AC + m\angle ACC'' + (180 - m\angle BC''A'') \\
&= 180 - m\angle A''AC + m\angle A''AC + m\angle ACC'' + 180 - m\angle C''CA \\
&= 360^\circ
\end{aligned}
$$

و این موضوع با فرع ۱ از قضیه ۴۳ هـ تناقض دارد؛ بنابراین: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

یادآوری می‌کنیم که در هندسه‌ی اقلیدسی دو مثلث را متشابه گویند، اگر یک تناظر یک به یک بین رؤوس دو مثلث طوری برقرار باشد که زوایای نظیر قابل انطباق و طول اضلاع نظیر متناسب باشند. اما در قضیه‌ی قبل مشخص شد که در هندسه‌ی هذلولوی دو مثلثی که در این شرایط صدق کنند قابل انطباقند. بدین ترتیب، در هندسه‌ی هذلولوی مثلث‌های متشابه و غیرقابل انطباق نداریم.

تمرین:

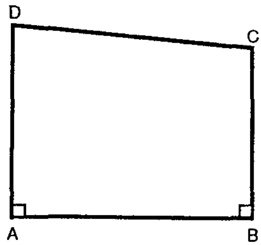
۱- قضیه ۴۱ هـ را ثابت کنید.

۲- فرع قضیه ۴۱ هـ را ثابت کنید.

۳- قضیه ۴۲ هـ را ثابت کنید [راهنمایی: برای اثبات ثانیاً موازی‌های جهت‌دار راست به AB در C و D را رسم کنید و قضیه ۳۵ هـ را برای مثلث مجانبی $\Delta CD\Omega$ به کار برید.]

۴- ثابت کنید قضیه ۴۲ هـ هم‌ارز بنداشت هذلولوی است.

۵- نشان دهید در مثلث ΔABC که D و E به ترتیب نقاط وسط AB و AC هستند،



شکل ۳۳-۲

عمودهای وارد به DE از A و B باید برهم منطبق یا در دو طرف AB باشند. (بدین ترتیب، همچنان که در شکل ۳۰-۲ نشان داده شده، فقط سه حالت ممکن وجود دارد.)

۶- حالت‌های ۲ و ۳ در قضیه ۴۳ ه را ثابت کنید.

۷- چرا در هندسه‌ی هذلولوی مربع یا مستطیل وجود ندارد.

۸- در شکل ۳۳-۲ نشان دهید اگر $AD>BC$ آنگاه $m(\angle BCD)>m(\angle ADC)$.

۲-۷. هندسه‌ی هذلولوی - مساحت مثلث‌ها

در بخش قبل دیدیم که در هندسه‌ی هذلولوی مجموع زوایای هر مثلث از 180° کم‌تر بود و مثلث‌های متشابه نداریم. حال نشان خواهیم داد که در این هندسه، مساحت یک مثلث توسط مجموع زوایایش مشخص می‌شود. ولی قبل از به‌کارگیری قضایای لازم احتیاط آن است که بنداشت‌هایی که یک تابع مساحت باید در آن صدق کند را یادآوری کنیم.

بنداشت‌های مساحت:

م ۱. مساحت هر مجموعه باید نامنفی باشد.
م ۲. مساحت مجموعه‌های قابل انطباق باید یکی باشند.
م ۳. مساحت اجتماعی از مجموعه‌های جدا از هم باید با مجموع مساحت آن مجموعه‌ها مساوی باشد.

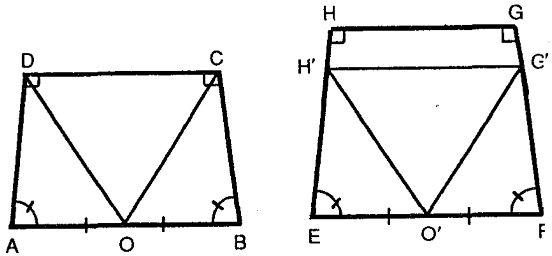
دنباله‌ای از قضایا را شروع می‌کنیم که ما را به نتیجه مطلوب رهنمون سازد؛ لزوماً به بررسی چهار ضلعی‌های ساکری برمی‌گردیم.

قضیه ۴۶ ه. دو چهارضلعی ساکری با اوج‌ها و زوایای اوج قابل انطباق، قابل انطباقند.

اثبات. گیریم $ABCD$ و $EFGH$ دو چهارضلعی ساکری با $AB\cong EF$ و $\angle DAB\cong\angle HEF\cong\angle EFG\cong\angle ABC$ باید نشان دهیم که $AD\cong EH$ (نتیجتاً $BC\cong FG$) و $DC\cong HG$.

قسمت ۱. $AD\cong EH$. فرض کنیم که این‌گونه نباشد؛ و مثلاً $m(AD)<m(EH)$ را H' روی EH و G' را روی FG طوری می‌یابیم که $EH'\cong AD$ و $FG'\cong BC$، $H'G'$ را رسم می‌کنیم (شکل ۳۴-۲). گیریم O و O' به ترتیب نقاط وسط AB و EF باشند DO، CO، $H'O'$ و $G'O'$ را رسم می‌کنیم. به وضوح $\Delta DAO\cong\Delta H'EO'$ و $\Delta OCB\cong\Delta O'G'F$. بدین ترتیب $DO\cong H'O'$ و $CO\cong\Delta O'G'$ و $\angle DOC\cong\angle H'O'G'$؛ بنابراین: $\Delta DOC\cong\Delta H'O'G'$. آن‌گاه $\angle EH'G'\cong\angle ADC$ و هر دو زاویه قائمه‌اند. به طریق مشابه $\angle FG'H'\cong\angle BCD$ و هردو قائمه‌اند؛ بنابراین $\angle HH'G'$ و $\angle GG'H'$ نیز قائمه‌اند. بدین ترتیب، چهار ضلعی $HH'G'G$ چهار زاویه‌ی قائمه دارد که با فرع ۱ از قضیه ۴۳ ه تناقض دارد. بدین سبب: $AD\cong EH$.

قسمت ۲. $DC\cong HG$. تمرین ۳ را ببینید. □



شکل ۳۴-۲

با این نتیجه، می‌توان صورت خاصی از قضیه کلی مساحت را برای مثلث‌ها ثابت کرد.

قضیه ۴۷ هـ. دو مثلث با مجموع زوایای یکسان و یک زوج ضلع قابل انطباق، مساحت یکسان دارند.

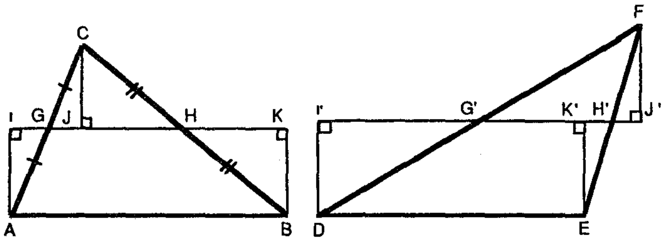
اثبات. گیریم ΔABC و ΔDEF با مجموع زوایای یکسان بوده و فرض کنیم $AB\cong DE$ گیریم G و H به ترتیب نقاط وسط AC و BC باشند. GH را می‌سازیم. گیریم I، J و K به ترتیب پای عمودهای به GH از A، C و B باشند همچنان که در اثبات قضیه ۴۳ هـ دیدیم سه حالت ممکن است. در حالت نشان داده شده در شکل ۳۵-۲ ، $\Delta AIG\cong\Delta CJG$ و $\Delta CJH\cong\Delta BKH$. بنابراین $IA\cong KB$ و $AIKB$ یک چهارضلعی ساکری است. پس بنا بر بنداشت‌های مساحت به وضوح مساحت (ΔABC)= مساحت $(AIKB)$.

علاوه‌بر این: $m(\angle IAB)=m(\angle CAB)+m(\angle GCJ)$ و $m(\angle KBA)=m(\angle CBA)+m(\angle HCJ)$. همچنین

$$m(\angle CAB)+m(\angle CBA)+m(\angle GCJ)+m(\angle HCJ)=m(\angle CAB)+m(\angle CBA)+m(\angle ACB)$$

بنابراین، چون $AIKB$ یک چهارضلعی ساکری است،

$$m(\angle IAB)=m(\angle KBA)=\frac{1}{2}[m(\angle CAB)+m(\angle CBA)+m(\angle ACB)].$$ □



شکل ۳۵-۲

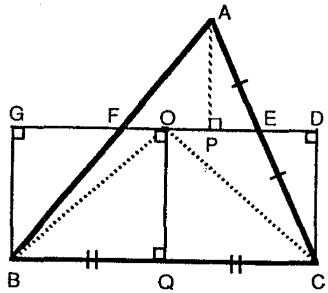
همچنان که در تمرین ۴ خواسته شده، اثبات‌های مشابه برای دو حالت دیگر نشانگر این است که یک مثلث و چهارضلعی ساکری هم‌ارزش همواره یک مساحت دارند و علاوه بر این، مجموع زوایای مثلث با مجموع زوایای اوج چهارضلعی ساکریِ هم‌ارزش، برابر است.

تکمیل همان‌ساختار روی DEF یک‌چهارضلعی ساکری $I'DEK'$ را باعث‌می‌شود که: مساحت (ΔDEF) = مساحت $(I'DEK')$. همچنین $m(\angle DEK')=\frac{1}{۲}[m(\angle FDE)+m(\angle FED)+m(\angle DFE)]$. اما بنابر این فرض و آنچه پیش از این آمد، مجموع زوایای اوج این دو چهارضلعی ساکری قابل انطباقند و چون $AB\cong DE$ بنا بر قضیه ۴۶ هـ نتیجه می‌شود که: $I'DEK'\cong AIKB$، پس مساحت$(AIKB)$=مساحت $(I'DEK')$، و ازاین‌رو، مساحت(ΔDEF)=مساحت(ΔABC).

برای اثبات قضیه ۴۸ هـ، صورت تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی قبل، ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. در ΔABC اگر EF بر عمود منصف BC عمود بوده و AC را در نقطه‌ی وسطش قطع کند، آن‌گاه AB را نیز در نقطه‌ی وسطش قطع می‌کند.

اثبات. همانند اثبات قضیه ۴۳ هـ باز سه‌حالت موجود است. برای حالت اول می‌توان شکل ۳۶-۲ را برای تکمیل اثبات به‌کار برد و بحث مشابهی را در دو حالت دیگر به‌کار گرفت.□

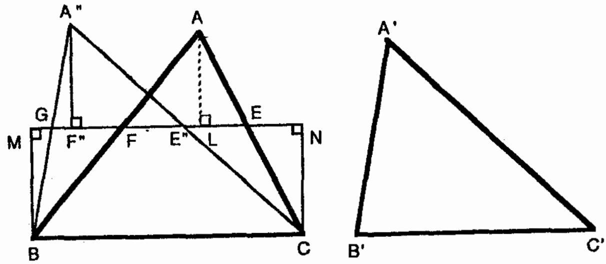


شکل ۳۶-۲

قضیه ۴۸ ه. هردو مثلث، با مجموع زوایای یکسان مساحت‌های یکسان دارند.

اثبات. گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ دو مثلث با مجموع زوایای یکسان باشند. بدون از دست دادن کلیّت فرض می‌کنیم که $m(A'C')>m(AC)$ (توجه کنید که اگر یک زوج از اضلاع قابل انطباق باشند، حکم فوراً از قضیه ۴۷ ه نتیجه می‌شود.) همانند اثبات قضیه ۴۷ ه، چهار ضلعی ساکری روی BC را می‌سازیم (شکل ۳۷-۲). سپس گیریم E'' روی FE طوری باشد که $m(CE'')=\frac{1}{2}m(A'C')$. E'' بر E یا N منطبق نخواهد شد؛ زیرا $m(CN)<\frac{1}{2}m(AC)<\frac{1}{2}m(A'C')$ پاره‌خط CE'' را رسم می‌کنیم و تا نقطه‌ی A'' امتداد می‌دهیم، طوری که $E''A''\cong CE''$ پاره‌خط $A''B$ را رسم می‌کنیم. حال، گیریم F'' پای عمود به MN از A'' باشد. بنابر قضیه ۴۱ ه FE بر عمودمنصف BC عمود است و $A''C$ را در نقطه‌ی وسطش قطع می‌کند و بنابر لم قبل $A''B$ را نیز در نقطه‌ی وسطش G' قطع خواهد کرد. بنابراین، $\Delta A''E''F''\cong\Delta CE''N$ و $\Delta BMG\cong\Delta A''F''G$ بدین ترتیب: مساحت$(MBCN)$=مساحت$(\Delta A''BC)$. اما همچنان که در اثبات قضیه ۴۷ ه آمد، مساحت$(MBCN)$=مساحت(ΔABC). و ازاین‌رو، مساحت(ΔABC)=مساحت$(\Delta A''BC)$. علاوه بر این، همچنان که در اثبات قضیه ۴۷ ه آمد،

مجموع زوایای $\Delta A''BC$ $=m(\angle MBC)+m(\angle BCN)=$مجموع زوایای ΔABC. بنابراین، مجموع زوایای $\Delta A''BC$=مجموع زوایای $\Delta A'B'C'$، و $A''C\cong A'C'$. لذا بنابر قضیه ۴۷ ه،



شکل ۳۷-۲

مساحت $(\Delta A''BC)$ = مساحت $(\Delta A'B'C')$ و بدین ترتیب

مساحت $(\Delta A'B'C')$ = مساحت (ΔABC). □

بدین ترتیب، برخلاف هندسه‌ی اقلیدسی که مساحت مثلث توسط طول قاعده و ارتفاعش مشخص می‌شود، قضیه‌ی قبل، بیانگر این است که مساحت یک مثلث در هندسه‌ی هذلولوی توسط مجموع زوایایش کاملاً مشخص می‌شود. ارتباط بین مساحت و مجموع زوایا برای مثلث‌ها برحسب کاستی یک مثلث بیان می‌شود.

تعریف ۴-۲. کاستی (زاویه‌ای) یک مثلث عبارت است از اختلاف عددی، مجموع زوایای مثلث − ۱۸۰ ، یعنی:

$$\Delta ABC \text{ کاستی زاویه‌ای} = 180 - [m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + m(\angle CAB)]$$

قضیه ۴۹ هـ. اگر یک مثلث توسط خط واصل از یک رأس به نقطه‌ای روی ضلع مقابل به دو مثلث تقسیم شود، کاستی مثلث اصلی برابر با مجموع کاستی‌های دو مثلث کوچک‌تر است.

اثبات. تمرین ۶ را ببینید.

از قضیه ۴۸ هـ نتیجه می‌شود که مساحت یک مثلث را می‌توان بـه عـنوان تـابعی از مجموع زوایای یک مثلث یا کـاستی زاویـه‌ای مـثلث درنـظر گـرفت. از قـضیه ۴۹ هـ و بنداشت‌های مساحت، تابع‌مساحت A باید حافظ جمع کاستی زاویه‌ای باشد. چون این تابع A باید پیوسته باشد یک نتیجه از حسابان مقدماتی بیانگر این است که عدد ثابت Kای وجود دارد که (کاستی (ΔABC)) $K^۲$=مساحت (ΔABC)
این نتیجه در قضیه‌ی زیر خلاصه شده است:

قضیه ۵۰ هـ. عدد ثابت Kای وجود دارد که:

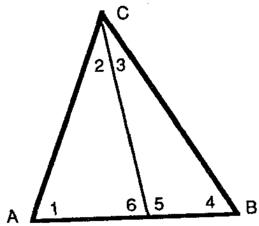
$$\text{مساحت}(\Delta ABC)=K^۲\{۱۸۰-[m(\angle ABC)+m(\angle BCA)+m(\angle CAB)]\}$$

تمرین:

۱- تنها با استفاده از اصول متعارف ۱ تا ۴ (و گزاره‌های ۱ تا ۲۸) ثابت کنید که: اگر مجموع زوایای مثلث برای همه مثلث‌ها یکسان باشد، آنگاه آن مجموع باید ۱۸۰° باشد. [**راهنمایی:** مثلثی را درنظر بگیرید که توسط خط واصل به یک رأس و نقطه‌ی روی ضلع مقابل به دو مثلث افراز شده است.] این نتیجه، درباره‌ی مثلث‌ها در هندسه‌ی هذلولوی چه چیزی را بیان می‌کند؟

۲- اثبات زیر درباره‌ی وجود یک مثلث با مجموع زوایای ۱۸۰° با اجـازه‌ی د.س. هیث وشرکا از کتاب "اشتباهاتی در اثبات‌های هندسی" اثر دوبونو (۱۹۶۳) آمده است. (آ) آیا در این اثبات از اصل متعارف توازی استفاده شده است؟ (ب) اشتباه این اثبات چیست؟

ادعا. مثلثی با مجموع زوایای ۱۸۰° موجود است.



شکل ۳۸-۲

اثبات. چون مجموع یک مثلث کوچک‌تر یا مساوی ۱۸۰° است. گیریم ΔABC (شکل ۳۸-۲) مثلثی با بیش‌ترین مجموع زوایا مثلاً a باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $a=۱۸۰^\circ$ $\angle ۱+\angle ۲+\angle ۶\le a$ و $\angle ۳+\angle ۴+\angle ۵\le a$ (چرا؟) بنابراین: $\angle ۱+\angle ۲+\angle ۳+\angle ۴+\angle ۵+\angle ۶\le ۲a$. اما $\angle ۵+\angle ۶=۱۸۰^\circ$ و $\angle ۱+\angle ۲+\angle ۳+\angle ۴=a$؛ بنابراین $a+۱۸۰^\circ\le ۲a$ یا $a\ge ۱۸۰^\circ$ بدین ترتیب $a=۱۸۰^\circ$

۳- قسمت ۲ در اثبات قضیه ۴۶ ه را بررسی کنید.

۴- ثابت کنید یک مثلث و چهارضلعی ساکری هم‌ارزش یک مساحت دارند و مجموع زوایای مثلث با مجموع زوایای اوج چهارضلعی هم‌ارزش یکی است.

۵- لمی را که در اثبات قضیه ۴۸ ه از آن استفاده شد ثابت کنید.

۶- قضیه ۴۹ ه را ثابت کنید.

۷- ثابت‌کنید: مجموع زوایای یک n ضلعی محدب کوچک‌تر از $۱۸۰^\circ(n-۲)$ است.

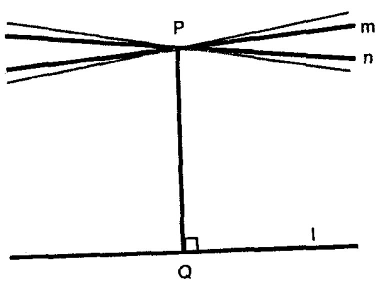
۸-۲. هندسه‌ی هذلولوی - فراموازی‌ها

در این بخش پایانی که مربوط به هندسه‌ی هذلولوی است، برآنیم بررسی مختصری از خطوط موازی نوع دوم، یعنی فراموازی‌ها را ارائه کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر l یک خط و P نقطه‌ای ناواقع بر آن باشد، آن‌گاه خط m مار بر P را فراموازی با l گویند؛ اگر l و m یکدیگر را قطع نکرده و موازی جهت‌دار نباشند. همانند حالت موازی‌های جهت‌دار تعریف فراموازی‌ها از نقطه‌ی P مستقل بوده و رابطه‌ای متقارن است. این خواص، در قضایای زیر فرمول‌بندی شده‌اند و می‌توان با اثبات‌هایی غیرمستقیم آن‌ها را ثابت کرد.

قضیه ۵۱ ه. اگر خطی فراموازی با خط مفروض و مار بر نقطه‌ی مفروضی باشد در هر نقطه‌ی دیگرش نیز فراموازی با خط مفروض است.

قضیه ۵۲ ه. اگر خطی با خط دومی فراموازی باشد، آن‌گاه دومی نیز با اولی فراموازی است.

با وجود این، برخلاف توازی جهت‌دار، فراموازی بودن ترایایی نیست. خط l و نقطه P را درنظر بگیرید؛ هر خط واقع در درون زوایای متقابل به رأس تشکیل شده توسط موازی‌های جهت‌دار با l مار بر P با l فراموازیند. خصوصاً هردوتا از این خطوط مثلاً m و n هردو فراموازی با lاند ولی چون m و n در P متقاطعند فراموازی نیستند (شکل ۳۹-۲).

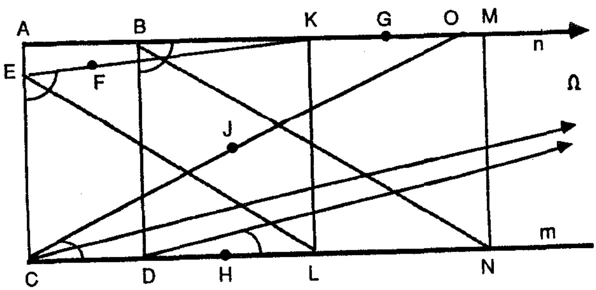


شکل ۳۹-۲

دو خاصیت آشنا در هندسه‌ی اقلیدسی عبارتند از: (۱) دو خط موازی تعداد نامتناهی عمود مشترک دارند. (۲) فاصله‌ی (عمودی) بین دو خط موازی ثابت است (یعنی، خطوط موازی در هرجا به یک فاصله‌اند). در هندسه‌ی هذلولوی پیش از این دیدیم که خطوط موازی جهت‌دار عمود مشترک ندارند و فاصله‌ی عمودی بین خطوط موازی جهت‌دار در جهت توازی کاهش می‌یابد (قضیه ۴۴ ه). علاوه بر این، یکی از نتایج قضیه ۴۳ ه بیانگر این مطلب بود که دو خط فراموازی بیش از یک عمود مشترک ندارند. در قضیه‌ی زیر وجود یک عمود مشترک بین دو خط فراموازی ثابت شده است. چون اثبات قضیه تا اندازه‌ای پیچیده است، ممکن است به این نتیجه برسید که برای راهنمایی ضمن مطالعه، هرجا به نقطه یا خط خاصی برخورد کردید، آن‌ها را یکی‌یکی رسم کنید.

قضیه ۵۳ ه. دو خط فراموازی یک عمود مشترک دارند.

اثبات. گیریم n و m فراموازی باشند. فرض کنیم A و B دو نقطه روی n بوده AC و BD را عمود بر m در C و D رسم می‌کنیم. حال، اگر پاره‌خط AC و BD قابل انطباق باشند، $ABCD$ یک چهارضلعی ساکری است (شکل ۴۰-۲) و عمود مشترک، خط واصل نقاط وسط AB و CD است. اگر AC و BD قابل انطباق نباشند، فرض می‌کنیم $m(AC)>m(BD)$ E را روی AC طوری می‌یابیم که $CE\cong BD$. در E در سمتی از AC که BD هست EF را طوری رسم می‌کنیم که $\angle CEF\cong\angle DBG$، که نقطه G روی n طوری



شکل ۴۰-۲

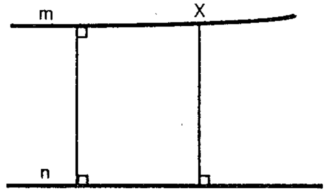
است که B بین A و G قرار دارد. نشان خواهیم داد EF خط n را قطع می‌کند. گیریم $C\Omega$ و $D\Omega$ موازی‌های جهت‌دار با n در جهت از A به B باشند گیریم H نقطه‌ای روی m باشد که D بین C و H قرار گیرد. آنگاه چون m با n فراموازی است، $C\Omega$ شامل نقاطی در درون $\angle ACH$ است و به همین ترتیب $D\Omega$ نیز شامل نقاطی در درون $\angle BDH$ است. حال، بنابر قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی برای مثلث مجانبی $m(\angle HD\Omega)>m(\angle HC\Omega)$. CJ را طوری می‌سازیم که $\angle JCH\cong\angle\Omega DH$. آنگاه CJ، n را در نقطه‌ای مانند O قطع خواهد کرد. حال، چون $EC\cong BD$، $\angle FEC\cong\angle GBD$ و $\angle ECJ\cong\angle BD\Omega$. EF با CJ موازی جهت‌دار است و از این‌رو نمی‌تواند پاره‌خط CO را قطع کند. بنابراین، EF باید پاره‌خط AO را در نقطه‌ی مثل K قطع کند. KL را عمود بر m رسم می‌کنیم. روی n و m در طرفی از BD که A نیست، M و N را طوری می‌یابیم که $BM\cong EK$ و $DN\cong CL$ MN را رسم می‌کنیم آنگاه $\Delta ECL\cong\Delta BDN$ و در نتیجه $\Delta EKL\cong\Delta BMN$ و بدین ترتیب: $KL\cong MN$ علاوه بر این: $m(\angle DNM)=m(\angle DNB)+m(\angle BNM)=m(\angle CLE)+m(\angle ELK)=۹۰^\circ$ بدین ترتیب $KMNL$ یک چهارضلعی ساکری است و خط واصل بین نقاط وسط پاره‌خط‌های KM و LN به n و m عمود است. □

فرع. دو خط فراموازی دقیقاً یک عمود مشترک دارند.

توجه کنید که در اثبات قضیه‌ی قبل وجود عمود مشترک ثابت شد ولی در عمل، برای ساخت آن نمی‌توان بدون ساخت موازی‌های جهت‌دار اقدام کرد. این ساخت عملی است و در ولف (۱۹۴۵) به طور مدلل انجام شده است.

حال سؤال مربوط به فاصله‌ی بین خطوط فراموازی را می‌توان برحسب عمود مشترک منحصربه‌فردشان پاسخ گفت. اثبات این قضیه را به عنوان تمرین واگذار کرده‌ایم.

قضیه ۵۴ ه. اگر X نقطه‌ی دلخواهی روی خط m که با n فراموازی‌ست باشد، آنگاه فاصله‌ی عمودی از X به n هرگاه بر عمود مشترک m و n منطبق شود به می‌نیمم خود خواهد رسید (شکل ۴۱-۲).



شکل ۴۱-۲

با این قضیه، معرفی هندسه‌ی هذلولوی را پایان می‌دهیم. ره‌یافت L همانند پیشرفت تاریخی موضوع بود؛ یعنی، با اصل متعارف پنجم اقلیدس شروع کردیم و سپس اصل متعارف پنجم (به شکل بنداشت پلی‌فایر) را با یک نفی آن به شکل بنداشت هذلولوی جای‌گزین کردیم. با این تغییر، هندسه‌ی جدیدی با خواص عجیب حاصل شد که تفاوت‌های اساسی با هندسه‌ی اقلیدسی داشت. در بخش بعد می‌خواهیم هندسه‌ای را بررسی کنیم که هنگام تعویض اصل متعارف پنجم اقلیدس با دومین صورت نفی ممکنش حاصل می‌شود.

تمرین:

۱- طرح هریک از موارد زیر را در مدل کلاین رسم کنید (برای هرکدام یک مدل رسم کنید).

(آ) دو خط متقاطع که هردو با خط سومی موازی جهت‌دارند.

(ب) دو خط متقاطع که هردو با خط سومی فراموازی‌اند.

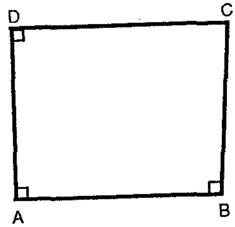
(پ) دو خط موازی جهت‌دار که هردو خط سومی را قطع می‌کنند.

(ت) دو خط موازی جهت‌دار که هردو موازی جهت‌دار با خط سومی هستند.

(ث) دو خط موازی جهت‌دار که هردو با خط سومی فراموازی‌اند.

(ج) دو خط فراموازی که هردو خط سومی را قطع می‌کنند.

(چ) دو خط فراموازی که هردو با خط سومی فراموازی‌اند.



شکل ۴۲-۲

۲- قضیه ۵۱ ه را ثابت کنید.

۳- قضیه ۵۲ ه را ثابت کنید.

۴- بدون استفاده از قضیه ۵۴ ه ثابت کنید که در شکل ۴۲-۲ ، $DC > AB$ (یک چنین چهارضلعی با سه زاویه قائمه به چهارضلعی لامبرت معروف است).

۵- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۴ ، ثابت کنید که اوج یک چهارضلعی ساکری از قاعده‌اش بزرگ‌تر است.

۶- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۴ قضیه ۵۴ ه را ثابت کنید.

۹-۲. هندسه‌ی بیضوی

نتایج بنداشت هذلولوی تماماً قبل از شروع مطالعه‌ی اصولی هندسه‌ی بیضوی بررسی شده بود. شروع مطالعه‌ی این هندسه‌ی غیراقلیدسی دوم می‌تواند به سال

۱۸۵۴ هنگام ایراد سخنرانی افتتاحیه‌ی گ.ب.ف.ریمان[1] در دانشگاه گوتینگن تحت عنوان «درخصوص فرضیاتی که زمینه‌ی اساس هندسه‌اند» برمی‌گردد.

همانند هندسه‌ی هذلولوی، یک دستگاه بنداشتی برای هندسه‌ی بیضوی از تعویض اصل متعارف پنجم یا شکل دیگرش بنداشت پلی‌فایر با یک نفی از آن حاصل می‌شود. در این حالت، این نفی به بنداشت بیضوی مشهور است.

بنداشت بیضوی. دو خط همواره متقاطعند.

به‌زودی روشن می‌شود که متأسفانه دستگاه بنداشتی، شامل این بنداشت و چهار اصل متعارف اول اقلیدس ناسازگارند؛ چراکه چهار اصل متعارف اولی اعتبار گزاره ۲۷ را، که مدعی وجود خطوط موازی (یعنی نامتقاطع) است، تضمین می‌کند. برای حصول یک دستگاه سازگار شامل بنداشت بیضوی که حتی‌المقدور خواص هندسه‌ی اقلیدسی را حفظ کند، اثبات اقلیدس از گزاره ۲۷ نباید معتبر باشد. بازدیدی از این اثبات (بخش ۲-۲ را ببینید) نشان می‌دهد که در آن از گزاره ۱۶ استفاده شده که در این گزاره نیز اقلیدس، از اصل متعارف دوم بی‌پایان بودن خط را استنباط کرد. اگر اصل متعارف ۲ بدین صورت تفسیر شود که فقط بیانگر بی‌مرز بودن خط باشد، و نه لزوماً بی‌پایان بودن آن، اثبات گزاره ۱۶ و بنابراین گزاره ۲۷ بی‌اعتبار است.

بدین ترتیب برای حصول یک هندسه‌ی نااقلیدسی سازگار شامل بنداشت بیضوی، باید اصل متعارف دوم اقلیدس به صورت زیر اصلاح شود:

اصل متعارف ′۲. یک خط متناهی (یعنی پاره‌خط) می‌تواند به طور پیوسته روی خط امتداد داده شود. خط حاصله بی‌مرز است ولی لزوماً بی‌پایان نیست.

حتی با این اصلاح نیز، دستگاه بنداشتی شامل چهار اصل متعارف اول و بنداشت

1. *G.B.F. Riemann*

بیضوی ناسازگار باقی می‌ماند؛ چراکه هنوز اثبات زیر برای وجود خط‌های موازی برقرار خواهد ماند.

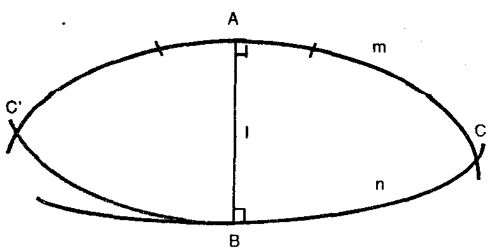
اثبات وجود خط‌های موازی. گیریم A و B دو نقطه روی خط l بوده و همچنین m و n موازی نیستند. گیریم C نقطه‌ی تقاطع آن‌ها باشد. C' را در طرفی از l که C نیست طوری می‌یابیم که پاره‌خط‌های AC و AC' قابل انطباق باشند (۳). $C'B$ را رسم می‌کنیم (شکل ۴۳-۲) آن‌گاه چون $\Delta ABC \cong \Delta ABC'$ و $\angle CBA \cong \angle C'BA$ (۴)، نتیجه می‌شود که $\angle C'BA$ نیز قائمه است. بدین ترتیب، بنابر گزارهٔ ۱۴ ، C'، B و C هم‌خطند، و از این‌رو m و n در دو نقطه‌ی متمایز C و C' همدیگر را قطع می‌کنند که یک تناقض است؛ بدین ترتیب m و n خطوطی موازی‌اند.

بنابراین، برای حصول یک دستگاه بنداشتی سازگار، شامل بنداشت بیضوی، اثبات قبل نیز باید معتبر نباشد. بعد از ملاحظاتی چند، مشخص می‌شود که فرضیات بیان شده‌ی زیر، در اثبات، به‌کار رفته است:

۱- یک خط صفحه را جدا می‌کند.

۲- دو نقطه‌ی متمایز روی یک خط منحصر به فرد واقعند.

بدین ترتیب، اثبات فوق بی‌اعتبار خواهد بود، اگر یکی از دو فرض بالا رد شود، لزوم رد یکی از این فرضیات به دو نوع هندسه‌ی بیضوی منتهی می‌شود. اگر فرض اول حفظ شده، فرض دوم رد می‌شود؛ یعنی، اگر دو نقطه‌ی متمایز لزوماً روی خط منحصربه‌فردی



شکل ۴۳-۲

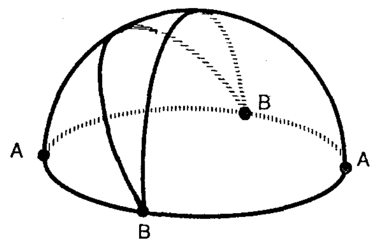
نباشند، هندسه‌ای معروف به هندسه‌ی بیضوی مضاعف حاصل خواهد شد. از طرف دیگر، با حفظ فرض دوم و رد فرض اول، یعنی، اگر بپذیریم که یک خط صفحه را جدا نمی‌کند. هندسه‌ای معروف به هندسه‌ی بیضوی تک‌حاصل خواهد شد. هر انتخابی همراه با اصلاح اصل متعارف ۲ ، دستگاهی اساساً مختلف با هندسه‌ی اقلیدسی را نتیجه می‌دهد. از این‌رو، بازیافت همه‌ی کارهای اقلیدس تقریباً غیرممکن است و باید مجموعه‌ی کاملاً جدیدی از بنداشت‌ها برای هردو هندسه‌ی تک و مضاعف مطرح شود. بنداشت‌هایی برای این هندسه‌ها را می‌توان در فصل ۷ و ۸، **"مقدمه‌ای به هندسه‌ی نااقلیدسی"** اثر **دیوید گانز**[1] (۱۹۷۳) یافت. چون مدل‌های هردو هندسه‌ی تک و مضاعف به سادگی در دست است با ملاحظه‌ی فهرستی از بعضی خواص اصلی هندسه می‌توانیم آشنایی نسبتاً زیادی با این هندسه‌ها پیدا کنیم. این خواص در لابه‌لای مدل‌هایی که در این‌جا توضیح داده خواهد شد، ظاهر می‌شوند؛ لذا می‌توانیم بدون ورود به یک سری اثبات‌های دقیق مزه‌ای از هندسه‌های بیضوی را بچشیم.

مدل‌های هندسه‌ی بیضوی تک و مضاعف

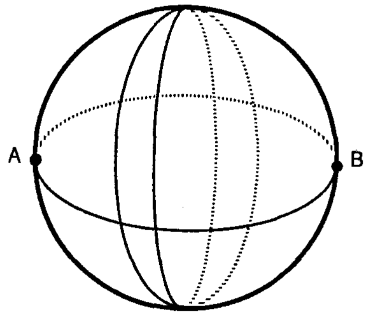
اصطلاح	تعبیر برای بیضوی مضاعف	تعبیر برای بیضوی تک
نقطه	نقاط روی سطح یک کرهٔ اقلیدسی	نقاط روی سطح یک نیم‌کرهٔ اقلیدسی اگر که نقاط روی لبه نباشند و نقاط روی لبه که در دوسوی یک قطر هستند را یکی می‌گیریم.
خط	دایره‌ی عظیمه	نیم‌دایره‌ی عظیمه
طول	طول اقلیدسی	طول اقلیدسی با اصلاح نتیجه‌شده ازقبل
زاویه	زاویه‌ی اقلیدسی	زاویه‌ی اقلیدسی
اندازه	اندازه	اندازه

(نمودار این دو مدل در شکل ۴۴-۲ و ۴۵-۲ داده شده است)

1. *David Gans*



شکل ۴۵-۲. مدل هندسه‌ی بیضوی تک



شکل ۴۴-۲ مدل هندسه‌ی بیضوی مضاعف

در مدل کروی قبل، خواص زیر از هندسه‌ی بیضوی مضاعف می‌شود.

خواص هندسه‌ی بیضوی مضاعف

۱- یک خط صفحه را جدا می‌کند.

۲- حداقل یک‌خط مار بر هر دو نقطه موجود است.

۳- هر زوج از خطوط دقیقاً در دو نقطه متقاطعند.

۴- یک ثابت مثبت k وجود دارد به‌طوری که فاصله‌ی بین دو نقطه هرگز از πk تجاوز نمی‌کند. دو نقطه با ماکزیمم فاصله را دو نقطه‌ی **متقابل** نامند.

۵- همه‌ی خطوط طولی برابر $۲\pi k$ دارند.

۶- نظیر هر نقطه یک نقطه‌ی متقابل منحصر به فرد وجود دارد.

۷- دو نقطه روی یک خط منحصر به فرد واقعند اگر و فقط اگر متقابل نباشند.

۸- همه‌ی خطوط مار بر یک نقطه‌ی مفروض از نقطه‌ی متقابل نقطه‌ی مفروض خواهند گذشت.

۹- همه‌ی خطوط عمود بر خطی مفروض، همدیگر را در یک جفت نقطه‌ی متقابل قطع می‌کنند. فاصله‌ی هریک از این نقاط تا هر نقطه‌ی خط مفروض $\frac{\pi k}{۲}$ است. این دو نقطه‌ی متقابل را قطب خط مفروض نامیده و خط را قطبی آن دو نقطه گویند.

۱۰- همه‌ی خطوط مار بریک نقطه بر قطبی آن نقطه عمودند.

۱۱- یک عمود منحصر به فرد به خطی مفروض مار بر یک نقطه‌ی داده شده وجود دارد؛ اگر و فقط اگر نقطه قطب خط نباشد.

۱۲- زوایای اوج یک چهارضلعی ساکری، قابل انطباق و منفرجه‌اند.

۱۳- مجموع زوایای هر مثلث از 180° بیش‌تر است.

۱۴- مساحت یک مثلث توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\text{مساحت}(\Delta ABC)=k^{2}[m(\angle ABC)+m(\angle BCA)+m(\angle CAB)-180^\circ]$$

به طریقی مشابه در مدل نیم‌کره‌ی اصلاح شده خواص زیر از هندسه‌ی بیضوی تک حاصل می‌شود.

خواص هندسه‌ی بیضوی تک

۱- یک خط صفحه را جدا نمی‌کند.

۲- حداقل یک خط از هر جفت نقطه می‌گذرد.

۳- هر زوج از خطوط دقیقاً در یک نقطه متقاطعند.

۴- یک ثابت مثبت k وجود دارد که فاصله‌ی بین دو نقطه از $\frac{\pi k}{2}$ تجاوز نمی‌کند. دو نقطه که یک خط را به قطعه‌های مساوی تقسیم می‌کنند، نقاط **متقابل** نامیده می‌شوند.

۵- روی یک خط مفروض نظیر هر نقطه یک نقطه متقابل روی آن خط موجود است.

۶- همه‌ی خطوط طولی برابر πk دارند.

۷- همه‌ی خطوط عمود بر خطی مفروض از یک نقطه عبور می‌کنند. فاصله‌ی این نقطه با هر نقطه از خط مفروض $\frac{\pi k}{2}$ است. این نقطه را **قطب** خط مفروض و خط را **قطبی** این نقطه نامند.

۸- همه‌ی خطوط مار بر یک‌نقطه بر قطبی آن نقطه عمودند.

۹- یک عمود منحصر به فرد بر خطی مفروض و مار بر یک نقطه داده شده موجود

است اگر و فقط اگر نقطه‌ی داده شده قطب خط مفروض نباشد.

۱۰- زوایای اوج یک چهارضلعی ساکری، قابل انطباق و منفرجه‌اند.

۱۱- مجموع زوایای هر مثلث از $^\circ$۱۸۰ بیش‌تر است.

۱۲- مساحت یک مثلث توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$(\Delta ABC)\ \text{مساحت} = k^{2}[m(\angle ABC)+m(\angle BCA)+m(\angle CAB)-180^\circ]$$

تمرین:

در هریک از تمرین‌های زیر شکلی در مدل کروی هندسه‌ی بیضوی مضاعف طرح کنید. فرض کنید شعاع مدل کروی r است. آن‌گاه با استفاده از اشکالتان به سؤالات پرسیده شده پاسخ دهید.

۱- (آ) یک مثلث با سه زاویه‌ی قائمه طرح کنید. (ب) طول اضلاع این مثلث چقدر است؟ (پ) چه کسری از رویهٔ کره توسط مثلث شما پوشیده می‌شود؟ (ت) مساحت مثلث شما چقدر است؟

۲- (آ) یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده را طرح کنید. (ب) کران بالای طول ضلع مقابل به زاویه‌ی حاده چقدر است؟

۳- (آ) مثلث قائم‌الزاویه‌ای با یک زاویه منفرجه طرح کنید. (ب) کران پایین ضلع مقابل به زاویه‌ی منفرجه چقدر است؟ (پ) کران بالای طول این ضلع چقدر است؟

۴- دومثلث با دو جفت زاویه‌ی قابل انطباق و یک جفت ضلع قابل انطباق را که روبه‌رو به یکی از جفت زاویه‌ی قابل انطباق است، طرح کنید. آیا این دو مثلث لزوماً قابل انطباقند.

۵- یک چهارضلعی ساکری طرح کنید. طول اوج و طول قاعده چگونه مقایسه می‌شود؟

۶- یک دایره در هندسه‌ی بیضوی مضاعف مجموعه‌ی نقاطی است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به فاصله‌ی ثابت (که شعاع نامیده می‌شود) است. (آ) دوایری با شعاع‌های $\rho<\frac{\pi r}{2}$، $\rho=\frac{\pi r}{2}$ و $\frac{\pi r}{2}<\rho<\pi r$ و $\rho=\pi r$ طرح کنید (توجه کنید که در مدل کروی فاصله در امتداد رویه‌ی کره اندازه گرفته می‌شود) (ب) چه عبارات دیگری برای توصیف دایره‌ای با شعاع $\frac{\pi r}{2}$ می‌توان به کار برد؟ با شعاع πr چه؟ (پ) توجه کنید که یک دایره با شعاع ρ و مرکز P را می‌توان به عنوان دایره‌ای به مرکز P' و شعاع ρ' نیز درنظر گرفت. چه ارتباطی بین ρ و ρ' وجود دارد؟ بین P و P' چه؟

۷- کوچک‌ترین nی که برای آن یک nضلعی متعامد در هندسه‌ی بیضوی مضاعف وجود دارد، چیست؟
(یک nضلعی متعامد یک nضلعی است که همه‌ی زوایای آن قائمه است)

۱۰-۲. اهمیت کشف هندسه‌های نااقلیدسی

توسعه‌ی هندسه‌ی نااقلیدسی به طور تاریخچه‌ای با کوشش برای اثبات اصل متعارف پنجم اقلیدس از روی چهار اصل متعارف اولش شروع شد در اوایل قرن نوزدهم، ریاضی‌دان، امکان استقلال اصل متعارف پنجم را پذیرفتند. این‌که این اصل متعارف به راستی مستقل است، برای نخستین بار در سال ۱۸۶۸ توسط اثوجینوبلترامی (۱۹۰۰-۱۸۳۵) با ارائه یک سری از مدل‌های هندسه‌ی هذلولوی، به ثبوت رسید. معروف‌ترین این مدل‌ها، مدل "پوانکاره" است که در بخش ۳-۲ معرفی شد. با تعابیر این مدل بنداشت‌های هندسه‌ی هذلولوی قضایایی در هندسه‌ی اقلیدسی خواهند شد.

بدین ترتیب سازگاری نسبی هندسه‌ی هذلولوی نشان داده شده و خصوصاً نشان‌گر این است که، اگر هندسه‌ی اقلیدسی سازگار باشد، هندسه‌ی هذلولوی نیز این‌طور است، و سرانجام سؤال استقلال اصل متعارف پنجم پاسخ داده شد!

پیشرفت هندسه‌ی نااقلیدسی نتایج فلسفی و ریاضی عمیقی دارد که تقریباً در ابتدای این فصل آمده است. ملاحظات مجرد این هندسه در حوزه‌های دیگر نیز نتایج مهمی دارد. "ریمان[۱]" در سخنرانی معروف سال ۱۸۵۴ خود روشی را مطرح کرد که خالق تعداد بی‌پایانی از هندسه‌ها بود، و انیشتن[۲] یکی از این هندسه‌های ریمانی را برای مطالعه‌اش در نسبیت انتخاب کرد. توصیف این هندسه و استفاده‌ی انیشتن از آن در مقاله‌ای از پنرُس[۳] (۱۹۷۸) آمده است. علاوه بر این تحقیقات به عمل‌آمده از جنگ جهانی دوم تاکنون‌بیانگر این است که فضای بصری دوربین‌های دوچشمی هذلولوی است. توصیف این تحقیق در ترودیو[۴] (۱۹۸۷) و مقالات اوگل[۵] (۱۹۶۲) و ذاگ[۶] (۱۹۸۰) آمده است.

1. Riemann
2. Einstein
3. Penrose
4. Trudeau
5. Ogle
6. Zage

جدول (۱-۲) : مقایسه‌ای از هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی

	اقلیدسی	هذلولوی	بیضوی	
دو خط متمایز همدیگر را قطع می‌کنند در	حداکثر یک	حداکثر یک	یک (تک) دو (مضاعف)	نقطه
خط m و نقطهٔ P ناواقع بر آن مفروضند	دقیقاً یک خط	حداقل دو خط.	هیچ خط	مار بر P و نامتقاطع با m موجود است.
یک خط طول متناهی	ندارد	ندارد	دارد	
یک خط توسط یک نقطه جدا	می‌شود	می‌شود	نمی‌شود	
یک خط صفحه را جدا می‌کند	می‌کند	می‌کند	نمی‌کند (تک) می‌کند (مضاعف)	
خطوط نامتقاطع	هم‌فاصله هستند	هرگز هم‌فاصله نیستند	وجود ندارند.	
اگر خطی یکی از دو خط نامتقاطع را قطع کند	باید	ممکن است		دیگری را قطع کند.
زوایای اوج در یک چهارضلعی ساکری	قائمه	حاده	منفرجه	هستند
دو خط متمایز عمود بر یک خط	موازیند	فراموازی‌اند	متقاطعند	
مجموع زوایای یک مثلث	مساوی با	کم‌تر از	بیش‌تر از	180° است.
مساحت یک مثلث	مستقل از	متناسب با کاستی	متناسب با اضافی	مجموع‌زوایای آن است.
دو مثلث با زوایای نظیر قابل‌انطباق	مشابه‌اند	قابل انطباقند	قابل انطباقند	

با اجازه‌ی میِیرو (۱۹۸۳) از روی کتاب "**مفاهیم اساسی هندسه**" نوشته شده است.

۱۱-۲. پیشنهاد برای مطالعه‌ی بیش‌تر

Alexandrov, A.D. (1969). Non-Euclidean Geometry. In: A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, and M.A. Lavrent'ev (Eds), *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning,* Vol. 3,pp.97-189. Cambridge, MA: M.I.T. Press. (This is an expository presentation of non-Euclidean geometry.)

Gans, D. (1973). *An Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York: Academic Press. (This is an easy-to-read and detailed presentation.)

Gray, J. (1979). *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic.* Oxford: Clarendon Press.

Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 2d ed. New York: Dover.

Henderson, L.D. (1983). *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art.* Princeton University Press.

Lieber, L.R. (1940). *Non-Euclidean Geometry: Or, Three Moons in Mathesis,* 2d ed. New York: Galois Institute of Mathematics and Art. (This is an entertaining poetic presentation.)

Lockwood, J.R., and Runion, G.E. (1978). *Deductive Systems: Finite and non-Euclidean Geometries.* Reston, VA: N.C.T.M. (This is a brief elementary intróduction that can be used as supplemetary material at the high-school level.)

Ogle, K.N. (1962). The visual space sense. *Science* 135: 763-771.

Penrose, R. (1978). The geometry of the universe. In: L.A. Steen (Ed.), *Mathematics Today: Twelve Informal Essays,* pp. 83-125. New

York: Springer-Verlag.

Ryan, P.J. (1986). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach.* Cambridge: University Press. (Uses groups and analytic techniques of linear algebra to construct and study models of these geometries.)

Sommerville, D. (1970). *Bibliography of Non-Euclidean Geometry,* 2d ed. New York: Chelsea.

Trudeau, R.J. (1987). *The Non-Euclidean Revolution.* Boston: Birkhauser. (This presentation of both Euclid's original work and non-Euclidean geometry is intewoven with a nontechnical description of the revolution in mathematics that resulted from the development of non-Euclidean geometry.)

Wolfe, H.E. (1945). *Introduction to Non-Euclidean Geometry.* New York: Holt, Rinehart and Winston. (Chap, 1,2, and 4 contain a development similar to that in this text.)

Zage, W.M. (1980). The geometry of binocular visual space. *Mathematics Magazine* 53(5): 289-294.

منابعی جهت مطالعه‌ی تاریخ هندسه

Barker, S.F. (1984). Non-Euclidean geometry. In: D.M. Campbell and J.C. Higgins (Eds.), *Mathematics: People, Problems, Results,* Vol. 2, pp. 112-127. Belmont, CA: Wadsworth.

Barker, S.F. (1964). *Philosophy of Mathematics*, pp.1-55. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bold, B. (1969). *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* New York: Dover.

Bronowski, J. (1974). The music of the spheres. In: *The Ascent of Man,* pp. 155-187. Boston: Little, Brown.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics,* 4th ed. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Gardner, M. (1966). The persistence (and futility) of efforts to trisect the angle. *Scientific American* 214: 116-122.

Gardner, M. (1981). Euclid's parallel postulate and its modern offspring. *Scientific American 254: 23-24.*

Heath, T.L. (1921). *A History of Greek Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 2d ed. New York: Dover.

Hoffer, W. (1975). A magic ratio recurs throughout history. *Smithsonian* 6(9): 110-124.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* pp. 3-130, 861-881. New York: Oxford University Press.

Knorr, W.R. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston: Birkhauser.

Maziarz, E., and Greenwood, T. (1984). Greek mathematical philosophy. In: D.M.Campbell and J.C. Higgins (Eds.), *Mathematics: People, Problems, Results,* Vol. 1, pp.18-27. Belmont, CA: Wadsworth.

Mikami, Y. (1974). *The Development of Mathematics in China and Japan,* 2d ed. New York: Chelsea.

Smith, D.E. (1958). *History of Mathematics,* Vol. 1, pp. 1-147. New

York: Dover.

Swetz, F. (1984). The evolution of mathematics in ancient China. In: D.M. Campbell and J.C. Higgins (Eds.), *Mathematics: People, Problems, Results,* Vol. 1, pp.28-37. Belmont, CA: Wadsworth.

پیشنهاد برای مطالعه‌ی اجمالی

A Non-Euclidean Universe (1978;25min). Depicts the Poincare model of the hyperbolic plane. Produced by the Open University of Great Britain. Available in 16-mm or video format from The Media Guild, 11722 Sorrento Valley Road, Suite E, San Diego, CA 92121.

فصل سوم

تبدیلات هندسی صفحه‌ی اقلیدسی

۱-۳. چشم‌انداز

معرفی هندسه‌ی اقلیدسی در فصل ۲ ساختنی به نظر می‌رسید؛ یعنی، اَشکال مستقیماً و بدون استفاده از نمایش‌های جبری آن‌ها مطالعه شده بودند. این مسأله به سبکی برمی‌گردد که هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی در اول پیشرفت خود پیش گرفته بودند؛ اما در قرن هفدهم، ریاضی‌دانان فرانسوی، پیردِفرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱) و رنه‌دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶) شروع به استفاده از نمایش‌های جبری اَشکال کردند. آن‌ها متوجه شدند که با نظیر قرار دادن هر نقطه در صفحه به یک زوج مرتب از اعداد حقیقی، تکنیک‌های جبری را می‌توان برای مطالعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی به کار برد. مطالعه‌ی اَشکال، با معادلاتی برحسب نمایش جبری آن‌ها، به هندسه‌ی تحلیلی شهرت دارد.

استفاده از تکنیک‌های جبری مآلاً به کاربرد نظریه‌ی گروه‌ها در مطالعه‌ی هندسه انجامید. پیرو این ره‌یافت فلیکس کلاین (۱۹۲۵-۱۸۴۹) در برنامه‌ی ارلانگر ۱۸۷۲ خود هندسه را به صورت زیر تعریف کرده است:

تعریف ۱-۳. یک هندسه مطالعه‌ی خواصی از یک مجموعه‌ی S است که وقتی اعضای S تحت اثر تبدیلاتی از یک گروه تبدیلات واقع شوند، ناوردا (بدون تغییر) بمانند.

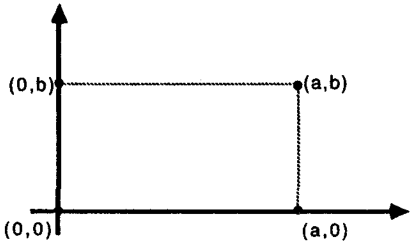
با استفاده از این تعریف، کلاین موفق به طبقه‌بندی هندسه‌ها برحسب گروه‌هایی از تبدیلات خطی شد. تبدیلات اقلیدسی همه حرکت‌هایی هستند که برای منطبق کردن اَشکال لازمند. این تکنیک که برای قابلیت انطباق دو شکل یکی از آن‌ها را حرکت داده روی دیگری قرار می‌دهند، از جنبه‌ی تاریخی به مفهوم متعارَف چهارم اقلیدس برمی‌گردد و او در اثبات گزاره‌های ۴ و ۸ (که به ترتیب به قضایای ض‌زض و ض‌ض‌ض معروفند) از آن استفاده کرده است.

این ره‌یافت تبدیلی نه‌تنها هندسه‌ی اقلیدسی را به موضوعی پویاتر بدل می‌کند، بلکه تکنیک‌های قابل استفاده در گرافیک‌های کامپیوتری کنونی را نیز معرفی خواهد کرد. علاوه بر این، تعمیم تبدیلات صفحه‌ی اقلیدسی، ما را قادر خواهد کرد که ابتدا تبدیلات هندسه‌ی تشابهی و سپس تبدیلات هندسه‌ی آفینی را به دست آوریم. با کمی تغییر در مجموعه‌ی نقاط، گام بعدی در این تعمیم، به بار آوردن تبدیلات هندسه‌ی تصویری است، این هندسه و تبدیلاتش موضوع بخش ۴ هستند.

در این فصل، ما از ره‌یافت تبدیلی برای مطالعه‌ی هندسه‌های اقلیدسی، تشابهی و آفینی استفاده می‌کنیم. ماتریس نمایش تبدیلات مختص هر هندسه را پیدا خواهیم کرد و با تکنیک‌های جبر ماتریسی اثرهای این تبدیلات را مشخص می‌کنیم. برای مناسب کردن زمینه فهم و تصور اثرهای تبدیلات معروف به طولپای‌ها، گروه‌های تقارنی چند ضلعی‌های منتظم و الگوهای کتیبه‌ای را درنظر می‌گیریم. خوانندگان علاقه‌مند ممکن است مشتاق به تعقیب دو بخش لذت‌بخشی شوند که ایده‌های آن‌ها در این فصل، بیش‌تر تقویت شده‌اند؛ یعنی، کاشی‌کاری سطح و هندسه‌ی تاکردن کاغذ، منابعی برای این مباحث در پایان فصل، فهرست شده است.

۳-۲. مدلی تحلیلی برای صفحه‌ی اقلیدسی

قبل از توصیف عملی مدل تحلیلی شاید بعضی دلایل انگیزه‌ی انتخاب این مدل



شکل ۱-۳

خاص مفید باشد، این بحث، همچنین به منظور معرفی نمادها و اصطلاحات به‌کار رفته نیز اهمیت دارد.

مطالعه‌ی تحلیلی هندسه‌ی اقلیدسی بر مبنای این فرض است که هر نقطه در صفحه می‌تواند به یک زوج مرتب از اعداد حقیقی، نظیر شود. راه معمول در انجام این روش استفاده از یک دستگاه مختصات دکارتی است که در آن از دو خط عمود بر هم به عنوان محور استفاده شده است. نقطه‌ی محل تلاقی این محورها به زوج (۰,۰) نظیر شده و دیگر نقاط، همانند شکل ۱-۳ به زوج‌های مرتب نظیر می‌شوند. ترجیحاً نقاط را با زوج مرتب‌های (x,y) همچنان که در حساب دیفرانسیل انتگرال رسم است نشان می‌دهند؛ ولی ما از زوج‌مرتب‌های $(x_1$ و $x_2)$ استفاده خواهیم کرد. انگیزه‌ی این انتخاب "فرم متقارنی" است که نتایج، با این نماد می‌گیرند.

با این نمایشِ نقاط، می‌توان خطوط صفحه‌ی اقلیدسی را توسط معادلاتی خطی، به شکل $a_1x_1+a_2x_2+a_3=0$ نمایش داد که در آن ضرایب a_iها اعداد حقیقی ثابت هستند. بدین ترتیب، هرسه‌تایی مرتب $[a_1,a_2,a_3]$، که a_1 و a_2 با هم صفر نیستند، معادله‌ی یک خط را مشخص می‌کند. توجه کنید که کروشه‌ها برای مختصات خطوط استفاده شده‌اند، بنابراین باید بین آن‌ها و مختصات نقاط فرق گذاشت. برخلاف نقاط، مختصات یک خط، تنها نمایش‌دهنده‌ی آن نیستند؛ چراکه معادله‌ی $a_1x_1+a_2x_2+a_3=0$ و $ka_1x_1+ka_2x_2+ka_3=0$ برای هر عدد حقیقی ناصفر k یک خط را مشخص می‌کنند؛ ولیکن یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی خطوط و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی از

سه‌تایی‌های مرتبی از اعداد حقیقی که با رابطه‌ی زیر تعریف شده‌اند وجود دارد: $[a_۱,a_۲,a_۳]\sim[b_۱,b_۲,b_۳]$ اگر $b_i=ka_i$، $i=۱,۲,۳$ که در آن k عددی حقیقی و ناصفر است. با استفاده از تعریف ۲-۳ می‌توانیم نشان دهیم این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (تمرین ۸).

تعریف ۲-۳. رابطه‌ی "$\sim$" یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، اگر در هریک از روابط زیر صدق کند:

(آ) $a\sim a$ (ب) اگر $a\sim b$ آن‌گاه: $b\sim a$ (پ) اگر $a\sim b$ و $b\sim c$ آن‌گاه: $a\sim c$

تعریف ۳-۳. مجموعه‌ای از اعضایی را که همه‌ی آن‌ها دوبه‌دو با یک رابطه‌ی هم‌ارزی مرتبطند، یک کلاس هم‌ارزی می‌نامند. هر عضو از این کلاس هم‌ارزی، یک نماینده از آن کلاس نامیده می‌شود.

چون یک تناظر یک به یک بین خطوط صفحه‌ی اقلیدسی و این کلاس‌ها وجود دارد، تعبیر این خطوط برحسب این کلاس‌ها ممکن خواهد بود. سه‌تایی‌های $[u_۱,u_۲,u_۳]$ را که به کلاس خاصی تعلق دارد، مختصات همگن آن خط می‌نامند. اگر ما یکی از سه‌تایی‌های مرتب را به عنوان یک ماتریس سطری $u[u_۱,u_۲,u_۳]$ درنظر بگیریم، آن‌گاه معادله‌ی خط نظیر $uX=۰$ است که $X=(x_۱,x_۲,۱)$ یک ماتریس ستونی با درایه‌ی سوم ۱ می‌باشد. به‌خصوص اگر $u=[۲,-۳,۵]$ آن‌گاه $uX=۰$ معادله $۲x_۱-۳x_۲+۵=۰$ است. این ملاحظه، همراه با میل استفاده از تعابیری مشابه برای نقاط و خطوط، دال بر این است که می‌توانیم نقاط را برحسب کلاس‌های هم‌ارزی از سه‌تایی‌های مرتبی از اعداد حقیقی $(x_۱,x_۲,x_۳)$، که $x_۳\neq۰$، با همان رابطه‌ی هم‌ارزی تعبیر می‌کنیم. باز هم به اعضای این کلاس‌ها به‌عنوان مختصات همگن آن نقطه اشاره می‌کنیم. ولیکن در حالت مربوط به نقاط، چون $x_۳$ همواره غیرصفر است، برای هر سه‌تایی مرتب داریم: $(x_۱,x_۲,x_۳)\sim(\frac{x_۱}{x_۳},\frac{x_۲}{x_۳},۱)$؛ بنابراین، هر کلاس هم‌ارزی یک نماینده‌ی منحصر به‌فرد به شکل $(x_۱,x_۲,۱)$ خواهد داشت. به عبارت دیگر، هر نقطه در صفحه را که ما عادتاً با زوج مرتب $(x_۱,x_۲)$ نمایش

می‌دهیم، می‌توان با سه‌تایی مرتب نظیر آن $(x_1,x_2,1)$ نشان داد. مثلاً، به‌جای اشاره به نقطه‌ای با مختصات $(1,-3)$ آن نقطه رابا مختصات $(1,-3,1)$ نشان می‌دهیم.

مدل تحلیلی برای صفحه‌ی اقلیدسی

اصطلاحات تعریف نشده	تعبیر
نقاط	کلاس‌های هم‌ارزی از سه‌تایی‌های مرتب (x_1,x_2,x_3) که در آن $x_3\neq 0$ (هریک از نماینده‌های یک کلاس هم‌ارزی مختصات آن نقطه نامیده می‌شود).
خطوط	کلاس‌های هم‌ارزی از سه‌تایی‌های مرتب (u_1,u_2,u_3) که u_1 و u_2 با هم صفر نیستند (هریک از نماینده‌های یک کلاس هم‌ارزی را مختصات آن خط می‌نامند.)
وقوع	نقطه‌ی $X(x_1,x_2,x_3)$ بر خط $u[u_1,u_2,u_3]$ واقع است اگر و فقط اگر $[u_1,u_2,u_3]\cdot(x_1,x_2,x_3)=0$ یا با نماد ماتریسی $uX=0$

همچنان‌که قبلاً مشخص شد، خطوط، همواره به صورت ماتریس‌های سطری و نقاط به‌صورت ماتریس‌های ستونی نمایش داده خواهند شد؛ اما برخلاف قرارداد معمول جبر برای نمایش ماتریس‌ها با حروف بزرگ، در این‌جا ماتریس‌های مختصات خط با حروف کوچک نمایش داده خواهند شد.

