متغیرهای مختلط و کاربردهای آن

ویراست هفتم

جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل

ترجمهٔ امیر خسروی

متغیرهای مختلط و کاربردهای آن

جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل

ترجمهٔ امیر خسروی

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۱۳۳۷

ریاضی، آمار، و رایانه
۱۶۵

Complex Variables and Applications
Seventh Edition
James Ward Brown, Ruel Vance Churchill
McGraw-Hill, 2004

متغیرهای مختلط و کاربردهای آن
تألیف جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل
ترجمهٔ امیر خسروی
ویراستهٔ محمدهادی شفیعیها
طراح جلد: حسین راست‌منش
نسخه پرداز: فاطمه پیوندی
حروفچین و صفحه‌آرا: مینا مهرابی‌فرد
ناظر چاپ: خشایار نصیری‌منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۸
چاپ دوم ۱۳۸۸
تعداد ۵۰۰۰
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: وسمه
۷۸۰۰ تومان

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: براون، جیمز وارد Brown, James Ward
عنوان و نام پدیدآور: متغیرهای مختلط و کاربردهای آن/جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل؛ ترجمهٔ امیر خسروی.
مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری: هشت، ۵۴۰ص.
فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۳۳۷. ریاضی، آمار، و رایانه؛ ۱۶۵.
شابک: 978-964-01-1337-0
چاپ دوم: ۱۳۸۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
یادداشت: عنوان اصلی: Complex variables and applications, 7th. ed, c2004.
موضوع: توابع متغیر مختلط
شناسه افزوده: چرچیل، روئل ونس، ۱۸۹۹ـ م.
شناسه افزوده: Churchill, Ruel Vance
شناسه افزوده: خسروی، امیر، ۱۳۲۷ـ ، مترجم
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۸ ۲م۴ج/QA۳۳۱/۷/
رده‌بندی دیویی: ۵۱۵٫۹
شماره کتابشناسی ملی: ۱۸۱۸۱۴۱

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان — صفحه

پیشگفتار

این کتاب تجدید نظری است از ویرایش ششم کتاب، که در ۱۹۹۶ منتشر شده است. ویرایش ششم مانند ویرایشهای قبلی به‌صورت کتاب درسی برای یک درس مقدماتی نیمساله در نظریه و کاربردهای توابع یک متغیرهٔ مختلط به‌کار رفته است. در این ویرایش محتوای اصلی و سبک ویرایشهای قبلی حفظ شده‌اند، سبکی که دو ویرایش اول آن به قلم خود روئل چرچیل فقید به تنهایی انجام گرفته است.

در این ویرایش تغییرات اساسی در نه فصل اول صورت گرفته است، که قسمت اصلی یک درس نیمساله را تشکیل می‌دهند. سه فصل باقیمانده به کاربردهای فیزیکی اختصاص یافته‌اند و اساساً به‌منظور مطالعهٔ فردی یا مرجع آورده شده‌اند و می‌توان از بین آنها گزینه‌هایی انتخاب کرد.

از جملهٔ اصلاحات عمده‌ای که انجام شده می‌توان از موارد زیر نام برد: سی شکل جدید اضافه شده و بسیاری از شکلها دوباره رسم شده‌اند. به‌منظور تأکید بر برخی مباحث خاص بعضی از بخشها به بخشهایی تقسیم شده و تعدادی از بخشهای جدید منحصراً به مثال اختصاص یافته‌اند. بخشهایی را که می‌توان بدون وارد آوردن خللی حذف کرد یا تدریس آنها را به تعویق انداخت به‌طور واضحتری مشخص کرده‌ایم تا برای مطالبی که کاملاً اساسی‌اند یا کاربردهایی که بعداً انتخاب می‌شوند وقت بیشتری بماند. در این ویرایش تعداد مجموعه‌های تمرینها از ویرایشهای قبلی بیشتر است که عموماً موجب کاهش تعداد تمرینات هر مجموعه شده و برای استاد درس در تعیین تکلیف مناسبتر است.

از بین دیگر اصلاحات می‌توان از موارد زیر نام برد: مطالب مقدماتی فصل ۲ در مورد نگاشتها ساده‌تر شده و حالا شامل خواص نگاشت تابع نمایی است. در فصل ۳، ترتیب ارائهٔ مطالب توابع مقدماتی را تغییر داده‌ایم تا مباحث به‌طور طبیعیتری پشت سرهم قرار گیرند. به‌خصوص حالا بخشهای لگاریتم مستقیماً بعد از تابع نمایی آمده‌اند و بخشهای توابع مثلثاتی و هذلولوی به بخشهای وارون آنها نزدیکتر شده‌اند. بنابر توصیهٔ افرادی که طی چند سال گذشته با این کتاب سروکار داشته‌اند

به‌منظور بهبود آن برخی از مطالب مهم را از تمرینات به داخل متن آورده‌ایم، مثلاً بررسی صفرهای تنهای توابع تحلیلی در فصل ۶ و بحث انتگرال روی مسیرهای دندانه‌دار در فصل ۷.

اولین هدف در ویرایش حاضر بسط قسمتهایی از نظریه است که اهمیت کاربردی دارند. دومین هدف ارائهٔ مقدمه‌ای است برکاربرد مانده‌ها و نگاشت همدیس. برکاربرد نگاشت همدیس در حل مسائل مقدار مرزی که در مطالعهٔ هدایت گرما، پتانسیل الکتروستاتیک و جریان سیال ظاهر می‌شوند، تأکید خاصی شده است. لذا این کتاب را می‌توان کتاب راهنمایی برای کتاب «سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی»، اثر همین مؤلفان و «ریاضیات عملی» اثر روئل چرچیل دانست که در آنها روشهای کلاسیک دیگری برای حل مسائل مقدار مرزی در معادلات با مشتقات جزئی مطرح شده‌اند. کتاب اخیر شامل کاربردهای بیشتر مانده‌ها در ارتباط با تبدیلات لاپلاس است.

این کتاب چندین سال به‌عنوان یک درس سه واحدی در دانشگاه میشیگان تدریس شده است. دانشجویان کلاسها عمدتاً سالهای آخر دورهٔ کارشناسی و دورهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ اصلی ریاضی، مهندسی، یا یکی از علوم فیزیک یا شیمی بوده‌اند. دانشجویان قبل از گرفتن این درس، حداقل یک دورهٔ سه ترمی حسابان، ترم اول معادلات دیفرانسیل و گاهی یک نیمسال حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته را گذرانده بوده‌اند. به‌منظور آنکه کتاب برای طیف وسیعتری از خوانندگان قابل استفاده باشد، هر جا به مطالب مشکلی از حسابان برخورده‌ایم که اغلب مورد نیازند در پانوشت به کتابهایی ارجاع داده‌ایم که اثبات آنها و بحثهایی از قضایای دقیقتر را دربر دارند.

تدریس بعضی از مطالب کتاب ضروری نیست و می‌توان مطالعهٔ آنها را به‌عهدهٔ خود دانشجویان گذاشت. در صورت تمایل به تدریس نگاشت به‌وسیلهٔ توابع مقدماتی و کاربردهای نگاشت همدیس در اوایل درس، می‌توان بلافاصله بعد از فصل ۳، که دربارهٔ توابع مقدماتی است، فصول ۸، ۹ و ۱۰ را تدریس کرد.

بیشتر نتایج بنیادی به‌عنوان قضیه و فرع بیان و با مثالها و تمرینهایی که بعد از آنها آمده‌اند روشن شده‌اند. در پیوست ۱ فهرستی از کتابهای دیگر که بیشتر آنها پیشرفته‌ترند تهیه شده است. در پیوست ۲ جدولی از تبدیلهای همدیس که در کاربردها مفیدند آمده است.

راهنماییهای عده‌ای از علاقه‌مندانی که آشنایان، همکاران، و دانشجویان بوده‌اند در تهیهٔ این ویرایش مؤثر بوده است. از این افراد و از همهٔ آنانی که از تشویق و حمایتشان برخوردار بوده‌ام سپاسگزارم.

جیمز وارد براون

۱

اعداد مختلط

در این فصل ساختار جبری و هندسی دستگاه اعداد مختلط را بررسی می‌کنیم. بسیاری از ویژگیهای متناظر اعداد حقیقی را دانسته می‌گیریم.

۱. مجموع و حاصلضرب

اعداد مختلط را می‌توان به‌صورت زوجهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی x و y تعریف کرد که باید به‌صورت نقاط صفحهٔ مختلط با مختصات قائم x و y تعبیر شوند، همان‌طور که اعداد حقیقی x را به‌صورت نقاط خط حقیقی می‌گیرند. درصورتی که اعداد حقیقی x را به‌صورت نقاط $(x, 0)$ روی محور حقیقی نمایش دهیم، واضح است که اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد مختلط می‌شود. اعداد مختلط به شکل $(0, y)$ با نقاط روی محور y متناظرند و اعداد موهومی محض نامیده می‌شوند. در این صورت محور y را محور موهومی می‌نامند.

معمولاً عدد مختلط (x, y) را با z نمایش می‌دهند، بنابراین

$$z = (x, y) . \qquad (۱)$$

به‌علاوه اعداد حقیقی x و y را، به‌ترتیب، قسمتهای حقیقی و موهومی z می‌نامند و می‌نویسند

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y\,. \tag{۲}$$

اعداد مختلط $z_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $z_۲ = (x_۲, y_۲)$ مساوی‌اند هرگاه دارای قسمتهای حقیقی و موهومی برابر باشند. بنابراین $z_۱ = z_۲$ یعنی اینکه $z_۱$ و $z_۲$ با یک نقطه در صفحهٔ مختلط، یا صفحهٔ z، متناظر باشند.

مجموع $z_۱+z_۲$ و حاصلضرب $z_۱z_۲$ برای دو عدد مختلط $z_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $z_۲ = (x_۲, y_۲)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(x_۱, y_۱) + (x_۲, y_۲) = (x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲), \tag{۳}$$

$$(x_۱, y_۱)(x_۲, y_۲) = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲, y_۱x_۲ + x_۱y_۲)\,. \tag{۴}$$

توجه کنید اعمالی که با روابط (۳) و (۴) تعریف شده‌اند وقتی به اعداد حقیقی محدود شوند همان اعمال جمع و ضرب معمولی‌اند:

$$(x_۱, ۰) + (x_۲, ۰) = (x_۱ + x_۲, ۰),$$
$$(x_۱, ۰)(x_۲, ۰) = (x_۱x_۲, ۰)\,.$$

در نتیجه، دستگاه اعداد مختلط توسیعی طبیعی از دستگاه اعداد حقیقی است.

هر عدد مختلط $z = (x, y)$ را می‌توان به‌صورت $z = (x, ۰) + (۰, y)$ نوشت و به‌سادگی دیده می‌شود که $(۰, y) = (۰, ۱)(y, ۰)$. بنابراین

$$z = (x, ۰) + (۰, ۱)(y, ۰)$$

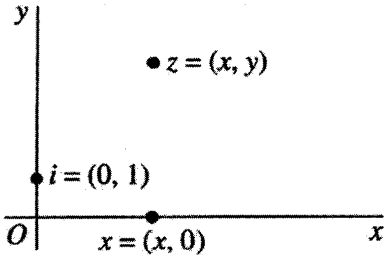
و اگر عدد حقیقی را به‌صورت x یا $(x, ۰)$ بگیریم و i نمایش عدد موهومی محض $(۰, ۱)$ باشد*، (شکل ۱ را ببینید)، واضح است که

$$z = x + iy\,. \tag{۵}$$

همچنین، با این قرارداد که $z^۲ = zz$، $z^۳ = zz^۲$ و غیره، ملاحظه می‌کنیم که

$$i^۲ = (۰, ۱)(۰, ۱) = (-۱, ۰)$$

* در مهندسی برق به جای حرف i از حرف j استفاده می‌شود.



شکل ۱

یا

$$i^{۲} = -۱ . \qquad (۶)$$

با توجه به عبارت (۵) تعاریف (۳) و (۴) به‌صورت زیر در می‌آیند

$$(x_۱ + iy_۱) + (x_۲ + iy_۲) = (x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲), \qquad (۷)$$

$$(x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(y_۱x_۲ + x_۱y_۲) . \qquad (۸)$$

ملاحظه کنید که اگر عملیات را به‌طور صوری و با این تصور که فقط شامل اعداد حقیقی‌اند، روی عبارات سمت چپ انجام دهیم و هر کجا $i^{۲}$ ظاهر شد به‌جای آن ۱− بگذاریم همان عبارات سمت راست حاصل خواهد شد.

۲. ویژگیهای جبری اساسی

ویژگیهای مختلف جمع و ضرب اعداد مختلط، همان ویژگیهای جمع و ضرب اعداد حقیقی‌اند. در اینجا فهرستی از این ویژگیها را که اساسیترند ارائه می‌دهیم و درستی تعدادی از آنها را تحقیق می‌کنیم. درستی اکثر ویژگیهای دیگر را در تمرینها تحقیق خواهید کرد.

قوانین تعویضپذیری

$$z_۱ + z_۲ = z_۲ + z_۱, \qquad z_۱z_۲ = z_۲z_۱ \qquad (۱)$$

و قوانین شرکتپذیری

$$(z_۱ + z_۲) + z_۳ = z_۱ + (z_۲ + z_۳), \quad (z_۱z_۲)z_۳ = z_۱(z_۲z_۳) \qquad (۲)$$

به‌سادگی از تعاریف جمع و ضرب اعداد مختلط و اینکه اعداد حقیقی از این قوانین پیروی می‌کنند

نتیجه می‌شود. مثلاً اگر $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$، آن‌گاه

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1 .$$

اثبات بقیهٔ قوانین بالا و همچنین قانون توزیعپذیری

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2 \tag{۳}$$

به‌صورتی مشابه است.

بنابر قانون تعویضپذیری ضرب، $iy = yi$. بنابراین به جای $z = x + iy$ می‌توان نوشت $z = x + yi$. همین‌طور بنابر قوانین شرکتپذیری، مجموع $z_1 + z_2 + z_3$ یا حاصلضرب $z_1z_2z_3$، درست مثل اعداد حقیقی، بدون پرانتز خوشتعریف است.

همانی جمعی $0 = (0, 0)$ و همانی ضربی $1 = (1, 0)$ برای اعداد حقیقی، همین ویژگی را در تمام دستگاه اعداد مختلط دارند. یعنی به‌ازای هر عدد مختلط z

$$z + 0 = z, \qquad z \cdot 1 = z . \tag{۴}$$

به‌علاوه، ۰ و ۱ تنها اعداد مختلط واجد این ویژگیهایند (تمرین ۹ را ببینید).

به هر عدد مختلط $z = (x, y)$ یک وارون جمعی

$$-z = (-x, -y) \tag{۵}$$

وابسته می‌شود که در معادلهٔ $z + (-z) = 0$ صدق می‌کند. به‌علاوه برای هر z مفروض، فقط یک چنین وارون جمعی موجود است، زیرا از معادلهٔ $(x, y) + (u, v) = (0, 0)$ نتیجه می‌شود که $u = -x$ و $v = -y$. عبارت (۵) را می‌توان بدون ابهام چنین نوشت $-z = -x - iy$ زیرا $-(iy) = (-i)y = i(-y)$ (تمرین ۸). برای تعریف تفریق از وارونهای جمعی استفاده می‌شود:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) . \tag{۶}$$

بنابراین اگر $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$، آن‌گاه

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) . \tag{۷}$$

برای هر عدد مختلط ناصفر $z = (x, y)$ عدد z^{-1}ی موجود است به قسمی که $zz^{-1} = 1$.

این وارون ضربی نسبت به وارون جمعی کمتر آشکار است. برای پیدا کردن آن، اعداد حقیقی u و v را برحسب x و y به قسمی پیدا می‌کنیم که

$$(x,y)(u,v)=(۱,۰).$$

بنابر رابطهٔ (۴) بخش ۱، که حاصلضرب دو عدد مختلط را تعریف می‌کند، u و v باید در دستگاه معادلات خطی

$$xu-yv=۱,\qquad yu+xv=۰$$

صدق کنند؛ و با محاسبه‌ای ساده جواب یکتای زیر به‌دست می‌آید

$$u=\frac{x}{x^۲+y^۲},\qquad v=\frac{-y}{x^۲+y^۲}.$$

پس وارون ضربی $z=(x,y)$ عبارت است از

$$z^{-۱}=\left(\frac{x}{x^۲+y^۲},\frac{-y}{x^۲+y^۲}\right)\qquad(z\neq ۰). \tag{۸}$$

وقتی $z=۰$ وارون آن یعنی $z^{-۱}$ تعریف نمی‌شود. در واقع اگر $z=۰$، آن‌گاه $x^۲+y^۲=۰$ و در عبارت (۸) این مقدار مجاز نیست.

تمرینها

۱. تحقیق کنید که

(الف) $(\sqrt{۲}-i)-i(۱-\sqrt{۲}i)=-۲i$؛ (ب) $(۲,-۳)(-۲,۱)=(-۱,۸)$.

(ج) $(۳,۱)(۳,-۱)(\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۱۰})=(۲,۱)$.

۲. نشان دهید که

(الف) $\mathrm{Re}\,(iz)=-\mathrm{Im}\,z$؛ (ب) $\mathrm{Im}\,(iz)=\mathrm{Re}\,z$.

۳. نشان دهید که $(۱+z)^۲=۱+۲z+z^۲$.

۴. تحقیق کنید که هر یک از دو عدد $z=۱\pm i$ در معادلهٔ $z^۲-۲z+۲=۰$ صدق می‌کند.

۵. همان‌طور که در دومین رابطه از روابط (۱) بخش ۲ بیان شد، ثابت کنید که عمل ضرب تعویضپذیر است.

۶. درستی موارد زیر را تحقیق کنید

(الف) قانون شرکتپذیری جمع را که در اولین رابطه از روابط (۲) بخش ۲ بیان شد؛

(ب) قانون توزیعپذیری (۳) بخش ۲ را.

۷. با استفاده از شرکتپذیری جمع و توزیعپذیری نشان دهید که

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

۸. با نوشتن $i = (0, 1)$ و $y = (y, 0)$ نشان دهید که $-(iy) = (-i)y = i(-y)$.

۹. (الف) بنویسید $(x, y) + (u, v) = (x, y)$ و خاطرنشان سازید چگونه نتیجه می‌شود که عدد مختلط $0 = (0, 0)$ به‌عنوان همانی جمعی، یکتاست.

(ب) همین‌طور بنویسید $(x, y)(u, v) = (x, y)$ و نشان دهید که عدد $1 = (1, 0)$ همانی ضربی یکتاست.

۱۰. معادلهٔ $z^2 + z + 1 = 0$ برحسب $z = (x, y)$ را با نوشتن

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

و حل یک دستگاه معادلات برحسب x و y، حل کنید.

راهنمایی: با استفاده از این واقعیت که هیچ عدد حقیقی x در معادلهٔ داده شده صدق نمی‌کند نشان دهید که $y \neq 0$.

جواب: $z = \left(\frac{-1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

۳. ویژگیهای دیگر

در این بخش، تعدادی از ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را بیان می‌کنیم که از ویژگیهایی که قبلاً در بخش ۲ بیان شدند، نتیجه می‌شوند. از آنجایی که این ویژگیها برای اعداد حقیقی نیز به‌کار می‌روند، می‌توان آنها را بدون اثبات پذیرفت و خواننده می‌تواند بدون وارد آوردن خللی از بخش ۴ شروع کند.

از اینجا شروع می‌کنیم که با استفاده از وجود وارونهای ضربی می‌توان نشان داد که اگر حاصلضرب z_1z_2 صفر شود، حداقل یکی از عوامل z_1 و z_2 صفر است. برای این منظور فرض کنید $z_1z_2 = 0$ و $z_1 \neq 0$. وارون z_1^{-1} موجود است و لذا بنابر تعریف ضرب، هر عدد مختلط ضرب در صفر برابر با صفر می‌شود. بنابراین

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1}z_1)z_2 = z_1^{-1}(z_1z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0.$$

یعنی اگر $z_1 z_2 = 0$، آن‌گاه $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$ یا ممکن است z_1 و z_2 هر دو مساوی صفر باشند. راه دیگری برای بیان این نتیجه آن است که اگر هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 ناصفر باشند، حاصلضرب آنها $z_1 z_2$ ناصفر است.

تقسیم بر عدد مختلط ناصفر چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq 0). \tag{1}$$

اگر $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$، از رابطهٔ (۱) فوق و رابطهٔ (۸) بخش ۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1, y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

یعنی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0). \tag{2}$$

گرچه به‌خاطر سپردن عبارت (۲) ساده نیست، می‌توان آن را بدین‌طریق به‌دست آورد که بنویسیم (تمرین ۷ را ببینید)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \tag{3}$$

و اعمال ضرب در صورت و مخرج کسر سمت راست را انجام دهیم و از ویژگی زیر استفاده کنیم

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2) z_3^{-1} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \qquad (z_3 \neq 0). \tag{4}$$

انگیزهٔ شروع با رابطهٔ (۳) در بخش ۵ ظاهر خواهد شد.

اتحادهای قابل انتظاری در مورد خارج‌قسمتها وجود دارند که از رابطهٔ زیر، که همان رابطهٔ (۱) به‌ازای $z_1 = 1$ است، به‌دست می‌آیند

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq 0). \tag{5}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵)، مثلاً، می‌توان رابطهٔ (۱) را به شکل زیر نوشت

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right), \qquad (z_2 \neq 0). \tag{6}$$

همچنین، با توجه به اینکه (تمرین ۳ را ببینید)

$$(z_۱z_۲)(z_۱^{-۱}z_۲^{-۱}) = (z_۱z_۱^{-۱})(z_۲z_۲^{-۱}) = ۱ \qquad (z_۱ \neq ۰, z_۲ \neq ۰),$$

و در نتیجه $(z_۱z_۲)^{-۱} = z_۱^{-۱}z_۲^{-۱}$، می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۵) نشان داد که

$$\frac{۱}{z_۱z_۲} = (z_۱z_۲)^{-۱} = z_۱^{-۱}z_۲^{-۱} = \left(\frac{۱}{z_۱}\right)\left(\frac{۱}{z_۲}\right) \qquad (z_۱ \neq ۰, z_۲ \neq ۰). \qquad (۷)$$

اتحاد مفید دیگری که در تمرینها به‌دست خواهد آمد به‌صورت زیر است

$$\frac{z_۱z_۲}{z_۳z_۴} = \left(\frac{z_۱}{z_۳}\right)\left(\frac{z_۲}{z_۴}\right) \qquad (z_۳ \neq ۰, z_۴ \neq ۰). \qquad (۸)$$

مثال. محاسباتی نظیر آنچه در زیر آمده است توجیه‌پذیرند:

$$\left(\frac{۱}{۲-۳i}\right)\left(\frac{۱}{۱+i}\right) = \frac{۱}{(۲-۳i)(۱+i)} = \frac{۱}{۵-i}\cdot\frac{۵+i}{۵+i} = \frac{۵+i}{(۵-i)(۵+i)}$$

$$= \frac{۵+i}{۲۶} = \frac{۵}{۲۶} + \frac{i}{۲۶} = \frac{۵}{۲۶} + \frac{۱}{۲۶}i.$$

بالاخره توجه می‌کنیم که دستور دوجمله‌یی برای اعداد حقیقی، برای اعداد مختلط نیز برقرار است. یعنی اگر $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط باشند،

$$(z_۱ + z_۲)^n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k} z_۱^{n-k} z_۲^{k} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۹)$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n)$$

و با این قرارداد که $۰! = ۱$. اثبات به استقرای ریاضی است و آن را به‌عنوان تمرین گذاشته‌ایم.

تمرینها

۱. هر یک از کمیتهای زیر را به یک عدد حقیقی تبدیل کنید:

(الف) $\frac{۱+۲i}{۳-۴i} + \frac{۲-i}{۵i}$؛ (ب) $\frac{۵i}{(۱-i)(۲-i)(۳-i)}$؛ (ج) $(۱-i)^۴$.

جواب: (الف) $-۲/۵$؛ (ب) $-۱/۲$؛ (ج) -۴.

۲. نشان دهید که

(الف) $-z = (-۱)z$؛ (ب) $\frac{۱}{۱/z} = z \; (z \neq ۰)$.

۳. با استفاده از قوانین شرکتپذیری و تعویضپذیری ضرب نشان دهید که

$$(z_۱ z_۲)(z_۳ z_۴) = (z_۱ z_۳)(z_۲ z_۴).$$

۴. ثابت کنید که اگر $z_۱ z_۲ z_۳ = ۰$، حداقل یکی از سه عامل صفر است.

راهنمایی: بنویسید $(z_۱ z_۲) z_۳ = ۰$ و از نتیجهٔ مشابه (بخش ۳) در مورد دو عامل استفاده کنید.

۵. رابطهٔ (۲)، بخش ۳، برای خارج‌قسمت $z_۱/z_۲$ را به روشی که درست بعد از آن بیان‌شده به‌دست آورید.

۶. به کمک روابط (۶) و (۷)، بخش ۳، اتحاد (۸) آن بخش را به‌دست آورید.

۷. با استفاده از اتحاد (۸) در بخش ۳، قانون حذف را به‌دست آورید:

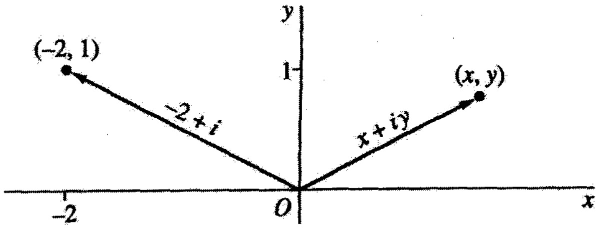
$$\frac{z_۱ z}{z_۲ z} = \frac{z_۱}{z_۲} \qquad (z_۲ \neq ۰, z \neq ۰).$$

۸. با استفاده از استقرای ریاضی درستی دستور دوجمله‌یی (۹) در بخش ۳ را تحقیق کنید. به عبارت دقیقتر، ابتدا توجه کنید که این دستور برای $n = ۱$ برقرار است. سپس با فرض اینکه برای $n = m$ برقرار است، که در آن m عدد صحیح مثبتی است، نشان دهید که باید برای $n = m + ۱$ برقرار باشد.

۴. قدرمطلقها

طبیعی است که هر عدد مختلط ناصفر $z = x + iy$ را با پاره‌خطی جهت‌دار، یا برداری، از مبدأ به نقطهٔ (x, y) که نمایش z (بخش ۱) در صفحهٔ مختلط است متناظر سازیم. در واقع اغلب به z نقطهٔ z، یا بردار z گفته می‌شود. در شکل ۲، اعداد $z = x + iy$ و $-۲ + i$ هم به‌صورت نقاط و هم به‌صورت بردارهای شعاعی نمایش داده شده‌اند.

بنابر تعریف مجموع دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$، عدد $z_۱ + z_۲$ با نقطهٔ $(x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲)$ متناظر است. این عدد همچنین با برداری متناظر است که مؤلفه‌هایش همان مختصات نقطه‌اند. بنابراین، همان‌طورکه در شکل ۳ نشان داده شده است، می‌توان $z_۱ + z_۲$



شکل ۲

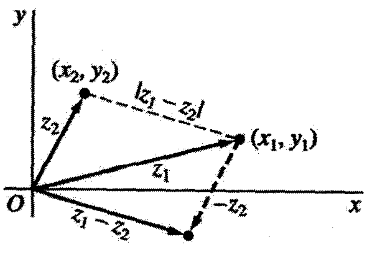
را به طریق برداری به‌دست آورد. تفاضل $z_۱ - z_۲ = z_۱ + (-z_۲)$ با مجموع بردارهای $z_۱$ و $-z_۲$ متناظر است (شکل ۴).

گرچه حاصلضرب دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ خود عددی مختلط است که با یک بردار نمایش داده می‌شود، ولی آن بردار در همان صفحهٔ بردارهای $z_۱$ و $z_۲$ واقع است. پس روشن است که این حاصلضرب نه حاصلضرب عددی و نه حاصلضرب برداری است که در آنالیز برداری معمولی به‌کار می‌روند.

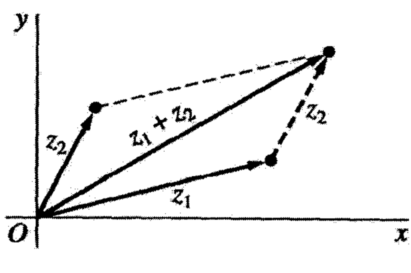
تعبیر برداری اعداد مختلط به‌خصوص در توسیع مفهوم قدرمطلق اعداد حقیقی برای صفحهٔ مختلط مفید است. هنگ یا قدرمطلق عدد مختلط $z = x + iy$ را به‌عنوان عدد حقیقی نامنفی $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ تعریف می‌کنیم و با $|z|$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}. \tag{۱}$$

از نظر هندسی، عدد $|z|$ فاصلهٔ بین نقطهٔ (x, y) و مبدأ، یا طول بردار معرف z است. وقتی $y = ۰$، این قدرمطلق به قدرمطلق معمولی در دستگاه اعداد حقیقی تبدیل می‌شود. توجه کنید که



شکل ۴



شکل ۳

گرچه نابرابری $z_1 < z_2$ جز در حالتی که z_1 و z_2 هر دو حقیقی‌اند بی‌معنی است، $|z_1| < |z_2|$ بدین‌معنی است که نقطهٔ متناظر با z_1 به مبدأ نزدیکتر است تا نقطهٔ متناظر با z_2.

مثال ۱. چون $|-3+2i| = \sqrt{13}$ و $|1+4i| = \sqrt{17}$، نقطهٔ $-3+2i$ از نقطهٔ $1+4i$ به مبدأ نزدیکتر است.

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ برابر است با $|z_1 - z_2|$. این مطلب از شکل ۴ واضح است، زیرا $|z_1 - z_2|$ طول بردار نمایش‌دهندهٔ $z_1 - z_2$ است. به روش دیگر از تعریف (۱) و عبارت

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

نتیجه می‌شود که

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

بنابراین اعداد مختلط متناظر با نقاط واقع بر دایرهٔ به مرکز z_0 و شعاع R در معادلهٔ $|z - z_0| = R$ صدق می‌کنند و برعکس. ما به‌سادگی از این مجموعهٔ نقاط به‌عنوان دایرهٔ $|z - z_0| = R$ نام می‌بریم.

مثال ۲. معادلهٔ $|z - 1 + 3i| = 2$ نمایش دایرهٔ به مرکز $z_0 = (1, -3)$ و شعاع $R = 2$ است.

همچنین از تعریف (۱) نتیجه می‌شود که اعداد حقیقی $|z|$، $\operatorname{Re} z = x$ و $\operatorname{Im} z = y$ با رابطهٔ زیر به‌هم مربوط‌اند

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \tag{۲}$$

بنابراین

$$\operatorname{Re} z \le |\operatorname{Re} z| \le |z| \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} z \le |\operatorname{Im} z| \le |z|. \tag{۳}$$

حال به نابرابری مثلثی می‌پردازیم که کران بالایی برای قدرمطلق مجموع دو عدد مختلط z_1 و z_2 ارائه می‌دهد:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{۴}$$

این نابرابری مهم در شکل ۳ از نظر هندسی بدیهی است، زیرا صرفاً بیان می‌کند که طول هر ضلع مثلث مساوی یا کوچکتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر است. همچنین از شکل ۳ متوجه می‌شویم که وقتی $z_۱$، $z_۲$ و ۰ همخط و بردارهای $z_۱$ و $z_۲$ هم‌جهت‌اند، نابرابری (۴) عملاً یک برابری است. برهان کاملاً جبری در تمرین ۱۶ بخش ۵ ارائه شده است.

از نابرابری مثلثی بی‌درنگ نابرابری زیر به‌دست می‌آید

$$|z_۱ + z_۲| \geq ||z_۱| - |z_۲||. \tag{۵}$$

برای به‌دست آوردن نابرابری (۵) می‌نویسیم

$$|z_۱| = |(z_۱ + z_۲) + (-z_۲)| \leq |z_۱ + z_۲| + |-z_۲|,$$

که مستلزم رابطهٔ زیر است

$$|z_۱ + z_۲| \geq |z_۱| - |z_۲|. \tag{۶}$$

این نابرابری همان نابرابری (۵) است وقتی که $|z_۱| \geq |z_۲|$. اگر $|z_۱| < |z_۲|$ فقط لازم است که در نابرابری (۶) جای $z_۱$ و $z_۲$ را عوض کنیم تا نابرابری

$$|z_۱ + z_۲| \geq -(|z_۱| - |z_۲|),$$

را که همان نتیجهٔ مطلوب است به‌دست آوریم. البته نابرابری (۵) بیان می‌کند که طول هر ضلع مثلث مساوی یا بزرگتر از تفاضل طولهای دو ضلع دیگر است.

چون $|z_۲| = |-z_۲|$، می‌توان در نابرابریهای (۴) و (۵) به‌جای $z_۲$ عدد $-z_۲$ را قرار داد تا این نتایج به شکل مفیدی خلاصه شوند:

$$|z_۱ \pm z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|, \tag{۷}$$

$$|z_۱ \pm z_۲| \geq ||z_۱| - |z_۲||. \tag{۸}$$

مثال ۳. اگر نقطهٔ z بر دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ پیرامون مبدأ واقع باشد، آن‌گاه

$$|z - ۲| \leq |z| + ۲ = ۳$$

و

$$|z - ۲| \geq ||z| - ۲| = ۱.$$

نابرابری مثلثی را می‌توان با استقرای ریاضی، به مجموعهایی شامل هر تعداد متناهی جمله تعمیم داد:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{۹}$$

برای ارائهٔ جزئیات اثبات استقرایی، توجه می‌کنیم که اگر $n = 2$، نابرابری (۹) همان نابرابری (۴) است. به‌علاوه اگر فرض کنیم که وقتی $n = m$ نابرابری (۹) برقرار است، باید برای $n = m + 1$ نیز برقرار باشد، زیرا بنابر نابرابری (۴)

$$\begin{aligned} |(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) + z_{m+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}| \\ &\leq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|) + |z_{m+1}|. \end{aligned}$$

تمرینها

۱. اعداد $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ را به طریق برداری مشخص سازید درصورتی که

(الف) $z_1 = 2i$، $z_2 = \frac{2}{3} - i$؛ (ب) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$، $z_2 = (\sqrt{3}, 0)$؛
(ج) $z_1 = (-3, 1)$، $z_2 = (1, 4)$؛ (د) $z_1 = x_1 + iy_1$، $z_2 = x_1 - iy_1$.

۲. درستی نابرابریهای (۳) بخش ۴ را که شامل $\operatorname{Re} z$، $\operatorname{Im} z$ و $|z|$ هستند تحقیق کنید.

۳. ثابت کنید که $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

راهنمایی: این نابرابری را به $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ تبدیل کنید.

۴. در هر حالت، مجموعهٔ نقاطی راکه با شرط داده شدهٔ زیر معین می‌شود، با شکل نمایش دهید:

(الف) $|z - 1 + i| = 1$؛ (ب) $|z + i| \leq 3$؛ (ج) $|z - 4i| \geq 4$.

۵. با استفاده از اینکه $|z_1 - z_2|$ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ z_1 و z_2 است یک استدلال هندسی بیاورید که

(الف) معادلهٔ $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ نمایش بیضیی است که کانونهایش $(0, \pm 4)$ هستند؛

(ب) معادلهٔ $|z - 1| = |z + i|$ نمایش خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن -1 است.

۵. مزدوجهای مختلط

مزدوج مختلط، یا به اختصار مزدوج، عدد مختلط $z = x + iy$ به‌صورت عدد مختلط $x - iy$ تعریف و با $\overline{z}$ نشان داده می‌شود یعنی

$$\overline{z} = x - iy\,. \tag{۱}$$

عدد $\overline{z}$ با نقطهٔ $(x, -y)$ نمایش داده می‌شود که بازتاب نقطهٔ (x, y)، نمایش z، نسبت به محور حقیقی است (شکل ۵). توجه کنید که به‌ازای هر z داریم

$$\overline{\overline{z}} = z \quad \text{و} \quad |\overline{z}| = |z|.$$

اگر $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$، آن‌گاه

$$\overline{z_۱ + z_۲} = (x_۱ + x_۲) - i(y_۱ + y_۲) = (x_۱ - iy_۱) + (x_۲ - iy_۲)\,.$$

بنابراین، مزدوج مجموع برابر است با مجموع مزدوجها:

$$\overline{z_۱ + z_۲} = \overline{z}_۱ + \overline{z}_۲\,. \tag{۲}$$

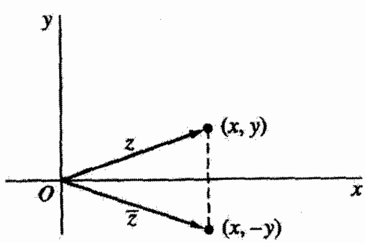
به روشی مشابه به سادگی نشان داده می‌شود که

$$\overline{z_۱ - z_۲} = \overline{z}_۱ - \overline{z}_۲, \tag{۳}$$

$$\overline{z_۱ z_۲} = \overline{z}_۱ \overline{z}_۲, \tag{۴}$$

و

$$\overline{\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)} = \frac{\overline{z}_۱}{\overline{z}_۲} \qquad (z_۲ \neq ۰)\,. \tag{۵}$$



شکل ۵

مجموع عدد مختلط $z = x + iy$ و مزدوج آن $\overline{z} = x - iy$، یعنی $z + \overline{z}$، برابر عدد حقیقی $۲x$ و تفاضل آن، $z - \overline{z}$، برابر عدد موهومی محض $۲iy$ است. بنابراین

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{۲}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{۲i}. \tag{۶}$$

اتحاد مهمی که مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را به قدرمطلق آن مربوط می‌سازد عبارت است از

$$z\overline{z} = |z|^۲, \tag{۷}$$

که در آن هر طرف برابر $x^۲ + y^۲$ است. این فرمول روش دیگری برای معین‌کردن خارج‌قسمت $z_۱/z_۲$ در رابطهٔ (۳) بخش ۳ ارائه می‌دهد. طرز عمل عبارت است از ضرب صورت و مخرج $z_۱/z_۲$ در $\overline{z}_۲$ به‌قسمی که مخرج عدد حقیقی $|z_۲|^۲$ شود.

مثال ۱. به‌عنوان مثال،

$$\frac{-۱ + ۳i}{۲ - i} = \frac{(-۱ + ۳i)(۲ + i)}{(۲ - i)(۲ + i)} = \frac{-۵ + ۵i}{|۲ - i|^۲} = \frac{-۵ + ۵i}{۵} = -۱ + i.$$

مثال نزدیک به آخر بخش ۳ را نیز ببینید.

اتحاد (۷) به‌خصوص در به‌دست آوردن ویژگیهای قدرمطلق از روی ویژگیهای مزدوجها که در بالا بیان کردیم مفید است: از آن جمله

$$|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|, \tag{۸}$$

$$\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|} \qquad (z_۲ \neq ۰). \tag{۹}$$

برای اثبات ویژگی (۸) می‌نویسیم

$$|z_۱ z_۲|^۲ = (z_۱ z_۲)(\overline{z_۱ z_۲}) = (z_۱ z_۲)(\overline{z}_۱ \overline{z}_۲) = (z_۱ \overline{z}_۱)(z_۲ \overline{z}_۲) = |z_۱|^۲ |z_۲|^۲ = (|z_۱||z_۲|)^۲$$

و به یاد می‌آوریم که قدرمطلق هیچگاه منفی نیست. درستی ویژگی (۹) را هم به همین روش می‌توان تحقیق کرد.

مثال ۲. ویژگی (۸) مبین این نکته است که $|z^۲| = |z|^۲$ و $|z^۳| = |z|^۳$. بنابراین اگر نقطهٔ z درون دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۲ واقع باشد، آن‌گاه $|z| < ۲$، در نتیجه بنابر صورت تعمیم‌یافتهٔ نابرابری مثلثی (۹)، بخش ۴، داریم

$$|z^۳ + ۳z^۲ - ۲z + ۱| \leq |z|^۳ + ۳|z|^۲ + ۲|z| + ۱ < ۲۵.$$

تمرینها

۱. با استفاده از ویژگیهای مزدوجها و قدرمطلقها که در بخش ۵ ثابت شد نشان دهید که

(الف) $\overline{\overline{z}+3i} = z - 3i$؛ (ب) $\overline{iz} = -i\overline{z}$؛

(ج) $\overline{(2+i)^2} = 3 - 4i$؛ (د) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$.

۲. در هر حالت مجموعهٔ نقاطی را که با شرط داده شده معین می‌شود، با شکل نمایش دهید

(الف) $\mathrm{Re}\,(\overline{z}-i) = 2$؛ (ب) $|2z-i| = 4$.

۳. درستی ویژگیهای (۳) و (۴) مزدوجها در بخش ۵ را تحقیق کنید.

۴. با استفاده از ویژگی (۴) مزدوجها در بخش ۵ نشان دهید که

(الف) $\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{z}_1\overline{z}_2\overline{z}_3$؛ (ب) $\overline{(z^4)} = (\overline{z})^4$.

۵. درستی ویژگی (۹) قدرمطلقها در بخش ۵ را تحقیق کنید.

۶. با استفاده از نتایج بخش ۵ نشان دهید که وقتی z_2 و z_3 ناصفرند،

(الف) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2\overline{z}_3}$؛ (ب) $\left|\dfrac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

۷. با استفاده از ویژگیهای قدرمطلقها که ثابت کردیم نشان دهید که وقتی $|z_3| \neq |z_4|$،

$$\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}.$$

۸. نشان دهید که

اگر $|z| \leq 1$، آن‌گاه $|\mathrm{Re}\,(2+\overline{z}+z^3)| \leq 4$.

۹. در بخش ۳ نشان دادیم که اگر $z_1 z_2 = 0$ آن‌گاه حداقل یکی از اعداد z_1 و z_2 باید صفر باشد. اثبات دیگری بر مبنای نتیجهٔ متناظر برای اعداد حقیقی و استفاده از اتحاد (۸) بخش ۵ ارائه دهید.

۱۰. با تجزیهٔ $z^4 - 4z^2 + 3$ به دو عامل درجهٔ دوم و استفاده از نابرابری (۸) بخش ۴ نشان دهید که اگر z بر دایرهٔ $|z| = 2$ واقع باشد، آن‌گاه

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}.$$

۱۱. ثابت کنید که

(الف) z حقیقی است اگر و فقط اگر $\overline{z} = z$؛

(ب) z حقیقی یا موهومی محض است اگر و فقط اگر $(\overline{z})^2 = z^2$.

۱۲. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که هرگاه $n = ۲, ۳, \ldots$،

(الف) $\overline{z_۱ + z_۲ + \cdots + z_n} = \overline{z}_۱ + \overline{z}_۲ + \cdots + \overline{z}_n$؛

(ب) $\overline{z_۱ z_۲ \cdots z_n} = \overline{z}_۱ \overline{z}_۲ \cdots \overline{z}_n$.

۱۳. فرض می‌کنیم $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، …، a_n $(n \geq ۱)$ نمایش اعدادی حقیقی و z عدد مختلط دلخواهی باشد. به کمک نتایج تمرین ۱۲ نشان دهید که

$$\overline{a_۰ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n} = a_۰ + a_۱ \overline{z} + a_۲ \overline{z}^۲ + \cdots + a_n \overline{z}^n .$$

۱۴. نشان دهید که معادلهٔ $|z - z_۰| = R$ برای دایرهٔ به مرکز $z_۰$ و شعاع R را می‌توان چنین نوشت

$$|z|^۲ - ۲\operatorname{Re}(z\overline{z}_۰) + |z_۰|^۲ = R^۲ .$$

۱۵. با استفاده از عبارات (۶) در بخش ۵ برای $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$ نشان دهید که هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$z^۲ + \overline{z}^۲ = ۲ .$$

۱۶. طی مراحل زیر اثبات جبری برای نابرابری مثلثی (بخش ۴) ارائه دهید

$$|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲| .$$

(الف) نشان دهید که

$$|z_۱ + z_۲|^۲ = (z_۱ + z_۲)(\overline{z}_۱ + \overline{z}_۲) = z_۱\overline{z}_۱ + (z_۱\overline{z}_۲ + \overline{z_۱\overline{z}_۲}) + z_۲\overline{z}_۲ .$$

(ب) بگویید چرا

$$z_۱\overline{z}_۲ + \overline{z_۱\overline{z}_۲} = ۲\operatorname{Re}(z_۱\overline{z}_۲) \leq ۲|z_۱||z_۲| .$$

(ج) با استفاده از نتایج قسمتهای (الف) و (ب) نابرابری زیر را به‌دست آورید

$$|z_۱ + z_۲|^۲ \leq (|z_۱| + |z_۲|)^۲ .$$

و نشان دهید که چگونه نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود.

۶. صورت نمایی

فرض می‌کنیم r و θ مختصات قطبی نقطهٔ (x, y)، متناظر با عدد مختلط ناصفر $z = x + iy$

باشند. چون $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، z را می‌توان به‌صورت قطبی چنین نوشت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,. \tag{۱}$$

اگر $z = ۰$، مختص θ تعریف نشده است؛ لذا وقتی، $\arg z$ مورد نظر باشد، همواره $z \neq ۰$.

در آنالیز مختلط، عدد حقیقی r نمی‌تواند منفی باشد و طول بردار شعاعی برای z است؛ یعنی $r = |z|$. عدد حقیقی θ نمایش زاویه‌ای است برحسب رادیان که z با محور حقیقی مثبت می‌سازد به شرطی که z را به‌صورت یک بردار شعاعی تعبیر کنیم (شکل ۶). مانند حسابان θ دارای تعدادی نامتناهی مقدار ممکن از جمله مقادیر منفی است که تفاضل آنها مضارب صحیحی از ۲π است. این مقادیر را می‌توان از معادلهٔ $\tan\theta = y/x$ معین کرد، که در آن ربع صفحهٔ شامل نقطهٔ متناظر با z باید مشخص شود. هر مقدار θ را یک آوند z می‌نامند و مجموعهٔ همهٔ این مقادیر را به‌صورت $\arg z$ نمایش می‌دهند. مقدار اصلی $\arg z$، که با $\text{Arg } z$ نشان داده می‌شود، مقدار یکتای Θ است به قسمی که $-\pi < \Theta \leq \pi$. توجه کنید که

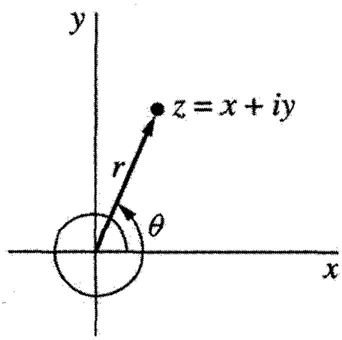
$$\arg z = \text{Arg } z + ۲n\pi \qquad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)\,. \tag{۲}$$

همچنین وقتی z یک عدد حقیقی منفی باشد $\text{Arg } z$ برابر مقدار π است نه $-\pi$.

مثال ۱. عدد مختلط $-۱ - i$، که در ربع سوم واقع است، دارای آوند اصلی $-۳\pi/۴$ است. یعنی،

$$\text{Arg}\,(-۱ - i) = -\frac{۳\pi}{۴};$$

باید تأکید کرد که، به علت محدودیت $-\pi < \Theta \leq \pi$ برای آوند اصلی Θ، نتیجه‌گیری $\text{Arg}\,(-۱ - i) = ۵\pi/۴$ درست نیست.



شکل ۶

به موجب معادلهٔ (۲)

$$\arg(-۱-i) = -\frac{۳\pi}{۴} + ۲n\pi \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

توجه کنید که در سمت راست معادلهٔ (۲) می‌توان هر مقدار خاص $\arg z$ را به‌جای $\operatorname{Arg} z$ قرار داد و مثلاً می‌توان نوشت

$$\arg(-۱-i) = \frac{۵\pi}{۴} + ۲n\pi \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

نماد $e^{i\theta}$ یا $\exp(i\theta)$ با فرمول اویلر به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{۳}$$

که در آن θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از آن می‌توان صورت قطبی (۱) را به صورت نمایی

$$z = re^{i\theta} \tag{۴}$$

جمع و جورتر نوشت. انگیزهٔ انتخاب نماد $e^{i\theta}$ بعداً در بخش ۲۸ گفته خواهد شد. ولی، مورد استفادهٔ آن در بخش ۷ توجیهی بر انتخاب طبیعی آن است.

مثال ۲. عدد $-۱-i$ در مثال ۱ دارای صورت نمایی زیر است

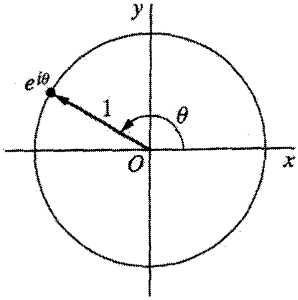
$$-۱-i = \sqrt{۲}\exp\left[i\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)\right]. \tag{۵}$$

با این توافق که $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$، فرمول فوق را به‌صورت $-۱-i = \sqrt{۲}e^{-i۳\pi/۴}$ هم می‌توان نوشت. البته عبارت (۵) فقط یکی از بی‌نهایت صورت نمایی ممکن $-۱-i$ است:

$$-۱-i = \sqrt{۲}\exp\left[i\left(-\frac{۳\pi}{۴} + ۲n\pi\right)\right] \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \tag{۶}$$

توجه کنید چگونه عبارت (۴) با $r = ۱$ بیان می‌کند که اعداد $e^{i\theta}$، همان‌طور که در شکل ۷ نشان‌داده‌شده، بر دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۱ واقع‌اند. پس مقادیر $e^{i\theta}$ بدون مراجعه به فرمول اویلر، از روی شکل مستقیماً به‌دست می‌آیند. مثلاً از نظر هندسی واضح است که

$$e^{i\pi} = -۱, \quad e^{-i\pi/۲} = -i, \quad e^{-i۴\pi} = ۱.$$



شکل ۷

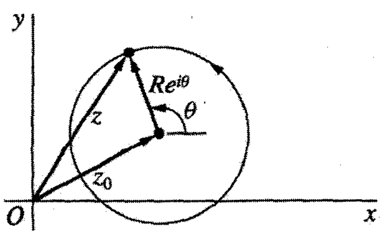
همچنین توجه کنید که معادلهٔ

$$z = Re^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \tag{۷}$$

یک نمایش پارامتری دایرهٔ $|z| = R$ به مرکز مبدأ و شعاع R است. درصورتی که پارامتر θ از 0 تا 2π افزایش یابد، نقطهٔ z با شروع از محور حقیقی مثبت یک دور دایره را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. به‌طور کلیتر، دایرهٔ $|z - z_0| = R$ که مرکز آن z_0 و شعاع آن R است دارای نمایش پارامتری زیر است

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \tag{۸}$$

رابطهٔ (۸) از نظر برداری چنین توجیه می‌شود که نقطهٔ z که دایرهٔ $|z - z_0| = R$ را یک بار در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید متناظر با مجموع بردار ثابت z_0 و برداری به‌طول R است که θ، زاویهٔ شیب آن، از $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$ تغییر می‌کند (شکل ۸).



شکل ۸

۷. صورت نمایی حاصلضرب و خارج‌قسمت

با محاسبات مثلثاتی ساده نتیجه می‌شود که $e^{i\theta}$ دارای ویژگی جمعی معمولی تابع نمایی در حسابان است:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

پس، اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$، حاصلضرب $z_1 z_2$ دارای صورت نمایی زیر است

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{۱}$$

به‌علاوه

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2}e^{-i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{۲}$$

چون $1e^{i0} = 1$، از عبارت (۲) نتیجه می‌شود که وارون هر عدد مختلط ناصفر $z = re^{i\theta}$ برابر است با

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \tag{۳}$$

البته عبارات (۱)، (۲) و (۳) با به‌کار بردن قواعد جبری معمولی برای اعداد حقیقی و e^x به‌آسانی به‌خاطر سپرده می‌شوند.

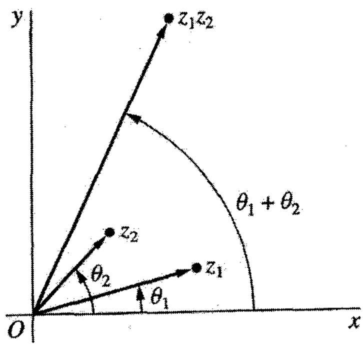
از عبارت (۱) اتحاد مهمی در مورد آوندها نتیجه می‌شود:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{۴}$$

این اتحاد را باید چنین تعبیر کرد که اگر مقادیر دو تا از این سه آوند (چندمقداری) مشخص باشد، آن‌گاه مقداری از سومی موجود است که برای آن رابطهٔ بالا برقرار است.

تحقیق درستی حکم (۴) را با این فرض شروع می‌کنیم که θ_1 و θ_2، به‌ترتیب، نمایش مقادیری از $\arg z_1$ و $\arg z_2$ باشند. در این‌صورت فرمول (۱) بیان می‌کند که $\theta_1 + \theta_2$ مقداری از $\arg(z_1 z_2)$ است (شکل ۹ را ببینید). اگر از طرف دیگر مقادیر $\arg(z_1 z_2)$ و $\arg z_1$ مشخص شده باشند، آن مقادیر با انتخابهای خاصی از n و n_1 در عبارتهای زیر متناظرند

$$\arg(z_1 z_2) = (\theta_1+\theta_2) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$



شکل ۹

و

$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

چون

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi],$$

درصورتی که مقدار

$$\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

انتخاب شود، رابطهٔ (۴) به‌وضوح برقرار است. تحقیق درستی آن وقتی مقادیر $\arg(z_1z_2)$ و $\arg z_2$ مشخص باشند، به قرینه به‌دست می‌آید.

درصورتی که در حکم (۴) همه جا Arg را به‌جای arg قرار دهیم، رابطهٔ حاصل بعضی مواقع برقرار می‌ماند (تمرین ۷ را ببینید). اما همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد همیشه وضع بدین منوال نیست.

مثال ۱. درصورتی که $z_1 = -1$ و $z_2 = i$،

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{اما} \quad \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

ولی اگر این مقادیر به‌کاربرده‌شدهٔ $\arg z_1$ و $\arg z_2$ را انتخاب کنیم و مقدار

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) + 2\pi = \frac{-\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

را برای $\arg(z_1z_2)$ انتخاب کنیم، درمی‌یابیم که رابطهٔ (۴) برقرار است.

از حکم (۴) نتیجه می‌شود که

$$\arg\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right) = \arg(z_۱ z_۲^{-۱}) = \arg z_۱ + \arg(z_۲^{-۱}).$$

و با استفاده از عبارت (۳) می‌توان ثابت کرد که

$$\arg(z_۲^{-۱}) = -\arg z_۲. \tag{۵}$$

بنابراین

$$\arg\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right) = \arg z_۱ - \arg z_۲. \tag{۶}$$

البته حکم (۵) را باید این‌طور تعبیر کرد که مجموعهٔ همهٔ مقادیر سمت چپ همان مجموعهٔ همهٔ مقادیر سمت راست است. پس حکم (۶) را باید به همان روش حکم (۴) تعبیر کرد.

مثال ۲. برای یافتن آوند اصلی $\text{Arg}\ z$ وقتی

$$z = \frac{-۲}{۱ + i\sqrt{۳}},$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\arg z = \arg(-۲) - \arg(۱ + i\sqrt{۳}).$$

چون

$$\text{Arg}(-۲) = \pi \quad \text{و} \quad \text{Arg}(۱ + i\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳},$$

یکی از مقادیر $\arg z$ برابر است با $۲\pi/۳$؛ و به دلیل اینکه $۲\pi/۳$ بین $-\pi$ و π است، درمی‌یابیم که $\text{Arg}\ z = ۲\pi/۳$.

نتیجهٔ مهم دیگری که می‌توان به‌طور صوری با استفاده از قواعد اعداد حقیقی برای $z = re^{i\theta}$ به‌دست آورد عبارت است از

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots), \tag{۷}$$

که درستی آن برای مقادیر مثبت n را می‌توان با استقرای ریاضی تحقیق کرد. به عبارت دقیقتر، ابتدا توجه می‌کنیم که وقتی $n = ۱$ رابطهٔ بالا به $z = re^{i\theta}$ تبدیل می‌شود. سپس فرض می‌کنیم

که برای $n = m$ برقرار باشد، که در آن m عدد صحیح مثبتی است. در این‌صورت با استناد به عبارت (۱) برای صورت نمایی حاصلضرب دو عدد مختلط ناصفر، این فرمول برای $n = m + ۱$ برقرار است:

$$z^{m+۱} = zz^m = re^{i\theta}r^m e^{im\theta} = r^{m+۱}e^{i(m+۱)\theta}.$$

بدین‌ترتیب درستی عبارت (۷) وقتی n عدد صحیح مثبتی باشد تحقیق می‌شود. با این قرارداد که $z^{\circ} = ۱$، این فرمول برای $n = \circ$ نیز برقرار است. از طرف دیگر اگر $n = -۱, -۲, \ldots$، ما z^n را برحسب وارون ضربی z با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$z^n = (z^{-۱})^m \quad \text{که در آن} \quad m = -n = ۱, ۲, \ldots.$$

سپس با توجه به برقراری عبارت (۷) برای توانهای مثبت، از صورت نمایی (۳) برای $z^{-۱}$ نتیجه می‌شود که

$$z^n = \left[\frac{۱}{r}e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{۱}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = \left(\frac{۱}{r}\right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta} \quad (n = -۱, -۲, \ldots)$$

بدین‌ترتیب عبارت (۷) برای همهٔ توانهای صحیح ثابت می‌شود.

ملاحظه کنید که وقتی $r = ۱$ فرمول (۷) به‌صورت زیر در می‌آید

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (n = \circ, \pm۱, \pm۲, \ldots) \tag{۸}$$

که اگر آن را به‌صورت

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (n = \circ, \pm۱, \pm۲, \ldots) \tag{۹}$$

بنویسیم، به فرمول د موآور[1] معروف است.

فرمول (۷) در پیدا کردن توانهای اعداد مختلط مفید است، حتی وقتی که اعداد به‌صورت $(x + yi)$ باشند و نتیجه را به همان صورت خواسته باشند.

مثال ۳. برای نوشتن $(\sqrt{۳} + i)^۷$ به‌صورت $(x + yi)$ فقط باید بنویسیم

$$\left(\sqrt{۳} + i\right)^۷ = (۲e^{i\pi/۶})^۷ = ۲^۷ e^{i۷\pi/۶} = \left(۲^۶ e^{i\pi}\right)\left(۲e^{i\pi/۶}\right) = -۶۴\left(\sqrt{۳} + i\right).$$

1. de Moivre

تمرینها

۱. آوند اصلی $\operatorname{Arg} z$ را پیدا کنید هرگاه

$$\text{(الف)}\quad z = \frac{i}{-۲-۲i};\quad \text{(ب)}\quad z = (\sqrt{۳}-i)^{۶}.$$

جواب: (الف) $-۳\pi/۴$؛ (ب) π.

۲. نشان دهید که (الف) $|e^{i\theta}| = ۱$؛ (ب) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

۳. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که

$$e^{i\theta_۱}e^{i\theta_۲}\ldots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_۱+\theta_۲+\cdots+\theta_n)} \qquad (n = ۲, ۳, \ldots).$$

۴. با استفاده از این امر که قدرمطلق $|e^{i\theta}-۱|$ فاصلهٔ بین نقاط $e^{i\theta}$ و ۱ است (بخش ۴ را ببینید)، برهانی هندسی برای یافتن مقداری از θ در بازهٔ $۰ \le \theta < ۲\pi$ که در معادلهٔ $|e^{i\theta}-۱| = ۲$ صدق می‌کند ارائه دهید.

جواب: π

۵. با استفاده از فرمول د موآور (بخش ۷) اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه بگیرید:

(الف) $\cos ۳\theta = \cos^۳\theta - ۳\cos\theta\sin^۲\theta$؛ (ب) $\sin ۳\theta = ۳\cos^۲\theta\sin\theta - \sin^۳\theta$.

۶. با نوشتن هر یک از عوامل سمت چپ به‌صورت نمایی و انجام اعمال لازم و بالاخره با بازگشت به مختصات قائم نشان دهید که

(الف) $i(۱-i\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+i) = ۲(۱+i\sqrt{۳})$؛

(ب) $۵i/(۲+i) = ۱+۲i$؛

(ج) $(-۱+i)^{۷} = -۸(۱+i)$؛

(د) $(۱+i\sqrt{۳})^{-۱۰} = ۲^{-۱۱}(-۱+i\sqrt{۳})$.

۷. نشان دهید اگر $\operatorname{Re} z_۱ > ۰$ و $\operatorname{Re} z_۲ > ۰$، آن‌گاه

$$\operatorname{Arg}(z_۱z_۲) = \operatorname{Arg} z_۱ + \operatorname{Arg} z_۲,$$

که در آن $\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)$ نمایش مقدار اصلی $\arg(z_۱z_۲)$ است و غیره.

۸. فرض کنید z عدد مختلط ناصفر و n عدد صحیح منفی باشد $(n = -۱, -۲, \ldots)$. همچنین قرار دهید $z = re^{i\theta}$ و $m = -n = ۱, ۲, \ldots$. با استفاده از عبارات

$$z^m = r^m e^{im\theta} \quad \text{و} \quad z^{-۱} = (۱/r)e^{i(-\theta)}$$

تحقیق کنید که $(z^m)^{-۱} = (z^{-۱})^m$ و لذا تعریف $z^n = (z^{-۱})^m$ در بخش ۷ را می‌توان به‌صورت $z^n = (z^m)^{-۱}$ نیز نوشت.

۹. ثابت کنید دو عدد مختلط ناصفر $z_۱$ و $z_۲$ دارای یک قدرمطلق‌اند اگر و فقط اگر اعداد مختلطی مانند $c_۱$ و $c_۲$ باشند که $z_۱ = c_۱c_۲$ و $z_۲ = c_۱\bar{c}_۲$.

راهنمایی: توجه کنید که

$$\exp\left(i\frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲}\right)\exp\left(i\frac{\theta_۱ - \theta_۲}{۲}\right) = \exp(i\theta_۱)$$

و [تمرین ۲ (ب) را ببینید]

$$\exp\left(i\frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲}\right)\overline{\exp\left(i\frac{\theta_۱ - \theta_۲}{۲}\right)} = \exp(i\theta_۲)\,.$$

۱۰. اتحاد زیر را ثابت کنید

$$۱ + z + z^۲ + \cdots + z^n = \frac{۱ - z^{n+۱}}{۱ - z} \qquad (z \neq ۱)$$

و سپس با استفاده از آن، اتحاد مثلثاتی لاگرانژ[1] را نتیجه بگیرید:

$$۱ + \cos\theta + \cos ۲\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{۱}{۲} + \frac{\sin[(۲n + ۱)\theta/۲]}{۲\sin(\theta/۲)} \qquad (۰ < \theta < ۲\pi)\,.$$

راهنمایی: برای اتحاد اول قرار دهید $S = ۱ + z + z^۲ + \cdots + z^n$ و تفاضل $S - zS$ را در نظر بگیرید. برای به‌دست آوردن اتحاد دوم، در اتحاد اول قرار دهید $z = e^{i\theta}$.

۱۱. با استفاده از فرمول دوجمله‌یی (بخش ۳) و فرمول د موآور (بخش ۷) بنویسید

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)\,.$$

1. Lagrange

سپس عدد صحیح m را با ضابطه‌های زیر تعریف کنید

$$m = \begin{cases} n/۲ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ (n-۱)/۲ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

و با استفاده از مجموع بالا فرمول زیر را به‌دست آورید [با تمرین ۵ (الف) مقایسه کنید]

$$\cos n\theta = \sum_{k=۰}^{m} \binom{n}{۲k} (-۱)^k \cos^{n-۲k}\theta \sin^{۲k}\theta \quad (n = ۱, ۲, \ldots).$$

(ب) قرار دهید $x = \cos\theta$ و فرض کنید $۰ \le \theta \le \pi$، در این حالت $-۱ \le x \le ۱$. خاطر نشان سازید که چگونه از نتیجهٔ آخر قسمت (الف) نتیجه می‌شود که هر یک از توابع

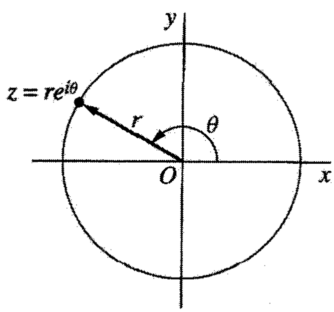
$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-۱} x) \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

یک چندجمله‌یی از درجهٔ n برحسب متغیر x است.*

۸. ریشه‌های اعداد مختلط

نقطهٔ $z = re^{i\theta}$ را که بر دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع r واقع است (شکل ۱۰) در نظر می‌گیریم. اگر θ افزایش یابد، z در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بر دایره حرکت می‌کند. به‌خصوص وقتی θ به اندازهٔ ۲π افزایش یابد، z به نقطهٔ اولیه می‌رسد و اگر به اندازهٔ ۲π کاهش یابد، همین وضع پیش می‌آید. بنابراین از شکل ۱۰ آشکار است که دو عدد مختلط ناصفر

$$z_۱ = r_۱ e^{i\theta_۱} \qquad \text{و} \qquad z_۲ = r_۲ e^{i\theta_۲}$$



شکل ۱۰

* این چندجمله‌ییها را چندجمله‌ییهای چبیشف می‌نامند و در نظریهٔ تقریب مهم‌اند.

برابرند اگر و فقط اگر

$$\theta_۱ = \theta_۲ + ۲k\pi, \quad \text{و} \quad r_۱ = r_۲$$

که در آن k عددی صحیح است $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$.

در نظر داشتن این مطلب و عبارت $z^n = r^n e^{in\theta}$ در بخش ۷ برای توانهای صحیح اعداد مختلط $z = re^{i\theta}$، در پیدا کردن ریشه‌های nام هر عدد مختلط ناصفر $z_۰ = r_۰ e^{i\theta_۰}$ مفید است، که در آن n دارای یکی از مقادیر $n = ۲, ۳, \ldots$ است. روش کار را با ملاحظهٔ این مطلب شروع می‌کنیم که ریشهٔ nام $z_۰$ عدد ناصفری است مانند $z = re^{i\theta}$ به‌طوری که $z^n = z_۰$ یا

$$r^n e^{in\theta} = r_۰ e^{i\theta_۰} .$$

حال، بنابر حکمی که در بالا به‌صورت ایرانیک آمده است،

$$n\theta = \theta_۰ + ۲k\pi \quad \text{و} \quad r^n = r_۰$$

که در آن $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$. بنابراین $r = \sqrt[n]{r_۰}$، که در آن رادیکال معرف ریشهٔ nام مثبت یکتای عدد حقیقی و مثبت $r_۰$ است، و

$$\theta = \frac{\theta_۰ + ۲k\pi}{n} = \frac{\theta_۰}{n} + \frac{۲k\pi}{n} \quad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots) .$$

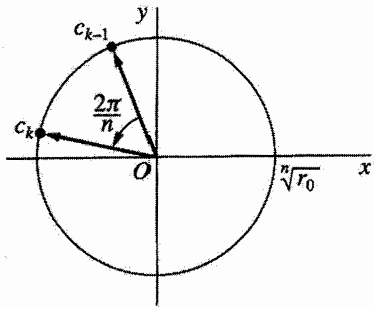
در نتیجه، اعداد مختلط

$$z = \sqrt[n]{r_۰} \exp\left[i\left(\frac{\theta_۰}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

ریشه‌های nام $z_۰$ هستند. از این‌صورت نمایی ریشه‌ها بی‌درنگ می‌توان دید که همهٔ آنها بر دایرهٔ $|z| = \sqrt[n]{r_۰}$ حول مبدأ و به فاصله‌های مساوی در هر $۲\pi/n$ رادیان با شروع از آوند $\theta_۰/n$ قرار دارند. پس بدیهی است که همهٔ ریشه‌های متمایز وقتی $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ به‌دست می‌آیند و از مقادیر دیگر k هیچ ریشهٔ دیگری حاصل نمی‌شود. فرض می‌کنیم c_kها $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱)$ نمایش این ریشه‌های متمایز باشند و می‌نویسیم

$$c_k = \sqrt[n]{r_۰} \exp\left[i\left(\frac{\theta_۰}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱) . \qquad (۱)$$

(شکل ۱۱ را ببینید.)



شکل ۱۱

عدد $\sqrt[n]{r_\circ}$ طول هر یک از بردارهای شعاعی معرف n ریشه است. اولین ریشه یعنی $c_\circ$ دارای آوند $\theta_\circ/n$ است؛ و وقتی $n=۲$ دو ریشه در دو انتهای قطری از دایرهٔ $|z|=\sqrt[n]{r_\circ}$ واقع‌اند، که ریشهٔ دوم $-c_\circ$ است. وقتی $n\geq ۳$ ریشه‌ها در رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در آن دایره واقع‌اند.

فرض می‌کنیم $z_\circ^{۱/n}$ نمایش مجموعهٔ ریشه‌های nام $z_\circ$ باشد. اگر به‌خصوص $z_\circ$ عدد حقیقی مثبتی مانند $r_\circ$ باشد، نماد $r_\circ^{۱/n}$ نمایش مجموعهٔ همهٔ ریشه‌هاست و نماد $\sqrt[n]{r_\circ}$ در عبارت (۱) برای ریشهٔ مثبت یکتا نگهداری می‌شود. در صورتی‌که مقدار $\theta_\circ$ به‌کار برده شده در عبارت (۱) مقدار اصلی $\arg z_\circ$ باشد $(-\pi<\theta_\circ\leq\pi)$، عدد $c_\circ$ را ریشهٔ اصلی می‌نامند. بنابراین وقتی $z_\circ$ عدد حقیقی مثبتی مانند $r_\circ$ باشد، ریشهٔ اصلی آن $\sqrt[n]{r_\circ}$ است.

بالاخره یک روش مناسب برای به خاطر سپردن عبارت (۱) این است که $z_\circ$ را به کلیترین صورت نمایی آن (با مثال ۲ در بخش ۶ مقایسه کنید)

$$z_\circ=r_\circ e^{i(\theta_\circ+۲k\pi)}\qquad(k=\circ,\pm۱,\pm۲,\ldots)\tag{۲}$$

بنویسیم و با در نظر داشتن اینکه دقیقاً n ریشهٔ متمایز موجود است، قوانین نماهای کسری برای اعداد حقیقی را به‌طور صوری به‌کار بریم:

$$\begin{aligned}z_\circ^{۱/n}&=\left[r_\circ e^{i(\theta_\circ+۲k\pi)}\right]^{۱/n}=\sqrt[n]{r_\circ}\,\exp\left[\frac{i(\theta_\circ+۲k\pi)}{n}\right]\\&=\sqrt[n]{r_\circ}\,\exp\left[i\left(\frac{\theta_\circ}{n}+\frac{۲k\pi}{n}\right)\right]\qquad(k=\circ,۱,۲,\ldots,n-۱).\end{aligned}$$

مثالهای بخش بعد در نشان دادن این روش برای یافتن ریشه‌های اعداد مختلط آورده شده‌اند.

۹. چند مثال

در هر یک از مثالهای زیر، با عبارت (۲)، بخش ۸، شروع و با روشی که در انتهای آن بخش ذکر شده عمل می‌کنیم.

مثال ۱. برای تعیین ریشه‌های nام واحد، می‌نویسیم

$$۱ = ۱ \exp[i(۰ + ۲k\pi)] \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

و در می‌یابیم که

$$۱^{۱/n} = \sqrt[n]{۱} \exp\left[i\left(\frac{۰}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right] = \exp\left(i\frac{۲k\pi}{n}\right) \qquad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱). \tag{۱}$$

وقتی $n = ۲$، البته این ریشه‌ها ± ۱ هستند. وقتی $n \geq ۳$، ریشه‌ها بر رئوس چندضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد $|z| = ۱$، با یک رأس متناظر با ریشهٔ اصلی $z = ۱$ $(k = ۰)$ قرار دارند.

اگر بنویسیم

$$\omega_n = \exp\left(i\frac{۲\pi}{n}\right), \tag{۲}$$

از ویژگی (۸) بخش ۷ دربارهٔ $e^{i\theta}$ نتیجه می‌شود که

$$\omega_n^k = \exp\left(i\frac{۲k\pi}{n}\right) \qquad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱).$$

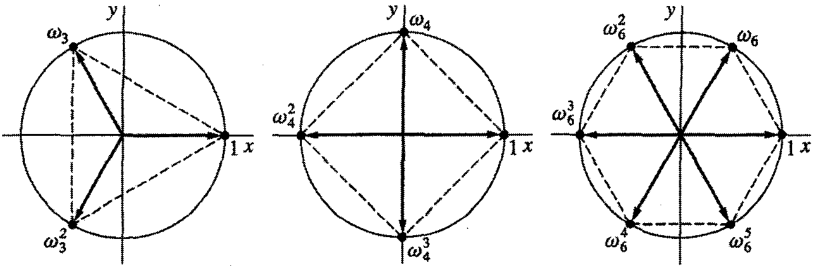
بنابراین ریشه‌های متمایز nام واحد که پیدا کردیم عبارت‌اند از

$$۱, \omega_n, \omega_n^۲, \ldots, \omega_n^{n-۱}.$$

شکل ۱۲ را ببینید، که در آن حالتهای $n = ۳, ۴, ۶$ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که $\omega_n^n = ۱$. بالاخره توجه به این نکته بجاست که اگر c ریشهٔ nام خاصی از عدد مختلط ناصفر $z_۰$ باشد، مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های nام را می‌توان چنین نوشت

$$c, c\omega_n, c\omega_n^۲, \ldots, c\omega_n^{n-۱}.$$

زیرا ضرب هر عدد مختلط ناصفر در ω_n، آوند آن عدد را به اندازهٔ $۲\pi/n$ افزایش می‌دهد، درحالی‌که قدرمطلق آن را تغییر نمی‌دهد.



شکل ۱۲

مثال ۲. برای یافتن همهٔ مقادیر $(-۸i)^{۱/۳}$، یا سه ریشهٔ سوم $-۸i$، فقط کافی است بنویسیم

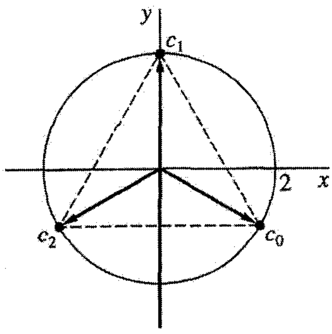
$$-۸i = ۸\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi\right)\right] \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

تا مشاهده کنیم که ریشه‌های مطلوب عبارت‌اند از

$$c_k = ۲\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{۶} + \frac{۲k\pi}{۳}\right)\right] \qquad (k = ۰, ۱, ۲). \tag{۳}$$

این ریشه‌ها در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی واقع‌اند که در دایرهٔ $|z| = ۲$ محاط است و بر پیرامون آن دایره به فاصله‌های مساوی در هر $۲\pi/۳$ رادیان، با شروع از ریشهٔ اصلی، واقع‌اند (شکل ۱۳)

$$c_۰ = ۲\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\right] = ۲\left(\cos\frac{\pi}{۶} - i\sin\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳} - i\,.$$



شکل ۱۳

پس بدون هیچ محاسبهٔ دیگر، بدیهی است که $c_۱ = ۲i$ و چون $c_۲$ قرینهٔ $c_۰$ نسبت به محور موهومی است، می‌دانیم که $c_۲ = -\sqrt{۳} - i$.

البته این ریشه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$c_۰,\ c_۰\omega_۳,\ c_۰\omega_۳^۲ \qquad \text{که در آنها} \qquad \omega_۳ = \exp\left(i\frac{۲\pi}{۳}\right).$$

(توضیحات آخر مثال ۱ را ببینید.)

مثال ۳. دو مقدار c_k $(k = ۰, ۱)$ برای $(\sqrt{۳} + i)^{۱/۲}$ که ریشه‌های دوم $\sqrt{۳} + i$ هستند با نوشتن

$$\sqrt{۳} + i = ۲\exp\left[i\left(\frac{\pi}{۶} + ۲k\pi\right)\right] \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

پیدا می‌شوند و (شکل ۱۴ را ببینید)

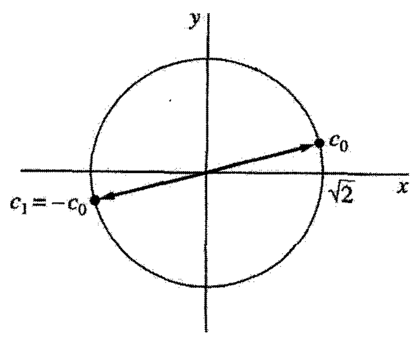
$$c_k = \sqrt{۲}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{۱۲} + k\pi\right)\right] \qquad (k = ۰, ۱). \tag{۴}$$

از فرمول اویلر (بخش ۶) نتیجه می‌شود که

$$c_۰ = \sqrt{۲}\exp\left(i\frac{\pi}{۱۲}\right) = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right),$$

و با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\cos^۲\left(\frac{\alpha}{۲}\right) = \frac{۱ + \cos\alpha}{۲}, \qquad \sin^۲\left(\frac{\alpha}{۲}\right) = \frac{۱ - \cos\alpha}{۲} \tag{۵}$$



شکل ۱۴

می‌توان نوشت

$$\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\left(۱+\cos\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴},$$

$$\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}.$$

در نتیجه

$$c_{۰}=\sqrt{۲}\left(\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}}+i\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+i\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right).$$

چون $c_{۱}=-c_{۰}$، پس ریشه‌های دوم $\sqrt{۳}+i$ عبارت‌اند از

$$\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+i\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right).$$

تمرینها

۱. ریشه‌های دوم (الف) $۲i$؛ (ب) $۱-i\sqrt{۳}$ را پیدا کنید و آنها را در مختصات قائم بیان کنید.

جواب: (الف) $\pm(۱+i)$؛ (ب) $\pm\dfrac{\sqrt{۳}-i}{\sqrt{۲}}$.

۲. در هر حالت، همهٔ ریشه‌ها را در مختصات قائم پیدا کنید و آنها را به‌طور هندسی با رأسهای یک مربع نمایش دهید و مشخص کنید که کدام‌یک ریشهٔ اصلی است:

(الف) $(-۱۶)^{۱/۴}$؛ (ب) $(-۸-۸i\sqrt{۳})^{۱/۴}$.

جواب: (الف) $\pm\sqrt{۲}(۱+i), \pm\sqrt{۲}(۱-i)$؛ (ب) $\pm(۱+i\sqrt{۳}), \pm(\sqrt{۳}-i)$.

۳. در هر حالت، همهٔ ریشه‌ها را در مختصات قائم پیدا کنید و آنها را به‌طور هندسی با رأسهای یک چندضلعی منتظم نمایش دهید و مشخص کنید که کدام‌یک ریشهٔ اصلی است:

(الف) $(-۱)^{۱/۳}$؛ (ب) $۸^{۱/۶}$.

جواب: (ب) $\pm\sqrt{۲}$، $\pm\dfrac{۱+i\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$، $\pm\dfrac{۱-i\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$

۴. بنابر مثال ۱ بخش ۹، سه ریشهٔ سوم عدد مختلط ناصفر $z_۰$ را می‌توان به‌صورت $c_۰$، $c_۰\omega_۳$، $c_۰\omega_۳^۲$ نوشت که در آنها $c_۰$ ریشهٔ سوم اصلی $z_۰$ است و

$$\omega_۳ = \exp\left(i\frac{۲\pi}{۳}\right) = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}.$$

نشان دهید اگر $z_۰ = -۴\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}i$، آن‌گاه $c_۰ = \sqrt{۲}(۱+i)$ و دو ریشهٔ سوم دیگر، در مختصات قائم، عبارت‌اند از اعداد

$$c_۰\omega_۳ = \frac{-(\sqrt{۳}+۱)+(\sqrt{۳}-۱)i}{\sqrt{۲}}, \qquad c_۰\omega_۳^۲ = \frac{(\sqrt{۳}-۱)-(\sqrt{۳}+۱)i}{\sqrt{۲}}.$$

۵. (الف) فرض کنید a عدد حقیقی ثابتی باشد. نشان دهید که دو ریشهٔ دوم $a+i$ عبارت‌اند از

$$\pm\sqrt{A}\exp\left(i\frac{\alpha}{۲}\right),$$

که در آن $A = \sqrt{a^۲+۱}$ و $\alpha = \operatorname{Arg}(a+i)$.

(ب) به کمک اتحادهای مثلثاتی رابطهٔ (۵) از مثال ۳ بخش ۹ نشان دهید که ریشه‌های دوم حاصل در قسمت (الف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}\right).$$

[توجه کنید که این نتیجهٔ نهایی مثال ۳ بخش ۹ است وقتی $a = \sqrt{۳}$.]

۶. چهار ریشهٔ معادلهٔ $z^۴+۴ = ۰$ را بیابید و با استفاده از آنها $z^۴+۴$ را به عوامل درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید.

جواب: $(z^۲+۲z+۲)(z^۲-۲z+۲)$.

۷. نشان دهید اگر c هر یک از ریشه‌های nام واحد به غیر از خود یک باشد، آن‌گاه

$$۱+c+c^۲+\cdots+c^{n-۱} = ۰.$$

راهنمایی: از اولین اتحاد تمرین ۱۰، بخش ۷، استفاده کنید.

۸. (الف) ثابت کنید که معادلهٔ درجهٔ دوم

$$az^۲+bz+c = ۰ \qquad (a \neq ۰)$$

وقتی ضرایب a، b و c اعداد مختلط‌اند با همان فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم معمولی حل می‌شود. به عبارت صریحتر، با مربع کامل کردن سمت چپ فرمول زیر را به‌دست آورید

$$z = \frac{-b + (b^۲ - ۴ac)^{۱/۲}}{۲a},$$

که اگر $b^۲ - ۴ac \neq ۰$ باید هر دو ریشهٔ دوم را در نظر گرفت.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) ریشه‌های معادلهٔ $z^۲ + ۲z + (۱ - i) = ۰$ را بیابید.

جواب: (ب) $\frac{i}{\sqrt{۲}} + \left(-۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$، $-\frac{i}{\sqrt{۲}} + \left(-۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$.

۹. فرض کنید $z = re^{i\theta}$ عدد مختلط ناصفر و n عدد صحیح منفی باشد ($n = -۱, -۲, \ldots$). سپس $z^{۱/n}$ را با ضابطهٔ $z^{۱/n} = (z^{-۱})^{۱/m}$ تعریف کنید، که در آن $m = -n$. با نشان دادن اینکه m مقدار $(z^{۱/m})^{-۱}$ و $(z^{-۱})^{۱/m}$ یکی هستند، تحقیق کنید که $z^{۱/n} = (z^{۱/m})^{-۱}$. (با تمرین ۸ بخش ۷ مقایسه کنید.)

۱۰. نواحی در صفحهٔ مختلط

در این بخش با مجموعه‌هایی از اعداد مختلط، یا نقاط صفحهٔ z، و نزدیکی آنها به یکدیگر سروکار داریم. ابزار اصلی ما مفهوم εـ‌همسایگی

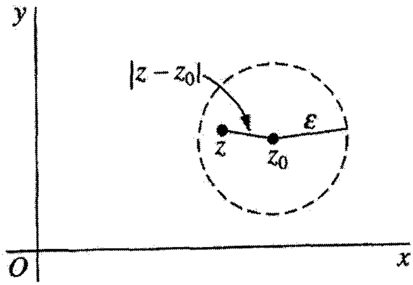
$$|z - z_۰| < \varepsilon \tag{۱}$$

از نقطهٔ مفروض $z_۰$ است که متشکل از همهٔ نقاط z واقع در داخل اما نه روی دایرهٔ به مرکز $z_۰$ و با شعاع مثبت و مشخص ε می‌باشد (شکل ۱۵). اگر در بحث ما مقدار ε معلوم یا بی‌اهمیت باشد، اغلب به مجموعهٔ (۱) همسایگی گفته می‌شود. گاهی مناسب است که از همسایگی محذوف

$$۰ < |z - z_۰| < \varepsilon \tag{۲}$$

صحبت کنیم که متشکل از همهٔ نقاط یک εـ‌همسایگی $z_۰$ بجز خود نقطهٔ $z_۰$ است.

نقطهٔ $z_۰$ را نقطهٔ داخلی مجموعهٔ S می‌نامیم هرگاه همسایگی‌ای از $z_۰$ موجود باشد که فقط شامل نقاطی از S باشد؛ $z_۰$ را نقطهٔ خارجی S می‌نامیم هرگاه همسایگی‌ای از آن موجود باشد که هیچ نقطهٔ S را در بر نداشته باشد. اگر $z_۰$ هیچکدام از اینها نباشد، یک نقطهٔ مرزی S است. بنابراین، نقطهٔ مرزی نقطه‌ای است که هر همسایگی‌اش شامل نقاطی در S و نیز نقاطی در



شکل ۱۵

خارج S باشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی را مرز S می‌نامند. مثلاً دایرهٔ $|z| = ۱$ مرز هر یک از مجموعه‌های زیر است

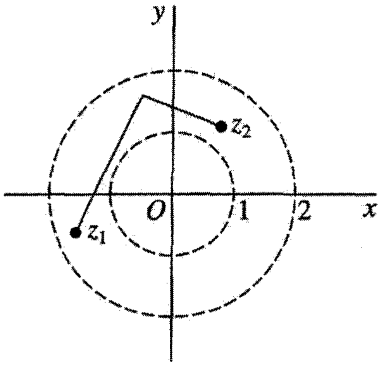
$$|z| < ۱ \quad \text{و} \quad |z| \le ۱. \tag{۳}$$

یک مجموعه باز است اگر شامل هیچیک از نقاط مرزی خود نباشد. این را به‌عنوان تمرین گذاشته‌ایم تا نشان دهید که یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر هر یک از نقاطش نقطهٔ داخلی باشد. یک مجموعه بسته است اگر شامل همهٔ نقاط مرزی خود باشد، و بستار مجموعهٔ S مجموعهٔ بسته‌ای است متشکل از همهٔ نقاط S و نقاط مرزی S. توجه کنید که از مجموعه‌های (۳) اولی باز و دومی بستار هر دوی آن مجموعه‌هاست.

البته بعضی مجموعه‌ها نه بازند و نه بسته. برای اینکه مجموعه‌ای باز نباشد باید یک نقطهٔ مرزی موجود باشد که متعلق به مجموعه است؛ و اگر یک مجموعه بسته نباشد نقطه‌ای مرزی هست که متعلق به مجموعه نیست. ملاحظه می‌کنید که قرص محذوف $۰ < |z| \le ۱$ قرص سوراخ‌دار نه باز است و نه بسته. از طرف دیگر چون مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط هیچ نقطهٔ مرزی ندارد هم باز است و هم بسته.

یک مجموعهٔ باز S همبند است اگر هر زوج از نقاط آن را بتوان با یک خط شکسته، متشکل از تعدادی متناهی پاره‌خط راست، که کاملاً در S واقع است به هم وصل کرد. مجموعهٔ باز $|z| < ۱$ همبند است. البته طوق $۱ < |z| < ۲$ باز و همچنین همبند است (شکل ۱۶). یک مجموعهٔ باز را که همبند باشد، حوزه می‌نامند. توجه کنید که هر همسایگی یک حوزه است. به یک حوزه همراه با بعضی، هیچیک، یا همهٔ نقاط مرزی آن، ناحیه اطلاق می‌شود.

مجموعه S کراندار است اگر دایره‌ای مانند $|z| = R$ موجود باشد به قسمی که هر نقطهٔ S درون این دایره واقع باشد؛ در غیر این‌صورت S بیکران است. هر دو مجموعهٔ (۳) نواحی کراندارند. و نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re} z \ge ۰$ بیکران است.



شکل ۱۶

بالاخره نقطهٔ $z_\circ$ را نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ S نامند اگر هر همسایگی محذوف $z_\circ$ شامل حداقل یک نقطهٔ S باشد. در نتیجه اگر مجموعهٔ S بسته باشد، شامل هر یک از نقاط انباشتگی خود است. زیرا اگر نقطهٔ انباشتگی $z_\circ$ در S نباشد نقطهٔ مرزی S خواهد بود؛ اما این مطلب با اینکه یک مجموعهٔ بسته شامل همهٔ نقاط مرزی خود است تناقض دارد. این را به‌عنوان تمرین گذاشته‌ایم تا نشان دهید که عکس این مطلب نیز درست است. بنابراین یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل هر یک از نقاط انباشتگی‌اش باشد.

بدیهی است که نقطهٔ $z_\circ$ نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ S نیست هرگاه همسایگی محذوفی از $z_\circ$ موجود باشد که شامل نقاطی از S نباشد. توجه کنید که مبدأ تنها نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ $z_n = i/n \; (n = ۱, ۲, \ldots)$ است.

تمرینها

۱. مجموعه‌های زیر را با شکل نمایش دهید و تعیین کنید کدام‌یک از آنها حوزه‌اند:

(الف) $|z - ۲ + i| \leq ۱$؛ (ب) $|۲z + ۳| > ۴$؛

(ج) $\mathrm{Im}\, z > ۱$؛ (د) $\mathrm{Im}\, z = ۱$؛

(ه) $\circ \leq \arg z \leq \pi/۴ \; (z \neq \circ)$؛ (و) $|z - ۴| \geq |z|$.

جواب: (ب) و (ج) حوزه‌اند.

۲. کدام‌یک از مجموعه‌های تمرین ۱ نه بازند و نه بسته؟

جواب: (ه).

۳. کدام‌یک از مجموعه‌های تمرین ۱ کراندارند؟

جواب: (الف).

۴. در هر یک از حالتهای زیر، بستار مجموعه را با شکل نمایش دهید:

(الف) $-\pi < \arg z < \pi \quad (z \neq ۰)$؛ (ب) $|\mathrm{Re}\ z| < |z|$؛

(ج) $\mathrm{Re}\left(\frac{۱}{z}\right) \leq \frac{۱}{۲}$؛ (د) $\mathrm{Re}\,(z^{۲}) > ۰$.

۵. فرض کنید S مجموعهٔ باز متشکل از همهٔ نقاط zی باشد که $|z| < ۱$ یا $|z - ۲| < ۱$. نشان دهید چرا S همبند نیست.

۶. نشان دهید که مجموعهٔ S باز است اگر و فقط اگر هر نقطهٔ S یک نقطهٔ داخلی باشد.

۷. نقاط انباشتگی هر یک از مجموعه‌های زیر را معین کنید.

(الف) $z_n = i^n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$؛

(ب) $z_n = i^n/n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$؛

(ج) $۰ \leq \arg z < \pi/۲ \quad (z \neq ۰)$؛

(د) $z_n = (-۱)^n (۱ + i)\frac{(n-۱)}{n} \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$.

جواب: (الف) ندارد؛ (ب) ۰؛ (د) $\pm(۱ + i)$.

۸. ثابت کنید که اگر مجموعه‌ای شامل هر یک از نقاط انباشتگی خود باشد باید مجموعهٔ بسته‌ای باشد.

۹. نشان دهید که هر نقطهٔ $z_۰$ از یک حوزه، یک نقطهٔ انباشتگی آن حوزه است.

۱۰. نشان دهید که یک مجموعهٔ متناهی از نقاط $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n نمی‌تواند هیچ نقطهٔ انباشتگیی داشته باشد.

۲

توابع تحلیلی

حال توابع یک متغیرۀ مختلط را در نظر می‌گیریم و یک نظریۀ مشتقگیری برای آنها ارائه می‌دهیم. در این فصل هدف اصلی ما معرفی توابع تحلیلی است که نقشی اساسی در آنالیز مختلط دارند.

۱۱. توابع یک متغیرۀ مختلط

فرض کنیم S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. تابع f که بر S تعریف شده عبارت از قاعده‌ای است که به هر z در S عدد مختلطی مانند w را نسبت می‌دهد. عدد w را مقدار f در z می‌نامند و با $f(z)$ نمایش می‌دهند؛ یعنی $w = f(z)$. مجموعۀ S، حوزۀ تعریف f نامیده می‌شود.*

باید تأکید کرد برای اینکه تابعی خوشتعریف باشد باید هم حوزۀ تعریف داشته باشد و هم ضابطه. قرار می‌گذاریم که وقتی حوزۀ تعریف ذکر نشده باشد آن را بزرگترین مجموعۀ ممکن بگیریم. همچنین استفاده از نمادی که بین تابع و مقادیرش فرق بگذارد هیچ مناسب نیست.

* گرچه حوزۀ تعریف اغلب به‌صورتی‌که در بخش ۱۰ تعریف شد یک حوزه است ولی لازم نیست که حوزه باشد.

مثال ۱. اگر f روی مجموعهٔ $z \neq \circ$ با معادلهٔ $w = \text{۱}/z$ تعریف شده باشد، از آن به‌عنوان تابع $w = \text{۱}/z$ یا صرفاً تابع $\text{۱}/z$ نام می‌برند.

فرض کنید که $w = u + iv$ مقدار تابع f در $z = x + iy$ باشد، یعنی

$$u + iv = f(x + iy)\,.$$

هر یک از اعداد حقیقی u و v به متغیرهای حقیقی x و y بستگی دارد و در نتیجه $f(z)$ را می‌توان برحسب یک زوج تابع حقیقی‌ـمقدار از متغیرهای حقیقی x و y نوشت:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)\,. \qquad (\text{۱})$$

اگر به‌جای x و y از مختصات قطبی r و θ استفاده شود، آن‌گاه

$$u + iv = f(re^{i\theta}),$$

که در آن $w = u + iv$ و $z = re^{i\theta}$. در این حالت می‌توان نوشت

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)\,. \qquad (\text{۲})$$

مثال ۲. اگر $f(z) = z^{\text{۲}}$، آن‌گاه

$$f(x + iy) = (x + iy)^{\text{۲}} = x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} + i\text{۲}xy\,.$$

بنابراین

$$u(x, y) = x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} \quad \text{و} \quad v(x, y) = \text{۲}xy\,.$$

درصورتی‌که از مختصات قطبی استفاده شود،

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^{\text{۲}} = r^{\text{۲}}e^{i\text{۲}\theta} = r^{\text{۲}}\cos\text{۲}\theta + ir^{\text{۲}}\sin\text{۲}\theta\,.$$

در نتیجه

$$u(r, \theta) = r^{\text{۲}}\cos\text{۲}\theta \quad \text{و} \quad v(r, \theta) = r^{\text{۲}}\sin\text{۲}\theta\,.$$

اگر در معادلهٔ (۱) یا (۲) تابع v همیشه صفر باشد، مقدار f همیشه حقیقی است. یعنی f یک تابع حقیقی‌ـمقدار از یک متغیر مختلط است.

مثال ۳. تابع حقیقی-مقداری که بعداً در این فصل برای نشان‌دادن برخی مفاهیم مهم از آن استفاده می‌شود تابع زیر است:

$$f(z) = |z|^۲ = x^۲ + y^۲ + i۰ .$$

اگر n، صفر یا عدد صحیح مثبتی باشد و اگر $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعداد مختلط ثابتی باشند، که در آن $a_n \neq ۰$، تابع

$$P(z) = a_۰ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n$$

یک چندجمله‌یی از درجهٔ n است. توجه کنید که این مجموع دارای تعدادی متناهی جمله است و حوزهٔ تعریف آن تمام صفحهٔ z است. خارج‌قسمتهای چندجمله‌ییها، $P(z)/Q(z)$، را توابع گویا می‌نامند و در هر نقطهٔ z که $Q(z) \neq ۰$ تعریف شده‌اند. چندجمله‌ییها و توابع گویا رده‌هایی مقدماتی، ولی مهم، از توابع یک متغیرهٔ مختلط را تشکیل می‌دهند.

یک تعمیم مفهوم تابع، قاعده‌ای است که به هر نقطهٔ z از حوزهٔ تعریف بیش از یک مقدار نسبت می‌دهد. در نظریهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط درست مثل متغیرهای حقیقی، این توابع چندمقداری وجود دارند. در مطالعهٔ توابع چندمقداری معمولاً به روشی نظام‌مند در هر نقطه یکی از مقادیر ممکنی را که به آن نسبت داده شده است انتخاب می‌کنند و از روی تابع چندمقداری یک تابع (تک‌مقداری) می‌سازند.

مثال ۴. فرض می‌کنیم z نمایش عدد مختلط ناصفری باشد. با توجه به بخش ۸ می‌دانیم که $z^{۱/۲}$ دارای دو مقدار

$$z^{۱/۲} = \pm\sqrt{r}\exp\left(i\frac{\Theta}{۲}\right),$$

است که در آن $r = |z|$ و $\Theta\,(-\pi < \Theta \leq \pi)$ مقدار اصلی $\arg z$ است. اما اگر فقط مقدار مثبت $\pm\sqrt{r}$ را بگیریم و بنویسیم

$$f(z) = \sqrt{r}\exp\left(i\frac{\Theta}{۲}\right) \qquad (r > ۰, -\pi < \Theta \leq \pi), \tag{۳}$$

تابع (تک‌مقداری) (۳) روی مجموعهٔ اعداد ناصفر در صفحهٔ مختلط خوشتعریف است. چون صفر تنها ریشهٔ دوم صفر است، می‌نویسیم $f(۰) = ۰$. در این‌صورت تابع f در تمام صفحه خوشتعریف است.

تمرینها

۱. برای هر یک از توابع زیر، حوزهٔ تعریفی را که از صورت مسأله درک می‌شود مشخص کنید.

(الف) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$؛ (ب) $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$؛

(ج) $f(z) = \dfrac{z}{z+\overline{z}}$؛ (د) $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$.

جواب: (الف) $z \neq \pm i$؛ (ج) $\operatorname{Re} z \neq 0$.

۲. تابع $f(z) = z^3 + z + 1$ را به‌صورت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بنویسید.

جواب: $(x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

۳. فرض کنید $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$، که در آن $z = x + iy$. با استفاده از این واقعیت که (بخش ۵)

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$f(z)$ را برحسب z بیان و نتیجه را خلاصه کنید.

جواب: $\overline{z}^2 + 2iz$.

۴. تابع

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

را به شکل $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ بنویسید.

جواب: $\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$.

۱۲. نگاشت

ویژگیهای تابع حقیقی‌ـمقدار از یک متغیر حقیقی اغلب به‌وسیلهٔ نمودار تابع نمایانده می‌شود. اما وقتی $w = f(z)$، که در آن z و w مختلط‌اند، چنین نمایش نموداری مناسبی از f در دست نیست زیرا هر یک از اعداد z و w نه بر یک خط بلکه در یک صفحه واقع‌اند. با وجود این، می‌توانیم با نشان‌دادن زوج نقاط متناظر $z = (x,y)$ و $w = (u,v)$ اطلاعاتی از تابع را آشکار سازیم. برای این کار عموماً ساده‌تر است که صفحات z و w را جداگانه رسم کنیم.

وقتی تابع f به این صورت در نظر گرفته می‌شود اغلب به آن نگاشت یا تبدیل می‌گویند. تصویر نقطهٔ z، از حوزهٔ تعریف S، نقطهٔ $w = f(z)$ است و مجموعهٔ تصویرهای همهٔ نقاط واقع

در مجموعهٔ T، که مشمول در S است، تصویر T نامیده می‌شود. تصویر تمام حوزهٔ تعریف S برد f نامیده می‌شود. تصویر وارون نقطهٔ w مجموعهٔ همهٔ نقاط z در مجموعهٔ S است که دارای تصویر w هستند. تصویر وارون یک نقطه ممکن است شامل یک نقطه یا چند نقطه باشد و یا اصلاً شامل هیچ نقطه‌ای نباشد. البته حالت اخیر وقتی پیش می‌آید که w در برد f نباشد.

اصطلاحاتی از قبیل انتقال، دوران و بازتابی برای رساندن مشخصه‌های عمدهٔ هندسی برخی نگاشتها به‌کار می‌روند. در چنین حالاتی بعضی مواقع مناسب است که صفحات z و w را یکی بگیریم. مثلاً، نگاشت

$$w = z + ۱ = (x + ۱) + iy,$$

را که در آن $z = x + iy$، می‌توان به‌عنوان انتقال هر نقطهٔ z به اندازهٔ یک واحد به راست پنداشت. چون $i = e^{i\pi/۲}$، نگاشت

$$w = iz = r \exp\left[i\left(\theta + \frac{\pi}{۲}\right)\right],$$

که در آن $z = re^{i\theta}$، بردار شعاعی هر نقطهٔ ناصفر z را به اندازهٔ یک زاویهٔ قائمه حول مبدأ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخاند و نگاشت

$$w = \overline{z} = x - iy$$

هر نقطهٔ $z = x + iy$ را به قرینهٔ آن نسبت به محور حقیقی تبدیل می‌کند.

معمولاً ترسیم تصاویر منحنیها و نواحی نسبت به تصاویر تک‌تک نقاط اطلاعات بیشتری را نشان می‌دهد. در مثالهای زیر این موضوع را با تبدیل $w = z^۲$ نشان می‌دهیم.

با پیداکردن تصاویر بعضی منحنیها در صفحهٔ z شروع می‌کنیم.

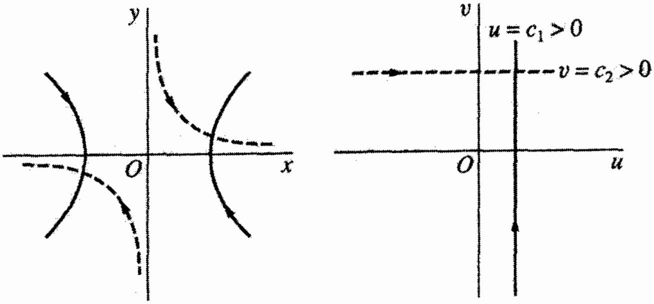
مثال ۱. بنابر مثال ۲ بخش ۱۱ نگاشت $w = z^۲$ را می‌توان به‌عنوان تبدیل

$$u = x^۲ - y^۲ \quad , \quad v = ۲xy \qquad (۱)$$

از صفحهٔ xy به‌توی صفحهٔ uv در نظر گرفت. این صورت نگاشت، به‌خصوص دریافتن تصاویر برخی هذلولیها مفید است.

مثلاً، به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر شاخهٔ هذلولی

$$x^۲ - y^۲ = c_۱ \quad (c_۱ > ۰) \qquad (۲)$$



شکل ۱۷

$w=z^{۲}$

به روشی یک‌به‌یک به روی خط قائم $u=c_۱$ نگاشته می‌شود. از اینجا شروع می‌کنیم که اگر (x,y) نقطه‌ای واقع بر یکی از شاخه‌ها باشد، آن‌گاه بنابر اولین رابطه از روابط (۱) داریم $u=c_۱$، به‌خصوص وقتی که نقطه روی شاخهٔ سمت راست باشد، بنابر دومین رابطه از روابط (۱) داریم $v=۲y\sqrt{y^۲+c_۱}$. بنابراین تصویر شاخهٔ سمت راست را می‌توان به‌صورت پارامتری زیر بیان کرد

$$u=c_۱, \quad v=۲y\sqrt{y^۲+c_۱} \quad (-\infty<y<\infty),$$

و بدیهی است که وقتی نقطهٔ (x,y) آن شاخه را در جهت بالا بپیماید تصویر (x,y) در امتداد خط رو به بالا می‌رود (شکل ۱۷). همین‌طور چون دو رابطهٔ

$$u=c_۱, \quad v=-۲y\sqrt{y^۲+c_۱} \quad (-\infty<y<\infty)$$

نمایش پارامتری برای تصویر شاخهٔ سمت چپ هذلولی است، می‌توان دید که وقتی نقطه در امتداد شاخهٔ سمت چپ پایین می‌آید تصویرش در امتداد خط $u=c_۱$ بالا می‌رود.

از طرف دیگر هر شاخهٔ هذلولی

$$۲xy=c_۲ \quad (c_۲>۰) \tag{۳}$$

همان‌طور که در شکل ۱۷ نشان داده شده است به خط $v=c_۲$ تبدیل می‌شود. برای تحقیق درستی این مطلب از دومین رابطه از روابط (۱) نتیجه می‌شود که اگر (x,y) روی هر یک از شاخه‌ها باشد، $v=c_۲$. فرض کنید (x,y) روی شاخهٔ واقع در ربع اول باشد. پس از آنجا که

$y = c_۲/(۲x)$ اولین رابطه از روابط (۱) نشان می‌دهد که تصویر شاخه دارای نمایش پارامتری زیر است

$$u = x^۲ - \frac{c_۲^۲}{۴x^۲}, \quad v = c_۲ \quad (۰ < x < \infty)$$

ملاحظه می‌کنید که

$$\lim_{\substack{x \to ۰ \\ x > ۰}} u = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} u = \infty.$$

چون u به‌طور پیوسته وابسته به x است، پس به‌وضوح دیده می‌شود که وقتی (x, y) تمام شاخهٔ بالایی هذلولی (۳) را به پایین بپیماید، تصویرش در امتداد تمام خط افقی $v = c_۲$ به طرف راست حرکت می‌کند. چون تصویر شاخهٔ پایینی دارای نمایش پارامتری

$$u = \frac{c_۲^۲}{۴y^۲} - y^۲, \quad v = c_۲ \quad (-\infty < y < ۰)$$

است و چون

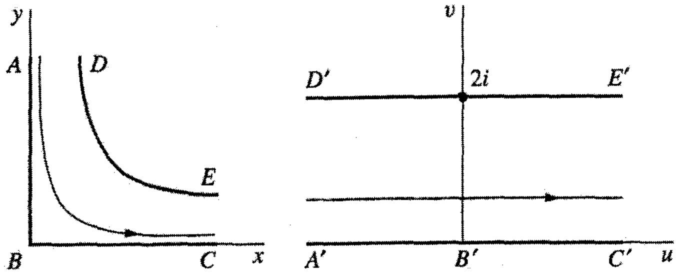
$$\lim_{y \to -\infty} u = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{y \to ۰ \\ y < ۰}} u = \infty،$$

در نتیجه تصویر نقطه‌ای که تمام شاخهٔ پایینی را به طرف بالا بپیماید نیز تمام خط $v = c_۲$ را به طرف راست می‌پیماید (شکل ۱۷ را ببینید).

حال مثال ۱ را برای یافتن تصویر یک ناحیه به‌کار می‌بریم.

مثال ۲. حوزهٔ $x > ۰$، $y > ۰$، $xy < ۱$ مرکب از همهٔ نقاط واقع بر شاخه‌های بالایی هذلولیهای $۲xy = c$ است، که در آنها $۰ < c < ۲$ (شکل ۱۸). با توجه به مثال ۱ می‌دانیم که اگر نقطه‌ای تمام یکی از این شاخه‌ها را به طرف پایین بپیماید، تصویرش تحت تبدیل $w = z^۲$ تمام خط $v = c$ را به طرف راست می‌پیماید. چون به‌ازای همهٔ مقادیر c بین ۰ و ۲ این شاخه‌ها حوزهٔ $x > ۰$، $y > ۰$، $xy < ۱$ را پر می‌کنند این حوزه به روی نوار افقی $۰ < v < ۲$ نگاشته می‌شود.

بنابر روابط (۱) تصویر هر نقطهٔ $(۰, y)$ در صفحهٔ z عبارت است از $(-y^۲, ۰)$. بنابراین وقتی $(۰, y)$ در امتداد محور yها رو به پایین به مبدأ برسد تصویر آن در صفحهٔ w در امتداد محور uهای منفی به طرف راست حرکت می‌کند و به مبدأ می‌رسد. از آنجا که تصویر نقطهٔ $(x, ۰)$ نقطهٔ $(x^۲, ۰)$ است وقتی $(x, ۰)$ از مبدأ در امتداد محور xها به طرف راست حرکت می‌کند، تصویر آن از مبدأ در امتداد محور u به طرف راست حرکت می‌کند. تصویر شاخهٔ بالایی هذلولی



شکل ۱۸

$w = z^{۲}$

$xy = ۱$ البته خط افقی $v = ۲$ است. پس همان‌طور که در شکل ۱۸ نشان داده شده است ناحیهٔ بستهٔ $x \geq ۰$، $y \geq ۰$، $xy \leq ۱$ به روی نوار بستهٔ $۰ \leq v \leq ۲$ نگاشته می‌شود.

آخرین مثال نشان می‌دهد که چگونه مختصات قطبی می‌تواند در تجزیه و تحلیل برخی نگاشتها مفید باشد.

مثال ۳. نگاشت $w = z^{۲}$ به

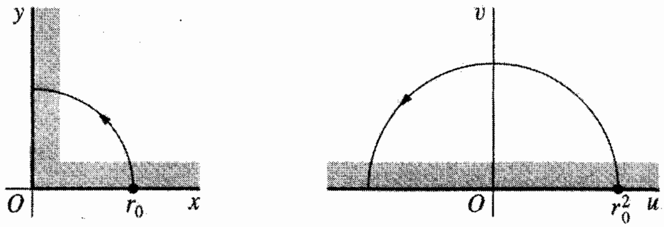
$$w = r^{۲}e^{i۲\theta}$$

تبدیل می‌شود هرگاه $z = re^{i\theta}$. بنابراین اگر $w = \rho e^{i\phi}$ داریم $\rho e^{i\phi} = r^{۲}e^{i۲\theta}$ و بنابر عبارتی که در اوایل بخش ۸ به حروف ایرانیک نوشته شده است

$$\rho = r^{۲} \quad \text{و} \quad \phi = ۲\theta + ۲k\pi،$$

که در آن k دارای یکی از مقادیر $k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$ است. پس روشن است که تصویر هر نقطهٔ ناصفر z با مجذور کردن قدرمطلق z و دو برابر کردن مقداری از آوند z به‌دست می‌آید.

ملاحظه می‌کنید که نقاط $z = r_{۰}e^{i\theta}$ بر دایرهٔ $r = r_{۰}$ به نقاط $w = r_{۰}^{۲}e^{i۲\theta}$ بر دایرهٔ $\rho = r_{۰}^{۲}$ نگاشته می‌شوند. وقتی نقطه روی دایرهٔ اول در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت از محور حقیقی مثبت به محور موهومی مثبت می‌رود، تصویر آن روی دایرهٔ دوم در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت از محور حقیقی مثبت به محور حقیقی منفی می‌رود (شکل ۱۹ را ببینید). بنابراین درصورتی که همهٔ مقادیر مثبت $r_{۰}$ انتخاب شوند، قوسهای نظیر در صفحات z و w،



شکل ۱۹

$w = z^2$

به‌ترتیب، ربع اول و نیم‌صفحهٔ بالا را پر می‌کنند. پس همان‌طورکه در شکل ۱۹ نشان داده شد، تبدیل $w = z^2$ نگاشت یک‌به‌یکی از ربع اول $r \geq 0$، $0 \leq \theta \leq \pi/2$ صفحهٔ z به روی نیم‌صفحهٔ بالایی $\rho \geq 0$، $0 \leq \phi \leq \pi$ صفحهٔ w است. البته نقطهٔ $z = 0$ به روی نقطهٔ $w = 0$ نگاشته می‌شود.

تبدیل $w = z^2$ همچنین نیم‌صفحهٔ بالایی $r \geq 0$، $0 \leq \theta \leq \pi$ را به روی همهٔ صفحهٔ w می‌نگارد. ولی در این حالت تبدیل یک‌به‌یک نیست زیرا هر دو محور حقیقی مثبت و منفی صفحهٔ z به روی محور حقیقی مثبت صفحهٔ w نگاشته می‌شوند.

درصورتی که n عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد، بسیاری از ویژگیهای نگاشت تبدیل $w = z^n$ یا $\rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta}$ شبیه ویژگیهای نگاشت $w = z^2$ است. چنین نگاشتی همهٔ صفحهٔ z را به روی تمام صفحهٔ w می‌نگارد، که در آن هر نقطهٔ ناصفر صفحهٔ w تصویر n نقطهٔ متمایز از صفحهٔ z است. دایرهٔ $r = r_0$ به روی دایرهٔ $\rho = r_0^n$ نگاشته می‌شود و قطاع $r \leq r_0$، $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$ به روی قرص $\rho \leq r_0^n$ نگاشته می‌شود، اما نه به روشی یک‌به‌یک.

۱۳. نگاشت با تابع نمایی

در فصل ۳ برخی از توابع مقدماتی را که شامل چندجمله‌ییها نیستند معرفی و ویژگیهای آنها را بررسی می‌کنیم. آن فصل با تابع نمایی

$$e^z = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy), \tag{1}$$

آغاز می‌شود، دو عامل e^x و e^{iy} در این مرحله خوشتعریف‌اند (بخش ۶ را ببینید). توجه کنید که تعریف (۱) را می‌توان به‌صورت

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

هم نوشت که با الهام از ویژگی آشنای

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$$

تابع نمایی در حسابان بیان شده است.

هدف ما در این بخش استفاده از تابع e^z برای آشنایی بیشتر خواننده با مثالهایی از نگاشتهاست که نسبتاً ساده هستند. موضوع را با بررسی تصویرهای خطوط قائم و افقی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱. تبدیل

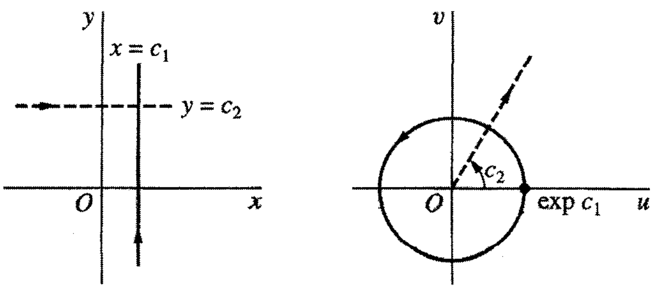
$$w = e^z \tag{۲}$$

را می‌توان به‌صورت $\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$ نوشت، که در آن $z = x + iy$ و $w = \rho e^{i\phi}$. بنابراین $\rho = e^x$ و $\phi = y + 2n\pi$ که در آن n عددی صحیح است (بخش ۸ را ببینید) و تبدیل (۲) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\rho = e^x, \qquad \phi = y. \tag{۳}$$

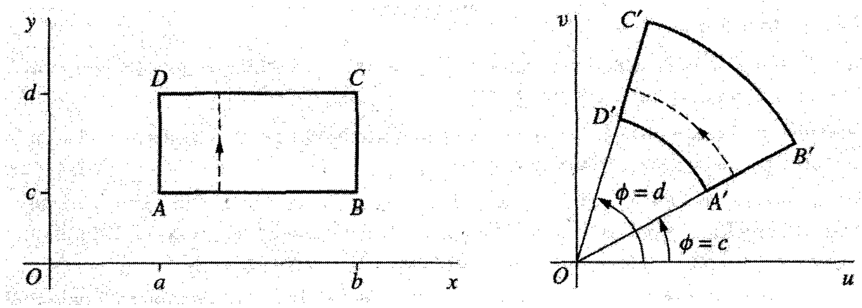
تصویر نقطهٔ عادی $z = (c_1, y)$ روی خط قائم $x = c_1$ در صفحهٔ w دارای مختصات قطبی $\rho = \exp c_1$ و $\phi = y$ است. در صورتی که z روی این خط به بالا حرکت کند این تصویر در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بر پیرامون دایره‌یی که در شکل ۲۰ نشان داده شده حرکت می‌کند. روشن است که تصویر خط همهٔ دایره است و هر نقطه از این دایره تصویر بی‌نهایت نقطه، به فاصلهٔ 2π واحد از یکدیگر، از این خط است.

هر خط افقی $y = c_2$ به روشی یک‌به‌یک به روی بردار شعاعی $\phi = c_2$ نگاشته می‌شود. برای اثبات این ادعا ملاحظه می‌کنیم که تصویر نقطهٔ $z = (x, c_2)$ دارای مختصات قطبی



شکل ۲۰

$w = \exp z$



شکل ۲۱

$w = \exp z$

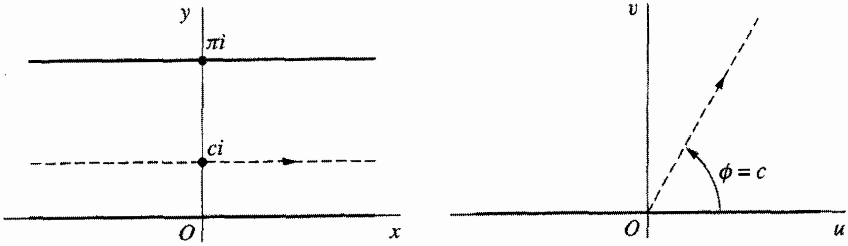
$\rho = e^x$ و $\phi = c_۲$ است. پس روشن است که وقتی نقطهٔ z در امتداد تمام این خط از چپ به راست حرکت می‌کند، تصویر آن همان‌طور که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، تمام این بردار شعاعی $\phi = c_۲$ را می‌پیماید.

پاره‌خطهای قائم و افقی، به‌ترتیب، به روی قسمتهایی از دوایر و بردارهای شعاعی نگاشته می‌شوند و از مشاهدهٔ مثال ۱ تصویرهای نواحی گوناگون به‌آسانی به‌دست می‌آیند. این مطلب را با مثال زیر روشن کرده‌ایم.

مثال ۲. حال نشان می‌دهیم که تبدیل $w = e^z$ ناحیهٔ مستطیلی $a \le x \le b$، $c \le y \le d$ را به روی ناحیهٔ $e^a \le \rho \le e^b$، $c \le \phi \le d$ می‌نگارد. دو ناحیه و قسمتهای متناظر مرزهایشان در شکل ۲۱ نشان داده شده‌اند. پاره‌خط قائم AD به روی قوس $\rho = e^a$، $c \le \phi \le d$، که با $A'D'$ علامتگذاری شده، نگاشته می‌شود. تصاویر پاره‌خطهای قائم واقع در سمت راست AD که قسمتهای افقی مرز را به هم وصل می‌کنند قوسهایی بزرگترند؛ بالاخره، تصویر پاره‌خط BC عبارت است از قوس $\rho = e^b$، $c \le \phi \le d$ که با $B'C'$ علامتگذاری شده است. اگر $d - c < ۲\pi$، نگاشت یک‌به‌یک است. به‌خصوص اگر $c = ۰$ و $d = \pi$ آن‌گاه $۰ \le \phi \le \pi$ و همان‌طور که در شکل ۸ پیوست ۲ نشان داده شده است، ناحیهٔ مستطیلی به روی نصف یک حلقهٔ مستدیر نگاشته می‌شود.

در آخرین مثال با استفاده از تصاویر خطوط افقی تصویر یک نوار افقی را پیدا می‌کنیم.

مثال ۳. درصورتی که $w = e^z$، تصویر نوار نامتناهی $۰ \le y \le \pi$ نیمهٔ بالایی $v \ge ۰$ در صفحهٔ w (شکل ۲۲) خواهد بود. این مطلب از مثال ۱ در بالا دیده می‌شود که چگونگی



شکل ۲۲

$w = \exp z$

نگاشته‌شدن خط افقی $y = c$ به‌توی بردار شعاعی $\phi = c$ از مبدأ را نشان می‌دهد. وقتی عدد حقیقی c از $\circ$ تا π تغییر می‌کند، عرض از مبدأ خطها از $\circ$ تا π تغییر می‌کند و زاویه‌های میل بردارهای شعاعی از $\phi = \circ$ تا $\phi = \pi$ افزایش می‌یابد. این نگاشت در شکل ۶ پیوست ۲ نشان داده شده است، که در آن نقاط متناظر روی مرزهای دو ناحیه مشخص شده‌اند.

تمرینها

۱. با رجوع به مثال ۱، بخش ۱۲، حوزه‌ای را در صفحهٔ z بیابید که تصویر آن تحت تبدیل $w = z^{۲}$ حوزهٔ مربعی در صفحهٔ w باشد که به خطوط $u = ۱$، $u = ۲$، $v = ۱$ و $v = ۲$ محدود شده است (شکل ۲ پیوست ۲ را ببینید.)

۲. تصاویر هذلولیهای

$$۲xy = c_{۲} \quad (c_{۲} < \circ) \qquad \text{و} \qquad x^{۲} - y^{۲} = c_{۱} \quad (c_{۱} < \circ)$$

را تحت تبدیل $w = z^{۲}$ بیابید و شکل آنها را رسم کنید و جهتهای متناظر آنها را نشان دهید.

۳. ناحیه‌ای را که قطاع $r \leq ۱$، $\circ \leq \theta \leq \pi/۴$ با تبدیل (الف) $w = z^{۲}$؛ (ب) $w = z^{۳}$؛ (ج) $w = z^{۴}$ به روی آن نگاشته می‌شود با شکل نمایش دهید.

۴. نشان دهید که خطوط $x = ay$ $(a \neq \circ)$ تحت تبدیل $w = \exp z$، که در آن $w = \rho \exp(i\phi)$ به روی مارپیچهای $\rho = \exp(a\phi)$ نگاشته می‌شوند.

۵. با در نظر گرفتن تصاویر پاره‌خطهای افقی، تحقیق کنید، همان‌طور که در شکل ۲۱ (بخش ۱۳) نشان داده شده است، تصویر ناحیهٔ مستطیلی $a \leq x \leq b$، $c \leq y \leq d$ تحت تبدیل $w = \exp z$ ناحیهٔ $e^a \leq \rho \leq e^b$، $c \leq \phi \leq d$ خواهد شد.

۶. درستی نگاشت ناحیه و مرزی را که در شکل ۷ پیوست ۲ نشان داده شده است تحقیق کنید، که در آن تبدیل عبارت است از $w = \exp z$.

۷. تصویر نوار نیمه نامتناهی $x \geq 0$، $0 \leq y \leq \pi$ را تحت تبدیل $w = \exp z$ پیدا کنید و قسمتهای متناظر مرزها را نمایش دهید.

۸. یک تعبیر دیگر تابع $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ عبارت از یک میدان برداری در حوزهٔ تعریف f است. این تابع به هر نقطهٔ z که در آن تعریف شده باشد برداری مانند w با مؤلفه‌های $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را نسبت می‌دهد. میدانهای برداری زیر را با نمودار نشان دهید (الف) $w = iz$؛ (ب) $w = z/|z|$.

۱۴. حد

فرض می‌کنیم تابع f در همهٔ نقاط z از یک همسایگی محذوف z_0 (بخش ۱۰) تعریف شده باشد. این عبارت که حد f وقتی z به z_0 میل کند عدد w_0 است، یا

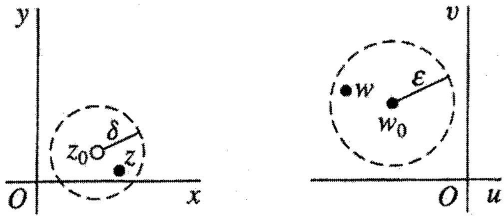
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0, \tag{۱}$$

بدین‌معنی است که نقطهٔ $w = f(z)$ را می‌توان به دلخواه نزدیک به w_0 گرفت، اگر نقطهٔ z را به‌قدر کافی نزدیک به z_0 اما متمایز از آن انتخاب کنیم. حال تعریف حد را به‌صورتی دقیق و قابل استفاده بیان می‌کنیم.

عبارت (۱) بدین‌معنی است که به‌ازای هر عدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ هست که

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{۲}$$

از نظر هندسی، تعریف بالا گویای این است که به‌ازای هر ε همسایگی $|w - w_0| < \varepsilon$ از w_0، δ همسایگی محذوف $0 < |z - z_0| < \delta$ از z_0 وجود دارد که هر نقطهٔ z از آن، یک تصویر w در این ε همسایگی دارد (شکل ۲۳). توجه کنید که گرچه باید همهٔ نقاط همسایگی محذوف $0 < |z - z_0| < \delta$ را در نظر گرفت، لزومی ندارد که تصاویر آنها همهٔ همسایگی $|w - w_0| < \varepsilon$ را تشکیل دهند. مثلاً اگر f دارای مقدار ثابت w_0 باشد، تصویر z همیشه مرکز آن همسایگی خواهد بود. همچنین توجه کنید که وقتی یک δ پیدا شد، می‌توان به‌جای آن هر عدد مثبت کوچکتری، مانند $\delta/2$ را قرار داد.



شکل ۲۳

به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر حد تابع $f(z)$ در یک نقطهٔ $z_\circ$ موجود باشد این حد یکتاست. برای انجام این کار، فرض می‌کنیم که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \quad \text{و} \quad \lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\backslash$$

در این‌صورت، به‌ازای هر عدد مثبت ε، اعداد مثبتی مانند $\delta_\circ$ و $\delta_\backslash$ موجودند به قسمی که

$$|f(z) - w_\circ| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \circ < |z - z_\circ| < \delta_\circ$$

و

$$|f(z) - w_\backslash| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \circ < |z - z_\circ| < \delta_\backslash .$$

بنابراین اگر $\circ < |z - z_\circ| < \delta$، که در آن δ کوچکترین عدد از دو عدد $\delta_\circ$ و $\delta_\backslash$ است، آن‌گاه

$$|w_\backslash - w_\circ| = |[f(z) - w_\circ] - [f(z) - w_\backslash]| \le |f(z) - w_\circ| + |f(z) - w_\backslash| < \varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon$$

اما $|w_\backslash - w_\circ|$ عددی ثابت و نامنفی است و ε را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت. در نتیجه

$$w_\backslash = w_\circ \text{، یا } w_\backslash - w_\circ = \circ .$$

در تعریف (۲) لازم است که f در همهٔ نقاط یک همسایگی محذوف از $z_\circ$، تعریف شده باشد. البته وقتی $z_\circ$ یک نقطهٔ داخلی ناحیه‌ای باشد که f بر آن تعریف شده است، همیشه چنین همسایگی محذوفی موجود است. می‌توان تعریف حد را به حالتی که $z_\circ$ یک نقطهٔ مرزی آن ناحیه باشد گسترش داد با این قرارداد که لازم است اولین نابرابری از نابرابریهای (۲) فقط برای نقاط z صادق باشد که هم به این همسایگی مخدوف و هم به ناحیهٔ مزبور متعلق‌اند.

مثال ۱. تابع $f(z)=iz/۲$ را که بر قرص باز $|z|<۱$ تعریف شده است، در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که

$$\lim_{z\to ۱} f(z)=\frac{i}{۲}, \qquad (۳)$$

نقطهٔ $z=۱$ بر مرز حوزهٔ تعریف f واقع است. ملاحظه می‌کنید که وقتی z در ناحیهٔ $|z|<۱$ باشد،

$$\left|f(z)-\frac{i}{۲}\right|=\left|\frac{iz}{۲}-\frac{i}{۲}\right|=\frac{|z-۱|}{۲}.$$

بنابراین، به‌ازای هر چنین zی و هر عدد مثبت ε،

$$\left|f(z)-\frac{i}{۲}\right|<\varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad ۰<|z-۱|<۲\varepsilon.$$

بنابراین وقتی که δ مساوی ۲ε (شکل ۲۴) یا هر عدد مثبتی کوچکتر از آن باشد شرط (۲) برای نقاط ناحیهٔ $|z|<۱$ برقرار است.

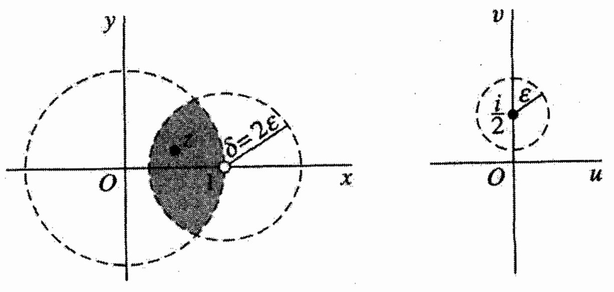
اگر $z_۰$ یک نقطهٔ داخلی حوزهٔ تعریف f بوده و حد (۱) موجود باشد در این‌صورت باید اولین نابرابری از نابرابریهای (۲) برای همهٔ نقاط در همسایگی محذوف $۰<|z-z_۰|<\delta$ برقرار باشد. بنابراین نماد $z\to z_۰$ ایجاب می‌کند که z مجاز باشد به هر طریق دلخواه و نه فقط در امتدادی خاص به $z_۰$ میل کند. مثال بعد تأکیدی بر این موضوع است.

مثال ۲. اگر

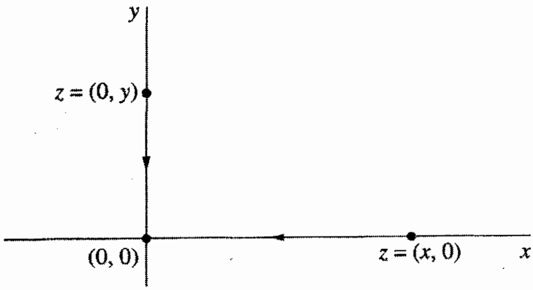
$$f(z)=z/\overline{z} \qquad (۴)$$

آن‌گاه

$$\lim_{z\to ۰} f(z) \qquad (۵)$$



شکل ۲۴



شکل ۲۵

وجود ندارد. زیرا اگر موجود باشد می‌توانیم آن را این‌گونه بیابیم که اجازه دهیم نقطهٔ $z = (x, y)$ از هر مسیری به مبدأ میل کند. اما وقتی $z = (x, \circ)$ یک نقطهٔ ناصفر روی محور حقیقی باشد شکل (۲۵)،

$$f(z) = \frac{x + i\circ}{x - i\circ} = ۱$$

و وقتی $z = (\circ, y)$ یک نقطهٔ ناصفر روی محور موهومی باشد،

$$f(z) = \frac{\circ + iy}{\circ - iy} = -۱ .$$

بنابراین، اگر z را در امتداد محور حقیقی به مبدأ میل دهیم، درمی‌یابیم که حد مطلوب ۱ است. از طرف دیگر با میل‌دادن در امتداد محور موهومی حد ۱− می‌شود. چون حد یکتاست، باید نتیجه بگیریم که حد (۵) موجود نیست.

گرچه تعریف (۲) ابزاری برای آزمون حدبودن یک نقطهٔ مفروض $w_\circ$ ارائه می‌دهد ولی مستقیماً روشی برای تعیین حد ارائه نمی‌دهد. قضایایی دربارهٔ حد، که در بخش بعد ارائه شده‌اند، ما را قادر خواهند ساخت که عملاً حدهای زیادی را پیدا کنیم.

۱۵. قضایایی دربارهٔ حد

با برقرارکردن رابطه‌ای بین حد تابع یک متغیرهٔ مختلط و حد توابع حقیقی‌مقدار از دو متغیر حقیقی می‌توانیم بررسی حد را سرعت بخشیم. چون حدهای نوع دوم در حسابان بررسی شده‌اند، تعاریف و ویژگیهای آنها را آزادانه به‌کار خواهیم برد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)،\quad z_\circ = x_\circ + iy_\circ، \quad و \quad w_\circ = u_\circ + iv_\circ.$$

در این صورت

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \tag{۱}$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} u(x,y) = u_\circ \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} v(x,y) = v_\circ\,. \tag{۲}$$

برای اثبات قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حدود (۲) برقرار باشند و حد (۱) را به‌دست می‌آوریم. حدود (۲) به ما می‌گویند که برای هر عدد مثبت ε، اعداد مثبت $\delta_۱$ و $\delta_۲$یی موجودند به قسمی که

$$|u - u_\circ| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{هرگاه} \quad \circ < \sqrt{(x-x_\circ)^۲ + (y-y_\circ)^۲} < \delta_۱ \tag{۳}$$

و

$$|v - v_\circ| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{هرگاه} \quad \circ < \sqrt{(x-x_\circ)^۲ + (y-y_\circ)^۲} < \delta_۲\,. \tag{۴}$$

فرض کنیم δ معرف کوچکترین عدد از دو عدد $\delta_۱$ و $\delta_۲$ باشد. چون

$$|(u+iv) - (u_\circ + iv_\circ)| = |(u-u_\circ) + i(v-v_\circ)| \le |u-u_\circ| + |v-v_\circ|$$

و

$$\sqrt{(x-x_\circ)^۲+(y-y_\circ)^۲} = |(x-x_\circ)+i(y-y_\circ)| = |(x+iy)-(x_\circ+iy_\circ)|$$

از عبارات (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$|(u+iv) - (u_\circ + iv_\circ)| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

هرگاه

$$\circ < |(x+iy) - (x_\circ + iy_\circ)| < \delta\,.$$

یعنی حد (۱) برقرار است.

حال با این فرض شروع می‌کنیم که حد (۱) برقرار باشد. با این فرض، می‌دانیم که برای هر عدد مثبت ε، عدد مثبت δیی وجود دارد به‌طوری که

$$|(u+iv) - (u_\circ + iv_\circ)| < \varepsilon \tag{۵}$$

هرگاه

$$\circ < |(x+iy) - (x_\circ + iy_\circ)| < \delta. \qquad (۶)$$

اما

$$|u - u_\circ| \leq |(u - u_\circ) + i(v - v_\circ)| = |(u + iv) - (u_\circ + iv_\circ)|,$$
$$|v - v_\circ| \leq |(u - u_\circ) + i(v - v_\circ)| = |(u + iv) - (u_\circ + iv_\circ)|,$$

و

$$|(x+iy)-(x_\circ+iy_\circ)|=|(x-x_\circ)+i(y-y_\circ)|=\sqrt{(x-x_\circ)^۲+(y-y_\circ)^۲}.$$

بنابراین از نابرابریهای (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$|u - u_\circ| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |v - v_\circ| < \varepsilon$$

هرگاه

$$\circ < \sqrt{(x-x_\circ)^۲ + (y-y_\circ)^۲} < \delta.$$

این، حد (۲) را اثبات می‌کند و اثبات قضیه کامل می‌شود.

قضیهٔ ۲. فرض کنید که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \quad \text{و} \quad \lim_{z\to z_\circ} F(z) = W_\circ \qquad (۷)$$

در این صورت

$$\lim_{z\to z_\circ} [f(z) + F(z)] = w_\circ + W_\circ, \qquad (۸)$$

$$\lim_{z\to z_\circ} [f(z)F(z)] = w_\circ W_\circ, \qquad (۹)$$

و اگر $W_\circ \neq \circ$،

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_\circ}{W_\circ}. \qquad (۱۰)$$

این قضیهٔ مهم را می‌توان مستقیماً از روی تعریف حد تابع یک متغیرهٔ مختلط ثابت کرد، اما به کمک قضیهٔ ۱، تقریباً بلافاصله، از قضایای حد توابع حقیقی‌مقدار دو متغیر حقیقی نتیجه می‌شود. مثلاً برای اثبات ویژگی (۹)، می‌نویسیم

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad F(z) = U(x,y) + iV(x,y),$$
$$z_\circ = x_\circ + iy_\circ, \qquad w_\circ = u_\circ + iv_\circ, \qquad W_\circ = U_\circ + iV_\circ\,.$$

پس، بنابر فرضهای (۷) و قضیهٔ ۱، حد توابع u، v، U و V وقتی (x,y) به $(x_\circ, y_\circ)$ میل کند موجود و به‌ترتیب برابر با $u_\circ$، $v_\circ$، $U_\circ$ و $V_\circ$ است. بنابراین وقتی (x,y) به $(x_\circ, y_\circ)$ میل کند مؤلفه‌های حقیقی و موهومی حاصلضرب

$$f(z)F(z) = (uU - vV) + i(vU + uV)$$

به‌ترتیب، دارای حدهای $u_\circ U_\circ - v_\circ V_\circ$ و $v_\circ U_\circ + u_\circ V_\circ$ هستند. بنابراین، مجدداً بنابر قضیهٔ ۱، وقتی z به $z_\circ$ میل کند، حد $f(z)F(z)$ عبارت است از

$$(u_\circ U_\circ - v_\circ V_\circ) + i(v_\circ U_\circ + u_\circ V_\circ)$$

که این خود مساوی $w_\circ W_\circ$ است. بدین‌ترتیب ویژگی (۹) ثابت می‌شود. تحقیق درستی ویژگیهای (۸) و (۱۰) را نیز می‌توان ارائه داد.

از تعریف (۲) بخش ۱۴، در مورد حد به سادگی می‌توان دید که

$$\lim_{z \to z_\circ} z = z_\circ \qquad \text{و} \qquad \lim_{z \to z_\circ} c = c$$

که در آن $z_\circ$ و c اعداد مختلط‌اند، و بنابر ویژگی (۹) و استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{z \to z_\circ} z^n = z_\circ^n \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)\,.$$

پس، با توجه به ویژگیهای (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که حد یک چندجمله‌یی

$$P(z) = a_\circ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n$$

وقتی z به نقطهٔ $z_\circ$ میل کند، مقدار چندجمله‌یی در آن نقطه است:

$$\lim_{z \to z_\circ} P(z) = P(z_\circ)\,. \tag{۱۱}$$

۱۶. حدهای مشتمل بر نقطه در بی‌نهایت

بعضی مواقع مناسب است که به صفحهٔ مختلط نقطه در بی‌نهایت را، که با ∞ نمایش داده می‌شود، ضمیمه کرده و از حدهای مشتمل بر آن استفاده کنیم. صفحهٔ مختلط همراه با این نقطه را صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته می‌نامیم. برای تجسم نقطه در بی‌نهایت می‌توان پنداشت که صفحهٔ مختلط از دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ واحد به مرکز $z = 0$ گذشته باشد (شکل ۲۶). متناظر با هر نقطهٔ z از صفحه، درست یک نقطهٔ P در رویهٔ کره وجود دارد. نقطهٔ P محل تقاطع خط گذرنده از نقطهٔ z و قطب شمال N کره، با رویهٔ کره است. به روشی مشابه، به هر نقطهٔ P بر رویهٔ کره، غیر از قطب شمال N، درست یک نقطهٔ z در صفحه متناظر است. با فرض اینکه نقطهٔ N از کره، متناظر با نقطه در بی‌نهایت باشد، تناظر یک‌به‌یکی بین نقاط کره و نقاط صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته به‌دست می‌آوریم، این کره به کرهٔ ریمان[1] مشهور است و این تناظر را تصویر گنجنگاری می‌نامند.

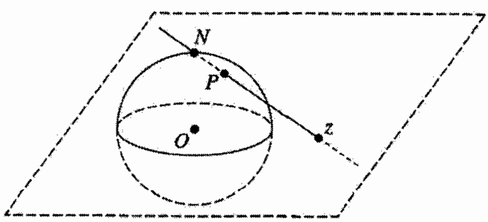
ملاحظه می‌کنید که خارج دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ در صفحهٔ مختلط، متناظر است با نیمکرهٔ بالایی که دایرهٔ عظیمه و نقطهٔ N از آن حذف شده باشند. به‌علاوه، به‌ازای هر عدد مثبت و کوچک ε، نقاطی از صفحهٔ مختلط که خارج دایرهٔ $|z| = 1/\varepsilon$ واقع‌اند با نقاطی بر کره که نزدیک Nاند متناظرند. بنابراین مجموعهٔ $|z| > 1/\varepsilon$ را یک ε همسایگی (یا همسایگی) ∞ می‌نامیم.

قرار بر این می‌گذاریم که وقتی از یک نقطهٔ z نام می‌بریم منظورمان نقطه در صفحهٔ متناهی است. اگر نقطه در بی‌نهایت مورد نظر باشد صریحاً ذکر خواهد شد.

حال وقتی z_0 یا w_0، یا هر دوی آنها، نقطه در بی‌نهایت باشند، به‌سهولت می‌توان به عبارت

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

معنایی بخشید. در تعریف حد در بخش ۱۴ فقط به‌جای همسایگیهای مناسب z_0 و w_0 همسایگیهایی از ∞ قرار می‌دهیم. برهان قضیهٔ زیر نحوهٔ کار را نشان می‌دهد.



شکل ۲۶

1. Riemann

قضیه. اگر $z_\circ$ و $w_\circ$ به‌ترتیب نقاطی در صفحات z و w باشند، آن‌گاه

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z)=\infty \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z\to z_\circ}\frac{\text{۱}}{f(z)}=\circ \tag{۱}$$

و

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_\circ \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z\to\circ} f\left(\frac{\text{۱}}{z}\right)=w_\circ \tag{۲}$$

به‌علاوه

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z\to\circ}\frac{\text{۱}}{f(\text{۱}/z)}=\circ. \tag{۳}$$

برهان را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که اولین حد (۱) بدین‌معنی است که به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبت δیی هست که

$$|f(z)|>\frac{\text{۱}}{\varepsilon} \quad \text{هرگاه} \quad \circ<|z-z_\circ|<\delta. \tag{۴}$$

یعنی نقطهٔ $w=f(z)$ در ε همسایگی $|w|>\text{۱}/\varepsilon$ از نقطهٔ ∞ واقع است، هرگاه z در همسایگی محذوف $\circ<|z-z_\circ|<\delta$ از نقطهٔ $z_\circ$ واقع باشد. چون عبارت (۴) را می‌توان به‌صورت

$$\left|\frac{\text{۱}}{f(z)}-\circ\right|<\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \circ<|z-z_\circ|<\delta.$$

نوشت، دومین حد (۱) به‌دست می‌آید.

اولین حد (۲) بدین‌معنی است که به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ هست که

$$|f(z)-w_\circ|<\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |z|>\frac{\text{۱}}{\delta}. \tag{۵}$$

اگر در عبارت (۵) به‌جای z قرار دهیم $\text{۱}/z$ و سپس نتیجه را به شکل زیر بنویسیم

$$\left|f\left(\frac{\text{۱}}{z}\right)-w_\circ\right|<\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \circ<|z-\circ|<\delta$$

دومین حد (۲) نتیجه می‌شود.

بالاخره، اولین حد (۳) را باید چنین تعبیر کرد که به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ هست که

$$|f(z)|>\frac{\text{۱}}{\varepsilon} \quad \text{هرگاه} \quad |z|>\frac{\text{۱}}{\delta}.$$

اگر به‌جای z قرار دهیم $1/z$، این عبارت به شکل زیر در می‌آید

$$\left|\frac{1}{f(1/z)} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad 0 < |z - 0| < \delta;$$

که دومین حد (۳) را ثابت می‌کند.

مثالها. ملاحظه کنید که

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} = \infty \qquad \text{زیرا} \qquad \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz+3} = 0$$

و

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+1} = 2 \qquad \text{زیرا} \qquad \lim_{z\to 0} \frac{(2/z)+i}{(1/z)+1} = \lim_{z\to 0} \frac{2+iz}{1+z} = 2.$$

به‌علاوه

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty \qquad \text{زیرا} \qquad \lim_{z\to 0} \frac{(1/z^2)+1}{(2/z^3)-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z+z^3}{2-z^3} = 0.$$

۱۷. پیوستگی

تابع f در نقطهٔ z_0 پیوسته است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

(۱) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجود باشد،

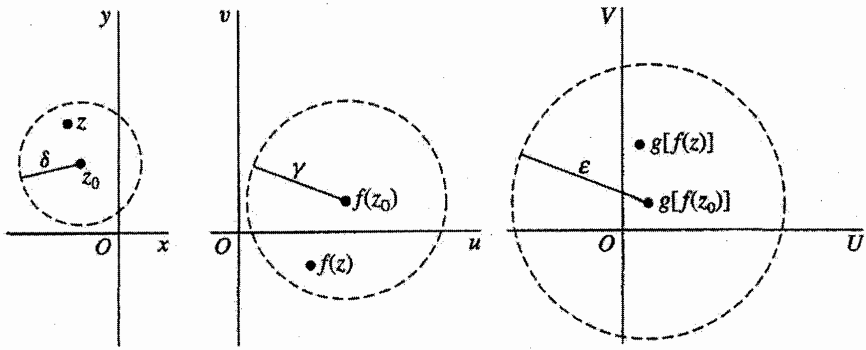
(۲) $f(z_0)$ موجود باشد،

(۳) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

ملاحظه می‌کنید که حکم (۳) عملاً احکام (۱) و (۲) را در بردارد زیرا وجود کمیتهای دو طرف معادله به‌طور ضمنی فرض شده است. حکم (۳) مبین این است که به‌ازای هر عدد مثبت ε، عدد مثبت δیی هست که

(۴) $$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad |z - z_0| < \delta.$$

یک تابع یک متغیرهٔ مختلط را در ناحیهٔ R پیوسته گوییم اگر در هر نقطهٔ R پیوسته باشد.



شکل ۲۷

اگر دو تابع در نقطه‌ای پیوسته باشند، مجموع و حاصلضرب آنها نیز در آن نقطه پیوسته‌اند؛ خارج قسمت آنها در هر چنین نقطه‌ای، که مخرج صفر نباشد، پیوسته است. این ملاحظات نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۲ بخش ۱۵ است. همچنین، توجه می‌کنید که بنابر رابطهٔ حد (۱۱) بخش ۱۵، هر چندجمله‌یی در تمام صفحه پیوسته است.

حال به دو ویژگی قابل انتظار توابع پیوسته باز می‌گردیم که تحقیق درستی آنها خیلی ساده نیست. اثباتها به تعریف (۴) بستگی دارند و این نتایج را به‌صورت قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. ترکیب دو تابع پیوسته، تابعی است پیوسته.

بیان دقیق این قضیه در برهان زیر آورده می‌شود. فرض می‌کنیم $w = f(z)$ تابعی باشد که به‌ازای هر z در یک همسایگی نقطهٔ $z_\circ$، مانند $|z - z_\circ| < \delta$، تعریف شده است و $W = g(w)$ تابعی باشد که حوزهٔ تعریف آن شامل تصویر (بخش ۱۲) آن همسایگی تحت f است. پس به‌ازای هر z در همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$، ترکیب $W = g[f(z)]$ تعریف شده است. حال فرض کنید f در $z_\circ$ و g در نقطهٔ $f(z_\circ)$ از صفحهٔ w پیوسته باشند. بنابر پیوستگی g در $f(z_\circ)$ می‌دانیم که به‌ازای هر عدد مثبت ε، عدد مثبت γیی هست که

$$|g[f(z)] - g[f(z_\circ)]| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - f(z_\circ)| < \gamma.$$

(شکل ۲۷ را ببینید) اما پیوستگی f در $z_\circ$ تضمین می‌کند که می‌توانیم همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ را به‌قدر کافی کوچک بگیریم تا دومین نابرابری فوق برقرار باشد. بدین‌ترتیب پیوستگی تابع مرکب $g[f(z)]$ ثابت شد.

قضیهٔ ۲. اگر تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z_\circ$ پیوسته و ناصفر باشد، آن‌گاه در سراسر یک همسایگی آن نقطه $f(z) \neq \circ$.

با این فرض که $f(z)$، در $z_\circ$ پیوسته و ناصفر است، می‌توان قضیهٔ ۲ را با تخصیص مقدار مثبت $|f(z_\circ)|/۲$ به عدد ε در عبارت (۴) ثابت کرد. در این‌صورت عدد مثبتی مانند δ هست که

$$|f(z) - f(z_\circ)| < \frac{|f(z_\circ)|}{۲} \qquad \text{هرگاه} \qquad |z - z_\circ| < \delta.$$

بنابراین اگر نقطهٔ zی در همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ موجود باشد که $f(z) = \circ$، به تناقض

$$|f(z_\circ)| < \frac{|f(z_\circ)|}{۲}$$

می‌رسیم؛ و قضیه ثابت می‌شود.

