مجموعه‌ها

تألیف جلیل‌الله قراگزلو

$(A \cup B') \cap (A \cup B) = A$

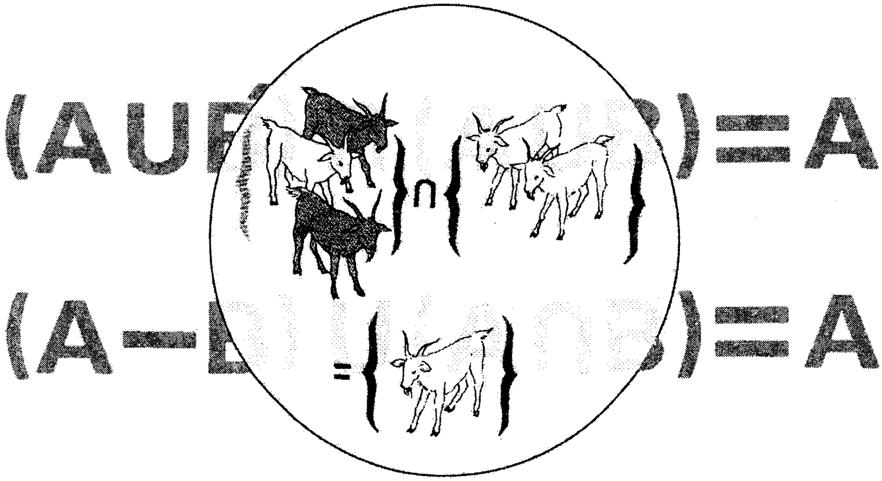
$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

گنجینهٔ دانش

انتشارات فاطمی

مجموعه‌ها

تألیف جلیل‌الله قراگزلو



گنجینهٔ دانش

انتشارات فاطمی

مجموعه‌ها

مؤلف: جلیل‌الله قراگزلو
ویراستار: مهران اخباریفر
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ پنجم، ۱۳۸۷
شابک ۹ـ۱۵۲ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-152-9
انتشارات فاطمی
قیمت: ۶۵۰۰ تومان
آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
طرح جلد: آتلیهٔ مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ و صحافی: کتاب شمس

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

قراگزلو، جلیل‌الله
مجموعه‌ها / مؤلف جلیل‌الله قراگزلو؛ ویراستار مهران اخباریفر. ــ تهران: فاطمی، گنجینهٔ دانش، ۱۳۶۹.
۱۵۷ ص.: مصور.
ISBN 964-318-152-9
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
چاپ پنجم: ۱۳۸۷.
۱. نظریهٔ مجموعه‌ها. ۲. نظریهٔ مجموعه‌ها ــ مسائل، تمرینها و غیره. الف. عنوان.
۵۱۱/۳۲۲
QA۲۴۸/ق۴م۳
کتابخانهٔ ملی ایران
۳۰۷ـ۶۹م*

به‌نام خدا

سخنی در بارهٔ این کتابها

هر جامعهٔ به‌پاخاسته‌ای، برای دست‌یافتن به خودکفایی و گسستن هرگونه زنجیر وابستگی سیاسی و اقتصادی، تلاش می کند تا علم و دانش و صنعت و فن و هنر را درمیان همگان، خاصه نوجوانان و جوانان و دانشپژوهان، گسترش دهد. نظام آموزشی را دگرگون می کند. کتابهای درسی را پر بارتر می کند و از دانشهای کهنه و سرگرم کننده می زداید. علم را با عمل و دانستن را با اندیشیدن و به کار بستن می آمیزد. برای هرگونه کتابی که دانشهای نو و تازه‌ترین یافته های دانشمندان و پژوهشگران به‌آنها راه‌یافته است، پایگاهی بس ارجمند می شناسد. می داند که بسیار نکته هاست که کتاب درسی فرصتی نمی یابد به آنها بپردازد یا افزونتر از اشاره هایی در این زمینه ها داشته باشد. چنین جامعه‌ای تلاش می کند تا دانش آموختگان به گونه ای بارآیند که برای زندگی امروز و فردای خود و جامعهٔ خویش کارآمدتر و مؤثرتر باشند و از خلق کردن و دست‌یازیدن به هنرها و صنعتها و اختراعها و اکتشافها و سودبردن از دانستن برای بهتر زیستن باز نمانند.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، باتوجه به این نیازها، رسالتی را برعهده گرفته است و انتشار مجموعه کتابهایی را در زمینهٔ علوم و دانستنیها آغاز کرده است که آنها را گنجینهٔ دانش نامیده است. این کتابها به پرسشهای آدمی در بارهٔ خود و جهان پیرامونش، و کنجکاو یهایش در زمینه های گوناگون علم و کاربردهایش پاسخ می گوید. برای انتشار آنها از بهترین و تازه‌ترین کتابهای علمی جهان استفاده می شود. در کار نوشتن و تألیف و ترجمهٔ آنها از همکاریهای زبده‌ترین کارشناسان آموزش و پرورش کشورمان و پژوهشگران در زمینه های گوناگون علوم بهره می برد. تا آنجا که میسر و ممکن است تلاش می شود تا اشتباه و لغزشی در آنها راه نیابد.

کتابهای گنجینهٔ دانش هم خودآموزند، هم یاری‌دهنده به فهم کتابهای درسی، هم آماده کنندهٔ دانش آموزان برای موفقیت در امتحان در رشته های گوناگون علمی و کنکور دانشگاهها، و هم راهنمای معلمان برای تدریس علم.

اگر به اندکی از این رسالت در راه بازسازی جامعهٔ علمی کشورمان رسیده باشیم، خدای را سپاس می گوییم که خدمتی درخور جامعه ای بزرگ برعهده گرفته ایم، حتی اگر اندک باشد.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

فهرست

پیشگفتار

روز سوم مارس سال ۱۸۴۵ میلادی، در شهر لنینگراد، که آن زمان سن‌پطرزبورگ نامیده می‌شد، کودکی به‌دنیا آمد که بعدها جهشی در ریاضی و روشی نو در این علم پدید آورد.

این نوزاد، که او را ژرژ کانتور* نامیدند، آغازگر نظریه‌ای دربارهٔ سیستم جدیدی از عدد شد که ممکن است شامل تعدادی محدود ولی بسیار بسیار، یا تعدادی محدود ولی اندك، یا تعدادی نامحدود ولی به‌ظاهر کم، و یا ظاهری کم ولی دارای عظمتی بی‌پایان باشد. خود او این سیستم را Transfinite نامید که اگر بخواهیم برابری فارسی برایش ذکر کنیم، بهتر از واژهٔ تراهتناهی نخواهیم یافت. این واژه را در کتاب درسی سال اول‌دبیرستان «فوق بینهایت» ترجمه کرده‌اند، بی آنکه به‌ترجمهٔ کلمهٔ Finite، به‌معنی محدود، توجه شود.

امروزه، این سیستم عدد را مجموعه می‌نامند. در حدود دوازده سال پیش، که بزرگان آموزش و پرورش تصمیم گرفتند ریاضیات جدید را وارد برنامهٔ دبیرستانی کنند، دو جلد کتاب Marjoram، معلم ریاضی انگلستان را ملاك کار خود قرار دادم و چند فصل از آن کتابها را ترجمه و تألیف کردم، که به‌همت آقای ایرج جهانشاهی به‌صورت دو جلد کتاب تئوری مجموعه‌ها ومنطق ریاضی انتشار یافتند. این دوجلد کتاب درحقیقت کمك درسی بودند. واژه‌هایی که در این دو کتاب به‌کار رفته بود، با مشورت استادانی چون شادروان دکتر غلامحسین مصاحب و شادروان دکتر محسن هشترودی و آقای غلامرضا عجدی برگزیده‌شد. پس از آنکه کتابهای وزارت آموزش وپرورش

---

* George Cantor (۱۸۴۵–۱۹۱۸ میلادی)

در این زمینه به‌چاپ رسید، برخی از این واژه‌ها تغییر کرده بود.

چندی قبل جلد سوم کتاب Marjoram به دستم رسید که کامل کنندهٔ دو جلد پیشین بود. دقتی دوباره در هر سه کتاب مرا برآن داشت که به‌تألیف این کتاب بپردازم. دراین کتاب همان واژه‌هایی‌را به‌کار برده‌ام که ازطرف وزارت آموزش و پرورش پذیرفته شده است. از این گذشته کتاب دارای مسائل بیشتری به‌شکل توصیفی و تستی است که برای جویندگان وعلاقه‌مندان ریاضیات جدید در حد پیش دانشگاهی مجموعه‌ای مفید است. در گزینش مسائل از کتاب Set Theory نیز استفاده کرده‌ام. این کتاب یکی از مجموعه‌کتابهای Schaum است که در سراسر جهان طالبان بسیار دارد.

دراین مقدمه از واژه‌ها و ترکیبهایی عجیب، مانند «محدود ولی بسیار بسیار»، «محدود ولی نامتناهی»، و... صحبت شده‌است. مفهوم این معانی را ضمن مطالعهٔ کتاب خواهید دانست.

بهتر است این کتاب همزمان با کتاب منطق و استدلال ریاضی، از مجموعه کتابهای گنجینهٔ دانش، که به‌وسیلهٔ مؤسسهٔ انتشارات فاطمی انتشار یافته‌است، مورد مطالعه قرار گیرد تا به‌سهولت با جبرهای گزاره‌ها، مجموعه‌ها، و بول (Bool) آشنا شوید و وسعت و عمق کار کانتور را درک کنید؛ دانشمندی که درسال ۱۹۱۸ میلادی در هال، یکی از شهرهای آلمان، چشم از جهان فرو بست، درحالی که هیچ کس به‌آنچه او دربارهٔ مجموعه‌ها بیان کرده بود توجهی نداشت.

جلیل‌الله قراگزلو

آبان ۶۸

۱

شناخت و قراردادها

۱-۱: تعریف مجموعه‌ها

مجموعه یکی از مفهومهای تعریف‌ناپذیر در ریاضیات جدید است که از نیم قرن پیش تاکنون، از مقدماتی‌ترین مبحثهای ریاضی تا آخرین کاوشهای این دانش را تحت‌تأثیر قرار داده است، و سرانجام در آنالیز ریاضی به شکل توپولوژی مجموعهٔ نقاط درآمده است. مثلاً تعریف جدید هندسه در ریاضی جدید، زوج مرتب (G و S) است. در این تعریف S شناساگر (پارامتر) مجموعه و G بیانگر گروهی از تبدیلات درمجموعه است.

روش استدلال و استنتاج، وعلامتها وقراردادهای نظریهٔ مجموعه‌ها در هر رشته از ریاضی به‌کار می‌آید؛ به‌ویژه در جبربول[1] که کاربردی جالب‌توجه در جبرکلیدی و منطق سمبولیك دارد.

با آنکه گفتیم مجموعه مفهومی است تعریف‌ناپذیر، ولی فهم و درك آن بسیار ساده وآسان‌است. حتی کودکان مفهوم آلبوم‌عکس، کلکسیون تمبر، گلهٔ‌گوسفند، خانوادهٔ پدری و مجموعهٔ اسباب‌بازیها را به خوبی می‌فهمند. اگر بخواهیم تعریفی جامع و مانع برای مجموعه‌بیان‌کنیم،حتماً دچار تناقض‌می‌شویم. با وجوداین، ریاضیدانها با هم توافق‌کرده‌اند که به‌تعریف زیر اکتفا کنند:

مجموعه کلکسیونی (دسته‌ای) از اشیای خوشتعریف ومتمایز است که در حکم یك شیء واحد تلقی شود.

۱ــ Boolean algebra نوعی‌از روشهای جبری است که به‌وسیلهٔ جورج‌بول(George Boole، ۱۸۱۵ــ۱۸۶۴ میلادی)، ریاضیدان، عالم‌منطق و نویسندهٔ انگلیسی وضع شده‌است. بول با وضع جبر گزاره‌ها، منطق را به‌نوعی جبر ساده تبدیل کرد. با استفاده از جبربول استدلال دربارهٔ یك موضوع را به‌سادگی می‌توان به‌وسیلهٔ دستورهای سادهٔ جبری بیان‌کرد.

منظور از خوشتعریف[۲] این است که بدون هیچ تردیدی بتوان گفت که شیء معینی در مجموعهٔ مورد نظر ما هست یا نه. مثلاً «شیکپوشان» مجموعه ندارند، زیـرا برای شیکپوشی ملاکی نداریم که معین کنیم آقای فلان شیکپوش است یا نه. ولی می‌توان گفت:

مجموعهٔ پایتختهای کشورهای افریقا،
مجموعهٔ عددهای چهار رقمی بخشپذیر بر ۷،
مجموعهٔ عددهای اول سه رقمی،
مجموعهٔ کتابهای درسی رشتهٔ ریاضی-فیزیك،
مجموعهٔ عددهای فرد که با O نشان‌داده می‌شود،
مجموعهٔ عددهای طبیعی که با N نشان‌داده می‌شود،
مجموعهٔ عددهای صحیح که با Z نشان‌داده می‌شود،
مجموعهٔ عددهای گویا که با Q نشان‌داده می‌شود،
مجموعهٔ عددهای حقیقی که با R نشان‌داده می‌شود،
مجموعهٔ عددهای همبافته[۳] که با C نشان‌داده می‌شود،
مجموعه عددهای زوج که با E نشان‌داده می‌شود.

۱ـ۲: علامت عضویت در یك مجموعه

اگر x عضوی از مجموعهٔ A باشد، چنین نمایش می‌دهیم:

$$x \in A$$

وچنین می‌خوانیم: x متعلق است به مجموعهٔ A.
مثلاً اگر P مجموعهٔ عددهای اول باشد، آنگاه داریم:

$$۱۳ \in P \;,\; ۱۹ \in P \;,\; ۲۹ \in P$$

علامت $\notin$ نقیض علامت $\in$ ومفهوم آن عضو نبودن است.

مثلاً $\frac{۲}{۵} \notin N$ ، $۱۸ \notin P$ ، و $\sqrt{-۱} \notin R$

۲ـ Well Defined

۳ـ عددهایی به‌صورت $a+ib$ را که در آن $i=\sqrt{-1}$ و a و b عددهای حقیقی هستند، عددهای همبافته (Complex) می‌نامند.

علامت $\in$ را نخستین‌بار **پئانو**[۴] به‌کار برده است. در برخی از کتابها به‌جای علامت $\notin$ علامت $\sim$ را به‌کار می‌برند.

مثلاً می‌نویسند $Z \sim ۱۸$ یا $N \nsim \frac{۲}{۷}$. درکتابهای دبیرستانی به‌جای واژهٔ عضو، واژهٔ زیبای فارسی «درایه» نیز به‌کار رفته است. کاش واژه‌ای فارسی برای مجموعه یافت شود. این مهم، بستگی به‌محبت زبانشناسان فارسی دارد. بنابراین، دراین‌کتاب به‌جای **Element** همان عضو به‌کار می‌رود.

۱ـ۳: نمایش یك مجموعه

طبق قرارداد مجموعه را با یکی از حرفهای بزرگ لاتین نشان می‌دهند. اگر عضوهای مجموعه محدود باشند، در میان دو ابرو یکایك آنها را نام می‌بریم. مانند:

$$A = \{\text{محمود}, \text{حمید}, \text{محمد}, \text{احمد}\}$$

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

این نوع نمایش مجموعه را نمایش تفصیلی مجموعه می‌نامند. ولی اگر عضوهای مجموعه بسیار زیاد یا نامتناهی باشند، ویژگی عضوها را در میان دو ابرو بیان می‌کنیم، مانند:

$$A = \{x \mid x \text{ عدد اول است}\}$$

$$O = \{x \mid x \text{ عدد فرد است}\}$$

$$E = \{x \mid x \text{ عدد زوج است}\}$$

$$L = \{x \mid x \in N,\ x < ۱۰۰۰\}$$

این نوع نمایش را نمایش توصیفی یا نمایش با علامتهای ریاضی مجموعه می‌نامند.

۱ـ۴: مجموعهٔ تهی

اگرمجموعه دارای عضوی نباشد، آن را تهی می‌نامند، مانند مجموعهٔ رئیس جمهورهای

۴ـ Giuseppe Peano (۱۸۵۸ـ۱۹۳۲ میلادی)، ریاضیدان، عالم‌منطق، وزبانشناس ایتالیایی؛ که شهرتش به‌سبب اختراع علامتهایی است که به‌کمك آنها همهٔ عبارتهای منطق و ریاضیات را می‌توان بدون استفاده از زبانهای معمولی بیان کرد.

مؤنث امریکا. این مجموعه تهی است. مجموعهٔ تهی را با نماد ϕ نشان می‌دهند. پس:

$$\phi=\{\quad\}$$

توجه کنید که:

$$A=\{x|x^{۲}<۰,\ x\in R\}=\phi$$
$$B=\{x|x^{۴}+۱۰x^{۲}+۹=۰,\ x\in R\}=\phi$$

۱ـ۵: مجموعهٔ تك عضوی

اگر مجموعه‌ای فقط یك عضو داشته باشد، آن‌را تك‌عضوی می‌نامند، مانند مجموعهٔ زنانی که در معبد پانتئون پاریس به خاك سپرده شده‌اند. این مجموعه فقط یك عضو دارد، و آن خانم **برتوله**[۵] است. همچنین مجموعهٔ

$$A=\{x|x^{۳}+۱۰x^{۲}+۱۹x=۰,\ x\in R\}$$

این مجموعه فقط یك عضو $x=۰$ دارد.

۱ـ۶: برابری دو مجموعه

دومجموعه‌را برابرمی گوییم، هرگاه درهیچ کدام عضوی نباشدکه در دیگری یافت‌نشود. طبق این تعریف مجموعه‌های زیر با هم برابرند:

$$A=\{۱,\ ۲,\ ۳\},\ B=\{۱,\ ۱,\ ۲,\ ۲,\ ۲,\ ۳,\ ۳,\ ۳\}$$
$$C=\{۱,\ ۲,\ ۳,\ ۳,\ ۳,\ ۳\},\ D=\{۱,\ ۱,\ ۱,\ ۱,\ ۲,\ ۳\}$$

این نوع تعریف درتئوری مجموعه‌ها، اصلی به‌نام اصل گسترش به‌وجود می‌آورد. مفهوم این اصل این است که اگر عضوی از مجموعه چندین‌بار تکرار شود، باآنکه عدهٔ عضوها زیادتر می‌شود، ولی مجموعهٔ جدید برابرهمان مجموعهٔ اولیه است. بنابراین:

$$\{۱,\ ۲,\ ۳\}=\{۱,\ ۱,\ ۲,\ ۲,\ ۲,\ ۳,\ ۳,\ ۳,\ ۳\}$$

۱ـ۷: مجموعه‌های هم‌ارز

دومجموعه را هم ارز می گوییم هرگاه عدهٔ عضوهای آنها برابرباشد، مانند دومجموعهٔ زیر:

۵ــ همسر کلودلویی برتوله (Berthollet، ۱۷۴۸ــ۱۸۲۲ میلادی)، شیمیدان فرانسوی

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}\ ,\ B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

دراین صورت، می‌نویسیم:

$$A\simeq B$$

ساده‌ترین راه برای تشخیص هم‌ارزی دو مجموعه شمارش عضوهای آن دومجموعه است. طبق قرارداد عدهٔ عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهند، پس:

$$(A\simeq B)\Longleftrightarrow n(A)=n(B)$$

۱ـ۸: مجموعهٔ مرجع

باز با مفهومی روبه‌رو هستیم که تعریف‌ناپذیر است، ولی با مثال به‌سادگی می‌توان مفهوم آن را درك كرد. برای مثال مجموعهٔ عددهای طبیعی را درنظر می‌گیریم. دراین مجموعه، مجموعه‌های دیگری وجود دارد، مانند مجموعهٔ عددهای فرد، مجموعهٔ عددهـای زوج، مجموعهٔ عددهای اول، مجموعهٔ عددهای بخشپذیر بر۷، ومجموعهٔ عددهایی کـه با دستور $n^۳+۱$ $(n\in N)$ تشکیل می‌شود. دراین‌حال، مجموعهٔ عددهای طبیعی برای مجموعه‌های دیگر مجموعهٔ مرجع یامجموعهٔ کل نامیده می‌شود. با همین روش، مجموعهٔ دانش‌آموزان کشورایران را می‌توان مجموعهٔ مرجع برای مجموعه‌های زیردانست:

مجموعهٔ دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی ایران،

مجموعهٔ دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی ایران،

مجموعهٔ دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی-فیزیك ایران،

مجموعهٔ دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی ایران،

مجموعهٔ دانش‌آموزان دختر درایران.

طبق قرارداد مجموعهٔ مرجع را بیشتر با M نشان می‌دهیم.

۱ـ۹: مجموعه‌های محدود ومجموعه‌های نامحدود

ممکن است عضوهـای یك مجموعـه نامحدود باشد، مانند مجموعهٔ عددهـای نسبی، یا مجموعه‌های زیر:

$$A=\left\{x|x=\frac{n}{n^۲+۱},\ n\in N\right\}$$

$$B=\left\{y \mid y=(-۱)^{n+۱} \times \frac{n}{n+۱}, n \in N\right\}$$

$$C=\left\{z \mid z=(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}} \times \frac{n}{n^{۲}+۱}, n \in N\right\}$$

اگر بخواهیم عضوهای این مجموعه‌ها را بیابیم،کافی است به‌جای n عددهای طبیعی از ۱ به‌بعد را قرار دهیم. این روش معرفی مجموعه همان نمایش مجموعه با علامتهای ریاضی است. پس:

$$B=\left\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, -\frac{۴}{۵}, \ldots\right\}$$

$$C=\left\{-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۵}, \frac{۳}{۱۰}, \frac{۴}{۱۷}, -\frac{۵}{۲۶}, -\frac{۶}{۳۷}, \ldots\right\}$$

ولی گاهی عدهٔ عضوهای یك مجموعه محدود است، مانند $D=\{x \mid$ ماههای شمسی است $x\}$ که دارای ۱۲ عضو است.