در جای جای این مدل تحلیلی، اعمال جبری ماتریسی همان‌طور که در قضایای بعد می‌آید معانی هندسی به خود خواهند گرفت. در هر حالت، مختصات انتخابی برای نمایش نقاط طوری خواهد بود که $x_3=1$ اولین قضیه راهی ساده برای مشخص کردن هم‌خطی سه نقطه؛ یعنی، روی یک خط قرار داشتن آن‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۱-۳. سه نقطه‌ی متمایز $X(x_1,x_2,1)$، $Y(y_1,y_2,1)$ و $Z(z_1,z_2,1)$ هم‌خط هستند؛ اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اثبات. X، Y و Z هم‌خط هستند اگر و فقط اگر خطی مانند $u[u_1,u_2,u_3]$ موجود باشد به قسمی که

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$$
$$u_1y_1 + u_2y_2 + u_3 = 0$$
$$u_1z_1 + u_2z_2 + u_3 = 0$$

یا

$$[u_1,u_2,u_3]\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0,0,0]$$

اما از جبر خطی می‌دانیم که این معادله دارای یک جواب غیربدیهی $[u_1,u_2,u_3]$ است؛ اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

چون در این جواب غیربدیهی u_1 و u_2 هردو نمی‌توانند صفر باشند (تمرین ۷)، $u[u_1,u_2,u_3]$ خطی شامل هر سه نقطه است. □

فرع. معادله خط AB که $A(a_1,a_2,1)$، $B(b_1,b_2,1)$ است را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

در اثبات قضیه ۱-۳ از تصور آشنای این که معادله‌ی $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$ نقاط روی خطی با مختصات $[u_1,u_2,u_3]$ را مشخص می‌کند استفاده کردیم و به این معادله به عنوان معادله‌ی خط u اشاره کردیم. اغلب فکر می‌کنیم مقادیر u_i ثابتند. برای مثال، معادله‌ی $3x_1-4x_2+1=0$ مشخص‌کننده‌ی نقاط واقع روی خطی با مختصات $[3,-4,1]$ است؛ اما درنظر گرفتن $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$ به عنوان معادله‌ی نقطه‌ی X و استفاده از آن برای مشخص کردن خطوط مار بر نقطه‌ی با مختصات $(x_1,x_2,1)$ به همین اندازه مفید است. خصوصاً می‌توانیم خطوط مار بر نقطه‌ای با مختصات $(-2,5,1)$ را با یافتن

سه‌تایی مرتب $[u_1,u_2,u_3]$ که در معادله‌ی $-2u_1+5u_2+u_3=0$ صدق کند، بیابیم.

با بحثی که از نظر گذشت، می‌توانیم مختصات خط را برای مشخص کردن هم‌رسی سه خط، یعنی وقتی که هر سه خط همدیگر را در یک نقطه‌ی مشترک قطع می‌کنند، به کار برد. اثبات این قضیه، شبیه اثبات قضیه‌ی قبلی است؛ به‌جز این‌که در این‌جا برای حالتی که تنها جواب‌های غیربدیهی آن‌هایی هستند که برای آن‌ها $x_3=0$ ، ملاحظه‌ی خاصی لازم است (تمرین ۱۲).

قضیه ۲-۳. خطوط متمایز u، v، w همگی هم‌رس یا همگی موازی‌اند؛ اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

فرع. معادله‌ی نقطه‌ی تقاطع خطوط هم‌رس p و q را که با $p.q$ نشان داده می‌شود، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

در این قضایا توجه به این نکته مهم است که مختصات نقاط در ستون‌ها و مختصات خطوط در سطرها ظاهر می‌شوند. از این قرارداد، در باقی‌مانده‌ی این متن نیز استفاده خواهد شد.

مختصات خطوط را همچنین می‌توان برای مشخص کردن زاویه‌ی بین دو خط با استفاده از تعریف داده شده بر حسب تانژانت زاویه به‌کار برد. در این تعریف از فرمولی در مثلثات استفاده شده است که تانژانت زاویه‌ی بین دو خط را برحسب شیب خطوط بیان می‌کند (تمرین ۱۷).

تعریف ۴-۳. اگر $u[u_1,u_2,u_3]$ و $v[v_1,v_2,v_3]$ دو خط باشند، زاویه‌ی بین u و v که با $\angle(u,v)$ نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف زاویه‌ی منحصر به فردی است که

اگر $u_1v_1+u_2v_2\neq 0$ آن‌گاه $tg[m(\angle(u,v))]=\frac{u_1v_2-u_2v_1}{u_1v_1+u_2v_2}$، $-90^\circ<m(\angle(u,v))<90^\circ$

اگر $u_1v_1+u_2v_2=0$ آن‌گاه $m(\angle(u,v))=90^\circ$

توجه کنید که این تعریف مستقل از مجموعه‌ی خاصی از مختصات همگن به کار رفته برای خطوط بوده و فقط از دو مختص اول هر خط در آن استفاده شده است. این امر متناظر است با تعریف زاویه‌ی بین خطوط u و v برحسب زاویه بین خطوط u' و v' که خطوط دوم از نقطه (۱,۰,۰) می‌گذرند و u' موازی u و v' موازی v است (تمرین ۱۳). به‌خصوص، این تعریف، زاویه‌ی بین خطوط موازی را به صفر نظیر می‌کند.

تمرین:

۱- گیریم u خطی به مختصات همگن [۲,۵,۷-] باشد. (آ) سه مجموعه‌ی مختصات دیگر برای u بیابید. (ب) معادله‌ای برای خط u پیدا کنید. (پ) مختصات دو نقطه‌ی متمایز روی u را بیابید.

۲- گیریم P نقطه‌ای با مختصات زوج مرتبی (۴,۷-) باشد. (آ) سه مجموعه‌ی مختصات همگن برای P بیابید. (ب) معادله‌ای برای نقطه‌ی P بیابید. (پ) مختصات دو خط مار بر P را بیابید.

۳- مختصات همگن هریک را بیابید: (آ) محور x_1؛ (ب) محور x_2؛ و (پ) خط $x_1=x_2$

۴- فرم کلی مشخصات خطوط مار بر نقطه‌ی (۱,۰,۰) را بیابید.

۵- با استفاده از فرع قضیه ۱-۳، خط شامل نقاط (۱۰,۲) و (۷,۳-) را بیابید.

۶- با استفاده از فرع قضیه ۲-۳ ، نقطه‌ی مشترک خطوط $3x+4y+7=0$ و $2x-y+8=0$ را بیابید.

۷- نشان دهید در جواب غیربدیهی حاصل در اثبات قضیه ۱-۳ ، u_1 و u_2 هردو نمی‌توانند صفر باشند.

۸- نشان دهید رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:
$[u_1,u_2,u_3]\sim[v_1,v_2,v_3]$ اگر برای یک kی غیرصفر $u_i=kv_i$

۹- فرع قضیه ۱-۳ را ثابت کنید.

۱۰- به طور جبری نشان دهید خطوط متمایز $u[u_1,u_2,u_3]$ و $v[v_1,v_2,v_3]$ موازی‌اند (همدیگر را قطع نمی‌کنند) اگر و فقط اگر برای یک kی حقیقی ناصفر، $u_1=kv_1$ ، $u_2=kv_2$ اما $u_3\neq kv_3$. (راهنمایی: نشان دهید که دستگاه معادلات $u_1x_1+u_2x_2+u_3=0$ و $u_1x_1+v_2x_2+v_3=0$ جوابی ندارند؛ اگر و فقط اگر این شرایط صحیح باشند.)

۱۱- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۱۰ ، بنداشت پلی‌فایر را در مدل تحلیلی صفحه‌ی اقلیدسی بررسی کنید.

۱۲- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۷ قضیه ۲-۳ را ثابت کنید (توجه به مطالبی که قبل از این قضیه آمده است را فراموش نکنید).

۱۳- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۱۰ ، نشان دهید که مختصات خط مار بر نقطه $(1,0,0)$ و موازی با $u[u_1,u_2,u_3]$ عبارت است از: $[u_1,u_2,0]$.

۱۴- با استفاده از تعریف ۴-۳، زاویه‌ی بین خطوط زیر را بیابید. (آ) خطوط $[-۲,۱,۷]$ و $[۳,۴,۱۷]$؛ (ب) محور $x_۱$و $x_۲$؛ (پ) خط $x_۱=x_۲$و محوْر $x_۱$.

۱۵- با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۱۰، زاویه‌ی بین دو خط موازی را بیابید.

۱۶- گیریم خط u محور $x_۱$و خط v با مختصات $[v_۱,v_۲,v_۳]$ باشد. با استفاده از تعریف ۴-۳ نشان دهید
$tg(\angle(u,v))=-(v_۱)/(v_۲)$. [به یاد آورید که شیب خط $[v_۱,v_۲,v_۳]$ با $-\frac{(v_۱)}{(v_۲)}$ داده می‌شود]

۱۷- فرمول مثلثاتی زیر مقدار تانژانت زاویه‌ی بین خطوط u و v را برحسب شیب‌های آن‌ها m_u و m_v بیان می‌کند با استفاده از تعریف شیب در تمرین ۱۶ نشان دهید که این فرمول هم‌ارز فرمول به‌کار رفته در تعریف ۴-۳ است:

$$tg(\angle(u,v)) = \frac{m_v-m_u}{۱+m_u m_v}$$

۱۸- ثابت کنید: اگر P یک نقطه و l یک خط باشد، خط منحصر به فردی مار بر P و عمود بر l موجود است.

۳-۳. تبدیلات خطی صفحه‌ی اقلیدسی

دیدگاه تبدیلی برای مطالعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی شناسایی گروه‌های مناسبی از تبدیلات صفحه‌ی اقلیدسی و بررسی خواصی است که تحت این گروه‌ها حفظ می‌شوند. این بخش را به معرفی تعاریف و قضایایی از جبر خطی که برای دنبال کردن این دیدگاه لازم است، اختصاص داده‌ایم. چون در مدل تحلیلی صفحه‌ی اقلیدسی نقاط و خطوط برحسب کلاس‌های هم‌ارزی از فضای برداری $R^۳$ تعبیر شده‌اند؛ ما

مجموعه‌ای خاص از توابع را که دامنه و بردشان هردو در R^3 باشند مورد استفاده قرار می‌دهیم.

تعریف ۵-۳. گیریم V یک فضای برداری روی R باشد. اگر $T:V\to V$ یک تابع باشد، T یک تبدیل خطی V نامیده می‌شود؛ هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

(۱) برای هر بردار u و v در V، $T(u+v)=T(u)+T(v)$؛ و

(۲) برای هر بردای u در V و هر اسکالر k در R، $T(ku)=kT(u)$.

تعریف ۶-۳. تبدیل خطی T یک به یک است هرگاه، وقتی $u\neq v$، $T(u)\neq T(v)$.

از این تعاریف، روشن خواهد شد که کلاس‌های هم‌ارزی از R^3 که با رابطه‌ی $u\sim v$ اگر و فقط اگر $u=kv$، تعریف شده، توسط تبدیلات خطی حفظ می‌شود. به بیان دیگر، اگر $u\sim v$ آن‌گاه $T(u)\sim T(v)$. بنابراین، یک تبدیل خطی یک به یک از R^3 یک نگاشت یک به یک روی مجموعه‌ی نقاط مدل صفحه‌ی اقلیدسی القا می‌کند. همان‌گونه که در زیر با نتیجه‌ی خلاصه شده‌ای از جبر خطی نشان داده شده، هریک از این نگاشت‌ها دارای یک ماتریس نمایش هستند.

قضیه ۳-۳. T یک تبدیل خطی یک به یک $R^3=\{X(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_i\in R\}$ است، اگر و فقط اگر $T(X)=AX$ که در آن $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$، $|A|\neq 0$ و $a_{ij}\in R$.

چون ما برای نقاط از مختصات همگن به فرم $(x_1,x_2,1)$ استفاده می‌کنیم؛ توجه به فرع زیر که صحت آن را می‌توان با استفاده از ضرب ماتریسی بررسی کرد، مهم است.

فرع. T یک تبدیل خطی یک به یک $V^*=\{X(x_1,x_2,1)\ ;\ x_i\in R\}$ است؛ اگر و فقط اگر $T(X)=AX$ که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad |A| \neq 0 \;\text{و}\; a_{ij} \in \mathrm{R}$$

همان‌طور که قبلاً بیان شد، باید بررسی کنیم که مجموعه‌ی تبدیلات خطی یک به یک از V^* تحت عمل ترکیب یک گروه است. اگر T_1 و T_2 تبدیلاتی از یک فضای برداری V باشند، ترکیب (یا ضرب) T_1T_2 نگاشتی است که به ازای هر بردار u در V با $(T_1T_2)(u)=T_1(T_2(u))$ ، تعریف می‌شود. چون ترکیب توابع خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی: $T_1(T_2T_3)=(T_1T_2)T_3$، می‌توانیم از تعریف خلاصه شده‌ی زیر استفاده کنیم:

تعریف ۷-۳. گوییم یک مجموعه‌ی ناتهی G از تبدیلات یک فضای برداری V تحت عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد اگر در دو شرط زیر صدق کند:
(۱) اگر $T \in G$ آن‌گاه $T^{-1} \in G$ و (۲) اگر $T_1 \in G$ و $T_2 \in G$ آن‌گاه $T_1T_2 \in G$

توجه کنید که این تعریف، متضمن این است که هر گروه G شامل یک تبدیل T و لذا بنابر خاصیت (۱)، T^{-1} را نیز دربر دارد. سپس خاصیت (۲) مبین این است که $TT^{-1}=I$ نیز در G می‌باشد که I تبدیل همانی تعریف شده توسط $I(u)=u$ برای هر u در V است.

کاربرد نتایج جبر ماتریسی برای ماتریس‌های نمایشی که در فرع قضیه ۳-۳ داده شده می‌تواند برای اثبات قضیه زیر مفید باشد (تمرین ۹).

قضیه ۴-۳. مجموعه‌ی تبدیلات خطی V^* یک گروه است.

اگرچه هر تبدیل خطی از این گروه را می‌توان با یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌هایی از اعداد حقیقی نمایش داد و نگار نقاط، تک‌تک به طور جبری قابل محاسبه‌اند، درک هندسی هریک از تبدیلات به عنوان یک نگاشت یا حرکت‌دهنده‌ی همه‌ی نقاط یک صفحه‌ی اقلیدسی به نقاط دیگر صفحه مهم است. تعیین روش کلی‌ای که یک تبدیل

نقاط را به آن روش حرکت می‌دهد و به خصوص این‌که بر چه نقاط یا خطوطی بدون اثر است، برای فهم این عمل هندسی اساسی هستند.

مثال ۱-۳. گیریم T تبدیل خطی با ماتریس نمایش A باشد، اگر X نقطه‌ی روی خط $[۱,-۱,۰]$ باشد نشان می‌دهیم $T(X)$ نیز نقطه‌ای روی l است و $T(P)=P$ که در آن $P(-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳},۱)$.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن نگار نقاط روی l توجه می‌کنیم که $X(x_۱,x_۲,۱)$ روی l است اگر و فقط اگر $x_۱-x_۲=۰$، یعنی، $x_۲=x_۱$ باشد. بدین ترتیب، می‌توانیم نگار هر نقطه‌ی X روی l را به صورت زیر بیابیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x_۱+۲ \\ ۴x_۱+۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

چون $x'_۲=۴x_۱+۲=x'_۱$، واضح است که $T(X)=X'(x'_۱,x'_۲,۱)$ نیز نقطه‌ای روی l است. علاوه بر این، چون P نقطه‌ای روی l است در محاسبه‌ی قبلی برای $T(P)$ می‌توانیم قرار دهیم $x_۱=x_۲=-\frac{۲}{۳}$ با این مقدار $x_۱$ خواهیم داشت $x'_۱=x'_۲=۴(-\frac{۲}{۳})+۲=-\frac{۲}{۳}$. بنابراین $T(P)=P$.

چون نگار P تحت تبدیل T در این مثال خودش می‌باشد، گوییم P یک نقطه‌ی ناوردای تبدیل است علاوه بر این، چون نگار هر نقطه روی l باز روی l هستند، گوییم l یک خط ناوردای T است. ولیکن توجه کنید که نقاط روی l غیر از P ناوردا نیستند؛ بنابراین l به طور نقطه‌ای ناوردا نیست.

تعریف ۸-۳. خاصیتی را که تحت یک تبدیل تغییر نکند یک ناوردای تبدیل می‌نامند. خاصیتی را که تحت هر تبدیل یک گروه تبدیلات ناوردا باشد یک ناوردای آن گروه

می‌نامند. اگر خاصیتی تحت یک تبدیل ناوردا باشد گویند به وسیله تبدیل حفظ شده است.

در مطالعه‌ی هر دستگاه ریاضی، مشخص کردن تبدیلاتی که حافظ ساختار مشخصی از دستگاه هستند لازم است. نتایج بعدی نشان می‌دهد که گروه تبدیلات خطی یک به یک از V^* حافظ هم‌خط بودن است؛ یعنی، هم‌خط بودن یکی از خواص ناوردای این گروه است. بدین ترتیب، این تبدیلات نقاط صفحه‌ی اقلیدسی، همچنین خطوط را به خطوط می‌نگارند. گوییم این‌ها نگاشت‌هایی بین خطوط صفحه‌ی اقلیدسی القا می‌کنند.

قضیه ۵-۳. یک تبدیل خطی یک به یک V^* حافظ هم‌خطی است (یعنی، نگاره‌ی نقاط هم‌خط، هم‌خط هستند).

اثبات. گیریم $X'(x'_1,x'_2,1)$، $Y'(y'_1,y'_2,1)$ و $Z'(z'_1,z'_2,1)$ نگار نقاط X، Y و Z تحت یک تبدیل خطی یک به یک با ماتریس مفروض A باشد. آن‌گاه به طور کلی در یک معادله‌ی ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و با دترمینان‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق داریم:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

و بدین ترتیب، نتیجه با استفاده از قضیه ۱-۳ حاصل می‌شود.

توجه کنید که این قضیه بیانگر این است که تبدیلات خطی یک به یک حافظ وقوع نیز می‌باشند. به بیان دیگر اگر X روی u باشد، آن‌گاه X' نگار X، روی u'، نگار u خواهد بود.

درست همان‌گونه که یک معادله ماتریسی نگار یک نقطه تحت یک تبدیل خطی یک به یک را مشخص می‌کند با استفاده از یک معادله‌ی ماتریسی می‌توان نگار یک خط تحت همان تبدیل را مشخص کرد. این معادله‌ی دوم با معادله‌ی اول مرتبط است ولی یکسان نیست.

قضیه ۶-۳. اگر نگار یک نقطه تحت یک تبدیل خطی یک به یک V^* توسط معادله‌ی ماتریسی $X'=AX$ داده شده باشد آن‌گاه نگار یک خط تحت همان تبدیل توسط معادله‌ی ماتریسی $ku'=uA^{-1}$ برای یک اسکالر ناصفر k، داده می‌شود.

اثبات. خط $u[u_1,u_2,u_3]$ با معادله‌ی $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ یعنی $uX=0$ را درنظر می‌گیریم. تحت این تبدیل خطی u به u' و X به X' نگاشته می‌شود و $uX=0$ اگر و فقط اگر $u'X'=0$ اما $X'=AX$ با جای‌گزاری، $u'AX=0$ اگر و فقط اگر $uX=0$ چون این رابطه باید برای هر نقطه‌ی X برقرار باشد. برای یک اسکالر ناصفر k، $u=ku'A$ یا $ku'=uA^{-1}$.

گوییم تبدیل با ماتریس A، معادله‌ی نقطه‌ای $X'=AX$ و معادله‌ی خطی $ku'=uA^{-1}$ را دارد؛ در حالی که استفاده از معادله‌ی نقطه‌ای سرراست است، اسکالر k در معادله‌ی خطی (چون لزوماً مجموعه منحصر به فردی از مختصات همگن برای یک خط مفروض موجود نیست) استفاده از معادله‌ی خطی را کمی مشکل می‌سازد. این نکته مهم است که k برای یک ماتریس مفروض A ثابت نیست. این موضوع به‌خصوص موقعی اهمیت پیدا می‌کند که همانند مثال زیر خط مفروضی بخواهد به خطی خاص نگاشته شود.

مثال ۲-۳. ماتریس یک تبدیل خطی یک به یک از صفحه‌ی اقلیدسی راکه $u[1,-3,2]$ را به $u'[1,0,-4]$، $v[2,1,-5]$ را به $v'[10,-7,7]$، و $w[1,-2,0]$ را به $w'[0,1,-6]$ می‌نگارد بیابید.

چون صحبت از نگارهای سه خط شد، با فرم کلی معادله‌ی خطی یک تبدیل خطی از

V^* ، $ku'=uA^{-1}$ شروع می‌کنیم. همان‌طور که نشان داده شد هر خط و نگارش یک معادلهٔ ماتریسی را باعث خواهند شد. در این معادلات گیریم $B=A^{-1}$ و از سه مقدار متمایز k استفاده می‌کنیم:

$$k_1\,[1,0,-4] = [1,-3,2]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2\,[10,-7,7] = [2,1,-5]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_3\,[0,1,-6] = [1,-2,0]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه حاصل از نه معادله و نه مجهول فوق دارای جواب‌های زیر برای مقادیر $k_1=-2$ ، $k_2=1$ و $k_3=-1$ است. و ماتریس

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین:

۱- گیریم T تبدیلی با ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(آ) با استفاده از روش مثال ۱-۳ نگارهای نقاط روی خط $l[1,-2,3]$ را بیابید. (ب) آیا T نقطه‌ای روی l را ناوردا نگه‌می‌دارد؟ اگر این‌طور است کدام نقطه (نقاط) را؟ (پ) مختصات نگارهای دو نقطه‌ی روی l را برای یافتن مختصات $l'=T(l)$ به کار برید. (ت)

دو خط l و l' را در صفحه‌ی اقلیدسی رسم کنید عمل هندسی T را توصیف کنید.

۲- با محاسبه تحقیق کنید تبدیلِ با ماتریس موجود در مثال ۲-۳، در واقع هرسه خط مفروض را به صورت خواسته شده می‌نگارد.

۳- گیریم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۷ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس یک تبدیل باشد. (آ) $P'=T(P)$ و $Q'=T(Q)$ را برای نقاط $P(۱,۲,۱)$ و $Q(۶,۴,۱)$ بیابید. (ب) مختصات خطوط PQ و $P'Q'$ را بیابید. (پ) معادله‌ی خطی تبدیل T را بیابید. (ت) با استفاده ازاین معادله‌ی خطی نگار خط PQ تحت T را بیابید (پاسخ شما باید خط $P'Q'$ باشد).

۴- ماتریس یک تبدیل خطی که $P(۰,۰,۱)$ را به $P'(۱,۵,۱)$، $Q(۱,۳,۱)$ را به $Q'(۳,-۷,۱)$ و $R(۱,۰,۱)$ را به $R'(۳,۶,۱)$ می‌نگارد را بیابید.

۵- ماتریس یک تبدیل خطی که $u[۲,-۳,۱]$ را به $u'[۲,۵,۰]$، $v[۱,-۲,۰]$ را به $v'[۱,۱,-۶]$ و $w[۱,۰,۰]$ را به $w'[۳,۲,-۱]$ می‌نگارد را بیابید.

۶- فرع قضیه ۳-۳ را ثابت کنید.

۷- ثابت کنید: اگر A ماتریسی به فرم توصیف شده در فرع قضیه ۳-۳ باشد آن‌گاه $A^{-۱}$ نیز به همان فرم است. (راهنمایی: چون این ماتریس‌ها با سطر سومی به فرم $(۰,۰,۱)$ هستند، روش الحاقی یک راه ساده برای محاسبه‌ی $A^{-۱}$ را فراهم می‌سازد).

۸- ثابت کنید: اگر A و B ماتریس‌های به فرم توصیف شده در فرع قضیه ۲-۳ باشد

آن‌گاه ماتریس حاصل‌ضرب AB نیز به همان فرم است.

۹- با استفاده از نتایج تمرین‌های ۷ و ۸ قضیه ۴-۳ را ثابت کنید.

۱۰- مثال‌هایی از ماتریس‌های تبدیلات یک به یک V^* بیابید که $AB \neq BA$ (این مثال نشان می‌دهد که این گروه خاصیت جابه‌جایی ندارد).

۳-۴. طولپای‌ها

در شروع دیدگاه تبدیلاتی‌مان به منظور مطالعه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی زیرمجموعه‌ای از تبدیلات خطی یک به یک از V^* که حافظ فاصله‌اند را جدا می‌کنیم.

تعریف ۹-۳. فاصله‌ی (اقلیدسی) بین دو نقطه‌ی $X(x_1,x_2,1)$ و $Y(y_1,y_2,1)$ با $d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰-۳. یک تبدیل خطی یک به یک از V^* به روی خودش یک طولپای است. به شرطی که حافظ فاصله باشد (یعنی، اگر برای هر زوج نقطه‌ی X و Y، $d(X,Y)=d(T(X),T(Y))$).

به عنوان تبدیلات خطی یک به یک از V^*، طولپای‌ها را می‌توان با ماتریس‌هایی به فرم حاصله در فرع قضیه ۳-۳ نمایش داده ولیکن خاصیت اضافیِ حفظ فاصله، فرم ماتریس‌های نمایش را بیش‌تر محدود می‌کند.

قضیه ۷-۳. یک طولپای دارای ماتریس نمایشی به یکی از صورت‌های زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن $(a_{11})^2+(a_{12})^2=1$

اثبات. گیریم $X(x'_1,x'_2,1)$، $Y(y'_1,y'_2,1)$ نگار نقاط $X(x_1,x_2,1)$ و $Y(y_1,y_2,1)$ تحت یک طولپای باشند؛ آن‌گاه بنابر فرع قضیه ۳-۳

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} \\ 1 \end{bmatrix}$$

و به طریق مشابه

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13} \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23} \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون این نگاشت یک طولپای است، پس $d(X',Y')=d(X,Y)$. با استفاده از تعریف فاصله معادلات زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} [(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{1/2} &= [(x'_1-y'_1)^2+(x'_2-y'_2)^2]^{1/2} \\ &= [(a_{11}x_1+a_{12}x_2-a_{11}y_1-a_{12}y_2)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2-a_{21}y_1-a_{22}y_2)^2]^{1/2} \\ &= [(a_{11}^2+a_{21}^2)(x_1-y_1)^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}(x_1-y_1)(x_2-y_2) \\ &\quad +(a_{12}^2+a_{22}^2)(x_2-y_2)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

چون این تساوی باید برای همه‌ی نقاط X و Y و بنابراین همه‌ی زوج‌مرتب‌های حقیقی (x_1,x_2) و (y_1,y_2) برقرار باشد. اولین و آخرین عبارت را مجذور کرده و سپس ضرایب جملات نظیر را مساوی قرار می‌دهیم. بدین‌گونه معادلات زیر حاصل می‌شوند:

(آ) $a_{11}^2+a_{21}^2=1$

(ب) $a_{12}^2+a_{22}^2=1$

(پ) $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$

(ت) $a_{11}a_{12}=-a_{21}a_{22}$

برای حل این معادلات دو حالت را درنظر می‌گیریم:

حالت ۱. $a_{11}\neq 0$. معادله‌ی (ت) نتیجه می‌دهد $a_{12}=-(a_{21}a_{22})/a_{11}$ و با جای‌گزاری

در (ب) داریم: $a_{21}^2a_{22}^2/a_{11}^2+a_{22}^2=1$ یا $(a_{11}^2+a_{21}^2)a_{22}^2=a_{11}^2$. اما بنا بر (آ) خواهیم داشت $a_{22}=\pm a_{11}$. اگر $a_{22}=a_{11}$ آن‌گاه معادله‌ی (ت) نتیجه می‌دهد که $a_{21}=-a_{12}$ اگر $a_{22}=-a_{11}$ آن‌گاه معادله‌ی (ت) نتیجه می‌دهد $a_{21}=a_{12}$. این نتایج با دو فرم ماتریسی ذکر شده، سازگارند.

حالت ۲. $a_{11}=0$. در این حالت نیز معادلات همان دو فرم ماتریسی را نتیجه می‌دهند (تمرین ۳). □

دترمینان ماتریس طولپای اول برابر است با $(a_{11})^2+(a_{12})^2=1$ است؛ در صورتی که دترمینان ماتریس دوم برابر است با: $-(a_{11})^2-(a_{12})^2=-1$. این ملاحظه، روش ساده‌ای را برای تمیز دادن این دو نوع طولپای پیش‌رو می‌گذارد.

تعریف ۱۱-۳. اگر دترمینان یک ماتریس طولپای ۱+ باشد طولپای را طولپای مستقیم و اگر این دترمینان ۱- باشد طولپای را طولپای غیرمستقیم می‌نامند.

استدلالی نسبتاً سرراست نشان می‌دهد که طولپای‌ها تشکیل یک گروه می‌دهند. به دلیل وجود طولپای‌های مستقیم و غیرمستقیم، بررسی این‌که مُعکوس هر نوع از طولپای‌ها باز یک طولپای است، واجب می‌باشد. همچنین، لازم است نشان دهیم که ترکیب T_1T_2 یک طولپای است که در آن T_1 و T_2 طولپای‌هایی، به ترتیب هردو مستقیم، هردو غیرمستقیم، مستقیم و غیرمستقیم و سرانجام غیرمستقیم و مستقیم هستند. نتایج این محاسبات در قضیه و فرع زیر خلاصه شده‌اند:

قضیه ۸-۳. مجموعه‌ی طولپای‌ها تشکیل یک گروه می‌دهند که مجموعه طولپای‌های مستقیم یک زیرگروه آن است.

فرع. حاصل‌ضرب دو طولپای مستقیم یا غیرمستقیم یک طولپای مستقیم است. حاصل‌ضرب یک طولپای مستقیم و یک طولپای غیرمستقیم و یا برعکس، طولپایی

غیرمستقیم است.

با در دست داشتن هویت مجموعه‌ی طولپای‌ها به عنوان یک گروه تبدیلات می‌توانیم هندسه‌ی اقلیدسی را با مشخص کردن خواصی از مجموعه‌ی نقاط V^* که توسط این گروه حفظ می‌شوند، مطالعه نمود. تعریف زیر به مفهوم "منطبق شدن" که اقلیدس به کار برده بود، رسمیت می‌بخشد.

تعریف ۱۲-۳. دو مجموعه از نقاط α و β قابل انطباق بوده و با $\alpha\cong\beta$ نشان داده می‌شوند اگر β نگار α تحت یک طولپای باشد.

در هرگونه ارائه‌ای از هندسه‌ی اقلیدسی قابلیت انطباق دو مجموعه‌ی خاص به یک اندازه اهمیت دارند؛ این اَشکال به پاره‌خط‌ها و مثلث‌ها معروفند. قبل از درنظر گرفتن این اَشکال خاص، پذیرفتن تعاریف زیر لازم است.

تعریف ۱۳-۳. P بین Q و R است. اگر P، Q و R سه نقطه‌ی هم‌خط متمایز باشند و $d(Q,P)+d(P,R)=d(Q,R)$ مجموعه‌ی نقاط شامل Q و R همراه با همه‌ی نقاط بین Q و R پاره‌خط با نقاط انتهایی Q و R نامیده شده با $\overline{QR}$ نشان داده می‌شود. اندازه $\overline{QR}$ که با $m(\overline{QR})$ نشان داده می‌شود بنابر تعریف، عبارت است از: $d(Q,R)$

تعریف ۱۴-۳. اگر P، Q و R سه نقطه‌ی ناهم‌خط باشند، آن‌گاه مثلث PQR که با ΔPQR نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه‌ی پاره‌خط‌های $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$ و $\overline{RP}$ این پاره‌خط‌ها اضلاع مثلث و $\angle PQR$، $\angle QRP$ و $\angle RPQ$ زوایای مثلث نامیده می‌شوند.

با استفاده از تعریف ۱۳-۳ و تعریف یک طولپای، بررسی این‌که پاره‌خط‌های قابل انطباق اندازه‌ی یکسانی دارند نسبتاً ساده است (تمرین ۵).

قضیه ۹-۳. اگر $\overline{PQ}\cong\overline{P'Q'}$ آن‌گاه $m(\overline{PQ})=m(\overline{P'Q'})$.

در مثلث‌های قابل انطباق، ما نه‌تنها به دانستن این‌که اضلاع نظیر مثلث‌ها اندازه‌ی یکسانی دارند؛ بلکه به چگونگی سنجش اندازه‌ی زاویه‌های نظیر نیز علاقه‌مندیم. همچنان که در قضیه‌ی بعد مشخص می‌شود، اندازه‌ی یک زاویه تحت طولپایی مستقیم بدون تغییر می‌ماند؛ ولی علامت اندازه‌ی زاویه‌ی تحت یک طولپای غیرمستقیم عوض می‌شود. به این دلیل، می‌گوییم که طولپای‌های غیرمستقیم جهت را برمی‌گردانند.

قضیه ۱۰-۳. گیریم u' و v' نگار خطوط u و v تحت یک طولپای باشند. اگر طولپای مستقیم باشد $m(\angle(u',v'))=m(\angle(u,v))$. اگر طولپای غیرمستقیم باشد $m(\angle(u',v'))=-m(\angle(u,v))$

اثبات. گیریم $u[u_1,u_2,u_3]$ و $v[v_1,v_2,v_3]$ دو خط و $u'[u'_1,u'_2,u'_3]$ و $v'[v'_1,v'_2,v'_3]$ نگارشان باشند. این قضیه با نشان دادن این‌که $tg(\angle(u',v'))=\pm tg(\angle(u,v))$، ثابت خواهد شد با استفاده از معادله‌ی خطی یک طولپای داریم، $k_1u'=uA^{-1}$ و $k_2v'=vA^{-1}$ که k_1 و k_2 اسکالرهایی غیرصفر و A ماتریس یک طولپای است. اگر فرض کنیم $B=A^{-1}$، آن‌گاه چون طولپای‌ها تشکیل یک گروه می‌دهند B ماتریس یک طولپای است. بدین ترتیب، ماتریس B یکی از دو فرم مفروض قضیه ۷-۳ را دارد. در هر دو حالت با محاسبه‌ی مستقیم، مختصات u' و v' را تعیین کرده و در فرمول $tg(\angle(u',v'))$ جای‌گزین می‌نماییم. با ساده کردن عبارات حاصل به نتایج مطلوب در قضیه می‌رسیم (تمرین ۷).

نتیجه‌ی زیر پی‌آمد دو قضیه‌ی قبل است.

قضیه ۱۱-۳. اگر $\Delta PQR\cong\Delta P'Q'R'$ آن‌گاه $m(\overline{PQ})=m(\overline{P'Q'})$، $m(\overline{QR})=m(\overline{Q'R'})$، $m(\overline{RP})=m(\overline{R'P'})$، $m(\angle PQR)=\pm m(\angle P'Q'R')$ و $m(\angle QRP)=\pm m(\angle Q'R'P')$ و $m(\angle RPQ)=\pm m(\angle R'P'Q')$.

برای نشان دادن این‌که عکس این قضیه نیز صحیح است، ساده‌ترین راه، بررسی اولیه و طبقه‌بندی طولپای‌هاست در دو بخش بعد به این مسأله خواهیم پرداخت.

تمرین:

۱- طولپای مستقیم و غیرمستقیمی را بیابید که $X(\circ,\circ,1)$، $Y(2,\circ,1)$ را به $X'(1,1,1)$ و $Y'(3,1,1)$ می‌نگارند. تحت هریک از این طولپای‌ها نقطه‌ی $Z(1,-1,1)$ چه تغییری می‌کند.

۲- ثابت کنید تابع فاصله که در تعریف ۹-۳ آمد در خواص (آ) تا (پ) در تعریف زیر صادق است (بررسی این‌که تابع حاصله در خاصیت (ت) صدق می‌کند نیز امکان‌پذیر است و بنابراین یک متر یک روی V^* می‌باشد.)

تعریف. تابع $d(P,Q)$ روی مجموعی S یک متریک است؛ هرگاه برای همه‌ی نقاط P، Q و R در S:
(آ) $d(P,Q)$ یک عدد حقیقی باشد؛ (ب) $d(P,Q)=d(Q,P)$؛ (پ) $d(P,Q)\geq \circ$ و $d(P,Q)=\circ$ اگر و فقط اگر $P=Q$؛ (ت) $d(P,R)\leq d(P,Q)+d(Q,P)$

۳- حالت ۲ در قضیه ۷-۳ را ثابت کنید.

۴- قضیه ۸-۳ و فرع آن را ثابت کنید (توجه کنید: $G'\subset G$ یک زیرگروه G است هرگاه G' نیز یک گروه باشد).

۵- قضیه ۹-۳ را ثابت کنید.

۶- نشان دهید رابطه‌ی قابلیت انطباق به صورتی که در تعریف ۱۳-۳ آمد یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (تعریف ۲-۳ را ببینید).

۷- محاسبات جبری لازم برای کامل شدن اثبات قضیه ۱۰-۳ را برای طولپای‌های مستقیم و غیرمستقیم انجام دهید.

۸- ثابت کنید: اگر $\alpha \cong \beta$ و T یک طولپای باشد که $T(\alpha)=\alpha'$ و $T(\beta)=\beta'$ آن‌گاه $\alpha' \cong \beta'$.

۵-۳. طولپای‌های مستقیم

در بخش ۴-۳ طولپای‌ها را چه مستقیم و چه غیرمستقیم توصیف کردیم. در این بخش، برآنیم که طولپای‌های مستقیم را بررسی و علاوه بر این برحسب تعداد نقاطی که تحت طولپای ناوردا هستند، طبقه‌بندی کنیم. دانستن این‌که چه نقاط و خطوطی ناوردا می‌باشند، در فهم عمل هندسی هر تبدیلی مهم است.

قضیه ۱۲-۳. یک طولپای مستقیم غیرهمانی، با ماتریس $A=[a_{ij}]$ دقیقاً یک نقطه‌ی ناوردا دارد اگر و فقط اگر $a_{11} \neq 1$

اثبات. نقطه‌ی $X(x_1, x_2, 1)$ یک نقطه‌ی ناوردای طولپای است، اگر و فقط اگر $AX=X$؛

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$(a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0 \qquad (۳-۱)$$

و

$$-a_{12}x_1 + (a_{11}-1)x_2 + a_{23} = 0 \qquad (۳-۲)$$

حالت ۱. $a_{11} \neq 1$. در این حالت برقراری معادله‌ی (۱-۳) نتیجه می‌دهد $x_1 = \frac{-a_{12}x_2 - a_{13}}{a_{11}-1}$ و از برقراری معادله‌ی (۲-۳) داریم: $-a_{12}[\frac{-a_{12}x_2-a_{13}}{a_{11}-1}]+(a_{11}-1)x_2+a_{23}=0$ یا با حل نسبت به x_2؛ $x_2 = \frac{-a_{12}a_{13}-a_{23}(a_{11}-1)}{a_{12}^2+(a_{11}-1)^2}$ و بدین ترتیب، یک جواب منحصر به فرد حاصل می‌شود.

حالت ۲. $a_{11}=1$. در این صورت چون $a_{11}^2+a_{12}^2=1$، پس $a_{12}=0$. بنابراین:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a_{13} \\ x_2 + a_{23} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب، هیچ نقطه‌ی ناوردایی وجود ندارد، مگر $a_{13}=a_{23}=0$ که در این صورت $A=I$. □

با استفاده از نتیجه‌ی قضیه ۱۲-۳ طولپای‌های مستقیم را دوران یا انتقال تعریف می‌کنند (تبدیل همانی به هر دو صورت تعریف می‌شود) برای رفع تردید احتمالی شما، نشان خواهیم داد که این طولپای‌ها لزوماً همان خواص دوران‌ها و انتقال‌هایی را که در درس‌های دیگر ریاضی بیان می‌شوند دارا هستند.
ولیکن، برخلاف جاهای دیگر که اغلب نمایش‌های ماتریسی ۲×۲ برای دوران‌ها استفاده می‌شود این‌جا از ماتریس‌های ۳×۳ استفاده خواهیم کرد؛ علاوه بر این، با این نمایش قادریم انتقال‌ها را نیز به فرم ماتریسی نمایش دهیم.

تعریف ۱۵-۳. هر طولپای مستقیم بدون نقطه‌ی ناوردا و نیز طولپای همانی را یک انتقال می‌نامند؛ در صورتی که دوران‌ها عبارت از طولپای‌های مستقیم با دقیقاً یک نقطه‌ی ناوردا همراه با طولپای همانی می‌باشند، در این حالت، نقطه‌ی ناوردا، مرکز دوران خوانده می‌شود.

بنابر این تعریف، انتقال‌ها طولپای‌هایی هستند که ماتریس نمایش آن‌ها در حالت دوم

اثبات قضیه ۱۲-۳ مشخص شد، فرم این ماتریس صریحاً در قضیه‌ی زیر داده شده است.

قضیه ۱۳-۳. انتقال T ماتریس نمایش زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T^{-1} نیز یک انتقال بوده و دارای ماتریس نمایش زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بررسی نیمه‌ی دوم قضیه‌ی قبل و دو قضیه‌ی بعد محاسباتی از جبر ماتریسی مقدماتی را دربر دارد (تمرین ۹ تا ۱۱ را ببینید).

قضیه ۱۴-۳. مجموعه‌ی انتقال‌ها تشکیل یک گروه می‌دهند.

قضیه ۱۵-۳. نقاط X و Y مفروضند. یک انتقال منحصر به فرد موجود است؛ به طوری که X را به Y می‌نگارد.

با استفاده از نمایش ماتریسی می‌توان چندین خاصیت مشخصه‌ی انتقال‌ها را تعیین کرد. این خواص، باید توصیف یک انتقال به عنوان لغزاننده‌ی نقاط در امتداد یک خط معین را که غالباً به کار برده می‌شود تأیید کنند.

قضیه ۱۶-۳. اگر انتقالی خط u را به v بنگارد، آن‌گاه خط u و v یا یکی هستند یا موازی‌اند.

اثبات. اگر A ماتریس انتقال باشد، $kv=uA^{-1}$، چراکه v نگار u است. بنابراین:

$$k[v_1,v_2,v_3]=[u_1,u_2,u_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[u_1,u_2,-au_1-bu_2+u_3]$$

چون $kv_1=u_1$ و $kv_2=u_2$ حکم نتیجه خواهد شد (تمرین ۱۰ در بخش ۲-۳ را ببینید). □

روند اثبات قضیه‌ی بعدی را با تأثیر متقابل بین روش‌های ساختنی و تحلیلی و عرضه‌ی کاربردی مناسب از تکنیک‌های متعدد تحلیلی اتخاذ کرده‌ایم.

قضیه ۱۷-۳. اگر انتقالی P را به P' بنگارد ($P\neq P'$)، آن‌گاه خط PP' و همه‌ی خطوط موازی با PP' ناوردا هستند. بقیه‌ی خطوط ناوردا نیستند.

اثبات. گیریم P نقطه‌ای با مختصات $(p_1,p_2,1)$ باشد. اگر T انتقالی با ماتریس به فرم مفروض در قضیه ۱۳-۳ باشد مختصات $P'=T(P)$ عبارتند از: $(p_1+a,p_2+b,1)$ و بنابراین، معادله‌ی خط PP' به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}x_1 & p_1 & p_1+a\\ x_2 & p_2 & p_2+b\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=0$$

با ارزیابی این دترمینان $[-b,a,p_1b-p_2a]$ به عنوان مختصات خطی برای PP' حاصل می‌شود؛ بدین ترتیب، همه‌ی خطوط موازی PP' و PP' مختصاتی به فرم $[-b,a,c]$ دارند. با به کار بردن معادله‌ی خطی این انتقال داریم:

$$[-b,a,c]\begin{bmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-b,a,c]$$

بدین ترتیب، این خطوط، در واقع تحت این انتقال ناوردا هستند.

برای بررسی عبارت دوم قضیه از اثباتی ساختنی استفاده خواهیم کرد. فرض کنید

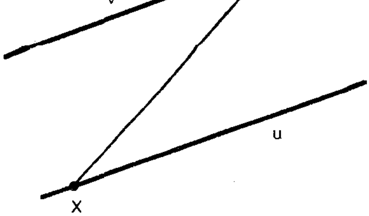
خط l با PP' موازی نبوده و همچنین تحت انتقال موردنظر ناوردا باشد. پس l و PP' همدیگر را در نقطه‌ای مانند Q قطع می‌کنند؛ بنابراین، Q روی دو خط ناوردای l و PP' واقع است؛ چون طولپای‌ها حافظ وقوع هستند $Q'=T(Q)$ نیز باید روی l و PP' باشد و بنابراین: $Q=Q'$ و این بدین معنی است که Q یک نقطه‌ی ناوردای این انتقال است؛ ولیکن، چون این انتقال همانی نیست ($P\neq P'$) به یک تناقض می‌رسیم و نتیجه این‌که هیچ خطی علاوه بر خطوط موازی با PP' ناوردا نیست. □

قضیه ۱۸-۳. **اگر u و v خطوط موازی باشند آن‌گاه انتقالی موجود است که u را به v می‌نگارد.**

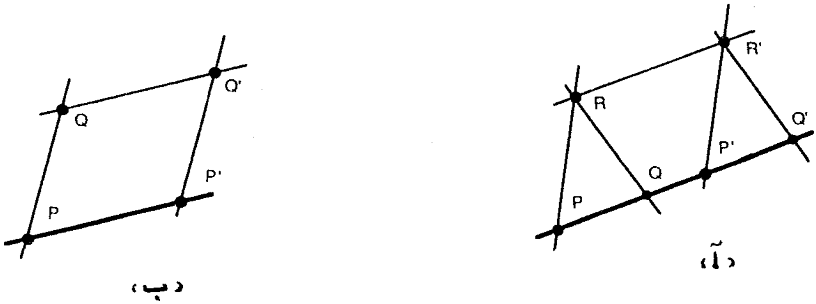
اثبات. گیریم X یک نقطه روی u و X' یک نقطه روی v باشد. آن‌گاه بنابر قضیه ۱۵-۳ انتقالی موجود است که X را به X' بنگارد. اما این انتقال، خط u را به خط u' مار بر X' می‌نگارد (شکل ۲-۳). چون u' با u موازی است (قضیه ۱۶-۳) نتیجه می‌شود: $u'=v$ □

با استفاده از خواص قبلی انتقال‌ها مشخص کردن نگار نقاط دیگر تحت تبدیل T که P را به P' می‌نگارد به‌طریقی ساختنی ممکن خواهد بود. اگر Q نقطه‌ی دیگری باشد Q'، نگار Q به روش زیر مشخص می‌شود:

حالت ۱. Q روی PP' نیست (شکل ۳-۳، آ) در آن صورت Q' محل تلاقی خط مار



شکل ۲-۳



شکل ۳-۳

بر P' و موازی با PQ و خط مار بر Q و موازی با PP' است.

حالت ۲. Q روی PP' است (شکل ۳-۳ ، ب). ابتدا R' را برای Rی که روی PP' نیست یافته سپس با استفاده از R و R' به جای P و P' از حالت (۱) استفاده می‌کنیم.

دوران‌ها نیز با توصیفی ساختنی از این نگاشت‌ها بیش‌تر مشخص خواهند شد.

قضیه ۱۹-۳. دوران R با مرکز $C(c_1,c_2,1)$ دارای ماتریسی نمایشی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & c_1(1-\cos\theta)+c_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -c_1\sin\theta+c_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین، R^{-1} ماتریس نمایشی به صورت زیر دارد:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & c_1(1-\cos\theta)-c_2\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & c_1\sin\theta+c_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و نیز دورانی به مرکز C می‌باشد.

اثبات. بنا بر تعریف، R یک نمایش ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دارد که در آن $a_{11}^2+a_{12}^2=1$. چون $|a_{11}|\le 1$ ، قرار می‌دهیم $a_{11}=\cos\theta$ در نتیجه

$a_{12}=\pm sin\theta$. گیریم $a_{12}=-sin\theta$ حال a_{13} و a_{23} را با توجه به این‌که $C(c_1,c_2,1)$ باید ناوردا باقی بماند، می‌توان یافت؛ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & a_{13} \\ sin\theta & cos\theta & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$c_1 cos\theta - c_2 sin\theta + a_{13} = c_1$$
$$c_1 sin\theta + c_2 cos\theta + a_{23} = c_2$$

و با حل معادلات فوق برحسب a_{13} و a_{23} درایه‌های مطلوب ماتریس نظیر R به‌دست می‌آید. ماتریس نمایش R^{-1} را می‌توان با معکوس کردن ماتریس نظیر R یافت.

با استفاده از این نمایش‌های ماتریسی برای هر نقطه‌ی C، می‌توان نشان داد دوران‌های به مرکز C تشکیل یک گروه می‌دهند.

قضیه ۲۰-۳. مجموعه‌ی همه‌ی دوران‌های با مرکز مفروض C تشکیل یک گروه می‌دهند.

θی ظاهر شده در ماتریس، نظیر R را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران یا به طور رایج‌تر، زاویه‌ی دوران R می‌نامند. از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود که یک دوران با زاویه و مرکزش به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود؛ بنابراین، می‌توانیم دوران با مرکز C و زاویه θ را با $R_{C,\theta}$ نمایش دهیم. توجه کنید که همچنین $(R_{C,\theta})^{-1}=R_{C,-a}$؛ یعنی، وارون یک دوران با زاویه‌ی θ دورانی حول همان مرکز با زاویه‌ی $-\theta$ است؛ اگرچه ما می‌توانیم به زاویه‌ی یک دوران برحسب ماتریس نمایش آن اشاره کنیم ولی هنوز بررسی این که این زاویه نگاشت تعریف شده توسط یک دوران را مشخص می‌کند، لازم است. در قضیه ۲۱-۳ شاهد این موضوع خواهیم بود؛ ولیکن، ابتدا شاهد موضوعی هستیم که به همان

اندازه که در اثبات این قضیه مفید است در محاسبات بعدی نیز به درد می‌خورد.

با این که قضیه ۱۹-۳ برای دورانی با هر مرکز C یک فرم ماتریسی را در اختیار می‌گذارد، فقط به خاطر داشتن فرم ساده‌تر آن برای دوران به مرکز نقطه‌ی $O(0,0,1)$ کافی است. سپس با استفاده از انتقال T که O را به C می‌نگارد و دورانی به مرکز O دوران به مرکز C به شکل زیر به دست می‌آید (تمرین ۶):

$$R_{C,\theta}=T\,R_{O,\theta}T^{-1}$$

به خاطر این رابطه کافی است قضیه‌ی بعد را فقط برای دوران‌های به مرکز $O(0,0,1)$ بررسی کنیم؛ چراکه انتقال‌های T و T^{-1} حافظ زوایا هستند.

قضیه ۲۱-۳. تحت دورانی به مرکز C با زاویه‌ی θ، هر نقطه‌ی $P\neq C$ به نقطه‌ی P' نگاشته می‌شود؛ به طوری که $d(C,P)=d(C,P')$ و $m(\angle PCP')=\theta$.

اثبات. چون یک دوران یک طولپای بوده و نگار نقاط C و P تحت آن به ترتیب C و P' می‌باشد. از تعریف طولپای نتیجه می‌شود که $d(C,P)=d(C,P')$

برای بررسی این که $m(\angle PCP')=\theta$ از موضوع بند قبل از قضیه استفاده کرده نتیجه را برای دوران به مرکز $O(0,0,1)$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید که P به مختصات $(p_1,p_2,1)$ باشد؛ سپس با استفاده از نمایش ماتریسی دوران به مرکز O و زاویه‌ی θ داریم:

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، P و P' به ترتیب به مختصات $(p_1,p_2,1)$ و $(p_1\cos\theta-p_1\sin\theta, p_1\sin\theta+p_2\cos\theta, 1)$ هستند که این نتیجه می‌دهد که خطوط $u=OP$ و $v=OP'$ با مختصات $u[-p_2,p_1,0]$ و $v[-p_1\sin\theta-p_2\cos\theta, p_1\cos\theta-p_2\sin\theta, 0]$ می‌باشند. با قرار دادن این مختصات در عبارت نظیر: $tg(\angle(u,v))$ در تعریف ۴-۳ داریم:

$$\frac{u_1v_2-v_1u_2}{u_1v_1+u_2v_2}=\frac{-p_2(p_1\cos\theta-p_2\sin\theta)-(-p_1\sin\theta-p_2\cos\theta)p_1}{-p_2(-p_1\sin\theta-p_2\cos\theta)+p_1(p_1\cos\theta-p_2\sin\theta)}=\frac{(p_1^2+P_2^2)\sin\theta}{(p_1^2+P_2^2)\cos\theta}=tg\theta$$

□

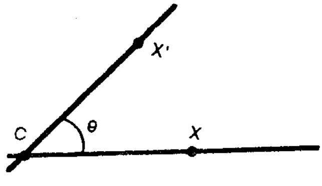
با استفاده از این قضیه به طور ساختنی می‌توان نگار هر نقطه تحت یک دوران $R_{C,\theta}$ را همان‌طور که در شکل ۴-۳ آمده است مشخص کرد. این قضیه، همچنین یک اثبات بلافصل قضیه‌ی زیر را به همراه دارد.

قضیه ۲۲-۳. اگر خطوط u و v درنقطه‌ی c متقاطع باشند و $m(\angle(u,v))=\theta$ آن‌گاه $R_{C,\theta}$، u را به v می‌نگارد.

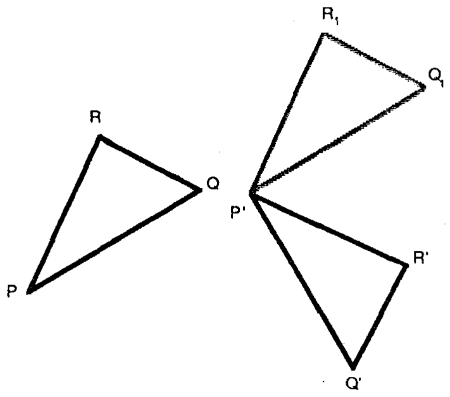
حال که طولپای‌های مستقیم مشخص شده‌اند، امکان اثبات عکس قضیه ۱۱-۳ برای مثلث‌های هم‌جهت به‌وجود آمده است.

قضیه ۲۳-۳. اگر ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ دو مثلث باشند، به طوری که $m(\overline{PQ})=m(\overline{P'Q'})$، $m(\overline{QR})=m(\overline{Q'R'})$ ، $m(\overline{RP})=m(\overline{R'P'})$ ، $m(\angle PQR)=m(\angle P'Q'R')$ ، $m(\angle QRP)=m(\angle Q'R'P')$ و $m(\angle RPQ)=m(\angle R'P'Q')$ آن‌گاه یک طولپای مستقیم موجود است، به‌طوری که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد و بدین ترتیب: $\Delta PQR\cong\Delta P'Q'R'$.

اثبات. برای نشان دادن قابلیت انطباق دو مثلث، کافی است نشان دهیم که یک طولپای ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد (تعریف ۱۲-۳). در پاراگراف بعدی، روند حصول یک چنین طولپایی را طرح‌ریزی کرده‌ایم.



شکل ۴-۳



شکل ۵-۳

گیریم T انتقالی باشد که P را به P' می‌نگارد. T همان‌طور که در شکل ۵-۳ مشخص شده است نقاط Q و R را به Q_1 و R_1 می‌نگارد، گیریم $\theta = m(\angle Q_1P'Q')$. آن‌گاه دوران به مرکز P' و زاویه‌ی θ نقاط P' و Q_1 را به ترتیب به نقاط P' و Q' می‌نگارد؛ چراکه $d(P',Q_1)=d(P,Q)=d(P',Q')$ علاوه بر این، چون:
$m(\angle Q_1P'R_1)=m(\angle QPR)=m(\angle Q'P'R')$ و $d(P',R_1)=d(P,R)=d(P',R')$، این دوران نقطه‌ی R_1 را به R' می‌نگارد. بدین ترتیب، طولپایی متشکل از ترکیب $R_{P',\theta}T$ مثلث ΔPQR را به مثلث $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد.

تمرین:

۱- گیریم T انتقالی باشد که $X(1,-2,1)$ را به $X'(3,4,1)$ می‌نگارد. (آ) ماتریس T و نگار خط $u[2,3,-1]$ را تحت T بیابید. (ب) بررسی کنید که u و $T(u)$ موازی‌اند.

۲- ماتریس انتقالی را که $u[1,-2,5]$ را به $v[2,-4,7]$ می‌نگارد بیابید.

۳- خطوط ناوردای انتقالی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

را بیابید.

۴- ثابت کنید: اگر l یک خط باشد، مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌هایی که l را ناوردا نگه می‌دارند تشکیل گروه می‌دهند.

۵- (آ) بررسی کنید که ماتریس

$$\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} & ۲ \\ -\frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس یک دوران است. (ب) زاویه‌ی دوران چقدر است؟ (پ) مرکز دوران چیست؟

۶- بررسی کنید در صورتی که O نقطه‌ای به مختصات (۰,۰,۱) و T انتقالی باشد که O را به C می‌نگارد $TR_{O,\theta}T^{-۱}$ دورانی به مرکز C و زاویه‌ی θ است.

۷- (آ) نقطه‌ی تلاقی خطوط $u[۲,۰,۳]$ و $v[۱,۱,۵]$ را بیابید. (ب) $m(\angle(u,v))$ را بیابید. (پ) دورانی را بیابید که خط u را به v بنگارد (جواب خود را امتحان کنید).

۸- (آ) چگونگی پیدا کردن مرکز و زاویه‌ی دورانی که نقطه‌ی مفروض P را به نقطه‌ی مفروض P' می‌نگارد را به طور ساختنی بیان کنید (توجه کنید که بی‌نهایت دوران ممکن موجود است). (ب) با استفاده از پاسخ (آ) ماتریس دورانی که $P(۲,۰,۱)$ را به $P'(۱,-۳,۱)$ می‌نگارد را بیابید. بررسی کنید که دوران این کار را انجام می‌دهد.

۹- ثابت کنید که $T^{-۱}$ ماتریس نمایشی به فرم مفروض در قضیه ۱۳-۳ دارد.

۱۰- قضیه ۱۴-۳ را ثابت کنید.

۱۱- قضیه ۱۵-۳ را ثابت کنید.

۱۲- اثباتی تحلیلی از عبارت دوم در قضیه ۱۷-۳ ارائه دهید (بقیه‌ی خطوط ناوردا نیستند).

۱۳- (آ) با کمک نمودار مثالی بزنید که توجیه‌کننده‌ی این باشد که حاصل‌ضرب دو دوران با مرکزهای مختلف می‌تواند یک انتقال باشد. (ب) نحوه‌ی نگاشته شدن یک مثلث خاص را تحت دو دورانی که در قسمت اول از آن‌ها استفاده شد نشان دهید.

۱۴- با کمک ماتریس‌ها نشان دهید $R_{C,\theta}R_{C,\varphi}=R_{C,\theta+\varphi}$.

۱۵- ثابت کنید هر طولپای مستقیم را می‌توان به عنوان حاصل‌ضرب یک دوران به مرکز $O(0,0,1)$ و یک انتقال بیان کرد (این جمله مشخص می‌کند که ابتدا باید از دوران استفاده کرد و سپس از انتقال).

۱۶- (آ) طولپای مستقیمی را که $P(1,0,1)$ و $Q(5,3,1)$ را به $P'(3,-2,1)$ و $Q'(0,2,1)$ می‌نگارد بیابید. (ب) طولپایی که شما یافته‌اید دوران است یا انتقال؟ چرا؟

۱۷- (آ) بااستفاده‌از روندی‌که در اثبات قضیه ۲۳-۳ طرح شد تحقیق کنید که ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ قابل انطباقند که در آن P، Q، R، P'، Q' و R' دارای مختصات زیر هستند: $P(2,8,1)$، $Q(4,4,1)$، $R(10,7,1)$، $P'(7,-2,1)$، $Q'(11,-4,1)$ و $R'(14,2,1)$ (ب) بررسی کنید که طولپایی که در قسمت (آ) یافته‌اید یک دوران است. مرکز آن چیست؟

۱۸- ثابت کنید اگر $C\neq D$ ضمناً $R_{C,\theta}$ و $R_{D,\varphi}$ دو دوران غیرهمانی باشند، آنگاه

حاصل‌ضرب $R_{D,\varphi}R_{C,\theta}$ عبارت است از: (آ) دورانی با زاویه $\theta+\varphi$ اگر (هنگ 2π) $\theta+\varphi\neq 0$ و (ب) یک انتقال است هرگاه (هنگ 2π) $\theta+\varphi=0$.

۱۹- ثابت کنید: اگر T طولپای مستقیمی باشد که $T^2=I$ که در آن I همانی است، آن‌گاه $T=I$ یا T دورانی با زاویه‌ی 180° است.

۲۰- ثابت کنید: (آ) اگر خطی تحت دورانی غیرهمانی به مرکز C ناوردا باشد، آن‌گاه آن خط از C می‌گذرد. [راهنمایی: فرض کنید $C=O(0,0,1)$] (ب) اگر یک دوران غیرهمانی به مرکز C خطی ناوردا داشته باشد آن‌گاه زاویه‌ی دوران 180° است.

۳-۶. طولپای‌های غیرمستقیم

در این بخش، همانند بخش طولپای‌های مستقیم برآنیم وجود دو نوع طولپای را مشخص کنیم. آن‌هایی که نقاط ناوردا دارند و آن‌هایی که این‌گونه نیستند؛ ولیکن، در این حالت، طولپای‌هایی وجود دارند که نه‌تنها یک نقطه، بلکه هر نقطه از خطی مشخص را ناوردا نگه می‌دارند. خطی این‌چنین را ناوردای نقطه‌ای نامند. صفت "نقطه‌ای" از این بابت مهم است که یک خط می‌تواند بدون این‌که نقاط روی آن ناوردا باشند، ناوردا باشد. مثالی از آن، خط PQ $(P\neq Q)$ تحت انتقالی است که P را به Q می‌نگارد. بنابر قضیه ۳-۱۷ خط PQ تحت این انتقال ناورداست اما چون انتقال هیچ نقطه‌ی ناوردا ندارد، هیچ نقطه‌ای روی PQ ناوردا باقی نمی‌ماند.

تعریف ۳-۱۶. یک بازتاب با محور m که با R_m نشان داده می‌شود، طولپایی غیرمستقیم است که خط m را ناوردای نقطه‌ای نگه‌می‌دارد.

پس از این تعریف، بررسی وجود این‌چنین تبدیل‌هایی مهم است. در این خصوص، ماتریس بازتاب R_x که x خطی به مختصات [۰,۱,۰] می‌باشد را می‌یابیم؛ یعنی، خط معروف به محور xها یا x_1ها. سپس با استفاده از آن، ماتریس نظیر بازتابی با هر محور دیگر مثل m را می‌توان به دست آورد.

قضیه ۲۴-۳. ماتریس نمایش بازتاب R_x با محور [۰,۱,۰] به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی ماتریس نمایش بازتاب R_m را می‌توان با استفاده از $R_m=SR_xS^{-1}$ پیدا کرد که در آن S طولپای مستقیمی است که x را به m می‌نگارد ($S(x)=m$) و

اثبات. همه‌ی نقاط روی x مختصاتی به شکل $(x_1,0,1)$ دارند R_x هم طولپای غیرمستقیمی است که هر نقطه $(x_1,0,1)$ را ثابت نگه‌می‌دارد؛ یعنی، برای هر $x_1\in\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $a_{11}x_1+a_{13}=x_1$ و $a_{12}x_1+a_{23}=0$. چون این روابط باید برای هر $x_1\in\mathbb{R}$ برقرار باشند پس $a_{11}=1$ و $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$. بنابراین، ماتریس نظیر R_x به صورت داده شده است. در حالت کلی، همواره یک طولپای مستقیم که x را به m می‌نگارد موجود است (قضیه ۱۸-۳ و ۲۲-۳). با استفاده از فرع قضیه ۸-۳، SR_xS^{-1} طولپایی غیرمستقیم است. پس کافی است نشان دهیم که SR_xS^{-1}، m را ناوردای نقطه‌ای نگه‌می‌دارد. اگر X نقطه‌ی دلخواهی روی m باشد، $S^{-1}(X)$ نقطه‌ای روی خط x است و بنابراین، $R_x(S^{-1}(X))=S^{-1}(X)$. بدین ترتیب: $(SR_xS^{-1})(X)=S(S^{-1}(X))=X$ و بنابراین X ناوردا باقی می‌ماند.

