متغیرهای مختلط

هِرب سیلورمن

ترجمه: محسن نقشینه ارجمند

متغیرهای مختلط

هرب سیلور من

ترجمه:

محسن نقشینه ارجمند

به نام خدا

فهرست مطالب — **صفحه**

پیشگفتار مؤلف

دانشجویی که‌ظاهرا" در فرهنگ تخصصی زمان‌ما غرق شده است، به سرعت لزوم فراگیری یک رشته تخصصی را احساس می‌کند. با چنین بینشی، دیوان سالاری آموزشی ما را مجبور به تقسیم مباحثی کرده، که به نوبه خود منجر به عدم توجه به روابط متقابل آنهامی‌گردد. بدین ترتیب است که گاهی وانمود می‌کنیم، جبر خطی مقوله‌یی جدا ازجبر نوین‌است‌ویا احتمالات‌و آمار را به سادگی تفکیک می‌نماییم. و یا حتی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته را بر پایه حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی استوار نه‌پنداریم.

این کتاب با توجه به این دیدگاه نوشته شده است که یک وابستگی متقابل میان متغیرهای‌حقیقی ومختلط موجود است و در هر فرصتی می‌بایست آن را روشن نمود. گاهی موضوعی را در متغیرهای حقیقی بررسی می‌کنیم و سپس آنرا در مورد متغیرهای مختلط تعمیم می‌دهیم، و گاهی با مطلبی از متغیرهای مختلط شروع می‌کنیم و سپس آن را برای مورد حقیقی‌اش بررسی می‌کنیم. هر دوروش ــ تعمیم و تخصیص ــ شایستگی بررسی دقیق را دارند.

تصور بر این است که فهم اعداد "مختلط" مشکل است، و واحدهای "انگاری "هم در پوشش ابهام‌انگیزی جا دارند. امیدواریم که با دوری نگرفتن از هیات اعداد حقیقی بتوانیم‌براین کلمه‌یاس‌آفرین، که ناگزیر از استعمال آن‌هم هستیم، چیره گردیم. مؤلف آرزو دارد تاثیری فزاینده ایجاد کند، که ابتداء خواننده را قادر سازد، تا دانش خود را در حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌کار گیرد، تا بتواند مسائل متغیرهای مختلط را بهتر درک نموده و سپس با بینش جدیدش از متغیرهای مختلط، درمباحث حساب‌دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مسلط گردد.

هم‌چنین ،هرجاکه ممکن باشد ، مشخصات تحلیلی و هندسی یک مطلب را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد . این‌کار طبعا" ما را به بحث در مورد "دقت" می‌کشاند . اکنون رسم بر آن است ، هر چه تحلیلی است دقیق محسوب می‌شود ، و اگر هندسی است کم دقت به حساب می‌آید . این دوگانگی موجب شده است که برخی نویسندگان را ، به قیمت صرفنظر کردن از معنای غنی هندسی ، به سمت "دقت" سوق دهد و برخی دیگر ، که پیرو " مکتب شهودی" هستند ، در حل‌مسائل از روش‌های هندسی استفاده نمایند ، و در نتیجه امکانات موجود در روش‌های تحلیلی را نادیده بگیرند . ازنظر ما دقت ، فقط آنجا که روشنگرباشد و نه ابهام‌انگیز ، مفید است . به همین دلیل ما از هندسه برای نمایش وتوصیف موضوعات تحلیلی استفاده می‌کنیم و آنالیز را برای روشن ساختن مفاهیم هندسی به‌کار می‌گیریم ،و در مورد این که کدام دقیق‌تر است تامل نخواهیم کرد .

گاهی اوقات ، برای ایجاد انگیزه ، قبل از بیان قضیه بحث کوتاهی مطرح می‌شود . گاهی هم به منظور فهم هر چه بیشتر قضیه ، بلافاصله پس از اثبات قضیه ، ملاحظات و نتایج گوناگون آن رابررسی‌خواهیم‌کرد . هیچگونه پوزشی هم بابت این پرحرفی‌هاضرورت ندارد ،زیرادرمباحث‌ریاضی ، که ریزه‌کاری‌های فراوان دارد ، همیشه ایجاز در کلام‌ضروری نیست .به‌منظورشناخت ارتباط میان روشهای‌مختلف و تشخیص اهمیت این ارتباط، بعضی از قضایا را به روش‌های مختلف اثبات کرده‌ایم . در این کتاب قبل از اینکه سعی کنیم به مرزهای دانش ریاضی توجه داشته باشیم ، بیشتر به راهی که به‌این مرز منتهی می‌شود ویا راههایی که ممکن است به آن منتهی شوند می‌اندیشیم .

سخنی‌هم درموردپرسش‌هایی‌که‌در آخر هر بخش مطرح شده است داریم . ما معتقدیم که مطالب ریاضی باید مورد سئوال قرار گیرد ــ نه تنها سازگاری و منطق درونی آن ، بلکه دلایلی که ما را به نتایج هدایت می‌کنند ، نیز باید مورد سئوال واقع بشوند . آیا نتیجه منطقی به‌نظر میرسد؟ آیا قابل پیش‌بینی بود؟ آیا روش اثبات طبیعی و معمولی بود و یا اینکه ساختگی بود؟ آیا روش دیگری برای رسیدن به نتیجه موجود است؟ آیا قضیه‌یی که ثابت شد ، تعبیرهندسی هم دارد؟ آیا می‌توان شکل برای آن ترسیم نمود؟[1] "پرسش‌ها" به نحوی که در انتهای هر بخش آمده‌اند به سادگی قابل دسته‌بندی‌نیستند . بعضی‌خیلی ساده و بعضی کاملا" مشکل‌اند . بعضی گویا و روشن و برخی مبهم‌اند . دسته‌یی فقط یک جواب و دسته‌یی جوابهای متعدد دارند . گروهی در رابطه با مطالب اثبات شده هستندو گروهی دیگر زمینه‌ساز درک مطالب بعدی هستند . چه وجه مشترکی میان این پرسش‌های گوناگون‌وجود دارد؟ همگی به منظور کمک به خواننده درجهت تفکر ، فهم ، خلاقیت و ــ خوب ــ طرح‌سئوال نمودن است . امید است که این پرسش‌ها برای مدرسین هم سودمند باشند و بتوانند به هنگام تدریس از آن بهره گیرند .

در مورد تمرین‌هایی که در انتهای هر بخش آمده است چندان نیازی به توضیح نیست ، زیرا که تمرین‌ها در مقایسه با پرسش‌ها اغلب به طبع دانشجویان سازگارترند . پرسش‌ها و تمرینات دارای ماهیتی واحد هستند و اختلاف میان آنها جنبه لغوی دارد . فراوانی تمرینات به منظور کمک به دانشجو می‌باشد که میزان تسلط خود را در درک مطالب مطروحه ارزیابی کند .

مطالب کتاب محتوای یک درس یکساله در متغیرهای مختلط است ، که به دانشجویان سالهای آخر دوره لیسانس و دانشجویان مبتدی فوق لیسانس در دانشگاه کلارک تدریس می‌شود . پیش نیاز آن یک دوره حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است . نه فصل اول بنیاد محکمی برای مقدمات متغیرهای مختلط است . پنج فصل آخر به بررسی مفصلی از موضوعات پیشرفته‌تر می‌پردازد تا به تواند پیش نیاز ضروری را برای دانشجویانی که بخواهند در نظریه عمومی آنالیز مختلط تحقیق نمایند فراهم سازد .

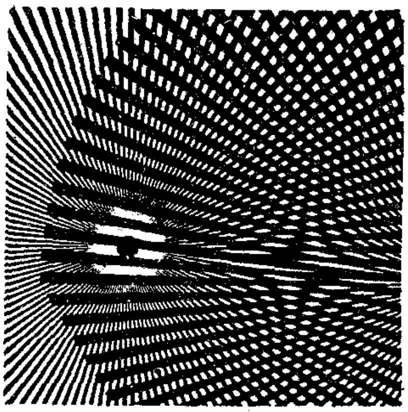
چنانچه بخواهیم از این کتاب به منظور تدریس در یک نیمسال استفاده کنیم ، فصل های ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را باید هدف اصلی قرار داد . فصل اول را می‌توان به سرعت تدریس کرد. مطالب فصل دوم را هر جا که لازم باشد توضیح می‌دهیم . فصل سوم و همچنین خواص نگاشتها از فصل چهارم را می‌توان تماما" حذف کرد .

وقتی که دانشجوی دوره لیسانس بودم و بعدها نیز هنگامی که دانشجوی فوق لیسانس شدم ، همیشه آرزو داشتم کتابی بنویسم که در آن عبارت "بدیهی است که" به کار نرفته باشد . این آرزو تا یک صفحه به آخر مانده در این کتاب عملی شد ، ولی متاسفانه در آخرین صفحه عدول شد و این بدان علت بود که می‌خواستم "صفرهای بدیهی "تابع زتا را بیان کنم . ولی به هر حال این آرزو ، اگر نه در حرف بلکه درعمل ، برآورده شده است . مطالب کتاب را با توضیحات ، تذکرات و ژرف‌نگری بیان داشته‌ام. مدرس می‌تواند مطالعه بعضی از بخش‌ها را به دانشجویان واگذار کند . در واقع ، این کتاب یک خودآموز است .

افراد ذیل پیش‌نویس کتاب را مطالعه کرده و اصلاحات متعدد بر آن پیشنهاد نموده‌اند : پرفسور داگلاس ام . کامبلا (دانشگاه بیرگام یانگ) ، توماس. ال. مک‌کوی (دانشگاه ایالتی میشیگان) ، جان ، تی ، شیت (دانشگاه ایالتی اوهایو) ، آلبرت شیلد (دانشگاه تمپل) ، جی . آر . اسمارت (دانشگاه وسکن‌سین) ، اولین ، ام . سیلویا (دانشگاه کالیفرنیا ، داویس) . به هنگام لحظه‌های حساسی که مشغول تهیه پیش‌نویس کتاب بودم ، اولین لحظه‌یی در تشویق من و ابراز دوستی خالصانه‌اش درنگ نکرد . در پایان باید گفت که مارگارت جاکویت با مهارت خاص خودش دست‌نویس مرا (که خواندن آن کار ساده‌یی نبود!) ترجمه نمود و به دقت تمام ماشین کرد .

هرب سیلورمن

نوارک ـ دلوار



۱ـ مقدمات جبری و هندسی

ریاضی‌دان شهیر کرونکر[1] زمانی گفت "خدا اعداد صحیح را آفرید و مابقی کار بشر است". در این فصل فرآیند تکاملی دستگاه اعداد حقیقی بررسی شده است. ما بطور نسبی به‌توصیف اعداد حقیقی می‌پردازیم، و سپس، با تاسف به‌نوعی نارسایی در آن پی می‌بریم. معادله درجه دوم $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی ریشه ندارد.

عصر نوی فرا میرسد، و دستگاه اعداد مختلط زاده می‌شود. ما عدد مختلط، این نوزاد عجیب را، از نقطه نظرهای مختلف: بعنوان عضو یک هیات، بعنوان نقطه‌ای در صفحه، و بعنوان یک بردار دوبعدی بررسی خواهیم کرد. هر سه نقطه مفید و سودمند است و در هر طریق که گام نهیم، شباهت دستگاه اعداد مختلط با والدینش یعنی دستگاه اعداد حقیقی را مشاهده می‌کنیم. بنظر میرسد که این طفل از هر جهت بر والدینش برتری داشته باشد مگر از یک جهت ــ آن ترتیب ندارد. و این کشف ساده احترام و ارزش را برای والدین فراموش شده‌اش ایجاب میکند.

روش ما در این فصل روشن است. تا زمانی این طفل واجد خصوصیات والدین خود میباشد و سپس جهت‌گیری جدیدی میکند و بما چیزهایی می‌آموزد که والدین او هرگز نمی‌دانستند.

۱ـ۱. هیات مختلط

با شرح مختصری در مورد منشاء اعداد مختلط آغاز می‌کنیم. اگر ما تنها از اعداد صحیح مثبت اطلاع می‌داشتیم معادله $x + 2 = 1$ را نمی‌توانستیم حل کنیم. معرفی اعداد صحیح منفی است که ما را قادر به‌حل این معادله می‌کند. ولی اطلاع از همه اعداد صحیح

1. Kronecker

برای‌حل‌معادله $2x+1=2$ کافی‌نیست‌و برای حل چنین معادلاتی نیاز به تعریف اعدادگویا داریم.

درحالیکه کلیه معادلات خطی با ضرایب صحیح دارای ریشه گویا هستند، برخی معادلات درجه دو چنین نیستند. مثلا" حل معادله $x^2-2=0$ به اعداد گنگ نیازمند است. اگریک‌مرحله فراتر رویم، معادلات درجه دومی موجودند که هیچ ریشه حقیقی (گویا یا اصم) ندارند. معادله $x^2+1=0$ دارای ریشه حقیقی نیست، زیرا که مربع هر عدد حقیقی غیرمنفی است. بمنظور حل چنین معادله‌یی، می‌بایست عددی "کشف" کنیم که مربع آن ۱ـ گردد. این عدد، که با $i=\sqrt{-1}$ نمایش‌داده‌می‌شود واحدانگاری‌نامیده‌می‌شود.

"ساختن" یک عدد برای حل یک معادله ویژه چندان منطقی نخواهد بود. و برای آنکه کل بحث را در چهارچوب دقیق‌تری قرار دهیم، اعمالی شامل ترکیب اعداد حقیقی وواحدهای انگاری، تعریف خواهیم کرد. نشان خواهیم داد، این اعمال، تا سرحدامکان با قوانین جمع و ضرب اعداد حقیقی مطابقت دارند هر جفت مرتب (a, b) از اعداد حقیقی را می‌توانیم "عدد مختلط"

$$a+bi \tag{1}$$

بنامیم. پس مجموعه اعداد مختلط به عنوان‌مجموعه همه جفت‌های مرتب ازاعداد حقیقی تعریف‌می‌شود. مفهوم تساوی و عملیات جمع وضرب بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ \Longleftrightarrow (a_1, b_1)=(a_2, b_2)$$
$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2),$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1).$$

تعریف ضرب در اعداد مختلط طبیعی‌تر از آن است که به نظر می‌رسد، زیرا اگر اعداد مختلط را به شکل (۱) بنویسیم، و آنها را مانند اعداد حقیقی در هم ضرب کنیم و از رابطه $i^2=-1$ استفاده کنیم، داریم:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

در این مورد چند نکته باید یادآوری شود. اول بایدتوجه داشت که عملیات رسمی برای جمع و ضرب اعداد مختلط به عدد انگاری چون i وابسته نیست. به عنوان مثال $i^2=-1$ را می‌توان به صورت $(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)$ بیان کردو بدین ترتیب نماد i صرفا "به‌منظورساده‌نویسی معرفی شده‌است. همچنین، توجه کنید که جفت مرتب $(a, 0)$ نمایش‌دهنده عدد حقیقی a است و روابط:

$$(a, 0)(b, 0)=(ab, 0) \quad \text{و} \quad (a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0)$$

به ترتیب، جمع و ضرب در اعداد حقیقی هستند.

برخی خواص اساسی اعداد حقیقی عبارتند از: حاصلجمع و حاصلضرب دو عدد

حقیقی، عددی‌حقیقی‌است، و ترتیب انجام هر یک از این عملیات می‌تواند وارونه‌گردد. یعنی، برای اعداد حقیقی a و b، قوانین جابجایی:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{و} \quad a + b = b + a \qquad (۲)$$

برقرارند. قوانین انجمنی:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{و} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad (۳)$$

و قانون پخش‌پذیری:

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (۴)$$

نیز برای همه اعداد حقیقی a و b و c برقرارند. اعداد 0 و 1 به ترتیب اعضای خنثی جمع و ضرب‌اند. وارون‌جمعی عدد a برابر $-a$ و وارون ضربی $a\ (\neq 0)$ عدد حقیقی $a^{-1} = 1/a$ است. بطور مختصر می‌توان‌چنین گفت که، دستگاه اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضرب تشکیل یک هیات میدهند.

ناگفته پیداست که دستگاه اعداد حقیقی تنها دستگاهی نیست‌که تشکیل یک هیات می‌دهد. به آسانی می‌توان دید که اعداد گویا در شرایط یک هیات که در بالا گفته شد صدق می‌کند. آنچه در این فصل اهمیت دارد این است که اعداد مختلط نیز، تشکیل یک هیات می‌دهند. عضوخنثای جمع $(0, 0)$، وارون جمعی (a, b) برابر $(-a, -b)$ و وارون ضربی $(a, b) \neq (0, 0)$ برابر

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \ -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

است. بررسی‌صادق‌بودن اصول هیات در مورد اعداد مختلط را به عنوان تمرین به‌عهده خواننده وا می‌گذاریم.

دانشجوی‌تیزبین‌ریاضی‌نشاید صرفاً "با تحقیق در یک اثبات اقناع گردد بلکه‌بایستی این احساس را پیدا کند، که چرا این کار را می‌کند. آیا خواننده از خودپرسیده که چطور می‌توان انتظار داشت، وارون ضربی (a, b) برابر

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \ -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

باشد؟ یکی از راههای ممکن برای استدلال به قرار زیر است: اگر وارون $(a, b) = a + bi$ را به صورت

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{(a + bi)},$$

بنویسیم، در اینصورت می‌خواهیم عدد مختلط $c + di$ را طوری بیابیم‌که

$$\frac{1}{(a+bi)} = c + di$$

پس از طرفین ـ وسطین ، خواهیم داشت $ac + bdi^2 + i(ad + bc) = 1$ و یا

$$ac - bd = 1,$$
$$ad + bc = 0.$$

جواب این دستگاه معادلات عبارت است از :

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad d = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

آیا خواننده می‌تواند دلائل دیگری برای برقراری رابطه زیر بیاورد ؟

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \ -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)?$$

فرض‌کنیم $z = (x, y)$ یک‌عددمختلط باشد . در اینصورت x و y به‌ترتیب‌به‌قسمت حقیقی z ، $\operatorname{Re} z$ و قسمت انگاری z ، $\operatorname{Im} z$ موسومند . مجموعه اعداد حقیقی را با R و مجموعه اعداد مختلط را با C نمایش می‌دهیم . تناظر $x \leftrightarrow (x, 0)$ برای $x \in R$ ، تناظری یک به یک بین مجموعه R و یک زیر مجموعه C می‌باشد . در این تناظر ، عملیات جمع و ضرب پایدار می‌مانند بدین معنی $x + y \to (x + y, 0)$ و $xy \to (xy, 0)$ از اینرو عدد حقیقی مانند x و جفت مرتب $(x, 0)$ را به‌جای یکدیگر بکار خواهیم برد . بعلاوه همچنین‌جفت‌مرتب $(0, 1)$ رانیزبا i نشان می‌دهیم . چون هر عدد مختلط یک جفت مرتب از اعداد حقیقی است ،عبارات $C = R^2$ و $C = R \times R$ را بجای یکدیگر بکار می‌بریم . از اینرو $R \times 0$ زیر مجموعه‌ای از C است که متشکل از اعداد حقیقی است .

همانطور که قبلا" اشاره شد ، یک فایده هیات C این است که در این دستگاه معادله $z^2 + 1 = 0$ جواب دارد . در فصل هشتم خواهیم دید که هر معادله چند جمله‌ای $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$ دراین دستگاه دارای یک جواب است . اما این تعمیم R به C خالی‌از اشکال‌نیست .هیات حقیقی خاصیت مهمی دارد که‌هیات مختلط فاقدآن‌است .

اگر $a \in R$ آنگاه دقیقا" یکی از سه گزاره زیر درست است :

$$a = 0, \qquad a > 0, \qquad -a > 0 \qquad \text{(سه‌گانگی)}$$

و بعلاوه حاصلجمع و حاصلضرب دو عدد حقیقی مثبت ، مثبت است (بسته بودن) .

یک هیات با یک رابطه ترتیبی $>$ را ، که در قانون سه‌گانگی و دو شرط اخیر صادق باشدمرتب‌نامند .در یک هیات مرتب ، همانند هیات اعداد حقیقی و یا اعداد گویا،روش طبیعی برای مقایسه هر دو عضو a و b موجود است . یا a کوچکتر از b است $(a < b)$ ، و یا a برابر b است $(a = b)$ ، و یا a بزرگتر از b است $(a > b)$. متاسفانه ، روی اعداد

مختلط نمی‌توان چنین رابطه‌یی بنا نهاد. زیرا اگر هیات اعداد مختلط مرتب می‌بود، در آنصورت یکی از دو عدد i و $i-$مثبت می‌بود و در نتیجه بنابر قانون بسته بودن $-1 = (-i)^2 = i^2$ نیز مثبت میشد. ولی اگر $1-$ مثبت باشد بایست 1 منفی باشد. از طرف دیگر اگر$1-$مثبت باشد$1 = (-1)^2$ نیز مثبت است که یک‌تناقض است.

در خاتمه جهت جمع بندی مطالب گوئیم، هیات مختلطی موجود است که شامل یک هیات حقیقی است و این هم شامل یک هیات گویاست. بررسی هر یک‌از هیات‌ها محاسن‌و معایبی دارد. در اینجا منظور ما این نیست خواصی را بیان کنیم که به طورمنحصربفردی هر یک از این هیات‌ها را مشخص کند، اگر چه اینکار مسلما" شدنی است.

پرسش‌ها

۱ـ آیا یک هیات می‌تواند متناهی باشد؟

۲ـ آیا یک هیات مرتب می‌تواند متناهی باشد؟

۳ـ آیا هیات‌هایی موجودند که بطور کامل شامل گویاها و بطور کامل زیر مجموعه حقیقی‌ها باشند؟

۴ـ چه عدد مختلطی به $a + bi$ بیافزائیم و یا در آن ضرب‌کنیم تا نتیجه‌حقیقی گردد؟

۵ـ چگونه‌می‌توان‌قسمت حقیقی و انگاری خارج قسمت دو عدد مختلط راجدانمود؟

۶ـ در مورد قسمت حقیقی حاصلجمع دو عدد مختلط چه‌می‌توان گفت؟ حاصلضرب چطور؟

۷ـ تعریف عدد مختلط به صورت جفت مرتب چگونه ایجابهایی به دنبال دارد؟

۸ـ اگر یک چند جمله‌یی درجه n حداقل دارای یک‌جواب باشد، آیا بیش از این چیزی می‌توان گفت؟

۹ـ اگر بکوشیم بر اعداد مختلط ترتیبی تعریف کنیم‌که اگر$a > b$ و$c > d$ آنگاه $(a, b) > (c, d)$. کدامین خواص ترتیب در اینجا موجود نیست؟

۱۰ـ آیا هیات مرتبی هست که $x^2 + 1 = 0$ در آن جواب داشته باشد؟

تمرینها

۱ـ نشان‌دهید مجموعه‌همه‌اعداد حقیقی بصورت$a + b\sqrt{2}$که در آنها a و b اعداد گویا باشند، یک‌هیات مرتب است.

۲ـ اگر a و b عناصر یک هیات باشند. نشان دهید که$ab = 0$ اگر و تنها اگر یا $a = 0$ یا $b = 0$.

۳ــ اگر a و b عناصر یک هیات مرتب با $a > b$ باشند. نشان دهید که به تعدادنا ــ متناهی عنصر بین a و b موجود است.

۴ــ مقادیر زیر را بیابید:

الفــ $(-2, 3)(4, -1)$ بــ $(1+2i)\{3(2+i)-2(3+6i)\}$

بــ $(1+i)^3$. تــ $(1+i)^4$

ثــ $(1+i)^n - (1-i)^n$

۵ــ نشان دهید که دو مقدار زیر برابر 1اند.

الف) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ب) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

۶ــ برای هر اعداد صحیح k و n نشان دهید که $i^n = i^{n+4k}$. عدد مختلط i^n چند مقدار مختلف می‌پذیرد؟

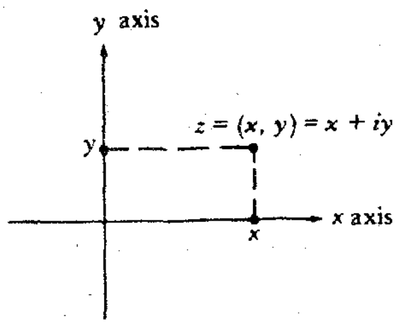
۱ــ۲ . نمایش مختصات مستطیلی

همان‌طور که عدد حقیقی x را می‌توان بوسیله یک نقطه بر یک خط نمایش داد، هر عدد مختلط $z = (x, y)$ را هم می‌توان با نقطه‌ای در صفحه نمایش داد (شکل ۱) . هرعدد مختلط به یک و فقط یک نقطه از صفحه متناظر می‌گردد. از اینرو عبارات عدد مختلط و نقطه در صفحه معادل‌اند. محورهای x و y به‌ترتیب به‌محور حقیقی و محور انگاری موسوم‌اند. در حالیکه صفحه xy به صفحه مختلط یا صفحه z موسوم است.

تعبیر دیگری از عدد مختلط نیز موجود است. هر نقطه (x, y) از صفحه مختلط یک بردار دوبعدی (پاره خط سودار) است از $(0, 0)$ ، نقطه آغازی، به (x, y) نقطه پایانی. پس هر عدد مختلط را می‌توان با یک بردار نمایش داد. این کار طبیعی به نظر می‌رسد، بدین معنی تعریفی که برای جمع اعداد مختلط اختیار کردیم با جمع بردارها متناظر است؛ یعنی:

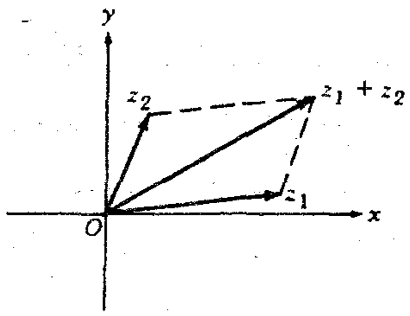
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

شکل ۱



از نظر هندسی، جمع بردارها پیرو قاعده‌ای موسوم به قاعده متوازی‌الاضلاع است. که در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. از نقطه z_1 ، برداری هم‌جهت با بردار z_2 و به‌بزرگی آن رسم‌کنید. نقطه پایانی، بردار $z_1 + z_2$ است. به روش دیگر هم اگر برداری هم جهت‌وبه اندازه z_1 به z_2 وصل شود به‌همان نقطه انتهایی خواهیم رسید. این نمایشگر خاصیت جابجایی در جمع برداری است. توجه کنید که $z_1 + z_2$ قطری از متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است. قطر دیگر متوازی‌الاضلاع برابر چه می‌تواند باشد؟

شکل ۲



منظور از بزرگی (درازا) بردار (x, y) دوری نقطه $z = (x, y)$ از مبداء است. این دوری به‌کالبد و یا قدر مطلق عدد مختلط z موسوم است و با $|z|$ نمایانده می‌شود؛ و مقدارش‌برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ است. به‌ازاءهر عدد حقیقی مثبت r ، به‌تعداد نامتناهی مقادیر متمایز از (x, y) موجوداند که کالبد آنها برابر $|z| = r$ باشد، اینها نقاط واقع بردایره $x^2 + y^2 = r^2$ می‌باشند. از این نقاط دوتای آنها $(r, 0)$ و $(-r, 0)$ ، حقیقی‌اند و از این رو این تعریف با تعریف قدر مطلق در هیات حقیقی مطابقت (ر.ک. شکل ۳).

باید توجه داشت که برای $z = (x, y)$

$$|x| = |\mathrm{Re}\ z| \leq |z|,$$
$$|y| = |\mathrm{Im}\ z| \leq |z|.$$

دوری بین دو نقطه $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ برابرست با

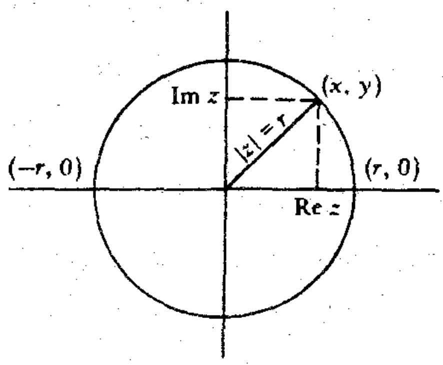
$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

نامساویهای مثلث

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

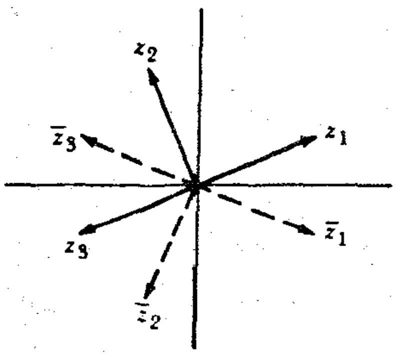
از نظر هندسی مبین آن هستند که هیچ ضلع یک مثلث‌از حاصلجمع در ازای دوضلع دیگر بزرگتر نبوده و از تفاضل در ازای دو ضلع دیگر کوچکتر نیست (شکل ۲). تحقیق این مطالب، از نظر جبری، به خواننده واگذار می‌گردد.

شکل ۳



بین همه اعداد مختلطی که کالبد آنها با کالبد عدد $z=(x,y)$ برابر است یکی از آنها نقش ویژه‌ای ایفا می‌کند. نقطه $(x,-y)$ به مزدوج موسوم است و با $\bar{z}$ نمایانده می‌شود. چنانچه محور حقیقی را به عنوان یک آئینه دوبر تصور کنیم آنگاه $\bar{z}$ تصویرآئینه‌یی z است (شکل ۴).

شکل ۴



خواص زیر از تعریف برای مزدوج بدست می‌آیند:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \qquad (۵)$$
$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2.$$

برخی از روابط مهم میان عدد مختلط $z=(x,y)$ و مزدوج آن بشرح‌زیراند:

$$\begin{aligned} z+\bar{z}&=(2x,0)=2\ \mathrm{Re}\ z,\\ z-\bar{z}&=(0,2y)=2\ \mathrm{Im}\ z,\\ |z|&=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2},\\ z\bar{z}&=|z|^2. \end{aligned} \qquad (۶)$$

شکل مجذور کالبد واقع در (۶) اغلب از همه مفیدتر است. به عنوان مثال برای اثبات این‌که‌کالبد حاصلضرب دو عدد مختلط برابر حاصلضرب کالبدهاست، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |z_1z_2|^2&=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=(z_1z_2)(\bar{z}_1\,\bar{z}_2)=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)\\ &=|z_1|^2|z_2|^2=(|z_1|\,|z_2|)^2. \end{aligned}$$

استفاده از مزدوج روشی‌جهت جدا کردن قسمت‌های حقیقی و انگاری وارون یکعدد

به دست می‌دهد.

مثال

$$(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{\overline{a+bi}}{\overline{a+bi}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

پرسش‌ها

۱ــ آیا در شکل ۲، اگر z_2 هم‌جهت و یا در جهت مخالف با z_1 باشد، باز هم متوازی‌ــ الاضلاع خواهیم داشت؟

۲ــ آیا به روش هندسی می‌توان با داشتن z_1 و z_2، مجذور z_1+z_2 را ترسیم نمود؟

۳ــ چرا ضرب اعداد مختلط را مانند ضرب در بردارها تعریف نمی‌کنیم؟

۴ــ چه وقت نامساوی مثلث به تساوی تبدیل میگردد؟

۵ــ تعبیر هندسی نامساوی مثلث در مورد حاصل جمع n عدد مختلط چیست؟

۶ــ روابط جالبی را که میان (x,y) و $(-x,y)$ به نظرتان می‌رسد برشمرید.

۷ــ اگر a و b اعداد گویای مثبت باشند. چرا اعداد $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ را مزدوج حقیقی می‌خوانند؟

تمرینها

۱ــ اگر $z_1=3-4i$ و $z_2=-2+3i$، به روشهای نموداری و تحلیلی مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف ــ $2z_1+4z_2$ ب ــ $3z_1-2\overline{z_2}$

پ ــ $z_1-\overline{z_2}-4$ ت ــ $|z_1+z_2|$

ث ــ $|z_1-z_2|$ ج ــ $|2\overline{z_1}+3\overline{z_2}-1|$

۲ــ مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف ــ $1<|z|\leq 3$ ب ــ $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|<2$

پ ــ $|z-1|+|z+1|=2$ ت ــ $\text{Re}\,(z-5)=|z|+5$

ث ــ $\text{Re}\,z^2>0$ ج ــ $\text{Im}\,z^2>0$

۳ــ فرض کنیم $M=|(z-a)/(z-b)|$ که در آن a و b ثابت‌های مختلط بوده و

$M>0$. این خم را توصیف کنید و توضیح دهید که بهنگام $M\to 0$ و بهنگام $M\to\infty$ چه اتفاق می‌افتد.

۴ــ نشان دهید که $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\text{Re}\,z_1\overline{z_2}$. یک همانندی برای $|z_1-z_2|$ بیابید.

۵ــ اگر $|z_1|<1$ و $|z_2|<1$، نشان دهید $|(z_1-z_2)/(1-\overline{z_1}z_2)|<1$. درحالت $|z_1|=1$ چه می‌شود؟

۶ــ اگر $|z|<1$ نشان دهید.

الف ــ $\text{Re}\,\dfrac{1}{1-z}>\dfrac{1}{2}$ ب ــ $\text{Re}\,\dfrac{z}{1-z}>-\dfrac{1}{2}$

۷ــ اگر $P(z)$ یک معادله چند جمله‌یی با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که یک z_1 ریشه معادله است اگر تنها اگر $\overline{z_1}$ یک ریشه معادله باشد. از این مطلب نتیجه بگیرید که هر معادله چند جمله‌یی با درجه فرد و با ضرایب حقیقی باید حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد. آیا با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟

۸ــ ثابت کنید که برای هر $n\geq 1$

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

۹ــ فرض کنیم $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعداد مختلط باشند نامساوی شوارتس[1] را ثابت کنید.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right).$$

تساوی چه‌وقت برقرار می‌گردد؟

۱۰ــ برای α حقیقی گیریم: $e(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$. نشان دهید که:

الف ــ $e(0)=1$ ب ــ $|e(\alpha)|=1$

پ ــ $e(\alpha_1+\alpha_2)=e(\alpha_1)e(\alpha_2)$ ت ــ $e(n\alpha)=[e(\alpha)]^n$

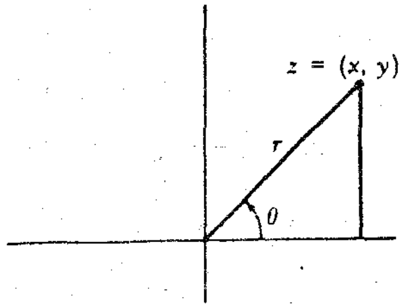
کدام یک از این خواص را تابع با مقدار حقیقی $f(x)=e^x$ داراست؟

۱ــ۳. نمایش قطبی

در بخش ۱ــ۲، بزرگی بردار $z=x+iy$ مورد بحث قرار گرفت. در مورد جهت آن چطور؟ اندازه‌ای از زاویه θ را که بردار $z\ (\neq 0)$ با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه از z مینامند. (ر.ک. شکل ۵)

1. Schwarz

شکل ۵



بدین ترتیب نقطه $z=(x,y)$ را می‌توان به یک شکل "جدید" بیان کرد : $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. و این البته همان نمایش عدد مختلط z در مختصات قطبی است. روابط زیر بر ایمان آشنا هستند :

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{و} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

عینا" مانند x و y دو عدد حقیقی r و θ به طور منحصر بفرد عدد مختلط z را مشخص می‌کنند. متاسفانه وارون مطلب کاملا" درست نیست. در حالیکه عدد مختلط z، x و y ی منحصر بفرد وازاینرو r را منحصرا" مشخص می‌کند، مقدار θ با اختلاف مضربی از 2π مشخص می‌گردد. برای هر عدد مختلط مفروض z به تعداد نامتناهی شناسه موجود است، و نماد $\arg z$ برای نمایاندن هر کدام از اینها بکار می‌رود. پس شناسه‌های عدد (۲ و ۲) عبارتند از :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

این اشکال را گاهی اوقات، نه همیشه، با مشخص کردن (به دلخواه) یک مقدار ویژه برای $\arg z$ می‌توان مرتفع کرد. نماد $\operatorname{Arg} z$ را برای مقدار مشخص و منحصربفردی از $-\pi < \arg z \leq \pi$ بکار می‌بریم. این θ به مقدار اصلی شناسه موسوم است. بدین ترتیب :

$$\operatorname{Arg}(2,2) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{Arg}(0,-5) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{Arg}(-1, \sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

شایان ذکر است که $\operatorname{Re} z > 0$ معادل است با $|\operatorname{Arg} z| < \pi/2$. اگر $x = y = 0$، عبارت $\tan\theta = y/x$ بی‌معنی است و اگر وقتی $z = 0$ باشد، $\arg z$ تعریف نمی‌شود.

فرض کنیم نمایش قطبی z_1 و z_2 به صورت :

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{و} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

باشند. در این صورت :

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)] = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

با بیانی غیردقیق می‌توان گفت: شناسهٔ حاصلضرب دو عدد مختلط مخالف صفر برابرست با حاصلجمع شناسه‌های آنها؛ یعنی،

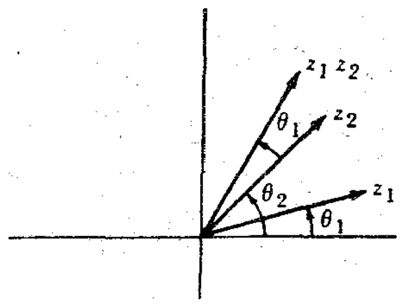
$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{۷}$$

از (۷) چنین مفهوم است که اگر θ_1 یکی از مقادیر $\arg z_1$ و θ_2 یکی از مقادیر $\arg z_2$ باشند، آنگاه $\theta_1+\theta_2$ یکی از مقادیر $\arg(z_1z_2)$ است. چونکه (۷) بااختلاف مضربی از 2π برقرار است، فرمول‌بندی صریح‌تری از آن این است که:

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \quad (\text{یک عدد صحیح } k)$$

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

شکل ۶



(ر.ک.شکل۶). برای مثال، ملاحظه می‌کنیم

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

و

$$\operatorname{Arg}\left\{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \operatorname{Arg}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

پس

$$\operatorname{Arg}\left\{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \operatorname{Arg}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{Arg}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) - 2\pi.$$

یک استدلال استقرایی (بدون دوپهلوگویی) نشان‌می‌دهد که اگر z_i دارای کالبد r_i و شناسه θ_i باشد، $(i = 1, 2, \ldots, n)$، آنگاه.

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \tag{۸}$$

تذکر ــ بررسی‌های هندسی (شکل۲ و ۶) دلالت بر این دارند که نمایش مستطیلی اغلب در مسائلی سودمندترانـد که جمع اعداد مختلط مطرح باشد، در حالی که نمایش هندسی در مسائل مربوطه به ضرب اعداد مختلط سودمندتر است.

اگر در (۸) فرض‌کنیم $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$، داریم:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \tag{۹}$$

برای $|z| = 1$ (دایره واحد)، (۹) به رابطه زیر تبدیل می‌گردد.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \tag{۱۰}$$

که قضیه‌یی از دموآدر[1] است.

رابطه (۹) محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط را ممکن می‌سازد. عدد مختلط z ریشه n ام z_0 است اگر چنانچه $z^n = z_0$، می‌نویسیم $z = z_0^{1/n}$.

مسئله از این قرار است که عمل ضرب را وارونه کنیم و عددی را مشخص کنیم که هر گاه n بار در خودش ضرب گردد، عدد اصلی نتیجه گردد. اگر $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ یک عدد مختلط باشد، چگونه‌می‌توان عدد مختلط $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را یافت بطوریکه $z^n = z_0$؟ بموجب (۹) داریم:

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0). \tag{۱۱}$$

چــــون که برای هر عدد حقیقی α، $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = 1$، از (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} r^n &= r_0, \\ \cos n\theta + i \sin n\theta &= \cos \theta_0 + i \sin \theta_0 . \end{aligned} \tag{۱۲}$$

اولـــــین رابطه (۱۲) نشان می‌دهد $|z| = r_0^{1/n}$ که قبلاً" هم دانستیم (چرا؟) ولـی رابطه دومی اطلاعات مهمی در مورد شناسه z بدست‌می‌دهد، و آن این که، اختلاف $\arg z_0$ با $n \arg z$ در مضربی از 2π است (یعنی $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$، $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \cdot \tag{۱۳}$$

چند عدد درست k در (۱۳) به جوابهای متمایز منجر می‌گردد؟ داریم:

$$z = z_0^{1/n} = r_0^{1/n}\left\{\cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \sin \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right\}. \tag{۱۴}$$

برای هر k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ یک مقداری متفاوت برای z موجود است. به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد جوابهائی بیش ازاین موجود نیست. از اینرو برای $z_0 \neq 0$ دقیقاً" n عدد مختلط و متمایز z موجود است بطوریکه $z^n = z_0$

اگر در (۱۴)، $z_0 = 1$ قرار دهیم ریشه‌های n ام واحد بدست می‌آیند. اگر $z^n = 1$

---

1. DeMoivre

آنگاه

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (۱۵)$$

با دید هندسی، جوابها معرف n راس یک n ضلعی منظم است که در دایره‌یی بمرکز مبداء وشعاع یک محاط شده باشد، در شکل ۷ و ۸، مربع و پنج ضلعی منظم محاطی ملاحظه می‌شود.

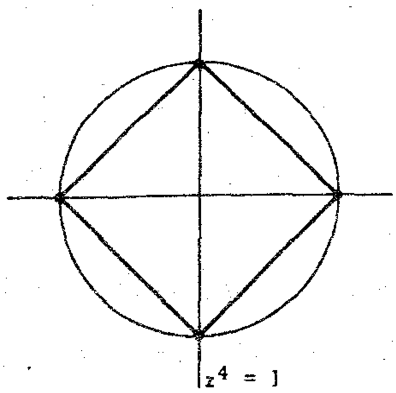
به‌موجب (۱۵) اختلاف شناسه‌های دو ریشه n ام متوالی واحد ثابت و برابر $(2\pi/n)$ است. اگر قرار دهیم:

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \sin\frac{2\pi}{n},$$

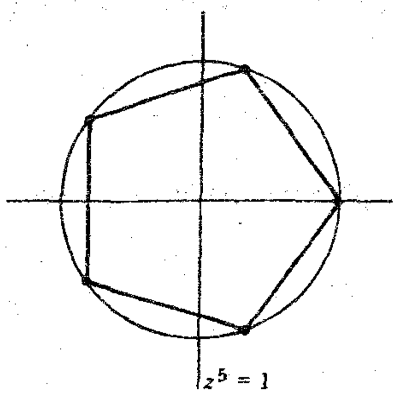
آنگاه هر ریشه را می‌توان بصورت توانی از ω بیان کرد. یعنی:

$$\omega,\quad \omega^2,\quad \omega^3,\quad \ldots,\quad \omega^{n-1},\quad \omega^n = \omega^0 = 1.$$

شکل۷



شکل۸



از این مطلب اطلاعات جالبی در مورد حاصلجمع وحاصلضرب ریشه‌های واحد می‌توان کسب نمود و آن این است‌که، حاصلضرب هر دو ریشهٔ واحد خود یک ریشهٔ واحد است و حاصلجمع همه ریشه‌های n ام واحد برابر صفر است.استنباط اخیر از همانی زیر نتیجه می‌گردد:

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}.$$

پرسشها

۱ــ اگر شناسه $z = 0$ را برابر صفر تعریف کنیم چه اشکالی پیش می‌آید ؟

۲ــ بدون دقت زیاد، در مورد اعداد مختلط z_1 و z_2 داریم $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ، کدام دسته از توابع با مقادیر حقیقی دارای خاصیت $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ اند ؟

۳ــ چه‌وقت $\text{Arg}\,(z_1 z_2) = \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2$ ؟

۴ــ اگر عدد مختلط z از بالا و پائین به محور حقیقی منفی نزدیک شود ، $\text{Arg}\,z$ چگونه‌تغییرمی‌کند ؟درموردیکه z از بالا و پائین‌به محور حقیقی مثبت نزدیک شودچطور ؟

۵ــ چگونه شناسه‌های z و $1/z$ مقایسه می‌شوند ؟

۶ــ بعضی از اختلافات موجود در میان زاویه. عدد حقیقی و شناسه را برشمارید .

۷ــ قضیه دو جمله‌یی در این بخش چه مورد استفاده‌یی می‌توانست داشته باشد ؟

۸ــ بازاء کدام اعداد صحیح n ، معادله $z^n = 1$ تنها دارای ریشه‌های حقیقی‌است ؟

۹ــ کدام یک از اصول هیأت برای ریشه‌های واحد با عمل جمع و ضرب معمولی اعداد مختلط، برقرار است ؟

۱۰ــ در مورد ریشه‌های n ام یک عدد مختلط دلخواه چه می‌توان گفت ؟

۱۱ــ برای‌عددحقیقی دلخواه α ، در مورد تعداد جوابهای $z^\alpha = 1$ چه‌فکرمی‌کنید ؟

تمرینها

۱ــ ناحیه‌های زیر را بطریق هندسی توصیف کنید .

الف ــ $|z| > 1 \quad \text{Arg}\,z = \pi/6$ ب ــ $\pi/4 < \text{Arg}\,z < \pi/2$

پ ــ $|z + i| > 2 \quad -\pi < \text{Arg}\,z < 0$

۲ــ اگر $|1 - z| < 1$،نشان دهید : $|\text{Arg}\,z| < \pi/2$

۳ــ اگر $|z| < 1$ نشان دهید :

$$\left|\text{Arg}\,\frac{1 + z}{1 - z}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

۴ــ اگر $\text{Re}\,z > 0$، نشان دهید $\text{Re}\,(1/z) > 0$ اگر $\text{Re}\,z > a > 0$، در مورد $\text{Re}\,(1/z)$

چه می‌توان گفت؟

۵ــ اگر $|z| = 1$، $z \neq -1$، نشان دهید، z را میتوان به صورت $z = \dfrac{1+it}{1-it}$ نوشت که در آن $|t|$ عدد حقیقی است.

۶ــ همه مقادیر ریشه‌های زیر را بیابید.

الف) $i^{1/2}$ ب) $i^{1/4}$

پ) $(-i)^{1/3}$ ت) $\sqrt{1+i}$

ث) $\sqrt[6]{8}$ ج) $\sqrt{4+3i}$

چ) $\sqrt{\dfrac{1-i}{1+i}}$

۷ــ همانی‌های $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$ و $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$ را اثبات کنید.

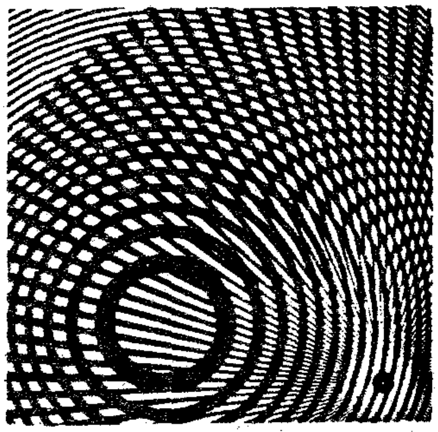
۸ــ فرض کنیم $\omega \neq 1$، یک ریشه nام واحد باشد، نشان دهید.

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = -n/(1-\omega)$$

راهنمایی: از $f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \omega^k$ مشتق بگیرید.

۹ــ فرض کنیم: $z_k = \cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{2k\pi}{n}$

نشان دهید، برای تمام مقادیر n، داریم $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| < 2\pi$. اگر n به ∞ میل کند چه اتفاق می‌افتد؟



۲ـ مقدمات توپولوژیکی و تحلیلی

اطرافیان یک طفل عبارتند از افراد خیلی نزدیک به او، از طرف چپ و راست. وقتیکه وی بزرگتر شود به همسایگی‌ها از دیدگاه دوبعدی میاندیشد (مردم شهر) و یا حتی به همسایگی‌های سه‌بعدی (مردم جهان). در این فصل هم، چنین می‌کنیم. برای توصیف دقیق مجموعه‌ها در خط حقیقی (یک‌بعدی) و در صفحه (دوبعدی)، روشهای متعددی را بررسی خواهیم کرد. برای اینکه نقطه خیالی واقع در بی‌نهایت را محسوس کنیم، لازم است به معرفی کره (سه‌بعدی) به پردازیم.

اگر یک مجموعه به روش اقناع‌کننده‌ای توصیف شود، متوجه نگار آن خواهیم شد. شرایطی را بررسی خواهیم کرد که در آن شرایط، خواص یک مجموعه در تبدیل به یک مجموعه جدید محفوظ بماند. یک محصول عالی بررسی‌های‌مان این خواهد بود که برداشتن یک نقطه تنها از یک مجموعه می‌تواند سرشت مجموعه را به‌کلّی تغییر دهد در حالی که برداشتن تعدادی نامتناهی نقاط از مجموعه دیگری می‌تواند بی‌اهمیت باشد. اگر از مجموعه‌یی واقع بر خط حقیقی دو نقطه برداریم ممکن است که مجموعه جدید به مجموعه از صفحه بیش از مجموعه قدیمی خود به مجموعه‌یی از صفحه شبیه گردد. در این فصل می‌بینیم که، به یک معنی همه نقاط برابرند ولی بعضی نقاط از بقیه برابرترند!

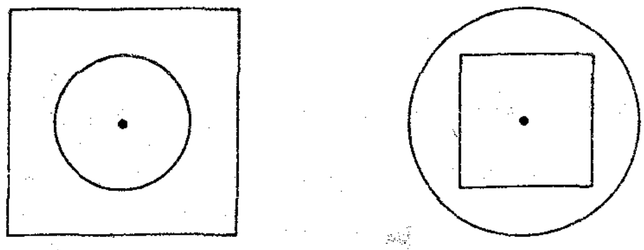
۲ـ۱. مجموعه‌های نقطه‌ئی در صفحه

یک همسایگی عدد حقیقی x_0 فاصله‌یی است به شکل $(x_0-\varepsilon$ و $x_0+\varepsilon)$ است، که ε هر عدد حقیقی و مثبت است. پس می‌توان گفت یک ε همسایگی x_0 مجموعه نقاط $x\in R$ است که $|x-x_0|<\varepsilon$. به روشهای گوناگون می‌توان مفهوم این همسایگی یک‌بعدی را گسترش

دادکه‌نقاط صفحه‌رانیز شامل گردد. یک ε همسایگی مربعی از نقطه (x_0, y_0) مجموعه همه نقاطی چون (x, y) است‌که در دونامساوی زیر صدق کنند.

$$|x-x_0|<\varepsilon, \qquad |y-y_0|<\varepsilon$$

این مجموعه عبارت است از همه‌نقاط درون یک مربع به مرکز (x_0, y_0). اضلاع این‌مربع بامحورهای مختصات موازی بوده و به طول 2ε میباشد. یک ε همسایگی‌مستدیر از (x_0, y_0) مجموعه همه نقاطی چون (x, y) است که دوری آنها تا (x_0, y_0) کمتراز ε باشد. این مجموعه عبارت است ازهمه‌نقاط $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon$ واقع دردرون دایره‌یی به‌مرکز (x_0, y_0) و با شعاع ε. مشاهده می‌شود که هرهمسایگی‌مربعی یک نقطه شامل یک همسایگی مستدیر آن نقطه است. و هر همسایگی مستدیر یک نقطه شامل یک همسایگی مربعی (البته، با ε ی کوچکتر) آن نقطه میباشد. این‌مطالب در شکل ۱ نمایش داده شده‌است.



شکل ۱

ازنقطه‌نظرما (که هر نقطه در صفحه معرف یک عدد مختلط‌است)، آسان‌تر این است با همسایگی‌های مستدیر کار کنیم، زیرا در این صورت هر ε همسایگی عدد مختلط z_0 عبارت است از همه نقاط $z \in C$ است که در نامساوی $|z-z_0|<\varepsilon$ صدق کنند. یک چنین همسایگی را با $N(z_0; \varepsilon)$ نمایش می‌دهیم.

باید توجه داشت که همسایگی بر خط حقیقی و همسایگی در صفحه متمایزاند. به عنوان‌مثال، $\{x \in R: -1<x<1\}$ یک همسایگی 0، بعنوان نقطه‌یی بر خط، است؛ در حالیکه یک همسایگی $(0, 0)$، به عنوان نقطه‌یی از صفحه، نیست. یک نقطه در صفحه نمی‌تواند یک همسایگی یک‌بعدی داشته باشد.

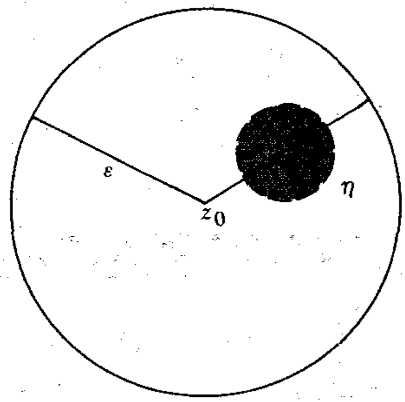
تعاریف و قضایای این بخش همزمان برای نقاط خط و نقاط صفحه برقرارند به‌شرطی که مفهوم ε همسایگی به درستی تعبیر گردد. یک‌مجموعه را کراندار گوئیم، اگر در یک همسایگی مبداء مشمول باشد. نقطه‌یی را یک نقطه درونی از یک مجموعه نامیم که یک همسایگی این نقطه مشمول مجموعه باشد. یک اختلاف عمده میان مجموعه‌های کراندار A و B:

$$A=\{z \in C: |z-z_0|<\varepsilon\} \qquad B=\{z \in C: |z-z_0| \leq \varepsilon\}$$

این است که هر نقطه A یک‌نقطه درونی است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم z_1 نقطه‌یی در A باشد. در این صورت برای یک δ با $0 \leq \delta<\varepsilon$ داریم $|z_1-z_0|=\delta$.

ولی برای $\eta=(\varepsilon-\delta)/2$ ، داریم $N(z_1;\eta)\subset N(z_0;\delta)$ (ر.ک. شکل ۲) . البته هیچ‌یک از نقاط روی دایره $|z-z_0|=\varepsilon$ یک نقطه درونی B نیست .

شکل ۲



مجموعه A را مجموعه باز گوئیم اگر هر نقطه A ، نقطه درونی آن باشد ، نشان‌دادیم که همسایگی یک نقطه در صفحه یک مجموعه باز است . مثالهای دیگری از مجموعه‌های باز در صفحه عبارت‌اند از :

(۱) مجموعه تهی .

(۲) مجموعه همه اعداد مختلط،

(۳) $\{z:|z|>r\}$ $r\geq 0$,

(۴) $\{z:r_1<|z|<r_2\}$ $0\leq r_1<r_2$,

(۵) اشتراک دو مجموعه باز

(۶) اجتماع هر گردآورده‌یی از مجموعه‌های باز .

تذکر ــ یک فاصله باز بر خط حقیقی ، یک مجموعه باز در صفحه نیست ، زیرا هر همسایگی یک نقطه حقیقی شامل نقاطی از صفحه است که حقیقی نیستند .

یک ε همسایگی سوده z_0 که آنرا $N'(z_0;\varepsilon)$ نمایش می‌دهیم ، مجموعه همه نقاط z است که $0<|z-z_0|<\varepsilon$. یعنی ، نقطه z_0 از مجموعه حذف شده است . نقطه z_0 را نقطه‌حدی مجموعه A می‌نامیم . هرگاه هر همسایگی سوده z_0 شامل یک نقطه از A باشد . باید توجه داشت که z_0 ممکن است متعلق به A باشد یا نباشد .

مثال ۱ــ نقاط حدی مجموعه $|z|<1$ عبارتند از $|z|\leq 1$ ، یعنی تمام نقاط آن مجموعه و همهٔ نقاط دایره واحد $|z|=1$.

مثال ۲ــ مجموعه $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,1/n,\ldots\}$ نقطه 0 را به‌عنوان نقطه حدی‌دارد ، (چه‌مجموعه را به‌عنوان‌زیر مجموعه‌ای از خط و یا زیر مجموعه‌ای از صفحه در نظر بگیریم) و 0 در مجموعه نیست .

مثال ۳ــ اگر A عبارت از مجموعه همه نقاطی باشد که هر دو مختص آنها گویا باشد، آنگاه هر نقطه در صفحه نقطه حدی A است .

مجموعه A را بسته نامیم چنانچه شامل همه نقاط حدیش باشد. اجتماع مجموعه A و نقاط حدی آن به بستار A موسوم است، و با $\bar{A}$ نمایش داده می‌شود. مثالهایی از مجموعه‌های بسته به شرح زیراند:

(۱) مجموعه تهی،

(۲) مجموعه همه اعداد مختلط،

(۳) $\{z : |z| \geq r\}$ ، $r \geq 0$ ،

(۴) $\{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ ، $0 \leq r_1 < r_2$ ،

(۵) اجتماع هر دو مجموعه بسته،

(۶) اشتراک هرگرد آورده‌یی از مجموعه‌های بسته.

قضیه ۲ــ۱. اگر z_0 نقطه‌حدی A باشد، آنگاه هر همسایگی z_0 شامل تعداد نامتناهی از نقاط A است.

اثبات ــ فرض کنیم که یک همسایگی‌های سوده z_0 تنها شامل تعدادی متناهی از نقاط A باشد. فرض‌کنیم این نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ باشندوگیریم $\varepsilon = \min_{i=1,2,\ldots,n}|z_0 - z_i|$ در این صورت $N'(z_0; \varepsilon)$ شامل هیچ نقطه A نبوده و z_0 نمی‌تواندنقطه حدی A باشد.

فرع ــ هر مجموعه متناهی بسته است.

اثبات ــ این مجموعه‌شامل‌تمام نقاط حدیش ــ در واقع "هیچ" نقطه حدی ندارد ــ می‌باشد.

درمورد مجموعه $|z| \leq 1$ می‌خواهیم نقاط درونی را از نقاط روی دایره متمایزکنیم. نقطه z_0 به نقطه مرزی A موسوم است اگر هر همسایگی z_0 شامل‌نقاطی‌از A و شامل نقاطی که در A نیستند (متمم A) باشد. مجموعه همه‌نقاط مرزی به مرز A موسوم است.

مثال ــ دایره $|z| = 1$ مرز مجموعه کراندار $|z| < 1$ و مجموعه بی‌کران $|z| > 1$ است.

تذکر ــ نقاط مرزی "باز بودن" یا "بسته بودن" یک‌مجموعه‌را مشخص می‌کنند. یک مجموعه باز نمی‌تواند شامل هیچ‌یک از نقاط مرزی خودش باشد، در حالی که یک مجموعه بسته بایستی شامل تمام نقاط مرزی خود باشد. (چرا؟)

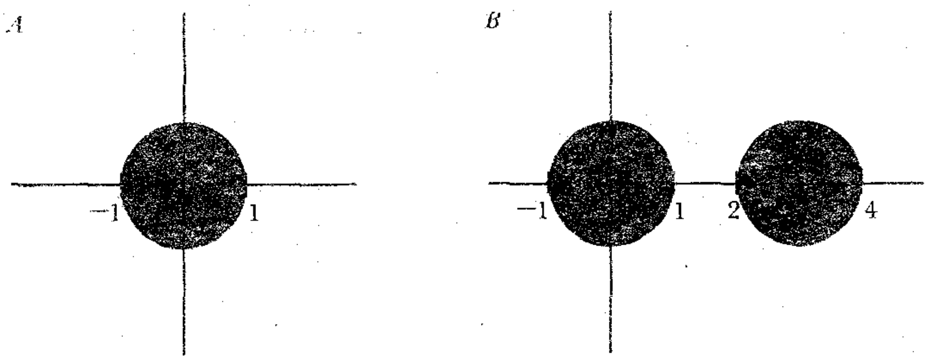
دو مجموعه زیر هم متمایز هستند:

$$A = \{z : |z| < 1\} \quad \text{و} \quad B = \{z : |z| < 1\} \cup \{z : |z - 3| < 1\}$$

مجموعه A "تماما یک تکه" است، در حالی که مجموعه B از دوتکه تشکیل شده‌است (ر.ک. شکل۳). مجموعه S را همبند نامیم هر گاه نتوان دو مجموعه باز U و V یافت که:

$$(۱)\ U \cup V \supset S \quad \text{و} \quad (۲)\ U \cap S \neq \varnothing,\ V \cap S \neq \varnothing$$

شکل ۳



بویژه ،اگر یک مجموعه باز همبند را بتوان به صورت اجتماع در مجموعه باز U و V نوشت آنگاه $U = \varnothing$ ویا $V = \varnothing$. مجموعه A بالا همبند است و مجموعه B نیست .

هر مجموعه‌باز همبند میدان نام دارد . یک ناحیه میدانی است بهمراه بعضی ،هیچیک، و یا همگی نقاط مرزی خودش. درک این تعریف "منفی" برای همبندی گاهی اوقات مشکل است . ولی وقتی که مجموعه همبند میدان باشد ، خاصیت مفید زیر را داریم :

قضیه ۲ــ۲ . هر دو نقطه یک میدان را می‌توان با یک خط چند ضلعی که تماما" در میدان واقع باشد بهم وصل کرد .

اثبات ــ نقطه z_0 را در میدان $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم . کافی‌است نشان دهیم ، هر نقطه در $\mathscr{D}$ را می‌توان با یک خط چند ضلعی که تماما" در $\mathscr{D}$ باشد به z_0 وصل کرد . فرض کنیم A آن دسته از نقاط $\mathscr{D}$ باشد که آنها را میتوان بدین ترتیب به z_0 وصل کرد و B دسته تمامی نقاط دیگر باشد . توجه کنید $A \cup B = \mathscr{D}$ و $A \cap B = \varnothing$. می‌خواهیم نشان دهیم که B تهی است .

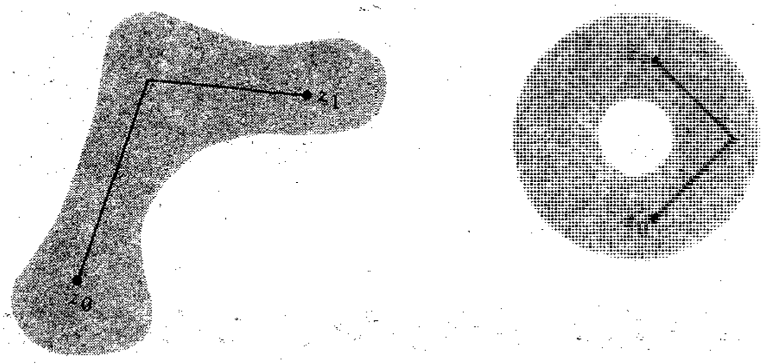
اگر z_1 در A باشد ، آنگاه z_1 در $\mathscr{D}$ است . چون $\mathscr{D}$ باز است ، $\varepsilon_1 > 0$ موجود است که $N(z_1; \varepsilon_1) \subset \mathscr{D}$ ولی همه نقاط $N(z_1; \varepsilon_1)$ را می‌توان با یک‌پاره خط مستقیم به z_1 وصل کرد . بنابراین، هر نقطه در $N(z_1; \varepsilon_1)$ باید در A باشد ، و این بدان‌معنی است‌که A یک مجموعه باز است .

به طریق مشابه ، اگر z_2 نقطه‌یی در B باشد ، آنگاه $\varepsilon_2 > 0$ موجود است که $N(z_2; \varepsilon_2) \subset \mathscr{D}$. همه نقاط این‌همسایگی می‌بایست‌در B باشد زیرا ،اگر $b \in N(z_2; \varepsilon_2)$ را می‌شد با یک چند ضلعی به z_0 وصل کرد ، در آن صورت پاره خط مستقیم از z_2 به b را به این چند ضلعی موجود بین z_0 تا b وصل می‌کردیم تا یک چند ضلعی از z_0 تا z_2 بیابیم . ازاینرو B یک‌مجموعه‌باز است . در نتیجه نه A و نه B نقاط مرزی نخواهند داشت . چونکه $\mathscr{D}$ همبند است ، یا A و یا B می‌بایست تهی باشد . ولی $z_0 \in A$ ، بنابراین B تهی است . این اثبات را کامل می‌کند .

باید توجه داشت در یک میدان ممکن است دو نقطه موجود باشند که بتوان آنها را

تنها با یک پاره خط مستقیم تنها بهم وصل کرد. این موضوع در شکل۴ نمایش داده‌شده است.

شکل۴



تذکر ۱ــ در قضیه ۲ــ۲. می‌توانستیم بخواهیم که چند ضلعی موازی محورهای مختصات باشد. تنها تصحیح لازم دراثبات، این است که ملاحظه کنیم هر نقطه در یک قرص را می‌توان با ترکیب دوپاره خط یکی موازی محور x و دیگری موازی محور y، بمرکز وصل کرد.

تذکر ۲ــ وارون قضیه ۲ــ۲. هم درست است: اگر هر دو نقطه یک مجموعه باز را بتوان بایک چند ضلعی بهم وصل کرد، آنگاه مجموعه همبند است. اثبات را برای تمرینها می‌نهیم.

تذکر ۳ــ درتمرینها، مثالی از یک مجموعه همبند آمده است که دونقطه‌اش را نمی‌توان با یک چند ضلعی در این مجموعه بهم وصل کرد.

با تعریفهای بالا، روشی یافته‌ایم که توسط آن اکثر مجموعه‌ها را چه بر خط و چه بر صفحه سرشت‌نمایی می‌کنیم.

مثال ۱ــ $\{z\in C: |z|\le 1\}-\{z_n=1/n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)\}$

این مجموعه باز نیست زیرا نقاط روی دایره واحد در آن است و بسته نیست زیرا نقاط حدی $z_n=1/n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ در آن نیست. مجموعه کراندار است. همبند است و دارای مرزی است متشکل از دایره واحد، نقاط $z_n=1/n$، و مبداء.

مثال ۲ــ $\{z\in C: \mathrm{Re}\ z>0\cup \mathrm{Re}\ z<-2\}$

این مجموعه‌باز است. بسته نیست، کراندار نیست، و همبند نیست. مرز آن عبارت است از همه نقاط واقع بر خطوط $\mathrm{Re}\ z=0$ و $\mathrm{Re}\ z=-2$.

مثال ۳ــ $\{z\in C: -\pi/4\le \mathrm{Arg}\ z\le\pi/4\}$

این مجموعه همبند و بسته است، باز نیست و کراندار نیز نیست. مرز آن عبارت از مبداء است بهمراه دوپرتو $\mathrm{Arg}\ z=\pi/4$ و $\mathrm{Arg}\ z=-\pi/4$.

پرسش‌ها

۱ــ چه تعاریف دیگری را برای "کراندار" می‌توانستیم مطرح کنیم؟

۲ـ در مورد اجتماع و اشتراک مجموعه‌های باز وبسته چه می‌توان گفت؟

۳ـ در مورد متمم مجموعه‌های باز و بسته چه می‌توان گفت؟

۴ـ چه مجموعه‌هایی هم در صفحه و هم در خط باز (بسته) هستند؟

۵ـ چه مجموعه‌هایی هم بازاند و هم بسته؟

۶ـ آیا می‌شود مجموعه‌یی به تعداد نامتناهی نقطه داشته باشد و در عین‌حال نقطه حدی نداشته باشد؟

۷ـ چه ارتباطی میان نقاط مرزی و نقاط حدی موجود است؟

۸ـ بستار اشتراک دو مجموعه بااشتراک بستار این دو مجموعه چگونه مقایسه‌می‌شود؟

۹ـ در مورد اشتراک واجتماع مجموعه‌های همبند چه می‌توان گفت؟

۱۰ـ در مورد مجموعه‌یی که هر جفت نقاط آن را می‌توان با یک پاره خط مستقیم واقع در آن مجموعه به هم وصل کرد چه می‌شود گفت؟

۱۱ـ چگونه مجموعه توصیف شده‌در پرسش قبلی‌را با مجموعه‌یی که‌درآن یک نقطه از مجموعه را می‌توان با یک پاره خط مستقیم در مجموعه به هر نقطه‌دیگری ازمجموعه وصل کرد، مقایسه‌می‌کنید؟

تمرینها

۱ـ ثابت کنید هر همسایگی از یک نقطه واقع بر خط حقیقی (یک فاصله باز) یک مجموعه باز در R است.

۲ـ نشان‌دهید مجموعه A از اعداد مختلط کراندار است اگروتنها اگر بازاء $z_0 \in C$ مفروض، عدد حقیقی M موجود باشد بطوری که برای هر $z \in A$ داشته باشیم $z \in N(z_0; M)$. آیا M را می‌توان مستقل از z_0 انتخاب کرد؟

۳ـ نشان‌دهید یک‌مجموعه از اعداد مختلط کرانداراست اگر و تنها اگر مجموعه‌های قسمت حقیقی و قسمت انگاری آن کراندار باشند.

۴ـ مجموعه‌های زیر را توصیف نمائید.

(الف) $\{z \in C : 1 < |z| < 2,$ به‌استثنای نقاطی که $z \in R\}$

(ب) $\{z \in C : z = (x, y),$ x و y گویا$\}$

(پ) $\{x \in R :$ x اصم$\}$

(ت) $\{x \in R :$ x عددصحیح$\}$

(ث) $\{\bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, n] :$ n هرعددصحیح‌مثبت$\}$

۵ـ ثابت‌کنیدکه‌اجتماع یک گردآورده دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است‌واشتراک

هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز ، باز است .

۶ـ نشان دهید یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر متمم آن بسته باشد .

۷ـ نشان دهید اشتراک یک گردآورده دلخواه از مجموعه‌های بسته ، بسته است و اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته ، بسته است .

۸ـ نشان دهید ، نقاط حدی یک مجموعه ، تشکیل یک مجموعه بسته می‌دهد .

۹ـ نشان دهید A ، بستار A ، کوچکترین مجموعه بسته‌یی است که شامل A باشد .

۱۰ـ نشان دهید ، یک مجموعه همبند است اگر هر دو نقطه‌اش را بتوان با یک خط چند ضلعی بهم وصل کرد .

۱۱ـ فرض کنیم $A=\{(x,y):y=\sin(1/x),\ x\neq 0\}$ و $B=\{(0,y):-1\le y\le 1\}$ نشان‌دهید $A\cup B$ همبنداست ولی هیچ نقطه A را نمی‌توان‌بایک‌چندضلعی که‌در $A\cup B$ باشد به یک نقطه B به‌هم‌وصل‌کرده

۱۲ـ نشان دهید ، اگر A همبند باشد ، آنگاه A همبند است ، آیا وارون آن درست است ؟

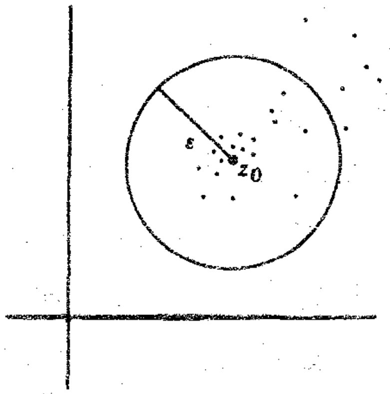
۱۳ـ نشان دهید ، اجتماع دو میدان ، یک میدان است اگر و تنها اگر حداقل یک نقطه‌مشترک داشته باشند .

۲ـ۲ . دنباله‌ها

یک‌دنباله $\{z_n\}$ ازاعدادمختلط بدین ترتیب تشکیل می‌شود که به هر عددصحیح مثبت n ، عدد مختلط z_n منسوب گردد . نقطه z_n به جمله nام دنباله موسوم است . بایستی در متمایز نمودن جملات یک دنباله و مجموعه‌یی که اعضای آن جملات دنباله هستند دقت‌کافی مبذول داشت . به عنوان مثال تعداد جملات دنباله $\{2,2,2,\ldots\}$ نامتناهی‌است (درواقع همه‌دنباله‌هااین‌چنین‌اند) درحالی که مجموعه $\{2,2,2,\ldots\}$ تنها شامل یک عنصر است . عموماً ، وقتی خواص دنباله‌ای را از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها بررسی کنیم ، منظورمان مجموعه‌ای منسوب به جملات دنباله است .

گوئیم دنباله $\{z_n\}$ دارای حد z_0 است (به z_0 می‌گراید) ، و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ اگر برای هر $\varepsilon>0$ یک عدد صحیح N (وابسته به ε) موجود باشد بطوری که هروقت $n>N$ آنگاه $|z_n - z_0|<\varepsilon$. از نظر هندسی این بدان معنی است‌که هر همسایگی z_0 شامل همه جملات دنباله باشد به استثنای تعدادی متناهی از آنها (ر.ک. شکل ۵) به عنوان مثال ، دنباله $\{1/n\}$ به 0 می‌گراید . ولی دنباله $\{(-1)^n\}$ که بین ۱ و ۱ـ در نوسان است همگرا نیست .

شکل ۵



ارتباطی زیبا میان همگرایی هر دنباله از اعداد مختلط با همگرایی قسمتهای حقیقی وانگاریش موجود است .

قضیه ۲ــ۳ . فرض کنیم $z_n = x_n + iy_n$ دنباله‌یی از اعداد مختلط باشد . آنگاه $\{z_n\}$ به عدد مختلط $z_0 = x_0 + iy_0$ می‌گراید اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ به x_0 و $\{y_n\}$ به y_0 بگراید .

اثبات ــ فرض‌کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. دراین‌صورت برای $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح N موجود است که $n > N$ موجب گردد .

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

از (۱) حاصل می‌گردد

$$|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)|$$

$$\leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

و $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید . برعکس اگر فرض شود $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ نامساویهای

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|, \qquad |y_n - y_0| \leq |z_n - z_0|$$

نشان می‌دهند ، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x_0 و y_0 می‌گرایند .

اساسا" قضیه ۲ــ۳ مبین آن است که خواص زیادی از دنباله‌های مختلط را می‌توان از خواص نظیرشان در دنباله‌های حقیقی استنتاج نمود . به عنوان مثال ، منحصر بفرد بودن حد یک دنباله مختلط را می‌توان یا مستقیما" اثبات کرد و یا اینکه با استفاده از خاصیت یکتایی حد در دنباله‌های حقیقی اثبات نمود .

چون هر دنباله همگرا کاملا" در حول حدش متمرکز می‌گردد ، قضیه بعدی چندان اعجاب‌انگیز نیست .

قضیه ۲ــ۴ . هر دنباله همگرا کراندار است .

اثبات ــ اگر $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ آنگاه N ی وجوددارد که برای $n > N$ داشته باشیم $z_n \in N(z_0, 1)$ آنگاه برای هر n داریم ، $|z_n| < M + |z_0| + 1$ که

$$M = \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_N|\}$$

وارون قضیه ۲ــ۴ درست نیست . دنباله $\{1, 2, 1, 2, \ldots\}$ کراندار است ولــی همگرا نیست ، با اینکه جملات فرد وجملات زوج آن دنباله‌هایی همگرا هستند .

یک زیر دنباله از دنباله $\{z_n\}$ ، دنباله‌یی چون $\{z_{n_k}\}$ است‌که‌جملات آن‌ازمیان جملات دنباله اصلی برگزیده شده و به همان ترتیب مرتب شده باشند . در مورد دنبالــه $z_n = (-1)^n$ ، زیر دنباله $z_{n_k} = z_{2k}$ ، $k = 1, 2, 3, \ldots,$ ، به ۱ می‌گرایدو زیر دنباله $z_{n_l} = z_{2l-1}$ ، $l = 1, 2, 3, \ldots,$ ، به ۱ــ می‌گراید . قضیه بعدی نشان می‌دهد ، یــک زیر دنباله لااقل به "خوش رفتاری" دنباله اصلی‌اش می‌باشد .

قضیه ۲ــ۵ . اگر دنباله $\{z_n\}$ به z_0 بگراید ، آنگاه هر زیر دنباله $\{z_{n_k}\}$ از آن هم z_0 می‌گراید .

اثبات ــ با فرض $\varepsilon > 0$ ، N ی وجود دارد که برای $n > N$ داریم ، $z_n \in N(z_0; \varepsilon)$ پس برای $n_k > N$ داریم $z_{n_k} \in N(z_0; \varepsilon)$. چون $n_k \geq n$ (چرا ؟) ، حداکثر N جمله‌اززیر دنباله یافت میشود که $|z_{n_k} - z_0| \geq \varepsilon$.

می‌دانیم که همه مجموعه‌ها کراندار نیستند . ولی ، اگر مجموعه‌یی از اعداد حقیقی کراندارباشد ، دارای یک "کوچکترین" کران است . عددحقیقی M را کوچکترین کران بالا ی مجموعه A از اعداد حقیقی نامند اگر (lub) :

(۱) برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq M$

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $y \in A$ موجود باشد که $y > M - \varepsilon$

به طریقی مشابه ، عدد حقیقی m را بزرگترین کران پائین (glb) مجموعه A گویند اگر :

(۱) برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \geq m$

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ یک $y \in A$ موجود باشد که $y < m + \varepsilon$

خاصیت ددکیند[1] مبین آن است که هر مجموعه کراندار و غیرتهی از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالا و یک بزرگترین کران پائین است ، برای اثبات این مطلب به کتاب رودین (۱ ، صفحه ۱۱) مراجعه کنید .[2]

چنانکه دیدیم وارون قضیه ۲ــ۴ (حتی برای دنباله‌های حقیقی) درست نیســت . دنباله‌های‌کراندارنوسانی‌لزوما "همگرا نیستند . با وجود بر این با حذف نوسان ،همگرایی بوجود خواهد آمد ، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ را بطور صعودی (نزولی) یکنوا گویند اگر برای هر n ، $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$. دنباله را یکنوا گوئیم ، چنانچه یا صعودی یکنوا و یا نزولی یکنوا باشد .

1. Dedekind Property

۲ــ به فهرست مراجع آخرکتاب مراجعه‌کنید .

<u>قضیه ۲ـ۶ . هر دنباله کراندار و یکنوا از اعداد حقیقی همگراست .</u>

<u>اثبات ـ</u> فرض‌کنیم دنباله‌کراندار $\{x_n\}$ بطورصعودی یکنوا باشد ؛ بموجب‌خاصیت ددکیند مجموعه $\{x_n\}$ ، دارای یک کوچکترین کران بالا است . که‌آنرا x می‌نامیم . بنابه تعریف lub ، بازاء $\varepsilon > 0$ عدد صحیح N موجود است که $x_N > x - \varepsilon$. از آنجا که $\{x_n\}$ بطور صعودی یکنواست ، برای $n > N$ داریم $x - \varepsilon < x_n \leq x$. بنابراین برای $n > N$ داریم ، $|x_n - x| < \varepsilon$ و $\{x_n\}$ به کوچکترین حد بالایش می‌گراید . اثبات در حالتی که دنباله‌نزولی یکنوا باشد مشابه است فقط باید عوض کوچکترین کران بالا ، بزرگترین کران پائین مورد استفاده قرار داد .

مثالهایی‌که‌از دنباله‌های کراندار دیدیم همگرا نبودند ، ولی دارای زیر دنباله‌های همگرا بودند . برای این که نشان دهیم این مطلب عمومیت دارد به لم زیر نیازمندیم :

<u>لم ـ هر دنباله از اعداد حقیقی شامل یک زیر دنباله یکنوا است</u>

<u>اثبات ـ</u> فرض کنیم ، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ دارای این خاصیت باشد که به تعداد نامتناهی n موجودباشدکه‌برای هر $k \geq n$ ، $x_k \leq x_n$. اگر n_1 اولین n بااین‌خاصیت n_2 دومین والخ ، در این صورت $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ زیر دنباله‌ای نزولی و یکنوا از $\{x_n\}$ است .

از سوی دیگر ، چنانچه تعداد نامتناهی n با این خاصیت موجود باشد که برای هر $k \geq n$ ، $x_k \leq x_n$ آنگاه ، عددصحیح m_1 راطوری‌انتخاب می‌کنیم که هیچ جمله دنباله $x_{m_1}, x_{m_1+1}, x_{m_1+2}, \ldots$ دارای این خاصیت نباشد . فرض کنیم m_2 اولین عدد صحیح بزرگتر از m_1 با $x_{m_2} > x_{m_1}$. با ادامه این روند ، دنباله‌ای مانند $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$ حاصل می‌گردد که زیر دنباله‌ای بطور صعودی یکنوای $\{x_n\}$ است . و بدین ترتیب اثبات کامل است .

<u>قضیه ۲ـ۷ . هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل یک زیر دنباله همگراست .</u>

اثبات ـ فرض‌کنیم $z_n = x_n + iy_n$ با $|z_n| \leq M$. دراین‌صورت $|x_n| \leq M$ و $|y_n| \leq M$ بموجب لم فوق ، $\{x_n\}$ شامل زیر دنباله یکنوای $\{x_{n_k}\}$ است و بموجب قضیه ۲ـ۶ ، $\{x_{n_k}\}$ همگراست .

اکنون زیر دنباله متناظر $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ را در نظر می‌گیریم . این زیر دنباله ممکن است همگرا نباشد ، ولی آن بموجب لم فوق و قضیه ۲ـ۶ ـ شامل‌زیردنباله همگرایی $\{y_{n_{k(l)}}\}$ است . و بنابه قضیه ۲ـ۵ $\{x_{n_{k(l)}}\}$ نیز همگراست . بابکاربردن‌قضیه ۲ـ۳ ، دنباله

$$z_{n_{k(l)}} = x_{n_{k(l)}} + iy_{n_{k(l)}}$$

یک زیر دنباله همگرا از $\{z_n\}$ است و این اثبات را کامل میکند .

ارتباط میان‌حدیک‌دنباله ،نقاط حدی‌یک دنباله و lub و glb یک دنباله‌چیست ؟ در دستگاه اعداد مختلط، lub و glb بی‌معنی هستند ، گو اینکه (همانطور که هم‌اکنون دیدیم)از این مفاهیم مربوطه به اعداد حقیقی میتوان برای اثبات قضایایی ، در مورد اعداد مختلط استفاده نمود . در مورد دنباله $\{n/(n+1)\}$، 1عبارت از lub است و حد و نقطه حدی یکتای آنست . اگر یک دنباله همگرا تنها دارای تعداد متناهی عضو باشد ، نقطه حدی نخواهد داشت ؛ با این حال در این زمینه قضیه زیر برقرار است :

قضیه ۲ـ۸ . نقطه z_0 نقطه حدی یک مجموعه A است اگر و تنها اگر یک دنباله نقاط متمایز در A موجود باشد که به z_0 بگراید .

اثبات ــ اگر دنباله $\{z_n\}$ از نقاط متمایز در A به z_0 بگراید ، آنگاه هر همسایگی z_0 شامل همه نقاط $\{z_n\}$ است ، مگر تعدادی متناهی از آنها (و بنابراین شامل تعداد نامتناهی خواهد بود) . پس z_0 می‌بایست نقطه حدی A باشد .

جهت اثبات وارون ، گیریم z_0 نقطه حدی A باشد . برای هر عدد صحیح n ، نقطه z_n را در $N(z_0; 1/n) \cap A$ اختیار می‌کنیم . چون هر همسایگی A شامل تعداد نامتناهی نقاط متمایز است ، می‌توان نقاط دنباله $\{z_n\}$ را متمایز فرض نمود .

با فرض $\varepsilon > 0$ ، N را طوری انتخاب می‌کنیم که $1/N < \varepsilon$. دراین صورت برای $n > N$ داریم ، $z_n \varepsilon N(z_0; \varepsilon)$ و دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید .

از ترکیب دو قضیه قبل حاصل می‌شود .

قضیه ۲ـ۹ (بولتسانو ـ وایرشتراس[1]) ــ هر مجموعه کراندار نامتناهی در صفحه یک نقطه حدی دارد .

اثبات ــ یک دنباله از نقاط متمایز در مجموعه اختیار می‌کنیم . بموجب قضیه۲ـ۷، این دنباله شامل یک زیر دنباله همگراست ؛ و بموجب قضیه ۲ـ۸ حد این زیردنباله‌همگرا نقطه حدی مجموعه است و اثبات تمام است .

دنباله $\{z_n\}$ ازاعدادمختلط را دنباله‌کوشی نامیم‌اگر برای هر $0 < \varepsilon$ ، عدد صحیح N (وابسته به ε) موجود باشد بطوری که :

اگر $m, n > N$ آنگاه $|z_m - z_n| < \varepsilon$

چه اختلافی میان دنباله‌کوشی و دنباله همگرا موجود است ؟ از نظر هندسی ، برای یک دنباله همگرا همه‌نقاط آن به استثنای تعدادی متناهی نزدیک به یک نقطه ثابت (حد دنباله)اند ، در حالی که در مورد دنباله کوشی همه نقاط به استثنای تعدادی متناهی ، نزدیک به همدیگراند . هم اکنون نشان می‌دهیم ، در مورد دنباله‌های مختلط ، این دو

1. Bolzano-Weierstrass

مفهوم هم‌ارزند .

قضیه ۲ــ۱۰ . دنباله $\{z_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی باشد .

اثبات ــ فرض کنیم $\{z_n\}$ به z_0 بگراید . از نامساوی مثلث داریم :

$$|z_m - z_n| = |z_m - z_0 + z_0 - z_n| \leq |z_m - z_0| + |z_n - z_0|. \qquad (۲)$$

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد ، هر دو جمله طرف راست (۲) را می‌توان برای $m, n > N$، از $\varepsilon/2$ کمتر کرد . بنابراین $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی است .

برعکس فرض کنیم $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی باشد . در این صورت برای $n > N$ داریم $|z_n - z_N| < 1$.بنابراین برای $n > N$، $|z_n| < |z_N| + 1$. از این رو $\{z_n\}$ یک دنباله کراندار است . بموجب قضیه ۲ــ۷ ، $\{z_n\}$ شامل یک زیر دنباله $\{z_{n_k}\}$ است‌که‌به‌نقطه‌یی (مثلاً z_0) می‌گراید .

نشان می‌دهیم ، $\{z_n\}$ نیز به z_0 می‌گراید . با استفاده از نامساوی مثلث ،داریم :

$$|z_n - z_0| = |z_n - z_{n_k} + z_{n_k} - z_0| \leq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0|. \qquad (۳)$$

برای $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N موجود است به طوری که برای $n > N$

$$\left.\begin{aligned} |z_n - z_{n_k}| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{(زیرا } \{z_n\} \text{ کوشی‌است)} \\ |z_{n_k} - z_0| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{(زیرا } \{z_{n_k}\} \text{ همگرا است)} \end{aligned}\right\} \qquad (۴)$$

با ترکیب (۳) و (۴) ملاحظه می‌شود ، برای $n > N$، $|z_n - z_0| < \varepsilon$.بنابراین $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید و اثبات کامل است .

قضیه ۲ــ۱۰ یک روش عمومی را برای مشخص نمودن همگرایی یک دنباله از اعداد مختلط بدست می‌دهد ، گرچه ممکن است که حد آن را از قبل‌ندانیم .دستگاههایی وجود دارد که در آن همه دنباله‌های کوشی همگرا نباشند . به عنوان مثال در هیات اعداد گویا دنباله‌کوشی ... ,1, 1.4, 1.41, 1.414 همگرا نیست ($\sqrt{2}$ گویا نیست) . دستگاهی را که‌در آن هر دنباله‌کوشی همگرا باشد کامل نامند .

در[۲] ثابت شده است . دستگاه اعداد حقیقی تنها هیات مرتب و کامل است .

پرسش‌ها

۱ــ فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های حقیقی باشند . اگر $\{(x_n + y_n)\}$ همگرا باشد ، آیا این بدان معنی است $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرایند ؟ چگونه این پرسش را با قضیه ۲ــ۳ مقایسه می‌کنید ؟

۲ـ برای یک دنباله چند زیر دنباله موجود است؟

۳ـ آیا دنباله‌های بی‌کران می‌توانند نقطه حدی داشته باشند؟ دنباله‌های بی‌کران یکنوا چطور؟

۴ـ چه وقت کوچکترین کران بالای یک مجموعه، عنصری از آن مجموعه است؟

۵ـ آیا یک دنباله حقیقی می‌تواند به مقداری بجز glb یا lub از آن دنباله بگراید؟

۶ـ آیا یک دنباله می‌تواند به تعداد نامتناهی نقطه حدی داشته باشد؟

۷ـ آیا می‌توانید دنباله‌یی حدس بزنید که همگرا باشد بدون آنکه حدش را بدانید؟

۸ـ چگونه می‌توان قضیه ۲ـ۸ را بدون استفاده از قضیه ۲ـ۱ اثبات کرد؟

۹ـ در مورد دنباله $b_n = \text{glb}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ که در آن $\{a_n\}$ یک دنباله حقیقی است چه می‌توان گفت؟ اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد چطور؟

تمرینها

۱ـ فرض کنیم $\{z_n\}$ به z_0 و $\{w_n\}$ به w_0 بگراید، نشان دهید:

الف $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z_0 + w_0$ ب $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = z_0 w_0$

۲ـ نشان دهید، اگر دنباله‌یی بیش از یک نقطه حدی داشته باشد همگرا نخواهد بود.

۳ـ اگر $\{z_n\}$ همگرا باشد نشان دهید، $\{|z_n|\}$ همگراست، آیا وارون آن درست است؟

۴ـ کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

الف $\{i^n\}$ پ $\{z_0^n, \text{ where } |z_0| < 1\}$

ب $\left\{\dfrac{\cos n + i \sin n}{n}\right\}$ ت $\left\{\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}\right\}$

۵ـ اگر $\{z_n\}$ به 0 بگراید، ثابت کنید $\{(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)/n\}$ به 0 می‌گراید. سپس نشان دهید، همگرایی $\{z_n\}$ به z_0 موجب می‌شود $\{(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)/n\}$ به z_0 بگراید.

۶ـ دنباله‌یی مثال بزنید.

الف ـ همگرا نباشد ولی دقیقاً" یک نقطه حدی داشته باشد.

ب ـ برای هر عدد صحیح n، دارای n نقطه حدی باشد.

پ ـ به تعداد نامتناهی نقاط حدی داشته باشد.

۷ـ ثابت کنید حدهای زیر دنباله‌یی (حدهای همه زیر دنباله‌های ممکن) از دنباله

$\{z_n\}$ یک مجموعه بسته تشکیل می‌دهد.

۸ــ فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌یی با خاصیت زیر باشد: بازاء $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N موجود است که برای $n > N$ داریم $|z_{n+1} - z_n| < \varepsilon$. مثالی بزنید که نشان دهد $\{z_n\}$ لزوما" یک دنباله‌کوشی نیست.

۹ــ فرض کنیم $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k!$ با استفاده از معیار کوشی نشان دهید، $\{s_n\}$ همگراست. .

۲ــ۳. فشردگی

اجتماع فواصل باز $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ برای $n = 1, 2, 3, \ldots$ شامل مجموعه اعداد صحیح مثبت است. هرفاصله به‌نوبه خود مهم است، از این نظر که با برداشتن یکی از این‌فواصل یک‌عدد صحیح‌مثبت بی‌پوشش‌می‌ماند. برای‌مجموعه‌کراندار $S = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ اجتماع فواصل باز $(1/n, 1)$ برای $n = 2, 3, 4, \ldots$ شامل S است. در حالی که برداشتن هر یک از این فواصل مانع پوشاندن S توسط فواصل‌باقیمانده نمی‌شود. مجموعه S درون اجتماع هیچ گردآورده متناهی از این فواصل نیست.

مجموعه‌یی را شمارش‌پذیر گویند که بتوان عناصر آن را با یک زیر مجموعه اعداد صحیح به‌طوریک‌به‌یک‌متناظرکرد. گردآورده $\{O_\alpha\}$ از مجموعه‌های بازراپوشش بازی‌برای S گویند، هرگاه‌داشته باشیم $S \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$. باید توجه داشت، گردآورده $\{O_\alpha\}$ ممکن است شامل تعداد غیرشماره‌پذیری از مجموعه‌ها باشد. مجموعه S را فشرده نامند اگر هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش متناهی باشد.

دیدیم مجموعه اعداد صحیح و فاصله باز $(0, 1)$ هیچکدام فشرده نیستند. ولی، هر مجموعه متناهی فشرده است زیرا هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی به‌ترتیب‌زیر دارد:

متناظر با هر نقطه یکی از مجموعه باز شامل نقطه را انتخاب می‌نمائیم.

به کار بردن تعریف فشردگی همیشه آسان نیست. می‌خواهیم برای مشخص نمودن فشردگی با روشی، از نظر هندسی ملموس‌تر کار کنیم. بدین منظور به لم زیر نیازمندیم:

لم ۱ــ فرض کنیم $\{I_n\}$ دنباله‌ای ازفواصل‌کرانداروبسته‌واقع بر خط حقیقی‌باشد. اگر برای هر n، داشته باشیم $I_{n+1} \subset I_n$ ودرازای I_n وقتی $n \to \infty$ به 0 نزدیک شود آنگاه دقیقا" یک نقطه است که در همه I_n ها مشترک است.

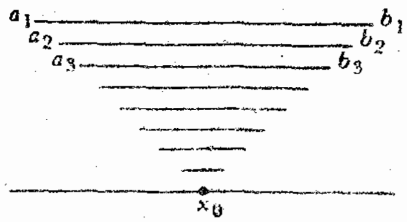
اثبات ــ فرض کنیم $I_n = \{x : a_n \le x \le b_n\}$ به موجب فرض

$$a_n \le a_{n+1},\ b_{n+1} \le b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \qquad (۵)$$

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو یکنوا و کراندار هستند (برای هر n داریم، $a_n, b_n \in [a_1, b_1]$)، به موجب قضیه ۲ـ۶ هر دو دنباله همگرا هستند؛ و بنابه (۵) بایست به یک نقطه مشترکی بگرانید که آنرا x_0 می‌نامیم. چون $x_0 = \text{lub}\,\{a_n\} = \text{glb}\,\{b_n\}$
برای هر n $\qquad x_0 \in [a_n, b_n]$
(ر.ک. شکل۶). نـــقـــطه دیگری چون x_1 نمی‌تواند در همه I_n هامشترک باشد. زیرا اگر x_1 (مخالف x_0)کوچکتر (بزرگتر) از x_0 باشد، آنگاه x_0 نمیتواند $\text{lub}\,\{a_n\}$ $(\text{glb}\,\{b_n\})$ باشد.



شکل۶

باید توجه داشت در لم ۱ اگر فواصل بسته به فواصل‌بازتبدیل‌شوند دیگر لم درست نخواهد بود. گردآورده فواصل $\{(0, 1/n)\}$ در شرایط مذکور صادقند. در حالی کـه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \varnothing$$

لم ۲ـ فرض‌کنیم $\{S_n\}$ دنباله‌یی از مستطیل‌های کراندار وبسته‌از صفحه باشد. اگر برای هر n، داشته باشیم $S_{n+1} \subset S_n$ ودرازای اضلاع S_n وقتی $n \to \infty$، به 0 نزدیک‌شود آنگاه دقیقا" یک نقطه در همه مستطیل‌ها مشترک است.

اثبات ـ فرض‌کنیم $\{I_n\}$ و $\{J_n\}$ به ترتیب افکنه‌های $\{S_n\}$ بر محورهای حقیقی و انگاری باشد. آنگاه $\{I_n\}$ و $\{J_n\}$ در شرایط لم ۱ صادقند. اگر

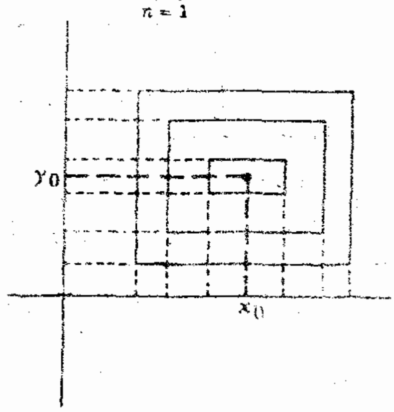
$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{و} \quad \{y_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

آنگاه برای $z_0 = (x_0, y_0)$ داریم:

$$\{z_0\} = \{(x_0, y_0)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

(ر.ک. شکل ۷)

شکل۷



<u>قضیه ۲-۱۱ (هاین ـ بورل[1]) ـ هر مجموعه کراندار و بسته فشرده است.</u>

اثبات ـ فرض کنیم $\{O_\alpha\}$ یک پوشش باز برای مجموعه کراندار و بسته S باشد که دارای زیر پوشش متناهی نیست. چونکه S کراندار است در مربع بسته‌ای مانند S_0 با رئوس $z=\pm a\pm ai$ جای دارد. محورهای مختصات مربع S_0 را به چهار زیر مربع (مربع کوچکتر) بسته مساوی تقسیم می‌کند. حداقل یکی از این مربعها (آنرا S_1 می‌نامیم) دارای این خاصیت است که $S\cap S_1$ را نمی‌توان با یک زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ پوشانید. (چرا؟) اینک S_1 را به چهار زیر مربع بسته مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم (ر.ک. شکل ۸). این بار هم یکی از این مربعها، موسوم به S_2 دارای این خاصیت است که برایش زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ موجود نیست که $S\cap S_2$ را بپوشاند.

این فرآیند را می‌توان بی‌نهایت بار ادامه داد تا دنباله‌یی از مربعهای بسته $\{S_n\}$ بوجود آید که برایشان هیچ زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ موجود نیست که $S\cap S_n$ را بپوشاند. باید توجه داشت که درازای هر ضلع S_n برابر $a/(2^{n-1})$ است. بنابه لم ۲، دقیقاً یک نقطه، موسوم به z_0، در همه مربعهای S_n مشترک است. نقطه z_0 بایست نقطه حدی S باشد و بنابراین عضو S است.

فرض کنیم O_{α_0} عضو پوشش $\{O_\alpha\}$ باشد که شامل z_0 است. چون O_{α_0} مجموعه‌بازی است، $\varepsilon>0$ ی موجود است که $N(z_0;\varepsilon)\subset O_{\alpha_0}$. ولی برای n های بس‌بزرگ داریم $S_n\subset N(z_0;\varepsilon)$. از این رو، $S_n\cap S$ یک زیر پوشش متناهی از $\{O_\alpha\}$ دارد که دارای یک عضو است: O_{α_0}. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند.

نکته اصلی بحث بالا این که اگر هیچ زیر گردآورده متناهی از $\{O_\alpha\}$، S را نپوشاند، آنگاه هیچ زیر گردآورده متناهی، یک دنباله با دقت انتخاب شده زیر مجموعه‌های S را نیز نمی‌پوشاند. از سوی دیگر، این دنباله از زیر مجموعه‌های S را می‌توان آنقدر کوچک کرد تا اینکه در یکی از مجموعه‌های باز پوشش بیافتد.

اینک می‌توانیم برخی از نتایج مهم دو بخش اخیر را گردآورده و قضیه اصلی زیر را بدست آوریم.

<u>قضیه ۲-۱۲. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از صفحه باشد. در اینصورت گزاره‌های زیر هم ارزند:</u>

(۱) S بسته و کراندار است.

(۲) S فشرده است.

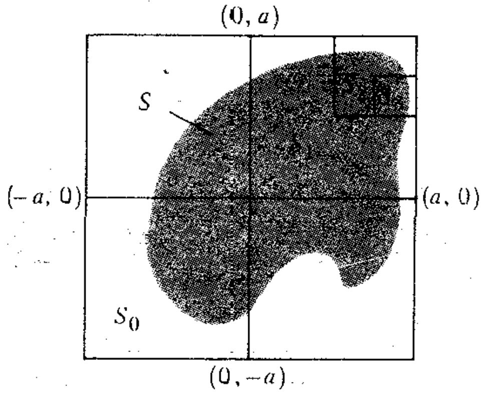
---

1. Heine-Borel

(۳) هر زیر مجموعه نامتناهی S یک نقطه حدی در S دارد .

(۴) هر دنباله در S دارای یک زیر دنباله است که به نقطه‌یی در S می‌گراید .

شکل ۸



اثبات ــ قضیه‌ها ین ــ بورل مبین این است که (۱) موجب (۲) می‌شود . نشان می‌دهیم که (۲) موجب (۳) و (۳) موجب (۴) و (۴) موجب (۱) می‌گردد . از آنجا که وقتی S متناهی باشد درستی هر یک از این گزاره‌ها بدیهی است . می‌توان فرض کرد که S نامتناهی است .

فرض کنیم (۲) برقرار است . اگر A یک زیر مجموعه متناهی S باشد که در S نقطه حدی نداشته باشد ، آنگاه برای هرنقطه در $S-A$ یک همسایگی می‌توان یافت که شامل هیچ نقطه A نباشد . به‌علاوه برای هر نقطه در A یک همسایگی می‌توان یافت که شامل هیچ نقطه دیگری از A نباشد . گردآورده همه چنین همسایگی‌هایی یک پوشش باز برای S است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد و این با فشرده بودن S متناقض است .

فرض کنیم (۳) برقرار است . گیریم $\{z_n\}$ دنباله‌یی از نقاط متمایز در S باشد (چرا بررسی این چنین دنباله‌هایی کفایت می‌کند ؟) بنابه فرض یک نقطه حدی z_0 برای $\{z_n\}$ موجود است که $z_0 \in S$. بموجب قضیه ۲ــ۸ زیر دنباله‌یی از $\{z_n\}$ موجود است که به z_0 می‌گراید .

فرض کنیم (۴) برقرار است . اگر S کراندار نباشد ، آنگاه دنباله نقاط $\{z_n\}$ در S موجودند که ، برای هر n داریم ، $|z_n|>n$. گیریم $\{z_{n_k}\}$ یک زیر دنباله دلخواه $\{z_n\}$ باشد . برای هر نقطه $z_0 \in S$ ، $N(z_0;1)$ نمی‌تواند شامل نقاط $\{z_{n_k}\}$ که برایشان $n_k>|z_0|+1$ باشد . پس $\{z_{n_k}\}$ نمی‌تواند به نقطه‌یی در S بگراید . و این متناقض با فرض است . برای این که نشان دهیم S بسته است ، گیریم z_0 یک نقطه‌حدی S باشد . بموجب قضیه ۲ــ۸ ، دنباله $\{z_n\}$ از نقاط متمایز S موجود است که به z_0 می‌گراید . بموجب قضیه ۲ــ۵ هر زیر دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید . بنابه (۴) ، z_0 نتیجتاً " بایست در S باشد . بدین ترتیب اثبات کامل است .

فشردگی خاصیتی زیبا است زیرا که تبدیل شدن یک پوشش باز به یک زیر پوشش

متناهی ، اغلب بدین معنی استکه برای اثبات این که مجموعه‌یی واجد خاصیت مشخصی است ، تنها لازم است یک تعداد نقاط متناهی بررسی شود . بهمین دلیل ، وقتی‌فشردگی موجود باشد ، می‌توان نشان داد اکثر خواص موضعی (خواصی که در یک همسایگی هرنقطه یک مجموعه برقرار است) . همه جایی و یا یکنواخت (خاصیت مجموعه در کل) هستند .

به‌عنوان‌مثال ازاین حقیقت‌که هر نقطه را می‌توان با یک همسایگی کراندارپوشانید ، نتیجه می‌شود که یک مجموعه فشرده کراندار است . همچنین اگر دوری‌هرنقطه یک‌مجموعه فشرده از یک نقطه ثابت صفر نباشد ، آنگاه دوری خود مجموعه از این نقطه ثابت هم‌صفر نیست (ر.ک. تمرین۳) . البته این مطلب در حالت عمومی درست نیست . دوری هرنقطه فاصله باز $(0, 1)$ از 0 مخالف صفر است ، در حالی که هیچ عدد حقیقی مثبت بین این مجموعه‌و 0 موجود نیست .

چه چیز باعث میشود که اضافه کردن یک یا دو نقطه این‌چنین عمده باشد ؟ فاصله باز $(0, 1)$ رابافاصله‌بسته $[0, 1]$ مقایسه‌کنیم . همان‌طورکه‌قبلا "دیدیم $\bigcup_{n=2}^{\infty} (1/n, 1)$ یک پوشش باز برای $(0, 1)$ است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد . این‌پوشش شامل‌نقاط $\{0\}$ و $\{1\}$ نمی‌شود .اگراین‌نقاط را به مجموعه می‌افزودیم آنگاه برای داشتن یک‌پوشش ، بایست فواصلی از قبیل $(-\varepsilon, \varepsilon)$ و $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ نیز افزوده می‌گردید . ولی درآن صورت $(-\varepsilon, \varepsilon), (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ بانضمام $\bigcup_{n=2}^{N} (1/n, 1)$ برای یک $N > 1/\varepsilon$ یک زیر پوشش متناهی می‌گردید .

پرسش‌ها

۱ــ در مورد اجتماع (اشتراک) متناهی مجموعه‌های فشرده چه می‌توان گفت ؟

۲ــ در مورد اجتماع (اشتراک) نامتناهی مجموعه‌های فشرده چه می‌توان گفت ؟

۳ــ در مورد متمم مجموعه فشرده چه می‌توان گفت ؟

۴ــ در مورد دنباله‌های‌کوشی در مجموعه فشرده چه می‌توان گفت ؟

۵ــ چه وقت می‌توان گفت هر زیر مجموعه ، از یک مجموعه فشرده ، فشرده است ؟

۶ــ دیدیم برداشتن یک نقطه از مجموعه می‌تواند ناقص فشردگی گردد . چند نقطه بایست به مجموعه‌ای افزود تا فشردگی را نقض کند .

۷ــ چگونه تعمیمی از لم ۲ را می‌توان برای مجموعه‌های فشرده بیان داشت ؟

۸ــ آیا می‌توان از "بی‌نهایت" به عنوان نقطه حدی صحبت کرد ؟

تمرینها

۱ــ نشان دهید اجتماع هر مجموعه کراندار با نقاط حدی خودش‌یک مجموعه‌فشرده

است .

۲ـ نشان دهید یک مجموعه فشرده از اعداد حقیقی شامل بزرگترین کران پائین و کوچکترین‌کران بالای‌خودش می‌باشد . آیا این مطلب در مورد مجموعه‌یی از اعداد حقیقی که فشرده نیست درست است ؟

۳ـ اگر S فشرده و $z_0 \notin S$ ، ثابت کنید :

$$\operatorname*{glb}_{z \in S} |z - z_0| > 0$$

۴ـ اگر $\{S_n\}$ دنباله‌یی ازمجموعه‌های فشرده غیرتهی و برای هر n ، $S_{n+1} \subset S_n$ نشان دهید $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \varnothing$

۵ـ در قضیه ۲ـ۱۲ هر تعداد از ایجاب‌های گوناگون آنرا که می‌توانید اثبات‌کنید .

۶ـ نشان دهید اعداد گویا شمارش‌پذیرند .

۷ـ نشان دهید هر پوشش باز یک زیر مجموعه صفحه دارای‌یک‌زیر پوشش شماره‌پذیر دارد .

۲ـ۴ . افکنش گنجنگاری

تا اینجا ، از حدود نامتناهی به دقت اجتناب کردیم . سه دنباله حقیقی زیر را در نظر میگیریم .

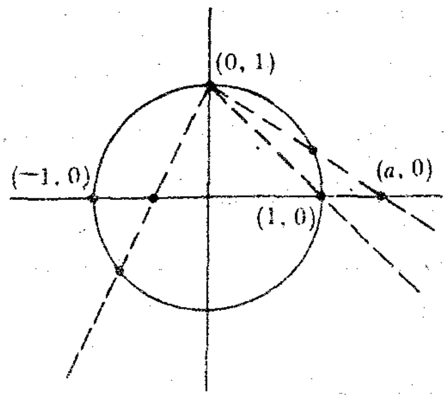
$$a_n = n, \qquad b_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ 1 & n \text{ زوج} \end{cases} \qquad , \qquad c_n = (-1)^n n.$$

با وجودی که هر سه دنباله مذکور به دلخواه بزرگ میشوند ، نمی‌خواهیم بگوئیم هر سه به بی‌نهایت نزدیک می‌گردند . از آنچه که در مورد حدود متناهی آموخته‌ایم مناسب به نظر می‌آید که بایست $\{a_n\}$ به بی‌نهایت نزدیک شود و $\{b_n\}$ چنین نباشد ، زیرا زیر دنباله‌یی از $\{b_n\}$ به ۱ می‌گراید . در حالی که $\{c_n\}$ از دو جهت به بی‌نهایت می‌رود روش معمول این است نمادهای $\pm\infty$ را معرفی کرد و آنها را به اعداد حقیقی بیافزائیم . مجموعه$R \cup \{+\infty, -\infty\}$به دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته مشهوراست .در دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته ، $\{c_n\}$ همگرانیست زیرا $\{c_{2n}\}$ به$+\infty$ و $\{c_{2n+1}\}$ به $-\infty$ می‌گراید .

روش کاملا" منطقی ، اگر چه تا اندازه‌یی غیرمعمول ، این است‌که به R تنها یک‌نقطه ∞ را بیافزائیم . آنگاه گوئیم $\{a_n\}$ به ∞ میل می‌کند ، و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ بشرط آنکه برای هر عدد حقیقی و از قبل مشخصMهمه جملات دنباله باستثنای تعداد متناهی ،خارج فاصله$(-M, M)$قرار گیرند . به موجب این تعریف دنباله $\{(-1)^n n\}$ به ∞ میل‌می‌کند .

می‌توان تصور کرد که روش اخیر از همان روش قبلی بدست آمده است باین ترتیب که دو نقطه $\infty+$ و $\infty-$ را از طرفین کشیده (با دو بازوی خیلی دراز) و پهلوی هم نهاده باشیم. در این صورت خط اعداد حقیقی به یک دایره تبدیل می‌گردد. اینک این مفهوم هندسی را دقیق‌تر بیان می‌کنیم. دایره واحد $x^2+y^2=1$ را در نظر می‌گیریم. بازاء هر عدد حقیقی a، خط مستقیمی رسم می‌کنیم که $(a, 0)$ را به $(0, 1)$ وصل کند. این خط دایره واحد را در $(0, 1)$ و نقطه دیگر (x_1, y_1) قطع می‌کند. نقطه (x_1, y_1) را متناظر a می‌گیریم. به‌عنوان‌مثال، نقاط فاصله‌باز $(-1, 1)$ با نقاط نیمه زیرین دایره‌متناظرند، نقاط -1 و 1 با خودشان متناظرند، نقاط خارج فاصله $[-1, 1]$ با نقاط نیمه‌بالای‌دایره متناظرند (ر. ک. شکل ۹).

شکل ۹



توجه کنید که نقاط نزدیک هم بر خط حقیقی همیشه بر نقاط نزدیک هم بر دایره متناظر می‌گردند. وارون این مطلب درست نیست. نقاط کاملا" دور از جهت‌های مثبت و منفی بر نقاطی نزدیک هم بر دایره متناظر می‌گردند. در واقع هر چه قدر مطلق عدد حقیقی بزرگتر باشد. نقطه نظیرش بر دایره به نقطه $(0, 1)$ نزدیک‌تر است. و $(0, 1)$ تنها نقطه‌یی از دایره است که متناظر با هیچ عدد حقیقی نیست، باین دلیل آنرا متناظر با نقطه ∞ می‌گیریم. بدین ترتیب، یک تناظر یک به یک میان مجموعه $R \cup \{\infty\}$ و نقاط دایره واحد برقرار است. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی فشرده نیست، متناظر گرفتن $R \cup \{\infty\}$ با دایره (فشرده)، به فشرده‌سازی یک نقطه‌یی اعداد حقیقی موسوم است.

آیا این کوشش در حذف $\infty-$ ارزشی هم دارد؟ در حقیقت خیر. درواقع $\infty-$ عملا مفید است زیرا که "کوچکتر از هر عدد حقیقی" است. هدف از معرفی $R \cup \{\infty\}$ ایجاد انگیزه‌یی مناسب برای مطالعه صفحه مختلط گسترش یافته می‌باشد. دنباله مختلط $\{z_n\}$ را که با $z_n = n(\cos\theta + i\sin\theta)$، $0 \leq \theta < 2\pi$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. برای هر مقدار θ. دنباله $\{z_n\}$ بر پرتوی متفاوت به ∞ میل می‌کند. بعلاوه، چون اعداد مختلط مرتب نیستند، نماد $\infty-$ معنایی بیش از نماد $i\infty$ ندارد.

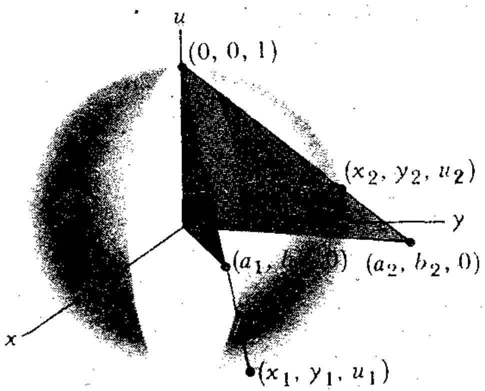
در حالت اعداد مختلط، منظور از Mــ همسایگی ∞، که با $N(\infty; M)$ نمایانده

می‌شود، مجموعه همه نقاطی است که دارای قدر مطلق بزرگتر از M اند. گوئیم دنباله $\{z_n\}$ به ∞ میل می‌کند اگر برای هر $M > 0$، برای همه n ها مگر تعدادی متناهی داشته باشیم $z_n \in N(\infty; M)$

اگر نقطه ∞ را به مجموعه اعداد مختلط بیافزائیم دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته حاصل می‌گردد. باید توجه داشت دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته، از نظر مفهوم با دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته، که به آن دو نقطه $-\infty$ و $+\infty$ افزوده شده، متفاوت است. این فشرده‌سازی یک نقطه‌یی صفحه با $C \cup \{\infty\}$، یک الگوی هندسی شبیه به فشرده سازی یک نقطه‌یی خط که در آن دایره با کره $x^2+y^2+u^2=1$ جایگزین شده است، می‌باشد.

برای هر عدد (a, b) از صفحه مختلط خط مستقیمی در R^3 از $(a, b, 0)$ به $(0, 0, 1)$ وصل می‌کنیم. این خط کره $x^2+y^2+u^2=1$ را در نقطه $(0, 0, 1)$ و در یک نقطه دیگر (x_1, y_1, u_1) قطع می‌کند. افکنش حاصله از نقطه $(0, 0, 1)$ واقع بر کره به نقطه $(a, b, 0)$ واقع در صفحه مختلط، به یک افکنش گنجنگاری موسوم است. (ر.ک. شکل ۱۰). این تناظر یک به یک همه نقاط صفحه متناهی و همه نقاط کره، باستثنای $(0, 0, 1)$ را می‌پوشاند. نقطه واقع در ∞ از دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته با نقطه $(0, 0, 1)$ متناظر می‌گردد، نقطه $(0, 0, 1)$ را گاهی قطب شمال می‌نامند.

قابل توجه است که، یک همسایگی ∞ در صفحه مختلط، متناظر درون یک دایره قطبی به مرکز قطب شمال است.



شکل ۱۰

برای آنکه نقطه (x_1, y_1, u_1) از کره را که متناظر با نقطه $(a, b, 0)$ است به طور مشخص بدست آوریم، ملاحظه می‌کنیم، که سه نقطه

$$(0, 0, 1), \qquad (x_1, y_1, u_1), \qquad (a, b, 0)$$

بر یک خط قرار دارند. بنابراین برای یک عدد حقیقی t داریم:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{u_1 - 1}{-1} = t \qquad (۶)$$

ولی

$$x_1^2 + y_1^2 + u_1^2 = (at)^2 + (bt)^2 + (1-t)^2 = 1$$

با حل معادله نسبت به t خواهیم داشت .

$$t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

بنابراین‌باتوجه‌به (۶) ، عدد مختلط (a, b) متناظر با نقطه

$$(x_1, y_1, u_1) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}\right)$$

است .

با دوباره‌نویسی (۷) ،عددمختلط $z = x + iy$ را با نقطه زیر، واقع بر کره متناظر می‌کنیم .

$$\left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

پرسش‌ها

۱ــ کدام قضایای حدود متناهی ، در مورد حدود نامتناهی هم درست‌اند ؟

۲ــ چه رابطه‌یی میان مجموعه‌های بی‌کران و همسایگی‌های ∞ موجود است ؟

۳ــ چگونه می‌توان ∞ را بعنوان نقطه حدی یک دنباله تعریف کرد ؟

۴ــ نماد "$i\infty$" چه معنی ممکن است داشته باشد ؟

۵ــ نقاط واقع بر دایره واحد در افکنش گنجنگاری به‌چه تبدیل می‌گردند ؟

۶ــ آیا می‌شود صفحه مختلط را با کره دیگری متناظر کرد؟

۷ــ فشرده‌سازی یک نقطه‌یی R^n چگونه می‌تواند باشد؟

تمرینها

۱ــ نشان دهید هر دنباله‌یی که دارای نقطه حدی متناهی‌است .نمی‌تواند به ∞ میل کند .

۲ــ اگر $\{z_n\}$به ∞ میل کند و $\{w_n\}$ کراندار باشد ، نشان دهید $\{(z_n + w_n)\}$ به ∞ می‌گراید .

۳ــ نشان دهید $\{z_n\}$ به‌∞ می‌گراید اگر و تنها اگر $\{|z_n|\}$ به‌∞ بگراید .

۴ــ اگر (x_1, y_1, u_1) نقطه مفروض واقع بر کره واحد باشد ، نقطه متناظر آنرا بر صفحه مختلط بیابید .

۵ــ نشان دهید یک دایره بر کره که از قطب شمال نگذرد با یک دایره در صفحه مختلط متناظر است.

۶ــ نشان دهید هر دایره واقع بر کره که از قطب شمال بگذرد با یک خط مستقیم در صفحه مختلط متناظر است.

۷ــ نشان دهید، با افکنش گنجگاری می توان صفحه مختلط را باکره $x^2+y^2+(u-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$ متناظر کرد.

۲ــ۵. پیوستگی

یک تابع و یا نگاشت (تک مقداری) f از مجموعه A در مجموعه B، که بصورت $f:A\to B$ نوشته می شود، قاعده یی است که به هر عنصر A یک عنصر منحصر بفرد از B متناظر کند. مجموعه A را پیش نگاره f نامیده و زیر مجموعه ای از B را که با نقاط A متناظر می گردد نگاره f نامیده و با $f(A)$ نمایانده می شود. اگر مجموعه B ــ که به برد تابع موسوم است ــ با $f(A)$ برابر باشد، در اینصورت تابع را پوشا گویند. اگر هیچ دو عنصر A بر یک عنصر B نگاشته نشود، تابع را یک به یک گویند. منظور از عبارت $f(a_1)=b_1$ این است که عنصر a_1، $a_1\in A$، بر عنصر b_1، $b_1\in B$ نگاشته می شود.

برای هر $b\in B$، بنابه تعریف $f^{-1}(b)$ عبارت از مجموعه تمام عناصری از A است که نگاره آن b باشد. قابل توجه است که چنانچه f پوشا نباشد. $f^{-1}(b)$ ممکن است تهی باشد. با این حال، چنانچه f یک به یک و پوشا باشد، $f^{-1}:B\to A$ هم تابعی یک به یک و پوشا است و به وارون f موسوم است.

مابطورضمنی با توابع سر و کار داشته ایم. بعنوان مثال، هر دنباله از اعداد حقیقی یک تابع است $f:P\to R$ و یک دنباله از اعداد مختلط یک تابع است $f:P\to C$، که در اینجا P مجموعه اعداد صحیح مثبت است. در افکنش گنجنگاری یک تابع یک به یک یافتیم، که صفحه مختلط گسترش یافته را بر روی کره واحد می نگاشت. (امیدواریم) خواننده با بعضی خواص توابع با مقادیر حقیقی از یک متغیر حقیقی آشنا باشد، یعنی با توابعی که مجموعه های اعداد حقیقی را بر مجموعه های اعداد حقیقی می نگارند. به عنوان مثال، تابع $y=f(x)=x^2$ که متغیر حقیقی x را بر متغیر حقیقی x^2 می نگارد، اعداد حقیقی را بر اعداد حقیقی غیرمنفی می برد و فاصله حقیقی $[0, 1]$ را بر خودش می نگارد والخ.

تذکر ــ موءکدا" گوئیم f برای تابع و $f(x)$ برای مقدار تابع در نقطه x بکار می ــ رود. با این حال چنانچه ابهامی ایجاد نگردد، برای صرفه جویی در وقت، به غلط از نماد $f(x)$ به عنوان تابع نام می بریم.

برای $z = x + iy$ تابع بامقدارمختلط $f(z)$ را می‌توان به‌عنوان تابعی ازمتغیرمختلط z و یا به عنوان تابعی از متغیرهای حقیقی x و y در نظر گرفت.

مثال ــ تابع $f(z) = z^2$ را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

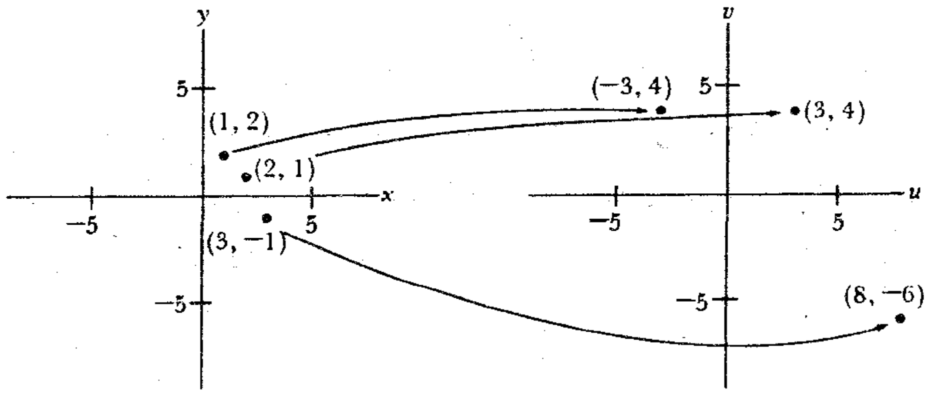
$$w = f(z) = f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy),$$

که

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2,$$
$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy.$$

برای این تابع نقاط(۱و۲) ، (۲و۱) و (۱ــ و۳) به ترتیب بر نقاط(۴و۳) ، (۴و۳ــ) و (۶ــ و۸) نگاشته می‌شوند (ر.ک. شکل ۱۱).

شکل ۱۱



همان طور که یک تابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی را می‌توان به‌عنوان‌نگاشتی از محور x بر محور y در نظر گرفت، یک تابع با مقادیر مختلط از متغیر مختلط را نیز می‌توان‌به‌عنوان‌نگاشتی از صفحه xy (صفحه z) بر صفحه uv (صفحه w) در نظرگرفت. در حالی که محور y را می‌توان متعامد بر محور x گرفت و یک تصویر کامل دو بعدی از $y = f(x)$ بدست آورد. صفحه z وصفحه w را ، حداقل دردنیای سه‌بعدی‌خودمان ، می‌بایست جدا از هم نگهداریم.

در فصل ۳ ، با توابعی سرو کار داریم که نواحی مشخصی از صفحه z را بر نواحی مشخصی از صفحه w می‌نگارند. هم اینک می‌خواهیم رده‌یی از توابع را مشخص‌کنیم که نقاط نزدیک به هم در صفحه z را بر نقاط نزدیک به هم در صفحه w می‌نگارند.

تابع $f(z)$ راکه در میدان $\mathscr{D}$ تعریف شده‌است ، در نقطه z_0 ، $z_0 \in \mathscr{D}$ پیوسته گوئیم بشرط آنکه برای هر$\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$(وابسته به ε و z_0) موجود باشد بطوری که:

اگر $|z - z_0| < \delta.$ آنگاه $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

از نظر هندسی ، این بدان معنی است که برای هر همسایگی $f(z_0)$ در صفحه w ،

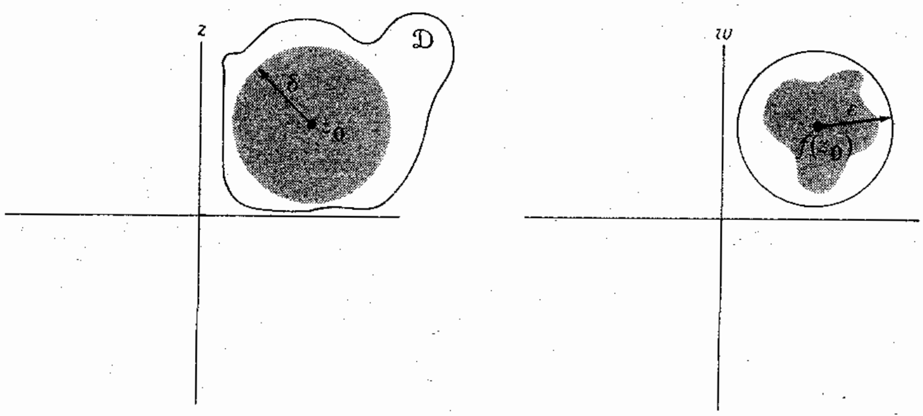
یک‌همسایگی‌از z_0 در صفحه z متناظرمی‌شودکه نگاره‌اش درون این همسایگی $f(z_0)$ واقع می‌شود . رسمی‌تر آن این که برای هر $\varepsilon > 0$عدد $\delta > 0$ موجود است بطوری که :

$$f(N(z_0; \delta)) \subset N(f(z_0); \varepsilon)$$

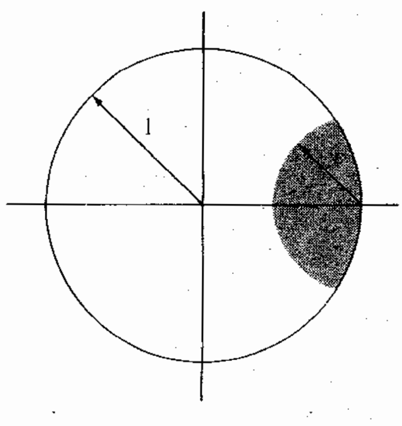
(ر.ک. شکل ۱۲) . اگر تابع در همه نقاط $\mathscr{D}$ پیوسته باشد گوئیم که تابع در میدان $\mathscr{D}$ پیوسته است .

<u>تذکر ۱.</u> از (۸) و (۹) همیشه بعوض یکدیگر استفاده می‌کنیم . توصیه می‌شود که خواننده باید‌هم‌ارزبودن‌این دو را اثبات نماید و کوشش کند که مهارت لازم برای‌استفاده مساوی از آنها را کسب نماید .

<u>تذکر ۲.</u> در این فرصت در پیوستگی تابعی که بر ناحیه R تعریف شده و R هم‌شامل نقاط‌مرزی می‌باشد ، بحث می‌کنیم منظور از یک ε همسایگی نقطه مرزی $z_0 \in R$ ، مجموعه $N(z_0; \varepsilon) \cap R$ بوده ،وآن را نسبت به ناحیه R مجموعه‌ای باز می‌خوانیم . در شکل ۱۳ یک ε ــ همسایگی از یک نقطه مرزی قرص بسته واحد $|z| \leq 1$ ، ملاحظه می‌شود .



شکل ۱۲



شکل ۱۳

اگر $f(z)$ در z_0 پیوسته باشد، می‌نویسیم $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. تابع ممکن است که در یک نقطه حد داشته باشد بدون آنکه در آن نقطه پیوسته باشد. گوئیم که $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ اگر برای هر همسایگی L، یک همسایگی سوده از z_0 موجود باشد که نگاره آن درون این همسایگی L بیافتد. اگر $L = f(z_0)$، تابع در z_0 پیوسته بوده و کلمه سوده را می‌توان از تعریف حذف کرد.

مثال

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq 2, \\ 5, & z = 2. \end{cases}$$

در مورد این $\lim_{z\to 2} f(z) = 4$ ولی تابع در $z = 2$ پیوسته نیست.

چه ارتباطی میان حد دنباله‌ها و حد توابع عمومی‌تر موجود است؟ دنباله مختلط $\{z_n\}$ که یک نگاشت $f: P \to C$ را تعریف می‌کند، به z_0 می‌گراید اگر چنانچه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد $M > 0$ موجود باشد بطوری که

$$f(N(\infty; M) \cap P) \subset N(z_0; \varepsilon)$$

یادآور می‌شویم که M همسایگی حقیقی از ∞، مجموعه همه نقاط خارج فاصله $(-M, M)$ است.

چنانچه پیش نگاره f، به عوض اعداد صحیح مثبت، یک ناحیه بی‌کران باشد. تعریف مشابه زیر را داریم:

فرض کنیم $f: C \to C$ آنگاه می‌نویسیم $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $M > 0$ موجود باشد بطوری که $f(N(\infty; M)) \subset N(L; \varepsilon)$

حتی اگر ناحیه کراندار باشد، شباهات عمده‌یی میان حد دنباله و حد در توابع عمومی‌تر موجود است. یک دنباله همگراست اگر در نهایت، نقاط آن به یکدیگر "نزدیک" باشند، در حالی که تابع از متغیر مختلط حد دارد بشرطی که، نزدیکی نقاط در صفحات مختلف محفوظ بماند. قضیه بعدی نشان می‌دهد که پیوستگی را می‌توان به عنوان عملی که همگرایی دنباله‌ها را محفوظ می‌دارد در نظر گرفت:

قضیه ۲ــ۱۳. تابع $f(z)$، که در ناحیه R تعریف شده است در یک نقطه $z_0 \in R$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{z_n\}$ در R که به z_0 بگراید، دنباله $\{f(z_n)\}$ به (z_0) بگراید.

اثبات ــ فرض کنیم $f(z)$ در z_0 پیوسته است. در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ عدد

اگـر $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ آنگاه $(z\in R)\ |z-z_0|<\delta$ بطوری‌که‌هروقت $\delta>0$ موجوداست
$\{z_n\}$ به‌z_0 بگراید،آنگاهNی وجوددارد که برای $n>N$ ، $|z_n-z_0|<\delta$.به موجب پیوستگی
برای $n>N$ داریم $|f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon$. از آنجاکه ε اختیاری‌است ،دنباله $\{f(z_n)\}$
به $f(z_0)$ می‌گراید .

برعکس، فرض‌کنیم ، $f(z)$ در z_0 پیوسته نباشد . در این صورت برای یک $\varepsilon>0$
$N(f(z_0);\varepsilon)$ شامل نگاره هیچ همسایگی z_0 نیست . این بدان معنی است که دنباله‌ای
از نقاط $\{z_n\}$ می‌توان یافت بطوری که $z_n\in N(z_0;1/n)\cap R$ و $f(z_n)\notin N(f(z_0);\varepsilon)$.
دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید در حالی که دنباله $\{f(z_n)\}$ به $f(z_0)$ نمی‌گراید . این
تناقض اثبات را تکمیل می‌کند .

تذکر ــ قضیه ۲ــ۱۳ برای توابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی هم برقراراست .

فرض‌کنیم f یک تابع پیوسته باشد که در ناحیه A تعریف شده است . چه خواصی از
A به نگاره $f(A)$ منتقل می‌شود ؟

قضیه ۲ــ۱۳ مبین آن است که دنباله‌های همگرا در A به دنباله‌های همگرا در $f(A)$
بدل می‌شوند . ولی خواص زیادی ، حتی برای‌توابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی ،
تحت نگاشتهای پیوسته محفوظ نمی‌مانند .

مثال ۱ــ تابع $f(z)=|z|$ صفحه را بر فاصله حقیقی $[0,\infty)$ می‌نگارد . این‌نشان
می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه باز لزوماً" باز نیست .

مثال ۲ . تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ خط حقیقی را بر فاصله $(-\pi/2,\pi/2)$ می‌نگارد . این
نشان می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه بسته لزوماً" بسته نیست .

مثال ۳ــ تابع $f(z)=1/z$ قرص سوده $0<|z|<1$ را بر خارج قرص واحد می‌نگارد.
این نشان می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه کراندار لزوماً" کراندار نیست .

ولی همه چیز از دست نمیرود . اگر خواص "زیبا"ی دو مثال اخیر را تواماً" در نظر
بگیریم ، نگاره هم باید "زیبا" گردد .

قضیه ۲ــ۱۴ . نگاره پیوسته هر مجموعه فشرده ، فشرده است .

اثبات ــ فرض کنیم $f:A\to f(A)$ بر مجموعه فشرده A پیوسته باشد . برای‌هردنباله

$\{w_n\}$ در $f(A)$ یک دنباله متناظر $\{z_n\}$ در A می‌توان یافت بطوری که $w_n = f(z_n)$ به‌موجب‌قضیه ۲ـ۱۲، زیردنباله $\{z_{n_k}\}$ موجود است که به یک نقطه $z_0 \in A$ می‌گراید. بموجب قضیه ۲ـ۱۳، $f(z_{n_k}) = w_{n_k}$ به نقطه $f(z_0)$ ، $f(z_0) \in f(A)$ می‌گراید. از آنجا که $\{w_n\}$ اختیاری است، هر دنباله در $f(A)$ یک زیر دنباله دارد، که در $f(A)$ همگراست. بنابراین $f(A)$ می‌بایست فشرده باشد.

از آنجا که هیات مختلط مرتب نیست، صحبت از مقادیر بیشینه و کمینه برای تابع بامقادیرمختلط بی‌معنی است. با این حال، بهترین کاری که میشود کرد، بررسی بیشینه‌ها و کمینه‌های توابع با مقادیر حقیقی $|f(z)|$ است. ملاحظه این مطلب که اگر $f(z)$ در ناحیه‌ای پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ نیز پیوسته است، مفید خواهد بود. این مطلب‌از نامساوی زیر نتیجه می‌گردد:

$$\big||f(z_2)| - |f(z_1)|\big| \leq |f(z_2) - f(z_1)| \qquad (z_1, z_2 \in C)$$

قضیه۲ـ۱۵. اگر $f(z)$ بر مجموعه فشرده E پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ بیشینه و کمینه خود را بر E اختیار می‌کند.

اثبات ــ به‌موجب‌قضیه۲ـ۱۴، نگاره E تحت‌تابع $|f(z)|$ ، که‌با E' می‌نمایانیم، مجموعه‌یی فشرده است. چون E' یک مجموعه کراندار از اعداد حقیقی است، دارای کوچکترین‌کران بالایی چون b است. از تمرین ۲ در بخش ۲ـ۳ نتیجه می‌شود که نقطه b در مجموعه E' است. ولی این بدان معنی است که بازاء یک $z_0 \in E$ ، داریم $|f(z_0)| = b$.

اثبات این که $|f(z)|$ کمینه‌اش را هم می‌پذیرد، مشابه همین است، فقط باید بزرگترین کران پائین راجایگزین کوچکترین کران بالا نمود.

تابع $f(z)$ را در ناحیه R پیوسته یکنواخت نامیم اگر برای هر$\varepsilon > 0$ داده شده‌عدد $\delta > 0$ δفقط به ε بستگی‌دارد) موجودباشدبطوری‌که‌اگر $z_1, z_2 \in R$ و$|z_1 - z_2| < \delta$ آنگاه داشته باشیم $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. این پیوستگی با پیوستگی در یک ناحیه در این اختلاف دارد، که‌دراین‌موردمی‌توان‌ازیک δ برای همه نقاط ناحیه استفاده نمود.

مثال ۱ــ تابع $f(z) = z$ در هر میدانی پیوسته یکنواخت‌است. زیرا، همیشه می‌توان $\delta = \varepsilon$ انتخاب کرد.