توجه کنید که علامت | به‌مفهوم به‌قسمی‌که است. در برخی از کتابها علامت $\ni$ را به‌این مفهوم به‌کار می‌برند.

به‌عبارت زیر توجه کنید:

$$A=\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n^{۲}+۱}\ , \ n \in N$$

علامت $\sum$ سیگما[۶] تلفظ می‌شود ومقصود ازعبارت بالا این‌است که درعبارت $n/(n^{۲}+۱)$ به‌جای n عددهای طبیعی از ۱ تا بینهایت قراردهیم وجمله‌های حاصل راکه عضوهای آن مجموعه هستند با هم جمع کنیم.

نکته‌های دیگر دربارهٔ مجموعه‌های محدود و نامحدود

باید دقت کرد که مجموعه‌های نامحدود با مجموعه‌هایی که شامل عضوهای بسیار زیادند اشتباه نشود. شاعران از بی‌نهایت بودن دانه‌های شن درساحل دریا یا ازبی‌نهایت بودن ستارگان سخن رانده‌اند. درحقیقت، نه‌دانه‌های شن بی‌نهایت هستند ونه‌ستارگان، همان‌طور که انگشتان یك دست نیز نامحدود نیستند. در ریاضیات جدید گاهی به‌عددهای

۶ــ Sigma، هجدهمین حرف درالفبای یونانی

بسیار بسیار بزرگ برمی‌خوریم که دلیل برنامحدود بودن آنها نیست. مثلاً سر آرتور ادینگتون[۷] ادعا کرد که با محاسبهٔ دقیق در عالم وجود ۱۳۶×۲^{۲۵۶} پروتون وجود دارد. این عدد که هنگام نوشتن شامل ۸۰ رقم می‌شود، کمتراست ازتعداد بازیهای ممکن مهره‌های شطرنج که ازیک سوی صفحهٔ شطرنج شروع وازسوی دیگرخارج شوند. این تعداد $۱۰^{۱۰^{۵۰}}$ است که هنگام نوشتن تعداد ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰، ۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ صفر به‌دنبال ۱ خواهدآمد. همچنین عددهای بزرگتر از این‌عدد هم وجود دارند، مانند:

$$۱۰^{۱۰^{۵۰^{۵۰^{۵۰}}}} \quad و \quad ۱۰^{۱۰^{۵۰^{۵۰}}}$$

این عددها هم با همهٔ عظمتشان محدودند، همان‌طور که عددهای ۲، ۷ و ۱۱ محدودند. سرادوارد ادینگتون نیز ادعا کرد که عدهٔ الکترونها درعالم $۱/۲۹ \times ۱۰^{۸۷}$ است. این عده نیزمحدود است.

می‌دانیم که در علم حساب عددهای اول را نامحدود می‌دانند. مرسن[۸] ادعا کرد که به‌ازای همهٔ مقادیراول n، عدد $۲^n - ۱$ اول‌است واین دستور تا عدد $۲^{۲۳۰۹} - ۱$ آزمایش شده است. دستور مرسن که ادعاست وهنوز به‌اثبات نرسیده است یک‌مجموعهٔ نامحدود را معرفی می کند. فرما[۹] نیزادعا کرد که دستور $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ به‌ازای همهٔ مقادیرصحیح و مثبت n، عددهای اول را معرفی می کند. درحقیقت، این دستور درست نیست. F_5 دارای سازهٔ ۶۴۱ است. همچنین $۲^{۲^{۲۷۳}} + ۱$ اول نیست، زیرا فاکتور $۵ \times ۲^{۷۵} + ۱$ دارد. ولی دستور فرما یك مجموعهٔ نامحدود را معرفی می کند.

۱-۱۰: مجموعه‌های نامحدود، ولی شمارش‌پذیر

مجموعه‌ای را شمارش‌پذیر می گوییم، هرگاه عضوهای آن با عددهای طبیعی تناظر یك به‌یك داشته باشند، گرچه عدهٔ عضوهای آن $۱۰^{۱۰^{۵۰}}$ باشد.

۷ــ sir Arthur Stanley Eddington (۱۸۸۲ــ۱۹۴۴ میلادی)، اخترشناس و فیزیکدان انگلیسی که چندی معاون رصدخانهٔ سلطنتی گرینویچ واستادومدیر رصدخانهٔ دانشگاه کیمبریج بود.

۸ــ L'abbe Marin Merssenne (۱۵۸۸ــ۱۶۴۸ میلادی)، فیلسوف ودانشمندفرانسوی

۹ــ Pierre de Fermat (۱۶۰۱ــ۱۶۶۵ میلادی)، ریاضیدان فرانسوی

ابوسعید ابوالخیر[۱۰] **می گوید:**

«کوهی است به طول هزار فرسنگ[۱۱] و به‌عرض هزار فرسنگ و به‌ارتفاع هزار فرسنگ. این کوه از دانه‌های ارزن تشکیل‌شده است. مرغی هر هزار سال یك بار می‌آید و ارزنی از این کوه عظیم برمی‌دارد. هنگامی که ارزنهای این کوه تمام شود، یك روز از ابدیت گذشته است.»

این تعبیری است زیبا وشاعرانه دربارهٔ مجموعهٔ شمارش‌پذیر! کوه عظیم است و دانه‌های ارزن بسیار بسیار، ولی می‌توان آنها را شمرد و گفت ارزن اول، ارزن دوم، ارزن سوم و...

ولی آیا می‌توان نقطه‌های موجود بین دوسر یك پاره‌خط را شمرد؟ نه. مجموعهٔ نقطه‌های یك پاره‌خط، هر قدرهم که کوچك باشد، شمارش‌ناپذیر است. اینك به‌مثال زیر توجه کنید:

مجموعهٔ عددهای گویا نامحدود است. حتی بین ۱/۲ و ۱/۳ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد. مانند:

$$\frac{۱+۱}{۳+۲}=\frac{۲}{۵},\ \frac{۱+۲}{۳+۵}=\frac{۳}{۸},\ \ldots$$

ولی مجموعهٔ عددهای گویا شمارش‌پذیر است. به‌آرایهٔ زیر، که به‌وسیلهٔ ژرژ کانتور تهیه‌شده است، توجه کنید:

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{۱}{۱} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} & \ldots \\
\frac{۲}{۱} & \frac{۲}{۲} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۴} & \frac{۲}{۵} & \frac{۲}{۶} & \ldots \\
\frac{۳}{۱} & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۳} & \frac{۳}{۴} & \frac{۳}{۵} & \frac{۳}{۶} & \ldots \\
\frac{۴}{۱} & \frac{۴}{۲} & \frac{۴}{۳} & \frac{۴}{۴} & \frac{۴}{۵} & \frac{۴}{۶} & \ldots \\
\frac{۵}{۱} & \frac{۵}{۲} & \frac{۵}{۳} & \frac{۵}{۴} & \frac{۵}{۵} & \frac{۵}{۶} & \ldots \\
\frac{۶}{۱} & \frac{۶}{۲} & \frac{۶}{۳} & \frac{۶}{۴} & \frac{۶}{۵} & \frac{۶}{۶} & \ldots
\end{array}$$

۱۰ــ عارف وشاعر ایرانی (۴۴۰ــ۳۵۷ ه.ق)، که در علوم تفسیر، حدیث، فقه و تصوف تبحر داشت.

۱۱ــ فرسنگ یا فرسخ ازمقیاسهای سنجش طول درایران بود که امروزه برابر با ۶ کیلومتر محاسبه می‌شود.

می‌بینید که این جدول شامل همهٔ عضوهای Q است که می‌توان آنها را در جهت پیکان شمرد. ولی هرگز نمی‌توان چنین جدولی برای مجموعهٔ عددهای حقیقی، یعنی R ترتیب داد.

تمرین ۱

● مجموعه‌های زیر را با نام بردن یکایک عضوهای آن مشخص کنید:

۱ . مجموعهٔ ماههای قمری
۲ . مجموعهٔ فصلهای سال
۳ . مجموعهٔ عددهای طبیعی درفاصلهٔ باز[۱۲] $]۱۰, ۲۰[$
۴ . مجموعهٔ عددهای طبیعی درفاصلهٔ بستهٔ[۱۳] $[۱۰, ۲۰]$
۵ . $A=\{x|۱۰<x\leqslant ۲۰,\ x\in N\}$
۶ . $B=\{x|۱۰\leqslant x<۲۰,\ x\in N\}$
۷ . $C=\{x|x=۲n+۱,\ n\in N,\ x\leqslant ۱۷\}$
۸ . $D=\{x|x=(-۱)^n\times n^۳,\ n\in N,\ x\leqslant ۳۴۳\}$
۹ . مجموعهٔ عددهای اول بین ۱۲ و ۴۰
۱۰. مجموعهٔ عددهای اول بین ۰ و ۱۰۰۰ که برابرمجموع دومجذورکامل باشند.
۱۱. مجموعهٔ عددهای صحیحی که مجموع مربعهای آنها برابر باشد با:

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲$$

۱۲. مجموعهٔ عددهای اول بین ۰ و ۳۰ که درمبنای ۲ نوشته شوند
۱۳. مجموعهٔ عددهای اول بین ۰ و ۵۰ که درمبنای ۸ نوشته شوند
۱۴. مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۱ و ۱۰۰۰ که مکعب‌کامل باشند
۱۵. مجموعهٔ عددهای‌طبیعی که بر ۹ بخشپذیرند، ولی بر ۳ بخشپذیر نیستند

● مجموعه‌های زیر را که با علامتهای ریاضی مشخص شده‌اند باذکر ده عضو اول مشخص کنید:

۱۶. $A=\left\{x|x=\dfrac{K}{K^۳+۱},\ K\in N\right\}$

۱۲ــ فاصلهٔ باز $]a$ و $b[$ یعنی $\{x|a<x<b\}$
۱۳ــ فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ یعنی $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

۱۷. $B=\left\{x \mid x=\frac{۲K+۱}{K^{۲}+۱},\ K\in N\right\}$

۱۸. $C=\left\{x \mid x=(-۱)^{K}\times\frac{۲K-۱}{K+۱},\ K\in N\right\}$

۱۹. $D=\left\{x \mid x=(-۱)^{K+۱}\times\frac{۳K}{K^{۳}+۲},\ K\in N\right\}$

۲۰. $E=\left\{x \mid x=(-۱)^{\frac{K(K+۱)}{۲}}\times\frac{۳K}{K^{۲}+۱},\ K\in N\right\}$

● مجموعه‌های زیر را که با نوشتن عضو مشخص شده‌اند با علامتهای ریاضی مشخص کنید:

۲۱. $F=\{۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, \dots\}$

۲۲. $G=\{۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, \dots\}$

۲۳. $H=\{۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، \dots\}$

۲۴. $K=\{۲, ۹, ۲۸, ۶۵, ۱۲۶, \dots\}$

۲۵. $L=\{۳, -۵, ۷, -۹, ۱۱, \dots\}$

۲۶. $M=\left\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۸}, -\frac{۱}{۶۵}, \dots\right\}$

۲۷. $N=\{-۲, -۵, ۱۰, ۱۷, -۲۶, -۳۷, \dots\}$

۲۸. $P=\left\{-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۱۷}, \frac{۱}{۸۲}, \frac{۱}{۲۵۷}, -\frac{۱}{۶۲۶}, \dots\right\}$

۲۹. $Q=\{۳, -۱۰, ۲۹, -۶۶, ۱۲۷, \dots\}$

۳۰. $T=\{۰, ۷, ۲۶, ۶۳, ۱۲۴, \dots\}$

● کدام‌یك از مجموعه‌های زیرتهی هستند؟ اگـر مجموعهٔ مورد بحث تهی نیست، چندعضو آن را نام ببرید.

۳۱. کسرهای بین ۰ و۱ که مخرج آنها ۵ باشد

۳۲. عددهای اول بین ۲۴ و ۲۸

۳۳. جانوران روی زمین که بزرگتر از فیل باشند

۳۴. عددهای بخشپذیر بر۷ بین ۱۰۰ و ۱۵۰

۳۵. عددهای بخشپذیر بر ۱۳۱

۳۶. عددهای بخشپذیر بر ۶ وغیر بخشپذیر بر ۳

۳۷. عددهای بخشپذیر بر ۲۱ که بر ۳ و ۷ بخشپذیر نیستند

۳۸. عددهایی که مجذور کاملند، ولی بر ۴ بخشپذیر نیستند

۳۹. مجموعهٔ پادشاهان مؤنث ایران

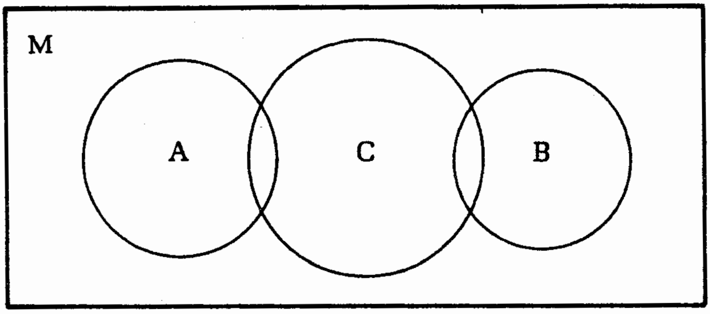
۴۰. مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۸}+۲۶x^{۴}+۲۵=۰$

۲

نمایش هندسی مجموعه‌ها و جزئیت آنها

۲ـ۱: نمودار ون

گاهی مفهوم یك تصویر از یك کتاب پرشرح و تفصیل گویاتر است. در ریاضیات، تصویر به‌فهم مطلب و اثبات قضیه‌ها بسیار کمك می‌کند. درنظریهٔ مجموعه‌ها، دربسیاری ازقسمتها، معمولاً مجموعهٔ مرجع را با مستطیل ومجموعه‌های دیگرراکه وابسته به‌این مجموعهٔمرجع هستند با دایره نشان می‌دهند. ایـن نوع نمایش مجموعه را نمایش هندسی یـا نمایش با نمودار وِن می‌نامند. این روش اولین‌بار به‌وسیلهٔ وِن[۱۴]، ریاضیدان انگلیسی، به‌کار برده شد. به‌عنوان‌مثال فرض می‌کنیم M مجموعهٔدانشجویان دانشگاه تهران، A مجموعهٔدانشجویان دانشکدهٔ فنی، B مجموعهٔ دانشجویان دانشکدهٔ پزشکی و C مجموعهٔ ورزشکاران دانشگاه تهران باشد. چنین نمایش می‌دهیم:



شکل ۱

۱۴ـ John Venn (۱۸۳۴ـ۱۹۲۳ میلادی)

توجه کنید که بزرگتر بودن C از A دلیل براین نیست که عدهٔ ورزشکاران دانشگاه تهران بیش ازعدهٔ دانشجویان دانشکدهٔ فنی است، ولی تقاطع C و A دلیل براین است که‌عده‌ای از دانشجویان دانشکدهٔ فنی ورزشکارند.

۲ـ۲: جزئیت درمجموعه‌ها

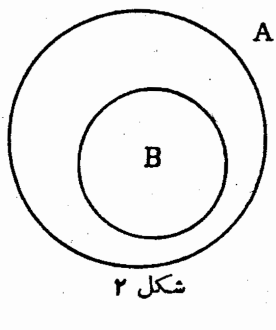
هرگاه هرعضو ازمجموعهٔ B درعین‌حال عضوی ازمجموعهٔ A نیزباشد، طبق تعریف B را زیرمجموعه یا مجموعك (SUBSET) مجموعهٔ A گویند. پس:
اگرمجموعهٔ B زیر مجموعهٔ A باشد، مفهوم این است که A محتوی مجموعهٔ B است.
این احتوا (INCLUSION) بردو گونه است:
الف- مجموعهٔA عضو یا عضوهایی دیگردارد که متعلق به‌مجموعهٔ B نیست. دراین صورت B را زیرمجموعهٔ محض A نامند، واین مفهوم را چنین نمایش می‌دهند:

$$B \subset A$$

ب- مجموعهٔ A احتمالاً عضوی غیر متعلق به B ندارد، حتی ممکن است برابر مجموعهٔ B باشد. دراین حالت B را زیرمجموعهٔ عادی مجموعهٔ A نامند واین مفهوم را چنین نمایش می‌دهند:

$$B \subseteq A$$

به‌نمودار ون توجه کنید تا ازاین راه نیز به‌مفهوم جزئیت درمجموعه‌ها پی ببرید.



شکل ۲

توجه: بااین تعریف، مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ جمیع مجموعه‌هاست، و فرق بین $B\subseteq A$ و $B\subset A$ درست مانند اختلاف بین $B<A$ و $B\leqslant A$ است.
تاکنون مجموعه‌های N (مجموعهٔ عددهای طبیعی)، Z (مجموعهٔ عددهای‌نسبی)، Q (مجموعهٔ عددهای‌گویا)، R (مجموعهٔ عددهای حقیقی) و C (مجموعهٔ عددهـای همبافته)

را شناخته‌ایم. اینک با شناخت زیرمجموعه می‌توان چنین نوشت:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

به‌مثالهای زیر توجه کنید تا اختلاف بین جزئیت درمجموعه‌ها وعضویت درآنهارا دریابید:

$a \in \{a\}$ و $a \in \{a, b\}$

$\{a\} \notin \{a, b\}$ و $\{a\} \subset \{a, b\}$

$\{a\} = \{a, a\}$ و $\{a, b\} = \{b, a\}$

$\{a\} \neq \{\{a\}\}$ و $A \notin A$

یادآوری: در گذشته‌دیدیم که‌نماد $\subseteq$ متناظر است با نماد $\leqslant$. در آینده‌نیز خواهیم دید که درموارد بسیارنماد $\subseteq$ شامل ویژگیهای $\leqslant$ است. منظور ازموارد بسیار این است که دربرخی ازموارد با هم اختلاف دارند. مثلاً، می‌دانیم که برای هردو عدد جبری a و b یا $a \leqslant b$، یا $b \leqslant a$ است، درصورتی که برای دو مجموعهٔ A و B ممکن است نه‌رابطهٔ $B \subseteq A$ صادق باشد و نه‌رابطهٔ $A \subseteq B$. مثلاً اگر A مجموعهٔ عددهای زوج و B مجموعهٔ عددهای فرد باشد، هیچ‌کدام از دورابطهٔ جزئیت بالا صادق نیستند.

۲-۳: ویژگیهای جزئیت

الف- برای هرمجموعهٔ غیرمشخص A داریم:

$$A \subseteq A$$

ب - مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست، یعنی:

$$\phi \subseteq A$$

ج - جزئیت ویژگی تعدی دارد، یعنی:

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

۲-۴: برابری دو مجموعه با دیدی وسیعتر

در گذشته تعریفی برای برابری دو مجموعه بیان کردیم. اینک که اطلاعات بیشتری دربارهٔ

مجموعه‌ها به‌دست آورده‌ایم، دومجموعهٔ A و B را برابر می گوییم، هرگاه هرعضو A در عین‌حال عضو B نیز باشد و برعکس، یعنی:

$$a \in A \iff a \in B$$

به‌بیان دیگر، می‌توان گفت که اگر دومجموعهٔ A و B برابرباشند، احتوای $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ برقرار است. یعنی:

$$(A=B) \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

مثال: مجموعهٔ مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع بامجموعهٔ مثلثهایی‌که محل‌تلاقی سه‌ارتفاع ومحل تلاقی سه میانهٔ آنها برهم منطبق است، برابراست.

۲ـ۵: ویژگیهای برابری دومجموعه

الف- هرمجموعه با خودش برابر است، یعنی $A=A$.

ب - اگر $A=B$ باشد، برعکس $B=A$ نیزهست.

ج - اگر $A=B$ و $B=C$ باشد، آنگاه $A=C$ است، یعنی:

$$[(A=B) \wedge (B=C)] \Rightarrow (A=C)$$

یادآوری: درنظریهٔ مجموعه‌ها، اثبات تساوی دومجموعه شامل دوقسمت‌است:

قسمت اول- اثبات $A \subseteq B$

قسمت دوم- اثبات $B \subseteq A$

۲ـ۶: مجموعهٔ زیرمجموعه‌ها یامجموعهٔ توانی

تعریف- مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی‌که بتوان ازیک مجموعهٔ A تشکیل داد، مجموعهٔ زیرمجموعه‌ها، یا مجموعهٔ توانی (Power Set) مجموعهٔ A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند.

مثلاً، اگر $A=\{a, b\}$ باشد، زیرمجموعه‌های A عبارتند از:

$$\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\ \ \}$$

بنابراین:

$$P(A)=\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\ \ \}\}$$

قضیه: اگرمجموعهٔ A دارای n عضو باشد، مجموعهٔ توانی آن دارای 2^n عضو

خواهد بود. مثلاً، اگر A مجموعه‌ای سه عضوی باشد، $P(A)$ دارای $۲^۳$ عضو خواهد بود.

اثبات: ازمجموعهٔ دوعضوی $A=\{a, b\}$ شروع می‌کنیم که دربرابرآن $P(A)$ دارای ۴ عضو است (بخش ۲ـ۶). اینك اگریك عضو c به‌این مجموعه اضافه شود، این عضو c با سه‌عضو $P(A)$ (عضوتهی به‌حساب نمی‌آید) روی هم ۳ عضو به $P(A)$ اضافه می‌کند، وبا احتساب‌خود c عدهٔ عضوهای $P(A)$ برابرمی‌شود با، $۲^۳=۴+۴$. حال‌اگر عضوچهارم d اضافه شود، این d با ۷ عضو دیگر $P(A)$ هفت مجموعهٔ جدید به $P(A)$ اضافه می‌کند، که بااحتساب خودش ۸ عضو به‌عضوهای $P(A)$ اضافه می‌شود. یعنی اگر A مجموعهٔ ۴ عضوی باشد، $P(A)$ دارای $۲^۴=۱۶=۸+۸$ عضوخواهد بود. اینك فرض می‌کنیم‌که مجموعهٔ A دارای k عضو است و مجموعهٔ توانی‌آن یعنی $P(A)$ دارای ۲^k عضو است (چنین فرضی، هرگز فرض محال نیست، زیرا صحت این فرض را دربارهٔ $k=۲$ و $k=۳$ آزمایش کردیم). اگر به مجموعهٔ A عضو$(k+۱)$اُمی مانند l بیفزاییم، این عضو l با $۲^k-۱$ عضو دیگر مجموعهٔ توانی (عضوتهی را استثنا کردیم) $۲^k-۱$ مجموعهٔجدید برای مجموعهٔ توانی پدیدخواهدآورد وبااحتساب‌خود $\{l\}$ عدهٔمجموعه‌های جدید ۲^k خواهد شد. می‌دانیم:

$$۲^k+۲^k=۲^k(۱+۱)=۲^k\times ۲=۲^{k+۱}$$

یعنی‌عدهٔ عضوهای مجموعهٔ‌توانی مجموعهٔ $k+۱$ عضوی برابر $۲^{k+۱}$ است. حال‌می‌گوییم که صحت قضیه رابرای $k=۳$ آزمایش‌کردیم، پس قضیه‌برای $k=۴$ نیز درست است؛ درنتیجه برای $k=۵$ نیزدرست است وبا استمراراین استدلال قضیه به‌ازای جمیع‌مقادیر $n\in N$ درست است.