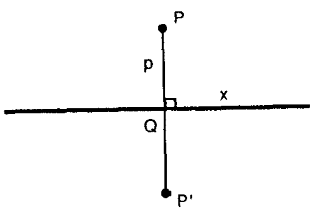
فرع. $R_m^{-1}=R_m$.

بنابر تعریف: یک بازتاب با محور m همه‌ی نقاط روی m را ناوردا نگه‌می‌دارد، اما آیا R_m نقاط ناوردای دیگری دارد؟ قضیه‌ی بعد به این سؤال پاسخ می‌دهد.

قضیه ۲۵-۳. تنها نقاط ناوردای تحت بازتاب با محور m، R_m، نقاط روی m هستند. برای هر نقطه ناواقع بر m، اگر $P'=R_m(p)$ آن‌گاه $P'\neq P$ و m عمودمنصف پاره‌خط PP' است.

اثبات. گیریم P نقطه‌ای با مختصات $(p_۱,p_۲,۱)$ باشد، آن‌گاه $P'=R_x(P)$ مختصات $(p_۱,-p_۲,۱)$ را دارا خواهد بود؛ بنابراین، نقاط ناوردای R_x دقیقاً آن‌هایی می‌باشند که $p_۱=-p_۲$ یا $p_۲=۰$. این‌ها نقاط روی $x[۰,۱,۰]$ هستند. با استفاده از این نتیجه برای بازتاب R_x، بررسی این‌که نقاط ناوردای $R_m=SR_xS^{-۱}$ تنها نقاط روی خط m هستند، ممکن می‌باشد (تمرین ۱).

برای نشان دادن این‌که اگر P روی m نباشد، m عمودمنصف پاره‌خط PP' است. باز حالتی را درنظر می‌گیریم که m خط x باشد (شکل ۶-۳). چون $P(p_۱,p_۲,۱)$ روی m نیست، $p_۲\neq ۰$. خطوط $p=PP'$ و x به ترتیب مختصات $[۱,۰,-p_۱]$ و $[۰,۱,۰]$ را دارند و بنابر تعریف ۴-۳ داریم: $m(\angle(p,x))=۹۰^\circ$ همچنین، خطوط p و x همدیگر را در نقطه‌ی $Q(p_۱,۰,۱)$ قطع می‌کنند به طوری که $d(P,Q)=d(P',Q)=|P_۲|$، و این موضوع بیانگر نصف شدن PP' توسط x است. در حالت کلی، همین نتیجه را برای هر خط m با نوشتن $R_m=SR_xS^{-۱}$ (که S یک طولپای مستقیم است که x را به m می‌نگارد) و توجه به این که S حافظ اندازه‌ی زاویه و فاصله است می‌توان نشان داد. □



شکل ۶-۳

قضیه‌ی بعد بیانگر این است که خطوط عمود بر خط m تحت بازتاب با محور m، ناوردا هستند. اثبات این قضیه و بقیه‌ی قضایا در مورد بازتاب‌هایی که محور بازتاب در آن‌ها $x[۰,۱,۰]$ می‌باشد، داده شده‌اند. همان‌طور که در اثبات قضیه ۲۵-۳ مختصراً گفته شد، این نتایج را می‌توان با نوشتن $R_m=SR_xS^{-1}$ که S طولپایی که x را به m می‌نگارد می‌باشد، برای بازتاب‌هایی با محورهای دیگر تعمیم داد.

قضیه ۲۶-۳. هر خط عمود بر m تحت R_m ناوردا می‌باشد و برعکس، هر خط ناوردا تحت R_m یا m است یا خطی است عمود بر m

اثبات. همان‌طور که قبلاً گفته شد، فرض می‌کنیم $m=x$. گیریم u خطی عمود بر x باشد چون x به مختصات $[۰,۱,۰]$ می‌باشد از تعریف ۴-۳ نتیجه می‌شود که u به مختصات $[u_۱,۰,u_۳]$ خواهد بود. اگر u' نگار u تحت این بازتاب باشد، آن‌گاه $ku'=u(R_x)^{-۱}=uR_x$ و یا با نمایش ماتریسی:

$$ku' = [u_۱,۰,u_۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = [u_۱,۰,u_۳]$$

بنابراین $u'=u$ ناورداست.

حال، فرض می‌کنیم $u[u_۱,u_۲,u_۳]$ خطی ناوردا تحت تبدیل R_x باشد، آن‌گاه

$$k\,[u_۱,u_۲,u_۳] = [u_۱,u_۲,u_۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $ku_۱=u_۱$، $ku_۲=-u_۲$ و $ku_۳=u_۳$ اگر $u_۱$ یا $u_۳$ غیرصفر باشند، نتیجه می‌شود که $k=۱$ و از این رو $u_۲=۰$. بنابراین u به مختصات $[u_۱,۰,u_۳]$ است و بنابراین به x عمود است. اگر $u_۱=u_۳=۰$ و $u_۲\neq ۰$ بنابراین $u=x[۰,۱,۰]$. □

حال با استفاده از بازتاب‌ها در کنار طولپای‌های مستقیم، بررسی عکس قضیه ۱۱-۳ برای مثلث‌هایی با جهت‌های مختلف ممکن است (تمرین ۴).

قضیه ۳-۲۷. اگر ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ دو مثلث باشند، به طوری که $m(\overline{PQ})=m(\overline{P'Q'})$، $m(\overline{QR})=m(\overline{Q'R'})$، $m(\overline{RP})=m(\overline{R'P'})$ و همچنین $m(\angle PQR)=m(\angle P'Q'R')$، $m(\angle QRP)=-m(\angle Q'R'P')$ و $m(\angle RPQ)=-m(\angle R'P'Q')$ آنگاه یک طولپای غیرمستقیم که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد موجود است و بنابراین: $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$.

خواص توصیف شده‌ی بازتاب‌ها منجر به این امر می‌شود که هر طولپای مستقیمی که در اثبات قضیه‌ی قبل به کار برده شد، حاصل‌ضرب دو بازتاب است در صورتی که محورها به طور مناسبی انتخاب شده باشند.

قضیه ۳-۲۸. حاصل‌ضرب دو بازتاب R_m و R_n (آ) اگر n و m موازی باشند، انتقالی خواهد بود که هر نقطه‌ی P را به P' می‌نگارد به‌طوری که $d^*(P,P')=۲d^*(m,n)$ (d^* مشخص‌کننده‌ی فاصله‌ی جهت‌دار است)؛ یا (ب) اگر n و m همدیگر را در C قطع کنند، دورانی خواهد بود به مرکز C و زاویه‌ی $\theta=۲[m(\angle(m,n))]$. برعکس هر انتقال یا دوران را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب R_m و R_n نوشت که خطوط m و n به ترتیب خواص توصیف شده در (آ) یا (ب) را دارند.

اثبات. (آ) فرض می‌کنیم که m خطی به مختصات $[۰,۱,۰]$ است؛ پس n باید به مختصات $[۰,۱,n_۲]$ باشد. می‌توان فاصله‌ی (عمودی) بین m و n را در امتداد خط $t[۱,۰,۰]$ که به m و n به ترتیب در $M(۰,۰,۱)$ و $N(۰,-n_۲,۱)$ عمود است، حساب کرد. پس $d^*(m,n)=d^*(M,N)=-n_۲$ برای یافتن ماتریس نمایش R_m، از انتقال T که M را به N و از این رو خط m را به خط n می‌نگارد استفاده می‌کنیم. ماتریس T عبارت است از:

$$T=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین $R_n=TR_mT^{-۱}$ ماتریس نمایش زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب R_nR_m با ماتریس نمایش زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که ماتریس یک انتقال است. علاوه بر این:

$$X' = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲n_۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲-۲n_۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب، $d^*(X,X')=-۲n_۲=d^*(m,n)$

(ب) اثبات شبیه قسمت (آ) است به جز این‌که در این حالت استفاده از دورانی که m را به n می‌نگارد لازم است (تمرین ۶).

چون اثبات نیمه دوم قضیه نیز شامل دو حالت می‌شود ما به اثبات یکی پرداخته و حالت دیگر را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۷).

برای بررسی عکس (ب) گیریم $R_{C,۲\theta}$ دورانی به مرکز C باشد. برای ساده شدن محاسبات ماتریسی فرض می‌کنیم $C=O(۰,۰,۱)$. آنگاه $R_{O,۲\theta}$ ماتریس نمایش زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} cos(۲\theta) & -sin(۲\theta) & ۰ \\ sin(۲\theta) & cos(۲\theta) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال بازتاب‌های R_m و R_n را با $m[۰,۱,۰]$ و $n[-sin\theta,cos\theta,۰]$ درنظر می‌گیریم. برای یافتن ماتریس نمایش نظیر R_n توجه کنید که m و n همدیگر را در O قطع می‌کنند، پس:

$$R_{O,\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & ۰ \\ sin\theta & cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دورانی به مرکز O است که m را به n می‌نگارد و R_n ماتریس نمایش زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & ۰ \\ sin\theta & cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & ۰ \\ sin\theta & cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta & ۲(\sin\theta)(\cos\theta) & ۰ \\ ۲(\sin\theta)(\cos\theta) & \sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(۲\theta) & \sin(۲\theta) & ۰ \\ \sin(۲\theta) & -\cos(۲\theta) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

سرانجام R_nR_m ماتریس نمایش زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} \cos(۲\theta) & -\sin(۲\theta) & ۰ \\ \sin(۲\theta) & \cos(۲\theta) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = R_{O,۲\theta}$$ □

فرع ۱. هر طولپای مستقیم حاصل‌ضرب دو بازتاب است.

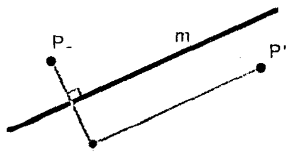
فرع ۲. $R_mR_n=R_{m'}R_{n'}$ **اگر و فقط اگر** m، n، m'، n' **همگی موازی باشند و** $d^*(m,n)=d^*(m',n')$ **یا** m، n، m'، n' **همگی هم‌رس باشند و** $m(\angle(m,n))=m(\angle(m',n'))$

فرع ۱ نه تنها قضیه ۲۸-۳ را خلاصه می‌کند، بلکه سؤال زیر را نیز مطرح خواهد کرد:

آیا طولپای‌های غیرمستقیم نیز حاصل‌ضرب بازتاب‌ها هستند؟ به وضوح بازتاب‌ها خودشان طولپای‌های غیرمستقیمند. ولیکن، طولپای‌های غیرمستقیم دیگر نیز وجود دارند که باقیمانده‌ی این بخش صرف مطالعه‌ی آن‌ها خواهد شد.

قضیه ۲۹-۳. یک طولپای غیرمستقیم حاصل‌ضرب یک یا سه بازتاب است.

اثبات. بعد از توجه به این که هر طولپای غیرمستقیم را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک طولپای مستقیم و R_x بیان کرد، اثبات به سادگی نتیجه می‌شود (تمرین ۹). □



شکل ۷-۳

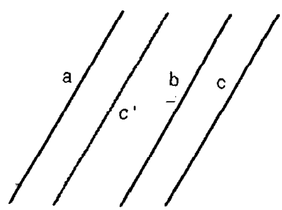
قضیه‌ی بعد بیانگر این است که طولپای‌های غیرمستقیم بازتاب یا لغزه هستند. در اثبات این نتیجه از فرع ۲ قضیه ۲۸-۳ زیاد استفاده می‌شود.

تعریف ۱۷-۳. یک لغزه با محور m (شکل ۷-۳) حاصل‌ضرب یک بازتاب با محور m و انتقالی غیرهمانی در امتداد m است (یعنی m تحت انتقال ناوردا است).

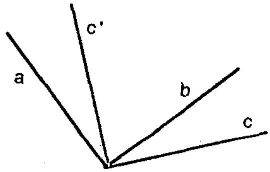
قضیه ۳۰-۳. یک طولپای غیرمستقیم یک بازتاب است یا یک لغزه.

اثبات. با استفاده از قضیه ۲۹-۳ فقط لازم است طولپای‌هایی را که به صورت حاصل‌ضرب $R_cR_bR_a$ نوشته می‌شوند درنظر گرفت. این حاصل‌ضرب را برای همه‌ی حالت‌ها امتحان می‌کنیم.

حالت ۱. a، b، c همگی موازی باشند (شکل ۸-۳). سپس گیریم c' خطی موازی با a باشد که $d^*(c',a)=d^*(c,b)$ بنا بر فرع ۲؛ $R_cR_b=R_{c'}R_a$ بنابراین $R_cR_bR_a=R_{c'}R_aR_a=R_{c'}$.



شکل ۸-۳

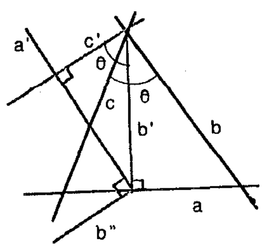


شکل ۹-۳

حالت ۲. a، b، c هم‌رس باشند (شکل ۹-۳). اثبات شبیه حالت ۱ است به‌جز این‌که در این حالت خط c' باید طوری انتخاب شود که مار بر $a.b$ بوده و $m(\angle(c',a))=m(\angle(c,b))$.

حالت ۳. هر زوج از خطوط a، b، c همدیگر را در نقاط معمولی مختلفی قطع کنند (شکل ۱۰-۳). گیریم b' مار بر $b.c$ و عمود بر a باشد. فرض کنید c' خط مار بر $b.c$ (نقطه‌ی تقاطع b و c) به طوری باشد که: $m(\angle(c,b))=m(\angle(c',b'))$، آن‌گاه $R_cR_bR_a=R_{c'}R_{b'}R_a$ که b' عمود بر a است. گیریم a' خطی مار بر $a.b'$ و عمود بر c' بوده و فرض می‌کنیم b'' خطی مار بر $a.b'$ طوری باشد که $m(\angle(a,b'))=m(\angle(a',b''))$. آن‌گاه $R_{c'}R_{b'}R_a=R_{c'}R_{b''}R_{a'}$ که a' عمود بر c' است. چون b' عمود بر a می‌باشد نتیجه می‌شود که b'' عمود بر a' بوده و بنابراین c' و b'' موازی و هردو عمود بر a' هستند، بنابراین $R_{c'}R_{b''}$ انتقالی در امتداد a' بوده و بدین صورت، حاصل‌ضرب $R_{c'}R_{b''}R_{a'}$ لغزه‌ای با محور a است.

حالت ۴. دقیقاً دو خط موازی‌اند. اثبات این حالت شبیه حالت‌های قبل است. □



شکل ۱۰-۳

اکنون نشان داده‌ایم که در واقع دو نوع طولپای غیرمستقیم موجود است. بازتاب‌ها، که یک خط را ناوردای نقطه‌ای نگه می‌دارند مورد توجه واقع شدند، از طرفی لغزه‌ها، که یک خط ناوردا دارند ولی هیچ نقطه‌ی ناوردا ندارند (تمرین ۱۶).

قضیه ۳-۳۱. یک لغزه خطی ناوردا دارد؛ ولی نقطه‌ی ناوردا ندارد.

با نتایج این بخش می‌توانیم طبقه‌بندی طولپای‌ها را کامل کنیم و نشان دهیم که طولپایی که یک مثلث را به مثلثی قابل انطباق با آن می‌نگارد منحصر به‌فرد است (تمرین ۱۷ تا ۱۹).

قضیه ۳-۳۲. هر طولپای، یک دوران، یک انتقال، یک بازتاب یا یک لغزه است و بنابراین، هر طولپای را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب حداکثر سه بازتاب نوشت.

فرع. طولپایی با سه نقطه‌ی ناوردای غیرواقع بر یک خط همانی است.

قضیه ۳-۳۳. اگر $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ آنگاه یک طولپای منحصر به فرد ΔPQR را بر روی $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد.

تمرین:

۱- اگر S طولپای مستقیمی باشد که خط x را به خط m می‌نگارد، نشان دهید که تنها نقاط ناوردای $R_m = SR_xS^{-1}$ نقاط روی m هستند.

۲- (آ) ماتریس R_m را که m خط $x_2 = (\frac{\sqrt{3}}{3})x_1$ می‌باشد، بیابید. (ب) با استفاده از این ماتریس P'، نگار نقطه‌ی $P(3,7,1)$ تحت این بازتاب را پیدا کنید. (پ) بررسی کنید که

m عمود منصف $\overline{PP'}$ است.

۳- در اثبات قضیه ۲۶-۳ برای نشان دادن این که خطوط عمود بر m تحت بازتاب با محور m ناوردا هستند از عبارتی تحلیلی استفاده شده است. اثباتی غیرتحلیلی از این نتیجه را ارائه دهید.

۴- اثباتی برای قضیه ۲۷-۳ شبیه اثبات قضیه ۲۳-۳ بخش ۵-۳ ارائه دهید.

۵- حاصل‌ضربی از یک انتقال، یک دوران و یک بازتاب بیابید که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ بنگارد در صورتی که $P(-۲,۵,۱)$، $Q(-۲,۷,۱)$، $R(-۵,۵,۱)$، $P'(۴,۳,-۱)$، $Q'(۶,۳,۱)$ و $R'(۴,۰,۱)$ باشند.

۶- قسمت (ب) قضیه ۲۸-۳ را ثابت کنید.

۷- عکس قسمت (آ) در قضیه ۱۵-۳ را ثابت کنید.

۸- گیریم R_a و R_b در صورتی که $a\neq b$، بازتاب‌هایی با محورهای a و b باشند، ثابت کنید: $R_aR_b=R_bR_a$ اگر و فقط اگر a و b بر هم عمود باشند. [راهنمایی: از قضیه ۲۸-۳ استفاده کنید.]

۹- قضیه ۲۹-۳ را ثابت کنید.

۱۰- با رسم کردن یک مثال نشان دهید که حاصل‌ضرب دو لغزه می‌تواند یک انتقال باشد (چگونگی نگاشت یک مثلث تحت لغزه‌ها را فراموش نکنید).

۱۱- هویت ماتریس‌های زیر را به عنوان ماتریس‌های بازتاب یا لغزه مشخص کنید.

در هر حالت محور را بیابید.

$$(a)\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \frac{۱}{۲۵}\begin{bmatrix} -۷ & -۲۴ & -۶۴ \\ -۲۴ & ۷ & -۴۸ \\ ۰ & ۰ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

۱۲- نشان دهید که اگر l و m دو خط موازی و n نگار خط l تحت یک لغزه با محور m باشند آن‌گاه l و n نیز موازی‌اند.

۱۳- گیریم P' نگار P تحت یک لغزه با محور m باشد؛ نشان دهید که m پاره‌خط $\overline{PP'}$ را نصف می‌کند.

۱۴- (آ) ماتریس لغزای را بیابید که $\overline{PQ}$ را به $\overline{P'Q'}$ می‌نگارد، در صورتی که $P(۴,-۲,۱)$، $Q(۷,۲,۱)$، $P'(-۳,-۴,۱)$ و $Q'(۰,۰,۱)$ باشند. [**راهنمایی**: از نتیجه‌ی تمرین ۱۳ استفاده کنید.] (ب) آیا این لغزه منحصر به فرد است؟ چرا؟ (ج) آیا لغزه‌ی منحصر به فردی هست که P را به P' بنگارد؟ چرا؟

۱۵- ثابت کنید: اگر خط a خطوط موازی b و c را قطع کند، آن‌گاه $R_cR_bR_a$ یک لغزه است (این قسمتی از حالت ۴ در اثبات قضیه ۳۰-۳ است).

۱۶- قضیه ۳۱-۳ را ثابت کنید.

۱۷- قضیه ۳۲-۳ را ثابت کنید.

۱۸- فرع قضیه ۳۲-۳ را ثابت کنید.

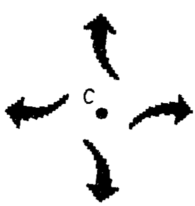
۱۹- قضیه ۳۳-۳ را ثابت کنید. [راهنمایی: فرض کنید دو طولپای موجود باشد و با کمک فرع قضیه ۳۲-۳ به تناقض برسید.]

۷-۳. گروه‌های تقارن

چون طولپای‌ها تناظرهایی از همه‌ی صفحه‌ی اقلیدسی با خودش هستند. مطالعه‌ی ناورداهای طولپای‌ها به ما اجازه می‌دهد که ساختار صفحه‌ی اقلیدسی را مشخص کنیم. همچنین، با درنظر گرفتن ناورداهای طولپای‌هایی که یک شکل را بدون تغییر باقی می‌گذارند؛ تا حد زیادی می‌توان پی به ساختار آن شکل برد. یک تبدیل تقارنی طولپایی است که با شکلی خاص مشخص می‌شود. مثلاً دوران $R=R_{C,90^\circ}$ هر نقطه از طرحی را که در شکل ۱۱-۳ آمده است را بر روی نقطه‌ی دیگری از این طرح می‌نگارد. علاوه بر این، هر دوران در مجموعه‌ی $\{I,R,R^2,R^3\}$ نیز تقارنی از این شکل است. این گروه از تقارن‌ها به گروه تقارنی این شکل معروف است.

تعریف ۱۸-۳. اگر α یک مجموعه از نقاط و T طولپایی باشد که $T(\alpha)=\alpha$ آن‌گاه T یک تقارن α است.

قضیه ۳۴-۳. مجموعه‌ی همه‌ی تقارن‌های یک مجموعه از نقاط تشکیل یک گروه می‌دهند.



شکل ۱۱-۳

برای یافتن گروه تقارنی یک پاره‌خط $\overline{PQ}$ بایست طولپای‌هایی که $\overline{PQ}$ را ناوردا نگه می‌دارند، مشخص کرد. غیر از همانی تنها طولپای مستقیمی که این خاصیت را دارد دورانی به مرکز نقطه‌ی وسط $\overline{PQ}$ و زاویه‌ی ۱۸۰° است. این‌چنین دوران‌هایی به نیم‌دور معروفند.

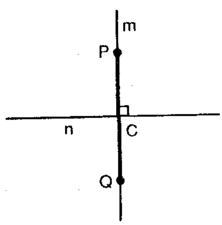
تعریف ۱۹-۳. دورانی به مرکز C و زاویه‌ی ۱۸۰° نیم‌دور به مرکز C است و با H_C نمایش داده می‌شود.

تنها طولپای‌های غیرمستقیم $\overline{PQ}$ دو بازتاب با محورهای $m=PQ$ و n است که n عمودمنصف $\overline{PQ}$ می‌باشد. شکل‌های دیگر ممکن است تقارن‌های بیش‌تری داشته باشند؛ اما، نیم‌دور و بازتاب همان‌گونه که در تعریف بعد می‌آید نقش مهمی در هر بحثی از تقارن ایفا می‌کنند.

تعریف ۲۰-۳. گیریم α مجموعه‌ای از نقاط باشد. اگر H_P نیم‌دوری به مرکز P باشد، به طوری که $H_P(\alpha)=\alpha$، در آن صورت P یک نقطه‌ی تقارن برای α است. اگر R_m بازتابی با محور m باشد، به طوری که $R_m(\alpha)=\alpha$، آن‌گاه m یک خط تقارن برای α است.

بدین ترتیب، پاره‌خط $\overline{PQ}$ یک نقطه‌ی تقارن دارد؛ یعنی، همان C نقطه‌ی وسط آن و دو خط تقارن، خطوط $m=PQ$ و n عمودمنصف $\overline{PQ}$ (شکل ۱۲-۳).

بنابراین مجموعه‌ی همه‌ی تقارنهای $\overline{PQ}$ عبارت است از $S=\{I, R_m, R_n, H_C\}$. چون حاصل‌ضرب هردو عضو S باز در S است مجموعه‌ی S تحت ترکیب بسته است. این امر



شکل ۱۲-۳

جدول ۱-۳: تقارن‌های یک پاره‌خط

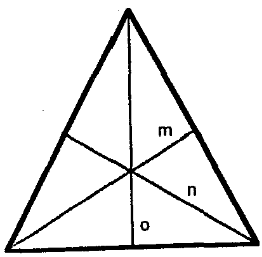
	I	R_m	R_n	H_C
I	I	R_m	R_n	H_C
R_m	R_m	I	H_C	R_n
R_n	R_n	H_C	I	R_m
H_C	H_C	R_n	R_m	I

با جدول ۱-۳ به ثبوت می‌رسد، که در آن درایه‌ی حجز، واقع در سطر R_m و ستون H_C حاصل‌ضرب R_mH_C می‌باشد. این جدول، همچنین نشان می‌دهد که وارون هر عضو S نیز در S است و بدین ترتیب S یک گروه می‌باشد.

دیگر اشکال هندسی نیز گروه تقارن دارند؛ خصوصاً چندضلعی‌های منتظم که گروه تقارن‌های آن‌ها متناهی است.

تعریف ۲۱-۳. اگر گروهی دقیقاً n عضو داشته باشد. آن‌گاه G متناهی و از مرتبه‌ی n است. اگر G متناهی نباشد نامتناهی است.

با مشخص کردن گروه تقارن‌های متناهی یک مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌توان پی برد که این‌چنین مثلثی همان‌طور که در شکل ۱۳-۳ آمده است سه خط تقارن دارد؛ ولی نقطه‌ی تقارن ندارد. اگر m، n و o همچنان که در شکل ۱۳-۳ نشان داده شده خطوط تقارن مثلث باشند، آن‌گاه علاوه بر تبدیل همانی بازتاب‌های R_m، R_n و R_o تقارن‌های



شکل ۱۳-۳

جدول ۲-۳: تقارن‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع

	I	R_m	R_n	$R_۰$	$R_{۱۲۰}$	$R_{۲۴۰}$
I	I	R_m	R_n	$R_۰$	$R_{۱۲۰}$	$R_{۲۴۰}$
R_m	R_m	I	$R_{۱۲۰}$	$R_{۲۴۰}$	R_n	$R_۰$
R_n	R_n	$R_{۲۴۰}$	I	$R_{۱۲۰}$	$R_۰$	R_m
$R_۰$	$R_۰$	$R_{۱۲۰}$	$R_{۲۴۰}$	I	R_m	R_n
$R_{۱۲۰}$	$R_{۱۲۰}$	$R_۰$	R_m	R_n	$R_{۲۴۰}$	I
$R_{۲۴۰}$	$R_{۲۴۰}$	R_n	$R_۰$	R_m	I	$R_{۱۲۰}$

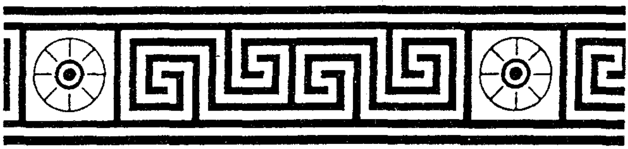
این مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. به علاوه دوران‌هایی با زوایای ۱۲۰° و ۲۴۰° که از حاصل‌ضرب هردو بازتاب حاصل می‌شوند نیز تقارن‌هایی از مثلث هستند. با استفاده از قضیه ۲۸-۳ همان‌طور که در جدول ۲-۳ آمده است می‌توان حاصل‌ضرب هر زوج از این تقارن‌ها را یافت.

همچنین با استفاده از این جدول‌ضرب می‌توان نشان داد که هر تقارن یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان با استفاده از حاصل‌ضرب‌های R_m و $R_{۱۲۰}$ به دست آورد؛ یعنی، گروه تقارن‌ها با این دو طولپای تولید شده است (تمرین ۷).

تعریف ۲۲-۳. اگر هر عضو گروه G حاصل‌ضربی از اعضای $T_۱$، $T_۲$،...، T_n از آن باشد، گوییم G توسط $T_۱$، $T_۲$،...، T_n تولید شده و به صورت $G=\langle T_۱,T_۲,...,T_n\rangle$ نشان می‌دهیم.

فرایند مشابهی را می‌توان برای مشخص کردن گروه تقارن متناهی هر چندضلعی منتظم به‌کار برد. چون این گروه‌های تقارن انتقال غیرهمانی و لغزه را شامل نمی‌شوند و تنها اعضای آن‌ها دوران‌ها و بازتاب‌ها هستند. می‌توان نشان داد که هریک از این گروه‌های متناهی را می‌توان با یک یا دو تقارن تولید کرد؛ به همین دلیل، آن‌ها به ترتیب به گروه‌های دوری و دووجهی معروفند (تمرین‌های ۹ و ۱۰).

اشکالی نیز وجود دارد که گروه تقارن‌های آن‌ها شامل انتقال است. الگویی که تحت کوتاه‌ترین انتقال غیرهمانی ناوردا باقی می‌ماند به الگوی کتیبه معروف است. اصطلاح



شکل ۱۴-۳

الگوی کتیبه، اشاره به وجود این الگوها از یک طرح تکراری در حاشیه‌ی سقف ساختمان‌های قدیمی دلالت دارد. مثالی از یک الگوی کتیبه که همان‌طور تکرار می‌شود، از "طرح‌ها و الگوهایی از زیورهای تاریخی" اثر آدسلی[1] (۱۹۶۸) در شکل ۱۴-۳ نشان داده شده است. الگوهای کتیبه به وضوح شامل خطوطی هستند که نسبت به انتقالی که در تعریفشان آمد، ناوردا می‌باشند.

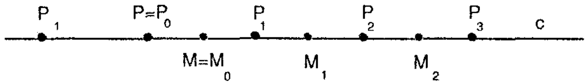
تعریف ۲۳-۳. یک گروه از طولپای‌هایی که خط مفروض c را ناوردا نگه می‌دارند و انتقال‌هایش تشکیل زیرگروه نامتناهی دوری از آن را می‌دهند یک گروه کتیبه با مرکز c می‌باشد.

انتقالی که زیرگروه دوری گروه کتیبه را تولید می‌کند "کوتاه‌ترین" انتقال توصیفی در الگوهای کتیبه است (تمرین ۱۲). در باقیماندهٔ این بخش، این کوتاه‌ترین انتقال را با τ نشان خواهیم داد.

تعریف ۲۴-۳. اگر $T_{A,B}$ انتقالی باشد که A را به B می‌نگارد، آن‌گاه $d(A,B)$ طول انتقال نامیده می‌شود. اگر $d(A,B)<d(C,D)$ آن‌گاه $T_{A,B}$ کوتاه‌تر از $T_{C,D}$ است.

برای یافتن گروه‌های کتیبه ممکن با مرکز c که شامل انتقال τ باشند، لازم است تکلیف طولپای‌هایی که کاندیدای عضویت در این‌چنین گروهی هستند، روشن شود. علاوه بر

1. Audsley-Designs and Patterns from Historic Ornoment. 1968



شکل ۱۵-۳

انتقال‌های موجود در $<\tau>$ ، تنها طولپای‌های مستقیم غیرهمانی مجاز، نیمدورهای با مرکز روی c هستند. طولپای‌های غیرمستقیم مجاز نیز عبارتند از: بازتاب‌هایی نسبت به c، بازتاب‌هایی نسبت به خطوط عمود به c و لغزه‌های در امتداد c. با استفاده از همه‌ی ترکیبات ممکن این‌چنین مولدهایی همراه با τ می‌توان فهرستی دقیق از گروه‌های کتیبه G_i با مرکز c را گردآوری کرد. با مشخص کردن نیم‌دورها و بازتاب‌های متعلق به هر گروه کتیبه G_i می‌توانیم نقاط و خطوط تقارن الگوی کتیبه‌ای که G_i را به عنوان گروه تقارن دارند، پیدا کرد. برخلاف چندضلعی‌ها، ممکن است تعداد این نقاط و خطوط در الگوهای کتیبه نامتناهی باشد (تمرین ۱۱).

در فرآیندی که برای به‌دست آوردن این فهرست، استفاده می‌کنیم نمادهای زیر را به کار خواهیم برد. اگر G_i شامل نیم‌دورها باشد، گیریم P به مرکز نیم‌دور دلالت کند، اگر G_i شامل هیچ نیم‌دوری نباشد ولی شامل بازتاب‌هایی نسبت به خطوط عمود به c باشد p به محور این‌چنین بازتابی و P به نقطه‌ی تلاقی c و p دلالت می‌کند. در غیر این‌صورت P را به عنوان نقطه‌ای روی c انتخاب می‌کنیم. گیریم $P_n=\tau^n(P)$ که τ^n وقتی n عدد صحیح نامنفی باشد به ترکیب τ ، n بار با خودش اشاره می‌کند و اگر n صحیح منفی باشد، τ^n ترکیب τ^{-1} ، $-n$ بار با خودش است. $M=M_0$ به نقطه‌ی وسط $\overline{P_0P_1}$ دلالت دارد و $M_n=\tau^n(M)$. توجه کنید که M_n نیز نقطه‌ی وسط $\overline{P_nP_{n+1}}$ است (شکل ۱۵-۳). در جریان حاضر توجیه بعضی مراحل با تمرین‌های ۱۴ تا ۱۸ مرتبط است.

هفت‌گروه کتیبه‌ای ممکن:

گروه‌های کتیبه‌ای که شامل طولپای‌های مستقیم هستند.

۱- $G_1=<\tau>$: گروهی که تنها توسط τ، کوتاه‌ترین انتقال، تولید شده و شامل هیچ نیم‌دور، بازتاب یا لغزه‌ای نیست. بنابراین الگوی کتیبه‌ی نظیر آن، F_1، هیچ نقطه یا خط تقارنی ندارد؛ علاوه بر این، لغزه‌ای که F_1 را ناوردا نگه‌می‌دارد موجود نیست.

۲- $G_2=<\tau,H_P>$: گروه تولید شده توسط τ و نیم‌دوری حول نقطه‌ی P روی c که در این صورت همه‌ی حاصل‌ضرب‌های $\tau^n H_P$ را شامل می‌شود. هریک از این‌ها باز نیم‌دوری به صورت $\tau^{2k}H_p$ و $\tau^{2k+1}H_p$، به‌ترتیب با مرکزهای P_k و M_k هستند.

برای نشان دادن این‌که G_2 تنها گروه کتیبه از طولپای‌های مستقیم شامل نیم‌دورهاست کافی‌ست نشان دهیم هر نیم‌دوری غیر از H_P باید در G_2 باشد. اگر H_C نیم‌دور دل‌خواهی با مرکز C متمایز از P، روی خط c باشد، آنگاه انتقال $H_C H_P$ نیز در G_2 است؛ ولیکن، همه‌ی انتقال‌های در G_2 در زیرگروه دوری $<\tau>$ می‌باشند. بدین ترتیب، برای یک عدد صحیح n یا $H_C H_P(P)=P_n$ و این موضوع، نتیجه $P=H_P(P)=H_C(P_n)$ می‌دهد که C نقطه‌ی وسط $\overline{PP_n}$ می‌باشد و بنابراین، برای یک k صحیح، C یا P_k است یا M_k. چون G_2 نیم‌دور H_P را شامل بوده ولی طولپای‌های غیرمستقیم را شامل نیست، الگوی کتیبه‌ی مربوط به آن، F_2، یک نقطه‌ی تقارن دارد؛ ولی دارای خط تقارن نیست.

گروه‌های کتیبه‌ای که شامل طولپای‌های غیرمستقیم هستند. ابتدا گروه‌های کتیبه‌ای را درنظر می‌گیریم که شامل بازتاب‌ها باشد؛ ولی شامل نیم‌دورها نباشند. این، بدین معنی است که این گروه‌ها نمی‌توانند شامل R_c و هم R_p باشند که p خط عمود به c در P است، چراکه $R_c P_p=H_P$

۳- $G_3=<\tau,R_c>$: چون بازتاب با محور c و انتقال τ خواص $R_c R_c=I$ و $\tau R_c=R_c\tau$ را دارند، اعضای دیگر گروه تولید شده توسط τ و R_c شکلی به صورت حاصل‌ضرب $\tau^n R_c$

خواهند داشت. همه‌ی این‌ها لغزه‌هایی با محور c هستند که P را به P_n می‌نگارند. بدین ترتیب، الگوی کتیبه‌ی مربوط به آن، $F_۳$، خط مرکز c را به عنوان خط تقارن داراست؛ ولی نقطه‌ی تقارن ندارد.

۴- $G_۴=<\tau,R_p>$: چون بازتاب با محور p و انتقال τ خواص $R_pR_p=I$ و $R_p\tau=\tau^{-۱}R_p$ را دارا هستند. دیگر اعضای این گروه شکلی به صورت حاصل‌ضرب τ^nR_p دارند. این‌ها همگی بازتاب‌هایی به صورت $\tau^{۲k}R_p$ و $\tau^{۲k+۱}R_p$ نسبت به خطوط عمود به c به ترتیب در P_k و M_k هستند.

با نشان دادن این‌که هر بازتاب با هر محور عمود به c باید یکی از اعضای $G_۴$ باشد، می‌توانیم نشان دهیم که $G_۴$ تنها گروه کتیبه‌ای شامل بازتاب‌هایی با محورهای عمود به c می‌باشد. گیریم R_q بازتابی با محور $q\neq p$ عمود به c در Q باشد. در این صورت حاصل‌ضرب R_qR_p انتقالی در امتداد c است و بنابراین، n وجود دارد که $R_qR_p(P)=P_n$ یا $P=R_p(P)=R_q(P_n)$، بنابراین Q نقطه‌ی وسطی $\overline{PP_n}$ است، و در نتیجه به ازای عدد صحیحی مانند k داریم $Q=P_k$ یا $Q=M_k$.

بدین ترتیب، الگوی کتیبه‌ی مربوط به آن، $F_۴$، دارای خطی عمود به مرکز C به عنوان خط تقارن بوده ولی نقطه‌ی تقارن ندارد.

اگر نیم‌دورها و بازتاب‌ها را درنظر بگیریم، دو گروه کتیبه‌ای دیگر اضافه خواهد شد و سرانجام گروه کتیبه‌ای که شامل لغزه‌هاست؛ ولی بازتاب‌ها راندارد. در این‌جا معرفی این سه گروه به اختصار صورت پذیرفته است. توضیح جامعی در این مورد را می‌توان در مارتین[1] (۱۹۸۲، فصل ۱۰) پیدا کرد.

۵- $G_۵=<\tau,H_P,R_c>$: از آن‌جا که $H_PR_c=R_pR_cR_c=R_p$ پس بازتاب R_p در $G_۵$ می‌باشد. همچنین $G_۵$ شامل اعضایی به شکل τ^nR_c می‌باشد که لغزه‌هایی هستند که P را به P_n می‌نگارند. دیگر اعضای $\tau^{۲k}R_p$ و $\tau^{۲k+۱}R_p$ بازتاب‌هایی نسبت به خطوط عمود بر

1. Martin

c به ترتیب در P_k و M_k می‌باشند. الگوی کتیبه مربوط به آن، $F_۵$، یک نقطه‌ی تقارن دارد. همچنین، خط مرکز و خطی عمود به مرکز را به عنوان خطوط تقارن خواهد داشت.

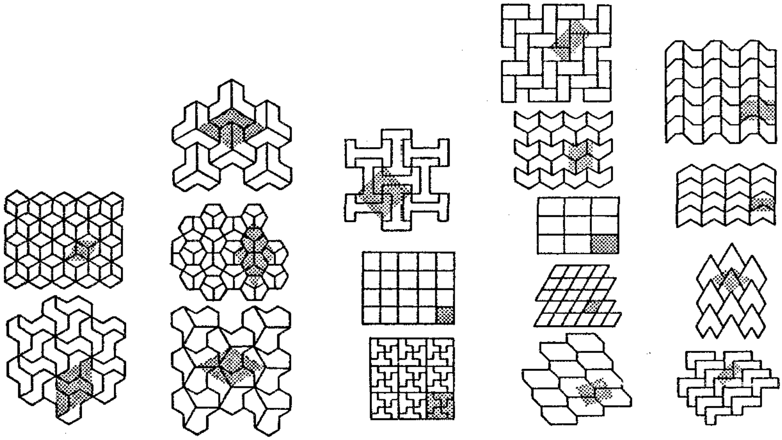
۶- $G_۶=<\tau,H_P,R_q>$: برای به‌دست آوردن گروه کتیبه‌ای متفاوت با $G_۵$، R_q باید بازتابی نسبت به خطی عمود به c در نقطه‌ی Q که از نقاط P_k و M_k متمایز است، باشد. همچنان که مارتین نشان داده است نقطه‌ی Q باید برای یک k نقطه‌ی وسط $\overline{PM_k}$ باشد. الگوی کتیبه‌ی مربوط، یک نقطه‌ی تقارن و یک خط تقارن دارد که خط تقارن برمرکز عمود است.

۷- $G_۷=<\sigma>$: $G_۷$ توسط لغزه σ تولید شده است که $\sigma^۲=\tau$. چون $G_۷$ شامل هیچ بازتاب یا نیم‌دوری نیست، الگوی کتیبه‌ی مربوط، $F_۷$، نقطه‌ی تقارن و خط تقارن ندارد و برخلاف $G_۱$ تحت یک لغزه ناوردا باقی می‌ماند.

هفت الگوی کتیبه‌ی ممکن توسط این گروه‌ها همراه با نوع تقارنشان در جدول ۳-۳ نمایش داده شده‌اند. درست همانند الگوهای کتیبه‌ای که تحت یک گروه تولید شده توسط یک انتقال ناوردا باقی می‌ماند، الگوهایی هستند که تحت گروه تولید شده توسط دو انتقال در امتداد خطوط متقاطع ناوردا باقی می‌مانند. این الگوها به الگوهای کاغذ دیواری معروفند شکل ۱۶-۳ که از مارتین (۱۹۸۲ ، صفحه ۱۰۹) گرفته شده است، مثالی از هر ۱۷ الگوی کاغذ دیواری ممکن را دربر دارد. بحث مفصل این الگوها و گروه‌های تقارنشان در فصل ۱۱ آن کتاب آمده است.

جدول ۳-۳

الگوی کتیبه‌ای		نقطه	خط مرکز	خط عمود	لغزه
		نوع تقارن			
$F_۱$	$LLLLLLL$				
$F_۲$	$NNNNNNN$	×			
$F_۳$	$DDDDDDD$		×		×
$F_۴$	$VVVVVVV$			×	
$F_۵$	$HHHHHHH$	×	×	×	×
$F_۶$	$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$	×		×	×
$F_۷$	$L\Gamma L\Gamma L\Gamma L$				×



شکل ۱۶-۳

تمرین:

۱- قضیه ۳۴-۳ را ثابت کنید.

۲- توضیح دهید چرا انتقال‌ها و لغزه‌ها نمی‌توانند یک چندضلعی را ناوردا نگه‌دارند.

۳- درایه‌های جدول ۱-۳ را بازرسی کنید. [**راهنمایی:** قضیه ۲۸-۳ را به کار گرفته و بازتاب‌ها را به صورت حاصل‌ضرب نیم‌دورها بازنویسی کنید]

۴- ثابت کنید: اگر H_C نیم‌دوری به مرکز C بوده و $H_C(A)=B$، آن‌گاه C نقطه‌ی وسط $\overline{AB}$ می‌باشد.

۵- (آ) ثابت کنید: اگر m و n خطوط تقارن شکل α طوری باشند که در نقطه‌ی C

همدیگر را قطع کنند، آنگاه دورانی به مرکز C در گروه تقارن α موجود است. (ب) توضیح دهید چرا یک شکل هندسی متناهی نمی‌تواند دو خط تقارن موازی داشته باشد. (پ) آیا یک شکل هندسی متناهی می‌تواند دو نقطه‌ی تقارن متمایز داشته باشد؟ چرا؟

۶- درایه‌های جدول ۲-۳ را بازرسی کنید. [راهنمایی: تمرین ۳ را ببینید.]

۷- (آ) نشان دهید که هر تقارن یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تقارن‌های R_m و R_{120} نوشت. (ب) چه زوج‌های دیگری از تقارن‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع گروه‌های تقارن آن را تولید می‌کنند.

۸- مربعی را همراه با همه‌ی نقاط و خطوط تقارن آن رسم کنید. هریک از این نقاط و خطوط را نام‌گذاری نمایید. (ب) مجموعه‌ی تقارن‌ها را برای این مربع بیابید. (پ) جدول ضربی برای این مجموعه‌ی تقارن‌ها بسازید. (ت) با جدولی که در قسمت (پ) ساخته‌اید گروه بودن مجموعه‌ی تقارن‌های مربع را بررسی کنید. مرتبه‌ی این گروه چیست؟ مولدهای این گروه چه هستند؟

۹- گیریم G گروهی متناهی از طولپای‌ها باشند که تنها شامل دوران‌ها است. فرض کنید یکی از اعضای G دورانی غیرهمانی به مرکز C است. (آ) نشان دهید که G نمی‌تواند شامل دورانی غیرهمانی به مرکز D باشد که $D \neq C$. [راهنمایی: فرض کنید $R_{C,\theta}$ و $R_{D,\varphi}$ هردو اعضای G باشند و با استفاده از تمرین ۱۸ در بخش ۵-۳ نشان دهید که طولپای $(R_{D,\varphi})^{-1}(R_{C,\theta})^{-1}R_{D,\varphi}R_{C,\theta}$ در G است.] (ب) نشان دهید که G توسط دوران $R_{C,\alpha}$ تولید می‌شود که در آن α کوچک‌ترین زاویه‌ی دوران مثبت در G است.

۱۰- گیریم G گروهی متناهی شامل یک بازتاب باشند. (آ) ثابت کنید: زیر مجموعه‌ی تمام طولپای‌های زوج G زیرگروهی دوری است که با یک دوران $R_{C,\theta}$ تولید می‌شود. [راهنمایی: تمرین ۹ را ببینید.] (ب) ثابت کنید: اگر R_m بازتابی در G باشد،

آن‌گاه $G=<R_{C,\theta},R_m>$.

۱۱- ثابت کنید: (آ) اگر T تقارنی برای مجموعه‌ی نقاط α و P نقطه‌ی تقارنی از α باشد، آن‌گاه $T(P)$ نیز نقطه‌ی تقارن α است. (ب) اگر T تقارنی برای مجموعه‌ی نقاط α و l خط تقارنی از α باشد آن‌گاه $T(l)$ نیز خط تقارنی از α است.

۱۲- ثابت کنید: اگر τ انتقالی باشد که زیرگروه دوری یک گروه کتیبه‌ای را تولید می‌کند، آن‌گاه τ کوتاه‌ترین انتقال غیرهمانی گروه است.

۱۳- (آ) نشان دهید که تنها دوران‌های یک گروه کتیبه‌ای با مرکز c نیم‌دورهایی به مراکزی بر c هستند. [راهنمایی: تمرین ۲۰ بخش ۵-۳ را ببینید.] (ب) نشان دهید که تنها انتقال‌های یک گروه کتیبه‌ای با مرکز c آن‌هایی هستند که c را ناوردا نگه‌می‌دارند.

تمرین‌های ۱۴ تا ۱۸ پرسش‌هایی است برای کامل کردن دلایل بعضی مراحلی که در طبقه‌بندی گروه‌های کتیبه‌ای آمده است. لازم است از توضیحاتی که در مورد نمادها، قبل از فهرست گروه‌های کتیبه‌ای آمده، استفاده کنید.

۱۴- (آ) ثابت کنید: $\tau^{n}H_P$ یک نیم‌چرخ است. (ب) بررسی کنید که P_k مرکز $\tau^{2k}H_P$ می‌باشد. (پ) بررسی کنید که M_k مرکز $\tau^{2k+1}H_P$ می‌باشد.

۱۵- نشان دهید که اگر A و B نقاط روی خط c باشند، آن‌گاه H_BH_A انتقالی در امتداد c است.

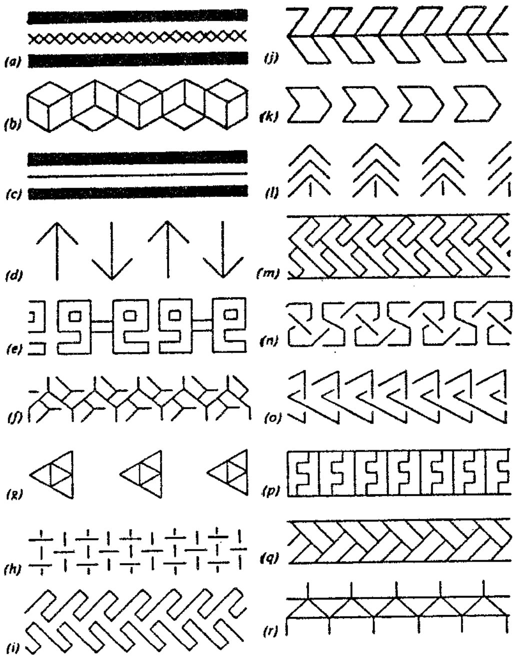
۱۶- گیریم T انتقالی در امتداد c و R_c بازتابی با محور c باشد. (آ) ثابت کنید: $R_cTR_c=T$ (ب) با استفاده از قسمت (آ) بررسی کنید که $R_cT=TR_c$

۱۷- گیریم T انتقالی در امتداد c و R_p بازتابی با محور p باشد که p بر c عمود است. (آ) ثابت کنید $TR_pT=R_p$. (ب) با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که $R_pT=T^{-1}R_p$.

۱۸- (آ) ثابت کنید $\tau^n R_p$ بازتابی نسبت به خطی عمود بر c است. (ب) بررسی کنید که محور بازتاب $\tau^{2k}R_p$ بر P_k واقع است. (پ) بررسی کنید که محور بازتاب $\tau^{2k+1}R_p$ بر M_k واقع است.

۱۹- دو الگوی کتیبه برای هریک از هفت گروه کتیبه‌ای بسازید.

۲۰- گروه کتیبه‌ای هر الگوی کتیبه‌ی شکل ۱۷-۳ را نام ببرید. اقتباس از مارتین (*1982b*، صفحه ۸۴).



شکل ۱۷-۳

۸-۳. تبدیلات تشابهی

در بخش‌های گذشته‌ی فصل ۳، هندسه‌ی اقلیدسی را با جستجو در خواص ناوردای V^* تحت گروهی از تبدیلات حافظ فاصله، معروف به طولپای‌ها مطالعه کردیم. در این بخش، خواصی از V^* را مشخص می‌کنیم که تحت تبدیلات خطی که نسبت‌های فاصله را حفظ می‌کنند ناوردا می‌ماند.

هندسه‌ای که توسط این تبدیلات مشخص می‌شود، هندسه‌ی تشابهی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۵-۳. یک تشابه با نسبت r تبدیل خطی یک به یکی مثل T از V^* بروی خودش است؛ به طوری که برای یک عدد حقیقی غیرصفر r به ازای هر زوج نقطه‌ی P و Q، $d^*(T(P),T(Q))=rd^*(P,Q)$؛ که در آن d^* معرف فاصله‌ی جهت‌دار است.

به‌وضوح، هر طولپای تشابهی با نسبت ۱± است و بدین دلیل، طولپای‌ها همه‌ی خواص تشابه‌ها را دارند. عکس این مطلب، صحیح نیست. اما چون تشابه‌ها تبدیلات خطی یک به یکی از V^* هستند، ماتریس نمایش ۳×۳ ای را دارند با معادلات نقطه‌ای و خطی، به ترتیب، $X'=AX$ و $ku'=uA$ (بخش ۳-۳). فرم ماتریس تشابه را می‌توان با روش مشابهی که در اثبات قضیه ۷-۳ به‌کار برده شد، به دست آورد. همانند طولپای‌ها، تشابه‌های مستقیم و غیرمستقیم نیز موجودند و مجموعه‌ی همه‌ی تشابه‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد.

قضیه ۳۵-۳. هر تشابه با نسبت r دارای یکی از ماتریس‌های نمایشی زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن $a_{11}^2+a_{12}^2=r^2$.

قضیه ۳۶-۳. مجموعه‌ی همه‌ی تشابه‌ها تشکیل گروهی می‌دهد که مجموعه‌ی

طولپای‌ها زیرگروهی از آنند.

اشکالی که تحت یک تشابه به یکدیگر نظیر می‌شوند، متشابه نامیده می‌شوند. بررسی این مطلب که مثلث‌های متشابه، دارای زوایای با یک اندازه و اضلاع با اندازه‌های متناسب هستند، تقریباً تکرار اثبات‌های قضایایی نظیر مثلث‌های قابل انطباق است (بخش ۴-۳).

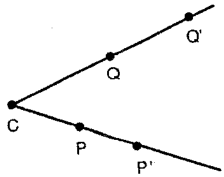
تعریف ۲۶-۳. دو مجموعه از نقاط α و β متشابه هستند و با $\alpha\sim\beta$ نشان داده می‌شوند، اگر β نگار α تحت یک تشابه باشد.

قضیه ۳۷-۳. گیریم u' و v' نگار خطوط u و v تحت یک تشابه باشند. اگر تشابه مستقیم باشد، آن‌گاه $m(\angle(u',v'))=m(\angle(u,v))$. اگر تشابه غیرمستقیم باشد، آن‌گاه $m(\angle(u',v'))=-m(\angle(u,v))$

قضیه ۳۸-۳. اگر $\Delta PQR\sim\Delta P'Q'R'$ آن‌گاه $m(\overline{P'Q'})=r(m(\overline{PQ}))$، $m(\overline{Q'R'})=r(m(\overline{QR}))$، $m(\overline{R'P'})=r(m(\overline{RP}))$، $m(\angle P'Q'R')=\pm m(\angle PQR)$، $m(\angle Q'R'P')=\pm m(\angle QRP)$، $m(\angle R'P'Q')=\pm m(\angle RPQ)$.

برای بررسی عکس قضیه‌ی اخیر، لازم است که رفتار تشابه‌ها را بیش‌تر مشخص کنیم. خوشبختانه کافی است یک نوع خاص از تشابه را درنظر بگیریم.

تعریف ۲۷-۳. گیریم C نقطه‌ای دل‌خواه و r یک عدد حقیقی غیرصفر باشد. یک تجانس به مرکز C و نسبت r، که با $D_{C,r}$ نشان داده می‌شود تشابهی مستقیم با نسبت r و نقطه‌ی ناوردای C است که هر نقطه‌ی P را به P' روی خط CP می‌نگارد (شکل ۱۸-۳). تجانس را انبساط یا تشابه مرکزی نیز می‌نامند.



شکل ۱۸-۳

با استفاده از این تعریف، نقاط و خطوط ناوردای یک تجانس را می‌توان مشخص کرده (تمرین ۹) و ماتریس نمایش آن را یافت.

قضیه ۳۹-۳. تحت تجانس $D_{C,r}$، نقطه‌ی C و هر خط واقع بر آن ناوردا هستند.

قضیه ۴۰-۳. تجانس به مرکز $O(0,0,1)$ و نسبت r ماتریس نمایشی به صورت

$$\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را داراست و تجانس به مرکز $C(c_1,c_2,1)$ دارای ماتریس نمایش زیر است:

$$\begin{bmatrix} r & 0 & c_1(1-r) \\ 0 & r & c_2(1-r) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

طرح اثبات. در حالت اول، لزوم ناوردا نگه‌داشتن $O(0,0,1)$ توسط تشابهی مستقیم با ماتریس نمایش $A=[a_{ij}]$ نتیجه می‌دهد که $a_{13}=a_{23}=0$ و لزوم این‌که هر نقطه $X(x,0,1)$ از خط $[0,1,0]$ می‌بایست به نقطهٔ $X'(x',0,1)$ بر همان خط نگاشته شود، نتیجه می‌دهد که $a_{12}=0$ و $a_{11}=r$.

دومین حالت را می‌توان با توجه به رابطه‌ی $D_{C,r}=TD_{O,r}T^{-1}$ بررسی کرد که در آن T انتقالی که O را به C می‌نگارد. □

با استفاده از این ماتریس نمایش می‌توان اثر یک تجانس را بر خطوطی که از مرکز تجانس نمی‌گذرند مشخص کرد.

قضیه ۳-۴۱. اگر $D_{C,r}$ تجانسی با $r\neq ۱$ و m خطی ناواقع بر C باشد، آنگاه $D_{C,r}(m)=m'$ خطی موازی و متمایز با m است.

اثبات. معادله‌ی خطی این تجانس ماتریس $(D_{C,r})^{-۱}$ را لازم دارد. چون این تبدیل نیز تجانسی به مرکز C و نسبت $r'=\frac{۱}{r}$ می‌باشد (تمرین ۱۱) ماتریس نمایش آن در قضیه ۳-۴۰ داده شده است.

با استفاده از این ماتریس، در معادله‌ی خطی تجانس، m'، نگار خط $m[m_۱,m_۲,m_۳]$ را می‌توان به روش زیر پیدا کرد:

$$[m_۱,m_۲,m_۳]\begin{bmatrix} r' & ۰ & c_۱(۱-r') \\ ۰ & r' & c_۲(۱-r') \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = [r'm_۱\,,\ r'm_۲\,,\ m'_۳]$$

که $m'_۳=m_۱c_۱(۱-r')+m_۲c_۲(۱-r')+m_۳$.

به وضوح، $m'=[r'm_۱\,;\ r'm_۲\,,\ m'_۳]$ با m مساوی است اگر و فقط اگر $m'_۳=r'm_۳$، یعنی: اگر و فقط اگر:

$$m_۱c_۱(۱-r')+m_۲c_۲(۱-r')+m_۳=r'm_۳$$

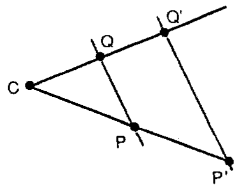
یا:
$$m_۱c_۱(۱-r')+m_۲c_۲(۱-r')+m_۳(۱-r')=۰$$

یا:
$$m_۱c_۱+m_۲c_۲+m_۳=۰ \quad \text{چراکه } r'\neq ۱$$

و این موضوع دقیقاً شرط وقوع C بر m است. بدین ترتیب، اگر C بر m واقع نباشد، m' لزوماً خطی متمایز و موازی با m است. □

مرکز C و نقاط P و P' (P' روی خط CP) مفروضند. در این صورت، ساختن نگار هر نقطه‌ی دیگر تحت تجانس $D_{C,r}$ که P را به P' می‌نگارد، ممکن خواهد بود. این روش ساخت، توجیه‌گر این است که یک تجانس توسط مرکز و نقطه‌ی دیگری[1] همراه با

۱- زیرا اگر $P=C$ آنگاه $P'=C$ و نتیجه‌ای به دست نمی‌آید. "ویراستار"



شکل ۱۹-۳

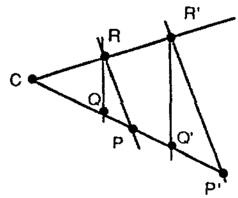
نگار آن نقطه، به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود.

حالت ۱. Q بر CP واقع نیست (شکل ۱۹-۳). Q' محل تلاقی خط CQ و خطی مار بر P' و موازی PQ خواهد بود.

حالت ۲. Q بر CP واقع می‌باشد (شکل ۲۰-۳). نگار نقطه‌ای مانند R ناواقع بر CP را همانند حالت قبل یافته و سپس از R و R' به جای P و P' در حالت ۱ استفاده می‌کنیم. ماتریس نمایش تجانس می‌تواند برای مشخص کردن تشابه‌ها برحسب تجانس‌ها و طولپای‌ها استفاده شود (تمرین ۱۳).

قضیه ۴۲-۳. هر تشابه را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک تجانس و یک طولپای بیان کرد.

با این توصیف، امکان طرح اثبات عکس قضیه ۳۸-۳ همانند طرح اثباتی که برای قضیه ۲۳-۳ آمد ممکن خواهد بود (تمرین ۱۵).



شکل ۲۰-۳

قضیه ۴۳-۳. اگر ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ دو مثلث باشند که $m(\overline{P'Q'})=r(m(\overline{PQ}))$، $m(\overline{Q'R'})=r(m(\overline{QR}))$، $m(\overline{R'P'})=r(m(\overline{RP}))$ و نیز $m(\angle P'Q'R')=\pm m(\angle PQR)$، $m(\angle Q'R'P')=\pm m(\angle QRP)$ و $m(\angle R'P'Q')=\pm m(\angle RPQ)$ **آن‌گاه تشابهی وجود دارد که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد.**

دیگر نتیجه‌ای که از اثبات قضیه ۴۳-۳ مستقیماً ظاهر می‌شود، آزادی بیش‌تری است که تشابه‌ها مجاز به استفاده از آن هستند. در حالی که همیشه می‌توان طولپایی یافت که نقطه‌ی P را به نقطه‌ی نگار دل‌خواه P' بنگارد. نمی‌توان یک زوج نقطه‌ی P و Q را با یک طولپای به زوج دل‌خواه دومی از نقاط مانند P' و Q' نگاشت (چرا نه؟). این چنین نگاشتی، می‌تواند با یک تشابه به انجام برسد (تمرین ۱۷).

قضیه ۴۴-۳. دو تشابه یکی مستقیم و دیگری غیرمستقیم موجودند به طوری که یک زوج نقاط متمایز P و Q را به یک زوج نقاط نظیر P' و Q' می‌نگارند.

تمرین

۱- نشان دهید تشابه حافظ بینیت است (تعریف ۱۳-۳ را ببینید).

۲- ثابت کنید: اگر تشابهی $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ را به ترتیب به $\overline{P'Q'}$ و $\overline{R'S'}$ بنگارد و $d(P,Q)=s(d(R,S))$ آن‌گاه $d(P',Q')=s(d(R',S'))$ (که ثابت می‌کند تشابه‌ها نسبت فواصل را حفظ می‌کنند).

۳- قضیه ۳۵-۳ را ثابت کنید.

۴- قضیه ۳۶-۳ را ثابت کنید.

۵- قضیه ۳۷-۳ را ثابت کنید.

۶- قضیه ۳۸-۳ را ثابت کنید.

۷- گیریم C، P و P' نقاطی با مختصات $C(۳,-۲,۱)$، $P(۱,۰,۱)$ و $P'(۷,-۶,۱)$ باشند. (آ) نشان دهید: این سه نقطه هم‌خطند. (ب) ماتریس تجانسی به مرکز C را بیابید به طوری که P را به P' بنگارد. (پ) نگار خطوط $m[۱,۱,-۱]$ و $n[۱,۱,۱]$ تحت این تجانس چیست.

۸- نشان دهید هر دورانی با زاویهٔ ۱۸۰° یک تجانس است.

۹- قضیه ۳۹-۳ را ثابت کنید.

۱۰- اثبات قضیه ۴۰-۳ را که در متن طرحی از آن ارائه شد، کامل کنید.

۱۱- نشان دهید: $(D_{C,r})^{-۱}=D_{C,\frac{۱}{r}}$.

۱۲- ثابت کنید: تنها نقاط و خطوط ناوردای تحت یک تجانس غیرهمانی با مرکز C عبارتند از: C و خطوط مار بر C.

۱۳- قضیه ۴۲-۳ را ثابت کنید.

۱۴- حاصل‌ضرب انتقال، دوران و تجانسی که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد را بیابید که در آن $P(۳,۶,۱)$ ، $Q(-۲,۵,۱)$ ، $R(-۳,-۱,۱)$ ، $P'(۰,۰,۱)$ ، $Q'(۲,-۱۰,۱)$ ، $R'(۱۴,-۱۲,۱)$ می‌باشد. [راهنمایی: ابتدا P را به P' انتقال دهید.]

۱۵- اثباتی برای قضیه ۴۳-۳ طرح کنید.

۱۶- ماتریس‌های دو تشابه مختلفی که هردوی آن‌ها $P(1,2,1)$ و $Q(0,0,1)$ را، به ترتیب، به $P'(2,4,1)$ و $Q'(-4,2,1)$ می‌نگارند را بیابید. نگار $R(1,1,1)$ تحت هریک چیست؟

۱۷- قضیه ۴۴-۳ را ثابت کنید.