پیوستگی تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{۵}$$

رابطهٔ نزدیکی با پیوستگی توابع مؤلفه‌یی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ دارد. مثلاً، توجه کنید که چگونه از قضیهٔ ۱، بخش ۱۵ نتیجه می‌شود که تابع (۵) در نقطهٔ $z_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ پیوسته است اگر و فقط اگر توابع مؤلفه‌یی آن، u و v، در آن نقطه پیوسته باشند. برای نشان‌دادن کاربرد این عبارت، فرض کنید تابع (۵) در ناحیهٔ R که هم بسته و هم کراندار است پیوسته باشد (بخش ۱۰ را ببینید). پس تابع

$$\sqrt{[u(x, y)]^۲ + [v(x, y)]^۲}$$

در R پیوسته است و بنابراین در نقطه‌ای از آن ناحیه به یک مقدار ماکسیمم می‌رسد.* یعنی، f در R کراندار است و $|f(z)|$ در نقطه‌ای از آن ناحیه به یک مقدار ماکسیمم می‌رسد. به بیان دقیقتر، عدد مثبت Mی هست که

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{به‌ازای هر } z \text{ در } R، \tag{۶}$$

که در آن به‌ازای حداقل یک چنین zی تساوی برقرار است.

* برای ویژگیهایی که در اینجا نقل شد، مثلاً، صفحات ۱۲۶ـ۱۲۵ و ۵۲۹ کتاب زیر را ببینید
A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., 1983.

تمرینها

۱. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ برای حد ثابت کنید که

(الف) $\lim_{z \to z_\circ} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_\circ$؛ (ب) $\lim_{z \to z_\circ} \overline{z} = \overline{z}_\circ$؛ (ج) $\lim_{z \to \circ} \frac{\overline{z}^{\,۲}}{z} = \circ$.

۲. فرض کنید a، b و c اعداد مختلط ثابتی باشند. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ در مورد حد ثابت کنید که

(الف) $\lim_{z \to z_\circ} (az + b) = az_\circ + b$؛

(ب) $\lim_{z \to z_\circ} (z^۲ + c) = z_\circ^۲ + c$؛

(ج) $\lim_{z \to ۱ - i} [x + i(۲x + y)] = ۱ + i \quad (z = x + iy)$.

۳. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $P(z)$ و $Q(z)$ چندجمله‌ییهایی باشند که $Q(z_\circ) \neq \circ$. با استفاده از قضیهٔ ۲، بخش ۱۵، و حدهای ظاهر شده در آن بخش، حدهای زیر را پیدا کنید.

(الف) $\lim_{z \to z_\circ} \frac{۱}{z^n} \quad (z_\circ \neq \circ)$؛ (ب) $\lim_{z \to i} \frac{iz^۳ - ۱}{z + i}$؛ (ج) $\lim_{z \to z_\circ} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

جواب: (الف) $۱/z_\circ^n$؛ (ب) $\circ$؛ (ج) $P(z_\circ)/Q(z_\circ)$.

۴. با استفاده از ویژگی (۹)، بخش ۱۵، در مورد حدود و استقرای ریاضی، نشان دهید که وقتی n عدد صحیح مثبتی باشد $(n = ۱, ۲, \ldots)$ داریم

$$\lim_{z \to z_\circ} z^n = z_\circ^n .$$

۵. نشان دهید که حد تابع

$$f(z) = \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^۲$$

وقتی z به صفر میل کند وجود ندارد. این کار را با میل‌دادن نقاط ناصفر $z = (x, \circ)$ و $z = (x, x)$ به مبدأ انجام دهید. [توجه کنید که برخلاف مثال ۲ بخش ۱۴ کافی نیست که صرفاً نقاط $z = (x, \circ)$ و $z = (\circ, y)$ را در نظر بگیرید.]

۶. حکم (۸) در قضیهٔ ۲ بخش ۱۵ را به یکی از روشهای زیر ثابت کنید

(الف) با استفاده از قضیهٔ ۱ بخش ۱۵ و ویژگیهای حد توابع حقیقی‌مقدار از دو متغیر حقیقی؛

(ب) با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ دربارهٔ حد.

۷. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ در مورد حد ثابت کنید که

$$\text{اگر } \lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \text{ ، آن‌گاه } \quad \lim_{z\to z_\circ} |f(z)| = |w_\circ|\,.$$

راهنمایی: ببینید چگونه از نابرابری (۸)، بخش ۴، می‌توانید استفاده کنید و بنویسید

$$||f(z)| - |w_\circ|| \le |f(z) - w_\circ|.$$

۸. قرار دهید $\Delta z = z - z_\circ$ و نشان دهید که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{\Delta z\to \circ} f(z_\circ + \Delta z) = w_\circ\,.$$

۹. نشان دهید که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z)g(z) = \circ \quad \text{اگر} \quad \lim_{z\to z_\circ} f(z) = \circ$$

و عدد مثبت Mی موجود باشد که به‌ازای هر z دریک همسایگی $z_\circ$، $|g(z)| \le M$.

۱۰. با استفاده از قضیهٔ بخش ۱۶ نشان دهید که

(الف) $\lim_{z\to\infty} \frac{۴z^۲}{(z-۱)^۲} = ۴$؛ (ب) $\lim_{z\to ۱} \frac{۱}{(z-۱)^۳} = \infty$؛

(ج) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^۲+۱}{z-۱} = \infty$.

۱۱. با استفاده از قضیهٔ بخش ۱۶ نشان دهید که وقتی

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq \circ),$$

(الف) اگر $c = \circ$ آن‌گاه $\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$؛

(ب) اگر $c \neq \circ$ آن‌گاه $\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ و $\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$.

۱۲. بیان کنید چرا حدهای شامل نقطه در بی‌نهایت، یکتا هستند.

۱۳. نشان دهید مجموعهٔ S بیکران است (بخش ۱۰) اگر و فقط اگر هر همسایگی نقطه در بی‌نهایت شامل حداقل یک نقطهٔ S باشد.

۱۸. مشتق

فرض کنیم f تابعی باشد که حوزهٔ تعریفش شامل همسایگیی از $z_\circ$ است. مشتق f در $z_\circ$ را، که به‌صورت $f'(z_\circ)$ نوشته می‌شود، با رابطهٔ

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم، مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. گوییم تابع f در $z_\circ$ مشتقپذیر است درصورتی که مشتق آن در $z_\circ$ موجود باشد.

تعریف (۱) را می‌توان با بیان z برحسب متغیر مختلط جدید

$$\Delta z = z - z_\circ$$

به‌صورت زیر نوشت

$$f'(z_\circ) = \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{f(z_\circ + \Delta z) - f(z_\circ)}{\Delta z}. \qquad (۲)$$

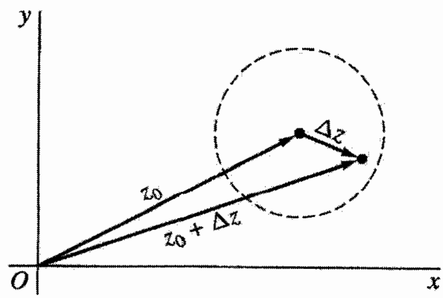
توجه کنید که چون f در تمامی یک همسایگی $z_\circ$ تعریف شده است، عدد

$$f(z_\circ + \Delta z)$$

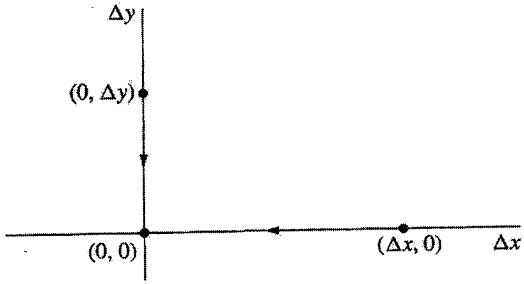
همیشه برای $|\Delta z|$ به‌قدر کافی کوچک، تعریف می‌شود (شکل ۲۸).

وقتی صورت (۲) تعریف مشتق را به‌کار می‌بریم اغلب زیرنویس $z_\circ$ را حذف می‌کنیم و عدد

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$



شکل ۲۸



شکل ۲۹

را معرفی می‌کنیم که نمایانگر تغییر در مقدار f متناظر با تغییر Δz در نقطه‌ای است که f محاسبه می‌شود. پس اگر به‌جای $f'(z)$ قرار دهیم dw/dz، رابطهٔ (۲) چنین خواهد شد

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{۳}$$

مثال ۱. فرض کنید که $f(z) = z^۲$. به‌ازای هر نقطهٔ z،

$$\lim_{\Delta z \to ۰} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{(z+\Delta z)^۲ - z^۲}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to ۰} (۲z + \Delta z) = ۲z$$

زیرا $۲z + \Delta z$ یک چندجمله‌یی برحسب Δz است. بنابراین $dw/dz = ۲z$، یا $f'(z) = ۲z$.

مثال ۲. حال تابع $f(z) = |z|^۲$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z+\Delta z|^۲ - |z|^۲}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

اگر حد $\Delta w/\Delta z$ موجود باشد، این حد را می‌توان با میل دادن نقطهٔ $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ به هر طریقی به سمت مبدأ در صفحهٔ zها پیدا کرد. اگر به‌خصوص Δz به‌طور افقی از طریق نقاط $(\Delta x, ۰)$ روی محور حقیقی به مبدأ میل کند (شکل ۲۹) می‌توانیم بنویسیم

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i۰} = \Delta x - i۰ = \Delta x + i۰ = \Delta z$$

در این حالت

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z.$$

بنابراین، اگر حد $\Delta w/\Delta z$ موجود باشد مقدار آن باید $\overline{z} + z$ باشد. ولی، اگر Δz به‌طور قائم از

طریق نقاط $(\circ, \Delta y)$ روی محور موهومی به مبدأ میل کند، داریم

$$\overline{\Delta z} = \overline{\circ + i\Delta y} = -(\circ + i\Delta y) = -\Delta z,$$

و در می‌یابیم که حد در صورت وجود باید $\overline{z} - z$ باشد. چون حدود یکتا هستند (بخش ۱۴)، نتیجه می‌شود که اگر dw/dz وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\overline{z} + z = \overline{z} - z \quad \text{یا} \quad z = \circ.$$

در واقع برای آنکه نشان دهیم dw/dz در $z = \circ$ موجود است فقط باید ملاحظه کنیم که وقتی $z = \circ$، عبارت $\Delta w/\Delta z$ به $\overline{\Delta z}$ تبدیل می‌شود. بدین‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که dw/dz فقط در نقطهٔ $z = \circ$ موجود و مقدارش برابر $\circ$ است.

مثال ۲ نشان می‌دهد که یک تابع می‌تواند در نقطهٔ معینی مشتقپذیر باشد اما هیچ جای دیگری در هر همسایگی آن نقطه مشتقپذیر نباشد. چون قسمتهای حقیقی و موهومی $f(z) = |z|^{\text{۲}}$ به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$u(x,y) = x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} \quad \text{و} \quad v(x,y) = \circ \tag{۴}$$

این مثال همچنین نشان می‌دهد که مؤلفه‌های حقیقی و موهومی یک تابع یک متغیرهٔ مختلط می‌توانند در نقطه‌ای دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه باشند و با این حال تابع در آن نقطه مشتقپذیر نباشد.

تابع $f(z) = |z|^{\text{۲}}$ در هر نقطهٔ صفحه پیوسته است زیرا مؤلفه‌های (۴) آن در هر نقطه پیوسته‌اند. بنابراین پیوستگی یک تابع در یک نقطه مستلزم وجود مشتق در آن نقطه نیست. مع‌هذا، وجود مشتق یک تابع در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن نقطه را ایجاب می‌کند. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم $f'(z_\circ)$ موجود باشد و می‌نویسیم

$$\lim_{z\to z_\circ}[f(z) - f(z_\circ)] = \lim_{z\to z_\circ}\frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}\lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ) = f'(z_\circ)\cdot\circ = \circ$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = f(z_\circ).$$

این همان بیان پیوستگی f در $z_\circ$ است (بخش ۱۷).

تعبیرهای هندسی مشتق توابع یک متغیرهٔ مختلط مانند تعبیرهای هندسی مشتق توابع یک متغیرهٔ حقیقی سرراست نیستند. بررسی چنین تعبیرهایی را تا فصل ۹ به تأخیر می‌اندازیم.

۱۹. فرمولهای مشتقگیری

تعریف مشتق در بخش ۱۸ با تعریف مشتق تابع حقیقی‌مقدار با یک متغیر حقیقی، از لحاظ صورت یکی است. در واقع، فرمولهای مشتقگیری زیر را می‌توان از آن تعریف و قضایای متعدد حد، اصولاً با همان روشهای اساسی موجود در حسابان استخراج کرد. در این فرمولها مشتق تابع f در نقطهٔ z را، با

$$\frac{d}{dz}f(z) \quad \text{یا} \quad f'(z)$$

نشان می‌دهند، بسته به اینکه کدام علامت مناسبتر باشد.

فرض کنیم c یک عدد مختلط ثابت باشد و f تابعی که مشتقش در نقطهٔ z موجود است. به‌آسانی نشان داده می‌شود که

$$\frac{d}{dz}c = ۰, \qquad \frac{d}{dz}z = ۱, \qquad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z). \tag{۱}$$

همچنین اگر n عدد صحیح مثبتی باشد،

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-۱}. \tag{۲}$$

این فرمول وقتی n یک عدد صحیح منفی باشد درست است، به شرطی که $z \neq ۰$.

اگر مشتقات دو تابع f و F در نقطهٔ z موجود باشند آن‌گاه

$$\frac{d}{dz}[f(z) + F(z)] = f'(z) + F'(z), \tag{۳}$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)F(z)] = f(z)F'(z) + f'(z)F(z), \tag{۴}$$

و وقتی $F(z) \neq ۰$،

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{[F(z)]^۲}. \tag{۵}$$

حال فرمول (۴) را به‌دست می‌آوریم. برای انجام این کار عبارت زیر را برای تغییر در حاصلضرب $w = f(z)F(z)$ می‌نویسیم:

$$\Delta w = f(z+\Delta z)F(z+\Delta z) - f(z)F(z)$$
$$= f(z)[F(z+\Delta z) - F(z)]$$
$$+ [f(z+\Delta z) - f(z)]F(z+\Delta z)\,.$$

بنابراین

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f(z)\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} + \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}F(z+\Delta z)$$

و اگر Δz را به صفر میل دهیم به فرمول مطلوب برای مشتق $f(z)F(z)$ می‌رسیم. در اینجا از پیوستگی F در نقطهٔ z استفاده کرده‌ایم، زیرا $F'(z)$ موجود است: در نتیجه وقتی Δz به ۰ میل کند $F(z+\Delta z)$ به $F(z)$ میل می‌کند (تمرین ۸ بخش ۱۷ را ببینید).

یک قاعدهٔ زنجیری برای مشتقگیری توابع مرکب نیز موجود است. فرض کنیم f در نقطهٔ z_0 و g در نقطهٔ $f(z_0)$، مشتق داشته باشند. در این صورت تابع $F(z) = g[f(z)]$ در نقطهٔ z_0 دارای مشتق است و

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0)\,. \tag{۶}$$

اگر قرار دهیم $w = f(z)$ و $W = g(w)$ آن‌گاه $W = F(z)$ و قاعدهٔ زنجیری بدین‌صورت در می‌آید

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\,\frac{dw}{dz}\,.$$

مثال. برای محاسبهٔ مشتق $(2z^2+i)^5$ می‌نویسیم $w = 2z^2+i$ و $W = w^5$. در این‌صورت

$$\frac{d}{dz}(2z^2+i)^5 = 5w^4 4z = 20z(2z^2+i)^4\,.$$

برای اثبات فرمول (۶)، نقطهٔ مشخص z_0 را چنان انتخاب می‌کنیم که $f'(z_0)$ موجود باشد. می‌نویسیم $w_0 = f(z_0)$ و همچنین فرض می‌کنیم که $g'(w_0)$ موجود باشد. حال یک ε همسایگی $|w - w_0| < \varepsilon$ از w_0 موجود است به قسمی که به‌ازای هر w در این همسایگی

می‌توان تابع

$$\Phi(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w) - g(w_\circ)}{w - w_\circ} - g'(w_\circ) & w \neq w_\circ\,, \\ \circ & w = w_\circ \end{cases} \qquad (۷)$$

را تعریف کرد.

توجه کنید که نظر به تعریف مشتق، می‌توان نوشت

$$\lim_{w \to w_\circ} \Phi(w) = \circ\,. \qquad (۸)$$

بنابراین Φ در $w_\circ$ پیوسته است.

حال عبارت (۷) را می‌توان به‌صورت

$$g(w) - g(w_\circ) = [g'(w_\circ) + \Phi(w)](w - w_\circ) \qquad (|w - w_\circ| < \varepsilon), \qquad (۹)$$

نوشت که حتی وقتی $w = w_\circ$ برقرار است؛ و چون $f'(z_\circ)$ موجود و در نتیجه f در $z_\circ$ پیوسته است، می‌توان عدد مثبت δیی انتخاب کرد به قسمی که اگر z در δ همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ از $z_\circ$ واقع باشد، $f(z)$ در ε همسایگی $|w - w_\circ| < \varepsilon$ از $w_\circ$ واقع شود. در نتیجه، وقتی که z نقطهٔ دلخواهی در همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ باشد، مجازیم که در عبارت (۹) به‌جای w، $f(z)$ را قرار دهیم. بنابراین، با این جایگذاری و با $w_\circ = f(z_\circ)$، معادلهٔ (۹) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_\circ)]}{z - z_\circ} = \{g'[f(z_\circ)] + \Phi[f(z)]\}\frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

$$(\circ < |z - z_\circ| < \delta), \qquad (۱۰)$$

که در آن باید قید کنیم $z \neq z_\circ$، تا حالت تقسیم بر صفر پیش نیاید. همان‌طورکه قبلاً تذکر دادیم، f در $z_\circ$ و Φ در نقطهٔ $w_\circ = f(z_\circ)$ پیوسته است. بنابراین ترکیب $\Phi[f(z)]$ در $z_\circ$ پیوسته است؛ و چون $\Phi(w_\circ) = \circ$ داریم،

$$\lim_{z \to z_\circ} \Phi[f(z)] = \circ\,.$$

بنابراین، وقتی z به $z_\circ$ میل کند رابطهٔ (۱۰) چنین می‌شود

$$F'(z_\circ) = g'[f(z_\circ)]f'(z_\circ)\,.$$

تمرینها

۱. با استفاده از نتایج بخش ۱۹، $f'(z)$ را بیابید، هرگاه

(الف) $f(z) = ۳z^۲ - ۲z + ۴$؛ (ب) $f(z) = (۱ - ۴z^۲)^۳$؛

(ج) $f(z) = \dfrac{z - ۱}{۲z + ۱} \left(z \neq -\dfrac{۱}{۲}\right)$؛ (د) $f(z) = \dfrac{(۱ + z^۲)^۴}{z^۲} (z \neq ۰)$.

۲. با استفاده از نتایج بخش ۱۹ نشان دهید که

(الف) چندجمله‌یی درجهٔ $n(n \geq ۱)$

$$P(z) = a_۰ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq ۰)$$

همه جا مشتقپذیر است، با مشتق

$$P'(z) = a_۱ + ۲a_۲ z + \cdots + n a_n z^{n-۱};$$

(ب) ضرایب چندجمله‌یی $P(z)$ در قسمت (الف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$a_۰ = P(۰), \quad a_۱ = \frac{P'(۰)}{۱!}, \quad a_۲ = \frac{P''(۰)}{۲!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(۰)}{n!}.$$

۳. تعریف (۳) از بخش (۱۸) در مورد مشتق را به‌کار برده، تا برهان مستقیمی ارائه دهید برای اینکه اگر $f(z) = ۱/z$ $(z \neq ۰)$، آن‌گاه $f'(z) = -۱/z^۲$.

۴. فرض کنید که $f(z_۰) = g(z_۰) = ۰$ و $f'(z_۰)$ و $g'(z_۰)$ موجود باشند به‌طوری که $g'(z_۰) \neq ۰$. با استفاده از تعریف (۱)، بخش ۱۸ در مورد مشتق نشان دهید که

$$\lim_{z \to z_۰} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_۰)}{g'(z_۰)}.$$

۵. فرمول (۳)، بخش ۱۹، را برای مشتق مجموع دو تابع به‌دست آورید.

۶. عبارت (۲)، بخش ۱۹، برای مشتق z^n را وقتی n عدد صحیح مثبتی است، با استفاده از

(الف) استقرای ریاضی و فرمول (۴)، بخش ۱۹، برای مشتق حاصلضرب دو تابع؛

(ب) تعریف (۳)، بخش ۱۸، مشتق و فرمول دوجمله‌یی (بخش ۳) به‌دست آورید.

۷. ثابت کنید عبارت (۲)، بخش ۱۹، برای مشتق z^n وقتی n عددی صحیح و منفی باشد $(n = -۱, -۲, \ldots)$ با شرط $z \neq ۰$ برقرار است.

راهنمایی: قرار دهید $m = -n$ و از فرمول مشتق خارج‌قسمت دو تابع استفاده کنید.

۸. با استفاده از روش مثال ۲، بخش ۱۸، نشان دهید که $f'(z)$ هیچ جا موجود نیست هرگاه

(الف) $f(z) = \overline{z}$؛ (ب) $f(z) = \operatorname{Re} z$؛ (ج) $f(z) = \operatorname{Im} z$.

۹. فرض کنید f تابعی باشد که مقادیر آن عبارت‌اند از

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^{۲}}{z}, & z \neq ۰ \\ ۰, & z = ۰ \end{cases}$$

نشان دهید اگر $z = ۰$ آن‌گاه در هر نقطهٔ ناصفر روی محورهای حقیقی و موهومی صفحهٔ Δz یا صفحهٔ $\Delta x \Delta y$ داریم $\Delta w / \Delta z = ۱$. سپس نشان دهید که در هر نقطهٔ ناصفر $(\Delta x, \Delta x)$ روی خط $\Delta y = \Delta x$ در آن صفحه داریم $\Delta w / \Delta z = -۱$. با استفاده از این ملاحظات نتیجه بگیرید که $f'(۰)$ موجود نیست. (توجه کنید که برای به‌دست آوردن این نتیجه کافی نیست که فقط روشهای میل‌دادن به‌صورت افقی و قائم به سمت مبدأ را در صفحهٔ Δz در نظر بگیریم.)

۲۰. معادلات کوشی[۱]-ریمان

در این بخش یک زوج معادله به‌دست می‌آوریم که وقتی تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (۱)$$

در نقطهٔ $z_۰ = (x_۰, y_۰)$ دارای مشتق باشد آن‌گاه مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع مؤلفه‌یی u و v تابع f باید در آن نقطه در این معادلات صدق کنند. همچنین چگونگی نوشتن $f'(z_۰)$ برحسب این مشتقات جزئی را نشان می‌دهیم.

با نوشتن $z_۰ = x_۰ + iy_۰$، $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ و

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z_۰ + \Delta z) - f(z_۰) \\ &= [u(x_۰ + \Delta x, y_۰ + \Delta y) - u(x_۰, y_۰)] \\ &\qquad + i[v(x_۰ + \Delta x, y_۰ + \Delta y) - v(x_۰, y_۰)] \end{aligned}$$

1. Cauchy

کار خود را شروع می‌کنیم. فرض کنید مشتق

$$f'(z_\circ) = \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{۲}$$

موجود باشد. بنابر قضیهٔ ۱ بخش ۱۵ می‌دانیم که

$$f'(z_\circ) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ, \circ)} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ, \circ)} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{۳}$$

حال توجه به این نکته مهم است که به هر طریقی $(\Delta x, \Delta y)$ به $(\circ, \circ)$ میل کند، عبارت (۳) معتبر است. به‌خصوص فرض کنید $(\Delta x, \Delta y)$ به‌طور افقی از طریق نقاط $(\Delta x, \circ)$ به‌صورتی که در شکل ۲۹ (بخش ۱۸) نشان داده شده است به $(\circ, \circ)$ میل کند. اگر $\Delta y = \circ$، خارج‌قسمت $\Delta w / \Delta z$ به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_\circ + \Delta x, y_\circ) - u(x_\circ, y_\circ)}{\Delta x} + i \frac{v(x_\circ + \Delta x, y_\circ) - v(x_\circ, y_\circ)}{\Delta x}.$$

بنابراین

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ, \circ)} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{u(x_\circ + \Delta x, y_\circ) - u(x_\circ, y_\circ)}{\Delta x} = u_x(x_\circ, y_\circ)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ, \circ)} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{v(x_\circ + \Delta x, y_\circ) - v(x_\circ, y_\circ)}{\Delta x} = v_x(x_\circ, y_\circ)$$

که در آن $u_x(x_\circ, y_\circ)$ و $v_x(x_\circ, y_\circ)$ به‌ترتیب نمایش مشتق جزئی مرتبهٔ اول توابع u و v نسبت به x در $(x_\circ, y_\circ)$ هستند. با جایگذاری این حدها در عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$f'(z_\circ) = u_x(x_\circ, y_\circ) + i v_x(x_\circ, y_\circ). \tag{۴}$$

ممکن است Δz را به‌طور قائم از طریق نقاط $(\circ, \Delta y)$ به صفر میل داد. در این حالت $\Delta x = \circ$ و

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u(x_\circ, y_\circ + \Delta y) - u(x_\circ, y_\circ)}{i \Delta y} + i \frac{v(x_\circ, y_\circ + \Delta y) - v(x_\circ, y_\circ)}{i \Delta y} \\ &= \frac{v(x_\circ, y_\circ + \Delta y) - v(x_\circ, y_\circ)}{\Delta y} - i \frac{u(x_\circ, y_\circ + \Delta y) - u(x_\circ, y_\circ)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

پس روشن است که

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\circ,\circ)} \operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to\circ} \frac{v(x_\circ,y_\circ+\Delta y)-v(x_\circ,y_\circ)}{\Delta y} = v_y(x_\circ,y_\circ)$$

و

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\circ,\circ)} \operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z} = -\lim_{\Delta y\to\circ} \frac{u(x_\circ,y_\circ+\Delta y)-u(x_\circ,y_\circ)}{\Delta y} = -u_y(x_\circ,y_\circ)$$

بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$f'(z_\circ) = v_y(x_\circ,y_\circ) - iu_y(x_\circ,y_\circ), \qquad (۵)$$

که این بار برحسب مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v نسبت به y حساب شده است. توجه کنید که معادلهٔ (۵) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$f'(z_\circ) = -i[u_y(x_\circ,y_\circ) + iv_y(x_\circ,y_\circ)].$$

روابط (۴) و (۵) نه تنها فرمولهایی برای یافتن $f'(z_\circ)$ برحسب مشتقات جزئی توابع مؤلفه‌یی u و v هستند، بلکه شرایطی لازم برای وجود $f'(z_\circ)$ نیز فراهم می‌آورند. زیرا، با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی سمت راست این روابط در می‌یابیم که وجود $f'(z_\circ)$ مستلزم این است که

$$u_x(x_\circ,y_\circ) = v_y(x_\circ,y_\circ) \quad \text{و} \quad u_y(x_\circ,y_\circ) = -v_x(x_\circ,y_\circ) \qquad (۶)$$

روابط (۶) معادلات کوشی‌ـریمان‌اند؛ که به افتخار ریاضیدان فرانسوی کوشی (۱۸۵۷ـ۱۷۸۹) که آنها را کشف کرد و به کاربرد و ریاضیدان آلمانی ریمان (۱۸۶۶ـ۱۸۲۶) که آنها را پایهٔ توسعهٔ نظریهٔ توابع یک متغیره مختلط قرار داد، چنین نامگذاری شده‌اند.

نتایج فوق را چنین خلاصه می‌کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم که

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

و $f'(z)$ در نقطهٔ $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$ موجود باشد. در این‌صورت، مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در $(x_\circ,y_\circ)$ موجودند و در آن نقطه در معادلات کوشی‌ـریمان صدق می‌کنند یعنی

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \qquad (۷)$$

همچنین $f'(z_\circ)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f'(z_\circ) = u_x + iv_x, \tag{۸}$$

که در آن مشتقات جزئی در $(x_\circ, y_\circ)$ محاسبه شده‌اند.

مثال ۱. در مثال ۱، بخش ۱۸، نشان دادیم که تابع

$$f(z) = z^۲ = x^۲ - y^۲ + i۲xy$$

همه جا مشتقپذیر است و $f'(z) = ۲z$. برای اینکه تحقیق کنیم معادلات کوشی-ریمان همه جا برقرارند، توجه می‌کنیم که

$$u(x,y) = x^۲ - y^۲ \quad \text{و} \quad v(x,y) = ۲xy$$

در نتیجه

$$u_x = ۲x = v_y, \qquad u_y = -۲y = -v_x\,.$$

به‌علاوه بنابر رابطهٔ (۸)،

$$f'(z) = ۲x + i۲y = ۲(x+iy) = ۲z\,.$$

چون معادلات کوشی-ریمان برای وجود مشتق تابع f در نقطهٔ $z_\circ$ شرایطی لازم‌اند، اغلب می‌توان از آنها برای تعیین نقاطی که در آن نقاط، f دارای مشتق نیست استفاده کرد.

مثال ۲. وقتی $f(z) = |z|^۲$، داریم

$$u(x,y) = x^۲ + y^۲ \quad \text{و} \quad v(x,y) = \circ$$

اگر معادلات کوشی-ریمان در نقطهٔ (x,y) برقرار باشند نتیجه می‌شود که $۲x = \circ$ و $۲y = \circ$ یا $x = y = \circ$. در نتیجه در هیچ نقطهٔ z مخالف صفر، $f'(z)$ موجود نیست، همان‌طوری که قبلاً از مثال (۲) بخش (۱۸) به آن پی برده بودیم. توجه کنید که قضیهٔ بالا وجود $f'(\circ)$ را تضمین نمی‌کند. ولی قضیه‌ای که در بخش بعد خواهد آمد وجود $f'(\circ)$ را تضمین می‌کند.

۲۱. شرایط کافی برای مشتقپذیری

برقراری معادلات کوشی-ریمان در نقطهٔ $z_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ برای وجود مشتق f در آن نقطه کافی نیست. (تمرین ۶ بخش ۲۲ را ببینید.) اما با برخی شرایط پیوستگی، قضیهٔ مفید زیر را داریم.

قضیه. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در سراسر یک ε همسایگی نقطهٔ $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$ تعریف شده باشد. فرض کنید که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع u و v نسبت به x و y در آن همسایگی موجود و در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته باشند. در این‌صورت اگر این مشتقات جزئی در $(x_\circ, y_\circ)$ در معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x,$$

صدق کنند، مشتق $f'(z_\circ)$ موجود است.

برای شروع اثبات می‌نویسیم $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ که در آن $0 < |\Delta z| < \varepsilon$ و

$$\Delta w = f(z_\circ + \Delta z) - f(z_\circ).$$

بنابراین

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \tag{۱}$$

که در آن

$$\Delta u = u(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - u(x_\circ, y_\circ)$$

و

$$\Delta v = v(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - v(x_\circ, y_\circ).$$

اما با توجه به پیوستگی مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ می‌توان نوشت*

$$\Delta u = u_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + u_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{۲}$$

* برای مثال صفحات ۱۵۱-۱۵۰ و ۱۹۸-۱۹۷ کتاب زیر را ببینید

A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., 1983.

و

$$\Delta v = v_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + v_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \varepsilon_\text{۲}\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}}, \qquad (\text{۳})$$

که در آن $\varepsilon_\text{۱}$ و $\varepsilon_\text{۲}$ به $\circ$ میل می‌کنند وقتی که $(\Delta x, \Delta y)$ در صفحهٔ Δz به $(\circ, \circ)$ میل کند. حال با جایگذاری عبارات (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که

$$\Delta w = u_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + u_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \varepsilon_\text{۱}\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}} \qquad (\text{۴})$$

$$+ i[v_x(x_\circ, y_\circ)\Delta x + v_y(x_\circ, y_\circ)\Delta y + \varepsilon_\text{۲}\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}}].$$

با این فرض که معادلات کوشی-ریمان در $(x_\circ, y_\circ)$ برقرارند، در رابطهٔ (۴) می‌توانیم به‌جای $u_y(x_\circ, y_\circ)$ مقدار $-v_x(x_\circ, y_\circ)$ و به جای $v_y(x_\circ, y_\circ)$ مقدار $u_x(x_\circ, y_\circ)$ را قرار دهیم و سپس بر Δz تقسیم کنیم تا به‌دست آوریم

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_\circ, y_\circ) + iv_x(x_\circ, y_\circ) + (\varepsilon_\text{۱} + i\varepsilon_\text{۲})\frac{\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}}}{\Delta z} \qquad (\text{۵})$$

اما، $\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}} = |\Delta z|$ و در نتیجه

$$\left|\frac{\sqrt{(\Delta x)^\text{۲} + (\Delta y)^\text{۲}}}{\Delta z}\right| = \text{۱}.$$

همچنین وقتی $(\Delta x, \Delta y)$ به $(\circ, \circ)$ میل کند $\varepsilon_\text{۱} + i\varepsilon_\text{۲}$ به‌صفر میل می‌کند. بنابراین وقتی متغیر $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ به صفر میل کند، جملهٔ آخر سمت راست رابطهٔ (۵) به $\circ$ میل خواهد کرد. بنابراین حد سمت چپ رابطهٔ (۵) موجود است و

$$f'(z_\circ) = u_x + iv_x. \qquad (\text{۶})$$

مثال ۱. تابع نمایی

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy),$$

را که برخی از ویژگیهای نگاشتش را در بخش ۱۳ مورد بحث قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. به موجب فرمول اویلر، (بخش ۶)، این تابع را می‌توان به‌صورت زیر

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y),$$

نوشت که در محاسبهٔ $\cos y$ و $\sin y$ مقدار y را برحسب رادیان می‌گیریم. پس

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{و} \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

چون همه جا $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ و این مشتقات همه جا پیوسته‌اند، شرایط قضیه در همهٔ نقاط صفحهٔ مختلط برقرارند. بنابراین همه جا مشتق، $f'(z)$، موجود است و

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y)$$

توجه می‌کنید که $f'(z) = f(z)$.

مثال ۲. از قضیهٔ این بخش نتیجه می‌شود که تابع $f(z) = |z|^2$ که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از

$$v(x,y) = 0 \quad \text{و} \quad u(x,y) = x^2 + y^2$$

در $z = 0$ دارای مشتق است، در واقع $f'(0) = 0 + 0i = 0$ (با مثال ۲، بخش ۱۸، مقایسه کنید). در مثال ۲، بخش ۲۰، دیدیم که این تابع نمی‌تواند در نقاط مخالف صفر مشتق داشته باشد زیرا در چنین نقاطی معادلات کوشی-ریمان برقرار نیستند.

۲۲. مختصات قطبی

با فرض اینکه $z_0 \neq 0$، در این بخش از تبدیل مختصات

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \sin\theta \tag{1}$$

استفاده کرده قضیهٔ بخش ۲۱ را در مختصات قطبی از نو بیان می‌کنیم.

وقتی $w = f(z)$، بسته به اینکه z را به‌صورت

$$z = x + iy \quad \text{یا} \quad z = re^{i\theta} \quad (z \neq 0)$$

بنویسیم، قسمتهای حقیقی و موهومی $w = u + iv$ برحسب متغیرهای x و y یا r و θ بیان می‌شوند. فرض کنید که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v نسبت به x و y در هر نقطه از یک همسایگی نقطهٔ ناصفر z_0 موجود و در آن نقطه پیوسته باشند. مشتقات جزئی مرتبهٔ اول نسبت به r و θ نیز دارای این ویژگیها هستند و با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای مشتقگیری توابع حقیقی‌مقدار

از دو متغیر حقیقی می‌توان آنها را برحسب مشتقات نسبت به x و y بیان کرد. به عبارت دقیقتر، چون

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

می‌توان نوشت

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \qquad u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta\,. \qquad (۲)$$

همین‌طور

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \qquad v_\theta = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta\,. \qquad (۳)$$

اگر مشتقات جزئی نسبت به x و y در نقطهٔ $z_\circ$ در معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \qquad (۴)$$

نیز صدق کنند، معادلات (۳) در آن نقطه به معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\sin\theta, \qquad v_\theta = u_y r\sin\theta + u_x r\cos\theta \qquad (۵)$$

بنابراین از معادلات (۲) و (۵) واضح است که در نقطهٔ $z_\circ$

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r\,. \qquad (۶)$$

اگر از طرف دیگر بدانیم که معادلات (۶) در $z_\circ$ برقرارند، مستقیماً می‌توان نشان داد (تمرین ۷) که معادلات (۴) باید در آن نقطه برقرار باشند. بنابراین معادلات (۶) صورت دیگری از معادلات کوشی-ریمان (۴) هستند.

حال می‌توان قضیهٔ بخش ۲۱ را با استفاده از مختصات قطبی از نو بیان کرد.

قضیه. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

در یک ε همسایگی نقطهٔ ناصفر $z_\circ = r_\circ \exp(i\theta_\circ)$ تعریف شده باشد. فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع u و v نسبت به r و θ در آن همسایگی موجود باشند. اگر این مشتقات جزئی در $(r_\circ\,, \theta_\circ)$ پیوسته باشند و در $(r_\circ\,, \theta_\circ)$ در صورت قطبی

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r$$

معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، آن‌گاه $f'(z_0)$ موجود است.

در اینجا می‌توان مشتق $f'(z_0)$ را به‌صورت زیر نوشت (تمرین ۸ را ببینید)

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \qquad (۷)$$

که سمت راست آن در (r_0, θ_0) محاسبه می‌شود.

مثال ۱. تابع

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0). \qquad (۸)$$

را در نظر می‌گیریم. چون

$$u(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \quad \text{و} \quad v(r,\theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$$

شرایط قضیهٔ فوق در هر نقطهٔ ناصفر صفحه، مانند $z = re^{i\theta}$ برقرارند. به‌خصوص، معادلات کوشی-ریمان

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \quad \text{و} \quad u_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} = -rv_r$$

برقرارند. پس مشتق f وقتی $z \neq 0$ موجود است و بنابر عبارت (۷) داریم

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -e^{-i\theta}\,\frac{e^{-i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

مثال ۲. با استفاده از قضیهٔ فوق می‌توان نشان داد که اگر α عدد حقیقی ثابتی باشد، تابع

$$f(z) = \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3} \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \qquad (۹)$$

در هر نقطه از حوزهٔ تعریف خود مشتق دارد. در اینجا

$$u(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3} \quad \text{و} \quad v(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\sin\frac{\theta}{3}.$$

از آنجا که

$$ru_r = \frac{\sqrt[3]{r}}{3}\cos\frac{\theta}{3} = v_\theta \quad \text{و} \quad u_\theta = -\frac{\sqrt[3]{r}}{3}\sin\frac{\theta}{3} = -rv_r$$

و چون شرایط دیگر قضیه برقرارند، مشتق $f'(z)$ در هر نقطه‌ای که $f(z)$ تعریف شده است موجود است. به‌علاوه بنابر عبارت (۷) داریم

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{۱}{۳(\sqrt[۳]{r}\,)^۲}\cos\frac{\theta}{۳} + i\frac{۱}{۳(\sqrt[۳]{r}\,)^۲}\sin\frac{\theta}{۳}\right],$$

یا

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{۳(\sqrt[۳]{r}\,)^۲}\,e^{i\theta/۳} = \frac{۱}{۳(\sqrt[۳]{r}\,e^{i\theta/۳})^۲} = \frac{۱}{۳[f(z)]^۲}.$$

توجه کنید که وقتی z نقطهٔ مشخصی در حوزهٔ تعریف f گرفته شود، مقدار $f(z)$ یکی از مقادیر $z^{۱/۳}$ است (بخش ۱۱ را ببینید). در اینجا عبارت آخری برای $f'(z)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{d}{dz}z^{۱/۳} = \frac{۱}{۳(z^{۱/۳})^۲}$$

هرگاه آن مقدار گرفته شده باشد. مشتقات چنین توابع توانی در فصل ۳ (بخش ۳۲) به‌طور کامل بررسی خواهد شد.

تمرینها

۱. با استفاده از قضیهٔ بخش ۲۰ نشان دهید که $f'(z)$ در هیچ نقطه‌ای موجود نیست اگر

(الف) $f(z) = \overline{z}$؛ (ب) $f(z) = z - \overline{z}$؛
(ج) $f(z) = ۲x + ixy^۲$؛ (د) $f(z) = e^x e^{-iy}$.

۲. با استفاده از قضیهٔ بخش ۲۱ نشان دهید که $f'(z)$ و مشتق آن $f''(z)$ همه جا موجودند و $f''(z)$ را پیدا کنید، هرگاه

(الف) $f(z) = iz + ۲$؛ (ب) $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$؛
(ج) $f(z) = z^۳$؛ (د) $f(z) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$.

جواب: (ب) $f''(z) = f(z)$؛ (د) $f''(z) = -f(z)$.

۳. با استفاده از نتایج حاصل در بخشهای ۲۰ و ۲۱ معین کنید کجا $f'(z)$ موجود است و مقدارش را پیدا کنید، درصورتی که

(الف) $f(z) = ۱/z$؛ (ب) $f(z) = x^۲ + iy^۲$؛ (ج) $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$.

جواب: (الف) $f'(z) = -۱/z^۲\ (z \neq ۰)$؛ (ب) $f'(x+ix) = ۲x$؛ (ج) $f'(۰) = ۰$.

۴. با استفاده از قضیهٔ بخش ۲۲ نشان دهید که هر یک از این توابع در حوزهٔ تعریف مشخص‌شده، مشتقپذیر است و سپس با استفاده از عبارت (۷) آن بخش، $f'(z)$ را پیدا کنید:

(الف) $f(z) = 1/z^4 (z \neq 0)$؛

(ب) $f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$؛

(ج) $(r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$ $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)$.

جواب: (ب) $f'(z) = 1/[2f(z)]$؛ (ج) $f'(z) = if(z)/z$.

۵. نشان دهید اگر $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$، فقط برای $z = i$ مجاز به نوشتن رابطهٔ زیر هستیم

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2 .$$

۶. فرض کنید u و v معرف مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع f باشند که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که معادلات کوشی‌ـریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ در مبدأ $z = (0, 0)$ برقرارند. [با تمرین ۹، بخش ۱۹، که در آن نشان دادید با وجود این $f'(0)$ موجود نیست، مقایسه کنید.]

۷. معادلات (۲)، بخش ۲۲، را برحسب u_x و u_y حل کرده نشان دهید که

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r} \quad \text{و} \quad u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}.$$

سپس با استفاده از این روابط و روابط مشابه برای v_x و v_y نشان دهید که اگر در بخش ۲۲ معادلات (۶) در نقطهٔ z_0 برقرار باشند، آن‌گاه معادلات (۴) در آن نقطه برقرارند. بدین‌ترتیب این تحقیق را کامل کنید که معادلات (۶)، بخش ۲۲، صورت قطبی معادلات کوشی‌ـریمان‌اند.

۸. فرض کنید تابع $f(z) = u + iv$ در نقطهٔ ناصفر $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ مشتقپذیر باشد. با استفاده از عباراتی که برای u_x و v_x در تمرین ۷ پیدا کردیم و صورت قطبی معادلات کوشی‌ـریمان، روابط (۶) بخش ۲۲، نشان دهید که $f'(z_0) = u_x + iv_x$ در بخش ۲۱ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

که در آن u_r و v_r در (r_0, θ_0) محاسبه شده‌اند.

۹. (الف) به کمک صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان، روابط (۶)، بخش ۲۲، از روی عبارتی که در تمرین ۸ برای $f'(z_\circ)$ به‌دست آمد، صورت دیگر زیر را به‌دست آورید

$$f'(z_\circ) = \frac{-i}{z_\circ}(u_\theta + iv_\theta).$$

(ب) با استفاده از عبارتی که در قسمت (الف) برای $f'(z_\circ)$ به‌دست آمد نشان دهید که مشتق تابع $f(z) = ۱/z(z \neq \circ)$ در مثال ۱ بخش ۲۲ عبارت است از $f'(z) = -۱/z^۲$.

۱۰. (الف) یادآوری می‌کنیم که (بخش ۵) اگر $z = x + iy$، آن‌گاه

$$x = \frac{z + \overline{z}}{۲} \quad \text{و} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{۲i}.$$

با کاربرد صوری قاعدهٔ زنجیری در حسابان برای تابع $F(x, y)$ از دو متغیر حقیقی، عبارت زیر را به‌دست آورید

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

(ب) با الهام گرفتن از قسمت (الف)، عملگر

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

را تعریف کرده نشان دهید که اگر مشتقات جزئی مرتبهٔ اول قسمتهای حقیقی و موهومی تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، آن‌گاه

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{۱}{۲}\left[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\right] = \circ.$$

بدین‌ترتیب صورت مختلط $\partial f/\partial \overline{z} = \circ$ برای معادلات کوشی-ریمان را به‌دست آورید.

۲۳. توابع تحلیلی

حال آماده‌ایم تا مفهوم تابع تحلیلی را معرفی کنیم. تابع f از متغیر مختلط z در یک مجموعهٔ باز تحلیلی است اگر در هر نقطهٔ آن مجموعه دارای مشتق باشد.* اگر از تابع fای سخن به میان می‌آوریم که در مجموعهٔ S تحلیلی است و S باز نیست منظور این است که f در مجموعهٔ بازی

* در متونی که در این زمینه نوشته شده اصطلاحات منظم و هولومورف نیز به معنی تحلیلی‌بودن به‌کار رفته‌اند.

شامل S تحلیلی است. به‌خصوص f در نقطهٔ z_0 تحلیلی است اگر در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

توجه می‌کنیم که مثلاً تابع $f(z) = 1/z$ در هر نقطهٔ ناصفر صفحهٔ متناهی تحلیلی است. اما تابع $f(z) = |z|^2$ در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست زیرا مشتق آن فقط در $z = 0$ موجود است نه در سراسر یک همسایگی. (مثال ۲، بخش ۱۸، را ببینید.)

یک تابع تام، تابعی است که در تمام نقاط صفحهٔ متناهی، تحلیلی باشد. چون مشتق یک چندجمله‌یی همه جا موجود است، نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌یی یک تابع تام است.

اگر تابع f در نقطهٔ z_0 تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی z_0 تحلیلی باشد آن‌گاه z_0 یک نقطهٔ تکین، یا تکینی، تابع f نامیده می‌شود. روشن است که نقطهٔ $z = 0$ یک نقطهٔ تکین تابع $f(z) = 1/z$ است. از طرف دیگر تابع $f(z) = |z|^2$ دارای نقطهٔ تکین نیست، زیرا در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

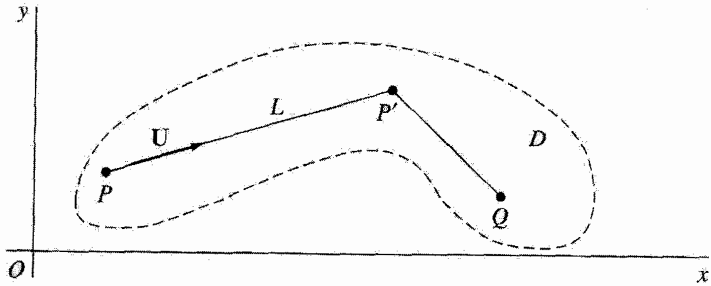
یک شرط لازم، اما نه به هیچ‌وجه کافی، برای اینکه تابع f در حوزهٔ D تحلیلی باشد، به‌وضوح پیوستگی f در سراسر D است. همچنین برقراری معادلات کوشی-ریمان لازم است ولی کافی نیست. شرایطی کافی برای تحلیلی بودن در D به‌وسیلهٔ قضایای دو بخش ۲۱ و ۲۲ فراهم شده‌اند.

از فرمولهای مشتقگیری بخش ۱۹ شرایط کافی و مفید دیگری به‌دست می‌آیند. مشتق مجموع و حاصلضرب دو تابع موجودند هرگاه خود توابع دارای مشتق باشند. در نتیجه، اگر دو تابع در حوزهٔ D تحلیلی باشند، مجموع و حاصلضرب آنها هر دو در D تحلیلی‌اند. به همین نحو، خارج‌قسمت آن دو تابع در D تحلیلی است، مشروط بر اینکه تابع مخرج در هیچ نقطهٔ D صفر نباشد. به‌خصوص، خارج‌قسمت $P(z)/Q(z)$ دو چندجمله‌یی در هر حوزه که در سراسر آن $Q(z) \neq 0$، تحلیلی است.

از قاعدهٔ زنجیری برای مشتق یک تابع مرکب، در می‌یابیم که ترکیب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است. به عبارت دقیقتر، فرض کنید تابع $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی و تصویر D (بخش ۱۲) تحت تبدیل $w = f(z)$ در حوزهٔ تعریف تابع تحلیلی $g(w)$ واقع باشد. در این‌صورت ترکیب $g[f(z)]$ در D تحلیلی و مشتق آن برابر است با

$$\frac{d}{dz}g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z)\,.$$

قضیهٔ زیر علاوه بر قابل پیش‌بینی بودن فوق‌العاده مفید است.



شکل ۳۰

قضیه. اگر در هر نقطه از حوزهٔ D داشته باشیم $f'(z) = 0$، آن‌گاه f در سراسر D ثابت است.

برای اثبات این قضیه، می‌نویسیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. پس با فرض اینکه در D، $f'(z) = 0$ توجه می‌کنیم که $u_x + iv_x = 0$ و بنابر معادلات کوشی-ریمان $v_y - iu_y = 0$. در نتیجه در هر نقطهٔ D داریم

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0\,.$$

حال نشان می‌دهیم که $u(x, y)$ در امتداد هر پاره‌خطی مانند L که از نقطه‌ای مانند P به نقطه‌ای مانند P' وصل شده و کاملاً در D واقع باشد ثابت است. فرض کنید s نمایش فاصله در امتداد L از نقطهٔ P باشد و $\mathbf{U}$ بردار یکه در امتداد L در جهت افزایش s باشد (شکل ۳۰ را ببینید). در حسابان دیده‌ایم که مشتق جهتی du/ds را می‌توان به‌صورت حاصلضرب نقطه‌یی

$$\frac{du}{ds} = (\text{gard } u) \cdot \mathbf{U} \tag{1}$$

نوشت، که در آن $\text{grad } u$ عبارت است از بردار گرادیان

$$\text{grad } u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} \tag{2}$$

چون u_x و u_y در هر نقطهٔ D صفرند، پس $\text{grad } u$ در هر نقطه روی L بردار صفر است. بنابراین از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که مشتق du/ds در امتداد L صفر است و لذا u روی L ثابت است.

سرانجام چون برای هر دو نقطه P و Q در D تعداد متناهی از این پاره‌خطها وجود دارند که انتهای هر یک ابتدای دیگری است و P را به Q وصل می‌کنند (بخش ۱۰)، مقادیر u در

P و Q باید یکی باشند. بدین‌ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که عدد حقیقی ثابتی مانند a وجود دارد که در سراسر D داریم $u(x,y) = a$. همین‌طور $v(x,y) = b$ و لذا در هر نقطهٔ D داریم $f(z) = a + bi$.

۲۴. چند مثال

همان‌طورکه در بخش ۲۳ خاطر نشان ساختیم، اغلب می‌توان با استفاده از فرمولهای مشتقگیری بخش ۱۹ محلی را که یک تابع مفروض در آن تحلیلی است مشخص کرد.

مثال ۱. خارج‌قسمت

$$f(z) = \frac{z^۳ + ۴}{(z^۲ - ۳)(z^۲ + ۱)}$$

به‌وضوح در سراسر صفحهٔ z تحلیلی است جز در نقاط تکین $z = \pm\sqrt{۳}$ و $z = \pm i$. تحلیلی بودن به استناد وجود فرمولهای مشتقگیری است که با آن آشنا هستیم، و صرفاً زمانی از آنها استفاده می‌کنیم که عبارت $f'(z)$ خواسته شده باشد.

درصورتی که تابعی برحسب توابع مؤلفه‌یی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ داده شده باشد، تحلیلی‌بودن آن را می‌توان با استفادهٔ مستقیم از معادلات کوشی‌ـریمان ثابت کرد.

مثال ۲. درصورتی که

$$f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

توابع مؤلفه‌یی عبارت‌اند از

$$u(x,y) = \cosh x \cos y \quad \text{و} \quad v(x,y) = \sinh x \sin y.$$

چون در هر نقطه

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

بنابر قضیهٔ بخش ۲۱، f تابعی است تام.

بالاخره، چگونگی استفاده از قضایای چهار بخش آخر، به‌خصوص قضیهٔ بخش ۲۳، را برای به‌دست آوردن برخی ویژگیهای مهم توابع تحلیلی نشان می‌دهیم.

مثال ۳. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

و مزدوج آن

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$

هر دو در حوزهٔ مفروضی مانند D تحلیلی باشند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $f(z)$ باید در سراسر D ثابت باشد.

برای انجام این کار $\overline{f(z)}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\overline{f(z)} = U(x,y) + iV(x,y),$$

که در آن

$$V(x,y) = -v(x,y) \quad \text{و} \quad U(x,y) = u(x,y). \tag{۱}$$

به دلیل تحلیلی‌بودن $f(z)$، بنابر قضیهٔ بخش ۲۰، معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{۲}$$

در Dبرقرارند. همچنین بنابر تحلیلی‌بودن $\overline{f(z)}$ در D داریم

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x.$$

بنابر روابط (۱)، این دو معادلهٔ آخر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x. \tag{۳}$$

با جمع‌کردن طرفین متناظر معادله‌های اول روابط (۲) و (۳) درمی‌یابیم که در D، $u_x = \circ$. همین‌طور با تفریق طرفین متناظر معادله‌های دوم روابط (۲) و (۳) می‌بینیم که $v_x = \circ$. پس بنابر عبارت (۸) بخش ۲۰،

$$f'(z) = u_x + iv_x = \circ + i\circ = \circ;$$

و از قضیهٔ بخش ۲۳ نتیجه می‌شود که $f(z)$ در سراسر D ثابت است.

تمرینها

۱. با استفاده از قضیهٔ بخش ۲۱ تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر تام است:

(الف) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$؛

(ب) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$؛

(ج) $f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$؛

(د) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$.

۲. به کمک قضیهٔ بخش ۲۰، نشان دهید که هیچ‌یک از توابع زیر در هیچ‌جا تحلیلی نیست:

(الف) $f(z) = xy + iy$؛ (ب) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$؛

(ج) $f(z) = e^y e^{ix}$.

۳. بیان کنید چرا ترکیب دو تابع تام تابعی تام است. همچنین بیان کنید چرا هر ترکیب خطی $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$ از دو تابع تام، که در آن c_1 و c_2 اعداد مختلط ثابتی هستند، تابعی تام است.

۴. در هر یک از حالتهای زیر نقاط تکین تابع را معین کرده بیان کنید چرا تابع همه جا جز در آن نقاط تحلیلی است:

(الف) $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$؛ (ب) $f(z) = \dfrac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$؛

(ج) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$.

جواب: (الف) $z = 0, \pm i$؛ (ب) $z = 1, 2$؛ (ج) $z = -2, -1 \pm i$.

۵. بنابر تمرین ۴ قسمت (ب) بخش ۲۲، تابع

$$g(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

در حوزهٔ تعریفش تحلیلی و مشتق آن

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$$

است. نشان دهید که تابع مرکب $G(z) = g(2z - 2 + i)$ در نیم‌صفحهٔ $x > 1$ تحلیلی است، با مشتق

$$G'(z) = \frac{1}{g(2z - 2 + i)}.$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که وقتی $x > 1$ داریم $\mathrm{Re}\,(2z - 2 + i) > 0$.

۶. با استفاده از نتایج بخش ۲۲ تحقیق کنید که تابع

$$g(z) = \ln r + i\theta \qquad (r > ۰, ۰ < \theta < ۲\pi)$$

در حوزهٔ تعریفی که نشان داده‌ایم تحلیلی و دارای مشتق $g'(z) = ۱/z$ است. سپس نشان دهید که تابع مرکب $G(z) = g(z^۲ + ۱)$ در ربع صفحهٔ $x > ۰$، $y > ۰$ تابعی است تحلیلی از z با مشتق

$$G'(z) = \frac{۲z}{z^۲ + ۱}$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که وقتی $x > ۰$، $y > ۰$ داریم $\mathrm{Im}\,(z^۲ + ۱) > ۰$.

۷. فرض کنید تابع f در حوزهٔ D تحلیلی باشد. ثابت کنید که $f(z)$ باید در D ثابت باشد هرگاه

(الف) به‌ازای هر z در D، $f(z)$ حقیقی‌مقدار باشد؛

(ب) $|f(z)|$ در سراسر D ثابت باشد.

راهنمایی: برای اثبات قسمت (الف) از معادلات کوشی-ریمان و قضیهٔ بخش ۲۳ استفاده کنید. برای اثبات (ب) ملاحظه کنید که

$$\overline{f(z)} = \frac{c^۲}{f(z)} \quad \text{هرگاه} \quad |f(z)| = c \quad (c \neq ۰).$$

سپس از نتیجهٔ اصلی مثال ۳ بخش ۲۴ استفاده کنید.

۲۵. توابع همساز

تابع حقیقی-مقدار H از دو متغیر حقیقی x و y را در یک حوزهٔ مفروض از صفحهٔ xy همساز گویند اگر در سراسر آن حوزه دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد و در معادلهٔ با مشتقات جزئی

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = ۰ \qquad (۱)$$

که به معادلهٔ لاپلاس[1] معروف است، صدق کند.

توابع همساز نقش مهمی در ریاضی کاربردی ایفا می‌کنند. مثلاً، دماهای $T(x, y)$ در ورقه‌های نازک واقع در صفحهٔ xy، اغلب همسازند. اگر تابع $V(x, y)$ معرف پتانسیل الکتروستاتیک در داخل ناحیه‌ای از فضای سه‌بعدی باشد که بدون بار الکتریکی است و پتانسیل الکتروستاتیک فقط با x و y تغییر کند، آنگاه V همساز است.

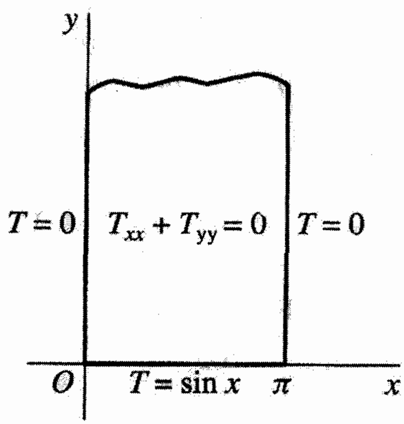
1. Laplace

مثال ۱. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع $T(x, y) = e^{-y} \sin x$ در هر حوزه از صفحهٔ xy، به‌خصوص در نوار قائم نیمه نامتناهی $\circ < x < \pi$ و $y > \circ$ همساز است. فرض می‌کنیم که تابع در لبه‌های نوار، مقادیری را می‌گیرد که در شکل ۳۱ نمایش داده شده‌اند. به بیان دقیقتر، در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = \circ$$
$$T(\circ, y) = \circ, \qquad T(\pi, y) = \circ,$$
$$T(x, \circ) = \sin x, \qquad \lim_{y \to \infty} T(x, y) = \circ,$$

که دماهای مانای $T(x, y)$ در یک ورقهٔ همگن نازک در صفحهٔ xy را که هیچ چشمه یا چاهک حرارتی ندارد و عایق‌بندی‌شده تشریح می‌کند، بجز برای شرایطی که در امتداد لبه‌ها بیان شده است.

نحوهٔ استفاده از نظریهٔ متغیرهای مختلط در یافتن جوابهایی، نظیر جواب مثال ۱، دماها و مسائل دیگر، بعداً در فصل ۱۰ و در قسمتهایی از فصول بعد از آن مفصل بررسی شده است.* این نظریه مبتنی بر قضیهٔ زیر است که زمینه‌ای برای توابع همساز به‌دست می‌دهد.



شکل ۳۱

* روش مهم دیگری در کتاب زیر از همین مؤلفان مطرح شده است
"Fourier Series and Boundary Value Problems" 6th ed., 2001.

قضیهٔ ۱. اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد توابع مؤلفه‌یی آن، u و v، در D همسازند.

برای اثبات آن احتیاج به قضیه‌ای داریم که بعداً در فصل ۴ (بخش ۴۸) ثابت خواهد شد. یعنی، اگر یک تابع یک متغیرهٔ مختلط در نقطه‌ای تحلیلی باشد، آنگاه قسمتهای حقیقی و موهومی‌اش در آن نقطه دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه هستند.

با این فرض که f در D تحلیلی است، مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع مؤلفه‌یی آن در سراسر D در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند، یعنی

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \tag{۲}$$

با مشتقگیری از هر دو طرف این معادلات نسبت به x داریم

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}. \tag{۳}$$

همین‌طور مشتقگیری نسبت به y نتیجه می‌دهد

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}. \tag{۴}$$

حال بنابر قضیه‌ای در حسابان پیشرفته،* پیوستگی مشتقات جزئی u و v متضمن این است که $u_{yx} = u_{xy}$ و $v_{yx} = v_{xy}$. پس، از معادلات (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{و} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

یعنی u و v در D همسازند.

مثال ۲. همان‌طور که در تمرین ۱ قسمت (ج) در بخش ۲۴ نشان داده شد تابع

$$f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$$

تام است. بنابراین قسمت حقیقی آن که تابع دمای $T(x, y) = e^{-y}\sin x$ در مثال ۱ است، باید در هر حوزه از صفحهٔ xy همساز باشد.

---

* برای مثال به صفحات ۱۹۹-۲۰۱ کتاب زیر رجوع کنید

A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., 1983.

مثال ۳. چون تابع $f(z) = i/z^{2}$ در هر نقطهٔ $z \neq 0$ تحلیلی است و چون

$$\frac{i}{z^{2}} = \frac{i}{z^{2}} \cdot \frac{\overline{z}^{2}}{\overline{z}^{2}} = \frac{i\overline{z}^{2}}{(z\overline{z})^{2}} = \frac{i\overline{z}^{2}}{|z|^{4}} = \frac{2xy + i(x^{2} - y^{2})}{(x^{2} + y^{2})^{2}},$$

دو تابع

$$v(x,y) = \frac{x^{2} - y^{2}}{(x^{2} + y^{2})^{2}} \quad \text{و} \quad u(x,y) = \frac{2xy}{(x^{2} + y^{2})^{2}}$$

در سراسر هر حوزه‌ای در صفحهٔ xy که شامل مبدأ نباشد تحلیلی‌اند.

اگر دو تابع مفروض u و v در حوزهٔ D همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبهٔ اولشان در سراسر D در معادلات کوشی-ریمان (۲) صدق کنند، گوییم v یک مزدوج همساز u است. البته معنی کلمهٔ مزدوج در اینجا با معنی آن در بخش ۵، که در آن $\overline{z}$ تعریف شد، فرق دارد.

قضیهٔ ۲. تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزهٔ D تحلیلی است اگر و فقط اگر v یک مزدوج همساز u در D باشد.

اثبات آسان است. اگر v یک مزدوج همساز u در D باشد، از قضیهٔ بخش ۲۱ نتیجه می‌شود که f در D تحلیلی است. برعکس اگر f در D تحلیلی باشد در قضیهٔ ۱ دیده‌ایم که u و v در D همسازند و با توجه به قضیهٔ بخش ۲۰، معادلات کوشی-ریمان برقرارند.

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر v یک مزدوج همساز u در حوزه‌ای باشد در حالت کلی لازم نیست که u یک مزدوج همساز v در آن حوزه باشد. (تمرینهای ۳ و ۴ را نیز ببینید.)

مثال ۴. فرض کنید که

$$.v(x,y) = 2xy \quad \text{و} \quad u(x,y) = x^{2} - y^{2}$$

چون این توابع به‌ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی تابع تام $f(z) = z^{2}$ هستند، v یک مزدوج همساز u در سراسر صفحه است. اما u نمی‌تواند یک مزدوج همساز v باشد زیرا، همان‌طور که در تمرین ۲ قسمت (ب) در بخش ۲۴ بررسی شد، تابع $2xy + i(x^{2} - y^{2})$ در هیچ جا تحلیلی نیست.

در فصل ۹ (بخش ۹۷) نشان خواهیم داد که اگر تابع u در حوزه‌ای از یک نوع معین همساز باشد، همیشه دارای یک مزدوج همساز است. پس، در چنین حوزه‌هایی هر تابع همساز قسمت

حقیقی یک تابع تحلیلی است. همچنین یک مزدوج همساز، در صورت وجود، یکتاست مگر با اختلاف یک عدد ثابت جمعی.

مثال ۵. حال به شرح روشی برای به‌دست آوردن مزدوج همساز یک تابع همساز مفروض می‌پردازیم. به‌سهولت دیده می‌شود که تابع

$$u(x,y) = y^۳ - ۳x^۲y \tag{۵}$$

در تمام صفحهٔ xy همساز است. چون هر مزدوج همساز $u(x,y)$ مانند $v(x,y)$، به‌وسیلهٔ معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \tag{۶}$$

به آن وابسته است، بنابر اولین معادله از این معادلات

$$v_y(x,y) = -۶xy\,.$$

با ثابت نگه‌داشتن x و انتگرالگیری از هر دو طرف این معادله نسبت به y، نتیجه می‌شود

$$v(x,y) = -۳xy^۲ + \phi(x), \tag{۷}$$

که در آن ϕ فعلاً تابع دلخواهی از x است. با استفاده از معادلهٔ دوم معادلات (۶) داریم

$$۳y^۲ - ۳x^۲ = ۳y^۲ - \phi'(x),$$

یا $\phi'(x) = ۳x^۲$. بنابراین $\phi(x) = x^۳ + C$، که در آن C عدد حقیقی دلخواهی است. پس بنابر رابطهٔ (۷) تابع

$$v(x,y) = -۳xy^۲ + x^۳ + C \tag{۸}$$

یک مزدوج همساز $u(x,y)$ است.

تابع تحلیلی متناظر عبارت است از

$$f(z) = (y^۳ - ۳x^۲y) + i(-۳xy^۲ + x^۳ + C)\,. \tag{۹}$$

تحقیق درستی صورت $f(z) = i(z^۳ + C)$ این تابع به‌سهولت انجام می‌شود و این صورت از آنجا پیشنهاد می‌شود که وقتی $y = ۰$، عبارت (۹) به‌صورت $f(x) = i(x^۳ + C)$ در می‌آید.

تمرینها

۱. نشان دهید که $u(x,y)$ در حوزه‌ای همساز است و مزدوج همسازی مانند $v(x,y)$ پیدا کنید وقتی‌که

(الف) $u(x,y) = ۲x(۱-y)$؛ (ب) $u(x,y) = ۲x - x^۳ + ۳xy^۲$؛
(ج) $u(x,y) = \sinh x \sin y$؛ (د) $u(x,y) = y/(x^۲+y^۲)$.

جواب: (الف) $v(x,y) = x^۲ - y^۲ + ۲y$؛ (ب) $v(x,y) = ۲y - ۳x^۲y + y^۳$
(ج) $v(x,y) = -\cosh x \ \cos y$ (د) $v(x,y) = x/(x^۲+y^۲)$

۲. نشان دهید اگر v و V مزدوجهای همساز u در حوزهٔ D باشند، آن‌گاه تفاضل $v(x,y)$ و $V(x,y)$ حداکثر می‌تواند یک عدد ثابت جمعی باشد.

۳. فرض کنید در حوزهٔ D، v یک مزدوج همساز u و u یک مزدوج همساز v باشد. نشان دهید چگونه نتیجه می‌شود که باید در سراسر D هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ ثابت باشند.

۴. با استفاده از قضیهٔ ۲ بخش ۲۵ نشان دهید تابع v یک مزدوج همساز u در حوزهٔ D است اگر و فقط اگر $-u$ یک مزدوج همساز v در حوزهٔ D باشد. (با نتیجهٔ تمرین ۳ مقایسه کنید.)

راهنمایی: ملاحظه کنید که تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در D تحلیلی است اگر و فقط اگر $-if(z)$ در D تحلیلی باشد.

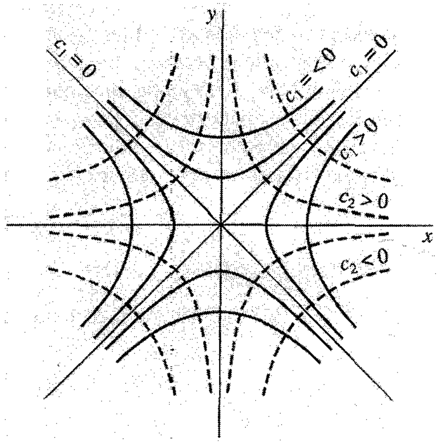
۵. فرض کنید تابع $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ در حوزهٔ D که شامل مبدأ نیست، تحلیلی باشد. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی (بخش ۲۲) و با فرض پیوستگی مشتقهای جزئی نشان دهید که در سراسر D تابع $u(r,\theta)$ در معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$r^۲ u_{rr}(r,\theta) + ru_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = ۰$$

که صورت قطبی معادلهٔ لاپلاس است، صدق می‌کند. نشان دهید که همین مطلب در مورد تابع $v(r,\theta)$ نیز برقرار است.

۶. تحقیق کنید که تابع $u(r,\theta) = \ln r$ در حوزهٔ $r > ۰$، $۰ < \theta < ۲\pi$ همساز است، بدین‌طریق که نشان دهید در صورت قطبی معادلهٔ لاپلاس، که در تمرین ۵ به‌دست آمد، صدق می‌کند. سپس با استفاده از روش مثال ۵، بخش ۲۵ اما با صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان (بخش ۲۲)، مزدوج همساز $v(r,\theta) = \theta$ را به‌دست آورید. (با تمرین ۶ بخش ۲۴ مقایسه کنید.)

۷. فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد و خانواده‌های منحنیهای تراز $u(x,y) = c_۱$ و $v(x,y) = c_۲$ را که در آنها $c_۱$ و $c_۲$ اعداد ثابت دلخواهی



شکل ۳۲

هستند در نظر بگیرید. ثابت کنید که این خانواده‌ها متعامدند. به بیان دقیقتر، نشان دهید که اگر $z_\circ = (x_\circ , y_\circ)$ نقطه‌ای از D، مشترک بین دو منحنی خاص $u(x,y) = c_۱$ و $v(x,y) = c_۲$ باشد و اگر $f'(z_\circ) \neq \circ$ آن‌گاه خطوط مماس بر این منحنیها در $(x_\circ , y_\circ)$ برهم عمودند.

راهنمایی: توجه کنید که چگونه از معادلات $u(x,y) = c_۱$ و $v(x,y) = c_۲$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \circ \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \circ.$$

۸. نشان دهید که وقتی $f(z) = z^۲$، منحنیهای تراز $u(x,y) = c_۱$ و $v(x,y) = c_۲$ مربوط به توابع مؤلفه‌یی، هذلولیهایی هستند که در شکل ۳۲ نشان داده شده‌اند. به تعامد این دو خانواده، که در تمرین ۷ ثابت شد، توجه کنید. منحنیهای $u(x,y) = \circ$ و $v(x,y) = \circ$ در مبدأ همدیگر را قطع می‌کنند ولی با وجود این، بر یکدیگر عمود نیستند. چرا این امر با نتیجهٔ تمرین ۷ تناقضی ندارد؟

۹. نمودار خانواده‌های منحنیهای تراز توابع مؤلفه‌یی u و v را درصورتی که $f(z) = ۱/z$ رسم کنید و به تعامدی که در تمرین ۷ ثابت شد توجه کنید.

۱۰. تمرین ۹ را با استفاده از مختصات قطبی انجام دهید.

۱۱. نمودار خانواده‌های منحنیهای تراز توابع مؤلفه‌یی u و v را وقتی

$$f(z) = \frac{z - ۱}{z + ۱},$$

رسم کنید و توجه کنید که چگونه نتایج تمرین ۷، در اینجا آشکار می‌شوند.

۲۶. توابع تحلیلی که به‌طور یکتا مشخص می‌شوند

در دو بخش آخر این فصل به بررسی این مسئله می‌پردازیم که اگر تابعی در حوزه‌ای مانند D تحلیلی باشد، مقادیرش در یک زیرحوزه یا بر پاره‌خطی مشمول در D چه اثری بر مقادیرش در D دارند. گرچه این بخشها فواید نظری قابل ملاحظه‌ای دارند نقش مهمی در ارائهٔ توابع تحلیلی در فصلهای بعد ندارند. خواننده می‌تواند در این مرحله مستقیماً به فصل ۳ برود و هر وقت نیاز پیدا کرد به این بخش برگردد.

لم. فرض کنید که

الف) تابع f در سراسر حوزهٔ D تحلیلی باشد؛

ب) در هر نقطهٔ z از حوزه یا پاره‌خطی واقع در D داشته باشیم $f(z) = ۰$.

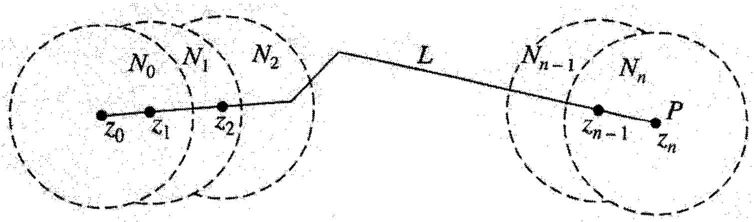
در این‌صورت $f(z) \equiv ۰$ در D، یعنی $f(z)$ در سراسر D متحد با صفر است.

برای اثبات این لم، فرض می‌کنیم f به‌صورتی باشد که در فرض آمده است و $z_۰$ نقطهٔ دلخواهی در زیرحوزه یا پاره‌خطی باشد که در هر نقطهٔ آن $f(z) = ۰$. چون D یک مجموعهٔ باز همبند است (بخش ۱۰) به‌ازای هر نقطهٔ دیگر P از D خط شکسته‌ای مانند L، متشکل از تعدادی متناهی پاره‌خط کاملاً واقع در D هست که انتهای هر یک ابتدای دیگری است و از $z_۰$ تا P ادامه دارد. فرض می‌کنیم d کوتاهترین فاصلهٔ نقاط روی L تا مرز D باشد، مگر اینکه D تمام صفحه باشد، که در این حالت d را می‌توان هر عدد مثبتی گرفت. سپس دنباله‌ای متناهی از نقاط روی L مانند

$$z_۰, z_۱, z_۲, \ldots, z_{n-۱}, z_n$$

تشکیل می‌دهیم، که نقطهٔ z_n منطبق بر P باشد (شکل ۳۳) و هر نقطه به‌قدر کافی نزدیک به نقاط مجاورش باشد به‌طوری که

$$|z_k - z_{k-۱}| < d \qquad (k = ۱, ۲, \ldots, n).$$



شکل ۳۳

بالاخره، دنباله‌ای متناهی از همسایگیها مانند

$$N_\circ, N_\text{۱}, N_\text{۲}, \ldots, N_{n-\text{۱}}, N_n$$

می‌سازیم که هر همسایگی N_k به مرکز z_k و شعاع d باشد. توجه کنید که این همسایگیها همه مشمول در Dاند و به‌ازای هر $k = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n$، نقطهٔ z_k مرکز همسایگی N_k در همسایگی قبلی یعنی $N_{k-\text{۱}}$ واقع است.

در این مرحله، لازم است از قضیه‌ای که بعداً در فصل ۶ ثابت خواهد شد استفاده کنیم. یعنی قضیهٔ ۳ بخش ۶۸ با این مضمون که چون تابع f در حوزهٔ $N_\circ$ تحلیلی است و در حوزه یا پاره‌خطی شامل $z_\circ$، $f(z) = \circ$ پس $f(z) \equiv \circ$ در $N_\circ$. اما نقطهٔ $z_\text{۱}$ در حوزهٔ $N_\circ$ واقع است. بنابراین با استفادهٔ مجدد از همان قضیه نتیجه می‌گیریم که $f(z) \equiv \circ$ در $N_\text{۱}$ و با ادامهٔ این روش، به این نتیجه می‌رسیم که $f(z) \equiv \circ$ در N_n. چون N_n به مرکز P است و چون P در D به دلخواه انتخاب شده است، به این نتیجه می‌رسیم که $f(z) \equiv \circ$ در D. بدین‌ترتیب اثبات لم کامل می‌شود.

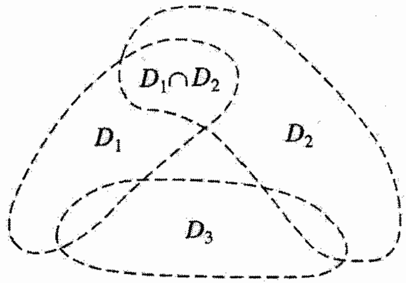
حال فرض کنید دو تابع f و g در حوزه‌ای مانند D تحلیلی باشند و در هر نقطهٔ z از یک حوزه یا پاره‌خطی مشمول در D، $f(z) = g(z)$. تفاضل

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

نیز در D تحلیلی است و در سراسر زیرحوزه یا در امتداد پاره‌خط، $h(z) = \circ$. پس بنابر لم فوق در سراسر D، $h(z) = \circ$؛ یعنی در هر نقطهٔ z از D داریم $f(z) = g(z)$. بدین‌ترتیب به قضیهٔ مهم زیر رسیده‌ایم.

قضیه. تابعی که در حوزهٔ D تحلیلی است با مقادیرش در حوزه‌ای یا در امتداد پاره‌خطی مشمول در D به‌طور یکتا روی D معین می‌شود.

این قضیه در مطالعهٔ مسئلهٔ مربوط به توسیع حوزهٔ تعریفِ یک تابع تحلیلی مفید است. به عبارت دقیقتر، دو حوزهٔ $D_\text{۱}$ و $D_\text{۲}$ مفروض‌اند، اشتراک $D_\text{۱} \cap D_\text{۲}$ متشکل از همهٔ نقاط مشترک بین هر دو حوزهٔ $D_\text{۱}$ و $D_\text{۲}$ را در نظر می‌گیریم. اگر دو حوزهٔ $D_\text{۱}$ و $D_\text{۲}$ دارای نقاط مشترکی باشند (شکل ۳۴ را ببینید) و تابع $f_\text{۱}$ در $D_\text{۱}$ تحلیلی باشد، آن‌گاه ممکن است تابعی مانند $f_\text{۲}$ موجود باشد که در $D_\text{۲}$ تحلیلی است به‌طوری که به‌ازای هر z در اشتراک $D_\text{۱} \cap D_\text{۲}$، $f_\text{۱}(z) = f_\text{۲}(z)$. در چنین صورتی $f_\text{۲}$ را ادامهٔ تحلیلی $f_\text{۱}$ به حوزهٔ دوم $D_\text{۲}$ می‌نامند.



شکل ۳۴

هرگاه این ادامهٔ تحلیلی موجود باشد، بنابر قضیه‌ای که اخیراً ثابت شد یکتاست. یعنی، بیش از یک تابع نمی‌تواند در D_2 تحلیلی باشد و در هر نقطهٔ z از مجموعهٔ باز $D_2 \cap D_1$ درون D_2 مقدار $f_1(z)$ را بگیرد. با وجود این، اگر f_3 یک ادامهٔ تحلیلی f_2 از D_2 به حوزهٔ D_3، متقاطع با D_1 مانند شکل ۳۴، باشد، لازم نیست که به‌ازای هر z در $D_1 \cap D_3$، $f_3(z) = f_1(z)$. تمرین ۲ بخش ۲۷ این مطلب را تشریح می‌نماید.

اگر f_2 ادامهٔ تحلیلی f_1 از حوزهٔ D_1 به حوزهٔ D_2 باشد، آن‌گاه تابع F که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود در اجتماع $D_1 \cup D_2$، که حوزهٔ متشکل از همهٔ نقاط واقع در D_1 یا D_2 می‌باشد، تحلیلی است

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

تابع F ادامهٔ تحلیلی f_1 یا f_2 به $D_1 \cup D_2$ است و f_1 و f_2 را عناصر F می‌نامند.

۲۷. اصل بازتابی

قضیهٔ این بخش در مورد این واقعیت است که بعضی از توابع تحلیلی دارای این ویژگی‌اند که به‌ازای همهٔ نقاط z در برخی حوزه‌ها $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$، در حالی‌که بعضی دیگر این ویژگی را ندارند. مثلاً، توجه کنید وقتی D تمام صفحهٔ متناهی باشد، $z + 1$ و z^2 دارای این ویژگی‌اند اما $z + i$ و iz^2 این ویژگی را ندارند. قضیهٔ زیر، معروف به اصل بازتابی، روشی فراهم می‌آورد تا بتوانیم پیشگویی کنیم چه موقع $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

قضیه. فرض می‌کنیم f تابعی باشد تحلیلی در حوزهٔ D که حوزهٔ D شامل قطعه‌ای از محور xهاست و نیمهٔ پایین آن قرینهٔ نیمهٔ بالایی آن نسبت به آن محور است. در این‌صورت برای هر

نقطهٔ z در حوزهٔ D داریم

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \tag{۱}$$

اگر و فقط اگر به‌ازای هر نقطهٔ x بر آن قطعه، $f(x)$ حقیقی باشد.

برای شروع اثبات، فرض می‌کنیم به‌ازای هر نقطهٔ x در آن قطعه، $f(x)$ حقیقی باشد. بعد از آنکه نشان دادیم تابع

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} \tag{۲}$$

در D تحلیلی است، با استفاده از آن، معادلهٔ (۱) را به‌دست می‌آوریم. برای اثبات تحلیلی‌بودن $F(z)$، قرار می‌دهیم

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

و ملاحظه می‌کنیم که چون

$$\overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y), \tag{۳}$$

از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های $F(z)$ و $f(z)$ با روابط

$$U(x,y) = u(x,t) \quad \text{و} \quad V(x,y) = -v(x,t) \tag{۴}$$

به هم وابسته‌اند، که در آن $t = -y$. حال چون $f(x+it)$ تابعی تحلیلی از $x+it$ است، مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع $u(x,t)$ و $v(x,t)$ در سراسر D پیوسته‌اند و در معادلات کوشی-ریمان*

$$u_x = v_t, \qquad u_t = -v_x \tag{۵}$$

صدق می‌کنند.

به‌علاوه، با توجه به روابط (۴) داریم

$$U_x = u_x, \qquad V_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t;$$

از این روابط و اولین معادله از معادلات (۵) نتیجه می‌شود که $U_x = V_y$. همین‌طور

$$U_y = u_t \frac{dt}{dy} = -u_t, \qquad V_x = -v_x;$$

* پاراگرافی را که بلافاصله بعد از قضیهٔ ۱ در بخش ۲۵، آمده است ببینید.

که با دومین معادله از معادلات (۵) نتیجه می‌دهد که $U_y = -V_x$. از آنجایی که نشان دادیم مشتقات جزئی مرتبهٔ اول $U(x,y)$ و $V(x,y)$ در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند و چون این مشتقات پیوسته هستند در می‌یابیم که تابع $F(z)$ در D تحلیلی است. به‌علاوه چون $f(x)$ در قطعه‌ای از محور حقیقی که در D واقع است، حقیقی است، در آن قطعه داریم $v(x,0) = 0$، که با توجه به روابط (۴) بدین‌معناست که

$$F(x) = U(x,0) + iV(x,0) = u(x,0) - iv(x,0) = u(x,0).$$

یعنی در هر نقطهٔ $z = x$ بر آن قطعه داریم

$$F(z) = f(z). \tag{۶}$$

حال به قضیه‌ای در بخش ۲۶ اشاره می‌کنیم که می‌گوید تابعی که در حوزهٔ D تحلیلی است با مقادیرش در امتداد هر پاره‌خطی واقع در D، به‌طور یکتا تعیین می‌شود. بنابراین معادلهٔ (۶) در سراسر D برقرار است. لذا بنابر تعریف (۲) برای تابع $F(z)$، داریم

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z); \tag{۷}$$

و این همان معادله (۱) است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم که معادلهٔ (۱) برقرار باشد و توجه می‌کنیم که بنابر عبارت (۳)، صورت (۷) از معادلهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$u(x,-y) - iv(x,-y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

به‌خصوص اگر نقطهٔ $(x,0)$ روی قطعه‌ای از محور حقیقی باشد که در D واقع است، آن‌گاه

$$u(x,0) - iv(x,0) = u(x,0) + iv(x,0)$$

و با مساوی قراردادن قسمتهای موهومی، می‌بینیم که $v(x,0) = 0$. بنابراین $f(x)$ در قطعهٔ محور حقیقی واقع در D حقیقی است.

چند مثال. درست قبل از بیان این قضیه، توجه کردیم که برای هر z در صفحهٔ متناهی داریم

$$\overline{z+1} = \overline{z}+1 \quad \text{و} \quad \overline{z^2} = \overline{z}^2.$$

البته این قضیه نیز صحت مطلب بالا را بیان می‌کند، زیرا که برای x حقیقی، $x+1$ و x^2 حقیقی‌اند. همچنین توجه کردیم که $z+i$ و iz^2 در تمام صفحه، ویژگی بازتابی ندارند، و حال می‌دانیم دلیل این مطلب آن است که برای x حقیقی، $x+i$ و ix^2 حقیقی نیستند.

تمرینها

۱. با استفاده از قضیهٔ بخش ۲۶ نشان دهید که اگر $f(z)$ در سراسر D تحلیلی و غیرثابت باشد، آن‌گاه نمی‌تواند در سراسر هیچ همسایگی واقع در D ثابت باشد.

راهنمایی: فرض کنید $f(z)$ در سراسر یک همسایگی واقع در D دارای مقدار ثابتی مانند w_0 باشد.

۲. با شروع از تابع

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, 0 < \theta < \pi)$$

و ارجاع به تمرین ۴ (ب) بخش ۲۲ بگویید چرا

$$f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi)$$

ادامهٔ تحلیلی f_1 از روی محور حقیقی منفی به نیم‌صفحهٔ پایینی است. سپس نشان دهید که تابع

$$f_3(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2})$$

ادامهٔ تحلیلی f_2 از روی محور حقیقی مثبت به ربع اول است اما در این ربع‌صفحه $f_3(z) = -f_1(z)$.

۳. بیان کنید چرا تابع

$$f_4(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

ادامهٔ تحلیلی تابع $f_1(z)$ در تمرین ۲، از روی محور حقیقی مثبت به نیم‌صفحهٔ پایین است.

۴. در مثال ۱ بخش ۲۱ دیده‌ایم که تابع

$$f(z) = e^x\, e^{iy}$$

در هر نقطهٔ صفحهٔ متناهی مشتق دارد. نشان دهید چگونه از اصل بازتابی (بخش ۲۷) نتیجه می‌شود که برای هر z،

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})\,.$$

سپس درستی این مطلب را مستقیماً بررسی کنید.

۵. نشان دهید اگر شرط حقیقی‌بودن $f(x)$ در اصل بازتابی (بخش ۲۷) با شرط موهومی محض بودن $f(x)$، عوض شود در آن‌صورت معادلهٔ (۱) در بیان اصل بازتابی به شکل $\overline{f(z)} = -f(\overline{z})$ تغییر می‌کند.

۳

توابع مقدماتی

حال توابع مقدماتی گوناگونی را که در حسابان بررسی شده‌اند در نظر می‌گیریم و به تعریف توابع متناظر از یک متغیر مختلط می‌پردازیم. دقیقتر بگوییم، توابعی تحلیلی از متغیر z را تعریف می‌کنیم که وقتی $z = x + i0$، به توابع مقدماتی در حسابان تبدیل می‌شوند. ابتدا تابع نمایی مختلط را تعریف می‌کنیم و سپس آن را برای تعریف سایر توابع مقدماتی به‌کار می‌بریم.

۲۸. تابع نمایی

همان‌طور که قبلاً (در بخش ۱۳) انجام دادیم در اینجا تابع نمایی e^z را با نوشتن

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \qquad (z = x + iy) \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن از فرمول اویلر (بخش ۶ را ببینید)

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{۲}$$

استفاده شده و y باید برحسب رادیان گرفته شود. از این تعریف می‌بینیم که اگر $y = 0$، آن‌گاه e^z به تابع نمایی معمولی در حسابان تبدیل می‌شود؛ و به پیروی از قراردادی که در حسابان به‌کار می‌رود، اغلب به‌جای e^z می‌نویسیم $\exp z$.

توجه کنید که مقدار $\sqrt[n]{e}$ را که ریشهٔ nام مثبت e است به e^x نسبت می‌دهند وقتی که $x = ۱/n$ $(n = ۲, ۳, \ldots)$، لذا بنابر عبارت (۱) مقدار تابع نمایی مختلط e^z نیز برابر با $\sqrt[n]{e}$ است وقتی که $z = ۱/n$ $(n = ۲, ۳, \ldots)$. این یک استثنا برای قراردادی است (بخش ۸) که معمولاً می‌بایست $e^{۱/n}$ را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های nام e تعبیر کنیم.

بنابر تعریف (۱)، $e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$ و همان‌طور که قبلاً در بخش ۱۳ خاطر نشان ساختیم این تعریف با الهام از ویژگی جمعی

$$e^{x_۱} \cdot e^{x_۲} = e^{x_۱ + x_۲}$$

تابع e^x در حسابان به‌دست آمده است. توسیع این ویژگی،

$$e^{z_۱} \cdot e^{z_۲} = e^{z_۱ + z_۲}, \tag{۳}$$

به آنالیز مختلط را به‌سادگی می‌توان ثابت کرد. برای اثبات این مطلب، می‌نویسم

$$z_۱ = x_۱ + iy_۱ \quad \text{و} \quad z_۲ = x_۲ + iy_۲$$

پس

$$e^{z_۱} e^{z_۲} = \left(e^{x_۱} e^{iy_۱}\right)\left(e^{x_۲} e^{iy_۲}\right) = \left(e^{x_۱} e^{x_۲}\right)\left(e^{iy_۱} e^{iy_۲}\right)$$

اما $x_۱$ و $x_۲$ هر دو حقیقی‌اند و در بخش ۷ دیدیم که

$$e^{iy_۱} e^{iy_۲} = e^{i(y_۱ + y_۲)}.$$

در نتیجه

$$e^{z_۱} e^{z_۲} = e^{(x_۱ + x_۲)} \cdot e^{i(y_۱ + y_۲)},$$

و چون

$$(x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲) = (x_۱ + iy_۱) + (x_۲ + iy_۲) = z_۱ + z_۲,$$

سمت راست رابطهٔ آخر به $e^{z_۱ + z_۲}$ تبدیل و بدین‌ترتیب ویژگی (۳) ثابت می‌شود.

بنابر ویژگی (۳) می‌توان نوشت $e^{z_۱ - z_۲} \cdot e^{z_۲} = e^{z_۱}$ یا

$$\frac{e^{z_۱}}{e^{z_۲}} = e^{z_۱ - z_۲}. \tag{۴}$$

از این رابطه و این واقعیت که $e^{\circ} = ۱$، نتیجه می‌شود که $۱/e^z = e^{-z}$.

e^z ویژگیهای مهم دیگری دارد که انتظارش را داریم. مثلاً، بنابر مثال ۱، بخش ۲۱، در هر نقطه از صفحهٔ z،

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z\,. \tag{۵}$$

توجه کنید که مشتقپذیری e^z در هر نقطهٔ z مبین این نکته است که e^z تام است (بخش ۲۳).
حکم زیر نیز درست است

(۶) بهازای هر عدد مختلط z، $e^z \neq 0$.

این مطلب واضح است، زیرا کافی است تعریف (۱) را به شکل زیر بنویسیم

$e^z = \rho e^{i\phi}$ که در آن $\rho = e^x$ و $\phi = y$،

که از آن نتیجه می‌شود

(۷) $|e^z| = e^x$، $\arg(e^z) = y + 2n\pi \,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

پس عبارت (۶) از آنجا نتیجه می‌شود که $|e^z|$ همیشه مثبت است.
ولی، بعضی از ویژگیهای e^z قابل انتظار نیست. مثلاً، از آنجا که

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i}$ و $e^{2\pi i} = 1$،

درمی‌یابیم که e^z تابعی است متناوب که دورهٔ تناوب آن عدد موهومی محض $2\pi i$ است:

$$e^{z+2\pi i} = e^z\,. \tag{۸}$$

مثال زیر ویژگی دیگری از e^z را نشان می‌دهد که e^x فاقد آن است. یعنی در حالی‌که e^x هرگز منفی نیست مقادیری منفی برای e^z وجود دارند.

مثال. مقادیری از z وجود دارند به‌طوری که مثلاً

$$e^z = -1\,. \tag{۹}$$

برای یافتن آنها، معادلهٔ (۹) را به‌صورت $e^x e^{iy} = 1 e^{i\pi}$ می‌نویسیم. سپس، با توجه به عبارت ایرانیک در آغاز بخش ۸، در مورد تساوی دو عدد مختلط ناصفری که به‌صورت نمایی باشند، داریم

$e^x = 1$، $y = \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

بنابراین $x = ۰$ و در می‌یابیم که

$$z = (۲n + ۱)\pi i \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \qquad (۱۰)$$

تمرینها

۱. نشان دهید که

(الف) $\exp(۲ \pm ۳\pi i) = -e^۲$؛ (ب) $\exp\left(\frac{۲ + \pi i}{۴}\right) = \sqrt{\frac{e}{۲}}(۱ + i)$؛

(ج) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$.

۲. بیان کنید چرا تابع $۲z^۲ - ۳ - ze^z + e^{-z}$ تام است.

۳. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان و قضیهٔ بخش ۲۰ نشان دهید که تابع $f(z) = \exp \overline{z}$ در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

۴. به دو روش نشان دهید که تابع $\exp(z^۲)$ تام است. مشتق آن چیست؟

جواب: $۲z \exp(z^۲)$.

۵. عبارات $|\exp(۲z + i)|$ و $|\exp(iz^۲)|$ را برحسب x و y بنویسید. سپس نشان دهید که

$$|\exp(۲z + i) + \exp(iz^۲)| \leq e^{۲x} + e^{-۲xy}.$$

۶. نشان دهید که $|\exp(z^۲)| \leq \exp(|z|^۲)$.

۷. ثابت کنید که $|\exp(-۲z)| < ۱$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} z > ۰$.

۸. همهٔ مقادیر z را بیابید به‌طوری که

(الف) $e^z = -۲$؛ (ب) $e^z = ۱ + \sqrt{۳}i$؛ (ج) $\exp(۲z - ۱) = ۱$.

جواب: (الف) $z = \ln ۲ + (۲n + ۱)\pi i \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$؛

(ب) $z = \ln ۲ + \left(۲n + \frac{۱}{۳}\right)\pi i \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$؛

(ج) $z = \frac{۱}{۲} + n\pi i \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$.

۹. نشان دهید که $\overline{\exp(iz)} = \exp(i\overline{z})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi$ که در آن $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$.
(با تمرین ۴ بخش ۲۷ مقایسه کنید.)

۱۰. (الف) نشان دهید که اگر e^z حقیقی باشد، آن‌گاه $\operatorname{Im} z = n\pi$ که در آن $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$.

(ب) اگر e^z موهومی محض باشد چه محدودیتی برای z به‌وجود می‌آید؟

۱۱. رفتار $e^z = e^x e^{iy}$ را بررسی کنید وقتی

(الف) x به $-\infty$ میل کند؛ (ب) y به ∞ میل کند.

۱۲. $\mathrm{Re}\,(e^{1/z})$ را برحسب x و y بنویسید. چرا این تابع در هر حوزه که شامل مبدأ نباشد همساز است؟

۱۳. فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در یک حوزهٔ D تحلیلی باشد. بیان کنید چرا توابع

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y), \qquad V(x,y) = e^{u(x,y)} \sin v(x,y)$$

در D همسازند و چرا $V(x,y)$ در واقع یک مزدوج همساز $U(x,y)$ است.

۱۴. اتحاد

$$(e^z)^n = e^{nz} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

را به روش زیر ثابت کنید:

(الف) با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که رابطهٔ بالا برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ برقرار است.

(ب) درستی رابطهٔ بالا را برای اعداد صحیح منفی بدین‌طریق تحقیق کنید که ابتدا از بخش ۷ به یاد آورید که وقتی $z \neq 0$ داریم

$$z^n = (z^{-1})^m \qquad (m = -n = 1, 2, \ldots)$$

و قرار دهید $(e^z)^n = (1/e^z)^m$. آن‌گاه از نتیجهٔ قسمت (الف) و ویژگی $1/e^z = e^{-z}$ (بخش ۲۸) از تابع نمایی استفاده کنید.

۲۹. تابع لگاریتمی

انگیزهٔ تعریف تابع لگاریتمی برمبنای حل معادلهٔ

$$e^w = z \tag{1}$$

نسبت به w است که در آن z عدد مختلط ناصفر و دلخواهی است. برای انجام این کار، توجه می‌کنیم که وقتی z و w را به‌صورت $z = re^{i\Theta}(-\pi < \Theta \leq \pi)$ و $w = u + iv$ بنویسیم،

معادلهٔ (۱) به شکل زیر در می‌آید

$$e^u e^{iv} = re^{i\Theta}.$$

سپس، با توجه به عبارت ایرانیک بخش ۸، در مورد تساوی دو عدد مختلط ناصفری که به‌صورت نمایی باشند، داریم

$$v = \Theta + ۲n\pi \quad \text{و} \quad e^u = r$$

که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. چون معادلهٔ $e^u = r$ همان معادلهٔ $u = \ln r$ است، نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۱) برقرار است اگر و فقط اگر w یکی از مقادیر زیر باشد

$$w = \ln r + i(\Theta + ۲n\pi) \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

بنابراین اگر بنویسیم

$$\log z = \ln r + i(\Theta + ۲n\pi) \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots), \tag{۲}$$

رابطهٔ سادهٔ

$$e^{\log z} = z \qquad (z \neq ۰), \tag{۳}$$

را داریم که انگیزه‌ای است برای رابطهٔ (۲) به‌عنوان تعریف تابع (چندمقداری) لگاریتمی از متغیر مختلط ناصفر $z = re^{i\Theta}$.

مثال ۱. اگر $z = -۱ - i\sqrt{۳}$، آن‌گاه $r = ۲$ و $\Theta = -۲\pi/۳$. بنابراین

$$\begin{aligned} \log(-۱ - i\sqrt{۳}) &= \ln ۲ + i\left(-\frac{۲\pi}{۳} + ۲n\pi\right) \\ &= \ln ۲ + ۲\left(n - \frac{۱}{۳}\right)\pi i \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \end{aligned}$$

باید تأکید کرد که اگر در سمت چپ رابطهٔ (۳) ترتیب تابع نمایی و لگاریتمی را عوض کنیم، عدد حاصل ممکن است مساوی z نباشد. به عبارت دقیقتر چون رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

نوشت و چون وقتی $z = x + iy$ داریم (بخش ۲۸)

$$|e^z| = e^x \quad \text{و} \quad \arg(e^z) = y + ۲n\pi \, (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

در نتیجه

$$\log(e^z) = \ln|e^z| + i\arg\,(e^z) = \ln(e^x) + i(y + ۲n\pi)$$
$$= (x + iy) + ۲n\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots).$$

یعنی

$$\log(e^z) = z + ۲n\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots) \tag{۴}$$

مقدار اصلی $\log z$ مقداری است که از رابطهٔ (۲) به‌ازای $n = ۰$ به‌دست می‌آید و آن را به $\operatorname{Log} z$ نمایش می‌دهند. پس،

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta. \tag{۵}$$

توجه کنید که تابع $\operatorname{Log} z$ خوشتعریف و تک‌مقداری است هرگاه $z \neq ۰$ و

$$\log z = \operatorname{Log} z + ۲n\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots). \tag{۶}$$

درصورتی که z عدد حقیقی مثبتی مانند $z = r$ باشد، $\operatorname{Log} z$ به لگاریتم طبیعی در حسابان تبدیل می‌شود. برای اثبات آن فقط باید بنویسیم $z = re^{i۰}$، در این حالت معادلهٔ (۵) به $\operatorname{Log} z = \ln r$ تبدیل می‌شود، یعنی $\operatorname{Log} r = \ln r$.

مثال ۲. از عبارت (۲) درمی‌یابیم که

$$\log ۱ = \ln ۱ + i(۰ + ۲n\pi) = ۲n\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم، $\operatorname{Log} ۱ = ۰$.

آخرین مثال ما را به یاد این مسئله می‌اندازد که گرچه در حسابان نمی‌توانستیم لگاریتم لگاریتم اعداد حقیقی منفی را پیدا کنیم، حالا قادر به انجام این کار هستیم.

مثال ۳. ملاحظه کنید که

$$\log(-۱) = \ln ۱ + i(\pi + ۲n\pi) = (۲n + ۱)\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots).$$

و $\operatorname{Log}\,(-۱) = \pi i$.

۳۰. شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم

اگر $z = re^{i\theta}$ عدد مختلط ناصفری باشد، θ دارای یکی از مقادیر $\theta = \Theta + ۲n\pi$ $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$ است، که در آن $\Theta = \operatorname{Arg} z$. بنابراین تعریف

$$\log z = \ln r + i(\Theta + ۲n\pi) \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

تابع لگاریتمی چندمقداری در بخش ۲۹ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\log z = \ln r + i\theta \,. \tag{۱}$$

اگر α عدد حقیقی دلخواهی باشد و مقدار θ در عبارت (۱) را طوری مقید کنیم که در بازهٔ $\alpha < \theta < \alpha + ۲\pi$ باشد، تابع

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > ۰, \alpha < \theta < \alpha + ۲\pi), \tag{۲}$$

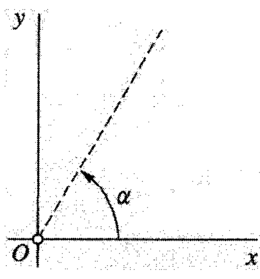
با توابع مؤلفه‌یی

$$u(r, \theta) = \ln r \qquad \text{و} \qquad v(r, \theta) = \theta ، \tag{۳}$$

در حوزهٔ مزبور تک‌مقداری و پیوسته است (شکل ۳۵). توجه کنید که اگر تابع (۲) روی پرتو $\theta = \alpha$ تعریف می‌شد، در آنجا پیوسته نبود. زیرا اگر z نقطه‌ای بر آن پرتو باشد، نقاطی به دلخواه نزدیک به z موجودند که مقدار v در آنها نزدیک به α است و همچنین نقاطی به دلخواه نزدیک به z موجودند که مقدار v در آنها نزدیک به $\alpha + ۲\pi$ است.

تابع (۲) نه تنها در حوزهٔ $r > ۰$، $\alpha < \theta < \alpha + ۲\pi$ پیوسته است بلکه در آن تحلیلی نیز هست، زیرا مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در آنجا پیوسته‌اند و در صورت قطبی (بخش ۲۲)

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r$$



شکل ۳۵

معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند. به‌علاوه بنابر بخش ۲۲ داریم

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}\left(\frac{۱}{r} + i۰\right) = \frac{۱}{re^{i\theta}};$$

یعنی

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{۱}{z} \quad (|z| > ۰, \alpha < \arg z < \alpha + ۲\pi). \tag{۴}$$

به‌خصوص

$$\frac{d}{dz}\text{Log}\, z = \frac{۱}{z} \quad (|z| > ۰, -\pi < \text{Arg}\, z < \pi). \tag{۵}$$

یک شاخه از تابع چندمقداری f، هر تابع تک‌مقداری F است که در حوزه‌ای تحلیلی و در هر نقطهٔ z از آن حوزه، مقدار $F(z)$ یکی از مقادیر $f(z)$ باشد. البته شرط تحلیلی‌بودن مانع از آن می‌شود که F مقادیرش را به تصادف از بین مقادیر f انتخاب کند. ملاحظه می‌کنید که به‌ازای هر عدد مشخص α تابع تک‌مقداری (۲) شاخه‌یی از تابع چندمقداری (۱) است. تابع

$$\text{Log}\, z = \ln r + i\Theta \quad (r > ۰, -\pi < \Theta < \pi) \tag{۶}$$

شاخهٔ اصلی نامیده می‌شود.

بریدگی شاخه قسمتی از یک خط یا منحنی است که برای تعریف شاخهٔ F از تابع چندمقداری f معرفی شده است. نقاط روی بریدگی شاخهٔ F نقاط تکین (بخش ۲۳) Fاند و هر نقطه که بین همهٔ بریدگیهای شاخه‌های f مشترک باشد یک نقطهٔ شاخه‌یی f نامیده می‌شود. مبدأ و پرتو $\theta = \alpha$، بریدگی شاخه برای شاخهٔ (۲) از تابع لگاریتمی را تشکیل می‌دهند. بریدگی شاخه برای شاخهٔ اصلی (۶) متشکل است از مبدأ و پرتو $\Theta = \pi$. روشن است که مبدأ یک نقطهٔ شاخه‌یی برای شاخه‌های تابع لگاریتمی چندمقداری است.

تمرینها

۱. نشان دهید که

(الف) $\text{Log}\,(-ei) = ۱ - \frac{\pi}{۲}i$؛ (ب) $\text{Log}\,(۱ - i) = \frac{۱}{۲}\ln ۲ - \frac{\pi}{۴}i$.

۲. تحقیق کنید که اگر $n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$

(الف) $\log e = ۱ + ۲n\pi i$؛ (ب) $\log i = \left(۲n + \frac{۱}{۲}\right)\pi i$؛

(ج) $\log(-۱ + \sqrt{۳}i) = \ln ۲ + ۲\left(n + \frac{۱}{۳}\right)\pi i$.

۳. نشان دهید که

(الف) $\text{Log}\,(۱+i)^۲ = ۲\text{Log}\,(۱+i)$؛ (ب) $\text{Log}\,(-۱+i)^۲ \neq ۲\text{Log}\,(-۱+i)$.

۴. نشان دهید که

(الف) اگر $\log z = \ln r + i\theta$ $\left(r > ۰ ،\frac{\pi}{۴} < \theta < \frac{۹\pi}{۴}\right)$ آن‌گاه $\log(i^۲) = ۲\log i$؛

(ب) اگر $\log z = \ln r + i\theta$ $\left(r > ۰ ،\frac{۳\pi}{۴} < \theta < \frac{۱۱\pi}{۴}\right)$ آن‌گاه $\log(i^۲) \neq ۲\log i$.

۵. نشان دهید که

(الف) مجموعهٔ مقادیر $\log(i^{۱/۲})$ همان مجموعهٔ مقادیر $(n+\frac{۱}{۴})\pi i$ $(n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ است، و همین ادعا برای $\frac{۱}{۲}\log i$ درست است؛

(ب) مجموعهٔ مقادیر $\log(i^۲)$ همان مجموعهٔ مقادیر $۲\log i$ نیست.

۶. می‌دانیم که شاخهٔ $\log z = \ln r + i\theta$ $(r > ۰ ،\alpha < \theta < \alpha + ۲\pi)$ از تابع لگاریتمی، در هر نقطهٔ حوزهٔ مزبور تحلیلی است، مشتق آن را با مشتقگیری از طرفین اتحاد $\exp(\log z) = z$ (بخش ۲۹) و استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید.

۷. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\log z = i\pi/۲$ را پیدا کنید.

جواب: $z = i$.

۸. فرض کنید نقطهٔ $z = x + iy$ در نوار افقی $\alpha < y < \alpha + ۲\pi$ واقع باشد. نشان دهید وقتی از شاخهٔ $\log z = \ln r + i\theta$ $(r > ۰ ،\alpha < \theta < \alpha + ۲\pi)$ تابع لگاریتمی استفاده شود داریم $\log(e^z) = z$.

۹. نشان دهید که

(الف) تابع $\text{Log}\,(z - i)$ همه جا تحلیلی است بجز روی نیم‌خط $y = ۱$ $(x \leq ۰)$؛

(ب) تابع

$$\frac{\text{Log}\,(z + ۴)}{z^۲ + i}$$

همه جا تحلیلی است بجز در نقاط $\pm(۱ - i)/\sqrt{۲}$ و روی قسمت $x \leq -۴$ از محور حقیقی.

۱۰. به دو طریق نشان دهید که تابع $\ln(x^۲ + y^۲)$ در هر حوزه‌ای که شامل مبدأ نباشد همساز است.

۱۱. نشان دهید که

$$\operatorname{Re}[\log(z - ۱)] = \frac{۱}{۲}\ln[(x-۱)^۲ + y^۲] \qquad (z \neq ۱).$$

چرا وقتی $z \neq ۱$، این تابع باید در معادلهٔ لاپلاس صدق کند؟

۳۱. اتحادهایی شامل لگاریتم

همان‌طورکه از روابط (۳) و (۴) بخش ۲۹ و نیز تمرینهای ۳، ۴ و ۵ و بخش ۳۰ تداعی می‌شود برخی از اتحادهای شامل لگاریتم در حسابان به آنالیز مختلط منتقل می‌شوند و بقیه منتقل نمی‌شوند. در این بخش تعدادی از آنهایی را که منتقل می‌شوند به‌دست می‌آوریم و بعضی مواقع نحوهٔ تعبیر آنها را بیان می‌کنیم. اگر خواننده علاقه‌مند است به بخش ۳۲ برود می‌تواند از آن بخش شروع کند و هر وقت به نتایج این بخش نیاز داشت به آن مراجعه کند.

اگر $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط ناصفر دلخواه باشند، مستقیماً ثابت می‌شود که

$$\log(z_۱ z_۲) = \log z_۱ + \log z_۲ . \tag{۱}$$

این تساوی که با تابع چندمقداری سروکار دارد باید به همان روشی تعبیر شود که تساوی

$$\arg(z_۱ z_۲) = \arg z_۱ + \arg z_۲ \tag{۲}$$

در بخش ۷ تعبیر شد. یعنی اگر مقادیر دو تا از این سه لگاریتم مشخص باشد، آن‌گاه مقداری از لگاریتم سوم موجود است که رابطهٔ (۱) را برقرار می‌کند.

اثبات رابطهٔ (۱) را می‌توان به روش زیر بر مبنای رابطهٔ (۲) بنا کرد. چون $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$ و چون این قدرمطلقها اعداد حقیقی مثبتی هستند، از تجربه با لگاریتمهای چنین اعدادی در حسابان می‌دانیم که

$$\ln|z_۱ z_۲| = \ln|z_۱| + \ln|z_۲| .$$

پس از این رابطه و رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\ln|z_۱ z_۲| + i\arg(z_۱ z_۲) = (\ln|z_۱| + i\arg z_۱) + (\ln|z_۲| + i\arg z_۲) . \tag{۳}$$

بالاخره به دلیل نحوهٔ تعبیر روابط (۱) و (۲)، معادلهٔ (۳) همان معادلهٔ (۱) می‌شود.

مثال. برای تشریح رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم $z_1 = z_2 = -1$ و توجه می‌کنیم که $z_1 z_2 = 1$. اگر مقادیر $\log z_1 = \pi i$ و $\log z_2 = -\pi i$ مشخص شده باشند، درصورتی که مقدار $\log(z_1 z_2) = 0$ انتخاب شود، بدیهی است که معادلهٔ (۱) برقرار خواهد بود.

ملاحظه کنید که برای همان اعداد z_1 و z_2 داریم

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 = 2\pi i.$$

بنابراین اگر در رابطهٔ (۱) به‌جای log نماد Log را قرار دهیم، این عبارت در حالت کلی برقرار نیست.

تحقیق درستی حکم

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2 \tag{4}$$

را که باید به همان روش حکم (۱) تعبیر شود، به‌عهدهٔ متعلم می‌گذاریم.

در اینجا دو ویژگی دیگر $\log z$ را که در بخش ۳۲ مفیدند بیان می‌کنیم. اگر z عدد مختلط ناصفری باشد، آن‌گاه به‌ازای هر مقدار $\log z$ که انتخاب کنیم داریم

$$z^n = e^{n \log z} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

البته برای $n = 1$، این رابطه به رابطهٔ (۳)، بخش ۲۹، تبدیل می‌شود. درستی رابطهٔ (۵) را به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد، برای این منظور می‌نویسیم $z = re^{i\theta}$ و توجه می‌کنیم که هر دو طرف برابر $r^n e^{in\theta}$ می‌شوند.

رابطهٔ زیر نیز وقتی $z \neq 0$ درست است،

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

یعنی در اینجا جملهٔ سمت راست دارای n مقدار متمایز است که آن مقادیر ریشه‌های nام zاند. برای اثبات این مطلب می‌نویسیم $z = r\exp(i\Theta)$ که در آن Θ مقدار اصلی $\arg z$ است. پس، بنابر عبارت (۲)، بخش ۲۹، برای $\log z$ داریم

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) = \exp\left[\frac{1}{n}\ln r + \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}\right],$$

که در آن $k = \text{۰}, \pm\text{۱}, \pm\text{۲}, \ldots$. در نتیجه

$$\exp\left(\frac{\text{۱}}{n}\log z\right) = \sqrt[n]{r}\exp\left[i\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{\text{۲}k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = \text{۰}, \pm\text{۱}, \pm\text{۲}, \ldots). \qquad (\text{۷})$$

از آنجا که $\exp(i\text{۲}k\pi/n)$ فقط وقتی دارای مقادیر متمایز است که $k = \text{۰}, \text{۱}, \ldots, n - \text{۱}$، سمت راست رابطهٔ (۷) فقط n مقدار دارد. در واقع این سمت راست، بیانی برای ریشه‌های nام z (بخش ۸) است و لذا می‌توان آن را به‌صورت $z^{\text{۱}/n}$ نوشت. بدین‌ترتیب ویژگی (۶) ثابت می‌شود، که عملاً برای موقعی که n عددی صحیح و منفی باشد نیز برقرار است (تمرین ۵ را ببینید).

تمرینها

۱. نشان دهید که اگر $\operatorname{Re} z_\text{۱} > \text{۰}$ و $\operatorname{Re} z_\text{۲} > \text{۰}$ آن‌گاه

$$\operatorname{Log}(z_\text{۱}z_\text{۲}) = \operatorname{Log} z_\text{۱} + \operatorname{Log} z_\text{۲}.$$

۲. نشان دهید که به‌ازای هر دو عدد مختلط ناصفر $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$ داریم

$$\operatorname{Log}(z_\text{۱}z_\text{۲}) = \operatorname{Log} z_\text{۱} + \operatorname{Log} z_\text{۲} + \text{۲}N\pi i$$

که در آن N یکی از مقادیر ۰، ۱ $\pm$ را داراست. (با تمرین ۱ مقایسه کنید.)

۳. درستی عبارت (۴)، بخش ۳۱، برای $\log(z_\text{۱}/z_\text{۲})$ را تحقیق کنید

(الف) با استفاده از اینکه $\arg(z_\text{۱}/z_\text{۲}) = \arg z_\text{۱} - \arg z_\text{۲}$ (بخش ۷)؛

(ب) ابتدا نشان دهید که $\log(\text{۱}/z) = -\log z$ $(z \neq \text{۰})$ بدین‌معنی که $\log(\text{۱}/z)$ و $-\log z$ دارای یک مجموعهٔ مقادیرند و سپس به رابطهٔ (۱) بخش ۳۱ برای $\log(z_\text{۱}z_\text{۲})$ استناد کنید.

۴. با انتخاب مقادیر مشخص ناصفری برای $z_\text{۱}$ و $z_\text{۲}$ نشان دهید که اگر در رابطهٔ (۴) بخش ۳۱ برای $\log(z_\text{۱}/z_\text{۲})$، Log به‌جای $\log$ قرار گیرد این رابطه همیشه برقرار نیست.

۵. نشان دهید که ویژگی (۶) بخش ۳۱ وقتی n عددی صحیح و منفی باشد نیز برقرار است. این کار را با نوشتن $z^{\text{۱}/n} = (z^{\text{۱}/m})^{-\text{۱}}$، $(m = -n)$، که در آن n هر یک از مقادیر $n = -\text{۱}, -\text{۲}, \ldots$ را داراست (تمرین ۹ بخش ۹ را ببینید)، و با استفاده از این واقعیت که این ویژگی برای اعداد صحیح مثبت برقرار است انجام دهید.

۶. فرض کنید z عدد مختلط ناصفری باشد که به شکل $z = re^{i\Theta}$ $(-\pi < \Theta \leq \pi)$ نوشته شده و n عدد صحیح مثبت و مشخصی باشد $(n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$. نشان دهید که همهٔ مقادیر

$\log(z^{1/n})$ با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\ln r + i\frac{\Theta + 2(pn+k)\pi}{n},$$

که در آن $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. سپس بعد از نوشتن

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\ln r + i\frac{\Theta + 2q\pi}{n},$$

که در آن $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$، نشان دهید که مجموعهٔ مقادیر $\log(z^{1/n})$ همان مجموعهٔ مقادیر $(1/n)\log z$ است. بدین‌ترتیب نشان دهید که $\log(z^{1/n}) = (1/n)\log z$، که در آن، متناظر با هر مقدار $\log(z^{1/n})$ که در سمت چپ قرارگرفته می‌شود، باید مقدار مناسبی از $\log z$ را در سمت راست انتخاب کرد و برعکس. [نتیجهٔ تمرین ۵ (الف) بخش ۳۰ حالتی خاص از این مسئله است.]

راهنمایی: از این ویژگی استفاده کنید که باقیماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر عدد صحیح مثبت n همیشه عدد صحیحی بین ۰ و $n-1$، به انضمام آنها، است، یعنی، اگر عدد صحیح مثبت n مشخص شده باشد، هر عدد صحیح q را می‌توان به‌صورت $q = pn + k$ نوشت که در آن p عددی صحیح و k یکی از مقادیر $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ است.

۳۲. نمای مختلط

اگر $z \neq 0$ و نمای c عدد مختلط دلخواهی باشد، تابع z^c را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$z^c = e^{c\log z}, \tag{1}$$

که در آن $\log z$ نمایش تابع لگاریتمی چندمقداری است. رابطهٔ (۱) تعریفی سازگار برای z^c به‌دست می‌دهد بدین‌معنی که از قبل می‌دانیم این رابطه (بخش ۳۱)، وقتی $c=n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ و $c = 1/n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ برقرار است. در واقع تعریف z^c با الهام از این انتخابهای خاص c صورت گرفته است.

مثال ۱. توانهای z در حالت کلی چندمقداری‌اند. این ادعا را به این صورت توضیح می‌دهیم که می‌نویسیم

$$i^{-2i} = \exp(-2i\log i)$$

و

$$\log i = \ln ۱ + i\left(\frac{\pi}{۲} + ۲n\pi\right) = i\left(۲n + \frac{۱}{۲}\right)\pi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

در نتیجه

$$i^{-۲i} = \exp\left[(۴n + ۱)\pi\right] \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \qquad (۲)$$

توجه کنید که‌این مقادیر $i^{-۲i}$ همگی اعداد حقیقی‌اند.

چون تابع نمایی دارای ویژگی $۱/e^z = e^{-z}$ است. می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{z^c} = \frac{۱}{\exp(c\log z)} = \exp(-c\log x) = z^{-c}$$

و به‌خصوص $i^{-۲i} = ۱/i^{۲i}$. پس بنابر عبارت (۲)، داریم

$$\frac{۱}{i^{۲i}} = \exp[(۴n + ۱)\pi] \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \qquad (۳)$$

اگر $z = re^{i\theta}$ و α عدد حقیقی دلخواهی باشد، شاخهٔ

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > ۰, \alpha < \theta < \alpha + ۲\pi)$$

از تابع لگاریتمی، در حوزهٔ مزبور تک‌مقداری و تحلیلی است (بخش ۳۰). اگر از این شاخه استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که تابع $z^c = \exp(c\log z)$ در همان حوزه تک‌مقداری و تحلیلی است. برای یافتن مشتق چنین شاخه‌یی از z^c ابتدا با استفاده از قاعدهٔ زنجیری می‌نویسیم

$$\frac{d}{dz}z^c = \frac{d}{dz}\exp(c\log z) = \frac{c}{z}\exp(c\log z)$$

و سپس به یاد می‌آوریم که (بخش ۲۹) $z = \exp(\log z)$. بدین‌ترتیب نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dz}z^c = c\frac{\exp(c\log z)}{\exp(\log z)} = c\exp[(c - ۱)\log z],$$

یا

$$\frac{d}{dz}z^c = cz^{c-۱} \qquad (|z| > ۰, \alpha < \arg z < \alpha + ۲\pi). \qquad (۴)$$

مقدار اصلی z^c وقتی به‌دست می‌آید که در تعریف (۱) به‌جای $\log z$ قرار دهیم $\operatorname{Log} z$:

$$^{*}\mathrm{P.V.}\, z^c = e^{c \operatorname{Log} z}. \tag{۵}$$

رابطهٔ (۵) برای تعریف شاخهٔ اصلی تابع z^c در حوزهٔ $|z| > ۰$، $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ نیز به‌کار می‌رود.

مثال ۲. مقدار اصلی $(-i)^i$ چنین است

$$\exp[i \operatorname{Log}(-i)] = \exp\left[i\left(\ln ۱ - \frac{\pi}{۲} i\right)\right] = \exp\frac{\pi}{۲}.$$

یعنی،

$$\mathrm{P.V.}\,(-i)^i = \exp\frac{\pi}{۲}. \tag{۶}$$

مثال ۳. شاخهٔ اصلی $z^{۲/۳}$، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\exp\left(\frac{۲}{۳}\operatorname{Log} z\right) = \exp\left(\frac{۲}{۳}\ln r + \frac{۲}{۳} i\Theta\right) = \sqrt[۳]{r^۲}\exp\left(i\frac{۲\Theta}{۳}\right).$$

بنابراین

$$\mathrm{P.V.}\, z^{۲/۳} = \sqrt[۳]{r^۲}\cos\frac{۲\Theta}{۳} + i\sqrt[۳]{r^۲}\sin\frac{۲\Theta}{۳}. \tag{۷}$$

این تابع در حوزهٔ $r > ۰$، $-\pi < \Theta < \pi$، همان‌طور که از قضیهٔ بخش ۲۲ نیز مستقیماً دیده می‌شود، تحلیلی است.

بنابر تعریف (۱)، تابع نمایی با پایهٔ c، که در آن c یک عدد مختلط ثابت و ناصفر است به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$c^z = e^{z \log c}. \tag{۸}$$

توجه کنید که گرچه e^z در حالت کلی، بنابر تعریف (۸)، چندمقداری است، وقتی مقدار اصلی لگاریتم را بگیریم تعبیر معمولی e^z حاصل می‌شود. زیرا مقدار اصلی $\log e$، یک است.

وقتی یک مقدار $\log c$ مشخص شود، c^z تابعی تام از z خواهد بود. در واقع

$$\frac{d}{dz}c^z = \frac{d}{dz}e^{z\log c} = e^{z\log c}\log c$$

* P.V. علامت اختصاری برای Principal Value است.

و این نشان می‌دهد که

$$\frac{d}{dz}c^z = c^z \log c. \qquad (۹)$$

تمرینها

۱. نشان دهید که وقتی $n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$

(الف) $(۱+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{۴} + ۲n\pi\right)\exp\left(\frac{i}{۲}\ln ۲\right)$؛ (ب) $(-۱)^{۱/\pi} = e^{(۲n+۱)i}$.

۲. مقدار اصلی عبارات زیر را پیدا کنید

(الف) i^i؛ (ب) $\left[\frac{e}{۲}(-۱-\sqrt{۳}i)\right]^{۳\pi i}$؛ (ج) $(۱-i)^{۴i}$.

جواب: (الف) $\exp(-\pi/۲)$؛ (ب) $-\exp(۲\pi^۲)$؛ (ج) $e^{\pi}[\cos(۲\ln ۲)+i\sin(۲\ln ۲)]$.

۳. با استفاده از تعریف (۱) بخش ۳۲ برای z^c نشان دهید که $(-۱+\sqrt{۳}i)^{۳/۲} = \pm ۲\sqrt{۲}$.

۴. نشان دهید که نتیجهٔ تمرین ۳ را می‌توان به یکی از روشهای زیر به‌دست آورد

(الف) بنویسیم $(-۱+\sqrt{۳}i)^{۳/۲} = [(-۱+\sqrt{۳}i)^{۱/۲}]^۳$ و ابتدا جذرهای $-۱+\sqrt{۳}i$ را پیدا کنیم؛

(ب) بنویسیم $(-۱+\sqrt{۳}i)^{۳/۲} = [(-۱+\sqrt{۳}i)^۳]^{۱/۲}$ و ابتدا مکعب $-۱+\sqrt{۳}i$ را پیدا کنیم.

۵. نشان دهید که ریشهٔ nام اصلی عدد مختلط ناصفر $z_۰$ که در بخش ۸ تعریف شد همان مقدار اصلی $z_۰^{۱/n}$ است که در بخش ۳۲ تعریف شد.

۶. نشان دهید که اگر $z \neq ۰$ و a عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $|z^a| = \exp(a\ln|z|) = |z|^a$، که در آن مقدار اصلی $|z|^a$ گرفته شده است.

۷. فرض کنید $c = a+bi$ عدد مختلط ثابتی باشد، که $c \neq ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$ و توجه کنید که i^c چندمقداری است. چه محدودیتی باید برای عدد ثابت c قائل شد تا همهٔ مقادیر $|i^c|$ یکی باشند؟

جواب: باید c حقیقی باشد.

۸. فرض کنیم c، d و z معرف اعداد مختلطی باشند که $z \neq ۰$. ثابت کنید که اگر همهٔ توانها مقادیر اصلی باشند،

(الف) $۱/z^c = z^{-c}$؛ (ب) $(z^c)^n = z^{cn}\ (n = ۱, ۲, \ldots)$؛

(ج) $z^c z^d = z^{c+d}$؛ (د) $z^c/z^d = z^{c-d}$.

۹. با فرض اینکه $f'(z)$ موجود باشد، فرمولی برای مشتق $c^{f(z)}$ را پیدا کنید.

۳۳. توابع مثلثاتی

فرمول اویلر (بخش ۶) گویای این است که به‌ازای هر عدد حقیقی x داریم،

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad و \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

که از این فرمولها نتیجه می‌شود

$$e^{ix} + e^{-ix} = ۲ \cos x \quad و \quad e^{ix} - e^{-ix} = ۲i \sin x$$

یعنی،

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲} \quad و \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}.$$

بنابراین طبیعی است که توابع سینوس و کسینوس متغیر مختلط z را با روابط زیر تعریف کنیم

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} \quad و \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲}. \tag{۱}$$

این توابع تام‌اند زیرا ترکیبهای خطی (تمرین ۳ بخش ۲۴) توابع تام e^{iz} و e^{-iz} هستند. با دانستن مشتقات توابع نمایی، از روابط (۱) در می‌یابیم که

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z. \tag{۲}$$

از تعاریف (۱) به سادگی می‌توان دریافت که

$$\cos(-z) = \cos z \quad و \quad \sin(-z) = -\sin z \tag{۳}$$

و لذا تعداد زیادی از اتحادهای مثلثاتی برای متغیرهای مختلط نیز معتبرند.

مثال. برای آنکه نشان دهیم

$$۲ \sin z_۱ \cos z_۲ = \sin(z_۱ + z_۲) + \sin(z_۱ - z_۲) \tag{۴}$$

از تعاریف (۱) و ویژگیهای تابع نمایی استفاده کرده، ابتدا می‌نویسیم

$$۲ \sin z_۱ \cos z_۲ = ۲ \left(\frac{e^{iz_۱} - e^{-iz_۱}}{۲i} \right) \left(\frac{e^{iz_۲} - e^{-iz_۲}}{۲} \right).$$

سپس با انجام عمل ضرب، سمت راست به

$$\frac{e^{i(z_۱+z_۲)}-e^{-i(z_۱+z_۲)}}{۲i}+\frac{e^{i(z_۱-z_۲)}-e^{-i(z_۱-z_۲)}}{۲i}$$

یا

$$\sin(z_۱+z_۲)+\sin(z_۱-z_۲)$$

تبدیل و اتحاد (۴) ثابت می‌شود.

از اتحاد (۴) اتحادهای زیر نتیجه می‌شوند (تمرینهای ۳ و ۴ را ببینید)

$$\sin(z_۱+z_۲)=\sin z_۱\cos z_۲+\cos z_۱\sin z_۲, \tag{۵}$$

$$\cos(z_۱+z_۲)=\cos z_۱\cos z_۲-\sin z_۱\sin z_۲, \tag{۶}$$

از اینها نتایج زیر به‌دست می‌آیند

$$\sin^۲ z+\cos^۲ z=۱, \tag{۷}$$

$$\sin ۲z=۲\sin z\cos z, \qquad \cos ۲z=\cos^۲ z-\sin^۲ z, \tag{۸}$$

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos z, \qquad \sin\left(z-\frac{\pi}{۲}\right)=-\cos z. \tag{۹}$$

وقتی y عددی حقیقی باشد، با استفاده از تعاریف (۱) و توابع هذلولوی

$$\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{۲} \quad \text{و} \quad \sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{۲}$$

که در حسابان دیده‌ایم، می‌توان نوشت

$$\sin(iy)=i\sinh y \quad \text{و} \quad \cos(iy)=\cosh y. \tag{۱۰}$$

با نوشتن $z_۱=x$ و $z_۲=iy$ در اتحادهای (۵) و (۶)، قسمتهای حقیقی و موهومی $\sin z$ و $\cos z$ نمایان می‌شوند:

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y, \tag{۱۱}$$

$$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y, \tag{۱۲}$$

که در آنها $z=x+iy$.

از عبارات (۱۱) و (۱۲) تعدادی از ویژگیهای مهم $\sin z$ و $\cos z$ بی‌درنگ نتیجه می‌شوند. مثلاً، ویژگی تناوبی این توابع بدیهی است

$$\sin(z+2\pi)=\sin z, \qquad \sin(z+\pi)=-\sin z \tag{۱۳}$$

$$\cos(z+2\pi)=\cos z, \qquad \cos(z+\pi)=-\cos z\,. \tag{۱۴}$$

همچنین داریم (تمرین ۹ را ببینید)

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y, \tag{۱۵}$$

$$|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y\,. \tag{۱۶}$$

چون $\sinh y$ به بی‌نهایت میل می‌کند وقتی y به بی‌نهایت میل کند، از این دو رابطه واضح است که بر صفحهٔ مختلط قدرمطلقهای $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند، در حالی‌که به‌ازای همهٔ مقادیر x قدرمطلقهای $\sin x$ و $\cos x$ کوچکتر از یا مساوی با یک‌اند. (تعریف کراندار بودن را در انتهای بخش ۱۷، ببینید.)

مقدار مشخصی مانند z_0 را که برای آن $f(z_0)=0$، یک صفر تابع مفروض $f(z)$ می‌نامند. چون وقتی z حقیقی است، $\sin z$ همان تابع سینوس معمولی در حسابان می‌شود، در می‌یابیم که تمام اعداد حقیقی به‌صورت $z=n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ صفرهای $\sin z$ هستند. برای آنکه نشان دهیم $\sin z$ صفرهای دیگری ندارد، فرض می‌کنیم که $\sin z=0$ و توجه می‌کنیم که چگونه از رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\sin^2 x+\sinh^2 y=0\,.$$

پس،

$$\sin x=0 \quad \text{و} \quad \sinh y=0.$$

در این‌صورت به‌وضوح دیده می‌شود که $x=n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ و $y=0$؛ یعنی

$$\sin z=0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad z=n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{۱۷}$$

چون بنابر دومین اتحاد (۹)، داریم

$$\cos z=-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right),$$

پس

$$z = \frac{\pi}{۲} + n\pi \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots) \qquad \text{اگر و فقط اگر} \qquad \cos z = ۰ \tag{۱۸}$$

بنابراین همانند $\sin z$، تمام صفرهای $\cos z$، حقیقی‌اند.

چهار تابع مثلثاتی دیگر با روابط معمولی برحسب توابع سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{۱۹}$$

$$\sec z = \frac{۱}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{۱}{\sin z}. \tag{۲۰}$$

توجه کنید که $\tan z$ و $\sec z$ همه جا تحلیلی‌اند جز در تکینیهای (بخش ۲۳)

$$z = \frac{\pi}{۲} + n\pi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

که صفرهای $\cos z$ هستند. به‌طور مشابه، $\cot z$ و $\csc z$ تکینیهایی در صفرهای $\sin z$ دارند که عبارت‌اند از

$$z = n\pi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

با مشتقگیری از عبارات سمت راست روابط (۱۹) و (۲۰)، فرمولهای مشتقگیری مورد انتظار زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^{۲} z, \qquad \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^{۲} z, \tag{۲۱}$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z, \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z. \tag{۲۲}$$

ویژگی تناوبی هر یک از توابع مثلثاتیی که با روابط (۱۹) و (۲۰) تعریف شده‌اند به سادگی از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود. مثلاً

$$\tan(z + \pi) = \tan z. \tag{۲۳}$$

ویژگیهای نگاشتی تبدیل $w = \sin z$ به‌خصوص درکاربردهای بعدی مهم‌اند. خواننده‌ای که حالا می‌خواهد بعضی از این ویژگیها را بداند برای خواندن بخش ۸۹ (فصل ۸)، که این ویژگیها در آنجا مورد بحث قرارگرفته است، آمادگی کافی دارد.

تمرینها

۱. با ارائهٔ جزئیات، درستی عبارات (۲) در بخش ۳۳ را برای مشتقات $\sin z$ و $\cos z$ تحقیق کنید.

۲. نشان دهید فرمول اویلر (بخش ۶) وقتی به‌جای θ، z قرار دهیم برقرار است:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

راهنمایی: برای تحقیق درستی این تساوی، از سمت راست شروع کنید.

۳. در رابطهٔ (۴)، بخش ۳۳، جای z_1 و z_2 را عوض کنید وطرفین نظیر در تساوی حاصل و تساوی (۴) را با هم جمع کرده عبارت (۵) را برای $\sin(z_1 + z_2)$ به‌دست آورید.

۴. بنابر رابطهٔ (۵) بخش ۳۳ داریم

$$\sin(z + z_2) = \sin z \cos z_2 + \cos z \sin z_2 .$$

با مشتقگیری از هر طرف رابطهٔ فوق نسبت به z و قرار دادن $z_1 = z$، عبارت (۶) آن بخش را برای $\cos(z_1 + z_2)$ به‌دست آورید.

۵. درستی اتحاد (۷) بخش ۳۳ را تحقیق کنید، با استفاده از

(الف) اتحاد (۶) و روابط (۳) آن بخش؛

(ب) لم بخش ۲۶ و این امر که تابع تام

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$$

همهٔ مقادیرش در امتداد محور xها صفر است.

۶. نشان دهید چگونه اتحادهای مثلثاتی (۸) و (۹) بخش ۳۳ از یکی از اتحادهای (۵) و (۶) آن بخش به‌دست می‌آیند.

۷. با استفاده از اتحاد (۷)، بخش ۳۳، نشان دهید که

(الف) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$؛ (ب) $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$.

۸. فرمولهای مشتقگیری (۲۱) و (۲۲) بخش ۳۳ را ثابت کنید.

۹. عبارات (۱۵) و (۱۶) بخش ۳۳ برای $|\sin z|^2$ و $|\cos z|^2$ را با استفاده از عبارات (۱۱) و (۱۲) به‌دست آورید.

راهنمایی: اتحادهای $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ را به یاد آورید.

۱۰. نشان دهید چگونه از عبارات (۱۵) و (۱۶) در بخش ۳۳ برای $|\sin z|^2$ و $|\cos z|^2$ نتیجه می‌شود که

(الف) $|\sin z| \geq |\sin x|$؛ (ب) $|\cos z| \geq |\cos x|$.

۱۱. به کمک عبارات (۱۵) و (۱۶) بخش ۳۳ برای $|\sin z|^2$ و $|\cos z|^2$ نشان دهید که

(الف) $|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$؛ (ب) $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$.

۱۲. (الف) با استفاده از تعاریف (۱)، بخش ۳۳، برای $\sin z$ و $\cos z$ نشان دهید که

$$2\sin(z_1+z_2)\sin(z_1-z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1 .$$

(ب) به کمک اتحاد حاصل در قسمت (الف) نشان دهید اگر $\cos z_1 = \cos z_2$ آن‌گاه حداقل یکی از اعداد z_1+z_2 و z_1-z_2 مضرب صحیحی از 2π است.

۱۳. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان و قضیهٔ بخش ۲۰ نشان دهید که نه $\sin \overline{z}$ در جایی تابعی تحلیلی از z است و نه $\cos \overline{z}$.

۱۴. اصل بازتابی (بخش ۲۷) را به‌کار برده نشان دهید که برای هر z داریم

(الف) $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$؛ (ب) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$.

۱۵. باکمک عبارات (۱۱) و (۱۲) از بخش ۳۳، مستقیماً رابطه‌های حاصل در تمرین ۱۴ را اثبات کنید.

۱۶. نشان دهید که

(الف) $\overline{\cos(iz)} = \cos(i\overline{z})$، به ازای هر z؛

(ب) $\overline{\sin(iz)} = \sin(i\overline{z})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

۱۷. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\sin z = \cosh 4$ را با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی $\sin z$ و $\cosh 4$ پیدا کنید.

جواب: $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \pm 4i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

۱۸. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\cos z = 2$ را پیدا کنید.

جواب: $2n\pi + i\cosh^{-1} 2$ یا $2n\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

۳۴. توابع هذلولوی

سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی یک متغیر مختلط به همان صورت سینوس و کسینوس هذلولوی یک متغیر حقیقی تعریف می‌شوند، یعنی

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{1}$$

چون e^z و e^{-z} تام‌اند، از تعریف (۱) نتیجه می‌شود که $\sinh z$ و $\cosh z$ تام‌اند. به‌علاوه

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z. \tag{۲}$$

با توجه به طریقهٔ ظاهرشدن تابع نمایی در تعاریف (۱) و در تعاریف (بخش ۳۳)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲}$$

برای $\sin z$ و $\cos z$، توابع سینوس و کسینوس هذلولوی ارتباطی نزدیک با این توابع مثلثاتی دارند:

$$-i\sinh(iz) = \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z, \tag{۳}$$

$$-i\sin(iz) = \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z. \tag{۴}$$

برخی از اتحادهایی که شامل توابع سینوس و کسینوس هذلولوی بوده و زیاد به‌کار می‌روند عبارت‌اند از

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \qquad \cosh(-z) = \cosh z, \tag{۵}$$

$$\cosh^۲ z - \sinh^۲ z = ۱, \tag{۶}$$

$$\sinh(z_۱ + z_۲) = \sinh z_۱ \cosh z_۲ + \cosh z_۱ \sinh z_۲, \tag{۷}$$

$$\cosh(z_۱ + z_۲) = \cosh z_۱ \cosh z_۲ + \sinh z_۱ \sinh z_۲, \tag{۸}$$

و

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \tag{۹}$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \tag{۱۰}$$

$$|\sinh z|^۲ = \sinh^۲ x + \sin^۲ y, \tag{۱۱}$$

$$|\cosh z|^۲ = \sinh^۲ x + \cos^۲ y. \tag{۱۲}$$

که در آنها $z = x + iy$. در حالی‌که این اتحادها مستقیماً از تعاریف (۱) نتیجه می‌شوند اغلب با کمک روابط (۳) و (۴) از اتحادهای مثلثاتی وابسته ساده‌تر به‌دست می‌آیند.

مثال. به‌منظور تشریح روش اثباتی که پیشنهاد شده است، درستی اتحاد (۱۱) را تحقیق می‌کنیم. بنابر اولین رابطه از روابط (۴)، $|\sinh z|^۲ = |\sin(iz)|^۲$. یعنی

$$|\sinh z|^۲ = |\sin(-y + ix)|^۲, \tag{۱۳}$$

که در آن $z = x + iy$. اما بنابر رابطهٔ (۱۵)، بخش ۳۳، می‌دانیم که

$$|\sin(x+iy)|^{۲} = \sin^{۲} x + \sinh^{۲} y;$$

با توجه به این رابطه، می‌توان رابطهٔ (۱۳) را به‌صورت مطلوب (۱۱) نوشت.

بنابر متناوب‌بودن $\sin z$ و $\cos z$ بلافاصله از روابط (۴) نتیجه می‌شود که $\sinh z$ و $\cosh z$ متناوب و با دورهٔ تناوب $۲\pi i$ هستند. همچنین از روابط (۴) معلوم می‌شود که

(۱۴) $\sinh z = ۰$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$

و

(۱۵) $\cosh z = ۰$ اگر و فقط اگر $z = \left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right) i \quad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$

تانژانت هذلولوی z با رابطهٔ

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad (۱۶)$$

تعریف می‌شود و در هر حوزه‌ای که در آن $\cosh z \neq ۰$ تحلیلی است. توابع $\coth z$، $\operatorname{sech} z$ و $\operatorname{csch} z$، به‌ترتیب عکس $\tanh z$، $\cosh z$ و $\sinh z$ هستند. مستقیماً می‌توان درستی فرمولهای مشتقگیری زیر را تحقیق کرد، که نظیر همان فرمولهایی هستند که در حسابان برای توابع یک متغیرهٔ حقیقی ثابت شده است:

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^{۲} z, \qquad \frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^{۲} z, \qquad (۱۷)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z. \qquad (۱۸)$$

تمرینها

۱. تحقیق کنید که مشتقات $\sinh z$ و $\cosh z$ به‌گونه‌ای هستند که در روابط (۲)، بخش ۳۴، بیان شده‌اند.

۲. به یکی از دو روش زیر ثابت کنید که $\sinh ۲z = ۲\sinh z \cosh z$

(الف) با استفاده از تعریفهای (۱)، بخش ۳۴، برای $\sinh z$ و $\cosh z$؛

(ب) با استفاده از اتحاد $\sin ۲z = ۲\sin z \cos z$ (بخش ۳۳) و روابط (۳) بخش ۳۴.

۳. نشان دهید چگونه اتحادهای (۶) و (۸) بخش ۳۴، به‌ترتیب، از اتحادهای (۷) و (۶) بخش ۳۳ نتیجه می‌شوند.

۴. بنویسید $\sinh z = \sinh(x+iy)$ و $\cosh z = \cosh(x+iy)$ و نشان دهید چگونه عبارات (۹) و (۱۰) در بخش ۳۴ به‌ترتیب از اتحادهای (۷) و (۸) آن بخش نتیجه می‌شوند.

۵. درستی عبارت (۱۲)، بخش ۳۴، را برای $|\cosh z|^2$ تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که $|\sinh x| \le |\cosh z| \le \cosh x$

(الف) با استفاده از اتحاد (۱۲) بخش ۳۴؛

(ب) با استفاده از نابرابریهای $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$ حاصل در تمرین ۱۱ (ب) بخش ۳۳.

۷. نشان دهید که

(الف) $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z$؛ (ب) $\cosh(z+\pi i) = -\cosh z$؛

(ج) $\tanh(z+\pi i) = \tanh z$.

۸. ثابت کنید صفرهای $\sinh z$ و $\cosh z$ به‌گونه‌ای هستند که در عبارات (۱۴) و (۱۵)، بخش ۳۴، بیان شد.

۹. با استفاده از نتایجی که در تمرین ۸ ثابت شد، همهٔ صفرها و تکینیهای تابع تانژانت هذلولوی را پیدا کنید.

۱۰. فرمولهای مشتقگیری (۱۷)، بخش ۳۴ ، را به‌دست آورید.

۱۱. با استفاده از اصل بازتابی (بخش ۲۷) نشان دهید که برای هر z داریم

(الف) $\overline{\sinh z} = \sinh \overline{z}$؛ (ب) $\overline{\cosh z} = \cosh \overline{z}$.

۱۲. با استفاده از نتایج تمرین ۱۱ نشان دهید در نقاطی که $\cosh z \neq 0$ داریم $\overline{\tanh z} = \tanh \overline{z}$.

۱۳. با پذیرفتن این نکته که هر یک از اتحادهای زیر وقتی به‌جای z متغیر حقیقی x را قرار دهیم معتبر است و با استفاده از لم بخش ۲۶ تحقیق کنید که

(الف) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$؛ (ب) $\sinh z + \cosh z = e^z$

[با تمرین ۵ (ب) بخش ۳۳ مقایسه کنید.]

۱۴. چرا تابع $\sinh(e^z)$ تام است؟ قسمت حقیقی این تابع را به‌صورت تابعی از x و y بنویسید و بیان کنید چرا این تابع باید همه جا همساز باشد.

۱۵. با استفاده از یکی از اتحادهای (۹) و (۱۰) بخش ۳۴ به همان روش تمرین ۱۷ بخش ۳۳ همهٔ ریشه‌های معادلات زیر را پیدا کنید

(الف) $\sinh z = i$؛ (ب) $\cosh z = \frac{1}{2}$.

جواب: (الف) $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$؛

(ب) $\left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

۱۶. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\cosh z = -2$ را پیدا کنید (این تمرین را با تمرین ۱۸ بخش ۳۳ مقایسه کنید.)

جواب: $\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

۳۵. توابع مثلثاتی و هذلولوی معکوس

معکوس توابع مثلثاتی و هذلولوی را می‌توان برحسب لگاریتم بیان کرد.

برای تعریف تابع معکوس سینوس $\sin^{-1} z$، می‌نویسیم

$$w = \sin^{-1} z \quad \text{درصورتی که} \quad z = \sin w$$

یعنی $w = \sin^{-1} z$ درصورتی که

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

اگر این معادله را به شکل

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

بنویسیم که معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به e^{iw} است. با حل آن نسبت به e^{iw} [تمرین ۸ (الف)، بخش ۹ را ببینید]، در می‌یابیم که

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}, \tag{1}$$

که در آن، همان‌طور که می‌دانیم $(1 - z^2)^{1/2}$ یک تابع دومقداری از z است. اگر از هر طرف معادلهٔ (۱) لگاریتم بگیریم و به یاد آوریم که $w = \sin^{-1} z$، به فرمول زیر می‌رسیم

$$\sin^{-1} z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \tag{2}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که $\sin^{-1} z$ تابعی چندمقداری، با تعدادی نامتناهی مقدار در هر نقطهٔ z است.

مثال. عبارت (۲) گویای این نکته است که

$$\sin^{-۱}(-i) = -i\log(۱ \pm \sqrt{۲}).$$

اما

$$\log(۱+\sqrt{۲}) = \ln(۱+\sqrt{۲}) + ۲n\pi i \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

و

$$\log(۱-\sqrt{۲}) = \ln(\sqrt{۲}-۱) + (۲n+۱)\pi i \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

چون

$$\ln(\sqrt{۲}-۱) = \ln\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}} = -\ln(۱+\sqrt{۲}),$$

پس اعداد

$$(-۱)^n \ln(۱+\sqrt{۲}) + n\pi i \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

مجموعهٔ مقادیر $\log(۱ \pm \sqrt{۲})$ را تشکیل می‌دهند. در نتیجه

$$\sin^{-۱}(-i) = n\pi + i(-۱)^{n+۱}\ln(۱+\sqrt{۲}) \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

می‌توان با استفاده از روش استنتاج فرمول (۲) برای $\sin^{-۱} z$ نشان داد که

$$\cos^{-۱} z = -i\log[z + i(۱-z^{۲})^{۱/۲}] \tag{۳}$$

و

$$\tan^{-۱} z = \frac{i}{۲}\log\frac{i+z}{i-z}. \tag{۴}$$

توابع $\cos^{-۱} z$ و $\tan^{-۱} z$ نیز چندمقداری‌اند. درصورتی که شاخه‌های مشخص جذر و تابع لگاریتمی به‌کار روند، هر سه تابع معکوس تک‌مقداری و تحلیلی می‌شوند، زیرا در این‌صورت ترکیبهایی از توابع تحلیلی‌اند.