مثال ۲ــ تابع $f(z)=1/z$ گرچه در ناحیه $0<|z|<1$ پیوسته است ولی در این ناحیه پیوسته یکنواخت نیست.

جهت اثبات گیریم $f(z)$ پیوسته یکنواخت باشد. در این صورت برای $\varepsilon=1$ عدد δ، $0<\delta<1$ موجود است که در شرایط تعریف صدق می‌کند. رفتار این تابع را درنزدیکی مبداء بررسی می‌کنیم. گیریم $z_1=\delta$ و $z_2=\delta/2$ در این صورت $|z_1-z_2|=\delta/2<\delta$ ولی

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{1}{\delta}-\frac{2}{\delta}\right|=\frac{1}{\delta}>1=\varepsilon$$

مثال ۳ــ تابع $f(z)=z^2$ در صفحه مختلط پیوسته یکنواخت نیست.

این بار هم عکس مطلب را فرض گرفته و گیریم $\varepsilon=1$. در این صورت برای هر $\delta>0$ ، $z_1=1/\delta$ و $z_2=1/\delta+\delta/2$ انتخاب می‌کنیم. داریم $|z_1-z_2|=\delta/2$ و $|z_1^2-z_2^2|=1+\delta^2/4>1=\varepsilon$. باید توجه داشت این تابع بر هر ناحیه کراندار، پیوسته یکنواخت است.

خواننده احتمالا " آخرین قضیه این فصل را حدس می‌زند:

قضیه ۲ــ۱۶. اگر $f(z)$ بر مجموعه فشرده A پیوسته باشد آنگاه $f(z)$ در روی A پیوسته یکنواخت است

اثبات ــ گیریم $\varepsilon>0$ مفروض باشد. در این صورت برای هر نقطه $z_\alpha\in A$ ، یک δ_α موجود است (وابسته به ε و z_α) که هر وقت $|z-z_\alpha|<\delta_\alpha$ و $z\in A$ آنگاه داشته باشیم:

$$|f(z)-f(z_\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{۱۰}$$

گردآورده همه همسایگی‌هایی به شکل $N(z_\alpha;\delta_\alpha/2)$ پوششی برای A است. چون A فشرده است، یک زیر پوشش متناهی، مانند

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}N\left(z_k;\frac{\delta_k}{2}\right) \tag{۱۱}$$

موجود است. δ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\delta=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\dots,\frac{\delta_n}{2}\right\}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این δ برای تمام مجموعه A کار می‌کند.

فرض کنیم w_1 و w_2 دو نقطه در A باشند که $|w_1-w_2|<\delta$. بموجب (۱۱)، برای

یکی از k ها داریم، $w_1 \in N(z_k;\, \delta_k/2)$ و به موجب (۱۰) داریم.

$$|f(w_1)-f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{۱۲}$$

ولی، هم چنین داریم

$$\begin{aligned}|w_2 - z_k| &= |w_2 - w_1 + w_1 - z_k| \le |w_2 - w_1| + |w_1 - z_k| \\ &< \delta + \frac{\delta_k}{2} \le \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k .\end{aligned}$$

بنابراین $w_2 \in N(z_k;\, \delta_k) \cap A$ و

$$|f(w_2)-f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{۱۳}$$

ازترکیب (۱۲) و (۱۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}|f(w_1)-f(w_2)| &= |f(w_1)-f(z_k)+f(z_k)-f(w_2)| \\ &\le |f(w_1)-f(z_k)| + |f(z_k)-f(w_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است.

پرسش‌ها

۱ــ چه ابهامی ممکن است ایجاد شود اگر پیش نگاره را در تابع، میدان بنامیم؟

۲ــ اهمیت هندسی یک تابع با مقادیر مختلط از یک متغیر حقیقی در چیست؟ یک تابع با مقادیر حقیقی از متغیر مختلط؟

۳ــ چه خواصی در توابع و وارون آنها مشترک است؟

۴ــ در چه نوع توابعی نقاط در صفحه w نزدیک‌تر (دورتر) ند تا در صفحه z ؟

۵ــ در مورد پیوستگی دنباله‌ها چه می‌توان گفت؟

۶ــ آیا می‌توان در مورد پیوستگی تابع در ∞ صحبت کرد؟

۷ــ در مورد نگاره پیوسته یک نقطه حدی از یک مجموعه چه می‌توان گفت؟

۸ــ چگونه اثباتهای قضایای ۲ــ۱۳ و ۲ــ۸ را مقایسه می‌کنید؟

۹ــ بزرگترین ناحیه‌یی که بر آن $f(z) = 1/z$ پیوسته یکنواخت است کدام است؟

۱۰ــ آیا توابع ناپیوسته می‌توانند مجموعه فشرده را بر روی مجموعه فشرده بطور پوشا بنگارند؟

۱۱ــ اگر تابعی بر مجموعه A پیوسته یکنواخت باشد، آیا بر هر زیر مجموعه A هم پیوسته یکنواخت‌است؟

تمرینها

۱ــ حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{z \to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i}$ ــــــ   ب) ــــــــــــ $\lim_{z \to 2i} \frac{\bar{z}+z^2}{1-\bar{z}}$

پ) $\lim_{z \to \infty} \frac{z+1}{z^2}$ ت) ــــــــــــ $\lim_{z \to \infty} \frac{z^2+10z+2}{2z^2-11z-6}$

۲ــ در پیوستگی و پیوستگی یکنواخت توابع زیر بحث کنید.

الف) $f(z)=z^2, \quad |z|<5$ ب) $f(z)=\frac{1}{z}, \quad |z| \geq 1$

پ) $f(z)=\frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$ ت) $f(z)=\begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z}, & z \neq 0, |z|<1 \\ 1, & z=0 \end{cases}$

ث) (e) $f(z)=\begin{cases} \frac{|z|}{z}, & z \neq 0, |z| \leq 1 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

۳ــ ثابت کنید اگر $\lim_{z \to \infty} f(z)=a$ و $f(z)$ برای هر عدد صحیح مثبت تعریف‌شده باشد، آنگاه $\lim_{n \to \infty} f(n)=a$. با مثالی نشان دهید که معکوس این نادرست است.

۴ــ نشان دهید یک تابع با مقادیر حقیقی یکنوا از متغیر حقیقی نمی‌تواند به‌تعداد غیر شماره‌پذیر نقاط ناپیوستگی داشته باشد.

۵ــ نشان دهید $f: A \to B$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه نسبت‌به B باز مانند O (تذکر ۲ صفحه ۳۶ ملاحظه شود)، $f^{-1}(O)$ نسبت به A باز باشد.

۶ــ با استفاده از تمرین ۵، ثابت کنید، نگاره پیوسته هر مجموعه فشرده، فشرده است.

۷ــ نشان دهید، $f: A \to B$ پیوسته است ،اگروتنهااگربرای‌هرمجموعه نسبت به B بسته مانند F ، $f^{-1}(F)$ نسبت به A باز باشد.

۸ــ ثابت کنید: نگاره پیوسته یک مجموعه همبند، همبند است.

۹ــ اگر تابعی که بر یک مجموعه فشرده تعریف شده است، پیوسته، یک به یک و پوشا باشد، نشان دهید تابع وارون آن هم همین خواص را دارد. آیا می‌توان فشردگی را

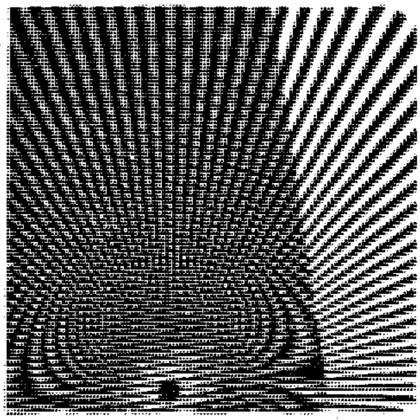
نادیده گرفت؟

۱۰ــ فرض کنیم f و g بر یک مجموعه مانند A پیوسته باشند. نشان دهید $f+g$ و $f\cdot g$ و f/g (اگر $g\neq 0$) هم بر A پیوسته‌اند. اگر f و g پیوسته یکنواخت باشند چه می‌شود گفت؟

۱۱ــ نشان‌دهید $f(z)$ در یک ناحیه R پیوسته‌است، اگر و تنها اگر هر دوی $\mathrm{Re} f(z)$ و $\mathrm{Im} f(z)$ در R پیوسته باشند.

۱۲ــ نشان دهید هر چند جمله‌یی در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

۱۳ــ فرض کنیم $f(z)$ در صفحه مختلط پیوسته است. گیریم $A=\{z\in C: f(z)=0\}$ نشان دهید که A مجموعه‌ای بسته است.



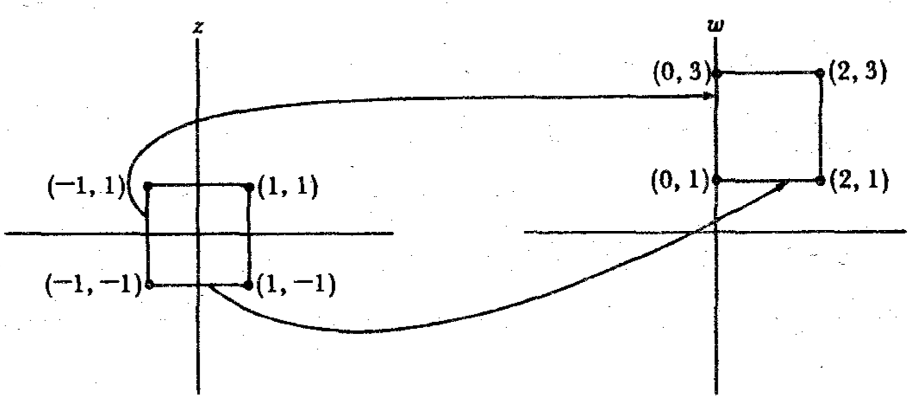
۳ـ نگاشت‌ها و تبدیلات دوخطی

در فصل قبل دیدیم که هر تابع مختلط از یک متغیر مختلط نقاط صفحه z را بر نقاط صفحه w می‌نگارد. بعد از این که هیجانات حاصله از این کشف فروکش کرد آنگاه دریافتیم که نگاشتن نقطه بر نقطه به روش ماشین‌وار، کاری بس خسته‌کننده است. دراین فصل خواهیم دید، در بعضی توابع خاص، نواحی صفحه z به هنگام نگاشتن‌آن برنواحی صفحه w . چگونه‌تغییرمی‌کنند. نشان خواهیم داد که، تبدیلهای‌دو خطی دوایر وخطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد. در واقع کشف می‌کنیم که حداقل در صفحه مختلط گسترش یافته ــ بر خلاف باور همگان ــ دوایر خیلی شبیه خطوط راست هستند.

۳ـ۱. نگاشتهای بنیادی

تابع $w=f(z)=z+b$ که در آن b عدد مختلط باشد، مجموعه‌ها در صفحه z را با یک جابجایی در امتداد بردار b ، بر مجموعه‌هایی در صفحه w می‌نگارد. این نگاشت، انتقال نام دارد. باید توجه داشت که شکل و اندازه مجموعهٔ صفحه w با شکل و اندازه مجموعه صفحه z همانند است.

شکل ۱



مثال ــ تابع $w = z + (1+2i)$ مربع به‌رئوس $\pm 1 \pm i$ رابر مربع به رئوس $i,\ 2+i,\ 3i$ و $2+3i$ می‌نگارد (ر.ک. شکل۱) برای نشان دادن این مطلب، گیریم $z = x+iy$ و $w = u+iv$. در این صورت $u+iv = (x+iy)+(1+2i)$ و

$$u = x+1, \qquad v = y+2.$$

هم‌چنان که x فاصله $[-1, 1]$ را می‌پیماید، u فاصله $[0, 2]$ را می‌پیماید؛ هم چنان که y فاصله $[-1, 1]$ را می‌پیماید، v فاصله $[1, 3]$ را می‌پیماید.

تابع $w = az$ که در آن $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$، هرنقطه‌از صفحه z را بر نقطه‌یی در صفحه w می‌نگارد، که دوری آن از مبداء برابر است ولی شناسه آن به اندازه α، یعنی شناسه a، افزایش می‌یابد. این نگاشت دوران نام دارد.

مثال ــ تابع $w = iz$ نیم صفحه راست $(\operatorname{Re} z > 0)$ را بر نیم‌صفحه زبرین $(\operatorname{Im} z > 0)$ می‌نگارد.

باتوجه به این که $\operatorname{Arg} i = \pi/2$، از نظر هندسی این نگاشت را می‌توان چنین تعبیرکرد که نقاط صفحه z راکه در $-\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$ صدق می‌کنندبرنقاطی از صفحه w که در $0 < \operatorname{Arg} w < \pi$ صدق می‌کنند می‌نگارد.

از نظر تحلیلی

$$w = u+iv = i(x+iy) = -y+ix,$$

و $u = -y$ و $v = x$ بنابراین $x > 0$ بر $v > 0$ نگاشته می‌شود.

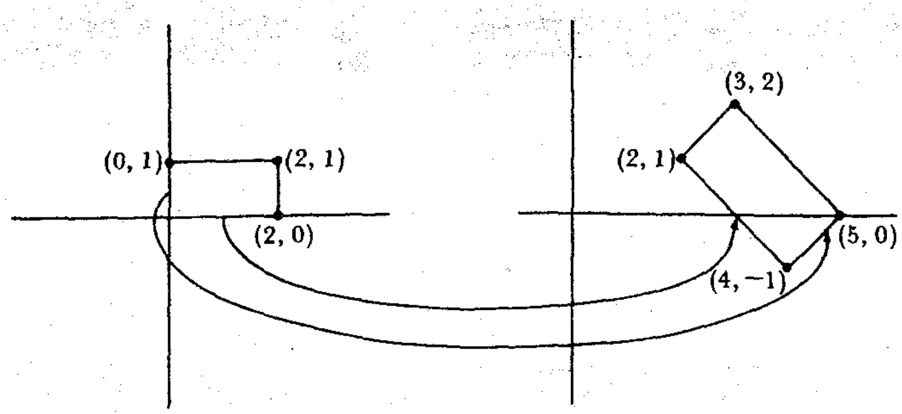
برای $a > 0$، $a \neq 1$ تابع $w = az$ رایک بزرگساز می‌نامند (گو اینکه برای $a < 1$ فی‌الواقع یک کوچکساز است). این تابع بسته به این که $a > 1$ یا $a < 1$ باشد نواحی صفحه z را با انبساط و یا انقباض به صفحه w می‌برد.

مثال ــ تابع $w = 5z$ قرص $|z| \leq 1$ را بر قرص $|w| \leq 5$ می‌نگارد.

بطور کلی‌تر، به ازاء مقادیر مختلط a، تابع $w = az$ نمایش توام یک دوران و یک بزرگسازی است. عبارت $\arg a$ قسمت دوران، و $|a|$ قسمت بزرگساز آن‌است. درحقیقت می‌توان یک انتقال، یک دوران و یک بزرگساز را ترکیب نمود تایک تابع خطی $w = az + b$ که در آن a و b ثابت‌های مختلط هستند بدست آورد.

مثال ــ تابع $w = (1-i)z + (2+i)$ مستطیل شکل۲ در صفحه z را بر مستطیلی در صفحه w می‌نگارد که مساحتی دو برابر قبلی دارد، و در ازای هر ضلع با مضربی‌برابر $\sqrt{2}$ افزایش یافته است.

شکل ۲

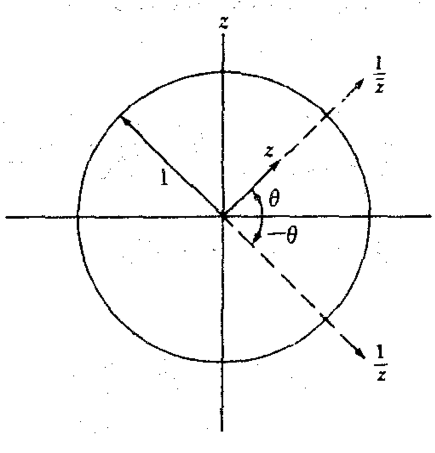


میان تابع آشناتر خطی و حقیقی $y = ax + b$، یعنی خط راست با تابع مختلط خطی ارتباطی موجود است. تابع با مقادیر مختلط $w = az + b$ که a و b مختلط اند. خطوط راست صفحه z را بر خطوط راست در صفحه w می‌نگارند. باید توجه داشت، تابع مختلط خطی همیشه ∞ را بر ∞ می‌نگارد. به خواننده به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم، مشخص نماید که تاثیر a و b بر شیب خط نگاره چیست. ملاحظه می‌شود $w = az + b$ درست مانند همتای حقیقی خود تابعی یک به یک است.

نگاشت $w = 1/z$ انعکاس نام دارد و نقاط نزدیک مبداء در صفحه z را بر نقاط دور از مبداء در صفحه w و نقاط دور از مبداء در صفحه z را بر نقاط نزدیک مبداء در صفحه w می‌نگارد.

وقتی z به مبداء نزدیک شود، w، در صفحه مختلط گسترش یافته به ∞ نزدیک می‌شود: یعنی برای هر $M > 0$ مفروض، یک $\delta > 0$ موجود است که $|z| < \delta$ موجب $|w| > M$ گردد. بدین ترتیب یک نگاشت یک به یک از صفحه مختلط گسترش یافته بر خودش داریم که در آن مبداء بر نقطه ∞ نگاشته می‌شود.

تقارن مشخصی نیز نسبت به دایره واحد و محور حقیقی هر دو موجود است. نقاط درون (برون) دایره واحد بر نقاط برون (درون) دایره واحد نگاشته می‌شوند و نقاط بالای (زیر) محور حقیقی بر نقاط زیر (بالای) محور حقیقی نگاشته می‌شوند (ر.ک. شکل ۳).



انعکاس $w=1/z$ گاهی بازتاب نسبت‌به دایره واحد و محور حقیقی هر دو نامیده‌می‌شود.

برای اینکه به بینیم، مجموعه‌های صفحه z ضمن تبدیل به مجموعه‌های صفحه w تحت این بازتاب چگونه تغییر می‌کنند، معادله

$$w=u+iv=\frac{1}{z}=\frac{1}{(x+iy)}$$

را برای متغیری مفروض در یک صفحه برحسب متغیرهای صفحه دیگر حل می‌کنیم. بدین ترتیب به روابط زیر می‌رسیم:

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2} \tag{۱}$$

و

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\qquad y=\frac{-v}{u^2+v^2} \tag{۲}$$

از (۱) یا (۲) نتیجه می‌شود.

$$x^2+y^2=\frac{1}{u^2+v^2} \tag{۳}$$

اینک معادله

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0, \tag{۴}$$

راکه در آن a ، b ، c و d ثابت‌های حقیقی هستند، در نظر می‌گیریم ،این‌معادله اگر $a\neq 0$ نمایش یک دایره و اگر $a=0$ ، نمایش یک خط راست است. از (۱)، (۲) و (۳) دیده می‌شود که تابع $w=1/z$ مجموعه (۴) را بر مجموعه

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0, \tag{۵}$$

می‌نگارد، که اگر $d\neq 0$ یک دایره است و اگر $d=0$ یک خط راست است.

اینک با توجه به (۴) و (۵) برخی از خواص نگاشت تابع $w=1/z$ را نتیجه‌می‌گیریم:

(۱) دوایری‌که‌برمبداء‌نمی‌گذرند (یعنی با $d\neq 0$) بر دوایری که از مبداء نمی‌گذرند نگاشته می‌شوند.

(۲) دوایری که از مبداء می‌گذرند بر خطوط راستی که از مبداء نمی‌گذرند نگاشته می‌شوند.

(۳) خطوط راستی که بر مبداء نمی‌گذرند بر دوایری که بر مبداء می‌گذرند نگاشته می‌شوند.

(۴) خطوط راستی که بر مبداء می‌گذرند بر خطوط راستی که بر مبداء می‌گذرنـد نگاشته می‌شوند .

بطورخلاصه، تابع $w = 1/z$ دوایروخطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد . آیا روشی برای به خاطر سپردن این که چه بر چه نگاشته می‌شود موجود است ؟ نکته‌کلیدی آنست‌که‌مبداء بر نقطه∞ نگاشته می‌شود . هر خط راست (ونه دایره) از نقطه∞ می‌گذرد . بنابراین خط راست و دایره‌ای که از مبداء بگذرد بر خط راست نگاشته می‌شود و چنانچه بر مبداء نگذرد بر دایره نگاشته می‌شود . در پایان توجه می‌کنیم ،درون‌یک دایره که‌شامل مبداء باشد ، برخارج یک دایره نگاشته و درون یک دایره که شامل مبداء نباشد (و مبداء نقطه مرزی آنهم نباشد) ، بر درون یک دایره نگاشته می‌شود .

پرسش‌ها

۱ــ توابع $w = 1/z$، $w = \bar{z}$ و $w = -z$ همگی نیم‌دایره‌واحدزبرین را برنیم دایره‌واحد زیرین می‌نگارند . اختلافات آنها چیست ؟

۲ــ در یک تابع خطی مساحت یک ناحیه با مساحت نگاره‌اش چگونه مقایسه‌می‌شود ؟ در انعکاس چه ؟

۳ــ برای $w = 1/z$ ،نگاره درون یک دایره که مبداء نقطه مرزی آن باشد چیست ؟

۴ــ درانعکاس ،مقاطع مخروطی به غیر از دایره ، چگونه تغییر شکل می‌دهند ؟

۵ــ آیا اختلافی میان انجام انعکاس به دنبال یک انتقال ، با انتقال به دنبال یک انعکاس وجود دارد ؟

۶ــ کدام زوج از چهار عمل انتقال ، دوران ، بزرگساز و انعکاس‌را می‌توان بدون‌تاثیر در خواص نگاشتی آن تعویض نمود ؟

تمرینها

۱ــ برای نگاشت $w = (1+i)z + 2$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید .

الف ــ خط $y = 2x$ ب ــ خط $|z-1| = 2$

پ ــ دایره $|z| = 3$ ت ــ دایره $y = 3x + 2$

۲ــ نگاره نیم صفحه $\operatorname{Re} z > 0$ راتحت تبدیلات زیر بیابید .

الف ــ $w = 2iz - i$ ب ــ $w = i/z - 1$

۳ــ نگاره نوار نیمه ــ متناهــی $0 < \operatorname{Re} z < 2$، $\operatorname{Im} z > 1$ را تحـت تبدیـل $w = (1-i)z + (2-i)$ بیابید ، و رسم کنید .

۴ــ یک تبدیل خطی بیابید که نقاط $(3+2i)$ و $(1-i)$ را بــه ترتیــب بر $5i$ و $(2+4i)$ بنگارد. آیا این تبدیل منحصربفرد است؟

۵ــ ثابت‌کنیدکه‌تابع‌خطی $w=az+b$ دایره‌یی به شعاع r و بمرکز z_0 را بر دایره‌یی به شعاع $|a|r$ و مرکز az_0+b می‌نگارد.

۶ــ مثلث به رئوس $3+4i$ ، $-3+4i$ و $-5i$ مفروض است. در تبدیلات زیرنگاره مثلث را بیابید.

الف) $w=z+5i$ ب) $w=iz+(2-i)$

پ) $w=(2+i)z-3$

۷ــ نگاره خط $y=2x+1$ راتحت‌تبدیلات زیر بیابید.

الف) $w=1/z$ ب) $w=i/z$ پ) $w=1/(z-2i)$

۸ــ برای تبدیل $w=1/z$ نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) دایره $|z-2|=1$ ب) دایره $|z-1|=2$

پ) دایره $|z-1|=1$ ت) میدان $\operatorname{Re} z>1$

ث) نوار نامتناهی $\frac{1}{4}<\operatorname{Im} z<\frac{1}{2}$

۹ــ ثابت کنید که انعکاس $w=1/z$،دایره‌یی به شعاع r و به مرکز z_0 ، $|z_0|\neq r$ را بر دایره‌یی به شعاع $\dfrac{r}{\left||z_0|^2-r^2\right|}$ و بمرکز $\dfrac{\bar{z}_0}{|z_0|^2-r^2}$ می‌نگارد.

۱۰ــ برای تبدیل $w=1/z$ نشان دهید که نگاره هذلولی $x^2-y^2=1$ لمینسکات $R^2=\cos 2\theta$ (که $w=(R,\theta)$) است.

۱۱ــ نگاره نوارهای $0\leq \operatorname{Re} z\leq 2$ و $0\leq \operatorname{Im} z\leq 2$ را تحت نگاشت $w=1/z$ بیابید.

۳ــ۲. تبدیلات خطی کسری

خارج قسمت دو تبدیل خطی تبدیلی بصورت

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{۶}$$

است که به تبدیل خطیِ کسری موسوم است. این تبدیل در حالات خاص شامل نگاشتهای بخش قبل می‌باشد. برای $c=0$ یک تبدیل خطی داریم و برای $a=d=0$ و $b=c$ ، یک انعکاس داریم. از سوی دیگر (۶) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$w=\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cz+d} \qquad (c\neq 0) \tag{۷}$$

این نشان می‌دهد که یک تبدیل کسری خطی را می‌توان به عنوان یک بزرگساز و دوران (cz) و به دنبال آن یک انتقال $(cz+d)$ و سپس یک انعکاس

$$\frac{1}{cz+d},$$

و به دنبال آن یک بزرگساز و دوران دیگر

$$\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cz+d},$$

و یک انتقال

$$\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cz+d}$$

در نظر گرفت . اگر $bc=ad$ تابع کسری خطی ، به تابعی ثابت تبدیل می‌شود . چون بررسی توابع ثابت نکته جالبی در بر ندارد از این به بعد فرض میکنیم $bc \neq ad$. دراین صورت تبدیل (۶) در صفحه گسترش یافته یک به یک است ،ووارونی دارد که آن هم یک تبدیل کسری خطی است . از حل z نسبت به w داریم :

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}.$$

از اینرو نواحی را می‌توان با امکانات یکسان از صفحه w گسترش یافته بر صفحه z گسترش‌یافته ویااز صفحه w گسترش یافته برصفحه z گسترش یافته نگاشت . با حذف کسرها ، (۶) به صورت زیر در می‌آید :

$$Azw+Bz+Cw+D=0,$$

معادله‌یی که نسبت به z و w هر دو خطی است . بهمین دلیل تابع کسری خطی اکثر اوقات به تبدیل دو خطی موسوم است .

یک تبدیل دو خطی نمایش یک نگاشت پیوسته و یک به یک از صفحه‌مختلط گسترش یافته برخودش می‌باشد . بطوریکه نقطه $z=-d/c$ بر نقطه $w=\infty$ ونقطه $z=\infty$ بر $w=a/c$ نگاشته می‌شود . یادآور می‌شویم که تبدیل خطی ، دوایر را بر دوایر و خطوط راست را بر خطوط راست می‌نگارند . در حالی که یک انعکاس دوایر و خطوط راست‌را بر دوایروخطوط راست می‌نگارد . ما از این نکات استفاده می‌کنیم تا خواص نگاشتی تبدیلات دو خطی را بیابیم .

با توجه به (۷) برای $c\neq 0$ ، سه تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم :

$$z'=cz+d, \qquad z''=\frac{1}{z'}, \qquad w=\frac{a}{c}+\left(b-\frac{ad}{c}\right)z''.$$

تبدیل اولی خطی است و دوایر صفحه z را بر دوایر در صفحه z' و خطوط راست صفحه z رابرخطوط راست صفحه z' مینگارد؛ دومی انعکاسی است‌که دوایر وخطوط راست در صفحه z' را بر دوایر و خطوط راست صفحه z'' می‌نگارد. سومی هم‌خطی است‌ودوایر در صفحه z'' را بر دوایر صفحه w و خطوط راست صفحه z''، را بر خطوط راست صفحه w می‌نگارد. اگر $c = 0$، تبدیل خطی است. نتایج بالا را می‌توان بصورت زیر خلاصه‌نمود:

قضیه ۳ــ۱. هر تبدیل دو خطی دوایر و خطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد.

<u>تذکر ــ</u> نقطه $z = -d/c$ درتبدیل دو خطی همان نقشی را ایفا می‌کند که $z = 0$ در انعکاس دارد. بنابراین هر خط راست و دایره‌ای که بر نقطه $z = -d/c$ بگذرد بر خط راست و اگر از این نقطه نگذرد بر دایره نگاشته می‌شود.

از قضیه ۳ــ۱، می‌توان اغلب برای ساده نمودن محاسبات استفاده نمود. به‌عنوان مثال، در تمرین ۶ بخش ۱ــ۲، از خواننده خواسته شده که نشان دهد:

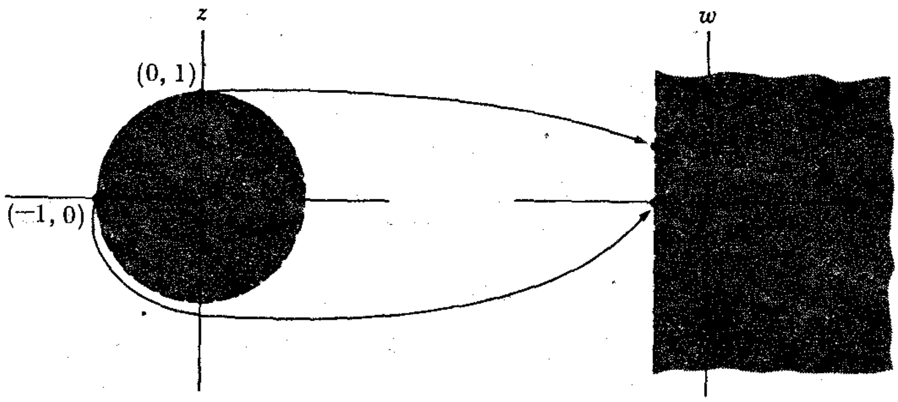
$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{1-z}\right\} > -\frac{1}{2} \quad \text{داریم} \quad |z| < 1 \quad \text{برای}$$

احتمالا"، دانشجو قسمتهای حقیقی و انگاری $z/(1-z)$ را جدا کرده و در نقاط درون قرص واحد جایگزین نموده و سپس به نتیجه رسیده است. از روش‌های راهیانه‌تری استفاده می‌کنیم که توجهی به محتوای حل دارد: تبدیل دو خطی $w = z/(1-z)$ دایره واحد را بر خط مستقیمی می‌نگارد (چون که $z = 1$ بر $w = \infty$ نگاشته‌می‌شود). با انتخاب‌هر دو نقطه متمایز بر دایره واحد، می‌توان این خط راست را مشخص نمود. نقاط ۱ــ و i به ترتیب بر نقاط $\frac{1}{2}$ــ و $(-\frac{1}{2} + i/2)$ نگاشته می‌شوند. بنابراین نگاره دایره $|z| = 1$ خط $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۴)

پیوستگی نگاشت دو خطی سبب می‌شود که مجموعه‌های همبند برمجموعه‌های همبند نگاشته‌شوند (تمرین ۸ بخش ۲ــ۵). چون‌هر نگاشت دو خطی، نگاشتی یک به یک ازصفحه مختلط گسترش یافته بر خودش می‌باشد. پس نگاره $|z| < 1$ یا

$\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ است و یا $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}$

برای یافتن نگاره ناحیه، تنها کافی است که یک نقطه آزمایش شود. از اینکه مبداء برخودش نگاشته می‌شوداطمینان حاصل می‌کنیم که $|z| < 1$ بر $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ نگاشته‌می‌شود.



تاکنون به تعیین نگاره مجموعه‌ها تحت یک تبدیل دو خطی مشخص پرداختیم. اینک مسئله را وارونه کرده و سئوال زیر را در نظر می‌گیریم: دو مجموعه مفروض‌اند. تحت چه شرایطی یک نگاشت دو خطی از یک مجموعه بر روی مجموعه دیگر موجود است؟ درهندسه مقدماتی دیده‌ایم که هر سه نقطه‌ای برحسب اینکه همخط باشند و یا نباشند، مشخص‌ــ کننده یک خط راست و یا یک دایره‌اند. هر تبدیل دو خطی، بسته به ضرائبش، دایره و یا خط راستی را که با این نقاط مشخص‌می‌شود بر دایره و یا خط راست می‌نگارد. اینک نشان می‌دهیم که برای A (یک دایره یا خط راست در صفحه z) و B (یک دایره یا خط راست در صفحه w) یک تبدیل دو خطی از A بر روی B موجود است.

قضیه ۳ــ۲. نقاط متمایز z_1 ، z_2 و z_3 در صفحه z گسترش یافته و نقاط متمایز w_1 ، w_2 و w_3 در صفحه w گسترش یافته مفروض‌اند. تبدیل دو خطی منحصربفردی مانند $w=f(z)$ موجود است که $f(z_1)=w_1$ $f(z_2)=w_2$ و $f(z_3)=w_3$

اثبات ــ ابتدا فرض کنیم هیچ یک از این شش نقطه ∞ نباشد. تبدیل

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

را در نظر می‌گیریم. باید a b ، c ، d را برحسب z_1 ، z_2 ، z_3 ، w_1 ، w_2 و w_3 محاسبه کنیم. این کار مشکل‌تر از آن به نظر می‌رسد که هست. برای $k=1, 2, 3$ داریم:

$$w-w_k=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az_k+b}{cz_k+d}=\frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cz_k+d)} \tag{۸}$$

از (۸) حاصل می‌گردد

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\left(\frac{cz_3+d}{cz_1+d}\right)\left(\frac{z-z_1}{z-z_3}\right) \tag{۹}$$

چنانچه در (۹) z را با z_2 و w را با w_2 جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\left(\frac{cz_1+d}{cz_3+d}\right)\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right) \tag{۱۰}$$

از ضرب (۹) در (۱۰) داریم:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (۱۱)$$

تبدیل مطلوب ازحل این معادله نسبت به z برحسب این شش نقطه بدست می‌آید. اگر یکی از این نقاط در ∞ می‌بود، مثلاً $z_3=\infty$، در این صورت (۱۱) را باید با تعیین حد آن وقتی z_3 به ∞ میل کند، اصلاح کنیم و در این حالت داریم:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

نشان دادن این امر که (۱۱) تبدیل را بطور منحصربفردی مشخص‌می‌کند به‌دانشجو واگذار می‌کنیم.

تذکر ۱ــ طرف راست (۱۱) را نسبت توافقی نقاط z_1 و z_2 و z_3 و z می‌نامند. و با $[z_1, z_2, z_3, z]$ نمایانده می‌شود. (۱۱) مبین آن است‌که در یک تبدیل دو خطی نسبت توافقی پایا است. یعنی که برای هر چهار زوج نقاط متمایز

(z_1, w_1)، (z_2, w_2)، (z_3, w_3) و (z_4, w_4)

از یک تبدیل دو خطی بایست داشته باشیم:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4]=[w_1, w_2, w_3, w_4].$$

تذکر ۲ــ این‌حیرت‌انگیز نیست‌که‌سه نقطه یک تبدیل دو خطی را مشخص کند. اگر (۶) را به یکی از ثابتهای مخالف صفر (فرض‌کنیم $a\neq 0$) تقسیم کنیم، دراینصورت (۶) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$w=\frac{z+B}{Cz+D},$$

و با کمک جبر مقدماتی از سه معادله می‌توان سه مجهول را بدست آورد.

مثال ۱ــ یک تبدیل دو خطی بیابید که نقاط ۲ــ و ۲ و $z=i$ را به ترتیب‌بر ۱ــ و ۱ و $w=i$ بنگارد.

روش ۱ــ از (۱۱) داریم:

$$\frac{(w-i)(1+1)}{(w+1)(1-i)}=\frac{(z-i)(2+2)}{(z+2)(2-i)}.$$

که پس از حل نتیجه می‌شود:

$$w=\frac{3z+2i}{iz+6}.$$

روش ۲ــ تبدیل مطلوب به شکل (۶) است‌که یا a ویا b مخالف صفر است. فرض کنیم $a\neq 0$، تبدیل‌را به‌صورت $w=(z+B)/(Cz+D)$ می‌نویسیم که به دستگاه معادلات زیر منجر می‌گردد.

$$B+C-iD=-i,$$
$$B-2C-D=-2,$$
$$B-2C+D=2.$$

و پس ازحل نتیجه می‌شود $B=2i/3$، $C=i/3$، $D=2$ پس‌تبدیل دو خطی‌مطلوب بصورت زیر است:

$$w=\frac{z+(2i/3)}{(i/3)z+2}.$$

تذکر ــ اگرفرض‌ما (یعنی $a\neq 0$) درست‌نمی‌بود، دستگاه معادلات‌جواب‌نمی‌داشت. دانشجومی‌تواند‌این‌مطلب راباسعی دریافتن یک تبدیل دو خطی که نقاط $z=1,-1,i$ را به ترتیب بر نقاط iــو ۱ــو ۱ بنگارد، مورد آزمایش قرار دهد. اگر در حالت $a\neq 0$ جوابی نیافتیم. تبدیل دو خطی مطلوب باید بصورت $w=A/(Bz+C)$ باشد.

مثال ۲ــ یک تبدیل دو خطی بیابیدکه نقاط $z=1-i$ و $1+i$ و $-1+i$ را به‌ترتیب بر $0,1,\infty$ بنگارد.

روش ۱ــ چنانچه‌در (۱۱) w_3 به ∞ میل‌دهیم مشاهده خواهیم کرد که تبدیل‌مطلوب برابر است با:

$$w=\frac{z-(1-i)}{iz+(1+i)}.$$

روش ۲ــ چنانچه‌جواب‌به‌شکل $w=(z+B)/(Cz+D)$ باشد، معادلات‌زیررا خواهیم داشت:

$$B=-(1-i),$$
$$C(1+i)+D=2i,$$
$$-D/C=-1+i,$$

و نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.

تاکنون دیده‌ایم، یک تبدیل دو خطی منحصربفرد موجود است که سه نقطه متمایز

درصفحه z رابر سه نقطه متمایز بر صفحه w می‌نگارد . این مطلب منجر به یافتن راهیابی برای نگاشتن دوایر و خطوط راست بر دوایر و خطوط راست شده است ، گو اینکه منحصر بفرد نیست . برای مثال جهت یافتن تابعی که خط را بر دایره می‌نگارد ، می‌توانیم هر سه نقطه دلخواه بر خط انتخاب کنیم و آنها را با سه نقطه دلخواه بر دایره متناظر سازیم . آن تبدیل دو خطئی که نقاط $z = 1, 0, \infty$ رابه ترتیب هر نقاط $w = 1, -1, i$ بنگارد به صورت زیر است :

$$w = i\left(\frac{z - [(1 + i)/2]}{z - [(1 - i)/2]}\right)$$

این تابع که خط حقیقی را بر دایره واحد می‌نگارد . هم چنین نیم صفحه زبرین را بر درون دایره واحد و نیم صفحه زیرین را بر خارج آن می‌نگارد . قابل‌توجه است که‌نقطه $z = (1 + i)/2$ در نیم صفحه زبرین بر مبداء و$z = (1 - i)/2$در نیم‌صفحه زیرین بر ∞ نگاشته می‌شود . از سوی دیگر آن تبدیل دو خطئی که نقاط $z = 0, 1, \infty$ را به ترتیب بر $w = 1, -1$ بنگارد بصورت زیر است :

$$w = i\left(\frac{z - [(1 - i)/2]}{z - [(1 + i)/2]}\right),$$

که این تبدیل نیم صفحه زیرین را بر درون دایره واحد و نیم صفحه زبرین را بر خارج آن می‌نگارد .

اینک سعی میکنیم تا همه تبدیلات دو خطئی که نیم صفحه زبرین را بر درون‌دایره واحد می‌نگارند ، مشخص سازیم . این تبدیلات ، البته ، می‌بایست خط حقیقی را بر دایره واحد بنگارند . با فرض $w = (az + b)/(cz + d)$ ، جهت یافتن شرایط حاکم بر ضرائب،نقاط خاصی انتخاب می‌کنیم . چون برای$z = 0$ و$z = \infty$ داریم$|w| = 1$، حاصل می‌شود که :

$$\left|\frac{b}{d}\right| = 1, \qquad \left|\frac{a}{c}\right| = 1 \tag{۱۲}$$

با توجه به (۱۲) داریم :

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$$

بنابراین تبدیل را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$w = \frac{a}{c}\,\frac{z + b/a}{z + d/c} = A\,\frac{z - z_0}{z - z_1}, \tag{۱۳}$$

که در آن $|A|=1$ و $|z_1|=|z_0|$. آیا می‌توان ارتباط بیشتری بین z_0 و z_1 و یافت؟ با قرار دادن $z=1$ در (۱۳) داریم:

$$|w|=|A|\left|\frac{1-z_0}{1-z_1}\right|=1,$$

ویا

$$|1-z_0|=|1-z_1|. \qquad (۱۴)$$

پس از ساده کردن (۱۴) نتیجه می‌شود که $\text{Re } z_0=\text{Re } z_1$، چون‌که $|z_1|=|z_0|$ پس یا $z_1=z_0$ و یا $z_1=\bar{z}_0$.

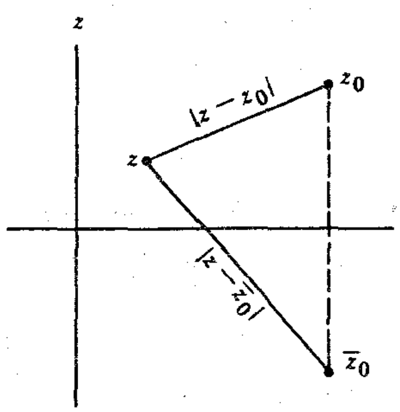
اگر $z_1=z_0$ ، (۱۳) به‌تابع ثابت تبدیل می‌شود. بنابراین $z_1=\bar{z}_0$ وعمومی‌ترین صورت یک تبدیل دو خطی که خط حقیقی را بر دایره واحد بنگارد بصورت زیر است:

$$w=A\,\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \qquad (۱۵)$$

که در آن $|A|=1$. چون z_0 بر مبداء و $\bar{z}_0$ بر ∞ نگاشته می‌شود، (۱۵) نیم‌صفحه زبرین را با شرط $\text{Im } z_0>0$ بر درون دایره واحد و باشرط $\text{Im } z_0<0$ بر بیرون آن‌می ‐ نگارد.

برای درک این مطلب هندسی، z_0 را در نیم صفحه زبرین انتخاب می‌کنیم (ر.ک. شکل ۵) در این صورت نقاط z و z_0 در یک طرف عمودمنصف (محور حقیقی) پاره خطی که z_0 را به $\bar{z}_0$ وصل می‌کند قرار دارد. بنابراین $|z-z_0|<|z-\bar{z}_0|$ و

$$|w|=|A|\left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right|<1 \qquad \text{برای } \ \text{Im}z>0$$



تنهاتابع $w=z$ واجد این خاصیت زیبا است که هر مجموعه را بر خودش بنگارد. از سوی‌دیگرهرتبدیل دو خطی‌صفحه مختلط گسترش یافته را بر خودش می‌نگارد. با داشتن یک ناحیه مفروض، تا اندازه‌یی جالب خواهد بود، همه‌نگاشت‌های دو خطئی که این‌ناحیه

رابرخودش می‌نگارد مشخص کنیم .اینک این‌کار را برای نیم صفحه زبرین انجام می‌دهیم .

می‌خواهیم عمومی‌ترین مجموعه ضرایب را بیابیم که $w=(az+b)/(cz+d)$ ناحیه $\operatorname{Im} z>0$ رابرناحیه $\operatorname{Im} w>0$ بنگارد . همانند مثال قبل ابتداء همه نگاشتهای دوخطئی از مرز ناحیه در صفحه z بر روی مرز ناحیه در صفحه w را می‌یابیم و سپس زیر مجموعه‌یی از این نگاشت‌ها را که در شرط اضافی ما صادق باشند مشخص‌می‌کنیم .نگاشتهای‌دوخطئی که $\operatorname{Im} z=0$ رابر $\operatorname{Im} w=0$ می‌نگارند ،بدین ترتیب بدست می‌آیند که سه نقطه دلخواه از محور حقیقی صفحه z را بر سه نقطه دلخواه از محور حقیقی صفحه w بنگاریم . فرض کنیم $z=z_1,\ z_2,\ z_3$ به ترتیب بر نقاط $0,\ 1,\ \infty$ نگاشته شوند. چون $w=[0,1,\infty,w]$ پایا می‌باشد ، نسبت توافقی نشان می‌دهد که

$$w=[z_1,\,z_2,\,z_3,\,z]=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\qquad \text{برای هر } z$$

چونکه z_1, z_2, z_3 حقیقی هستند . ضرایب $w=(az+b)/(cz+d)$ همگی می‌بایست حقیقی باشند .

برای اینکه شرایط مورد لزوم دیگر را بیابیم ،$z=x+iy$ ، $y>0$ ورا انتخاب‌می‌کنیم. در این صورت :

$$w=\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}=\frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+(cy)^2}+i\,\frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$

$$\text{ازاین‌رو}\quad \operatorname{Im} w=v=\frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy)^2}>0 \quad \text{اگر و تنها اگر}\quad ad-bc>0$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این نگاشت پوشا است .بنابراین عمومی‌ترین‌نگاشت دو خطی که نیم صفحه زبرین را بر خودش می‌نگارد . بصورت $w=(az+b)/(cz+d)$ است که در آن a, b, c, d حقیقی‌اند و $ad-bc>0$.

مسئله نهایی این بخش این است که همه تبدیلات دو خطی را که قرص واحد را بر خودش می‌نگارد مشخص کنیم . برای این کار لازم است ، نگاشت‌هایی که دایره واحد را بر خودش می‌نگارندمشخص کرد . در تمرین ۱۰ از خواننده خواسته‌ایم ، نشان دهدترکیب دونگاشت دو خطی ، یک نگاشت دو خطی است . و فعلا" آنرا اثبات شده فرض می‌کنیم .

هر دوران تابع همانی (یعنی $w=az$ ، $|a|=1$) یک جواب مسئله است . ولی تبدیلات عمومی‌تری موجودند که قرص واحد را بر خودش می‌نگارند و با یک روشی نسبتا" غیرمستقیم آنها را می‌یابیم . چنانکه دیده‌ایم ، آن دسته از تبدیلات دو خطی که نیم

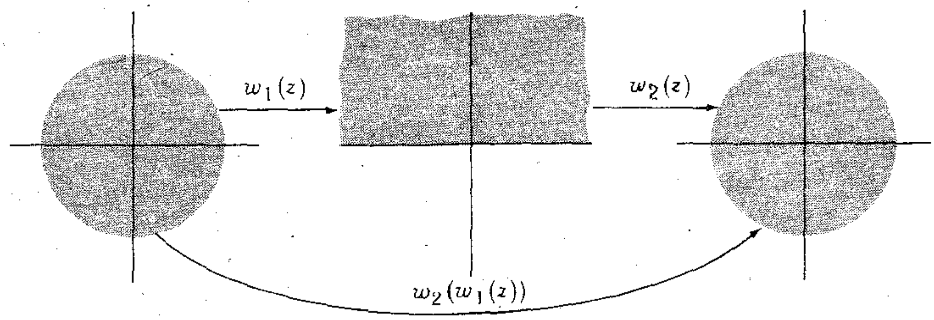
صفحه زبرین را بر درون قرص واحد می‌نگارند بصورت زیر هستند:

$$w = A\,\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \qquad (|A|=1,\ \mathrm{Im}\ z_0>0). \tag{۱۶}$$

در نتیجه ، آن دسته از تبدیلات دوخطی که درون قرص واحد را بر نیم صفحه زبرین بنگارند به صورت زیر هستند:

$$w = \frac{z\bar{z}_0 - Az_0}{z-A} \qquad (|A|=1,\ \mathrm{Im}\ z_0>0). \tag{۱۷}$$

(در "۱۶ "جای z و w را عوض کرده و سپس حل کنید) . فرض کنیم تبدیل دو خطی w_1 درون‌قرص واحد رابرنیم صفحه زبرین بنگارد و تبدیل دو خطی دیگر w_2 نیم‌صفحه زبرین را بر درون قرص واحد بنگارد. در این صورت $w_2(w_1(z))$ یک تبدیل دو خطی است که درون قرص واحد را بر خودش می‌نگارد (ر.ک. شکل ۶)



با قرار دادن $z_0=i$ و $A=-1$ در (۱۷) حاصل می‌شود:

$$w = -i\,\frac{z-1}{z+1}. \tag{۱۸}$$

این ، شاید ، "زیباترین" نگاشت از درون قرص واحد بر نیم صفحه زبرین باشد . اکنون تمام تبدیلات دوخطی ، که قرص واحد را بر خودش می‌نگارند را می‌توان "فاکتوری" از تبدیل (۱۸) به حساب آورد . روشن‌تر این که ، اگر w^* چنین نگاشتی باشد در این صورت w^* رامی‌توان بصورت:

$$w^*(z) = w\!\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right), \tag{۱۹}$$

نوشت که درآن w یک نگاشت دو خطی است که نیم صفحه زبرین را بر قرص واحد می‌نگارد . تابع w در (۱۹) می‌بایست به شکل (۱۶) باشد . پس از حل ، خواهیم داشت:

$$w^*(z) = A\,\frac{(z_0+i)z+(z_0-i)}{(\bar{z}_0+i)z+(\bar{z}_0-i)} \qquad (\mathrm{Im}\ z_0>0).$$

این را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$w^*(z) = A\frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}} \qquad (|A|=1,\ |\beta|<|\alpha|).$$

پس از تقسیم صورت و مخرج بر α و باانتخاب $\gamma=-\beta/\alpha$ خواهیم داشت:

$$w^*(z) = A\frac{z-\gamma}{-\bar{\gamma}(\bar{\alpha}/\alpha)z+(\bar{\alpha}/\alpha)} = -A\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\frac{z-\gamma}{\bar{\gamma}z-1}.$$

بنابراین $w^*(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w^*(z) = K\frac{z-\gamma}{\bar{\gamma}z-1} \qquad (|K|=1,\ |\gamma|<1). \tag{۲۰}$$

چون یک تناظر یک به یک میان w و w^* در (۱۹) برقرار است، از این رو عبارت (۲۰) مشخص‌کننده همه نگاشتهای دو خطی است که درون قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. باید توجه داشت که هر نقطه انتخابی γ درون قرص را می‌توان بر مبداء نگاشت.

تذکر ۱ـ اگر $|\gamma|>1$، (۲۰) نمایش همه تبدیلات دو خطی است که درون قرص واحد را بر خارج قرص واحد می‌نگارند.

تذکر ۲ـ یک نگاشت از یک ناحیه بر ناحیه دیگر (یا بر خودش)، از نقطه نظر هندسی نگاشتی است از نقاط یک صفحه بر نقاط صفحهٔ دیگر. بنابراین (۲۰) نمایش نگاشتی از $|z|<1$ بر روی $|w|<1$ است. تابع مرکب نشان داده شده در شکل ۶ را می‌توان به عنوان نگاشتی از صفحه z بر یک صفحه واسطه که به دنبال آن نگاشتی از این صفحه‌واسطه بر صفحه w آمده تصور کرد. ولی باید به خاطر داشت که هر سه تای این صفحات در واقع همان صفحه مختلط هستند.

پرسش‌ها

۱ـ چرا در موقع انتخاب سه نقطه اغلب راحت‌تر آن است که نقاط 0 و 1 و ∞ را در نظر گرفت؟

۲ـ چه وقت حاصلجمع دو تبدیل دو خطی، یک تبدیل دو خطی است؟ حاصلضرب چطور؟

۳ـ چه نوع تبدیل دو خطی ∞ را بر خودش می‌نگارد؟

۴ـ چه نوع تبدیل دو خطی ∞ را بر مبداء می‌نگارد؟

۵ــ آیا یک تبدیل دو خطی می‌تواند هیچ نقطه‌یی را بر خودش ننگارد؟
۶ــ چند تبدیل دو خطی موجود است که بیش از دو نقطه را برخودشان می‌نگارد؟
۷ــ بدون جایگذاری نقاط، آیا روشی موجود است که بدان وسیله مشخص کنیم، یک ناحیه بر درون یا خارج ناحیه دیگر نگاشته می‌شود؟
۸ــ در مورد وجود یک تابع دو خطی از یک مثلث بر یک مربع چه می‌توان گفت؟ مثلث بر یک دایره؟ مثلث بر یک خط راست؟ مربع بر یک مربع؟
۹ــ ازرابطه (۱۵) در می‌یابیم که یک نگاشت دو خطی از خط حقیقی بر دایره‌واحد بطور منحصربفرد با یافتن نقطه‌یی که بر مبداٴ نگاشته می‌شود و یک نقطه دیگر مشخص می‌شود. آیا این مطلب با این نکته که سه نقطه مشخص یک تبدیل دو خطی است متناقض است؟
۱۰ــ آیا غیر از تبدیلات دو خطی، نگاشت یک به یک دیگری از صفحه گسترش‌یافته بر روی خودش وجود دارد؟

<u>تمرینها</u>

۱ــ یک تبدیل دو خطی بیابید که نقاط متناظر زیر را بر هم بنگارد.

الف) $z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i$ را بر $w_1=i,\ w_2=-i,\ w_3=0$

ب) $z_1=1,\ z_2=i,\ z_3=\infty$ را بر $w_1=i,\ w_2=-1,\ w_3=0$

پ) $z_1=2,\ z_2=-1,\ z_3=-i$ را بر $w_1=\infty,\ w_2=-1,\ w_3=-i$

ت) $z_1=2,\ z_2=\infty,\ z_3=i$ را بر $w_1=\infty,\ w_2=-1,\ w_3=1$

۲ــ در تبدیل $w=iz/(z-1)$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) قرص واحد $|z|\leq 1$

ب) نیم صفحه راست $\text{Re } z\geq 0$

پ) نیم صفحه زبرین $\text{Im } z\geq 0$

ت) قطاع نامتناهی $\pi/4<\text{Arg } z<\pi/2$

۳ــ در تبدیل $w=(z-1)/(z+1)$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) $|z|\leq r<1$ ب) $|z|\leq r$ $(r>1)$

پ) $\text{Im } z>1$ ت) $\text{Im } z>\text{Re } z$

۴ــ فرض کنیم w یک تبدیل خطی از خط حقیقی بر دایره واحد باشد. اگر z_1 بر w_1 نگاشته شود، نشان دهید $\bar{z}_1$ بر $1/\bar{w}_1$ نگاشته می‌شود.

۵ــ فرض کنیم w یک تبدیل دو خطی از دایره واحد بر خودش باشد. اگر z_1 بر w_1

نگاشته شود، نشان دهید $1/\bar{z}_1$ بر $1/\bar{w}_1$ نگاشته می‌شود.

۶ـ ثابت کنید، نسبت توافقی چهار نقطه متمایز حقیقی است اگر و تنها اگر چهار نقطه بر یک دایره یا بر یک خط راست واقع باشند. (راهنمایی: نگاره خط حقیقی در یک نگاشت دو خطی چیست؟)

۷ـ یک نقطه را نقطهٔ پابرجا از یک تبدیل و خطی گویند، اگر برخودش نگاشته شود. اگر z_1 و z_2 دو نقطه متمایز پابرجا از یک تبدیل دو خطی باشند، نشان دهید که آن تبدیل را می‌توان بصورت $(w-z_1)/(w-z_2)=K[(z-z_1)/(z-z_2)]$ نوشت، که‌در آن K یک ثابت مختلط است.

۸ـ نشان دهید، یک تبدیل دو خطی 1 ، 2 و یا به‌تعداد نامتناهی نقطه پابر جا دارد. شرایطی برای هر یک از این رخدادها را بررسی و اثبات کنید.

۹ـ نشان دهید، تبدیل دو خطی

$$w=w(z)=\frac{(z_1+z_2)z-2z_1z_2}{2z-(z_1+z_2)}\qquad (z_1\neq z_2)$$

دارای نقاط پابرجای z_1 و z_2 می‌باشد و ثابت کنید $w(w(z))=z$

۱۰ـ فرض کنید

$$w_1=w_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$$

و

$$w_2=w_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}.$$

ثابت کنید، $w_1w_2(z)=w_1(w_2(z))$ نیز یک تبدیل دو خطی است.

۱۱ـ فرض کنیم $w_1(z)$ ، $w_2(z)$ و $w_3(z)$ تبدیلات دو خطی باشند. ثابت‌کنید

$$w_1(w_2w_3)(z)=(w_1w_2)w_3(z)$$

۱۲ـ برای هر تبدیل دو خطی $w_1(z)$ ، نشان‌دهید، یک‌تبدیل‌دو خطی $w_2(z)$ موجود است بطوری که:

$$w_1(w_2(z))=w_2(w_1(z))=z$$

۱۳ـ تمرینهای ۱۰، ۱۱ و ۱۲ مبین آنند که تبدیلات دو خطی تحت عمل ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهند. با یافتن دو تبدیل خطی $w_1(z)$ و $w_2(z)$ بطوری که $w_1(w_2(z))\neq w_2(w_1(z))$ نشان دهید این گروه جابجایی نیست.

۱۴ـ همه تبدیلات دو خطی که محور انگاری را بر دایره واحد می‌نگارند بیابید.

۱۵ـ نشان دهید، یک تبدیل دو خطی که قرص $|z| \leq r_1$ رابرروی قرص $|w| \leq r_2$ می‌نگارد حتما" بایستی به شکل:

$$w = \frac{Ar_1 r_2(z - z_0)}{r_1^2 - \bar{z}_0\, z},$$

باشد که در آن $|A| = 1$ و $|z_0| < r_1$.

۱۶ـ نشان دهیدکه تبدیلات دوخطی مجموعه‌های بازرابر مجموعه‌های بازمی‌نگارند.

۳ـ۳ـ نگاشت‌های دیگر

دراین بخش خواص نگاشتی توابعی به غیر از تبدیلات دو خطی را بررسی می‌کنیم. تابع $w = z^2$ رادرنظرمی‌گیریم. باجداسازی قسمت‌های حقیقی و انگاری‌آن حاصل‌می‌گردد.

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy).$$

این تابع نقطه (a, a) در صفحه z را بر $(0, 2a^2)$ در صفحه w می‌نگارد. یعنی که پرتو $x = y$ با $x > 0$ بر پرتو $(0, v)$ با $v > 0$ نگاشته می‌شود: و پرتو $x = y$، $x < 0$ هم بر پرتو $(0, v)$ ،$v > 0$ نگاشته می‌شود، به بیان دیگر، خط $x = y$ دوبار بر پرتو $(0, v)$ ، $v \geq 0$ نگاشته می‌شود (ر.ک. شکل ۷). ملاحظه شود که، به‌خلاف تبدیلات دو خطی، تابع $w = z^2$ یک به یک نیست.

در حالت عمومی نقطه $(x, y) = (x, mx)$ برنقطه

$$(u, v) = ((1 - m^2)x^2, 2mx^2).$$

نگاشته می‌شود، چون:

$$\frac{v}{u} = \frac{2m}{1 - m^2} \qquad (m \neq 1),$$

خط راست $y = mx$ دو بار بر پرتو

$$v = \left(\frac{2m}{1 - m^2}\right)u,$$

نگاشته می‌شود. اگر $|m| < 1$ ، u همه اعداد حقیقی غیرمنفی را می‌پذیرد. و اگر $|m| > 1$، u همه اعداد حقیقی غیر مثبت را می‌پذیرد. قابل توجه است که ناحیه $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4$ بر ربع اول نگاشته می‌شود.

برای یافتن پیش نگاره یک دایره تحت تابع $w = z^2$ ، می‌نویسیم.

$$u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

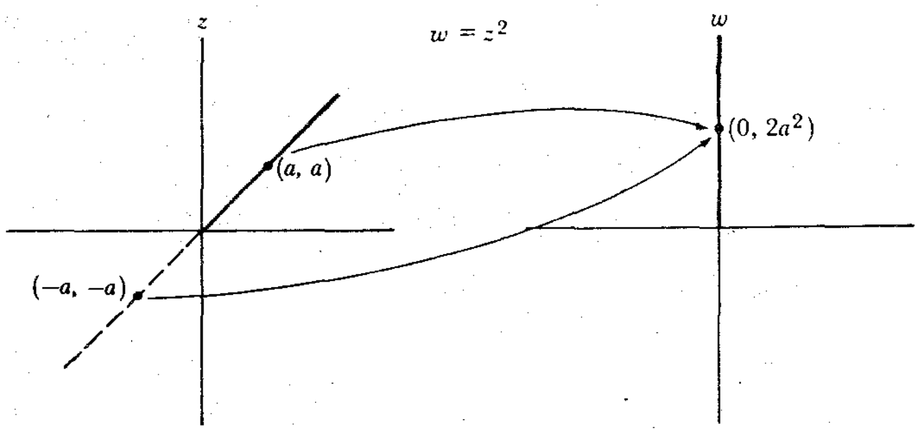
بنابراین بر دایره در صفحه z به مرکز مبداء و شعاع r بر دایره‌یی در صفحه w به

مرکز مبداء و شعاع r^2 نگاشته می‌شود. شاید طبیعی‌تر این باشد که این تابع را نسبت به مختصات قطبی‌اش نمایش دهیم. داریم:

$$w = z^2 = [r \cos \theta + i \sin \theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

بنابراین هر نقطه‌با مختصات قطبی (r, θ) در صفحه z بر نقطه‌یی با مختصات قطبی $(r^2, 2\theta)$ در صفحه w نگاشته می‌شود، یعنی به نقطه‌یی که دوری آن از مبداء مجذور گردیده و شناسه‌اش دو برابر شده است.

شکل ۷



توابع $z = w$ و $w = z^2$ هردو دایره واحد را بر خودش می‌نگارند؛ ولی شباهت این دو نگاشت به هم دیگر بیش از شباهت دو تابع حقیقی $x = y$ و $y = x^2$ به هم نیست. دو تابع حقیقی اخیر هم فاصله بسته $[0, 1]$ را بر خودش می‌نگارند. تابع $w = z^2$ دایره واحد را دوبار می‌پیماید، درواقع این نگاشت هر نیم دایره به مرکز مبداء را بر یک دایره می‌نگارد.

ما نمی‌بایست تابع $w = z^2$ را بدون مقایسه با همتای حقیقی‌اش، یعنی سهمی $y = x^2$ رها کنیم. خط $y = c$ در صفحه z به:

$$u = x^2 - c^2, \qquad v = 2xc,$$

تبدیل می‌گردد که از آن حاصل می‌شود

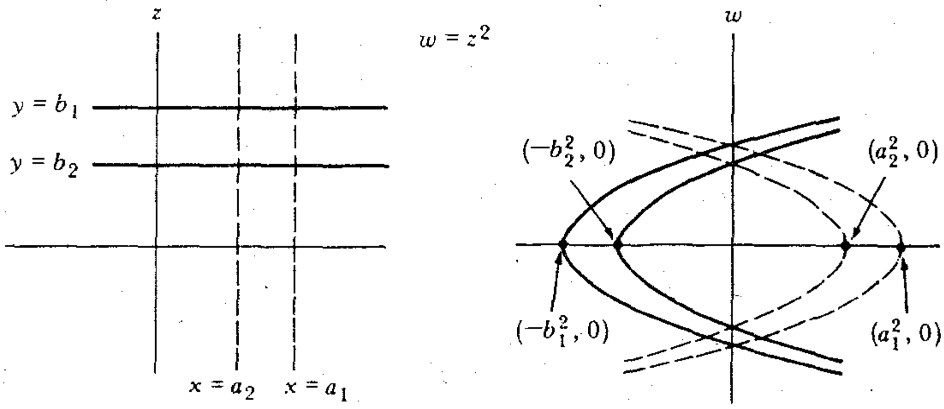
$$u = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 - c^2 = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

بنابراین خطوط راست $y = \pm c \neq 0$ بر سهمی

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

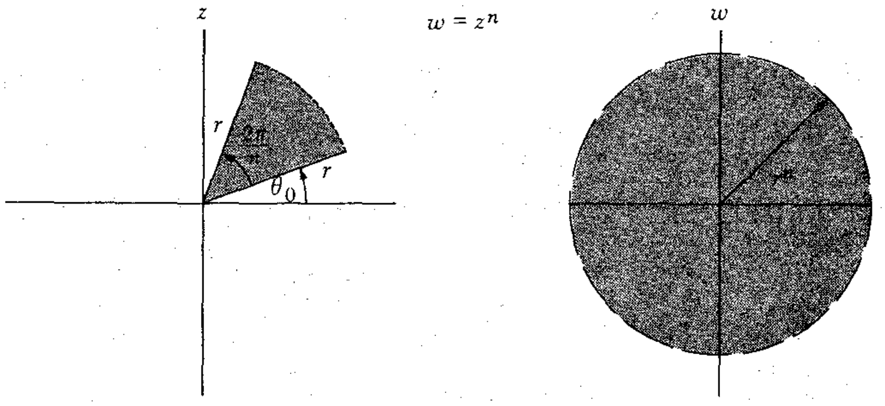
نگاشته می‌شود. اگر $c = 0$، سهمی به پرتو $(u, 0), u \geq 0$ تبدیل می‌گردد. به‌روشی مشابه می‌توان نشان داد که خطوط راست $x = \pm a \neq 0$ بر سهمی زیر نگاشته می‌شوند. (ر. ک. شکل ۸).

$$u = -\left(\frac{v^2}{4a^2} - a^2\right)$$



شکل ۸

برای عدد صحیح مثبت n ، تابع $w = z^n = r^n(\cos\ n\theta + i\ \sin\ n\theta)$ ، نقاطی را کـه دوری آنهـا ازمبداء r باشد بر نقاطی با دوری از مبداء r^n می‌نگارد ، و نقاطی راکه شناسه آنها θ باشد بر نقاطی با شناسه $n\theta$ می‌نگارد .این تابع‌کمان (r, θ) ، $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + (2\pi/n)$ را بر دایره‌یی به‌شعاع r^n و بمرکز مبداء می‌نگارد (ر.ک. شکل ۹)

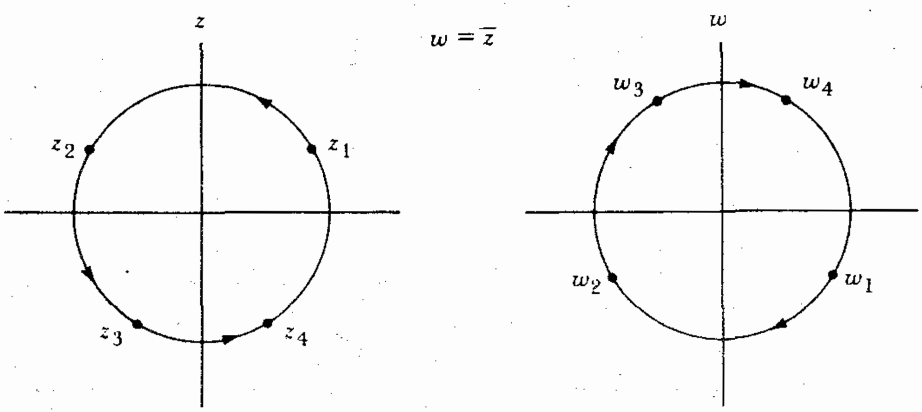


شکل ۹

تابع $w = \bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ هم تابع دیگری است‌که دایره را بر خودش می‌نگارد . این تابع نقطه (r, θ) را بر نقطه $(r, -\theta)$ می‌نگارد . بنابراین نگاره دایـره واحد با جهتی مخالف حرکت عقربه‌های ساعت ، دایره واحد ،درجهت حرکت عقربه‌های ساعت است (ر.ک. شکل ۱۰) ، قابل توجه است که نیم صفحه زبرین بر نیم صفحه زیرین نگاشته می‌شود .

در حالی‌که‌ترکیب‌تبدیلات دو خطی ، تبدیل دو خطی است (تمرین ۱۰ بخش۳ـ۲) حاصلجمع تبدیلات دو خطی لزوما" چنین نیست . آخرین تابعی که در این فصل مـورد بررسی قرار می‌دهیم تابع زیر است :

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$



شکل ۱۰

باجداسازی قسمت‌های حقیقی و انگاری آن داریم:

$$\begin{aligned} w=u+iv&=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta. \end{aligned}$$

دایره‌واحد، $r=1$، بر $w=u=\cos\theta$ نگاشته‌می‌شود. در حالی که θ فاصله $[0,\pi]$ را می‌پیماید، u بطور پیوسته از 1 به -1 کاهش می‌یابد؛ در حالیکه θ فاصله $[\pi, 2\pi]$ را می‌پیماید، u فاصله $[-1, 1]$ را می‌پیماید. بنابراین نیمه‌های زبرین و زیرین دایره‌واحد هر دو فاصله بسته $[-1, 1]$ نگاشته می‌شوند.

جالب است متذکر شویم که در این تبدیل، نقاط z و $1/z$ هر دو بر یک نقطه نگاشته می‌شوند. چون $1/z$ خارج دایره واحد است اگر و تنها اگر z درون دایره واحدباشد، کافی است که خواص نگاشتی آن را برای $|z|>1$ مورد بررسی قرار دهیم:

از روابط

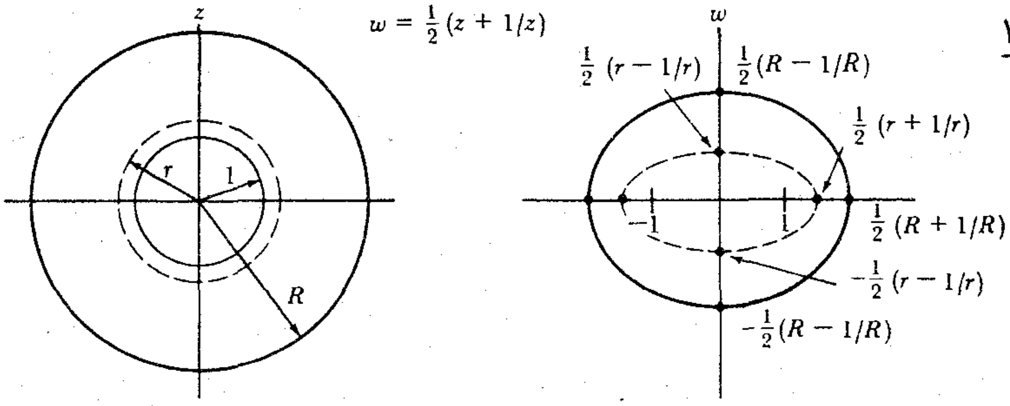
$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\qquad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta, \tag{۲۱}$$

دیده می‌شود که، برای $r>1$

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}(r+1/r)}\right)^2+\left(\frac{v}{\frac{1}{2}(r-1/r)}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

یعنی که دایره $|z|=r>1$ بر یک بیضی که محور بزرگ آن بر محور u قرار دارد، نگاشته می‌شود. با افزایش r، بیضی مستدیرتر می‌گردد و هم‌چنان که r به 1 کاهش‌می‌یابد بیضی به فاصله $[-1, 1]$ تبدیل می‌گردد (ر.ک. شکل ۱۱).

شکل ۱۱

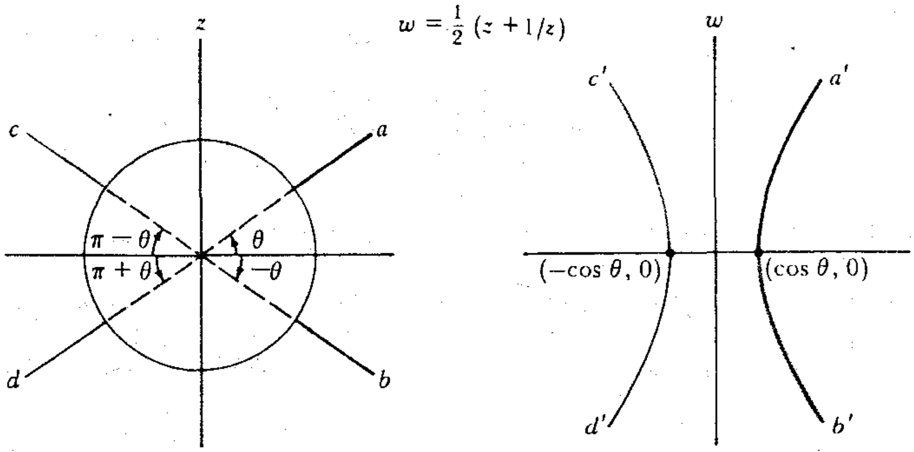


سپس بررسی می‌کنیم که پرتو $\operatorname{Arg} z = \theta$ به چه تبدیل می‌شود. برای $r \geq 1$ با توجه به (۲۱) می‌بینیم که پرتوهای $\operatorname{Arg} z = 0$ و $\operatorname{Arg} z = \pi$ برخودشان نگاشته می‌شوند، گرچه (به استثنای ∞) تنها نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ هستند که پابرجا می‌مانند. بطریق مشابه $\operatorname{Arg} z = \pi/2$ $(r > 1)$ بر $\operatorname{Arg} w = \pi/2$ $(r > 0)$ نگاشته می‌شود. برای دیگر مقادیر θ، بموجب (۲۱)، داریم:

$$\left(\frac{u}{\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2\right] = 1, \qquad (۲۲)$$

که معادله یک هذلولی است. برای $(r > 1)$ هر کمان این هذلولی در همان ربعی واقع است که پرتو $\operatorname{Arg} z = \theta$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۲).

شکل ۱۲



خلاصه آنکه، تابع

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

دایره واحد رادو بار بر فاصله $[-1, 1]$ و همه دوایر دیگر را بر بیضی‌ها می‌نگارد. این تابع درون و خارج دایره واحد هر دو را بر صفحه مختلط گسترش یافته، به استثنای

فاصله حقیقی $[-1, 1]$ ، می‌نگارد، بالاخره، این تابع پرتوهای با شناسه ثابت را بر کمانهایی از هذلولی می‌نگارد.

پرسشها

۱ــ در تابع $w = z^2$ ، نگاره $y = c$ و نگاره $y = -c$ در چه اختلاف دارند؟

۲ــ بزرگترین میدانی که تابع $w = z^2$ در آن یک به یک است کدام است؟

۳ــ چرا بحث در مورد تابع $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ ساده‌تر از بحث در مورد تابع $w = z + 1/z$ بود؟

۴ــ چه وقت یک پرتو دارای شناسه ثابت است؟

۵ــ بزرگترین میدانی که تابع $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ در آن یک به یک می‌شود کدام است؟

۶ــ چگونه می‌توان خواص نگاشتی دو بخش اخیر را ادغام کرد؟

تمرینها

۱ــ نشان دهید، تابع $w = z^2$ هذلولی‌های $x^2 - y^2 = C$ و $xy = K$ را بر خطوط راست می‌نگارد.

۲ــ نشان‌دهید، $w = ((1 + z)/(1 - z))^2$ ، قرص $|z| < 1$ را بر صفحه، به‌استثنای پرتو $(u, 0), u \leq 0$ می‌نگارد.

۳ــ نشان دهید، $w = z/(1 - z)^2$ قرص $|z| < 1$ را بر صفحه به استثنای پرتو $(u, 0)$ $u \leq -\frac{1}{4}$ می‌نگارد. راهنمایی:

$$\frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

۴ــ نشان‌دهیدکه، تابع $w = z^2$ قرص $|z - 1| \leq 1$ را بردلوار $R = 2(1 + \cos\theta)$ می‌نگارد.

۵ــ خواص‌نگاشتی $w = z^{-n}$ راکه در آن n عددی صحیح مثبت است، را بررسی‌کنید.

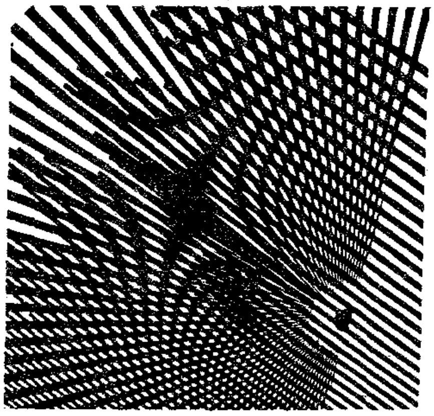
۶ــ نگاره قطاع $|z| < 1,\ 0 < \operatorname{Arg}\ z < \pi/n$ را برای هر یک از توابع زیر بیابید.

الف) $w = \dfrac{z^n + 1}{z^n - 1}$ ب) $w = \left(\dfrac{z^n + 1}{z^n - 1}\right)^2$

۷ــ نگاره قرص واحد $|z| \leq 1$ را تحت تابع زیر بیابید:

$$w = \prod_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{z_k}\left(\frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}\right)$$

۸ــ خواص نگاشتی $w = cz + 1/cz$ را وقتی که c یک عدد مختلط دلخواه باشد، بررسی کنید.



۴ـ توابع مقدماتی

اکثر محصلین دبیرستان با "اثبات" زیر ممکن است گمراه شوند: فرض کنیم $a = b$ در این صورت $a^2 = ab$ ، $a^2 - b^2 = ab - b^2$ و $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. باتقسیم بر $a - b$ خواهیم داشت $a + b = b$ ، $2b = b$ ، و $2 = 1$. خواننده حتماً" توجه‌داشت که‌ماعمل تقسیم بر صفر را که مجاز نیست انجام دادیم . اینک عمل محالی بدون تقسیم بر صفر ارائه می‌دهیم . چون $1/-1 = -1/1$. باجذرگرفتن‌ازطرفین‌داریم $\sqrt{(1/-1)} = \sqrt{(-1/1)}$ ، $\sqrt{1}/\sqrt{-1} = \sqrt{-1}/\sqrt{1}$ ، $1/i = i/1$. با طرفین ـ وسطین $i^2 = 1^2$ یا $-1 = 1$.

این فصل نشان خواهد داد که 1 واقعاً" برابر -1 نیست . هم چنین‌خواهیم دیدکه نماهای مختلط و توابع مثلثاتی وجوه اشتراک فراوان دارند ، و این که هر تابعی دارای نمای مختلط باشد ، بایست برحسب یک لگاریتم تعریف شود .

۴ـ۱ . تابع نمائی

تابع حقیقی $f(x) = e^x$ مجموعه اعداد حقیقی را بطور یک به یک بر مجموعه‌اعداد حقیقی‌مثبت‌می‌نگاردو آن‌در قاعده نماهای $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ هم صدق می‌کند . این تابع با مشتق خودش برابر است و دارای بسط به رشته توانی زیر است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

در تعریف تابع مختلط $w = f(z) = e^z = e^{x+iy}$ می‌خواهیم خواص‌عمده تابع حقیقی نظیرش را حفظ کند . اگر قرار باشد قاعده نماها معتبر ماند ، باید داشته باشیم $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. آنچه‌باقی می‌ماند این است که برای e^{iy} یک تعریف "مستدل"

ارائه دهیم .

اگر همانند e^x می‌توانستیم e^{iy} را به رشته‌ای توانی بسط دهیم ، نتیجه می‌شد :

$$e^{iy}=1+iy+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}+\cdots. \qquad (۱)$$

باجداسازی (۱) به قسمتهای حقیقی و انگاری‌اش حاصل می‌شد :

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}\cdots\right). \qquad (۲)$$

بسطهای‌رشته‌نمایی‌در (۲) به‌ترتیب نمایش توابع $\cos y$ و $\sin y$ است . این‌مطالب راهنمای تعریف زیر است .

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \quad (\text{حقیقی } y) \qquad (۳)$$

تاکید می‌شود که (۳) یک تعریف است و بحث بالا تنها بدین دلیل مطرح‌شدکه این تعریف موجه بنظر آید . در فصل ۸ ، رسما" اعتبار بسط به رشته توانی مختلط را اثبات می‌کنیم ، و از این‌رو ، تعریف تائید می‌گردد . اینک قانون دموآور را

$$(\cos y+i\sin y)^n=\cos ny+i\sin ny,$$

می‌توان بصورت $(e^{iy})^n=e^{iny}$ نوشت . باید توجه داشت که‌برای‌هر عددحقیقی y داریم ،

$$|e^{iy}|=\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=1$$

تذکر ـ با قرار دادن $y=\pi$ در (۳) ، حاصل می‌گردد

$$e^{\pi i}+1=0,$$

که ،به‌نظر مولف ، زیباترین معادله در سراسر ریاضیات است . این معادله ازعمده‌ترین ثابت‌ها پنج ثابت و از عمده‌ترین عملیات سه عمل (جمع و ضرب و به نمارساندن)را شامل می‌شود .

اینک بعضی از نتایج تعریف e^z به عنوان عدد مختلط ، رابطه

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

را بررسی می‌کنیم ، با قرار دادن $y=0$ ، (۴) به تابع حقیقی e^x ساده‌می‌گردد . اگر $x=0$ ، برای هر اعداد حقیقی y_1 و y_2 داریم :

$$\begin{aligned}e^{iy_1}e^{iy_2}&=(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)\\&\quad+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)\\&=\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)=e^{i(y_1+y_2)}.\end{aligned}$$

بنابراین‌برای‌اعدادمختلط $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ نتیجه می‌شود که :

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} \\ &= (e^{x_1}e^{x_2})(e^{iy_1}e^{iy_2}) \\ &= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

و قاعده برای نماها در مورد اعداد مختلط هم درست است. چون $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x$ ملاحظه می‌شود برای هر عدد مختلط z داریم $e^z \neq 0$

بنابراین، اکثر خواص مهم e^x در e^z نیز حفظ می‌شود. با این حال یک استثناء قابل‌توجه موجود است. تابع e^z یک به یک نیست، درواقع بازاء هر عدد مختلط z.

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

حال فرض کنیم $e^z = e^{x+iy} = 1$. در این صورت $e^x \cos y = 1$ و $e^x \sin y = 0$ ازآنجا که $e^x \neq 0$ داریم $\sin y = 0$؛ یعنی $y = n\pi$، n عددی است صحیح. ولی اگر $e^x \cos n\pi = 1$ آنگاه n می‌بایست زوج‌بوده‌و x برابر صفر باشد. بنابراین z مضرب‌صحیحی از $2\pi i$ است.

اکنون برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 که $e^{z_1} = e^{z_2}$، داریم $e^{z_1-z_2} = 1$. در نتیجه $z_1 - z_2 = 2k\pi i$، k عددی است صحیح. بطور خلاصه تابع $f(z) = e^z$ متناوب‌است و دوره تناوب آن $2\pi i$ است.

اگر تابع نمائی مقداری‌رایک بار به پذیرد، آن تابع می‌بایست ــ چون متناوب‌استــ آن مقدار را به دفعات نامتناهی به پذیرد. اینک نشان می‌دهیم، e^z هر عدد مختلط مخالف‌صفر و متناهی را به‌دفعات نامتناهی می‌پذیرد. اگر $e^z = a + bi$ و a و b هر دوصفر نباشند آنگاه

$$e^x \cos y = a, \qquad e^x \sin y = b. \tag{۵}$$

با مربع‌کردن هر دو جمله‌در (۵)، بدست‌می‌آوریم $e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} = a^2 + b^2$ چون لگاریتم برای اعداد حقیقی مثبت خوش تعریف است، داریم $x = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2)$. اگر $a \neq 0$، عبارت دوم را به عبارت اول در(۵) تقسیم می‌کنیم، تا بدست آوریم $\tan y = b/a$، $y = \tan^{-1} b/a$ بنابراین

$$z = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

یک حل معادله $e^z = a + bi$ است. اگر یکی از مقادیر $\tan^{-1} b/a$ برابر y_0 باشدآنگاه برای هر عدد صحیح k، $y_0 + 2k\pi$ هم بایست یک مقدار برای $\tan^{-1} b/a$ باشد. اگر $a = 0$ آنگاه:

$$z=\begin{cases}\log|b|+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right), & b>0,\\[2ex] \log|b|+i\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right), & b<0,\quad k \text{ عدد صحیح}\end{cases}$$

مثال ۱ــ فرض‌کنیم $e^z=5-5i$. آنگاه

$$z=\frac{1}{2}\log[5^2+(-5)^2]+i\tan^{-1}\frac{-5}{5}$$

$$=\frac{\log 50}{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\qquad k \text{ عدد صحیح}$$

مثال ۲ــ فرض کنیم $e^z=-5+5i$ آنگاه

$$z=\frac{1}{2}\log[(-5)^2+5^2]+i\tan^{-1}\frac{5}{-5}$$

$$=\frac{\log 50}{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\qquad k \text{ عددصحیح}$$

قابل توجه است که

$$\tan^{-1}\frac{-b}{a}\neq\tan^{-1}\frac{b}{-a}.$$

تعریف‌تابع نمائی برحسب توابع مثلثاتی پیشنهاد می‌کنـد که این فرآیند رامی‌توان وارونه نمود. از (۳) داریم:

$$e^{-iy}=\cos(-y)+i\sin(-y)=\cos y-i\sin y. \tag{۶}$$

از تفریق یا جمع (۳) و (۶) خواهیم داشت:

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},\qquad \cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}.$$

از این رو طبیعی بنظر می‌رسد که توابع مثلثاتی مختلط رابه‌ترتیب‌زیرتعریف‌کنیم:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{۷}$$

دیگر توابع مثلثاتی با نسبت‌های معمول تعریف می‌گردند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

با این تعاریف، اکثر خواص مثلثاتی حقیقی آشنا را می‌توان در مورد صفحه مختلط گسترش داد.

مثال ۱–

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

اثبات –

$$\begin{aligned}
\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}e^{i\pi/2} - e^{-iz}e^{-i\pi/2}}{2i} \\
&= \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.
\end{aligned}$$

مثال ۲–

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

اثبات –

$$\begin{aligned}
2 \sin z \cos z &= 2\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{4i}\right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} \\
&= \sin 2z.
\end{aligned}$$

اینک در مورد استثناء: کران توابع حقیقی سینوس و کسینوس ۱ است. در حالی که در صفحه مختلط نه $\sin z$ و نه $\cos z$ کراندار نیستند. از نامساوی مثلث داریم:

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| \geq \frac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

اگر z در امتداد پرتو $\operatorname{Arg} z = \pi/2$ به ∞ نزدیک شود عبارت طرف راست بدلخواه بزرگ

می‌شود، و این نشان می‌دهد، $\sin z$ کراندار نیست. بطریق مشابه

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| \geq \frac{e^{y}-e^{-y}}{2},$$

و چنانچه z بر پرتو $\operatorname{Arg} z=\pi/2$ به ∞ میل‌کند $|\cos z|$ به ∞نزدیک می‌شود.

همانندیهای (۷) را می‌توان بکار برد و معادلاتی را که دارای توابع مثلثاتی هستند حل کرد.

مثال ــ همه اعداد مختلطی را که برایشان $\cos z=2$است بیابید.

بایست داشته باشیم $(e^{iz}+e^{-iz})/2=2$ که نتیجه می‌شود $e^{2iz}-4e^{iz}+1=0$ که یک معادله درجه دوم نسبت به e^{iz} است. با حل آن حاصل می‌شود.

$$e^{iz}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

ولی $e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)=2\pm\sqrt{3},$ که‌روابط زیر را بدست می‌دهند.

$$e^{-y}\cos x=2\pm\sqrt{3},\qquad e^{-y}\sin x=0.$$

رابطه دوم نتیجه می‌دهد که برای n عدد صحیح، $x=n\pi$؛ و از رابطه اولی نتیجه می‌شود که n بایستی زوج باشد بنابراین$y=-\log(2\pm\sqrt{3})$. بنابراین $\cos z=2$ اگــرو تنـها اگر

$$\begin{aligned} z &= 2k\pi - i\log(2\pm\sqrt{3}) \\ &= 2k\pi \pm i\log(2+\sqrt{3}), \qquad k \text{ عددصحیح} \end{aligned}$$

از دانشجو می‌خواهیم به عنوان تمرین ثابت کند که هر دوی $\sin z$ و $\cos z$ همـه مقادیر صفحه مختلط را می‌پذیرند.

سرانجام توابع هذلولی را بوسیله فرمولهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\qquad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}. \tag{۸}$$

به عنوان یک نتیجه مستقیم (۸) روابط زیر را داریم:

$$\sinh z=-i\sin iz,\qquad \cosh z=\cos iz.$$

باید توجه داشت که هر دو $\sinh z$ و $\cosh z$ متناوب‌اند و دوره تناوب آنها $2\pi i$ است.

پرسشها

۱ــ برای چه توابع $f(z)$، تابع $e^{f(z)}$ متناوب خواهد بود؟

۲ـ بزرگترین ناحیه‌یی که در آن e^z یک به یک می‌باشد کدامست؟
۳ـ بزرگترین ناحیه‌یی که در آن e^z کراندار می‌باشد کدامست؟
۴ـ بزرگترین ناحیه‌یی که در آن $\sin z$ کراندار است کدام است؟
۵ـ چه وقت $e^{f(\bar{z})} = e^{\overline{f(z)}}$ ؟
۶ـ آیا همانندیهائی مثلثاتی موجودند که برای متغیرهای حقیقی درست‌باشند ولی در صفحه مختلط معتبر نباشند؟
۷ـ چگونه میتوان $|\sin z|$ را با $\sin |z|$ مقایسه کرد؟
۸ـ $|\sin z|$ و $|\sinh z|$ را چگونه مقایسه می‌کنید؟
۹ـ وقتیکه z بر پرتوهای متفاوت به سمت ∞ میل‌کند بر e^z چه می‌گذرد؟ در مورد $e^z + z$ چطور؟

<u>تمرینها</u>

۱ـ تمام مقادیر z را که در روابط زیر صدق می‌کنند بیابید.

الف) $e^{3z} = 1$ ب) $e^{z^2} = 1$ پ) $e^{e^z} = 1$

۲ـ نشان دهید که صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ همگی حقیقی‌اند.

۳ـ (الف) نشان دهید که بر پرتو $\operatorname{Arg} z = \theta$، $0 < |\theta| < \pi$ توابع $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند.

(ب) نشان دهید که $\sin z$ تنها بر مجموعه‌هایی کراندار است که، در یک نوار افقی جای گیرند.

۴ـ برای $|z| = r$، ثابت کنید.

الف) $e^{-r} \leq |e^z| \leq e^r$

ب) $e^{-rn} \leq |e^{zn}| \leq e^{rn}$، n صحیح‌ومثبت

تساوی چه وقت برقرار است؟

۵ـ همانندیهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

ب) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

پ) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

۶ـ (الف) قسمتهای حقیقی و انگاری $e^{1/z}$، $z \neq 0$ را جدا کنید.

(ب) نشان دهید، $|e^{1/z}|$ در ناحیه $|z| \geq \varepsilon$، $\varepsilon > 0$ کراندار است.

۷ـ (الف) ثابت کنید، e^{iz} متناوب است و دوره تناوب آن 2π است.

(ب) برای عدد مختلط مخالف صفر و دلخواه a ، نشان دهید ، e^{az} متناوب است ، و دوره تناوب آنرا بیابید .

۸ــ نامساویهای زیر را ثابت کنید .

الف) $|e^z + e^{z^2}| \le e^x + e^{x^2-y^2}$

ب) $|e^{iz} + e^{iz^2}| \le e^{-y} + e^{-2xy}$

پ) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \ge 1$

۹ــ همانندیهای زیر را ثابت کنید .

الف) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

ب) $\sinh (z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

پ) $\cosh (z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

ت) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

ث) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

ج) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

چ) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

۱۰ ــ نشان دهید

الف) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$

ب) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$

۱۱ــ ثابت کنید $\tanh z = (\sinh z)/(\cosh z)$ متناوب و دوره تناوب آن πi است .

۴ــ۲ . خواص نگاشتی

اهمیت قسمتهای حقیقی و انگاری یک عدد مختلط مخالف صفر ، در مشخص نمودن جایگاه‌آن‌درصفحه "مساوی"است ، داریم : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan (\arg z) = y/x$ قسمتهای حقیقی و انگاری $z = x + iy$ نقشی مستقل در مشخص نمودن‌جایگاه e^z درصفحه w ایفا می‌کنند . با تفکیک تابع $w = e^z$ به مولفه‌های حقیقی و انگاری‌اش داریم :

$$w = e^z = u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

که از آن حاصل می‌شود .

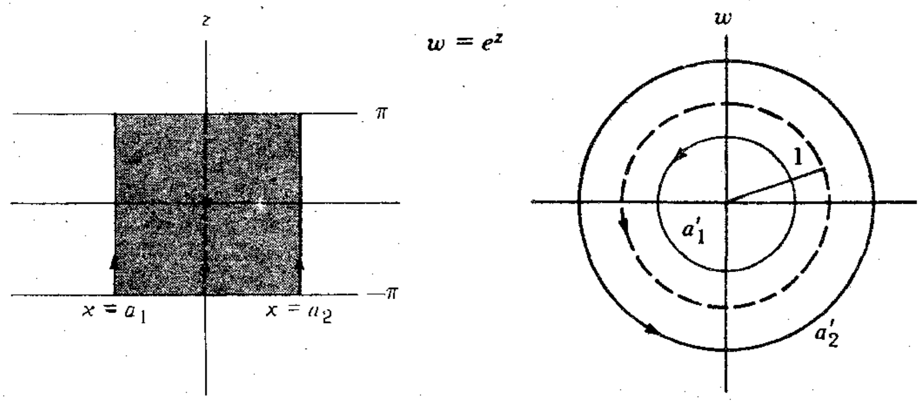
$$|e^z| = e^x, \qquad \tan(\arg e^z) = \frac{v}{u} = \tan y.$$

این روابط نشان می‌دهند که کالبد e^z تنها به قسمت حقیقی z وابسته است ، در حالی‌که‌شناسه e^z تنها‌به‌قسمت‌انگاری z وابسته است . در واقع $\arg e^z = y + 2k\pi$ (k عدد صحیح) . از این رو تا اندازهٔ جالب خواهد بود چنانچه نگاره‌خطوط موازی محورهای‌مختصات را مشخص کنیم ، ولی نخست از متناوب بودن تابع نمائی استفاده‌می‌نمائیم . چون‌برای‌هر z ، $e^{z+2\pi i} = e^z$ ، برای‌هرعدد صحیح k ، نقاط $x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$ دارای یک نگاره هستند . از این رو می‌خواهیم خود را به ناحیه $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$ محدود کنیم . هر چه‌دراین نوار اتفاق بیافتد در نوار $-\pi + 2k\pi < \text{Im } z \leq \pi + 2k\pi$ نیز اتفاق خواهدافتاد . با چنین شرطی ، $\text{Arg } e^z = y$ ، $-\pi < y \leq \pi$.

چون که e^z دارای‌کالبد ثابت است ، همه نقاط واقع بر خط $x = x_0$ برنقاطی بادوری مساوی از مبداء نگاشته می‌شوند .بویژه‌پاره خط $x = x_0$ ، $-\pi < y \leq \pi$ بطور یک به یک بــر دایره‌یی در صفحه w نگاشته می‌شود . مرکزش مبداء و شعاع آن e^{x_0} است . با افزایش y از $-\pi$ به π ، دایره در جهت مخالف حرکت عقربه ساعت پیموده می‌شود .

چون که $|e^z| = e^x > 1$ اگر و تنها اگر $x > 0$ ، نیم نوار نامتناهی $\text{Re } z > 0$ ، $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$ بطور یک به یک بر خارج دایره واحد نگاشته می‌شود ، در حالی که نــوار $\text{Re } z < 0$ ، $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$ بر درون آن به استثنای مبداء نگاشته می‌شود (ر.ک. شکل ۱)

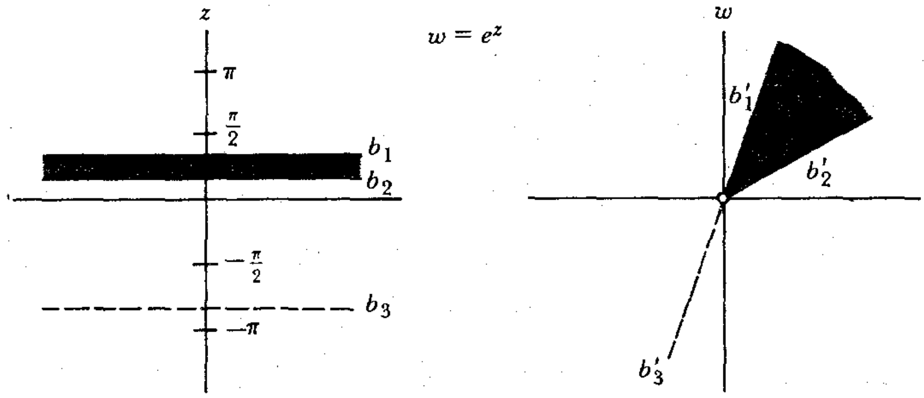
شکل ۱



همان طور که قبلا" تذکر دادیم ، $\text{Re } z$ نقشی در مشخص کردن شناسه e^z ندارد . از این رو نقاطی که قسمتهای انگاری برابر دارند ، بر نقاطی که دارای شناسه‌های‌برابرند ، نگاشته می‌شود . درمورد خط $y = y_0$ ، $-\pi < y < 0$ ، داریم $w = e^z = e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0)$ چون که e^x ، اعداد حقیقی مثبت را می‌پیماید ، خط $y = y_0$ بطور یک به یک بر پرتــو $\text{Arg } w = y_0$ نگاشته می‌شود . پس ، نوارنامتناهی $0 < y < \pi$ بطور یک به یک بر نیم صفحــه زبرین‌نگاشته می‌شود . در حالی که نوار $-\pi < y_0 \leq \pi$ بر نیم صفحه زیرین نگاشته می‌شود (ر.

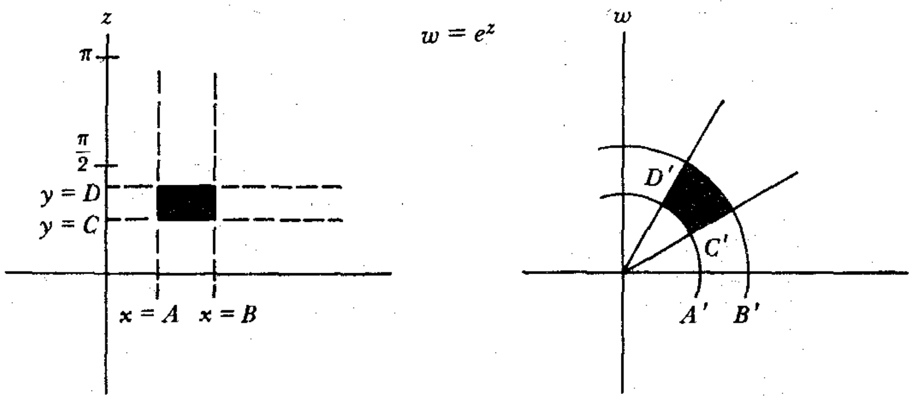
ک. شکل ۲). قابل‌توجه است که محور x، $y=0$ بر محور حقیقی مثبت و خط $y=\pi$ بر محور حقیقی منفی نگاشته می‌شوند. از اینرو نوار $-\pi < \operatorname{Im} z \le \pi$ بطور یک به یک بر صفحه سوراخ شده w نگاشته می‌شود. که منظور از صفحه سوراخ شده، تمام صفحه منهای مبداء است.

شکل ۲



دو نگارش قبلی را می‌توانیم ترکیب کنیم تا اینکه نگاره مستطیل‌ها را در تابع $w=e^z$ بیابیم. چنانچه نگاره را در شکل قطبی آن بنویسیم در این صورت مستطیل $A \le x \le B$، $-\pi < C \le y \le D \le \pi$ بر ناحیه $Re^{i\theta}, e^A \le R \le e^B, C \le \theta \le D$ که به‌کمانها و پرتوها محصور است نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۳).

شکل ۳



سپس خط مستقیمی را که با هیچ یک از محورهای مختصات موازی نیست در نظر می‌گیریم. نگاره این خط نه کالبد ثابت دارد و نه شناسه ثابت، با این وصف می‌بایست با بزرگ شدن x، به مقدار کافی بزرگ شود ولی بایست هر بار که y به میزان 2π افزایش یابد یک دوران کامل نماید که نهایتا" به یک حلزونی منتهی می‌گردد. اگر $y=mx+b$، $m \ne 0$ آنگاه $w=e^z=e^{x+i(mx+b)}$. از این رو $|e^z|=e^x$ و $\arg e^z = mx+b+2k\pi$ k عدد صحیح. در شکل قطبی می‌توانیم بنویسیم $w=Re^{i\theta}$، با

$$R=|e^z|=e^x,$$
$$\theta = \operatorname{Arg} e^z = mx+b+2k\pi, \tag{۹}$$

که $k=k(x)$ عدد صحیح است و بطوری انتخاب می‌شود که θ همیشه در نامساوی $-\pi<\theta\leq\pi$ صادق باشد. چون که x مجموعه اعداد حقیقی را می‌پیماید. k می‌بایست مجموعه اعداد صحیح را به پذیرد. با حذف x از روابط در (۹) داریم

$$R=e^{(\theta-b-2k\pi)/m}=e^{-b/m}e^{(\theta-2k\pi)/m} \qquad (۱۰)$$

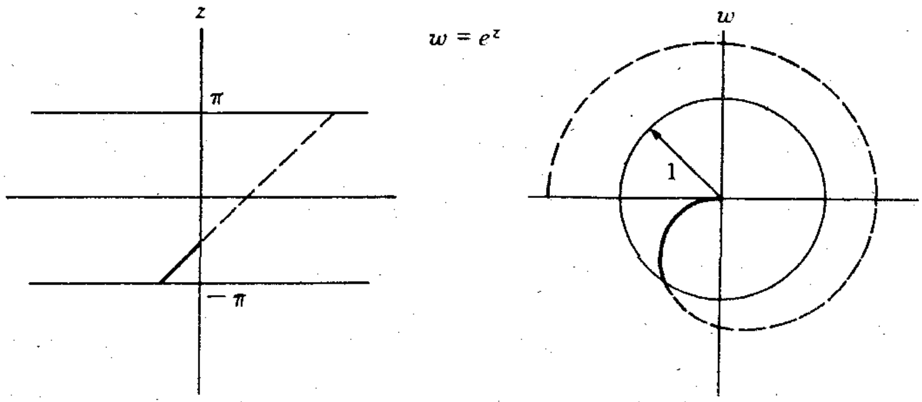
با قرار دادن $\alpha=\theta-2k\pi$ در (۱۰) داریم:

$$R=Ke^{\alpha/m}, \qquad (۱۱)$$

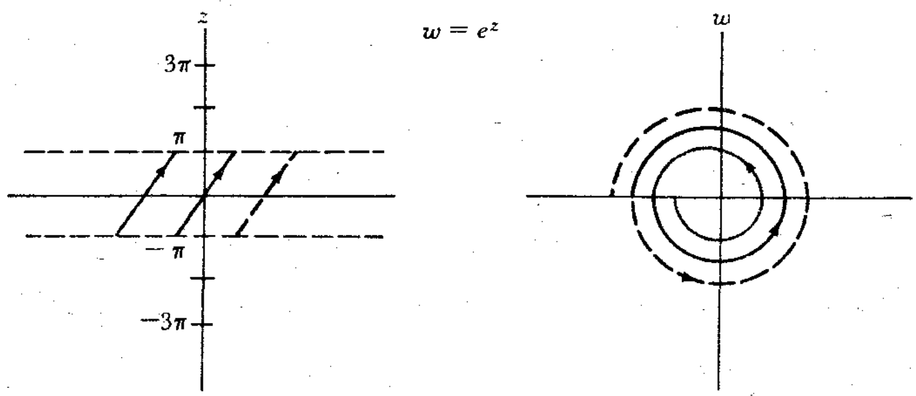
که K ثابت مثبت و α مجموعه اعداد حقیقی را می‌پیماید.

معادله (۱۱) نمایش چیزی است که به حلزونی لگاریتمی موسوم است. در شکل ۴، نگاره یک پاره خط و در شکل ۵ تصویر کامل‌تری به نمایش آمده است.

شکل ۴



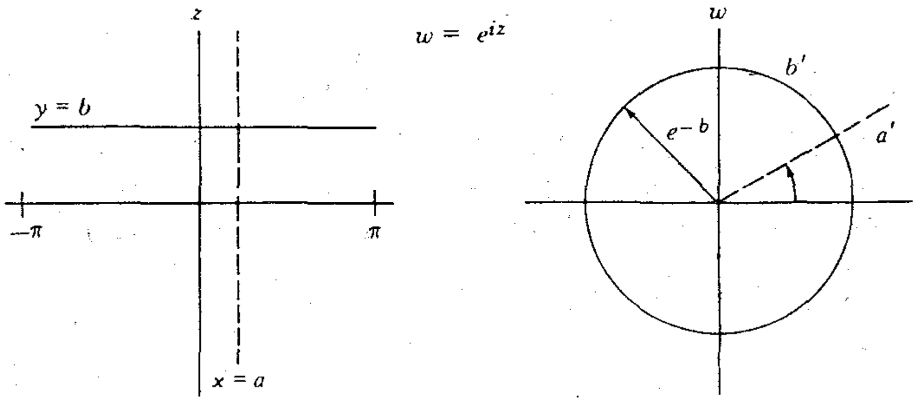
شکل ۵



چون اختلاف شناسه iz با شناسه z برابر با $\pi/2$ است، انتظار می‌رود تابع $w=e^{iz}$ خطوط موازی محور y (محور x) را بر همان نوع اشکالی بنگارد که تابع $w=e^z$ خطوط موازی محور x (محور y) را می‌نگاشت. با قرار دادن $w=e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}$ می‌بینیم $|e^{iz}|=e^{-y}$ و $\arg e^{iz}=x+2k\pi$. بنابراین پاره خط $-\pi<x\leq\pi$، $y=y_0$ بر دایره‌یی به مرکز مبداء و شعاع e^{-y_0} نگاشته می‌شود. نیم نوار نامتناهی $-\pi<x\leq\pi$, $y>0$ بر درون قرص واحد سفته نگاشته می‌شود در حالیکه نوار $-\pi<x\leq\pi$

$y<0,$ برخارج آن نگاشته می‌شود . هم چنین ، خط $x=x_0$ ، $-\pi<x_0\le\pi$ برپرتو $\operatorname{Arg} w=x_0$ نگاشته می‌شود (ر.ک. شکل ۶) .

شکل ۶



اینک با استفاده از این خواص نگاشتی تابع نمائی ، خواص توابع مثلثاتی را بررسی خواهیم کرد . همانند حالت تابع نمائی ، میخواهیم $\cos z$ را به ناحیه‌یی که تابع درآن یک به یک است محدود کنیم . چون $\cos z$ دارای دوره تناوب 2π است به ناحیه $-\pi<\operatorname{Re} z\le\pi$ اکتفا می‌کنیم . بعلاوه $\cos z$ تابعی زوج است ، یعنی‌که $\cos z=\cos(-z)$ و این بدان معنی است که نقاط ربع اول و چهارم (دوم و سوم) نگاره‌های یکسان دارند . بنابراین نگاره هر مجموعه‌یی واقع در نیم نوار نامتناهی $-\pi<\operatorname{Re} z\le\pi$ ، $\operatorname{Im} z>0$ ، در هر نیم نوار نامتناهی به شکل $(k-1)\pi<\operatorname{Re} z\le(k+1)\pi$ ، $\pm\operatorname{Im} z>0$ "عینا" تکرار می‌گردد . چون $\cos z$ حقیقی است اگر و تنها اگر z حقیقی باشد ، کافی است نگاشت‌هایی را که در میدان

$$\{-\pi<\operatorname{Re} z\le\pi,\quad \operatorname{Im} z>0\}\cup\{0\le\operatorname{Re} z\le\pi,\quad \operatorname{Im} z=0\},$$

تعریف شده در نظر بگیریم . در این میدان تابع $w=\cos z$ یک به یک است .

متذکر می‌شویم ، تابع $w=\frac{1}{2}(z+1/z)$ دوایر را بر بیضی‌ها و پرتوها را بر کمانهایی ازهذلولیها می‌نگارد . می‌توان تبدیل $w=\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+1/e^{iz})$ را بصورت نگاشت‌های پی‌درپی از صفحه z بر صفحه z' و از صفحه z' به صفحه w در نظر گرفت که $z'=e^{iz}$. برای $y_0>0$ پاره خط $-\pi<x\le\pi$ ، $y=y_0$ ، در صفحه z بر دایره $|z'|=e^{-y_0}$ در صفحه z' نگاشته می‌شود . آنگاه تابع $w=\frac{1}{2}(z'+1/z')$ ، دایره $|z'|=e^{-y_0}$ در صفحه z' را بر بیضی

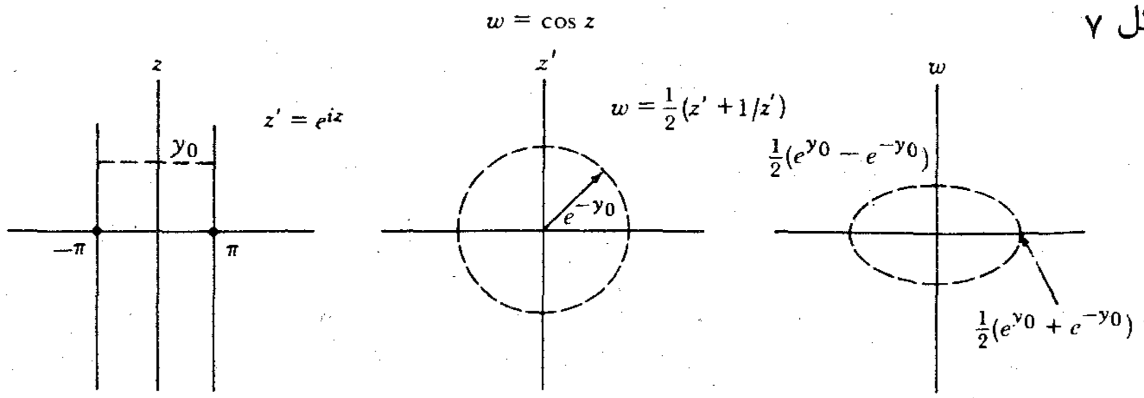
$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}(e^{-y_0}+e^{y_0})}\right)^2+\left(\frac{v}{\frac{1}{2}(e^{-y_0}-e^{y_0})}\right)^2=1$$

در صفحه w می‌نگارد ، بنابراین با $w=\cos z$ پاره‌خط $-\pi<x\le\pi$ ، $y_0>0$ بر یک بیضی

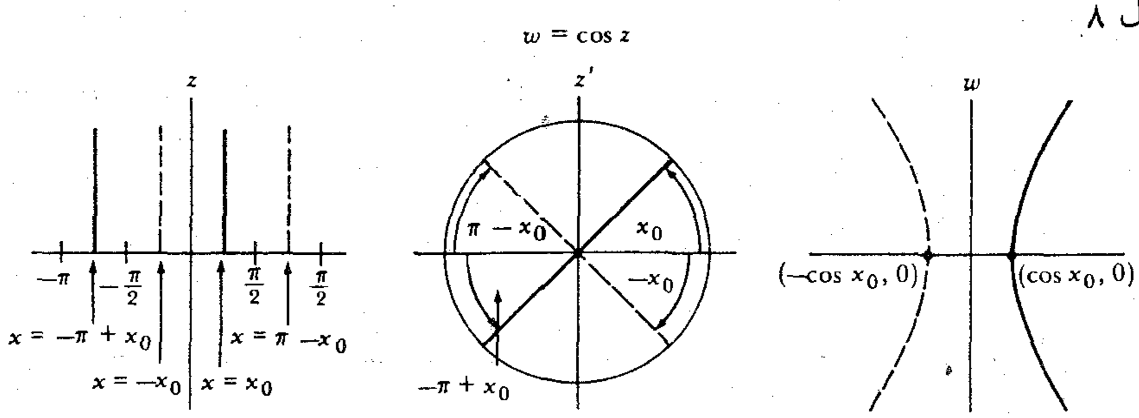
نگاشته می‌شود . (شکل ۷ ملاحظه شود) .

بطریقی مشابه برای $y>0$ نیم خط $x=x_0$ ، $-\pi<x_0<\pi$ بر پاره خط $\operatorname{Arg} z'=x_0$ ، $1>|z'|>0$ نگاشته می‌شود که این هم بر یک کمان هذلولی $(u/\cos x_0)^2-(v/\sin x_0)^2=1$ نگاشته می‌شود (شکل ۸ ملاحظه شود) .

شکل ۷



شکل ۸



تذکر ــ برای $y>0$ ، نگاشت‌های بالا برای نیم خط $x=0$ ، $x=\pi$ و یا $x=\pm\pi/2$ معتبر نیست . اگر $x=0$ ، $\cos z=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})$ بر فاصله حقیقی $u>1$ نگاشته می‌شود ، در حالی‌که نیم خط $x=\pi$ بر فاصله حقیقی $u<-1$ نگاشته می‌شود . نیم خط $x=\pi/2$ بر محور انگاری منفی ونیم خط $x=-\pi/2$ بر محور انگاری مثبت نگاشته می‌شوند . بالاخره فاصله $0\leq x\leq\pi$ ، $y=0$ بر فاصله حقیقی $-1\leq u\leq 1$ نگاشته می‌شود .

همانندی

$$\sin z=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (۱۲)$$

مارا قادر می‌سازد تا خواص نگاشت $\sin z$ را از خواص نگاشت $\cos z$ استنتاج کنیم . معادله (۱۲) نشان می‌دهد که می‌توان $w=\sin z$ را به عنوان تبدیل $z'=z-\pi/2$ از صفحه

z به صفحه z' در نظر گرفت ، که به دنبال آن نگاشت $w=\cos z'$ عمل کند . پس تابع $w=\sin z$ نقاط ناحیه $-\pi/2<\operatorname{Re} z\leq 3\pi/2$ را بر آنجا می‌نگارد که تابع $w=\cos z$ نقاط ناحیه $-\pi<\operatorname{Re} z\leq\pi$ را می‌نگاشت .

مثال ــ تابع $w=\cos z$ پاره خط $-\pi<x\leq\pi$ ، $y=1$ رابر بیضی

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(e+1/e)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}(e-1/e)^2}=1.$$

می‌نگارد . تابع $w=\sin z$ پاره‌خط $-\pi/2<x\leq 3\pi/2$ و $y=1$ رابرهمان‌بیضی می‌نگارد .

پرسشها

۱ــ چه‌نوع‌ازتوابع ، صفحه‌مختلط منهای‌مبداء‌رابر نوار $-\pi<\operatorname{Im} w\leq\pi$ می‌نگارند ؟

۲ــ اگر z نقطه‌یی مفروض از صفحه باشد ، آیا همیشه یک همسایگی این نقطه موجود است که در آن تابع e^z یک به یک باشد ؟

۳ــ رفتار e^z را وقتی که z به ∞ نزدیک شود چگونه توصیف می‌کنید ؟

۴ــ درمورد تابع e^z ، چگونه‌مساحت یک‌مستطیل‌با مساحت نگاره‌اش مقایسه‌می‌شود ؟

۵ــ در مورد تابع $\cos z$ ، چگونه مساحت یک مستطیل با مساحت نگاره آن مقایسه میشود ؟

۶ــ در مورد تابع e^z ، شیب یک خط مستقیم درنگاره‌آن که یک حلزونی لگاریتمی است ، چه تاثیری می‌گذارد ؟

۷ــ چه توابعی ، به غیر از e^z ، هرگز در صفحه صفر نمی‌شوند ؟

۸ــ بزرگترین میدانی که در آن $\sin z$ یک به یک است کدام است ؟

۹ــ اگر z نقطه مفروضی در صفحه z باشد . آیا همیشه یک همسایگی این نقطه‌موجود است که در آن $\sin z$ یک به یک باشد ؟

۱۰ــ چه تفاوتهایی میان توابع $w=\cos(z-\pi/2)$ و $w=\cos z-\pi/2$ موجود است ؟

تمرینها

۱ــ نگاره مجموعه‌های زیر را تحت تبدیل $w=e^z$ بیابید و رسم کنید .

الف) $-5\leq x\leq 5$ ، $y=\pi/4$

ب) $-2<x<1$ $0<y<\pi$

پ) $x=3$ $-\pi/2<y<\pi/2$

ت) $x<1$ $-\pi/3<y<2\pi/3$

۲ــ نگاره ناحیه $0\leq x\leq\pi$ ، $0\geq y$ را تحت هر یک از تبدیلهای زیر بیابید .

الف) $w = e^{iz}$ ب) $w = ie^{iz}$ پ) $w = ie^{-iz}$

۳ــ مطلوبست نگاره‌های خطوط مستقیم تحت تبدیل $w = e^{cz}$ که در آن c یک ثابت مختلط است.

۴ــ نشان دهید، نگاره‌قرص $|z| \leq 1$ تحت‌تبدیل $w = e^{z}$ درون‌طوق $1/e \leq |w| \leq e$ واقع است.

۵ــ نشان دهید، نگاره قرص $|z| \leq 1$ تحت تبدیلهای $w = \cos z$ و $w = \sin z$ درون قرص $|w| \leq (e^2+1)/2e$ قرار دارد.

۶ــ نگاره مجموعه‌های زیر را در تبدیل $w = \cos z$ بیابید.

الف) $y \geq 0$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ ب) $y = -5$ ، $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

پ) $-2 < y < 2$ ، $0 \leq x < \pi$ ت) $y > 0$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$

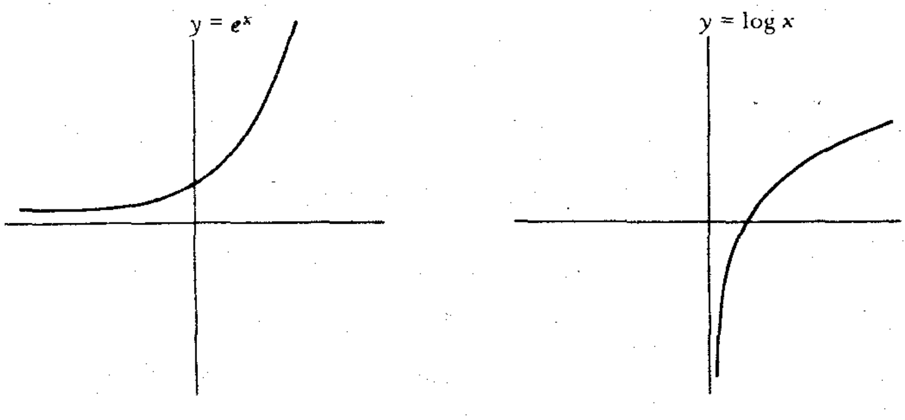
۴ــ۳. تابع لگاریتمی

قبل از تعریف لگاریتم یک عدد مختلط، نظری مجدد بر خواص لگاریتم حقیقی می‌افکنیم. برای هرعدد حقیقی مثبت x ، عدد حقیقی‌ومنحصربفرد y چنان موجوداست $e^{y} = x$. می‌نویسیم $y = \log x$ و ملاحظه می‌کنیم که برای $x_1, x_2 > 0$ داریم

$$\log (x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 .$$

تابع $y = \log x$ محور حقیقی مثبت را بر مجموعه اعداد حقیقی می‌نگاردو وارون‌تابع $y = e^{x}$ است که اعداد حقیقی را بر حقیقی‌های مثبت می‌نگارد. (ر.ک. شکل ۹) چون e^{x} یک به یک است وارون آن نیز یک به یک است.

شکل ۹



در مورد تعریف لگاریتم عدد مختلط z ، به عنوان مقداری چون w به‌طوری $e^{w} = z$ گردد اشکالی موجود است. چون تابع نمائی متناوب است، وجود لگاریتم مختلط منحصر بفردرامنتفی‌می‌سازد. زیرااگر $e^{w} = z$ ، آنگاه‌برای‌هرعددصحیح k داریم $e^{w+2k\pi i} = z$

از این رولگاریتم یک عدد مختلط z را، که با $\log z$ نمایش می‌دهیم، بصورت مجموعه همه‌مقادیر $w = \log z$ تعریف می‌کنیم که $e^w = z$ باشد. چون تابع نمائی هرگز صفرنمی‌شود، لگاریتمی با عدد صفر متناظر نمی‌گردد. و چون تابع نمائی بر عدد مختلط غیر صفر را به‌دفعات نامتناهی می‌پذیرد، پس برای هر عدد مختلط مخالف صفر تعداد مقادیرمربوط به لگاریتم نامتناهی است.

عبارت $w = \log z$ ، $z \neq 0$ ، اولین مثال از یک تابع چند مقداری است. منظورازتابع چند مقداری رابطه‌ای است که به هر مقدار مختلط بیش از یک نگاره متناظر می‌کند. چند مقداری بودن لگاریتم با چند مقداری بودن شناسه عدد مختلط ارتباط دارد. زیرا اگر قرار دهیم:

$$w = u + iv = \log z \quad \text{and} \quad z = re^{i(\theta + 2k\pi)} \quad r \neq 0$$ و k عددصحیح

معادله $z = e^w$ به‌شکل $e^{u+iv} = re^{i(\theta+2k\pi)}$ در می‌آید، و از این به همانندیهای $e^u = r$ و $v = \theta + 2k\pi$ می‌رسیم، یعنی:

$$w = u + iv = \log z = \log r + i(\theta + 2k\pi) \qquad \text{صحیح } k \tag{۱۳}$$

معادله (۱۳) را نیز می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$w = \log |z| + i \arg z,$$

که در آن $\log |z|$ ، لگاریتم حقیقی $|z|$ است و $\arg z$ تنها با تقریب مضربهای 2π تعریف می‌گردد.

روشی راکه‌برای بررسی پیوستگی و دیگر خواص توابع تک ـ مقداری داشتیم‌نمی‌توان درموردتوابع چند مقداری بکار گرفت. خوشبختانه یک تابع چند مقداری را بصورت‌کاملا" طبیعی می‌توان با چند تابع تک ـ مقداری متفاوت جایگزین نمود. در این صورت ماهیت یک تابع چند مقداری با بررسی توابع تک ـ مقداری متناظرش قابل بررسی است.

یک شاخهٔ $\log z$ بنابه تعریف عبارت از هر تابع تک مقداری $\log^* z$ است که‌برای هر مقدار مختلط غیر صفر z در همانندی $e^{\log^* z} = z$ صدق می‌کند. به تابع چند مقداری $\log z$ به‌تعدادنامتناهی‌شاخه‌متناظرمی‌گردد. هر یک از این شاخه‌ها وارونی از e^z اند.

میان تمام شاخه‌های $\log z$ دقیقا" یکی از آنهاست که قسمت انگاری آن $(\arg z)$ در فاصله $(-\pi, \pi]$ واقع می‌شود. این شاخه به شاخه اصلی $\log z$ موسوم است و با $\text{Log } z$ نمایانده‌می‌شود. اختلاف‌هر شاخه $\log z$ با شاخه اصلی در مضربی از $2\pi i$ است. یعنی اگر $\log^* z$ یک شاخه ثابت باشد، آنگاه بازاء یک عدد صحیح k.

$$\log^* z = \text{Log } z + 2k\pi i \tag{۱۴}$$

باید توجه داشت

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{ Arg } z \qquad (-\pi < \text{Arg } z \leq \pi). \tag{۱۵}$$

محدودیت (۱۵) را از دیدگاه هندسی می‌توان به عنوان بریدگی صفحه z درامتداد محور حقیقی منفــی در نظر گرفت. در این صورت این پرتو به بریدگی شاخه تابع $\operatorname{Log} z$ موسوم است. شاخه‌های دیگر $\log z$ را می‌توان با محدود کردن $\arg z$ بصورت:

$$(2k-1)\pi < \arg z \leq (2k+1)\pi, \qquad k \text{ عدد صحیح}$$

تعریف نمود و در حالی که شناسه z پیوسته‌وار تغییر کند و نخواهیم از شاخه‌یی بـه شاخه دیگر بیافتیم مجاز نخواهیم بود که از "خط بریدگی" عبور کنیم زیراکه تک‌مقداری بودن از بین خواهد رفت.

بی‌جهت‌شرط محدودیت‌شناسه در فاصله $[-\pi, \pi)$، در (۱۵) را نباید عمده‌کنیم. برای یک مقدار ثابت و حقیقی θ، تابع

$$\log_\theta z = \operatorname{Log} |z| + i \arg z \qquad (\theta < \arg z \leq \theta + 2\pi),$$

که دارای بریدگی شاخه $\arg z = \theta + 2\pi$ می‌باشد، نیز می‌تواند منظور ما را بخوبـی برآورده نماید. در واقع یک بریدگی شاخه لازم نیست که حتی یک پرتو باشد. هر خـم پیوسته که خود را قطع نکند و از مبداء تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد می‌تواند همین کار را انجام دهد.

اینک حدود اعتبار همانندی

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \qquad (z_1,\, z_2 \neq 0)$$

را در صفحه مختلط بررسی می‌کنیم. برای یک شاخه ثابت، داریم:

$$\log z_1 z_2 = \operatorname{Log} |z_1 z_2| + i \arg z_1 z_2$$

و

$$\begin{aligned}\log z_1 + \log z_2 &= \operatorname{Log} |z_1| + \operatorname{Log} |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2)\\ &= \operatorname{Log} |z_1 z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2).\end{aligned}$$

هم چنانکه در بخش ۱ــ۳ دیدیم، اختلاف، $\arg z_1 + \arg z_2$ با $\arg z_1 z_2$ در مضربی از 2π است.

پس بهترین کاری که می‌توان کرد عبارت است از:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i$$

و یا

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i}.$$

وقتی که بریدگی در امتداد محور حقیقی منفی باشد، شاخه لگاریتم مورد بررسی با معین‌کردن یک مقدار بخصوص از تابع کاملا" مشخص می‌گردد. به عنوان مثال شاخه اصلی

تنها شاخه‌یی است که برای آن $\log 1 = 0$. شاخه‌یی که برای آن $\log 1 = 10\pi i$ باشد ، عبارت است از $\log z = \operatorname{Log} z + 10\pi i$. هر یک از توابع $w = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$ صفحه ، مبداء ، را بر نوار نامتناهی $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} w \le (2k+1)\pi$ می‌نگارند . خاطرنشان می‌شویم که تابع نمائی هر یک از نوارهای $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \le (2k+1)\pi$ را برصفحه سفته می‌نگارد . چون رفتار همه توابعی که با (۱۴) تعریف شوند اساسا" یکی است ، همیشه ــ مگر وقتی صراحتا" غیر از این بیان شود ــ فرض می‌کنیم $k = 0$ ، و توجه خواننده را به شاخه اصلی لگاریتم معطوف می‌نمائیم .

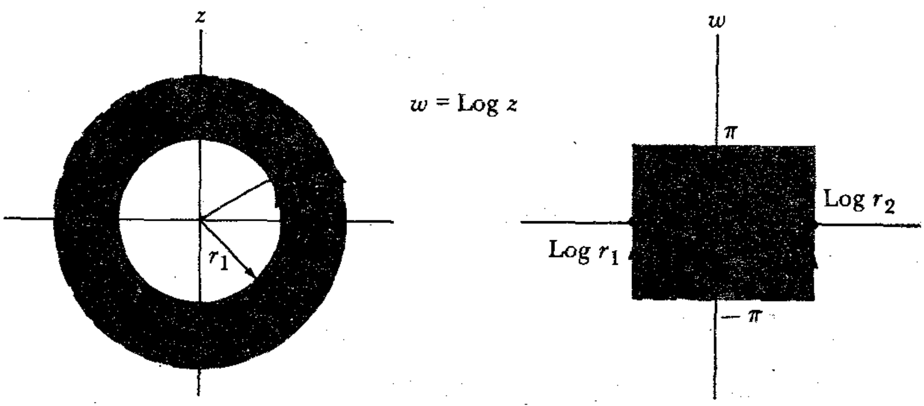
تابع $w = \operatorname{Log} z$ در هیچ نقطه واقع بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست . زیرا که هر چنین نقطه‌یی را می‌توان بصورت $z_0 = r_0 e^{\pi i}$ ، $r_0 > 0$ ، با $\operatorname{Log} z_0 = \operatorname{Log} r_0 + i\pi$ نوشت ، ولی چنانچه با مقادیر زیر محور حقیقی به z_0 نزدیک شویم داریم $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z = -\pi$ و $\operatorname{Log} z \to \operatorname{Log} r_0 - i\pi \neq \operatorname{Log} z_0$ به هنگامی که $z \to z_0$ از طریق مقادیر یاد شده میل کند .

این بدان معنی نیست‌که تابع لگاریتمی بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست . چیزی که نشان دادیم این است که $\operatorname{Log} z$ ، یعنی شاخه اصلی، در این نقاط پیوسته نیست . چنانچه بریدگی را بر پرتو دیگری بیاندازیم ، می‌توانیم شاخه‌یی برای لگاریتم بیابیم که برای مقادیر حقیقی منفی پیوسته باشد . به عنوان مثال ، تابع تک ــ مقداری $w = \log z$ $(-\pi/2 < \arg z \le 3\pi/2)$ در همه نقاط محور حقیقی منفی پیوسته است ولی برپرتو $\arg z = 3\pi/2$ پیوسته نیست .

به بیان دیگر تابع لگاریتمی برای هر عدد مختلط غیرصفربه‌معنی زیر پیوسته‌است : بازاء $z_0 \neq 0$ مفروض، شاخه‌یی موجود است‌که برای آن $\lim_{z\to z_0} \log z = \log z_0$. با این حال شاخه‌یی موجود نیست که $\log z$ بازاء تمام‌اعداد مختلط غیر صفر پیوسته باشد .

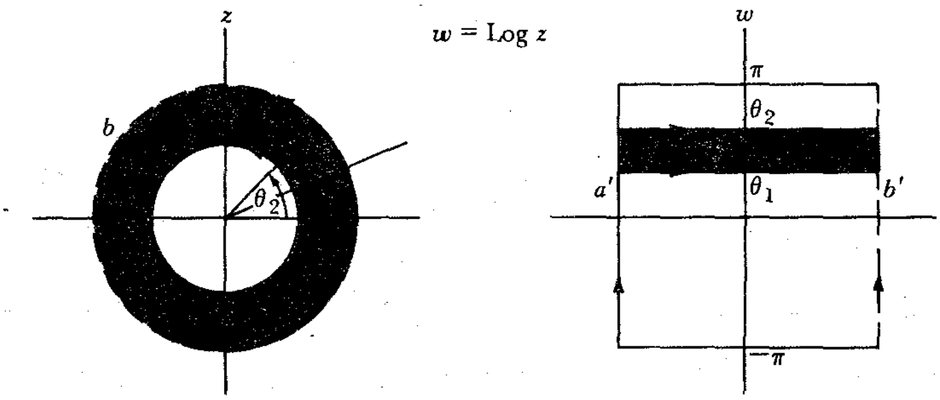
با توجه به (۱۵) ، به آسانی می‌توان بعضی خواص نگاشتی تابع لگاریتمی را مشخص نمود . برای تابع $w = \operatorname{Log} z$ ، نگاره دایره $|z| = r$ عبارتست از پاره خط $u = \operatorname{Log} r$ ، $-\pi < v \le \pi$ (ر . ک . شکل ۱۰) .

شکل ۱۰



هم چنین پرتو $\operatorname{Arg} z=\theta$ بر خط $v=\theta$ نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۱۱) .

شکل ۱۱



پرسش‌ها

۱ــ چه ارتباطی میان شناسه و لگاریتم یک عدد مختلط موجود است ؟

۲ــ برای θ_0 ثابت ، اگر مقداراصلی‌رابصورت $\theta_0-\pi < \arg z \leq \theta_0+\pi$ تعریف کنیم چه تغییراتی رخ می‌دهد ؟

۳ــ نتایج مترتب بر تعریف $\log 0=\infty$ چیست ؟

۴ــ نگاره حلزونی تحت تابع $w=\log z$ چیست ؟

۵ــ در کدام نواحی $\log z$ کراندار است ؟

۶ــ آیا $\log (z_1/z_2)=\log z_1-\log z_2$ ؟

۷ــ آیا $\operatorname{Log}(z_1/z_2)=\operatorname{Log} z_1-\operatorname{Log} z_2$ ؟

تمرینها

۱ــ مقادیر زیر را بیابید .

الف) $\log (1-i)$ ب) $\log (3-2i)$ پ) $\log (x+iy)$

۲ــ ثابت کنید ، برای همه اعداد مختلط مخالف صفر z_1 و z_2 داریم $\operatorname{Log} z_1z_2=\operatorname{Log} z_1+\operatorname{Log} z_2+2k\pi i$ که در آن $k=0, 1, -1$. مثالی بیاوریدکه‌نشان دهد هر یک از مقادیر k ممکن است .

۳ــ برای $z\neq 0$ ، ثابت کنید .

$$\operatorname{Log}|z| \leq |\operatorname{Log} z| \leq \operatorname{Log}|z|+|\operatorname{Arg} z| .$$

۴ــ فرض کنیم $f(z)$ درمیدانی مانند $\mathscr{D}$ تعریف شده باشد و در $\mathscr{D}$ $f(z)\neq 0$. ثابت کنید که برای هر نقطه z واقع در $\mathscr{D}$ ، $\operatorname{Arg} f(z)=\operatorname{Im} \operatorname{Log} f(z)$

۵ــ نگاره خطوط مستقیم موازی محورهای مختصات را برای توابع زیر بیابید.

الف) $w = \text{Log}\, iz.$ پ) $w = \text{Log}\,(-iz) + 1$

ب) $w = \text{Log}\, z^2.$

۴ــ۴ . نماهای مختلط

همان‌طورکه‌در بخش ۱ــ۳ دیدیم n مقدار مختلط متمایزبه $z^{1/n}$ ، $z \neq 0$، متناظر می‌گردد. اگر بنویسیم $z = re^{i\theta}$ ، آنگاه $z_k = r^{1/n}e^{i[(\theta + 2k\pi)/n]}$ بــرای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ یک ریشه n ام متمایز می‌باشد. هم زمان با اینکه شناسه z مقادیــر $\theta + 2\pi$ ، $\theta + 4\pi$ ، . . . ، $\theta + 2(n-1)\pi$ را می‌پذیرد، مقادیر $z^{1/n}$ تغییر می‌نمایند. چنانچه $\arg z$ به یک شاخه ویژه محدود گردد، در این صورت $z^{1/n}$ یک مقدار منحصربه فرد خواهد داشت. بنظر می‌آید که این مطلب دال برآن باشد که میان ریشه‌های nام و لگاریتم یک عدد مختلط مخالف صفر ارتباطی برقرار باشد. در واقع تابع $z^{1/n}$ رامی ــ توان به ترتیب زیر تعریف کرد:

$$w = z^{1/n} = e^{(1/n)\,\text{Log}\, z} = e^{(1/n)(\text{Log}\,|z| + i \arg z)}. \qquad (۱۶)$$

ایــن تابــع، همانــنــد تابــع لگاریتمــی چنــد مقداری است. با قــرار دادن $\arg z = \text{Arg}\, z + 2k\pi$ kعددی صحیح، مشاهده می‌شود که (۱۶) بازاء $k = 0, 1, \dots, n-1$ مقادیرمختلف‌می‌پذیرد: و بازاء دیگرمقادیر k ، یکی از این n ریشه تکرار می‌گردد. بطور عمومی‌تر، اگر m و n اعداد صحیح مثبت با مضارب مشترک نباشند تعریف می‌کنیم $(z^{1/n})^m = e^{(m/n)\log z}$ ، $z \neq 0$. این‌مقدار، هم، دارای n مقدار متمایز است‌این‌مطالب بطور کاملا" طبیعی ما را به تعریف زیر از z^α ، برای α های مختلط، هدایت می‌کند.