۹-۳. تبدیلات آفین

در بخش ۸-۳ نشان دادیم که تشابه‌ها تعمیم‌هایی از طولپای‌ها هستند. در این بخش، با درنظر گرفتن مجموعهٔ بدون محدودیتی از تبدیلات خطی V^* در صدد دنبال کردن روند تعمیم طولپای‌ها هستیم. این تبدیلات هندسه‌ای را به نام هندسه‌ی آفینی مشخص می‌کنند.

تعریف ۲۸-۳. یک تبدیل آفین تبدیل خطی یک به یکی از V^* به روی خودش می‌باشد.

به عبارت دیگر، تبدیلات آفین تبدیلاتی هستند که در بخش ۳-۳ توصیف شد. در آن‌جا دیدیم که تبدیلات آفین نقاط را بر طبق معادله‌ی ماتریسی $X'=AX$ می‌نگارند، که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad |A| \neq 0$$

همچنین، متوجه شدیم که تبدیلات آفین حافظ هم‌خطی بوده و خطوط را برطبق معادله‌ی ماتریسی $ku'=uA^{-1}$ نگار می‌کنند. یک بازنویسی از قضیه ۴-۳ می‌تواند بیانگر این باشد که مجموعه‌ی تبدیلات آفین تشکیل یک گروه می‌دهند و قضیه ۳۶-۳ در

بخش ۸-۳ نتیجه می‌دهد که مجموعه‌ی تشابه‌ها تشکیل زیرگروهی از گروه تبدیلات آفین خواهند داد.

چون تشابه‌ها و طولپای‌ها انواع خاصی از تبدیلات آفین هستند، هر خاصیت ناوردا تحت تبدیلات آفین تحت تشابه‌ها و طولپای‌ها نیز ناورداست. یکی از مهم‌ترین این خواص ناوردا، توازی است.

قضیه ۴۵-۳. اگر T یک تبدیل آفین و m و n خطوط موازی باشند، آنگاه $T(m)$ با $T(n)$ موازی است.

اثبات. فرض کنیم $m[m_1,m_2,m_3]$ و $n[n_1,n_2,n_3]$ موازی‌اند، در این صورت، عدد حقیقی غیرصفری مثل t وجود دارد؛ به طوری که $n_1=tm_1$، $n_2=tm_2$. می‌توان $T(m)$ نگار خط m تحت تبدیل آفین T با ماتریس A را با استفاده از معادله‌ی خطی $k_1m'=mB$ به دست آورد که در آن $B=A^{-1}$. به عبارت صریح‌تر،

$$k_1m' = [m_1,m_2,m_3]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یا:

$$m'[m'_1,m'_2,m'_3]=(\frac{1}{k_1})[m_1b_{11}+m_2b_{21},m_1b_{12}+m_2b_{22},m_1b_{13}+m_2b_{23}+m_3]$$

به طریق مشابه:

$$n'[n'_1,n'_2,n'_3]=(\frac{1}{k_2})[n_1b_{11}+n_2b_{21},n_1b_{12}+n_2b_{22},n_1b_{13}+n_2b_{23}+n_3]$$

سپس با جانشینی $n_1=tm_1$ و $n_2=tm_2$ خواهیم داشت:

$$n'=(\frac{1}{k_2})[tm_1b_{11}+tm_2b_{21},tm_1b_{12}+tm_2b_{22},n_1b_{13}+n_2b_{23}+n_3]$$

یا:

برای $i=1,2$،

$$n'_i=(\frac{t}{k_2})(m_1b_{1i}+m_2b_{2i})=(\frac{tk_1}{k_2})m'_i$$

بدین ترتیب: m' و n' موازی‌اند. □

واضح است که تبدیلات آفین در کل همانند طولپای‌ها حافظ فاصله و یا همانند تشابه‌ها حافظ نسبت فاصله نیستند. اما آن‌ها حافظ نسبت کلی‌تری از فواصل معروف به نسبت تقسیم پاره‌خط می‌باشند. این موضوع، در اثبات قضیه‌ی بعد بررسی خواهد شد (تمرین ۱).

قضیه ۴۶-۳. اگر T یک تبدیل آفین و P، Q و R سه نقطه متمایز هم‌خط باشند به طوری که: $\frac{d(Q,P)}{d(Q,R)}=k$، آن‌گاه $\frac{d(T(Q),T(P))}{d(T(Q),T(R))}=k$.

با استفاده از این قضیه و تعریف ۱۳-۳ می‌توان نشان داد که تبدیلات آفین بینیت نقاط را حفظ می‌کنند. سپس این نتیجه خواهد داد که تبدیلات آفین همچنین حافظ پاره‌خط‌ها و نقاط وسط آن‌ها هستند.

قضیه ۴۷-۳. اگر T یک تبدیل آفین و P، Q و R سه نقطه‌ی هم‌خط باشند که P بین Q و R است؛ آن‌گاه $T(P)$ بین $T(Q)$ و $T(R)$ می‌باشد.

اثبات. چون P بین Q و R بوده $d(Q,P)+d(P,R)=d(Q,R)$ پس از تقسیم طرفین معادله‌ی قبل به $d(Q,R)$ و جانشینی $\frac{d(Q,P)}{d(Q,R)}=k$ خواهیم داشت: $\frac{d(P,R)}{d(Q,R)}=1-k$. بنابر قضیه ۴۶-۳ اگر $P'=T(P)$ و بقیه نیز به همین ترتیب نام‌گذاری شوند، داریم:

$$\frac{d(Q',P')}{d(Q',R')}=k \quad \text{و} \quad \frac{d(P',R')}{d(Q',R')}=1-k$$

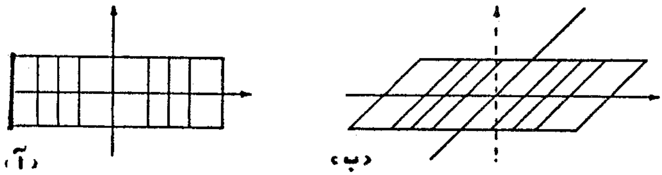
با جانشین‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{d(P',R')}{d(Q',R')}=1-\frac{d(Q',P')}{d(Q',R')}$$

یا:

$$d(Q',P')+d(P',R')=d(Q',R')$$

بنابراین P' بین Q' و R' می‌باشند. □



شکل ۲۱-۳

فرع. اگر T یک تبدیل آفین و M نقطهٔ وسط پاره‌خطی با نقاط انتهایی Q و R باشند، آن‌گاه $T(M)$ نقطه‌ی وسط پاره‌خطی با نقاط انتهایی $T(Q)$ و $T(R)$ می‌باشد.

اثبات. کافی‌ست در اثبات قضیه ۴۷-۳ قرار دهیم: $k=\frac{۱}{۲}$. □

با درنظر گرفتن دو نوع خاص از تبدیلات آفین به نام‌های دگرکشی و دگروشی می‌توان درک مستقیمی از اثر این تبدیلات حاصل نمود.

تعریف ۲۹-۳. یک دگرکشی با محور m که با S_m نشان داده می‌شود، یک تبدیل آفین است که m را ناوردای نقطه‌ای نگه‌می‌دارد و هر نقطه‌ی دیگر P را به نقطه‌ی P' طوری می‌نگارد که خط PP' با m موازی باشد (شکل ۲۱-۳).

قضیه ۴۸-۳. ماتریس نمایش یک دگرکشی با محور $x[۰,۱,۰]$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۱ & j & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و در حالت کلی، ماتریس نمایش یک دگرکشی S_m با استفاده از رابطه‌ی $S_m=SS_xS^{-۱}$ به دست می‌آید که S طولپای مستقیمی است که x را به m می‌نگارد $(S(x)=m)$.

اثبات. چون S_x هر نقطه روی خط $x[۰,۱,۰]$ را ناوردا نگه می‌دارد، معادله‌ی زیر باید برای همه‌ی اعداد حقیقی $x_۱$ صحیح باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

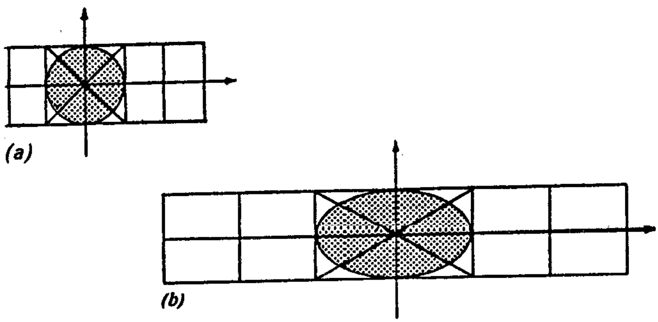
بنابراین: $a_{11}x_1+a_{13}=x_1$ و $a_{21}x_1+a_{23}=0$ پس: $a_{11}=1$، $a_{13}=0$، $a_{21}=0$ و $a_{23}=0$.
اگر $P(p_1,p_2,1)$ نقطه‌ای ناواقع بر خط $x[0,1,0]$ باشد (بنابراین $p_2\neq 0$) P باید به نقطه‌ی P' روی خط مار بر P و موازی x نگاشته شود. این خط مختصات $u[0,1,-p_2]$ را داراست و بنابراین P' باید با مختصات $P'(p'_1,p_2,1)$ بوده و بنابراین معادله‌ی زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین: $a_{22}p_2=p_2$. چون $p_2\neq 0$ این نتیجه می‌دهد که $a_{22}=1$ بنابراین، ماتریس باید آن‌چنان باشد که در حکم قضیه آمد.

بررسی قسمت دوم قضیه شبیه اثباتی است که برای نتایج مشابه در قضایای قبلی به کار برده شد.

دگروشی‌ها نیز برحسب ناوارایی نقطه‌ای خط تعریف شده‌اند و روند به کار رفته در مشخص کردن ماتریس نمایش آن‌ها درست شبیه پیدا کردن ماتریس یک دگرکشی است (تمرین ۴).



شکل ۲۲-۳

تعریف ۳۰-۳. یک دگروشی با محور m، که با T_m نشان داده می‌شود، یک تبدیل آفین است که m را ناوردای نقطه‌ای نگه‌داشته و هر نقطه‌ی دیگر P را به نقطه‌ی P' طوری می‌نگارد که خط PP' عمود بر m باشد (شکل ۲۲-۳).

قضیه ۴۹-۳. ماتریس نمایش یک دگروشی با محور $x[0,1,0]$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و در حالت کلی ماتریس نمایش یک دگروشی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی $T_m = ST_xS^{-1}$ به دست آورد، که در آن S نگاشت طولپای مستقیمی است که x را به m می‌نگارد $(S(x)=m)$.

با استفاده از دگرکشی‌ها، دگروشی‌ها و تشابه‌ها امکان حصول هر تبدیل آفین خواهد بود. خصوصاً می‌توان هر تبدیل آفین را به صورت حاصل‌ضرب یک دگرکشی S_x، یک دگروشی T_x، و یک تشابه مستقیم بیان کرد.

قضیه ۵۰-۳. هر تبدیل آفین را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک دگرکشی، یک دگروشی، و یک تشابه مستقیم نوشت:

اثبات. برای اثبات این قضیه کافی است نشان دهیم که حاصل‌ضرب زیر همان ماتریس تبدیل آفین کلی است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن: $j = \frac{a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}}{a_{11}^2+a_{21}^2}$ و $k = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}^2+a_{21}^2}$. □

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، هرچه تبدیلات کلی‌تر می‌شوند، آزادی آن‌ها بیش‌تر خواهد شد. در حالی که طولپای‌هایی وجود داشت که نقطه‌ی P را به یک نقطه‌ی P' می‌نگاشت و تشابه‌هایی موجود بود که یک زوج نقطه‌ی P و Q را به یک زوج نقطه‌ی P' و Q' می‌نگاشت، قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که تبدیلات آفینی وجود دارد که سه نقطه‌ی ناهم‌خط P، Q، R را به سه‌نقطه‌ی ناهم‌خط P'، Q'، R' می‌نگارد.

قضیه ۵۱-۳. دو مثلث ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ مفروضند. یک تبدیل آفینی موجود است که ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ می‌نگارد.

اثبات. با یافتن ماتریس A که در روابط $P'=AP$، $Q'=AQ$ و $R'=AR$ صادق باشد، نشان خواهیم داد که یک تبدیل آفینی موجود است که P، Q و R را به ترتیب به P'، Q' و R' می‌نگارد. این امر، به حل یک دستگاه شش معادله‌ی شش مجهولی برمی‌گردد. ولیکن، در عمل می‌توان تعیین ماتریس A را به صورت زیر ساده کرد: ابتدا ماتریس تبدیل آفین S که $O(۰,۰,۱)$، $X(۱,۰,۱)$ و $U(۱,۱,۱)$ را به ترتیب به P، Q و R می‌نگارد، یافته، سپس ماتریس تبدیل آفین T را که O، X و U را به ترتیب به P'، Q' و R' می‌نگارد، می‌یابیم. تبدیل آفین TS^{-1}، P، Q و R را به P'، Q'، R' خواهد نگاشت. چون تبدیلات آفین حافظ بینیت می‌باشند TS^{-1} نیز پاره‌خط‌های $\overline{PQ}$، $\overline{QR}$ و $\overline{RP}$ را به $\overline{P'Q'}$، $\overline{Q'R'}$ و $\overline{R'P'}$ نگاشته و در نتیجه ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ خواهد نگاشت.

علاوه بر پاره‌خط‌ها و مثلث‌ها، تبدیلات آفین حافظ دیگر اشکال هندسی نیز می‌باشند. چون طولپای‌ها حافظ فاصله‌اند و هر مقطع مخروطی (دایره، بیضی، سهمی و هذلولی) را می‌توان برحسب فواصل مشخص نمود، روشن است که طولپای‌ها حافظ هر مقطع مخروطی خواهند بود، مثلاً، نگار یک دایره تحت یک طولپای یک دایره است. برای جستجوی ناوردایی مقاطع مخروطی تحت عمل تبدیلات خطی کلی‌تر، توجه به این نکته که همه‌ی مقاطع مخروطی را می‌توان از طریق معادلات ماتریسی نوشت مناسب است (تمرین ۱۰).

قضیه ۵۲-۳. هر مقطع مخروطی می‌تواند به طور جبری به صورت زیر نوشته شود:

$$c_{11}x_1^2+c_{22}x_2^2+2c_{13}x_1+2c_{23}x_2+2c_{12}x_1x_2+c_{33}=0$$

و یا با نماد ماتریسی به صورت زیر:

$$X^tCX=0 \quad \text{یا} \quad [x_1 x_2, 1]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}=0$$

ماتریس متقارن $C=[c_{ij}]$ ماتریس مقطع مخروطی نامیده می‌شود. مقطع مخروطی‌ای ناتبهگن (یعنی، یک خط، یک زوج از خطوط، نقطه یا یک مجموعه‌ی تهی نیست) خواهد بود اگر و فقط اگر $|C|\neq 0$. علاوه بر این، یک مقطع مخروطی یک بیضی، هذلولی یا سهمی است. اگر به ترتیب $(c_{12})^2-c_{11}c_{22}<0$ ، $(c_{12})^2-c_{11}c_{22}>0$ یا $(c_{12})^2-c_{11}c_{22}=0$ (که c_{11} و c_{22} با هم صفر نیستند). بدین ترتیب، سه نوع مقطع مخروطی مختلف موجود است که البته دایره‌ها $(c_{11}=c_{22})$ را به عنوان حالت خاصی از بیضی‌ها درنظر گرفته‌ایم.

با استفاده از نماد ماتریسی مشخص کردن ماتریس نگار یک مقطع مخروطی تحت یک تبدیل آفین نسبتاً ساده است. درایه‌های این ماتریس دوم نشان می‌دهند که تبدیلات آفین حافظ انواع مقاطع مخروطی هستند.

قضیه ۵۳-۳. نگار یک مقطع مخروطی تحت یک تبدیل آفین یک مقطع مخروطی از همان نوع است. علاوه بر این اگر A ماتریس یک تبدیل آفینی باشد، آنگاه ماتریس نگار مقطع مخروطی عبارت است از $C'=(A^{-1})^t\,C\,A^{-1}$.

اثبات. تحت تبدیل آفینی X به $X'=AX$، نگاشته می‌شود. با حل برحسب X نتیجه می‌شود $X=A^{-1}X'$. جایگزین کردن این عبارت در معادلهٔ $X^tCX=0$ داریم $(A^{-1}X')^tC(A^{-1}X')=0$ و یا $X'^t((A^{-1})^tCA^{-1})X'=0$ معادله‌ی اخیر معادله‌ی یک مقطع مخروطی با ماتریس متقارن $C'=(A^{-1})^tCA^{-1}$ می‌باشد که $|C'|=0$ اگر و فقط اگر

$|C| = ۰$. نشان دادن این‌که نوع این مقطع مخروطی حفظ می‌شود، نیاز به محاسبات سرراست ولی تا اندازه‌ای کسل‌کننده دارد.

تمرین:

۱- قضیه ۴۶-۳ را در صورتی‌که P، Q و R با مختصات $P(x, ۰, ۱)$، $Q(۰, ۰, ۱)$ و $R(y, ۰, ۱)$ باشند ثابت کنید.

۲- ماتریس یک دگرکشی با محور $x_۱ = x_۲$ را بیابید.

۳- ماتریس یک دگروشی با محور $x_۱ = ۵$ را بیابید.

۴- قضیه ۴۹-۳ را ثابت کنید. [**راهنمایی**: اثبات قضیه ۴۸-۳ را ببینید]

۵- نشان دهید که یک تجانس با مرکز O عبارت خواهد بود از حاصل‌ضرب دگروشی‌هایی با محورهای $x[۰, ۱, ۰]$ و $y[۱, ۰, ۰]$

۶- ماتریس تبدیل آفینی را بیابید که $P(۱, -۱, ۱)$، $Q(۲, ۱, ۱)$ و $R(۳, ۰, ۱)$ را به ترتیب به $P'(۰, ۱, ۱)$، $Q'(۱, ۲, ۱)$ و $R'(۰, ۳, ۱)$ می‌نگارد. [**راهنمایی**: از روش توصیف شده در اثبات قضیه ۵۱-۳ استفاده کنید.]

۷- نشان دهید تنها تبدیل آفین با سه نقطه‌ی ناوردای ناهم‌خط تبدیل همانی است. [**راهنمایی**: ابتدا فرض کنید که نقاط $O(۰, ۰, ۱)$، $X(۱, ۰, ۱)$ و $U(۱, ۱, ۱)$ ناوردا باشند.]

۸- با استفاده از تمرین ۷ نشان دهید که یک تبدیل آفین منحصر به فرد موجود است

که هر سه نقطه‌ی ناهم‌خط را به هر سه نقطه‌ی ناهم‌خط می‌نگارد. [راهنمایی: فرض کنید S و T دو تبدیل آفین مطلوب باشند و سپس تبدیل آفین ST^{-1} را درنظر بگیرید.]

۹- نشان دهید که تبدیلات آفین حافظ توازی‌اند.

۱۰- هم‌ارزی معادله‌ی استاندارد یک مقطع مخروطی که در قضیه ۵۲-۳ آمده است را با معادله‌ی ماتریسی داده شده در آن قضیه بررسی کنید.

۱۱- گیریم

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نگار سهمی $y=۶x^{۲}$ را تحت تبدیل آفینی بیابید که ماتریس نمایش آن A است. بررسی کنید که نگار نیز یک سهمی است.

۱۲- نشان دهید که نگار یک دایره تحت یک تشابه باز دایره است. (توجه کنید: در حالت کلی، ممکن است تبدیلات آفین دایره‌ها را به بیضی‌های غیرمستدیر بنگارد.)

در تمرین‌های ۱۳ و ۱۴ استفاده از فرمولی در جبر خطی برای مساحت یک مثلث با رؤوس $P(p_۱,p_۲,۱)$، $Q(q_۱,q_۲,۱)$ و $R(r_۱,r_۲,۱)$ که در زیر آمده است لازم می‌باشد.

$$\text{مساحت}\ (\Delta PQR) = \frac{۱}{۲}\left| \begin{vmatrix} p_۱ & q_۱ & r_۱ \\ p_۲ & q_۲ & r_۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} \right|$$

(توجه کنید: دو خط موازی بیرونی علامت قدرمطلق و دو خط موازی درونی علامت دترمینان هستند).

۱۳- ثابت کنید: اگر T یک تبدیل آفینی با ماتریس A بوده و T، ΔPQR را به $\Delta P'Q'R'$ بنگارد آنگاه (مساحت $\Delta P'Q'R'$) $= k$(مساحت ΔPQR) که در آن $k=||A||$ (توجه

کنید: هرگاه ۱ =kباشد تبدیل آفین را یک تبدیل هم‌مساحتی خوانیم).

۱۴- با استفاده از تمرین ۱۳ نشان دهید که مساحت یک مثلث تحت طولپای‌ها و دگرکشی‌ها حفظ می‌شود.

۱۰-۳. پیشنهاد برای مطالعه‌ی بیش‌تر

Coxford, A.F., and Usiskin, Z.P. (1971). *Geometry: A Transformation Approach.* River Forest, IL: Laidlow Brothers. Uses transformations in its presentation of the standard topics of elementary Euclidean geometry.

Dodge, C.W. (1972). *Euclidean Geometry and Transformations.* Reading, MA: Addison-similarities and include applications.

Eccles, F.M. (1971).*An Introduction to Transformational Geometry.* Menlo Park. CA: Addition-Wesley. Intended to introduce high-school strudents to the transformations following a traditional geometry course.

Gans, D. (1969). *Transformations and Geometries.* New York: Appleton-Century-Crofts. A detailed presentation of the transformations introduced in this chapter followed by a presentation of the more general projective and topological transformations.

Iaglom, I.M. (1962). *Geometric Transformations,* Vols. 1, 2, 3. New York: Random House. Numerous problems of elemetnary Euclidean geometry are solved through transformations.

Jeger, M. (1969). *Transformation Geometry London:* Allen and Unwin. Numerous diagrams are included in this easy-to-understand presentation of isometries, similarities, and affinities.

Martin, G.E. (1982b). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag. Introduces isometries and applies them to ornamental groups and tessellations.

Maxwell, E.A. (1975). *Geometry by Transformations.* Cambridge Univers-in Press. A high-school-level introduction of isometries and similarities including their matrix representations.

منابعی برای مطالعه‌ی کاشی‌کاری سطح و کاغذ تاشو:

Faulkner, J.E. (1975). Paper folding as a technique in visualizing a certain class of transformations. *Mathematics Teacher 68: 376-377.*

Gardner, M. (1975). One tessellating the plane with convex polygon tiles. *Scientific American* 233(1): 112-117.

Gardner, M. (1978). The art of M.C. Escher. In: M. Gardner, *Mathematical Carniral, pp.* 89-102. New York: Alfred A.Knopf.

Grunbaum, B., and Shephard, G.C. (1987). *Tilings and Patterns.* New York: W.H. Freeman.

Haak, S. (1976). Transformation geometry and the artwork of M.C. Escher. *Mathematics Teacher* 69: 647-652.

Johnson, D.A. (1973). *Paper folding for the Mathematics Class.* Reston, VA: N.C.T.M.

MacGillavry, C.H. (1976). *Symmetry Aspects of M.C. Eschers Periodic Drawings,* 2d ed. Utrecht: Bohn, Scheltema & Holkema.

O›Daffer, P.G., and Clemens, S.R. (1976). *Geometry: An*

Investingative Approach. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Olson. A.T. (1975). *Mathematics Through Paper Folding.* Reston, VA: N.C.T.M.

Ranucci, E.R. (1974). Master of Tessellations: M.C Escher, 1898-1972. *Mathematics Teacher* 67: 299-306.

Robertson, J. (1986). Geometric constructions using hinged mirrors. *Mathematics Teacher* 79: 380-386.

Teeters, J.C. (1974). How to draw tessellations of the Escher type. *Mathematics Teacher* 67: 307-310.

پیشنهاد برای مطالعه‌ی اجمالی:

Adventures in Perception (1973,22 min). An especially effective presentation of the work of M.C. Escher. Produced by Hans Van Gelder, Film Producktie, N.V., The Netherlands. Available from B.F.A. Educational Media.

Dihedral Kaleidoscopes (1971; 13 min). Uses pairs of intersecting mirrors (dihedral kaleidoscopes) to demonstrate several regular figures and their stellations and tilings of the plane. Produced by the College Geometry Project at the University of Minnesota. Available from International Film Bureau, 332 South Michigan Ave., Chicago, IL 60604.

Isometries (1971; 26 min). Demonstrates that every plane isometry is a tranlation, rotation, reflection, or glide reflection and that each is the product of at most three reflections. Produced by the College Geometry

Project at the University of Minnesota. Available from International Film Bureau, 332 South Michigan Ave., Chicago, IL 60604.

Symmetries of the Cube (1971; 13.5 min). Uses mirrors to exhibit the symmetries of a square as a prelude to the analogous generation of the cube by reflections. Produced by the College Geometry Project at the University of Minnesota. Available from International Film Bureau, 332 South Michigan Ave., Chicago, IL 60604.

فصل چهارم

هندسه‌ی تصویری

۱-۴. چشم‌انداز

از نقطه نظر تحلیلی تعریف کلاین در مورد هندسه، هندسه‌ی تصویری تعمیم منطقی هندسه‌ی آفینی است که در فصل ۳ مورد بررسی واقع شد. درست به همان ترتیب که طولپای‌های صفحه‌ی اقلیدسی را به تشابهی‌ها و تبدیلات آفین تعمیم دادیم، قادر خواهیم بود که تبدیلات آفین را به تبدیلات هم‌خطی که در صفحه‌ی تصویری تعریف خواهند شد، تعمیم دهیم. ولیکن، در این تعمیم اخیر نیاز به جزئیات جدیدی است. می‌بایست مجموعه نقاط مشمول صفحه‌ی اقلیدسی را با اضافه کردن نقاط خطی، به نام خط آرمانی گسترش داد. این نقاط آرمانی نه تنها باعث پیچیدگی این هندسه نمی‌شوند، بلکه هندسه‌ی تصویری را ساده کرده و خاصیت بسیار مطلوب دوگانی را باعث خواهند شد.

توسعه‌ی تاریخی هندسه‌ی تصویری بیش‌تر از آن که تحلیلی باشد، ساختنی بود. منشأ این هندسه را می‌توان مدیون کوشش نقاشان دوره‌ی رنسانس برای به تصویر کشیدن اشیای سه‌بعدی بربوم دو بعدی نقاشی دانست. اینان، تحت تأثیر رساله‌ی افلاطون که در آن معتقد بود: طبیعت به طور ریاضی طراحی شده است به دنبال یافتن

روابط ریاضی حاکم بر پرسپکتیو بودند. تأثیر متقابل ریاضیات و هنر، اهمیت رساله‌ی افلاطون و نفوذ کلیسا، منشأ هندسه‌ی تصویری را یکی از اپیزودهای جذاب تاریخ ریاضیات ساخته است. نام منابعی که دقیقاً به این موضوعات پرداخته، در آخر این فصل آمده است. مطالعه‌ی این منابع، ارتباط بین نقاط آرمانی را که در شروع این بخش مطرح شد، با نقاط فراری که در نقاشی‌ها به کار می‌رود خواهد کرد.

تناسب هندسه‌ی تصویری برای به تصویر کشیدن اشیایی سه‌بعدی مطالعه‌ی هندسه‌ی تصویری را به پیش‌نیازی برای مطالعه‌ی گرافیک کامپیوتری بدل ساخته است. چون گرافیک کامپیوتری از نمایش نقاط و خطوط به وسیله مختصات همگن و نمایش تبدیلات به وسیله ماتریس‌ها استفاده می‌کند که در هندسه‌ی تصویری شرح و بسط یافته، ارزش این پیش‌نیاز افزوده می‌شود.

۲-۴. دستگاه بنداشتی و دوگانی

قبل از معرفی یک مدل تحلیلی برای هندسه‌ی تصویری مسطحه، بسط یک دستگاه بنداشتی برای این هندسه لازم است. دستگاه بنداشتی موردنظر ما شش بنداشت را شامل می‌شود؛ ولیکن، هر دستگاهی را که در چهار بنداشت نخست آن صدق می‌کند، یک صفحه‌ی تصویری[۱] می‌نامیم. در این بخش، چهار بنداشت اول را به عنوان شروع روند ساختنی هندسه‌ی تصویری مسطحه درنظر می‌گیریم. درست همانند فصل ۱، اصطلاحات تعریف نشده‌ی این دستگاه "نقطه"، "خط" و "وقوع" می‌باشند. نقاط را هم‌خط نامیم اگر همه‌ی آن‌ها بر یک خط، واقع باشند. اصطلاح "چهارگوشه‌ی کامل" که در بنداشت ۴ به کار برده شده، در تعریف ۲-۴ توضیح داده خواهد شد.

۱- به طور کلی یک صفحه‌ی تصویری، دستگاهی است که در بنداشت‌های ۱ تا ۳ و بنداشتی که متضمن وجود حداقل سه نقطه روی هر خط باشد، صدق کند.

بنداشت‌هایی برای صفحه‌ی تصویری

بنداشت ۱. هر دو نقطه‌ی متمایز دقیقاً بر یک خط واقعند.
بنداشت ۲. هر دو خط متمایز حداقل بر یک نقطه واقعند.
بنداشت ۳. حداقل چهار نقطه موجودند که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند.
بنداشت ۴. سه نقطه‌ی قطری یک چهارگوشه‌ی کامل هیچ‌گاه هم‌خط نیستند.

توجه کنید که هر چند بنداشت اول مشخصه‌ای از هندسه‌ی اقلیدسی است، بنداشت دوم که متضمن تقاطع هردوخط است، این‌گونه نیست؛ یعنی، خطوط موازی در این هندسه وجود ندارد. همچنین توجه کنید که بنداشت‌های ۱ و ۲ تقریباً عبارت‌هایی دوگان هستند. (یادآوری این که دوگان یک عبارت با تعویض کلمه‌ی نقطه ذر هر جای عبارت با کلمه خط و برعکس حاصل می‌شود) دوگان بنداشت ۱ بدین صورت خوانده خواهد شد "هردوخط متمایز دقیقاً بر یک نقطه واقعند." اثبات این گزاره با توجه به بنداشت‌های ۱ و ۲ بدیهی است (تمرین ۱)، و بدین ترتیب دوگان هر دوبنداشت قضایایی در این دستگاه بنداشتی خواهند بود.

مطالعه‌ی دقیق، نشان خواهد داد که بنداشت‌های ۱ و ۲ ادعایی در مورد وجود نقاط و خطوط ندارد. اما بنداشت ۳ و دوگان آن ما را از بابت وجود نقاط و خطوط در صفحه‌ی تصویری مطمئن خواهد کرد.

قضیه ۱-۴ (دوگان بنداشت ۳). حداقل چهارخط وجود دارند که هیچ سه‌تای آن هم‌رس نیستند.

اثبات. همان‌گونه که بنداشت ۳ تضمین می‌کند، گیریم A، B، C، D چهار نقطه باشند که هیچ سه‌تای آن هم‌رس نیستند؛ سپس بنابر بنداشت ۱، چهارخط AB، AC، CD و BD موجودند. اگر سه‌تا از این‌ها هم‌رس باشند دوگان بنداشت ۱ نقض خواهد شد. □

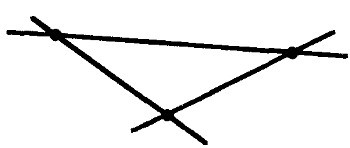
همان‌گونه که در اثبات قضیه‌ی قبل آمد، نقاط این هندسه را با حروف بزرگ A، B، C و غیره نشان می‌دهیم. در صورتی که خطوط را با حروف کوچک a، b، c و غیره نشان خواهیم داد. یک جفت حرف بزرگ، AB، اشاره به خط منحصر به فردی دارد که توسط نقاط A و B مشخص می‌شود. چون یک جفت خط a و b نیز نقطه‌ای منحصر به فرد را مشخص می‌کنند، این نقطه را با $a.b$ نشان می‌دهیم. علاوه بر این، از نماد AIa یا aIA برای نمایاندن وقوع A بر a استفاده می‌کنیم.

چون بنداشت ۳ وجود نقاط غیرهم‌خط را تضمین می‌کند، اَشکالی مانند مثلث‌های اقلیدسی موجودند ولی چون مفهوم بینیت در این هندسه نیست، اضلاع یک مثلث خط هستند نه پاره‌خط. این تغییر آخر تعریف زیر را خود دوگان می‌سازد:

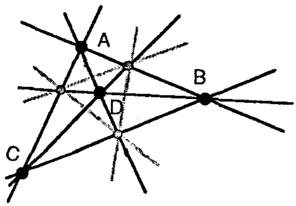
تعریف ۱-۴. یک مثلث مجموعه‌ی سه نقطه‌ی غیرهم‌خط و سه خط مشخص شده با این نقاطند. نقاط را رؤوس و خطوط، را اضلاع مثلث نامند (شکل ۱-۴).

اشکالی مرکب از چهار نقطه و خطوط مشخص شده توسط آن‌ها نیز موجودند برخلاف مثلث‌ها این اشکال همانند قابل قیاسی در هندسه‌ی اقلیدسی ندارند.

تعریف ۲-۴. یک چهار گوشه‌ی (کامل) مجموعه‌ی چهارنقطه، که هیچ سه‌تای آن‌ها هم‌خط نیستند و شش خط مشخص شده توسط این چهار نقطه می‌باشد. نقاط را رؤوس و خطوط را اضلاع چهارگوشه نامند. اگر A، B، C، D چهار نقطه‌ی یک چهارگوشه باشند، آن‌گاه AB و CD، BD و AC، و BC و AD را جفت اضلاع متقابل نامند. نقاطی که جفت اضلاع متقابل همدیگر را در آن‌ها قطع می‌کند، نقاط قطری چهارگوشه نامند (شکل ۲-۴).



شکل ۱-۴

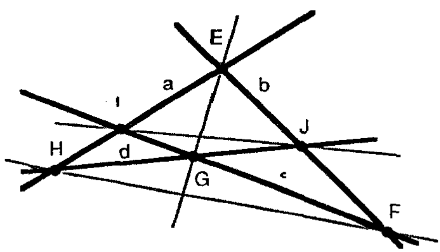


شکل ۲-۴

همان‌گونه که در بنداشت ۴ ادعا شد نقاط قطری که یک چهارگوشه‌ی کامل تشکیل مثلثی معروف به مثلث چهارگوشه می‌دهند، وجود این مثلث قطری را می‌توان برای نشان دادن این‌که هر خط در صفحه‌ی تصویری حداقل شامل چهار نقطه است، به کار برد (تمرین ۲).

برای مشخص کردن این‌که دوگان بنداشت ۴ یک قضیه می‌باشد، در نظر گرفتن دوگان تعریف ۲-۴ لازم است. برخلاف تعریف یک مثلث، تعریف ۲-۴ خود دوگان نیست. بنابراین دوگان یک چهارگوشه شکل دیگری در این هندسه می‌باشد.

تعریف ۳-۴. یک چهارضلعی (کامل) مجموعه‌ای است از چهار خطی، که هیچ سه‌تای آن هم‌رس نیستند، و شش نقطه‌ی مشخص شده توسط این خطوط. نقاط را رؤوس و خطوط را اضلاع چهارضلعی می‌نامند. اگر a ، b، c، d چهار خط یک چهارضلعی باشند، $a.b$ و $c.d$، $a.c$ و $b.d$، $a.d$ و $b.c$ را جفت رؤوس متقابل می‌نامند. خطوط واصل بین جفت رؤوس متقابل خطوط قطری چهارضلعی نامیده می‌شوند (شکل ۳-۴).



شکل ۳-۴

قضیه ۲-۴ (دوگان بنداشت ۴). سه خط قطری یک چهار ضلعی کامل هم‌رس نیستند.

اثبات. گیریم $abcd$ چهارضلعی کامل دل‌خواهی باشد و $E=a.b$ ، $F=b.c$ ، $G=c.d$ ، $H=a.d$ ، $I=a.c$ و $J=b.d$ آن‌گاه خطوط قطری، عبارتند از: EG ، FH و IJ فرض کنیم این خطوط هم‌رس باشند؛ یعنی، EG ، FH و IJ همگی در یک نقطه متقاطع باشند. اما $EFGH$ تشکیل یک چهارگوشه‌ی کامل با نقاط قطری $EF.GH=b.d=J$ ، $EG.FH$ و $FH.FG=a.c=I$ می‌دهد؛ اما چون EG ، FH و IJ هم‌رس هستند، نتیجه این است که نقاط قطری چهارگوشه $EFGH$ هم‌خط هستند و این با بنداشت ۴ تناقض دارد. بدین ترتیب، خطوط قطری چهارضلعی $abcd$ هم‌رس نیستند. □

از این رو، خطوط قطری یک چهارضلعی کامل نیز مثلثی معروف به مثلث قطری چهارضلعی را مشخص می‌کنند.

با اثبات قضیه ۲-۴ فرایند نشان دادن این‌که دستگاه بنداشتی مرکب از بنداشت‌های ۱ تا ۴ در اصل دوگانی صادقند را کامل کرده‌ایم (بخش ۳-۱ را ببینید). حال قصد اضافه کردن دو بنداشت دیگر به این دستگاه و بررسی این‌که این دستگاه بزرگ‌تر باز در اصل دوگانی صادق است را داریم.

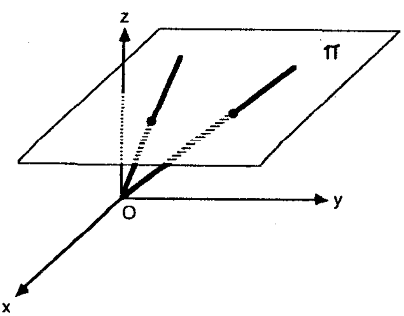
اگرچه موضوع موردنظر ما در این فصل مطالعه‌ی صفحه‌ی تصویری حقیقی است، ولی توجه به این نکته جالب است که بنداشت‌های ۱ تا ۳ همان سه بنداشت از چهار بنداشت صفحات تصویری متناهی داده شده در بخش ۳-۱ می‌باشد. بنداشت باقی‌مانده در صفحات تصویری متناهی (بنداشت ت ۲) اشاره به تعداد نقاط روی یک خط داشت. همان‌طور که قبلاً در این بخش، مشخص شد بنداشت ۴ متضمن وجود حداقل چهارنقطه روی هر خط است. بدین ترتیب، هر مدل متناهی از دستگاه بنداشتی حاضر از مرتبه‌ی $n\geq3$ بوده و بنابراین، حداقل شامل ۱۳ نقطه خواهد بود. در حقیقت، مدل ۱۳ نقطه‌ای (مدل ۳) که در بخش ۳-۱ آمده نیز مدلی است که در بنداشت‌های ۱ تا ۴ صدق می‌کند. بررسی این‌که این مدل واقعاً در بنداشت ۴ صادق است، متضمن بررسی خسته‌کننده‌ی حالت به حالت همه‌ی چهارگوشه‌های ممکن است (تمرین ۶).

یک مدل نامتناهی از این دستگاه بنداشتی را می‌توان با بسط مستقیم یک صفحه‌ی اقلیدسی همان‌گونه که در زیر آمده، حاصل نمود.

یک مدل نامتناهی برای صفحه‌ی تصویری

گیریم π صفحه‌ای موازی ولی نه مساوی با صفحه‌ی x-y در فضای سه‌بعدی اقلیدسی بوده و O نیز معرف مبدأ مختصات دکارتی باشد، توجه کنید که هر نقطه‌ی P در π همراه با نقطه‌ی O خط منحصر به فردی مانند p را مشخص می‌کنند. بنابراین P را می‌توان نظیر خط منحصر به فردی مار بر O یعنی p دانست. به طریقی مشابه هر خط l در π همراه نقطه‌ی O صفحه‌ی منحصر به فردی مانند λ را مشخص می‌کنند. بنابراین، l را می‌توان نظیر صفحه‌ای مار بر O یعنی، λ دانست (شکل ۴-۴). این تناظر، به وضوح یک نگاشت یک به یک از مجموعه‌ی نقاط و خطوط در π به توی مجموعه‌ی خطوط و صفحات مار بر O می‌باشد. ولیکن، یک صفحه که همان صفحه‌ی x-y باشد و یک زیرمجموعه از خطوط که همان خطوط مار بر O و در صفحه‌ی x-y هستند، با این نگاشت، پوشیده نمی‌شوند.

مدل π' برای صفحه‌ی تصویری، با اضافه کردن یک خط آرمانی و نقاط آرمانی به π، به منظور پوشا کردن این تناظر یک به یک، حاصل می‌شود. خط آرمانی اضافه شده به π



شکل ۴-۴

نظیر صفحه‌ی x-y و نقاط آرمانی اضافه شده نظیر خطوط مار بر O در صفحه‌ی x-y هستند. پس از اضافه کردن، بین این خط و نقاط آرمانی با دیگر خطوط و نقاط π' فرقی قائل نیستیم.

علاوه بر این، برای توصیف نقاط و خطوط π' بیان تعبیر اصطلاح "وقوع" لازم است. یک نقطه و خط را در π' واقع بر هم گویند، اگر و فقط اگر خط نظیر مار بر O آن، بر صفحه نظیر مار بر O آن، قرار داشته باشد. بدین ترتیب، نقاط آرمانی بر خط آرمانی واقعند. با این تعبیر، می‌توان نشان داد π' یک مدل از صفحه‌ی تصویری است (تمرین ۵).

تمرین:

۱- اثبات دوگان بنداشت ۱ را به تفضیل بنویسید.

۲- (آ) ثابت کنید روی هرخط صفحه‌ی تصویری حداقل سه نقطه وجود دارد (توجه کنید: نمی‌توانید وجود هیچ نقطه‌ای را روی خط فرض کنید). (ب) اثبات قسمت (آ) را با نشان دادن وجود حداقل چهار نقطه روی هر خط صفحه‌ی تصویری وسعت بخشید.

۳- مدلی برای دستگاه بنداشتی شامل بنداشت‌ها ۱ تا ۳ بیابید که روی هر خط دقیقاً سه نقطه وجود داشته باشد. تعداد کل نقاط در این مدل چندتاست؟ تعداد کل خطوط چندتاست؟ آیا مدل شما در بنداشت ۴ صادق است؟

۴- نشان دهید که بنداشت ۴ مستقل از بنداشت‌های ۱ تا ۳ است (توجه: بنداشت ۴ به بنداشت فانو معروف است).

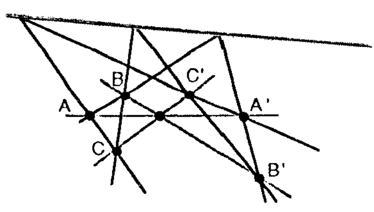
۵- بررسی کنید که π' در بنداشت‌های ۱ تا ۳ صادق است. چه نقاطی در π' محل تلاقی خطوط موازی در صفحه‌ی π هستند.

۶- (آ) همه‌ی چهارگوشه‌های مدل ۳ در بخش ۳-۱ که شامل نقاط A و B به عنوان دو رأس از چهار رأس هستند را فهرست کنید. (ب) بنداشت ۴ را برای چهارگوشه‌های این مدل با سه رأس A، B، E بررسی کنید.

۳-۴. مثلث‌های پرسپکتیو

اگرچه بنداشت‌های ۱ تا ۴ خواص اولیه‌ی صفحه‌ی تصویری ما را توصیف می‌کنند، ولی افزون بر آن‌ها نیاز به دو خاصیت دیگر که در بنداشت‌های ۵ و ۶ فرموله شده‌اند خواهیم داشت. اولین خاصیت مربوط به دو رابطه بین یک زوج مثلث است؛ همان‌گونه که در تعریف بعد خواهید دید، یکی از این روابط لزوم تناظر بین رؤوس و دیگری لزوم تناظر بین اضلاع است. همانند حالت آشنای قابلیت انطباق مثلث‌ها در هندسه‌ی اقلیدسی، ترتیب نامگذاری رؤوس برای مشخص کردن تناظر به کار برده می‌شود.

تعریف ۴-۴. مثلث‌های ΔABC و $\Delta A'B'C'$ را پرسپکتیو از یک نقطه گوییم هرگاه سه خطی که رؤوس نظیر را به هم وصل می‌کند، AA'، BB' و CC' هم‌رس باشند. مثلث‌ها را پرسپکتیو از یک خط گوییم اگر سه نقطه‌ی تلاقی اضلاع نظیر: $AB,A'B'$ ، $AC,A'C'$ و $BC,B'C'$ هم‌خط باشند (شکل ۵-۴).



شکل ۵-۴

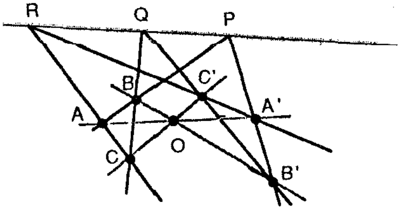
بنداشت ۵ (قضیهٔ دزارگ). اگر دو مثلث پرسپکتیو از یک نقطه باشند، آن‌گاه پرسپکتیو از یک خط نیز خواهند بود.

این عبارت را می‌توان به راحتی در هندسه‌ی فضای ۳ بعدی (کتاب هندسه‌ی تصویری، کاکستر، ۱۹۸۷) ثابت کرد از این رو و به احترام ریاضی‌دان فرانسوی که در پیشبرد توسعه‌ی هندسه‌ی تصویری همت گماشت، اغلب از آن به عنوان قضیه‌ی دزارگ یاد شده است. ولیکن، در هندسه‌ی تصویری مسطحه، این عبارت یا عبارتی هم‌ارز آن را باید به عنوان یک بنداشت پذیرفت؛ چراکه بعضی هندسه‌ها در بنداشت‌های ۱ تا ۴ صادقند ولی این عبارت، در آن‌ها صحیح نیست.

به منظور اطمینان از این‌که دستگاه بنداشتی ما در اصل دوگان صادق است باید دوگان بنداشت ۵ را ثابت کنیم. در این حالت دوگان بنداشت درست عکس آن بنداشت است.

قضیه ۳-۴ (دوگان بنداشت ۵). اگر دو مثلث پرسپکتیو از یک خط باشند، آن‌گاه پرسپکتیو از یک نقطه نیز خواهند بود.

اثبات. فرض کنیم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ از خطی پرسپکتیوند؛ یعنی: $AB,A'B'=P$، $B'C',BC=Q$ و $AC,A'C'=R$ هم‌خطند (شکل ۶-۴). کافی است نشان دهیم AA'، BB' و CC' هم‌رسند. گیریم $O=AA',BB'$، و همچنین دو مثلث $\Delta RAA'$ و $\Delta QBB'$ را درنظر می‌گیریم. P روی RQ است چراکه P، Q و R هم‌خطند و بنابر تعریف P، P روی AB و



شکل ۶-۴

روی $A'B'$ می‌باشد. بدین ترتیب $\Delta RAA'$ و $\Delta QBB'$ پرسپکتیو از P می‌باشند؛ بنابراین، با توجه به بنداشت ۵ آن‌ها پرسپکتیو از یک خطند؛ یعنی: $RA.QB=C$ ، $RA'.QB'=C'$ و $AA'.BB'=O$ هم‌خطند. بدین ترتیب AA'، BB' و CC' هم‌رس خواهند بود. □

اهمیت این بنداشت و نتایج وابسته به آن بی‌شک بسیار است، همان‌طور که در اثبات قضیه‌ی قبل شاهد بودید، بنداشت اخیر وسیله‌ای مناسب برای اثبات هم‌خطی سه نقطه است. همچنین در نشان دادن یکتایی نقطه‌ی چهارم مجموعه‌ای معروف به مجموعه‌ی هم‌ساز از آن استفاده خواهیم کرد.

تمرین:

۱- دو مثلث بسازید که از یک نقطه پرسپکتیو باشند. آن‌ها از چه خطی پرسپکتیو هستند؟

۲- دو مثلث بسازید که از یک خط پرسپکتیو باشند. آن‌ها از چه نقطه‌ای پرسپکتیو هستند؟

۳- (آ) آیا تشکل دزارگ که در بخش ۵-۱ آمده است یک صفحه‌ی تصویری است؟ چرا؟ (ب) نشان دهید که در این تشکل ΔBEH و ΔADI پرسپکتیو از یک نقطه و از یک خط هستند.

۴- اگر رؤوس مثلث ΔPQR به ترتیب بر اضلاع ΔABC طوری قرار داشته باشد که AP، BQ و CR هم‌رس باشند و اگر $AB.PQ=U$، $AC.PR=V$ و $BC.QR=W$ نشان دهید که U، V و W هم‌خطند.

۴-۴. مجموعه‌های هم‌ساز

این بخش به معرفی مجموعه‌هایی خاص از چهار نقطه‌ی هم‌خط (و مجموعه‌های دوگان شامل چهار خط هم‌رس) می‌پردازد که تماماً بر حسب ساختاری از نقاط و خطوط تعریف شده‌اند. در بخش ۵-۴ خواهیم دید که ساختارهایی از نقطه و خط را می‌توان در تعریف تناظرهایی بین دو مجموعه از نقاط هم‌خط، دو مجموعه از خطوط هم‌رس و یک مجموعه از نقاط هم‌خط و مجموعه‌ای از خطوط هم‌رس به‌کار برد. در بخش ۶-۴ ساختارهایی از نقطه و خط در تعریف مقاطع مخروطی استفاده شده‌اند.

تعریف ۵-۴. گوییم چهار نقطه‌ی هم‌خط A، B، C، D تشکیل یک مجموعه‌ی هم‌ساز $H(AB,CD)$ می‌دهند. هرگاه چهارگوشه‌ی کاملی موجود باشد که دو ضلع مقابل آن از A دو ضلع مقابل دیگر از B و دو ضلع باقیمانده به ترتیب از C و D بگذرند. C را مزدوج هم‌ساز D (یا D را مزدوج هم‌ساز C) نسبت به A و B خوانند.

توجه کنید که A و B نقاط قطری چهارگوشه هستند و اول نامگذاری شده‌اند. همچنین، توجه به تمایز نقاط زوج اول از نقاط زوج دوم در مجموعه‌ی هم‌ساز لازم است در صورتی که تفاوتی بین نقاط در زوج اول و نقاط در زوج دوم قایل نخواهیم بود؛ یعنی:

$$H(AB,CD) \Leftrightarrow H(BA,CD) \Leftrightarrow H(AB,DC) \Leftrightarrow H(BA,DC)$$

با استفاده از این تعریف، برای هرسه نقطه‌ی متمایز مفروض هم‌خط A، B، C همان‌طور که خواهد آمد D را می‌توان طوری ساخت که مزدوج هم‌ساز C نسبت به A و B شود.

ساختن نقطه‌ی چهارم یک مجموعه هم‌ساز

گیریم E نقطه‌ای دل‌خواه ناواقع بر AB و m خطی متمایز از AB مار بر B باشد که از E

نگذرد. گیریم $m.AE=F$، $m.CE=G$ و $AG.EB=H$ همچنین، می‌توانید بررسی کنید که E، F، G، H تشکیل چهارگوشه‌ی کاملی با دو ضلع مقابل مار بر A، دو ضلع مقابل مار بر B و یک ضلع باقیمانده مار بر C را می‌دهند (شکل ۷-۴). بنابراین $D=FH.AB$

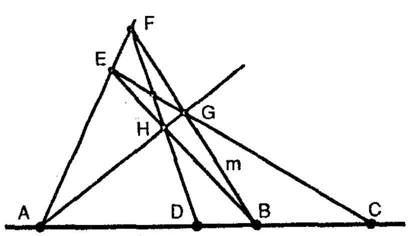
با استفاده از بنداشت ۴ می‌توان بررسی کرد که D متمایز از A، B، C است (تمرین ۴). بدین ترتیب، باز توجیهی بر موجود بودن حداقل چهارنقطه روی هر خط صفحه‌ی تصویری داریم.

هم تعریف و هم ساختن قبلی برای یافتن D، مزدوج هم‌ساز C نسبت به A و B، تا اندازه‌ای نقطه‌ی D را دل‌خواه نشان می‌دهند؛ ولیکن قضیه‌ی زیر نشانگر این است که اگر با سه نقطه‌ی مفروض A، B، C شروع کنیم با هر ساختنی که در تعریف ۵-۴ صدق کند، همان نقطه‌ی D حاصل خواهد شد؛ یعنی، D به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود.

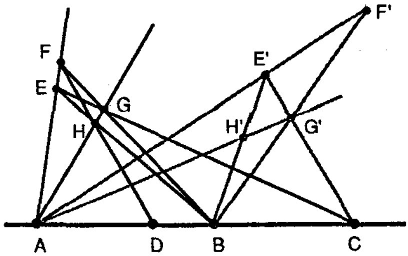
قضیه ۴-۴. اگر A، B، C سه نقطه‌ی متمایز هم‌خط باشند، آن‌گاه D، مزدوج هم‌ساز C نسبت به A و B منحصر به فرد است.

اثبات. گیریم $EFGH$ چهار گوشه‌ی مورداستفاده در یافتن نقطه‌ی D باشد، فرض کنید چهار گوشه‌ی دوم $E'F'G'H'$ نیز طوری ساخته شده باشد که $E'H'.F'G'=B$، $E'F'.G'H'=A$، $E'G'.AB=C$ و گیریم $D^*=F'H'.AB$ (شکل ۸-۴). کافی است نشان دهیم که $D^*=D$ بدین منظور، از بنداشت ۵ و دوگان آن استفاده خواهیم کرد.

توجه کنید که ΔEFG و $\Delta E'F'G'$ از خط AB پرسپکتیو هستند. بنابر قضیه ۳-۴ آن‌ها پرسپکتیو از یک نقطه‌اند؛ یعنی، EE'، FF' و GG' هم‌رسند. به طریقی مشابه ΔEGH و



شکل ۷-۴



شکل ۸-۴

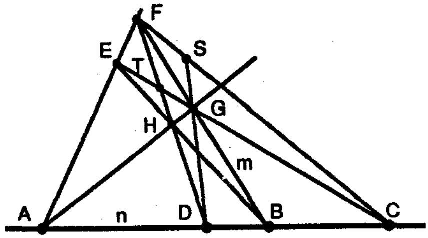
$\Delta E'G'H'$ پرسپکتیو از AB هستند و از این رو EE'، GG' و HH' هم‌رسند. بدین ترتیب، چهار خط EE'، FF'، GG' و HH' همگی هم‌رسند؛ بنابراین ΔFHG و $\Delta E'H'G'$ از یک نقطه پرسپکتیواند و بنابر بنداشت ۵ پرسپکتیوی آن‌ها از یک خط نتیجه می‌شود؛ پس: $FH.F'H'$، $B=FG.F'G'$، $A=HG.H'G'$ هم‌خطند اما $FH.AB=D$، $F'H'.AB=D^*$ بدین ترتیب $D=D^*$

علاوه بر امکان تغییر ترتیب نقاط در زوج‌های اول و آخر یک مجموعه‌ی هم‌ساز، قضیه زیر بیانگر این است که خود زوج نقاط نیز می‌توانند جابه‌جا شوند.

قضیه ۵-۴. $H(AB,CD) \Leftrightarrow H(CD,AB)$

اثبات. $H(AB,CD)$ را مفروض گرفته $H(CD,AB)$ را نشان می‌دهیم. اثبات مشابهی می‌تواند قسمت دوم هم‌ارزی را ثابت کند.

چون $H(AB,CD)$، یک چهار زاویه‌ای $EFGH$ موجود است به طوری که $A=EF.GH$، $B=EH.FG$، $C=EG.n$ و $D=FH.n$ که در آن $n=AB$، حال، گیریم $S=DG.FC$ و $T=GE.FH$ و چهار گوشه $TGSF$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۹-۴). توجه کنید که دو خط $SF=FC$ و $TG=GE$ هردو بر C واقعند، همچنین $GS=DG$ و $TF=FH$ هردو بر D واقعند. علاوه بر این، خط GF بر B واقع است؛ بدین ترتیب، کافی است نشان دهیم که TS بر A واقع است توجه کنید که $A=EF.GH$ بنابراین: ΔTHE و ΔSGF را درنظر



شکل ۹-۴

می‌گیریم. اگر بتوان نشان داد این مثلث‌ها پرسپکتیو از نقطه‌ای هستند، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که A بر TS واقع بوده و بنابراین $H(CD,AB)$

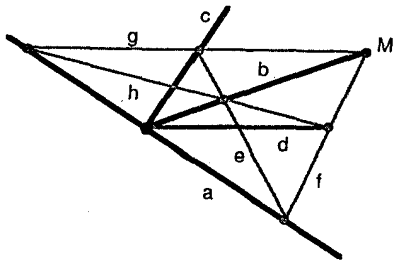
چون محل تلاقی اضلاع نظیر این مثلث‌ها $TE.SF=GE.FC=C$، $TH.SG=FH.DG=D$ و $HE.GF=B$ است. این مثلث‌ها پرسپکتیو از خط n می‌باشند و بنابراین پرسپکتیو از یک نقطه است. □

فرع.

$$H(AB,CD) \Leftrightarrow H(AB,DC) \Leftrightarrow H(BA,CD) \Leftrightarrow H(BA,DC) \Leftrightarrow H(CD,AB) \Leftrightarrow$$
$$H(CD,BA) \Leftrightarrow H(DC,AB) \Leftrightarrow H(DC,BA)$$

همانند بخش‌های قبل می‌توان دوگان این مجموعه‌ی هم‌ساز از نقاط را فرمول‌بندی کرد.

تعریف ۶-۴. گیریم چهار خط هم‌رس a، b، c، d تشکیل مجموعه‌ی هم‌ساز $H(ab,cd)$ را می‌دهند. هرگاه یک چهارضلعی کامل موجود باشد که دو رأس مقابل آن روی a، دو رأس مقابل دیگر روی b و دو رأس باقیمانده به ترتیب روی c و d قرار گیرد (در شکل ۱۰-۴ خطوط e، f، g و h تشکیل چهارضلعی می‌دهند که $H(ab,cd)$ را نتیجه می‌دهد).



شکل ۱۰-۴

ساختن خط چهارم یک مجموعه‌ی هم‌ساز و قضایای زیر به طور خودکار با دوگان‌سازی نتایج قبل به دست می‌آیند.

قضیه ۶-۴. اگر خطوط a، b، c هم‌رس باشند، آن‌گاه d، مزدوج هم‌ساز c نسبت به a و b منحصر به فرد است.

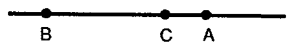
قضیه ۷-۴. $H(ab,cd) \Leftrightarrow H(cd,ab)$

سرانجام می‌خواهیم ببینیم که خواص هم‌سازی تحت تبدیلات هندسه‌ی تصویری ناوردا است یا خیر. به علاوه، خواص هم‌سازی می‌تواند برای مختصاتی کردن صفحه‌ی تصویری به کار رود؛ یعنی، با استفاده از ساختارهایی که فقط شامل نقاط و خطوط‌اند و بدون هیچ مفهومی از فاصله می‌توان یک دستگاه مختصاتی ساخت که به هر نقطه در صفحه‌ی تصویری یک زوج مرتب از اعداد نسبت دهد (برای ارائه‌ی مفصل این فرآیند تولر را ببینید).

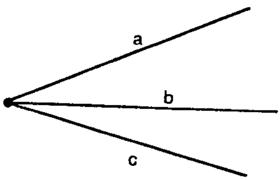
تمرین:

۱- گیریم نقاط A، B، C آن‌چنان که در شکل ۱۱-۴ و ۱۲-۴ آمده است، مشخص

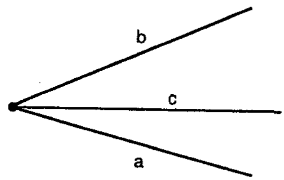
شکل ۱۱-۴



شکل ۱۲-۴



شکل ۱۳-۴



شکل ۱۴-۴

شده باشند. در حالت‌های زیر مزدوج هم‌ساز C نسبت به A و B را بسازید: (آ) در شکل ۱۱-۴ ، (ب) در شکل ۱۲-۴.

۲- گیریم خطوط a ، b ، c آن‌چنان که در شکل ۱۳-۴ و ۱۴-۴ آمده است قرار گرفته باشند. در حالت‌های زیر مزدوج هم‌ساز c نسبت به a و b را بسازید:
(آ) در شکل ۱۳-۴ ، (ب) در شکل ۱۴-۴.

۳- در شکل ۷-۴ گیرید $I=EG.FH$ نشان دهید که I عضوی از دو مجموعه‌ی هم‌ساز ناهم‌ارز در این شکل است. در هریک از آن‌ها چهارگوشه‌ی مطرح شده را مشخص کنید.

۴- ثابت کنید چهارمین نقطه‌ی یک مجموعه‌ی هم‌ساز از سه نقطه دیگر آن مجموعه‌ی هم‌ساز متمایز است؛ یعنی، اگر $H(AB,CD)$ آن‌گاه D از A ، B و C متمایز است.

۵- در صفحه‌ی اقلیدسی، فرض کنید B نقطه‌ی وسط پاره‌خط AC باشد. سعی کنید مزدوج هم‌ساز B را نسبت به A و C بسازید. چه اتفاقی می‌افتد؟

تمرین زیر با اجازه از کاکستر *(1987. Projective Geometry)* در این‌جا آمده است.

۶- در صفحه‌ی اقلیدسی پاره‌خط OC را رسم کرده G را در دوسوم راه در همان امتداد و E را در دوپنجم راه از G به C در آن امتداد بگیرید (مثلاً برحسب سانتی‌متر $OG=۱۰$، $GE=۲$ و $EC=۳$) اگر پاره‌خط OC نمایش یک تار کشیده باشد که برای نتی در C کوک شده است، آن‌گاه در صورتی که همان تار در E یا G ثابت نگه‌داشته شود، دیگر نت‌های سه‌گانه اصلی را خواهد نواخت. با رسم یک چهارگوشه‌ی مناسب، به طور تجربی بررسی کنید که $H(OE,CG)$. (پدیده‌ای این‌چنین استفاده از کلمه‌ی هم‌ساز را توجیه می‌کند).

۵-۴. پرسپکتیوی‌ها و تصویری‌ها

تبدیلات صفحه‌ی تصویری معروف به هم‌خطی‌ها در بخش ۱۰-۴ به گونه‌ای تحلیلی معرفی خواهند شد. در این بخش، خواهیم دید همان‌گونه که از نام آن‌ها برمی‌آید این تبدیلات حافظ هم‌خط بودن هستند؛ یعنی، نگار نقاط هم‌خط باز هم‌خط می‌باشند. بدین ترتیب، اگر دیدمان را به نقاط بر روی خطی مشخص محدود کنیم قادر هستیم که بگوییم یک هم‌خطی نگاشتی از این مجموعه‌ی نقاط هم‌خط به مجموعه‌ی نقاط هم‌خط دیگری القا می‌کند. همان‌گونه که احتمالاً شما انتظار دارید می‌توانیم ببینیم که هم‌خطی‌ها به همان خوبی حافظ هم‌رسی هستند؛ یعنی، نگار خطوط هم‌رس خطوطی هم‌رس خواهد بود. بنابراین هم‌خطی‌ها همچنین نگاشت‌هایی از مجموعه‌ای از خطوط هم‌رس به مجموعه‌ی خطوط هم‌رس دیگری القا می‌کنند. نوع دومی از

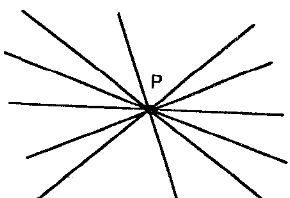
تبدیلات معروف به همبسته‌ها نگاشت‌هایی را از نقاط هم‌خط به خطوط هم‌رس و برعکس القا خواهند کرد. در این بخش چگونگی استفاده از ساختمان‌هایی از خط و نقطه را برای به دست آوردن تناظر، به طور ساختنی، یاد خواهیم گرفت؛ بعداً خواهیم دید که این تناظرها همان تناظرهایی هستند که به طور تحلیلی از طریق نگاشت‌های القایی که قبلاً توصیف شد، مطرح شوند.