مشتقهای این سه تابع به‌سهولت از فرمولهای بالا به‌دست می‌آیند. مشتق دو تابع اول بستگی به مقادیر انتخاب شده برای جذرها دارند:

$$\frac{d}{dz}\sin^{-۱} z = \frac{۱}{(۱-z^{۲})^{۱/۲}}, \tag{۵}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-۱} z = \frac{-۱}{(۱-z^{۲})^{۱/۲}}. \tag{۶}$$

ولی مشتق تابع آخری،

$$\frac{d}{dz}\tan^{-۱} z = \frac{۱}{۱+z^{۲}}, \tag{۷}$$

به نحوهٔ تک‌مقداری شدن تابع بستگی ندارد.

با روشی متناظر می‌توان توابع هذلولوی معکوس را بررسی کرد. نتیجه می‌شود که

$$\sinh^{-۱} z = \log[z + (z^{۲}+۱)^{۱/۲}], \tag{۸}$$

$$\cosh^{-۱} z = \log[z + (z^{۲}-۱)^{۱/۲}], \tag{۹}$$

و

$$\tanh^{-۱} z = \frac{۱}{۲}\log\frac{۱+z}{۱-z}. \tag{۱۰}$$

سرانجام یادآور می‌شویم که نماد متداول دیگر برای همهٔ این توابع معکوس عبارت است از $\arcsin z$، $\arccos z$ و غیره.

تمرینها

۱. همهٔ مقادیر هر یک از عبارات زیر را پیدا کنید

(الف) $\tan^{-۱}(۲i)$؛ (ب) $\tan^{-۱}(۱+i)$؛

(ج) $\cosh^{-۱}(-۱)$؛ (د) $\tanh^{-۱}۰$

جواب: (الف) $\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\pi + \frac{i}{۴}\ln(۳) \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$؛

(د) $n\pi i \quad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$.

۲. معادلهٔ $\sin z = ۲$ را نسبت به z حل کنید

(الف) با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی در آن معادله؛
(ب) با استفاده از فرمول (۲)، بخش ۳۵، برای $\sin^{-1}(z)$.

جواب: $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}) \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

۳. معادلهٔ $\cos z = \sqrt{2}$ را نسبت به z حل کنید.

۴. فرمول (۵)، بخش ۳۵، برای مشتق $\sin^{-1} z$ را به‌دست آورید.

۵. عبارت (۴)، بخش ۳۵، برای $\tan^{-1} z$ را به‌دست آورید.

۶. فرمول (۷)، بخش ۳۵، برای مشتق $\tan^{-1} z$ را به‌دست آورید.

۷. عبارت (۹)، بخش ۳۵، برای $\cosh^{-1} z$ را به‌دست آورید.

۴

انتگرال

انتگرالها در مطالعهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط فوق‌العاده مهم‌اند. نظریهٔ انتگرالگیری، که در این فصل ارائه می‌شود، به دلیل دقت، زیبایی و سادگی ریاضی‌اش معروف است. قضایا عموماً فشرده و توانا و بیشتر اثباتها ساده‌اند.

۳۶. مشتقات توابع $w(t)$

برای آشنایی با انتگرالهای $f(z)$ به روشی نسبتاً ساده، ابتدا مشتق توابع مختلط‌مقدار w از متغیر حقیقی t را تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم

$$w(t) = u(t) + iv(t), \tag{۱}$$

که در آن توابع u و v توابعی حقیقی مقدار از t هستند. مشتق $w'(t)$، یا $d[w(t)]/dt$ از تابع (۱) در نقطهٔ t به‌صورت

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \tag{۲}$$

تعریف می‌شود، به شرط آنکه هر یک از مشتقات u' و v' در t موجود باشند.

از تعریف (۲) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد مختلط ثابت مانند $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$،

$$\frac{d}{dt}[z_\circ w(t)] = [(x_\circ + iy_\circ)(u+iv)]' = [(x_\circ u - y_\circ v) + i(y_\circ u + x_\circ v)]'$$
$$= (x_\circ u - y_\circ v)' + i(y_\circ u + x_\circ v)' = (x_\circ u' - y_\circ v') + i(y_\circ u' + x_\circ v').$$

اما

$$(x_\circ u' - y_\circ v') + i(y_\circ u' + x_\circ v') = (x_\circ + iy_\circ)(u' + iv') = z_\circ w'(t),$$

و لذا

$$\frac{d}{dt}[z_\circ w(t)] = z_\circ w'(t). \tag{۳}$$

قاعدهٔ دیگر مورد انتظار که اغلب از آن استفاده می‌کنیم عبارت است از

$$\frac{d}{dt}e^{z_\circ t} = z_\circ e^{z_\circ t} \tag{۴}$$

که در آن $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$. برای تحقیق درستی آن، می‌نویسیم

$$e^{z_\circ t} = e^{x_\circ t}e^{iy_\circ t} = e^{x_\circ t}\cos y_\circ t + ie^{x_\circ t}\sin y_\circ t$$

و با استناد به تعریف (۲) می‌بینیم که

$$\frac{d}{dt}e^{z_\circ t} = (e^{x_\circ t}\cos y_\circ t)' + i(e^{x_\circ t}\sin y_\circ t)'.$$

با توجه به قواعد آشنای حسابان و اندکی اعمال جبری ساده عبارت زیر را پیدا می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}e^{z_\circ t} = (x_\circ + iy_\circ)(e^{x_\circ t}\cos y_\circ t + ie^{x_\circ t}\sin y_\circ t),$$

یا

$$\frac{d}{dt}e^{z_\circ t} = (x_\circ + iy_\circ)e^{x_\circ t}e^{iy_\circ t}.$$

البته این همان رابطهٔ (۴) است.

تعداد دیگری از قواعد که در حسابان آموخته‌ایم، از قبیل قواعد مشتقگیری مجموع و حاصلضرب، همان‌طور به‌کار برده می‌شوند که برای توابع حقیقی‌مقدار از متغیر t به‌کار برده می‌شدند. همانند

ویژگی (۳) و دستور (۴) تحقیق درستی آنها را می‌توان بر منبای قواعد مشابه در حسابان انجام داد. ولی باید خاطر نشان کرد که همهٔ قواعد مشتق در حسابان به توابع نوع (۱) منتقل نمی‌شوند. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال. فرض کنید $w(t)$ در بازهٔ $a \leq t \leq b$ پیوسته باشد یعنی، توابع مؤلفه‌یی آن $u(t)$ و $v(t)$ هر دو در آن بازه پیوسته باشند، حتی اگر به‌ازای هر t از بازهٔ $a < t < b$، $w'(t)$ موجود باشد، دیگر از قضیهٔ مقدار میانگین نمی‌توان استفاده کرد. به عبارت دقیقتر، لازم نیست عددی مانند c در بازهٔ $a < t < b$ موجود باشد به قسمی که

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}.$$

برای اثبات آن، فقط لازم است تابع $w(t) = e^{it}$ را در بازهٔ $۰ \leq t \leq ۲\pi$ در نظر بگیریم. زیرا درصورتی که از این تابع استفاده شود، $|w'(t)| = |ie^{it}| = ۱$؛ و این بدان معناست که $w'(t)$ هیچ‌وقت صفر نمی‌شود، در حالی‌که $w(۲\pi) - w(۰) = ۰$.

۳۷. انتگرالهای معین توابع $w(t)$

در صورتی که $w(t)$ تابع مختلط‌مقداری از یک متغیر حقیقی t و به‌صورت زیر نوشته شده باشد

$$w(t) = u(t) + iv(t), \qquad (۱)$$

که در آن u و v حقیقی مقدارند، انتگرال معین $w(t)$ بر بازهٔ $a \leq t \leq b$ چنین تعریف می‌شود

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \qquad (۲)$$

به شرطی که هر یک از انتگرالهای سمت راست موجود باشد. بنابراین

$$\operatorname{Im}\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \operatorname{Im}[w(t)]dt \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}[w(t)]dt. \qquad (۳)$$

مثال ۱. به‌عنوان یک مثال تشریحی تعریف (۲)،

$$\int_۰^۱ (۱ + it)^۲ dt = \int_۰^۱ (۱ - t^۲)dt + i\int_۰^۱ ۲t\,dt = \frac{۲}{۳} + i.$$

انتگرالهای ناسرهٔ $w(t)$ بر بازه‌های بیکران به روش مشابه تعریف می‌شوند.

اگر توابع u و v در بازهٔ $a \le t \le b$ تکه‌یی پیوسته باشند، وجود انتگرالهایشان در تعریف (۲) تضمین می‌شود. چنین تابعی همه جا در بازهٔ مزبور پیوسته است بجز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه که تابع در آنها، با وجود ناپیوستگی، دارای حدود یکطرفه است. البته در a فقط حد راست و در b فقط حد چپ لازم است. درصورتی که u و v هر دو تکه‌یی پیوسته باشند، گویند تابع w دارای این ویژگی است.

قواعد قابل انتظار برای انتگرالگیری از حاصلضرب یک عدد مختلط ثابت در تابعی مانند $w(t)$، برای انتگرالگیری مجموعهای چنین توابعی و برای تعویض حدود انتگرالگیری، همگی برقرارند. درستی این قواعد و نیز ویژگی

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt,$$

با یادآوری نتایج نظیر از حسابان به‌آسانی تحقیق می‌شود.

به‌علاوه قضیهٔ اساسی حسابان، شامل تابع اولیه، را می‌توان تعمیم داد تا برای انتگرالهایی از نوع (۲) هم به‌کار رود. به عبارت صریحتر، فرض کنید که توابع

$$w(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{و} \quad W(t) = U(t) + iV(t)$$

در بازهٔ $a \le t \le b$ پیوسته باشند. اگر وقتی $a \le t \le b$، $W'(t) = w(t)$، آن‌گاه $U'(t) = u(t)$ و $V'(t) = v(t)$. بنابراین، طبق تعریف (۲)

$$\int_a^b w(t)dt = U(t)\Big]_a^b + iV(t)\Big]_a^b$$
$$= [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)].$$

یعنی

$$\int_a^b w(t)dt = W(b) - W(a) = W(t)\Big]_a^b. \tag{۴}$$

مثال ۲. چون $(e^{it})' = ie^{it}$، (بخش ۳۶ را ببینید)

$$\int_۰^{\pi/۴} e^{it}dt = -ie^{it}\Big]_۰^{\pi/۴} = -ie^{i\pi/۴} + i$$
$$= -i\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{i}{\sqrt{۲}}\right) + i = \frac{۱}{\sqrt{۲}} + i\left(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right).$$

این بخش را با ویژگی مهمی از قدرمطلق انتگرال، یعنی

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt \qquad (a \leq b) \tag{۵}$$

به پایان می‌بریم. واضح است که وقتی مقدار انتگرال سمت چپ صفر باشد، به‌خصوص وقتی $a = b$، این نابرابری برقرار است. بنابراین در اثبات، فرض می‌کنیم این مقدار، عدد مختلط ناصفری باشد. اگر $r_\circ$ قدرمطلق و $\theta_\circ$ یک آوند این عدد ثابت باشد آن‌گاه

$$\int_a^b w\ dt = r_\circ e^{i\theta_\circ}.$$

این معادله را نسبت به $r_\circ$ حل کرده می‌نویسیم

$$r_\circ = \int_a^b e^{-i\theta_\circ} w\ dt. \tag{۶}$$

حال سمت چپ این رابطه، عددی حقیقی است و لذا سمت راست آن نیز عددی حقیقی است. پس با استفاده از اینکه قسمت حقیقی هر عدد حقیقی با خود آن برابر است و به استناد ویژگی اول از ویژگیهای (۳) می‌بینیم که سمت راست رابطهٔ (۶) را می‌توان به طریق زیر نوشت

$$\int_a^b e^{-i\theta_\circ} w\ dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_\circ} w\ dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_\circ} w)dt.$$

در نتیجه رابطهٔ (۶) به شکل زیر در می‌آید

$$r_\circ = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_\circ} w)dt. \tag{۷}$$

اما

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta_\circ} w) \leq |e^{-i\theta_\circ} w| = |e^{-i\theta_\circ}||w| = |w|$$

و لذا بنابر رابطهٔ (۷)

$$r_\circ \leq \int_a^b |w|dt.$$

در واقع چون وقتی مقدار انتگرال ناصفر باشد، $r_\circ$، طرف چپ نابرابری (۵) است، اثبات کامل می‌شود.

فقط با تغییرات جزئی مناسب، نابرابریهایی مانند

$$\left|\int_a^\infty w(t)dt\right| \le \int_a^\infty |w(t)|dt, \qquad (۸)$$

نیز از بحث فوق نتیجه می‌شوند، به شرطی که هر دو انتگرال ناسره موجود باشند.

تمرینها

۱. با استفاده از قواعد نظیر در حسابان قواعد زیر را ثابت کنید هرگاه

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

تابعی مختلط‌مقدار از متغیر حقیقی t و $w'(t)$ موجود باشد.

(الف) $\frac{d}{dt}w(-t) = -w'(-t)$، که در آن $w'(-t)$ نمایش مشتق $w(t)$ نسبت به t است که در $-t$ محاسبه شده است؛

(ب) $\frac{d}{dt}[w(t)]^۲ = ۲w(t)w'(t)$.

۲. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\int_۱^۲ \left(\frac{۱}{t} - i\right)^۲ dt$؛ (ب) $\int_۰^{\pi/۶} e^{i۲t}dt$؛ (ج) $\int_۰^\infty e^{-zt}dt$ ($\text{Re}\, z > ۰$).

جواب: (الف) $-\frac{۱}{۲} - i\ln ۴$؛ (ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۴} + \frac{i}{۴}$؛ (ج) $\frac{۱}{z}$.

۳. نشان دهید که اگر m و n اعداد صحیحی باشند آن‌گاه

$$\int_۰^{۲\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} ۰, & m \neq n \\ ۲\pi, & m = n \end{cases}$$

۴. بنابر تعریف (۲) بخش ۳۷ از انتگرال توابع مختلط با یک متغیر حقیقی، داریم

$$\int_۰^\pi e^{(۱+i)x}dx = \int_۰^\pi e^x \cos x\, dx + i\int_۰^\pi e^x \sin x\, dx\,.$$

دو انتگرال سمت راست را بدین‌طریق محاسبه کنید که تنها انتگرال سمت چپ را محاسبه کنید و آنها را قسمتهای حقیقی و موهومی عدد حاصل بگیرید.

جواب: $-(۱+e^\pi)/۲$، $(۱+e^\pi)/۲$.

۵. فرض کنید $w(t)$ تابع مختلط پیوسته‌ای از t باشد که در بازهٔ $a \leq t \leq b$ تعریف شده است. با در نظر گرفتن حالت خاص $w(t) = e^{it}$ در بازهٔ $0 \leq t \leq 2\pi$ نشان دهید که این حکم همیشه برقرار نیست که عدد cیی در بازهٔ $a < t < b$ هست، به‌طوری که

$$\int_a^b w(t)dt = w(c)(b-a)\,.$$

بدین‌ترتیب نشان دهید که قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای معین در حسابان برای این‌گونه توابع به‌کار نمی‌رود. (با مثال بخش ۳۶ مقایسه کنید.)

۶. فرض کنید $w(t) = u(t) + iv(t)$ معرف تابع مختلط پیوسته‌ای باشد که در بازهٔ $-a \leq t \leq a$ تعریف شده است.

(الف) فرض کنید $w(t)$ زوج باشد، یعنی، به‌ازای هر t در بازهٔ مفروض، $w(-t) = w(t)$، نشان دهید که

$$\int_{-a}^a w(t)dt = 2\int_0^a w(t)dt\,.$$

(ب) نشان دهید اگر $w(t)$ تابعی فرد باشد، تابعی که به‌ازای هر t در آن بازه، $w(-t) = -w(t)$، آن‌گاه

$$\int_{-a}^a w(t)dt = 0\,.$$

راهنمایی: در هر قسمت این تمرین از ویژگی نظیر برای انتگرالهای توابع حقیقی از t استفاده کنید، که از نظر نموداری بدیهی است.

۷. با استفاده از نابرابری (۵) بخش ۳۷، نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر x در بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ توابع*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

در نابرابری $|P_n(x)| \leq 1$ صدق می‌کنند.

۳۸. مسیر

انتگرالهای توابع مختلط‌مقدار از یک متغیر مختلط به جای آنکه روی بازه‌های خط حقیقی تعریف شوند، روی منحنیها در صفحهٔ مختلط تعریف می‌شوند. در این بخش به معرفی رده‌های منحنیهایی می‌پردازیم که برای مطالعهٔ چنین انتگرالهایی مناسب‌اند.

* این توابع عملاً چندجمله‌ییهایی برحسب x هستند که به چندجمله‌ییهای لژاندر مشهور و در ریاضیات کاربردی، مهم‌اند. برای مثال فصل ۴ کتاب لبدف (Lebedev) را که در پیوست ۱ آمده است ببینید.

مجموعه‌ای از نقاط $z = (x, y)$ در صفحهٔ مختلط را یک قوس می‌نامند هرگاه

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{۱}$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابع پیوسته‌ای از پارامتر حقیقی t اند. این تعریف، نگاشت پیوسته‌ای از بازهٔ $a \leq t \leq b$ به‌توی صفحهٔ xy یا z برقرار می‌کند و نقاط تصویر برحسب مقادیر افزایندهٔ t مرتب می‌شوند. مناسب است که نقاط C را با رابطهٔ

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{۲}$$

بیان کنیم که در آن

$$z(t) = x(t) + iy(t)\,. \tag{۳}$$

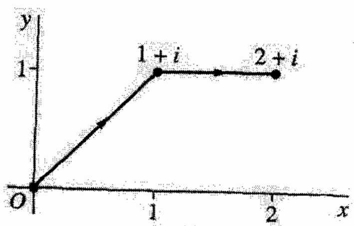
قوس C یک قوس ساده، یا یک قوس ژوردان[۱]، است اگر خودش را قطع نکند؛ یعنی، C ساده است اگر $z(t_۱) \neq z(t_۲)$ وقتی که $t_۱ \neq t_۲$. وقتی قوس C ساده است، با این استثنا که $z(b) = z(a)$، گوییم C یک منحنی سادهٔ بسته، یا یک منحنی ژوردان، است.

بیشتر مواقع از ماهیت هندسی یک قوس خاص، نماد دیگری برای پارامتر t در رابطهٔ (۲) به ذهن می‌رسد. در واقع در مثالهای زیر با چنین وضعی مواجهیم.

مثال ۱. خط شکستهٔ

$$z = \begin{cases} x + ix, & ۰ \leq x \leq ۱ \\ x + i, & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases} \tag{۴}$$

متشکل از پاره‌خطی از ۰ تا $۱ + i$ و به دنبال آن پاره‌خطی از $۱ + i$ تا $۲ + i$ (شکل ۳۶)، یک قوس ساده است.



شکل ۳۶

1. Jordan

مثال ۲. دایرهٔ واحد

$$z = e^{i\theta} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{5}$$

حول مبدأ، منحنی سادهٔ بسته‌ای است که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است. دایرهٔ

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{6}$$

به مرکز نقطهٔ z_0 و با شعاع R (بخش ۶ را ببینید) همین‌طور است.

برای یک مجموعه نقاط می‌توان قوسهای مختلفی ساخت.

مثال ۳. قوس

$$z = e^{-i\theta} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{7}$$

همان قوسی نیست که با معادلهٔ (۵) بیان شد. مجموعهٔ نقاط یکی است اما حالا دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است.

مثال ۴. نقاط روی قوس

$$z = e^{i2\theta} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{8}$$

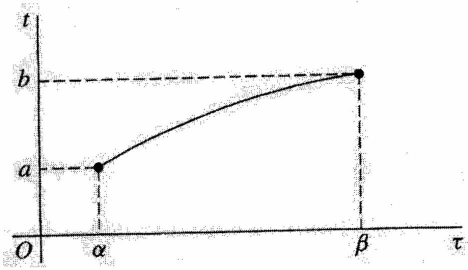
همان نقاطی هستند که قوسهای (۵) و (۷) را تشکیل می‌دادند. اما، قوس در اینجا با هر یک از آن قوسها فرق دارد زیرا دایره را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دو بار پیموده است.

البته نمایش پارامتری برای هر منحنی مفروض C یکتا نیست. در واقع می‌توان بازه‌ای را که پارامتر بر آن تغییر می‌کند با هر بازهٔ دیگری عوض کرد. به عبارت صریحتر، فرض کنید

$$t = \phi(\tau) \qquad (\alpha \le \tau \le \beta), \tag{9}$$

که در آن ϕ تابع حقیقی‌مقداری است که بازهٔ $\alpha \le \tau \le \beta$ به روی بازهٔ $a \le t \le b$ در نمایش (۲) می‌نگارد (شکل ۳۷ را ببینید). فرض می‌کنیم که ϕ پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد. همچنین فرض می‌کنیم که به‌ازای هر τ، $\phi'(\tau) > 0$؛ این به ما اطمینان می‌دهد که t با τ افزایش می‌یابد. در این‌صورت نمایش (۲) با معادلهٔ (۹) به نمایش زیر تبدیل می‌شود

$$z = Z(\tau) \qquad (\alpha \le \tau \le \beta), \tag{10}$$



شکل ۳۷

$t = \phi(\tau)$

که در آن

$$Z(\tau) = z[\phi(\tau)] \tag{۱۱}$$

این مطلب در تمرین (۳) تشریح شده است، که در آن یک تابع صریح $\phi(\tau)$ پیدا شده است.

حال فرض کنید که مؤلفه‌های $x'(t)$ و $y'(t)$ مشتق تابع (۳) (بخش ۳۶ را ببینید)، یعنی

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \tag{۱۲}$$

که برای نمایش C به‌کار برده شد، در تمام بازهٔ $a \leq t \leq b$ پیوسته باشند. در این‌صورت قوس را قوسی مشتق‌پذیر می‌نامند و تابع حقیقی مقدار

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^۲ + [y'(t)]^۲}$$

بر بازهٔ $a \leq t \leq b$ انتگرال‌پذیر است. در واقع بنابر تعریف طول قوس در حسابان، طول C برابر است با عدد

$$L = \int_a^b |z'(t)|dt. \tag{۱۳}$$

همان‌طور که انتظار داریم مقدار L تحت برخی تغییرات در نمایش C از قبیل آنچه به‌کار بردیم پایاست. به عبارت دقیقتر، با تغییر متغیری که در معادلهٔ (۹) بیان شد، فرمول (۱۳) به‌صورت زیر در می‌آید [تمرین ۱ (ب) را ببینید]

$$L = \int_\alpha^\beta |z'[\phi(\tau)]|\phi'(\tau)\, d\tau.$$

بنابراین اگر برای C از نمایش (۱۰) استفاده شود، چون (تمرین ۴)

$$Z'(\tau) = z'[\phi(\tau)]\phi'(\tau) \qquad (۱۴)$$

می‌توان فرمول (۱۳) را به شکل زیر نوشت

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |Z'(\tau)| d\tau \,.$$

بنابراین اگر از نمایش (۱۰) استفاده شود همان طول C به‌دست خواهد آمد.

اگر معادلهٔ (۲) نمایش قوسی مشتقپذیر باشد و در هر نقطه از بازهٔ $a < t < b$ داشته باشیم $z'(t) \neq 0$، آن‌گاه بردار یکهٔ مماس

$$\mathbf{T} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

به‌ازای هر t در این بازهٔ باز با زاویهٔ شیب $\arg z'(t)$ خوشتعریف است. بنابراین وقتی t بر تمامی بازهٔ $a < t < b$ تغییر کند $\mathbf{T}$ پیوسته می‌چرخد. این عبارت که برای $\mathbf{T}$ پیدا کردیم، همان عبارتی است که در حسابان دیده بودیم وقتی $z(t)$ را بردار شعاعی گرفته بودیم. چنین قوسی را قوس هموار می‌نامند. پس قرارداد می‌کنیم که در ارجاع به قوس هموار $z = z(t) (a \le t \le b)$ مشتق $z'(t)$ در بازهٔ بستهٔ $a \le t \le b$ پیوسته و در بازهٔ باز $a < t < b$ ناصفر است.

مسیر، یا قوس تکه‌یی هموار، قوسی است متشکل از تعداد متناهی قوس هموار که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است. اگر رابطهٔ (۲) معرف یک مسیر باشد آن‌گاه $z(t)$ پیوسته است، در حالی‌که $z'(t)$ تکه‌یی‌پیوسته است. مثلاً، خط شکستهٔ (۴) یک مسیر است. درصورتی که فقط مقادیر ابتدایی و انتهایی $z(t)$ یکی باشند، مسیر C یک مسیر سادهٔ بسته نامیده می‌شود. دایره‌های (۵) و (۶) و مرز یک مثلث یا یک مستطیل که در جهت مشخصی در نظر گرفته شده باشند مثالهایی از مسیر سادهٔ بسته هستند. طول یک مسیر یا یک مسیر سادهٔ بسته، مجموع طول قوسهای تشکیل‌دهندهٔ مسیر است.

نقاط واقع بر هر منحنی سادهٔ بسته یا مسیر سادهٔ بستهٔ C، نقاط مرزی دو حوزهٔ متمایزند. یکی از این حوزه‌ها، که داخل C نامیده می‌شود، کراندار و دیگری، خارج C، بیکران است. بجاست این حکم را، که به قضیهٔ منحنی ژوردان مشهور است، بپذیریم، گرچه به‌طور هندسی معلوم است ولی اثبات آن ساده نیست.*

* صفحات ۱۱۶ـ۱۱۵ کتاب نویمن یا بخش ۱۳ کتاب ثرون مذکور در پیوست ۱ را ببینید. حالت خاصی که C چندضلعی سادهٔ بسته‌ای است در صفحات ۲۸۵ـ۲۸۱ جلد اول کتابهای هیل که در پیوست ۱ آمده ثابت شده است.

تمرینها

۱. نشان دهید اگر تابع $w(t) = u(t) + iv(t)$ در بازهٔ $a \le t \le b$ پیوسته باشد، آن‌گاه

(الف) $\displaystyle\int_{-b}^{-a} w(-t)dt = \int_a^b w(\tau)d\tau$؛

(ب) $\displaystyle\int_a^b w(t)dt = \int_\alpha^\beta w[\phi(\tau)]\phi'(\tau)d\tau$ که در آن تابع $\phi(\tau)$ همان تابع در معادلهٔ (۹)، بخش ۳۸، است.

راهنمایی: این روابط را می‌توان بدین‌طریق به‌دست آورد که ابتدا توجه کنیم که برای توابع حقیقی‌مقدار از t برقرارند.

۲. فرض کنید C نیمهٔ راست دایرهٔ $|z| = ۲$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد و توجه کنید که دو نمایش پارامتری برای C عبارت‌اند از

$$z = z(\theta) = ۲e^{i\theta} \qquad \left(-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}\right)$$

و

$$z = Z(y) = \sqrt{۴ - y^۲} + iy \qquad (-۲ \le y \le ۲).$$

ثابت کنید $Z(y) = z[\phi(y)]$، که در آن

$$\phi(y) = \arctan \frac{y}{\sqrt{۴ - y^۲}} \qquad \left(-\frac{\pi}{۲} < \arctan t < \frac{\pi}{۲}\right).$$

همچنین نشان دهید که تابع ϕ، به همان صورت که در شرایط بعد از معادلهٔ (۹) بخش ۳۸ لازم بود، دارای مشتق مثبت است.

۳. معادلهٔ خط ماربر نقاط (α, a) و (β, b) در صفحهٔ τt را که در شکل ۳۷ نشان داده شده است به‌دست آورید. سپس با استفاده از آن تابع خطی $\phi(\tau)$ را پیدا کنید که بتوان با استفاده از آن در تغییر متغیر (۹) بخش ۳۸ نمایش (۲) آن بخش را به نمایش (۱۰) آن بخش تبدیل کرد.

جواب: $\phi(\tau) = \dfrac{b-a}{\beta-\alpha}\tau + \dfrac{a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha}$.

۴. عبارت (۱۴)، بخش ۳۸، برای مشتق $Z(\tau) = z[\phi(\tau)]$ را تحقیق کنید.

راهنمایی: قرار دهید $Z(\tau) = x[\phi(\tau)] + iy[\phi(\tau)]$ و از قاعدهٔ زنجیری برای توابع حقیقی‌مقدار یک متغیرهٔ حقیقی استفاده کنید.

۵. فرض کنید تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z_\circ = z(t_\circ)$ که روی قوس هموار $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ واقع است تحلیلی باشد. نشان دهید اگر $w(t) = f[z(t)]$ آن‌گاه درصورتی که $t = t_\circ$

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)\,.$$

راهنمایی: بنویسید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ و $z(t) = x(t) + iy(t)$ بنابراین

$$w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\,.$$

سپس با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای توابع دومتغیره در حسابان، بنویسید

$$w' = (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y'),$$

و از معادلات کوشی‌ـریمان استفاده کنید.

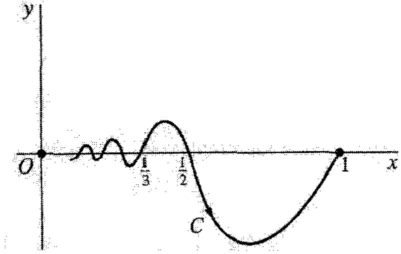
۶. فرض کنید $y(x)$ تابعی حقیقی‌مقدار باشد که روی بازهٔ $\circ \le x \le ۱$ با رابطهٔ زیر تعریف شده است

$$y(x) = \begin{cases} x^۳ \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \circ < x \le ۱ \\ \circ, & x = \circ \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که رابطهٔ

$$z = x + iy(x) \qquad (\circ \le x \le ۱)$$

قوسی مانند C را نمایش می‌دهد که همان‌طور که در شکل ۳۸ نشان داده شده است، محور حقیقی را در نقاط $z = ۱/n\ (n = ۱, ۲, \ldots)$ و $z = \circ$ قطع می‌کند.



شکل ۳۸

(ب) ثابت کنید قوس C در قسمت (الف) در واقع یک قوس هموار است.
راهنمایی: برای اثبات پیوستگی $y(x)$ در $x = 0$، ملاحظه کنید که هرگاه $x > 0$، داریم

$$0 \leq \left| x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq x^3 .$$

برای یافتن $y'(0)$ و نشان‌دادن اینکه $y'(x)$ در $x = 0$ پیوسته است، عین همین مطلب به‌کار برده می‌شود.

۳۹. انتگرال روی مسیر

حال به انتگرال توابع مختلط f از متغیر مختلط z باز می‌گردیم. این انتگرال برحسب مقادیر $f(z)$ در امتداد مسیر مفروض C که از نقطهٔ $z = z_1$ تا نقطهٔ $z = z_2$ در صفحهٔ مختلط ادامه دارد تعریف می‌شود. بنابراین، این یک انتگرال روی خط است و مقدارش در حالت کلی بستگی به مسیر C و تابع f دارد. چنین انتگرالی به‌صورت

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \qquad \text{یا} \qquad \int_C f(z)dz$$

نوشته می‌شود؛ اغلب وقتی مقدار انتگرال از انتخاب مسیر بین دو نقطهٔ انتهایی مستقل است نمادگذاری سمت چپ به‌کار می‌رود. با اینکه انتگرال را می‌توان مستقیماً به‌صورت حد یک مجموع تعریف کرد ولی ما ترجیح می‌دهیم آن را برحسب نوعی انتگرال معین که در بخش ۳۷ معرفی شد تعریف کنیم.

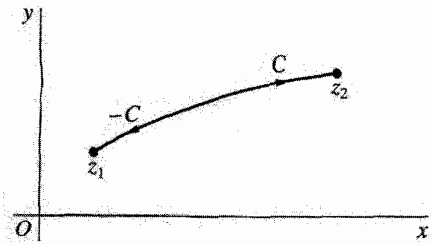
فرض کنید C مسیری باشد که با رابطهٔ

$$z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{1}$$

نمایش داده شده و از نقطهٔ $z_1 = z(a)$ تا نقطه $z_2 = z(b)$ ادامه داشته باشد. فرض کنید تابع $f(z)$ بر C تکه‌یی پیوسته باشد؛ یعنی، $f[z(t)]$ در بازهٔ $a \leq t \leq b$ تکه‌یی پیوسته باشد. انتگرال روی خط، یا انتگرال روی مسیر، تابع f در امتداد C را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt . \tag{2}$$

توجه کنید که چون C یک مسیر است $z'(t)$ نیز روی بازهٔ $a \leq t \leq b$ تکه‌یی پیوسته است و لذا وجود انتگرال (۲) تضمین می‌شود.



شکل ۳۹

مقدار انتگرال روی مسیر تحت تغییر نمایش مسیرش ناورداست هرگاه تغییر از نوع (۱۱)، بخش ۳۸، باشد. این مطلب را می‌توان با همان روش کلیی نشان داد که در بخش ۳۸ برای ناوردایی طول قوس به‌کار برده شد.

دو ویژگی دیگر انتگرال روی مسیر بلافاصله از تعریف (۲) و ویژگیهای انتگرالهای توابع مختلط $w(t)$ که در بخش ۳۷ ذکر شد به‌دست می‌آیند. یعنی به‌ازای هر عدد مختلط ثابت $z_\circ$،

$$\int_C z_\circ f(z)dz = z_\circ \int_C f(z)dz, \tag{۳}$$

و

$$\int_C [f(z)+g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz. \tag{۴}$$

به مسیر C که در انتگرال (۲) به‌کار برده شد مسیر $-C$، متشکل از همان مجموعهٔ نقاط اما با ترتیب عکس وابسته می‌شود به‌طوری که مسیر جدید از نقطهٔ z_2 تا نقطهٔ z_1 ادامه دارد (شکل ۳۹). مسیر $-C$ دارای نمایش پارامتری

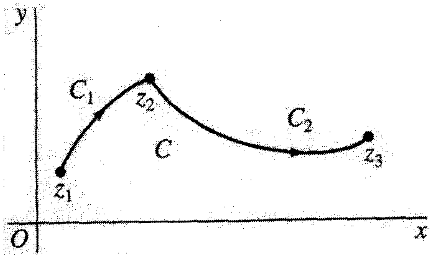
$$z = z(-t) \qquad (-b \le t \le -a);$$

است. بنابراین

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)]\frac{d}{dt}z(-t)dt = -\int_{-b}^{-a} f[z(-t)]z'(-t)dt$$

که در آن $z'(-t)$ معرف مقدار مشتق $z(t)$ نسبت به t در $-t$ است. پس از تغییر متغیر $\tau = -t$ در انتگرال اخیر و ارجاع به تمرین ۱ (الف) بخش ۳۸ در می‌یابیم که

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_a^b f[z(\tau)]z'(\tau)d\tau,$$



شکل ۴۰

$C = C_۱ + C_۲$

که همان رابطهٔ زیر است

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz\,. \qquad (۵)$$

حال فرض کنید مسیر C، با نمایش (۱) متشکل از مسیر $C_۱$ از $z_۱$ تا $z_۲$ و به دنبال آن مسیر $C_۲$ از $z_۲$ تا $z_۳$ باشد، نقطهٔ ابتدایی $C_۲$ همان نقطهٔ انتهایی $C_۱$ است (شکل ۴۰). در این‌صورت مقداری از t مانند c هست که $a < c < b$ و $z(c) = z_۲$. در نتیجه $C_۱$ با

$$z = z(t) \qquad (a \le t \le c)$$

نمایش داده می‌شود و $C_۲$ با

$$z = z(t) \qquad (c \le t \le b)$$

همچنین بنابر قاعده‌ای برای انتگرالهای توابع $w(t)$ که در بخش ۳۷ بیان شد،

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt = \int_a^c f[z(t)]z'(t)\,dt + \int_c^b f[z(t)]z'(t)\,dt\,.$$

پس روشن است که

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_۱} f(z)dz + \int_{C_۲} f(z)dz\,. \qquad (۶)$$

گاهی اوقات مسیر C را با مجموع ساقهای $C_۱$ و $C_۲$ آن می‌خوانند و به‌صورت $C_۱ + C_۲$ نمایش می‌دهند. درصورتی که نقاط انتهایی $C_۱$ و $C_۲$ یکی باشد مجموع $C_۱$ و $-C_۲$ خوشتعریف است و به‌صورت $C_۱ - C_۲$ نوشته می‌شود.

انتگرالهای معین را در حسابان می‌توان به‌صورت مساحتها تعبیر کرد؛ این انتگرالها تعبیرهای دیگری نیز دارند. بجز در حالات خاص، هیچ تعبیر هندسی یا فیزیکی مفیدی در ارتباط با انتگرالها در صفحهٔ مختلط در دست نیست.

۴۰. چند مثال

منظور ما از این بخش تهیهٔ مثالهایی برای تعریف انتگرال روی مسیر در بخش ۳۹ و بیان بعضی از ویژگیهای مذکور در آنجاست. بررسی مفهوم تابع اولیهٔ انتگرالده‌های $f(z)$ در انتگرالهای روی مسیر را تا بخش ۴۲ به تأخیر می‌اندازیم.

مثال ۱. مقدار انتگرال زیر را پیدا کنید

$$I = \int_C \overline{z}\, dz \tag{۱}$$

درصورتی که C نیمهٔ سمت راست دایرهٔ ۲ $= |z|$ از $z = -۲i$ تا $z = ۲i$ باشد (شکل ۴۱) یعنی

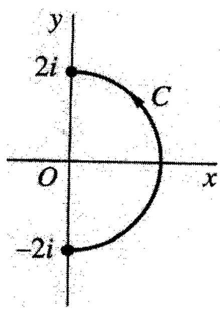
$$z = ۲e^{i\theta} \qquad \left(-\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}\right).$$

بنابر تعریف (۲)، بخش ۳۹،

$$I = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \overline{۲e^{i\theta}}(۲e^{i\theta})' d\theta$$

و چون

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{،و} \quad (e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$$



شکل ۴۱

پس داریم

$$I = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} ۲e^{-i\theta} ۲ie^{i\theta} d\theta = ۴i \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} d\theta = ۴\pi i \,.$$

توجه کنید که وقتی نقطهٔ z بر دایرهٔ $|z| = ۲$ قرار دارد، نتیجه می‌شود که $z\overline{z} = ۴$ یا $\overline{z} = ۴/z$. بنابراین، نتیجهٔ $I = ۴\pi i$ را به‌صورت

$$\int_C \frac{dz}{z} = \pi i \,. \qquad (۲)$$

نیز می‌توان نوشت.

مثال ۲. در این مثال، ابتدا $C_۱$ را معرف مسیر OAB می‌گیریم که در شکل ۴۲ نشان داده شده و انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

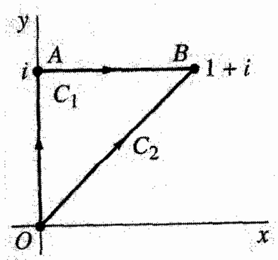
$$\int_{C_۱} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz, \qquad (۳)$$

که در آن

$$f(z) = y - x - i۳x^۲ \qquad (z = x + iy) \,.$$

ساق OA را می‌توان به‌صورت پارامتری $z = ۰ + iy$ $(۰ \le y \le ۱)$ نمایش داد، و چون در نقاط واقع روی آن ساق $x = ۰$ است، مقادیر f در آنجا با پارامتر y بنابر رابطهٔ $f(z) = y$ $(۰ \le y \le ۱)$ تغییر می‌کند. در نتیجه

$$\int_{OA} f(z)dz = \int_۰^۱ yi \, dy = i \int_۰^۱ y \, dy = \frac{i}{۲} \,.$$



شکل ۴۲

روی ساق AB، $z = x + i$ $(\circ \leq x \leq ۱)$ و لذا

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{\circ}^{۱} (۱ - x - i۳x^{۲}) \cdot ۱\, dx = \int_{\circ}^{۱} (۱ - x)dx - ۳i \int_{\circ}^{۱} x^{۲} dx = \frac{۱}{۲} - i\,.$$

بنابر رابطهٔ (۳)، می‌بینیم که

$$\int_{C_۱} f(z)dz = \frac{۱ - i}{۲}\,. \tag{۴}$$

اگر $C_۲$ نمایش پاره‌خط OB از خط $y = x$، با نمایش پارامتری $z = x + ix$ $(\circ \leq x \leq ۱)$ باشد آن‌گاه

$$\int_{C_۲} f(z)\, dz = \int_{\circ}^{۱} -i۳x^{۲}(۱ + i)dx = ۳(۱ - i) \int_{\circ}^{۱} x^{۲} dx = ۱ - i\,. \tag{۵}$$

پس به‌وضوح انتگرالهای $f(z)$ روی دو مسیر $C_۱$ و $C_۲$ مقادیر متمایز دارند، گرچه این مسیرها دارای یک ابتدا و یک انتها هستند.

ملاحظه می‌کنیم که انتگرال $f(z)$ روی مسیر سادهٔ بستهٔ $OABO$ یا $C_۱ - C_۲$ دارای مقدار ناصفر زیر است

$$\int_{C_۱} f(z)\, dz - \int_{C_۲} f(z)\, dz = \frac{-۱ + i}{۲}\,.$$

مثال ۳. در اینجا با این فرض شروع می‌کنیم که C معرف قوس هموار دلخواهی مانند

$$z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

از نقطهٔ ثابت $z_۱$ تا نقطهٔ ثابت $z_۲$ باشد (شکل ۴۳). برای محاسبهٔ انتگرال

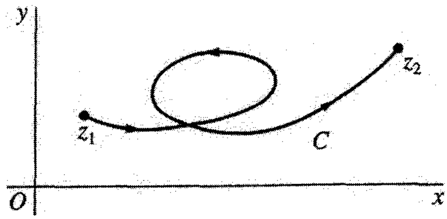
$$I = \int_C z\, dz = \int_a^b z(t) z'(t) dt,$$

توجه می‌کنیم که بنابر تمرین ۱ (ب)، بخش ۳۷،

$$\frac{d}{dt} \frac{[z(t)]^{۲}}{۲} = z(t) z'(t)\,.$$

در نتیجه

$$I = \left.\frac{[z(t)]^{۲}}{۲}\right]_a^b = \frac{[z(b)]^{۲} - [z(a)]^{۲}}{۲}\,.$$



شکل ۴۳

اما $z_2 = z(b)$ و $z_1 = z(a)$ و لذا $I = (z_2^2 - z_1^2)/2$. از آنجا که مقدار I فقط به نقاط انتهایی C بستگی دارد و از قوسی که گرفته شده مستقل است، می‌نویسیم

$$\int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}. \tag{۶}$$

(با مثال ۲ مقایسه کنید، که در آن مقدار انتگرال از یک نقطهٔ ثابت تا نقطهٔ ثابت دیگری وابسته به مسیر بود.)

عبارت (۶) برای مسیر C نیز، بدون شرط هموار بودن برقرار است زیرا مسیر C مرکب از تعدادی متناهی قوس هموار C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ است که انتهای هر یک ابتدای دیگری است. به عبارت دقیقتر، فرض کنید هر C_k از z_k تا z_{k+1} امتداد داشته باشد. در این‌صورت

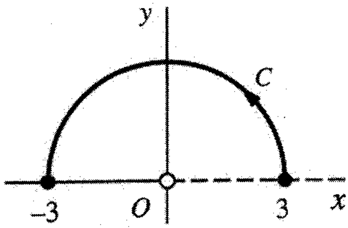
$$\int_C z\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} z\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2 - z_1^2}{2}, \tag{۷}$$

z_1 نقطهٔ ابتدای C و z_{n+1} نقطهٔ انتهای آن است.

از عبارت (۷) نتیجه می‌شود که انتگرال تابع $f(z) = z$ روی هر مسیر بسته در صفحه دارای مقدار صفر است. (یک بار دیگر با مثال ۲ مقایسه کنید که در آن مقدار انتگرال تابع مفروض روی یک مسیر بسته، صفر نبود.) مسئلهٔ این پیش‌بینی را که چه موقع انتگرال، پیرامون یک مسیر بسته صفر است در بخشهای ۴۲، ۴۴، ۴۶ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۴. فرض کنید C معرف مسیر نیمدایره‌یی

$$z = 3e^{i\theta} \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$



شکل ۴۴

از نقطهٔ $z = ۳$ تا نقطهٔ $z = -۳$ باشد (شکل ۴۴). گرچه شاخهٔ (بخش ۳۰)

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/۲} \qquad (r > ۰, ۰ < \theta < ۲\pi) \tag{۸}$$

از تابع چندمقداری $z^{۱/۲}$ در $z = ۳$، نقطهٔ ابتدای مسیر C، تعریف نشده است، با وجود این انتگرال

$$I = \int_C z^{۱/۲} dz \tag{۹}$$

برای آن شاخه موجود است. زیرا انتگرالده روی C تکه‌یی پیوسته است. برای اثبات این ادعا ملاحظه می‌کنیم که اگر $z(\theta) = ۳e^{i\theta}$، حدود راست مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع

$$f[z(\theta)] = \sqrt{۳}e^{i\theta/۲} = \sqrt{۳}\cos\frac{\theta}{۲} + i\sqrt{۳}\sin\frac{\theta}{۲} \qquad (۰ < \theta \le \pi)$$

در $\theta = ۰$ به‌ترتیب $\sqrt{۳}$ و ۰ هستند. بنابراین اگر مقدار $f[z(\theta)]$ را در $\theta = ۰$ مساوی $\sqrt{۳}$ تعریف کنیم این تابع در بازهٔ بستهٔ $۰ \le \theta \le \pi$ پیوسته می‌شود. در نتیجه

$$I = \int_۰^\pi \sqrt{۳}e^{i\theta/۲}۳ie^{i\theta}d\theta = ۳\sqrt{۳}i\int_۰^\pi e^{i۳\theta/۲}d\theta;$$

و

$$\int_۰^\pi e^{i۳\theta/۲}d\theta = \frac{۲}{۳i}e^{i۳\theta/۲}\Big]_۰^\pi = -\frac{۲}{۳i}(۱+i).$$

پس بالاخره داریم

$$I = -۲\sqrt{۳}(۱+i).$$

تمرینها

برای مسیرهای C و توابع f در تمرینهای ۱ تا ۶، با استفاده از نمایش پارامتری C، یا ساقهای C،

مقدار انتگرال زیر را پیدا کنید

$$\int_C f(z)dz\,.$$

۱. $f(z) = (z+۲)/z$ و C عبارت است از

(الف) نیمدایرهٔ $z = ۲e^{i\theta}$ $(۰ \leq \theta \leq \pi)$؛

(ب) نیمدایرهٔ $z = ۲e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq ۲\pi)$؛

(ج) دایرهٔ $z = ۲e^{i\theta}$ $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$.

جواب: (الف) $-۴ + ۲\pi i$؛ (ب) $۴ + ۲\pi i$؛ (ج) $۴\pi i$.

۲. $f(z) = z - ۱$ و C قوسی است از $z = ۰$ تا $z = ۲$ متشکل از

(الف) نیمدایرهٔ $z = ۱ + e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq ۲\pi)$؛

(ب) پاره‌خط $۰ \leq x \leq ۲$ از محور حقیقی.

جواب: (الف) ۰؛ (ب) ۰.

۳. $f(z) = \pi \exp(\pi \bar{z})$ و C مرز مربعی با رئوسی در نقاط ۰، ۱، $۱ + i$ و i است و جهت C در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

جواب: $۴(e^{\pi} - ۱)$.

۴. $f(z)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = \begin{cases} ۱, & y < ۰ \\ ۴y, & y > ۰ \end{cases}$$

و C قوسی است از $z = -۱ - i$ تا $z = ۱ + i$ در امتداد منحنی $y = x^۳$.

جواب: $۲ + ۳i$

۵. $f(z) = ۱$ و C مسیر دلخواهی از نقطهٔ ثابت $z_۱$ تا نقطهٔ ثابت $z_۲$، در صفحه است.

جواب: $z_۲ - z_۱$.

۶. $f(z)$ شاخهٔ

$$z^{-۱+i} = \exp[(-۱+i)\log z] \qquad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi)$$

از تابع توانی $z^{-۱+i}$ و C دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

جواب: $i(۱ - e^{-۲\pi})$.

۷. به کمک نتیجهٔ تمرین ۳، بخش ۳۷، انتگرال

$$\int_C z^m \overline{z}^n dz$$

را محاسبه کنید که در آن m و n اعدادی صحیح هستند و C دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

۸. انتگرال I در مثال ۱ بخش ۴۰ را با استفاده از نمایش زیر برای C محاسبه کنید:

$$z = \sqrt{۴ - y^۲} + iy \quad (-۲ \leq y \leq ۲).$$

(مثال ۲، بخش ۳۸، را ببینید.)

۹. فرض کنید C و $C_۰$ به‌ترتیب نمایش دوایر

$$z = z_۰ + Re^{i\theta}\,(۰ \leq \theta \leq ۲\pi) \quad \text{و} \quad z = Re^{i\theta}\,(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$$

باشند. با استفاده از این نمایشهای پارامتری نشان دهید که اگر f روی C تکه‌یی پیوسته باشد

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_۰} f(z - z_۰)dz.$$

۱۰. فرض کنید $C_۰$ نمایش دایرهٔ $|z - z_۰| = R$ باشد که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است. با استفاده از نمایش پارامتری $z = z_۰ + Re^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ برای $C_۰$ فرمولهای انتگرالگیری زیر را به‌دست آورید:

(الف) $\displaystyle\int_{C_۰} \frac{dz}{z - z_۰} = ۲\pi i$؛

(ب) $\displaystyle\int_{C_۰} (z-z_۰)^{n-۱}dz = ۰ \; (n = \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$.

۱۱. با استفاده از نمایش پارامتری در تمرین ۱۰ برای دایرهٔ جهت‌دار $C_۰$ نشان دهید که

$$\int_{C_۰} (z - z_۰)^{a-۱}dz = i\frac{۲R^a}{a}\sin(a\pi).$$

که در آن a هر عدد حقیقی غیر از صفر است و شاخهٔ اصلی انتگرالده و مقدار اصلی R^a گرفته شده‌اند. [توجه کنید که چگونه این عبارت تمرین ۱۰ (ب) را تعمیم می‌دهد.]

۱۲. (الف) فرض کنید $f(z)$ روی قوس هموار C، که دارای نمایش پارامتری $z=z(t)$ $(a\leq t\leq b)$ است، پیوسته باشد، یعنی $f[z(t)]$ روی بازهٔ $a\leq t\leq b$ پیوسته باشد. نشان دهید اگر $\phi(\tau)$ $(\alpha\leq\tau\leq\beta)$ تابعی باشد که در بخش ۳۸ توصیف شد، آن‌گاه

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt=\int_\alpha^\beta f[Z(\tau)]Z'(\tau)d\tau,$$

که در آن $Z(\tau)=z[\phi(\tau)]$.

(ب) بیان کنید که چرا اتحاد حاصل در قسمت (الف) وقتی C مسیری، نه لزوماً هموار، و $f(z)$ روی C تکه‌یی پیوسته باشد برقرار می‌ماند. بدین‌ترتیب نشان دهید که مقدار انتگرال $f(z)$ در امتداد C، وقتی از نمایش $z=Z(\tau)$ $(\alpha\leq\tau\leq\beta)$ به‌جای نمایش اولیهٔ $z=z(t)$ $(a\leq t\leq b)$ استفاده کنیم، تغییر نمی‌کند.

راهنمایی: در قسمت (الف)، از نتیجهٔ تمرین ۱ (ب)، بخش ۳۸، استفاده کنید و به رابطهٔ (۱۴) آن بخش استناد کنید.

۴۱. کرانهای بالا برای قدرمطلق انتگرال روی مسیر

اگر C نمایش مسیر $z=z(t)$ $(a\leq t\leq b)$ باشد، از تعریف (۲) بخش ۳۹ و نابرابری (۵) بخش ۳۷ می‌دانیم که

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|=\left|\int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt\right|\leq\int_a^b |f[z(t)]|\cdot|z'(t)|dt.$$

بنابراین به‌ازای هر عدد نامنفی M به‌طوری که مقادیر f روی C در نابرابری $|f(z)|\leq M$ صدق کنند داریم

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leq M\int_a^b |z'(t)|dt.$$

چون انتگرال سمت راست، L، یعنی طول مسیر را نمایش می‌دهد (بخش ۳۸ را ببینید) در نتیجه قدرمطلق انتگرال f در امتداد C از ML تجاوز نمی‌کند:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leq ML. \tag{۱}$$

البته، نابرابری بالا یک نابرابری اکید است اگر به‌ازای همهٔ نقاط z بر C، $|f(z)|<M$.

توجه کنید که چون همهٔ راههایی که در انتگرالگیری در نظر می‌گیریم مسیرند و انتگرالده‌ها توابعی تکه‌یی پیوسته‌اند که روی این مسیرها تعریف شده‌اند، همیشه عدد Mی مانند آنچه در نابرابری (۱) ظاهر می‌شود موجود است. علت آن است که اگر f روی C پیوسته باشد، تابع حقیقی $|f[z(t)]|$ در بازهٔ بسته و کراندار $a \leq t \leq b$ پیوسته است و چنین تابعی همیشه بر آن بازه به یک مقدار ماکسیمم M می‌رسد.* بنابراین درصورتی که f روی C پیوسته باشد، $|f(z)|$ روی آن ماکسیمم دارد. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر f روی C تکه‌یی پیوسته باشد، این مطلب درست است.

مثال ۱. فرض کنید C قوسی از دایرهٔ $|z| = ۲$ از $z = ۲$ تا $z = ۲i$ باشد که در ربع اول واقع است (شکل ۴۵). با استفاده از نابرابری (۱) نشان دهید که

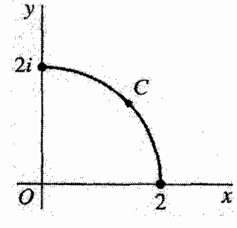
$$\left|\int_C \frac{z+۴}{z^۳-۱}\, dz\right| \leq \frac{۶\pi}{۷}. \tag{۲}$$

این کار را بدین‌صورت انجام دهید که ابتدا توجه کنید اگر z نقطه‌ای روی C باشد، آن‌گاه $|z| = ۲$ و لذا

$$|z+۴| \leq |z| + ۴ = ۶$$

و

$$|z^۳ - ۱| \geq \left||z|^۳ - ۱\right| = ۷.$$



شکل ۴۵

* مثلاً صفحات ۹۰-۸۶ کتاب زیر را ببینید

A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., pp. 86-90, 1983.

بنابراین وقتی z روی C است،

$$\left|\frac{z+۴}{z^۳-۱}\right| = \frac{|z+۴|}{|z^۳-۱|} \leq \frac{۶}{۷}.$$

حال با قرار دادن $M = ۶/۷$ و توجه به اینکه $L = \pi$ طول مسیر C است، با استفاده از نابرابری (۱)، نابرابری (۲) به‌دست می‌آید.

مثال ۲. در اینجا C_R را مسیر نیمدایره‌یی

$$z = Re^{i\theta} \qquad (۰ \leq \theta \leq \pi)$$

و $z^{۱/۲}$ را شاخهٔ

$$z^{۱/۲} = \sqrt{r}e^{i\theta/۲} \qquad \left(r > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

از تابع ریشهٔ دوم می‌گیریم. (شکل ۴۶ را ببینید.) بدون اینکه عملاً مقدار انتگرال را محاسبه کنیم، به‌سادگی می‌توان نشان داد که

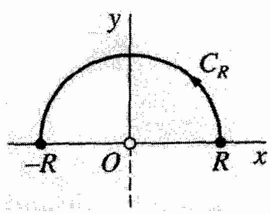
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{۱/۲}}{z^۲+۱} dz = ۰ \qquad (۳)$$

زیرا، وقتی $|z| = R > ۱$، داریم

$$|z^{۱/۲}| = |\sqrt{R}e^{i\theta/۲}| = \sqrt{R}$$

و

$$|z^۲+۱| \geq ||z^۲|-۱| = R^۲-۱.$$



شکل ۴۶

در نتیجه، در نقاطی روی C_R که انتگرالده تعریف شده باشد داریم

$$\left|\frac{z^{۱/۲}}{z^۲+۱}\right| \le M_R \qquad \text{که در آن} \qquad M_R = \frac{\sqrt{R}}{R^۲-۱}.$$

چون طول C_R عدد $L = \pi R$ است، ازنابرابری (۱)، نتیجه می‌شود که

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{۱/۲}}{z^۲+۱}dz\right| \le M_R L\,.$$

اما

$$M_R L = \frac{\pi R\sqrt{R}}{R^۲-۱}\cdot\frac{۱/R^۲}{۱/R^۲} = \frac{\pi/\sqrt{R}}{۱-(۱/R^۲)},$$

و روشن است که اگر R به بی‌نهایت میل کند، عبارت منتهی‌الیه سمت راست به صفر میل می‌کند. بنابراین حد (۳) ثابت شد.

تمرینها

۱. بدون محاسبهٔ انتگرال نشان دهید که

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^۲-۱}\right| \le \frac{\pi}{۳}\,.$$

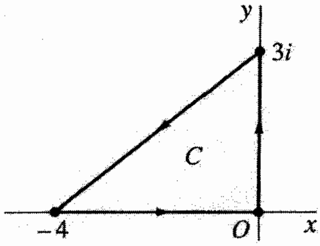
وقتی که C همان منحنی مثال ۱ بخش ۴۱ باشد.

۲. فرض کنید C پاره‌خط از $z = i$ تا $z = ۱$ باشد. با توجه به اینکه نزدیکترین نقطهٔ این پاره‌خط به مبدأ، نقطهٔ وسط این پاره‌خط است، بدون محاسبهٔ انتگرال نشان دهید که

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^۴}\right| \le ۴\sqrt{۲}\,.$$

۳. نشان دهید که اگر C مرز مثلثی باشد که رئوس آن در نقاط ۰، $۳i$، ۴- و جهت C خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد (شکل ۴۷ را ببینید)، آن‌گاه

$$\left|\int_C (e^z - \overline{z})dz\right| \le ۶۰\,.$$



شکل ۴۷

۴. فرض کنید C_R معرف نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z| = R$ $(R > ۲)$ باشد که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است. نشان دهید که

$$\left|\int_{C_R} \frac{۲z^۲ - ۱}{z^۴ + ۵z^۲ + ۴} dz\right| \leq \frac{\pi R(۲R^۲ + ۱)}{(R^۲ - ۱)(R^۲ - ۴)} .$$

سپس با تقسیم صورت و مخرج کسر طرف راست بر $R^۴$، نشان دهید که وقتی R به بی‌نهایت میل کند مقدار انتگرال به صفر میل می‌کند.

۵. فرض کنید C_R دایرهٔ $|z| = R$ $(R > ۱)$ باشد که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است. نشان دهید که

$$\left|\int_{C_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^۲} dz\right| < ۲\pi \left(\frac{\pi + \ln R}{R}\right) .$$

سپس با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نشان دهید که وقتی R به بی‌نهایت میل کند مقدار انتگرال به صفر میل می‌کند.

۶. فرض کنید C_ρ معرف دایرهٔ $|z| = \rho$ $(۰ < \rho < ۱)$ باشد که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده و $f(z)$ در قرص $|z| \leq ۱$ تحلیلی باشد. نشان دهید اگر $z^{-۱/۲}$ نمایش هر یک از شاخه‌های خاص آن تابع توانی باشد، آن‌گاه عدد ثابت نامنفیی مانند M، مستقل از ρ هست، که

$$\left|\int_{C_\rho} z^{-۱/۲} f(z) dz\right| \leq ۲\pi M \sqrt{\rho}.$$

بدین‌ترتیب نشان دهید که وقتی ρ به ۰ میل کند مقدار انتگرال به ۰ میل می‌کند.

راهنمایی: توجه کنید که چون $f(z)$ در سراسر قرص $|z| \leq ۱$ تحلیلی و بنابراین پیوسته است، در این قرص کراندار می‌باشد (بخش ۱۷).

۷. فرض کنید C_N نمایش مرز مربع حاصل از خطوط

$$x = \pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{و} \quad y = \pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$$

باشد که در آنها N عددی صحیح و مثبت و جهت C_N در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

(الف) به کمک نابرابریهای

$$|\sin z| \ge |\sin x| \quad \text{و} \quad |\sin z| \ge |\sinh y|،$$

که در تمرینهای ۱۰ (الف) و ۱۱ (الف)، بخش ۳۳، به‌دست آمدند، نشان دهید که روی اضلاع قائم مربع، $|\sin z| \ge 1$ و روی اضلاع افقی $|\sin z| > \sinh(\pi/2)$. بدین‌ترتیب نشان دهید که عدد ثابت مثبتی مانند A، مستقل از N، هست که به‌ازای همهٔ نقاط z واقع بر مسیر C_N داریم $|\sin z| \ge A$.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ نهایی قسمت (الف) نشان دهید که

$$\left|\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z}\right| \le \frac{16}{(2N+1)\pi A}$$

و بنابراین وقتی N به بی‌نهایت میل کند مقدار این انتگرال به صفر میل می‌کند.

۴۲. تابع اولیه

گرچه مقدار انتگرال روی مسیر تابع $f(z)$ از نقطهٔ ثابت z_1 تا نقطهٔ ثابت z_2، در حالت کلی به مسیری که اختیار شده بستگی دارد، برخی از توابع موجودند که انتگرال آنها از z_1 تا z_2 مستقل از مسیر است. (با مثالهای ۲ و ۳ بخش ۴۰ مقایسه کنید.) مثالهای مذکور همچنین نشان می‌دهند که مقدار انتگرال روی مسیرهای بسته گاهی از اوقات، اما نه همیشه، صفر است. قضیهٔ زیر در تعیین موقعیتی که انتگرالگیری مستقل از مسیر است و به‌علاوه موقعیتی که انتگرال روی مسیر بسته صفر است مفید خواهد بود.

در اثبات قضیه، تعمیمی از قضیهٔ اساسی حسابان به‌دست می‌آوریم که محاسبهٔ تعداد زیادی از انتگرالهای روی مسیر را ساده می‌کند. این تعمیم، مفهوم تابع اولیهٔ تابع پیوستهٔ f در حوزهٔ D را در بر دارد، یعنی تابع Fی که به‌ازای هر z در D داریم $F'(z) = f(z)$. توجه کنید که تابع

اولیه لزوماً تابعی تحلیلی است. همچنین توجه کنید که تابع اولیهٔ تابع مفروض f بجز برای یک ثابت مختلط جمعی یکتاست. زیرا اگر $F(z)$ و $G(z)$ دو تابع اولیهٔ $f(z)$ باشند آن‌گاه مشتق $F(z) - G(z)$ صفر است و بنا بر قضیهٔ بخش ۲۳ درصورتی که مشتق یک تابع تحلیلی در سراسر حوزهٔ D صفر باشد آن تابع در حوزهٔ D ثابت است.

قضیه. فرض کنید تابع $f(z)$ در حوزهٔ D پیوسته باشد. اگر یکی از احکام زیر برقرار باشد آن‌گاه بقیه هم برقرارند

(الف) $f(z)$ دارای تابع اولیه‌ای مانند $F(z)$ در D است؛

(ب) انتگرالهای $f(z)$ در امتداد مسیرهایی که کاملاً در D واقع و از نقطهٔ ثابت $z_۱$ تا نقطهٔ ثابت $z_۲$ امتداد داشته باشند همگی مساوی‌اند؛

(ج) انتگرال $f(z)$ روی هر مسیر بسته که کاملاً در D واقع باشد مساوی صفر است.

باید تأکید کنیم که در قضیه ادعا نشده که برای تابعی مفروض مانند f و حوزه‌ای مفروض مانند D هر یک از این احکام برقرار است. قضیه تنها گویای این نکته است که همهٔ آنها برقرارند یا هیچ‌کدام برقرار نیستند. برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که حکم (الف) مستلزم حکم (ب) و حکم (ب) مستلزم حکم (ج) و بالاخره حکم (ج) مستلزم حکم (الف) است.

فرض کنید حکم (الف) برقرار باشد. اگر C مسیری واقع در D از $z_۱$ تا $z_۲$ باشد که قوسی هموار با نمایش پارامتری $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ است، بنابر تمرین ۵ بخش ۳۸، می‌دانیم که

$$\frac{d}{dt}F[z(t)] = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t) \qquad (a \le t \le b).$$

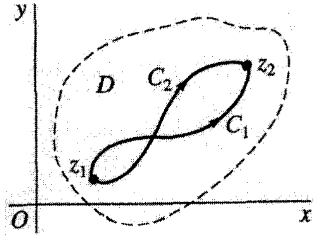
چون قضیهٔ اساسی حسابان را می‌توان تعمیم داد تا برای توابع مختلط یک‌متغیرهٔ حقیقی قابل استفاده باشد (بخش ۳۷)، نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = F[z(t)]\Big]_a^b = F[z(b)] - F[z(a)].$$

چون $z(b) = z_۲$ و $z(a) = z_۱$ پس مقدار این انتگرال روی مسیر برابر است با

$$F(z_۲) - F(z_۱)$$

و روشن است که این مقدار مستقل از مسیر C است مادامی که C از $z_۱$ تا $z_۲$ کشیده شده



شکل ۴۸

و کاملاً واقع در D باشد. یعنی درصورتی که C هموار باشد

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big]_{z_1}^{z_2} . \qquad (1)$$

البته این عبارت وقتی C مسیری، نه لزوماً هموار، واقع در D باشد نیز صحیح است. به عبارت صریحتر، اگر C از تعدادی متناهی قوس هموار C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ تشکیل شده باشد که هر C_k از نقطهٔ z_k تا نقطهٔ z_{k+1} کشیده شده است، آن‌گاه

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_{n+1}) - F(z_1) .$$

(با مثال ۳ بخش ۴۰ مقایسه کنید.) و لذا ثابت شد که حکم (ب) از حکم (الف) نتیجه می‌شود.

برای اینکه ببینیم حکم (ب) مستلزم حکم (ج) است، فرض می‌کنیم z_1 و z_2 نمایش دو نقطهٔ دلخواه روی مسیر بستهٔ C باشد که C در D واقع است و بدین‌ترتیب دو مسیر می‌سازیم که ابتدای هر دو z_1 و انتهای هر دو z_2 است، به‌طوری که $C = C_1 - C_2$ (شکل ۴۸). با فرض درست‌بودن حکم (ب)، می‌توان نوشت

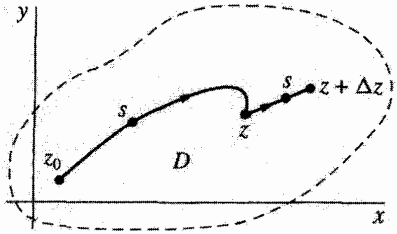
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz, \qquad (2)$$

یا

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0 . \qquad (3)$$

یعنی انتگرال $f(z)$ پیرامون مسیر بستهٔ $C = C_1 - C_2$ دارای مقدار صفر است.

آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم حکم (ج) مستلزم حکم (الف) است. این کار را بدین‌نحو انجام می‌دهیم که از فرض درست‌بودن (ج) برقراری (ب) را ثابت می‌کنیم و سپس به



شکل ۴۹

حکم (الف) می‌رسیم. برای اثبات درستی (ب) فرض می‌کنیم C_1 و C_2 نمایش دو مسیر واقع در D از نقطهٔ z_1 تا نقطهٔ z_2 باشند و ملاحظه می‌کنیم که بنا بر حکم (ج) معادلهٔ (۳) برقرار است (شکل ۴۸ را ببینید). بنابراین معادلهٔ (۲) برقرار است. در نتیجه در D انتگرالگیری مستقل از مسیر است و می‌توانیم تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

را در D تعریف کنیم. درصورتی که نشان دهیم همه جا در D، $F'(z) = f(z)$ اثبات قضیه کامل می‌شود. برای این کار فرض کنید $z + \Delta z$ نقطه‌ای متمایز از z واقع در یک همسایگی z باشد که به‌قدر کافی کوچک است تا مشمول در D باشد. در این‌صورت

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds\,.$$

که در آن مسیر انتگرالگیری از z تا $z + \Delta z$ را می‌توان یک پاره‌خط گرفت (شکل ۴۹). از آنجا که

$$\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \Delta z$$

(تمرین ۵، بخش ۴۰، را ببینید)، می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds$$

و نتیجه می‌شود که

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]ds\,.$$

اما f در نقطهٔ z پیوسته است. بنابراین به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ موجود است به قسمی که

اگر $|s-z|<\delta$ آن‌گاه $|f(s)-f(z)|<\varepsilon$.

در نتیجه، اگر نقطهٔ $z+\Delta z$ آن‌قدر به z نزدیک باشد که $|\Delta z|<\delta$، آن‌گاه

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{۱}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon;$$

یعنی،

$$\lim_{\Delta z\to ۰}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

یا $F'(z)=f(z)$.

۴۳. چند مثال

مثالهای زیر، قضیهٔ بخش ۴۲ و به‌خصوص استفاده از فرمول (۱) را روشن می‌کنند که تعمیمی از قضیهٔ اساسی حسابان است.

مثال ۱. تابع پیوستهٔ $f(z)=z^۲$ دارای تابع اولیهٔ $F(z)=z^۳/۳$ در سراسر صفحه است. بنابراین به‌ازای هر مسیر از $z=۰$ تا $z=۱+i$ داریم

$$\int_۰^{۱+i} z^۲dz=\left.\frac{z^۳}{۳}\right]_۰^{۱+i}=\frac{۱}{۳}(۱+i)^۳=\frac{۲}{۳}(-۱+i)$$

مثال ۲. تابع $f(z)=۱/z^۲$ که همه جا بجز در مبدأ پیوسته است دارای تابع اولیهٔ $F(z)=-۱/z$ در حوزهٔ $|z|>۰$، متشکل از تمامی صفحهٔ z به استثنای مبدأ است. در نتیجه

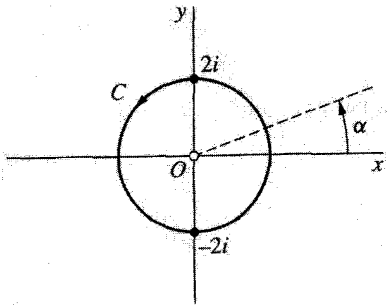
$$\int_C\frac{dz}{z^۲}=۰$$

هرگاه C دایرهٔ

$$z=۲e^{i\theta}\qquad(-\pi\le\theta\le\pi)\tag{۱}$$

حول مبدأ در جهت مثبت باشد (شکل ۵۰).

توجه کنید که انتگرال تابع $f(z)=۱/z$ را روی همان دایره نمی‌توان به روش مشابه محاسبه کرد. زیرا گرچه مشتق هر شاخهٔ $\log z$ مانند $F(z)$ مساوی $۱/z$ است (بخش ۳۰) $F(z)$ در



شکل ۵۰

امتداد بریدگی شاخه‌اش مشتق‌پذیر نیست یا حتی تعریف نشده است. به‌خصوص اگر پرتو $\theta = \alpha$ از مبدأ برای تشکیل بریدگی این شاخه به‌کار رود $F'(z)$ در نقطه‌ای که این پرتو دایرهٔ C را قطع می‌کند موجود نیست (شکل ۵۰ را ببینید). بنابراین C در حوزه‌ای که در سراسر آن $F'(z) = ۱/z$، واقع نیست و نمی‌توان مستقیماً از تابع اولیه استفاده کرد. مثال ۳، نحوهٔ استفاده از ترکیب دو تابع اولیهٔ متفاوت برای محاسبهٔ انتگرال $f(z) = ۱/z$ روی C را نشان می‌دهد.

مثال ۳. فرض کنید $C_۱$ نمایش نیمهٔ سمت راست

$$z = ۲e^{i\theta} \qquad \left(-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}\right) \tag{۲}$$

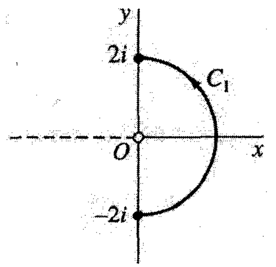
دایرهٔ C مثال ۲ باشد. برای محاسبهٔ انتگرال $۱/z$ حول $C_۱$ از شاخهٔ اصلی

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta \qquad (r > ۰, -\pi < \Theta < \pi)$$

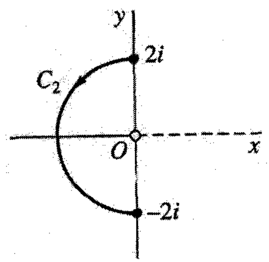
تابع لگاریتمی به‌عنوان تابع اولیهٔ $۱/z$ استفاده می‌کنیم (شکل ۵۱):

$$\int_{C_۱} \frac{dz}{z} = \int_{-۲i}^{۲i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log} z \Big]_{-۲i}^{۲i} = \operatorname{Log}(۲i) - \operatorname{Log}(-۲i)$$
$$= \left(\ln ۲ + i\frac{\pi}{۲}\right) - \left(\ln ۲ - i\frac{\pi}{۲}\right) = i\pi\,.$$

این انتگرال در مثال ۱ بخش ۴۰، با استفاده از نمایش (۲) برای این نیمدایره، به روش دیگری محاسبه شده بود.



شکل ۵۱



شکل ۵۲

حال فرض کنید $C_۲$ نمایش نیمهٔ چپ

$$z = ۲e^{i\theta} \qquad \left(\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{۳\pi}{۲}\right) \tag{۳}$$

همان دایرهٔ C باشد و شاخهٔ

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > ۰, ۰ < \theta < ۲\pi)$$

تابع لگاریتمی (شکل ۵۲) را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت

$$\int_{C_۲} \frac{dz}{z} = \int_{۲i}^{-۲i} \frac{dz}{z} = \log z \Big]_{۲i}^{-۲i} = \log(-۲i) - \log(۲i)$$

$$= \left(\ln ۲ + i\frac{۳\pi}{۲}\right) - \left(\ln ۲ + i\frac{\pi}{۲}\right) = \pi i\,.$$

بدین‌ترتیب مقدار انتگرال $1/z$ حول تمام دایرهٔ $C = C_1 + C_2$ به‌دست می‌آید:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

مثال ۴. با استفاده از یک تابع اولیه، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz \qquad (4)$$

که در آن انتگرالده، شاخهٔ زیر از تابع ریشهٔ دوم است

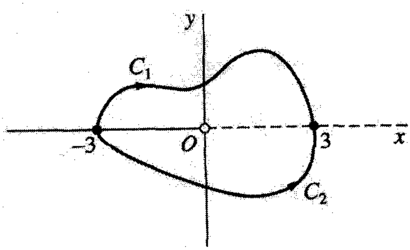
$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi) \qquad (5)$$

و C_1 مسیر دلخواهی از $z = -3$ تا $z = 3$ است که بجز نقاط انتهایی آن در بالای محور xها قرار دارد (شکل ۵۳). گرچه انتگرالده روی C_1 تکه‌یی پیوسته و لذا انتگرال موجود است، شاخهٔ (۵) از $z^{1/2}$ روی پرتو $\theta = 0$ به‌خصوص در نقطهٔ $z = 3$ تعریف نشده است. اما شاخهٔ دیگر

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$$

همه جا روی C_1 تعریف شده و پیوسته است. مقادیر $f_1(z)$ در همهٔ نقاط روی C_1 بجز در $z = 3$ با مقادیر انتگرالده (۵) برابر است، لذا می‌توان به‌جای انتگرالده تابع $f_1(z)$ را قرار داد. چون تابع

$$F_1(z) = \frac{2}{3}z^{3/2} = \frac{2}{3}r\sqrt{r}e^{i3\theta/2} \qquad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$



شکل ۵۳

یک تابع اولیهٔ تابع $f_۱(z)$ است می‌توان نوشت

$$\int_{C_۱} z^{۱/۲}dz = \int_{-۳}^{۳} f_۱(z)dz = F_۱(z)\Big]_{-۳}^{۳} = ۲\sqrt{۳}\left(e^{i۰} - e^{i۳\pi/۲}\right) = ۲\sqrt{۳}(۱+i).$$

(با مثال ۴ بخش ۴۰ مقایسه کنید.)

انتگرال تابع (۵)، روی هر مسیر $C_۲$ از $z = -۳$ تا $z = ۳$ که در زیر محور حقیقی واقع باشد، یعنی

$$\int_{C_۲} z^{۱/۲}dz \tag{۶}$$

را می‌توان به روش مشابهی محاسبه کرد. در این حالت می‌توان به‌جای انتگرالده، شاخهٔ

$$f_۲(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/۲} \qquad \left(r > ۰, \frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{۵\pi}{۲}\right)$$

را قرار داد که مقادیر آن در $z = -۳$ و در همهٔ نقاط روی $C_۲$ در نیم‌صفحهٔ پایین با مقادیر انتگرالده برابر است. با این اقدام می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال (۶) از یک تابع اولیهٔ $f_۲(z)$ استفاده کرد. جزئیات را برای تمرین گذاشته‌ایم.

تمرینها

۱. با استفاده از تابع اولیه نشان دهید که برای هر مسیر C که از نقطهٔ $z_۱$ تا نقطهٔ $z_۲$ کشیده شود، داریم

$$\int_C z^n dz = \frac{۱}{n+۱}\left(z_۲^{n+۱} - z_۱^{n+۱}\right) \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

۲. هر یک از انتگرالهای زیر را با پیداکردن تابع اولیه محاسبه کنید، که در آنها مسیر انتگرالگیری مسیری دلخواه بین حدود داده‌شدهٔ انتگرالگیری است:

(الف) $\int_i^{i/۲} e^{\pi z}dz$؛ (ب) $\int_۰^{\pi+۲i} \cos\left(\frac{z}{۲}\right)dz$؛ (ج) $\int_۱^۳ (z-۲)^۳dz$.

جواب: (الف) $(۱+i)/\pi$؛ (ب) $e + (۱/e)$؛ (ج) ۰.

۳. با استفاده از قضیهٔ بخش ۴۲ نشان دهید که اگر $C_۰$ مسیر بسته‌ای باشد که از نقطهٔ $z_۰$ نمی‌گذرد، آن‌گاه

$$\int_{C_۰} (z-z_۰)^{n-۱}dz = ۰ \qquad (n = \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

[با تمرین ۱۰ (ب) بخش ۴۰ مقایسه کنید].

۴. یک تابع اولیهٔ $F_۲(z)$ برای شاخهٔ $f_۲(z)$ از تابع $z^{۱/۲}$ در مثال ۴ بخش ۴۳ پیدا کنید و نشان دهید که انتگرال (۶) دارای مقدار $۲\sqrt{۳}(-۱+i)$ است. توجه کنید که انتگرال تابع (۵) پیرامون مسیر بستهٔ $C_۲ - C_۱$ آن مثال برابر است با $-۴\sqrt{۳}$.

۵. نشان دهید که

$$\int_{-۱}^{۱} z^i dz = \frac{۱+e^{-\pi}}{۲}(۱-i),$$

که در آن z^i معرف شاخهٔ اصلی

$$z^i = \exp(i \operatorname{Log} z) \qquad (|z| > ۰, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

و مسیر انتگرالگیری مسیر دلخواهی از $z = -۱$ تا $z = ۱$ است که به غیر از نقاط انتهایی آن در بالای محور xهاست.

راهنمایی: از یک تابع اولیه برای شاخهٔ

$$z^i = \exp(i \log z) \qquad \left(|z| > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \arg z < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

از همان تابع توانی استفاده کنید.

۴۴. قضیهٔ کوشی-گورسا[1]

در بخش ۴۲ دیدیم که اگر تابع پیوستهٔ f دارای تابع اولیه‌ای در حوزهٔ D باشد، انتگرال $f(z)$ روی هر مسیر بستهٔ C که تماماً در D واقع باشد دارای مقدار صفر است. در این بخش قضیه‌ای ارائه می‌دهیم که شرایط دیگری به تابع f می‌دهد تا متضمن صفرشدن انتگرال $f(z)$ پیرامون هر مسیر سادهٔ بسته باشد (بخش ۳۸). این قضیه در نظریهٔ توابع یک‌متغیرهٔ مختلط نقشی اساسی دارد؛ و برخی از تعمیمهای آن شامل انواع خاصی از حوزه‌ها هستند که در بخش ۴۶ ارائه خواهند شد.

فرض می‌کنیم C معرف مسیر سادهٔ بستهٔ $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ باشد که در جهت مثبت (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت) گرفته شده و فرض می‌کنیم f در هر نقطهٔ درون و روی C تحلیلی است. بنابر بخش ۳۹

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt \qquad (۱)$$

1. E. Goursat

و اگر

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{و} \quad z(t) = x(t) + iy(t)،$$

انتگرالده سمت راست عبارت (۱) حاصلضرب توابع

$$x'(t) + iy'(t) \quad \text{و} \quad u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]$$

از متغیر حقیقی t است. از این‌رو

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt \tag{۲}$$

پس برحسب انتگرالهای روی خط توابع حقیقی‌مقدار از دو متغیر حقیقی داریم

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy \tag{۳}$$

ملاحظه کنید که عبارت (۳) را می‌توان به‌طور صوری با جایگزینی $f(z)$ و dz در سمت چپ، به‌ترتیب، با دوجمله‌ی

$$dx + idy \quad \text{و} \quad u + iv$$

و انجام اعمال ضرب به‌دست آورد. البته اگر C یک مسیر، نه لزوماً سادهٔ بسته، باشد و $f[z(t)]$ فقط روی آن تکه‌یی پیوسته باشد عبارت (۳) برقرار خواهد بود.

قضیه‌ای از حسابان را یادآوری می‌کنیم که بر مبنای آن می‌توان انتگرالهای روی خط سمت راست رابطهٔ (۳) را برحسب انتگرالهای دوگانه بیان کرد. به عبارت صریحتر اگر توابع حقیقی $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول در سراسر ناحیهٔ بستهٔ R متشکل از نقاط درون و روی C پیوسته باشند، بنابر قضیهٔ گرین* داریم

$$\int_C P\,dx + \int_C Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)dA\,.$$

حال f در R پیوسته است زیرا در آنجا تحلیلی است. بنابراین توابع u و v نیز در R پیوسته‌اند. همچنین اگر مشتق f یعنی f' در R پیوسته باشد، مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در R پیوسته‌اند. پس بنابر قضیهٔ گرین می‌توان رابطهٔ (۳) را به‌صورت زیر نوشت

$$\int_C f(z)dz = \iint_R (-v_x - u_y)dA + i\iint_R (u_x - v_y)dA\,. \tag{۴}$$

* *Green*

اما، بنابر معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

انتگرالده‌های این دو انتگرال دوگانه در سراسر R صفرند. بنابراین اگر f در R تحلیلی و f' در آنجا پیوسته باشد

$$\int_C f(z)dz = \circ \qquad (\text{۵})$$

این قضیه را در نیمهٔ اول قرن نوزدهم، کوشی ثابت کرد.

توجه کنید که وقتی ثابت شد مقدار این انتگرال صفر است، جهت C اهمیتی ندارد، یعنی وقتی C را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، حکم (۵) باز هم درست است، زیرا در این‌صورت

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz = \circ$$

مثال. اگر C مسیر سادهٔ بسته‌ای، در جهت دلخواهی باشد، آن‌گاه

$$\int_C \exp(z^{\text{۳}})dz = \circ$$

دلیل این امر این است که تابع $f(z) = \exp(z^{\text{۳}})$ همه جا تحلیلی و مشتق آن $f'(z) = \text{۳}z^{\text{۲}}\exp(z^{\text{۳}})$ همه جا پیوسته است.

گورسا (۱۹۳۶-۱۸۵۸) اولین کسی بود که ثابت کرد شرط پیوستگی f' را می‌توان حذف کرد. برداشتن این شرط مهم است، مثلاً می‌توانیم نشان دهیم که f'، مشتق تابع تحلیلی f، تابعی تحلیلی است بدون اینکه نیاز به فرض پیوستگی f' داشته باشیم که خود به‌عنوان نتیجه‌ای به‌دست می‌آید. حال صورت تجدید نظر شدهٔ دستاورد کوشی را که به قضیهٔ کوشی-گورسا مشهور است بیان می‌کنیم.

قضیه. اگر تابع f در همهٔ نقاط درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$\int_C f(z)dz = \circ\,.$$

اثبات این قضیه در بخش بعد ارائه می‌شود که، برای دقیق‌بودن بحث، فرض می‌کنیم C به‌طور مثبت جهت‌دار شده باشد. خواننده‌ای که مایل است این قضیه را بدون اثبات بپذیرد، می‌تواند مستقیماً به بخش ۴۶ برود.

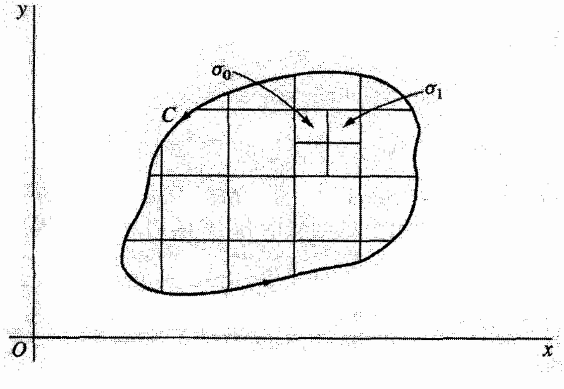
۴۵. برهان قضیه

برهان قضیهٔ کوشی‌ـگورسا را با لمی آغاز می‌کنیم. برای شروع، زیرمجموعه‌هایی از ناحیهٔ R را می‌سازیم که R متشکل از نقاط درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C با جهت مثبت است. برای انجام این کار خطوطی با فواصل مساوی به موازات محورهای حقیقی و موهومی رسم می‌کنیم به قسمی که فاصلهٔ بین خطوط عمودی مجاور، با فاصلهٔ بین خطوط افقی مجاور، مساوی باشند. بدین‌ترتیب، تعدادی متناهی زیرناحیهٔ بستهٔ مربع شکل می‌سازیم که هر نقطهٔ R در لااقل یک زیرناحیه واقع است و هر زیرناحیه شامل نقاطی از R است. از این زیرناحیه‌های مربع شکل، فقط به‌عنوان مربع نام خواهیم برد و همواره به یاد داریم که منظور ما از مربع، مرز آن همراه با نقاط داخلی آن است. اگر مربع خاصی شامل نقاطی باشد که در R نیستند، آن نقاط را بر می‌داریم و آنچه را که باقی می‌ماند یک مربع جزئی می‌نامیم. بنابراین ناحیهٔ R را با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی می‌پوشانیم (شکل ۵۴) و اثبات لم زیر را با این پوشش شروع می‌کنیم.

لم. فرض کنید تابع f در همهٔ نقاط ناحیهٔ بستهٔ R، متشکل از همهٔ نقاط داخل مسیر سادهٔ بستهٔ C با جهت مثبت و نقاط روی خود C، تحلیلی باشد. به‌ازای هر عدد مثبت ε، می‌توان ناحیهٔ R را با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی پوشاند، که با $j = ۱, ۲, \ldots, n$ اندیس‌گذاری شده‌اند، به قسمی که در هر یک، نقطهٔ ثابتی مانند z_j موجود باشد که برای آن نابرابری

$$\left|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j)\right| < \varepsilon \qquad (z \neq z_j) \tag{۱}$$

به‌ازای همهٔ نقاط دیگر آن مربع یا مربع جزئی صادق باشد.



شکل ۵۴

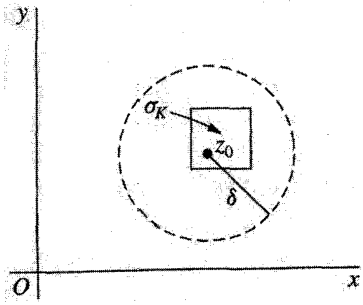
برای شروع اثبات، این امکان را در نظر می‌گیریم که در پوششی که درست قبل از بیان لم ساختیم یک مربع یا مربع جزئی موجود است به قسمی که در آن هیچ نقطه‌ای مانند z_j موجود نباشد که به‌ازای همهٔ نقاط دیگر z در آن، نابرابری (۱) برقرار باشد. اگر آن زیرناحیه یک مربع است با رسم پاره‌خطهای واصل بین نقاط وسط اضلاع مقابل، چهار مربع کوچکتر می‌سازیم (شکل ۵۴). اگر زیرناحیهٔ مورد نظر یک مربع جزئی باشد، تمام مربع را به همان طریق تفکیک می‌نماییم و سپس فرض می‌کنیم قسمتهایی که در خارج Rاند کنار گذاشته شده باشند. اگر در هیچ‌یک از این زیرناحیه‌های کوچکتر نقطه‌ای مانند z_j موجود نباشد که برای آن نابرابری (۱) به‌ازای همهٔ نقاط دیگر آن برقرار باشد، باز مربعها و مربعهای جزئی کوچکتر می‌سازیم و غیره. اگر این عمل را در مورد هر یک از زیرناحیه‌های اولیه‌ای که به این کار نیاز دارد انجام دهیم، ثابت می‌شود که، بعد از تعدادی متناهی مرحله، ناحیهٔ R را می‌توان با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی پوشاند به قسمی که لم درست باشد.

برای تحقیق درستی این مطلب، فرض می‌کنیم یکی از زیرناحیه‌های اولیه چنان باشد که پس از هر تعداد متناهی تقسیم آن، نقاط z_j مورد نیاز موجود نباشند و به تناقض می‌رسیم. فرض کنیم اگر زیرناحیه مربع است σ_0 نمایش آن باشد؛ اگر مربع جزئی است، σ_0 نمایش تمام مربعی باشد که زیرناحیه جزئی از آن است. پس از تقسیم σ_0، لااقل یکی از چهار مربع کوچکتر، که با σ_1 نمایش داده می‌شود، باید شامل نقاطی از R، اما نه نقطهٔ مناسب z_j باشد. سپس σ_1 را تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. شاید بعد از تقسیم مربع σ_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots)$ بیش از یکی از چهار مربع کوچکتر ساخته شده از آن را بتوان انتخاب کرد. به‌منظور مشخص‌بودن انتخاب، σ_k را مربعی می‌گیریم که پایینترین و در منتهی‌الیه سمت چپ باشد.

با توجه به نحوه‌ای که دنبالهٔ نامتناهی

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \ldots \tag{۲}$$

از مربعهای تودرتو ساخته شده است به‌آسانی نشان داده می‌شود (تمرین ۹، بخش ۴۶) که نقطهٔ z_0ی وجود دارد که بین همهٔ σ_kها مشترک است، همچنین هر یک از این مربعها شامل نقاطی از R هستند که متمایز از z_0اند. به یاد می‌آوریم که چگونه اندازهٔ مربعها در دنباله کاهش می‌یابد و توجه می‌کنیم که هر δ همسایگی $|z - z_0| < \delta$ شامل چنین مربعهایی است وقتی که طول قطرشان کمتر از δ باشد. بنابراین هر δ همسایگی $|z - z_0| < \delta$ شامل نقاطی از R متمایز از z_0 است و در نتیجه z_0 یک نقطهٔ انباشتگی R است. چون ناحیهٔ R مجموعه‌ای بسته است، در نتیجه z_0 نقطه‌ای در R است. (بخش ۱۰ را ببینید.)



شکل ۵۵

حال تابع f در سراسر R و به‌خصوص در $z_\circ$ تحلیلی است. در نتیجه $f'(z_\circ)$ موجود است. بنابر تعریف مشتق (بخش ۱۸) به‌ازای هر عدد مثبت ε یک δـ‌همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ موجود است به قسمی که نابرابری

$$\left|\frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} - f'(z_\circ)\right| < \varepsilon$$

به‌ازای همهٔ نقاط متمایز از $z_\circ$ در آن همسایگی صادق است. اما اگر عدد صحیح K آن‌قدر بزرگ باشد که طول قطر σ_K کوچکتر از δ باشد، آن‌گاه همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ شامل مربع σ_K است (شکل ۵۵). در نتیجه $z_\circ$ به‌عنوان نقطهٔ z_j در نابرابری (۱) برای زیرناحیهٔ متشکل از σ_K یا قسمتی از σ_K به‌کار می‌رود. لذا برخلاف روشی که دنبالهٔ (۲) را ساختیم، نیازی به تقسیم σ_K نیست. بنابراین به تناقض رسیدیم و اثبات لم کامل می‌شود.

بحث را با تابعی مانند f ادامه می‌دهیم که در سراسر ناحیهٔ R متشکل از مسیر سادهٔ بستهٔ C با جهت مثبت و نقاط درون آن تحلیلی است. حال آماده‌ایم تا قضیهٔ کوشی‌ـگورسا را ثابت کنیم، یعنی اینکه

$$\int_C f(z)dz = \circ\,. \qquad (۳)$$

عدد مثبت دلخواه ε مفروض است، پوشش R در حکم لم را در نظر می‌گیریم. روی مربع یا مربع جزئی jام تابع زیر را تعریف می‌کنیم، که در آن z_j نقطهٔ ثابت واقع در آن زیرناحیه است که برای آن نابرابری (۱) برقرار است:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & z \neq z_j \\ \circ, & z = z_j\,. \end{cases} \qquad (۴)$$

بنابر نابرابری (۱)، در همهٔ نقاط z از زیرناحیه‌ای که $\delta_j(z)$ در آن تعریف شده است

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon . \tag{۵}$$

همچنین تابع $\delta_j(z)$ در سراسر زیرناحیه پیوسته است زیرا f در آنجا پیوسته است و

$$\lim_{z\to z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = ۰ .$$

حال فرض کنید $C_j(j = ۱,۲,\ldots,n)$ نمایش مرزهای مربعها یا مربعهای جزئی پوشانندهٔ R در جهت مثبت باشد. بنابر تعریف (۴) مقدار f در هر نقطهٔ z از هر C_jی خاص را می‌توان چنین نوشت

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z);$$

و در نتیجه

$$\int_{C_j} f(z)dz = [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z\,dz + \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz . \tag{۶}$$

اما

$$\int_{C_j} z\,dz = ۰ \quad \text{و} \quad \int_{C_j} dz = ۰$$

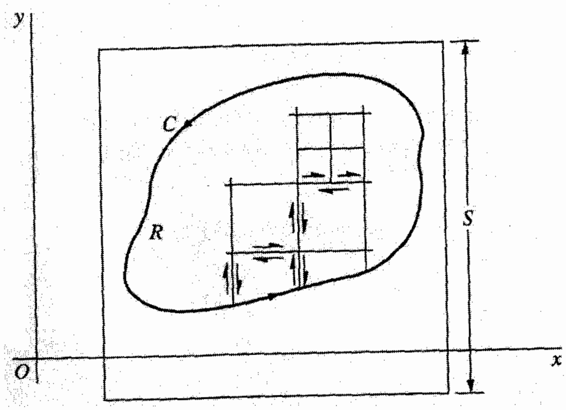
زیرا توابع ۱ و z همه جا در صفحهٔ متناهی تابع اولیه دارند. لذا معادلهٔ (۶) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \qquad (j = ۱,۲,\ldots,n). \tag{۷}$$

مجموع همهٔ n انتگرال سمت چپ روابط (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{j=۱}^{n} \int_{C_j} f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

زیرا دو انتگرال روی مرز مشترک هر دو زیرناحیهٔ مجاور با هم حذف می‌شوند، انتگرال روی آن پاره‌خط در یک زیرناحیه در یک جهت و در زیرناحیهٔ دیگر در جهت مخالف آن گرفته می‌شود



شکل ۵۶

(شکل ۵۶). فقط انتگرالها در طول قوسهایی که قسمتهایی از منحنی C هستند باقی می‌مانند. در نتیجه با توجه به معادله‌های (۷) داریم

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz;$$

و لذا

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz\right| . \qquad (۸)$$

حال با استفاده از ویژگی (۱)، بخش ۴۱، برای هر یک از قدرمطلقهای سمت راست نابرابری (۸) یک کران بالا پیدا می‌کنیم. برای انجام این کار ابتدا به یاد می‌آوریم که هر C_j منطبق بر تمام یا قسمتی از مرز یک مربع است. در هر حالت فرض می‌کنیم s_j نمایش طول ضلع این مربع باشد. چون در انتگرال jام متغیر z و نقطه z_j هر دو در آن مربع واقع‌اند،

$$|z - z_j| \leq \sqrt{۲}s_j .$$

بنابراین با توجه به نابرابری (۵)، می‌دانیم که هر انتگرالده سمت راست نابرابری (۸) در شرط زیر صدق می‌کند

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{۲}s_j\varepsilon . \qquad (۹)$$

اگر C_j مرز یک مربع باشد، طول مسیر C_j مساوی $4s_j$ است. در این حالت فرض می‌کنیم A_j معرف مساحت مربع باشد و ملاحظه می‌کنیم که

$$\left|\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon. \qquad (10)$$

اگر C_j مرز یک مربع جزئی باشد، طول آن از $4s_j + L_j$ تجاوز نمی‌کند، که در آن L_j طول آن قسمت از C_j است که قسمتی از C نیز هست. مجدداً اگر فرض کنیم A_j نمایش مساحت تمام مربع باشد، در می‌یابیم که

$$\left|\int_{C_j}(z-z_j)\delta_j(z)dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon(4s_j+L_j) < 4\sqrt{2}A_j\varepsilon + \sqrt{2}SL_j\varepsilon, \qquad (11)$$

که در آن، S طول ضلع مربعی است که تمام مسیر C و همهٔ مربعات اولیه را که در پوشاندن R به‌کار رفته‌اند در بر می‌گیرد (شکل ۵۶). توجه کنید که مجموع همهٔ A_jها از S^2 تجاوز نمی‌کند.

حال اگر L معرف طول C باشد، از نابرابریهای (۸)، (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < (4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL)\varepsilon.$$

چون مقدار عدد مثبت ε دلخواه است، می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که سمت راست نابرابری آخر به دلخواه ما کوچک شود. بنابراین سمت چپ که مستقل از ε است باید مساوی صفر باشد و حکم (۳) نتیجه می‌شود. بدین‌ترتیب اثبات قضیهٔ کوشی‌ـگورسا کامل می‌شود.

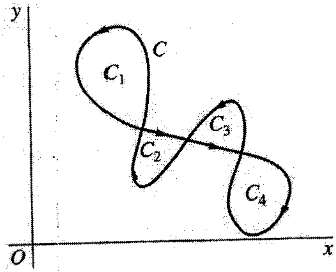
۴۶. حوزه‌های همبند ساده و چندگانه

حوزهٔ همبند سادهٔ D، حوزه‌ای است که هر مسیر سادهٔ بسته در درون آن فقط نقاط D را در بر گیرد. مجموعهٔ نقاط داخلی یک مسیر سادهٔ بسته مثالی در این مورد است. ولی حوزهٔ طوقی بین دو دایرهٔ هم‌مرکز، همبند ساده نیست. یک حوزه که همبند ساده نباشد حوزهٔ همبند چندگانه نامیده می‌شود.

قضیهٔ کوشی‌ـگورسا را می‌توان به روش زیر تعمیم داد تا شامل حوزهٔ همبند ساده باشد.

قضیهٔ ۱. اگر تابع f در سراسر حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد آن‌گاه به‌ازای هر مسیر بستهٔ C واقع در D داریم

$$\int_C f(z)dz = 0. \qquad (1)$$



شکل ۵۷

اگر C مسیر سادهٔ بسته‌ای باشد یا اگر مسیر بسته‌ای باشد که به دفعات متناهی خودش را قطع کند اثبات ساده است. زیرا اگر C ساده و واقع در D باشد، تابع f در هر نقطهٔ درون و روی C تحلیلی است؛ و بنابر قضیهٔ کوشی‌ـ‌گورسا معادلهٔ (۱) برقرار است. به‌علاوه، اگر C بسته باشد، ولی به دفعات متناهی خودش را قطع کند، متشکل از تعدادی متناهی مسیر سادهٔ بسته خواهد بود. این مطلب در شکل ۵۷ نشان داده شده است، که مسیرهای سادهٔ بستهٔ C_k $(k = ۱, ۲, ۳, ۴)$ مسیر C را می‌سازند. چون مقدار انتگرال حول هر C_k صفر است، طبق قضیهٔ کوشی‌ـ‌گورسا نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=۱}^{۴} \int_{C_k} f(z)\,dz = ۰\,.$$

اگر مسیر بسته در تعدادی نامتناهی نقطه خودش را قطع کند دقت زیادی لازم خواهد بود. در تمرین ۵ روشی را بیان کرده‌ایم که اغلب می‌توان برای نشان‌دادن کاربرد قضیه در این مورد هم از آن استفاده کرد.*

فرع ۱. تابع f که در سراسر حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی است باید در D دارای تابع اولیه باشد.

این فرع بلافاصله از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود زیرا بنابر قضیهٔ بخش ۴۲ اگر تابع در حوزه‌ای پیوسته و به‌ازای هر مسیر بستهٔ C در آن حوزه رابطهٔ (۱) برقرار باشد آن‌گاه f همیشه در آن حوزه تابع اولیه دارد. توجه کنید که چون صفحهٔ متناهی همبند ساده است بنابر فرع ۱ توابع تام همیشه دارای تابع اولیه‌اند.

* برای یک اثبات قضیهٔ فوق، که شامل مسیرهای کلیتری با طول متناهی باشد، مثلاً بخشهای ۶۵ـ۶۳ جلد ۱ کتاب مارکوشویچ (Markushevich) مذکور در پیوست ۱ را ببینید.

قضیهٔ کوشی_گورسا را می‌توان طوری تعمیم داد که شامل انتگرال روی مرز حوزهٔ همبند چندگانه شود. قضیهٔ زیر چنین تعمیمی است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید که

(الف) C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است؛

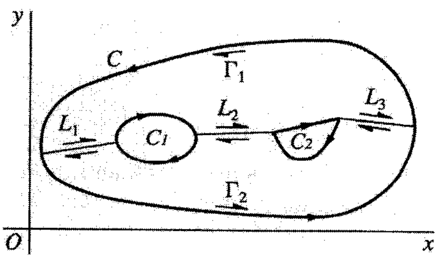
(ب) C_k $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$ مسیرهای سادهٔ بسته‌ای هستند که همه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده‌اند و در درون C بوده، درونهای آنها هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند (شکل ۵۸).

اگر تابع f روی همهٔ این مسیرها و در سراسر این حوزهٔ همبند چندگانه متشکل از همهٔ نقاطی که درون C و خارج هر C_k واقع‌اند تحلیلی باشد، آن‌گاه

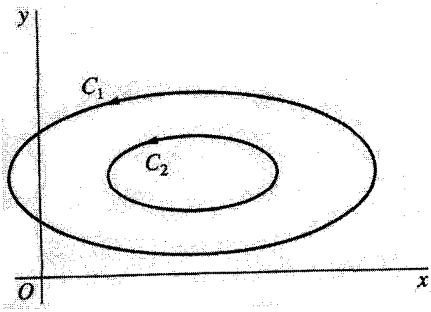
$$\int_C f(z)dz + \sum_{k=۱}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = ۰ . \qquad (۲)$$

توجه کنید که در رابطهٔ (۲)، جهت هر یک از مسیرهای انتگرالگیری طوری است که داخل ناحیهٔ بسته در سمت چپ آن مسیر واقع است.

برای اثبات قضیه، یک مسیر چندبر $L_۱$، متشکل از تعدادی متناهی پاره‌خط که انتهای هر یک ابتدای دیگری است، می‌سازیم که مسیر خارجی C را به مسیر داخلی $C_۱$ وصل کند. یک مسیر چندبر دیگر $L_۲$ می‌سازیم که $C_۱$ را به $C_۲$ وصل کند و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا $L_{n+۱}$ که C_n را به C وصل می‌کند ساخته شود. همان‌طور که در شکل ۵۸ با پیکانهای تک‌جهتی نشان داده‌ایم دو مسیر سادهٔ بستهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ می‌توان تشکیل داد که هر یک متشکل از مسیرهای چندبر L_k یا $-L_k$ و قطعاتی از C و C_kها هستند وهر کدام از آنها در جهتی گرفته می‌شوند که نقاطی



شکل ۵۸



شکل ۵۹

که به‌وسیلهٔ آنها محاط شده‌اند در سمت چپ واقع شوند. حال می‌توان قضیهٔ کوشی‌ـگورسا را در مورد f روی $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ اعمال کرد و معلوم می‌شود که مجموع انتگرالها بر این مسیرها صفر است. چون انتگرالهای روی هر مسیر L_k در جهتهای مختلف حذف می‌شوند، فقط انتگرالهای در طول C و C_kها باقی می‌مانند و حکم (۲) ثابت می‌شود.

فرع زیر پیامدی مهم از قضیهٔ ۲ است.

فرع ۲. فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ معرف مسیرهای سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت بوده و $C_۲$ درون $C_۱$ باشد (شکل ۵۹). اگر تابع f در ناحیهٔ بستهٔ متشکل از آن مسیرها و همهٔ نقاط بین آنها تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$\int_{C_۱} f(z)dz = \int_{C_۲} f(z)dz\,. \tag{۳}$$

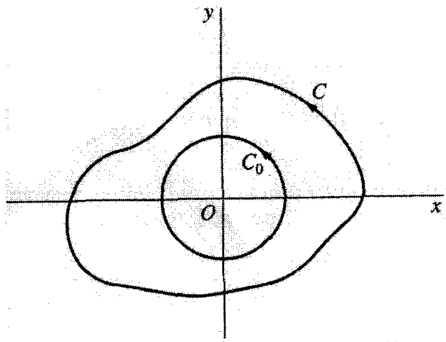
برای تحقیق درستی آن، با استفاده از قضیهٔ ۲ می‌نویسیم

$$\int_{C_۱} f(z)dz + \int_{-C_۲} f(z)dz = ۰$$

و توجه می‌کنیم که این رابطه، صورتی دیگر از رابطهٔ (۳) است.

فرع ۲ به اصل تغییر شکل مسیرها معروف است زیرا مبین این نکته است که اگر $C_۱$ به‌طور پیوسته به $C_۲$ تغییر شکل یابد به قسمی که همیشه از نقاطی بگذرد که f در آنها تحلیلی است، آن‌گاه مقدار انتگرال f روی $C_۱$ هیچ‌وقت تغییر نمی‌کند.

مثال. اگر C مسیر سادهٔ بسته‌ای با جهت مثبت باشد که مبدأ را احاطه کرده است، با استفاده



شکل ۶۰

از فرع ۲ می‌توان نشان داد که

$$\int_C \frac{dz}{z} = ۲\pi i\,.$$

برای انجام این کار، فقط باید دایره‌یی به مرکز مبدأ و شعاع به‌قدر کافی کوچک مانند $C_۰$ در جهت مثبت ساخت که $C_۰$ کاملاً درون C واقع شود (شکل ۶۰). از آنجا که [تمرین ۱۰ (الف) بخش ۴۰]

$$\int_{C_۰} \frac{dz}{z} = ۲\pi i$$

و چون $۱/z$ همه جا بجز در $z = ۰$ تحلیلی است، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

توجه کنید که شعاع $C_۰$ را همچنین می‌توان به‌قدر کافی بزرگ گرفت تا C کاملاً درون $C_۰$ باشد.

تمرینها

۱. با استفاده از قضیهٔ کوشی‌ـگورسا نشان دهید که

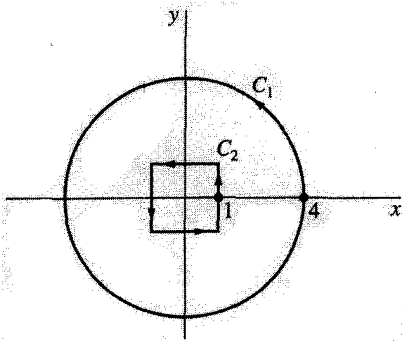
$$\int_C f(z)dz = ۰,$$

درصورتی که مسیر C دایرهٔ $|z| = ۱$، در یک جهت دلخواه باشد و داشته باشیم

(الف) $f(z) = \dfrac{z^۲}{z-۳}$؛ (ب) $f(z) = ze^{-z}$؛

(ج) $f(z) = \dfrac{۱}{z^۲+۲z+۲}$؛ (د) $f(z) = \operatorname{sech} z$؛

(هـ) $f(z) = \tan z$؛ (و) $f(z) = \operatorname{Log}(z+۲)$.



شکل ۶۱

۲. فرض کنید $C_۱$ معرف دایرهٔ $|z| = ۴$ در جهت مثبت و $C_۲$ مرز مربعی در جهت مثبت باشد که اضلاعش در امتداد خطوط $x = \pm ۱$، $y = \pm ۱$ هستند (شکل ۶۱). به کمک فرع ۲، بخش ۴۶، بگویید که چرا تساوی زیر برقرار است

$$\int_{C_۱} f(z)dz = \int_{C_۲} f(z)dz$$

وقتی

(الف) $f(z) = \dfrac{۱}{۳z^۲ + ۱}$؛ (ب) $f(z) = \dfrac{z + ۲}{\sin(z/۲)}$؛ (ج) $f(z) = \dfrac{z}{۱ - e^z}$.

۳. اگر $C_\circ$ معرف دایرهٔ $|z - z_\circ| = R$ در جهت مثبت باشد، آن‌گاه بنابر تمرین ۱۰، بخش ۴۰، داریم

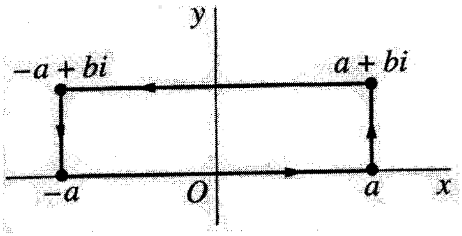
$$\int_{C_\circ} (z - z_\circ)^{n-۱}dz = \begin{cases} \circ, & n = \pm ۱, \pm ۲, \ldots \\ ۲\pi i, & n = \circ \end{cases}$$

با استفاده از این نتیجه و فرع ۲، بخش ۴۶، نشان دهید که اگر C مرز مستطیل $\circ \le x \le ۳$، $\circ \le y \le ۲$ در جهت مثبت باشد، آن‌گاه

$$\int_C (z - ۲ - i)^{n-۱}dz = \begin{cases} \circ, & n = \pm ۱, \pm ۲, \ldots \\ ۲\pi i, & n = \circ \end{cases}$$

۴. با استفاده از روشی که در ذیل بیان می‌شود فرمول انتگرالگیری زیر را به‌دست آورید

$$\int_\circ^\infty e^{-x^۲} \cos(۲bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{-b^۲} \qquad (b > \circ).$$



شکل ۶۲

(الف) نشان دهید که مجموع انتگرالهای $\exp(-z^۲)$ در امتداد ساقهای افقی بالا و پایین از مسیر مستطیلی شکل ۶۲ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$۲\int_{۰}^{a} e^{-x^۲}dx - ۲e^{b^۲}\int_{۰}^{a} e^{-x^۲}\cos(۲bx)dx$$

و مجموع انتگرالها در امتداد ساقهای قائم چپ و راست را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$ie^{-a^۲}\int_{۰}^{b} e^{y^۲}e^{-i۲ay}dy - ie^{-a^۲}\int_{۰}^{b} e^{y^۲}e^{i۲ay}dy\,.$$

در این‌صورت، با استفاده از قضیهٔ کوشی‌ـگورسا نشان دهید که

$$\int_{۰}^{a} e^{-x^۲}\cos(۲bx)dx = e^{-b^۲}\int_{۰}^{a} e^{-x^۲}dx + e^{-(a^۲+b^۲)}\int_{۰}^{b} e^{y^۲}\sin(۲ay)dy\,.$$

(ب) با پذیرفتن این امر که*

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x^۲}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

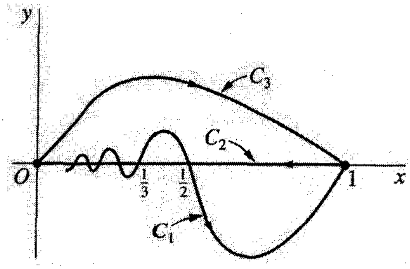
---

* روش معمولی برای محاسبهٔ این انتگرال این است که مجذور آن را به‌صورت

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x^۲}dx\int_{۰}^{\infty} e^{-y^۲}dy = \int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} e^{-(x^۲+y^۲)}dx\,dy$$

می‌نویسند و این انتگرال را با استفاده از مختصات قطبی محاسبه می‌کنند. جزئیات، مثلاً در صفحات ۶۸۰ـ۶۸۱ کتاب زیر آمده است

A. E. Taylor and W. R. Mann, “Advanced Calculus,” 3d ed. 1983.



شکل ۶۳

و ملاحظهٔ این نکته که

$$\left|\int_{\circ}^{b} e^{y^{۲}} \sin ۲ay\, dy\right| < \int_{\circ}^{b} e^{y^{۲}}\, dy$$

در معادلهٔ آخر قسمت (الف) a را به بی‌نهایت میل داده، فرمول انتگرالگیری مطلوب را به‌دست آورید.

۵. بنابر تمرین ۶، بخش ۳۸، مسیر $C_{۱}$ از مبدأ تا نقطهٔ $z = ۱$ در طول نمودار تابعی که با ضابطه‌های زیر تعریف‌شده قوس همواری است که محور حقیقی را بی‌نهایت بار قطع می‌کند

$$y(x) = \begin{cases} x^{۳} \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \circ < x \leq ۱ \\ \circ, & x = \circ \end{cases}$$

فرض کنید $C_{۲}$ نمایش پاره‌خط در امتداد محور حقیقی از $z = ۱$ تا مبدأ باشد و $C_{۳}$ معرف قوس هموراری از مبدأ تا نقطهٔ $z = ۱$ باشد که خودش را قطع نکند و فقط در نقاط انتهایی خود با قوسهای $C_{۱}$ و $C_{۲}$ مشترک باشد (شکل ۶۳). با استفاده از قضیهٔ کوشی‌ـگورسا نشان دهید اگر f تابعی تام باشد، آن‌گاه

$$\int_{C_{۱}} f(z)dz = \int_{C_{۳}} f(z)dz \quad \text{و} \quad \int_{C_{۲}} f(z)dz = -\int_{C_{۳}} f(z)dz \,.$$

نتیجه بگیرید که گرچه مسیر بستهٔ $C = C_{۱} + C_{۲}$ خودش را بی‌نهایت بار قطع می‌کند، داریم

$$\int_{C} f(z)dz = \circ \,.$$

۶. فرض کنید C معرف تمام مرز نیم‌قرص $0 \leq r \leq 1$، $0 \leq \theta \leq \pi$ در جهت مثبت و $f(z)$ تابع پیوسته‌ای باشد که در این نیم‌قرص با نوشتن $f(0) = 0$ و استفاده از شاخهٔ

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

از تابع چندمقداری $z^{1/2}$ تعریف شده است. با محاسبهٔ جداگانهٔ انتگرالهای $f(z)$ روی نیمدایره و دو شعاع که C را تشکیل می‌دهند نشان دهید که

$$\int_C f(z)\, dz = 0 .$$

چرا در اینجا نمی‌توان قضیهٔ کوشی-گورسا را به‌کار برد؟

۷. نشان دهید اگر C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ محدود به C را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2i}\int_C \overline{z}\, dz .$$

راهنمایی: توجه کنید که گرچه تابع $f(z) = \overline{z}$ تحلیلی نیست می‌توان از عبارت (۴)، بخش ۴۴، استفاده کرد (تمرین ۱(الف) بخش ۲۲ را ببینید).

۸. بازه‌های تودرتو. دنبالهٔ نامتناهی $a_n \leq x \leq b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ از بازه‌های بسته به روش زیر ساخته شده است. بازهٔ $a_1 \leq x \leq b_1$ نیمهٔ سمت چپ یا نیمهٔ سمت راست اولین بازه $a_0 \leq x \leq b_0$ و سپس بازهٔ $a_2 \leq x \leq b_2$ یکی از دو نیمهٔ $a_1 \leq x \leq b_1$ است و غیره. ثابت کنید نقطهٔ x_0ی هست که به هر یک از بازه‌های بستهٔ $a_n \leq x \leq b_n$ متعلق است.

راهنمایی: توجه کنید که نقاط انتهایی سمت چپ a_n نمایش یک دنبالهٔ غیرکاهشی و کراندار از اعداد است زیرا $a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_0$؛ بنابراین وقتی n به ∞ میل کند این دنباله دارای حدی مانند A است. نشان دهید که نقاط انتهایی b_n نیز دارای حدی مانند B هستند. سپس نشان دهید که $A = B$ و بنویسید $x_0 = A = B$.

۹. مربعهای تودرتو. مربع σ_0: $a_0 \leq x \leq b_0$، $c_0 \leq y \leq d_0$ را با پاره‌خطهایی موازی محورهای مختصات به چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. یکی از این چهار مربع کوچکتر σ_1 : $a_1 \leq x \leq b_1$، $c_1 \leq y \leq d_1$ بر طبق قاعده‌ای انتخاب می‌شود. این مربع به‌نوبهٔ خود به چهار مربع مساوی تقسیم می‌شود یکی از آنها که آن را σ_2 می‌نامیم انتخاب می‌شود و الی آخر.

(بخش ۴۵ را ببینید). ثابت کنید نقطه‌ای مانند $(x_\circ, y_\circ)$ وجود دارد که به هر یک از ناحیه‌های بستهٔ دنبالهٔ نامتناهی $\sigma_\circ$، $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، ... متعلق است.

راهنمایی: نتیجهٔ تمرین ۸ را در مورد هر یک از دنباله‌های بازه‌های بستهٔ $a_n \leq x \leq b_n$ و $c_n \leq y \leq d_n$ $(n = \circ, ۱, ۲, \ldots)$ به‌کار برید.

۴۷. فرمول انتگرال کوشی

حال قضیهٔ اساسی دیگری را ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید f همه جا درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C، که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر $z_\circ$ نقطهٔ دلخواهی درون C باشد، آن‌گاه

$$f(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_\circ}. \qquad (۱)$$

فرمول (۱) را فرمول انتگرال کوشی می‌نامند. این فرمول بیان می‌کند که اگر تابع f درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C تحلیلی باشد، آن‌گاه مقادیر f در درون C کاملاً به‌وسیلهٔ مقادیر f بر C معین می‌شوند.

درصورتی که فرمول انتگرال کوشی به‌صورت

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_\circ} = ۲\pi i f(z_\circ), \qquad (۲)$$

نوشته شود می‌توان در محاسبهٔ برخی انتگرالها روی مسیرهای سادهٔ بسته از آن استفاده کرد.

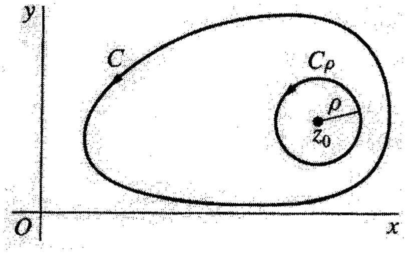
مثال. فرض کنید C دایرهٔ $|z| = ۲$ در جهت مثبت باشد. چون تابع

$$f(z) = \frac{z}{۹ - z^۲}$$

در درون و روی C تحلیلی است و چون نقطهٔ $z_\circ = -i$ درون C است، بنابر فرمول (۲) داریم

$$\int_C \frac{z\,dz}{(۹ - z^۲)(z + i)} = \int_C \frac{z/(۹ - z^۲)}{z - (-i)} dz = ۲\pi i \left(\frac{-i}{۱\circ}\right) = \frac{\pi}{۵}.$$

اثبات قضیه را با این فرض که C_ρ نمایش دایرهٔ $|z - z_\circ| = \rho$ در جهت مثبت است شروع می‌کنیم، که در آن ρ به‌قدر کافی کوچک است تا C_ρ درون C باشد (شکل ۶۴ را ببینید). چون



شکل ۶۴

تابع $f(z)/(z-z_\circ)$ روی مسیرهای C و C_ρ و بین آنها تحلیلی است، در نتیجه بنابر اصل تغییر شکل مسیرها (فرع ۲ بخش ۴۶) داریم

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_\circ} = \int_{C_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-z_\circ}.$$

پس می‌توان نوشت

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_\circ} - f(z_\circ)\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_\circ} = \int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}dz. \qquad (۳)$$

اما [تمرین ۱۰ (الف) بخش ۴۰ را ببینید]

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_\circ} = ۲\pi i;$$

و لذا رابطهٔ (۳) تبدیل می‌شود به

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_\circ} - ۲\pi i f(z_\circ) = \int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}dz. \qquad (۴)$$

حال چون f در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی، و لذا پیوسته است، متناظر با هر عدد مثبت هر اندازه کوچک ε عدد مثبتی مانند δ هست که

$$|f(z)-f(z_\circ)| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |z-z_\circ| < \delta. \qquad (۵)$$

فرض کنید ρ شعاع دایرهٔ C_ρ از عدد δ در دومین نابرابری از این نابرابریها کوچکتر باشد. اگر z روی C_ρ باشد $|z-z_\circ| = \rho$ در نتیجه وقتی z چنین نقطه‌ای باشد اولین نابرابری از نابرابریهای

(۵) برقرار است و از نابرابری (۱) بخش ۴۱ کرانهای بالایی برای قدرمطلق انتگرالهای روی مسیر به‌دست می‌آید

$$\left|\int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\varepsilon\,.$$

پس بنابر رابطهٔ (۴) داریم

$$\left|\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_\circ} - 2\pi i f(z_\circ)\right| < 2\pi\varepsilon\,.$$

چون سمت راست این نابرابری عددی ثابت و نامنفی است که از هر عدد مثبت به دلخواه کوچک، کوچکتر است، باید مساوی صفر باشد. بنابراین رابطهٔ (۲) برقرار است و قضیه ثابت می‌شود.

۴۸. مشتق توابع تحلیلی

از فرمول انتگرال کوشی (بخش ۴۷) نتیجه می‌شود که اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، مشتقات آن از هر مرتبه در آن نقطه موجودند و خود در آنجا تحلیلی‌اند. برای اثبات این ادعا با لمی شروع می‌کنیم که فرمول انتگرال کوشی را طوری تعمیم می‌دهد که برای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم کارایی دارد.

لم. فرض کنید تابع f همه جا در درون و روی مسیر سادهٔ بسته C، که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر z نقطه‌ای در درون C باشد، آن‌گاه

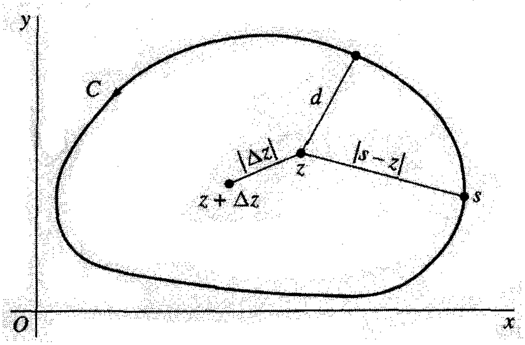
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^2} \quad \text{و} \quad f''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^3} \qquad (۱)$$

توجه کنید که عبارات (۱) را می‌توان به‌طور صوری، یا بدون تحقیق دقیق با مشتقگیری نسبت به z از انتگرالده فرمول انتگرال کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{s-z}, \qquad (۲)$$

به‌دست آورد که در آن z در درون C و s نمایش نقاط روی C است.

برای اثبات اولین فرمول از فرمولهای (۱)، فرض می‌کنیم d کوتاهترین فاصلهٔ z تا نقاط s در روی C باشد و $0 < |\Delta z| < d$، با استفاده از فرمول (۲) می‌توان نوشت (شکل ۶۵ را ببینید).



شکل ۶۵

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\left(\frac{۱}{s-z-\Delta z}-\frac{۱}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$
$$=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)},$$

پس روشن است که

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^۲}=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{\Delta z f(s)\,ds}{(s-z)^۲(s-z-\Delta z)}\qquad (۳)$$

حال فرض می‌کنیم M نمایش مقدار ماکسیمم $|f(s)|$ روی C و L طول C باشد، توجه کنید که $|s-z|\geq d$ و $|\Delta z|<d$،

$$|s-z-\Delta z|=|(s-z)-\Delta z|\geq ||s-z|-|\Delta z||\geq d-|\Delta z|>۰.$$

در نتیجه

$$\left|\int_C\frac{\Delta z\, f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^۲}\right|\leq\frac{|\Delta z|ML}{(d-|\Delta z|)d^۲},$$

از این نابرابری درمی‌یابیم که اگر Δz به صفر میل کند، طرف راست رابطهٔ (۳) نیز به صفر میل می‌کند. در نتیجه

$$\lim_{\Delta z\to ۰}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{f(s)\,ds}{(s-z)^۲}=۰;$$

و فرمول مطلوب برای $f'(z)$ اثبات می‌شود.

با استفاده از همین روش می‌توان درستی فرمول $f''(z)$ در لم را تحقیق کرد. جزئیات را که در تمرین ۹ طرح‌ریزی شده است به‌عهدهٔ متعلم گذاشته‌ایم.

قضیهٔ ۱. اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، مشتقاتش از هر مرتبه در آن نقطه موجودند. به‌علاوه همهٔ این مشتقات در آنجا تحلیلی‌اند.

برای اثبات این قضیهٔ قابل‌توجه فرض می‌کنیم تابع f در نقطهٔ $z_{\circ}$ تحلیلی باشد. پس همسایگیی از $z_{\circ}$ مانند $|z - z_{\circ}| < \varepsilon$ هست که f در سراسر آن تحلیلی است (بخش ۲۳ را ببینید). در نتیجه دایره‌یی با جهت مثبت مانند $C_{\circ}$، به مرکز $z_{\circ}$ و شعاع $\varepsilon/2$، هست که f در درون و روی $C_{\circ}$ تحلیلی است (شکل ۶۶). بنابر لم فوق در هر نقطهٔ z در درون $C_{\circ}$

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_{\circ}} \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{3}}$$

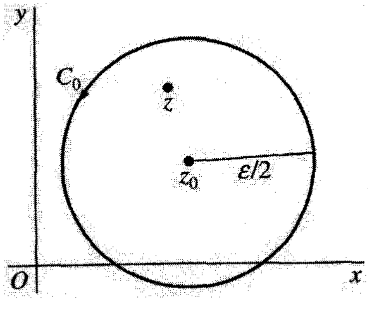
و وجود $f''(z)$ در سراسر همسایگی $|z - z_{\circ}| < \varepsilon/2$ مستلزم تحلیلی‌بودن f' در $z_{\circ}$ است. می‌توان برهان فوق را برای تابع تحلیلی f' به‌کار برد و تحلیلی‌بودن f'' مشتق آن را نتیجه گرفت و همین‌طور برای مشتقات مرتبه‌های بالاتر. حال قضیهٔ ۱ ثابت شد.

به‌عنوان یک پیامد، اگر تابع

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

در نقطهٔ $z=(x,y)$ تحلیلی باشد، مشتقپذیری f' متضمن پیوستگی f' در آن نقطه است (بخش ۱۸). پس چون

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$



شکل ۶۶

نتیجه می‌شود که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در آن نقطه پیوسته‌اند. به‌علاوه چون f'' در z تحلیلی و پیوسته است و چون

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx},$$

و غیره، به فرعی می‌رسیم که در بخش ۲۵ هنگام معرفی توابع همساز آن را بدون اثبات پذیرفتیم.

فرع. اگر تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطهٔ $z = (x,y)$ تحلیلی باشد آن‌گاه توابع مؤلفه‌یی u و v در آن نقطه دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌اند.

با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان فرمولهای (۱) را به

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^{n+۱}} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \tag{۴}$$

تعمیم داد. تحقیق درستی آن خیلی پیچیده‌تر از حالت $n = ۱$ و $n = ۲$ است و خوانندهٔ علاقه‌مند برای اثبات آن به کتابهای دیگر مراجعه کند.* توجه کنید که با قرارداد

$$۰! = ۱ \qquad \text{و} \qquad f^{(۰)}(z) = f(z)$$

رابطهٔ (۴) برای $n = ۰$ نیز برقرار است و در این حالت به فرمول انتگرال کوشی (۲) تبدیل می‌شود.

درصورتی که فرمول (۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} = \frac{۲\pi i}{n!} f^{(n)}(z_۰) \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \tag{۵}$$

در محاسبهٔ برخی انتگرالها که f در درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C، که در جهت مثبت گرفته شده، تحلیلی و $z_۰$ در درون C باشد مفید است. این مطلب قبلاً در بخش ۴۷ وقتی $n = ۰$ نشان داده شده است.

مثال ۱. اگر C دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ در جهت مثبت باشد و $f(z) = \exp(۲z)$، آن‌گاه

$$\int_C \frac{\exp(۲z)dz}{z^۴} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-۰)^{۳+۱}} = \frac{۲\pi i}{۳!} f'''(۰) = \frac{۸\pi i}{۳}.$$

مثال ۲. فرض کنید $z_۰$ نقطه‌ای در داخل مسیر سادهٔ بستهٔ C باشد که C در جهت مثبت گرفته شده است. درصورتی که $f(z) = ۱$ فرمول (۵) نشان می‌دهد که

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} = ۰ \qquad (n = ۱, ۲, \ldots).$$

* مثلاً، مراجعه کنید به جلد اول کتاب مارکوشویچ (Markushevich) مذکور در پیوست ۱.

و

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

(با تمرین ۱۰ بخش ۴۰ مقایسه کنید.)

این بخش را با قضیه‌ای منسوب به مورِرا[1] (۱۹۰۹-۱۸۵۶) به پایان می‌بریم. اثبات ارائه شده، به این واقعیت بستگی دارد که مشتق یک تابع تحلیلی، همان‌طور که در قضیهٔ ۱ بیان شد، خود تحلیلی است.

قضیهٔ ۲. اگر تابع f در سراسر حوزهٔ D پیوسته باشد و به‌ازای هر مسیر بستهٔ C واقع در D،

$$\int_C f(z)dz = 0 \qquad (6)$$

آن‌گاه f در سراسر D تحلیلی است.

به‌خصوص وقتی D همبند ساده است برای ردهٔ توابع پیوسته در D عکس قضیهٔ ۱ در بخش ۴۶ را داریم که تعمیم قضیهٔ کوشی-گورسا برای چنین حوزه‌هایی است.

وقتی فرض قضیه برقرار باشد تنها با مراجعه به قضیهٔ بخش ۴۲ می‌بینیم که f دارای تابع اولیه‌ای در D است یعنی تابعی تحلیلی مانند F وجود دارد که در هر نقطهٔ D داریم $F'(z) = f(z)$. چون f مشتق F است از قضیهٔ ۱ بالا نتیجه می‌شود که f در D تحلیلی است.

تمرینها

۱. فرض کنیم C معرف مرز مربعی باشد که اضلاعش در امتداد خطوط $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ واقع‌اند، و C در جهت مثبت گرفته شده است. مقدار عددی هر یک از این انتگرالها را به‌دست آورید.

(الف) $\int_C \frac{e^{-z}dz}{z-(\pi i/2)}$؛ (ب) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$؛ (ج) $\int_C \frac{z\,dz}{2z+1}$؛

(د) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}dz$؛ (هـ) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}dz \quad (-2 < x_0 < 2)$.

جواب: (الف) 2π؛ (ب) $\pi i/4$؛ (ج) $-\pi i/2$؛ (د) 0؛ (هـ) $i\pi \sec^2(x_0/2)$.

1. E. Morera

۲. مقدار انتگرال $g(z)$ روی دایرهٔ ۲ $= |z - i|$ را در جهت مثبت پیدا کنید درصورتی که

(الف) $g(z) = \dfrac{۱}{z^۲ + ۴}$؛ (ب) $g(z) = \dfrac{۱}{(z^۲ + ۴)^۲}$.

جواب: (الف) $\pi/۲$؛ (ب) $\pi/۱۶$.

۳. فرض کنید C دایرهٔ ۳ $= |z|$ در جهت مثبت باشد. نشان دهید که اگر

$$g(w) = \int_C \frac{۲z^۲ - z - ۲}{z - w}dz \qquad (|w| \neq ۳)$$

آن‌گاه $g(۲) = ۸\pi i$. وقتی ۳ $> |w|$ مقدار $g(w)$ چیست؟

۴. فرض کنید C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت در صفحهٔ zها باشد و بنویسید

$$g(w) = \int_C \frac{z^۳ + ۲z}{(z - w)^۳}dz$$

نشان دهید که وقتی w در درون C است $g(w) = ۶\pi i w$ و وقتی w در خارج C است $g(w) = ۰$.

۵. نشان دهید درصورتی که f در درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C تحلیلی باشد و $z_۰$ روی C نباشد آن‌گاه

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z - z_۰} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_۰)^۲}.$$

۶. فرض کنید f معرف تابعی باشد که بر مسیر سادهٔ بستهٔ C پیوسته است. با پیروی از روشی که در بخش ۴۸ به‌کار رفته ثابت کنید که تابع

$$g(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{s - z}$$

در هر نقطهٔ z در داخل C تحلیلی است و به‌ازای هر چنین نقطه‌ای

$$g'(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s - z)^۲}.$$

۷. فرض کنید C دایرهٔ واحد $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ باشد. ابتدا نشان دهید که به‌ازای هر عدد حقیقی و ثابت a

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}dz = ۲\pi i.$$

سپس با نوشتن انتگرال برحسب θ، فرمول زیر را نتیجه بگیرید

$$\int_{\circ}^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta = \pi\,.$$

۸. (الف) به کمک فرمول دوجمله‌یی (بخش ۳) نشان دهید که به‌ازای هر مقدار n، تابع

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

چندجمله‌یی از درجهٔ n است.*

(ب) فرض کنید C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت باشد که نقطهٔ ثابت z را در برگرفته است. به کمک نمایش انتگرالی (۴)، بخش ۴۸، برای مشتق nام تابع تحلیلی نشان دهید که می‌توان چندجمله‌ییهای قسمت (الف) را به شکل زیر نوشت

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(s^2-1)^n}{(s-z)^{n+1}}ds \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.$$

(ج) نشان دهید که چگونه در نمایش $P_n(z)$ در قسمت (ب)، اگر $z=1$ می‌توان انتگرالده را به‌صورت $(s+1)^n/(s-1)$ نوشت. سپس با استفاده از فرمول انتگرال کوشی نشان دهید که

$$P_n(1) = 1\,(n=0,1,2,\ldots)$$

به روشی مشابه نشان دهید که

$$P_n(-1) = (-1)^n\,(n=0,1,2,\ldots)\,.$$

۹. طی مراحل زیر درستی عبارت

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^3}$$

در لم بخش ۴۸ را تحقیق کنید.

(الف) با استفاده از فرمول $f'(z)$ در آن لم نشان دهید که

$$\frac{f'(z+\Delta z)-f'(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s-z)^3} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{3(s-z)\Delta z - 2(\Delta z)^2}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^3}f(s)\,ds\,.$$

(ب) فرض کنید d و D، به‌ترتیب، نمایش کوچکترین و بزرگترین فاصلهٔ z تا نقاط روی

* اینها چندجمله‌ییهای لژاندر هستند که در تمرین ۷، بخش ۳۷، به‌ازای $z=x$ ظاهر شدند. پانوشت آن تمرین را ببینید.

C باشند. همچنین فرض کنید M مقدار ماکسیمم $|f(s)|$ روی C و L طول C باشد. به کمک نابرابری مثلثی و با استناد به عبارتی که برای $f'(z)$ در لم به‌دست آمد، نشان دهید که اگر $d > |\Delta z| > ۰$، قدرمطلق انتگرال سمت راست در قسمت (الف) از بالا به عدد زیر کراندار است

$$\frac{(۳D|\Delta z| + ۲|\Delta z|^۲)M}{(d - |\Delta z|)^۲ d^۳} L .$$

(ج) با استفاده از نتایج حاصل در قسمتهای (الف) و (ب)، عبارت مطلوب برای $f''(z)$ را به‌دست آورید.

۴۹. قضیهٔ لیوویل[1] و قضیهٔ اساسی جبر

این بخش را به دو قضیهٔ مهم اختصاص می‌دهیم که از تعمیم فرمول انتگرال کوشی در بخش ۴۸ حاصل می‌شوند.

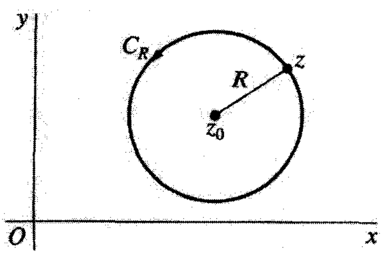
لم. فرض کنید تابع f در درون و روی دایرهٔ C_R با جهت مثبت، به مرکز $z_۰$ و شعاع R تحلیلی باشد (شکل ۶۷). اگر M_R نمایش مقدار ماکسیمم $|f(z)|$ روی C_R باشد، آن‌گاه

$$|f^{(n)}(z_۰)| \le \frac{n! M_R}{R^n} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots). \qquad (۱)$$

نابرابری (۱) را نابرابری کوشی می‌نامند و نتیجهٔ بلافصل رابطهٔ زیر است

$$f^{(n)}(z_۰) = \frac{n!}{۲\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_۰)^{n+۱}} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots).$$

که همان رابطهٔ (۵) بخش ۴۸ است که شکل ظاهری آن کمی تغییر یافته است. با استفاده از



شکل ۶۷

1. Liouville

نابرابری (۱) بخش ۴۱، کرانهای بالایی برای قدرمطلق انتگرالهای روی مسیر به‌دست می‌آوریم و نتیجه می‌گیریم که

$$|f^{(n)}(z_\circ)| \leq \frac{n!}{۲\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+۱}}\, ۲\pi R \qquad (n = ۱, ۲, \ldots),$$

که در آن M_R همان عددی است که در حکم لم معرفی شد. البته این نابرابری همان نابرابری (۱) لم است.

با استفاده از این لم می‌توان نشان داد که هیچ تابع تامی، جز تابع ثابت، در صفحهٔ مختلط کراندار نیست. اولین قضیهٔ ما در اینجا که موسوم به قضیهٔ لیوویل است، این حکم را به‌صورتی با اندک اختلاف بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱. اگر f تابعی تام و در صفحهٔ مختلط کراندار باشد، آن‌گاه $f(z)$ در تمامی صفحه ثابت است.

برای شروع به اثبات، فرض می‌کنیم f به‌صورتی باشد که در قضیه آمده است و توجه می‌کنیم که چون f تام است، نابرابری کوشی (۱) با $n = ۱$ برای هر انتخاب $z_\circ$ و R برقرار است:

$$|f'(z_\circ)| \leq \frac{M_R}{R}. \tag{۲}$$

بنابر شرط کرانداری در قضیه، عددی ثابت و نامنفی مانند M هست که به‌ازای هر z داریم $|f(z)| < M$ و چون عدد ثابت M_R در نابرابری (۲) همیشه مساوی یا کوچکتر از M است، نتیجه می‌شود

$$|f'(z_\circ)| \leq \frac{M}{R}, \tag{۳}$$

که در آن $z_\circ$ نقطه‌ای مشخص و R به دلخواه بزرگ است. حال عدد M در نابرابری (۳) از مقدار R اختیار شده مستقل است. در نتیجه آن نابرابری فقط وقتی می‌تواند برای مقادیر به دلخواه بزرگ R برقرار باشد که $f'(z_\circ) = \circ$. چون انتخاب $z_\circ$ دلخواه بود در نتیجه در هر نقطه از صفحهٔ مختلط $f'(z) = \circ$. در نتیجه، با توجه به قضیهٔ بخش ۲۳، f تابعی ثابت است.

قضیهٔ زیر که به قضیهٔ اساسی جبر مشهور است به آسانی از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲. هر چندجمله‌یی

$$P(z) = a_\circ + a_۱ z + a_۲ z^۲ + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq \circ)$$

از درجهٔ $n(n \geq ۱)$ حداقل یک صفر دارد. یعنی حداقل یک نقطهٔ $z_\circ$ موجود است به قسمی که $P(z_\circ) = \circ$.

قضیه را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $P(z)$ به‌ازای هیچ مقدار z صفر نباشد. پس به‌وضوح تابع

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

تام است و نیز در صفحهٔ مختلط کراندار است.

برای اثبات کراندار بودن آن، ابتدا می‌نویسیم

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}, \tag{۴}$$

بنابراین، $P(z) = (a_n + w)z^n$. سپس ملاحظه می‌کنیم که می‌توان عدد مثبت به‌قدر کافی بزرگی مانند R یافت به‌طوری که اگر $|z| \geq R$ آن‌گاه قدرمطلق هر یک از خارج‌قسمتهای موجود در عبارت (۴) از عدد $|a_n|/(2n)$ کوچکتر باشد. با استفاده از نابرابری مثلثی تعمیم‌یافته برای n عدد مختلط، نتیجه می‌گیریم که برای چنین مقادیری از z داریم $|w| < |a_n|/2$. در نتیجه اگر $|z| \geq R$،

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2};$$

و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$|P(z)| = |a_n + w||z^n| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}R^n \qquad \text{هرگاه} \qquad |z| \geq R. \tag{۵}$$

در این‌صورت به‌وضوح داریم

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n|R^n} \qquad \text{هرگاه} \qquad |z| > R.$$

بنابراین f در ناحیهٔ خارج قرص $|z| \leq R$ کراندار است. اما f در آن قرص بسته، پیوسته و لذا f در آن کراندار نیز هست. در نتیجه f در تمام صفحه کراندار است.

حال از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌گیریم که $f(z)$ و در نتیجه $P(z)$، ثابت است. اما $P(z)$ ثابت نیست و به تناقض رسیده‌ایم.*

* برای یک برهان جالب قضیهٔ اساسی با استفاده از قضیهٔ کوشی-گورسا مقالهٔ زیر را ببینید
R. P. Boas, Jr., *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.

بنابر قضیهٔ اساسی، هر چندجمله‌یی $P(z)$ از درجهٔ $n(n \geq ۱)$ را می‌توان به‌صورت حاصلضرب عوامل خطی بیان کرد:

$$P(z) = c(z - z_۱)(z - z_۲)\cdots(z - z_n) \tag{۶}$$

که c و $z_k (k = ۱, ۲, \ldots, n)$ اعداد مختلط ثابتی هستند. به بیان صریحتر، این قضیه تضمین می‌کند که $P(z)$ صفری مانند $z_۱$ دارد. پس بنابر تمرین ۱۰، بخش ۵۰، داریم

$$P(z) = (z - z_۱)Q_۱(z),$$

که $Q_۱(z)$ یک چندجمله‌یی از درجهٔ $n - ۱$ است. با به‌کار بردن همین استدلال برای $Q_۱(z)$ معلوم می‌شود عددی مانند $z_۲$ هست به‌طوری که

$$P(z) = (z - z_۱)(z - z_۲)Q_۲(z)$$

که $Q_۲(z)$ یک چندجمله‌یی از درجهٔ $n - ۲$ است. با ادامهٔ این روش، به فرمول (۶) می‌رسیم. البته بعضی از ثابتهای z_k در فرمول (۶)، ممکن است بیش از یک بار ظاهر شوند و واضح است که $P(z)$ نمی‌تواند بیش از n صفر متمایز داشته باشد.

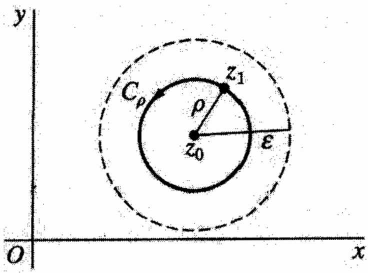
۵۰. اصل ماکسیمم قدرمطلق

در این بخش قضیهٔ مهمی در مورد مقادیر ماکسیمم قدرمطلقهای توابع تحلیلی به‌دست می‌آوریم. با یک لم شروع می‌کنیم.

لم. فرض کنید $f(z)$ در سراسر همسایگی $|z - z_۰| < \varepsilon$ از نقطهٔ $z_۰$ تحلیلی باشد. اگر به‌ازای هر z در آن همسایگی $|f(z)| \leq |f(z_۰)|$، آن‌گاه $f(z)$ در سراسر آن همسایگی دارای مقدار ثابت $f(z_۰)$ است.

برای اثبات لم، فرض کنیم f در شرایط مذکور صدق کند و $z_۱$ نقطهٔ دلخواهی غیر از $z_۰$ در آن همسایگی مفروض باشد. سپس ρ را فاصلهٔ بین $z_۰$ و $z_۱$ می‌گیریم. اگر C_ρ معرف دایرهٔ $|z - z_۰| = \rho$ در جهت مثبت باشد که مرکز آن در $z_۰$ است و از $z_۱$ می‌گذرد (شکل ۶۸)، آن‌گاه بنابر فرمول انتگرال کوشی،

$$f(z_۰) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_۰} \tag{۱}$$



شکل ۶۸

و با استفاده از نمایش پارامتری

$$z = z_\circ + \rho e^{i\theta} \quad (\circ \leq \theta \leq ۲\pi)$$

برای C_ρ می‌توان رابطهٔ (۱) را به‌صورت زیر نوشت

$$f(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} f(z_\circ + \rho e^{i\theta}) d\theta . \tag{۲}$$

فرمول (۲) نشان می‌دهد که مقدار تابع در مرکز دایره‌یی که تابع در درون و روی آن تحلیلی است، میانگین عددی مقادیرش بر آن دایره است. این نتیجه را معمولاً قضیهٔ مقدار میانگین گاوس[1] می‌نامند.

بنابر فرمول (۲)، نابرابری

$$|f(z_\circ)| \leq \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} |f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| d\theta \tag{۳}$$

را به‌دست می‌آوریم. از طرف دیگر، چون

$$|f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| \leq |f(z_\circ)| \quad (\circ \leq \theta \leq ۲\pi) \tag{۴}$$

در می‌یابیم که

$$\int_\circ^{۲\pi} |f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \int_\circ^{۲\pi} |f(z_\circ)| d\theta = ۲\pi |f(z_\circ)| .$$

در نتیجه

$$|f(z_\circ)| \geq \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^{۲\pi} |f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| d\theta . \tag{۵}$$

1. Gauss

حال از نابرابریهای (۳) و (۵) بدیهی است که

$$|f(z_\circ)| = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} |f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| d\theta$$

یا

$$\int_\circ^{۲\pi} [|f(z_\circ)| - |f(z_\circ + \rho e^{i\theta})|] d\theta = \circ .$$

انتگرالده انتگرال آخری، تابع پیوسته‌ای از متغیر θ است و بنابر شرط (۴) روی تمام بازهٔ $\circ \leq \theta \leq ۲\pi$ مساوی یا بزرگتر از صفر است. چون مقدار انتگرال صفر است پس انتگرالده باید متحد با صفر باشد. یعنی

$$|f(z_\circ + \rho e^{i\theta})| = |f(z_\circ)| \quad (\circ \leq \theta \leq ۲\pi). \tag{۶}$$

این تساوی نشان می‌دهد که به‌ازای هر z روی دایرهٔ $|z - z_\circ| = \rho$ داریم $|f(z)| = |f(z_\circ)|$.