توجه: این قبیل استدلال را درمنطق ریاضی روش استقراء می‌نامند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱: هرگاه عدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یك مجموعهٔ k عضوی ۲۲۴ عضو بیش از عدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یك مجموعه $(k-۳)$ عضوی باشد، k را بیابید.

حل: عدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یك مجموعهٔ k عضوی برابر ۲^k وعدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یك مجموعهٔ $(k-۳)$ عضوی برابر $۲^{k-۳}$ است. پس:

$$۲^k-۲^{k-۳}=۲۲۴$$

یا

$$۲^k-\frac{۲^k}{۲^۳}=۲۲۴$$

یا

$$۲^k - \frac{۲^k}{۸} = ۲۲۴$$

از ضرب طرفین تساوی در ۸ خواهیم داشت:

$$۸ \times ۲^k - ۲^k = ۸ \times ۲۲۴$$

یا

$$۷ \times ۲^k = ۸ \times ۲۲۴$$

بنابراین:

$$۲^k = \frac{۸ \times ۲۲۴}{۷}$$

یا

$$۲^k = ۸ \times ۳۲$$

یا

$$۲^k = ۲^۳ \times ۲^۵$$

یا

$$۲^k = ۲^۸$$

بنابراین:

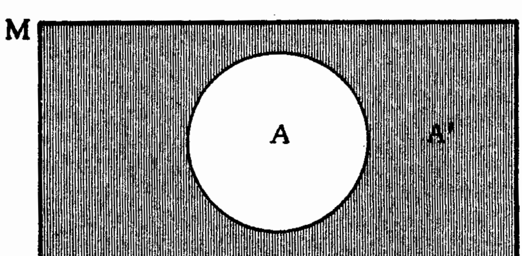
$$k = ۸$$

۲-۷: متمم یک مجموعه

اگر M مجموعهٔ مرجع و مجموعهٔ A یکی ازمجموعه‌های آن باشد، مجموعه‌ای را که‌شامل همهٔ عضوهای M غیراز عضوهای مجموعهٔ A باشد، متمم مجموعهٔ A می‌نامیم که با نماد A^c یا A' یا C_A^M یا $\overline{A}$ نشان داده می‌شود. پس:

$$A' = A^c = \{x | x \in M \land x \notin A\}$$

درحقیقت $A' = M - A$ است. نمودار ون این مفهوم را بهترمجسم می کند:



شکل ۳

به‌کمك این نمودار به‌آسانی دیده می‌شود که:

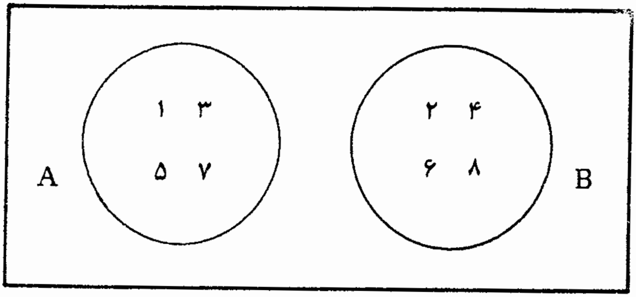
$$M' = \phi,\ \ \phi' = M,\ \ (A')' = A$$

۲ـ۸: دومجموعهٔ جدا از هم

دومجموعه را جدا از هم (متخارج) می‌گویند که هیچ عضومشترکی نداشته باشند، مانند:

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷\}\ \ ,\ \ B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$

دومجموعهٔ جدا ازهم را با نمودار ون بهتر می‌توان مجسم کرد:



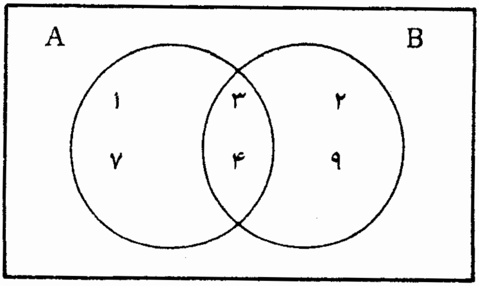
شکل ۴

۲ـ۹: دو مجموعهٔ متقاطع

دومجموعه را متقاطع می‌نامند هرگاه چند عضو مشترك داشته باشند، مانند:

$$A = \{۱, ۳, ۴, ۷\}\ \ ,\ \ B = \{۲, ۳, ۴, ۹\}$$

به‌نمودار زیرتوجه کنید تا مفهوم دو مجموعهٔ متقاطع را بهتر دریابید:



شکل ۵

۲-۱۰: دو مجموعهٔ متداخل

هرگاه $A \subset B$ باشد، A و B را متداخل نامند.

۲-۱۱: مجموعه‌های قیاس‌پذیر

دومجموعهٔ A و B راقیاس‌پذیرگویند، هرگاه $A \subset B$ یا $B \subset A$ باشد. مثلاً، دومجموعهٔ $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{a, b, c, d, e\}$ قیاس‌پذیرند، زیرا $A \subset B$ است.

اگر $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$، آنگاه A و B را قیاس‌ناپذیر گویند، مانند $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{a, c, d, e\}$.

تمرین ۲

● بررسی کنید که هریك ازمجموعه‌های A، B، C، ... و L که درستون‌چپ جدول زیر نوشته شده است، باکدام مجموعه از شمارهٔ ۱ تا شمارهٔ ۱۰ که درستون راست جدول نوشته شده است، برابراست؟

۱. $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$	$A=\{۱, ۲, ۳\}$
۲. $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$	$B=\{۹\}$
۳. $\{p, q, r, s\}$	$C=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$
۴. $\{۱, x, x^۲\}$	$D=\{۵, ۶, ۷\}$
۵. $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$	$E=$ {عددهای زوج کمتراز۱۰}
۶. {همهٔ عددهای فرد بزرگتراز ۷ وکوچکتر از۱۱}	$F=\phi$
۷. {همهٔ عددهایی که با افزودن یك‌عدد به‌عضوهای مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴\}$ به دست می‌آیند}	$G=$ {چهارعدد اولیهٔ مجموعهٔ عددهای طبیعی}
۸. $\{۱, ۴, ۹, ۱۶\}$	$H=\{۱, ۲, ۳, ۰\}$
۹. {همهٔ فاکتورهای ۱۰ که از۱۰ بزرگترند}	$I=\{x^۲, x, ۱\}$
۱۰. {همهٔ فاکتورهای اول ۷۰}	$J=\{q, p, s, r\}$
	$K=$ {عددهای طبیعی کمتر از۲۰ که‌مربع‌کاملند}
	$L=$ {رقمهای‌موجود درحاصل‌ضرب ۲۵×۱۱}

۱۱. کدام دومجموعه ازمجموعه‌های ϕ و $\{\circ\}$ و $\{\phi\}$ برابرند؟

۱۲. کدام مجموعه ازمجموعه‌های زیرتهی است؟

$$A=\{x|x^{۲}=۹ \quad , \quad ۲x=۴\}$$

$$B=\{x|x\neq x\} \quad , \quad C=\{x|x+۸=۸\}$$

۱۳. درصورتی‌که $A=\{۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B=\{x|x=۲k\}$، ثابت کنید A زیر‌مجموعهٔ B نیست $(k\in N)$.

۱۴. ثابت کنیدکه اگر $A\subset\phi$ باشد، آنگاه $A=\phi$.

۱۵. مجموعهٔ توانی $A=\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

۱۶. مجموعهٔ توانی $S=\{۳, \{۱, ۴\}\}$ را بنویسید.

● با به‌کاربردن علامتهای $\in$ و $\notin$ و $\subset$ و $=$، رابطه‌ای بین عضوها یا مجموعه‌های ستون سمت راست ومجموعه‌های ستون سمت‌چپ برقرار کنید:

۱۷. p	$\{p, q, r\}$
۱۸. $\{p, q, r\}$	$\{q, r, p\}$
۱۹. $\{p\}$	$\{r, p, q\}$
۲۰. s	$\{p, q, r\}$
۲۱. $\{۳, ۴, ۵, ۶, \dots\}$	$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \dots\}$
۲۲. {عددهای طبیعی زوج}	{عددهای صحیح ومثبت}
۲۳. {عددهای اول}	{عددهای طبیعی}
۲۴. {توان چهارم عددهای‌طبیعی}	{مجذور عددهای طبیعی}
۲۵. ۵۰	{عددهایی که‌با فرمول $n^{۲}+۱$ به‌دست‌می‌آیند}
۲۶. {عددهای اول — $\{۲, ۳\}$}	{عددهایی که بافرمول $۶n\pm۱$ به‌دست‌می‌آیند} $(n\in N)$

● فرض می‌کنیم $M=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۱, ۱۲\}$ مجموعهٔ مرجع باشد، عضوهای‌هریك از زیرمجموعه‌های زیررا نام ببرید:

۲۷. همهٔ عددهای زوج در M

۲۸. همهٔ عددهای بزرگتر از ۵ در M

۲۹. همهٔ عددهای کوچکتر از ۴ در M

۳۰. همهٔ عددهای اول در M

● مجموعهٔ مرجع $M=$ {آیدین , سام , برنا , سارا , تارا} را در نظر می‌گیریم. زیر مجموعه‌های زیر را تشکیل دهید:

۳۱. با چهارعضو ۳۲. یك پسرویك دختر

۳۳. تارا و دوپسر ۳۴. تارا وسارا با دوپسر

۳۵. عدهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ ۵ عضوی را حساب کنید.

● درصورتی که N مجموعهٔ عددهای طبیعی، Z مجموعهٔ عددهای نسبی، Q مجموعهٔ عددهای گویا، R مجموعهٔ عددهای حقیقی، و C مجموعهٔ عددهای همبافته باشد، معین کنید کدام یك ازگزاره‌های زیردرست وکدام یك نادرست است؟

۳۶. $۵ \in N$ ۳۷. $\sqrt{۳} \in Z$

۳۸. $-۷ \in Q$ ۳۹. $\sqrt{۱۵} \in R$

۴۰. $x \in C \ , \ x^۲+x+۵=۰$

● تعیین کنید ازمجموعه‌های زیرکدام محدود وکدام نامحدود است؟

۴۱. مجموعهٔ عددهای گویا که به‌شکل کسر تحویل‌ناپذیر با مخرج یك رقمی‌هستند وارزش آنها بین صفر ویك است

۴۲. مجموعهٔ عددهای گویا بین ۱ و ۲

۴۳. مجموعهٔ عددهای اول

۴۴. مجموعهٔ عددهایی که درمعادلهٔ $x^۲+۲=۰$ صدق می‌کنند

۴۵. $\{x | ۲<x<۳ \ , \ x \in Q\}$

۴۶. $\{x | \sin x^\circ = \frac{۱}{۲}, \ x \in Z\}$

۴۷. $\{x | \mathrm{tg} x < ۱, \ x \in R\}$

۴۸. $\{x | x^۲ - ۵x + ۱ = ۰, \ x \in N\}$

۴۹. $\{x | x^۲ + x + ۶ = ۰, \ x \in C\}$

۵۰. $\{x|x+51<10,\ x\in Z\}$

۵۱. هرگاه $P(k)$، ۹۶۰ عضو کمتر از $P(k+4)$ داشته باشد، k را بیابید.

۵۲. هرگاه عدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یک مجموعهٔ k عضوی $\frac{1}{32}$ عدهٔ عضوهای مجموعهٔ توانی یک مجموعهٔ $2k$ عضوی باشد، k را بیابید.

۳

عملیات مقدماتی در مجموعه‌ها

تعریف- هرگاه طبق قرارداد یا قانونی بتوان از دو یا چند مجموعه، یك مجموعهٔ جدید ساخت، آن قرارداد یا قانون را عمل مقدماتی می‌نامند.

عملهای مقدماتی عبارتند از:

الف- اجتماع (جمع منطقی)

ب - اشتراك (ضرب منطقی)

ج - تفریق منطقی

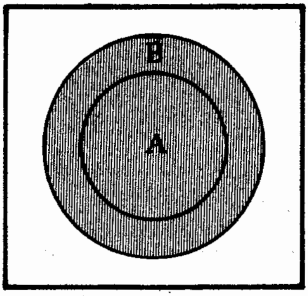
۳-۱: اجتماع مجموعه‌ها

اجتماع یا جمع منطقی دومجموعهٔ A و B که با نماد $A\bigcup B$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ جدیدی است که هرعضو آن به‌مجموعهٔ A یا مجموعهٔ B یا هم به A وهم به B تعلق داشته باشد. به‌بیان دیگرهرعضو $A\bigcup B$ دست کم به‌یکی ازدو مجموعهٔ A و B تعلق داشته‌باشد، یعنی:

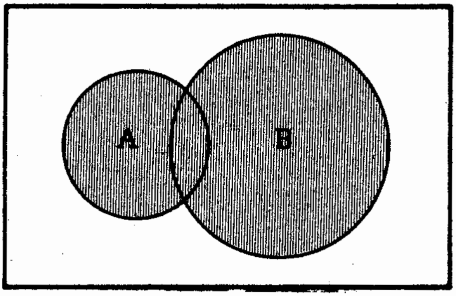
$$A\bigcup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

علامت اجتماع دو مجموعه، یعنی نماد $\bigcup$ را به‌زبان انگلیسی CUP و به زبان فارسی ناو می‌نامند. بنابراین نماد $A\bigcup B$ را درفارسی A ناو B می‌خوانیم. در برخی‌از کتابها نماد $A\bigcup B$ را A یا B معرفی می‌کنند. باکمی دقت متوجه می‌شویم که این «یا» یا بهتربگوییم «یای منطقی» با «یای فارسی» اختلاف دارد. در زبان فارسی «یا» فاصل است. ولی درمنطق «یا» فاصلی است که مانع عطف نمی‌شود. به‌نمودار ون توجه‌کنید.

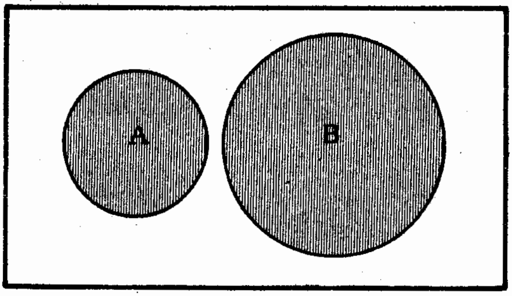
درشکلهای زیراجتماع دومجموعهٔ A و B با هاشور نشان داده شده است:



شکل ۶ــ اجتماع دومجموعهٔ متداخل



شکل ۷ــ اجتماع دو مجموعهٔ متقاطع



شکل ۸ــ اجتماع دومجموعهٔ جدا ازهم

مثال: فرض می‌کنیم:

$$A=\{۱, ۲, ۳, ۵, ۹\} \quad , \quad B=\{۳, ۵, ۶, ۸, ۱۱\}$$

آنگاه داریم:

$$A\cup B=\{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۱\}$$

۳ــ۲: ویژگیهای اجتماع مجموعه‌ها

اجتماع دومجموعه دارای ده ویژگی است‌که اثبات آنها به‌کمک نمودار ون بسیار ساده است. دراین ویژگیها، M به‌مفهوم مجموعهٔ‌مرجع‌فرض شده‌است. این ویژگیها عبارتند از:

۱ . (قانون همتوانی) $A\cup A=A$

۲ . (قانون اتحاد) $A\cup \phi=A$

۳ . (قانون اتحاد) $A\cup M=M$

۴ . (قانون متمم) $A\cup A'=M$

۵ . (جزئیت) $A\subset(A\cup B)$

۶ . (جزئیت) $B\subset(A\cup B)$

۷ . $[(A\subset C)\wedge(B\subset C)] \Rightarrow [(A\cup B)\subset C]$

۸ . $(A\cup B=A) \Leftrightarrow (B\subset A)$

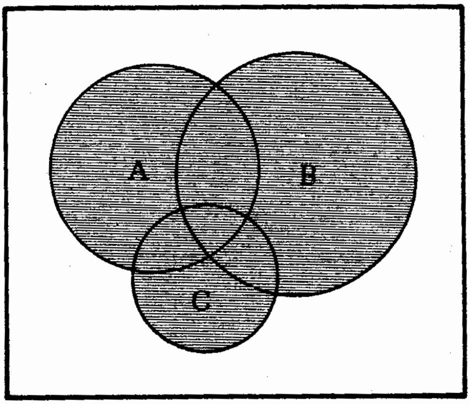
۹ . (قانون جابه‌جایی) $A\cup B=B\cup A$

۱۰. (قانون شرکتپذیری) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

یادآوری: در ویژگیهای ۵ و ۶ و ۷ و ۸، نماد $\subseteq$ را می‌توان به‌جای نماد $\subset$ به‌کار برد.

توجه: اجتماع دومجموعه را با عمل جمع درجبروحساب مقایسه‌کنید تا بدانید چرا به‌اجتماع دومجموعه جمع منطقی نیز گفته‌اند. سبب این نامگذاری را درفصلهای آینده بهتردرك خواهیم کرد.

به‌طوری‌که در بالا گفته شد، به‌کمك نمودار ون، این ویژگیها به‌سادگی اثبات می‌شوند. مثلاً، دربارهٔ ویژگی دهم، نمودار زیربیانگر این ویژگی است:



شکل ۹

اگر نخواهیم برای اثبات این ویژگی از نمودار ون استفاده‌کنیم، باید ثابت‌کنیم که هرعضو x متعلق به $(A\cup B)\cup C$ درعین‌حال به $A\cup(B\cup C)$ نیزتعلق‌دارد، وبرعکس. به‌شرح زیر:

$$x\in[A\cup(B\cup C)] \Rightarrow [x\in A \vee x\in(B\cup C)]$$

$$\Rightarrow[x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)]$$

$$\Rightarrow[(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C]$$ (ویژگی‌شرکتپذیری برای «یای» منطقی)

$$\Rightarrow [x \in (A \bigcup B) \vee x \in C] \Rightarrow x \in [(A \bigcup B) \bigcup C]$$

به‌همین‌ترتیب می‌توان ثابت کرد:

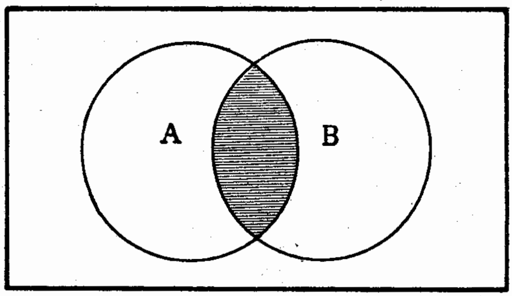
$$x \in [(A \bigcup B) \bigcup C] \Rightarrow x \in [A \bigcup (B \bigcup C)]$$

۳ـ۳: اشتراك مجموعه‌ها

اشتراك یا ضرب منطقی دومجموعهٔ A و B، کـه با نماد $A \bigcap B$ نشان‌داده می‌شود، مجموعهٔ جدیدی است که هرعضوآن هم به A وهم به B تعلق داشته باشد. یعنی:

$$A \bigcap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

نماد $\bigcap$ را طاق می‌نامیم، ودرزبان انگلیسی به‌آن CAP می‌گویند. نماد $\wedge$ را دراینجا به‌مفهوم «وهم» به‌کار برده‌ایم، ولی دربیان فقـط «و» می‌گوییم. اشتراك دومجموعه را با نمودار ون چنین نمایش می‌دهیم:



شکل ۱۰

قسمت هاشورخورده $A \bigcap B$ را مشخص می‌کند.