تعاریف دوگان زیر نیز به منظور تسهیل در امر توصیف این ساختمان‌ها مطرح می‌شوند.

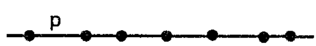
تعریف ۷-۴. مجموعه‌ی خطوط مار بر نقطه‌ی P را دسته خط به مرکز P نامند (شکل ۱۵-۴). مجموعه‌ی همه‌ی نقاط روی خط p را دسته نقطه به محور p نامند (شکل ۱۶-۴).

با این تعاریف نگاشت‌هایی را که قبلاً ذکر شدند می‌توان به طور صوری برحسب نگاشت‌هایی بین دو دسته تعریف کرد؛ مقدماتی‌ترین این نگاشت‌ها به پرسپکتیوی‌ها معروفند.

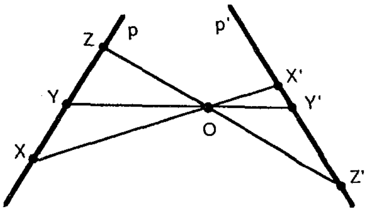
تعریف (آ)-۸-۴. نگاشتی یک به یک بین دو دسته نقطه با محورهای p و p' یک پرسپکتیوی نامیده می‌شود، اگر هر خط واصل نقطه‌ی X روی p به نقطه‌ی نظیرش X' روی p' بر نقطه‌ی ثابت O واقع باشد. O را مرکز پرسپکتیوی نامند. این‌چنین پرسپکتیوی را با $X\overset{O}{\barwedge}X'$ نشان می‌دهند (شکل ۱۷-۴).



شکل ۱۵-۴



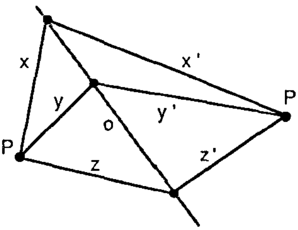
شکل ۱۶-۴



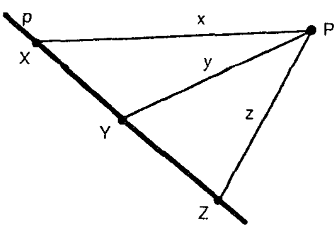
شکل ۱۷-۴

تعریف (ب)-۸-۴. نگاشتی یک به یک بین دو دسته خط به مراکز P و P' یک پرسپکتیوی نامیده می‌شود، اگر هر نقطه‌ی تلاقی خطوط نظیر x روی P و x' روی P' روی خط ثابت o قرار داشته باشد. o را محور پرسپکتیوی نامند. همچنین پرسپکتیوی با $x\overset{o}{\barwedge}x'$ نشان داده می‌شود (شکل ۱۸-۴).

تعریف (پ)-۸-۴. نگاشتی یک به یک بین دسته نقطه‌ای به محور p و دسته خطی به مرکز P یک پرسپکتیوی نامیده می‌شود. اگر هر نقطه‌ی X روی p بر خط نظیر x روی P واقع باشد. این‌چنین پرسپکتیوی را با $X\barwedge x$ یا $x\barwedge X$ نشان می‌دهند (شکل ۱۹-۴).



شکل ۱۸-۴



شکل ۱۹-۴

توجه کنید که در تعریف پ-۸-۴ دسته‌ی اول می‌تواند دسته نقطه و دسته‌ی نگار یک دسته خط باشد یا دسته‌ی اول می‌تواند دسته خط و دسته نگار یک دسته نقطه باشد.

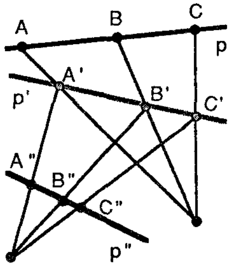
در هر سه تعریف دسته‌ها را وابسته‌ی پرسپکتیوی خوانیم. اگر دسته‌های وابسته‌ی پرسپکتیوی هم‌نوع باشند، می‌توانیم نشان دهیم (تمرین ۱) پرسپکتیوی توسط دو زوج از اعضای نظیر (به شرطی که هیچ عضوی از دو زوج در هر دو دسته نباشد) به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود. به بیان دیگر وقتی دو زوج از اعُضای نظیر مشخص شده باشند، نگار هر عضو سوم از دسته‌ی اول به طور منحصر به فردی معین می‌شود.

چون پرسپکتیوی‌ها نگاشت‌هایی یک به یک هستند، معکوس آن‌ها موجود و به وضوح باز پرسپکتیوی است. همچنین حاصل‌ضرب متناهی از پرسپکتیوی‌ها، یعنی استفاده‌ی متوالی و متناهی از پرسپکتیوی‌ها نگاشت دیگری معروف به تصویری را حاصل می‌کند، آخرین بنداشت درباره‌ی این نگاشت‌ها است.

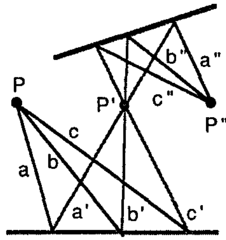
تعریف ۹-۴. نگاشتی یک به یک بین اعضای دو دسته را یک تصویری خوانیم هرگاه حاصلضربی متناهی از پرسپکتیوی‌ها باشد.

شکل‌های ۲۰-۴ تا ۲۲-۴ به ترتیب تصویری‌های بین دسته نقطه‌ها، دسته خط‌ها و دسته خط و دسته نقطه را نشان می‌دهد. توجه کنید که نماد به کار برده شده برای تصویری‌ها سمبل "⩞" می‌باشد. هرگاه بین دو دسته یک تصویری باشد، دسته‌ها را وابسته‌ی تصویری خوانیم. اگر یک تصویری یک دسته نقطه یا یک دسته خط را به روی خودش بنگارد آن را تصویری روی دسته نامیم. بنداشت ۶ که خود دوگان می‌باشد، خاصیت مهمی از تصویری‌های روی دسته‌ها را توصیف می‌کند.

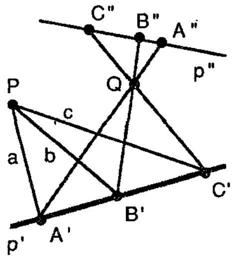
بنداشت ۶. اگر یک تصویری روی یک دسته سه عضو دسته را ناوردا نگه‌دارد هر عضو دسته را ناوردا نگه می‌دارد.



شکل ۲۰-۴ : $ABC \wedge A''B''C''$



شکل ۲۱-۴ : $abc \wedge a'b'c'$



شکل ۲۲-۴ : $abc \wedge A''B''C''$

بدین ترتیب، تصویری روی یک دسته که سه عضو را ناوردا نگه دارد، لزوماً نگاشت همانی است. ملاحظات دیگری که در این مرحله باید انجام داد عبارت است از: (۱) یک تصویری مرکز یا محوری ندارد مگر این‌که درست از یک پرسپکتیوی تشکیل شده باشد و (۲) وارون یک تصویری و همچنین حاصل‌ضرب دوتصویری باز یک‌تصویری است.

از آن‌جایی که یک پرسپکتیوی بین دو دسته با دو زوج نظیر از اعضای دسته‌ها به طور منحصر به‌فرد مشخص می‌شود؛ وجود یک تصویری بین دو دسته که هر سه عضو دل‌خواه از دسته‌ی اول را به سه عضو نظیر در دسته دوم بنگارد، را می‌توان با روش ساختنی ثابت کرد. این ساخت برای دو دسته نقطه‌ی متمایز تشریح شده است.

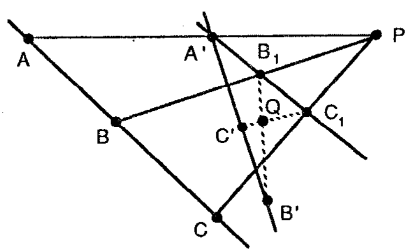
ساخت یک تصویری بین دسته‌های نقاط

گیریم A، B، C اعضای یک دسته با محور p و A'، B'، C' اعضای متناظر در دسته‌ای با محور p' ($p\neq p'$) باشد. خط AA' را ساخته نقطه‌ی P را متمایز از A' روی آن انتخاب می‌کنیم. گیریم $m\neq p'$ خط دل‌خواهی مار بر A' باشد. گیریم: $B_1=BP.m$، $C_1=CP.m$. بدین ترتیب: $ABC\overset{P}{\barwedge}A'B_1C_1$، حال گیریم $Q=B_1B'.C_1C'$. در این صورت $A'B_1C_1\overset{Q}{\barwedge}A'B'C'$ و بنابراین $ABC\barwedge A'B'C'$ (شکل ۲۳-۴).

توجه کنید که در ساخت قبل فقط دو پرسپکتیوی لازم است؛ ولیکن ساخت این پرسپکتیوی‌ها منحصربه‌فرد نیست.

وجود تصویری بین دو دسته خط که سه خط دل‌خواه از دسته اول را به سه خط نظیر در دستهٔ دوم بنگارد با دوگانگیری حاصل می‌شود. وجود یک تصویری که سه خط هم‌رس را به نقطه‌ی هم‌خط بنگارد را نیز می‌توان به راحتی توجیه کرد (تمرین ۴).

بدین ترتیب، هر سه عضو یک دسته می‌تواند با سه عضو دل‌خواه دسته‌ی دوم وابسته‌ی تصویری باشد و تناظر تعریف شده توسط تصویری ساخته شده از این سه زوج را می‌توان توسیع داد تا اعضای باقیمانده دو دسته به صورت زوج مرتب درآیند. اما چون ساخت موردنظر ما به طور منحصر به فردی مشخص نشد، فوراً نمی‌توان دید که نگار هر عضو چهارم دسته‌ی اول از طرق ساخت مختلف هموار یکی است. نتیجه‌ی قابل‌ملاحظه‌ای که لزوم این اتفاق را بیان می‌دارد به قضیه‌ی اساسی هندسه‌ی تصویری معروف است.



شکل ۲۳-۴

قضیه ۸-۴ (قضیه‌ی اساسی). یک تصویری بین دو دسته با هر سه زوج از اعضای متناظر به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود.

اثبات. وجود یک تصویری بررسی شده است. همچنان که می‌آید، یکتایی آن را با کمک بنداشت ۶ نشان می‌دهیم.

حالت ۱. دو دسته نقطه. گیریم A، B، C اعضای دسته‌ای از نقاط با محور p باشد که A'، B'، C' اعضای نظیر آن‌ها از دسته‌ی دوم با محور p' هستند. بنابر نتیجه‌ی قبل یک تصویری T وجود دارد، به طوری که:

$$T : ABC \to A'B'C'$$

اگر T منحصر به فرد نباشد، تصویری دیگری مانند S موجود است؛ به طوری که

$$S : ABC \to A'B'C'$$

آن‌گاه تحت تصویری ST^{-1}

$$A'B'C' \wedge ABC \wedge A'B'C'$$

یا به بیان دیگر ST^{-1} یک تصویری روی p' است که سه نقطه‌ی A'، B'، C' را ناوردا نگه‌می‌دارد.

بنابر بنداشت ۶، $ST^{-1}=I$ یا $S=T$

حالت ۲. دو دسته خط. اثبات به طور خودکار با دوگانگیری از حالت ۱ به دست می‌آید.

حالت ۳. یک دسته نقطه و یک دسته خط. این حالت از حالت‌های ۱ و ۲ و استفاده از پرسپکتیوی بین یک دسته نقطه و یک دسته خط که آن هم منحصر به فرد است نتیجه می‌شود. □

ساختنی که برای توجیه وجود تصویریی که سه عضو از دسته‌ای اولی را به سه عضو نظیر از دسته‌ی دومی می‌نگارد اثبات مستقیمی برای دو فرع زیر از قضیه اساسی به بار خواهد آورد (تمرین ۸).

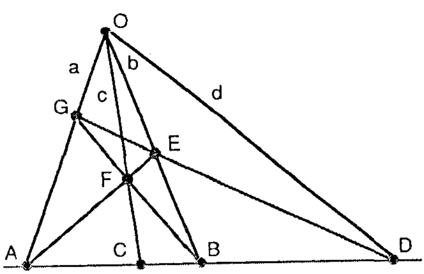
فرع ۱. **اگر در یک تصویری بین دو دسته‌ی متمایز یک عضو به خودش نظیر شود، آن‌گاه تصویری یک پرسپکتیوی است (یعنی، این نگاشت فقط یک پرسپکیتوی لازم دارد).**

فرع ۲. **هر تصویری بین دو دسته را می‌توان به عنوان حاصلضرب حداکثر سه پرسپکتیوی نوشت.**

چون تصویری‌ها نگاشت‌هایی القاشده توسط تبدیلات کلی صفحه تصویری هستند. این نکته که رابطه‌ی هم‌سازی تحت تصویری‌ها ناوردا می‌ماند حائز اهمیت است.

قضیه ۹-۴. **رابطه‌ی هم‌سازی تحت یک تصویری ناورداست. بنابراین برای مثال، اگر** $H(AB,CD)$ و $ABCD \wedge A'B'C'D'$، آن‌گاه $H(A'B',C'D')$.

اثبات. چون صفحه‌ی تصویری دارای خاصیت دوگانی است و هر تصویری حاصل‌ضرب پرسپکتیوی‌هاست کافی است نشان دهیم که $H(AB,CD)$ مستلزم $H(ab,cd)$ است، که در آن $ABCD \wedge abcd$ گیریم $O=a.b$ بدین ترتیب $a=OA$ و $b=OB$ و غیره. چون $H(AB,CD)$ یک چهارگوشهٔ $DEFG$، با رأسی در O وجود دارد به طوری که A و B نقاط قطری چهارگوشه هستند و الی آخر، گیریم $A=EF.OG$، $B=OE.EF$، $C=OF.AB$ و $D=GE.AB$ (شکل ۲۴-۴). حال چهارضلعی GF، GE، AE و AB را



شکل ۲۴-۴

درنظر می‌گیریم، آنگاه $GF.GE=G$ و $AE.AB=A$ روی a بوده و $GE.AE=E$ و $GF.AB=B$ روی b هستند. $GE.AB=D$ روی d است و $GF.AE=F$ روی c است. بدین ترتیب $H(ab,cd)$ □

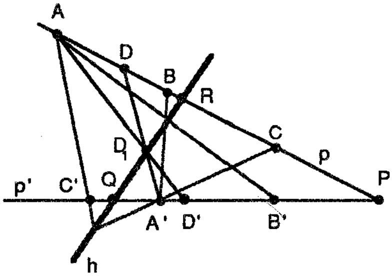
همچنان که دیدیم سه عنصر یک دسته همواره می‌تواند از طریق یک تصویری به سه عضو دسته‌ی دوم نگاشته شود اما یک مجموعه شامل چهار عضو یک دسته را عموماً نمی‌توان به یک مجموعه‌ی چهارعضوی دسته دومی نگاشت؛ ولیکن، اگر مجموعه‌های اول و دوم مجموعه‌های هم‌سازی باشند تصویری مطلوب موجود خواهد بود. این مطلب در قضیه‌ی زیر فرموله شده است که اگرچه نمادهای به کار برده شده مبین دسته نقطه‌هاست؛ ولیکن، برای دسته خط‌ها نیز برقرار می‌باشد.

قضیه ۱۰-۴. اگر چهار عضو یک دسته A ، B ، C ، D تشکیل یک مجموعه هم‌ساز دهند $H(AB,CD)$، و چهار عضو دسته‌ی دوم A'، B'، C'، D' تشکیل مجموعه هم‌ساز دهند؛ آن‌گاه یک تصویری هست که A، B، C، D را به ترتیب به A'، B'، C'، D' می‌نگارد.

اثبات. بنابر قضیه ۸-۴، یک تصویری موجود است؛ به طوری که $ABC \wedge A'B'C'$ گیریم D^* نگار D تحت این تصویری باشد. آن‌گاه بنابر قضیه ۹-۴، $H(A'B',C'D^*)$، اما بنابر قضیه ۴-۴ مزدوج هم‌ساز C' نسبت به A' و B' منحصربه‌فرد است. بدین ترتیب $D^*=D$
□

قبل از ترک مبحث تصویری‌ها، توجه به روش دومی برای ساخت نگارهای تحت یک تصویری بین دسته نقطه‌ها که اغلب نیز ساده‌تر است، مفید می‌باشد. در این روش از تعریف و قضیه‌ی زیر استفاده شود.

تعریف ۱۰-۴. اگر A و A'، B و B' زوج‌هایی از نقاط متناظر باشند، اتصال‌های متقاطع این زوج نقطه‌ها عبارتند از خطوط AB' و BA'



شکل ۲۵-۴

قضیه ۱۱-۴. یک تصویری بین دو دسته‌ی متمایز از نقاط یک خط منحصربه‌فرد را به نام محور همولوژی مشخص می‌کند که شامل تقاطع تلاقی اتصال‌های متقاطع همه‌ی زوج نقاط نظیر می‌باشد.

اثبات. دو دسته متمایز از نقاط با محورهای p و p' را درنظر می‌گیریم، فرض کنید: $ABC \barwedge A'B'C'$ که در آن $P=p.p'$ هیچ‌یک از شش نقطه‌ی ذکر شده نباشد، به وضوح: $A'A,A'B,A'C \barwedge ABC$ و $A'B'C' \barwedge AA',AB',AC'$ بدین ترتیب $A'A,A'B,A'C \barwedge AA',AB',AC'$ بنابراین، با توجه به فرع ۱ قضیه‌ی اساسی برای محوری مانند h، $A'A,A'B,A'C \overset{h}{\barwedge} AA',AB',AC'$ بنابراین $A'B.AB'$ و $A'C.AC'$ هردو روی h هستند (شکل ۲۵-۴).

برای پیدا کردن نگار نقطه‌ی دیگرِ D روی p با کمک h به صورت زیر اقدام می‌کنیم. $A'D$ را می‌سازیم. گیریم $D_1=A'D.h$ آن‌گاه $D'=AD_1.p'$

برای نشان دادن این‌که h منحصر به فرد است لازم است نشان دهیم که h مستقل از انتخاب مراکز دسته‌خط‌ها (این‌جا A و A') است و بدین ترتیب، محل تلاقی همه‌ی اتصال‌های متقاطع هر زوج نقطه‌ی نظیر، روی h است. برای انجام این کار، کافی است دو نقطه روی h بیابیم که مستقل از این انتخاب‌ها باشند. گیریم $Q=h.p'$ و $R=h.p$ از تکنیکی که قبلاً توصیف شده بود برای مشخص کردن نگار R استفاده می‌کنیم. گیریم $R_1=A'R.h$ اما $A'R.h=R$ بنابراین $R_1=R$ آن‌گاه $R'=AR.p'=p.p'=P$ یعنی نگار R، P

می‌باشد. به طریقی مشابه، می‌توان نشان داد نگار P، Q است. اما بنابر قضیه ۸-۴ نگار و پیشنگار P به طور منحصر به فردی مشخص می‌شوند (توجه کنید $Q\neq P$ چراکه این تصویری یک پرسپکتیوی نیست). بدین ترتیب $h=QR$ به طور یکتا مشخص می‌شود. □

اثبات قضیه ۱۱-۴ شامل توصیفی از روش ساخت h و یافتن نگار هر نقطه‌ی دل‌خواهی بود. به وضوح اتصال‌های متقاطع دو زوج خط را می‌توان با دوگانگیری تعریف ۱۱-۴ تعریف نمود؛ همچنین دوگان قضیه ۱۱-۴ را می‌توان برای ساخت نگاره‌های خطوط تحت تصویری‌های بین دسته‌خط‌ها با استفاده از یک مرکز همولوژی به کار گرفت.

تمرین:

۱- ثابت کنید که یک پرسپکتیوی بین دو دسته‌ی هم‌نوع توسط دو زوج نظیر، به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود (به شرط این‌که هیچ عضوی از دو زوج روی دو دسته نباشد).

۲- یک پرسپکتیوی بین دو دسته نقطه‌ی متمایز با محورهای p و p' داده شده است؛ گزاره‌های زیر را بررسی کنید: (آ) مرکز پرسپکتیوی بر p یا p' واقع نیست و (ب) نقطه‌ی $P=p.p'$ تحت این تصویری به خودش نگاشته می‌شود.

۳- وجود تصویریی که خطوط هم‌رس a، b، c در دسته‌ای به مرکز P را به خطوط هم‌رس a'، b'، c' در دسته‌ای به مرکز P' می‌نگارد را توجیه کنید (فرض کنید $P\neq P'$).

۴- وجود تصویری‌ای که خطوط هم‌رس a، b، c را به نقاط هم‌خط A، B، C

می‌نگارد را ثابت کنید.

۵- گیریم a، b، c سه خط هم‌رس و P و Q دو نقطه باشند که روی هیچ‌کدام آن‌ها واقع نیستند. گیریم $A_۱$، $A_۲$... و $B_۱$، $B_۲$... نقاطی به ترتیب روی a و b باشند، همچنین $A_iP.B_iQ=C_i$ که C_i روی خط c است. نشان دهید $A_i \wedge B_i$

۶- چهار نقطه‌ی هم‌خط متمایز A، B، C، D داده شده‌اند. تصویری‌های زیر را بسازید:
(آ) $ABC \wedge ABD$ ؛ (ب) $ABC \wedge ACD$ ؛ (پ) $ABC \wedge BAD$ ؛ (ت) $ABC \wedge ACB$.
نگاره‌ی D تحت تصویری قسمت (ت) را بیابید.

۷- کم‌ترین تعداد پرسپکتیوی‌های لازم در هریک از قسمت‌های تمرین ۵ چیست؟

۸- فرع‌های قضیه ۸-۴ را ثابت کنید.

۹- با استفاده از دوگان قضیه ۱۱-۴ مرکز همولوژی مشخص شده توسط دو دسته خط وابسته‌ی تصویری اما نه وابسته‌ی پرسپکتیوی را بیابید. ساخت یک خط نگار را توجیه کنید.

۶-۴. مخروطی‌ها در صفحه‌ی تصویری

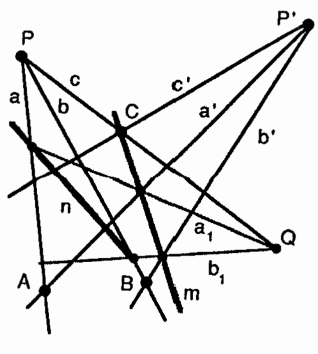
تاکنون در فصل ۴، اشکالی تصویریی که توسط مجموعه‌هایی از n نقطه که هیچ سه نقطه‌ی آن هم‌خط نبودند، مطالعه شد. برای $n=۳$ اشکالی معروف به مثلث و برای $n=۴$ اشکالی معروف به چهارگوشه، درنظر گرفته بودیم. اکنون، مجموعه‌هایی را درنظر

می‌گیریم که نهایتاً نشان خواهیم داد به طور منحصر به‌فردی به‌وسیله‌ی مجموعه‌هایی این‌گونه با $n=5$ مشخص می‌شوند. این اشکال بـه مـخروطی‌های نـقطه‌ای مـعروفند و برحسب تصویری‌ها تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۱-۴. یک مخروطی نقطه‌ای مجموعه‌ای از نـقاط تـلاقی خـطوط مـتناظر دو دسته خط با مرکزهای متمایز است که وابسته‌ی تصویری‌اند ولی وابسته‌ی پرسپکتیوی نیستند (شکل ۲۶-۴).

این‌که مخروطی‌های نقطه‌ای که هم‌اکنون تعریف شد، به صورتی با مخروطی‌های آشنای هندسه‌ی اقلیدسی مربوطند، مشهود نیست. در این بخش، توجیهی بر این داریم که مخروطی‌های نقطه‌ای توسط پنج نقطه که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند، به گونه‌ای منحصر به فرد مشخص می‌شوند (قضیه ۱۴-۴). اما ارتباط بین مخروطی‌های نقطه‌ای هندسه‌ی تصویری و مخروطی‌های اقلیدسی کمی بـعد ظـاهر خـواهـد شـد؛ ولیکـن، تعریف زیر از مماس به مانند تعریف اقلیدسی آشنایش است.

تعریف ۱۲-۴. یک مماس به یک مخروطی نقطه‌ای خطی است که دقیقاً یک نـقطه‌ی مشترک با مخروطی نقطه‌ای دارد.



شکل ۲۶-۴: $abc \overset{n}{\wedge} a_1b_1c \overset{m}{\wedge} a'b'c'$

هردو تعریف مخروطی نقطه‌ای و مماس را می‌توان برای تعریف نمودن مفاهیم دیگر در هندسه‌ی تصویری دوگان‌گیری کرد. شکل حاصله از دوگان تعریف ۱۱-۴ به مخروطی خطی و نقطه‌ی حاصله از دوگان‌گیری تعریف ۱۲-۴ به نقطه‌ی تماس معروفند. با این تعاریف هر قضیه‌ی این بخش که خواصی از مخروطی‌های نقطه‌ای را بیان می‌دارد را می‌توان دوگان‌گیری کرد تا خواص نظیر در مخروطی‌های خطی را بیان دارند.

تعریف ۱۳-۴. یک مخروطی خطی مجموعه‌ای از خطوط واصل به نقاط نظیر، در دو دسته نقطه با محورهای متمایز است که وابسته‌ی تصویری‌اند ولی وابسته‌ی پرسپکتیوی نیستند.

تعریف ۱۴-۴. یک نقطه‌ی تماس به یک خط مخروطی نقطه‌ای است که دقیقاً یک خط مشترک با خط مخروطی دارد.

همان‌طور که تعریف ۱۱-۴ مشخص می‌کند یک مخروطی نقطه‌ای توسط یک تصویری بین دو دسته خط مشخص می‌شود و همان‌طور که قضیه اساسی بیان می‌کند این نگاشت‌ها هنگامی که سه زوج از خطوط متناظر مشخص باشند، به طور منحصر به فردی، معین می‌شوند؛ بدین ترتیب، هرگاه دسته خط‌هایی با مراکزی در P و P' ($P \neq P'$) داده شده باشند می‌توانیم سه خط a، b، c واقع بر P و سه خط نظیر a'، b' و c' واقع بر P' را به دل‌خواه انتخاب کنیم. مشروط به این‌که این تناظر یک پرسپکتیوی نباشد، می‌توان بی‌درنگ سه نقطه‌ی مخروطی نقطه‌ای را که توسط این پرسپکتیوی مشخص می‌شود؛ یعنی، $a.a'$، $b.b'$ و $c.c'$ پیدا کرد. (توجه کنید که انتخاب‌های مختلف خطوط و یا خطوط متناظر آن‌ها، منجر به مخروطی‌های نقطه‌ای متفاوتی می‌شود.) قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد دو نقطه‌ی بسیار قابل دسترس دیگر از این مخروطی نقطه‌ای موجود است؛ اما دیگر نقاط افزون بر این پنج نقطه توسط ساخت یک تصویری یا دیگر ساخت‌هایی که در ادامه‌ی این بخش بیان خواهند شد، مشخص می‌شوند.

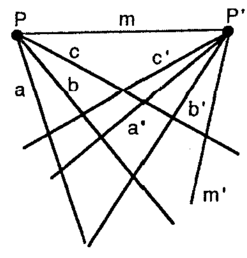
قضیه ۱۲-۴. مراکز دسته خط‌ها در تصویریی که یک مخروطی نقطه‌ای را تعریف می‌کند، نقاطی از آن مخروطی نقطه‌ای هستند.

اثبات. گیریم P و P' مراکز دسته‌ها باشند. فرض کنیم $m=PP'$ و همچنین m را به عنوان خطی در دسته‌ی به مرکز P درنظر بگیرید (شکل ۲۷-۴) در این صورت یک خط m' نظیر m در دسته‌ی به مرکز P' موجود است. توجه کنید که $m \neq m'$ چراکه این تصویری یک پرسپکتیوی نیست؛ بنابراین $m.m'=P'$ نقطه‌ای از مخروطی نقطه‌ای است. به طریق مشابه با درنظر گرفتن m به عنوان خطی در دسته‌ی به مرکز P' و یافتن خط نظیر، می‌توان نشان داد P نیز یک نقطه از این مخروطی نقطه‌ای است. □

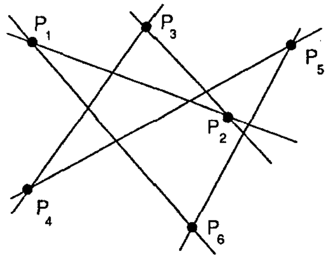
به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، هر پنج نقطه‌ی دل‌خواه مانند $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$ (که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند) را می‌توان به روش زیر، برای مشخص کردن یک مخروطی به کار برد.

دو نقطه به عنوان مرکز دسته‌ها مثل $P_۱$ و $P_۲$ انتخاب کرده و خطوط $P_۱P_۳$، $P_۱P_۴$، $P_۱P_۵$ و $P_۲P_۳$، $P_۲P_۴$، $P_۲P_۵$ را رسم می‌کنیم. آنگاه تصویری $P_۱P_۳,P_۱P_۴,P_۱P_۵ \wedge P_۲P_۳,P_۲P_۴,P_۲P_۵$ یک مخروطی نقطه‌ای شامل پنج نقطه را تعریف می‌کند.

مخروطی نقطه‌ای حاصله از این ساخت، به وضوح شامل مجموعه‌ی اصلی پنج نقطه است. برای نشان دادن این‌که یک مجموعه از پنج نقطه به طور منحصر به فرد یک مخروطی نقطه‌ای را مشخص می‌کند: از شکلی تصویری شامل شش نقطه (ولیکن شرط هم‌خط نبودن هیچ سه نقطه از نقاط لازم نیست) استفاده خواهیم کرد.



شکل ۲۷-۴



شکل ۲۸-۴

تعریف ۱۵-۴. یک شش ضلعی مجموعه‌ای است از شش نقطه‌ی متمایز موسوم به رؤوس مثل P_1، P_2، P_3، P_4، P_5، P_6 و شش خط P_1P_2، P_2P_3، P_3P_4، P_4P_5، P_5P_6، P_6P_1 (شکل ۲۸-۴). این خطوط را اضلاع شش‌ضلعی $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ می‌نامند. نقاط P_1 و P_4، P_2 و P_5، P_3 و P_6 زوج رؤوس متقابل و خطوط P_1P_2 و P_4P_5، P_2P_3 و P_5P_6، P_3P_4 و P_6P_1 زوج اضلاع متقابل هستند. سه نقطه تلاقی اضلاع متقابل نقاط قطری هستند.

ملاحظه این نکته مهم است که یک مجموعه شامل شش نقطه یک شش‌ضلعی یکتا را مشخص نمی‌کند، چراکه شش‌ضلعی با ترتیب رؤوس نامگذاری شده‌ی آن مشخص می‌شود؛ در حقیقت، یک مجموعه‌ی شامل شش نقطه می‌تواند $\frac{6!}{12}=60$ شش‌ضلعی مختلف را مشخص کند (تمرین ۳). بدین ترتیب، در قضیه ۱۳-۴ این‌که P و P' مراکز دسته‌های به‌کار رفته در تعریف مخروطی نقطه‌ای، به ترتیب به عنوان اولین و سومین رأس به‌کار گرفته شده در شش ضلعی هستند، اهمیت دارد.

قضیه ۱۳-۴. اگر A، B، C، D چهار نقطه روی یک مخروطی نقطه‌ای تعریف شده توسط دسته‌های وابسته‌ی تصویری با مراکز P و P' باشند، آن‌گاه نقاط قطری شش‌ضلعی $PBP'ACD$ هم‌خطند و برعکس، اگر نقاط قطری شش‌ضلعی $PBP'ACD$ هم‌خط باشند، آن‌گاه A، B، C، D نقاطی از مخروطی نقطه‌ای مشخص شده توسط

دسته‌های وابسته‌ی تصویری با مراکز P و P' می‌باشد.

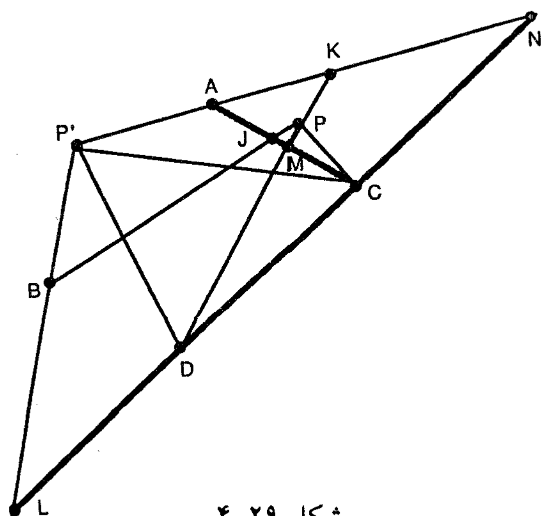
اثبات. (آ) نقاط قطری در شش ضلعی $PBP'ACD$ عبارتند از: $PB.AC=J$ ، $BP'.CD=L$ و $P'A.DP=K$. گیریم $AC.PD=M$ و $AP'.DC=N$ (شکل ۲۹-۴). با استفاده از این‌ها و تعریف مخروطی نقطه‌ای، خواص زیر حاصل خواهند شد:

$$AJCM \wedge PA,PB,PC,PD \wedge P'A,P'B,P'C,P'D \wedge NLCD \text{ یا } AJCM \wedge NLCD$$

اما چون $C \wedge C$ این تصویری یک پرسپکتیوی است و چون $AN.MD=AP'.PD=K$ مرکز پرسپکتیوی K است. بدین ترتیب J، L و K هم‌خطند.

(ب) اثبات عکس نیز صرفاً استدلال وارون اثبات قبلی است. □

با استفاده از این نتایج، می‌توانیم نشان دهیم که یک مجموعه‌ی پنج‌نقطه‌ای که هیچ سه نقطه‌ی آن هم‌خط نیستند، یک مخروطی نقطه‌ای را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند؛ بدین معنی که ساخت‌هایی که با استفاده از زوج‌های مختلف از پنج نقطه به عنوان مراکز دسته‌های وابسته‌ی تصویری حاصل می‌شوند، همگی یک مجموعه نقاط را مشخص می‌کنند.



شکل ۲۹-۴

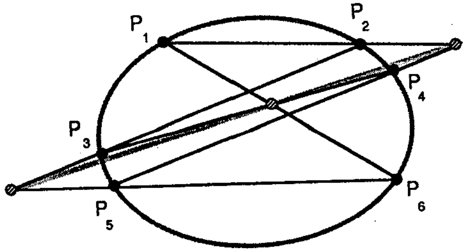
قضیه ۱۴-۴. یک مخروطی نقطه‌ای توسط پنج نقطه‌ی متمایز که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند، به طور منحصر به فردی مشخص می‌شوند.

اثبات. گیریم P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 پنج نقطه‌ای باشند که هیچ سه‌تای آن‌ها هم‌خط نیستند. در این صورت، یک مخروطی نقطه‌ای هست که با دسته‌هایی به مراکز P_1 و P_2 و تصویری $P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5 \wedge P_2P_3, P_2P_4, P_2P_5$ مشخص شده که شامل این پنج نقطه است. گیریم D نقطه‌ی ششمی روی این مخروطی نقطه‌ای باشد، برای نشان دادن این‌که مخروطی به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود، به این معنی که: هرگاه نقاطی غیر از P_1 و P_2 به عنوان مرکز درنظر گرفته شوند، همان مجموعه از نقاط مشخص خواهند شد، کافی‌ست نشان دهیم که D روی مخروطی نقطه‌ای تعریف شده و توسط دسته‌هایی با مراکز در هردو نقطه دیگر می‌باشد. شش ضلعی $P_1P_4P_2P_3P_5D$ را درنظر می‌گیریم. بنابر قضیه ۱۳-۴ نقاط قطری $P_1P_4.P_3P_5$ ، $P_4P_2.P_5D$ ، $P_2P_3.DP_1$ هم‌خطند. اما این شش ضلعی، همان شش ضلعی $P_4P_2P_3P_5DP_1$ است و بدین ترتیب بنا بر قسمت دوم قضیه ۱۳-۴ ، D روی مخروطی نقطه‌ای مشخص شده توسط دسته‌هایی با مراکز P_3 و P_4 می‌باشد. به طریقی مشابه با نامگذاری دوباره‌ی این شش ضلعی یا دیگر شش ضلعی‌هایی با P_1 و P_2 به عنوان اولین و سومین رأس می‌توان نشان داد که D روی مخروطی نقطه‌ای مشخص شد، توسط دسته‌هایی با مراکزی در هر دو نقطه P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 می‌باشد. □

این قضیه چند فرع جالب دارد. اولین آن‌ها عنوان بسیار جالب "قضیه ستاره شش‌پر مرموز پاسکال" را به خود اختصاص داد و پاسکال در ۱۶۴۰ در سن ۱۷ سالگی آن را ثابت کرد. ولی دوگان آن تا ۱۸۰۶ هنگامی که برایانچون[1] اثبات آن را گسترش داد ثابت نشده بود.

---

1. *Brianchon*

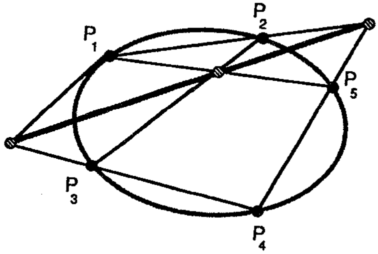


شکل ۳۰-۴

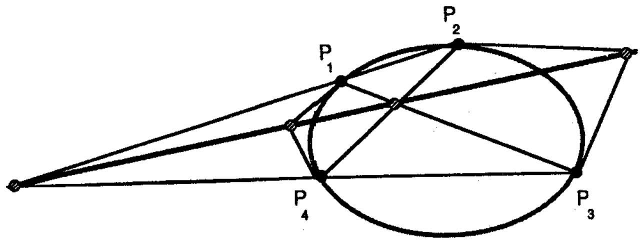
فرع ۱ (قضیه‌ی پاسکال). اگر یک شش ضلعی در یک مخروطی نقطه‌ای محاط شود (رؤوس شش ضلعی نقاطی از مخروطی نقطه‌ای باشند)، آن‌گاه نقاط قطری آن هم‌خطند (شکل ۳۰-۴).

با درنظر گرفتن شش ضلعی $P'_1P_1P_4P_2P_3P_5$ و میل دادن P'_1 به P_1 به طوری که P'_1P_1 مماس در P_1 شود می‌توان فرع دومی را بررسی کرد که روشی کارآمد برای رسم مماس به یک نقطه مخروطی را ارائه می‌دهد. به کار بردن فرایندی مشابه برای دو شش ضلعی $P_1P_2P'_2P_4P_3P'_3$ و $P_1P'_1P_2P_4P'_4P_3$ فرع سومی را نتیجه می‌دهد (تمرین ۸).

فرع ۲. اگر پنج نقطه‌ی P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 نقاط یک مخروطی نقطه‌ای باشند، سه نقطه‌ی $P_1P_2.P_4P_5$، $P_2P_3.P_5P_1$، مماس (در P_1) $.P_3P_4$، هم‌خطند (شکل ۳۱-۴).



شکل ۳۱-۴



شکل ۳۲-۴

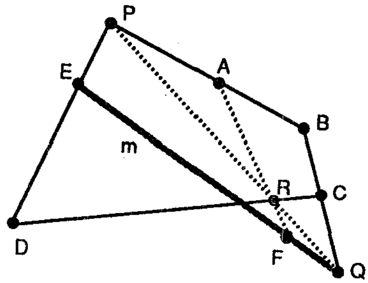
فرع ۳. **اگر P_1، P_2، P_3، P_4 چهار نقطه‌ی یک مخروطی نقطه‌ای باشند، آن‌گاه چهار نقطه‌ی $P_1P_2.P_3P_4$، $P_1P_3.P_2P_4$، مماس P_3. مماس P_4، مماس P_4.مماس P_1 هم‌خطند (شکل ۳۲-۴).**

ساخت نقاط اضافی از یک نقطه مخروطی توسط ساخت تصویری مربوط به آن انصافاً فرایند خسته‌کننده‌ای می‌باشد؛ اما این فرآیند را می‌توان با استفاده از مرکز همولوژی همان‌گونه که با دوگان قضیه ۱۱-۴ توصیف شده تا اندازه‌ای ساده کرد. روش سوم ساخت نقاط اضافی، همان‌طور که خواهد آمد استفاده از قضیه‌ی پاسکال است.

ساخت نقاط یک مخروطی نقطه‌ای با استفاده از قضیه‌ی پاسکال

گیریم A، B، C، D، E پنج نقطه از یک مخروطی نقطه‌ای باشد. آن‌گاه هر نقطه‌ی دیگر، F، روی این مخروطی نقطه‌ای را می‌توان به عنوان نقطه‌ی ششم شش ضلعی محاطی $ABCDEF$ درنظر گرفت. چون نقاط قطری $P=AB.DE$، $Q=BC.EF$ و $CD.FA$ هم‌خط خواهند بود. خطی مانند m مار بر E (این خط EF خواهد بود) انتخاب می‌کنیم. نقاط P و Q را می‌سازیم. آن‌گاه $R=CD.PQ$ و $F=RA.m$ (شکل ۳۳-۴). مشخص کردن نقاط دیگر روی مخروطی نقطه‌ای صرفاً انتخاب خطوط دیگر مار بر E را می‌طلبد.

هرچند فرع دوم قضیه ۱۴-۴ روش ساده‌ای برای رسم یک مماس در نقطه‌ای معین



شکل ۳۳-۴

توصیف می‌کند؛ ولیکن، بینشی در چگونگی ارتباط خطوط مماس به مخروطی نقطه‌ای و تصویری تعریف‌کننده‌ی نقطه مخروطی نمی‌دهد. اثبات قضیه‌ی زیر نه فقط توجیه این ارتباط است، بلکه منجر به فرعی می‌شود که در بخش ۱۱-۴ برای یافتن معادله‌ی یک مخروطی نقطه‌ای از آن استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱۵-۴. به ازای هر نقطه‌ی A از یک مخروطی نقطه‌ای دقیقاً یک خط مماس به مخروطی در A موجود است (هنگامی که مخروطی توسط دسته‌های وابسته‌ی تصویری با مراکز A و B تعریف شده باشد؛ این مماس خط نظیر AB است که به عنوان خطی از دسته مار بر B درنظر گرفته شده است).

اثبات. گیریم B، C، D، E چهار نقطه‌ای دیگر از مخروطی نقطه‌ای باشد. آنگاه مخروطی نقطه‌ای می‌تواند توسط دسته‌های وابسته‌ی تصویری با مراکز A و B تعریف شود. گیریم h خطی در دسته‌ی با مرکز A باشد که به خط ABای که به عنوان خطی در دسته‌ی با مرکز B درنظر گرفته شده است، نظیر می‌شود. به وضوح h نقطه A از نقطه مخروطی را شامل شده و $h.AB=A$. فرض کنیم h شامل نقطه‌ی دوم متمایزی از مخروطی نقطه‌ای مانند X باشد.

حالت ۱. X روی AB است. آنگاه $h=AB$ و h تحت تصویری به خودش نظیر می‌شود و از این رو بنا بر فرع ۱ و قضیه ۸-۴ تصویری یک پرسپکتیوی بوده و این با تعریف یک

مخروطی نقطه‌ای تناقض دارد.

حالت ۲. X روی AB نیست. آن‌گاه $h=AX$ به خط AB و به خط BX که متمایز از AB است نظیر می‌شود؛ ولی این با خاصیت یک به یک بودن تصویری‌ها تناقض دارد. پس h دقیقاً شامل یک نقطه از مخروطی نقطه‌ای است و بنابراین یک مماس است.

برای نشان دادن این‌که مماس دیگری به مخروطی نقطه‌ای در A وجود ندارد؛ فرض می‌کنیم h' خط روی مماس در A باشد. چون $h' I A$، خط m ای در دسته با مرکز B موجود است؛ به طوری که به h' نظیر می‌شود. آن‌گاه $m.h'$ نقطه‌ای در مخروطی نقطه‌ای است.اما چون h' در A مماس است، فقط یک نقطه از مخروطی یعنی A را شامل می‌شود. بدین ترتیب: $m.h'=A$، بنابراین: $m=AB$ و از این رو: $h'=h$. □

فرع. یک مخروطی نقطه‌ای توسط سه نقطه متمایز غیرهم‌خط و خطوط مماس در دو تا از آن‌ها به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود.

بنابر تعریف، مماس‌ها خطوطی هستند که مخروطی را دقیقاً یک بار قطع می‌کنند. خطوط دیگر، ممکن است مخروطی را قطع کنند یا قطع نکنند؛ ولی همان‌طور که در قضیه‌ی بعد شاهد خواهیم بود یک خط یک مخروطی را هرگز بیش از دوبار، قطع نخواهد کرد. این نتیجه در بخش ۱۱-۴ هنگامی که ما بدنبال ره‌یافتی تحلیلی برای مطالعه‌ی خواص بیش‌تر مخروطی‌های نقطه‌ای هستیم استفاده خواهد شد.

قضیه ۱۶-۴. یک خط یک مخروطی نقطه‌ای را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند.

اثبات. فرض کنیم خط n یک مخروطی نقطه‌ای را در سه نقطه Q، R و S قطع کند. گیریم P و P' دو نقطه‌ی دیگر از مخروطی بوده و دسته‌هایی با مراکز P و P' را درنظر می‌گیریم. آن‌گاه همان‌طور که قبلاً نشان داده شد، مخروطی می‌تواند برحسب یک تصویری بین این دسته‌ها که Q، R و S نقاط تلاقی زوج خطوط نظیر: PQ و $P'Q$، PR و $P'R$، PS و $P'S$ هستند تعریف شود، تحت این تصویری: $PQ, PR, PS \wedge P'Q, P'R, P'S$. اما سه

نقطه Q، R و S همگی روی n واقعند و بدین ترتیب:

$$PQ, PR, PS \overset{n}{\barwedge} P'Q, P'R, P'S$$

از قضیه اساسی نتیجه می‌شود که این تصویری یک پرسپکتیوی است و این با تعریف یک مخروطی نقطه‌ای تناقض دارد. □

تمرین:

۱- پنج نقطه‌ای که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند داده شده‌اند، دو نقطه‌ی دیگر از نقاط مخروطی نقطه‌ایی که آن‌ها تعیین می‌کنند و همچنین یک مماس در یکی از پنج نقطه اصلی را با استفاده از هریک از روش‌های زیر بسازید:

(آ) ساختن تصویری به صورت حاصل‌ضرب دو پرسپکتیوی

(ب) با استفاده از مرکز هومولوژی

۲- تمرین ۱ را دوگان‌گیری کرده و ساختن را اجرا کنید.

۳- توضیح دهید چرا شش نقطه ۶۰ شش ضلعی مختلف را مشخص می‌کنند.

۴- ثابت کنید: اگر رؤوس متبادل یک شش ضلعی روی دو خط قرار داشته باشند (یعنی، در شش ضلعی $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$، P_1، P_3، P_5 و همین‌طور P_2، P_4، P_6 هم‌خطند). آن‌گاه نقاط قطری هم‌خطند (این گزاره به قضیه‌ی پاپوس شهرت دارد که از قرن سوم است) [**راهنمایی:** یک تصویری بین دو خط بیابید که نقاط تلاقی اتصال‌های متقاط آن نقاط قطری شش‌ضلعی باشند.]

۵- پنج نقطه داده شده است که هیچ سه نقطه آن هم‌خط نیستند. دو نقطه‌ی دیگر از نقاط مخروطی نقطه‌ایی که آن‌ها مشخص می‌کنند را با استفاده از قضیه‌ی پاسکال

بسازید.

۶- تمرین ۵ را دوگان‌گیری کرده و ساخت را اجرا کنید.

۷- ثابت کنید مماس به یک مخروطی نقطه‌ای در A خط واصل A به مرکز همولوژی است که توسط تصویریی بین دو دسته‌ی تعریف‌کننده‌ی مخروطی که A مرکز یکی از این دسته‌هاست مشخص می‌شود.

۸- فرع ۳ از قضیه ۱۴-۴ را ثابت کنید.

۹- نشان دهید که حذف عبارت "ولی وابسته‌ی پرسپکتیوی، نیستند" از تعریف ۱۱-۴ باعث می‌شود که مجموعه‌های دو خط (یعنی نقاط روی این خطوط) را به عنوان مخروطی‌های نقطه‌ای به حساب می‌آوریم؛ این‌ها کدام دو خط خواهند بود؟

۷-۴. مدلی تحلیلی برای صفحه‌ی تصویری

تاکنون هندسه‌ی تصویری مسطحه را با دیدگاهی کاملاً ساختنی پیش بردیم. اکنون دیدگاه خود را تغییر داده و بر ره‌یافت پیشنهادی تعریف کلاین از هندسه منطبق خواهیم کرد؛ یعنی، پی‌گردی ناورداهای صفحه‌ی تصویری تحت گروهی از تبدیلات را آغاز می‌کنیم. برای حصول ماتریس نمایش این تبدیلات تصویری نیازمند مدلی تحلیلی از صفحه‌ی تصویری هستیم. چون هدف ما توجه به صفحه‌ی تصویری حقیقی است، مدل تحلیلی صفحه‌ی تصویری را مشابه با مدل صفحه‌ی اقلیدسی درنظر می‌گیریم. بدین‌سان ماتریس‌های نمایش همانند ماتریس‌های به کار رفته برای طولپای‌ها، تشابهی‌ها و آفینی‌ها خواهند بود؛ بنابراین، امکان استفاده از تکنیک‌های مشابه در فصل

۳ را خواهیم داشت؛ بدین ترتیب، این ره‌یافت ما را قادر خواهد کرد که هم خواص جدیدی از صفحه‌ی تصویری آفینی را جستجو کنیم و همین‌طور دیدگاه هندسه‌ی تصویری را به عنوان گامی منطقی در بسط فرایند تعمیم از هندسه‌ی اقلیدسی به تشابهی و سپس به آفینی را دنبال کنیم.

در مدل تحلیلی‌مان برای صفحه‌ی تصویری از کلاس‌های هم‌ارزی ناصفری که توسط رابطه‌ی تعریف شده روی R^3 در بخش ۲-۳ مشخص شد نه‌تنها به عنوان خطوط، بلکه به عنوان نقاط هم استفاده می‌کنیم. [به یاد آورید که $(a_1,a_2,a_3)\sim(b_1,b_2,b_3)$ اگر عدد ناصفر kای موجود باشد؛ به طوری که $(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)$.] همانند فصل ۳، سه‌تایی‌های مرتب نمایش‌دهنده‌ی نقاط، با پرانتزهایی به صورت (x_1,x_2,x_3) نشان داده می‌شوند؛ در حالی که سه‌تایی‌های نمایش‌دهنده‌ی خطوط را با کروشه‌هایی به صورت $[u_1,u_2,u_3]$ نشان می‌دهیم ملاحظه‌ی این نکته اهمیت دارد که محدودیت‌های اضافی‌ای که برای تعبیرهای نقطه و خط در مدل اقلیدسی لازم بود در این مدل لازم نیست.

مدل تحلیلی

اصطلاحات تعریف نشده	تعبیر
نقطه	یک کلاس هم‌ارزی ناصفر از سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، هر عضو (x_1,x_2,x_3) از کلاس هم‌ارزی مختصات همگن نقطه نامیده می‌شود.
خط	یک کلاس هم‌ارزی ناصفر از سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی؛ هر عضو $[u_1,u_2,u_3]$ از کلاس هم‌ارزی مختصات همگن خط نامیده می‌شود.
وقوع	گفته می‌شود خط u بر نقطه‌ی X واقع است؛ اگر ضرب نقطه‌ای $u.X$ صفر باشد، $u.X=0$ یا با نماد ماتریسی

$$[u_1,u_2,u_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

برای نشان دادن این‌که این مجموعه از تعبیرها مدلی از صفحه‌ی تصویری ماست؛ باید تحقیق کنیم که در بنداشت‌های ۱ تا ۶ صدق می‌کند. تأیید ۱ تا ۳ به عنوان تمرین واگذار شده است (تمرین ۲). بنداشت ۵ را در آخر این بخش بررسی خواهیم کرد؛ ولی بررسی بنداشت‌های ۴ و ۶ را به ترتیب تا بخش ۱۰-۴ و ۸-۴ به تعویق می‌اندازیم.

این مدل تحلیلی را می‌توان برحسب صفحه‌ی اقلیدسی گسترش یافته π' که در بخش ۲-۴ معرف شد تصور نمود. آن‌جا دیدیم که چگونه از π، π' (یک صفحه‌ی اقلیدسی موازی ولی متمایز از صفحه‌ی $x_3=0$) با گسترش تناظر زیر بین مجموعه نقاط و خطوط در π و مجموعه خطوط و صفحات مار بر مبدأ در E^3 حاصل شد:

۱- یک نقطه‌ی P در π به خطی مار بر مبدأ که π را در P قطع می‌کند، نظیر می‌شود.

۲- یک خط l در π به صفحهٔ مار بر مبدأ که π را در امتداد l قطع می‌کند، نظیر می‌شود.

برای این‌که نشان دهیم از این تناظر مختصات همگن برای نقاط و خطوط π' به دست می‌آید باید چند مطلب در مورد E^3 (فضای سه‌بعدی اقلیدسی) را از هندسه‌ی تحلیلی یادآوری کنیم. خصوصاً مشاهدات زیر می‌توانند مفید باشند:

۱- هر خط مار بر مبدأ را با نماد برداری می‌توان به صورت $(x_1,x_2,x_3)=t(s_1,s_2,s_3)$ نمایش داد که در آن $X=(x_1,x_2,x_3)$ برداری از مبدأ به نقطه‌ی دل‌خواه X روی خط است. و $S=(s_1,s_2,s_3)$ یک بردار هادی برای خط می‌باشد (توجه کنید که هر مضرب اسکالر ناصفر بردار هادی S نیز یک بردار هادی برای همان خط است).

۲- هر صفحه مار بر مبدأ توسط معادله‌ای به صورت $n.X=n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=0$ بیان می‌شود که در آن $X=(x_1,x_2,x_3)$ برداری از مبدأ به نقطه دل‌خواه X روی صفحه و $n=(n_1,n_2,n_3)$ برداری قائم به صفحه است (توجه کنید که هر مضرب اسکالر ناصفر بردار قائم n نیز برداری قائم برای همان صفحه است).

۳- بدین ترتیب، خط مار بر مبدأ با بردار هادی S در صفحه مار بر مبدأ با بردار قائم n قرار دارد؛ اگر و فقط اگر $n.S=0$

پس می‌توانیم هر نقطه‌ی P در π را با کلاس هم‌ارزی ناصفری از R^3؛ یعنی، مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای هادی ممکن برای خط مار بر مبدأ که π را در P قطع

می‌کنند یکی بگیریم. به طریقی مشابه می‌توانیم هر خط l در π را با یک کلاس هم‌ارزی از R^3، یعنی، مجموعه‌ی همه بردارهای قائم ممکن برای صفحه‌ی مار بر مبدأ که π را در l قطع می‌کنند یکی بگیریم. بدین طریق، اعضای کلاس‌های هم‌ارزی، مختصات همگن نقاط و خطوط در π می‌شوند.

برای کامل کردن این فرایند لازم است مختصات همگن خط و نقاط آرمانی‌ای که برای حصول π' به π اضافه شدند را بیابیم. این عمل را می‌توان با یکی گرفتن نقاط آرمانی با کلاس‌های هم‌ارزی ناصفری که بردارهای هادی خطوط مار بر مبدأ که π را قطع نمی‌کنند و یکی گرفتن خط آرمانی اضافه شده به π با کلاس هم‌ارزی بردارهای قائم به صفحه‌ی $x_3=0$ انجام داد. توجه به شکل مختصات همگن این خط و نقاط آرمانی جالب است (تمرین ۳).

با استفاده از این یکی‌گرفتن‌ها، واضح است که نقاط در π' هم‌خطند اگر و فقط اگر خطوط متناظر مار بر مبدأ آن‌ها در E^3 هم‌صفحه باشند؛ اما نتیجه‌ای از جبر خطی می‌گوید این خطوط در E^3 هم‌صفحه‌اند؛ اگر و فقط اگر بردارهای هادی آن‌ها وابسته‌ی خطی باشند. به طریق مشابه خطوط π' هم‌رس‌اند؛ اگر و فقط اگر صفحات متناظر مار بر مبدأ آن‌ها در E^3، همدیگر را در یک خط مشترک، قطع کنند؛ اما این اتفاق، فقط و فقط وقتی می‌افتد که بردارهای قائم وابسته‌ی خطی باشند. این مشاهدات نتایجی به بار خواهد آورد که شرایطی جبری برای هم‌خطی نقاط و هم‌رسی خطوط بیان می‌دارد. (اثبات این نتایج تقریباً همان اثبات‌هایی است که در فصل ۳ از آن استفاده شد).

قضیه ۱۷-۴. سه نقطه X، Y، Z هم‌خطند؛ اگر و فقط اگر:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

فرع. معادله‌ی خط PQ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

دوگان این عبارات روش‌هایی جبری، برای مشخص کردن هم‌رسی سه خط و همچنین یافتن معادله‌ی نقطه‌ای که توسط دو خط معین می‌شود، ارائه می‌دهد؛ ولیکن، در این‌جا مختصات خطوط به صورت سطری نوشته شده‌اند تا ستونی.

قضیه ۱۸-۴. سه خط u، v، w هم‌رسند؛ اگر و فقط اگر:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

فرع. معادله‌ی نقطه‌ی $p.q$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۱-۴. معادله‌ی نقطه‌ی تلاقی خطوط $p[-2,5,7]$ و $q[3,1,2]$ را بیابید.

با استفاده از فرع قضیه ۱۸-۴ می‌توان معادله‌ی نقطه را با صفر قرار دادن دترمینان زیر یافت:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

بسط این دترمینان معادله $3u_1+25u_2-17u_3=0$ را نتیجه می‌دهد، که این معادله‌ی یک نقطه است؛ توجه کنید که مختصات این نقطه $(3,25,-17)$ می‌باشد.

در این مدل، می‌توان نشان داد که تصویری‌های بین دسته‌ها از طریق ماتریس‌های 2×2 نمایش داده می‌شوند (فرم تحلیلی تبدیلات صفحه‌ی تصویری تام، که تصویری‌ها را القا می‌کنند؛ لزوماً ماتریس‌های 3×3 خواهند بود که بعداً گسترش داده خواهند شد). این نمایش ماتریسی تصویری‌ها، لزوم نسبت دادن زوج مرتب‌هایی از اعداد حقیقی را به جای سه‌تایی‌های مرتب به نقاط یا خطوط باعث می‌شود. این عمل، با انتخاب اعضای پایه برای یک دسته و استفاده از قضیه‌ی زیر صورت می‌گیرد:

قضیه ۱۹-۴. اگر $P(p_1,p_2,p_3)$ و $Q(q_1,q_2,q_3)$ دو نقطه‌ی متمایز باشند، هر نقطه‌ی R از خط PQ مختصات همگن (r_1,r_2,r_3) را دارد که $r_i=\lambda_1 p_i+\lambda_2 q_i$، $i=1,2,3$ و λ_1 و λ_2 حقیقی‌اند، ولی هردو صفر نیستند و برعکس، هر نقطه‌ی R با مختصات همگن فوق روی خط PQ است.

اثبات. (آ) فرض کنیم R مختصات همگن $(\lambda_1 p_1+\lambda_2 q_1$ و $\lambda_1 p_2+\lambda_2 q_2$ و $\lambda_1 p_3+\lambda_2 q_3)$ را دارا باشد. آن‌گاه

$$\begin{vmatrix} r_1 & p_1 & q_1 \\ r_2 & p_2 & q_2 \\ r_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 p_1+\lambda_2 q_1 & p_1 & q_1 \\ \lambda_1 p_2+\lambda_2 q_2 & p_2 & q_2 \\ \lambda_1 p_3+\lambda_2 q_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

بدین ترتیب، بنابر قضیه ۱۷-۴، نقاط P، Q و R هم‌خطند.

(ب) اگر R روی PQ باشد آن‌گاه $|PQR|=0$ و یا به بیان دیگر بردارهای نظیر این سه نقطه وابسته‌ی خطی‌اند. بدین ترتیب، اعداد حقیقی λ_1، λ_2، λ_3ای که همگی صفر نیستند، یافت می‌شوند که $\lambda_1 P+\lambda_2 Q+\lambda_3 R=0$ توجه کنید که $\lambda_3\neq 0$ چراکه P و Q نقاط متمایزی‌اند؛ بدین‌ترتیب، فرض کنید $\lambda_3=-1$ باشد، در نتیجه $\lambda_1 P+\lambda_2 Q=R$

تعریف ۱۶-۴. نقاط P و Q را که در قضیه ۱۹-۴ به‌کار رفت، نقاط پایه و λ_1 و λ_2 را پارامترهای همگن R نسبت به P و Q می‌نامند.

به وضوح پارامترهای همگن نقاط پایه‌ی P و Q به ترتیب $(1,0)$ و $(0,1)$ هستند. به طور کلی، پارامترهای همگن یک نقطه، بستگی به انتخاب نقاط پایه دارد. بدین سبب پارامترهای همگن (λ_1,λ_2) برای نقطه R نسبت به نقاط پایه منحصر به‌فرد نیست؛ چراکه مختصات همگن یک نقطه منحصر به فرد نیست؛ اما نسبت $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ منحصر به فرد است (تمرین ۱۹). این نسبت را پارامتر نقطه می‌نامند. توجه کنید که پارامتر Q در صورتی که پارامتر P، ∞ گرفته شده باشد، صفر است. بدین ترتیب، اعداد حقیقی می‌توانند در یک تناظر یک به یک با همه‌ی نقاط یک خط به جز یکی؛ یعنی، نقطه پایهٔ اول قرار گیرند.

با استفاده از پارامترهای همگن و قضیه ۱۹-۴ می‌توان نشان داد مدل تحلیلی ما در

بنداشت ۵ صادق است. (اگر دو مثلث پرسپکتیو از یک نقطه باشند، آن‌گاه از یک خط پرسپکتیوند.)

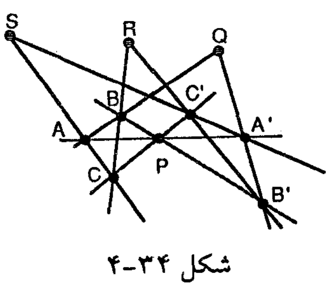
بررسی بنداشت ۵

دو مثلث را با رؤوس $A(a_1,a_2,a_3)$، $B(b_1,b_2,b_3)$، $C(c_1,c_2,c_3)$، $A'(a'_1,a'_2,a'_3)$، $B'(b'_1,b'_2,b'_3)$، $C'(c'_1,c'_2,c'_3)$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم این مثلث‌ها از نقطه‌ی $P(p_1,p_2,p_3)$ پرسپکتیو باشند. گیریم $Q=AB.A'B'$، $R=BC.B'C'$ و $S=AC.A'C'$ لازم است نشان دهیم Q، R و S هم‌خطند (شکل ۳۴-۴).