بالاخره، چون $z_۱$ نقطه‌ای است که در همسایگی محذوف $\circ < |z - z_\circ| < \varepsilon$ به دلخواه انتخاب شده است، می‌بینیم که در واقع رابطهٔ $|f(z)| = |f(z_\circ)|$ به‌ازای هر نقطهٔ z واقع روی هر دایرهٔ $|z - z_\circ| = \rho$، که در آن $\circ < \rho < \varepsilon$، برقرار است. در نتیجه همه جا در همسایگی $|z - z_\circ| < \varepsilon$ داریم $|f(z)| = |f(z_\circ)|$. اما بنابر تمرین ۷ (ب)، بخش ۲۴، می‌دانیم که اگر قدرمطلق تابعی تحلیلی در یک حوزه ثابت باشد خود تابع در آنجا ثابت است، بنابراین به‌ازای هر z در این همسایگی $f(z) = f(z_\circ)$ و اثبات لم کامل می‌شود.

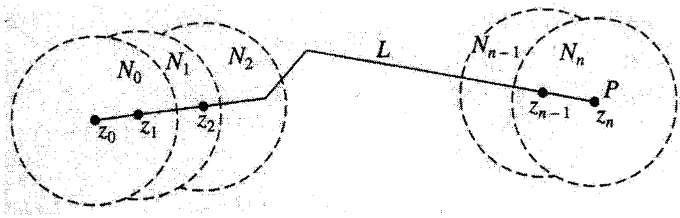
با استفاده از این لم قضیهٔ زیر را که به اصل ماکسیمم قدرمطلق مشهور است ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر تابع f در حوزهٔ مفروض D تحلیلی و غیر ثابت باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ دارای هیچ مقدار ماکسیممی در D نیست. یعنی هیچ نقطهٔ $z_\circ$ی در D نیست که به‌ازای هر نقطهٔ z در D داشته باشیم $|f(z)| \leq |f(z_\circ)|$.

بنابه فرض f در D تحلیلی است، برای اثبات قضیه فرض می‌کنیم که $|f(z)|$ در نقطه‌ای از D مانند $z_\circ$ دارای مقدار ماکسیمم باشد و سپس نشان می‌دهیم که $f(z)$ باید در سراسر D ثابت باشد.

روش کلی در اینجا شبیه روشی است که در اثبات لم بخش ۲۶ به‌کار رفته است. خط شکسته‌ای در D مانند L رسم می‌کنیم که از $z_\circ$ به نقطهٔ دیگری از D مانند P امتداد یافته است. همچنین d نمایش کوتاهترین فاصلهٔ نقاط L تا مرز D است. درصورتی که D تمام صفحه باشد، d را می‌توان هر مقدار مثبتی گرفت. حال ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ متناهی از نقاط مانند

$$z_\circ, z_۱, z_۲, \ldots, z_{n-۱}, z_n$$



شکل ۶۹

روی L وجود دارد به‌طوری که z_n بر P منطبق است و

$$|z_k - z_{k-۱}| < d \qquad (k = ۱, ۲, \ldots, n).$$

سپس دنباله‌ای متناهی از همسایگیها مانند (شکل ۶۹)

$$N_{۰}, N_{۱}, N_{۲}, \ldots, N_{n-۱}, N_n,$$

می‌سازیم، به قسمی که هر همسایگی N_k به مرکز z_k و شعاع d باشد. توجه کنید که این همسایگیها همگی مشمول در D هستند و هر z_k مرکز همسایگی $N_k (k = ۱, ۲, \ldots, n)$ در همسایگی قبلی $N_{k-۱}$ واقع است.

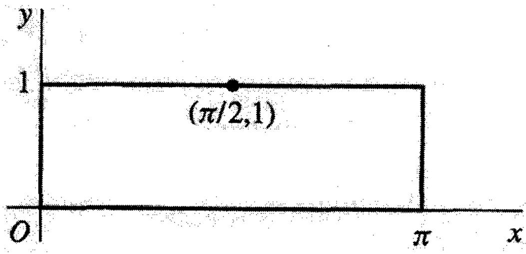
چون فرض کرده بودیم که $|f(z)|$ در $z_{۰}$ مقدار ماکسیمم خود در D را گرفته است، در آن نقطه مقدار ماکسیمم خود در $N_{۰}$ را نیز می‌گیرد. پس بنابر لم قبل $f(z)$ در سراسر $N_{۰}$ دارای مقدار ثابت $f(z_{۰})$ است. به‌خصوص $f(z_{۱}) = f(z_{۰})$. در نتیجه به‌ازای هر نقطهٔ z در $N_{۱}$ داریم $|f(z)| \le |f(z_{۱})|$ و مجدداً می‌توان از لم قبل استفاده کرد، این دفعه نتیجه می‌گیریم که اگر z در $N_{۱}$ باشد

$$f(z) = f(z_{۱}) = f(z_{۰}).$$

چون $z_{۲}$ در $N_{۱}$ است پس $f(z_{۲}) = f(z_{۰})$. بنابراین اگر z در $N_{۲}$ باشد، $|f(z)| \le |f(z_{۲})|$ و بار دیگر می‌توان لم را به‌کار برده نشان داد که اگر z در $N_{۲}$ باشد

$$f(z) = f(z_{۲}) = f(z_{۰}).$$

با ادامهٔ این روش، سرانجام به همسایگی N_n و به این واقعیت می‌رسیم که $f(z_n) = f(z_{۰})$.



شکل ۷۰

چون z_n منطبق بر P بود که نقطهٔ دلخواهی در D غیر از $z_\circ$ است نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر z در D داریم $f(z) = f(z_\circ)$. از آنجایی که ثابت شد $f(z)$ در سراسر D ثابت است، قضیه ثابت می‌شود.

اگر تابع f که در هر نقطهٔ داخلی ناحیهٔ بسته و کراندار R تحلیلی است در سراسر R نیز پیوسته باشد، تابع پیوستهٔ $|f(z)|$ دارای مقدار ماکسیممی در R است (بخش ۱۷). یعنی، عدد نامنفی و ثابتی مانند M هست که به‌ازای هر نقطهٔ z در R، $|f(z)| \leq M$ و حداقل برای یکی از این نقاط برابری برقرار است. اگر f تابع ثابتی باشد آن‌گاه به‌ازای هر z در R داریم $|f(z)| = M$. ولی اگر $f(z)$ ثابت نباشد بنابر اصل ماکسیمم قدرمطلق به‌ازای هر نقطهٔ z در داخل R، داریم $|f(z)| \neq M$. بدین ترتیب به نتیجهٔ مهمی از اصل ماکسیمم قدرمطلق می‌رسیم.

فرع. فرض کنید تابع f در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. در این‌صورت مقدار ماکسیمم $|f(z)|$ در R، که همیشه قابل‌حصول است، در نقطه‌ای از مرز R به‌دست می‌آید و هیچ‌گاه در داخل آن رخ نمی‌دهد.

مثال. فرض کنید R نمایش ناحیهٔ مستطیلی $\circ \leq x \leq \pi$، $\circ \leq y \leq ۱$ باشد. بنابر نتیجهٔ فوق قدرمطلق تابع تام $f(z) = \sin z$ در R دارای ماکسیممی است که جایی در مرز آن است و نه در داخل R. این مطلب را می‌توان مستقیماً با نوشتن (بخش ۳۳ را ببینید)

$$|f(z)| = \sqrt{\sin^{۲} x + \sinh^{۲} y}$$

و با توجه به این نکته تحقیق کرد که در R تابع $\sin^{۲} x$ وقتی بیشترین مقدار را دارد که $x = \pi/۲$ و تابع صعودی $\sinh^{۲} y$ وقتی بیشترین مقدار را دارد که $y = ۱$. در نتیجه مقدار ماکسیمم $|f(z)|$ در R در نقطهٔ مرزی $z = (\pi/۲, ۱)$ رخ می‌دهد و نه در هیچ نقطهٔ دیگری از R (شکل ۷۰).

درصورتی که تابع f این نتیجه را به‌صورت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بنویسیم، تابع مؤلفه‌یی $u(x,y)$ نیز در R دارای مقدار ماکسیممی است که روی مرز R گرفته می‌شود و نه هیچ‌گاه در داخل R که در آن همساز است (بخش ۲۵). زیرا تابع مرکب $g(z) = \exp[f(z)]$ در R پیوسته و در داخل آن تحلیلی و غیرثابت است. در نتیجه قدرمطلق آن $|g(z)| = \exp[u(x,y)]$ که در R پیوسته است باید مقدار ماکسیمم خود در R را روی مرز اختیار کند. بنابر صعودی‌بودن تابع نمایی، مقدار ماکسیمم $u(x,y)$ نیز روی مرز گرفته می‌شود.

ویژگیهای مقادیر مینیمم $|f(z)|$ و $u(x,y)$ در تمرینها بررسی شده‌اند.

تمرینها

۱. فرض کنید f تابع تامی است که به‌ازای هر z داریم $|f(z)| \leq A|z|$، که در آن A عددی ثابت و مثبت است. نشان دهید که $f(z) = a_۱ z$ که در آن $a_۱$ عدد مختلط ثابتی است.

راهنمایی: با استفاده از نابرابری کوشی (بخش ۴۹) نشان دهید که مشتق دوم $f''(z)$ در همهٔ نقاط صفحه مساوی صفر است. توجه کنید که M_R در نابرابری کوشی کوچکتر از $A(|z_۰| + R)$ یا مساوی با آن است.

۲. فرض کنید $f(z)$ تام و تابع همساز $u(x,y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ دارای کران بالا باشد، یعنی به‌ازای هر نقطهٔ (x,y) از صفحهٔ xy داشته باشیم $u(x,y) \leq u_۰$. نشان دهید که $u(x,y)$ باید در سراسر صفحه ثابت باشد.

راهنمایی: قضیهٔ لیوویل (بخش ۴۹) را برای تابع $g(z) = \exp[f(z)]$ به‌کار برید.

۳. نشان دهید برای R به‌قدرکافی بزرگ، چندجمله‌یی $P(z)$ در قضیهٔ ۲، بخش ۴۹، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\text{اگر } |z| \geq R \quad \text{آن‌گاه} \quad |P(z)| < ۲|a_n||z|^n.$$

[با اولین نابرابری از نابرابریهای (۵) بخش ۴۹ مقایسه کنید.]

راهنمایی: ملاحظه کنید که عدد مثبتی مانند R هست به قسمی که اگر $|z| \geq R$ قدرمطلق هر یک از خارج‌قسمتهای موجود در عبارت (۴)، بخش ۴۹، از $|a_n|/n$ کوچکتر است.

۴. فرض کنید تابع f در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در سراسر داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. با فرض اینکه همه جا در R داشته باشیم $f(z) \neq ۰$، ثابت کنید $|f(z)|$ در R دارای مقدار مینیممی مانند m است که بر مرز R گرفته می‌شود و هیچ‌گاه در داخل R گرفته نمی‌شود. این کار را با استفاده از نتیجهٔ نظیر برای مقدار ماکسیمم (بخش ۵۰) تابع $g(z) = ۱/f(z)$ انجام دهید.

۵. با استفاده از تابع $f(z) = z$ نشان دهید که در تمرین ۴، شرط $f(z) \neq \circ$ در هر نقطهٔ R برای به‌دست آوردن نتیجهٔ آن تمرین لازم است. یعنی نشان دهید اگر مینیمم تابع صفر باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ می‌تواند در یک نقطهٔ داخلی به مقدار مینیمم خود برسد.

۶. تابع $f(z) = (z+\text{۱})^{\text{۲}}$ و ناحیهٔ مثلثی بستهٔ R با رئوس واقع در نقاط $z = \circ$، $z = \text{۲}$ و $z = i$ را در نظر بگیرید. نقاطی در R پیدا کنید که $|f(z)|$ در آنها دارای مقادیر ماکسیمم و مینیمم باشد، بدین ترتیب نتایج بخش ۵۰ و تمرین ۴ را تشریح نمایید.

راهنمایی: $|f(z)|$ را به‌عنوان مربع فاصلهٔ بین z و $-\text{۱}$ تعبیر کنید.

جواب: $z = \text{۲}$، $z = \circ$.

۷. فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. نشان دهید که تابع $u(x,y)$ در R دارای مقدار مینیممی است که آن را روی مرز R اختیار می‌کند و هیچ‌گاه در داخل R این مقدار مینیمم را ندارد (تمرین ۴ را ببینید.)

۸. فرض کنید f تابع $f(z) = e^z$ و R ناحیهٔ مستطیلی‌شکل $\circ \le x \le \text{۱}$، $\circ \le y \le \pi$ باشد. با پیدا کردن نقاطی در R که تابع مؤلفه‌یی $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[f(z)]$ در آنها ماکسیمم یا مینیمم می‌شود نتایج بخش ۵۰ و تمرین ۷ را تشریح نمایید.

جواب: $z = \text{۱}$، $z = \text{۱} + \pi i$.

۹. فرض کنید تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیرثابت باشد. نشان دهید که تابع مؤلفه‌یی $v(x,y)$ در R دارای مقادیر ماکسیمم و مینیممی است که روی مرز R به آنها می‌رسد و هیچ‌گاه در داخل R که در آن همساز است به این مقادیر نمی‌رسد.

راهنمایی: نتایج بخش ۵۰ و تمرین ۷ را برای تابع $g(z) = -if(z)$ به‌کار برید.

۱۰. فرض کنید $z_\circ$ صفری از چندجمله‌یی درجهٔ n $(n \ge \text{۱})$

$$P(z) = a_\circ + a_\text{۱} z + a_\text{۲} z^\text{۲} + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq \circ)$$

باشد. به روش زیر نشان دهید که

$$P(z) = (z - z_\circ) Q(z),$$

که در آن $Q(z)$ یک چندجمله‌یی از درجهٔ $n - \text{۱}$ است.

(الف) تحقیق کنید که

$$z^k - z_\circ^k = (z - z_\circ)(z^{k-\text{۱}} + z^{k-\text{۲}} z_\circ + \cdots + z z_\circ^{k-\text{۲}} + z_\circ^{k-\text{۱}}) \qquad (k = \text{۲}, \text{۳}, \ldots).$$

(ب) با استفاده از تجزیهٔ قسمت (الف) نشان دهید که

$$P(z) - P(z_\circ) = (z - z_\circ)Q(z)$$

که در آن $Q(z)$ یک چندجمله‌یی از درجهٔ $n - ۱$ است و از این رابطه نتیجهٔ مطلوب را به‌دست آورید.

۵

سریها

این فصل عمدتاً به نمایشهای سری توابع تحلیلی اختصاص داده شده است. قضایایی ارائه می‌دهیم که وجود چنین نمایشهایی را تضمین نماید و تسهیلاتی در بررسی سریها فراهم می‌آوریم.

۵۱. همگرایی دنباله‌ها

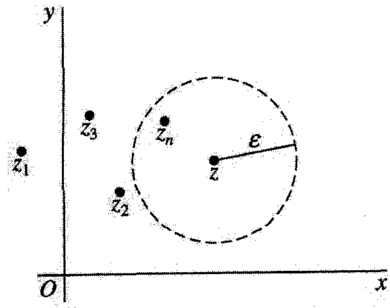
دنبالهٔ نامتناهی

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{۱}$$

از اعداد مختلط دارای حد z است اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε، عدد صحیح و مثبتی مانند n_0 موجود باشد به قسمی که

$$|z_n - z| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_0. \tag{۲}$$

از نظر هندسی، این بدان معنی است که به‌ازای مقادیر به‌قدر کافی بزرگ n نقاط z_n در εـ‌همسایگی z واقع‌اند (شکل ۷۱). چون می‌توانیم ε را هر اندازه کوچک بگیریم، در نتیجه z_nها وقتی اندیس آنها افزایش یابد به دلخواه به z نزدیک می‌شوند. توجه کنید که مقدار n_0 مورد لزوم عموماً به مقدار ε وابسته است.



شکل ۷۱

دنبالهٔ (۱) می‌تواند حداکثر یک حد داشته باشد. یعنی حد z در صورت وجود یکتاست (تمرین ۵، بخش ۵۲). درصورتی که این حد موجود باشد گوییم دنباله به z همگراست و می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,. \tag{۳}$$

اگر دنباله دارای حد نباشد واگراست.

قضیه. فرض کنید $z_n = x_n + iy_n$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ و $z = x + iy$. در این‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \tag{۴}$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y\,. \tag{۵}$$

برای اثبات این قضیه ابتدا فرض می‌کنیم شرایط (۵) برقرار باشند و شرط (۴) را از آن نتیجه می‌گیریم. بنابر شرایط (۵) به‌ازای هر عدد مثبت ε، اعداد صحیح و مثبتی مانند $n_۱$ و $n_۲$ هستند که

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_۱$$

و

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_۲.$$

بنابراین اگر $n_۰$ عدد بزرگتر بین دو عدد $n_۱$ و $n_۲$ باشد، آن‌گاه

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{و} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_۰.$$

چون

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

پس

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_\circ.$$

در نتیجه شرط (۴) برقرار است.

برعکس، اگر با شرط (۴) شروع کنیم، می‌دانیم که به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد صحیح و مثبتی مانند $n_\circ$ هست که

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_\circ.$$

اما

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

و

$$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|;$$

و در نتیجه

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \text{و} \qquad |y_n - y| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad n > n_\circ.$$

یعنی، شرایط (۵) برقرارند.

توجه کنید که با استناد به این قضیه می‌توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$$

هرگاه هر دو حد سمت راست یا حد سمت چپ موجود باشد.

مثال. دنبالهٔ

$$z_n = \frac{۱}{n^۳} + i \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

به i همگراست زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n^{۳}}+i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^{۳}}+i\lim_{n\to\infty}۱=۰+i\cdot۱=i.$$

با نوشتن

$$|z_n-i|=\frac{۱}{n^{۳}},$$

می‌توان با استفاده از تعریف (۲) این نتیجه را به‌دست آورد. به عبارت دقیقتر، به‌ازای هر عدد مثبت ε

$$|z_n-i|<\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad n>\frac{۱}{\sqrt[۳]{\varepsilon}}.$$

۵۲. همگرایی سریها

سری نامتناهی

$$\sum_{n=۱}^{\infty}z_n=z_۱+z_۲+\cdots+z_n+\cdots \tag{۱}$$

از اعداد مختلط به مجموع S همگراست اگر دنبالهٔ

$$S_N=\sum_{n=۱}^{N}z_n=z_۱+z_۲+\cdots+z_N \quad (N=۱,۲,\ldots) \tag{۲}$$

از مجموعهای جزئی به S همگرا باشد. در این‌صورت می‌نویسیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}z_n=S\,.$$

توجه کنید که چون هر دنباله حداکثر دارای یک حد است، هر سری حداکثر یک مجموع دارد. درصورتی که سری همگرا نباشد، گوییم واگراست.

قضیه. فرض کنید $z_n=x_n+iy_n$ $(n=۱,۲,\ldots)$ و $S=X+iY$. در این‌صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty}z_n=S \tag{۳}$$

اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=۱}^{\infty}x_n=X \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty}y_n=Y. \tag{۴}$$

البته با استناد به این قضیه می‌توان نوشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+iy_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+i\sum_{n=1}^{\infty}y_n$$

هرگاه بدانیم که هر دو سری سمت راست یا سری سمت چپ همگرا هستند.

برای اثبات قضیه ابتدا مجموعهای جزئی (۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$S_N=X_N+iY_N, \tag{۵}$$

که در آن

$$Y_N=\sum_{n=1}^{N}y_n \quad \text{و} \quad X_N=\sum_{n=1}^{N}x_n$$

حال شرط (۳) برقرار است اگر و فقط اگر

$$\lim_{N\to\infty}S_N=S; \tag{۶}$$

و با توجه به رابطهٔ (۵) و قضیهٔ مربوط به دنباله‌ها در بخش ۵۱ حد (۶) برقرار است اگر و فقط اگر

$$.\lim_{N\to\infty}Y_N=Y \quad \text{و} \quad \lim_{N\to\infty}X_N=X \tag{۷}$$

بنابراین شرایط (۷) مستلزم شرط (۳)اند و برعکس. چون X_N و Y_N مجموعهای جزئی سریهای (۴) هستند، قضیه ثابت می‌شود.

با یادآوری این نکته از حسابان که جملهٔ nام یک سری همگرا از اعداد حقیقی، وقتی n به بی‌نهایت میل کند به صفر میل می‌کند، بنابر قضایای این بخش و بخش قبل بی‌درنگ می‌بینیم که این حکم برای سریهای همگرا از اعداد مختلط برقرار است. یعنی یک شرط لازم برای همگرایی سری (۱) این است که

$$\lim_{n\to\infty}z_n=0\,. \tag{۸}$$

بنابراین جملات یک سری همگرا از اعداد مختلط کراندار هستند، به عبارت دقیقتر عدد ثابت مثبتی مانند M هست که به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم $|z_n|\le M$. (تمرین ۹ را ببینید.)

برای ویژگی مهم دیگری از سریهای اعداد مختلط، فرض می‌کنیم که سری (۱) مطلقاً همگرا باشد. یعنی، اگر $z_n = x_n + iy_n$، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

از اعداد حقیقی $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ همگرا باشد. چون

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{و} \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

از آزمون مقایسه در حسابان می‌دانیم که دو سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

همگرا هستند. به‌علاوه چون همگرایی مطلق یک سری از اعداد حقیقی مستلزم همگرایی خود سری است، در نتیجه اعداد حقیقی مانند X و Y موجودند به قسمی که شرایط (۴) برقرارند. پس بنابر قضیهٔ این بخش سری (۱) همگراست. در نتیجه، همگرایی مطلق یک سری از اعداد مختلط مستلزم همگرایی آن سری است.

در اثبات این واقعیت که مجموع سری عدد مفروض S است، اغلب مناسب است که ρ_N باقیماندهٔ بعد از N جمله را تعریف کنیم:

$$\rho_N = S - S_N \,. \tag{۹}$$

بنابراین، $S = S_N + \rho_N$ و چون $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$ می‌بینیم که سری به عدد S همگراست اگر و فقط اگر دنبالهٔ باقیمانده‌ها به 0 همگرا باشد. در بحث از سریهای توانی به‌طور قابل ملاحظه‌ای از این موضوع استفاده خواهیم کرد. سریهای توانی سریهایی هستند به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

که در آن z_0 و ضرایب a_n اعداد مختلط ثابتی هستند و z می‌تواند هر نقطه در ناحیهٔ معینی، که شامل z_0 است، باشد. در چنین سریهایی که شامل یک متغیر z هستند مجموع، مجموعهای جزئی و باقیمانده‌ها را، به‌ترتیب، با $S(z)$، $S_N(z)$ و $\rho_N(z)$ نمایش خواهیم داد.

مثال. به کمک باقیمانده‌ها، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} z^n = \frac{۱}{۱-z} \quad \text{آن‌گاه} \quad |z| < ۱ \quad \text{اگر} \qquad (۱۰)$$

کافی است اتحاد زیر را به‌یاد آوریم (تمرین ۱۰، بخش ۷)

$$۱ + z + z^۲ + \cdots + z^n = \frac{۱ - z^{n+۱}}{۱-z} \quad (z \neq ۱)$$

تا بتوانیم مجموعهای جزئی

$$S_N(z) = \sum_{n=۰}^{N-۱} z^n = ۱ + z + \cdots + z^{N-۱} \quad (z \neq ۱)$$

را به‌صورت زیر بنویسیم

$$S_N(z) = \frac{۱ - z^N}{۱-z}.$$

اگر

$$S(z) = \frac{۱}{۱-z},$$

آن‌گاه

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{۱-z} \quad (z \neq ۱).$$

در نتیجه

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|۱-z|},$$

و از این رابطه نتیجه می‌شود که اگر $|z| < ۱$، آن‌گاه $\rho_N(z)$ دنبالهٔ باقیمانده‌ها به صفر همگراست اما اگر $|z| \geq ۱$ به صفر همگرا نیستند. بنابراین فرمول مجموعیابی (۱۰) ثابت شده است.

تمرینها

۱. با دو روش نشان دهید که دنبالهٔ زیر به ۲− همگراست

$$z_n = -۲ + i\frac{(-۱)^n}{n^۲} \quad (n = ۱, ۲, \ldots).$$

۲. فرض کنید r_n نمایش قدرمطلقها و Θ_n مقادیر اصلی آوندهای اعداد مختلط z_n در تمرین ۱ باشند. نشان دهید که دنبالهٔ $r_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ همگراست اما دنبالهٔ $\Theta_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ همگرا نیست.

۳. نشان دهید که

$$\text{اگر} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{آن‌گاه} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|.$$

۴. در فرمول مجموعیابی مثال بخش ۵۲ قرار دهید $z = re^{i\theta}$ که در آن $۰ < r < ۱$. سپس به کمک قضیهٔ بخش ۵۲ نشان دهید که اگر $۰ < r < ۱$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^۲}{۱ - ۲r\cos\theta + r^۲} \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{۱ - ۲r\cos\theta + r^۲}.$$

(توجه کنید که این فرمولها در حالت $r = ۰$ نیز برقرارند.)

۵. با استفاده از یکتایی حدود دنباله‌های همگرای اعداد حقیقی نشان دهید که حد یک دنبالهٔ همگرا از اعداد مختلط یکتاست.

۶. نشان دهید که

$$\text{اگر} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} z_n = S \quad \text{آن‌گاه} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}.$$

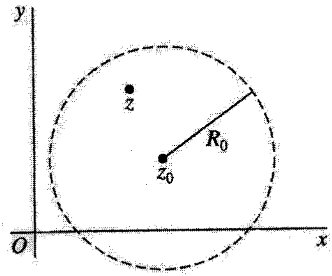
۷. فرض کنید c عدد مختلط دلخواهی باشد ونشان دهید که

$$\text{اگر} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} z_n = S \quad \text{آن‌گاه} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} cz_n = cS.$$

۸. با یادآوری نتیجهٔ نظیر برای سریهای اعداد حقیقی و استناد به قضیهٔ بخش ۵۲، نشان دهید که

$$\text{اگر} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} z_n = S \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} w_n = T \quad \text{آن‌گاه} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T.$$

۹. فرض کنید دنبالهٔ $z_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ به عدد z همگرا باشد. نشان دهید که عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که نابرابری $|z_n| \le M$ به‌ازای هر n برقرار است. این کار را به هر یک از روشهای زیر انجام دهید.



شکل ۷۲

(الف) توجه کنید که عدد صحیح مثبتی مانند $n_\circ$ هست که هرگاه $n > n_\circ$،

$$|z_n| = |z + (z_n - z)| < |z| + ۱.$$

(ب) بنویسید $z_n = x_n + iy_n$ و از نظریهٔ دنباله‌های اعداد حقیقی به یاد آورید که بنابر همگرایی x_n و y_n $(n = ۱, ۲, \ldots)$ اعداد مثبتی مانند $M_۱$ و $M_۲$ وجود دارند که $|x_n| \le M_۱$ و $|y_n| \le M_۲$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$.

۵۳. سری تیلر[1]

حال به بررسی قضیهٔ تیلر می‌پردازیم که یکی از مهمترین قضایای این فصل است.

قضیه. فرض کنید f در سراسر قرص باز $|z - z_\circ| < R_\circ$ به مرکز $z_\circ$ و شعاع $R_\circ$ تحلیلی باشد (شکل ۷۲). در این‌صورت $f(z)$ دارای نمایش سری توانی

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n \qquad (|z - z_\circ| < R_\circ) \tag{۱}$$

است که در آن

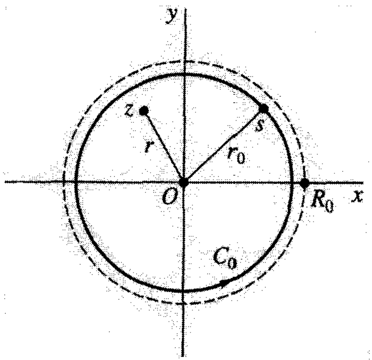
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!} \qquad (n = \circ, ۱, ۲, \ldots). \tag{۲}$$

یعنی هرگاه z در قرص باز مذکور واقع باشد، سری (۱) به $f(z)$ همگراست.

این بسط $f(z)$ به سری تیلر حول نقطهٔ $z_\circ$ است. این همان سری تیلر معمولی در حسابان است که برای توابع یک‌متغیرهٔ مختلط جرح و تعدیل شده است. توجه کنید که با قرارداد

$$f^{(\circ)}(z_\circ) = f(z_\circ) \quad \text{و} \quad \circ! = ۱$$

1. Taylor



شکل ۷۳

سری (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f(z)=f(z_\circ)+\frac{f'(z_\circ)}{۱!}(z-z_\circ)+\frac{f''(z_\circ)}{۲!}(z-z_\circ)^۲+\cdots \quad (|z-z_\circ|<R_\circ). \quad (۳)$$

هر تابعی که در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشد باید سری تیلری حول نقطهٔ $z_\circ$ داشته باشد. زیرا اگر f در $z_\circ$ تحلیلی باشد در یک همسایگی $z_\circ$ مانند $|z-z_\circ|<\varepsilon$ تحلیلی است (بخش ۲۳) و ε به‌عنوان مقدار $R_\circ$ در قضیهٔ تیلر به‌کار می‌رود. اگر از طرف دیگر f تام باشد، $R_\circ$ را می‌توان به دلخواه بزرگ گرفت و شرط $|z-z_\circ|<R_\circ$، به شرط $|z-z_\circ|<\infty$ تبدیل می‌شود. در این‌صورت سری در هر نقطهٔ z از صفحهٔ متناهی به $f(z)$ همگراست.

ابتدا قضیه را وقتی $z_\circ=\circ$ ثابت می‌کنیم، در این حالت سری (۱) به سری

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}z^n \qquad (|z|<R_\circ) \qquad (۴)$$

تبدیل می‌شود و آن را سری مکلورن[1] می‌نامند. اثبات وقتی $z_\circ$ دلخواه است به‌صورت نتیجهٔ بلافصل آن درمی‌آید.

برای شروع اثبات نمایش (۴) قرار می‌دهیم $|z|=r$ و فرض می‌کنیم $C_\circ$ معرف دایرهٔ دلخواه $|z|=r_\circ$ در جهت مثبت باشد که در آن $r<r_\circ<R_\circ$ (شکل ۷۳ را ببینید). چون f در درون و روی دایرهٔ $C_\circ$ تحلیلی است و نقطهٔ z در درون $C_\circ$ واقع است، می‌توان از فرمول انتگرال

1. *Maclaurin*

کوشی استفاده کرد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s-z}. \qquad (5)$$

حال عامل $1/(s-z)$ در این انتگرالده را می‌توان به‌صورت

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-(z/s)} \qquad (6)$$

نوشت و بنابر مثال بخش ۵۲، می‌دانیم که اگر z عدد مختلطی غیر از واحد باشد

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n + \frac{z^N}{1-z}. \qquad (7)$$

پس با قرار دادن z/s به‌جای z در فرمول (۷)، می‌توان رابطهٔ (۶) را چنین نوشت

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s-z)s^N}. \qquad (8)$$

با ضرب‌کردن هر یک از جملات این تساوی در $f(s)$ و انتگرالگیری از هر طرف نسبت به s روی C_0، در می‌یابیم که

$$\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} z^n + z^N \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}.$$

به موجب عبارت (۵) و این واقعیت که (بخش ۴۸)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

درصورتی که هر یک از جملات رابطهٔ بالا را در $1/(2\pi i)$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \rho_N(z), \qquad (9)$$

که در آن

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}. \qquad (10)$$

حال به محض اینکه ثابت کنیم

$$\lim_{N\to\infty} \rho_N(z) = ۰ \qquad (۱۱)$$

نمایش (۴) به‌دست می‌آید. برای انجام این کار، یادآور می‌شویم که $|z| = r$ و $C_۰$ دارای شعاع $r_۰$ است که $r_۰ > r$. در این صورت اگر s نقطه‌ای روی $C_۰$ باشد

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = r_۰ - r\,.$$

بنابراین اگر M نمایش مقدار ماکسیمم $|f(s)|$ روی $C_۰$ باشد،

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{۲\pi} \cdot \frac{M}{(r_۰ - r)r_۰^N} \cdot ۲\pi r_۰ = \frac{Mr_۰}{r_۰ - r}\left(\frac{r}{r_۰}\right)^N .$$

تا وقتی که $(r/r_۰) < ۱$ حد (۱۱) به‌وضوح برقرار است.

برای تحقیق برقراری قضیه وقتی مرکز قرص به شعاع $R_۰$ در نقطهٔ دلخواه $z_۰$ باشد، فرض می‌کنیم f در قرص $|z - z_۰| < R_۰$ تحلیلی باشد و توجه می‌کنیم که تابع مرکب $f(z + z_۰)$ باید در قرص $|(z + z_۰) - z_۰| < R_۰$ تحلیلی باشد. البته این نابرابری آخری درست همان $|z| < R_۰$ است؛ و اگر بنویسیم $g(z) = f(z + z_۰)$ تحلیلی‌بودن g در قرص $|z| < R_۰$ متضمن وجود بسط سری مکلورن است:

$$g(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{g^{(n)}(۰)}{n!} z^n \qquad (|z| < R_۰)\,.$$

یعنی

$$f(z + z_۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_۰)}{n!} z^n \qquad (|z| < R_۰)$$

پس از قراردادن $z - z_۰$ به‌جای z در این رابطه و در شرط برقراری آن، بسط سری تیلر مطلوب (۱) را خواهیم داشت.

۵۴. چند مثال

درصورتی که بدانیم f در همهٔ نقاط داخل دایره‌یی به مرکز $z_۰$ تحلیلی است، مطمئن می‌شویم که به‌ازای هر z در داخل آن دایره سری تیلر حول $z_۰$ به $f(z)$ همگراست، و هیچ آزمونی برای

همگرایی سری لازم نیست. در واقع بنابر قضیهٔ تیلر، این سری در داخل دایره‌یی حول $z_\circ$، که شعاع آن برابر است با فاصلهٔ $z_\circ$ تا نزدیکترین نقطهٔ z_1 که f در آن تحلیلی نیست، به $f(z)$ همگراست. در بخش ۵۹ درخواهیم یافت که این دایره در واقع بزرگترین دایرهٔ به مرکز $z_\circ$ است که به‌ازای هر z در داخل آن، سری به $f(z)$ همگراست.

همچنین در بخش ۶۰ خواهیم دید که اگر اعداد ثابتی مانند a_n $(n = \circ, 1, 2, \ldots)$ موجود باشند به قسمی که به‌ازای هر z در داخل دایره‌یی به مرکز $z_\circ$ داشته باشیم

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z - z_\circ)^n$$

آن‌گاه بدون توجه به نحوهٔ به‌دست آمدن این اعداد ثابت، این سری توانی سری تیلر f حول $z_\circ$ است. این مطلب موجب می‌شود که اغلب بتوانیم ضرایب a_n در سری تیلر را به روشهایی کاراتر از مراجعهٔ مستقیم به فرمول $a_n = f^{(n)}(z_\circ)/n!$ در قضیهٔ تیلر، پیدا کنیم.

در مثالهای زیر با استفاده از فرمول قضیهٔ تیلر، بسط مکلورن بعضی از توابع نسبتاً ساده را پیدا می‌کنیم و تأکید ما بر این است که با استفاده از این بسطها نمایشهای دیگر را بیابیم. در مثالها به‌طور آزادانه از ویژگیهای مورد انتظار سریهای همگرا، از قبیل ویژگیهایی که درستی آنها در تمرینات ۷ و ۸ بخش ۵۲ ثابت شد، استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱. چون تابع $f(z) = e^z$ تام است، دارای نمایش سری مکلورنی است که به‌ازای هر z برقرار است. در اینجا $f^{(n)}(z) = e^z$ و چون $f^{(n)}(\circ) = 1$ در نتیجه

$$e^z = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \infty). \tag{۱}$$

توجه کنید که اگر $z = x + i\circ$، بسط (۱) تبدیل می‌شود به

$$e^x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

تابع تام $z^2 e^{3z}$ نیز دارای بسط سری مکلورنی است. ساده‌ترین راه به‌دست آوردن آن قراردادن $3z$ به‌جای z در هر طرف رابطهٔ (۱) و ضرب کردن هر جملهٔ رابطهٔ حاصل در z^2 است

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \qquad (|z| < \infty).$$

بالاخره اگر در اینجا به‌جای n عدد $n-۲$ را قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$z^{۲}e^{۳z}=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۳^{n-۲}}{(n-۲)!}z^{n}\qquad(|z|<\infty).$$

مثال ۲. با استفاده از بسط (۱) و تعریف (بخش ۳۳)

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$$

می‌توان سری مکلورن تابع تام $f(z)=\sin z$ را به‌دست آورد. برای ارائهٔ جزئیات به بسط (۱) استناد می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\sin z=\frac{۱}{۲i}\left[\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(iz)^{n}}{n!}-\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-iz)^{n}}{n!}\right]=\frac{۱}{۲i}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left[۱-(-۱)^{n}\right]\frac{i^{n}z^{n}}{n!}\quad(|z|<\infty).$$

اما اگر n زوج باشد، $۱-(-۱)^{n}=\circ$ و لذا می‌توان در سری آخر به‌جای n عدد $۲n+۱$ را قرار داد:

$$\sin z=\frac{۱}{۲i}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left[۱-(-۱)^{۲n+۱}\right]\frac{i^{۲n+۱}\,z^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}\qquad(|z|<\infty).$$

از آنجایی که

$$۱-(-۱)^{۲n+۱}=۲\qquad \text{و}\qquad i^{۲n+۱}=(i^{۲})^{n}i=(-۱)^{n}i،$$

بسط فوق به سری زیر تبدیل می‌شود

$$\sin z=\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{z^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}\qquad(|z|<\infty).\tag{۲}$$

مجازبودن مشتقگیری جمله به جمله در بخش ۵۹ ثابت خواهد شد. در اینجا با استفاده از این روش از طرفین رابطهٔ (۲) مشتق می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\cos z=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{(۲n+۱)!}\cdot\frac{d}{dz}\,z^{۲n+۱}=\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{۲n+۱}{(۲n+۱)!}\,z^{۲n}.$$

یعنی

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty). \tag{3}$$

مثال ۳. چون $\sinh z = -i\sin(iz)$ (بخش ۳۴) فقط باید در هر طرف رابطهٔ (۲) به‌جای z عدد iz را قرار دهیم و هر یک از جملات رابطهٔ حاصل را در $-i$ ضرب کنیم تا ببینیم که

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < \infty). \tag{4}$$

همین‌طور، از آنجایی که $\cosh z = \cos(iz)$، از بسط (۳) نتیجه می‌شود که

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty). \tag{5}$$

ملاحظه می‌کنید که سری تیلر $\cosh z$ حول نقطهٔ $z_0 = -2\pi i$ بدین‌طریق به‌دست می‌آید که در هر طرف رابطهٔ (۵) به‌جای z مقدار $z + 2\pi i$ را قرار دهید و به یاد آورید که به‌ازای هر z داریم $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty).$$

مثال ۴. نمایش سری مکلورن دیگری چنین است

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1). \tag{6}$$

مشتقات تابع $f(z) = 1/(1-z)$، که در $z = 1$ تحلیلی نیست، عبارت‌اند از

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

و به‌خصوص $f^{(n)}(0) = n!$. توجه کنید که بسط (۶) مجموع سری هندسی نامتناهی را به ما می‌دهد، که در آن z قدر نسبت سری است:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

این فرمول اساساً همان فرمول مجموعیابی است که به روش دیگری در مثال بخش ۵۲ پیدا کردیم.

اگر در رابطهٔ (۶) و شرط برقراری آن به‌جای z مقدار $-z$ قرار دهیم و توجه کنیم که هرگاه $|-z| < 1$، آن‌گاه $|z| < 1$، می‌بینیم که

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z| < 1).$$

اگر از طرف دیگر در رابطهٔ (۶) به‌جای z مقدار $1 - z$ قرار دهیم نمایش سری تیلر زیر را خواهیم داشت

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n \qquad (|z-1| < 1).$$

این شرط برقراری از شرط مربوط به بسط (۶) نتیجه می‌شود زیرا $|1-z| < 1$ همان $|z-1| < 1$ است.

مثال ۵. به‌عنوان آخرین مثال، تابع

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{2(1+z^2)-1}{1+z^2} = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1+z^2}\right)$$

را به سری شامل توانهای z بسط می‌دهیم. چون تابع $f(z)$ در $z = 0$ تحلیلی نیست نمی‌توانیم سری مکلورنی برای آن پیدا کنیم، اما با توجه به بسط (۶) می‌دانیم که

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \cdots \qquad (|z| < 1).$$

بنابراین، وقتی $0 < |z| < 1$،

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \cdots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots$$

جملاتی از قبیل $1/z^3$ و $1/z$ را توانهای منفی z می‌نامیم زیرا آنها را می‌توان، به‌ترتیب، z^{-3} و z^{-1} نوشت. نظریهٔ بسطهای شامل توانهای منفی $z - z_0$ در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تمرینها *

۱. نمایش سری مکلورن زیر را به‌دست آورید

$$z\cosh(z^{۲}) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^{۴n+۱}}{(۲n)!} \qquad (|z| < \infty).$$

۲. سری تیلر

$$e^{z} = e\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(z-۱)^{n}}{n!} \qquad (|z-۱| < \infty).$$

برای تابع $f(z) = e^{z}$ را به یکی از روشهای زیر به‌دست آورید.

(الف) استفاده از $f^{(n)}(۱)$ $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$؛ (ب) با نوشتن $e^{z} = e^{z-۱}e$.

۳. بسط سری مکلورن تابع زیر را پیدا کنید

$$f(z) = \frac{z}{z^{۴}+۹} = \frac{z}{۹}\cdot\frac{۱}{۱+(z^{۴}/۹)}.$$

جواب: $\displaystyle\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{n}}{۳^{۲n+۲}} z^{۴n+۱}$ $(|z| < \sqrt{۳})$.

۴. نشان دهید اگر $f(z) = \sin z$، آن‌گاه

$$f^{(۲n)}(۰) = ۰ \quad \text{و} \quad f^{(۲n+۱)}(۰) = (-۱)^{n} \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

بدین‌ترتیب برهان دیگری برای سری مکلورن (۲) تابع $\sin z$ در بخش ۵۴ ارائه دهید.

۵. به هر یک از روشهای زیر سری مکلورن (۳) در بخش ۵۴ را برای تابع $f(z) = \cos z$ مجدداً به‌دست آورید

(الف) با استفاده از تعریف

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}$$

در بخش ۳۳ و با استفاده از سری مکلورن (۱) برای e^{z} در بخش ۵۴؛

(ب) با نشان دادن اینکه

$$f^{(۲n)}(۰) = (-۱)^{n} \quad \text{و} \quad f^{(۲n+۱)}(۰) = ۰ \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

* در این تمرینها و تمرینهای بعد که دربارهٔ بسطهای سری هستند، توصیه می‌کنیم که خواننده در صورت امکان از نمایشهای (۱) تا (۶) بخش ۵۴ استفاده کند.

۶. بسط سری مکلورن تابع $f(z) = \sin(z^2)$ را بنویسید و بیان کنید چگونه نتیجه می‌شود که

$$f^{(4n)}(0) = 0 \quad \text{و} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

۷. نمایش سری تیلر زیر را به‌دست آورید

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \qquad (|z-i| < \sqrt{2}).$$

راهنمایی: با نوشتن رابطهٔ زیر شروع کنید

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-(z-i)/(1-i)}.$$

۸. به کمک اتحاد (بخش ۳۳)

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

تابع $\cos z$ را به سری تیلر حول نقطهٔ $z_0 = \pi/2$ بسط دهید.

۹. با استفاده از اتحاد $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z$، که در تمرین ۷ (الف)، بخش ۳۴، درستی آن تحقیق شد، و اینکه $\sinh z$ متناوب و با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است سری تیلر $\sinh z$ حول نقطهٔ $z_0 = \pi i$ را بیابید.

جواب: $$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z-\pi i| < \infty).$$

۱۰. بزرگترین دایره‌یی که به‌ازای هر z در درون آن، سری مکلورن تابع $\tanh z$ به $\tanh z$ همگرا باشد، کدام است؟ اولین دوجملهٔ ناصفر این سری را بنویسید.

۱۱. نشان دهید که هرگاه $z \neq 0$ داریم

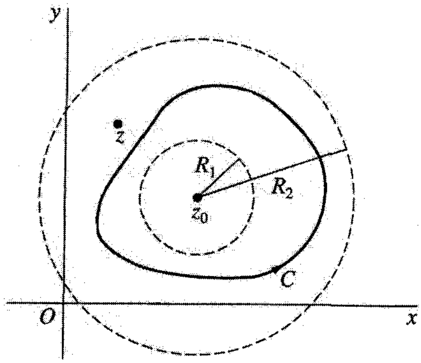
(الف) $$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots;$$

(ب) $$\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots.$$

۱۲. بسطهای زیر را به‌دست آورید

(الف) $$\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!} \qquad (0 < |z| < \infty);$$

(ب) $$z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} \qquad (0 < |z| < \infty).$$



شکل ۷۴

۱۳. نشان دهید که هرگاه $4 > |z| > 0$، داریم

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}} \cdot$$

۵۵. سری لوران[1]

اگر تابع f در نقطهٔ z_0 تحلیلی نباشد، نمی‌توانیم از قضیهٔ تیلر در آن نقطه استفاده کنیم. ولی اغلب می‌توانیم یک نمایش سری برای $f(z)$ شامل توانهای مثبت و منفی $z - z_0$ پیدا کنیم. (مثال ۵، بخش ۵۴ و همچنین تمرینهای ۱۱، ۱۲ و ۱۳ آن بخش را ببینید.) حال نظریهٔ چنین نمایشهایی را ارائه می‌دهیم و با قضیهٔ لوران شروع می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید تابع f در سراسر حوزهٔ طوقی $R_1 < |z - z_0| < R_2$ به مرکز z_0 تحلیلی و C معرف مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت حول z_0 و واقع در این حوزه باشد (شکل ۷۴). در این‌صورت در هر نقطهٔ z از آن حوزه، $f(z)$ دارای نمایش سری

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \qquad (1)$$

است که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

1. Laurent

و

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

رابطهٔ (۱) را اغلب به‌صورت زیر می‌نویسند

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (R_1 < |z-z_0| < R_2), \qquad (4)$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (5)$$

هر یک از سریهای (۱) یا (۴) را سری لوران می‌نامند.

ملاحظه کنید که انتگرالده عبارت (۳) را می‌توان به‌صورت $f(z)(z-z_0)^{n-1}$ نوشت. بنابراین واضح است که اگر f در سراسر قرص $|z-z_0| < R_2$ تحلیلی باشد این انتگرالده نیز تحلیلی است. در نتیجه همهٔ ضرایب b_n صفرند؛ و چون (بخش ۴۸)

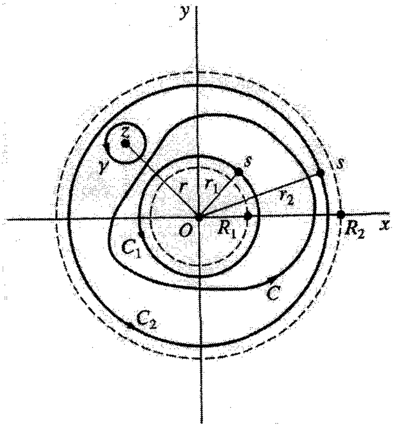
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

بسط (۱) به سری تیلر حول z_0 تبدیل می‌شود.

با وجود این، اگر f در z_0 تحلیلی نباشد اما در بقیهٔ نقاط قرص $|z-z_0| < R_2$ تحلیلی باشد، شعاع R_1 را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت. در این‌صورت نمایش (۱) به‌ازای هر z که $0 < |z-z_0| < R_2$ برقرار است. همین‌طور اگر f در همهٔ نقاط صفحهٔ متناهی که خارج دایرهٔ $|z-z_0| = R_1$ واقع‌اند تحلیلی باشد، شرط برقراری عبارت است از $R_1 < |z-z_0| < \infty$. ملاحظه کنید که اگر f همه جا در صفحهٔ متناهی بجز در z_0 تحلیلی باشد، سری (۱) در هر نقطه که تحلیلی‌بودن برقرار باشد یا وقتی که $0 < |z-z_0| < \infty$، برقرار است.

ابتدا قضیهٔ لوران را وقتی $z_0 = 0$ ثابت می‌کنیم، در این حالت مرکز طوق در مبدأ است. تحقیق درستی قضیه وقتی z_0 دلخواه است به‌آسانی نتیجه می‌شود.

اثبات را با ساختن یک ناحیهٔ طوقی بسته مانند $r_1 \leq |z| \leq r_2$ که مشمول در حوزهٔ $R_1 < |z| < R_2$ است و درون آن شامل نقطهٔ z و مسیر C است، شروع می‌کنیم (شکل ۷۵). فرض می‌کنیم که C_1 و C_2، به‌ترتیب، معرف دوایر $|z| = r_1$ و $|z| = r_2$ باشند و این دوایر را در جهت مثبت می‌گیریم. ملاحظه می‌کنید که f روی C_1 و C_2 و در حوزهٔ بین آنها تحلیلی است.



شکل ۷۵

حال دایرهٔ γ را به مرکز z و در جهت مثبت و به‌قدر کافی کوچک می‌گیریم تا همان‌طور که در شکل ۷۵ نشان داده شده در درون ناحیهٔ طوقی $r_۱ \le |z| \le r_۲$ باشد. اکنون بنابر تعمیم قضیهٔ کوشی‌ـگورسا برای انتگرال توابع تحلیلی حول مرزهای جهت‌دار نواحی همبند چندگانه (قضیهٔ ۲، بخش ۴۶) داریم

$$\int_{C_۲} \frac{f(s)ds}{s-z} - \int_{C_۱} \frac{f(s)ds}{s-z} - \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z} = \circ\,.$$

اما بنابر فرمول انتگرال کوشی، مقدار انتگرال سوم مساوی $۲\pi i f(z)$ است. بنابراین

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_۲} \frac{f(s)ds}{s-z} + \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_۱} \frac{f(s)ds}{z-s}\,. \qquad (۶)$$

حال عامل $۱/(s-z)$ در اولین انتگرال همان عامل موجود در عبارت (۵) بخش ۵۳ است، که قضیهٔ تیلر در آن ثابت شده بود و در اینجا به بسط

$$\frac{۱}{s-z} = \sum_{n=\circ}^{N-۱} \frac{۱}{s^{n+۱}} z^n + z^N \frac{۱}{(s-z)s^N}, \qquad (۷)$$

نیاز داریم که در بخش قبل از آن استفاده شد. همچنین برای عامل $۱/(z-s)$ در انتگرال دوم

با تعویض z و s در رابطهٔ (۷) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{z-s}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s^{-n}}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{z^N}\cdot\frac{s^N}{z-s}.$$

اگر در اینجا اندیس مجموعیابی را به‌جای n عدد $n-1$ بگیریم، بسط بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{z-s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{s^{-n+1}}\cdot\frac{1}{z^{n}}+\frac{1}{z^N}\cdot\frac{s^N}{z-s}, \tag{8}$$

که در ادامهٔ کار از آن استفاده می‌شود.

با ضرب همهٔ جملات روابط (۷) و (۸) در $f(s)/(2\pi i)$ و انتگرالگیری از هر طرف روابط حاصل نسبت به s، به‌ترتیب، روی C_2 و C_1، از عبارت (۶) درمی‌یابیم که

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a_nz^n+\rho_N(z)+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{z^n}+\sigma_N(z), \tag{9}$$

که در آن اعداد $a_n(n=0,1,2,\ldots,N-1)$ و $b_n(n=1,2,\ldots,N)$ با برابریهای زیر داده شده‌اند

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)ds}{s^{n+1}},\qquad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)ds}{s^{-n+1}} \tag{10}$$

و

$$\rho_N(z)=\frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)ds}{(s-z)s^N},\qquad \sigma_N(z)=\frac{1}{2\pi i z^N}\int_{C_1}\frac{s^Nf(s)ds}{z-s}.$$

وقتی N به ∞ میل کند عبارت (۹) به‌وضوح به‌صورت یک سری لوران، در حوزهٔ $R_1<|z|<R_2$ در می‌آید به شرط آنکه

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(z)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{N\to\infty}\sigma_N(z)=0. \tag{11}$$

این حدود به سادگی با روشی که قبلاً برای اثبات قضیهٔ تیلر در بخش ۵۳ به‌کار رفت، ثابت می‌شوند. می‌نویسیم $|z|=r$، پس $r_1<r<r_2$، و فرض می‌کنیم M مقدار ماکسیمم $|f(s)|$ روی C_1

و $C_۲$ باشد. همچنین توجه می‌کنیم که اگر s نقطه‌ای روی $C_۲$ باشد آن‌گاه $|s-z| \geq r_۲ - r$؛ و اگر s روی $C_۱$ باشد، $|z-s| \geq r - r_۱$. پس می‌توانیم بنویسیم

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_۲}{r_۲ - r}\left(\frac{r}{r_۲}\right)^N \quad \text{و} \quad |\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_۱}{r - r_۱}\left(\frac{r_۱}{r}\right)^N.$$

چون $۱ > (r/r_۲)$ و $۱ > (r_۱/r)$ واضح است که $\rho_N(z)$ و $\sigma_N(z)$ دارای ویژگی مطلوب‌اند.

بالاخره با یادآوری فرع ۲ بخش ۴۶ می‌بینیم که می‌توان در انتگرالهای (۱۰) به‌جای مسیرهای آنها مسیر C را قرار داد. بدین‌ترتیب اثبات قضیهٔ لوران وقتی $z_۰ = ۰$ کامل می‌شود، زیرا اگر به‌جای s از z به‌عنوان متغیر انتگرالگیری استفاده کنیم عبارات (۱۰) برای ضرایب a_n و b_n همان عبارات (۲) و (۳) هستند که در آنها $z_۰ = ۰$.

برای تعمیم اثبات به حالت کلی که در آن $z_۰$ نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ متناهی است، فرض می‌کنیم f تابعی باشد که در شرایط قضیه صدق می‌کند و همانند اثبات قضیهٔ تیلر قرار می‌دهیم $g(z) = f(z+z_۰)$. چون f در طوق $R_۱ < |z-z_۰| < R_۲$ تحلیلی است، تابع $f(z+z_۰)$ تحلیلی است وقتی $R_۱ < |(z+z_۰) - z_۰| < R_۲$. یعنی، g در طوق $R_۱ < |z| < R_۲$ که به مرکز مبدأ است تحلیلی است. حال مسیر سادهٔ بستهٔ C در صورت قضیه، دارای نمایش پارامتری $z = z(t)\,(a \leq t \leq b)$ است که به‌ازای هر t در بازهٔ $a \leq t \leq b$،

$$R_۱ < |z(t) - z_۰| < R_۲. \tag{۱۲}$$

بنابراین اگر Γ معرف مسیر

$$z = z(t) - z_۰ \qquad (a \leq t \leq b), \tag{۱۳}$$

باشد Γ نه تنها مسیر سادهٔ بسته‌ای است بلکه بنابر نابرابریهای (۱۲) در حوزهٔ $R_۱ < |z| < R_۲$ واقع است. در نتیجه $g(z)$ دارای نمایش سری لوران زیر است

$$g(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (R_۱ < |z| < R_۲), \tag{۱۴}$$

که در آن

$$a_n = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)dz}{z^{n+۱}} \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots), \tag{۱۵}$$

$$b_n = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)dz}{z^{-n+۱}} \quad (n = ۱, ۲, \ldots). \tag{۱۶}$$

اگر در رابطهٔ (۱۴) به‌جای $g(z)$ بنویسیم $f(z+z_\circ)$ و سپس، هم در رابطهٔ حاصل و هم در شرط برقراری $R_۱ < |z| < R_۲$ به‌جای z مقدار $z - z_\circ$ را قرار دهیم نمایش (۱) به‌دست می‌آید. به‌علاوه عبارت (۱۵) برای ضرایب a_n همان عبارت (۲) است، زیرا

$$\int_\Gamma \frac{g(z)dz}{z^{n+۱}} = \int_a^b \frac{f[z(t)]z'(t)}{[z(t)-z_\circ]^{n+۱}}dt = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^{n+۱}}.$$

همین‌طور ضرایب b_n در عبارت (۱۶) همان ضرایب در عبارت (۳) هستند.

۵۶. چند مثال

ضرایب سری لوران را عموماً به روشی غیر از مراجعهٔ مستقیم به نمایش انتگرالی آنها پیدا می‌کنند. این موضوع در مثالهای زیر نشان داده شده است، که در آنها همیشه فرض می‌کنیم اگر حوزهٔ طوقی مشخص باشد، سری لوران یک تابع مفروض، یکتاست. همانند سری تیلر، اثبات چنین یکتایی را تا بخش ۶۰ به تعویق می‌اندازیم.

مثال ۱. با قرار دادن $۱/z$ به‌جای z در بسط سری مکلورن

$$e^z = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \cdots \qquad (|z| < \infty),$$

بسط سری لوران زیر به‌دست می‌آید

$$e^{۱/z} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!z^n} = ۱ + \frac{۱}{۱!z} + \frac{۱}{۲!z^۲} + \frac{۱}{۳!z^۳} + \cdots \qquad (\circ < |z| < \infty).$$

توجه کنید که این سری لوران شامل هیچ توان مثبت z نیست، ضرایب توانهای مثبت صفرند. همچنین توجه کنید که ضریب $۱/z$ مساوی یک است؛ و بنابر قضیهٔ لوران در بخش ۵۵ آن ضریب برابر با عدد زیر است

$$b_۱ = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C e^{۱/z}dz,$$

که در آن C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت پیرامون مبدأ است. چون $b_۱ = ۱$، پس

$$\int_C e^{۱/z}dz = ۲\pi i.$$

این روش محاسبهٔ برخی انتگرالها روی مسیرهای سادهٔ بسته را در فصل ۶ مفصلاً شرح و بسط خواهیم داد.

مثال ۲. تابع $f(z) = 1/(z-i)^2$ هم‌اکنون به‌صورت سری لوران است که در آن $z_0 = i$. یعنی،

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n \qquad (0 < |z-i| < \infty),$$

که در آن $c_{-2} = 1$ و همهٔ ضرایب دیگر صفرند. بنابر فرمول (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران، داریم

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

که در آن C مثلاً دایرهٔ $|z-i| = R$ حول نقطهٔ $z_0 = i$ در جهت مثبت است. بنابراین (با تمرین ۱۰ بخش ۴۰ مقایسه کنید)

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0, & n \neq -2 \\ 2\pi i, & n = -2 \end{cases}$$

مثال ۳. تابع

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}, \tag{1}$$

که دارای دو نقطهٔ تکین $z = 1$ و $z = 2$ است در حوزه‌های

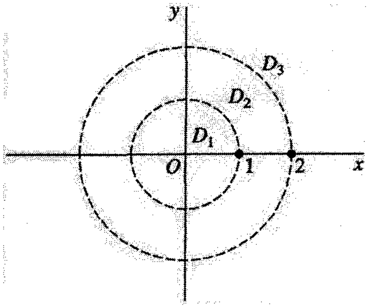
$$|z| < 1,\quad 1 < |z| < 2 \quad \text{و} \quad 2 < |z| < \infty$$

تحلیلی است. در هر یک از این حوزه‌ها که در شکل ۷۶، به‌ترتیب، با D_1، D_2 و D_3 نشان داده شده $f(z)$ دارای نمایشهای سری برحسب توانهای z است. همهٔ آنها را می‌توان با یادآوری این مطلب از مثال ۴ بخش ۵۴ به‌دست آورد که

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1).$$

نمایش در D_1 یک سری مکلورن است. برای پیدا کردن آن می‌نویسیم

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z/2)}$$



شکل ۷۶

و ملاحظه می‌کنیم که چون در $D_۱$ داریم $۱ > |z|$ و $۱ > |z/۲|$،

$$f(z) = -\sum_{n=۰}^{\infty} z^n + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{۲^{n+۱}} = \sum_{n=۰}^{\infty} (۲^{-n-۱} - ۱) z^n \qquad (|z| < ۱). \qquad (۲)$$

همچنین برای نمایش در $D_۲$ می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{۱}{z} \cdot \frac{۱}{۱ - (۱/z)} + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۱ - (z/۲)}.$$

چون اگر $۲ > |z| > ۱$ آن‌گاه $۱ > |۱/z|$ و $۱ > |z/۲|$، در نتیجه

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{z^{n+۱}} + \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{۲^{n+۱}} \qquad (۱ < |z| < ۲).$$

اگر به‌جای n، اندیس مجموعیابی در سری اول، $n - ۱$ قرار دهیم و سپس جای دو سری را عوض کنیم بسطی به‌دست می‌آید که به همان صورت بسط سری لوران (بخش ۵۵) است:

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{۲^{n+۱}} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{z^n} \qquad (۱ < |z| < ۲). \qquad (۳)$$

چون فقط یک چنین نمایشی برای $f(z)$ در طوق $۲ > |z| > ۱$ موجود است، بسط (۳) در واقع سری لوران $f(z)$ در آن حوزه است.

نمایش $f(z)$ در حوزهٔ بیکران $D_۳$ نیز یک سری لوران است. اگر عبارت (۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$f(z) = \frac{۱}{z} \cdot \frac{۱}{۱ - (۱/z)} - \frac{۱}{z} \cdot \frac{۱}{۱ - (۲/z)}$$

و ملاحظه کنیم که اگر $\text{۲} < |z| < \infty$ آن‌گاه $|\text{۱}/z| < \text{۱}$ و $|\text{۲}/z| < \text{۱}$، در می‌یابیم که

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\text{۱}}{z^{n+\text{۱}}} - \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\text{۲}^n}{z^{n+\text{۱}}} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\text{۱} - \text{۲}^n}{z^{n+\text{۱}}} \qquad (\text{۲} < |z| < \infty).$$

یعنی

$$f(z) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{\text{۱} - \text{۲}^{n-\text{۱}}}{z^n} \qquad (\text{۲} < |z| < \infty). \tag{۴}$$

تمرینها

۱. سری لورانی را بیابید که نمایش تابع

$$f(z) = z^{\text{۲}} \sin\left(\frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}}\right)$$

در حوزهٔ $\circ < |z| < \infty$ باشد.

جواب: $\text{۱} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^n}{(\text{۲}n+\text{۱})!} \cdot \frac{\text{۱}}{z^{\text{۴}n}}$.

۲. نمایش سری لوران زیر را به‌دست آورید

$$\frac{e^z}{(z+\text{۱})^{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{e}\left[\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(z+\text{۱})^n}{(n+\text{۲})!} + \frac{\text{۱}}{z+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{(z+\text{۱})^{\text{۲}}}\right] \qquad (\circ < |z+\text{۱}| < \infty).$$

۳. نمایشی برای تابع

$$f(z) = \frac{\text{۱}}{\text{۱}+z} = \frac{\text{۱}}{z} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۱}+(\text{۱}/z)}$$

برحسب توانهای منفی z بیابید به‌طوری که در حوزهٔ $\text{۱} < |z| < \infty$ معتبر باشد.

جواب: $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{z^n}$.

۴. دو بسط سری لوران برحسب توانهای z برای تابع

$$f(z) = \frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}(\text{۱}-z)},$$

ارائه دهید و نواحی معتبربودن این بسطها را مشخص سازید.

جواب: $\sum_{n=\circ}^{\infty} z^n + \frac{\text{۱}}{z} + \frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}} \quad (\circ < |z| < \text{۱})$؛ $-\sum_{n=\text{۳}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{z^n} \quad (\text{۱} < |z| < \infty)$.

۵. تابع $f(z) = (z+1)/(z-1)$ را

(الف) با سری مکلورن آن نمایش دهید و ناحیهٔ معتبربودن آن نمایش را معین کنید؛

(ب) با سری لوران آن برای حوزهٔ $1 < |z| < \infty$ نمایش دهید.

جواب: (الف) $(|z|<1)$ $-1-2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$؛ (ب) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

۶. نشان دهید که اگر $0 < |z-1| < 2$ آن‌گاه

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)}.$$

۷. دو بسط سری لوران برحسب توانهای z برای نمایش تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

ارائه دهید و نواحی معتبربودن این بسطها را مشخص کنید.

جواب: $(0<|z|<1)$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{2n+1}+\frac{1}{z}$؛ $(1<|z|<\infty)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}$.

۸. (الف) فرض کنید a عددی حقیقی باشد که $-1 < a < 1$. نمایش سری لوران زیر را به‌دست آورید

$$\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n} \qquad (|a| < |z| < \infty).$$

(ب) در رابطه‌ای که در قسمت (الف) به‌دست آمد، بنویسید $z = e^{i\theta}$ و سپس در رابطهٔ حاصل قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین را مساوی قرار دهید تا دستورهای مجموعیابی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

را به‌دست آورید که در آنها $-1 < a < 1$. (با تمرین ۴ بخش ۵۲ مقایسه کنید.)

۹. فرض کنید سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

در طوق $R_۲ < |z| < R_۱$ به تابع تحلیلی $X(z)$ همگرا باشد. این مجموع $X(z)$، تبدیل z از دنبالهٔ $x[n]$ $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$* نامیده می‌شود. با استفاده از عبارت (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران، نشان دهید که اگر طوق شامل دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ باشد، آن‌گاه مقدار وارون تبدیل z تابع $X(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x[n] = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

۱۰. (الف) فرض کنید z عدد مختلطی دلخواه و C دایرهٔ واحد

$$w = e^{i\phi} \qquad (-\pi \le \phi \le \pi)$$

در صفحهٔ w باشند. سپس با استفاده از مسیر مربوط به عبارت (۵)، بخش ۵۵، در مورد ضرایب سری لوران، که برای چنین سریهایی حول مبدأ در صفحهٔ w تنظیم شده است، نشان دهید که

$$\exp\left[\frac{z}{۲}\left(w - \frac{۱}{w}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n \qquad (۰ < |w| < \infty),$$

که در آن

$$J_n(z) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(n\phi - z\sin\phi)] d\phi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

(ب) به کمک تمرین ۶، بخش ۳۷، دربارهٔ انتگرالهای معین توابع مختلط زوج و فرد از یک متغیر حقیقی، نشان دهید که ضرایب قسمت (الف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت**

$$J_n(z) = \frac{۱}{\pi} \int_{۰}^{\pi} \cos(n\phi - z\sin\phi) d\phi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

۱۱. (الف) فرض کنید $f(z)$ معرف تابعی باشد که در یک حوزهٔ طوقی حول مبدأ، شامل دایرهٔ واحد $z = e^{i\phi}$ $(-\pi \le \phi \le \pi)$، تحلیلی است. این دایره را مسیر انتگرالگیری در فرمولهای (۲)

* تبدیل z در مطالعهٔ دستگاههای خطی گسسته‌ـزمان مطرح می‌شود. مثلاً فصل ۴ کتاب Oppenheim، Schafer و Buck را که در پیوست ۱ آمده است ببینید.

** این ضرایب $J_n(z)$ را توابع نوع اول بسل می‌نامند. اینها نقش مهمی در بعضی قسمتهای ریاضی کاربردی ایفا می‌کنند. مثلاً فصل ۸ کتاب زیر از مؤلفان، را ببینید:

"Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., 2001.

و (۳) بخش ۵۵، برای ضرایب a_n و b_n در سری لوران برحسب توانهای z بگیرید و نشان دهید که به‌ازای هر z در حوزهٔ طوقی داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\phi}\right)d\phi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right]d\phi .$$

(ب) بنویسید $u(\theta) = \operatorname{Re}\left[f(e^{i\theta})\right]$ و نشان دهید که چگونه از بسط قسمت (الف) نتیجه می‌شود که

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)d\phi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\cos[n(\theta-\phi)]d\phi .$$

این صورتی از بسط سری فوریهٔ تابع حقیقی‌مقدار $u(\theta)$ در بازهٔ $-\pi \le \theta \le \pi$ است. محدودیتهای روی $u(\theta)$ جدیتر از محدودیتهایی است که برای نمایش آن با سری فوریه لازم است.*

۵۷. همگرایی مطلق و یکنواخت سریهای توانی

این بخش و سه بخش بعدی، عمدتاً به شرح ویژگیهای متنوع سریهای توانی اختصاص دارند. خواننده‌ای که میل دارد سریعتر به بخش ۶۱ برسد، به‌سادگی می‌تواند قضیه‌ها و فرعهای این چهار بخش را بپذیرد و از اثبات آنها صرفنظر نماید.

از بخش ۵۲ یادآوری می‌کنیم که یک سری از اعداد مختلط مطلقاً همگراست هرگاه سری قدرمطلقهای آن اعداد همگرا باشد. قضیهٔ زیر دربارهٔ همگرایی مطلق سریهای توانی است.

قضیهٔ ۱. اگر سری توانی

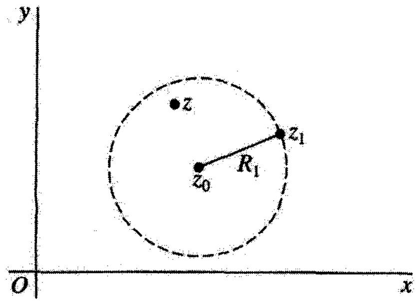
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

همگرا باشد وقتی $z = z_1$ $(z_1 \ne z_0)$، آن‌گاه به‌ازای هر نقطهٔ z در قرص باز $|z - z_0| < R_1$، مطلقاً همگراست، که در آن $R_1 = |z_1 - z_0|$ (شکل ۷۷).

ابتدا قضیه را برای $z_0 = 0$ ثابت می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \qquad (z_1 \ne 0)$$

* برای شرایط کافی دیگر، فصول ۳۱ و ۳۲ کتاب مذکور در پانوشت تمرین ۱۰ را ببینید.



شکل ۷۷

همگرا باشد. از این‌رو جملات $a_n z_۱^n$ کراندارند، یعنی به‌ازای یک عدد ثابت و مثبت M داریم (بخش ۵۲ را ببینید)

$$|a_n z_۱^n| \le M \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

اگر $|z| < |z_۱|$ و ρ معرف قدرمطلق $|z/z_۱|$ باشد، می‌بینیم که

$$|a_n z^n| = |a_n z_۱^n| \left|\frac{z}{z_۱}\right|^n \le M\rho^n \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots),$$

که در آن $\rho < ۱$. اما سریی که جملات آن اعداد حقیقی $M\rho^n (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ هستند یک سری هندسی است که اگر $\rho < ۱$، همگراست. بنابراین از آزمون مقایسه برای سریهای اعداد حقیقی نتیجه می‌گیریم که سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty} |a_n z^n|$$

در قرص باز $|z| < |z_۱|$ همگراست؛ و قضیه برای $z_۰ = ۰$ اثبات می‌شود.

وقتی $z_۰$ عدد ناصفر دلخواهی باشد، فرض می‌کنیم سری (۱) در $z = z_۱ (z_۱ \ne z_۰)$ همگرا باشد. اگر قرار دهیم $w = z - z_۰$، سری (۱) به

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n w^n \tag{۲}$$

تبدیل می‌شود و این سری در $w = z_۱ - z_۰$ همگراست. در نتیجه، چون درستی قضیه برای $z_۰ = ۰$ معلوم است، می‌بینیم که سری (۲) در قرص باز $|w| < |z_۱ - z_۰|$ مطلقاً همگراست.

سرانجام با قراردادن $z - z_\circ$ به‌جای w، هم در سری (۲) و هم در این شرط برقراری و قراردادن $|z_\circ - z_\text{۱}| = R_\text{۱}$، به اثبات قضیه، به‌صورتی که بیان شده است، می‌رسیم.

این قضیه بیان می‌کند که مجموعهٔ همهٔ نقاط داخل یک دایره حول $z_\circ$، یک ناحیهٔ همگرایی برای سری توانی (۱) است به شرط اینکه سری (۱) در نقطه‌ای غیر از $z_\circ$ همگرا باشد. بزرگترین دایرهٔ حول $z_\circ$، که در هر نقطهٔ داخلی آن سری (۱) همگرا باشد، دایرهٔ همگرایی سری (۱) نامیده می‌شود. بنابر قضیهٔ بالا، سری مذکور در هیچ نقطه‌ای مانند $z_\text{۲}$ در خارج آن دایره نمی‌تواند همگرا باشد، زیرا در آن حالت همه جا در درون دایرهٔ به مرکز $z_\circ$ که از $z_\text{۲}$ می‌گذرد، همگرا خواهد بود. در این‌صورت دایرهٔ اول نمی‌تواند دایرهٔ همگرایی باشد.

قضیهٔ بعد شامل اصطلاحی است که ابتدا باید آن را تعریف کنیم. فرض کنید که سری توانی (۱) دارای دایرهٔ همگرایی $|z - z_\circ| = R$ باشد و $S(z)$ و $S_N(z)$، به‌ترتیب، نمایش مجموع و مجموعهای جزئی آن سری باشند:

$$S(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n, \qquad S_N(z) = \sum_{n=\circ}^{N-\text{۱}} a_n (z - z_\circ)^n \qquad (|z - z_\circ| < R).$$

سپس تابع باقیمانده را تعریف می‌کنیم

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \qquad (|z - z_\circ| < R). \tag{۳}$$

چون به‌ازای هر مقدار ثابت z که $|z - z_\circ| < R$، سری توانی همگراست، می‌دانیم که باقیماندهٔ $\rho_N(z)$ به‌ازای هر چنین zی، وقتی N به بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. بنابر تعریف (۲)، بخش ۵۱، دربارهٔ حد یک دنباله، این بدان معنی است که متناظر با هر عدد مثبت ε، عدد صحیح و مثبتی مانند N_ε هست که

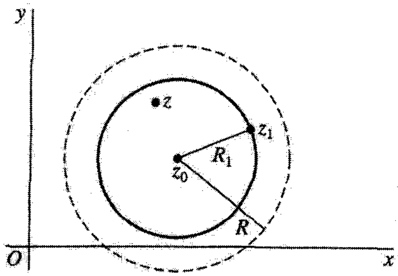
$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad N > N_\varepsilon. \tag{۴}$$

وقتی انتخاب N_ε فقط به مقدار ε بستگی داشته باشد و از نقطهٔ z، که در یک ناحیهٔ مشخص درون دایرهٔ همگرایی اختیار شده، مستقل باشد گوییم همگرایی در آن ناحیه یکنواخت است.

قضیهٔ ۲. اگر $z_\text{۱}$ نقطه‌ای در درون دایرهٔ همگرایی $|z - z_\circ| = R$ از سری توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n, \tag{۵}$$

باشد آن‌گاه سری در قرص بستهٔ $|z - z_\circ| \le R_\text{۱}$ همگرای یکنواخت است که در آن $|z_\text{۱} - z_\circ| = R_\text{۱}$. (شکل ۷۸)



شکل ۷۸

مانند اثبات قضیهٔ ۱، ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن $z_0 = 0$. می‌دانیم که نقطهٔ z_1 درون دایرهٔ همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{۶}$$

واقع است، توجه کنید که نقاطی با قدرمطلق بزرگتر از $|z_1|$ وجود دارند که برای آنها سری همگراست. پس بنابر قضیهٔ (۱)، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n| \tag{۷}$$

همگراست. فرض می‌کنیم m و N دو عدد صحیح مثبت باشند که $m > N$، می‌توانیم باقیمانده سریهای (۶) و (۷) را به‌ترتیب به شکل زیر بنویسیم

$$\rho_N(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} a_n z^n \tag{۸}$$

و

$$\sigma_N = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|. \tag{۹}$$

حال، بنابر تمرین ۳ بخش ۵۲،

$$|\rho_N(z)| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n=N}^{m} a_n z^n \right|;$$

و وقتی $|z| \le |z_1|$،

$$\left| \sum_{n=N}^{m} a_n z^n \right| \le \sum_{n=N}^{m} |a_n||z|^n \le \sum_{n=N}^{m} |a_n||z_1|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|.$$

در نتیجه

$$|\rho_N(z)| \le \sigma_N \quad \text{هرگاه} \quad |z| \le |z_۱|. \tag{۱۰}$$

چون σ_Nها باقیمانده‌های یک سری همگرا هستند، وقتی N به بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کنند. یعنی، به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد صحیحی مانند N_ε هست که

$$\sigma_N < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad N > N_\varepsilon. \tag{۱۱}$$

پس بنابر شرایط (۱۰) و (۱۱)، شرط (۴) به‌ازای هر z در قرص $|z| \le |z_۱|$ برقرار است؛ و مقدار N_ε مستقل از انتخاب z است. بنابراین همگرایی سری (۶) در آن قرص، یکنواخت است.

البته تعمیم اثبات به حالتی که $z_۰$ دلخواه باشد با جایگذاری $w = z - z_۰$ در سری (۵)، انجام می‌شود. برای این حالت فرض قضیه این است که $z_۱ - z_۰$ نقطه‌ای در درون دایرهٔ همگرایی سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n w^n$$

یعنی $|w| = R$ است. چون می‌دانیم که این سری باید در قرص بستهٔ $|w| \le |z_۱ - z_۰|$ همگرای یکنواخت باشد، روشن است که حکم قضیه نتیجه می‌شود.

۵۸. پیوستگی مجموع سری توانی

قضیهٔ بعد نتیجهٔ مهمی از همگرایی یکنواخت است، که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت.

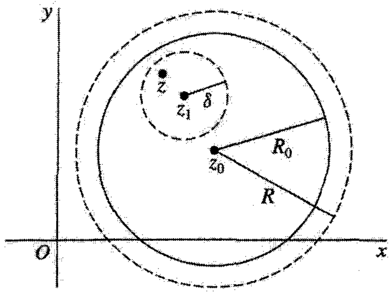
قضیه. سری توانی

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n (z - z_۰)^n \tag{۱}$$

در هر نقطهٔ داخلی دایرهٔ همگرایی خود، یعنی $|z - z_۰| = R$، یک تابع پیوستهٔ $S(z)$ را نمایش می‌دهد.

روش دیگری برای بیان قضیهٔ بالا این است که اگر $S(z)$ نمایش مجموع سری (۱) در درون دایرهٔ همگرایی آن یعنی $|z - z_۰| = R$ باشد و $z_۱$ نقطه‌ای در درون آن دایره، آن‌گاه به‌ازای هر عدد مثبت ε، عدد مثبتی مانند δ هست به‌طوری که

$$|S(z) - S(z_۱)| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |z - z_۱| < \delta, \tag{۲}$$



شکل ۷۹

عدد δ به‌قدر کافی کوچک است به‌طوری که z در حوزهٔ تعریف تابع $S(z)$، یعنی $|z - z_\circ| < R$ واقع باشد. [تعریف ۴، بخش ۱۷، برای پیوستگی را ببینید.]

برای نشان‌دادن این مطلب، فرض می‌کنیم $S_N(z)$ معرف مجموع N جملهٔ اول سری (۱) باشد و تابع باقیمانده را می‌نویسیم

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \qquad (|z - z_\circ| < R).$$

پس از آنجا که

$$S(z) = S_N(z) + \rho_N(z) \qquad (|z - z_\circ| < R),$$

می‌توان نوشت

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + \rho_N(z) - \rho_N(z_1)|,$$

یا

$$|S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)|. \qquad (۳)$$

اگر $R_\circ$ بزرگتر از $|z_1 - z_\circ|$ ولی کوچکتر از R، شعاع دایرهٔ همگرایی سری (۱)، باشد (شکل ۷۹ را ببینید)، بنابر همگرایی یکنواخت در قرص بستهٔ $|z - z_\circ| \leq R_\circ$ که در قضیهٔ ۲ بخش ۵۷ بیان شد، مطمئناً عدد صحیح مثبتی مانند N_ε هست به‌طوری که به‌ازای هر z در این قرص بسته داریم

$$|\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{۳} \qquad \text{هرگاه} \qquad N > N_\varepsilon. \qquad (۴)$$

به‌خصوص اگر همسایگی $|z - z_1| < \delta$ از z_1 را به‌قدر کافی کوچک اختیار کنیم تا مشمول در قرص بستهٔ $|z - z_\circ| \leq R_\circ$ باشد، به‌ازای هر نقطهٔ z در این همسایگی، شرط (۴) برقرار است.

حال به‌ازای هر مقدار N، مجموع جزئی $S_N(z)$، یک چندجمله‌ای است و لذا در z_1 پیوسته است. به‌خصوص وقتی $N = N_\varepsilon + 1$، می‌توانیم δ را آن‌قدر کوچک بگیریم که

$$|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{هرگاه} \qquad |z - z_1| < \delta. \tag{5}$$

با نوشتن $N = N_\varepsilon + 1$ در نابرابری (۱۳) و استفاده از این واقعیت که احکام (۴) و (۵) وقتی $N = N_\varepsilon + 1$ برقرارند، در می‌یابیم که

$$|S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{هرگاه} \qquad |z - z_1| < \delta.$$

این همان حکم (۲) است و قضیه ثابت می‌شود.

با جایگذاری $w = 1/(z - z_0)$ می‌توان دو قضیه و فرع این بخش را طوری اصلاح کرد که در مورد سریهایی از نوع زیر کارایی داشته باشند

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \tag{6}$$

مثلاً اگر سری (۶)در نقطهٔ z_1 $(z_1 \neq z_0)$ همگرا باشد، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

باید به تابع پیوسته‌ای مطلقاً همگرا باشد هرگاه

$$|w| < \frac{1}{|z_1 - z_0|}. \tag{7}$$

بنابراین چون نابرابری (۷) همان نابرابری $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ است، سری (۶) باید در خارج دایرهٔ $|z - z_0| = R_1$ به تابع پیوسته‌ای مطلقاً همگرا شود که در آن $R_1 = |z_1 - z_0|$. همچنین می‌دانیم که اگر نمایش سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

در طوق $R_1 < |z - z_0| < R_2$ معتبر باشد آن‌گاه هر دو سری سمت راست در هر طوق بسته‌ای که در داخل ناحیهٔ معتبربودن و با آن متحدالمرکز باشد، همگرای یکنواخت هستند.

۵۹. انتگرالگیری و مشتقگیری از سریهای توانی

دیدیم که سری توانی

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (1)$$

در هر نقطه در درون دایرهٔ همگرایی خود، تابع پیوسته‌ای را نمایش می‌دهد. در این بخش ثابت می‌کنیم که مجموع $S(z)$ عملاً در درون آن دایره، تحلیلی است. اثبات بستگی به قضیهٔ زیر دارد که به خودی خود با ارزش است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم C نمایش مسیر دلخواهی در داخل دایرهٔ همگرایی سری توانی (۱) است و $g(z)$ تابع دلخواهی است که بر C پیوسته است. در این‌صورت می‌توان از سری حاصل از ضرب هر جملهٔ سری توانی در $g(z)$، جمله به جمله بر C انتگرال گرفت، یعنی

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz \,. \qquad (2)$$

برای اثبات این قضیه، توجه می‌کنیم که چون $g(z)$ و $S(z)$ که مجموع یک سری توانی است هر دو روی C پیوسته‌اند، انتگرال حاصلضرب

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)(z - z_0)^n + g(z)\rho_N(z),$$

روی C موجود است، که در آن $\rho_N(z)$ باقیماندهٔ سری مفروض بعد از N جمله است. در اینجا جملات مجموع متناهی نیز بر مسیر C پیوسته و بنابراین انتگرالهایشان بر C موجودند. در نتیجه باید انتگرال $g(z)\rho_N(z)$ موجود باشد و می‌توان نوشت

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z) dz \,. \qquad (3)$$

فرض کنید M مقدار ماکسیمم $|g(z)|$ بر C و L معرف طول C باشد. با توجه به همگرایی یکنواخت سری توانی مفروض (بخش ۵۷)، می‌دانیم که به‌ازای هر عدد مثبت ε، عدد صحیح N_εی موجود است به قسمی که به‌ازای هر نقطهٔ z روی C

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad N > N_\varepsilon.$$

چون N_ε مستقل از z است، در می‌یابیم که

$$\left|\int_C g(z)\rho_N(z)dz\right| < M\varepsilon L \qquad \text{هرگاه} \qquad N > N_\varepsilon.$$

یعنی

$$\lim_{N\to\infty}\int_C g(z)\rho_N(z)dz = \circ\,.$$

بنابراین از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود که

$$\int_C g(z)S(z)dz = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=\circ}^{N-\backslash} a_n \int_C g(z)(z-z_\circ)^n dz\,.$$

این همان تساوی (۲) است و قضیهٔ ۱ ثابت می‌شود.

اگر به‌ازای هر مقدار z در قرص باز محدود به دایرهٔ همگرایی سری توانی (۱)، $|g(z)| = ۱$، چون به‌ازای هر $n = \circ, ۱, ۲, \ldots$ تابع $(z-z_\circ)^n$ تام است، آن‌گاه به‌ازای هر مسیر بستهٔ C واقع در آن حوزه داریم

$$\int_C g(z)(z-z_\circ)^n dz = \int_C (z-z_\circ)^n dz = \circ \qquad (n = \circ, ۱, ۲, \ldots)\,.$$

پس بنابر رابطهٔ (۲) به‌ازای هر چنین مسیری

$$\int_C S(z)dz = \circ$$

و بنابر قضیهٔ موررا (بخش ۴۸) تابع $S(z)$ در سراسر حوزه تحلیلی است. این نتیجه را به‌صورت یک فرع بیان می‌کنیم.

فرع. $S(z)$، مجموع سری توانی (۱)، در هر نقطهٔ z در درون دایرهٔ همگرایی آن سری تحلیلی است.

این فرع اغلب در اثبات تحلیلی‌بودن توابع و محاسبهٔ حدود مفید است.

مثال ۱. برای روشن‌شدن مطلب، نشان می‌دهیم تابعی که با ضابطه‌های

$$f(z) = \begin{cases} (\sin z)/z, & z \neq \circ \\ ۱, & z = \circ \end{cases}$$

تعریف شده است، تام است. چون برای هر مقدار z، بسط سری مکلورن

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\sin z$ را نمایش می‌دهد، اگر $z \neq 0$ آن‌گاه سری حاصل از تقسیم هر جملهٔ آن سری بر z، یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots , \tag{4}$$

به $f(z)$ همگراست. اما وقتی $z = 0$، به‌وضوح سری (۴) به $f(0)$ همگراست. بنابراین به‌ازای هر z، $f(z)$ با سری توانی همگرای (۴) نمایش داده می‌شود و در نتیجه f یک تابع تام است. توجه کنید که چون f در $z = 0$ پیوسته است، و وقتی $z \neq 0$، $(\sin z)/z = f(z)$، داریم

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = 1. \tag{5}$$

این نتیجه‌ای است که از قبل می‌دانستیم، زیرا این حد، تعریف مشتق $\sin z$ در $z = 0$ است.

در ابتدای بخش ۵۴، ملاحظه کردیم که سری تیلر تابع f حول نقطهٔ z_0، در هر نقطهٔ z در داخل دایره‌یی به مرکز z_0 که از نزدیکترین نقطهٔ z_1 که f در آن تحلیلی نیست می‌گذرد، به $f(z)$ همگراست. حال با توجه به فرع بالا، می‌دانیم که دایرهٔ بزرگتری حول z_0 موجود نیست به قسمی که در هر نقطهٔ z در داخل آن، سری تیلر به $f(z)$ همگرا باشد. زیرا اگر چنین دایره‌یی موجود باشد f در z_1 تحلیلی خواهد بود، اما f در z_1 تحلیلی نیست.

حال قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۱ ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۲. از سری توانی (۱) می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت. یعنی در هر نقطهٔ z در داخل دایرهٔ همگرایی آن سری داریم

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \tag{6}$$

برای اثبات این قضیه فرض می‌کنیم z معرف نقطهٔ دلخواهی در داخل دایرهٔ همگرایی سری (۱) و C مسیر ساده و بسته‌ای در جهت مثبت باشد که z را در بر گرفته و داخل دایره است. همچنین تابع

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s-z)^2} \tag{7}$$

را در هر نقطهٔ s روی C تعریف می‌کنیم. چون تابع $g(s)$ روی C پیوسته است بنابر قضیهٔ (۱) داریم

$$\int_C g(s)S(s)ds = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \int_C g(s)(s-z_\circ)^n ds. \qquad (\text{۸})$$

چون تابع $S(s)$ درون و روی C تحلیلی است با استفاده از نمایش انتگرالی مشتق، در بخش ۴۸، می‌توان نوشت

$$\int_C g(s)S(s)ds = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i}\int_C \frac{S(s)ds}{(s-z)^{\text{۲}}} = S'(z).$$

به‌علاوه

$$\int_C g(s)(s-z_\circ)^n ds = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i}\int_C \frac{(s-z_\circ)^n}{(s-z)^{\text{۲}}}ds = \frac{d}{dz}(z-z_\circ)^n \quad (n=\circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots).$$

بنابراین رابطهٔ (۸) به رابطهٔ زیر که همان رابطهٔ (۶) است تبدیل می‌شود

$$S'(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z-z_\circ)^n.$$

این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

مثال ۲. در مثال ۴، بخش ۵۴، دیدیم که

$$\frac{\text{۱}}{z} = \sum_{n=\circ}^{\infty}(-\text{۱})^n(z-\text{۱})^n \qquad (|z-\text{۱}| < \text{۱}).$$

با مشتقگیری از هر طرف این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\frac{-\text{۱}}{z^{\text{۲}}} = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty}(-\text{۱})^n n(z-\text{۱})^{n-\text{۱}} \qquad (|z-\text{۱}| < \text{۱}),$$

یا

$$\frac{\text{۱}}{z^{\text{۲}}} = \sum_{n=\circ}^{\infty}(-\text{۱})^n(n+\text{۱})(z-\text{۱})^n \qquad (|z-\text{۱}| < \text{۱}).$$

۶۰. یکتایی نمایش سریها

یکتایی نمایش سریهای تیلر و لوران را که به‌ترتیب، در بخشهای ۵۴ و ۵۶ بدون اثبات پذیرفتیم به سادگی می‌توان از قضیهٔ ۱، بخش ۵۹ به‌دست آورد. ابتدا یکتایی نمایشهای سری تیلر را در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۱. اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{۱}$$

در همهٔ نقاط داخلی دایرهٔ $|z-z_0|=R$ به $f(z)$ همگرا باشد، این سری بسط سری تیلر f برحسب توانهای $z-z_0$ است.

برای اثبات این قضیه نمایش سری

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad (|z-z_0|<R) \tag{۲}$$

در فرض قضیه را، با استفاده از اندیس مجموعیابی m می‌نویسیم:

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-z_0)^m \qquad (|z-z_0|<R).$$

سپس، با مراجعه به قضیهٔ ۱، بخش ۵۹، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C g(z)f(z)dz=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\int_C g(z)(z-z_0)^m dz, \tag{۳}$$

که در آن $g(z)$ هر یک از توابع

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{۴}$$

و C دایره‌یی به مرکز z_0 و شعاع کمتر از R است.

بنابر صورت تعمیم یافتهٔ فرمول انتگرال کوشی، عبارت (۵) بخش ۴۸، (همچنین فرع بخش ۵۹ را ببینید) در می‌یابیم که

$$\int_C g(z)f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \tag{۵}$$

و چون (تمرین ۱۰ بخش ۴۰ را ببینید)

$$\int_C g(z)(z-z_0)^m dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z-z_0)^{n-m+1}}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \tag{۶}$$

واضح است که

$$\sum_{m=\circ}^{\infty} a_m \int_C g(z)(z-z_\circ)^m dz = a_n \,. \tag{۷}$$

حال با توجه به روابط (۵) و (۷)، رابطهٔ (۳) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!} = a_n,$$

و این نشان می‌دهد که سری (۲)، در واقع سری تیلر f حول نقطهٔ $z_\circ$ است.

توجه کنید چگونه از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که اگر سری (۱) در هر نقطه از یک همسایگی $z_\circ$ به صفر همگرا باشد، آن‌گاه تمام ضرایب a_n، باید صفر باشند.

قضیهٔ دوم مربوط به یکتایی نمایش سری لوران است.

قضیهٔ ۲. اگر سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_\circ)^n} \tag{۸}$$

در همهٔ نقاط یک حوزهٔ طوقی حول $z_\circ$ به $f(z)$ همگرا باشد، این سری بسط سری لوران f برحسب توانهای $z - z_\circ$ برای آن حوزه است.

روش اثبات در اینجا مشابه روشی است که در اثبات قضیهٔ ۱ به‌کار رفت. بنابر فرض قضیه، یک حوزهٔ طوقی حول $z_\circ$ وجود دارد به‌طوری که برای هر نقطهٔ z در آن طوق داریم

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^n \,.$$

فرض کنید $g(z)$ طوری باشد که در رابطهٔ (۴) تعریف شده ولی n بتواند عدد صحیح منفی هم باشد. همچنین فرض کنید C دایرهٔ دلخواهی حول این طوق باشد که به مرکز $z_\circ$ و در جهت مثبت گرفته شده است. در این‌صورت با استفاده از اندیس مجموعیابی m و پذیرفتن قضیهٔ ۱ بخش ۵۹ برای سریهایی که شامل توانهای منفی و نامنفی $z - z_\circ$ باشند (تمرین ۱۰)، می‌توان نوشت

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_\circ)^m dz,$$

یا

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_۰)^m dz. \qquad (۹)$$

چون روابط (۶) وقتی m و n اعداد صحیح منفی باشند نیز برقرارند، رابطهٔ (۹) به

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} = c_n,$$

تبدیل می‌شود که همان عبارت (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران f در این طوق است.

تمرینها

۱. با مشتقگیری از نمایش سری مکلورن

$$\frac{۱}{۱-z} = \sum_{n=۰}^{\infty} z^n \qquad (|z| < ۱),$$

نمایشهای زیر را به‌دست آورید

$$\frac{۱}{(۱-z)^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)z^n \qquad (|z| < ۱)$$

و

$$\frac{۲}{(۱-z)^۳} = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)(n+۲)z^n \qquad (|z| < ۱).$$

۲. با قرار دادن $۱/(z-۱)$ به جای z در بسط

$$\frac{۱}{(۱-z)^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)z^n \qquad (|z| < ۱),$$

که در تمرین ۱ به‌دست آمد، نمایش سری لوران زیر را به‌دست آورید

$$\frac{۱}{z^۲} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n(n-۱)}{(z-۱)^n} \qquad (۱ < |z-۱| < \infty).$$

(با مثال ۲ بخش ۵۹ مقایسه کنید.)

۳. سری تیلر تابع

$$\frac{۱}{z} = \frac{۱}{۲+(z-۲)} = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+(z-۲)/۲}$$

حول نقطهٔ $z_\circ = ۲$ را پیدا کنید. سپس با مشتقگیری جمله به جمله از آن سری نشان دهید که

$$\frac{۱}{z^۲} = \frac{۱}{۴}\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n(n+۱)\left(\frac{z-۲}{۲}\right)^n \quad (|z-۲|<۲).$$

۴. به کمک سریها، ثابت کنید تابع f که با ضابطه‌های

$$f(z) = \begin{cases} (e^z-۱)/z, & z \neq \circ \\ ۱, & z = \circ \end{cases}$$

تعریف می‌شود، تام است.

۵. ثابت کنید اگر

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z}{z^۲-(\pi/۲)^۲}, & z \neq \pm\pi/۲ \\ \dfrac{-۱}{\pi}, & z = \pm\pi/۲ \end{cases}$$

آن‌گاه f تابعی تام است.

۶. در صفحهٔ w از بسط سری تیلر (مثال ۴ بخش ۵۴ را ببینید)

$$\frac{۱}{w} = \sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n(w-۱)^n \quad (|w-۱|<۱)$$

در امتداد مسیری از $w=۱$ تا $w=z$ در داخل دایرهٔ همگرایی انتگرال گرفته، نمایش زیر را به‌دست آورید

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}(z-۱)^n \quad (|z-۱|<۱).$$

۷. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۶ نشان دهید که اگر

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log} z}{z-۱}, & z \neq ۱ \\ ۱, & z = ۱ \end{cases}$$

آن‌گاه f در سراسر حوزهٔ $\circ < |z| < \infty$، $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ تحلیلی است.

۸. ثابت کنید که اگر f در $z_\circ$ تحلیلی باشد و $f(z_\circ) = f'(z_\circ) = \cdots = f^{(m)}(z_\circ) = \circ$، آن‌گاه تابع g که با ضابطه‌های

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_\circ)^{m+\text{۱}}}, & z \neq z_\circ \\ \dfrac{f^{(m+\text{۱})}(z_\circ)}{(m+\text{۱})!}, & z = z_\circ \end{cases}$$

تعریف می‌شود در $z_\circ$ تحلیلی است.

۹. فرض کنید تابع $f(z)$ در درون دایرهٔ $|z-z_\circ| = R$ دارای نمایش سری توانی

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z-z_\circ)^n$$

باشد. با استفاده از قضیهٔ ۲ بخش ۵۹ در مورد مشتقگیری جمله به جمله از چنین سریهایی و استقرای ریاضی نشان دهید که اگر $|z-z_\circ| < R$، آن‌گاه

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z-z_\circ)^k \qquad (n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots).$$

سپس با قراردادن $z = z_\circ$ نشان دهید که ضرایب $a_n (n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$ همان ضرایب سری تیلر f حول $z_\circ$ است. بدین‌ترتیب برهان دیگری برای قضیهٔ ۱، بخش ۶۰، ارائه دهید.

۱۰. دو سری

$$S_\text{۱}(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z-z_\circ)^n, \qquad S_\text{۲}(z) = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_\circ)^n},$$

را که در یک حوزهٔ طوقی به مرکز $z_\circ$ همگرا هستند در نظر بگیرید. فرض کنید C معرف مسیری واقع در این طوق باشد و $g(z)$ تابعی پیوسته در C. اثبات قضیهٔ ۱، بخش ۵۹، برای

$$\int_C g(z) S_\text{۱}(z) dz = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_\circ)^n dz,$$

را کمی تغییر داده ثابت کنید که

$$\int_C g(z) S_\text{۲}(z) dz = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} b_n \int_C \frac{g(z)}{(z-z_\circ)^n} dz.$$

با استفاده از این روابط نتیجه بگیرید که اگر

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n + \sum_{n=\backslash}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_\circ)^n},$$

آنگاه

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C g(z)(z-z_\circ)^n dz\,.$$

۱۱. نشان دهید که تابع

$$f_۲(z) = \frac{۱}{z^۲+۱} \qquad (z \neq \pm i)$$

ادامهٔ تحلیلی (بخش ۲۶) تابع

$$f_۱(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n z^{۲n} \qquad (|z| < ۱)$$

به حوزهٔ متشکل از همهٔ نقاط صفحهٔ z بجز $z = \pm i$ است.

۱۲. نشان دهید که تابع $f_۲(z) = ۱/z^۲$ $(z \neq \circ)$ عبارت است از ادامهٔ تحلیلی (بخش ۲۶) تابع

$$f_۱(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty}(n+۱)(z+۱)^n \qquad (|z+۱| < ۱)$$

به حوزهٔ متشکل از همهٔ نقاط صفحهٔ z بجز $z = \circ$.

۶۱. ضرب و تقسیم سریهای توانی

فرض کنید هر یک از سریهای توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=\circ}^{\infty} b_n(z-z_\circ)^n \tag{۱}$$

در درون دایرهٔ $|z-z_\circ| = R$ همگرا باشد. پس مجموعهای آنها، به‌ترتیب، $f(z)$ و $g(z)$ توابعی تحلیلی در قرص $|z-z_\circ| < R$ (بخش ۵۹) هستند و حاصلضرب این مجموعها بسط سری تیلری دارد که در آن قرص معتبر است:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^n \qquad (|z-z_\circ| < R)\,. \tag{۲}$$

بنابر قضیهٔ ۱، بخش ۶۰، سریهای (۱) خود سری تیلرند. بنابراین سه ضریب اول در سری

(۲) با ضابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$c_0 = f(z_0)g(z_0) = a_0 b_0 ,$$
$$c_1 = \frac{f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)}{1!} = a_0 b_1 + a_1 b_0 ,$$

و

$$c_2 = \frac{f(z_0)g''(z_0) + 2f'(z_0)g'(z_0) + f''(z_0)g(z_0)}{2!} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 .$$

فرمول کلی برای ضریب c_n را می‌توان به‌آسانی با استناد به قاعدهٔ لایبنیتس برای مشتق nام حاصلضرب دو تابع مشتقپذیر به‌دست آورد (تمرین ۶)

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z), \qquad (3)$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

طبق معمول $f^{(0)}(z) = f(z)$ و $0! = 1$. آشکارا دیده می‌شود که

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k};$$

و لذا می‌توان بسط (۲) را به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} f(z)g(z) = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)(z - z_0) \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(z - z_0)^2 + \cdots \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(z - z_0)^n + \cdots \quad (|z - z_0| < R). \qquad (4) \end{aligned}$$

سری (۴) همان سریی است که از ضرب جمله به جملهٔ دو سری (۱) در هم و دسته‌بندی جملاتی که دارای یک توان $z - z_0$ هستند حاصل می‌شود، این را حاصلضرب کوشی دو سری مفروض می‌نامند.

مثال ۱. تابع $e^z/(1+z)$ دارای نقطهٔ تکینی در $z=-1$ است و لذا نمایش سری مکلورن آن در قرص باز $|z|<1$ معتبر است. اولین سه جملهٔ ناصفر آن به‌آسانی با نوشتن

$$\frac{e^z}{1+z}=e^z\frac{1}{1-(-z)}=\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)(1-z+z^2-z^3+\cdots)$$

و ضرب جمله به جملهٔ دو سری به‌دست می‌آید. به‌عبارت دقیقتر، می‌توان هر یک از جملات سری اول را در ۱ و سپس هر یک از جملات را در $-z$ ضرب کرد و غیره. روش رده‌بندی زیر را پیشنهاد می‌کنیم، که در آن توانهای مساوی z به‌طور قائم دسته‌بندی شده‌اند به قسمی که ضرایب آنها را بتوان به‌سهولت با هم جمع کرد:

$$\begin{aligned}
&1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\\
&\qquad -z-z^2-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{6}z^4-\cdots\\
&\qquad\qquad z^2+z^3+\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{6}z^5+\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad -z^3-z^4-\frac{1}{2}z^5-\frac{1}{6}z^6-\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

نتیجهٔ مطلوب عبارت است از

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots\qquad(|z|<1).\tag{۵}$$

با این فرض ادامه می‌دهیم که $f(z)$ و $g(z)$ معرف مجموعهای سریهای (۱) باشند و فرض می‌کنیم که $g(z)\neq 0$ هرگاه $|z-z_0|<R$. چون خارج‌قسمت $f(z)/g(z)$ در سراسر قرص $|z-z_0|<R$ تحلیلی است، دارای نمایش سری تیلر زیر است

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-z_0)^n\qquad(|z-z_0|<R),\tag{۶}$$

که در آن ضرایب d_n را می‌توان با مشتقگیری متوالی از $f(z)/g(z)$ و محاسبهٔ مشتقات در $z=z_0$ به‌دست آورد. نتایج همان است که با تقسیم صوری اولین سری (۱) بر دومین سری آن به‌دست می‌آید. چون عموماً در عمل فقط به چند جملهٔ اول نیاز داریم، این روش مشکل نیست.

مثال ۲. همان‌طور که در بخش ۳۴ اشاره شد صفرهای تابع تام $\sinh z$ اعداد $z = n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ هستند. بنابراین خارج‌قسمت

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^2(z + z^3/3! + z^5/5! + \cdots)},$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots}\right), \qquad (7)$$

دارای نمایش سری لورانی در قرص محذوف $0 < |z| < \pi$ است. مخرج کسر داخل پرانتز سمت راست عبارت (۷) یک سری توانی است که وقتی $z \neq 0$ به $(\sinh z)/z$ و وقتی $z = 0$ به ۱ همگراست. بنابراین مجموع این سری هیچ‌جا در قرص $|z| < \pi$ صفر نیست و نمایش سری توانی این کسر را می‌توان به روش زیر با تقسیم یک بر این سری به‌دست آورد:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \cdots \\
\cline{2-2}
 & 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right] z^4 + \cdots \\
1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \cdots & \\
\hline
-\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \cdots & \\
-\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{(3!)^2}z^4 - \cdots & \\
\hline
\left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right] z^4 + \cdots & \\
\left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right] z^4 + \cdots & \\
\hline
\vdots &
\end{array}$$

یعنی،

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right] z^4 + \cdots,$$

یا

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}=1-\frac{1}{6}z^2+\frac{7}{360}z^4+\cdots \qquad (|z|<\pi). \qquad (8)$$

بنابراین

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{7}{360}z+\cdots \qquad (0<|z|<\pi). \qquad (9)$$

گرچه فقط سه جملهٔ اول ناصفر این سری لوران را ارائه داده‌ایم اما با ادامهٔ تقسیم می‌توان هر تعداد از جملات را پیدا کرد.

تمرینها

۱. با استفاده از حاصلضرب سریها، نشان دهید که

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+1-\frac{1}{2}z-\frac{5}{6}z^2+\cdots \qquad (0<|z|<1).$$

۲. با نوشتن $\csc z=1/\sin z$ و استفاده از تقسیم، نشان دهید که

$$\csc z=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z+\left[\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{5!}\right]z^3+\cdots \quad (0<|z|<\pi).$$

۳. با استفاده از تقسیم نمایش سری لوران را به‌دست آورید

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z-\frac{1}{720}z^3+\cdots \quad (0<|z|<2\pi).$$

۴. با استفاده از بسط

$$\frac{1}{z^2\sinh z}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{7}{360}z+\cdots \qquad (0<|z|<\pi).$$

در مثال ۲، بخش ۶۱، و روشی که در مثال ۱، بخش ۵۶ تشریح شد نشان دهید اگر C دایرهٔ $|z|=1$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، آن‌گاه

$$\int_C \frac{dz}{z^2\sinh z}=-\frac{\pi i}{3}.$$

۵. طی مراحل زیر، که روش مستقیم دیگری را جهت تقسیم سریها نشان می‌دهد، نمایش (۸) مثال ۲، بخش ۶۱، را به‌دست آورید.

(الف) قرار دهید

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\cdots}=d_0+d_1z+d_2z^2+d_3z^3+d_4z^4+\cdots,$$

که در آن ضرایب سری توانی طرف راست با ضرب دو سری در معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$1=\left(1+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)(d_0+d_1z+d_2z^2+d_3z^3+d_4z^4+\cdots).$$

با انجام این ضرب نشان دهید که اگر $|z|<\pi$ آن‌گاه

$$(d_0-1)+d_1z+\left(d_2+\frac{1}{3!}d_0\right)z^2+\left(d_3+\frac{1}{3!}d_1\right)z^3+\left(d_4+\frac{1}{3!}d_2+\frac{1}{5!}d_0\right)z^4+\cdots=0$$

(ب) با مساوی صفر قراردادن ضرایب در آخرین سری قسمت (الف) مقادیر d_0، d_1، d_2، d_3 و d_4 را بیابید. با این مقادیر، اولین رابطهٔ قسمت (الف) تبدیل به رابطهٔ (۸) بخش ۶۱ می‌شود.

۶. با استفاده از استقرای ریاضی درستی فرمول (۳) بخش ۶۱ را برای مشتق nام حاصلضرب دو تابع مشتقپذیر تحقیق کنید.

۷. فرض کنید $f(z)$ تابع تامی باشد که با یک سری به‌صورت زیر نمایش داده شده است

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \qquad (|z|<\infty).$$

(الف) با مشتقگیری متوالی از تابع مرکب $g(z)=f[f(z)]$ اولین سه جملهٔ ناصفر در سری مکلورن $g(z)$ را به‌دست آورید و بدین‌ترتیب نشان دهید که

$$f[f(z)]=z+2a_2z^2+2(a_2^2+a_3)z^3+\cdots \qquad (|z|<\infty).$$

(ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را به روش صوری چنین به‌دست آورید که بنویسید

$$f[f(z)]=f(z)+a_2[f(z)]^2+a_3[f(z)]^3+\cdots$$

و در سمت راست این رابطه به جای $f(z)$ نمایش سری آن را قرار دهید و جملاتی را که توان z آنها یکی است با هم بگیرید.

(ج) با به‌کاربردن نتیجهٔ قسمت (الف) برای تابع $f(z) = \sin z$ نشان دهید که

$$\sin(\sin z) = z - \frac{۱}{۳}z^{۳} + \cdots \qquad (|z| < \infty).$$

۸. اعداد اویلر عبارت‌اند از اعداد E_n $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ در نمایش سری مکلورن

$$\frac{۱}{\cosh z} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \qquad (|z| < \pi/۲).$$

بگویید چرا این نمایش در قرص نشان‌داده‌شده معتبر است و چرا

$$E_{۲n+۱} = ۰ \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

سپس نشان دهید که

$$E_۰ = ۱, \quad E_۲ = -۱, \quad E_۴ = ۵, \quad E_۶ = -۶۱.$$

۶

مانده‌ها و قطبها

قضیهٔ کوشی‌ـگورسا (بخش ۴۴) بیان می‌کند که اگر تابعی در همهٔ نقاط درون و روی مسیر ساده و بستهٔ C تحلیلی باشد، آن‌گاه انتگرال تابع پیرامون آن مسیر صفر است. ولی اگر تابع در تعدادی متناهی نقطه از نقاط درونی C تحلیلی نباشد، همان‌طورکه در این فصل خواهیم دید، اثر این نقاط از طریق عدد مشخصی موسوم به مانده در مقدار انتگرال ظاهر می‌شود. در اینجا نظریهٔ مانده‌ها را ارائه می‌دهیم و در فصل ۷ استفادهٔ آنها را در برخی زمینه‌های ریاضی کاربردی نشان می‌دهیم.

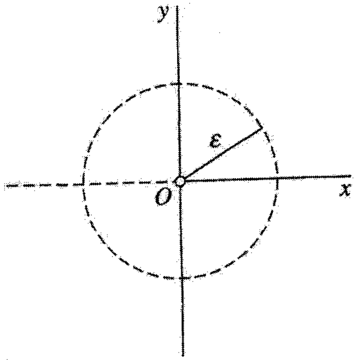
۶۲. مانده‌ها

یادآوری می‌کنیم (بخش ۲۳) که نقطهٔ $z_\circ$ یک نقطهٔ تکین تابع f نامیده می‌شود، اگر f در $z_\circ$ تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی $z_\circ$ تحلیلی باشد. نقطهٔ تکین $z_\circ$ را تنها نامند هرگاه علاوه بر این، همسایگی محذوفی از $z_\circ$ مانند $\circ < |z - z_\circ| < \varepsilon$ موجود باشد که f در سراسر آن تحلیلی است.

مثال ۱. تابع

$$\frac{z+\text{۱}}{z^{\text{۳}}(z^{\text{۲}}+\text{۱})}$$

دارای سه نقطهٔ تکین تنهای $z=\circ$، $z=\pm i$ است.



شکل ۸۰

مثال ۲. مبدأ یک نقطهٔ تکین شاخهٔ اصلی (بخش ۳۰)

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta \quad (r > ۰, -\pi < \Theta < \pi)$$

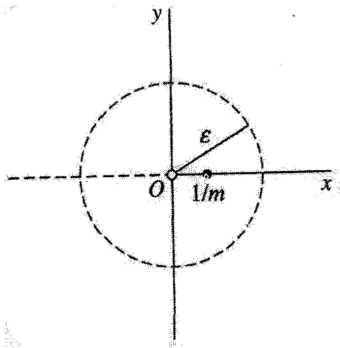
تابع لگاریتمی است. ولی نقطهٔ تکین تنها نیست زیرا هر همسایگی محذوف مبدأ شامل نقاطی روی محور حقیقی منفی است (شکل ۸۰ را ببینید) و این شاخه حتی در آنجا تعریف نشده است.

مثال ۳. تابع

$$\frac{۱}{\sin(\pi/z)}$$

دارای نقاط تکین $z = ۰$ و $z = ۱/n$ $(n = \pm۱, \pm۲, \ldots)$ است که همهٔ آنها بر پاره‌خطی از محور حقیقی واقع‌اند که بین $z = -۱$ تا $z = ۱$ است. هر نقطهٔ تکین بجز $z = ۰$، تنهاست. نقطهٔ تکین $z = ۰$ تنها نیست زیرا هر همسایگی محذوف مبدأ شامل نقاط تکین دیگری از تابع است. به عبارت دقیقتر اگر ε عدد مثبت مشخصی باشد و m عدد صحیح مثبتی باشد به‌طوری که $m > ۱/\varepsilon$، آن‌گاه $۰ < ۱/m < \varepsilon$ یعنی نقطهٔ $z = ۱/m$ در εـ‌همسایگی محذوف $۰ < |z| < \varepsilon$ واقع است (شکل ۸۱).

اگر $z_۰$ یک نقطهٔ تکین تنهای تابع f باشد، عدد مثبتی مانند $R_۲$ هست به قسمی که تابع f



شکل ۸۱

در هر نقطهٔ z با ویژگی $0 < |z - z_0| < R_2$، تحلیلی است. در نتیجه این تابع با سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0}$$
$$+ \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots \qquad (0 < |z - z_0| < R_2) \qquad (1)$$

نمایش داده می‌شود، که در آن a_n و b_n دارای نمایش انتگرالی‌اند (بخش ۵۵). به‌خصوص

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

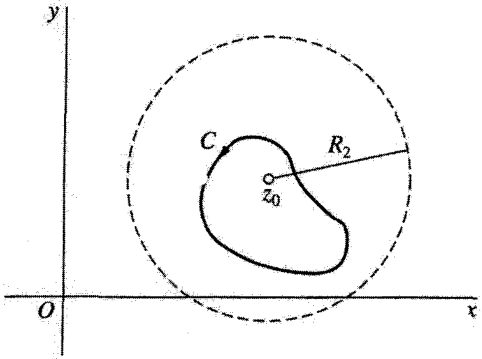
که در آن C مسیر سادهٔ بسته‌ای حول نقطهٔ z_0 در جهت مثبت و واقع در قرص محذوف $0 < |z - z_0| < R_2$ است (شکل ۸۲). وقتی $n = 1$ این فرمول برای b_n را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i b_1 . \qquad (2)$$

عدد مختلط b_1 را که ضریب $1/(z - z_0)$ در بسط (۱) استماندهٔ f در نقطهٔ تکین تنهای z_0 می‌نامند. اغلب برای نمایش ماندهٔ b_1 از نماد

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),$$

یا وقتی نقطهٔ z_0 و تابع f به‌وضوح مشخص باشند صرفاً از B، استفاده خواهیم کرد.



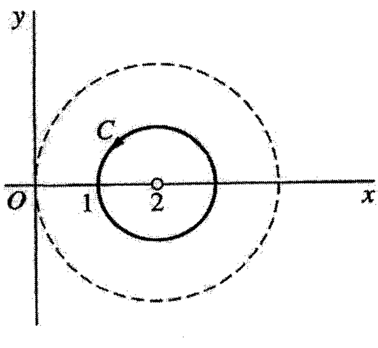
شکل ۸۲

معادلهٔ (۲) روشی توانا برای محاسبهٔ برخی انتگرالها پیرامون مسیرهای سادهٔ بسته را به‌دست می‌دهد.

مثال ۴. انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z(z-۲)^۴}, \tag{۳}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن C دایرهٔ $|z-۲| = ۱$ در جهت مثبت است (شکل ۸۳). چون انتگرالده همه جا در صفحهٔ متناهی بجز در نقاط $z = ۰$ و $z = ۲$ تحلیلی است، دارای نمایش سری لورانی است که در قرص محذوف $۰ < |z-۲| < ۲$ معتبر است، این قرص نیز در شکل ۸۳ نشان داده شده است. در نتیجه بنابر رابطهٔ (۲) مقدار انتگرال (۳) برابر با حاصلضرب



شکل ۸۳

$۲\pi i$ و ماندهٔ انتگرالده در $z = ۲$ است. برای تعیین این مانده بسط سری مکلورن

$$\frac{۱}{۱-z} = \sum_{n=۰}^{\infty} z^n \qquad (|z| < ۱)$$

را به یاد می‌آوریم (بخش ۵۴) و با استفاده از آن می‌نویسیم

$$\frac{۱}{z(z-۲)^۴} = \frac{۱}{(z-۲)^۴} \cdot \frac{۱}{۲+(z-۲)}$$

$$= \frac{۱}{۲(z-۲)^۴} \cdot \frac{۱}{۱-\left(-\dfrac{z-۲}{۲}\right)}$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲^{n+۱}} (z-۲)^{n-۴} \qquad (۰ < |z-۲| < ۲).$$

در این سری لوران که می‌توان آن را به‌صورت (۱) نوشت، ضریب $۱/(z-۲)$ ماندهٔ مطلوب یعنی $-۱/۱۶$ است. در نتیجه

$$\int_C \frac{dz}{z(z-۲)^۴} = ۲\pi i \left(-\frac{۱}{۱۶}\right) = -\frac{\pi i}{۸}. \tag{۴}$$

مثال ۵. نشان می‌دهیم که

$$\int_C \exp\left(\frac{۱}{z^۲}\right) dz = ۰ \tag{۵}$$

که در آن C دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ است. چون $۱/z^۲$ همه جا بجز در مبدأ تحلیلی است، انتگرالده نیز چنین است. نقطهٔ تکین تنهای $z = ۰$ در داخل C است و به کمک سری مکلورن (بخش ۵۴)

$$e^z = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۳}{۳!} + \cdots \qquad (|z| < \infty),$$

می‌توان بسط سری لوران زیر را نوشت

$$\exp\left(\frac{۱}{z^۲}\right) = ۱ + \frac{۱}{۱!} \cdot \frac{۱}{z^۲} + \frac{۱}{۲!} \cdot \frac{۱}{z^۴} + \frac{۱}{۳!} \cdot \frac{۱}{z^۶} + \cdots \qquad (۰ < |z| < \infty).$$

بنابراین ماندهٔ انتگرالده در نقطهٔ تکین تنهایش، یعنی $z = ۰$، صفر است ($b_۱ = ۰$) و مقدار انتگرال (۵) به‌دست می‌آید.

در این مثال متوجه می‌شویم که گرچه تحلیلی‌بودن تابع در درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C شرطی کافی برای صفرشدن مقدار انتگرال روی C است ولی شرط لازمی برای آن نیست.

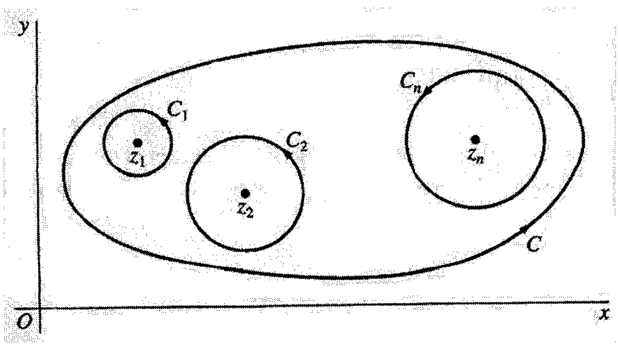
۶۳. قضیهٔ ماندهٔ کوشی

اگر تابع f درون مسیر سادهٔ بستهٔ C بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ تکین تحلیلی باشد، آن‌گاه نقاط تکین باید تنها باشند (بخش ۶۲). قضیهٔ زیر، که به قضیهٔ ماندهٔ کوشی مشهور است و آن را قضیهٔ مانده‌ها نیز می‌نامند، بیان دقیقی از این امر است که اگر f روی C نیز تحلیلی باشد و C را در جهت مثبت بگیریم، آن‌گاه مقدار انتگرال f پیرامون C برابر با حاصلضرب $2\pi i$ در مجموع مانده‌های مربوط به آن نقاط تکین است.

قضیه. فرض کنید C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع f در درون و روی C بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ تکین $z_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ که در داخل C هستند، تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (1)$$

برای اثبات قضیه، فرض کنید نقاط $z_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ مراکز دوایر C_k با جهت مثبت باشند که در داخل C واقع و آن‌قدر کوچک‌اند که هیچ دوتایی از این دوایر نقطهٔ مشترکی ندارند (شکل ۸۴). دوایر C_k همراه با مسیر سادهٔ بستهٔ C مرز ناحیه‌ای را تشکیل می‌دهند که f در سراسر آن تحلیلی است و داخل آن یک حوزهٔ همبند چندگانه است. پس بنابر تعمیم قضیهٔ کوشی‌ـگورسا



شکل ۸۴

به این‌گونه نواحی (قضیهٔ ۲، بخش ۴۶)

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0 .$$

این تساوی به فرمول (۱) تبدیل می‌شود زیرا (بخش ۶۲)

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال. با استفاده از این قضیه، انتگرال

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$$

را محاسبه می‌کنیم که در آن C دایرهٔ $|z| = 2$ با جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است. انتگرالده دارای دو نقطهٔ تکین $z = 0$ و $z = 1$ است که هر دو در داخل C واقع‌اند. می‌توانیم مانده‌های B_1 در $z = 0$ و B_2 در $z = 1$ را به کمک سری مکلورن

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

پیدا کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که وقتی $0 < |z| < 1$ (شکل ۸۵)،

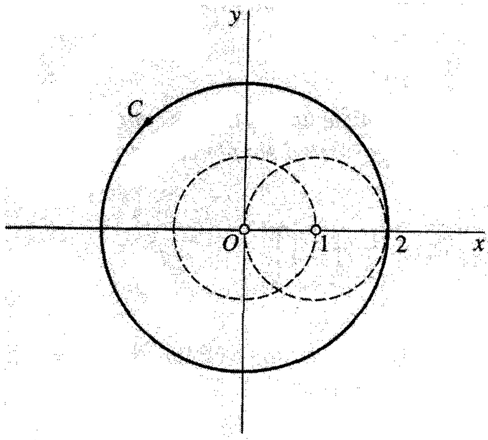
$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z}\right)(-1 - z - z^2 - \cdots);$$

و با مشخص‌کردن ضریب $1/z$ در حاصلضرب طرف راست در می‌یابیم که $B_1 = 2$. همچنین، چون وقتی $0 < |z-1| < 1$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right)[1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots]\end{aligned}$$

واضح است که $B_2 = 3$. بنابراین

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i(B_1 + B_2) = 10\pi i .$$



شکل ۸۵

در این مثال، البته ساده‌تر این است که انتگرالده را به‌صورت مجموع کسرهای جزئی آن بنویسیم:

$$\frac{۵z - ۲}{z(z-۱)} = \frac{۲}{z} + \frac{۳}{z-۱}.$$

در این‌صورت چون $۲/z$ وقتی $۱ > |z| > ۰$ و $۳/(z-۱)$ وقتی $۱ > |z-۱| > ۰$، خود سری لوران هستند در نتیجه

$$\int_C \frac{۵z - ۲}{z(z-۱)} dz = ۲\pi i(۲) + ۲\pi i(۳) = ۱۰\pi i.$$

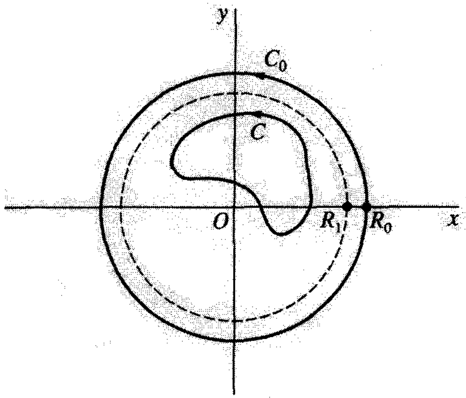
۶۴. استفاده از فقط یک مانده

اگر تابع f در قضیهٔ ماندهٔ کوشی (بخش ۶۳)، به‌علاوه در هر نقطهٔ صفحهٔ متناهی که در خارج C است تحلیلی باشد، بعضی مواقع کاراتر است که انتگرال f روی C را با یافتن تنها یک مانده برای تابعی وابسته به f محاسبه کنیم. این روش را به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.*

قضیه. فرض کنید C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع f همه جا در

* این شیوهٔ کار در نظریهٔ مانده‌ها در بی‌نهایت مطرح می‌شود که ما بررسی نمی‌کنیم. برای جزئیات این نظریه مثلاً صفحات ۷۶ و ۷۷ کتاب زیر را ببینید

R. P. Boas, "Invitation to Complex Analysis" 1987.



شکل ۸۶

صفحهٔ متناهی، بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ تکین واقع در داخل C، تحلیلی باشد آن‌گاه

$$\int_C f(z)dz = ۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=۰} \left[\frac{۱}{z^۲} f\left(\frac{۱}{z}\right)\right]. \qquad (۱)$$

برای به‌دست آوردن عبارت (۱)، دایرهٔ $|z| = R_۱$ را می‌سازیم که به‌قدر کافی بزرگ است تا مسیر C در داخل آن باشد (شکل ۸۶). در این‌صورت اگر $C_۰$ معرف دایرهٔ $|z| = R_۰$ در جهت مثبت باشد که در آن $R_۱ < R_۰$، بنابر قضیهٔ لوران (بخش ۵۵) می‌دانیم که

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (R_۱ < |z| < \infty), \qquad (۲)$$

که در آن

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{C_۰} \frac{f(z)dz}{z^{n+۱}} \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots). \qquad (۳)$$

با قراردادن $n = -۱$ در عبارت (۳) در می‌یابیم که

$$\int_{C_۰} f(z)dz = ۲\pi i c_{-۱}. \qquad (۴)$$

ملاحظه کنید که چون شرط برقراری نمایش (۲) از نوع $۰ < |z| < R_۲$ نیست، ضریب $c_{-۱}$ ماندهٔ f در $z = ۰$ نیست. حتی ممکن است نقطهٔ $z = ۰$ نقطهٔ تکین f نباشد. اما اگر در نمایش

(۲) و شرط برقراری آن، به جای z مقدار $z/۱$ را قرار دهیم، می‌بینیم که

$$\frac{۱}{z^۲}f\left(\frac{۱}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{z^{n+۲}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{n-۲}}{z^n}\qquad\left(۰<|z|<\frac{۱}{R_۱}\right).$$

و لذا

$$c_{-۱}=\operatorname*{Res}_{z=۰}\left[\frac{۱}{z^۲}f\left(\frac{۱}{z}\right)\right]. \tag{۵}$$

در نتیجه بنابر روابط (۴) و (۵) داریم

$$\int_{C_۰}f(z)dz=۲\pi i\operatorname*{Res}_{z=۰}\left[\frac{۱}{z^۲}f\left(\frac{۱}{z}\right)\right].$$

بالاخره چون f در سراسر ناحیهٔ بستهٔ محدود به C و $C_۰$ تحلیلی است، بنابر اصل تغییر شکل مسیرها (فرع ۲، بخش ۴۶)، نتیجهٔ مطلوب (۱) به‌دست می‌آید.

مثال. در مثال بخش ۶۳ انتگرال

$$f(z)=\frac{۵z-۲}{z(z-۱)}$$

پیرامون دایرهٔ ۲ $=|z|$، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، را با پیدا کردن مانده‌های $f(z)$ در ۰ $=z$ و ۱ $=z$ محاسبه کردیم. چون

$$\begin{aligned}\frac{۱}{z^۲}f\left(\frac{۱}{z}\right)&=\frac{۵-۲z}{z(۱-z)}=\frac{۵-۲z}{z}\cdot\frac{۱}{۱-z}\\&=\left(\frac{۵}{z}-۲\right)(۱+z+z^۲+\cdots)\\&=\frac{۵}{z}+۳+۳z+\cdots\qquad(۰<|z|<۱),\end{aligned}$$

می‌بینیم که می‌توان از قضیهٔ فوق، که در آن ماندهٔ مطلوب برابر با ۵ است، استفاده کرد. به عبارت دقیقتر،

$$\int_C\frac{۵z-۲}{z(z-۱)}dz=۲\pi i(۵)=۱۰\pi i,$$

که در آن C دایرهٔ مطرح‌شده در مسئله است. البته، این همان نتیجهٔ حاصل در بخش ۶۳ است.

تمرینها

۱. ماندهٔ هر یک از توابع زیر را در $z = ۰$ بیابید.

(الف) $\dfrac{۱}{z+z^۲}$؛ (ب) $z\cos\left(\dfrac{۱}{z}\right)$؛ (ج) $\dfrac{z-\sin z}{z}$؛

(د) $\dfrac{\cot z}{z^۴}$؛ (هـ) $\dfrac{\sinh z}{z^۴(۱-z^۲)}$.

جواب: (الف) ۱؛ (ب) $\dfrac{-۱}{۲}$؛ (ج) ۰؛ (د) $\dfrac{-۱}{۴۵}$؛ (هـ) $\dfrac{۷}{۶}$.

۲. با استفاده از قضیهٔ ماندهٔ کوشی (بخش ۶۳) مقدار انتگرال هر یک از توابع زیر را روی دایرهٔ $|z| = ۳$ در جهت مثبت محاسبه کنید.

(الف) $\dfrac{\exp(-z)}{z^۲}$؛ (ب) $\dfrac{\exp(-z)}{(z-۱)^۲}$؛

(ج) $z^۲\exp\left(\dfrac{۱}{z}\right)$؛ (د) $\dfrac{z+۱}{z^۲-۲z}$.

جواب: (الف) $-۲\pi i$؛ (ب) $-۲\pi i/e$؛ (ج) $\pi i/۳$؛ (د) $۲\pi i$.

۳. با استفاده از قضیهٔ بخش ۶۴ که تنها با یک مانده سروکار دارد، مقدار انتگرال هر یک از توابع زیر را روی دایرهٔ $|z| = ۲$ در جهت مثبت محاسبه کنید.

(الف) $\dfrac{z^۵}{۱-z^۳}$؛ (ب) $\dfrac{۱}{۱+z^۲}$؛ (ج) $\dfrac{۱}{z}$.

جواب: (الف) $-۲\pi i$؛ (ب) ۰؛ (ج) $۲\pi i$.

۴. فرض کنید C معرف دایرهٔ $|z| = ۱$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مراحل زیر را طی کرده نشان دهید که

$$\int_C \exp\left(z+\frac{۱}{z}\right)dz = ۲\pi i\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!(n+۱)!}.$$

(الف) با استفاده از بسط سری مکلورن برای e^z و استناد به قضیهٔ ۱، بخش ۵۹، که بر مبنای آن می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، انتگرال بالا را به‌صورت زیر بنویسید

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\int_C z^n\exp\left(\frac{۱}{z}\right)dz.$$

(ب) با استفاده از قضیهٔ بخش ۶۳، انتگرالهای قسمت (الف) را محاسبه کرده به نتیجهٔ مطلوب برسید.

۵. فرض کنید درجهٔ چندجمله‌ییهای

$$P(z) = a_{\circ} + a_{۱}z + a_{۲}z^{۲} + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq \circ)$$

و

$$Q(z) = b_{\circ} + b_{۱}z + b_{۲}z^{۲} + \cdots + b_m z^m \qquad (b_m \neq \circ)$$

طوری باشند که $m \geq n + ۲$. با استفاده از قضیهٔ بخش ۶۴ نشان دهید اگر همهٔ صفرهای $Q(z)$ درون مسیر سادهٔ بستهٔ C واقع باشند، آن‌گاه

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \circ\,.$$

[با تمرین ۳ (ب) مقایسه کنید.]

۶۵. سه نوع نقطهٔ تکین تنها

در بخش ۶۲ دیدیم که نظریهٔ مانده‌ها بر مبنای این واقعیت بنا شده است که اگر f دارای نقطهٔ تکین تنهای $z_{\circ}$ باشد، آن‌گاه $f(z)$ را می‌توان در قرص محذوف $\circ < |z - z_{\circ}| < R_{۲}$ با سری لوران زیر نمایش داد

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_{\circ})^n + \frac{b_{۱}}{z - z_{\circ}} + \frac{b_{۲}}{(z - z_{\circ})^{۲}} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_{\circ})^n} + \cdots \quad (۱)$$

بخش

$$\frac{b_{۱}}{z - z_{\circ}} + \frac{b_{۲}}{(z - z_{\circ})^{۲}} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_{\circ})^n} + \cdots$$

از این سری را که شامل توانهای منفی $z - z_{\circ}$ است، قسمت اصلی f در $z_{\circ}$ می‌نامند. حال با استفاده از قسمت اصلی، نقطهٔ تکین تنهای $z_{\circ}$ را در مقام یکی از سه نوع خاص مشخص می‌سازیم. این رده‌بندی ما را در بررسی نظریهٔ مانده‌ها در بخشهای بعد یاری خواهد کرد.

اگر قسمت اصلی f در $z_{\circ}$ شامل حداقل یک جملهٔ ناصفر باشد ولی تعداد این‌گونه جملات متناهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند m هست به قسمی که

$$b_m \neq \circ \qquad \text{و} \qquad b_{m+۱} = b_{m+۲} = \cdots = \circ.$$

یعنی بسط (۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

$$(0 < |z-z_0| < R_2) \tag{2}$$

که در آن $b_m \neq 0$. در این حالت نقطهٔ تکین تنهای z_0 را قطب مرتبهٔ m می‌نامند.* هر قطب مرتبهٔ $m = 1$ را معمولاً یک قطب ساده می‌گویند.

مثال ۱. ملاحظه کنید که تابع

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z-2} = \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2}$$

$$(0 < |z-2| < \infty)$$

دارای یک قطب ساده ($m = 1$) در $z_0 = 2$ است. b_1، ماندهٔ تابع در این نقطه، ۳ است.

مثال ۲. تابع

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

$$(0 < |z| < \infty)$$

در $z_0 = 0$ دارای قطب مرتبهٔ $m = 3$ با ماندهٔ $b_1 = 1/6$ است.

دو حالت فرین باقی می‌مانند، حالتی که در آن همهٔ ضرایب b_n در قسمت اصلی صفرند و حالتی که در آن تعدادی نامتناهی از b_nها ناصفرند.

وقتی همهٔ b_nها در قسمت اصلی صفر باشند، به‌طوری که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$(0 < |z-z_0| < R_2), \tag{3}$$

نقطهٔ z_0 به نقطهٔ تکین برداشتنی موسوم است. توجه کنید که مانده در نقطهٔ تکین برداشتنی همیشه مساوی با صفر است. اگر f را در z_0 تعریف یا احتمالاً مجدداً تعریف کنیم به‌طوری که

* دلایلی برای اصطلاح قطب در صفحهٔ ۷۰ کتابی که در پانوشت بخش ۶۴ معرفی شد، آمده است.

$a_\circ = f(z_\circ)$، بسط (۳) در سراسر قرص $|z - z_\circ| < R_۲$ برقرار می‌شود. چون هر سری توانی همیشه نمایش تابعی تحلیلی در درون دایرهٔ همگرایی خود هست (بخش ۵۹)، در نتیجه f در $z_\circ$ تحلیلی می‌شود، هرگاه به f مقدار $a_\circ$ را در آن نقطه نسبت دهیم. بدین‌ترتیب تکینی در $z_\circ$ برداشته می‌شود.

مثال ۳. نقطهٔ $z_\circ = \circ$ یک نقطهٔ تکین برداشتنی تابع زیر است

$$f(z) = \frac{۱ - \cos z}{z^۲} = \frac{۱}{z^۲}\left[۱ - \left(۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \frac{z^۶}{۶!} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{۱}{۲!} - \frac{z^۲}{۴!} + \frac{z^۴}{۶!} - \cdots \qquad (\circ < |z| < \infty).$$

درصورتی که مقدار $f(\circ) = ۱/۲$ را اختیار کنیم، f تام می‌شود.

وقتی تعداد نامتناهی از ضرایب b_n در قسمت اصلی ناصفر باشند، $z_\circ$ را یک نقطهٔ تکین اساسی f می‌نامند. یک نتیجهٔ مهم در مورد رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطهٔ تکین اساسی، قضیهٔ پیکار[1] است با این مضمون که یک تابع در هر همسایگی یک نقطهٔ تکین اساسی خود، هر مقدار متناهی بجز احتمالاً یک مقدار را بی‌نهایت بار اختیار می‌کند.*

مثال ۴. تابع

$$\exp\left(\frac{۱}{z}\right) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!} \cdot \frac{۱}{z^n} = ۱ + \frac{۱}{۱!} \cdot \frac{۱}{z} + \frac{۱}{۲!} \cdot \frac{۱}{z^۲} + \cdots \qquad (\circ < |z| < \infty)$$

یک نقطهٔ تکین اساسی در $z_\circ = \circ$ دارد، که در آن $b_۱$ مساوی یک است. برای روشن ساختن قضیهٔ پیکار، نشان می‌دهیم که تابع $\exp(۱/z)$ مقدار -۱ را در هر همسایگی مبدأ بی‌نهایت بار اختیار می‌کند. برای انجام این کار، مثال بخش ۲۸ را به یاد می‌آوریم که $\exp z = -۱$ هرگاه $z = (۲n+۱)\pi i$ $(n = \circ, \pm۱, \pm۲, \ldots)$. این بدان معنی است که $\exp(۱/z) = -۱$، هرگاه

$$z = \frac{۱}{(۲n+۱)\pi i} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{i}{(۲n+۱)\pi} \qquad (n = \circ, \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

و به‌وضوح دیده می‌شود که در هر همسایگی مبدأ تعدادی نامتناهی از این نقاط واقع است. چون به‌ازای هر مقدار z، $\exp(۱/z) \neq \circ$، صفر مقدار استثنایی در قضیهٔ پیکار است.

1. Picard

* برای اثبات قضیهٔ پیکار بخش ۵۱ از جلد سوم کتاب مارکوشویچ (Markushevich) را ببینید که در پیوست ۱ معرفی شده است.

در بقیهٔ بخشهای این فصل، نظریهٔ این سه نوع نقطهٔ تکین تنها را که مطرح کردیم به‌صورتی عمیقتر بررسی خواهیم کرد. تأکید ما روی روشهای مفید و کارا برای مشخص‌کردن قطبها و یافتن مانده‌های متناظر آنهاست.

تمرینها

۱. در هر یک از حالات زیر، قسمت اصلی تابع را در نقطهٔ تکین تنهای آن بنویسید. تعیین کنید که آیا آن نقطه یک قطب، یک نقطهٔ تکین برداشتنی، یا یک نقطهٔ تکین اساسی تابع مفروض است.

(الف) $z\exp\left(\frac{۱}{z}\right)$؛ (ب) $\frac{z^۲}{۱+z}$؛ (ج) $\frac{\sin z}{z}$؛

(د) $\frac{\cos z}{z}$؛ (هـ) $\frac{۱}{(۲-z)^۳}$.

۲. نشان دهید که نقطهٔ تکین هر یک از توابع زیر یک قطب است. m، مرتبهٔ آن قطب، و B ماندهٔ متناظر آن را تعیین کنید.

(الف) $\frac{۱-\cosh z}{z^۳}$؛ (ب) $\frac{۱-\exp(۲z)}{z^۴}$؛ (ج) $\frac{\exp(۲z)}{(z-۱)^۲}$.

جواب: (الف) $m=۱$ و $B=\frac{-۱}{۲}$؛ (ب) $m=۳$ و $B=\frac{-۴}{۳}$؛ (ج) $m=۲$ و $B=۲e^۲$.

۳. فرض کنید f تابعی باشد که در نقطهٔ $z_۰$ تحلیلی است و کسر زیر را در نظر بگیرید

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_۰}.$$

نشان دهید که

(الف) اگر $f(z_۰)\neq ۰$ آن‌گاه $z_۰$ یک قطب سادهٔ g با ماندهٔ $f(z_۰)$ است.

(ب) اگر $f(z_۰)=۰$ آن‌گاه $z_۰$ یک نقطهٔ تکین برداشتنی g است.

راهنمایی: همان‌طور که در بخش ۵۳ ذکر شد چون f حول $z_۰$ تحلیلی است سری تیلر برای f در آنجا وجود دارد. هر قسمت این تمرین را با نوشتن چند جملهٔ آن سری آغاز کنید.

۴. تابع

$$f(z)=\frac{۸a^۳z^۲}{(z^۲+a^۲)^۳}\qquad (a>۰)$$

را به شکل زیر بنویسید

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-ai)^3} \quad \text{که در آن} \quad \phi(z) = \frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3}.$$

بگویید چرا $\phi(z)$ حول $z = ai$ نمایش سری تیلر دارد، و سپس با استفاده از این مطلب نشان دهید که قسمت اصلی f در این نقطه عبارت است از

$$\frac{\phi''(ai)/2}{z-ai} + \frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^2} + \frac{\phi(ai)}{(z-ai)^3} = -\frac{i/2}{z-ai} - \frac{a/2}{(z-ai)^2} - \frac{a^2i}{(z-ai)^3}.$$

۶۶. مانده در قطب

وقتی تابع f در نقطهٔ z_0 یک تکینی تنها داشته باشد، روش اصلی برای مشخص‌کردن z_0 به‌عنوان یک قطب و یافتن مانده در آنجا، این است که سری لوران مناسبی بنویسیم و به ضریب $1/(z-z_0)$ توجه کنیم. قضیهٔ زیر روش دیگری است برای مشخص‌کردن قطبها و یافتن مانده‌های متناظر آنها.

قضیه. z_0 نقطهٔ تکین تنهای تابع f، یک قطب از مرتبهٔ m است اگر و فقط اگر $f(z)$ را بتوان به‌صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{1}$$

که در آن، $\phi(z)$ در z_0 تحلیلی و ناصفر است. به‌علاوه

$$\text{اگر } m = 1 \quad \text{آن‌گاه} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0) \tag{2}$$

و

$$\text{اگر } m \geq 2 \quad \text{آن‌گاه} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \tag{3}$$

ملاحظه کنید که نیازی نیست عبارت (۲) را جداگانه بنویسیم زیرا با قراردادهای $\phi^{(0)}(z_0) = \phi(z_0)$ و $0! = 1$، عبارت (۳) برای $m = 1$ به آن تبدیل می‌شود.

برای اثبات قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم $f(z)$ به‌صورت (۱) باشد و یادآوری می‌کنیم (بخش ۵۳) که چون $\phi(z)$ در z_0 تحلیلی است، دریک همسایگی $|z-z_0| < \varepsilon$ از z_0 دارای سری

تیلر است

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

و از عبارت (۱) نتیجه می‌شود که اگر $\varepsilon > |z - z_0| > 0$ آن‌گاه

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)/2!}{(z - z_0)^{m-2}} + \cdots \tag{۴}$$
$$+ \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}$$

از این نمایش سری لوران، همراه با این واقعیت که $\phi(z_0) \neq 0$ معلوم می‌شود که در واقع z_0 یک قطب مرتبهٔ m تابع $f(z)$ است. البته از ضریب $1/(z - z_0)$ نتیجه می‌شود که ماندهٔ $f(z)$ در z_0 همان‌طور است که در صورت قضیه بیان شد.

از طرف دیگر، فرض کنید که فقط بدانیم، z_0 یک قطب مرتبهٔ m تابع f باشد یا اینکه $f(z)$ دارای نمایش سری لوران زیر باشد

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

که در قرص محذوف $R_2 > |z - z_0| > 0$ معتبر است. تابع $\phi(z)$ که با ضابطه‌های

$$\phi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z), & z \neq z_0 \\ b_m, & z = z_0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود به‌وضوح دارای نمایش سری توانی

$$\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_2(z - z_0)^{m-2} + b_1(z - z_0)^{m-1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}$$

در سراسر قرص کامل $R_2 > |z - z_0|$ است. در نتیجه $\phi(z)$ در آن قرص و به‌خصوص در z_0 تحلیلی است (بخش ۵۹). چون $\phi(z_0) = b_m \neq 0$، عبارت (۱) ثابت و اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۷. چند مثال

مثالهای زیر برای توضیح نحوهٔ استفاده از قضیهٔ بخش قبل آورده شده‌اند.

مثال ۱. تابع $f(z) = (z+۱)/(z^۲+۹)$ در $z = ۳i$ نقطهٔ تکین تنها دارد و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - ۳i} \qquad \text{که در آن} \qquad \phi(z) = \frac{z+۱}{z+۳i}.$$

چون $\phi(z)$ در $z = ۳i$ تحلیلی است و $\phi(۳i) = (۳-i)/۶ \neq ۰$، آن نقطه قطب سادهٔ تابع f است و مانده در آن برابر است با $B_۱ = (۳-i)/۶$. نقطهٔ $z = -۳i$ نیز یک قطب سادهٔ f با ماندهٔ $B_۲ = (۳+i)/۶$ است.

مثال ۲. اگر $f(z) = (z^۳ + ۲z)/(z-i)^۳$ آن‌گاه

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-i)^۳}, \qquad \text{که در آن} \qquad \phi(z) = z^۳ + ۲z.$$

تابع $\phi(z)$ تام است و $\phi(i) = i \neq ۰$. بنابراین f در $z = i$ قطب مرتبهٔ ۳ دارد. مانده در آن برابر است با

$$B = \frac{\phi''(i)}{۲!} = ۳i.$$

البته، وقتی شاخه‌های توابع چندمقداری مطرح‌اند هم می‌توان از این قضیه استفاده کرد.

مثال ۳. فرض کنید

$$f(z) = \frac{(\log z)^۳}{z^۲ + ۱},$$

که در آن شاخهٔ

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > ۰, ۰ < \theta < ۲\pi)$$

از تابع لگاریتمی استفاده می‌شود. برای یافتن ماندهٔ f در $z = i$ می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-i} \qquad \text{که در آن} \qquad \phi(z) = \frac{(\log z)^۳}{z+i}.$$

تابع $\phi(z)$ به‌وضوح در $z = i$ تحلیلی است و چون

$$\phi(i) = \frac{(\log i)^۳}{۲i} = \frac{(\ln ۱ + i\pi/۲)^۳}{۲i} = -\frac{\pi^۳}{۱۶} \neq ۰,$$

ماندهٔ مطلوب عبارت است از $B = \phi(i) = -\pi^۳/۱۶$.

در حالی‌که قضیهٔ بخش ۶۶ می‌تواند خیلی مفید باشد، بعضی مواقع برای اینکه ببینیم یک نقطهٔ تکین تنها قطب از مرتبهٔ معینی است مؤثرترین راه استفادهٔ مستقیم از سری لوران است.

مثال ۴. اگر مثلاً، ماندهٔ تابع

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^{۴}}$$

را در تکینی $z = ۰$ بخواهیم، درست نیست که بنویسیم

$$f(z) = \phi(z)/z^{۴}، \quad \text{که در آن} \quad \phi(z) = \sinh z،$$

و از فرمول (۳)، بخش ۶۶، با $m = ۴$ استفاده کنیم. زیرا اگر بخواهیم از فرمول (۳) استفاده کنیم لازم است $\phi(z_{۰}) \neq ۰$. ساده‌ترین راه یافتن مانده در $z = ۰$ این است که مانند مثال ۲، بخش ۶۵، چند جملهٔ سری لوران $f(z)$ را بنویسیم. در آن مثال نشان دادیم که $z = ۰$ یک قطب مرتبهٔ سوم بوده و مانده برابر با $B = ۱/۶$ است.