مثال: هرگاه:

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۶, ۷\} \quad , \quad B = \{۲, ۴, ۶, ۷, ۸\}$$

داریم:

$$A \bigcap B = \{۶, ۷\}$$

۴ـ۳: ویژگیهای اشتراك دو مجموعه

اشتراك دومجموعه نیزدارای ده ویژگی است، به‌شرح زیر:

۱ . (قانون همتوانی) $A\cap A=A$

۲ . (قانون اتحاد) $A\cap \phi=\phi$

۳ . (قانون اتحاد) $A\cap M=A$

۴ . (قانون متمم) $A\cap A'=\phi$

۵ . (جزئیت) $(A\cap B)\subset A$

۶ . (جزئیت) $(A\cap B)\subset B$

۷ . $[(C\subset A)\wedge(C\subset B)] \Rightarrow [C\subset(A\cap B)]$

۸ . $[(A\cap B)=A] \Leftrightarrow (A\subset B)$

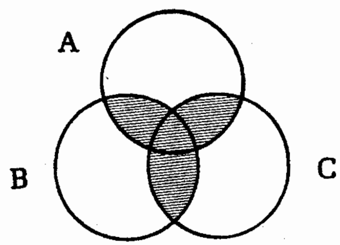
۹ . (ویژگی جابه‌جایی) $A\cap B=B\cap A$

۱۰. (ویژگی شرکتپذیری) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

اثبات ویژگی دهم به‌عنوان نمونه

روش اول ـ با استفاده از نمودار ون:

به‌شکل زیرنگاه کنید. خواهید دیدکه آنچه از مجموعهٔ $(B\cap C)$ کـه متعلق به‌مجموعهٔ A



شکل ۱۱

نیز باشد، همان بخشی است ازمجموعهٔ $(A\cap B)$ که متعلق به‌مجموعهٔ C نیزهست، ودرعین حال همان بخشی است ازمجموعهٔ $(C\cap A)$ که متعلق به A نیزهست، یعنی:

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=(C\cap A)\cap B=A\cap B\cap C=B\cap C\cap A=$$
$$= B\cap A\cap C=A\cap C\cap B=C\cap B\cap A$$

روش دوم ـ با استفاده ازعضوگیری:

دراین روش ثابت می‌کنیم که اگر x عضو مجموعهٔ $[A\cap(B\cap C)]$ بـاشد، این x

عضومجموعهٔ $[(A\bigcap B)\bigcap C]$ نیز خواهد بود و برعکس.

$$x\in[A\bigcap(B\bigcap C)] \Rightarrow [x\in A\wedge x\in(B\bigcap C)]$$

$$\Rightarrow [x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)]$$

$$\Rightarrow[(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C]$$

عمل آخر را طبق ویژگی شرکتپذیری برای «و» منطقی انجام دادیم. پس:

$$[x\in(A\bigcap B)\wedge x\in C] \Rightarrow x\in[(A\bigcap B)\bigcap C]$$

$$\Rightarrow[A\bigcap(B\bigcap C)]\subset[(A\bigcap B)\bigcap C] \qquad (۱)$$

و به‌همین ترتیب ثابت می کنیم:

$$x\in[(A\bigcap B)\bigcap C] \Rightarrow x\in[A\bigcap(B\bigcap C)]$$

$$\Rightarrow[(A\bigcap B)\bigcap C]\subset[A\bigcap(B\bigcap C)] \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$$

یادآوری: توجه کنید که اشتراك درجبر مجموعه‌ها، برخی شباهتها با عمل ضرب درحساب وجبر دارد و به‌همین دلیل به‌آن ضرب منطقی نیز گفته‌اند؛ ولی در برخی موارد با آن اختلاف دارد. مثلاً درضرب جبری داریم $۵^۲ = ۵ \times ۵$، ولی درضرب منطقی مجموعه‌ها داریم $A\bigcap A=A$. ویژگی $A\bigcap\phi=\phi$ را می‌توان مانند ویژگی $A\times ۰ = ۰$ درجبر و حساب دانست. ویژگی جابه‌جایی هم درضرب منطقی مجموعه‌هادیده می‌شود وهم درضرب علم جبر و حساب و....

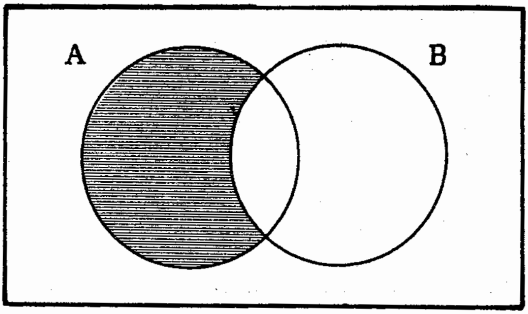
توجه: دقت کنید که درضرب منطقی مجموعه‌ها چگونه نماد $\bigcap$ به‌نماد $\wedge$ (و) تبدیل می‌شود، همان‌طور که درجمع منطقی مجموعه‌ها، نماد $\bigcup$ به‌نماد $\vee$ (یا) تبدیل می‌شد.

۳-۵: تفاضل منطقی دو مجموعه

تفاضل دومجموعهٔ A و B که با نماد $A-B$ یا A/B نشان داده می‌شود، مجموعهٔ جدیدی است که اگر x عضو آن باشد، داشته باشیم $x\in A$ ولی $x\notin B$. یعنی:

$$A-B=A/B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

یادآورمی‌شویم که نماد $\wedge$ اگرجلوِنقیض قرارگیرد، بمفهوم «ولی» خواهد بود. به‌نمودار ون توجه کنید:



شکل ۱۲

توجه کنید که قسمت هاشورخورده $(A-B)$ است.

با همین روش:

$$B-A=B/A=\{x|x\in B\wedge x\notin A\}$$

مثال: هرگاه $A=\{1, 2, 3, 7, 11, 15\}$ و $B=\{1, 3, 7, 12, 15\}$ باشد، خواهیم داشت:

$$A-B=\{2, 11\} \quad , \quad B-A=\{12\}$$

نتیجه: متمم مجموعهٔ A را می‌توان $M-A$ دانست، یعنی:

$$A^c=A'=\overline{A}=M-A$$

قضیه: اگر $A\subset B$، آنگاه $A-B=\phi$

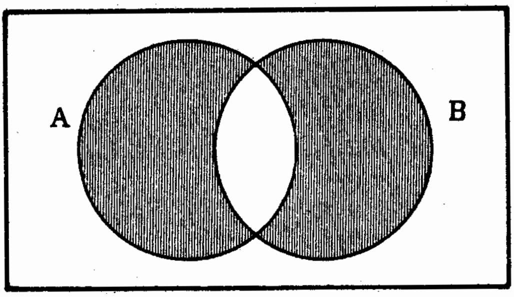
قضیه: همواره $A-B=A\cap B'$

اثبات این دوقضیه به‌کمک نمودار ون و همچنین عضوگیری بسیار ساده است. به‌عنوان مثال قضیهٔ دوم را ازطریق عضوگیری ثابت می‌کنیم:

$$A-B=\{x|x\in(A-B)\}=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=$$
$$=\{x|x\in A\wedge x\in B'\}=\{x|x\in A\cap B'\}=A\cap B'$$

۳ـ۶: تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دومجموعهٔ A و B که با نماد $A\Delta B$ نشان‌داده می‌شود، مجموعهٔ ثالثی است که عضوهایش فقط متعلق به‌یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد، نه به‌هردو آنها. درنمودار شکل ۱۳ قسمت هاشورخورده $(A\Delta B)$ است.



شکل ۱۳

ازروی نمودار بالا به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$A\Delta B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$

$$A\Delta B=(A\bigcap B')\bigcup(A'\bigcap B)$$

۳ـ۷: ویژگیهای تفاضل منطقی دومجموعه

اینك که متمم هرمجموعه وتفاضل منطقی دومجموعه را می‌شناسیم، ویژگیهای ده گانهٔ تفاضل منطقی دومجموعه را بیان می‌کنیم:

۱. $A\bigcup A'=M$

۲. $A\bigcap A'=\phi$

۳. $(A'\subset B') \iff (B\subset A)$

۴. $(A=B) \iff (A'=B')$

۵. $(A')'=A$

۶. $(B-A)\bigcup(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=A\bigcup B$

۷. $(A'=\phi) \iff (A=M)$

۸. $(A'=M) \iff (A=\phi)$

۹. $[(A\bigcup B)=M] \iff (A'\subset B)$

۱۰. $[(A\bigcap B)=\phi] \iff (A\subset B')$

جمیع این ویژگیها به‌کمك نمودار وِن، یا کاربرد رابطه‌های منطقی به‌آسانی اثبات

می‌شوند. به‌عنوان مثال ویژگی پنجم را اثبات می‌کنیم:

$$x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A$$

$$x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')'$$

پس:

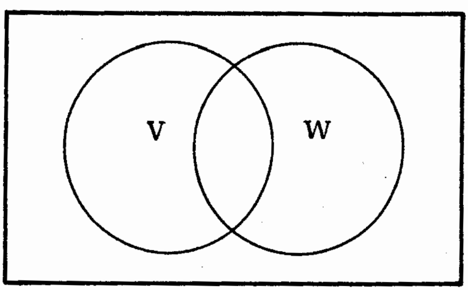
$$(A')' = A$$

تمرین ۳

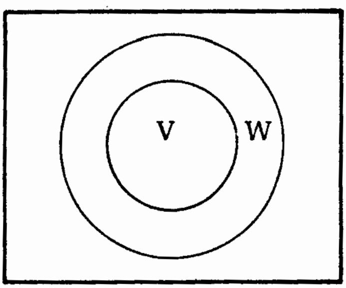
● فرض می‌کنیم مجموعهٔ $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$، مجموعهٔ مرجع و $A = \{a, b, c, d, e\}$، $B = \{a, c, e, g\}$ و $C = \{b, e, f, g\}$ زیرمجموعه‌های آن باشند، مطلوب است یافتن:

۱. $A \bigcup B$
۲. $B \bigcap A$
۳. $C - B$
۴. B'
۵. $A' - B$
۶. $B' \bigcup C$
۷. $(A - C)'$
۸. $C' \bigcap A$
۹. $(A - B')'$
۱۰. $(A \bigcap A')'$
۱۱. ثابت کنید اگر $(A \bigcap B) = \phi$، آنگاه $A \subset B'$.
۱۲. درنمودارهای ۱ و ۲، مجموعه‌های زیررا هاشور بزنید:

الف— $V \bigcap W$
ب — W'
ج — $W - V$
د — $V' \bigcup W$
ه — $V \bigcap W'$
و — $V' - W'$



نمودار ۱



نمودار ۲

● نمودار ون را برای سه مجموعهٔ غیرتهی A و B و C با شرطهای زیررسم کنید:

۱۳. $A\subset B,\ C\subset B,\ A\cap C=\phi$

۱۴. $A\subset B,\ C\not\subset B,\ A\cap C\neq\phi$

۱۵. $A\subset C,\ A\neq C,\ B\cap C=\phi$

۱۶. $A\subset(B\cap C),\ B\subset C,\ C\neq B$

● گزاره‌های زیررا با به‌کاربردن $\subset$ یا $\supset$ یا $n.c$ (غیرقابل مقایسه، non comparable) درفضای خالی کامل کنید. A و B دومجموعهٔ دلخواه هستند.

۱۷. $A\cdots A-B$

۱۸. $A\cdots A\cap B$

۱۹. $A'\cdots B-A$

۲۰. $A\cdots A\cup B$

۲۱. $A'\cdots A-B$

۲۲. $A\cdots B-A$

۲۳. ثابت کنید که $(A-B)$ زیرمجموعهٔ $(A\cup B)$ است.

۲۴. ثابت کنید که اگر $(A\cap B)=\phi$، آنگاه $B=(B\cap A')$.

۲۵. ثابت کنید که اگر $(A\cap B)=\phi$، آنگاه $(A\cup B')=B'$.

۴

جبر مجموعه‌ها

تعریفــ جبرمجموعه‌ها مجموعهٔ‌قانونهایی‌است که بین دو یاچندمجموعه‌ارتباط برقرار می‌کند. دربارهٔ برخی ازاین قانونها پیش ازایـن بحث‌کردیم، مانند قانونهای همتوانی (IDEMPOTENT LAWS)، قانـونهای شرکتپذیری (ASSOCIATIVE LAWS)، قـانـونهـای جابـه‌جایـی (COMMUTATIVE LAWS)، قـانـونهـای اتحـاد (IDENTITY LAWS)، وقانونهای متمم (COMPLEMENT LAWS). اینك به بحث دربارهٔ قانونهای دیگری از جبرمجموعه‌ها می‌پردازیم.

۴ــ۱: قانونهای دومورگان[۱۵]

قانون اول‌ــ **متمم اجتماع دومجموعه برابراست با اشتراك متممهای آن‌دومجموعه، و برعکس.** یعنی:

$$(A \cup B)' = (A' \cap B')$$

اثبات: ثابت‌می‌کنیم که هرگاه $x \in (A \cup B)'$، آنگاه $x \in (A' \cap B')$ و برعکس.

الف‌ــ

$$x \in (A \cup B)'$$

$$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$$

$$\Rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$$

$$\Rightarrow (x \in A') \wedge (x \in B')$$ (۸ نقیض ۷ است)

$$\Rightarrow x \in (A' \cap B')$$

۱۵ــ Augustus De Morgan (۱۸۰۶ــ۱۸۷۱ میلادی)، ریاضیدان وعالم‌منطق انگلیسی

$$\Rightarrow (A\bigcup B)'\subset(A'\bigcap B')$$

ب-

$$x\in A'\bigcap B'$$

$$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'$$

$$\Rightarrow x\notin A\vee x\notin B$$

$$\Rightarrow x\notin(A\bigcup B)$$

$$\Rightarrow x\in(A\bigcup B)'$$

$$\Rightarrow (A'\bigcap B')\subset(A\bigcup B)'$$

بنابراین، طبق آنچه دربارهٔ برابری مجموعه‌ها دیده‌ایم:

$$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$$

قانون دوم- متمم اشتراك دومجموعه برابر است با اجتماع متممهای آن‌دومجموعه وبرعکس، یعنی:

$$(A\bigcap B)'=(A'\bigcup B')$$

اثبات ایـن قانون ازراه عضوگیری مانند قانون اول است و برعهدهٔ خوانندگان واگذار می‌شود. توجه‌کنید‌که اثبات ایـن دوقانون به‌کمك نمودار ون بسیارآسان است وجنبهٔ عینی ومکاشفه دارد.

۴-۲: قانونهای توزیعپذیری

درجبر و حساب، عمل ضرب بر روی عمل جمع توزیعپذیر است، یعنی:

$$a(b+c)=ab+ac$$

درجبرمجموعه‌ها نیزداریم:

قانون اول- عمل $\bigcap$ برروی عمل $\bigcup$ توزیعپذیر است، یعنی:

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

اثبات: فرض می کنیم که:

$$x\in[A\bigcap(B\bigcup C)]$$

$$\Rightarrow x\in(B\bigcup C)\wedge x\in A$$

$$\Rightarrow [(x \in B) \vee (x \in C)] \wedge x \in A$$

(اصل گسترش)

$$\Rightarrow [(x \in B) \wedge (x \in A)] \vee [(x \in C) \wedge (x \in A)]$$

$$\Rightarrow [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)]$$

$$\Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$\Rightarrow [A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

برعکس، فرض می کنیم که:

$$x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

پس x عضوی است از $(A \cap B)$ یا $(A \cap C)$.

اگر $[x \in (A \cap B)]$، آنگاه $[(x \in B) \wedge (x \in A)]$.

اگر $[x \in (A \cap C)]$، آنگاه $[(x \in C) \wedge (x \in A)]$.

درهردوحالت:

$$(x \in A) \wedge [x \in (B \cup C)]$$

پس:

$$x \in [A \cap (B \cup C)]$$

بنابراین:

$$[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset [A \cap (B \cup C)]$$

درنتیجه، بنابرتعریف برابری درمجموعه‌ها داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

همچنین درجبر و حساب عمل جمع بر روی عمل ضرب توزیعپذیر نیست، مثلاً :

$$[۵ + (۷ \times ۹)] \neq [(۵ + ۷) \times (۵ - ۹)]$$

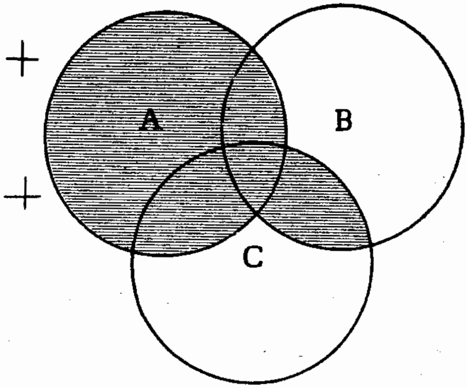
ولی درمجموعه‌ها داریم:

قانون دوم ـ عمل $\cup$ برروی عمل $\cap$ توزیعپذیر است، یعنی:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

اثبات این قانون را، ازراه منطقی وعضوگیری، برعهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم. در اینجا به‌کمك نمودار ون به‌اثبات‌عینی این دوقانون می‌پردازیم. قسمت هاشورخورده در شکل ۱۴ نشان می‌دهد که:

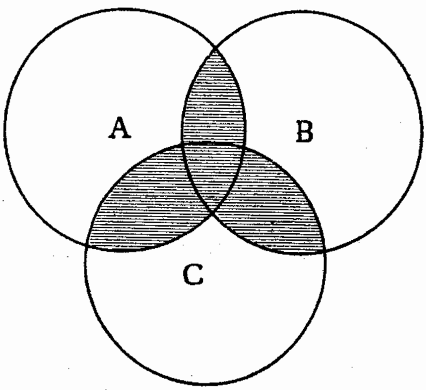
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



شکل ۱۴

همچنین، قسمت هاشور خورده درشکل ۱۵ نشان می‌دهد که:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$



شکل ۱۵

۴ـ۳: قانونهای جذب

قانونهای جذب عبارتند از:

قانون اول ـ $A\cap(A\cup B)=A$

قانون دوم ـ $A\cup(A\cap B)=A$

اثبات قانون اول:

$A\cap(A\cup B)=$

$=(A\cup\phi)\cap(A\cup B)=$ (قانون اتحاد)

(عکس توزیعپذیری $\bigcup$ در $\bigcap$) $\quad = A\bigcup(\phi\bigcap B)=$

(قانون اتحاد) $\quad = A\bigcup\phi =$

(قانون اتحاد) $\quad = A$

اثبات قانون‌دوم:

$$A\bigcup(A\bigcap B)=$$

(قانون اتحاد) $\quad =(A\bigcap M)\bigcup(A\bigcap B)=$

(عکس توزیعپذیری $\bigcap$ در $\bigcup$) $\quad = A\bigcap(M\bigcup B)=$

(قانون اتحاد) $\quad = A\bigcap M =$

(قانون اتحاد) $\quad = A$

اینک همهٔ قانونهای جبرمجموعه‌ها را درزیرمی آوریم:

۱ـ همتوانی:

۱ـ الف $\quad A\bigcup A=A$

۱ـ ب $\quad A\bigcap A=A$

۲ـ شرکتپذیری:

۲ـ الف $\quad (A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$

۲ـ ب $\quad (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$

۳ـ جابه‌جایی:

۳ـ الف $\quad A\bigcup B=B\bigcup A$

۳ـ ب $\quad A\bigcap B=B\bigcap A$

۴ـ توزیعپذیری:

۴ـ الف $\quad A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

۴ـ ب $\quad A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

---

۵ و ۶ـ اتحاد:

۵ـ الف $A\bigcup\phi=A$ ‏ ‏ ‏ ۵ـ ب $A\bigcap\phi=\phi$

۶ـ الف $A\bigcup M=M$ ‏ ‏ ‏ ۶ـ ب $A\bigcap M=A$

۷ و ۸ـ متمم:

۷ـ الف $A\bigcup A'=M$ ‏ ‏ ‏ ۷ـ ب $A\bigcap A'=\phi$

۸ـ الف $(A')'=A$ ‏ ‏ ‏ ۸ـ ب $\begin{cases}M'=\phi\\ \phi'=M\end{cases}$

۹ـ دومورگان:

۹ـ الف $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$

۹ـ ب $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

۱۰ـ جذب:

۱۰ـ الف $A\bigcap(A\bigcup B)=A$

۱۰ـ ب $A\bigcup(A\bigcap B)=A$

قضیه: هر یك از حالتهای زیرهم‌ارز است با $A\subset B$.

الف‌ـ $A\bigcap B=A$ ‏ ‏ ‏ ب‌ـ $A\bigcup B=B$ ‏ ‏ ‏ ج‌ـ $B'\subset A'$

د ـ $A\bigcap B'=\phi$ ‏ ‏ ‏ هـ ـ $B\bigcup A'=M$

این قضیه را هم می‌توان به‌کمك نمودار وِن به‌طور عینی مکاشفه کرد و هم از راه منطقی با استفاده از عضوگیری به‌اثبات آن پرداخت. هردو شیوه را برعهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

اینك برای فهم بیشتر مطالب این بخش چندمثال نمونه ذکرمی کنیم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲: درستی تساوی زیررا ثابت‌کنید:

$$(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=A$$

حل: ‏ ‏ ‏ طرف چپ $=$

(تعریف تفاضل) ‏ ‏ ‏ $=(A\bigcap B')\bigcup(A\bigcap B)=$

(عکس توزیع‌پذیری $\bigcap$ در $\bigcup$) $=A\bigcap(B'\bigcup B)=$

(قانون متمم) $=A\bigcap M=$

(قانون اتحاد) $=A$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$[(A-B)\bigcup(B-A)]\bigcup(A\bigcap B)=A\bigcup B$$

حل: = طرف چپ

(تعریف تفاضل متقارن) $=(A\Delta B)\bigcup(A\bigcap B)=$

(ویژگی تفاضل متقارن) $=[(A\bigcup B)-(A\bigcap B)]\bigcup(A\bigcap B)=$

(تعریف تفاضل) $=[(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap B)']\bigcup(A\bigcap B)=$

$=[(A\bigcup B)\bigcup(A\bigcap B)]\bigcap[(A\bigcap B)'\bigcup(A\bigcap B)]=$

$=[(A\bigcup B)\bigcup(A\bigcap B)]\bigcap M=$

$=(A\bigcup B)\bigcup(A\bigcap B)=$

$=A\bigcup B$

قسمت آخر از آنجا نتیجه شده است که $(A\bigcap B)\subset(A\bigcup B)$.