برای انجام این امر، از پارامترهای همگن کمک می‌گیریم. چون P روی خط AA'، BB' و CC' است نسبت به نقاط A و A'، B و B'، C و C'، به ترتیب دارای پارامترهای همگن (α_1,α_2)، (β_1,β_2)، (γ_1,γ_2) می‌باشد. بدین ترتیب، مختصات P توسط $i=1,2,3$ و $p_i=\alpha_1 a_i+\alpha_2 a'_i=\beta_1 b_i+\beta_2 b'_i=\gamma_1 c_i+\gamma_2 c'_i$ داده می‌شود. دوتای اول نتیجه می‌دهند: $\alpha_1 a_i-\beta_1 b_i=\beta_2 b'_i-\alpha_2 a'_i$ بنابراین:

$$(\alpha_1 a_1-\beta_1 b_1,\ \alpha_1 a_2-\beta_1 b_2,\ \alpha_1 a_3-\beta_1 b_3)=(\beta_2 b'_1-\alpha_2 a'_1,\ \beta_2 b'_2-\alpha_2 a'_2,\ \beta_2 b'_3-\alpha_2 a'_3)$$

اما سه‌تایی مرتب اول مختصات همگن نقطه‌ای روی خط AB را نتیجه می‌دهد؛ در صورتی که دومی مختصات همگن نقطه‌ای روی خط $A'B'$ را نتیجه می‌دهد چون دوسه‌تایی مساوی‌اند؛ هردو باید مختصات نقطه‌ی Q باشند از مجموعه‌ی اول استفاده خواهیم کرد. به همین طریق، می‌توان نشان داد که $R(\beta_1 b_1-\gamma_1 c_1\ ,\ \beta_1 b_2-\gamma_1 c_2\ ,\ \beta_1 b_3-\gamma_1 c_3)$ و



شکل ۳۴-۴

سرانجام $S(\alpha_1 a_1-\gamma_1 c_1\ ,\ \alpha_1 a_2-\gamma_1 c_2\ ,\ \alpha_1 a_3-\gamma_1 c_3)$. با استفاده از این مختصات همگن می‌توان نشان داد که $|QRS|=0$ و بنابراین سه نقطه درواقع هم‌خطند.

تمرین:

۱- نشان دهید تعبیر وقوع که در مدل تحلیلی به کار رفته است، مستقل از مختصات همگن خاص به کار رفته برای نقطه‌ی X و خط u است.

۲- بررسی کنید که مجموعه‌ی تعبیرهای اصطلاحات تعریف‌نشده‌ای که در این بخش داده شد در بنداشت‌های ۱ تا ۳ صدق می‌کنند.

۳- (آ) مختصات همگن نقاط آرمانی را توصیف کنید. (ب) مختصات همگن خط آرمانی را بیابید. (پ) به طور تحلیلی نشان دهید که نقاط آرمانیْ روی خط آرمانی واقعند.

۴- گیریم $l[a,b,c]$ یک خط باشد. مختصات همگن نقطه(ها)ی آرمانی روی l را بیابید. چند نقطه‌ی آرمانی روی l وجود دارد.

۵- (آ) معادله خط واصل نقاط $(0,2,1)$ و $(1,1,0)$ را بیابید. (ب) یک مجموعه‌ی مختصات برای این خط بیابید. (پ) نقطه‌ی تلاقی خطوط $2x_2+x_3=0$ و $x_1+x_2=0$ را بیابید. (ت) خط واصل نقاط $2u_2+u_3=0$ و $u_1+u_2=0$ را بیابید.

۶- گیریم $l[a,b,c]$ و $m[a,b,d]$ دو خط متمایز در صفحه‌ی تصویری باشند (یعنی $e\neq d$). (آ) نقطه‌ی تلاقی l و m را بیابید. (ب) آیا l و m در صفحه‌ی اقلیدسی نیز یکدیگر را قطع می‌کنند؟ چرا؟

۷- گیریم X، Y، Z نقاطی به ترتیب با مختصات همگن $(\circ,\circ,1)$، $(\circ,1,\circ)$ و $(1,\circ,\circ)$ باشند. (آ) نشان دهید که X، Y، Z هم‌خط نیستند. (ب) نشان دهید اگر $P(p_1,p_2,p_3)$ نقطه‌ای متمایز از Z باشد، آن‌گاه $P'=ZP.XY$ با مختصات همگن $(p_1,p_2,\circ)$ می‌باشد.

۸- نشان دهید که نقاط $P(2,3,-2)$، $Q(1,2,-4)$ و $R(\circ,1,-6)$ هم‌خطند و پارامترهای همگن R نسبت به P و Q را بیابید. پارامتر نظیر R چیست؟

۹- نشان دهید که پارامتر یک نقطه نسبت به یک زوج نقاط پایه‌ی مفروض، مستقل از مختصات همگن به‌کار برده شده در نقاط پایه است.

۱۰- سه‌تایی‌های مرتب شامل ۰ و ۱ و حساب به پیمانه‌ی ۲ را برای مختصاتی کردن صفحه‌ی تصویری متناهی با سه نقطه روی خط به‌کار برید (بخش ۳-۱ را ببینید).

۴-۸. فرم تحلیلی تصویری‌ها

با استفاده از مدل تحلیلی صفحه‌ی تصویری، یافتن یک ماتریس ۲×۲ برای نمایش تناظرهای یک به یک بین اعضای دو دسته معروف به تصویری‌ها ممکن می‌شود.

قضیه ۲۰-۴. یک تصویری بین اعضای دو دسته را می‌توان توسط معادله‌ی ماتریسی حقیقی زیر نشان داد.

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

که در آن $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=|A|\neq\circ$، $s\neq\circ$ و همچنین (λ_1,λ_2) و (λ'_1,λ'_2) پارامترهای همگن اعضای اولیه و اعضای نگار نسبت به اعضای پایه‌ای از پیش تعیین شده

می‌باشند.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که یک پرسپکتیوی از دسته‌ای از نقاط به دسته‌ای از خطوط دارای این فرم جبری است. گیریم P و Q نقاط پایه‌ی دسته نقاط و m و n خطوط پایه‌ی دسته خطوط باشند. همچنین، گیریم $X(\lambda_1,\lambda_2)$ نقطه‌ی دیگری روی PQ باشد؛ و فرض کنیم که به خط $x'(\lambda'_1,\lambda'_2)$ نظیر شود. با توجه به تعریف تصویری $x'.X=0$. با نوشتن این معادله برحسب مؤلفه‌ها معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$[\lambda'_1 m_1+\lambda'_2 n_1\,,\ \lambda'_1 m_2+\lambda'_2 n_2\,,\ \lambda'_1 m_3+\lambda'_2 n_3]$$
$$.(\lambda_1 p_1+\lambda_2 q_1\,,\ \lambda_1 p_2+\lambda_2 q_2\,,\ \lambda_1 p_3+\lambda_2 q_3)=0$$

یا

$$\lambda'_1\lambda_1(p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3)+\lambda'_1\lambda_2(q_1m_1+q_2m_2+q_3m_3)$$
$$+\lambda'_2\lambda_1(p_1n_1+p_2n_2+p_3n_3)+\lambda'_2\lambda_2(q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3)=0 \qquad (۴-۱)$$

برای ساده کردن معادله‌ی (۱-۴) برای هر مجموع در هر پرانتز از یک تعویض متغیر استفاده می‌کنیم:

$$a_{21}=\Sigma p_i m_i\ ,\ \ a_{22}=\Sigma q_i m_i\ ,\ \ a_{11}=-\Sigma p_i n_i\ ,\ \ a_{12}=-\Sigma q_i n_i$$

بنابراین:

$$a_{21}\lambda'_1\lambda_1+a_{22}\lambda'_1\lambda_2-a_{11}\lambda'_2\lambda_1-a_{12}\lambda'_2\lambda_2=0 \qquad (۴-۲)$$

یا:

$$\lambda'_1(a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2)=\lambda'_2(a_{11}\lambda_1-a_{12}\lambda_2)$$

و این نتیجه می‌دهد که:
$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}=\frac{a_{11}\lambda_1-a_{12}\lambda_2}{a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2}$$

که آن را می‌توان با نماد ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

که در آن $s\neq 0$. توجه کنید که چون تصویری یک نگاشت یک به یک است $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=|A|\neq 0$.

اگر معادله‌ی (۲-۴) را برای $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ حل کنیم، نمایش مشابهی برای یک پرسپکتیوی از یک دسته خطوط به یک دسته نقاط به دست خواهد آمد. چون هر تصویری حاصل‌ضربی متناهی از پرسپکتیوی‌هاست و هر پرسپکتیوی یا یک دسته نقاط را به یک دسته خطوط و یا یک دسته خطوط را به دسته نقاط می‌نگارد و یا حاصل‌ضرب این دو است؛ توجه به این نکته که حاصل‌ضربی از دو ماتریس بدین فرم باز ماتریسی به این فرم خواهد بود، کافی‌ست. □

با استفاده از نمایش ماتریسی داد شده در قضیه ۲۰-۴ بررسی بنداشت ۶ نسبتاً ساده است (تمرین ۳). اما بررسی این بنداشت به اندازه‌ی هر استفاده‌ی دیگر از معادله ماتریسی یک تصویری نیاز به توجه دقیق به s، اسکالر موجود در فرمول، دارد. چون پارامترهای همگن اعضای دسته‌ها منحصر به فرد نیستند، لازم است به s اجازه داد، مقادیر مختلفی حتی ضمن یک تصویری مفروض بپذیرد. مثال بعد شاهدی بر این مدعاست که طبیعت نامشخص این اسکالر، دست‌آویزی برای یافتن ماتریسی تصویری خاص خواهد بود.

مثال ۲-۴. ماتریس تصویریی را بیابید که نقاط روی p با پارامترهای همگن (۱,۳)، (۱,۲)، (۲,۳) را به نقاط روی p' به ترتیب با پارامترهای همگن (۴-,۱)، (۱,۰)، (۱,۱-) می‌نگارد.

بنابر قضیه ۲۰-۴ تصویری را می‌توان توسط یک ماتریسی ۲×۲ به نام A نمایش داد؛ به طوری که

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

محاسبات جبری برای یافتن ماتریسی این‌چنین را می‌توان در بعضی مواقع با درنظر گرفتن حالتی که پارامترهای همگن یک نقطه یا نگارش شامل صفر باشند، ساده نمود؛ در این مثال، ابتدا شرط نگاشته شدن زوج مرتب (۱,۲) به (۱,۰) را درنظر می‌گیریم. این موضوع به منظور یافتن و استفاده از تعویض متغیری حتی‌الامکان ساده و ممکن مفید

است. در محاسبات زیر از هردو تکنیک استفاده خواهیم کرد.

برای نگاشتن (۱,۲) به (۰,۱) باید داشته باشیم:

$$s_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned}0&=a+2b &\quad (4-3)\\ s_1&=c+2d &\quad (4-4)\end{aligned}$$

معادله‌ی (۳-۴) نتیجه می‌دهد $a=-2b$ بنابراین، می‌توانیم این تعویض متغیر را هنگامی که این ماتریس (۱,۳) را به (۴-,۱) می‌نگارد، به‌کار بندیم.

$$s_2\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2b & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned}s_2&=b &\quad (4-5)\\ -4s_2&=c+3d &\quad (4-6)\end{aligned}$$

معادله‌ی (۵-۴) به ما اجازه می‌دهد جای s_2 را در معادله‌ی (۶-۴) با b عوض کنیم؛ حاصل $c=-3d-4b$ خواهد بود. با استفاده از این تعویض متغیر نقطه‌ی سوم و نگارش معادلات زیر را نتیجه می‌دهند:

$$s_3\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2b & b\\-3d-4b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned}-s_3&=-b &\quad (4-7)\\ s_3&=-3d-8b &\quad (4-8)\end{aligned}$$

چون معادلات (۷-۴) و (۸-۴) شامل سه مجهول b، d و s_3 هستند، می‌توانیم برای یکی از مجهولات مقدار درنظر بگیریم. گیریم $s_3=1$. آنگاه معادله‌ی (۷-۴) نتیجه می‌دهد $b=1$ و معادله‌ی (۸-۴) نتیجه می‌دهد $d=-3$ با جایگزینی این مقادیر، در معادلات (۵-۴) و (۶-۴) نتیجه می‌شود $c=5$ و سرانجام از (۳-۴) نتیجه‌ی $a=-2$ را خواهیم گرفت؛ بنابراین ماتریس A عبارت است از:

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & -3\end{bmatrix}$$

توجه کنید که اسکالر s مقادیر مختلفی پذیرفت؛ یعنی $s_1=0$ در صورتی که $s_3=s_2=1$.

اثبات زیر از قضیه ۲۱-۴ (عکس قضیه ۲۰-۴) نیز شاهدی بر این مدعاست که ماتریسی که بدین طریق، مشخص می‌شود مشخصه‌ی یک تصویری است.

قضیه ۲۱-۴. هر نگاشتی که توسط رابطه‌ای به فرم زیر داده شود، تصویری است:

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\\lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix} \quad ab\text{-}bc\neq 0 \quad , \quad s\neq 0 \qquad (4-9)$$

اثبات. برای اثبات، فرض می‌کنیم که هر دو دسته، دسته‌هایی از نقاطند، با وجود این، استدلال‌های همانندی را می‌توان در دیگر حالت‌ها به‌کار گرفت. گیریم $P(۱,۰)$ و $Q(۰,۱)$ نقاط پایه برای دسته نقاط اول باشند. همچنین، گیریم R نقطه‌ای با پارامترهای $(۱,۱)$ نسبت به P و Q باشد. آنگاه تحت نگاشت داده شده توسط این رابطه‌ی ماتریسی $P'(a,c)$ و $Q'(b,d)$ و $R'(a+b,c+d)$ اعضای نظیر دسته‌ی دوم نسبت به پایه‌های از پیش تعیین شده می‌باشند. با استفاده از قضیه‌ی اساسی، یک تصویری منحصر به فرد T موجود است؛ به طوری که $T:PQR\to P'Q'R'$، اما بنابر قضیه ۲۰-۴ تصویری T معادله‌ی ماتریسی زیر را داراست:

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

پس کافی است نشان دهیم که این ماتریس مضرب اسکالری از ماتریس رابطه‌ی (۹-۴) است. برای ارزیابی a، b، c، d شرایط جبری لازم برای نگاشت P به P'، Q به Q' و R به R' را مشخص می‌کنیم. چون اسکالر s ممکن است نقطه به نقطه تغییر کند، لازم است s مجاز باشد؛ در هریک از حالات، مقادیر مختلفی بگیرد تا به سه معادله‌ی زیر برسیم:

$$s_1\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\qquad s_2\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$s_3\begin{bmatrix}a+b\\ c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

این معادلات ماتریسی نتیجه می‌دهند:

$$s_1a=a_{11}\qquad s_2b=a_{12}\qquad s_3(a+b)=a_{11}+a_{12}$$

$$s_1c=a_{21}\qquad s_2d=a_{22}\qquad s_3(c+d)=a_{21}+a_{22}$$

چون در اینجا شش معادله و هفت مجهول وجود دارد، یکی از مجهولات را می‌توان انتخاب کرد. گیریم $s_3=1$، آنگاه:

$$a+b=a_{11}+a_{12}=s_1a+s_2b$$

$$c+d=a_{21}+a_{22}=s_1c+s_2d$$

بنابراین:

$$a(1-s_1)+b(1-s_2)=0$$
$$c(1-s_1)+d(1-s_2)=0$$

و چون $ad-bc\neq 0$ جواب $s_1=1$ و $s_2=1$ منحصر به فرد است، بدین ترتیب $a=a_{11}$ و غیره، و معادلهٔ ماتریسی:

$$s\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

نمایش یک تصویری است. □

قضایای ۲۰-۴ و ۲۱-۴ به اتفاق بیانگر وجود یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی تصویری‌های بین دو دسته نسبت به اعضای پایه‌ی ازپیش تعیین شده و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی ماتریس‌های ۲×۲ با دترمینان ناصفر است که در آن $A\sim B$ اگر و فقط اگر برای ثابت ناصفری مانند s، $A=sB$.

بنابر بنداشت ۶ غیر از تصویری همانی بقیه‌ی تصویری‌ها دو یا کمتر از دو عضو ناوردا دارند. قضیه‌ی بعد نمایش‌های ماتریسی تصویری‌ها را به ترتیب با دو، یک و صفر عضو ناوردا مشخص خواهد کرد. در اثبات این قضیه یک نتیجه‌ی مهم درباره‌ی ویژه بردارها از جبر خطی استفاده شده است.

قضیه ۲۲-۴. **یک تصویری روی یک دسته، غیر از تصویری همانی با ماتریس**

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

دارای دو عضو ناوردای متمایز، یک عضو ناوردا، یا بدون عضو ناوردا است؛ برحسب این که $(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}a_{21}$ بزرگ‌تر از صفر، مساوی صفر و یا کوچک‌تر از صفر باشد.

اثبات. توجه کنید (λ_1,λ_2) یک عضو ناورداست اگر و فقط اگر:

$$s\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

یعنی، (λ_1,λ_2) یک بردار مشخصه یا ویژه بردار این ماتریس باشد؛ اما ویژه بردارها وجود دارند؛ اگر و فقط اگر معادله‌ی مشخصه $|A-sI|=0$ یک جواب ناصفر داشته باشد، محاسبه‌ی $|A-sI|=0$ عبارت $(a_{11}-s)(a_{22}-s)-a_{12}a_{21}=0$ را نتیجه می‌دهد. با بسط دادن و حل کردن نسبت به s نتیجه می‌شود:

$$s=\frac{(a_{22}+a_{11})\pm\sqrt{(a_{22}+a_{11})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}$$

اگر عبارت زیر رادیکال مثبت باشد دو جواب متمایز برای s و بنابراین دو ویژه بردار مستقل و از این رو دو نقطه‌ی ناوردای متمایز از تصویری موجود است. اگر این عبارت، صفر باشد دقیقاً یک جواب برای s و بنابراین دقیقاً یک نقطه‌ی ناوردا از تصویری وجود خواهد داشت (تمرین ۵). سرانجام اگر عبارت، منفی باشد هیچ جواب حقیقی برای s و بنابراین هیچ نقطه‌ی ناوردای از تصویری موجود نیست. چون عبارت زیر رادیکال به طور جبری هم‌ارز عبارت بیان شده در حکم قضیه است، نتیجه حاصل شده است. □

تعریف ۱۷-۴. یک تصویری روی یک دسته را هذلولوی، سهموی یا بیضوی خوانیم اگر تعداد نقاط ناوردای آن به‌ترتیب ۲ ، ۱ یا ۰ باشد.

این تعاریف، اشاره به ارتباطی بین تصویری‌های روی دسته‌ها و مخروطی‌هایی که به طور مشابه نام‌گذاری شده‌اند، دارد که در بخش ۱۲-۴ فرمول‌بندی خواهد شد.

تمرین:

۱- اگر تحت یک تصویری بین دسته‌ها، اعضای پایه دسته‌ی اول، P و Q به ترتیب به اعضای پایه‌ی دسته‌ی دوم، P' و Q' نظیر شوند؛ نشان دهید که ماتریس تصویری یک ماتریس قطری است.

۲- ماتریس تصویریی را بیابید که نقاط روی p با پارامترهای همگن (۰,۱)، (۱,۰) و (۱,۱) را بــه نـقاط روی p' بـه تـرتیب بـا پـارامـترهای هـمگن (۱,۲)، (۲,۳) و (۱,۰-) می‌نگارد.

۳- با استفاده از قضیه ۲۰-۴ تحقیق کنید که مدل تحلیلی ما در بنداشت ۶ صـدق می‌کند. [راهنمایی: شما می‌توانید دو عضو ناوردا به عنوان اعضای پایه انتخاب کنید.]

۴- پارامترهای همگن اعضای ناوردای تحت تصویری روی یک دسته را بیابید کـه ماتریس نمایشی به شکل زیر دارد:

$$\begin{bmatrix} ۶ & -۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵- نتیجه‌ای از جبر خطی می‌گوید نظیر هر جواب معادله‌ی $|A\text{-}sI|=0$ حداقل یک ویژه بردار موجود است. نشان دهید هرگاه A ماتریسی ۲×۲ باشد، دو ویژه بردار مستقل خطی نمی‌توانند با یک جواب s متناظر باشند.

تمرین‌های زیر به نوع خاصی از تصویری معروف به برگشت اشاره دارد. یک برگشت تبدیلی مانند T است که $T\neq I$ و $T^2=I$.

۶- ثابت کنید که یک تصویری روی یک دسته که یک زوج عناصر متمایز را تعویض کند، یک برگشت است. [راهنمایی: از دو نقطه که با هم تعویض می‌شوند به عنوان نقاط پایه استفاده کرده و ماتریس نمایش آن را بیابید.]

۷- نشان دهید که فرم کلی ماتریس یک برگشت به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{که} \quad a^2+bc\neq 0$$

۸- نشان دهید یک برگشت با ماتریسی که در تمرین ۷ داده شده، بیضوی است؛ اگر و فقط اگر: $a^{2}+bc<0$

۹- با استفاده از دو نقطه‌ای که با هم تعویض می‌شوند، به عنوان نقاط پایه، نشان دهید ماتریس یک برگشت بیضوی به صورتی است که در تمرین ۷ آمده است با $a=0$ و $bc<0$

۹-۴. نسبت‌های ناهم‌ساز

در بحث مدل تحلیلی صفحه‌ی تصویری، طبیعی است که بپرسیم آیا مفهوم فاصله‌ی اقلیدسی رابطه‌ای به موضوع دارد؛ لیکن همان‌گونه که قبلاً اشارهٔ کردیم، هندسه‌ی تصویری مطالعه‌ی ناورداهایی تحت تبدیلاتی است که می‌توان آن‌ها را تعمیم تبدیلات آفین درنظر گرفت و خود آن‌ها نیز تعمیم تشابهی‌ها هستند. در فصل ۳ دیدیم که تشابهی‌ها حافظ فواصل نیستند؛ بلکه نسبت‌هایی از فواصل را حفظ می‌کنند، و تبدیلات آفین فقط حافظ نسبت‌های تقسیم پاره‌خط می‌باشند. این امر باعث می‌شود که فکرکنیم مفهوم فاصله ربطی به هندسه‌ی تصویری ندارد، لذا جای تعجب است اگر بتوانیم نشان دهیم که تبدیلات تصویری دارای مقدار عددی موسوم به نسبت ناهم‌ساز است که می‌توان آن را نسبتی از نسبت‌های فواصل تعبیر کرد.

تعریف ۱۸-۴. اگر A، B، C و D چهار عضو متمایز از دسته‌ای با پارامترهای همگن (α_1,α_2)، (β_1,β_2)، (γ_1,γ_2) و (δ_1,δ_2) نسبت به نقاط پایه‌ی مفروضی باشند، آن‌گاه نسبت ناهم‌ساز چهار عضو، به ترتیب داده شده، عددی است که با رابطه‌ی زیر برحسب دترمینان‌ها تعریف می‌شود:

$$R(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}$$

اگر هیچ‌یک از چهار عضو A، B، C و D اولین عضو پایه نباشند، هریک از آن‌ها همچنین دارای پارامترهای همگنی به ترتیب برابر $(\alpha,1)$، $(\beta,1)$، $(\gamma,1)$ و $(\delta,1)$ هستند که α، β، γ و δ عبارتند از پارامترهای (ناهمگن) نظیر. توجه کنید که در این حالت:

$$R(A,B,C,D) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} \div \frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$$

و این بیان مجدد این تعریف است که آن را به عنوان نسبتی از نسبت‌های فواصل نمایان می‌سازد (تمرین ۳).

اگرچه نماد به کار رفته در تعریف قبل، برای دسته‌ی نقاط پیشنهاد شده بود، این تعریف، هم برای دسته‌ی نقاط و هم برای دسته‌ی خطوط به کار می‌رود. با استفاده از نمادهای مشابه در قضایای زیر می‌خواهیم مشخص کنیم که ترتیب اعضا چه اثری در نسبت ناهم‌ساز دارد و اثبات‌های این قضایا با کمک محاسبه جبری از تعریف، نتیجه می‌شود.

قضیه ۲۳-۴. اگر A، B، C و D چهارعضو متمایز یک دسته باشند، آن‌گاه نسبت ناهم‌ساز $R(A,B,C,D)$ بی‌تغییر خواهد ماند؛ هرگاه هردو زوج از اعضاء تعویض شوند، یعنی

$$R(A,B,C,D)=R(B,A,D,C)=R(C,D,A,B)=R(D,C,B,A)$$

قضیه ۲۴-۴. اگر نسبت ناهم‌ساز چهار عضو متمایز یک دسته که به ترتیب مفروضی نام‌گذاری شده‌اند r باشد، تعویض زوج اول با دوم نسبت ناهم‌ساز را به $\frac{1}{r}$ تبدیل می‌کند و تعویض زوج درونی یا زوج بیرونی نسبت ناهم‌ساز r را به $1-r$ تبدیل خواهد کرد.

فرع. ۲۴ جایگشت ممکن از چهار نقطه‌ی متمایز در یک دسته را می‌توان به ۶ مجموعه‌ی چهارتایی دسته‌بندی کرد که نسبت‌های ناهم‌ساز آن‌ها r، $\frac{1}{r}$، $1-r$، $\frac{(r-1)}{r}$، $r/(r-1)$ و $1/(1-r)$ باشد.

قضیه ۲۵-۴. نسبت ناهم‌ساز چهارعضو متمایز از یک دسته نمی‌تواند ۰، ۱ یا ∞ باشد.

چون تبدیلات تصویری، تصویری‌هایی از دسته‌ای به دسته‌ای دیگر را القا می‌کنند، توجیه ناوردایی نسبت ناهم‌ساز تحت تصویری‌ها ناوردایی آن‌ها را تحت تبدیلات تصویری ثابت خواهد کرد.

قضیه ۲۶-۴. نسبت ناهم‌ساز چهار عضو متمایز یک دسته، تحت یک تصویری ناورداست (بنابراین، مثلاً اگر $ABCD \wedge A'B'C'D'$، آن‌گاه: $(R(A,B,C,D)=R(A',B',C',D')$.

اثبات. فرض کنیم اعضای متمایز A، B، C، D از دسته‌ای تحت یک تصویری با ماتریس $A=[a_{ij}]$ به اعضای نظیر A'، B'، C' و D' از دسته‌ی دوم نگاشته شوند؛ آن‌گاه:

$$\begin{vmatrix}\gamma'_1 & \alpha'_1\\ \gamma'_2 & \alpha'_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}$$

که در آن A دارای پارامترهای همگن (α_1,α_2) بوده و A' دارای پارامترهای همگن (α'_1,α'_2) می‌باشد و غیره؛ که نسبت به اعضای پایه‌ی از پیش تعیین شده، محاسبه شده‌اند؛ بنابراین:

$$\begin{aligned}
R(A',B',C',D') &= \frac{\begin{vmatrix}\gamma'_1 & \alpha'_1\\ \gamma'_2 & \alpha'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma'_1 & \beta'_1\\ \gamma'_2 & \beta'_2\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix}\gamma'_1 & \alpha'_1\\ \gamma'_2 & \alpha'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma'_1 & \beta'_1\\ \gamma'_2 & \beta'_2\end{vmatrix}}\\
&= \frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}\\
&= \frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}\\
&= R(A,B,C,D)
\end{aligned}$$

□

این قضیه منجر به فرع مفیدی می‌شود که با آن می‌توان نسبت ناهم‌ساز چهار عضو را مستقیماً از روی مختصات همگن اعضا محاسبه کرد، که به نوبه‌ی خود ابتدا باید نسبت به نقاط پایه‌ی مفروض محاسبه شوند.

فرع. اگر A، B، C، D با مختصات همگن (a_1,a_2,a_3) و غیره، چهارعضو متمایز دسته‌ای باشند که شامل $Z(0,0,1)$ نیست؛ آن‌گاه:

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}} = R(A,B,C,D)$$

بدین ترتیب اگر $Z(0,0,1)$ عضوی از دسته نباشد، دو مختص اول اعضا را می‌توان به عنوان پارامترهای همگن به‌کار برد. اما اگر دسته شامل $Z(0,0,1)$ باشد، (یعنی، فرع از اعتبار ساقط شود) در آن صورت، نمی‌تواند به طور همزمان شاملِ هردو $X(1,0,0)$ و $Y(0,1,0)$ باشد و نتیجه‌های متناسبی را می‌توان برای حالتی که شامل X نباشد و یا شامل Y نباشد ثابت کرد (تمرین ۸). از یکی از این احکام مقایسه‌ای برای توجیه مثال ۳-۴ استفاده شده است.

مثال ۳-۴. $R(A,B,C,D)$ را بیابید به طوری که در آن $A(1,2,1)$، $B(3,6,1)$، $C(2,4,1)$ و $D(1,2,0)$ نقاطی روی $l[2,-1,0]$ هستند (توجه کنید که اگر این نقاط به عنوان نقاط صفحه‌ی اقلیدسی درنظر گرفته شوند، C نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB نام دارد).

چون به وضوح $Z(0,0,1)$ نقطه‌ای روی خط l است، از فرع قضیه ۲۶-۴ نمی‌توان به طور مستقیم استفاده کرد. اما چون $X(1,0,0)$ بر l واقع نیست، می‌توان نتیجه‌ی مناسبی را به کار گرفت؛ یعنی، می‌توانیم از دو مختص همگن آخر هر نقطه در دستور پارامترهای همگن برای محاسبه‌ی نسبت ناهم‌ساز استفاده کنیم؛ بدین ترتیب:

$$R(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} \div \frac{2}{2} = -1$$

به یاد آورید که قضیه‌ی اساسی هندسه‌ی تصویری به طور کلی بر این اشاره دارد که برای هر سه عضو از دسته‌ی اول و هر سه عضو از دسته‌ی دوم یک تصویری موجود است که سه عضو دسته‌ی اول را به سه عضو نظیر در دسته‌ی دوم می‌نگارد؛ ولی همان‌گونه که در قضیه ۲۸-۴ نشان داده خواهد شد، اگر چهار عضو از دسته‌ی اول نام‌گذاری شده و چهار عضو نظیر در دسته‌ی دوم با همان نسبت ناهم‌ساز داده شده باشند، یک تصویری که چهار عضو مجموعه‌ی اول را به چهار عضو مجموعه‌ی دوم بنگارد موجود خواهد بود. برای اثبات این نتیجه به خاصیت دیگری از نسبت ناهم‌ساز نیاز داریم که می‌توان آن را با استفاده با محاسبات جبری تأیید کرد.

قضیه ۲۷-۴. **اگر A، B، C سه عضو متمایز یک دسته و عدد حقیقی $r(r\neq 0,1)$ داده شده باشند؛ آن‌گاه نقطه‌ی منحصر به فردی مانند D موجود است که $R(A,B,C,D)=r$.**

قضیه ۲۸-۴. **اگر A، B، C، D چهار عضو متمایز یک دسته و A'، B'، C'، D' چهار عضو متمایز دسته‌ی دومی باشند که $R(A',B',C',D')=R(A,B,C,D)$ آن‌گاه یک تصویری موجود است که A، B، C، D را به ترتیب به A'، B'، C'، D' می‌نگارد.**

اثبات. با توجه به قضیه‌ی اساسی یک تصویری موجود است؛ به طوری که $ABC\wedge A'B'C'$ گیریم D^* نگار منحصر به فرد D تحت این تصویری باشد. بنابر قضیه ۲۶-۴، $R(A,B,C,D)=R(A',B',C',D^*)$؛ اما $R(A,B,C,D)=R(A',B',C',D')$ بنابراین: $D^*=D'$ □

اثبات قضیه ۲۸-۴ همراه با قضایای قبلی اشاره بر این دارد که تغییرات در نسبت ناهم‌ساز، از تغییرات مختلف ممکن در ترتیب چهار عضو نتیجه می‌شود و یادآور قضایایی مشابه در باب مجموعه‌های هم‌ساز است و امکان ارتباطی بین دو مفهوم را پیشنهاد می‌کند؛ این رابطه در قضیه‌ی نهایی این بخش فرموله شده است.

قضیه ۲۹-۴. اگر A، B، C، D چهار عضو متمایز یک دسته باشد، آنگاه $R(A,B,C,D)=-1$ اگر و فقط اگر $H(AB,CD)$.

اثبات. (آ) از اینکه $H(AB,CD)$ نتیجه می‌شود $H(AB,CD)$ و بنابر قضیه ۱۰-۴ یک تصویری موجود است به طوری که $ABCD \wedge ABDC$ بدین ترتیب با توجه به قضیه ۲۶-۴، $R(A,B,C,D)=R(A,B,D,C)$ اما بنابر قضیه ۲۴-۴ اگر $R(A,B,C,D)=r$ آنگاه $R(A,B,D,C)=\frac{1}{r}$ و در نتیجه $r=\frac{1}{r}$ یا $r^2=1$ و چون $r\neq 1$ آنگاه $r=-1$ (ب) فرض کنیم $R(A,B,C,D)=-1$ گیریم D' چهارمین عضو یک دسته به گونه‌ای باشد که $H(AB,CD')$ بدین ترتیب بنا بر قسمت قبل اثبات، $R(A,B,C,D')=-1$، و بنابر قضیه ۲۷-۴ نتیجه می‌شود که $D=D'$. □

تمرین:

۱- نقاط هم‌خط با پارامترهای همگن $A(1,1)$، $B(3,2)$، $C(1,0)$ و $D(-1,2)$ داده شده‌اند؛ $R(A,B,C,D)$ و $R(C,A,B,D)$ را بیابید.

۲- مختصات نقطه‌ی D را بیابید که با $A(3,1,2)$، $B(1,0,-1)$، $C(1,1,4)$ هم‌خط است و $R(A,B,C,D)=-\frac{2}{3}$

۳- در صفحه‌ی اقلیدسی، گیریم A، B، C، D نقاط متمایز روی یک محور اعداد به ترتیب با مختصات α، β، γ، σ باشند نشان دهید که نسبت پارامتری (ناهمگن) برای نسبت ناهم‌ساز $R(A,B,C,D)$ عبارت است از نسبت دو نسبت تقسیم پاره‌خط با این چهار نقطه (بخش ۹-۴ را ببینید).

۴- نشان دهید اگر C دارای پارامتر همگن $(1,1)$ و D دارای پارامتر همگن $(r,1)$

نسبت به A و B باشند، آن‌گاه $R(A,B,C,D)=r$

۵- قضیه ۲۴-۴ را ثابت کنید.

۶- قضیه ۲۵-۴ را ثابت کنید.

۷- فرع قضیه ۲۶-۴ را ثابت کنید. [راهنمایی: تمرین ۷ در بخش ۷-۴ را ببینید]

۸- حکم نظیر فرع قضیه ۲۶-۴ برای دسته‌ای که شامل $X(1,0,0)$ نباشد، چیست؟ برای دسته‌ای که شامل $Y(0,1,0)$ نباشد چطور؟

۹- قضیه ۲۷-۴ را ثابت کنید.

۱۰- ثابت کنید، اگر A، B، C، D، E پنج نقطه‌ی هم‌خط متمایز باشند، آن‌گاه:

$$R(A,B,C,D)\ .\ R(B,A,D,E)=R(A,B,C,E)$$

۱۰-۴. هم‌خطی‌ها

دو نوع مختلف تبدیل از صفحه‌ی تصویری موجود است؛ تبدیلاتی که این بخش به بررسی آن‌ها می‌پردازد، تبدیلاتی هستند که نقاط هم‌خط را به نقاط هم‌خط (و بدین ترتیب خطوط را به خطوط) می‌نگارند. این تبدیلات، هم‌خطی نامیده شده و تشکیل یک گروه می‌دهند. هندسه‌ی تصویری به مطالعه‌ی ناورداهای این گروه می‌پردازد. در بخش بعد، تبدیلاتی را درنظر می‌گیریم که نقاط هم‌خط را به خطوطِ هم‌رس می‌نگارند (و طبعاً خطوط را به نقاط). این تبدیلات همبستگی نامیده می‌شوند و نگاشتی بین اشکال دوگان به‌وجود آورده و معادله‌ای تحلیلی را برای مخروطی‌ها نتیجه خواهند داد.

اگر V را مجموعه‌ای از نقاط مدل تحلیلی صفحه‌ی تصویری همراه با $\{(0,0,0)\}$ درنظر بگیریم (یعنی، V مجموعه همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی R^3)، می‌توان نشان داد که V تحت جمع معمولی و ضرب اسکالر در R^3 یک فضای برداری است (تمرین ۱). هم‌خطی‌ها به عنوان تبدیلاتی از این فضای برداری تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۹-۴. یک تبدیل خطی یک به یک از V به روی خودش یک هم‌خطی است.

با این تعریف و کمی اصلاح در قضیه ۳-۳ نتیجه‌ای عاید می‌شود که صورت تحلیلی هم‌خطی‌ها را نتیجه خواهد داد (تمرین ۲).

قضیه ۳۰-۴. یک هم‌خطی را می‌توان با یک ماتریس ۳×۳ مانند A با $|A| \neq 0$ نمایش داد که درایه‌هایی حقیقی دارد. رابطه‌ی ماتریسی برای این هم‌خطی عبارت است از $sX' = AX$ که در آن $X \in R^3$ و $s \neq 0$.

باید به دو نکته در باب این قضیه توجه داشت: ابتدا معادلات هم‌خطی‌ها به مانند معادله تصویری‌ها، شامل اسکالرهای ناصفری هستند و این اسکالرها می‌توانند مقادیر مختلفی حتی در لابلای یک هم‌خطی به خود بگیرند. دوم، ماتریس یک هم‌خطی منحصر به فرد نیست (چراکه اگر A ماتریس یک هم‌خطی مفروض باشد، kA نیز برای هر اسکالر غیرصفر k ماتریس همان هم‌خطی است)، اما به هر هم‌خطی یک کلاس هم‌ارزی منحصر به فرد از ماتریس‌ها نظیر می‌شود (تمرین ۴).

برای نشان دادن این‌که کلمه‌ی "هم‌خطی" کلمه‌ی مناسبی است؛ باید بررسی کنیم که این نگاشت‌ها به همان صورتی که قبلاً ادعا شده بود هم‌خطی بودن را حفظ می‌کنند؛ سپس می‌توانیم نتیجه بگیریم که هم‌خطی‌ها نگاشت‌هایی از خطوط به خطوط القا می‌کنند و بنابراین بد نیست به دنبال معادله‌ای باشیم که مستقیماً نگار یک خط را بدهد.

قضیه ۳۱-۴. یک هم‌خطی نقاط هم‌خط را به نقاط هم‌خط می‌نگارد. نگار یک خط

$u[u_1, u_2, u_3]$ تحت یک هم‌خطی با ماتریس A توسط معادله‌ی $ku'=uA^{-1}$ داده می‌شود که $k\neq 0$

اثبات. فرض کنیم P نقطه‌ای روی QR باشد. کافی‌ست نشان دهیم P' نگار P تحت هم‌خطی موردنظر، با نگارهای Q و R یعنی Q' و R' هم‌خطند. چون P روی QR است بنابر قضیه ۱۹-۴ دو عدد حقیقی λ_1 و λ_2 موجوداند؛ به طوری که $P=\lambda_1 Q+\lambda_2 R$ پس برای یک اسکالر غیرصفر s داریم:

$$P' = (\frac{\lambda_1}{s})AQ + (\frac{\lambda_2}{s})AR = \lambda_1 Q'+\lambda_2 R' \quad \text{یا} \quad sP'=AP=A(\lambda_1 Q+\lambda_2 R)$$

لذا مجدداً بنابر قضیه ۱۹-۴، P' روی خط $Q'P'$ واقع است.

برای یافتن معادله‌ی نگار یک خط گیریم هم‌خطی‌ای با ماتریس A خطی با مختصات u و معادله‌ی $uX=0$ را به خطی با مختصات u' و معادله‌ی $u'X'=0$ بنگارد که در آن برای یک اسکالر غیرصفر s، $sX'=AX$. تعویض X' در معادله‌ی نگار خط با $(\frac{1}{s})AX$ به $(\frac{1}{s})u'AX=0$ می‌انجامد. بدین ترتیب نقطه‌ی X' روی خط $u'X'=0$ است؛ اگر و فقط اگر X روی خط $(u'A)X=0$ باشد، اما X' روی $u'X'=0$ می‌باشد، اگر و فقط اگر X روی $uX=0$ باشد. چون هم‌خطی‌ها نگاشت‌های یک به یکی هستند، $u'AX=0$ و $uX=0$ باید یک خط باشند؛ بدین ترتیب: $u=ku'A$ یا $ku'=uA^{-1}$. □

در نتیجه همان هم‌خطی که نقاط را براساس معادله‌ی $sX'=AX$ می‌نگارد، خطوط را براساس معادله‌ی $ku'=uA^{-1}$ خواهد نگاشت. بدین ترتیب، دو معادله برای توصیف نگاشت هر هم‌خطی خاص موجود است: یکی معادله‌ی نقطه‌ای که نگاره‌های نقاط را خواهد داد و دیگری معادله‌ی خطی که نگاره‌های خطوط را خواهد داد. ماتریس A که در معادله‌ی نقطه‌ای به کار گرفته شده، ماتریس هم‌خطی نامیده می‌شود.

چون هر هم‌خطی نقاط هم‌خط را به نقاط هم‌خط می‌نگارد از دوگان گرفتن پیش‌بینی می‌کنیم که خطوط هم‌رس به خطوط هم‌رس نگاشته خواهند شد اثبات این فرع با معادله‌ی خطی یک هم‌خطی و دقیقاً همگام با اثبات قسمت اول قضیه ۳۱-۴ پیش خواهد رفت.

فرع. تحت یک هم‌خطی، خطوط هم‌رس به خطوط هم‌رس نگاشته می‌شوند.

مجموعه‌ی هم‌خطی‌ها تحت عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهند که این ادعا را می‌توان با استفاده از تعریف گروه بررسی کرد (تمرین ۵).

قضیه ۳۲-۴. مجموعه‌ی هم‌خطی‌ها تشکیل گروهی تحت ترکیب می‌دهند.

همان‌طور که قبلاً چندین بار تذکر داده شد، کلاین هندسه‌ی تصویری را مطالعه خواص V که تحت گروه هم‌خطی‌ها ناوردا هستند تعریف کرد. قضیه زیر نشان می‌دهد که خواص نسبت ناهم‌ساز و رابطه‌ی هم‌ساز که قبلاً ناوردایی آن تحت تصویری‌ها نشان داده شده است تحت هم‌خطی‌ها نیز ناوردا هستند.

قضیه ۳۳-۴. هر هم‌خطی از یک صفحه تصویری، یک تصویری بین اعضای دسته‌های نظیر القا می‌کند.

اثبات. گیریم P ، Q ، R سه نقطه‌ی هم‌خط باشند؛ بنابراین $R=\lambda_1P+\lambda_2Q$. همچنین گیریم P' ، Q' و R' نگار آن‌ها تحت هم‌خطی با ماتریس A باشند؛ در این صورت: P' ، Q' و R' نیز هم‌خط بوده و بنابراین $R'=\mu_1P'+\mu_2Q'$ با اعمال این هم‌خطی روی P ، Q و R نتیجه می‌شود که: $s_1P'=AP$ ، $s_2Q'=AQ$ ، $s_3R'=AR$ که در آن هر $s_i\neq 0$. چون $R=\lambda_1P+\lambda_2Q$ آخرین معادله نتیجه می‌دهد:

$$s_3R'=A(\lambda_1P+\lambda_2Q)=\lambda_1AP+\lambda_2AQ=s_1\lambda_1P'+s_2\lambda_2Q'$$

بنابراین، هنگامی که P و Q اعضای پایه‌ی یک دسته و P' و Q' اعضای پایه‌ی دسته دیگر باشند، عنصر R از دسته‌ی اول پارامتر همگن (λ_1 , λ_2) را دارا خواهد بود؛ درحالی که نگار آن، R'، پارامتر همگن (μ_1 , μ_2) را دارد که در آن:

$$s_3\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{vmatrix}\neq 0$$

بدین ترتیب، بنابر قضیه ۲۱-۴ نگاشت القا شده بین دسته نقاط، یک تصویری است. اثبات برای دسته خطوط با دوگان‌گیری نتیجه می‌شود.

فرع. **نسبت‌های ناهم‌ساز و مجموعه‌های هم‌ساز تحت هم‌خطی‌ها ناوردا هستند.**

ارتباطی بین هم‌خطی‌های صفحه‌ی تصویری و تصویری‌هایی از دسته‌ها ثابت شد. حال، می‌خواهیم خواص عمومی هم‌خطی‌ها را بررسی کنیم. در حالی که تصویری‌ها توسط سه زوج از اعضای نظیر به طور منحصر به فردی مشخص می‌شوند؛ قضیه‌ی بعد نشانگر این است که هم‌خطی‌ها توسط چهار زوج از اعضای نظیر به طور منحصر به فردی مشخص خواهند شد. اثبات این قضیه شاهدی بر تکنیک مفیدی جهت یافتن ماتریس یک هم‌خطی است.

قضیه ۳۴-۴. **هم‌خطی منحصر به فردی موجود است که هر چهار نقطه‌ای را که هیچ سه تای آن هم‌خط نیستند به هر چهار نقطه‌ای که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند، می‌نگارد.**

اثبات. روش اثبات، بدین صورت است که ابتدا به روش جبری ماتریس A برای یک هم‌خطی را پیدا می‌کنیم که چهار نقطه دل‌خواه P، Q، R، S (که هیچ سه‌تای آن‌ها هم‌خط نیستند) را به چهار نقطه دل‌خواه P'، Q'، R'، S' (که هیچ سه‌تای آن‌ها هم‌خط نیستند) می‌نگارد و توجه بر این نکته است، که این ماتریس به پیمانه رابطه‌ی هم‌ارزی به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود. این فرایند را می‌توان بدین نحو ساده کرد که: ابتدا ماتریس B را می‌یابیم به طوری که $s_1P'=BX$، $s_2Q'=BY$، $s_3R'=BZ$ و $s_4S'=BU$ که در آن $X(1,0,0)$، $Y(0,1,0)$، $Z(0,0,1)$ و $U(1,1,1)$ می‌باشد و سپس ماتریس C را می‌یابیم، به طوری که $s_5P=CX$، $s_6Q=CY$، $s_7R=CZ$، $s_8S=CU$ و سرانجام ماتریس A با رابطه $A=BC^{-1}$ داده می‌شود. □

فرع. یک هم‌خطی در صفحه‌ی تصویری با چهار نقطه‌ی ناوردا، که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند، تبدیل همانی است.

به وضوح یک هم‌خطی توسط چهار خط (که هیچ سه‌تای آن هم‌رس نیست) و چهار خط نگار (که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیست) به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود و ماتریس A^{-1}ی را که در معادله‌ی خطی هم‌خطی استفاده شد را می‌توان با فرایندی مشابه با فرایندی که در اثبات قضیه ۳۴-۴ آمد، یافت. این فرایند "ساده شده‌ی" برای یافتن ماتریس هم‌خطی‌ای که مجموعه‌ی مفروض چهار نقطه‌ای (که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیست) را به یک مجموعه‌ی مفروض چهار نقطه‌ی نگار (که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیست) می‌نگارد؛ در مثال ۴-۴ توجیه شده است.

مثال ۴-۴. ماتریس هم‌خطی‌ای که $P(1,-3,2)$، $Q(2,-1,3)$، $R(0,3,-2)$ و $S(-1,3,0)$ را به ترتیب به $P'(3,7,7)$، $Q'(0,0,1)$، $R'(5,7,6)$ و $S'(1,9,7)$ بنگارد، بیابید.

برای بررسی این‌که هیچ سه نقطه از نقاط P، Q، R و S هم‌خط نیستند، بررسی غیرصفر بودن همه دترمینان‌های $|PQR|$ ، $|PQS|$ ، $|PRS|$ و $|QRS|$ لازم است. محاسبات مشابهی هم برای نشان دادن اینکه هیچ سه‌تای نقطه از نقاط P'، Q'، R' و S' هم‌خط نیستند، لازم خواهد بود. به پیروی از فرایندی که در اثبات قضیه ۳۴-۴ طرحی شد، ابتدا با به تفصیل نوشتن معادلات ماتریسی برای هر معادله‌ی $s_1P'=BX$، $s_2Q'=BY$، $s_3R'=BZ$ و $s_4S'=BU$، ماتریس B را پیدا می‌کنیم. اولین معادله چنین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}= s_1\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} b_{11}&=3s_1 \\ b_{21}&=7s_1 \\ b_{31}&=7s_1 \end{aligned} \qquad (4-10)$$

قبل از نوشتن صورت ماتریسی معادله‌ی دوم، ستون اول را با مقادیر به‌دست آمده تعویض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3s_1 & b_{12} & b_{13} \\ 7s_1 & b_{22} & b_{23} \\ 7s_1 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}= s_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} b_{12}&=0 \\ b_{22}&=0 \\ b_{32}&=s_2 \end{aligned} \qquad (4-11)$$

با جایگزینی ستون دوم معادله‌ی سوم به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۳s_۱ & ۰ & b_{۱۳} \\ ۷s_۱ & ۰ & b_{۲۳} \\ ۷s_۱ & s_۲ & b_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = s_۳ \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \\ ۶ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} b_{۱۳}= ۵s_۳ \\ b_{۲۳}= ۷s_۳ \\ b_{۳۳}= ۶s_۳ \end{matrix} \qquad (۴-۱۲)$$

سرانجام، معادله‌ی چهارم چنین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۳s_۱ & ۰ & ۵s_۳ \\ ۷s_۱ & ۰ & ۷s_۳ \\ ۷s_۱ & s_۲ & ۶s_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = s_۴ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \\ ۷ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} ۳s_۱ & & + ۵s_۳ = s_۴ \\ ۷s_۱ & & + ۷s_۳ = ۹s_۴ \\ ۷s_۱ & + s_۲ & + ۶s_۳ = ۷s_۴ \end{matrix} \qquad (۴-۱۳)$$

با استفاده از عملیات تحویل سطری برای ماتریس ضرایب این معادلات، نتیجه می‌شود: $s_۱=-۱۹$، $s_۲=۲۴$، $s_۳=۱۰$ و $s_۴=-۷$ بنابراین، ماترپس B را می‌توان با جایگزینی این مقادیر در ماتریس شماره‌ی (۱۳-۴) حاصل کرد:

$$B = \begin{bmatrix} -۵۷ & ۰ & ۵۰ \\ -۱۳۳ & ۰ & ۷۰ \\ -۱۳۳ & ۲۴ & ۶۰ \end{bmatrix}$$

با پیدا کردن ماتریس B به دنبال یافتن ماتریس C هستیم که با چهار معادله‌ی $s_۵P=CX$ ، $s_۶Q=CY$ ، $s_۷R=CZ$ ، $s_۸S=CU$ مشخص می‌شود. این محاسبات را می‌توان به طور چشمگیری با توجه به این که نقاط X ، Y و Z با ماتریس C نگاشته می‌شوند با جایگزینی ستون‌های اول، دوم و سوم در ماتریس نظیر با (۱۳-۴) به ترتیب با $s_۵P$ ، $s_۶Q$ و $s_۷R$ ساده کرد:

$$\begin{bmatrix} ۱s_۵ & ۲s_۶ & ۰ \\ -۳s_۵ & -۱s_۶ & ۳s_۷ \\ ۲s_۵ & ۳s_۶ & -۲s_۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = s_۸ \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} ۱s_۵ + ۲s_۶ & = -s_۸ \\ -۳s_۵ - s_۶ + ۳s_۷ & = ۳s_۸ \\ ۲s_۵ + ۳s_۶ - ۲s_۷ & = ۰ \end{matrix} \qquad (۴-۱۴)$$

این معادلات، نتیجه می‌دهند $s_۵=۱۹$، $s_۶=-۶$، $s_۷=۱۰$، $s_۸=-۷$ بنابراین، ماتریس C به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} ۱۹ & -۱۲ & ۰ \\ -۵۷ & ۶ & ۳۰ \\ ۳۸ & -۱۸ & -۲۰ \end{bmatrix}$$

سرانجام محاسبه‌ی ماتریس حاصل‌ضرب $BC^{-۱}$ ماتریس هم‌خطی A را حاصل می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون هم‌خطی‌ها حافظ هم‌خط بودن، هم‌رس بودن و نسبت ناهم‌ساز هستند، قضیه ۳۴-۴ به ما امکان ساده کردن اثبات‌های تحلیلی‌ای را می‌دهد که با این خواص سروکار دارند، با انتخاب هر چهار نقطه که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند، به صورت نقاط X، Y، Z و U که همانند قبل این نقاط را با مختصات $X(۱,۰,۰)$، $Y(۰,۱,۰)$، $Z(۰,۰,۱)$ و $U(۱,۱,۱)$ فرض می‌کنیم، می‌دهد. این تکنیک در اثبات زیر به کار رفته است که نشانگر این است که مدل تحلیلی ما در بنداشت ۴ صادق می‌باشد.

بررسی بنداشت ۴

گیریم $X(۱,۰,۰)$، $Y(۰,۱,۰)$، $Z(۰,۰,۱)$ و $U(۱,۱,۱)$ چهار نقطه‌ی یک چهارگوشه باشد. با محاسبه‌ی مستقیم می‌توان نشان داد که نقاط قطری این چهارگوشه عبارتند از: $XY.UZ=A(۱,۱,۰)$، $XZ.UY=B(۱,۰,۱)$ و $UX.ZY=C(۰,۱,۱)$ به سرعت می‌توان نشان داد $|ABC| \neq ۰$، بنابراین، نقاط قطری چهارگوشه هم‌خط نیستند (تمرین ۷).

همچنان که قضیه ۲۲-۴ بیان می‌کند، تصویری‌ها لزومی ندارد که دارای نقطه‌ی ناوردایی باشند. از طرف دیگر هم‌خطی‌ها همواره حداقل یک نقطه و یک خط ناوردا دارند. اثبات این مطلب چیزی جز کاربردی مستقیم از نظریه ویژه بردارها در جبر خطی نیست.

قضیه ۳۵-۴. یک هم‌خطی حداقل یک نقطه‌ی ناوردا و یک خط ناوردا دارد.

اثبات. برای نشان دادن این‌که هم‌خطی‌ای با ماتریس A حداقل یک نقطه‌ی ناوردا دارد. باید توجه داشت که نقطه‌ی ناوردای X موجود است؛ اگر و فقط اگر اسکالر غیرصفری مانند s موجود باشد، به طوری که $sX=AX$. اما $sX=AX$ اگر و فقط اگر

$sIX\text{-}AX=(sI\text{-}A)X=0$ که در آن I ماتریس همانی است. معادله‌ی آخر دارای جواب غیربدیهی X است؛ اگر و فقط اگر $|sI\text{-}A|=0$؛ اما چون A یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های حقیقی است $|sI\text{-}A|$ یک چندجمله‌ای درجه سه نسبت به s است و بنابراین، حداقل یک ریشه حقیقی برای s دارد. (توجه کنید این ریشه نمی‌تواند صفر باشد) برای نشان دادن این‌که هم‌خطی‌ای با ماتریس A حداقل یک خط ناوردا دارد همین فرایند با شروع از معادله $ku'=uA^{-1}$ به کار گرفته می‌شود. □

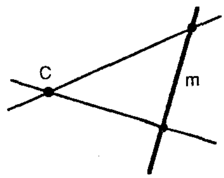
خط ناوردای یک هم‌خطی لزوماً ناوردای نقطه‌ای نیست؛ یعنی، اگرچه نقاط روی خط ناوردا تحت هم‌خطی باید روی همان خط باقی بمانند؛ ولیکن، خود نقاط لزوماً ثابت نخواهند ماند.

تعریف ۲۰-۴. هم‌خطی‌ای را که حداقل یک خط ناوردای نقطه‌ای دارد پرسپکتیو هم‌خطی نامند. در آن صورت خط ناوردای نقطه‌ای، محور نامیده می‌شود.

بنابر قضیه ۳۴-۴ پرسپکتیو هم‌خطی غیرهمانی حداکثر دارای یک نقطه‌ی ناوردای ناواقع بر محور است. قضیه‌ی زیر توجیهی بر وجود همیشگی یک نقطه ناوردای برای یک پرسپکتیو هم‌خطی موجود است.

قضیه ۳۶-۴. هر پرسپکتیو هم‌خطی یک نقطه ناوردای خطوار دارد (این نقطه مرکز نامیده می‌شود).

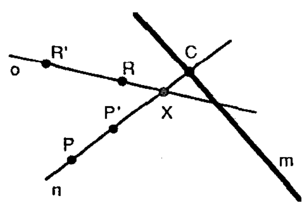
اثبات. گیریم m محور پرسپکتیو هم‌خطی باشد.
حالت ۱. یک نقطه ناوردای ناواقع بر m موجود است. گیریم این نقطه ناوردا C باشد. آن‌گاه هر خط مار بر C، m را در نقطه ناوردای دومی قطع می‌کند (شکل ۳۵-۴). بدین ترتیب هر خط مار بر C دارای دو نقطه ناوردا بوده و از این رو ناورداست. و این نتیجه می‌دهد که C ناوردای خطی است.



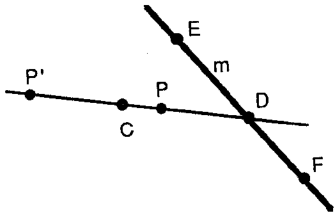
شکل ۳۵-۴

حالت ۲. تنها نقاط پایا عبارتند از نقاط روی m گیریم P نقطه‌ای ناواقع بر m باشد. خط $n=PP'$ را که P' نگار P تحت پرسپکتیو هم‌خطی می‌باشد، را درنظر می‌گیریم. گیریم $C=n.m$. در این صورت: $n=CP=CP'$ ناورداست. اگر R نقطه‌ی دیگری ناواقع بر m یا n باشد، در این‌جا به طریقی مشابه خط ناوردای $o=RR'$ موجود خواهد بود. گیریم $X=o.n$ (شکل ۳۶-۴)؛ سپس، چون o و n هردو ناوردا هستند، نتیجه می‌شود که X ناوردا بوده و بنابراین بر m واقع است. اما $n.m=C$ و بدین ترتیب $X=C$ بنابراین، هر نقطه‌ی ناواقع بر m روی خط ناوردایی مار بر C واقع بوده و یا به عبارت دیگر، هر خط مار بر C ناورداست. □

اثبات قضیه ۳۶-۴ نشان داد که یک پرسپکتیو هم‌خطی با مرکز C و محور m نقطه‌ی مفروض P $(P\neq C)$ ناواقع بر m را به نقطه‌ی P' روی PC می‌نگارد. اما بنابراین شرط، نگار P می‌تواند دل‌خواه باشد؛ ولیکن، پس از نام‌گذاری نگار P، و نگار هر نقطه تحت یک پرسپکتیو هم‌خطی با محور و مرکز مفروض کاملاً مشخص می‌شود.



شکل ۳۶-۴

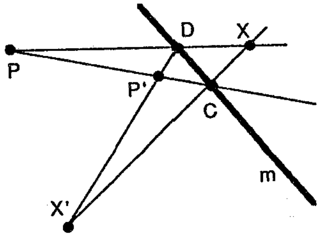


شکل ۳۷-۴

قضیه ۳۷-۴. یک پرسپکتیو هم‌خطی منحصر به فرد با محور m و مرکز C موجود است؛ به طوری که نقطه‌ی مفروض P را (که $P\neq C$ و P ناواقع بر m است) به نقطه‌ی مفروض P' روی PC می‌نگارد.

اثبات. حالت ۱. C بر m واقع نیست؛ گیریم $PC.m=D$ و همچنین E و F دو نقطه‌ی اضافی روی m باشند (شکل ۳۷-۴). سپس بنابر قضیه ۳۴-۴ یک هم‌خطی منحصر به فرد موجود است که P را به P'، C را به C'، E را به E' و F را به F' می‌نگارد. به وضوح، این هم‌خطی m را ناوردا نگاه‌می‌دارد؛ چراکه E و F را ناوردا نگاه داشته است. توجه کنید که $PC=PC'$ دومین خط ناورداست. بدین ترتیب: $D=PC.m$ نقطه‌ی ناوردای سومی روی m می‌باشد، و نتیجه این خواهد بود که تصویری القاشده روی m توسط این هم‌خطی همانی است (قضیه ۸-۴)، و بنابراین m ناوردای نقطه‌ای است. بدین ترتیب، هم‌خطی یک پرسپکتیو هم‌خطی با محور m بوده و همچنان‌که در اثبات قضیه ۳۶-۴ دیدیم، مرکز آن را می‌توان با C نشان داد.

حالت ۲. C روی m است. گیریم $PX.m=D$ که در آن X نقطه‌ای غیرواقع بر PC و غیرواقع بر m (شکل ۳۸-۴) در این صورت اگر پرسپکتیو هم‌خطی مطلوبی موجود باشد، می‌بایست X را به $X'=CX.P'D$ بنگارد (تمرین ۱۰). اما بنابر قضیه ۳۴-۴ هم‌خطی منحصر به فردی موجود است که P را به P'، X را به X'، C را به C' و D را به D' می‌نگارد، همانند قبل، m تحت هم‌خطی ناورداست چراکه C و D ناوردا هستند؛ ولیکن، ناوردای نقطه‌ای m و ناوردای خطوار C می‌بایست نشان داده می‌شد. بنابر فرع قضیه



شکل ۴-۳۸

۴-۳۶، کافی‌ست نشان دهیم C ناوردای خطوار است و سپس با توجه به این‌که m دست کم دو نقطه‌ی ناوردا دارد باید محور باشد.

برای نشان دادن این‌که C ناوردای خطوار است، توجه کنید که $CP=CP'$ ، m و $CX=CX'$ سه خط ناوردای مار بر C هستند؛ بنابراین، با توجه به دوگان استدلال حالت ۱، C ناوردای خطوار و نتیجه حاصل است. □

این هم‌خطی‌ها را پرسپکتیو هم‌خطی خوانند به این دلیل که مثلث‌ها را به مثلث‌های پرسپکتیو می‌نگارند. اثبات این گزاره نتیجه‌ی مستقیمی از تعاریف مرکز و محور یک پرسپکتیو هم‌خطی و همچنین تعریف مثلث‌های پرسپکتیو است.

قضیه ۴-۳۸. $\Delta P'Q'R'$ **نگار** ΔPQR **تحت یک پرسپکتیو هم‌خطی با مرکز** C **و محور** m **است اگر و فقط اگر این مثلث‌ها از نقطه‌ی** C **و از خط** m **پرسپکتیو باشند.**

اثبات. (آ) برای قسمت اول اثبات تمرین ۱۱ را ببینید.

(ب) حال، فرض کنیم ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ از C و m پرسپکتیو باشند. چون ΔPQR یک مثلث است، سه نقطه‌ی R ، Q و P هم‌خط نیستند. بدین‌ترتیب، حداقل یک نقطه، مثل P، بر m واقع نیست. علاوه بر این، چون ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$ از C پرسپکتیوند، P' روی PC است. بنابراین، با توجه به قضیه ۴-۳۷ پرسپکتیو هم‌خطی‌ای مانند: T با مرکز C و محور m موجود است که P را به P' می‌نگارد؛ حال، باید نشان داد $T(Q)=Q'$ و

$T(R)=R'$.

بنابر اثبات قضیه ۴-۳۷، $T(Q)=P'D.QC$ که در آن $D=PQ.m$. اما $PQ.m=P'Q'.m$ چراکه مثلث‌ها پرسپکتیو از m هستند و بنابراین $P'D=P'Q'$. بدین ترتیب $T(Q)=P'Q'.QC$. اما Q' روی QC است؛ چراکه مثلث‌ها پرسپکتیو از C بوده و بنابراین $T(Q)=Q'$. به طریق مشابه $T(R)=R'$. □

همان‌گونه که اثبات قضیه ۴-۳۷ نشان می‌دهد، بین پرسپکتیو هم‌خطی‌هایی که مرکزشان روی محورشان قرار دارد با آن‌هایی که مرکزشان بر محورشان واقع نیست، تفاوتی وجود دارد.

تعریف ۴-۲۱. یک پرسپکتیو هم‌خطی غیرهمانی را ایلیشن[1] نامند هرگاه مرکز آن بر محورش واقع بوده و آن را یک همولوژی خوانند؛ هرگاه مرکزش بر محورش واقع نباشد.