بعضی مواقع روش سریها را می‌توان به‌صورتی مؤثر با قضیهٔ بخش ۶۶ ترکیب کرد.

مثال ۵. چون $z(e^{z} - ۱)$ تام است و صفرهای آن عبارت‌اند از $z = ۲n\pi i$ $(n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$، نقطهٔ $z = ۰$ به‌وضوح یک نقطهٔ تکین تنهای تابع

$$f(z) = \frac{۱}{z(e^{z} - ۱)}$$

است. از سری مکلورن

$$e^{z} = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^{۲}}{۲!} + \frac{z^{۳}}{۳!} + \cdots \qquad (|z| < \infty),$$

می‌بینیم که

$$\begin{aligned} z(e^{z} - ۱) &= z\left(\frac{z}{۱!} + \frac{z^{۲}}{۲!} + \frac{z^{۳}}{۳!} + \cdots\right) \\ &= z^{۲}\left(۱ + \frac{z}{۲!} + \frac{z^{۲}}{۳!} + \cdots\right) \qquad (|z| < \infty). \end{aligned}$$

بنابراین

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z^{۲}} \quad \text{که در آن} \quad \phi(z) = \frac{۱}{۱ + z/۲! + z^{۲}/۳! + \cdots}$$

چون $\phi(z)$ در $z = ۰$ تحلیلی است و $\phi(۰) = ۱ \neq ۰$، نقطهٔ $z = ۰$ یک قطب مرتبهٔ دوم بوده و بنابر فرمول (۳) بخش ۶۶ مانده برابر با $B = \phi'(۰)$ است. چون در یک همسایگی مبدأ

$$\phi'(z) = \frac{-(۱/۲! + ۲z/۳! + \cdots)}{(۱ + z/۲! + z^۲/۳! + \cdots)^۲},$$

پس $B = -۱/۲$.

این مانده را می‌توان از تقسیم ۱ بر نمایش سری $z(e^z - ۱)$ یا از ضرب سری لوران $۱/(e^z - ۱)$ در $۱/z$ نیز پیدا کرد، که این سری لوران در تمرین ۳، بخش ۶۱، به‌دست آمد.

تمرینها

۱. در هریک از حالات زیر نشان دهید که نقاط تکین تابع، قطب‌اند. m، مرتبهٔ هر قطب و B،ماندهٔ متناظر را تعیین کنید.

(الف) $\dfrac{z^۲ + ۲}{z - ۱}$؛ (ب) $\left(\dfrac{z}{۲z + ۱}\right)^۳$؛ (ج) $\dfrac{\exp z}{z^۲ + \pi^۲}$.

جواب: (الف) $B = ۳, m = ۱$؛ (ب) $B = -۳/۱۶, m = ۳$؛
(ج) $B = \pm i/۲\pi, m = ۱$.

۲. نشان دهید که

(الف) $$\operatorname*{Res}_{z=-۱} \frac{z^{۱/۴}}{z + ۱} = \frac{۱ + i}{\sqrt{۲}} \quad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi)$$

(ب) $$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\operatorname{Log} z}{(z^۲ + ۱)^۲} = \frac{\pi + ۲i}{۸}$$

(ج) $$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^{۱/۲}}{(z^۲ + ۱)^۲} = \frac{۱ - i}{۸\sqrt{۲}} \quad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi)$$

۳. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{۳z^۳ + ۲}{(z - ۱)(z^۲ + ۹)} dz$$

را که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ (الف) $|z - ۲| = ۲$؛ (ب) $|z| = ۴$ گرفته شده است پیدا کنید.

جواب: (الف) πi؛ (ب) $۶\pi i$.

۴. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z^{۳}(z+۴)}$$

را که در جهت عکس عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ (الف) $|z| = ۲$؛ (ب) $|z+۲| = ۳$ گرفته شده پیدا کنید.

جواب: (الف) $\pi i/۳۲$؛ (ب) ۰.

۵. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^{۲}+۱)} dz$$

را محاسبه کنید که در آن C دایرهٔ $|z| = ۲$ در جهت مثبت است.

جواب: $۴\pi i$.

۶. با استفاده از قضیهٔ بخش ۶۴، که تنها یک مانده دارد، انتگرال $f(z)$ را پیرامون دایرهٔ $|z| = ۳$ که در جهت مثبت گرفته شده محاسبه کنید هرگاه

(الف) $f(z) = \dfrac{(۳z+۲)^{۲}}{z(z-۱)(۲z+۵)}$؛ (ب) $f(z) = \dfrac{z^{۳}(۱-۳z)}{(۱+z)(۱+۲z^{۴})}$؛

(ج) $f(z) = \dfrac{z^{۳}e^{۱/z}}{۱+z^{۳}}$.

جواب: (الف) $۹\pi i$؛ (ب) $-۳\pi i$؛ (ج) $۲\pi i$.

۶۸. صفرهای توابع تحلیلی

صفرها و قطبهای توابع ارتباط نزدیکی با هم دارند. در واقع، در بخش بعد خواهید دید که چگونه صفرها می‌توانند سرمنشأ قطبها باشند. با وجود این به نتایج مقدماتی در مورد صفرهای توابع تحلیلی نیاز داریم.

فرض کنید تابع f در نقطهٔ $z_۰$ تحلیلی باشد. با توجه به بخش ۴۸ می‌دانیم که همهٔ مشتقات $f^{(n)}(z)$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ در $z_۰$ موجودند. اگر $f(z_۰) = ۰$ و اگر عدد صحیح مثبتی مانند m موجود باشد به‌طوری که $f^{(m)}(z_۰) \neq ۰$ و همهٔ مشتقات مرتبه‌های پایین‌تر در $z_۰$ صفر شوند، آن‌گاه f در $z_۰$ دارای صفر مرتبهٔ m است. اولین قضیهٔ این بخش خاصیت مشخصهٔ مفید دیگری برای صفرهای مرتبهٔ m ارائه می‌دهد.

قضیهٔ ۱. تابع f که در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی است، در این نقطه صفر مرتبهٔ m دارد اگر و فقط اگر تابعی مانند g موجود باشد که در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر بوده به قسمی که

$$f(z) = (z - z_\circ)^m g(z). \qquad (۱)$$

در هر دو قسمت اثبات زیر از این واقعیت استفاده می‌کنیم (بخش ۵۳) که اگر تابعی در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشد آن‌گاه باید دارای نمایش سری تیلر معتبری برحسب توانهای $z - z_\circ$ باشد که در سراسر یک همسایگی آن نقطه، مانند $|z - z_\circ| < \varepsilon$، معتبر است.

اثبات قسمت اول را با این فرض آغاز می‌کنیم که عبارت (۱) برقرار باشد و توجه می‌کنیم که چون $g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی است دارای نمایش سری تیلر

$$g(z) = g(z_\circ) + \frac{g'(z_\circ)}{۱!}(z - z_\circ) + \frac{g''(z_\circ)}{۲!}(z - z_\circ)^۲ + \cdots$$

در یک همسایگی $z_\circ$ مانند $|z - z_\circ| < \varepsilon$ است. بنابراین هرگاه $|z - z_\circ| < \varepsilon$، عبارت (۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$f(z) = g(z_\circ)(z - z_\circ)^m + \frac{g'(z_\circ)}{۱!}(z - z_\circ)^{m+۱} + \frac{g''(z_\circ)}{۲!}(z - z_\circ)^{m+۲} + \cdots$$

چون در واقع، این بسط سری تیلر برای $f(z)$ است، بنابر قضیهٔ ۱ بخش ۶۰، نتیجه می‌شود که

$$f(z_\circ) = f'(z_\circ) = f''(z_\circ) = \cdots = f^{(m-۱)}(z_\circ) = \circ, \qquad (۲)$$

و

$$f^{(m)}(z_\circ) = m!g(z_\circ) \neq \circ \qquad (۳)$$

بنابراین $z_\circ$ یک صفر مرتبهٔ m تابع f است.

برعکس، اگر فرض کنیم f در $z_\circ$ صفر مرتبهٔ m داشته باشد، از تحلیلی‌بودن آن در $z_\circ$ و برقراری شرط (۲) نتیجه می‌شود که سری تیلر در یک همسایگی $z_\circ$ مانند $|z - z_\circ| < \varepsilon$ موجود است

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!}(z - z_\circ)^n$$

$$= (z - z_\circ)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_\circ)}{m!} + \frac{f^{(m+۱)}(z_\circ)}{(m+۱)!}(z - z_\circ) + \frac{f^{(m+۲)}(z_\circ)}{(m+۲)!}(z - z_\circ)^۲ + \cdots\right]$$

در نتیجه، $f(z)$ به‌صورت (۱) است، که در آن

$$g(z)=\frac{f^{(m)}(z_\circ)}{m!}+\frac{f^{(m+۱)}(z_\circ)}{(m+۱)!}(z-z_\circ)+\frac{f^{(m+۲)}(z_\circ)}{(m+۲)!}(z-z_\circ)^۲+\cdots$$
$$(|z-z_\circ|<\varepsilon).$$

همگرایی این سری آخر به شرط $|z-z_\circ|<\varepsilon$، تضمین می‌کند که g در آن همسایگی و به‌خصوص در $z_\circ$ تحلیلی است (بخش ۵۹). به‌علاوه

$$g(z_\circ)=\frac{f^{(m)}(z_\circ)}{m!}\neq\circ\,.$$

این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

مثال. تابع تام $f(z)=z(e^z-۱)$ در نقطهٔ $z_\circ=\circ$ صفر مرتبهٔ $m=۲$ دارد، زیرا

$$f(\circ)=f'(\circ)=\circ \quad \text{و} \quad f''(\circ)=۲\neq\circ.$$

در این حالت، تابع g در رابطهٔ (۱) با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$g(z)=\begin{cases}(e^z-۱)/z, & z\neq\circ\\ ۱, & z=\circ\end{cases}$$

که در $z=\circ$ تحلیلی و در واقع تام است. (تمرین ۴ بخش ۶۰ را ببینید.)

قضیهٔ بعد بیان می‌کند که صفرهای توابع تحلیلی نقاط تنها هستند.

قضیهٔ ۲. تابع f و نقطهٔ $z_\circ$ مفروض‌اند. فرض کنید که

(الف) f در $z_\circ$ تحلیلی است؛

(ب) $f(z_\circ)=\circ$ اما $f(z)$ در هیچ همسایگی $z_\circ$ متحد با صفر نیست.

در این‌صورت در سراسر یک همسایگی محذوف $z_\circ$ مانند $\circ<|z-z_\circ|<\varepsilon$، $f(z)\neq\circ$.

برای اثبات این قضیه، فرض کنید f با شرایط فوق باشد و ملاحظه کنید که همهٔ مشتقات f در $z_\circ$ صفر نیستند. زیرا اگر چنین باشد، همهٔ ضرایب در سری تیلر برای f حول نقطهٔ $z_\circ$ صفر خواهد بود و در نتیجه $f(z)$ در یک همسایگی $z_\circ$ متحد با صفر خواهد بود. پس با توجه به تعریف صفرهای مرتبهٔ m که در ابتدای این بخش بیان شد بدیهی است که f باید در $z_\circ$ دارای

یک صفر مرتبهٔ m باشد. پس بنابر قضیهٔ ۱،

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \tag{۴}$$

که در آن $g(z)$ در z_0 تحلیلی و ناصفر است.

حال g علاوه بر ناصفر بودن در z_0 پیوسته است زیرا در آن نقطه تحلیلی است. بنابراین همسایگیی مانند $|z - z_0| < \varepsilon$ هست که در آن رابطهٔ (۴) برقرار است و $g(z) \neq 0$ (بخش ۱۷ را ببینید). در نتیجه در همسایگی محذوف $0 < |z - z_0| < \varepsilon$، $f(z) \neq 0$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

آخرین قضیهٔ این بخش در مورد توابعی است که همهٔ صفرهای آن تنها نیستند. قبلاً در بخش ۲۶ به این قضیه ارجاع داده‌ایم و مغایرت جالبی با قضیهٔ ۲ فوق دارد.

قضیهٔ ۳. تابع f و نقطهٔ z_0 مفروض‌اند. فرض کنید که

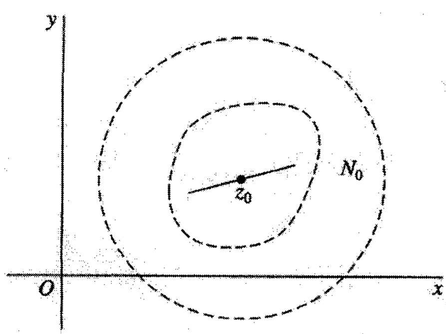
(الف) f در سراسر یک همسایگی z_0 مانند N_0 تحلیلی است؛

(ب) $f(z_0) = 0$ و در هر نقطهٔ z از یک حوزه یا پاره‌خط شامل z_0، $f(z) = 0$ (شکل ۸۷).

در این‌صورت $f(z) \equiv 0$ در N_0؛ یعنی $f(z)$ در سراسر N_0 متحد با صفر است.

اثبات را با ملاحظهٔ این مطلب آغاز می‌کنیم که تحت شرایط فوق در یک همسایگی z_0 مانند N، $f(z) \equiv 0$. زیرا در غیر این‌صورت بنابر قضیهٔ ۲ همسایگی محذوفی از z_0 موجود خواهد بود که در سراسر آن $f(z) \neq 0$، که با فرض اینکه در هر نقطه از حوزه یا پاره‌خطی شامل z_0، $f(z) = 0$ سازگار نیست. چون در همسایگی N، $f(z) \equiv 0$ نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$



شکل ۸۷

در سری تیلر $f(z)$ حول $z_\circ$ باید صفر باشد. بنابراین در $N_\circ$، $f(z) \equiv \circ$، زیرا سری تیلر، $f(z)$ را در $N_\circ$ نیز نمایش می‌دهد. با این امر اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۹. صفرها و قطبها

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که چگونه صفرهای مرتبهٔ m می‌توانند قطبهای مرتبهٔ m تولید کنند.

قضیهٔ ۱. فرض کنید

(الف) دو تابع p و q در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشند؛

(ب) $p(z_\circ) \neq \circ$ و q در $z_\circ$ صفر مرتبهٔ m داشته باشد.

در این‌صورت خارج‌قسمت $p(z)/q(z)$ در $z_\circ$ قطب مرتبهٔ m دارد.

اثبات ساده است. فرض کنید p و q دارای ویژگیهایی باشند که در صورت قضیه آمده است. چون q در $z_\circ$ دارای صفر مرتبهٔ m است بنابر قضیهٔ ۲ بخش ۶۸ همسایگی محذوفی از $z_\circ$ موجود است که در آن $q(z) \neq \circ$ و لذا $z_\circ$ یک نقطهٔ تکین تنهای خارج‌قسمت $p(z)/q(z)$ است. به‌علاوه قضیهٔ ۱ بخش ۶۸ مبین این نکته است که

$$q(z) = (z - z_\circ)^m g(z),$$

که g در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است و می‌توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{(z - z_\circ)^m}. \tag{۱}$$

چون $p(z)/g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است، از قضیهٔ بخش ۶۶ نتیجه می‌شود که $z_\circ$ قطب مرتبهٔ m تابع $p(z)/q(z)$ است.

مثال ۱. دو تابع

$$q(z) = z(e^z - ۱) \quad \text{و} \quad p(z) = ۱$$

تام‌اند و با استناد به مثال بخش ۶۸ می‌دانیم که q در نقطهٔ $z_\circ = \circ$ دارای صفر مرتبهٔ $m = ۲$ است. پس بنابر قضیهٔ ۱ این بخش خارج‌قسمت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{۱}{z(e^z - ۱)}$$

در آن نقطه دارای قطب مرتبهٔ ۲ است. این مطلب را در مثال ۵ بخش ۶۷ به روش دیگری نشان دادیم.

قضیهٔ ۱ منجر به روش دیگری برای شناسایی قطبهای ساده و یافتن مانده‌های نظیر می‌شود. بعضی مواقع این روش از روش بخش ۶۶ ساده‌تر است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید توابع p و q در نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی باشند. اگر

$$p(z_\circ) \neq \circ, \quad q(z_\circ) = \circ \quad \text{و} \quad q'(z_\circ) \neq \circ,$$

آن‌گاه $z_\circ$ قطب سادهٔ خارج‌قسمت $p(z)/q(z)$ است و

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}. \tag{۲}$$

برای اثبات این مطلب، فرض کنید p و q با ویژگیهای فوق باشند و ملاحظه کنید که با توجه به شرایط روی q نقطهٔ $z_\circ$ صفر مرتبهٔ $m = ۱$ آن تابع است. پس بنابر قضیهٔ ۱ بخش ۶۸

$$q(z) = (z - z_\circ)g(z) \tag{۳}$$

که در آن $g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است. به‌علاوه، بنابر قضیهٔ ۱ این بخش، $z_\circ$ قطب سادهٔ $p(z)/q(z)$ است و رابطهٔ (۱) تبدیل می‌شود به

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z - z_\circ}.$$

حال $p(z)/g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است و از قضیهٔ بخش ۶۶ نتیجه می‌شود که

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_\circ)}{g(z_\circ)}. \tag{۴}$$

اما $g(z_\circ) = q'(z_\circ)$ این تساوی با مشتق گرفتن از طرفین رابطهٔ (۳) و قراردادن $z = z_\circ$ به‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب عبارت (۴) به شکل (۲) در می‌آید.

مثال ۲. تابع

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

را که خارج‌قسمت توابع تام $p(z)=\cos z$ و $q(z)=\sin z$ است در نظر بگیرید. تکینیهای این خارج‌قسمت در صفرهای q یعنی در نقاط

$$z = n\pi \qquad (n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

بروز می‌کند. چون

$$p(n\pi) = (-۱)^n \neq ۰, \quad q(n\pi) = ۰ \quad \text{و} \quad q'(n\pi) = (-۱)^n \neq ۰$$

هر نقطهٔ تکین $z = n\pi$ تابع f یک قطب ساده است با ماندهٔ

$$B_n = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{(-۱)^n}{(-۱)^n} = ۱.$$

مثال ۳. ماندهٔ تابع

$$f(z) = \frac{\tanh z}{z^۲} = \frac{\sinh z}{z^۲ \cosh z}$$

در صفر $z = \pi i/۲$ تابع $\cosh z$ (بخش ۳۴ را ببینید) به‌سادگی با نوشتن

$$p(z) = \sinh z \quad \text{و} \quad q(z) = z^۲ \cosh z$$

به‌دست می‌آید. چون

$$p\left(\frac{\pi i}{۲}\right) = \sinh\left(\frac{\pi i}{۲}\right) = i \sin\frac{\pi}{۲} = i \neq ۰$$

و

$$q\left(\frac{\pi i}{۲}\right) = ۰, \quad q'\left(\frac{\pi i}{۲}\right) = \left(\frac{\pi i}{۲}\right)^۲ \sinh\left(\frac{\pi i}{۲}\right) = \frac{-\pi^۲}{۴} i \neq ۰,$$

درمی‌یابیم که $z = \pi i/۲$ یک قطب سادهٔ f است و مانده در آن نقطه برابر است با

$$B = \frac{p(\pi i/۲)}{q'(\pi i/۲)} = -\frac{۴}{\pi^۲}.$$

مثال ۴. می‌توان ماندهٔ تابع

$$f(z) = \frac{z}{z^۴ + ۴}$$

در نقطهٔ تکین تنهای

$$z_\circ = \sqrt{۲}\, e^{i\pi/۴} = ۱ + i$$

را با نوشتن $p(z) = z$ و $q(z) = z^۴ + ۴$ به‌دست آورد. چون

$$p(z_\circ) = z_\circ \neq \circ, \qquad q(z_\circ) = \circ \qquad \text{و} \qquad q'(z_\circ) = ۴z_\circ^۳ \neq \circ,$$

تابع f در $z_\circ$ دارای قطب ساده است. ماندهٔ نظیر عبارت است از عدد

$$B_\circ = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)} = \frac{z_\circ}{۴z_\circ^۳} = \frac{۱}{۴z_\circ^۲} = \frac{۱}{۸i} = -\frac{i}{۸}.$$

گرچه می‌توان این مانده را به روش بخش ۶۶ پیدا کرد ولی محاسباتش پیچیده‌تر است.

برای مانده در قطبهای از مرتبهٔ بالاتر فرمولهایی نظیر فرمول (۲) موجود است اما طولانیتر و عموماً بدون کارایی‌اند.

تمرینها

۱. نشان دهید نقطهٔ $z = \circ$ قطب سادهٔ تابع

$$f(z) = \csc z = \frac{۱}{\sin z}$$

است و مانده در آن نقطه برابر با یک است

(الف) با استفاده از قضیهٔ ۲ بخش ۶۹،

(ب) با استفاده از سری لوران $\csc z$ که در تمرین ۲ بخش ۶۱ به‌دست آوردیم.

۲. نشان دهید که

(الف) $$\operatorname*{Res}_{z=\pi i} \frac{z - \sin \mathrm{h}\, z}{z^۲ \sinh z} = \frac{i}{\pi};$$

(ب) $$\operatorname*{Res}_{z=\pi i} \frac{\exp(zt)}{\sinh z} + \operatorname*{Res}_{z=-\pi i} \frac{\exp(zt)}{\sinh z} = -۲\cos \pi t.$$

۳. نشان دهید که

(الف) $\operatorname*{Res}_{z=z_n}(z\sec z)=(-۱)^{n+۱}z_n,$ که در آن $z_n=\frac{\pi}{۲}+n\pi$ $(n=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$

(ب) $\operatorname*{Res}_{z=z_n}(\tanh z)=۱$ که در آن $z_n=\left(\frac{\pi}{۲}+n\pi\right)i$ $(n=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$.

۴. فرض کنید C دایرهٔ $|z|=۲$ در جهت مثبت باشد و انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

(الف) $\int_C \tan z\,dz$؛ (ب) $\int_C \frac{dz}{\sinh ۲z}$.

جواب: (الف) $-۴\pi i$؛ (ب) $-\pi i$.

۵. فرض کنید C_N مرز مربعی با اضلاع واقع در امتداد خطوط

$$x=\pm\left(N+\frac{۱}{۲}\right)\pi \quad \text{و} \quad y=\pm\left(N+\frac{۱}{۲}\right)\pi$$

در جهت مثبت باشد، که در آن N عدد صحیح مثبتی است. نشان دهید که

$$\int_{C_N}\frac{dz}{z^۲\sin z}=۲\pi i\left[\frac{۱}{۶}+۲\sum_{n=۱}^{N}\frac{(-۱)^n}{n^۲\pi^۲}\right].$$

سپس با استفاده از این واقعیت که وقتی N به بی‌نهایت میل کند مقدار این انتگرال به صفر میل می‌کند (تمرین ۷ بخش ۴۱)، بیان کنید چگونه نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۱۲}.$$

۶. نشان دهید که

$$\int_C\frac{dz}{(z^۲-۱)^۲+۳}=\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}},$$

که در آن C مرز مستطیلی با اضلاع واقع روی خطوط $x=\pm۲$، $y=۰$ و $y=۱$ در جهت مثبت است.

راهنمایی: با ملاحظهٔ این مطلب که چهار صفر چندجمله‌یی $q(z)=(z^۲-۱)^۲+۳$ عبارت‌اند از ریشه‌های دوم اعداد $۱\pm\sqrt{۳}i$، نشان دهید که تابع $۱/q(z)$ در درون و روی C بجز در نقاط

$$z_۰=\frac{\sqrt{۳}+i}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad -\overline{z}_۰=\frac{-\sqrt{۳}+i}{\sqrt{۲}}$$

تحلیلی است. سپس قضیهٔ ۲ بخش ۶۹ را به‌کار برید.

۷. تابع

$$f(z) = \frac{۱}{[q(z)]^{۲}}$$

را در نظر بگیرید که در آن تابع q در $z_{\circ}$ تحلیلی است و $q(z_{\circ}) = \circ$ و $q'(z_{\circ}) \neq \circ$. نشان دهید که $z_{\circ}$ قطب مرتبهٔ $m = ۲$ تابع f است با ماندهٔ

$$B_{\circ} = -\frac{q''(z_{\circ})}{[q'(z_{\circ})]^{۳}}.$$

راهنمایی: توجه کنید که $z_{\circ}$ یک صفر مرتبهٔ $m = ۱$ تابع q است، بنابراین

$$q(z) = (z - z_{\circ})\, g(z)$$

که $g(z)$ در $z_{\circ}$ تحلیلی و ناصفر است. سپس بنویسید

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_{\circ})^{۲}} \qquad \text{که در آن} \qquad \phi(z) = \frac{۱}{[g(z)]^{۲}}.$$

صورت مطلوب ماندهٔ $B_{\circ} = \phi'(z_{\circ})$ را می‌توان با نشان‌دادن

$$q'(z_{\circ}) = g(z_{\circ}) \qquad \text{و} \qquad q''(z_{\circ}) = ۲g'(z_{\circ})$$

به‌دست آورد.

۸. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۷ ماندهٔ هر یک از توابع زیر را در $z = \circ$ پیدا کنید

(الف) $f(z) = \csc^{۲} z$؛ (ب) $f(z) = \dfrac{۱}{(z + z^{۲})^{۲}}$.

جواب: (الف) ۰؛ (ب) ۲−.

۹. فرض کنید p و q معرف توابعی تحلیلی در $z_{\circ}$ باشند، که $p(z_{\circ}) \neq \circ$ و $q(z_{\circ}) = \circ$. نشان دهید اگر خارج‌قسمت $p(z)/q(z)$ دارای قطب مرتبهٔ m در $z_{\circ}$ باشد، آن‌گاه $z_{\circ}$ صفر مرتبهٔ m تابع q است (با قضیهٔ ۱ بخش ۶۹ مقایسه کنید.)

راهنمایی: توجه کنید که بنابر قضیهٔ بخش ۶۶ می‌توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_{\circ})^{m}}$$

که در آن $\phi(z)$ در $z_{\circ}$ تحلیلی و ناصفر است. سپس $q(z)$ را به‌دست آورید.

۱۰. یادآور می‌شویم (بخش ۱۰) که نقطهٔ $z_\circ$ یک نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ S است هرگاه هر همسایگی محذوف $z_\circ$ شامل حداقل یک نقطه از S باشد. یک صورت قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس را می‌توان چنین بیان کرد: هر مجموعهٔ نامتناهی از نقاط واقع در یک ناحیهٔ بسته و محدود مانند R حداقل یک نقطهٔ انباشتگی در R دارد.* با استفاده از این قضیه و قضیهٔ ۲ بخش ۶۸ نشان دهید که اگر تابع f در ناحیهٔ R متشکل از همهٔ نقاط درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C، بجز محتملاً در قطبهای درون C، تحلیلی باشد و اگر همهٔ صفرهای f در R در درون C واقع و از مرتبهٔ متناهی باشند، آن‌گاه تعداد آن صفرها متناهی است.

۱۱. فرض کنید R معرف ناحیهٔ متشکل از همهٔ نقاط درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C باشد. با استفاده از قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس (تمرین ۱۰ را ببینید) و این واقعیت که قطبها نقاط تکین تنها هستند نشان دهید که اگر f در ناحیهٔ R بجز در قطبها که در درون C هستند تحلیلی باشد، آن‌گاه تعداد این قطبها باید متناهی باشد.

۷۰. رفتار تابع در نزدیکی نقاط تکین تنها

همان‌طور که قبلاً در بخش ۶۵ دیدیم رفتار تابع f در نزدیکی نقطهٔ تکین تنهای $z_\circ$ بسته به اینکه $z_\circ$ قطب، نقطهٔ تکین برداشتنی یا نقطهٔ تکین اساسی باشد، فرق می‌کند. در این بخش اختلاف رفتارها را بیشتر بررسی می‌کنیم. چون از این قضایا در قسمتهای دیگر این کتاب استفاده نمی‌شود خواننده‌ای که مایل است زودتر به کاربردها برسد می‌تواند بدون هیچ خللی مستقیماً به فصل ۷ برود.

قضیهٔ ۱. اگر $z_\circ$ یک قطب تابع f باشد، آن‌گاه

$$\lim_{z \to z_\circ} f(z) = \infty \tag{۱}$$

برای تحقیق درستی حد (۱) فرض می‌کنیم که f در $z_\circ$ دارای قطب مرتبهٔ m باشد و از قضیهٔ بخش ۶۶ استفاده می‌کنیم. بنابر آن قضیه

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_\circ)^m},$$

* به‌عنوان مثال، صفحات ۵۱۷ و ۵۲۱ کتاب زیر را ببینید

A. E. Taylor and W. R. Mann. "Advanced Calculus", 3d ed., 1983.

که در آن $\phi(z)$ در z_0 تحلیلی و ناصفر است. چون

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{\phi(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m}{\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z)}=\frac{0}{\phi(z_0)}=0\,.$$

پس بنابر قضیهٔ بخش ۱۶ در مورد حدودی که نقطه در بی‌نهایت مطرح است، حد (۱) برقرار است.

تأکید قضیهٔ بعد بر این نکته است که رفتار f در نزدیکی نقطهٔ تکین برداشتنی اساساً با رفتار آن در نزدیکی قطب فرق می‌کند.

قضیهٔ ۲. اگر z_0 یک نقطهٔ تکین برداشتنی تابع f باشد، آن‌گاه f در یک همسایگی محذوف z_0 مانند $0<|z-z_0|<\varepsilon$ تحلیلی و کراندار است.

اثبات ساده و بر مبنای این امر است که اگر $f(z_0)$ به‌صورتی مناسب تعریف شود تابع f در قرصی مانند $|z-z_0|<R_2$ تحلیلی می‌شود و در این صورت f در هر قرص بستهٔ $|z-z_0|\le\varepsilon$ که $\varepsilon<R_2$ پیوسته است. در نتیجه بنابر بخش ۱۷ تابع f در قرص $|z-z_0|\le\varepsilon$ کراندار است و لذا تابع f علاوه بر تحلیلی‌بودن باید در همسایگی محذوف $0<|z-z_0|<\varepsilon$ کراندار باشد.

اثبات قضیهٔ آخر، در مورد رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ تکین اساسی، بر مبنای لم زیر است که ارتباط نزدیکی با قضیهٔ ۲ دارد و به قضیهٔ ریمان مشهور است.

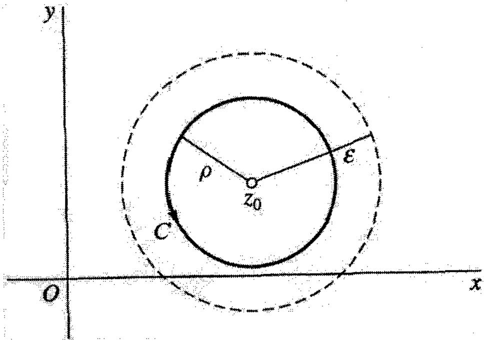
لم. فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف $0<|z-z_0|<\varepsilon$ از نقطهٔ z_0 تحلیلی و کراندار باشد. اگر f در z_0 تحلیلی نباشد، آن‌گاه در z_0 تکینی برداشتنی دارد.

برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم که f در z_0 تحلیلی نباشد. پس نقطهٔ z_0 یک تکینی تنهای f است و f در سراسر همسایگی محذوف $0<|z-z_0|<\varepsilon$ با سری لوران نمایش داده می‌شود

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\,. \tag{۲}$$

اگر C معرف دایرهٔ $|z-z_0|=\rho$ در جهت مثبت باشد، که در آن $\rho<\varepsilon$ (شکل ۸۸)، با توجه به بخش ۵۵ می‌دانیم که ضرایب b_n در بسط (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}}\qquad(n=1,2,\dots)\,. \tag{۳}$$



شکل ۸۸

حال بنابر شرط کرانداری f، عدد ثابت مثبتی مانند M هست که $|f(z)| \leq M$ هرگاه $\circ < |z - z_\circ| < \varepsilon$. بنابراین از فرمول (۳) نتیجه می‌شود که

$$|b_n| \leq \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{-n+۱}} ۲\pi\rho = M\rho^n \qquad (n = ۱, ۲, \ldots).$$

چون ضرایب b_n ثابت‌اند و ρ را می‌توان به‌دلخواه کوچک گرفت، نتیجه می‌گیریم که در سری لوران (۲)، $b_n = \circ$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$. در نتیجه $z_\circ$ تکینی برداشتنی f است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

همان‌طور که قبلاً در بخش ۶۵ خاطر نشان ساختیم، رفتار یک تابع در نزدیکی نقطهٔ تکین اساسی کاملاً نامنظم است. قضیهٔ دوم که در اینجا ثابت می‌شود وابسته به قضیهٔ پیکار است و از آن به‌عنوان قضیهٔ کازوراتی[1]ـوایرشتراس یاد می‌کنند. این قضیه بدین مضمون است که در هر همسایگی محذوف یک نقطهٔ تکین اساسی، تابع مقادیری به دلخواه نزدیک به هر عدد مفروض اختیار می‌کند.

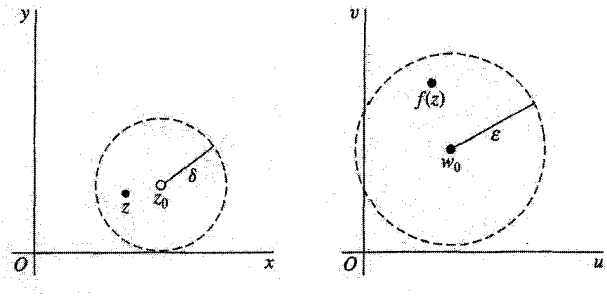
قضیه ۳. فرض کنید $z_\circ$ یک تکینی اساسی تابع f و $w_\circ$ عدد مختلط دلخواهی باشد. در این‌صورت به‌ازای هر عدد مثبت ε، در هر همسایگی محذوف $z_\circ$ مانند $\circ < |z - z_\circ| < \delta$ نابرابری

$$|f(z) - w_\circ| < \varepsilon \qquad (۴)$$

در نقطه‌ای مانند z از آن همسایگی صادق است (شکل ۸۹).

اثبات به‌وسیلهٔ یافتن تناقض است. چون $z_\circ$ تکینی تنهای f است، همسایگی محذوفی مانند $\circ < |z - z_\circ| < \delta$ هست که f در سراسر آن تحلیلی است، و فرض می‌کنیم که شرط (۴)

1. *Casorati*



شکل ۸۹

به‌ازای هیچ zی در این همسایگی محذوف برقرار نباشد. در نتیجه $|f(z) - w_\circ| \geq \varepsilon$ هرگاه $\circ < |z - z_\circ| < \delta$ و تابع

$$g(z) = \frac{\text{١}}{f(z) - w_\circ} \quad (\circ < |z - z_\circ| < \delta) \tag{۵}$$

در حوزهٔ تعریفش تحلیلی و کراندار است. پس بنابر لم فوق، نقطهٔ $z_\circ$ یک تکینی برداشتنی g است؛ و فرض کنید g در $z_\circ$ طوری تعریف شود که در آن تحلیلی باشد.

اگر $g(z_\circ) \neq \circ$، تابع $f(z)$ که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\text{١}}{g(z)} + w_\circ \tag{۶}$$

وقتی $\circ < |z - z_\circ| < \delta$، در $z_\circ$ تحلیلی می‌شود به شرطی که آن را در $z_\circ$ چنین تعریف کنیم

$$f(z_\circ) = \frac{\text{١}}{g(z_\circ)} + w_\circ \,.$$

اما این بدان معناست که $z_\circ$ یک تکینی برداشتنی f است، نه یک تکینی اساسی و به تناقض می‌رسیم.

اگر $g(z_\circ) = \circ$ تابع g باید در $z_\circ$ دارای صفری از یک مرتبهٔ متناهی مانند m باشد (بخش ۶۸) زیرا $g(z)$ در همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ متحد با صفر نیست. پس بنابر رابطهٔ (۶)، f در $z_\circ$ دارای قطب مرتبهٔ m است (قضیهٔ ۱ بخش ۶۹ را ببینید). بنابراین مجدداً به تناقض می‌رسیم و قضیهٔ ۳ ثابت می‌شود.

۷

کاربردهای مانده‌ها

حال به بعضی از کاربردهای مهم نظریهٔ مانده‌ها که در فصل قبل بررسی شد می‌پردازیم. این کاربردها شامل محاسبهٔ برخی از انواع انتگرالهای معین و ناسره است که در آنالیز حقیقی و ریاضی کاربردی مطرح می‌شوند. توجهٔ قابل ملاحظه‌ای به یک روش، مبتنی بر مانده‌ها، برای تعیین محل صفرهای توابع و یافتن تبدیلهای وارون لاپلاس با روش جمع کردن مانده‌ها شده است.

۷۱. محاسبهٔ انتگرالهای ناسره

در حسابان، انتگرال ناسرهٔ تابع پیوستهٔ $f(x)$ بر بازهٔ نیمه نامتناهی $x \geq ۰$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\int_{۰}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{۰}^{R} f(x)dx\,. \qquad (۱)$$

وقتی حد سمت راست موجود باشد، گویند انتگرال ناسره به آن حد همگراست. اگر $f(x)$ در هر نقطهٔ x پیوسته باشد، انتگرال ناسرهٔ آن بر بازهٔ نامتناهی $-\infty < x < \infty$ چنین تعریف می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_۱\to\infty} \int_{-R_۱}^{۰} f(x)dx + \lim_{R_۲\to\infty} \int_{۰}^{R_۲} f(x)dx \qquad (۲)$$

و درصورتی که هر دو حد موجود باشند، انتگرال (۲) به مجموع آنها همگراست. مقدار دیگری که به انتگرال (۲) نسبت می‌دهند اغلب مفید است. یعنی، مقدار اصلی کوشی (P.V.) انتگرال (۲) برابر است با عدد

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx, \tag{۳}$$

به شرطی که این حد تک موجود باشد.

اگر انتگرال (۲) همگرا باشد، مقدار اصلی کوشی (۳) موجود است؛ و این مقدار برابر با عددی است که انتگرال (۲) به آن همگراست. به این دلیل که

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-R}^{\circ} f(x)dx + \int_{\circ}^{R} f(x)dx$$

و درصورتی که انتگرال (۲) همگرا باشد، حد هر یک از انتگرالهای سمت راست وقتی $R \to \infty$ موجود است. ولی همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد اگر مقدار اصلی کوشی موجود باشد، همیشه نمی‌توان گفت انتگرال (۲) همگراست.

مثال. ملاحظه کنید که

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} \circ = \circ. \tag{۴}$$

از طرف دیگر

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{R_۱\to\infty} \int_{-R_۱}^{\circ} x\,dx + \lim_{R_۲\to\infty} \int_{\circ}^{R_۲} x\,dx \tag{۵}$$

$$= \lim_{R_۱\to\infty} \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{-R_۱}^{\circ} + \lim_{R_۲\to\infty} \left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{R_۲}$$

$$= -\lim_{R_۱\to\infty} \frac{R_۱^{۲}}{۲} + \lim_{R_۲\to\infty} \frac{R_۲^{۲}}{۲};$$

چون این دو حد موجود نیستند، درمی‌یابیم که انتگرال ناسرهٔ (۵) موجود نیست.

اما فرض کنید $f(x)(-\infty < x < \infty)$ تابعی زوج باشد، تابعی که

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{به‌ازای هر } x$$

بنابر تقارن نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور yها می‌توان نوشت

$$\int_{\circ}^{R} f(x)dx = \frac{۱}{۲}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

و می‌بینیم که اگر مقدار اصلی کوشی (۳) موجود باشد، انتگرال (۱) به نصف مقدار اصلی کوشی (۳) همگراست. به‌علاوه چون انتگرال (۱) همگراست و چون

$$\int_{-R_{۱}}^{\circ} f(x)dx = \int_{\circ}^{R_{۱}} f(x)dx$$

انتگرال (۲) به دو برابر مقدار انتگرال (۱) همگراست. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $f(x)(-\infty < x < \infty)$ زوج و مقدار اصلی کوشی (۳) موجود باشد، هر دو انتگرال (۱) و (۲) همگرا هستند و

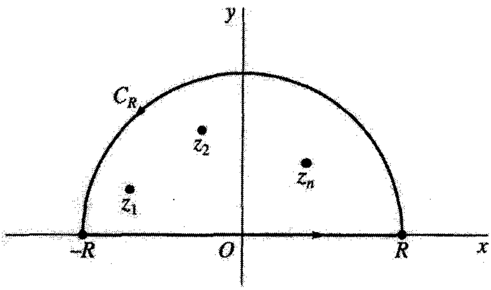
$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۲\int_{\circ}^{\infty} f(x)dx. \qquad (۶)$$

حال روشی، مشتمل بر مانده‌ها، را تشریح می‌کنیم که اغلب برای محاسبهٔ انتگرالهای ناسرهٔ توابع گویای زوج $f(x) = p(x)/q(x)$ به‌کار می‌رود، که در آن $f(-x)$ مساوی $f(x)$ است و $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ییهایی با ضرایب حقیقی و بدون عامل مشترک‌اند. توافق می‌کنیم که $q(z)$ هیچ صفر حقیقی ندارد اما حداقل یک صفر در بالای محور حقیقی دارد.

این روش با شناسایی همهٔ صفرهای متمایز چندجمله‌یی $q(z)$ که در بالای محور حقیقی واقع‌اند شروع می‌شود. البته تعداد آنها متناهی است (بخش ۴۹ را ببینید) و می‌توان آنها را با $z_{۱}, z_{۲}, \ldots, z_n$ نمایش داد، که در آن n مساوی یا کوچکتر از درجهٔ $q(z)$ است. سپس از خارج قسمت

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad (۷)$$

پیرامون مرز ناحیهٔ نیمدایره‌یی که در شکل ۹۰ نشان داده شده و در جهت مثبت گرفته شده است انتگرال می‌گیریم. این مسیر سادهٔ بسته متشکل است از قطعه‌ای از محور حقیقی از $z = -R$ تا $z = R$ و نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z| = R$ که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده و به C_R نمایش داده شده است. باید متوجه بود که عدد مثبت R بقدر کافی بزرگ است تا همهٔ نقاط $z_{۱}, z_{۲}, \ldots, z_n$ درون این مسیر بسته واقع باشد.



شکل ۹۰

با استفاده از قضیهٔ ماندهٔ کوشی در بخش ۶۳ و نمایش پارامتری $z = x$ $(-R \leq x \leq R)$ برای قطعهٔ محور حقیقی که بیان شد می‌توان نوشت

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

یا

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z)\, dz\,. \qquad (8)$$

اگر

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0\,,$$

آن‌گاه نتیجه می‌شود که

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (9)$$

اگر $f(x)$ زوج باشد، از رابطهٔ (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (10)$$

و

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,. \qquad (11)$$

۷۲. مثال

حال به تشریح روش بخش ۷۱ برای محاسبهٔ انتگرالهای ناسره می‌پردازیم.

مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_۰^\infty \frac{x^۲}{x^۶+۱}dx$$

همگراست و مقدار آن را پیدا می‌کنیم. با این نکته آغاز می‌کنیم که تابع

$$f(z)=\frac{z^۲}{z^۶+۱}$$

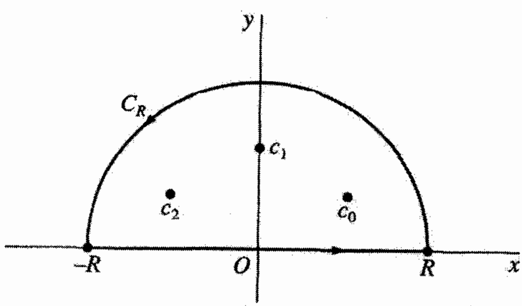
دارای تکینیهای تنها در ریشه‌های ششم ۱− است و در هر جای دیگر تحلیلی است. روش بخش ۸ برای یافتن ریشه‌های اعداد مختلط نشان می‌دهد که ریشه‌های ششم ۱− عبارتند از

$$c_k=\exp\left[i\left(\frac{\pi}{۶}+\frac{۲k\pi}{۶}\right)\right] \qquad (k=۰,۱,۲,\ldots,۵)$$

و هیچ‌یک از آنها روی محور حقیقی نیست. سه ریشهٔ اول

$$c_۰=e^{i\pi/۶}\text{،} \qquad c_۱=i \qquad \text{و} \qquad c_۲=e^{i۵\pi/۶}$$

در نیم‌صفحهٔ بالا واقع‌اند (شکل ۹۱) و سه ریشهٔ دیگر در نیم‌صفحهٔ پایین. درصورتی که $R>۱$، نقاط تکین $c_k(k=۰,۱,۲)$ تابع f درون ناحیهٔ نیمدایره‌یی محدود به پاره‌خط $z=x(-R\le x\le R)$ از محور حقیقی و C_R نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z|=R$ از $z=R$ تا



شکل ۹۱

$-R = z$ واقع‌اند. با انتگرالگیری از $f(z)$ پیرامون مرز این ناحیهٔ نیمدایره‌یی در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، می‌بینیم که

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i(B_0 + B_1 + B_2) \qquad (1)$$

که در آن B_k ماندهٔ $f(z)$ در $c_k\,(k = 0, 1, 2)$ است.

به کمک قضیهٔ ۲ بخش ۶۹ درمی‌یابیم که نقاط c_k قطبهای سادهٔ f هستند و

$$B_k = \operatorname*{Res}_{z=c_k} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

بنابراین

$$2\pi i(B_0 + B_1 + B_2) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3};$$

و رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z)dz \qquad (2)$$

که به‌ازای همهٔ مقادیر R بزرگتر از ۱ برقرار است.

سپس نشان می‌دهیم که وقتی R به ∞ میل کند مقدار انتگرال سمت راست رابطهٔ (۲) به ۰ میل می‌کند. برای انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که وقتی $|z| = R$،

$$|z^2| = |z|^2 = R^2$$

و

$$|z^6 + 1| \geq ||z|^6 - 1| = R^6 - 1.$$

بنابراین اگر z نقطه‌ای روی C_R باشد،

$$|f(z)| = \frac{|z^2|}{|z^6 + 1|} \leq M_R \qquad \text{که در آن} \qquad M_R = \frac{R^2}{R^6 - 1}$$

و در نتیجه

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq M_R \pi R, \qquad (3)$$

πR طول نیمدایرهٔ C_R است. (بخش ۴۱ را ببینید.) چون عدد

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^۳}{R^۶ - ۱}$$

خارج‌قسمت دو چندجمله‌یی برحسب R و درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کوچکتر است وقتی R به ∞ میل کند این خارج‌قسمت باید به صفر میل کند. به عبارت دقیقتر، اگر صورت و مخرج را بر $R^۶$ تقسیم کنیم و بنویسیم

$$M_R \pi R = \frac{\frac{\pi}{R^۳}}{۱ - \frac{۱}{R^۶}},$$

بدیهی است که $M_R \pi R$ به صفر میل می‌کند. در نتیجه، بنابر نابرابری (۳)

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) dz = ۰\,.$$

حال از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^۲}{x^۶ + ۱} dx = \frac{\pi}{۳},$$

یا

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲}{x^۶ + ۱} dx = \frac{\pi}{۳}\,.$$

چون در اینجا انتگرالده زوج است، با توجه به روابط (۶) بخش ۷۱ و عبارت ایرانیک قبل از آنها می‌دانیم که

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{x^۲}{x^۶ + ۱} dx = \frac{\pi}{۶}\,. \qquad (۴)$$

تمرینها

با استفاده از مانده‌ها انتگرالهای ناسره در تمرینهای ۱ تا ۵ را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^۲ + ۱}$

جواب: $\pi/۲$.

۲. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^{2}+1)^{2}}$

جواب: $\pi/4$.

۳. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{4}+1}$

جواب: $\pi/(2\sqrt{2})$.

۴. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2}dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+4)}$

جواب: $\pi/6$.

۵. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2}dx}{(x^{2}+9)(x^{2}+4)^{2}}$

جواب: $\pi/200$.

با استفاده از مانده‌ها مقادیر اصلی کوشی انتگرالهای تمرینات ۶ و ۷ را پیدا کنید.

۶. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2}+2x+2}$

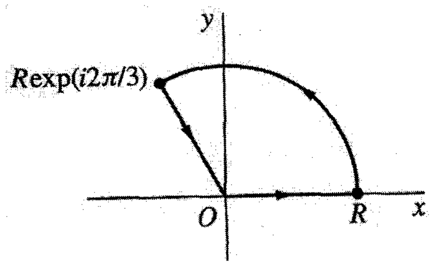
۷. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+2x+2)}$

جواب: $-\pi/5$.

۸. با استفاده از مانده‌ها و مسیر نشان داده شده در شکل ۹۲، که در آن $R > 1$، فرمول انتگرالگیری زیر را به‌دست آورید

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{3}+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

۹. فرض کنید m و n اعدادی صحیح باشند، که $0 \le m < n$. طی مراحل زیر فرمول انتگرالگیری



شکل ۹۲

زیر را نتیجه بگیرید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۲m}}{x^{۲n}+۱}dx = \frac{\pi}{۲n}\csc\left(\frac{۲m+۱}{۲n}\pi\right).$$

(الف) نشان دهید که صفرهای چندجمله‌یی $z^{۲n}+۱$ واقع در بالای محور حقیقی عبارت‌اند از

$$c_k = \exp\left[i\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n}\right] \qquad (k=\circ,۱,۲,\ldots,n-۱)$$

و هیچ صفری از آن روی محور حقیقی نیست.

(ب) به کمک قضیهٔ ۲ بخش ۶۹ نشان دهید که

$$\operatorname*{Res}_{z=c_k}\frac{z^{۲m}}{z^{۲n}+۱} = -\frac{۱}{۲n}e^{i(۲k+۱)\alpha} \qquad (k=\circ,۱,۲,\ldots,n-۱)$$

که در آن c_kها صفرهایی هستند که در قسمت (الف) پیدا شدند و

$$\alpha = \frac{۲m+۱}{۲n}\pi.$$

سپس با استفاده از فرمول مجموعیابی

$$\sum_{k=\circ}^{n-۱} z^k = \frac{۱-z^n}{۱-z} \qquad (z\neq ۱)$$

(تمرین ۱۰ بخش ۷ را ببینید) عبارت زیر را به‌دست آورید

$$۲\pi i\sum_{k=\circ}^{n-۱}\operatorname*{Res}_{z=c_k}\frac{z^{۲m}}{z^{۲n}+۱} = \frac{\pi}{n\sin\alpha}.$$

(ج) با استفاده از نتیجهٔ نهایی قسمت (ب) استنتاج فرمول انتگرالگیری را کامل کنید.

۱۰. فرمول انتگرالگیری

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{[(x^۲-a)^۲+۱]^۲} = \frac{\pi}{۸\sqrt{۲}A^۳}\left[(۲a^۲+۳)\sqrt{A+a}+a\sqrt{A-a}\right]$$

که در آن a عددی حقیقی و دلخواه است و $A=\sqrt{a^۲+۱}$، در نظریهٔ سخت‌سازی فولاد به‌وسیلهٔ حرارت‌دادن با فرکانس رادیویی مطرح می‌شود.* این فرمول را طی مراحل زیر استنتاج کنید.

* صفحات ۳۵۹ـ۳۶۴ کتاب براون، هویلر و بیرورس (Brown, Hoyler, Bierwirth) را که در پیوست ۱ آمده است ببینید.

(الف) خاطر نشان سازید چرا چهار صفر چندجمله‌یی

$$q(z) = (z^۲ - a)^۲ + ۱$$

عبارت‌اند از ریشه‌های دوم اعداد $a \pm i$. سپس با استفاده از اینکه اعداد

$$z_۰ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{A+a} + i\sqrt{A-a}\right)$$

و $-z_۰$ ریشه‌های دوم $a+i$ هستند (تمرین ۵، بخش ۹)، تحقیق کنید که $\pm\overline{z}_۰$ ریشه‌های دوم $a-i$ بوده و لذا $z_۰$ و $-\overline{z}_۰$ تنها صفرهای $q(z)$ در نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} z \geq ۰$ هستند.

(ب) با استفاده از روشی که در تمرین ۷، بخش ۶۹، به‌دست آمد و با به خاطر داشتن $z_۰^۲ = a+i$ به‌منظور ساده‌کردن، نشان دهید که نقطهٔ $z_۰$ در قسمت (الف) یک قطب مرتبهٔ ۲ تابع $f(z) = ۱/[q(z)]^۲$ است و $B_۱$، مانده در $z_۰$، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$B_۱ = -\frac{q''(z_۰)}{[q'(z_۰)]^۳} = \frac{a - i(۲a^۲+۳)}{۱۶A^۲ z_۰}.$$

پس از ملاحظهٔ اینکه $q'(-\overline{z}) = -\overline{q'(z)}$ و $q''(-\overline{z}) = \overline{q''(z)}$، با استفاده از همان روش نشان دهید که نقطهٔ $-\overline{z}_۰$ در قسمت (الف) نیز یک قطب مرتبهٔ ۲ تابع $f(z)$ است باماندهٔ

$$B_۲ = \overline{\left\{\frac{q''(z_۰)}{[q'(z_۰)]^۳}\right\}} = -\overline{B}_۱.$$

سپس عبارت زیر را برای مجموع این مانده‌ها به‌دست آورید

$$B_۱ + B_۲ = \frac{۱}{۸A^۲ i}\operatorname{Im}\left[\frac{-a + i(۲a^۲+۳)}{z_۰}\right].$$

(ج) با رجوع به قسمت (الف) نشان دهید اگر $|z| = R$، آنگاه $|q(z)| \geq (R - |z_۰|)^۴$، که در آن $|z_۰| < R$. سپس به‌کمک نتیجهٔ نهایی قسمت (ب) استنتاج فرمول انتگرالگیری را کامل کنید.

۷۳. انتگرالهای ناسره از آنالیز فوریه

نظریهٔ مانده‌ها می‌تواند در محاسبهٔ انتگرالهای ناسره و همگرا به‌صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx \tag{۱}$$

که در آنها a نمایش عدد ثابت مثبتی است مفید واقع شود. مانند بخش ۷۱، فرض می‌کنیم $f(x) = p(x)/q(x)$، که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ییهایی با ضرایب حقیقی‌اند که هیچ عامل مشترکی ندارند. همچنین $q(z)$ هیچ صفر حقیقیی ندارد. انتگرالهایی از نوع (۱) در نظریه و کاربردهای انتگرال فوریه پیدا می‌شوند.*

روش مذکور در بخش ۷۱ را که در بخش ۷۲ از آن استفاده شد در اینجا نمی‌توان مستقیماً به‌کار برد زیرا (بخش ۳۳ را ببینید)

$$|\sin az|^{۲} = \sin^{۲} ax + \sinh^{۲} ay$$

و

$$|\cos az|^{۲} = \cos^{۲} ax + \sinh^{۲} ay .$$

به عبارت دقیقتر چون

$$\sinh ay = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{۲}$$

قدرمطلقهای $|\sin az|$ و $|\cos az|$ مثل e^{ay} وقتی y به بی‌نهایت میل کند افزایش می‌یابند. روش اصلاح‌شده‌ای که در مثال زیر توضیح داده‌ایم بر اثر این واقعیت به ذهن القا شده است که

$$\int_{-R}^{R} f(x)\cos ax\, dx + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin ax\, dx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\, dx,$$

و قدرمطلق

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay}$$

در نیم‌صفحهٔ بالایی $y \geq ۰$ کراندار است.

مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۳x}{(x^{۲}+۱)^{۲}} dx = \frac{۲\pi}{e^{۳}}. \qquad (۲)$$

چون این انتگرالده زوج است، کافی است نشان دهیم که مقدار اصلی کوشی انتگرال موجود است و مقدار آن را پیدا کنیم.

* فصل ۷ کتاب زیر از مؤلفان را ببینید
“Fourier Series and Boundary Value Problems,” 6th ed., 2001.

تابع

$$f(z) = \frac{۱}{(z^۲ + ۱)^۲} \tag{۳}$$

را معرفی کرده و ملاحظه می‌کنیم که حاصلضرب $f(z)e^{i۳z}$ در همهٔ نقاط محور xها و بالای آن جز در نقطهٔ $z = i$ تحلیلی است. تکینی $z = i$ درون ناحیهٔ نیمدایره‌یی واقع است که مرز آن از پاره‌خط $-R \leq x \leq R$ محور حقیقی و C_R نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z| = R$ $(R > ۱)$ از $z = R$ تا $z = -R$ تشکیل شده است. با انتگرالگیری از $f(z)e^{i۳z}$ پیرامون این مرز رابطهٔ زیر پیدا می‌شود

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i۳x}}{(x^۲ + ۱)^۲} dx = ۲\pi i B_۱ - \int_{C_R} f(z)e^{i۳z} dz, \tag{۴}$$

که در آن

$$B_۱ = \operatorname*{Res}_{z=i} \left[f(z)e^{i۳z} \right].$$

چون

$$\phi(z) = \frac{e^{i۳z}}{(z+i)^۲} \quad \text{که در آن} \quad f(z)e^{i۳z} = \frac{\phi(z)}{(z-i)^۲}$$

نقطهٔ $z = i$ به‌وضوح یک قطب مرتبهٔ $m = ۲$ تابع $f(z)e^{i۳z}$ است و

$$B_۱ = \phi'(i) = \frac{۱}{ie^۳}.$$

سپس با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی طرفین رابطهٔ (۴) درمی‌یابیم که

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos ۳x}{(x^۲ + ۱)^۲} dx = \frac{۲\pi}{e^۳} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i۳z} dz. \tag{۵}$$

بالاخره، ملاحظه می‌کنیم که اگر z نقطه‌ای روی C_R باشد،

$$M_R = \frac{۱}{(R^۲ - ۱)^۲} \quad \text{که در آن} \quad |f(z)| \leq M_R$$

و برای چنین نقطه‌ای $|e^{i۳z}| = e^{-۳y} \leq ۱$. در نتیجه

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i۳z} dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i۳z} dz \right| \leq M_R \pi R. \tag{۶}$$

چون وقتی R به ∞ میل کند کمیت

$$M_R\pi R = \frac{\pi R}{(R^۲-۱)^۲} \times \frac{\frac{۱}{R^۴}}{\frac{۱}{R^۴}} = \frac{\frac{\pi}{R^۳}}{\left(۱-\frac{۱}{R^۲}\right)^۲}$$

به ۰ میل می‌کند و نابرابریهای (۶) برقرارند، برای رسیدن به نتیجهٔ مطلوب (۲) فقط باید در رابطهٔ (۵)، R را به ∞ میل داد.

۷۴. لم ژوردان

در محاسبهٔ انتگرالهایی از نوع بررسی شده در بخش ۷۳ گاهی لازم است از لم ژوردان*، که در اینجا آن را به‌صورت قضیه بیان کرده‌ایم، استفاده کنیم.

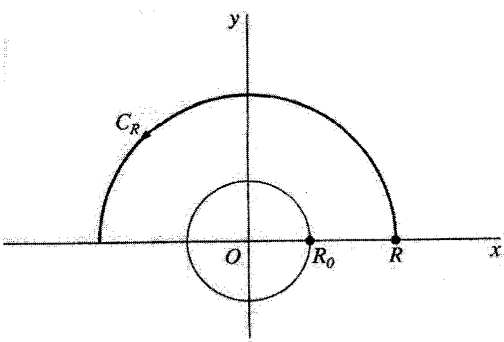
قضیه. فرض کنید که

(الف) تابع $f(z)$ در همهٔ نقاط z واقع در نیم‌صفحهٔ بالایی $y \geq ۰$ که خارج دایرهٔ $|z| = R_۰$ واقع‌اند تحلیلی باشد؛

(ب) C_R نمایش نیمدایرهٔ $z = Re^{i\theta}$ $(۰ \leq \theta \leq \pi)$ باشد، که در آن $R > R_۰$ (شکل ۹۳)؛

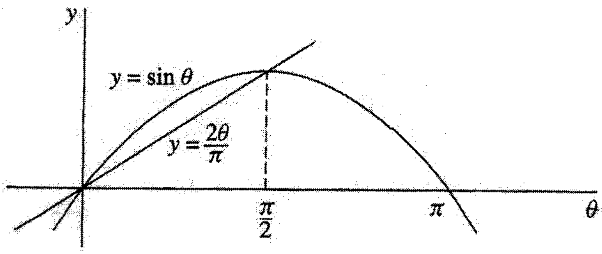
(ج) عدد ثابت مثبتی مانند M_R هست که به‌ازای هر z روی C_R، $|f(z)| \leq M_R$ که در آن

$$\lim_{R\to\infty} M_R = ۰ .$$



شکل ۹۳

* اولین پانوشت در بخش ۳۸ را ببینید.



شکل ۹۴

در این‌صورت به‌ازای هر عدد ثابت مثبت a،

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\, e^{iaz} dz = \circ \qquad (۱)$$

اثبات بر مبنای قضیه‌ای موسوم به نابرابری ژوردان است:

$$\int_\circ^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \qquad (R>\circ) \qquad (۲)$$

برای تحقیق درستی این نابرابری، ابتدا از روی نمودارهای توابع $y=\sin\theta$ و $y=۲\theta/\pi$ وقتی $\circ \leq \theta \leq \pi/۲$ (شکل ۹۴) توجه می‌کنیم که به‌ازای هر θ در این بازه $\sin\theta \geq ۲\theta/\pi$. در نتیجه اگر $R>\circ$،

$$e^{-R\sin\theta} \leq e^{-۲R\theta/\pi} \qquad \text{هرگاه} \qquad \circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}؛$$

و لذا

$$\int_\circ^{\pi/۲} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_\circ^{\pi/۲} e^{-۲R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{۲R}\left(۱-e^{-R}\right).$$

بنابراین

$$\int_\circ^{\pi/۲} e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{۲R} \qquad (R>\circ). \qquad (۳)$$

اما این نابرابری دقیقاً صورت دیگری از نابرابری (۲) است، زیرا نمودار $y=\sin\theta$ نسبت به خط قائم $\theta=\pi/۲$ در بازهٔ $\circ \leq \theta \leq \pi$ متقارن است.

حال به تحقیق درستی حد (۱) می‌پردازیم، احکام (الف)ـ(ج) قضیه را پذیرفته و می‌نویسیم

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_\circ^\pi f(Re^{i\theta}) \exp(iaRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta.$$

چون
$$|\exp(iaRe^{i\theta})| \leq e^{-aR\sin\theta} \quad \text{و} \quad |f(Re^{i\theta})| \leq M_R$$
بنابر نابرابری ژوردان (۲) نتیجه می‌شود که
$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| \leq M_R R\int_{\circ}^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta < \frac{M_R\pi}{a}.$$
پس حد (۱) بدیهی است زیرا وقتی $R \to \infty$، $M_R \to \circ$.

مثال. حال مقدار اصلی کوشی انتگرال زیر را پیدا می‌کنیم
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\ dx}{x^{۲}+ ۲x + ۲}.$$
طبق معمول وجود مقدار مورد سؤال را با یافتن آن ثابت می‌کنیم، می‌نویسیم
$$f(z) = \frac{z}{z^{۲}+۲z+۲} = \frac{z}{(z-z_۱)(z-\overline{z}_۱)},$$
که در آن $z_۱ = -۱ + i$. نقطهٔ $z_۱$ که بالای محور xهاست، قطب سادهٔ تابع $f(z)e^{iz}$ است، با ماندهٔ
$$B_۱ = \frac{z_۱ e^{iz_۱}}{z_۱ - \overline{z}_۱}. \tag{۴}$$
بنابراین اگر $R > \sqrt{۲}$ و C_R نمایش نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z| = R$ در جهت مثبت باشد،
$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}dx}{x^{۲}+۲x+۲} = ۲\pi i B_۱ - \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz;$$
و در نتیجه
$$\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x\ dx}{x^{۲}+۲x+۲} = \mathrm{Im}\,(۲\pi i B_۱) - \mathrm{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}dz. \tag{۵}$$
حال
$$\left|\mathrm{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq \left|\int_{C_R} f(z)e^{iz}dz\right|; \tag{۶}$$
و توجه می‌کنیم که وقتی z نقطه‌ای روی C_R باشد،
$$|f(z)| \leq M_R \quad \text{که در آن} \quad M_R = \frac{R}{(R-\sqrt{۲})^{۲}}$$

و برای هر چنین نقطه‌ای $|e^{iz}| = e^{-y} \leq ۱$. به روش مثالهای بخشهای ۷۲ و ۷۳ نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که وقتی R به بی‌نهایت میل کند سمت راست نابرابری (۶) و بنابراین سمت چپ آن به صفر میل می‌کند. زیرا کمیت

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^۲}{(R-\sqrt{۲})^۲} = \frac{\pi}{\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{R}\right)^۲}$$

به صفر میل نمی‌کند. ولی حد (۱) نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

بنابراین در واقع از نابرابری (۶) نتیجه می‌شود که وقتی R به بی‌نهایت میل کند سمت چپ آن به صفر میل می‌کند. در نتیجه از رابطهٔ (۵) و عبارت (۴) برای ماندهٔ $B_۱$ می‌بینیم که

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^۲ + ۲x + ۲} = \operatorname{Im}(۲\pi i B_۱) = \frac{\pi}{e}(\sin ۱ + \cos ۱). \qquad (۷)$$

تمرینها

به کمک مانده‌ها، انتگرالهای ناسرهٔ تمرینهای ۱ تا ۸ را به‌دست آورید.

۱. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^۲+a^۲)(x^۲+b^۲)} \quad (a > b > ۰)$

جواب: $\displaystyle\frac{\pi}{a^۲-b^۲}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$.

۲. $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^۲+۱} dx \quad (a > ۰)$

جواب: $\displaystyle\frac{\pi}{۲} e^{-a}$.

۳. $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^۲+b^۲)^۲} dx \quad (a > ۰, b > ۰)$

جواب: $\displaystyle\frac{\pi}{۴b^۳}(۱+ab)e^{-ab}$.

۴. $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{x \sin ۲x}{x^۲+۳} dx$

جواب: $\displaystyle\frac{\pi}{۲} \exp(-۲\sqrt{۳})$.

۵. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^۴+۴} dx \quad (a > ۰)$

جواب: $\displaystyle\frac{\pi}{۲} e^{-a} \sin a$.

۶. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{3}\sin ax}{x^{4}+4}dx \quad (a>0)$

جواب: $\pi e^{-a}\cos a$.

۷. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+4)}$

۸. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{3}\sin x\, dx}{(x^{2}+1)(x^{2}+9)}$

با استفاده از مانده‌ها، مقدار اصلی کوشی انتگرال ناسره در تمرینهای ۹ تا ۱۱ را به‌دست آورید.

۹. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^{2}+4x+5}$

جواب: $-\frac{\pi}{e}\sin 2$.

۱۰. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^{2}+4x+5}dx$

جواب: $\frac{\pi}{e}(\sin 2-\cos 2)$.

۱۱. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x+a)^{2}+b^{2}} \quad (b>0)$

۱۲. طی مراحل زیر، انتگرالهای فرنل[1] را که در نظریهٔ پراش حائز اهمیت‌اند به‌دست آورید

$$\int_{0}^{\infty}\cos(x^{2})dx=\int_{0}^{\infty}\sin(x^{2})dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(الف) با انتگرالگیری از تابع $\exp(iz^{2})$ روی مرز قطاع R $0\le r\le R$، $0\le\theta\le\pi/4$ در جهت مثبت (شکل ۹۵) و با استفاده از قضیهٔ کوشی-گورسا نشان دهید که

$$\int_{0}^{R}\cos(x^{2})dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{R}e^{-r^{2}}dr-\operatorname{Re}\int_{C_R}e^{iz^{2}}dz$$

و

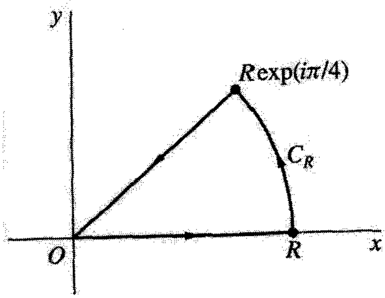
$$\int_{0}^{R}\sin(x^{2})dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{R}e^{-r^{2}}dr-\operatorname{Im}\int_{C_R}e^{iz^{2}}dz$$

که C_R، قوس $z=Re^{i\theta}\ (0\le\theta\le\pi/4)$ است.

(ب) با به‌دست آوردن نابرابری

$$\left|\int_{C_R}e^{iz^{2}}dz\right|\le\frac{R}{2}\int_{0}^{\pi/2}e^{-R^{2}\sin\phi}d\phi$$

1. Fresnel



شکل ۹۵

و سپس با مراجعه به صورت (۳)، بخش ۷۴، از نابرابری ژوردان، نشان دهید که مقدار انتگرال در امتداد قوس C_R، که در قسمت (الف) مطرح شد، به صفر میل می‌کند هرگاه R به بی‌نهایت میل کند.

(ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، همراه با فرمول انتگرالگیری مشهور* زیر را به‌کار برده تمرین را کامل کنید،

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}.$$

۷۵. مسیرهای دندانه‌دار

در این بخش و بخش بعد نحوهٔ استفاده از مسیرهای دندانه‌دار را توصیف می‌کنیم. مطلب را با بیان حد مهمی که در مثال این بخش مطرح خواهد شد شروع می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید که

(الف) تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z = x_{۰}$ بر محور حقیقی دارای قطب ساده و نمایش سری لوران در قرص محذوف $۰ < |z - x_{۰}| < R_{۲}$ و با ماندهٔ $B_{۰}$ باشد (شکل ۹۶)؛

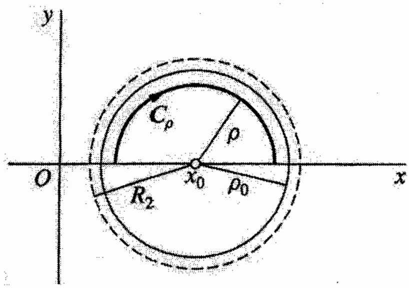
(ب) C_ρ نمایش نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z - x_{۰}| = \rho$ باشد که $\rho < R_{۲}$ و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است.

در این صورت

$$\lim_{\rho \to ۰} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_{۰} \pi i. \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم شرایط (الف) و (ب) برقرار باشند. اثبات قضیه را با نوشتن سری لوران قسمت

* پانوشت تمرین ۴ بخش ۴۶ را ببینید.



شکل ۹۶

(الف) به‌صورت زیر آغاز می‌کنیم

$$f(z) = g(z) + \frac{B_\circ}{z - x_\circ} \qquad (\circ < |z - x_\circ| < R_۲),$$

که در آن

$$g(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - x_\circ)^n \qquad (|z - x_\circ| < R_۲).$$

در نتیجه

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_{C_\rho} g(z)\,dz + B_\circ \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_\circ}. \tag{۲}$$

حال بنابر قضیهٔ بخش ۵۸، تابع $g(z)$ در قرص $|z - x_\circ| < R_۲$ پیوسته است. بنابراین اگر عدد $\rho_\circ$ را طوری بگیریم که $\rho < \rho_\circ < R_۲$ (شکل ۹۶ را ببینید) بنابر بخش ۱۷، تابع $g(z)$ باید در قرص بستهٔ $|z - x_\circ| \le \rho_\circ$ کراندار باشد. یعنی عدد ثابت نامنفیی مانند M هست که

$$|g(z)| \le M \qquad \text{هرگاه} \qquad |z - x_\circ| \le \rho_\circ؛$$

و چون L طول مسیر C_ρ برابر است با $L = \pi\rho$، در نتیجه

$$\left| \int_{C_\rho} g(z)\,dz \right| \le ML = M\pi\rho.$$

بنابراین

$$\lim_{\rho \to \circ} \int_{C_\rho} g(z)\,dz = \circ \tag{۳}$$

چون نیمدایرهٔ $-C_\rho$ دارای نمایش پارامتری

$$z = x_\circ + \rho e^{i\theta} \qquad (\circ \le \theta \le \pi),$$

است، انتگرال دوم در سمت راست رابطهٔ (۲) دارای مقدار زیر است

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_\circ} = -\int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_\circ} = -\int_\circ^\pi \frac{\text{۱}}{\rho e^{i\theta}}\, \rho i e^{i\theta}\, d\theta = -i \int_\circ^\pi d\theta = -i\pi\,.$$

در نتیجه

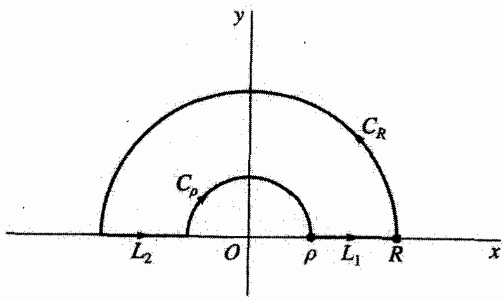
$$\lim_{\rho \to \circ} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_\circ} = -i\pi\,. \tag{۴}$$

حال حد (۱) با میل‌دادن ρ به سمت صفر در طرفین رابطهٔ (۲) و استفاده از حدود (۳) و (۴) به‌دست می‌آید.

مثال. حال با تغییر مختصر در روش به‌کار رفته در بخشهای ۷۳ و ۷۴ و انتگرالگیری از e^{iz}/z روی مسیر ساده و بسته‌ای که در شکل ۹۷ نشان داده شده است، فرمول انتگرالگیری*

$$\int_\circ^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{\text{۲}} \tag{۵}$$

را به‌دست می‌آوریم. در آن شکل، ρ و R معرف اعداد حقیقی و مثبتی هستند که $\rho < R$، و L_1 و L_2 به‌ترتیب بازه‌های $\rho \le x \le R$ و $-R \le x \le -\rho$ را روی محور حقیقی نمایش می‌دهند.



شکل ۹۷

* این فرمول در نظریهٔ انتگرال فوریه پیدا می‌شود. صفحات ۲۰۸ـ۲۰۶ چاپ ششم ۲۰۰۱ کتاب "Fourier Series and Boundary Value Problems" همین مؤلفان را ببینید که این فرمول در آن به روشی کاملاً متفاوت به‌دست آمده است.

در حالی‌که نیمدایرهٔ C_R مانند بخشهای ۷۳ و ۷۴ گرفته شده است، نیمدایرهٔ C_ρ بدین‌منظور معرفی شده است که مسیر انتگرالگیری از تکینی $z=0$ تابع e^{iz}/z عبور نکند.

از قضیهٔ کوشی-گورسا نتیجه می‌شود که

$$\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{L_2}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

یا

$$\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{L_2}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\,. \tag{۶}$$

به‌علاوه، چون ساقهای L_1 و $-L_2$ به‌ترتیب دارای نمایشهای زیرند

$$z=re^{i0}=r(\rho\le r\le R)\qquad \text{و}\qquad z=re^{i\pi}=-r(\rho\le r\le R)، \tag{۷}$$

می‌توان طرف چپ رابطهٔ (۶) را به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{-L_2}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_\rho^R\frac{e^{ir}}{r}dr-\int_\rho^R\frac{e^{-ir}}{r}dr=2i\int_\rho^R\frac{\sin r}{r}dr\,.$$

در نتیجه،

$$2i\int_\rho^R\frac{\sin r}{r}dr=-\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\,. \tag{۸}$$

حال بنابر نمایش سری لوران

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}}{z}&=\frac{1}{z}\left[1+\frac{(iz)}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{z}+\frac{i}{1!}+\frac{i^2}{2!}z+\frac{i^3}{3!}z^2+\cdots\qquad(0<|z|<\infty),\end{aligned}$$

به‌وضوح دیده می‌شود که، e^{iz}/z قطب ساده‌ای در مبدأ با ماندهٔ واحد دارد. پس بنابر قضیهٔ ابتدای این بخش،

$$\lim_{\rho\to0}\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i\,.$$

همچنین، چون وقتی z نقطه‌ای روی C_R باشد

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{R},$$

بنابر لم ژوردان در بخش ۷۴ می‌دانیم که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=۰\,.$$

بنابراین، با میل‌دادن ρ به ۰ در معادلهٔ (۸) و سپس میل‌دادن R به ∞، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$۲i\int_۰^\infty\frac{\sin r}{r}dr=\pi i$$

که در واقع فرمول (۵) است.

۷۶. یک دندانه پیرامون نقطهٔ شاخه‌یی

در مثال این بخش از همان مسیر دندانه‌داری استفاده می‌شود که در مثال بخش قبل استفاده شد. ولی این دندانه به علت نقطهٔ شاخه‌یی اختیار شده است نه تکینی تنها.

مثال. فرمول انتگرالگیری

$$\int_۰^\infty\frac{\ln x}{(x^۲+۴)^۲}dx=\frac{\pi}{۳۲}(\ln ۲-۱)\,. \qquad (۱)$$

را می‌توان با در نظر گرفتن شاخهٔ

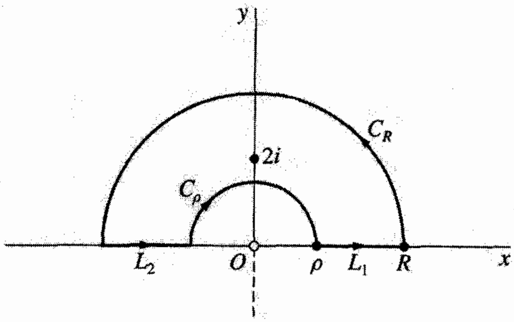
$$f(z)=\frac{\log z}{(z^۲+۴)^۲}\qquad\left(|z|>۰,-\frac{\pi}{۲}<\arg z<\frac{۳\pi}{۲}\right).$$

از تابع چندمقداری $(\log z)/(z^۲+۴)^۲$ به‌دست آورد. این شاخه، که بریدگی شاخه‌یی آن متشکل از مبدأ و قسمت منفی محور موهومی است، در همهٔ نقاط حوزهٔ نشان داده شده بجز در نقطهٔ $z=۲i$ تحلیلی است. برای اینکه همیشه نقطهٔ تکین تنهای $۲i$ درون مسیر بسته باشد، لازم است که $R>۲>\rho$. شکل ۹۸ را ببینید، که در آن نقطهٔ تکین تنها و نقطهٔ شاخه‌یی $z=۰$ نشان داده شده و از همان نمادهای $L_۱$، $L_۲$، C_ρ و C_R شکل ۹۷ استفاده شده است. بنابر قضیهٔ ماندهٔ کوشی

$$\int_{L_۱}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz+\int_{L_۲}f(z)dz+\int_{C_\rho}f(z)dz=۲\pi i\operatorname*{Res}_{z=۲i}f(z)\,.$$

یعنی

$$\int_{L_۱}f(z)dz+\int_{L_۲}f(z)dz=۲\pi i\operatorname*{Res}_{z=۲i}f(z)-\int_{C_\rho}f(z)dz-\int_{C_R}f(z)dz\,. \qquad (۲)$$



شکل ۹۸

چون

$$f(z)=\frac{\ln r+i\theta}{(r^{۲}e^{i۲\theta}+۴)^{۲}}\qquad (z=re^{i\theta})$$

می‌توان نمایشهای پارامتری

$$z=re^{i\circ}=r\quad(\rho\le r\le R)\qquad \text{و}\quad z=re^{i\pi}=-r\quad(\rho\le r\le R) \tag{۳}$$

را برای $L_۱$ و $-L_۲$ به‌کار برده طرف چپ رابطهٔ (۲) را به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{L_۱}f(z)dz-\int_{-L_۲}f(z)dz=\int_\rho^R\frac{\ln r}{(r^۲+۴)^۲}dr+\int_\rho^R\frac{\ln r+i\pi}{(r^۲+۴)^۲}dr.$$

همچنین، چون

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-۲i)^۲}\quad \text{که در آن}\quad \phi(z)=\frac{\log z}{(z+۲i)^۲}،$$

تکینی $z=۲i$ تابع $f(z)$، یک قطب از مرتبهٔ ۲ با ماندهٔ

$$\phi'(۲i)=\frac{\pi}{۶۴}+i\frac{۱-\ln ۲}{۳۲}$$

است. بنابراین رابطهٔ (۲) به

$$۲\int_\rho^R\frac{\ln r}{(r^۲+۴)^۲}dr+i\pi\int_\rho^R\frac{dr}{(r^۲+۴)^۲}=\frac{\pi}{۱۶}(\ln ۲-۱)+i\frac{\pi^۲}{۳۲}$$

$$-\int_{C_\rho}f(z)dz-\int_{C_R}f(z)dz \tag{۴}$$

تبدیل می‌شود و با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی طرفین با هم، در می‌یابیم که

$$۲\int_{\rho}^{R}\frac{\ln r}{(r^{۲}+۴)^{۲}}dr=\frac{\pi}{۱۶}(\ln ۲-۱)-\operatorname{Re}\int_{C_\rho}f(z)dz-\operatorname{Re}\int_{C_R}f(z)dz\,. \quad (۵)$$

آنچه می‌ماند این است که نشان دهیم

$$\lim_{R\to\infty}\operatorname{Re}\int_{C_R}f(z)dz=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{\rho\to ۰}\operatorname{Re}\int_{C_\rho}f(z)dz=۰ \qquad (۶)$$

زیرا در این‌صورت اگر در رابطهٔ (۵)، ρ و R را، به‌ترتیب، به ۰ و ∞ میل دهیم به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$۲\int_{۰}^{\infty}\frac{\ln r}{(r^{۲}+۴)^{۲}}dr=\frac{\pi}{۱۶}(\ln ۲-۱)$$

که همان رابطهٔ (۱) است.

حدود (۶) به‌صورت زیر اثبات می‌شوند. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $\rho<۱$ و $z=\rho e^{i\theta}$ نقطه‌ای روی C_ρ باشد آن‌گاه

$$|\log z|=|\ln\rho+i\theta|\le|\ln\rho|+|i\theta|\le-\ln\rho+\pi$$

و

$$|z^{۲}+۴|\ge||z|^{۲}-۴|=۴-\rho^{۲}\,.$$

در نتیجه،

$$\left|\operatorname{Re}\int_{C_\rho}f(z)dz\right|\le\left|\int_{C_\rho}f(z)dz\right|\le\frac{-\ln\rho+\pi}{(۴-\rho^{۲})^{۲}}\pi\rho=\pi\frac{\pi\rho-\rho\ln\rho}{(۴-\rho^{۲})^{۲}};$$

و بنابر قاعدهٔ هوپیتال[1] وقتی ρ به ۰ میل کند، حاصلضرب $\rho\ln\rho$ که در صورت کسر منتهی‌الیه سمت راست قرار دارد، به ۰ میل می‌کند. بنابراین اولین حد (۶) به‌وضوح برقرار است. به‌صورتی مشابه، با نوشتن

$$\left|\operatorname{Re}\int_{C_R}f(z)dz\right|\le\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\le\frac{\ln R+\pi}{(R^{۲}-۴)^{۲}}\pi R=\pi\frac{\dfrac{\pi}{R}+\dfrac{\ln R}{R}}{\left(R-\dfrac{۴}{R}\right)^{۲}}$$

1. l'Hospital

و استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌توان نشان داد که خارج‌قسمت $(\ln R)/R$ به ۰ میل می‌کند وقتی R به ∞ میل کند، و دومین حد (۶) به‌دست می‌آید.

توجه کنید که چگونه یک فرمول انتگرالگیری دیگر، یعنی

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{dx}{(x^{۲}+۴)^{۲}} = \frac{\pi}{۳۲} \qquad (۷)$$

با مساوی گرفتن قسمتهای موهومی، به‌جای قسمتهای حقیقی، در دو طرف رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود:

$$\pi \int_{\rho}^{R} \frac{dr}{(r^{۲}+۴)^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۳۲} - \operatorname{Im}\int_{C_\rho} f(z)dz - \operatorname{Im}\int_{C_R} f(z)dz\,. \qquad (۸)$$

در این‌صورت با میل‌دادن ρ و R به‌ترتیب به ۰ و ∞، فرمول (۷) به‌دست می‌آید، زیرا

$$\left|\operatorname{Im}\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \quad \text{و} \quad \left|\operatorname{Im}\int_{C_\rho} f(z)dz\right| \le \left|\int_{C_\rho} f(z)dz\right|.$$

۷۷. انتگرالگیری در امتداد یک بریدگی شاخه‌یی

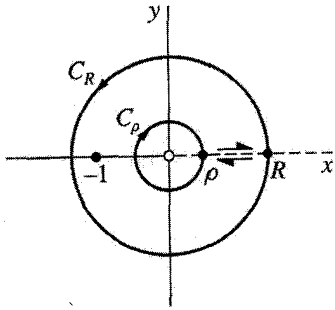
قضیهٔ ماندهٔ کوشی در محاسبهٔ یک انتگرال حقیقی، وقتی قسمتی از مسیر انتگرالگیری تابع $f(z)$، که قضیه برای آن به‌کار می‌رود، در امتداد یک بریدگی شاخه‌یی آن تابع است، می‌تواند مفید باشد.

مثال. فرض کنیم x^{-a}، که در آن $x > \circ$ و $\circ < a < ۱$، معرف مقدار اصلی توان مورد نظر x است؛ یعنی، x^{-a} عدد حقیقی مثبت $\exp(-a\ln x)$ است. حال انتگرال حقیقی ناسرهٔ

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+۱}dx \qquad (\circ < a < ۱) \qquad (۱)$$

را که در مطالعهٔ تابع گاما مهم است محاسبه می‌کنیم.* توجه کنید که انتگرال (۱) نه فقط به دلیل حد بالای انتگرالگیری ناسره است بلکه به دلیل داشتن ناپیوستگی بی‌نهایت انتگرالده در $x = \circ$ نیز ناسره است. در صورتی‌که $\circ < a < ۱$ این انتگرال همگراست زیرا انتگرالده در نزدیکی $x = \circ$ همانند x^{-a}، رفتار می‌کند و وقتی x به بی‌نهایت میل کند همانند $x^{-a-۱}$. ولی نیازی نیست که همگرایی را جداگانه ثابت کنیم زیرا این مطلب در محاسبهٔ انتگرال مستتر است.

* به‌عنوان مثال صفحهٔ ۴ کتاب لبدف (Lebedev) را که در پیوست ۱ ذکر شده، ببینید.



شکل ۹۹

اثبات را با این فرض شروع می‌کنیم که C_ρ و C_R به‌ترتیب نمایش دوایر $|z| = \rho$ و $|z| = R$ باشند که در آن $R > ۱ > \rho$ و آنها را در جهتی می‌گیریم که در شکل ۹۹ نشان داده شده است. سپس از شاخهٔ

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+۱} \qquad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi) \tag{۲}$$

از تابع چندمقداری $z^{-a}/(z+۱)$ با بریدگی شاخه‌یی $\arg z = ۰$، روی مسیر سادهٔ بسته‌ای که در شکل ۹۹ نشان داده شده است انتگرال می‌گیریم. این مسیر به‌وسیلهٔ نقطهٔ متحرکی پیموده می‌شود که در امتداد لبهٔ بالایی بریدگی شاخه‌یی $f(z)$ از ρ به R می‌رود، سپس روی C_R به R برمی‌گردد، بعد در امتداد لبهٔ پایینی بریدگی به ρ می‌رود و بالاخره روی C_ρ به ρ برمی‌گردد.

حال در امتداد «لبه‌های» بالایی و پایینی طوق بریده شده‌ای که ساخته شده است، به‌ترتیب، $\theta = ۰$ و $\theta = ۲\pi$. چون

$$f(z) = \frac{\exp(-a \log z)}{z+۱} = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{re^{i\theta}+۱}$$

هرگاه $z = re^{i\theta}$، در نتیجه روی لبهٔ بالایی که $z = re^{i۰}$،

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i۰)]}{r+۱} = \frac{r^{-a}}{r+۱}$$

و روی لبهٔ پایینی که $z = re^{i۲\pi}$،

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i۲\pi)]}{r+۱} = \frac{r^{-a}e^{-i۲a\pi}}{r+۱}.$$

بدین‌ترتیب از قضیهٔ مانده‌ها نتیجه می‌شود که

$$\int_{\rho}^{R} \frac{r^{-a}}{r+1}dr + \int_{C_R} f(z)dz - \int_{\rho}^{R} \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}dr + \int_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z). \tag{3}$$

البته استنتاج رابطهٔ (۳) فقط صوری است زیرا $f(z)$ روی بریدگی شاخهٔ مطرح شده تحلیلی نیست، یا حتی تعریف نشده است. مع‌هذا این رابطه برقرار است و با استدلالی نظیر آنچه در تمرین ۸ آمده می‌توان درستی آن را کاملاً ثابت کرد.

ماندهٔ موجود در رابطهٔ (۳) را می‌توان با توجه به این نکته که تابع

$$\phi(z) = z^{-a} = \exp(-a\log z) = \exp[-a(\ln r + i\theta)] \qquad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

در $z = -1$ تحلیلی است و

$$\phi(-1) = \exp[-a(\ln 1 + i\pi)] = e^{-ia\pi} \neq 0$$

به‌دست آورد. این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ $z = -1$ یک قطب سادهٔ تابع $f(z)$ است که با ضابطهٔ (۲) تعریف شده و

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = e^{-ia\pi}.$$

بنابراین رابطهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(1 - e^{-i2a\pi})\int_{\rho}^{R} \frac{r^{-a}}{r+1}dr = 2\pi i e^{-ia\pi} - \int_{C_\rho} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz. \tag{4}$$

حال با استناد به تعریف (۲) برای $f(z)$ می‌بینیم که

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)dz\right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho}\rho^{1-a}$$

و

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1}2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1}\cdot\frac{1}{R^a}.$$

چون $0 < a < 1$ وقتی ρ و R به‌ترتیب به 0 و ∞ میل کنند مقادیر این دو انتگرال به 0 میل می‌کنند. بنابراین اگر در رابطهٔ (۴) ابتدا ρ به 0 میل کند و سپس R به ∞ میل کند، نتیجه می‌شود که

$$\left(1 - e^{-i2a\pi}\right)\int_{0}^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+1}dr = 2\pi i e^{-ia\pi},$$

یا

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+\text{۱}} dr = \text{۲}\pi i \, \frac{e^{-ia\pi}}{\text{۱} - e^{-i\text{۲}a\pi}} \cdot \frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}} = \pi \frac{\text{۲}i}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} .$$

این رابطه البته همان رابطهٔ زیر است

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+\text{۱}} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (\circ < a < \text{۱}). \tag{۵}$$

تمرینها

در تمرینهای ۱ تا ۴ مسیر دندانه‌دار شکل ۹۷ (بخش ۷۵) را در نظر بگیرید.

۱. فرمول انتگرالگیری زیر را به‌دست آورید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^{\text{۲}}} dx = \frac{\pi}{\text{۲}}(b-a) \qquad (a \geq \circ, b \geq \circ).$$

سپس با کمک اتحاد مثلثاتی $\text{۱} - \cos(\text{۲}x) = \text{۲}\sin^{\text{۲}} x$ بگویید که چگونه نتیجه می‌شود که

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin^{\text{۲}} x}{x^{\text{۲}}} dx = \frac{\pi}{\text{۲}}.$$

۲. انتگرال ناسرهٔ زیر را محاسبه کنید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^a}{(x^{\text{۲}}+\text{۱})^{\text{۲}}} dx$$ که در آن $-\text{۱} < a < \text{۳}$ و $x^a = \exp(a \ln x)$.

جواب:
$$\begin{cases} \dfrac{(\text{۱}-a)\pi}{\text{۴}\cos(a\pi/\text{۲})}, & a \neq \text{۱} \\ \dfrac{\text{۱}}{\text{۲}}, & a = \text{۱} \end{cases}.$$

۳. با استفاده از تابع

$$f(z) = \frac{z^{\text{۱}/\text{۳}} \log z}{z^{\text{۲}}+\text{۱}} = \frac{e^{(\text{۱}/\text{۳})\log z} \log z}{z^{\text{۲}}+\text{۱}} \qquad \left(|z| > \circ, -\frac{\pi}{\text{۲}} < \arg z < \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}\right)$$

دو فرمول انتگرالگیری زیر را به‌دست آورید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sqrt[\text{۳}]{x} \ln x}{x^{\text{۲}}+\text{۱}} dx = \frac{\pi^{\text{۲}}}{\text{۶}}, \qquad \int_{\circ}^{\infty} \frac{\sqrt[\text{۳}]{x}}{x^{\text{۲}}+\text{۱}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\text{۳}}}.$$

۴. با استفاده از تابع

$$f(z) = \frac{(\log z)^۲}{z^۲ + ۱} \qquad \left(|z| > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \arg z < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

نشان دهید که

$$\int_۰^\infty \frac{(\ln x)^۲}{x^۲ + ۱} dx = \frac{\pi^۳}{۸}, \qquad \int_۰^\infty \frac{\ln x}{x^۲ + ۱} dx = ۰$$

راهنمایی: در اینجا به فرمول انتگرالگیری که در تمرین ۱ بخش ۷۲ به‌دست آمد، نیاز دارید.

۵. با استفاده از تابع

$$f(z) = \frac{z^{۱/۳}}{(z+a)(z+b)} = \frac{e^{(۱/۳)\log z}}{(z+a)(z+b)} \qquad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi)$$

و مسیر بستهٔ شکل ۹۹ (بخش ۷۷) به‌طور صوری نشان دهید که

$$\int_۰^\infty \frac{\sqrt[۳]{x}}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}} \cdot \frac{\sqrt[۳]{a} - \sqrt[۳]{b}}{a - b} \qquad (a > b > ۰).$$

۶. با انتگرالگیری از یک شاخهٔ مناسب تابع چندمقداری

$$f(z) = \frac{z^{-۱/۲}}{z^۲ + ۱} = \frac{e^{(-۱/۲)\log z}}{z^۲ + ۱}$$

روی (الف) مسیر دندانه‌دار شکل ۹۷ بخش ۷۵؛ (ب) مسیر بستهٔ شکل ۹۹ بخش ۷۷؛ نشان دهید که

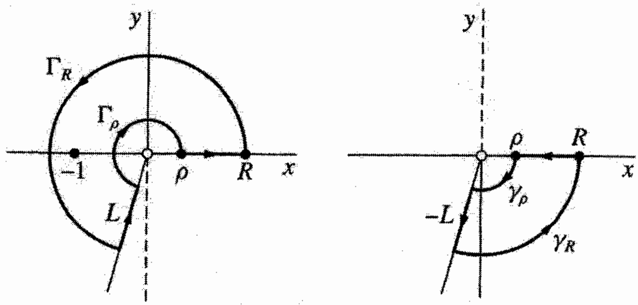
$$\int_۰^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^۲ + ۱)} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}}.$$

۷. تابع بتا، عبارت است از تابع دومتغیرهٔ حقیقی زیر:

$$B(p, q) = \int_۰^۱ t^{p-۱}(۱ - t)^{q-۱} dt \qquad (p > ۰, q > ۰).$$

با قراردادن $t = ۱/(x + ۱)$ و استفاده از نتیجهٔ حاصل در مثال بخش ۷۷، نشان دهید که

$$B(p, ۱ - p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \qquad (۰ < p < ۱).$$



شکل ۱۰۰

۸. دو مسیر سادهٔ بسته‌ای را، که در شکل ۱۰۰ نشان داده شده و از دو قسمت‌کردن طوق محدود به دوایر C_ρ و C_R در شکل ۹۹ (بخش ۷۷) به‌دست آمده است، در نظر بگیرید. ساقهای L و $-L$ این مسیرها عبارت‌اند از پاره‌خطهای جهتداری در امتداد پرتو دلخواهی مانند $\arg z = \theta_۰$ که در آن $\pi < \theta_۰ < ۳\pi/۲$. همچنین Γ_ρ و γ_ρ قسمتهایی از C_ρاند که نشان داده شده است در حالی‌که Γ_R و γ_R، C_R را می‌سازند.

(الف) نشان دهید چگونه از قضیهٔ ماندهٔ کوشی نتیجه می‌شود که وقتی از شاخهٔ

$$f_۱(z) = \frac{z^{-a}}{z+۱} \qquad \left(|z| > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \arg z < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

تابع چندمقداری $z^{-a}/(z+۱)$ روی مسیر بستهٔ سمت چپ شکل ۱۰۰ انتگرال بگیریم،

$$\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+۱}dr + \int_{\Gamma_R} f_۱(z)dz + \int_L f_۱(z)dz + \int_{\Gamma_\rho} f_۱(z)dz = ۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=-۱} f_۱(z).$$

(ب) با استفاده از قضیهٔ کوشی-گورسا برای انتگرال شاخهٔ

$$f_۲(z) = \frac{z^{-a}}{z+۱} \qquad \left(|z| > ۰, \frac{\pi}{۲} < \arg z < \frac{۵\pi}{۲}\right)$$

از تابع $z^{-a}/(z+۱)$، روی مسیر بستهٔ سمت راست شکل ۱۰۰ نشان دهید که

$$-\int_\rho^R \frac{r^{-a}e^{-i۲\pi a}}{r+۱}dr + \int_{\gamma_\rho} f_۲(z)dz - \int_L f_۲(z)dz + \int_{\gamma_R} f_۲(z)dz = ۰.$$

(ج) بگویید چرا در سه انتگرال آخری قسمتهای (الف) و (ب) می‌توان به‌جای شاخه‌های $f_۱(z)$ و $f_۲(z)$ از $z^{-a}/(z+۱)$، شاخهٔ زیر را به‌کار برد

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+۱} \quad (|z| > ۰, ۰ < \arg z < ۲\pi).$$

سپس با جمع کردن طرفهای متناظر این دو رابطه، معادلهٔ (۳) بخش ۷۷ را که در آنجا فقط به‌طور صوری به‌دست آمده نتیجه بگیرید.

۷۸. انتگرالهای معین مشتمل بر سینوس و کسینوس

روش مانده‌ها در محاسبهٔ برخی انتگرالهای معین از نوع

$$\int_۰^{۲\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta \tag{۱}$$

نیز مفید است. این واقعیت که θ از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند این فکر را به ما می‌دهد که θ را یک آوند نقطهٔ z بر دایرهٔ واحد C به مرکز مبدأ در نظر بگیریم، بنابراین می‌نویسیم

$$z = e^{i\theta} \quad (۰ \le \theta \le ۲\pi) \tag{۲}$$

پس به‌طور صوری

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta;$$

و با استفاده از روابط

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-۱}}{۲i}, \qquad \cos\theta = \frac{z+z^{-۱}}{۲}, \qquad d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{۳}$$

انتگرال (۱) تبدیل به

$$\int_C F\left(\frac{z-z^{-۱}}{۲i}, \frac{z+z^{-۱}}{۲}\right)\frac{dz}{iz} \tag{۴}$$

می‌شود که انتگرال مسیری تابعی از z روی دایرهٔ C پیموده شده در جهت مثبت است. البته، بنابر عبارت (۲)، بخش ۳۹، انتگرال (۱) فقط یک صورت پارامتری انتگرال (۴) است. وقتی انتگرالدهٔ انتگرال (۴) تابعی گویا از z باشد، انتگرال را می‌توان پس از تعیین صفرهای چندجمله‌یی مخرج، مشروط بر اینکه هیچ‌یک از آنها روی C نباشد، به‌وسیلهٔ قضیهٔ ماندهٔ کوشی محاسبه کرد.

مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{d\theta}{۱ + a\sin\theta} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۱ - a^{۲}}} \qquad (-۱ < a < ۱). \tag{۵}$$

وقتی $a = ۰$، این فرمول انتگرالگیری به‌وضوح برقرار است و در اثبات مسئله این حالت را کنار می‌گذاریم. با جایگذاری (۳)، این انتگرال به‌صورت

$$\int_{C} \frac{۲/a}{z^{۲} + (۲i/a)z - ۱} dz \tag{۶}$$

در می‌آید که در آن C دایرهٔ $|z| = ۱$ در جهت مثبت است. در اینجا مخرج انتگرالده دارای صفرهای موهومی محض

$$z_{۱} = \left(\frac{-۱ + \sqrt{۱ - a^{۲}}}{a}\right) i, \qquad z_{۲} = \left(\frac{-۱ - \sqrt{۱ - a^{۲}}}{a}\right) i$$

است. بنابراین اگر $f(z)$ نمایش انتگرالده باشد، آن‌گاه

$$f(z) = \frac{۲/a}{(z - z_{۱})(z - z_{۲})}.$$

توجه کنید که چون $|a| < ۱$،

$$|z_{۲}| = \frac{۱ + \sqrt{۱ - a^{۲}}}{|a|} > ۱.$$

همچنین، چون $|z_{۱}z_{۲}| = ۱$ نتیجه می‌شود که $|z_{۱}| < ۱$. بنابراین هیچ نقطهٔ تکینی روی C نیست و تنها نقطهٔ تکین در داخل آن نقطهٔ $z_{۱}$ است. $B_{۱}$ ماندهٔ متناظر با نوشتن

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_{۱}} \qquad \text{که در آن} \qquad \phi(z) = \frac{۲/a}{z - z_{۲}}$$

پیدا می‌شود. این رابطه نشان می‌دهد که $z_{۱}$ یک قطب ساده است و

$$B_{۱} = \phi(z_{۱}) = \frac{۲/a}{z_{۱} - z_{۲}} = \frac{۱}{i\sqrt{۱ - a^{۲}}}.$$

در نتیجه

$$\int_{C} \frac{۲/a}{z^{۲} + (۲i/a)z - ۱} dz = ۲\pi i B_{۱} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۱ - a^{۲}}}$$

و فرمول انتگرالگیری (۵) به‌دست می‌آید.

روشی که اکنون توضیح دادیم برای موقعی که متغیرهای مستقل سینوس و کسینوس مضارب صحیح θ باشند به همین خوبی به‌کار می‌رود. مثلاً می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۲) نوشت

$$\cos ۲\theta = \frac{e^{i۲\theta} + e^{-i۲\theta}}{۲} = \frac{(e^{i\theta})^۲ + (e^{i\theta})^{-۲}}{۲} = \frac{z^۲ + z^{-۲}}{۲}.$$

تمرینها

با استفاده از مانده‌ها، انتگرالهای معین را در تمرینهای ۱ تا ۷ به‌دست آورید.

۱. $\displaystyle\int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۵ + ۴\sin\theta}$

جواب: $\displaystyle\frac{۲\pi}{۳}$.

۲. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{۱ + \sin^۲\theta}$

جواب: $\sqrt{۲}\pi$.

۳. $\displaystyle\int_۰^{۲\pi} \frac{\cos^۲ ۳\theta\, d\theta}{۵ - ۴\cos ۲\theta}$

جواب: $\displaystyle\frac{۳\pi}{۸}$.

۴. $\displaystyle\int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۱ + a\cos\theta} \quad (-۱ < a < ۱)$

جواب: $\displaystyle\frac{۲\pi}{\sqrt{۱ - a^۲}}$.

۵. $\displaystyle\int_۰^{\pi} \frac{\cos ۲\theta\, d\theta}{۱ - ۲a\cos\theta + a^۲} \quad (-۱ < a < ۱)$

جواب: $\displaystyle\frac{a^۲\pi}{۱ - a^۲}$.

۶. $\displaystyle\int_۰^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^۲} \quad (a > ۱)$

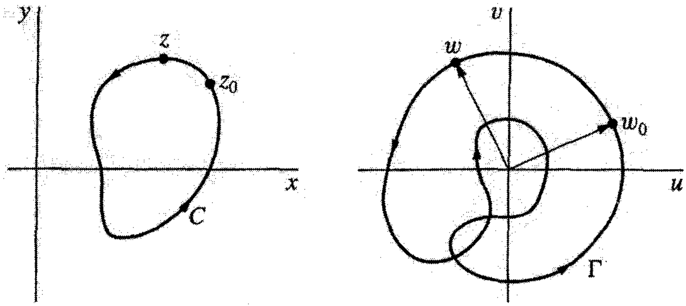
جواب: $\displaystyle\frac{a\pi}{(\sqrt{a^۲ - ۱})^۳}$.

۷. $\displaystyle\int_۰^{\pi} \sin^{۲n}\theta d\theta \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$

جواب: $\displaystyle\frac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^۲}\pi$.

۷۹. اصل آوند

تابع f در حوزهٔ D را برخه‌ریخت می‌نامند، هرگاه در سراسر D بجز محتملاً در قطبها تحلیلی باشد. حال فرض کنید که C مسیر سادهٔ بسته‌ای با جهت مثبت و f در حوزهٔ داخلی C برخه‌ریخت و



شکل ۱۰۱

روی C تحلیلی و ناصفر باشد. Γ، تصویر C تحت تبدیل $w = f(z)$، مسیر بسته‌ای، نه لزوماً ساده، در صفحهٔ w است (شکل ۱۰۱). وقتی نقطهٔ z مسیر C را در جهت مثبت بپیماید، تصویر آن، w، مسیر Γ را در جهت خاصی، که جهت Γ را معین می‌کند، می‌پیماید. توجه کنید که چون تابع f، صفری روی C ندارد مسیر Γ از مبدأ صفحهٔ w نمی‌گذرد.

فرض کنید w و $w_\circ$ نقاطی روی Γ باشند که $w_\circ$ ثابت و $\phi_\circ$ مقداری از $\arg w_\circ$ باشد. سپس فرض کنید وقتی که نقطهٔ w، با شروع از $w_\circ$، Γ را در جهتی که به‌وسیلهٔ نگاشت $w = f(z)$ به آن داده شده است بپیماید، $\arg w$ با شروع از $\phi_\circ$، به‌طور پیوسته تغییر کند. وقتی w به نقطهٔ شروع $w_\circ$ برمی‌گردد، $\arg w$ مقدار خاصی از $\arg w_\circ$ را که با $\phi_\backslash$ نمایش می‌دهیم اختیار می‌کند. بدین‌ترتیب، وقتی w مسیر Γ را در جهتی که به آن داده شده است یک دور بپیماید تغییر $\arg w$ عبارت است از $\phi_\backslash - \phi_\circ$. توجه کنید که این تغییر از نقطهٔ خاص $w_\circ$، که برای تعیین آن برگزیده شده، مستقل است. چون $w = f(z)$، در واقع عدد $\phi_\backslash - \phi_\circ$ تغییر آوند $f(z)$ است وقتی z با شروع از $z_\circ$، مسیر C را در جهت مثبت یک دور بپیماید؛ و قرار دهیم

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_\backslash - \phi_\circ\,.$$

مقدار $\Delta_C \arg f(z)$ به‌وضوح مضرب صحیحی از ۲π است و عدد صحیح

$$\frac{۱}{۲\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

نمایش تعداد دفعاتی است که نقطهٔ w حول مبدأ در صفحهٔ w می‌چرخد. به این دلیل، گاهی اوقات این عدد صحیح را عدد پیچش Γ نسبت به مبدأ $w = \circ$ می‌نامند. عدد پیچش مثبت است اگر Γ حول مبدأ در جهت عکس عقربه‌های ساعت بپیچد و منفی است اگر حول آن

نقطه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بپیچد. عدد پیچش همیشه صفر است هرگاه Γ مبدأ را در بر نگیرد. تحقیق درستی این واقعیت را در حالت خاص به‌عنوان تمرین باقی گذاشته‌ایم.

از روی تعداد صفرها و قطبهای f درون C، می‌توان عدد پیچش را تعیین کرد. بنابر تمرین ۱۱ بخش ۶۹، تعداد قطبها لزوماً متناهی است. به‌طور مشابه، با درک این مطلب که $f(z)$ در بقیهٔ نقاط درون C متحد با صفر نیست به‌آسانی دیده می‌شود (تمرین ۴، بخش ۸۰)که تعداد صفرهای f متناهی است و همهٔ آنها از مرتبهٔ متناهی‌اند. حال فرض کنید که f در حوزهٔ داخلی C، دارای Z صفر و P قطب باشد. قرارداد می‌کنیم که f در نقطهٔ z_0، دارای m_0 صفر است اگر در آن نقطه صفری از مرتبهٔ m_0 داشته باشد، و اگر f در z_0 قطبی از مرتبهٔ m_p داشته باشد، آن قطب m_p بار شمرده می‌شود. قضیهٔ زیر که به اصل آوند مشهور است، بیان می‌کند که عدد پیچش صرفاً تفاضل $Z-P$ است.

قضیه. فرض کنید

(الف) C مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت و تابع $f(z)$ در حوزهٔ داخلی C برخه‌ریخت باشد؛

(ب) $f(z)$ روی C تحلیلی و ناصفر باشد؛

(ج) Z تعداد صفرها و P تعداد قطبهای $f(z)$ در داخل C، با احتساب چندگانگی آنها باشد. در این صورت

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = Z - P\,. \tag{1}$$

برای اثبات این مطلب، انتگرال $f'(z)/f(z)$ روی C را از دو راه مختلف محاسبه می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $z=z(t)\ (a \le t \le b)$ نمایش پارامتری C باشد، بنابراین

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{f'[z(t)]z'(t)}{f[z(t)]}dt\,. \tag{2}$$

چون Γ، تصویر C تحت تبدیل $w=f(z)$، هرگز از مبدأ صفحهٔ w نمی‌گذرد، تصویر هر نقطهٔ $z=z(t)$ روی C را می‌توان به شکل نمایی $w=\rho(t)\exp[i\phi(t)]$ بیان کرد. بنابراین

$$f[z(t)] = \rho(t)e^{i\phi(t)} \qquad (a \le t \le b) \tag{3}$$

و در امتداد هر یک از قوسهای هموار تشکیل‌دهندهٔ مسیر Γ داریم (تمرین ۵، بخش ۳۸ را ببینید)

$$f'[z(t)]z'(t) = \frac{d}{dt}f[z(t)] = \frac{d}{dt}[\rho(t)e^{i\phi(t)}] = \rho'(t)e^{i\phi(t)} + i\rho(t)e^{i\phi(t)}\phi'(t)\,. \tag{4}$$

چون $\rho'(t)$ و $\phi'(t)$ روی بازهٔ $a \le t \le b$ تکه‌یی پیوسته‌اند می‌توان با استفاده از عبارات (۳) و

(۴)، انتگرال (۲) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}dt + i\int_a^b \phi'(t)dt = \ln\rho(t)\Big]_a^b + i\phi(t)\Big]_a^b.$$

اما

$$\rho(b) = \rho(a), \qquad \phi(b) - \phi(a) = \Delta_C \arg f(z).$$

بنابراین

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i\Delta_C \arg f(z). \tag{۵}$$

روش دیگر محاسبهٔ انتگرال (۵) این است که از قضیهٔماندهٔ کوشی استفاده کنیم. به بیان صریح، ملاحظه می‌کنیم که انتگرالده $f'(z)/f(z)$ در درون و روی C، بجز در نقاطی از درون C که در آنها صفرها و قطبهای f واقع‌اند، تحلیلی است. اگر f در $z_\circ$ صفری از مرتبهٔ $m_\circ$ داشته باشد آن‌گاه (بخش ۶۸)

$$f(z) = (z-z_\circ)^{m_\circ} g(z) \tag{۶}$$

که در آن $g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است. بنابراین

$$f'(z_\circ) = m_\circ(z-z_\circ)^{m_\circ - ۱}g(z) + (z-z_\circ)^{m_\circ}g'(z)$$

یا

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_\circ}{z-z_\circ} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{۷}$$

چون $g'(z)/g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی است، دارای نمایش سری تیلر حول آن نقطه است و بنابراین از معادلهٔ (۷) نتیجه می‌شود که $f'(z)/f(z)$ در $z_\circ$ قطب ساده‌ای با ماندهٔ $m_\circ$ دارد. از طرف دیگر اگر f در $z_\circ$ قطبی از مرتبهٔ m_p داشته باشد، با توجه به قضیهٔ بخش ۶۶ می‌دانیم که

$$f(z) = (z-z_\circ)^{-m_p}\phi(z) \tag{۸}$$

که در آن $\phi(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است. چون عبارت (۸) همان شکل عبارت (۶) را دارد که به‌جای عدد صحیح و مثبت $m_\circ$، $-m_p$ گذاشته شده است، به‌وضوح از رابطهٔ (۷)، $f'(z)/f(z)$ قطب ساده‌ای در $z_\circ$ با ماندهٔ $-m_p$ دارد. دراین‌صورت، با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها درمی‌یابیم که

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = ۲\pi i(Z-P). \tag{۹}$$

حال با مساوی گرفتن طرفهای راست روابط (۵) و (۹)، عبارت (۱) نتیجه می‌شود.

مثال. تنها تکینی تابع $1/z^2$ قطبی از مرتبهٔ ۲ در مبدأ است و هیچ صفری در صفحهٔ متناهی ندارد. به‌خصوص، این تابع روی دایرهٔ واحد $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ تحلیلی و ناصفر است. اگر C معرف این دایره در جهت مثبت باشد، از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2.$$

یعنی، Γ، تصویر C تحت تبدیل $w = 1/z^2$، دو بار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ $w = 0$ می‌پیچد. با توجه به اینکه Γ دارای نمایش پارامتری $w = e^{-i2\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ است، می‌توان این موضوع را مستقیماً بررسی کرد.

۸۰. قضیهٔ روشه[1]

قضیهٔ اصلی این بخش موسوم به قضیهٔ روشه نتیجه‌ای از اصل آوند است که در بخش ۷۹ مطرح شد. این قضیه برای تعیین نواحیی از صفحهٔ مختلط که یک تابع تحلیلی مفروض در آن صفری دارد مفید است.

قضیه. فرض کنید که

(الف) توابع $f(z)$ و $g(z)$ در درون و روی مسیر سادهٔ بستهٔ C تحلیلی باشند؛

(ب) در هر نقطه روی C، $|f(z)| > |g(z)|$.

در این‌صورت تعداد صفرهای توابع $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ در داخل C، با احتساب چندگانگی آنها، برابرند.

واضح است که جهت C درصورت قضیه اهمیتی ندارد. بنابراین در اثبات زیر می‌توان فرض کرد که جهت آن مثبت باشد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تابع $f(z)$ و مجموع $f(z)+g(z)$ هیچ‌یک صفری روی C ندارند، چون اگر z روی C باشد آن‌گاه

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0 \qquad \text{و} \qquad |f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0.$$

اگر Z_f و Z_{f+g} به‌ترتیب معرف تعداد صفرهای $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ در داخل C، با احتساب چندگانگی آنها، باشند، با توجه به قضیهٔ بخش ۷۹ می‌دانیم که

$$Z_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) \qquad \text{و} \qquad Z_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left[f(z) + g(z)\right].$$

1. Rouché

در نتیجه، چون

$$\Delta_C \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_C \arg\left\{f(z)\left[۱+\frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\}$$
$$= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left[۱+\frac{g(z)}{f(z)}\right],$$

واضح است که

$$Z_{f+g} = Z_f + \frac{۱}{۲\pi}\Delta_C \arg F(z) \qquad (۱)$$

که در آن

$$F(z) = ۱ + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

اما

$$|F(z)-۱| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < ۱$$

و این بدان معنی است که تحت تبدیل $w = F(z)$، تصویر C در قرص باز $|w-۱| < ۱$ قرار دارد. پس این تصویر، مبدأ $w = ۰$ را دور نمی‌زند. بنابراین $\Delta_C \arg F(z) = ۰$ و چون رابطهٔ (۱) به $Z_{f+g} = Z_f$ تبدیل می‌شود، قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال. برای تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ

$$z^۷ - ۴z^۳ + z - ۱ = ۰ \qquad (۲)$$

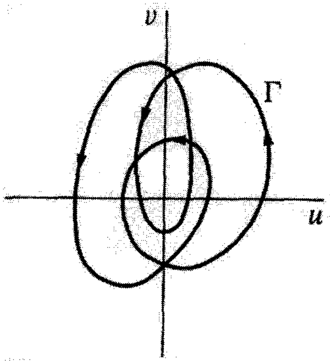
در داخل دایرهٔ $|z| = ۱$ می‌نویسیم

$$f(z) = -۴z^۳ \quad \text{و} \quad g(z) = z^۷ + z - ۱.$$

سپس ملاحظه می‌کنیم که اگر $|z| = ۱$ آن‌گاه $|f(z)| = ۴|z|^۳ = ۴$ و $|g(z)| \leq |z|^۷ + |z| + ۱ = ۳$. بنابراین، شرایط قضیهٔ روشه برقرار است. در نتیجه چون $f(z)$ در داخل دایرهٔ $|z| = ۱$، با احتساب چندگانگی، سه صفر دارد، $f(z) + g(z)$ نیز سه صفر دارد. یعنی معادلهٔ (۲) در داخل دایرهٔ $|z| = ۱$ سه ریشه دارد.

تمرینها

۱. فرض کنید C معرف دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ در جهت مثبت باشد. با استفاده از قضیهٔ بخش ۷۹ مقدار $\Delta_C \arg f(z)$ را تعیین کنید هرگاه



شکل ۱۰۲

(الف) $f(z) = z^{۲}$؛ (ب) $f(z) = (z^{۳} + ۲)/z$؛ (ج) $f(z) = (۲z - ۱)^{۷}/z^{۳}$.

جواب: (الف) ۴π؛ (ب) -۲π؛ (ج) ۸π.

۲. فرض کنید f تابعی باشد که درون و روی مسیر ساده و بستهٔ C تحلیلی است و $f(z)$ هیچ‌گاه روی C صفر نیست. فرض کنید تصویر C تحت تبدیل $w = f(z)$، مسیر بستهٔ Γ باشد که در شکل ۱۰۲ نشان داده شده است. از روی آن شکل، مقدار $\Delta_C \arg f(z)$ را تعیین کنید؛ با کمک قضیهٔ بخش ۷۹ تعداد صفرهای f را در داخل C، با احتساب چندگانگی آنها، به‌دست آورید.

جواب: ۶π؛ ۳.

۳. با استفاده از نمادگذاری بخش ۷۹، فرض کنید که Γ مبدأ $w = ۰$ را در بر نگیرد و پرتوی از آن نقطه موجود باشد که Γ را قطع نکند. با ملاحظهٔ اینکه وقتی نقطهٔ z یک دور پیرامون C می‌چرخد قدرمطلق $\Delta_C \arg f(z)$ باید کمتر از ۲π باشد و یادآوری اینکه $\Delta_C \arg f(z)$ مضرب صحیحی از ۲π است، بگویید چرا عدد پیچش Γ نسبت به مبدأ $w = ۰$ باید صفر باشد.

۴. فرض کنید D حوزهٔ داخلی مسیر ساده و بستهٔ C باشد و تابع f در حوزهٔ D برخه‌ریخت و روی C تحلیلی و ناصفر باشد. $D_۰$ را حوزهٔ مشتمل بر همهٔ نقاط D بجز قطبها بگیرید. بگویید چگونه از لم بخش ۲۶ و تمرین ۱۰، بخش ۶۹، نتیجه می‌شود که اگر $f(z)$ در $D_۰$ متحد با صفر نباشد آن‌گاه تمام صفرهای f در D از مرتبهٔ متناهی هستند و تعدادشان هم متناهی است.

راهنمایی: توجه کنید که اگر نقطهٔ $z_۰$ در D، یک صفر تابع f باشد که از مرتبهٔ متناهی نیست آن‌گاه باید یک همسایگی $z_۰$ موجود باشد که $f(z)$ روی آن متحد با صفر باشد.

۵. C را مسیر ساده و بسته‌ای در جهت مثبت بگیرید و فرض کنید تابع f در درون و روی C تحلیلی باشد و روی C هیچ صفری نداشته باشد. نشان دهید که اگر f درون C دارای n صفر z_k $(k = ۱, ۲, \ldots, n)$ باشد که هر z_k با چندگانگی m_k است آن‌گاه

$$\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} m_k z_k .$$

[با رابطهٔ (۹)، بخش ۷۹، مقایسه کنید وقتی در آنجا $P = ۰$.]

۶. تعداد صفرهای هر یک از چندجمله‌ییهای زیر را، با احتساب چندگانگی آنها، درون دایرهٔ $|z| = ۱$ تعیین کنید

(الف) $z^۶ - ۵z^۴ + z^۳ - ۲z$؛ (ب) $۲z^۴ - ۲z^۳ + ۲z^۲ - ۲z + ۹$

جواب: (الف) ۴؛ (ب) ۰.

۷. تعداد صفرهای هر یک از چندجمله‌ییهای زیر را، با احتساب چندگانگی آنها، درون دایرهٔ $|z| = ۲$ تعیین کنید

(الف) $z^۴ + ۳z^۳ + ۶$؛ (ب) $z^۴ - ۲z^۳ + ۹z^۲ + z - ۱$؛ (ج) $z^۵ + ۳z^۳ + z^۲ + ۱$

جواب: (الف) ۳؛ (ب) ۲؛ (ج) ۵.

۸. تعداد ریشه‌های معادلهٔ

$$۲z^۵ - ۶z^۲ + z + ۱ = ۰$$

را، با احتساب چندگانگی آنها، در طوق $۱ \leq |z| < ۲$، تعیین کنید.

جواب: ۳.

۹. نشان دهید اگر c عدد مختلطی باشد که $|c| > e$ آن‌گاه معادلهٔ $cz^n = e^z$، n ریشه، با احتساب چندگانگی، در داخل دایرهٔ $|z| = ۱$ دارد.

۱۰. با قراردادن $f(z) = z^n$ و $g(z) = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_{n-۱} z^{n-۱}$ و استفاده از قضیهٔ روشه ثابت کنید هر چندجمله‌یی

$$P(z) = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_{n-۱} z^{n-۱} + a_n z^n \qquad (a_n \neq ۰)$$

که $n \geq ۱$، با احتساب چندگانگیها، دقیقاً n صفر دارد. بدین‌ترتیب برای قضیهٔ اساسی جبر، اثبات دیگری ارائه دهید. (قضیهٔ ۲، بخش ۴۹).

راهنمایی: توجه کنید که می‌توان a_n را یک گرفت. سپس نشان دهید که اگر R به اندازهٔ کافی بزرگ و به‌خصوص بزرگتر از

$$۱ + |a_۰| + |a_۱| + \cdots + |a_{n-۱}|$$

باشد، روی دایرهٔ $|z| = R$ داریم $|g(z)| < |f(z)|$.

۱۱. نابرابری (۵) بخش ۴۹ متضمن این است که صفرهای چندجمله‌یی

$$P(z) = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_{n-۱} z^{n-۱} + a_n z^n \qquad (a_n \neq ۰)$$

از درجهٔ $n \geq ۱$، همه در درون دایره‌یی حول مبدأ مانند $|z| = R$ واقع‌اند. همچنین از تمرین ۴ بالا نتیجه می‌شود که همهٔ این صفرها از مرتبهٔ متناهی هستند و تعدادی متناهی از آنها، مثلاً N تا وجود دارد. با استفاده از عبارت (۹)، بخش ۷۹، و قضیهٔ بخش ۶۴، نشان دهید که

$$N = \operatorname*{Res}_{z=۰} \frac{P'(۱/z)}{z^۲ P(۱/z)}$$

که چندگانگی صفرها باید شمرده شوند. سپس با محاسبهٔ این مانده نشان دهید که $N = n$. (با تمرین ۱۰ مقایسه کنید.)

۱۲. فرض کنید توابع f و g چنان باشند که در صورت قضیهٔ روشه در بخش ۸۰ آمده است و مسیر C را در جهت مثبت بگیرید. سپس تابع

$$\Phi(t) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz \qquad (۰ \leq t \leq ۱)$$

را تعریف کرده و طی مراحل زیر، اثبات دیگری برای قضیهٔ روشه ارائه دهید.

(الف) بگویید که چرا مخرج انتگرالده در انتگرالی که $\Phi(t)$ را تعریف می‌کند هرگز روی C صفر نمی‌شود. این امر وجود انتگرال را تضمین می‌کند.

(ب) t و $t_۰$ را دو نقطهٔ دلخواه در بازهٔ $۰ \leq t \leq ۱$ گرفته نشان دهید که

$$|\Phi(t) - \Phi(t_۰)| = \frac{|t - t_۰|}{۲\pi} \left| \int_C \frac{fg' - f'g}{(f + tg)(f + t_۰ g)} dz \right|.$$

سپس، بعد از آنکه گفتید چرا در نقاط روی C داریم

$$\left|\frac{fg'-f'g}{(f+tg)(f+t_{\circ}g)}\right| \leq \frac{|fg'-f'g|}{(|f|-|g|)^{۲}}$$

نشان دهید که ثابت مثبتی مانند A مستقل از t و $t_{\circ}$ هست به‌طوری که

$$|\Phi(t)-\Phi(t_{\circ})| \leq A|t-t_{\circ}|.$$

از این نابرابری نتیجه بگیرید که $\Phi(t)$ روی بازهٔ $۰ \leq t \leq ۱$ پیوسته است.

(ج) با استناد به رابطهٔ (۹) بخش ۷۹، بیان کنید که چرا برای هر مقدار t در بازهٔ $۰ \leq t \leq ۱$، مقدار تابع Φ یک عدد صحیح است که تعداد صفرهای $f(z)+tg(z)$ را در درون C نمایش می‌دهد. سپس از این واقعیت که Φ پیوسته است، همان‌طور که در قسمت (ب) نشان داده شد، نتیجه بگیرید که تعداد صفرهای $f(z)$ و $f(z)+g(z)$، با احتساب چندگانگی، در داخل C برابرند.

۸۱. تبدیلهای وارون لاپلاس

فرض می‌کنیم تابع F از متغیر مختلط s در سراسر صفحهٔ متناهی s بجز در تعدادی متناهی تکینی تنها، تحلیلی باشد. در این‌صورت فرض می‌کنیم L_R نمایش پاره‌خطی قائم واصل از $s=\gamma-iR$ به $s=\gamma+iR$ باشد، که در آن عدد ثابت γ مثبت و به‌قدرکافی بزرگ است تا همهٔ تکینیهای F در سمت چپ پاره‌خط باشند (شکل ۱۰۳). تابع جدید f از متغیر حقیقی t برای مقادیر مثبت t با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(t)=\frac{۱}{۲\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} e^{st}F(s)ds \qquad (t>۰) \tag{۱}$$

به شرطی که این حد موجود باشد. عبارت (۱) را معمولاً به‌صورت زیر می‌نویسند

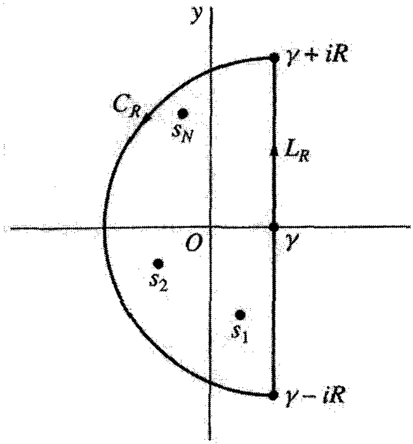
$$f(t)=\frac{۱}{۲\pi i}\text{P.V.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds \qquad (t>۰) \tag{۲}$$

[با رابطهٔ (۳) بخش ۷۱ مقایسه کنید]، و چنین انتگرالی را انتگرال برامویچ[1] می‌نامند.

می‌توان نشان داد که، اگر شرایط نسبتاً کلی روی توابع مطرح شده قرار دهیم، $f(t)$ تبدیل وارون لاپلاس $F(s)$ است. یعنی اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد که با رابطهٔ زیر تعریف شده است

$$F(s)=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}f(t)dt \tag{۳}$$

1. *Bromwich*



شکل ۱۰۳

آن‌گاه $f(t)$ دوباره با رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید، که در آن انتخاب عدد مثبت γ مادامی که همهٔ تکینیهای F در سمت چپ L_R باشند اهمیتی ندارد.* تبدیلهای لاپلاس و وارون آنها در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مهم‌اند.

وقتی که تابع $F(s)$ مشخص شده باشد اغلب می‌توان از مانده‌ها برای محاسبهٔ حد عبارت (۱) استفاده کرد. برای اینکه ببینیم این کار چگونه انجام می‌شود، فرض می‌کنیم s_n $(n = ۱, ۲, \ldots, N)$ معرف تکینیهای $F(s)$ باشند. سپس $R_۰$ را بزرگترین قدرمطلق آنها و C_R را یک نیمدایره با نمایش پارامتری

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \qquad \left(\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{۳\pi}{۲}\right) \tag{۴}$$

می‌گیریم که در آن $R > R_۰ + \gamma$. توجه کنید که برای هر s_n داریم

$$|s_n - \gamma| \leq |s_n| + \gamma \leq R_۰ + \gamma < R.$$

بنابراین همهٔ تکینیها در داخل ناحیهٔ نیمدایره‌یی محدود به C_R و L_R واقع‌اند (شکل ۱۰۳) و بنابر

* برای یک بررسی جامع چنین جزئیاتی در مورد تبدیل لاپلاس، کتاب

R. V. Churchill, "Operational Mathematics" 3d ed., 1972.

را ببینید که در آن تبدیل $F(s)$ با تعدادی نامتناهی نقطهٔ تکین تنها یا با بریدگی شاخه‌یی نیز بررسی شده است.

قضیهٔ مانده‌ها داریم

$$\int_{L_R} e^{st}F(s)ds = ۲\pi i \sum_{n=۱}^{N} \operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)] - \int_{C_R} e^{st}F(s)ds\,. \qquad (۵)$$

حال فرض می‌کنیم، عدد ثابت مثبتی مانند M_R موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر s روی C_R داشته باشیم $|F(s)| \le M_R$، که در آن M_R به صفر میل می‌کند وقتی R به بی‌نهایت میل کند. با استفاده از نمایش پارامتری (۴) برای C_R می‌توان نوشت

$$\int_{C_R} e^{st}F(s)ds = \int_{\pi/۲}^{۳\pi/۲} \exp(\gamma t + Rte^{i\theta})F(\gamma + Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\,.$$

پس، چون

$$|F(\gamma + Re^{i\theta})| \le M_R \quad \text{و} \quad |\exp(\gamma t + Rte^{i\theta})| = e^{\gamma t}e^{Rt\cos\theta}$$

در می‌یابیم که

$$\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)ds\right| \le e^{\gamma t}M_R R \int_{\pi/۲}^{۳\pi/۲} e^{Rt\cos\theta}d\theta\,. \qquad (۶)$$

اما اگر قرار دهیم $\phi = \theta - (\pi/۲)$ با توجه به نابرابری ژوردان (۲)، بخش ۷۴، نتیجه می‌شود که

$$\int_{\pi/۲}^{۳\pi/۲} e^{Rt\cos\theta}d\theta = \int_{\circ}^{\pi} e^{-Rt\sin\phi}d\phi < \frac{\pi}{Rt}\,.$$

بنابراین نابرابری (۶) تبدیل می‌شود به

$$\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)ds\right| \le e^{\gamma t}\frac{M_R\pi}{t}, \qquad (۷)$$

و این نشان می‌دهد که

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st}F(s)ds = \circ\,. \qquad (۸)$$

سپس با میل دادن R به ∞ در رابطهٔ (۵) می‌بینیم که تابع $f(t)$ که با ضابطهٔ (۱) تعریف شد، موجود است و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$f(t) = \sum_{n=۱}^{N} \operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)] \qquad (t > \circ)\,. \qquad (۹)$$

در بسیاری از کاربردهای تبدیلهای لاپلاس، مانند حل معادلات دیفرانسیل جزئی که در مطالعهٔ هدایت گرما و ارتعاشهای مکانیکی مطرح می‌شوند تابع $F(s)$ برای همهٔ مقادیر s در صفحهٔ متناهی بجز یک مجموعهٔ نامتناهی از نقاط تکین تنها مانند $s_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ که در سمت چپ خطی قائم مانند $\text{Re } s = \gamma$ قرار دارند، تحلیلی است. اغلب می‌توان این روشی را که برای یافتن $f(t)$ توصیف کردیم، طوری اصلاح کرد که به‌جای مجموع متناهی (۹) سری

$$f(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=s_n} [e^{st}F(s)] \qquad (t > ۰) \tag{۱۰}$$

که یک سری نامتناهی از مانده‌هاست، قرار گیرد. تعدیل اساسی این است که به‌جای پاره‌خطهای قائم L_R پاره‌خطهای قائم $L_N (N = ۱, ۲, \ldots)$، واصل از $s = \gamma - ib_N$ به $s = \gamma + ib_N$، را قرار دهیم. در این‌صورت به‌جای قوسهای دایره‌یی C_R مسیرهای $C_N (N = ۱, ۲, \ldots)$، از $\gamma + ib_N$ به $\gamma - ib_N$، قرار می‌گیرند به‌طوری که برای هر N، مجموع $L_N + C_N$ یک مسیر سادهٔ بسته باشد که نقاط تکین $s_۱, s_۲, \ldots, s_N$ را در بر گیرد. وقتی که نشان دهیم

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} e^{st}F(s)ds = ۰, \tag{۱۱}$$

عبارت (۲) برای $f(t)$ به عبارت (۱۰) تبدیل می‌شود.

انتخاب مسیرهای C_N بستگی به ماهیت تابع $F(s)$ دارد. انتخابهای متداول شامل قوسهای دایره‌یی یا سهمی‌شکل و مسیرهای مستطیلی است. همچنین نیازی نیست که مسیر ساده و بستهٔ $L_N + C_N$، دقیقاً N تکینی را در بر گیرد. مثلاً وقتی ناحیهٔ بین $L_N + C_N$ و $L_{N+۱} + C_{N+۱}$ شامل دو نقطهٔ تکین $F(s)$ باشد، دو ماندهٔ $e^{st}F(s)$ نظیر آنها صرفاً به‌صورت یک جمله در سری (۱۰) دسته‌بندی می‌شود. چون اثبات حد (۱۱) در هر حالت معمولاً خسته‌کننده است، در مثالها و تمرینهای زیر که شامل تعدادی نامتناهی نقطهٔ تکین‌اند، این حد را می‌پذیریم.* بنابراین استفاده از عبارت (۱۰) فقط جنبهٔ صوری خواهد داشت.

۸۲. چند مثال

اغلب با تکنیکهایی که در تمرینهای ۱۲ و ۱۳ این بخش مطرح کرده‌ایم، محاسبهٔ مجموع مانده‌های $e^{st}F(s)$ در عبارات (۹) و (۱۰)، بخش ۸۱، به‌آسانی انجام می‌شود. در اینجا قبل از مثالها،

* یک بررسی جامع روشهای به‌دست آوردن حد (۱۱) درکتاب ر. و. چرچیل (R. V. Churchill) آمده است که در پانوشت قبل به آن ارجاع دادیم. در واقع تبدیل وارونی که در مثال ۳ بخش آتی پیدا می‌شود، در صفحات ۲۲۶ـ۲۲۰ آن کتاب به‌طور کامل بررسی شده است.

حکمی برای این تکنیکها ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $F(s)$ در نقطهٔ $s_\circ$ قطبی از مرتبهٔ m داشته باشد و نمایش سری لوران آن در قرص محذوف $\circ < |s - s_\circ| < R_۲$ دارای قسمت اصلی

$$\frac{b_۱}{s-s_\circ} + \frac{b_۲}{(s-s_\circ)^۲} + \cdots + \frac{b_m}{(s-s_\circ)^m} \qquad (b_m \neq \circ)$$

باشد. در این‌صورت

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] = e^{s_\circ t}\left[b_۱ + \frac{b_۲}{۱!}t + \cdots + \frac{b_m}{(m-۱)!}t^{m-۱}\right]. \qquad (۱)$$

اگر قطب $s_\circ$ به‌صورت $s_\circ = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq \circ)$ باشد و در نقاط تحلیلی‌بودن $F(s)$ داشته باشیم $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$ (بخش ۲۷ را ببینید)، آن‌گاه مزدوج آن یعنی $\overline{s}_\circ = \alpha - i\beta$ نیز یک قطب مرتبهٔ m است. به‌علاوه برای عددی حقیقی مانند t داریم

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_\circ}[e^{st}F(s)]$$
$$= ۲e^{\alpha t}\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta t}\left[b_۱ + \frac{b_۲}{۱!}t + \cdots + \frac{b_m}{(m-۱)!}t^{m-۱}\right]\right\}. \qquad (۲)$$

توجه کنید که اگر $s_\circ$ یک قطب ساده باشد ($m = ۱$)، روابط (۱) و (۲)، به‌ترتیب، به

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] = e^{s_\circ t}\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}F(s) \qquad (۳)$$

و

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_\circ}[e^{st}F(s)] = ۲e^{\alpha t}\operatorname{Re}\left[e^{i\beta t}\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}F(s)\right] \qquad (۴)$$

تبدیل می‌شوند.

مثال ۱. حال تابع $f(t)$ را پیدا می‌کنیم که متناظر با تابع زیر باشد

$$F(s) = \frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲} \qquad (a > \circ). \qquad (۵)$$

تکینیهای $F(s)$ عبارت‌اند از نقاط مزدوج

$$s_\circ = ai \quad \text{و} \quad \overline{s}_\circ = -ai.$$

چون می‌توان نوشت

$$F(s) = \frac{\phi(s)}{(s-ai)^۲} \quad \text{که در آن} \quad \phi(s) = \frac{s}{(s+ai)^۲}،$$

می‌بینیم که $\phi(s)$ در $s_\circ = ai$ تحلیلی و ناصفر است. بنابراین $s_\circ$ یک قطب مرتبهٔ $m = ۲$ از تابع $F(s)$ است. به‌علاوه در نقاطی که $F(s)$ تحلیلی است داریم $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$. در نتیجه، $\overline{s}_\circ$ نیز یک قطب مرتبهٔ ۲ از تابع $F(s)$ است؛ و با توجه به رابطهٔ (۲) می‌دانیم که

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_\circ}[e^{st}F(s)] = ۲\mathrm{Re}\,[e^{iat}(b_۱ + b_۲ t)], \tag{۶}$$

که در آن $b_۱$ و $b_۲$، ضرایب قسمت اصلی

$$\frac{b_۱}{s-ai} + \frac{b_۲}{(s-ai)^۲}$$

از تابع $F(s)$ در ai هستند. این ضرایب را می‌توان با کمک دو جملهٔ اول سری تیلر $\phi(s)$ حول $s_\circ = ai$، به‌آسانی به‌دست آورد:

$$F(s) = \frac{۱}{(s-ai)^۲}\phi(s) = \frac{۱}{(s-ai)^۲}\left[\phi(ai) + \frac{\phi'(ai)}{۱!}(s-ai) + \cdots\right]$$

$$= \frac{\phi(ai)}{(s-ai)^۲} + \frac{\phi'(ai)}{s-ai} + \cdots \qquad (\circ < |s-ai| < ۲a).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\phi(ai) = -i/(۴a)$ و $\phi'(ai) = \circ$، و در می‌یابیم که $b_۱ = \circ$ و $b_۲ = -i/(۴a)$. بنابراین، عبارت (۶) چنین می‌شود

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_\circ}[e^{st}F(s)] = ۲\mathrm{Re}\left[e^{iat}\left(-\frac{i}{۴a}t\right)\right] = \frac{۱}{۲a}t\sin at\,.$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(t) = \frac{۱}{۲a}t\sin at \qquad (t > \circ) \tag{۷}$$

به شرط آنکه $F(s)$ در شرط کرانداریی که در بخش ۸۱ با خط ایرانیک بیان شد، صدق کند.

برای بررسی شرط کرانداری، s را نقطهٔ دلخواهی روی نیمدایرهٔ

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \qquad \left(\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{۳\pi}{۲}\right),$$

می‌گیریم که در آن $\gamma > \circ$ و $R > a + \gamma$؛ و توجه می‌کنیم که

$|s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \leq \gamma + R$ و $|s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \geq |\gamma - R| = R - \gamma > a$.

چون

$$|s^{۲} + a^{۲}| \geq ||s|^{۲} - a^{۲}| \geq (R-\gamma)^{۲} - a^{۲} > \circ,$$

نتیجه می‌شود که

$|F(s)| = \dfrac{|s|}{|s^{۲} + a^{۲}|^{۲}} \leq M_R$ که در آن $M_R = \dfrac{\gamma + R}{[(R-\gamma)^{۲} - a^{۲}]^{۲}}$.

چون اگر $R \to \infty$ آن‌گاه $M_R \to \circ$، شرط کرانداری مورد نظر ثابت می‌شود.

مثال ۲. برای یافتن $f(t)$ وقتی

$$F(s) = \frac{\tanh s}{s^{۲}} = \frac{\sinh s}{s^{۲}\cosh s},$$

توجه می‌کنیم که $F(s)$ تکینیهای تنهایی در $s = \circ$ و در صفرهای $\cosh s$ (بخش ۳۴)، یعنی

$$s = \left(\frac{\pi}{۲} + n\pi\right) i \qquad (n = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

دارد. این تکینیها را به شکل زیر فهرست می‌کنیم

$$s_{\circ} = \circ \text{ ،} \quad s_n = \frac{(۲n-۱)\pi}{۲} i \text{ ؛} \quad \overline{s}_n = -\frac{(۲n-۱)\pi}{۲} i \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

در این‌صورت، به‌طور صوری

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{s=s_{\circ}} [e^{st}F(s)] + \sum_{n=۱}^{\infty} \left\{ \operatorname*{Res}_{s=s_n} [e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_n} [e^{st}F(s)] \right\}. \qquad (۸)$$

با تقسیم سریهای مکلورن، نمایش سری لوران

$$F(s) = \frac{۱}{s^{۲}} \cdot \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{۱}{s} - \frac{۱}{۳}s + \cdots \qquad \left(\circ < |s| < \frac{\pi}{۲}\right)$$

به‌دست می‌آید که نتیجه می‌دهد $s_{\circ} = \circ$ یک قطب سادهٔ $F(s)$ با ماندهٔ واحد است. لذا، بنابر عبارت (۳) داریم

$$\operatorname*{Res}_{s=s_{\circ}} [e^{st}F(s)] = \operatorname*{Res}_{s=s_{\circ}} F(s) = ۱. \qquad (۹)$$

با استفاده از روشی که در قضیهٔ ۲ بخش ۶۹ برای تشخیص قطبهای ساده و تعیین مانده‌ها در چنین نقاطی مطرح شد، به‌آسانی می‌توان مانده‌های $F(s)$ را در نقاط s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ به‌دست آورد. به عبارت دقیقتر، می‌نویسیم

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}، \quad \text{که در آن} \quad p(s) = \sinh s \quad \text{و} \quad q(s) = s^2 \cosh s$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$\sinh s_n = \sinh\left[i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = i \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -i \cos n\pi = (-1)^{n+1} i \neq 0 .$$

پس، چون

$$p(s_n) = \sinh s_n \neq 0, \quad q(s_n) = 0 \quad \text{و} \quad q'(s_n) = s_n^2 \sinh s_n \neq 0$$

در می‌یابیم که [با مثال ۳ بخش ۶۹ مقایسه کنید]

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{1}{s_n^2} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

اتحادهای

$$\overline{\cosh s} = \cosh \overline{s} \quad \text{و} \quad \overline{\sinh s} = \sinh \overline{s}$$

(تمرین ۱۱ بخش ۳۴ را ببینید) تضمین می‌کنند در نقاطی که تابع $F(s)$ تحلیلی است داریم $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$. بنابراین $\overline{s}_n$ نیز یک قطب سادهٔ $F(s)$ است و می‌توان با استفاده از عبارت (۴) نوشت

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)] + \operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_n}[e^{st}F(s)] = 2\operatorname{Re}\left\{-\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \exp\left[i\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right]\right\}$$

$$= \frac{-8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (10)$$

سرانجام با جایگذاری عبارات (۹) و (۱۰) در معادلهٔ (۸) به نتیجه مورد نظر می‌رسیم:

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2} \qquad (t > 0). \qquad (11)$$

مثال ۳. حال تابع

$$F(s) = \frac{\sinh(xs^{1/2})}{s\sinh(s^{1/2})} \qquad (0 < x < 1), \tag{۱۲}$$

را در نظر می‌گیریم که $s^{1/2}$ معرف شاخهٔ دلخواهی از این تابع دو مقداری است. با وجود این، قرارداد می‌کنیم که از یک شاخه در صورت و مخرج کسر استفاده کنیم، بنابراین اگر s یک نقطهٔ تکین $F(s)$ نباشد، آن‌گاه

$$F(s) = \frac{xs^{1/2} + (xs^{1/2})^3/3! + \cdots}{s[s^{1/2} + (s^{1/2})^3/3! + \cdots]} = \frac{x + x^3 s/6 + \cdots}{s + s^2/6 + \cdots}. \tag{۱۳}$$

به‌وضوح یکی از این نقاط تکین $s = 0$ است. با این قرارداد اضافی، که بریدگی شاخه‌یی $s^{1/2}$ در امتداد محور حقیقی منفی قرار نگیرد تا $\sinh(s^{1/2})$ در امتداد آن محور خوشتعریف باشد، سایر نقاط تکین زمانی رخ می‌دهند که $s^{1/2} = \pm n\pi i$ $(n = 1, 2, \ldots)$. بنابراین نقاط

$$s_0 = 0 \;\text{،}\; s_n = -n^2\pi^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

مجموعهٔ نقاط تکین $F(s)$ را تشکیل می‌دهند. حال مسأله، محاسبهٔ مانده‌ها در نمایش سری صوری زیر است

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=s_n}[e^{st}F(s)]. \tag{۱۴}$$

با تقسیم سریهای توانی در منتهی‌الیه راست عبارت (۱۳) معلوم می‌شود که s_0 یک قطب سادهٔ $F(s)$ با ماندهٔ x است. بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}[e^{st}F(s)] = x. \tag{۱۵}$$

همین‌طور برای مانده‌های $F(s)$ در نقاط تکین $s_n = -n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$، می‌نویسیم

$F(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ که در آن $p(s) = \sinh(xs^{1/2})$ و $q(s) = s\sinh(s^{1/2})$.

همان‌طور که در مثال ۲ انجام دادیم، برای استفاده از قضیهٔ ۲ بخش ۶۹ مشاهده می‌کنیم که

$$p(s_n) = \sinh(xs_n^{1/2}) \neq 0 \;\text{،}\; q(s_n) = 0 \quad \text{و} \quad q'(s_n) = \frac{1}{2}s_n^{1/2}\cosh(s_n^{1/2}) \neq 0$$

و در نتیجه هر s_n قطب ساده‌ای از $F(s)$ است با ماندهٔ

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{۲}{\pi} \cdot \frac{(-۱)^n}{n} \sin n\pi x\,.$$

لذا، بنابر عبارت (۳) داریم

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n} [e^{st}F(s)] = e^{s_n t}\operatorname*{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{۲}{\pi} \cdot \frac{(-۱)^n}{n} e^{-n^۲\pi^۲ t} \sin n\pi x\,. \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری عبارات (۱۵) و (۱۶) در معادلهٔ (۱۴) به تابع زیر می‌رسیم

$$f(t) = x + \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n} e^{-n^۲\pi^۲ t} \sin n\pi x \qquad (t > ۰)\,. \qquad (۱۷)$$

تمرینها

در تمرینهای ۱ تا ۵، با استفاده از روشی که در بخش ۸۱ بیان شد و در مثال ۱ بخش ۸۲ آن را توضیح دادیم، تابع $f(t)$ نظیر تابع مفروض $F(s)$ را بیابید.

۱. $F(s) = \dfrac{۲s^۳}{s^۴ - ۴}$

جواب: $f(t) = \cosh \sqrt{۲}t + \cos \sqrt{۲}t$.

۲. $F(s) = \dfrac{۲s - ۲}{(s+۱)(s^۲ + ۲s + ۵)}$

جواب: $f(t) = e^{-t}(\sin ۲t + \cos ۲t - ۱)$.