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}. \qquad (۱۷)$$

اگر α گویا نباشد، آنگاه بی‌نهایت مقدار به عبارت (۱۷) متناظر می‌گردد، جهــت اثبات‌این‌مطلب ،ابتداءفرض می‌کنیم‌که α اصم باشد، در این صورت برای $z = re^{i\theta} \neq 0$ داریم:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha[\text{Log}\, r + i(\theta + 2k\pi)]} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i(2k\pi\alpha)}.$$

چون $e^{i(2k_1\pi\alpha)} = e^{i(2k_2\pi\alpha)}$ اگر و تنها اگر $k_1 = k_2$ نتیجه می‌شود که بی‌نهایت مقدار به z^α منسوب می‌شود، که کالبد همگی با هم برابر است.

حال فرض کنیم که $\alpha = a + bi$ (a و b حقیقی و $b \neq 0$). در این صورت:

$$z^{a+bi} = e^{(a+bi)\log z} = e^{a\,\text{Log}\, r - b(\theta + 2k\pi)} e^{i(b\,\text{Log}\, r + a\theta + 2k\pi a)}.$$

چون $|z^{a+bi}| = r^a e^{-b(\theta + 2k\pi)}$ ، پس‌بازاء هر شاخه، z^{a+bi} دارای کالبدی

متفاوت است . و اختلاف هر دو تای آنها با هم در مضربی از $e^{-2n\pi}$ با n صحیح است .

مثالها

(۱) $$5^{1/2} = e^{(1/2)\log 5} = e^{(1/2)(\mathrm{Log}\,5 + 2k\pi i)} = e^{(1/2)\mathrm{Log}\,5}e^{k\pi i} = \pm\sqrt{5}$$

(۲) $$i^{1/2} = e^{(1/2)\log i} = e^{(1/2)i(\pi/2+2k\pi)} = \pm e^{\pi i/4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

(۳) $i^i = e^{i\log i} = e^{i[\mathrm{Log}\,1 + i(\pi/2+2k\pi)]} = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$ که k هر عدد صحیحی است .

تذکر ــ در بعضی جاها عبارات $x^{1/2}$ و $\sqrt{x}$ را معادله می‌گیرند . منظورما از $x^{1/2}$ - $(x>0)$ عدد حقیقی مثبت $+\sqrt{x}$ و عدد حقیقی منفی $-\sqrt{x}$ هر دو است .

جالب است تا ارتباط میان $z^{\alpha}z^{\beta}$ و $z^{\alpha+\beta}$ را ،که در آن $z = re^{i\theta}$ $(r \neq 0)$ است ، مقایسه کنیم . اگر α و β حقیقی باشند ، آنگاه :

$$z^{\alpha}z^{\beta} = e^{\alpha\log z}e^{\beta\log z} = e^{(\alpha+\beta)\mathrm{Log}\,r}e^{i(\alpha+\beta)\theta}e^{2\pi i(k\alpha+n\beta)},$$

که در آن k و n صحیح هستند . از سوی دیگر برای هر عدد صحیح m داریم :

$$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\log z} = e^{(\alpha+\beta)\mathrm{Log}\,r}e^{i(\alpha+\beta)\theta}e^{2\pi i m(\alpha+\beta)}$$

پس اگر α و β صحیح باشند ، $z^{\alpha}z^{\beta} = z^{\alpha+\beta}$. اگر یکی از اعداد α و یا β صحیح باشد آنگاه $z^{\alpha}z^{\beta}$ و $z^{\alpha+\beta}$ یک مجموعه از مقادیر را می‌پذیرند ، گرچه لزوما" برای هر α و β تساوی برقرار نیست . در حالت عمومی $z^{\alpha+\beta}$ همه مقادیر $z^{\alpha}z^{\beta}$ را می‌پذیرد ، ولی وارون آن درست نیست . بعنوان مثال $5^{1/2+1/2} = 5$ در حالی که $5^{1/2}5^{1/2} = \pm 5$. نشان دادن صحت این شمول در مورد α و β ی مختلط را به دانشجو واگذار می‌کنیم .

"اثبات "$1 = -1$ ازمقدمه راکه درآن ازفرض غلط $\sqrt{1/-1} = \sqrt{1}/\sqrt{-1}$ استفاده شد، یادآوری می‌کنیم . اگر در مقدمه نتیجه اخیر را بکار برده بودیم آنگاه قادر می‌بودیم به نتیجه $\pm 1 = \pm 1$ برسیم که چندان جالب نیست .

نظیر حالتی که برای تابع لگاریتمی وجود داشت ، می‌توان توابع چند مقداری راکه دارای نماهای کسری هستند با شاخه‌های (تک ــ مقداری) جایگزین نمود . برای شرح مطلب در مورد $z = re^{i\theta}$ $(r \neq 0,\ -\pi < \theta \leq \pi)$ شاخه اصلی $z^{1/2}$ برابر است با

$$w_0 = z^{1/2} = e^{(1/2)(\mathrm{Log}\,r + i\theta)} = \sqrt{r}e^{i(\theta/2)} \qquad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

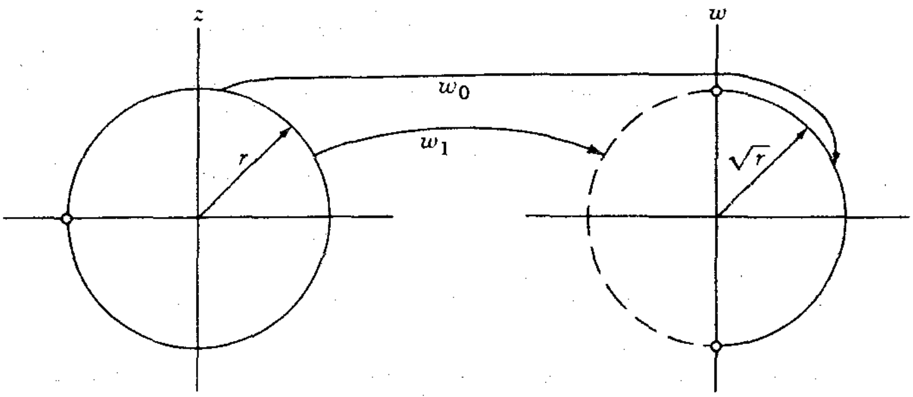
شاخه دیگر تابع برابر است با :

$$w_1 = z^{1/2} = e^{(1/2)[\mathrm{Log}\,r + i(\theta+2\pi)]} = -\sqrt{r}e^{i(\theta/2)} \qquad (\pi < \theta + 2\pi \leq 3\pi).$$

هر دو تابع w_0 و w_1 پیوسته‌اند، مگر بر محور حقیقی منفی. این پرتو به یک بریدگی شاخه برای هر دوی w_0 و w_1 موسوم است. هر یک از این توابع تک ـ مقداری را یک مشخصه یا شاخه تابع چند مقداری $w = z^{1/2}$ می‌نامند.

اینک به اثبات برخی خواص نگاشتی برای توابع w_0 و w_1 می‌پردازیم. صفحه سفته $(z \neq 0)$ توسط w_0 بر نیم صفحه راست بانضمام محور انگاری مثبت و توسط w_1 بر نیم صفحه چپ بانضمام محور انگاری منفی نگاشته می‌شود. این توابع هم چنین دایره را بر نیم دایره باستثنای یکی از نقطه‌های انتهایی آن می‌نگارد (ر. ک. شکل ۱۲).

شکل ۱۲



دیگر توابع چندمقداری با نمای کسری را میتوان بهمین ترتیب تجزیه و تحلیل نمود. تابع $w = z^{1/3}$ سه شاخه دارد. می‌نویسیم:

$$w_k = \sqrt[3]{r}e^{i(\theta + 2k\pi)/3} \qquad (k = 0, 1, 2;\ -\pi < \theta \leq \pi).$$

هر یک از این سه تابع تک ـ مقداری پیوسته‌اند مگر بر محور حقیقی منفی، و دایره $|z| = r$ را بر کمان زیر می‌نگارند.

$$|w_k| = \sqrt[3]{r}, \qquad \frac{(2k-1)\pi}{3} < \operatorname{Arg} w_k \leq \frac{(2k+1)\pi}{3}.$$

مثال بعدی بعضی خواص حیرت‌انگیز نماهای مختلط را تشریح می‌کند. تابع $w = 1^z$ را در نظر می‌گیرم. داریم:

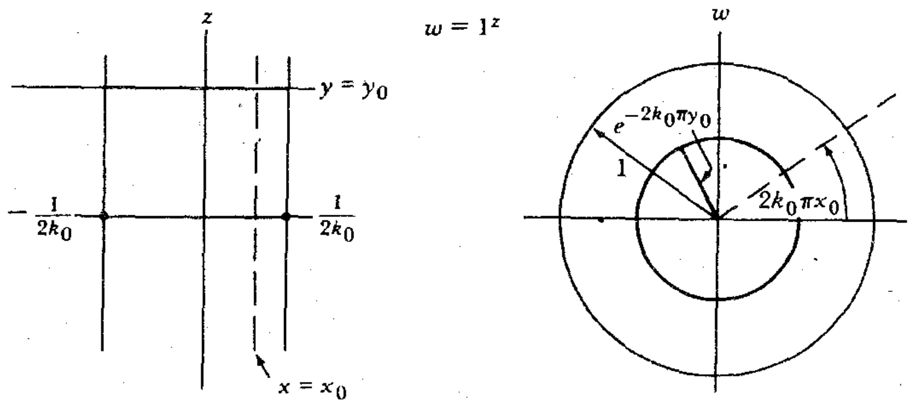
$$w = 1^z = e^{z \log 1} = e^{2k\pi iz} = e^{2k\pi i(x+iy)} = e^{-2k\pi y}e^{2k\pi ix}.$$

بازاء هر عدد صحیح k، تابع $w = 1^z$ در تمام صفحه تعریف شده است. اگر $k = 0$، یعنی با شاخه اصلی لگاریتم، آنگاه $w \equiv 1$. این همان بود که انتظار داشتیم.

ولی مشخصه دیگری برای لگاریتم در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که $k = k_0$، $k_0 > 0$ در این صورت تابع $w = 1^z$ متناوب و دوره تناوب آن $1/k_0$ است. اگر z عدد درست مثبتی باشد، آنگاه $1^z = 1$. اگر z حقیقی باشد آنگاه 1^z نقطه‌یی بر دایره واحد است. درواقع

بازاء x_0ثابت ،هر فاصله $x_0 - 1/2k_0 < x \leq x_0 + 1/2k_0$ بطور یک به یک بر دایره واحد نگاشته می‌شود . پاره خط $y = y_0$ ، $-1/2k_0 < x \leq 1/2k_0$ بر دایره $|w| = e^{-2k_0\pi y_0}$ نگاشته می‌شود . خط $x = x_0$ ، $-1/2k_0 < x_0 \leq 1/2k_0$-بر پرتو $\text{Arg}\, w = 2k_0\pi x_0$ نگاشته می‌شود، بنابراین نوار نامتناهی $-1/2k_0 < x \leq 1/2k_0$ بر صفحه ، منهای مبداء ، نگاشته‌می‌شود . بالاخره نیم صفحه زبرین بر درون قرص واحد سفته و نیم صفحه زیرین بر خارج آن نگاشته می‌شود (ر.ک. شکل ۱۳) .

شکل ۱۳



ما قبلا " ارتباط نزدیک میان توابع نمائی و توابع مثلثاتی را بررسی‌کرده‌ایم .ازاین رو ،وجوه‌اشتراک‌فراوان بین‌وارون‌های آنها تعجب‌آور نخواهد بود . نشان می‌دهیم که‌توابع مثلثاتی وارون را می‌توان برحسب لگاریتم تعریف کرد . اگر z عدد مختلط مفروض باشد ، می‌خواهیم‌همه اعداد مختلط w را که در $z = \sin w$ صدق‌می‌کنند ، بیابیم . اگر w_0 چنین جوابی‌باشدآنگاه $w_0 + 2k\pi$ نیز بایست‌جواب باشد .اگر $z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$، آنگاه $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$ که معادله درجه دوم نسبت به e^{iw} است . از حل آن حاصل می‌شود $e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$. بنابراین $iw = \log\,[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$ ، که به کمک آن تابع چند مقداری $w = \sin^{-1} z = -i \log\,[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$ را تعریف می‌کنیم .

تذکر ــ عبارت $(1 - z^2)^{1/2}$ خودش چند مقداری است . برای محاسبه $\sin^{-1} z$ بایست ابتداء هر یک از مقادیر $(1 - z^2)^{1/2}$ را محاسبه نمود . برای هریک‌از این‌مقادیر آنگاه لازم است تمام لگاریتمها را مشخص نمود .

مثال ۱ــ برای یافتن همه مشخصه‌های‌ممکن $\sin^{-1} 0$ می‌نویسیم :

$$\sin^{-1} 0 = -i \log 1^{1/2} = -i\,\frac{2k\pi i}{2} = k\pi, \qquad \text{صحیح } k.$$

برای شاخه اصلی $k = 0$ و $\sin^{-1} 0 = 0$

مثال ۲ــ برای یافتن همه مشخصه‌های ممکن $\sin^{-1} i$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} i &= -i \log(-1 + 2^{1/2})\\ &= -i\,[\mathrm{Log}\,|-1 \pm \sqrt{2}| + i \arg(-1 \pm \sqrt{2})]\\ &= \arg(-1 \pm \sqrt{2}) - i\,\mathrm{Log}\,|-1 \pm \sqrt{2}|.\end{aligned}$$

بــــــازاء هــرمشخصه مفروض برای ریشه‌دوم و برای لگاریتم قسمت حقیقی $\sin^{-1} i$ مضرب صحیحی از π است. قسمت انگاری تنها به مشخصه ریشه دوم وابسته است. بنابراین:

$$\sin^{-1} i = k\pi - i\,\mathrm{Log}\,|-1 \pm \sqrt{2}|, \qquad \text{صحیح} \quad k$$

با انتخاب ریشه دوم مثبت و مقدار اصلی برای لگاریتم یک مشخصه ویژه عاید می‌گردد:

$$\sin^{-1} i = -i\,\mathrm{Log}\,(\sqrt{2} - 1)$$

بطریقی مشابه می‌تــوان وارون دیگــر توابــع مثلثـاتــی را یــافــت. بــرای $z = \cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2$ داریم

$$w = \cos^{-1} z = -i \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}].$$

پرسش‌ها

۱ــ آیا اگر $\alpha = 0$، $\log z^\alpha = \alpha \log z$ ؟

۲ــ آیا $1^{1/2} + 1^{1/2} = 2 \cdot 1^{1/2}$ ؟

۳ــ یک عدد مختلط به توان یک عدد مختلط، چه‌وقت حقیقی است؟

۴ــ اگر z^α ، m مقدار متمایز به پذیرد و z^β ، n مقدار متمایز به پذیرد. در مورد $z^\alpha z^\beta$ چه می‌توان گفت؟

۵ــ برای اعداد مختلط αو β ، $z^{\alpha\beta}$ را با $(z^\alpha)^\beta$ چگونه مقایسه می‌کنید؟

۶ــ برای تابع چند مقداری $w = z^{1/2}$ ، چرا مبداء این چنین نقش عمده دارد؟

۷ــ برای تابع $w = z^{1/2}$ ، آیا میتوانستیم پرتوهائی به غیر از $\mathrm{Arg}\, z = \pi$ را بــرای بریدگی شاخه انتخاب کنیم؟

۸ــ چگونه توابع $w = z^n$ و $w = z^{1/n}$ را مقایسه می‌کنید؟

۹ــ اگــــر m و n صحیح باشند، آیا $(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$ ؟

۱۰ــ توابع مثلثاتی وارون در کدام نواحی یک به یک هستند؟

۱۱ــ چگونه می‌توان خواص نگاشتی توابع مثلثاتی وارون را با استفاده از خــواص نگاشتی توابع مثلثاتی مشخص نمود؟

تمرینها

۱ــ همه مقادیر عبارات زیر را بیابید.

الف) 5^i ب) $(\pi i)^e$ پ) $(2^i)^i$ ت) $\log(1+i)^{\pi i}$

۲ــ برای $z\neq 0$، α و β اعداد مختلط، نشان دهید که هر مقدار $z^{\alpha\beta}$ مقداری برای $(z^\alpha)^\beta$ است. وارون این مطلب چه موقع درست است؟

۳ــ برای $z\neq 0$ و α اصم، نشان دهید که برای بینهایت مقدار از z^α داریم $\theta_0 < \text{Arg}\, z^\alpha < \theta_0 + \varepsilon$ که در آن $-\pi < \theta_0 < \pi$ و $\varepsilon > 0$.

۴ــ قسمتهای حقیقی و انگاری عبارات زیر را جدا کنید.

الف) x^x (x حقیقی، $x\neq 0$)

ب) $(iy)^{iy}$ (y حقیقی، $y\neq 0$)

پ) z^z $(z\neq 0)$

۵ــ نشان دهید برای عدد مختلط غیر صفر a، بسته به این که کدام شاخه از لگاریتم انتخاب شود تابع a^z یا ثابت است و یا بی‌کران است.

۶ــ نگاره دایره $|z| = r$ تحت توابع چند مقداری زیر بررسی کنید.

الف) $w = z^{1/n}$ n عددی صحیح و مثبت ب) $w = z^{2/3}$

۷ــ همانندیهای زیر را ثابت کنید.

الف) $$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$$

ب) $$\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\log\frac{z+i}{z-i}$$

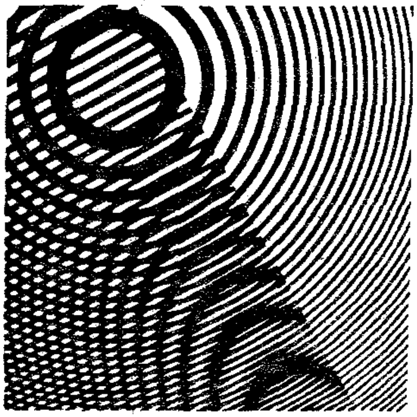
پ) $$\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\log\frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}$$

ت) $$\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\log\frac{i+(z^2-1)^{1/2}}{z}$$

۸ــ همه مقادیر عبارات زیر را بیابید.

الف) $\sin^{-1}\frac{1}{2}.$ ب) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

پ) $\tan^{-1}(1+i).$ ت) $\sec^{-1} i.$



۵ـ توابع تحلیلی

در این فصل مشتق‌گیری توابع تک ـ مقداری با متغیر مختلط را تعریف می‌کنیم و خواهیم دید که چگونه مشتق یک تابع مختلط از یک متغیر مختلط گاهی اوقات رفتاری شبیه به مشتق یک تابع حقیقی از متغیر حقیقی دارد و دیگر مواقع با مشتقات نسبی یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی قابل مقایسه است. هم‌چنین به نقش عمده همسایگی‌ها پی می‌بریم. اگر مشتق‌پذیری در یک همسایگی مفروض نباشد. در این صورت هموار بودن تابع بر یک مسیر می‌تواند مشکلات بالقوه‌یی بر مسیر دیگری ایجاد نماید.

۵ـ۱. معادلات کوشی ـ ریمان

قبلاً" دیده‌ایم که هر تابع از متغیر مختلط را می‌توان به قسمت‌های حقیقی وانگاری آن تفکیک نمود. چنانچه بنویسیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، علاقه‌مندیم که خواص $f(z)$ را با خواص مولفه‌های حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ آن مقایسه کنیم. در مورد پیوستگی، این مقایسه کاملاً" سرراست است.

فرض کنیم g تابعی از دو متغیر حقیقی x و y باشد. گوئیم:

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(x, y) = L$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ نتیجه بدهد $|g(x, y) - L| < \varepsilon$. اگر $L = g(x_0, y_0)$ ، آنگاه $g(x, y)$ رادر (x_0, y_0) پیوسته گوئیم.

قضیه ۵ــ۱. تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته‌است اگر و تنها اگر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشند.

اثبات ــ ابتداء فرض می‌کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ پیوسته باشد در این صورت برای‌هر $\varepsilon>0$، وجود دارد $\delta>0$ بطوری که هر وقت

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta.$$

آنگاه

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|\leq|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$
$$|v(x,y)-v(x_0,y_0)|\leq|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

بنابراین دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته‌اند.

برعکس اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشند، پیوستگی $f(z)$ از نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$|f(z)-f(z_0)|\leq|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|.$$

با توجه به قضیه ۵ــ۱، بررسی دقیق‌تر مفهوم حد یک تابع از دو متغیرحقیقی عمل مفیدی می‌باشد. یادآور می‌شویم که برای تابع از یک متغیر حقیقی، وقتی که تنها دو سو برای پیمایش موجود است، حد موجود است اگر و تنها اگر حد راست و حد چپ با هم مساوی باشند. در مورد تابع دو متغیری حالتی مشابه موجود نیست زیرا در این حالت تعداد روشهای ممکن برای میل کردن نامتناهی است.

مثال ۱ــ فرض کنیم $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ ، $(x,y)\neq(0,0)$. چون اگر (x,y) در امتداد هر یک از محورهای مختصات به صفر میل کند آنگاه $f(x,y)\equiv 0$ ، داریم:

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=0.$$

با اینحال، با انتخاب خط مستقیم $y=mx$، حاصل می‌شود.

$$\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

چون $f(x,y)$ بر امتداد خطوط مستقیم متفاوت به مقادیر مختلفی میل می‌کند. حد آن در مبداء موجود نیست.

مثال ۲ــ فرض کنیم $f(x,y)=x^2y^2/(x+y^2)^3$ ، $(x,y)\neq(0,0)$ در این حال:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{(x+m^2x^2)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{(1+m^2x)^3} = 0,$$

و اگر (x, y) بر امتداد خط مستقیمی به $(0, 0)$ میل‌کند. آنگاه $f(x, y)$ بـه 0 میل می‌کند. ولی بر امتداد سهمی $x = y^2$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4y^2}{(y^2+y^2)^3} = \frac{1}{8}.$$

بنابراین، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ موجود نیست.

مثال ۳ــ فرض کنیم $f(x, y) = (x^3-2y^3)/(x^2+y^2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$ ، می‌خواهیم نشان دهیم که این تابع در مبداء حد دارد. واضح است که آزمایش تمام راهها امکان ـ پذیر نیست، بنابراین لازم است نامساویهای مناسبی بیابیم.

روش اول ــ داریم:

$$\begin{aligned} |x^3-2y^3| &\le |x|^3 + 2|y|^3 = |x|x^2 + 2|y|y^2 \\ &\le \sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+2y^2) \le 2(x^2+y^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

پس

$$\left|\frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2}\right| \le 2\sqrt{x^2+y^2},$$

بنابراین‌هروقت $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon/2 = \delta$ خواهیم داشت $|f(x, y)| < \varepsilon$ بنابراین:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

روش ۲ــ با تبدیل به مختصات قطبی، بایست نشان داد که اگر $r < \delta$ آنگاه $|f(r, \theta)| < \varepsilon$ ولی:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left|\frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta - 2r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| \\ &= r|\cos^3\theta - 2\sin^3\theta| \le 3r, \end{aligned}$$

و با انتخاب $\delta = \varepsilon/3$ ، نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

هدف ما از طرح مثال‌های بالا این نبود که روش‌های داهیانه برای محاسبه حدود را بیابیم، بلکه منظور تاکید بر نقش عمده مسیر بود. یک تابع ممکن است در طول یک‌مسیر

خیلی‌خوش‌رفتار باشد، در حالی که مطالعهٔ آن بر مسیری دیگر غیرممکن باشد. این پدیده نتایج حیرت‌انگیزی را در نظریه توابع مشتق‌پذیر بوجود می‌آورد.

تابع f را در نقطه z مشتق‌پذیر گوئیم اگر چنانچه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

موجود باشد. در اینصورت می‌نویسیم:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

باید توجه داشت که h از میان نقاط صفحه به 0 نزدیک می‌شودنه‌اینکه تنهادرطول محور حقیقی.

مثال ــ تابع $f(z)=z^2$ در همه جا مشتق‌پذیر است زیرا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2zh+h^2}{h}=2z.$$

در همانی

$$f(z+h)-f(z)=\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)h,$$

با میل‌کردن h به‌صفر، قضیه مشهور متغیرهای حقیقی که هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است حاصل می‌گردد، یعنی که

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\,(f(z+h)-f(z))&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right)h\\&=f'(z)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{h\to 0}f(z+h)=f(z)$

ازسوی دیگر، تابع $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ درمبداء پیوسته‌است ولی درآن‌مشتق‌ـ پذیرنیست. واضح است که $\lim_{z\to 0}f(z)=f(0)=0$ ولی $(f(h)-f(0))/(h-0)=|h|/h$ که برای‌مقادیرمثبت‌حقیقی h برابر 1، برای‌مقادیرمنفی حقیقی h برابر -1، برای مقادیر h برمحور انگاری مثبت برابر $-i$ و برای h برمحور انگاری منفی برابر i است بنابراین $f'(0)$ موجود نیست.

شباهاتی که تاکنون میان مشتق تابع بامقادیر مختلط $f(z)$ و تابع با مقادیرحقیقی

$f(x)$ داشتیم ، قابل توجه است . در واقع ، همه قواعد مشتق‌گیری رسمی یکسانند .
خواص زیر را به صورت قضیه‌ای گردآوری می‌کنیم :

قضیه ۵ـ۲ . (۱) اگر $f(z) = z^n$ و n صحیح باشد ،آنگاه $f'(z) = nz^{n-1}$ برای توابع مشتق‌پذیر $f(z)$ و $g(z)$ داریم :

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \qquad (۲)$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \qquad (۳)$$

(۴) اگر $g(z) \neq 0$ آنگاه

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$$

فرض کنیم g در z و f در $g(z)$ مشتق‌پذیر باشد . اگر $F(z) = f(g(z))$ آنگاه :

$$F'(z) = f'(g(z))g'(z) \qquad (۵)$$

اثبات ــ اثبات این خواص بدون کم و زیاد مشابه توابع با متغیر حقیقی است .

برای آنکه خواننده با شباهات ظاهری میان مشتق‌های حقیقی و مختلط گمراه‌نشود ، اینک برخی نتایج حاصل از این شرط را که $(f(z+h) - f(z))/h$ بدون توجه به مسیر h به مقدار معین میل می‌کرد ، بررسی می‌کنیم .

بدین منظور مسیرهای مشخصی جهت میل متغیر تخصیص می‌دهیم تا بدین وسیله خواص قسمتهای حقیقی و انگاری تابع مشتق‌پذیر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ رااستنتاج کنیم .

ابتداءفرض‌می‌کنیم h در امتداد محور حقیقی به 0 میل کند . با تفکیک به قسمتهای حقیقی و انگاری داریم

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h}$$
$$= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i\frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}.$$

اگر f در $z = x + iy$ مشتق‌پذیر باشد ، دو عبارت طرف راست می‌بایست حد داشته باشند و می‌بینیم که این حد همان مشتقات $u(x, y)$ و $v(x, y)$ نسبت به x اند . بنابراین :

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (۱)$$

اینک گیریم h برمحورانگاری به صفر میل کند در این صورت برای $h=ik$ ، k حقیقی داریم:

$$\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik}=\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{ik}+i\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{ik}.$$

بنابراین

$$f'(z)=\lim_{k\to 0}\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (۲)$$

ولی عبارات (۱) و (۲) می‌بایست برابر باشند. بنابراین

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (۳)$$

با برابر نهادن قسمتهای حقیقی و انگاری در (۳) حاصل میشود.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (۴)$$

معادلات (۴) به معادلات کوشی ــ ریمان مشهوراند، و شرطی لازم برای مشتق‌پذیری در یک نقطه را بدست می‌دهند. در مورد تابع $f(z)=\bar{z}=x-iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv 1 \qquad و \qquad \frac{\partial v}{\partial y}\equiv -1.$$

چون معادلات کوشی ــ ریمان سازگار نیستند، تابع هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

برای این که به بینیم سازگاری معادلات کوشی ــ ریمان برای مشتق‌پذیری در یک نقطه کافی نیست، تابع

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

را در نظر می‌گیرم. این تابع روی دو محور مختصات صفر است. بنابراین در $z=0$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

و معادلات کوشی ــ ریمان صادق‌اند. ولی بر خط $y=x$، داریم:

$$\frac{f(h+ih)-f(0)}{h+ih}=\frac{h\cdot h/(h^2+h^2)}{h+ih}=\frac{1}{2(1+i)h},$$

که با میل h به 0 به ∞ میل می‌کند. بنابراین $f'(0)$ موجود نیست. در واقع، در $z=0$ علیرغم وجود مشتقات نسبی، تابع حتی پیوسته نیست.

اگر تابعی درنقطه‌یی پیوسته و دارای مشتقات نسبی سازگار در معالات کوشی ــ ریمان باشد هنوز مشتق‌پذیری تابع تضمین نیست. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

چون $|f(z)|\leq |x|$ ، تابع در مبداء پیوسته است، بعلاوه

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0,$$

و بنابراین معادلات کوشی ــ ریمان سازگارند. ولي بر خط $y=mx$ داریم:

$$\frac{f(h+imh)-f(0)}{h+imh}=\frac{m^2h^3/(1+m^2)h^2}{h+imh}=\frac{m^2}{(1+im)(1+m^2)},$$

که به حد منحصربفردی مستقل از m میل‌نمی‌کند، بنابراین، این بار هم $f'(0)$ موجود نیست.

تاکنون سرشت‌های منفی معادلات کوشی ــ ریمان مورد تاکید قرار گرفت. آنها در ابتداء بمنظور اثبات عدم وجود مشتق مورد استفاده قرار گرفتند. در بخش‌بعدبااستفاده از این معادلات‌و همراه با معیاری دیگر یک شرط کافی برای مشتق‌پذیری تدوین خواهیم کرد.

معادله (۳) را بطور دقیق‌تر می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (۵)$$

معادله (۵) روشی برای محاسبه مشتق بشرط وجود آن بدست می‌دهد. به عنوان مثال تابع $f(z)=z^2=x^2-y^2+i(2xy)$ همه جا مشتق دارد (قضیه ۵ــ۲)، بنابراین از (۵) استفاده نموده و بدست می‌آوریم:

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=2x+i(2y)=2(x+iy)=2z.$$

اینک مشابهی از یک قضیه معروف در متغیرهای حقیقی را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵ــ۳. اگر در میدان $\mathscr{D}$ داشته باشیم $f'(z)\equiv 0$ آنگاه $f(z)$ در $\mathscr{D}$ ثابت است.

اثبات ــ با توجه به (۵) برای همه‌نقاط $\mathscr{D}$ داریم، $\partial f/\partial x=\partial f/\partial y=0$. اکنون اگرمشتق یک‌تابع

از یک متغیر حقیقی در یک فاصله صفر باشد، تابع در این فاصله می‌بایست ثابت باشد. بنابراین $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ در $\mathscr{D}$ موجب می‌شود که $u(x, y)$ بر هر پاره خط افقی و عمودی درون $\mathscr{D}$ ثابت باشد. بطریق مشابه $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$ در $\mathscr{D}$، موجب می‌گردند که $v(x, y)$ به‌هرپاره‌خط افقی‌وعمودی‌درون $\mathscr{D}$ ثابت‌باشد. بنابراین $f(z) = u(z) + iv(z)$ بر هر خط چند ضلعی در $\mathscr{D}$ با اضلاع موازی محورهای مختصات ثابت است. بموجب‌تذکر دنبال قضیه ۲ـ۲، هر دو نقطه در $\mathscr{D}$ رامی‌توان‌بایک چنین چند ضلعی به همدیگر وصل کرد. بنابراین برای هر z_1 و هر z_2 داریم، $f(z_1) = f(z_2)$ و بنابراین $f(z)$ در $\mathscr{D}$ ثابت و اثبات تمام است.

پرسش‌ها

۱ــ تفسیر هندسی تابع پیوسته‌ای از دو متغیر چیست؟

۲ــ برای تابع دو متغیری، چرا معمولاً" اثبات عدم وجود حد ساده‌تراست؟

۳ــ چرا رفتار توابع بر محورهای مختصات نقش اساسی داشت؟

۴ــ آیا می‌توان معادلات کوشی ــ ریمان را به شکل مختصات قطبی نوشت؟

۵ــ آیا می‌توانیم وجود مشتق در تابع مختلط را از نظر هندسی تعبیر کنیم؟

۶ــ اگر مشتق موجود باشد، آیا مشتق تابعی پیوسته است؟

۷ــ چه وقت محاسبه حد در مختصات قطبی ساده‌تر است؟

۸ــ در این بخش، از کلمه "مسیر" بدون اینکه آنرا تعریف کنیم استفاده کردیم، چگونه "مسیر" را تعریف می‌کنید؟

۹ــ اگرتابع $f = u + iv$ مشتق‌پذیرباشد، آیا می‌توانیم چیزی در مورد $\partial^2 u/\partial x^2$ بگوئیم؟

۱۰ــ اگر $f(z)$ در میدانی تنها مقادیر حقیقی به پذیرد، در مورد وجود $f'(z)$ چه می‌توان گفت؟

۱۱ــ تابع $|z|$ کجا مشتق‌پذیر است؟

تمرینها

۱ــ اگر $f(0, 0) = 0$، کدام یک از توابع زیر در مبداء پیوسته است.

الف) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ ب) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

پ) $f(x, y) = \dfrac{x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ت) $f(x, y) = \dfrac{x + ye^{-x^2}}{1 + y^2}$

ث) $f(x, y) = \dfrac{(x + y^2)^2}{x^2 + y^2}$

۲ــ مشخص کنید که توابع زیر کجا در معادلات کوشی ــ ریمان صدق می‌کنند ودرکجا مشتق‌پذیراند .

الف) $f(z) = \bar{z}^2$ ب) $f(z) = x^2 - y^2$

پ) $f(z) = 2xyi$ ت) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$

ث) $f(z) = z \operatorname{Re} z$ ج) $f(z) = z|z|$

۳ــ اگر $f(z)$ در z_0 پیوسته باشد ، نشان دهید که $\overline{f(z)}$ هم در z_0 پیوسته است آیا این مطلب برای مشتق‌پذیری هم درست است ؟

۴ــ(الف) عدد صحیح n و عدد حقیقی غیر صفر m مفروض‌اند ، تابعی مانند $f(z)$ چنان بسازید که بر هرخمی به شکل $y = mx^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ ولی بر هر خم $y = mx^n$ ، $\lim_{z\to 0} f(z) \neq 0$

(ب) تابعی مانند $f(z)$ چنان بسازید که بر هر خمی به شکل $y = mx^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ ولی برای آن تابع $\lim_{z\to 0} f(z)$ موجود نباشد .

۵ــ اگر $f(z)$ مشتق‌پذیر باشد ، نشان دهید .

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

عبارت اخیر را ژاکوبین[1] u و v نسبت به x و y گویند .

۶ــ اگر $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در نقطه (x_0, y_0) موجود باشد ، نشان دهید .

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

آیا می‌بایست $f(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشد ؟

۲ــ۵ . تحلیلی بودن

باکوششی‌که‌نمودیم ،قادرنگشتیم مشتق‌پذیری را از معادلات‌کوشی ــ ریمان استخراج نمائیم . این‌شرط "هموازبودن" بر امتداد هر یک از محورهای مختصات نمی‌توانست‌رفتار یک تابع بر امتداد مسیرهای مختلف را بقدرکافی کنترل نماید . اگر چنانچه توجه خود را به عوض نقاط تنها بر همسایگی‌ها متمرکز کنیم ، اکثر مشکلات موجود برطرف خواهد شد . یک تابع را در یک نقطه تحلیلی گوئیم اگر در همه جای یک همسایگی این نقطه

1. Jacobian

مشتق‌پذیر باشد. یک تابع را در یک میدان تحلیلی گوئیم اگر در همه نقاط این میدان تحلیلی باشد. تابعی را که در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد، تابع تام گویند.

تابع $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ تنها در مبداء مشتق دارد، وبنابراین هیچ‌جا تحلیلی نیست. تابع $f(z)=x^2y^2$ بر همه نقاط محورهای مختصات مشتق داردوبا این حال‌هیچ جاتحلیلی‌نیست. ازسوی‌دیگر، چندجمله‌ی‌هاتوابع تام هستند، و $f(z)=1/(1-z)$ همه‌جا مگر در $z=1$ تحلیلی است.

تذکر ــ اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه یک ε مثبت موجود است بطوری که $f(z)$ در تمام نقاط $N(z_0;\varepsilon)$ مشتق‌پذیر باشد. ولی برای هر نقطه z_1 متعلق به $N(z_0;\varepsilon)$ یک δ یافت می‌شودبطوری که $N(z_1;\delta)\subset N(z_0;\varepsilon)$. بنابراین $f(z)$ در z_1 هم تحلیلی‌است. درنتیجه $f(z)$ دریک نقطه تحلیلی است اگر و تنها اگردر همسایگی این نقطه تحلیلی باشد. بنابراین، مجموعه همه نقاطی که یک تابع مفروض آن تحلیلی است، می‌بایست یک مجموعه باز تشکیل دهد. به ویژه، اگر تابعی در یک مجموعه بسته تحلیلی باشد، در این صورت همیشه یک مجموعه باز شامل این مجموعه بسته موجوداست بطوری که، تابع بر آن تحلیلی است.

به توابع از دو متغیر حقیقی باز می‌گردیم، و قضیه مقدار میانگین زیر را اثبات می‌کنیم:

قضیه ۵ــ۴. فرض کنیم $f(x,y)$ در میدان $\mathscr{D}$ تعریف شده و $\partial f/\partial x=f_1(x,y)$ و $\partial f/\partial y=f_2(x,y)$ درتمام‌نقاط $\mathscr{D}$ پیوسته باشند. اگر (x,y) نقطه مفروضی از $\mathscr{D}$ باشد، δ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای همه نقاطی که $\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ داشته باشیم $(x+h,\ y+k)\in\mathscr{D}$ در این صورت:

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f_1(x,y)h+f_2(x,y)k+\varepsilon_1h+\varepsilon_2k,$$

که در آن وقتی h و k هر دو به سمت صفر میل کنند آنگاه $\varepsilon_1\to 0$ و $\varepsilon_2\to 0$.

اثبات ــ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&f(x+h,y+k)-f(x,y)\\&=\{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)\}+\{f(x,y+k)-f(x,y)\}.\qquad (۶)\end{aligned}$$

اینک تابع $f(\xi,y+k)$ را می‌توان به عنوان تابع مشتق‌پذیر از متغیر ξ در نظر گرفت، که در آن ξ مقادیرمیان x و $(x+h)$ رامی‌پذیرد. با بکار بردن قضیه مقدارمیانگین برای یک متغیر حقیقی داریم:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = f_1(x+\theta_1 h, y+k)h \quad (|\theta_1| < 1). \quad (۷)$$

بطریق مشابه

$$f(x, y+k) - f(x, y) = f_2(x, y+\theta_2 k)k \quad (|\theta_2| < 1). \quad (۸)$$

از پیوستگی f_1 و f_2 داریم

$$\begin{aligned} f_1(x+\theta_1 h, y+k) &= f_1(x, y) + \varepsilon_1, \\ f_2(x, y+\theta_2 k) &= f_2(x, y) + \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن اگر h و k هر دو بسمت صفر میل کنند آنگاه $\varepsilon_1 \to 0$ و $\varepsilon_2 \to 0$. با توجه به (۹) می‌توان (۷) و (۸) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y+k) &= f_1(x, y)h + \varepsilon_1 h, \\ f(x, y+k) - f(x, y) &= f_2(x, y)k + \varepsilon_2 k. \end{aligned}$$

و اینک نتیجه از (۶) حاصل می‌گردد.

این قضیه مقدار میانگین بما امکان می‌دهد تا با استفاده از معادلات کوشی ـ ریمان شرایط کافی برای تحلیلی بودن را بدست آوریم.

قضیه ۵ـ۵. فرض کنیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در میدانی مانند $\mathscr{D}$ تعریف شده باشد و گیریم $u(x, y)$ و $v(x, y)$ دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد که در تمام نقاط $\mathscr{D}$ در معادلات کوشی ـ ریمان صدق کنند. یعنی برای تمام نقاط $\mathscr{D}$ داشته باشیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

در این صورت $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است.

اثبات ـ قرار می‌گذاریم $j = h + ik$ باشد، که در آن h و k اعداد حقیقی دلخواه باشند. با نقطه مفروض z، $z \in \mathscr{D}$ می‌بایست نشان دهیم که $\lim_{j\to 0}(f(z+j) - f(z))/j$ موجود است. برای h و k های باندازه کافی کوچک، $z + (h+ik)$ در $\mathscr{D}$ واقع است. چون فرض برآن است، u و v مشتقات نسبی پیوسته داشته باشند. کاربرد قضیه ۵ـ۱ نشان می‌دهد که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ نیز می‌بایست پیوسته باشند. بنابراین شرایط قضیه ۵ـ۴ صادق‌اند و داریم:

$$\frac{f(z+(h+ik)) - f(z)}{h+ik} = \frac{f_1(x, y)h + f_2(x, y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{h+ik}, \quad (۱۰)$$

بطوریکه با $h \to 0$ و $k \to 0$ داریم $\varepsilon_1 \to 0$ و $\varepsilon_2 \to 0$، هم چنانکه در (۵) دیدیم معادلات

کوشی ــ ریمان را می‌توان بصورت $f_1(x,y) = -if_2(x,y)$ و یا بصورت زیر نوشت:

$$if_1(x,y) = f_2(x,y). \tag{۱۱}$$

با جایگزین نمودن (۱۱) در (۱۰)، حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{f(z+(h+ik))-f(z)}{h+ik} &= \frac{f_1(x,y)h + if_1(x,y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{h+ik} \\ &= f_1(x,y) + \varepsilon_1 \frac{h}{h+ik} + \varepsilon_2 \frac{k}{h+ik}. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

ولی

$$\left|\frac{h}{h+ik}\right| \le 1, \qquad \left|\frac{k}{h+ik}\right| \le 1,$$

بنابراین دو عبارت آخر در (۱۲) با میل کردن h و k به سمت صفر، به صفر میل می‌کنند بنابراین

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(z+(h+ik))-f(z)}{h+ik} = f_1(x,y).$$

چون در مورد چگونگی میل کردن h و k به صفر فرض مشخصی نداشتیم، پس مشتق $f'(z)$ موجود است $f'(z) = f_1(x,y)$. چون z دلخواه بود، تابع در $\mathscr{D}$ همه جا مشتق‌پذیر است و بنابراین تابع در $\mathscr{D}$ تحلیلی است.

بطریقی مشابه می‌توانستیم نشان دهیم که برای تمام نقاط $\mathscr{D}$ داریم $f'(z) = -if_2(x,y)$.

به منظور فهم بیشتر ارتباط میان معادلات کوشی ــ ریمان و مشتق‌پذیری، مراحل عمده قضیه ۵ــ۵ رااستخراج‌کنیم. از شرط پیوستگی مشتقات نسبی در یک همسایگی استفاده کردیم تا بتوانیم از قضیه ۴ــ۵ استفاده کرده و (۱۰) را بدست آوریم. جایگزین نمودن معادلات‌کوشی ــ ریمان‌در (۱۰) به (۱۲) منجر گردید. آنگاه تحلیلی بودن از (۱۲) نتیجه شد.

اگرتنهامشتق‌پذیری در یک نقطه هدف اصلی ما می‌بود، می‌توانستیم قضیه‌یی مشابه ۵ــ۵، که در آن پیوستگی مشتقات نسبی تنها در یک نقطه لازم بود، اثبات کنیم. ولی برای توابع مختلط، تحلیلی بودن (به عوض مشتق‌پذیری در یک نقطه) مفهوم عمده‌است.

در فصل ۸، نشان خواهیم داد، اگر $f(z)$ در نقطه‌یی تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ درآن نقطه دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، به ویژه وجود $f'(z)$ گویای آن است‌که

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

پـــیــــوسته است . بموجب قضیه ۵ــ۱ ، مشتقات نسبی مولفه‌های حقیقی و انگاری هــم پیوسته می‌باشند .

بنابراین ، معکوس قضیه ۵ــ۵ هم درست است . یعنی که تابع در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلــی است اگر و فقط اگر تابع در همه نقاط میدان $\mathscr{D}$ دارای مشتقات نسبی پیوسته‌ای باشد کــه در معادلات کوشی ــ ریمان صدق کنند .

قابل توجه است که مشتق‌پذیری در یک همسایگی برای‌توابع حقیقی به اندازه توابع مختلط ارزشمند نیست . تابع حقیقی $f(x) = x|x|$ برای تمام مقادیر حقیقی مشتق‌پذیر است . ولی در مبداء دارای مشتق مرتبه دوم نیست .

تابع زیر همه جا مشتق‌پذیر است .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ولی مشتق آن در مبداء پیوسته نیست .

اکنون بررسی تحلیلی بودن توابع مقدماتی امری کاملا" ساده است .

<u>مثال ۱ــ</u> فرض کنیم $f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y.$$

با بکار بردن قضیه ۵ــ۵ نتیجه می‌گیریم که $f(z) = e^z$ تابعی تام است .

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

<u>مثال ۲ــ</u> فرض کنیم $f(z) = \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ بموجب قضیه ۵ــ۲ و مثــال ۱ داریم :

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

مثال ۳ــ فرض کنیم $f(z) = \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ در این صورت :

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

مثالهای فوق بازگوکننده یک الگوی تراجعی در نظریه متغیرهای مختلط است. نمای حقیقی، اطلاعاتی درمورد نمای مختلط بدست می‌دهد که آن به نوبه خود ما رابه‌استنتاج نتایجی در مورد توابع مثلثاتی قادر می‌سازد. تحقیق این مطلب که توابع $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\sec z$ و $\csc z$ دارای‌مشتقات منتظره "میباشند، را به دانشجو واگذارمی‌کنیم.

ذیلا" عبارتی برای معادلات کوشی ــ ریمان در مختصات‌قطبی‌راکه گاهی مفید است اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵ــ۶. فرض کنیم $f=u+iv$ در $z=re^{i\theta}$، $r\neq 0$ مشتق‌پذیر و مشتقات نسبی آن پیوسته باشد آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

اثبات ــ چون مشتقات نسبی پیوسته‌اند، قاعده زنجیر را می‌توان‌بکاربست. باقرار دادن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \tag{۱۳}$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta). \tag{۱۴}$$

با بکار بردن معادلات کوشی ــ ریمان در (۱۴)، از (۱۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right)=r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

که شرط اول را برقرار می‌کند. بطریق مشابه

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \theta}&=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)=-r\left(\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\right)\\&=-r\frac{\partial v}{\partial r},\end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است.

در خاتمه این بخش قضیه‌یی را که فقط به مشتق‌پذیری در یک نقطه نیاز داردمطرح می‌کنیم. گو اینکه بعدا" قضیه عمومی‌تری برای توابع تحلیلی اثبات خواهد شد.

قضیه۵ـ۷. فرض‌کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 مشتق‌پذیربوده‌با $f(z_0)=g(z_0)=0$
اگر $g'(z_0)\neq 0$ آنگاه $\lim_{z\to z_0}(f(z)/(g(z))=f'(z_0)/(g'(z_0))$

اثبات ـ این قضیه، نتیجه‌ای تعریف مشتق است، زیرا

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}.$$

مثال ۱ـ فرض‌کنیم $f(z)=|z|^2$ و $g(z)=z$. در این صورت:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{1}=0.$$

مثال ۲ـ برای $f(z)=\sin z$ داریم:

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(az)}{f(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin az}{\sin z}=a\,\frac{\cos 0}{\cos 0}=a,$$

که درآن a عدد مختلط است.

مثال ۳ـ فرض کنیم $f(z)=1-\cos z$ و $g(z)=\sin^2 z$. در اینجا $g'(0)=0$ ، و
با اثباتی مستقیم می‌توان از قضیه ۵ـ۷ پرهیز نمود.

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{1-\cos^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{(1-\cos z)(1+\cos z)}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+\cos z}=\frac{1}{2}.$$

پرسش‌ها

۱ـ اگر در قضیه ۵ـ۴، شرط پیوستگی مشتقات نسبی موجود نباشد، چه نوع قضیه مقدار میانگین می‌توان بدست آورد؟

۲ـ چه اختلافات عمده‌یی میان توابع مشتق‌پذیر و توابع تحلیلی موجود است؟

۳ـ برای تابع تام چه تعاریف دیگری می‌توانستیم مطرح کنیم؟

۴ـ چه ارتباطی میان پیوستگی یک تابع با پیوستگی مشتقات نسبی آن موجوداست؟

۵ـ تابع تحلیلی حقیقی را چگونه می‌توانستیم تعریف کنیم؟

۶ـ اگر $f(z_0)=g(z_0)=0$ و $f'(z_0)$ و $g'(z_0)$ موجودباشندو $g'(z_0)\neq 0$ ،

آیا:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\ ?$$

۷ــ اگر تابعی در یک ناحیه کراندار تحلیلی باشد، آیا تابع کراندار است؟

۸ــ اگر $f(z)$ در تمام نقاط صفحه در معادلات کوشی ــ ریمان صدق کند، آیا تابعی تام است؟

۹ــ چرا شکل قطبی معادلات کوشی ــ ریمان در مبداء معتبر نیست؟

تمرینها

۱ــ شرایطی برای ثابت‌های a و b و c بیابید تا توابع زیر تام گردند.

الف) $f(z)=x+ay-i(bx+cy)$

ب) $f(z)=ax^2-by^2+icxy$

پ) $f(z)=e^x\cos ay+ie^x\sin(y+b)+C$

ت) $f(z)=a(x^2+y^2)+ibxy+C$

۲ــ فرض کنیم

$$f(z)=\begin{cases}e^{-1/z^4}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

نشان دهید:

الف) $f(z)$ همه جا در معادلات کوشی ــ ریمان صادق است؛

ب) $f(z)$ همه جا مگر در $z=0$ تحلیلی است.

پ) $f(z)$ در $z=0$ پیوسته نیست.

۳ــ فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ توابع تام هستند. نشان دهید، توابع زیر هم تام هستند.

الف) $f(z)+g(z)$ ب) $f(z)g(z)$ پ) $f(g(z))$

۴ــ فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 تحلیلی‌اند. نشان دهید، $f(z)/g(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر و تنها اگر $g(z_0)\neq 0$.

۵ــ فرض کنیم $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$. ثابت کنید، $a_k=(f^{(k)}(0))/k!$ $(k=0,1,\ldots,n)$

۶ــ اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد، نشان دهید، $g(z)=\operatorname{Re}f(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر و تنها اگر $g(z)$ در یک همسایگی z_0 ثابت باشد.

۷ــ اگر $f=u+iv$ در نقطه z مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید، مشتقات نسبی مراتب

اول u و v در z موجودند.

۸ــ(الف) فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ که شامل مبداء نیست، تحلیلی و دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد. با استفاده از قضیه ۵ــ۶ نشان دهید که در تمام نقاط $\mathscr{D}$ داریم:

$$f'(z) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(ب) برعکس، اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ که شامل مبداء نیست دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد و در تمام نقاط $\mathscr{D}$ رابطه

$$e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

برقرار باشد، نشان دهید $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است.

۹ــ با استفاده از نتیجه تمرین قبل نشان دهید، مشتق z^n، برای n صحیح، برابر nz^{n-1} است.

۱۰ــ حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{3z}$ ب) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{|z|}$

پ) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin z}{e^z-1}$ ت) $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\dfrac{1}{z}$

۵ــ۳. توابع همساز

اگر $f(z)$ در میدانی تحلیلی باشد، آنگاه مشتقات آن را می‌توان به اشکال مختلف نوشت، به عنوان مثال بموجب (۵) می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{۱۵}$$

ویا

$$f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{۱۶}$$

در فصل ۸ نشان خواهیم داد که یک تابع تحلیلی دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد. از معادله (۱۵) می‌بینیم که مشتق دوم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$f''(z) = \frac{\partial}{\partial x}f'(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{۱۷}$$

با توجه به (۱۶) هم چنین خواهیم داشت:

$$f''(z) = -i\frac{\partial}{\partial y}f'(z) = -i\frac{\partial}{\partial y}\left(-i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \qquad (۱۸)$$

با برابر نهادن (۱۷) و (۱۸) همانندی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad (۱۹)$$

که برای هر تابع تحلیلی برقرار است، پس اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در میدانی تحلیلی باشد، معادله (۱۹) نشان می‌دهد که مولفه‌های حقیقی و انگاری آن می‌بایست در معادلات با مشتقات‌نسبی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \qquad (۲۰)$$

تابع با مقادیر حقیقی پیوسته $U(x,y)$ را که در میدان $\mathscr{D}$ تعریف شده است، در $\mathscr{D}$ همساز گویند بشرطی که دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده‌و این‌مشتقات در تمام $\mathscr{D}$ در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \qquad (۲۱)$$

این معادله‌به معادله لاپلاس[1] مشهور است. با بکار بردن این قضیه، (که البته‌بعدا" ثابت‌خواهیم‌کرد) که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه‌نقاط آن میدان دارای‌مشتق از تمام مراتب می‌باشد (در نتیجه دارای مشتق دوم پیوسته نیز می‌باشد)، از (۲۰) می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و انگاری یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

تذکر ــ این خاصیت پادتقارنی زیررا داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب، از توجه به این امر نتیجه می‌شود که‌هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u+iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است.

معادله لاپلاس شرط لازمی برای اینکه تابعی قسمت حقیقی (یا انگاری) یک تابع تحلیلی باشد ارائه می‌دهد.

مثال ــ برای تابع $u(x,y) = x^2 + y$، داریم:

1. Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 2,$$

و بنابراین u هیچ جا در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند. بنابراین $u(x, y)=x^2+y$ نمی‌تواند قسمت حقیقی هیچ تابع تحلیلی باشد.

اینک‌نشان می‌دهیم که‌چگونه می‌توان مزدوج همسازرابا استفاده از معادلات کوشی-ریمان یافت.

مثال ــ به آسانی می‌توان نشان داد که $u(x, y)=x+e^{-x}\cos y$ همه جا همسازاست اگر یک تابع $v(x, y)$ موجود باشد بطوری که $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-e^{-x}\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (۲۲)$$

با تابع اولیه گرفتن نسبت به y از (۲۲) حاصل می‌شود.

$$v=y-e^{-x}\sin y+\phi(x), \qquad (۲۳)$$

کــــه درآن $\phi(x)$ یک‌تابع نسبت به x مشتق‌پذیر است. ولی با توجه به (۲۳) و بـا استفاده از معادله دیگر کوشی ــ ریمان حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{-x}\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-x}\sin y-\phi'(x),$$

و تنها وقتی برقرار است که $\phi'(x)\equiv 0$. بنابراین $v(x, y)=y-e^{-x}\sin y+C$، C ثابتی است حقیقی. بنابراین $v(x, y)$ مزدوج همساز $u(x, y)$ است و بموجب قضیه ۵ــ۵، تابع $f(z)$ تام است. در واقع

$$\begin{aligned}f(z)&=x+e^{-x}\cos y+i(y-e^{-x}\sin y+C)\\&=x+iy+e^{-x}(\cos y-i\sin y)+iC\\&=z+e^{-z}+iC.\end{aligned}$$

اینک‌دوسئوال‌مطرح می‌شود: معادله لاپلاس تاچه حد برای تضمین وجود یک‌مزدوج همسازکفایت‌می‌کندودر حالت عمومی، چگونه می‌توان همه این مزدوج‌های همساز رامشخص نمود؟ بهردوی این سئوال‌ها در فصل ۱۰ پاسخ خواهیم گفت، در آنجا مزدوج همساز یک تابع همساز را در یک همسایگی یک نقطه خواهیم ساخت، بنابراین نشان خواهیم داد که یک‌تابع در یک همسایگی از یک نقطه همساز است اگر و تنها اگر قسمت حقیقی یک تابع

تحلیلی باشد.

همان‌طور که ممکن است انتظار برود، اختلاف هر دو مزدوج همساز از یک‌تابع همساز مفروض در یک عدد ثابت حقیقی است. زیرا اگر $v(x, y)$ و $v^*(x, y)$ مزدوج‌های همساز $u(x, y)$ باشند، آنگاه بموجب معادلات کوشی ــ ریمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v^*}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v^*}{\partial x}.$$

بنابراین $v(x, y) = v^*(x, y) + C$ ، C ثابت.

اکثر خواص توابع تحلیلی از خواص قسمتهای حقیقی و انگاری آنها به‌ارث برده‌شده است. به عنوان مثال، اگر $u = \operatorname{Re} f(z)$ در ناحیه‌یی ثابت باشد و در آن ناحیه $f(z)$ تحلیلی باشد، در این صورت $f(z)$ می‌بایست ثابت باشد. این مطلب از بکار بردن معادلات کوشی ــ ریمان حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

در حالی که قسمت‌های حقیقی و انگاری یک تابع تحلیلی‌همسازند. کالبد آن لزومی ندارد همساز باشد. با اینحال با مطالعه رفتار کالبد تابع تحلیلی‌هنوزمی‌توان خواص‌آنرا استنتاج نمود.

<u>قضیه ۵ــ۸. فرض کنیم $|f(z)|$ در ناحیه‌یی که $f(z)$ تحلیلی است، ثابت باشد در این صورت $f(z)$ ثابت است.</u>

اثبات ــ اگر $|f(z)| = |u + iv| = C$، در این صورت $u^2 + v^2 = C^2$. با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{۲۴}$$

از به کار گرفتن معادلات کوشی ــ ریمان در مورد (۲۴) داریم:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{۲۵}$$

با حذف $\partial u/\partial y$ در (۲۵) بدست می‌آوریم $(u^2 + v^2)(\partial u/\partial x) = 0$ بنابراین $\partial u/\partial x = 0$. به شیوه مشابه می‌توان نشان داد

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

و اثبات تمام است.

تذکر ــ کلمه "ناحیه" را نمی‌توان با "دایره" جایگزین نمود. برای نشان دادن این مطلب، تابع تام $f(z) = z^n$ را که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، را در نظر می‌گیریم، کالبد این تابع بر هر دایره‌یی به مرکز مبداء ثابت است.

تاکنون، دربحث تحلیلی بودن به توابع تک مقداری اکتفا کردیم، صحبت از مشتقات توابع چند مقداری بی‌معنی است؛ زیرا در عبارت:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

قاعده‌سازگاری برای مشخص کردن این که وقتی z به سوی z_0 تغییر می‌کند، $f(z)$ چه مقداری را به پذیرد، موجود نیست. ولی، با اینحال، بحث در مورد تحلیلی بودن یک شاخه ثابت از یک تابع چند مقداری با معنی است. خاطرنشان می‌شویم که:

$$f(z) = \text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{ Arg } z \qquad (z \neq 0, -\pi < \text{Arg } z \leq \pi)$$

یک تابع تک ــ مقداری است که برای $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ پیوسته است. چون $f(z)$ بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست، قطعاً" در آنجا مشتق‌پذیر نیزنمی‌باشد.

اینک نشان می‌دهیم‌که $f(z)$ در همه نقاطی که پیوسته است، تحلیلی نیزمی‌باشد. با تبدیل به مختصات قطبی داریم:

$$f(z) = \text{Log } z = \text{Log } r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi). \qquad (۲۶)$$

باید توجه کرد:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = i.$$

بر اساس تمرین ۸، بخش قبل، نتیجه می‌شود که $f'(z)$ موجود است و داریم:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{z} \qquad (-\pi < \text{Arg } z < \pi).$$

اختلاف هر شاخه $\log z$، که بریدگی شاخه‌اش در امتداد محور حقیقی منفی باشد، با $\text{Log } z$، در آن صفحه بریده، یک مضرب $2\pi i$ است. و بنابراین در صفحه بریده شده مشتق آن نیز $1/z$ است.

با اینکه وقتی شاخه بریدگی بر امتداد محور حقیقی منفی‌باشد، $\log z$ برای‌مقادیر حقیقی منفی، ناپیوسته است، ولی می‌توان شاخه‌یی از $\log z$ را یافت که برای‌آن $\log z$ بر محور حقیقی منفی تحلیلی باشد. برای روشن شدن مطلب، به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که تابع $f(z) = \log z$ $(0 < \text{Arg } z < 2\pi)$ در تمام نقاط صفحه که در امتداد محور

حقیقی مثبت بریده شده باشد تحلیلی است و در تمام این نقاط $f'(z)=1/z$. باید توجه داشت که نمی‌توان این تابع را بر محور حقیقی پیوسته تعریف کرد. بنابراین برای هرعدد مختلط مخالف‌صفر z_0 ، شاخه‌یی از $\log z$ موجوداست که‌برای آن $\log z$ در z_0 تحلیلی و مشتق آن $1/z_0$ است.

چنانچه مشتق‌پذیری $\log z$ با $z \neq 0$، مورد قبول باشد، می‌توان مشتق $\log z$ را با استفاده از ارتباط وارون میان لگاریتم و نما دریافت. برای یک شاخه مشخص، قرارمی‌دهیم $f(z)=\log z$ ، و $g(z)=e^z$. در این صورت:

$$g(f(z))=e^{\log z}=z. \tag{۲۷}$$

مشتق‌گیری از دو طرف (۲۷) نتیجه می‌شود.

$$g'(f(z))f'(z)=1 \qquad \text{یا} \qquad f'(z)=\frac{1}{e^{\log z}}=\frac{1}{z}.$$

هم چنانکه در فصل قبل دیدیم، با مشخص کردن خواص لگاریتم، قادر خواهیم‌بود که خواص چندین رده از توابع وابسته را مشخص‌کنیم. جهت تشریح این مطلب، شاخهٔ معینی برای $\log z$ انتخاب می‌کنیم، و می‌نویسیم:

$$f(z)=z^{1/2}=e^{(1/2)\log z} \qquad (z\neq 0).$$

در این صورت با استفاده از قاعده زنجیری،

$$f'(z)=\frac{1}{2z}e^{(1/2)\log z}=\frac{1}{2z}z^{1/2}=\frac{1}{2}z^{-1/2}.$$

بطورکلی‌تراگربازاء یکعدد مختلط α و یک‌مشخصه از $\log z$ ، $f(z)=z^\alpha=e^{\alpha\log z}$ باشد، آنگاه:

$$f'(z)=\frac{\alpha}{z}e^{\alpha\log z}=\alpha z^{\alpha-1}.$$

تذکر ــ توابع z^α و α^z نباید با هم اشتباه شوند. اولی بهنگامیکه α عدد صحیح نباشد، تابع چند مقداری از z است؛ هر شاخه آن در صفحه بریده شده تحلیلی و دارای مشتقی‌برابر $\alpha z^{\alpha-1}$ است. تابع دومی، α^z که‌می‌توان آن را بصورت $e^{z\log\alpha}$ نوشت، یک تابع تام تک ــ مقداری است، البته بشرطی‌که برای $\log\alpha$ شاخه‌یی مشخص انتخاب گردد؛ مشتق آن $\alpha^z\log\alpha$ است.

با استفاده از قاعده زنجیری و لگاریتم می‌توان مشتق توابع مثلثاتی وارون را نیز محاسبه نمود. یادآور می‌شویم که

$$\sin^{-1}z=-i\log[iz+(1-z^2)^{1/2}].$$

چون

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)^{1/2} = -z(1-z^2)^{-1/2},$$

که در دو طرف معادله بالا یک شاخه به کار رفته، نتیجه می‌گیرم که:

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) = \frac{-i[i-z(1-z^2)^{-1/2}]}{iz+(1-z^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$

بطور کلی‌تر، اگر f در z تحلیلی و مخالف صفر باشد، آنگاه شاخه‌یی چنان‌می‌توان انتخاب کرد که برای آن $\log f$ نیز در یک همسایگی z تحلیلی باشدو

$$\frac{d}{dz}[\log f(z)] = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

بعلاوه، $f(z) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ بنابراین $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$. بنابراین، $\log |f(z)|$ درهمه‌نقاطی‌که $f(z)$ تحلیلی‌وغیرصفراست تحلیلی می‌باشد، زیرا که قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. با قرار دادن $f = u + iv$، همساز بودن $\log |f(z)| = \log \sqrt{u^2 + v^2}$ را می‌توان مستقیما" با محاسبه‌یی طولانی نیز اثبات‌نمود.

پرسش‌ها

۱ــ تحت چه شرایط می‌توان خواص توابع تحلیلی را از توابع همسازاستنتاج‌نمود؟

۲ــ تحت چه شرایطی‌می‌توان خواص توابع همسازراازتوابع تحلیلی‌استنتاج‌نمود؟

۳ــ توابع تحلیلی و توابع همساز در چه خواصی با هم متفاوتند؟

۴ــ چه وقت $\arg f(z)$ تابع همساز است؟

۵ــ خواص $|f(z)|$ چگونه با خواص $\log |f(z)|$ مقایسه می‌شوند؟

۶ــ اگر $u(x, y)$ در همه جای میدانی مانند $\mathscr{D}$ همساز باشد، آیا تابع $v(x, y)$ ی موجود است که برای آن تابع $u(x, y) + iv(x, y)$ در همه جای $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد؟

تمرینها

۱ــ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

نشان دهیدکه

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = -1 \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} = 1.$$

۲ــ نشان دهید که توابع زیر همسازند، و سپس مزدوج همساز آنها را بیابید.

الف) $u = ax + by$ a و b ثابت‌های حقیقی

ب) $u = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ ، $x^2+y^2 \neq 0$

پ) $u = x^3 - 3xy^2$

ت) $u = \operatorname{Arg} z$ $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$

ث) $u = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$

۳ــ عدد ثابت a را طوری انتخاب کنید که تابع $u = ax^2y - y^3 + xy$ همسازگردد، و سپس همه مزدوجهای همساز آنرا بیابید.

۴ــ با استفاده از روش این بخش بکوشید که تابع $v(x, y)$ را چنان بیابید تا $x^2 + iv(x, y)$ همساز گردد و توضیح دهید که این روش در چه نقطه‌یی لنگ میماند.

۵ــ اگر u_1 و u_2 در نقطه (x_0, y_0) همساز باشند، نشان دهید $au_1 + bu_2$ ، که a و b ثابت‌های حقیقی‌اند، نیز در (x_0, y_0) همساز است.

۶ــ فرض کنیم u و v دو تابع همساز مزدوج باشند، نشان دهید uv تابعی همساز است. عمومی‌ترین شرایط برای همساز بودن حاصلضرب دو تابع همساز چیست؟

۷ــ فرض کنیم $f(z)$ دارای مشتق مرتبه nام باشد، نشان دهید.

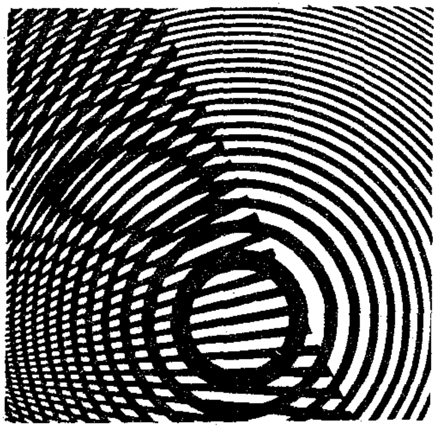
$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{(n)}} = (-i)^n \frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^{(n)}}.$$

۸ــ مشتق توابع زیر را بیابید.

(الف) $\cos^{-1} z$ (ب) $\tan^{-1} z$ (پ) $\sec^{-1} z$

۹ــ فرض کنیم $u(r, \theta)$ در یک همسایگی نقطه $z = re^{i\theta}$ همساز باشد، نشان‌دهید.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$



۶- رشته‌های توانی

مدتها تصور می‌شده است که فهم رشته‌ها از فهم دنباله‌ها مشکل‌تر است. هر کس‌که این تصور را منتشر کرده باید یا رشته‌ها و یا دنباله‌ها را نفهمیده باشد. ما نشان خواهیم داد که اختلاف اساسی میان یک دنباله و یک رشته در املا آنها نهفته است. کلمه "رشته" تنها به‌این‌دلیل به فرهنگ ریاضی افزوده شده است، که ما را قادر میسازد قضایای مشخصی در مورد دنباله‌ها را خلاصه‌تر فرمول‌بندی کنیم.

از دنباله‌های اعداد به دنباله‌های توابع برمی‌گردیم. در اینصورت شکل همگرایی و رفتار تابع حدی هر دو مورد توجه‌اند. در همگرایی، که در هر نقطه یک مجموعه‌مشخص می‌شود، تابع حدی الزاما" واجد خواصی که در هر تابع دنباله موجوداست، نیست؛ ولی اگر "رابطه" مشخصی میان دنباله توابع و مجموعه برقرار باشد، در این صورت تابع حدی الزاما" از استانداردهای معینی از دنباله پیروی خواهد کرد. این نوع قویتر از همگرایی، که در آن مجموعه بر نقاط خودش پیشی گرفته است، به همگرایی یکنواخت موسوم است.

عمده‌ترین دنباله‌های توابع آنهایی هستند که بصورت رشته‌های توانی قابل بیان هستند. توابع حدی مربوط به این رده همیشه درون نواحی همگرایی‌شان، تحلیلی‌هستند. در اکثر موارد، رفتار یک رشته‌توانی شبیه یک چند جمله‌یی "بزرگ" است.

۶-۱. یادآوری دنباله‌ها

اگر دنباله (حقیقی یا مختلط) $\{a_n\}$ مفروض باشد، دنباله جدید $\{s_n\}$ به صورت $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ را به دنباله اصلی وابسته می‌کنیم. نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ رشته نام دارد. بسته به اینکه دنباله $\{s_n\}$ همگرا یا واگرا باشد، رشته را همگرایاواگرا نامند. اگر $\{s_n\}$

به s به‌گرایده در اینصورت s را حاصلجمع (یا مقدار) رشته گوئیم ، و می‌نویسیم

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

بنابـر این در رشتـه همگـرا برای نمایاندن رشته و حاصلجمع آن یک نمادبکار می‌برند. s_n را حاصلجمع جزیی و a_n را جمله n ام رشته می‌خوانند.

بنابه‌تعریف ،هرقضیه در مورد رشته‌ها را بصورت قضیه‌یی در مورد دنباله‌ها (دنباله حاصلجمع جزیی) می‌توان فرموله کرد. معکوس مطلب هم درست است.

قضیه ۶ـ۱. اگر $\{s_n\}$ دنباله مفروضی باشد ، آنگاه دنباله $\{a_n\}$ موجود است کـه برای هر n ، $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

اثبات ــ با انتخاب $a_1 = s_1$ و برای $n > 1$ ، $a_n = s_n - s_{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) = s_1 + (s_n - s_1) = s_n .$$

از این رو، تعریف یک رشته یک مفهوم "جدید" را سامان نمی‌دهد. صرفا "محصول آن یک روش اضافی برای بیان قضایای جدید و دوباره‌گویی قضایای قدیم است. خـواص همگرایی رشته‌های مختلط را می‌توان از خواصهای رشته‌های‌حقیقی استنتاج نمود ، زیرااگر $\{a_n\}$ دنباله‌یی از اعداد مختلط باشد ، می‌نویسیم $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ، که در آن $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی هستند. بموجب قضیه ۲ـ۳ رشته مختلط $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و تنها اگر رشته‌های حقیقی $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ هر دو همگرا باشند:

محک‌کوشی برای دنباله‌ها (قضیه ۲ـ۱۰) را می‌توان بصورت زیر بازگو کرد: فـرض کنیم $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ،رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددصحیح N موجود باشد بطوری که $m, n > N$ موجب شود که:

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon. \qquad (۱)$$

با قرار دادن $m = n + p$ ، (۱) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, \ldots). \qquad (۲)$$

محـک کوشـی عمومی‌ترین آزمون برای همگرایی یک رشته است. بعضی از روشهایی که غالبا "درحساب‌دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بکار می‌روند ، مانند آزمونهای خارج‌قسمت و انتگرال ، مفروضات زیادی می‌طلبند و تازه شرایط لازم و کافی برای همگرایی بدست

نمی‌دهند .

اکثر خواص آشنای رشته‌ها نتیجه فوری (۲) هستند . بعنوان مثال همگرایی $\{a_n\}$ به صفر شرط لازم همگرایی $\{s_n\}$ است . این مطلب با قرار دادن $p=1$ در (۲) نتیجه می‌شود .

رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق گوئیم به شرطی که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد . از به کار بردن نامساوی

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

در (۲) ، ملاحظه می‌شود که همگرایی مطلق در یک رشته ، همگرایی آن رشته را تضمین می‌کند . بطور مشابه اگر برای هر n ، $|a_n| \leq |b_n|$ ، آنگاه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ را می‌توان از همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ و به کار بستن (۲) نتیجه‌گرفت .

فرض کنیم همه جملات دنباله $\{a_n\}$ حقیقی و مثبت باشند . در این صورت $s_n - s_{n-1} = a_n > 0$ و $\{s_n\}$ یک دنباله صعودی یکنواست . بموجب قضیه ۲ـ۶ ، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگروتنها اگر دنباله $\{s_n\}$ کراندار باشد . اینکه مثبت بودن $\{a_n\}$ را نمی‌توان از مفروضات حذف کرد با قرار دادن $a_n = (-1)^n$ روشن می‌گردد . در اینجا با وجودیکه $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ ازنظرقدرمطلق دارای کران 1 است ولی رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا نیست .

قضیهٔ بعدی ارتباط جالبی میان یک دنباله و حاصلجمع های جزئی آن دنباله را نشان می‌دهد .

قضیه ۶ـ۲ . فرض‌کنیم برای هر n ، $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد . اگر $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ آنگاه :

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ واگراست ؛

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ همگراست .

اثبات ــ به موجب محک‌کوشی ، اگر برای هر عدد صحیح n ، عدد صحیح p بتوان یافت به طوری که :

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{s_{n+p}} > \frac{1}{2}.$$

آنگاه (۱) واگرا خواهد بود ، چون $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی است،

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{s_{n+p}} = \frac{s_{n+p} - s_n}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}. \qquad (۳)$$

ولی با $p \to \infty$ ، $s_{n+p} \to \infty$ ، و بنابراین p را می‌توان چنان بزرگ انتخاب کرد تا $s_{n+p} > 2s_n$. برای چنین انتخاب p ، از (۳) نتیجه می‌شود که $\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k/s_k) > \frac{1}{2}$. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/s_n)$ واگراست . برای اثبات (۲) ملاحظه می‌کنیم که :

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{a_n}{s_n s_{n-1}} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

با بکار بستن محک کوشی داریم :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{s_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k}\right) = \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_{n+p}} < \frac{1}{s_n}.$$

برای هر مقدار از پیش معلوم $\varepsilon > 0$ ، می‌توان n را باندازه کافی بزرگ انتخاب کرد که $1/s_n < \varepsilon$ ، بنابراین ، $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/s_n^2)$ همگراست .

فرع ۱ . رشته $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ واگرا و رشته $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ همگراست .

اثبات ــ قضیه ۶ــ۲ را با $a_n \equiv 1$ بکار ببرید .

فرع ۲ــ اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد ، آنگاه یک دنباله مثبت $\{b_n\}$ موجود است که $b_n/a_n \to 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست .

اثبات ــ $b_n = a_n/s_n$ انتخاب کرده و قضیه ۶ــ۲ را بکار ببرید .

این فرع نشان می‌دهد که "کندترین" رشته واگرا موجود نیست . از خواننده در تمرین ۴ می‌خواهیم تا نشان دهد که کندترین رشته همگرا موجود نیست .

بعد از اثبات چند خواص اضافی برای دنباله‌ها به بحث در مورد رشته‌ها باز می‌گیریم ، ولی مطلب واضح ولی مفید زیر را ثابت می‌کنیم .

اصل تله‌موشی ــ فرض کنیم برای هر n ، $0 \leq a_n \leq b_n$ و فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

اثبات ــ بازاء $\varepsilon > 0$ مفروض ، عدد صحیح N موجود است که برای $n > N$ داریم $|b_n| < \varepsilon$. ولی در این صورت برای $n > N$ داریم $|a_n| \leq |b_n| < \varepsilon$ ، بنابراین $a_n \to 0$.

قضیه ۶ـ۳. برای $\alpha > 0$، $\beta > 0$، و x حقیقی، داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0; \qquad (۱)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0. \qquad (۲)$$

اثبات ـ باقراردادن $f(x) = \log x$ و $g(x) = x^{\beta/\alpha}$ وبابکار بستن قاعده‌هوپیتال برای توابع از یک متغیر حقیقی حاصل می‌گردد.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\beta/\alpha)x^{\beta/\alpha}} = 0.$$

بنابراین

بهنگامیکه $x \to \infty$ داریم $\left(\frac{\log x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \to 0$

و (۱) ثابت می‌شود.

با قرار دادن $y = \log x$ در (۱) و با ملاحظه اینکه وقتی $x \to \infty$، آنگاه $y \to \infty$، (۱) بدست می‌آید.

فرع برای $\alpha > 0$، $\beta > 0$، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0; \qquad (۱)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = 0; \qquad (۲)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1; \qquad (۳)$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad (|r| < 1) \qquad (۴)$$

اثبات ـ با قرار دادن $x = n$ در قضیهٔ ۶ـ۳، (۱) و (۲) بدست می‌آید. سپس اگر بدانیم $(\log n)/n \to 0$ $n^{1/n} \to 1$ ولی این حالت خاصی از (۱) است، و (۳) ثابت می‌شود. بالاخره با قرار دادن $\beta = -\log |r|$ در (۲) داریم:

$$\frac{n^\alpha}{e^{-n\log|r|}} = n^\alpha |r|^n \geq |r|^n,$$

و (۴) از (۲) و از اصل تله‌موشی اثبات می‌شود.

تذکر ــ این خاصیت آخری برای اثبات همگرایی در اکثر رشته‌ها مفید است. با نوشتن

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r},$$

و با استفاده از اینکه برای $|r| < 1$، $\{r^n\}$ به صفر می‌گراید، نشان می‌دهیم که در این رشته هندسی داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r} \qquad (|r| < 1).$$

بنابراین، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است اگر عدد ثابت r، $0 \le r < 1$ و عدد حقیقی M چنان موجود باشند که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| \le Mr^n$.

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله کرانداری از اعداد مختلط باشد، A مجموعه حدود زیر دنباله‌های $\{a_n\}$ باشد، بعضی خواص A قبلاً مورد بحث قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال مجموعه A غیرتهی است (قضیه ۲ــ۷) و متشکل از یک نقطه است، اگر و تنها اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد (قضیه ۲ــ۵). اگر دنباله $\{a_n\}$ حقیقی و کراندار باشد، آنگاه مجموعه A دارای کوچکترین کران بالاست (خاصیت دوکیند).

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله کراندار حقیقی و A مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ باشد، با قرار دادن $a^* = \text{lub } A$، a^* را حد زبرین $\{a_n\}$ نامیم، و می‌نویسیم:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a^*.$$

این تعریف را می‌توان به دنباله‌های حقیقی بی‌کران گسترش داد. اگر $\{a_n\}$ ــ دنباله بی‌کران باشد، می‌گوئیم:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty;$$

در حالیکه اگر همه a_n مگر یک تعداد متناهی از آنها، از هر عدد حقیقی از پیش معلوم، کوچکتر باشد، می‌گوییم:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

همتای مفید برای حد زبرین، حد زیرین است. برای دنباله کراندار $\{a_n\}$، قرار می‌دهیم $a_* = \text{glb}$ { مجموعه حدود زیر دنباله‌ها }، و می‌نویسیم:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = a_*.$$

اگر $\{a_n\}$ از پائین بی‌کران باشد گوییم:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty;$$

در حالیکه همه a_nها، مگر یک تعداد متناهی از آنها، از هر عدد حقیقی از پیش معلوم بزرگتر باشد گوئیم که:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

بیان قضایا برحسب حد زبرین و حد زیرین به عوض برحسب حد، یک مزیت مشخص دارد. در دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته (شامل $\pm\infty$ است)، حد زبرین و حد زیرین یک دنباله حقیقی همیشه موجود است. این به ما امکان می‌دهد، بدون اینکه نگران وجود حد باشیم، قضایا را در مورد دنباله‌ها اثبات کنیم.

مثال ۱ـ فرض کنیم $a_n = n\ \sin^2(n\pi/4)$، چون برای هر n، $0 \le a_n < \infty$، هیچ زیر دنباله‌ای از $\{a_n\}$ نمی‌تواند به مقداری کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از ∞ بگراید. برای اینکه نشان دهیم:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{و} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0,$$

کافی است یک زیردنباله (از میان زیردنباله‌های متعدد) بیابیم که به مقدار مطلوب میل کند. داریم:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} (4n+2) = \infty$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty} 4n \cdot 0 = 0.$$

مثال ۲ـ فرض کنیم $a_n = (1 + 1/n) \cos n\pi$ آنگاه.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1.$$

مثال ۳ـ فرض کنیم $a_n = \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi/4)$ آنگاه.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n+1} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{4n-1} = -\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

مثال ۴ــ فرض کنیم $a_n = n\cos n\pi$ آنگاه.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \infty$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\infty.$$

مثال ۵ــ فرض‌کنیم $a_n = 5n\cos n\pi - n^2$. آنگاه برای‌هر n ، $a_n \leq 5n - n^2$ ، بنابراین

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

روشن است‌که‌حدزبرین وحد زیرین هر دو منحصربفردند ، و دنباله حقیقی $\{a_n\}$ به L ، L متناهی ، می‌گراید اگر و تنها اگر:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L.$$

ولی بعضی از قضایای متعارف حد برای حد زبرین و حد زیرین هر دو نادرست‌اند.

مثال ــ فرض کنیم $a_n = (-1)^n$ و $b_n = (-1)^{n+1}$ در این صورت:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) = 0 \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 2$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) = 0 \neq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = -2.$$

با اینحال، نامساوی‌های زیر درست‌اند.

قضیه ۶ــ۴. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی کراندار و حقیقی باشند،آنگاه:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{1}$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n . \qquad (۲)$$

اثبات ــ فرض کنیم $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ و $\limsup_{n\to\infty} b_n = b$، فرض کنیم نامساوی (۱) درست نباشد در این صورت برای یک $\varepsilon > 0$، زیر دنباله $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ از $\{a_n + b_n\}$ موجود است که برای هر n_k داشته باشیم، $a_{n_k} + b_{n_k} > a + b + \varepsilon$. ولی در این صورت یکی از نامساویهای

$$a_{n_k} > a + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{یا} \qquad b_{n_k} > b + \frac{\varepsilon}{2}$$

برای دفعات نامتناهی برقرارند.

این موجب می‌گردد که $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a + \varepsilon/2$ یا $\limsup_{n\to\infty} b_n \geq b + \varepsilon/2$ (چرا؟)، این متناقض فرض است و (۱) را ثابت می‌کند. اثبات (۲) مشابه است، و از آن صرفنظر می‌کنیم.

قضیه زیر در تعیین خواص همگرایی رشته‌های توانی مفید است.

قضیه ۶ــ۵ (آزمون ریشه) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌یی مختلط، و $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$، در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، اگر $L < 1$ بطور مطلق همگرا و اگر $L > 1$، واگراست.

اثبات ــ اگر $L < 1$، r را طوری انتخاب می‌کنیم که $L < r < 1$. برای همه n ها، مگر یک تعداد متناهی، داریم: $|a_n|^{1/n} < r$، یعنی که:

$$|a_n| < r^n \qquad (n > N)$$

اینک همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نتیجه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ $(|r| < 1)$ است.

اگر $L > 1$، آنگاه برای یک تعداد نامتناهی n، $|a_n|^{1/n} > 1$ ولی در این صورت بدفعات نامتناهی $|a_n| > 1$، بنابراین $a_n \nrightarrow 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمی‌تواند همگرا باشد.

تذکر ــ هنگامیکه $L = 1$، آزمون ریشه هیچ اطلاعاتی به ما نمی‌دهد. رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگرا و رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ همگراست. در حالی که:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right|^{1/n} = 1.$$

پرسشها

۱ــ چه نوع از قضایای دنباله‌های حقیقی برای دنباله‌های مختلط هم برقرارند؟
۲ــ چه معنایی بر اینکه کندترین رشته همگرا موجود نیست مترتب است؟
۳ــ چرا اصل تله‌موشی چنین نام گرفته است؟
۴ــ برای کدام رشته‌های همگرا می‌توانید حاصلجمع را مشخص کنید؟
۵ــ چه تعریف دیگری برای حد زبرین و حد زیرین می‌توانستیم بدهیم؟
۶ــ آیا می‌توان حد زیرین را برحسب حد زبرین تعریف کرد؟
۷ــ محاسن و معایب اینکه حد زبرین یک دنباله مجاز باشد مقادیر $\pm\infty$ را بپذیرد. را بیان کنید.
۸ــ چگونه حد زبرین حاصلضرب با حاصلضرب حدود زبرین مقایسه می‌شود؟
۹ــ آیا می‌توان قضیه ۶ــ۴ را ترمیم کرد تا دنباله‌های بی‌کران را نیز شامل شود؟
۱۰ــ اگر برای هر n، $|a_n|^{1/n} < 1$، آیا الزاماً $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست؟

تمرینها

۱ــ فرض‌کنیم $a_n = \alpha_n + i\beta_n$، α_n و β_n حقیقی، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ هر دو همگرا باشند.

۲ــ فرض‌کنیم $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. اگر $a_k = 1/k$، نشان دهید که برای هر n، $s_{2n+1} - s_{2n} > \frac{1}{2}$، اگر $a_k = (-1)^{k+1}/k$، نشان دهید که برای هر n و p داریم، $|s_{n+p} - s_n| < 2/n$.

۳ــ فرض کنیم برای هر n، $a_n > 0$. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست اگر و تنها اگر برای اعداد صحیح M و N، عدد صحیح p موجود باشد، بطوری که $\sum_{n=N}^{N+p} a_n > M$.

۴ــ فرض کنیم $a_n > 0$ و فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. اگر $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$، نشان دهید که:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ واگراست (راهنمایی: قرار دهید $a_n = r_n - r_{n+1}$ و محک‌کوشی را به کار ببرید).

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست (راهنمایی: نشان دهید $a_n/\sqrt{r_n} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$.)

۵ــ فرض کنیم A مجموعه حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله مختلط باشد، نشان دهید مجموعه A بسته است.

۶ــ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله مختلط باشد، نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ اگر و تنها اگر: $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = \liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$

۷ــ اگر برای هر n ، $a_n \geq b_n$ ، نشان دهید:

الف) $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} b_n$

ب) $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n .$

۸ــ فرض کنیم دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ، کراندار و مثبت باشند، نشان‌دهید:

الف) $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n .$

ب) $\liminf_{n\to\infty} a_n b_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n .$

مثالهایی بیاورید که برای آنها در (الف) و (ب) تساوی برقرار نگردد.

۹ــ فرض کنیم $\{a_n\}$ حقیقی و $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، $a \neq 0$. برای دنباله حقیقی $\{b_n\}$ نشان دهید.

الف) $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n .$

ب) $\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n .$

پ) $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n .$

ت) $\liminf_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \liminf_{n\to\infty} b_n .$

۱۰ــ اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ حقیقی و کراندار باشند و $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ موجود باشد، نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n .$$

۱۱ــ برای هر دنباله حقیقی $\{a_n\}$ ، نشان دهید:

$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n).$ (راهنمایی: تمرین ۱۰ را بکار برید)

۱۲ــ نشان دهید $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$ ، L متناهی، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد: برای هر $\varepsilon > 0$ ،

(۱) برای همه n ها، مگر یک تعداد متناهی، $a_n < L + \varepsilon$ ،

(۲) به دفعات نامتناهی، $a_n > L - \varepsilon$ ،

۱۴ــ نشان دهید $\liminf_{n\to\infty} a_n = L$ ، L متناهی، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار

باشد: برای هر $0 < \varepsilon$،

(۱) به دفعات نامتناهی، $a_n < L + \varepsilon$

(۲) برای همه n ها، مگر یک تعداد متناهی، $a_n > L - \varepsilon$

۱۴ـ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله مختلط باشد.

الف) اگر $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L < 1$، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = L > 1$، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

۱۵ـ فرض کنیم برای هر n، $a_n > 0$. نشان دهید:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

۱۶ـ دنباله $\{a_n\}$ را برای هر n به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم $a_{2n-1} = 1/2^n$ و $a_{2n} = 1/3^n$. نشان دهید:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty;$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

آیا رشته زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

۶ـ۲. همگرایی یکنواخت

دنباله توابع $\{f_n\}$ روی مجموعه E به f همگرای نقطه‌ای است $(f_n \to f)$ اگر به هر $z_0 \in E$ و هر $0 < \varepsilon$، عدد صحیح $N = N(\varepsilon, z_0)$ چنان متناظر شود که:

$$\text{هر وقت} \quad n > N(\varepsilon, z_0) \quad \text{آنگاه} \quad |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

تذکر ـ اینکه دنباله توابع $\{f_n\}$ روی مجموعه E همگرای نقطه‌یی است، بدین‌معنی است‌که برای‌هر $z_0 \in E$، دنباله $\{f_n(z_0)\}$ همگرا باشد. تابع حدی f در این‌حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) \qquad (z_0 \in E).$$

عدد صحیح N درتعریف همگرای نقطه‌ای، در حالت عمومی، ممکن است با نقاط مجموعه، تغییر کند. ولی چنانچه یک عدد صحیح N بتوان یافت که برای همه این نقاط

قابل استفاده باشد، در اینصورت همگرایی، یکنواخت نام دارد. یعنی، دنباله توابع $\{f_n\}$ روی E به f همگرای یکنواخت است $(f_n \rightrightarrows f)$ اگر به هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ چنان متناظر شود که برای هر $z \in E$

$$\text{هر وقت} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{آنگاه} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

روشن است که همگرایی یکنواخت بر یک مجموعه موجب همگرایی (نقطه‌ای) می‌گردد. بیانی برای نفی همگرایی یکنواخت، بهنگام ارائه مثالهایی که نشان دهند معکوس این مطلب درست نیست، مفید خواهد بود. همگرایی $\{f_n\}$ به f روی E یکنواخت نیست اگر یک $\varepsilon > 0$ چنان موجود باشد که به ازاء هر عدد صحیح N، یک عدد صحیح $n\ (>N)$ و یک $z_n \in E$ موجود باشد بطوریکه $|f_n(z_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$.

اختلاف میان پیوستگی و پیوستگی یکنواخت را یادآورید. یک تابع پیوسته روی یک مجموعه پیوسته یکنواخت است اگر چنانچه یک $\delta = \delta(\varepsilon)$ ی واحد بتوان یافت که برای تمام نقاط مجموعه مورد استفاده قرار گیرد.

در فصل ۲ نشان دادیم که $f(z) = 1/z$ بر مجموعه $0 < |z| < 1$ پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست. مثال زیر مشابه همین مطلب در مورد همگرایی است.

مثال ۱ــ دنباله $f_n(z) = 1/nz$ روی مجموعه $0 < |z| < 1$ به $f(z) \equiv 0$ همگرای نقطه‌ای است ولی همگرای یکنواخت نیست.

اثبات ــ برای نشان دادن همگرای نقطه‌ای، یک z_0 دلخواه انتخاب می‌کنیم، $0 < |z_0| < 1$، با $\varepsilon > 0$ مفروض، اگر $N = N(z_0, \varepsilon)$ عدد صحیحی بزرگتر از $1/\varepsilon|z_0|$ باشد، برای $n > N$ داریم $|1/nz_0| < \varepsilon$.

اگر همگرایی یکنواخت می‌بود، یک عدد صحیح N موجود می‌بود که برای هر z، $0 < |z| < 1$ می‌داشتیم $|1/Nz| < \varepsilon < 1$ ولی این نامساوی برای $z = 1/N$ برقرار نیست.

تذکر ــ نشان دادیم که همگرایی در مثال بالا یکنواخت نیست زیرا که:
برای هر n،

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1$$

مثال ۲ــ دنباله $f_n(z) = 1/(1 + nz)$ در ناحیه $|z| \geq 2$ همگرای یکنواخت است **ولی** در ناحیه $|z| \leq 2$ همگرای یکنواخت نیست.

اثبات ــ دنباله $\{f_n\}$ همه جا به تابع:

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\neq 0,\\ 1, & z=0.\end{cases}$$

همگرای نقطه‌ای است . اگر $|z|\geq 2$ ، آنگاه

$$|f_n(z)|=\left|\frac{1}{1+nz}\right|\leq\frac{1}{|nz|-1}\leq\frac{1}{2n-1}\leq\frac{1}{n}.$$

بنابراین هروقت $n>1/\varepsilon$ ، $|f_n(z)|<\varepsilon$ واین همگرایی یکنواخت در ناحیه $|z|\geq 2$ را اثبات می‌کند .

اگر همگرایی برای $|z|\leq 2$ یکنواخت بود ، عدد صحیح N ی موجود بود که برای هر z در این ناحیه ، $|f_N(z)-f(z)|<\frac{1}{2}$ ولی برای هر n ،

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{1}{1+n\cdot(1/n)}-0\right|=\frac{1}{2}$$

تذکر ــ قضیه ۲ــ۱۶ مبین آن است که هر تابع پیوسته روی مجموعه فشرده ، پیوسته یکنواخت است ، مثال فوق نشان می‌دهد که همگرایی نقطه‌ای ، حتی بر مجموعه فشرده ، لزوماً" موجب همگرایی یکنواخت نیست .

مثال ۳ــ دنباله $f_n(z)=z^n$ روی مجموعه $|z|<1$ همگرایی نقطه‌ای و برمجموعه $|z|\leq r<1$ همگرای یکنواخت است .

اثبات ــ همگرایی نقطه‌یی برای $|z|<1$ ، از فرع قضیه ۵ــ۲ نتیجه‌می‌شود . چون $r^n\to 0$ $(r<1)$ ، عدد صحیح $N=N(\varepsilon)$ را چنان می‌توان یافت که $r^n<\varepsilon$ $(n>N)$. ولی در این صورت :

$$|z^n|\leq r^n<\varepsilon\qquad(|z|\leq r,\ n>N(\varepsilon)).$$

بنابراین ، $\{f_n(z)\}$ در قرص $|z|\leq r$ ،همگرای یکنواخت به صفر است .

اگر همگرایی بر مجموعه $|z|<1$ یکنواخت می‌بود ، آنگاه برای n باندازه‌کافی بزرگ وبرای هر z ، $|z|<1$ می‌داشتیم $|z^n|<\varepsilon$. باانتخاب $z=1-1/n$ ، داریم $z^n=(1-1/n)^n$ و از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی داریم :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \qquad n\to\infty$$

بنابراین $|z^n| > \frac{1}{3}$ $(z = 1-1/n,\ n>N)$ ، و همگرایی برا $|z|<1$ یکنواخت نیست .

مثال۴ـ دنباله $f_n(z) = z/n^2$ برای $|z|\le R$ به $f(z)\equiv 0$ همگرای یکنواخت است ولی در صفحه همگرای یکنواخت نیست .

اثبات ـ برای $|z|\le R$ ، نامساوی

$$|f_n(z)| \le \frac{R}{n^2} < \varepsilon \qquad (n > \sqrt{R/\varepsilon})$$

نشان می‌دهد که بر قرص $|z|\le R$ همگرایی یکنواخت است . ولی اگر در صفحه همگرایی یکنواخت می‌بود ، بازاء یک N صحیح و برای هر z میداشتیم $|z/N^2|<1$. انتخاب $z=N^2$ به تناقض مطلوب می‌انجامد .

همگرایی یکنواخت دنباله $\{f_n\}$ روی مجموعه E را اغلب می‌توان از همگرایی $\{f_n\}$ در نقطه‌یی مانند $z=z_0$ استنتاج نمود ، بدین ترتیب که نشان دهیم برای هر $z\in E$ نا ـ مساوی $|f_n(z)-f(z)| \le |f_n(z_0)-f(z_0)|$ برقرار است

اگر دنباله‌یی همگرای یکنواخت نباشد ، معمولا " یک "نقطه بد" موجود است که باید کشف کرد . در مثالهای ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ نقاط بد به ترتیب عبارت بودند از $z=0$ ، $z=0$ ، $z=1$ و $z=\infty$. برای هر یک از چنین نقاط z_0 ، عبارت $\lim_{z\to z_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(z))$ را نمی‌توان با عبارت زیر جایگزین کرد .

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{z\to z_0} f_n(z)\right).$$

بعنوان مثال در مثال ۲ :

$$\lim_{z\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nz}\right)=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+nz}\right)=1.$$

اهمیت همگرائی یکنواخت در این است که تغییر در تربیت حدیابی را مجاز می‌کند و این‌مطلب ، بنوبه‌خود ، موجب‌می‌شود که‌تابع حدی،اکثر خواص دنباله را برای خودمحفوظ بدارد .

قضیه ۶ـ۶. فرض‌کنیم $\{f_n\}$ روی E به تابع f همگرای یکنواخت است. اگر هر f_n در نقطه‌ای مانند $z_0 \in E$، پیوسته باشد، آنگاه تابع حدی f هم در z_0 پیوسته است. یعنی:

$$\lim_{z \to z_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(z)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{z \to z_0} f_n(z)\right).$$

اثبات ـ باید نشان داد که برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای هر z در E که در شرط $|z - z_0| < \delta$ صدق کند داشته باشیم $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ نامساوی زیر برای هر n برقرار است.

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \qquad (۴)$$

همـــگرایی یکنواخت $\{f_n\}$ ما را مجاز می‌کند که N ی مستقل از z انتخاب‌کنیم بطوری که:

$$|f(z) - f_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (z \in E).$$

با قرار دادن $n = N$ در (۴)، داریم:

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(z) - f_N(z_0)| + \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (۵)$$

از پـــیوســـتگی f_N در $z = z_0$ نتیجه می‌شود که برای z های باندازه کافی نزدیک به z_0 داریم:

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (۶)$$

باترکیب (۵) و (۶) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

تذکر ـ قضیه ۶ـ۶. یک شرط لازم، ولی‌نه کافی، را برای همگرایی یکنواخت، بیان می‌دارد. در مثال ۳، نشان دادیم که دنباله توابع پیوسته $\{z^n\}$ در ناحیه $|z| < 1$ به تابع $f(z) \equiv 0$ همگرای‌یکنواخت‌نیست. در حالی که در مثال ۲، ناپیوستگی تابع حدی در $z = 0$ همگرایی یکنواخت دنباله $\{1/(1 + nz)\}$ درهرمیدانی شامل مبداء را منتفی می‌سازد.

تعریف وبحث ماراجع به همگرایی یکنواخت برای‌توابع با مقادیر حقیقی ازیک‌متغیر حقیقی به قوت خود باقی می‌ماند. در واقع، همان نتایج را از چهار مثال قبل، با عوض کردن z به x و با تعویض ناحیه‌ها به‌فواصل‌متناظرشان، می‌توان بدست آورد. بعلاوه، در

همگرایی یکنواخت توابع حقیقی یک تعبیر هندسی جالب موجود است . اگر $\{f_n(x)\}$ روی مجموعه E به $f(x)$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه برای n باندازه کافی بزرگ داریم .

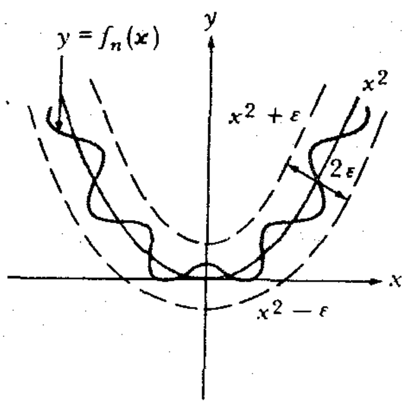
$$f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon \qquad \text{برای هر } x \text{ در } E$$

این بدان معنی است که یک نوار منحنی بعرض 2ε موجود است که نمودار تمام توابع $y=f_n(x)$ ، با $n>N$ در این نوار جای دارند ، و دوری هر یک از نمودارها از منحنی $y=f(x)$ ، هرگز بزرگتر از ε نیست .

مثال ــ فرض کنیم $f_n(x)=x^2+\sin nx/n$ داریم :

$$|f_n(x)-x^2| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n} \quad (x \text{ حقیقی})$$

و برای $n>1/\varepsilon$ ، $|f_n(x)-x^2|<\varepsilon$ بنابراین دنباله $\{f_n(x)\}$ روی مجموعه اعداد حقیقی همگرای یکنواخت به $f(x)=x^2$ است (ر . ک . شکل ۱) .



شکل ۱

بدون شک هیچ بحث همگرایی بدون محک کوشی کامل نخواهد شد . با بازگویی قضیه ۲ــ۱۰ برای توابع می‌بینیم که دنباله $\{f_n(z)\}$ روی E همگرای نقطه‌ای است اگر و فقط اگر برای هر $z_0 \in E$ ، $\{f_n(z_0)\}$ دنباله‌ای کوشی باشد . یعنی برای هر $z_0 \in E$ ، و هر $\varepsilon>0$ ، عدد صحیح $N=N(\varepsilon, z_0)$ موجود باشد که هر وقت $n, m > N(\varepsilon, z_0)$ آنگاه $|f_n(z_0)-f_m(z_0)|<\varepsilon$.

دنباله $\{f_n\}$ را روی E کوشی یکنواخت گوئیم اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح $N=N(\varepsilon)$ چنان متناظر گردد که برای هر $z \in E$ ، هر وقت $n, m > N(\varepsilon)$ ، آنگاه :

$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

قضیه ۶ـ۷. یک دنباله از توابع روی مجموعه E همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگرآن دنباله روی E کوشی یکنواخت باشد.

اثبات ــ فرض کنیم $\{f_n\}$ روی E به f همگرای یکنواخت باشد. دراین صورت برای هر $\varepsilon > 0$ مفروض

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{برای } n > N(\varepsilon) \text{ و برای هر } z \in E$$

ولی در این حالت، برای $n, m > N(\varepsilon)$ ، داریم:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_m(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

بنابراین، دنباله $\{f_n\}$ روی E کوشی یکنواخت است.

برعکس، فرض‌کنیم $\{f_n\}$ روی E کوشی‌یکنواخت‌است. به‌ویژه، برای‌هر $z_0 \in E$ دنباله $\{f_n(z_0)\}$ کوشی است. و بدین لحاظ $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه‌ای است می‌خواهیم نشان دهیم که این‌همگرایی یکنواخت است. برای $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ موجود است بطوری که برای هر $n, m > N$ و برای هر $z \in E$ داریم:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{۷}$$

با ثابت گرفتن $n(>N)$ و با تغییر دادن m، (۷) تبدیل به:

$$|f_n(z) - f(z)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{۸}$$

می‌گردد. چونکه (۸) برای هر $z \in E$ و هر $n > N(\varepsilon)$ برقرار است، همگرایی $\{f_n\}$ به f روی E یکنواخت است.

در بخش‌قبل، دیدیم‌که‌خواص دنباله‌های اعداد مختلط را می‌توان به‌عنوان‌خواصی برای رشته‌های اعداد مختلط بازگو کرد. مابقی این بخش منحصراً به این تبدیل از دنباله‌های توابع مختلط به رشته‌های توابع مختلط اختصاص دارد. همانطور که انتظار می‌رود، کار ما به موازات بخش قبل خواهد بود.

بازاء هر دنباله مفروض $\{f_n(z)\}$ که روی مجموعه E تعریف شده باشد، دنباله جدیدی از توابع $\{S_n(z)\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z). \tag{۹}$$

بـرای تمـام مقادیــر z که برایشان $\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ موجود است ، گوئیم رشتـه $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ همگراست و می‌نویسیم :

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

اگر $\{S_n(z)\}$ بر مجموعه E همگرای یکنواخت باشد ، آنگاه رشته $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ را روی E همگرای یکنواخت می‌نامیم بعلاوه رشته $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ همگرای مطلق است اگر $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ همگرا باشد .

با بازگو کردن محک کوشی ، داریم :

قضیه ۶ــ۸ . رشته $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی مجموعه E همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، عدد $N=N(\varepsilon)$ چنان متناظر شود که برای هر $z\in E$ داشته باشیم :

$$n>N(\varepsilon) \qquad (p=1,2,3,\ldots) \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right|<\varepsilon$$

اثبات ــ S_n را با (۹) تعریف می‌کنیم و قضیه ۶ــ۷ را به کار می‌بریم .

با استفاده از قضیه ۶ــ۸ می‌توان یک شرط کافی برای همگرایی یکنواخت اثبات نمود که به آزمون ــM وایراشتراس یا آزمون همگرایی مغلوب موسوم است .

قضیه ۶ــ۹ . فرض کنیم $\{M_n\}$ دنباله‌یی از اعداد حقیقی باشد ، و فرض کنیم برای هر $z\in E$ و هر n داشته باشیم $|f_n(z)|\le M_n$ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی مجموعه E ، همگرای یکنواخت (ومطلق) است .

اثبات ــ بازاء $\varepsilon>0$ مفروض عدد صحیح N موجود است که برای $n>N$ داریم :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k<\varepsilon \qquad (p=1,2,3,\ldots).$$

ولی

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k<\varepsilon.$$

اینک همگرایی یکنواخت نتیجه قضیه ۸ــ۶ و همگرایی مطلق از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود .

مثال ۱ــ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ برای $|z|<1$ همگرای مطلق و برای $|z|\le r<1$ همگرای

یکنواخت است .

اثبات ــ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \qquad (|z|<1),$$

و این همگرائی مطلق را ثابت می‌کند . همگرایی یکنواخت . برای $|z| \le r$ ، نتیجه آزمون ــM (قضیه ۶ــ۹) با $M_n = r^n$ می‌باشد .

هم چنین می‌توان نشان داد که این رشته همگرای یکنواخت نیست . با قرار دادن

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z},$$

دنباله $\{S_n(z)\}$ برای $|z|<1$ همگرای نقطه‌ای به $f(z) = z/(1-z)$ است . با انتخاب $z = 1 - 1/n$ ، داریم :

$$|S_{n-1}(z) - f(z)| = \left|\frac{z^n}{1-z}\right| = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

چون $(1-1/n)^n \to 1/e$ ، نتیجه می‌شود که برای n باندازه کافی بزرگ $|S_{n-1}(z) - f(z)| > n/3$. بنابراین ، همگرایی یکنواخت این رشته را نمی‌توان به قرص $|z|<1$ گسترش داد .

مثال ۲ــ رشته $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nz)/n^2$ بر خط حقیقی همگرای یکنواخت و مطلق است .

اثبات ــ چون برای z حقیقی داریم $|\cos nz| \le 1$ ، می‌توان قضیه ۶ــ۹ را با $M_n = 1/n^2$ بکارگرفت ونتیجه مطلوب رابدست آورد . بانوشتن $\cos nz = (e^{inz} + e^{-inz})/2$ خواننده می‌تواند تحقیق کند که با میل n به ∞ ، $\cos nz/n^2$ به 0 نمی‌گراید ، مگر اینکه z حقیقی باشد . از اینرو $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nz)/n^2$ همگراست اگر و تنها اگر z حقیقی باشد .

مثال ۳ــ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} 2z^2/(n^2+|z|)$ درصفحه همگرای مطلق ، و برای هر $R>0$ در $|z| \le R$ ، همگرای یکنواخت است .

اثبات ــ برای هر نقطه z_0 در صفحه ، داریم :

$$\frac{2|z_0^2|}{n^2+|z_0|} \le \frac{2|z_0^2|}{n^2}.$$

همگرای مطلق در صفحه ، نتیجه همگرایی $2|z_0|^2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ است وهمگرایی یکنواخت روی قرص $|z| \leq R$ از آزمون Mـ، با $M_n = 2R^2/n^2$ ، نتیجه می‌گردد .

مثال ۴ــ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ برای $\mathrm{Re}\ z > 1$ همگرای مطلق‌وبرای $\mathrm{Re}\ z \geq 1+\varepsilon$، $\varepsilon > 0$ همگرای یکنواخت است .

اثبات ــ برای $z = x + iy$ ، داریم $n^z = e^{z \log n} = e^{(x+iy)\log n}$ بنابراین :

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{e^{x \log n}} = \frac{1}{n^x},$$

و برای $x = \mathrm{Re}\ z > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

همگراست . همگرائی یکنواخت برای $\mathrm{Re}\ z \geq 1+\varepsilon$ ازآزمون Mـ با $M_n = 1/n^{1+\varepsilon}$ نتیجه می‌شود .

تذکر ــ رشته بالا ، که به تابع ریمان ــ زتا موسوم است ، و در نظریه‌اعداداز اهمیت عمده‌یی برخوردار است مفصلتر در فصل ۱۴ بررسی خواهد شد .

پرسش‌ها

۱ــ چه نوع دنباله‌هایی ازتوابع در صفحه همگرای یکنواخت‌اند ؟

۲ــ آیا دنباله‌یی از توابع بی‌کران می‌تواند همگرای یکنواخت باشد ؟

۳ــ چگونه تعریف می‌کنید که : " $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به بی‌نهایت است " ؟

۴ــ آیا می‌شود که دنباله‌یی‌از توابع روی هر زیر مجموعه فشرده از یک‌ناحیه‌همگرای یکنواخت باشد ولی روی خود آن ناحیه همگرای یکنواخت نباشد ؟

۵ــ آیامی‌شوددنباله‌یی‌ازتوابع روی هرزیر مجموعه فشرده یک ناحیه همگرای‌نقطه‌ای باشد ولی در آن ناحیه همگرای نقطه‌ای نباشد ؟

۶ــ آیا می‌شود دنباله‌یی از توابع ناپیوسته همگرای یکنواخت به یک تابع پیوسته باشد ؟

۷ــ آیا می‌شود همگرایی یک دنباله ازتوابع ، در یک‌ناحیه یکنواخت باشدولی مطلق نباشد ؟ مطلق باشد و یکنواخت نباشد ؟

۸ــ فرض‌کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح N موجود است بطوری که برای هر

z در E داریم $|f_N(z)-f(z)| < \varepsilon$ آیا $\{f_n\}$ به f در E همگرای یکنواخت است؟ آیا $\{f_n\}$ در E همگرای نقطه‌ای است؟

۹ــ چگونه می‌توان قضیه ۶ــ۹ را به صورت قضیه‌یی برای دنباله‌ها بیان کرد؟

۱۰ــ اگر دنباله‌یی از توابع مشتق‌پذیر همگرای یکنواخت باشد، آیا تابع حدی هم مشتق‌پذیر است؟

تمرینها

۱ــ نشان دهید $f_n = u_n + iv_n$ به $f = u + iv$ همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر $\{u_n\}$ همگرای یکنواخت به u و $\{v_n\}$ همگرای یکنواخت به v باشد.

۲ــ فرض‌کنیم $\{f_n\}$ به f روی E همگرای یکنواخت و $\{g_n\}$ به g روی E همگرای یکنواخت باشد.

الف) نشان دهید $\{f_n + g_n\}$ به $f + g$ روی E همگرای یکنواخت است.

ب) اگر به علاوه برای هر $z \in E$ و هر n، $|f_n| \leq M$ و $|g_n| \leq M$. نشان دهید $\{f_n g_n\}$ به fg روی E همگرای یکنواخت است.

۳ــ فرض‌کنیم $f(z)$ روی مجموعه E بی‌کران است. فرض‌کنیم برای هر n، $f_n(z) \equiv f(z)$ و گیریم $g_n(z) = 1/n$.

الف) نشان دهید $f_n(z)$ و $g_n(z)$ هر دو روی مجموعه E همگرای یکنواخت‌اند.

ب) نشان دهید $f_n(z)g_n(z)$ همگرای نقطه‌ای است ولی روی E همگرای یکنواخت نیست.

۴ــ نشان دهید $\{f_n\}$ بر یک مجموعه متناهی همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر همگرای نقطه‌ای باشد.

۵ــ تعمیم زیر از قضیه ۶ــ۶ را ثابت کنید: فرض کنیم $\{f_n\}$ به f روی E همگرای یکنواخت باشد، و برای تعدادی نامتناهی n، f_n در $z_0 \in E$، پیوسته باشد. در این صورت تابع حدی f هم در z_0 پیوسته است.

۶ــ فرض کنیم $\{f_n\}$ روی مجموعه فشرده E به f همگرای یکنواخت است و هر f_n روی E پیوسته یکنواخت است، ثابت کنید f روی E پیوسته یکنواخت است. آیا می‌توان فرض فشردگی را حذف کرد؟

۷ــ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی E همگرای یکنواخت باشد، نشان دهید که $\{f_n(z)\}$ روی E به صفر همگرای یکنواخت است. آیا معکوس این این مطلب درست است؟

۸ــ فرض کنیم $E = \{z : |z| \leq r\} \cup \{z : r \leq z \leq 1$ و z حقیقی $\}$ و $0 < r < 1$ نشان دهید، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^n/n)$ بر E یکنواخت است ولی مطلق نیست.

۹ـ مطلوبست تعیین جاهایی که دنباله‌های زیر همگرای نقطه‌ای و همگرای یکنواخت‌اند.

الف) $\dfrac{z}{z^2+n^2}$ ب) ze^{-nz}

پ) $\dfrac{e^{nz}}{n}$ ت) $\dfrac{1}{1+z^n}$

۱۰ـ نشان دهید که رشته‌های زیر روی مجموعه‌های یاد شده همگرای یکنواخت‌اند.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{z^{2n}+1}$ برای $|z|\leq r<1$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z^2-1)^n}$ برای $|z|\geq r>\sqrt{2}$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z^2-1)^n}$ برای $\operatorname{Re} z\geq 2$

ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^2+1}{n^{z+1}}$ برای $\varepsilon\leq \operatorname{Re} z\leq R<\infty$

ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n$ برای $\operatorname{Re} z\geq \varepsilon>0$

۱۱ـ در چه ناحیه‌هایی رشته‌های زیر همگرای یکنواخت‌اند؟ همگرای مطلق‌اند؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)z^n$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^2}{(1+z^2)^n}$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{n^2-z^2}$ ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+z^n}$

ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{nz^n}$

۶ـ۳. رشته‌های ماکلورن وتیلر

متاسفانه دانستن اینکه رشته دلخواه $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ در نقطه $z=z_0$ همگراست (یا واگراست)، هیچگونه آگاهی در مورد رشته در دیگر نقاط بما نمی‌دهد، با اینحال، می‌توانیم دنباله‌های بخصوصی از $\{f_n(z)\}$ را در نظر بگیریم و رده‌یی از توابع رابیابیم. که برای آنها رفتار رشته در یک نقطه، خواص آن در یک ناحیه را مشخص کند. این رده نقش عمده‌یی در نظریه توابع تحلیلی دارد.

فرض کنیم $f_n(z)=a_n(z-b)^n$، که a_n و b ثابت‌های مختلط‌اند. عبارت

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-b)^n, \tag{۱۰}$$

به رشته‌ی توانی در $z-b$ موسوم است. اگر $b=0$، (۱۰) به

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad (۱۱)$$

رشته‌ای‌توانی در z تبدیل می‌گردد. توجه ما به خواص رشته‌های توانی تعریف‌شده با (۱۱) معطوف خواهد بود. با تعویض z با $z-b$، این خواص به سادگی به رشته‌های تعریف شده با (۱۰) منتقل می‌گردند.

قضیه ۶ـ۱۰. فرض کنیم‌که رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $z=z_0$ همگراست. آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$ برای $|z|<|z_0|$ همگرا خواهد بود (یعنی، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای $|z|<|z_0|$ همگرای مطلق است).

اثبات ـ چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ همگرا می‌باشد داریم $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ بنابراین عدد ثابت M موجود است که برای هر n، $|a_n z_0^n| \le M$ و

$$|a_n||z|^n = \left|a_n z_0^n\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \qquad (۱۲)$$

برای $|z|<|z_0|$، رشته‌هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} |z/z_0|^n$ همگراست. ازاین رو به‌موجب (۱۲)،

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1-\left|\frac{z}{z_0}\right|} \qquad (|z|<|z_0|).$$

فرع ۱ـ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $z=z_0$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای $|z|>|z_0|$ واگراست.

اثبات ـ همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای‌یک نقطه z_1 با $|z_1|>|z_0|$، موجب همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ می‌گردد، که با فرض ما متناقض است.

فرع ۲ـ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای همه مقادیر حقیقی z همگرا باشد، آنگاه این رشته برای همه مقادیر مختلط همگراست.

اثبات ـ فرض‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ بازاء یک مقدار مختلط z_0، واگرا باشد، بموجب فرع ۱ برای $R>|z_0|$ رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ واگراست که با فرض ما متناقص است.

از قضیه ۶ـ۱۰ می‌توان برای تعیین کران دقیقی برای ناحیه‌یی که یک رشته توانی در آن همگراست استفاده نمود.

قضیه ۶ـ۱۱. به هر رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، یک عدد $R,\ 0 \le R \le \infty$ متناظر می‌شود بطوری که رشته:

(۱) در $|z| < R$ همگرای مطلق است.

(۲) در $|z| \le R_0 < R$ همگرای یکنواخت است.

(۳) برای $|z| > R$ واگراست.

اثبات ــ اگر رشته برای تمام مقادیر مخالف صفر z واگرا باشد، آنگاه روشن است که $R = 0$. اگر رشته برای یک مقدار مخالف صفری همگرا باشد، قرار می‌دهیم:

$$S = \left\{ r : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \text{ رشته برای } |z| < r \text{ همگرا باشد} \right\},$$

و تعریف می‌کنیم:

$$R = \begin{cases} \text{lub } S, & \text{اگر } S \text{ کراندار باشد} \\ \infty, & S \text{ بی‌کران} \end{cases}$$

می‌خواهیم نشان دهیم، که این R در شرایط (۱) و (۲) و (۳) صدق می‌کند.

برای هر نقطه z_0 ، $|z_0| < R$ عدد حقیقی ρ را می‌توان چنان یافت که:

$$|z_0| < \rho < R. \tag{۱۳}$$

عدد ρ می‌بایست در S باشد؛ زیرا در غیراین صورت R نمی‌توانست کوچکترین کران بالای آن گردد. بنابراین به موجب (۱۳) و تعریف مجموعه S ، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z_0|^n$ همگراست. چون z_0 دلخواه بود (۱) ثابت می‌شود.

همگرایی یکنواخت رشته در ناحیه $|z| \le R_0 < R$ از (۱) و آزمون ـM با انتخاب $M_n = |a_n| R_0^n$ نتیجه می‌شود و بدین ترتیب (۲) ثابت می‌گردد.

در پایان، همگرایی رشته در نقطه z_1 با $|z_1| > R,$ ، بنا به قضیه ۶ـ۱۰، همگرایی مطلق به ازاء $|z| < |z_1|$ را ایجاب می‌کرد. ولی در این صورت $|z_1|$ عنصری از S می‌شد؛ و این با فرض اینکه R یک کران بالای مجموعه S است متناقض است. بدین‌ترتیب (۳) ثابت می‌شود.

عدد R را که در قضیه ۶ـ۱۱ تعریف شد، شعاع همگرایی می‌نامند. یک رشته توانی همیشه درون دایره $|z| = R$ همگراست و خارج آن واگراست. ولی هیچگونه اصل عمومی که

رفتاررشته راروی این دایره مشخص کند موجود نیست . ممکن است در همه و یا بعضی‌نقاط روی دایره همگرا باشد و یا در هیچیک ازنقاط دایره همگرا نباشد .

مثال ۱ـ رشته $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ برای $|z|<1$ همگرا و در همه جای دایره همگرایی آن، $|z|=1$ ، واگراست . باید توجه داشت که رشته برقرص باز $|z|<1$ همگرای یکنواخت نیست .

مثال ۲ـ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ در $z=-1$ همگراست و در $z=1$ واگراست . بنابراین شعاع همگرایی آن می‌بایست $R=1$ باشد (چرا؟)

مثال ۳ـ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ برای $|z|\leq 1$ همگرای مطلق (ویکنواخت) است .اگر $z=1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ آنگاه $(z^n/n^2)\to\infty$. بنابراین شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^2)$ برابر $R=1$ می‌باشد .

مثال ۴ـ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ برای هر مقدار مختلط مخالف صفر نمی‌تواند همگرا باشد زیرا که $(z\neq 0)$ $|nz|^n\to\infty$. بنابراین $R=0$.

مثال ۵ـ رشته $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^n)$ همه‌جاهمگراست .برای اثبات، $z=z_0$ را انتخاب می‌کنیم . در این صورت برای $N>|z_0|$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{z_0^n}{n^n}\right|<\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{z_0}{N}\right|^n=\frac{|z_0/N|^N}{1-|z_0/N|},$$

و همگرایی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty}(z_0^n/n^n)$ نتیجه می‌گردد ، چون z_0 دلخواه بود $R=\infty$. به موجب قضیه ۶ـ۱۱ رشته بر همه زیر مجموعه‌های فشرده صفحه همگرای یکنواخت است .

تاکنون شعاعهای همگرایی رشته‌های توانی گوناگونی را مشخص نمودیم و تنها روش مورد استفاده که گاهی هم پرزحمت بود آزمایش نقاط متمایز جهت همگرایی و واگرایی و سپس‌بکارگرفتن قضیه ۶ـ۱۰ بوده است . ولی یک رشته توانی با ضرایبش تعریف می‌گردد، و تنها این ضرایب‌اندکه مشخص‌کننده شعاع همگرایی می‌باشند .

قضیه ۶ـ۱۲ . شعاع همگرایی رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر با $R=1/A$ است که

در آن $A = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. اگر $A = 0$ آنگاه $R = \infty$ ؛ اگر $A = \infty$ آنگاه $R = 0$

اثبات ــ برای هر نقطه z_0 ، داریم:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z_0^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} |z_0| = |z_0| A.$$

بـه موجـب قضیـه ۶ــ۵ ، رشتـه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ ، به هنگامی که $|z_0|A < 1$ ، یعنی ، برای $|z_0| < R$ ، همگرای مطلق است و بازاء $|z_0|A > 1$. یعنی به ازاء $|z_0| > R$ واگراست. با توجه به قضیه ۶ــ۱۱ ، شعاع همگرایی $R = 1/A$.

هنگامیکه $A = 0$ ، رشته همه‌جا همگراست؛ وهنگامیکه $A = \infty$ رشته تنها در $z = 0$ همگراست .

فرض کنیم رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R است . می‌خواهیم تـا سرحد امکان رفتار تابع $f(z)$ را ، که با این رشته توانی تعریف می‌شود ، در نقاط درونی دایره همگرائیش توصیف نماییم . بررسی پیوستگی $f(z)$ به ازاء $|z| < R$ به صورت ضمنی در کار ما نهفته است . برای اینکه نشان دهیم تابع در نقطه دلخـواه z_0 ، $|z_0| < R$ پیوسته‌است ، به‌این‌نکته‌توجه‌می‌کنیم‌که (به‌موجب‌قضیه‌۶ــ۱۱) دنباله $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ در قرص $|z| \le |R'|$ ، $|z_0| < R' < R$ به طور یکنواخت به $f(z)$ میل‌می‌کند . چون $S_n(z)$ برای هر n ، در $z = z_0$ پیوسته است . با استفاده از قضیه ۶ــ۶ ، پیوستگی تابع حـدی $f(z)$ در $z = z_0$ به ثبوت می‌رسد .

اثبات مشتق‌پذیری $f(z)$ به این سرراستی نیست . ممکن است انتظار داشته باشیم که مشتقات یک دنباله همگرای یکنواخت از توابع مشتق‌پذیر به‌یک‌تابع مشتق‌پذیربگراید . در حالیکه ، برای دنباله $f_n(z) = (\sin nz)/\sqrt{n}$ ، گواینکه $\{f_n(z)\}$ همگرای‌یکنواخت بر خط حقیقی است ولی دنباله $f_n'(z) = \sqrt{n} \cos nz$ به ازاء هیچ مقدار حقیقی همگرا نیست .

خوشبختانه ، این رفتار غیرعادی برای دنباله حاصلجمع های جزیی یک رشته توانی نمی‌تواند رخ دهد . به یک معنی ، یک رشته توانی را می‌توان به عنوان یک چند جمله‌یـی از درجه نامتناهی تصور کرد؛ در واقع ، یک‌چند جمله‌یی را می‌توان به صورت یک رشتـه توانی تعریف کرد که همه ضرایب آن ، مگر یک تعداد متناهی ، صفر باشند . مشتق یک‌چند جمله‌یی $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ برابر است با:

$$P_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

قضیه‌یی مشابه همین مطلب برای رشته‌های توانی ثابت می‌کنیم . ولی ابتداء به لم

زیر نیازمندیم

لم ــ دو رشته توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

دارای یک شعاع همگرایی هستند.

اثبات ــ با استفاده از خواص حد زبرین (بخش ۶ــ۱، تمرین ۹) داریم:

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

و اینک لم از قضیه ۶ــ۱۲ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶ــ۱۳. اگر تابع $f(z)$ حد نقطه‌ای رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z|<R$ باشد آنگاه $f(z)$ در $|z|<R$ تحلیلی است، و $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$

اثبات ــ اگر z_0، $|z_0|<R$ مفروض باشد، نشان خواهیم داد که هر وقت $|z-z_0|<\delta=\delta(\varepsilon, z_0)$ آنگاه:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}\right| < \varepsilon$$

برای z پس نزدیک به z_0، عدد حقیقی ρ چنان موجود است که در نامساویهای زیر صدق کند.

$$|z_0| \le \rho, \qquad |z| \le \rho \qquad (\rho < R). \tag{۱۴}$$

برای هر عدد صحیح N می‌نویسیم:

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

و

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}$$
$$= \frac{P_N(z)-P_N(z_0)}{z-z_0} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}.$$

باتوجه به اینکه $P_N'(z_0) = \sum_{n=1}^{N} na_n z_0^{n-1}$ داریم:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}\right| \quad (۱۵)$$

$$=\left|\frac{P_N(z)-P_N(z_0)}{z-z_0}-P_N'(z_0)+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}-\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}\right|$$

$$\leq\left|\frac{P_N(z)-P_N(z_0)}{z-z_0}-P_N'(z_0)\right|$$

$$+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}\right|.$$

سه عبارت آخری را به ترتیب‌با A_1 و A_2 و A_3 می‌نمایانیم . ابتداءً N را بس بزرگ انتخاب می‌کنیم تا $A_2+A_3<\varepsilon/2$ و سپس δ را بس‌کوچک انتخاب می‌کنیم تا $A_1<\varepsilon/2$ از (۱۴) داریم :

$$\left|\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}\right|=|z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1}| \quad (۱۶)$$

$$\leq|z|^{n-1}+|z|^{n-2}|z_0|+\cdots+|z_0|^{n-1}\leq n\rho^{n-1}.$$

به موجب لـم فـوق $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ همگراست و به موجب محک‌کوشی عدد صحیح مانند N می‌توان یافت که :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}<\frac{\varepsilon}{4}. \quad (۱۷)$$

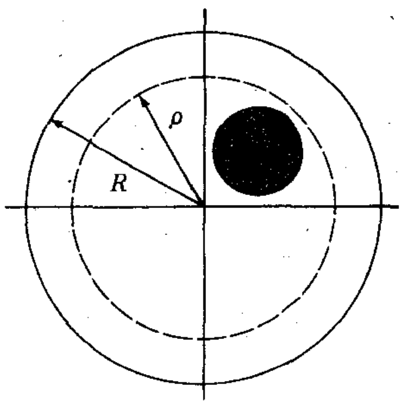
با توجه به (۱۷) و با جایگزینی (۱۶) در (۱۵) حاصل می‌شود

$$A_2+A_3\leq 2\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (۱۸)$$

از مشتق‌پذیری چند جمله‌یی $P_N(z)$ در $z=z_0$ نتیجه می‌شود که :

(۱۹) برای $|z-z_0|<\delta$ داریم $A_1<\frac{\varepsilon}{2}$

شکل ۲



اگر (۱۸) و (۱۹) را ترکیب نمائیم ، قضیه از (۱۵) نتیجه می‌گردد .

تذکر ۱ــ یک‌رشته‌توانی را همیشه می‌توان بصورت یک چند جمله‌یی بعلاوه‌یک "دم" نوشت . اساس این اثبات بر این بود که نشان دهیم این دم بی‌اثر است .

تذکر ۲ــ قضیه ۶ــ۱۲ مبین‌آنست هر تابعی که با رشته توانی‌اش تعریف شود درون دایره همگرائیش تحلیلی است . در فصل ۸ ، معکوس این نیز اثبات می‌گردد . یعنی‌هرتابع که در یک قرص تحلیلی باشد ، حد نقطه‌ای یک رشته توانی است .

بررسی قضیه ۶ــ۱۲ آشکارمیسازد که خیلی بیش از آنچه در ابتداء قصد اثبات‌داشتیم اثبات کرده‌ایم . نشان دادیم که رشته توانی :

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

دارای مشتقی به صورت :

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\cdots$$

است که این‌به‌نوبه خود یک رشته توانی است که شعاع همگرایی آن برابر با شعاع همگرایی $f(z)$ است . از این رو قضیه ۶ــ۱۳ را می‌توان‌مکرر به کاربست و نتیجه گرفت :

$$\begin{aligned} f''(z)&=2a_2+6a_3z+12a_4z^2+20a_5z^3+\cdots,\\ f'''(z)&=6a_3+24a_4z+60a_5z^2+\cdots,\\ &\vdots\\ f^{(k)}(z)&=k!\,a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots, \end{aligned} \tag{۲۰}$$

هر یک از روابط فوق درون دایره همگرایی $f(z)$ برقرارند . با قرار دادن $z=0$ در (۲۰) حاصل می‌گردد :

$$f^{(k)}(0)=k!\,a_k. \tag{۲۱}$$

این نتایج را در قضیه زیر جمعبندی می‌کنیم :

قضیه ۶ــ۱۴ . اگر تابع $f(z)$ حد نقطه‌یی یک رشته توانی در یک‌همسایگی از مبداء باشد ، آنگاه $f(z)$ در هر یک از نقاط درون دایره همگرایی از همه مراتب مشتق دارد . بعلاوه ، ضرایب‌رشته‌های‌توانی‌منحصربفردبوده و به وسیله رابطه (۲۱) به مشتقات $f(z)$ در مبداء مربوط می‌شوند .

نمایش

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n$$

به بسط $f(z)$ به رشته ماکلورن موسوم است

تمام نتایج حاصل در مورد رشته‌های توانی را به‌آسانی می‌توان برای بسطهایی با توانهای $z-b$، که در آن b هر عددی مختلط است، بازگو کرد. به عنوان مثال، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ درون دایره

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}} \quad \text{که} \quad |z-b|<R$$

به تابع تحلیلی $f(z)$ همگرای مطلق است. بعلاوه، بسط رشته تیلر

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}\,(z-b)^n$$

برای $|z-b|<R$ برقرار است.

پرسش‌ها

۱ــ فرض کنید یک رشته توانی در $z=z_0$ همگرا و در $z=z_1$ واگراست. چه ارتباطی میان z_0 و z_1 موجود است؟

۲ــ فرض کنید یک رشته توانی در همه اعداد صحیح همگراست. این رشته نمایش‌ــ دهنده چگونه تابعی است؟

۳ــ آیا مجموعه S، تعریف شده در قضیه ۶ــ۱۱، مجموعهٔ بسته‌یی است؟

۴ــ چه‌وقت نواحی همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت یک رشته توانی بر همدیگر منطبق می‌شوند؟

۵ــ خواص‌همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$ راچگونه می‌توان‌مقایسه‌کرد؟

۶ــ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراباشد، در مورد شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ چه می‌توان‌گفت؟

۷ــ رشته‌های توانی که دارای شعاع همگرایی $R=0$ یا $R=\infty$ اند در چه زمینه‌هایی با دیگر رشته‌های توانی تفاوت دارند؟

۸ــ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌یی از توابع مشتق‌پذیر است، و $\{f'_n\}$ بر مجموعه یی مانند E به یک تابع مشتق‌پذیر همگرای یکنواخت است. آیا می‌بایست $\{f_n\}$ بر E همگرا باشد؟

۹ــ در مورد حاصلجمع و حاصلضرب رشته‌های توانی چه می‌توان گفت؟

۱۰ــ کدام دسته‌از توابع تحلیلی را می‌توان نشان داد که دارای نمایش‌رشته توانی

می‌باشند ؟

۱۱ـ آیا قضایای این بخش برای رشته‌های توانی حقیقی برقرارند ؟

تمرینها

۱ـ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی R باشد . نشان دهید که دنباله $\{a_n z_0^n\}$ برای $|z_0| > R$ ، بی‌کران است .

۲ـ (الف) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ همگرا و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ واگرا باشد ، و $|z_1| = |z_2|$ ، نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = |z_1|$ است .

(ب) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراو $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ واگراباشد ، نشان‌دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ میباشد .

۳ـ فرض کنیم $|a_n|$ یک دنباله نزولی است . نشان‌دهید ، شعاع‌همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ حداقل 1 است .

۴ـ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در یک دنباله بیکران از نقاط همگرا باشد ، نشان‌دهید این رشته توانی همه جا همگراست .

۵ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌یی از اعداد صحیح است . ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یا یک تابع تام است و یا شعاع همگرایی آن حداکثر یک میباشد .

۶ـ نشان دهید یک رشته توانی بر هر زیر مجموعه فشرده درون دایره همگرائیش ، همگرای یکنواخت است .

۷ـ فرض‌کنید $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = R$ نشان‌دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R است .

۸ـ نشان دهید که شعاع همگرائی هر رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر است با $R = \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}$.

۹ـ نشان دهید برای هر عدد صحیح k ، $\sum_{n=1}^{\infty} (n^k/n^{\log n}) z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ می‌باشد .

۱۰ـ شعاع همگرایی رشته‌های توانی زیر را بیابید .

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n} z^n.$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^k + a^n) z^n.$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 1}{n} z^n.$ ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$

ث) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 3i^n}{2n + 1} (z-2)^n.$

۱۱ــ شعاع همگرایی رشته‌های توانی زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n n^k}.$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+4n} z^{2n}.$

پ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n^2}}.$ ت) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}.$

ث) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} z^n.$

۱۲ــ فرض‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌یی از اعداد مختلط است که حاصلجمع‌های جزیی‌آن $\sum_{i=1}^{n} a_i$ کرانداراست. اگر $\{b_n\}$ دنباله‌یی حقیقی باشد که یکنوا به 0 نزول کند، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست (راهنمایی: فرض کنید $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ و تساوی $\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n} (s_i - s_{i-1}) b_i$.) را در نظر بگیرید).

۱۳ــ (الف) نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n)$ بر دایره $|z| = 1$ همه جا مگر در $z = 1$ همگراست.

(ب) نشان دهید برای $|z_1| = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)(z/z_1)^n$ بر دایره واحد، همه جا، مگر در $z = z_1$ همگراست.