روش دیگر: = طرف چپ

$=[(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')]\bigcup(A\bigcap B)=$

$=[(A\bigcap B')\bigcup(A\bigcap B)]\bigcup(B\bigcap A')=$

$=[A\bigcap(B\bigcup B')]\bigcup(B\bigcap A')=$

$=(A\bigcap M)\bigcup(B\bigcap A')=$

$=A\bigcup(B\bigcup A')=$

$=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup A')=$

$=(A\bigcup B)\bigcap M=$

$=A\bigcup B$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

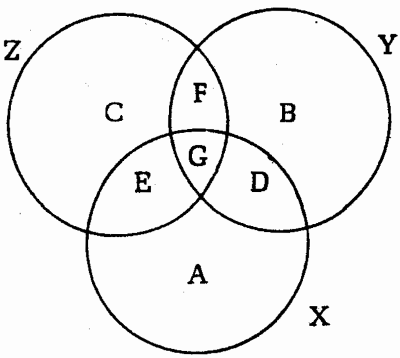
$$(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$

حل:

$$\text{طرف چپ}=(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')=$$
$$=[(A\bigcap B')\bigcup B]\bigcap[(A\bigcap B')\bigcup A']=$$
$$=[(B\bigcup A)\bigcap(B\bigcup B')]\bigcap[(A'\bigcup A)\bigcap(A'\bigcap B')]=$$
$$=[(A\bigcup B)\bigcap M]\bigcap[M\bigcap(A\bigcap B)']=$$
$$=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcap B)'=$$
$$=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۵: همـهٔ دانش‌آموزان یك کلاس در سه انجمن ورزش، موسیقی و ادبی شرکت دارند. درانجمن ورزش ۳۷نفر، درانجمن موسیقی ۲۹نفر ودرانجمن ادبی ۳۴نفرعضویت دارند. ۱۲نفرهم درانجمن‌ورزش وهم‌درانجمن موسیقی نامنویسی کرده‌اند. ۱۵نفرهم درانجمن ورزش‌وهم درانجمن ادبی عضویت‌دارند. ۱۶نفرهم درانجمن‌موسیقی وهم درانجمن ادبی شرکت‌کرده‌اند. ۷نفر در هرسه انجمن ثبت‌نام‌کرده‌اند. عدهٔ دانش‌آموزان این‌کلاس را حساب کنید.

حل: فرض می‌کنیم X، Y و Z به‌ترتیب مجموعهٔ انجمنهای ورزش، موسیقی‌وادبی باشند. نمودار ون را برای این سه‌مجموعه رسم می‌کنیم:



شکل ۱۶

بنابراین نمودار داریم:

$$G = X \cap Y \cap Z$$

پس $n(G) = 7$ و:

$$n(D) = n(X \cap Y) - n(G) = 12 - 7 = 5$$

$$n(E) = n(X \cap Z) - n(G) = 15 - 7 = 8$$

$$n(F) = n(Y \cap Z) - n(G) = 16 - 7 = 9$$

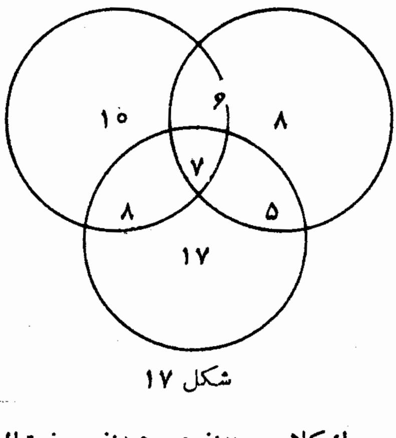
$$n(A) = n(X) - [n(D) + n(E) + n(G)] =$$
$$= 37 - (5 + 8 + 7) = 17$$

$$n(B) = n(Y) - [n(D) + n(F) + n(G)] =$$
$$= 29 - (5 + 9 + 7) = 8$$

$$n(C) = n(Z) - [n(E) + n(F) + n(G)] =$$
$$= 34 - (8 + 9 + 7) = 10$$

درنتیجه:

$$\text{عدهٔ کل دانش‌آموزان} = 7 + 5 + 8 + 9 + 17 + 8 + 10 = 64$$



شکل ۱۷

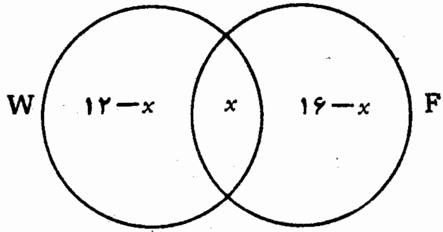
مسئلهٔ نمونهٔ ۶: دریک کلاس ۲۰ نفری، ۱۶ نفر فوتبال و ۱۲ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۲ نفر هم از ورزش معاف هستند. معین کنید چندنفرهم فوتبال وهم والیبال بازی می‌کنند.

حل: فرض می‌کنیم F و W به ترتیب مجموعهٔ بازیکنان فوتبال و والیبال باشند. همچنین فرض می‌کنیم X مجموعهٔ بازیکنان مشترك فوتبال و والیبال است و x عضودارد،

یعنی:

$$F \cap W = X,\ n(X) = x,\ n(W) = ۱۲,\ n(F) = ۱۶$$

پس، $(۱۶ - x)$ نفرفقط فوتبال و $(۱۲ - x)$ نفرفقط والیبال بازی می‌کنند.



شکل ۱۸

با درنظر گرفتن اینکه دونفر از ورزش معافند، داریم:

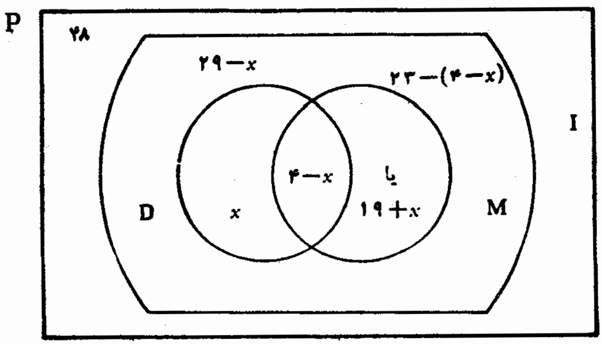
$$(۱۲ - x) + x + (۱۶ - x) + ۲ = ۲۰$$

بنابراین:

$$x = ۱۰$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۷: دریك کنفرانس صدنفر شرکت کرده‌اند. ۲۹ نفرزن ایرانی و۲۳ نفرمرد ایرانی درمیان این عده هستند. ۴ نفـر ازایرانیان پزشك هستند و۲۴ نفر از آنها یا مرد هستند یا پزشك. هیچ پزشك خارجی دراین کنفرانس شرکت نکرده است. تعیین کنید چند پزشك زن دراین کنفرانس شرکت کرده‌اند.

حل: در این مثال P را مجموعهٔ مرجع و I را مجموعهٔ ایرانیان فـرض می‌کنیم. واضح است کـه $I \subset P$. I شامل دومجموعهٔ متقاطع M (مردان) و D (پزشکها) است. اگر x عدهٔ پزشکان زن دراین کنفرانس باشد، نمودار ون را به‌شرح زیر ترسیم می‌کنیم:



شکل ۱۹

طبق روشی که برای حل مسئلهٔ نمونهٔ ۶ به کار بردیم، می گوییم: چون ۲۴ نفر از شرکت کنندگان یا مرد یا پزشکند، پس:

$$x+(۴-x)+۱۹+x=۲۴$$

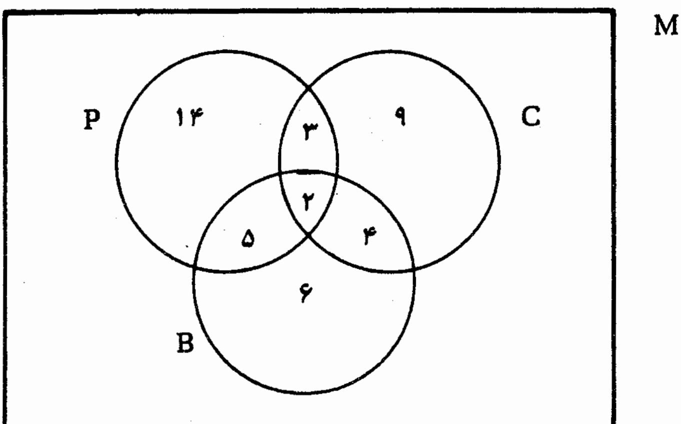
بنابراین:

$$x=۱$$

یعنی فقط یک نفر پزشک زن در این کنفرانس شرکت کرده است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۸: از میان ۵۰ نفر دانشجو که واحد ریاضی را برگزیده‌اند، ۱۸ نفر شیمی، ۱۷ نفر زیستشناسی و ۲۴ نفر فیزیک هم می‌خوانند. ۵ نفر هم فیزیک و هم شیمی، ۷ نفر هم فیزیک و هم زیستشناسی، ۶ نفر هم شیمی و هم زیستشناسی را انتخاب کرده‌اند. دو نفر هم هرچهار درس را می‌خوانند. معین کنید چند نفر فقط ریاضی می‌خوانند.

حل: مجموعهٔ مرجع را M با ۵۰ عضو انتخاب می کنیم. زیرمجموعه‌های این مرجع عبارتند از:



شکل ۲۰

فرض می کنیم P مجموعهٔ فیزیک‌خوانها و C مجموعهٔ شیمی‌خوانها و B مجموعهٔ زیستشناسی‌خوانها باشد، داریم:

$$n(P\cap C\cap B)=۲$$

با تشکیل نمودار ون مانند آنچه دربارهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۶ انجام دادیم، خواهیم داشت:

$$n(P\cup C\cup B)=۴۳$$

بنا بر این:

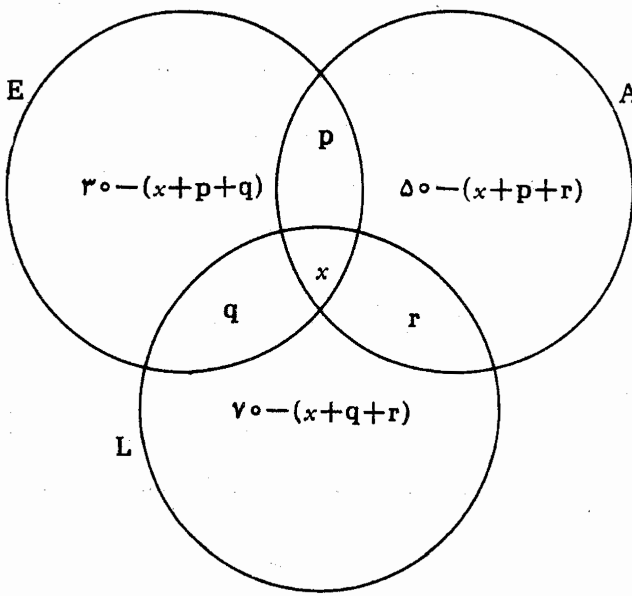
$$n(P\bigcup C\bigcup B)'=۵۰-۴۳=۷$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۹: گزارش یک شرکت بیمه حاکی از آن است که از ۱۰۰ نفر قربانی سوانح اتومبیل به‌ترتیب ۳۰ نفر یك چشم، ۵۰ نفر یك‌دست، ۷۰ نفر یك‌پا و ۴۴ نفر دوعضو ازاین عضوهای خود را از دست داده‌اند. تعیین کنید چندنفر هرسه‌عضو خود را ازدست داده‌اند.

حل: فرض می‌کنیم که x تعداد خواسته‌شده‌باشد. مجموعه‌های E، A و L به‌ترتیب شامل کسانی هستند که چشم ودست وپای خود را ازدست داده‌اند. فرض می‌کنیم که:

$$n(E\bigcap A)=p+x,\ n(E\bigcap L)=q+x,\ n(A\bigcap L)=r+x$$

نمودار ون را رسم می‌کنیم.



شکل ۲۱

بنا برصورت مسئله، داریم:

$$۳۰-(x+p+q)+۵۰-(x+p+r)+۷۰-(x+q+r)+$$
$$+p+q+r+x=۱۰۰$$

بنابراین:

$$p+q+r+۲x=۵۰$$

می‌دانیم که:

$$p+q+r=۴۴$$

بنابراین:

$$۲x=۶$$

$$x=۳$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۰: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(A\bigcup B'\bigcup C')\bigcap[A\bigcup(B\bigcap C)]=A$$

حل:

طرف چپ=

$$=[A\bigcup(B\bigcap C)']\bigcap[A\bigcup(B\bigcap C)]=$$

$$=A\bigcup[(B\bigcap C)'\bigcap(B\bigcap C)]=$$

$$=A\bigcup\phi=$$

$$=A$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۱: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(A\bigcup B)-B=A-B$$

حل:

طرف چپ=

$$=(A\bigcup B)\bigcap B'=$$

$$=(B\bigcap B')\bigcup(A\bigcap B')=$$

$$=\phi\bigcup(A\bigcap B')=$$

$$=A\bigcap B'=$$

$$=A-B$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۲: اگر $A\bigcup B=M$ باشد، ثابت کنید که:

$$A'\subset B$$

حل:

دلیل	بیان
قانون اتحاد:	$M\bigcap A'=A'$
فرض مسئله:	$A\bigcup B=M$
جایگزینی:	$(A\bigcup B)\bigcap A'=A'$
قانون توزیعپذیری $\bigcap$ در $\bigcup$:	$\Rightarrow (A\bigcap A')\bigcup(B\bigcap A')=A'$
قانون متمم:	$\Rightarrow \phi\bigcup(B\bigcap A')=A'$
قانون جابه‌جایی واتحاد:	$\Rightarrow (A'\bigcap B)=A'$
ویژگی ۸ اشتراك (۳ — ۴):	$\Rightarrow A'\subset B$

تمرین ۴

۱. صد وسیلهٔ نقلیه درآزمایش ادارهٔ راهنمایی و رانندگی شرکت کردند. ۶۰وسیلهٔ نقلیه قبول شدند. بقیه به‌علت نقص درترمز، چراغ وفرمان مردود شدند، به‌شرح زیر:
۱۲ وسیله فقط به سبب نقص ترمز، ۵ وسیله به‌سبب نقص ترمزوفرمان با هم، ۳ وسیله به‌سبب نقص ترمز وفرمان وچراغ هرسه با هم، ۸وسیله به‌سبب نقص ترمز وچراغ با هم، و ۵وسیله به‌سبب نقص فرمان وچراغ با هم مردود شدند. عدهٔ وسایلی‌که فقط به‌سبب نقص فرمان و فقط به‌سبب نقص چراغ مردود شدند برابربود. تعیین‌کنید چند وسیلهٔ نقلیه فقط به‌سبب نقص چراغ مردود شده‌اند وچندتا ازآنها فقط در یك مورد نقص داشته‌اند.

۲. حوزهٔامتحانات نهایی‌ابتدایی، نتیجهٔامتحانات دبستانی رابرای ۶۰نفرشرکت‌کنندگان آن دبستان، به‌شرح زیراعلام‌کرد:
قبولشدگان ۱۲نفر، تجدیدشدگان درحساب ۲۴نفر، تجدیدشدگان در املا ۱۸نفر، تجدیدشدگان درانشا ۲۱نفر، تجدیدشدگان درحساب وانشا ۱۵نفر، تجدیدشدگان در املا وانشا۱۰نفر، تجدیدشدگان درهرسه درس ۵نفر. درضمن‌هیچ‌یك ازدانش‌آموزان از درس املا وحساب باهم تجدید نشده است.

مدیردبستان به‌عنوان اعتراض گزارش را به‌حوزه برگرداند. حوزه نیزمتوجه شد که درگزارش اشتباه شده است. تعیین‌کنید چگونه می‌توان به‌اشتباه این اعلام نتیجه پی برد.

۳ . هرگاه A، B و C زیرمجموعه‌های مرجع M باشند ثابت کنید:

$$[(A-B)\cap(A-C)=\phi] \Rightarrow [A\subset(B\cup C)]$$

۴ . درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(A-B)\cap B=\phi$$

۵ . درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(M-A)\cap(M-B)=M-(A\cup B)$$

۶ . درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(A\,\Delta\, B)\cup(A\cap B)=A\cup B$$

۷ . هرگاه $A\subset B$ و $C\subset D$ باشد، ثابت کنید:

الف‌ـ $(A\cap C)\subset(B\cap D)$؛ ب‌ـ $(A\cup C)\subset(B\cup D)$.

● درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

۸ . $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$

۹ . $(A'\cap B')\cap(A\cup B)=\phi$

۱۰ . $(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$

۱۱ . $[(A'\cap B')\cup(A\cup B)]=M$

۱۲ . $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup C')\cap(A\cup B')=A$

۱۳ . $(A\cup B\cup C)\cap[A\cup(B\cap C)]=A\cup(B\cap C)$

۱۴ . $(A\cup B\cup C'\cup D'\cup E')\cap[A\cup B\cup(C\cap D\cap E)]=A\cup B$

۱۵ . $(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)\cup(A\cap B\cap C')$
$=(B\cap C)\cup(C\cap A)\cup(A\cap B)$

۵

حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه

۵-۱: تعریف دوتایی مرتب

دو شیء را که برای آنها ترتیبی درنظر گرفته شده باشد، که کدام اول و کدام دوم است، دوتایی مرتب می‌نامند وهریك از دو شیء را عضوآن می گویند.

مثلاً، اگرخانوادهٔ A پنج پسر و دو دختر داشته باشد وخانوادهٔ B دو پسر وپنج دختر داشته باشد وقرار بگذاریم که نخست عدهٔ پسران را یادآور شویم، این‌دو دوتایی مرتب را به‌صورت A:(۵, ۲) و B:(۲,۵) نشان می‌دهیم.

مشاهده می‌کنید که دوتایی مرتبی را که a عضو اول و b عضو دوم آن باشد، به‌صورت (a, b) نشان می‌دهیم. a را مختص اول و b را مختص دوم می‌نامیم.

واضح است که $(a, b) \neq (b, a)$ وهمچنین $(a, b) \neq \{a, b\}$ است.

۵-۲: nتایی مرتب

اگر دریك پرانتز سه مختص قراردهیم وبرای آنها ترتیب درنظر بگیریم، آن را سه‌تایی مرتب می‌گوییم. مثلاً اگرقرار بگذاریم که نخست یکی از دانشجویان رشتهٔ ریاضی (m) وبعد ازآن یکی ازدانشجویان رشتهٔ فیزیك (p) و سرانجام یکی ازدانشجویان رشتهٔ زیستشناسی (b) را نام ببریم، سه‌تایی مرتب را به‌شکل (m, p, b) می‌نویسیم. به‌همین ترتیب چهارتایی مرتب، ... و nتایی مرتب نیزداریم.

۵-۳: ضرب دکارتی دومجموعه

تعریف ـ اگر A و B دومجموعه باشند، حاصل‌ضرب دکارتی یا حاصل‌ضرب کارتزین

مجموعهٔ A درمجموعهٔ B که‌با نماد $A\times B$ نشان‌داده می‌شود، مجموعهٔ‌همهٔ دوتاییهای مرتبی است که مختص اول آنها متعلق به A ومختص دوم آنها متعلق به B باشد، یعنی:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,\ y\in B\}$$

مثال: هرگاه $A=\{a,b\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، خواهیم داشت:

$$A\times B=\{(a,۱),(a,۲),(a,۳),(b,۱),(b,۲),(b,۳)\}$$

توجه کنید که $A\times B\neq B\times A$، زیرا طبق تعریف:

$$B\times A=\{(۱,a),(۱,b),(۲,a),(۲,b),(۳,a),(۳,b)\}$$

عدهٔ عضوهای ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A

اگر $n(A)=\alpha$ و $n(B)=\beta$ باشد، $n(A\times B)=\alpha\times\beta$ خواهد بود.

۵-۴: برابری دوتاییهای مرتب

طبق تعریف، دوتایی مرتب $(a;b)$ را با دوتایی مرتب (c,d) برابر می‌گوییم اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$ باشد، یعنی:

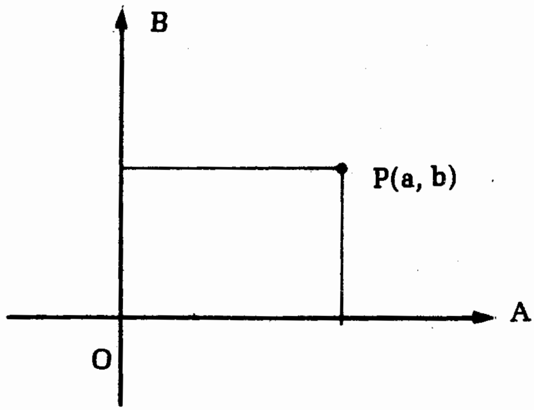
$$[(a,b)=(c,d)]\iff[a=c,\ b=d]$$

۵-۵: نمودار مختصاتی حاصل‌ضرب دکارتی

علاقه‌مندان باصفحهٔ دکارتی $R\times R$ آشنایی دارند. واژهٔ دکارتی برگرفته از نام **دکارت**[16]، دانشمند قرن هفدهم است که نخستین‌بار صفحهٔ مختصات با دومحور عمود برهم را وارد ریاضی کرد.

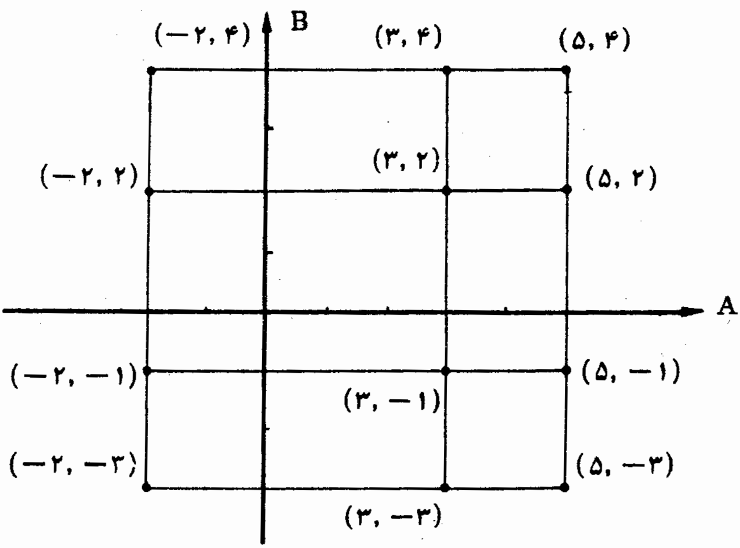
دراین صفحه می‌توانیم هردوتایی مرتب را با یك نقطه نشان دهیم. اگر (a,b) دوتایی مرتب موردنظر باشد، نقطه‌ای به‌طول a روی محورافقی OA ونقطه‌ای به‌عرض b روی محور قائم OB انتخاب می‌کنیم. عمودهایی که دراین دو نقطه برمحورهای نظیر اخراج شوند، یکدیگررا درنقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. P را نمایش‌مختصاتی دوتایی مرتب (a,b) می‌نامند.