۳. $F(s) = \dfrac{۱۲}{s^۳ + ۸}$

جواب: $f(t) = e^{-۲t} + e^{t}(\sqrt{۳}\sin \sqrt{۳}t - \cos \sqrt{۳}t)$.

۴. $F(s) = \dfrac{s^۲ - a^۲}{(s^۲ + a^۲)^۲} \qquad (a > ۰)$

جواب: $f(t) = t\cos at$.

۵. $F(s) = \dfrac{۸a^۳ s^۲}{(s^۲ + a^۲)^۳} \qquad (a > ۰)$.

راهنمایی: برای قسمت اصلی $F(s)$ در ai به تمرین ۴ بخش ۶۵ مراجعه کنید.

جواب: $f(t) = (۱ + a^۲t^۲)\sin at - at\cos at$.

در تمرینهای ۶ تا ۱۱، با استفاده از روش صوری شامل یک سری نامتناهی از مانده‌ها که در

مثالهای ۲ و ۳، بخش ۸۲، توضیح داده شد، تابع $f(t)$ نظیر تابع مفروض $F(s)$ را بیابید.

۶. $(\circ < x < \text{۱})$ $\quad F(s) = \dfrac{\sinh(xs)}{s^{\text{۲}}\cosh s}$

جواب: $f(t) = x + \dfrac{\text{۸}}{\pi^{\text{۲}}}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{(-\text{۱})^n}{(\text{۲}n-\text{۱})^{\text{۲}}}\sin\dfrac{(\text{۲}n-\text{۱})\pi x}{\text{۲}}\cos\dfrac{(\text{۲}n-\text{۱})\pi t}{\text{۲}}$.

۷. $F(s) = \dfrac{\text{۱}}{s\cosh(s^{\text{۱}/\text{۲}})}$

جواب: $f(t) = \text{۱} + \dfrac{\text{۴}}{\pi}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{(-\text{۱})^n}{\text{۲}n-\text{۱}}\exp\left[-\dfrac{(\text{۲}n-\text{۱})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}t}{\text{۴}}\right]$.

۸. $F(s) = \dfrac{\coth(\pi s/\text{۲})}{s^{\text{۲}}+\text{۱}}$

جواب: $f(t) = \dfrac{\text{۲}}{\pi} - \dfrac{\text{۴}}{\pi}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{\cos\text{۲}nt}{\text{۴}n^{\text{۲}}-\text{۱}}{}^{*}$.

۹. $(\circ < x < \text{۱})$ $\quad F(s) = \dfrac{\sinh(xs^{\text{۱}/\text{۲}})}{s^{\text{۲}}\sinh(s^{\text{۱}/\text{۲}})}$

جواب: $f(t) = \dfrac{\text{۱}}{\text{۶}}x(x^{\text{۲}}-\text{۱}) + xt + \dfrac{\text{۲}}{\pi^{\text{۳}}}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{n^{\text{۳}}}e^{-n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}t}\sin n\pi x$.

۱۰. $F(s) = \dfrac{\text{۱}}{s^{\text{۲}}} - \dfrac{\text{۱}}{s\sinh s}$

جواب: $f(t) = \dfrac{\text{۲}}{\pi}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{n}\sin n\pi t$.

۱۱. $(\circ < x < \text{۱})$ $\quad F(s) = \dfrac{\sinh(xs)}{s(s^{\text{۲}}+\omega^{\text{۲}})\cosh s}$،

که در آن $\omega > \circ$ و $\omega \neq \omega_n = \dfrac{(\text{۲}n-\text{۱})\pi}{\text{۲}}$ $(n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$.

جواب: $f(t) = \dfrac{\sin\omega x\sin\omega t}{\omega^{\text{۲}}\cos\omega} + \text{۲}\sum\limits_{n=\text{۱}}^{\infty}\dfrac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{\omega_n}\cdot\dfrac{\sin\omega_n x\sin\omega_n t}{\omega^{\text{۲}}-\omega_n^{\text{۲}}}$.

۱۲. فرض کنید تابع $F(s)$ در $s = s_\circ$ دارای قطبی از مرتبهٔ m باشد و دارای بسط سری لوران

$$F(s) = \sum_{n=\circ}^{\infty}a_n(s-s_\circ)^n + \frac{b_\text{۱}}{s-s_\circ} + \frac{b_\text{۲}}{(s-s_\circ)^{\text{۲}}} + \cdots + \frac{b_{m-\text{۱}}}{(s-s_\circ)^{m-\text{۱}}}$$
$$+ \frac{b_m}{(s-s_\circ)^m} \qquad (b_m \neq \circ)$$

* این عملاً تابع سینوس اصلاح شدهٔ $f(t) = |\sin t|$ است. صفحهٔ ۶۸ کتاب زیر را از مؤلفان ببینید
"Fourier Series and Boundary Value Problems." 6th ed., 2001.

در قرص محذوف $0 < |s - s_0| < R_2$، و توجه کنید که $(s - s_0)^m F(s)$ در این حوزه با سری توانی

$$b_m + b_{m-1}(s - s_0) + \cdots + b_2(s - s_0)^{m-2} + b_1(s - s_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s - s_0)^{m+n}$$

نمایش داده می‌شود. با تعیین ضریب $(s - s_0)^{m-1}$ در حاصلضرب (بخش ۶۱) این سری توانی در سری تیلر تابع تام $e^{st} = e^{s_0 t} e^{(s-s_0)t}$ یعنی

$$e^{st} = e^{s_0 t}\left[1 + \frac{t}{1!}(s - s_0) + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}(s - s_0)^{m-2} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(s - s_0)^{m-1} + \cdots\right]$$

نشان دهید که

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}\,[e^{st}F(s)] = e^{s_0 t}\left[b_1 + \frac{b_2}{1!}t + \cdots + \frac{b_{m-1}}{(m-2)!}t^{m-2} + \frac{b_m}{(m-1)!}t^{m-1}\right],$$

همان‌طور که در ابتدای بخش ۸۲ بیان شد.

۱۳. فرض کنید نقطهٔ $s_0 = \alpha + i\beta\ (\beta \neq 0)$ یک قطب مرتبهٔ m تابع $F(s)$ باشد که دارای نمایش سری لوران

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s - s_0)^n + \frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \qquad (b_m \neq 0)$$

در قرص محذوف $0 < |s - s_0| < R_2$ است. همچنین فرض کنید در نقاط sی که $F(s)$ تحلیلی است، $\overline{F(s)} = F(\overline{s})$.

(الف) باکمک نتیجهٔ تمرین ۶ بخش ۵۲ بگویید که چگونه نتیجه می‌شود اگر $0 < |\overline{s} - \overline{s}_0| < R_2$ آن‌گاه

$$F(\overline{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n(\overline{s} - \overline{s}_0)^n + \frac{\overline{b}_1}{\overline{s} - \overline{s}_0} + \frac{\overline{b}_2}{(\overline{s} - \overline{s}_0)^2} + \cdots + \frac{\overline{b}_m}{(\overline{s} - \overline{s}_0)^m} \quad (\overline{b}_m \neq 0).$$

حال s را به‌جای $\overline{s}$ قرار داده نمایش سری لوران $F(s)$ را در قرص محذوف $0 < |s - \overline{s}_0| < R_2$ به‌دست آورید و نتیجه بگیرید که $\overline{s}_0$ یک قطب مرتبهٔ m تابع $F(s)$ است.

(ب) با استفاده از نتایج تمرین ۱۲ و قسمت (الف) بالا نشان دهید که اگر t حقیقی باشد آن‌گاه

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\circ}[e^{st}F(s)]+\operatorname*{Res}_{s=\overline{s}_\circ}[e^{st}F(s)]=\text{۲}e^{\alpha t}\mathrm{Re}\left\{e^{i\beta t}\left[b_\text{۱}+\frac{b_\text{۲}}{\text{۱}!}t+\cdots+\frac{b_m}{(m-\text{۱})!}t^{m-\text{۱}}\right]\right\},$$

همان‌طور که در ابتدای بخش ۸۲ بیان شد.

۱۴. فرض کنید $F(s)$ تابع تمرین ۱۳ باشد و ضریب ناصفر b_m را به شکل نمایی $b_m = r_m \exp(i\theta_m)$ بنویسید. سپس با استفاده از نتیجهٔ اصلی قسمت (ب) تمرین ۱۳ نشان دهید که اگر t حقیقی باشد مجموع مانده‌های $e^{st}F(s)$ در $s_\circ = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq \circ)$ و $\overline{s}_\circ$ شامل جمله‌ای از نوع زیر است

$$\frac{\text{۲}r_m}{(m-\text{۱})!}t^{m-\text{۱}}e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_m)\,.$$

توجه کنید که اگر $\alpha > \circ$، وقتی t به ∞ میل می‌کند حاصلضرب $t^{m-\text{۱}}e^{\alpha t}$ به ∞ میل می‌کند. بنابراین وقتی $f(t)$، تبدیل وارون لاپلاس، با جمع کردن مانده‌های $e^{st}F(s)$ به‌دست آمده باشد، جمله‌ای که در بالا ظاهر شده، مؤلفهٔ ناپایدار $f(t)$ است هرگاه $\alpha > \circ$؛ و گفته می‌شود از نوع تشدید است. همچنین اگر $m \geq \text{۲}$ و $\alpha = \circ$، این جمله از نوع تشدید است.

۸

نگاشت به‌وسیلهٔ توابع مقدماتی

تعبیر هندسی تابع یک‌متغیرهٔ مختلط به‌عنوان نگاشت، یا تبدیل، در بخشهای ۱۲ و ۱۳ (فصل ۲) معرفی شد. در آنجا دیدیم که چگونه ماهیت چنین تابعی را، تا حدی، می‌توان از روی نحوهٔ نگاشتن برخی منحنیها و نواحی با نمودار نمایش داد.

در این فصل با مثالهای بیشتری خواهیم دید که چگونه منحنیها و نواحی گوناگون به‌وسیلهٔ توابع تحلیلی مقدماتی نگاشته می‌شوند. کاربردهای چنین نتایجی در مسائل فیزیکی، بعداً در فصول ۱۰ و ۱۱ تشریح خواهند شد.

۸۳. تبدیلات خطی

برای مطالعهٔ نگاشت

$$w = Az \qquad (۱)$$

که در آن A عدد ثابت مختلط و ناصفری است و $z \neq 0$، اعداد z و A را به‌صورت نمایی می‌نویسیم:

$$A = ae^{i\alpha}, \qquad z = re^{i\theta}.$$

در این‌صورت

$$w = (ar)e^{i(\alpha+\theta)} \tag{۲}$$

و از رابطهٔ (۲) می‌بینیم که تبدیل (۱) بردار شعاعی نمایش z را با ضریب $a = |A|$ منبسط (یا منقبض) می‌کند و آن را حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha = \arg A$ دوران می‌دهد. بنابراین تصویر یک ناحیهٔ مفروض از نظر هندسی با آن ناحیه متشابه است.

نگاشت

$$w = z + B \tag{۳}$$

که در آن B عدد مختلط ثابتی است، انتقالی به‌وسیلهٔ بردار نمایش B است. یعنی اگر

$$w = u + iv \quad ، \quad z = x + iy \quad و \quad B = b_۱ + ib_۲$$

آن‌گاه تصویر هر نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ z نقطهٔ

$$(u, v) = (x + b_۱,\ y + b_۲) \tag{۴}$$

در صفحهٔ w است. چون هر نقطه در ناحیهٔ مفروضی از صفحهٔ z بدین‌نحو به‌توی صفحهٔ w نگاشته می‌شود، ناحیهٔ تصویر از نظر هندسی با ناحیهٔ اول همنهشت است.

تبدیل خطی کلی (غیر ثابت)

$$w = Az + B \quad (A \neq ۰) \tag{۵}$$

که ترکیبی از تبدیلهای

$$Z = Az \quad (A \neq ۰) \quad و \quad w = Z + B$$

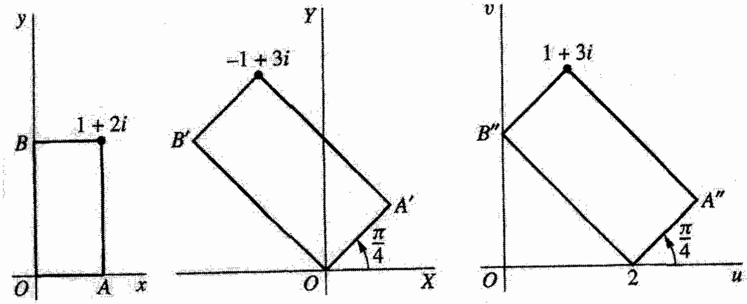
است به‌وضوح انبساط یا انقباض و دورانی است که به دنبال آن یک انتقال صورت می‌گیرد.

مثال. تبدیل

$$w = (۱ + i)z + ۲$$

ناحیه‌ای مستطیلی از صفحهٔ z را که در شکل ۱۰۴ نشان داده شده به روی ناحیهٔ مستطیلی نشان داده شده در صفحهٔ w می‌نگارد. این مطلب با نوشتن تبدیل بالا به‌صورت ترکیبی از تبدیلهای

$$Z = (۱ + i)z \quad و \quad w = Z + ۲$$



شکل ۱۰۴

$w = (۱ + i)z + ۲$

مشهود است. چون $۱ + i = \sqrt{۲}\exp(i\pi/۴)$، تبدیل اول انبساطی با ضریب $\sqrt{۲}$ و دورانی به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/۴$ است. تبدیل دوم انتقالی به اندازهٔ دو واحد به راست است.

تمرینها

۱. بیان کنید چرا تبدیل $w = iz$ یک دوران صفحهٔ z به اندازهٔ $\pi/۲$ است. سپس تصویر نوار نامتناهی $۰ < x < ۱$ را پیدا کنید.

جواب: $۰ < v < ۱$.

۲. نشان دهید که تبدیل $w = iz + i$ نیم‌صفحهٔ $x > ۰$ را به روی نیم‌صفحهٔ $v > ۱$ می‌نگارد.

۳. ناحیه‌ای را پیدا کنید که نیم‌صفحهٔ $y > ۰$ تحت تبدیل $w = (۱ + i)z$ به روی آن نگاشته می‌شود. (الف) با استفاده از مختصات قطبی؛ (ب) با استفاده از مختصات دکارتی. این ناحیه را با شکل نمایش دهید.

جواب: $v > u$.

۴. تصویر نیم‌صفحهٔ $y > ۱$ را تحت تبدیل $w = (۱ - i)z$ پیدا کنید.

۵. تصویر نوار نیمه نامتناهی $x > ۰$، $۰ < y < ۲$ را تحت تبدیل $w = iz + ۱$ پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

جواب: $-۱ < u < ۱$، $v < ۰$.

۶. از تبدیل $w = A(z + B)$ که در آن A و B اعداد مختلط ثابت‌اند و $A \neq ۰$، توصیفی هندسی ارائه دهید.

۸۴. تبدیل $w = 1/z$

رابطهٔ

$$w = \frac{1}{z} \tag{1}$$

تناظری یک‌به‌یک بین نقاط ناصفر صفحات z و w برقرار می‌کند. چون $z\overline{z} = |z|^2$ این نگاشت را می‌توان به‌وسیلهٔ تبدیلهای متوالی زیر بیان کرد

$$Z = \frac{1}{|z|^2}z, \qquad w = \overline{Z}\,. \tag{2}$$

تبدیل اول یک انعکاس نسبت به دایرهٔ $|z| = 1$ است. یعنی تصویر نقطهٔ ناصفر z نقطهٔ Z است با ویژگیهای

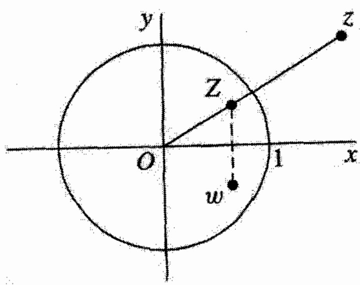
$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad \text{و} \quad \arg Z = \arg z.$$

پس نقاط خارج دایرهٔ $|z| = 1$ به روی نقاط ناصفر داخل آن نگاشته می‌شوند و برعکس (شکل ۱۰۵). هر نقطه بر دایره، به روی خودش نگاشته می‌شود. تبدیل دوم از تبدیلهای (۲) فقط یک تقارن نسبت به محور حقیقی است.

اگر تبدیل (۱) را به‌صورت

$$T(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0) \tag{3}$$

بنویسیم، می‌توانیم T را در مبدأ و در نقطه در بی‌نهایت طوری تعریف کنیم که در صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته پیوسته باشد. برای انجام این کار، فقط لازم است به بخش ۱۶ مراجعه کنیم تا ملاحظه



شکل ۱۰۵

کنیم که

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{T(z)}=0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z\to 0}T(z)=\infty \tag{۴}$$

و

$$\lim_{z\to 0}T\left(\frac{1}{z}\right)=0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z\to\infty}T(z)=0 \tag{۵}$$

پس به‌منظور پیوسته نمودن T در صفحهٔ توسعه‌یافته، می‌نویسیم

$$T(0)=\infty,\quad T(\infty)=0 \quad \text{و برای بقیهٔ مقادیر } z\text{،}\quad T(z)=\frac{1}{z}. \tag{۶}$$

به عبارت دقیقتر، بنابر روابط (۶) و حدود اول (۴) و (۵) به‌ازای هر z_0 در صفحهٔ توسعه‌یافته به انضمام $z_0=0$ و $z_0=\infty$ داریم

$$\lim_{z\to z_0}T(z)=T(z_0). \tag{۷}$$

حال پیوستگی T در هر نقطه از صفحهٔ توسعه‌یافته نتیجه‌ای از رابطهٔ (۷) است (بخش ۱۷ را ببینید). به دلیل این پیوستگی وقتی در بحث از تابع $1/z$ نقطه در بی‌نهایت مطرح می‌شود، این نکته در آن مستتر است که منظور تابع $T(z)$ است.

۸۵. نگاشت به‌وسیلهٔ $1/z$

درصورتی که نقطهٔ $w=u+iv$ تصویر نقطهٔ ناصفر $z=x+iy$ تحت تبدیل $w=1/z$ باشد، با نوشتن $w=\overline{z}/|z|^2$ نتیجه می‌شود که

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}. \tag{۱}$$

همچنین چون $z=1/w=\overline{w}/|w|^2$،

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\qquad y=\frac{-v}{u^2+v^2}. \tag{۲}$$

استدلال زیر که بر مبنای این روابط بین مختصات، بنا شده، نشان می‌دهد که تبدیل $w=1/z$ دوایر و خطوط را به دوایر و خطوط تبدیل می‌کند. اگر A، B، C و D همگی اعدادی حقیقی باشند که در شرط $B^2+C^2>4AD$ صدق کنند، معادلهٔ

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{۳}$$

نمایش دایره یا خطی دلخواه است، که برای دایره $A \neq 0$ و برای خط $A = 0$. اگر با روش کامل کردن مربعات، معادلهٔ (۳) را به شکل

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}}{2A}\right)^2$$

بنویسیم، در حالت $A \neq 0$ نیاز به شرط $B^2 + C^2 > 4AD$ آشکار می‌شود. وقتی $A = 0$، این شرط به‌صورت $B^2 + C^2 > 0$ در می‌آید. یعنی اینکه B و C هر دو باهم صفر نیستند. حال به اثبات حکمی می‌پردازیم که با حروف ایرانیک نوشتیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر x و y در معادلهٔ (۳) صدق کنند، می‌توان به‌جای این متغیرها مقدارشان را از روابط (۲) قرار داد. پس از چند بار ساده کردن، در می‌یابیم که u و v در معادلهٔ

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \tag{۴}$$

صدق می‌کنند (همچنین تمرین ۱۴ را ببینید) که نمایش یک دایره یا خط است. برعکس اگر u و v در معادلهٔ (۴) صدق کنند، از روابط (۱) نتیجه می‌شود که x و y در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند.

حال از معادلات (۳) و (۴) واضح است که

(الف) دایره‌یی ($A \neq 0$) در صفحهٔ z که از مبدأ عبور نکند ($D \neq 0$) به دایره‌یی در صفحهٔ w تبدیل می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد؛

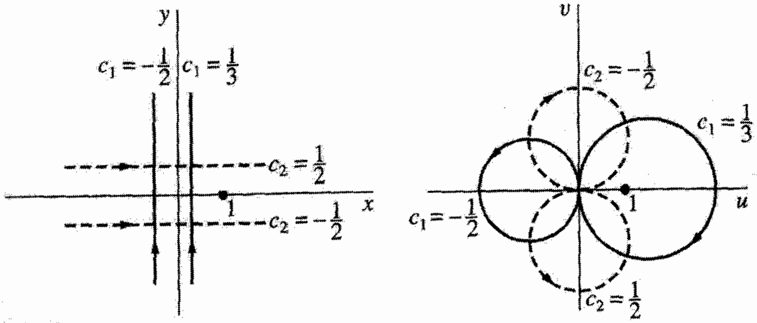
(ب) دایره‌یی ($A \neq 0$) در صفحهٔ z که از مبدأ عبور کند ($D = 0$) به خطی در صفحهٔ w تبدیل می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد؛

(ج) خطی ($A = 0$) در صفحهٔ z که از مبدأ عبور نکند ($D \neq 0$) به دایره‌یی در صفحهٔ w تبدیل می‌شود که از مبدأ می‌گذرد؛

(د) خطی ($A = 0$) در صفحهٔ z که از مبدأ عبور کند ($D = 0$) تبدیل به خطی در صفحهٔ w می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۱. بنابر معادلات (۳) و (۴) خط قائم $x = c_1 (c_1 \neq 0)$ به‌وسیلهٔ $w = 1/z$ به دایرهٔ $-c_1(u^2 + v^2) + u = 0$ یا

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \tag{۵}$$



شکل ۱۰۶

$w = 1/z$

تبدیل می‌شود که مرکز آن روی محور uها و مماس بر محور vهاست. تصویر نقطهٔ نوعی (c_1, y) روی آن خط، بنابر روابط (۱)، عبارت است از

$$(u, v) = \left(\frac{c_1}{c_1^2 + y^2}, \frac{-y}{c_1^2 + y^2} \right).$$

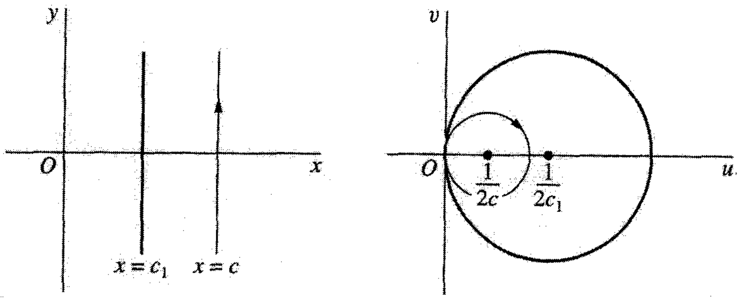
اگر $c_1 > 0$ دایرهٔ (۵) به‌وضوح در سمت راست محور vهاست. وقتی نقطهٔ (c_1, y) روی تمام خط بالا رود، تصویر آن دایره را یک‌بار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید، نقطه در بی‌نهایت صفحهٔ z توسعه‌یافته، با مبدأ صفحهٔ w متناظر است. زیرا اگر $y < 0$ آنگاه $v > 0$ و وقتی y با مقادیر منفی به 0 افزایش یابد، u از 0 تا $1/c_1$ افزایش می‌یابد. پس درصورتی که y با مقادیر مثبت افزایش یابد، v منفی است و u به 0 کاهش می‌یابد.

اما اگر $c_1 < 0$، دایره در سمت چپ محور vهاست. در صورتی که نقطهٔ (c_1, y) به طرف بالا حرکت کند، تصویر آن باز یک دایره می‌سازد، اما در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت. شکل ۱۰۶ را ببینید که در آن حالتهای $c_1 = 1/3$ و $c_1 = -1/2$ رسم شده‌اند.

مثال ۲. تبدیل $w = 1/z$ خط افقی $y = c_2 (c_2 \neq 0)$ را به روی دایرهٔ

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2} \right)^2, \tag{۶}$$

می‌نگارد که مرکز آن روی محور vها و مماس بر محور uهاست. دو حالت خاص آن را در شکل ۱۰۶ نشان داده‌ایم که در آن جهتهای خطوط و دوایر نظیر را نیز مشخص کرده‌ایم.



شکل ۱۰۷

$w = ۱/z$

مثال ۳. وقتی $w = ۱/z$، نیم‌صفحهٔ $x \geq c_۱$ $(c_۱ > ۰)$ به روی قرص

$$\left(u - \frac{۱}{۲c_۱}\right)^۲ + v^۲ \leq \left(\frac{۱}{۲c_۱}\right)^۲, \qquad (۷)$$

نگاشته می‌شود. زیرا بنابر مثال ۱، خط دلخواه $x = c$ $(c \geq c_۱)$ تبدیل به دایرهٔ

$$\left(u - \frac{۱}{۲c}\right)^۲ + v^۲ = \left(\frac{۱}{۲c}\right)^۲ \qquad (۸)$$

می‌شود. به‌علاوه، در صورتی که c با مقادیر بزرگتر از $c_۱$ افزایش یابد، خطوط $x = c$ به سمت راست حرکت می‌کنند و اندازهٔ دوایر تصویر (۸) کوچک می‌شود (شکل ۱۰۷ را ببینید). چون از هر نقطهٔ نیم‌صفحهٔ $x \geq c_۱$ یکی از خطوط $x = c$ می‌گذرد و از هر نقطهٔ قرص (۷) یکی از دوایر (۸) می‌گذرد، درستی نگاشت ثابت می‌شود.

تمرینها

۱. در بخش ۸۵ بگویید چگونه از اولین رابطه از روابط (۲) نتیجه می‌شود که وقتی $w = ۱/z$، نابرابری $x \geq c_۱$ $(c_۱ > ۰)$ برقرار است اگر و تنها اگر نابرابری (۷) برقرار باشد. بدین‌ترتیب برای درستی نگاشتی که در مثال ۳ این بخش ثابت شد، اثبات دیگری ارائه دهید.

۲. نشان دهید که اگر $c_۱ < ۰$، تصویر نیم‌صفحهٔ $x < c_۱$ تحت تبدیل $w = ۱/z$ درون یک دایره است. اگر $c_۱ = ۰$، تصویر چیست؟

۳. نشان دهید که تصویر نیم‌صفحهٔ $y > c_۲$ تحت تبدیل $w = ۱/z$ درون یک دایره است، به شرط اینکه $c_۲ > ۰$. تصویر را وقتی $c_۲ < ۰$ پیدا کنید، همچنین تصویر را وقتی $c_۲ = ۰$، بیابید.

۴. تصویر نوار نیمه نامتناهی $۰ < y < ۱/(۲c)$ را تحت تبدیل $w = ۱/z$ پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

جواب: $u^۲ + (v + c)^۲ > c^۲$، $v < ۰$.

۵. تصویر ربع صفحهٔ $x > ۱$، $y > ۰$ را تحت تبدیل $w = ۱/z$ پیدا کنید.

جواب: $(u - ۱/۲)^۲ + v^۲ < (۱/۲)^۲$، $v < ۰$.

۶. درستی نگاشت نواحی و قسمتهای نشان‌داده‌شده از مرزها در (الف) شکل ۴ پیوست ۲؛ (ب) شکل ۵ پیوست ۲، را تحت تبدیل $w = ۱/z$، تحقیق کنید.

۷. تبدیل $w = ۱/(z - ۱)$ را به‌طور هندسی توصیف کنید.

۸. تبدیل $w = i/z$ را به‌طور هندسی توصیف کنید؛ همچنین نشان دهید که این تبدیل، دایره و خط را به دایره و خط تبدیل می‌کند.

۹. تصویر نوار نیمه نامتناهی $x > ۰$، $۰ < y < ۱$ را تحت تبدیل $w = i/z$ پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

جواب: $(u - ۱/۲)^۲ + v^۲ > (۱/۲)^۲$، $u > ۰$، $v > ۰$.

۱۰. با نوشتن $w = \rho \exp(i\phi)$ نشان دهید که نگاشت $w = ۱/z$، هذلولوی $x^۲ - y^۲ = ۱$ را به لمنیسکات $\rho^۲ = \cos ۲\phi$ تبدیل می‌کند. (تمرین ۱۵ بخش ۵ را ببینید).

۱۱. فرض کنید دایرهٔ $|z| = ۱$ دارای جهت مثبت، یا جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، باشد. جهت تصویر این دایره تحت تبدیل $w = ۱/z$ را معین کنید.

۱۲. نشان دهید که هرگاه دایره‌یی تحت تبدیل $w = ۱/z$ به دایره تبدیل شود مرکز دایرهٔ اولی هیچ‌وقت به روی مرکز دایرهٔ تصویر نگاشته نمی‌شود.

۱۳. با استفاده از شکل نمایی z یعنی $z = re^{i\theta}$ نشان دهید تبدیل

$$w = z + \frac{۱}{z}$$

که مجموع تبدیل همانی و تبدیل مطرح شده در بخشهای ۸۴ و ۸۵ است، دوایر $r = r_۰$ را به روی بیضیهایی با نمایش پارامتری

$$u = \left(r_۰ + \frac{۱}{r_۰}\right)\cos\theta, \qquad v = \left(r_۰ - \frac{۱}{r_۰}\right)\sin\theta \qquad (۰ \le \theta \le ۲\pi)$$

و کانونهایی واقع در نقاط $w = \pm ۲$ می‌نگارد. سپس نشان دهید چگونه نتیجه می‌شود که این تبدیل، تمام دایرهٔ $|z| = ۱$ را به روی قطعهٔ $-۲ \leq u \leq ۲$ از محور u می‌نگارد و حوزهٔ خارج آن دایره را به روی بقیهٔ صفحهٔ w.

۱۴. (الف) معادلهٔ (۳) بخش ۸۵ را به‌صورت

$$۲Az\overline{z} + (B - Ci)z + (B + Ci)\overline{z} + ۲D = ۰$$

بنویسید که در آن $z = x + iy$.

(ب) نشان دهید که وقتی $w = ۱/z$، نتیجهٔ قسمت (الف) چنین می‌شود

$$۲Dw\overline{w} + (B + Ci)w + (B - Ci)\overline{w} + ۲A = ۰ \, .$$

سپس نشان دهید که اگر $w = u + iv$، این رابطه همان رابطهٔ (۴) بخش ۸۵ می‌شود.

راهنمایی: در قسمت (الف) از روابط زیر استفاده کنید (بخش ۵ را ببینید)

$$x = \frac{z + \overline{z}}{۲} \quad \text{و} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{۲i}.$$

۸۶. تبدیل خطی کسری

تبدیل

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq ۰) \tag{۱}$$

که در آن a، b، c و d اعداد مختلط ثابتی هستند، تبدیل خطی کسری یا تبدیل موبیوس[1] نامیده می‌شود. ملاحظه کنید که رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$Azw + Bz + Cw + D = ۰ \quad (AD - BC \neq ۰); \tag{۲}$$

نوشت و برعکس هر رابطه از نوع (۲) را می‌توان به‌صورت (۱) در آورد. چون این صورت، هم نسبت به z و هم نسبت به w خطی است، یا برحسب z و w دوخطی است، تبدیل خطی کسری را تبدیل دوخطی نیز می‌نامند.

درصورتی که $c = ۰$، شرط $ad - bc \neq ۰$ که در رابطهٔ (۱) آمده است به‌صورت $ad \neq ۰$ در می‌آید و می‌بینیم که تبدیل بالا به تابع خطی غیرثابتی تحویل می‌یابد. وقتی $c \neq ۰$، رابطهٔ (۱)

1. Möbius

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{۱}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq ۰). \qquad (۳)$$

لذا بار دیگر شرط $ad - bc \neq ۰$ تضمین می‌کند که تابع ثابتی نداریم. البته تبدیل $w = ۱/z$، حالتی خاص از تبدیل (۱) است، وقتی $c \neq ۰$.

رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که وقتی $c \neq ۰$، تبدیل خطی کسری ترکیبی از نگاشتهای زیر است

$$Z = cz + d, \qquad W = \frac{۱}{Z}, \qquad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} W \qquad (ad - bc \neq ۰).$$

بدین‌ترتیب نتیجه می‌شود که c صفر باشد یا نباشد هر تبدیل خطی کسری همیشه دایره و خط را به دایره و خط تبدیل می‌کند زیرا این تبدیلهای خطی کسری خاص واجد این ویژگی‌اند. (بخشهای ۸۳ و ۸۵ را ببینید.)

با حل معادلهٔ (۱) برحسب z، در می‌یابیم که

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \qquad (ad - bc \neq ۰). \qquad (۴)$$

بنابراین اگر نقطهٔ مفروض w تصویر نقطه‌ای مانند z تحت تبدیل (۱) باشد، نقطهٔ z را می‌توان به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۴) دوباره به‌دست آورد. اگر $c = ۰$، آن‌گاه a و d هر دو ناصفرند و هر نقطه از صفحهٔ w به‌وضوح تصویر یک و تنها یک نقطه از صفحهٔ z است. اگر $c \neq ۰$ این حکم برقرار است بجز وقتی که $w = a/c$، زیرا اگر w دارای آن مقدار باشد در رابطهٔ (۴) مخرج صفر می‌شود. ولی می‌توان حوزهٔ تعریف تبدیل (۱) را توسعه داد تا تبدیل خطی کسری T روی صفحهٔ z توسعه‌یافته تعریف شود به قسمی که وقتی $c \neq ۰$ نقطهٔ $w = a/c$ تصویر $z = \infty$ باشد. ابتدا می‌نویسیم

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq ۰) \qquad (۵)$$

سپس می‌نویسیم

$$T(\infty) = \infty \qquad \text{اگر} \qquad c = ۰$$

و

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \qquad \text{و} \qquad T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \qquad \text{اگر} \qquad c \neq ۰.$$

بنابر تمرین ۱۱ بخش ۱۷، این امر T را روی صفحهٔ z توسعه‌یافته پیوسته می‌سازد. این موضوع با روش توسیع حوزهٔ تعریف $w = ۱/z$ در بخش ۸۴ نیز سازگار است.

درصورتی که حوزهٔ تعریف بدین‌نحو توسعه یابد، تبدیل خطی کسری (۵) نگاشتی یک‌به‌یک از صفحهٔ z توسعه‌یافته به روی صفحهٔ w توسعه‌یافته است. یعنی، $T(z_۱) \neq T(z_۲)$ هرگاه $z_۱ \neq z_۲$؛ و به‌ازای هر نقطهٔ w در صفحهٔ دوم نقطه‌ای مانند z در صفحهٔ اول هست به‌طوری که $T(z) = w$. بنابراین به‌ازای هر تبدیل T، تبدیل وارون $T^{-۱}$ی موجود است که روی صفحهٔ w توسعه‌یافته چنین تعریف می‌شود:

$$T^{-۱}(w) = z \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad T(z) = w.$$

از رابطهٔ (۴) می‌بینیم که

$$T^{-۱}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \qquad (ad - bc \neq ۰). \tag{۶}$$

به‌وضوح، $T^{-۱}$ یک تبدیل خطی کسری است، که در آن

$$T^{-۱}(\infty) = \infty \quad \text{اگر} \quad c = ۰$$

و

$$T^{-۱}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{و} \quad T^{-۱}(\infty) = \frac{-d}{c} \quad \text{اگر} \quad c \neq ۰.$$

اگر S و T دو تبدیل خطی کسری باشند، آن‌گاه ترکیب $S[T(z)]$ نیز تبدیل خطی کسری است. با ترکیب عباراتی از نوع (۵) درستی این مطلب را می‌توان تحقیق کرد. توجه کنید که به‌خصوص به‌ازای هر نقطهٔ z در صفحهٔ توسعه‌یافته $T^{-۱}[T(z)] = z$.

همیشه یک تبدیل خطی کسری وجود دارد که سه نقطهٔ مفروض و متمایز $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ را، به‌ترتیب، به روی سه نقطهٔ مشخص و متمایز $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ می‌نگارد. اثبات این مطلب در بخش ۸۷ خواهد آمد، که w تصویر نقطهٔ z تحت چنین تبدیلی، به‌طور ضمنی برحسب z داده می‌شود. در اینجا به توضیح روش مستقیمتری برای یافتن تبدیل مطلوب می‌پردازیم.

مثال ۱. حالتی خاص از تبدیل (۱) را می‌یابیم که نقاط

$$z_۱ = -۱ \quad ، \quad z_۲ = ۰ \quad \text{و} \quad z_۳ = ۱$$

را به روی نقاط

$$w_3 = i \quad \text{و} \quad w_2 = 1 \;،\; w_1 = -i$$

بنگارد. چون ۱ تصویر ۰ است از عبارت (۱) نتیجه می‌شود که $b/d = 1$ یا $b = d$. بنابراین

$$w = \frac{az+b}{cz+b} \qquad [b(a-c) \neq 0]. \tag{۷}$$

سپس چون ۱− و ۱ به‌ترتیب به $-i$ و i تبدیل می‌شوند، نتیجه می‌شود که

$$ic + ib = a + b \quad \text{و} \quad ic - ib = -a + b$$

با جمع‌کردن طرفهای متناظر این معادلات، در می‌یابیم که $c = -ib$؛ و با تفریق‌کردن معلوم می‌شود که $a = ib$. در نتیجه،

$$w = \frac{ibz+b}{-ibz+b} = \frac{b(iz+1)}{b(-iz+1)}.$$

چون در اینجا b دلخواه و ناصفر است، می‌توانیم به‌جای آن، مقدار یک را قرار دهیم (یا آن را حذف کنیم) و بنویسیم

$$w = \frac{iz+1}{-iz+1} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i-z}{i+z}.$$

مثال ۲. فرض می‌کنیم نقاط

$$z_3 = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = 0 \;،\; z_1 = 1$$

به روی نقاط

$$w_3 = 1 \quad \text{و} \quad w_2 = \infty \;،\; w_1 = i$$

نگاشته شوند. چون $w_2 = \infty$ نظیر $z_2 = 0$ است، در عبارت (۱) باید $d = 0$، و بنابراین

$$w = \frac{az+b}{cz} \qquad (bc \neq 0). \tag{۸}$$

چون باید ۱ به روی i نگاشته شود و ۱− به روی ۱، روابط زیر را داریم

$$-c = -a + b \quad \text{و} \quad ic = a + b$$

و نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{i+1}{2}c \text{ ،} \quad b = \frac{i-1}{2}c.$$

پس سرانجام اگر قرار دهیم $c = 2$، رابطهٔ (۸) چنین می‌شود

$$w = \frac{(i+1)z + (i-1)}{2z}.$$

۸۷. یک صورت ضمنی

معادلهٔ

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \tag{1}$$

معرف یک تبدیل خطی کسری (به‌طور ضمنی) است که نقاط متمایز z_1، z_2 و z_3 از صفحهٔ متناهی z را به‌ترتیب به روی نقاط w_1، w_2 و w_3 از صفحهٔ متناهی w می‌نگارد.* برای اثبات این مطلب، معادلهٔ (۱) را چنین می‌نویسیم

$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3) = (z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1). \tag{2}$$

اگر $z = z_1$، سمت راست رابطهٔ (۲) صفر می‌شود؛ و در نتیجه $w = w_1$. همین‌طور اگر $z = z_3$، سمت چپ آن صفر می‌شود و در نتیجه $w = w_3$. اگر $z = z_2$، معادلهٔ خطی

$$(w-w_1)(w_2-w_3) = (w-w_3)(w_2-w_1),$$

را به‌دست می‌آوریم که جواب یکتای آن $w = w_2$ است. می‌توان دید که نگاشت تعریف شده با رابطهٔ (۱)، در واقع یک تبدیل خطی کسری است، این موضوع را می‌توان با انجام عمل ضرب در رابطهٔ (۲) و نوشتن نتیجهٔ حاصل به‌صورت (بخش ۸۶)

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \tag{3}$$

* دو طرف معادلهٔ (۱) نسبت ناهمساز است که در بررسی تبدیلهای خطی کسری، در سطحی وسیعتر از آنچه در این کتاب آمده، نقش مهمی ایفا می‌کند. مثلاً، صفحات ۱۹۶ـ۱۹۲ کتاب

R. P. Boas, "Invitation to Complex Analysis," 1993

یا صفحات ۵۵ـ۴۸ کتاب

J. B. Conway, "Functions of One Complex Variable," 2d ed., 6th Printing, 1997

را ببینید.

ملاحظه کرد. شرط $AD - BC \neq ۰$ که آن را در رابطهٔ (۱) لازم داریم به‌وضوح برقرار است، زیرا همان‌طور که توضیح دادیم رابطهٔ (۱) تابع ثابتی را تعریف نمی‌کند. از خواننده خواسته شده است (تمرین ۱۰) که نشان دهد رابطهٔ (۱) تنها تبدیل خطی کسریی را تعریف می‌کند که نقاط $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ را، به‌ترتیب، به روی نقاط $w_۱$ و $w_۲$ و $w_۳$ می‌نگارد.

مثال ۱. تبدیلی را که در مثال ۱، بخش ۸۶، یافتیم، با این شرط بود که

$$z_۱ = -۱ ،\ z_۲ = ۰ ،\ z_۳ = ۱ \quad \text{و} \quad w_۱ = -i ،\ w_۲ = ۱ ،\ w_۳ = i.$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) می‌نویسیم

$$\frac{(w+i)(۱-i)}{(w-i)(۱+i)} = \frac{(z+۱)(۰-۱)}{(z-۱)(۰+۱)}$$

و سپس با به‌دست آوردن w برحسب z، به تبدیل

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

می‌رسیم که قبلاً به‌دست آمده بود.

اگر رابطهٔ (۱) به‌صورتی مناسب تغییر داده شود، می‌توان آن را در حالتی نیز به‌کار برد که نقطه در بی‌نهایت، یکی از نقاط از قبل تعیین شده در هر یک از صفحات (توسعه‌یافته) z یا w باشد. مثلاً، فرض کنید $z_۱ = \infty$. چون هر تبدیل خطی کسری روی صفحهٔ توسعه‌یافته پیوسته است، تنها لازم است در طرف راست رابطهٔ (۱)، $۱/z_۱$ را به‌جای $z_۱$ قرار داده، مخرج کسرها را برداشته و $z_۱$ را به صفر میل دهیم:

$$\lim_{z_۱\to ۰} \frac{(z-۱/z_۱)(z_۲-z_۳)}{(z-z_۳)(z_۲-۱/z_۱)} \cdot \frac{z_۱}{z_۱} = \lim_{z_۱ \to ۰} \frac{(z_۱ z-۱)(z_۲-z_۳)}{(z-z_۳)(z_۱ z_۲-۱)} = \frac{z_۲-z_۳}{z-z_۳}.$$

در این‌صورت، تغییریافته مطلوبِ رابطهٔ (۱) عبارت است از

$$\frac{(w-w_۱)(w_۲-w_۳)}{(w-w_۳)(w_۲-w_۱)} = \frac{z_۲-z_۳}{z-z_۳}.$$

توجه کنید که به‌طور صوری این تغییر با حذف عاملهای شامل $z_۱$ در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید. به‌آسانی می‌توان دید که وقتی هر یک از نقاط از قبل تعیین شدهٔ دیگر ∞ باشد همین روش صوری به‌کار می‌رود.

مثال ۲. در مثال ۲، بخش ۸۶، نقاط از قبل تعیین شده عبارت بودند از

$$z_1 = 1 \text{ ، } z_2 = 0 \text{ ، } z_3 = -1 \quad \text{و} \quad w_1 = i \text{ ، } w_2 = \infty \text{ ، } w_3 = 1.$$

در این حالت، تغییر زیر از رابطهٔ (۱) را به‌کار می‌بریم

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{w - i}{w - 1} = \frac{(z - 1)(0 + 1)}{(z + 1)(0 - 1)}.$$

حال اگر w را به‌دست آوریم، به تبدیل مطلوب می‌رسیم:

$$w = \frac{(i + 1)z + (i - 1)}{2z}.$$

تمرینها

۱. تبدیل خطی کسریی پیدا کنید که نقاط $z_1 = 2$، $z_2 = i$، $z_3 = -2$ را به روی نقاط $w_1 = 1$، $w_2 = i$، $w_3 = -1$ بنگارد.

جواب: $w = (3z + 2i)/(iz + 6)$.

۲. تبدیل خطی کسریی پیدا کنید که نقاط $z_1 = -i$، $z_2 = 0$، $z_3 = i$ را به روی نقاط $w_1 = -1$، $w_2 = i$، $w_3 = 1$ بنگارد. محور موهومی $x = 0$ به چه منحنی‌یی تبدیل می‌شود؟

۳. تبدیل دوخطیی پیدا کنید که نقاط $z_1 = \infty$، $z_2 = i$، $z_3 = 0$ را به روی نقاط $w_1 = 0$، $w_2 = i$، $w_3 = \infty$ بنگارد.

جواب: $w = -1/z$.

۴. تبدیل دوخطیی پیدا کنید که نقاط متمایز z_1، z_2، z_3 را به روی نقاط $w_1 = 0$، $w_2 = 1$، $w_3 = \infty$ بنگارد.

جواب: $w = \dfrac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$.

۵. نشان دهید، همان‌طور که در بخش ۸۶ بیان شد ترکیب دو تبدیل خطی کسری، یک تبدیل خطی کسری است.

۶. یک نقطهٔ ثابت از تبدیل $w = f(z)$، نقطه‌ای مانند z_0 است به قسمی که $f(z_0) = z_0$. نشان دهید که هر تبدیل خطی کسری، به استثنای تبدیل همانی $w = z$، حداکثر دو نقطهٔ ثابت در صفحهٔ توسعه‌یافته دارد.

۷. نقاط ثابت (تمرین ۶) تبدیلهای زیر را پیدا کنید

(الف) $w = (z-1)/(z+1)$؛ (ب) $w = (6z-9)/z$.

جواب: (الف) $z = \pm i$؛ (ب) $z = 3$.

۸. معادلهٔ (۱)، بخش ۸۷، را برای حالتی که z_2 و w_2 هر دو نقطه در بی‌نهایت باشند به‌صورتی مناسب تغییر دهید. سپس نشان دهید هر تبدیل خطی کسری که نقاط ثابتش (تمرین ۶) 0 و ∞ هستند باید به‌صورت $w = az\ (a \neq 0)$ باشد.

۹. ثابت کنید اگر مبدأ، یک نقطهٔ ثابت (تمرین ۶) تبدیل خطی کسریی باشد، آن تبدیل را می‌توان به‌صورت $w = z/(cz+d)$ نوشت، که در آن $d \neq 0$.

۱۰. نشان دهید که فقط یک تبدیل خطی کسری موجود است به‌طوری که سه نقطهٔ مفروض و متمایز z_1، z_2 و z_3 از صفحهٔ توسعه‌یافتهٔ z را به روی سه نقطهٔ متمایز و مشخص w_1، w_2 و w_3 از صفحهٔ توسعه‌یافتهٔ w بنگارد.

راهنمایی: فرض کنید T و S دو تبدیل خطی کسری با ویژگیهای بالا باشند. در این‌صورت پس از ملاحظهٔ این مطلب که $S^{-1}[T(z_k)] = z_k\ (k = 1, 2, 3)$ با استفاده از تمرینهای ۵ و ۶ نشان دهید که به‌ازای هر z، $S^{-1}[T(z)] = z$. بدین‌ترتیب نشان دهید که به‌ازای هر z، $T(z) = S(z)$.

۱۱. به کمک رابطهٔ (۱) بخش ۸۷، ثابت کنید که اگر یک تبدیل خطی کسری نقاط محور x را به روی محور u بنگارد، آنگاه همهٔ ضرایب موجود در این تبدیل، حقیقی‌اند، مگر محتملاً با یک عامل مشترک مختلط. عکس این حکم بدیهی است.

۱۲. فرض کنید $T(z) = (az+b)/(cz+d)$، که در آن $ad - bc \neq 0$، یک تبدیل خطی کسری باشد که متمایز از $T(z) = z$ است. نشان دهید که $T^{-1} = T$ اگر و تنها اگر $d = -a$.

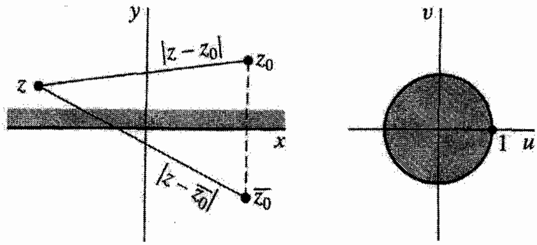
راهنمایی: رابطهٔ $T^{-1}(z) = T(z)$ را چنین بنویسید

$$(a+d)[cz^2 + (d-a)z - b] = 0 .$$

۸۸. نگاشتهای نیم‌صفحهٔ بالایی

حال همهٔ تبدیلهای خطی کسری را معین می‌کنیم که نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} z > 0$ را به روی قرص باز $|w| < 1$، می‌نگارند و مرز $\operatorname{Im} z = 0$ را به روی مرز $|w| = 1$ (شکل ۱۰۸).

با در نظر داشتن این مطلب که نقاط روی خط $\operatorname{Im} z = 0$ باید به نقاط روی دایرهٔ $|w| = 1$



شکل ۱۰۸

$$w = e^{i\alpha}\frac{z-z_\circ}{z-\overline{z}_\circ} \qquad (\operatorname{Im} z_\circ > \circ)$$

تبدیل شوند، با انتخاب نقاط $z = \circ$، $z = ۱$ و $z = \infty$ روی این خط شروع کرده به تعیین شرایطی روی تبدیل خطی کسری

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq \circ) \tag{۱}$$

می‌پردازیم که برای اینکه تصاویر این نقاط دارای قدرمطلق واحد باشند ضروری هستند.

با توجه به رابطهٔ (۱) می‌بینیم که اگر برای $z = \circ$ داشته باشیم $|w| = ۱$ آن‌گاه $|b/d| = ۱$؛ یعنی،

$$|b| = |d| \neq \circ\,. \tag{۲}$$

حال بنابر بخش ۸۶، w، تصویر نقطهٔ $z = \infty$ تنها زمانی یک عدد متناهی، یعنی $w = a/c$ است که $c \neq \circ$. لذا این شرط که $|w| = ۱$ وقتی $z = \infty$ بدین‌معنی است که $|a/c| = ۱$، یا

$$|a| = |c| \neq \circ \tag{۳}$$

و بنابر ناصفربودن a و c می‌توان رابطهٔ (۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$w = \frac{a}{c}\cdot\frac{z+(b/a)}{z+(d/c)}\,. \tag{۴}$$

در این‌صورت، چون $|a/c| = ۱$ و

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right| \neq \circ,$$

بنابر روابط (۲) و (۳)، رابطهٔ (۴) را می‌توان به‌صورت

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_۰}{z - z_۱} \qquad (|z_۱| = |z_۰| \neq ۰) \tag{۵}$$

نوشت که در آن α یک عدد حقیقی ثابت است و $z_۰$ و $z_۱$ اعداد مختلط ثابت (ناصفر) هستند.

اکنون، این شرط را روی تبدیل (۵) می‌گذاریم که $|w| = ۱$ هرگاه $z = ۱$. این نتیجه می‌دهد که

$$|۱ - z_۱| = |۱ - z_۰|,$$

یا

$$(۱ - z_۱)(۱ - \overline{z}_۱) = (۱ - z_۰)(۱ - \overline{z}_۰).$$

اما $z_۱\overline{z}_۱ = z_۰\overline{z}_۰$ چون $|z_۱| = |z_۰|$ و رابطهٔ بالا به

$$z_۱ + \overline{z}_۱ = z_۰ + \overline{z}_۰$$

تبدیل می‌شود؛ یعنی، $\mathrm{Re}\, z_۱ = \mathrm{Re}\, z_۰$. در نتیجه چون داریم $|z_۱| = |z_۰|$ پس

$$z_۱ = z_۰ \qquad \text{یا} \qquad z_۱ = \overline{z}_۰$$

اگر $z_۱ = z_۰$، تبدیل (۵) تابع ثابت $w = \exp(i\alpha)$ می‌شود؛ بنابراین $z_۱ = \overline{z}_۰$.

تبدیل (۵) با $z_۱ = \overline{z}_۰$، نقطهٔ $z_۰$ را به روی مبدأ $w = ۰$ می‌نگارد و چون نقاط درون دایرهٔ $|w| = ۱$ باید تصاویر نقاط بالای محور حقیقی در صفحهٔ z باشند، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Im}\, z_۰ > ۰$. بنابراین هر تبدیل خطی کسری با ویژگی نگاشتی مذکور در پاراگراف اول این بخش باید به شکل

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_۰}{z - \overline{z}_۰} \qquad (\mathrm{Im}\, z_۰ > ۰) \tag{۶}$$

باشد، که در آن α عددی حقیقی است.

حال باید نشان دهیم که برعکس هر تبدیل خطی کسری به شکل (۶) دارای ویژگی نگاشتی مطلوب است. این کار را می‌توان به‌آسانی با قدرمطلق گرفتن از طرفین رابطهٔ (۶) و تعبیر هندسی رابطهٔ حاصل،

$$|w| = \left|\frac{z - z_۰}{z - \overline{z}_۰}\right|$$

انجام داد. اگر نقطهٔ z در بالای محور حقیقی باشد، این نقطه و نقطهٔ z_0 هر دو در یک طرف آن محور واقع‌اند که عمودمنصف پاره‌خط واصل بین z_0 و $\overline{z}_0$ است. در نتیجه فاصلهٔ $|z - z_0|$ از فاصلهٔ $|z - \overline{z}_0|$ کوچکتر است (شکل ۱۰۸)؛ یعنی، $|w| < 1$. همچنین اگر z پایین محور حقیقی باشد، فاصلهٔ $|z - z_0|$ از فاصلهٔ $|z - \overline{z}_0|$ بزرگتر است؛ و بنابراین $|w| > 1$. بالاخره اگر z روی محور حقیقی باشد، $|w| = 1$ زیرا در این‌صورت $|z - z_0| = |z - \overline{z}_0|$. چون هر تبدیل خطی کسری نگاشتی یک‌به‌یک از صفحهٔ z توسعه‌یافته به روی صفحهٔ w توسعه‌یافته است، در نتیجه تبدیل (۶) نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > 0$ را به روی قرص $|w| < 1$ و مرز نیم‌صفحه را به روی مرز قرص می‌نگارد.

اولین مثال استفاده از نتیجهٔ فوق را، که با حروف ایرانیک نوشته شده است، روشن می‌کند.

مثال ۱. تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z} \tag{۷}$$

در مثالهای ۱ بخشهای ۸۶ و ۸۷ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$w = e^{i\pi}\frac{z - i}{z - \overline{i}}.$$

از این‌رو این نگاشت دارای ویژگی نگاشتی مذکور در عبارت ایرانیک بالاست. (شکل ۱۳ در پیوست ۲ را نیز که نقاط مرزی متناظر نشان داده شده‌اند، ببینید.)

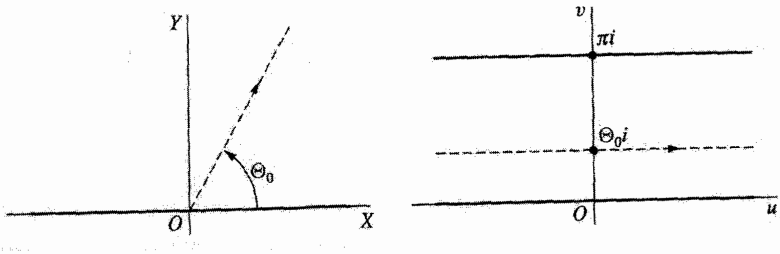
تصویر نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} z \geq 0$ تحت انواع دیگر تبدیلهای خطی کسری بیشتر مواقع با وارد بحث کردن این تبدیل خاص به سهولت تعیین می‌شود.

مثال ۲. با نوشتن $z = x + iy$ و $w = u + iv$ به‌سادگی می‌توان نشان داد که تبدیل

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{۸}$$

نیم‌صفحهٔ $y > 0$ را به روی نیم‌صفحهٔ $v > 0$ می‌نگارد و محور xها را به روی محور uها. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر z عددی حقیقی باشد، عدد w نیز حقیقی است. در نتیجه چون تصویر محور حقیقی $y = 0$ یک دایره یا یک خط است، باید محور حقیقی $v = 0$ باشد. به‌علاوه به‌ازای هر نقطهٔ w در صفحهٔ متناهی w،

$$v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}\frac{(z - 1)(\overline{z} + 1)}{(z + 1)(\overline{z + 1})} = \frac{2y}{|z + 1|^2} \qquad (z \neq -1).$$



شکل ۱۰۹

$w = \operatorname{Log} z$

بنابراین اعداد y و v هم‌علامت‌اند و در نتیجه نقاط بالای محور xها متناظرند با نقاط بالای محور uها و نقاط زیر محور xها با نقاط زیر محور uها. بالاخره، چون نقاط روی محور xها با نقاط روی محور uها متناظرند و هر تبدیل خطی کسری نگاشتی یک‌به‌یک از صفحهٔ توسعه‌یافته به روی صفحهٔ توسعه‌یافته است (بخش ۸۶)، ویژگی نگاشتی بیان شده برای تبدیل (۸) ثابت می‌شود.

آخرین مثال متضمن تابعی است مرکب و در آن از نگاشتی که در مثال ۲ مورد بحث قرار گرفته استفاده می‌شود.

مثال ۳. تبدیل

$$w = \operatorname{Log} \frac{z-۱}{z+۱}, \qquad (۹)$$

که در آن از شاخهٔ اصلی لگاریتم استفاده شده، ترکیبی از توابع زیر است

$$Z = \frac{z-۱}{z+۱} \quad \text{و} \quad w = \operatorname{Log} Z. \qquad (۱۰)$$

با توجه به مثال ۲ می‌دانیم که تبدیل اول از تبدیلهای (۱۰)، نیم‌صفحهٔ بالایی $y > ۰$ را به روی نیم‌صفحهٔ بالایی $Y > ۰$ می‌نگارد، که در آن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$. به‌علاوه از شکل ۱۰۹ به‌آسانی می‌توان دید که تبدیل دوم از تبدیلهای (۱۰) نیم‌صفحهٔ $Y > ۰$ را به روی نوار $۰ < v < \pi$ می‌نگارد، که در آن $w = u + iv$. به عبارت دقیقتر با نوشتن $Z = R\exp(i\Theta)$ و

$$\operatorname{Log} Z = \ln R + i\Theta \qquad (R > ۰, -\pi < \Theta < \pi),$$

می‌بینیم که وقتی نقطهٔ $Z = R\exp(i\Theta_۰)$ $(۰ < \Theta_۰ < \pi)$ در امتداد پرتو $\Theta = \Theta_۰$ از مبدأ به طرف خارج برود، تصویر آن نقطه‌ای می‌شود که مختصات قائم آن در صفحهٔ w

عبارت‌اند از $(\ln R, \Theta_\circ)$. این تصویر به‌وضوح در امتداد تمام خط افقی $v = \Theta_\circ$ به سمت راست حرکت می‌کند. چون وقتی که انتخاب $\Theta_\circ$ بین $\circ = \Theta_\circ$ تا $\Theta_\circ = \pi$ تغییر کند، این خطوط نوار $\circ < v < \pi$ را پر می‌کنند، نگاشتِ نیم‌صفحهٔ $Y > \circ$ به روی این نوار در واقع یک‌به‌یک است.

این مطلب نشان می‌دهد که ترکیب (۹) مربوط به نگاشتهای (۱۰) نیم‌صفحهٔ $y > \circ$ را بر روی نوار $\circ < v < \pi$ می‌نگارد. نقاط مرزی متناظر در شکل ۱۹ پیوست ۲ نشان داده شده‌اند.

تمرینها

۱. مثال ۱ بخش ۸۸ را یادآوری می‌کنیم که تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > \circ$ را به روی قرص $|w| < ۱$ و مرز نیم‌صفحه را به روی مرز قرص می‌نگارد. نشان دهید که نقطهٔ $z = x$ به روی نقطهٔ

$$w = \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} + i\frac{۲x}{۱ + x^۲},$$

نگاشته می‌شود و سپس درستی نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۳ پیوست ۲ را بدین‌صورت تحقیق کنید که نشان دهید قطعه‌خطهای محور xها به‌نحوی که نمایش داده شده نگاشته می‌شوند.

۲. درستی نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۲ پیوست ۲ را که در آن

$$w = \frac{z - ۱}{z + ۱}$$

تحقیق کنید.

راهنمایی: تبدیل مفروض را به‌صورت ترکیبی از نگاشتهای زیر بنویسید

$$Z = iz, \qquad W = \frac{i - Z}{i + Z}, \qquad w = -W\,.$$

سپس به نگاشتی که در تمرین ۱ بررسی شد استناد کنید.

۳. (الف) با پیدا کردن وارون تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

و استفاده از شکل ۱۳ پیوست ۲ که در تمرین ۱ بررسی شد، نشان دهید که تبدیل

$$w = i\frac{۱ - z}{۱ + z}$$

قرص $|z| \leq ۱$ را به روی نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} w \geq ۰$ می‌نگارد.

(ب) نشان دهید که تبدیل خطی کسری

$$w = \frac{z - ۲}{z}$$

را می‌توان چنین نوشت

$$Z = z - ۱, \qquad W = i\frac{۱ - Z}{۱ + Z}, \qquad w = iW\,.$$

سپس به کمک نتیجهٔ قسمت (الف) تحقیق کنید که این تبدیل قرص $|z - ۱| \leq ۱$ را به روی نیم‌صفحهٔ سمت چپ $\operatorname{Re} w \leq ۰$ می‌نگارد.

۴. تبدیل (۶) بخش ۸۸ نقطهٔ $z = \infty$ را به روی نقطهٔ $w = \exp(i\alpha)$ می‌نگارد، که بر مرز قرص $|w| \leq ۱$ واقع است. نشان دهید که اگر $۰ < \alpha < ۲\pi$ و نقاط $z = ۰$ و $z = ۱$، به‌ترتیب، به روی نقاط $w = ۱$ و $w = \exp(i\alpha/۲)$ نگاشته شوند، آن‌گاه تبدیل را می‌توان چنین نوشت

$$w = e^{i\alpha}\frac{z + \exp(-i\alpha/۲)}{z + \exp(i\alpha/۲)}\,.$$

۵. توجه کنید که وقتی $\alpha = \pi/۲$ تبدیل تمرین ۴ چنین می‌شود

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/۴)}{z + \exp(i\pi/۴)}\,.$$

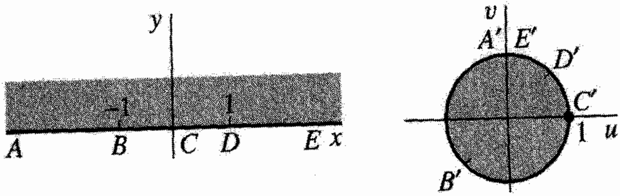
تحقیق کنید که این حالت خاص، نقاط روی محور xها را به نحوی می‌نگارد که در شکل ۱۱۰ نشان داده شده است.

۶. نشان دهید که وقتی $\operatorname{Im} z_۰ < ۰$، تبدیل (۶) بخش ۸۸ نیم‌صفحهٔ پایینی $\operatorname{Im} z \leq ۰$ را به روی قرص واحد $|w| \leq ۱$ می‌نگارد.

۷. رابطهٔ $w = \log(z - ۱)$ را می‌توان چنین نوشت

$$Z = z - ۱, \qquad w = \log Z\,.$$

شاخه‌یی از $\log Z$ را پیدا کنید به‌طوری که صفحهٔ z بریده‌شده که متشکل از همهٔ نقاط بجز نقاط روی نیم‌خط $x \geq ۱$ از محور حقیقی است، به‌وسیلهٔ $w = \log(z - ۱)$ به روی نوار $۰ < v < ۲\pi$ در صفحهٔ w نگاشته شود.



شکل ۱۱۰

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/۴)}{z + \exp(i\pi/۴)}.$$

۸۹. تبدیل $w = \sin z$

چون (بخش ۳۳)

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

تبدیل $w = \sin z$ را می‌توان چنین نوشت

$$u = \sin x \cosh y, \qquad v = \cos x \sinh y. \tag{۱}$$

یکی از روشهایی که اغلب برای یافتن تصاویر نواحی تحت این تبدیل مفید است، بررسی تصاویر خطوط قائم $x = c_۱$ است. اگر $۰ < c_۱ < \pi/۲$، نقاط روی خط $x = c_۱$ به نقاط روی منحنی

$$u = \sin c_۱ \cosh y, \qquad v = \cos c_۱ \sinh y \qquad (-\infty < y < \infty) \tag{۲}$$

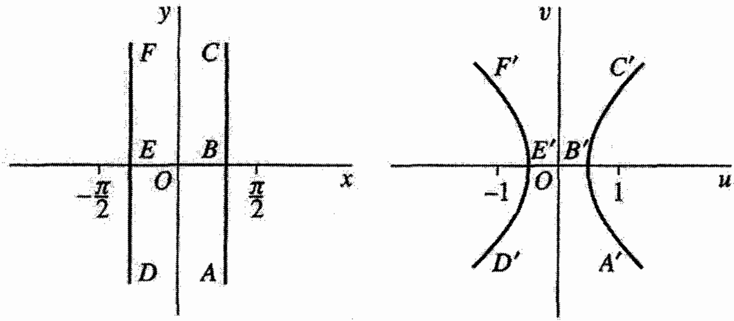
نگاشته می‌شوند که شاخهٔ سمت راست هذلولی

$$\frac{u^۲}{\sin^۲ c_۱} - \frac{v^۲}{\cos^۲ c_۱} = ۱ \tag{۳}$$

با کانونهای واقع در نقاط زیر است

$$w = \pm\sqrt{\sin^۲ c_۱ + \cos^۲ c_۱} = \pm ۱.$$

دومین رابطه از روابط (۲) نشان می‌دهد که وقتی نقطهٔ $(c_۱, y)$ روی آن خط به طرف بالا حرکت می‌کند، تصویرش روی این شاخهٔ هذلولی به طرف بالا حرکت می‌کند. چنین خطی و



شکل ۱۱۱

$w = \sin z$

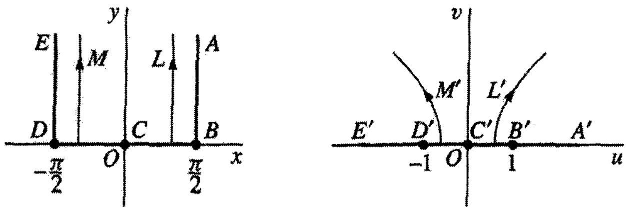
تصویرش در شکل ۱۱۱ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که، به‌خصوص، نگاشتی یک‌به‌یک از نیمهٔ بالایی ($y > ۰$) این خط به روی نیمهٔ بالایی ($v > ۰$) این شاخهٔ هذلولی موجود است. اگر $-\pi/۲ < c_۱ < ۰$، خط $x = c_۱$ به روی شاخهٔ سمت چپ همان هذلولی نگاشته می‌شود. مثل قبل، نقاط متناظر در شکل ۱۱۱ نشان داده شده‌اند.

خط $x = ۰$، یا محور y، را باید جداگانه در نظر گرفت. بنابر روابط (۱) تصویر هر نقطهٔ $(۰, y)$ عبارت است از $(۰, \sinh y)$. بنابراین محور y به روشی یک‌به‌یک به روی محور v نگاشته می‌شود، محور y مثبت با محور v مثبت متناظر است.

حال نحوهٔ استفاده از این ملاحظات را در یافتن تصاویر برخی نواحی تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. در اینجا نشان می‌دهیم که تبدیل $w = \sin z$ نگاشت یک‌به‌یکی از نوار نیمه نامتناهی $-\pi/۲ \le x \le \pi/۲$، $y \ge ۰$ در صفحهٔ z به روی نیمهٔ بالایی $v \ge ۰$ صفحهٔ w است.

برای انجام این کار، ابتدا نشان می‌دهیم که مرز این نوار، همان‌طورکه در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است، به روشی یک‌به‌یک به روی محور حقیقی در صفحهٔ w نگاشته می‌شود. تصویر پاره‌خط BA بدین‌روش به‌دست می‌آید که در روابط (۱) قرار می‌دهیم $x = \pi/۲$، و y را مقید می‌کنیم که نامنفی باشد. چون وقتی $x = \pi/۲$ داریم $u = \cosh y$ و $v = ۰$، نقطهٔ نوعی $(\pi/۲, y)$ روی BA به روی نقطهٔ $(\cosh y, ۰)$ در صفحهٔ w نگاشته می‌شود و وقتی $(\pi/۲, y)$ از B به طرف بالا حرکت کند آن تصویر باید در امتداد محور u از B' به طرف راست حرکت کند. نقطهٔ $(x, ۰)$ روی پاره‌خط افقی DB دارای تصویر $(\sin x, ۰)$ است که وقتی x از $x = -\pi/۲$ تا $x = \pi/۲$ افزایش یابد یا وقتی که $(x, ۰)$ از D به B برود این تصویر از D' به B' به طرف



شکل ۱۱۲

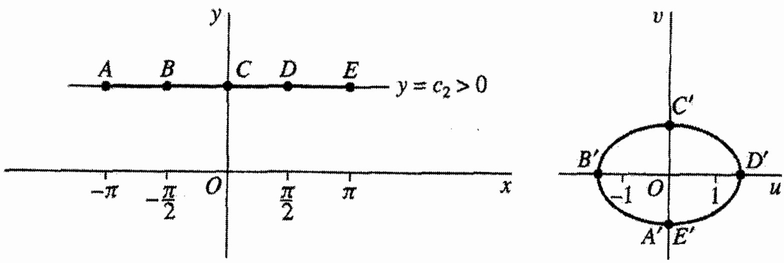
$w = \sin z$

راست حرکت می‌کند. بالاخره وقتی نقطهٔ $(-\pi/2, y)$ روی پاره‌خط DE از D به طرف بالا می‌رود تصویر آن $(-\cosh y, 0)$ از D' به طرف چپ حرکت می‌کند.

حال هر نقطه در درون نوار $-\pi/2 < x < \pi/2$، $y > 0$ روی یکی از نیم‌خطهای قائم $x = c_1$، $y > 0$ $(-\pi/2 < c_1 < -\pi/2)$ که در شکل ۱۱۲ نشان داده شده واقع است. همچنین توجه به این نکته که تصاویر این نیم‌خطها متمایزند و همهٔ نیم‌صفحهٔ $v > 0$ را تشکیل می‌دهند مهم است. به عبارت دقیقتر اگر تصور کنیم که L نیمهٔ بالایی خط $x = c_1$ $(0 < c_1 < \pi/2)$ به سمت چپ به طرف محور y مثبت حرکت می‌کند، شاخهٔ سمت راست هذلولی که شامل L' است بازتر می‌شود و رأس آن $(\sin c_1, 0)$ به مبدأ $w = 0$ میل می‌کند. بنابراین، L' در حد، محور v مثبت می‌شود که در پاراگراف قبل از مثال دیدیم تصویر محور y مثبت است. از طرف دیگر در صورتی که L به قطعهٔ BA مرز نوار میل کند، شاخهٔ هذلولی حول قطعهٔ $B'A'$ از محور u بسته می‌شود و رأس آن $(\sin c_1, 0)$ به نقطهٔ $w = 1$ میل می‌کند. در مورد نیم‌خط M و تصویرش M' در شکل ۱۱۲ می‌توان عبارات مشابهی بیان کرد. می‌توان نتیجه گرفت که تصویر هر نقطه در درون نوار نقطه‌ای واقع در نیم‌صفحهٔ بالایی $v > 0$ است و به‌علاوه هر نقطه در نیم‌صفحهٔ بالایی تصویر درست یک نقطه در درون نوار است.

بدین‌ترتیب اثبات اینکه تبدیل $w = \sin z$ نگاشتی یک‌به‌یک از نوار $-\pi/2 \le x \le \pi/2$، $y \ge 0$ به روی نیم‌صفحهٔ $v \ge 0$ است کامل می‌شود. نتیجهٔ نهایی در شکل ۹ پیوست ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، نیمهٔ سمت راست نوار به روی ربع اول صفحهٔ w نگاشته می‌شود.

روش مناسب دیگری برای یافتن تصاویر برخی نواحی وقتی $w = \sin z$ این است که تصاویر پاره‌خطهای افقی $y = c_2$ $(-\pi \le x \le \pi)$ را در نظر بگیریم، که در آن $c_2 > 0$. بنابر روابط



شکل ۱۱۳

$w = \sin z$

(۱) تصویر چنین پاره‌خطی عبارت است از منحنی با نمایش پارامتری

$$u = \sin x \cosh c_۲, \qquad v = \cos x \sinh c_۲ \qquad (-\pi \le x \le \pi). \tag{۴}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که این منحنی عبارت است از بیضی

$$\frac{u^۲}{\cosh^۲ c_۲} + \frac{v^۲}{\sinh^۲ c_۲} = ۱ \tag{۵}$$

که کانونهای آن در نقاط زیر واقع‌اند

$$w = \pm\sqrt{\cosh^۲ c_۲ - \sinh^۲ c_۲} = \pm ۱\,.$$

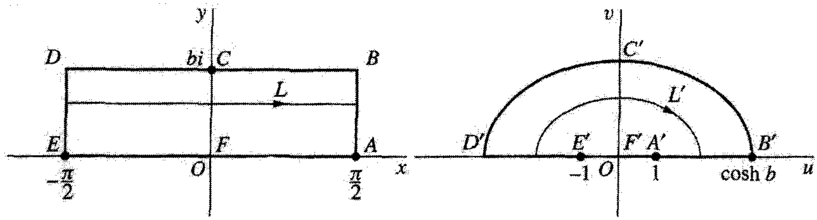
وقتی نقطهٔ $(x, c_۲)$ در شکل ۱۱۳ از نقطهٔ A در جهت راست به نقطهٔ E می‌رود تصویرش مداری پیرامون بیضی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد. توجه کنید که وقتی برای عدد مثبت $c_۲$ مقادیر کوچکتر گرفته شود، بیضی کوچکتر می‌شود اما همان کانونهای $(\pm۱, ۰)$ باقی می‌مانند. در حالت حدی $c_۲ = ۰$، روابط (۴) چنین می‌شوند

$$u = \sin x, \qquad v = ۰ \qquad (-\pi \le x \le \pi);$$

و در می‌یابیم که بازهٔ $-\pi \le x \le \pi$ از محور xها به روی بازهٔ $-۱ \le u \le ۱$ از محور uها نگاشته می‌شود. با وجود این، نگاشت یک‌به‌یک نیست در حالی که وقتی $c_۲ > ۰$، نگاشت یک‌به‌یک است.

مثال زیر مبتنی بر این ملاحظات است.

مثال ۲. ناحیهٔ مستطیلی $-\pi/۲ \le x \le \pi/۲$، $۰ \le y \le b$ با $w = \sin z$، به‌صورتی یک‌به‌یک به روی ناحیهٔ نیم‌بیضی‌شکل نشان داده شده در شکل ۱۱۴ نگاشته می‌شود، که در آن



شکل ۱۱۴

$w = \sin z$

نقاط مرزی متناظر نیز نشان داده شده‌اند. زیرا اگر L پاره‌خط $y = c_۲ \; (-\pi/۲ \leq x \leq \pi/۲)$ باشد که در آن $۰ < c_۲ \leq b$، تصویر آن L' نیمهٔ بالایی بیضی (۵) است. وقتی $c_۲$ کاهش می‌یابد، L به طرف پایین محور xها حرکت می‌کند. همچنین نیم بیضی L' نیز به طرف پایین حرکت کرده در حد، به پاره‌خط $E'F'A'$، از $w = -۱$ تا $w = ۱$، تبدیل می‌شود. در واقع وقتی $c_۲ = ۰$، روابط (۴) چنین می‌شوند

$$u = \sin x, \qquad v = ۰ \qquad \left(-\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}\right);$$

و این به‌وضوح نگاشتی یک‌به‌یک از پاره‌خط EFA به روی $E'F'A'$ است. از آنجایی که هر نقطه در ناحیهٔ نیم‌بیضی‌شکل صفحهٔ w روی یک و تنها یکی از نیم‌بیضیها یا روی حالت حدی $E'F'A'$ واقع است، آن نقطه، تصویر دقیقاً یک نقطه از ناحیهٔ مستطیلی در صفحهٔ z است. حال درستی نگاشت مطلوب، که در شکل ۱۱ پیوست ۲ نیز نشان داده شده، تأیید می‌شود.

اگر نگاشتها به‌وسیلهٔ تابع سینوس معلوم باشند، نگاشت به‌وسیلهٔ توابع گوناگون دیگری که ارتباط نزدیکی با تابع سینوس دارند به سادگی به‌دست می‌آید.

مثال ۳. تنها با یادآوری اتحاد (بخش ۳۳)

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{۲}\right)$$

می‌بینیم که تبدیل $w = \cos z$ را می‌توان متوالیاً به‌صورت

$$Z = z + \frac{\pi}{۲}, \qquad w = \sin Z$$

نوشت. پس این تبدیل همان تبدیل سینوس است که مقدم بر آن یک انتقال به سمت راست به اندازهٔ $\pi/۲$ صورت گرفته است.

مثال ۴. بنابر بخش ۳۴، تبدیل $w = \sinh z$ را می‌توان چنین نوشت $w = -i\sin(iz)$، یا

$$Z = iz, \qquad W = \sin Z, \qquad w = -iW\,.$$

ازاین‌رو، این ترکیبی است از تبدیل سینوس با دورانهایی به زوایای قائمه. همچنین تبدیل $w = \cosh z$ اساساً یک تبدیل کسینوس است زیرا $\cosh z = \cos(iz)$.

تمرینها

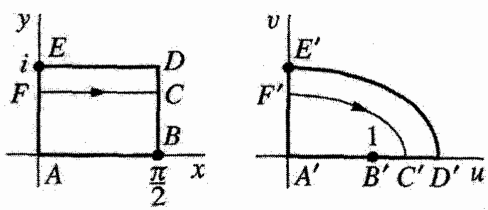
۱. نشان دهید که تبدیل $w = \sin z$ همان‌طور که در شکل ۱۱۲ بخش ۸۹ نشان داده شده است نیمهٔ بالایی $(y > 0)$ خط قائم $x = c_1 \, (-\pi/2 < c_1 < 0)$ را به روشی یک‌به‌یک به روی نیمهٔ بالایی $(v > 0)$ شاخهٔ سمت چپ هذلولی (۳) آن بخش می‌نگارد.

۲. نشان دهید که در تبدیل $w = \sin z$ خط $x = c_1 \, (\pi/2 < c_1 < \pi)$ به روی شاخهٔ سمت راست هذلولی (۳) بخش ۸۹ نگاشته می‌شود. توجه کنید که نگاشت یک‌به‌یک است و نیمه‌های بالایی و پایینی خط، به ترتیب، به روی نیمهٔ پایینی و بالایی شاخه نگاشته می‌شوند.

۳. در مثال ۱ بخش ۸۹ با استفاده از نیم‌خطهای قائم نشان دادیم که تبدیل $w = \sin z$ نگاشتی یک‌به‌یک از ناحیهٔ باز $-\pi/2 < x < \pi/2$، $y > 0$ به روی نیم‌صفحهٔ $v > 0$ است. این مطلب را با استفاده از پاره‌خطهای افقی $y = c_2 \, (-\pi/2 < x < \pi/2)$، $c_2 > 0$، تحقیق کنید.

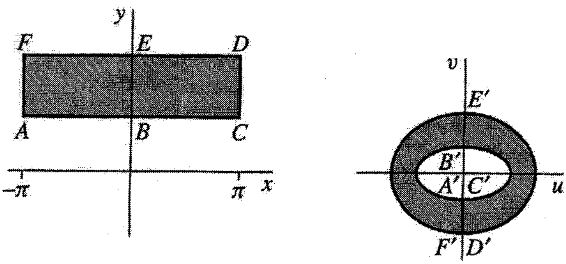
۴. (الف) نشان دهید که در تبدیل $w = \sin z$ تصاویر پاره‌خطهایی که مرز ناحیهٔ مستطیلی $0 \le x \le \pi/2$، $0 \le y \le 1$ را تشکیل می‌دهند عبارت‌اند از قوس $D'E'$ و پاره‌خطهایی که در شکل ۱۱۵ نشان داده شده‌اند. قوس $D'E'$ ربعی از بیضی زیر است

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1.$$



شکل ۱۱۵

$w = \sin z$



شکل ۱۱۶

$w = \sin z$

(ب) با استفاده از تصاویر پاره‌خطهای افقی، نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۱۵ را کامل کرده ثابت کنید که تبدیل $w = \sin z$ تناظری یک‌به‌یک بین نقاط داخلی نواحی $ABDE$ و $A'B'D'E'$ برقرار می‌کند.

۵. تحقیق کنید همان‌طور که در شکل ۱۱۶ نشان داده شده، درون ناحیهٔ مستطیلی $-\pi \le x \le \pi$، $a \le y \le b$ که در بالای محور xها واقع است با $w = \sin z$ به روی درون یک حلقهٔ بیضی‌شکل نگاشته می‌شود که بریدگیی در امتداد قطعهٔ $-\sinh b \le v \le -\sinh a$ از محور حقیقی منفی دارد. توجه کنید که نگاشت درون ناحیهٔ مستطیلی، یک‌به‌یک است اما نگاشت مرزی چنین نیست.

۶. (الف) نشان دهید که رابطهٔ $w = \cosh z$ را می‌توان چنین نوشت

$$Z = iz + \frac{\pi}{۲}, \qquad w = \sin Z\,.$$

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) و نگاشتی به‌وسیلهٔ $\sin z$ که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، تحقیق کنید که تبدیل $w = \cosh z$ نوار نیمه نامتناهی $x \ge ۰$، $۰ \le y \le \pi/۲$ از صفحهٔ z را به روی ربع اول $u \ge ۰$، $v \ge ۰$ صفحهٔ w می‌نگارد. قسمتهای متناظر از مرزهای دو ناحیه را نمایش دهید.

۷. ملاحظه کنید که تبدیل $w = \cosh z$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی از نگاشتهای زیر نوشت

$$Z = e^z, \qquad W = Z + \frac{۱}{Z}, \qquad w = \frac{۱}{۲}W\,.$$

سپس با استفاده از شکلهای ۷ و ۱۶ پیوست ۲ نشان دهید که وقتی $w = \cosh z$ نوار نیمه نامتناهی $x \le ۰$، $۰ \le y \le \pi$ از صفحهٔ z به روی نیمهٔ پایینی $v \le ۰$ صفحهٔ w نگاشته می‌شود. قسمتهای متناظر مرزها را نمایش دهید.

۸. (الف) تحقیق کنید که رابطهٔ $w = \sin z$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$Z = i\left(z + \frac{\pi}{۲}\right), \qquad W = \cosh Z, \qquad w = -W .$$

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) این مسئله و نتیجهٔ تمرین ۷ نشان دهید که تبدیل $w = \sin z$ نوار نیمه نامتناهی $-\pi/۲ \leq x \leq \pi/۲$، $y \geq ۰$ را، همان‌طور که در شکل ۹ پیوست ۲ نشان داده شده است، به روی نیم‌صفحهٔ $v \geq ۰$ می‌نگارد. (درستی این نگاشت به روش دیگری در مثال ۱، بخش ۸۹، تحقیق شده است.)

۹۰. نگاشت به‌وسیلهٔ $z^۲$ و شاخه‌های $z^{۱/۲}$

در فصل ۲ (بخش ۱۲) بعضی از نگاشتهای نسبتاً ساده تحت تبدیل $w = z^۲$ را در نظر گرفتیم و این تبدیل را به شکل زیر نوشتیم

$$u = x^۲ - y^۲, \qquad v = ۲xy \tag{۱}$$

حال به مثال پیشرفته‌تری می‌پردازیم و سپس نگاشتهای وابسته به $w = z^{۱/۲}$ را بررسی می‌کنیم که در آن شاخه‌های مشخصی از این تابع جذر در نظر گرفته شده است.

مثال ۱. با استفاده از روابط (۱) نشان دهید همان‌طور که در شکل ۱۱۷ نشان داده شده است تصویر نوار قائم $۰ \leq x \leq ۱$، $y \geq ۰$ ناحیهٔ بستهٔ نیم‌سهمی‌شکل است.

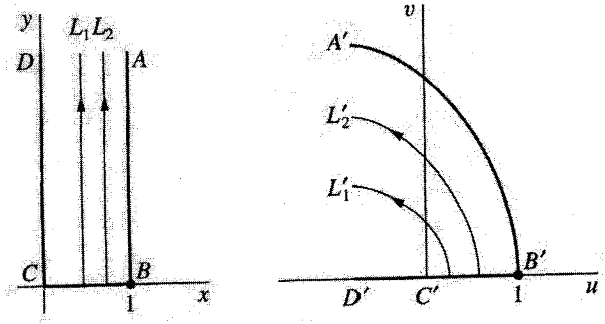
اگر $۰ < x_۱ < ۱$ وقتی y از $y = ۰$ افزایش می‌یابد، نقطهٔ $(x_۱, y)$ در امتداد نیم‌خط قائمی که در شکل ۱۱۷ به $L_۱$ نمایش داده شده بالا می‌رود. بنابر روابط (۱) تصویر آن در صفحهٔ uv دارای نمایش پارامتری زیر است

$$u = x_۱^۲ - y^۲, \qquad v = ۲x_۱y \qquad (۰ \leq y < \infty). \tag{۲}$$

حال اگر y را از معادلهٔ دوم به‌دست آورده و در معادلهٔ اول قرار دهیم، می‌بینیم که نقاط تصویر (u, v) باید روی سهمی

$$v^۲ = -۴x_۱^۲(u - x_۱^۲), \tag{۳}$$

به رأس $(x_۱^۲, ۰)$ و کانون مبدأ باشد. چون بنابر دومین رابطه از روابط (۲)، v با y از $v = ۰$ افزایش می‌یابد می‌بینیم که وقتی نقطهٔ $(x_۱, y)$ در امتداد $L_۱$ با شروع از محور x به طرف بالا حرکت می‌کند، تصویرش در امتداد $L_۱'$ نیمهٔ بالایی این سهمی با شروع از محور u به طرف بالا



شکل ۱۱۷

$w = z^۲$

حرکت می‌کند. به‌علاوه اگر عدد $x_۲$ بزرگتر از $x_۱$ و کوچکتر از ۱ گرفته شود، $L_۲$ نیم‌خط متناظر آن دارای تصویر $L'_۲$ است که همان‌طور که در شکل ۱۱۷ نشان داده شده نیم‌سهمی در سمت راست $L'_۱$ است. توجه می‌کنیم که در واقع تصویر نیم‌خط BA در آن شکل عبارت است از نیمهٔ بالایی سهمی $v^۲ = -۴(u - ۱)$ که با $B'A'$ نمایش داده شده است.

تصویر نیم‌خط CD به این‌صورت به‌دست می‌آید که بنابر معادلات (۱) نقطهٔ $(۰, y)$، که در آن $y \geq ۰$، روی CD به نقطهٔ $(-y^۲, ۰)$ در صفحهٔ uv نگاشته می‌شود. بنابراین وقتی نقطه‌ای از مبدأ در امتداد CD بالا رود، تصویر آن از مبدأ در امتداد محور u به سمت چپ حرکت می‌کند. پس به‌وضوح اگر نیم‌خطهای قائم در صفحهٔ xy به سمت چپ حرکت کنند، نیم‌سهمیهایی که تصاویر آنها در صفحهٔ uv هستند به نیم‌خط $C'D'$ میل می‌کنند.

حال بدیهی است که تصاویر همهٔ نیم‌خطهای بین CD و BA به‌انضمام خود آنها ناحیهٔ بستهٔ نیم‌سهمیی محدود به $A'B'C'D'$ را پر می‌کنند. همچنین هر نقطهٔ این ناحیه تصویر فقط یک نقطه در نوار بستهٔ محدود به $ABCD$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناحیهٔ نیم‌سهمی‌شکل، تصویر این نوار است و تناظر یک‌به‌یکی بین نقاط این دو ناحیهٔ بسته وجود دارد. (با شکل ۳ پیوست ۲ مقایسه کنید، که در آن نوار با عرض دلخواه گرفته شده است.)

برای نگاشت به‌وسیلهٔ شاخه‌های $z^{۱/۲}$، با توجه به بخش ۸ یادآوری می‌کنیم که اگر $z \neq ۰$ مقادیر $z^{۱/۲}$ ریشه‌های دوم z هستند. با استناد به آن بخش اگر از مختصات قطبی استفاده شود و

$$z = r\exp(i\Theta) \qquad (r > ۰, -\pi < \Theta \leq \pi),$$

آن‌گاه

$$z^{۱/۲} = \sqrt{r} \exp \frac{i(\Theta + ۲k\pi)}{۲} \qquad (k = ۰, ۱), \tag{۴}$$

ریشهٔ اصلی وقتی به‌دست می‌آید که $k = ۰$. در بخش ۳۱ دیدیم که $z^{۱/۲}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$z^{۱/۲} = \exp\left(\frac{۱}{۲} \log z\right) \qquad (z \neq ۰). \tag{۵}$$

پس $F_۰(z)$ شاخهٔ اصلی تابع دومقداری $z^{۱/۲}$، با گرفتن شاخهٔ اصلی $\log z$ و نوشتن (بخش ۳۲ را ببینید)

$$F_۰(z) = \exp\left(\frac{۱}{۲} \operatorname{Log} z\right) \qquad (|z| > ۰, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

به‌دست می‌آید. چون اگر $z = r\exp(i\Theta)$،

$$\frac{۱}{۲} \operatorname{Log} z = \frac{۱}{۲} (\ln r + i\Theta) = \ln \sqrt{r} + i\frac{\Theta}{۲}$$

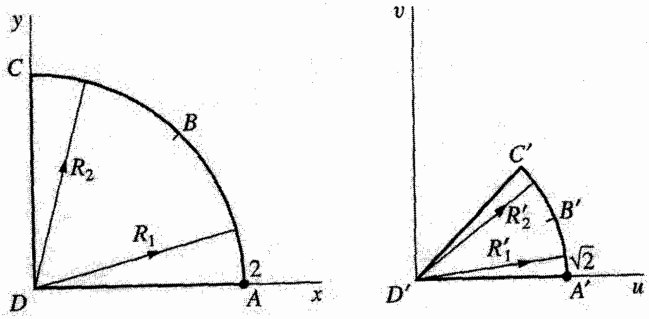
در نتیجه

$$F_۰(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\Theta}{۲} \qquad (r > ۰, -\pi < \Theta < \pi). \tag{۶}$$

البته سمت راست این رابطه همان سمت راست رابطهٔ (۴) با شرطهای $k = ۰$ و $-\pi < \Theta < \pi$ است. مبدأ و پرتو $\Theta = \pi$ تشکیل بریدگی شاخه‌یی برای $F_۰$ می‌دهند و مبدأ نقطهٔ شاخه‌یی است.

تصاویر منحنیها و نواحی تحت تبدیل $w = F_۰(z)$ را می‌توان با نوشتن $w = \rho\exp(i\phi)$ به‌دست آورد که در آن $\rho = \sqrt{r}$ و $\phi = \Theta/۲$. به‌وضوح این تبدیل، آوندها را نصف می‌کند، و در می‌یابیم که اگر $z = ۰$، آن‌گاه $w = ۰$.

مثال ۲. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $w = F_۰(z)$ نگاشتی یک‌به‌یک از ربع قرص $۰ \leq r \leq ۲$، $۰ \leq \theta \leq \pi/۲$ در صفحهٔ z به روی قطاع $۰ \leq \rho \leq \sqrt{۲}$، $۰ \leq \phi \leq \pi/۴$ در صفحهٔ w است (شکل ۱۱۸). برای انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که وقتی نقطهٔ $z = r\exp(i\theta_۱)$ $(۰ \leq \theta_۱ \leq \pi/۲)$ در امتداد شعاع $R_۱$ به طول ۲ و زاویهٔ شیب $\theta_۱$ از مبدأ به طرف خارج حرکت کند، تصویر آن $w = \sqrt{r}\exp(i\theta_۱/۲)$ در امتداد شعاع $R'_۱$ به طول $\sqrt{۲}$ و زاویهٔ شیب $\theta_۱/۲$ از مبدأ به طرف خارج حرکت می‌کند. شکل ۱۱۸ را ببینید، که در آن، شعاع دیگر $R_۲$ و تصویر آن $R'_۲$ نیز نشان داده شده‌اند. حال از روی این شکل واضح است که اگر این



شکل ۱۱۸

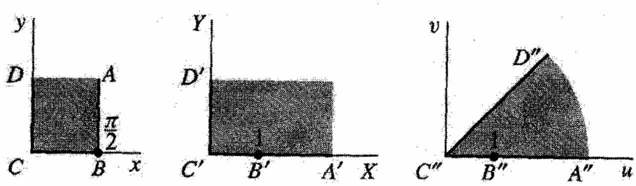
$w = F_\circ(z)$

ناحیهٔ صفحهٔ z به‌وسیلهٔ شعاعی، با شروع از DA و ختم در DC روفته شود، آن‌گاه ناحیهٔ صفحهٔ w به‌وسیلهٔ شعاع متناظر، با شروع از $D'A'$ و ختم در $D'C'$ روفته می‌شود. بدین‌ترتیب تناظری یک‌به‌یک بین نقاط دو ناحیه برقرار می‌شود.

مثال ۳. تبدیل $w = F_\circ(\sin z)$ را می‌توان چنین نوشت

$$Z = \sin z, \qquad w = F_\circ(Z) \qquad (|Z| > \circ, -\pi < \operatorname{Arg} Z < \pi).$$

همان‌طورکه در آخر مثال ۱، بخش ۸۹، توضیح دادیم، تبدیل اول نوار نیمه نامتناهی $\circ \leq x \leq \pi/۲$، $y \geq \circ$ را به روی ربع اول $X \geq \circ$، $Y \geq \circ$ در صفحهٔ Z می‌نگارد. تبدیل دوم، با در نظر داشتن اینکه $F_\circ(\circ) = \circ$، این ربع را به روی هشت‌ـیک صفحهٔ w می‌نگارد. این تبدیلهای متوالی در شکل ۱۱۹ تشریح شده‌اند، که در آن نقاط مرزی متناظر نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱۹

$w = F_\circ(\sin z)$

وقتی $-\pi < \Theta < \pi$ و از شاخهٔ

$$\log z = \ln r + i(\Theta + ۲\pi)$$

تابع لگاریتمی استفاده شود، رابطهٔ (۵)، شاخهٔ

$$F_۱(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i(\Theta + ۲\pi)}{۲} \quad (r > ۰, -\pi < \Theta < \pi) \qquad (۷)$$

از تابع $z^{۱/۲}$ را به ما می‌دهد، که متناظر با انتخاب $k = ۱$ در رابطهٔ (۴) است. چون $\exp(i\pi) = -۱$ در نتیجه $F_۱(z) = -F_۰(z)$. بنابراین مقادیر $\pm F_۰(z)$ همهٔ مقادیر $z^{۱/۲}$ را در همهٔ نقاط حوزهٔ $r > ۰$، $-\pi < \Theta < \pi$ نمایش می‌دهند. اگر با استفاده از عبارت (۶) حوزهٔ تعریف $F_۰$ را توسعه دهیم تا شامل پرتو $\Theta = \pi$ شود و اگر بنویسیم $F_۰(۰) = ۰$ آن‌گاه مقادیر $\pm F_۰(z)$ نمایش همهٔ مقادیر $z^{۱/۲}$ در همهٔ صفحهٔ z است.

با استفاده از سایر شاخه‌های $\log z$ در عبارت (۵) شاخه‌های دیگری از $z^{۱/۲}$ به‌دست می‌آیند. شاخه‌یی که در آن پرتو $\theta = \alpha$ بریدگی شاخه است با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f_\alpha(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{۲} \quad (r > ۰, \alpha < \theta < \alpha + ۲\pi). \qquad (۸)$$

ملاحظه کنید که وقتی $\alpha = -\pi$ شاخهٔ $F_۰(z)$ را داریم و وقتی $\alpha = \pi$ شاخهٔ $F_۱(z)$ را داریم. درست مثل حالت $F_۰$، حوزهٔ تعریف f_α را می‌توان به همهٔ صفحهٔ مختلط توسعه داد بدین‌صورت که f_α را در نقاط ناصفر روی بریدگی شاخه با استفاده از عبارت (۸)، تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم $f_\alpha(۰) = ۰$. ولی چنین توسیعهایی هیچ‌وقت در همهٔ صفحه پیوسته نیستند.

بالاخره فرض کنید n عدد صحیح دلخواهی باشد، که در آن $n \geq ۲$. اگر $z \neq ۰$، مقادیر $z^{۱/n}$ ریشه‌های nام zاند و بنابر بخش ۳۱ تابع چندمقداری $z^{۱/n}$ را می‌توان چنین نوشت

$$z^{۱/n} = \exp\left(\frac{۱}{n}\log z\right) = \sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta + ۲k\pi)}{n} \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱) \qquad (۹)$$

که در آن $r = |z|$ و $\Theta = \operatorname{Arg} z$. حالت $n = ۲$ هم‌اکنون بررسی شده است. در حالت کلی هر یک از n تابع

$$F_k(z) = \sqrt[n]{r}\exp\frac{i(\Theta + ۲k\pi)}{n} \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱) \qquad (۱۰)$$

یک شاخهٔ $z^{1/n}$ است که در حوزهٔ $r > 0$، $-\pi < \Theta < \pi$ تعریف شده است. اگر $w = \rho e^{i\phi}$، تبدیل $w = F_k(z)$ نگاشتی یک‌به‌یک از آن حوزه به روی حوزهٔ

$$\rho > 0, \qquad \frac{(2k-1)\pi}{n} < \phi < \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

است. این n شاخهٔ $z^{1/n}$ در هر نقطهٔ z از حوزهٔ $r > 0$، $-\pi < \Theta < \pi$، هر n ریشهٔ متمایز nام z را به ما می‌دهند. وقتی $k = 0$ شاخهٔ اصلی پیدا می‌شود و شاخه‌های بیشتری از نوع (۸) به‌آسانی ساخته می‌شوند.

تمرینها

۱. با نشان دادن جهتهای متناظر نشان دهید، که نگاشت $w = z^2$ خطوط $y = c_2$ $(c_2 > 0)$ را به سهمیهای $v^2 = 4c_2^2(u + c_2^2)$ که کانون همهٔ آنها $w = 0$ است تبدیل می‌کند. (با مثال ۱ بخش ۹۰ مقایسه کنید.)

۲. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۱ نشان دهید که تبدیل $w = z^2$ نگاشت یک‌به‌یکی از نوار $a \le y \le b$ در بالای محور xها به روی ناحیهٔ بستهٔ محدود به سهمیهای زیر است

$$v^2 = 4a^2(u + a^2), \qquad v^2 = 4b^2(u + b^2).$$

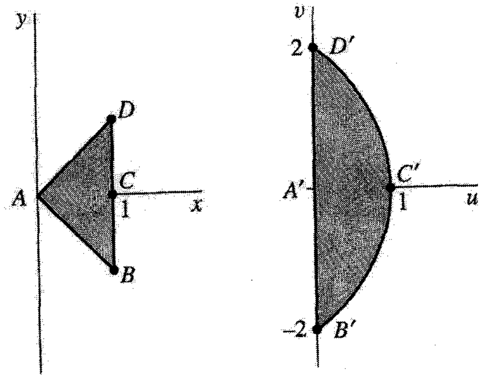
۳. نشان دهید که چگونه از بحث مثال ۱ بخش ۹۰ نتیجه می‌شود که تبدیل $w = z^2$ نوار قائم $0 \le x \le c$، $y \ge 0$ با عرض دلخواه را آن‌طور که در شکل ۳ پیوست ۲ نشان داده شده، به روی یک ناحیهٔ نیم‌سهمی‌شکل بسته می‌نگارد.

۴. با مختصر تغییری در بحث مثال ۱ بخش ۹۰ نشان دهید که وقتی $w = z^2$، تصویر ناحیهٔ مثلثی بستهٔ حاصل از خطوط $y = \pm x$ و $x = 1$ ناحیهٔ بسته سهمی‌شکل محدود از سمت چپ به قطعهٔ $-2 \le v \le 2$ از محور v و از سمت راست به قسمتی از سهمی $v^2 = -4(u-1)$ است. تحقیق کنید که در شکل ۱۲۰ نقاط متناظر روی دو مرز درست نشان داده شده‌اند.

۵. با استناد به شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان دهید که تبدیل $w = \sin^2 z$ نوار $0 \le x \le \pi/2$، $y \ge 0$ را به روی نیم‌صفحهٔ $v \ge 0$ می‌نگارد. قسمتهای متناظر از مرزها را نمایش دهید.

راهنمایی: اولین پاراگراف مثال ۳ بخش ۱۲ را ببینید.

۶. با استفاده از شکل ۹ پیوست ۲ نشان دهید که تحت تبدیل $w = (\sin z)^{1/4}$، که در آن شاخهٔ اصلی توان کسری گرفته شده است، نوار نیمه نامتناهی $-\pi/2 < x < \pi/2$، $y > 0$ به روی



شکل ۱۲۰

$w = z^{۲}$

قسمتی از ربع اول نگاشته می‌شود که بین خط $v = u$ و محور u واقع است. قسمتهای متناظر مرزها را مشخص کنید.

۷. بنابر مثال ۲ بخش ۸۸، تبدیل خطی کسری

$$Z = \frac{z - ۱}{z + ۱}$$

محور x را به روی محور X و نیم‌صفحه‌های $y > ۰$ و $y < ۰$ را، به ترتیب، به روی نیم‌صفحه‌های $Y > ۰$ و $Y < ۰$ می‌نگارد. نشان دهید که به‌خصوص این تبدیل پاره‌خط $-۱ \leq x \leq ۱$ از محور x را به روی قطعهٔ $X \leq ۰$ از محور X می‌نگارد. سپس نشان دهید که وقتی از شاخهٔ اصلی ریشهٔ دوم استفاده شود، تابع مرکب

$$w = Z^{۱/۲} = \left(\frac{z - ۱}{z + ۱}\right)^{۱/۲}$$

صفحهٔ z، بجز پاره‌خط $-۱ \leq x \leq ۱$ از محور x، را به روی نیم‌صفحهٔ $u > ۰$ می‌نگارد.

۸. تصویر حوزهٔ $r > ۰$، $-\pi < \Theta < \pi$ در صفحهٔ z را تحت هر یک از تبدیلهای $w = F_k(z)$ $(k = ۰, ۱, ۲, ۳)$ تعیین کنید، که در آن $F_k(z)$ها چهار شاخهٔ $z^{۱/۴}$ هستند که با رابطهٔ (۱۰)، بخش ۹۰، وقتی که $n = ۴$ تعریف شده‌اند. با استفاده از این چهار شاخه، ریشه‌های چهارم i را تعیین کنید.

۹۱. ریشه‌های دوم چندجمله‌ییها

حال نگاشتهایی را در نظر می‌گیریم که ترکیب چندجمله‌ییها و ریشه‌های دوم zاند.

مثال ۱. شاخه‌های تابع دومقداری $(z - z_\circ)^{1/2}$ را می‌توان با توجه به اینکه ترکیبی از انتقال $Z = z - z_\circ$ با تابع دومقداری $Z^{1/2}$ است به‌دست آورد. هر شاخهٔ $Z^{1/2}$ شاخه‌یی از $(z - z_\circ)^{1/2}$ را به‌دست می‌دهد. اگر $Z = Re^{i\theta}$، شاخه‌های $Z^{1/2}$ عبارت‌اند از

$$Z^{1/2} = \sqrt{R}\exp\frac{i\theta}{2} \quad (R > \circ, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi).$$

بنابراین، اگر بنویسیم

$$R = |z - z_\circ|, \quad \Theta = \operatorname{Arg}(z - z_\circ) \quad \text{و} \quad \theta = \arg(z - z_\circ)$$

دو شاخهٔ $(z - z_\circ)^{1/2}$ عبارت‌اند از

$$G_\circ(z) = \sqrt{R}\exp\frac{i\Theta}{2} \quad (R > \circ, -\pi < \Theta < \pi) \tag{1}$$

و

$$g_\circ(z) = \sqrt{R}\exp\frac{i\theta}{2} \quad (R > \circ, \circ < \theta < 2\pi). \tag{2}$$

شاخه‌یی از $Z^{1/2}$ که در نوشتن $G_\circ(z)$ به‌کار برده شده در هر نقطه از صفحهٔ Z، بجز مبدأ و نقاط روی نیم‌خط $\operatorname{Arg} Z = \pi$، تعریف شده است. بنابراین، تبدیل $w = G_\circ(z)$ نگاشتی یک‌به‌یک از حوزهٔ

$$|z - z_\circ| > \circ, \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z - z_\circ) < \pi$$

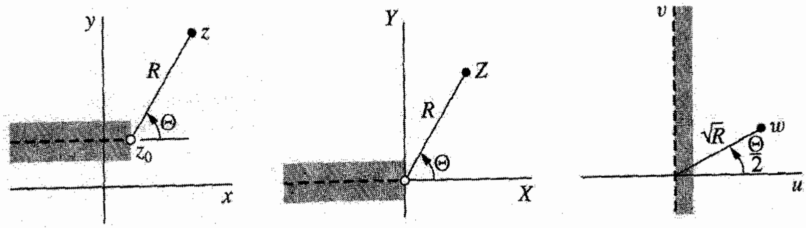
به روی نیمهٔ راست صفحهٔ w، $\operatorname{Re} w > \circ$، است (شکل ۱۲۱). تبدیل $w = g_\circ(z)$ حوزهٔ

$$|z - z_\circ| > \circ, \quad \circ < \arg(z - z_\circ) < 2\pi$$

را به روشی یک‌به‌یک به روی نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} w > \circ$ می‌نگارد.

مثال ۲. حال به‌عنوان مثالی آموزنده و تا حدی پیشرفته، تابع دومقداری $(z^2 - 1)^{1/2}$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از ویژگیهای ثابت شدهٔ تابع لگاریتمی، می‌توانیم بنویسیم

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\log(z^2 - 1)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\log(z - 1) + \frac{1}{2}\log(z + 1)\right]$$



شکل ۱۲۱

$w = G_\circ(z)$

یا

$$(z^۲ - ۱)^{۱/۲} = (z-۱)^{۱/۲}(z+۱)^{۱/۲} \qquad (z \neq \pm ۱). \tag{۳}$$

بنابراین اگر $f_۱(z)$ شاخه‌یی از $(z-۱)^{۱/۲}$ باشد که بر حوزهٔ $D_۱$ تعریف شده و $f_۲(z)$ شاخه‌یی از $(z+۱)^{۱/۲}$ باشد که بر حوزهٔ $D_۲$ تعریف شده است، آن‌گاه حاصلضرب $f(z) = f_۱(z)f_۲(z)$ شاخه‌یی از $(z^۲-۱)^{۱/۲}$ است که در همهٔ نقاط واقع در هر دو حوزهٔ $D_۱$ و $D_۲$ تعریف شده است.

برای به‌دست آوردن شاخهٔ مشخصی از $(z^۲-۱)^{۱/۲}$، شاخه‌یی از $(z-۱)^{۱/۲}$ و شاخه‌یی از $(z+۱)^{۱/۲}$ را، که با رابطهٔ (۲) داده شده‌اند به‌کار می‌بریم. اگر قرار دهیم

$$r_۱ = |z-۱| \quad \text{و} \quad \theta_۱ = \arg(z-۱)،$$

آن شاخهٔ $(z-۱)^{۱/۲}$ چنین است

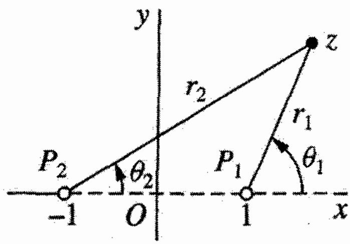
$$f_۱(z) = \sqrt{r_۱}\exp\frac{i\theta_۱}{۲} \qquad (r_۱ > \circ, \circ < \theta_۱ < ۲\pi).$$

شاخه‌یی از $(z+۱)^{۱/۲}$ که با رابطهٔ (۲) تعریف می‌شود چنین است

$$f_۲(z) = \sqrt{r_۲}\exp\frac{i\theta_۲}{۲} \qquad (r_۲ > \circ, \circ < \theta_۲ < ۲\pi)$$

که در آن

$$r_۲ = |z+۱| \quad \text{و} \quad \theta_۲ = \arg(z+۱).$$



شکل ۱۲۲

بنابراین حاصلضرب این دو شاخه، شاخهٔ f از $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ است که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = \sqrt{r_۱ r_۲} \exp \frac{i(\theta_۱ + \theta_۲)}{۲} \tag{۴}$$

که در آن

$$r_k > ۰, \qquad ۰ < \theta_k < ۲\pi \qquad (k = ۱, ۲).$$

همان‌طور که در شکل ۱۲۲ نشان داده شده است، شاخهٔ f همه جا در صفحهٔ z بجز روی پرتو $r_۲ \geq ۰$، $\theta_۲ = ۰$، که قسمت $x \geq -۱$ محور x است، تعریف شده است.

شاخهٔ f از $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ را، که با رابطهٔ (۴) داده شده است، می‌توان به تابع زیر توسیع داد

$$F(z) = \sqrt{r_۱ r_۲} \exp \frac{i(\theta_۱ + \theta_۲)}{۲} \tag{۵}$$

که در آن

$$r_k > ۰ \quad ، \quad ۰ \leq \theta_k < ۲\pi \ \ (k = ۱, ۲) \quad \text{و} \quad r_۱ + r_۲ > ۲.$$

همان‌طور که حالا خواهیم دید، این تابع همه جا در حوزهٔ تعریفش، که همهٔ صفحهٔ z بجز پاره‌خط $-۱ \leq x \leq ۱$ محور x است، تحلیلی است.

چون به‌ازای هر z در حوزهٔ تعریف F بجز روی پرتو $r_۱ > ۰$، $\theta_۱ = ۰$ داریم $F(z) = f(z)$، فقط لازم است نشان دهیم که F بر آن نیم‌خط تحلیلی است. برای انجام این کار، حاصلضرب شاخه‌های $(z - ۱)^{۱/۲}$ و $(z + ۱)^{۱/۲}$ را که با رابطهٔ (۱) داده شده‌اند تشکیل می‌دهیم. یعنی تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$G(z) = \sqrt{r_۱ r_۲} \exp \frac{i(\Theta_۱ + \Theta_۲)}{۲},$$

که در آن

$$r_1 = |z - 1|, \quad r_2 = |z + 1|, \quad \Theta_1 = \operatorname{Arg}(z - 1), \quad \Theta_2 = \operatorname{Arg}(z + 1)$$

و

$$r_k > 0, \qquad -\pi < \Theta_k < \pi \qquad (k = 1, 2).$$

ملاحظه کنید که G در تمام صفحهٔ z بجز بر نیم‌خط $r_1 \geq 0$، $\Theta_1 = \pi$ تحلیلی است. حال وقتی نقطهٔ z در بالا یا روی نیم‌خط $r_1 > 0$ و $\Theta_1 = 0$ واقع باشد، $F(z) = G(z)$ زیرا در این‌صورت $\theta_k = \Theta_k$ $(k = 1, 2)$. وقتی z در زیر آن نیم‌خط واقع باشد $\theta_k = \Theta_k + 2\pi$ $(k = 1, 2)$. در نتیجه $\exp(i\theta_k/2) = -\exp(i\Theta_k/2)$ و لذا

$$\exp\frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} = \left(\exp\frac{i\theta_1}{2}\right)\left(\exp\frac{i\theta_2}{2}\right) = \exp\frac{i(\Theta_1 + \Theta_2)}{2}.$$

بنابراین مجدداً، $F(z) = G(z)$. چون در حوزه‌ای شامل نیم‌خط $r_1 > 0$، $\Theta_1 = 0$ داریم $F(z) = G(z)$ و چون $G(z)$ در آن حوزه تحلیلی است پس $F(z)$ در آن حوزه تحلیلی است. بنابراین $F(z)$ همه جا بجز بر پاره‌خط P_2P_1 در شکل ۱۲۲ تحلیلی است.

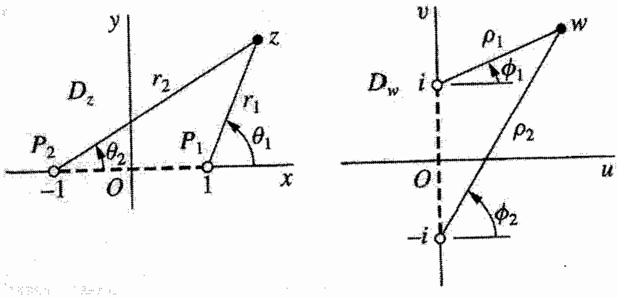
تابع F را که با رابطهٔ (۵) تعریف شده است نمی‌توان به تابعی توسیع داد که در نقاط روی پاره‌خط P_2P_1 تحلیلی باشد، زیرا وقتی نقطهٔ z از روی آن پاره‌خط به پایین می‌آید، مقدار سمت راست رابطهٔ (۵) از $i\sqrt{r_1r_2}$ به اعداد نزدیک به $-i\sqrt{r_1r_2}$ می‌جهد. پس این توسیع حتی در آنجا پیوسته نخواهد بود.

تبدیل $w = F(z)$ همان‌طور که خواهیم دید نگاشتی یک‌به‌یک است از حوزهٔ D_z متشکل از همهٔ نقاط صفحهٔ z بجز نقاط روی پاره‌خط P_2P_1 به روی حوزهٔ D_w متشکل از تمام صفحهٔ w به استثنای پاره‌خط $-1 \leq v \leq 1$ از محور v (شکل ۱۲۳).

قبل از تحقیق درستی این مطلب، توجه می‌کنیم که اگر $z = iy$ $(y > 0)$ آن‌گاه

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \quad \text{و} \quad r_1 = r_2 > 1$$

بنابراین، محور مثبت y تحت $w = F(z)$ به روی قسمتی از محور v نگاشته می‌شود که برای آن $v > 1$. به‌علاوه محور منفی y به روی قسمتی از محور v نگاشته می‌شود که برای آن $v < -1$. هر نقطه در نیمهٔ بالایی $y > 0$ از حوزهٔ D_z، به‌توی نیمهٔ بالایی $v > 0$ از صفحهٔ w نگاشته می‌شود و هر نقطه در نیمهٔ پایینی حوزهٔ D_z، $y < 0$، به‌توی نیمهٔ پایینی صفحهٔ w، $v < 0$،



شکل ۱۲۳

$w = F(z)$

نگاشته می‌شود. پرتو $r_۱ > ۰$، $\theta_۱ = ۰$ به روی محور حقیقی مثبت در صفحهٔ w نگاشته می‌شود و نیم‌خط $r_۲ > ۰$، $\theta_۲ = \pi$ به روی محور حقیقی منفی.

برای اینکه نشان دهیم تبدیل $w = F(z)$ یک‌به‌یک است توجه می‌کنیم که اگر $F(z_۱) = F(z_۲)$ آن‌گاه $z_۱^۲ - ۱ = z_۲^۲ - ۱$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $z_۱ = z_۲$ یا $z_۱ = -z_۲$. مع‌هذا به علت نحوهٔ نگاشته شدن نیمه‌های بالایی و پایینی حوزهٔ D_z و قسمتهای محور حقیقی واقع در D_z توسط F، حالت $z_۱ = -z_۲$ غیرممکن است. بنابراین اگر $F(z_۱) = F(z_۲)$، آن‌گاه $z_۱ = z_۲$ و F یک‌به‌یک است.

می‌توان نشان داد که F حوزهٔ D_z را به روی D_w می‌نگارد، برای این کار تابعی مانند H می‌یابیم که D_w را به‌توی D_z بنگارد، با این ویژگی که اگر $z = H(w)$ آن‌گاه $w = F(z)$. این کار نشان خواهد داد که به‌ازای هر نقطهٔ w در D_w، نقطه‌ای مانند z در D_z هست به قسمی که $F(z) = w$؛ یعنی، نگاشت F پوشاست. نگاشت H وارون F خواهد بود.

برای پیدا کردن H، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر w یک مقدار $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ برای z خاصی باشد، آن‌گاه $w^۲ = z^۲ - ۱$ و بنابراین z مقداری از $(w^۲ + ۱)^{۱/۲}$ برای آن w است. تابع H شاخه‌یی از تابع دومقداری زیر است

$$(w^۲ + ۱)^{۱/۲} = (w - i)^{۱/۲}(w + i)^{۱/۲} \qquad (w \neq \pm i).$$

به پیروی از روشی که برای به‌دست آوردن تابع $F(z)$ به‌کار بردیم، می‌نویسیم $w - i = \rho_۱ \exp(i\phi_۱)$ و $w + i = \rho_۲ \exp(i\phi_۲)$. (شکل ۱۲۳ را ببینید.) سپس با محدودیتهای

$$\rho_k > ۰ \quad ، \quad \frac{-\pi}{۲} \leq \phi_k < \frac{۳\pi}{۲} \quad (k = ۱, ۲) \quad \text{و} \quad \rho_۱ + \rho_۲ > ۲$$

می‌نویسیم

$$H(w) = \sqrt{\rho_1\rho_2}\exp\frac{i(\phi_1+\phi_2)}{2} \qquad (6)$$

حوزهٔ تعریف، D_w است. تبدیل $z = H(w)$ نقاط D_w واقع در بالا یا پایین محور u را، به ترتیب، به روی نقاط بالایی یا پایینی محور x می‌نگارد. این تبدیل محور u مثبت را به‌توی قسمتی از محور x که $x > 1$، و محور u منفی را به‌توی قسمتی از محور x منفی که $x < -1$ می‌نگارد. اگر $z = H(w)$، آن‌گاه $z^2 = w^2 + 1$ و بنابراین $w^2 = z^2 - 1$. چون z در D_z است و چون $F(z)$ و $-F(z)$ دو مقدار $(z^2-1)^{1/2}$ به‌ازای نقطه‌ای در D_z هستند می‌بینیم که $w = F(z)$ یا $w = -F(z)$. اما از نحوه‌ای که F و H نیمه‌های بالایی و پایینی حوزه‌های تعریفشان را، به انضمام قسمتهایی از محورهای حقیقی که در این حوزه‌ها واقع‌اند، می‌نگارند، بدیهی است که $w = F(z)$.

نگاشت به‌وسیلهٔ شاخه‌های توابع دومقداری

$$w = (z^2 + Az + B)^{1/2} = [(z-z_0)^2 - z_1^2]^{1/2} \qquad (z_1 \neq 0) \qquad (7)$$

را، که در آن $A = -2z_0$ و $B = z_0^2 - z_1^2$، می‌توان به کمک نتایج حاصل برای تابع F در مثال ۲ و تبدیلهای متوالی زیر بررسی کرد

$$Z = \frac{z-z_0}{z_1}, \qquad W = (Z^2-1)^{1/2}, \qquad w = z_1 W. \qquad (8)$$

تمرینها

۱. شاخهٔ F از $(z^2-1)^{1/2}$ در مثال ۲ بخش ۹۱ برحسب مختصات r_1، r_2، θ_1، θ_2 تعریف شد. به‌طور هندسی توضیح دهید چرا شرایط $r_1 > 0$، $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ ربع $x > 0$، $y > 0$ از صفحهٔ z را توصیف می‌کند. سپس نشان دهید که تبدیل $w = F(z)$ آن ربع را به روی ربع $u > 0$، $v > 0$ از صفحهٔ w می‌نگارد.

راهنمایی: برای آنکه نشان دهید ربع $x > 0$، $y > 0$ در صفحهٔ z توصیف می‌شود، توجه کنید که در هر نقطه روی محور y مثبت $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ و وقتی z در امتداد پرتو $\theta_2 = c$ $(0 < c < \pi/2)$ به طرف راست حرکت کند، $\theta_1 + \theta_2$ کاهش می‌یابد.

۲. برای تبدیل $w = F(z)$ از ربع اول صفحهٔ z به روی ربع اول صفحهٔ w (تمرین ۱) نشان دهید که

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - x^2 + y^2 + 1} \quad \text{و} \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 + x^2 - y^2 - 1}$$

که در آن

$$r_1^2 r_2^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2,$$

و نشان دهید که تصویر قسمتی از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ که در ربع اول است پرتو $v = u$ $(u > 0)$ است.

۳. نشان دهید که در تمرین ۲، حوزهٔ D که زیر هذلولی و در ربع اول صفحهٔ z واقع است با شرایط $r_1 > 0$، $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ توصیف می‌شود. سپس نشان دهید که تصویر D، هشت‌ـیک $0 < v < u$ است. شکل حوزهٔ D و تصویر آن را بکشید.

۴. فرض کنید F شاخه‌یی از $(z^2 - 1)^{1/2}$ باشد که در مثال ۲ بخش ۹۱ تعریف شد و فرض کنید $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ نقطهٔ ثابتی باشد، که در آن $r_0 > 0$ و $0 \le \theta_0 < 2\pi$. نشان دهید که شاخه‌یی از $(z^2 - z_0^2)^{1/2}$ مانند F_0 هست که بریدگی شاخه‌یی آن پاره‌خط بین نقاط z_0 و $-z_0$ است و می‌توان آن را به‌صورت $F_0(z) = z_0 F(Z)$ نوشت که $Z = z/z_0$.

۵. بنویسید $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ و $z + 1 = r_2 \exp(i\Theta_2)$، که در آن

$$-\pi < \Theta_2 < \pi \quad \text{و} \quad 0 < \theta_1 < 2\pi$$

و سپس شاخه‌یی از تابع

$$\text{(الف)} \quad (z^2 - 1)^{1/2}؛ \quad \text{(ب)} \quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$$

را تعریف کنید. در هر حالت بریدگی شاخه‌یی باید متشکل از دو پرتو $\theta_1 = 0$ و $\Theta_2 = \pi$ باشد.

۶. با استفاده از نماد بخش ۹۱ نشان دهید که تابع

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \frac{i(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

یک شاخه با همان حوزهٔ تعریف D_z و همان بریدگی شاخه‌یی مربوط به $w = F(z)$ آن بخش است. نشان دهید که این تبدیل، D_z را به روی نیم‌صفحهٔ سمت راست $\rho > 0$، $-\pi/2 < \phi < \pi/2$

می‌نگارد، که در آن $w = ۱$ تصویر نقطهٔ $z = \infty$ است. همچنین نشان دهید که تبدیل وارون عبارت است از

$$z = \frac{۱ + w^۲}{۱ - w^۲} \qquad (\mathrm{Re}\, w > ۰)\,.$$

(با تمرین ۷ بخش ۹۰ مقایسه کنید.)

۷. نشان دهید که تبدیل تمرین ۶ ناحیهٔ خارجی دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z را به روی ناحیه‌ای در ربع اول صفحهٔ w می‌نگارد که بین خط $u = v$ و محور u واقع است. شکل دو ناحیه را بکشید.

۸. بنویسید $z = r\exp(i\Theta)$، $z - ۱ = r_۱ \exp(i\Theta_۱)$ و $z + ۱ = r_۲ \exp(i\Theta_۲)$، که در آنها مقادیر هر سه آوند بین $-\pi$ و π است. سپس شاخه‌یی از تابع $[z(z^۲ - ۱)]^{۱/۲}$ را تعریف کنید که بریدگی شاخه‌یی آن متشکل از دو قطعهٔ $x \leq -۱$ و $۰ \leq x \leq ۱$، از محور x باشد.

۹۲. سطوح ریمان

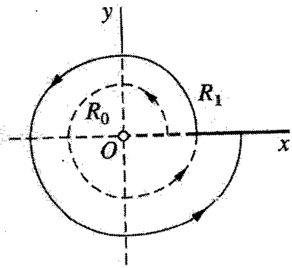
دو بخش پایانی این فصل، آشنایی مختصری با مفهوم نگاشتی است که روی یک سطح ریمان، که تعمیمی از صفحهٔ مختلط با بیش از یک لایه است، تعریف شده است. این نظریه متکی بر این واقعیت است که به هر نقطه روی چنین سطحی فقط یک مقدار از تابع چندمقداری مفروض نسبت داده می‌شود. از مطالب این دو بخش در فصلهای بعد استفاده نمی‌شود و خواننده می‌تواند بدون هیچ نگرانی به فصل ۹ برود.

به مجرد اینکه چنین سطحی برای یک تابع مفروض طرحریزی شد، تابع بر این سطح تک‌مقداری است و نظریهٔ توابع تک‌مقداری در مورد آن به‌کار برده می‌شود. بدین‌ترتیب مشکلات ناشی از چندمقداری‌بودن تابع به‌وسیلهٔ یک طرح هندسی آسان می‌شود. با وجود این، تعبیر آن سطوح و ترتیب ارتباطهای مناسب بین لایه‌ها ممکن است کاملاً پیچیده شود. توجه خود را به چند مثال نسبتاً ساده محدود می‌کنیم و ابتدا با سطحی برای $\log z$ شروع می‌کنیم.

مثال ۱. متناظر با هر عدد ناصفر z، تابع چندمقداری

$$\log z = \ln r + i\theta \tag{۱}$$

دارای بی‌نهایت مقدار است. به‌منظور بیان $\log z$ به‌صورت تابعی تک‌مقداری، صفحهٔ z بدون مبدأ را با سطحی جایگزین می‌کنیم که هرگاه آوند عدد z به اندازهٔ ۲π، یا مضرب صحیحی از ۲π، افزایش یا کاهش یابد آن‌گاه نقطهٔ جدیدی روی آن سطح مشخص شود.

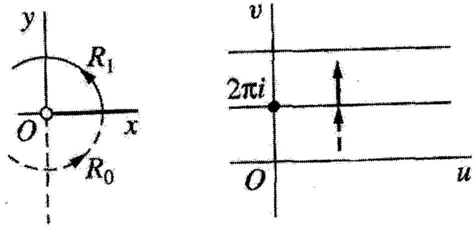


شکل ۱۲۴

صفحهٔ z را با مبدأ محذوف به‌عنوان یک لایهٔ نازک $R_۰$ در نظر می‌گیریم که در امتداد نیمهٔ مثبت محور حقیقی بریده شده است. فرض کنید θ بر این سطح از صفر تا ۲π تغییر کند. فرض کنید لایهٔ دومی مانند $R_۱$ به همین روش بریده شده و در مقابل لایهٔ $R_۰$ قرارگرفته باشد. سپس لبهٔ پایینی شکاف $R_۰$ به لبهٔ بالایی شکاف $R_۱$ وصل شده باشد. زاویهٔ θ بر $R_۱$ از ۲π تا ۴π تغییر می‌کند، لذا وقتی z به‌وسیلهٔ نقطه‌ای روی $R_۱$ معرفی می‌شود، مؤلفهٔ موهومی $\log z$ از ۲π تا ۴π تغییر می‌کند.

سپس لایهٔ $R_۲$ به همین روش بریده شده و در مقابل $R_۱$ قرارگرفته است و لبهٔ پایینی شکاف $R_۱$ به لبهٔ بالایی شکاف این لایهٔ جدید وصل شده است و همین‌طور برای لایه‌های $R_۳$، $R_۴$، ... . لایهٔ $R_{-۱}$ که θ بر آن از صفر تا -۲π تغییر می‌کند بریده شده و در پشت سر $R_۰$ قرارگرفته است، لبهٔ پایینی شکافش متصل به لبهٔ بالایی شکاف $R_۰$ است؛ لایه‌های $R_{-۲}$، $R_{-۳}$، ... به‌نحوی مشابه ساخته می‌شوند. مختصات r و θ هر نقطه روی هر لایه را می‌توان به‌عنوان مختصات قطبی تصویر آن نقطه روی صفحهٔ z اولیه در نظر گرفت، مختص زاویه‌یی θ، بر هر لایه، به یک برد معین ۲π رادیان محدود می‌شود.

منحنی پیوستهٔ دلخواهی روی این سطح همبند، که از تعدادی نامتناهی لایه تشکیل شده، در نظر می‌گیریم. وقتی نقطهٔ z این منحنی را بپیماید، مقادیر $\log z$ به‌طور پیوسته تغییر می‌کند زیرا θ، علاوه بر r، حالا به‌طور پیوسته تغییر می‌کند؛ و $\log z$ متناظر با هر نقطه روی منحنی درست یک مقدار اختیار می‌کند. مثلاً، وقتی نقطه روی لایهٔ $R_۰$ بر مسیری که در شکل ۱۲۴ نشان داده شده است یک دور کامل حول مبدأ بچرخد، زاویه از صفر تا ۲π تغییر می‌کند. وقتی این نقطه از خط $\theta = ۲\pi$ بگذرد، به لایهٔ $R_۱$ سطح می‌رود. وقتی نقطه یک دور کامل در $R_۱$ بچرخد، زاویهٔ θ از ۲π تا ۴π تغییر می‌کند و وقتی نقطهٔ مزبور از خط $\theta = ۴\pi$ بگذرد، به لایهٔ $R_۲$ می‌رود.



شکل ۱۲۵

سطحی را که در اینجا توصیف کردیم یک سطح ریمان برای $\log z$ است. این سطح، سطحی است همبند و متشکل از تعدادی نامتناهی لایه که به قسمی مرتب شده‌اند که $\log z$ تابعی تک‌مقداری از نقاط روی آن است.

تبدیل $w = \log z$ کل سطح ریمان را به روشی یک‌به‌یک به روی تمام صفحهٔ w می‌نگارد. تصویر لایهٔ $R_۰$ عبارت است از نوار $۰ \leq v \leq ۲\pi$ (مثال ۳ بخش ۸۸ را ببینید). وقتی نقطهٔ z بر قوسی که در شکل ۱۲۵ نشان داده شده به روی لایهٔ $R_۱$ رود، همچنان‌که در شکل نشان داده شده، تصویرش، w، از خط $v = ۲\pi$ رو به بالا می‌رود.

توجه کنید که $\log z$ که بر لایهٔ $R_۱$ تعریف شد، ادامهٔ تحلیلی (بخش ۲۶) تابع تحلیلی تک‌مقداری

$$f(z) = \ln r + i\theta \qquad (۰ < \theta < ۲\pi)$$

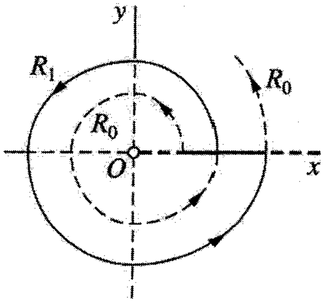
را از روی محور حقیقی مثبت به طرف بالا نمایش می‌دهد. با این مفهوم، $\log z$ نه فقط تابع تک‌مقداری از همهٔ نقاط z بر سطح ریمان است بلکه تابعی تحلیلی در همهٔ نقاط آن سطح نیز هست.

البته، می‌توانستیم این سطوح را در امتداد محور حقیقی منفی، یا در امتداد هر نیم‌خط دیگری که از مبدأ شروع شود، ببریم و به‌طور مناسبی در امتداد شکافها به هم وصل کنیم تا سطح ریمان دیگری برای $\log z$ تشکیل دهند.

مثال ۲. متناظر با هر نقطهٔ صفحهٔ z غیر از مبدأ، تابع

$$z^{۱/۲} = \sqrt{r}e^{i\theta/۲} \qquad (۲)$$

دارای دو مقدار است. یک سطح ریمان برای $z^{۱/۲}$ با قرار دادن سطحی متشکل از دو لایهٔ $R_۰$ و $R_۱$ به‌جای صفحهٔ z به‌دست می‌آید. هر لایه در امتداد محور حقیقی مثبت بریده شده و $R_۱$ در



شکل ۱۲۶

مقابل R_0 قرارگرفته است. لبهٔ پایینی شکاف R_0 به لبهٔ بالایی شکاف R_1 وصل شده است و لبهٔ پایینی شکاف R_1 به لبهٔ بالایی شکاف R_0.

وقتی نقطهٔ z از لبهٔ بالایی شکاف R_0 شروع کند و مدار پیوسته‌ای حول مبدأ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت را بپیماید (شکل ۱۲۶)، زاویهٔ θ از ۰ تا 2π افزایش می‌یابد. سپس نقطه از لایهٔ R_0 به لایهٔ R_1 می‌رود، که در آن θ از 2π تا 4π افزایش می‌یابد. وقتی نقطه از این هم بیشتر حرکت کند به لایهٔ R_0 برمی‌گردد، که در آن مقادیر θ می‌توانند از 4π تا 6π یا از ۰ تا 2π تغییر کنند، انتخابی که روی مقدار $z^{1/2}$ اثر ندارد، و غیره. توجه کنید مقدار $z^{1/2}$ در نقطه‌ای که مدار از لایهٔ R_0 به لایهٔ R_1 می‌رود غیر از مقدار $z^{1/2}$ در نقطه‌ای است که مدار از لایهٔ R_1 به لایهٔ R_0 می‌رود.

بدین‌ترتیب، یک سطح ریمان ساخته‌ایم که به‌ازای هر z ناصفر $z^{1/2}$ بر آن تک‌مقداری است. در این ساختمان، لبه‌های لایه‌های R_0 و R_1 به قسمی دو به دو به هم وصل شده‌اند که سطح حاصل بسته و همبند است. نقاطی که در آنها دو لبه به هم وصل می‌شوند متمایز از نقاطی هستند که در آنها دو لبهٔ دیگر به هم وصل می‌شوند. بنابراین از نظر فیزیکی ساختن مدلی برای این سطح ریمان غیرممکن است. برای تصور سطح ریمان، مهم این است که بفهمیم در موقع رسیدن به یک لبهٔ شکاف چگونه باید عمل کنیم.

مبدأ، نقطهٔ خاصی روی این سطح ریمان است که بین دو لایه مشترک بوده و هر منحنی حول مبدأ روی این سطح باید دو بار حول آن بچرخد تا منحنی بسته‌ای شود. نقطه‌ای از این نوع روی یک سطح ریمان را نقطهٔ شاخه‌یی می‌نامند.

تصویر لایهٔ R_0 تحت تبدیل $w = z^{1/2}$ عبارت از نیمهٔ بالایی صفحهٔ w است زیرا آوند w روی R_0 برابر با $\theta/2$ است، که در آن $0 \leq \theta/2 \leq \pi$. همین‌طور، تصویر لایهٔ R_1، نیمهٔ پایینی

صفحهٔ w است. این تابع را به‌صورتی که بر هر یک از لایه‌ها تعریف شد، می‌توان ادامهٔ تحلیلی تابع تعریف شده روی لایهٔ دیگر از روی بریدگی دانست. از این نظر، تابع تک‌مقداری $z^{1/2}$ از نقاط روی سطح ریمان، در همهٔ نقاط بجز مبدأ، تحلیلی است.

تمرینها

۱. سطح ریمان برای $\log z$ را که با بریدن صفحهٔ z در امتداد محور حقیقی منفی حاصل می‌شود توصیف نمایید. این سطح ریمان برای $\log z$ را با سطحی که در مثال ۱ بخش ۹۲ به‌دست آمد مقایسه کنید.

۲. تصویر لایهٔ R_n، وقتی n یک عدد صحیح دلخواه است، از سطح ریمان برای $\log z$ را که در مثال ۱ بخش ۹۲ داده شد، تحت تبدیل $w = \log z$ معین کنید.

۳. تحقیق کنید که تحت تبدیل $w = z^{1/2}$، لایهٔ R_1 سطح ریمان برای $z^{1/2}$ که در مثال ۲ بخش ۹۲ داده شد، به روی نیمهٔ پایینی صفحهٔ w نگاشته می‌شود.

۴. منحنیی، بر یک سطح ریمان برای $z^{1/2}$، تعریف کنید که تصویرش تحت تبدیل $w = z^{1/2}$ تمام دایرهٔ $|w| = 1$ باشد.

۵. فرض کنید C معرف دایرهٔ $|z-2| = 1$ در جهت مثبت بر سطح ریمانی باشد که در مثال ۲ بخش ۹۲ برای $z^{1/2}$ توصیف شد، به‌طوری که نیمهٔ بالایی این دایره در لایهٔ R_0 و نیمهٔ پایینی آن در R_1 واقع است. توجه کنید که برای هر نقطهٔ z بر C می‌توان نوشت

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad \text{که در آن} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < 4\pi + \frac{\pi}{2}.$$

بیان کنید چرا نتیجه می‌شود که

$$\int_C z^{1/2} dz = 0$$

این نتیجه را تعمیم دهید تا برای منحنیهای سادهٔ بستهٔ دیگری که از لایه‌ای به لایهٔ دیگر می‌گذرند، بدون اینکه نقاط شاخه‌یی را در برگیرند، مناسب گردد. با تعمیم آن به توابع دیگر، قضیهٔ کوشی‌ـگورسا را به انتگرالهای توابع چندمقداری گسترش دهید.

۹۳. سطوحی برای توابع مرکب

در اینجا سطوح ریمان برای دو تابع مرکب را در نظر می‌گیریم که در آنها چندجمله‌ییهای ساده و تابع جذر (ریشهٔ دوم) مطرح‌اند.

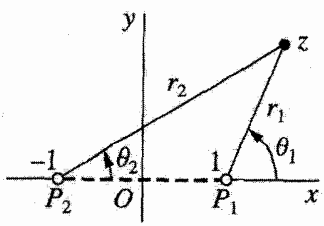
مثال ۱. حال به توصیف یک سطح ریمان برای تابع دومقداری

$$f(z) = (z^۲ - ۱)^{۱/۲} = \sqrt{r_۱ r_۲} \exp \frac{i(\theta_۱ + \theta_۲)}{۲} \qquad (۱)$$

می‌پردازیم، که در آن $z - ۱ = r_۱ \exp(i\theta_۱)$، $z + ۱ = r_۲ \exp(i\theta_۲)$. یک شاخهٔ این تابع با پاره‌خط $P_۱P_۲$ بین نقاط شاخه‌یی $z = \pm ۱$ به‌عنوان یک بریدگی شاخه‌یی (شکل ۱۲۷) در مثال ۲ بخش ۹۱ توصیف شد. آن شاخه به‌صورت نوشته شدهٔ فوق با محدودیتهای $r_k > ۰$، $۰ \le \theta_k < ۲\pi$ $(k = ۱, ۲)$ و $r_۱ + r_۲ > ۲$ بود. این شاخه روی قطعهٔ $P_۱P_۲$ تعریف نشده است.

یک سطح ریمان برای تابع دومقداری (۱) باید متشکل از دو لایهٔ $R_۰$ و $R_۱$ باشد. فرض کنید هر دو لایه در امتداد قطعهٔ $P_۱P_۲$ بریده شده باشند. در این‌صورت لبهٔ پایینی شکاف $R_۰$ به لبهٔ بالایی شکاف $R_۱$ وصل می‌شود و لبهٔ پایینی $R_۱$ به لبهٔ بالایی $R_۰$.

فرض کنید زوایای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ بر لایهٔ $R_۰$ از ۰ تا ۲π تغییر کنند. اگر نقطه‌ای بر لایهٔ $R_۰$ یک منحنی سادهٔ بسته را که قطعهٔ $P_۱P_۲$ را در بر گرفته در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت یک دور بپیماید، آن‌گاه با برگشتن نقطه به وضعیت اولیه‌اش، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ هر دو به اندازهٔ ۲π تغییر می‌کنند. تغییر $(\theta_۱ + \theta_۲)/۲$ نیز ۲π است و مقدار f تغییر نمی‌کند. اگر نقطه‌ای از روی لایهٔ $R_۰$ شروع کند و مسیری را بپیماید که فقط حول نقطهٔ شاخه‌یی $z = ۱$ دو دور می‌چرخد، از لایهٔ $R_۰$ به لایهٔ $R_۱$ می‌رود و سپس قبل از اینکه به وضعیت اولیه‌اش برگردد به لایهٔ $R_۰$ باز می‌گردد. در این حالت مقدار $\theta_۱$ به اندازهٔ ۴π تغییر می‌کند در حالی که مقدار $\theta_۲$ ابداً تغییر نمی‌نماید. همین‌طور، برای مداری که دو بار حول نقطهٔ $z = -۱$ می‌چرخد، مقدار $\theta_۲$ به اندازهٔ ۴π تغییر می‌کند، در حالی که مقدار $\theta_۱$ بدون تغییر باقی می‌ماند. مجدداً تغییر $(\theta_۱ + \theta_۲)/۲$ نیز ۲π است و مقدار f تغییر نمی‌کند. بدین‌ترتیب، روی لایهٔ $R_۰$ می‌توان برد $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را گسترش داد،



شکل ۱۲۷

بدین‌صورت که θ_1 و θ_2 هر دو به اندازهٔ یک مضرب صحیح 2π تغییر کنند یا فقط یکی از زوایا به اندازهٔ یک مضرب صحیح 4π تغییر کند. در هر حالت تغییر کلی دو زاویه مضرب زوجی از 2π است.

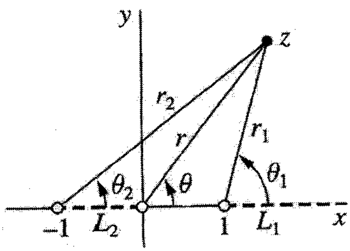
برای به‌دست آوردن برد مقادیر θ_1 و θ_2 روی لایهٔ R_1، توجه می‌کنیم که اگر نقطه‌ای از روی لایهٔ R_0 شروع به حرکت کند و مسیری را بپیماید که فقط حول یکی از نقاط شاخه‌یی یک دور چرخیده است، نقطه به لایهٔ R_1 می‌رود و به لایهٔ R_0 برنمی‌گردد. در این حالت مقدار یکی از زوایا به اندازهٔ 2π تغییر می‌کند در حالی که مقدار دیگری بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین، بر لایهٔ R_1 یک زاویه می‌تواند از 2π تا 4π تغییر کند در حالی که زاویهٔ دیگر از 0 تا 2π تغییر می‌کند. در این‌صورت مجموع این دو زاویه از 2π تا 4π تغییر می‌کند و مقدار $(\theta_1 + \theta_2)/2$، که آوند $f(z)$ است، از π تا 2π تغییر می‌کند. مجدداً با تغییر درست یکی از زوایا به اندازهٔ مضرب صحیحی از 4π یا با تغییر مقدار هر دو زاویه به اندازهٔ یک مضرب صحیح 2π، برد زوایا گسترش می‌یابد.

حال می‌توان تابع دومقداریی را که با رابطهٔ (۱) تعریف شده است به‌عنوان تابعی تک‌مقداری از نقاط روی سطح ریمان، که اینک ساختیم، در نظر گرفت. تبدیل $w = f(z)$ هر یک از لایه‌هایی را که در ساختن این سطح ریمان به‌کار رفته است به روی تمام صفحهٔ w می‌نگارد.

مثال ۲. تابع دومقداری

$$f(z) = [z(z^2 - 1)]^{1/2} = \sqrt{r r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta + \theta_1 + \theta_2)}{2} \tag{2}$$

را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲۸). نقاط $z = 0, \pm 1$، نقاط شاخه‌یی این تابع‌اند. توجه داریم که اگر نقطهٔ z مداری را بپیماید که هر سهٔ این نقاط را در برگرفته است، آوند $f(z)$، به اندازهٔ زاویهٔ 3π تغییر می‌کند و بدین‌ترتیب مقدار تابع تغییر می‌کند. در نتیجه، برای توصیف یک شاخهٔ تک‌مقداری



شکل ۱۲۸

f، لازم است یک بریدگی شاخه‌یی از یکی از این نقاط شاخه‌یی تا نقطه در بی‌نهایت ادامه یابد. بنابراین نقطه در بی‌نهایت نیز یک نقطهٔ شاخه‌یی است، همچنان‌که می‌توان این مطلب را با توجه به اینکه تابع $f(۱/z)$ دارای نقطه‌ای شاخه‌یی در $z = ۰$ است نشان داد.

حال فرض کنید دو لایه در امتداد پاره‌خط $L_۲$ از $z = -۱$ تا $z = ۰$ و در امتداد قسمت $L_۱$ از محور حقیقی که در سمت راست نقطهٔ $z = ۱$ واقع است بریده شده باشند. این را تصریح می‌کنیم که هر یک از سه زاویهٔ θ، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ می‌تواند بر لایهٔ $R_۰$ از ۰ تا ۲π و بر لایهٔ $R_۱$ از ۲π تا ۴π تغییر کند. این را نیز تصریح می‌کنیم که زوایای متناظر با نقطه‌ای بر هر یک از لایه‌ها می‌توانند با مضرب صحیحی از ۲π تغییر کنند به قسمی که مجموع سه زاویه به اندازهٔ مضرب صحیحی از ۴π تغییر نماید، بنابراین مقدار تابع f تغییر نمی‌کند.

یک سطح ریمان برای تابع دومقداری (۲) بدین‌شکل به‌دست می‌آید که لبه‌های پایینی شکافها در امتداد $L_۱$ و $L_۲$ را که در $R_۰$ واقع‌اند به ترتیب به لبه‌های بالایی شکافها در امتداد $L_۱$ و $L_۲$ که در $R_۱$ واقع‌اند وصل کنیم. در این‌صورت لبه‌های پایینی شکافها در امتداد $L_۱$ و $L_۲$ که در $R_۱$ واقع‌اند به ترتیب به لبه‌های بالایی شکافها در امتداد $L_۱$ و $L_۲$ که در $R_۰$ واقع‌اند وصل می‌شوند. به کمک شکل ۱۲۸ به‌سهولت تحقیق می‌شود که یک شاخهٔ تابع به‌وسیلهٔ مقادیرش در نقاط روی $R_۰$ نمایش داده می‌شود و شاخهٔ دیگر به‌وسیلهٔ مقادیرش در نقاط روی $R_۱$.

تمرینها

۱. یک سطح ریمان برای تابع سه‌مقداری $w = (z - ۱)^{۱/۳}$ توصیف نمایید و بگویید که کدام ثلث صفحهٔ w نمایش تصویر هر یک از لایه‌های این سطح است.

۲. متناظر با هر نقطه بر سطح ریمانی که در مثال ۲ بخش ۹۳ برای تابع $w = f(z)$ آن مثال توصیف شد، فقط یک مقدار w موجود است. نشان دهید که در حالت کلی، متناظر با هر مقدار w، سه نقطه روی سطح موجودند.