(پ) فرض‌کنید $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_p| = 1$ نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{z_1^n} + \cdots + \frac{1}{z_p^n} \right) z^n$$

بر دایره واحد همه‌جا مگر در نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_p$ همگراست.

۱۴ــ بسط های تیلر چند جمله‌یی $P(z) = z^3 + 3z^2 - 2z + 1$ را برحسب توانهای زیر بنویسید:

الف) $z-1$ ب) $z+2.$ پ) $z-i.$

۶ــ۴. عملیات بر رشته‌های توانی

مطالعه ما در مورد رشته‌های توانی بر محور سه سئوال زیر دور زده است.

(۱) برای چه مقادیر z، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$ همگراست؟

(۲) تابع $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = f(z)$ در نقاطی که رشته همگراست واجد چه خواصی ممکن است باشد؟

(۳) تحت چه شرایطی می‌توان تابع $f(z)$ را در یک همسایگی یک نقطه با رشته توانی نمایش داد؟

دو سئوال اول تقریبا" بطور کامل حل شده‌اند. رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ یا همه جاهمگراست، یا تنها در $z=b$ همگراست ویا اینکه یک دایره همگرایی موجود است که رشته در درون آن همگرای مطلق و در خارج آن واگراست. تابع $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ در درون دایره همگرایی تحلیلی است و از تمام مراتب مشتق دارد. تنها رفتار تابع بر دایره بعنوان معما باقی می‌ماند.

سئوال سوم تاکنون به طور کامل مورد بحث قرار نگرفته است. می‌دانیم که $f(z)$ را نمی‌توان در یک همسایگی یک نقطه با یک رشته توانی نمایش داد، مگر این که در هر یک از نقاط این همسایگی دارای مشتق از تمام مراتب باشد. بعلاوه، اگر $f(z)$ در یک همسایگی $z=b$ دارای نمایش رشته توانی باشد، آنگاه این نمایش منحصربفرد است وضرایب آن توسط رابطه $\sum_{n=0}^{\infty}(f^{(n)}(b)/n!)(z-b)^n$ با مشتقات تابع در $z=b$ مربوط می‌شوند، ولی ماتاکنون محکی نداریم که وجود بسط رشته توانی را تضمین نماید.

به عنوان مثال، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots.$$

ابتداء ثابت می‌کنیم که $f(z)$ تام است. با توجه به قضیه ۶ـ۱۳ کافی است نشان دهیم که $(n!)^{1/n}\to\infty$ از نامساوی

$$n!\geq n(n-1)\cdots\left(n-\frac{n}{2}\right)\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2},$$

شروع می‌کنیم و از طرفین ریشه n ام می‌گیریم تا حاصل شود

$$(n!)^{1/n}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}\to\infty.$$

بنابراین $f(z)$ همه جا تحلیلی است، بعلاوه $f(0)=1$ و، به موجب قضیه ۶ـ۱۳ برای‌هر z

$$f'(z)=f(z)$$

دراین لحظه‌ظن قوی بر این خواهد بود که $f(z)=e^z$. در واقع، اگر e^z نمایش رشته توانی داشته باشد، آنگاه

$$f(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \qquad (۲۲)$$

برای اینکه صحت (۲۲) را بیش از این باور کنیم باید توجه داشته باشیم که برای همه x های حقیقی داریم $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n$ این مطلب در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با استفاده از فرمول تیلرباباقیمانده‌در (۳) ثابت‌شده‌است.

یعنی که:

$$f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),$$

در آن $R_n(x)$ برحسب یک انتگرال حقیقی تعریف می‌شود و این انتگرال با میل n به ∞ به صفر می‌گراید.

اثبات (۲۲) در مورد z مختلط تا بررسی نظریه انتگرال مختلط به‌تعویق می‌افتد، ولی کم حوصله‌ترین خواننده هم ترجیح می‌دهد که چنین انتظاری بکشد. نه تنها ثابت خواهیم کرد که همگی همانندیهای رشته توانی حقیقی، از قبیل:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

در صفحه مختلط هم برقرارند، بلکه معکوسی از قضیه ۶ـ۱۳ را نیز ثابت خواهیم کرد. یعنی ثابت می‌کنیم که هر تابع تحلیلی یک بسط رشته تیلر دارد. به ویژه، اگر $f(z)$ یک تابع تام باشد، نمایش آن به رشته تیلر

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n$$

برای همه اعداد ثابت مختلط b و z برقرار است.

ازاین‌نظرکه مطلب فوق در متغیر حقیقی مشابهی ندارد، بیشتر موجب شگفتی است.

مثال ۱ـ تابع $f(x)=x|x|$ برای همه x های حقیقی مشتق‌پذیر است، ولی چون $f''(0)$ موجود نیست قابل بسط به رشته ماکلورن نمی‌باشد.

مثال ۲ـ تابع $f(x)=1/(1+x^2)$ برای همه x های حقیقی دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، در حالی که بسط ماکلورن آن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

تنها در فاصله حقیقی $(-1,1)$ برقرار است. ظاهرا" در ماهیت این تابع چیزی نیست که موجب این محدودیت باشد. ولی با جایگزین کردن x با متغیر مختلط z،

می‌بینیم که تابع $f(z) = 1/(1+z^2)$ در $z = \pm i$ تحلیلی نیست. و همین‌مطلب مانع همگرایی یک رشته ماکلورن آن در خارج دایره $|z| = 1$ می‌شود. بویژه‌برای‌مقادیر حقیقی z این رشته درخارج فاصله $[-1, 1]$ نمی‌تواند همگرا باشد.

مثال ۳ تابع

تابع
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

برای‌همه‌مقادیرحقیقی، دارای‌مشتق از تمام مراتب است. چون برای هر عددصحیح n، $f^{(n)}(0) = 0$، داریم: $\sum_{n=0}^{\infty}(f^{(n)}(0)/n!)x^n \equiv 0$ بنابراین رشته ماکلورن آن، تابع را تنها در مبداء نمایش می‌دهد.

بار دیگر، به توابع متغیر مختلط باز گردیم، حاصلجمع دو چند جمله‌یی ازدرجه n. یک چند جمله‌یی از درجه حداکثر n است و ضرایب آن از جمع کردن ضرایب جمله به جمله تشکیل می‌شود، یعنی:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n} b_k z^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^k.$$

حاصلضرب دو چند جمله‌یی از درجه n، یک چند جمله‌یی از درجه $2n$ است. ولی ارتباط میان ضرایب چندان ساده نیست. داریم:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)&(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 \\ &\quad + \cdots + a_n b_n z^{2n}.\end{aligned}$$

به عبارت دقیق‌تر

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k,$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_k &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 \\ &= \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}. \end{aligned}$$

اگربدانیم‌که‌دوتابع دارای رشته‌های توانی هستند، آنگاه اطلاعات‌در مورد حاصلجمع و حاصلضرب آنها قابل حصول است.

قضیه۶ـ۱۵ . فرض‌کنیم $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ به ترتیب دارای شعاعهای همگرایی R_1 و R_2 باشند . در این صورت $f(z)+g(z)$ و $f(z)g(z)$ دارای نمایش‌هایی به رشته توانی است که شعاع همگرایی آنها حداقل $R=\min\{R_1, R_2\}$ است .

اثبات ــ قرار دهیم :

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{و} \qquad T_n(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k.$$

در این صورت

$$S_n(z)+T_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)z^k$$

و

$$S_n(z)\,T_n(z)=\sum_{k=0}^{2n} c_k z^k,$$

که $c_k=\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$. برای هر z_0 . با $|z_0|<R$ داریم :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0)=f(z_0) \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(z_0)=g(z_0).$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(z_0)+T_n(z_0))=f(z_0)+g(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z_0^n$$

و

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z_0)\,T_n(z_0)=f(z_0)g(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

چون z_0 اختیاری بود ، هر دو رشته در $|z|<R$ همگرا هستند وبدین ترتیب اثبات تمام است .

تذکر ــ شعاعهای همگرایی برای $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ درواقع ممکن است بزرگتر از $\min\{R_1, R_2\}$ باشد ، اگر $a_n\equiv 1$ و $b_n\equiv -1$ ، آنگاه $R_1=R_2=1$ ولی

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-1)z^n\equiv 0,$$

و رشته برای همه مقادیر z ، همگراست . اگر

$$a_n=\begin{cases}2, & n=0,\\ 2^n, & n\ge 1,\end{cases} \qquad \text{و} \qquad b_n=\begin{cases}-1, & n=0,\\ 1, & n\ge 1,\end{cases}$$

آنگاه $R_1 = \frac{1}{2}$ و $R_2 = 1$. درحالی که برای $n \geq 1$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

$$= 2 - 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 - 2^n + \frac{2 - 2^n}{1 - 2} = 0.$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 = a_0 b_0 = -2,$$

و رشته برای همه z ها همگراست . قابل توجه است‌که

$$f(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n = 2 + \frac{2z}{1 - 2z} = \frac{2(1 - z)}{1 - 2z} \qquad \left(|z| < \frac{1}{2}\right)$$

و

$$g(z) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = -1 + \frac{z}{1 - z} = -\frac{(1 - 2z)}{1 - z} \qquad (|z| < 1).$$

اصولا " تنها تابعی که تاکنون بسط ماکلورن آن "به شکل بسته‌یی" برایمان شناخته شده است ، رشته هندسی است :

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1).$$

برای هر عدد مختلط مخالف صفر a ، این رابطه به همانندی زیر منجر می‌گردد :

$$\frac{1}{a - z} = \frac{1}{a(1 - z/a)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} z^n \qquad (|z| < |a|).$$

هم‌چنین برای دو عدد مختلط متمایز a و b داریم :

$$\frac{1}{(z - a)(z - b)} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b}\right)$$

$$= \frac{1}{a - b} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n\right]$$

که در ناحیه زیر برقرار است :

$$|z| < R = \min\{|a|, |b|\}. \qquad (۲۳)$$

یک بسط ماکلورن برای $1/(1 - z)^2$ را می‌توان به دو روش یافت :

روش ۱ــ با قرار دادن $a_n \equiv b_n \equiv 1$ در اثبات قضیه ۶ــ۱۴ ، داریم :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n \qquad (|z| < 1).$$

روش ۲ــ فرض‌کنیم

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1).$$

بموجب قضیه ۶ــ۱۳

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \qquad (|z| < 1). \tag{۲۴}$$

معمولا" تشخیص این که یک رشته مفروض همگراست یا نه بمراتب ساده‌تر از یافتن مقدار یک رشته همگرای معلوم است. به عنوان مثال هر دانشجوی درس‌حساب‌ودیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌تواند نشان دهد، رشته $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^3)$ همگراست. ولی‌باهوشترین ریاضیدانهای جهان تاکنون نتوانسته‌اند روشی جهت یافتن حاصلجمع آن بیابند. با این حال همیشه‌اینطورنیست؛ شکل بسته رشته هندسی به ما امکان می‌دهد تا مقداراکثررشته‌ها را بیابیم.

مثال ۱ــ حاصلجمع $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ را بیابید.

بموجب (۲۴)، داریم:

$$zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \qquad (|z| < 1). \tag{۲۵}$$

با قرار دادن $z = \frac{1}{2}$ در (۲۵)، حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

جالب توجه است که بدانیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

پارادکس ظاهری موجود را می‌توان با توجه به این نکته که جمله طرف راست صفر است مرتفع کرد.

مثال ۲ــ حاصلجمع $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2/3^n)$ را بیابید.

با مشتق‌یابی از (۲۵) و ضرب در z داریم

$$\frac{z+z^2}{(1-z)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n \qquad (|z|<1). \tag{۲۶}$$

با قرار دادن $z=\frac{1}{3}$ ، (۲۶) منجر به:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})^2}{(1-\frac{1}{3})^3}=\frac{3}{2}.$$

می‌شود. روش بکار رفته در این مثالها را می‌توان در مورد هر رشته‌یی به شکل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{z_0^n} \qquad (\text{صحیح‌مثبت } k\,,\ |z_0|>1).$$

بکار گرفت. گاهی اوقات ممکن است یک رشته توانی را که به صورت بازگشتی‌تعریف شده است، به "شکل بسته" بدست آورد.

مثال ۳ــ دنباله فیبوناچی[1] بدین صورت تعریف می‌شود که برای هر n ، $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ با $a_0=0$ و $a_1=1$. فرض کنیم $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ در این صورت:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}z^{n+2}=z+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)z^{n+2}\\
&= z+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+2}\\
&= z+z\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^{n+1}+z^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\\
&= z+zf(z)+z^2f(z).
\end{aligned}$$

که با حل آن، حاصل می‌شود:

$$f(z)=\frac{z}{1-z-z^2}.$$

محاسبات فوق تنها در نقاطی که رشته همگراست، برقرار است. ریشه‌های مخرج $f(z)$ عبارتند از: $z=(1\pm\sqrt{5})/2$ بنابه (۲۳)، دیده‌می‌شودکه‌شعاع‌همگرایی $f(z)$ برابر با $(\sqrt{5}-1)/2$ است.

با عملیاتی بر رشته هندسی می‌توان بسطهای رشته تیلر را نیز یافت. به‌عنوان‌مثال

---

[1] Fibonacci

می‌دانیم که برای هر عدد مختلط b ، $b \neq 1$ ، همانندی زیر :

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-b-(z-b)}=\frac{1}{(1-b)(1-[(z-b)/(1-b)])}$$
$$=\frac{1}{(1-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{1-b}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-b)^{n+1}}(z-b)^{n}$$

هروقت

$$\left|\frac{z-b}{1-b}\right|<1,$$

یعنی هر وقت

$$|z-b|<|1-b|.$$

برقرار است . بنابراین ، تابع $f(z)$ ، حول‌تمام نقاط به استثنای $b=1$ ، بسط تیلر دارد . به‌خواننده توصیه می‌شود که صحت رابطه زیر را تحقیق کند .

برای هر n ، $\dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}=\dfrac{1}{(1-b)^{n+1}}$

پرسش‌ها

۱ـ اختلاف میان رشته‌های توانی حقیقی و مختلط در چیست ؟

۲ـ آیا خارج قسمت دو رشته توانی نمایشی بصورت رشته توانی دارد ؟

۳ـ فرض‌کنید $f(z)$ و $g(z)$ دارای‌نمایش‌رشته‌توانی‌هستند ، درمورد $f(g(z))$ چه می‌توان گفت ؟

۴ـ فرض کنید $f(z)$ دارای بسط ماکلورنی با شعاع همگرایی R است . آیا می‌شودکه $f(z)$ در z_0 با $|z_0|>R$ تحلیلی باشد ؟ آیا می‌شود که $f(z)$ درهمه‌جای $|z|=R$ تحلیلی باشد ؟

۵ـ فرض کنید که می‌دانیم تابعی دارای نمایش رشته توانی است . در این‌صورت چه عملیاتی را باید انجام داد ، تا مقدار رشته‌های نامتناهی مشخص را محاسبه نمود ؟

۶ـ اگر $a_n \neq 0$ ، شعاعهای همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n)z^n$ را چگونه می‌توان مقایسه کرد ؟

۷ـ اگر تابعی حول دو نقطه متمایز بسط تیلر داشته باشد ، شعاع‌های همگرایی این دو رشته توانی چگونه مقایسه می‌شوند ؟

۸ـ در مورد نمایش رشته توانی برای توابع کسری چه می‌توان گفت ؟

۹ـ آیا می‌شود که رشته‌ای توانی در یک قرص $|z| < R$ همگرا باشد بدون اینکه در آنجا همگرای مطلق باشد؟ در مورد قرص بسته $|z| \leq R$ چطور؟

تمرینها

۱ـ فرض‌کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای‌شعاع‌همگرایی R_1، $0 < R_1 < \infty$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R_2، $0 < R_2 < \infty$، باشد نشان دهید:

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ دارای شعاع همگرایی حداقل برابر با $R_1 R_2$ است.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n/b_n) z^n$ $(b_n \neq 0)$ دارای‌شعاع‌همگرایی‌حداکثربرابربا R_1/R_2 است.

مثالهایی بیاورید که نشان دهند برقراری نامساوی در (الف) و (ب) ممکن است.

۲ـ فرض‌کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به‌شعاع‌همگرایی R، $0 < R < \infty$ است‌شعاع‌همگرایی‌رشته های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n.$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^k} z^n.$

پ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n.$ ت) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$

ث) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \, z^n.$

کدام یک از جوابها درحالت $R = 0$ یا $R = \infty$ تغییر پیدا می‌کنند.

۳ـ فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی R است. مثالی بیاورید که در آن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$ (k صحیح مثبت) و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$ دارای شعاع همگرایی R، و شعاع همگرایی بزرگتر از R باشند.

۴ـ الف) فرض کنید $f(z)$ را بتوان حول $z = a$ به رشته‌تیلربسط داد، نشان‌دهید که اگر برای هر عدد صحیح n، $|f^{(n)}(a)| \leq M$، آنگاه $f(z)$ تام است.

ب) نشان دهید که اگر برای یک عدد صحیح k و هر n، $|f^{(n)}(a)| \leq n^k$ آنگاه $f(z)$ تام است.

۵ـ حاصل‌جمع رشته‌های زیر را بیابید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3^n}$ (ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(3^n - 2^n)}{6^n}$ (پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5in}{(1+i)^n}$

۶ـ تابع $f(z)$ را فرد گوئیم چنانچه $f(-z) = -f(z)$ و زوج گوئیم چنانچه $f(-z) = f(z)$. اگر $f(z)$ نمایش رشته توانی داشته باشد، نشان دهید.

(الف) $f(z)$ فرد است اگر وتنها اگر ضرایب زوج رشته توانی آن همگی‌صفرباشند.

(ب) $f(z)$ زوج است اگر و تنها اگر ضرایب فرد همگی صفر باشند.

(ج) $f'(z)$ فرد (زوج) است اگر $f(z)$ زوج (فرد) باشد.

۷ــ فرض کنید $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ ، نشان دهیدکه رابطه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a_0 + (a_1 + a_0 A)z}{1 + Az + Bz^2}$$

در تمام نقاطی کــه رشته توانی همگراست، برقرار است، شعاع همگرایی چقدراست؟

۸ــ برای دنباله فیبوناچی که بصورت $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ با $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ تعریف می‌شود، نشان دهید که:

$$a_n \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1}\right)^n \qquad \text{برای هر } n \text{ ،}$$

۹ــ فرض کنید a ، b و c اعداد مختلط مخالف صفر متمایز باشند. یک بسط رشته توانی برای $f(z) = 1/(z-a)(z-b)$ حول نقطه $z = c$ بیابید، و شعاع همگرایی آنرابیابید.

۷ـ انتگرال‌گیری مختلط و قضیهٔ کوشی

«یکی از عمده‌ترین قضایای حساب دیفرانسیل وانتگرال ، به حق ، قضیه اساسی محاسبات انتگرال ، نامیده شده است . از یک سو انتگرال را با مشتق‌گیری مربوط می‌کند ، و از سوی دیگر روشی برای محاسبه انتگرال بدست می‌دهد . در این فصل به دنبال مشابه مختلط آن هستیم . البته ، اشکال در این است که میان هر دو نقطه،بی‌نهایت مسیر موجود است که‌می‌توان‌برآنهاانتگرال گرفت . قضیه کوشی ، که قضیه اساسی انتگرال‌گیری مختلط است ، مبین آن است که برای توابع تحلیلی بر میدانهای ویژه‌یی ، یک مسیر همان اندازه‌مناسب است که دیگر مسیرها تناسب دارند.»

۷ـ۱ . خم‌ها

ابتداء به‌یادآوری برخی خواص انتگرال ریمان می‌پردازیم . فرض کنیم $f(t)$ و $g(t)$ توابعی با مقادیر حقیقی باشند که بر فاصله $a \leq t \leq b$ پیوسته‌اند . در این‌صورت برای هر دو عدد ثابت حقیقی c_1 و c_2 داریم :

$$\int_a^b (c_1 f(t) + c_2 g(t))\, dt = c_1 \int_a^b f(t)\, dt + c_2 \int_a^b g(t)\, dt \tag{1}$$

و

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{2}$$

اینک تابع با مقادیر مختلط $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$ را در نظر می‌گیریم که‌در آن توابع با مقادیر حقیقی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در فاصله $a \leq t \leq b$ پیوسته‌اند . انتگرال معین

$F(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b F_1(t)\,dt + i\int_a^b F_2(t)\,dt. \qquad (۳)$$

ملاحظه می‌کنیم که:

$$\operatorname{Re}\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\,dt = \int_a^b F_1(t)\,dt,$$

$$\operatorname{Im}\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\,dt = \int_a^b F_2(t)\,dt.$$

خیلـــــــی از خواص انتگرال حقیقی برای انتگرال مختلط نیز معتبر است. به‌عنوان‌مثال خاصیت خطی بودن که‌در (۱) بیان شده است برای توابع مختلط و اعداد مختلط ثابت برقرار است. برای اثبات کافی است قسمت‌های حقیقی و انگاری تفکیک شوند. برای‌اثبات (۲) برای توابع مختلط، فرض می‌کنیم:

$$\int_a^b F(t)\,dt = Re^{i\alpha} \qquad (R>0,\ -\pi<\alpha\leq\pi).$$

در این صورت:

$$\int_a^b e^{-i\alpha}F(t)\,dt = e^{-i\alpha}\int_a^b F(t)\,dt = R = \left|\int_a^b F(t)\,dt\right|. \qquad (۴)$$

با توجه به (۴) و خواص انتگرال حقیقی

$$R = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\alpha}F(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\, e^{-i\alpha}F(t)\,dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\alpha}F(t)|\,dt = \int_a^b |F(t)|\,dt.$$

وقتیکه $\int_a^b F(t)\,dt = 0$ ، صحت نامساوی روشن است.

بحث ما تا این‌جا کمکی به بررسی توابع مختلط از متغیرهای مختلط نکرده است. حل این مسئله نیازمند انتگرال‌گیری بر خم‌های عمومی‌تری است تا بر فواصل حقیقی.

یک خم پیوسته (یک کمان) در صفحه مختلط بصورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

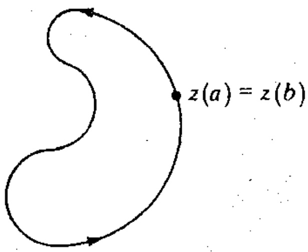
$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a\leq t\leq b), \qquad (۵)$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی و پیوسته از متغیر حقیقی t هستند. ما از این به بعد تمام خمها را پیوسته می‌گیریم و بنابراین کلمه "خم" و "کمان" را می‌توان به عوض هم دیگر بکار گرفت.

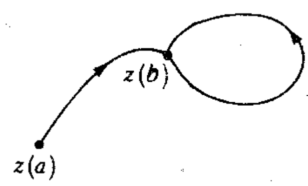
به هنگام بحث در مورد خم‌ها یک ابهام طبیعی بروز می‌کند . با وجود اینکه یک‌خم بنا‌به تعریف یک تابع است ، و خواص آن هم خواص تابع است ولی ما‌به‌مجموعه‌ای‌نقطه‌ای که‌نمایش نمودار تابع است نیز "خم" اطلاق می‌کنیم . از این رو یک خم در عین حال که تابعی پیوسته است ، یک مجموعه همبند و فشرده از نقاط نیز میباشد . وقتی که خواص توپولوژیکی یک خم مورد بحث باشد ، گاهی خم را با C می‌نمایانیم و توجهی به ساخت پارامتری منحنی نداریم .

در مورد یک خم C که با (۵) تعریف شده است ، نقطه $z(a)$. نقطه آغازی و $z(b)$ نقطه‌پایانی نامیده‌می‌شود .اگرنقاط آغازی و پایانی برهم منطبق شوند ($z(a) = z(b)$) در اینصورت C را یک خم بسته می‌نامند . اگر هر وقت $t_1 \neq t_2$ ، داشته باشیم $z(t_1) \neq z(t_2)$ ، در این صورت C با خودش‌تلاقی نمی‌کند واین خم را ساده می‌نامند . خم بسته‌یی راکه در فاصله $a \leq t \leqslant b$ ساده باشد ، خم ساده بسته و یا خم ژردان[1] نامند .

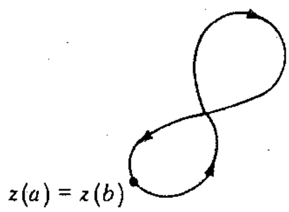
ساده است ، بسته نیست



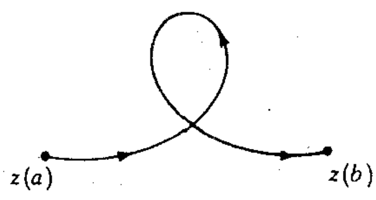
سادهٔ بسته



ساده است ، بسته نیست



بسته است ، ساده نیست



بسته نیست ، ساده نیست

هرخم ساده‌بسته‌صفحه‌را به دو میدان مجز تقسیم می‌کند . و یا بطور رسمی‌ترداریم :

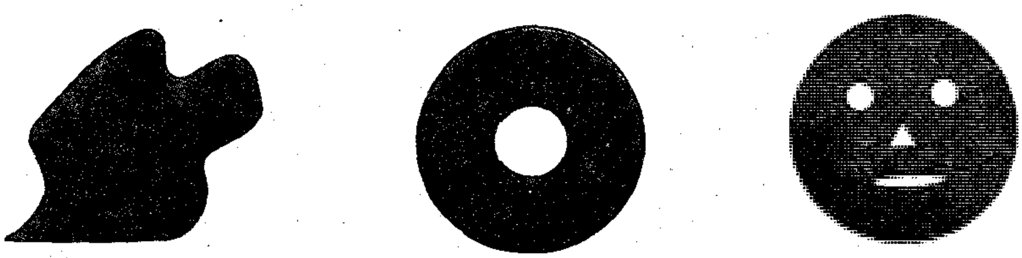
قضیهٔ خم ژردان اگر C یک‌خم ساده بسته (ژردان) باشد ، آنگاه مکمل C ، از دومجموعه مجزا تشکیل می‌شود ، یک میدان کراندار موسوم به درون (یا داخل) و دیگری یک میدان

1. Jordan

بی‌کران موسوم به بیرون (یا خارج) است خم C مرز هر یک از این دو میدان است.

اثبات این قضیه‌شهودی و قابل تجسم ،بسیار مشکل‌است. خواننده‌یی که نمی‌خواهد صحت قضیه را همینطوری قبول کند می‌تواند اثبات آنرا در کتاب نویمان[1] (۴) پیداکند.

میدان $\mathscr{D}$ همبند ساده است اگر درون هر خم ساده بسته واقع در $\mathscr{D}$ ، تماما" متعلق به $\mathscr{D}$ باشد. تعبیر زیر به فهم تعریف کمک می‌کند. "از نظر توپولوژیکی، یک میدان همبند ساده‌رامی‌توان بطور پیوسته بصورت نقطه منقبض کرد". قابل‌توجه است که قرص واحد سفته $A=\{z: 0<|z|<1\}$ را می‌توان به یک میدان به اندازه دلخواه کوچک منقبض کرد ،ولی آنرانمی‌توان به‌یک‌نقطه از A منقبض کرد." از نظر هندسی، یک میدان همبند ساده‌حفره‌ای درونش ندارد ، زیرا اگر خم ساده بسته‌یی این حفره را احاطه کرده باشد، آنگاه این خم رانمی‌توان به‌ماوراء حفره منقبض کرد. در اینجا نیز حذف تنها یک نقطه در میدان‌معادل باایجاد یک حفره در آن است ، میدانی که همبند ساده نباشد، همبند چندگانه می‌نامند.



همبند ساده — همبند چندگانه — همبند چندگانه

تذکر ۱ــ در بحث میدانهای همبند ساده، به صفحه مختلط متناهی محدود شدیم. در نتیجه خارج یک دایره، همبند ساده نیست ، زیرا که از یک جهت دایره و از سوی‌دیگر نقطه ∞ مانع منقبض شدن میدان به یک نقطه می‌گردد. در صفحه گسترش یافته، خارج‌یک دایره، همبند ساده است چون می‌توان آنرا در نقطه ∞ "منقبض" کرد.

تذکر ۲ــ در حالیکه توابع تحلیلی بنابه تعریف لازم است تک ــ مقداری باشند ، جالب است که مفهوم مختصرتر و عام‌تر از تحلیلی را ، که توابع چند مقداری را نیز شامل می‌گردد مورد بحث قرار دهیم ، سعی ما بر آنست که بگوئیم $\log z$ در صفحه سفته تحلیلی است زیرا که برای هر مقدار $z_0 \neq 0$ شاخه‌یی از $\log z$ را می‌توان یافت که برای‌آن $\log z$ در z_0 تحلیلی باشد. همانطور که در فصل ۱۴ خواهیم دید. به لحاظ وجود این‌خاصیت برای لگاریتم ، قادریم‌که تابع چند مقداری $\log z$ را در صفحه سفته، منظم

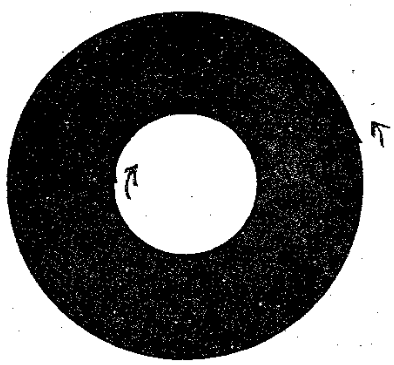
1. New man

بنامیم . باید توجه داشت‌که یک بریدگی شاخه برای‌لگاریتم ، یک تابع چند مقداری را به یک‌تابع تک ـ مقداری‌تبدیل می‌کند ، و هم چنین یک میدان همبند چندگانه (صفحه‌سفته) را به یک میدان همبند ساده تبدیل می‌کند . بعد از تعریف دقیق کلمه "منظم" در فصل ۱۴ نشان‌خواهیم داد یک تابع منظم که در یک میدان همبند ساده منظم باشد، می‌بایست درآنجاتک‌مقداری (ودر نتیجه‌تحلیلی) باشد . این مطلب به قضیه تکمیدانی معروف‌است .

گوئیم‌که‌مرز C از یک‌میدان‌دارای جهت مثبت است و یا در جهت مثبت پیموده‌شده است ، بشرط آنکه شخصی که C را می‌پیماید همیشه میدان در طرف چپ او قرار گیرد . مرز یک قرص دارای جهت مثبت است اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های‌ساعت پیموده‌شده و دارای جهت منفی است اگر هم جهت با حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود .

نکته قابل‌توجه : مثبت راباخلاف‌حرکت عقربه‌های ساعت معادل نگیرید . برای‌طوق شکل ۱ ، جهت مثبت بر امتداد دایره خارجی خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است ، در حالی که بر امتداد دایره درونی جهت مثبت موافق حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد .

شکل ۱



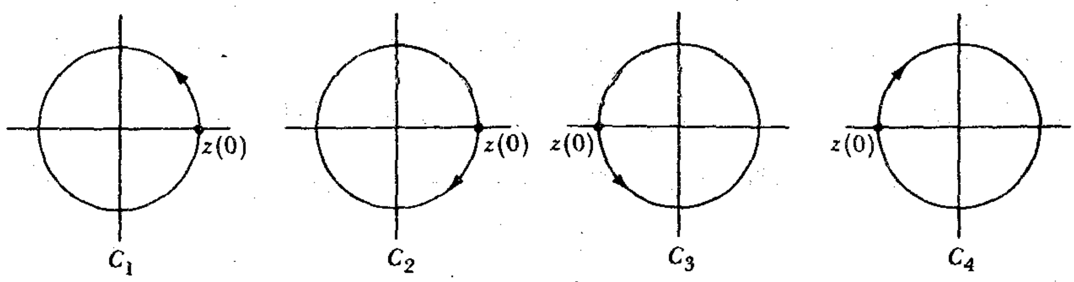
بااین حال‌اگرخم ساده بسته بی بدون‌وابستگی به یک ناحیه مفروض‌باشد ،فرض‌می‌کنیم که میدان‌درون‌خم‌است ، و بنابراین جهت‌مثبت ، خلاف حرکت عقربه‌های ساعت‌خواهد بود .

تذکر ــ اینکه ما مفهوم خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را بی‌چون و چرا می‌پذیریم ، علتش فریبی است که در کلمه "ساده" در عبارت مرز ساده بسته نهفته است . مثالهایی‌از خم‌های ساده بسته موجودند که به معنی شهودی کلمه ، "ساده" نیستند ، و تقریبا " یک مربع‌کامل را اشغال می‌کنند . برای چنین خمی ، خواننده باید عمر خود را صرف دنبـال کردن جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت نماید . درحالی که تعریف‌ما برای جهت‌بیشتر شهودی است تا دقیق ، ولی برای‌تمام خمهایی که ما در این کتاب با آنها مواجه هستیم مناسب است .

فرض کنیم

$$
\begin{aligned}
C_1 &: z_1(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t && (0 \le t \le 2\pi),\\
C_2 &: z_2(t) = e^{-it} = \cos t - i \sin t && (0 \le t \le 2\pi),\\
C_3 &: z_3(t) = -e^{it} = -\cos t - i \sin t && (0 \le t \le 2\pi),\\
C_4 &: z_4(t) = -e^{-it} = -\cos t + i \sin t && (0 \le t \le 2\pi).
\end{aligned}
$$

چهـــــار خم بالا همگی دایره واحد را می‌پیمایند. اختلاف آنها با یکدیگر یا در نقطه آغازی و یا در جهت است. آغاز خم‌های C_1 و C_2، $(1, 0)$ است، در حالیکه آغـاز C_3 و C_4، نقطه $(-1, 0)$ است. C_1 و C_3 دارای جهت مثبت هستند، در حالیکه خم‌های C_2 و C_4 جهت منفی دارند (ر. ک. شکل ۲)



خمی که دارای مشتق پیوسته باشد هموار نامیده می شود. فرض کنیم C خم هموار باشد که دارای معادلات پارامتری زیر است؛

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \le t \le b).$$

اگـــــر تابع مختلط $f(z)$ بر C پیوسته باشد، نتیجه می‌گردد کـــــه $f(z(t))z'(t)$ بازاء $a \le t \le b$ پیوسته است. در اینصورت انتگرال $f(z)$ بر C بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt. \qquad (۶)$$

تذکر ۱ــ انتگرال مختلط را می‌توانستیم، همانند تعریف انتگرال ریمان، بصـورت حدی از یک مجموع تعریف کنیم. در این صورت (۶) را می‌توانستیم بصورت یک قضیـه استنتاج کنیم که برای خم هموار C و $f(z)$ پیوسته بر C معتبر باشد.

یک مزیت (۶) در این است که قادر خواهیم بود از خواص آشنای انتگرال ریمـان استفاده کنیم. جهت مقایسه ایندو تعریف به کتاب دپری و اهرینگ (۵) مراجعه کنید.

تذکر ۲ــ عبارت زیر علامت انتگرال در طرف راست (۶) با جایگزینی صوری $z = z(t)$ ، $dz = z'(t)\,dt$ در طرف چپ، بدست می‌آید.

تذکر ۳ـ در حالت خاصی که $z(t)=t$ ، خم یک فاصله حقیقی است و (۶) به یک انتگرال به شکل (۳) ساده می‌گردد.

تذکر ۴ـ مقدار انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x)\,dx$ به تابع ونقاط انتهایی فاصله $[a, b]$ وابسته است. مقدار انتگرال مختلط $\int_C f(z)\,dz$ ممکن است به تابع $f(z)$ و همه نقاط خم C ، و نه تنها نقاط انتهایی C ، وابسته باشد.

مثال ـ مقدار $\int_C |z|^2\,dz$ را در امتداد خمهای زیر بیابید.

الف) $C=C_1 : z_1(t)=t+it \qquad (0\leq t\leq 1),$

ب) $C=C_2 : z_2(t)=t^2+it \qquad (0\leq t\leq 1).$

بموجب (۶) داریم:

$$\int_{C_1}|z|^2\,dz=\int_0^1|t+it|^2(1+i)\,dt$$
$$=(1+i)\int_0^1 2t^2\,dt=\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}i$$

و

$$\int_{C_2}|z|^2\,dz=\int_0^1|t^2+it|^2(2t+i)\,dt$$
$$=\int_0^1 2t(t^4+t^2)\,dt+i\int_0^1 (t^4+t^2)\,dt=\tfrac{5}{6}+\tfrac{8}{15}i.$$

علیرغم آنکه خط راست C_1 و سهمی C_2 دارای نقاط آغازی‌وپایانی مشترک‌می‌باشند (ر.ک. شکل۳):

$$\int_{C_1}|z|^2\,dz\neq\int_{C_2}|z|^2\,dz.$$

ولی با اینحال بایدتوجه داشت که:

$$\int_{C_1} z^2\,dz=\int_0^1 (t+it)^2(1+i)\,dt$$
$$=\int_0^1 -2t^2\,dt+i\int_0^1 2t^2\,dt$$
$$=-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}i$$

و

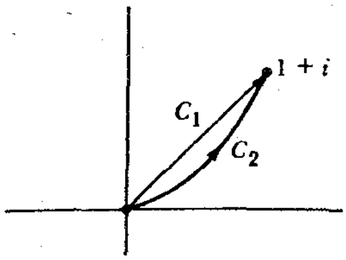
$$\int_{C_2} z^2\,dz=\int_0^1 (t^2+it)^2(2t+i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3)\, dt + i\int_0^1 (5t^4 - t^2)\, dt$$
$$= -\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}i.$$

این یک تصادف نیست که:

$$\int_{C_1} z^2\, dz = \int_{C_2} z^2\, dz.$$

شکل ۳



بعـــــدا "نشان‌خواهیم‌دادکه مقدار $\int_C z^2\, dz$ تنها به نقاط آغازی و پایانی خم هموار C وابسته است . هدف این فصل مشخص‌کردن ردهٔ توابعی است‌که انتگرال‌شان به مسیر وابسته نیست ، یعنی‌توابعی که برای آنها

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$$

بر هر دو خم همـــوار C_1 و C_2 که دارای نقاط آغاز و پایانی مشترک باشند .

پرسش‌ها

۱ــ آیا یک نقطهٔ "تنها" یک خم است ؟

۲ــ آیا یک خم ساده بسته ، یک خم ساده است ؟

۳ــ آیااگردر تعریف خم ، پارامتر t را در فاصله $[0, 1]$ محدود می‌کردیم ، تفاوتی ایجاد می‌شد ؟

۴ــ چه ارتباطی میان همبند ساده و همبند موجوداست ؟

۵ــ آیا می‌شود که یک میدان و مکمل آن هر دو همبند ساده باشند ؟

۶ــ آیا می‌شود که یک میدان بی‌نهایت حفره داشته باشد ؟

۷ــ اگرازیک‌میدان همبند ساده یک نقطه را برداریم ، آیا میدان جدید همبندساده است ؟

۸ــ چرا پیوسته بودن مشتق یک خم حایز اهمیت بود ؟

۹ـ چه ارتباطی میان مستقل بودن یک انتگرال از مسیر و صفر بودن یک انتگرال بر یک خم بسته موجود است؟

۱۰ـ چرا هر خم، فشرده و همبنداست .

تمرینها

۱ـ خم $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ ـ$(-\pi \le t \le \pi)$ راکه‌در آن a، b اعدادحقیقی مثبت‌اند توصیف نمائید.

۲ـ خم

$$z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\,\frac{2t}{1+t^2} \qquad (-R \le t \le R).$$

را توصیف‌کنید. وقتی $R \to \infty$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۳ـ خم پارامتری شده‌یی بیابید که مسیرهای زیر را به پیماید.

الف) پاره خط $z = i$ تا $z = 1 - i$

ب) پاره خط $z = 1$ تا $z = 2 + 3i$

پ) مربعی به رئوس $\pm i$، ± 1 که‌درجهت مثبت پیموده شده است و نقطه آغازی آن $-1 - i$ است.

ت) قسمتی از دایره $|z - 1| = 2$ که در نیم صفحه راست واقع است.

۴ـ یک معادله پارامتری از سهمی $y = 2x^2 - 3$ به نقطه آغازی $z = -1 - i$ و نقطه پایانی $z = 2 + 5i$، بیابید.

۵ـ خم‌های ساده بسته زیر را در مختصات قطبی پارامتری کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 4$ ب) $4x^2 + y^2 = 1$ پ) $x^2 + (y+1)^2 = 9$

۶ـ $\int_C \bar{z}\,dz$ را در امتداد خمهای زیر بیابید.

الف) $z(t) = e^{it}$ $(-\pi \le t \le \pi)$

ب) $z(t) = e^{2it}$ $(-\pi \le t \le \pi)$

پ) $z(t) = e^{it} - 1$ $(-\pi \le t \le \pi)$

ت) $z(t) = t + it$ $(0 \le t \le 2)$

ث) $z(t) = 5e^{it} + 3$ $(0 \le t \le \pi)$

۷ـ در امتداد خم C، $(-\pi \le t \le \pi)$ $C : z(t) = e^{it}$، مقدار $\int_C f(z)\,dz$ را برای هر یک از توابع زیر بیابید.

الف) $f(z) = z^2.$ ب) $f(z) = \frac{1}{z}.$

پ) $f(z) = \frac{1}{z^2}.$ ت) $f(z) = 2\bar{z} - i\left(z + \frac{1}{z}\right).$

۲-۷ . پارامتری کردن

فرض کنیم $C : z(t)$ خم هموازی باشد که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده است . باتقسیم فاصله به دو زیر فاصله $[a, c]$ و $[c, b]$ و با تحدید پارامتر t در فواصل $[a, c]$ و $[c, b]$ ، به ترتیب دو خم C_1 و C_2 بدست می‌آیند . برای‌هر تابع $f(z)$ که بر C پیوسته باشد داریم :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt \\ &= \int_a^c f(z(t))z'(t)\,dt + \int_c^b f(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

بطریق مشابه خم C را می‌توان به صورت " مجموع n " خم نوشت :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{C_1+\dots+C_n} f(z)\,dz \\ &= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.\end{aligned} \tag{۷}$$

تذکر ــ منظور از حاصلجمع دو خم ، خمی است که از وصل کردن نقطه پایانی اولی به نقطه آغازی دومی حاصل می‌شود ؛ این‌حاصلجمع را نباید با حاصلجمع جمله به جمله توابعی که بر یک مجموعه تعریف شده‌اند اشتباه کرد .

یک تابع را بر یک فاصله پیوسته بخشی گویند ، چنانچه تعداد نقاط ناپیوستگی آن حداکثر متناهی ، و حد چپ و حد راست آن درتمام نقاط فاصله موجود باشند . خمی که مشتق آن پیوسته بخشی باشد ، مرز نام دارد . چون هر مرز C را می‌توان‌بصورت‌حاصلجمع تعدادی متناهی ازخم‌های هموار ، $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ نوشت ، انتگرال یک تابع پیوسته در امتداد یک مرز به صورت (۷) تعریف می‌شود .

مثال ــ مقدار $\int_C z\,dz$ را بر مرز C بصورت زیر بیابید .

$$C : z(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 2 + i(t-1), & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

خم‌های C_1 و C_2 را به‌ترتیب با تحدید پارامتر t از خم C به فواصل $[0, 1]$ و $[1, 2]$ تعریف می‌کنیم (ر. ک. شکل ۴) داریم:

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_{C_1} z\,dz + \int_{C_2} z\,dz \\ &= \int_0^1 2t(2dt) + \int_1^2 \{2 + i(t-1)\}(i\,dt) \\ &= \int_0^1 4t\,dt - \int_1^2 (t-1)\,dt + \int_1^2 2i\,dt \\ &= 2 - \tfrac{1}{2} + 2i = \tfrac{3}{2} + 2i.\end{aligned}$$

یادآور می‌شویم که، در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، درازای (کمان) L از یک خم هموار در صفحه که با معادلات پارامتری

$$x = \phi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

مشخص شده باشد برابر است با

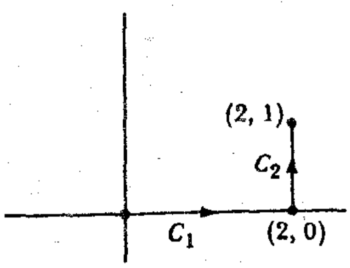
$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

اگر C خم هموار (یا مرزی) در صفحه باشد و برای آن معادله پارامتری مختلط

$$C:\ z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

بکار بریم، درازای آن به صورت زیر است:

$$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \left|\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right| dt. \qquad (۸)$$



شکل ۴

در حالت خاص که خم، پاره خط $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $z_1 = x_1 + iy_1$ باشد وبصورت پارامتری

$$\begin{aligned}z(t) &= z_0 + t(z_1 - z_0) \\ &= x_0 + t(x_1 - x_0) + i(y_0 + t(y_1 - y_0)) \qquad (0 \leq t \leq 1),\end{aligned}$$

مشخص شده باشد، داریم $z'(t) = z_1 - z_0$. بنابراین، همانطور که انتظار داشتیم،

$$L = \int_0^1 |z'(t)|\, dt = \int_0^1 |z_1 - z_0|\, dt = |z_1 - z_0|.$$

وقتی که z بر C باشد، نماد $|dz|$ بصورت $|dz| = |z'(t)|\, dt$ تعریف می‌شود و بنابراین (۸) را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$L = \int_C |dz|, \tag{۹}$$

که در آن C بوسیله $z(t)$ پارامتری شده است.

تذکر ــ صحبت از درازای یک خم دلخواه بامعنی است. با اینحال چنانچه خم، مرز نباشد، ممکن است درازای خم متناهی نباشد. درازای یک خم دلخواه $z(t)$، $a \leq t \leq b$، را می‌توان بصورت کوچکترین کران بالای حاصلجمع هایی به شکل

$$\sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|,$$

تعریف کرد، که در آن $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$. اگر درازای خم متناهی باشد، خم را راستی‌پذیر می‌نامند.

خواننده می‌بایست تحقیق کند که هر مرز راستی‌پذیر است. وبرای مرز، این تعریف با (۹) مطابقت دارد. درتمرین ۱، مثالی از یک خم راستی‌ناپذیر داده شده است.

آنچه در زیر میآید همتای مختلط یک قضیه معروف در متغیرهای حقیقی است.

قضیه ۷ـ۱. فرض‌کنیم $f(z)$ بر مرز C که به درازای L است، پیوسته می‌باشد، و بر C، $|f(z)| \leq M$. آنگاه

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f(z)|\, |dz| \leq M \int_C |dz| = ML.$$

اثبات ـ اگر C بر فاصله $[a, b]$ با $z(t)$ پارامتری شده باشد، داریم:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t)|\, dt$$
$$= \int_C |f(z)|\, |dz|,$$

و بدین ترتیب نامساوی اولی اثبات می‌شود، چون

$$\int_C |f(z)||dz| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\ dt$$
$$\leq M\int_a^b |z'(t)|\ dt = ML,$$

نامساوی دوم ثابت می‌شود.

مثال ـ کران بالایی برای $|\int_C dz/(z^2+10)|$ بیابید، که در آن C دایره زیر می‌باشد.

$$C: z(t) = 2e^{it} \qquad (-\pi \leq t \leq \pi).$$

داریم :

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2+10}\right| \leq \int_C \frac{|dz|}{|z^2+10|} \leq \int_C \frac{|dz|}{10-|z|^2}$$
$$\leq \frac{1}{6}\int_C |dz| = \frac{2\pi}{3}.$$

با بیان دقیق می‌توان گفت‌که درازای یک خم برحسب پارامترهای‌آن‌تعریف‌می‌شود، ولی از نظر هندسی روشن است که، در مورد خمهای ساده، درازای خم به نحوه پارامتری کردن آن بستگی ندارد. مثلا" ، خم‌های

$$C_1: z_1(t) = e^{it} \qquad (0 \leq t \leq \pi)$$
$$C_2: z_2(t) = e^{2it} \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

هر دو پیمایش نیمه زبرین دایره واحد است، بعلاوه

$$\int_{C_1} |dz_1| = \int_0^\pi |z_1'(t)|\ dt = \int_0^\pi dt = \pi,$$

و

$$\int_{C_2} |dz_2| = \int_0^{\pi/2} |z_2'(t)|\ dt = \int_0^{\pi/2} 2dt = \pi.$$

مرزهای C_1 و C_2 ، در حالی که منتج از پارامتری کردنهای متفاوت‌اند و به مفهوم صوری متفاوت‌اند، ولی هر دو به یک درازا می‌باشند.

تذکر ــ خمهای e^{it} $(0 \leq t \leq 2\pi)$ و e^{2it} $(0 \leq t \leq 2\pi)$ هردونمایش مجموعه‌نقاط دایره واحد هستند. درازای اولی 2π و درازای دومی 4π است. ولی، باید توجه داشت

که خم دومی ساده نیست زیرا دایره واحد را دوبار می‌پیماید .

قضیه بعدی یک‌محک عمومی برای تغییر در پارامتری کردن ، بدون تغییری در طول خم ، بدست می‌دهد .

قضیه ۷ـ۲ . فرض‌کنیم $z(t)=x(t)+iy(t)$ ، $a\le t\le b$ یک مرز باشد . فرض کنیم $t=\phi(r)$ با $a=\phi(c)$ ، $b=\phi(d)$ ، $\phi'(r)>0$ بطوریکه t با r افزایش‌یابد . اگر $\phi'(r)$ در فاصله $[c,d]$ پیوسته بخشی باشد ، آنگاه درازای $z(t)$ برابر است با :

$$L=\int_c^d |z'(\phi(r))|\phi'(r)\,dr.$$

اثبات ــ بموجب (۸) و قاعدهٔ زنجیری

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b |z'(t)|\,dt=\int_a^b |x'(t)+iy'(t)|\,dt\\&=\int_a^b |x'(\phi(r))+iy'(\phi(r))|\,d\phi(r)\\&=\int_c^d |z'(\phi(r))|\phi'(r)\,dr,\end{aligned}$$

و اثبات کامل است .

فرض کنیم $f(z)$ بر مرز C ، $a\le t\le b$ ، $C:z(t)$ ، پیوسته است و $t=\phi(r)$ در شرایط قضیه۷ـ۲ صدق می‌کند ، دراین‌صورت با بکار بردن قاعده زنجیری حاصل می‌گردد .

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt \tag{۱۰}$$

$$=\int_c^d f(z(\phi(r))z'(\phi(r))\phi'(r)\,dr.$$

چون $z'(\phi(r))\phi'(r)$ مشتق $z(\phi(r))$ نسبت به r است ، خم C رامی‌توان با $z(\phi(r))$ ، $c\le r\le d$ پارامتری کرد ، بدون اینکه در مقدار انتگرال تاثیری بگذارد . مرز

$$-C:z(-t)=x(-t)+iy(-t)\qquad(-b\le t\le -a)$$

نمایشگر همان مرز است که در جهت عکس

$$C:z(t)=x(t)+iy(t)\qquad(a\le t\le b).$$

پیموده شود.

داریم:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)(-1)\,dt$$

و با جایگزینی

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{b}^{a} f(z(r))z'(r)\,dr$$
$$= -\int_{a}^{b} f(z(r))z'(r)\,dr = -\int_{C} f(z)\,dz.$$

تذکر ــ با بیان ساده، معادلات (۱۰) و (۱۱) مبین آنند که مقدار انتگرال بر مرز ساده C، که C به عنوان یک مجموعه نقطه‌یی در صفحه مد نظر باشد، تنها به پارامتری نمودن خم از لحاظ جهت وابسته است.

مثال ۱ــ مقدار $\int_C |z|\,dz$ را بر خط راست C که مبداء را به $1+i$ وصل می‌کند، محاسبه می‌کنیم. خط را به ترتیب زیر پارامتری می‌کنیم:

$$C: z(t) = t + it \qquad (0 \le t \le 1). \tag{۱۲}$$

در این صورت $z'(t) = 1 + i$ و

$$\int_C |z|\,dz = \int_0^1 |t + it|(1+i)\,dt = \sqrt{2}(1+i)\int_0^1 t\,dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

علت پارامتری نمودن به شکل (۱۲) تنها بدین دلیل بود که طبیعی‌ترین شکل آن بود. می‌توانستیم C را بصورت زیر نیز پارامتری کنیم.

$$C: z(t) = x(t) + ix(t) \qquad (a \le t \le b),$$

که $x(a) = 0$ ، $x(b) = 1$ ،و $x'(t) > 0$. دراین‌صورت $z'(t) = (1+i)x'(t)$ و

$$\int_C |z|\,dz = \int_a^b |x(t) + ix(t)|(1+i)x'(t)\,dt$$
$$= (1+i)\sqrt{2}\int_a^b x(t)x'(t)\,dt$$
$$= (1+i)\sqrt{2}\left(\frac{(x(b))^2 - (x(a))^2}{2}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

مثال ۲ــ مقدار $\int_C |z|\,dz$ را بر مستطیل C با گوشه‌های $-1+i,\ 1+i,\ 1,\ -1$ ــ

محاسبه می‌کنیم . این مرز حاصلجمع چهار مرز هموار (خطوط راست) است ، داریم :

$$\int_C |z|\,dz = \int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz + \int_{C_3} |z|\,dz + \int_{C_4} |z|\,dz,$$

که

$$\begin{aligned} C_1 &: z_1(t) = t && (-1 \le t \le 1),\\ C_2 &: z_2(t) = 1 + it && (0 \le t \le 1),\\ C_3 &: z_3(t) = -t + i && (-1 \le t \le 1),\\ C_4 &: z_4(t) = -1 - it && (-1 \le t \le 0). \end{aligned}$$

و پس از حل بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \int_C |z|\,dz &= \int_{-1}^{1} |t|\,dt + i\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2+1}\,dt \\ &\quad - i\int_{-1}^{0} \sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(|t| - \sqrt{t^2+1}\right) dt = 1 - \sqrt{2} - \operatorname{Log}\,(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

تذکر ــ به‌صورتی‌که‌در (۷) تعریف شده ، مرز C حاصلجمع چهار خم C_1 و C_2 و C_3 و C_4 نمی‌باشد . زیرا که این چهار خم بر چهار زیر فاصله متمایز ، از فاصله‌یی که C بر آن تعریف شده است ، پارامتری نشده‌اند ؛ ولی به موجب (۱۰) نحوه پارامتری نمودن اساسی نیست ، و بهمین دلیل می‌توانیم تعریف آزادتری از "حاصلجمع " را به پذیریم که به پارامتری نمودن خاصی نیاز نداشته باشد . در واقع ، حتی می‌توان انتگرال را بدون اینکه x و y رانسبت‌به‌پارامترمشترکی مانند t بیان کنیم محاسبه کنیم ، در مثال ۲ می‌توانستیم بنویسیم :

$$\int_C |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |x|\,dx + \int_0^1 |1+iy|\,i\,dy$$
$$+ \int_1^{-1} |x+i|\,dx + \int_1^0 |-1+iy|\,i\,dy.$$

در اینجـــا در واقع برای C_1 و C_3 پارامتر x و برای C_2 و C_4 پارامتر y به کار رفتــه است .

مثال ۳ــ مقدار انتگرال $\int_C |z|\,dz$ را بر دایره‌یی به مرکز مبداء و شعاع r محاسبه می‌کنیم . خم را به ترتیب زیر پارامتری می‌کنیم

$$C: z(t) = re^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

در این صورت:

$$\int_C |z|\, dz = \int_0^{2\pi} |re^{it}|\, ire^{it}\, dt = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{it}\, dt$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)\, dt = 0.$$

تذکر ــ چون انتگرال‌گیری بر دایره از عملیات جاری و متداول، است نماد $\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$ را برایش معرفی می‌کنیم‌که معنایش انتگرال $f(z)$ بر دایره $|z-z_0| = r$ درجهت مثبت می‌باشد.

مثال ۴ــ مقدار $\int_{|z|=r} z^n\, dz$ را برای هر عدد صحیح n محاسبه‌می‌کنیم، داریم:

$$\int_{|z|=r} z^n\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it}\, dt$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos (n+1)t + i \sin (n+1)t]\, dt.$$

$$\int_{|z|=r} z^n\, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \text{ اگر } \\ 2\pi i, & n = -1. \text{ اگر } \end{cases}$$

توجه داشته باشید که مقدار این انتگرال به شعاع دایره بستگی پیدا نکرد.

پرسش‌ها

۱ــ آیا می‌شود (۷) را به حالت نامتناهی هم گسترش داد؟

۲ــ عبارتهای زیرین را چگونه‌می‌شود تفسیر کرد؟

$$\int_C |f(z)|\, dz; \qquad \int_C f(z)\, |dz|; \qquad \int_C |f(z)|\, |dz|.$$

۳ــ آیا بدون فرض پیوستگی $f(z)$ در تمام نقاط C، $\int_C f(z)\, dz$ می‌تواند تعریف شود؟

۴ــ اگر $f(z)$ بر مرز C پیوسته باشد، آیا $|f(z)|$ لزوماً" بر C ماکزیمم خود را اختیار می‌کند؟

۵ــ آیاجهت یک خم بر درازای آن تاثیر دارد؟

۶ـ چرا معمولا" انتگرال‌گیری بر دایره ساده‌تر از انتگرال‌گیری بر مربع است؟

<u>تمرینها</u>

۱ـ نشان دهید، خم زیر راستی‌پذیر نیست.

$$z(t)=\begin{cases} t\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)+i\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right), & 0<t\leq 1,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

۲ـ ثابت کنید، هر خم (پیوسته) کراندار است.

۳ـ نشان دهید:

الف) $\left|\int_{|z|=1}\frac{dz}{3+5z^2}\right|\leq\pi.$ ب) $\left|\int_{|z|=1}\frac{2z+1}{5+z^2}\,dz\right|\leq\frac{3\pi}{2}.$

۴ـ درازای مرزهای زیر را بیابید:

الف) $(-\pi\leq t\leq\pi)$ $z(t)=3e^{2it}+2$

ب) $(-\pi\leq t\leq\pi)$ $z(t)=e^t\cos t+ie^t\sin t$

۵ـ انتگرالهای $\int_C x\,dz$ ، $\int_C y\,dz$ ، $\int_C \bar{z}\,dz$ را بر هر یک از مرزهای زیر بیابید:

الف) پاره خط از مبداء تا $1+i$

ب) پاره خط از مبداء تا $1-i$

پ) دایره $|z|=1$

۶ـ انتگرالهای زیر را بر هر یک از مرزهای مثال قبل محاسبه کنید.

$$\int_C z\,dz,\qquad \int_C |z|\,dz,\qquad \int_C z\,|dz|,\qquad \int_C |z|\,|dz|$$

۷ـ مقدار $\int_C (1/z)\,dz$ را بر مربعی به رئوس $\pm 1\pm i$ محاسبه کنید.

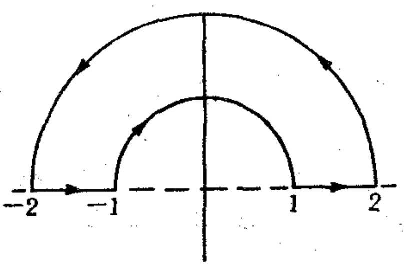
۸ـ مقدار انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C e^z\,dz$ بر پاره خط از مبداء تا $2+2i$

ب) $\int_C (e^z+z+1)\,dz$ بر پاره خط از $-1+i$ تا $1-i$

پ) $\int_C \cos z\,dz$ بر پاره خط از مبداء تا $1+i$

۹ـ مقدار انتگرال $\int_C (z/\bar{z})\,dz$ را بر خم ساده بسته C واقع در شکل زیر محاسبه کنید.



۷ـ۳ . انتگرالهای خطی

همانطور که یک تابع مختلط را می‌توان برحسب توابع حقیقی نوشت، یک انتگرال مختلط را نیز می‌توان برحسب انتگرالهای با مقادیر حقیقی نوشت، فرض‌کنید $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بر مرز C پیوسته است و این مرز هم بصورت

$$C: z=z(t)=x(t)+iy(t) \qquad (a\leq t\leq b).$$

پارامتری شده است . در این صورت بموجب (۶)

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt \tag{۱۳}$$

$$=\int_a^b (u(z(t))+iv(z(t)))(x'(t)+iy'(t))\,dt.$$

با قراردادن $u=u(z(t))$ و $v=v(z(t))$ و تفکیک نمودن (۱۳) درمولفه‌های آن داریم :

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b (ux'-vy')\,dt+i\int_a^b (uy'+vx')\,dt. \tag{۱۴}$$

عبارتی به شکل $\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ را یک انتگرال خطی حقیقی گویند. از (۱۴) ملاحظه می‌شود که انتگرال (خطی) مختلط را می‌توان برحسب دو انتگرال خطی بیان کرد؛ یعنی :

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C u\,dy+v\,dx. \tag{۱۵}$$

ملاحظه می‌شود که طرف راست (۱۵) با جایگزینی $f=u+iv$ و $dz=dx+i\,dy$ در طرف چپ بدست می‌آید . هر یک از معادلات (۱۴) یا (۱۵) را می‌توان‌بعوض (۶) بعنوان تعریف‌انتگرال‌مختلط در نظر گرفت . در اینجا مثالی می‌آوریم تا روشهای مختلف‌محاسبه انتگرال مختلط را تشریح کنیم .

مثال ــ مطلوبست $\int_C z^2\,dz$ ، که در آن C مرز پارامتری $(0\leq t\leq 1)$ و $C: z(t)=t^2+it$ است .

روش ۱ــ بموجب (۶) داریم :

$$\int_C z^2\,dz=\int_0^1 (t^2+it)^2(2t+i)\,dt$$

$$=\int_0^1 (2t^5-4t^3)\,dt+i\int_0^1 (5t^4-t^2)\,dt$$

$$=-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}i.$$

روش ۲ــ باقراردادن $x=x(t)=t^2$ و $y=y(t)=t$ ، از (۱۵) یا از (۱۴) ، حاصل می‌شود .

$$\int_C z^2\,dz=\int_C (x^2-y^2)\,dx-2xy\,dy+i\int_C 2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$
$$=\int_0^1[(t^4-t^2)(2t)-2t^2t]\,dt+i\int_0^1[(2t^2t(2t)+(t^4-t^2)]\,dt$$
$$=\int_0^1(2t^5-4t^3)\,dt+i\int_0^1(5t^4-t^2)\,dt=-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}i.$$

تذکر ــ در نگاه اول ، چنین بنظر می‌رسد که (۱۵) فایده‌یی ندارد ، و تنها روشی مشکل و وقت‌گیر برای محاسبه انتگرالهای مختلط ارائه می‌کند . از (۱۵) به ندرت برای محاسبه مستقیم انتگرال استفاده می‌کنیم . با اینحال ، اهمیت (۱۵) در این است که به ما امکان می‌دهد قضایای انتگرال مختلط را با استفاده از قضایای انتگرال‌های خطی حقیقی استنتاج کنیم . بدین ترتیب روشی برای محاسبه انتگرال مختلط خواهیم یافت که به مراتب ساده‌تر از (۶) است .

فرض‌کنیم $f(x)$ بر فاصله $[a,b]$ پیوسته است . به موجب قضیه اساسی حساب دیفرانسیل‌وانتگرال ، تابع $F(x)$ ی موجوداست‌بطوری‌که‌بر $[a,b]$ ، $F'(x)=f(x)$ و

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

این قضیه رفتار یک تابع بر مرز یک مجموعه (دو نقطه) را با رفتار تابعی متناظر ، یعنی مشتق‌آن‌را ، بر تمامی مجموعه (یک فاصله بسته) مربوط می‌سازد . قضیه بعدی‌مشابهی دو بعدی از این‌مطلب را عنوان می‌کند .

قضیه ۷ــ۳ . (قضیه‌گرین) گیریم توابع $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ و مشتقات آنها در میدان همبند ساده و بسته پیوسته باشد و مرز (توپولوژیکی) R همان مرز C باشد . در این صورت :

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

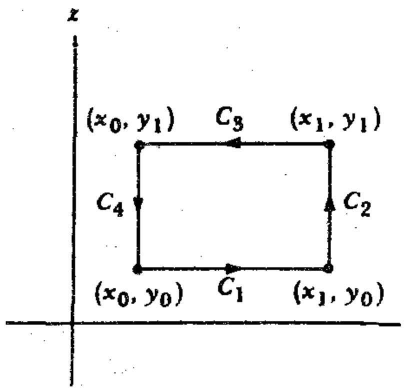
که در آن C در جهت مثبت پیموده می‌شود .

اثبات ــ قضیه را در حالت خاصی که C یک مستطیل (و درون آن) و اضلاع مستطیل موازی محورهای مختصات باشند ، ثابت می‌کنیم (ر . ک . شکل ۵) .

گیریم در شکل ۵، $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.باملاحظه اینکه بر C_1 و C_3 ، $dy \equiv 0$ و بر C_2 و C_4 ، $dx \equiv 0$ داریم :

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\,dy$$
$$+ \int_{x_1}^{x_0} P(x,y_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_0} Q(x_0,y)\,dy.$$

<u>شکل ۵</u>



از ترکیب انتگرالها بدست می‌آوریم :

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{x_0}^{x_1} \{P(x,y_0) - P(x,y_1)\}\,dx + \int_{y_0}^{y_1} \{Q(x_1,y) - Q(x_0,y)\}\,dy. \tag{۱۷}$$

بـــا به‌کاربردن‌قضیه‌اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مورد توابع زیرانتگرالهای طرف راست (۱۷) . به دست می‌آید .

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx + \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \tag{۱۸}$$
$$= \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

کــــه‌تغییرترتیب‌انتگرال‌گیری در (۱۴) را با تغییر انتگرال مکرر بعنوان حجم ،می‌توان توجیه نمود . بدین ترتیب قضیه برای مستطیل شکل ۵ ثابت می‌شود . برای اثبات کامل‌به کتاب اپوستل [1] مراجعه کنید .

---

1. Apostol

مثال ۱ـ انتگرال $\int_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$ رابر مربع $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ می‌یابیم .

روش ۱ـ با حل مستقیم

$$\int_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 x\cdot 0\,dx + \int_0^1 (1+y^2)\,dy$$
$$+\int_1^0 x\cdot 1\,dx + \int_1^0 (0+y^2)\,dy$$
$$= 0 + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

روش ۲ـ به موجب قضیه گرین

$$\int_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1\int_0^1 (2x-x)\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}.$$

مثال ۲ـ انتگرال $\int_C x\,dy - y\,dx$ را بر مثلثی به رئوس $(1,1)$ ، $(2,1)$ و $(2,2)$ می‌یابیم .

روش ۱ـ داریم :

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \int_1^2 -1\,dx + \int_1^2 2\,dy + \int_2^1 y\,dy - y\,dy,$$

که انتگرال آخری با $x = y$ پارامتری شده است . پس از حل داریم :

$$\int_C x\,dy - y\,dx = -1 + 2 + 0 = 1.$$

روش ۲ـ با استفاده از قضیه گرین

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \iint_R (1+1)\,dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy.$$

ولی $\iint_R dx\,dy$ - برابر مساحت مثلث است و بنابراین $2\iint_R dx\,dy = 2(\tfrac{1}{2}) = 1$

به متغیرهای مختلط باز می‌گردیم تا دلیل مطرح کردن قضیه گرین روشن گردد .

قضیه ۷ـ۴ . (قضیه "ضعیف "کشی) اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی (وبا مشتق پیوسته) باشد ، و C مرز بسته‌یی واقع در درون $\mathscr{D}$ باشد ، آنگاه $\int_C f(z)\,dz = 0$

اثبات ـ قرار میدهیم $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. به موجب معادلات کوشی ـ ریمان برای توابع تحلیلی ، برای تمام نقاط میدان داریم :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱۹)$$

چون $f'(z)$ـ از پیش پیوسته فرض شده است ، پس چهار مشتقات نسبی نیزمیبایست پیوسته‌باشند . موقتاً "فرض کنیم که C یک مرز ساده است . در این صورت از کار بستن قضیه گرین در مورد (۱۵) حاصل می‌شود .

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C v\,dx+u\,dy$$

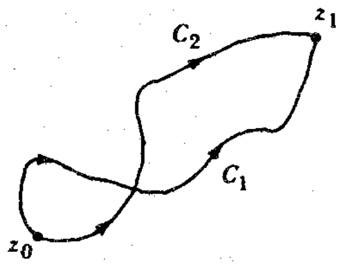
$$=\iint_R\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_R\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

که در آن R ناحیهٔ محصور به C است . بـــا تـوجه به (۱۹) هر دو تابع زیر انتگرالـهـا در R متحد با صفر هستند . بدین‌ترتیب قضیه برای حالتی که C مرز ساده بسته‌یی باشـد ثابت می‌شود . برای‌حالت یک مرز بسته عمومی ، بهمین شیوه از حالت عمومی‌تری از قضیه‌گرین قابل اثبات است . به کتاب اپرستل (۷) مراجعه کنید .

فرع ــ در شرایط قضیه فوق ، فرض کنید C_1 و C_2 دو مرز دلخواه‌دراین میدان‌باشند که نقاط آغازی و پایانی آنها مشترک باشند ، آنگاه :

$$\int_{C_1}f(z)\,dz=\int_{C_2}f(z)\,dz.$$

شکل ۶



اثبات ــ فرض کنیم C_1 و C_2 دارای به ترتیب نقاط آغازی و پایانی مشترک z_0 و z_1 می‌باشند (ر. ک. شکل ۶) . گیریم $C=C_1-C_2$. در این صورت :

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1-C_2}f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{-C_2}f(z)\,dz$$

$$=\int_{C_1}f(z)\,dz-\int_{C_2}f(z)\,dz.$$

چون C مرزی بسته است ، پس $\int_C f(z)\,dz=0$ ، کـه از آن نتیجـه می‌شـود

$$\int_{C_1}f(z)\,dz=\int_{C_2}f(z)\,dz$$

تذکر ۱ــ این فرع (و هم چنین قضیه) مبین آن است که مقدارانتگرال‌دراین‌میدان

به مسیر وابسته نیست . یعنی که مقدار انتگرال تنها به نقطه آغازی و نقطه پایانی وابسته است ، تنها به شرط آن که مرز، درون میدانی باشد که تابع در آن میدان بطور پیوسته مشتق‌پذیر است . پس، درشرایط موجود در قضیه ، می‌توان به عبارت $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz$ معنی بخشید . مقدار آن را می‌توان با محاسبه انتگرال خطی مختلط $\int_C f(z)\, dz$ بر مرزی‌که‌در این میدان بوده‌و نقطه آغازی آن z_0 و نقطه پایانی آن z_1 باشد ، پیدا کرد . در حالت خاص، اگر مرز C بسته باشد $(z_1 = z_0)$ ، در این صورت:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_0} f(z)\, dz = 0.$$

تذکر ۲ــ قضیه‌کوشی ، در شکل کنونی آن، ضعیف است‌زیرا فرض بر این بود که تابع تحلیلی دارای مشتق پیوسته باشد (تا بتوان از قضیه گرین استفاده کرد) .درعین حالی‌که ممکن است این‌محدودیت ناچیز به نظر برسد ، به ما این امکان را نمی‌دهد که قضیه کوشی را برای ردهٔ همه توابع تحلیلی بکار بندیم . در بخش بعد ، این فرض‌محدودکننده‌حذف خواهد شد . و سپس، در فصل ۸ نشان خواهیم داد که در واقع هر تابع تحلیلی همیشه مشتق پیوسته دارد .

اینک‌میزان‌اعتبارقضیه کوشی در مورد میدانهای همبند چندگانه را بررسی می‌کنیم . یادآور می‌شویم که

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i.$$

پس بــــا وجودیکه تابع $1/z$ بر همه جای دایره واحد تحلیلی است ، مقدار انتگرال‌فوق صفرنیست .قضیه کوشی به این دلیل کاربردندارد که قرص سفته همبند ساده نیست . برای آنکه دریابیم این تابع چه اشکالی دارد ، ملاحظه می‌کنیم که $1/z$ مشتق شاخه‌های مختلف فراوانی‌از $\log z$ است . فرض کنیم با یک نقطه دلخواه ω بر دایره واحد شروع کنیم و روی دایره و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت در یک دوران‌کامل انتگرال بگیریم . در حالیکه نقطه پایانی $\omega e^{2\pi i}$ در صفحه در همان محلی است که نقطه آغازی ω قرار دارد. ولی شناسه آن به میزان 2π افزایش یافته است . با انتخاب یک شاخه مشخص برای‌لگاریتم و با یک بریدگی شاخه بر پرتو $\arg z = -\alpha$ ، $\omega = e^{i\alpha}$ ، اینک می‌توان‌نوشت :

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{d}{dz} \log z = \log z \Big|_{\omega}^{\omega e^{2\pi i}}$$
$$= \log \omega e^{2\pi i} - \log \omega.$$

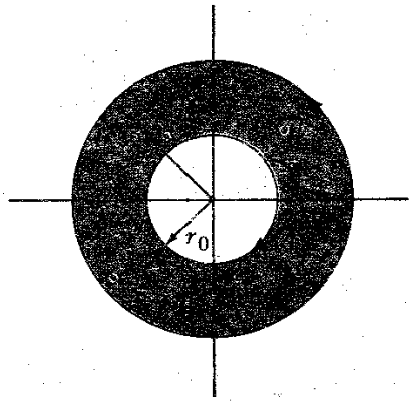
عبارت اخیر به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\log|\omega e^{2\pi i}| + i\arg \omega e^{2\pi i} - (\log|\omega| + i\arg\omega)$$
$$= i(\arg\omega e^{2\pi i} - \arg\omega) = 2\pi i.$$

پس انتگرال صفر نیست چون تابع $1/z$ دارای توابع اولیه متفاوت بسیار است. مقدار انتگرال درارتباط با تغییرات‌شناسه‌تابع چند مقداری $\log z$ می‌باشد. در موردمیدانهای همبند ساده. این مشکل وجود ندارد، زیرا در این حالت، هم چنانکه خواهیم دید، در چنین میدانی توابع تحلیلی دارای توابع اولیه تک ـ مقداری می‌باشند.

با اینحال، فرض کنیم $1/z$ را بر مرز توپولوژیکی C از یک ناحیه همبند چندگانه بصورت طوق $r_1 > |z| > r_0 > 0$ انتگرال بگیریم. اگر انتگرال‌گیری در جهت مثبت باشد (یعنی که میدان همیشه در طرف چپ بیافتد)، همانطور که در شکل ۷ ملاحظه می‌شود، داریم:

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \oint_{|z|=r_1} \frac{1}{z}\,dz + \oint_{|z|=r_0} \frac{1}{z}\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{ir_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\theta}}\,d\theta + \int_0^{-2\pi} \frac{ir_0 e^{i\theta}}{r_0 e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$



شکل ۷

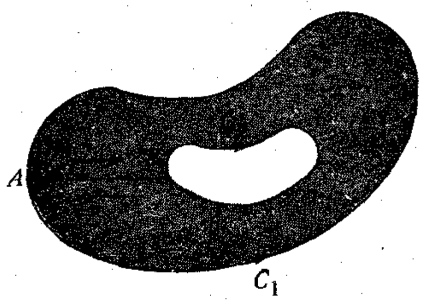
این مطلب که مقدار انتگرال در این جا صفر شد نتیجه‌ای از قضیه کشی زیر برای ناحیه‌های همبند چندگانه است:

قضیه ۷ــ۵. فرض کنیم $f(z)$ در یک ناحیه همبند چندگانه و بر مرز آن تحلیلی باشد (و مشتقات آن پیوسته باشد)، در این صورت $\int_C f(z)\,dz = 0$ ، انتگرال‌گیری بر C در جهت مثبت انجام می‌گیرد.

ما روش اثباتی را شرح می‌دهیم که یک‌ناحیه همبند چندگانه را به یک ناحیه همبند ساده" تبدیل" می‌نماید. جهت توضیح مطلب، ناحیه همبند چندگانه شکل ۸ را در نظر

بگیرید.

شکل ۸



فرض کنید پاره‌خط AB، موسوم به برش عبوری را که مرز خارجی C_1 را به مرز داخلی C_2 وصل کند رسم کنیم. در این صورت میدان محصور به مرز C_1، پاره خط AB، مرز C_2، و پاره خط BA (با پیمایشی مطابق شکل ۸) همبند ساده است. این به آن دلیل است که درناحیه جدیدهیچ خم بسته‌یی مجاز نیست که پاره خط AB را قطع کند. فرض کنیم C نمایشگر مرز این میدان باشد، در این صورت به موجب قضیه‌کوشی برای میدانهای همبند ساده، داریم:

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0.$$

باید توجه داشت که $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$ پس:

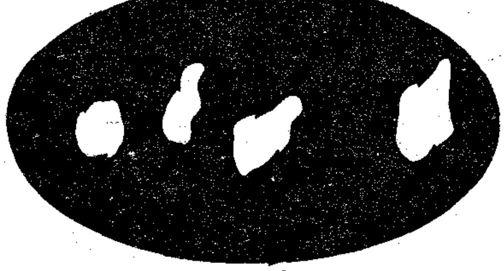
$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0.$$

و بدین ترتیب بحث در مورد قضیه کوشی برای ناحیه شکل ۸ پایان می‌پذیرد. در شکل ۹، قضیه کوشی را برای میدانی $(n-1)$ حفره‌ای نمایش داده‌ایم. به روشی مشابه حالت یک حفره‌یی، بدست می‌آید که:

$$\int_{C_1+C_2+\dots+C_n} f(z)\,dz = 0. \qquad (۲۰)$$

معادله (۲۰) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\left[\oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,dz\right] = \oint_{-C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{-C_n} f(z)\,dz.$$



شکل ۹

به بیان دیگر، اگر بر هر یک از مرزهای درونی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیریم ،بطوری که $(n-1)$ مرز درونی دارای‌جهت منفی خواهد بودآنگاه نتیجه می‌شود که مقدار انتگرال بر مرز خارجی برابر با حاصلجمع مقادیرانتگرال برمرزهای درونی است .

در یک ناحیه همبند چندگانهٔ پیچیده‌تر ، شاید برقراری‌ارتباط بین مرزهای‌درونی با بیرونی با خط مستقیم ممکن نباشد؛ ولی برای هر ناحیه همبند چندگانه ، همیشه یک خط چند ضلعی می‌توان یافت که برش عبوری لازم را فراهم آورد . در واقع قضیه گرین‌را نیز می‌توان از میدانهای همبند ساده به میدانهای همبند چندگانه تعمیم داد . و بدین ترتیب می‌توانیم قضیه کوشی را مستقیما" برای میدانهای همبند چندگانه اثبات نمائیم .

تذکر ــ شرط تحلیلی‌بودن‌برمرز C در قضیه ۷ــ۵ بدین‌معنی‌است که تابع درمیدانی شامل C تحلیلی باشد .

پرسش‌ها

۱ــ چه‌اختلافهایی‌بین‌انتگرالهای‌خطی حقیقی و مختلط موجود است؟ بین انتگرال خطی و انتگرال ریمان؟

۲ــ در اثبات قضیه گرین برای مستطیل‌ها از پیوستگی مشتقات نسبی کجا استفاده شد؟

۳ــ چرا قضیه گرین همتایی دوبعدی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است؟

۴ــ درقضیه‌گرین ، اگر جهت پیمایش بر C در جهت منفی باشد ، نتیجه‌چه‌می‌شود؟

۵ــ قضیه گرین چگونه می‌تواند روشی برای محاسبه مساحت یک ناحیه بدست‌دهد؟

۶ــ فرض‌کنید $f(z)$ در میدان‌همبندساده یی با مرز C ، دارای مشتق پیوسته‌است ، آیا می‌توان با استفاده از قضیه کوشی نتیجه گرفت $\int_C f(z)\, dz = 0$

۷ـ فرض کنید بازاء یک مرز C ، $\int_C f(z)\,dz = 0$ ، آیا در مورد $f(z)$ چیزی می‌توان گفت ؟

۸ـ آیا برای تابعی که در ناحیه خارج یک قرص دارای مشتق پیوسته است ، میتوان قضیه کوشی را بکار برد .

۹ـ آیا از قضیه کوشی می‌توان برای محاسبه انتگرالهای ریمان استفاده نمود ؟

تمرینها

۱ـ انتگرالهای خطی زیر را محاسبه کنید .

الف) $\int_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$ که در آن C ربع دایره واقع در ربع اول با شعاع $r=2$ و مرکز مبداء می‌باشد .

ب) $\int_C x^2y\,dx + (2x+1)y^2\,dy$ بر روی مربعی به رئوس $(0,1)$ ، $(1,0)$ـ ، $(-1,1)$ ، $(-1,2)$ و $(0,2)$.

پ) $\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$ روی منحنی C که توسط $(0 \leq t \leq 2\pi)$ $x = a\cos^3 t$ ، $y = a\sin^3 t$ پارامتری شده است .

ت) $\int_C \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dy$ بر امتداد دایره $|z| = r$

ث) $\int_C (x^2+xy)\,dy$ بر امتداد سهمی $y=x^2$ از $(-2,4)$ تا $(2,4)$

۲ـ فرض کنیم C مرز ساده بسته‌یی باشد که ناحیه‌یی به مساحت A را احاطه کرده است ، ثابت کنید .

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = -\int_C y\,dz = -i\int_C x\,dz = -\frac{i}{2}\int_C \bar{z}\,dz.$$

۳ـ با ترمیم اثبات قضیه گرین برای یک مستطیل نشان دهید

$$\int_C P(x,y)\,dx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

$$\int_C Q(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

۴ـ قضیه کوشی را در مورد توابع زیر تحقیق کنید . C مربعی به گوشه‌های $\pm 1 \pm i$ است .

الف) $3z-2$ ب) z^2+3z-1

۵ـ با محاسبه $\int_{|z|=1} e^z\,dz$ ، نشان دهید که

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)\,d\theta=0.$$

۶ـ انتگرالهای زیررا بر هر مرز بین نقاط نمایش داده شده به عنوان حدود انتگرال محاسبه کنید.

الف) $\int_{-\pi i}^{\pi i} e^{z}\,dz$ ب) $\int_{0}^{\pi+i} e^{iz}\,dz$

پ) $\int_{1-i}^{2+i}(z^2+3z-2)\,dz$

۷ـ۴. قضیه کوشی

قضیه‌کوشی (هم‌چنین موسوم به‌قضیه کوشی ـ گورسا[1]) را به صورتهای مختلف‌اثبات خواهیم کرد که هر یک متضمن محلوظات هندسی و توپورلوژیکی‌گوناگون‌است. گورسانشان داد که قضیه ۷ـ۴ را بدون فرض پیوستگی $f'(z)$ می‌توان اثبات‌کرد. قضیه درساده‌ترین صورتش برای یک مستطیل ثابت شده است. اثبات متضمن ساختمانی شبیه آن چیزی‌است که در اثبات قضیه هاین ـ برل (قضیه ۲ـ۱۱) بکار رفت.

قضیه ۷ـ۶. فرض‌کنیم $f(z)$ درمیدانی شامل مستطیل C و درون آن تحلیلی‌است، در اینصورت $\int_C f(z)\,dz=0$.

اثبات ـ C را به چهار مستطیل مساوی تقسیم می‌کنیم (ر. ک. شکل ۱۰)، و آنهارا با $C^{(1)}$ ، $C^{(2)}$ ، $C^{(3)}$ و $C^{(4)}$ نمایش می‌دهیم. انتگرالها روی اضلاع‌مشترک‌دارای جهت‌های مخالف‌اند و بنابراین همدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C^{(1)}} f(z)\,dz+\int_{C^{(2)}} f(z)\,dz+\int_{C^{(3)}} f(z)\,dz+\int_{C^{(4)}} f(z)\,dz.$$

با استفاده از نامساوی مثلث

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\left|\int_{C^{(1)}} f(z)\,dz\right|+\left|\int_{C^{(2)}} f(z)\,dz\right|+\left|\int_{C^{(3)}} f(z)\,dz\right|+\left|\int_{C^{(4)}} f(z)\,dz\right|. \qquad (۲۱)$$

پس، حداقل برای یکی از انتگرالهای طرف راست (۲۱)، که با $\int_{C_1} f(z)\,dz$ می‌

1. Goursat

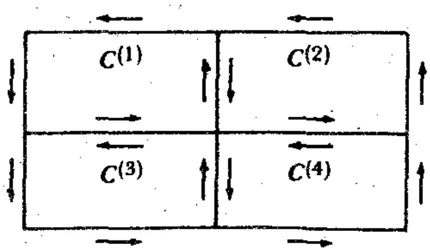
نمایانیم ، داریم :

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{\left|\int_C f(z)\,dz\right|}{4}.$$

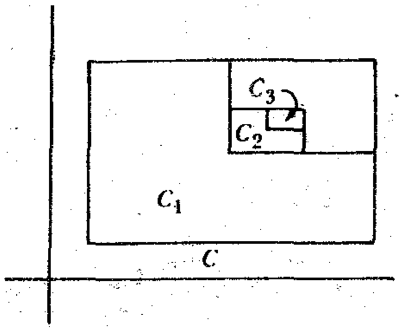
سپــــــس مستطیل C_1 را به چهار مستطیل مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم و همانند فــوق برای یکی از این مستطیل‌ها ، که با C_2 نمایش می‌دهیم ، داریم :

$$\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \geq \frac{\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right|}{4} \geq \frac{\left|\int_C f(z)\,dz\right|}{4^2}.$$

شکل ۱۰



شکل ۱۱



بـــا ادامـــه این فرآیند ، دنباله‌ء $\{C_n\}$ از مستطیل‌های تودرتو بدست می‌آید (ر. ک. شکل ۱۱). هر یک در نامساوی زیر صدق می‌کنند .

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{\left|\int_{C_{n-1}} f(z)\,dz\right|}{4} \geq \frac{\left|\int_C f(z)\,dz\right|}{4^n}. \qquad (۲۲)$$

بـــــه‌موجب لم پیش‌ازقضیه ۲ـ۱۱ ، دقیقا " یک نقطه ، موسوم به z_0 ، به همه‌مستطیل ها متعلق است . برای هر n ، نقطه z_0 روی مستطیل C_n و یا درون آن است .

بویژه ، z_0 در میدان تحلیلی بودن $f(z)$ واقع است . پس برای $\varepsilon > 0$ مفـروض $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$f'(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \eta(z), \qquad (۲۳)$$

که در آن هر وقت $|z - z_0| < \delta$ آنگاه $|\eta(z)| \underline{<} \varepsilon$

با حل (۲۳) برای $f(z)$ و بعد از انتگرال‌گیری ، حاصل می‌شود .

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z)(z-z_0)\}\,dz \qquad (۲۴)$$
$$= \int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\}\,dz + \int_{C_n} \eta(z)(z-z_0)\,dz,$$

که برای هر n برقرار است. عبارت زیر انتگرال اول دارای مشتق پیوسته است. پس با استفاده از قضیه ضعیف کوشی داریم:

$$\int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\}\,dz = 0.$$

بنابراین (۲۴) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} \eta(z)(z-z_0)\,dz.$$

اینک n را به حدی بزرگ انتخاب می‌کنیم که $C_n \subset N(z_0;\delta)$ آنگاه:

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_n} \eta(z)(z-z_0)\,dz\right|$$
$$\le \int_{C_n} |\eta(z)|\,|z-z_0|\,|dz| \le \varepsilon \int_{C_n} |z-z_0|\,|dz|.$$

درازای قطر و محیط مستطیل C_n را به‌ترتیب با D_n و L_n می‌نمایانیم دراین‌صورت برای هر z در C_n داریم: $|z-z_0| \le D_n$ و

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon D_n L_n = \varepsilon \frac{D}{2^n}\frac{L}{2^n} = \frac{\varepsilon DL}{4^n}, \qquad (۲۵)$$

که در آن D و L به ترتیب نمایشگر درازای قطر و محیط C است. با ترکیب (۲۵) با (۲۲) حاصل می‌شود.

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le 4^n \frac{\varepsilon DL}{4^n} = \varepsilon DL.$$

چون ε اختیاری است، $|\int_C f(z)\,dz| = 0$ و اثبات کامل است.

دراینجا لحظه‌یی تأمل می‌کنیم و آنچه را که ثابت کرده و آنچه که مواجه بوده‌ایم جمع‌بندی‌می‌کنیم. دربخش‌قبل، ثابت کردیم، برای تابعی که در یک میدان مشتق‌پیوسته دارد، انتگرال بر هر مرز بسته در این میدان صفر است، و یا، به بیانی معادل، انتگرال برهرمرزی‌در این میدان تنها به نقاط انتهایی مرز بستگی دارد. قضیه قبل فرض‌پیوستگی مشتق را درحالتی که مرز یک مستطیل باشد غیرضروری می‌کند.

هدف‌ما‌این است که نشان دهیم مستطیل را می‌توان با هر مرز بسته دلخواه‌دردرون

میدان تعویض کرد . برای‌انجام این‌کار ، ابتداء نشان می‌دهیم که انتگرال هر تابع پیوسته که در یک میدان دارای تابع اولیه باشد مستقل از مسیر است و سپس نشان می‌دهیم ، هر تابعی که در یک قرص تحلیلی باشد ، تابع اولیه دارد . و بعد از آن نشان می‌دهیم که هر تابع تحلیلی درمیدان‌همبندساده دارای تابع اولیه است . بالاخره با "تبدیل" میدانهای همبندچندگانه به‌میدانهای‌همبندساده ، همانند بخش قبل ، قضیه کوشی را برای میدانهای همبند چندگانه گسترش می‌دهیم .

قضیه ۷ـ۷ . فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ پیوسته است و فرض کنید یک تابع مشتق‌پذیر $F(z)$ در $\mathscr{D}$ موجود است به طوری که $F'(z) \equiv f(z)$ در $\mathscr{D}$. در این صورت برای هر مرز C در $\mathscr{D}$ که با $z(t)$ ، $a \le t \le b$ـ پارامتری شده است ، داریم :

$$\int_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

اثبات ــ چون $F(z)$ در $\mathscr{D}$ مشتق پیوسته دارد ، بدست می‌آوریم که :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C F'(z)\,dz = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(z(t))\,dt = F(z(b)) - F(z(a)),$$

آخرین تساوی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌شود .

برای به‌کار بردن نماد آشناتر ، گیریم در قضیه بالا $z(a) = z_0$ و $z(b) = z_1$. در این صورت نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

بر هر مرزی که در این میدان واقع بوده‌و نقطه‌آغازی آن z_0 و نقطه پایانی آن z_1 باشد . اگر مرز بسته باشد به طوری که $z(a) = z(b) = z_0$ آنگاه :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_0} f(z)\,dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

مثال ــ تابع $f(z) = z^2$ همه جا پیوسته است‌و‌دارای‌تابع اولیه $F(z) = z^3/3$ می‌باشد . پس برای هر مرز C در صفحه از z_0 تا z_1

$$\int_C z^2\,dz = \int_{z_0}^{z_1} z^2\,dz = \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_0^3}{3}.$$

قضیه ۷ـ۷ . به گونه‌یی فریبنده مشابه با قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

است . در حالی که یک اختلاف عمده میان آنها موجود است . قضیه اساسی مبین آن‌است که تابع پیوسته $f(x)$ که بر $[a, b]$ تعریف شده است دارای تابع اولیه‌یی مانند $F(x)$ـ صادق در رابطه زیر است :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t)\, dt = F(x_1) - F(x_0) \qquad (a \leq x_0 < x_1 \leq b).$$

در حالیکه قضیه ۷ـ۷ صرفا " بر این دلالت دارد که اگر تابع پیوسته $f(z)$ تابع اولیه‌داشته‌باشد ، آنگاه نتیجه مربوطه درست خواهد آمد . اینکه پیوستگی شرط کافی‌برای وجود یک تابع اولیه نیست ، از مثال زیر روشن می‌گردد :

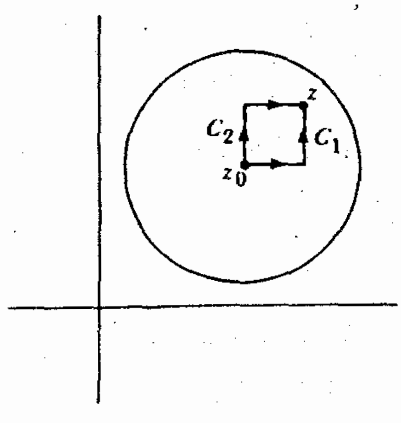
مثال ــ اگر تابع همه جا پیوسته $f(z) = \bar{z}$ تابع اولیه‌یی می‌داشت ، آنگاه نتیجه قضیه ۷ـ۷ را نیز به دنبال داشت ، در حالی که

$$\int_{|z|=1} \bar{z}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} ie^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

اینک ارتباط موجود میان توابع اولیه و توابع تحلیلی را بررسی می‌کنیم .

قضیه ۷ـ۸ . فرض‌کنیم $f(z)$ در میدانی شامل قرص $|z - z_0| \leq r$ـ تحلیلی‌باشد آنگاه $\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0$

اثبات ــ به موجب قضیه ۷ـ۷ . کافی است یک تابع $F(z)$ـ به یابیم که‌برای $|z - z_0| \leq r$ ، $F'(z) = f(z)$. نقطه‌یی مانند $z = x + iy$ در قرص انتخاب می‌کنیم‌و گیریم C_1ـ مرزی باشد مرکب از یک پاره خط افقی از $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $x + iy_0$ و به‌دنبال‌آن یک پاره خط قائم از $x + iy_0$ تا $x + iy$. هم چنین گیریم C_2.مرزی باشد مرکب‌ازپاره خط قائم‌از $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $x_0 + iy$ وبه‌دنبال‌آن‌پاره‌خط افقی از $x_0 + iy$ تا $x + iy$ (ر . ک . شکل ۱۲) .



شکل ۱۲

تعریف می‌کنیم

$$F(z)=\int_{C_1} f(z)\,dz \tag{۲۶}$$
$$=\int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)\,dt+\int_{y_0}^{y} f(x+it)i\,dt.$$

به موجب قضیه ۷ـ۶

$$\int_{C_1-C_2} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{-C_2} f(z)$$
$$=\int_{C_1} f(z)\,dz-\int_{C_2} f(z)\,dz=0.$$

پس $F(z)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$F(z)=\int_{C_2} f(z)\,dz \tag{۲۷}$$
$$=\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)i\,dt+\int_{x_0}^{x} f(t+iy)\,dt.$$

با محاسبه مشتق جزیی $F(z)$ نسبت به y در (۲۶) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_0}^{y} f(x+it)i\,dt\right)=if(x+iy)=if(z). \tag{۲۸}$$

به طریق مشابه، با محاسبه مشتق $F(z)$ در (۲۷) نسبت به x، حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t+iy)\,dt\right) \tag{۲۹}$$
$$=f(x+iy)=f(z).$$

با توجه به (۲۸) و (۲۹) داریم:

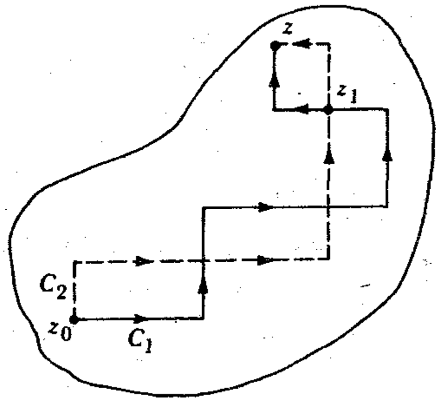
$$\frac{\partial F}{\partial x}=-i\,\frac{\partial F}{\partial y}=f(z). \tag{۳۰}$$

ولـــــی (۳۰) همان معادلات کوشی ـ ریمان برای $F(z)$ است. بعلاوه پیوستگی $\partial F/\partial x$ و $\partial F/\partial y$ نتیجهٔ پیوستگی $f(z)$ می‌باشد. پس‌می‌توان‌قضیه ۵ـ۵ را بکار بردوتحلیلی‌بودن F را در z ثابت‌کرد. چون z اختیاری بود، $F(z)$ در قرص $|z-z_0|\leq r$ تحلیلی است. بالاخره، از (۵) در فصل ۵، نتیجه می‌گیریم که $F'(z)=\partial F/\partial x=f(z)$.

دایره دارای این‌خاصیت است که هر نقطه درون دایره را می‌توان با دو خط شکسته متمایز به مرکز آن صل کرد بطوری که، ایندو خط شکسته روی هم تشکیل‌پیرامون مستطیلی

را می‌دهند که اضلاعش با محورهای مختصات موازی است. بعلاوه این تنها خاصیت‌دایره بود که برای گذار از قضیه کوشی برای مستطیل به قضیه کوشی برای‌دایره‌مورد استفاده‌قرار گرفت. در یک میدان عمومی‌تری، چنین کاری ممکن نیست؛ با این حال به موجب تذکر ۱ بعد از قضیه ۲ــ۲، هر زوج نقاط در میدان $\mathscr{D}$ را می‌توان به‌وسیله یک خط چند ضلعی که در $\mathscr{D}$ واقع باشد را به هم‌وصل کرد (که اضلاع این خط چند ضلعی با محورهای مختصات موازی باشد). در کتاب آلفرس(۸، صفحه ۱۴) نشان داده شده است که اگر میدان‌همبند ساده باشد، آنگاه دوتا از چنین خطوط چند ضلعی C_1 و C_2 می‌توان ساخت بطوری که اختلاف $C_1 - C_2$ برابر تعداد متناهی از مرزهای مستطیل هائی باشد که متناوبا" در جهت‌های مثبت و منفی پیموده شده‌اند، همانطور که در شکل ۱۲ نشان داده‌ایم. این مطلب در اثبات قضیه اصلی، بکار خواهد رفت.

شکل ۱۲



قضیه ۷ــ۹. (قضیه کوشی) اگر $f(z)$ در یک میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد و C مرز بسته‌یی واقع در درون $\mathscr{D}$ باشد، آنگاه $\int_C f(z)\,dz = 0$.

اثبات ــ به موجب قضیه ۷ــ۷، کافی است یک تابع $F(z)$ بیابیم بطوری‌که درمیدان همبنــد ساده $\mathscr{D}$، $F'(z) = f(z)$. نقطه z_0 را در $\mathscr{D}$ ثابت می‌گیریم و یک نقطه دلخــواه z در $\mathscr{D}$ اختیار می‌کنیم. در این صورت با C_1 و C_2 که مطابق شکل ۱۲ رسم شده‌اند، تابع $F(z)$ را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(z) = \int_{C_1} f(z)\,dz.$$

به موجب قضیه ۷ــ۴، چون انتگرال بر هر مستطیل صفر است داریم:

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0,$$

از اینرو هم‌چنین داریم:

$$F(z) = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

فرض کنیم $z_1 = x_1 + iy_1$ آخرین نقطه برخورد C_1 با C_2 میان z_0 و $z = x + iy$ باشد. هم چنین فرض‌کنیم، در این آخرین مستطیل، C_1 مرکب باشد از خط افقی و به دنبال آن خط قائم، در حالی که C_2 عبارت باشد از خط قائم و به دنبال آن خط افقی همانطور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

با توجه به قضیه ۷ـ۶، مقدار انتگرال $f(z)$ از z_0 تا z_1، بر هر دو مرز C_1 و C_2 برابر است و این مقدار مشترک را با K نمایش می‌دهیم. باقی‌مانده اثبات، همانند قضیه ۷ـ۸ است، زیرا داریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{C_1} f(z)\, dz \\ &= K + \int_{x_1}^{x} f(t + iy_1)\, dt + \int_{x_1}^{y} f(x + it) i\, dt \end{aligned} \tag{۳۱}$$

و

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{C_2} f(z)\, dz \\ &= K + \int_{y_1}^{y} f(x_1 + it) i\, dt + \int_{x_1}^{x} f(t + iy)\, dt. \end{aligned} \tag{۳۲}$$

از (۳۱) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{y_1}^{y} f(x + it) i\, dt\right) = if(x + iy) = if(z)$$

و از (۳۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_1}^{x} f(t + iy)\, dt\right) = f(x + iy) = f(z).$$

پس

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y} = f(z). \tag{۳۳}$$

معادلـــادله (۳۳) نمایش معادلات کوشی ـ ریمان برای $F(z)$ است. چون $f(z)$ پیوسته است. مشتقات نسبی $F(z)$ هم پیوسته‌اند. بنابراین $F(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی اســت و $F'(z) = \partial F/\partial x = f(z)$ در $\mathscr{D}$. و اثبات کامل است.

تذکر ۱ــ مفاهیم توپولوژیکی که در اثبات قضیه ۷ـ۹ بکار رفت به ما اجازه می‌دهد

که با تعداد متناهی از مستطیل‌ها درون میدان همبند ساده‌کار کنیم ، در نتیجه از قضیه ۷ـ۶ استفاده کنیم . ولی اساس قضیه ۷ـ۶ شامل "انقباض" یک مستطیل به‌یک نقطه است. در نتیجه قضیه کوشی مالا" بر این نکته متکی است که $\int_{z_0}^{z_0} f(z)\, dz = 0$.

تذکر ۲ــ قضیه ۷ـ۵ که تعمیم قضیه "ضعیف" کوشی(قضیه ۷ـ۴) از میدانهای همبند ساده به میدانهای همبند چندگانه بود،ماهیت توپولوژیکی محض داشت، و هیچ جا از پیوستگی مشتقات نسبی استفاده به عمل نیامد . بنابراین ، قضیه کوشی برای ناحیه همبند چندگانه نیز برقرار است و اثبات عبارت است از اینکه ، همانند قضیه ۷ـ۵ ، ناحیه‌همبند چندگانه را "تبدیل" به‌ناحیه همبند ساده نمائیم .

این‌تعمیم قضیه کوشی در محاسبه‌انتگرالها بر مرزی که یک ناحیه را احاطه‌کرده‌است که در آن تابع تحلیلی نیست ، مورد استفاده قرار می‌گیرد .

مثال ــ مقدار $\int_C 1/(z-z_0)\, dz$ را بر مرز ساده بسته‌ای مانند C که‌مبداء درون‌آن است ، محاسبه‌کنید . برای یک $\varepsilon > 0$ ، دایره $C_1 : |z - z_0| = \varepsilon$ درون مرز C قرارمی‌گیرد . هم چنین $f(z) = 1/(z - z_0)$ در ناحیه میان C و دایره $|z - z_0| = \varepsilon$ ، که ناحیه‌یی همبند چندگانه است ، تحلیلی می‌باشد (ر. ک. شکل ۱۴) . بنابراین

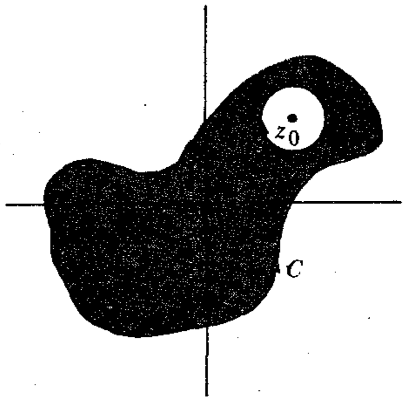
$$0 = \int_{C+C_1} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \oint_C \frac{1}{z-z_0}\, dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0}\, dz.$$

بنابراین

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\, dz = -\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \oint_{-C_1} \frac{dz}{z-z_0}.$$

بـــــاید توجه داشت که جهت مثبت بر C_1 در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است بـه طوری که جهت مثبت $-C_1$ ، خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد . $-C_1$ را بـا $z(t) = \varepsilon e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$ پارامتری می‌کنیم و داریم :

شکل ۱۴



$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz=\oint_{-C_1}\frac{1}{z-z_0}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{z'(t)}{z(t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,dt=2\pi i.$$

بنابراین اعتبار قضیه کوشی درمورد ناحیه‌های همبندچندگانه‌نگرانی موجوددرمورد نحوه پارامتری کردن مرزهای بدشکل را برطرف می‌کند. روش بکار رفته در مثال بالانشان می‌دهد $\oint_C 1/(z-z_0)\,dz$ برابر با $2\pi i$ یا 0 است، برحسب اینکه z_0 درون و یا بیرون مرز ساده بسته C باشد. برای محاسبه انتگرال هیچگونه آگاهی اضافی لازم نیست.

تذکر ــ قضیه کوشی را برای ناحیه‌های همبند چندگانه مستقیماً"، همانند روشی که برای‌ناحیه‌همبندساده داشتیم، نمی‌توان اثبات کرد، زیرا که توابع تحلیلی درمیدانهای همبندچندگانه‌لزوماً "دارای‌تابع اولیه (تک‌مقداری) نیستند. درمثال بالا، $\log(z-z_0)$، در صورتی که به یک شاخه اکتفا شود تابع اولیه تحلیلی $1/(z-z_0)$ می‌باشد. مفهوم لگاریتم تحلیلی در میدانهای همبند ساده در قضیه زیر روشن‌تر می‌گردند:

قضیه ۷ــ۱۰. اگر $f(z)$ در یک میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی و غیر صفر باشد، آنگاه تابعی مانند $g(z)$، تحلیلی در $\mathscr{D}$، موجود است به طوری که $e^{g(z)}=f(z)$.

اثبات ــ چون $f(z)$ در $\mathscr{D}$ هرگزصفرنمی‌شود، تابع $f'(z)/f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است. بعلاوه انتگرال $f'(z)/f(z)$ میان هر دو نقطه $\mathscr{D}$، که میدانی‌همبندساده‌است، به مسیر بستگی ندارد. تابع $g(z)$ را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta+\operatorname{Log} f(z_0), \tag{۳۴}$$

که در آن z_0 نقطه ثابتی از $\mathscr{D}$ است و z نقطه‌یی دلخواه در $\mathscr{D}$ و مسیر انتگرال گیری هر مسیری است که در $\mathscr{D}$ باشد. قرار می‌دهیم $h(z)=f(z)e^{-g(z)}$ و ملاحظه می‌کنیم که:

$$\begin{aligned}h'(z)&=f'(z)e^{-g(z)}-f(z)g'(z)e^{-g(z)}\\&=f'(z)e^{-g(z)}-f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)}=0.\end{aligned}$$

پس $h(z)$ در $\mathscr{D}$ ثابت‌است. برای تعیین این ثابت، قرار می‌دهیم $z=z_0$ بدست می‌آوریم.

$$h(z_0)=f(z_0)e^{-g(z_0)}=f(z_0)e^{-\operatorname{Log} f(z_0)}=1.$$

پس در سراسر $\mathscr{D}$ ، $f(z)e^{-g(z)} \equiv 1$ و قضیه ثابت می‌گردد .

برای‌آنکه بدانیم فرض همبند ساده بودن میدان ، اساسی است ، ملاحظه می‌کنیم که $1/z$ در صفحه سفته هرگز صفر نمی‌شود و هیچ تابع تحلیلی $g(z)$ موجود نیست که بتوان را بصورت $e^{g(z)}$ نوشت . (یادآور می‌شویم که هیچ شاخه‌ای از $\log z$ در صفحه سفته تحلیلی نیست) .

فرع ــ اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی و مخالف صفر باشد ، آنگاه یک شاخه تحلیلی از $(f(z))^{1/n}$ (n عددی صحیح و مثبت) در $\mathscr{D}$ قابل تعریف است .

اثبات ــ قرار می‌دهیم $f(z) = e^{g(z)}$ ، بطوری که $g(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است ، و $(f(z))^{1/n}$ را با $(f(z))^{1/n} = e^{(1/n)g(z)}$ تعریف می‌کنیم .

تذکر ــ بطور عام‌تر ، هر یک از n تابع $e^{(g(z)+2k\pi i)/n}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ یک شاخه تحلیلی از $(f(z))^{1/n}$ است .

پرسش ها

۱ــ اگر $f(z)$ در میدانی تحلیلی باشد و C مرزی در این میدان باشد ، آیا $\int_C |f(z)|\, dz = 0$ ؟

۲ــ در اثبات قضیه ۷ــ۹ ، از همبند ساده بودن میدان کجا استفاده کردیم ؟

۳ــ فرض کنید $f(z)$ بر مرز C تحلیلی است ، آیا $\int_C f(z)\, dz = 0$ ؟

۴ــ چه ارتباطی میان قضیه ۷ــ۷ و قضیه گرین موجود است ؟

۵ــ در اثبات قضیه ۷ــ۸ ، کجا فرض تحلیلی بودن مورد نیاز بود ؟

۶ــ چه اختلافی میان قضیه کوشی و قضیه ضعیف کوشی موجود است ؟

۷ــ اگر مرز C از مبداء بگذرد ، در مورد $\int_C (1/z)\, dz$ چه می‌توان گفت ؟

۸ــ اگر C خم بسته‌یی غیرساده باشد ، $\int_C (1/z)\, dz$ چه مقادیری را ممکن است به‌ـ پذیرند ؟

۹ــ آیا تابع $g(z)$ در قضیه ۷ــ۱۰ منحصربفرد است ؟

تمرینها

۱ــ مقدار $\int_{-i}^{i} |z|\, dz$ را بــر مرزهای‌متفاوت محاسبه کنید .آیا $|z|$ تابع اولیه‌یی دارد ؟

۲ــ یک‌تابع $f(z)$ مثال بزنید که برای هر $r > 0$ ، $\int_{|z|=r} f(z)\, dz = 0$ در عین‌حال

که $f(z)$ همه جا تحلیلی نباشد .

۳ــ مطلوبست $\int_C dz/(1+z^2)$. ، که در آن C دایره زیر است .

الف) $|z-i|=1$ ب) $|z+i|=1$

پ) $|z|=2$ ت) $|z-1|=1$

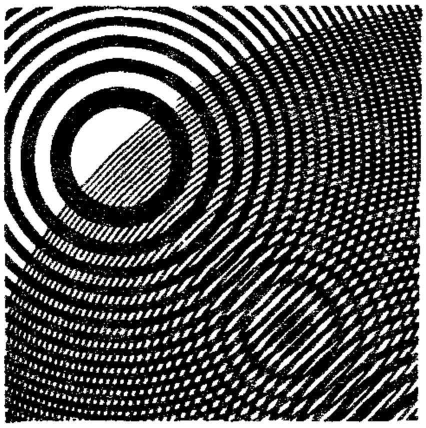
۴ــ عبارت زیر انتگرال را به قسمت‌های حقیقی و انگاری تفکیک کنید . و در صورت امکان ، عبارت $\int_C e^z/z\, dz$ را برای C زیر محاسبه کنید .

الف) دایره $|z|=1$

ب) دایره $|z-2|=1$.

پ) مربعی به رئوس $\pm 1 \pm i$

۵ــ فرض کنید $\operatorname{Re} z_0 > 0$ و $\operatorname{Re} z_1 > 0$. مقدار $\int_{z_0}^{z_1}(1/z)\, dz$ را در طول مرزهای واقع در نیم صفحهٔ راست محاسبه کنید .



۸ـ کاربردهای قضیهٔ کوشی

اکثر قضایای موثروزیبائی که در این فصل ثابت می‌شوند. سهمی درمتغیرهای حقیقی ندارند. باوجودآنکه قضیه کوشی فی‌الواقع زیباست، ولی اهمیت آن درکاربردهایش نهفته است. در این فصل، قضایای متعددی را اثبات می‌کنیم که در فصل قبل به آنها اشاره‌شد. خواهیم دیدکه یک تابع تحلیلی دارای مشتق از تمام مراتب میباشد و آنرا می‌توان بوسیله یک رشته نمایی، نمایش داد. قضیه اساسی جبر به روشهای گوناگون اثبات خواهد شد. در واقع آنچنان روابط زیبایی میان قضایای گوناگون این فصل موجود است که به نظرمی‌رسد اثبات دوباره هر قضیه کار ارزنده‌یی باشد.

۸ــ۱. فرمول انتگرال کوشی

اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد. می‌دانیم که بر امتداد هر مرز بسته C درون $\mathscr{D}$، $\int_C f(z)\, dz = 0$. به هنگامیکه تابع در تمام نقاط مگر در یک تعداد متناهی، تحلیلی باشد، تغییر جالبی رخ خواهد داد. هم چنانکه در فصل‌قبل دیدیم بر هر مرز ساده بسته با جهت مثبت C که z_0 درون آن باشد داریم:

$$\int_C \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i$$

اینک تعمیم (۱) را بیان می‌داریم:

قضیه ۸ــ۱. (فرمول‌انتگرال‌اول‌کوشی) فرض‌کنیم $f(z)$ در یک میدان همبندساده که شامل مرز ساده بسته C است تحلیلی باشد. اگر z_0 درون C باشد آنگاه:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

تذکر ــ اگر $f(z)\equiv 1$ نتیجه قضیه به (۱) ساده می‌شود.

اثبات قضیه ۸ــ۱ــ بازاء $\varepsilon>0$ مفروض، دایره C_1، $C_1: |z-z_0|=r$ را درون C می‌سازیم که بس کوچک باشد تا برای هر z بر C_1 ، $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. بموجب قضیه کوشی برای ناحیه‌های همبند چندگانه،

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

از اینرو

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_{C_1}\frac{f(z_0)+(f(z)-f(z_0))}{z-z_0}\,dz$$
$$=\int_{C_1}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz+\int_{C_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

چونکه $\int_{C_1} dz/(z-z_0)=2\pi i$ ، خواهیم داشت:

$$\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i f(z_0)+\int_{C_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

اگر بتوان نشان داد که انتگرال طرف راست صفر است قضیه ثابت می‌گردد. داریم:

$$\left|\int_{C_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\le\int_{C_1}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,|dz|$$
$$<\frac{\varepsilon}{r}\int_{C_1}|dz|=\frac{\varepsilon}{r}(2\pi r)=2\pi\varepsilon.$$

چونکه ε اختیاری است، انتگرال صفر است. بدین ترتیب اثبات تمام است.

تذکر ــ قضیه ۸ــ۱، مقدار $f(z)$ را در هر نقطه درون C برحسب مقادیر روی C بدست می‌دهد. به بیان دیگر اگر بدانیم $f(z)$ درون و بر مرز یک ناحیه همبند ساده تحلیلی است، آنگاه مقادیر $f(z)$ برمرز مقادیر $f(z)$ در درون را کاملاً مشخص می‌کند. مشابه این قضیه برای توابع از یک متغیر حقیقی موجود نیست. به عنوان مثال، توابع $f_n(x)=x^n$ ، $0\le x\le 1$ همگی دارای مقادیر مرزی برابرند $(f(0)=0, f(1)=1)$ ولی در نقاط درونی با یکدیگر مخالف‌اند.

سپس مشتق یک تابع تحلیلی را برحسب یک انتگرال محاسبه می‌کنیم. نمادهای قضیه

۸–۱ را بکار می‌بریم و h را از نظر قدر مطلق بس کوچک انتخاب می‌کنیم که z_0+h درون C بیفتد. در این صورت:

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}\,dz.$$

بنابراین

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right)f(z)\,dz}{h} \qquad (۲)$$

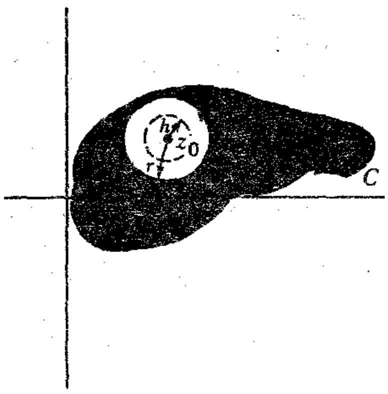
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\,dz.$$

وقتی که $h\to 0$، تابع زیر انتگرال به $f(z)/(z-z_0)^2$ نزدیک می‌شود. جهت اثبات این مطلب می‌توان از درون انتگرال حد گرفت، می‌بایست نشان دهیم که تفاضل

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \qquad (۳)$$

$$=\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,dz\right|$$

را می‌توان به‌دلخواه کوچک کرد. اگر دایره $C_1: |z-z_0|=r$، درون C مفروض باشد، h را بس کوچک انتخاب می‌کنیم که $|h|\le r/2$ (ر.ک. شکل ۱). بموجب قضیه‌کوشی برای نواحی همبند چندگانه،



شکل ۱

$$\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,dz$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,dz.$$

چـــــون $f(z)$ بر C_1 پیوسته‌است، کراندار است $|f(z)| \leq M$. سپس (۳) ازبالا دارای کران زیر می‌باشد:

$$\frac{|h|}{2\pi}\int_{C_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2|z-z_0-h|}|dz| \leq \frac{|h|M}{2\pi r^2}\int_{C_1}\frac{|dz|}{|z-z_0|-|h|}$$
$$\leq \frac{|h|M}{\pi r^3}\int_{C_1}|dz|$$
$$= |h|\left(\frac{2M}{r^2}\right).$$

بنابراین (۳) با h به صفر میل می‌کند. با توجه به (۲) و (۳)

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz \qquad (۴)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

معادله (۴) مقدار $f'(z)$ را در هر نقطه درون C نسبت به مقادیر $f(z)$ بـــر C بیان می‌کند. ما بنابه فرض می‌دانستیم که $f(z)$ در همه نقاط درون C مشتق‌پذیر است. ولی فرآیند فوق قابل تکرار است. از (۴) حاصل می‌شود

$$\frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\{2(z-z_0)-h\}f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)^2}dz. \qquad (۵)$$

همـــــانند قبل می‌توانیم نشان دهیم‌که از درون‌انتگرال‌می‌توان حد گرفت. بنابرایــن از (۵) می‌رسیم به:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz. \qquad (۶)$$

معادله (۶) آگاهیهایی افزون بر آنچه ما انتظار داشتیم، بما می‌دهد. اولا" وجود $f''(z)$ در همه نقاط درون C روشن می‌شود. سپس مشتق دوم‌رامی‌توان برحسب‌مقادیر $f(z)$ بر C محاسبه کرد. این بحث به دفعات نامتناهی قابل تکرار است. با استقـرار، می‌توان نشان داد که مشتق n.ام به صورت زیر است:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

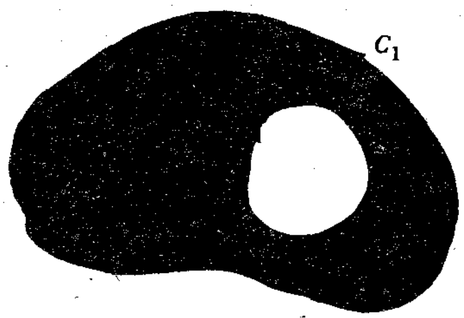
بنـــــابـــراین‌مشتقات‌ازتمام مراتب در هر یک از نقاط درونی، برحسب مقادیر تابع بـــر مرزش قابل محاسبه است. این نتیجه درخشان را به صورت قضیه زیر جمع بندی می‌کنیم:

قضیه ۸ـ۲. (فرمول انتگرال کوشی) فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده‌یی که شامل مرز بسته ساده C است تحلیلی باشد. در این صورت $f(z)$ در هر نقطه z_0 درون C دارای مشتق از تمام مراتب است و

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

تذکر ۱ــ در حالی که قضیه ۸ـ۲ به عنوان یک خاصیت همه جایی بیان شده است. ولی در حقیقت خاصیتی از میدانهای همبند ساده است که خاصیتی موضعی است. زیرا که اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، در یک همسایگی (همبند ساده) این نقطه نیز تحلیلی است، در نتیجه تابعی که در یک نقطه تحلیلی است می‌بایست درآن نقطه‌دارای مشتق از تمام مراتب باشد.

تذکر ۲ــ فرمول انتگرال کوشی برای ناحیه‌های همبند چندگانه نیز برقرار است. ما آنرا برای میدان همبند چندگانه شکل ۲ اثبات می‌کنیم. در تمرینات از خواننده می‌خواهیم که آن را برای حالت عمومی اثبات نماید.



شکل ۲

فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند R تحلیلی است و مرز R مرکب است از مرز $C=C_1\cup C_2$. دایره Γ را به مرکز z_0 در R رسم می‌کنیم، در این صورت به موجب قضیه کوشی برای میدانهای همبند چندگانه داریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=0.$$

از این رو به موجب قضیه ۸ـ۱،

$$\begin{aligned}f(z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.\end{aligned}$$

یعنـــــــی $f(z_0) = 1/2\pi i \int_C f(z)/(z - z_0)\, dz$ و بدین ترتیب ضیه ۸–۱ برای میدان همبند چندگانه R ثابت می‌شود. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که نتیجه قضیه ۸–۲ برای میدان همبند چند گانه R نیز معتبر است (ر. ک. شکل ۲).

فرمول انتگرال کوشی برای محاسبه انتگرالهای مشخص بر مرز به ما کمک می‌کند:

مثال ـ مطلوبست $\int_{|z|=2} \frac{z - 3\cos z}{(z - \pi/2)^2}\, dz.$

با قرار دادن $f(z) = z - 3\cos z$ داریم:

$$\int_{|z|=2} \frac{z - 3\cos z}{(z - \pi/2)^2}\, dz = 2\pi i f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\pi i.$$

اکنون قادریم که قضیه تیلر را برای توابع مختلط اثبات کنیم.

قضیه ۸–۳. فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی است و مرز $\mathscr{D}$ ، C است. اگر z_0 نقاطی از $\mathscr{D}$ باشد، $f(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots,$$

ایـــن رشتـــه برای $|z - z_0| < \delta$ همگراست، که در آن δ دوری z_0 تا نزدیکترین نقطه بر C است.

اثبات ـ دایره C_1 رابه‌مرکز z_0 وشعاع ρ ، $\rho < \delta$ ، رسم می‌کنیم. گیریم z نقطه‌یی درون C_1 باشد. به موجب فرمول کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{۷}$$

قـــــرار می‌دهـــیم $|z - z_0| = r$. در این صورت $r = |z - z_0| < |\zeta - z_0| = \rho$ (ر. ک. شکل ۳) و

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \tag{۸}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2\right.$$

$$+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{k}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\Bigg(1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n-1}+\frac{((z-z_0)/(\zeta-z_0))^n}{1-(z-z_0)/(\zeta-z_0)}\Bigg).$$

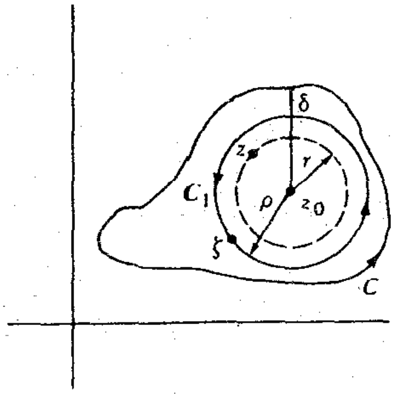
به‌موجب (۷) ، می‌توان (۸) را در $f(\zeta)$ ضرب کرده و انتگرال گرفت تا حاصل شود.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta+\cdots \tag{۹}$$

$$+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta+R_n,$$

که در آن

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$



شکل ۳

به موجب فرمول انتگرال کوشی ، (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n.$$

اکنون چنانچه بتوان نشان داد R_n ، با میل کردن n به ∞ ، به صفر میل می‌کند ، قضیه ثابت می‌گردد . فرض کنیم بر C_1 ، $|f(z)|\le M$ (ر . ک . شکل ۳) . دراینصورت

$$R_n\le\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\,|d\zeta|\le\frac{M}{2\pi}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\int_{C_1}\frac{1}{|\zeta-z|}\,|d\zeta|. \tag{۱۰}$$

با استفاده از نامساوی

$$\frac{1}{|\zeta - z|} = \frac{1}{|\zeta - z_0 - (z - z_0)|} \leq \frac{1}{|\zeta - z_0| - |z - z_0|} = \frac{1}{\rho - r},$$

(۱۰) منجر به

$$R_n \leq \frac{M}{2\pi(\rho - r)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \int_{C_1} |d\zeta| = \frac{M\rho}{\rho - r}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

چونکه $\rho > r$ با $n \to \infty$ ، $(r/\rho)^n \to 0$ ـ بنابراین .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

و اثبات کامل است .

تذکر ــ به موجب آزمون M (قضیه ۶ــ۹) رشته تیلر $f(z)$ روی زیرمجموعه‌های فشرده ازقرص $|z - z_0| < \delta$ همگرای یکنواخت نیز می‌باشد .

در بخش ۶ــ۳ دیدیم که یک رشته توان درون دایره همگرایی‌اش نمایش‌دهنده یک تابع تحلیلی است . قضیه ۸ــ۳ ، در واقع معکوس این مطلب است . بنابراین تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است . اگر و تنها اگــــــــــر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ در قرصی دایره‌یی مانند $|z - z_0| \leq r$ معتبر باشد ، که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

قضیه ۸ــ۳ . بسطهای ماکلورن زیر را که در فصل ۶ بدون اثبات بیان‌کردیم، توجیه می‌کند.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

اینک‌به‌بررسی‌برخی ارتباط های‌میان همگرایی یکنواخت و انتگرال‌گیری می‌پردازیم :

قضیه۸ــ۴ . فرض‌کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع باشند که بر مرز C پیوسته اند و فرض‌کنیم که روی C ، $\{f_n(z)\}$ به طور یکنواخت به $f(z)$ می‌گراید . در این‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \int_C f(z)\, dz.$$

بیان قضیه بدین صورت است که ما می‌بایست نشان دهیم دنباله $\int_C f_n(z)\, dz$ به

$\int_C f(z)\,dz$ می‌گراید .

اثبات ــ باید توجه‌داشت‌که به موجب قضیه ۶ــ۶ ، $f(z)$ بر C پیوسته‌است وبنابر- این $\int_C f(z)\,dz$ موجود است . با $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ موجود است که برای $n > N$ و هر z بر C داریم $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. اگر درازای C را با L بنمایانیم . نتیجه می‌شود که برای $n > N$ داریم :

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_C (f_n(z) - f(z))\,dz\right|$$
$$\leq \int_C |f_n(z) - f(z)|\,|dz| < \varepsilon L.$$

چونکه ε اختیاری است ، اثبات کامل است .

<u>فرع ــ فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع پیوسته و $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ بر مرز C همگرای یکنواخت است . آنگاه</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C f_n(z)\,dz\right) = \int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz.$$

اثبات ــ قرار می‌دهیم که $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ در این صورت :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C f_n(z)\,dz\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\int_C f_k(z)\,dz\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)\,dz.$$

ولی به موجب قضیه فوق داریم :

$$\lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz.$$

تذکر ــ اثبات ما از قضیه ۸ــ۳ تقلیدی از اثبات در حالت حقیقی بود . با توجه‌به فرع اینک می‌توانیم اثبات ساده‌تری ارائه دهیم که جمله باقی مانده در آن ظاهر نشود . به عوض (۸) می‌توان نوشت :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

کــــه همگرایی بر C_1 یکنواخت است . بنابراین می‌توان در $f(\zeta)/2\pi i$ ضرب کرد و جمله به‌جمله انتگرال گرفت که این مستقیما" منجر به مطالب زیر می‌گردد :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right)f(\zeta)\,d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

ممکن است تصور کنیم که چنانچه برای هر مرز ساده بستهٔ C که z_0 نقطه درونی آن است، $\int_C f(z)\,dz = 0$ آنگاه $f(z)$ درنقطه z_0 تحلیلی‌خواهد شد. متأسفانه‌این معکوس قضیه‌کوشی درست‌نیست. به عنوان مثال $\int_C (1/z^2)\,dz = 0$ بر هر مرز ساده بسته C که‌مبداء درون آن باشد صفر است. این به دلیل آن است که $f(z)$ در ناحیهٔ میان C و دایره ای مانند $|z| = \varepsilon$ واقع دردرون C تحلیلی‌است. ازاین روبه‌موجب قضیه کوشی برای‌ناحیه های همبند چندگانه داریم

$$\int_C \frac{1}{z^2}\,dz = \int_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{z^2}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^2 e^{2i\theta}}\,d\theta$$
$$= \frac{i}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,d\theta = 0.$$

ولی یک معکوس نسبی از برای قضیه کوشی وجود دارد.

قضیه ۸ــ۵. (قضیه مررا[1]) فرض‌کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ پیوسته باشد. اگر بر هر مرز ساده بسته C درون $\mathscr{D}$، $\int_C f(z)\,dz = 0$ آنگاه $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است.

اثبات ــ z_0 را در $\mathscr{D}$ ثابت می‌گیریم، مقدار تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

بــه مسیر انتگرال‌گیری از z_0 تا z درون $\mathscr{D}$ وابسته نیست. h را بس کوچک انتخاب می‌کنیم تا پاره خط z تا $(z+h)$ درون $\mathscr{D}$ باشد و خارج قسمت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right]$$
$$= \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta.$$

در این صورت

1. Morera

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta, \qquad (11)$$

کــــه در آن مسیر از z تا $(z+h)$ پاره خط راست در نظر گرفته شده است. به موجب پیوستگی $f(z)$، برای $|h|$ بس کوچک، $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. چون که پاره خــط از z تا $(z+h)$ به دارازی $|h|$ است. از (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\frac{1}{|h|}\,\varepsilon\,|h|=\varepsilon.$$

بنـــابـــراین، $F(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است و $F'(z)=f(z)$. بعلاوه $F(z)$ می‌بایست دارای مشتق از تمام مراتب باشد. به ویژه، برای همه نقاط $\mathscr{D}$ داریم $F''(z)=f'(z)$ که بدین ترتیب تحلیلی بودن $f(z)$ ثابت می‌شود.

فرع ــ فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد. اگر z_0 نقطه‌یی از $\mathscr{D}$ باشد، آنگاه $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\,d\zeta$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است.

اثبات ــ به موجب قضیه کوشی برای میدانهای همبند ساده، بر هر مرز C درون $\mathscr{D}$ داریم $\int_C f(z)\,dz=0$. بنابراین $f(z)$ در مفروضات (و هم درنتیجه) قضیه مرراصدق می‌کند. از این رو اثبات فرع در مضمون اثبات قضیه مررا نهفته است.

خاطر نشان می‌شویم که حتی اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد مع‌الوصف‌اینطور نیست‌که‌برهرمرزبسته‌ساده‌در $\mathscr{D}$ داشته باشیم $\int_C f(z)\,dz=0$. تابـــع $f(z)=1/z$ در طوق محصور به دوایر $|z|=\frac{1}{2}$ و $|z|=2$ تحلیلی است. ولی $\int_{|z|=1}(1/z)\,dz=2\pi i$. با اینکه این دایره‌درون‌طوق جای دارد. باید توجه داشت که درون $|z|=1$ در طوق‌جای نداردوبه همین دلیل است قضیه کوشی در اینجا کاربرد ندارد. برای میدان همبندساده ایـــــن مطلب درست است که: انتگرال روی هر مرز ساده بسته در میدان صفر است.

با توجه به قضیه مررا می‌توانیم بگوئیم که یک‌شرط لازم و کافی برای تابع پیوستــه که در یک میدان‌همبند ساده تحلیلی باشد این است کــــه مقدار انتگرال مستقل از مسیر انتگرال‌گیری‌باشد. بایک نظر سطحی ممکن است تصور شود که قضیه مررا در اثبات‌تحلیلی بودن توابع مفید نیست، چــونکه ممکن نیست همه مرزهای ساده‌بسته‌را آزمایش نمود. ولی اثبات قضیه بعدی، هر گونه شکی را در مورد کارآیی قضیه مررا، برطرف می‌نماید.

قضیه ۸ــ۶. فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی باشد که بر زیر‌مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ به تـابـع $f(z)$ همگرای یکنواخت باشد. در این صورت $f(z)$ در

$\mathscr{D}$ تحلیلی است.

اثبات ــ کافی است نشان دهیم $f(z)$ در نقطه دلخواه z_0 در $\mathscr{D}$ تحلیلی است. همسایگی $\mathscr{D}'$ از z_0 را درون $\mathscr{D}$ می‌سازیم، به موجب قضیه ۶ــ۶، $f(z)$ می‌بایست درتمام نقاط $\mathscr{D}'$ پیوسته باشد. به موجب قضیه ۸ــ۴، برای هر مرز ساده بسته C درون $\mathscr{D}'$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz \qquad (۱۲)$$

چون $f_n(z)$ در $\mathscr{D}'$ تحلیلی است. برای هر n، و هر مرز ساده بسته $\int_C f_n(z)\,dz=0$ با توجه به (۱۲)، $\int_C f(z)\,dz=0$. به موجب قضیه مررا، $f(z)$ می‌بایست در $\mathscr{D}'$ تحلیلی باشد. به ویژه $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و اثبات تمام است.

تذکر ــ فرض همگرایی یکنواخت بر زیر مجموعه‌های‌فشرده، بعوض همگرایی یکنواخت بر تمام میدان، انعطاف‌پذیری مورد نیاز جهت بررسی سئوالات معینی در فصل‌های بعد را فراهم می‌سازد.

با نوشتن قضیه ۸ــ۶، برحسب رشته خواهیم داشت: اگر $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی‌باشدو $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ برزیر مجموعه‌های‌فشرده $\mathscr{D}$ به $f(z)$ همگرای‌یکنواخت باشد، آنگاه $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی‌است. این مطلب با توجه به اینکه‌برای هرمرز ساده‌بسته درون $\mathscr{D}$ داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_C f_k(z)\,dz\right)=\int_C\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\right)dz=\int_C f(z)\,dz=0.$$

نتیجه می‌گردد.

فرع ــ فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی در میدان $\mathscr{D}$ باشد، و $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$، ورشته بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ همگرای یکنواخت باشد. در این صورت:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z).$$

اثبات ــ به موجب قضیه ۸ــ۶، $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است. بنابراین از قضیه ۸ــ۲.

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta,$$

کــــــه C برمرزساده بسته‌یی درون $\mathscr{D}'$ ، که $\mathscr{D}'$ هم یک همسایگی z درون $\mathscr{D}$ ، می‌باشد. هم چنین باید توجه داشت که برای هر n

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

چــــــون‌که‌برای ζ بر C ، $\sum_{n=0}^{\infty}[f_n(\zeta)/(\zeta - z)^2]$ همگرای‌یکنواخت‌به $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$ است ، داریم :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right) d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z).$$

در حالت عمومی برای هر عدد صحیح k ، داریم :

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

و

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

چــــــون که برای ζ بر C ، $\sum_{n=0}^{\infty}[f_n(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}]$ به $f(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}$ همگرای یکنواخت است ، همانند فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای هر z در $\mathscr{D}$ ،

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

تذکر_ یک اختلاف میان رشته‌های حقیقی و مختلط را متذکر می‌شویم رشته حقیقی $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx)/n^2$ بر خط حقیقی همگرای یکنواخت است . ولی مشتق‌یابی جمله به جمله منجر به $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n$ می‌گرددکه‌در $x = 0$ همگرا نیست . درحالت مختلط، در مورد یک رشته از توابع تحلیلی که بر زیر مجموعه‌های فشرده میدانی ، همگرای یکنواخت باشد ، می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت و مشتق حاصلجمع را بدست آورد . با این حال ، این مطلب برای مرز میدان قابل گسترش نیست . به عنوان مثال با اینکه‌تابــع $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^2)$ در قرص $|z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است ، ولی مشتق‌یابی جمله به جمله در $z = 1$ حاصل می‌کند $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ که همگرا نیست .

فرض‌کنیم $f(z)$ یک تابع تام است . به موجب قضیه ۸_۳ ، $f(z)$ دارای نمایــش رشته توانی .