۱۶- René Descartes (۱۵۹۶، ۱۶۵۰ میلادی)، فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی



شکل ۲۲

مثال: دو مجموعهٔ $A=\{-۲,۳,۵\}$ و $B=\{-۳,-۱,۲,۴\}$ مفروضند. نمودار مختصاتی $A\times B$ را رسم می‌کنیم:

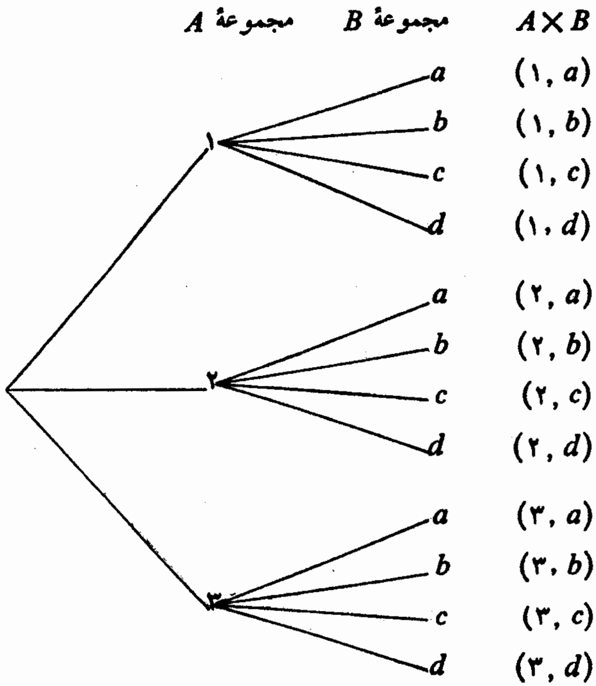


شکل ۲۳

۵-۶: نمودار درختی حاصل‌ضرب دکارتی

برای آشنایی با این نمودار، مثالی می‌آوریم:

مثال: هرگاه $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{a, b, c, d\}$ باشد، عضوهای $A\times B$ را مشخص می‌کنیم:



دقت کنید که عضوهای مجموعهٔ A درستون قائم سمت‌چپ نوشته شده‌اند. در برابر هرعضو ازمجموعهٔ A جمیع عضوهای مجموعهٔ B درستون وسط دیـده می‌شود وسرانجام عضوهای $A\times B$ درستون سمت‌راست نوشته شده‌اند. این گونه نمودار را نمودار درختی می‌نامند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۳: هرگـاه دوتاییهای مـرتب $(x+۲y, ۵)$ و $(۹, ۳x-۵y)$ برابرباشند، x و y را بیابید.

حل: عضوهای اول وهمچنین عضوهای دوم این دوتاییها برابرند، یعنی:

$$x+۲y=۹\ ,\ ۳x-۵y=۵$$

ازحل این دستگاه دومعادله با دومجهول خواهیم داشت:

$$x=۵,\ y=۲$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۴: ثابت کنید که حاصل‌ضرب دکارتی دراشتراک مجموعه‌ها توزیع‌پذیر است، یعنی:

$$A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$$

حل: طبق تعریف برابری درمجموعه‌ها باید دوجزئیت زیررا ثابت کنیم:

الف- $[(A\times(B\bigcap C)]\subset[(A\times B)\bigcap(A\times C)]$

ب - $[(A\times B)\bigcap(A\times C)]\subset[A\times(B\bigcap C)]$

برای اثبات «الف» باید ثابت کنیم که اگر $(x\ ,\ y)$ متعلق به $A\times(B\bigcap C)$ باشد، عضو $(A\times B)\bigcap(A\times C)$ نیزخواهد بود:

$$\forall(x,\ y)\in[A\times(B\bigcap C)]\ \Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ y\in(B\bigcap C)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ y\in B\wedge y\in C\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x,\ y)\in A\times B\\ (x,\ y)\in A\times C\end{cases}\Rightarrow\ (x,\ y)\in[(A\times B)\bigcap(A\times C)]$$

یعنی:

$$[A\times(B\bigcap C)]\subset[(A\times B)\bigcap(A\times C)]$$

برای اثبات «ب» نیز به‌همین روش عمل می‌کنیم:

$$\forall(x,\ y)\in[(A\times B)\bigcap(A\times C)]\Rightarrow\begin{cases}(x,\ y)\in A\times B\\ (x,\ y)\in A\times C\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in A,\ y\in B\\ \\ x\in A,\ y\in C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in A\\ y\in(B\bigcap C)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ (xy)\in A\times(B\bigcap C)$$

پس، نتیجه می‌شود که:

$$[(A\times B)\bigcap(A\times C)]\subset[A\times(B\bigcap C)]$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۵: اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ باشد، ثابت کنید:

$$(A\times C)\subset(B\times D)$$

حل:

$$\forall(x,\ y)\in(A\times C)\ \Rightarrow x\in A,\ \ y\in C$$

$$A\subset B, x\in A\ \Rightarrow x\in B$$

$$C\subset D, y\in D\ \Rightarrow y\in D$$

درنتیجه $(x\ ,\ y)\in(B\times C)$ خواهد بود، یعنی $(A\times C)\subset(B\times D)$

۵-۷: نگاهی به‌فضای n بعدی

فرض می‌کنیم که R مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد. در این صورت $R\times R$ مجموعهٔ دوتاییهای مرتب $(x\ ,y)$ خواهد بود که در آن x و y هردو عدد حقیقی هستند. این مجموعهٔ دوتاییها تشکیل‌دهندهٔ فضای دوبعدی است که با R^2 نشان‌داده می‌شود. درهندسهٔ تحلیلی به‌سادگی نشان می‌دهند که عضوهای R^2 نقاط یك صفحه را پدید می‌آورند. با همین روش $R^3=R^2\times R=R\times R\times R$ یك فضای سه‌بعدی پدید می‌آورد که سه‌تاییهای مرتب آن $(x,\ y,\ z)$ نقاط مختلف فضای سه‌بعدی را به‌وجود می‌آورند.

nتاییهای مرتب $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n)$ عضوهای R^n هستند که فضای nبعدی را پدید می‌آورند. مهمترین ویژگی این فضاها را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد:

> درفضای nبعدی، دونقطه هنگامی برهم منطبقند که مختصات نظیر به‌نظیر آنها برابر باشد.

تمرین ۵

۱. اگر $A=\{-۳,-۱,۱,۳\}$ و $B=\{-۴,۳,۵\}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $A\times B$، $B\times A$، $A\times A$، $B\times B$ ونمایش‌هندسی$A\times B$ به‌یاری محورهای مختصات درصفحه.

۲. ثابت کنید که حاصل‌ضرب دکارتی دومجموعه شامل قانونهای‌جابه‌جایی وشرکت‌پذیری

نیست.

● درستی برابریهای زیررا ثابت کنید:

۳ . $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$

۴ . $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

۵ . $(B\bigcup C)\times A=(B\times A)\bigcup(C\times A)$

۶ . $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

۷ . $(B\bigcap C)\times A=(B\times A)\bigcap(C\times A)$

۸ . ضرب دکارتی را با ضرب اقلیدسی مقایسه کنید.

۹ . درستی برابری زیررا ثابت کنید:

$$(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)=(A\times C)\bigcup(A\times D)\bigcup(B\times C)\bigcup(B\times D)$$

۱۰. اگر $A=\{a, b\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{x, y\}$ باشد، $A\times B\times C$ را بیابید.

۱۱. ضرب دکارتی $A\times B=\phi$ درریاضیات جدید را با $a\times b=۰$ درجبر مقایسه کنید.

۱۲. اگر دوتاییهای مرتب $(x+y, ۱)$ و $(۳, x-y)$ برابر باشند، x و y را بیابید.

● اگر $A=\{a, b\}$ و $B=\{۲, ۳\}$ و $C=\{۳, ۴\}$ باشد، مطلوب است:

۱۳. $A\times(B\bigcup C)$ ۱۴. $(A\times B)\bigcup(A\times C)$

۱۵. $A\times(B\bigcap C)$ ۱۶. $(A\times B)\bigcap(A\times C)$

۱۷. هرگاه $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴\}$ و $C=\{۳,۴,۵\}$ باشد، اعضای $A\times B\times C$ را باروش درختی نمایش دهید.

۱۸. هرگاه $S=\{a, b\}$ و $W=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $V=\{۳,۵,۷,۹\}$ باشد، مجموعهٔ $(S\times W)\bigcap(S\times V)$ را بیابید.

● عضو یا عضوهای مجموعه‌های زیررا نام ببرید:

۱۹. $\{(x,y)|x+y=۶\}\bigcap\{(x,y)|۳x+y=۶\}$

۲۰. $\{(x, y)|۳x+y=۶\}\bigcap\{(x, y)|x+۳y=۶\}$

۲۱. $\{(x, y)|x+y=۶\}\bigcap\{(x, y)|x+۳y=۶\}$

۲۲. $\{(x, y)|x+y=۴\}\bigcap\{(x, y)|۳x+y=۶\}$

۲۳. $\{(x, y)|x+y=4\}\bigcap\{(x, y)|x+3y=6\}$

۲۴. ثابت کنید که:

$$(A\times B)'=(A'\times B)\bigcup(A\times B')\bigcup(A'\times B')$$

۲۵. درصورتی که $A=\{a, b\}$ و $B=\{1, 2, 3\}$ و $C=\{p, q, 1\}$ باشد، نشان دهید که:

$$A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$$

۶

رابطه در مجموعه

۶-۱: پیشگفتار

یکی ازاصلهای مسلم ریاضیات این است که، درعالم وجود، دوچیز نمی‌توان یافت که به‌نحوی باهم ارتباط نداشته باشند. به‌بیان دیگر، همواره دوچیز به‌وسیلهٔ نوعی از تأثیر با یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند. مثلاً دوشخص یا دوشیء را می‌توان با رابطه‌ای مانند سنگینتر بودن، سبکتر بودن، بلندتر بودن، کوتاهتر بودن و... باهم ارتباط داد ومثلاً گفت: «علی ازحسن بلندتر است» یا «یك لیتر آب ازیك لیترجیوه سبکتراست». همچنین،انسانها به‌وسیلهٔ رابطه‌هایی مانند پدر و فرزندی، زن و شوهری یا هموطن بودن به‌یکدیگر نسبت داده می‌شوند. افکار وعقیده‌ها را نیز می‌توان با رابطه‌هایی مانند مترقی بودن، ارتجاعی بودن، و نو یا کهنه بودن با هم مقایسه‌کرد ورابطه‌ای میان آنها یافت. سرانجام،رویدادها نیز می‌توانند با رابطه‌هایی مانند همزمان بودن، و جلوتر بودن یا عقبتر بودن با یکدیگر ارتباط پیدا کنند.

اگر خواسته باشیم این حقیقت را به‌زبان مجموعه‌ها بیان‌کنیم، باید بگوییم‌که همواره دریك مجموعهٔ مرجع، زیرمجموعه‌هایی وجود دارندکه درآنها عضوها بایکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند. هرگاه، به‌فرض، دوچیز یافت شوندکه با یکدیگر هیچ‌گونه ارتباط نداشته باشند، همان رابطه نداشتن خود رابطه‌ای بین آنهاست.

اینك‌که با مفهوم مجموعه وضرب دکارتی آشنا شده‌ایم، اقدام منطقی بعدی تحقیق دربارهٔ رابطه‌های موجود بین عضوهای یك مجموعه یا بین عضوهای مجموعهٔ دوتاییهای مرتب یك ضرب دکارتی است.

طرفداران ریاضیات سنتی روشی راکه ریاضیات جدید دراین‌باره به‌کارمی‌برد نمی‌پسندند، ولی انسان روبه‌رشد باید جبر زمان را بپذیرد و دستورهایش را اجرا کنند.

اینك، پیش‌ازآنکه به‌تعریف ریاضی رابطه بپردازیم، چند مثال می‌آوریم:

مثال ۱: فرض می‌کنیم M مجموعهٔ ساکنان شهر تهران (مجموعهٔ مرجع) باشدکه دارای nعضو است (تقریباً ۸میلیون نفر). هدف مـا مطالعهٔ زندگی خانوادگی مردم این شهراست. مثلاً، می‌خواهیم بدانیم فلانی فرزندکیست؟ یابه‌زبان مجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ F راکه شامل دوتاییهای مرتب (x, y)، به‌قسمی که y فرزند x است، مطالعه‌کنیم (x و y هردو عضو M هستند). دراین حالت درزیرمجموعهٔ F یك رابطه از M در M وجود دارد:

$$x \in M,\ \ y \in M,\ \ yfx$$

f رابطهٔ فرزندبودن را نشان می‌دهد ومقصود از yfx این است‌که y فرزند x است.پس:

$$F=\{(x,\ y)|x \in M,\ y \in M,\ yfx\}$$

واضح است‌که عدهٔ دوتاییهای مرتب‌کمتر از $2n$ است، زیرا برخی از مردم‌تهران فوت‌کرده‌اند، یا ازتهران رفته‌اند، ولی فرزندان آنها هنـوز درتهران زندگی می کنند. همچنین، واضح است‌که مجموعهٔ F دست‌کم دارای دو دوتایی مرتب است‌که عضو اول آنها یکی است. زیرا دست‌کم یکی ازساکنان تهران دارای دوفرزند است، مثلاً، آیدین وآرمین فرزندان نادر هستند. پس دوتاییهای مرتب (آیدین, نادر) و (آرمین ,نادر)عضو F هستند، یعنی:

نادر f آرمین , نادر f آیدین

همچنین، درمجموعهٔ F دست‌کم دو دوتایی مرتب وجود داردکـه عضو دوم آنها یکی است. مثلاً، اگر نادر ونسرین، پدر ومادر آرمین باشند، داریم:

نسرین f آرمین , نادر f آرمین

یعنی دوتاییهای مرتب (آرمین ,نادر) و(آرمین ,نسرین) عضو F هستند. این‌چنین‌رابطه‌ها را، رابطهٔ چند به‌چند می‌نامند.

مثال ۲: مطالعه دربارهٔ زندگی خانوادگی مردم تهـران را ادامه می‌دهیم. فرض می‌کنیم S مجموعهٔ دوتاییهای مرتب (x, y) باشدکه درآن $x \in M$، $y \in M$ و y تنهـا فرزند x باشد، یعنی:

$$S=\{(x,\ y)|x \in M,\ y \in M,\ ysx\}$$

s رابطهٔ یگانه فرزند بودن را نشان می‌دهد. واضح است که S دست کم شامل دو دوتایی مرتب است که عضو دوم آنها برابر باشد، یعنی دست کم یك تهرانی وجود دارد که یگانه فرزند دوتهرانی (پدر ومادر او) باشد. مثلاً، اگر احمد و پروین فقط یك فرزند به‌نام امید داشته باشند، خواهیم داشت:

$$S=\{\ldots, (\text{امید}, \text{احمد}), (\text{امید}, \text{پروین}), \ldots\}$$

درمجموعهٔ S دو دوتایی مرتب نمی‌توان یافت که عضواول آنها برابر باشد. چنین رابطه‌ای را رابطهٔ چند به‌یك می‌نامند.

مثال ۳: حال فرض می‌کنیم که R مجموعهٔ دوتاییهای مرتب (x, y) باشد، به‌قسمی که $x \in M$، $y \in M$ و x مادر y باشد. اگر رابطهٔ مادر بودن را با r نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$R=\{(x, y) | x \in M,\ y \in M,\ xry\}$$

این گونه رابطه‌ها را رابطهٔ یك به‌چند می‌نامند، زیرا دراین مجموعه دست کم دو دوتایی مرتب یافت می‌شود که عضو اول آنها یکی است. مثلاً، نسرین مادر آیدین و آرمین است، ولی دوتاییهای مرتبی که عضودوم آنها برابر باشد وجود ندارند.

مثال ۴: این‌بار فرض می‌کنیم که H مجموعهٔ دوتاییهای مرتب (x, y) باشد، به‌قسمی که x همسر دائمی y باشد. اگر رابطهٔ همسر دائمی بودن را با h نشان دهیم (فرض می کنیم که دو زن داشتن ممنوع باشد) خواهیم داشت:

$$H=\{(x, y) | x \in M,\ y \in M,\ xhy\}$$

این گونه رابطه‌ها را رابطهٔ یك به‌یك می‌نامیم.

اینك با آگاهی ازاین چهارمثال رابطه را به‌زبان ریاضی تعریف می‌کنیم.

۶ـ۲: تعریف ریاضی رابطه

هرگاه x و y به‌ترتیب عضو مجموعه‌های X و Y باشند، دوتایی مرتب (x, y) عضوی است ازحاصلضرب دکارتی $X \times Y$، یعنی:

$$x \in X\ ,\ y \in Y \Rightarrow (x, y) \in X \times Y$$

اینك اگر درمجموعهٔ حاصلضرب $X \times Y$ زیرمجموعهٔ R را در نظر بگیریم

$(R\subset X\times Y)$، این زیرمجموعه رابطه‌ای است که باضابطهٔ خود x را به y پیوندمی‌دهد. این واقعیت را بـا نماد xRy یا $(x, y)\in R$ نشان می‌دهند و می‌خوانند: x نسبت R با y دارد، یا بین x و y رابطهٔ R برقرار است. نقیض این مفهوم را با نماد $(x, y)\notin R$ یا $\sim xRy$ یا $x \not R y$ نشان می‌دهند ومی‌خوانند: x رابطهٔ R با y ندارد.

مثال: فرض می کنیم:

$$X=\{۱,۷,۹\} \quad , \quad Y=\{۲,۶,۱۱\}$$

حاصل‌ضرب دکارتی این دومجموعه عبارت است از:

$$X\times Y=\{(۱,۲), (۱,۶), (۱,۱۱), (۷,۲), (۷, ۶), (۷,۱۱),$$
$$(۹,۲),(۹,۶),(۹,۱۱)\}$$

واضح است که این مجموعهٔ ۹ عضوی از دوتاییهای مرتب دارای زیرمجموعه‌های بسیاری است. (عدهٔ این زیرمجموعه‌ها را حساب کنید.)

هرزیرمجموعه‌ای ازاین مجموعهٔ ۹عضوی، یك رابطه از A در B خوانده می‌شود. ولی معمولاً رابطه را با ضابطه‌ای تعیین می کنند. مثلاً، می گویند رابطه‌ای از A در B بیابیدکـه درآن مختص اول بزرگتر ازمختص دوم باشد. دراین حالت آن رابطه چنین خواهد بود:

$$R=\{(۷,۲), (۷,۶), (۹,۲), (۹,۶)\}$$

پس، هر رابطه به سه عامل نیاز دارد: الف) مجموعهٔ A، ب) مجموعهٔ B، ج) یك گزاره نمای $P(x, y)\in A\times B$.

توجه: اگر $A=B$ باشد، به‌جای اصطلاح رابطهٔ A در A، کافی است بگـوییم رابطه در A.

نمایش رابطه

همان‌طورکـه درنمایش مجموعه ازنمایش تفصیلی ونمایش با عـلائم ریاضی نام بردیم، درنمایش رابطه نیزمی‌گوییم:

نمایش تفصیلی هررابطه نام بردن یکایك عضوهای آن رابطه است. نمایش باعلائم ریاضی هررابطه معرفی آن رابطه با گزاره نماست؛ به‌بیان‌دیگر، معرفی عضوها بایك‌رابطهٔ ریاضی است. مثلاً، درمثال بالاچنین نمایش می‌دهیم:

$$R=\{(x, y)|x\in A,\ y\in B,\ x>y\}$$

۶ـ۳: دامنه وحوزهٔ رابطه

مجموعه‌ای که عضوهای آن مختص اول دوتاییهای مرتب رابطه باشند، دامنهٔ رابطه و مجموعه‌ای که عضوهای آن مختص دوم دوتاییهای مرتب رابطه باشند، حوزهٔ رابطه نام دارند. مثلاً درمثال قبل:

$$R \text{ دامنهٔ } = \{۷,۹\}$$

$$R \text{ حوزهٔ } = \{۲,۶\}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۶: رابطهٔ $R=\{(x, y)|x^۲+y^۲=۱۳\}$ در مجموعهٔ $A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ تعریف شده است:

الف- نمایش تفصیلی این رابطه را بنویسید.

ب - دامنه وحوزهٔ این رابطه را مشخص کنید.

حل:

الف- $R=\{(-۳,-۲), (-۳,۲), (-۲,-۳), (-۲,۳), (۲,۳), (۲,-۳), (۳,۲), (۳,-۲)\}$

ب - $\text{دامنه} = \{-۳,-۲,۲,۳\}$, $\text{حوزه} = \{-۳,-۲,۲,۳\}$

۶ـ۴: نمودار یک رابطه

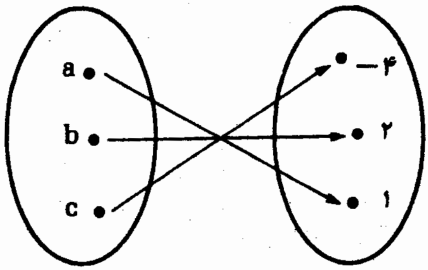
رابطه را به‌دو روش تصویری نمایش می‌دهند که عبارتند از:

الف- نمودار پیکانی

نخست دامنه وحوزهٔ رابطه را تعیین می کنیم. سپس ازنمودار ون استفاده ودامنه وحوزه را با دو خم بسته روی نمودار مشخص می کنیم. سپس، با پیکانی مختص اول هردوتایی مرتب را به‌مختص دوم آن مربوط می کنیم.

مثال: نمودار پیکانی رابطهٔ $R=\{(a,۱), (b,۲), (c,-۴)\}$ را رسم می کنیم.

$$\text{دامنه} = \{a, b, c\} \quad , \quad \text{حوزه} = \{۱,۲,-۴\}$$



شکل ۲۴

ب- نمودار دکارتی

ازاین روش بیشتر برای نمایش رابطه‌هایی که عضوهای آنها دوتاییهای مرتب از عددهای حقیقی باشند، استفاده می کنیم.