۳. یک سطح ریمان برای تابع چندمقداری زیر توصیف نمایید

$$f(z) = \left(\frac{z-۱}{z}\right)^{۱/۲}.$$

۴. توجه کنید سطح ریمانی که در مثال ۱، بخش ۹۳، برای $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ توصیف شد سطح ریمانی برای تابع زیر نیز هست

$$g(z) = z + (z^۲ - ۱)^{۱/۲}$$

فرض کنید $f_۰$ معرف شاخه‌یی از $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ باشد که بر لایهٔ $R_۰$ تعریف شده است و نشان دهید که شاخه‌های $g_۰$ و $g_۱$ تابع g بر این دو لایه با روابط زیر تعریف می‌شوند

$$g_۰(z) = \frac{۱}{g_۱(z)} = z + f_۰(z) .$$

۵. در تمرین ۴، شاخهٔ $f_۰$ تابع $(z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ را می‌توان با رابطهٔ زیر توصیف کرد

$$f_۰(z) = \sqrt{r_۱ r_۲}\left(\exp\frac{i\theta_۱}{۲}\right)\left(\exp\frac{i\theta_۲}{۲}\right),$$

که در آن $\theta_۱$ و $\theta_۲$ از ۰ تا ۲π تغییر می‌کنند و

$$z - ۱ = r_۱ \exp(i\theta_۱), \qquad z + ۱ = r_۲ \exp(i\theta_۲) .$$

توجه کنید که $۲z = r_۱ \exp(i\theta_۱) + r_۲ \exp(i\theta_۲)$ و نشان دهید که شاخهٔ $g_۰$ تابع $g(z) = z + (z^۲ - ۱)^{۱/۲}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$g_۰(z) = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{r_۱}\exp\frac{i\theta_۱}{۲} + \sqrt{r_۲}\exp\frac{i\theta_۲}{۲}\right)^۲ .$$

با پیدا کردن $g_۰(z)\overline{g_۰(z)}$ و توجه به اینکه به‌ازای هر z، $r_۱ + r_۲ \geq ۲$ و $\cos[(\theta_۱ - \theta_۲)/۲] \geq ۰$، ثابت کنید که $|g_۰(z)| \geq ۱$. سپس نشان دهید که تبدیل $w = z + (z^۲ - ۱)^{۱/۲}$، لایهٔ $R_۰$ سطح ریمان را به روی ناحیهٔ $|w| \geq ۱$، لایهٔ $R_۱$ را به روی ناحیهٔ $|w| \leq ۱$، و بریدگی شاخه‌یی بین نقاط $z = \pm ۱$ را به روی دایرهٔ $|w| = ۱$ می‌نگارد. توجه کنید که تبدیلی که در اینجا به‌کار بردیم وارون تبدیل زیر است

$$z = \frac{۱}{۲}\left(w + \frac{۱}{w}\right) .$$

۹

نگاشت همدیس

در این فصل به معرفی و شرح و بسط مفهوم نگاشت همدیس با تأکید بر رابطهٔ بین این قبیل نگاشتها و توابع همساز می‌پردازیم. کاربردهای آن در مسائل فیزیکی در فصل بعد خواهند آمد.

۹۴. حفظ زوایا

فرض کنید C قوسی هموار باشد (بخش ۳۸) که با رابطهٔ

$$z = z(t) \ (a \leq t \leq b)$$

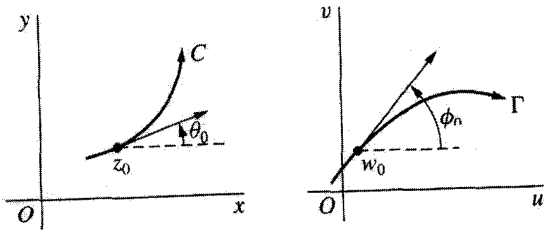
نمایش داده شده و $f(z)$ تابعی باشد که در همهٔ نقاط روی C تعریف شده است. رابطهٔ

$$w = f[z(t)] \ (a \leq t \leq b)$$

یک نمایش پارامتری برای Γ تصویر C تحت تبدیل $w = f(z)$ است.

فرض کنید C از نقطهٔ $z_0 = z(t_0)$ $(a < t_0 < b)$ بگذرد که f در آن تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$. بنابر قاعدهٔ زنجیری که در تمرین ۵ بخش ۳۸ ارائه شد اگر $w(t) = f[z(t)]$، آن‌گاه

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]z'(t_0); \tag{۱}$$



شکل ۱۲۹

$$\phi_{\circ} = \psi_{\circ} + \theta_{\circ}$$

و در نتیجه (بخش ۷ را ببینید)

$$\arg w'(t_{\circ}) = \arg f'[z(t_{\circ})] + \arg z'(t_{\circ})\,. \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) در ارتباط دادن جهتهای C و Γ، به ترتیب، در نقاط $z_{\circ}$ و $w_{\circ} = f(z_{\circ})$ مفید است.

به عبارت صریحتر، فرض کنید $\psi_{\circ}$ نمایش مقداری از $\arg f'(z_{\circ})$ باشد و $\theta_{\circ}$ زاویهٔ شیب خط جهت‌داری مماس بر C در نقطهٔ $z_{\circ}$ (شکل ۱۲۹). بنابر بخش ۳۸، $\theta_{\circ}$ مقداری از $\arg z'(t_{\circ})$ است و در نتیجه بنابر رابطهٔ (۲) کمیت

$$\phi_{\circ} = \psi_{\circ} + \theta_{\circ}$$

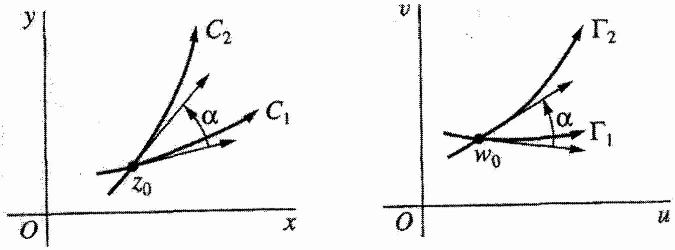
یک مقدار از $\arg w'(t_{\circ})$ و بنابراین زاویهٔ شیب یک خط مماس جهت‌دار بر Γ در نقطهٔ $w_{\circ} = f(z_{\circ})$ است. در نتیجه زاویهٔ شیب یک خط جهت‌دار در $w_{\circ}$ اختلافش با زاویهٔ شیب یک خط جهت‌دار در $z_{\circ}$ به اندازهٔ زاویهٔ دوران زیر است

$$\psi_{\circ} = \arg f'(z_{\circ})\,. \qquad (۳)$$

حال فرض کنید $C_{۱}$ و $C_{۲}$ دو قوس هموار مار بر $z_{\circ}$ باشند و $\theta_{۱}$ و $\theta_{۲}$، به ترتیب، زوایای شیب خطوط مماس جهت‌دار بر $C_{۱}$ و $C_{۲}$ در $z_{\circ}$ باشند. پس بنابر پاراگراف قبل، کمیتهای

$$\phi_{۱} = \psi_{\circ} + \theta_{۱} \quad \text{و} \quad \phi_{۲} = \psi_{\circ} + \theta_{۲}$$

به ترتیب، زوایای شیب خطوط مماس جهت‌دار بر منحنیهای تصویر، $\Gamma_{۱}$ و $\Gamma_{۲}$، در نقطهٔ $w_{\circ} = f(z_{\circ})$ هستند. بدین ترتیب $\phi_{۲} - \phi_{۱} = \theta_{۲} - \theta_{۱}$؛ یعنی زاویهٔ $\phi_{۲} - \phi_{۱}$ از $\Gamma_{۱}$ به $\Gamma_{۲}$



شکل ۱۳۰

از نظر اندازه و جهت همان زاویهٔ $\theta_۲ - \theta_۱$ از $C_۱$ به $C_۲$ است. این زوایا را در شکل ۱۳۰ با α نشان داده‌ایم.

به دلیل این ویژگی حفظ زاویه، گویند تبدیل $w = f(z)$ در نقطهٔ $z_۰$ همدیس است اگر f در آن نقطه تحلیلی باشد و $f'(z_۰) \neq ۰$. چنین تبدیلی عملاً در هر نقطه از یک همسایگی $z_۰$ همدیس است، زیرا f باید در یک همسایگی $z_۰$ تحلیلی باشد (بخش ۲۳) و چون f' در $z_۰$ پیوسته است (بخش ۴۸) در نتیجه بنابر قضیهٔ ۲بخش ۱۷ همسایگیی از آن نقطه نیز موجود است که در سراسر آن $f'(z) \neq ۰$.

تبدیلی مانند $w = f(z)$ را که در حوزه‌ای مانند D تعریف شده است تبدیل همدیس یا نگاشت همدیس می‌نامیم هرگاه در هر نقطهٔ D همدیس باشد. یعنی، نگاشت در D همدیس است هرگاه f در D تحلیلی باشد و مشتق آن f' هیچ صفری در آنجا نداشته باشد. هر یک از توابع مقدماتی را که در فصل ۳ بررسی شد می‌توان برای تعریف تبدیلی که در یک حوزه همدیس باشد به‌کار برد.

مثال ۱. نگاشت $w = e^z$ در تمام صفحهٔ z همدیس است زیرا به‌ازای هر z داریم $(e^z)' = e^z \neq ۰$. دو خط $x = c_۱$ و $y = c_۲$ در صفحهٔ z را در نظر می‌گیریم که جهت اولی به بالا و جهت دومی به طرف راست باشد. بنابر بخش ۱۳ تصاویر آنها تحت $w = e^z$، به ترتیب عبارت‌اند از دایره‌یی به مرکز مبدأ در جهت مثبت و نیم‌خطی از مبدأ. همان‌طور که در شکل ۲۰ (بخش ۱۳) نشان داده شده است، زاویهٔ بین خطوط در نقطهٔ تقاطع آنها زاویه‌یی قائمه در جهت منفی است و همین مطلب در مورد زاویهٔ بین دایره و نیم‌خط در نقطهٔ نظیر در صفحهٔ w صادق است. همدیسی نگاشت $w = e^z$ در شکلهای ۷ و ۸ پیوست ۲ نیز نشان داده شده است.

مثال ۲. دو قوس هموار در نظر می‌گیریم که، به ترتیب، منحنیهای تراز $u(x,y) = c_1$ و $v(x,y) = c_2$ مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

هستند و فرض می‌کنیم که همدیگر را در نقطهٔ z_0 قطع کنند که f در آن تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$. تبدیل $w = f(z)$ در z_0 همدیس است و این قوسها را به خطوط $u = c_1$ و $v = c_2$ می‌نگارد که در نقطهٔ $w_0 = f(z_0)$ متعامدند. پس بنابر نظریهٔ ما این قوسها باید در z_0 متعامد باشند. این مطلب قبلاً در تمرینهای ۷ تا ۱۱ بخش ۲۵ بررسی و تشریح شده است.

نگاشتی که اندازهٔ زاویهٔ بین دو قوس هموار را حفظ کند، اما نه لزوماً جهت آن را، نگاشت حافظ زاویه نامیده می‌شود.

مثال ۳. تبدیل $w = \overline{z}$، که تقارن نسبت به محور حقیقی است، حافظ زاویه است اما همدیس نیست. اگر متعاقب این نگاشت تبدیلی همدیس اثر کند، تبدیل حاصل یعنی $w = f(\overline{z})$ نیز حافظ زاویه است ولی همدیس نیست.

فرض کنید f تابعی غیر ثابت و در نقطهٔ z_0 تحلیلی باشد. اگر $f'(z_0) = 0$، آن‌گاه z_0 یک نقطهٔ بحرانی تبدیل $w = f(z)$ نامیده می‌شود.

مثال ۴. نقطهٔ $z = 0$ یک نقطهٔ بحرانی تبدیل

$$w = 1 + z^2$$

است که ترکیبی از نگاشتهای

$$Z = z^2 \quad \text{و} \quad w = 1 + Z$$

است. پرتو $\theta = \alpha$ از نقطهٔ $z = 0$ به‌وضوح به روی پرتوی از نقطهٔ $w = 1$ نگاشته می‌شود که زاویهٔ شیب آن برابر با 2α است. به‌علاوه، زاویهٔ بین هر دو پرتو که از نقطهٔ بحرانی $z = 0$ کشیده شوند، به‌وسیلهٔ این تبدیل دو برابر می‌شود.

به‌طور کلیتر، می‌توان نشان داد که اگر z_0 نقطه‌ای بحرانی از تبدیل $w = f(z)$ باشد آن‌گاه عدد صحیح و مثبتی مانند m هست $(m \geq 2)$ به قسمی که زاویهٔ بین هر دو قوس هموار مار بر z_0، تحت آن تبدیل، در m ضرب می‌شود. عدد صحیح m، کوچکترین عدد صحیح و مثبتی است که $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. تحقیق این واقعیتها را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده‌ایم.

۹۵. ضریب مقیاس

ویژگی دیگری از تبدیل $w = f(z)$ که در نقطهٔ z_0 همدیس است با در نظر گرفتن قدرمطلق $f'(z_0)$ به‌دست می‌آید. بنابر تعریف مشتق و ویژگی (۷) بخش ۱۷ در مورد حد، می‌دانیم که

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}. \qquad (۱)$$

حال $|z-z_0|$ طول پاره‌خط واصل بین z و z_0 است و $|f(z)-f(z_0)|$ طول پاره‌خط واصل بین نقاط $f(z)$ و $f(z_0)$ در صفحهٔ w. پس به‌وضوح اگر z نزدیک نقطهٔ z_0 باشد، نسبت این دو طول، یعنی

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

تقریباً برابر عدد $|f'(z_0)|$ است. توجه کنید که $|f'(z_0)|$ اگر بزرگتر از واحد باشد نمایش یک انبساط و اگر کوچکتر از واحد باشد نمایش یک انقباض است.

گرچه زاویهٔ دوران $\arg f'(z)$ (بخش ۹۴) و ضریب مقیاس $|f'(z)|$، در حالت کلی، از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، بنابر پیوستگی f' مقادیر آنها در نقاط z نزدیک به z_0 تقریباً برابر با $\arg f'(z_0)$ و $|f'(z_0)|$ هستند. بنابراین تصویر یک ناحیهٔ کوچک در همسایگیی از نقطهٔ z_0 با ناحیهٔ اولیه همدیس است بدین‌معنی که تقریباً همان شکل را دارد. با وجود این یک ناحیهٔ بزرگ ممکن است به ناحیه‌ای تبدیل شود که هیچ شباهتی با ناحیهٔ اولیه نداشته باشد.

مثال. وقتی $f(z) = z^۲$، تبدیل

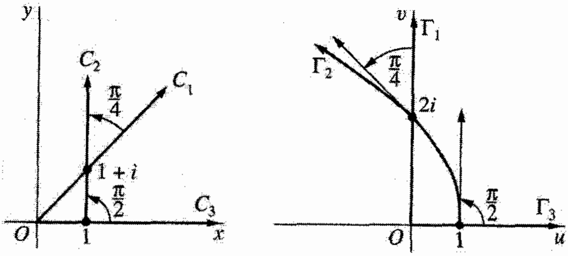
$$w = f(z) = x^۲ - y^۲ + i۲xy$$

در نقطهٔ $z = ۱ + i$، که دو نیم‌خط

$$x = ۱\,(y \geq ۰) \qquad \text{و} \qquad y = x\,(x \geq ۰)$$

همدیگر را قطع می‌کنند، همدیس است. این نیم‌خطها، با جهت مثبت به طرف بالا، را به $C_۱$ و $C_۲$ نمایش می‌دهیم، و ملاحظه می‌کنیم که زاویهٔ $C_۱$ با $C_۲$ در نقطهٔ تقاطع آنها برابر با $\pi/۴$ است (شکل ۱۳۱). چون تصویر نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ z عبارت است از نقطه‌ای در صفحهٔ w که مختصات قائم آن برابرند با

$$v = ۲xy \qquad \text{و} \qquad u = x^۲ - y^۲$$



شکل ۱۳۱

$w = z^۲$

نیم‌خط $C_۱$ به منحنی $\Gamma_۱$، با نمایش پارامتری زیر، تبدیل می‌شود

$$u = ۰, \qquad v = ۲x^۲ \quad (۰ \le x < \infty). \tag{۲}$$

بنابراین $\Gamma_۱$ نیمهٔ بالایی $v \ge ۰$ محور v است. نیم‌خط $C_۲$ به منحنی $\Gamma_۲$ تبدیل می‌شود که معادلات پارامتری آن عبارت‌اند از

$$u = ۱ - y^۲, \qquad v = ۲y \quad (۰ \le y < \infty). \tag{۳}$$

بنابراین $\Gamma_۲$ نیمهٔ بالایی سهمی $v^۲ = -۴(u-۱)$ است. توجه کنید که در هر حالت جهت مثبت منحنی تصویر به طرف بالاست.

اگر در نمایش (۳) برای منحنی تصویر $\Gamma_۲$ متغیرها u و v باشند، آن‌گاه

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dy}{du/dy} = \frac{۲}{-۲y} = -\frac{۲}{v}.$$

به‌خصوص وقتی $v = ۲$، داریم $dv/du = -۱$. در نتیجه زاویهٔ منحنی تصویر $\Gamma_۱$ با منحنی تصویر $\Gamma_۲$ در نقطهٔ $w = f(۱+i) = ۲i$ برابر است با $\pi/۴$ و این همان چیزی است که بنابر همدیسی نگاشت در آن نقطه لازم است. همان‌طور که پیش‌بینی کرده بودیم، زاویهٔ دوران $\pi/۴$ در نقطهٔ $z = ۱ + i$ یکی از مقادیر زیر است

$$\arg[f'(۱+i)] = \arg[۲(۱+i)] = \frac{\pi}{۴} + ۲n\pi \qquad (n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots).$$

ضریب مقیاس در آن نقطه برابر است با عدد

$$|f'(۱+i)| = |۲(۱+i)| = ۲\sqrt{۲}.$$

برای آنکه نشان دهیم چگونه زاویهٔ دوران و ضریب مقیاس می‌توانند از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کنند، توجه می‌کنیم که در نقطهٔ $z = ۱$، به ترتیب، برابرند با ۰ و ۲ زیرا $f'(۱) = ۲$. شکل ۱۳۱ را ببینید که در آن $C_۲$ و $\Gamma_۲$ همان منحنیهای بالا هستند و $C_۳$محور x نامنفی، به $\Gamma_۳$ که محور u نامنفی است تبدیل می‌شود.

۹۶. وارونهای موضعی

تبدیل $w = f(z)$ که در نقطهٔ $z_۰$ همدیس است دارای یک وارون موضعی در آن نقطه است. یعنی اگر $w_۰ = f(z_۰)$، آن‌گاه تبدیل یکتایی مانند $z = g(w)$ موجود است که در یک همسایگی $w_۰$ مانند N تعریف شده و تحلیلی است به‌طوری که $g(w_۰) = z_۰$ و به‌ازای هر نقطهٔ w در N داریم $f[g(w)] = w$. مشتق $g(w)$ در واقع برابر است با

$$g'(w) = \frac{۱}{f'(z)}. \qquad (۱)$$

از عبارت (۱) توجه می‌کنیم که تبدیل $z = g(w)$ خود در $w_۰$ همدیس است.

حال وجود چنین تابع وارونی را بررسی می‌کنیم، که پیامد مستقیم نتایج حسابان پیشرفته است.* همان‌طور که در بخش ۹۴ توضیح دادیم، همدیسی تبدیل $w = f(z)$ در $z_۰$ مستلزم وجود همسایگیی از $z_۰$ است که این تبدیل در آن همدیس است و در نتیجه f در آن تحلیلی است. بنابراین اگر بنویسیم

$$z = x + iy,\quad z_۰ = x_۰ + iy_۰ \quad \text{و} \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

می‌دانیم که همسایگیی از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ هست که توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ و مشتقات جزئی آنها از هر مرتبه در سراسر آن پیوسته‌اند (بخش ۴۸ را ببینید).

حال دو معادلهٔ

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y) \qquad (۲)$$

نمایش تبدیلی از همسایگی مذکور به‌توی صفحهٔ uv است. به‌علاوه، دترمینان

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

* نتایجی از حسابان پیشرفته را که اینجا به‌کار برده می‌شود می‌توانید در صفحات ۲۴۱-۲۴۷ کتاب زیر ببینید
A. E. Taylor and W. R. Mann, “Advanced Calculus,” 3d ed., 1983.

که به ژاکوبی این تبدیل معروف است، در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ غیر صفر است. چون بنابر معادلات کوشی‌ـریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$، می‌توان J را به‌صورت زیر نوشت

$$J = (u_x)^{۲} + (v_x)^{۲} = |f'(z)|^{۲}$$

و از آنجا که تبدیل $w = f(z)$ در $z_\circ$ همدیس است $f'(z_\circ) \neq \circ$. شرایط پیوستگی بالا دربارهٔ توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ و مشتقات آنها همراه با شرط ناصفربودن ژاکوبی برای وجود وارون موضعی تبدیل (۲) در $(x_\circ, y_\circ)$ کافی است. یعنی، اگر

$$u_\circ = u(x_\circ, y_\circ) \quad \text{و} \quad v_\circ = v(x_\circ, y_\circ) \tag{۳}$$

آن‌گاه تبدیل پیوستهٔ یکتایی مانند

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \tag{۴}$$

هست که در یک همسایگی N از نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ تعریف شده و نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ را به روی $(x_\circ, y_\circ)$ می‌نگارد به‌طوری که در صورت برقراری روابط (۴)، روابط (۲) برقرارند. همچنین علاوه بر پیوسته‌بودن، توابع (۴) دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته‌اند که در سراسر N در روابط زیر صدق می‌کنند

$$x_u = \frac{۱}{J} v_y, \quad x_v = -\frac{۱}{J} u_y, \quad y_u = -\frac{۱}{J} v_x, \quad y_v = \frac{۱}{J} u_x \,. \tag{۵}$$

اگر بنویسیم $w = u + iv$، $w_\circ = u_\circ + iv_\circ$ و

$$g(w) = x(u,v) + iy(u,v), \tag{۶}$$

تبدیل $z = g(w)$ به‌وضوح یک وارون موضعی $w = f(z)$ در $z_\circ$ است. تبدیلهای (۲) و (۴) را می‌توان چنین نوشت

$$u + iv = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{و} \quad x + iy = x(u,v) + iy(u,v)$$

و این دو رابطهٔ آخری همان روابط

$$w = f(z) \quad \text{و} \quad z = g(w)$$

هستند، که g دارای ویژگیهای مطلوب است. با استفاده از روابط (۵) می‌توان نشان داد که g در N تحلیلی است. جزئیات را به‌عنوان تمرین گذاشته‌ایم، عبارت (۱) برای $g'(w)$ را نیز در تمرینها به‌دست خواهید آورد.

مثال. در مثال ۱ بخش ۹۴ دیدیم که، اگر $f(z) = e^z$، تبدیل $w = f(z)$ همه جا در صفحهٔ z و به‌خصوص در نقطهٔ $z_0 = 2\pi i$ همدیس است. تصویر این انتخاب z_0 نقطهٔ $w_0 = 1$ است. درصورتی که نقاط صفحهٔ w را به‌صورت $w = \rho \exp(i\phi)$ بیان کنیم، وارون موضعی در z_0 را می‌توان با نوشتن $g(w) = \log w$ به‌دست آورد که در آن $\log w$ نمایش شاخهٔ

$$\log w = \ln \rho + i\phi \qquad (\rho > 0, \pi < \phi < 3\pi)$$

از تابع لگاریتمی است که به همسایگیی از w_0 که شامل مبدأ نیست تحدید شده باشد. ملاحظه کنید که

$$g(1) = \ln 1 + i2\pi = 2\pi i$$

و اگر w در آن همسایگی باشد،

$$f[g(w)] = \exp(\log w) = w\,.$$

همچنین بر طبق رابطهٔ (۱) داریم

$$g'(w) = \frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w} = \frac{1}{\exp z}\,.$$

توجه کنید که اگر نقطهٔ $z_0 = 0$ انتخاب شود، می‌توان از شاخهٔ اصلی

$$\operatorname{Log} w = \ln \rho + i\phi \qquad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$$

تابع لگاریتمی، برای تعریف g استفاده کرد. در این حالت $g(1) = 0$.

تمرینها

۱. زاویهٔ دوران، در نقطهٔ $z = 2 + i$ برای تبدیل $w = z^2$ را تعیین کنید. زاویهٔ دوران برای یک منحنی خاص را رسم کنید. نشان دهید که ضریب مقیاس تبدیل در این نقطه $2\sqrt{5}$ است.

۲. به‌وسیلهٔ تبدیل $w = 1/z$ چه زاویهٔ دورانی (الف) در نقطهٔ $z = 1$؛ (ب) در نقطهٔ $z = i$، حاصل می‌شود؟

جواب: (الف) π؛ (ب) 0.

۳. نشان دهید که تحت تبدیل $w = 1/z$ تصاویر خطوط $y = x - 1$ و $y = 0$ به‌ترتیب عبارت‌اند از دایرهٔ $u^2 + v^2 - u - v = 0$ و خط $v = 0$. هر چهار منحنی را رسم کنید، جهتهای متناظر در امتداد آنها را معین نمایید و همدیسی نگاشت در نقطهٔ $z = 1$ را تحقیق کنید.

۴. نشان دهید که زاویهٔ دوران در نقطهٔ ناصفر $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$، تحت تبدیل $w = z^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ عبارت است از $(n-1)\theta_0$. ضریب مقیاس تبدیل در آن نقطه را معین کنید.

جواب: nr_0^{n-1}.

۵. نشان دهید که تبدیل $w = \sin z$ در همهٔ نقاط بجز

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

همدیس است. توجه کنید که این مطلب با نگاشت قطعه‌خطهای جهت‌داری که در شکلهای ۹، ۱۰ و ۱۱ پیوست ۲ نشان داده شده سازگار است.

۶. وارون موضعی تبدیل $w = z^2$ را در هر یک از نقاط زیر پیدا کنید

(الف) $z_0 = 2$؛ (ب) $z_0 = -2$؛ (ج) $z_0 = -i$.

جواب: (الف) $w^{1/2} = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2}(\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$؛

(ج) $w^{1/2} = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2}(\rho > 0, 2\pi < \phi < 4\pi)$.

۷. در بخش ۹۶ خاطر نشان کردیم که مؤلفه‌های $x(u,v)$ و $y(u,v)$ تابع وارون $g(w)$ که در رابطهٔ (۶) تعریف شد در همسایگی N پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته‌اند. با استفاده از معادلات (۵) بخش ۹۶ نشان دهید که معادلات کوشی-ریمان $x_u = y_v$، $x_v = -y_u$ در N برقرارند. سپس نتیجه بگیرید که $g(w)$ در آن همسایگی تحلیلی است.

۸. نشان دهید که اگر $z = g(w)$ وارون موضعی تبدیل همدیس $w = f(z)$ در نقطهٔ z_0 باشد، آن‌گاه در نقاط w از همسایگی N که g در آن تحلیلی است (تمرین ۷) داریم

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

راهنمایی: با این مطلب شروع کنید که $f[g(w)] = w$ و قاعدهٔ زنجیری برای مشتقگیری توابع مرکب را به‌کار برید.

۹. فرض کنید C قوس هموار واقع در حوزهٔ D باشد که تبدیل $w = f(z)$ در سراسر آن حوزه همدیس است و Γ نمایش تصویر C تحت این تبدیل باشد. نشان دهید که Γ نیز قوسی هموار است.

۱۰. فرض کنید تابع f در z_0 تحلیلی باشد و به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند m $(m \geq 1)$

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

همچنین بنویسید $w_0 = f(z_0)$.

(الف) با استفاده از سری تیلر f حول نقطهٔ z_0 نشان دهید که همسایگیی از z_0 موجود است که تفاضل $f(z) - w_0$ را می‌توان در آن چنین نوشت

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}[1 + g(z)]$$

که $g(z)$ در z_0 پیوسته است و $g(z_0) = 0$.

(ب) فرض کنید همان‌طور که در شکل ۱۲۹ (بخش ۹۴) نشان داده شده است Γ تصویر قوس هموار C تحت تبدیل $w = f(z)$ باشد، و توجه کنید که زوایای شیب θ_0 و ϕ_0 در آن شکل، به ترتیب، حدود $\arg(z - z_0)$ و $\arg[f(z) - w_0]$ هستند وقتی z در امتداد قوس C به z_0 میل کند. سپس با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید که θ_0 و ϕ_0 با رابطهٔ زیر به هم وابسته‌اند

$$\phi_0 = m\theta_0 + \arg f^{(m)}(z_0).$$

(ج) فرض کنید همان‌طور که در سمت چپ شکل ۱۳۰ (بخش ۹۴) نشان داده شده است α زاویهٔ بین دو قوس هموار C_1 و C_2 مار بر z_0 باشد. نشان دهید که چگونه از رابطهٔ حاصل در قسمت (ب) نتیجه می‌شود که زاویهٔ متناظر بین منحنیهای تصویر Γ_1 و Γ_2 در نقطهٔ $w_0 = f(z_0)$ برابر با $m\alpha$ است. (توجه کنید که اگر $m = 1$ این تبدیل در z_0 همدیس است و اگر $m \geq 2$ آن‌گاه z_0 یک نقطهٔ بحرانی است.)

۹۷. مزدوجهای همساز

در بخش ۲۵ دیدیم که اگر تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در حوزهٔ D تحلیلی باشد، آن‌گاه توابع حقیقی u و v در آن حوزه همسازند. یعنی، در D دارای

مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته‌اند و در آنجا در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند:

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \qquad v_{xx} + v_{yy} = \circ \,. \tag{۱}$$

قبلاً دیده بودیم که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \tag{۲}$$

صدق می‌کنند و همان‌طورکه در بخش ۲۵ خاطر نشان ساختیم v یک مزدوج همساز u نامیده می‌شود.

حال فرض کنید $u(x,y)$ تابع همساز مفروضی باشد که در یک حوزهٔ همبند ساده (بخش ۴۶) تعریف شده است. در این بخش نشان می‌دهیم که $u(x,y)$ همیشه دارای مزدوج همسازی مانند $v(x,y)$ در D است و این کار را با یافتن عبارتی برای $v(x,y)$ انجام می‌دهیم.

برای انجام این کار، ابتدا مطالب مهمی دربارهٔ انتگرال روی خط را از حسابان یادآوری می‌کنیم.* فرض کنید $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ در حوزهٔ همبند سادهٔ D از صفحهٔ xy دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته باشند و $(x_\circ, y_\circ)$ و (x,y) دو نقطهٔ دلخواه در D باشند. اگر در هر نقطهٔ D داشته باشیم $P_y = Q_x$، آنگاه انتگرال روی خط

$$\int_C P(s,t)ds + Q(s,t)dt$$

از $(x_\circ, y_\circ)$ تا (x,y)، مادامی که مسیر تماماً در D واقع باشد، مستقل از مسیر C است. به‌علاوه، درصورتی که نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ ثابت گرفته شود و (x,y) مجاز به تغییر در سراسر D باشد، این انتگرال نمایش تابعی تک‌مقداری مانند

$$F(x,y) = \int_{(x_\circ, y_\circ)}^{(x,y)} P(s,t)ds + Q(s,t)dt \tag{۳}$$

از x و y است که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن با ضابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$F_x(x,y) = P(x,y) \quad , \quad F_y(x,y) = Q(x,y)\,. \tag{۴}$$

توجه کنید که اگر نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ دیگری بگیریم مقدار F با یک ثابت جمعی تغییر می‌کند.

* مثلاً صفحات ۵۵۰-۵۴۶ کتاب زیر را ببینید

W. Kaplan, “Advanced Mathematics for Engineers,” 1992.

به تابع همساز مفروض $u(x,y)$ برمی‌گردیم و ملاحظه می‌کنیم که از معادلهٔ لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ نتیجه می‌شود که همه جا در D

$$(-u_y)_y=(u_x)_x\,.$$

همچنین مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم u در D پیوسته‌اند و لذا مشتقات جزئی مرتبهٔ اول توابع $-u_y$ و u_x در آنجا پیوسته‌اند. بنابراین اگر $(x_0\,,y_0)$ را در D ثابت بگیریم، تابع

$$v(x,y)=\int_{(x_0\,,y_0)}^{(x,y)}-u_t(s,t)\,ds+u_s(s,t)\,dt \tag{۵}$$

به‌ازای هر (x,y) در D خوشتعریف است و بنابر روابط (۴)،

$$v_x(x,y)=-u_y(x,y),\qquad v_y(x,y)=u_x(x,y)\,. \tag{۶}$$

اینها معادلات کوشی-ریمان‌اند. چون مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u پیوسته‌اند، از روابط (۶) معلوم می‌شود که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول v نیز پیوسته‌اند. در نتیجه، $u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی در D و بنابراین v مزدوج همساز u است (بخش ۲۱).

البته تابع v، که با فرمول (۵) تعریف شد، تنها مزدوج همساز u نیست. زیرا تابع $v(x,y)+c$، که در آن c یک عدد حقیقی ثابت و دلخواه است، نیز مزدوج همساز u است. [تمرین ۲ بخش ۲۵ را به یاد آورید.]

مثال. تابع $u(x,y)=xy$ را که در تمام صفحهٔ xy همساز است در نظر بگیرید. بنابر معادلهٔ (۵) تابع

$$v(x,y)=\int_{(0\,,\,0)}^{(x,y)}-s\;ds+t\;dt$$

یک مزدوج همساز $u(x,y)$ است. این انتگرال را می‌توان به‌سهولت با تحقیق و بررسی محاسبه کرد؛ همچنین می‌توان آن را با انتگرالگیری در امتداد مسیر افقی از نقطهٔ $(0\,,0)$ تا نقطهٔ $(x,0)$ و سپس در امتداد مسیر عمودی از $(x,0)$ تا نقطهٔ (x,y) محاسبه کرد. نتیجه چنین است

$$v(x,y)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$$

و بنابراین، تابع تحلیلی متناظر عبارت است از

$$f(z)=xy-\frac{i}{2}(x^2-y^2)=-\frac{i}{2}z^2\,.$$

۹۸. تبدیلهای توابع همساز

مسئلهٔ یافتن تابعی که در یک حوزهٔ مشخص همساز باشد، و بر مرز آن حوزه در شرایط از پیش تعیین شده‌ای صدق کند، در ریاضیات کاربردی از اهمیت خاصی برخوردار است. اگر مقادیر تابع در امتداد مرز از پیش تعیین شده باشند، مسئله، به مسئلهٔ مقدار مرزی نوع اول یا مسئلهٔ دیریکله[1] معروف است. اگر مقادیر مشتق نرمال تابع بر مرز از پیش تعیین شده باشند، مسئلهٔ مقدار مرزی یکی از مسائل نوع دوم یا مسئلهٔ نویمان[2] است. صورتهای اصلاح شده و ترکیبهایی از این دو نوع شرایط مرزی نیز پیش می‌آیند.

حوزه‌هایی که بیشتر مواقع در کاربردها با آن مواجه می‌شویم همبند ساده‌اند و چون هر تابع که در حوزهٔ همبند ساده‌ای همساز باشد همیشه دارای مزدوج همساز است (بخش ۹۷)، جوابهای مسائل مقدار مرزی برای چنین حوزه‌هایی قسمتهای حقیقی یا موهومی توابع تحلیلی‌اند.

مثال ۱. در مثال ۱ بخش ۲۵، دیدیم که تابع

$$T(x,y) = e^{-y}\sin x$$

در یک مسئلهٔ دیریکله برای نوار $0 < x < \pi$، $y > 0$ صدق می‌کند و خاطر نشان کردیم که جوابی از یک مسئلهٔ دما را نمایش می‌دهد. تابع $T(x,y)$، که در واقع در سراسر صفحهٔ xy همساز است، به‌وضوح قسمت حقیقی تابع تام

$$-ie^{iz} = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$$

است. همچنین قسمت موهومی تابع تام e^{iz} است.

بعضی مواقع جواب یک مسئلهٔ مقدار مرزی مفروض را می‌توان با گرفتن آن به‌عنوان قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی پیداکرد. اما موفقیت در این روش بستگی به سادگی مسئله و آشنایی با قسمتهای حقیقی و موهومی توابع تحلیلی گوناگون دارد. قضیهٔ زیر وسیلهٔ کمکی مهمی است.

قضیه. فرض کنید تابع تحلیلی

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{۱}$$

حوزهٔ D_z از صفحهٔ z را به روی حوزهٔ D_w از صفحهٔ w بنگارد. اگر $h(u,v)$ تابع همسازی باشد که بر D_w تعریف شده است آنگاه تابع

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)] \tag{۲}$$

در D_z همساز است.

1. *Dirichlet* 2. *Neumann*

ابتدا قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم که D_w همبند ساده است. بنابر بخش ۹۷ چون D_w همبند ساده است، تابع همساز مفروض $h(u,v)$ دارای مزدوج همسازی مانند $g(u,v)$ است. بنابراین تابع

$$\Phi(w) = h(u,v) + ig(u,v) \tag{۳}$$

در D_w تحلیلی است. چون تابع $f(z)$ در D_z تحلیلی است، تابع مرکب $\Phi[f(z)]$ نیز در D_z تحلیلی است. در نتیجه $h[u(x,y), v(x,y)]$ قسمت حقیقی این تابع مرکب در D_z همساز است.

اگر D_w همبند ساده نباشد، ملاحظه می‌کنیم که هر نقطهٔ $w_\circ$ در D_w دارای همسایگیی مانند $|w - w_\circ| < \varepsilon$ است که تماماً در D_w واقع است. چون این همسایگی همبند ساده است، تابعی از نوع (۳) در آن تحلیلی است. به‌علاوه، چون f در نقطهٔ $z_\circ$ از D_z که تصویر آن $w_\circ$ است پیوسته است، همسایگیی مانند $|z - z_\circ| < \delta$ وجود دارد به‌طوری که تصویر آن مشمول در همسایگی $|w - w_\circ| < \varepsilon$ است. بنابراین نتیجه می‌شود که تابع مرکب $\Phi[f(z)]$ در همسایگی $|z - z_\circ| < \delta$ تحلیلی است و در نتیجه $h[u(x,y), v(x,y)]$ در آنجا همساز است. بالاخره، چون $w_\circ$ در D_w به دلخواه گرفته شده بود و چون هر نقطهٔ D_z تحت تبدیل $w = f(z)$ به چنین نقطه‌ای نگاشته می‌شود، تابع $h[u(x,y), v(x,y)]$ باید در سراسر D_z همساز باشد.

اثبات این قضیه را برای حالت کلی که D_w لزوماً همبند ساده نیست می‌توان مستقیماً به‌وسیلهٔ قاعدهٔ زنجیری در مورد مشتقات جزئی ارائه داد. ولی محاسبات تا اندازه‌ای پیچیده است (تمرین ۸، بخش ۹۹، را ببینید).

مثال ۲. تابع $h(u,v) = e^{-v}\sin u$ در حوزهٔ D_w، متشکل از همهٔ نقاط واقع در نیم‌صفحهٔ بالایی $v > \circ$ همساز است (مثال ۱ را ببینید). اگر تبدیل عبارت باشد از $w = z^۲$، آن‌گاه $u(x,y) = x^۲ - y^۲$ و $v(x,y) = ۲xy$؛ به‌علاوه، همان‌طور که در مثال ۳ بخش ۱۲، نشان داده شد، حوزهٔ D_z از صفحهٔ z متشکل از نقاط واقع در ربع اول $x > \circ$، $y > \circ$ به روی حوزهٔ D_w نگاشته می‌شود. بنابراین تابع

$$H(x,y) = e^{-۲xy}\sin(x^۲ - y^۲)$$

در D_z همساز است.

مثال ۳. تابع $h(u,v) = \operatorname{Im} w = v$ را که در نوار افقی $-\pi/۲ < v < \pi/۲$ همساز است، در نظر می‌گیریم. بنابر مثال ۳، در بخش ۸۸، به سادگی نتیجه می‌شود که تبدیل $w = \operatorname{Log} z$

نیم‌صفحهٔ سمت راست $x > \circ$ را به روی آن نوار می‌نگارد. اگر بنویسیم

$$\operatorname{Log} z = \ln\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} + i \arctan\frac{y}{x},$$

که در آن $-\pi/۲ < \arctan t < \pi/۲$، در می‌یابیم که تابع

$$H(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$$

در نیم‌صفحهٔ $x > \circ$ همساز است.

۹۹. تبدیل شرایط مرزی

شرایطی که تابع یا مشتق نرمال آن در امتداد مرز یک حوزه که در آن همساز است دارای مقادیر از پیش تعیین شده‌ای باشند، عمومی‌ترین نوع شرایط مرزی‌اند، ولی تنها نوع مهم آن نیستند. در این بخش نشان می‌دهیم که برخی از این شرایط تحت تغییر متغیرهای وابسته به تبدیل همدیس، تغییرناپذیر باقی می‌مانند. در فصل ۱۰ این نتایج را برای به‌دست آوردن جواب مسائل مقدار مرزی به‌کار خواهیم برد. روشی که در آنجا به‌کار رفته بدین‌صورت است که مسئلهٔ مرزی مفروض در صفحهٔ xy را به مسئلهٔ ساده‌تری در صفحهٔ uv تبدیل می‌کنند و سپس با استفاده از قضایای این بخش و بخش قبل، جواب مسئلهٔ اولیه را برحسب جواب حاصل برای دومی می‌نویسند.

قضیه. فرض کنید تبدیل

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{۱}$$

روی قوس هموار C همدیس و Γ تصویر C تحت این تبدیل باشد. اگر تابع $h(u, v)$ در امتداد Γ در یکی از شرایط

$$\frac{dh}{dn} = \circ \qquad \text{یا} \qquad h = h_\circ \tag{۲}$$

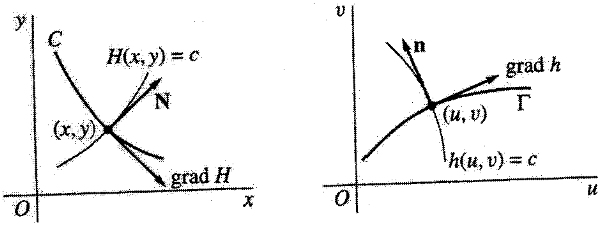
صدق کند، که در آن $h_\circ$ یک عدد حقیقی ثابت و dh/dn نمایش مشتقات نرمال بر Γ است، آن‌گاه تابع

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)] \tag{۳}$$

در امتداد C در شرط متناظر

$$\frac{dH}{dN} = \circ \qquad \text{یا} \qquad H = h_\circ \tag{۴}$$

صدق می‌کند، که در آن dH/dN نمایش مشتقات نرمال بر C است.



شکل ۱۳۲

برای آنکه نشان دهیم شرط $h = h_0$ روی Γ مستلزم شرط $H = h_0$ روی C است، توجه می‌کنیم که بنابر رابطهٔ (۳) مقدار H در هر نقطهٔ (x, y) روی C همان مقدار h در (u, v) تصویر (x, y) تحت تبدیل (۱) است. چون نقطهٔ تصویر یعنی (u, v) روی Γ واقع است و چون در امتداد آن منحنی $h = h_0$ در نتیجه در امتداد C داریم $H = h_0$.

از طرف دیگر فرض کنید روی Γ داشته باشیم $dh/dn = 0$. از حسابان می‌دانیم که

$$\frac{dh}{dn} = (\text{grad } h) \cdot \mathbf{n}, \tag{۵}$$

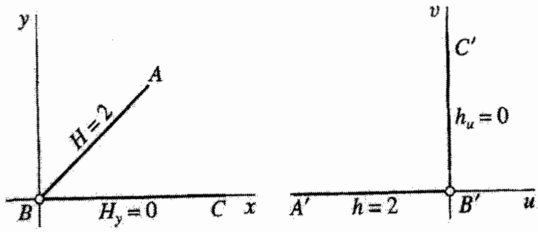
که در آن $\text{grad } h$ نمایش گرادیان h در نقطهٔ (u, v) روی Γ است و $\mathbf{n}$ بردار یکه‌ای قائم بر Γ در (u, v) است. چون در (u, v) داریم $dh/dn = 0$، از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود که $\text{gard } h$ در (u, v) بر $\mathbf{n}$ عمود است. یعنی، $\text{grad } h$ در آنجا بر Γ مماس است (شکل ۱۳۲). اما گرادیانها بر منحنیهای تراز عمودند؛ و چون $\text{grad } h$ بر Γ مماس است، می‌بینیم که Γ بر هر منحنی تراز $h(u, v) = c$ مار بر (u, v) عمود است.

حال بنابر رابطهٔ (۳)، منحنی تراز $H(x, y) = c$ در صفحهٔ z را می‌توان چنین نوشت

$$h[u(x, y), v(x, y)] = c;$$

و لذا به‌وضوح تحت تبدیل (۱) به منحنی تراز $h(u, v) = c$ تبدیل می‌شود. به‌علاوه چون C به Γ تبدیل می‌شود و همان‌طورکه در بند قبل توضیح دادیم Γ بر منحنی تراز $h(u, v) = c$ عمود است، بنابر همدیسی تبدیل (۱) روی C نتیجه می‌گیریم که در نقطهٔ (x, y) متناظر با (u, v) منحنی C بر منحنی تراز $H(x, y) = c$ عمود است. چون گرادیانها بر منحنیهای تراز عمودند، در نتیجه $\text{grad } H$ در (x, y) بر C مماس است (شکل ۱۳۲ را ببینید). بنابراین اگر $\mathbf{N}$ نمایش بردار یکه‌ای قائم بر C در (x, y) باشد، $\text{grad } H$ بر $\mathbf{N}$ عمود است. یعنی،

$$(\text{grad } H) \cdot \mathbf{N} = 0 \tag{۶}$$



شکل ۱۳۳

بالاخره، چون

$$\frac{dH}{dN} = (\text{grad } H) \cdot \mathbf{N},$$

می‌توان از رابطهٔ (۶) نتیجه گرفت که در هر نقطه روی C، $dH/dN = ۰$.

در بحث بالا، به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که $\text{grad } h \neq ۰$. اگر $\text{grad } h = ۰$، از اتحاد

$$|\text{grad } H(x,y)| = |\text{grad } h(u,v)| \cdot |f'(z)|,$$

که در تمرین ۱۰ (الف) در ذیل به‌دست می‌آید، نتیجه می‌شود که $\text{grad } H = ۰$ بنابراین dh/dn و مشتق نرمال متناظر dH/dN هر دو صفرند. همچنین فرض کردیم که

(الف) $\text{grad } h$ و $\text{grad } H$ همیشه موجودند؛

(ب) در صورتی که در (u,v)، $\text{grad } h \neq ۰$ منحنی تراز $H(x,y) = c$ در نقطهٔ (x,y) قوسی هموار است.

شرط (ب) اطمینان می‌دهد که اگر تبدیل (۱) همدیس باشد زوایای بین قوسها به‌وسیلهٔ این تبدیل حفظ می‌شوند. در همهٔ کاربردهایمان شرایط (الف) و (ب) هر دو برقرار خواهند بود.

مثال. به‌عنوان نمونه، تابع $h(u,v) = v + ۲$ را در نظر بگیرید. تبدیل

$$w = iz^۲ = -۲xy + i(x^۲ - y^۲)$$

همدیس است هرگاه $z \neq ۰$. این تبدیل نیم‌خط $x = y(x > ۰)$ را به روی محور u منفی می‌نگارد، که در آن $h = ۲$ و محور x مثبت را به روی محور v مثبت می‌نگارد، که در آن مشتق نرمال h_u مساوی ۰ است (شکل ۱۳۳). بنابر قضیهٔ بالا، تابع

$$H(x,y) = x^۲ - y^۲ + ۲$$

باید در امتداد نیم‌خط $y = x$ $(x > ۰)$ در شرط $H = ۲$ و در امتداد محور x مثبت در شرط $H_y = ۰$ صدق کند، این مطلب را می‌توان مستقیماً تحقیق کرد.

شرطی که یکی از دو نوع شرط مرزی مذکور در قضیه نباشد ممکن است به شرطی تبدیل شود که اساساً مغایر شرط اولیه است (تمرین ۶ را ببینید). در هر حالت برای یک تبدیل خاص ممکن است شرایط مرزی جدیدی به‌دست آید. توجه به این نکته جالب است که تحت یک تبدیل همدیس، نسبت مشتق جهتی H در امتداد قوس هموار C از صفحهٔ z، به مشتق جهتی h در امتداد منحنی تصویر Γ در نقطهٔ متناظر صفحهٔ w عبارت است از $|f'(z)|$؛ معمولاً این نسبت در امتداد یک قوس مفروض ثابت نیست. (تمرین ۱۰ را ببینید.)

تمرینها

۱. با استفاده از فرمول (۵) بخش ۹۷ یک مزدوج همساز برای تابع همساز $u(x, y) = x^۳ - ۳xy^۲$ پیدا کنید. تابع تحلیلی حاصل را برحسب متغیر مختلط z بنویسید.

۲. فرض کنید $u(x, y)$ در حوزهٔ همبند سادهٔ D همساز باشد. با استفاده از نتایج بخشهای ۹۷ و ۴۸ نشان دهید که مشتقات جزئی u از هر مرتبه در سراسر D پیوسته‌اند.

۳. همان‌طور که در شکل ۶ پیوست ۲ نشان داده شده، تبدیل $w = \exp z$ نوار افقی $۰ < y < \pi$ را به روی نیم‌صفحهٔ بالایی $v > ۰$ می‌نگارد، و تابع

$$h(u, v) = \operatorname{Re}(w^۲) = u^۲ - v^۲$$

در آن نیم‌صفحه همساز است. به‌کمک قضیهٔ بخش ۹۸ نشان دهید که تابع $H(x, y) = e^{۲x} \cos ۲y$ در این نوار همساز است. این نتیجه را مستقیماً تحقیق کنید.

۴. تحت تبدیل $w = \exp z$، تصویر پاره‌خط $۰ \leq y \leq \pi$ از محور yها نیمدایرهٔ $u^۲ + v^۲ = ۱$، $v \geq ۰$ است. همچنین، تابع

$$h(u, v) = \operatorname{Re}\left(۲ - w + \frac{۱}{w}\right) = ۲ - u + \frac{u}{u^۲ + v^۲}$$

همه‌جا در صفحهٔ w، بجز در مبدأ، همساز و روی نیمدایرهٔ بالا مقدارش $h = ۲$ است. برای تابع $H(x, y)$ که در قضیهٔ بخش ۹۹ تعریف شد عبارت صریحی بنویسید. سپس با اثبات مستقیم این مطلب که روی پاره‌خط $۰ \leq y \leq \pi$ از محور yها داریم $H = ۲$، این قضیه را با مثال تشریح نمایید.

۵. تحت تبدیل $w = z^۲$، محورهای x و y مثبت و مبدأ صفحهٔ z به روی محور u در صفحهٔ w نگاشته می‌شوند. حال تابع همساز

$$h(u,v) = \mathrm{Re}\,(e^{-w}) = e^{-u}\cos v$$

را در نظر بگیرید و توجه کنید که h_v مشتق نرمال آن در امتداد محور u، صفر است. وقتی $f(z) = z^۲$، قضیهٔ بخش ۹۹ را با مثال تشریح نمایید، برای انجام این کار مستقیماً نشان دهید که مشتق نرمال تابع $H(x,y)$ که در آن قضیه تعریف شد در امتداد محورهای مثبت صفحهٔ z صفر است. (توجه کنید که تبدیل $w = z^۲$ در مبدأ همدیس نیست.)

۶. به‌جای تابع $h(u,v)$ در تمرین ۵ تابع همساز

$$h(u,v) = \mathrm{Re}\,(-۲iw + e^{-w}) = ۲v + e^{-u}\cos v$$

را قرار دهید. سپس نشان دهید که در امتداد محور u، $h_v = ۲$، اما در امتداد محور x مثبت $H_y = ۴x$ و در امتداد محور y مثبت $H_x = ۴y$. این مثال نشان می‌دهد که چگونه شرطی از نوع

$$\frac{dh}{dn} = h_۰ \neq ۰$$

لزوماً به شرطی از نوع $dH/dN = h_۰$ تبدیل نمی‌شود.

۷. نشان دهید که اگر تابع $H(x,y)$ جواب مسئلهٔ نویمان باشد (بخش ۹۸) آن‌گاه $H(x,y) + A$ نیز که در آن A عدد حقیقی ثابتی است جواب آن مسئله است.

۸. فرض کنید تابع تحلیلی $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ حوزهٔ D_z از صفحهٔ z را به روی حوزهٔ D_w از صفحهٔ w بنگارد و تابع $h(u,v)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته در D_w تعریف شده باشد. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای مشتقات جزئی نشان دهید اگر $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$، آن‌گاه

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = [h_{uu}(u,v) + h_{vv}(u,v)]|f'(z)|^۲.$$

نتیجه بگیرید که اگر $h(u,v)$ در D_w همساز باشد، آن‌گاه $H(x,y)$ در D_z همساز است . این برهان دیگری برای قضیهٔ بخش ۹۸ است، حتی وقتی که حوزهٔ D_w همبند چندگانه باشد.

راهنمایی: در ساده کردنها، توجه به این نکته مهم است که چون f تحلیلی است معادلات کوشی-ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ برقرارند و توابع u و v در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند. همچنین بنابر شرایط پیوستگی مشتقات h مطمئنیم که $h_{uv} = h_{vu}$.

۹. فرض کنید $p(u,v)$ تابعی باشد که در حوزهٔ D_w از صفحهٔ w دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد و در معادلهٔ پواسون[1] صدق کنند

$$p_{uu}(u,v) + p_{vv}(u,v) = \Phi(u,v),$$

که در آن Φ تابع از پیش تعیین شده‌ای است. نشان دهید چگونه از اتحاد حاصل در تمرین ۸ نتیجه می‌شود که اگر تابع تحلیلی

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

حوزهٔ D_z را به روی حوزهٔ D_w بنگارد، آن‌گاه تابع

$$P(x,y) = p[u(x,y), v(x,y)]$$

در D_z در معادلهٔ پواسون زیر صدق می‌کند

$$P_{xx}(x,y) + P_{yy}(x,y) = \Phi[u(x,y), v(x,y)]|f'(z)|^2 .$$

۱۰. فرض کنید $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ نگاشت همدیسی از قوس هموار C به روی قوس هموار Γ در صفحهٔ w باشد. فرض کنید تابع $h(u,v)$ روی Γ تعریف شده باشد و قرار دهید

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)] .$$

(الف) با توجه به حسابان می‌دانیم که مؤلفه‌های x و y تابع $\operatorname{grad} H$ به ترتیب، مشتقات جزئی H_x و H_y هستند، همین‌طور $\operatorname{grad} h$ دارای مؤلفه‌های h_u و h_v است. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای مشتقات جزئی و معادلات کوشی-ریمان، نشان دهید که اگر (x,y) نقطه‌ای روی C و (u,v) تصویر آن روی Γ باشد، آن‌گاه

$$|\operatorname{grad} H(x,y)| = |\operatorname{grad} h(u,v)||f'(z)| .$$

(ب) ثابت کنید زاویهٔ قوس C با $\operatorname{grad} H$ در هر نقطهٔ (x,y) روی C برابر است با زاویهٔ Γ با $\operatorname{grad} h$ در (u,v) تصویر نقطهٔ (x,y).

1. *Poisson*

(ج) فرض کنید s و σ، به ترتیب، نمایش فاصله در امتداد C و Γ باشند و $\mathbf{t}$ و $\boldsymbol{\tau}$ نمایش بردارهای یکهٔ مماس در (x, y) روی C و تصویرش (u, v) در جهت افزایش فاصله باشند. به کمک نتایج قسمتهای (الف) و (ب) و استفاده از اینکه

$$\frac{dh}{d\sigma} = (\operatorname{grad} h) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{و} \quad \frac{dH}{ds} = (\operatorname{grad} H) \cdot \mathbf{t}$$

نشان دهید که مشتق جهتی در امتداد قوس Γ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{d\sigma}|f'(z)|.$$

۱۰

کاربردهای نگاشت همدیس

اینک با استفاده از نگاشت همدیس، به حل تعدادی مسئلهٔ فیزیکی می‌پردازیم که شامل معادلهٔ لاپلاس با دو متغیر مستقل‌اند. مسائلی در هدایت گرما، پتانسیل الکترواستاتیکی و جریان سیال بررسی خواهد شد. چون هدف این است که این مسائل روشها را تشریح کنند، آنها را در سطحی نسبتاً مقدماتی ارائه می‌کنیم.

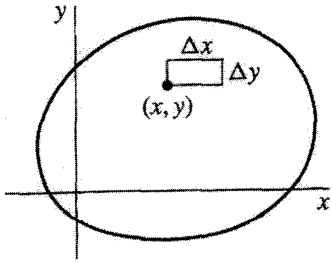
۱۰۰. دمای پایا

در نظریهٔ هدایت گرما شارگذرنده از سطح یک جسم صلب در نقطه‌ای از آن سطح عبارت است از مقدارگرمایی که در امتداد مشخصی عمود بر سطح در واحد زمان و در واحد سطح از آن نقطه جریان دارد. بنابراین شار برحسب واحدهایی از قبیل کالری در ثانیه در سانتیمتر مربع اندازه‌گیری می‌شود. در اینجا آن را با Φ نمایش می‌دهیم و با مشتق نرمال دمای T در نقطهٔ روی سطح تغییر می‌کند:

$$\Phi = -K\frac{dT}{dN} \qquad (K > ۰). \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) به قانون فوریه مشهور است و عدد ثابت K هدایت گرمایی جسم صلب، که فرض می‌کنیم همگن باشد، نامیده می‌شود.*

* این قانون به احترام فیزیک‌ریاضیدان فرانسوی ژوزف فوریه (۱۸۳۰ـ۱۷۶۸) نامگذاری شده است. ترجمهٔ کتاب او، مذکور در پیوست ۱، کتابی کلاسیک در نظریهٔ هدایت گرما است.



شکل ۱۳۴

نقاط جسم صلب با مختصات دکارتی در فضای سه‌بعدی تعیین می‌شوند، و ما توجه خود را به حالتهایی محدود می‌کنیم که دمای T فقط با مختصات x و y تغییر کند. چون T با مختص در امتداد محور عمود بر صفحهٔ xy تغییر نمی‌کند پس جریان گرما دوبعدی و موازی با آن صفحه است. علاوه بر آن فرض می‌کنیم، که جریان در حالت پایاست؛ یعنی، T با زمان تغییر نمی‌کند.

فرض می‌شود که در درون جسم صلب، انرژی گرمایی تولید یا تلف نشود. یعنی هیچ چشمه یا چاهک گرمایی در آن نیست. همچنین تابع دما، $T(x, y)$، و همهٔ مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن در هر نقطهٔ داخلی جسم صلب پیوسته‌اند. این حکم و فرمول (۱) دربارهٔ شارگرما اصول موضوعهٔ نظریهٔ ریاضی هدایت گرما هستند؛ اصول موضوعه‌ای که در نقاط درون یک جسم صلب شامل توزیع پیوستهٔ چشمه‌ها یا چاهکها نیز به‌کار می‌رود.

حال یک عنصر حجم واقع در داخل جسم صلب را در نظر می‌گیریم، این عنصر به شکل یک منشور مستطیلی به ارتفاع واحد عمود بر صفحهٔ xy است با قاعدهٔ Δx در Δy در آن صفحه (شکل ۱۳۴). نرخ زمانی جریان گرما به طرف راست در طول وجه سمت چپ عبارت از $-KT_x(x, y)\Delta y$ است و به طرف راست در طول وجه سمت راست عبارت از $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y$. با کم کردن نرخ اولی از دومی نرخ اتلاف گرمای عنصر را در میان آن دو وجه به دست می‌آوریم. اگر Δx خیلی کوچک باشد، نسبت حاصل را می‌توان چنین نوشت

$$-K\left[\frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x}\right]\Delta x \Delta y$$

یا

$$-KT_{xx}(x, y)\Delta x \Delta y\,. \qquad (۲)$$

البته عبارت (۲) تقریبی است و وقتی Δx و Δy کوچکتر شوند، دقتش افزایش می‌یابد.

به روشی مشابه نرخ اتلاف گرمای حاصل در میان وجه‌های دیگر عمود بر صفحهٔ xy چنین به‌دست می‌آید

$$-KT_{yy}(x,y)\Delta x\Delta y\,. \qquad (۳)$$

گرما فقط از طریق این چهار وجه به عنصر داخل یا از آن خارج می‌شود و دما درون عنصر پایاست. بنابراین، مجموع عبارات (۲) و (۳) صفر است؛ یعنی

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0\,. \qquad (۴)$$

پس تابع دما در هر نقطهٔ داخلی جسم صلب در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

با توجه به معادلهٔ (۴) و پیوستگی تابع دما و مشتقات جزئی آن در حوزه‌ای که معرف داخل جسم باشد، T تابع همسازی از x و y در حوزهٔ معرف داخل جسم صلب است.

سطوح $T(x,y)=c_1$، که در آن c_1 عدد حقیقی ثابتی است، تکدماهای درون جسم صلب هستند همچنین می‌توان آنها را به‌عنوان منحنیهایی در صفحهٔ xy در نظر گرفت؛ در این‌صورت $T(x,y)$ را می‌توان به‌عنوان دما در نقطهٔ (x,y) لایهٔ نازکی از ماده در آن صفحه تعبیر کرد که وجه‌های لایه عایق گرما هستند. تکدماها عبارت‌اند از منحنیهای تراز تابع T.

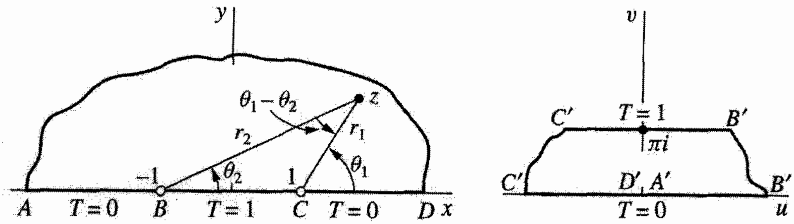
گرادیان T در هر نقطه بر تکدما عمود است و شار ماکسیمم در یک نقطه در جهت گرادیان در آن نقطه است. اگر $T(x,y)$ معرف دما در یک لایهٔ نازک باشد و S یک مزدوج همساز تابع T، آن‌گاه در هر نقطه‌ای که تابع تحلیلی $T(x,y)+iS(x,y)$ همدیس باشد گرادیان T همان بردار مماس بر منحنی $S(x,y)=c_2$ است. منحنیهای $S(x,y)=c_2$ خطوط جریان نامیده می‌شوند.

اگر مشتق نرمال dT/dN در امتداد قسمتی از مرز لایه صفر باشد، شار دما در امتداد آن قسمت صفر است. یعنی آن قسمت عایق گرما و بنابراین یک خط جریان است.

تابع T همچنین می‌تواند معرف غلظت ماده‌ای باشد که در جسم صلب پخش می‌شود. در آن حالت K ضریب پخش است. بحث فوق و استنتاج معادلهٔ (۴) در مورد پخش پایا_حالت هم به‌کار می‌رود.

۱۰۱. دماهای پایا در نیم‌صفحه

حال فرمولی برای دمای پایا، $T(x,y)$، در یک ورق نازک نیمه نامتناهی $y\geq 0$ پیدا می‌کنیم که وجوه آن عایق‌اند و لبهٔ $y=0$ آن، بجز تکهٔ $-1<x<1$، که در دمای واحد نگهداری



شکل ۱۳۵

$$w = \log \frac{z-۱}{z+۱} \left(\frac{r_۱}{r_۲} > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \theta_۱ - \theta_۲ < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

شده است، در دمای صفر نگه‌داشته می‌شود (شکل ۱۳۵). تابع $T(x, y)$ باید کراندار باشد؛ اگر ورق مفروض را به‌عنوان حالت حدی ورق $۰ \leq y \leq y_۰$ در نظر بگیریم، که وقتی $y_۰$ افزایش یابد، لبهٔ بالایی آن در دمای ثابتی نگه‌داشته می‌شود، این شرط طبیعی خواهد بود. در واقع از نظر فیزیکی معقول است که شرط کنیم وقتی y به بی‌نهایت میل می‌کند $T(x, y)$ به صفر میل کند.

مسئلهٔ مقدار مرزی را که باید حل کرد می‌توان چنین نوشت

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = ۰ \qquad (-\infty < x < \infty, y > ۰) \tag{۱}$$

$$T(x, ۰) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \\ ۰, & |x| > ۱ \end{cases} \tag{۲}$$

همچنین $|T(x, y)| < M$ که در آن M عدد ثابت مثبتی است. این یک مسئلهٔ دیریکله برای نیمهٔ بالایی صفحهٔ xy است. روش حل ما به دست آوردن مسئلهٔ دیریکلهٔ جدیدی برای یک ناحیه در صفحهٔ uv است. این ناحیه عبارت خواهد بود از تصویر این نیم‌صفحه تحت تبدیل $w = f(z)$ که در حوزهٔ $y > ۰$ تحلیلی و در امتداد مرز $y = ۰$ بجز در نقاط $(\pm ۱, ۰)$، که در آنها تعریف نشده است، همدیس است. پیدا کردن تابع همساز و کرانداری که در مسئلهٔ جدید صدق کند، کار ساده‌ای خواهد بود. در این‌صورت با استفاده از دو قضیهٔ فصل ۹، جواب مسئله در صفحهٔ uv را به جواب مسئلهٔ اصلی در صفحهٔ xy تبدیل می‌کنیم. به‌ویژه، تابعی همساز از u و v به تابعی همساز از x و y تبدیل خواهد شد و شرایط مرزی در صفحهٔ uv روی قسمتهای متناظر مرز در صفحهٔ xy حفظ خواهد شد. اگر همان نماد T را برای نمایش توابع دمای مختلف در دو صفحه به‌کار بریم، ابهامی پیش نخواهد آمد.

حال می‌نویسیم

$$z - ۱ = r_۱ \exp(i\theta_۱) \quad \text{و} \quad z + ۱ = r_۲ \exp(i\theta_۲)$$

که در آنها $۰ \leq \theta_k \leq \pi$ $(k = ۱, ۲)$. تبدیل

$$w = \log \frac{z-۱}{z+۱} = \ln \frac{r_۱}{r_۲} + i(\theta_۱ - \theta_۲) \qquad \left(\frac{r_۱}{r_۲} > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \theta_۱ - \theta_۲ < \frac{۳\pi}{۲}\right) \qquad (۳)$$

در نیم‌صفحهٔ بالایی $y \geq ۰$، بجز نقاط $z = \pm ۱$، تعریف شده است، زیرا در آن ناحیه $۰ \leq \theta_۱ - \theta_۲ \leq \pi$ (شکل ۱۳۵ را ببینید). حال وقتی $۰ \leq \theta_۱ - \theta_۲ \leq \pi$ مقدار لگاریتم، مقدار اصلی است و مثال ۳، بخش ۸۸ را یادآور می‌شویم که نیم‌صفحهٔ بالایی $y > ۰$ به روی نوار $۰ < v < \pi$ در صفحهٔ w نگاشته می‌شود. چنانکه قبلاً در آن مثال گفته شد، این نگاشت و نقاط مرزی متناظرش در شکل ۱۹، پیوست ۲ نشان داده شده است. در واقع همان شکل راهنمای ما برای رسیدن به تبدیل (۳) بود. قطعهٔ محور x واقع بین $z = -۱$ و $z = ۱$، که در آن $\theta_۱ - \theta_۲ = \pi$، به روی لبهٔ بالایی نوار نگاشته می‌شود و بقیهٔ محور x، که در آن $\theta_۱ - \theta_۲ = ۰$، به روی لبهٔ پایینی. شرایط تحلیلی‌بودن و همدیس‌بودن لازم به‌وضوح برای تبدیل (۳) برقرارند.

یک تابع همساز و کراندار از u و v که روی لبهٔ $v = ۰$ از نوار، مساوی صفر و روی لبهٔ $v = \pi$ مساوی واحد باشد مسلماً چنین است

$$T = \frac{۱}{\pi} v; \qquad (۴)$$

که چون قسمت موهومی تابع تام $(۱/\pi)w$ است، همساز است. اگر به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$w = \ln \left|\frac{z-۱}{z+۱}\right| + i \arg \left(\frac{z-۱}{z+۱}\right), \qquad (۵)$$

آن را به مختصات x و y تغییر دهیم، در می‌یابیم که

$$v = \arg \left[\frac{(z-۱)(\overline{z}+۱)}{(z+۱)(\overline{z+۱})}\right] = \arg \left[\frac{x^۲ + y^۲ - ۱ + i۲y}{(x+۱)^۲ + y^۲}\right]$$

یا

$$v = \arctan \left(\frac{۲y}{x^۲ + y^۲ - ۱}\right).$$

در اینجا برد تابع آرکتانژانت از ۰ تا π است زیرا

$$\arg\left(\frac{z-۱}{z+۱}\right)=\theta_۱-\theta_۲$$

و $\pi \leq \theta_۱-\theta_۲ \leq ۰$. حال فرمول (۴) به‌صورت زیر در می‌آید

$$T=\frac{۱}{\pi}\text{arctan}\left(\frac{۲y}{x^۲+y^۲-۱}\right)\qquad (۰\leq \text{arctan}\, t\leq \pi). \tag{۶}$$

چون تابع (۴) در نوار $۰ < v < \pi$ همساز و تبدیل (۳) در نیم‌صفحهٔ $y > ۰$ تحلیلی است، می‌توان با استفاده از قضیهٔ بخش ۹۸ نتیجه گرفت که تابع (۶) در این نیم‌صفحه همساز است. شرایط مرزی دو تابع همساز بر تکه‌های متناظر مرزها یکی هستند، زیرا از نوع $h=h_۰$ هستند، که در قضیهٔ بخش ۹۹ بررسی شدند. بنابراین تابع کراندار (۶) جواب مطلوب مسئلهٔ اصلی است. البته می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که تابع (۶) در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند و دارای مقادیری است که وقتی نقطهٔ (x,y) از بالا به محور xها میل می‌کند، به مقادیر نشان داده شده در سمت چپ شکل ۱۳۵ میل می‌کنند.

تکدماهای $T(x,y)=c_۱$ $(۰<c_۱<۱)$ عبارت‌اند از قوسهایی از دوایر

$$x^۲+(y-\cot \pi c_۱)^۲=\csc^۲ \pi c_۱,$$

که مراکز آنها روی محور yهاست و از نقاط $(\pm ۱,۰)$ می‌گذرند.

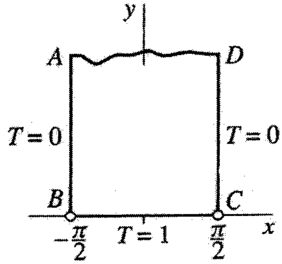
سرانجام توجه می‌کنیم که چون حاصلضرب یک تابع همساز در عددی ثابت نیز تابعی همساز است، تابع

$$T=\frac{T_۰}{\pi}\text{arctan}\left(\frac{۲y}{x^۲+y^۲-۱}\right)\qquad (۰\leq \text{arctan}\, t\leq \pi)$$

نمایش دمای پایا در نیم‌صفحهٔ مفروض است، هنگامی که به‌جای دمای $T=۱$ در امتداد قطعهٔ $-۱<x<۱$ از محور x دمای ثابت $T=T_۰$ را قرار دهیم.

۱۰۲. مسئله‌ای در این زمینه

یک‌قاب نیمه نامتناهی در فضای سه‌بعدی را در نظر می‌گیریم که به صفحات $x=\pm\pi/۲$ و $y=۰$ محدود است. دو سطح اول در دمای صفر نگهداری می‌شوند و سومی در دمای واحد.



شکل ۱۳۶

می‌خواهیم عبارتی برای دمای $T(x,y)$ در هر نقطهٔ داخلی قاب پیدا کنیم. این مسئله، همچنین مسئلهٔ یافتن دما در ورق نازکی است به شکل نوار نیمه نامتناهی $-\pi/۲ \le x \le \pi/۲$، $y \ge ۰$ وقتی که وجوه ورق کاملاً عایق‌بندی شده‌اند (شکل ۱۳۶).

مسئلهٔ مقدار مرزی در اینجا عبارت است از

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=۰ \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}, y>۰\right) \tag{۱}$$

$$T\left(-\frac{\pi}{۲},y\right)=T\left(\frac{\pi}{۲},y\right)=۰ \qquad (y>۰) \tag{۲}$$

$$T(x,۰)=۱ \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right) \tag{۳}$$

که در آن $T(x,y)$ کراندار است.

با توجه به مثال ۱ بخش ۸۹ و شکل ۹ پیوست ۲، نگاشت

$$w=\sin z \tag{۴}$$

این مسئلهٔ مقدار مرزی را به مسئله‌ای که در بخش ۱۰۱ مطرح شد تبدیل می‌کند (شکل ۱۳۵). بنابراین طبق جواب (۶) آن بخش،

$$T=\frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{۲v}{u^۲+v^۲-۱}\right) \qquad (۰\le \arctan t\le \pi). \tag{۵}$$

تغییر متغیرهایی را که در رابطهٔ (۴) گفته شده است می‌توان چنین نوشت

$$u=\sin x\cosh y, \qquad v=\cos x\sinh y;$$

و تابع همساز (۵) چنین می‌شود

$$T = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2\cos x\sinh y}{\sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y - 1}\right).$$

چون مخرج این کسر به $\sinh^2 y - \cos^2 x$ تبدیل می‌شود، خارج‌قسمت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{2\cos x\sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} = \frac{2(\cos x/\sinh y)}{1-(\cos x/\sinh y)^2} = \tan 2\alpha,$$

که در آن $\tan\alpha = \cos x/\sinh y$. بنابراین $T = (2/\pi)\alpha$؛ یعنی،

$$T = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) \qquad \left(0 \le \arctan t \le \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

این تابع آرکتانژانت دارای برد 0 تا $\pi/2$ است زیرا متغیر آن نامنفی است.

چون $\sin z$ تام و تابع (۵) در نیم‌صفحهٔ $v > 0$ همساز است، تابع (۶) در نوار $-\pi/2 < x < \pi/2$، $y > 0$ همساز است. همچنین تابع (۵) در شرط مرزی $T = 1$ وقتی $|u| < 1$ و $v = 0$ و نیز در شرط $T = 0$ هرگاه $|u| > 1$ و $v = 0$ صدق می‌کند. پس تابع (۶) در شرایط مرزی (۲) و (۳) صدق می‌کند. به‌علاوه در سراسر نوار داریم $|T(x,y)| \le 1$. بنابراین عبارت (۶)، فرمول دمای مطلوب است.

تکدماهای $T(x,y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ عبارت‌اند از قسمتهایی از سطوح

$$\cos x = \tan\left(\frac{\pi c_1}{2}\right)\sinh y$$

که درون قاب واقع‌اند، هر سطح از نقاط $(\pm\pi/2, 0)$ در صفحهٔ xy می‌گذرد. اگر K هدایت گرمایی باشد، شار گرما از سطح واقع در صفحهٔ $y = 0$ به‌توی قاب چنین است

$$-KT_y(x,0) = \frac{2K}{\pi\cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

شاری که از سطح واقع در صفحهٔ $x = \pi/2$ به طرف خارج می‌گذرد عبارت است از

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2K}{\pi\sinh y} \qquad (y > 0).$$

مسئلهٔ مقدار مرزی را که در این بخش مطرح شد می‌توان به روش جداسازی متغیرها نیز حل کرد. آن روش سرراست‌تر است، اما جواب را به شکل یک سری نامتناهی به‌دست می‌دهد.*

۱۰۳. دما در ربع صفحه

حال دماهای پایا در ورق نازکی به شکل یک ربع صفحه را چنان پیدا می‌کنیم که قسمتی در انتهای یک لبه عایق باشد، بقیهٔ آن لبه در دمای مشخصی، و لبهٔ دوم در دمای مشخص دیگری نگه‌داشته شود. سطوح عایق‌اند و لذا مسئله دوبعدی است.

مقیاس دما و واحد طول را می‌توان چنان اختیار کرد که مسئلهٔ مقدار مرزی مربوط به تابع دمای T چنین شود

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0 \qquad (x>0, y>0) \tag{1}$$

$$\begin{cases} T_y(x,0)=0, & 0<x<1 \\ T(x,0)=1, & x>1 \end{cases} \tag{2}$$

$$T(0,y)=0 \qquad (y>0) \tag{3}$$

که در آن $T(x,y)$ در ربع صفحه کراندار است. ورق و شرایط مرزی آن در سمت چپ شکل ۱۳۷ نشان داده شده‌اند. شرایط (۲)، مقدار مشتق نرمال تابع T را بر قسمتی از خط مرزی و مقدار خود تابع را بر بقیهٔ آن خط از پیش تعیین می‌کنند. روش جداسازی متغیرها که در پایان بخش ۱۰۲ بیان شد در مورد چنین مسائلی که در امتداد یک خط مرزی انواع مختلف شرایط را دارا هستند مناسب نیست.

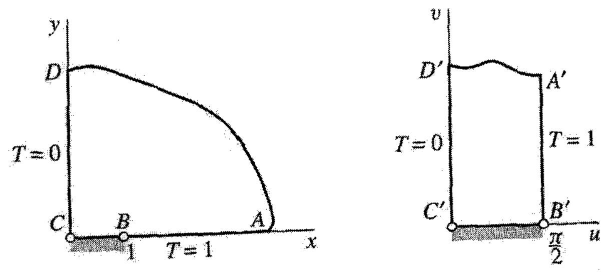
همان‌طور که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، تبدیل

$$z=\sin w \tag{4}$$

نگاشتی یک‌به‌یک است از نوار $0 \le u \le \pi/2$، $v \ge 0$ به روی ربع صفحهٔ $x \ge 0$، $y \ge 0$. حال ملاحظه می‌کنید که چون تبدیل مفروض یک‌به‌یک و به‌روست از وجود وارون آن مطمئن

* مشابه این مسئله در مسئلهٔ ۷ صفحهٔ ۱۴۲ کتاب
"Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., 2001.

این مؤلفان بررسی شده است. همچنین بحث کوتاهی دربارهٔ یکتایی جوابهای مسائل مقدار مرزی را می‌توان در فصل ۱۰ آن کتاب یافت.



شکل ۱۳۷

هستیم. چون تبدیل (۴) در سراسر نوار بجز در نقطهٔ $w = \pi/۲$ همدیس است، تبدیل وارون باید در سراسر ربع صفحه بجز در نقطهٔ $z = ۱$ همدیس باشد. همان‌طور که در شکل ۱۳۷ نشان داده شده است، این تبدیل وارون، پاره‌خط $۰ < x < ۱$ از محور x را به روی قاعدهٔ نوار می‌نگارد و بقیهٔ مرز را به روی اضلاع نوار.

چون وارون تبدیل (۴) در ربع صفحه، بجز وقتی که $z = ۱$، همدیس است، جواب مسئلهٔ مفروض را می‌توان با یافتن تابعی به‌دست آورد که در نوار همساز باشد و در شرایط مرزیی که در سمت راست شکل ۱۳۷ نشان داده شده صدق کند. ملاحظه می‌کنید که این شرایط مرزی از نوع $h = h_۰$ و $dh/dn = ۰$ در قضیهٔ بخش ۹۹ هستند.

تابع دمای مورد نیاز، T، برای مسئلهٔ مقدار مرزی جدید به‌وضوح عبارت است از

$$T = \frac{۲}{\pi}u, \qquad (۵)$$

تابع $(۲/\pi)u$ قسمت حقیقی تابع تام $(۲/\pi)w$ است. حال باید T را برحسب x و y بیان کنیم.

برای به‌دست آوردن u برحسب x و y ابتدا توجه می‌کنیم که بنابر رابطهٔ (۴)

$$x = \sin u \cosh v, \qquad y = \cos u \sinh v\,. \qquad (۶)$$

وقتی $۰ < u < \pi/۲$، اعداد $\sin u$ و $\cos u$ هر دو نامنفی‌اند و در نتیجه

$$\frac{x^۲}{\sin^۲ u} - \frac{y^۲}{\cos^۲ u} = ۱\,. \qquad (۷)$$

حال بهتر است توجه کنیم که به‌ازای هر u مشخص، هذلولی (۷) دارای کانونهایی است در نقاط

$$z = \pm\sqrt{\sin^۲ u + \cos^۲ u} = \pm ۱$$

و محور کانونی، که پاره‌خط واصل بین دو رأس آن است، به طول $\text{۲}\sin u$ است. پس، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های دوکانون از نقطهٔ (x,y) واقع بر قسمتی از هذلولی در ربع اول عبارت است از

$$\sqrt{(x+\text{۱})^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}-\sqrt{(x-\text{۱})^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}=\text{۲}\sin u\,.$$

از روابط (۶) مستقیماً نتیجه می‌شود که وقتی $u=\text{۰}$ یا $u=\pi/\text{۲}$ نیز این رابطه برقرار است. بنابراین با توجه به رابطهٔ (۵) تابع دمای مطلوب عبارت است از

$$T=\frac{\text{۲}}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sqrt{(x+\text{۱})^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}-\sqrt{(x-\text{۱})^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}}}{\text{۲}}\right] \qquad (\text{۸})$$

که چون $\text{۰}\le u\le\pi/\text{۲}$، تابع آرکسینوس دارای برد ۰ تا $\pi/\text{۲}$ است.

اگر بخواهیم تحقیق کنیم که این تابع در شرایط مرزی (۲) صدق می‌کند باید به‌خاطر بیاوریم که چون جذر مثبت است، $\sqrt{(x-\text{۱})^{\text{۲}}}$ معرف $x-\text{۱}$ است در صورتی‌که $x>\text{۱}$، و معرف $\text{۱}-x$ است درصورتی که $\text{۰}<x<\text{۱}$. همچنین توجه کنید که دما در هر نقطه در امتداد قسمت عایق لبهٔ پایینی ورق عبارت است از

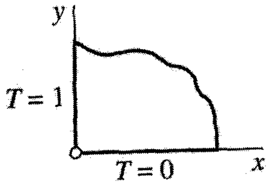
$$T(x,\text{۰})=\frac{\text{۲}}{\pi}\arcsin x \qquad (\text{۰}<x<\text{۱})\,.$$

می‌توان از رابطهٔ (۵) تحقیق کرد که تکدماهای $T(x,y)=c_{\text{۱}}(\text{۰}<c_{\text{۱}}<\text{۱})$ عبارت‌اند از قسمتهایی از هذلولیهای هم‌کانون (۷)، که در آنها $u=\pi c_{\text{۱}}/\text{۲}$، و در ربع اول واقع‌اند. چون تابع $(\text{۲}/\pi)v$ یک مزدوج همساز تابع (۵) است، خطوط جریان عبارت‌اند از ربع بیضیهای هم‌کانون حاصل از ثابت گرفتن v در روابط (۶).

تمرینها

۱. در مسئلهٔ مربوط به ورق نیمه نامتناهی که در سمت چپ شکل ۱۳۵ (بخش ۱۰۱) نشان داده شده است یک مزدوج همساز تابع دمای $T(x,y)$ را از رابطهٔ (۵) بخش ۱۰۱ به‌دست آورید و خطوط جریان گرما را پیدا کنید. نشان دهید که خطوط جریان متشکل‌اند از نیمهٔ بالایی محور yها و نیمه‌های بالایی برخی دوایر در هر دو طرف آن محور، مراکز این دوایر بر قطعهٔ AB یا CD محور x واقع‌اند.

۲. نشان دهید که اگر تابع T، بخش ۱۰۱، قید کراندار بودن را نداشته باشد، می‌توان به‌جای تابع



شکل ۱۳۸

همساز (۴) آن بخش، تابع همساز

$$T = \text{Im}\left(\frac{۱}{\pi}w + A\cosh w\right) = \frac{۱}{\pi}v + A\sinh u\sin v$$

را قرار داد که در آن A عدد حقیقی ثابت دلخواهی است. نتیجه بگیرید که، در این‌صورت، جواب مسئلهٔ دیریکله برای نوار صفحهٔ uv (شکل ۱۳۵) یکتا نخواهد بود.

۳. فرض کنید که از مسئلهٔ دما در قاب نیمه نامتناهی بخش ۱۰۲ (شکل ۱۳۶) شرط کرانداربودن T حذف شود. آن‌گاه با توجه به اثر افزودن قسمت موهومی تابع $A\sin z$ به جوابی که در آن بخش پیدا کردیم، که در آن A یک عدد حقیقی ثابت دلخواه است، نشان دهید که داشتن تعدادی نامتناهی جواب امکان‌پذیر است.

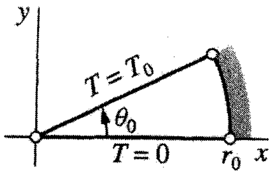
۴. با استفاده از تابع $\text{Log}\ z$، فرمولی برای دمای پایا و کراندار در ورقی که به شکل ربع صفحهٔ $x \geq ۰$، $y \geq ۰$ است پیدا کنید اگر وجوه کاملاً عایق و لبه‌های آن دارای دمای $T(x,۰) = ۰$ و $T(۰,y) = ۱$ باشند (شکل ۱۳۸). تکدماها و خطوط جریان را بیابید و بعضی از آنها را رسم کنید.

جواب: $T = (۲/\pi)\arctan(y/x)$.

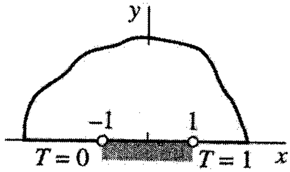
۵. دمای پایا در یک جسم صلب به شکل گوهٔ استوانه‌یی دراز را پیدا کنید که صفحات مرزی $\theta = ۰$ و $\theta = \theta_۰$ ($۰ < r < r_۰$)، به‌ترتیب در دماهای صفر و $T_۰$ نگه‌داشته شوند و سطح $r = r_۰$ ($۰ < \theta < \theta_۰$) آن کاملاً عایق باشد (شکل ۱۳۹).

جواب: $T = (T_۰/\theta_۰)\arctan(y/x)$.

۶. دمای پایا و کراندار $T(x,y)$ در جسم صلب نیمه نامتناهی $y \geq ۰$ را چنان پیدا کنید که بر قسمت $x < -۱$ ($y = ۰$) از مرز، $T = ۰$، بر قسمت $x > ۱$ ($y = ۰$) از مرز، $T = ۱$، و نوار $-۱ < x < ۱$ ($y = ۰$) از مرز عایق‌بندی شده باشد (شکل ۱۴۰).



شکل ۱۳۹



شکل ۱۴۰

جواب:
$$T = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲} - \sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}}{۲}\right]$$
$$\left(-\frac{\pi}{۲} \le \arcsin t \le \frac{\pi}{۲}\right).$$

۷. دمای پایا و کراندار در جسم صلب $x \geq ۰$، $y \geq ۰$ را پیدا کنید، هنگامی که سطوح مرزی، بجز نوارهای عایق با پهنای مساوی در گوشه، در دمای مشخصی نگه‌داشته شوند، همچنان‌که در شکل ۱۴۱ نشان داده شده است.

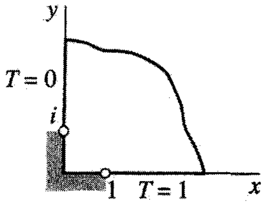
راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئلهٔ تمرین ۶ تبدیل کرد.

جواب:
$$T = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\arcsin\left[\frac{\sqrt{(x^۲-y^۲+۱)^۲+۴x^۲y^۲} - \sqrt{(x^۲-y^۲-۱)^۲+۴x^۲y^۲}}{۲}\right]$$
$$\left(-\frac{\pi}{۲} \le \arctan t \le \frac{\pi}{۲}\right).$$

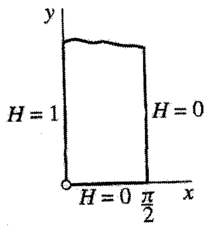
۸. مسئلهٔ دیریکلهٔ زیر را برای نوار نیمه نامتناهی (شکل ۱۴۲) حل کنید:

$$\begin{aligned} &H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = ۰ \qquad (۰ < x < \pi/۲, y > ۰),\\ &H(x,۰) = ۰ \qquad (۰ < x < \pi/۲),\\ &H(۰,y) = ۱, \quad H(\pi/۲, y) = ۰ \qquad (y > ۰), \end{aligned}$$

که در آن $۰ \le H(x,y) \le ۱$.



شکل ۱۴۱



شکل ۱۴۲

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئلهٔ تمرین ۴ تبدیل کرد.

جواب: $H = \frac{۲}{\pi}\arctan\left(\frac{\tanh y}{\tan x}\right)$.

۹. فرمولی برای دمای $T(r,\theta)$ در ورق نیمدایره‌یی $r \leq ۱$، $۰ \leq \theta \leq \pi$ با سطوح عایق را چنان پیدا کنید که در امتداد لبهٔ شعاعی $\theta = ۰$ $(۰ < r < ۱)$، $T = ۱$ و در بقیهٔ مرز $T = ۰$.

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئلهٔ تمرین ۸ تبدیل کرد.

جواب: $T = \frac{۲}{\pi}\arctan\left(\frac{۱-r}{۱+r}\cot\frac{\theta}{۲}\right)$.

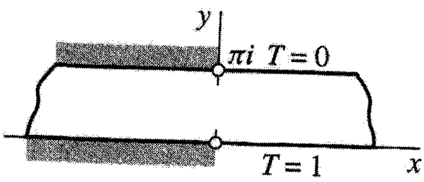
۱۰. مسئلهٔ مقدار مرزی برای ورق $x \geq ۰$، $y \geq ۰$ در صفحهٔ z را حل کنید درصورتی که وجوه آن عایق‌بندی شده و شرایط مرزی همانهایی باشند که در شکل ۱۴۳ نشان داده شده‌اند.

راهنمایی: با استفاده از نگاشت

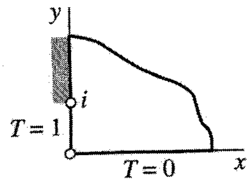
$$w = i/z = i\bar{z}/|z|^{۲}$$

این مسئله را به مسئله‌ای که در بخش ۱۰۳ (شکل ۱۳۷) مطرح شد تبدیل کنید.

۱۱. قسمتهای $x < ۰$ $(y = ۰)$ و $x < ۰$ $(y = \pi)$ از لبه‌های ورق نامتناهی $۰ \leq y \leq \pi$



شکل ۱۴۴



شکل ۱۴۳

و وجوه ورق، عایق گرما هستند. وقتی $x > 0$، شرایط $T(x, 0) = 1$ و $T(x, \pi) = 0$ حفظ می‌شوند (شکل ۱۴۴). دماهای پایا در ورق را پیدا کنید.

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئلهٔ تمرین ۶ تبدیل کرد.

۱۲. یک ورق نازک با وجوه عایق‌بندی شده را در نظر می‌گیریم که شکل آن نیمهٔ بالایی ناحیهٔ محدود به بیضی با کانونهای $(\pm 1, 0)$ است. دما روی قسمت بیضوی مرز برابر است با $T = 1$. دما در امتداد پاره‌خط $-1 < x < 1$ از محور x برابر است با $T = 0$ و بقیهٔ مرز در امتداد محور x عایق‌بندی شده است. به کمک شکل ۱۱ پیوست ۲ خطوط جریان گرما را پیدا کنید.

۱۳. بنابر بخش ۵۰ و تمرین ۷ آن بخش، اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در ناحیهٔ بسته و کراندار R پیوسته و در داخل R تحلیلی و غیر ثابت باشد، آن‌گاه تابع $u(x, y)$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را بر مرز R اختیار می‌کند و نه هرگز در داخل آن. با تعبیر $u(x, y)$ به‌عنوان یک دمای پایا، دلیلی فیزیکی بیان کنید که چرا باید این ویژگی مقادیر ماکسیمم و مینیمم برقرار باشد.

۱۰۴. پتانسیل الکترواستاتیکی

در یک میدان الکترواستاتیکی، شدت میدان در یک نقطه، بردار نمایش‌دهندهٔ نیرویی است که بر یک واحد بار مثبت واقع در آن نقطه وارد می‌شود. پتانسیل الکترواستاتیک تابعی است عددی از مختصات فضایی به قسمی که در هر نقطه مشتق جهتی آن در هر جهت عبارت است از منفی مؤلفهٔ شدت میدان در آن جهت.

برای دو ذرهٔ باردار مانا، اندازهٔ نیروی جاذبه یا دافعه‌ای که از یکی بر دیگری وارد می‌شود با حاصلضرب بارها نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ بین دو ذره نسبت معکوس دارد. با توجه به این قانون عکس مجذور، می‌توان نشان داد که در یک نقطه پتانسیل ناشی از یک ذرهٔ تک در فضا با فاصلهٔ بین نقطه و ذره نسبت معکوس دارد. پس می‌توان نشان داد که در هر ناحیهٔ بی‌بار پتانسیل ناشی از پخش بارها در خارج آن ناحیه در معادلهٔ لاپلاس برای فضای سه‌بعدی صدق می‌کند.

اگر شرایط به قسمی باشند که پتانسیل V در همهٔ صفحات موازی صفحهٔ xy یکی باشد آن‌گاه در ناحیه‌های بی‌بار، V تابع همسازی تنها از دو متغیر x و y است:

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = \circ \, .$$

بردار شدت میدان در هر نقطه به موازات صفحهٔ xy است و مؤلفه‌های x و y آن، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $-V_x(x, y)$ و $-V_y(x, y)$. پس این بردار عبارت است از گرادیان $V(x, y)$ با علامت منفی.

سطحی که در امتداد آن $V(x, y)$ ثابت باشد، یک سطح هم‌پتانسیل است. در یک نقطه بر سطح هادی، مؤلفهٔ مماسی بردار شدت میدان، در حالت سکون صفر است، زیرا بارها مجازند بر چنین سطحی حرکت نمایند. بنابراین $V(x, y)$، در امتداد سطح یک هادی ثابت و آن سطح یک سطح هم‌پتانسیل است.

اگر U یک مزدوج همساز V باشد منحنیهای $U(x, y) = c_۲$ در صفحهٔ xy خطوط شار نامیده می‌شوند. درصورتی که خط شاری یک منحنی هم‌پتانسیل $V(x, y) = c_۱$ را در نقطه‌ای قطع کند که در آن مشتق تابع تحلیلی $V(x, y) + iU(x, y)$ صفر نیست، دو منحنی در آن نقطه متعامدند و شدت میدان در آن نقطه بر خط شار مماس است.

مسائل مقدار مرزی برای پتانسیل V، همان مسائل ریاضیی هستند که برای دماهای پایای T بودند؛ و همانند حالت دماهای پایا، روشهای متغیرهای مختلط محدود به مسائل دوبعدی‌اند. مثلاً مسئله‌ای را که در بخش ۱۰۲ (شکل ۱۳۶) عنوان شد می‌توان به‌عنوان مسئلهٔ یافتن پتانسیل الکترواستاتیکی دوبعدی در فضای تهی

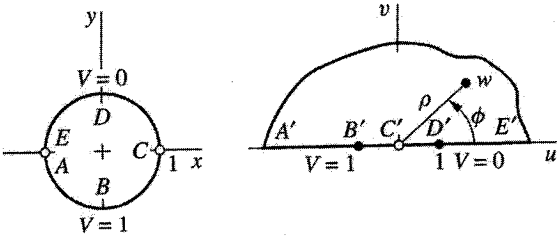
$$-\pi/۲ < x < \pi/۲ \text{،} \quad y > \circ$$

تعبیر کرد که به صفحات هادی $x = \pm\pi/۲$ و $y = \circ$، که در فصل مشترکشان عایق شده‌اند، محدود است، در صورتی‌که دو سطح اول در پتانسیل صفر و سومی در پتانسیل واحد نگه‌داشته شود.

پتانسیل جریان پایای برق در یک ورق مسطح هادی در نقاطی که عاری از چشمه و چاهک‌اند، نیز تابعی همساز است. پتانسیل گرانشی، مثال دیگری از تابع همساز در فیزیک است.

۱۰۵. پتانسیل در فضای استوانه‌یی

یک استوانهٔ مستدیر دراز توخالی از یک ورق نازک با جنس هادی درست شده و استوانه با برش در امتداد دو مولدش به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. این قسمتها به‌وسیلهٔ نوارهای باریکی



شکل ۱۴۵

از مواد عایق از هم جدا شده‌اند و به‌صورت الکترودهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند، یکی از آنها در پتانسیل صفر و دیگری در پتانسیل مشخص دیگری نگه‌داشته می‌شود. محورهای مختصات و واحدهای طول و اختلاف پتانسیل را به‌صورتی که در شکل ۱۴۵ نشان داده شده اختیار می‌کنیم. در این‌صورت پتانسیل الکترواستاتیکی $V(x,y)$ را بر هر مقطع عرضی فضای بسته که از دو انتهای استوانه دور باشد، به‌عنوان یک تابع همساز در درون دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحهٔ xy تعبیر می‌نماییم. توجه کنید بر نیمهٔ بالایی دایره، $V = ۰$، و بر نیمهٔ پایینی آن، $V = ۱$.

تبدیل خطی کسریی که نیم‌صفحهٔ بالایی را به روی دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ، محور حقیقی مثبت را به روی نیمهٔ بالایی دایره و محور حقیقی منفی را به روی نیمهٔ پایینی دایره می‌نگارد، در تمرین ۱ بخش ۸۸ بررسی شد. این نگاشت، در شکل ۱۳ پیوست ۲ داده شده است؛ و اگر در آنجا z و w را با هم عوض نماییم در می‌یابیم که وارون تبدیل

$$z = \frac{i - w}{i + w} \tag{۱}$$

مسئلهٔ جدیدی برای V در نیم‌صفحه ارائه می‌دهد، که در شکل ۱۴۵ نمایش داده شده است.

حال قسمت موهومی تابع

$$\frac{۱}{\pi}\mathrm{Log}\, w = \frac{۱}{\pi}\ln\rho + \frac{i}{\pi}\phi \qquad (\rho > ۰, ۰ \le \phi \le \pi) \tag{۲}$$

تابع کرانداری است از u و v که مقادیر ثابت لازم را بر دو قسمت $\phi = ۰$ و $\phi = \pi$ محور uها اختیار می‌کند. بنابراین تابع همساز مطلوب برای نیم‌صفحه، عبارت است از

$$V = \frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{v}{u}\right) \tag{۳}$$

که در آن مقادیر تابع آرکتانژانت بین ۰ و π تغییر می‌کند.

وارون تبدیل (۱)، عبارت است از

$$w = i\frac{1-z}{1+z}, \tag{۴}$$

که از روی آن می‌توان u و v را برحسب x و y بیان کرد. پس معادلهٔ (۳) چنین می‌شود

$$V = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right) \qquad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \tag{۵}$$

تابع (۵)، تابع پتانسیل برای فضای محدود به الکترودهای استوانه‌یی است، زیرا در درون دایره همساز است و مقادیر لازم را بر نیمدایره‌ها اختیار می‌کند. اگر بخواهیم این جواب را امتحان کنیم باید توجه کنیم که

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \arctan t = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \arctan t = \pi.$$

منحنیهای هم‌پتانسیل $V(x,y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ در ناحیهٔ دایره‌یی، قوسهایی هستند از دوایر

$$x^2 + (y + \tan \pi c_1)^2 = \sec^2 \pi c_1,$$

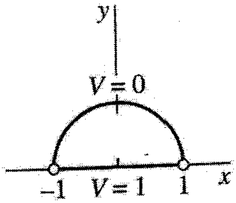
هر دایره از نقاط $(\pm 1, 0)$ می‌گذرد. همچنین پاره‌خطی از محور xها که بین این دو نقطه واقع است هم‌پتانسیل $V(x,y) = 1/2$ است. یک مزدوج همساز U برای V عبارت از $-(1/\pi)\ln\rho$، یا قسمت موهومی تابع $-(i/\pi)\operatorname{Log} w$ است. با توجه به رابطهٔ (۴)، U را می‌توان چنین نوشت

$$U = -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|.$$

از روی این رابطه می‌توان تحقیق کرد که خطوط شار $U(x,y) = c_2$ قوسهایی هستند از دوایری که مرکزشان روی محور xهاست. پاره‌خطی از محور yها که بین الکترودها واقع است نیز یک خط شار است.

تمرینها

۱. تابع همساز (۳)، بخش ۱۰۵، در نیم‌صفحهٔ $v \geq 0$ کراندار است و در شرایط مرزیی که در سمت راست شکل ۱۴۵ نمایش داده شده است، صدق می‌کند. نشان دهید اگر قسمت موهومی Ae^w را، که A عدد حقیقی ثابتی است، به آن تابع بیفزاییم، آنگاه تابع حاصل در همهٔ شرایط بجز شرط کراندار بودن صدق می‌کند.



شکل ۱۴۶

۲. نشان دهید که تبدیل (۴)، بخش ۱۰۵، نیمهٔ بالایی ناحیهٔ دایره‌یی را که در سمت چپ شکل ۱۴۵ نشان داده شده است به روی ربع اول صفحهٔ w می‌نگارد و قطر CE را به روی محور v مثبت. سپس پتانسیل الکترواستاتیکی V را در فضای محصور به نیم‌استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$، $y \geq ۰$ و صفحهٔ $y = ۰$ پیدا کنید به‌طوری که بر سطح استوانه‌یی، $V = ۰$ و بر سطح تخت $V = ۱$ (شکل ۱۴۶).

جواب: $V = \frac{۲}{\pi}\arctan\left(\frac{۱ - x^۲ - y^۲}{۲y}\right)$.

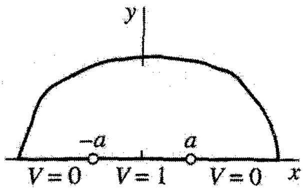
۳. پتانسیل الکترواستاتیکی $V(r, \theta)$ را در فضای $۱ > r > ۰$، $۰ < \theta < \pi/۴$ که به نیم‌صفحه‌های $\theta = ۰$ و $\theta = \pi/۴$ و قسمت $۰ \leq \theta \leq \pi/۴$ از سطح استوانه‌یی $r = ۱$ محدود می‌شود به قسمی پیدا کنید که بر سطوح تخت، $V = ۱$، و بر سطح استوانه‌یی، $V = ۰$ (تمرین ۲ را ببینید). تحقیق کنید که تابع حاصل در این شرایط مرزی صدق می‌کند.

۴. توجه کنید که همهٔ شاخه‌های $\log z$ یک مؤلفهٔ حقیقی دارند که همه‌جا بجز در مبدأ همساز است. سپس فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی $V(x, y)$ در فضای بین دو سطح استوانه‌یی هادی هم‌محور $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ = r_۰^۲$ $(r_۰ \neq ۱)$ بنویسید به قسمی که بر سطح اول $V = ۰$ و بر دومی $V = ۱$.

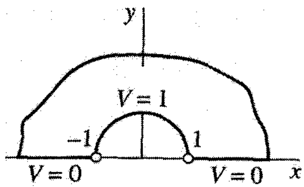
جواب: $V = \frac{\ln(x^۲ + y^۲)}{۲\ln r_۰}$.

۵. پتانسیل الکترواستاتیکی کراندار $V(x, y)$ در فضای $y > ۰$ محدود به صفحهٔ هادی نامتناهی $y = ۰$ را به قسمی پیدا کنید که نوار $(-a < x < a$، $y = ۰)$ که از بقیهٔ صفحه جدا شده در پتانسیل $V = ۱$ نگه‌داشته شود و در بقیهٔ صفحه، $V = ۰$ (شکل ۱۴۷). تحقیق کنید که تابع حاصل در شرایط مرزی صدق می‌کند.

جواب: $V = \frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{۲ay}{x^۲ + y^۲ - a^۲}\right)$ $\quad (۰ \leq \arctan t \leq \pi)$.



شکل ۱۴۷



شکل ۱۴۸

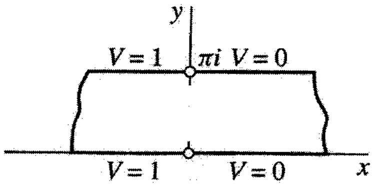
۶. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی در فضای نیمه نامتناهی که در شکل ۱۴۸ نشان داده شده و به دو نیم‌صفحه و یک نیم استوانه محدود است پیدا کنید به قسمی که در سطح استوانه‌یی $V = ۱$ باشد و بر سطوح تخت، $V = ۰$. بعضی از منحنیهای هم‌پتانسیل در صفحهٔ xy را رسم کنید.

جواب: $V = \frac{۲}{\pi}\arctan\left(\frac{۲y}{x^۲ + y^۲ - ۱}\right)$.

۷. پتانسیل V در فضای بین صفحات $y = ۰$ و $y = \pi$ را به قسمی پیدا کنید که بر قسمتی از هر یک از آن صفحات که $x > ۰$ داشته باشیم $V = ۰$، و بر قسمتهایی که $x < ۰$ داشته باشیم $V = ۱$ (شکل ۱۴۹). نتیجه را با شرایط مرزی امتحان کنید.

جواب: $V = \frac{۱}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right) \quad (۰ \leq \arctan t \leq \pi)$.

۸. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی V در فضای داخلی استوانهٔ دراز $r = ۱$ به قسمی پیدا کنید که بر ربع اول ($۰ < \theta < \pi/۲$ ،$r = ۱$) سطح استوانه‌یی، $V = ۰$، و بر بقیهٔ آن سطح ($\pi/۲ < \theta < ۲\pi$ ،$r = ۱$)، $V = ۱$ (رجوع کنید به تمرین ۵، بخش ۸۸ و شکل ۱۱۰). نشان دهید که بر محور استوانه $V = ۳/۴$. فرمول حاصل را با شرایط مرزی امتحان کنید.



شکل ۱۴۹

۹. با استفاده از شکل ۲۰ پیوست ۲، یک تابع دمای $T(x,y)$ بیابید که در حوزهٔ سایه‌زده شدهٔ صفحهٔ xy، که در آنجا نشان داده شده است، همساز باشد و در امتداد قوس ABC، $T = ۰$، و در امتداد پاره‌خط DEF، $T = ۱$. تحقیق کنید که تابع حاصل در شرایط مرزی لازم صدق می‌کند. (تمرین ۲ را ببینید.)

۱۰. مسئلهٔ دیریکله

$$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) = ۰ \qquad (۰ < x < a, ۰ < y < b)$$
$$V(x,۰) = ۰, \qquad V(x,b) = ۱ \qquad (۰ < x < a)$$
$$V(۰,y) = V(a,y) = ۰ \qquad (۰ < y < b)$$

را برای $V(x,y)$ در یک مستطیل، می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل کرد.* جواب عبارت است از

$$V = \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi y/a)}{m \sinh(m\pi b/a)} \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (m = ۲n - ۱).$$

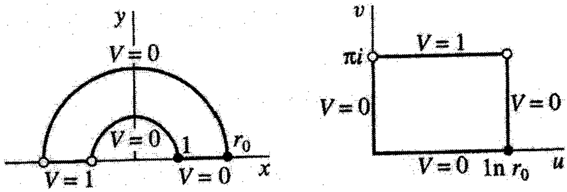
با پذیرفتن این نتیجه و وفق‌دادن آن برای مسئله در صفحهٔ uv، پتانسیل $V(r,\theta)$ در فضای $۱ < r < r_۰$، $۰ < \theta < \pi$ را به قسمی پیدا کنید که روی قسمتی از مرز که $\theta = \pi$ داشته باشیم $V = ۱$ و بر بقیهٔ مرز $V = ۰$. (شکل ۱۵۰ را ببینید.)

جواب: $V = \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha_n \theta)}{\sinh(\alpha_n \pi)} \cdot \frac{\sin(\alpha_n \ln r)}{۲n-۱} \quad \left[\alpha_n = \frac{(۲n-۱)\pi}{\ln r_۰}\right]$.

۱۱. به کمک جواب مسئلهٔ دیریکله برای مستطیل

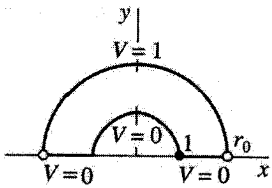
$$۰ \le x \le a, ۰ \le y \le b$$

* صفحات ۱۳۵ـ۱۳۷ و ۱۸۵ـ۱۸۷ کتاب مؤلفان را ببینید
"Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., 2001.



شکل ۱۵۰

$$w = \log z \left(r > ۰, -\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{۳\pi}{۲}\right)$$



شکل ۱۵۱

که در تمرین ۱۰ به‌کار برده شد، تابع پتانسیل $V(r, \theta)$ برای فضای

$$۰ < \theta < \pi \text{ ،} ۱ < r < r_۰$$

را به قسمتی پیدا کنید که بر قسمت $r = r_۰$، $۰ < \theta < \pi$ از مرز $V = ۱$ و بر بقیهٔ مرز $V = ۰$ (شکل ۱۵۱).

جواب: $(m = ۲n - ۱) \quad V = \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{r^m - r^{-m}}{r_۰^m - r_۰^{-m}}\right) \frac{\sin m\theta}{m}$.

۱۰۶. جریان سیال دوبعدی

توابع همساز نقش مهمی در هیدرودینامیک و آئرودینامیک بازی می‌کنند. مجدداً، فقط نوع حالت پایا و دوبعدی مسئله را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم که حرکت سیال در همهٔ صفحات موازی صفحهٔ xy یکسان است و سرعت، موازی آن صفحه و مستقل از زمان است. در این‌صورت کافی است حرکت یک‌لایهٔ جریان در صفحهٔ xy را در نظر بگیریم.

فرض کنیم بردار نمایش‌دهندهٔ عدد مختلط

$$V = p + iq$$

معرف سرعت یک ذرهٔ سیال در نقطهٔ (x, y) باشد، بنابراین مؤلفه‌های x و y بردار سرعت به‌ترتیب $p(x, y)$ و $q(x, y)$ هستند. فرض می‌شود که توابع $p(x, y)$ و $q(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آنها در نقاط داخلی یک ناحیهٔ جریان که در آن هیچ چشمه یا چاهکی از سیال وجود ندارد پیوسته باشند.

گردش سیال روی هر مسیر C، به‌عنوان انتگرال روی خط مؤلفهٔ مماسی بردار سرعت $V_T(x, y)$ نسبت به طول قوس σ روی C تعریف می‌شود:

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma\,. \tag{۱}$$

بنابراین، نسبت گردش روی C به طول C عبارت از تندی متوسط سیال روی آن مسیر است. در حسابان پیشرفته* نشان داده شده است که چنین انتگرالی را می‌توان این‌گونه نوشت

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma = \int_C p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy\,. \tag{۲}$$

درصورتی که C مسیر ساده و بسته‌ای واقع در یک حوزهٔ همبند سادهٔ جریان عاری از هر چشمه یا چاهک باشد، بنابر قضیهٔ گرین (بخش ۴۴ را ببینید) می‌توان نوشت

$$\int_C p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = \int\int_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dA$$

که در آن R ناحیهٔ بستهٔ متشکل از نقاط درون و روی C است. در نتیجه برای هر چنین مسیری داریم

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma = \int\int_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dA\,. \tag{۳}$$

یک تعبیر فیزیکی انتگرالده سمت راست عبارت (۳) برای گردش در امتداد مسیر سادهٔ بستهٔ C را می‌توان به سادگی ارائه داد. فرض می‌کنیم C نمایش دایره‌یی به شعاع r باشد که مرکزش

* ویژگیهایی از انتگرال روی خط در حسابان پیشرفته را که در این بخش و بخش بعد به‌کار می‌بریم، به‌عنوان مثال می‌توان در فصل ۱۰ کتاب زیر یافت

W. Kaplan, "Advanced Mathematics for Engineers", 1992.

در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ و جهت آن عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است. بنابراین یک تندی متوسط روی C با تقسیم گردش بر محیط $\text{۲}\pi r$ به‌دست می‌آید و سرعت زاویه‌یی متوسط متناظر سیال حول مرکز دایره از تقسیم آن تندی متوسط بر r حاصل می‌شود:

$$\frac{\text{۱}}{\pi r^{\text{۲}}}\int\int_R \frac{\text{۱}}{\text{۲}}[q_x(x,y) - p_y(x,y)]dA\,.$$

حال این عبارت مقدار متوسط تابع

$$\omega(x,y) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}[q_x(x,y) - p_y(x,y)] \qquad (\text{۴})$$

بر ناحیهٔ دایره‌یی R محدود به C نیز می‌باشد. حد آن وقتی r به صفر میل کند برابر با مقدار ω در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ است. بنابراین تابع $\omega(x,y)$ که دوران سیال نامیده می‌شود، سرعت زاویه‌یی حدی یک عنصر دایره‌یی از سیال را نمایش می‌دهد وقتی که دایره در مرکزش (x,y) جمع شود، نقطه‌ای که ω در آن محاسبه می‌شود.

اگر در هر نقطه از یک حوزهٔ همبند ساده $\omega(x,y) = \circ$، جریان در آن حوزه غیر دورانی است. در اینجا فقط جریانهای غیر دورانی را در نظر می‌گیریم و نیز فرض می‌کنیم سیال غیرقابل تراکم و بدون چسبندگی باشد. تحت این فرض که سیالات با چگالی یکنواخت ρ و جریان غیر دورانی و پایا هستند، می‌توان نشان داد که فشار سیال $P(x,y)$ در حالت خاص زیر از معادلهٔ برنولی[1] صدق می‌کند:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}|V|^{\text{۲}} = \text{ثابت}\,.$$

توجه کنید که فشار بیشترین مقدار را دارد هرگاه تندی $|V|$ کمترین مقدار باشد.

فرض کنید D حوزهٔ همبند ساده‌ای باشد که در آن جریان غیر دورانی است. بنابر رابطهٔ (۴) در سراسر D داریم $p_y = q_x$. این رابطهٔ بین مشتقات جزئی ایجاب می‌کند که انتگرال روی خط

$$\int_C p(s,t)ds + q(s,t)dt$$

عملاً مستقل از مسیر باشد هرگاه مسیر C تماماً در D واقع باشد و دو نقطهٔ دلخواه $(x_\circ, y_\circ)$ و (x,y) از D را به هم وصل کند. بنابراین اگر $(x_\circ, y_\circ)$ نقطهٔ مشخصی در D باشد، تابع

$$\phi(x,y) = \int_{(x_\circ,y_\circ)}^{(x,y)} p(s,t)ds + q(s,t)dt \qquad (\text{۵})$$

1. *Bernoulli*

روی D خوشتعریف است و با مشتق جزئی گرفتن از طرفین این رابطه، در می‌یابیم که

$$\phi_x(x,y) = p(x,y), \qquad \phi_y(x,y) = q(x,y). \tag{۶}$$

از روابط (۶) می‌بینیم که بردار سرعت $V = p + iq$ گرادیان ϕ است و مشتق جهتی ϕ در هر جهت مؤلفهٔ سرعت جریان در آن جهت را نمایش می‌دهد.

تابع $\phi(x,y)$ را پتانسیل سرعت می‌نامند. از رابطهٔ (۵) واضح است که وقتی نقطهٔ مرجع (x_0, y_0) تغییر کند، $\phi(x,y)$ با یک ثابت جمعی تغییر می‌کند. منحنیهای تراز $\phi(x,y) = c_1$ منحنیهای هم‌پتانسیل نامیده می‌شوند. چون بردار سرعت V گرادیان $\phi(x,y)$ است، در هر نقطه‌ای که V بردار صفر نباشد بر یک منحنی هم‌پتانسیل عمود است.

درست مثل حالت جریان گرما، این شرط که سیال غیرقابل تراکم فقط با جریان یافتن در سراسر مرز یک عنصر حجم، به آن داخل یا از آن خارج می‌شود مستلزم این است که $\phi(x,y)$ در معادلهٔ لاپلاس

$$\phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y) = 0$$

در حوزه‌ای که سیال عاری از چشمه یا چاهک است، صدق کند. با توجه به روابط (۶) و پیوستگی توابع p و q و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آنها، نتیجه می‌شود که مشتقات مرتبهٔ دوم ϕ در چنین حوزه‌ای پیوسته‌اند. بنابراین پتانسیل سرعت ϕ در آن حوزه، تابعی همساز است.

۱۰۷. تابع جریان

بنابر بخش ۱۰۶، بردار سرعت

$$V = p(x,y) + iq(x,y) \tag{۱}$$

را، برای یک حوزهٔ همبند ساده که جریان در آن غیر دورانی است، می‌توان چنین نوشت

$$V = \phi_x(x,y) + i\phi_y(x,y) = \operatorname{grad}\phi(x,y) \tag{۲}$$

که در آن ϕ پتانسیل سرعت است. درصورتی که بردار سرعت، بردار صفر نباشد، بر منحنی هم‌پتانسیلی که از نقطهٔ (x,y) می‌گذرد عمود است. اگر به‌علاوه $\psi(x,y)$ نمایش یک مزدوج همساز $\phi(x,y)$ باشد (بخش ۹۷ را ببینید)، بردار سرعت بر منحنی $\psi(x,y) = c_2$ مماس است.

منحنیهای $\psi(x,y) = c_2$ را خطوط جریان می‌نامند و تابع ψ تابع جریان است. به‌خصوص مرزی که سیال نمی‌تواند از آن عبور کند یک خط جریان است.

تابع تحلیلی

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

پتانسیل مختلط جریان نامیده می‌شود. توجه کنید که

$$F'(z) = \phi_x(x,y) + i\psi_x(x,y)$$

یا بنابر معادلات کوشی-ریمان داریم

$$F'(z) = \phi_x(x,y) - i\phi_y(x,y)\,.$$

در نتیجه عبارت (۲) برای سرعت چنین خواهد شد

$$V = \overline{F'(z)} \tag{۳}$$

تندی، یا اندازهٔ سرعت، با فرمول زیر داده می‌شود

$$|V| = |F'(z)|\,.$$

بنابر رابطهٔ (۵) بخش ۹۷، اگر ϕ در حوزهٔ همبند سادهٔ D همساز باشد، یک مزدوج همساز ϕ در آن را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\phi_t(s,t)ds + \phi_s(s,t)dt$$

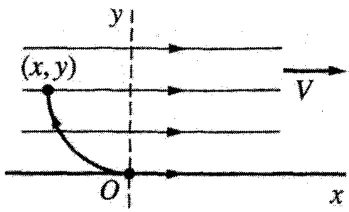
که در آن انتگرالگیری مستقل از مسیر است. بنابراین به‌کمک روابط (۶) بخش ۱۰۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\psi(x,y) = \int_C -q(s,t)ds + p(s,t)dt \tag{۴}$$

که در آن C مسیری است در D از (x_0,y_0) تا (x,y).

در حسابان پیشرفته نشان داده شده است که سمت راست رابطهٔ (۴) نمایش انتگرال مؤلفهٔ نرمال $V_N(x,y)$ نسبت به طول قوس σ روی C است که مؤلفه‌های x و y بردار V، به‌ترتیب عبارت‌اند از $p(x,y)$ و $q(x,y)$. بنابراین فرمول (۴) را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(x,y) = \int_C V_N(s,t)d\sigma\,. \tag{۵}$$



شکل ۱۵۲

بدین‌ترتیب از نظر فیزیکی، $\psi(x,y)$ نمایش نرخ زمانی جریان سیال در عرض C است. به عبارت دقیقتر، $\psi(x,y)$ معرف نرخ جریان بر حجم، در عرض سطحی به ارتفاع واحد است که روی منحنی C عمود بر صفحهٔ xy قرار دارد.

مثال. درصورتی که تابع

$$F(z) = Az \tag{۶}$$

پتانسیل مختلطی باشد که در آن A عدد ثابت حقیقی مثبتی است،

$$\phi(x,y) = Ax, \qquad \psi(x,y) = Ay\,. \tag{۷}$$

خطوط جریان $\psi(x,y) = c_۲$ عبارت‌اند از خطوط افقی $y = c_۲/A$ و سرعت در هر نقطه برابر است با

$$V = \overline{F'(z)} = A\,.$$

در اینجا نقطهٔ $(x_۰\,, y_۰)$ که در آن $\psi(x,y) = ۰$ نقطهٔ دلخواهی روی محور x است. اگر نقطهٔ $(x_۰\,, y_۰)$ در مبدأ گرفته شود، آن‌گاه $\psi(x,y)$ نرخ جریان روی هر مسیری است که از مبدأ به نقطهٔ (x,y) کشیده شود (شکل ۱۵۲). جریان یکنواخت و به سمت راست است. می‌توان آن را به‌عنوان جریان یکنواخت در نیم‌صفحهٔ بالایی محدود به محور x، که یک خط جریان است، یا جریان یکنواخت بین دو خط موازی $y = y_۱$ و $y = y_۲$ تعبیر کرد.

تابع ψ جریان معینی در ناحیه را مشخص می‌سازد. این سؤال را که آیا متناظر با یک ناحیهٔ مفروض، درست یک چنین تابعی، جز محتملاً با یک ضریب ثابت یا یک ثابت جمعی، موجود است یا نه، در اینجا بررسی نخواهیم کرد. در بعضی مثالهای آتی، که در آنها سرعت در نقاط دور از مانع، یکنواخت است، یا در فصل ۱۱، که چشمه و چاهک در کارند، وضعیت فیزیکی نشان می‌دهد که جریان با شرایط مفروض مسئله به‌طور یکتا معین می‌شود.

همیشه به صرف دانستن مقادیر تابعی همساز بر مرز یک ناحیه، نمی‌توان آن را به صورتی یکتا، حتی با تقریب یک عامل ثابت، تعیین کرد. در مثال بالا دیدیم که تابع $\psi(x,y) = Ay$ در نیم‌صفحهٔ $y > ۰$ همساز و بر مرز آن دارای مقادیر صفر است. تابع $\psi_۱(x,y) = Be^x \sin y$ نیز در آن شرایط صدق می‌کند. مع‌هذا، خط جریان $\psi_۱(x,y) = ۰$ نه فقط شامل خط $y = ۰$ است بلکه خطوط $y = n\pi$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ را نیز در بر می‌گیرد. در اینجا تابع $F_۱(z) = Be^z$ پتانسیل مختلط برای جریان در نوار بین خطوط $y = ۰$ و $y = \pi$ است، این دو خط، خط جریان $\psi_۱(x,y) = ۰$ را تشکیل می‌دهند؛ اگر $B > ۰$، سیال در امتداد خط پایینی به راست و در امتداد خط بالایی به چپ جریان می‌یابد.

۱۰۸. جریان حول یک گوشه و حول یک استوانه

برای تحلیل جریان در صفحهٔ xy یا z اغلب مناسبتر است که جریان متناظری در صفحهٔ uv یا w را در نظر بگیریم. در این صورت اگر ϕ پتانسیل سرعت و ψ تابع جریان برای جریانی در صفحهٔ uv باشد، می‌توان نتایج بخشهای ۹۸ و ۹۹ را برای این توابع همساز به‌کار برد. یعنی، در صورتی که حوزهٔ جریان D_w در صفحهٔ uv تصویر حوزهٔ D_z تحت تبدیل

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

باشد، که در آن f تحلیلی است، توابع

$$\psi[u(x,y), v(x,y)] \quad \text{و} \quad \phi[u(x,y), v(x,y)],$$

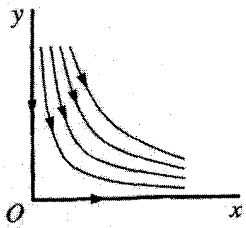
در D_z همسازند. این توابع جدید را ممکن است به‌ترتیب، پتانسیل سرعت و تابع جریان در صفحهٔ xy تعبیر کرد. خط جریان یا مرز طبیعی $\psi(u,v) = c_۲$ در صفحهٔ uv با خط جریان یا مرز طبیعی $\psi[u(x,y), v(x,y)] = c_۲$ در صفحهٔ xy متناظر است.

برای استفاده از این روش، معمولاً مؤثرترین کار این است که ابتدا تابع پتانسیل مختلط را برای ناحیهٔ صفحهٔ w بنویسیم و سپس از روی آن پتانسیل سرعت و تابع جریان را برای ناحیهٔ نظیر در صفحهٔ xy به‌دست آوریم. به عبارت دقیقتر، اگر تابع پتانسیل در صفحهٔ uv تابع

$$F(w) = \phi(u,v) + i\psi(u,v)$$

باشد، آنگاه تابع مرکب

$$F[f(z)] = \phi[u(x,y), v(x,y)] + i\psi[u(x,y), v(x,y)]$$



شکل ۱۵۳

پتانسیل مختلط مطلوب در صفحهٔ xy است.

برای اجتناب از افراط در نمادگذاری از همان نمادهای F، ϕ و ψ برای پتانسیل مختلط و غیره در هر دو صفحهٔ xy و uv استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. یک جریان در ربع اول $x > \circ$، $y > \circ$ را در نظر می‌گیریم که در امتداد موازی محور y پایین می‌آید اما همان‌طور که در شکل ۱۵۳ نشان داده شده است اجباراً گوشه‌ای در نزدیکی مبدأ را دور می‌زند. برای تعیین جریان، به خاطر می‌آوریم (مثال ۳، بخش ۱۲) که تبدیل

$$w = z^{\text{۲}} = x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}} + i\text{۲}xy$$

ربع اول را به روی نیمهٔ بالایی صفحهٔ uv و مرز ربع را به روی تمام محور u می‌نگارد.

از مثال بخش ۱۰۷، پی می‌بریم که پتانسیل مختلط برای جریان یکنواخت به طرف راست در نیمهٔ بالایی صفحهٔ w عبارت است از $F = Aw$، که در آن A عدد ثابت حقیقی مثبتی است. بنابراین پتانسیل در ربع اول عبارت است از

$$F = Az^{\text{۲}} = A(x^{\text{۲}} - y^{\text{۲}}) + i\text{۲}Axy; \qquad (\text{۱})$$

و در نتیجه تابع جریان برای جریان در ربع صفحه عبارت است از

$$\psi = \text{۲}Axy\,. \qquad (\text{۲})$$

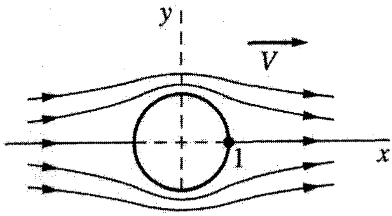
البته این تابع جریان در ربع اول همساز است و روی مرز صفر می‌شود.

خطوط جریان عبارت‌اند از شاخه‌های هذلولی متساوی‌الساقین

$$\text{۲}Axy = c_{\text{۲}}\,.$$

بنابر رابطهٔ (۳)، بخش ۱۰۷، سرعت سیال عبارت است از

$$V = \overline{\text{۲}Az} = \text{۲}A(x - iy)\,.$$



شکل ۱۵۴

ملاحظه کنید که تندی ذره،

$$|V| = ۲A\sqrt{x^۲ + y^۲}$$

با فاصلهٔ ذره تا مبدأ نسبت مستقیم دارد. مقدار تابع جریان (۲) در نقطهٔ (x, y) را می‌توان نرخ جریان در روی پاره‌خطی تعبیر کرد که از مبدأ تا آن نقطه امتداد دارد.

مثال ۲. فرض کنید استوانهٔ مستدیر و درازی به شعاع واحد در مقدار زیادی از سیال که با سرعت یکنواخت جریان دارد قرار گرفته باشد، محور استوانه بر جهت جریان عمود است. برای معین کردن جریان پایا حول استوانه، استوانه را با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم جریان دور از آن موازی محور x و به سمت راست باشد (شکل ۱۵۴). تقارن نشان می‌دهد که نقاط روی محور xها را که در خارج دایره است می‌توان نقاط مرزی تلقی کرد، و لذا لازم است که فقط قسمت بالایی شکل را ناحیهٔ جریان در نظر بگیریم.

مرز این ناحیهٔ جریان، متشکل از نیمدایرهٔ بالایی و قسمتهای محور xها در خارج دایره، به‌وسیلهٔ تبدیل زیر به روی تمام محور uها نگاشته می‌شود

$$w = z + \frac{۱}{z}.$$

همچنان‌که در شکل ۱۷ پیوست ۲ نشان داده شده است، این ناحیه به روی نیم‌صفحهٔ $v \geq ۰$ نگاشته می‌شود. پتانسیل مختلط برای جریان یکنواخت در آن نیم‌صفحه عبارت است از $F = Aw$، که در آن A عدد حقیقی ثابتی است. بنابراین پتانسیل مختلط برای ناحیهٔ خارج دایره و بالای محور xها عبارت است از

$$F = A\left(z + \frac{۱}{z}\right). \qquad (۳)$$

وقتی $|z|$ افزایش یابد سرعت

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\overline{z}^2}\right) \tag{۴}$$

به A نزدیک می‌شود؛ بنابراین همان‌طور که انتظار داشتیم، در نقاط دور از دایره، جریان تقریباً یکنواخت و موازی محور xها است. بنابر فرمول (۴)، داریم $V(\overline{z}) = \overline{V(z)}$، لذا همان فرمول، سرعتهای جریان در ناحیهٔ پایینی را نیز نمایش می‌دهد، نیمدایرهٔ پایینی یک خط جریان است.

بنابر فرمول (۳)، تابع جریان برای مسئلهٔ مفروض در مختصات قطبی عبارت است از

$$\psi = A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,. \tag{۵}$$

خطوط جریان

$$A\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = c_2$$

نسبت به محور y متقارن و دارای مجانبهایی به‌موازات محور xهایند. توجه کنید که وقتی $c_2 = 0$ خط جریان متشکل است از دایرهٔ $r = 1$ و قسمتهایی از محور x که در خارج دایره‌اند.

تمرینها

۱. بیان کنید چرا مؤلفه‌های سرعت را می‌توان از تابع جریان به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر به‌دست آورد

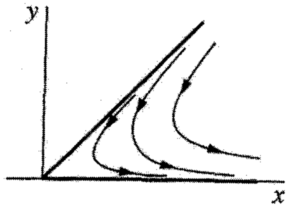
$$p(x,y) = \psi_y(x,y), \qquad q(x,y) = -\psi_x(x,y)\,.$$

۲. در یک نقطهٔ داخلی ناحیهٔ جریان، تحت شرایطی که فرض کرده‌ایم، فشار سیال نمی‌تواند از فشار در هر نقطهٔ دیگر همسایگیی از آن نقطه کمتر باشد. صحت این مطلب را به کمک احکام بخشهای ۱۰۶، ۱۰۷ و ۵۰ تحقیق کنید.

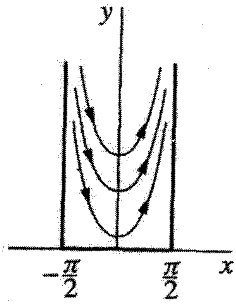
۳. برای جریان حول یک گوشه که در مثال ۱ بخش ۱۰۸ تشریح شد، در چه نقطه‌ای از ناحیهٔ $x \geq 0$، $y \geq 0$ فشار سیال بیشترین مقدار را دارد؟

۴. نشان دهید که تندی سیال در نقاط روی سطح استوانه‌یی، در مثال ۲، بخش ۱۰۸، عبارت است از $2A|\sin\theta|$ و فشار سیال روی استوانه در نقاط $z = \pm 1$ بیشترین مقدار و در نقاط $z = \pm i$ کمترین مقدار را دارد.

۵. پتانسیل مختلط برای جریان حول استوانهٔ $r = r_0$ را چنان بنویسید که اگر نقطه از استوانه دور شود سرعت V به عدد حقیقی و ثابت A نزدیک شود.



شکل ۱۵۵



شکل ۱۵۶

۶. تابع جریان

$$\psi = Ar^{۴} \sin ۴\theta$$

را برای سیال در ناحیهٔ زاویه‌یی $r \geq ۰$، $۰ \leq \theta \leq \pi/۴$ به‌دست آورید (شکل ۱۵۵) و چند خط جریان در داخل این ناحیه را رسم کنید.

۷. پتانسیل مختلط $F = A \sin z$ را برای جریانی در درون ناحیهٔ نیمه نامتناهی $-\pi/۲ \leq x \leq \pi/۲$، $y \geq ۰$ به‌دست آورید (شکل ۱۵۶). معادلات خطوط جریان را بنویسید.

۸. نشان دهید که اگر $\phi = A \ln r$، $(A > ۰)$، پتانسیل سرعت برای جریان در ناحیهٔ $r \geq r_۰$ باشد خطوط جریان عبارت‌اند از نیم‌خطهای $\theta = c$ $(r \geq r_۰)$، و متناظر با چشمه‌ای به قدرت $۲\pi A$ در مبدأ، نرخ جریان به خارج از هر دایرهٔ کامل حول مبدأ برابر $۲\pi A$ است.

۹. پتانسیل مختلط

$$F = A\left(z^{۲} + \frac{۱}{z^{۲}}\right)$$

را برای جریانی در ناحیهٔ $r \geq ۱$، $۰ \leq \theta \leq \pi/۲$ به‌دست آورید. فرمولهایی برای V و ψ بنویسید. به چگونگی تغییر تندی $|V|$ در امتداد مرز ناحیه توجه و تحقیق کنید که روی مرز $\psi(x, y) = ۰$.

۱۰. فرض کنید که جریان در فاصلهٔ بی‌نهایت دور از استوانهٔ به شعاع واحد، مربوط به مثال ۲، بخش ۱۰۸، در جهتی که با محور xها زاویهٔ α می‌سازد یکنواخت باشد، یعنی

$$\lim_{|z|\to\infty} V = Ae^{i\alpha} \qquad (A > ۰).$$

پتانسیل مختلط را پیدا کنید.

جواب: $F = A[ze^{-i\alpha} + \frac{۱}{z}e^{i\alpha}]$.

۱۱. قرار می‌دهیم

$$z - ۲ = r_۱ \exp(i\theta_۱), \qquad z + ۲ = r_۲ \exp(i\theta_۲)$$

و

$$(z^۲ - ۴)^{۱/۲} = \sqrt{r_۱ r_۲} \exp\left(i\frac{\theta_۱ + \theta_۲}{۲}\right),$$

که در آن

$$۰ \le \theta_۱ < ۲\pi \quad \text{و} \quad ۰ \le \theta_۲ < ۲\pi.$$

در این صورت تابع $(z^۲ - ۴)^{۱/۲}$ تک‌مقداری و همه جا تحلیلی است بجز روی بریدگی شاخه متشکل از قطعه خط بین نقاط $z = \pm ۲$ از محور xها. به‌علاوه از تمرین ۱۳ بخش ۸۵ پی می‌بریم که تبدیل

$$z = w + \frac{۱}{w}$$

دایرهٔ $|w| = ۱$ را بر روی پاره‌خط از $z = -۲$ تا $z = ۲$ می‌نگارد و حوزهٔ خارج این دایره را به روی مابقی صفحه می‌نگارد. با استفاده از همهٔ ملاحظات فوق نشان دهید که وارون تبدیل فوق را، در آن به‌ازای هر نقطهٔ z که روی بریدگی شاخه نباشد $|w| > ۱$، می‌توان چنین نوشت

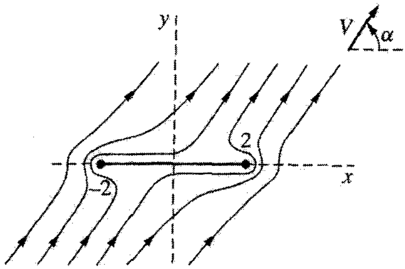
$$w = \frac{۱}{۲}[z + (z^۲ - ۴)^{۱/۲}] = \frac{۱}{۴}\left(\sqrt{r_۱}\exp\frac{i\theta_۱}{۲} + \sqrt{r_۲}\exp\frac{i\theta_۲}{۲}\right)^۲.$$

بدین‌ترتیب تبدیل بالا و این وارون، تناظری یک‌به‌یک بین نقاط دو حوزه برقرار می‌کنند.

۱۲. به کمک نتایج تمرینهای ۱۰ و ۱۱ فرمول زیر را به‌دست آورید

$$F = A[z\cos\alpha - i(z^۲ - ۴)^{۱/۲}\sin\alpha]$$

که عبارت از پتانسیل مختلط برای جریان پایا حول ورق درازی است که پهنای آن ۴ و مقطع



شکل ۱۵۷

عرضی آن پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $z = \pm ۲$ در شکل ۱۵۷ است، با این فرض که سرعت سیال در فاصلهٔ بی‌نهایت از ورق عبارت باشد از $A\exp(i\alpha)$. شاخهٔ $(z^۲ - ۴)^{۱/۲}$ شاخه‌یی است که در تمرین ۱۱ مشخص شد و $A > ۰$.

۱۳. نشان دهید که اگر در تمرین ۱۲ داشته باشیم $\sin\alpha \neq ۰$، تندی سیال در امتداد پاره‌خط واصل بین نقاط $z = \pm ۲$ در نقاط انتهایی بی‌نهایت است و در نقطهٔ وسط آن $A|\cos\alpha|$.

۱۴. برای سهولت، فرض کنید که در تمرین ۱۲، $۰ < \alpha \leq \pi/۲$. سپس نشان دهید که سرعت سیال در سمت بالای پاره‌خطی که نمایش ورق در شکل ۱۵۷ است، در نقطهٔ $x = ۲\cos\alpha$، و در سمت پایین پاره‌خط در نقطه $x = -۲\cos\alpha$، صفر است.

۱۵. یک دایره به مرکز $x_۰$ $(۰ < x_۰ < ۱)$ روی محور xها و مار بر نقطهٔ $z = -۱$، تحت تبدیل

$$w = z + \frac{۱}{z}$$

قرار دارد. تصویر تک‌تک نقاط ناصفر z را به‌طور هندسی می‌توان با جمع کردن بردارها

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{و} \qquad \frac{۱}{z} = \frac{۱}{r}\,e^{-i\theta}$$

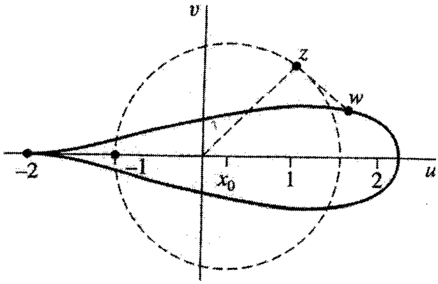
به‌دست آورد. با نگاشتن بعضی نقاط نشان دهید که تصویر دایره، مقطعی از نوع نشان داده شده در شکل ۱۵۸ است و نقاط خارج دایره به روی نقاط خارج مقطع نگاشته می‌شوند. این حالت خاصی است از طرح هواشکن ژوکوفسکی.[1] (تمرینهای ۱۶ و ۱۷ را نیز ببینید).

۱۶. (الف) نشان دهید که نگاشت دایره در تمرین ۱۵ همدیس است بجز در نقطهٔ $z = -۱$.

(ب) فرض کنید اعداد مختلط

$$t = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}, \qquad \tau = \lim_{\Delta w \to ۰} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

1. *Joukowski*



شکل ۱۵۸

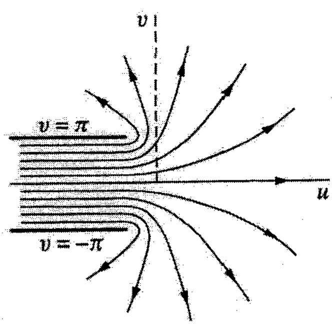
نمایش بردارهای واحدی باشند که به‌ترتیب بر یک قوس جهت‌دار در $z = -۱$ و تصویر آن قوس تحت تبدیل $w = z + (۱/z)$ مماس‌اند. نشان دهید که $\tau = -t^۲$ و بنابراین طرح ژوکوفسکی شکل ۱۵۸ در نقطهٔ $w = -۲$ دارای یک نقطهٔ بازگشت است. زاویهٔ بین مماسها در نقطهٔ بازگشت صفر است.

۱۷. وارون تبدیل

$$w = z + \frac{۱}{z}$$

که در تمرین ۱۵ به‌کار رفت، با تعویض z و w، در تمرین ۱۱ داده شده است. مطلوب است، پتانسیل مختلط برای جریان حول هواشکن، که در تمرین ۱۵ معرفی شد، به شرطی که V، سرعت سیال در فاصلهٔ بی‌نهایت دور از مبدأ، عدد حقیقی و ثابت A باشد.

۱۸. توجه کنید که تحت تبدیل $w = e^z + z$ هر یک از نیم‌خطهای $x \leq ۰, x \geq ۰$ از خط $y = \pi$ به روی نیم‌خط $v = \pi$ $(u \leq -۱)$ نگاشته می‌شود. همین‌طور، $y = -\pi$ به روی



شکل ۱۵۹

$v = -\pi$ $(u \leq -۱)$ نگاشته می‌شود و نوار $-\pi \leq y \leq \pi$ به روی صفحهٔ w. همچنین توجه کنید که وقتی x به $-\infty$ میل کند تغییر جهتها، $\arg(dw/dz)$، تحت این تبدیل به صفر میل می‌کند. نشان دهید که خطوط جریان یک سیال که از مجرای باز متشکل از نیم‌خطهای صفحهٔ w جریان دارد (شکل ۱۵۹) عبارت‌اند از تصاویر خطوط $y = c_۲$ در این نوار. این خطوط جریان، منحنیهای هم‌پتانسیل میدان الکترواستاتیکی در نزدیکی لبهٔ خازنی با صفحات موازی را نیز نمایش می‌دهند.

۱۱

تبدیل شوارتس-کریستوفل

در این فصل تبدیلی می‌سازیم، معروف به تبدیل شوارتس-کریستوفل، که محور xها و نیمهٔ بالایی صفحهٔ z را به روی یک چندضلعی بستهٔ ساده و داخل آن در صفحهٔ w، می‌نگارد. کاربردهای این تبدیل، در حل مسائل جریان سیال و نظریهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی مطرح شده است.

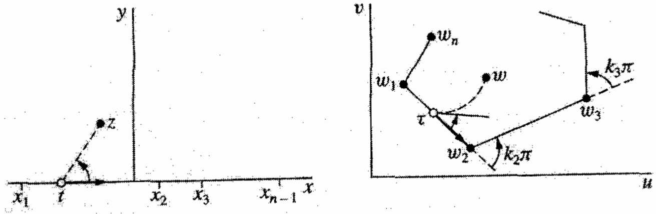
۱۰۹. نگاشت محور حقیقی به روی یک چندضلعی

بردار واحد مماس بر قوس هموار C در نقطهٔ $z_\circ$ را با عدد مختلط t نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم عدد τ بردار واحد مماس بر Γ، تصویر C تحت تبدیل $w = f(z)$، در نقطهٔ متناظر $w_\circ$ باشد. فرض می‌کنیم که f در $z_\circ$ تحلیلی باشد و $f'(z_\circ) \neq \circ$. بنابر بخش ۹۴ داریم

$$\arg \tau = \arg\ f'(z_\circ) + \arg\ t\,. \tag{۱}$$

به‌خصوص اگر C قطعه‌ای از محور xها با جهت مثبت به راست باشد، در هر نقطهٔ $z_\circ = x$ روی C، $t = ۱$ و $\arg\ t = \circ$. در این حالت رابطهٔ (۱) تبدیل می‌شود به

$$\arg \tau = \arg\ f'(x)\,. \tag{۲}$$



شکل ۱۶۰

اگر $f'(z)$ در امتداد آن قطعه دارای آوند ثابتی باشد، نتیجه می‌شود که $\arg \tau$ ثابت است. بنابراین Γ، تصویر C، نیز قطعه‌ای از یک خط راست است.

حال تبدیلی مانند $w = f(z)$ می‌سازیم که کل محور xها را به روی یک nضلعی بنگارد که در آن $x_{۱}$، $x_{۲}$، ...، $x_{n-۱}$ و ∞ نقاطی بر آن محورند که تصاویرشان رئوس آن چندضلعی است و

$$x_{۱} < x_{۲} < \cdots < x_{n-۱}\,.$$

این رئوس عبارت‌اند از نقاط $w_j = f(x_j)\ (j = ۱, ۲, \ldots, n-۱)$ و $w_n = f(\infty)$. تابع f باید به قسمی باشد که وقتی نقطهٔ z محور xها را می‌پیماید، $\arg f'(z)$ در نقاط $z = x_j$ از یک مقدار ثابت به مقدار ثابت دیگری جهش کند (شکل ۱۶۰).

اگر تابع f به قسمی اختیار شود که

$$f'(z) = A(z-x_{۱})^{-k_{۱}}(z-x_{۲})^{-k_{۲}}\cdots(z-x_{n-۱})^{-k_{n-۱}} \tag{۳}$$

که در آن A یک عدد مختلط ثابت و هر k_j عدد حقیقی ثابتی است، آن‌گاه وقتی z محور xها را می‌پیماید آوند $f'(z)$ به نحوی که از قبل تعیین شده است تغییر می‌نماید؛ زیرا آوند مشتق (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\arg f'(z) = \arg A - k_{۱}\arg(z-x_{۱}) \tag{۴}$$

$$- k_{۲}\arg(z-x_{۲}) - \cdots - k_{n-۱}\arg(z-x_{n-۱})\,.$$

هنگامی که $z = x$ و $x < x_{۱}$، داریم

$$\arg(z-x_{۱}) = \arg(z-x_{۲}) = \cdots = \arg(z-x_{n-۱}) = \pi\,.$$

هنگامی که $x_1 < x < x_2$، داریم $\arg(z - x_1) = 0$ و هر یک از آوندهای دیگر، π است. پس، بنابر رابطهٔ (۴)، وقتی z از نقطهٔ $z = x_1$ به سمت راست حرکت کند، $\arg f'(z)$ به‌طور ناگهانی به اندازهٔ زاویهٔ $k_1\pi$ افزایش می‌یابد. مجدداً وقتی z از نقطهٔ x_2 می‌گذرد مقدار $\arg f'(z)$ به اندازهٔ $k_2\pi$ جهش می‌کند و غیره.

با توجه به رابطهٔ (۲)، وقتی z از x_{j-1} به x_j تغییر مکان می‌دهد جهت بردار واحد τ ثابت است، پس w در آن جهت مشخص در امتداد خط راستی حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۶۰ نشان داده شده است، جهت τ در نقطهٔ w_j، تصویر x_j، به‌طور ناگهانی به اندازهٔ زاویهٔ $k_j\pi$ تغییر می‌کند. زوایای $k_j\pi$ عبارت‌اند از زوایای خارجی چندضلعیی که به‌وسیلهٔ نقطهٔ w پیموده می‌شود.

این زوایای خارجی را می‌توان به زوایایی بین $-\pi$ و π محدود کرد؛ یعنی، $-1 < k_j < 1$. فرض می‌کنیم که اضلاع چندضلعی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نکنند و به چندضلعی جهت مثبت، یا عکس حرکت عقربه‌های ساعت، داده شده باشد. در این‌صورت مجموع زوایای خارجی یک چندضلعی بسته 2π است و زاویهٔ خارجی در رأس w_n را، که تصویر نقطهٔ $z = \infty$ است، می‌توان چنین نوشت

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi .$$

بنابراین اعداد k_j باید لزوماً در شرایط زیر صدق کنند

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n = 2, \qquad -1 < k_j < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

توجه کنید که اگر

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2 \qquad (6)$$

آن‌گاه $k_n = 0$. در این حالت جهت τ در نقطهٔ w_n تغییر نمی‌کند، لذا w_n یک رأس نیست و چندضلعی $n - 1$ ضلع دارد.

وجود تابع نگاشت f، که مشتق آن با فرمول (۳) معین می‌شود، در بخش بعد ثابت خواهد شد.

۱۱۰. تبدیل شوارتس-کریستوفل

در عبارتِ (بخش ۱۰۹)

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (1)$$

برای مشتق تابعی که باید محور x را به روی چندضلعی بنگارد، فرض کنید عوامل $(z-x_j)^{-k_j}$ نمایش شاخه‌هایی از توابع توانی باشند که بریدگیهای شاخه‌یی آنها در زیر آن محور واقع است. به عبارت دقیقتر می‌نویسیم

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j} \exp(-ik_j\theta_j) \qquad \left(\frac{-\pi}{۲} < \theta_j < \frac{۳\pi}{۲}\right) \tag{۲}$$

که در آن $\theta_j = \arg(z-x_j)$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n-۱$. پس $f'(z)$ همه‌جا در نیم‌صفحهٔ $y \geq ۰$ بجز در $n-۱$ نقطهٔ شاخه‌یی x_j، تحلیلی است.