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

است، که برای همه z ها معتبر است. بنابه‌قضیه۶ــ۱۳ ویابنابه فرع‌قضیه ۸ــ۶، مشتق حاصلجمع برابر است با حاصلجمع مشتقات. یعنی برای هر z، $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

اکنون بنابه فرع قضیه ۸ــ۴، می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. به بیان دیگر

$$F(z)=\int_0^z f(\zeta)\, d\zeta=\int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n\right) d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1},$$

کــــه در آن انتگرال بر هر مرزی که مبداء را به z وصل کند محاسبه می‌شود.

از ترکیب این نتایج می‌توان نمایش رشته‌های توانی مفید را یافت.

مثال ۱ــ $f(z)=\sin^2 z$ را به یک رشته ماکلورن بسط دهید.

البته می‌توانستیم مشتق گرفته مستقیما" بسط ماکلورن را بیابیم.

روش ۱ــ چونکه $\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}/(2n-1)!]\cdot z^{2n-1}$ داریم:

$$\sin^2 z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right).$$

با گردآوردن جملات و مرتب کردن آنها به ترتیب صعودی درجات، حاصل‌می‌شود.

$$\sin^2 z=z^2-\frac{1}{3} z^4+\left(\frac{2}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right) z^6+\cdots.$$

در این شکل یافتن جمله عمومی مشکل است.

روش ۲ــ داریم:

$$f'(z)=2 \sin z \cos z=\sin 2z=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (2z)^{2n-1}.$$

ولی

$$f(z)=\sin^2 z=\int_0^z f'(\zeta)\, d\zeta+f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^z \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (2z)^{2n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}.$$

روش ۳ــ همانندی مثلثاتی به کار می‌بریم

$$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}.$$

مثال ۲ــ تابع $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$ را برای $|z| < 1$ به رشته ماکلورن بسط دهید.

داریم:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

بنابراین:

$$f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z) = \int_0^z f'(\zeta)\,d\zeta + f(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^n \zeta^n\,d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \quad \frac{z^4}{4} + \cdots$$

بـــایـــد توجه داشت که شاخه اصلی لگاریتم را انتخاب کرده تا$\mathrm{Log}\ 1 = 0$ گردد. بطور عمومی‌تر، هرگاه $\log 1 = 2k\pi i$ ، داریم:

$$f(z) = \log\,(1+z) = \int_0^z f'(\zeta)\,d\zeta + f(0)$$
$$= 2k\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots.$$

پرسشها

۱ــ اگر برای همه نقاط درون C داشته باشیم $f(z_0) = (1/2\pi i)\int_C (f(z)/z - z_0)\,dz$ ، آیا$f(z)$درون C تحلیلی است؟

۲ــ اگر مشتقات از تمام مراتب، دو تابع متفاوت در نقطه‌ای برابر باشند. دو تابع چه ربطی با هم دارند؟

۳ــ اگر $\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C (\lim_{n\to\infty} f_n(z))\,dz$ ، آیا$\{f_n(z)\}$بر C همگرای یکنواخت است؟

۴ــ اگردنباله‌یی از توابع بر همه زیر مجموعه‌های فشرده یک میدان همگرای یکنواخت باشد، آیا می‌بایست در تمام میدان همگرای یکنواخت باشد؟

۵ــ اگر $\{f_n(z)\}$ــ دنباله‌یی از توابع تحلیلی در میدان $\mathscr{D}$ باشد و $\{f_n(z)\}$ در

$\mathscr{D}$ به $f(z)$ بگراید، آیا $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است؟

۶ـ فرض کنید $\{f_n(z)\}$ به یک تابع تحلیلی همگرای یکنواخت‌است، درمورد توابع $\{f_n(z)\}$ چه می‌توان گفت؟

۷ـ اگر $f(z)$ درون مرز ساده بسته C تحلیلی و $\int_C f(z)\, dz = 0$، آیا $f(z)$ درون C تحلیلی است؟

۸ـ اگر $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$، در مورد $f^{(k-1)}(z)$ چه می‌توان گفت؟

۹ـ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$، آیا می‌شود که $f'(z_0)$ موجودباشدوبرابر $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ نباشد.

تمرینها

۱ـ فرمول انتگرال کوشی را برای میدانهای همبند چندگانه اثبات کنید.

۲ـ(الف) اگر $P(z)$ یک چند جمله‌یی از درجه n باشد، ثابت کنید.

$$\int_{|z|=2} \frac{P(z)}{(z-1)^{n+2}}\, dz = 0.$$

(ب) اگر n و m اعداد صحیح مثبت باشند، نشان دهید که بر هر مرز C که z_0 درون آن باشد داریم:

$$\int_C \frac{(n-1)!\, e^z}{(z-z_0)^n}\, dz = \int_C \frac{(m-1)!\, e^z}{(z-z_0)^m}\, dz$$

۳ـ انتگرالهای زیر را که در آن C دایره $|z| = 3$ است محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{e^z}{z-2}\, dz$ ب) $\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2}\, dz$ پ) $\int_C \frac{e^{z^2}}{(z-2)^2}\, dz$

ت) $\int_C \frac{e^z \sin z}{(z-2)^2}\, dz$ ث) $\int_C \frac{3z^4+2z-6}{(z-2)^3}\, dz$

۴ـ با استفاده از کسرهای جزیی انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1}\, dz$ ب) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\, dz$

پ) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1}\, dz$ ت) $\int_{|z|=3} \frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)}\, dz$

۵ـ انتگرال $\int_C z/((16-z^2)(z+i))\, dz$ را که در آن C هر یک از دوایر زیرباشد محاسبه کنید.

الف) $|z|=2.$ ب) $|z-4|=2.$ پ) $|z+4|=2.$

ت) $|z|=\frac{1}{2}.$ ث) $|z|=5.$

۶ـ ضرایب پنج جمله اول در بسط ماکلورن توابع زیر را بیابید.

الف) $e^z \sin z.$ ب) $\dfrac{1}{\cos z}.$

پ) $e^{z+z^2}.$ ت) $e^{z/(1-z)}.$

۷ـ فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 تحلیلی‌اند و

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0,$$
$$g(z_0)=g'(z_0)=\cdots=g^{(n-1)}(z_0)=0.$$

اگر $g^{(n)}(z_0)\neq 0$، نشان دهید

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

این یک تعمیم از قضیه ۵ـ۷ است.

۸ـ حدودزیررا، یا با استفاده از تمرین قبل ویا با استفاده از قضیه ۸ـ۳، محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-z}{z^2}$ ب) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z-z^3}$

پ) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{e^z-1}$ ت) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z}{\cos z-1}$

۹ـ اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی باشد و برای هر n، $|f^{(n)}(z_0)|\leq n^k$ (k ثابت) نشان دهید که $f(z)$ تابع تام است.

۱۰ـ نشان دهید که رشته‌های زیر در میدانهای داده شده نمایش توابع تحلیلی هستند و مشتق آنها را بیابید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ $(\operatorname{Re} z>1)$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$ $(z\neq \pm 1, \pm 2, \ldots)$

۱۱ـ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تحلیلی‌اند. ثابت‌کنید:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz=f(z_1)g(z_1)-f(z_0)g(z_0)$$
$$-\int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)\,dz,$$

که در آن مسیر انتگرال‌گیری بر مرزی از z_0 تا z_1 است که در درون $\mathscr{D}$ واقع باشد.

۱۲ـ فرض کنید $f(z)$ بر C پیوسته است ولی لزوما" تحلیلی نیست، نشان دهید که تابع

$$F(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

در هر z که بر C نباشد تحلیلی است، و

$$F'(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

۱۳ـ با انتخاب یک مشخصه ویژه، بسطهای ماکلورن هر یک از توابع زیر رابیابید و ناحیه‌یی را که در آن هر یک از این بسطها برقرار است بیان کنید

الف) $(1+z)^\alpha,\quad 0<\alpha<1$ ب) $\tan^{-1} z$.

پ) $\sin^{-1} z$

۸ـ۲ . نامساوی کوشی و کاربردها

درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی، اغلب آگاهی ما از تابع بر پایه رفتارمشتق آن می‌باشد. به عنوان مثال اگر مشتق تابع در فاصله‌یی مثبت، منفی ویا صفر باشدآنگاه تابع در آن فاصله به ترتیب صعودی، نزولی و یا ثابت خواهد بود. درآنالیز مختلط عکس این مطلب درست است. یعنی از رفتار یک تابع تحلیلی استفاده می‌کنیم و رفتار مشتق آنرا تخمین می‌زنیم.

قضیه ۸ـ۷. (نامساوی کوشی) فرض کنیم $f(z)$ درون و بر دایره C به‌مرکز z_0 وشعاع r تحلیلی است. اگر بر C، $|f(z)| \le M$، آنگاه $|f^{(n)}(z_0)| \le Mn!/r^n$

اثبات ــ به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &\le \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, |dz| \\ &\le \frac{n!\,M}{2\pi r^{n+1}}\int_C |dz| = \frac{n!\,M}{2\pi r^{n+1}}(2\pi r) = \frac{n!\,M}{r^n}.\end{aligned}$$

از نامساوی کوشی می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد:

قضیه ۸ـ۸ . (قضیه لیوویل)[1] تابع تام کراندار ثابت است.

اثبات ـ فرض‌کنید $f(z)$ تابعی‌تام است و برای هر z ، $|f(z)| \leq M$. کافی‌است نشان دهیم $f'(z) \equiv 0$. برای هر عدد مختلط داده شده z_0 ، به موجب نامساوی‌کوشی برای هر عدد حقیقی مثبت r داریم $|f'(z_0)| \leq M/r$.با $r \to \infty$ ، نتیجه می‌شود که $f'(z_0) = 0$. چون که z_0 اختیاری است قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ـ البته قضیه‌یی مشابه برای قضیه لیوویل در متغیر حقیقی موجود نیست. تابع $f(x) = \sin x$ ، غیرثابت است و همه جا مشتق‌پذیر کراندار است.

قضیه لیوویل مبین آن است که برای تابع تام غیرثابت $f(z)$ به دنباله‌یی ازنقاط مانند $\{z_n\}$ موجود است، به طوری که $f(z_n) \to \infty$. نتیجه دقیق‌تری ازاین مطلب را می‌توان بصورت زیر عنوان کرد:

قضیه۸ـ۹ .هرتابع تام غیرثابت به‌هر عدد مختلط به قدر دلخواه نزدیک می‌شود.

اثبات ـ فرض‌کنیم $f(z)$ تابعی‌است‌تام و بعلاوه عدد مختلط z موجود است‌بطوری که برای هر $|f(z) - a| \geq \varepsilon$. در این صورت تابع $g(z) = 1/[f(z) - a]$ تام است‌و $|g(z)| = 1/|f(z) - a| \leq 1/\varepsilon$.بنابه قضیه لیوویل، $g(z)$ ثابت است. بنابراین $f(z) = 1/g(z) + a$ نیز می‌بایست ثابت باشد.

فرع ـ فرض‌کنیم $f(z)$ تابع تام غیرثابتی باشد. بازاء هر عدد مختلط مفروض a دنباله $\{z_n\}$ موجود است $f(z_n) \to a$

اثبات ـ به‌موجب ۸ـ۹ ، بازاءهر n نقطه z_n موجوداست‌که $f(z_n) \in N(a; 1/n)$ چون $1/n \to 0$ نتیجه می‌شود $f(z_n) \to a$

تذکر ـ با اینکه‌یک‌تابع تام غیرثابت هر چه قدر بخواهیم به هر مقدار مختلط نزدیک می‌گردد ولی لزوما "هر مقدار مختلط را نمی‌پذیرد. به عنوان مثال $f(z) = e^z$ هرگز صفر نمی‌شود. با این حال با $n \to \infty$ ، $f(-n) = e^{-n} \to 0$ این نکته که e^z همه دیگر اعداد مختلط را می‌پذیرد. استنتاج ویژه‌یی از قضیه زیر است:

---

1. Liouville

قضیه‌پیکار[1] تابع تام غیرثابت هر مقدار مختلط را، با یک استثناء ممکن، می‌پذیرد.

برای اثبات قضیه پیکار به کتاب دپری و ارینگ[2] (۹) مراجعه کنید.
قضیه بعدی ما تخمینی‌بر میزان رشد، یک تابع تام است.

قضیه ۸ـ۱۰. فرض کنیم $f(z)$ تابعی تام است و برای یک عدد حقیقی غیر منفی مانند λ داریم $|f(z)| \leq Mr^{\lambda}$ $(|z| = r \geq r_0)$. در این صورت $f(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر λ است.

اثبات ــ فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

به موجب نامساوی کوشی بر دایره $|z| = r$ داریم:

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{Mr^{\lambda}}{r^n} = \frac{M}{r^{n-\lambda}}.$$

وقتی $r \to \infty$ می‌بینیم که هر وقت $n > \lambda$، آنگاه $a_n = 0$. بنابراین $f(z)$ یک چند جمله‌یی است که درجه اش از λ بیشتر نیست.

تذکر ــ وقتی $\lambda = 0$، قضیه ۸ـ۱۰ به قضیه‌لیوویل‌تبدیل‌می‌گردد. انتخاب $0 < \lambda < 1$ نشان می‌دهد که لازم نیست $f(z)$ را کراندار فرض کنیم (مگر اینکه رشد آن میزان کندی داشته باشد) تا اینکه بتوان نتیجه گرفت $f(z)$ می‌بایست ثابت باشد.

هر تابع تام که جمله‌یی نباشد به تابع تام متعالی موسوم است. $M(r, f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ قرار می‌دهیم. قضیه ۸ـ۱۰ مبین آن است که برای تابع تام متعالی $f(z)$، تابع $M(r, f)$ سریعتر از هر توان r رشد می‌کند. این بدان معنی نیست که بر هر مسیری که به ∞ برویم $f(z) \to \infty$ به عنوان مثال، داریم $M(r, e^z) = e^r$ ولی با $z \to \infty$ برامتداد محور حقیقی منفی، $e^z \to 0$. چندجمله‌یی‌ها تا اندازه‌یی متفاوت‌اند. رشد چند جمله‌یی‌ها به وسیله درجه آنها مشخص می‌شود:

قضیه ۸ـ۱۱. فرض‌کنید $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$، $a_n \neq 0$ آنگاه‌برای $|z| = r$

1. Picard

2. Depree and Oehring

بس بزرگ

$$\frac{|a_n|}{2} r^n \le |P(z)| \le \frac{3|a_n|}{2} r^n.$$

اثبات ــ داریم:

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

به موجب نامساوی مثلث

$$r^n\left(|a_n| - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|\right) \le |P(z)|$$

$$\le r^n\left(|a_n| + \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|\right).$$

برای

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \le \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{r} = \frac{K}{r}.$$

بنابراین

$$r^n\left(|a_n| - \frac{K}{r}\right) \le |P(z)| \le r^n\left(|a_n| + \frac{K}{r}\right) \qquad (r > 1).$$

و قضیه برای $K/r < |a_n|/2$ ، یعنی وقتی که $r > 2K/|a_n|$ ، اثبات می‌گردد.

قضیه ۸ــ۱۰ و ۸ــ۱۱ ، امکان مقایسه‌یی میان رشد چند جمله‌یی‌ها و توابع متعالی فراهم می‌سازد. اگر $P(z)$ـ چندجمله‌یی و $f(z)$ تابع متعالی‌باشد ،آنگاه برای $r \to \infty$ ، $M(r, P)/M(r, f) \to 0$. یعنی که‌برامتداد "بهترین‌مسیر" تابع متعالی خیلی سریعتر از چند جمله‌یی به بی‌نهایت میل می‌کند. با این حال به هنگامیکه $z \to \infty$ بر هر مسیری، $P(z) \to \infty$ ـدر فصل ۹نشان‌خواهیم داد که هیچ تابع متعالی چنین خاصیتی را ندارد. با بیانی ساده می‌توان گفت‌که، یک‌تابع متعالی خیلی سریعتر از یک چند جمله‌یی رشد می کند ، در حالی که یک چند جمله یی موزون تر از یک تابع متعالی رشد می کند .

یک خاصیت عمده چند جمله یی ها در قضیهٔ ۸ ــ ۱۲ آمده است .

قضیه ۸ــ۱۲ . (قضیه اساسی جبر) یک چند جمله‌یی غیرثابت حداقل یک صفردارد.

اثبات ــ فرض کنیم $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ، $a_n \neq 0$ ، اگر $P(z)$

هرگز صفر نباشد ، $1/P(z)$ تام است . به موجب قضیه ۸ــ۱۱ ، با $z\to\infty$ ، $1/P(z)\to 0$.
بنابراین برای $|z|\geq R$ ، $|1/P(z)|<1$.ولی $1/P(z)$ بـــر مجموعه‌فشرده $|z|\leq R$
پیوسته‌است (و در نتیجه کراندار است) . بنابراین $1/P(z)$ بر تمام صفحه کرانداراست
و به موجب قضیه لیوویل می‌بایست ثابت باشد . این موجب می‌گردد که $P(z)$ ثابت‌باشد
که با فرض ما متناقض است .

فرع ۱ــ هرچندجمله‌یی از درجه n دقیقاً "n صفر (که لزوماً " متمایز نیستند) دارد .

اثبات ــ قضیه اساسی جبر وجود حداقل یک صفر r_1 را نشان می‌دهد . از عبـــارت
$z-r_1$ می‌توان فاکتورگیری کرد و یک چند جمله‌یی از درجه $n-1$ باقی می‌ماند . با بکـــار
بستن قضیه در مورد چند جمله‌یی جدید ، صفر جدیدی بدست می‌آید . این فرآیند را
می‌توان n بار تکرار کرد .

فرع ۲ــ هر چند جمله‌یی از درجه n ، هر عدد مختلط را دقیقاً "n بار می‌پذیرد .

اثبات ــ اگر $P(z)$ یک چند جمله‌یی از درجه n باشد آنگاه :

$$Q(z)=P(z)-a$$

هـــــم یک چند جمله‌یی از درجه n است . بموجب فرع ۱ ، $Q(z)$ ، n صفردارد .ولی
صفرهای $P(z)$ ، نقاط "a"ی $Q(z)$ اند .

تذکر ــ فرع ۲ ، در حالت چند جمله‌یی ، حل‌کامل‌تری در مقایسه با قضیه ۸ــ۹را به
دست می‌دهد . یک چند جمله‌یی از درجه n ، نه تنها به عدد مختلط هر قدر بخواهیم
نزدیک‌می‌شود ، بلکه هر مقداری را عملاً "n بار می‌پذیرد . ولی وجود n ریشه ، گویای‌هیچ
گونه اطلاعاتی در مورد جایگاه آنها نیست . در بخش ۸ــ۴ روشی برای تقریب به جایگـاه
صفرهای بعضی توابع تحلیلی را بررسی خواهیم کرد .

اینک می‌بینیم که‌چگونه رفتار یک تابع در یک دنباله نقاط بر رفتار تابع درجاهای
دیگر تاثیر می‌گذارد .

قضیه ۸ــ۱۳ . فرض کنیم $f(z)$ در قرص $|z-z_0|<R$ تحلیلی اســـــت و $\{z_n\}$
دنباله‌یی از نقاط متمایز است که به z_0 می‌گراید . اگر برای هر n ، $f(z_n)=0$ ، آنگاه
همه جای $|z-z_0|<R$ ، $f(z)\equiv 0$

اثبات داریم :

$$f(z)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \qquad (|z-z_0|<R). \qquad (۱۳)$$

چونکه $f(z)$ در z_0 پیوسته است، نتیجه می‌شود که برای $z_n \to z_0$ ، $f(z_n)\to f(z_0)$ بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0=f(z_0)=a_0.$$

بنابراین $f(z)$ ، جمله ثابت ندارد و می‌توان نوشت:

$$f(z)=(z-z_0)\left(a_1+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(z-z_0)^{k-1}\right).$$

با قرار دادن $z=z_n$ وتقسیم بر z_n-z_0 منجر به این می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)}{z_n-z_0}=0=a_1.$$

به طریق مشابه

$$f(z)=(z-z_0)^2\left(a_2+\sum_{k=3}^{\infty}a_k(z-z_0)^{k-2}\right),$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z_n)}{(z_n-z_0)^2}=0=a_2.$$

با روش استقرایی نشان می‌دهیم که برای هر k ، $a_k=0$ و قضیه ثابت است.

فرع ــ فرض کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است. در این صورت یا در یک‌همسایگی z_0 ، $f(z)\equiv 0$ و یا اینکه عدد حقیقی r موجود است به طوری که در قرص سفته $0<|z-z_0|\leq r$ ، $f(z)\neq 0$.

اثبات ــ فرض کنیم چنین r ی موجود نیست. در این صورت در هر قرص سفته $0<|z-z_0|\leq 1/n$ نقطه z_n چنان موجود است که $f(z_n)=0$. چــون کـه $z_n\to z_0$ کاربردی از قضیه ۸ــ۱۳ نشان می‌دهد که $f(z)$ می‌بایست در یک همسایگی z_0 متحد با صفر باشد.

تذکر ــ همتای این قضیه در متغیر حقیقی موجود نیست. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

بـــــــرای تمام x های حقیقی مشتق‌پذیر است و برای هر n ، $f(1/n) = 0$ بااین حال‌در هر همسایگی مبداء ، $f(x) \not\equiv 0$.

اینک قضیه قبل را به یک میدان دلخواه تعمیم می‌دهیم .

قضیه ۸ــ۱۴ . فرض‌کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی باشدو $\{z_n\}$ دنباله‌یی‌ازنقاط متمایزباشدکه‌به نقطه z_0 در $\mathscr{D}$ می‌گراید . اگر برای هر n ، $f(z_n) = 0$ ، آنگاه درسراسر $\mathscr{D}$ ، $f(z) \equiv 0$.

اثبات ــ دو مجموعه متمایز زیر را در نظر می‌گیریم :

$A = \{a \in \mathscr{D}$: در یک همسایگی a ، $f(z) \equiv 0\}$

$B = \{a \in \mathscr{D}$: در یک همسایگی سوده a برای هر z ، $f(z) \neq 0\}$

به موجب فرع قضیه ۸ــ۱۳ ، هر نقطه در $\mathscr{D}$ یا در A است‌و یا در B است . به سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر دو مجموعه A و B باز هستند . چون‌که‌میدان $\mathscr{D} = A \cup B$ همبند است ، یا A تهی است ، یا B تهی است . به موجب قضیه ۸ــ۱۳ ، z_0 متعلق به A اســت . بنابراین $B = \varnothing$. این بدان معنی است $A = \mathscr{D}$ و در $\mathscr{D}$ ، $f(z) \equiv 0$

به عنوان نتیجه‌یی از قضیه ۸ــ۱۴ داریم :

قضیه ۸ــ۱۵ . (قضیه همانی) فرض‌کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌یی از نقاط است‌که یک نقطه حدی در $\mathscr{D}$ دارد . اگر $f(z)$ و $g(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی باشند و برای هر n داشته باشیم $f(z_n) = g(z_n)$ ، آنـــگاه در سراسر $\mathscr{D}$ ، $f(z) \equiv g(z)$.

اثبات ــ فرض‌کنیم z_0 نقطه حدی $\{z_n\}$ باشد ، به‌موجب قضیه ۲ــ۸ ، زیر دنبالـه $\{z_{n_k}\}$ مـــــوجوداست‌که‌به z_0 می‌گراید . با قرار دادن $h(z) = f(z) - g(z)$ ، می‌بینیم که برای تمام نقاط دنباله $\{z_{n_k}\}$ ، $h(z_{n_k}) = 0$ کاربردی از قضیه ۸ــ۱۴ ، نشان می‌دهد که در $\mathscr{D}$ ، $h(z) \equiv 0$ که از آنجا قضیه ثابت است .

تذکرــ اینکه نقطه حدی z_0 در میدان تحلیلی بودن باشد ، یک شرط اساسی است. تابع غیر ثابت $f(z) = e^{1/(1-z)}$ در $|z| < 1$ تحلیلی است . برای $z_n = 1 - 1/2n\pi i$

داریم $e^{1/(1-z_n)} = e^{2n\pi i} = 1$

باید توجه داشت‌که $\{z_n\} \to 1$ و $f(z)$ در نقطه 1 تحلیلی نیست .

مثال ــ آیا تابع $f(z)$ ی موجود است که در $|z| < 1$ تحلیلی و در شرط زیر صدق کند ؟

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۱۴}$$

تابع $f(z) = z$ تحلیلی است ودر شرط $f(1/2n) = 1/2n$ صدق می‌کند . بموجب قضیه همانی این تنها چنین تابع تحلیلی است . چونکه

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \neq \frac{1}{2n},$$

پس هیچ تابع تحلیلی موجود نیست که در (۱۴) صدق کند . قابل توجه است‌که می‌توان تابعی مانند $f(z)$ ساخت که در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و برای هر n در شرط زیر صدق کند .

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$$

با قرار دادن $z = 1/(2n+1)$ داریم $1/2n = z/(1-z)$ بنابراین $f(z) = z/(1-z)$ در شرط مذکور صدق می‌کند .

تذکر ۱ــ فرمول انتگرال کوشی مبین آن است‌که رفتار یک‌تابع تحلیلی بر مرز ساده بسته مشخص رفتار تابع درون مرز است . قضیه همانی بیش از این آگاهی در اختیار ما می‌گذارد . آن قضیه مبین آن است که رفتار تابع بر هر دنباله نقاط بردرون‌یاروی مرزساده بسته مشخص رفتار تابع در تمام نقاط میدان است .

تذکر ۲ــ اینک روش ساده‌یی برای اثبات همانندیهای متعارف مثلثاتی داریم ، به عنوان مثال تابع

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$$

تابعی است تام و بر محور حقیقی برابر با یک است . بنابراین در صفحه مختلط $f(z) \equiv 1$ ، یعنی که برای‌هر z ،

$$\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$$

پرسشها

۱ــ آیا "نامساوی کوشی" در حالتی که دایره با یک مرز ساده بسته جایگزین شود متناظری دارد؟

۲ــ آیا یک تابع تام غیرثابت می‌تواند در یک نیم صفحه کراندار باشد؟

۳ــ آیا می‌شود که قسمت حقیقی یک تابع تام غیرثابت کراندار باشد؟

۴ــ چرا قضیه ۸ــ۹ یک تعمیم قضیه لیوویل است؟

۵ــ اگر تابع غیرثابتی همه جا در خارج یک قرص تحلیلی باشد، آیا می‌تواند کراندار باشد؟

۶ــ در مورد توابع تامی که مقدار صفر را نمی‌پذیرند چه می‌توان گفت؟

۷ــ چه ایرادی بر اثبات زیر وارد است؟

چونکه $e^z \neq 0$ ، پس $1/e^z$ کراندار است. بنابراین به‌موجب قضیه لیوویل $1/e^z$ ثابت است.

۸ــ اگر دو تابع تام در یک تعداد نامتناهی نقاط برابر باشند، آیا هر دو می‌بایست برابر باشند؟

تمرینها

۱ــ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z| < R$ تحلیلی و $f(x)$ برای $-R < x < R$، حقیقی باشد، نشان دهید که a_n برای هر n ، حقیقی است. هم چنین نشان دهید $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

۲ــ فرض کنید $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ، $a_n \neq 0$. با $\varepsilon > 0$ مفروض، نشان دهید که یک R موجود است که $r > R$ موجب

$$(1-\varepsilon)|a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n| r^n \qquad (|z| = r).$$

می‌گردد.

۳ــ فرض کنید که $f(z)$ تابع تام و برای هر z ، $|f(z)| \leq |e^z|$ ثابت کنید که $f(z) = Ke^z$ ، $|K| \leq 1$

۴ــ فرض کنید $f(z)$ تام و a و b دو عدد ثابت مثبت باشند، اگر برای هر z

$$f(z+a) = f(z+bi) = f(z)$$

نشان دهید که $f(z)$ ثابت است.

۵ــ فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ بر $|z| \leq 1$ تحلیلی باشد و فرض کنیم برای $|z| \leq 1$ ، $|f(z)| \leq 1$ ، با بکار بردن نامساوی کوشی ثابت کنید.

الف)
$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \frac{|z|^k}{1-|z|} \qquad (|z| < 1).$$

ب) اگر $|z_1| \leq r$ ، $|z_2| \leq r$ و $0 < r < 1$ و $z_1 \neq z_2$ آنگاه

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

۶ــ اگر $f(z)$ و $g(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی باشند و در $\mathscr{D}$ داشته باشیم $f(z)g(z) \equiv 0$ ثابت کنید که در $\mathscr{D}$ یا $f(z) \equiv 0$ و یا $g(z) \equiv 0$

۷ــ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی‌اند و بر یک‌دنباله‌نقاط $\{z_n\}$ که به نقطه z_0 در $\mathscr{D}$ می‌گرایند داشته باشیم:

$$\frac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \frac{g'(z_n)}{g(z_n)}$$

نشان دهید که در $\mathscr{D}$ ، $f(z) = Kg(z)$. (راهنمایی: قرار دهید $h(z) = f(z)/g(z)$ و نشان دهید $h'(z) = 0$

۸ـ۳ . قضیه ماکزیمم کالبد

فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی باشد که بر فاصله $[a, b]$ تعریف شده است و در این فاصله $F'(x) = f(x)$. در این صورت میانگین مقدار $f(x)$ در این فاصله عبارتست از:

$$\frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

به علاوه به موجب قضیه میانگین، عبارت فوق به‌ازاء یک ξ، $a < \xi < b$ برابر است با $F'(\xi)$.

قضیه بعدی نشان می‌دهد، برای توابعی که درون و بر یک دایره تحلیلی باشند، میانگین مقادیر بر روی دایره برابر است با مقدار تابع در مرکز دایره.

قضیه ۸ـ۶ ۱ (قضیه‌میانگین‌گاوس) [1] . فرض‌کنیم $f(z)$ درقرص‌بسته $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی است آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

اثبات ــ بموجب فرمول انتگرال کوشی

1. Gauss

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

با قرار دادن $z=z_0+re^{i\theta}$ ، بدست می‌آید:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

اگر $f(z)$ ثابت‌باشد (مثلاً " $f(z)=C$) آنگاه‌قضیه گاوس نکته بدیهی‌زیررا می‌دهد:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta=C.$$

قضیه‌بعدی‌نشان‌می‌دهد ، برای توابع غیر ثابت ، حتماً " می‌بایست نقطه‌یی بردایره $|z|=r$ موجود باشد که $|f(z)|>|f(z_0)|$.

<u>قضیه‌ماکزیمم‌کالبد (شکل‌اول) . اگر $f(z)$ درمیدان $\mathscr{D}$ تحلیلی‌باشد ،آنگاه $|f(z)|$ در $\mathscr{D}$ نمی‌تواند ماکزیممی اختیار کند ، مگر اینکه تابع ثابت باشد .</u>

اثبات ــ فرض‌کنیم $|f(z)|$ در نقطه z_0 متعلق به $\mathscr{D}$ ماکزیمم داشته باشد . قرص $|z-z_0|\le R$ را درون $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم . بازاء r ، $0\le r\le R$، قضیه میانگین گاوس نتیجه می‌دهد:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

به موجب فرض $|f(z_0+re^{i\theta})|\le|f(z_0)|$. فرض کنیم به ازاء نقطه‌ای مانند $z=z_0+r_1e^{i\theta_1}$ $(r_1\le R)$ داریم:

$$|f(z_0+r_1e^{i\theta_1})|<|f(z_0)|.$$

در این صورت از آنجا که $|f(z)|$ــ پیوسته ست ، نامساوی اکید می‌بایست برکمانی از دایره $|z-z_0|=r_1$ برقرار باشد ، بنابراین:

$$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+r_1e^{i\theta})|\,d\theta<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|\,d\theta$$
$$=|f(z_0)|,$$

که تناقضی آشکار است .

ازسوی‌دیگر ،اگر $|f(z)|$ بر قرص $|z-z_0|\le R$ ثابت باشد آنگاه به موجب قضیه ۵ــ۸ ، $f(z)$ می‌بایست در این قرص ثابت باشد . از قضیه همانندی نتیجه می‌شود که

$f(z)$ درتمامی میدان ثابت است. بنابراین $|f(z)|$ نمی‌تواند ماکزیمم در نقطه‌یی از $\mathscr{D}$ داشته باشد مگر اینکه $f(z)$ ثابت باشد و اثبات کامل است.

قضیه ماکزیمم کالبد (شکل دوم). اگر $f(z)$ در یک میدان کراندار $\mathscr{D}$ تحلیلی و بر بستار آن، $\bar{\mathscr{D}}$ پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز دارد. بعلاوه $|f(z)|$ ماکزیمم در نقاط درونی ندارد مگر اینکه تابع ثابت باشد.

اثبات ــ ابتداء ملاحظه می‌کنیم چون $\mathscr{D}$ کراندار است، $\bar{\mathscr{D}}$ فشرده است. بنابراین به موجب قضیه ۲ــ۱۵، $|f(z)|$ جایی در $\bar{\mathscr{D}}$ ماکزیمم دارد. به موجب شکل اول قضیه، ماکزیمم در نقاط درونی‌نیست، بنابراین ماکزیمم بر مرز است.

تذکر ــ لازم نیست که میدان همبند ساده باشد. به عنوان مثال‌اگر تابعی برطوق باز $1/R < |z| < R$ تحلیلی‌وبرطوق بسته $1/R \leq |z| \leq R$ پیوسته‌باشد،آنگاه‌ماکزیمم‌کالبداین تابع می‌بایست بر مرز باشد. کالبد تابع $f(z) = z$ ماکزیمم آن بر مرز خارجی است، در حالیکه کالبد $f(z) = 1/z$ ماکزیمم آن بر مرز داخلی است.

به عنوان کاربردی برای قضیه ماکزیمم قدر مطلق، قضیه اساسی جبررادو باره‌اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$، $a_n \neq 0$ صفری نداشته باشد، در این صورت $1/P(z)$ یک تابع تام است که صفر ندارد. با توجه به قضیه ۸ــ۱۱ با $z \to \infty$، $1/P(z) \to 0$ هنگامیکه r بس بزرگ است،

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| < \left|\frac{1}{P(0)}\right| = \left|\frac{1}{a_0}\right| \quad (|z| = r).$$

پس تابع پیوسته $|1/P(z)|$ ماکزیممی بر مرز مجموعه فشرده $|z| \leq r$ ندارد. بنابراین $|1/P(z)|$ می‌بایست ماکزیممی در نقطه درونی داشته باشدکه‌با قضیه‌ماکزیمم کالبد متناقض است. بنابراین $P(z)$ می‌بایست صفری در قرص $|z| \leq r$ داشته باشد و اثبات کامل است.

در مورد یک تابع تحلیلی غیرثابت، امکان دارد می‌نیممی در میدان و نه بر مرز داشته باشد. برای دیدن قرار می‌دهیم $f(z) = z^n$ در این صورت:

$$0 = |f(0)| = \min_{|z| \leq r} |f(z)| < \min_{|z| = r} |f(z)| = r^n.$$

در واقع کالبد یک تابع در صفر تابع همیشه یک می‌نیمم اختیار می‌کند. با اینحال

همتای زیر برای قضیه ماکزیمم کالبد موجود است .

قضیه می‌نیمم کالبد ــ فرض‌کنید $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی و در $\mathscr{D}$ ، $f(z) \neq 0$ ، در این‌صورت $|f(z)|$ نمی‌تواند می‌نیمی در $\mathscr{D}$ داشته‌باشد مگر اینکه $f(z)$ ثابت باشد . اگر $|f(z)|$ هم‌چنین بر $\bar{\mathscr{D}}$ پیوسته‌باشد و $\bar{\mathscr{D}}$ فشرده باشد ، در این صورت $f(z)$ می‌نیممی بر مرز دارد .

اثبات ــ اگر $f(z) \neq 0$ در $\mathscr{D}$. آنگاه $1/f(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی‌است . تابع $|f(z)|$ در نقطه z_0 متعلق به $\mathscr{D}$ می‌نیمم است اگر و تنها اگر $|1/f(z)|$ در z_0 ماکزیمم داشته باشد . قضیه اینک با بکار بستن قضیه ماکزیمم کالبد در مورد $1/f(z)$ ثابت می‌گردد .

جای‌تعجب‌نیست‌که قضیه اساسی جبر را بتوان ازقضیه می‌نیمم کالبد استنتاج نمود . با توجه به قضیه ۸ــ۱۱ وقتی که r بس بزرگ باشد ، چند جمله‌یی

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0),$$

در نامساوی زیر صادق است

$$|P(z)| > |P(0)| = |a_0| \qquad (|z| = r).$$

اگــــــر بخواهیم قضیه‌می‌نیمم‌کالبدبرقرارباشد ، می‌بایست‌فرض $P(z) \neq 0$ در $|z| < r$ دروغ بــــــاشد ، یعنی که $P(z)$ می‌بایست در قرص $|z| < r$ صفری داشته باشد .

در این فصل صحبت از تابع حقیقــــــی $M(r) = M(r, f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ داشتیم که این تابع حقیقی متناظر تابع تحلیلی $f(z)$ بود . اگر $f(z)$ تام باشد ، قضیه لیوویل مبین آن است‌که $M(r,f)$ بی‌کران است . بعلاوه اگر $M(r, f) \leq Mr^{\lambda}$ آنگاه قضیه ۸ــ۱۰ مبین آن است که $f(z)$ یک چند جمله‌یی با درجه حداکثر λ است . قضیــه ماکزیمم‌کالبد‌مبین آن‌است‌که $M(r, f)$ یک‌تابع صعودی از r است واینک خاصیت‌دیگری برای $M(r, f)$:

قضیه ۸ــ۱۷ . فرض کنیم $f(z)$ بر قرص $|z| < R$ تحلیلی است ، در این صورت برای $0 \leq r < R$ ، $M(r) = M(r, f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ تابعی پیوسته است .

اثبات ــ با r_0 مفروض $0 \leq r_0 < R$ می‌خواهیم نشان‌دهیم‌که به هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ متناظر است که :

$$\text{هر وقت } \quad |r_1 - r_0| \leq \delta. \quad \text{آنگاه} \quad |M(r_1) - M(r_0)| < \varepsilon$$

چونکه $|f(z)|$ بر زیر مجموعه‌های فشرده $|z|<R$ پیوسته یکنواخت است و هروقت $|r_1-r_0|\le\delta$ $(0\le\theta<2\pi)$ داریم:

$$\left|\,|f(r_1e^{i\theta})|-|f(r_0e^{i\theta})|\,\right|<\varepsilon$$

ابتداء فرض کنیم $r_0\le r_1\le r_0+\delta$ و $|f(r_1e^{i\theta_1})|=M(r_1)$ اگر به ازاء بیش از یک مقدار θ، $|f(re^{i\theta})|$ بر دایره $|z|=r_1$ ماکزیمم داشته باشد، گیریم θ_1 یکی از چنین مقادیری باشد. به موجب قضیه ماکزیمم کالبد، $M(r_1)\ge M(r_0)$ پس هر وقت $r_0\le r_1\le r_0+\delta$ آنگاه:

$$0\le M(r_1)-M(r_0)\le|f(r_1e^{i\theta_1})|-|f(r_0e^{i\theta_1})|<\varepsilon$$

از سوی دیگر، اگر $r_0-\delta\le r_1\le r_0$، قرار می‌دهیم $M(r_0)=|f(r_0e^{i\theta_0})|$. در این صورت

$$0\le M(r_0)-M(r_1)\le|f(r_0e^{i\theta_0})|-|f(r_1e^{i\theta_0})|<\varepsilon.$$

پس $M(r)$ در r_0 پیوسته و اثبات کامل است.

اگر $f(z)$ بر $|z|\le R$ تابعی تحلیلی و غیرثابت باشد و بر $|z|=R$، $|f(z)|\le M$، در این صورت قضیه ماکزیمم کالبد مبین آن است که برای $|z|<R$ داریم $|f(z)|<M$. در لم بعدی روشهایی را بررسی می‌کنیم که این کران را در درون قرص ترمیم می‌نماید.

لم شوارتس[1]: فرض کنیم $f(z)$ برای $|z|<R$ تحلیلی است و $f(0)=0$ اگر در $|z|<R$، $|f(z)|\le M$، آنگاه $|f(z)|\le(r/R)M$ $(|z|=r<R)$، و تساوی تنها هنگامی برقرار است که $f(z)=(M/R)e^{i\alpha}z$ با α حقیقی.

اثبات ــ چونکه $f(0)=0$، پس می‌توان نوشت:

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=zg(z),$$

که $g(z)$ بر $|z|<R$ تحلیلی است. باید توجه داشت که $g(0)=a_1=f'(0)$، به موجب قضیه ماکزیمم کالبد برای $g(z)$ داریم:

$$\max_{|z|=r}|g(z)|\le\max_{|z|=R'}|g(z)|\qquad(r<R'<R).\tag{۱۵}$$

یعنی،

$$\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\max_{|z|=R'}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\qquad(r<R'<R),$$

---

1. Schwarz

و یا

$$\max_{|z|=r}|f(z)|\le\frac{r}{R'}\max_{|z|=R'}|f(z)|\le\frac{r}{R'}M.$$

چونکه R' را می‌توان به دلخواه نزدیک R انتخاب نمود پس

$$\max_{|z|=r}|f(z)|\le\frac{r}{R}M.$$

شایان توجه است‌که در (۱۵) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $g(z)$ ثابت باشد. پس $|g(z)|=M/R$ $(|z|=r<R)$ اگر و فقط اگر $|f(z)|=(r/R)M$. اینک لم باتوجه به قضیه ۵ــ۸ ثابت می‌گردد.

تذکر ــ لم شوارتس را می‌توان برحسب تابع $M(r,f)$ بیان کرد. زیرا اگر $f(z)$ در $|z|<R$ تحلیلی باشد و $f(0)=0$، آنگاه $M(r,f)\le(r/R')M(R',f)$، $(r<R'<R)$.

<u>فرع ۱ــ فرض‌کنیم $f(z)$ برای $|z|<R$ تحلیلی است و $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. اگر در $|z|<R$، $|f(z)|\le M$، آنگاه $|f(z)|\le(r/R)^nM$ $(|z|=r<R)$ و تساوی تنها وقتی برقرار است که $f(z)=(M/R^n)e^{i\alpha}z^n$، α حقیقی.</u>

اثبات ــ می‌نویسیم $f(z)=z^ng(z)$ و قضیه ماکزیمم کالبد را برای $g(z)$ بکار می‌بریم.

اگر $f(0)\neq0$، لم شوراتس را می‌توان ترمیم نمود تا فرع ۲ استنتاج گردد.

<u>فرع ۲ــ فرض‌کنیم $f(z)$ برای $|z|<R$ تحلیلی است. اگر در $|z|<R$، $|f(z)|\le M$ آنگاه $|f(z)-f(0)|\le(2r/R)M$ $(|z|=r<R)$.</u>

اثبات ــ قرار می‌دهیم $g(z)=f(z)-f(0)$ آنگاه $g(0)=0$ و

$$|g(z)|\le|f(z)|+|f(0)|\le2M.$$

و با بکار بستن لم شوراتس برای $g(z)$، حاصل می‌شود.

$$|g(z)|=|f(z)-f(0)|\le\frac{2r}{R}M\qquad(|z|=r<R).$$

تذکر ــ از فرع ۲ می‌توان اثبات دیگری برای قضیه لیوویل ارائه‌کرد.

فرض کنیم $f(z)$ تابعی است تام‌وبرای هر z ، $|f(z)| \leq M$. اگر z_0 نقطه مفروضی بوده و $r_0 = |z_0|$ و $\varepsilon > 0$ ، R را با $R > 2r_0 M/\varepsilon$ انتخاب می‌کنیم ، در این صورت:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{2r_0 M}{R} < \varepsilon.$$

چــــونکـه ε اختیاری است ، $f(z_0) = f(0)$. ولی z_0 هم اختیاری است پس برای هر z ، $f(z) = f(0)$ ، یعنی $f(z)$ ثابت است .

پرسش‌ها

۱ــ فرض‌کنید $f(z)$ درون و بر مرز ساده بسته C تحلیلی‌است .آیا می‌شود $|f(z)|$ بر C ثابت باشد بدون اینکه $f(z)$ ثابت باشد ؟

۲ــ آیا می‌توان یک تابع $f(z)$ـ را ساخت که $M(r_0, f) = |f(r_0 e^{i\theta_0})|$ و $M(r_1, f) = |f(r_1 e^{i\theta_1})|$ با $\theta_1 \neq \theta_0$ ؟

۳ــ اگر $f(z)$ تحلیلی باشد ، آیا $M(r, f)$ مشتق‌پذیر است ؟

۴ــ اگر $f(z)$ پیوسته باشد ، آیا $M(r, f)$ پیوسته است ؟

۵ــ فرض‌کنید $f(z)$ در $|z| \leq r$ تحلیلی است . آیا دو نقطه متمایز $z_0 = re^{i\theta_0}$ و $z_1 = re^{i\theta_1}$ موجودندبطوری‌که‌برای‌هر z ، $|z| < r$ داشته‌باشیم $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ و و $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ ؟

۶ــ اگر تابعی بر ناحیه‌یی که بسته نیست غیرثابت و تحلیلی باشد ، آیا کالبــد آن می‌تواند بر این‌ناحیه ماکزیمم داشته باشد ؟

۷ــ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر مرز ساده بسته C تحلیلی هستند و بر C $|f(z) - g(z)| = 0$ آیا رابطه $f(z) = g(z)$ در درون C برقرار است ؟ اگر بر C ، $|f(z)| - |g(z)| = 0$ آن وقت چه ؟

۸ــ تعریف می‌کنیم که $m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$. $m(r, f)$ با $M(r, f)$ چه خواص مشترکی دارد ؟

تمرینها

۱ــ اگر $f(z)$ در قرص $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی و مخالف صفر باشد ، نشان دهید:

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z_0 + re^{i\theta})| \, d\theta.$$

۲ــ فرض کنید $f(z)$ تابع غیرثابت و تحلیلی در میدان $\mathscr{D}$ است و بربستارآن $\bar{\mathscr{D}}$ پیوسته است . اگر $|f(z)|$ بر مرز $\mathscr{D}$ ثابت‌باشد ،نشان‌دهید که $f(z)$ صفری در $\mathscr{D}$ دارد .

۳ــ قرار می‌دهیم که $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ و $m(r,f) = \min_{|z|=r}|f(z)|$ برای‌توابع تام زیر $M(r,f)$ و $m(r,f)$ را بیابید و همه نقاط بر $|z| = r$ را که درآنجاها ماکزیمم و می‌نیمم وجود دارد مشخص کنید.

الف) $f(z) = e^z$ ب) $f(z) = z^n$

پ) $f(z) = z^2 + 1$ ت) $f(z) = z^2 - z + 1$

۴ــ نشان دهید که $\max_{|z|=r}|e^{z^2 - iz}|$ در نقاط ir با $r \leq \frac{1}{4}$ و در نقاط $re^{i\theta}$ با $\theta = \sin^{-1}(1/4r)$ و $r > \frac{1}{4}$ واقع می‌شود (راهنمایی: ملاحظه کنید که $|e^{z^2 - iz}| = e^{\mathrm{Re}(z^2 - iz)}$ سپس $\mathrm{Re}\{z^2 - iz\}$ را ماکزیمم کنید.)

۵ــ با نمادهای تمرین ۳، نشان دهید که اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، $m(r,f)$ پیوسته است.

۶ــ گیریم $P(z)$ یک چند جمله‌یی است و قرار می‌دهیم $f(z) = P(z)e^z$ نشان‌دهید که با $r \to \infty$، $M(r,f) \to \infty$ و $m(r,f) \to 0$.

۷ــ $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ را که یک چند جمله‌یی است درنظرمی‌گیریم. نشان دهید که برای همه r های بس بزرگ، نقاط z_0 و z_1 می‌بایست بر دایره $|z| = r$ موجود باشند بطوری که:

$$|e^{P(z_0)}| = e^{(1/2)r^n}, \qquad |e^{P(z_1)}| = e^{-(1/2)r^n}.$$

(راهنمایی: ازقضیه۸ــ۱۱ و از این نکته‌که $|e^{P(z)}|$ پیوسته است استفاده‌کنید).

۸ــ اگر $f(z)$ بر $|z| < 1$ تحلیلی و $|f(z)| < 1$ و $f(0) = 0$. نشان دهید که $|f'(0)| \leq 1$. تساوی تنها وقتی است که $f(z) = e^{i\alpha}$، α حقیقی.

۹ــ فرض‌کنید برای $|z| \leq 1$، $f(z)$ تحلیلی است و برای $|z| \leq 1$، $|f(z)| \geq 1$. اگر $f(0) = 1$، نشان دهید f ثابت‌است.

۱۰ــ فرض‌کنید $f(z)$ در $|z| < R$ تحلیلی است و $f(0) = 0$. ثابت کنید

$$F(z) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots$$

برای $|z| < R$ تحلیلی است و

$$|F(z)| \leq \frac{r}{1 - r} \qquad (|z| = r < R).$$

۱۰ لم شوارتس استفاده کنید).

z_0 تحلیلی است و $f(z_0) = 0$. در اینصورت

ـجود است که شامل هیچ صفر دیگری‌از

نیست . پس $f(z)$ را می‌توان بصورت

$$f(z) = (z - z_0)^k F(z)$$ (k یک عدد صحیح و مثبت)

نـــــوشت که در آن $F(z)$ در z_0 تحلیلی است و در این همسایگی و بر مرز آن صفری ندارد . باید توجه داشت که

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} F(z) + (z - z_0)^k F'(z),$$

بنابراین

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{F'(z)}{F(z)} \tag{۱۶}$$

و

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_C \frac{k}{z - z_0}\, dz + \int_C \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz. \tag{۱۷}$$

عبـــــارت زیر نشانه آخرین انتگرال در طرف راست (۱۷) درون و بر روی C تحلیلـــی است . پس به موجب قضیه کوشی ، مقدار انتگرال صفر است‌و

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_C \frac{k}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{k}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i k.$$

یعنی که

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = k,$$

کـــــه k مرتبه صفر $f(z)$ است . عبارت $f'(z)/f(z)$ به مشتق لگاریتمـی $f(z)$ موسوم است زیرا در تمام نقاطی که $f(z)$ تحلیلی و مخالف صفر است ، این عبارت برابر مشتق $\log f(z)$ است .

سپس‌فرض‌کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و بر C مخالف صفر است . بموجب قضیه ۸-۱۴، $f(z)$ حداکثر یک تعداد متناهی صفر درون C دارد . فرض‌کنیم صفرهادر نقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ باشندوبه‌ترتیب‌مراتب‌آنها $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ باشد . در این صورت

$$f(z) = (z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \cdots (z - z_n)^{\alpha_n} F(z), \tag{۱۸}$$

کـــــه $F(z)$ صفری درون و بر C ندارد . با تشکیل مشتق لگاریتمی در (۱۸) ، حاصـــل می‌گردد .

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{z - z_i} + \frac{F'(z)}{F(z)}. \tag{۱۹}$$

انتگرال‌گیری از (۱۹) منجر می‌گردد به:

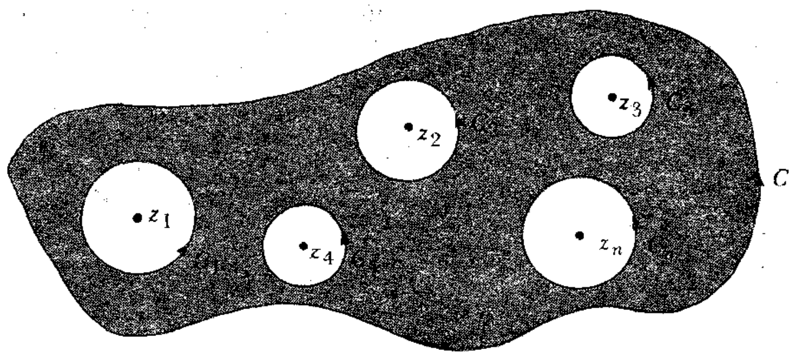
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{z-z_i}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz \tag{۲۰}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\alpha_i}{z-z_i}\,dz\right).$$

بـــــه مرکز هر یک از نقاط z_i ، دوایر C_i را درون C رسم می‌کنیم که صفرهای دیگری برای $f(z)$ درون این دوایر موجود نباشد (ر. ک. شکل ۴) در این صورت برای هر z_i داریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\alpha_i}{z-z_i}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{\alpha_i}{z-z_i}\,dz=\alpha_i. \tag{۲۱}$$

شکل ۴



از بکار بستن (۲۱) در (۲۰) حاصل می‌شود

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i. \tag{۲۲}$$

پـــــس عبارت $(1/2\pi i)\int_C f'(z)/f(z)\,dz$ می‌تواند به‌عنوان "تابع شمارشی "برای‌صفر های $f(z)$ درون C به‌حساب آید، که یک صفر با چند بارگی k ، k بار شمرده می‌شود.

اگر $f(z)$ در یک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد و عدد صحیح مثبت n را بتوان یافت به طوری که

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=A\neq 0,\ \infty,$$

در ایـــــن صورت‌گوییم که یک قطب از مرتبه n در z_0 داریم. اگر $n=1$ ، قطب راساده گویند. در بخش ۹ـ۱ نشان خواهیم داد تابع $f(z)$ را که در z_0 دارای قطب مرتبــه n است، می‌توان به صورت $f(z)=F(z)/(z-z_0)^n$ نمایش داد که $F(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است و $F(z_0)\neq 0$. هم‌چنانکه‌در (۱۶) مشاهده می‌گردد، اگر $f(z)$ صفری در z_0 داشته

باشد آنگاه $f'(z)/f(z)$ یک قطب ساده در z_0 خواهد داشت .

معادله (۲۲) را اینک می‌توان بصورت زیر تعمیم داد :

قضیه ۸ـ۱۸ . فرض‌کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد مگر در یک تعداد متناهی قطب‌ها درون C ، و فرض کنیم بر C ، $f(z) \neq 0$. اگر N و P بـه ترتیب تعداد صفرها و قطب‌های درون C باشند ، آنگاه :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P.$$

اثبات ــ فرض‌کنیم صفرهای $f(z)$ در نقاط $z_1, \ldots, z_n$ با چند بارگیهای به‌ترتیب $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ باشندوقطب‌های $f(z)$ درنقاط $w_1, \ldots, w_m$ باچندبارگیهای به‌ترتیب $\beta_1, \ldots, \beta_m$ باشند ، در این صورت $f(z)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$f(z) = \frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_n)^{\alpha_n}}{(z-w_1)^{\beta_1}\cdots(z-w_m)^{\beta_m}}F(z),$$

کـــه $F(z)$ تحلیلی است و هیچ صفر و هیچ قطب درون ندارد . با تشکیل مشتق لگاریتمی ، داریم :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{z-z_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i}{z-w_i} + \frac{F'(z)}{F(z)}. \qquad (۲۳)$$

با انتگرال گرفتن از (۲۳) حاصل می‌شود

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\alpha_i}{z-z_i}\,dz\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\beta_i}{z-w_i}\,dz\right). \qquad (۲۴)$$

سپس هرصفر و قطب $f(z)$ را با دوایر متمایز که این دوایر شامل صفرها وقطب های دیگرنباشند ، محصور می‌کنیم . در این صورت عینا" همانطور که از (۲۰) به (۲۲) رسیدیم می‌توانیم از (۲۴) به رابطه زیر برسیم :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=1}^{m}\beta_i = N - P. \qquad (۲۵)$$

درواقع این‌که (۲۵) همیشه بدون ارتباط با تابع $f(z)$ و مرز بسته C ، عددی‌صحیح است عجیب بنظر می‌رسد . این پدیده ریشه در خواص لگاریتم دارد . فرض کنیم ، $f(z)$ بر مرز ساده بسته C تحلیلی و مخالف صفر است ، قرار می‌دهیم .

$$\log f(z) = \mathrm{Log}\,|f(z)| + i\arg f(z),$$

که در آن شاخه خاصی از لگاریتم انتخاب شده است ، در این صورت

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\int_C \frac{d}{dz}\log f(z)=\mathrm{Log}\,|f(z)|\,\Big|_C+i\arg f(z)\Big|_C. \qquad (۲۶)$$

چـــــــونکه‌نقاط آغازی‌وپایانی‌مرزبسته C می‌بایست‌برهم‌بیافتند ، $\mathrm{Log}\,|f(z)|\,|_C=0$. پس (۲۶) به رابطه زیر ساده می‌شود :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=i\arg f(z)\Big|_C. \qquad (۲۷)$$

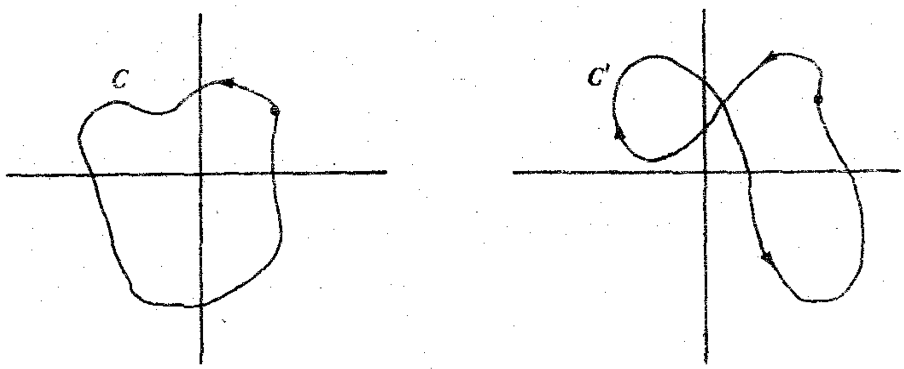
بنابـــــــراین مقدار انتگرال تنها به تغییرات خالص در شناسه $f(z)$ بهنگام‌پیمایش z بر مرز C وابسته است .

اکنون نگاره مرز ساده بسته C در تحت $f(z)$ ، مرز بسته C' است ، که لزوما "ساده" نیست . اگر $f(z)$ صفری‌درون C نداشته‌باشد ، آنگاه C' مبداء رااحاطه نمی‌کند. بنابراین $\arg f(z)$ ، هنگامیکه $f(z)$ مرز C' را می‌پیماید ، به مقدار اصلی‌اش باز می‌گردد (ر. ک. شکل ۵) . این بدان‌معنی است‌که تغییرات خالص در $\arg f(z)$ بهنگام پیمایش z بر مرز C برابر است با صفر ، یعنی که :

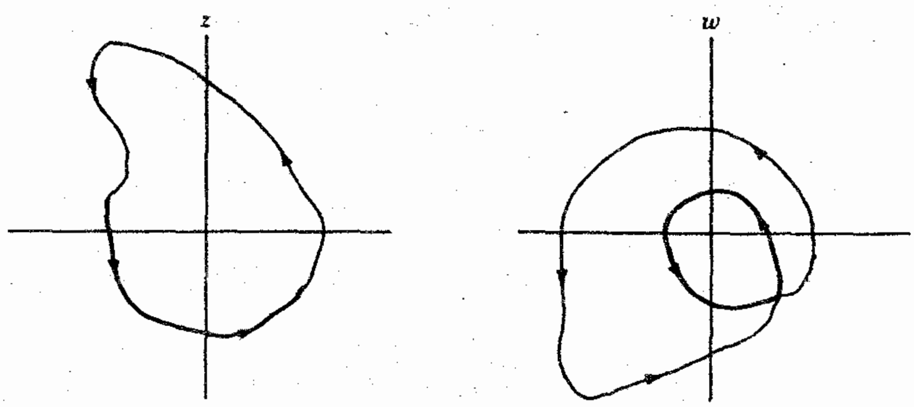
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=i\arg f(z)\Big|_C=0.$$

ازسوی‌دیگراگر $f(z)$ صفرهایی درون C داشته باشد ، آنگاه C' دور مبداء می‌بایست به‌پیچد (چرا؟) هر بار که C' حول مبداء می‌گردد (در جهت مثبت) ، شناسه $f(z)$ بـه میزان 2π افزایش‌می‌یابد .درشکل ۶ ، مرز ساده بسته C تحت تابع $f(z)=z^2$ بر مرزبسته C' نگاشته‌شده‌است‌و C' دوبار دور مبداء گردیده است . هنگامیکه z به نقطه‌آغازی خود بر C باز می‌گردد ، $\arg f(z)$ بر C' به میزان 4π افزایش می‌یابد .

شکل ۵



شکل ۶



باید توجه داشت ، اینکه مبداء درون مرز ساده بسته C باشدیانباشد،ارتباطی‌به‌مسئله کنونی ما ندارد . مبداء تنها نسبت به C' ، نگاره خم ، نقش تعیین‌کننده دارد . تغییرات خالص در $\arg f(z)$ به هنگام پیمایش z بر مرز C به وردنش شناسه $f(z)$ بر C موسوم است و با $\Delta_C \arg f(z)$ نمایانده می‌شود . و با این نماد می‌توان (۲۷) را بصورت زیر نوشت :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = i\,\Delta_C \arg f(z).$$

پس نتیجه قضیه ۸–۱۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = N - P. \qquad (۲۸)$$

همانندی (۲۸) به اصل شناسه موسوم است .

تذکر — برای هر صفر $f(z)$ درون C ، خم C' یک بار حول مبداء در جهت مثبت می‌گردد ، در حالی که برای هر قطب $f(z)$ ، درون C، خم C' یک بار حول مبداء در جهت‌منفی می‌گردد . برای اثبات این مطلب به تعریف دقیق شماره گشت نیازمندیم (کتاب الفرس[1] (۱۰) ملاحظه شود) .

دو لم زیر از نتایج اصل شناسه است :

لم ۱ — فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و $f(z)$ و $g(z)$ صفری بر C ندارند . در این صورت

$$\Delta_C \arg f(z)g(z) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg g(z).$$

---

1. Ahlforse

اثبات_ فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب درون C دارای N_1 و N_2 صفر باشند. در این صورت به موجب اصل شناسه

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = N_1 \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg g(z) = N_2 .$$

ولی $f(z)g(z)$ درون C دارای $N_1 + N_2$ صفر است. پس

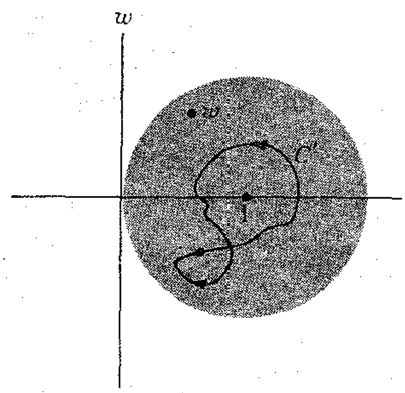
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)g(z) = N_1 + N_2 ,$$

و اثبات کامل است.

<u>لم ۲_ فرض‌کنیم $h(z)$ بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و برای هر z بر C، $|h(z)| < 1$. در این صورت $\Delta_C \arg (1 + h(z)) = 0$.</u>

اثبات _ مرز ساده بسته C با $w = F(z) = 1 + h(z)$ بر مرز بسته C' درون قرص $|w - 1| < 1$ نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۷). چون که قرص در نیم صفحه‌راست واقع است، می‌توان صفحه‌را درامتداد محور حقیقی منفی‌بریدوشاخه‌یی (شاخه اصلی) برای $\arg F(z)$ به هنگامیکه $F(z)$، C' را می‌پیماید، بدست آورد. بنابراین

$$\Delta_C \arg F(z) = \Delta_C \arg (1 + h(z)) = 0.$$



<u>شکل ۷</u>

تذکر _ تابع $F(z) = 1 + h(z)$ لازم نیست که برای z درون C تحلیلی باشد تا این که برای $\log F(z)$ شاخه‌یی برای z بر روی C موجود باشد. با توجه به اصل شناسه، ما تنها نشان داده‌ایم که تعداد صفرها و قطب‌های $F(z)$ درون C برابراست. به عنوان مثال $h(z) = 1/2z$ درنامساوی $|h(z)| < 1$ بردایره‌واحد صدق می‌کند. تابع $F(z) = 1 + h(z)$ یک صفر ساده (در $z = -\frac{1}{2}$) و یک قطب ساده (در مبداء) دارد.

با ترکیب این‌لم‌هامی‌توان قضیه ۸–۱۹ را اثبات نمود .

قضیه ۸–۱۹ (قضیه روشه)[1] . فرض‌کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی‌مرزساده‌بسته C تحلیلی‌اندوبر C ، $|g(z)| < |f(z)|$. آنگاه $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند .

اثبات ـ می‌نویسیم :

$$f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

و توجه می‌کنیم که به موجب لم ۱ ،

$$\Delta_C \arg\,(f(z) + g(z)) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right). \qquad (۲۹)$$

چونکه بر C ، $|g(z)/f(z)| < 1$ با بکار بردن لم ۲ حاصل می‌شود .

$$\Delta_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

پس (۲۹) به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\Delta_C \arg\,(f(z) + g(z)) = \Delta_C \arg f(z). \qquad (۳۰)$$

اگر N تعداد صفرهای $f(z) + g(z)$ درون C باشد . آنگاه به موجب (۳۰) و اصل شناسه ، $(1/2\pi)\Delta_C \arg\,(f(z) + g(z)) = (1/2\pi)\Delta_C \arg f(z) = N$. بدین ترتیب‌اثبات‌کامل است .

اثبات قضیه روشه سرشتی "هندسی" داشت و هم اینک یک اثبات "تحلیلی" برای آن بیان می‌کنیم :

اثبات مجدد قضیه روشه: گیریم $\{\phi_t(z)\}$ خانواده‌یی ازتوابع باشد که با $\phi_t(z) = f(z) + tg(z)$ $(0 \le t \le 1)$ تعریف شود . بر مرز C داریم :

$$|\phi_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \ge |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

چونکه $|f(z)| - |g(z)|$ بر مجموعه فشرده C پیوسته است ، پس بر آن می‌نیمم ، مثلا " m ، دارد پس برای هر z بر C ،

1. Rouche

$$|\phi_t(z)| \geq m > 0 \qquad (0 \leq t \leq 1). \tag{۳۱}$$

تعریف می‌کنیم که

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi_t'(z)}{\phi_t(z)} \, dz.$$

ملاحظه می‌شودکه $h(t)$ معرف‌تعداد صفرهای $\phi_t(z)$ درون C است. به‌ویژه $h(0)$ و $h(1)$ به ترتیب معرف صفرهای $\phi_0(z) = f(z)$ و $\phi_1(z) = f(z) + g(z)$ درون C می‌باشند. اگر بتوانیم نشان دهیم $h(0) = h(1)$، اثبات کامل خواهدبود. چونکه $h(t)$ یک تابع پله‌بی است، کافی است ثابت کنیم $h(t)$ پیوسته است، زیرا که‌تنها تابع پله‌بی پیوسته، تابع ثابت است.

به ازاء t_1 و t_2 مفروض در $[0, 1]$ داریم:

$$h(t_2) - h(t_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f' + t_2 g'}{f + t_2 g} - \frac{f' + t_1 g'}{f + t_1 g} \right) dz \tag{۳۲}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{(t_2 - t_1)(g'f - f'g)}{(f + t_2 g)(f + t_1 g)} \right) dz.$$

چون که $f(z)$، $g(z)$، $f'(z)$ و $g'(z)$ بر C تحلیلی هستند، کراندار نیز می‌باشند، می‌توان فرض کرد که

$$|f(z)|, \quad |g(z)|, \quad |f'(z)|, \quad |g'(z)| \leq M. \tag{۳۳}$$

درازای C را با L نمایش می‌دهیم، در این صورت از (۳۲) و (۳۳) بدست می‌آید که:

$$|h(t_2) - h(t_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|t_2 - t_1| 2M^2}{m^2} L = K |t_2 - t_1|,$$

که در آن K عدد ثابتی مستقل از t_1 و t_2 می‌باشد. با $\varepsilon > 0$ مفروض داریم

هر وقت $|t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{K}$ آنگاه $|h(t_2) - h(t_1)| > \varepsilon$

پس $h(t)$ بر $[0, 1]$ پیوسته است و اثبات کامل است.

تذکر ــ در قضیه‌روشه‌شرط $|g(z)| < |f(z)|$ بر C رانمی‌توان‌با $|g(z)| \leq |f(z)|$ بر C، جایگزین نمود. این مطلب را با قرار دادن $g(z) = -f(z)$ می‌توان دید زیرا که در این صورت $f(z) + g(z) \equiv 0$ درون C و به تعداد صفرهای $f(z)$ هم ارتباطی‌ندارد.

بعنوان اولین کاربرد قضیه روشه، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۸ـ۲۰ (قضیه هرویتس)[1] . فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی درون وبرروی مرز ساده بسته C باشد . و فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ درون C به $f(z)$ همگرای یکنواخت‌است .اگر $f(z)$ صفری‌بر C نداشته‌باشد، آنگاه تعداد صفرهای $f(z)$ در درون C برابر است با تعداد صفرهای $f_n(z)$ در درون C،برای n های بس بزرگ .

اثبات ـ ابتداء باید‌توجه داشت ، بموجب قضیه ۸ـ۶ تابع حدی $f(z)$ درون و بر روی C تحلیلی است . فرض کنیم $m>0$ نمایشگر می‌نیمم $|f(z)|$ بر C باشد . چونکه $\{f_n(z)\}$ بر C همگرای یکنواخت است . پس با $n>N(m)$ و بر C داریم

$$|f_n(z)-f(z)|<m\leq|f(z)|$$

پـــــس به موجب قضیه روشه ، تعداد صفرهای $f(z)$ درون C برابر تعداد صفرهای‌تابع زیر است :

$$f(z)+(f_n(z)-f(z))=f_n(z) \qquad (n>N).$$

با استفاده از قضیه روشه می‌توان اثبات دیگری برای قضیه اساسی جبر بدست‌داد .

فرض کنیم

$$\begin{aligned}P_n(z)&=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_n z^n\\&=P_{n-1}(z)+a_n z^n \qquad (a_n\neq 0).\end{aligned}$$

در این صورت برای $|z|=r>1$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_{n-1}(z)}{a_n z^n}\right|&\leq\frac{(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)r^{n-1}}{|a_n|r^n}\\&=\frac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|}{|a_n|r}.\end{aligned}$$

پس به ازاء $r>\max\{(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)/|a_n|,1\}$، و بر دایره $|z|=r$ داریم :

$$|P_{n-1}(z)|<|a_n z^n|$$

چون که $a_n z^n$ درون $|z|=r$ دارای n صفر (همگی در مبداء) است ، پس تابع

$$P_n(z)=P_{n-1}(z)+a_n z^n.$$

نیز n صفر درون دایره $|z|=r$ دارد .

---

1. Hurwitz

تذکر ــ این اثبات قضیه اساسی جبر از اثباتهای قبلی خیلی قانع کننده‌تر است. اول اینکه، مستقیما" ثابت می‌کنیم‌که یک چند جمله‌یی n ریشه دارد (درحالی‌که‌قبلا" "حداقل یکی" ثابت شد). ثانیا" و مهم‌تر اینکه کرانی برای کالبد ریشه‌ها برحسب ضرایب بدست می‌آید. ما اینک می‌دانیم که همگی ریشه‌ها درون قرص

$$|z| \le \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \qquad (|z| > 1).$$

واقعند.

برای‌تقریب زدن هر جایگاه صفرهای یک تابع تحلیلی، غالبا" قضیه روشه به‌ماکمک می‌نماید.

مثال ــ نشان دهید که پنج ریشه چند جمله‌یی

$$P(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$$

درون طوق $3 > |z| > 1$ واقعند

فرض‌کنیم $f(z) = z^5 + 6z^3 + 2z$ و $g(z) = 10$. بر دایره $|z| = 1$

$$|f(z)| \le |z|^5 + 6|z|^3 + 2|z| = 9.$$

پس $P(z) = f(z) + g(z)$ و $g(z)$ درون $|z| < 1$ صفرهای مساوی دارند، یعنی هیچ کدام صفر ندارند. ملاحظه می‌شود که بر $|z| = 1$، $|P(z)| \ge 1$ و $P(z)$ نمی‌تواند صفری بر دایره داشته باشد.

این بار $f(z) = z^5$ و $g(z) = 6z^3 + 2z + 10$. بر $|z| = 3$ داریم

$$|g(z)| \le 6 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 10 < |f(z)| = 3^5.$$

پس صفرهای $P(z)$ می‌بایست در $|z| < 3$ یعنی درون طوق $3 > |z| > 1$ باشند.

تذکر ــ با قرار دادن $f(z) = 6z^3$ و $g(z) = z^5 + 2z + 10$ می‌توانیم نشان دهیم سه صفر $P(z)$ درون $2 > |z| > 1$ و در نتیجه دو ریشه دیگر در طوق $3 > |z| > 2$ واقع است.

بعنوان آخرین کاربرد قضیه روشه قضیه زیر را اثبات می‌کنیم:

<u>قضیه ۸ــ۲۱ (قضیه نگاشت باز). تابع تحلیلی غیرثابت مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد.</u>

اثبات ــ فرض کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است. می‌بایست نشان دهیم که نگاره هر همسایگی بس کوچک z_0 در صفحه z شامل یک همسایگی $w_0=f(z_0)$ در صفحه w است. $\delta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که تابع $f(z)-w_0$ بر قرص $|z-z_0|\le\delta$ تحلیلی باشد و به طوری که $f(z)-w_0$ صفری بر دایره $|z-z_0|=\delta$ نداشته باشد. و این کار با توجه به فرع قضیه ۸ــ۱۳ شدنی است. فرض کنیم m می‌نیمم مقدار $|f(z)-w_0|$ بر دایره $|z-z_0|=\delta$ باشد. نشان خواهیم داد که نگاره قرص $|z-z_0|<\delta$ در تحت تابع $f(z)$ شامل قرص $|w-w_0|<m$ می‌باشد (ر. ک. شکل ۸)

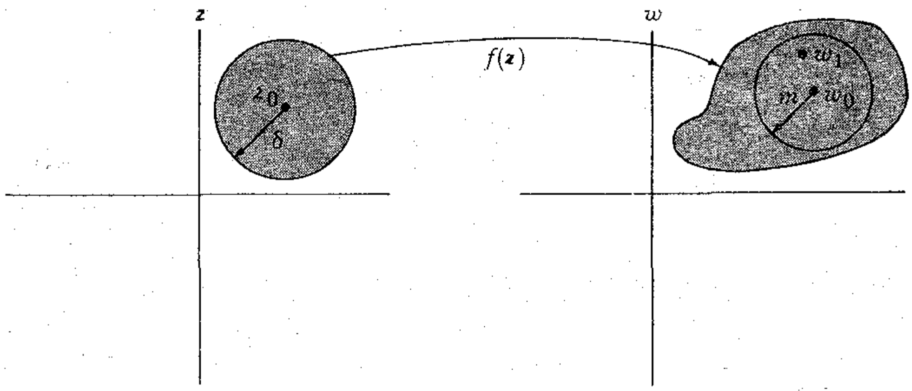
نقطه w_1 را در قرص $|w-w_0|<m$ می‌گیریم. در این صورت بر دایره $|z-z_0|=\delta$ داریم

$$|w_0-w_1|<m\le|f(z)-w_0|\ .$$

به موجب قضیه روشه، تابع

$$(f(z)-w_0)+(w_0-w_1)=f(z)-w_1$$

و تابع $f(z)-w_0$ در $|z-z_0|<\delta$ صفرهای مساوی دارند. چونکه $f(z)-w_0$ حداقل یک صفر دارد (در z_0)، تابع $f(z)=w_1$ نیز حداقل یک صفر خواهد داشت. یعنی که حداقل یک بار $f(z)=w_1$. چون که w_1 اختیاری بود، نگاره قرص $|z-z_0|<\delta$ می‌بایست شامل همه نقاط قرص $|w-w_0|<m$ باشد.



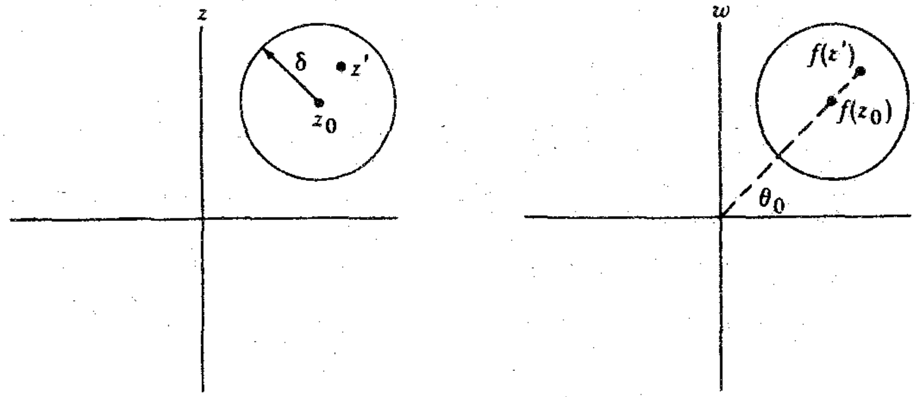
شکل ۸

فرع ــ تابع تحلیلی غیرثابت میدان را بر میدان می‌نگارد.

اثبات ــ یادآور می‌شویم که میدان، مجموعه باز همبند است و با توجه به این قضیه ماتنها باید نشان دهیم که تابع تحلیلی مجموعه همبند را بر مجموعه همبند می‌نگارد. ولی این از تمرین ۸ بخش ۲ــ۵ نتیجه می‌شود، زیرا که تابع تحلیلی، پیوسته هم می‌باشد.

با استفاده از قضیه نگاشت باز اثبات کوتاهی بر قضیه ماکزیمم کالبد می‌توان ارائه کرد.

شکل ۹



فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی است و z_0 نقطه‌یی در $\mathscr{D}$ است. اگر $f(z)$ ثابت نباشد، آنگاه نگاره قرص $|z-z_0|<\delta$ شامل یک قرص $|w-f(z_0)|<m$ در صفحه w است. اگر $f(z_0)=Re^{i\theta_0}$، آنگاه به ازاء هر ε، $0<\varepsilon<m$، نقطه z' در قرص $|z-z_0|<\delta$ متناظر می‌گردد و به طوری که $f(z')=(R+\varepsilon)e^{i\theta_0}$ (ر. ک. شکل ۹).
پس

$$|f(z')|=R+\varepsilon>|f(z_0)|=R,$$

بنابراین z_0 ماکزیمم برای $|f(z)|$ نیست.

پرسشها

۱ــ آیا می‌شود که $f(z)$ در یک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد، در حالی که به ازاء هر n، $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ موجود نباشد؟

۲ــ اهمیت ثابت $2\pi i$ در چیست؟

۳ــ چگونه خواص $\Delta_C \arg f(z)$ با $\log f(z)$ مقایسه می‌شوند؟

۴ــ آیا با استفاده از قضیه روشه می‌توان ربعی از صفحه را که صفرهای یک تابع تحلیلی در آن واقع می‌شود مشخص کرد؟

۵ــ آیا می‌توان قضیه روشه را برای حالتی که قطبی نیز در درون مرز باشد گسترش داد؟

۶ــ آیا یک تابع پیوسته غیرثابت، مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد؟

۷ــ آیا یک تابع تحلیلی مجموعه‌های بسته را بر مجموعه‌های بسته می‌نگارد؟

تمرینها

۱ــ اگر $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد و بر C، $f(z)\neq a$،

نشان دهید که تعداد دفعاتی که $f(z)$ درون C مقدار a را می‌پذیرد، عبارت است از:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

۲ـ فرض کنید $f(z)$ درون و بر مرز ساده بسته C تحلیلی است مگر در یک تعداد متناهی‌قطب‌درون C . صفرها را (که هیچ کدام بر C نیستند) با $z_1, \ldots, z_n$ و قطب‌ها را با $w_1, \ldots, w_m$ می‌نمایانیم . اگر $g(z)$ درون و بر روی C تحلیلی باشد، ثابت‌کنید که:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} g(z_i) - \sum_{i=1}^{m} g(w_i)،$$

کـــــه در آن هر صفر و هر قطب در حاصلجمع به میزان چندبارگی آن ظاهر می‌گردد .

۳ـ اگر $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ، $1/2\pi i \int_{|z|=R} z P'(z)/P(z)\,dz$ رابرای مقادیر بزرگ R محاسبه کنید .

۴ـ اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد، نشان دهید، $f(z)$ صفری از مرتبه k در z_0 دارد اگر و فقط اگر $1/f(z)$ قطبی از مرتبه k در z_0 داشته باشد .

۵ـ اگر $f(z)$ در قرص $|z| < 1$ تحلیلی و مخالف صفر باشد، ثابت کنید، بـرای $0 < r < 1$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right) = |f(0)|.$$

۶ـ نشان دهید، چند جمله‌یی $z^4 + 4z - 1$ یک ریشه در قرص $|z| < \frac{1}{3}$ داردو سه ریشه دیگر در طوق $\frac{1}{3} < |z| < 2$، جای دارند .

۷ـ اگر $a > e$ ، ثابت‌کنید ،معادله $e^z = az^n$ درون‌دایره واحد n ریشه دارد .وقتی $n = 2$ ، نشان دهید هر دو ریشه حقیقی هستند .

۸ـ اگر $a > 1$ ، ثابت کنید $f(z) = z + e^{-z}$ دقیقا" در یک‌نقطه‌درنیم صفحه راست برابر a می‌گردد .

۹ـ نشان دهید ، هر چقدر R کوچک باشد ، همه صفرهای تابع

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^n}$$

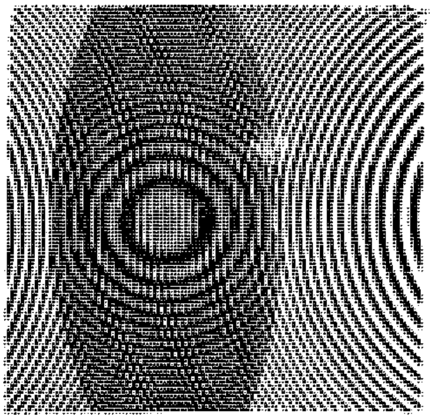
برای n به اندازه کافی بزرگ، درون قرص $|z| < R$ قرار دارند .

۱۰ـ فرض کنید $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی ازتوابع تحلیلی است که بر زیر مجموعه‌هـای فشرده میدان $\mathscr{D}$ به $f(z)$ همگرای یکنواخت است . فرض کنید برای هر n ، $f_n(z_n) = 0$ که

هر z_n متعلق به $\mathscr{D}$ است. نشان دهید، هر نقطه حدی $\{z_n\}$ که به $\mathscr{D}$ متعلق باشد، یک صفر $f(z)$ است. (راهنمایی: قضیه هرویتس را بکار ببرید).

۱۱- فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f(z)-f(z_0)$ دارای صفری از مرتبه n در z_0 است. نشان دهید، همسایگی‌های $N(z_0;\delta)$ و $N(f(z_0);\varepsilon)$ موجودند به طوری که هر نقطه در $N(f(z_0);\varepsilon)$ حداقل نگاره یک و حداکثر نگاره n نقطه متمایز از $N(z_0;\delta)$ می‌باشد.

۱۲- فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0)\neq 0$. نشان دهید، تابع تحلیلی $g(z)$ موجود است. بطوری که در یک همسایگی z_0، $f(g(z))=z$. این به قضیه تابع وارون موسوم است.



۹ـ رشته لران و قضیهٔ مانده

در این فصل رفتار تابع را در نقاطی که تحلیلی نیست بررسی می‌کنیم. در حالی که این توابع را نمی‌توان به یک رشته تیلر بسط داد، نشان خواهیم داد که بسطی به رشته لران امکان‌پذیر است. اینک از انتگرال مختلط که در فصل ۷ بنا کردیم و در فصل ۸ تکمیل کردیم، برای محاسبه انتگرالهای معین از توابع حقیقی استفاده می‌کنیم.

۹ـ۱. رده‌بندی تکینه‌ها

گوئیم که یک‌تابع تک ـ مقداری در یک نقطه تکینه دارد اگر چنانچه در آن نقطه تحلیلی نباشد. بعلاوه اگر تابع در یک همسایگی سوده این نقطه تحلیلی باشد، آنگاه گوئیم که تکینه تنها است. رفتار تابع $f(z)$ در نزدیکی یک تکینه تنهای z_0 را میتوان به شرح زیر توصیف نمود:

(۱) $f(z)$ دریک‌همسایگی z_0 کراندار است. مثال: قرارمی‌دهیم $f(z) = (\sin z)/z$، $z \neq 0$. در این صورت $f(z)$ در یک همسایگی مبداء کراندار است. این مثال‌چندان جالب نیست زیرا که با تعریف $f(0) = 1$، می‌توان $f(z)$ را تحلیلی کرد.

(۲) اگر z به z_0 میل کند. $f(z)$ ممکن است به ∞ میل کند. مثال: قرار می‌دهیم $f(z) = 1/z$، $z \neq 0$. در این حالت $f(z)$ در مبداء یک‌تکینه تنها دارد و اگر $z \to 0$ آنگاه $1/z \to \infty$.

(۳) ممکن است $f(z)$ نه در (۱) صادق و نه‌در (۲) صادق باشد. مثال: قرارمی‌دهیم $f(z) = e^{1/z}$، $z \neq 0$. در این مورد توجه کنید که برای $z = x$، x حقیقی، داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0.$$

پس در یک همسایگی مبداء ، $e^{1/z}$ نه کراندار است و نه به ∞ میل می‌کند .

ملاحظه کنید که از شیوه "زیرکانه"ای که (۳) را بیان داشتیم ، نتیجه می‌شود که هر تکینه تنها در یکی ازحالات (۱) و (۲) و یا (۳) صدق خواهد کرد . هر یک از این سه نوع تکینه تنها، دارای سرشت‌های عمده‌یی هستند که در سه قضیه بعد بدست خواهند آمد .

قضیه ۹ـ۱ (قضیه ریمان) . اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکینه تنها داشته باشد و در یک همسایگی سوده z_0 کراندار باشد ، آنگاه $f(z)$ را میتوان در z_0 به گونه‌یی تعریف کرد که در z_0 تحلیلی باشد .

اثبات ــ بازاء R ی $R>0$ ، $f(z)$ در قرص سفته

$$0 < |z - z_0| \le R.$$

تحلیلی است : اگر z_1 نقطه‌مفروضی‌درون قرص باشد ، عدد مثبت r را طوری‌انتخاب می‌کنیم که $r < |z_1 - z_0| < R$. تابع $f(z)$ در طوق محصور به دوایر $C: |z - z_0| = R$ و $C_1: |z - z_0| = r$ تحلیلی است (ر . ک . شکل ۱) بنابراین بموجب فرمول انتگرال‌کوشی

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta. \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌شود که مقدار (۱) به انتخاب r وابسته نیست . ثابت می‌کنیم آخرین انتگرال طرف راست (۱) صفر است ، و برای این کار نشان می‌دهیم که برای مقادیر بس کوچک r ، قدر مطلق آنرا به دلخواه می‌توان کوچک کرد . چون که $f(z)$ در این قرص کراندار است ، مثلا " $|f(z)| \le M$ داریم :

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta\right| \le \frac{M}{2\pi}\int_{C_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|} \le \frac{M}{2\pi}\,\frac{2\pi r}{|z_1 - z_0| - r}. \qquad (۲)$$

پس (۲) با r به صفر میل می‌کند و (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta. \qquad (۳)$$

چونکه z_1 درقرص $0 < |z - z_0| < R$ اختیاری‌بود ، (۳) برای‌هر z با $0 < |z - z_0| < R$ به صورت زیر در می‌آید :

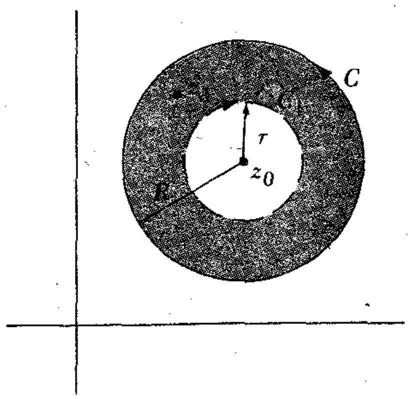
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad (۴)$$

در اثبـــــات قضیه ۸ــ۲ نشان دادیم که انتگرال طرف راست (۴) برای $|z-z_0|<R$ نمایشگر یک‌تابع تحلیلی است . پس با تعریف

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta,$$

تابع $f(z)$ در تمامی قرص $|z-z_0|<R$ تحلیلی می‌گردد و بدین ترتیب اثبات تمام است .

شکل ۱



فرع ــ اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تکینه تنها داشته باشد و در یک همسایگی z_0 کراندار باشد ، آنگاه $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجود است .

اثبات ــ چون که تابع تحلیلی پیوسته است ، $f(z_0)$ در قضیه ۹ــ۱ می‌بایست به گونه‌یی تعریف شده باشد که $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ به‌ویژه $\lim_{z\to z_0} f(z)$ می‌بایست موجود باشد .

ما نشان دادیم توابعی که در شرایط قضیه ۹ــ۱ صادق باشند . صرفا" به این دلیل تکینه دارند که در نقطه مورد بحث بطور "مناسب" تعریف نشده‌اند . اگر $f(z)$ در z_0 تکینه تنها داشته باشد و اگر $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجـــــود باشد ، در این صورت گوئیم که این تکینه برداشتنی است . قضیه ۹ــ۱ مبیـن آن است‌که اگر تابعی در یک همسایگی سوده نقطه‌یی تحلیلی و کراندار باشد ، در بدترین حالت در آن یک تکینه برداشتنی دارد . در تمام مقاصد عملی می‌توان‌چنین تابعی‌را تحلیلی فرض کرد . پس به هنگامیکه‌از $(\sin z)/z$ به عنوان تابع تام صحبت می‌شود منظور این است‌که $f(0)=\lim_{z\to 0}(\sin z)/z=1$. قابل توجه است که بسط ماکلورن برای این تابع عبارت است‌از :

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

یادآورمی‌شویم ، تابع $f(z)$ که‌درهمسایگی سوده $z=z_0$ تحلیلی است ، دارای قطبی

از مرتبه k (k عدد صحیح مثبت) است اگر چنانچه
$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = A \neq 0,\ \infty$.
اینک به بررسی تکینه‌های نوع (۲) می‌پردازیم :

قضیه ۹ـ۲ . اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تکینه تنها داشته باشد و با $z\to z_0$ ، $f(z)\to\infty$ ، آنگاه $f(z)$ در $z=z_0$ قطب دارد .

اثبات ـ اگر با $z\to z_0$ ، $f(z)\to\infty$ ، آنگاه $g(z)=1/f(z)$ دریک همسایگی سوده z_0 کراندار است . به موجب قضیه ۹ـ۱ ، $g(z)$ در z_0 تکینه برداشتنی دارد و می‌توان نوشت :

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

که نتیجه می‌شود :

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=a_0=0.$$

اکنون ضرایب $g(z)$ همگی نمی‌تواند صفر باشد زیرا ، این بدان معنی است که در یک همسایگی سوده z_0 ، $f(z)\equiv\infty$. فرض کنیم a_k اولین ضریب مخالف صفر $g(z)$ باشد . در این صورت :

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots,$$

و

$$\frac{1}{f(z)(z-z_0)^k}=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\cdots. \qquad (۵)$$

پس

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)(z-z_0)^k}=a_k\neq 0;$$

یعنی

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\frac{1}{a_k}.$$

پس ، $f(z)$ در $z=z_0$ قطب مرتبه k دارد و قضیه ثابت می‌گردد .

تذکر ــ اگر $f(z)$ در z_0 قطب داشته باشد، بنابه تعریف نتیجه می‌شودبا $z \to z_0$، $f(z) \to \infty$ پــــس قضیــــه ۹ــ۲ یک شرط لازم‌و کافی را برای اینکه تکینه تنها، قطب باشد بیان می‌دارد.

فرع ــ اگر $f(z)$ در $z = z_0$ قطب داشته باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

که k مرتبه قطب است

اثبات ــ نمادهای قضیه ۹ــ۲ را بکار می‌بریم، بموجب (۵)، تابع

$$\frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

در $z = z_0$ تحلیلی است. چونکه $a_k \neq 0$، با استفاده از پیوستگی تابع می‌توان نشان داد که یک همسایگی z_0 موجود است که در آن

$$\frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} \neq 0.$$

پس $f(z)(z - z_0)^k$ در z_0 تحلیلی است وبسط

$$f(z)(z - z_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^m \qquad \left(c_0 = \frac{1}{a_k} \neq 0\right)$$

در یک همسایگی z_0 برقرار است، یعنی که

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^{m-k} \tag{۶}$$

با قرار دادن $n = m - k$ و $b_n = c_{m+k}$ در (۶) حاصل می‌شود.

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^{m-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

یک تکینه تنها که نه برداشتنی باشد و نه قطب باشد به تکینه تنهای اساسی، موسوم است. رفتار تابع در همسایگی نقطه‌یی که در آن تکینه تنهای اساسی دارد کاملا" حیرت‌انگیز است.

قضیه ۹ــ۳ (کازوراتی ـ وایرشتراس)[1]. اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تکینه تنهای اساسی داشته باشد، آنگاه در هر همسایگی سوده z_0 ، $f(z)$ به هر عدد مختلط، هر چقدر بخواهیم نزدیک می‌شود.

اثبات ــ فرض کنیم ،به‌ازاء عدد مختلط a و برای هر z در قرص سفته $0<|z-z_0|<\delta$ داشته باشیم

$$|f(z)-a|\geq\varepsilon>0$$

قرار می‌دهیم $g(z)=1/(f(z)-a)$ در این صورت

اگر $0<|z-z_0|<\delta.$ آنگاه $|g(z)|=\left|\dfrac{1}{f(z)-a}\right|\leq\dfrac{1}{\varepsilon}$

پس به‌موجب قضیه ۹ــ۱ ، $g(z)$ در $z=z_0$ تکینه‌برداشتنی دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-a}=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

ملاحظه می‌شود که $\lim_{z\to z_0}1/(f(z)-a)=a_0$. دو حالت قابل بررسی موجوداست:

حالت ۱ــ $a_0\neq0$. در این صورت $\lim_{z\to z_0}f(z)=1/a_0+a$ و $f(z)$ در $z=z_0$ تکینه برداشتنی دارد.

حالت ۲ــ $a_0=0$ فرض کنیم a_k اولین ضریب مخالف صفر باشد، در این صورت:

$$1/(f(z)-a)(z-z_0)^k=a_k+a_{k+1}(z-z_0)+\cdots.$$

در این حالت

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k(f(z)-a)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^kf(z)=\frac{1}{a_k},$$

و $f(z)$ در $z=z_0$ قطب مرتبه k دارد. چون که بنا به فرض هر دو حالت منتفی‌است. پس نامساوی $|f(z)-a|\geq\varepsilon>0$ نمی‌تواند درست باشد و اثبات تمام است.

فرع ــ فرض کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ تکینه تنهای اساسی داشته باشد. به ازاء هرعدد مختلط a ، دنباله $\{z_n\}$ موجود است به طوری که $z_n\to z_0$ و $f(z_n)\to a$.

اثبات ــ دنباله $\{\delta_n\}$ رااختیارمی‌کنیم که برای هر n ، $\delta_n>0$ و $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$

---

1. Casorati-Weierstrass

به‌موجب قضیه ۹ـ۳ دنباله‌بی‌ازنقاط $\{z_n\}$ موجوداست‌بطوری‌که‌برای $0 < |z_n - z_0| < \delta_n$ ، $|f(z_n) - a| < 1/n$. پس به هنگامی که $z_n \to z_0$ ، $f(z_n) \to a$.

یک تعمیم قضیه ۹ـ۳ به صورت زیر است :

قضیه بزرگ پیکار ـ در همسایگی تکینه تنهای اساسی ، تابع هر مقدار مختلط را ، با یک استثناء ممکن ، به دفعات نامتناهی می‌پذیرد .

جهت اثبات به کتاب هیل[1] (۱۱) مراجعه کنید .

تابع $e^{1/z}$ در $z = 0$ تکینه‌تنهای‌اساسی دارد و هرگز مقدار صفر نمی‌پذیرد . بموجب قضیه بزرگ پیکار، $e^{1/z}$ می‌بایست‌دریک همسایگی مبداء ، تمام دیگرمقادیر را به‌دفعات نامتناهی‌به‌پذیرد . مااین‌مطلب را با یافتن نقاطی که درآنجاها $e^{1/z} = i$ تشریح‌می‌کنیم . ابتداء توجه می‌کنیم که $|e^{1/z}| = |i| = 1$ تنها وقتی که $\operatorname{Re} z = 0$. قرار می‌دهیم $z = iy$ ، y حقیقی ، در این صورت

$$e^{1/iy} = e^{-i/y} = \cos\frac{1}{y} - i\sin\frac{1}{y} = i$$

اگر و تنها اگر $1/y = -\pi/2 + 2n\pi$ ، n صحیح. با قرار دادن

$$z_n = \frac{1}{i(-\pi/2 + 2n\pi)},$$

برای هر n ، خواهیم داشت $e^{1/z_n} = i$. ملاحظه می‌شود که به تعداد نامتناهی z_n در هر همسایگی مبداء قرار دارد . می‌توان به نقطه ∞ بعنوان تکینه تنها اطلاق‌نمود. تابع $f(z)$ در $z = \infty$ تکینه‌تنهادارد .اگرچنانچه $f(z)$ در یک همسایگی سوده ∞ تحلیلی باشد؛ یعنی که عدد حقیقی R موجود باشد بطوری که برای $R < |z| < \infty$ ، تابع $f(z)$ تحلیلی باشد .

باید توجه داشت که $f(z)$ برای $|z| > R$ تحلیلی است اگر و تنها اگر $f(1/z)$ برای $|1/z| < 1/R$ تحلیلی باشد . پس $f(z)$ در $z = \infty$ تکینه تنها دارد اگر و تنها اگر $f(1/z)$ در $\bar{z} = 0$ تکینه‌تنهاداشته‌باشد . بعلاوه بنابر تعریف این تکینه تنهای $f(z)$ در $z = \infty$ به‌ترتیب برداشتنی ، قطب و یا اساسی است چنانچه تکینه $f(1/z)$ در $z = 0$ برداشتنی ، قطب و یا اساسی باشد .

---

1. Hille

مثال ۱ـ تابع $f(z)=z^2+1$ دارای یک تکینه اساسی تنها از مرتبه ۲، در $z=\infty$ است زیرا که $f(1/z)=(1/z^2)+1$ تکینه اساسی‌تنها در$z=0$ دارد.

مثال ۲ـ تابع $f(z)=e^z$ در$z=\infty$دارای تکینه اساسی تنهـا اسـت، زیرا که $f(1/z)=e^{1/z}$ یک در$z=0$تکینه اساسی تنها دارد.

با این تعریف، مجددا" رفتار توابع تام را بررسی می‌کنیم، اگر$f(z)=\sum_{n=0}^{k}a_n z^n$ چند جمله‌یی از درجه k باشد، آنگاه

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^k}\left(a_k+\sum_{n=0}^{k-1}a_n z^{n-k}\right)$$

در$z=0$ قطب مـــــرتبه k دارد. پس$f(z)$ در$z=\infty$ قطب‌مرتبه k دارد. اینک ملاحظـه می‌گردد که قضیه ۸ـ۱۱، حالت خاص قضیه ۹ـ۳ است. یعنی که با$z\to\infty$، $f(z)\to\infty$، زیرا$f(z)$ در $z=\infty$ قطب دارد. شایان توجه است‌که تابع تام $f(z)$ در $z=\infty$ قطب‌مرتبه k دارد اگر و فقط اگر

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^k}=A\neq 0,\ \infty. \qquad (۷)$$

بعـــــــلاوه‌اگر(۷) برقرار باشد آنگاه (بنا به قضیه ۸ـ۱۰) $f(z)$ یک چند جمله‌یـی از درجه k است. پس‌تابع تام‌متعالی نمی‌تواند در$z=\infty$قطب داشته باشد. و این بدان معنی است‌که توابع تام متعالی در$z=\infty$می‌بایست تکینه اساسی داشته باشند.

اینک می‌توان یک مقایسه جالب میان قضیهٔ ۸ـ۹وقضیهٔ ۹ـ۳انجام داد. قضیهٔ ۸ـ۹ صرفا "بیانگر آن‌است‌که یک تابع تام هرچقدربخواهیم به هرعدد مختلط‌نزدیک می شود. قضیهٔ ۹ـ۳ مبین آن است که یک تابع تام متعالی هر چقدر بخواهیم به هر عدد مختلط که خارج دایـره $|z|=R$ باشد نزدیک می‌شود. البته رفتار تابع تام غیرمتعالی (یک چند جمله‌یی) قبلا " بطور کامل مورد بحث قرار گرفته است.

سپس مثالی از یک تکینه‌یی که تنها نیست می‌آوریم: تابع

$$f(z)=\frac{1}{\sin(1/z)}$$

در مبـــــداء تکینه دارد زیراکـــــــه $\lim_{z\to 0}f(z)$ موجود نیست. بعلاوه نقـاط $z_n=1/n\pi$نیز تکینه‌های $f(z)$ می‌باشند چونکه با$n\to\infty$، $z_n\to 0$ پس هر همسایگی مبـداء شامل تکینه‌های $f(z)$ میباشد. پس تکینه در$z=0$ تنها نیست.

تذکر ــ دیدیم که تکینه‌های تنهای یک تابع تک ــ مقداری، فقط تکینه‌های برداشتنی، قطب‌ها و تکینه‌های اساسی هستند. مبداء را می‌توان به‌عنوان تکینه تنهای تابع چندمقداری $\log z$ تصور کرد، زیرا که در هر نقطه مفروض باستثنای مبداء یک شاخه از این تابع تحلیلی است. نقطه z_0 را یک نقطه شاخه تابع $f(z)$ گوئیم، اگر چنانچه هر مرز ساده بسته C در نظرگیریم که z_0 درون آن باشد و z مرز C را به پیماید آنگاه $f(z)$ به مقدار اولیه‌اش باز نگردد. مبداء نقطه شاخه $\log z$ است. تمام توابع چند مقداری نقاط شاخه دارند (و هیچ تابع تک ــ مقداری نقطه شاخه‌یی ندارد). چونکه تابع تحلیلی می‌بایست تک ــ مقداری باشد، پس هیچ تکینه تنها نمی‌تواند نقطه شاخه باشد.

پرسش‌ها

۱ــ آیا می‌شود تابعی به تعداد نامتناهی تکینه‌های تنها در صفحه داشته باشد؟ در یک ناحیه کراندار چه؟ در یک مجموعه فشرده چه؟

۲ــ اگر $f(z)$ تابع مفروضی باشد، آیا عدد حقیقی M موجود است که هیچ قطب $f(z)$ مرتبه‌یی بزرگتر از M نداشته باشد؟

۳ــ آیا می‌شود تابعی در یک دنباله نقاط از پیش معلوم دارای قطب باشد؟

۴ــ آیا می‌شود تابعی در یک دنباله نقاط از پیش معلوم دارای تکینه‌های اساسی باشد.

۵ــ آیا می‌شود که یک تابع تام مقدار $2i - 7$ را نه پذیرد و هر مقدار دیگری را به دفعات نامتناهی به‌پذیرد؟

۶ــ چرا دو نقطه 0 و ∞ این‌چنین با دیگر نقاط، اغلب متفاوتند؟

۷ــ چه تابعی در صفحه گسترش یافته تکینه ندارد؟

۸ــ چگونه، تکینه‌های $f(z)$ را با تکینه‌های $1/f(z)$ مقایسه می‌کنید؟ چگونه با تکینه‌های $f(1/z)$؟ و چگونه با تکینه‌های $1/f(1/z)$؟

۹ــ آیا می‌شود که قطب یک تکینه غیرتنها باشد؟

۱۰ــ چگونه قضیه بزرگ پیکار را با قضیه پیکار در بخش ۸ــ۲ مقایسه می‌کنید؟

تمرینها

۱ــ فرض کنید $f(z)$ در $z = z_0$ تکینه تنها دارد و ∞ و $0 \neq M = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)^{\alpha} f(z)$. ثابت کنید α می‌بایست عدد صحیح باشد.

۲ــ اگر $f(z)$ در همسایگی سوده مبداء تحلیلی و $\lim_{z\to 0}|zf(z)| = 0$. نشان دهید که مبداء تکینه برادشتنی $f(z)$ است.

۳ـ نشان دهید که $\tan z$ مقادیر$\pm i$ را نمی‌پذیرد. آیا این با قضیه پیکار متناقض است؟

۴ـ همه تکینه‌های توابع زیر را بیابید و ماهیت آنها را توصیف کنید.

الف) $\tan z$ ب) $\dfrac{1}{e^{1/z}+1}$

پ) $\dfrac{1}{\sin z-\cos z}$ ت) $e^{z+1/z}$

ث) $\dfrac{(z-1)^{1/2}}{z+1}$

۵ـ در توابع زیر، تکینه را در$z=\infty$توصیف نمائید.

الف) $\dfrac{2z^2+1}{3z^2-10}$ ب) $\dfrac{z^2}{z+1}$

پ) $\dfrac{z^2+10}{e^z}$ ت) $\dfrac{e^z}{z^2+10}$

ث) $\tan z-z$ ج) $\dfrac{1}{z}+\sin z$

۶ـ اعداد مختلط و متمایز z_0 ، z_1 و z_2 مفروض‌اند. تابع $f(z)$ را طوری‌بسازید که در$z=z_0$ تکینه‌برداشتنی، در$z=z_1$ یک قطب مرتبه k و در$z=z_2$ تکینه اساسی‌داشته باشد.

۷ـ نشان دهید که $f(z)$ تکینه‌هایی به غیر از قطب در صفحه گسترش یافته ندارد اگر و فقط اگر $f(z)$ تابع کسری (خارج قسمت دو چند جمله‌یی) باشد.

۸ـ اگر $f(z)$ در دنباله نقاط $\{z_n\}$ قطب داشته باشد و $z_n\to z_0$ ، نشان دهید که $f(z)$ در$z=z_0$ قطب ندارد.

۹ـ فرض کنید $f(z)$ در$z=z_0$ قطبی از مرتبه m دارد و $P(z)$ یک چند جمله‌یی‌از درجه n است، نشان دهید، $P(f(z))$ در $z=z_0$ دارای مرتبه mn است.

۹ـ۲. رشته لران

می‌دانیم تابع $f(z)$ ی که در z_0 تحلیلی است. در یک همسایگی z_0 دارای‌نمایش رشته توانی$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ میباشد. به موجب فرع قضیه ۹ـ۲، اگر $f(z)$ در $z=z_0$ قطب مرتبه k داشته باشد، آنگاه یک‌نمایش رشته‌یی$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$، $a_{-k}\neq 0$ موجود است‌که در یک همسایگی سوده z_0 برقرار می‌باشد.

در این بخش سرشت عبارتی به شکل زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

در ایـــــن مرحله ملاحظه می‌شود که رشته $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z-z_0)^n$ را می‌توان به عنوان یک رشته توانی از متغیر $1/(z-z_0)$ در نظر گرفت. اگر R شعاع همگرایی آن باشد، آنگاه این رشته برای $1/|z-z_0| < R$ یعنی که برای $|z-z_0| > R_1 = 1/R$ همگرای مطلق است. پس رشته $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$ در خارج دایره $|z| = R_1$ نمایش یک تابع تحلیلـــی، $f_1(z)$ می‌باشد. هم چنین فرض کنیم که رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ به شعاع همگرایـــی R_2 باشد. دراین‌صورت $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ برای $|z-z_0| < R_2$ تحلیلی‌است. اگر $R_2 > R_1$، آنگاه $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هردودر طوق $R_1 < |z-z_0| < R_2$ تحلیلی هستند پس تابع

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

برای همه z ها در طوق $R_1 < |z-z_0| < R_2$ تحلیلی‌است. باقراردادن $a_{-n} = b_n$ داریم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \qquad (۸)$$

عبـــــارتی به شکل (۸) رشته لران[1] نام دارد. نشان خواهیم داد که هر تابع تحلیلی درون یک طوق یک‌نمایش رشته لران دارد.

قضیه۹ــ۴ (قضیه‌لران). فرض کنیم $f(z)$ در طوق $R_1 < |z-z_0| < R_2$ تحلیلی‌است. تساوی $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ درسراسرطوق‌برقراراست و بعلاوه ضرایب بصورت‌زیراند:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

که C هر خم بسته‌یی درون طوق، کـــــه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت‌دریک دور کامل حول z_0 چرخیده باشد، می‌باشد.

اثبات ــ z را نقطه‌یی در طوق می‌گیریم و R_1' و R_2' را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$R_1 < R_1' < |z-z_0| < R_2' < R_2 .$$

دراین صورت $f(z)$ در طوق بسته‌یی تحلیلی است که مرزش عبارت است از:

$$C_1 : |z-z_0| = R_1' \quad \text{و} \quad C_2 : |z-z_0| = R_2'$$

---

1. Laurent

(ر. ک. شکل۲) به‌موجب فرمول انتگرال‌کوشی

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz. \qquad (۹)$$

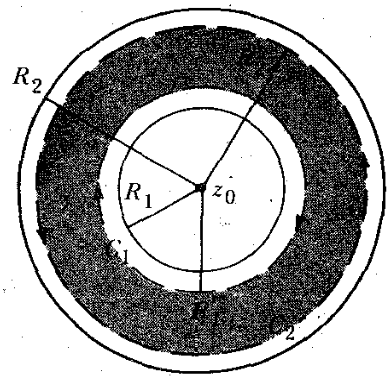
اولین انتگرال را در (۹) در نظر می‌گیریم . برای ζ بر C_2 و z در طوق داریم :

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{(\zeta-z_0)[1-(z-z_0)/(\zeta-z_0)]}$$

$$=\frac{1}{(\zeta-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

و همگرایی بر C_2 یکنواخت است . پس بنا به فرع قضیه ۸ــ۴ ، می‌توان در $f(\zeta)/2\pi i$ ضرب کرد و جمله به جمله انتگرال گرفت ،

شکل ۲



با این کار می‌رسیم به

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,d\zeta\right) \qquad (۱۰)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

که

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

ملاحظه کنید که در حالت عمومی a_n برابر $f^{(n)}(z_0)/n!$ نیست زیرا که $f(z)$ ممکن است درتمام نقاط درون C_2 تحلیلی نباشد .

سپس دومین انتگرال در (۹) را در نظر می‌گیریم . برای ζ بر C_1

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0)[1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0)]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}\, d\zeta\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^m\, d\zeta\right) \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}. \qquad (۱۱)$$

اگر قرار دهیم $n = m + 1$، (۱۱) تبدیل می‌گردد

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \qquad (۱۲)$$

که

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

جایگزین نمودن (۱۰) و (۱۲) در (۹) بدست می‌دهد که

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad (۱۳)$$

که

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = -1, -2, \ldots).$$

اینک مرز ساده بسته‌یی درون طوق در نظر می‌گیریم که یک دورکامل حول نقطه z_0 درخلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت گردیده است . چونکه $f(\zeta)/(\zeta - z_0)$ درناحیه محدود به مرزهای بسته C_1 و C (C_2, C) تحلیلی است ، فرمول انتگرال کوشی موجب می‌گردد که بتوان ضرایب را با جایگزینی C_1 و C_2 با C محاسبه نمود . بنابراین

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots). \qquad (۱۴)$$

در پایان ، چونکه R_1' و R_2' را می‌توان به دلخواه به ترتیب نزدیک به R_1 و R_2 انتخاب‌نمود ، عبارت (۱۳) (که a_n ، به صورت (۱۴) تعریف شود) برای همه z های‌درون طوق $R_1 < |z - z_0| < R_2$ برقرار است .

تذکر ۱ــ ملاحظه می‌گردد که رشتهٔ با توانهای مثبت $z-z_0$ درون دایره $|z-z_0|=R_2$ همگراست ، در حالی که رشتهٔ باتوانهای منفی $z-z_0$ همه‌جا در خارج دایره $|z-z_0|=R_1$ همگراست رشتهٔ با توانهای منفی $z-z_0$ به قسمت اصلي بسط لران موسوم است . در حالیکه رشتهٔ با توانهای مثبت به قسمت تحلیلي موسوم است .

تذکر ۲ـ درحالت‌خاصی که $R_1=0$ ، نقطه z_0 تکینه تنهای $f(z)$ است . قسمت‌اصلی در بسط لران صفر می‌گردد اگر و تنها اگر تکینه در z_0 برداشتنی باشد . قسمت اصلی دارای‌تعداد جملات‌متناهی است‌اگر و تنها اگر تکینه در z_0 قطب باشد . پس با یک فرایند حذفی‌ثابت‌می‌شودکه‌قسمت اصلی دارای تعداد جملات نامتناهی است اگر و تنها اگرتکینه در z_0 یک تکینهٔ اساسی باشد .

تذکر ۳ــ بسط لران ، مانند بسط رشته توانی برای‌توابع تحلیلی ، منحصرفرداست . فرض‌کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \qquad (R_1<|z-z_0|<R_2). \end{aligned}$$

دراین‌صورت هر رشته بر دایره C درون طوق و حول z_0 همگرای یکنواخت است . با ضرب کردن در $(z-z_0)^k$ ، برای هر عدد صحیح k ، و سپس انتگرال‌یابی درامتداد C حاصل می‌شود .

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^{n+k}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_C (z-z_0)^{n+k}\,dz. \qquad (۱۵)$$

چون که

$$\int_C (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & m=-1, \\ 0, & m\neq -1, \end{cases}$$

از (۱۵) نتیجه می‌شود

$$2\pi i a_{-k-1} = 2\pi i b_{-k-1} .$$

بنابراین برای هر عدد صحیح k ، $a_k=b_k$

تذکر ۴ــ ضرایب‌یک‌رشته لران را معمولا " از شکل انتگرالی (۱۴) نمی‌یابند . درواقع بامشخص‌نمودن‌ضرایب a_n از روشهای دیگر ، آنگاه قادرخواهیم بود که بدینوسیله‌انتگرال

(۱۴) را محاسبه کنیم . ضریب a_{-1} نقش خاصی دارد ، زیرا ما را قادر می‌کند ، مقدار $\int_C f(\zeta)\, d\zeta$ را محاسبه کنیم .

اینک مثالهایی ارائه می‌دهیم‌که روشهای متفاوت محاسبه ضریب یک رشته توانـی را نشان می‌دهند .

مثال ۱ــ برای یافتن بسط لران تابع

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2} \qquad (|z|>0),$$

$\sin z$ را در یک رشته ماک لورن بسط می‌دهیم . با اینکار می‌رسیم به

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots.$$

پس $f(z)$ در مبداء قطب ساده دارد

مثال ۲ــ تابع $f(z)=e^{1/z}$ برای $|z|>0$ تحلیلی است و در $z=0$ تکینه اساسـی دارد . از همانندی $e^u=1+u+u^2/2!+u^3/3!+\cdots$ بدست می‌آید

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots \qquad (|z|>0).$$

مثال ۳ــ تابع

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

در $z=\pm i$ قطب ساده دارد. ابتداء این تابع را به رشته لرانی که برای همسایگـی سوده $z=i$ برقرار باشد بسط می‌دهیم . با قرار دادن

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i+(z-i)},$$

همانندی

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i[1+(z-i)/2i]}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

برای $0<|(z-i)/2i|=|z-i|/2<1$ برقرار است . پس

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^{n}(z-i)^{n}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^{n+2}(z-i)^{n}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+2}(z-i)^{n}$$

$$(0<|z-i|<2).$$

بطــــــریق مشابه، تابع را به رشته لرانی که برای همسایگی سوده $z=-i$ مقبول باشد بسط می‌دهیم، با قرار دادن

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{-2i+(z+i)}$$

و با به کار بردن همانندی

$$\frac{1}{z-i}=-\frac{1}{2i[1-(z+i)/2i]}=-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^{n},$$

که برای $0<|z+i|<2$ مقبول است. پس

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=-\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+2}(z+i)^{n}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{-i}{2}\right)^{n+2}(z+i)^{n}$$

$$(0<|z+i)<2).$$

مثال ۴ـ تابع $f(z)=1/(z-1)(z-2)$ در $z=1$ و $z=2$ قطب‌های ساده دارد. همانند مثال قبل این تابع را به رشته لرانی که برای همسایگی‌های سوده $z=1$ و یا $z=2$ برقرار باشد بسط می‌دهیم. این‌کار می‌رسد به

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{(z-1)[1-(z-1)]}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^{n}\qquad(0<|z-1|<1)$$

و

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-1)}=\frac{1}{(z-2)[1+(z-2)]}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n$$

$$(0 < |z-2| < 1).$$

ولی می‌توانیم $f(z)$ را به رشته لرانی بسط دهیم که درناحیه‌های دیگری مقبول باشند.

الف) فرض کنیم $1 < |z| < 2$ در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-z/2)} - \frac{1}{z(1-1/z)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

در اینجا از این نکته استفاده کردیم‌که $|z/2| < 1$ و $|1/z| < 1$ پس

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n .$$

ب) فرض کنیم $|z| < 1$. در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-z/2)} + \frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n,$$

که بسط رشته ماکلورن برای $f(z)$ است.

پ) فرض کنیم $|z| > 2$. در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z(1-1/z)}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

هنگام بسط به رشته لران حول یک تکینه تنها، گاهی اوقات تنها قسمت اصلی آن موردتوجه ماست. اگر $f(z)$ در $z = z_0$ قطب ساده داشته باشد، آنگاه مشخص‌نمودن‌قسمت اصلی، از سادگی خاصی برخوردار است. زیرا در این حالت $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)$ می‌بایست موجود باشد. می‌توان قرار داد که

$$(z-z_0)f(z)=A+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \qquad (A\neq 0).$$

که در این صورت ملاحظه می‌شود ، قسمت اصلی برابر است با $A/(z-z_0)$.

مثال ۵ـ برای‌تابع $f(z)=z/(z^2+4)$ ، قسمت اصلی بسط لران را که‌درهمسایگی سوده $z=2i$ مقبول باشد محاسبه می‌کنیم .

چون که

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)z}{(z+2i)(z-2i)}=\frac{1}{2},$$

پس $f(z)$ در$z=2i$ قطب ساده‌دارد‌وقسمت‌اصلی‌آن‌برابراست بــــــا $\frac{1}{2}[1/(z-2i)]$. $f(z)=\frac{1}{2}[1/(z-2i)]+g(z)$ که $g(z)$ در $z=2i$ تحلیلی است .

مثال ۶ـ برای‌تابع $f(z)=1/(z^4+1)$ ،قسمت‌اصلی‌بسط لرانی‌را که در همسایگی سوده $z=e^{\pi i/4}$ متعبر است بیابید .

همانند مثال قبل ، حد مقدار زیر را با تجزیه مخرج کسر می‌توان یافت .

$$\lim_{z\to e^{\pi i/4}}\frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1}$$

ولـــــــی برای اجتناب از عملیات سنگین تجزیه می‌توان به قضیه ۵ـ۷ ارجاع کرده‌و این کار منجر به محاسبه زیر شود

$$\lim_{z\to e^{\pi i/4}}\frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1}=\frac{1}{4(e^{\pi i/4})^3}=\frac{-(1+i)\sqrt{2}}{8}.$$

پس

$$f(z)=\frac{-(1+i)\sqrt{2}}{8(z-e^{\pi i/4})}+g(z),$$

که $g(z)$ در $z=e^{\pi i/4}$ تحلیلی است .

مثال ۷ـ همه تکینه‌های تابع $f(z)=\cot\pi z$ را می‌یابیم و قسمت‌های اصلی بسط لران‌راحول‌هرتکینه مشخص می‌کنیم .

چون‌که $\sin\pi z$ در $z=n$ (n عددصحیح) صفرهای ســـاده دارد ، تابـــــع $f(z)=\cos\pi z/\sin\pi z$ در$z=n$ قطب‌های ساده خواهد داشت ، در یـــــــــک همسایگی‌سوده$z=n$ داریم $f(z)=A/(z-n)+g(z)$ که $g(z)$ در $z=n$ تحلیلی‌است .

تنها باقی است که A مشخص گردد . از همانندی

$$\sin \pi z = (-1)^n \sin \pi(z-n),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$A = \lim_{z\to n} (z-n)f(z) = \lim_{z\to n} \frac{z-n}{\sin \pi(z-n)} \frac{\cos \pi z}{(-1)^n}$$

$$= \lim_{z\to n} \frac{z-n}{\sin \pi(z-n)}.$$

چونکه با $t \to 0$ داریم

$$\frac{t}{\sin \alpha t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha t}{\sin \alpha t} \to \frac{1}{\alpha}$$

نتیجه می‌شود $A = 1/\pi$ و قسمت اصلی $f(z)$ در $z = n\pi$ برابر است با $1/\pi(z-n)$.

تقسیم به‌رشته‌های توانی ، روش دیگری است برای مشخص نمودن قسمت اصلی .فرض کنیم :

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots}{b_0 + b_1 z + \cdots} \qquad (b_0 \neq 0).$$

در این صورت $f(z)$ در $z=0$ تحلیلی است و می‌توان آن را به صورت رشته‌یی به شکل زیر بسط داد .

$$\frac{a_0 + a_1 z + \cdots}{b_0 + b_1 z + \cdots} = c_0 + c_1 z + \cdots.$$

با بکار بردن ضرب رشته‌ها ، که قبلا" بحث شد ، داریم :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + \cdots &= (b_0 + b_1 z + \cdots)(c_0 + c_1 z + \cdots) \\ &= b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0) z + \cdots. \end{aligned}$$

و اینک می‌توان c_k را به روش بازگشتی از معادلات زیر یافت :

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &\vdots \\ a_n &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0. \end{aligned}$$

تذکر ــ این روش را می‌توان به صورت "تقسیم دراز" تصور کرد . بدین معنی که

$$
\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{a_0}{b_0}+\cdots \\ \hline
b_0+b_1z+\cdots & a_0+a_1z \quad +\cdots \\
 & a_0+\dfrac{a_0b_1}{b_0}z+\cdots \\ \hline
\end{array}
$$

ما از این روش در مثال ۸ استفاده خواهیم کرد.

مثال ۸ــ قسمت اصلی $f(z)=(\pi\cot\pi z)/z^4$ که در یک همسایگی مبداء مقبول باشد می‌یابیم. داریم

$$
\frac{\pi\cot\pi z}{z^4}=\frac{\pi\cos\pi z}{z^4\sin\pi z}=\frac{\pi}{\pi z^5}\,\frac{1-(\pi z)^2/2!+(\pi z)^4/4!-\cdots}{1-(\pi z)^2/3!+(\pi z)^4/5!-\cdots}
$$
$$
=\frac{1}{z^5}\left(1+\frac{\pi^2}{3}z^2-\frac{\pi^4}{45}z^4+\cdots\right).
$$

پس قسمت اصلی $f(z)$ عبارتست از:

$$
\frac{1}{z^5}+\frac{\pi^2}{3z^3}-\frac{\pi^4}{45z}.
$$

پرسش‌ها

۱ــ چه شباهاتی میان رشته‌های توانی و رشته‌های لران موجود است؟

۲ــ اگر رشته لران برای $f(z)$ بر مرز یک طوق همگرا باشد، آیا $f(z)$ بر مرز تحلیلی است؟

۳ــ یک رشته لران در کجا همگرای یکنواخت است؟

۴ــ آیا می‌شود که یک تابع تنها بر یک نوار مستطیلی تحلیلی باشد؟

۵ــ آیا می‌شود که $f(z)$ و $f(1/z)$ همزمان بر یک مجموعه از نقاط تحلیلی باشند.

۶ــ اگر $f(z)$ در z_0 قطب مرتبه k داشته باشد، قسمت اصلی بسط لران حداکثر و حداقل چند جمله می‌تواند داشته باشد؟

۷ــ در مورد حاصلجمع دو رشته لران چه می‌توان گفت؟ در مورد حاصلضرب چه؟

۸ــ اگر $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$، درتحت چه شرایطی
$f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$

تمرینها

۱ــ تابع $1/(z+1)(z^2+2)$ را در رشته‌های لران مقبول در هر یک از نواحی زیر

بسط دهید .

الف) $1 < |z| < \sqrt{2}$ ب) $|z| > \sqrt{2}$ پ) $|z| < 1$

(راهنمایی : از کسرهای جزیی استفاده کنید) .

۲ـ تابع $e^{z^2} + e^{1/z^2}$ را برای $0 < |z|$ در رشته لران بسط دهید .

۳ـ برای $0 < |a| < |b|$ تابع $1/(z-a)(z-b)$ را دررشته‌لران مقبول درناحیه‌های زیر بسط دهید .

الف) $|z| < |a|$ ب) $|a| < |z| < |b|$

پ) $|z| > |b|$ ت) $0 < |z-a| < |a-b|$

ث) $0 < |z-b| < |a-b|$

۴ـ قسمت اصلی را در رشته‌های لران زیر بیابید .

الف) $\dfrac{z^2}{z^4-1}$ $(0 < |z-i| < \sqrt{2})$

ب) $\dfrac{z^2}{z^4-1}$ $(0 < |z+i| < \sqrt{2})$

پ) $\dfrac{e^z}{z^4}$ $(|z| > 0)$

ت) $\dfrac{\sin z}{z^4}$ $(|z| > 0)$

ث) $\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}$ $(0 < |z-1| < 1)$

۵ـ توابع زیر را به رشته لران ، که در ناحیه داده شده معتبر باشد بسط دهید .

الف) $z^n e^{1/z}$ $(|z| > 0)$ ب) $e^{1/(z-1)}$ $(|z| > 1)$

۶ـ تابع $\sin z \sin (1/z)$ را برای $0 < |z|$ به رشته لران بسط دهید .

۷ـ با بکار بردن تقسیم رشته‌ها برای‌تابع $e^z/(1-\cos z)^2$ ، قسمت اصلی‌را دریک همسایگی مبداء بیابید .

۸ـ فرض کنید $f(z)$ در قرص $|z| < R$ $(R > 1)$ تحلیلی است مگر در نقطه z_0 که قطب‌ساده‌است‌و $|z_0| = 1$. بادرنظرگرفتن بسـط $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$، نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}(a_n/a_{n+1}) = z_0$.

(راهنمایی : قرار دهید $f(z) = A/(1-z/z_0) + F(z)$ که A عدد ثابت و $F(z)$ در $|z| < R$ تحلیلی است) .

۹ـ در یک همسایگی مبداء ، مشخصه‌های گوناگون $(1+z)^{1/z}$ را در نظر بگیرید .

الف) نشان‌دهید که یکی از آنها در $|z| < 1$ تحلیلی است وآنرا با $f_0(z)$ نمایش

دهید (راهنمایی: قرار دهید $(1+z)^{1/z} = e^{(1/z)\log(1+z)} = e^{(1/z)[\mathrm{Log}(1+z)+2k\pi i]}$).

ب) در بسط $f_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ مقادیر a_0 و a_1 و a_2 را مشخص کنید.

پ) فرض کنید $f(z)$ یکی از مشخصه‌های $(1+z)^{1/z}$ به غیر از $f_0(z)$ باشد. ماهیت $g(z) = f(z)/f_0(z)$ را بیابید و بسط لران آنرا برای $0 < |z|$ پیدا کنید.

۹-۳. محاسبه انتگرالهای حقیقی

اگر $f(z)$ دریک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد، آنگاه بموجب قضیه لران می‌توان نوشت $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ بعلاوه

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz, \tag{۱۶}$$

که C بــــر مرزساده‌بسته‌یی است که z_0 را احاطه کرده و در این همسایگی باشد. ضریب a_{-1} به مانده $f(z)$ در z_0 موسوم است. معادله (۱۶) مبین آن است که محاسبه یک انتگرال مشخص، معادل است با معلوم نمودن یک ضریب مشخص در رشته لران. در سه مثالی که به دنبال خواهد آمد، C مرز ساده بسته‌یی است که مبداء را احاطه کرده است.

مثال ۱- مقدار $\int_C e^{1/z}\,dz$ را محاسبه می‌کنیم.

چونکه مانده تابع $e^{1/z} = 1/z + 1/2!\,z^2 + \cdots$ در $z=0$ برابر است با 1، داریم:

$$\int_C e^{1/z}\,dz = 2\pi i.$$

مثال ۲- مقدار $\int_C \sin(1/z^2)\,dz$ را محاسبه می‌کنیم.

در یک همسایگی سوده مبداء

$$\sin\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^5 + \cdots$$

پس

$$\int_C \sin\frac{1}{z^2}\,dz = 0.$$

مثال ۳- مقدار $\int_C z^2 \sin(1/z)\,dz$ را محاسبه می‌کنیم

برای $z \neq 0$ داریم.

$$z^2\sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} + \cdots\right) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} + \cdots.$$

پس مانده در $z=0$ برابر است با $-\frac{1}{6}$ و

$$\int_C z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

بدون استفاده از (۱۶) نمی‌توانستیم این سه انتگرال را محاسبه کنیم و اینک تعمیم زیر از (۱۶) را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۹ــ۵ (قضیه مانده). فرض کنیم $f(z)$ در درون و بر روی مرز ساده بسته C مگر در تکینه‌های تنهای z_1 و ...، و z_n در درون C، تحلیلی است. گیریم مانده‌ها در نقاط z_1 و ... و z_n به ترتیب برابر α_1 و ... و α_n باشد، در این صورت

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

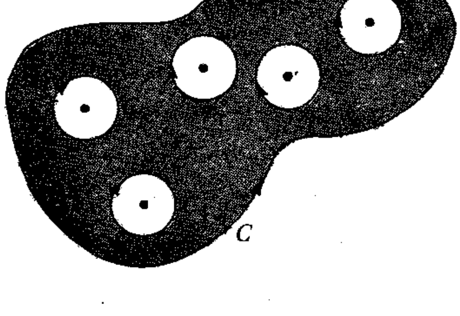
اثبات ــ حول هر تکینه z_i، دایره C_i را درون C رسم می‌کنیم بطوری که هر وقت $i \neq j$، $C_i \cap C_j = 0$ (ر.ک. شکل۳). بنا به فرمول انتگرال کوشی

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\, dz,$$

که انتگرال‌گیری بر مرزهای درونی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. با قرار دادن $C=C_i$ در (۱۶)، می‌بینیم که برای هر i،

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} f(z)\, dz = \alpha_i$$

و قضیه ثابت است.



مثال ــ مقدار

$$\int_C \frac{dz}{z(z-3)}$$

را بر مرزهای ساده بسته C گوناگون محاسبه می‌کنیم.

تابع $f(z)=1/z(z-3)$ در $z=0$ و $z=3$ قطب ساده دارد. مانده $f(z)$ در $z=0$ برابرست با

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3},$$

و مانده در $z=3$ عبارتست از

$$\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to 3}\frac{1}{z}=\frac{1}{3}.$$

پس اگر $z=0$ درون C و $z=3$ بیرون C باشد آنگاه

$$\int_C\frac{1}{z(z-3)}\,dz=2\pi i\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\pi i}{3}.$$

اگر $z=0$ بیرون C و $z=3$ درون C باشد آنگاه

$$\int_C\frac{1}{z(z-3)}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi i}{3}.$$

اگر $z=0$ درون C و $z=3$ هم درون C باشد آنگاه

$$\int_C\frac{1}{z(z-3)}\,dz=2\pi i\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=0.$$

تذکر ــ مثال قبل را می‌توانستیم با استفاده از فرمول انتگرال‌کوشی به عوض قضیه مانده محاسبه کنیم. چون که

$$\frac{1}{z(z-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z}\right),$$

داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z(z-3)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{3(z-3)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{3z}\,dz,$$

که از آن نتیجه مطلوب عاید می‌گردد. در واقع فرمول انتگرال کوشی حالت خاص قضیه مانده است. فرض‌کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته‌یی که شامل z_0 است، تحلیلی باشد. در این صورت $g(z)=f(z)/(z-z_0)$، بشرطی که $f(z_0)\neq 0$، در z_0 قطب ساده دارد. مانده $g(z)$ در z_0 برابرست با $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)=f(z_0)$. پس

$$\int_C g(z)\,dz=\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i f(z_0).$$

فرض‌کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ قطب‌مرتبه k داشته‌باشد. برای یافتن‌مانده a_{-1} برحسب

$f(z)$ می‌نویسیم

$$(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+g(z)(z-z_0)^k, \tag{۱۷}$$

که در آن $g(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است. با $k-1$ بار مشتق‌یابی از (۱۷) در نقطه $z=z_0$، بدست می‌آید که

$$a_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-z_0)^k f(z). \tag{۱۸}$$

برای این که کاربرد (۱۸) را مشاهده کنیم، مقدار

$$\int_C \frac{z^4-z^3-17z+2}{(z-1)^3}\,dz$$

را بر خم ساده بسته‌ای که $z=1$ درون آن باشد، محاسبه می‌کنیم.

روش ۱ــ در (۱۸) قرار می‌دهیم $f(z)=(z^4-z^3-17z+2)/(z-1)^3$، $z_0=1$، $k=3$. در این صورت

$$a_{-1}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^3 f(z)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z^4-z^3-17z+2)=3.$$

پس

$$\int_C \frac{z^4-z^3-17z+2}{(z-1)^3}\,dz=2\pi i a_{-1}=6\pi i.$$

روش ۲ــ با قرار دادن $g(z)=z^4-z^3-17z+2$، از فرمول انتگرال کوشی بدست می‌آید:

$$g''(1)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{(z-1)^3}\,dz=6,$$

و نتیجه مطلوب حاصل است.

اینک که چندین روش برای مشخص نمودن مانده‌ها آموخته‌ایم به یک کاربرد عمده آن می‌پردازیم و این کاربرد عبارت‌از محاسبه انتگرالهای‌حقیقی با استفاده از انتگرال‌گیری یک تابع مختلط در طول یک مرز بسته است. روش معمول متضمن تابع تحلیلی است که مقدارش بر محور حقیقی، حقیقی باشد. در این صورت یک فاصله حقیقی‌از جمله‌خم‌هایی

است‌که‌مابه عنوان مرز بر روی آن انتگرال‌یابی می‌کنیم . یادآور می‌شویم که انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ بنابه تعریف برابر است با $\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ ، در صورتی که این حد موجود باشد .

مثال ۱ــ با انتگرال‌گیری ، نشان می‌دهیم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\pi.$$

تابع مختلط $f(z)=1/(z^2+1)$ در $z=\pm i$ تکینه دارد . گیریم مرز C عبارت‌باشد از محور حقیقی از $-R$ تا R $(R>1)$ و به دنبال آن نیم دایره‌یی در صفحه زبرین (ر .ک. شکل ۴) . در این صورت تنها تکینه $f(z)$ درون C نقطه $z=i$ می‌باشد و مانده آن برابر است با :

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\frac{1}{2i}.$$

پس

$$\int_C\frac{dz}{z^2+1}=2\pi i\,\frac{1}{2i}=\pi. \tag{۱۹}$$

هم چنین

$$\int_C\frac{dz}{z^2+1}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta. \tag{۲۰}$$

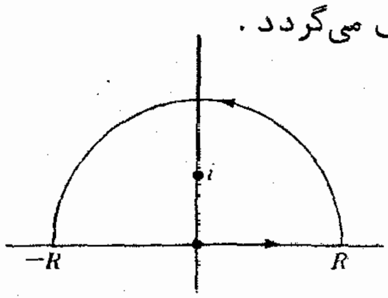
ملاحظه می‌شود که

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta\right|\le\int_0^{\pi}\frac{R}{R^2-1}\,d\theta=\frac{\pi R}{R^2-1}. \tag{۲۱}$$

با توجه به (۲۱) ، انتگرال طرف راست (۲۰) با $R\to\infty$ به 0 میل می‌کند ، پس

$$\lim_{R\to\infty}\int_C\frac{dz}{z^2+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1},$$

و نتیجه مطلوب از (۱۹) حاصل می‌گردد .