درنمودار دکارتی یا نمودار مختصاتی دومحور رسم می‌کنیم (بهتراست عمودبرهم باشند). مختص اول هردوتایی را روی یکـی از محورها (معمولاً محور افقی) ومختص دوم‌را روی محور دیگر مشخص می کنیم. ازنقطه‌های مشخص‌شده روی هرمحور، خطهایی موازی محور دیگر رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد هردوخط نظیر، نمودار دکارتی یك زوج مرتب است.

مثال: نمودار دکارتی رابطهٔ زیررا رسم می‌کنیم.

$$R=\{(-۳,۱),(-۲,-۵),(۰,۳),(۴,۰),(۳,۲)\}$$

دو محور عمود برهم (ممکن است عمودهم نباشند) رسم می کنیم. روی‌محورافقی $\{-۳,-۲,۰,۴,۳\}$، یعنی مختصات اول را وروی محورعمودی $\{۱,-۵,۳,۰,۲\}$، یعنی مختصات دوم را مشخص می‌کنیم. برای مشخص کـردن هردوتایی مرتب از مختص اول ودوم مربـوط به آن خطهایی رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنهـا نمایش دکارتی آن دوتایی مرتب است (شکل ۲۵).

ج- نمودار درختی

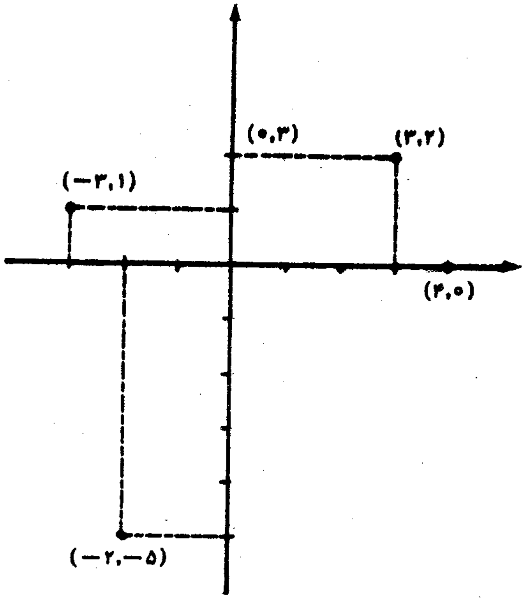
این نمودار را در بخش ۵-۶ و همچنین تمرین ۱۷ از فصل پنجم وپاسخ مربوط به‌آن شناخته‌ایم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۷: نمودار دکارتی رابطهٔ

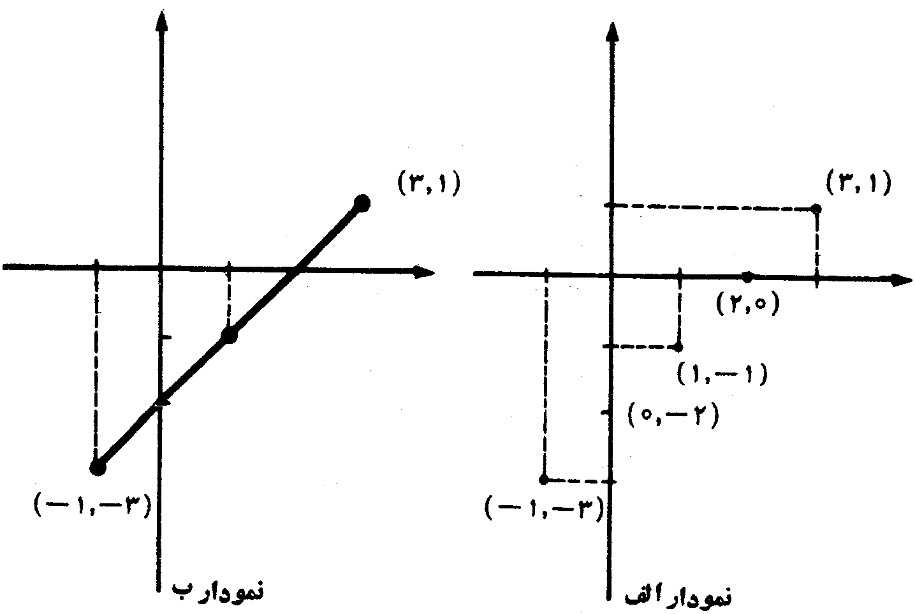
$$R=\{(x,y)|x-y=۲,x>-۲,y\leqslant ۱\}$$

را در دوحالت زیررسم کنید.

الف- $x,y\in Z$ ؛ **ب-** $x,y\in R$



شکل ۲۵



شکل ۲۶

حل: الفـ دراین‌حالت:

$$R=\{(۳,۱),(۲,۰),(۱,-۱),(۰,-۲),(-۱,-۳)\}$$

بـ دراین حالت x و y متعلق به R هستند ونمودار، خطی مستقیم می‌شود.

۶ـ۵: رابطهٔ وارون

هرگاه R رابطه‌ای از A در B باشد، رابطهٔ وارون‌آن‌با نماد $R^{-۱}$ از B به A است‌وچنین تعریف می‌شود:

$$R^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

درحقیقت، حوزهٔ R = دامنهٔ $R^{-۱}$ و دامنهٔ R = حوزهٔ $R^{-۱}$ است.

مثال: اگر $R=\{(۱,۵),(-۲,۶),(۳,-۷)\}$ باشد خواهیم داشت:

$$R^{-۱}=\{(۵,۱),(۶,-۲),(-۷,۳)\}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۸: رابطهٔ $R=\{(x,y)|y=۲x\}$ در مجموعهٔ عددهـای حقیقی تعریف شده است، رابطهٔ وارون آن یعنی $R^{-۱}$ را بیابید ونمودار دکارتی R و $R^{-۱}$ را روی یك دستگاه نمودار مختصات قائم نشان دهید.

حل: اگر مختص اول این رابطه را x بنامیم مختص دوم آن $۲x$ خواهد بود، در نتیجه‌عضوهای R به‌شکل‌دوتاییهای $(x,۲x)$ خواهندبودکه‌در آن $x\in R$ است.عضوهای $R^{-۱}$ طبق تعریف $(۲x,x)$ هستند کـه با ضابطهٔ $x=۲y$ مشخص می‌شود. نمودار R و $R^{-۱}$ درشکل ۲۷ رسم شده است.

به‌طوری‌که‌ملاحظه می‌کنیدنمودارهندسی‌رابطهٔ R و وارونش $R^{-۱}$ نسبت‌به‌نیمساز ناحیهٔ اول وسوم مختصات دکارتی قرینه‌اند.

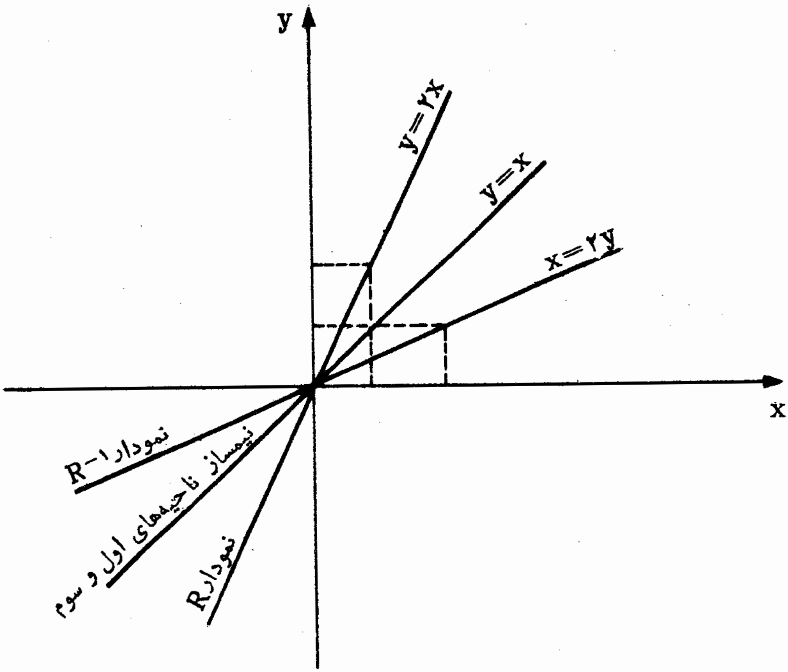
۶ـ۶: ویژگی بازتابی رابطه‌ها

تعریفـ رابطهٔ R درمجموعهٔ A، ویژگی بازتابی (انعکاسی) دارد، هرگاه‌هرعضو A با خودش در رابطهٔ R قرار داشته باشد. با بیان ریاضی:

$$\forall a\in A\ :\ (a,a)\in R$$

یا

$$aRa$$



شکل ۲۷

مثال ۱: درمجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$، رابطهٔ زیرویژگی بازتابی دارد:

$$\{(۱,۱), (۱,۳), (۱,۲), (۲,۲), (۲,۳), (۳,۳), (۳,۱)\}$$

زیرا همگی عضوهای مجموعهٔ A، یعنی ۱ و۲ و۳، با خود رابطه برقرار کرده‌اند و دوتاییهای مرتب (۱,۱) و (۲,۲) و(۳,۳) را ترتیب داده‌اند.

مثال ۲: فرض می‌کنیم A مجموعهٔ مثلثهای هندسهٔ اقلیدسی باشد. رابطهٔ R در A که با گزاره نمای «x متشابه y است» تعریف می‌شود، رابطه‌ای بازتاب است زیرا هرمثلث با خودش متشابه است.

مثال ۳: اگر R رابطه‌ای در مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد که با گزاره نمای «x کوچکتر از y است» تعریف شود، بازتاب نیست. زیرا عددی وجود ندارد که ازخود کوچکتر باشد.

مثال ۴: هرگاه A خانوادهٔ مجموعه‌ها باشد، رابطهٔ R که با گزاره نمای «x زیر-

مجموعهٔ y است» تعریف می‌شود، یک رابطهٔ بازتاب است، زیرا هرمجموعه‌ای زیر مجموعهٔ خود است.

مثال ۵: (بسیارمهم) اگر R رابطه‌ای درمجموعهٔ عددهای حقیقی باشد که با گزاره نمای «$x \leqslant y$» تعریف شود، بازتاب است، زیرا $x \leqslant y$ یک ترکیب فصلی از دو مؤلفهٔ $x = y$ و $x < y$ است، که $x = y$ بازتاب است. پس، رابطهٔ $x \leqslant y$ درمجموعهٔ عددهای حقیقی بازتاب است، درحالی‌که $x < y$ بازتاب نیست.

۶-۷: ویژگی تقارن رابطه‌ها

تعریف ـ رابطهٔ R درمجموعهٔ A ویژگی تقارن دارد، هرگاه:

$$\forall a, b \in A: [(a, b) \in R] \Rightarrow [(b, a) \in R]$$

مثال ۱: هرگاه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد، رابطهٔ

$$R = \{(۱, ۳), (۴, ۲), (۲, ۴), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۱)\}$$

درمجموعهٔ A ویژگی تقارن دارد. ولی رابطهٔ

$$S = \{(۱, ۳), (۴, ۲), (۲, ۴), (۲, ۳), (۳, ۱)\}$$

ویژگی تقارن ندارد، زیرا $(۲, ۳) \in S$ ولی $(۳, ۲) \notin S$.

مثال ۲: اگر A مجموعهٔ مثلثهای هندسهٔ اقلیدسی باشد، رابطهٔ R که در A با گزاره نمای «x متشابه y است» تعریف می‌شود، ویژگی تقارن دارد. (چرا؟)

حال به‌عنوان تمرین ثابت کنید رابطهٔ R درمجموعهٔ A هنگامی ویژگی تقارن دارد که داشته باشیم:

$$R = R^{-۱}$$

۶-۸: ویژگی ضد تقارن رابطه‌ها

تعریف ـ رابطهٔ R درمجموعهٔ A ویژگی ضد تقارن دارد، هرگاه:

$$\forall a, b \in A: [(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b$$

یا به تعبیر دیگر، اگر $a \neq b$ باشد، احتمالاً a رابطه با b دارد، یا b رابطه با a دارد، نه‌هر دو.

مثال ۱: اگر R رابطه‌ای در N (مجموعهٔ عددهای طبیعی) باشدکه باگزاره نمای «a بر b بخشپذیر است» تعریف شود، ویژگی ضد تقارن دارد. زیرا:

$$(a|b,\ b|a) \Rightarrow a=b$$

(نماد $a|b$ چنین خوانده می‌شود: a بر b بخشپذیر است.)

مثال ۲: رابطهٔ $R=\{(۱,۳),(۴,۲),(۴,۴),(۲,۴)\}$ در مجموعهٔ $W=\{۱,۲,۳,۴\}$ ویژگی ضد تقارن ندارد، زیرا $(۲,۴)\in R$ و $(۴,۲)\in R$ است ولی $۲ \neq ۴$.

مثال ۳: اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ باشد، آنگاه $a=b$. پس، رابطهٔ R درمجموعهٔ عددهای حقیقی که باگزاره نمای «$x \leqslant y$» نمایش داده می‌شود ویژگی ضدتقارن دارد.

مثال ۴: هرگاه R رابطه‌ای درخانوادهٔ مجموعه‌ها باشدکه باگزاره نمای «x زیرمجموعهٔ y است» تعریف شود، ویژگی ضد تقارن دارد، زیرا:

$$(A \subset B\ ,\ B \subset A) \Rightarrow A=B$$

به‌عنوان تمرین ثابت کنید، اگر D خط قطری $A\times A$ باشد (یعنی‌مجموعهٔ دوتاییهای مرتب $(a,a)\in A\times A$)، رابطهٔ R در مجموعهٔ A ویژگی ضد تقارن دارد، اگر و تنها اگر $(R\cap R^{-۱})\subset D$.

۶-۹: ویژگی تراگذری رابطه‌ها

تعریف ـ رابطهٔ R درمجموعهٔ A دارای ویژگی تراگذری (تعدی) است، هرگاه:

$$\forall a,b,c\in A:\ [(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R] \Rightarrow (a,c)\in R$$

مثال ۱: هرگاه A مجموعهٔ انسانهای روی زمین باشد، رابطهٔ R در A که با گزاره نمای «a دوست b است» تعریف شود، ویژگی تراگذری ندارد، زیرا ممکن است a دوست b و b دوست c باشد ولی a و c دوست نباشند.

مثال ۲: هرگاه رابطهٔ R درمجموعهٔ عددهای حقیقی با گزاره نمای «x کمتر از

y است» تعریف شود، دارای ویژگی تراگذری است، زیرا:

$$(x<y \wedge y<z) \Rightarrow (x<z)$$

مثال ۳: فرض می‌کنیم $W=\{a, b, c\}$ مجموعه‌ای باشد که رابطهٔ R در آن چنین است:

$$R=\{(a, b)\ ,\ (c, b)\ ,\ (b, a)\ ,\ (a, c)\}$$

رابطهٔ R تراگذر نیست، زیرا $(c, b)\in R$ و $(b, a)\in R$ ولی $(c, a)\notin R$.

مثال ۴: هرگاه R رابطه‌ای درخانوادهٔ مجموعه‌ها باشد که با گزاره نمای «x زیرمجموعهٔ y است» تعریف شود، رابطهٔ R دارای ویژگی تراگذری است، زیرا:

$$[(A\subset B)\wedge(B\subset C)] \Rightarrow (A\subset C)$$

۶ـ۱۰: رابطه‌های هم‌ارزی

تعریف ـ هر رابطهٔ R در مجموعهٔ A که دارای سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تراگذری باشد، رابطهٔ هم‌ارزی نام‌دارد. با نمادهای ریاضی می‌گوییم رابطهٔ R در مجموعهٔ A یك رابطه هم‌ارزی است، هرگاه:

الف- $\forall a\in A\ :\ (a, a)\in R$

ب - $\forall a\ ,\ b\in A : [(a, b)\in R] \Rightarrow [(b, a)\in R]$

ج - $\forall a, b, c\in A : [(a, b)\in R\ \wedge(b, c)\in R]\Rightarrow(a, c)\in R$

مثال ۱: هرگاه A مجموعهٔ مثلثها در هندسهٔ اقلیدسی باشد، رابطهٔ R درآن، که با گزاره نمای «x متشابه y است» تعریف می‌شود، یك رابطهٔ هم‌ارزی است، زیرا دارای هرسه ویژگی بازتابی وتقارنی و تراگذری است.

مثال ۲: مهمترین مثال برای رابطهٔ هم‌ارزی رابطهٔ تساوی است، زیرا برای هرعضو از هرمجموعه داریم:

الف- $a=a$

ب - $(a=b) \Rightarrow (b=a)$

ج - $[(a=b)\wedge(b=c)] \Rightarrow (a=c)$

۶-۱۱: دسته‌های هم‌ارزی

هرگاه R يك رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ A باشد، طبق تعريف دستهٔ هم ارزی هر عضو مانند $a \in A$ که با $[a]$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ عضوهایی‌در A است که درسازماندهی R با a ارتباط پیدا می‌کنند. یعنی:

$$[a]=\{x|(a, x) \in R\}$$

مثال ۱: درمجموعهٔ Z، رابطهٔ $R=\{(a, x)|$ بر ۵ بخشپذیر است $a-x\}$، يك رابطهٔ هم‌ارزی است. دراین رابطه، دستهٔ هم‌ارزی ۲ که آن را با $E_۲$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$E_۲=[۲]=\{\dots, -۸, -۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \dots\}$$

زیرا، $(۲, -۸)$، $(۲, -۳)$، $(۲, ۲)$، $(۲, ۷)$، $(۲, ۱۲)$، $(۲, ۱۷)$ و... درگزاره‌نمای «$a-x$ بر ۵ بخشپذیراست» صدق می‌کنند.

دسته‌های هم‌ارزی دیگر R دراین مثال عبارتند از:

$$E_۰=[۰]=\{\dots, -۱۰, -۵, ۰, ۵, ۱۰, \dots\}$$

$$E_۱=[۱]=\{\dots, -۹, -۴, ۱, ۶, ۱۱, \dots\}$$

$$E_۳=[۳]=\{\dots, -۷, -۲, ۳, ۸, ۱۳, \dots\}$$

$$E_۴=[۴]=\{\dots, -۶, -۱, ۴, ۹, ۱۴, \dots\}$$

توجه کنید که هرعدد صحیح $x \in Z$ به‌شکل $x=۵q+r$ نشان‌داده می‌شود، که در آن $۰ \leqslant r < ۵$ است. بادقت دوباره خواهید دید که این‌دسته‌های هم‌ارزی‌اولاً مجموعه‌های جدا ازهمند، ثانیاً $\forall x \in Z$ دریکی ازاین‌کلاسها عضویت دارد، ثالثاً:

$$Z=E_۰ \dot{\cup} E_۱ \cup E_۲ \cup E_۳ \cup E_۴$$

طبق تعریف می‌گوییم، بااین عمل مجموعهٔ Z را به‌پیمانهٔ (سنج) ۵ به‌دسته‌های همنهشت افرازکرده‌ایم. این دسته‌ها، که درعین‌حال هم‌ارزند، به‌ترتیب دستهٔ همنهشت با صفر، يك، دو، سه، وچهار نامیده می‌شوند ومی‌توان چنین نوشت:

$$Z=\{[۰], [۱], [۲], [۳], [۴]\}$$

مثال ۲: درمجموعهٔ Z، $R=\{(a, x)|$ باقیماندهٔ تقسیم a و x بر ۳ برابر است$\}$ يك رابطهٔ هم‌ارزی است که سه‌دستهٔ هم‌ارزی به‌صورت زیر پدید می‌آورد:

$$[\text{۰}]=\{\dots, -\text{۶}, -\text{۳}, \text{۰}, \text{۳}, \text{۶}, \text{۹}, \dots\}$$

$$[\text{۱}]=\{\dots, -\text{۵}, -\text{۲}, \text{۱}, \text{۴}, \text{۷}, \text{۱۰}, \dots\}$$

$$[\text{۲}]=\{\dots, -\text{۴}, -\text{۱}, \text{۲}, \text{۵}, \text{۸}, \text{۱۱}, \dots\}$$

مثال ۳: درمجموعهٔ عددهای گویا (به آرایهٔ ژرژکانتور درفصل اول مراجعه کنید) رابطهٔ «برابراست بـا» بینهایت دسته‌های هم‌ارزی پدید می‌آورد. یکی ازایـن دسته‌های هم‌ارزی {... ,۴/۸ ,۳/۶ ,۲/۴ ,۱/۲} است که هریك از عضوهایش به‌دستهٔ هم‌ارزی $n/\text{۲}n$ $(n\neq\text{۰})$ تعلق دارد. اگر این کسرها را به‌شکل دوتاییهای مرتب (۲،۱)، (۴،۲)، (۶،۳)، (۸،۴)، ... درآوریم، دردستگاه مختصات، نمودار هندسی هردوتایی مرتب یك نقطه است. این نقطه‌ها روی خطی قراردارندکـه ازمبدأ مختصات می‌گذرد. اگر همگی دسته‌های هم‌ارزی مورد بحث را درنظر بگیریم، نقاط نظیر هـردسته برروی خطی قرار دارندکه ازمبدأ مختصات می‌گذرد. یا به‌گفتهٔ بهتر، همهٔ آنها نقاطی ازصفحه راکـه طول وعرض آنها عددهای درستند، پدید می‌آورند.

قضیه: اگر R یك رابطهٔ هم‌ارزی‌درمجموعهٔ A باشد و $[a]$ دستهٔ هم‌ارزی $a\in A$ باشد، آنگاه:

الف - برای هرعضو a متعلق به A، $a\in[a]$.

ب - $[a]=[b]$، اگروتنها اگر $(a, b)\in R$.

ج - اگر $[a]\neq[b]$ آنگاه $[a]$, $[b]$ دومجموعهٔ جدا ازهمند.

اثبات:

الف- چون رابطهٔ R ویژگی بازتابی دارد، پس برای هر $a\in A$ داریم:

$$(a, a)\in R$$

درنتیجه $a\in[a]$.