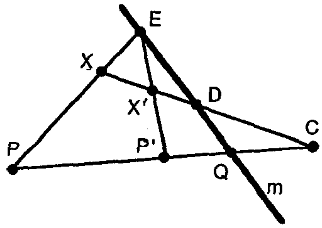
همولوژی‌ها خواص شایان توجه دیگری نیز دارند.

قضیه ۴-۳۹. تحت همولوژیی به مرکز C و محور m هر نقطه‌ی ناواقع بر m مانند P $(P\neq C)$ نگاری مانند P' دارد؛ به‌گونه‌ای‌که C، P و P' هم‌خط هستند، واگر $m.CP=Q$، آن‌گاه $R(C,Q,P,P')$ برای هر P ثابت است.

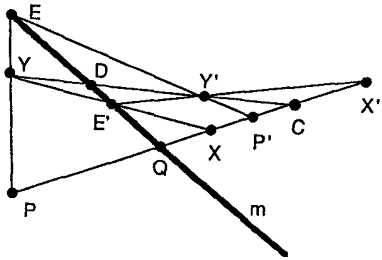
اثبات. این حقیقت را که C، P و P' برای همه‌ی پرسپکتیو هم‌خطی‌ها هم‌خط هستند قبلاً متذکر شده بودیم.

حالت ۱. X نقطه‌ای ناواقع بر CP یا غیرواقع بر m باشد. گیریم X' نگار آن تحت همولوژی و همچنین گیریم: $D=CD.m$، $E=PX.m$ بنابراین $X'=XC.EP'$ (شکل

1. *elation*



شکل ۳۹-۴



شکل ۴۰-۴

۳۹-۴). آن‌گاه: $CQPP' \overset{E}{\wedge} CDXX'$ و بدین ترتیب، با توجه به قضیه ۲۶-۴،
$R(C,Q,P,P')=R(C,D,X,X')$

حالت ۲. X روی CP است. آن‌گاه فرض کنیم Y نقطه‌ای ناواقع بر CP باشد (شکل ۴۰-۴). بنابر حالت ۱، $R(C,Q,P,P')=R(C,D,Y,Y')$ و Y را می‌توان در حالت ۱ با P جای‌گزین کرده نتیجه‌ای مشابه برای X به دست آورد. □

اگر این نسبت ناهم‌ساز ثابت برابر ۱- باشد همولوژی را همولوژی هم‌ساز خوانیم.

تمرین:

۱- ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط مدل تحلیلی (یعنی، کلاس‌های همارزی ناصفر از سه‌تایی‌های R^3) همراه با کلاس هم‌ارزی $\{(0,0,0)\}$ تحت جمع و ضرب اسکالر

معمولی R^3 تشکیل یک فضای برداری می‌دهند.

۲- قضیه ۳۰-۴ را ثابت کنید.

۳- هم‌خطی‌ای با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(آ) معادله‌ی نقطه‌ای را برای این هم‌خطی به تفصیل نوشته و P' و Q' به ترتیب نگارهای $P(1,2,3)$ و $Q(-1,0,1)$ را بیابید. (ب) مختصات خط $P'Q'$ را بیابید. (پ) معادله‌ی خطی را برای این هم‌خطی به تفصیل نوشته نگار خط $l[1,-2,1]$ را بیابید. (ت) آیا پاسخ‌های شما در (ب) و (پ) سازگارند؟

۴- نشان دهید رابطه "$\sim$" که در زیر تعریف شده است یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی ماتریس‌های ۳×۳ است: $A\sim B$ اگر و فقط اگر برای یک اسکالر ناصفر k، $A=kB$

۵- قضیه ۳۲-۴ را ثابت کنید.

۶- ماتریس هم‌خطی‌ای را بیابید که $P(1,0,1)$، $Q(2,0,1)$، $R(0,1,1)$ و $S(0,2,1)$ را به ترتیب به $X(1,0,0)$، $Y(0,1,0)$، $Z(0,0,1)$ و $U(1,1,1)$ می‌نگارد.

۷- جزئیات بررسی بنداشت ۴ را کامل کنید.

۸- نقاط و خطوط ناوردای هم‌خطی‌هایی با ماتریس‌های زیر را بیابید:

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ و $a\neq 0,1$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ و $a\neq 0$

۹- ثابت‌کنید: هر هم‌خطی با یک‌نقطه ناوردای خطوار یک پرسپکتیو هم‌خطی است.

۱۰- نشان دهید در اثبات حالت ۲ از قضیه ۳۷-۴ داریم: $X' = CX.P'D$

۱۱- قسمت اول قضیه ۳۸-۴ را ثابت کنید.

۱۲- نشان دهید هم‌خطی با ماتریس زیر یک همولوژی است. آیا این همولوژی هم‌ساز است؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۳- ماتریس یک ایلیشن با محور [۱,۰,۰] و مرکز (۰,۰,۱) را بیابید.

۱۱-۴. همبستگی‌ها و قطبیت‌ها

نوع دوم تبدیلات صفحه‌ی تصویری، موسوم به همبستگی‌ها، باز تبدیلات خطی یک به یکی هستند. ولی در این‌جا نگار نقاط، خطوط می‌باشد.

تعریف ۲۲-۴. یک همبستگی تبدیل خطی یک به یکی از مجموعه‌ی نقاط صفحه‌ی تصویری به روی مجموعه‌ی خطوط صفحه‌ی تصویری است.

همبستگی‌ها را نیز می‌توان با ماتریس‌های ۳×۳ نمایش داد. معادله‌ی ماتریسی آن نیز بسیار شبیه معادله‌ی ماتریسی هم‌خطی‌هاست؛ با این تفاوت که در این‌جا سه‌تایی‌هایی منتج از این نگاشت‌ها به عنوان مختصات همگن خطوط تعبیر می‌شوند. درست، همانند هم‌خطی‌ها، در این‌جا نیز یک کلاس هم‌ارزی از ماتریس‌ها به هر همبستگی نظیر

می‌شود. این‌ها و چند نتیجه‌ی دیگر از خواص مشخصه‌ی همبستگی‌ها را می‌توان با استفاده از اثبات‌هایی کاملاً شبیه اثبات‌هایی که برای نتایج مشابه در مورد هم‌خطی‌ها به کار رفت، ثابت کرد.

قضیه ۴-۴۰. یک همبستگی را می‌توان توسط یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های حقیقی A که $|A| \neq 0$ نمایش داد. معادله‌ی ماتریسی این همبستگی، عبارت است از $su^t=AX$ که $X \in R^3$ و $s \neq 0$.

قضیه ۴-۴۱. یک همبستگی نقاط هم‌خط را به خطوط هم‌رس می‌نگارد. نگار خط u تحت همبستگی با ماتریس A با معادله‌ی $kX^t=uA^{-1}$، $k \neq 0$ داده می‌شود.

فرع. تحت هر همبستگی خطوط هم‌رس به نقاط هم‌خط نگاشته می‌شوند.

قضیه ۴-۴۲. یک همبستگی از صفحه‌ی تصویری یک تصویری بین اعضای دسته‌های نظیر القا می‌کند.

فرع. نسبت‌های ناهم‌ساز و مجموعه‌های هم‌ساز تحت همبستگی‌ها ناوردا می‌باشند.

قضیه ۴-۴۳. یک همبستگی منحصر به‌فرد موجود است؛ به طوری که چهار نقطه دل‌خواه را که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند به چهار خط دل‌خواه که هیچ سه‌تای آن هم‌رس نیستند، می‌نگارد.

بدین‌ترتیب، همبستگی مفروضی که مطابق معادله‌ی $su^t=AX$ نقاط را به خطوط می‌نگارد، خطوط را نیز مطابق معادله‌ی $kX^t=uA^{-1}$ به نقاط می‌نگارد (در هر دو معادله از ترانهاده استفاده شده است؛ چراکه نقاط با ماتریس‌های ستونی و خطوط با ماتریس‌های سطری نمایش داده می‌شوند). به طور کلی همبستگی‌ها هر مجموعه

مفروض را به مجموعه‌ی دوگان آن می‌نگارد. به عنوان مثال، نگار یک چهارگوشه تحت یک هبستگی یک چهارضلعی است و برعکس. درنتیجه، همبستگی‌ها، روشی تحلیلی، برای مطالعه دوگانی در اختیار ما خواهند گذاشت.

چون همبستگی‌ها نقاط را به خطوط و خطوط را به نقاط می‌نگارند، از همبستگی‌ای که نقطه‌ی P را به خط p می‌نگارد انتظار نگاشته شدن خط p به نقطه‌ی P به طور اتوماتیک معقول به‌نظر می‌رسد؛ اما این عمل، لزوماً اتفاق نمی‌افتد؛ چون همبستگی‌ای که نقطه‌ی X را بنابر معادله‌ی $su'=AX$ به خط u می‌نگارد، خط u را بنابر معادله‌ی $kY^t=uA^{-1}$ به نقطه‌ی Y خواهد نگاشت. حل معادله‌ی اول برای u نتیجه می‌دهد: $u=(\frac{1}{s})(AX)^t=(\frac{1}{s})X^tA^t$، اگر هر نقطه‌ی X به خط u نگاشته شود که به نوبه‌ی خود در برگشت به X نگاشته می‌شود، به طوری که برای هر X داشته باشیم $X=Y$، آنگاه:

$$kX^t=k'y^t=uA^{-1}=((\frac{1}{s})X^tA^t)A^{-1}$$

یا

$$X^t=X^t(A^tA^{-1})$$

و این برای همه‌ی نقاط ممکن X برقرار است، اگر و فقط اگر $A^tA^{-1}=t$؛ یعنی، $A^t=A$ بنابراین یک همبستگی هر نقطه‌ی X را به خط u نگاشته و خط u را به X برمی‌گرداند، اگر و فقط اگر ماتریسش متقارن باشد. همبستگی‌ای از این نوع را قطبیت خوانیم. به زودی خواهیم دید که مجموعه‌ی قطبیت‌ها عباراتی تحلیلی برای مخروطی‌ها معرفی خواهند کرد و از این‌رو، حرف C را برای نشان دادن ماتریس قطبیت به کار می‌بریم.

تعریف ۲۳-۴. همبستگی‌ای را که ماتریس آن متقارن باشد قطبیت خوانیم. اگر یک قطبیت نقطه‌ی P را به خط p بنگارد (و بدین ترتیب p را به P)، آنگاه p قطبی P و P قطب p نسبت به قطبیت مفروض نامیده می‌شود.

چون قطبیت‌ها یک نوع همبستگی هستند، نگاشت‌هایی یک به یک بوده و از این‌رو قطبی‌های نقاط متمایز خطوط متمایزند و برعکس. این رابطه قطبیت خاصیت

مشخصه‌ای دارد که اولین‌بار در بخش ۵-۱ برای جفت کردن نقاط توصیف شد که در آن دو نقطه‌ای را یک جفت می‌گیریم که واقع بر قطبیت‌های یکدیگر باشند. نقاطی این‌چنین را نقاط مزدوج نسبت به قطبیت خوانند.

قضیه ۴-۴۴. نقطه P روی قطبی نقطه‌ی Q تحت قطبیتی مفروض است؛ اگر و فقط اگر Q روی قطبی P تحت همان قطبیت باشد.

اثبات. گیریم C ماتریس قطبیت و q و p قطبی‌های Q و P باشند؛ یعنی: $s_1q^t=CQ$ و $s_2p^t=CP$ چون P روی قطبی Q است، $qP=0$؛ ولی $s_1q=Q^tC$، بنابراین: $Q^tCP=0$. ترانهاده کردن طرفین نتیجه می‌دهد $P^tCQ=0$ یا $pQ=0$ یعنی Q روی قطبی P است.

فرع. P روی قطبی Q نسبت به قطبیتی با ماتریس C است؛ اگر و فقط اگر $Q^tCP=0$ و p شامل قطب q نسبت به همان قطبیت است؛ اگر و فقط اگر $pC^{-1}q^t=0$.

تعریف ۴-۲۴. دو نقطه نسبت به قطبیتی مفروض نقاط مزدوج خوانده می‌شوند؛ اگر هر نقطه روی قطبی دیگر باشد. نقطه‌ای را که روی قطبی خود قرار داشته باشد نقطه‌ی خود مزدوج نسبت به قطبیت مفروض خوانند.

دو خط نسبت به قطبیتی مفروض مزدوج خوانده می‌شوند، اگر هر خط بر قطب دیگری واقع باشد. خطی که بر قطب خود واقع باشد را خط خودمزدوج نسبت به قطبیت مفروض خوانند.

فرع قضیه‌ی قبل به گونه‌ای مستقیم معادله‌ی ماتریسی‌ای برای مجموعه نقاط خودمزدوج حاصل می‌کند (تمرین ۲). با انجام عمل ضرب ماتریسی در این معادله با فرم درجه دومی شبیه فرم‌های درجه دوم بخش ۹-۳ مواجه می‌شویم که به رابطه‌ای بین مجموعه نقاط خودمزدوج و مخروطی‌های نقطه‌ای دلالت دارد.

قضیه ۴۵-۴. مجموعه نقاط خودمزدوج از یک قطبیت با ماتریس C مجموعه همه‌ی نقاط X است که در معادله‌ی $X^tCX=0$ صدق می‌کنند. مجموعه خطوط خودمزدوج از همان قطبیت مجموعه همه‌ی خطوطی مانند u است که در معادله‌ی $uC^{-1}u^t=0$ صدق می‌کنند.

فرع. مجموعه نقاط خودمزدوج از قطبیتی با ماتریس C، مجموعه نقاطی مانند X است که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 = 0$$

با استفاده از معادله‌ی ماتریسی، برای یک مجموعه از نقاط خودمزدوج می‌توان نشان داد که مجموعه‌هایی این‌چنین تحت همبستگی‌ها حفظ می‌شوند. فرایندی مشابه را می‌توان برای نشان دادن این‌که رابطه‌ی قطب-قطبی نیز تحت این نگاشت‌ها حفظ می‌شود، به‌کار برد؛ یعنی، اگر P و p قطب و قطبی‌ای نسبت به قطبیتی با ماتریس C باشند، آن‌گاه، P' و p' نگار آن‌ها تحت یک هم‌خطی نسبت به قطبیتی با ماتریس C' قطب و قطبی خواهند بود (تمرین ۳).

قضیه ۴۶-۴. هر هم‌خطی با ماتریس A یک مجموعه از نقاط خودمزدوج با ماتریس C را به مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج با ماتریس $C'=(A^{-1})^tC(A^{-1})$ می‌نگارد.

اثبات. گیریم S مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج با معادله‌ی $X^tCX=0$ باشد که در آن C ماتریس ۳×۳ متقارن نامنفردی است. گیریم A ماتریس یک هم‌خطی دل‌خواه باشد، در این صورت، A نیز ماتریسی ۳×۳ و نامنفرد بوده و معادله‌ی نقطه‌ای نظیر آن عبارت است از $sX'=AX$. حل این معادله برحسب X و X^t نتیجه می‌دهد $X=sA^{-1}X'$ و $X^t=s(X')^t(A^{-1})^t$ با جای‌گزینی در معادله‌ی $X^tCX=0$ خواهیم داشت: $(X')^t(A^{-1})^tC(A^{-1})X'=0$ یا $(X')^t((A^{-1})^tCA^{-1})X'=0$؛ اما: $(A^{-1})^tCA^{-1}$ ماتریسی متقارن، نامنفرد و ۳×۳ بوده و از این جهت ماتریس یک قطبیت است. بدین ترتیب X در

مجموعه‌ی S از نقاط خودمزدوج با ماتریس C است اگر و فقط اگر X' در مجموعه‌ی S' از نقاط خودمزدوج با ماتریس $C'=(A^{-1})^tCA^{-1}$ باشد. □

قضیه قبل به ما اجازه می‌دهد با مجموعه‌هایی خودمزدوج از نقاط را با اختصاص مختصاتی مناسب به بعضی نقاط مطرح شده آسان کنیم. همان کاری که هنگام بررسی بنداشت ۴ در بخش ۱۰-۴ انجام دادیم. خصوصاً از این روش برای توجیه این مطلب استفاده می‌شود که مجموعه‌هایی از نقاط خودمزدوج، که به طور تحلیلی برحسب قطبیت‌ها تعریف شده‌اند، مخروطی‌های نقطه‌ای هستند؛ اَشکالی که می‌توانند تماماً با نقاط و خطوط ساخته شوند حتی با این روش ساده کردن، اثبات این نتایج گاهی طولانی و پیچیده است؛ اما شاهد خوبی برای روش‌های تحلیلی در هندسه‌ی تصویری است. اهمیت این قضیه و نتیجه‌هایش، این کوشش را باارزش می‌سازند.

قضیه ۴۷-۴. یک مجموعه ناتهی از نقاط خودمزدوج نسبت به یک قطبیت مفروض یک مخروطی نقطه‌ای است و یک مجموعه‌ی ناتهی از خطوط خودمزدوج نسبت به یک قطبیت مفروض یک مخروطی خطی است. برعکس هر مخروطی نقطه‌ای مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج نسبت به یک قطبیت بوده و هر مخروطی خطی مجموعه‌ای از خطوط خودمزدوج نسبت به یک قطبیت می‌باشد.

اثبات. با کمک اصل دوگانی، کافی‌ست حکم قضیه را برای مخروطی‌های نقطه‌ای بررسی کرد.

گیریم $\mathscr{C}$ مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج باشد. چون $\mathscr{C}$ ناتهی است، می‌توان نشان داد که $\mathscr{C}$ حداقل شامل سه نقطه‌ی متمایز ناهم‌خط باشد (تمرین ۶). فرض خواهیم کرد این نقاط، عبارت باشند از: $X(1,0,0)$، $Z(0,0,1)$ و $U(1,1,1)$ و همچنین قطبی‌های X و Z در $Y(0,1,0)$ تلاقی کنند. چون X و Z نقاط خودمزدوج هستند، قطبی‌های آن‌ها نسبت به $\mathscr{C}$ عبارتند از: $XY[0,0,1]$ و $ZY[1,0,0]$ و از نظر جبری، این بدان معنی است که به ماتریس متقارنی مانند C نیاز داریم که در شرط زیر صدق کند:

$$C[1,0,0]^t=s_1[0,0,1] \quad \text{و} \quad C[0,0,1]^t=s_2[1,0,0]^t$$

این معادلات نتیجه می‌دهند: $C_{11}=C_{12}=C_{23}=C_{33}=0$ و $C_{13}\neq 0$. سرانجام لزوم خودمزدوج بودن نقطه‌ی U نیز نتیجه می‌دهد $C_{22}=1$ و $C_{13}=-\frac{1}{2}$ بنابراین، معادله‌ی $\mathscr{C}$ عبارت خواهد شد از: $(x_2)^2-x_1x_3=0$. در این‌صورت، کافی‌ست نشان دهیم مجموعه‌ی نقاط صادق در این معادله مخروطی نقطه‌ای می‌باشد؛ یعنی، مجموعه‌ای از نقاط تلاقی خطوط نظیر دو دسته خط وابسته‌ی تصویری.

فرض کنیم X و Z مراکز دو دسته باشند. تصویری مورد استفاده‌ی ما بنابر تناظر: $XY\ XZ\ XU \wedge ZX\ ZY\ ZU$ به طور منحصر به فردی مشخص می‌شود. توجه کنید که تحت این تصویری X، Z و U همگی محل تلاقی خطوط نظیر هستند؛ و چون XY به ZX، خط بین مراکز دو دسته، نظیر می‌شود، در X مماس خواهد بود. به طریق مشابه ZY در Z مماس خواهد بود. با فرض این‌که XY و XZ خطوط پایه دسته اول و ZX و ZY خطوط پایه‌ی دسته دوم باشند، یک تصویری با ماتریسی قطری حاصل خواهد شد (تمرین ۱ بخش ۸-۴). سرانجام، لزوم نگاشته شدن $XU[0,1,-1]$ با پارامترهای همگن $(1,1-)$ به $ZU(1,-1,0)$ با پارامترهای همگن $(1,1-)$ ماتریس همانی 2×2 را به عنوان ماتریس تصویری حاصل می‌کند.

برای نشان دادن این‌که $\mathscr{C}$ دقیقاً مجموعه‌ی نقاط تلاقی خطوط نظیر تحت این تصویری است، گیریم $P(p_1,p_2,p_3)$ نقطه‌ی دل‌خواهی از $\mathscr{C}$ باشد؛ آن‌گاه تصویری، خط $XP=l[0,-p_3,p_2]$ با پارامترهای همگن $(p_2,-p_3)$ را به خط l' مار بر Z با همان پارامترهای همگن می‌نگارد. بنابراین، مختصات l' عبارت است از $[-p_3,p_2,0]$. استفاده از شرط دترمینانی برای یافتن نقطه‌ی $l.l'$ مختصات $(-(p_2)^2,-p_3p_2,-(p_3)^2)$ را به عنوان این نقطه‌ی تلاقی خواهد داد؛ اما چون P نقطه‌ای از $\mathscr{C}$ است، $(p_2)^2=p_1p_3$، بنابراین مختصات نقطه‌ی $l.l'$ عبارت است از: (p_1,p_2,p_3). از طرفی، نقطه‌ی P نقطه‌ی تلاقی خطوط وابسته‌ی تصویری l و l' است اگر و فقط اگر P در $\mathscr{C}$ باشد.

برای کامل کردن نیمه‌ی اول اثبات، بررسی پرسپکتیوی نبودن این تصویری لازم است. برای این عمل توجه به این نکته کافی‌ست که خط XZ، که مراکز دو دسته را به هم

وصل می‌کند، به خودش نظیر نمی‌شود.

برعکس، برای نشان دادن این‌که هر مخروطی نقطه‌ای $\mathscr{C}$ مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج نسبت به یک قطبیت می‌باشد، می‌توان از فرایندی مشابه استفاده کرد. گیریم P، Q، R سه نقطه‌ی متمایز $\mathscr{C}$ و S نقطه‌ی تلاقی مماس‌های به $\mathscr{C}$ در P و Q باشند، آنگاه P ، Q ، R و S چهارنقطه‌ی متمایزند که هیچ سه‌تای آن هم‌خط نیستند (تمرین ۷). چون هم‌خطی‌ها حافظ وقوع و بنابراین، مخروطی‌ها می‌باشند؛ می‌توان فرض کرد P، Q، R و S به ترتیب عبارت باشند از: $X(1,0,0)$، $Z(0,0,1)$، $U(1,1,1)$ و $Y(0,1,0)$.

بنابر فرع قضیه ۱۵-۴ مماس در X و Z همراه با سه نقطه X، Z و U مخروطی را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند؛ بنابراین کافی‌ست نشان دهیم این مماس‌ها و نقاط، قطبیتی با ماتریس C معین می‌کنند که $\mathscr{C}$ مجموعه‌ای از نقاط خودمزدوج نسبت به آن است. چون در قسمت اول اثبات، دو خط خودمزدوج به مخروطی مماس شدند، در این‌جا به دنبال یافتن قطبیتی هستیم که تحت آن دو خط مماس، خودمزدوج باشند و این همراه با شرط، نقطه‌ی خودمزدوج بودن U ما را به معادله‌ای همانند قبل راهنمایی می‌کند؛ یعنی، $(x_2)^2-x_1x_3=0$. بنابراین، در واقع قطبیتی موجود است که $\mathscr{C}$ یک مجموعه از نقاط خودمزدوج تحت آن است. □

فرع ۱. یک مخروطی نقطه‌ای معادله‌ای به فرم $X^tCX=0$ و یک مخروطی خطی معادله‌ای به فرم $uC^{-1}u^t=0$ دارد که در آن‌ها C ماتریسی متقارن نامنفرد و 3×3 است.

بنابراین، هر مخروطی نقطه‌ای به ماتریس متقارنی نظیر می‌شود که ماتریس یک قطبیت می‌باشد. این ماتریس قطبیت را ماتریس مخروطی نقطه‌ای خوانیم. علاوه بر این، اگر خط p تحت قطبیتی که توسط مخروطی نقطه‌ای تعیین شده است به نقطه‌ی P نظیر شود، گویند P و p قطب و قطبی نسبت به مخروطی نقطه‌ای می‌باشند. این اصطلاحات، در دو فرع بعدی از قضیه ۴۷-۴ به کار رفته‌اند و رابطه‌ی بین خطوط خودمزدوج و مماس‌ها را فرمول‌بندی می‌کنند.

فرع ۲. گیریم نقطه‌ای از یک مخروطی نقطه‌ای $\mathscr{C}$ باشد. قطبی P نسبت به $\mathscr{C}$ در P مماس است؛ برعکس مماس به $\mathscr{C}$ در P عبارت است از قطبی P نسبت به $\mathscr{C}$.

فرع ۳. اگر X نقطه‌ای از یک مخروطی نقطه‌ای $\mathscr{C}$ با ماتریس C باشد، آن‌گاه u مماس به $\mathscr{C}$ در X، با رابطه‌ی $su^t=CX$ داده می‌شود.

با استفاده از فرع اخیر، می‌توان نشان داد مخروطی خطی معین شده توسط قطبیتی مفروض، متشکل است از مماس‌های به مخروطی نقطه‌ای که با همان قطبیت معین می‌شوند.

قضیه ۴-۴۸. مماس‌های به یک مخروطی نقطه‌ای عبارتند از خطوط مخروطی خطی معین شده با همان قطبیت.

اثبات. گیریم X نقطه‌ای روی یک مخروطی نقطه‌ای با ماتریس C باشد. با توجه به فرع ۳ از قضیه ۴-۴۷ ، u، مماس در X، با معادله‌ی $su^t=CX$ داده می‌شود. حل این معادله، برای X نتیجه می‌دهد $X=sC^{-1}u^t$ چون X روی مخروطی نقطه‌اي است بنابر فرع ۱ قضیه ۴-۴۷، $X^tCX=0$ جای‌گزینی مقدار X در معادله‌ی اخیر نتیجه می‌دهد: $(sC^{-1}u^t)^tC(sC^{-1}u^t)=0$ یا $uC^{-1}CC^{-1}u^t=uC^{-1}u^t=0$ بنابراین u در معادله‌ی مخروطی خطی معین شده توسط همان قطبیت صادق است. □

یک قطبیت همچنین قطبی‌های نقاط ناواقع بر مخروطی نظیر را مشخص می‌کند. قضایا و تعاریف بعد، روشی برای ساخت قطبی‌های نقاط دیگر ارائه می‌دهد (و با توجه به دوگانی، قطب‌های خطوطی غیرمماس). اهمیت این ساختن‌ها هنگامی که ما هندسه‌های نااقلیدسی را به عنوان زیرهندسه‌های هندسه‌ی تصویری در بخش ۴-۱۲ توصیف خواهیم کرد، افزون می‌گردد.

قضیه ۴۹-۴. نقطه‌ی تلاقی دو مماس به یک مخروطی نقطه‌ای عبارت است از قطب خط واصل به نقاط تماس.

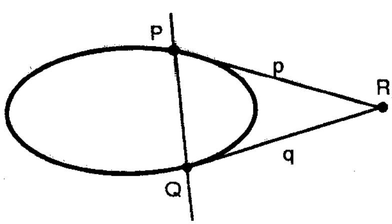
اثبات. گیریم p و q مماس‌هایی به یک مخروطی نقطه‌ای به ترتیب در P و Q باشند؛ یعنی، p و q به ترتیب قطبی‌های P و Q هستند. گیریم $R=p.q$ (شکل ۴۱-۴). آن‌گاه R هم بر قطبی P و هم بر قطبی Q واقع بوده و بنابر قضیه ۴۴-۴، P و Q هردو بر قطبی R هستند، پس PQ قطبی R بوده و بنابر تعریف R قطب خط PQ می‌باشد. □

فرع. هر نقطه بر حداکثر دو مماس از یک نقطه مخروطی مفروض واقع است.

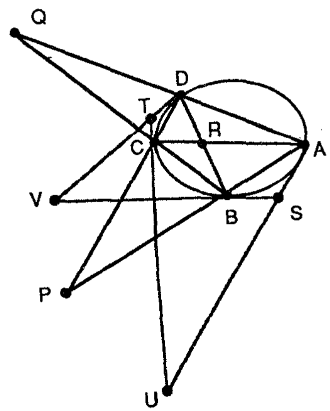
اثبات قضیه ۴۹-۴ توجیهی بر وجود مثلث‌هایی است که یک رأس آن قطب ضلع مقابل می‌باشد؛ خصوصاً مثلث‌هایی که هر رأس آن‌ها قطب ضلع مقابلشان باشد حایز اهمیتند. وجود مثلث‌هایی این‌گونه بنابر قضیه‌ی بعد، ثابت شده است.

تعریف ۲۵-۴. هرگاه هر رأس از مثلثی قطب ضلع مقابل آن نسبت به یک مخروطی باشد، این مثلث را نسبت به آن مخروطی خودقطبی نامند.

قضیه ۵۰-۴. اگر A، B، C و D چهار نقطه‌ی متمایز از یک مخروطی نقطه‌ای باشند، مثلث قطری چهارگوشه‌ی $ABCD$ خودقطبی است.



شکل ۴۱-۴



شکل ۴۲-۴

اثبات. گیریم $P=CD.AB$ ، $Q=CB.AD$ و $R=AC.BD$ نقاط قطری چهارگوشه باشند و همچنین

$$S=tanB.tanA \quad \text{و} \quad T=tanC.tanD$$

$$U=tanC.tanA \quad \text{و} \quad V=tanD.tanB$$

آنگاه بنابر فرع قضیه ۱۴-۴ ، Q ، R ، S و T همانند P ، Q ، U و V هم‌خط هستند (شکل ۴۲-۴).

بنابر قضیه ۴۹-۴ ، P هم بر قطبی S و هم بر قطبی T واقع است؛ بنابراین $TS=QR$ قطبی P است به طریق مشابه R هم بر قطبی U و هم بر قطبی V واقع بوده و در نتیجه $UV=PQ$ قطبی R است و سرانجام چون Q روی قطبی P و R می‌باشد آنگاه PR قطبی Q است. □

فرع. هرگاه خطی مانند m مار بر نقطه‌ای ناواقع بر یک مخروطی نقطه‌ای مانند P ، مخروطی نقطه‌ای را قطع کند؛ نقاط تلاقی نسبت به P و نقطه‌ی تلاقی m با قطبی P مزدوج هم‌ساز می‌باشند.

قضیه ۴۹-۴ نحوه‌ی ساخت قطب‌های خطوطی که یک مخروطی را دوبار قطع می‌کنند را مشخص می‌کند. خطوطی که مخروطی را دقیقاً یک بار قطع می‌کنند، درست همان مماس‌ها بوده و از این‌رو قطبی‌های نقطه‌ی تلاقی هستند؛ اما خطوطی هم هستند که مخروطی را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. این تفاوت، اساس تعریف بعدی است.

تعریف ۲۶-۴. اگر قطبی P نسبت به مخروطی مفروضی یک مخروطی نقطه‌ای را قطع نکند، P را نقطه‌ی درونی مخروطی می‌خوانیم. اگر قطبی P نسبت به یک نقطه مخروطی نقطه‌ای، مخروطی را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند، P را یک نقطه‌ی بیرونی مخروطی نامیم.

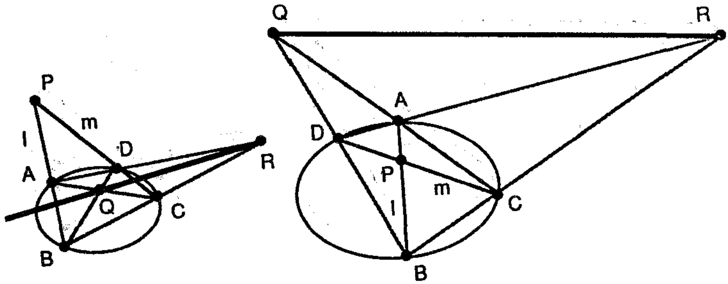
برای توجیه ساخت قطبی‌های نقاط درونی و بیرونی و ساخت قطب خطوطی که شامل نقاط درونی می‌شوند یا نمی‌شوند، از لم زیر استفاده خواهیم کرد (تمرین ۱۱).

لم. یک خط شامل نقاط درونی یک مخروطی نقطه‌ای است اگر و فقط اگر مخروطی را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند.

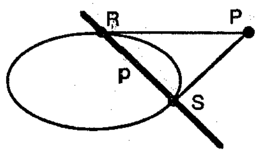
ساختن قطب‌ها و قطبی‌ها

حالت ۱. ساخت قطبی نقطه‌ای مانند P ناواقع بر مخروطی. گیریم l و m دو خط مار بر P به‌گونه‌ای باشند که هریک مخروطی $\mathscr{C}$ را در دو نقطه قطع کنند. فرض کنیم A و B نقاط تلاقی l با $\mathscr{C}$ و C و D نقاط تلاقی m با $\mathscr{C}$ باشد؛ در این صورت A، B، C و D تشکیل یک چهارگوشه می‌دهند که بنابر قضیه ۵۰-۴ مثلث قطریش خودقطبی است. به بیان دیگر خط واصل $Q=AC.BD$ به $R=AD.BC$ قطبی P می‌باشد (شکل ۴۳-۴).

حالت ۲. ساخت قطب خطی مانند p که به مخروطی مماس نیست. اگر p مخروطی را



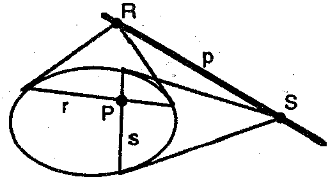
شکل ۴۳-۴



شکل ۴۴-۴

در نقاط متمایز R و S قطع کند، آنگاه بنابر قضیه ۴۹-۴ ، (قطبِ p)=$P=tanR.tanS$ (شکل ۴۴-۴). اگر p مخروطی را قطع نکند، فرض می‌کنیم R و S نقاط متمایزی روی p باشد. آنگاه چون p مخروطی را قطع نمی‌کند، لم قبل نتیجه می‌دهد که نقاط روی φ خصوصاً R و S، نقاط بیرونی مخروطی هستند. پس بدین ترتیب r و s به ترتیب قطبی‌های آن‌ها، هرکدام مخروطی را دوبار قطع می‌کنند. گیریم $P=r.s$ (شکل ۴۵-۴). آنگاه چون P هم بر قطبی R و هم بر قطبی S واقع است، در نتیجه، قطب p خواهد بود (توجه کنید P یک نقطه‌ی درونی است).

مثلث‌های خودقطبی نیز در نگاشت یک مخروطی نقطه‌ای خاص به مخروطی نقطه‌ای دیگری به فرم استاندارد استفاده می‌شوند (مخروطی به فرم استاندارد نقش مهمی در بخش بعد بازی خواهد کرد). اثبات اولین قضیه از قضایای لازم برای یافتن این نگاشت یک مثلث خودقطبی خاص و استفاده از روش‌های مشابهی را که در قسمتی از اثبات قضیه ۴۷-۴ مورد استفاده واقع شد، طلب می‌کند.



شکل ۴۵-۴

قضیه ۵۱-۴. مثلث ΔXYZ [که در آن $X(1,0,0)$، $Y(0,1,0)$ و $Z(0,0,1)$] مثلثی خودقطبی نسبت به یک مخروطی است اگر و فقط اگر ماتریس این مخروطی قطری باشد.

بدین ترتیب، هر مخروطی نقطه‌ای هم‌ارز یک مخروطی با معادله‌ای به فرم $a(x_1)^2+b(x_2)^2+c(x_3)^2=0$ می‌باشد؛ یعنی، می‌تواند از طریق یک هم‌خطی به مخروطی‌ای با معادله‌ی فوق نگاشته شود. ولیکن، قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که مخروطی‌های با معادله‌ای به این فرم به مخروطی‌های با معادلاتی باز هم ساده‌تر قابل نگاشته شدن هستند. این قضیه، حتی شامل حالتی خواهد شد که مخروطی نقطه‌ای اصلی شامل هیچ نقطه در صفحه‌ی تصویری حقیقی نباشد.

قضیه ۵۲-۴. هر مخروطی نقطه‌ای تصویری هم‌ارز یک مخروطی با معادله‌ای به فرم $(x_1)^2+(x_2)^2\pm(x_3)^2=0$ می‌باشد؛ (یعنی، هر مخروطی از طریق یک هم‌خطی می‌تواند به یک مخروطی با این معادله نگاشته شود).

اثبات. گیریم ΔPQR مثلثی خودقطبی نسبت به یک مخروطی نقطه‌ای مفروض $\mathscr{C}$ بوده و همچنین T هم‌خطی‌ای باشد که P، Q و R را به ترتیب به X، Y و Z می‌نگارد. در این صورت ΔXYZ نسبت به مخروطی $T(\mathscr{C})$ خودقطبی است؛ بنابراین، مخروطی اخیر با توجه به قضیه ۵۱-۴ ماتریسی قطری خواهد داشت. حال یا همه‌ی درایه‌های قطری هم‌علامتند یا علامت یکی از آن‌ها با دوتای دیگر فرق می‌کند. در حالت اول، از ماتریس

نمایشی که درایه‌های قطری آن همگی مثبت‌اند استفاده خواهیم کرد. در دومین حالت، در صورت لزوم، می‌توان از هم‌خطیی استفاده کرد که زوج مناسبی از نقاط X، Y و Z را تعویض کند تا مخروطی با ماتریس نمایش قطری به‌دست آید که درایهٔ سوم آن منفی است (تمرین ۱۵). بنابراین، می‌توان فرض کرد که ماتریس نمایش مخروطی نگار به فرم زیر می‌باشد که در آن a و b مثبت و c ناصفر است:

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

سرانجام گیریم S هم‌خطی‌ای با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|c|} \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت، بنابر قضیه ۴۶-۴ مخروطی $ST(\mathscr{C})$ ماتریس $C'=(A^{-1})C(A^{-1})$ را داراست. محاسبه این حاصل‌ضرب ماتریسی نتیجه می‌دهد:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، مخروطی $ST(\mathscr{C})$ معادله‌ای به فرم: $(x_1)^2+(x_2)^2\pm(x_3)^2=0$ دارد. □

گویند مخروطی نقطه‌ای که معادله‌ی آن به این فرم باشد به فرم استاندارد است. فرم‌های استاندارد ممکن دو نوع قطبیت را مشخص می‌کنند. نام‌هایی که به این دو نوع اختصاص داده شده از دو هندسه‌ی نااقلیدسی ناشی شده‌اند. در بخش بعد، ارتباط بین این قطبیت‌ها و هندسه‌های نظیرشان را پی می‌گیریم.

تعریف ۲۷-۴. قطبیتی که مخروطی وابسته به آن با مخروطی‌ای به معادله‌ی $(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2=0$ هم‌ارز است، هذلولوی نامیده می‌شود. قطبیتی که مخروطی وابسته به آن با مخروطی‌ای به معادله‌ی $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=0$ هم‌ارز باشد بیضوی

نامیده می‌شود.

تمرین:

۱- قطبیتی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

داده شده است. (آ) معادلات مجموعه‌هایی از نقاط خودمزدوج و خطوط خودمزدوج مشخص شده توسط این قطبیت را بیابید. (ب) قطب خط [۱،۱،۱] را بیابید. (پ) یک نقطه مزدوج برای نقطه (۱،۱،۱) بیابید.

۲- قضیه ۴۵-۴ و فرع آن را ثابت کنید.

۳- نشان دهید که رابطه قطب-قطبی تحت یک هم‌خطی حفظ می‌شود.

در تمرین‌های ۴ تا ۶، $\mathscr{C}$ مجموعه‌ای خودمزدوج ناتهی از نقاط مشخص شده توسط قطبیتی مفروض است.

۴- با استفاده از قضیه ۴۴-۴، ثابت کنید: اگر P نقطه‌ای از $\mathscr{C}$ باشد، آن‌گاه قطبی P دقیقاً شامل یک نقطه از $\mathscr{C}$ است.

۵- ثابت کنید: اگر A نقطه‌ای از $\mathscr{C}$ بوده و $B\neq A$ نقطه‌ی دومی روی قطبی A باشد، آن‌گاه قطبی B دقیقاً شامل دو نقطه از $\mathscr{C}$ می‌باشد. [راهنمایی: فرض کنید A و B به ترتیب نقاط $Z(۰,۰,۱)$ و $Y(۰,۱,۰)$ باشند.]

۶- از نتیجه تمرین ۵ استفاده کرده، نشان دهید $\mathscr{C}$ شامل حداقل سه نقطه‌ی ناهم‌خط است.

۷- نشان دهید که چهار نقطه‌ی P، Q، R و Sی که در نیمه‌ی دوم اثبات قضیه ۴۷-۴ انتخاب شدند متمایز بوده و هیچ‌کدام از سه‌تای آن‌ها هم‌خط نیستند.

۸- مخروطی $(x_1)^2+2(x_2)^2+5(x_3)^2-2x_2x_3-2x_1x_3-4x_1x_2=0$ مفروض است. (آ) مماس در نقطه‌ی $(1,1,1)$ را بیابید. (ب) قطبی $(3,1,5)$ را بیابید. (پ) مماس‌های از نقطه‌ی $(1,-2,0)$ را بیابید.

۹- فرع قضیه ۴۹-۴ را ثابت کنید.

۱۰- فرع قضیه ۵۰-۴ را ثابت کنید [راهنمایی: فرض کنید n خط دومی باشد که مخروطی را در دو نقطه قطع کرده است. مجموعه‌ی هم‌ساز تشکیل شده توسط این چهار نقطه را یافته سپس از یک پرسپکتیوی استفاده کنید.]

۱۱- گیریم $\mathscr{C}$ مخروطی‌ای با معادله‌ای $(x_2)^2-x_1x_3=0$ باشد. (آ) نشان دهید که نقطه‌ی $P(p_1,p_2,p_3)$ یک نقطه‌ی درونی از $\mathscr{C}$ است اگر و فقط اگر $p_2^2-p_1p_3<0$ (به‌طور کلی P نقطه‌ی درونی مخروطی $X^tCX=0$ است اگر و فقط اگر $P^tCP<0$) (ب) نشان دهید هر خط شامل نقاط بیرونی $\mathscr{C}$ می‌شود. (پ) با استفاده از قسمت‌های (آ) و (ب) نشان دهید که هر خط شامل نقاط درونی $\mathscr{C}$ باشد؛ اگر و فقط اگر $\mathscr{C}$ را در دو نقطه متمایز قطع کند.

۱۲- در ساخت قطبی نقطه‌ی P ناواقع بر یک مخروطی، l و m خطوطی مار بر P انتخاب شدند که هرکدام دوبار مخروطی را قطع می‌کردند؛ توصیف کنید چگونه قطبی P را می‌توان حاصل نمود اگر l و یا m مخروطی را دقیقاً یک‌بار قطع کنند. آیا این اتفاق

وقتی P نقطه‌ی درونی باشد رخ خواهد داد؟

۱۳- قضیه ۵۱-۴ را ثابت کنید.

۱۴- نشان دهید که یک همولوژی هم‌ساز که مرکز و محور آن قطب و قطبی نسبت به مخروطی نقطه‌ای $\mathscr{C}$ می‌باشد $\mathscr{C}$ را ناوردا نگه‌می‌دارد؛ یعنی، (این نگاشت نقاط روی $\mathscr{C}$ را به نقاط روی $\mathscr{C}$ برمی‌گرداند).

۱۵- اگر $\mathscr{C}$ مخروطی نقطه‌ای با معادله‌ی $a(x_1)^2+b(x_2)^2+c(x_3)^2=0$ باشد که در آن $a<0$، $b>0$ و $c>0$،ماتریس یک هم‌خطی مانند T را طوری بیابید که مخروطی نقطه‌ای $T(\mathscr{C})$ معادله‌ای به صورت: $a'(x_1)^2+b'(x_2)^2+c'(x_3)^2=0$ داشته باشد که در آن $a'>0$، $b'>0$ و $c'>0$. [راهنمایی: هم‌خطی‌ای را به کار گیرید که نقاط X و Y را تعویض کرده و Y را ناوردا نگه می‌دارد.]

۱۶- نشان دهید مخروطی نقطه‌ای که توسط یک قطبیت بیضوی مشخص می‌شود هیچ نقطه‌ای در صفحه تصویری حقیقی را شامل نمی‌شود.

۱۷- نشان دهید هر هم‌خطی با یک ماتریس متعامد A مخروطی‌ای را که توسط یک قطبیت بیضوی مشخص می‌شود ناوردا نگه‌می‌دارد. [راهنمایی: فرم استاندارد برای مخروطی را به کار ببرید و توجه کنید ماتریس A متعامد است؛ اگر و تنها اگر $A^t=A^{-1}$.]

۱۸- ثابت کنید: اگر T یک همبستگی باشد T^2 یک هم‌خطی است. اگر A ماتریس T باشد T^2 چیست؟

۱۲-۴. زیر هندسه‌های هندسه تصویری

در این بخش نهایی، خواهیم دید تعریف کلاین به ما اجازه می‌دهد که هندسه‌ی تصویری را به عنوان چتری هندسی بینگاریم که هندسه‌های آفینی، تشابهی، اقلیدسی، هذلولوی و بیضوی تک، همگی را دربر گرفته است. ره‌یافت ما توجیه قابلیت هندسه‌های مسطحه‌ی مذکور به عنوان زیرهندسه‌هایی از هندسه‌ی تصویری مسطحه می‌باشد. این ره‌یافت را می‌توان برای توجیه رابطه‌ی مشابه در میان هندسه‌های سه‌بعدی گسترش داد؛ هرچند در این‌جا این‌کار را انجام نداده‌ایم.

برای حصول دیدگاهی مناسب، ابتدا با انتخاب قطبیت مطلق (مخروطی نظیر آن به مخروطی مطلق $\mathscr{C}$ معروف است)، برای هر سه هندسه آغاز کرد، سپس به توجیه این‌که می‌توان مفاهیم اساسی هر هندسه را برحسب خواص ناوردای چپ تحت یک گروه تبدیلات حافظ $\mathscr{C}$ تعریف کرد، چون این هندسه‌ها در فصول ۲ و ۳ تقریباً خوب بررسی شده‌اند، در این‌جا به جزئیات هر هندسه نخواهیم پرداخت. ترجیحاً، بر تشخیص مفاهیم، برحسب رونوشت‌های تصویریشان و تعیین راهی که بتوان قضایای هندسه‌ی تصویری را برای بررسی نتایج استاندارد در هر هندسه به کار برد، تمرکز خواهیم کرد. سادگی، همراه با توانایی تشخیص و اثبات این نتایج، تحسین شما را نسبت به اهمیت و زیبایی هندسه‌ی تصویری برخواهد انگیخت.

همچنان که قبلاً مشخص شد، ما ابتدا قطبیتی خاص از صفحه‌ی تصویری را درنظر می‌گیریم. ما به این قطبیت و مخروطی نقطه‌ای وابسته به آن به عنوان قطبیت مطلق و مخروطی مطلق اشاره می‌کنیم. بنا بر یافته‌هایمان در بخش ۱۱-۴ این مخروطی مطلق را در فرم استاندارد می‌توان به صورت: $(x_1)^2+(x_2)^2\pm(x_3)^2=0$ نمایش داد. برای حصول هندسه‌های نااقلیدسی و آفینی ومالاً هندسه‌ی اقلیدسی به عنوان زیرهندسه معادله فوق را به صورت $c[(x_1)^2+(x_2)^2]+(x_3)^2=0$ بازنویسی می‌کنیم که در آن $c=\pm 1$ یا $c=0$ تغییر می‌دهیم. دو مقدار اول c فرم استاندارد قبلی را نتیجه خواهد داد، در صورتی که $c=0$ مخروطی تبهگن، $x_3=0$، یعنی، خطی با مختصات $[0,0,1]$ را به بار می‌آورد. بنابراین، در حالت اخیر، مخروطی مطلق متشکل از نقاط آرمانی است؛ نقاطی که برای

حصول یک مدل تحلیلی از هندسه‌ی تصویری به صفحه‌ی آفینی اضافه شده بود (۷-۴). پس عجیب نیست که هندسه‌ی حاصله با کمک این مخروطی مطلق هندسه آفینی باشد، در حالاتی که $c=\pm 1$، باز به نقاط مخروطی مطلق به عنوان نقاط آرمانی اشاره خواهیم کرد. قطبیت‌های مشخص‌کننده‌ی مخروطی مطلق، در صورتی که $c=1$ و $c=-1$ باشند، بیضوی و هذلولوی نامیده می‌شوند (تعریف ۲۷-۴)؛ چراکه خواهیم دید این قطبیت‌ها به ترتیب هندسه بیضوی و هذلولوی را معین می‌کنند.

ما از فرایند زیر برای توجیه ارتباط هریک از این هندسه‌ها با هندسه تصویری استفاده می‌کنیم. برای هر مقدار c یک قطبیت مطلق و $\mathscr{C}$ مخروطی مطلق نظیر را انتخاب می‌کنیم. با استفاده از $\mathscr{C}$ زیرمجموعه‌ی خاصی از نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی را توصیف می‌کنیم. این زیرمجموعه از نقاط (عادی)، نقاط باقی‌مانده پس از حذف نقاط آرمانی (و در حالت هندسه‌ی هذلولوی، فراآرمانی) خواهند بود. در حالتی که $c=1$ می‌باشد، هیچ نقطه‌ی حقیقی روی مخروطی مطلق نیست؛ بنابراین، هیچ نقطه‌ای حذف نخواهد شد؛ یعنی، مجموعه نقاط صفحه‌ی بیضوی با مجموعه‌ی نقاط صفحه‌ی تصویری یکی است. (اما، قطبیت مطلقی که این مخروطی تهی را معین می‌کند، هنوز مفید است) ملاحظه‌ی این نکته که برای هر زیرهندسه، تنها نقاط هندسه، نقاط (عادی) خواهد بود، اهمیت دارد؛ یعنی، نقاط آرمانی و فراآرمانی نقاط هندسه نیستند؛ اما، برای استفاده از مفاهیم هندسه تصویری برآنیم مجموعه‌ی نقطه‌ای از هر هندسه را به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی نقطه‌ای صفحه تصویری درنظر بگیریم. به این فرایند، به عنوان نشاندن هندسه در هندسه‌ی تصویری اشاره می‌کنیم. این نشاندن اجازهٔ استفاده از نقاط آرمانی و فراآرمانی را علاوه بر نقاط (عادی) به ما می‌دهد.

در پی یکی گرفتن مجموعه‌ی مناسبی از نقاط، برآنیم چند تعریف را که نشانگر چگونگی تعریف مفاهیم اساسی هر هندسه از طریق خواص هندسه‌ی تصویری است، فهرست کنیم. شما باید توجه داشته باشید، این تعاریف همگی برحسب خواص تصویری‌ای بیان شده‌اند که تحت هم‌خطی‌هایی که مخروطی مطلق را حفظ می‌کنند، ناوردا هستند. پس از بیان تعاریف مورد استفاده در هندسه‌ی نااقلیدسی معرفی ما روی هندسه آفینی تمرکز می‌یابد؛ چراکه آشناترین هندسه، یعنی هندسه اقلیدسی را شامل

می‌شود. این ره‌یافت اجازه می‌دهد شاهد این باشیم که با اندکی تعمیم در تعریف یک مخروطی خطی، می‌توان نسبت ناهم‌ساز را برای تعریف مشترکی از اندازه‌ی زاویه در هرسه هندسه به‌کار برد؛ اگرچه تعریف مشابهی برای فاصله در دو هندسه نااقلیدسی عملی است؛ امکان تعمیم این تعریف به هندسه‌ی آفینی نمی‌باشد.

بیان تعاریف برحسب خواص تصویری، ما را قادر به استفاده از قضایای هندسه‌ی تصویری برای تحقیق این مطلب می‌کند که مفاهیمی که بدین طریق تعریف می‌شوند خواص قابل انتظار دیگری دارند. ولیکن، چون هدف این بخش، صرفاً شواهدی بر ارتباط بین این هندسه‌ها است، ما فقط به چگونگی بررسی تعدادی از خواصی این‌چنین می‌پردازیم. از شما بررسی خواص دیگری خواسته خواهد شد؛ این تمرین‌ها تحسین شما را در ارتباط متقابل هندسه‌هایی که مطالعه کرده‌ایم برخواهد انگیخت و به همان اندازه فرصتی برای دوره کردن ایده‌های این بخش فراهم خواهد آورد.

هندسه‌ی هذلولوی

نقاط آرمانی: نقاط مخروطی مطلق $\mathscr{C}$: $(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2=0$

نقاط فراآرمانی : نقاط بیرونی $\mathscr{C}$

نقاط (عادی) : نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی درونی $\mathscr{C}$

خطوط : وترهای باز $\mathscr{C}$ (یعنی: قسمت‌هایی از خطوط تصویری شامل نقاط درونی $\mathscr{C}$).

تعاریف هذلولوی

ه ۱ : دو خط هذلولوی موازی جهت‌دارند اگر خطوط تصویری نظیرشان در نقاط آرمانی متقاطع باشند.

ه ۲ : دو خط هذلولوی فراموازیند اگر خطوط تصویری نظیرشان در نقاط فراآرمانی متقاطع باشند.

ه ۳: دو خط هذلولوی متعامدند اگر خطوط تصویری نظیرشان نسبت به مخروطی مطلق

مزدوج باشند.

ه ۴: اگر A و B دو نقطه‌ی هذلولوی باشند، فاصله‌ی هذلولوی جهت‌دار عبارت است از:

$$d_h(A,B)=k\ ln(R(A,B,P,Q))$$

که در آن P و Q نقاط آرمانی خط AB و ln نمایش لگاریتم طبیعی است.

ه ۵: اگر a و b خطوط هذلولوی متقاطعی باشند، اندازه هذلولوی زاویه عبارت است از:

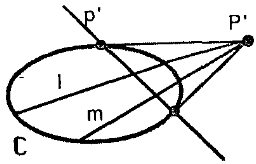
$$m_h(\angle(a,b))=k'\ ln(R(a,b,p,q))$$

که در آن p و q مماس‌های رسم شده به $\mathscr{C}$ از نقطه‌ی $a.b$ می‌باشند.

با استفاده از این تعاریف، می‌توانیم صفحه‌ی هذلولوی را در صفحه‌ی تصویری بنشانیم و از قضایای هندسه‌ی تصویری برای ساخت اثبات‌هایی از قضایای هذلولوی سود بریم. این فرایند را با بررسی تعمیمی از قضیه ه -۵۳ روشن خواهیم کرد (بخش ۸-۲ را ببینید). توجه کنید که خطوط هذلولوی و تصویری یکی نیستند، چراکه خطوط هذلولوی تنها شامل نقاطی از خط تصویری نظیرش می‌باشد که درون مخروطی مطلق $\mathscr{C}$ قرار دارد. برای حفظ ردّپای این تمایز: خط تصویری نظیر خط هذلولوی l را با l' نشان خواهیم داد. همچنین استفاده از نمودار در صفحه‌ی تصویری مفید خواهد بود. این نمودار به نظر آشنا خواهد رسید؛ چراکه صرفاً نمایشی در مدل کلاین است که در بخش ۳-۲ توصیف شد.

خاصیت ه ۱. دو خط هذلولوی فراموازی اگر و فقط اگر یک عمود مشترک منحصر به فرد داشته باشند.

اثبات. (آ) گیریم l و m دو خط فراموازی باشند، آنگاه خطوط تصویری نظیر آن‌ها l' و m' در نقطه‌ی بیرونی P' از $\mathscr{C}$ متقاطعند، (شکل ۴۶-۴). گیریم p' قطبی P' باشد. چون P' بیرون $\mathscr{C}$ است، p'، $\mathscr{C}$ را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند و بنابراین، یک خط هذلولوی p مشخص می‌شود (لمی در بخش ۱۱-۴ را ببینید). علاوه بر این، p' مزدوج هر دو خط l' و m' است و بنابر تعریف ه ۳، p هم بر l و هم بر m عمود می‌باشد. چون قطبی P'



شکل ۴۶-۴

منحصر به فرد است در نتیجه p'عمود مشترک منحصر بـه فـرد l و m مـی‌باشد. (ب) فرض کنیم l و m دو خط هذلولوی با عمود مشترک منحصر به فرد p باشند، آن‌گاه l' و m' خطوط تصویری نظیر هردو مزدوج p' می‌باشند، که p' خط تصویری نظیر به p است، بدین ترتیب، آن‌ها باید هـمدیگر را در قـطب p' قـطع کـنند. ایـن قـطب را بـا P' نشـان می‌دهیم. چون p' شامل نقاط درونی $\mathscr{C}$ است، p' باید $\mathscr{C}$ را در دو نقطه متمایز قطع کند؛ بدین ترتیب P' یک نقطه‌ی فراآرمانی است. در نـتیجه l و m خـطوطی فـراموازی‌انـد (تعریف هـ-۲). □

تعاریفی که برای خطوط موازی جهت‌دار و فراموازی در هندسه‌ی هذلولوی استفاده شد، برای هندسه بیضوی تک کارایی ندارد (چرا؟). ولیکن، سه تعریف باقیمانده به کار برده می‌شود. البته در این‌جا نقاط تلاقی با $\mathscr{C}$ و خطوط مماس به $\mathscr{C}$ که در تعاریف ب۲ و ب۳ به آن‌ها اشاره شده است لزوماً مختصاتی دارند که با اعداد مختلف سروکار دارد.

هندسه بیضوی تک

نقاط آرمانی: نقاط مخروطی مطلق $\mathscr{C}$: $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=0$.

نقاط (عادی) : نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی.

خطوط : خطوط صفحه‌ی تصویری حقیقی.

تعاریف بیضوی تک

ب ۱ : دو خط بیضوی متعامدند؛ اگر خطوط تصویری نظیرشان نسبت به $\mathscr{C}$ مزدوج باشند.

ب ۲ : اگر A و B دو نقطه‌ی بیضوی باشند، فاصله بیضوی جهت‌دار عبارت است از:

$$d_e(A,B)=k\ ln(R(A,B,P,Q))$$

که P و Q نقاط تقاطع خط AB با $\mathscr{C}$ بوده و ln نمایش لگاریتم طبیعی است.

ب ۳ : اگر a و b خطوط بیضوی باشند، آن‌گاه اندازه زاویه بیضوی عبارت است از:

$$m_e(\angle(a,b))=k'\ ln(R(a,b,p,q))$$

که در آن p و q مماس‌های رسم شده به $\mathscr{C}$ از نقطه‌ی $a.b$ می‌باشند.

باز هم این تعاریف و قضایای هندسه‌ی تصویری را می‌توان برای بررسی خواصی از صفحه‌ی بیضوی تک به‌کار برد. چون مخروطی مطلقی که در تعریف مجموعه‌ی نقطه‌ای صفحه‌ی تصویری از آن استفاده شد تهی است؛ اغلب نمایش خواص صفحه‌ی بیضوی تک در لابه‌لای صفحه‌ی تصویری ممکن نیست. ولیکن، این خواص می‌توانند در مدل توصیف شده در بخش ۹-۲ تشریح شوند.

به راحتی دیده می‌شود که خطوط موازی در هندسه آفینی را می‌توان با استفاده از تعریف مشابهی که در هندسه‌ی هذلولوی برای خطوط موازی جهت‌دار به‌کار برده شد، تعریف کرد. چون تعامد و اندازه‌ی زاویه خواص هندسه‌ی تشابهی هستند؛ ولی از خواص هندسه آفینی نمی‌باشند بهتر است تعاریف آن‌ها را بعداً بیاوریم؛ ولی می‌توانیم تعاریف نقطه‌ی وسط و انواع مخروطی‌ها در هندسه آفینی را بیان کُنیم.

هندسه‌ی آفینی

نقاط آرمانی: نقاط مخروطی مطلق $\mathscr{C}$: $x_3=0$.

نقاط (عادی) : نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی ناواقع بر $\mathscr{C}$.

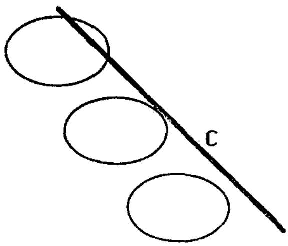
خطوط : همه‌ی خطوط صفحه‌ی تصویری حقیقی به جز خط $x_3=0$.

تعاریف آفینی

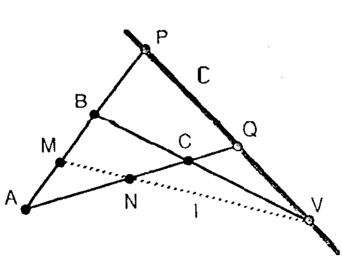
آ ۱. دو خط آفینی موازی‌اند؛ اگر خطوط تصویری نظیرشان در نقاط آرمانی متقاطع باشند.

آ ۲. M نقطه‌ی وسط AB است؛ اگر $H(AB,PM)$ که در آن P نقطه‌ی آرمانی خط AB است.

آ ۳. یک مخروطی نقطه‌ای عبارت است از یک هذلولوی، سهمی یا بیضی برحسب این‌که شامل دو، یک یا بدون نقطه‌ی آرمانی حقیقی باشد (شکل ۴۷-۴). مرکز یک مخروطی، قطب خط آرمانی نسبت به مخروطی است. قطبی هر نقطه آرمانی نسبت به مخروطی یک قطر مخروطی است. مماس به یک مخروطی در یک نقطه‌ی آرمانی را یک مجانب می‌نامند.



شکل ۴۷-۴



شکل ۴۸-۴

این تعاریف و قضایای هندسه‌ی تصویری می‌تواند برای بررسی تعدادی از خواص آفینی از جمله خاصیت زیر مورد استفاده واقع شود.

خاصیت آ ۱. خطی که اوساط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم، موازی است.

اثبات. گیریم M نقطه‌ی وسط AB در ΔABC و همچنین l موازی منحصر به فرد با BC مار بر M باشند (تمرین ۱۶). می‌خواهیم نشان دهیم $N=l.AC$ نقطه‌ی وسط AC است (شکل ۴۸-۴). گیریم $P=AB.\mathscr{C}$ در این صورت، بنابر تعریف آ ۲، مجموعه‌ی هم‌ساز $H(AB,PM)$ را داریم. فرض کنیم $V=BC.\mathscr{C}$؛ آن‌گاه $l=MV$. سرانجام فرض کنیم $Q=AC.\mathscr{C}$. باید نشان دهیم $H(AC,QN)$، پس از توجه به $ABPM\overset{V}{\barwedge}ACQN$ این مطلب نتیجه می‌شود؛ چراکه مجموعه‌های هم‌ساز تحت پرسپکتیوی‌ها حفظ می‌شوند. بنابراین، N نقطه‌ی وسط AC خواهد بود.

برای حصول هندسه تشابهی؛ لازم است که بتوانیم تعریفی برای خطوط متعامد بیاوریم. این کار در هندسه‌ی هذلولوی و بیضوی تک با استفاده از قطبیت مطلق انجام شد. چون مخروطی مطلق تعیین‌کننده‌ی صفحه‌های آفینی و تشابهی تبهگن می‌باشد، هیچ قطبیت مطلق وابسته‌ای وجود ندارد؛ ولیکن، می‌توان برای استفاده به جای قطبیت مطلق یک برگشت بیضوی مطلق (یعنی تصویری‌ای مانند T به طوری که $T^{2}=I$) روی $x_3=0$ معرفی کرد. این تصویری مطلق بدون نقطه‌ی ناورداست، چراکه بیضوی بوده، ولی زوج‌های نقاط را تعویض می‌کند [یعنی، اگر $T(P)=Q$ آن‌گاه $T(Q)=P$] زیرا یک برگشت است. تصویری‌ای که ما انتخاب می‌کنیم، تصویریی است که $X(1,0,0)$ را با $Y(0,1,0)$ تعویض می‌کند.

برای نشان دادن امکان استفاده از تعریف اندازه‌ی زاویه در هندسه تشابهی، همانند آنچه در هندسه‌های نااقلیدسی استفاده شد، لازم است منظور خود از مخروطی خطی متناظر با مخروطی نقطه‌ای تبهگن $x_3=0$ را مشخص کنیم.