شکل ۴

تذکر ــ به هنگام محاسبه انتگرال حقیقی با استفاده از انتگرال‌یابی بر مرز، تابع مختلط مناسب و مرز مناسب می‌بایست انتخاب شود. در مثال ۱ انتخاب تابع مختلط آسان بود. ولی به زودی خواهیم دید، که این‌انتخاب همیشه آسان نیست. خواننده می‌تواند تحقیق کند که نتیجه مطلوب نیز با به کار بردن مرزی که عبارت باشد از محور حقیقی از $-R$ تا R و به‌دنبال آن نیمه دایره در صفحه زیرین، قابل‌حصول‌است.

لم ــ اگر $0<\theta\leq\pi/2$، آنگاه $(\sin\theta)/\theta\geq 2/\pi$

اثبات ــ چون که $f(\pi/2)=2/\pi$، پس‌کافی‌است، نشان‌دهیم‌که $f(\theta)=(\sin\theta)/\theta$ در فاصله $[0,\pi/2]$ تابعی است نزولی، که $f(0)=\lim_{\theta\to 0}f(\theta)=1$. بابکار بردن قضیه میانگین

$$f'(\theta)=\frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}=\frac{\cos\theta-(\sin\theta)/\theta}{\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta-\cos\xi}{\theta}\qquad(0<\xi<\theta).$$

چون‌که‌کسینوس‌در فاصله $[0,\pi/2]$ تابعی است نزولی، $f'(\theta)<0$، نتیجه مطلوب حاصل است.

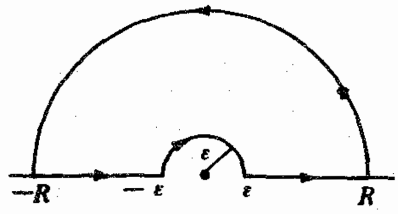
مثال ۲ــ نشان می‌دهیم که:

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

اولین چیزی که در ذهن ما خطور می‌کند این است که از $(\sin z)/z$ بر همان مرز مثال قبل انتگرال بگیریم. ولی این‌کار به دو دلیل مفید نیست. اولا" $(\sin z)/z$ در $z=0$ تکینه دارد و ما معمولا" نمی‌توانیم بر مرزی که از یک نقطه تکینه می‌گذرد انتگرال بگیریم. ولی این تکینه برداشتنی و این اشکال قابل مرتفع شدن است. دلیل‌دوم و دلیل عمده این که انتگرال $(\sin z)/z$ با میل کردن شعاع به بی‌نهایت، به یک حد متناهی میل نمی‌کند.

تابع e^{iz}/z را در نظر می‌گیریم‌که قسمت انگاری آن بر محور حقیقی برابر است با $(\sin x)/x$. مرز C عبارت است از محور حقیقی از ε تا R،نیم دایره‌درنیم صفحه‌زبرین از R تا $-R$، محورحقیقی $-R$ تا $-\varepsilon$ و نیمدایره در صفحه زبرین از $-\varepsilon$ تا ε (ر.ک. شکل ۵).

شکل ۵



تابع e^{iz}/z درون و بر روی C تحلیلی است ، بنابراین

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

هم چنین

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta.$$

با قرار دادن $-x$ بعوض x در انتگرال سومی و ترکیب آن با انتگرال اولی ، داریم :

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + i\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}\,d\theta - i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta = 0.$$

با استفاده از همانندی

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x,$$

حاصل می‌شود

$$2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx + i\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta. \qquad (۲۲)$$

اینک رفتار انتگرال دوم را بر طرف چپ (۲۲) بررسی می‌کنیم . از همانندی $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ و لم فوق نتیجه می‌شود که :

$$\left| i\int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}}\,d\theta \right| \le \int_0^\pi \left| e^{iRe^{i\theta}} \right| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-(2R/\pi)\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}),$$

که با میل R به ∞ به 0 می‌گراید . پس با $R \to \infty$ در (۲۲) منجر می‌شود به :

$$2\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\, d\theta. \qquad (۲۳)$$

به ازاء $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ، $e^{i\varepsilon e^{i\theta}}$ را در یک رشته توانی بسط می‌دهیم تا نشان دهیم :

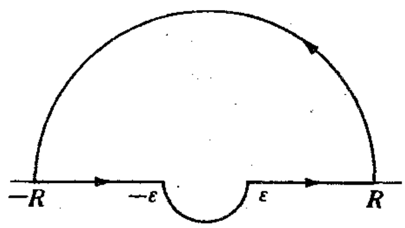
$$|e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1| < 2\varepsilon$$

برای هر θ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ برقراراست . با $\varepsilon \to 0$ در (۲۳) ملاحظه می‌شود که :

$$\int_{0}^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\, d\theta = \int_{0}^{\pi} (e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1)\, d\theta + \int_{0}^{\pi} d\theta$$

به π میل می‌کند و نتیجه مطلوب حاصل است . بر خواننده است ، تحقیق کند که ممکن بود مرز شکل ۶ را نیز بکار برده و نتیجه مطلوب را ثابت کرد .

شکل ۶



انتگرال بعدی را با روشهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه می‌کنیم .این انتگرال به هنگام محاسبه انتگرالهای حقیقی گوناگونی به روش انتگرال‌یابی مرزی مورد استفاده قرار خواهد گرفت .

لم ـ $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2.$

اثبات ـ قرار می‌دهیم $I = \int_0^R e^{-x^2}\, dx$. در این صورت

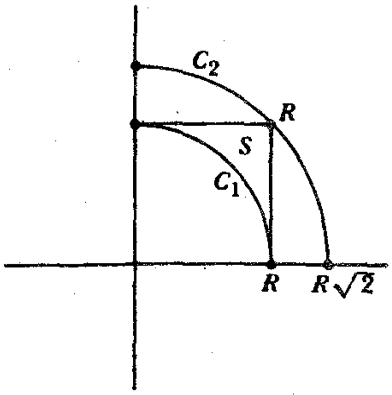
$$I^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\, dy\right) = \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

در اینجا انتگرال‌یابی بر مربع S است که در ربع اول قرار دارد و در ازای اضلاع برابر R می‌باشد . فرض‌کنیم C_1 و C_2 ربع دوایری در ربع اول بمرکز مبداء و به ترتیب با شعاعهای R و $R\sqrt{2}$ باشند (ر.ک. شکل ۷) . با محاسبه بر این دوایر در مختصات قطبی، داریم :

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r\, dr\, d\theta < \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$< \int_0^{\pi/2} \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta,$$

شکل ۷



و یا

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}).$$

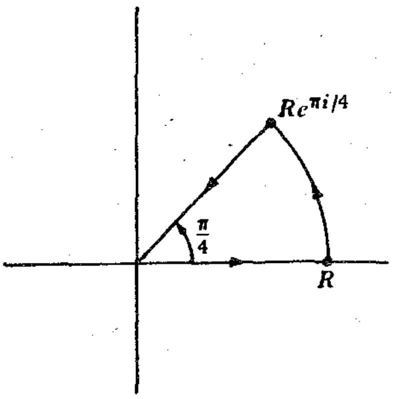
با $R\to\infty$ ، ملاحظه می‌کنیم

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

و نتیجه حاصل است .

مثال ۳ـ نشان دهید : $\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$
قابل توجه است که بهیچوجه همگرایی انتگرالهای فوق روشن نیست .
فرض کنیم C مرزی باشد مرکب از پاره خط از 0 تا R و به دنبال آن کمان از R تا $Re^{\pi i/4}$ و پاره خط از $Re^{\pi i/4}$ تا 0 (ر. ک. شکل ۸) . به موجب قضیه کوشی

شکل ۸



$$\int_C e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_0^{\pi} e^{iR^2e^{2i\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta + \int_R^0 e^{i(te^{\pi i/4})^2} e^{\pi i/4}\,dt = 0,$$

انتگرال آخری با رابطه $z = te^{\pi i/4}$ پارامتری شده است . پس

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_0^\pi e^{iR^2e^{2i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta = e^{\pi i/4}\int_0^R e^{-t^2}\,dt. \qquad (۲۴)$$

اینک نشان می‌دهیم که انتگرال دومی در طرف چپ (۲۴) هنگامیکه R به ∞ میل کند به 0 نزدیک می‌شود. باید توجه داشت که

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi e^{iR^2e^{2i\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta\right| &\le \int_0^\pi \left|e^{iR^2e^{2i\theta}}i\,Re^{i\theta}\right|\,d\theta\\ &= \int_0^\pi e^{-R^2\sin 2\theta}R\,d\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\theta}R\,d\theta \le \tfrac{1}{2}R\int_0^{\pi/2} e^{-(2R^2/\pi)\theta}\,d\theta\\ &= \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}). \qquad (۲۵)\end{aligned}$$

با توجه به (۲۵) چنانچه در (۲۴)، $R\to\infty$، حاصل می‌شود

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = e^{\pi i/4}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

و با بکار بردن لم حاصل می‌شود

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = e^{\pi i/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

و اینک نتیجه مطلوب با برابر گرفتن قسمتهای حقیقی و انگاری در دوطرف آن عاید می‌گردد.

مثال بعدی متضمن توابع مثلثاتی است. اگر z دایره واحد را به پیماید. آنگاه z را می‌توان با $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ پارامتری نمود. همانندیهای

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}$$

ما را قادر می‌سازند که انتگرالهای به شکل $\int_0^{2\pi} g(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$ را برحسب انتگرالهای مرزی محاسبه کنیم.

مثال ۴- برای a و b حقیقی، $a>|b|$، نشان می‌دهیم که

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

با قرار دادن $z=e^{i\theta}$. ملاحظه می‌شود که $dz=ie^{i\theta}\,d\theta=iz\,d\theta$ پس

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\int_C\frac{dz/iz}{a+(b/2)(z+1/z)}$$

$$=\frac{2}{bi}\int_C\frac{dz}{z^2+(2a/b)z+1}, \qquad (۲۶)$$

که C دایره واحد است. تابع

$$f(z)=\frac{1}{z^2+(2a/b)z+1}$$

در نقاط

$$z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad \text{و} \quad z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

قطب های ساده دارد و z_1 درون دایره و z_2 بیرون دایره است. مانده $f(z)$ در z_1 عبارتست از

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}.$$

پس بکار بردن قضیه مانده در (۲۶)، بدست می‌دهد که

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=2\pi i\,\frac{2}{bi}\,\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

آخرین مثال ما متضمن یک تابع چند مقداری است.

مثال ۵ـ برای $0<\lambda<1$، نشان می‌دهیم که

$$\int_0^\infty\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}.$$

انتگرال $f(z)=z^{\lambda-1}/(1+z)$ راکه $0<\arg z<2\pi$ بریک‌مرز مناسب‌محاسبه می‌کنیم. این تابع در $z=-1=e^{\pi i}$ قطب ساده دارد ومانده‌اش برابر است با:

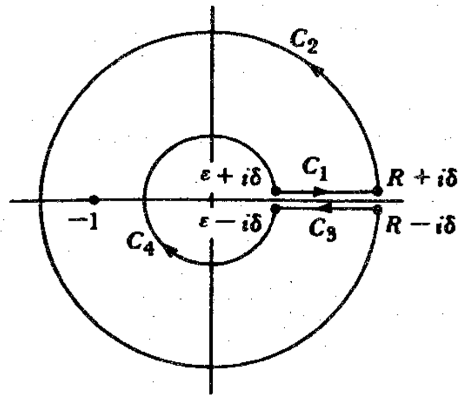
$$\lim_{z\to -1}(1+z)f(z)=e^{\pi i(\lambda-1)}.$$

هم چنین این تابع در مبداء نقطه شاخه دارد. چون که قضیه مانده در مورد توابع تک ـ مقداری درست است. مرز ساده بسته C که بر آن انتگرال می‌گیریم، مبداء نمی‌تواند

درون آن باشد .

گیریم C عبارت باشد از پاره خط C_1 از $\varepsilon+i\delta$ تا $R+i\delta$ ، دایره C_2 به مرکز مبداء از $R+i\delta$ تا $R-i\delta$ پیموده شده در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت ، پاره خط C_3 از $R-i\delta$ تا $\varepsilon-i\delta$ و دایره C_4 به‌مرکزمبداءاز $\varepsilon-i\delta$ تا $\varepsilon+i\delta$ پیموده‌شده در جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت (ر. ک. شکل ۹) .

شکل ۹



باید توجه داشت که محور حقیقی مثبت به عنوان بریدگی شاخه‌برای $f(z)$ انتخاب شده است . تنها تکینه $f(z)$ درون C ، $z=-1$ می‌باشد . پس به موجب قضیه مانده :

$$\int_C \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i e^{\pi i(\lambda-1)} = -2\pi i e^{\pi i\lambda}. \qquad (۲۷)$$

می‌نویسیم

$$\int_C \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz = \int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz + \int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz + \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz + \int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz. \qquad (۲۸)$$

مقدار انتگرال در (۲۷) وابسته به δ و R و ε نیست و تنها به این‌که $z=-1$ درون C است ، وابسته است . با این ترتیب روش ما برای حل مسئله این است که در (۲۸)، $\delta\to 0$ ، $R\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ میل دهیم تا بتوانیم عبارتی برای یک‌انتگرال حقیقی بیابیم که بتوان آنرا با (۲۷) معادل گرفت .

داریم

$$\int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{(x+i\delta)^{\lambda-1}}{1+(x+i\delta)}\,dx.$$

با $\eta>0$ مفروض، δ را بس کوچک انتخاب می‌کنیم تا

$$\left|\int_{C_1}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx\right|<\eta.$$

پس

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_1}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx. \qquad (۲۹)$$

هنگامیکه z یـــــــک‌دور کامل حول مبداء بگردد، شناسه آن به مقدار 2π افزایـش می‌یابد. پس انتگرال بر C_3 را می‌توان بصورت زیر پارامتری نمود:

$$\int_{C_3}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz=\int_{R}^{\varepsilon}\frac{(xe^{2\pi i}-\delta)^{\lambda-1}}{1+(xe^{2\pi i}-\delta)}dx.$$

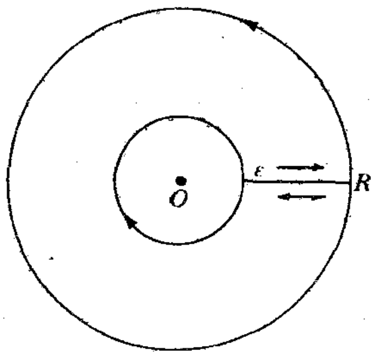
با $\eta>0$ مفروض، δ را بس‌کوچک انتخاب می‌کنیم تا

$$\left|\int_{C_3}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz-\int_{R}^{\varepsilon}\frac{(xe^{2\pi i})^{\lambda-1}}{1+x}\,dx\right|<\eta.$$

پس

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_3}\frac{x^{\lambda-1}}{1+z}dz=e^{2\pi i(\lambda-1)}\int_{R}^{\varepsilon}\frac{z^{\lambda-1}}{1+x}dx$$
$$=-e^{2\pi i\lambda}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx. \qquad (۳۰)$$

شکل ۱۰



بـــــــا توجه به مقداری که پس از محاسبه حد در (۲۹) به دست آمد. می‌توانیم تصـور کنیم‌که C_1 و C_2 بر محور حقیقی می‌افتند و C_1 بر نیمه‌زبرین بریدگی و C_3 برنیمه‌زیرین است (ر.ک. شکل ۱۰).

از جمع (۲۹) و (۳۰) به

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{C_1}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz+\int_{C_3}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz\right)=(1-e^{2\pi i\lambda})\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx. \qquad (۳۱)$$

می‌رسیم. برای دو انتگرال دیگر داریم:

$$\left|\int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{(Re^{i\theta})^{\lambda-1} iRe^{i\theta}}{1+Re^{i\theta}}\right| d\theta$$
$$\le \int_0^{2\pi} \frac{R^\lambda}{R-1} d\theta = \frac{2\pi R^\lambda}{R-1}$$

و

$$\left|\int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{\lambda-1} i\varepsilon e^{i\theta}}{1+\varepsilon e^{i\theta}} d\theta\right| \le \frac{2\pi\varepsilon^\lambda}{1-\varepsilon}.$$

چونکه $0<\lambda<1$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 0. \qquad (۳۲)$$

با $R\to\infty$ و $\varepsilon\to 0$ در (۳۱) ملاحظه می‌شود.

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left(\int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz\right) = (1-e^{2\pi i\lambda}) \int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx. \qquad (۳۳)$$

با توجه به (۳۲) و (۳۳) می‌توانیم در (۲۷) و (۲۸) حد بگیریم و بدست‌آوریم.

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{\pi\lambda i}}{e^{2\pi\lambda i}-1} = \frac{2i\pi}{e^{\pi\lambda i} - e^{-\pi\lambda i}} = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}.$$

تذکر ــ درهمانندی (۳۱) لازم است که ε و R ثابت باشند. برای آنکه دقیق‌تر عمل کرده‌باشیم، می‌بایست‌ابتداء R را بس بزرگ و ε را بس کوچک انتخاب کنیم تا قدرمطلق هر انتگرال در (۳۲) بس کوچک شود. برای این انتخاب ε و R ، آنگاه می‌توان (۳۱) را استنتاج نمود.

پرسش‌ها

۱ــ با اینکه $\int_C \sin(1/z^2)\, dz = 0$ بــر مــرز ساده بسته که مبداء درون آن باشد، ولی چرا $\sin(1/z^2)$ ــ تحلیلی نیست؟

۲ــ آیا قضیه مانده برای تکینه‌های غیرتنها درست است؟

۳ــ برای چه نوع توابعی می‌توان انتگرالهای مختلط را با استفاده از قضیه مانده و نه با استفاده از فرمول انتگرال کوشی محاسبه نمود؟

۴ــ در محاسبه انتگرالهای حقیقی با استفاده از انتگرال‌یابی مرزی، چه محک عمومی

برای‌انتخاب تابع مناسب و مرز مناسب در دست داریم ؟

۵ــ چرا قضیه مانده برای توابع چند مقداری برقرار نیست ؟

۶ــ چرا محاسبه انتگرالی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$$

از محاسبه انتگرالی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n+1}}\,dx$$

ساده‌تر است ؟

۷ــ آیا همانندی موجود در مثال ۵ را می‌توان تعمیم داد تا برای مقادیر مختلط λ هم برقرار باشد ؟

تمرینها

۱ــ در هر از تکینه‌های توابع زیر مانده را مشخص کنید .

الف) $\dfrac{1}{\cos z}$ ب) $\tan z$ پ) $\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

ت) $z^n \sin \dfrac{1}{z}$ ث) $z^n \cos \dfrac{1}{z}$

۲ــ نشان دهید با $R\to\infty$ ، $\int_{|z|=R} |(\sin z)/z|\,|dz| \to \infty$

۳ــ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\int_{|z|=1/2} (\sin z/1+z+z^2+\cdots+z^n)\,dz$ که n نزدیکترین عدد صحیح به سن خودتان باشد .

ب) $\int_{|z|=5/2} e^{z^2}\pi \cot \pi z\,dz$

۴ــ برای هر عدد صحیح n ، مقدارهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\int_{|z|=n} \tan \pi z\,dz$ ب) $\int_{|z|=n+1/2} \cot \pi z\,dz$

۵ــ با استفاده از انتگرال‌یابی مرزی ، نشان دهید :

الف) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.$ ب) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

پ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$ ت) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$

۶ــ نشان دهید :

الف) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$

ب) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+1}\,dx=\begin{cases}\pi e^{-a}, & a>0,\\ -\pi e^{a}, & a<0.\end{cases}$$

۷ـ گیریم C مستطیلی به رئوس 0 ، R ، $R+iy$ ، iy است. با در نظر گرفتن مقدار $\int_C e^{-z^2}\,dz$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx.$$

را محاسبه کنید. (راهنمایی: y را ثابت نگهداشته و $R\to\infty$)

۸ـ(الف) با انتگرال‌یابی $(e^{iz}-1)/z$ بر مرز شکل ۴ نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

ب) با انتگرال‌یابی $(1-e^{2iz})/z^2$ بر مرز شکل ۵ نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

پ) با انتگرال‌یابی $(1+2iz-e^{2iz})/z^2$ بر مرز شکل ۴ نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

۹ـ اگر $t\neq\pm 1$ حقیقی باشد، نشان دهید:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}=\frac{2\pi}{|t^2-1|}.$$

۱۰ـ نشان دهید:

الف) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta=-\frac{\pi}{3}.$ ب) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

پ) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{ab}.$ $(a, b>0)$

۱۱ـ برای $-1<\lambda<1$ نشان دهید:

الف) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\lambda}{(1+x)^2}\,dx=\frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}.$

ب) $$\int_0^\infty \frac{x^\lambda}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\cos\dfrac{\pi\lambda}{2}}.$$

۱۲ــ با انتگرال‌یابی از $e^{\lambda z}/(1+e^z)$ ، $0<\lambda<1$ ، بر مرز مستطیلی به رئوس $-R$ ، R ، $R+2\pi i$ و $-R+2\pi i$ ، نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}.$$

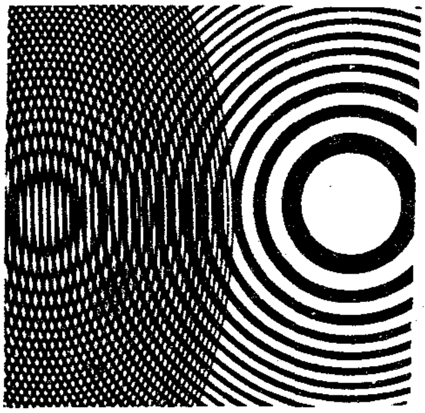
با استفاده از این نتیجه ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\qquad(0<\lambda<1).$$

۱۳ــ نشان دهید:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{1-iR}^{1+iR}\frac{a^z}{z}\,dz=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ 2\pi i, & a>1.\end{cases}$$

(راهنمایی: قرار دهید $a^z=e^{z\log a}$. اگر $0<a<1$ ، مرز را پاره‌خط از $1-iR$ تا $1+iR$ و به دنبال آن نیمدایره راست را در نظر بگیرید. اگر $a>1$ ، نیمدایره‌چپ‌رادر نظر بگیرید) .



۱۰ـ توابع همساز

در فصل ۵، دیدیم که اگر یک تابع تحلیلی دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد، آنگاه قسمت حقیقی (انگاری) این تابع همساز است. در فصل ۸ نشان دادیم که همه توابع تحلیلی مشتق مرتبه دوم پیوسته دارند. پس قسمت حقیقی هر تابع تحلیلی همیشه همساز است.

در این فصل بررسی می‌کنیم که معکوس این مطلب به چه میزانی صحت دارد. نشان می‌دهیم که در میدانهای همبند ساده، هر تابع همساز قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. این نتیجه، اثبات چندین قضیه را در مورد توابع همساز مقدور می‌سازد، که با قضایای مربوط به توابع تحلیلی مشابهت دارند. بالاخص مشابه فرمول انتگرال کوشی، معروف به فرمول انتگرال پواسن [1] ما را قادر می‌سازد که با دانستن رفتار تابع همساز برمرز یک قرص، مقدار تابع را در درون قرص مشخص سازیم.

۱۰ـ۱. مقایسه با توابع تحلیلی

یادآوری می‌کنیم، تابع با مقادیر حقیقی $u(x, y)$ را، که در میدان $\mathscr{D}$ معین و تک مقداری است، در $\mathscr{D}$ همسازگویند، اگر چنانچه دارای مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم پیوسته بوده واین مشتقات در معادله لاپلاس [2] صدق کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

در بخش ۵ـ۳ تشریح کردیم که‌چگونه با بکار بردن معادلات کوشی ـ ریمان می‌توان

1. Poisson 2. Laplace

تابع $v(x, y)$ را که مزدوج یک تابع همساز مفروض $u(x, y)$ است، ساخت؛ بدین‌معنی که تابع $v(x, y)$ را یافتیم که برای‌آن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی‌باشد. روش این بود که همه توابع $v(z)$ را که در دو شرط زیر صادق باشند بیابیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

این روش‌در حالتی که انتگرال‌یابی‌جزیی $\int (\partial v/\partial y)\, dy$ صریحا "قابل‌حل‌باشد، موفقیت‌آمیز بود. اینک شرایط عمومی برای یک تابع تحلیلی را بیان می‌کنیم‌که قسمت حقیقی آن برابر یک تابع همساز از پیش معلوم باشد. ابتداء توجه می‌کنیم که، بموجب معادلات کوشی ــ ریمان، مشتق هر تابع تحلیلی $f(z) = u(z) + iv(z)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} - i\,\frac{\partial u(z)}{\partial y}.$$

<u>قضیه ۱۰ــ۱. اگر $u(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تابع همساز مفروض باشد، تابع تحلیلی $f(z)$ در $\mathscr{D}$ موجوداست که $\mathrm{Re}\, f(z) = u(z)$.</u>

اثبات ــ قرارمی‌دهیم $g(z) = \partial u(z)/\partial x - i\,[\partial u(z)/\partial y]$. آنگاه‌به‌موجب معادله‌لاپلاس

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}\, g) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}\, g) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{۱}$$

چون‌که همه مشتقات نسبی $u(z)$ پیوسته‌اند.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}\, g) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}\, g) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0. \tag{۲}$$

ولی (۱) و (۲) معادلات‌کوشی برای $g(z)$ هستند. و با توجه به این که

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re}\, g), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re}\, g), \quad \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Im}\, g), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Im}\, g)$$

همگی پیوسته‌اند، می‌توان قضیه ۵ــ۵ را بکار برد و تحلیلی بودن $g(z)$ را در $\mathscr{D}$ اثبات نمود.

سپس نقطه z_0 را در $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $F(z) = \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta$. در این صورت به موجب فرع قضیه مررا، $F(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی است و

$$F'(z) = g(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} - i\,\frac{\partial u(z)}{\partial y}.$$

ملاحظه می‌شود، مشتق $F(z)$ را نیز می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}F(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}F(z).$$

پس $u(z)$ و $\operatorname{Re}F(z)$ در $\mathscr{D}$ دارای مشتقات نسبی مساوی هستند، بنابراین

$$\operatorname{Re}F(z) = u(z) + C \qquad (C \text{ حقیقی})$$

پس تابع

$$f(z) = F(z) - C = \int_{z_0}^{z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(\zeta) - i\frac{\partial u(\zeta)}{\partial y}\right\}d\zeta - C$$

در $\mathscr{D}$ تحلیلی است و $\operatorname{Re}f(z) = u(z)$.

فرع. اگر $u(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ همساز مفروض باشد، تابع تحلیلی $f(z)$ موجود است بطوری که

$$\text{در } \mathscr{D} \text{ داریم} \qquad \operatorname{Im}f(z) = u(z)$$

اثبات ــ به‌موجب قضیه ۱۰ــ۱، تابع تحلیلی $h(z)$ موجود است که $\operatorname{Re}h(z) = u(z)$. ولی در این صورت $f(z) = ih(z)$ تحلیلی است $\operatorname{Im}f(z) = \operatorname{Re}h(z) = u(z)$.

شرط همبند سادگی در قضیه ۱۰ــ۱، اساسی است، به عنوان مثال تابع

$$u(z) = u(x, y) = \operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}$$

در صفحه سفته $x^2 + y^2 \neq 0$ همساز است. بعلاوه $u(z)$ "تقریباً" در این میدان برابر قسمت حقیقی $\operatorname{Log} z$ است. منظور ما از "تقریباً"، اینست که $\operatorname{Log} z$ بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست. اکنون اگر تابعی مانند

$$f(z) = \operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2} + iv(x, y)$$

در تمام صفحه سفته تحلیلی می‌بود. در این صورت $g(z) = f(z) - \operatorname{Log} z$ نیز بر میدان $\mathscr{D}$ مشتمل بر صفحه که در امتداد محور حقیقی بریده شده باشد، نیز تحلیلی می‌بود. چون که $g(z)$ در $\mathscr{D}$ انگاری محض است، با به کار بردن معادلات کوشی ــ ریمان می‌بینیم که $g(z)$ می‌بایست در $\mathscr{D}$ ثابت باشد. پس هر تابع تحلیلی در $\mathscr{D}$ که قسمت حقیقی‌اش $\operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}$ باشد باید به شکل $\operatorname{Log} z + iC$، C حقیقی، باشد. چون که $\operatorname{Log} z + iC$ حتی بر محور حقیقی منفی نمی‌تواند پیوسته تعریف شود (به بخش ۵ــ۳ مراجعه کنید)، هیچگونه امیدی که بتوان یک تابع تحلیلی در صفحه سفته تعریف کرد، که قسمت حقیقی آن $u(z)$ باشد، موجود نیست.

با اینحال، قابل توجه است که

$$u(x,y) = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2 \neq 0)$$

قسمت حقیقی تک مقداری برای تابع چند مقداری $\log z$ است. بعلاوه $u(x,y)$ بطورموضعی قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. بدین معنی که اگر $z_0 \neq 0$ مفروض باشد. شاخه‌یی از $\arg z$ را می‌توان تعریف کرد که

$$\log z = \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} + i\phi(z)$$

دریک همسایگی z_0 تحلیلی باشد. واضح است که‌یک همسایگی، میدان همبندساده است و بنابراین وجود یک تابع تحلیلی که قسمت حقیقی آن $\mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}$ باشدبوسیله قضیه ۱۰-۱ تضمین می‌گردد.

به‌موجب‌قضیه ۱۰-۱، اینک می‌توان بعضی از قضایای فصل ۸ را ترمیم نمودوهمتایی برایشان درتوابع همساز یافت. قضیه بعدی ما همتای همساز قضیه لیوویل است.

قضیه ۱۰-۲. یک تابع همساز و کراندار در صفحه می‌بایست ثابت باشد.

اثبات ـ فرض کنیم $u(z)$ در صفحه همساز و کراندار است. قضیه ۱۰-۱ وجود یک تابع تام $f(z)$ را که قسمت حقیقی‌اش $u(z)$ باشد تضمین می‌کند. ولی در این صورت $g(z) = e^{f(z)}$ هم تابع تام است. چون که $|g(z)| = e^{u(z)}$، $g(z)$ هم در صفحه‌کراندار است. به موجب قضیه لیوویل $g(z)$ و در نتیجه $u(z) = \log|g(z)|$، نیز بایست ثابت باشد.

تذکر ـ قضیه ۱۰-۱ را می‌توان به بیانی دیگر مطرح کرد: اگرقسمت‌حقیقی وانگاری یک تابع تام کراندار باشد، آنگاه تابع ثابت است.

اینک مشابه قضیه میانه گاوس برای توابع تحلیلی را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۰-۳. فرض کنیم $u(z)$ در میدانی شامل قرص $|z-z_0| \leq r$ تحلیلی‌باشد، آنگاه:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\, d\theta.$$

اثبات ـ فرض کنیم $f(z)$ در $|z-z_0| \leq r$ یک تابع تحلیلی باشدکه قسمت‌حقیقی آن $u(z)$ است. بموجب قضیه میانه گاوس

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

با محاسبه قسمت حقیقی از دو طرف قضیه ثابت می‌شود . یعنی که

$$u(z_0)=\operatorname{Re} f(z_0)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

مشابه‌قضایای ماکزیمم و می‌نیمم کالبد برای توابع تحلیلی ، اصول ماکزیمم و می‌نیمم برای توابع همساز است :

قضیه ۱۰ــ۴ . تابع همساز غیرثابت در یک میدان ماکزیمم و یامی نیمم ندارد .

قابل‌توجه است ، تابع همساز $u(z)$ در z_0 ماکزیمم می‌شود اگروتنها اگر تابع همساز $-u(z)$ در z_0 می‌نیمم شود ، پس اصل می‌نیمم مستقیما" نتیجه اصل ماکزیمم است .

اثبات ۱ــ قضیه ماکزیمم کالبد برای توابع تحلیلی از قضیه میانگین گاوس و ازاینکه تابع تحلیلی پیوسته می‌باشد ، نتیجه می‌گردد . بطور مشابه می‌توانیم ، اصل ماکزیمم برای توابع همساز را از اصل میانگین برای توابع همساز (قضیه ۱۰ــ۳) استنتاج کنیم .

اثبات ۲ــ فرض کنیم $u(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ همساز و غیرثابت باشد . اگر z_0 در $\mathscr{D}$ مفروض باشد ، تابع $f(z)=u(z)+iv(z)$ را که در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد می‌سازیم . قرار می‌دهیم‌که $g(z)=e^{f(z)}$ و توجه داریم به اینکه $|g(z)|=e^{u(z)}$. اگر $u(z)$ در z_0 ماکزیمم می‌بود ، آنگاه $|g(z)|$ نیز در z_0 ماکزیمم می‌گردید که با قضیه ماکزیمم کالبد برای توابع تحلیلی متناقض است .

اثبات ۳ــ فرض کنیم $u(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ همساز و غیرثابت باشد . اگر z_0 در $\mathscr{D}$ مفروض باشد ، تابع $f(z)=u(z)+iv(z)$ را که در $N(z_0;\delta)$ تحلیلی است می‌سازیم . به موجب قضیه نگاشت باز (قضیه ۸ــ۲۱) عدد $\varepsilon>0$ موجوداست‌که $N(f(z_0);\varepsilon)$ زیر مجموعه‌نگاره $N(z_0;\delta)$ درتابع $f(z)$ خواهدبود . به‌ویژه‌بازاءنقطه $z_1\in N(z_0;\delta)$ ، داریم $\operatorname{Re} f(z_1)=u(z_0)+\varepsilon/2$. پس $u(z)$ در $\mathscr{D}$ ماکزیمم در z_0 ندارد .

تذکر ــ اصل می‌نیمم برای توابع همساز عملا" قوی‌تر از قضیه ماکزیمم کالبد برای توابع تحلیلی است . فرض مخالف صفر بودن در میدان برای‌توابع همساز غیرضروری‌است .

واضح است که در یک میدان، تابع همساز می‌تواند منفی باشد، در حالی که کالبد تابع تحلیلی نمی‌تواند چنین باشد.

فرع ۱ــ فرض کنیم $u(z)$ در میدان کراندار $\mathscr{D}$ همساز است و مرز (توپولوژیکی) $\mathscr{D}$ یک مرز بسته است. اگر $u(z)$ در $\mathscr{D} \cup C$ پیوسته باشد و در C، $u(z) \equiv K$ (K ثابت). آنگاه در تمام $\mathscr{D}$، $u(z) \equiv K$.

اثبات ــ چون که $\mathscr{D} \cup C$ یک مجموعه فشرده است، $u(z)$ می‌بایست یک ماکزیمم و می‌نیمم داشته‌باشد. بموجب قضیه ۱۰ــ۱۴، ماکزیمم و می‌نیمم در $\mathscr{D}$ نیست. پس می‌بایست بر C باشد. ولی این بدان معنی است که $\max u(z) = \min u(z) = K$. پس در تمامی $\mathscr{D}$، $u(z) \equiv K$.

تذکر ــ کرانداربودن اساسی است. مرز میدان $\operatorname{Re} z > 0$ عبارت است از $\operatorname{Re} z = 0$. تابع $u(z) = x$ برای $\operatorname{Re} z \geq 0$ پیوسته است و بر مرز $u(z) \equiv 0$. ولی برای $\operatorname{Re} z > 0$، $u(z) \neq 0$.

فرع ۲ــ فرض کنیم $u_1(z)$ و $u_2(z)$ در یک میدان کراندار همساز باشد و مرز این میدان، مرز بسته C باشد. اگر $u_1(z)$ و $u_2(z)$ بر $C \cup \mathscr{D}$ پیوسته باشند با $u_1(z) \equiv u_2(z)$ بر C، در این صورت در تمام $\mathscr{D}$، $u_1(z) \equiv u_2(z)$.

اثبات ــ قرار می‌دهیم $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ و فرع ۱ را به‌کار می‌بریم.

نشان‌دادیم که رفتار تابع همساز بر مرز یک ناحیه کراندار و بسته، مشخص رفتار تابع در تمامی میدان است. بر خلاف مورد توابع تحلیلی. این نتیجه برای یک دنباله از نقاط دلخواه در ناحیه ترمیم پذیر نیست. به عنوان مثال تابع غیرثابت $u(z) = x$ در تمام صفحه همساز است و بر محور انگاری $u(z) \equiv 0$. پس در قضیه ۸ــ۱۴، کلمه "تحلیلی" را نمی‌توان با "همساز" تعویض نمود. بدین معنی که، اگر حتی $u(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ همساز باشد و $z_n \to z_0$ در $\mathscr{D}$ و $u(z_n) \equiv 0$ باشد، معذالک اینها تضمین نمی‌کنند که $u(z) \equiv 0$. با اینحال نتیجه زیر را می‌توان بیرون کشید.

قضیه ۱۰ــ۵. اگر $u(z)$ درمیدان $\mathscr{D}$ همساز باشد و در همسایگی یک نقطه از $\mathscr{D}$ ثابت باشد، آنگاه $u(z)$ در تمامی $\mathscr{D}$ ثابت است.

اثبات ــ فرض کنیم A مجموعه همه نقاط z_0 در $\mathscr{D}$ باشد که برای آنها $u(z)$ در یک همسایگی z_0 ثابت است. واضح است که A مجموعه‌یی است غیرتهی. برای آنکه ثابت کنیم $A=\mathscr{D}$، کافیست نشان دهیم $B=\mathscr{D}-A$ باز است، زیرا در این صورت، چون که $\mathscr{D}$ همبند است، B می‌بایست تهی باشد.

فرض کنیم B باز نیست، پس برای نقطه z_0 در B و $\varepsilon>0$، نقطه z_1 در A موجود است که $z_1\in N(z_0;\varepsilon)\subset\mathscr{D}$ چون که A باز است، می‌توان $\delta>0$ به قدر کافی کوچک یافت که $N(z_1;\delta)\subset N(z_0;\varepsilon)\cap A$. اکنون تابعی تحلیلی می‌سازیم که برای هر z در $N(z_0;\varepsilon)$، $\operatorname{Re} f(z)=u(z)$. چونکه $u(z)$ در $N(z_1;\delta)$ ثابت است، برای تمام نقاط در این همسایگی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

پس برای z در $N(z_1;\delta)$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

با به کار بردن قضیه ۸ــ۱۴ برای $f'(z)$، نشان می‌دهیم در تمامی $N(z_0;\varepsilon)$، $f'(z)\equiv 0$. دراین‌صورت بنا به قضیه ۵ــ۳، $f(z)$ در $N(z_0;\varepsilon)$ ثابت است. بنابراین $u(z)=\operatorname{Re} f(z)$ هم در $N(z_0;\varepsilon)$ ثابت است و این با فرض $z_0\in B$ متناقض است. و اثبات تمام است.

یک ارتباط جالب توجه میان ماکزیمم کالبد یک تابع تحلیلی با ماکزیمم قسمت حقیقی آن تابع موجود است.

<u>قضیه ۱۰ــ۶ (بورل ــ کاراتئودری)[1]. فرض کنیم $f(z)$ در قرص $|z|\le R$ تحلیلی است. گیریم $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ و $A(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re} f(z)$. در این صورت برای $0<r<R$</u>

$$M(r)\le\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

اثبات ــ اگر $f(z)$ ثابت باشد (مثلاً $f(z)=K$)، در این صورت طرف راست از پائین دارای کران

---

1. Borel-Caratheodory

$$\frac{-2r}{R-r}|K|+\frac{R+r}{R-r}|K|=|K|=M(r),$$

است و قضیه ثابت است. پس می‌توان فرض کرد که $f(z)$ غیرثابت است.

اگر $f(0)=0$ ، بموجب قضیه ۱۰–۴ ، $A(R)>A(0)=0$. چون‌که برای $|z|\leq R$،

$$\operatorname{Re}\{2A(R)-f(z)\}\geq A(R)>0$$

تابع

$$g(z)=\frac{f(z)}{2A(R)-f(z)}$$

برای $|z|\leq R$ تحلیلی است. بعلاوه با قرار دادن $f(z)=u+iv$ ، داریم:

$$|g(z)|=\sqrt{\frac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2}}\leq\sqrt{\frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}}=1 \qquad (|z|\leq R).$$

بموجب لم شوارتس

$$\max_{|z|=r}|g(z)|\leq\frac{r}{R}.$$

ولی

$$|f(z)|=\left|\frac{2A(R)g(z)}{1+g(z)}\right|\leq\frac{2A(R)r/R}{1-r/R}=\frac{2rA(R)}{R-r}, \qquad (۳)$$

و قضیه درحالت $f(0)=0$ ثابت می‌گردد.

بالاخره اگر $f(0)\neq 0$ ، (۳) را برای $f(z)-f(0)$ بکار می‌بریم. و این‌کار منجر می‌شود به

$$\begin{aligned}|f(z)-f(0)|&\leq\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=r}\operatorname{Re}\{f(z)-f(0)\}\\&\leq\frac{2r}{R-r}(A(R)+|f(0)|).\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}|f(z)|&\leq\frac{2r}{R-r}(A(R)+|f(0)|)+|f(0)|\\&=\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|,\end{aligned}$$

و قضیه ثابت است.

ازقضیه ۱۰ـ۶ می‌توان‌استفاده‌کرد و قضیه ۸ـ۱۰ و قضیه ۱۰ـ۲ را بصورت زیرتعمیم داد.

قضیه ۱۰ـ۷. فرض‌کنیم $f(z)$ تابعی است تام و $\operatorname{Re} f(z) \le Mr^\lambda$ $(|z| = r \ge r_0)$ برای یکعدد حقیقی غیرمنفی λ، در این صورت $f(z)$ یک‌چند جمله‌یی با درجه حداکثر λ است.

اثبات ــ در قضیه ۱۰ـ۶، $R = 2r$ قرار می‌دهیم. در این صورت برای M_1 بس‌بزرگ

$$|f(z)| \le \frac{2r}{2r-r} A(2r) + \frac{2r+r}{2r-r} |f(0)|$$
$$\le 2(2r)^\lambda M + 3|f(0)| \le M_1 r^\lambda,$$

و اینک قضیه،از قضیه ۸ـ۱۰ اثبات می‌گردد.

پرسش‌ها

۱ــ در اثبات قضیه ۱۰ـ۱، از همبند ساده بودن میدان کجا استفاده شد؟

۲ــ چه قضایایی برای قرص‌ها مقبول است ولی برای میدانهای همبند ساده‌نیست؟

۳ــ نقش عمده پیوستگی مشتقات نسبی مرتبه دوم در توابع همساز چیست؟

۴ــ آیا یک تابع همساز غیرثابت در صفحه می‌تواند بیش از یک مقدار حقیقی حذف کند؟

۵ــ آیا می‌توان قضیه ماکزیمم کالبد برای توابع تحلیلی رابااستفاده از اصل‌ماکزیمم برای توابع همساز اثبات نمود؟

۶ــ فرض‌کنید تابعی‌بر میدان همسازاست و بر مرزش C پیوسته است، آیامی‌بایست که تابع بر$\mathscr{D} \cup C$ پیوسته باشد؟

۷ــ آیا ارتباطی میان ضرایب یک تابع و ماکزیمم قسمت حقیقی آن موجود است؟

۸ــ چرا قضیه ۱۰ـ۷،تعمیم قضیه ۸ـ۱۰ و قضیه ۱۰ـ۴ می‌باشد؟

تمرینها

۱ــ نشان دهید که تابع همساز در یک میدان، دارای مشتقات نسبی از تمام مراتب است.

۲ــ اگر $u(z)$ در صفحه غیرثابت و همساز باشد، نشان دهید، $u(z)$ به هر عدد

حقیقی هر چقدر بخواهیم نزدیک می‌شود .

۳ـ اصل می‌نیمم را مستقیما" با هر یک از سه روشی که اصل ماکزیمم ثابت شد ، ثابت کنید .

۴ـ با بکار بردن اصل میانگین برای تابع $\log|1+z|$ ، $|z|\leq r<1$ و با $r\to 1$ نشان دهید $\int_0^\pi \log\sin\theta\, d\theta=-\pi\log 2$.

۵ـ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است با $\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}g(z)$ بر C . نشان‌دهیدکه درون C ، $f(z)=g(z)+i\beta$ ،که β ثابت حقیقی است .

۶ـ تمرین قبلی را به این ترتیب تعمیم دهید که: نشان دهید اگر تنها فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون C تحلیلی‌وبرناحیه شامل C و درون آن پیوسته باشندباز هم نتیجه برقرار است .

۷ـ اگر $u(z)$ بر قرص سفته $0<|z-z_0|<R$ همسازوکراندارباشد ، نشان دهید که $\lim_{z\to z_0}u(z)$ موجود است .

۸ـ فرض کنید $u_1(z)$ و $u_2(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ همسازند و در $\mathscr{D}$ ، $u_1(z)u_2(z)\equiv 0$ ثابت کنید ، یا $u_1(z)\equiv 0$ و یا $u_2(z)\equiv 0$ در $\mathscr{D}$.

۹ـ اگر $u(z)=u(x,y)$ در صفحه هدساز باشد و بـــرای‌هر z ، $u(z)\leq|z|^n$ ، نشان دهید ، $u(z)$ نسبت به دو متغیر x و y چند جمله‌یی است .

۱۰ـ فرض‌کنید $f(z)$ در قرص $|z|\leq R$ تحلیلی است و $A(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}f(z)$. ثابت کنید برای $r<R$ ،

$$\max_{|z|=r}\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\leq\frac{2^{n+2}R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

(راهنمایی: فرمول انتگرال کوشی را در ارتباط با قضیه ۱۰ـ۶ بکار ببرید) .

۱۰ـ۲ . فرمول انتگرال پواسن

در این بخش همتای همسازی برای فرمول انتگرال کوشی‌خواهیم یافت . اگر f درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه در تمام نقاط z درون C ،

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{۴}$$

می‌خواهیم در نقاط درون C ، عبارتی برای $\operatorname{Re}f(z)$ برحسب مقادیر $\operatorname{Re}f$ بر C بیابیم .ولی عبارت

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right\}$$

بـــــه گونه‌یی ساده می‌شود که هم متضمن $\mathrm{Re}\, f$ و هم متضمن $\mathrm{Im}\, f$ بر C می‌باشد.

ولی اگر با این حال، انتگرال (۴) به انتگرالی به شـــــکل $\int_a^b \phi(t)\,dt$ تبدیل شود که در آن $\phi(t)$ تابع مختلط از متغیر حقیقی t باشد، آنگاه:

$$\mathrm{Re}\int_a^b \phi(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,\phi(t)\,dt.$$

یادآور میشویم که به هنگام اثبات اصل میانگین برای توابع همساز به تشکیل چنین تبدیلی مبادرت کردیم. و بدین ترتیب قادر شدیم که مقدار یک تابع همساز را در مرکز یک دایره بر اساس مقادیر بر محیط آن مشخص کنیم. ولی همتای فرمول انتگرال کوشی برای دایره، عبارتی است برای تابع همساز در تمام نقاط درون دایره برحسب مقادیرآن بر دایره. همانندی زیر در یافتن چنین ارتباطی مفید است، قرار می‌دهیم

$$\zeta = Re^{i\phi}, \qquad z = re^{i\theta} \qquad (r < R).$$

آنگاه

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{R^2 - r^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}. \tag{۵}$$

جهت اثبات (۵) ملاحظه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= \frac{(\zeta + z)(\overline{\zeta - z})}{(\zeta - z)(\overline{\zeta - z})} = \frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^2}\\ &= \frac{R^2 - r^2 + 2irR\sin(\theta - \phi)}{|\zeta - z|^2}.\end{aligned} \tag{۶}$$

بـــــا محاسبه مقدار حقیقی در (۶)، تساوی اول (۵) ثابت می‌شود. تساوی دوم از همانندی زیر ناشی می‌شود:

$$\begin{aligned}|\zeta - z|^2 &= (Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})\\ &= R^2 - rR(e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}) + r^2\\ &= R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2.\end{aligned}$$

<u>قضیه ۱۰–۸ (فرمول انگرال پواسن). فرض کنیم $u(z)$ در میدانی شامل قرص $|z| \le R$ تحلیلی است، آنگاه برای $z = re^{i\theta}$، $r < R$ داریم:</u>

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

اثبات ــ به موجب قضیه ۱۰ــ۱ ، تابع تحلیلی $f(z)$ موجود است که در قرص $|z| \leq R$ ، قسمت حقیقی آن $u(z)$ باشد . به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (|z| < R). \tag{۷}$$

اگر $z = 0$ قضیه ، با استفاده از قضیه میانگین گاوس ، ثابت می‌شود . پس می‌توان فرض کرد $z = re^{i\theta} \neq 0$ و قرار داد

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

نقطه z_1 ، که بر پرتو مار بر مبداء تا z واقع است ، خارج دایره $|\zeta| = R$ واقع است . پس

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\, d\zeta. \tag{۸}$$

با تفریق (۸) از (۷) بدست می‌آید

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right] f(\zeta)\, d\zeta \tag{۹}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{R^2 - r^2}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} f(\zeta)\, d\zeta.$$

برای $\zeta = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{iRe^{i\phi}\, d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(R^2 - rRe^{i(\phi - \theta)})}$$

$$= \frac{i\, d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{i}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi. \tag{۱۰}$$

با جایگزینی (۱۰) در (۹) ، حاصل می‌شود ..

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi})\, d\phi. \tag{۱۱}$$

با محاسبه قسمت حقیقی در طرفین (۱۱) ، قضیه ثابت است .

فرع ۱ــ برای $r<R$ و θ دلخواه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\,d\phi=1.$$

اثبات ــ در قضیه $u(z)\equiv 1$ قرار می‌دهیم.

فرع ۲ــ فرض کنیم $f(z)=u(z)+iv(z)$ در قرص $|z|\leq R$ تحلیلی است. آنگاه برای $r<R$، $z=re^{i\theta}$ داریم

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\,u(Re^{i\phi})\,d\phi,$$

$$v(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\,v(Re^{i\phi})\,d\phi.$$

اثبات ــ با محاسبه قسمتهای حقیقی و انگاری در (۱۱) قضیه ثابت می‌شود.

فرع ۳ــ با مفروضات فرع ۲، $v(z)$ را بصورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$v(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2rR\sin(\theta-\phi)}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\,u(Re^{i\phi})\,d\phi+v(0).$$

اثبات ــ قرار می‌دهیم $\zeta=Re^{i\phi}$ ، $z=re^{i\theta}$ ، $r<R$ و گیریم:

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\,d\phi.$$

نشـــــان می‌دهیم که $\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}g(z)$. خارج قسمت تفاضلی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-(z+h))}\,u(\zeta)\,d\phi.$$

همانند اثبات قضیه ۸ــ۱، می‌توانیم نشان دهیم $g(z)$ تحلیلی است و

$$g'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\zeta}{(\zeta-z)^2}\,u(\zeta)\,d\phi.$$

چون که

$$\operatorname{Re}g(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\,d\phi\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,u(\zeta)\,d\phi,$$

با جایگزینی (۵)، در اولین همانندی فرع ۲، حاصل می‌شود.

$$\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}u(Re^{i\phi})\,d\phi.$$

پس با بکار بردن معادلات کوشی ــ ریمان نتیجه می‌دهد.

$$v(re^{i\theta})=\operatorname{Im} f(z)=\operatorname{Im} g(z)+C.$$

پس به موجب (۶)

$$v(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2rR\sin(\theta-\phi)}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}u(Re^{i\phi})\,d\phi+C. \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن $r=0$ در (۱۲) ملاحظه می‌شود که $C=v(0)$ و قضیه ثابت است.

تذکر ۱ــ در حالت عمومی می‌دانیم که (تمرین ۵، بخش ۱۰ــ۱) یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی‌اش با اختلاف یک ثابت انگاری مشخص می‌گردد. در موردی که $f(z)=u(z)+iv(z)$ در قرص $|z|\leq R$ تحلیلی باشد، فرع ۲ و فرع ۳، این ارتباط را صراحتاً" بیان می‌کنند، بدین معنی که:

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2+2irR\sin(\theta-\phi)}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}u(Re^{i\phi})\,d\phi+iv(0)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\phi}+re^{i\theta}}{Re^{i\phi}-re^{i\theta}}u(Re^{i\phi})\,d\phi+iv(0). \qquad (۱۳)\end{aligned}$$

تذکر ۲ــ عبارت

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}$$

بــــــه هسته پواسن معروف است. قابل توجه است که هسته پواسن دارای یک کران بالائی بصورت زیر

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR+r^2}=\frac{R+r}{R-r}$$

و دارای یک کران پائین بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+2rR+r^2}=\frac{R-r}{R+r}.$$

همانطور که خواهیم دید. نتیجه قضیه ۱۰ــ۸ در شرایط ضعیف‌تر هم برقرار است. لازم نیست که فرض کنیم $u(z)$ بر دایره $|z|=R$ همساز است.

قضیه ۱ــ۹. فرض‌کنیم $u(z)$ درقرص‌باز $|z|<R$ تحلیلی‌وبرقرص‌بسته $|z| \leq R$ پیوسته است. در این صورت برای $z=re^{i\theta}$ ، $r<R$ داریم:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, u(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

اثبات ــ گیریم $\{t_n\}$ دنباله‌یی از اعداد حقیقی صعودی باشد که به ۱ میل می‌کند. در این صورت برای هر n ، تابع $u(t_n z)$ در قرص بسته $|z| \leq R$ همساز است. با قرار دادن $u_n(z)=u(t_n z)$ ، از قضیه ۱۰ــ۸ نتیجه می‌شود که

$$u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, u_n(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

چونکه $u_n(z)$ در $z=re^{i\theta}$ پیوسته است.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(re^{i\theta}) = \lim_{n\to\infty} u(t_n re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}).$$

با تحقیق کردن تساوی زیر، اثبات کامل می‌گردد:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, u_n(Re^{i\phi})\, d\phi \tag{۱۴}$$
$$\to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, u(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

کافی است ثابت کنیم که اختلاف

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, (u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})\, d\phi)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r}\, |u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})|\, d\phi$$

را می‌تـــــوان به دلخواه کوچک کرد. اکنون $u(z)$ بر مجموعه فشرده $|z| \leq R$ پیوسته است و پس پیوسته یکنواخت است. با $\varepsilon>0$ مفروض عدد صحیح N می‌توان یافت بطوری‌که برای $n>N$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r}\, |u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})|\, d\phi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r}\, |u(t_n Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})|\, d\phi \leq \varepsilon \frac{R+r}{R-r}.$$

چونکه ε اختیاری است، اثبات قضیه تمام است.

تذکر ــ با استفاده از پیوستگی یکنواخت $u(z)$ $(|z| \leq R)$ قادر شدیم که نشان دهیم دنباله $u_n(z) = u(t_n z)$ به $u(z)$ $(|z| \leq R)$ همگرای یکنواخت است. پس اعتبار (۱۴) نتیجه مستقیم قضیه ۸ــ۴ است.

نشان داده‌ایم تابعی که برای $|z| < R$ همساز و برای $|z| \leq R$ پیوسته است دارای این خاصیت می‌باشد که مقادیر آن در درون قرص برحسب مقادیر مرزی مشخص است. فرض کنیم، در عوض، از تابع حقیقی $F(\theta)$ که بر دایره $|z| = R$ پیوسته است، شروع کنیم. آیا تابعی موجود است که بر قرص $|z| < R$ همساز باشد و دارای این خاصیت باشد که برای هر θ

$$\lim_{r \to R} u(re^{i\theta}) = F(\theta) \qquad (r < R)$$

درحالت عمومی، مسئله دیریکله[1] چنین عنوان شده است. اگر $\mathscr{D}$ میدان مفروض باشد، آیا تابع همسازی در $\mathscr{D}$ موجود است که مقادیر مفروضی را بر مرز $\mathscr{D}$ به پذیرد؟ قضیه بعدی ما مربوط به مسئله دیریکله برای قرص است.

قضیه ۱۰ــ۱۰. گیریم $F(\phi)$ تابعی است پیوسته از متغیرحقیقی ϕ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ با $F(0) = F(2\pi)$. در این صورت تابع $u(z)$ که بصورت زیر تعریف شود:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} F(\phi)\, d\phi \qquad (r < R)$$

در شرایط زیر صادق است:

(i) $u(z)$ در قرص $|z| < R$ همساز است.

(ii) برای هر θ ی ثابت $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\lim_{r \to R} u(re^{i\theta}) = F(\theta) \qquad (r < R).$$

اثبات ــ جهت اثبات (i)، قرار می‌دهیم $\zeta = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ $(r < R)$ و گیریم:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} F(\phi)\, d\phi.$$

در ایـــــن صورت، همانند اثبات فرع ۳ از قضیه ۱۰ــ۸، می‌توان نشان داد که $g(z)$ (در $|z| < R$) تحلیلی است. به موجب (۵) ملاحظه می‌شود که $\operatorname{Re} g(z) = u(z)$ وهمساز

1. Dirichlet

بودن $u(z)$ ثابت می‌گردد.

برای اثبات (ii) می‌بایست نشان داد که برای هر θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ و هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ متناظر می‌شود بطوری که برای تمام r های با $0 < R - r < \delta$ داشته باشیم.

$$|u(re^{i\theta}) - F(\theta)| < \varepsilon$$

قرار می‌دهیم:

$$P(\phi) = P(\phi, \theta, r, R) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}.$$

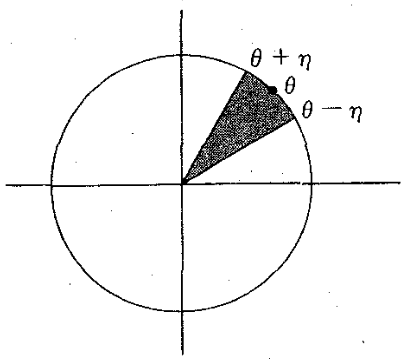
به موجب فرع ۱ قضیه ۱۰–۸

$$u(re^{i\theta}) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\phi)(F(\phi) - F(\theta))\, d\phi. \qquad (۱۵)$$

قابل توجه است که

$$P(\theta) = P(\theta, \theta, r, R) = \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} = \frac{R + r}{R - r},$$

بنابراین $\lim_{r\to R} P(\theta) = \infty$. در حالی که $\lim_{r\to R} P(\phi) = 0$، هر وقت $\phi \neq \theta$. برای آنکه نشان دهیم (۱۵) بدلخواه کوچک می‌گردد، دو انتگرال متفاوت را در نظر می‌گیریم. یکی پیوستگی $F(\phi)$ را در $\phi = \theta$ مورداستفاده قرار می‌دهد درحالی که دیگری رفتار "دقیق" $P(\phi)$ را در ناحیه‌یی که خارج از یک همسایگی نقطه $Re^{i\theta}$ باشد، مورد استفاده قرار می‌دهد (ر. ک. شکل ۱)



شکل ۱

به موجب پیوستگی $F(\phi)$ در $\phi = \theta$

$$|F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad 0 < |\phi - \theta| < \eta. \qquad (۱۶)$$

با قرار دادن

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi$$

و

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\eta}^{2\pi+\theta-\eta} P(\phi)[F(\phi)-F(\theta)]\,d\phi,$$

از متناوب بودن عبارت زیر نشان انتگرال در (۱۵) و نامساوی مثلث نتیجه‌می‌شود:

$$|u(re^{i\theta})-F(\theta)| = |I_1+I_2| \le |I_1|+|I_2|. \qquad (۱۷)$$

چون که $P(\phi)>0$ ، (۱۶) را در فرع ۱ قضیه ۱۰ــ۸ بکار می‌بریم‌وحاصل می‌شود:

$$|I_1| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi)|F(\phi)-F(\theta)|\,d\phi < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi)\,d\phi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

برای $\theta+\eta \le \phi \le 2\pi+\theta-\eta$ ،

$$P(\phi) \le \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos\eta+r^2}.$$

مخرج این عبارت اخیر، به عنوان تابعی از r ، در $r=R\cos\eta$ می‌نیمم دارد، پس

$$P(\phi) \le \frac{(R+r)(R-r)}{R^2(1-\cos^2\eta)} \le \frac{2}{R\sin^2\eta}(R-r) = m(R-r),$$

که m ثابت‌صحیحی مستقل از r است. چونکه $F(\phi)$ در فاصله بسته $[\theta+\eta, 2\pi+\theta-\eta]$ و پیوسته است، پس می‌توان فرض کرد:

$$|F(\phi)| \le M.$$

پس

$$|I_2| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\eta}^{2\pi+\theta-\eta} P(\phi)|F(\phi)-F(\theta)|\,d\phi \le 2mM(R-r)$$
$$= K(R-r),$$

که در آن K ثابت صحیح مستقل از r است. پس برای r که‌دررابطه‌زیر صادق‌باشد.

$$R-r < \frac{\varepsilon}{2K} = \delta,$$

نتیجه می‌شود

$$|I_2| \le \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۱۹)$$

با جایگزین (۱۸) و (۱۹) در (۱۷)، بدست می‌آید.

$$|u(re^{i\theta})-F(\theta)| < \varepsilon \qquad \text{برای} \quad 0<R-r<\delta.$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

تذکر ۱ــ ترمیم جزیی در اثبات فوق نشان می‌دهد که هر تابعی در شرایط قضیه صادق باشد ، می‌بایست بر قرص بسته $|z| \leq R$ پیوسته باشد . به‌موجب‌فرع ۲ قضیه ۱۰ــ۴ ، تابع $u(z)$ در قضیه ۱۰ــ۸ تنها تابعی است که در شرایط قضیه صدق می‌کند .

تذکر ۲ــ درقضیه ۱۰ــ۱۰ ، اگرتنها فرض بر این باشد که $F(\phi)$ پیوسته بخشی است ، نتیجه (i) باز هم برقرار است . و (ii) هم برقرار است منتها با این شرط که تساوی $\lim_{r\to R} u(re^{i\theta}) = F(\theta)$ تنهادرنقاط پیوستگی F برقرار است ، اثبات مطلب کاملا" مشابه است .

مثال ــ تابع $u(z)$ ی می‌یابیم که برای $|z| < R$ همساز باشد و بطوری که

$$\lim_{r\to R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

برای $\zeta = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ ، تابع

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi Re\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\phi$$

در $|z| < R$ همساز است . یک انتگرال‌یابی نشان می‌دهد :

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{R+r}{R-r}\tan\frac{\phi - \theta}{2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{R+r}{R-r}\tan\frac{\pi - \theta}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{R+r}{R-r}\tan\frac{-\theta}{2}\right)\right].$$

از همانندی‌های مثلثاتی زیر

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \cot\frac{\theta}{2},$$

$$\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sin\theta},$$

نتیجه می‌شود

$$\tan \pi u(z) = \frac{\dfrac{R+r}{R-r}\left[\tan\dfrac{\pi - \theta}{2} - \tan\dfrac{-\theta}{2}\right]}{1 + \left(\dfrac{R+r}{R-r}\right)^2 \tan\dfrac{\pi - \theta}{2}\tan\dfrac{-\theta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\cot\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2} = \frac{R^2-r^2}{-2rR\sin\theta}.$$

اگر مشخصه‌یی برای تانژانت معکوس به کار بریم که در فاصله $[0, \pi]$ باشد، داریم

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{R^2-r^2}{-2rR\sin\theta}.$$

و با این مشخصه

$$\lim_{r\to R}\tan^{-1}\frac{R^2-r^2}{-2rR\sin\theta} = \begin{cases}\pi, & 0<\theta<\pi,\\ 0, & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

پس شرایط مرزی

$$\lim_{r\to R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases}1, & 0<\theta<\pi,\\ 0, & \pi<\theta<2\pi,\end{cases}$$

صادق است.

تذکر ــ قضایای این بخش برای توابعی که بر قرص $|z| \le R$ به مرکز مبداء تعریف شده بودند، اثبات گردید. با یک انتقال ساده می‌توانستیم این قضایا را برای توابعی که بر قرص $|z-z_0| \le R$ به مرکز z_0 تعریف شوند، ثابت کنیم. جهت تشریح مطلب، فرض کنیم $u(z)$ درمیدانی‌شامل‌قرص $|z-z_0| \le R$ همسازاست. باقراردادن $z-z_0 = re^{i\theta}$ قضیه ۱۰ــ۸ برای هر نقطه از درون دایره $|z-z_0| = R$ برقرار می‌گردد.

پرسش‌ها

۱ــ کدام خواص نقطه z_1، که در اثبات قضیه ۱۰ــ۸ انتخاب شد، در اثبات موثر افتاد؟

۲ــ آیا می‌توان قضیه ۱۰ــ۷ را با استفاده از فرمول پواسن اثبات کرد؟

۳ــ اگر $F(\phi)$، که بر دایره $|z| = R$ معین است، همه جا مگر در یک تعداد متناهی نقاط پیوسته باشد. آیا تابع همساز منحصربفردی در $|z| < R$ موجود است که با نزدیک شدن z به مرز به $F(\phi)$ میل کند؟

۴ــ آیا می‌توان با استفاده از حل مسئله دیریکله در قرص، مسئله دیریکله را برای ناحیه‌های متفاوت حل نمود؟

۵ــ چه رابطه‌یی میان قضیه ۱۰ــ۳ و قضیه ۱۰ــ۸ موجود است؟

تمرینها

۱ــ(الف) برای $\rho = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ $(r<R)$ ، نشان دهید .

$$\frac{\rho + z}{\rho - z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\phi)}.$$

(ب) نتیجه بگیرید که

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\alpha + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha \quad (\text{حقیقی } \alpha)$$

۲ــ با استفاده از تمرین قبل ، عبارت متفاوتی برای نتیجه قضیه ۱۰ــ۸ بیابید .

۳ــ نشان دهید .

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta-\phi)}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\phi) + r^2}\, d\phi = 0.$$

۴ــ اگر $u(z)$ برای $|z|>R$ همساز و برای $|z|\geq R$ پیوسته باشد ، نشان دهید که برای $\rho = Re^{i\phi}$ $z = re^{i\theta}$ $(r>R)$

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\,\frac{\rho + z}{\rho - z}\, u(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

۵ــ تابع همساز $u(z)$ بر $|z|<R$ بیابیدکه

$$\lim_{r\to R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & 0<\theta<\pi, \\ 1, & \pi<\theta<2\pi. \end{cases}$$

۶ــ نشان دهید که تابع

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{2r\sin\theta}{1-r^2} \qquad (r<1)$$

بر $|z|<1$ همساز است و در شرط مرزی زیر صادق است .

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0<\theta<\pi, \\ -1, & \pi<\theta<2\pi. \end{cases}$$

۷ــ قرار دهید $F(\theta) = \theta/2$، $0\leq\theta\leq 2\pi$، نشان دهید که تابع

$$u(re^{i\theta}) = \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}$$

در $|z|<1$ همساز است و برای هر θ ، $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = F(\theta)$. آیا می‌توان این را از فرمول انتگرال پواسن استنتاج نمود ؟ (راهنمایی : نشان دهید :

$$\left(\tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}=\operatorname{Im}\log(1+z)\qquad(z=re^{i\theta})\right)$$

۸ـ فرض کنید $f=u+iv$ بر خط حقیقی و بر نیم صفحه زبرین تحلیلی و کراندار است. نشان دهید که برای $z=x+iy$ ، $y>0$ داریم

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

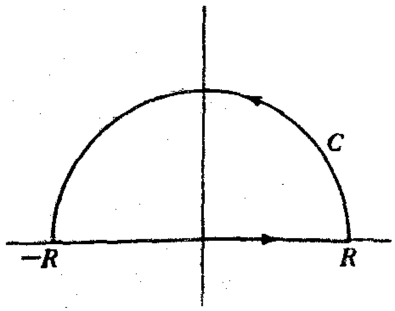
$$v(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yv(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt.$$

(راهنمایی: بنویسید

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-\bar z}\right)d\zeta,$$

که در آن C مرز شکل ۲ است).

شکل ۲



۹ـ با استفاده از تمرین قبل، مسئله دیریکله را برای یک‌نیم‌صفحه‌طرح و حل‌کنید.

۱۰ـ۳. توابع همساز مثبت

به عنوان کاربردی از فرمول انتگرال پواسن، ثابت می‌کنیم که:

نامساوی هارنک[1] ـ فرض کنیم $u(z)$ در قرص $|z-z_0|<R$ همساز است و برای هر z ، $u(z)\geq 0$. با قرار دادن $z-z_0=re^{i\theta}$ داریم:

$$u(z_0)\frac{R-r}{R+r}\leq u(re^{i\theta})\leq u(z_0)\frac{R+r}{R-r}\qquad(r<R).$$

اثبات ـ کافی است این نامساویها را برای قرص کوچکتر

1. Harnack

$$|z-z_0| \leq R' < R,$$

ثـــــابت کرده و سپس R' به R میل کند . به همین دلیل می‌توان فرض کرد $u(z)$ در قرص بسته $|z-z_0| \leq R$ همساز است . در این صورت به موجب قضیه ۱۰ـ۹

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\, u(Re^{i\phi})\, d\phi. \qquad (۲۰)$$

با استفاده از مثبت بودن $u(z)$ و با استفاده از نامساوی

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2} \leq \frac{R+r}{R-r},$$

از (۲۰) نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{R-r}{R+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\, d\phi \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\, d\phi.$$

به موجب خاصیت میانگین

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\, d\phi = u(z_0),$$

و اثبات تمام است .

نشان دادیم (قضیه ۱۰ـ۳) که هر تابع همساز در خاصیت میانگین صادق است . در مورد توابع پیوسته ، معکوس مطلب هم درست است :

قضیه ۱۰ـ۱۱ . فرض کنیم $u(z)$ تابع حقیقی پیوسته باشد که برای z_0 درمیدان $\mathscr{D}$ و برای هر قرص $|z-z_0| \leq r$ ، درون $\mathscr{D}$ داشته باشیم .

$$.u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\, d\theta$$

آنگاه $u(z)$ در $\mathscr{D}$ همساز است .

اثبات ــ نقطه z_0 ، $z_0 \in \mathscr{D}$ را با $r > 0$ انتخاب می‌کنیم کـه $|z-z_0| \leq r$ درون $\mathscr{D}$ بیافتد . به‌عنوان‌نتیجه‌قضیه ۱۰ـ۱۰ ،تابع $u_1(z)$ موجوداست‌که‌بر $|z-z_0| < r$ همساز و بر $|z-z_0| \leq r$ پیوسته‌بوده‌و بردایره $|z-z_0| = r$ با $u(z)$ برابرباشد، چون‌کـه $u_1(z)-u(z)$ تابعی است پیوسته که در خاصیت میانگین صدق می‌کند ، اثبات اول قضیه ۱۰ـ۴ نشـان می‌دهد که $u_1(z)-u(z)$ ماکزیمم و می‌نیمم بر مرز دارد . چون که

بر $|z-z_0|=r,$ داریم $u_1(z)-u(z)\equiv 0$

پس نتیجه می‌شود که برای $|z-z_0|<r$ ، $u_1(z)\equiv u(z)$. پس $u(z)$ در یک همسایگی z_0 همساز است . چون که z_0 اختیاری بود ، $u(z)$ در سراسر $\mathscr{D}$ همساز خواهد بود .

پس یک شرط لازم و کافی برای آنکه تابع پیوسته در یک میدان همسازباشد آن‌است که در هر نقطه میدان در خاصیت میانگین صدق کند ، به عنوان کاربردی از این نکته ، قضیه زیر را که مشابه قضیه ۸ـ۶ است اثبات می‌کنیم :

قضیه ۱۰ـ۱۲ . فرض کنیم $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع همساز باشد که بر زیر که بر زیرمجموعه های فشرده $\mathscr{D}$ به تابع $u(z)$ همگرای یکنواخت باشد . در این صورت $u(z)$ در تمامی $\mathscr{D}$ همساز است .

اثبات ــ چون‌که به ازاء هر n ، $u_n(z)$ پیوسته است ، پیوستگی $u(z)$ ناشی‌ازقضیه ۶ـ۶ است . با $z_0\in\mathscr{D}$ مفروض و قرص $|z-z_0|\le r$ درون $\mathscr{D}$ ، برای هر n داریم :

$$u_n(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

بموجب قضیه ۸ـ۴

$$u(z_0)=\lim_{n\to\infty}u_n(z_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_n(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

و اینک قضیه،از قضیه ۱۰ـ۱۱ نتیجه می‌گردد .

نامساوی هارنک به قضیه‌یی در مورد دنباله‌های توابع همساز می‌انجامد .

قضیه ۱۰ـ۱۳ (اصل هارنک) . فرض کنیم $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع معین و همساز بر میدان $\mathscr{D}$ است و برای هر $z\in\mathscr{D}$ و هر n ، $u_{n+1}(z)\ge u_n(z)$ اگر $\{u_n(z)\}$ حداقل در یک نقطه $\mathscr{D}$ همگرا باشد ، آنگاه $\{u_n(z)\}$ در تمامی نقاط $\mathscr{D}$ همگراست . بعلاوه همگرایی بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ یکنواخت و تابع حدی در تمام $\mathscr{D}$ همساز است .

اثبات ــ می‌توانیم فرض‌کنیم $u_n(z)\ge 0$ ، زیرا اگر چنین نباشد ، قضبه را برای دنباله غیرمنفی $\{u_n(z)-u_1(z)\}$ اثبات می‌کنیم . به موجب خاصیت یکنوایی ، برای‌هر

z در $\mathscr{D}$ یا $\{u_n(z)\}$ همگراست و یا به ∞ می‌گراید . گیریم

$$A=\{z\in\mathscr{D}:\quad u_n(z)\to\infty\},$$
$$B=\{z\in\mathscr{D}:\quad \text{همگراست}\quad u_n(z)\}.$$

بـــــا $z_0\in\mathscr{D}$، مفروض، قرص $|z-z_0|\le R$ را درون $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم در این صورت برای هر z با $|z-z_0|\le R/2$ به موجب نامساوی هارنک داریم :

$$\frac{1}{3}u_n(z_0)=\frac{R-R/2}{R+R/2}u_n(z_0)\le u_n(z)\le\frac{R+R/2}{R-R/2}u_n(z_0)=3u_n(z_0). \quad (۲۱)$$

اگـــــر $u_n(z_0)\to\infty$ ، نامساوی چپ ۲۱ نشان می‌دهد که برای $|z-z_0|\le R/2$ ، $u_n(z)\to\infty$. اگر $\{u_n(z_0)\}$ همگـــــرا باشد نامساوی راست نشان می‌دهد کـه بـرای $|z-z_0|\le R/2$ ، $\{u_n(z)\}$ همگـــــراست . پس A و B هر دو بازند و $A\cup B=\mathscr{D}$. چون که میدان $\mathscr{D}$ همبند است یا $A=\varnothing$ و یا $B=\varnothing$. بنا به فرض حداقل یک نقطـه در B موجود است . پس $B=\mathscr{D}$ و $\{u_n(z)\}$ برای هر z در $\mathscr{D}$ همگراست .

سپس باید نشان دهیم $\{u_n(z)\}$ بـــــر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ همگرای یکنواخت است . با به کار بردن نامساوی هارنک برای $u_{n+p}(z)-u_n(z)$ ، همانند (۲۱) بـرای $|z-z_0|\le R/2$ و $p=1, 2, \ldots$ بدست می‌آید :

$$u_{n+p}(z)-u_n(z)\le 3\,[u_{n+p}(z_0)-u_n(z_0)] \quad (۲۲)$$

به موجب محک کوشی

$$u_{n+p}(z_0)-u_n(z_0)<\varepsilon \qquad (n>N(\varepsilon)).$$

پـــــس (۲۲) نشان می‌دهد که $\{u_n(z)\}$ در یک همسایگی z_0 همگرای یکنواخت است . چون که z_0 دلخواه بود ، به هر نقطه در $\mathscr{D}$ یک همسایگی از آن نقطه متناظر می‌گردد که بر آن $\{u_n(z)\}$ همگـــــرای یکنواخت است .

اینک اگر K زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$ باشد ، برای هر نقطه K یک همسایگی می‌سازیم که بر آن $\{u_n(z)\}$ همگرای یکنواخت باشد . بنا به قضیه هاین ــ بورل ، یک تعداد متناهی از این همسایگی‌ها K را می‌پوشاند . ولی اگر دنباله‌یی بر یک تعداد متناهی مجموعه‌هـای گوناگون همگرای یکنواخت باشد ، بر اجتماع آنها نیز همگرای یکنواخت است . پـــــس $\{u_n(z)\}$ بر K همگرای یکنواخت است .

در پایان ، از قضیه ۱۰ــ۱۲ نتیجه می‌گیریم که تابع حدی در تمام $\mathscr{D}$ همساز است .

تذکر ــ عکس نقیض قضیه مبین است که اگر دنباله در یک نقطه از میدان به ∞ بگراید ، در تمامی نقاط به ∞ می‌گراید . برای آنکه بدانیم در عمل هم ممکن است چنین حالتی رخ دهد دنباله $u_n(z)=x+n$

را در نظر می‌گیریم که در هر میدانی که واجد شرایط قضیه باشد، همساز است.

اینک به رده توابع تحلیلی در قرص $|z| < 1$ با قسمت حقیقی مثبت می‌پردازیم. و دانستنیهای خودرادرمورد توابع همساز برای‌آنها به کار می‌بندیم. بنابه نامساوی‌هارنک، اگر $u(z)$ برای $|z| < 1$. همساز و مثبت باشد و $u(0) = 1$ آنگاه:

$$u(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad (|z| < 1).$$

تعمیم زیرین را در مورد توابع تحلیلی در نظر بگیرید:

قضیه ۱۰–۱۴. فرض کنیم $f(z)$ برای $|z| < 1$ تحلیلی است و $f(0) = 1$. اگر برای $|z| < 1$، $\operatorname{Re} f(z) > 0$ آنگاه

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad (|z| < 1).$$

اثبات ۱ـ اگر $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$، به موجب (۱۳) می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} u(Re^{i\phi})\, d\phi \qquad (|z| < R < 1).$$

پس

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\, d\phi = \frac{R+|z|}{R-|z|} u(0) = \frac{R+|z|}{R-|z|}.$$

و با $R \to 1^-$ نتیجه حاصل است.

اثبات ۲ـ این اثبات مبتنی بر نامساوی شوراتس(لم شوراتس) است، بر خلاف‌قبلی که بر نامساوی هارنک مبتنی بود،

اگر $\operatorname{Re} f(z) > 0$، آنگاه تابع

$$g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \qquad (۲۳)$$

برای $|z| < 1$ در $|g(z)| < 1$ صادق است، چون که $g(0) = 0$، از نامساوی شوارتس نتیجه می‌شود که

برای $|z| < 1.$ داریم $|g(z)| \leq |z|$

و با حل $f(z)$ در (۲۳)، حاصل می‌شود:

$$f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}.$$

ولی

$$|f(z)| \leq \frac{1+|g(z)|}{1-|g(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

و اثبات تمام است.

تذکر ۱ــ این قضیه یک تعمیم نامساوی هارنک است زیرا که $\operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)|$.

تذکر ۲ــ فرض $f(0)=1$ عمومیت نامساوی را تحدید نمی‌کند. زیرا اگر $\operatorname{Re} f(z)>0$، آنگاه قضیه را می‌توان برای تابع

$$h(z)=\frac{f(z)-i\operatorname{Im} f(0)}{\operatorname{Re} f(0)},$$

که در شرایط $\operatorname{Re} h(z)>0$ و $h(0)=1$ صدق می‌کند، بکار برد.

تذکر ۳ــ اگر تنها فرض می‌کردیم که برای $|z|<1$، $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$، آنگاه از قضیه نگاشت باز می‌توانستیم استنتاج کنیم که برای $|z|<1$، $\operatorname{Re} f(z)>0$.

قضیه بعدی ما نیز می‌تواند با روشی مبتنی بر توابع همساز و یا با روشی مبتنی بر لم شوارتس اثبات شود:

قضیه ۱۰ــ۱۵. فرض کنیم برای $|z|<1$، $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است: اگر برای $|z|<1$، $\operatorname{Re} f(z)>0$، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq 2$.

اثبات ۱ــ اگر $f(z)=u(re^{i\theta})+iv(re^{i\theta})$ با $a_n=\alpha_n+i\beta_n$، آنگاه

$$u(re^{i\theta})=1+Re\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m \cos m\theta-\beta_m \sin m\theta)r^m.$$

این رشته بر دایره $|z|=r<1$ همگرای یکنواخت است. به موجب قضیه ۸ــ۴، می‌توانیم در $\cos n\theta$ و یا $\sin n\theta$ ضرب کنیم و سپس جمله به جمله انتگرال بگیریم. چونکه برای $n \neq m$ داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta=\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta=0$$

و برای هر n و m داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta \, d\theta = 0$$

پس همانندیهای زیر را خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_n r^n \cos^2 n\theta \, d\theta = \alpha_n r^n, \qquad (۲۴)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -\beta_n r^n \sin^2 n\theta \, d\theta = -\beta_n r^n. \qquad (۲۵)$$

(۲۵) را در $i-$ ضرب می‌کنیم و با (۲۴) جمع می‌کنیم تا حاصل شود.

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n)r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta} \, d\theta.$$

پس

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) |e^{-in\theta}| \, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, d\theta.$$

به موجب خاصیت میانگین

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \, d\theta = 2u(0) = 2.$$

پس، $|a_n| r^n \leq 2$ و با $r \to 1^-$، قضیه ثابت می‌شود.

اثبات ۲ــ تابع

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

در قـــــرص $|z| < 1$ تحلیلی است با $g(0) = 0$ و $|g(z)| < 1$. به موجب تمرین ۸ بخش ۸ــ۳، $|g'(0)| \leq 1$. ولی $g'(0) = a_1/2$ و بنابراین $|a_1| \leq 2$

اکنون نشان می‌دهیم که برای n دلخواه، $|a_n| \leq 2$. و این کار را با ساختـــن تابع جدیدی به شکل

$$1 + a_n z + \cdots,$$

انجام می‌دهیم. این تابع جدید در شرایط قضیه صدق می‌کند. با توجه به همانندی

$$\sum_{k=1}^{n} e^{(2k\pi i)m/n} = \begin{cases} n, & \text{اگر } m \text{ مضرب } n \text{ باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می‌توان تحقیق کرد (تحقیق کنید!) که تابع

$$h(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(e^{2k\pi i/n}z^{1/n})=1+a_n z+\cdots$$

بـــــــرای $|z|<1$ تحلیلی است و دارای قسمت حقیقی مثبت می‌باشد. پس $|a_n|\leq 2$ و اثبات تمام است.

تابع $f(z)=(1+z)/(1-z)$ دایره $|z|=1$ را بر محور انگاری می‌نگارد و قرص $|z|<1$ را بر نیم صفحه راست می‌نگارد. این تابع نشان می‌دهد که در دو قضیه قبـل امکان تساوی هم موجود است. بدین معنی که $\operatorname{Re} f(z)=(1+|z|)/(1-|z|)$، هنگامی که z عدد حقیقی مثبت باشد، و

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}=(1+z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n=1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

<u>پرسش‌ها</u>

۱ــ آیا می‌شود خاصیت میانگین برای توابع ناپیوسته برقرار باشد؟

۲ــ اگر دو تابع پیوسته در خاصیت میانگین صدق کنند، آیا حاصلجمع آنها هم صدق میکند؟ حاصلضرب چطور؟

۳ــ فرض کنید $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع همساز است و $\{v_n(z)\}$ مزدوج همساز آن می‌باشند. اگر $\{u_n(z)\}$ در ناحیه‌یی همگرای یکنواخت باشد، آیا $\{v_n(z)\}$ نیز همگرای یکنواخت است؟

۴ــ اگر در قضیه ۱۰ــ۱۳، فرض $u_{n+1}(z)\geq u_n(z)$ با فرض $u_{n+1}(z)\leq u_n(z)$ جایگزین شود، باز قضیه درست است؟

۵ــ چه نوع تعمیمی برای قضیه ۱۰ــ۱۴ می‌توانید اثبات کنید.

۶ــ چرا بعضی قضایا برای زیر مجموعه‌های فشرده یک میدان برقرارند و در همه میدان برقرار نیستند؟

۷ــ در اثبات اول قضیه ۱۰ــ۱۵، مثبت بودن $\operatorname{Re} f(z)$ در چه جایی بکار رفت؟

۸ــ ارتباط میان نامساوی شوارتس و نامساوی هارنک در کجاست؟

<u>تمرینها</u>

۱ــ فرض کنید $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع همساز در میدان $\mathscr{D}$ است و برای هر $z\in\mathscr{D}$ و هر n، $u_{n+1}(z)\geq u_n(z)$. اگر به ازاء z_0 ی در $\mathscr{D}$، $u_n(z_0)\to\infty$، نشـــان دهید، بر زیر مجموعه‌های فشرده $u_n(z)\to\infty$ بطور یکنواخت. بدین معنی که اگر C مجموعـه فشرده مفروضی و M یک عدد حقیقی باشد، نشان دهید، برای $n>N$ و همه $z\in C$، $u_n(z)\geq M$

۲ــ گیریم K زیر مجموعه فشرده میدان $\mathscr{D}$ است . و $z_0 \in \mathscr{D}$ مفروض است . نشان‌دهید ثابتهای حقیقی A و B (وابسته به z_0 ، K و $\mathscr{D}$) موجودند بطوری که برای هر z در K و همه‌توابع همساز $u(z)$ در $\mathscr{D}$ داشته باشیم

$$A \cdot u(z_0) \leq u(z) \leq B \cdot u(z_0)$$

۳ــ تابع حقیقی و پیوسته $u(z)$ را در میدان $\mathscr{D}$ زیر همساز نامند اگر چنانچه برای هر قرص $|z - z_0| \leq r$ در $\mathscr{D}$ داشته باشیم

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

نشان دهید که یک تابع زیر همساز غیرثابت در یک میدان ماکزیمم ندارد . آیا می‌شود که می‌نیمم داشته باشد ؟

۴ــ فرض‌کنید برای $|z| < 1$ ، $f(z)$ تحلیلی باشدو $\operatorname{Re} f(z) > 0$. اگر $f(0) = 1$ ، با بکار بردن قضیه ۱۰ــ۱۴ برای $1/f(z)$ ، نشان دهید .

$$|f(z)| \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}.$$

آیا این را می‌توان از نامساوی هارنک نتیجه گرفت ؟

۵ــ فرض کنید $g(z)$ برای $|z| < 1$ تحلیلی است و $g(0) = 1$. اگر $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$ نشان دهید که

$$|g(z)| \leq \frac{1 + (1 - 2\alpha)|z|}{1 - |z|} \qquad (|z| < 1).$$

(راهنمایی : قرار دهید $g(z) = (1 - \alpha) f(z) + \alpha$ ، که $\operatorname{Re} f(z) > 0$. سپس قضیه ۱۰ــ۱۴ را بکار ببرید . چرا α نمیتواند از 1 متجاوز باشد) .

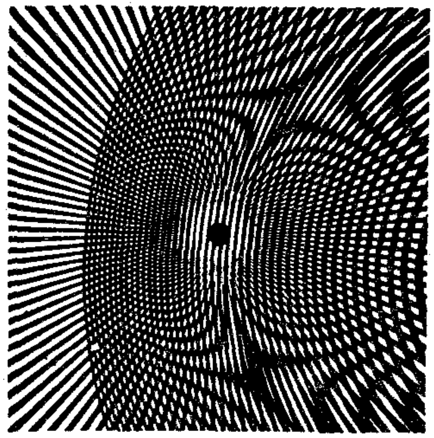
۶ــ در شرایط تمرین قبل نشان دهید که

$$|g(z)| \geq \frac{1 - (1 - 2\alpha)|z|}{1 + |z|} \qquad (|z| < 1).$$

۷ــ فرض کنید که برای $|z| < 1$. $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است با $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$. نشان دهید که برای هر n ، $|a_n| \leq 2(1 - \alpha)$. (راهنمایی : قراردهید $f(z) = (g(z) - \alpha)/(1 - \alpha)$ و قضیه ۱۰ــ۱۵ را بکار ببرید) .

۸ــ نشان‌دهیدکه‌در قضیه ۱۰ــ۱۴ و ۱۰ــ۱۵ تساوی برقرار می‌گردد ، اگر و تنها اگر $f(z)$ به شکل زیر باشد :

$$f(z) = \frac{1 + e^{i\theta_0} z}{1 - e^{i\theta_0} z} \qquad (\text{حقیقی } \theta_0)$$



۱۱ـ نگاشت‌های همدیس و قضیه نگاشت ریمان

بررسی ما از خواص نگاشتی در فصل ۳ و ۴ محدود بود، زیرا که در آنوقت هنوز مشتق معرفی نگشته بود. به دلیل این نقیصه مجدداً" به توابع قدیمی باز می‌گردیم. خواهیم دید که مشتق ارتباطی میان زاویه بین دو خم با زاویه بین نگاره آنها ایجاد می‌کند. بعلاوه خواهیم دید مشتق میزان "پیچیدگی" نگاره خم‌ها را اندازه می‌گیرد.

آن دسته از توابع تحلیلی که قرص‌ها و نیم صفحات را بر قرصها و نیم صفحات، قرصها را بر درون بیضی و غیره می‌نگارند، را قبلاً" ساختیم. نتیجه مهاد این فصل، معروف به قضیه نگاشت ریمان، حاکی است که تقریباً" همیشه یک تابع تحلیلی موجود است که یک میدان همبند ساده مفروض را بر یک میدان همبند ساده دیگر بنگارد. روش ما مبتنی بر خانواده‌های نرمال است، مفهومی که به واسطه آن قادریم توابع حدی را از خانواده‌های توابع استخراج کنیم. خاطرنشان می‌گردیم که چگونه قبلاً" نقاط حدی از دنباله‌های نقاط استخراج شد (قضیه بولتسانو ـ وایرشتراس).

۱۱ـ۱. نگاشت‌های همدیس

هر خط مستقیم را در صفحه که از مبداء بگذرد، می‌توان با $\sigma(s)=se^{i\alpha}$، که s مجموعه اعداد حقیقی را می‌پیماید، پارامتری نمود، که α زاویه ــ برحسب رادیان ــ میان خط و محور حقیقی مثبت است. عموماً"، خط مستقیمی که از نقطه z_0 می‌گذرد و با محور حقیقی زاویه α می‌سازد، را می‌توان به صورت $\sigma(s)=z_0+se^{i\alpha}$، s حقیقی، نمایش داد.

اکنون فرض کنیم که تابع f بر خم هموار $z(t)$ تحلیلی است. در این صورت نگاره

$z(t)$ تحت f نیز یک خم هموار است که مشتـــق آن $f'(z(t))z'(t)$ می‌باشد. یـک خم هموار با در دست بودن مماس در هر نقطه‌اش مشخص می‌گردد. هدف ما مقایسه شیب مماس بر خم در یک نقطه با شیب مماس بر خم نگاره، درنگاره همان نقطه می‌باشد. گیریم $z_0 = z(t_0)$ نقطه‌یی بر خم $z = z(t)$ و فرض کنیـــــــم $w = w(t) = f(z(t))$ با $w_0 = f(z_0)$. برای هر نقطه z بر خم به غیر از z_0، همانندی زیر را داریم:

$$w - w_0 = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

پس

$$\arg(w - w_0) = \arg\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \arg(z - z_0) \quad (\text{mod } 2\pi), \qquad (۱)$$

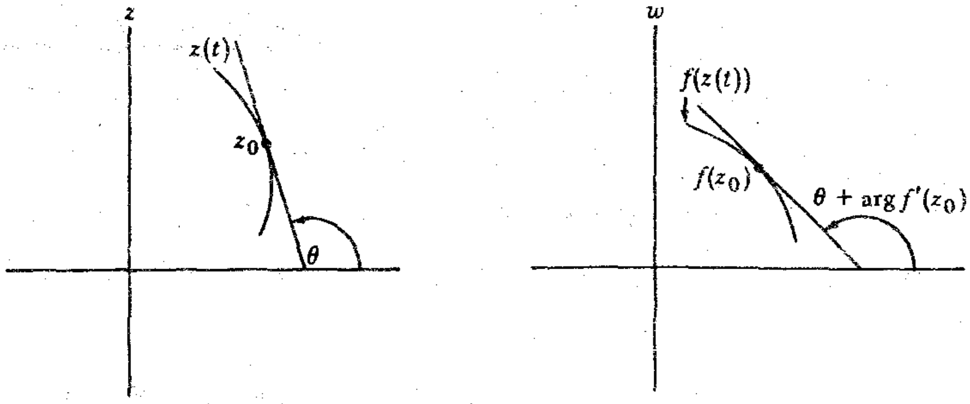
کـــــه فرض بر آن است $f(z) \neq f(z_0)$، تا که (۱) با معنی باشد. قابل‌توجه است‌که $\arg(z - z_0)$، در صفحـــه z، زاویه میان محور x و خط مستقیم‌گذرابر z و z_0 است. درحالی که $\arg(w - w_0)$، در صفحه w، زاویه میان محور u، و خط مستقیم گذرا بر w و w_0 است. پس با میل z به z_0 بر خم $z(t)$، $\arg(z - z_0)$ به‌مقدار θ میل می‌کند که زاویه میان مماس بر خم $z(t)$ در z_0 با محور x ها است. بطریقـــی مشابـــه، $\arg(w - w_0)$ به مقدار ϕ میل می‌کند، که ϕ زاویه مماس بر خـــم $f(z(t))$ در نقطـه w_0 با محور u ها است.

فرض‌کنیم $f'(z_0) \neq 0$ تا $\arg f'(z_0)$ با معنی باشد. با محاسبه حد در(۱)در می‌یابیم که

$$\phi = \arg f'(z_0) + \theta \quad (\text{mod } 2\pi) \qquad (۲)$$

بدین معنی که تفاوت میان مماس بر یک خم در یک نقطه با مماس بر نگاره خــم در نگاره آن نقطه تنـها به مشتق تابع درآن نقطه وابسته است (ر. ک. شکل ۱).

شکل ۱



اگر دو خم هموار در نقطه‌یی برخورد کنند، زاویه میان این دو خم به عنوان زاویه میان مماس‌های بر این دو خم در نقطه بر خورد تعریف می‌گردد. اکنون می‌توان گفت:

قضیه ۱۱–۱. فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی است با $f'(z_0) \neq 0$. گیریم C_1 و C_2 خم‌های هموار در صفحه z هستند که در نقطه z_0 برخورد کرده‌اند و نگاره‌های آنها به ترتیب C_1' و C_2' می‌باشد. در این صورت زاویه میان C_1 و C_2 از C_1 تا C_2 برابر است با زاویه میان C_1' و C_2' از C_1' تا C_2'.

اثبات – گیریم مماسهای بر C_1 و C_2 به ترتیب با محور x ها زوایای θ_1 و θ_2 داشته باشند (ر. ک. شکل ۲). در این صورت زاویه میان C_1 و C_2 برابر است با $\theta_2 - \theta_1$. به موجب (۲)، زاویه میان C_1' و C_2' برابر است با

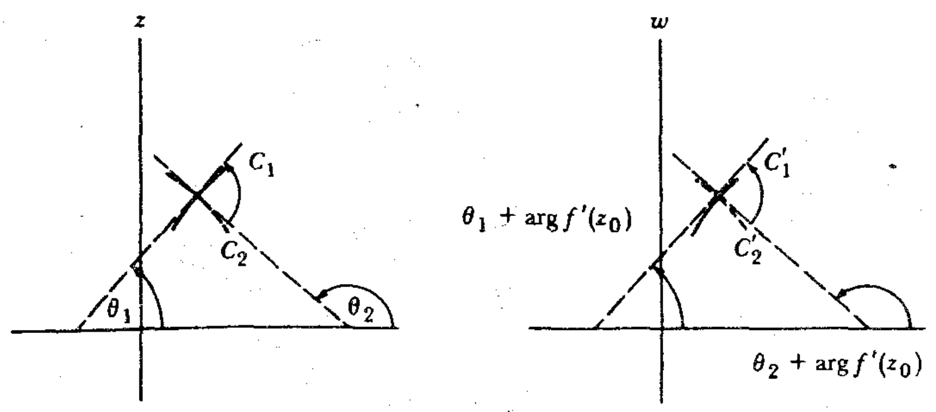
$$\theta_2 + \arg f'(z_0) - (\theta_1 + \arg f'(z_0)) = \theta_2 - \theta_1,$$

و قضیه ثابت می‌شود.

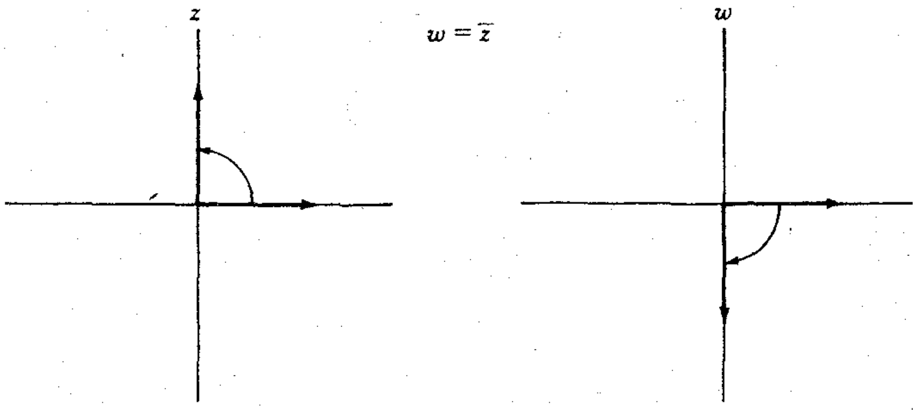
تابعی که اندازه زاویه و هم جهت را محفوظ بدارد همدیس نامیده می‌شود. قضیه ۱۱–۱ مبین آن است که توابع تحلیلی در تمام نقاطی که مشتق مخالف صفر دارد همدیس است. تابعی که تنها اندازه زاویه را و نه جهت را محفوظ بدارد همگوشه نام دارد. مثالی از چنین تابعی $f(z) = \bar{z}$ است. برای تشریح، $\bar{z}$ محور حقیقی مثبت و محور انگاری مثبت را به ترتیب بر محور حقیقی مثبت و محور انگاری منفی می‌نگارد. (ر. ک. شکل ۳). گو اینکه دو خم در هر کدام از صفحات در زاویه قائمه تلاقی می‌کنند، ولی یک زاویه "با جهت مثبت" بر یک زاویه "با جهت منفی" نگاشته می‌شود.

فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی با مشتق مخالف صفر است. اگر z نزدیک z_0 باشد. در مورد دوری z تا z_0 با دوری نگاره‌های آنها یک ارتباط جالب موجود است.

شکل ۲



شکل ۳



قابل توجه است که

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

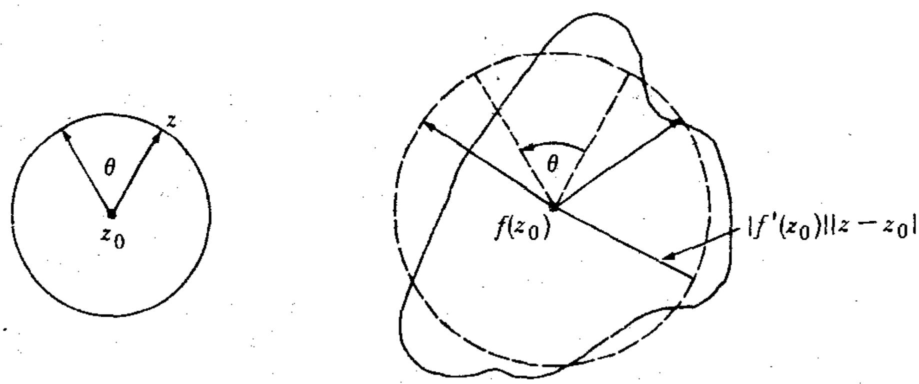
پس برای z های نزدیک z_0

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)|\ |z - z_0|. \qquad (۳)$$

با بیانی نه چندان دقیق: وقتی z نزدیک z_0 است، $f(z)$ را می‌توان با تابع خطی $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ تقریب زد. و این کار بدین دلیل منطقی است که توانهای بالای $z - z_0$ قابل صرفنظرکردن است. با توجه به (۳) همسایگی‌های "کوچک" z_0، برنگاره‌های کم و بیش متشابه با ضریب بزرگسازی $|f'(z_0)|$ نگاشته می‌شوند. (ر. ک. شکل ۴). پس $f'(z_0)$ در سرشت هندسی نگاره، دو نقش دارد. به موجب (۲)، $\arg f'(z_0)$ میزان دوران را اندازه می‌گیرد، به موجب (۳) $|f'(z_0)|$ (برای نقاط مجاور) میزان بزرگسازی و یا انقباض نگاره را اندازه می‌گیرد.

مقایسه جالبی می‌توان میان مشتقات توابع حقیقی و مختلط انجام داد. برای توابع مشتق‌پذیرحقیقی، مخالف صفر نبودن مشتق در یک فاصله، یک به یک بودن تابع را تضمین می‌کند. ولی در مورد توابع مختلط بر یک میدان چنین نیست. در حالی که

شکل ۴



مشتـــــــق تابع e^z هرگز صفر نیست، ولی برای هر z ، $e^z = e^{z+2\pi i}$. بـــا این حال ازنظر هندسی روشن است که مخالف صفر بودن مشتق، حداقل به صورت موضعی، موجب یک به یک بودن تابع می‌گردد. اینک از نظر صوری این را نشان می‌دهیم:

قضیه ۱۱ــ۲. اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد و $f'(z_0) \neq 0$ ، آنگاه $f(z)$ در یک همسایگی z_0 یک به یک است.

اثبات ــ چون که $f'(z_0) \neq 0$ ،پس تابع

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

در $z = z_0$ قطب ساده دارد . به موجب تمرین ۱۱ در بخش ۸ــ۴، یک همسایگی برای z_0 موجود است که در آن $f(z) - f(z_0)$ هر مقداری را بیش از یک‌بار نمی‌پذیرد. بدین معنی که $f(z)$ در این‌همسایگی z_0 یک به یک است. این اثبات را کامل می‌کند.

دریک‌تابع حقیقی اگرمشتق صفر شود باز هم ممکن است تابع یک به یک باشد. گرچه مشتق تابع $f(x) = x^3$ در مبداء صفر است ولی این تابع بر خط حقیقی یک به یک‌است. ولی ذیلاً " می‌بینیم که در توابع مختلط چنین چیزی ممکن نیست.

قضیه ۱۱ــ۳. اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی و یک به یک باشد، آنگاه در $\mathscr{D}$ ، $f'(z) \neq 0$.

اثبات ــ اگر در z_0 ی متعلق به $\mathscr{D}$ ، $f'(z_0) = 0$ آنگاه تابع

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

صفری از مرتبه k ، $k \geq 2$ ، دارد. به‌موجب‌فرع قضیه ۸ــ۱۳، دایـــــره $|z - z_0| = r$ موجوداست‌که $f(z) - f(z_0)$ و $f'(z)$ درقرص‌سفته $0 < |z - z_0| \leq r$ صفر دیگری‌نداشته باشند. گیریم

$$m = \min_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)|,$$

و قرار می‌دهیم.

$$g(z) = f(z) - f(z_0) - a \qquad (0 < |a| < m).$$

نشان‌خواهیم دادکه $g(z)$ در $|z-z_0| \leq r$، حداقل دو صفر متمایز دارد. ملاحظه می‌گردد که $g(z_0)=-a\neq 0$ و برای $0<|z-z_0|\leq r$ ، $g'(z)=f'(z)\neq 0$. پس همه صفرهای $g(z)$ در $|z-z_0| \leq r$ ساده هستند. چون که بر $|z-z_0|=r$

$$|f(z)-f(z_0)|\geq m>|a|$$

بـــه موجب قضیه روشه، نتیجه می‌گیریم که $g(z)$ و $f(z)-f(z_0)$ دارای تعـداد صفرهای مساوی k ($k\geq 2$) هستند. ولی این بدان معنی است که می‌بایست k نقطه متمایز در $|z-z_0|=r$ موجود باشد که $f(z)=f(z_0)+a$ ، که با فرض ما متناقض است و بدین ترتیب اثبات تمام است.

در موارد توابع مشتق‌پذیرنتایج حاصله را جمع بندی می‌کنیم. در حالت حقیقی شرط کافی ولی نه لازم برای‌آنکه تابع در یک فاصله یک به یک باشد آن است‌که مشتق مخالـف صفر باشد، در حالی که در مورد مختلط، شرط لازم و نه کافی برای آن که تابع در یک میدان یک به یک باشد آن است که مشتق مخالف صفر باشد.

یک شرط کافی برای آنکه تابع تحلیلی در میدان همبند ساده‌یی یک به یک باشد، آن است که بر مرز میدان یک به یک باشد. رسمی‌تر اینکه:

قضیه ۱۱-۴. فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ و بر مرزش، که مرز ساده بسته C است، تحلیلی باشد. اگر $f(z)$ بر C یک به یک باشد، آنگاه $f(z)$ در $\mathscr{D}$ یک به یک است.

اثبات ــ نقطه z_0 را در $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم‌که برای z بر C ، $w_0=f(z_0)\neq f(z)$. به موجب اصل شناسه، تعـداد صفرهـای $f(z)-f(z_0)$ در $\mathscr{D}$ عبـارت اسـت از $(1/2\pi)\,\Delta_C\{f(z)-f(z_0)\}$. بنابه فرض نگارهٔ C می‌بایست یک مرزساده‌بسته باشد که‌آنرا با C' نمایش می‌دهیم (ر. ک. شکل ۵). پس اگر $w=f(z)$ مرز C' رابه‌پیماید، تغییرات خالص در شناسه $w-w_0=f(z)-f(z_0)$ ، بسته به اینکه پیمایش در جهت خلاف یا موافق عقربه‌های ساعت باشد، $+2\pi$ یا -2π است. چون که $f(z)$ در $\mathscr{D}$ حداقل یک بار w_0 می‌شود، می‌بایست داشت که

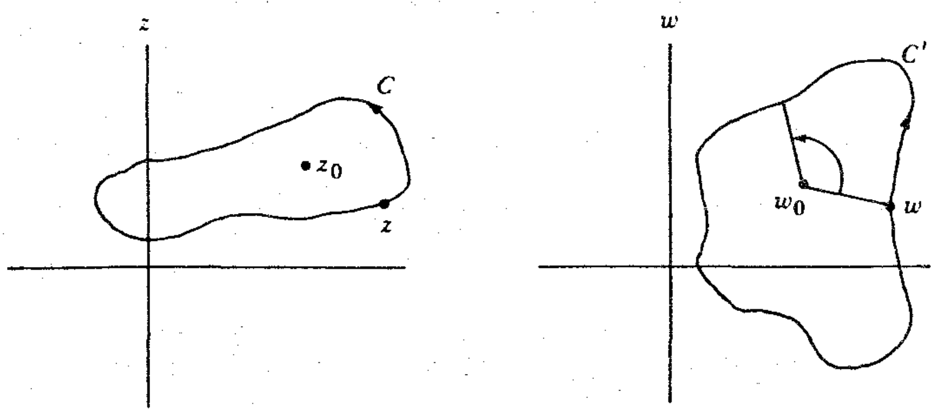
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\{f(z)-f(z_0)\}=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\{w-w_0\}=1.$$

یعنی، $f(z)$ در $\mathscr{D}$ دقیقا" یک بار با $f(z_0)$ برابر می‌گردد.

بااین ترتیب قضیه برای تمام نقاط z_0 در $\mathscr{D}$ ، که $f(z)\neq f(z_0)$ وقتی که z بـر

C ، ثابت می‌گردد . اگر $f(z)=f(z_0)$ در نقطه‌یی بر C باشد ، در این صورت عبارت $\Delta_C\{f(z)-f(z_0)\}$ معیـــن نیست . به خواننده واگذار می‌کنیم که اثبات را در ایـــن حالت خاص تکمیل کند .

شکل ۵



در اثبات قضیه ۱۱ـ۱ ، ما به صفر نشدن مشتق استناد کردیم . اینک رفتار تابع را در یک همسایگی نقطه بحرانی بررسی می‌کنیم ، که منظور از نقطه بحرانی ، نقطه‌یی است که‌مشتق‌در آن صفر می‌شود .اگر مشتق تابع تحلیلی $f(z)$ در $z=z_0$ صفر مرتبه k داشته باشد ، در این صورت می‌توان نوشت

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+\cdots .$$

پس

$$\arg[f(z)-f(z_0)]=k\arg(z-z_0)+\arg\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]. \quad (۴)$$

فـــــرض کنیم θ زاویه‌یی است که مماس بر یک خم هموار در z_0 با محور x ها می‌سازد ، و ϕ زاویه‌یی است که مماس بر نگاره این خم در $f(z_0)$ با محور u ها می‌سازد . اگـــر z بر خم به z_0 میل کند (۴) نتیجه می‌دهد :

$$\phi=k\theta+\arg\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (۵)$$

ملاحظـــــه می‌شود که در حالت خاص $k=1$ ، (۵) به (۱) تحویل می‌گردد . در حالت عمومی ، مماس‌برنگاره خم به مماس بر خم اصلی و هم‌چنین به مرتبه و شناسهٔ اولین مشتق مخالف در نقطه مورد نظر ، بستگی دارد . همان طور که (۲) به قضیه ۱۱ـ۱ منجر شد ،

(۵) هم به قضیه زیر منجر می‌گردد:

قضیه ۱۱ـ۵. فرض‌کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z)$ در z_0 صفر مرتبه $k-1$ دارد. اگردوخم هموار در صفحه z با زاویه θ برخورد کنند، نگاره‌های آنها درصفحه w با زاویه $k\theta$ برخورد می‌کنند.

اثبات ــ فرض کنیم که مماسهای هر دو خم با محور حقیقی زوایای θ_1 و θ_2 داشته باشند. در اینصورت $\theta=\theta_2-\theta_1$ زاویه میان دو خم است. به موجب (۵)، زاویه ϕ میان نگاره‌های آنها برابر است با:

$$\phi=k\theta_2+\arg\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}-\left(k\theta_1+\arg\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right)=k\theta.$$

با ترکیب قضیه ۱۱ـ۱ و ۱۱ـ۵ می‌بینیم که تابع تحلیلی در یک نقطه همدیس‌است اگر و تنها اگر در آن نقطه مشتق مخالف صفر داشته باشد.

اکنون مناسب‌است تبدیل دو خطی را که در فصل ۳ مطالعه کردیم، از دیدگاه‌نگاشت همدیس، بار دیگر مورد بررسی قرار دهیم. یادآور می‌شویم که تبدیل

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ad-bc\neq0)\tag{۶}$$

نمایش یک نگاشت پیوسته و یک به یک از صفحه گسترش یافته بر خودش می‌باشد و $f(-d/c)=\infty$ و $f(\infty)=a/c$ چونکه $f'(z)=(ad-bc)/(cz+d)^2\neq0$، نگاشت برای تمام نقاط متناهی z، $z\neq-d/c$، همدیس است.

چنانچه‌دیدیم، دایره یا خط مستقیم، بسته به اینکه چه نقطه‌یی بر∞ نگاشته‌شود، بر دایره یا خط مستقیم نگاشته می‌شود. به عنوان مثال،تبدیل انعکاسی$w=1/z$ خطوط مستقیمی را که از مبداء نگذرند بر دوایر می‌نگارد. به ویژه خطوط $y=x+1$ و $y=-x+1$ را به ترتیب بر دوایر زیر می‌نگارد:

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

و

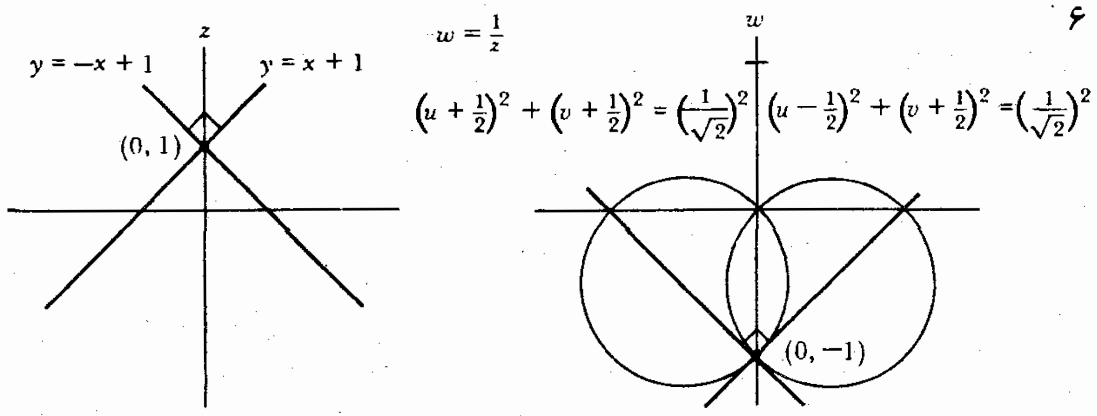
$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

در بدو امر، شکل ۶ قدری گمراه‌کننده است. یک جفت خط مستقیم که در یک نقطه برخورد کرده‌اند، بر یک جفت دایره نگاشته می‌شوند که در دو نقطه برخورد دارند. ولی

نباید فراموش کرد که این خطوط در∞ نیز برخورد دارند. در مورد هر دو خط $(0, 1)$ بر $(0, -1)$ نگاشته می‌شود. در حالی که نقطه∞ بر مبداء نگاشته می‌شود. دو خط در $(0, 1)$ با زاویه قائمه برخورد می‌کنند و دو دایره هم در $(0, -1)$ چنین می‌کنند. و این مطلب با قضیه ۱۱ـ۱ هماهنگ است.

ولی این دو خط در∞ در چه زاویه‌یی برخوردارند؟ به تعریف زیر نیاز داریم: گوئیم دو خم هموار در صفحه گسترش یافته در نقطه∞ با زاویه α برخورد می‌کنند اگر چنانچه نگاره‌های آنها در تبدیل $w = 1/z$ در مبداء با زاویه α برخورد کنند. چونکه دو دایره شکل ۶ در مبداء در زاویه قائمه برخورد دارند، خطوط $y = x + 1$ و $y = -x + 1$ در∞ در زاویه قائمه برخورد می کنند.

شکل ۶



با این تعریف می‌توان نشان داد که همه تبدیلات به شکل (۶) در∞ همدیس‌اند. دو حالت برای بررسی موجود است.

حالت ۱ـ $c \neq 0$. در (۶) $z = 1/\zeta$ و $f(z) = g(1/z)$. در این صورت

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a/\zeta + b}{c/\zeta + d} = \frac{b\zeta + a}{d\zeta + c}.$$

چون که $g'(0) = (bc - ad)/c^2 \neq 0$، نتیجه می‌شود که $g(\zeta)$ در$\zeta = 0$ همدیس است. ولی این بدان معنی است که $f(z)$ در$z = \infty$ همدیس است.

حالت ۲ـ $c = 0$. در این صورت (۶) خطی است و$z = \infty$ را بر$w = \infty$ می‌نگارد. قرار می‌دهیم $z = 1/\zeta$، $w = 1/\omega$، $h(z) = 1/f(1/z)$ در (۶). در این صورت

$$\frac{1}{\omega} = \frac{a/\zeta + b}{d} = \frac{b\zeta + a}{d\zeta} \qquad \omega = h(\zeta) = \frac{d\zeta}{b\zeta + a}.$$

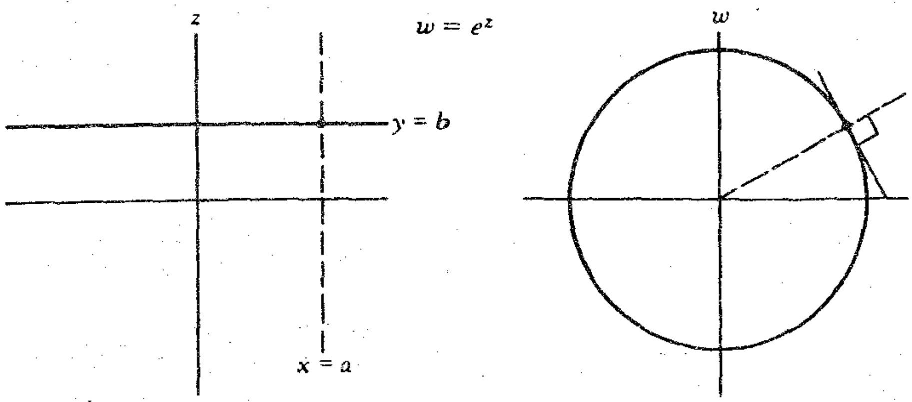
چون‌که $h'(0) = d/a \neq 0$، $h(\zeta)$ در $\zeta = 0$ همدیس‌است؛ یعنی‌که $f(z)$ در$z = \infty$

همدیس است .

<u>پس یک تبدیل دو خطی ، یک نگاشت همدیس و یک به یک از صفحه گسترش یافته بر خودش می‌باشد .</u>

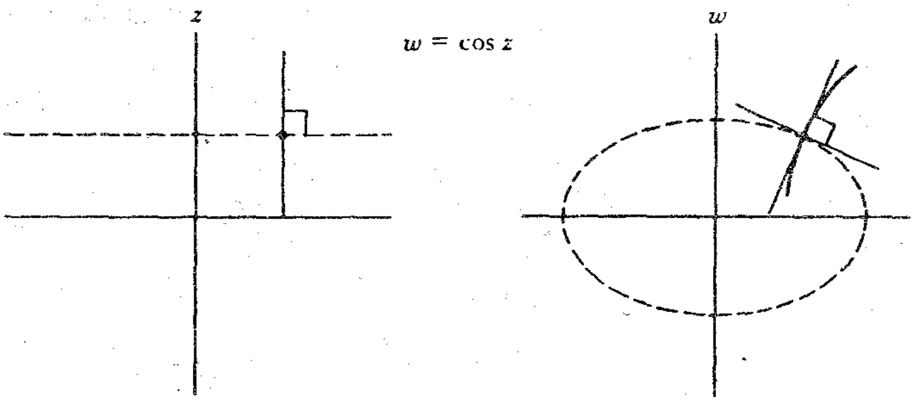
از فصل ۴ ، یادآور می‌شویم که تابع نمایی e^z خطوط موازی محور y ها را بر دوایری به‌مرکز مبداء و خطوط موازی محور x ها را بر پرتوهای منشعب از مبداء می‌نگارد . در هندسه مقدماتی دیده‌ایم که این دو خم نگاره در زاویه قائمه برخورد می‌کنند (ر . ک . شکل ۷) .

شکل ۷



در پایان ، تابع $w = \cos z$ را که خطوط موازی محور y ها را بر بیضی‌ها و خطوط موازی محور x ها را بر هذلولی‌ها می‌نگارد ، در نظر می‌گیریم . به موجب قضیه ۱۱–۱ ، مقاطع مخروطی می‌بایست در زاویه قائمه برخورد کنند (ر . ک . شکل ۸) .

شکل ۸



<u>پرسش‌ها</u>

۱– منظور از مماس در یک نقطه با خط مستقیم چیست ؟

۲– آیا لازم بود ، در قضیه ۱۱–۱ ، فرض کنیم که آن خمها هموارند ؟

۳– آیا می‌شود توابع غیرتحلیلی همدیس باشند ؟

۴ـ چگونه توابعی همگوشه‌اند ؟

۵ـ چرا مشتق،چنین نقش اصلی را ایفا می‌کند ؟

۶ـ اگر تابعی در یک همسایگی هر نقطه یک میدان یک به یک باشد ، چرا بدین‌معنی نیست که درتمام میدان یک به یک است ؟

۷ـ چه ارتباطی میان همدیس و یک به یک موجود است ؟

۸ـ دو خط موازی،در∞ در چه زاویه‌یی برخورد می‌کنند ؟

۹ـ چگونه می‌توان تحلیلی بودن تابع در∞ را تعریف کرد ؟

۱۰ـ آیا حاصلجمع نگاشت‌های همدیس، همدیس است ، حاصلضرب چطور؟ ترکیب چطور؟

تمرینها

۱ـ عدد مختلط z_0 و$0<\varepsilon$ مفروضند . نشان دهید ، تابع $f(z)$ موجود است که در z_0 تحلیلی است و با $f'(z_0)\neq 0$ وبطوری که برای $|z-z_0|<\varepsilon$ ، $f(z)$ یک به یک نباشد . آیا این با قضیه ۱۱ـ۲ متناقض است؟

۲ـ نشان دهید ، z^2 در میدان $\mathscr{D}$ یک به یک است اگر و تنها اگر $\mathscr{D}$ در نیم‌صفحه‌یی باشد که مرزش از مبداء بگذرد .

۳ـ نشان‌دهید دوخم هموار در∞ در زاویه α برخورد می‌کنند اگر وتنها اگرنگاره‌های آنهادرافکنش گنجگاری (بخش۲ـ۴ ملاحظه شود) در قطب شمال در زاویه α برخوردکنند .

۴ـ نشان دهید ، $f(\bar{z})$ و $\overline{f(z)}$ هر دو در نقطه‌یی که $f(z)$ تحلیلی و با مشتق مخالف صفر است ، همگوشه‌اند .

۵ـ اگر دو خط مستقیم در یک تبدیل دو خطی بر دوایر مماس بر یکدیگر نگاشته شوند ، نشان دهید ، ایندو خط می‌بایست موازی باشند . آیا معکوس مطلب هم درست است ؟

۶ـ شعاع بزرگترین قرص به‌مرکز مبداء را بیابید که بر آن قرص $w=e^z$ یک به یک‌باشد . اگر قرص به مرکز نقطه دلخواه z_0 باشد ، آیا شعاع متفاوت خواهد بود ؟

۷ـ $\arg f'(z)$ را در تابع $f(z)=e^z$ بیابید . با استفاده‌ازاین ، تحقیق‌کنید ، خطوط موازی محور y ها و x ها به ترتیب بر دوایر و پرتوها نگاشته می‌شوند .

۸ـ فرض‌کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی‌است و $f'(z_0)\neq 0$. ثابت‌کنید ، یک‌مستطیل "کوچک" که z_0 درون آن باشد و مساحت آن A باشد بر شکلی که مساحت آن تقریبا " $|f'(z_0)|^2A$ می‌باشد نگاشته می‌شود .

۹ـ مستقیما " و یا با استفاده از قضیه ۱۱ـ۴ ، نشان دهید ، تابع $w=z^n$ ، پرتو

$\arg z=\theta$ $(0\leq\theta<2\pi/n)$ را بر پرتو $\arg z=n\theta$ می‌نگارد .

۱۰ــ اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی و غیرثابت باشد ، نشان‌دهید ، تنها برای‌یک تعداد شماره‌پذیر نقاط $\mathscr{D}$ ، $f'(z)=0$. سپس نتیجه بگیرید که $f(z)$ ، در تمام نقاط $\mathscr{D}$ مگر در یک تعداد شماره‌پذیر، یک به یک ، موضعی و همدیس‌است .

۱۱ــ نشان دهید $f(z)=z+1/z$ همه جا مگر در $z=\pm1$ همدیس‌است و با در نظر داشتن این مطلب نظری مجدد به خواص نگاشتی این تابع که در فصل ۳ مطالعه گردید ، بیاندازید .

۱۱ــ۲ . خانواده‌های نرمال

قبلا" اختلافات‌آشکارمیان‌پیوستگی نقطه‌ای با یکنواخت و هم چنین‌همگرایی‌نقطه‌ای با یکنواخت را دیده‌ایم . بار دیگر با اختلاف میان خواص موضعی و همه‌جایی مواجه‌می ــ شویم . این بار خواست ما این‌است که یکنواختی بر یک مجموعه مرکب ازیک خانواده‌توابع، برقرار باشد .

خانواده F از توابع را بر مجموعه A ، کراندار یکنواخت گوئیم اگر چنانچه عدد حقیقی M موجودباشدکه برای هر $f\in F$ و هر $z\in A$ ، $|f(z)|\leq M$. بی‌شک کراندار بودن یکنواخت یک خانواده موجب می‌گردد که هر عضو این خانواده کرانداراباشد .از سوی‌دیگر، هر عضو دنباله توابع $f_n(z)=nz$ در قرص $|z|\leq R$ کراندار است ولی هیچ عددی وجود ندارد که برای همه اعضاء این خانواده کران باشد .

خانواده F از توابع را بر مجموعه A کراندار یکنواخت موضعی گویند اگر چنانچه به هر $z\in A$ ، یک همسایگی متناظر گردد که در آن F کراندار یکنواخت باشد . دنباله $f_n(z)=1/(1-z^n)$ در قرص $|z|<1$ ، کراندار یکنواخت موضعی است ولی کراندار یکنواخت نیست . قضیه زیر در این رابطه است :

قضیه ۱۱ــ۶ . خانواده F از توابع در میدان $\mathscr{D}$ کراندار یکنواخت‌موضعی است اگــرو تنها اگر F بر هر زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$ ، کراندار یکنواخت باشد .

اثبات ــ گیریم F کراندار یکنواخت موضعی است و فرض‌کنیم K زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$ باشد. برای هر نقطه در K ، یک همسایگی اختیار می‌کنیم که درآن F کرانداریکنواخت باشد . بدین ترتیب یک پوشش باز برای K بدست می‌آید . به موجب قضیه هاین ــ بورل، یک زیر پوشش متناهی برای K موجود است . بدین معنی که به تعداد متناهــی $z_i\in K$ و $\varepsilon_i>0$ موجودند که $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}N(z_i;\varepsilon_i)$ و برای هر $z\in N(z_i;\varepsilon_i)$ وبرای‌هر $f\in F$ ، $|f(z)|\leq M_i$. در این صورت F بــر K کـرانـدار یکنـواخـت اســـت و

$M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ یک کران آن است.

معکوس مطلب بلافاصله از این نکته که بستار همسایگی یک نقطه مجموعه‌یی است فشرده، ناشی می‌گردد.

چنانچه در چهارچوب خانواده‌های کراندار یکنواخت از توابع تحلیلی باشیم، آگاهی دیگری قابل حصول است:

قضیه ۱۱–۷. فرض کنیم F در میدان $\mathscr{D}$ خانواده‌یی از توابع تحلیلی و کراندار یکنواخت موضعی است. در این صورت خانواده $F^{(n)}$، مشتمل بر مشتقات n ام همه توابع در F، نیز در $\mathscr{D}$ کراندار یکنواخت موضعی است.

اثبات ــ کافی است، این را برای $n = 1$ ثابت کنیم، زیرا در این صورت نتیجه را پیاپی می‌توان در مورد رده جدید به کار بست. فرض کنیم برای z_0 ی در $\mathscr{D}$ و برای هر f در F و هر z درون دایره $C: |z - z_0| = r$، که درون $\mathscr{D}$ است، داشته باشیم $|f(z)| \leq M$. در این صورت برای هر z، درون قرص کوچکتر $|z - z_0| \leq r/2$، به موجب فرمول انتگرال کوشی حاصل می‌شود:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi (r/2)^2} \int_C |f(\zeta)| \, |d\zeta| \leq \frac{4M}{r}.$$

و این نشان می‌دهد، F' در z_0 کراندار یکنواخت موضعی است. چون z_0 دلخواه است، اثبات تمام است.

اینک مفهوم پیوستگی یکنواخت را گسترش می‌دهیم. خانواده F از توابع را بر ناحیه R همپیوسته گوئیم اگر چنانچه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر $f \in F$ و همه $z_1 \in R$ و z_0 با $|z_1 - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon$. ملاحظه می‌شود، هر عضو یک خانواده همپیوسته، پیوسته یکنواخت است. بدین معنی که برای یک خانواده همپیوسته، میتوان یک $\delta = \delta(\varepsilon)$ یافت که برای همه نقاط مجموعه و هم‌چنین همه توابع در خانواده کارساز باشد.

ممکن است هر عضو یک خانواده پیوسته یکنواخت باشد ولی خانواده همپیوسته نباشد. برای مشاهده این مطلب کافی است $f_n(z) = nz$ قرار دهیم. هر f_n بر $|z| \leq R$ پیوسته یکنواخت است زیرا، هر وقت $|z_1 - z_0| < \varepsilon/n = \delta$ داریم:

$$|f_n(z_1)-f_n(z_0)|=n|z_1-z_0|<\varepsilon$$

ولی یک δ نمی‌توان یافت که برای هر n کارساز باشد. پس دنباله $\{nz\}$ بر $|z|\leq R$ همپیوسته نیست.

یک ارتباط عمده بین خانواده های کراندار یکنواخت موضعی و همپیوسته از توابع تحلیلی موجود است:

قضیه ۱۱ــ۸. اگر F خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی درمیدان $\mathscr{D}$ باشد، آنگاه F بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ همپیوسته است.

اثبات ــ قضیه را در حالت خاصی که K یک قرص بسته درون $\mathscr{D}$ باشد اثبات می‌کنیم. اثبات برای زیر مجموعه‌های فشرده عمومی $\mathscr{D}$ مشابه اثبات قضیه ۱۱ــ۶ است و به خواننده واگذار می‌شود. به موجب قضیه ۱۱ــ۷، خانواده F'، مرکب از مشتقات توابع F، نیز کراندار یکنواخت موضعی است. با توجه به قضیه ۱۱ــ۶، می‌توانیم فرض کنیم برای هر $f\in F$ و هر $z\in K$، $|f'(z)|\leq M$. پس برای $z_1\in K$ و z_0 داریم:

$$|f(z_1)-f(z_0)|=\left|\int_{z_0}^{z_1}f'(z)\,dz\right|\leq M|z_1-z_0|,$$

که مسیر انتگرال از z_0 تا z_1 یک خط مستقیم است. با انتخاب $\delta=\varepsilon/M$ (ε اختیاری) می‌بینیم که خانواده F بر قرص K همپیوسته است.

تذکر ــ معکوس قضیه ۱۱ــ۸ درست نیست. دنباله $f_n(z)=z+n$ بر زیرمجموعه‌های فشرده صفحه همپیوسته است. در واقع برای هر n، $f_n(z_1)-f_n(z_0)=z_1-z_0$، پس $\delta=\varepsilon$ می‌توان انتخاب کرد. با اینحال $\{f_n(z)\}$ در هیچ همسایگی در صفحه کراندار یکنواخت نیست.

در فصل ۲ نشان دادیم که هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل یک زیر دنباله همگراست. هدف ما در این بخش این است که نتایج مشابهی برای دنباله‌های توابع کسب کنیم. در این مرحله روشن نیست که چه شکلی از همگرایی، مستدل‌تر و پرکاربردتر است. جهت روشن شدن مطلب به تعریف زیر نیازمندیم: خانواده F از توابع را در میدان $\mathscr{D}$ نرمال گوئیم اگر هر دنباله $\{f_n\}$ از F شامل یک زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ باشد که بر هر زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$، همگرای یکنواخت باشد.

به عنوان مثال خانواده مرکب از دنباله $\{z^n\}$ در میدان $|z|<1$ نرمال است. در واقع خود دنباله بر هر زیر مجموعه فشرده $|z|<1$ به صفر همگرای یکنواخت است. با

اینحال باید توجه داشت، نه دنباله و نه هیچ زیر دنبالهٔ آن، درتمامی میدان همگرای یکنواخت نیست .

همان طور که دنباله کراندار ممکن است شامل زیر دنباله‌های متفاوت باشد که به حدهای مختلف‌همگراباشند، عینا" ممکن است یک خانواده قائم شامل دنباله‌های‌متفاوتی باشدکه‌بر زیر مجموعه‌های فشرده به توابع مختلف همگرای یکنواخت باشند . جهت‌تشریح مطلب، قرار می‌دهیم :

$$f_n(z) = \begin{cases} z^n, & n \text{ فرد} \\ 1 - z^n, & n \text{ زوج} \end{cases}$$

در این صورت $\{f_{2n+1}\}$ به 0 و $\{f_{2n}\}$ به 1، در همه زیر مجموعه‌های فشرده $|z| < 1$، همگرای یکنواخت است .

مجموعه‌نقاط E را درمجموعه A متراکم گوئیم اگر هر همسایگی هر نقطهٔ A شامل‌نقاط E باشد . هر میدان در صفحه شامل یک دنباله متراکم از نقاط است (به عنوان مثال، مجموعه نقاطی از میدان که هر دو مختص آنها گویا باشد، مجموعه‌یی است شماره‌پذیر و بنابراین می‌توان آنرا بصورت یک دنباله بیان کرد) . قبل از اثبات‌نتیجه مهاد این‌بخش به لم زیر نیازمندیم :

لم ــ فرض‌کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی‌از توابع تحلیلی باشد که در میدان $\mathscr{D}$ کراندار یکنواخت موضعی است . اگر $\{f_n(z)\}$ در همه نقاط یک زیر مجموعه متراکم در $\mathscr{D}$ همگرا باشد، آنگاه بر هر زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$ همگرای یکنواخت است .

اثبات ــ اگر K زیرمجموعه‌فشرده مفروض در $\mathscr{D}$ باشد . می‌خواهیم نشان دهیم دنباله $\{f_n(z)\}$ بر K همگرای‌یکنواخت‌است . بموجب‌قضیه ۱۱ ــ ۸، $\{f_n(z)\}$ بر K همپیوسته است . پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ متناظر است که هر وقت z و z' هر دو نقطه در K و برای n دلخواه

$$\text{اگر } |z - z'| < \delta, \quad \text{آنگاه} \quad |f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{۷}$$

چون که K کراندار است، تعدادی متناهی، مثلا" p، همسایگی به شعاع $\delta/2$، K را می‌پوشاند . در هر یک از این p همسایگی‌ها،یک نقطه z_k، $(k = 1, 2, \ldots, p)$ از زیر مجموعه متراکم K انتخاب می‌کنیم‌که در آن $\{f_n\}$ همگرا باشد . سپس n و m را بس‌بزرگ انتخاب می‌کنیم تا

$$\text{برای} \quad k = 1, 2, \ldots, p. \quad \text{داشته باشیم} \quad |f_n(z_k) - f_m(z_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{۸}$$

به موجب (۷) و (۸) می‌بینیم، به هر z در K، یک z_k از K متناظر می‌گردد که:

$$|f_n(z)-f_m(z)| \le |f_n(z)-f_n(z_k)| + |f_n(z_k)-f_m(z_k)| + |f_m(z_k)-f_m(z)| < \varepsilon.$$

پس دنباله $\{f_n(z)\}$ بر K کوشی یکنواخت است و بنابراین می‌بایست بر K همگرای یکنواخت باشد.

قابل‌توجه است‌که لم بدین‌نتیجه می‌انجامد که $\{f_n(z)\}$ در $\mathscr{D}$ یک خانوادهٔ نرمال است. اینک، با یک‌فرایند قطری نمودن، نشان می‌دهیم، این نتیجه، بدون فرض همگرایی دنباله بر یک زیر مجموعه متراکم، هم درست است:

قضیه ۱۱–۹ (قضیه مانتل)[1]. اگر F یک خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی در میدان $\mathscr{D}$ باشد، آنگاه F در $\mathscr{D}$ خانواده نرمال است.