اگر $z_۰$ نقطه‌ای در آن ناحیهٔ تحلیلی، که در اینجا با R نمایش می‌دهیم، باشد آن‌گاه تابع

$$F(z) = \int_{z_۰}^{z} f'(s)ds \tag{۳}$$

در سراسر همان ناحیه تک‌مقداری و تحلیلی است، که در آن مسیر انتگرالگیری از $z_۰$ تا z مسیری دلخواه واقع در درون R است. به‌علاوه، $F'(z) = f'(z)$ (بخش ۴۲ را ببینید).

برای تعریف تابع F در نقطهٔ $z = x_۱$ به‌گونه‌ای که در آن نقطه پیوسته باشد، توجه داریم که $(z-x_۱)^{-k_۱}$ تنها عامل عبارت (۱) است که در $x_۱$ تحلیلی نیست. بنابراین اگر $\phi(z)$ معرف حاصلضرب بقیهٔ عوامل آن عبارت باشد، $\phi(z)$ در $x_۱$ تحلیلی است و در سراسر قرص بازی مانند $|z-x_۱| < R_۱$ به‌وسیلهٔ سری تیلر آن حول $x_۱$ نمایش داده می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z-x_۱)^{-k_۱}\phi(z) \\ &= (z-x_۱)^{-k_۱}\left[\phi(x_۱) + \frac{\phi'(x_۱)}{۱!}(z-x_۱) + \frac{\phi''(x_۱)}{۲!}(z-x_۱)^۲ + \cdots\right] \end{aligned}$$

یا

$$f'(z) = \phi(x_۱)(z-x_۱)^{-k_۱} + (z-x_۱)^{۱-k_۱}\psi(z) \tag{۴}$$

که در آن ψ در سراسر قرص باز تحلیلی، و بنابراین پیوسته است. چون $۱ - k_۱ > ۰$، اگر به جملهٔ آخر سمت راست رابطهٔ (۴) در $z = x_۱$ مقدار صفر را تخصیص دهیم، آن جمله معرف یک تابع پیوسته از z در سراسر نیمهٔ بالایی قرص است، که در آن $\operatorname{Im} z \geq ۰$. از اینجا نتیجه می‌شود که انتگرال جملهٔ آخری در امتداد مسیری از $Z_۱$ به z،

$$\int_{Z_۱}^{z} (s-x_۱)^{۱-k_۱}\psi(s)ds,$$

که $Z_۱$ و مسیر در آن نیم‌قرص واقع‌اند، در $z = x_۱$ تابع پیوسته‌ای از z است. انتگرال

$$\int_{Z_۱}^{z}(s-x_۱)^{-k_۱}ds = \frac{۱}{۱-k_۱}[(z-x_۱)^{۱-k_۱}-(Z_۱-x_۱)^{۱-k_۱}]$$

در امتداد همان مسیر نیز در $x_۱$ تابع پیوسته‌ای از z را نمایش می‌دهد هرگاه مقدار انتگرال را در $x_۱$ مساوی حدش، وقتی که z به $x_۱$ در نیم‌قرص میل کند، تعریف کنیم. بنابراین، انتگرال تابع (۴) در امتداد مسیر تعیین شده از $Z_۱$ تا z در $z = x_۱$ پیوسته است، پس انتگرال (۳) نیز چنین است، زیرا می‌توان آن را به‌عنوان انتگرالی در امتداد یک مسیر در R از $z_۰$ تا $Z_۱$، به‌علاوهٔ انتگرال از $Z_۱$ تا z نوشت.

استدلال بالا در مورد هر یک از $n-۱$ نقطهٔ x_j اعمال می‌شود تا F در سراسر ناحیهٔ $y \geq ۰$ پیوسته شود.

بنابر رابطهٔ (۱)، می‌توان نشان داد که به‌ازای عدد مثبت و به‌قدر کافی بزرگ R عدد ثابت و مثبتی مانند M هست به قسمی که اگر $\operatorname{Im} z \geq ۰$، آن‌گاه

$$|f'(z)| < \frac{M}{|z|^{۲-k_n}} \qquad \text{هرگاه} \qquad |z| > R. \tag{۵}$$

چون $۲ - k_n > ۱$، این ویژگی ترتیبی انتگرالده در رابطهٔ (۳)، نشان می‌دهد که وقتی z به بی‌نهایت میل کند، حد انتگرال موجود است؛ یعنی، عددی مانند W_n وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = W_n \qquad (\operatorname{Im} z \geq ۰). \tag{۶}$$

جزئیات استدلال را در تمرینهای ۱ و ۲ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

تابع نگاشتی را که مشتق آن با فرمول (۱) معین شده است، می‌توان چنین نوشت $f(z) = F(z) + B$، که در آن B عدد مختلط ثابتی است. تبدیل حاصل، یعنی

$$w = A\int_{z_۰}^{z}(s-x_۱)^{-k_۱}(s-x_۲)^{-k_۲}\cdots(s-x_{n-۱})^{-k_{n-۱}}ds + B \tag{۷}$$

تبدیل شوارتس_کریستوفل نام دارد که به افتخار دو ریاضیدان آلمانی شوارتس[1] (۱۹۲۱_۱۸۴۳) و کریستوفل[2] (۱۹۰۰_۱۸۲۹)، که مستقلاً آن را پیدا کرده‌اند، نامگذاری شده است.

تبدیل (۷) در سراسر نیم‌صفحهٔ $y \geq ۰$ پیوسته است و این تبدیل در آن نیم‌صفحه، بجز در نقاط x_j، همدیس است. فرض کرده‌ایم که اعداد k_j در شرایط (۵) بخش ۱۰۹ صدق کنند.

1. H. A. Schwarz 2. E. B. Christoffel

به‌علاوه فرض می‌کنیم که اعداد ثابت x_j و k_j به قسمی باشند که اضلاع چندضلعی یکدیگر را قطع نکنند، بنابراین چندضلعی یک مسیر سادهٔ بسته است. بدین‌ترتیب، بنابر بخش ۱۰۹، وقتی نقطهٔ z محور xها را در جهت مثبت بپیماید، تصویرش یعنی w چندضلعی P را در جهت مثبت خواهد پیمود و تناظری یک‌به‌یک بین نقاط روی آن محور و نقاط روی P موجود است. بنابر شرط (۶)، w_n، تصویر نقطهٔ $z = \infty$، موجود است و $w_n = W_n + B$.

اگر z یک نقطهٔ داخلی نیم‌صفحهٔ بالایی $y \geq ۰$ و $x_۰$ نقطه‌ای به غیر از x_jها روی محور xها باشد، آن‌گاه زاویه از بردار t در $x_۰$ تا پاره‌خط واصل بین $x_۰$ و z، مثبت و کوچکتر از π است (شکل ۱۶۰). در $w_۰$، تصویر $x_۰$، زاویهٔ متناظر از بردار τ تا تصویر پاره‌خط واصل بین $x_۰$ و z، دارای همان مقدار است. بنابراین تصاویر نقاط داخلی نیم‌صفحه در سمت چپ اضلاع چندضلعی واقع‌اند، وقتی اضلاع در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شوند. اثبات این مطلب که این تبدیل تناظری یک‌به‌یک بین نقاط داخلی نیم‌صفحه و نقاط درون چندضلعی برقرار می‌کند جزو تمرینات گذاشته شده است (تمرین ۳).

چندضلعی معین P مفروض است، تعداد اعداد ثابت در تبدیل شوارتس-کریستوفل را که می‌باید تعیین کرد تا محور xها را به روی P بنگارد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور می‌توان نوشت، $z_۰ = ۰$، $A = ۱$ و $B = ۰$ و فقط خواست که محور xها به روی یک چندضلعی P' مشابه P نگاشته شود. با معرفی اعداد ثابت A و B مناسب می‌توان اندازه و مکان P' را تنظیم کرد تا با اندازه و مکان P یکی شود.

همهٔ اعداد k_j، از روی زوایای خارجی در رئوس P تعیین می‌شوند. حال آنچه باقی می‌ماند انتخاب $n - ۱$ عدد ثابت x_j است. تصویر محور xها، چندضلعیی مانند P' است که دارای همان زوایای P است. اما اگر P' بخواهد مشابه با P باشد آن‌گاه $n - ۲$ ضلع همبند باید نسبت مشترکی با اضلاع متناظر P داشته باشند. این شرط به‌وسیلهٔ $n - ۳$ معادله برحسب $n - ۱$ مجهول حقیقی x_j بیان می‌شود. بنابراین دو تا از اعداد x_j، یا دو رابطه بین آنها، را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد، مشروط بر اینکه آن $n - ۳$ معادله برحسب مابقی $n - ۳$ مجهول دارای ریشه‌های حقیقی باشند.

وقتی نقطهٔ متناهی $z = x_n$ بر محور x، به جای نقطه در بی‌نهایت، نقطه‌ای را نمایش دهد که تصویرش رأس w_n است، بنابر بخش ۱۰۹، نتیجه می‌شود که تبدیل شوارتس-کریستوفل به‌صورت زیر در می‌آید

$$w = A \int_{z_۰}^{z} (s - x_۱)^{-k_۱}(s - x_۲)^{-k_۲} \cdots (s - x_n)^{-k_n} ds + B \qquad (۸)$$

که در آن $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2$. نماهای k_j از روی زوایای خارجی چندضلعی تعیین می‌شوند. اما در این حالت n عدد ثابت حقیقی x_j وجود دارند که باید در $n - 3$ معادلهٔ بالا صدق کنند. بنابراین، در تبدیل (۸) از محور xها به روی چندضلعی مفروض، سه تا از اعداد x_j، یا سه شرط بر آن n عدد، را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد.

تمرینها

۱. نامساوی (۵)، بخش ۱۱۰ را به‌دست آورید.

راهنمایی: فرض کنید R از هر یک از اعداد $|x_j| (j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ بزرگتر باشد. توجه کنید که برای R به‌قدر کافی بزرگ در صورتی که $|z| > R$، به‌ازای هر x_j نابرابریهای $|z|/2 < |z - x_j| < 2|z|$ برقرارند. سپس از رابطهٔ (۱)، بخش ۱۱۰، با شرایط (۵)، بخش ۱۰۹، استفاده کنید.

۲. با استفاده از شرط (۵)، بخش ۱۱۰، و شرایط کافی برای وجود انتگرالهای ناسرهٔ توابع حقیقی‌مقدار، نشان دهید که وقتی x به بی‌نهایت میل کند $F(x)$ دارای حدی مانند W_n است، که در آن $F(z)$ با رابطهٔ (۳) آن بخش تعریف شده است. همچنین، نشان دهید که وقتی R به ∞ میل کند، انتگرال $f'(z)$ بر هر کمانی از نیمدایرهٔ $|z| = R$ $(\operatorname{Im} z \geq 0)$ به 0 میل می‌کند. سپس، همچنان‌که در رابطهٔ (۶)، بخش ۱۱۰، بیان شد، نتیجه بگیرید که

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = W_n \qquad (\operatorname{Im} z \geq 0).$$

۳. بنابر بخش ۷۹، فرمول

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

را می‌توان برای تعیین (N) تعداد صفرهایی از تابع g به‌کار برد که در داخل مسیر ساده و بسته و به‌طور مثبت جهت‌دار شدهٔ C واقع‌اند، در صورتی که روی C، $g(z) \neq 0$ و C در حوزهٔ همبند سادهٔ D واقع و g در سراسر آن تحلیلی باشد و $g'(z)$ هیچ‌گاه بر D صفر نشود. در این فرمول قرار می‌دهیم $g(z) = f(z) - w_0$، که در آن $f(z)$ عبارت است از تابع نگاشت شوارتس-کریستوفل (۷) بخش ۱۱۰، و نقطهٔ w_0 یا در داخل و یا در خارج چندضلعی P است، که تصویر محور x است، بنابراین $f(z) \neq w_0$. فرض کنید مسیر C متشکل باشد از نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z| = R$ و پاره‌خط $-R < x < R$ از محور x که شامل هر $n - 1$ نقطهٔ x_j است، بجز اینکه حول هر

نقطهٔ x_j به‌جای یک پاره‌خط کوچک نیمهٔ بالایی دایرهٔ $|z - x_j| = \rho_j$ را، که آن پاره‌خط قطر این دایره است، قرار داده‌ایم. پس تعداد نقاط z در داخل C که $f(z) = w_\circ$ برابر است با

$$N_C = \frac{۱}{۲\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_\circ} dz\,.$$

توجه کنید که وقتی $|z| = R$ و R به بی‌نهایت میل کند، $f(z) - w_\circ$ به نقطهٔ ناصفر $W_n - w_\circ$ میل می‌کند و ویژگی ترتیبی (۵)، بخش ۱۱۰، در مورد $|f'(z)|$ را به یاد بیاورید. فرض کنید ρ_j به صفر میل کند و ثابت کنید که تعداد نقاط در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z که در آنها $f(z) = w_\circ$، مساوی است با

$$N = \frac{۱}{۲\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_\circ} dx\,.$$

نتیجه بگیرید که چون

$$\int_P \frac{dw}{w - w_\circ} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_\circ} dx,$$

$N = ۱$ هرگاه $w_\circ$ نقطهٔ داخلی P باشد و $N = \circ$ هرگاه $w_\circ$ نقطهٔ خارجی P باشد. بدین‌طریق نشان دهید که نگاشت نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > \circ$ به روی داخل P یک‌به‌یک است.

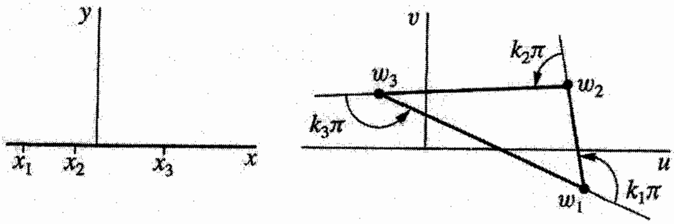
۱۱۱. مثلث و مستطیل

تبدیل شوارتس-کریستوفل، برحسب نقاط x_j نوشته می‌شود نه برحسب تصاویرشان، یعنی رئوس چندضلعی. بیش از سه تا از آن نقاط را نمی‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد، بنابراین وقتی چندضلعی مفروض بیش از سه ضلع دارد، برای اینکه این چندضلعی، یا هر چندضلعی مشابه آن را تصویر محور xها سازیم باید بعضی از نقاط x_j را تعیین کنیم. انتخاب شرایط برای تعیین این اعداد ثابت، شرایطی که به‌کار بردن آنها راحت باشد، اغلب احتیاج به ابتکار دارد.

محدودیت دیگر استفاده از این تبدیل به دلیل انتگرالگیری مربوط به آن است. اغلب نمی‌توان انتگرال را برحسب تعدادی متناهی تابع مقدماتی محاسبه کرد. در چنین حالاتی جواب مسائل به‌وسیلهٔ این تبدیل ممکن است بسیار پیچیده شود.

اگر این چندضلعی، مثلثی با رئوس $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ باشد (شکل ۱۶۱)، تبدیل را می‌توان چنین نوشت

$$w = A \int_{z_\circ}^{z} (s - x_۱)^{-k_۱}(s - x_۲)^{-k_۲}(s - x_۳)^{-k_۳} ds + B \qquad (۱)$$



شکل ۱۶۱

که در آن $k_۱ + k_۲ + k_۳ = ۲$. برحسب زوایای داخلی θ_j داریم

$$k_j = ۱ - \frac{۱}{\pi}\theta_j \qquad (j = ۱, ۲, ۳).$$

در اینجا هر سه نقطهٔ x_j را نقاطی متناهی بر محور xها گرفته‌ایم. به هر یک از آنها می‌توان مقادیر دلخواهی نسبت داد. اعداد مختلط ثابت A و B، مربوط به اندازه و مکان مثلث، را می‌توان به قسمی انتخاب کرد که نیم‌صفحهٔ بالایی به روی ناحیهٔ مثلثی مفروض نگاشته شود.

اگر رأس $w_۳$ را تصویر نقطه در بی‌نهایت بگیریم، تبدیل چنین می‌شود

$$w = A\int_{z_۰}^{z} (s - x_۱)^{-k_۱}(s - x_۲)^{-k_۲} ds + B \qquad (۲)$$

که در آن مقادیر حقیقی دلخواهی را می‌توان به $x_۱$ و $x_۲$ نسبت داد.

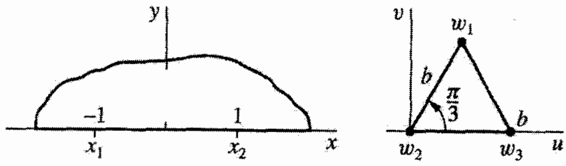
انتگرالهای روابط (۱) و (۲) نمایش توابع مقدماتی نیستند مگر اینکه مثلث با یک یا دو رأسش در بی‌نهایت تباهیده شود. در صورتی که مثلث متساوی‌الاضلاع یا مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ مساوی $\pi/۳$ یا $\pi/۴$ باشد، انتگرال رابطهٔ (۲) یک انتگرال بیضوی می‌شود.

مثال ۱. برای مثلث متساوی‌الاضلاع داریم $k_۱ = k_۲ = k_۳ = ۲/۳$. راحت‌تر این است که قرار دهیم $x_۱ = -۱$، $x_۲ = ۱$ و $x_۳ = \infty$ و از رابطهٔ (۲) که در آن $z_۰ = ۱$، $A = ۱$ و $B = ۰$ استفاده کنیم. در این‌صورت تبدیل چنین می‌شود

$$w = \int_{۱}^{z} (s + ۱)^{-۲/۳}(s - ۱)^{-۲/۳} ds. \qquad (۳)$$

واضح است که تصویر نقطهٔ $z = ۱$ نقطهٔ $w = ۰$ است؛ یعنی $w_۲ = ۰$. وقتی در انتگرال $z = -۱$، می‌توانیم بنویسیم $s = x$، که در آن $-۱ < x < ۱$. پس

$$x + ۱ > ۰ \qquad \text{و} \qquad \arg(x + ۱) = ۰$$



شکل ۱۶۲

در حالی که

$$\arg(x-۱)=\pi \quad \text{و} \quad |x-۱|=۱-x$$

بنابراین

$$w=\int_۱^{-۱}(x+۱)^{-۲/۳}(۱-x)^{-۲/۳}\exp\left(-\frac{۲\pi i}{۳}\right)dx$$
$$=\exp\left(\frac{\pi i}{۳}\right)\int_۰^۱\frac{۲dx}{(۱-x^۲)^{۲/۳}}. \qquad (۴)$$

با قرار دادن $x=\sqrt{t}$، این انتگرال آخر به حالت خاصی از انتگرالی تبدیل می‌شود که در تعریف تابع بتا به‌کار رفته است (تمرین ۷ بخش ۷۷). فرض کنید b معرف مقدار این انتگرال باشد، که مثبت است:

$$b=\int_۰^۱\frac{۲dx}{(۱-x^۲)^{۲/۳}}=\int_۰^۱ t^{-۱/۲}(۱-t)^{-۲/۳}dt=B\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right). \qquad (۵)$$

بنابراین، رأس $w_۱$ نقطهٔ زیر است (شکل ۱۶۲)

$$w_۱=b\exp\frac{\pi i}{۳}. \qquad (۶)$$

رأس $w_۳$ بر محور u مثبت قرار دارد، زیرا

$$w_۳=\int_۱^\infty(x+۱)^{-۲/۳}(x-۱)^{-۲/۳}dx=\int_۱^\infty\frac{dx}{(x^۲-۱)^{۲/۳}}.$$

اما در صورتی که z در امتداد محور x منفی به بی‌نهایت میل کند، مقدار $w_۳$ نیز با انتگرال (۳)

نمایش داده می‌شود یعنی

$$w_۳ = \int_۱^{-۱} (|x+۱||x-۱|)^{-۲/۳} \exp\left(-\frac{۲\pi i}{۳}\right) dx$$
$$+ \int_{-۱}^{-\infty} (|x+۱||x-۱|)^{-۲/۳} \exp\left(-\frac{۴\pi i}{۳}\right) dx .$$

پس، با توجه به اولین رابطه از روابط (۴) برای $w_۱$ داریم

$$w_۳ = w_۱ + \exp\left(-\frac{۴\pi i}{۳}\right) \int_{-۱}^{-\infty} (|x+۱||x-۱|)^{-۲/۳} dx$$
$$= b \exp \frac{\pi i}{۳} + \exp\left(-\frac{\pi i}{۳}\right) \int_۱^{\infty} \frac{dx}{(x^۲-۱)^{۲/۳}},$$

یا

$$w_۳ = b \exp \frac{\pi i}{۳} + w_۳ \exp\left(-\frac{\pi i}{۳}\right) .$$

با حل این معادله نسبت به $w_۳$ در می‌یابیم که

$$w_۳ = b . \tag{۷}$$

بدین‌ترتیب تحقیق کرده‌ایم که تصویر محور xها، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع b است که در شکل ۱۶۲ نشان داده شده است. همچنین می‌توان دید که

$$w = \frac{b}{۲} \exp \frac{\pi i}{۳} \quad \text{هرگاه} \quad z = ۰ .$$

در صورتی که چندضلعی مستطیل باشد، هر $k_j = ۱/۲$. اگر ± ۱ و $\pm a$ را آن نقاط x_j که تصویرشان رئوس مستطیل‌اند انتخاب کنیم و قرار دهیم

$$g(z) = (z+a)^{-۱/۲}(z+۱)^{-۱/۲}(z-۱)^{-۱/۲}(z-a)^{-۱/۲} \tag{۸}$$

که در آن $۰ \le \arg(z-x_j) \le \pi$ تبدیل شوارتس-کریستوفل، بجز تبدیل $W = Aw + B$ که اندازه و مکان مستطیل را تنظیم می‌کند، چنین می‌شود

$$w = -\int_۰^z g(s) ds . \tag{۹}$$

انتگرال (۹) عبارت است از حاصلضرب یک عدد ثابت در انتگرال بیضوی

$$\int_{0}^{z}(1-s^2)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}ds \qquad \left(k=\frac{1}{a}\right)$$

اما صورت (۸) انتگرالده با وضوح بیشتری، شاخه‌های توابع توانی را نشان می‌دهد.

مثال ۲. حال در صورتی که $a>1$، رئوس مستطیل را مشخص می‌کنیم. همچنان‌که در شکل ۱۶۳ نشان داده شده است $x_1=-a$، $x_2=-1$، $x_3=1$ و $x_4=a$. به روش زیر هر چهار رأس را می‌توان برحسب دو عدد مثبت b و c، که بستگی به مقدار a دارند، بیان کرد:

$$b=\int_{0}^{1}|g(x)|dx=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}, \qquad (10)$$

$$c=\int_{1}^{a}|g(x)|dx=\int_{1}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}. \qquad (11)$$

هرگاه $-1<x<0$، آن‌گاه

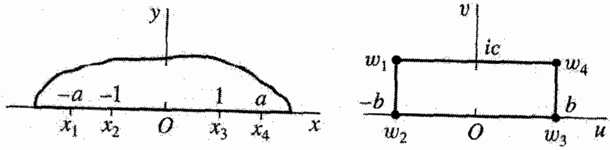
$$\arg(x+a)=\arg(x+1)=0 \quad \text{و} \quad \arg(x-1)=\arg(x-a)=\pi;$$

بنابراین

$$g(x)=\left[\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)\right]^{2}|g(x)|=-|g(x)|.$$

اگر $-a<x<-1$، آن‌گاه

$$g(x)=\left[\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)\right]^{3}|g(x)|=i|g(x)|.$$



شکل ۱۶۳

در نتیجه

$$w_۱ = -\int_۰^{-a} g(x)dx = -\int_۰^{-۱} g(x)dx - \int_{-۱}^{-a} g(x)dx$$

$$= \int_۰^{-۱} |g(x)|dx - i\int_{-۱}^{-a} |g(x)|dx = -b + ic.$$

این را جزو تمرینها می‌گذاریم تا نشان دهید که

$$w_۲ = -b, \qquad w_۳ = b, \qquad w_۴ = b + ic. \tag{۱۲}$$

مکان و ابعاد مستطیل در شکل ۱۶۳ نشان داده شده‌اند.

۱۱۲. چندضلعیهای تباهیده

حال تبدیل شوارتس-کریستوفل را برای بعضی از چندضلعیهای تباهیده که انتگرال مربوط به آنها توابع مقدماتی هستند به‌کار می‌بریم. با مثالهایی از تبدیلهای فصل ۸ که قبلاً دیده‌ایم به توضیح این مطلب می‌پردازیم.

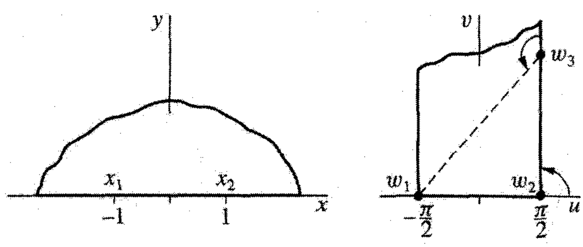
مثال ۱. نیم‌صفحهٔ $y \geq ۰$ را به‌روی نوار نیمه نامتناهی زیر می‌نگاریم

$$-\frac{\pi}{۲} \leq u \leq \frac{\pi}{۲}, \qquad v \geq ۰.$$

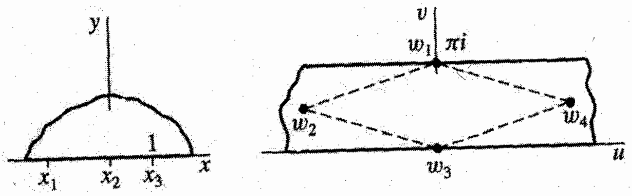
این نوار را به‌عنوان صورت حدی مثلثی با رئوس $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶۴) وقتی که قسمت موهومی $w_۳$ به بی‌نهایت میل کند.

مقادیر حدی زوایای خارجی عبارت‌اند از

$$k_۱\pi = k_۲\pi = \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad k_۳\pi = \pi.$$



شکل ۱۶۴



شکل ۱۶۵

نقاط $x_{۱} = -۱$، $x_{۲} = ۱$ و $x_{۳} = \infty$ را نقاطی انتخاب می‌کنیم که تصاویرشان رئوس چندضلعی باشند. پس مشتق تابع نگاشت را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dw}{dz} = A(z+۱)^{-۱/۲}(z-۱)^{-۱/۲} = A'(۱-z^{۲})^{-۱/۲}.$$

بنابراین $w = A' \sin^{-۱} z + B$. اگر قرار دهیم $A' = ۱/a$ و $B = b/a$ نتیجه می‌شود که

$$z = \sin(aw - b).$$

این تبدیل از صفحهٔ w به صفحهٔ z در این شرایط صدق می‌کند که اگر $a = ۱$ و $b = ۰$؛ در صورتی که $w = -\pi/۲$، $z = -۱$، و در صورتی که $w = \pi/۲$، $z = ۱$. تبدیل حاصل عبارت است از

$$z = \sin w$$

که در بخش ۸۹ درستی آن را، به‌عنوان تبدیلی که نوار مذکور را به روی نیم‌صفحه می‌نگارد تحقیق کردیم.

مثال ۲. نوار $۰ < v < \pi$ را به‌عنوان صورت حدی لوزی با رئوس $w_{۱} = \pi i$، $w_{۲}$، $w_{۳} = ۰$ و $w_{۴}$ در نظر می‌گیریم وقتی که نقطهٔ $w_{۲}$ بی‌نهایت به چپ برود و نقطهٔ $w_{۴}$ بی‌نهایت به راست (شکل ۱۶۵). در حد، زوایای خارجی چنین می‌شوند

$$k_{۱}\pi = ۰, \qquad k_{۲}\pi = \pi, \qquad k_{۳}\pi = ۰, \qquad k_{۴}\pi = \pi.$$

$x_{۱}$ را کمیتی می‌گیریم که باید تعیین شود و مقادیر $x_{۲} = ۰$، $x_{۳} = ۱$ و $x_{۴} = \infty$ را انتخاب می‌کنیم. پس مشتق تابع نگاشت شوارتس-کریستوفل چنین می‌شود

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_{۱})^{۰} z^{-۱}(z-۱)^{۰} = \frac{A}{z};$$

در نتیجه

$$w = A \operatorname{Log} z + B .$$

حال $B = 0$، زیرا در صورتی که $z = 1$، داریم $w = 0$. عدد ثابت A باید حقیقی باشد زیرا در صورتی که $z = x$ و $x > 0$ نقطهٔ w روی محور حقیقی واقع است. نقطهٔ $w = \pi i$ تصویر نقطهٔ $z = x_1$ است، که در آن x_1 یک عدد منفی است، بنابراین

$$\pi i = A \operatorname{Log} x_1 = A \ln |x_1| + A \pi i .$$

در اینجا با متحد قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی، می‌بینیم که $|x_1| = 1$ و $A = 1$. بنابراین، تبدیل چنین می‌شود

$$w = \operatorname{Log} z;$$

همچنین $x_1 = -1$. ما قبلاً از مثال ۳ بخش ۸۸، می‌دانیم که این تبدیل نیم‌صفحه را به روی این نوار می‌نگارد.

روشی که در این دو مثال به‌کار رفت دقیق نیست زیرا مقادیر حدی زوایا و مختصات به طریقی منظم معرفی نشده‌اند. مقادیر حدی، هر جا که مقتضی بوده، مورد استفاده واقع شده است. اما اگر درستی نگاشت حاصل را نشان دهیم، لازم نیست مراحلی را که در استنتاج تابع نگاشت طی کردیم توجیه نماییم. روشی صوری که در اینجا به‌کار بردیم کوتاهتر و کم‌زحمت‌تر از روشهای دقیق است.

تمرینها

۱. در تبدیل (۱)، بخش ۱۱۱، قرار دهید $B = z_0 = 0$ و

$$A = \exp \frac{3\pi i}{4}, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \qquad k_2 = \frac{1}{2}, \qquad k_3 = \frac{3}{4}$$

تا تبدیل حاصل محور xها را به روی یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بنگارد. نشان دهید که رئوس آن مثلث عبارت‌اند از نقاط

$$w_1 = bi, \qquad w_2 = 0, \qquad w_3 = b$$

که در آن b عدد ثابت مثبت زیر است

$$b = \int_{۰}^{۱} (۱ - x^{۲})^{-۳/۴} x^{-۱/۲} dx\,.$$

همچنین نشان دهید که

$$۲b = B\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}\right)$$

که در آن B تابع بتاست.

۲. فرمولهای (۱۲)، بخش ۱۱۱، را برای بقیهٔ رئوس مستطیلی که در شکل ۱۶۳ نشان داده شده است به‌دست آورید.

۳. نشان دهید که اگر در فرمولهای (۸) و (۹)، بخش ۱۱۱، داشته باشیم $۰ < a < ۱$، رئوس مستطیل، نقاط نشان داده شده در شکل ۱۶۳ هستند که در آن b و c اکنون دارای مقادیر زیرند

$$b = \int_{۰}^{a} |g(x)| dx, \qquad c = \int_{a}^{۱} |g(x)| dx\,.$$

۴. نشان دهید که حالت خاص

$$w = i\int_{۰}^{z} (s + ۱)^{-۱/۲}(s - ۱)^{-۱/۲} s^{-۱/۲} ds$$

از تبدیل شوارتس‌ـکریستوفل (۷)، بخش ۱۱۰، محور xها را به روی مربعی با رئوس زیر می‌نگارد

$$w_{۱} = bi, \qquad w_{۲} = ۰, \qquad w_{۳} = b, \qquad w_{۴} = b + ib$$

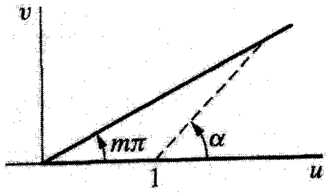
که در آنها عدد مثبت b برحسب تابع بتا چنین داده می‌شود:

$$b = \frac{۱}{۲} B\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}\right)\,.$$

۵. با استفاده از تبدیل شوارتس‌ـکریستوفل، تبدیل

$$w = z^{m} \ (۰ < m < ۱)$$

را نتیجه بگیرید که نیم‌صفحهٔ $y \geq ۰$ را به روی ناحیهٔ زاویه‌یی $|w| \geq ۰$، $۰ \leq \arg w \leq m\pi$ می‌نگارد و نقطهٔ $z = ۱$ را به روی نقطهٔ $w = ۱$. ناحیهٔ زاویه‌یی را به‌عنوان حالت حدی مثلثی در نظر بگیرید که در شکل ۱۶۶ نشان داده شده است، وقتی زاویهٔ α به ۰ میل کند.



شکل ۱۶۶

۶. شکل ۲۶، پیوست ۲ را در نظر بگیرید. وقتی نقطهٔ z در امتداد محور حقیقی منفی به سمت راست حرکت کند، w، تصویرش، در امتداد تمامی محور u به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی z پاره‌خط $0 \leq x \leq 1$ از محور حقیقی را بپیماید، w تصویرش در امتداد نیم‌خط $v = \pi i$ $(u \geq 1)$ به سمت چپ حرکت می‌کند؛ و وقتی z در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که $x \geq 1$ حرکت کند، w تصویرش در امتداد همان نیم‌خط $v = \pi i$ $(u \geq 1)$ به سمت راست حرکت می‌کند. به تغییرات جهت حرکت w در تصاویر نقاط $z = 0$ و $z = 1$ توجه کنید. این تغییرات این فکر را ایجاد می‌کند که مشتق تابع نگاشت باید عبارت باشد از

$$f'(z) = A(z - 0)^{-1}(z - 1),$$

که در آن A عدد ثابتی است، بدین‌ترتیب، به‌طور صوری تابع نگاشت

$$w = \pi i + z - \operatorname{Log} z,$$

را به‌دست آورید که می‌توان درستی آن را به‌عنوان نگاشتی که نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re} z > 0$ را به‌صورت نشان داده شده در شکل می‌نگارد نشان داد.

۷. وقتی نقطهٔ z در امتداد آن قسمت از محور حقیقی منفی که $x \leq -1$، به سمت راست حرکت کند، تصویرش در امتداد محور حقیقی منفی صفحهٔ w به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی z روی محور حقیقی در امتداد پاره‌خط $-1 \leq x \leq 0$ و سپس در امتداد پاره‌خط $0 \leq x \leq 1$ به سمت راست حرکت کند w، تصویرش، در امتداد پاره‌خط $0 \leq v \leq 1$ از محور v و در جهت افزایش v حرکت می‌کند و سپس در امتداد همان پاره‌خط در جهت کاهش v حرکت می‌نماید. بالاخره، اگر z در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که $x \geq 1$، به سمت راست حرکت کند، تصویرش در امتداد محور حقیقی مثبت صفحهٔ w به سمت راست حرکت می‌کند. به تغییرات جهت حرکت w در تصاویر نقاط $z = -1$، $z = 0$ و $z = 1$ توجه کنید. بدین‌ترتیب تابع نگاشتی

که مشتق آن عبارت باشد از

$$f'(z) = A(z+۱)^{-۱/۲}(z-۰)^{۱}(z-۱)^{-۱/۲},$$

که در آن A عدد ثابتی است، مطرح می‌شود. تابع نگاشت

$$w = \sqrt{z^{۲}-۱}$$

را که در آن $۰ < \arg\sqrt{z^{۲}-۱} < \pi$، به‌طور صوری به‌دست آورید. با درنظرگرفتن نگاشتهای متوالی

$$Z = z^{۲}\text{، } W = Z-۱ \quad \text{و} \quad w = \sqrt{W}$$

تحقیق کنید که تبدیل حاصل نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Re} z > ۰$ را به روی نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} w > ۰$ با بریدگیی در امتداد پاره‌خط $۰ < v \leq ۱$ از محور v می‌نگارد.

۸. وارون تبدیل خطی کسری

$$Z = \frac{i-z}{i+z}$$

قرص واحد $|Z| \leq ۱$ را به‌طور همدیس، بجز در نقطهٔ $Z = -۱$، به روی نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z \geq ۰$ می‌نگارد. (شکل ۱۳ پیوست ۲ را ببینید) فرض کنید Z_jها نقاطی روی دایرهٔ $|Z| = ۱$ باشند که تصویرشان نقاط $z = x_j$ $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ هستند که در تبدیل شوارتس‌ـکریستوفل (۸)، بخش ۱۱۰، به‌کار رفته است. به‌طور صوری بدون تعیین شاخه‌های توابع توانی نشان دهید که

$$\frac{dw}{dZ} = A'(Z-Z_{۱})^{-k_{۱}}(Z-Z_{۲})^{-k_{۲}}\cdots(Z-Z_n)^{-k_n}$$

که در آن A' عدد ثابتی است. بدین‌ترتیب نشان دهید که تبدیل

$$w = A'\int_{۰}^{Z}(S-Z_{۱})^{-k_{۱}}(S-Z_{۲})^{-k_{۲}}\cdots(S-Z_n)^{-k_n}\,dS + B$$

داخل دایرهٔ $|Z| = ۱$ را به روی داخل یک چندضلعی می‌نگارد، رئوس چندضلعی تصاویر نقاط Z_j روی این دایره هستند.

۹. در انتگرال تمرین ۸، فرض کنید اعداد Z_j $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ ریشه‌های nام واحد باشند. قرار دهید $\omega = \exp(۲\pi i/n)$ و $Z_{۱} = ۱$، $Z_{۲} = \omega$، …، $Z_n = \omega^{n-۱}$. فرض کنید هریک از اعداد k_j $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ دارای مقدار $۲/n$ باشد. در این‌صورت انتگرال تمرین ۸ چنین می‌شود

$$w = A'\int_{۰}^{Z}\frac{dS}{(S^n-۱)^{۲/n}} + B.$$

نشان دهید که وقتی $A' = ۱$ و $B = ۰$، این تبدیل داخل دایرهٔ واحد $|Z| = ۱$ را به روی داخل یک nضلعی منتظم می‌نگارد و مرکز چندضلعی نقطهٔ $w = ۰$ است.

راهنمایی: تصویر هر یک از نقاط Z_j $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ رأس یک چندضلعی با زاویهٔ خارجی $۲\pi/n$ در آن رأس است. قرار دهید

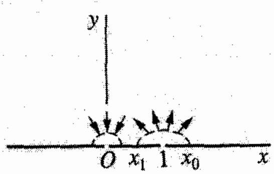
$$w_۱ = \int_۰^۱ \frac{dS}{(S^n - ۱)^{۲/n}},$$

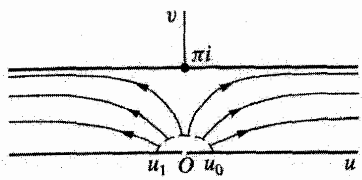
که در آن مسیر انتگرالگیری در امتداد محور حقیقی مثبت از $Z = ۰$ تا $Z = ۱$ است و مقدار اصلی ریشهٔ nام $(S^n - ۱)^۲$ گرفته شده است. سپس نشان دهید که تصاویر نقاط $Z_۲ = \omega$، ...، $Z_n = \omega^{n-۱}$ به‌ترتیب عبارت‌اند از نقاط $\omega w_۱$، ...، $\omega^{n-۱} w_۱$. بدین‌ترتیب تحقیق کنید که چندضلعی منتظم و مرکزش در $w = ۰$ است.

۱۱۳. جریان سیال از شکافی به درون یک کانال

حال مثال دیگری از جریان پایا و بی‌نقصی را ارائه می‌دهیم که در فصل ۱۰ بررسی شده است، مثالی که به ما کمک می‌کند تا نشان دهیم که چگونه چشمه‌ها و چاهکها را می‌توان در مسائل جریان سیال به‌حساب آورد. در این بخش و دو بخش آتی مسائل در صفحهٔ uv طرح شده‌اند و نه در صفحهٔ xy. بدین‌ترتیب می‌توانیم بدون تعویض صفحات مستقیماً به نتایج قبلی این فصل استناد کنیم.

جریان پایای دوبعدی سیال بین دو صفحهٔ موازی $v = ۰$ و $v = \pi$ را در نظر می‌گیریم وقتی که سیال از شکاف باریکی در امتداد خطی از صفحهٔ اول وارد می‌شود که در مبدأ بر صفحهٔ uv عمود است (شکل ۱۶۷). فرض کنید نرخ جریان سیالی که از شکاف به کانال وارد می‌شود به‌ازای هر واحد عمق کانال برابر با Q واحد حجم در واحد زمان باشد، که در آن عمق عمود بر صفحهٔ uv اندازه‌گیری می‌شود. پس در هر انتها نرخ جریان خارج شده $Q/۲$ است.





شکل ۱۶۷

تبدیل $w = \operatorname{Log} z$ نگاشتی یک‌به‌یک از نیمهٔ بالایی $y > 0$ صفحهٔ z به روی نوار $0 < v < \pi$ صفحهٔ w است. (مثال ۲، بخش ۱۱۲ را ببینید). تبدیل وارون

$$z = e^{w} = e^{u}e^{iv} \tag{1}$$

این نوار را به روی نیم‌صفحه می‌نگارد (مثال ۳، بخش ۱۳ را ببینید). تحت تبدیل (۱) تصویر محور u نیمهٔ مثبت محور x است و تصویر خط $v = \pi$ نیمهٔ منفی محور x. بنابراین مرز نوار به مرز نیم‌صفحه تبدیل می‌شود.

تصویر نقطهٔ $w = 0$ نقطهٔ $z = 1$ است. تصویر نقطهٔ $w = u_0$ که در آن $u_0 > 0$ نقطه‌ای است مانند $z = x_0$ که در آن $x_0 > 1$. نرخ جریان سیال در امتداد منحنیی که نقطهٔ $w = u_0$ را به نقطهٔ (u, v) درون نوار وصل می‌کند یک تابع جریان $\psi(u, v)$ است (بخش ۱۰۷). اگر u_1 یک عدد حقیقی منفی باشد آن‌گاه نرخ جریان از شکاف به کانال را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(u_1, 0) = Q\,.$$

حال تحت یک تبدیل همدیس تابع ψ به تابعی از x و y تبدیل می‌شود که تابع جریان در ناحیهٔ متناظر صفحهٔ z را نمایش می‌دهد؛ یعنی، نرخ جریان در امتداد منحنیهای متناظر در دو صفحه یکی است. مانند فصل ۱۰، همان نماد ψ برای نمایش توابع جریان مختلف در دو صفحه به‌کار رفته است. چون تصویر نقطهٔ $w = u_1$ نقطه‌ای است مانند $z = x_1$ که در آن $0 < x_1 < 1$، نرخ جریان در امتداد هر منحنی که نقاط $z = x_0$ و $z = x_1$ را به هم وصل کند و در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z واقع باشد نیز مساوی Q است. بنابراین در نقطهٔ $z = 1$ چشمه‌ای موجود است مساوی با چشمهٔ موجود در $w = 0$.

استدلال بالا به‌طور کلی برای نشان‌دادن این مطلب به‌کار می‌رود که تحت یک تبدیل همدیس چشمه یا چاهک در نقطهٔ مفروضی متناظر است با چشمه یا چاهک مساوی با آن در تصویر آن نقطه.

وقتی $\operatorname{Re} w$ به $-\infty$ میل کند، تصویر w به نقطهٔ $z = 0$ میل می‌کند. چاهکی به قدرت $Q/2$ در نقطهٔ $z = 0$ با چاهکی بی‌نهایت دور در سمت چپ نوار متناظر است. برای به‌کاربردن استدلال بالا در این حالت، نرخ جریان در امتداد منحنیی که مرزهای $v = 0$ و $v = \pi$ قسمت سمت چپ نوار را به هم وصل می‌کند، و نرخ جریان در امتداد تصویر آن منحنی در صفحهٔ z را در نظر می‌گیریم.

چاهک در انتهای سمت راست نوار به چاهکی در بی‌نهایت در صفحهٔ z تبدیل می‌شود.

تابع جریان ψ برای جریانی در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z در این حالت باید تابعی باشد که مقادیرش در امتداد هر یک از سه قسمت محور x ثابت است. به‌علاوه، وقتی نقطهٔ z حول نقطهٔ $z = ۱$ از وضعیت $z = x_۰$ به وضعیت $z = x_۱$ حرکت می‌کند، مقدارش باید به اندازهٔ Q افزایش یابد و وقتی z حول مبدأ به‌نحو متناظری حرکت کند مقدارش باید به اندازهٔ $Q/۲$ کاهش یابد. می‌بینیم که تابع

$$\psi = \frac{Q}{\pi}\left[\operatorname{Arg}(z-۱) - \frac{۱}{۲}\operatorname{Arg} z\right]$$

در این شرایط صدق می‌کند. علاوه بر این، این تابع در نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > ۰$ همساز است زیرا قسمت موهومی تابع زیر است

$$F = \frac{Q}{\pi}\left[\operatorname{Log}(z-۱) - \frac{۱}{۲}\operatorname{Log} z\right] = \frac{Q}{\pi}\operatorname{Log}(z^{۱/۲} - z^{-۱/۲}).$$

تابع F یک تابع پتانسیل مختلط برای جریان در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z است. چون $z = e^w$، تابع پتانسیل مختلط $F(w)$ برای جریان در کانال عبارت است از

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\operatorname{Log}(e^{w/۲} - e^{-w/۲}).$$

با حذف یک ثابت جمعی می‌توان نوشت

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\operatorname{Log}\left(\sinh\frac{w}{۲}\right). \qquad (۲)$$

یک نماد F را برای نمایش سه تابع متمایز به‌کار برده‌ایم، یک‌بار در صفحهٔ z و دوبار در صفحهٔ w.

بردار سرعت $\overline{F'(w)}$، با معادلهٔ زیر معین می‌شود

$$V = \frac{Q}{۲\pi}\coth\frac{\overline{w}}{۲}. \qquad (۳)$$

بنابر این فرمول، می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{|u|\to\infty} V = \frac{Q}{۲\pi}.$$

همچنین نقطهٔ $w = \pi i$ یک نقطهٔ توقف است؛ یعنی، سرعت در آن نقطه صفر است. بنابراین فشار سیال در امتداد دیوار $v = \pi$ کانال در نقاطی که مقابل شکاف‌اند دارای بیشترین مقدار است.

تابع جریان $\psi(u,v)$ برای کانال عبارت است از قسمت موهومی تابع $F(w)$ که با رابطهٔ (۲) داده شد. بنابراین، خطوط جریان $\psi(u,v) = c_۲$ عبارت‌اند از منحنیهای

$$\frac{Q}{\pi}\mathrm{Arg}\left(\sinh\frac{w}{۲}\right) = c_۲ .$$

این معادله به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\tan\frac{v}{۲} = c\tanh\frac{u}{۲}, \qquad (۴)$$

که در آن c عدد حقیقی ثابتی است. بعضی از این خطوط جریان در شکل ۱۶۷ نشان داده شده‌اند.

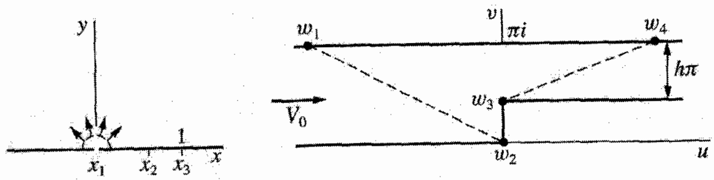
۱۱۴. جریان در کانالی با یک زانو

به‌منظور تشریح بیشتر موارد استعمال تبدیل شوارتس-کریستوفل، پتانسیل مختلط جریان یک سیال در کانالی را پیدا می‌کنیم که پهنایش به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند (شکل ۱۶۸). واحد اندازه‌گیری را طوری اختیار می‌کنیم که پهنای قسمت گشاد کانال π واحد باشد؛ پس $h\pi$، که در آن $۰ < h < ۱$ پهنای قسمت باریک را نمایش می‌دهد. فرض کنید عدد حقیقی و ثابت $V_۰$ معرف سرعت سیال در قسمت گشاد و دور از زانو باشد؛ یعنی،

$$\lim_{u\to-\infty} V = V_۰$$

که در آن متغیر مختلط V بردار سرعت را نمایش می‌دهد. پس نرخ جریان در واحد عمق کانال، یا قدرتِ چشمهٔ سمت چپ و قدرت چاهک سمت راست، عبارت است از

$$Q = \pi V_۰ . \qquad (۱)$$



شکل ۱۶۸

مقطع کانال را می‌توان به‌عنوان حالت حدی یک چهارضلعی با رئوس $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$ و $w_۴$ در نظر گرفت، که در شکل ۱۶۸ نشان داده شده‌اند، وقتی که اولین رأس، بی‌نهایت به چپ برود و آخرین رأس بی‌نهایت به راست. زوایای خارجی در حد چنین می‌شوند

$$k_۱\pi = \pi, \qquad k_۲\pi = \frac{\pi}{۲}, \qquad k_۳\pi = -\frac{\pi}{۲}, \qquad k_۴\pi = \pi .$$

مثل قبل به‌طور صوری عمل می‌کنیم و هر وقت مناسب باشد از مقادیر حدی استفاده می‌کنیم. اگر قرار دهیم $x_۱ = ۰$، $x_۳ = ۱$، $x_۴ = \infty$ و $x_۲$ را کمیتی بگیریم که باید تعیین شود، که در آن $۰ < x_۲ < ۱$، مشتق تابع نگاشت چنین می‌شود

$$\frac{dw}{dz} = Az^{-۱}(z - x_۲)^{-۱/۲}(z - ۱)^{۱/۲}. \tag{۲}$$

در اینجا برای آنکه تعیین ثابتهای A و $x_۲$ ساده باشد، بی‌درنگ به استفاده از پتانسیل مختلط جریان مبادرت می‌ورزیم. چشمهٔ جریان در فاصلهٔ بی‌نهایت دور سمت چپ کانال با چشمه‌ای مساوی در $z = ۰$ متناظر است (بخش ۱۱۳). تمام مرز مقطع عرضی کانال، تصویر محور x است. پس با توجه به رابطهٔ (۱)، تابع

$$F = V_۰ \operatorname{Log} z = V_۰ \ln r + iV_۰ \theta \tag{۳}$$

پتانسیل جریان در نیمهٔ بالایی صفحهٔ z، با چشمهٔ مورد نظر در مبدأ است. در اینجا تابع جریان عبارت است از $\psi = V_۰ \theta$. مقدار آن روی هر نیمدایرهٔ $z = Re^{i\theta}$ $(۰ \le \theta \le \pi)$، که در آن $R > ۰$، از ۰ تا $V_۰ \pi$ افزایش پیدا می‌کند، هرگاه θ از ۰ تا π تغییر کند. [با رابطهٔ (۵) بخش ۱۰۷، و تمرین ۸، بخش ۱۰۸، مقایسه کنید.]

مزدوج مختلط سرعت V در صفحهٔ w را می‌توان چنین نوشت

$$\overline{V(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{dw}.$$

بنابراین، با توجه به روابط (۲) و (۳)، می‌توان نوشت

$$\overline{V(w)} = \frac{V_۰}{A}\left(\frac{z - x_۲}{z - ۱}\right)^{۱/۲}. \tag{۴}$$

در وضعیت حدی نقطهٔ $w_۱$، که با $z = ۰$ متناظر است، سرعت عبارت است از عدد حقیقی و ثابت $V_۰$. بدین‌ترتیب از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود که

$$V_۰ = \frac{V_۰}{A}\sqrt{x_۲}.$$

در وضعیت حدی $w_۴$، که با $z = \infty$ متناظر است، فرض کنید عدد حقیقی $V_۴$ معرف سرعت باشد. حال موجه به نظر می‌رسد که اگر پاره‌خطی عمودی که قسمت باریک کانال را می‌پیماید بی‌نهایت به راست برود، در هر نقطهٔ آن پاره‌خط، V به $V_۴$ میل نماید. اگر ابتدا w را از روی رابطهٔ (۲) به‌عنوان تابعی از z پیدا می‌کردیم می‌توانستیم این حدس را به‌عنوان یک حقیقت ثابت کنیم، اما برای اینکه بحث را کوتاه کرده باشیم، فرض می‌کنیم که این حدس درست باشد. پس، چون جریان پایاست، داریم

$$\pi h V_۴ = \pi V_۰ = Q$$

یا $V_۴ = V_۰/h$. فرض کنیم در رابطهٔ (۴) متغیر z به بی‌نهایت میل کند، بنابراین در می‌یابیم که

$$\frac{V_۰}{h} = \frac{V_۰}{A}.$$

پس،

$$A = h, \qquad x_۲ = h^۲ \tag{۵}$$

و

$$\overline{V(w)} = \frac{V_۰}{h}\left(\frac{z-h^۲}{z-۱}\right)^{۱/۲}. \tag{۶}$$

بنابر رابطهٔ (۶) می‌توان ثابت کرد که قدرمطلق $|V|$ سرعت در گوشهٔ $w_۳$ زانو بی‌نهایت می‌شود زیرا تصویر نقطهٔ $z = ۱$ است. همچنین گوشهٔ $w_۲$ یک نقطهٔ توقف است، نقطه‌ای که در آن $V = ۰$. بنابراین در امتداد کرانهٔ کانال فشار سیال در $w_۲$ بیشترین و در $w_۳$ کمترین است.

برای نوشتن رابطهٔ بین پتانسیل و متغیر w باید از رابطهٔ (۲)، که حال می‌توان آن را به‌صورت

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{z}\left(\frac{z-۱}{z-h^۲}\right)^{۱/۲} \tag{۷}$$

نوشت، انتگرال بگیریم. در اینجا با قرار دادن متغیر جدید s، که

$$\frac{z-h^۲}{z-۱} = s^۲,$$

می‌توان نشان داد که رابطهٔ (۷) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{dw}{ds} = ۲h\left(\frac{۱}{۱-s^۲} - \frac{۱}{h^۲-s^۲}\right).$$

بنابراین

$$w = h \operatorname{Log} \frac{۱ + s}{۱ - s} - \operatorname{Log} \frac{h + s}{h - s}. \qquad (۸)$$

ثابت انتگرالگیری در اینجا صفر است، زیرا در صورتی که $z = h^۲$، s صفر و در نتیجه w صفر است.

پتانسیل F رابطهٔ (۳) برحسب s چنین می‌شود

$$F = V_\circ \operatorname{Log} \frac{h^۲ - s^۲}{۱ - s^۲};$$

و در نتیجه

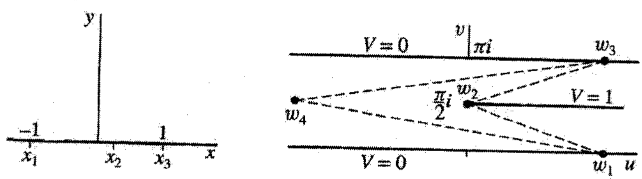
$$s^۲ = \frac{\exp(F/V_\circ) - h^۲}{\exp(F/V_\circ) - ۱}. \qquad (۹)$$

با قرار دادن s از این رابطه در رابطهٔ (۸)، یک رابطهٔ ضمنی به‌دست می‌آوریم که پتانسیل F را به‌عنوان تابعی از w تعریف می‌کند.

۱۱۵. پتانسیل الکترواستاتیکی حول لبه‌ای از یک ورقهٔ هادی

دو ورقهٔ هادی موازی با وسعت نامتناهی در پتانسیل الکترواستاتیکی $V = \circ$ نگه‌داشته می‌شوند و یک ورقهٔ موازی نیمه نامتناهی، که در وسط راه بین آنها قرارگرفته، در پتانسیل $V = ۱$ نگه‌داشته می‌شود. دستگاه مختصات و واحد طول را به قسمتی انتخاب می‌کنیم که ورقه‌ها در صفحات $v = \circ$، $v = \pi$ و $v = \pi/۲$ واقع باشند (شکل ۱۶۹). حال تابع پتانسیل $V(u, v)$ در ناحیهٔ بین این ورقه‌ها را معین می‌کنیم.

مقطع عرضی این ناحیه در صفحهٔ uv دارای صورت حدی چهارضلعی محدود به خطوط خط‌چین آن شکل است، وقتی که نقاط $w_۱$ و $w_۳$ به سمت راست و $w_۴$ به سمت چپ حرکت



شکل ۱۶۹

کنند. در به‌کاربردن تبدیل شوارتس-کریستوفل، فرض می‌کنیم نقطهٔ $x_۴$، متناظر با رأس $w_۴$، نقطه در بی‌نهایت باشد. نقاط $x_۱ = -۱$، $x_۳ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم و $x_۲$ را کمیتی در نظر می‌گیریم که باید تعیین شود. مقادیر حدی زوایای خارجی چهارضلعی عبارت‌اند از

$$k_۱\pi = \pi, \qquad k_۲\pi = -\pi, \qquad k_۳\pi = k_۴\pi = \pi\,.$$

بدین‌ترتیب

$$\frac{dw}{dz} = A(z+۱)^{-۱}(z-x_۲)(z-۱)^{-۱} = A\left(\frac{z-x_۲}{z^۲-۱}\right) = \frac{A}{۲}\left(\frac{۱+x_۲}{z+۱}+\frac{۱-x_۲}{z-۱}\right)$$

و لذا تبدیل نیمهٔ بالایی صفحهٔ z به‌توی نوار تقسیم شدهٔ صفحهٔ w دارای شکل زیر است

$$w = \frac{A}{۲}[(۱+x_۲)\mathrm{Log}\,(z+۱)+(۱-x_۲)\mathrm{Log}\,(z-۱)]+B\,. \qquad (۱)$$

فرض کنیم $A_۱$، $A_۲$ و $B_۱$، $B_۲$ معرف قسمتهای حقیقی و موهومی اعداد ثابت A و B باشند. در صورتی که $z = x$، نقطهٔ w بر مرز نوار تقسیم‌شده واقع است و بنابر رابطهٔ (۱) داریم

$$u+iv = \frac{A_۱+iA_۲}{۲}\{(۱+x_۲)[\ln|x+۱|+i\arg(x+۱)] \qquad (۲)$$

$$+(۱-x_۲)[\ln|x-۱|+i\arg(x-۱)]\}+B_۱+iB_۲\,.$$

برای تعیین این اعداد ثابت، ابتدا توجه می‌کنیم که وضعیت حدی پاره‌خط واصل بین نقاط $w_۱$ و $w_۴$، محور u است. این خط تصویر قسمتی از محور x است که در سمت چپ نقطهٔ $x_۱ = -۱$ واقع است، این بدان جهت است که پاره‌خط واصل بین $w_۳$ و $w_۴$ تصویر قسمتی از محور x است که در سمت راست $x_۳ = ۱$ واقع است و دو ضلع دیگر چهارضلعی تصاویر دو پاره‌خط باقیماندهٔ محور xاند. بنابراین، وقتی $v = ۰$ و u با مقادیر مثبت به بی‌نهایت میل کند نقطهٔ متناظر x از سمت چپ به نقطهٔ $z = -۱$ میل می‌کند. بدین‌ترتیب

$$\arg(x+۱) = \pi, \qquad \arg(x-۱) = \pi$$

و $\ln|x+۱|$ به $-\infty$ میل می‌کند. همچنین، نظر به اینکه $-۱ < x_۲ < ۱$، قسمت حقیقی مقدار داخل ابرو در رابطهٔ (۲) به $-\infty$ میل می‌کند. چون $v = ۰$ نتیجه می‌شود که $A_۲ = ۰$؛

در غیر این‌صورت، قسمت موهومی سمت راست بی‌نهایت خواهد شد. با مساوی‌گرفتن قسمتهای موهومی دو طرف، می‌بینیم که

$$۰ = \frac{A_۱}{۲}[(۱+x_۲)\pi + (۱-x_۲)\pi] + B_۲ .$$

بنابراین

$$-\pi A_۱ = B_۲, \qquad A_۲ = ۰ \tag{۳}$$

وضعیت حدی پاره‌خط واصل بین نقاط $w_۱$ و $w_۲$ عبارت است از نیم‌خط $v=\pi/۲$ $(u \geq ۰)$. نقاط روی این نیم‌خط تصاویر نقاط $z=x$اند که در آن $-۱ < x \leq x_۲$، در نتیجه

$$\arg(x+۱) = ۰, \qquad \arg(x-۱) = \pi .$$

لذا با مساوی‌گرفتن قسمتهای موهومی دو طرف رابطهٔ (۲) به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{A_۱}{۲}(۱-x_۲)\pi + B_۲ . \tag{۴}$$

بالاخره، اوضاع حدی نقاط روی پاره‌خط واصل بین $w_۳$ و $w_۴$ عبارت‌اند از نقاط $u+\pi i$ که تصاویر نقاط xاند هرگاه $x > ۱$. با مساوی‌گرفتن قسمتهای موهومی رابطهٔ (۲) برای این نقاط، چنین پیدا می‌کنیم که

$$\pi = B_۲ .$$

پس، با توجه به روابط (۳) و (۴) داریم

$$A_۱ = -۱, \qquad x_۲ = ۰ .$$

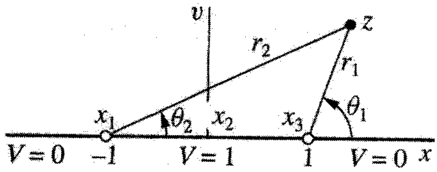
در نتیجه $x=۰$ نقطه‌ای است که تصویرش رأس $w=\pi i/۲$ است و با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ (۲) و مساوی‌گرفتن قسمتهای حقیقی می‌بینیم که $B_۱ = ۰$.

حال تبدیل (۱) چنین می‌شود

$$w = \frac{-۱}{۲}[\mathrm{Log}\,(z+۱) + \mathrm{Log}\,(z-۱)] + \pi i \tag{۵}$$

یا

$$z^۲ = ۱ + e^{-۲w} . \tag{۶}$$



شکل ۱۷۰ .

تحت این تبدیل، تابع همساز مطلوب $V(u,v)$، تبدیل به تابع همسازی از x و y در نیم‌صفحهٔ $y > ۰$ می‌شود که در شرایط مرزی تعیین شده در شکل ۱۷۰ صدق می‌کند. توجه کنید که اکنون $x_۲ = ۰$. تابعی که در این نیم‌صفحه همساز باشد و آن مقادیر را در مرز اختیار کند عبارت است از مؤلفهٔ موهومی تابع تحلیلی

$$\frac{۱}{\pi}\text{Log}\,\frac{z-۱}{z+۱} = \frac{۱}{\pi}\ln\frac{r_۱}{r_۲} + \frac{i}{\pi}(\theta_۱ - \theta_۲),$$

که در آن $\theta_۱$ و $\theta_۲$ از صفر تا π تغییر می‌کنند. اگر تانژانتهای این زوایا را به‌صورت توابعی از x و y بنویسیم و خلاصه کنیم، می‌بینیم که

$$\tan\pi V = \tan(\theta_۱ - \theta_۲) = \frac{۲y}{x^۲ + y^۲ - ۱}. \qquad (۷)$$

از رابطهٔ (۶) عبارتهایی برای $x^۲ + y^۲$ و $x^۲ - y^۲$ برحسب u و v به‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب با توجه به فرمول (۷) در می‌یابیم که رابطهٔ بین پتانسیل V و مختصات u و v را می‌توان چنین نوشت

$$\tan\pi V = \frac{۱}{s}\sqrt{e^{-۴u} - s^۲} \qquad (۸)$$

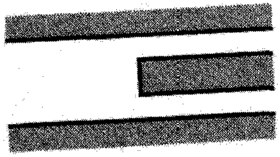
که در آن

$$s = -۱ + \sqrt{۱ + ۲e^{-۲u}\cos ۲v + e^{-۴u}}$$

تمرینها

۱. با استفاده از تبدیل شوارتس-کریستوفل، تابع نگاشتی را که با شکل ۲۲، پیوست ۲، داده شده است به‌طور صوری به‌دست آورید.

۲. بیان کنید چرا جواب مسئلهٔ جریان درکانالی با یک مانع مستطیلی نیمه نامتناهی (شکل ۱۷۱) در جواب مسئله‌ای که در بخش ۱۱۴ بررسی کردیم مستتر است.



شکل ۱۷۱

۳. به شکل ۲۹، پیوست ۲، رجوع کنید. وقتی نقطهٔ z در امتداد آن قسمت از محور حقیقی منفی که $x \leq -۱$ به سمت راست حرکت کند، w، تصویرش در امتداد نیم‌خط $v = h$ $(u \leq ۰)$ به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی نقطهٔ z در امتداد پاره‌خط $-۱ \leq x \leq ۱$ از محور x به سمت راست حرکت کند، w تصویرش باید در امتداد پاره‌خط $h \geq v \geq ۰$ از محور v در جهت کاهش v حرکت کند. بالاخره، وقتی z در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که $x \geq ۱$ به سمت راست حرکت کند، w تصویرش باید در امتداد محور حقیقی مثبت به سمت راست حرکت کند. به تغییرات جهت حرکت w در تصاویر نقاط $z = -۱$ و $z = ۱$ توجه کنید. این تغییرات نشان می‌دهند که مشتق تابع نگاشت احتمالاً عبارت است از

$$\frac{dw}{dz} = A\left(\frac{z+۱}{z-۱}\right)^{۱/۲},$$

که در آن A عددی ثابت است. بدین‌ترتیب تبدیلی را که با آن شکل داده شده است به‌طور صوری به‌دست آورید. تحقیق کنید تبدیلی که به‌صورت

$$w = \frac{h}{\pi}\{(z+۱)^{۱/۲}(z-۱)^{۱/۲} + \operatorname{Log}[z + (z+۱)^{۱/۲}(z-۱)^{۱/۲}]\}$$

نوشته شده است و در آن $۰ \leq \arg(z \pm ۱) \leq \pi$، مرز را به‌صورتی که در شکل تعیین شده است می‌نگارد.

۴. فرض کنید $T(u,v)$ معرف دمای حالت پایای کراندار در ناحیهٔ هاشورزدهٔ صفحهٔ w در شکل ۲۹، پیوست ۲، با این شرایط مرزی باشد که وقتی $u < ۰$، $T(u,h) = ۱$ و بر بقیهٔ $(B'C'D')$ از مرز، $T = ۰$. برحسب پارامتر حقیقی $\alpha(۰ < \alpha < \pi/۲)$، نشان دهید که تصویر هر نقطهٔ $z = i\tan\alpha$ بر محور yهای مثبت، عبارت است از نقطهٔ

$$w = \frac{h}{\pi}\left[\ln(\tan\alpha + \sec\alpha) + i\left(\frac{\pi}{۲} + \sec\alpha\right)\right]$$

(تمرین ۳ را ببینید) و نشان دهید که دما در آن نقطهٔ w عبارت است از

$$T(u,v) = \frac{\alpha}{\pi} \qquad \left(\circ < \alpha < \frac{\pi}{۲}\right).$$

۵. فرض کنید $F(w)$ معرف تابع پتانسیل مختلط برای جریان یک سیال بر پله‌ای در بستر یک جریان عمیق باشد که با ناحیهٔ هاشورزدهٔ صفحهٔ w در شکل ۲۹، پیوست ۲، نمایش داده شده است، که در آن سرعت سیال V به عدد حقیقی و ثابت $V_\circ$ میل می‌کند وقتی که $|w|$ در آن ناحیه به بی‌نهایت میل کند. تبدیلی که نیمهٔ بالایی صفحهٔ z را به روی آن ناحیه می‌نگارد در تمرین ۳ ملاحظه شد. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{dw}$$

نشان دهید که

$$\overline{V(w)} = V_\circ\,(z-۱)^{۱/۲}(z+۱)^{-۱/۲};$$

و برحسب نقاط $z = x$ که تصاویرشان در امتداد بستر جریان‌اند، نشان دهید که

$$|V| = |V_\circ|\sqrt{\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|}.$$

توجه کنید که تندی، از $|V_\circ|$ در امتداد $A'B'$ تا $|V| = \infty$ در B' افزایش می‌یابد، سپس در C' به صفر می‌رسد و از C' تا D' به سمت $|V_\circ|$ افزایش می‌یابد؛ همچنین توجه کنید که تندی در نقطهٔ

$$w = i\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\right)h,$$

بین B' و C' برابر است با $|V_\circ|$.

۱۲

فرمولهای انتگرال از نوع انتگرال پواسون

در این فصل نظریه‌ای را شرح می‌دهیم که به ما امکان می‌دهد برای مسائل با مقدار مرزی گوناگون جوابهایی، که برحسب انتگرالهای معین یا ناسره بیان می‌شوند، به‌دست آوریم. سپس می‌توانیم بسیاری از این انتگرالها را به سهولت محاسبه کنیم.

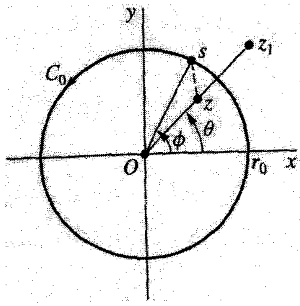
۱۱۶. فرمول انتگرال پواسون

فرض می‌کنیم $C_\circ$ معرف دایره‌یی به مرکز مبدأ در جهت مثبت باشد و تابع f در درون و روی $C_\circ$ تحلیلی باشد. فرمول انتگرال کوشی (بخش ۴۷)

$$f(z) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i} \int_{C_\circ} \frac{f(s)}{s-z} ds \qquad (\text{۱})$$

مقدار f در هر نقطهٔ z در داخل $C_\circ$ را برحسب مقادیر f در نقاط s روی $C_\circ$ بیان می‌کند. در این بخش از فرمول (۱)، فرمول متناظری برای قسمت حقیقی f به‌دست می‌آوریم و در بخش ۱۱۷ با استفاده از آن مسئلهٔ دیریکله برای قرص محدود به $C_\circ$ را حل می‌کنیم (بخش ۹۸).

فرض می‌کنیم $r_\circ$ شعاع $C_\circ$ باشد و قرار می‌دهیم $z = r\exp(i\theta)$، که در آن $\circ < r < r_\circ$ (شکل ۱۷۲). منعکس نقطهٔ ناصفر z نسبت به دایره عبارت است از نقطهٔ z_1 که با z روی یک



شکل ۱۷۲

پرتو مار بر مبدأ واقع است و در شرط $|z_۱||z| = r_\circ^۲$ صدق می‌کند؛ بنابراین اگر s نقطه‌ای روی $C_\circ$ باشد،

$$z_۱ = \frac{r_\circ^۲}{r}\exp(i\theta) = \frac{r_\circ^۲}{\overline{z}} = \frac{s\,\overline{s}}{\overline{z}}. \qquad (۲)$$

چون $z_۱$ در خارج دایرهٔ $C_\circ$ است، از قضیهٔ کوشی‌ـگورسا نتیجه می‌شود که وقتی در انتگرالده به جای z، $z_۱$ را قرار دهیم مقدار انتگرال (۱) صفر می‌شود. بنابراین

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_\circ}\left(\frac{۱}{s-z} - \frac{۱}{s-z_۱}\right) f(s)ds;$$

و با استفاده از نمایش پارامتری $s = r_\circ \exp(i\phi)$ $(\circ \le \phi \le ۲\pi)$ برای $C_\circ$ می‌توان نوشت

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\left(\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_۱}\right) f(s)d\phi$$

که در آن برای سهولت به جای $r_\circ \exp(i\phi)$ همان s را نگه می‌داریم.

توجه کنید که بنابر آخرین عبارت از عبارات (۲) برای $z_۱$، در اینجا ضریب داخل پرانتز را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{s}{s-z} - \frac{۱}{۱-(\overline{s}/\overline{z})} = \frac{s}{s-z} + \frac{\overline{z}}{\overline{s}-\overline{z}} = \frac{r_\circ^۲ - r^۲}{|s-z|^۲}. \qquad (۳)$$

بنابراین صورت دیگری از فرمول انتگرال کوشی (۱)، در صورتی که $\circ < r < r_\circ$ عبارت است از

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_\circ^۲ - r^۲}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{f(r_\circ e^{i\phi})}{|s-z|^۲}d\phi. \qquad (۴)$$

این صورت برای $r = \circ$ نیز برقرار است؛ در این حالت این صورت مستقیماً به

$$f(\circ) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{\circ}^{۲\pi} f(r_{\circ} e^{i\phi}) d\phi$$

تبدیل می‌شود، که صرفاً صورت پارامتری رابطهٔ (۱) با $z = \circ$ است.

کمیت $|s - z|$ فاصلهٔ بین نقاط s و z است و با استفاده از قانون کسینوسها می‌توان نوشت (شکل ۱۷۲ را ببینید)

$$|s - z|^{۲} = r_{\circ}^{۲} - ۲r_{\circ} r \cos(\phi - \theta) + r^{۲}. \tag{۵}$$

بنابراین اگر u قسمت حقیقی تابع f باشد، از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که

$$u(r, \theta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{(r_{\circ}^{۲} - r^{۲}) u(r_{\circ}, \phi)}{r_{\circ}^{۲} - ۲r_{\circ} r \cos(\phi - \theta) + r^{۲}} d\phi \quad (r < r_{\circ}). \tag{۶}$$

این فرمول انتگرال پواسون برای تابع همساز u در قرص باز محدود به دایرهٔ $r = r_{\circ}$ است.

فرمول (۶) تبدیل انتگرال خطیی از $u(r_{\circ}, \phi)$ به $u(r, \theta)$ را تعریف می‌کند. هستهٔ تبدیل، بجز ضریب $۱/(۲\pi)$، عبارت است از تابع حقیقی‌مقدار

$$P(r_{\circ}, r, \phi - \theta) = \frac{r_{\circ}^{۲} - r^{۲}}{r_{\circ}^{۲} - ۲r_{\circ} r \cos(\phi - \theta) + r^{۲}}, \tag{۷}$$

که به هستهٔ پواسون مشهور است. بنابر رابطهٔ (۵) می‌توانیم چنین نیز بنویسیم

$$P(r_{\circ}, r, \phi - \theta) = \frac{r_{\circ}^{۲} - r^{۲}}{|s - z|^{۲}}; \tag{۸}$$

و چون $r < r_{\circ}$، به‌وضوح P تابعی مثبت است. به‌علاوه، چون $\overline{z}/(\overline{s} - \overline{z})$ و مزدوج مختلط آن $z/(s - z)$ دارای یک قسمت حقیقی هستند از دومین معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آوریم

$$P(r_{\circ}, r, \phi - \theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{s}{s - z} + \frac{z}{s - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{s + z}{s - z}\right). \tag{۹}$$

بنابراین به‌ازای هر s مشخص بر $C_{\circ}$، تابع $P(r_{\circ}, r, \phi - \theta)$ در داخل C تابع همسازی از r و θ است. از رابطهٔ (۷) می‌بینیم که $P(r_{\circ}, r, \phi - \theta)$ یک تابع متناوب زوج از $\phi - \theta$ با دورهٔ تناوب ۲π است و وقتی $r = \circ$ مقدارش ۱ است.

حال می‌توان فرمول انتگرال پواسون (۶) را چنین نوشت

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}P(r_{\circ},r,\phi-\theta)u(r_{\circ},\phi)d\phi \quad (r<r_{\circ}). \qquad (۱۰)$$

در صورتی که $f(z)=u(r,\theta)=۱$، رابطهٔ (۱۰) نشان می‌دهد که P دارای خاصیت زیر است

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}P(r_{\circ},r,\phi-\theta)d\phi=۱ \quad (r<r_{\circ}). \qquad (۱۱)$$

فرض کرده‌ایم که نه تنها f در داخل $C_{\circ}$ بلکه روی خود $C_{\circ}$ تحلیلی است و بنابراین u در حوزه‌ای که شامل همهٔ نقاط آن دایره باشد همساز است. به‌خصوص، u بر $C_{\circ}$ پیوسته است. حالا این شرایط تعدیل خواهند شد.

۱۱۷. مسئلهٔ دیریکله برای قرص

فرض می‌کنیم F تابعی تکه‌یی پیوسته از θ روی بازهٔ $\circ\le\theta\le ۲\pi$ باشد. تبدیل انتگرال پواسون F برحسب هستهٔ پواسون $P(r_{\circ},r,\phi-\theta)$، که در بخش ۱۱۶ معرفی شد، با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

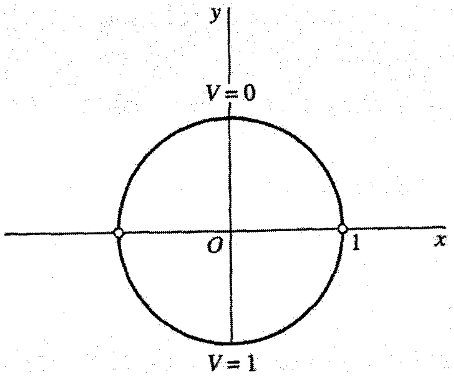
$$U(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}P(r_{\circ},r,\phi-\theta)F(\phi)d\phi \quad (r<r_{\circ}). \qquad (۱)$$

در این بخش ثابت می‌کنیم که تابع $U(r,\theta)$ در داخل دایرهٔ $r=r_{\circ}$ همساز است و به‌ازای هر θ ثابت که F در آن پیوسته باشد داریم

$$\lim_{\substack{r\to r_{\circ}\\ r<r_{\circ}}} U(r,\theta)=F(\theta). \qquad (۲)$$

بدین‌ترتیب U یک جواب مسئلهٔ دیریکله برای قرص $r<r_{\circ}$ است به این معنی که وقتی نقطهٔ (r,θ) در امتداد یک شعاع به سمت $(r_{\circ},\theta)$ میل کند، بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ $(r_{\circ},\theta)$ که ممکن است F در آنها ناپیوسته باشد، $U(r,\theta)$ به مقدار مرزی $F(\theta)$ میل می‌کند.

مثال. قبل از اثبات حکم بالا، آن را برای یافتن پتانسیل $V(r,\theta)$ در درون استوانهٔ مستدیر تو خالی و درازی به شعاع واحد به‌کار می‌بریم که آن را از طول به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند و روی یکی از قسمتها $V=۱$ و روی دیگری $V=\circ$. این مسئله به‌وسیلهٔ نگاشت همدیس



شکل ۱۷۳

در بخش ۱۰۵، حل شد و یادآوری می‌کنیم که چگونه آن را به‌عنوان مسئلهٔ دیریکله برای قرص $r < ۱$ تعبیر کردیم، که در آن روی نیمهٔ بالایی مرز $r = ۱$، $V = ۰$ و روی نیمهٔ پایینی $V = ۱$. (شکل ۱۷۳ را ببینید.)

در رابطهٔ (۱) به جای U نماد V را قرار می‌دهیم و $r_۰$ را مساوی ۱ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $F(\phi) = ۰$ هرگاه $۰ < \phi < \pi$ و $F(\phi) = ۱$ هرگاه $\pi < \phi < ۲\pi$ تا رابطهٔ زیر به‌دست آید

$$V(r, \theta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{\pi}^{۲\pi} P(۱, r, \phi - \theta) d\phi \tag{۳}$$

که در آن

$$P(۱, r, \phi - \theta) = \frac{۱ - r^۲}{۱ + r^۲ - ۲r\cos(\phi - \theta)}.$$

یک تابع اولیهٔ $P(۱, r, \psi)$ عبارت است از

$$\int P(۱, r, \psi) d\psi = ۲\arctan\left(\frac{۱ + r}{۱ - r} \tan\frac{\psi}{۲}\right), \tag{۴}$$

این انتگرالده مشتق تابع سمت راست نسبت به ψ است. بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$\pi V(r, \theta) = \arctan\left(\frac{۱ + r}{۱ - r} \tan\frac{۲\pi - \theta}{۲}\right) - \arctan\left(\frac{۱ + r}{۱ - r} \tan\frac{\pi - \theta}{۲}\right).$$

پس از ساده‌کردن عبارت حاصل از این رابطهٔ آخر برای $\tan[\pi V(r, \theta)]$ (تمرین ۳، بخش ۱۱۸

را ببینید)، به‌دست می‌آوریم

$$V(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\theta}\right) \qquad (0 \leq \arctan t \leq \pi) \tag{5}$$

که در آن محدودیت مذکور برای مقادیر تابع آرکتانژانت از نظر فیزیکی بدیهی است. در صورتی‌که این جواب را برحسب مختصات قائم بیان کنیم همان جواب (۵) بخش ۱۰۵ حاصل می‌شود.

حال به اثبات این مطلب باز می‌گردیم که تابع U که با رابطهٔ (۱) تعریف شد در مسئلهٔ دیریکله برای قرص $r < r_0$ که درست قبل از این مثال بیان شد صدق می‌کند. قبل از هر چیز U در داخل دایرهٔ $r = r_0$ همساز است زیرا P در آنجا تابعی است همساز از r و θ. به عبارت دقیقتر، توجه می‌کنیم که چون F تکه‌یی پیوسته است، انتگرال (۱) را می‌توان به‌صورت مجموع تعدادی متناهی انتگرال معین نوشت که هر یک از آنها دارای انتگرالده پیوسته نسبت به r، θ و ϕ است. مشتقات جزئی این انتگرالده‌ها نسبت به r و θ نیز پیوسته‌اند. چون بدین‌ترتیب می‌توان ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری نسبت به r و θ را عوض کرد وچون P در معادلهٔ لاپلاس

$$r^2 P_{rr} + rP_r + P_{\theta\theta} = 0$$

در مختصات قطبی r و θ صدق می‌کند (تمرین ۵، بخش ۲۵) در نتیجه U نیز در این معادله صدق می‌کند.

برای تحقیق درستی حد (۲)، لازم است نشان دهیم که اگر F در θ پیوسته باشد، متناظر با هر عدد مثبت ε، عدد مثبتی مانند δ هست به قسمی که

$$|U(r,\theta) - F(\theta)| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad 0 < r_0 - r < \delta. \tag{6}$$

از آنجا شروع می‌کنیم که با توجه به ویژگی (۱۱) هستهٔ پواسون در بخش ۱۱۶، می‌توان نوشت

$$U(r,\theta) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi-\theta)[F(\phi) - F(\theta)]d\phi.$$

برای سهولت فرض می‌کنیم F به‌طور دوره‌یی با دورهٔ تناوب 2π توسعه یافته تا انتگرالده نسبت به ϕ دوره‌یی و با همان دورهٔ تناوب باشد. همچنین به دلیل ماهیت حدی که باید ثابت شود می‌توان فرض کرد که $0 < r < r_0$.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که چون F در θ پیوسته است، عدد مثبت و کوچکی مانند α هست که

$$|F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{هرگاه} \quad |\phi - \theta| \le \alpha. \tag{۷}$$

به‌وضوح

$$U(r,\theta) - F(\theta) = I_۱(r) + I_۲(r) \tag{۸}$$

که در آن

$$I_۱(r) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_\circ, r, \phi-\theta)[F(\phi) - F(\theta)]d\phi,$$

$$I_۲(r) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+۲\pi} P(r_\circ, r, \phi-\theta)[F(\phi) - F(\theta)]d\phi.$$

بنابر مثبت‌بودن تابع P (بخش ۱۱۶)، و اولین نابرابری (۷) بالا و ویژگی (۱۱) آن تابع در بخش ۱۱۶، می‌توان نوشت

$$|I_۱(r)| \le \frac{۱}{۲\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_\circ, r, \phi-\theta)|F(\phi) - F(\theta)|d\phi$$

$$< \frac{\varepsilon}{۴\pi}\int_\circ^{۲\pi} P(r_\circ, r, \phi-\theta)d\phi = \frac{\varepsilon}{۲}.$$

همین‌طور برای انتگرال $I_۲(r)$ از شکل ۱۷۲، بخش ۱۱۶، می‌توان دید که مخرج $|s-z|^۲$ در عبارت (۸) آن بخش برای $P(r_\circ, r, \phi-\theta)$ دارای مقدار مینیممی (مثبت) مانند m است وقتی ϕ، آوند s، در بازهٔ بستهٔ

$$\theta + \alpha \le \phi \le \theta - \alpha + ۲\pi$$

تغییر کند. بنابراین اگر M معرف کران بالایی برای تابع تکه‌یی پیوستهٔ $|F(\phi) - F(\theta)|$ در بازهٔ $\circ \le \phi \le ۲\pi$ باشد، نتیجه می‌شود که اگر $r_\circ - r < \delta$،

$$|I_۲(r)| \le \frac{(r_\circ^۲ - r^۲)M}{۲\pi m}۲\pi < \frac{۲Mr_\circ}{m}(r_\circ - r) < \frac{۲Mr_\circ}{m}\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$$

که در آن

$$\delta = \frac{m\varepsilon}{۴Mr_\circ}. \tag{۹}$$

بالاخره بنابر نتایج دو پاراگراف قبل می‌توان گفت که اگر $r_\circ - r < \delta$، آن‌گاه

$$|U(r,\theta) - F(\theta)| \leq |I_۱(r)| + |I_۲(r)| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

که در آن δ عدد مثبتی است که با رابطهٔ (۹) تعریف شده است. یعنی اگر آن انتخاب δ صورت گیرد، حکم (۶) برقرار است.

بنابر فرمول (۱)، مقدار U در $r = \circ$ عبارت است از

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} F(\phi)d\phi\,.$$

بنابراین، مقدار تابع همساز در مرکز دایرهٔ $r = r_\circ$ عبارت است از میانگین مقادیر مرزی روی دایره.

به‌عنوان تمرین ثابت کنید که P و U را می‌توان به‌وسیلهٔ سریهایی شامل توابع مقدماتی همساز $r^n \cos n\theta$ و $r^n \sin n\theta$ به‌صورت زیر نمایش داد:

$$P(r_\circ, r, \phi - \theta) = ۱ + ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{r_\circ}\right)^n \cos n(\phi - \theta) \quad (r < r_\circ) \qquad (۱\circ)$$

و

$$U(r,\theta) = \frac{۱}{۲}a_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{r_\circ}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (r < r_\circ) \qquad (۱۱)$$

که در آن

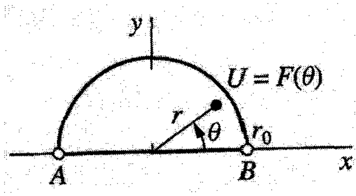
$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^{۲\pi} F(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \qquad b_n = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^{۲\pi} F(\phi)\sin n\phi\, d\phi\,. \qquad (۱۲)$$

۱۱۸. مسائل مقدار مرزی مربوطه

جزئیات اثبات نتایج زیر را جزو تمرینها می‌گذاریم. فرض می‌کنیم تابع F که معرف مقادیر مرزی بر دایرهٔ $r = r_\circ$ است تکه‌یی پیوسته باشد.

(۱) فرض می‌کنیم که $F(۲\pi - \theta) = -F(\theta)$. در این‌صورت فرمول انتگرال پواسون بخش ۱۱۷، چنین می‌شود

$$U(r,\theta) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{\pi}[P(r_\circ, r, \phi - \theta) - P(r_\circ, r, \phi + \theta)]F(\phi)d\phi\,. \qquad (۱)$$



شکل ۱۷۴

مقادیر این تابع U بر شعاعهای افقی $\theta = \circ$ و $\theta = \pi$ از دایره، همان‌طور که در صورت تعبیر U به‌عنوان دمای پایا انتظار می‌رود صفر است. بنابراین، فرمول (۱) مسئلهٔ دیریکله برای ناحیهٔ نیمدایره‌یی $r < r_\circ$، $\circ < \theta < \pi$ را حل می‌کند، که بر قطر AB، در شکل ۱۷۴، $U = \circ$ و به‌ازای هر θ ثابت که F در آن پیوسته باشد

$$\lim_{\substack{r \to r_\circ \\ r < r_\circ}} U(r,\theta) = F(\theta) \qquad (\circ < \theta < \pi). \tag{۲}$$

اگر $F(۲\pi - \theta) = F(\theta)$ آن‌گاه

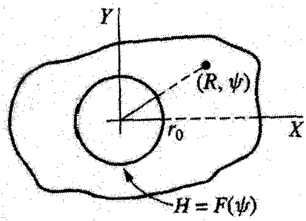
$$U(r,\theta) = \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^\pi [P(r_\circ, r, \phi - \theta) + P(r_\circ, r, \phi + \theta)]F(\phi)d\phi \tag{۳}$$

و $U_\theta(r,\theta) = \circ$، در صورتی که $\theta = \circ$ یا $\theta = \pi$. در نتیجه فرمول (۳) تابعی مانند U را ارائه می‌دهد که در ناحیهٔ نیمدایره‌یی $r < r_\circ$، $\circ < \theta < \pi$ همساز است و در شرط (۲) و شرط صفربودن مشتق نرمال آن بر قطر AB، که در شکل ۱۷۴ نشان داده شده است، صدق می‌کند.

تابع تحلیلی $z = r_\circ^۲/Z$، دایرهٔ $|Z| = r_\circ$ در صفحهٔ Z را به روی دایرهٔ $|z| = r_\circ$ در صفحهٔ z، و خارج دایرهٔ اولی را به روی داخل دایرهٔ دومی می‌نگارد. با قرار دادن $z = r\exp(i\theta)$ و $Z = R\exp(i\psi)$، توجه می‌کنیم که $r = r_\circ^۲/R$ و $\theta = ۲\pi - \psi$. پس تابع همساز $U(r,\theta)$ که با فرمول (۱) بخش ۱۱۷ نمایش داده شد، به تابع زیر که در حوزهٔ $R > r_\circ$ همساز است، تبدیل می‌شود

$$U\left(\frac{r_\circ^۲}{R}, ۲\pi - \psi\right) = -\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} \frac{r_\circ^۲ - R^۲}{r_\circ^۲ - ۲r_\circ R\cos(\phi + \psi) + R^۲} F(\phi)d\phi.$$

حال، به‌طور کلی، اگر $u(r,\theta)$ همساز باشد، $u(r,-\theta)$ نیز همساز است (تمرین ۱۱ را ببینید).



شکل ۱۷۵

بنابراین تابع $H(R,\psi) = U(r_\circ^2/R, \psi - 2\pi)$ یا

$$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} P(r_\circ, R, \phi - \psi)F(\phi)d\phi \qquad (R > r_\circ) \qquad (۴)$$

نیز همساز است. به‌ازای هر ψ ثابت که در آن $F(\psi)$ پیوسته باشد از شرط (۲) بخش ۱۱۷، به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{\substack{R\to r_\circ \\ R>r_\circ}} H(R,\psi) = F(\psi). \qquad (۵)$$

بدین‌ترتیب فرمول (۴) مسئلهٔ دیریکله برای ناحیهٔ خارجی دایرهٔ $R = r_\circ$ را در صفحهٔ Z حل می‌کند (شکل ۱۷۵). از عبارت (۸) بخش ۱۱۶، متوجه می‌شویم که هستهٔ پواسون $P(r_\circ, R, \phi - \psi)$ وقتی $R > r_\circ$ منفی است. همچنین

$$\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} P(r_\circ, R, \phi - \psi)d\phi = -1 \qquad (R > r_\circ) \qquad (۶)$$

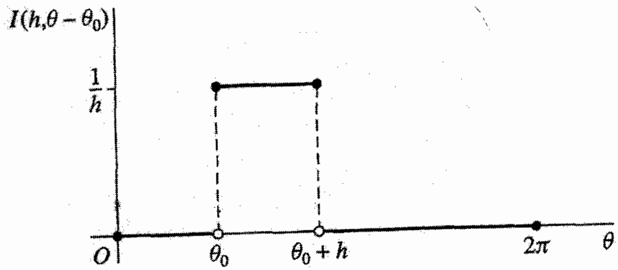
و

$$\lim_{R\to\infty} H(R,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} F(\phi)d\phi. \qquad (۷)$$

تمرینها

۱. با استفاده از فرمول انتگرال پواسون (۱) بخش ۱۱۷، فرمول

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left[\frac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}\right] \qquad (\circ \le \arctan t \le \pi)$$



شکل ۱۷۶

برای پتانسیل الکترواستاتیکی در داخل استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱$ را نتیجه بگیرید هرگاه بر ربع اول $(x>۰, y>۰)$ سطح استوانه‌یی، $V=۱$ و بر بقیهٔ سطح $V=۰$. همچنین بیان کنید چرا $V-۱$ جواب تمرین ۸، بخش ۱۰۵ است.

۲. فرض کنید T معرف دمای پایا در قرص $r\le ۱$ با وجوه عایق باشد در صورتی که بر قوس $۰<\theta<۲\theta_۰$ $(۰<\theta_۰<\pi/۲)$ از لبهٔ $r=۱$ داشته باشیم $T=۱$ و بر بقیهٔ لبه $T=۰$. با استفاده از فرمول انتگرال پواسون نشان دهید که

$$T(x,y)=\frac{۱}{\pi}\arctan\left[\frac{(۱-x^{۲}-y^{۲})y_۰}{(x-۱)^{۲}+(y-y_۰)^{۲}-y_۰^{۲}}\right]\qquad (۰\le \arctan t\le \pi)$$

که در آن $y_۰=\tan\theta_۰$. تحقیق کنید که این تابع T در شرایط مرزی صدق می‌کند.

۳. به کمک اتحادهای مثلثاتی

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta},\qquad \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

نشان دهید چگونه در مثال بخش ۱۱۷، از روی فرمول $\pi V(r,\theta)$ که درست قبل از جواب آمده است جواب (۵) به‌دست می‌آید.

۴. فرض کنید I معرف تابع ضربهٔ یکهٔ متناهی زیر باشد (شکل ۱۷۶):

$$I(h,\theta-\theta_۰)=\begin{cases}۱/h, & \theta_۰\le\theta\le\theta_۰+h\\ ۰, & ۰\le\theta<\theta_۰ \quad \text{یا} \quad \theta_۰+h<\theta\le ۲\pi\end{cases}$$

که در آن h یک عدد مثبت است و $\circ \leq \theta_\circ < \theta_\circ + h < ۲\pi$. توجه کنید که

$$\int_{\theta_\circ}^{\theta_\circ + h} I(h, \theta - \theta_\circ) d\theta = ۱.$$

به کمک قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای معین، نشان دهید که

$$\int_\circ^{۲\pi} P(r_\circ, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_\circ) d\phi = P(r_\circ, r, c - \theta) \int_{\theta_\circ}^{\theta_\circ + h} I(h, \phi - \theta_\circ) d\phi$$

که در آن $\theta_\circ \leq c \leq \theta_\circ + h$ و بنابراین

$$\lim_{\substack{h \to \circ \\ h > \circ}} \int_\circ^{۲\pi} P(r_\circ, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_\circ) d\phi = P(r_\circ, r, \theta - \theta_\circ) \qquad (r < r_\circ).$$

بنابراین هستهٔ پواسون $P(r_\circ, r, \theta - \theta_\circ)$ حد تابعی است که در داخل دایرهٔ $r = r_\circ$ همساز است و مقادیر مرزی آن به‌وسیلهٔ تابع ضربهٔ $۲\pi I(h, \theta - \theta_\circ)$ نمایش داده می‌شود، وقتی که h با مقادیر مثبت به صفر میل کند.

۵. نشان دهید که فرمول تمرین ۸ (ب) بخش ۵۶، در مورد مجموع یک سری کسینوسی را می‌توان چنین نوشت

$$۱ + ۲ \sum_{n=۱}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{۱ - a^۲}{۱ - ۲a \cos\theta + a^۲} \qquad (-۱ < a < ۱).$$

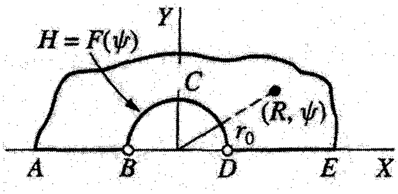
سپس نشان دهید که هستهٔ پواسون دارای نمایش سری (۱۰) بخش ۱۱۷ است.

۶. نشان دهید که در نمایش (۱۰) بخش ۱۱۷ برای هستهٔ پواسون، سری نسبت به ϕ همگرای یکنواخت است. سپس از فرمول (۱) آن بخش نمایش سری (۱۱) همان بخش را برای $U(r, \theta)$ به‌دست آورید.*

۷. با استفاده از فرمولهای (۱۱) و (۱۲) بخش ۱۱۷، دمای پایای $T(r, \theta)$ در استوانهٔ توپُر $r \leq r_\circ$ به طول نامتناهی را پیدا کنید اگر $T(r_\circ, \theta) = A \cos\theta$. نشان دهید که در عرض صفحهٔ $y = \circ$ هیچ گرمایی جریان نمی‌یابد.

جواب: $T = A(r/r_\circ) \cos\theta = Ax/r_\circ$.

* دربخش ۴۸ کتاب "سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی" (Fourier Series and Boundary Value Problems) از همین مؤلفان این نتیجه برای $r_\circ = ۱$ به روش جداسازی متغیرها به‌دست آمده است، چاپ ششم ۲۰۰۱.



شکل ۱۷۷

۸. حالت خاص

(الف) $H(R,\psi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}[P(r_{\circ},R,\phi+\psi)-P(r_{\circ},R,\phi-\psi)]F(\phi)d\phi$؛

(ب) $H(R,\psi)=-\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}[P(r_{\circ},R,\phi+\psi)+P(r_{\circ},R,\phi-\psi)]F(\phi)d\phi$

از فرمول (۴) بخش ۱۱۸، را برای تابع همساز H در ناحیهٔ بیکران $R > r_{\circ}$، $\circ < \psi < \pi$، که در شکل ۱۷۷ نشان داده شده، به‌دست آورید به شرط آنکه تابع روی نیمدایره، در شرط مرزی زیر صدق کند

$$\lim_{\substack{R\to r_{\circ}\\ R>r_{\circ}}} H(R,\psi) = F(\psi) \qquad (\circ < \psi < \pi)$$

و (الف) بر پرتوهای BA و DE صفر باشد؛ (ب) بر پرتوهای BA و DE مشتق نرمال آن صفر باشد.

۹. در اثبات فرمول (۱) بخش ۱۱۸، به‌عنوان جواب مسئلهٔ دیریکله که در آنجا برای ناحیهٔ نشان داده شده در شکل ۱۷۴ بیان شده است جزئیات لازم را ارائه دهید.

۱۰. در اثبات فرمول (۳)، بخش ۱۱۸، به‌عنوان جواب مسئلهٔ مقدار مرزی که در آنجا بیان شده است جزئیات لازم را ارائه دهید.

۱۱. فرمول (۴) بخش ۱۱۸ را به‌عنوان جواب مسئلهٔ دیریکله برای ناحیهٔ خارجی یک دایره (شکل ۱۷۵) به‌دست آورید. نشان دهید که $u(r,-\theta)$ در صورتی همساز است که $u(r,\theta)$ همساز باشد، از صورت قطبی معادلهٔ لاپلاس، یعنی

$$r^{۲}u_{rr}(r,\theta) + ru_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = \circ$$

استفاده کنید.

۱۲. بیان کنید چرا فرمول (۶) بخش ۱۱۸، برقرار است.

۱۳. رابطهٔ (۷) بخش ۱۱۸ را ثابت کنید.

۱۱۹. فرمول انتگرال شوارتس

فرض کنید f در سراسر نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z \geq ۰$، تابعی تحلیلی از z باشد به قسمی که، به‌ازای اعداد ثابت و مثبت a و M، تابع f در ویژگی ترتیبی زیر صدق کند

$$|z^a f(z)| < M \qquad (\operatorname{Im} z \geq ۰). \tag{۱}$$

برای نقطهٔ ثابت z واقع در بالای محور حقیقی، فرض کنید C_R معرف نیمهٔ بالایی دایرهٔ به شعاع R و مرکز مبدأ باشد که در جهت مثبت گرفته شده است، که در آن $|z| < R$ (شکل ۱۷۸). پس، بنابر فرمول انتگرال کوشی داریم

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{C_R} \frac{f(s)ds}{s-z} + \frac{۱}{۲\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)dt}{t-z}. \tag{۲}$$

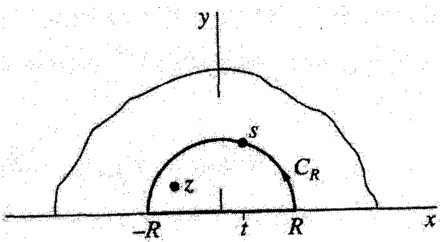
می‌بینیم که وقتی R به ∞ میل کند اولین این انتگرالها به صفر میل می‌کند، زیرا بنابر شرط (۱)،

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(s)ds}{s-z}\right| < \frac{M}{R^a(R-|z|)}\pi R = \frac{\pi M}{R^a(۱-|z|/R)}.$$

در نتیجه

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t-z} \qquad (\operatorname{Im} z > ۰). \tag{۳}$$

بنابر شرط (۱)، این انتگرال ناسره همگراست* . عددی که به آن همگرا می‌شود همان مقدار اصلی کوشی آن خواهد بود (بخش ۷۱ را ببینید) و نمایش (۳) یک فرمول انتگرال کوشی برای نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > ۰$ است.



شکل ۱۷۸

* برای مثال، فصل ۲۲ از کتاب زیر را ببینید

A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., 1983.

در صورتی که z در زیر محور حقیقی واقع باشد، سمت راست رابطهٔ (۲) صفر است، بنابراین انتگرال (۳) برای چنین نقطه‌ای صفر است. در نتیجه وقتی z در بالای محور حقیقی است، فرمول زیر را داریم که در آن c یک ثابت مختلط دلخواه است:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{c}{t-\overline{z}}\right)f(t)dt \qquad (\operatorname{Im} z > 0). \tag{۴}$$

در دو حالت $c=-1$ و $c=1$، به‌ترتیب، این فرمول به فرمولهای زیر تبدیل می‌شود

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)}{|t-z|^2}dt \qquad (y>0) \tag{۵}$$

و

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-x)f(t)}{|t-z|^2}dt \qquad (y>0). \tag{۶}$$

اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$، از فرمولهای (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که توابع همساز u و v در نیم‌صفحهٔ $y>0$ برحسب مقادیر مرزی u، با فرمولهای زیر نمایش داده می‌شوند

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(t,0)}{|t-z|^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt \qquad (y>0) \tag{۷}$$

و

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-t)u(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt \qquad (y>0). \tag{۸}$$

فرمول (۷) به فرمول انتگرال پواسون برای نیم‌صفحه، یا فرمول انتگرال شوارتس، معروف است. در بخش بعد برای برقراری فرمولهای (۷) و (۸) شرایط را تعدیل خواهیم کرد.

۱۲۰. مسئلهٔ دیریکله برای نیم‌صفحه

فرض می‌کنیم F تابعی حقیقی‌مقدار از x باشد که به‌ازای هر x کراندار است و، به استثنای حداکثر تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است. وقتی که $y \geq \varepsilon$ و $|x| \leq 1/\varepsilon$، که در آن ε عدد ثابت مثبت دلخواهی است، انتگرال

$$I(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)dt}{(t-x)^2+y^2}$$

نسبت به x و y همگرای یکنواخت است، انتگرالهای مشتقات جزئی انتگرالده نسبت به x و y نیز همگرای یکنواخت هستند. هر یک از این انتگرالها، مجموع تعدادی متناهی انتگرال ناسره یا معین بر بازه‌هایی است که F در آنها پیوسته است؛ بنابراین وقتی $y \geq \varepsilon$، انتگرالده هر انتگرال مؤلفه‌یی، تابعی پیوسته از t، x و y است. در نتیجه، هرگاه $y > ۰$، هر مشتق جزئی $I(x, y)$ با انتگرال مشتق نظیر این انتگرالده نمایش داده می‌شود.

قرار می‌دهیم $U(x, y) = yI(x, y)/\pi$. بنابراین، U تبدیل انتگرال شوارتس F است، که از دومین فرمول (۷)، بخش ۱۱۹ به ذهن القا می‌شود.

$$U(x, y) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(t)}{(t - x)^۲ + y^۲} dt \qquad (y > ۰). \tag{۱}$$

بجز ضریب $۱/\pi$، هسته در اینجا عبارت است از $y/|t - z|^۲$. این هسته، مؤلفهٔ موهومی تابع $۱/(t - z)$ است که نسبت به z تحلیلی است هرگاه $y > ۰$. در نتیجه هسته همساز است و بنابراین در معادلهٔ لاپلاس برحسب x و y صدق می‌کند. چون ترتیب مشتقگیری و انتگرالگیری را می‌توان عوض کرد، پس تابع (۱) در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. در نتیجه، U همساز است هرگاه $y > ۰$.

برای اینکه ثابت کنیم به‌ازای هر x مشخص که F در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{y \to ۰ \\ y > ۰}} U(x, y) = F(x) \tag{۲}$$

در فرمول (۱) تغییر متغیر $t = x + y \tan \tau$ را انجام می‌دهیم و می‌نویسیم

$$U(x, y) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} F(x + y \tan \tau) d\tau \qquad (y > ۰). \tag{۳}$$

پس اگر

$$G(x, y, \tau) = F(x + y \tan \tau) - F(x)$$

و α عدد ثابت مثبت و کوچکی باشد، آن‌گاه

$$\pi[U(x, y) - F(x)] = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} G(x, y, \tau) d\tau = I_۱(y) + I_۲(y) + I_۳(y) \tag{۴}$$

که در آن

$$I_۱(y) = \int_{-\pi/۲}^{(-\pi/۲)+\alpha} G(x,y,\tau)d\tau, \qquad I_۲(y) = \int_{(-\pi/۲)+\alpha}^{(\pi/۲)-\alpha} G(x,y,\tau)d\tau,$$

$$I_۳(y) = \int_{(\pi/۲)-\alpha}^{\pi/۲} G(x,y,\tau)d\tau\,.$$

اگر M معرف کران بالایی برای $|F(x)|$ باشد آن‌گاه $|G(x,y,\tau)| \leq ۲M$. به‌ازای عدد مثبت مفروض ε، عدد α را به‌قسمی انتخاب می‌کنیم که $۶M\alpha < \varepsilon$؛ در این صورت

$$|I_۱(y)| \leq ۲M\alpha < \frac{\varepsilon}{۳} \quad \text{و} \quad |I_۳(y)| \leq ۲M\alpha < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

حال نشان می‌دهیم که متناظر با ε عدد مثبتی مانند δ هست به قسمی که

$$|I_۲(y)| < \frac{\varepsilon}{۳} \quad \text{هرگاه} \quad ۰ < y < \delta.$$

برای انجام این کار ملاحظه می‌کنیم که چون F در x پیوسته است، عدد مثبتی مانند γ هست که

$$|G(x,y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{۳\pi} \quad \text{هرگاه} \quad ۰ < y|\tan\tau| < \gamma.$$

حالا مقدار ماکسیمم $|\tan\tau|$، وقتی τ بین $(-\pi/۲)+\alpha$ و $(\pi/۲)-\alpha$ تغییر کند، عبارت است از $\tan[(\pi/۲)-\alpha] = \cot\alpha$. بنابراین اگر بنویسیم $\delta = \gamma\tan\alpha$، نتیجه می‌شود که

$$|I_۲(y)| < \frac{\varepsilon}{۳\pi}(\pi - ۲\alpha) < \frac{\varepsilon}{۳} \quad \text{هرگاه} \quad ۰ < y < \delta.$$

بدین‌ترتیب نشان داده‌ایم که

$$|I_۱(y)| + |I_۲(y)| + |I_۳(y)| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad ۰ < y < \delta.$$

حال از این نتیجه و رابطهٔ (۴)، شرط (۲) به‌دست می‌آید.

بنابراین، فرمول (۱) مسئلهٔ دیریکله برای نیم‌صفحهٔ $y > ۰$ باشرط مرزی (۲) را حل می‌کند. از صورت (۳) فرمول (۱) واضح است که در این نیم‌صفحه $|U(x,y)| \leq M$، که در آن M یک کران بالای $|F(x)|$ است؛ یعنی U کراندار است. توجه می‌کنیم که وقتی $F(x) = F_۰$، داریم $U(x,y) = F_۰$، که در آن $F_۰$ یک عدد ثابت است.

بنابر فرمول (۸) بخش ۱۱۹، تحت برخی شرایط برای F، تابع

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-t)F(t)}{(t-x)^{2}+y^{2}}dt \qquad (y>0) \tag{5}$$

یک مزدوج همساز همان تابع U است که با فرمول (۱) تعریف شده است. عملاً، فرمول (۵) یک مزدوج همساز U را به ما می‌دهد اگر F همه جا، به‌استثنای حداکثر تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته باشد و در ویژگی ترتیبی

$$|x^{a}F(x)|<M \qquad (a>0)$$

صدق کند. زیرا تحت این شرایط می‌بینیم که هرگاه $y>0$، U و V در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند.

حالتهای خاص فرمول (۱) را، وقتی که F تابعی فرد یا زوج باشد، جزو تمرینها گذاشته‌ایم.

تمرینها

۱. به‌عنوان حالت خاصی از فرمول (۱)، بخش ۱۲۰، عبارت

$$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{(t-x)^{2}+y^{2}}-\frac{1}{(t+x)^{2}+y^{2}}\right]F(t)dt \quad (x>0,y>0)$$

را برای تابع کراندار U به‌دست آورید که در ربع اول همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U(0,y)=0 \qquad\qquad (y>0),$$

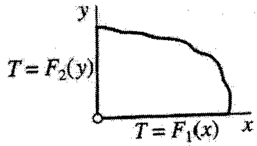
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}U(x,y)=F(x) \qquad\qquad (x>0,x\neq x_j)$$

که در آن F به‌ازای همهٔ xهای مثبت کراندار و، بجز حداکثر تعدادی متناهی نقطهٔ x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است.

۲. فرض کنید $T(x,y)$ معرف دماهای پایا و کراندار در ورق $x>0$، $y>0$ با وجوه عایق باشد به شرطی که

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}T(x,y)=F_1(x) \qquad\qquad (x>0),$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}T(x,y)=F_2(y) \qquad\qquad (y>0)$$



شکل ۱۷۹

(شکل ۱۷۹). در اینجا $F_۱$ و $F_۲$ کراندار و پیوسته‌اند بجز اینکه حداکثر تعدادی متناهی جهش محدود دارند. قرار دهید $z = x + iy$ و به کمک فرمول حاصل در تمرین ۱ نشان دهید که

$$T(x,y) = T_۱(x,y) + T_۲(x,y) \qquad (x > ۰, y > ۰)$$

که در آن

$$T_۱(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_۰^\infty \left(\frac{۱}{|t-z|^۲} - \frac{۱}{|t+z|^۲}\right) F_۱(t)dt,$$

$$T_۲(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_۰^\infty \left(\frac{۱}{|it-z|^۲} - \frac{۱}{|it+z|^۲}\right) F_۲(t)dt.$$

۳. حالت خاص فرمول (۱)، بخش ۱۲۰،

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_۰^\infty \left[\frac{۱}{(t-x)^۲+y^۲} + \frac{۱}{(t+x)^۲+y^۲}\right] F(t)dt \qquad (x>۰, y>۰)$$

را برای تابع کراندار U به‌دست آورید که در ربع اول همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U_x(۰,y) = ۰ \qquad (y > ۰),$$

$$\lim_{\substack{y\to ۰\\ y>۰}} U(x,y) = F(x) \qquad (x > ۰, x \neq x_j)$$

که در آن F به‌ازای همهٔ xهای مثبت کراندار و، بجز محتملاً تعدادی متناهی از نقاط $x = x_j$ $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است.

۴. با تعویض محورهای x و y در بخش ۱۲۰ جواب

$$U(x,y) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{xF(t)}{(t-y)^۲ + x^۲}dt \qquad (x > ۰)$$

مسئلهٔ دیریکله برای نیم‌صفحهٔ $x > ۰$ را بنویسید. سپس قرار دهید

$$F(y) = \begin{cases} ۱, & -۱ < y < ۱ \\ ۰, & |y| > ۱ \end{cases}$$

و این فرمولها را برای U و مزدوج همسازش $-V$ به‌دست آورید:

$$U(x,y) = \frac{۱}{\pi}\left(\arctan\frac{y+۱}{x} - \arctan\frac{y-۱}{x}\right), V(x,y) = \frac{۱}{۲\pi}\ln\frac{x^۲+(y+۱)^۲}{x^۲+(y-۱)^۲}$$

که $-\pi/۲ \leq \arctan t \leq \pi/۲$. همچنین نشان دهید که

$$V(x,y) + iU(x,y) = \frac{۱}{\pi}\left[\operatorname{Log}(z+i) - \operatorname{Log}(z-i)\right]$$

که در آن $z = x + iy$.

۱۲۱. مسائل نویمان

مانند بخش ۱۱۶ و شکل ۱۷۲ قرار می‌دهیم $s = r_۰ \exp(i\phi)$ و $z = r\exp(i\theta)$ که در آنها $r < r_۰$. در صورتی‌که s ثابت باشد، تابع

$$Q(r_۰, r, \phi-\theta) = -۲r_۰ \ln|s-z| = -r_۰ \ln[r_۰^۲ - ۲r_۰ r\cos(\phi-\theta) + r^۲] \quad (۱)$$

در داخل دایرهٔ $|z| = r_۰$ همساز است، زیرا مؤلفهٔ حقیقی $-۲r_۰ \log(z-s)$ است که در آن بریدگی شاخه‌یی $\log(z-s)$ پرتوی از نقطهٔ s به سمت خارج است. اگر، به‌علاوه، $r \neq ۰$، داریم

$$Q_r(r_۰, r, \phi-\theta) = -\frac{r_۰}{r}\left[\frac{۲r^۲ - ۲r_۰ r\cos(\phi-\theta)}{r_۰^۲ - ۲r_۰ r\cos(\phi-\theta) + r^۲}\right] \quad (۲)$$

$$= \frac{r_۰}{r}[P(r_۰, r, \phi-\theta) - ۱]$$

که در آن P همان هستهٔ پواسون (۷)، بخش ۱۱۶، است.

با توجه به این نکات، برای نوشتن نمایش انتگرالی تابع همساز U، که مشتق نرمال U_r آن بر دایرهٔ $r = r_۰$ مقادیر از قبل تعیین شدهٔ $G(\theta)$ را می‌گیرد، می‌توان از تابع Q استفاده کرد.

اگر G تکه‌یی پیوسته و $U_\circ$ ثابتی دلخواه باشد، تابع

$$U(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}Q(r_\circ,r,\phi-\theta)G(\phi)d\phi+U_\circ \qquad (r<r_\circ) \tag{۳}$$

همساز است زیرا انتگرالده تابعی همساز از r و θ است. اگر مقدار میانگین G بر دایرهٔ $|z|=r_\circ$ صفر باشد، یا

$$\int_\circ^{۲\pi}G(\phi)d\phi=\circ, \tag{۴}$$

آن‌گاه با توجه به رابطهٔ (۲) داریم

$$\begin{aligned}U_r(r,\theta)&=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{r_\circ}{r}[P(r_\circ,r,\phi-\theta)-۱]G(\phi)d\phi\\&=\frac{r_\circ}{r}\cdot\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}P(r_\circ,r,\phi-\theta)G(\phi)d\phi.\end{aligned}$$

حال بنابر روابط (۱) و (۲) بخش ۱۱۷،

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ\\ r<r_\circ}}\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}P(r_\circ,r,\phi-\theta)G(\phi)d\phi=G(\theta).$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار θ که G در آن پیوسته باشد

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ\\ r<r_\circ}}U_r(r,\theta)=G(\theta). \tag{۵}$$

پس اگر G تکه‌یی پیوسته باشد و در شرط (۴) صدق کند، فرمول

$$U(r,\theta)=-\frac{r_\circ}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\ln[r_\circ^۲-۲r_\circ r\cos(\phi-\theta)+r^۲]G(\phi)d\phi+U_\circ \quad (r<r_\circ) \tag{۶}$$

مسئلهٔ نویمان برای ناحیهٔ داخلی دایرهٔ $r=r_\circ$ را حل می‌کند که در آن $G(\theta)$ به همان مفهوم شرط (۵) مشتق نرمال تابع همساز $U(r,\theta)$ در مرز است. توجه کنید که چگونه از روابط (۴) و (۶) نتیجه می‌شود که به دلیل ثابت‌بودن $\ln r_\circ^۲$، عدد $U_\circ$ مقدار U در مرکز $r=\circ$ دایرهٔ $r=r_\circ$ است.

مقادیر $U(r,\theta)$ ممکن است نمایش دماهای پایا در قرص $r<r_\circ$ با وجوه عایق باشد.

در آن حالت شرط (۵) بیان می‌کند که شارگرما به داخل قرص، در امتداد لبه‌اش، متناسب است با $G(\theta)$. چون دما با زمان تغییر نمی‌کند، شرط (۴) شرط فیزیکی متعارفی است که نرخ کل جریان گرما به‌داخل قرص باید صفر باشد.

می‌توان برای تابع همساز H، در ناحیهٔ خارجی دایرهٔ $r = r_\circ$، فرمولی متناظر برحسب Q به‌صورت زیر نوشت

$$H(R,\psi) = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi}\int_\circ^{\text{۲}\pi} Q(r_\circ, R, \phi - \psi)G(\phi)d\phi + H_\circ \qquad (R > r_\circ) \qquad (\text{۷})$$

که در آن $H_\circ$ عددی ثابت است. مثل قبل، فرض می‌کنیم که G تکه‌یی پیوسته و شرط (۴) برقرار باشد. در این‌صورت

$$H_\circ = \lim_{R\to\infty} H(R,\psi)$$

و به‌ازای هر ψ که G در آن پیوسته باشد،

$$\lim_{\substack{R\to r_\circ \\ R>r_\circ}} H_R(R,\psi) = G(\psi). \qquad (\text{۸})$$

تحقیق درستی فرمول (۷) و حالات خاص فرمول (۳) را، که برای نواحی نیمدایره‌یی به‌کار برده می‌شوند، جزو تمرینها می‌گذاریم.

حال به نیم‌صفحه باز می‌گردیم، فرض می‌کنیم $G(x)$ به‌ازای همهٔ xهای حقیقی، بجز حداکثر تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته باشد و در ویژگی ترتیبی زیر صدق کند

$$|x^a G(x)| < M \qquad (a > \text{۱}) \qquad (\text{۹})$$

هر گاه $-\infty < x < \infty$. به‌ازای هر عدد حقیقی و ثابت t تابع $\operatorname{Log}|z-t|$ در نیم‌صفحهٔ $\operatorname{Im} z > \circ$ همساز است. در نتیجه، تابع

$$U(x,y) = \frac{\text{۱}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z-t|G(t)dt + U_\circ \qquad (\text{۱۰})$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t-x)^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}]G(t)dt + U_\circ \qquad (y > \circ)$$

که در آن $U_\circ$ یک عدد ثابت حقیقی است، در آن نیم‌صفحه همساز است.

فرمول (۱۰) با درنظرداشتن تبدیل انتگرال شوارتس (۱) بخش ۱۲۰، نوشته شد؛ زیرا از فرمول (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$U_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t-x)^2+y^2}dt \qquad (y>0). \tag{11}$$

پس با توجه به روابط (۱) و (۲) بخش ۱۲۰، در هر نقطهٔ x که G در آن پیوسته باشد داریم

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U_y(x,y) = G(x). \tag{12}$$

بنابراین، فرمول انتگرال (۱۰)، مسئلهٔ نویمان برای نیم‌صفحهٔ $y>0$ با شرط مرزی (۱۲) را حل می‌کند. اما روی G شرایطی نگذاشته‌ایم که برای اطمینان ازکرانداربودن تابع همساز U، وقتی $|z|$ افزایش می‌یابد، کافی باشند.

در صورتی که G یک تابع فرد باشد، فرمول (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \ln\left[\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right] G(t)dt \qquad (x>0, y>0). \tag{13}$$

این فرمول نمایش‌دهندهٔ تابعی است که در ربع اول $x>0$، $y>0$ همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند.

$$U(0,y) = 0 \qquad (y>0), \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U_y(x,y) = G(x) \qquad (x>0). \tag{15}$$

تمرینها

۱. فرمول (۷)، بخش ۱۲۱ را با استفاده از نتایج قبلی آن بخش، به‌عنوان جواب مسئله نویمان برای ناحیهٔ خارجی دایرهٔ $r=r_0$ ثابت کنید.

۲. حالت خاص فرمول (۳)، بخش ۱۲۱،

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [Q(r_0, r, \phi-\theta) - Q(r_0, r, \phi+\theta)]G(\phi)d\phi$$

را برای تابع U به‌دست آورید که در ناحیهٔ نیمدایره‌یی $r<r_0$، $0<\theta<\pi$ همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U(r,0) = U(r,\pi) = 0 \qquad (r<r_0)$$

و به‌ازای هر θ که G در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ \\ r<r_\circ}} U_r(r,\theta)=G(\theta) \qquad (\circ<\theta<\pi).$$

۳. حالت خاص فرمول (۳)، بخش ۱۲۱،

$$U(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^\pi [Q(r_\circ,r,\phi-\theta)+Q(r_\circ,r,\phi+\theta)]G(\phi)d\phi+U_\circ$$

را برای تابع U به‌دست آورید که در ناحیهٔ نیمدایره‌یی $r<r_\circ$، $\circ<\theta<\pi$ همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U_\theta(r,\circ)=U_\theta(r,\pi)=\circ \qquad (r<r_\circ)$$

و به‌ازای هر θ که G در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ \\ r<r_\circ}} U_r(r,\theta)=G(\theta) \qquad (\circ<\theta<\pi)$$

به شرط اینکه

$$\int_\circ^\pi G(\phi)d\phi=\circ\,.$$

۴. فرض کنید $T(x,y)$ معرف دماهای پایا در ورق $x\geq\circ$، $y\geq\circ$ باشد. وجوه ورق عایق‌اند و روی لبهٔ $x=\circ$ داریم $T=\circ$. شار گرما (بخش ۱۰۰) به داخل ورق در امتداد قطعهٔ $\circ<x<۱$ از لبهٔ $y=\circ$ عبارت است از ثابت A و بقیهٔ آن لبه عایق است. با استفاده از فرمول (۱۳)، بخش ۱۲۱، نشان دهید که شار خارج شده از ورق در امتداد لبهٔ $x=\circ$ عبارت است از

$$\frac{A}{\pi}\ln\left(۱+\frac{۱}{y^۲}\right).$$

پیوست ۱

کتابنامه

فهرست کتابهای تکمیلی زیر، فهرستی جامع نیست. در بسیاری از کتابهای این فهرست مراجع دیگری را می‌توان یافت.

نظریه

Ahlfors, L. V.: "Complex Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1979.

Antimirov, M. Ya., A. A. Kolyshkin, and R. Vaillancourt: "Complex Variables," Academic Press, San Diego, 1998.

Bak, J., and D. J. Newman: "Complex Analysis," 2d ed., Springer-Verlag, New York, 1997.

Bieberbach, L.: "Conformal Mapping," American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

Boas, R. P. : "Invitation to Complex Analysis," The McGraw-Hill Companies, New York, 1987.

———: "Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.

Carathéodory, C.: "Conformal Representation," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.

———: "Theory of Functions of a Complex Variable," American Mathematical Society, Providence, RI, 1954.

Conway, J. B.: "Functions of One Complex Variable," 2d ed., 6th Printing, Springer-Verlag, New York, 1997.

Copson, E. T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1962.

Evans, G. C.: "The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems," American Mathematical Society, Providence, RI, 1927.

Fisher, S. D.: "Complex Variables," 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1990.

Flanigan, F. J.: "Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1983.

Hille, E.: "Analytic Function Theory," Vols. 1 and 2, 2d ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1973.

Kaplan, W.: "Advanced Calculus," 5th ed., Addison-Wesley Higher Mathematics, Boston, MA, 2003.

———: " Advanced Mathematics for Engineers," TechBooks, Marietta, OH, 1992.

Kellogg, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Dover Publications, Inc., New York, 1953.

Knopp, K.: "Elements of the Theory of Functions," translated by F. Bagemihl, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.

———: "Problem Book in the Theory of Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2000.

Krantz, S. G.: "Complex Analysis: The Geometric Viewpoint," Carus Mathematical Monograph Series, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.

———: "Handbook of Complex Variables," Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, 2000.

Krzyż, J. G.: "Problems in Complex Variable Theory," Elsevier Science, New York, 1972.

Lang, S.: "Complex Analysis," 3d ed., Springer-Verlag, New York, 1993.

Levinson, N., and R. M. Redheffer: "Complex Variables," The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1988.

Markushevich, A. I.: "Theory of Functions of a Complex Variable," 3 vols. in one, 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.

Marsden, J. E., and M. J. Hoffman: "Basic Complex Analysis," 2d ed., W. H. Freeman & Company, New York, 1987.

Mathews, J. H., and R. W. Howell: "Complex Analysis for Mathematics and Engineering," 4th ed., Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, 2001.

Mitrinović, D. S.: "Calculus of Residues," P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1966.

Nahin, P. J.: "An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

Nehari, Z.: "Conformal Mapping," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1975.

Newman, M. H. A.: "Elements of the Toplogy of Plane Sets of Points," 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1999.

Pennisi, L. L.: "Elements of Complex Variables," 2d ed., Holt, Rinehart & Winston, Inc., Austin, TX, 1976.

Rubenfeld, L. A.: "A First Course in Applied Complex Variables," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

Saff, E. B., and A. D. Snider: "Fundamentals of Complex Analysis," 3d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 2001.

Silverman, R. A.: "Complex Analysis with Applications," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.

Springer, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1981.

Taylor, A. E., and W. R. Mann: "Advanced Calculus," 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983:

Thron, W. J.: "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

Titchmarsh, E. C.: "Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, Inc., New York,1976.

Volkovyskii, L. I., G. L. Lunts, and I. G. Aramanovich: "A Collection of Problems on Complex Analysis," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1992.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson: "A Course of Modern Analysis," 4th ed., Cambridge University Press, New York, 1996.

کاربردها

Bowman, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.

Brown, G. H., C. N. Hoyler, and R. A. Bierwirth: "Theory and Application of Radio-Frequency Heating," D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1947.

Brown, J. W., and R. V. Churchill: "Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2001.

Churchill, R. V.: "Operational Mathematics," 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1972.

Dettman, J. W.: "Applied Complex Variables," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.

Fourier, J.: "The Analytical Theory of Heat," translated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

Hayt, W. H., Jr. and J. A. Buck: "Engineering Electromagnetics," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2000.

Henrici, P.: "Applied and Computational Complex Analysis," Vols. 1, 2, and 3, John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1991, and 1993.

Jeffrey, A.: "Complex Analysis and Applications," CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

Kober, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, Inc., New York, 1952.

Lebedev, N. N.: "Special Functions and Their Applications," rev. ed., translated by R. Silverman, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1972.

Love, A. E.: "Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1944.

Milne-Thomson, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," 5th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996.

Oppenheim, A. V., R. W. Schafer, and J. R. Buck: "Discrete-Time Signal Processing," 2d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 1999.

Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., Krieger Publishing Company, Melbourne, FL, 1983.

Streeter, V. L., E. B. Wylie, and K. W. Bedford: "Fluid Mechanics," 9th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1997.

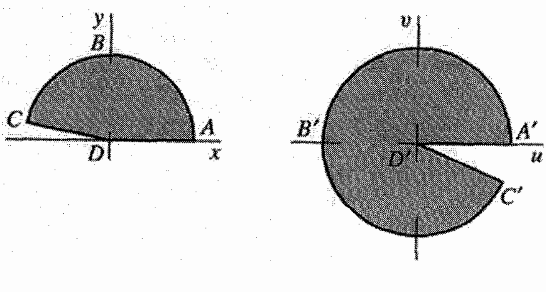
Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier: "Theory of Elasticity," 3d ed., The McGraw-Hill Companies, New York, 1970.

Wen, G.-C.: "Conformal Mappings and Boundary Value Problems," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 106, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

پیوست ۲

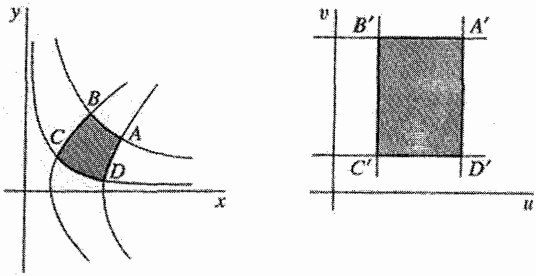
جدول تبدیلهای نواحی

(فصل ۸ را ببینید)



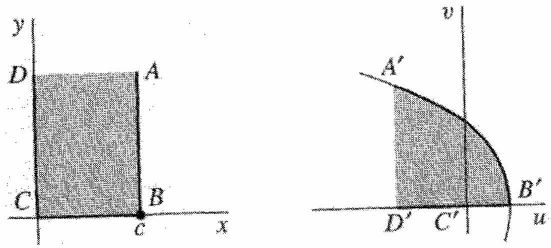
شکل ۱

$w = z^{2}$



شکل ۲

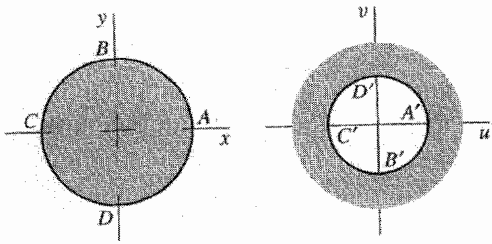
$w = z^{۲}$



شکل ۳

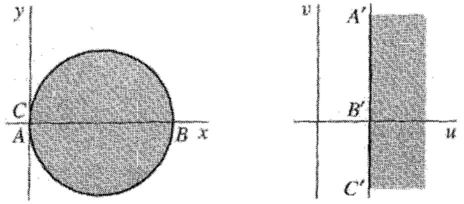
$w = z^{۲}$؛

$A'B'$ روی سهمی $v^{۲} = -۴c^{۲}(u - c^{۲})$



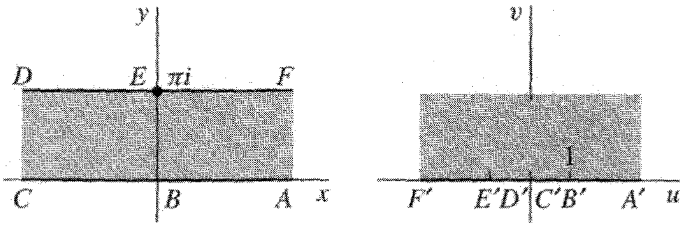
شکل ۴

$w = \frac{۱}{z}$



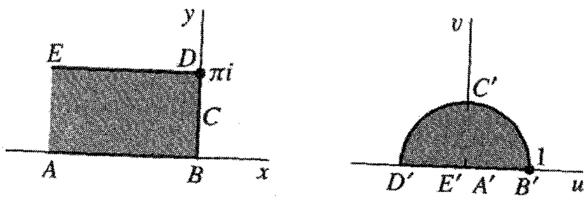
شکل ۵

$$w = \frac{۱}{z}$$



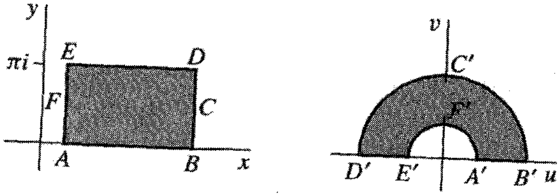
شکل ۶

$$w = \exp z$$



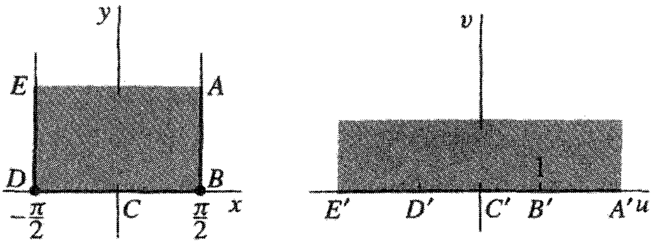
شکل ۷

$$w = \exp z$$



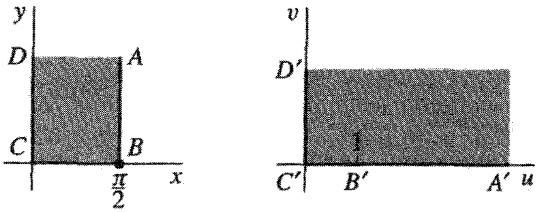
شکل ۸

$$w = \exp z$$



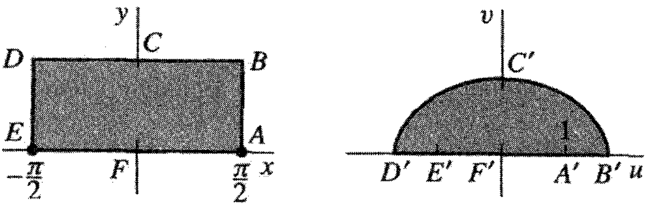
شکل ۹

$w = \sin z$



شکل ۱۰

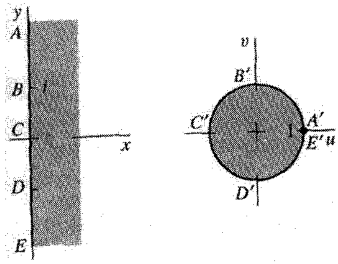
$w = \sin z$



شکل ۱۱

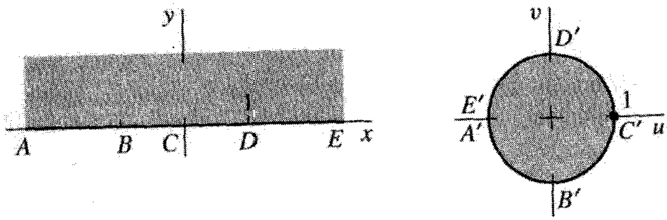
$w = \sin z$؛ BCD روی خط $y = b$ $(b > 0)$، $B'C'D'$

روی بیضی $\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$



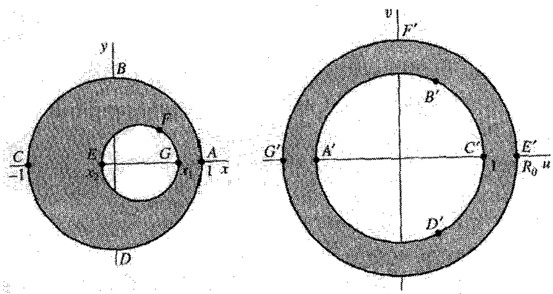
شکل ۱۲

$$w = \frac{z-۱}{z+۱}$$



شکل ۱۳

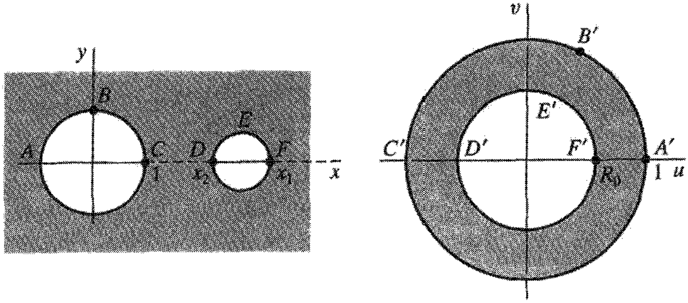
$$w = \frac{i-z}{i+z}$$



شکل ۱۴

$$w = \frac{z-a}{az-۱}؛ \quad a = \frac{۱ + x_۱x_۲ + \sqrt{(۱-x_۱^۲)(۱-x_۲^۲)}}{x_۱+x_۲}$$

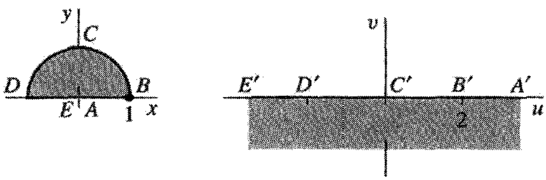
$$R_۰ = \frac{۱ - x_۱x_۲ + \sqrt{(۱-x_۱^۲)(۱-x_۲^۲)}}{x_۱ - x_۲}$$ ($a > ۱$ و $R_۰ > ۱$ در صورتی که $-۱ < x_۲ < x_۱ < ۱$)



شکل ۱۵

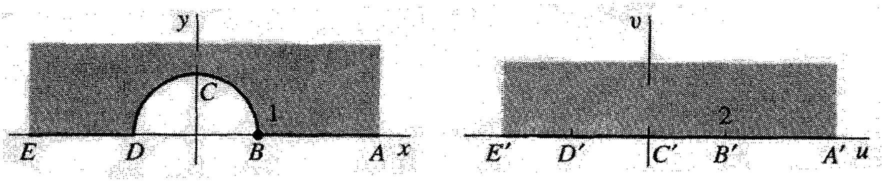
$$w = \frac{z-a}{az-1} \text{؛} \quad a = \frac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2}$$

$$R_0 = \frac{x_1x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$$ ($x_2 < a < x_1$ و $0 < R_0 < 1$) در صورتی که $1 < x_2 < x_1$



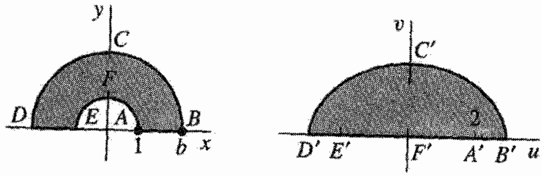
شکل ۱۶

$$w = z + \frac{1}{z}$$



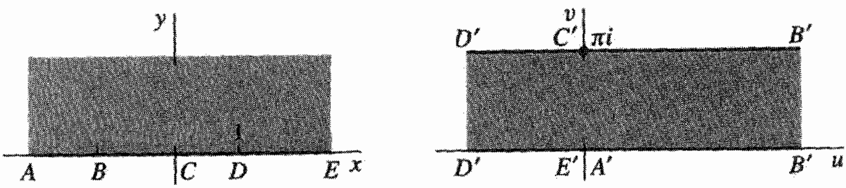
شکل ۱۷

$$w = z + \frac{1}{z}$$



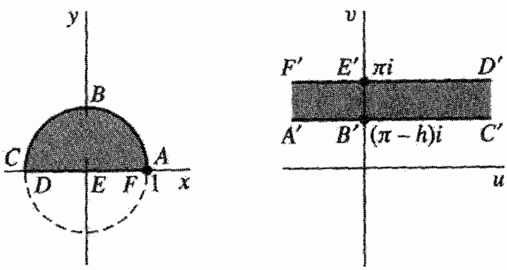
شکل ۱۸

$w = z + \frac{1}{z}$؛ $B'C'D'$ روی بیضی $\frac{u^2}{(b+1/b)^2} + \frac{v^2}{(b-1/b)^2} = 1$



شکل ۱۹

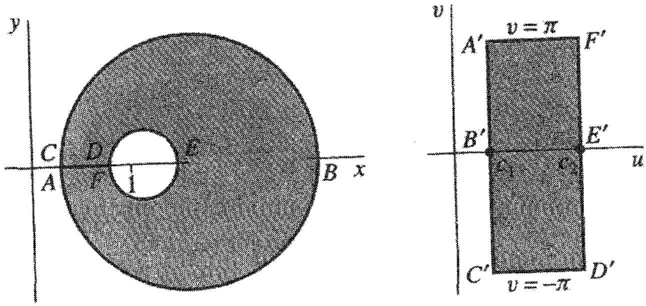
$w = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$؛ $z = -\coth \frac{w}{2}$



شکل ۲۰

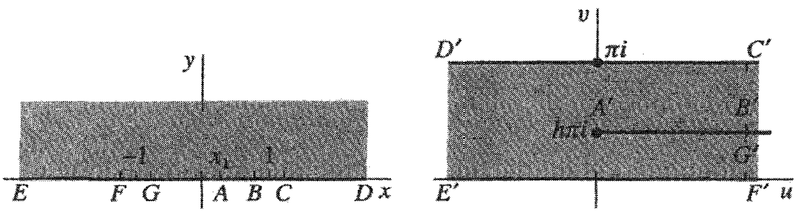
$w = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$؛

ABC روی دایرهٔ $x^2 + (y + \cot h)^2 = \csc^2 h$ $(0 < h < \pi)$



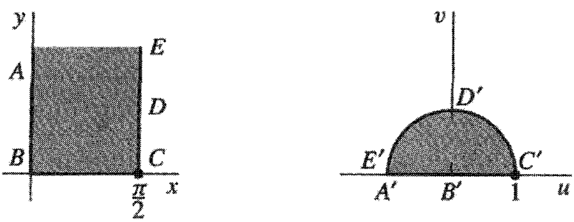
شکل ۲۱

$w = \operatorname{Log}\dfrac{z+۱}{z-۱}$؛ مراکز دوایر در $z = \coth c_n$، شعاعها: $\operatorname{csch} c_n\ (n = ۱, ۲)$



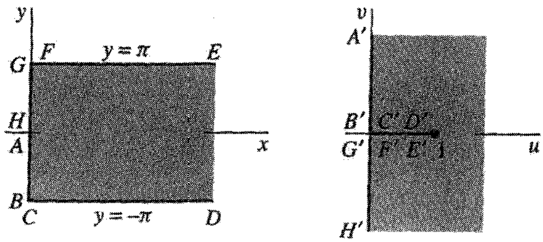
شکل ۲۲

$x_۱ = ۲h - ۱$ ؛$w = h\ln\dfrac{h}{۱-h} + \ln ۲(۱-h) + i\pi - h\operatorname{Log}(z+۱) - (۱-h)\operatorname{Log}(z-۱)$



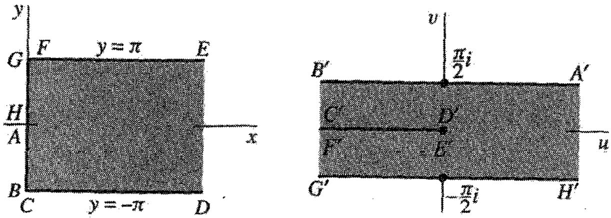
شکل ۲۳

$$w = \left(\tan\frac{z}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱-\cos z}{۱+\cos z}$$



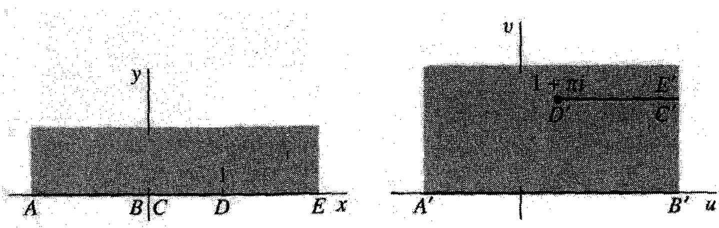
شکل ۲۴

$$w=\coth\frac{z}{۲}=\frac{e^{z}+۱}{e^{z}-۱}$$



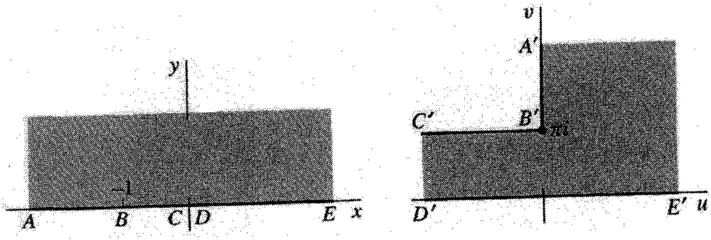
شکل ۲۵

$$w=\text{Log}\left(\coth\frac{z}{۲}\right)$$



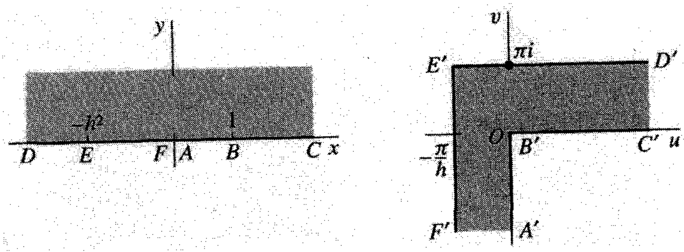
شکل ۲۶

$$w=\pi i+z-\text{Log}\, z$$



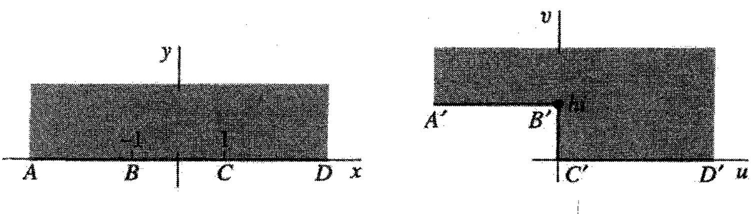
شکل ۲۷

$$w = ۲(z+۱)^{۱/۲} + \mathrm{Log}\,\frac{(z+۱)^{۱/۲}-۱}{(z+۱)^{۱/۲}+۱}$$



شکل ۲۸

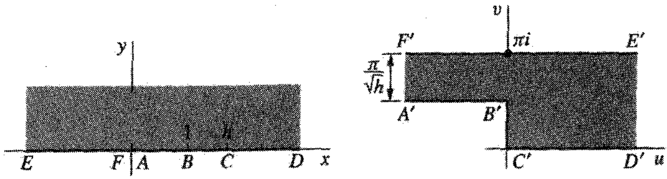
$$w = \frac{i}{h}\mathrm{Log}\,\frac{۱+iht}{۱-iht} + \mathrm{Log}\,\frac{۱+t}{۱-t}; \qquad t = \left(\frac{z-۱}{z+h^{۲}}\right)^{۱/۲}$$



شکل ۲۹

$$w = \frac{h}{\pi}[(z^{۲}-۱)^{۱/۲} + \cosh^{-۱} z]^{*}$$

* تمرین ۳ بخش ۱۱۵ را ببینید.



شکل ۳۰

$$w = \cosh^{-۱}\left(\frac{۲z - h - ۱}{h - ۱}\right) - \frac{۱}{\sqrt{h}}\cosh^{-۱}\left[\frac{(h + ۱)z - ۲h}{(h - ۱)z}\right]$$

واژه‌نامه

آوند	argument
اصل بازتابی	reflection Principle
انتگرال روی خط	line integral
اندازه	magnitude
بریدگی شاخه‌یی	cut branch
پایا	invariant, steady
پتانسیل الکتروستاتیک	electrostatic potential
تابع	function
ـ افزایشی	increasing -
ـ چندمقداری	multiple -valued -
ـ دو مقداری	double -valued -
ـ ضربه	impulse -
ـ لگاریتمی	logarithmic -
ـ هذلولوی	hyperbolic -
تابع اولیه	antiderivative

transformation	تبدیل
integral -	ـ انتگرال
linear fractional -	ـ خطی کسری
stereographic projection	ـ گنجنگاشتی
singularity	تکینی
multiply connected domain	حوزهٔ همبند چندگانه
simply connected domain -	حوزهٔ همبند ساده
extended complex plane	صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته
solid scale factor	ضریب مقیاس صلب
residue theorem	قضیهٔ مانده
bound	کران
upper -	ـ بالایی
lower -	ـ پایینی
sheet	لایه
nested squares	مربعات تو در تو
contour	مسیر
normal derivative	مشتق نرمال
reciprocal	معکوس
indefinite	نامعین
point	نقطه
stagnation -	ـ توقف
exterior -	ـ خارجی
interior -	ـ داخلی
branch -	ـ شاخه‌یی
singular point	نقطهٔ تکین
essential -	ـ اساسی

removable -	ـ برداشتنی
isolated -	ـ تنها
isotherm	همدما
deleted neighborhood	همسایگی محذوف
confocal	هم‌کانون
uniform convergent	یکنواخت‌ـهمگرا

نمایه