به‌یاد آورید که اگر یک مخروطی نقطه‌ای معادله‌ی $X^tCX=0$ را دارا باشد. آن‌گاه مخروطی خطی نظیرش معادله‌ی $uC^{-1}u^t=0$ را داراست. به طور کلی مخروطی مطلق ماتریس زیر را داراست.

$$C=\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{با} \quad C^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

از این‌رو مخروطی خطی وابسته به مخروطی نقطه‌ای $c[(x_1)^2+(x_2)^2]+(x_3)^2=0$ عبارت است از: $(u_1)^2+(u_2)^2+c(u_3)^2=0$. در حالت درنظر گرفته شده $c=0$، خط مخروطی تبهگن نظیر، عبارت است از $(u_1)^2+(u_2)^2=0$. با فاکتورگیری خواهیم داشت: $(u_1+iu_2)(u_1-iu_2)=0$ که در آن $i^2=-1$ خطوط این مخروطی خطی همگی خطوط مار بر نقاط $I(i,1,0)$ و $J(i,-1,0)$ می‌باشند؛ هر نقطه P روی دو مماس به مخروطی مطلق؛ یعنی، PI و PJ خواهد بود. با استفاده از این دو خط، دادن تعریفی برای اندازه‌ی زاویه و قابل مقایسه با تعریف آن در هندسه‌های هذلولوی و بیضوی تک ممکن خواهد بود. این تعریف، همراه با تعریف خطوط عمود، بعداً بیان می‌شود. تعاریف آفینی‌ای که قبلاً داده شد نیز در هندسه‌ی تشابهی به‌کار می‌رود، چراکه برحسب همان مخروطی مطلق تعریف شده و با هندسه‌ی آفین یک مجموعه‌ی نقطه‌ای دارد.

هندسه تشابهی

مخروطی مطلق: $\mathscr{C}: x_3=0$ ،

تصویری مطلق: برگشت بیضوی روی $\mathscr{C}$ که $X(1,0,0)$ و $Y(0,1,0)$ را تعویض کرده و $I(i,1,0)$ و $J(i,-1,0)$ را ناوردا نگه‌می‌دارد.

نقاط آرمانی: نقاط مخروطی مطلق $\mathscr{C}$.

نقاط (عادی): نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی ناواقع بر $\mathscr{C}$.

خطوط: همه‌ی خطوط صفحه‌ی تصویری حقیقی به جز خط $x_3=0$.

تعاریف تشابهی

ت ۱. دو خط از هندسه‌ی تشابهی متعامدند؛ اگر و فقط اگر آرمانی آن‌ها تحت تصویری مطلق متناظر باشند.

ت ۲. اگر a و b خطوطی از هندسه‌ی تشابهی باشند، آنگاه اندازه‌ی زاویه عبارت است از:

$$m_s(\angle(a,b))=k\ ln(R(a,b,p,q))$$

که در آن p و q مماس‌های به $\mathscr{C}$ از $a.b$ بوده و ln نمایش لگاریتم طبیعی است.

با استفاده از این تعاریف بررسی خاصیتی آشنا از هندسه‌ی تشابهی نیز ممکن خواهد بود.

خاصیت ت ۱. دو خط $U(u_1,u_2,u_3)$ و $V(v_1,v_2,v_3)$ متعامدند؛ اگر و فقط اگر $u_1v_1+u_2v_2=0$.

اثبات. خط $U(u_1,u_2,u_3)$ دارای نقطه آرمانی $U(-u_2,u_1,0)$ است که نسبت به X و Y دارای پارامترهای همگن $(-u_2,u_1)$ می‌باشد. با استفاده از این نمایش ماتریسی نسبت به این نقاط پایه، می‌توان U' نگار U تحت تصویری مطلق را به صورت زیر به دست آورد (تمرین ۵):

$$sU' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U$$

بنابراین U' دارای پارامترهای همگن (u_1,u_2) بوده و در نتیجه مختصات همگن آن عبارت است از: $(u_1,u_2,0)$. خطوط عمود به u عبارتند از خطوطی که U' نقطه‌ی آرمانی آن‌هاست، اما این خطوط، عبارتند از: خطوط $V(v_1,v_2,v_3)$ که در آن $v_1u_1+v_2u_2=0$. □

بعد از توجه بسیار زیادی که برای حصول تعاریف تعامد و اندازه زاویه برای

هندسه‌ی تشابهی و از این رو برای هندسه‌ی اقلیدسی انجام داده‌ایم، واضح خواهد بود که بررسی هندسه‌ی اقلیدسی به عنوان یک زیرهندسه‌ی هندسه‌ی تصویری از بررسی هندسه‌های ناآشناتر هذلولوی و بیضوی تک به این عنوان مشکل‌تر می‌باشد؛ این امر، باعث افزایش سختی نتایج است؛ چراکه مخروطی مطلقی که برای تعیین مجموعه نقطه‌ای هندسه آفینی، تشابهی و اقلیدسی استفاده شده یک خط است تا این‌که مخروطی تعیین شده با یک قطبیت باشد. برای حصول هندسه تشابهی، مجبور شدیم برگشتی بیضویی روی خط آرمانی تعریف کنیم برای حصول هندسه اقلیدسی به عنوان زیرهندسه‌ی، هندسه‌ی تشابهی می‌بایست یک متر (یعنی، یک تابع فاصله) معرفی کرد. بنابراین، هندسه‌ی اقلیدسی می‌تواند به عنوان یک هندسه متریک برپایه‌ی یک برگشت بیضوی بر خط آرمانی توصیف شود.

در آخر، خواهیم دید که می‌توان بحث این بخش را با به‌کار بردن صفتی اضافی در توصیف هندسه‌ی اقلیدسی مختصر کرد. این صفت، مشخصه‌ای برپایه زیر توصیف می‌کند: (۱) هر خط در صفحه اقلیدسی یک نقطه‌ی آرمانی حقیقی دارد؛ (۲) هر خط در صفحه‌ی هذلولوی دو نقطه‌ی آرمانی حقیقی دارد؛ و (۳) هر خط در صفحه‌ی بیضوی تک بدون نقاط آرمانی حقیقی است. این باید یادآور تعریف انواع مُخروطی‌های نقطه‌ای در صفحهٔ آفین باشد. در آن‌جا یک مخروطی را یک سهموی، یک هذلولوی، یا یک بیضوی می‌نامند، برحسب این‌که شامل یک، دو یا صفر نقطه‌ی آرمانی باشد. بدین ترتیب، دو هندسه‌ی نااقلیدسی به گونه‌ای مناسب و مقتضی هذلولوی و بیضوی نامیده می‌شوند. همچنین، هندسه‌ی اقلیدسی را می‌توان به عنوان یک هندسه‌ی سهموی طبقه‌بندی کرد؛ روابط بین این هندسه‌ها در قسمت بعد خلاصه شده است.

زیرهندسه‌های هندسه تصویری مسطحه

هندسه‌ی تصویری حقیقی

مجموعه‌ی نقطه‌ای: نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی

(کلاس‌های هم‌ارزی به فرم $\{x_1, x_2, x_3\}$)

تبدیلات: هم‌خطی‌ها

هندسه هذلولوی	هندسه آفینی	هندسه بیضوی تک
نقاط: نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی‌دردرون مخروطی‌مطلق $[(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2=0]$	نقاط: نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی ناواقع بر مخروطی مطلق $(x_3=0)$	نقاط: همه‌ی نقاط صفحه‌ی تصویری حقیقی

تبدیلات: آفینی‌ها

هندسه تشابهی

نقاط: نقاط صفحه‌ی آفینی

تبدیلات: تشابهی‌ها

هندسه اقلیدسی

نقاط: نقاط صفحه‌ی آفینی

تبدیلات: طولپای‌ها

تمرین:

۱- بررسی کنید که مجموعه‌ی هم‌خطی‌هایی که مخروطی مفروض $\mathscr{C}$ را ناوردا نگه می‌دارند، تشکیل گروه می‌دهند.

۲- بیان کنید چرا خطوط فراموازی نمی‌توانند در هندسه آفینی یا هندسه‌ی بیضوی تک تعریف شوند.

۳- بررسی کنید که هم‌خطی‌هایی که $x_3=0$ را ناوردا نگه‌می‌دارند آفینی‌هایی توصیف شده در بخش ۹-۳ می‌باشند.

۴- اگر $A(0,0,1)$ و $B(1,0,1)$ نقاطی از صفحه‌ی آفینی باشند، با استفاده از تعریف آ۲، مختصات نقطه‌ی وسط AB را بیابید.

۵- نشان دهید ماتریس تصویری مطلقی که در تعریف هندسه‌ی تشابهی استفاده شد، عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

[راهنمایی: تمرین ۹ در بخش ۸-۴ را ببینید.]

۶- نشان دهید آفینی‌هایی که تصویری مطلق مورداستفاده در تعریف هندسه تشابهی را حفظ می‌کنند، عبارتند از: تشابهی‌های توصیف شده در بخش ۸-۳ می‌باشند. [راهنمایی: اگر $S(P)=P'$ که S تصویری مطلق با ماتریس داده شده در تمرین ۵ و T یک آفینی باشد، شرایطی را بیابید که تحت آن‌ها برای هر نقطه‌ی P روی خط آرمانی $S(T(P))=T(P')$.]

۷- نشان دهید تشابهی‌هایی که همچنین تبدیلاتی هم‌مساحتی باشند همان طولپای‌های صفحه‌ی اقلیدسی هستند (تمرین ۱۳ در بخش ۹-۳ را ببینید).

۸- نشان دهید در حالتی که $a.b=Z(۰,۰,۱)$ باشد، تعریف اندازه‌ی زاویه که در هندسه‌ی تشابهی از آن استفاده شد، همان مقدار تعریف ۴-۳ در بخش ۲-۳ را خواهد داد؛ در صورتی که $k=-\frac{i}{۲}$ که در آن $i^{۲}=-۱$

با استفاده از تعاریف، خواص مناسبی که در این بخش فهرست شده‌اند، همراه با قضایایی از هندسه‌ی تصویری، هریک از نتایج زیر در هندسه‌های هذلولوی، بیضوی تک، آفینی و تشابهی را بررسی کنید.

هندسه‌ی هذلولوی

۹- هردو نقطه، خط منحصر به فردی را مشخص می‌کنند.

۱۰- هر دو خط متمایز حداکثر یک نقطه را مشخص می‌کنند.

۱۱- دقیقاً دو خط موازی جهت‌دار با l از نقطه P ناواقع بر l می‌گذرند.

۱۲- مار بر یک نقطه‌ی مفروض دقیقاً یک خط عمود بر خطی مفروض موجود است.

هندسه بیضوی تک

۱۳- دو نقطه یک خط منحصر به فرد را مشخص می‌کنند.

۱۴- دو خط یک نقطه‌ی منحصر به فرد را مشخص می‌کنند.

۱۵- همه‌ی خطوط عمود به خطی مفروض در نقطه‌ای به نام قطب آن خط هم‌رسند.

هندسه‌ی آفینی

۱۶- مار بر نقطه‌ی مفروض P ناواقع بر خط مفروض m دقیقاً یک خط موازی m موجود است.

۱۷- دو خط متمایز و موازی با یک خط با یکدیگر موازی‌اند.

۱۸- اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند.

۱۹- میانه‌های یک مثلث هم‌رسند. [راهنمایی: از مثلث‌های پرسپکتیو استفاده کنید.]

۲۰- یک هذلولی مرکزی دارد که یک نقطه‌ی بیرونی است، یک بیضی مرکزی دارد که یک نقطه‌ی درونی است، یک سهمی مرکزی دارد که روی مخروطی مطلق است و بدین ترتیب، در صفحه آفینی هیچ مرکزی ندارد.

۲۱- هذلوی‌ها تنها مخروطی‌های صفحه‌ی آفینی هستند که مجانب دارند. سهمی‌ها تنها یک مجانب به نام خط آرمانی دارند که در صفحه‌ی آفینی نیست.

۲۲- قطرهای یک مخروطی از مرکز می‌گذرند.

۲۳- مخروطی $X^tCX=0$ برحسب این‌که $(c_{12})^2-c_{11}c_{22}$ بزرگ‌تر از صفر، مساوی صفر یا کوچک‌تر از صفر باشد، یک هذلوی، سهمی یا بیضی است.

هندسه تشابهی

۲۴- خطی منحصر به فرد عمود بر یک خط مفروض و مار بر یک نقطه‌ی مفروض موجود است.

۲۵- خطی عمود بر یکی از دو خط موازی بر دیگری نیز عمود است.

۲۶- خطوط عمود به یک خط با یکدیگر موازی‌اند.

۲۷- ارتفاع‌های یک مثلث هم‌رسند. [راهنمایی: اولاً به یاد آورید که یک ارتفاع از ΔABC خطی مار بر رأس A و عمود بر BC است؛ ثانیاً فرض کنید مثلث شما ΔABC باشد که $A(0,0,1)$، $B(1,0,1)$ و $C(a,b,1)$]

۴-۱۳. پیشنهاد برای مطالعه‌ی بیش‌تر:

Coxeter, H.S.M (1957). *Non-Euclidean Geometry*, 3rd ed. Toronto: University of Toronto Press. (Includes a detailed presentation of Euclidean and non-Euclidean geometries as subgeometries of projective geometry.)

Coxeter, H.S.M (1961). *The Real Projective Plane*, 2nd ed. Cambridge: The University Press. (A primarily synthetic presentation restricted to the real plane, it includes the development of affine geometry.)

Coxeter, H.S.M (1987). *Projective Geometry*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag. (A classic text containing a detailed development of this geometry.)

Dorwart, H. (1966). *The Geometry of Incidence.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. (An expository overview of projective geometry.)

Kline, M. (1968). Projective Geometry. *In Mathematics in the Modern World: Readings from Scientific American, pp.* 120-127. San Francisco: W.H. Freeman. (A short, easy-to-read introduction.)

Meserve, B.E. (1983). *Fundamental Concepts of Geometry.* New York: Dover. [Chapters 5 and 8 give a more detailed presentation of the material in Section 4.12.)

Mihalek, R.J. (1972). *Projective Geometry and Algebraic structures.* New YorK: Academic Press. (A detailed presentation emphasizing the interrelation between geometry and algevra.]

Pedoe, D. (1963). *An Introduction to Projective Geometry,* Oxford: Pergamon Press. (Contain an extensive treatment of the theorems of

Desargues and Pappus.)

Penna, M.A. and Patterson, R.R. (1986). *Projective Geometry and its Applications to Computer Graphics.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Seidenberg, A. (1962). *Lectures in Projective Geometry.* New York: Van Nostrand Reinhold. (The initial chapter introduces the major concepts in a fairly naive form; the remaining chapters develop the subject from axioms.)

Stevenson, F.W. (1972). *Projective Planes.* San Francisco: W.H. Freeman.

Tuller, A. (1967). *Modern Introduction to Geometries.* New York: Van Nostrand Reinhold. (Usess matrix representations of the projective transformations.)

Wylie, C.R.Jr. (1970). *Introduction to Projective Geometry.* New York: McGraw-Hill. (Contains both analytic and axiomatic developments.)

Young, J.W. (1930). *Projective Geometry.* The Carus Mathematical Monographs, No. 4. Chicago: Open Court Publishing Co. (for the M.A.A.). (Develops concepts intuitively first and then incorporates metric properties and group concepts.)

منابعی برای مطالعه تاریخ هندسه‌ی تصویری

Bronowski, J. (1974). The music of the spheres. In: *The Ascent of Man,* pp. 155-187. Boston: Little, Brown. This chapter is the companion to the 52-minute episode of the same name in *The Ascent of Man* television series.

Edgerton, S.Y. (1975). *The Renaissance Rediscovery of Linear Perspective.* New York: Basic Books.

Ivins, W.M. (1964). *Art and Geometry: A Study in Space Intuitions.* New York: Dover.

Kline, M. (1963). *Mathematics: A Cultural Approach.* Reading, MA: Adison-Wesley.

Kline, M. (1968). Projective Geometry. In: *Mathematics in the Modern World: Readings from scientific American*, pp. 120-127. San Francisco: W.H.Freeman.

Pedoe, D. (1983). *Geometry and the Visual Arts.* New York: Dover.

پیشنهاد برای مطالعه‌ی اجمالی

Central Perspectivities (1971; 13.5 min). Demonstrates perspectivities and projectivities with flashing dots and lines. Produced by the College Geometry Project at the University of Minnesota. Available from International Film Bureau, 332 South Michigan Avenue, Chicago, IL 60604.

Projective Generation of Conics (1971; 16 min). Illustrates four methods of constructing point conics and demonstrates their logical equivalence. Available from International Film Bureau, 332 South Michigan Avenue, Chicago, IL 60604.

پیوست آ

تعاریف، اصول موضوعه و ۳۰ گزاره‌ی اول کتاب اول اقلیدس[۱]

تعاریف

۱- نقطه آن است که هیچ جزء ندارد.
۲- خط درازایی است بی‌پهنا.
۳- انتهاهای هر خط نقطه‌اند.
۴- خط راست خطی است که صاف قرار می‌گیرد و نقطه‌ها بر آن قرار دارند.
۵- سطح آن است که فقط درازا و پهنا دارد.
۶- انتهاهای سطح خطند.
۷- سطح مستوی آن است که صاف قرار می‌گیرد و خط‌های مستقیم بر آن قرار دارند.
۸- زاویه‌ی مسطحه عبارت است از زاویه‌ی میل دو خط واقع در یک صفحه نسبت به یکدیگر، که یکدیگر را قطع می‌کنند و بر یک خط راست واقع نیستند.
۹- وقتی که خط‌هایی که زاویه را می‌سازند بر یک خط راست باشند، زاویه مستقیم‌الخط نامیده می‌شود.
۱۰- وقتی که خط راستی بر خط راست دیگری وارد شود و دو زاویه‌ی مجاوری که می‌سازد مساوی باشند، هریک از دو زاویه‌ی متساوی قائمه است و خطی که بر دیگری وارد شده است عمود بر آن خط نامیده می‌شود.
۱۱- زاویه‌ی منفرجه زاویه‌ای است بزرگ‌تر از زاویه‌ی قائمه.
۱۲- زاویه‌ی حاده زاویه‌ای است کوچک‌تر از زاویه‌ی قائمه.

۱- چاپ با اجازهٔ انتشارات دانشگاه کمبریج از کتاب

The Thirteen Books of Euclid's Elements, 2nd ed, pp. 154-155(1956) Translated by Sir Thomas L. Heath. New York: Dover

۱۳- مرز آن است که حد هر چیز است.
۱۴- شکل آن است که مشمول در یک مرز یا چند مرز باشد.
۱۵- دایره شکل مسطحی است مشمول در یک خط چنان‌که همه‌ی خط‌های راستی که از یک نقطه از نقاط واقع در درون دایره به نقاط آن خط منتهی می‌شوند با یکدیگر برابرند.
۱۶- و آن نقطه را مرکز دایره گویند.
۱۷- قطر هر دایره خط راستی است که بر مرکز دایره بگذرد و در دو طرف به محیط دایره محدود شود، و چنین خط راستی دایره را هم نصف می‌کند.
۱۸- نیم‌دایره، شکلی است محدود بین قطر و محیط دایره که به وسیله‌ی آن قطر جدا شده است، مرکز نیم‌دایره همان مرکز دایره است.
۱۹- شکل‌های مستقیم‌الخطوط آن‌هایی هستند که به خط‌های راست محدود شده‌اند. شکل سه‌پهلو آن است که به سه خط محدود شده باشد. شکل چهارپهلو به چهار خط و شکل چندپهلو به بیش‌تر از چهار خط محدود شده‌اند.
۲۰- از شکل‌های سه‌پهلو مثلث متساوی‌الاضلاع آن است که سه ضلعش با هم برابر باشند؛ مثلث متساوی‌الساقین آن است که تنها دو ضلعش با هم برابر باشند؛ مثلث نامشخص سه ضلع نابرابر دارد.
۲۱- علاوه بر این از شکل‌های سه‌پهلو، مثلث قائم‌الزاویه آن است که یک زاویه‌ی قائمه دارد. مثلث منفرجه‌الزاویه آن است که یک زاویه‌ی منفرجه دارد؛ مثلث حادالزاویه آن است که هرسه زاویه‌اش حاده باشند.
۲۲- از شکل‌های چهارپهلو مربع آن است که هم ضلع‌هایش با هم برابر و هم زوایایش قائمه باشند؛ مستطیل آن است که زاویه‌هایش قائمه باشند؛ اما ضلع‌هایش برابر نباشند؛ لوزی آن است که اضلاعش برابر باشند؛ اما زاویه‌هایش قائمه نباشند؛ متوازی‌الاضلاع، آن است که ضلع‌های روبه‌رویش با هم، و زاویه‌های روبه‌رویش نیز با هم مساوی باشند؛ اما نه متساوی‌الاضلاع باشد و نه قائم‌الزاویه؛ چهارضلعی‌های غیر از این‌ها را چهارضلعی غیرمنتظم بخوانید.
۲۳- خط‌های راست متوازی خط‌هایی هستند که در یک صفحه واقعند و اگر آن‌ها را به

طور نامتناهی امتداد دهیم در هیچ طرف تقاطع نمی‌کنند.

اصول متعارف

۱- رسم خطی مستقیم از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر.
۲- امتداد دادن خط راست متناهی به صورت پیوسته به یک خط راست.
۳- رسم دایره به هر مرکز و با هر شعاع.
۴- همه‌ی زوایای قائمه با هم برابرند.
۵- اگر خط راستی دو خط راست دیگر را قطع کند و زاویه‌های داخلی که در یک طرف آن خط هستند، کم‌تر از دو قائمه باشند، اگر آن دو خط راست به طور نامحدود امتداد داده شوند، در همان طرفی که زاویه‌هایش کم‌تر از دو قائمه‌اند تلاقی می‌کنند.

مفهوم‌های متعارف

۱- چیزهایی که با یک چیز برابر باشند با یکدیگر برابرند.
۲- اگر مقدارهای متساوی به مقدارهای متساوی افزوده شوند، مجموع‌ها متساوی‌اند.
۳- اگر مقدارهای متساوی از مقدارهای متساوی کسر شوند، تفاضل‌ها متساوی‌اند.
۴- چیزهایی که بر یکدیگر منطبق شوند، با یکدیگر برابرند.
۵- کل بزرگ‌تر از هر جزء خود است.

۳۰ گزاره‌ی اول کتاب یکم اقلیدس

۱- بر روی یک خط راست متناهی مثلثی متساوی‌الاضلاع ساخته شود.
۲- بر یک نقطه (به عنوان انتهای خط) خط راستی مساوی با خط راست مفروضی قرار داده شود.
۳- هرگاه دو خط راست نامساوی داده شده باشد، بر خط بزرگ‌تر خطی مساوی

کوچک‌تر جدا شود.
۴- هرگاه دو مثلث دارای دو ضلع به ترتیب مساوی با دو ضلع باشند و زاویه‌ی بین خط‌های مساوی آن‌ها نیز مساوی باشند، قاعده‌ی یکی نیز با قاعده‌ی دیگری مساوی خواهد بود؛ دو مثلث با هم برابر خواهند بود، و بقیه‌ی زاویه‌ها به ترتیب با بقیه‌ی زاویه‌ها، یعنی، آن‌هایی که روبه‌رو هستند به ضلع‌های متساوی، مساوی خواهند بود.
۵- در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های قاعده با هم برابرند، و اگر دو ضلع مساوی امتداد داده شوند زاویه‌های زیر قاعده با یکدیگر برابر خواهند بود.
۶- اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند، ضلع‌های مقابل به زاویه‌های متساوی نیز متساوی‌اند.
۷- اگر دو خط راست بر یک خط راست (از دو انتهای آن) ساخته شوند و یکدیگر را در نقطه‌ای قطع کنند، ممکن نیست بر همان خط راست (از دو انتهایش) و در همان طرفش، دو خط راست دیگر رسم کرد که در نقطه‌ی دیگری تلاقی کنند و با دو خط قبلی به ترتیب مساوی باشند؛ یعنی هریک با خطی مساوی باشد که با آن بر یک انتها می‌گذرد.
۸- اگر دو مثلث دو ضلع به ترتیب مساوی با دو ضلع داشته باشند و قاعده هم با قاعده مساوی باشد، زاویه‌های آن‌ها که بین خط‌های راست متساوی واقعند، باهم برابرند.
۹- نصف کردن یک زاویه‌ی مستقیم‌الخطوط.
۱۰- نصف کردن یک خط راست متناهی.
۱۱- رسم خطی با زاویه‌ی قائمه بر خطی مفروض از نقطه‌ای مفروض بر این خط.
۱۲- رسم خطی مستقیم عمود به یک خط راست نامتناهی از نقطه‌ای که بر آن نیست.
۱۳- اگر خط راستی بر خط راست دیگری وارد شود یا با آن دو زاویه‌ی قائمه می‌سازد و یا دو زاویه می‌سازد که مجموعشان مساوی دو قائمه است.
۱۴- اگر بر نقطه‌ی واقع بر خط راستی دو خط راست بگذرند که در یک طرف آن خط نباشند و هردو با خط دو زاویه مجاور مساوی با دو زاویه‌ی قائمه بسازند، آن دو خط راست، با یکدیگر بر یک خط راست خواهند بود.
۱۵- هرگاه دو خط راست تقاطع کنند، زاویه‌های متقابل به رأس متساوی تشکیل می‌دهند.

۱۶- در هر مثلث اگر ضلعی امتداد داده شود، زاویه‌ی خارجی بزرگ‌تر است از هریک از دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن.
۱۷- در هر مثلث، هر دو زاویه به هر وضع با هم گرفته شوند از دو قائمه کم‌تر هستند.
۱۸- در هر مثلث، ضلع بزرگ‌تر روبه‌روی زاویه‌ی بزرگ‌تر است.
۱۹- در هر مثلث، زاویه‌ی بزرگ‌تر روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر است.
۲۰- در هر مثلث، هردو ضلع به هر وضع که با هم گرفته شوند از ضلع باقیمانده بزرگ‌ترند.
۲۱- اگر از دو انتهای یک ضلع مثلث دو خط رسم شوند که یکدیگر را در داخل مثلث قطع کنند، خط‌های مستقیمی که به این نحو ساخته می‌شوند از دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌ترند؛ اما زاویه‌ی بزرگ‌تری تشکیل می‌دهند.
۲۲- با سه خط راست، که با سه خط راست مفروض مساوی باشند مثلثی ساخته خواهد شد؛ به شرطی که دو تا از خط‌ها به هر صورت که با هم گرفته شوند از خط سوم بزرگ‌تر باشند.
۲۳- بر روی خط راستی و از یک نقطه‌ی واقع بر آن زاویه‌ای ساخته شود، مساوی با زاویه مستقیم‌الخطوط مفروض.
۲۴- اگر دو مثلث دو ضلع به ترتیب مساوی با دو ضلع داشته باشند، اما یکی از زاویه‌های بین خط‌های متساوی بزرگ‌تر از زاویه‌ی دیگر باشد، قاعده‌ی یکی بزرگ‌تر از قاعده‌ی دیگری خواهد بود.
۲۵- اگر دو مثلث دو ضلع به ترتیب مساوی با دو ضلع داشته باشند، اما قاعده‌ی یکی بزرگ‌تر از قاعده‌ی دیگر باشد زاویه‌ی بین دو ضلع یکی نیز بزرگ‌تر از دیگری خواهد بود.
۲۶- اگر دو مثلث دو زاویه‌ی به ترتیب مساوی با دو زاویه داشته باشند، و یک ضلع یکی مساوی با یک ضلع دیگری باشد، خواه ضلعی باشد که مجاور به دو زاویه‌ی متساوی است، یا ضلعی باشد که روبه‌روی یکی از دو زاویه‌ی متساوی است، ضلع‌های دیگر یکی با ضلع‌های دیگری مساوی خواهند بود و زاویه‌ی دیگر یکی نیز با زاویه‌ی دیگر، دیگری مساوی خواهد بود.

۲۷- اگر خط راستی بر دو خط راست دیگر وارد شود و زاویه‌های متبادل مساوی بسازد آن دو خط متوازی‌اند.
۲۸- اگر خط راستی بر دو خط راست وارد شود و زاویه‌ی خارجی که می‌سازد با زاویه‌ی داخلی و مقابل در همان طرف مساوی باشد، یا اگر دو زاویه‌ی داخلی در یک طرف با دو قائمه مساوی باشند، خط‌های راست با هم موازی خواهند بود.
۲۹- اگر خط راستی روی دو خط متوازی بیافتند، زاویه‌های متبادل با هم مساوی خواهند بود، زاویه‌ی خارجی با زاویه داخلی مقابل آن مساوی خواهد بود و دو زاویه‌ی داخلی در یک طرف با دو قائمه مساوی می‌شود.
۳۰- خط‌های راست موازی با یک خط راست موازی یکدیگرند.

پیوست ب

بنداشت‌های هیلبرت برای هندسه‌ی مسطحه(۱)

اصطلاحات تعریف نشده: نقطه، خط، صفحه، روی، بین، قابل انطباق

گروه I : بنداشت‌های التصاق

I-۱. بر هر دو نقطه‌ی متمایز A و B همواره خط m مار بر آن‌ها وجود دارد.

I-۲. بر هر دو نقطه‌ی متمایز A و B بیش از یک خط m مار بر آن دو وجود ندارد.

I-۳. روی هر خط حداقل دو نقطه‌ی متمایز وجود دارد، حداقل سه نقطه‌ی ناواقع بر یک خط موجودند.

I-۴. بر هر سه نقطه‌ی ناواقع بر یک خط یک و تنها یک صفحه مار بر آن‌ها وجود دارد.

گروه II : بنداشت‌های ترتیب

II-۱. اگر B نقطه‌ای بین نقاط A و C باشد، آن‌گاه A، B و C نقاط متمایز روی یک خط بوده و B بین C و A است.

II-۲. برای هر دو نقطه‌ی متمایز A و C حداقل یک نقطه‌ی B روی خط AC وجود دارد، به طوری که C بین A و B است.

II-۳. اگر A، B و C سه نقطه‌ی متمایز روی یک خط باشند، آن‌گاه تنها یکی از نقاط بین دوتای دیگر است.

۱- چاپ با اجازه از شرکت انتشاراتی *Open Court* از کتاب:

D. Hilbert, The Foundations of Geometry, 2nd ed (1921). Translated by E.J. Townsend Chicago: Open Court Publishing Co.

تعریف. بنابر تعریف پاره‌خط AB عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که بین A و B هستند. نقاط A و B نقاط انتهایی پاره‌خط نامیده می‌شوند. پاره‌خط AB همان پاره‌خط BA است.

II-۴. بنداشت پاش. گیریم A، B و C سه نقطه‌ی ناواقع بر یک خط و m خطی در صفحه‌ی A، B و C باشد که از هیچ‌یک از نقاط A، B و C نگذشته است. سپس اگر m بر نقطه‌ای از پاره‌خط AB بگذرد، آن‌گاه بر نقطه‌ای از پاره‌خط AC یا بر نقطه‌ای از پاره‌خط BC نیز خواهد گذشت.

توجه: $\text{II}-۴'$. اصل متعارف فوق را می‌توان با بنداشت دیگری به نام بنداشت جداسازی جانشین ساخت؛ این بنداشت، عبارت است از این‌که یک خط m نقاط یک صفحه را که روی m نیستند به دو مجموعه طوری تفکیک می‌کند که اگر دو نقطه X و Y در یکی از مجموعه‌ها باشند پاره‌خط XY، m را قطع نمی‌کند و اگر X و Y در دو مجموعه‌ی مختلف باشند، پاره‌خط XY، m را قطع می‌کند. در حالت اول، گفته می‌شود X و Y در یک طرف m هستند؛ در صورتی که در حالت دوم، گفته می‌شود X و Y در طرف‌های مختلف m هستند.

تعریف. نیم‌خط AB عبارت از مجموعه‌ی نقاط متشکل از نقاط بین A و B خود نقطه‌ی B و همه‌ی نقاطی مانند C که B بین A و C می‌باشد. گفته می‌شود نیم خط AB از A خارج شده است.

یک نقطه A روی خط مفروض m، m را به دو نیم‌خط تقسیم می‌کند، به طوری که دو نقطه در یک نیم‌خطند؛ اگر و فقط اگر A بین آن‌ها نباشد.

تعریف. اگر A، B و C سه نقطه‌ی ناواقع بر یک خط باشند، آن‌گاه، دستگاه سه پاره‌خط AB، BC، CD و نقاط انتهایی آن‌ها مثلث ABC نامیده می‌شود. سه پاره‌خط اضلاع و سه نقطه رؤوس مثلث نامیده می‌شود.

گروه III. بنداشت‌های قابلیت انطباق

۱-III. اگر A و B دو نقطه‌ی متمایز روی خط m باشند و اگر A' نقطه‌ای روی خط m' (نه لزوماً متمایز از m)، آنگاه برای هر نیم‌خط از m' که از A' خارج شده باشد یک و فقط یک نقطه B' روی آن وجود دارد که پاره‌خط $A'B'$ با پاره‌خط AB قابل انطباق است.

۲-III. اگر دو پاره‌خط با پاره‌خط سومی قابل انطباق باشند، آنگاه با یکدیگر قابل انطباقند (این نشان می‌دهد که قابلیت انطباق پاره‌خط‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؛ یعنی: $AB \cong AB$؛ اگر $AB \cong A'B'$ آنگاه $A'B' \cong AB$؛ و اگر $AB \cong CD$ و $CD \cong EF$ آنگاه $AB \cong EF$).

۳-III. اگر نقطه‌ی C بین A و B، همچنین C' بین A' و B' بوده و، اگر پاره‌خط $A'C'$ با پاره‌خط AC قابل انطباق بوده و پاره‌خط CB با پاره‌خط $C'B'$ قابل انطباق باشد، آنگاه پاره‌خط AB با پاره‌خط $A'B'$ قابل انطباق است.

تعریف. بنابر تعریف یک زاویه عبارت است از یک نقطه (به نام رأس) و دو نیم‌خط (به نام اضلاع زاویه) خارج شده از آن.

اگر رأس زاویه نقطه‌ی A و اگر B و C دو نقطه غیر از A روی دو ضلع زاویه باشند، از این زاویه به BAC یا CAB یا ساده‌تر زاویه A نام می‌بریم.

۴-III. اگر BAC زاویه‌ای باشد که اضلاع آن روی یک خط واقع نیستند و اگر در صفحه مفروضی، $A'B'$ نیم‌خطی خارج شده از A' باشد، در همان صفحه یک و فقط یک نیم‌خط $A'C'$ در یک طرف مفروض خط $A'B'$ موجود است؛ به طوری که $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. خلاصه این‌که در یک طرف مفروض از نیم‌خطی داده شده در صفحه‌ای مفروض تنها به یک طریق می‌توان زاویه‌ی مفروضی را جدا کرد. هر زاویه با خودش قابل انطباق است.

تعریف. اگر ABC یک مثلث باشد، آنگاه زوایای BAC، CBA، ACB زوایای مثلث نامیده می‌شوند. گویند اضلاع AB و AC از مثلث زاویه BAC را دربر دارد.

III-۵. اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها در مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها در مثلث دیگر قابل انطباق باشد، آنگاه هر زاویه‌ی باقی‌مانده در مثلث اول با زاویه‌ی نظیر در مثلث دوم، قابل انطباق است.

گروه IV. بنداشت‌های توازی (برای صفحه)

IV-۱. **اصل متعارف پلی‌فایر.** از نقطه‌ی A ناواقع بر خط مفروض m حداکثر یک خط می‌گذرد که m را قطع نمی‌کند.

گروه V. بنداشت‌های پیوستگی

V-۱. **بنداشت اندازه (بنداشت ارشمیدس).** اگر AB و CD پاره‌خط‌های دل‌خواهی باشند، آنگاه عددی مانند n وجود دارد که چنانچه اگر CD را n بار روی نیم‌خط AB که از A خارج شده است، بگذاریم آنگاه به نقطه‌ای مانند E می‌رسیم که $n.CD=AE$ و B بین A و E است.

V-۲. **بنداشت تمامیت خطی.** دستگاه نقاط روی یک خط با روابط ترتیب و قابلیت انطباق، را نمی‌توان چنان گسترش داد که روابط موجود بین اعضا و خواص پایه‌ی ترتیب خطی و قابلیت انطباق ناشی از بنداشت‌های I تا III و V-۱ معتبر بماند.

توجه: V. این بنداشت‌ها را می‌توان با بنداشت پیوستگی ددکیند جانشین کرد. بنداشت ددکیند می‌گوید: برای هر افراز از نقاط روی یک خط به دو مجموعه‌ی ناتهی، به طوری که هیچ‌یک از نقاط یکی بین دو نقطه از دیگری نباشد، نقطه‌ای از یک مجموعه وجود دارد که بین هر نقطه‌ی دیگر از آن مجموعه و هر نقطه از مجموعه‌ی دیگر واقع است.

پیوست پ

اصول متعارف بیرخُف برای هندسه‌ی مسطحه[1]

عناصر و روابط تعریف نشده؛ (آ) نقاط A ، B ،... (ب) مجموعه‌ی نقاط موسوم به خطوط m ، n ،... (پ) فاصله‌ی بین هر دونقطه؛ $d(A,B)$که عددی نامنفی حقیقی می‌باشد؛ به طوری که $d(A,B)=d(B,A)$ ؛ (ت) زاویه‌ای با سه نقطه‌ی مرتب A، O ، B تشکیل می‌شود $(B\neq O\ ,\ A\neq O)$؛ $\angle AOB$ عددی حقیقی به پیمانه‌ی 2π. نقطه‌ی O نیز رأس زاویه نامیده می‌شود.

اصل متعارف I (اصل متعارف اندازه‌ی خطی). نقاط A، B ،... از هر خط mمی‌توانند در یک تناظر یک به یک با اعداد حقیقی xقرار گیرند؛ به طوری که برای هر نقطهٔ A، B، $|x_B-x_A|=d(A,B)$.

تعاریف. نقطه‌ی B بین Aو C $(A\neq C)$ است اگر $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$ نقاط Aو C همراه با همه‌ی نقاط بین Aو C تشکیل پاره‌خط ACرا می‌دهند. نیم‌خط m'از خط m با نقطه‌ی انتهایی Oکه با دو نقطه‌ی Oو Aتعریف می‌شود $(A\neq O)$ عبارت است از همه‌ی نقاطی از mمانند A'که Oبین Aو A'نباشد؛ اگر A، B، Cنقاط متمایزی باشند، گویند سه پاره‌خط AB ، BCو CA تشکیل مثلثی با اضلاع AB، BCو CD با رؤوس A، B، C می‌دهند. اگر A، B ، Cبر یک خط باشند گویند ΔABC تبهگن شده است.

اصل متعارف II (اصل متعارف نقطه- خط). یک و تنها یک خط mشامل دو نقطه‌ی مفروض Pو Q $(P\neq Q)$ است.

۱- چاپ با اجازه‌ی

G.D. Birkhoff, "A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractor), Annals of Mathematics 33: 329-345 (1932).

تعاریف. اگر دو خط متمایز هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را موازی نامند. یک خط، همواره با خودش موازی گرفته می‌شود.

اصل متعارف III (اصل متعارف اندازه‌ی زاویه). نیم‌خط‌های m، n،... مار بر نقطه‌ی O را می‌توان در یک تناظر یک به یک با اعداد حقیقی a (به پیمانهٔ ۲π) قرار داد، به طوری که اگر $A\neq O$ و $B\neq O$ به ترتیب نقاطی از m و n باشد اختلاف a_n-a_m (به پیمانهٔ ۲π) برابر $\angle AOB$ می‌باشد. علاوه بر این، اگر نقطه‌ی B روی n به طور پیوسته در امتداد خط r که شامل رأس O نیست، تغییر کند عدد a_n نیز به طور پیوسته تغییر می‌کند.

تعاریف. دو نیم‌خط m، n مار بر O تشکیل یک زاویه‌ی مستقیم می‌دهند، اگر $\angle mon\equiv\pi$ گویند دو نیم‌خط m، n مار بر o تشکیل یک زاویه‌ی قائمه می‌دهند اگر $\angle mon\equiv\pm\frac{\pi}{۲}$، که در این حالت، گفته می‌شود n بر m عمود است.

اصل متعارف IV (اصل متعارف تشابه). اگر در دو مثلث ΔABC، $\Delta A'B'C'$ برای ثابتی مانند $k>۰$، $d(A',B')=kd(A,B)$، $d(A',C')=kd(A,C)$ و $\angle B'A'C'\cong\pm\angle BAC$. آن‌گاه $d(B',C')=kd(B,C)$، $\angle C'B'A'\cong\pm\angle CBA$، $\angle A'C'B'\cong\pm\angle ACB$.

تعاریف. دو شکل هندسی را متشابه گویند، اگر تناظری یک به یک بین نقاط دو شکل طوری وجود داشته باشد که همه‌ی فواصل نظیر متناسب و زوایای نظیر نیز با هم معادل یا منفی یکدیگر باشند. هردو شکل هندسی متشابه با $k=۱$ قابل انطباق می‌باشند.

پیوست ت

اصول متعارف $S.M.S.G$ برای هندسه‌ی اقلیدسی[1]

اصطلاحات تعریف‌نشده: نقطه ، خط ، صفحه

اصل متعارف ۱. از هر دو نقطه‌ی مفروض متمایز دقیقاً یک خط شامل هردوی آن‌ها موجود است.

اصل متعارف ۲ (اصل متعارف فاصله). به هر زوج نقطه‌ی متمایز یک عدد مثبت منحصر به فرد نظیر می‌شود.

اصل متعارف ۳ (اصل متعارف خط‌کش). نقاط یک خط می‌توانند در یک تناظر با اعداد حقیقی قرار گیرند، به طوری که

(i) هر نقطه از خط به دقیقاً یک عدد حقیقی نظیر می‌شود.

(ii) هر عدد حقیقی به دقیقاً یک نقطه از خط نظیر می‌شود.

(iii) فاصله‌ی بین دو نقطه عبارت است از: قدرمطلق اختلاف اعداد نظیر شده به آن‌ها.

اصل متعارف ۴ (اصل متعارف استقرار خط‌کش). دو نقطه‌ی P و Q از خطی مفروضند؛ دستگاه مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که مختص P صفر و مختص Q مثبت باشد.

اصل متعارف ۵ : (آ) هر صفحه شامل حداقل سه نقطه‌ی غیرهم‌خط می‌باشد (ب) فضا شامل حداقل چهار نقطه‌ی غیرهم‌صفحه می‌باشد.

اصل متعارف ٦. اگر دو نقطه در صفحه‌ای باشند، آن‌گاه خط شامل این نقاط نیز در همان صفحه واقع است.

اصل متعارف ۷. هرسه نقطه حداقل در یک صفحه واقعند و هرسه‌نقطه‌ی غیرهم‌خط

۱- چاپ از

S.M.S.G., Geometry: Student's Text, A.C. Vroman, Pasadena CA, 1965.

دقیقاً در یک صفحه واقع می‌باشند. ساده‌تر این‌که هرسه نقطه‌ی هم‌صفحه‌اند و هرسه نقطه‌ی غیرهم‌خط یک صفحه را مشخص می‌کنند.

اصل متعارف ۸. اگر دو صفحه‌ی مختلف اشتراک داشته باشند، اشتراک آن‌ها یک خط است.

اصل متعارف ۹ (اصل متعارف تفکیک صفحه). یک صفحه و خطی در آن مفروضند؛ نقاطی از صفحه که روی خط واقع نیستند، تشکیل دو مجموعه به صورت زیر می‌دهند:

(i) هر مجموعه محدب است.

(ii) اگر P در یک مجموعه و Q در مجموعه‌ی دیگر باشد، پاره‌خط $\overline{PQ}$ آن خط را قطع می‌کند.

اصل متعارف ۱۰ (اصل متعارف تفکیک فضا). نقاطی از فضا که روی یک صفحه‌ی مفروض واقع نباشند، تشکیل دو مجموعه به صورت زیر می‌دهند:

(i) هر مجموعه محدب است.

(ii) اگر P در یکی از مجموعه‌ها و Q در مجموعه‌ی دیگر باشد، پاره‌خط $\overline{PQ}$ آن صفحه را قطع می‌کند.

اصل متعارف ۱۱ (اصل متعارف اندازه‌گیری زاویه). به هر زاویه‌ی $\angle BAC$ عددی حقیقی بین ۰ و ۱۸۰ نظیر می‌شود.

اصل متعارف ۱۲ (اصل متعارف ساختن زاویه). گیریم $\overrightarrow{AB}$ نیم‌خطی روی یال نیم‌صفحه‌ی H باشد، برای هر عدد r بین ۰ و ۱۸۰ دقیقاً یک نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ موجود است که P در H بوده و $m\angle PAB=r$

اصل متعارف ۱۳ (اصل متعارف جمع زوایا). اگر D نقطه‌ای درون $\angle BAC$ باشد، آن‌گاه

$$m\angle BAC=m\angle BAD+m\angle DAC$$

اصل متعارف ۱۴ (اصل متعارف تکمیل). اگر دو زاویه تشکیل یک زوج خطی دهند آن‌گاه مکمل هستند.

اصل متعارف ۱۵ (اصل متعارف ض ز ض). تناظری بین دو مثلث (یا بین یک مثلث و خودش) مفروض است. اگر دو ضلع و زاویه‌ی مشمول آن‌ها در مثلث اول با اجزای نظیر در مثلث دوم قابل انطباق باشد، آن‌گاه تناظر، یک قابلیت انطباق است.

اصل متعارف ۱٦ (اصل متعارف توازی). از یک نقطه خارج یک خط حداکثر یک خط به موازات خط مفروض وجود دارد.

اصل متعارف ۱۷. به هر ناحیهٔ چندضلعی یک عدد مثبت منحصر به فرد نظیر می‌شود.

اصل متعارف ۱۸. اگر دو مثلث قابل انطباق باشند، آن‌گاه نواحی مثلثی مساحتی‌های یکسان دارند.

اصل متعارف ۱۹. فرض کنید ناحیه‌ی R اجتماع نواحی $R_۱$ و $R_۲$ باشد، همچنین $R_۱$ و $R_۲$ حداکثر در تعداد متناهی پاره‌خط و نقطه مشترک باشند، آن‌گاه مساحت R مجموع مساحت‌های $R_۱$ و $R_۲$ می‌باشد.

اصل متعارف ۲۰. مساحت مستطیل عبارت است از: حاصل‌ضرب طول قاعده‌ی آن در طول ارتفاعش.

اصل متعارف ۲۱. حجم یک مکعب مستطیل عبارت است از: حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده.

اصل متعارف ۲۲ (اصل کاوالیری[۱]). دو جسم و یک صفحه مفروضند. اگر این دو جسم، توسط هر صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی مفروض در نواحی هم‌مساحت قطع شوند، آن‌گاه دو جسم هم‌حجمند.

1. Cavalieri's Principle

پیوست ث

بعضی تعاریف $S.M.S.G$ برای هندسه‌ی اقلیدسی[1]

۱- فاصله بین دو نقطه عدد مثبتی است که با اصل متعارف فاصله (اصل متعارف ۲) داده شده است. اگر نقاط P و Q باشد، آن‌گاه فاصله آن‌ها با PQ نشان داده می‌شود.
۲- تناظری که مختصراً در اصل متعارف ۳ توصیف شد یک دستگاه مختصات برای خط نامیده می‌شود و عددی که به یک نقطه نظیر می‌شود، مختص آن نقطه نامیده می‌شود.
۳- B بین A و C است اگر (۱) A و B و C نقاط متمایز یک خط بوده و (۲) $AB+BC=AC$
۴- برای هر دو نقطه‌ی A و B پاره‌خط $\overline{AB}$ عبارت است از: مجموعه‌ی نقاط A، B همراه با همه‌ی نقاطی که بین A و B هستند. نقاط A و B را نقاط انتهایی پاره‌خط $\overline{AB}$ می‌نامند.
۵- فاصله‌ی AB طول پاره‌خط $\overline{AB}$ نامیده می‌شود.
۶- گیریم A و B نقاطی روی خط L باشند. نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ عبارت از اجتماع (۱) پاره‌خط $\overline{AB}$ و (۲) مجموعه‌ی همه نقاطی مانند C به طوری که B بین A و C باشد. نقطه‌ی A را نقطه‌ی انتهایی $\overrightarrow{AB}$ می‌نامند.
۷- اگر A بین B و C باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را نیم‌خط‌های متقابل نامند.
۸- نقطه‌ی B نقطه‌ی وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ نامیده می‌شود؛ اگر B بین A و C بوده و $AB=BC$
۹- گویند نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط آن را نصف می‌کند؛ کلی‌تر این‌که گویند: هر شکلی که اشتراک آن با پاره‌خطی نقطه‌ی وسط پاره‌خط باشد پاره‌خط را نصف کرده است.
۱۰- مجموعه‌ی همه‌ی نقاط فضا نامیده می‌شود.
۱۱- یک مجموعه از نقاط را هم‌خط گوییم، اگر خطی شامل همه‌ی نقاط آن مجموعه

۱- چاپ از

S.M.S.G., Geometry: Student's Text, A.C. Vroman, Pasadena CA, 1965.

موجود باشد.

۱۲- یک مجموعه از نقاط را هم‌صفحه گوییم، اگر صفحه‌ای شامل همه‌ی نقاط آن مجموعه موجود باشد.

۱۳- مجموعه‌ی A را محدب خوانند، اگر برای هر دو نقطه‌ی P، Q از A، تمام پاره‌خط $\overline{PQ}$ در A واقع باشد.

۱۴- خط L و صفحه‌ی E شامل آن مفروضند، هریک از دو مجموعه‌ی مشخص شده در اصل متعارف ۹ را نیم‌صفحه خوانده و L را یال هریک از آن‌ها نامیم. گوییم L، E را به دو نیم‌صفحه تفکیک می‌کند؛ اگر دو نقطه‌ی P و Q در E و در یک نیم‌صفحه واقع باشند، گوییم آن‌ها در یک طرف L قرار دارند؛ اگر P در یکی از نیم‌صفحه‌ها و Q در نیم‌صفحه‌ی دیگر باشد، گوییم در طرف متقابل L هستند.

۱۵- دو مجموعه‌ی مشخص شده در اصل متعارف ۱۰ نیم‌فضا نامیده شده و نیم‌صفحه‌ی مفروض وجه هریک از آن‌ها نامیده می‌شود.

۱۶- یک زاویه عبارت است از دو نیم خط که نقطه‌ی انتهایی یکسانی دارند؛ ولیکن، روی یک خط واقع نیستند. دو نیم‌خط را اضلاع زاویه و نقطه‌ی مشترک انتهایی را رأس زاویه می‌نامیم.

۱۷- اگر A، B و C سه نقطه‌ی غیرهم‌خط باشد، آنگاه اجتماع پاره‌خط‌های $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ یک مثلث نامیده شده و با ΔABC نشان داده می‌شود، نقاط A، B و C رؤوس مثلث و پاره‌خط‌های $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ اضلاع آن نامیده می‌شوند. هر مثلث سه زاویه را مشخص می‌کند: مثلث ΔABC زوایای $\angle BAC$، $\angle ABC$ و $\angle ACB$ را مشخص می‌کند که زوایای ΔABC خوانده می‌شود.

۱۸- گیریم $\angle BAC$ زاویه‌ای باشد که در صفحه‌ی E قرار دارد. نقطه‌ی P از E درون $\angle BAC$ است، هرگاه (۱) P و B در یک طرف خط $\overleftrightarrow{AC}$ بوده و (۲) P و C در یک طرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ باشند. خارج زاویه‌ی $\angle BAC$ مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی از E هستند که درون و روی خود زاویه نباشند.

۱۹- یک نقطه در درون یک مثلث واقع است، اگر در درون همه‌ی زوایای مثلث باشد. یک نقطه خارج از مثلث است، اگر در صفحه‌ی مثلث بوده، ولی نقطه از مثلث یا نقطه‌ی

درونی آن نباشد.

۲۰- عدد مشخص شده در اصل متعارف ۱۱ اندازه‌ی زاویه نامیده می‌شود و به صورت $m\angle BAC$ نوشته خواهد شد.

۲۱- اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نیم‌خط‌های متقابلی بوده و $\overrightarrow{AD}$ نیم‌خط دیگری باشد، آن‌گاه $\angle BAD$ و $\angle DAC$ تشکیل یک زوج خطی می‌دهند.

۲۲- زوایا قابل انطباقند، هرگاه هم‌اندازه باشند؛ پاره‌خط‌ها قابل انطباقند، هرگاه هم‌اندازه باشند.

۲۳- تناظر $ABC\Leftrightarrow DEF$ بین رؤوس دو مثلث مفروض است، اگر هر زوج از اضلاع و زوایای نظیر قابل انطباق باشند، آن‌گاه تناظر $ABC\Leftrightarrow DEF$ یک قابلیت انطباق بین دو مثلث است.

۲۴- اگر مجموع اندازه‌ی دو زاویه ۱۸۰ باشد آن‌ها را مکمل نامیم و هریک را تکمیل‌کننده‌ی دیگری می‌خوانیم.

۲۵- اگر دو زاویه از یک جفت خطی هم‌اندازه باشند، هریک از زوایا یک زاویه‌ی قائمه می‌باشد.

۲۶- دو مجموعه‌ی متقاطع که هرکدام یک خط، نیم‌خط و یا یک پاره‌خط هستند، متعامد می‌باشند، هرگاه دو خطی که شامل آن‌ها هستند زاویه‌ای قائمه پدید آورند.

۲۷- عمودمنصف پاره‌خطی در یک صفحه، خطی در آن صفحه است که بر آن پاره‌خط عمود بوده و شامل نقطه‌ی وسط آن باشد.

پیوست ج

قضیه ز - ض - ز

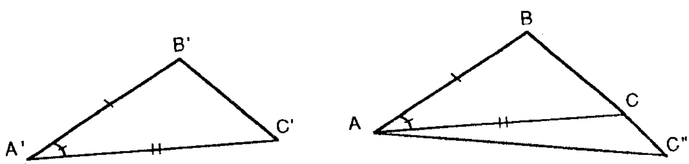
قضیه. اگر در مثلث‌های ناتبهگن ΔABC و $\Delta A'B'C'$ داشته باشیم $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$، $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ و $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، آنگاه $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ ، $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ و $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

اثبات این قضیه به ترتیب در سه دستگاه بنداشتی هیلبرت، بیرخف و .S.M.S.G آمـده است.

اثبات I (براساس بنداشت‌های هیلبرت). با اثبات لم زیر شروع می‌کنیم:
لم. اگر در مثلث‌های ناتبهگن ΔABC ، $\Delta A'B'C'$ داشته باشیم $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$، $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ و $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ ؛ آنگاه $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ، $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ و $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.
اثبات. گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ همان‌گونه باشند که در فرض لم آمده است، آنگاه بنابر بـــنداشت III-۳، $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ و $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. از ایـــن‌رو، فـقط اثـبات $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ باقی است.

روی نیم‌خط $\overrightarrow{BC}$، C'' را طوری می‌یابیم که $\overline{BC''} \cong \overline{B'C'}$ (III-۱) و AC'' را می‌سازیم (I-۱) (شکل ج-۱). اگر $C=C''$ آنگاه $\overline{BC''} \cong \overline{BC}$ و از این‌رو $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

اگر $C \neq C''$، چون ΔABC و $\Delta A'B'C'$ ناتبهگن هستند، سه نقطه‌ی B ، C و C'' متمایز می‌باشند. علاوه بر این، چون C'' روی نیم‌خط $\overrightarrow{BC}$ است یا C بین B و C'' است و یا C'' بین B و C است.



شکل ج-۱

حالت ۱. C بین B و C'' است. چون $\overline{AB}\cong\overline{A'B'}$، $\overline{BC}\cong\overline{B'C'}$ و $\angle ABC\cong\angle A'B'C'$، $\angle C''AB\cong\angle C'A'B'$ (III-۵). ولیکن $\angle C'A'B'\cong\angle CAB$. بدین ترتیب: $\angle C''AB\cong\angle CAB$[۱]. بنابر (III-۴) نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$=نیم‌خط $\overrightarrow{AC''}$ و از این‌رو $\overline{AC''}=\overline{AC}$ (I-۱). بنابراین C و C' هریک هم روی AC و هم روی BC قرار دارند بنابراین $C=C''$. و این یک تناقض است.

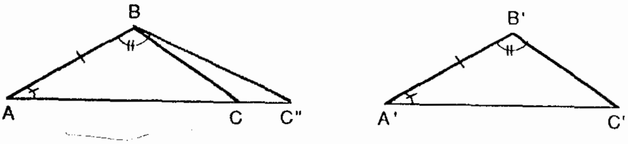
حالت ۲. C'' بین B و C است. در این حالت نیز به طریق مشابه تناقضی حاصل می‌شود و از این رو $C=C''$ و در نتیجه $\overline{BC}=\overline{B'C'}$

گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ همان‌گونه باشند که در فرض آمده است، آن‌گاه بنابر لم قبل کافی‌ست نشان دهیم $\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$ روی نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$، C'' را طوری می‌یابیم که $\overline{AC''}\cong\overline{A'C'}$ (III-۱) و BC' را می‌سازیم (I-۱). اگر $C=C'$ آن‌گاه $\overline{AC}\cong\overline{AC''}$ و از این‌رو $\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$ اگر $C\neq C''$ اثبات را می‌توان شبیه به اثبات لم دنبال کرد.

اثبات II (براساس بنداشت‌های بیرخف). گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ آن‌چنان باشند که در فرض آمد، آن‌گاه بنابر تعریف قابلیت انطباق $d(A,B)=d(A',B')$ و $\angle CAB\cong\pm\angle C'A'B'$ و $\angle ABC\cong\pm\angle A'B'C'$. فرض می‌کنیم $\angle CAB=\angle C'A'B'$ و $\angle ABC=\angle A'B'C'$ چراکه اثبات حالت‌های دیگر نیز مشابه است؛ با استفاده از اصل متعارف IV و تعریف قابلیت انطباق کافی‌ست نشان دهیم $d(A,C)=d(A',C')$ اگر $d(A,C)\neq d(A',C')$، آن‌گاه بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $d(A,C)<d(A',C')$ گیریم C'' نقطه‌ای از نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$[۲] طوری باشد که $d(A,C'')=d(A',C')$ (I)، همچنین BC'' را درنظر می‌گیریم (II). اکنون $\angle C'A'B'=\pm\angle CAB$. علاوه بر این، چون نیم‌خط $\overrightarrow{AC}$=نیم‌خط $\overrightarrow{AC''}$ (II)، بنابر (III) $\angle CAB=\angle C''AB$. بنابراین $\angle C'A'B'=\pm\angle C''AB$ علاوه بر این $d(A,C'')=d(A',C')$ و $d(A',B')=d(A,B)$ از این رو $\angle A'B'C'=\angle ABC''$ (IV). و این نتیجه می‌دهد که $\angle ABC''=\angle ABC$ بنابراین، نیم‌خط $\overrightarrow{BC}$=نیم‌خط $\overrightarrow{BC''}$ (III). بنابراین C و C'' هردو

۱- توجه کنید که نشان دادن برقراری ترایایی زوایای قابل انطباق لازم است.

۲- در این‌جا نشان دادن خوش تعریفی نماد، لازم است.



شکل ج-۲

مشمول BC و AC هستند و در نتیجه $C=C''$. و این بیانگر این است که $d(A,C)=d(A,C'')$ چون $d(A,C'')=d(A',C')$ پس $d(A,C)=d(A',C')$

اثبات III (براساس بنداشت‌های $S.M.S.G$). گیریم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ همان‌گونه باشند که در فرض قضیه آمد. بنابر اصل متعارف ۱۵ کافی‌ست نشان دهیم که $\overline{AC}\cong\overline{A'C'}$ اگر $\overline{AC}\neq\overline{A'C'}$ بنابر تعریف قابلیت انطباق پاره‌خط‌ها $\overline{AC}\ncong\overline{A'C'}$ بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $AC<A'C'$ گیریم C'' نقطه‌ای از خط AC به گونه‌ای باشد که $\overline{AC''}\cong\overline{A'C'}$ (شکل ج-۲). خط BC'' را درنظر می‌گیریم (۱). بنابر (II) داریم $m\angle CAB=m\angle C''AB$ و بنابر تعریف زوایای قابل انطباق $m\angle CAB=m\angle C'A'B'$ از این‌رو $m\angle C''AB=m\angle C'A'B'$ و در نتیجه $\angle C''AB\cong\angle C'A'B'$. علاوه بر این، بنابر تعریف پاره‌خط‌های قابل انطباق $\overline{A'C'}\cong\overline{AC''}$ و بنابر فرض $\overline{A'B'}\cong\overline{AB}$ بدین صورت، با توجه به (۱۵) $\angle ABC\cong\angle A'B'C'$؛ یعنی $m\angle ABC''=m\angle A'B'C'=m\angle ABC$ و این با توجه به (۱۲) نتیجه می‌دهد که: نیم‌خط $\overrightarrow{BC''}$=نیم‌خط $\overrightarrow{BC}$ و چون بنابر (۱)
خط AC = خط AC''، C و C'' هردو نقاطی هم از خط AC و هم از خط BC می‌باشند، از این رو $C=C''$.بدین ترتیب $\overline{AC}\cong\overline{AC''}$ و بنابراین $\overline{AC}=\overline{AC''}\cong\overline{A'C'}$.

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

Absolute consistency .... سازگاری مطلق

Affine geometry .... هندسه‌ی آفین

Axiom .... بنداشت

Axiomatic system .... دستگاه بنداشتی

Coding theory .... تئوری کدنگاری

Collinear points .... نقاط هم‌خط

Collineation .... نقاط هم‌خط

Configuration .... هم‌خطی

Congruence .... تشکّل

Coplanar .... هم‌صفحه

Correlation .... همبستگی

Cross joins .... اتصال‌های متقاطع

Cross ratio .... نسبت‌های ناهم‌ساز

Cyclic group .... گروه دوری

Deductive .... قیاسی

Defect of a triangle .... کاستی یک مثلث

Digonal .... قطری

Dihedral group .... گروه دووجهی

Dilatation .... انبساط

Dilation .... تجانس

Distance directed .... فاصله‌ی جهت‌دار

Dual .... دوگان

Elements of Euclid	اصول اقلیدس
Ellipse	بیضی
Elliptic	بیضوی
Embed	نشاندن
Error-correcting code	کد تصحیح‌کننده‌ی خطا
Frieze	کتیبه
Glide reflection	لغزه
Hyperbola	هذلولی
Hyperbolic	هذلولوی
Incidence	وقوع
Independence	استقلال
Invariant	ناوردا
Involution	برگشت
Isometry	طولپای
Parabola	سهمی
Parabolic	سهموی
Parallel	موازی
Partiy check matrix	ماتریس مقایسه‌ای تطبیقی
Pencil	دسته
Polar	قطبی
Pole	قطب
Postulates	اصول متعارف
Projective	تصویر
Projectively related	وابسته‌ی تصویری
Projectivity	تصویری
Quadrangle	چهارگوشه

چهارضلعی	*Quadrilateral*
سازگاری نسبی	*Relative consistency*
دگرکشی	*Shear*
تشابه	*Similar*
تشابهی	*Similarity*
دگروشی	*Strain*
مثلث	*Triangle*
نقاط فراآرمانی	*Ultraideal point*
فراموازی	*Ultraparallel*
نقطه‌ی فرار	*Vanishing point*
الگوی کاغذ دیواری	*Wallpaper pattern*