اثبات ــ اگر $\{f_n\}$ دنباله‌مفروضی در F باشد، می‌بایست نشان داد که‌زیردنباله‌یی از $\{f_n\}$ بر زیر مجموعه‌های فشرده همگرای یکنواخت است. دنباله‌یی از نقاط $\{z_k\}$ راکه‌در $\mathscr{D}$ متراکم باشدانتخاب می‌کنیم. به موجب لم، کافی است زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ بسازیم که در هر نقطه دنباله $\{z_k\}$ همگرا باشد. بنابه فرض $\{f_n(z_1)\}$ کراندار است. پس بنابه قضیه ۲–۷ زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ موجود است که در z_1 همگراست‌وآنرا با $\{f_{n,1}\}$ می نمایانیم. ولی دنباله نقاط $\{f_{n,1}(z_2)\}$ نیز کراندار است. پس زیر دنباله $\{f_{n,2}\}$ از $\{f_{n,1}\}$ موجود است که در z_2 همگراست. چونکه $\{f_{n,2}\}$ زیر دنباله $\{f_{n,1}\}$ می‌باشد، پس $\{f_{n,2}\}$ در z_1 نیز همگراست.

باادامه‌این‌فرآیندزیردنباله $\{f_{n,m}\}$، m امین، رامی‌سازیم‌که‌در $z_1, z_2, \ldots, z_m$ همگرا باشد. همان طور که در جدول زیر مشاهده می‌شود، m امین دنباله توابع مختلط در z_m و درهمه نقاط قبلی‌اش $\{z_k\}$ همگرا می‌باشد.

$$\begin{array}{llllll}
f_{11}(z), & f_{21}(z), & f_{31}(z), & \ldots & & \\
f_{12}(z), & f_{22}(z), & f_{32}(z), & \ldots & & \\
f_{13}(z), & f_{23}(z), & f_{33}(z), & \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
f_{1m}(z), & f_{2m}(z), & f_{3m}(z), & \ldots, & f_{mm}(z), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

---

1. Montel

اینک دنباله $\{f_{nn}(z)\}$ را در نظر می‌گیریم ،که قطر جدول فوق است . برای هر m ثابت ،دنباله $\{f_{nn}(z_m)\}$ ، $n \geq m$ زیردنباله‌یی‌ازدنبالهٔ‌همگرای $\{f_{nm}(z_m)\}$ می‌باشد و بنابر این همگراست . پس $\{f_{nn}(z)\}$ زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ است که در همه نقاط دنباله $\{z_k\}$ همگراست . و اثبات کامل است .

قضیه بولتسانو ــ وایرشتراس وجود یک نقطه حدی را برای هر مجموعه نامتناهی و کراندار از نقاط تضمین‌می‌کند و نهایتا" ضامن وجود زیر دنباله‌های همگرابرای هردنباله کراندار است . قضیه مانتل را می‌توان همتای "تابع تحلیلی" برای قضیه بولتسانو تصور کرد . به مفهومی ، در هر خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی ، وجود یک دنباله همگرا از توابع را تضمین می‌کند .

چنانچه در شباهات آنها کنجکاوتر شویم ، می‌بینیم‌که هر دو قضیه دارای یک‌نقیصه مشترک هستند : نقطه حدی در قضیه بولتسانو ، لزوما" عضو مجموعه نیست‌و تابع همگرای قضیه مانتل هم لزوما" عضو خانواده نرمال نمی‌باشد .

به عنوان مثال، دنباله $\{z^n\}$ در $|z|<1$ یک خانواده قائم است ، زیرا ، بر زیر مجموعه‌های‌فشرده $|z|<1$ به 0 همگرای یکنواخت است . در حالی که 0 ، عضو خانواده $\{z^n\}$ نمی‌باشد .

یادآور می‌شویم مجموعه کرانداری که شامل تمام نقاط حدی‌خودباشد ،فشرده‌است . این مطلب ما را به تعریف زیر ارشاد می‌کند . خانواده نرمال F از توابع‌رافشرده‌گوئیم اگر چنانچه حدود یکنواخت همه دنباله‌های همگرا در F ، عضو F باشند .

مثال ــ خانواده F از توابعی به شکل

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

که‌درقرص $|z|<1$ تحلیلی وبا قسمت حقیقی مثبت‌اند ، یک خانواده نرمال‌فشرده است .

بنابه قضیه ۱۰ــ۱۴ ، همه توابع $f\in F$ در نامساوی زیر صادقند :

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad (|z|=r<1).$$

پس F کراندار یکنواخت موضعی است و بنابه قضیه مانتل ، نرمال است . برای نشان دادن فشردگی ، فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌یی ازتوابع در F باشد که به تابع g همگرای یکنواخت است . باید نشان دهیم که $g\in F$. بنابه قضیه ۸ــ۶ ، g در $|z|<1$ تحلیلی

است. چون‌که برای‌هر n ، $\operatorname{Re} f_n(z) > 0$ ، چون‌که برای‌هر n ، $f_n(0) = 1$ پس $g(0) = 1$. پس برای $|z| < 1$ ، $g(z) \geq 0$. ولی در این صورت به موجب قضیه نگاشت باز، برای $|z| < 1$ می‌بایست داشته باشیم $\operatorname{Re}\, g(z) > 0$. پس $g \in F$ و F فشرده است.

پرسش‌ها

۱ــ چه دسته‌یی از خانواده‌های توابع، کراندار یکنواخت موضعی‌اند ولی کراندار یکنواخت نیستند؟

۲ــ آیا خانواده چند جمله‌یی‌ها بر یک مجموعه، کراندار یکنواخت موضعی است؟

۳ــ اگر F خانواده کرانداریکنواخت از توابع تحلیلی باشد، آیا $F^{(n)}$ کرانداریکنواخت است؟

۴ــ اگر خانواده‌یی از توابع در هر نقطه یک میدان کراندار یکنواخت باشد، آیا این خانواده کراندار یکنواخت موضعی است؟

۵ــ در اثبات قضیه ۱۱ــ۷، از این‌که K قرص است کجا استفاده شد؟

۶ــ تفاوت عمده میان دنباله متراکم و مجموعه متراکم در چیست؟

۷ــ چه دسته‌یی از خانواده‌های نرمال بیش از یک‌تابع حدی زیر دنباله‌یی دارند؟

۸ــ آیا می‌شود یک خانواده نرمال دارای نامتناهی توابع حدی زیر دنباله‌یی باشد؟

تمرینها

۱ــ فرض‌کنید برای هر نقطه در میدان $\mathscr{D}$ یک همسایگی متناظر شود که در آن خانواده F همپیوسته باشد. نشان دهید، F بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ همپیوسته است. آیا F در $\mathscr{D}$ همپیوسته است؟

۲ــ نشان دهید، دنباله $\{nz\}$ در هیچ ناحیه‌یی همپیوسته نیست.

۳ــ اگر F خانواده کرانداریکنواخت موضعی از توابع تحلیلی در $\mathscr{D}$ باشد، نشان‌دهید F' ، خانواده مشتمل بر مشتقات توابع F بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ همپیوسته است.

۴ــ فرض کنید F خانواده نرمال از توابع تحلیلی بر قرص $|z| < 1$ می‌باشد. گیریم G خانواده توابعی به‌شکل $g(z) = \int_0^z f(\zeta)\, d\zeta$ که $f \in F$. نشان دهید G در $|z| < 1$ نرمال است.

۵ــ نشان دهید، دنباله $\{f_n(z)\}$:

$$f_n(z) = \begin{cases} z^n, & \text{فرد } n \\ 1 - z^n, & \text{زوج } n \end{cases}$$

در قرص $|z| < 1$ تشکیل یک خانواده نرمال می‌دهد.

۶ــ نشان دهید ، خانواده توابعی به شکـــــل $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ ، $|a_n|\le n$ ، یک خانواده نرمال فشرده ازتوابع تحلیلی در قرص $|z|<1$ می‌باشد .

۷ــ گیریم F خانواده‌یی مشتمل بر همه توابع $f(z)$ که در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی‌اند بـا $|f(z)|\le M$ در $\mathscr{D}$. نشان دهید F ، خانواده نرمال و فشرده در $\mathscr{D}$ است .

۱۱ــ۳ . قضیه نگاشت ریمان

فرض‌کنیم $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ میدانهای‌همبندساده‌اند . دراین صورت تقریبا "یک تابع تحلیلی موجود است که $\mathscr{D}_1$ را بر $\mathscr{D}_2$ بنگارد . ابتداء از یک استثناء "نوعی" بحث می‌کنیم . فرض کنیم $\mathscr{D}_1$ تمام صفحه و $\mathscr{D}_2$ قرص $|z|<1$ باشد . هیچ‌تابع تحلیلی در صفحه (تام) موجود نیست که بر قرص (کراندار) $|z|<1$ نگاشته شود ، زیرا به موجب قضیه لیوویل توابع ثابت تنها توابع تام هستند که نگاره آنها درون یک قرص بیفتد . قضیه مهاد ما در این بخـش مبین آن است‌که یک نگاشت تحلیلی یک به یک میان دو میدان همبند ساده ، که هیچ‌کدام تمام‌صفحه نباشند ، موجود است . قبل ازاثبات این نتیجه درخشان ، به مقدماتی درمورد توابع تک ارز (یک‌کلمه زیبا برای یک به یک) نیازمندیم .

قضیه ۱۱ــ۱۰ . فرض‌کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع معین و تحلیلی و تک ارز در میدان $\mathscr{D}$ باشد و بر هر زیر مجموعه فشرده $\mathscr{D}$ به تابع غیرثابت $f(z)$ همگرای یکنواخت باشد . در این صورت $f(z)$ تحلیلی و تک‌ارز است .

اثبات ــ تحلیلی بودن از قضیه ۸ــ۶ نتیجه می‌شود . برای اثبات تک‌ارزی ، فـرض کنیم نقاط متمایز z_0 و z_1 در $\mathscr{D}$ موجودند که $f(z_0)=f(z_1)=a$. دوایر متمایز C_0 و C_1 را به ترتیب با مراکز z_0 و z_1 رسم می‌کنیم . که هر دو درون $\mathscr{D}$ باشند . بعلاوه فرض می‌کنیم ،برهردو دایره ، $f(z)\neq a$. گیریم m برابر می‌نیمم $|f(z)-a|$ بر $C_0\cup C_1$ باشد . اینک n رابس‌بزرگ‌انتخاب می‌کنیم تابر $C_0\cup C_1$ داشته‌باشیم $|f_n(z)-f(z)|<m$ به موجب قضیه روشه ، تابع

$$f_n(z)-a=(f_n(z)-f(z))+(f(z)-a)$$

حــــــداقل یک ریشه درون C_0 و حداقل یک ریشه درون C_1 دارد . و این‌با تک‌ارزبودن $f_n(z)$ در $\mathscr{D}$ متناقض است .

باید توجه داشت ، ممکن است که حد یکنواخت دنباله‌یی ازتوابع تک ــ ارز ، تابـع ثابت گردد . به عنوان مثال $f_n(z)=z/n$ برتمام زیر مجموعه‌های فشرده صفحه به 0 همگرای یکنواخت است .

قضیه ۱۱ـ۱۱ . فرض‌کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی و تک ـ ارز است و $g(z)$ بر نگاره $\mathscr{D}$ با $f(z)$ تحلیلی و تک ـ ارز است. در این صورت تابع ترکیبـــی $g(f(z))$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی و تک ـ ارز خواهد بود.

اثبات ـ تحلیلی بودن $g(f(z))$ از قضیه ۵ـ۲ نتیجه می‌شود. برای نشان دادن تک ـ ارزی، فرض کنیم بـــرای z_0 و $z_1 \in \mathscr{D}$، $g(f(z_0)) = g(f(z_1))$. بنابه تک ارزی g، داریم $f(z_0) = f(z_1)$ و بنابه تک‌ارزی f، $z_0 = z_1$ و قضیه ثابت است.

قضیه ۱۱ـ۱۲ . فرض‌کنیم f، که $\mathscr{D}_1$ را بر $\mathscr{D}_2$ می‌نگارد، در $\mathscr{D}_1$ تحلیلی و تک ـ ارز باشد. در این صورت تابع وارون g، که با $g(f(z)) = z$ برای‌هر z تعریف‌می‌شود، یک نگاشت تحلیلی و تک ـ ارز از $\mathscr{D}_2$ بر $\mathscr{D}_1$ است.

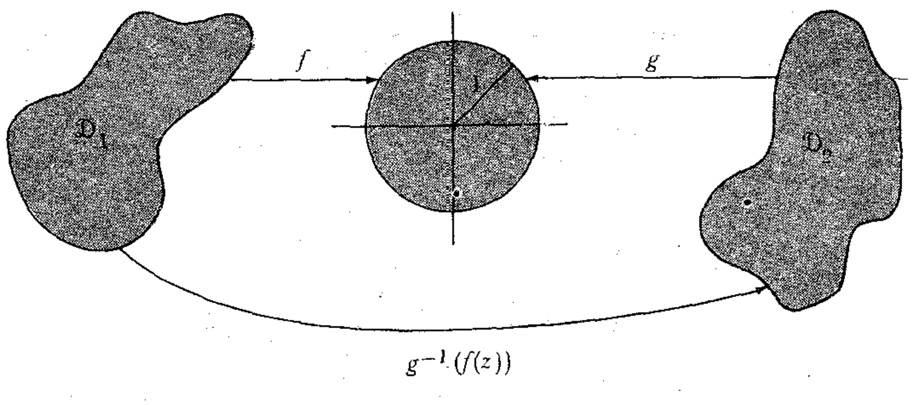
اثبات ـ تک ـ ارز بودن g نتیجه مستقیم تک ـ ارزی f است. برای نشان دادن تحلیلی، $w_0 \in \mathscr{D}_2$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت برای $z_0 \in \mathscr{D}_1$ منحصربفردی، $w_0 = f(z_0)$. با قرار دادن $w = f(z)$، داریم:

$$\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}. \qquad (۹)$$

چونکه f مجموعـــه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد (قضیه ۸ـ۲۱)، g در $\mathscr{D}_2$ پیوسته است. پس با $w \to w_0$ داریم $z \to z_0$. بنـــا به قضیه ۱۱ـ۳ $f'(z_0) \neq 0$، و می‌توان از (۹) حد گرفت تا $g'(w_0) = g'(f(z_0)) = 1/(f'(z_0))$ حاصل گردد. پس g در $\mathscr{D}_2$ تحلیلی است و قضیه ثابت است.

اگر f و g به‌ترتیب‌درمیدانهای $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ تحلیلی باشندو هر دو بر قرص $|z| < 1$ نگاشته شوند، در این صورت $g^{-1}(f(z))$ تحلیلی و تک ـ ارز است که $\mathscr{D}_1$ را بر $\mathscr{D}_2$ می‌نگارد (ر. ک. شکل ۹).

شکل ۹



پس مجموعه میدانهایی که ممکن است تحلیلی‌وار و تک ـ ارز بر درون قرص واحد نگاشته شوند، امکان دارند که تحلیلی‌وار و تک ـ ارز بر یکدیگر نگاشته شوند.

فرض‌کنیم f در $\mathscr{D}$ تحلیلی و تک ـ ارز است و $\mathscr{D}$ را بر $|z|<1$ بنگارد. آیا توابع دیگری با همین خاصیت موجود است؟ در حالت عمومی به تعداد نامتناهی موجود است. برای دیدن مطلب، از بخش ۳ـ۲ یادآور می‌شویم، همه توابعی به شکل

$$g(z)=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\qquad (|z_0|<1,\quad \text{حقیقی}\quad \alpha)$$

درون دایره واحد را بر خودش می‌نگارند. پس‌توابع $g(f(z))$ و $f(z)$ هم‌زمان $\mathscr{D}$ را بر $|z|<1$ می‌نگارند.

لم زیر شرایط پیشنهادی را برای یک تابع نگاشتی منحصربفرد مطرح می‌سازد.

لم ـ فرض کنیم $f(z)$ در $|z|<1$ تحلیلی و تک ـ ارزاست وقرص را بر خودش می‌نگارد. اگر $f(0)=0$ و $f'(0)>0$ آنگاه $f(z)=z$.

اثبات ـ به موجب لم شوارتس $|f(z)|\leq|z|$. با به کار بردن لم شوارتس برای تابع‌وارون، هم‌چنین‌داریم $|z|\leq|f(z)|$. پس برای $|z|\leq 1$، $|f(z)/z|=1$. بنابه‌قضیه۵ـ۸، $f(z)=e^{i\alpha}z$، α حقیقی. چون که $f'(0)>0$، نتیجه‌حاصل‌است.

تذکر ـ خاطرنشان می‌شویم که یک شرط لازم و کافی برای این که تبدیل دو خطی، قرص واحد را بر خودش بنگارد آن است که به شکل (۱۰) باشد. پس اگر خانواده توابع به تبدیلات دو خطی محدود باشد، این لم مستقیما" از (۱۰) نتیجه می‌شدو احتیاجی به لم شوارتس نمی‌داشتیم.

اکنون آماده‌ایم که رسما" قضیه زیر را بیان و اثبات کنیم:

قضیه ۱۱ـ۳ـ۱.(قضیه نگاشت ریمان) فرض‌کنیم که $\mathscr{D}$ میدان همبند ساده‌یی به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌یی در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصربفرد وتک‌ـ ارز $f(z)$ موجود است که $\mathscr{D}$ را بر قرص $|z|<1$ می‌نگارد و $f(z_0)=0$ و $f'(z_0)>0$.

اثبات ـ ابتداء منحصربفرد بودن این تابع را اثبات می‌کنیم. اگر f و g دو تابع با خواص مذکور در قضیه باشند، در این صورت تابع $h=g(f^{-1})$ تحلیلی و تک ـ ارزاست که درون قرص دایره واحد را بر خودش می‌نگارد و

$$h(0)=g(f^{-1}(0))=g(z_0)=0$$

و

$$h'(0)=\frac{g'(z_0)}{f'(z_0)}>0.$$

و بـــــا توجه به لم قبلی h تابع همانی است . یعنی $g(z)=f(z)$ و منحصر به فـرد بودن f ثابت می‌شود .

برای اثبات وجود ، بدوا" نشان می‌دهیم ، تابع تحلیلی و تک ارزی موجود است‌که $\mathscr{D}$ را در قرص $|z|<1$ می‌نگارد . چون که $\mathscr{D}$ همه صفحه نیست ، نقطه $a\notin\mathscr{D}$ موجود است . اگر عملا" قرص $|z-a|<\varepsilon$ خارج $\mathscr{D}$ موجود باشد ،آنگاه‌برای هر z در $\mathscr{D}$، $|z-a|>\varepsilon$. دراین حالت $w=\varepsilon/(z-a)$ تابعی تحلیلی و تک ارز است که همه نقاط $\mathscr{D}$ را درون قرص‌واحد می‌نگارد . ولی ممکن است متمم $\mathscr{D}$ شامل هیچ قرصی نباشد . مثلا" $\mathscr{D}$ تمام صفحه منهای پرتوی از نقطه‌یی مانند z_0 تا ∞ باشد . چنین اشکالی با در نظر گرفتن شاخه‌یی از تابـع ریشه دوم ، که یک میدان را بر "نصف" اندازه خودش می‌نگارد ، مرتفع می‌گردد .

به موجب فرع قضیه ۷ــ۱۰ ، اگر $a\notin\mathscr{D}$ آنگاه می‌توان یک شاخــه تحلیلی برای $\phi(z)=\sqrt{z-a}$ در میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ تعریف کرد ، که $\phi(z)$ در $\mathscr{D}$ تک ــ ارز باشد . زیرا اگـــــر $\phi(z_1)=\phi(z_2)$ $(z_1, z_2\in\mathscr{D})$ ، $(\phi(z_1))^2=(\phi(z_2))^2=z_1-a=z_2-a$.

اکنون فرض‌کنیم $\mathscr{D}'$ نگاره $\mathscr{D}$ در تحت تابع $\phi(z)$ باشد . در این صورت متمم $\mathscr{D}'$ شامل یک قرص (درواقع شامل نیم صفحه) است . برای دیدن‌این مطلب ، نشان‌می‌دهیم ، نقاط b و $-b$ هم زمان به $\mathscr{D}'$ نمی‌توانند متعلق گردند . زیرا اگر باشند،آنگاه نقاط متمایز z' و z'' در $\mathscr{D}$ موجودند که $\phi(z')=b$ و $\phi(z'')=-b$. ولی در این صورت

$$[\phi(z')]^2=-z'a=[\phi(z'')]^2=z''-a,$$

که بافرض z' و z'' متمایز ، متناقض است .

سپس نقطه c و $\varepsilon>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که قرص $|z-c|<\varepsilon$ درون $\mathscr{D}'$ باشد . در این صورت قرص $|z+c|<\varepsilon$ در متمم $\mathscr{D}'$ واقع است . پس تابع $\psi(z)=\varepsilon/(z+c)$ ، $\mathscr{D}'$ را درون قرص واحد می‌نگارد . بنابراین ترکیب $\psi(\phi(z))$ در $\mathscr{D}$ تحلیلی‌و تک‌ـ ارز است و $\mathscr{D}$ را بر قرص واحد می‌نگارد . با یک تبدیل دو خطی‌مناسب (توضیحات لازم‌رابیان کنید!) ، می‌توان‌این‌تابع‌رابه تابع $f_0(z)$ تبدیل‌نمود که در شرایط اضافی $f_0(z_0)=0$ و $f_0'(z_0)>0$ صادق باشد .

گوئیم $g(z)$ متعلق به خانوادهٔ F است،اگر چنانچه $g(z)$ در $\mathscr{D}$ تحلیلـی و تک ـ ارز باشد و با روابط $g(z_0)=0$ و $g'(z_0)>0$ نرمالیزه شده باشد و برای هر z در $\mathscr{D}$ ،

$|g(z)| < 1$. خانواده F غیرتهی است زیرا ، $f_0(z) \in F$. بدون شک تابعی راکه‌می‌خواهیم وجودش را اثبات نمائیم می‌بایست متعلق به F باشد . نشان خواهیم داد ، مقدار مشتق تابع مطلوب در z_0 با مقایسه با دیگر تابع عضو F ، بزرگترین است . برای این که نشان دهیم تابعی در F موجوداست که مشتق آن در z_0 ماکزیمم است ، به‌نظریه‌خانواده‌های نرمال متوسل می‌گردیم .

چون F در $\mathscr{D}$ کراندار یکنواخت موضعی است (درواقع ،کراندار یکنواخت است) ، از قضیه ۱۱–۹ نتیجه می‌شود ، F یک خانواده نرمال است . قرار می‌دهیم

$$A = \operatorname{lub}\{g'(z_0) : g(z) \in F\},$$

که A ممکن است نامتناهی باشد . بنابه تعریف A ، دنباله $f_n \in F$ موجود است که $f_n'(z_0) \to A$. چون که F نرمال است ، زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ موجود است که بر زیر مجموعه‌های فشرده $\mathscr{D}$ به یک تابع تحلیلی $f(z)$ـ همگرای یکنواخت است . به کار بستن فرع قضیه ۸–۶ ، نشان می‌دهد که $f'(z_0) = A$. پس A متناهی است . چون که $f'(z_0) \geq f_0'(z_0) > 0$ ، تابع $f(z)$ در $\mathscr{D}$ ثابت نیست . پس از قضیه ۱۱–۱۰ نتیجه می‌شود ، $f(z)$ـ تک ـ ارز و در نتیجه متعلق به F است .

اینک‌نشان‌می‌دهیم که $f(z)$ تابع مطلوب است . فرض کنیم به ازاء α یی درون‌قرص واحد ، $f(z) \neq \alpha$ ، در این صورت یک شاخه تحلیلی برای

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f(z)}}$$

در $\mathscr{D}$ قابل تعریف است . تک ـ ارزی $F(z)$ ناشی از تک ارزی $f(z)$ است ونامساوی $|F(z)| < 1$ ، ناشی ازنامساوی $|f(z)| < 1$ است . ولی با این حال $F(z)$ کاملاً نرمالیزه نیست و از اینرو تابع

$$G(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)} F(z)},$$

را در نظر می‌گیریم‌که $G(z_0) = 0$ و $G'(z_0) > 0$ ، بنابراین $G(z) \in F$ به علاوه

$$G'(z_0) = \frac{|F'(z_0)|}{1 - |F(z_0)|^2} = \frac{1 + |\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} A > A = f'(z_0),$$

که با ماکزیمم بودن $f'(z_0)$ متناقض است . پس $f(z)$ هیچ مقداری درون قرص واحد را ازقلم نمی‌اندازد و اثبات کامل است .

تذکر ۱ـ دو میدان $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ را همدیس‌وار هم‌ارز گویند اگرچنانچه‌یک تابع تحلیلی $\mathscr{D}_1$ را بر $\mathscr{D}_2$ بگونه‌یی یک‌به‌یک و همدیس‌وار بنگارد. چون که در میدان، تک ـ ارزی‌تابع مخالف‌صفرشدن‌مشتق می‌گردد، قضیه نگاشت ریمان نشان می‌دهد که هر دو میدان همبند ساده (که هیچکدام تمام صفحه نیستند)، همدیس‌وار هم‌ارزند.

تذکر ۲ـ در اثبات این قضیه، فرض بر این بود که هر تابع تحلیلی و تک ـ ارز، میدانهای ساده را بر میدانهای همبند ساده می‌نگارد. در توپولوژی مقدماتی ثابت شده است، نگاره یک‌به‌یک و پیوسته یک میدان همبند ساده،نمی‌تواند همبند چندگانه باشد. پس هیچ میدان همبند ساده نمی‌تواند همدیس‌وار هم‌ارز میدان همبند چندگانه باشد.

تذکر ۳ـ یاد آور می‌شویم که یک تبدیل دو خطی دوایر و خطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد. پس اگر نگاشتی همدیس، از یک میدان، به غیر از یک قرص ویا نیم صفحه، بر درون دایره واحد داشته باشیم، این نگاشت چیزی به غیر از یک تبدیل دو خطی است. به علاوه به موجب خاصیت منحصربفرد بودن در قضیه نگاشت ریمان، هیچ تابع تک ـ ارز به غیر از تبدیل دو خطی، نمی‌تواند قرص و یا نیم صفحه را بردرون دایره واحد بنگارد.

تذکر ۴ـ در اینجا می‌بایست به یک نکتهٔ هشیار باشانه اشاره کنیم. قضیه نگاشت ریمان، همانند اکثر قضایای وجودی، دارای این نقیصه است که در مورد ساختمان عملی، آگاهی زیادی به ما نمی‌دهد. پس اگر دو میدان همبند ساده "نامأنوس" مفروض باشند، می‌بایست همانند گذشته برای مشخص‌کردن یک تابع نگاشتی مناسب، به‌دنبال این‌باشیم که روشهای دیگری را بررسی کنیم.

تذکر ۵ـ ازقضیه‌چنین برمی‌آید که درون یک چند ضلعی دلخواه را می‌توان‌بردرون دایره واحد نگاشت، و چنین نگاشتی را بطور صریح می‌توان به دست آورد. انجام‌این‌کار در مراحل متعدد انجام‌می‌گیرد. فرمول شوارتس ـ کریستفل[1] یک تابع تحلیلی و تک ـ ارز بدست می‌دهد که نیم صفحه زبرین را بر درون یک چندضلعی‌دلخواه‌می‌نگارد. جهت بحث کامل در مورد تبدیل شوارتس ـ کریستفل خواننده را به کتاب نِهَری[2] (۱۲) ارجاع می‌دهیم. با ترکیب وارون چنین نگاشتی با یک تبدیل دو خطی از نیم صفحه زبرین بر

1. Schwarz-Christoffle 2. Nehari

قرص واحد باز (بخش ۳ـ۲ ملاحظه شود) به نگاشت مطلوب می‌رسیم .

پرسش‌ها

۱ـ آیا برای برقراری قضیه ۱۱ـ۱۰ ، می‌بایست همگرایی یکنواخت باشد ؟

۲ـ آیا نگاشتهای همدیسی موجودند که میدانهای همبند چندگانه را بر میدانهای همبند چندگانه بنگارند ؟

۳ـ اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}_1$ تحلیلی و همدیس باشد و $\mathscr{D}_1$ را بر $\mathscr{D}_2$ بنگارد ، آیا $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ همدیس‌وار هم‌ارزند ؟

۴ـ برای تضمین منحصربفرد بودن در قضیه نگاشت ریمان، کدام شرائط اولیهٔ دیگری را می‌توانستیم از پیش تعیین کنیم ؟

۵ـ آیا یک نگاشت یک‌به‌یک و همدیس از قرص دایره واحد بر قرص منهای مبدأ موجود است ؟

۶ـ اگر دو میدان همدیس‌وار هم‌ارزند باشند ، در مورد مرزهای آن‌ها چه می‌توان گفت ؟

۷ـ در اثبات قضیه نگاشت ریمان ، از همبند ساده بودن میدان کجا استفاده شد ؟

۸ـ چرا لازم بود ، در ابتداء نشان دهیم ، تابعی میدان را در قرص‌واحد می‌نگارد ؟

۹ـ چرا تابع $G(z)$ ی که در اثبات قضیه ریمان ساختیم کارساز شد ؟

تمرینها

۱ـ فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$ ، نشان‌دهید همسایگی‌های U و V به ترتیب برای z_0 و $f(z_0)$ موجودند که $f(z)$ نگاشتی تک ارز از U به روی V باشد .

۲ـ فرض‌کنید $f(z)$ تحلیلی‌است‌و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد . نشان‌دهید ، $f(z)$ تک‌ارز است اگر و تنها اگر بتوان بصورت زیر نوشت :

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \qquad (|z_0| < 1, \quad \text{حقیقی} \ \alpha)$$

۳ـ نشان‌دهید ، صفحه با نیم صفحه زبرین همدیس‌وار هم‌ارز نیست . عمومی‌تر اینکه نشان دهید صفحه تنها با خودش همدیس‌وار هم‌ارز است .

۴ـ در حالی که درون هر مربع را همدیس‌وار می‌توان بر درون یک دایره نگاشت ، نشان دهید ، هیچ مربعی را نمی‌توان همدیس‌وار بر یک دایره نگاشت .

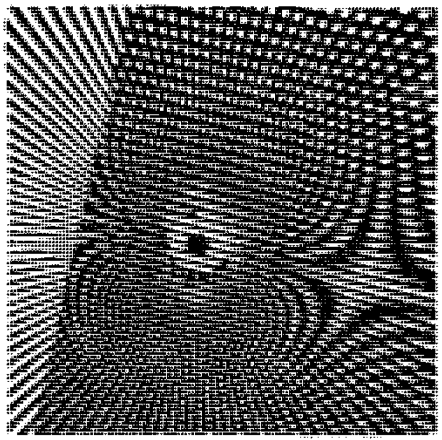
۵ــ فرض کنیـــد $\mathscr{D}_1$ طوق $0<r_1<|z|<R_1$ و $\mathscr{D}_2$ طوق $0<r_2<|z|<R_2$ باشد. اگر

$$\frac{R_1}{r_1}=\frac{R_2}{r_2},$$

تابع تحلیلی وتک‌ارزی بسازید که $\mathscr{D}_1$ را بر روی $\mathscr{D}_2$ بنگارد.

۶ــ فرض‌کنید $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_2$ همدیس‌وار هم‌ارزند و $\mathscr{D}_2$ و $\mathscr{D}_3$ همدیس هم‌ارز باشند. نشان دهید، $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_3$ همدیس‌وار هم‌ارزند.

۷ــ قضیه ۱۱ــ۱۰ را با استفاده از قضیه هورویتس اثبات کنید.



۱۲ـ توابع تک ارز

در این فصل به بررسی توابع تک ارز ادامه می‌دهیم . از نظر تحلیلی، تابع تک ـ ارز مشتق مخالف صفر دارد (قضیه ۱۱ـ۳)؛ از نظر هندسی تابع تک‌ارز، خم‌های ساده‌را بر خم‌های ساده می‌نگارد . نشان خواهیم داد که چگونه از ترکیب این خواص و خواص دیگر، می‌توان قضایایی را که سرشت هندسی یا سرشت تحلیلی داشته باشند اثبات نمود . به عنوان مثال ، با استفاده از کران ضریبی بر توابع تک ـ ارز ، می‌توانیم ازمیدانی که‌درون یک قرص بر آن نگاشته می‌شود ، آگاهی کسب نمود و برعکس اگر میدان $\mathscr{D}$ واجد شرایط مشخص هندسی باشد ، آنگاه قادریم برای ضرایب هر تابع تک ـ ارز که نگاره آن $\mathscr{D}$ باشد ، کرانی به دست آوریم .

۱۲ـ۱ . رده S

توابعی‌که‌هم تحلیلی و هم تک‌ـ ارزند ، واجد خاصیت جالبی‌هستند که میدانهای‌همبند ساده‌را بر میدانهای همبند ساده‌می‌نگارند . به‌موجب قضیه نگاشت ریمان ، هر تابع تک ارز ، که‌در یک‌میدان‌همبند ساده(به‌غیراز تمامی صفحه) تعریف شده‌باشد، را می‌توان با تابعی‌که‌در قرص واحد تعریف شده‌است متناظر کرد . بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z|<1$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم . و اگر چنانچه فرض‌کنیم تابع در مبداء صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبداء هم مشتق مخالف صفر دارد ، دراین‌صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود . چون که مشتق تابع تک ـ ارز هرگز صفر نیست ، هر تابع تک‌ارز $f(z)$ را می‌توان به $[f(z)-f(0)]/f'(0)$، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد . رده توابعی که در محدودیتهای مذکور صادقند با یک‌حرف مشخص می‌شوند .

رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z|<1$ تحلیلی و تک ـ ارز بوده و با شرایط $f(0)=0$ ، $f'(0)=1$ نرمالیزه گردیده‌اند با S نمایش می‌دهیم . پس تابع $f(z)$ در S دارای نمایش رشته توانی زیر است :

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \qquad (|z|<1).$$

رده همه توابعی به شکل

$$g(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots$$

که در میدان $1<|z|$ تحلیلی و تک ـ ارزند با T نمایش می‌دهیم . ارتباط زیرین ما را قادر می‌کند که اطلاعات در مورد رده T به رده S منتقل گردد .

قضیه ۱۲ـ۱ . اگر $f(z)\in S$ ، آنگاه $1/f(1/z)\in T$.

اثبات ـ ابتداء فرض کنیم $1/f(1/z_1)=1/f(1/z_2)$ $(|z_1|>1,\ |z_2|>1)$. پس $f(1/z_1)=f(1/z_2)$ که $|1/z_1|<1$ و $|1/z_2|<1$. اینک تک ـ ارزی $1/f(1/z)$ $(|z|>1)$ از تک ـ ارزی $f(z)$ $(|z|<1)$ ناشی می‌گردد . اگر چنانچه بتوانیم نشان دهیم برای $|z|>1$ ، $f(1/z)\neq 0$ ، آنگاه تحلیلی بودن $1/f(1/z)$ نتیجه تحلیلی بودن $f(z)$ خواهد بود . اگر برای $0<|1/z_0|<1$ ، $f(1/z_0)=0$ ، آنگاه $f(0)=f(1/z_0)=0$ که با تک ارزی $f(z)$ در $|z|<1$ متناقض است . پس $1/f(1/z)\in T$ و اثبات تمام است .

قضیه بعدی ، به دلیل اثبات آن و نه به دلیل صورت قضیه ، به قضیه مساحت معروف است .

قضیه ۱۲ـ۲ . اگر $g(z)=z+b_0+(b_1/z)+(b_2/z^2)+\cdots$ در T باشد ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\le 1$.

اثبات ـ تابع تک ـ ارز $g(z)$ ، دایره $|z|=r>1$ را بر مرز ساده بسته C می‌نگارد . قرار می‌دهیم $g(z)=u(z)+iv(z)$. مساحت ناحیه R محصور به C را با $A(r)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$A(r)=\iint_R du\, dv.$$

قابل توجه است ، برای هر $r>1$ ، $A(r)>0$. اگر اکنون قرار دهیم $P(u,v)=-v/2$ و $Q(u,v)=u/2$ با بکار بردن قضیه گرین

$$A(r)=\frac{1}{2}\int_C u\,dv-v\,du$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)d\theta>0. \qquad (۱)$$

بـــــه موجب تمرین ۸ بخش ۵ـ۲ ، داریم $g'(z)=(1/iz)(\partial g/\partial\theta)$ برای محاسبه انتگرال خطی (۱) ، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(u-iv)\left[\frac{1}{iz}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right]iz\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial u}{\partial\theta}+v\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)d\theta$$
$$+i\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)d\theta, \qquad (۲)$$

که قسمت انگاری آن با $A(r)$ متناظر است . برای ساده کردن (۲) ، می‌نویسیم :

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\left(\bar z+\sum_{m=0}^{\infty}\bar b_m\bar z^{-m}\right)$$
$$\times\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}nb_n z^{-n-1}\right)dz,$$

و توجه می‌کنیم که

$$\int_{|z|=r}\bar z^{-m}z^{-n-1}\,dz=\begin{cases}2\pi i r^{-2m}, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

و این به همانندی زیر می‌انجامد

$$\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\bar z\,dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=r}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}}{z}dz$$
$$=\pi i\left(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\right).$$

پس (۲) انگاری محض است و

$$A(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)d\theta=\pi\left(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\right) \qquad (۳)$$

چونکه $A(r)>0$ ، داریم

$$r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}>0 \qquad (r>1). \qquad (۴)$$

ولی (۴) برای هر $r>1$ برقرار است و نتیجه با $r\to1^+$ حاصل می‌گردد .

تذکر ۱ــ به موجب (۳) مساحت محصور به نگاره دایره $|z|=r$ حداکثر πr^2 (مساحت ناحیه محصور به دایره) است، که تساوی تنها برای $g(z)=z+b_0$ برقراراست. به علاوه در نتیجه، تساوی برقرار می‌گردد و اگر و تنها اگر مساحت محضور به نگاره $|z|=r>1$ با $r\to 1$ به دلخواه کوچک گردد.

تذکر ۲ــ اگر $b_1=1$ ، آنگاه برای $n>1$ ، $b_n=0$. یادآور می‌شویم که خواص $g(z)=z+1/z$ وسیعا "دربخش ۳ــ۳ وسیعا" مورد مطالعه قرار گرفت. بالاخص‌نشان دادیم که‌این‌تابع دایره $|z|=r>1$ را بر یک بیضی می‌نگارد و هم چنین که r بــه 1 نزدیک می‌شود، این بیضی به پاره خط $[-2,2]$ میل می‌کند.

کران ضرایب برای توابع T ، به صورتی که در قضیه مساحت آمده است، مار راقادر می‌کند که برای توابع S کران ضرایب محاسبه کنیم. ولی ابتداء به لم زیر محتاجیم.

لم ــ اگر $f(z)\in S$ ، آنگاه $z\sqrt{f(z^2)/z^2}\in S$

اثبات ــ قرار می‌دهیم: $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ و گیریم

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2 z^2+a_3 z^4+\cdots}. \qquad (۵)$$

تابع $g(z)$ تحلیلــــــی است و $g(0)=0$ ، $g'(0)=1$. برای اثبات تک ــ ارزی $g(z)$ ، گیریم $g(z_1)=g(z_2)$. در ایــــن صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ و تک ارزی $f(z)$ نشان می‌دهد که $z_1^2=z_2^2$ ، یعنی که، $z_1=\pm z_2$. ولی از (۵)، ملاحظه می‌شودکه $g(z)$ تابع فرداست، پس $z_1=-z_2$ موجب $g(z_1)=-g(z_2)$ است. بنابراین $z_1=z_2$ و تک ــ ارزی $g(z)$ به ثبوت می‌رسد.

تذکر ــ لازم‌بود به‌عوض $\sqrt{f(z^2)}$ ، $z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ نوشته‌شود، زیراکه $f(z^2)$ صفری در مبداء دارد که $\sqrt{f(z^2)}=e^{(1/2)\mathrm{Log}\, f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

قضیه ۱۲ــ۳. اگر $g(z)=z\sqrt{f(z^2)/z^2}\in S$ در S باشد آنگاه $|a_2|\leq 2$

اثبات ــ به موجب لم، $f(z)=z+a_2 z^2+\cdots$. از بسط (۵) نتیجــــــه می‌شود $g'''(0)=3a_2$. پس

$$g(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots.$$

با توجه به قضیه ۱۲ــ۱، بسط لران برای تابع $1/g(1/z)$ نشان می‌دهد که

$$\frac{1}{g(1/z)} = \frac{1}{(1/z)[1+(a_2/2)z^2+\cdots]} = z - \frac{a_2}{2}\frac{1}{z} + \cdots \in T.$$

بـــــا به‌کاربردن قضیه ۱۲ــ۲، درمی‌یابیم کـــــه $|a_2/2|^2 \le 1$. پس $|a_2| \le 2$ و قضیه ثابت است.

تذکر ــ با بررسی مجدد این اثبات، مشخص می‌شود که تساوی چه وقت برقراراست. زیــرا اگــر $a_2 = 2e^{i\alpha}$، α حقیقی، آنگـــــاه $1/g(1/z) = z - e^{i\alpha}/z$. و یــا $g(z) = z/(1-e^{i\alpha}z^2) = z\sqrt{f(z^2)/z^2}$، پس

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \cdots. \qquad (۶)$$

برای‌قضیه ۱۲ــ۳، تابعی که در (۶) آمده است فرینال است. بدین معنی که، دومین ضریب، با کران خودش برابر شده است. این که آیا این توابع برای‌کرانهای تمام ضرایب فرینال هستند یا نه، گمانی بشرح زیر است:

گمان ــ بایبرباخ[1] ــ اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد، آنگاه برای هــر n، $|a_n| \le n$.

قضیـــــــه ۱۲ــ۳، گمـــــــان را در مـورد $n=2$ ثابت می‌کند. این گمان در سال ۱۹۱۶ مطرح شده است، ولی تا به امروز تنها در مورد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ = n به ثبـوت رسیده است[2].

با قرار دادن $\alpha = 0$ در (۶) به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

که به تابع کوئب[3] معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌یی کـــــه در

---

1. Bieberbach

۲ــ(توضیح‌مترجم)این گمان به یقـین تبدیل شده است، جهت اثبات به مقالهٔ زیر مراجعه کنید:

L. de Brange, a Proof of the Bieberbach Conjecture, ACTA. Math. 154 (1985) 137-152.

3. Koebe

امتداد محورحقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است می‌نگارد . قضیه بعدی حاکی است که این‌خاصیت نگاشتی ، در یک معنی ، فرینال است .

قضیه۱۲ـ۴ . اگر $f(z) \in S$ و $f(z) \neq c$ برای $|z| < 1$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$

اثبات ـ قرار می‌دهیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ چون که $f(z) \neq c$ پس تابع

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \cdots$$

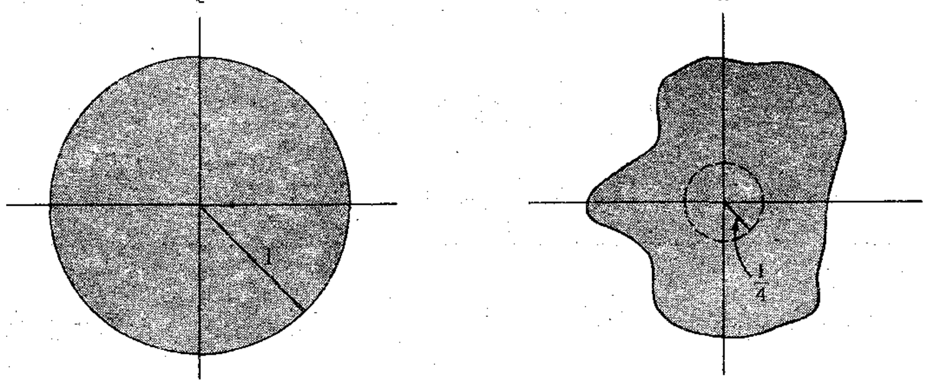
نیز متعلق به S است . با بکار بردن قضیه ۱۲ـ۳ برای $g(z)$ ، نتیجه می‌گیریم که $|a_2 + (1/c)| \leq 2$. پس $|1/c| - |a_2| \leq |(1/c) + a_2| \leq 2$. اینک بابکار بردن قضیه ۱۲ـ۳ در مورد $f(z)$ داریم :

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2| \leq 4,$$

و قضیه ثابت است .

تذکر ـ قضیه ۱۲ـ۴ به قضیه پوشش موسوم است . قضیه مبین آن است ،هر تابعی‌در S قرص $|z| < 1$ را بر میدانی در صفحه w می‌نگارد که این میدان شامل قرص $|w| < \frac{1}{4}$ می‌باشد(ر. ک. شکل ۱) . به خواننده واگذار می‌کنیم ، تحقیق نماید که توابع $k_\alpha(z) = z/(1 - e^{i\alpha} z)^2$ ، قرص $|z| < 1$ رابرصفحه w ، که درامتدادپرتوی با شناسهٔ ثابت از $-\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$ تا ∞ بریده شده ، می‌نگارد .

شکل ۱



"شگرد" اثبات قضیه ۱۲ـ۴ ، متضمن ساختن یک تابع کمکی در S بود که وقتی با

قضیه ۱۲ــ۳ ترکیب شد، به نتیجه مطلوب رسید. اثبات قضیه بعدی که در ارتباط با کرانهایی برای مشتقات توابع S است، مستلزم به‌کار گرفتن روشی مشابه‌است. ولی ابتداء به لم زیر نیاز داریم:

لم ــ اگر $f(z) \in S$ ، $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

اثبات ــ چونکه $f'(z) \neq 0$ ، شاخه تابع $\log f'(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی است. پس

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}.$$

و با ضرب طرفین رابطه در (۱) و محاسبه قسمت‌های حقیقی، نتیجه می‌شود:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re}\left\{\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

و لم ثابت می‌گردد.

قضیه ۱۲ــ۵. اگر $f(z) \in S$ آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad (|z| = r < 1).$$

اثبات ــ یادآورمی‌شویم، تابع

$$w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z} \qquad (|z_0| < 1)$$

تحلیلی و تک ــ ارز است و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

نیز بازاء $|z| < 1$ ، تحلیلی و تک ــ ارز است. با این حال $g(z) \notin S$ ، چون که $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد. در واقع

$$b_0 = g(0) = f(z_0),$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2),$$

$$b_2=\frac{g''(0)}{2}=\frac{1}{2}[f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2-2f'(z_0)\bar{z}_0(1-|z_0|^2)].$$

با توجه به این‌که

$$\frac{g(z)-b_0}{b_1}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+\cdots$$

در S است و با بکار بردن قضیه ۱۲–۳، داریم $|b_2/b_1|\leq 2$ ، یعنی

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2)-2\bar{z}_0\right|\leq 2. \qquad (۷)$$

چون‌که z_0 عدد مختلط اختیاری در قرص واحد است ، تغییر نمادی $r<1$ ،$z_0=z=re^{i\theta}$ را انجام می‌دهیم . سپس طرفین (۷) را در $2|z|/(1-|z|^2)$ ضرب می‌کنیم تا حاصل شود .

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}. \qquad (۸)$$

از نظر هندسی ، (۸) گویای این است که برای هر r ، مقدار $z[f''(z)/f'(z)]$ در قرصی به مرکز $2r^2/(1-r^2)$ و با شعاع $4r/(1-r^2)$ واقع است (ر. ک. شکل ۲) . به ویژه :

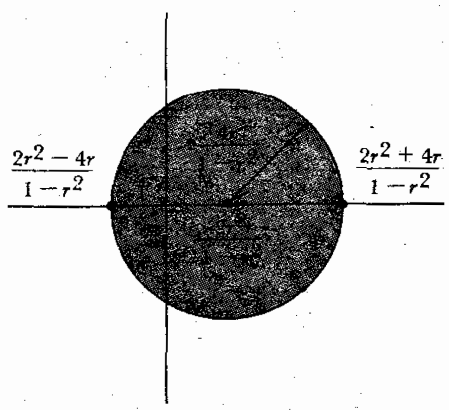
$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq \mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\leq\frac{2r^2+4r}{1-r^2}. \qquad (۹)$$

با توجه به لم ، (۹) را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{2r-4}{1-r^2}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})|\leq\frac{2r+4}{1-r^2}. \qquad (۱۰)$$

انتگرال‌یابی در (۱۰) نسبت به r از 0 تا r نتیجه می‌دهد

شکل ۲



$$\log(1-r) - 3\log(1+r) \le \log|f'(re^{i\theta})| \le \log(1+r) - 3\log(1-r)$$

و با به نما رسانیدن داریم

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(re^{i\theta})| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

و قضیه ثابت است.

قابل توجه است، مشتق تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ برابر است با $k'(z) = (1+z)/(1-z)^3$. پس کران بالای قضیه ۱۲ــ۵ در مورد این توابع در $z = r$ است و کران پائین در $z = -r$. اینک می‌توانیم کرانهایی برای کالبد توابع S مشخص‌کنیم. با توجه به سرشت فرینالی تابع $k(z) = z/(1-z)^2$، احتمالا "خواننده می‌تواند قضیه بعدی را حدس بزند.

<u>قضیه ۱۲ــ۶. اگر $f(z) \in S$ آنگاه:</u>

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (|z| = r < 1).$$

اثبات ــ با انتگرال‌یابی در امتداد پاره‌خط مستقیم از 0 تا $z = re^{i\theta}$، و با بکار بردن قضیه ۱۲ــ۵ داریم:

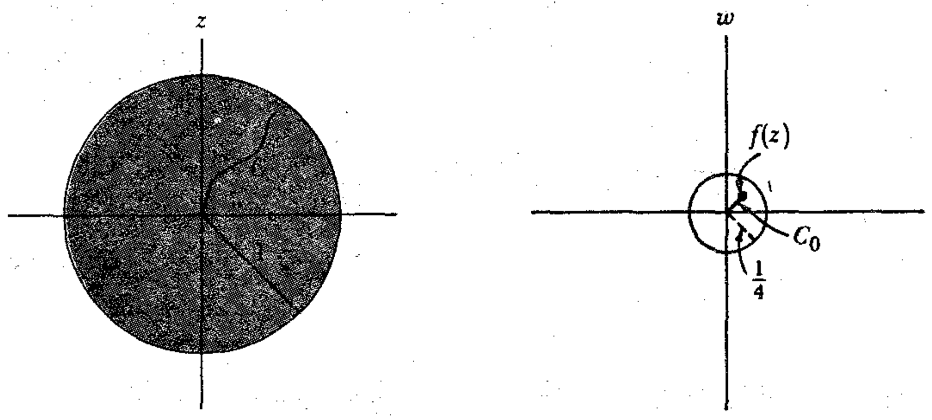
$$|f(re^{i\theta})| \le \int_0^r |f'(te^{i\theta})|\, dt \le \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}\, dt = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

و بدین ترتیب نامساوی اولی ثابت می‌شود.

برای مقادیر z ی که با $|f(z)| \ge \frac{1}{4}$ سازگارباشند، نامساوی‌دوم نتیجه‌مستقیم این است که $r/(1+r)^2 < \frac{1}{4}$. بنابراین می‌توانیم نقطه z ی به دلخواه اختیار کنیم و فرض‌کنیم، $|f(z)| < \frac{1}{4}$. به موجب قضیه ۱۲ــ۴، پاره خط مستقیم C_0 از 0 تا $f(z)$ درصفحه w نگاره‌مرز ساده‌ٔ بسته‌یی مانند C در قرص $|z| < 1$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۳). در این صورت $|f(z)| = \int_{C_0}|dw| = \int_C |f'(\zeta)|\,|d\zeta|$. قابل توجه است، $\int_C|d\zeta| \ge \int_C d|\zeta| = r$ و r هم درازای پاره خط مستقیم از 0 تا $|z|$ است. پس

$$|f(z)| = \int_C |f'(\zeta)| \left|\frac{d\zeta}{d|\zeta|}\right| d|\zeta| \ge \int_C |f'(\zeta)|\, d|\zeta|$$
$$\ge \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3}\, dt = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

شکل ۳



و بدین ترتیب اثبات کامل است .

تذکر ــ به عنوان نتیجه‌یی از این قضیه ، خانواده S کراندار یکنواخت است . پس به موجب قضیه ۱۱ــ۹ ، S خانواده نرمال است . بعلاوه حد $f(z)$ برای هردنباله ازتوابع می‌بایست خودش هم با روابط $f(0)=0$ ، $f'(0)=1$ نرمالیزه شده باشد . بنابراین بنابه قضیه ۱۱ــ۱۰ ، تابع $f(z)$ تکارز است و بنابراین S فشرده است .

قضیه مساحت (قضیه ۱۲ــ۲) به توابع متعلق به T هم اشاره‌یی دارد .چنانچه‌اثبات آن ترمیم شود ، که این کار را به عهده خواننده می‌نهیم ، نتایج زیر قابل حصول‌است .

لم ۱ــ اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ متعلق به S باشد ، آنگاه مساحت‌نگاره $|z|=r<1$ در تابع $f(z)$ برابر است ، با $A(r)=\pi(r^2+\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|^2r^{2n})$

هم چنین باید توجه داشت

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}f(z)\overline{f(z)}\,d\theta$$
$$=2\pi\left(r^2+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\right)\qquad(0<r<1),\qquad(۱۱)$$

که به نتیجه زیر منتج می‌گردد .

لم ۲ــ برای $f(z)\in S$ ، گیریم $A(r)$ مساحت نگاره $|z|\le r\le R<1$ در تابع $f(z)$ باشد . در این صورت

$$\int_0^R\frac{A(r)}{r}\,dr=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta})|^2\,d\theta.$$

اثبات ــ با توجه به لم ۱

$$\int_0^R \frac{A(r)}{r}\, dr = \pi \int_0^R \left(r + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n-1}\right) dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n}\right).$$

و اینک قضیه به موجب (۱۱) ثابت می‌شود.

بی‌درنگ از قضیه ۱۲ــ۶ می‌توان نتیجه گرفت که برای تمام توابع S داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \le \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (0<r<1) \tag{۱۲}$$

ولـــــی این که نامساوی (۱۲) چندان ظرافتی ندارد، موضوع عجیبی نیست. هیچ‌تابع S در بیش از یک نقطه، کالبدش $r/(1-r)^2$ نیست. لم بعدی‌ترتیب‌درستی ازاندازه تابع بدست، می‌دهد.

لم ۳ــ اگر $f(z) \in S$ آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \le \frac{r}{1-r} \qquad (0<r<1).$$

اثبات ــ به موجب لم ماقبل قضیه ۱۲ــ۳، تابع $g(z) = z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ در S است. اگر قضیه۱۲ــ۶رابرای $f(z)$ بکاربریم درمی‌یابیم، $|g(z)| \le r\sqrt{1/(1-r^2)^2} = r/(1-r^2)$ پس

$$A(r, g) \le \pi \left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2. \tag{۱۳}$$

باتوجه به (۱۳)، همانندی

$$\int_0^{2\pi} |g(Re^{i\theta})|^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{2i\theta})|\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{i\alpha})|\, d\alpha \qquad (0<R<1)$$

را برای لم ۲ بکار می‌بریم که بدست می‌دهد

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{i\alpha})|\, d\alpha \le 2\int_0^R \frac{r}{(1-r^2)^2}\, dr = \frac{R^2}{1-R^2}. \tag{۱۴}$$

چون که $R(<1)$ دلخواه است، لم با توجه به (۱۴) ثابت می‌گردد.

همان طور که تذکر دادیم ، گمان بایبرباخ تاکنون ثابت نشده است . با اینحال لم ۳ به ما امکان می‌دهد که یک کران بالای "خوب مقبول" برای‌کالبد ضرایب بیابیم .

قضیه ۱۲ـ۷ . اگـــــــر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد ، آنگاه برای هـر n ، $|a_n| < en$.

اثبات ــ به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad (n = 2, 3, \ldots; \quad 0 < r < 1).$$

پس

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \, d\theta,$$

که به موجب لم ۳ نتیجه می‌شود .

$$|a_n| \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}. \qquad (۱۵)$$

چون که برای هر r ، در فاصله $0 < r < 1$ نامساوی (۱۵) برقرار است ، بهترین‌کرانی که با این روش می‌توان به دست آورد این است که در (۱۵) ، کمینه‌سازی کنیم . با اینکار نتیجه می‌شود :

$$|a_n| \le \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en.$$

تذکر ــ در حال حاضر ، بهترین کران شناخته شده عبارتست از $|a_n| < 1.243$

پرسش‌ها

۱ــ در این بخش چنانچه توابع نرمالیزه نمی‌بودند چگونه نتایجی می‌توانستیم به دست آوریم ؟

۲ــ اهمیت رده T در چه بود ؟

۳ــ چرا کرانی برای $|a_2|$ این چنین مفید بود ؟

۴ــ اگر $f(z)$ تابع کرانداری در S باشد ، آیا می‌شود که $|a_2| = 2$ ؟

۵ــ چرا تابع کمکی که در قضیه ۱۲ــ۵ ساختیم مفید افتاد ؟

۶ــ چرا برای اکثر قضایا ، تابع کوئب فرینال بود ؟

۷ـ بازاء هر n ، آیا تابعی متعلق به S موجود است که برای آن قدر مطلق ضریب n ام آن حداقل به بزرگی قدر مطلق ضریب n ام در همه دیگر توابع S باشد؟

۸ـ در اثبات نامساوی دوم قضیه ۱۲ـ۶ ، چرا لازم بود که دوحالت مختلف بررسی شود؟

تمرینها

۱ـ تابعی مثال بیاورید که در قرص $|z|<1$ تک ارز باشد و تحلیلی نباشد.

۲ـ (الف) اگر $f(z)\in S$ ، نشان دهید که برای هر عدد مختلط مخالف صفر t ، $|t|\le 1$ تابع $f(tz)/t\in S$.

(ب) اگر $f(z)=z/(1-z)^2$ و $|t_0|>1$ ، نشان دهید ، $f(t_0 z)/t_0\notin S$

۳ـ اگر $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ در S باشد ، نشان دهید ، برای هر عدد صحیح n ، تابع $g(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}b_k z^k$ در S موجود است که $b_n=|a_n|$.

۴ـ برای α حقیقی ، تحقیق کنید که $z/(1-e^{i\alpha}z)^2$ در S است .

۵ـ برای α حقیقی ، تحقیق کنید که $z/(1-e^{i\alpha}z)^3$ در $|z|<\frac{1}{2}$ تکارزست ولی بر هیچ قرص بزرگتری به مرکز مبداء تکارز نیست .

۶ـ اگر $f(z)\in S$ ، نشان دهید ، نگاره $|z|<1$ در تابع $f(z)$ شامل نگاره $z/(1-z)^2$ نیست مگر اینکه $f(z)=z/(1-z)^2$.

۷ـ اگر $f(z)\in S$ ، نشان دهید ، $z(f(z^k)/z^k)^{1/k}\in S$ متعلق بـه S است ، برای هر عدد صحیح و مثبت k .

۸ـ فرض‌کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی است و گیریم C مرز بسته‌یی در $\mathscr{D}$ است . ثابت کنید ، $\int_C \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ انگاری محض است .

۹ـ اگر $f(z)\in S$ ، نشان دهید ، $|z|<1$ بر میدانی شامل قرص $|w|<1$ نگاشته می‌شود ، اگر وتنها اگر $f(z)=z$. (راهنمایی: اگر نگاره $|z|<1$ تحت تابع f شامل قرص $|w|<1$ باشد ، آنگاه f^{-1} می‌بایست در S باشد و $|f^{-1}|<1$. اینک لم شوارتس را برای f^{-1} بکار ببرید) .

۱۰ـ اگر $f(z)$ تابع فردی در S باشد ، نشان دهید ، $|z|<1$ برمیدانی شامل‌قرص $|w|<\frac{1}{2}$ نگاشته می‌شود .

۱۱ـ اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ و $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$ ، نشان دهید ، $f(z)\in S$.

(راهنمایی: اختلاف $f(z_1)-f(z_0)=(z_1-z_0)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^n-z_0^n)$ را در نظر بگیرید) .

۱۲ــ اگر $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n$ در S باشد، نشان دهید که $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$ (راهنمایی: اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|>1$، نشان‌دهید که‌برای r_0 ی $0<r_0<1$ ، $f'(r_0)=0$).

۱۲ــ۲. زیر رده‌های S

مشکل بودن اثبات گمان بایبرباخ، باعث شده است که ریاضی‌دانها زیر رده‌هایی‌از S را مورد بررسی قرار دهند که در آن زیر رده‌ها کران‌های ضریبی ظریفی بتوان بدست آورد.

قضیه ۱۲ــ۸. اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ در S باشدو ضرایب حقیقی‌داشته باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n|\le n$.

اثبات ــ برای $z=re^{i\theta}$ ، $r<1$ قرار می‌دهیم.

$$\operatorname{Im} f(z)=v(re^{i\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}a_k r^k \sin k\theta. \tag{۱۶}$$

با ضریب (۱۶) در $\sin n\theta$ و انتگرال‌یابی از 0 تا π حاصل می‌شود.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin n\theta\, d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a_n r^n \sin^2 n\theta\, d\theta=a_n r^n. \tag{۱۷}$$

باتوجه به رابطه

$$\begin{aligned}|\sin (n+1)\theta| &= |\sin n\theta \cos\theta+\cos n\theta \sin\theta|\\ &\le |\sin n\theta|+|\sin\theta|,\end{aligned}$$

و به روش استقراء می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta|\le n|\sin\theta|$. پس‌از (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n|\le\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta. \tag{۱۸}$$

سپس نشان می‌دهیم، $v(re^{i\theta})\ne 0$ $(0<r<1, 0<\theta<\pi)$. این بدین دلیل است که

$$\begin{aligned}0\ne f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n(e^{in\theta}-e^{-in\theta})\\ &= 2i\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n \sin n\theta=2iv(re^{i\theta}).\end{aligned}$$

چون که $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، می‌بایست در فاصله $0<\theta<\pi$

علامت جبری ثابت داشته باشد . پس

$$r = |a_1 r| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta\right| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta. \qquad (۱۹)$$

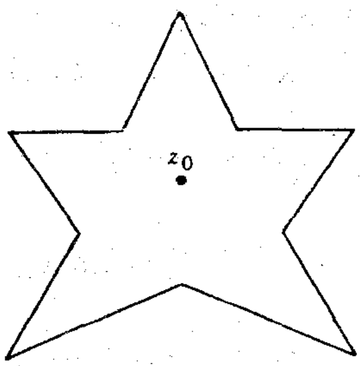
بـــــا جایگزینی (۱۹) در (۱۸) به دست می‌آید که $|a_n r^n| \leq nr$ و بـا $r \to 1$ قضیه ثابت می‌گردد .

قابل توجه است‌که در مورد تابع‌کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ تساوی‌برقرارمی‌گردد .

زیررده‌های S را نیزمی‌توان‌بدین ترتیب توصیف نمود که خواص هندسی میدانهایی راکه آنها نگاشته‌اند مشخص کرد . میدان $\mathscr{D}$ را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوئیم ، اگر چنانچه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از $\mathscr{D}$ را به z_0 وصل کند در $\mathscr{D}$ بیافتد . حیرت‌انگیز نیست‌که یک‌ستاره (ر.ک. شکل ۴) . ستاره‌گون‌است . تابع $f(z) \in S$ را نسبت به‌مبداء ستاره‌گون (ویابطورخلاصه ستاره‌گون) گوئیم اگر چنانچه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است . این زیر رده S را با S^* نمایش می‌دهیم .

لم بعدی نشان می‌دهد که در مورد توابع ستاره‌گون نگاره قرص‌های کوچکتر وارث بعضی خواص نگاره قرص واحدند .

لم ــ فرض‌کنیم $f(z) \in S$. در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد .



شکـــل ۴

اثبات ــ ابتداء فرض کنیم $f(z) \in S^*$. گیریم $\mathscr{D}$ نگاره $|z| < 1$ و $\mathscr{D}_r$ نگاره $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد . اگر $w \in \mathscr{D}$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$، $tw \in \mathscr{D}$ (چون‌که $\mathscr{D}$ ستاره‌گون است) . پس تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < 1$ صادق است . چون که $g(0) = f^{-1}(tf(0)) = 0$ ، لم شوارتس را بکار می‌بریم تا حاصل شود $|g(z)| \leq |z|$.

اکنون نقطه $w_1 \in \mathscr{D}_r$ را انتخاب می‌کنیم . در این صورت برای نقطه‌ی z_1 با $|z_1| < r$ $\quad w_1 = f(z_1)$. برای t دلخواه ، $0 < t < 1$ داریم :

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r.$$

ولـــــی این بدان معنی است که tw_1 در $\mathscr{D}_r$ قرار دارد . چون که‌این‌مطلب برای همه w_1 هـا در $\mathscr{D}_r$ و همه tها ، $0 < t < 1$ درست است ، میدان $\mathscr{D}_r$ نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است .

برعکس ، اگر $f(z) \notin S^*$ ، آنگاه نقطه $w_0 \in \mathscr{D}$ موجود است بطوری که برای t_0 ی $0 < t_0 < 1$ ، $t_0 w_0 \notin \mathscr{D}$.اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به طوری‌که نگاره‌اش $\mathscr{D}_r$ شامل نقطه w_0 باشد . چون که $\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}$ ، نقطه $t_0 w_0 \notin \mathscr{D}_r$. پــس $f(z)$ ، $|z| < r$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد .

اینک می‌توانیم برای‌توابع ستاره‌گون نمایش تحلیلی ارائه دهیم .

قضیه ۱۲ــ۹ . فرض‌کنیم $f(z) \in S$. آنگاه $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re}\left\{z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1).$$

اثبات ــ به موجب لم ، $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر نگاره $\mathscr{D}_r$ از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد . به بیان معادل برای هر θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ می‌بایست در $\mathscr{D}_r$ باشد . ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است ، زیرا در غیر این صورت ، بردار شعاعی می‌بایست مرز $\mathscr{D}_r$ راحداقل در دو نقطه قطع کند . پس یک تابع در S^* با شرط

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\{\arg f(re^{i\theta})\} > 0.$$

مشخص می‌گردد ، ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$. بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\{\operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta})\right\}$$
$$= \operatorname{Im}\left\{i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = \operatorname{Re}\left\{z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

و اثبات کامل است .

تذکر ــ شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{\arg f(z)\} = \operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

حاکی است که $f(z)$ بر یک میدان ستاره‌گون نگاشته می‌شودولی تک‌ارزبودن $f(z)$ را تضمین نمی‌کند. بعنوان مثال z^2 ، قرص $|z| < 1$ را بر خودش می‌نگارد و درشرط زیر هم صادق است.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg z^2) = \frac{\partial}{\partial\theta} 2\theta = 2 > 0.$$

این نکته که مشتق z^2 در مبداء صفر است، بدین معنی است که در هیچ همسایگی مبداء این تابع تک ارز نیست. حیرت‌انگیز است که همه توابع تحلیلی غیرتک ارز که‌قرص $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون می‌نگارند می‌بایست مشتق آنها در مبداء صفر شود.

<u>قضیه ۱۲–۱۰. فرض‌کنیم $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ در $|z| < 1$ تحلیلی‌است و $f'(0) = a_1 \neq 0$. اگر در $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re}\{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$ آنگاه $f(z)$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است.</u>

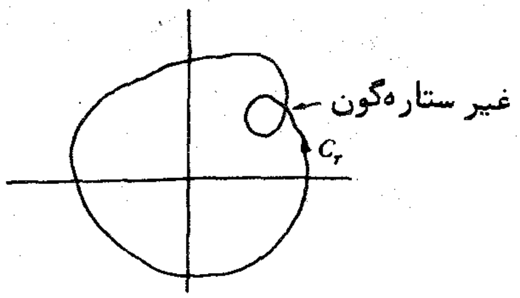
اثبات ــ باید توجه داشت که $f(z)$ در $|z| < 1$ به غیر از صفر ساده‌یی در مبداء، صفر دیگری ندارد، زیرا اگر در نقطه z_0 ی، $0 < |z_0| < 1$ ، $f(z_0) = 0$ ، آنگاه $z[f'(z)/f(z)]$ در z_0 قطب ساده خواهد داشت. این بدان معنی است که $\operatorname{Re}\{z[f'(z)/f(z)]\}$ مقادیر منفی به دلخواه بزرگ را می‌پذیرد که با فرض $\operatorname{Re}\{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$ متناقض است.

اینک r ، $0 < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم. به موجب قضیه ۱۱–۴، کافی است‌که‌نشان دهیم $f(z)$ بر دایره $|z| = r$ تک‌ارزست. چون که $f(z)$ در $|z| \leq r$ ، یک صفر (و نه‌قطب) دارد، اصل شناسه نتیجه می‌دهد که $\Delta_{|z|=r} \arg f(z) = 2\pi$. واین‌بدان معنی است‌که دایره $|z| = r$ با تابع $f(z)$ برمرز بسته C_r نگاشته می‌شود و C_r یک بار حول مبداء می‌گردد. چون که $\arg f(z)$ با $\arg z$ افزایش می‌یابد، خم نمی‌تواند مانند شکل ۵، خود بر خورد باشد. پس C_r مرز ساده بسته است. چونکه r دلخواه‌است، تابع $f(z)$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است.

تذکر ــ با ترکیب قضیه ۱۲–۹ و ۱۲–۱۰ می‌بینیم، یک شرط لازم و کافی برای این که‌تابع تحلیلی $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشداین‌است‌که $\operatorname{Re}\{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$.

اینک برقراری گمان بایبرباخ را در مورد رده S^* ثابت می‌کنیم:

شکل ۵



قضیه ۱۲-۱۱. گیریم $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ در S^* باشد، آنگاه بـرای هـر n ، $|a_n|\le n$.

اثبات ــ چون که برای $0<|z|<1$ ، $f(z)\neq 0$ ، تابع

$$P(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}} \tag{۲۰}$$

در $|z|<1$ تحلیلی است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n. \tag{۲۱}$$

چـــــون که $f(z)\in S^*$ ، برای $|z|<1$ داریم $\operatorname{Re}\{P(z)\}>0$. پس به‌موجب قضیه ۱۰-۱۵

$$|\alpha_n|\le 2 \quad \text{بـــرای}\quad n=1,2,3,\ldots \tag{۲۲}$$

از (۲۰) و (۲۱) بدست می‌آید.

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n z^{n-1}=\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n\right)$$

با برابر گرفتن ضرایب حاصل می‌شود

$$ka_k=a_k+a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+\cdots+a_2\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1},$$

و یا به صورت معادل

$$(k-1)a_k=a_{k-1}\alpha_1+a_{k-2}\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}\qquad(k=2,3,4,\ldots). \tag{۲۳}$$

بـــا استفاده از کران (۲۲)، می‌توان نامساوی مثلث را در (۲۳) بکار زد تـا حاصل نمود.

$$(k-1)|a_k|\le 2(|a_{k-1}|+|a_{k-2}|+\cdots+|a_2|+1). \tag{۲۴}$$

از (۲۴) (یـــا قضیه ۱۲-۳)، در می‌یابیم که $|a_2|\le 2$. سپس فرض کنیم که بـرای $k=2,3,\ldots,n-1$ ، $|a_k|\le k$. در این صورت

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و ایـــــن به $|a_n| \leq n$ تحویل می‌گردد. پس، به استقراء، قضیه برای هر n درست است.

تذکر ــ تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ در S^* است. برای اثبات، ملاحظه‌می‌شود که نگاره $|z| < 1$، صفحه w است که در امتداد پرتو $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است. و یا این مطلب با نشان دادن

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{k'(z)}{k(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0.$$

نیـــــز قابل اثبات است. پس کران ضریبی را برای توابع S^* نمی‌توان ترمیم کرد. به علاوه کرانهای حاصله در قضایای ۱۲ــ۴ و ۱۲ــ۵ و ۱۲ــ۶، برای S را هم نمی‌توان برای S^* ظریف‌تر نمود.

میدان $\mathscr{D}$ را محدب گوئیم اگر چنانچه پاره خط مستقیمی که‌هردونقطه‌از $\mathscr{D}$ را به هم وصل می‌کند در $\mathscr{D}$ بیافتد. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوئیم اگر چنانچه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیر رده S را با K نمایش می‌دهیم.

از نظر هندسی واضح است که یک میدان محدب نسبت به هر نقطه از این میدان ستاره‌گون است، پس $K \subset S^*$. بعلاوه این احتوا کامل است. جهت اثبات، ملاحظه می‌شود که تابع ساده‌یی چون تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ قرص $|z| < 1$ را برمیدان ستاره‌گونی می‌نگارد که‌محدب نیست(نگاره شامل نقاط $-\frac{1}{4}-i$ و $-\frac{1}{4}+i$ هست.ولی شامل نقطه $-\frac{1}{4}$ نیست). با توجه به کامل بودن احتوا، هر قضیه در مورد توابـــع S^*، قضیه‌یی در مورد توابع K نیز هست. مثلا" کالبد ضریب n ام یک تابع محدب دارای‌کران n می‌باشد. نشان خواهیم داد که این قضیه و دیگر قضایای ثابت‌شده برای S^* هنگامیکه به رده K محدود گردیم، قابل ترمیم است.

بررسی K به موازات بررسی S^* صورت می‌گیرد. به عوض لم ماقبل‌قضیه ۱۲ــ۹، لم زیر را داریم:

<u>لم ــ فرض‌کنیم $f(z) \in S$، در این صورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هــر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب بنگارد.</u>

اثبــات ــ ابتداء فــرض کنیــم $f(z) \in K$. گیریــم $\mathscr{D}$ نگـــــاره $|z| < 1$ و

$\mathscr{D}_r$ نگاره $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1 و w_2 را در $\mathscr{D}_r$ انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط

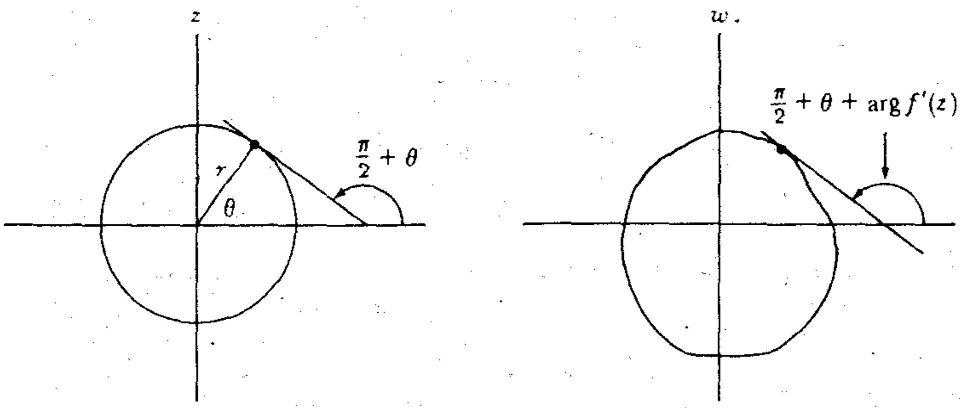
$$tw_1 + (1-t)w_2 \qquad (0 < t < 1)$$

هم در $\mathscr{D}_r$ واقع است. می‌بایست نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < r$ موجود باشند که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن عمومیت، فرض می‌کنیم که $|z_1| \le |z_2|$. آنگاه نگاره $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf((z_1/z_2)z) + (1-t)f(z)$ در $\mathscr{D}$ واقع است. پس تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در شرایط $|h(z)| < 1$ ، $h(0) = 0$ صدق می‌کند. به موجب لم شوارتس، $|h(z)| \le |z|$ بویژه

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \le |z_2| < r. \qquad (۲۵)$$

چونکه $\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}$ ، نقطه z_0 ی در قرص $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$ ولی بنابه (۲۵) نقطه $f^{-1}(f(z_0)) = z_0$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < r$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در $\mathscr{D}_r$ قرار دارد.

برعکس اگر $f(z) \notin K$ ، آنگاه دو نقطه در $\mathscr{D}$ موجود است، که پاره خط مار بر این دو نقطه در $\mathscr{D}$ قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که نگاره‌اش $\mathscr{D}_r$ شامل این دو نقطه باشد. چون که $\mathscr{D}_r \subset \mathscr{D}$ ، پاره خطی که این دو نقطه را بهم وصل می‌کند نمی‌تواند در $\mathscr{D}_r$ قرار داشته باشد. پس $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب نمی‌نگارد.



شکل ۶

قضیه ۱۲–۱۲. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in K$ و اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1).$$

اثبات ــ به موجب لم ، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر نگاره $\mathscr{D}_r$ ، از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد . از نظر هندسی ، این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز ، با افزایش θ ، در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌گردد . با توجه به نتایج بخش ۱۱ــ۱ ، زاویه‌یی که خط مماس در صفحه w با محور حقیقی می‌سازد ، برابر است با $\pi/2 + \theta + \arg f'(z)$ ، همان طور که در شکل ۶ تشریح شده است .

پس تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta})\right) > 0. \tag{۲۶}$$

اکنون (۲۶) به صورت زیر ساده می‌شود .

$$1 + \frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{Im}\log f'(re^{i\theta})) = 1 + \operatorname{Im}\left\{ire^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0.$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است .

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ ، (۲۶) به صورت مجدد چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg izf'(z)) = \frac{\partial}{\partial\theta}(\arg zf'(z)) > 0. \tag{۲۷}$$

ولــــی (۲۷) شرطی است برای $zf'(z)$ تا بر میدان ستاره‌گون نگاشته شود . از این رو $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in S^*$. این باعث می‌شود ، به روشی ساده بتوان کرانهای ضریبی برای رده K مشخص نمود .

قضیه ۱۲ــ۱۳ . گیریم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در K باشد . دراین‌صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

اثبات ــ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در S^* است . پس بنا به قضیه ۱۲ــ۱۱ می‌بایست برای هر n ، $n|a_n| \leq n$ و قضیه ثابت است .

تذکر ــ تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n = z/(1-z)$ تک ــ ارز است و $|z| < 1$ را بر میدان محدب $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$ می‌نگارد . پس کران موجود در قضیه ۱۲ــ۱۳ ، بهترین‌کران

ممکن است. تابع $f(z)$ در نظریه توابع محدب به همان اندازه مهم است که تاح کوئب در نظریه توابع ستاره‌گون اهمیت داشت. بدین معنی که برای اکثر قضایای‌مربوط به‌توابع محدب، وضعیت فرینال دارد. جالب است متذکر شویم، $zf'(z)=z/(1-z)^2$ تابع کوئب است.

همان‌گونه‌که انتظار می‌رود با توجه به تذکرقبلی، عدد"$\frac{1}{4}$" در قضیه پوششی (قضیه ۱۲ـ۴) تبدیل به قضیه پوششی "$\frac{1}{2}$" برای توابع K می‌گردد.

قضیه۱۲ـ۱۴. اگر $f(z)\in K$ و $f(z)\neq c$ برای $|z|<1$، دراین‌صورت $|c|\geq\frac{1}{2}$.

اثبات ـ ابتداء نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z)=(c-f(z))^2$ در $|z|<1$ تک ارز است. دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم. در این صورت:

$$g(z_0)-g(z_1)=(c-f(z_0))^2-(c-f(z_1))^2$$
$$=(f(z_0)-f(z_1))(f(z_0)+f(z_1)-2c).$$

اکنون $f(z_0)\neq f(z_1)$ زیرا که $f(z)$ تک ـ ارز است. هم چنین، بموجب تحدب $f(z)$، نقطه $\frac{1}{2}[f(z_0)+f(z_1)]$ به نگاره $|z|<1$ متعلق است و بنابراین نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0)+f(z_1)-2c\neq 0$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون که $g(z)=c^2-2cz+\cdots$، تابع نرمالیزه زیر در S است.

$$h(z)=\frac{g(z)-c^2}{-2c}=z+\cdots$$

به‌علاوه در $|z|<1$، $h(z)\neq c/2$ زیرا که $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با بکار بردن قضیه ۱۲ـ۴، در می‌یابیم $|c/2|\geq\frac{1}{4}$ و یا $|c|\geq\frac{1}{2}$.

در بخش ۱۲ـ۱، نشان دادیم، چگونه نامساوی $|a_2|\leq 2$ ما را قادر می‌کند که کرانهایی برای $|f(z)|$ و $|f'(z)|$ بیابیم. کران ضریبی ترمیمی توابع محدب، ما را قادر می‌کند که کرانهای بر $|f(z)|$ و $|f'(z)|$ برای توابع K، نیز ترمیم گردد.

قضیه ۱۲ـ۱۵. اگر $f(z)\in K$ آنگاه

$$\frac{r}{1+r}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{1-r},$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2} \qquad (|z| = r < 1).$$

اثبات ــ اثبات قضیه ۱۲ــ۵ را مختصری اصلاح می‌کنیم . به عوض (۷) داریم :

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\bar{z}_0\right| \le 1.$$

پس نامساوی

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \le \frac{2r}{1-r^2}$$

جایگزین (۸) می‌گردد . این منجر می‌شود به :

$$-\frac{2}{1+r} \le \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \le \frac{2}{1-r}.$$

با انتگرال‌یابی و با به نما رساندن ، بدست می‌آید

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2}.$$

همان طور که قضیه ۱۲ــ۶ ، نتیجه قضیه ۱۲ــ۵ بود ، کرانها هم بر $|f(z)|$ از کرانهای بر $|f'(z)|$ نتیجه می‌شود . توضیحات را به خواننده واگذار می‌کنیم .

گرچه همه توابع S محدب نیست ولی به یک معنی ، می‌توان درجه تحدب را برای هر تابع S "اندازه" گرفت . برای هر $f \in S$ ، عدد حقیقی $R = R(f)$ ، بزرگترین قرص $|z| < R \le 1$ که بوسیله f بر میدان محدب نگاشته می‌شود ، را متناظر می‌کنیم . این عدد R به شعاع تحدب $f(z)$ موسوم است . روشن است‌که $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $R = 1$. اینک بزرگترین قرصی را که بر آن تمام توابع S محدب باشند ، مشخص می‌کنیم .

<u>قضیه ۱۲ــ۱۶ . اگر $f(z) \in S$ ، آنگاه $f(z)$ قرص $|z| < 2 - \sqrt{3}$ را برمیدان محدب می‌نگارد .</u>

اثبات ــ به موجب قضیه ۱۲ــ۱۲ ، نگاره $|z| < r$ محدب است اگر و تنها اگر برای $|z| < r$ ، $\mathrm{Re}\{1 + z[f''(z)/f'(z)]\} > 0$. به موجب نامساوی دوم (۹) داریم :

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \ge 1 + \frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} = \frac{1 - 4r + r^2}{1-r^2}.$$

چون‌که $2 - \sqrt{3}$ ، کوچکترین ریشه‌مثبت $1 - 4r + r^2$ می‌باشد ، قضیه ثابت‌می‌گردد .

طبق معمول، تابع کوئب $k(z)=z/(1-z)^2$ فرنیال است. در واقع

$$1+z_0\frac{k''(z_0)}{k'(z_0)}=0 \qquad (z_0=-(2-\sqrt{3})).$$

رده‌بعدی ما در رابطه با K است، بدین معنی که هر تابع در این رده برحسب بعضی توابع محدب کمکی تعریف می‌شود. تابع

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,$$

که در $|z|<1$ تحلیلی است، به تقریبا" محدب موسوم است اگر چنانچه تابع $g(z)\in K$ موجود باشد که برای هر z در قرص واحد، $\operatorname{Re}\{f'(z)/g'(z)\}>0$.
لم زیر برای نشان تک ارزی توابع تقریبا" محدب به کار می‌رود.

لم. اگر $\phi(z)$ در میدان محدب $\mathscr{D}$ تحلیلی باشدو در $\mathscr{D}$، $\operatorname{Re}\phi'(z)>0$، آنگاه $\phi(z)$ در $\mathscr{D}$ تک‌ارز است.

اثبات ــ نقاط متمایز z_0 و z_1 را در $\mathscr{D}$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت پاره خط مستقیم $z=z_0+t(z_1-z_0)$ ، $0\le t\le 1$ می‌بایست در $\mathscr{D}$ باشد. با انتگرال‌گیری در امتداد این مسیر، بدست می‌آید.

$$\phi(z_1)-\phi(z_0)=\int_{z_0}^{z_1}\phi'(z)\,dz$$
$$=\int_0^1\phi'(z_0+t(z_1-z_0))(z_1-z_0)\,dt.$$

با تقسیم بر z_1-z_0 و با محاسبه قسمت‌های حقیقی، داریم:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\phi(z_1)-\phi(z_0)}{z_1-z_0}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\int_0^1\phi'(z_0+t(z_1-z_0))\,dt\right\}>0.$$

پس $\phi(z_1)\ne\phi(z_0)$ و $\phi(z)$ در $\mathscr{D}$ تک ــ ارز است.

قضیه ۱۲ــ۱۷. اگر $f(z)$ تقریبا" محدب باشد، $f(z)$ تک ارز است.

اثبات ــ به موجب فرض تابع $g(z)\in K$ موجود است‌که

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}>0 \qquad |z|<1.$$

قرارمی‌دهیم $\phi(z)=f(g^{-1}(z))$. در این صورت $f(z)=\phi(g(z))$ و بنابراین $f'(z)=\phi'(g(z))g'(z)$. پس در میدان محدب $\mathscr{D}$، نگاره $|z|<1$ تحت

تابع $g(z)$ داریم : $\operatorname{Re}\{f'(z)/g'(z)\}=\operatorname{Re}\{\phi'(g(z))\}>0$
به موجب لم ، ϕ در $\mathscr{D}$ تک ارز است . با بکار بردن قضیه ۱۱ـ۱۱ ، در می‌یابیم کـه $f(z)$ در قرص $|z|<1$ می‌بایست تک ارز باشد .

تذکر ــ با تخصیص در انتخاب $g(z)$ در می‌یابیم که توابع تقریبا " محدب شامـل چندین زیر رده‌های عمده می‌گردد .

(i) هرتابع محدب $f(z)$ تقریبا " محدب‌است : این‌را باقراردادن $g(z)=f(z)$ می‌توان دید .

(ii) هرتابعی که مشتق آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشد ، تقریبا " محدب است ؛ این را با متناظر گرفتن آن با تابع محدب $g(z)=z$ می‌توان دید .

(iii) تابع ستاره‌گون $f(z)$ تقریبا " محدب است . این را با متناظر گرفتـن آن با تابع $g(z)=\int_0^z (f(\zeta)/\zeta)\,d\zeta$ می‌توان دید . زیرا که در این صورت

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0.$$

قابل توجه است که $g(z)$ محدب است زیرا همانندی زیر را داریم :

$$1+z\,\frac{g''(z)}{g'(z)}=z\,\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

گمان بایبرباخ نیز در مورد توابع تقریبا " محدب هم درست‌است .روش اثبات‌مشابه روش اثبات در مورد توابع ستاره‌گون است .

قضیه ۱۲ـ۱۸ . اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ تقریبا " محدب باشد ، آنگـاه بـرای هر n ، $|a_n|\le n$.

اثبات ــ فرض کنیم $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n$ در K باشد و بطوری که

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n \qquad (۲۸)$$

قسمـــــت حقیقی مثبت داشته باشد . با ضرب کردن طرفین (۲۸) در $g'(z)$ و برابر گرفتن ضریب جمله متضمن z^{n-1} ، به دست می‌آید .

$$na_n=nb_n+(n-1)\alpha_1 b_{n-1}+(n-2)\alpha_2 b_{n-2}+\cdots$$
$$+2\alpha_{n-2}b_2+\alpha_{n-1}.$$

بـــــه موجب قضیه ۱۰ـ۱۵ ، برای هر k داریم $|\alpha_k|\le 2$ ؛ و بموجب‌قضیه۱۲ـ۱۳

برای هر k ، $|b_k| \le 1$. پس

$$\begin{aligned} n|a_n| &\le n|b_n| + (n-1)|\alpha_1|\ |b_{n-1}| + \cdots + |\alpha_{n-1}| \\ &\le n + 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] \\ &= n + \frac{2(n-1)n}{2} = n^2. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر n ، $|a_n| \le n$ و قضیه ثابت است .

تذکر ــ چون که رده توابع تقریبا" محدب شامل نگاشتهای‌ستاره‌گون می‌باشد ،قضیه ۱۲ــ۱۱ فرع قضیه ۱۲ــ۸ می‌گردد .

ایــــــن بخـش را بـــــا یـک مثـــــال از تابعـی کـــه تقریبا" محـدب است ولی ستاره‌گون نیست به پایان می‌بریم . تابع $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ واجد این خاصیت است . با $f(z)$ تابع $g(z) = -\text{Log}\,(1-z)$ را متناظر می‌کنیم ، $f(z)$ در K است زیرا :

$$\text{Re}\left\{1 + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right\} = \text{Re}\left\{1 + \frac{z}{1-z}\right\} > \frac{1}{2} \qquad (|z| < 1).$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} \text{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} &= \text{Re}\,\{(1+z+z^2)(1-z)\} \\ &= \text{Re}\,\{1-z^3\} > 0 \qquad (|z|<1). \end{aligned}$$

پس $f(z)$ تقریبا" محدب است .

برای اثبات اینکه $f(z)$ در S^* نیست می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} \text{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} &= \text{Re}\left\{\frac{1+z+z^2}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2}\right\} \\ &= \frac{\text{Re}\,\{(1+z+z^2)(1+\frac{1}{2}\bar{z}+\frac{1}{3}\bar{z}^2)\}}{|1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2|^2}. \end{aligned} \tag{۲۹}$$

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ می‌بایست نشان دهیم ، مخرج (۲۹) که آنرا با

$$A(r,\theta) = 1 + (\tfrac{3}{2}\cos\theta)r + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3}\cos 2\theta)r^2 + (\tfrac{5}{6}\cos\theta)r^3 + \tfrac{1}{3}r^4, \tag{۳۰}$$

نمایش می‌دهیم برای نقطه‌یی درون قرص واحد منفی است . چـــون که $A(r,\theta)$ در

قرص واحد بسته، تابعی است پیوسته، کافی است، نشان دهیم برای مقدار θ_0 ی، $A(1, \theta_0)$ منفی است که در آن صورت نتیجه می‌شود برای هر r در یک فاصله $1-\delta < r < 1$ ، $A(r, \theta_0)$ ، منفی است. با قرار دادن $r=1$ در (۳۰) می‌توان نشان داد که عبارت

$$A(1, \theta) = \frac{11}{6} + \frac{7}{3}\cos\theta + \frac{4}{3}\cos 2\theta$$

به هنگام $\cos\theta = -7/16$ کمینه میگردد. در یک چنین نقطه θ_0 ی‌داریم $\cos 2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 - 1 = -79/128$. پس

$$A(1, \theta_0) = \frac{11}{6} - \frac{7}{3}\left(\frac{7}{16}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{79}{128}\right) = -\frac{1}{96}.$$

پس $\operatorname{Re}\{z(f'/f)\} < 0$ در نقطه‌یی مانند

$$z = re^{i\theta_0} \qquad \left(1-\delta < r < 1,\ \cos\theta_0 = -\frac{7}{16}\right),$$

و بنابراین $f(z) \notin S^*$

پرسش‌ها

۱ــ در اثبات قضیه ۱۲ــ۷، تک ارزی $f(z)$ به چه کار آمد؟

۲ــ چرا بر میدانهای ستاره‌گون نسبت به مبداء متمرکز شدیم و نه نسبت به نقاط دیگر؟

۳ــ آیا می‌شود که میدانی نسبت به هیچ یک از نقاط خودش ستاره‌گون نباشد؟

۴ــ آیا می‌توانید در این بخش خواص هندسی را از خواص تحلیلی متمایز کنید؟

۵ــ چرا در اثبات قضایای مربوط به رده S ، لم شوارتس، چنین مفید واقع شد؟

۶ــ تعبیر هندسی توابع تقریبا " محدب چیست؟

۷ــ آیا می‌شود که بیش از یک تابع با یک تابع تقریبا " محدب مفروض متناظر کرد؟

۸ــ آیا می‌توان توابع تقریبا " محدب را بدون استفاده از توابع کمکی سرشت‌نمایی کرد؟

۹ــ بزرگترین عدد حقیقی R راکه‌برای‌آن همه‌توابع S درقرص $|z| < R$ ، ستاره گون است کدامست؟

تمرینها

۱ــ اگر $f(z) \in S$ ، $z = re^{i\theta}$ ، نشان دهید

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| = \frac{\partial}{\partial \theta}\arg f'(z).$$

۲ـ با استفاده از تمرین قبلی، اثبات قضیه ۱۲ـ۵ را اصلاح کنید تا نشان دهید:

$$|\arg f'(z)| \leq 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

۳ـ(الف) نشان دهید $f(z) = z + Cz^2$ در S است اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{2}$

(ب) نشان دهید $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{2}$

(پ) نشان دهید $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{4}$

۴ـ نشان دهید $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + (1/n)z^n$ به ازاء هر n در S است (راهنمایی: نشان دهید $f(z)$ تقریبا" محدب است).

۵ـ اثبات قضیه ۱۲ـ۹ را اصلاح کنید تا نشان دهید: اگر $f(z) = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$ تابع فرد ستاره‌گون باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 1$

۶ـ اگر $f(z) = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$ تابع محدب فرد باشد، نشان دهید، برای هر n ، $|a_n| \leq 1/n$

۷ـ نشان دهید، S^* و K خانواده‌های نرمال و فشرده هستند.

۸ـ اگر $f(z) \in S^*$ $(f(z) \in K)$. نشان دهید $e^{-i\alpha}f(ze^{i\alpha}) \in S^*$ $(e^{-i\alpha}f(ze^{i\alpha}) \in K)$

۹ـ اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ با $\mathrm{Re}\,\{z(f'/f)\} > \alpha$ ، نشان دهید، $|a_2| \leq 2(1-\alpha)$.

(راهنمایی: قرار دهید $P(z) = (zf'/f - \alpha)/(1-\alpha)$)

۱۰ـ فرض کنید $f(z) \in S$ و $\mathrm{Re}\,\{1 + z_0 f''(z_0)/f'(z_0)\} = 0$ $|z_0| < 1$ نشان دهید، برای $|z_0| < r < 1$ ، نگاره $|z| < r$ محدب نیست.

۱۱ـ فرض کنید $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ توابع تحلیلی هستند و $|z| < 1$ را به ترتیب بر $\mathscr{D}_0$ و $\mathscr{D}_1$ می‌نگارند. اگر $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_1$ ، نشان دهید، $|a_1| \leq |b_1|$ (راهنمایی: لم شوارتس را برای $g^{-1}(f(z))$ بکار برید).

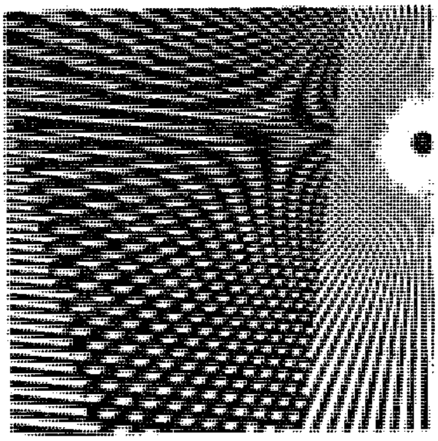
۱۲ـ در شرایط تمرین قبلی، نشان دهید: اگر $\mathscr{D}_1$ محدب باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq |b_1|$. (راهنمایی: تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$F(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(e^{2k\pi i/n} z^{1/n}) = 1 + a_n z + \cdots.)$$

۱۳ـ قضیه ۱۲ـ۱۴ را با استفاده از تمرین قبلی ثابت کنید. (راهنمایی: اگر $f(z) \in K$ مقدار $z = -re^{i\alpha}$ را نپذیرد، نشان دهید، نگاره $|z| < 1$ در تابع $w = e^{-i\alpha}f(ze^{i\alpha})$

زیر مجموعه نگاره $w = 2rz/(1-z) = 2rz + \cdots$ می‌باشد) .

۱۴ــ نشان دهید $f(z)$ در $|z| < 1$ تک ارزست . بشرطی‌که تابع $g(z) \in K$ موجود باشد ، به طوری که به ازاء یک عدد حقیقی α و همه z ها در قرص واحد $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha}(f'(z)/g'(z))\} > 0$. این را گاهی به عنوان تعریف تقریبا " محدب برای $f(z)$ می‌گیرند .



۱۳ـ توابع تام و برخه‌ریخت

ابتداء حاصلضربهای نامتناهی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که خواص همگرایی آنها شبیه به خواص رشته‌های نامتناهی است. همان طور که رشته‌های نامتناهی به عنوان وسیله‌یی برای بررسی بسطهای رشته توانی برای توابع تحلیلی مورد استفاده قرار گرفت. همان طور حاصلضربها نیز می‌توانند به عنوان وسیله‌یی برای بررسی بسطهای حاصلضربی برای توابع تحلیلی مورد استفاده قرار گیرند. همان طور که خواهیم دید مقایسه بسطهای حاصلضربی با بسطهای رشته‌ای ما را قادر می‌سازد که همانندیهای جالبی به دست آوریم.

اگر $\{a_n\}$ دنباله مفروضی باشد که به ∞ میل کند، نشان می‌دهیم، یک تابع تام موجود است که صفرهایش در $\{a_n\}$ هستند. به یک معنی، این قضیه از قضیه (وجودی) نگاشت ریمان در فصل ۱۱ دقیق‌تر است، زیرا که می‌توانیم عملا" چنین تابع تام را بسازیم. سپس یک دنباله دلخواه $\{b_n\}$ را که به ∞ میل می‌کند در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم، همیشه می‌توان تابعی یافت که قطب‌های آن در $\{b_n\}$ بوده و در جاهای دیگر تحلیلی باشد. به هنگام مطالعه این فصل شایسته است، همیشه شباهات موجود میان صفرها و قطب‌ها را مد نظر داشته باشیم.

۱۳ـ۱. حاصلضربهای نامتناهی

حاصلضرب نامتناهی، عبارتی است به شکل $u_1u_2u_3\cdots$ (که با $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ می‌نمایانیم)، که u_n ها اعداد مختلط هستند. قیاس با رشته‌های نامتناهی ما را وامیدارد که بگوئیم یک حاصلضرب نامتناهی همگراست اگر چنانچه $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} u_k)$ همگرا باشد. ولی چنین تعریفی کامل نیست، زیرا که اگر یک جمله صفر باشد، حاصلضرب

نامتناهی‌همگرا خواهد بود و رفتار مضارب دیگر هیچ نقشی نخواهند داشت . و به تحقیق، این در جوهر تعاریف "حد" وجود ندارد . از اینرو فرض می‌کنیم که در یک حاصلضرب نامتناهی ، هیچ مضربی ، صفر نیست . با وجود این ممکن است یک حاصلضرب نامتناهی صفر شود بدون اینکه هیچ یک از مضارب آن صفر باشد (برخلاف حاصلضربهای متناهی) . به‌عنوان‌مثال $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1/k)=0$. ما از چنین پدیده‌یی هم (به دلائلی که بعدا" روشن‌خواهد گشت) می‌خواهیم طفره برویم . گوئیم که یک حاصلضرب نامتناهی همگراست اگر چنانچه $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}u_k)$ موجود و مخالف صفر باشد . حاصلضرب‌نامتناهی‌که‌همگرا نباشد ، واگرا خوانده می‌شود .

قرار می‌دهیم $P_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$. اگر $\prod_{n=1}^{\infty}u_n$ همگراباشد .آنگاه‌دنباله $\{P_n\}$ به یک مقدار مخالف صفر P می‌گراید . پس:

$$\text{اگر } n\to\infty \quad \text{آنگاه} \quad u_n=\frac{P_n}{P_{n-1}}\to\frac{P}{P}=1$$

از این رو مناسب خواهد بود که حاصلضرب نامتناهی را به صورت $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ نمایش دهیم که اگر حاصلضرب همگرا باشد $a_n\to 0$. همانند حالت مربوط به‌رشته‌های نامتناهی ،همگرایی‌دنباله $\{a_n\}$ به 0 ، برای‌همگرایی‌حاصلضرب‌نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ کافی نیست ، مثلا" :

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}\to\infty,$$

پس $\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/n)$ واگراست . به طریق مشابه

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\to 0,$$

پس $\prod_{n=2}^{\infty}(1-1/n)$ نیز واگراست .

بدون شک کاملا" طبیعی بنظر می‌رسد که مقایسه میان رشته نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ بیش از این دنبال گردد . در حالت خاص‌که برای هر n ، $a_n\geq 0$. ارتباط این دو از ویژه‌گی ظریفی برخوردار است .

<u>قضیه ۱۳ــ۱ . اگر $a_n\geq 0$ ، حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگراست اگر و فقط اگر رشته $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد .</u>

اثبات ــ ابتداء چون همه جملات غیرمنفی‌اند توجه می‌کنیم که :

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leq(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n),$$

هم‌چنین برای x های غیرمنفی داریم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!) \geq 1 + x$. پس نامساوی دوگانه زیر را داریم :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq e^{a_1}e^{a_2} \cdots e^{a_n}.$$

یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leq \exp \sum_{k=1}^{n} a_k . \qquad (۱)$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به عدد حقیقی A میل کند ، آنگاه $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ یک‌دنباله صعودی است که از بالا (به e^A) کراندار است و بنابراین می‌بایست همگرا باشد. برعکس اگر $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ به P بگراید ،آنگاه‌طرف‌چپ‌نامساوی (۱) نشان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به مقداری که از P بزرگتر نیست می‌گراید .

همان طور که در قضیه بعدی مشاهده می‌گردد ، نتایج مشابهی در حالی که جملات منفی باشند استنتاج می‌گردد .

قضیه ۱۳ـ۲ . اگر $a_n \geq 0$ ، $a_n \neq 1$ ،آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ همگراست‌اگر و تنهااگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد .

اثبات ــ ابتداءفرض‌می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد . به موجب محک‌کوشی‌برای N بس بزرگ ، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$. داریم :

$$(1 - a_N)(1 - a_{N+1}) = 1 - a_N - a_{N+1} + a_N a_{N+1} \geq 1 - a_N - a_{N+1} > \tfrac{1}{2}.$$

با استقراء می‌توان نشان داد که برای $n > N$

$$\prod_{k=N}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=N}^{n} a_k > \frac{1}{2}. \qquad (۲)$$

با نوشتن $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) = P_{N-1}\prod_{k=N}^{n}(1 - a_k)$. از (۲) به دست می‌آید که P_n/P_{N-1} به مقدار P میل می‌کند و $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$. پس $P_n \to P_{N-1}P \neq 0$ و $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k)$ همگراست .

اینک فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست . اگر $a_n \not\to 0$ ، آنگاه $1 - a_n \not\to 1$ و حاصلضرب‌واگراست . پس بدون از دست رفتن عمومیت قضیه ، می‌توان فرض کرد $a_n \to 0$. پس برای $n \geq N$ ، $0 \leq a_n < 1$. از همانندی

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \cdots,$$

نتیجه می‌شود که برای $0 \le x < 1$، $1 - x \le e^{-x}$، چون که تمام جملات داخل پرانتز غیرمنفی است . پس

$$0 \le \prod_{k=N}^{n} (1 - a_k) \le \prod_{k=N}^{n} \exp(-a_k) = \exp\left(-\sum_{k=N}^{n} a_k\right) \qquad (n > N).$$

با $n \to \infty$ ، واگرایی $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ نشان می‌دهد که $\prod_{k=N}^{\infty}(1 - a_k) = 0$ بنابراین $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k)$ واگراست و اثبات کامل است .

تذکر ــ اگر حاصلضرب مجاز می‌بود که به 0 بگراید ، قضیه ۱۳ــ۲ دروغ می‌بودو این مطلب با قرار دادن $a_n = 1/(n+1)$ ملاحظه می‌گردد .

اگرمحدودیت‌های‌موجودبر $\{a_n\}$ از بین‌بروند ، مقایسه‌مابین $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چنین سرراست نخواهد بود . در تمرینات مثالی خواهد آمد که در آن $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ واگراست .درحالی‌که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست‌ومثال‌دیگری‌که $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ همگراست در حالی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست .

درحالت عمومی برای مرتبط ساختن حاصلضربهای نامتناهی با رشته‌های نامتناهی از لگاریتم مختلط استفاده می‌کنیم . اگر $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = P \ne 0$ آنگاه $\log\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)\right] = \log P$. با این حال این بدان معنی نیست که $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ به $\log P$ می‌گراید . گیریم $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) = |P_n| e^{i \arg P_n}$ در این صورت $|P_n| \to |P|$ ؛ ولی تنها چیزی که در مورد $\arg P_n$ می‌توان‌گفت‌این که $\arg P_n \to \arg P \pmod{2\pi}$. برای این که همگرایی $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ با همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ مقایسه شود ، لازم است که در خواص چند مقداری لگاریتم بحث شود . مرحله حلال در اثبات قضیه بعدی عبارت است از اینکه نشان دهیم ، برای یک حاصلضرب‌همگرا ، شناسه حاصلضربهای جزیی ، مثلاً حول یک نقطه ثابت مجتمع می‌کنند ، وقتی که برای هر k ، همان شاخه برای $\arg(1 + a_k)$ انتخاب شود .

قضیه ۱۳ــ۳ . برای a_n مختلط، $a_n \ne -1$ ، حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ همگراست اگر وتنها اگر رشته $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + a_n)$ همگرا باشد .

اثبات ــ قرار می‌دهیم $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ و می‌نویسیم :

$$\log P_n = \text{Log}\,|P_n| + i \arg P_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\,(1+a_k), \qquad (۳)$$

که برای هر k، شاخه‌یی از لگاریتم انتخاب شده است که در $-\pi < \text{Im Log}\,(1+a_k) = \text{Arg}\,(1+a_k) \le \pi$ صدق کند. بدین ترتیب شاخه‌یی برای $\log P_n$ مشخص می‌شود.

فرض کنید که $P_n \to P \neq 0$. در این صورت $\text{Log}\,|P_n| \to \text{Log}\,|P|$ و $\arg P_n \to \arg P \pmod{2\pi}$. پس دنباله‌یی از اعداد حقیقی $\{\varepsilon_n\}$، $\varepsilon_n \to 0$ و دنباله‌یی از اعداد صحیح $\{m_n\}$ موجودند به صورتی که برای هر n

$$\arg P_n = \arg P + 2\pi m_n + \varepsilon_n. \qquad (۴)$$

نشان می‌دهیم که برای n بس بزرگ، m_n ثابت (مثلاً m) است. بدین منظور می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\arg P_{n+1} - \arg P_n &= \text{Arg}\,(1+a_n)\\ &= 2\pi(m_{n+1}-m_n) + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n.\end{aligned}$$

چون که $a_n \to 0$ داریم $\text{Arg}\,(1+a_n) \to 0$، پس برای $n > N$

$$2\pi|m_{n+1}-m_n| \le |\text{Arg}\,(1+a_n)| + |\varepsilon_{n+1}| + |\varepsilon_n| < 2\pi.$$

پس برای $n > N$، $m_{n+1} = m_n = m$ و از (۴) دیده می‌شود که $\arg P_n \to \arg P + 2m\pi$. با توجه به (۳) اینک نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}\,(1+a_n)$ همگرا است.

برعکس، فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}\,(1+a_n)$ به عدد مختلط A بگراید. در این‌صورت:

$$P_n = \exp \log P_n = \exp \sum_{k=1}^{n} \text{Log}\,(1+a_k). \qquad (۵)$$

با $n \to \infty$ در (۵)، نتیجه می‌شود $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) = e^A \neq 0$ و اثبات‌تمام است.

حاصلضرب‌نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$، $a_n \neq -1$ را همگرای مطلق گویند اگرچنانچه $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ همگراباشد. همانندموردرشته‌ها، حاصلضرب همگرای مطلق‌همگراست. قبل از اثبات به لم زیرین نیازمندیم:

لم ــ برای a_n مختلط، $a_n \neq -1$، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}\,(1+a_n)$ همگرای مطلق باشد.

اثبات ــ اگریکی‌ازاین‌دو رشته همگرا باشد، آنگاه برای n بس بزرگ $|a_n| \le \frac{1}{2}$

بسط ماکلورن

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots\right) \qquad (۶)$$

برای $|z| < 1$ مقبول است . با قرار دادن $z = a_n$ در (۶) ، برای $n > N$ داریم :

$$\frac{\mathrm{Log}\,(1+a_n)}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} \mp \ldots = 1 + b_n,$$

که در آن :

$$|b_n| = \left| -\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} - \cdots \right| \le \frac{1}{2}\,(|a_n| + |a_n|^2 + \cdots)$$

$$= \frac{|a_n|}{2(1-|a_n|)} \le \frac{1}{2}$$

بنابراین :

$$\tfrac{1}{2}|a_n| \le |\mathrm{Log}\,(1+a_n)| \le \tfrac{3}{2}|a_n| \qquad (n > N).$$

پس یا هر دو سری همگرای مطلق‌اند و یاهیچ‌کدام همگرای مطلق نیستند .

تذکر ــ باتوجه به این لم ، ملاحظه می‌شود که قضایای ۱۳ــ۱ و ۱۳ــ۲ حالات خاص قضیه ۱۳ــ۳ هستند .

قضیه ۱۳ــ۴ . اگر $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ همگرای مطلق باشد ، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ همگراست .

اثبات ــ فرض‌کنیم $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|a_n|)$ همگراست ،به‌موجب‌قضیه۱۳ــ۱ ، $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست . سپس به موجب لم ، $\sum_{n=1}^{\infty}|\mathrm{Log}(1+a_n)|$ همگراست . چونکه یک رشته همگرای مطلق ، همگرا نیز می‌باشد ، نتیجه می‌شود که$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\,(1+a_n)$همگراست .اینک قضیه ، به عنوان نتیجه‌یی از قضیه ۱۳ــ۳ ثابت می‌گردد .

تذکر ــ ترتیب‌جملات را در یک حاصلضرب همگرای مطلق می‌توان عوض کرد ،بدون این که به همگرایی آن و یا به مقدار آن تأثیر نماید . اثبات آن ، مشابه‌اثبات همین‌مطلب در رشته‌های نامتناهی است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود .

همان طور که از رشته‌های اعداد ثابت به رشته‌های توابع رفتیم ، اینک‌هم می‌توانیم

از حاصلضرب اعداد ثابت به حاصلضرب توابع بپردازیم . حاصلضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)] \qquad (۷)$$

را در ناحیه R همگرا گوئیم ، اگر برای هر $z_0 \in R$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}[1+f_k(z_0)]$$

موجود و مخالف صفر باشد ، همگرایی در (۷) را در R یکنواخت گوئیم اگر چنانچه دنباله $P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}[1+f_k(z)]$ در R به یک تابع بدون صفر همگرای یکنواخت باشد . مفیدترین آزمون برای همگرایی یکنواخت حاصلضرب ، چیزی مشابه آزمون M ، قضیه ۶ـ۹ است که بطور وسیع برای اثبات همگرایی یکنواخت (و مطلق) رشته مورد استفاده قرار گرفته است .

<u>قضیه ۱۳ـ۵ . فرض کنیم برای هر z در ناحیه R ، $|f_n(z)| \le M_n$ و $f_n(z) \ne -1$ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد ، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$ در R همگرای یکنواخت است .</u>

اثبات ـ به‌موجب قضیه ۱۳ـ۱ ، $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$ برای هر نقطه در R ، همگرای مطلق و در نتیجه همگرا می‌باشد . کافی است نشان دهیم که دنباله $P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}[1+f_k(z)]$ در R کوشی یکنواخت است . قابل توجه است که برای هر اعداد صحیح و مثبت m و n $(m<n)$ ، داریم :

$$P_n(z)-P_m(z)=\sum_{k=m}^{n-1}[P_{k+1}(z)-P_k(z)]=\sum_{k=m}^{n-1}P_k(z)f_{k+1}(z). \qquad (۸)$$

ولی برای تمام k ها

$$|P_k(z)| \le \prod_{n=1}^{\infty}(1+|f_n(z)|) \le \exp\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$$
$$\le \exp\sum_{n=1}^{\infty}M_n = e^M.$$

به موجب قضیه ۶ـ۹ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ در R همگرای یکنواخت است . پس با انتخاب m بس بزرگ در (۸) تا این که برای هر $z\in R$ و هر n ، $\sum_{k=m}^{n}|f_k(z)|<\varepsilon$ ، داریم :

$$|P_n(z)-P_m(z)| \le \sum_{k=m}^{n-1}|P_k(z)|\ |f_k(z)| \le e^M\sum_{k=m}^{n-1}|f_k(z)| < \varepsilon e^M.$$

چون که ε اختیاری است ، اثبات تمام است .

تذکر ــ نشان دادن این که $\{P_n(z)\}$ کوشی یکنواخت است ، امکان این که برای z ی ، $P_n(z) \to 0$ رامرتفع نمی‌کند .به‌همین دلیل لازم است که نشان دهیم $\{P_n(z)\}$ همگرای نقطه‌یی (به‌یک‌تابع بدون صفر) است .

پرسشها

۱ــ چه شباهاتی میان رشته‌های نامتناهی و حاصلضربهای نامتناهی موجود است ؟

۲ــ اگر دنباله حاصلضربهای جزیی $\{P_n\}$ همگرا باشد ، آیا $\{\log P_n\}$ همگراست؟ در مورد معکوس مطلب چه ؟

۳ــ باتوجه به‌قضیه۱۳ــ۱و قضیه ۱۳ــ۲ آیا این درست است که برای دنباله حقیقی $\{a_n\}$ ، $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد ؟

۴ــ به چند طریق یک حاصلضرب نامتناهی می‌تواند واگرا گردد ؟

۵ــ اگر $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگرا و $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ واگرا باشد ، در مورد دنباله $\{a_n\}$ چه می‌توان گفت ؟

۶ــ آیا می‌شود $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ همگرای یکنواخت باشد و همگرای مطلق نباشد ؟ مطلق باشد ولی یکنواخت نباشد ؟

۷ــ از اینکه یک حاصلضرب نامتناهی در محک‌کوشی صدق می‌کند منظـور چیست ؟ چه ارتباطی با همگرایی آن دارد ؟

۸ــ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد ، در مورد $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n z)$ چه می‌توان گفت ؟

۹ــ چگونه‌می‌توان‌بدون فرض: برای هر k ، $-\pi < \arg(1+a_k) \le \pi$ ، قضیه۱۳ــ۳ را اثبات نمود ؟

تمرینها

۱ــ هر یک از مقادیر زیر را بیابید .

(الف) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ (ب) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$

(پ) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ (ت) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

۲ــ نشان دهید ، حاصلضرب زیر همگراست ولی مطلق نیست .

$$(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})\cdots$$

۳ــ فرض کنید $\{a_n\}$ حقیقی با $|a_n|<1$. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. نشان دهید، $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد. (راهنمایی: قرار دهید، $-\mathrm{Log}\,(1-a_n)=a_n+a_n^2(1/2+a_n/3+\cdots)$ و قضیه ۱۳ــ۳ را بکار ببرید).

۴ــ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله نزولی از اعداد حقیقی است با $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. نشان دهید، $\prod_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n a_n]$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد. (راهنمایی: تمرین قبلی را به کار ببرید).

۵ــ قرار دهید $a_n=(-1)^{n+1}/\sqrt{n}$. نشان دهید با این که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست ولی $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ واگراست.

۶ــ قرار دهید:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}, & n \text{ فرد}\\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & n \text{ زوج}\end{cases}$$

نشان دهید، $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگراست در حالی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

۷ــ نشان دهید، عبارت‌های زیر یا همگی همگرایند و یا همگی واگرایند.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\log\,(1+a_n)|,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\,(1+|a_n|).$$

۸ــ ناحیه همگرایی حاصلضربهای زیر را بیابید.

(الف) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)$. (ب) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{2^n})$. (پ) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^z}\right)$.

۹ــ برای $|z|<1$ ، نشان دهید:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}.$$

۱۰ــ فرض‌کنید برای هر n ، $a_n>0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. قرار دهید $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ و نشان دهید:

$$a_1\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{a_n}{s_{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

۱۱ــ گیریم p_n ، n امین عدداول‌باشد ($p_1=2$ ، $p_2=3$ و) . اگر $\operatorname{Re} z>1$ نشان دهید :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-z}}.$$

(راهنمایی : هر مضرب $1/(1-p_n^{-z})$ را به رشته هندسی بسط دهید) .

۱۳ــ۲ . قضیه حاصلضرب وایرشتراس

اگر یک مجموعه متناهی از اعداد مختلط مخالف صفر $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ مفروض‌باشد ، همیشه می‌توان تابعی تام (در واقع یک چند جمله‌یی) یافت که دراین‌نقاط وتنهادراین نقاط صفر شود . این چنین تابع تامی عبارتست از $\prod_{n=1}^{k}(1-z/a_n)$. سئوالی که مطرح است این که آیا همیشه می‌توان تابعی تام یافت که تنها صفرهایش در یک‌دنباله نقاط از پیش معلوم و دلخواه باشد . متأسفانه جواب منفی است . مثلا " اگر تابع تامی‌در دنباله $\{1/n\}$ صفرباشد ،آنگاه به موجب قضیه ۸ــ۱۴ ، این تابع تام می‌بایست‌متحدا " صفر باشد . با این حال نشان می‌دهیم که اگر دنباله ، نقطه حدی متناهی نداشته باشد ، آنگاه جواب سئوال مثبت خواهد بود .

فرض‌کنیم ، دنباله $\{a_n\}$ که به ∞ میل می‌کند به گونه‌یی مرتب شده که :

$$0<|a_1|\leq|a_2|\leq|a_3|\leq\cdots.$$

یک حدس خام برای تابع تام مناسب عبارتست از $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/a_n)$. بدون شک اگر $f(z)$ تام باشد آنگاه این تابع تنها در نقاط دنباله $\{a_n\}$ صفرمی‌گردد.

اینک شرایطی را مشخص می‌کنیم که باید $\{a_n\}$ واجد باشد تا $f(z)$ تام گردد . یادآور می‌شویم که حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/a_n)$ را همگرا گویند اگر دنباله $P_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(1-z/a_n)$ به یک تابع بدون صفر میل کند . و ما اینک این شرط را مختصری تخفیف می‌دهیم و تابع حدی را مجاز می‌کنیم در نقاطی که یکی از مضارب، صفر است ، صفر شود .

فرض کنیم ، $\sum_{n=1}^{\infty}1/|a_n|$ همگرا باشد چون که در $|z|\leq R$ (R دلخواه) $|z/a_n|\leq R/|a_n|$ بکاربردن‌قضیه ۱۳ــ۵ نشان می‌دهد که $P_n(z)$ بر هرزیرمجموعه فشرده صفحه به تابع $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/a_n)$ همگرای یکنواخت است . به موجب قضیه ۸ــ۶ ، $f(z)$ می‌بایست در این صورت تابع تام باشد . اینک به‌آسانی می‌توانیم یک تابع تام بسازیم که صفرهایش در ۱ ، ۴ ، ۱۶ ، . . . باشد . حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n^2)$ یک چنین تابعی است .

ولی ساختن یک تابع تام که صفرهایش در اعداد صحیح مثبت باشد به مراتب دشوارتر است. عبارت $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)$ معرف یک تابع تام نیست. در واقع با قرار دادن $z=-1$ ملاحظه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty.$$

آنچه را که مورد نیاز ماست یک مضرب "همگراساز" می‌باشد. اینک نشان می‌دهیم، $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)e^{z/n}$ تابع تام است. به موجب قضیه ۱۳—۳، در تمام نقاطی که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}\right]$$

همگرا باشد، $f(z)$ نیز همگراست، بنابه ۱۳—۵، کافی است نشان دهیم که بر هر مجموعه فشرده $|z|\le R$ یک رشته همگرا $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ می‌توان یافت به طوری که:

$$\left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}\right|\le M_n \qquad (|z|\le R). \tag{۹}$$

همانندی زیر برای $|z|\le R<n$ برقرار است:

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{n}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k=-\frac{z}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^3-\cdots \tag{۱۰}$$

با انتخاب $n\ge 2R$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}\right|&=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k\right|\le\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{R}{n}\right)^k\\&=\frac{1}{2}\,\frac{R^2/n^2}{1-R/n}\le\frac{R^2}{n^2}.\end{aligned}$$

با انتخاب $M_n=R^2/n^2$ در (۹) داریم:

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}\right|\le\sum_{n=N}^{\infty}\frac{R^2}{n^2}<\infty \qquad (N>2R).$$

پس $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)e^{z/n}=\prod_{n=1}^{N-1}(1-z/n)e^{z/n}\prod_{n=N}^{\infty}(1-z/n)e^{z/n}$ یک تابع تام است.

روش عمومی برای ساختن یک تابع تام با صفرهای از پیش معلوم در همانندی (۱۰) آمده است. به عنوان مثال فرض کنیم می‌خواهیم یک تابع تام بسازیم که در $z=\sqrt{n}$ صفر داشته باشد. چون که:

$$\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)=-\frac{z}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^3-\cdots,$$

روش بالا نشان می‌دهد که:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)e^{(z/\sqrt{n})+(1/2)(z^2/n)}$$

یک چنین تابعی است. عمومی‌تر این‌که اگر به ازاء یک عدد p ، $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{p+1}$ همگرا باشد، آنگاه:

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{z/a_n+(1/2)(z/a_n)^2+\cdots+(1/p)(z/a_n)^p} \tag{11}$$

تابعی تام است که تنها صفرهایش در $z=a_n$ می‌باشد.

با اینکه ظاهراً (۱۱) جنبه عمومیت دارد ولی در مورد تمام دنباله‌ها کاربرد ندارد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم یک تابع تام بسازیم که صفرهایش در نقاط $\log n$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$ باشد، ما نمی‌توانیم از (۱۱) استفاده کنیم زیرا که برای هر p ، $\sum_{n=2}^{\infty}[1/(\operatorname{Log} n)^p]$ واگراست. ملاحظه می‌شود که ضریب‌های همگراساز در (۱۱) متضمن دنباله‌یی از چند جمله‌یی‌هاست، که همگی از درجه p هستند. درحالت عمومی، یک کران یکنواخت بر درجه چند جمله‌یی‌ها قرار نمی‌دهیم. و این به نوبه خود ما را قادر می‌کند که بدون توجه به همگرایی سری متضمن صفرها، تابع تام مناسب را بسازیم.

قضیه ۱۳ـ۶. (قضیه حاصلضرب وایرشتراس) به ازاء هر دنباله مختلط که نقطه حدی متناهی ندارد. یک تابع تام موجود است که تنها صفرهایش در نقاط این دنباله باشد.

اثبات ــ فرض می‌کنیم که تابع تام $f(z)$ منظور ما، صفرهایش در $\{a_n\}$ بوده و بطوری مرتب باشند که $0<|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le\cdots$ ما بدون از دست دادن عمومیت قضیه، فرض کرده‌ایم که هیچ یک از a_n ها صفر نیست، زیرا که اگر k تا از این نقاط صفر باشند، آنگاه $z^k f(z)$ واجد خاصیت مطلوب است.

به ازاء هر n قرار می‌دهیم

$$P_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که تابع $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/a_n)e^{P_n(z)}$ در شرایط قضیه صدق می‌کند. کافی است نشان دهیم که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{Log}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)\right]$$

بـر هـر زیـر مجموعـه دلخواه و فشرده $|z| \le R$ در صفحه همگرای یکنواخت است . برای $|z| \le R < 2R \le |a_n|$ ، داریم :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Log}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)\right| \\
&\quad = \left|-\frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+2} - \frac{1}{n+3}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n+3}\cdots\right| \\
&\quad \le \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}\left(1+\left|\frac{z}{a_n}\right|+\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\cdots\right) \\
&\quad \le 2\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} \le \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

پس اگر N بس بزرگ باشد تا $|a_N| \ge 2R$ ، نتیجه می‌شود که :

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\mathrm{Log}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z)\right| \le \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty \qquad (|z| \le R),$$

و با توجه به قضیه ۱۳ــ۵ اثبات کامل است .

تذکر ۱ــ قضیه ، مواردی را که صفرهای چندباره داشته باشیم نیز شامل می‌گـردد . بدون شک ممکن است برای بعضی k ها ، $a_k = a_{k+1}$ باشد .

تذکر۲ــ تابع $f(z)$ با صفرهایش به هیچ ترتیب به گونه‌یی منحصر بفرد مشخص نمی‌گردد ، مثلا " دیدیم ، $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)e^{z/n}$ تابع تام است که در اعداد صحیح‌مثبت صفر می‌شود . و در اثبات قضیه نشان دادیم که :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{(z/n)+(1/2)(z/n)^2+\cdots+(1/n)(z/n)^n}$$

نیز یک چنین تابعی است . ما هم‌چنین می‌توانیم نشان دهیم که :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{(z/n)+(1/2)(z/n)^2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n+(1/2)(z/n)^2+(1/3)(z/n)^3},$$

و تعـداد بی‌شمـاری توابـع دیگـر همگی دارای این خاصیت هستند که در اعدادصحیح مثبت صفر می‌گردند .

فرض کنیم دو تابع تام دارای صفرهای مشترک و با چند بارگیهای مشترک باشنـد .

چگونه این دو تابع را مقایسه می‌کنیم؟ چون که صفحه مختلط همبند ساده است جواب مسئله نتیجه قضیه ۷ـ۱۰ است و داریم:

قضیه ۱۳ـ۷. اگر $f_0(z)$ و $f_1(z)$ توابعی باشند که صفرهای آنها از نظر جایگاه و چندبارگی یکی باشد، در این صورت تابع تام $g(z)$ موجود است به طوری که $f_0(z) = e^{g(z)} f_1(z)$.

اثبات ـ پس از حذف ضرایب مشترک، دیده می‌شود که $f_0(z)/f_1(z)$ تابع تام بدون صفر است. و قضیه از قضیه ۷ـ۱۰ ثابت می‌گردد.

قضیه وایرشتراس نشان می‌دهد که برای یک دنباله نقاط از پیش معلوم، می‌توان یک حاصلضرب نامتناهی ساخت که نمایشگر یک تابع تام باشد و صفرهایش در دنباله از پیش معلوم قرار داشته باشد. در مورد معکوس این مطلب چه می‌توان گفت؟ یک تابع تام که صفرهایش معلومند مفروض است، آیا می‌توان یک حاصلضرب نامتناهی ساخت که نمایشگر این تابع باشد؟ باتوجه به قضیه ۱۳ـ۷، این کار، تا مرحله یک مضرب تابع نمایی، همیشه ممکن است. مشخص نمودن صریح این تابع نمایی معمولاً" کار دشواری است. مسئله را برای تابع $\sin \pi z$ حل می‌کنیم.

باید توجه داشت که $\sin \pi z$ در همه اعداد صحیح، صفر می‌شود. نشان دادیم که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n)e^{z/n}$ یک تابع تام است و در اعداد صحیح مثبت صفر می‌شود. می‌توان به طریق مشابه نشان داد که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n)e^{-z/n}$ تابعی است تام، که در اعداد صحیح منفی صفر می‌گردد. پس تابع

$$
\begin{aligned}
& z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \\
&\qquad = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{z/n-z/n} \\
&\qquad = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (۱۲)
\end{aligned}
$$

تابعی است تام که در تمام اعداد صحیح صفر ساده دارد. چون که حاصلضرب نامتناهی همگرای مطلق است، پس تجدید ترتیب در (۱۲) موجه است. پس $\sin \pi z$ را می‌توان به صورت:

$$\sin \pi z = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \qquad (۱۳)$$

نوشت که $g(z)$ تابعی است تام. فرض کنید، موقتاً"، می‌توانستیم نشان دهیم

$g(z)$ ثابت است ، در این صورت (۱۳) را می‌شد به صورت زیر نوشت :

$$\sin \pi z = cz\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

چون که $\lim_{z\to 0}(\sin \pi z)/z = \pi = \lim_{z\to 0} c\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2) = c$ ، پس در این صــورت می‌داشتیم :

$$\sin \pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{۱۴}$$

مابقی اثبات عبارت است از این که نشان دهیم فی‌الواقع $g(z)$ ثابت است ، کــه در این صورت (۱۴) موجه می‌گردد . بدین منظور فرض کنیم z عدد صحیح‌نباشد ، دراین صورت با تشکیل دادن مشتق لگاریتمی در (۱۳) حاصل می‌شود .

$$\begin{aligned}\pi \cot \pi z &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2z}{n^2(1-z^2/n^2)}\\ &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},\end{aligned} \tag{۱۵}$$

کــه مشتق‌یابــی جملــه بــه جمله مجاز است زیرا که رشته $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Log}\,(1-z^2/n^2)$ بر مجموعه‌های‌فشرده‌یی که اعداد صحیح در آن نباشند . همگرای یکنواخت است . کافی‌است نشان دهیم $g(z)\equiv 0$. با در نظر گرفتن این مطلب ، با روشی دیگر ، عبارتی برای $\pi \cot \pi z$ محاسبه می‌کنیم که برای همه مقادیر غیرصحیح z مقبول باشد .

همان‌طور که در بخش ۹ــ۲ دیدیم ، تابع $\pi \cot \pi z$ در هر k صحیح قطب ســاده دارد و مانده‌اش برابر است با :

$$\lim_{z\to k}\frac{(z-k)\pi \cos \pi z}{(-1)^k \sin \pi(z-k)} = 1.$$

پس برای $|z| < R_k = k+\frac{1}{2}$ ، z غیرصحیح ، از قضیه مانده استفاده می‌شود که :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_k}\frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\,d\zeta = \pi \cot \pi z + \sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{n-z}. \tag{۱۶}$$

ولی

$$\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{n-z} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n-z}-\frac{1}{n+z}\right) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k}\frac{2z}{n^2-z^2}. \tag{۱۷}$$

با جایگزینی (۱۷) در (۱۶) حاصل می‌گردد .

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_k}\frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\,d\zeta = \pi \cot \pi z - \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k}\frac{2z}{z^2-n^2}\right). \tag{۱۸}$$

اینک رفتار انتگرال در (۱۸) را به هنگامی که $k \to \infty$ بررسی می‌کنیم . قرار می‌دهیم که :

$$\int_{|\zeta|=R_k} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{C_2} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

C_1 و C_2 به ترتیب نیم دایره زبرین و زیرین $|\zeta| = R_k$ می‌باشند . چون زمانی که ζ ، C_2 را در جهت مثبت می‌پیماید ، $-\zeta$ ، C_1 را در جهت مثبت می‌پیماید ، پس‌داریم :

$$\int_{C_2} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi(-\zeta)}{-\zeta - z}\, d(-\zeta) = -\int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta + z}\, d\zeta. \qquad (۲۰)$$

با جایگزینی (۲۰) در (۱۹) ، در می‌یابیم که :

$$\int_{|\zeta|=R_k} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C_1} \pi \cot \pi\zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z}\right) d\zeta$$

$$= 2z \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta^2 - z^2}\, d\zeta.$$

ما سپس نشان می‌دهیم که $\cot \pi z$ بر هر زیر مجموعه‌صفحه‌که‌قرصهایی‌به‌شکل $|z-k| < \frac{1}{2}$ ، k صحیح ،درآن نباشد ، کراندار است . چون که $\cot \pi z$ دارای‌دوره تناوب ۱ است ، کافی است‌که ناحیه $-\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} z \le \frac{1}{2}$ منهای قرص $|z| < \frac{1}{2}$ رادر نظر بگیریم . ملاحظه می‌شود که $\cot \pi z = i\,(e^{2\pi i z}+1)/(e^{2\pi i z}-1)$ هنگامی که $\operatorname{Im} z$ در نیم‌صفحه زبرین به ∞ میل کند ، به $-i$ یکنواخت میل می‌کند و چنانچه $\operatorname{Im} z$ در نیم صفحه زیرین به ∞ میل کند ، به $+i$ یکنواخت میل می‌کند . پس به موجب قضیه ماکزیمم کالبد ، عدد حقیقی M موجود است که :

$$|\cot \pi z| \le M \qquad (۲۱)$$

همه‌جا در این ناحیه و نتیجتا" در تمام صفحه منهای تمام قرصهای به شکل $|z-k| < \frac{1}{2}$ ، k صحیح . پس برای هر k ،

$$\left|\int_{|\zeta|=R_k} \frac{\pi \cot \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \le 2\pi\, |z|\, M \int_{C_1} \frac{1}{|\zeta^2 - z^2|}\, |d\zeta|$$

$$\le \frac{2\pi^2 |z|\, M R_k}{R_k^2 - |z|^2}. \qquad (۲۲)$$

با $k \to \infty$ در (۲۲) می‌بینیم که انتگرال به صفر میل می‌کند . با توجه به (۱۰) نتیجه می‌گیریم که همانندی :

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \qquad (۲۳)$$

برای تمام مقادیر غیرصحیح z برقرار است . مقایسه (۲۳) با (۱۵) نشان می‌دهد که

$g'(z) \equiv 0$. ولی این بدان معنی است که $g(z)$ ثابت است و (۱۴) اثبات شده است.

هر وقت یک بسط حاصلضرب نامتناهی برای یک تابع تام یافت می‌شود، مقایسه آن‌بایک‌بسط رشته توانی مورد توجه خواهد بود. و این کار به کشف وابستگی‌های جالبی می‌انجامد. برای تشریح مطلب، داریم:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \cdots.$$

جمله z^3 در حاصلضرب نامتناهی عبارت است از:

$$\pi z(-z^2)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = -\pi z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

با توجه به منحصربه‌فرد بودن بسط ماکلورن، می‌بایست داشته باشیم:

$$-\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^3}{3!}.$$

و از این همانندی $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$ بدست می‌آید.

همان‌طور که دیده‌ایم، تابع

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{۲۴}$$

تابعی است که در اعداد صحیح منفی صفر می‌شود. تابع $f(z-1)$ دارای همان صفرها است به علاوه این که در مبداء نیز صفر است، پس:

$$f(z-1) = e^{g(z)} z f(z), \tag{۲۵}$$

که $g(z)$ یک تابع تام است. با تشکیل مشتق لگاریتمی در (۲۵) بدست می‌آید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}\right) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right). \tag{۲۶}$$

حاصلجمع در طرف چپ (۲۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z} - 1\right) &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

بـا مقایسه ایـن با طرف راست (۲۶)، بدست می‌آید $g'(z) \equiv 0$. پس $g(z) = \gamma$ ، γ ثابت . برای مشخص نمودن γ ، در (۲۵) $z = 1$ قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود :

$$1 = f(0) = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}.$$

بنابراین با بکار بردن لگاریتم طبیعی ، بدست می‌آید

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \operatorname{Log}(N+1)\right]. \qquad (۲۷)$$

عـدد ثابـت γ در (۲۷) بـه ثابت اویلر[1] معروف‌است؛ مقدار تقریبی آن ۰/۵۷۷ است . این نکته که این حد موجود است ، یک روشی "داهیانه" به دست می‌دهد که ثابت کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگراست .

تابع

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z f(z)}, \qquad (۲۸)$$

کـه $f(z)$ در (۲۴) تعریـف شده است به تابع گاما[2] معروف است . این تابع درتمام نقاط صفحه مگر در اعداد صحیح منفی و صفر نمایش یک تابع تحلیلی است و در نقـاط یادشده‌قطب‌ساده‌دارد . چون‌که‌در (۲۵) ، $g(z) = \gamma$ ، داریم $f(z) = e^{\gamma}(z+1) f(z+1)$ و با این قادریم که عمده‌ترین خاصیت تابع γ را مشخص‌کنیم ؛ یعنی که :

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{e^{\gamma(z+1)}(z+1) f(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma z} f(z)} = z\Gamma(z). \qquad (۲۹)$$

اگر $z = n$ ، عدد صحیح ، (۲۹) نشان می‌دهد که :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\Gamma(1).$$

ولی $\Gamma(1) = 1/e^{\gamma} f(1) = 1/e^{\gamma} e^{-\gamma} = 1$ و بنابراین $\Gamma(n+1) = n!$.

یک ارتباط جالب میان تابع گاما و تابع سینوس موجود است . با بکار بردن روابط $\sin \pi z = \pi z f(z) f(-z)$ و $f(z) = 1/z e^{\gamma z}\Gamma(z)$ در (۲۸) ، حاصل می‌شود

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{e^{\gamma z}\Gamma(z)(-z)e^{-\gamma z}\Gamma(-z)} = \frac{\pi}{-z\Gamma(-z)\Gamma(z)}.$$

چـون کـه $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$ ، نتیجه می‌شود ، برای همه مقادیر غیردرست

---

1. Euler 2. gamma

داریم :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

در حالت خاص در مورد $z = \frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید ، $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

تذکر ۱ــ باید توجه داشت ، تابع زیر یک تابع تام است :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

تذکر ۲ــ در آنالیز حقیقی ، تابع

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0)$$

وسیعاً " مطالعه شده است . کاملاً " جالب خواهد بود که بدانیم ، (۲۸) را می‌توان برای‌مقادیرحقیقی‌مثبت z ، در این شکل انتگرالی نیز بیان کرد . در فصل بعد ، مجدداً " تابع گاما را به صورت انتگرال مختلط تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این دو تعریف در همه نقاطی که انتگرال همگرا باشد ، نمایش یک تابع هستند .

تذکر ۳ــ ما هم چنین می‌توانیم $\Gamma(\frac{1}{2})$ را با تعریف انتگرالی محاسبه‌کنیم .داریم: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt$ با جایگزاری $t = y^2$ می‌رسیم به

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

این انتگرال اخیر در بخش ۹ــ۳ محاسبه گردید .

پرسش‌ها

۱ــ آیا می‌توان یک تابع تام ساخت که در یک دنباله‌ازنقاط از پیش معلوم مقدارش "a" باشد ؟

۲ــ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ واگرا باشد . آیا $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)$ می‌تواند جایی تحلیلی باشد ؟

۳ــ منظور از ضریب "همگراساز" چیست ؟

۴ــ آیا برای قضیه وایرشتراس مشابهی برای توابع تحلیلی در یک میدان دلخواه موجود است ؟

۵ـ دراثبات‌قضیه وایرشتراس، کدام دیگر انتخابی برای $\{P_n(z)\}$ مفیدمی‌بود؟

۶ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آیا $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n z)$ تام است؟

۷ـ چه ارتباطی میان یک بسط به صورت حاصلضرب نامتناهی و یک بسط به‌صورت رشته نامتناهی برای یک تابع تام موجود است؟

۸ـ با دانستن بسط $\sin \pi z$ به صورت حاصلضرب نامتناهی، کدام دیگر بسطهای حاصلضرب نامتناهی را می‌توان مشخص کرد؟

تمرینها

۱ـ یک تابع تام بسازید که تنها صفرهای آن در $z=\log n$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$ باشد.

۲ـ تابع تام $f(z)$ را که واجد دو خاصیت زیر باشد بسازید.

(i) $f(z)$ در $z=1, 2, 3, \ldots$ صفر باشد و نه در جای دیگر

(ii) صفر $f(z)$ در $z=n$، دارای چندبارگی n باشد.

۳ـ(الف) مقدار $\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/n^2)$ را بیابید (راهنمایی: بسط حاصلضربی $\sin \pi z$ را بکار ببرید).

(ب) نشان دهید: $\prod_{n=2}^{\infty}(1-1/n^4)=(e^{\pi}-e^{-\pi})/8\pi$

۴ـ(الف) نشان دهید. صفرهای ساده $\sin iz$ و $e^{2z}-1$ درنقـــــاط مشترک است.

(ب) قرار دهید، $(e^{2z}-1)/\sin iz=e^{g(z)}$ و $g(z)$ را محاسبه کنید.

۵ـ با مقایسه جمله متضمن z^5 در بسطهای رشته‌ایی و حاصلضربی $\sin \pi z$، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^4)=\pi^4/90$.

۶ـ نشان دهید که همگرایی (۲۳) بر همه زیرمجموعه‌های فشرده‌یی که شامل اعداد صحیح نیست، یکنواخت است.

۷ـ نشان دهید $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)e^{z/n+(5z^2/n^2)}$ نمایش یک تابع تام است.

۸ـ فرض کنید $0<|a_1|\le|a_2|\le\cdots\to\infty$. نشان دهید،

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{Q_n(z)}$$

نمایش یک تابع تام است که:

$$Q_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{[\log n]}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{[\log n]}$$

۹ـ ثابت کنید:

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

(راهنمایی: از همانند $\cos z=(\sin 2z)/(2\sin z)$ استفاده کنید).

۱۰ـ اگر a عدد صحیح نباشد، نشان دهید:

$$f(z)=\prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a+n}\right)e^{-z/n}$$

تابع تام است و

$$f(z)=\frac{a\sin(z+a)}{(z+a)\sin\pi a}.$$

۱۱ـ مقدار $\prod_{n=1}^{\infty}(1+1/n^2+1/n^4)$ را محاسبه کنید.

۱۲ـ با استفاده از بسط حاصلضرب $\sin\pi z$ نشان دهید

(الف) $$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

(ب) $$\sqrt{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots.$$

(راهنمایی: ابتداء $z=\frac{1}{2}$ و سپس $z=\frac{1}{4}$ قرار دهید و سپس عبارت دومی را به اولی تقسیم کنید).

(پ) $$\sqrt{3}=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots.$$

(راهنمایی: همانند بالا ابتداء $z=\frac{1}{3}$ و سپس $z=\frac{1}{6}$ قرار دهید).

۱۳ـ نشان دهید که ثابت اویلر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\operatorname{Log} n\right).$$

۱۴ـ نشان دهید:

$$\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},$$

که $\Gamma(z)$ با (۲۸) تعریف می‌شود

۱۵ـ نشان دهید: $\Gamma(z)\sin\pi z$ تابعی است تام

۱۶ـ تابع e^z-1 را به صورت حاصلضرب نامتناهی بسط دهید. (راهنمایی: از

همانندی $e^z - 1 = 2ie^{z/2} \sin (z/2i)$ استفاده کنید) .

۱۲ـ۳ـ قضیه میتاگ ـ لفله [1]

تابعی‌که‌درمیدان $\mathscr{D}$ هیچگونه تکینه مگر قطب نداشته باشد برخه ریخت نام‌دارد . اگر بر میدان مشخصی‌صراحت نشده باشد ، فرض بر این است که ، تابع در تمام صفحه برخه‌ریخت‌است .ازتعریف نتیجه می‌شود که اگر تابع $f(z)$ در صفحه برخه‌ریخت‌باشد ، آنگاه‌در هر ناحیه کراندار نمی‌تواند به تعداد نامتناهی قطب داشته باشد . زیرا اگرچنین باشد ، دنباله قطب‌ها نقطه حدی p خواهند داشت . چون که $f(z)$ نمی‌تواند‌درهیچ همسایگی p تحلیلی باشد ،نقطه p تکینه‌یی خواهد بود که قطب نیست .

معکوس‌یک‌تابع تام .برخه ریخت‌است و قطب‌های آن همان صفرهای تابع تام‌هستند. بطـور عمومی‌تر ، توابع برخه‌ریخت دارای سرشتی به شرح زیر است :

قضیه ۱۳ـ۸ . تابعی برخه‌ریخت است اگر و تنها اگر آن را بتوان به صورت خارج قسمت دو تابع تام نوشت .

اثبات ـ ابتداء فرض می‌کنیم ، $f(z) = g(z)/h(z)$ که $g(z)$ و $h(z)$ دو تابع تام بدون صفر مشترک باشند (صفرهای مشترک از صورت و مخرج حذف می‌شوند) . در این صورت تنها تکینه‌های $f(z)$ قطب‌ها هستند و این قطب‌ها همان صفرهای $h(z)$ است . پس $f(z)$ برخه‌ریخت است .

برعکس فرض کنیم $f(z)$ برخه‌ریخت است . به موجب قضیه‌وایرشتراس‌تابع $h(z)$ موجود است که صفرهایش از نظر جایگاه و از نظر چندبارگی بر قطب‌های $f(z)$ منطبـق باشدپس $g(z) = f(z)h(z)$ تابعی‌است تام زیراکه قطب‌های $f(z)$ با صفرهای $h(z)$ حذف می‌گردند . پس $f(z) = g(z)/h(z)$ خارج‌قسمت دو تابع تام است و اثبـات تمام است .

در این بخش می‌خواهیم قضیه‌یی برای توابع برخه‌ریخت ثابت کنیم که مشابه‌قضیه وایرشتراس برای توابع تام است . اگر $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ یک مجموعه متناهی مفـروض باشد ، تابع (برخه‌ریخت) کسری

$$\frac{1}{z_1 - b} + \frac{1}{z - b_2} + \cdots + \frac{1}{z - b_n}$$

1. Mitag-Leffler

در هر یک از نقاط این مجموعه قطب ساده‌دارد. اگر مجموعه مفروض نامتناهی‌باشد، مسئله ساختن یک تابع برخه‌ریخت، که دارای قطب در هر یک از نقاط این‌مجموعه‌باشد، کاملا" دشوار است. زیرا که در این حالت مسئله همگرایی مطرح است.

تابع $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/(z-n^2)$ را که هه جا مگر در مجذور اعداد صحیح، معین و همگراست در نظر می‌گیریم. اگر یک همسایگی نقطه مفروضی را در نظر بگیریم که این همسایگی شامل مجذور هیچ عدد صحیح نباشد، آنگاه برای هر z در این همسایگی و برای n بس بزرگ داریم:

$$\frac{1}{|z-n^2|}\leq\frac{2}{n^2}$$

پس به موجب قضیه ۶ـ۹ همگرایی رشته به $f(z)$ در یک همسایگی بر چنین‌نقطه‌یی یکنواخت است. این نشان می‌دهد که $f(z)$ در تمام نقاط مگردر $z=n^2\ (n=1,2,\ldots)$ تحلیلی است و بنابراین $f(z)$ تابع برخه ریختی است‌که در $z=n^2$ قطب ساده دارد.

از سوی دیگر فرض کنیم می‌خواهیم یک تابع برخه ریخت بسازیم‌که‌در اعداد صحیح مثبت قطب ساده داشته باشد، همانند مورد قضیه وایرشتراس یک ضریب همگراساز مورد نیاز است. تابع

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z-n)}$$

واجد خواص مطلوب است. باید توجه داشت:

$$\left|\frac{z}{n(z-n)}\right|\leq\frac{2|z|}{n^2}\qquad \text{برای}\ \ n>\frac{|z|}{2}\ ,$$

و بنابراین برای همه z ها مگر اعداد صحیح مثبت، رشته همگرای مطلق است.

به‌یک مفهوم، قضیه‌یی که در مورد توابع برخه‌ریخت ثابت شود، از قضیه‌متناظرش در مورد توابع تام، کاملا" عمومی‌تر است. زیرا، تابع برخه‌ریختی ساخته‌ایم که نه تنها قطب‌هایش از پیش معلوم بود، بلکه با قسمت‌های اصلی ازپیش معلوم، ساخته شده‌است. گیریم $\{b_n\}$ دنباله‌یی باشد که به ∞ میل می‌کند. به ازاء هر n، یک تابع کسری به‌شکل زیر متناظر می‌کنیم:

$$P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)=\frac{a_1^{(n)}}{z-b_n}+\frac{a_2^{(n)}}{(z-b_n)^2}+\cdots+\frac{a_{k_n}^{(n)}}{(z-b_n)^{k_n}}, \qquad (۳۰)$$

که $a_i^{(n)}$ ثابت‌های مختلط، $a_{k_n}^{(n)}\neq 0$. باید توجه داشت، k_n مرتبه قطب است و ممکن است با n تغییر کند. هدف ما ساختن یک‌تابع برخه‌ریخت‌است که قسمت اصلی آن

به ازاء هر n برابربا $P_n(1/(z-b_n))$ باشد . اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(1/(z-b_n))$ همگرا نباشد ، نشان خواهیم‌داد ، به ازاء هر n ضریب همگراساز عبارت است از یک چند جمله‌یی که این چند جمله‌یی حاصلجمع جزیی در بسط ماکلورن برای $P_n(1/(z-b_n))$ می‌باشد .

قبل از شروع و اثبات قضیه ، آخرین تذکر را در اینجا مطرح می‌کنیم : فرض‌کنیم دو تابع برخه‌ریخت $f_0(z)$ و $f_1(z)$ یک‌قطبهای مشترک‌و با قسمتهای اصلی برابرباشند . در این صورت $f_0(z)-f_1(z)$ قطب ندارد و در نتیجه می‌بایست تابع تام باشد . پس دوتابع برخه‌ریخت با قسمتهای اصلی برابر ، حداکثر در یک تابع تام (از نظر جمع جبری) باهم اختلاف‌دارند . این‌تابع‌تام در مبحث‌توابع برخه‌ریخت ، همتای تابع نمایی (ضربی) است که در فرع قضیه ۱۳ــ۷ مذکور افتاد .

قضیه ۱۳ــ۹ . (قضیهٔ میتاگ‌ــ لفله) اگر $\{b_n\}$ دنباله‌یی‌باشدکه به ∞ میل‌کند و به هر نقطه این دنباله قسمت اصلی $P_n(1/(z-b_n))$ به شکل (۳۰) متناظر شده باشد ، آنگاه تابع برخه‌ریختی موجود است که قطب‌هـــای آن در $\{b_n\}$ با قسمت اصلی $P_n(1/(z-b_n))$ است و در جاهای دیگر تحلیلی است .

اثبات ــ بدون از دست دادن عمومیت قضیه ، فرض می‌کنیم که هیچ یک از b_n هـا صفر نیست ، زیرا با اضافه کردن یک تابع کسری در مبداء قطب ایجاد می‌شود . هم چنین می‌توان فرض‌کرد که دنباله به گونه‌یی مرتب شده است که :

$$0<|b_1|\le|b_2|\le|b_3|\le\cdots.$$

بــه ازاء هـــر n ، تابع کسری $P_n(1/(z-b_n))$ در قرص $|z|<|b_n|$ تحلیلــی است و بسط ماکلورن آن در $|z|<|b_n|$ همگرای مطلق و در $|z|\le|b_n|/2$ همگرای یکنواخت است . پس چند جمله‌یی $Q_n(z)$ را می‌توان یافت که حاصلجمع جزیی رشته ماکلورن $P_n(1/(z-b_n))$ باشد و درجه‌اش آنقدر بزرگ باشد که :

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right|<\frac{1}{2^n} \quad \text{داشته‌باشیم} \quad |z|\le\frac{|b_n|}{2} \quad \text{برای} \qquad (۳۱)$$

نشان می‌دهیم که تابع :

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

در خواستــه‌هــای قضیــه صدق می‌کند . کافی است نشان دهیم که رشته منسوب‌به $f(z)$ بر زیرمجموعه‌های فشرده و دلخواه $|z|\le R$ از صفحه که شامل نقـــاط $|b_n|\le R$ نیستند ، همگرای یکنواخت است . با انتخاب N به طوری که $|b_N|\ge 2R$ ، از (۳۱) مشاهده

می‌شود که:

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right|<\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty$$

و اینک همگرایی از قضیه ۶ـ۹ نتیجه می‌گردد. قابل توجه است که:

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

در $|z|\leq R$ تحلیلی است زیرا که قطب‌های $P_n(1/(z-b_n))$ بیرون $|z|=R$ قرار دارند. چون که R دلخواه است، $f(z)$ درصفحه‌برخه‌ریخت‌است و اثبات تمام‌است.

تذکر ۱ـ به‌عوض‌انتخاب چند جمله‌یی‌های همگراساز $\{Q_n(z)\}$، می‌توانستیم هردنباله‌دیگری‌ازچندجمله‌یی‌های $\{R_n(z)\}$، که‌برای‌آنها $\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(z)-R_n(z)]$ برزیرمجموعه‌های‌فشرده‌که‌شامل قطب‌نباشد همگرای یکنواخت باشند را، انتخاب کنیم.

تذکر ۲ـ در حالت عمومی، درجه چند جمله‌یی‌های همگراساز $\{R_n(z)\}$ با n تغییر می‌کند. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}P_n(1/(z-b_n))$ همگرا باشد، می‌توانیم $R_n(z)\equiv 0$ انتخاب کنیم. اگر $P_n(1/(z-b_n))=1/(z-n)$، نشان دادیم که می‌توان $R_n(z)=1/n$ یعنی دنباله‌یی از چند جمله‌یی‌های ثابت، انتخاب کرد. خواننده می‌تواند تحقیق کند که اگر $P_n(1/(z-b_n))=1/(z-\sqrt{n})$، می‌توان $R_n(z)=1/\sqrt{n}+z/n$ انتخاب کرد.

ملاحظه می‌شود که تابع

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

یک تابع برخه‌ریخت است، که در اعداد صحیح قطب ساده با باقیمانده ۱ می‌باشد. پس:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}+g(z),$$

عمومی‌ترین چنین تابع برخه‌ریخت است، که در آن $g(z)$ یک تابع تام است. در حالت خاص که $g(z)\equiv 0$ مقایسه (۳۲) و (۲۳) نشان می‌دهد که $f(z)=\pi\cot\pi z$

در سراسر این بخش شباهاتی میان قضیه وایرشتراس و قضیه میتاگ ـ لفله دیده‌ایم. به‌عنوان‌کاربردی از قضیه میتاگ ـ لفله، تعمیمی برای‌قضیه‌وایرشتراس‌به اثبات می‌رسانیم.

قضیه ۱۳ــ۱۰ . گیریم $\{a_n\}$ دنباله‌یی از اعداد مختلط متمایز باشد که به ∞ میل کند . در این صورت برای هر دنباله $\{c_n\}$ از اعداد مختلط، تابع تام $f(z)$ موجود است که برای هر n ، $f(a_n)=c_n$.

اثبات ــ به موجب قضیه وایرشتراس، تابع تام $g(z)$ را می‌توان ساخت که در $z=a_n$ صفرهای ساده دارد . در این صورت $g(a_n)=0$ و برای هر n ، $g'(a_n)\neq 0$ به موجب قضیه میتاگ ــ لفله ، می‌توان یک تابع برخه‌ریخت $h(z)$ ساخت که در $z=a_n$ قطب ساده با باقیمانده $c_n/g'(a_n)(z-a_n)$ داشته باشد (اگر $c_n=0$ ، $h(z)$ را طوری می‌سازیم که در $z=a_n$ تحلیلی باشد) .

چون که قطب‌های ساده $h(z)$ ، صفرهای ساده $g(z)$ نیز می‌باشند ، پس تکنیه‌های $f(z)=g(z)h(z)$ برداشتنی است . یعنی که $f(z)$ تابع تام است . برای هر n ، می‌توان $g(z)$ را حول $z=a_n$ به رشته تیلر بسط داد . در این صورت

$$g(z)=g'(a_n)(z-a_n)+\frac{g''(a_n)}{2}(z-a_n)^2\cdots. \qquad (۳۳)$$

هم‌چنین می‌توان نوشت :

$$h(z)=\frac{c_n}{g'(a_n)(z-a_n)}+h_1(z), \qquad (۳۴)$$

که $h_1(z)$ در یک همسایگی $z=a_n$ تحلیلی است . با ترکیب (۳۳) و (۳۴) در می‌یابیم که :

$$f(a_n)=\lim_{z\to a_n}f(z)=\lim_{z\to a_n}g(z)h(z)=c_n.$$

و اثبات تمام است .

تذکر ــ اگر $c_n\equiv 0$ ، قضیه ۱۳ــ۱۰ به قضیه وایرشتراس تحویل می‌گردد .

پرسش‌ها

۱ــ چه ارتباطی میان قضیه وایرشتراس و قضیه میتاگ ــ لفله موجود است ؟ آیا می‌توان یکی را از دیگری استنتاج نمود ؟

۲ــ در مورد حاصلجمع دو تابع برخه ریخت چه می‌توان گفت؟ در مورد حاصلضرب چی ؟

۳ــ چگونه ضرایب همگراساز قضیه وایرشتراس و قضیه میتاگ ــ لفله قابل قیاس‌اند ؟

۴ــ چرا در این فصل مشتق لگاریتمی چنین اهمیت دارد ؟

۵ــ دراثبات قضیه میتاگ ــ لفله ، چه لزومی داشت که فرض شود هیچ یک از b_n ها صفر نیست .

۶ــ آیا یک‌تابع تام منحصربفرد موجود است که در شرایط قضیه ۱۳ــ۱۰ صدق‌کند ؟

۷ــ اگر قسمت اصلی مجاز باشد که تکینه‌های اساسی داشته باشد ، آیا باز هم قضیه میتاگ ــ لفله برقرار است ؟

تمرینها

۱ــ تابع برخه‌ریخت $f(z)$ را که واجد دو خاصیت زیر باشد بسازید :

(i) $f(z)$ در $z = 1, 2, 3, \ldots$ و نــــه در جـــــای دیگری قطب داشته باشد .

(ii) قطب در $z = n$ مرتبه‌اش n باشد .

۲ــ نشان دهید که $(\sin z)/(e^{2iz} + 1)$ و $1/(2i \cos z)$ دریک‌تابع تام اختلاف دارند و آن را مشخص کنید .

۳ــ نشان دهید که $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n)$ تام است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(z - a_n)$ برخه‌ریخت باشد .

۴ــ گیریم $p(\geq 1)$ عدد صحیح باشد . اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{p+1}$ همگرا باشـــد ، نشان دهید :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right)$$

برخه‌ریخت است .

۵ــ(الف) فرض کنید $0 < |b_2| \leq |b_2| \leq \cdots$ $(|b_n| \to \infty)$.نشان دهید که دنباله مثبت $\{a_n\}$ موجود است بطوری که $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/(z - b_n)$ در $z = b_n$ تحلیلی باشد .

(ب) بسط $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m \cdots$ را در نظر بگیرید و c_m را برحسب کمیت‌های a_n و b_n محاسبه کنید .

۶ــ فرض کنید $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/b_n)$ تام است . با نمادهای تمرین قبل ، نشان دهید $h(z) = f(z)g(z)$ تام است و $h(z_n)$ را برحسب α_n و $g'(z_n)$ محاسبه کنید .

۷ــ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|/n^2)$ همگراست . نشان دهید :

(الف) $f(z) = 2z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n/(z^2-n^2)$ برخه‌ریخت است.

(ب) $g(z) = (\sin \pi z/\pi) f(z)$ تام است و $g(n) = \alpha_n$.

۸ــ قضیه وایرشتراس را از قضیه متیاگ ــ لفله استنتاج نمائید.

۹ــ همانندی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+4\pi^2 n^2}.$$

(راهنمایی: ازطرفین همانندی ثابت شده در تمرین ۱۶ از بخش قبل مشتق لگاریتمی استخراج کنید).

۱۴ـ ادامهٔ تحلیلی

قبلاً "دیدیم که یک تابع تحلیلی توسط رفتارش در یک دنباله نقاط، که نقطه‌حدی داشته باشد مشخص می‌گردد، ولی هنوز سئوال زیر بررسی نشده است: اگر $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}_1$ تحلیلی باشد، آیا یک تابع تحلیلی در یک میدان دیگر $\mathscr{D}_2$ موجود است که در $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ با $f(z)$ برابر باشد؟ این مسئله را که چگونه می‌توان یک تابع تحلیلی را به طور کامل، مجدداً" تعریف کرد تا حوزه تحلیلی بودن آن گسترش یابد، در ادامه تحلیلی بررسی می‌گردد. در این فرآیند با توابعی مواجه می‌شویم که برای آنها چنین گسترش موجود نیست. در پایان دانستنیهای خود را در مورد ادامه تحلیلی در دو مسئله، از عمده‌ترین مسائل آنالیز، تابع گاما و تابع ریمان ـ زتا بکار می‌بندیم.

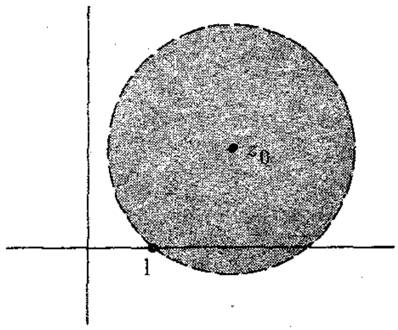
۱۴ـ۱ـ مفاهیم بنیادی

تابع $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ در قرص $|z| < 1$، تحلیلی است و در آنجا نمایشگر تابع $f(z) = 1/(1-z)$ می‌باشد. ولی $f(z)$ در تمام نقاط صفحه مگر در $z = 1$ تحلیلی است. برای هر نقطه $z = z_0 \neq 1$، نمایش رشته تیلر

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{۱}$$

برای وقتی که $|z - z_0| < |1 - z_0|$، برقرار است. (ر. ک. شکل ۱) قرصی که در آن (۱) همگراست، ممکن است با قرص $|z| < 1$ نقاط مشترک داشته و یا نداشته باشد. به عنوان مثال:

شکل ۱



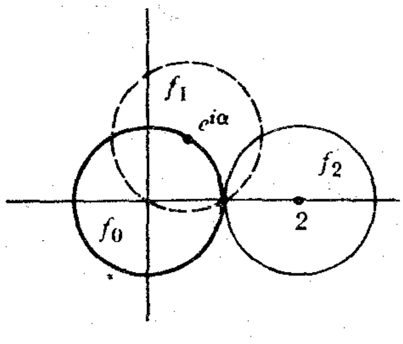
$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(e^{i\alpha})}{n!}(z-e^{i\alpha})^n \qquad (0<\alpha<2\pi)$$

در قرصی همگراست که با قرص $|z|<1$ ناحیه مشترک دارد؛ ولی در مورد قرصی که در آن:

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(z-2)^n$$

همگراست، چنین نیست. در شکل ۲، میدانهایی که در آن $f_0(z)$ ، $f_1(z)$ و $f_2(z)$ همگرایند نشان داده شده است. در میدانهای همگرایی مربوطه، همگی نمایشگر تابع $f(z)=1/(1-z)$ هستند. به‌علاوه برای $\mathrm{Re}\ z<1$ ، انتگرال $\int_0^\infty e^{-t(1-z)}\,dt$ همگراست و در این نیم‌صفحه نمایشگر $f(z)=1/(1-z)$ می‌باشد. بنابراین می‌بینیم، توابعی که ظاهراً" وابستگی به یکدیگر ندارند، در عمل ممکن است در میدانهای متفاوت نمایشگر یک تابع باشند.

شکل ۲



فرض کنیم بدانیم $f_0(z)$ در میدان $\mathscr{D}_0$ تحلیلی است می‌خواهیم بزرگترین میدان $\mathscr{D}\supset\mathscr{D}_0$ را بیابیم که، $f(z)$ ی بر $\mathscr{D}$ تحلیلی بوده و به‌علاوه در $\mathscr{D}_0$ ، $f(z)\equiv f_0(z)$ باشد. همان‌طورکه‌هم‌اینک دیدیم صفحه منهای $z=1$. بزرگترین میدان شامل $|z|<1$ است که بر آن یک تابع تحلیلی می‌توان تعریف کرد که با $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ در $|z|<1$ برابر باشد.

تابع $f(z)$ ، به همراه $\mathscr{D}$ که در آن تابع تحلیلی است ، به عنصر تابع موسوم است و با $(f, \mathscr{D})$ نمایانده می‌شود . دو عنصر تابع $(f_1, \mathscr{D}_1)$ و $(f_2, \mathscr{D}_2)$ را ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر گوئیم اگر چنانچه $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \neq \varnothing$ و در میـدان $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ ، $f_1 = f_2$.هروقت یک ادامه تحلیلی مستقیم از $(f_1, \mathscr{D}_1)$ در میدان $\mathscr{D}_2$ موجود باشد ، آن ادامه تحلیلی به طور منحصر بفـرد می‌بایست مشخص باشد ، زیرا هر دو ادامه تحلیلی می‌بایست بر $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ مساوی گردد و به موجب قضیه همانی (قضیه ۸ــ۱۵) نتیجتا "در تمام میدان $\mathscr{D}_2$ مساوی خواهند بود .

خاصیت ادامه تحلیلی مستقیم بودن ، سرایتی نیست . بدین‌معنی‌که‌اگر $(f_1, \mathscr{D}_1)$ و $(f_2, \mathscr{D}_2)$ ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر $(f_2, \mathscr{D}_2)$ و $(f_3, \mathscr{D}_3)$ هم‌ادامه‌های تحلیلی‌مستقیم یکدیگرباشند ، نمی‌توان‌نتیجه گرفت ، $(f_1, \mathscr{D}_1)$ و $(f_3, \mathscr{D}_3)$ ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر هستند . مثال ساده‌یی در این مورد ، این که $\mathscr{D}_1$ و $\mathscr{D}_3$ نقطه مشترک‌نداشته‌باشند .بااین حال میان $f_1(z)$ و $f_3(z)$ ارتباطی‌موجوداست که‌شایستگی بررسی دارد .

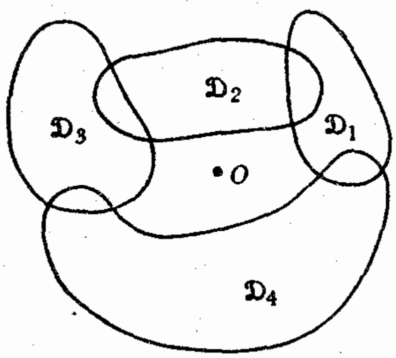
فرض کنیم $\{(f_1, \mathscr{D}_1), (f_2, \mathscr{D}_2), \ldots, (f_n, \mathscr{D}_n)\}$ یک مجموعه متناهـی از عنصرهای تابع باشد با این خاصیت که $(f_k, \mathscr{D}_k)$ و $(f_{k+1}, \mathscr{D}_{k+1})$ ، بـــــرای $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ ، ادامه تحلیلی مستقیم یکدیگرند . در این صورت این مجموعه عنصرهای تابع را ادامه تحلیلی یکدیگر نامند . در این صورت مجموعه عنصرهای تابع را یک زنجیر نامند . باید توجه داشت که $(f_i, \mathscr{D}_i)$ و $(f_j, \mathscr{D}_j)$ ادامه تحلیلی یکدیگرنداگر و تنها اگر آنها را بتوان با تعداد متناهی ادامه‌های تحلیلی مستقیم،مربوط کرد . گوئیم عنصر تابع $(f, \mathscr{D})$ را می‌توان تحلیلی‌وار بر یک خم ادامه داد ، چنانچـه زنجیری شامل $(f, \mathscr{D})$ موجود باشد بطـوری که هر نقطه این خم در میدان یک عنصر تابع از این زنجیر باشد .

اگر زنجیر $\{(f_1, \mathscr{D}_1), (f_2, \mathscr{D}_2), \ldots, (f_n, \mathscr{D}_n)\}$ مفروض باشد ، آیا می‌توان‌تابع $f(z)$ ی تعریف کرد که در میدان $\{\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{D}_n\}$ تحلیلی باشد ؟ بـدون شک وقتی $n = 2$ باشد ، این کار عملی است . تابع

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \mathscr{D}_1, \\ f_2(z), & z \in \mathscr{D}_2, \end{cases}$$

در $\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$ تحلیلـــــی اســت . اگـر $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \cap \cdots \cap \mathscr{D}_n \neq \varnothing$ ،بااستقراء می‌توان نشان داد که f ، که با $f(z) = f_i(z)$ برای $z \in \mathscr{D}_i$ تعریـف می‌شود ، تحلیلی است . با این حال در حالت کلی این اثبات مقبول نیست . چهار میدان شکل ۳

شکل ۳



را در نظر می‌گیریم . برای یک شاخه ثابت $\log z$ ، قرار می‌دهیم $f_1(z) = \log z$ در $\mathscr{D}_1$. عنصر تابع $(f_1, \mathscr{D}_1)$ مشخص‌کننده یک ادامه تحلیلی مستقیم و منحصربفرد $(f_2, \mathscr{D}_2)$ است ، و این هم مشخص‌کننده $(f_3, \mathscr{D}_3)$ و این هم مشخص‌کننده $(f_4, \mathscr{D}_4)$ است . پس ما زنجیر $\{(f_1, \mathscr{D}_1)\ (f_2, \mathscr{D}_2)\ (f_3, \mathscr{D}_3), (f_4, \mathscr{D}_4)\}$ را خواهیم داشت . ولی در میدان $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_4$ تساوی $f_1(z) = f_4(z)$ درست نیست . اختلاف این دو تابع در این نکته نهفته است که شناسه تابع چندمقداری لگاریتم بعد از یک دوران کامل حول مبداء به مقدار 2π افزایش یافته است . هم‌چنین باید توجه داشت که می‌توان $(f_1, \mathscr{D}_1)$ را در میدان $\mathscr{D}_3$ با زنجیرهای دیگری ادامه داد و به توابع دیگری رسید . در مورد زنجیرهای $\{(f_1, \mathscr{D}_1), (f_2, \mathscr{D}_2)\ (f_3, \mathscr{D}_3)\}$ و $\{(f_1, \mathscr{D}_1), (g_1, \mathscr{D}_4), (g_2, \mathscr{D}_3)\}$ ، مقادیر f_3 و g_2 به مقدار $2\pi i$ با هم اختلاف دارند .

اختلاف میان توابع تک ــ مقداری و چند مقداری را از دیدگاه دیگری می‌توان بررسی کرد . فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی است . نقطه z_1 را نقطه منظم تابع $f(z)$ گوئیم اگر چنانچه عنصر تابع $(f, \mathscr{D})$ را بتوان در امتداد خمی از نقطه‌یی در $\mathscr{D}$ تا نقطه z_1 ، ادامه تحلیلی داد . مجموعه همه نقاط منظم $f(z)$ ، به میدان نظام $f(z)$ موسوم است .

همان‌طورکه‌دیدیم میدان‌نظام $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ عبارتست‌از $\{z : z \neq 1\}$. قابل توجه است که $f(z) = 1/(1-z)$ در میدان نظام $f_0(z)$ تحلیلی است و درهمه نقاطی که هر دو تحلیلی‌اند ، با $f_0(z)$ مساوی است .

اینک تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$F_0(z) = \int_0^z f_0(\zeta)\, d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n\right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

که در آن مسیر انتگرال‌یابی در قرص واحد قرار دارد . تابع

$F(z)=\int_0^z 1/(1-\zeta)\,d\zeta=-\mathrm{Log}\,(1-z)$ با $F_0(z)$ در قرص $|z|<1$ برابراست و همه جای صفحه مگر در $z=1$ و پرتو $\mathrm{Arg}\,(1-z)=\pi$ (یعنی پرتومحورحقیقی مثبت شروع از $z=1$) تحلیلی است. تابع

$$F_1(z)=-\log\,(1-z) \qquad (0<\arg\,(1-z)<2\pi)$$

یک ادامه $F(z)$ از نیم‌صفحه $0<\mathrm{Arg}\,(1-z)<\pi$ به تمام صفحه منهای $z=1$ و پرتو $\arg\,(1-z)=0$ می‌باشد.

پس میدان نظام برای تابع

$$F_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$$

عبارت است از $\{z:z\neq 1\}$. با این حال باید توجه داشت تابعی که هم در میدان‌نظام $F_0(z)$ تحلیلی‌باشد و هم در قرص $|z|<1$ با $F_0(z)$ مساوی باشد موجود نیست. همان طور که قضیه بعد نشان می‌دهد، رخداد این پدیده صرفا "بدین‌دلیل‌است که $\{z:z\neq 1\}$، یک میدان همبند چندگانه است.

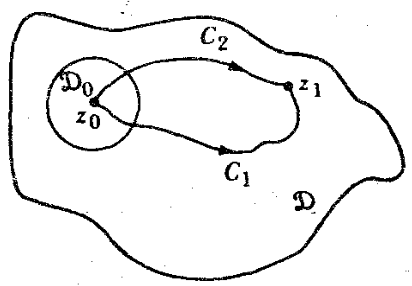
تذکر ــ تابع چند مقداری $\log\,(1-z)$ را در میدان $\{z:z\neq 1\}$ منظم‌گوئیم چون که هر یک از نقاط این میدان، یک نقطه منظم است. بعضی موءلفین به شمارآوردن توابع چند مقداری را به عنوان تابع تحلیلی، مجاز می‌دانند. در این صورت تعریف‌آنها از تحلیلی با تعریف ما از منظم مطابقت دارد. قضیه بعدی نشان می‌دهد که، یک تابع منظم در یک میدان همبند ساده همیشه تک مقداری (و در نتیجه تحلیلی) است.

قضیه ۱۴ــ۱. (قضیه تک ــ میدانی) گیریم $\mathscr{D}$ میدان همبند ساده است و فرض کنیم $f_0(z)$ در میدان $\mathscr{D}_0\subset\mathscr{D}$، تحلیلی است. اگر عنصر تابع $(f_0,\mathscr{D}_0)$ را بتوان بر امتداد هر خم در $\mathscr{D}$ ادامه تحلیلی داد، در این صورت تابع تک ــ مقداری $f(z)$ موجود است که در $\mathscr{D}$ تحلیلی باشد و در $\mathscr{D}_0$، $f(z)\equiv f_0(z)$.

اثبات ــ دراین‌اثبات‌به‌ذکرنکات عمده اکتفا می‌کنیم و جزئیات اثبات رابه‌خواننده علاقمندواگذارمی‌کنیم. فرض‌کنیم نتیجه‌مذکور دروغ باشد. در این صورت نقاط $z_0\in\mathscr{D}_0$ و $z_1\in\mathscr{D}$ وخم‌های C_1 و C_2 هردو با نقطه آغازی z_0 و نقطه پایانی z_1 موجودند بطوری که اگر $(f_0,\mathscr{D}_0)$ را بر امتداد C_1 ادامه تحلیلی دهیم و بر امتداد C_2 ادامه تحلیلی دهیم، در همسایگی z_1 به عنصرهای تابع متفاوت خواهیم رسید (ر. ک. شکل ۴) واین بدان‌معنی‌است که اگر $(f_0,\mathscr{D}_0)$ بر امتداد C_1–C_2 ادامه تحلیلی داده شود، به‌مقدار

اولیه‌اش باز نمی‌گردد .

از این رو جهت اثبات قضیه کافی است نشان دهیم ، عنصر تابع $(f_0, \mathscr{D}_0)$ ، $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$ را می‌توان بر هر خم بسته در $\mathscr{D}$ ادامه داد و به مقدار اولیه بازگشت . درحالت خاصی که خم بسته C یک مستطیل باشد ، اثبات آن شبیه اثبات قضیه ۷ـ۶ است .



شکل ۴

مستطیل C را به چهار مستطیل مساوی تقسیم می‌کنیم ، همان‌طور که در شکل ۱۰ بخش ۷ـ۴ مشاهده می‌شود . ادامه بر C به همان چیزی می‌انجامد که ادامه بر این چهار مستطیل با هم . اگر نتیجه برای C دروغ می‌بود ، آنگاه می‌بایست برای یکی از این چهار مستطیل دروغ باشد و ما این مستطیل اخیر را با C_1 می‌نمایانیم . در این صورت C_1 را نیز به چهار مستطیل مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم و برای یکی از این چهار مستطیل قضیه دروغ است . با ادامه این فرآیند ، دنباله‌یی از مستطیل‌های تودرتو به دست می‌آید ، که برای آنها قضیه دروغ است . به موجب لم ماقبل قضیه ۲ـ۱۱ ، دقیقاً " یک نقطه ، که آن را z^* می‌نامیم ، به همه این مستطیل‌ها واقع است .

چون‌که $z^* \in \mathscr{D}$ ، عنصرتابع $(f^*, \mathscr{D}^*)$ بـــا $z^* \in \mathscr{D}^* \subset \mathscr{D}$ موجوداست . برای n بس بزرگ ، مستطیل C_n از این‌مستطیل‌های تودرتو در $\mathscr{D}^*$ واقع است . ولی این‌بدان معنی‌است‌که $f^*(z)$ درمیدانی شامل C_n تحلیلی است ، که با نحوه تعریف C_n متناقض است ، این‌تناقض به اثبات قضیه در حالت خاصی که خم مستطیل باشد ، می‌انجامد . برای اثبات در حالت عمومی به کتاب هیل (۱۳) مراجعه کنید .

فرض کنیم $f(z)$ در میدان $\mathscr{D}$ تحلیلی است و z_0 نقطه مرزی $\mathscr{D}$ است . نقطه z_0 ، نقطه منظم برای $f(z)$ خواهد بود ، اگر چنانچه برای قرص $\mathscr{D}_0$ به مرکز z_0 ، عنصر تابع $(f_0, \mathscr{D}_0)$ موجودباشدبه‌طوری‌که در میدان $\mathscr{D}_0 \cap \mathscr{D}$ داشته باشیم $f_0(z) \equiv f(z)$. هرنقطه‌مرزی $\mathscr{D}$ که‌نقطه‌منظم برای $f(z)$ نباشد ، نقطه منفرد برای $f(z)$ نامیده می‌شود .

در مورد تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ، دیدیم که هر نقطه بر دایـــــره $|z| = 1$ نقطه‌منظم‌است مگر $z = 1$. این مطلب که تمامی نقاط دایره نمی‌تواند نقطه منظم‌باشد ، نتیجه قضیه زیر است :

قضیه ۱۴ــ۲ . اگر شعاع همگرایی رشته $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R باشد ، آنگاه $f(z)$ بر دایره $|z| = R$ حداقل یک نقطه منفرد دارد .

اثبات ــ قرص $|z| < R$ را با $\mathscr{D}$ می‌نمایانیم و فرض می‌کنیم که همه نقاط بر $|z| = R$ نقطه منظم باشند . در این صورت برای هر z_α بر دایره ، تابع f_α را می‌توان بر قرص $\mathscr{D}_\alpha$ به مرکز z_α تعریف کرد ، بطوری که عنصر تابع $(f_\alpha , \mathscr{D}_\alpha)$ ادامه تحلیلی مستقیم $(f, \mathscr{D})$ باشد . چون که $\bigcup_\alpha \mathscr{D}_\alpha$ ، مجموعه فشرده $|z| = R$ را می‌پوشاند ، زیر پوشش متناهی $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2 \ \ldots, \mathscr{D}_n)$ می‌توان یافت . تابع g که به صورت

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathscr{D}, \\ f_i(z), & z \in \mathscr{D}_i, \end{cases}$$

تعریف شده در میدان $\mathscr{D}' = \mathscr{D} \cup \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2 \cup \cdots \cup \mathscr{D}_n$ تحلیلی است . چون‌که $\mathscr{D}'$ شامل قرص $|z| \le R$ می‌باشد ، پس برای یک ε مثبت ، میدان می‌بایست شامل قرص $|z| \le R + \varepsilon$ باشد . پس نمایش رشته توانی $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در قرص $|z| < R + \varepsilon$ برقرار است و این مطلب با این نکته که شعاع همگرایی رشته ماکلورن $f(z)$ ، برابر با R است متناقض می‌باشد .

فرع ــ اگر $f(z)$ در قرص $|z - z_0| < R$ تحلیلی باشد و بسط رشته تیلر حول $z = z_0$ به شعاع همگرایی R باشد ، آنگاه $f(z)$ بر دایره $|z - z_0| = R$ حداقل یک نقطه منفرد دارد .

اثبات ــ قرار می‌دهیم $\zeta = z - z_0$ و قضیه را در مورد $f(\zeta)$ بکار می‌بریم

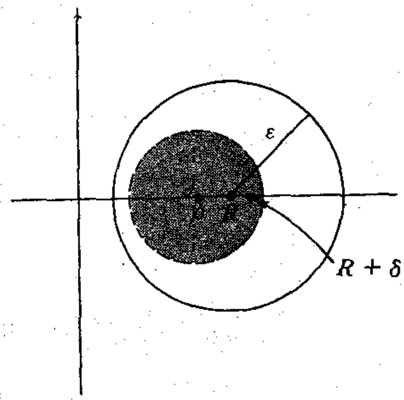
گرچه ، این مطلب روشن است که ، یک رشته توانی می‌بایست نقاط منفرد بر دایره همگرایی داشته باشد ، ولی مشخص کردن جایگاه آنها در حالت عمومی کاری مشکل است . با گذاشتن محدودیتی برضرایب ، می‌توانیم موضع یک نقطه منفرد خاص را مشخص کنیم .

قضیه ۱۴ــ۳ . فرض کنیم شعاع همگرایی $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R باشد ، اگر برای هر n ، $a_n \ge 0$ ، آنگاه $z = R$ یک نقطه منفرد است .

اثبات ــ اگر $z = R$ نقطه تکینه نباشد ، $f(z)$ در قرصی $\mathscr{D}_0 : |z - R| < \varepsilon$ ، تحلیلی است . برای یک عدد مثبت ρ ، $\rho < R$ ، بس نزدیک به R ، قرص باز $\mathscr{D}_1$ به مرکز $z = \rho$ موجود است که شامل نقطه $z = R$ و زیرمجموعه $\mathscr{D}_0$ باشد . پس رشته تیلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho)}{n!}(z-\rho)^n \qquad (۲)$$

در نقطه $z=R+\delta$ $(\delta>0)$ همگراست (ر. ک. شکل ۵)



شکل ۵

به‌موجب قضیه ۱۴ـ۲ ،رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ جایی بر دایره $|z|=R$ یک نقطه‌منفرد دارد، مثلاً " $Re^{i\theta_0}$. پس شعاع همگرایی رشته تیلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})}{n!}(z-\rho e^{i\theta_0})^n$$

برابر $R-\rho$ است (اگر شعاع همگرایی بزرگتر می‌بود ،آنگاه $Re^{i\theta_0}$ نقطه‌منفرد نمی‌بود). باید توجه داشت، برای هر n داریم:

$$f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})=\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(\rho e^{i\theta_0})^{k-n}. \qquad (۳)$$

چون که $a_n \geq 0$ ، از (۳) نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$|f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})| \leq \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k\rho^{k-n}=f^{(n)}(\rho).$$

پس

$$\frac{1}{R-\rho}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})}{n!}\right|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(\rho)}{n!}\right|^{1/n},$$

این بدین معنی است که شعاع همگرایی (۲) حداکثر $R-\rho$ است. و این با این نکته که رشته در $z=R+\delta$ همگراست متناقض است. پس $z=R$ یک نقطه منفرد $f(z)$ است.

نشان دادیم که، یک رشته توانی بر دایره همگرائی‌اش حداقل یک نقطه منفرد دارد. سئوالی مطرح است این که آیا برای تعداد نقاط منفرد بر دایره، حد بالایی موجود است؟ نشان خواهیم داد که ممکن است هر یک از این نقاط منفرد باشند. اگر $f(z)$ درمیدانی

که مرزش C است، تحلیلی باشد و هر نقطه بر C، نقطه منفرد $f(z)$ باشد، آنگاه C به مرز طبیعی $f(z)$ موسوم است. در چنین حالتی میدان نظام همان میدان تحلیلی بودن است.

برای ساختن یک رشته توانی با مرز طبیعی، از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم ــ فرض کنیم شعاع همگرایی $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R است. اگر با $r \to R$، $f(re^{i\theta_0}) \to \infty$. آنگاه نقطه $Re^{i\theta_0}$، نقطه منفرد برای $f(z)$ است.

اثبات ــ اگر $Re^{i\theta_0}$ یک نقطه منظم باشد، آنگاه تابع $g(z)$ ی موجود است که بر قرصی به‌مرکز $Re^{i\theta_0}$ تحلیلی‌است و برای $|z| < R$، با $f(z)$ برابر است. ولی دراین‌صورت:

$$\lim_{r \to R^-} f(re^{i\theta_0}) = \lim_{r \to R^-} g(re^{i\theta_0}) = g(Re^{i\theta_0}),$$

و با این نکته که حد در طرف چپ نامتناهی است متناقض است.

اینک تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$ را درنظر می‌گیریم که در قرص $|z| \leq 1$ تحلیلی است. نشان می‌دهیم، دایره $|z| = 1$ برای‌این تابع یک مرز طبیعی‌است. ابتداء ملاحظه‌می‌کنیم، با $z \to 1$ درامتداد محور حقیقی، $f(z) \to \infty$ و بنابراین $z=1$ نقطه‌منفرداست (این‌نتیجه قضیه ۱۴ــ۳ نیز می‌باشد). قابل توجه است، $f(z)$ دررابطه $f(z) = z + f(z^2)$ صدق می‌کند. پس $f(z)$ و $f(z^2)$ هم‌زمان به ∞ میل می‌کنند. ولی وقتی $z^2 \to 1$ بر اعداد حقیقی، $f(z^2) \to \infty$، و $1-$ را نقطه منفرد می‌سازد. این مقدمه موجب روشن شدن روش عمومی می‌گردد. تابع $f(z)$ در رابطه بازگشتی $f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^{n-1}} + f(z^{2^n})$ صدق می‌کند. برای هر n ثابت داریم:

$$|f(z)| \geq |f(z^{2^n})| - n \qquad (|z| < 1).$$

چون بر هر پرتوی که به یکی از ریشه‌های 2^n ام واحد میل کند، $f(z^{2^n}) \to \infty$، پس نتیجه می‌شود، هر ریشه 2^n ام واحد نقطه منفرد است. یعنی، همه نقاطی به شکل $e^{(2k\pi/2^n)i}$، k و n صحیح مثبت، نقاط منفرد هستند. اکنون هر همسایگی از هر نقطه دیگری بر دایره واحد می‌بایست شامل یکی از ریشه‌های 2^n ام واحد باشد. پس‌هیچ نقطه‌یی از دایره واحد نقطه منظم نیست. یعنی، $|z| = 1$ برای $f(z)$ مرز طبیعی است.

استدلالی مشابه در مورد تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ که در قرص $|z| < 1$ تحلیلی است، نیز می‌توان بکار برد. زیرا اگر $z = re^{2\pi(p/q)i}$، که p و q اعداد صحیح مثبت و $0 < r < 1$، آنگاه

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} e^{2\pi(p/q)n!i} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}\right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - q. \qquad (۴)$$

چون که وقتی r به 1 میل کند، طرف راست (۴) به ∞ میل می‌کند، پس همه نقاطی به شکل $e^{2\pi(p/q)i}$ نقاط منفرد هستند. ولی این نقاط در $|z| = 1$ متراکم‌اند، پس دایره واحد مرز طبیعی برای $f(z)$ است.

چون که یک رشته توانی در یک قرص همگراست، مرزش می‌بایست یک دایره باشد، ولی مرز طبیعی به گونه‌یی تعریف شده است که، توابعی را که میدان تحلیلی بودن آنها لزوماً" قرص نیست، نیز شامل گردد. تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$ را در نظر می‌گیریم. چون که رشته برای $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$ همگرای یکنواخت است، پس تابع $f(z)$ برای $\operatorname{Re} z > 0$ تحلیلی است. اینک نشان می‌دهیم که محور انگاری مرز طبیعی $f(z)$ است.

فرض کنیم $z = x + 2\pi(p/q)i$، که p صحیح و q صحیح مثبت و x عدد حقیقی مثبت باشد. پس

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{q-1} e^{-n!(x+2\pi(p/q)i)} + \sum_{n=q}^{\infty} e^{-n!x}\right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} e^{-n!x} - q. \qquad (۵)$$

چون که وقتی x به 0 میل کند، طرف راست (۵) به ∞ میل می‌کند، نتیجه می‌شود نقاطی به شکل $2\pi(p/q)i$، نقاط منفرد هستند. ولی این نقاط در محور انگاری متراکم‌اند، پس محور انگاری مرز طبیعی $f(z)$ است.

پرسش‌ها

۱ــ اگر در میدان $\mathscr{D}_0$، $f(z) = z$، آیا می‌شود، $f(z)$ در $\mathscr{D}_1$ تحلیلی باشد و در عین حال در $\mathscr{D}_1$، $f(z) \neq z$ باشد؟

۲ــ آیا می‌شود، دو تابع تحلیلی در قرص $|z| < 1$، در یک تعداد نامتناهی نقاط برابر باشند ولی در همه جای قرص برابر نباشند؟

۳ــ آیا می‌توان همیشه یک ادامه تحلیلی را به یک ادامه تحلیلی مستقیم تبدیل نمود؟

۴ــ آیا ممکن است، عناصر تابع $(f, \mathscr{D}_1)$ و $(g, \mathscr{D}_2)$ را بتوان با یک زنجیر نامتناهی از عناصر تابع به همدیگر مرتبط کرد، ولی نتوان با هیچ زیرزنجیر متناهی این کار را کرد؟

۵ــ چرا میدان نظام یک میدان است؟

۶ــ چه اختلافی میان نقطه منفرد و تکینه موجود است؟ چه اختلافی میان نقطه منظم و نقطه تحلیلی بودن موجود است؟

۷ــ آیا می‌شود، یک تعداد نامتناهی نقاط بر مرز C یک میدان، منفرد باشند و C

مرز طبیعی نباشد؟

۸ــ اگر $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_n$ میدان باشند، آیا اجتماع آنها هم میدان است؟

۹ــ آیا معکوس آخرین لم مذکور در این بخش درست است؟

۱۰ــ آیا رابطه‌یی میان وجود شکاف در ضرایب رشته ماکلورن برای $f(z)$، باانطباق دایره همگرایی بر مرز طبیعی موجود است؟

۱۱ــ آیا ارتباطی میان قضیه کوشی و قضیه تک ـ میدانی برقرار است؟

تمرینها

۱ــ مجموعه اعداد حقیقی $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \theta_n < 2\pi$ مفروض است. تابع $f(z)$ ی بسازید که:

(i) $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد.

(ii) تنها نقاط منفرد $f(z)$ بر دایره واحد عبارت باشند از: $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}$.

۲ــ نشان دهید، مجموعه نقاط منظم یک تابع، مجموعه‌یی است باز، و مجموعه نقاط منفرد، مجموعه بسته است.

۳ــ (الف) نشان دهید، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[z^{2^{n+1}}/(1 - z^{2^{n+1}})]$ درمیدان $|z| < 1$ و در میدان $|z| > 1$ تحلیلی است و $|z| = 1$ در هر یک از این میدانها برای $f(z)$ مرز طبیعی است.

(ب) $f(z)$ را در هر یک از این میدانها به شکل بسته مشخص کنید.

۴ــ نشان دهید که $|z| = 1$ برای $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ یک مرز طبیعی است.

۵ــ فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n!}$ $(a_n > 0)$ دارای شعاع همگرایی R است. نشان دهید $|z| = R$ یک مرز طبیعی است.

۶ــ فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و هر a_n حقیقی است، اگر با $k \to \infty$، $\sum_{n=1}^{k} a_n \to \infty$، نشان دهید $z = 1$ نقطه منفرد برای $f(z)$ است. (راهنمایی: $g(z) = f(z)/(1 - z)$ را در یک رشته بسط دهید و نشان دهید، با $z \to 1$ با مقادیر حقیقی، $(1 - z)g(z) \to \infty$)

۷ــ فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی 1 است و تکینه‌ها تنها بر دایره $|z| = 1$ واقفند و این تکینه‌ها هم‌قطب ساده هستند. نشان دهید، دنباله $\{a_n\}$ کراندار است.

۲-۱۴. توابع خاص

همان طور که در فصل قبل دیدیم، تابع گاما برخه‌ریخت است و در اعداد صحیح منفی و صفر قطب ساده دارد. معکوس آن تابعی است تام و می‌توان آن را به صورت:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}, \tag{۶}$$

نوشت که:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \log n\right).$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} ze^{[1+(1/2)+(1/3)+\cdots+(1/n)]z - z\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} ze^{-z\log n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right).$$

با نوشتن مجدد حاصلضرب اخیر، داریم:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} ze^{-z\log n}\frac{(z+1)}{1}\frac{(z+2)}{2}\frac{(z+3)}{3}\cdots\frac{(z+n)}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{z}{n^z}\frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!}$$

و به یک عبارت مجدد برای تابع گاما می‌رسیم، یعنی که:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \tag{۷}$$

که برای همه مقادیر، مگر صفر و اعداد صحیح منفی، معین است.

در آنالیز حقیقی، تابع گاما برحسب انتگرال ناسره تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (x>0). \tag{۸}$$

برای این‌که بدانیم این انتگرال برای همه مقادیر مثبت x، همگراست، می‌نویسیم:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = I_1 + I_2.$$

چون که برای $t\geq 0$، $e^{-t}\leq 1$، نتیجه می‌شود که $I_1 \leq \int_0^1 t^{x-1}\,dt = 1/x$. چون که $\lim_{t\to\infty}(t^{x+1}/e^t) = 0$، عبارت زیر نشان انتگرال، I_2 هم کراندار است. داریم:

$$\int_N^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq \int_N^\infty \frac{t^{x-1}}{t^{x+1}}\,dt = \frac{1}{N} \qquad (N \geq N(x)).$$

پس $\Gamma(x)$ برای $x>0$ معین است . یک انتگرال‌یابی جزء به‌جزء نتیجه می‌دهد که :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -\frac{t^x}{e^t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$
$$= x\Gamma(x). \qquad (۹)$$

قابل توجه است که نشان داده‌ایم برای مقادیر مختلط z ، (۶) در (۹) صادق‌است ، از (۹) و از این نکته که $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ ،نتیجه‌می‌شود ،برای همه اعداد صحیح مثبت n ، $\Gamma(n+1) = n!$.

اکنون تابع مختلط زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt. \qquad (۱۰)$$

برای $z = x+iy$ ، $x>0$ داریم

$$|t^{z-1}| = |e^{(x-1)\log t + iy\log t}| = e^{(x-1)\log t} = t^{x-1}.$$

پس انتگرال (۱۰) برای $x>0$ همگرای مطلق است و

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty |t^{z-1}e^{-t}|\,dt = \Gamma(x).$$

می‌خواهیم نشان دهیم‌که (۱۰) دوخاصیت‌عمده‌دارد . اول‌این‌که برای $\operatorname{Re} z > 0$ ، تحلیلی است ، ثانیا" برای $\operatorname{Re} z > 0$ با (۷) برابر است . ما در (۷) و (۱۰) از یک نماد استفاده‌کرده‌ایم‌که ظاهرا" عمل درستی نیست ، خواص اخیر (۱۰) ، این‌عمل ظاهرا" خطا را توجیه می‌کند .

برای $z = x+iy$ ، $0 < x_0 \leq x \leq x_1$ داریم

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x) \leq \int_0^1 t^{x_0-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{x_1-1}e^{-t}\,dt$$
$$< \Gamma(x_0) + \Gamma(x_1).$$

پس $\Gamma(z)$ در نوار نامتناهی

$$0 < x_0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_1. \qquad (۱۱)$$

کراندار است . قرار می‌دهیم $\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,dt$ ونشان می‌دهیم که برای $\operatorname{Re} z > 0$ ، $\Gamma_n(z)$ تحلیلی است و $\Gamma_n'(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\log t\,dt$. در

پایان نشان می‌دهیم که بر هر نواری به شکل (۱۱)، عبارت زیر را با $|h|$ بس کوچک می‌توان به دلخواه کوچک کرد:

$$\left|\frac{\Gamma_n(z+h)-\Gamma_n(z)}{h}-\int_{1/n}^{n} t^{z-1}e^{-t}\log t\,dt\right|$$
$$=\left|\int_{1/n}^{n} t^{z-1}e^{-t}\left(\frac{t^h-1}{h}-\log t\right)dt\right|$$
$$\leq\int_{1/n}^{n} t^{x-1}e^{-t}\left|\frac{t^h-1}{h}-\log t\right|dt \qquad (۱۲)$$

با استفاده از قضیه میانه و از پیوستگی یکنواخت $\log t$ در فاصله $[1/n, n]$، می‌توان نشان داد که بر $1/n\leq t\leq n$، $(t^h-1)/h$ به $\log t$ همگرای یکنواخت است. از این رو نتیجه می‌شود، $|h|<\delta(\varepsilon)$ و انتگرال آخری در (۱۲) دارای کران بالای زیراست.

$$\varepsilon\int_{1/n}^{n} t^{x-1}e^{-t}\,dt<\varepsilon\,\Gamma(x)<\varepsilon(\Gamma(x_0)+\Gamma(x_1)).$$

پس $\Gamma_n(z)$ تحلیلی است $(x_0<\operatorname{Re} z<x_1)$ و

$$\Gamma_n'(z)=\int_{1/n}^{n} t^{z-1}e^{-t}\log t\,dt.$$

ولی برای $x_0\leq\operatorname{Re} z\leq x_1$، $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z)=\Gamma(z)$. چون که $\Gamma_n(z)$ درنیم صفحه راست کراندار یکنواخت موضعی است، با بکار بردن قضیه مانتل می‌توان نشان‌داد که $\Gamma(z)$ برای $\operatorname{Re} z>0$ تحلیلی است.

اکنون نشان می‌دهیم که، تعریف انتگرالی (۱۰) برای $x=\operatorname{Re} z>0$، با (۷) مطابقت دارد، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_n^*(x)=\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \qquad (x>0).$$

با انتگرال‌یابی جزء به جزء حاصل می‌شود:

$$\Gamma_n^*(x)=\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\Bigg|_0^n+\frac{1}{x}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt.$$

با $n-1$ بار دیگر انتگرال‌یابی جزءبه‌جزء، به‌دست می‌آید

$$\Gamma_n^*(x)=\frac{1}{x}\,\frac{n-1}{n(x+1)}\,\frac{n-2}{n(x+2)}\,\frac{n-3}{n(x+3)}\cdots\frac{1}{n(x+n-1)}\;\times\int_0^n t^{x+n-1}\,dt$$

$$=\frac{(n-1)!n^{x+n}}{n^{n-1}x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

پس برای $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^*(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \qquad (۱۳)$$

اگراکنون بتوانیم نشان دهیم که ، درفاصله $[1, 2]$ ، $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^*(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ ، آنگاه از قضیه همانی می‌توان نتیجه گرفت که ، در بزرگترین میدان شامل‌فاصله $[1, 2]$ که در آن هر دو تابع تحلیلی است ، داریم :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

یعنی ، نشان دادیم ، نمایش‌های (۷) و (۱۰) در نیم صفحه راست با هم برابرند .

برای $n>N$ ، داریم

$$\Gamma_n^*(x)>\int_0^N t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \qquad (1\le x\le 2). \qquad (۱۴)$$

دنباله چند جمله‌ای‌های $f_n(t)=(1-(t/n))^n$ بر هر فاصله متناهی $[a, b]$ به e^{-t} همگرای یکنواخت است . بعلاوه برای n بس بزرگ ، $f_n(t)\le f_{n+1}(t)\le e^{-t}$. پس برای هر x ثابت ، عبارت زیر نشان انتگرال (۱۴) (به عنوان تابعی از t) بر فاصله $[0, N]$ به $t^{x-1}e^{-t}$ همگرای یکنواخت است . بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^*(x)\ge\lim_{n\to\infty}\int_0^N t^{x-1}(1-t/n)^n\,dt=\int_0^N t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

چون که N دلخواه است ، نتیجه می‌شود که :

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^*(x)\ge\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \qquad (۱۵)$$

ولی $\Gamma_n^*(x)\le\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt\le\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ ، بنابراین :

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n^*(x)\le\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \qquad (۱۶)$$

با ترکیب (۱۵) و (۱۶) ، می‌بینیم که ، برای $1\le x\le 2$ ، (۷) با (۱۰) مطابقت دارد و نتیجتا " آنها می‌بایست در نیم صفحه راست مطابقت داشته باشند . پس (۷) (یا (۶)) را می‌توان به عنوان ادامه تحلیلی مستقیم $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ ازمیدان $\mathrm{Re}\ z>0$ به تمامی صفحه منهای صفر و اعداد صحیح منفی تصور نمود .

مثال بعدی در مورد تابع زیر می‌باشد:

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}, \tag{۱۷}$$

که به تابع ریمان ـ زتا[1] معروف است. چون که $|1/n^{x+iy}|=1/n^x$ ، می‌بینیم که برای $\mathrm{Re}\ z>1$ ، رشته (۱۷) همگرای مطلق است و برای $\mathrm{Re}\ z\geq x_0>1$ همگرای مطلق است پس $\zeta(z)$ در نیم صفحه $\mathrm{Re}\ z>1$ نمایش یک تابع تحلیلی است. می‌خواهیم ادامه تحلیلی عنصر تابع $(\zeta(z), \mathrm{Re}\ z>1)$ را بیابیم. بدین‌منظور، ابتداء ارتباطی را میان تابع ریمان ـ زتا و تابع گاما به ثبوت می‌رسانیم.

از نمایش انتگرالی شروع می‌کنیم

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\ z>0),$$

nt را جایگزین t می‌کنیم تا حاصل شود

$$\Gamma(z)=n^z\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-nt}\,dt. \tag{۱۸}$$

و با استفاده از همانندی

$$\sum_{n=1}^{k}e^{-nt}=e^{-t}\frac{1-e^{-kt}}{1-e^{-t}}$$

در (۱۸) به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}(1-e^{-kt})}{1-e^{-t}}t^{z-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-kt}}{e^t-1}t^{z-1}\,dt.$$

پس برای $\mathrm{Re}\ z>1$ و k یک عدد صحیح مثبت، داریم

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt-\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-kt}}{e^t-1}t^{z-1}\,dt \tag{۱۹}$$

زیرا که هر دو انتگرال همگراست. اینک نشان می‌دهیم که انتگرال آخری با $k\to\infty$ ، به ∞ میل می‌کند

چون که $|t^{z-1}|=t^{x-1}$ $(x=\mathrm{Re}\ z)$ ، نتیجه می‌شود که

---

1. Riemann-Zeta

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,t^{z-1}\,dt\right| \le \int_0^\infty \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,t^{x-1}\,dt. \qquad (۲۰)$$

با $\varepsilon > 0$ مفروض، δ را بس‌کوچک انتخاب می‌کنیم تا برای هر k ،

$$\int_0^\delta \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,t^{x-1}\,dt \le \int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt < \varepsilon \qquad (۲۱)$$

سپس k را بس بزرگ انتخاب می‌کنیم تا

$$\int_\delta^\infty \frac{e^{-kt}}{e^t-1}\,t^{x-1}\,dt \le e^{-k\delta}\int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt < \varepsilon. \qquad (۲۲)$$

با ترکیب (۲۱) ، (۲۲) ، می‌بینیم که انتگرال در (۲۰) با k بس بزرگ ، به دلخواه کوچک می‌گردد . با میل دادن k به∞ در (۱۹) می‌رسیم به

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt \qquad (\operatorname{Re} z > 1). \qquad (۲۳)$$

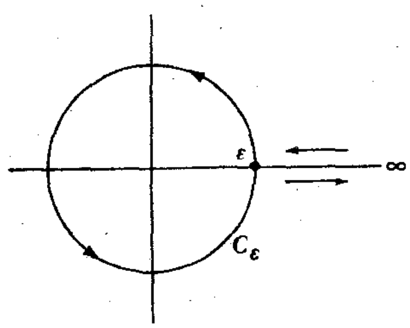
اشکالی که در مورد گسترش میدان تعریف تابع ریمان ــ زتا موجود است‌این است‌که انتگرال در (۲۳) برای$\operatorname{Re} z \le 1$ واگراست . با انتخاب مرزی برای تابع زیر نشان انتگرال (۲۳) که از مبداء نگذرد ، نشان می‌دهیم که ، تابع حاصله تام است . در این صورت با نسبت دادن تابع جدید با انتگرال در (۲۳) ، ادامه تحلیلی انجام‌پذیر خواهد شد .

فرض کنیم C_ε مشتمل بر قسمتی از محور حقیقی مثبت از∞ تا ε $(0 < \varepsilon < 2\pi)$ ، دایره‌یی بمرکز مبداء با شعاع ε در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت‌و محورحقیقی مثبت از ε تا ∞ (ر. ک. شکل ۶) باشد. این مرز در شکل ۶ را با مرز شکل ۱۰ در بخش ۹ــ۳ مقایسه کنید .

می‌نویسیم $\tau^{z-1} = e^{(z-1)\log\tau}$ و فرض می‌کنیم بر شاخهٔ زبرین محور حقیقی از ∞ تا ε $\arg\log\tau = 2\pi$ درحالی که بر شاخه زیرین از ε تا ، $\arg\log\tau = 0$.

تابع

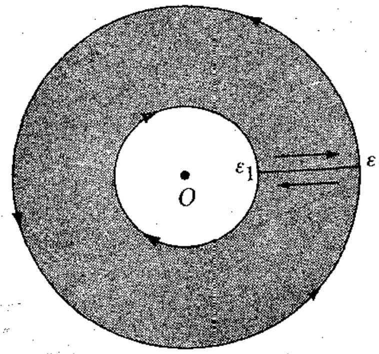
$$f(z) = \int_{C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau-1}\,d\tau \qquad (0 < \varepsilon < 2\pi) \qquad (۲۴)$$



شکل ۶

یک تابع تام است . باید توجه داشت که ، انتگرال در (۲۴) مستقل از ε است ، برای مشاهده این مطلب ، فرض می‌کنیم $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2\pi$. ملاحظه می‌شود که ناحیه $C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1}$ که در شکل ۷ نمایش داده‌ایم ، همبند ساده است .

شکل ۷



بنابراین قضیه کوشی را می‌توان بکار برد تا نشان داد

$$\int_{C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau - \int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = 0.$$

بنابراین :

$$\int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau.$$

می‌توانیم $f(z)$ را به شکل زیر بنویسیم :

$$f(z) = \int_\infty^\varepsilon \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau + \int_\varepsilon^\infty \frac{(te^{2\pi i})^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

$$= (e^{2\pi i z} - 1) \int_\varepsilon^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau. \qquad (۲۵)$$

فرض کنیم که ، موقتاً ، $x = \operatorname{Re} z > 1$. از همانندی

$$e^\tau - 1 = \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \cdots$$

ملاحظه می‌شود که برای $|\tau|$ بس کوچک ، $|e^\tau - 1| \geq |\tau|/2$. پس

$$\left| \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau \right| \leq 2 \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\varepsilon^{x-1}}{\varepsilon}\, |d\tau| = 4\pi\varepsilon^{x-1},$$

و بـــا x به 0 میل می‌کند . پس برای $\operatorname{Re} z > 1$ و به هنگامی $\varepsilon \to 0$ ، $f(z)$ به حدی میل می‌کند . چون که $f(z)$ مستقل از ε است ، اگر در (۲۵) ε به 0 میل کند ، مقدار $f(z)$ محاسبه می‌شود . این بدست می‌دهد که :

$$f(z) = (e^{2\pi i z} - 1) \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt \qquad (\mathrm{Re}\ z > 1). \tag{۲۶}$$

از مقایسه (۲۶) با (۲۳) نتیجه می‌شود:

$$\zeta(z) = \frac{f(z)}{(e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z)} \qquad (\mathrm{Re}\ z > 1). \tag{۲۷}$$

گرچه (۲۷) تنها برای $\mathrm{Re}\ z > 1$ ثابت شده‌است، بااستفاده از قضیه همانندی می‌توان این را به میدان وسیع‌تری گسترش داد. هر قطب ساده $\Gamma(z)$ بایک‌صفرساده $e^{2\pi i z} - 1$ حذف می‌گردد. پس $(e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z)$ یک تابع تام است. بدین ترتیب $\zeta(z)$ در (۲۷) به صورت خارج قسمت توابع تام بیان شده است، یعنی که، تابعی برخه‌ریخت است. قطب‌های $\zeta(z)$ در نقاطی است که $(e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z) = 0$. اکنون $\Gamma(z) \neq 0$ و در اعداد درست $e^{2\pi i z} - 1 = 0$. ولی برای صفر و اعداد صحیح‌منفی، صفرهای $e^{2\pi i z} - 1$ باقطب‌های $\Gamma(z)$ حذف‌می‌شوند. پس‌تنهاصفرهای $(e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z)$ در اعداد صحیح مثبت است. در حالی که قبلاً نشان داده‌ایم، $\zeta(z)$ برای $\mathrm{Re}\ z > 1$ تحلیلی است (پس برای $f(z) = 0$، $z = 2, 3, 4, \ldots$).

بنابراین $\zeta(z)$ می‌تواندتنهادر $z = 1$ قطب‌داشته باشد. برای این که نشان دهیم $z = 1$ عملاً قطب است، می‌بایست نشان داد که، $f(1) \neq 0$. از (۲۴) می‌بینیم که، $f(1) = \int_{C_\varepsilon} 1/(e^\tau - 1)\, d\tau$. چون که درون C_ε $(0 < \varepsilon < 2\pi)$ تنها تکینه $1/(e^\tau - 1)$ یک قطب ساده در $\tau = 0$ است، با بکار بردن قضیه میانه، نشان می‌دهیم که:

$$f(1) = 2\pi i \lim_{\tau \to 0} \frac{\tau}{e^\tau - 1} = 2\pi i \neq 0.$$

پس $\zeta(z)$ در $z = 1$ قطب ساده دارد و مانده‌اش برابر است با:

$$\lim_{z \to 1} \frac{(z-1) f(z)}{(e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z)} = 2\pi i \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{e^{2\pi i z} - 1} = 1.$$

پس معادله (۲۷) نمایش ادامه تحلیلی مستقیم $\sum_{n=1}^\infty 1/n^z$ $(\mathrm{Re}\ z > 1)$ به یک تابع تحلیلی در تمام صفحه منهای قطب ساده در $z = 1$ می‌باشد. نتیجه می‌شود که، تابع ریمان ـ زتای کامل را می‌توان بصورت

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + g(z),$$

نوشت، که در آن $g(z)$ تابعی تام است. البته، برای $\mathrm{Re}\ z > 1$

$$g(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} - \frac{1}{z-1}$$

با توجه به همانندیهای

$$e^{2\pi iz}-1=2ie^{\pi iz}\sin \pi z$$

و

$$\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z\Gamma(1-z)},$$

(۲۷) به صورت زیر در می‌آید؛

$$\zeta(z)=\frac{f(z)\Gamma(1-z)}{2\pi i e^{\pi iz}}. \qquad (۲۸)$$

گرچه (۲۷) و (۲۸) در صفحه برقرارند، ولی اطلاعاتی در مورد جایگاه صفرهای تابع ریمان ــ زتا بدست می‌دهد. برای انجام این مهم، اثبات یک رابطه بازگشتی برای تابع ریمان ــ زتا ما را یاری می‌دهد. لم زیرین در این مقوله مفید است.

لم ــ گیریم $\mathscr{D}$ میدانی باشد مشتمل بر تمام صفحه منهای قرص‌های به شکل $|z-2k\pi i|<\frac{1}{2}$، k صحیح، است. در این صورت عدد حقیقی $\delta>0$ موجود است، که برای z در $\mathscr{D}$، $|e^z-1|\geq\delta$.

اثبات ــ چون که e^z-1 بادوره‌تناوب $2\pi i$ است، کافی است، نامساوی را درناحیه مشتمل بر نوار $-\pi\leq \operatorname{Im} z\leq\pi$ منهای قرص $|z|<\frac{1}{2}$، ثابت کنیم. دیده‌می‌شود که، در نیم‌صفحه راست R، e^z-1 با میل z به ∞ به ∞ می‌گراید و در نیم‌صفحه چپ R با میل z به ∞ به -1 می‌گراید. δ، $0<\delta<1$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، بر دایره $|z|=\frac{1}{2}$، $|e^z-1|\geq\delta$. چون که e^z-1 در R هرگز صفر نیست، با استفاده از قضیه می‌نیمم کالبد، می‌توان نشان داد که، برای هر z در R، $|e^z-1|\geq\delta$. بدین ترتیب اثبات تمام است.

گیریم C_k با مرز شکل ۶ تنها در این اختلاف داشته باشد که شعاع دایره به عوض ε، $0<\varepsilon<2\pi$، برابر $(2k+1)\pi$ باشد. در این صورت تابع $\tau^{z-1}/(e^\tau-1)$ در نقاط $\tau=\pm2n\pi i$ $(n=1, 2, \ldots, k)$ درون مرز C_k-C_ε قطب‌های ساده دارد. مانده‌در $2n\pi i$ برابر با

$$\lim_{\tau\to2n\pi i}\frac{(\tau-2n\pi i)\tau^{z-1}}{e^\tau-1}=(2n\pi i)^{z-1},$$

و مانده در $-2n\pi i$ برابر با

$$\lim_{\tau \to -2n\pi i} \frac{(\tau + 2n\pi i)\tau^{z-1}}{e^\tau - 1} = (-2n\pi i)^{z-1}.$$

می‌باشد. با توجه به همانندیهای:

$$i^{z-1} = e^{(\pi i/2)(z-1)} = -ie^{(\pi i/2)z},$$
$$(-i)^{z-1} = e^{(3\pi/2)i(z-1)} = ie^{(3\pi/2)iz},$$

مانده را در $2n\pi i$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-i(2\pi)^{(z-1)}e^{(\pi/2)iz}n^{z-1}$$

و مانده را در $-2n\pi i$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$i(2\pi)^{z-1}e^{(3\pi/2)iz}n^{z-1}.$$

با استفاده ازقضیه مانده داریم:

$$\int_{C_k - C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = 2\pi i\Big[-i(2\pi)^{z-1}e^{(\pi/2)iz} \sum_{n=1}^{k} n^{z-1} + i(2\pi)^{z-1}e^{(3\pi/2)iz}\sum_{n=1}^{k} n^{z-1}\Big]$$
$$= (2\pi)^z(e^{(\pi/2)iz} - e^{(3\pi/2)iz}) \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1-z}}.$$

پس نتیجه می‌شود:

$$\int_{C_k - C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = -2i(2\pi)^z e^{\pi iz} \sin\frac{\pi z}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1-z}}. \qquad (۲۹)$$

به موجب لم داریم:

$$\left| \int_{|z| = (2k+1)\pi} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau \right| \qquad (۳۰)$$
$$\leq \frac{1}{\delta} \int_{|z| = (2k+1)\pi} |\tau^{z-1}|\ |d\tau| \leq \frac{2\pi}{\delta} \{(2k+1)\pi\}^{\operatorname{Re} z}.$$

فرض کنیم $\operatorname{Re} z < 0$. باتوجه به (۳۰) و با میل $k \to \infty$ در (۲۹) حاصل می‌شود.

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = -2i(2\pi)^z e^{\pi iz} \sin\frac{\pi z}{2}\, \zeta(1-z) \qquad (\operatorname{Re} z < 0).$$

چون که

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau = -\int_{C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^\tau - 1}\, d\tau,$$

پس تابع $f(z)$ در (۲۴) را می‌توان به صورت زیر بیان داشت:

$$f(z) = 2i(2\pi)^z e^{\pi i z} \sin\frac{\pi z}{2}\,\zeta(1-z) \qquad (\mathrm{Re}\, z < 0) \tag{۳۱}$$

با جایگزینی (۳۱) در (۲۸) همانندی زیر حاصل می‌شود:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\frac{\pi z}{2}\,\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \qquad (\mathrm{Re}\, z < 0). \tag{۳۲}$$

عبارت (۳۲) به ما امکان می‌دهد که، جایگاه بعضی از صفرهای $\zeta(z)$ را مشخص کنیم. ابتداء توجه می‌کنیم که، به عنوان نتیجه‌یی از تمرین ۱۱ در بخش ۱۳-۱، $\zeta(z)$ در نیم‌صفحه $\mathrm{Re}\, z>1$ صفر ندارد. چون که $\Gamma(1-z)$ و $\zeta(1-z)$ هر دو برای $\mathrm{Re}\, z<0$ تحلیلی و مخالف صفر است، تنها صفرهای $\zeta(z)$، ناشی از صفرهای $\sin(\pi z/2)$، یعنی که $z=-2, -4, -6, \ldots$ می‌باشد. این صفرها به صفرهای بدیهی تابع ریمان-زتا موسوم است.

تنها صفرهای به حساب نیامده می‌بایست در نوار $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$ واقع باشند. مسئله رده‌بندی این صفرها، مسئله‌یی بس دشوار (و حل نشده) است. تاکنون به تعداد نامتناهی در این نوار صفر یافت شده است؛ و شایان ذکر است که، همگی بر خط $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}$ قرار دارند. به منظور تشویق دانشجویان در جهت پژوهشی در این زمینه، این کتاب را نه با یک قضیه بلکه با یک گمان به پایان می‌بریم و این گمان معروف است به:

فرض ریمان - تمامی صفرهای غیربدیهی $\zeta(z)$ بر خط $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}$ واقعند.

اثبات - خدا می‌داند.

پرسش‌ها

۱- آیا تابع $f(z) \neq \Gamma(z)$ موجود است که در نیم‌صفحه راست تحلیلی و در رابطه $f(z+1)=zf(z)$ صادق باشد؟

۲- با استفاده از (۷) کدام یک از خواص تابع گاما را می‌توان به ساده‌ترین صورت اثبات نمود؟

۳- با مقایسه (۶) و (۷) و (۱۰) چه همانندیهایی می‌توان یافت؟

۴- برای اینکه، نشان دهیم (۷) و (۱۰) در نیم‌صفحه راست هم‌ارزند، چرا ابتداء لازم بود تا نشان دهیم آنها در یک فاصله نامتناهی با هم برابرند؟

۵- تابع گاما و تابع ریمان-زتا در چه خواصی مشترکند؟

۶ـ چگونه خواص $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ را با خواص $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/z^n)$ مقایسه‌می‌کنید؟

۷ـ تابع $(1-z)\zeta(z)/\Gamma(z)$ چگونه تابعی است؟

۸ـ از (۳۳) چه آگاهی‌هایی در مورد تابع ریمان ـ زتا، به غیر از جایگاه بعضی صفرها، می‌توان کسب کرد؟

۹ـ چرا دو مرتبه تمام پرسش‌های این‌کتاب را نمی‌خوانید تا به‌بینید که به‌چندتای دیگر آنها قادر به پاسخ گفتن هستید؟

تمرینها

۱ـ اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، با استفاده از (۶) و (۷) نشان دهید که مانده در قطب ساده $z=n$ برابر است با $(-1)^n/n!$.

۲ـ نشان دهید، هرگاه $\operatorname{Re} z \geq 2$، آنگاه $\operatorname{Re}\zeta(z) > 0$ (راهنمایی: نشان دهید، بر خط $\operatorname{Re} z = 2$، $\operatorname{Re}\zeta(z) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$).

۳ـ نشان دهید، $(1-1/2^{z-1})\zeta(z)$ تابعی است تام و می‌توان آن را برای $\operatorname{Re} z > 1$ به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^z$ نمایش داد. در کجای دیگر این رشته همگراست؟

۴ـ نشان دهید، برای $0 < \operatorname{Re} z < 1$،

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

۵ـ نشان دهید، $\zeta(1-z) = (1/2^{z-1}\pi^z) \cos(\pi z/2)\Gamma(z)\zeta(z)$.

۶ـ نشان دهید، تابع گاما را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

پاسخ به پرسش‌ها و تمرینهای برگزیده

فصل ۱

بخش ۱ـ۱ پرسش‌ها

۱ـ مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, p\}$ ، p عدد اول ، با عملگرهای جمع و ضرب درپیمانه p ، یک هیات است .

۲ـ میان هر دو عنصر در یک هیأت مرتب ، عنصرِ دیگری موجود است .

۷ـ به سادگی ارتباط میان عدد مختلط و نقطه را در صفحه می‌توان دریافت .

۹ـ بستار . با اینکه $(0, 0) < (1, 1)$ ولی داریم : $(1, 1)(1, 1) = (0, 2)$

بخش ۱ـ۱ تمرینها

۴ـ(الف) $(-5, 14)$ ب) $18 - 9i$ (پ) $-2 + 2i$ (ت) -4

(ث) $2^{(n/2)+1} i \sin n\pi/4$

بخش ۱ـ۲ پرسش‌ها

۴ـ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ اگر و تنها اگر z_1 و z_2 بر یک پرتو منشعب از مبداء جای داشته باشند .

۷ـ چون که حاصلضرب آنها گویاست .

بخش ۱ــ۲ تمرینها

۱ــ(ب) $13-6i$ (ت) $\sqrt{2}$ (ج) $\sqrt{2}$

۲ــ(ب) $(x+5)^2+y^2>4^2$ (پ) $-1\leq x\leq 1$ ، $y=0$

(ت) $y^2=-20(x-5)$

۴ــ $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2$

بخش ۱ــ۳ پرسش‌ها

۲ــ عمده‌ترین چنین تابعی همان تابع $f(x)=\log x$ است .

۵ــ توجه کنید : $\arg(1/z)=\arg\bar{z}$

۶ــ یک بحث دقیق در این زمینه را می‌توان در مرجع (۱۴) یافت .

۷ــ بسط(۱۰) همانندیهای مفیدی به دست می‌دهد .

۹ــ ریشه‌های واحد با ضرب تشکیل گروه می‌دهند .

۱۱ــ این در فصل ۴ بحث شده است .

بخش ۱ــ۳ تمرینها

۶ــ(الف) $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ (ت) $\pm\sqrt[4]{2}(\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8))$

(ج) $\pm(1-i)/\sqrt{2}$

۹ــ با $n\to\infty$ ، حاصلجمع به 2π میل می‌کند ، که همان محیط دایره واحداست .

فصل ۲

بخش ۲ــ۱ پرسش‌ها

۴ــ هرمجموعه‌از اعداد حقیقی که بسته باشد ، زیر مجموعه بسته صفحه نیزمی‌باشد . مجموعه تهی تنها مجموعه‌یی است که هم در خط حقیقی و هم در صفحه باز است .

۶ــ این اعداد صحیح نقطه حدی ندارند .

۷ــ نقطه مرزی یک مجموعه همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد ، می‌بایست‌نقطه حدی باشد .

۸ــ $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$. برای اینکه بدانیم این احتـــوا اغلب کامل است . گیریم A = اصم‌ها و B = گویاها .

۱۰ــ این معروف به مجموعه محدب است .

۱۱ــ این‌به‌مجموعه ستاره‌یی معروف است . فصل ۱۲ را به‌ببینید . صفحه منهای‌محور

حقیقی منفی نسبت به مبداء ستاره‌یی است ولی محدب نیست .

بخش ۲ـ۱ تمرینها

۴ـ(الف) مجموعه باز کراندار .

(ب) نه باز ، نه بسته ، نه همبند ، نه کراندار .

(ث) باز بر خط حقیقی ، همبند ، بی‌کران .

بخش ۲ـ۲ پرسش‌ها

۱ـ گیریم $x_n = (-1)^n$ ، $y_n = (-1)^{n+1}$

۳ـ دنباله $x_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ فرد} \\ n, & n \text{ زوج} \end{cases}$ دنباله‌یی است بی‌کران و نقطه حدی دارد .

۴ـ هر وقت مجموعه بسته است .

۵ـ $2, 0, 1, 1, 1, \ldots$

۶ـ مجموعه اعداد گویا را می‌توان به صورت دنباله نوشت .

۹ـ دنباله $\{b_n\}$ صعودی است .

بخش ۲ـ۲ تمرینها

۲ـ حول نقاط حدی متمایز ، همسایگی‌های متمایز رسم کنید .

۴ـ (ب) ، (پ) ، (ت)

۶ـ (الف) $1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \ldots$

(ب) $1, 2, \ldots, n, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}, \ldots, \frac{k+1}{k}, \frac{2k+1}{k}, \ldots, \frac{nk+1}{k}, \ldots$

(پ) دنباله مرکب از همه اعداد گویا

۸ـ $1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 4, 4\frac{1}{4}, 4\frac{2}{4}, 4\frac{3}{4}, 5, 5\frac{1}{5}, \ldots$

بخش ۲ـ۳ پرسش‌ها

۲ـ اجتماع نامتناهی ممکن است فشرده نباشد . هر عدد صحیح فشرده است ، ولی اجتماع آنها نیست . همچنین $[0, 1 - 1/n]$ برای هر n ، فشرده است ولی $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - 1/n]$ فشرده نیست .

۳ـ باز و بی‌کران است .

۵ـ اگر نقاط حدی موجود نباشد

۶ــ به تعداد نامتناهی.

بخش ۲ــ۳ تمرینها

۶ــ برای p و q اعداد صحیح و مثبت و نسبت به هم اول، $f(p, q) = 2^p 3^q$ یک نگاشت یک به یک از اعداد گویای مثبت در اعداد صحیح مثبت است.

۷ــ برای هر مجموعه باز در این پوشش، نقطه‌یی در مجموعه انتخاب کنید که‌هردو مختص آن گویا باشد.

بخش ۲ــ۴ پرسش‌ها

۲ــ مجموعه‌یی که شامل یک همسایگی ∞ باشد، بی‌کران است ولی معکوس آن برقرار نیست. مثلاً $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ شامل هیچ همسایگی ∞ نیست.

۵ــ هویت آنها با خودشان مشخص می‌شود.

۷ــ کره $n+1$ بعدی.

بخش ۲ــ۴ تمرینها

۱ــ اگر z_0 نقطه حدی باشد، آنگاه $N(\infty; |z_0| + 1)$ شامل تعداد نامتناهی نقاط دنباله نیست.

۴ــ $\left(\dfrac{x_1}{1-u_1}, \dfrac{y_1}{1-u_1}\right)$

۶ــ تمرینات ۵ و ۶ را پس از مطالعه فصل ۳ باز بخوانید.

بخش ۲ــ۵ پرسش‌ها

۱ــ ممکن است با تعریف ما از یک میدان به عنوان مجموعه باز همبند اشتباه‌شود.

۴ــ اگرنقاط در صفحه w همیشه‌نزدیک‌ترباشند، تابع پیوسته‌یکنواخت است. معکوس آن درست نیست. تابع $f(z) = 2z$ را بر یک مجموعه کراندار در نظر بگیرید.

۵ــ همه دنباله‌ها پیوسته یکنواخت‌اند، فقط $\delta = 1$ انتخاب کنید.

۷ــ لازم نیست نقطه حدی باشد؛ مثلاً تابع ثابت.

۹ــ نه چنین چیزی. تابع بـــــر $|z| \geq \varepsilon$ برای هر $\varepsilon > 0$ پیوسته یکنواخت است.

۱۰ــ نگاشتی از قرص واحد بر دو نقطه.

بخش ۲ــ۵ تمرینها

۱ــ (الف) $6i$ (ب) $-(8+6i)/5$ (پ) 0 (ت) $1/2$

۲ــ (الف) و (ب) پیوسته یکنواخت‌اند (پ) پیوسته است. (ت) و (ث) درمبداء ناپیوسته‌اند.

۳ــ $f(z)=\sin \pi z$

۱۳ــ از تمرین ۷ استفاده کنید.

فصل ۳

بخش ۳ــ۱ پرسش‌ها

۳ــ نیم صفحه.

۵ــ $\frac{1}{z+b}\neq\frac{1}{z}+b$

۶ــ دوران و بزرگساز

بخش ۳ــ۱ تمرینها

۱ــ (الف) $v=-3(u-2)$ (ت) $(u-3)^2+(v-1)^2=8$

۲ــ (الف) $\operatorname{Im} w>-1$ (ب) $\operatorname{Im} w>0$

۳ــ نوار میان خطوط $v=u-3$ و $v=u-7$

۶ــ (پ) مثلثی به رئوس $-1+11i$ $-13+5i$ و $2-10i$

۷ــ (ب) $(u-\frac{1}{2})^2+(v+1)^2=\frac{5}{4}$

۸ــ (الف) $(u-\frac{2}{3})^2+v^2=(\frac{1}{3})^2$

(ت) $(u-\frac{1}{2})^2+v^2<\frac{1}{4}$

۱۱ــ $0\le \operatorname{Re} z\le 2$ برنیم‌صفحه‌راست‌منهای قرص $(u-\frac{1}{4})^2+v^2\le(\frac{1}{4})^2$ نگاشته می‌شود.

بخش ۳ــ۲ پرسش‌ها

۳ــ یک تبدیل خطی.

۵ــ خیر. آن می‌بایست یک، دو و یا به تعداد نامتناهی نقاط را بر خودش‌بنگارد.

۸ــ از این نکته استفاده کنید که خطوط و دوایر بر خطوط و دوایر نگاشته می‌شوند. سئوال را پس از مطالعه فصل ۱۱ بازبخوانید.

۱۰ـ
$$f(z)=\begin{cases}0, & z=\infty,\\ \infty, & z=0,\\ z, & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$
اگر پیوستگی در شرط آمده باشد، تابع می‌بایست دو خطی باشد.

بخش ۳ـ۲ تمرینها

۱ـ (الف) $w=\dfrac{iz-1}{-3z+i}$ (ت) $w=-\dfrac{z+2(1-i)}{z-2}$

۲ـ (الف) $\operatorname{Im} v\le\frac12$ (ب) $u^2+(v-\frac12)^2\ge(\frac12)^2$

۳ـ (پ) $(u-1)^2+(v-1)^2<1$ (ت) $u^2+(v+1)^2>2$

۸ـ فرض کنید $w=(az+b)/(cz+d)$ اگر $a=d$ ، $b=c=0$ ، آنگاه بـه تعداد نامتناهی نقاط ثابت موجود است. اگر $(a-d)^2=-4bc$ آنگاه یک نقطه ثابت موجود است.

۱۴ـ $w=A(iz-z_0)/(iz-\bar z_0)$ ، $|A|=1$

بخش ۳ـ۳ پرسش‌ها

۱ـ اختلافی ندارد.

۲ـ هر نیم‌صفحه‌یی که مرزش‌از مبداء بگذرد.

۳ـ قرص وقتی که پرتو (گسترش‌یافته) از مبداء بگذرد.

بخش ۳ـ۳ تمرینها

۶ـ (الف) نیم‌صفحه زبرین.

(ب) صفحه منهای محور حقیقی مثبت.

۷ـ n دفعه قرص واحد.

فصل ۴

بخش ۴ـ۱ پرسش‌ها

۲ـ نوارهای نامتناهی به عرض 2π

۴ـ بر هر پرتو بی‌کران است مگر بر محور حقیقی.

۶ـ خیر. چنان که در فصل ۸ خواهیم دید.

۹ـ e^z بر هر پرتوی در نیم‌صفحه راست بی‌کران است، در حالی که e^z+z برهر

پرتوی بی‌کران است .

بخش ۴ـ۱ تمرینها

۱ـ (الف) $2k\pi/3i$ (ب) $k \geq 0$ ، $\pm(1+i)\sqrt{k\pi}$

(پ) $\text{Log}\ |2k\pi| + i(\pi/2 + n\pi)$

۶ـ (الف) $e^{x/(x^2+y^2)}\left(\cos\dfrac{y}{x^2+y^2} - i\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ (ب) $|e^{1/z}| \leq e^{1/\varepsilon}$

۸ـ(پ) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1$

بخش ۴ـ۲ پرسش‌ها

۱ـ وارون تابع نمایی

۲ـ بله .

۴ـ هر چه بیشتر در نیم‌صفحه راست باشد ، مساحت نگاره‌اش وسیع‌تر است .

۷ـ $e^{f(z)}$

۹ـ درتمام نقاط به‌استثنای $z = \pi/2 + 2k\pi$ ، اینرا در فصل ۱۱ بهتر خواهید فهمید .

بخش ۴ـ۲ تمرینها

۱ـ (الف) پاره خط از $[(1+i)/\sqrt{2}]e^{-5}$ تا $[(1+i)/\sqrt{2}]e^{5}$

(پ) قسمتی ازطوق‌واقع درنیم‌صفحه زیرین محصور به نیم دوایر $|w| = 1/e^2$ و $|w| = e$.

۲ـ (الف) ناحیه $|w| \leq 1$ ، $\text{Im}\, w \geq 0$

(ب) ناحیه $|w| \leq 1$ ، $\text{Re}\, w \leq 0$

(پ) ناحیه $|w| \geq 1$ ، $\text{Re}\, w \geq 0$

بخش ۴ـ۳ پرسش‌ها

۱ـ قسمت انگاری لگاریتم ، شناسه است .

۲ـ این‌کاملا" سازگار است ، گواینکه بعضی اوقات خوش‌آیند نیست .

۷ـ تنها اگر $-\pi < \text{Arg}\, z_1 - \text{Arg}\, z_2 \leq \pi$

بخش ۴ـ۳ تمرینها

۱ـ(پ) $\frac{1}{2}\,\text{Log}\,(x^2+y^2) + i\tan^{-1}(y/x)$

بخش ۴ـ۴ پرسش‌ها

۱ـ خیر، زیرا $2k\pi \neq 0$

۳ـ $(a+bi)^{c+di}$ حقیقی است اگرچنانچه $d\,\mathrm{Log}|a+bi| + c\arg(b/a) = k\pi$ ، k صحیح

۴ـ mn مقادیر متمایز می‌پذیرد.

۶ـ چونکه تابع درهیچ‌همسایگی مبداء تک ـ مقداری نیست. تابع در مبداء ناپیوسته است.

۸ـ یکی تابع n مقداری است و دیگری یک نگاشت n ـ به ـ یک است.

۹ـ تنها وقتی m و n نسبت به هم اول باشند. به عنوان مثال $(z^2)^{1/2}$ دومقدار دارد در حالی که $(z^{1/2})^2$ تنها یک مقدار دارد.

بخش ۴ـ۴ تمرینها

۱ـ(ب) $\pi^e e^{i(\pi/2+2k\pi)e}$ (پ) $\frac{1}{2}$

۸ـ(پ) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2/-1) + (i/4)\,\mathrm{Log}\,5$

فصل ۵

بخش ۵ـ۱ پرسش‌ها

۲ـ زیرا تنها یک مسیر "بد" لازم است که یافت شود.

۶ـ مشتق تابع $f(z) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ موجود است ولی در مبداء پیوسته نیست.

۷ـ معمولا " وقتی که با عباراتی نظیر x^2+y^2 مواجه باشیم.

۱۰ـ اگر $f'(z)$ موجود باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

۱۱ـ هیچ‌جا.

بخش ۵ـ۱ تمرینها

۱ـ(پ) و (ت).

۲ـ(الف)، (ب)، (پ)، (ث) و (ج) درمبداء مشتق‌پذیرند. (ت) همه‌جا مشتق‌پذیر است.

۴ـ(الف) $\dfrac{(x^2+y^2)^{n/2}}{y}$ (ب) $y/\sqrt{x}$

بخش ۵ـ۲ پرسش‌ها

۱ـ رفتار موضعی در مقابل رفتار همه‌جایی .

۳ـ تابعی که همه‌جا در صفحه مشتق‌پذیر است .

۶ـ $f'(z)/g'(z)$ در z_0 پیوسته است .

۷ـ خیر ، $1/z$ ، $0<|z|<1$

۹ـ چونکه شناسه معین نیست .

بخش ۵ـ۲ تمرینها

۱ـ(الف) $a=b$ ، $c=-1$ (ب) $a=b=c/2$

(پ) $a=1$ ، $b=2k\pi$ (ت) $a=b=0$

۱۰ـ(الف) $1/3$ (ب) 0 (پ) 2 (ت) موجود نیست .

بخش ۵ـ۳ پرسش‌ها

۱ـ اگر خاصیتی برای توابع تحلیلی برقرار باشد هر وقت آن خاصیت برای قسمتهای حقیقی و انگاری برقرار باشد .

۵ـ اگر $f(z)$ تحلیلی باشد ، آنگاه $|f(z)|$ پیوسته است و هنگامی $f(z)\neq 0$ ، $\log|f(z)|$ همساز است .

۶ـ خیر . برای توضیحات به فصل ۱۰ رجوع کنید .

بخش ۵ـ۳ تمرینها

۲ـ(الف) $v=ay-bx+c$ (ب) $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}+c$

(پ) $v=3x^2y-y^3+c$ (ت) $v=-\operatorname{Log}|z|+c$

(ث) $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy+c$

۳ـ $a=3$ ، $v=3xy^2+\dfrac{y^2}{2}-x^3-\dfrac{x^2}{2}+c$

۶ـ $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

۷ـ(الف) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ (ب) $\dfrac{1}{1+z^2}$ (پ) $\dfrac{1}{\sqrt{z^2(z^2-1)}}$

فصل ۶

بخش ۶ـ۱ پرسش‌ها

۲ـ اگر $a_n>0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ، آنگاه دنباله مثبت $\{b_n\}$ موجود است

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا و $a_n/b_n \to 0$.

۵ـ تمرینات ۱۲ و ۱۳ ملاحظه شود .

۷ـ همه دنباله‌هایی که حد زبرین دارند ،ولی می‌بایست از عبارتی مثل $\infty - \infty$ برحذر بود .

۹ـ مادام که یک دنباله به ∞ و دیگری به $-\infty$ میل نکند نتیجه برقرار است .

۱۰ـ خیر . برای هر n ، $(1/2n)^{1/n} < 1$

بخش ۶ـ۱ تمرینها

۸ـ فرض کنید $a_n = \begin{cases} 1, & \text{فرد } n \\ 2, & \text{زوج } n \end{cases}$ و $b_n = \begin{cases} 2, & \text{فرد } n \\ 1, & \text{زوج } n \end{cases}$ دراین‌صورت‌تساوی‌برقرار نیست .

۱۶ـ رشته به $3/2$ می‌گراید .

بخش ۶ـ۲ پرسش‌ها

۲ـ دنباله $\{z+1/n\}$ در صفحه بی‌کران است و همگرای یکنواخت می‌باشد .

۵ـ یک نقطه مجموعه‌یی است فشرده .

۶ـ $f_n(z) = \begin{cases} 1/n & \text{حقیقی } z \\ 0, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$ در صفحه به صفر همگرای یکنواخت است .

۸ـ $f_n(z) = (-1)^n$ همگراست ، درحالی‌که‌برای‌تعداد نامتناهی n ، $|f_n(z) - 1| = 0$

۱۰ـ $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (z^k/k^2)$ در $|z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است ، ولی‌تابع حدی در $z=1$ مشتق‌پذیر نیست .

بخش ۶ـ۲ تمرینها

۷ـ دنباله $\{z/n\}$ بر $|z| \leq 1$ به 0 همگرای‌یکنواخت‌است ،ولی $\sum_{n=1}^{\infty} (z/n)$ برای $z \neq 0$ واگراست .

۹ـ(الف) هر جا که معین است به 0 همگرای یکنواخت است .

(ب) برای $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon > 0$ همگرای‌یکنواخت‌وبرای $\operatorname{Re} z > 0$ همگرای‌نقطه‌ای است .

(پ) برای $\operatorname{Re} z \leq 0$ همگرای یکنواخت است .

(ت) برای $|z| \leq r < 1$ همگرای‌یکنواخت به 1 و برای $|z| < 1$ همگرای‌نقطه‌ای است ؛ برای $|z| \geq R > 1$ به صفر همگرای یکنواخت و برای $|z| > 1$ به 0 همگرای نقطه‌ای است ؛ وقتیکه $z = 1$ ، به $\frac{1}{2}$ می‌گراید .

۱۱ـ(الف) برای $|z| < 1$ مطلق و برای $|z| \leq r < 1$ یکنواخت ، همگراست .

(ب) برای $|z^2+1|<1$ همگرای مطلق و برای $1<R\leq|z^2+1|$ همگرای یکنواخت است.

(پ) هر جا معین است $(z\neq n)$ همگرای مطلق و بر زیر مجموعه‌های کراندار صفحه منهای قرصهایی به مرکز مبداء، همگرای یکنواخت است.

(ت) برای $|z|>1$ همگرای مطلق و برای $|z|\geq R>1$ همگرای یکنواخت است.

(ث) برای $|z|>1$ همگرای مطلق و برای $|z|\geq R>1$ همگرای یکنواخت است.

بخش ۶ـ۳ پرسش‌ها

۱ـ $|z_0|\leq|z_1|$

۲ـ تابع تام.

۵ـ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ همگراست. معکوس آن دروغ است.

۶ـ حداقل 1 است.

۸ـ $f_n(z)=z+n$ همگرا نیست، با اینکه $f_n'(z)\rightrightarrows 1$.

۱۰ـ در فصل ۸ خواهیم دید که توابع تحلیلی نمایش رشته توانی دارند.

بخش ۶ـ۳ تمرینها

۳ـ برای هر n ، $|a_n z^n|\leq|a_0||z|^n$

۵ـ یا اینکه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست و یا اینکه رشته یک چند جمله‌یی است.

۱۰ـ(الف) $|a|$ (ب) $1/|a|$ ، $|a|\geq 1$ ؛ 1 ، $|a|>1$ (پ) 1 (ت) $1/e$ (ث) 1

۱۱ـ(الف) 2 (ب) $1/\sqrt{3}$ (پ) ∞ (ت) 1 (ث) $5/3$

۱۴ـ(ب) $9-2(z+2)-3(z+2)^2+(z+2)^3$

بخش ۶ـ۴ پرسش‌ها

۲ـ درتمام نقاطی که مشتق مخالف صفر است. این از این نکته (که در فصل ۸ ثابت می‌شود) نتیجه می‌شود که تابع تحلیلی بسط رشته توانی دارد.

۴ـ $1/(1-z)$ برای $z=2$ تحلیلی است، تابع نمی‌تواند همه جا بر $|z|=R$ تحلیلی باشد، که در فصل ۱۴ ثابت می‌شود.

۸ـ شعاع همگرایی رشته تیلر حول یک نقطه عبارت است از فاصله میان آن نقطه تا نزدیکترین صفر مخرج.

بخش ۶ـ۴ تمرینها

۱ـ(الف) تساوی وقتی برقرار است که

$$b_n=\begin{cases}1/2^n & n \text{ فرد}\\ 1 & n \text{ زوج}\end{cases} \quad \text{و} \quad a_n=\begin{cases}1 & n \text{ فرد}\\ 1/2^n & n \text{ زوج}\end{cases}$$

۲ـ(الف) R (ب) R (پ) R^k (ت) ∞ (ث) 0

۳ـ اگر $a_n \equiv 1$ ، آنگاه برای هر دو رشته $R=1$. اگر $a_n=2^n$ آنگاه برای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$ ، $R=2^{-1/k}$ و برای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$ ، $R=1$.

۴ـ(ب) $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n^k}{n!}\right|^{1/n}=0$

۵ـ(الف) $\frac{5}{2}$ (ب) $\frac{13}{12}$ (پ) $5-5i$

فصل ۷

بخش ۷ـ۱ پرسشها

۲ـ خیر، چونکه نقاط آغازی و پایانی بر هم منطبق‌اند.

۴ـ متمم یک میدان همبند ساده همبند است.

۶ـ صفحه منهای اعداد صحیح.

۱۰ـ نگاره یک مجموعه فشرده و همبند است.

بخش ۷ـ۱ تمرینها

۱ـ اگر $a=b$ یک دایره و اگر $a\neq b$ یک بیضی

۲ـ با $R\to\infty$ ، $z(t)$ دایره‌یی به مرکز مبداء و شعاع 1 می‌گردد.

۳ـ(الف) $z(t)=t+i(1-2t)$ $(0\le t\le 1)$

(ت) $z(t)=1+2\cos t+i\,2\sin t$ $(-2\pi/3\le t\le 2\pi/3)$

۴ـ $z(t)=t+i(2t^2-3)$ $(-1\le t\le 2)$

۵ـ(ب) $4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1$

۶ـ(الف) $2\pi i$ (ب) $4\pi i$ (ث) $-30+25\pi i$

۷ـ(ب) $2\pi i$ (ت) $2\pi+4\pi i$

بخش ۷ـ۲ پرسشها

۳ـ تعداد متناهی نقاط ناپیوستگی تأثیری ندارد.

۴ــ بله، چونکه مرز فشرده است.

۶ــ کار کردن با این پارامتر ساده‌تر است.

بخش ۷ــ۲ تمرینها

۴ــ(الف) 12π (ب) $\sqrt{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

۵ــ(ب) $\int_C x\,dz=\frac{1-i}{2}$, $\int_C y\,dz=-\frac{1-i}{2}$, $\int_C \bar{z}\,dz=1$

(پ) $\int_C x\,dz=\pi i$, $\int_C y\,dz=-\pi$, $\int_C \bar{z}\,dz=2\pi i$

۶ــ در امتداد پاره خط از مبداء تا $1+i$

$$\int_C z\,dz=i,\qquad \int_C |z|\,dz=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\qquad \int_C z|dz|=\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$
$$\int_C |z|\,|dz|=1.$$

در امتداد دایره $|z|=1$

$$\int_C z\,dz=0,\qquad \int_C |z|dz=0,\qquad \int_C z|dz|=0,$$
$$\int_C |z|\,|dz|=2\pi.$$

۷ــ $2\pi i$

۸ــ(الف) $e^{2+2i}-1$ (ب) $e^{1-i}-e^{-(1-i)}+2(1-i)$

(پ) $\frac{i}{2}\left(e^{1-i}-e^{-1+i}\right)$

۹ــ $\frac{4}{3}$

بخش ۷ــ۳ پرسش‌ها

۲ــ در کاربرد قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

۵ــ تمرین ۲ را به‌بینید.

۷ــ لازم نیست تحلیلی باشد: $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2}=0$

۹ــ بخش ۹ــ۳ را به‌بینید.

بخش ۷ــ۳ تمرینها

۱ــ(الف) $16/3$ (ب) پیمایش در جهت مثبت $-5/3$

(پ) 0 (ت) $\pi r^2/4$ (ث) $128/5$

۶ــ با هر مرزی که انتخاب شود؛ (الف) 0 (ب) $i(1+1/e)$

بخش ۷ــ۴ پرسش‌ها

۱ــ نه لزوماً " زیرا که $|f(z)|$ تحلیلی نیست .

۳ــ $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \neq 0$

۵ــ به منظور بکار بردن معادلات کوشی ــ ریمان .

۸ــ هر مضرب صحیح $2\pi i$

۹ــ اگر $g_0(z)$ یک جواب باشد ، $g_0(z)+2k\pi i$ نیز جواب است .

بخش ۷ــ۴ تمرینها

۲ــ $f(z)=1/z^2$

۳ــ(الف) π (ب) $-\pi$ (پ) 0 (ت) 0

۴ــ(الف) $2\pi i$ (ب) 0 (پ) $2\pi i$

حل این تمرینات پس از مطالعه بخش ۸ــ۱ ، ساده است .

فصل ۸

بخش ۸ــ۱ پرسش‌ها

۲ــ اگر آنها در آن نقطه تحلیلی باشند ، متحد خواهند بود .

۴ــ $\{z^n\}$ بر $|z|<1$ همگرای یکنواخت نیست .

۶ــ لزومی ندارد تحلیلی باشند .

۷ــ $\int_{|z|=1} |z|^2\,dz=0$ ، ولی $|z|^2$ تحلیلی نیست . مررا کاربرد ندارد زیرا که انتگرال بر هر مرز صفر نیست .

۹ــ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$ ، $(|z|<1)$

$$f'(2)=1\neq \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}.$$

در اینجا $1/(1-z)$ در $z=2$ با $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تعریف نمی‌شود. فصل ۱۴ ملاحظه می‌شود.

بخش ۸ـ۱ تمرینها

۳ـ(الف) $2\pi ie^2$ (ب) $2\pi ie^4$ (پ) $8\pi ie^4$

(ت) $2\pi ie^2(\sin 2+\cos 2)$ (ث) $144\pi i$

۴ـ(الف) 0 (ب) 0 (پ) $12\pi i$

۵ـ(الف) $\dfrac{2\pi}{17}$ (پ) $\dfrac{\pi}{17}-\dfrac{4\pi i}{17}$ (ث) $\dfrac{2\pi}{17}-\dfrac{8\pi i}{17}$

۶ـ(الف) $z+z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{30}z^5$

(پ) $1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{7}{6}z^3+\frac{25}{24}z^4+\frac{27}{40}z^5$

۸ـ(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (پ) 1 (ت) 0

۱۳ـ(الف) مانند $e^{\alpha \log(1-z)}$ بیان کنید که و بسط دهید.

بخش ۸ـ۲ پرسش‌ها

۲ـ e^z برای $\operatorname{Re} z \le 0$ کراندار است.

۳ـ خیر، همانطور که در فصل ۱۰ خواهیم دید.

۸ـ خیر، زیرا که $\sin \pi z$ و 0 در اعداد صحیح مساویند.

بخش ۸ـ۳ پرسش‌ها

۱ـ بر $|z|=r$، $f(z)=z^n$

۲ـ تمرین ۴ ملاحظه شود.

۵ـ لزوماً خیر. اگر $f(z)=e^z$ آنگاه برای یک قرص $|z|<r$ و هر وقت $\theta_1 \neq 2k\pi$، $|e^{re^{i\theta_1}}|<|e^z|$.

۶ـ در ناحیه $\{z: \operatorname{Re} z<0 \cup z=0\}$، e^z در $z=0$ ماکزیمم است.

بخش ۸ـ۳ تمرینها

۳ـ(الف) بیشینه در $z=r$، کمینه در $z=-r$

(ب) بیشینه و کمینه در همه جا

(پ) بیشینه در $z=r$، کمینه در $z=ir$

(ت) بیشینه در $z=-r$، کمینه در $z=r$

بخش ۸ـ۴ پرسشها

۱ـ $e^{1/z}$ ، $z \neq 0$

۶ـ $|z|$ صفحه را بر پرتو $\operatorname{Re} u \geq 0$ ، $v=0$ می‌نگارد ، که باز نیست .

۷ـ e^z صفحه را بر صفحه سفته می‌نگارد که بسته نیست .

بخش ۸ـ۴ تمرینها

۳ـ حاصلجمع ریشه‌های $P(z)$

فصل ۹

بخش ۹ـ۱ پرسشها

۱ـ $1/\sin(1/z)$ در مجموعه فشرده $|z| \leq 1$ به‌تعدادنامتناهی تکینه دارد . همگی به استثنای $z=0$ ، تنها هستند .

۲ـ یک مثال نقض در فصل ۱۳ خواهیم داشت .

۵ـ $e^z-(7-2i)$

۷ـ تنها توابع ثابت

۹ـ خیر ، به موجب تعریف

بخش ۹ـ۱ تمرینها

۴ـ (ب) قطب‌های ساده در $z=1/(2k+1)\pi i$ ، تکینه‌اساسی‌غیرتنهادر $z=0$

(ت) تکینه‌های اساسی و تنها در $z=0$ و $z=\infty$

(ث) نقطه شاخه در $z=1$ وقطب ساده در $z=-1$

۵ـ (الف) برداشتنی (ب) قطب ساده

(پ) ، (ت) و (ج) تکینه‌های اساسی تنها هستند .

(ث) تکینه اساسی غیرتنها .

۶ـ $$f(z)=\frac{z-z_0}{(z-z_0)(z-z_1)^k}e^{1/(z-z_2)}$$

بخش ۹ـ۲ پرسشها

۲ـ خیر ، $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^2)$ برطوق $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است‌ولی بر $|z|=1$ تحلیلی نیست .

۴ـ $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^z)$ در نیم صفحه تحلیلی است .

۵ــ تنها برای توابع ثابت

۶ــ k و 1

۸ــ اگر $f(z)$ بر طوقی تحلیلی باشد، آنگاه همانندی در آن طوق برقرار است.

بخش ۹ــ۲ تمرینها

۲ــ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}n!}$

۳ــ(پ) $\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$

(ت) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}$

۴ــ(الف) $-\frac{i}{4(z-i)}$ (ت) $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}$

۵ــ(الف) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{k!z^k}$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ که $a_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{k!}$

۷ــ $\frac{4}{z^4}+\frac{4}{z^3}+\frac{8}{3z^2}+\frac{4}{3z}$

بخش ۹ــ۳ پرسش‌ها

۱ــ قضیه مررا کاربرد ندارد زیرا که $\sin(1/z^2)$ در $z=0$ پیوسته نیست.

۳ــ هیچ‌کدام. قضیه مانده‌تنها یک شکل ساده‌تر قضیه کوشی است.

۶ــ چونکه $1+x^{2n+1}$ بر محور حقیقی تکینه دارد.

بخش ۹ــ۳ تمرینها

۱ــ(الف) در $z=\pi/2+k\pi$، مانده برابر است با $(-1)^{k+1}$

(پ) در $z=1$ مانده -2 است؛ و در $z=2$ مانده 2 است.

(ث) مانده در $z=0$ برابر است با
$$\begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -\frac{1}{(n+1)!} & n=4k+1 \text{ اگر} \\ \frac{1}{(n+1)!} & n=4k+3 \text{ اگر} \end{cases}$$

۳ــ(الف) 0 (ب) $2\pi i(1+2e+2e^4)$

۴ــ(الف) $(2-4n)i$ (ب) $(2+4n)i$

فصل ۱۰

بخش ۱۰ـ۱ پرسش‌ها

۴ـ نه به موجب قضیه پیکار .

۶ـ $u(z)=\begin{cases}x+y, & |z|<1\\ 1, & |z|=1\end{cases}$

۸ـ قضیه ۱۰ـ۷ تعمیم قضیه ۸ـ۱۰ است ، چون که $\operatorname{Re} f(z)\leq|f(z)|$. در حالت $\lambda=0$ به قضیه ۱۰ـ۲ تحویل می‌شود .

بخش ۱۰ـ۲ پرسش‌ها

۲ـ بله . بابکار بردن (۱۳) ، برای آن تابع تام یک کران بالا می‌یابیم و سپس قضیه ۸ـ۱۰ را بکار می‌بریم .

۴ـ در فصل ۱۱ ، نگاشت‌ها را از قرص برمیدانهای دیگر بررسی می‌کنیم . این کارما را قادر می‌سازد که مسئله دیریکله را برای میدانهای دیگر حل کنیم .

۵ـ قضیه ۱۰ـ۳ مقدار تابع همساز را در مرکز دایره به دست می‌دهد . در حالی که قضیه ۱۰ـ۸ مقدار تابع را در همه نقاط درونی به دست می‌دهد .

بخش ۱۰ـ۲ تمرینها

۵ـ $u(re^{i\theta})=\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\dfrac{1-r^2}{2r\sin\theta}\quad(0\leq\tan^{-1}t\leq\pi)$

بخش ۱۰ـ۳ پرسش‌ها

۲ـ باتوجه‌به‌قضیه ۱۰ـ۱۱ ، خاصیت‌میانگین ، وقتی که حاصلضرب دو تابع همساز ، همساز نباشد ، برقرار نیست .

۴ـ بله ، کافیست $\{-u_n(z)\}$ را در نظر بگیریم .

۵ـ $|z|<R$ و $\operatorname{Re} f(z)>\alpha$ را در نظر بگیرید .

۷ـ از اینکه $\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|\,d\theta=\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta$ استفاده کنید .

فصل ۱۱

بخش ۱۱ـ۱ پرسش‌ها

۱ـ بنا به قرارداد خود خط، خط مماس است .

۲ــ تنها در نقطه برخورد.

۳ــ نه، اگر مشتقات نسبی پیوسته باشند. بـه‌کتاب نهری (۱۵) مراجعه شود.

۷ــ یک نگاشت یک به یک اگر تحلیلی باشد همدیس است. یک نگاشت همدیس یک به یک موضعی است.

۱۰ــ تنها ترکیب.

بخش ۱۱ــ۱ تمرینها

۱ــ $f(z) = e^{3\pi i(z-z_0)/\varepsilon}$

بخش ۱۱ــ۲ پرسش‌ها

۲ــ نه‌حتی خانواده چند جمله‌ای‌های ثابت هم نیست.

۳ــ $\{z^n\}$ بر $|z|<1$ کراندار یکنواخت است، ولی $\{nz^{n-1}\}$ نیست.

۴ــ نه، فرض‌کنیم F مشتمل‌بریک‌تابع $f(z)$ باتعریف $f(z)=\begin{cases}1, & z\neq 1/n,\\ n, & z=1/n.\end{cases}$ این تابع در هر همسایگی مبداء بی‌کران است.

۵ــ فرض کرده‌ایم که پاره خط میان هر دو نقطه در میدان قرار دارد. پس اثبات برای هر میدان محدب هم برقرار است.

۶ــ دنباله می‌بایست شماره‌پذیر باشد.

بخش ۱۱ــ۳ پرسش‌ها

۲ــ $f(z)=az$، $a>0$، طوق $r<|z|<R$ راهمدیسواربرطوق $ar<|w|<aR$ می‌نگارد.

۵ــ نه، زیرا، قرص سفته همبند ساده نیست.

۷ــ در ساختمان تابع ریشه دوم تحلیلی.

۸ــ به منظور اطمینان بر اینکه خانواده نرمال ساخته شده تهی نیست.

بخش ۱۱ــ۳ تمرینها

۳ــ فرض کنیم که صفحه همدیسوار هم‌ارز یک میدان همبند ساده $\mathscr{D}$ به‌غیرازخودش می‌بود. چون که $\mathscr{D}$ همدیسوار هم‌ارز یک میدان کراندار است. پس می‌بایست تابع تامی موجود باشد که بر یک میدان کراندار نگاشته شود.

۵ــ $f(z)=\dfrac{r_2}{r_1}z$

فصل ۱۲

بخش ۱۲ـ۱ پرسش‌ها

۲ـ قضیه ۱۲ـ۱ ما را قادر می‌سازد که قضایایی در موزد S با استفاده از قضایای‌در مورد T ، اثبات کنیم .

۴ـ توابعی به شکل $z/(1-e^{i\alpha}z)^2$ بی‌کران هستند .

۷ـ این از این نکته ناشی می‌شود که اگر $J(f)$ یک تابعک پیوسته و تعریف شده بر خانواده فشرده باشد ، در این صورت ، مسئله $|J(F)| = \max$ به ازاء ی $f \in F$ جواب دارد .

بخش ۱۲ـ۱ تمرینها

۱ـ $1/z$

۵ـ مشتق آن در $z = -\frac{1}{2}e^{-i\alpha}$ برابر صفر است .

بخش ۱۲ـ۲ پرسش‌ها

۱ـ درآنجا که گفتیم $0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta})$

۳ـ صفحه سفته

۵ـ چونکه برای $f(z) \in S$ ، $f(0) = 0$ می‌توانیم بر $\max_{|z|=r}|f(z)|$ کرانها بیابیم .

۶ـ می‌توان‌نشان‌دادکه‌مماس‌برخم نگاره بر خودش بیش از π رادیان باز نمی‌گردد .

۷ـ با $f(z) = z$ می‌توان توابع محدب z و یا$(z$ $-$Log $(1 -$را متناظر کرد .

۹ـ در کارهای پیشرفته‌تری می‌توان نشان داد که شعاع ستاره‌گونی برای S برابرست با $(\pi/4) \approx 0.65$

فصل ۱۳

بخش ۱۳ـ۱ پرسش‌ها

۳ـ تمرینات ۵ و ۶ ملاحظه شود .

۴ـ می‌تواند به ∞ و 0 میل کند و یا نوسان کند .

۵ـ دنباله $\{a_n\} \to 0$. رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق نیست . ممکن است همگرا باشد یا نباشد .

۸ـ یک تابع تام است .

بخش ۱۳ـ۱ تمرینها

۱ـ(الف) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (پ) $\frac{1}{3}$ (ت) 1

۸ـ(الف) $|z| < 1$ (ب) $|z| < 1$ (پ) $\operatorname{Re} z > 1$

بخش ۱۳ـ۲ پرسش‌ها

۱ـ این در قسمت بعد ثابت می‌گردد.

۶ـ لازم است که همگرایی مطلق باشد، به عنوان مثال:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}z}{n}\right)$$ در $z=1$ واگراست

۷ـ بسط رشته‌یی را می‌توان از بسط حاصلضربی مشخص نمود. ولی معکوس آن درست نیست.

بخش ۱۳ـ۲ تمرینها

۱ـ $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\log n}\right)e^{(z/\log n)+(1/2)(z/\log n)^2+\cdots+(1/n)(z/\log n)^n+\cdots}$$

۲ـ $$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-z/n)^n e^{z^2/2n}$$

۳ـ(الف) $$\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$$

۴ـ(ب) $$g(z)\,z=-\log 2i$$

۱۱ـ $$\frac{9}{8}\,\frac{e^{\pi^2}+e^{-\pi^2}-(e^{\pi^2/3}+e^{-\pi^2/3})}{\pi^4}$$

بخش ۱۳ـ۳ پرسش‌ها

۲ـ آنها برخه‌ریخت هستند.

۵ـ برای اینکه بسط ماکلورن بدست آید.

۶ـ نه، چون که تابع تام $g(z)$ که در اثبات قضیه ۱۳ـ۸ ساختیم یکتا نیست.

بخش ۱۳ـ۳ تمرینها

۱ـ $$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^n}$$

۲ــ $\frac{i}{2}e^{-iz}$

فصل ۱۴

بخش ۱۴ــ۱ پرسش‌ها

۱ــ تنها وقتی که $\mathscr{D}_0 \cap \mathscr{D}_1 = \varnothing$

۲ــ هر وقت $z_n = 1 - \frac{1}{n\pi}$ ، $\sin \frac{1}{1-z_n} = 1$

۸ــ وقتی که اشتراک آنها غیرتهی باشد.

۱۰ــ می‌توان نشان داد که اگر

$$(\varepsilon > 0) \quad ، \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k} \quad \text{with} \quad n_{k+1} > (1+\varepsilon) n_k$$

در این صورت دایره همگرایی رشته، مرز طبیعی تابع است.

بخش ۱۴ــ۱ تمرینها

۱ــ $f(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(z - e^{i\theta_k})}$

۷ــ بنهید $f(z) = \frac{\alpha_1}{z - e^{i\theta_1}} + \frac{\alpha_2}{z - e^{i\theta_2}} + \cdots + \frac{\alpha_k}{z - e^{i\theta_k}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

که $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ برای $|z| \le 1$ تحلیلی است.

بخش ۱۴ــ۲ پرسش‌ها

۴ــ ما به همگرایی یکنواخت دنباله $\{(1 - t/n)^n\}$ نیاز داریم. این دنباله‌بر آن خط همگرای یکنواخت نیست.

۶ــ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ در قرص تحلیلی و بر زیر مجموعه‌های فشرده قرص همگرای یکنواخت است، می‌توان نشان داد که $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^z)$ دریک‌نیم‌صفحه‌تحلیلی‌است‌وبرزیر مجموعه‌های فشرده این نیم‌صفحه همگرای یکنواخت است.

۷ــ تام.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

واژه فارسی	معادل انگلیسی
ادامه تحلیلی	Analytic Continuation
ادامه تحلیلی مستقیم	Direct Analytic Continuation
اساسی	Essential
اصل تله‌موش	Mousetrap Principle
اصل‌شناسه	Argument Principle
اصلی	Principal
اصم	Irrational
افکنش گنجنگاری	Streographic Projection
انتقال	Translation
انتگرال خطی	Line Integral
انجمنی	Associative
انعکاس	Inversion
انگاری	Imaginary
بستار	Clousure
پابرجا	Fixed
پارامتری کردن	Parametrization
پخشی	Distributive
پوشش	Covering

Sectionally Continuous	پیوسته بخشی
Multiple-Valued Function	تابع چند مقداری
Entire	تام
Transformation	تبدیل
Sub-Harmonic	تحت همساز
Analytic	تحلیلی
Close-to-Convex	تقریبا" محدب
Univalent	تکارز
Singularity	تکینه
Removable Singularity	تکینهٔ برداشتنی
Nonisolated Singularity	تکینهٔ غیرتنها
Monodromy	تکمیدانی
Isolated	تنها
Special Function	توابع خاص
Commutative	جابجایی
Polynomial	چند جمله‌یی
Infinite Product	حاصلضرب نامتناهی
Superior Limit	حد زبرین
Inferior Limit	حد زیرین
Range	حوزه مقادیر
Quotinet	خارج‌قسمت
Curve	خم
Simple Curve	خم ساده
Length	درازا
Interior	درونی
Bilinear	دو خطی
Rotation	دوران
Rectifiable	راستی‌پذیر
Power Series	رشته توانی
Root	ریشه
Chain	زنجیر

ستاره‌گون	Starlike
سفته	Punctured
سوده	Deleted
سه‌گانگی	Trichotomy
شاخه	Branch
شعاع	Radius
شماره گشت	Winding Number
شناسه	Argument
صفر بدیهی	Trivial Zero
عنصر تابع	Function Element
فرینال	Extremal
فشرده	Compact
فشرده‌سازی تک‌نقطه‌یی	One-Point Compactification
قاعده متوازی‌الاضلاع	Parallelogram-Rule
قدر مطلق	Absolute-Value
قضیه تابع وارون	Inverse Function Theorem
قضیه ماکزیمم کالبد	Maximum Modulus Theorem
قضیه می‌نیمم کالبد	Minimum Modulus Theorem
قضیه همانی	Identity Theorem
قطب	Pole
کالبد	Modulus
کامل	Complete
کران	Bound
کراندار	Bounded
کسری	Fractional
کمان	Arc
گسترش‌یافته	Extended
گویا	Rational
لگاریتم تحلیلی	Analytic Logarithm
مانده	Residue
متراکم	Dense

Complement	متمم
Convex	محدب
Boundary	مرز
Natural Boundary	مرز طبیعی
Conjugate	مزدوج
Circulas	مستدیر
Determination	مشخصه
Dominated	مغلوب
Regular	منظم
Orientation	موجه کردن
Domain	میدان
Domain of Regularity	میدان نظام
Region	ناحیه
Ineuqality	نامساوی
Normal	نرمال
Cross-Ratio	نسبت توافقی
Initial Point	نقطه آغازی
Terminal Point	نقطه پایانی
Limit Point	نقطه حدی
Boundary Point	نقطه مرزی
Regular Point	نقطه منظم
Singular Point	نقطه منفرد
Image	نگاره
Mapping	نگاشت
Complex Exponent	نماهای مختلط
Exponential	نمایی
Kernel	هسته
Connected	همبند
Multiply Connected	همبند چندگانه
Simply Connected	همبند ساده
Equicontinuous	همپیوسته

همدیس	Conformal
همدیسوار هم‌ارز	Conformally Equivalent
همساز	Harmonic
همگرای مطلق	Absolute Convergence
همگرای نقطه‌یی	Pointwise Convergence
همگوشه	Isogonal
هموار	Smooth
هیأت	Field
یکنوا	Monotone
یکنواخت	Uniform

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute Convergence	همگرایی مطلق
Absolute Value	قدر مطلق
Analytic	تحلیلی
Analytic Continuation	ادامه تحلیلی
Arc	قوس
Argument	شناسه
Argument Principle	اصل شناسه
Association	انجمنی
Bilinear Transformation	تبدیل دوخطی
Bound	کران
Boundary Point	نقطه مرزی
Bounded Set	مجموعه کراندار
Branch	شاخه
Chain	زنجیر
Close-to-Convex	تقریبا" محدب
Commutative	جابجایی
Comapct	فشرده
Complete	کامل
Complex	مختلط

Conformal	همدیس
Confromallly Equivalent	همدیسوار هم‌ارز
Conjugate	مزدوج
Connected	همبند
Contour	مرز
Convergence	همگرایی
Convex	محدب
Countable	شماره‌پذیر
Cross-Cut	پرش عبوری
Cross-Ratio	نسبت توافقی
Curve	خم
Deleted Neighborhood	همسایگی سوده
Dense	متراکم
Determination	مشخصه
Differentiation	مشتق‌یابی
Distributive Law	قانون پخشی
Domain	میدان
Dominated Convergence Test	آزمون همگرایی مغلوب
Entire	تام
Equicontinuity	همپیوستگی
Essential Singularity	تکینه اساسی
Expansion	بسط
Extended	گسترش‌یافته
Extremal	فرینال
Field	هیات
Fixed Point	نقطه پابرجا
Function Element	عنصر تابع
Fundamental	اساسی
Harmonic	همساز
Hyperbolic	هذلولی
Identity	همانی

Imaginary	انگاری
Infinite	نامتناهی
Infinity	بی‌نهایت
Interior	درونی
Inverse	وارون
Inversion	انعکاس
Isogonal	همگوشه
Isolated	تنها
Line Integral	انتگرال خطی
Linear Fractional Transformation	تبدیل خطی کسری
Magnification	برگساز
Meromorphic	برخه‌ریخت
Modulus	قدر مطلق
Mousetrap Principle	اصل تله‌موشی
Natural Boundary	مرز طبیعی
Nonisolated	غیرتنها
Normal Family	خانواده‌نرمال
Orientation of Curve	موجه کردن خم
Power Series	رشته توانی
Preimage	پیش‌نگار
Principal Branch	شاخه اصلی
Quotient	خارج‌قسمت
Radius	شعاع
Range	برد
Rectifiable	راستی‌پذیر
Region	ناحیه
Regular	منظم
Remobable Singularity	تکینه برداشتنی
Residue	مانده
Rotation	دوران
Sectionally Continuous	پیوسته بخشی

Sequence	دنباله
Series	رشته
Simple Curve	خم ساده
Simply Connected	همبند ساده
Singular Point	نقطه منفرد
Singularity	تکینه
Smooth Curve	خم هموار
Starlike	ستاره‌گون
Streographic projection	افکنش گنجنگاری
Subharmonic	تحت همساز
Subsequence	زیردنباله
Transcendental	متعالی
Translation	انتقال
Trichotomy	سه‌گانگی
Trivial Zeros	صفرهای بدیهی
Uniform	یکنواخت
Uniform Bounded	کراندار یکنواخت
Univalent	تک‌ارز
Variation of The Argument	وردنش شناسه
Winding Number	شماره گشت

فهرست راهنما

مراجع

X 1. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, 1964, p. 11.
2. D. Sprecher, *Elements of Real Analysis*. New York: Academic Press, 1970.
3. A. Taylor, *Advanced Calculus*. New York: Blaisdell, 1955.
4. M. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* (4th ed.). Cambridge University Press, 1961.
5. J. DePree and C. Oehring, *Elements of Complex Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1969.
X 6. T. Apostol, *Mathematical Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1967.
7. *Ibid.*
8. L. Ahlfors, *Complex Analysis* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, 1966, p.141.
9. J. DePree and C. Oehring, *Op. cit.*
10. L. Ahlfors, *Op. cit.*, p. 114.
11. E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. 2. Lexington, Mass: Ginn, 1962.
12. Z. Nehari, *Introduction to Complex Analysis* (rev. ed.). Boston: Allyn and Bacon, 1968, pp. 188–205.
13. E. Hille, *Op. cit.*
14. J. DePree and C. Oehring, *Op. cit.*, p. 80.
15. Z. Nehari, *Op. cit.*, p. 165.