ب- فرض می‌کنیم $(a, b)\in R$. می‌خواهیم ثابت کنیم $[a]=[b]$. اگر $x\in[b]$ آنگـاه $(b, x)\in R$. ولی به‌فـرض $(a, b)\in R$، بنابه‌ویژگی تراگذری $(a, x)\in R$. بنابراین، $x\in[a]$ یعنی $[b]\subset[a]$. برای اثبات $[a]\subset[b]$، می‌گوییم $(a, b)\in R$ طبق ویژگی‌تقارن‌مستلزم $(b, a)\in R$ است. پس بااستدلالی مشابه‌نتیجه می‌گیریم $[a]\subset[b]$. چون $[a]\subset[b]$ و $[b]\subset[a]$ است، طبق تعریف برابری دومجموعه:

$$[a]=[b]$$

ازسوی دیگـر، اگر $[b]=[a]$ باشد، بنابرویژگی بازتابی $b\in[b]=[a]$ یعنی $(a, b)\in R$.

ج- برای اثبات این قسمت ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر $[a]\bigcap[b]\neq\phi$، عضـوی مانند $x\in A$ وجـود خـواهد داشت کـه $x\in[a]\bigcap[b]$. پس، $(a, x)\in R$ و $(b, x)\in R$. بنابرویژگی تقارن $(x, b)\in R$ وطبق ویژگی تراگذری:

$$[(a, x)\in R \wedge (x, b)\in R] \Rightarrow (a, b)\in R$$

درنتیجه، با درنظر گرفتن حالت «الف» $[b]=[a]$، که مخالف فرض است.

۶-۱۲: خارج‌قسمت یك مجموعه بریك رابطهٔ هم‌ارزی

خارج‌قسمت یك مجموعهٔ A بریـك رابطهٔ هم‌ارزی R کـه آن را با نماد «A/R» نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌شود:

$$A/R=\{[a]|a\in A\}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۹: مجموعهٔ $N\times N$ یعنی‌مجموعه زوجهای مرتب عددهای صحیح ومثبت را درنظر می‌گیریم. رابطهٔ «$\simeq$» دراین مجموعه را چنین تعریف می‌کنیم: $(a, b)\simeq(c, d)$ اگر وتنها اگر $ad=bc$.

ثابت‌کنید این رابطه دراین مجموعه، رابطهٔ هم‌ارزی است.

حل: چون برای هر $(a, b)\in N\times N$، $(a, b)\simeq(a, b)$ زیـرا $ab=ab$ پس، رابطهٔ $\simeq$ ویژگی بازتابی دارد.

برای اثبات ویژگی تقارن، فرض می‌کنیم $(a, b)\simeq(c, d)$ باشد. پس $ad=bc$ درنتیجه $(c, d)\simeq(a, b)$ است.

برای‌اثبات‌ویژگی تراگذری، فرض‌می‌کنیم $(a, b)\simeq(c, d)$ و $(c,d)\simeq(e, f)$ پس، $ad=bc$ و $cf=de$. ازضرب آنها دریکدیگر:

$$(ad)(cf)=(bc)(de)$$

پس ازاختصار:

$$af=be$$

واین برابری نشان می‌دهد کـه $(a, b)\simeq(e, f)$. چون این رابطه ویـژگیهای بازتابی،تقارن، و تراگذری دارد، پس رابطهٔ هم‌ارزی است.

درحقیقت، این رابطه تعریف کلی بـرای برابری دوکسر است. یعنی $a/b=c/d$ درست است اگروتنها اگر $ad=bc$ باشد.

۶-۱۳: رابطه‌های ترتیب

تعریف- رابطهٔ R درمجموعهٔ A را یك «ابطهٔترتیب گویند، هرگاه‌دارای‌ویژگی بازتابی، ضد تقارن وترا گذری باشد. به‌زبان ریاضی، رابطهٔ R در مجموعهٔ A یك رابطهٔ ترتیب است، هرگاه داشته باشیم:

الف- $\forall a\in A:(a,a)\in R$

ب - $\forall a,b\in A:[(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R]\Rightarrow a=b$

ج - $\forall a,b,c\in A:[(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R]\Rightarrow(a,c)\in R$

مثال: درمجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ رابطهٔ R چنین تعریف شده است:

$$R=\{(۲,۴),(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}$$

R رابطهٔ ترتیب است، زیرا اولاً هر عضو A با خودش در رابطه است (بازتابی)، ثانیاً درترکیب شرطی زیر:

$$[(۲,۴)\in R\wedge(۴,۲)\in R]\Rightarrow ۲=۴$$

سمت‌چپ یا مقدم شرط نادرست است پس، ترکیب شرطی درست است (ضد تقارن). ثـالثاً، $[(۲,۴)\in R\wedge(۴,۴)\in R]\Rightarrow(۲,۴)\in R$ نشان می‌دهد کـه ویژگی تراگذری دراین رابطه وجود دارد. پس این رابطه، یك رابطهٔ ترتیب است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۰: درچه‌صورت رابطـهٔ R درمجموعهٔ A ویژگی بازتابی ندارد؟
حل: هنگامی که دست‌کم یك عضو $a\in A$ یافت شودکه $(a,a)\notin R$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱: درچه صورت رابطهٔ R درمجموعهٔ A ویژگی تقارن ندارد؟
حل: هنگامی کـه دوعضو a و b در A یافتِ شوند کـه یکی از دو دوتایی مرتب (a,b) یا (b,a) به R تعلق نداشته و دیگری تعلق داشته باشد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۲: آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هررابطه‌ای درآن متقارن‌باشد؟
حل: آری. مجموعهٔ تهی وهمچنین هرمجموعهٔ یك عضوی این ویژگی‌را دارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۳: هرگاه R و R' دو رابطهٔ متقارن در مجموعهٔ A باشند، ثابت کنید رابطهٔ $R\bigcap R'$ درمجموعهٔ A متقارن است.

حل: نخست یادآور می‌شویم که R و R' هردو، زیرمجموعهٔ $A\times A$ هستند. پس، $R\bigcap R'$ نیز زیرمجموعهٔ $A\times A$ است. سپس فرض می کنیم $(a, b)\in R\bigcap R'$ باشد، در نتیجه $(a, b)\in R$ و $(a, b)\in R'$. چون R و R' هردو متقارن‌هستند. پس، $(b, a)\in R$ و $(b, a)\in R'$. درنتیجه $(b, a)\in R\bigcap R'$. پس:

$$(a, b)\in(R\bigcap R') \Rightarrow (b, a)\in(R\bigcap R')$$

یعنی، $R\bigcap R'$ ویژگی تقارن دارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۴: درمجموعهٔ A رابطه‌ای بیابید که هم‌متقارن وهم‌ضدمتقارن باشد.

حل: هرزیرمجموعه‌ای از خط قطری $A\times A$، رابطه‌ای در A است که هم متقارن است وهم ضد متقارن.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۵: در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ رابطه‌ای بیابید که نه‌متقارن باشد و نه‌ضد متقارن.

حل: رابطهٔ $R=\{(۱,۲)\ ,\ (۲,۱),(۲,۳)\}$ ویژگی‌تقارن‌ندارد زیرا $(۲,۳)\in R$ ولی $(۳,۲)\notin R$. همچنین R ضد متقارن نیست زیرا $(۱,۲)\in R$, $(۲,۱)\in R$ ولی $۱\neq۲$ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۶: ثابت کنید در مجموعهٔ عددهای طبیعی، رابطهٔ R با گزاره‌نمای «$x+۲y=۱۰$» ضد متقارن است.

حل: مجموعهٔ جواب عبارت است از: $R=\{(۲,۴)\ ,\ (۴,۳),\ (۶,۲),\ (۸,۱)\}$. $R\bigcap R^{-۱}=\phi$ و ϕ زیرمجموعه‌ای از خط‌قطری $N\times N$ است، پس R ضدمتقارن است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۷: ثابت کنید اگر R رابطهٔ تراگذری باشد، وارون آن، یعنی $R^{-۱}$، نیز تراگذر خواهد بود.

حل: فرض می‌کنیم $(a, b)\in R^{-۱}$, $(b, c)\in R^{-۱}$ باشد. برای اینکه ثابت کنیم $R^{-۱}$ تراگذر است، باید ثابت کنیم $(a, c)\in R^{-۱}$. می‌دانیم:

$$(a, b)\in R^{-۱} \Rightarrow (b, a)\in R\ \ ,\ \ (b, c)\in R^{-۱} \Rightarrow (c, b)\in R$$

درضمن R رابطه‌ای تراگذر است، پس:

$$[(c,b)\in R \wedge (b,a)\in R] \Rightarrow (c,a)\in R$$

$$(c,a)\in R \Rightarrow (a,c)\in R^{-1}$$

بنابراین R^{-1} ویژگی تراگذری دارد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸: هرگاه در یك مجموعه، دو رابطهٔ R و S دارای ویژگی تراگذری باشند، ثابت کنید:

الف- $R\bigcap S$ ویژگی تراگذری دارد.

ب - $R\bigcup S$ ویژگی تراگذری ندارد.

حل: الف- باید ثابت کنیم:

$$[(a,b)\in (R\bigcap S)\wedge (b,c)\in (R\bigcap S)] \Rightarrow (a,c)\in (R\bigcap S)$$

$$[(a,b)\in (R\bigcap S)] \Rightarrow \begin{cases}(a,b)\in R & (۱)\\ (a,b)\in S & (۲)\end{cases}$$

$$[(b,c)\in (R\bigcap S)] \Rightarrow \begin{cases}(b,c)\in R & (۳)\\ (b,c)\in S & (۴)\end{cases}$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $(a,c)\in R$ و از (۲) و (۴) نتیجه می‌شود $(a,c)\in S$.
پس، $(a,c)\in (R\bigcap S)$. (توجه کنید که R و همچنین S ویژگی تراگذری دارند.)

ب- فرض می‌کنیم:

$$R=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$$

$$S=\{(b,d),(d,e),(b,e)\}$$

بنابراین:

$$R\bigcup S=\{(a,b),(b,c),(a,c),(b,d),(d,e),(b,e)\}$$

به‌سادگی می‌توان دید که $R\bigcup S$ ویژگی تراگذری ندارد، زیرا:

$$[(b,d)\in (R\bigcup S)] \quad , \quad [(a,b)\in (R\bigcup S)]$$

ولی $(a,d)\notin (R\bigcup S)$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۹: در مجموعهٔ Z رابطهٔ R با گزاره نمای «$a+b=۲k$» برای

a و b و k متعلق به‌مجموعهٔ Z تعریف شده است. ثابت کنید R یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

حل: الف- (ویژگی بازتابی) $\forall a \in Z : a+a=۲a=۲k$

ب - (ویژگی تقارن) $\forall (a, b) \in R : a+b=۲k \Rightarrow b+a=۲k$

ج - (ویژگی تراگذری) $\forall (a, b) \in R : (b, c) \in R$

$$(a+b=۲k)\wedge(b+c=۲k') \Rightarrow a+۲b+c=۲(k+k')$$

با درنظر گرفتن اینکه $۲b$ زوج است، پس، $a+c=۲k''$. یعنی $(a, c) \in R$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۰: درمجموعهٔ عددهای طبیعی رابطهٔ aRb چنین تعریف‌می‌شود که a و b دست‌کم یك شمارندهٔ غیراز یك دارند. آیا R رابطهٔ هم‌ارزی است؟

حل: نه، زیرا (۱۸ , ۲۱) دارای یك شمارندهٔ مشترك (۳) و (۲۲ , ۱۸) نیز دارای یك شمارندهٔ مشترك (۲) ولی (۲۲ , ۲۱) شمارندهٔ مشترکی غیراز ۱ ندارند.

$$(۲۱R۱۸)\wedge(۱۸R۲۲) \not\Rightarrow (۲۱R۲۲)$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۱: اگر در مجموعهٔ A رابطه‌های R و S دارای ویژگی‌ضدتقارن باشند، ثابت کنید که $R\bigcap S$ نیزضد متقارن است.

حل: باید ثابت کرد: $[(x, y) \in R\bigcap S]\wedge[(y, x) \in (R\bigcap S)] \Rightarrow x=y$

$$[(x, y) \in (R\bigcap S)] \Rightarrow \begin{cases}(x, y) \in R & (۱)\\ (x, y) \in S & (۲)\end{cases}$$

$$[(y, x) \in (R\bigcap S)] \Rightarrow \begin{cases}(y, x) \in R & (۳)\\ (y, x) \in S & (۴)\end{cases}$$

ولی، می‌دانیم که R و S رابطه‌های ضد متقارن هستند ، پس از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $x=y$ وهمچنین‌از (۲) و (۴) نیز نتیجه می‌شود $x=y$ است. درنتیجه:

$$[(x, y) \in (R\bigcap S)]\wedge[(y, x) \in (R\bigcap S)] \Rightarrow x=y$$

تمرین ۶

● رابطه‌های زیر را درمجموعه‌های داده شده مورد بررسی قراردهید ودرهرحالت تعیین کنید که رابطهٔ موردنظر بازتابی، متقارن یا تراگذر است. (بازتابی را با R وتقارن را با S وتراگذری را با T نشان دهید.)

۱ . «x کوچکتر از y است»، درمجموعهٔ تخم‌مرغها درمؤسسهٔ بسته‌بندی.
۲ . «x برابر y است»، درمجموعهٔ عددهای گویا.
۳ . «x دوواحد با y اختلاف دارد»، درمجموعهٔ عددهای صحیح.
۴ . «x برابر y است»، درمجموعهٔ مثلثها.
۵ . «x متشابه y است»، درمجموعهٔ مثلثها.
۶ . «پدر x همان پدر y است»، درمجموعهٔ انسانها.
۷ . «x، y را دوست دارد»، درمجموعهٔ دانش‌آموزان یك کلاس معین.
۸ . «x موازی y است»، درمجموعهٔ پاره‌خطهای مستقیم یك صفحه.
۹ . «x با y موازی وازلحاظ طول برابرآن است»، درمجموعهٔ پاره‌خطهای مستقیم یك صفحه.
۱۰. «x بر y عمود است»، درمجموعهٔ خطهای مستقیم یك‌صفحه.
۱۱. «x بر y عمود است»، درمجموعهٔ خطهای مستقیم فضایی.
۱۲. «x خواهر y است»، درمجموعهٔ عده‌ای از بچه‌ها.
۱۳. «x خواهر y است»، درمجموعهٔ دختران مشخص.
۱۴. «مساحت x برابرمساحت y است»، درمجموعهٔ شکلهای مسطح.
۱۵. «x و y در تقسیم بر ۳ همباقیمانده‌اند»، درمجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی.
۱۶. «عدهٔ عضوهای x با y برابراست»، درمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها.
۱۷. «x با y متقابل است»، درمجموعهٔ عددهای حقیقی، به‌استثنای صفر.
۱۸. «x توان دوم y است»، درمجموعهٔ عددهای حقیقی.
۱۹. «x درهمسایگی y زندگی می‌کند»، درمجموعهٔ ساکنان یك خیابان.
۲۰. «x با y همکلاس است»، درمجموعهٔ دانش‌آموزان یك مدرسه.
۲۱. «x ، y را قطع می‌کند»، در مجموعهٔ خطهای مستقیم یك صفحه.
۲۲. «x هم معنی y است»، درمجموعهٔ واژه‌های یك‌زبان.
۲۳. $R=\{(x, y)|x, y\in R , y=x\}$.
۲۴. $R=\{(x, y)|x-y=2n\}$ که در آن x و y عددهای درست ومثبت و n نیزعددی درست است.
۲۵. «تعداد عوامل اول x و y برابراست»، درمجموعهٔ عددهای طبیعی.
۲۶. نشان دهیدکه وارون‌هررابطهٔ متقارن،خودآن رابطه‌است.مثالی دراین موردبیاورید.
۲۷. آیا رابطهٔ $x+y=10$ درمجموعهٔ عددهای طبیعی بازتابی است؟
۲۸. درمجموعهٔ عددهای صحیح نسبی رابطه‌ای به‌صورت زیرتعریف شده است:

$$\{(x, y) | x-y=2k \ , \ k\in Z\}$$

ثابت کنید که این رابطه یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

۲۹. هرگاه دریك مجموعه دورابطهٔ R و S دارای ویژگی بازتابی باشند، ثابت کنید که هم $R\bigcup S$ وهم $S\bigcap R$ ویژگی بازتابی خواهند داشت.

۳۰. مجموعهٔ $A=\{a, b, c\}$ داده شده است. رابطه‌ای در A بنویسید که الف) متقارن باشد، ولی تراگذر نباشد؛ ب) تراگذر باشد، ولی ویژگی تقارن نداشته باشد؛ ج) ویژگی بازتابی داشته باشد؛ د) ویژگی بازتابی و تقارن داشته باشد، ولی تراگذر نباشد.

۳۱. درمجموعهٔ $A=\{0,1,2,3\}$ رابطهٔ R چنین تعریف شده است:

$$R=\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,2), (0,2), (2,0)\}$$

آیا R رابطهٔ ترتیب است؟

۳۲. رابطهٔ R در مجموعهٔ Z باگزاره نمای «x شمارندهٔ y است» تعریف شده است.آیا R یك‌رابطهٔ ترتیب است؟

۳۳. رابطهٔ R در مجموعهٔ نقاط یك صفحه باگزاره نمای «$x_1+y_1=x_2+y_2$» برای هردونقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) متعلق به‌صفحه تعریف شده است. ثابت کنید که R یك‌رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳۴. درمجموعهٔ $(Z-\{0\})\times(Z-\{0\})$ رابطهٔ R باگزاره نمای زیرتعریف‌شده‌است:

$$[(a, b)R(c, d)] \iff ad=bc$$

ثابت کنید که R یك‌رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳۵. درمجموعهٔ $N\times N$ رابطهٔ R باگزاره نمای زیرتعریف شده است:

$$[(a, b)R(c, d)] \iff a+d=b+c$$

ثابت کنید که R یك‌رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳۶. درمجموعهٔ Z رابطهٔ R باگزاره نمای زیرتعریف شده است:

$$(aRb) \iff |a-b|<5$$

ثابت کنید که R رابطهٔ هم‌ارزی نیست. (راهنمایی: یك مثال نقض بیاورید که ثابت کنید R ویژگی تراگذری ندارد.)

۳۷. تعیین کنید که کدام‌یك ازرابطه‌های «الف» تا «ی» رابطهٔ هم‌ارزی است:

الف ـ ... همخانه است با ...

ب ـ ... به‌همان بلندی است که ...

ج ـ ... کوچکتر است از...

د ـ ... برابراست با ...

هـ ـ ... تقریباً برابراست با ...

و ـ ... همنهشت است با ...

ز ـ ... متشابه است با ...

ح ـ ... دوست است با ...

ط ـ ... دارای یك پدر است با ...

ی ـ ... موازی است با ...

۳۸. تعیین کنیدکه‌کدام رابطه از رابطه‌های ۱ تا با ۲۵ رابطهٔ هم‌ارزی هستند.

● فرض می‌کنیم رابطه‌های R و S در مجموعهٔ A تعریف شده باشند. تعیین کنید که‌کدام‌یك ازگزاره‌های زیردرست وکدام‌یك نادرست است.

۳۹. اگررابطهٔ R متقارن باشد، R^{-1} نیزمتقارن است.

۴۰. اگررابطهٔ R ضدمتقارن باشد، R^{-1} نیزضدمتقارن است.

۴۱. اگر R ویژگی بازتابی داشته باشد، آنگاه $R\bigcap R^{-1}\neq\phi$.

۴۲. اگر R متقارن باشد، آنگاه $R\bigcap R^{-1}\neq\phi$.

۴۳. اگر R و S تراگذر باشند، $R\bigcup S$ نیز تراگذر است.

۴۴. اگر R و S تراگذر باشند، $R\bigcap S$ نیز تراگذر است.

۴۵. اگر R و S ضدمتقارن باشند، $R\bigcup S$ نیز ضدمتقارن است.

۴۶. اگر R و S ضدمتقارن باشند، $R\bigcap S$ نیزضدمتقارن است.

۴۷. اگر R و S بازتاب باشند، $R\bigcup S$ نیز بازتاب است.

۴۸. اگر R و S بازتاب باشند، $R\bigcap S$ نیزبازتاب است.

۷

تابع

دراین فصل تابع فقط ازدیدگاه مجموعه‌ها بررسی می‌شود، نه آنالیز ریاضی.

۷-۱: تعریف تابع

فرض می‌کنیم A و B دومجموعه باشند. رابطه‌ای از A در B را یک تابع از A در B (به B) می‌گویند هرگاه به همه یا برخی ازعضوهای مجموعهٔ A، عضو منحصر به‌فردی از مجموعهٔ B نسبت داده شود. اگر دراین رابطه به‌همهٔ عضوهای A عضومنحصر به‌فردی از B نسبت داده شود، تابع را نگاشت می‌نامند.

با بیان ریاضی، f یك تابع از A در B است، هرگاه استلزام زیردرست باشد:

$$[(a, b)\in f\land(a, b')\in f] \Rightarrow b=b'$$

با چنین شرطی می‌نویسیم: $f:A\rightarrow B$

ومی‌خوانیم: f تابعی است از A در B (به‌B).

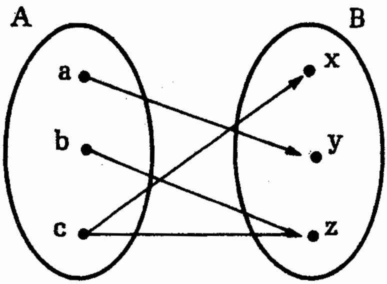
۷-۲: دامنه و برد تابع

اگر f تابعی از A در B باشد، مجموعهٔ عضوهای اول، یعنی $\{x|x\in A, (x, y)\in f\}$ را دامنهٔ تابع می‌نامند و با D_f نشان می‌دهند. همچنین مجموعهٔ عضوهای دوم، یعنی $\{y|y\in B \ , \ (x, y)\in f\}$ را برد تابع می‌نامند و با R_f نشان می‌دهند ومجموعهٔ B را حوزهٔ تابع f می‌گویند.

مثال ۱: هرگاه $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{x, y, z\}$ باشد، رابطهٔ:

$$f=\{(a, y) , (b, z) , (c, x) , (c, z)\}$$

تابع نیست، زیرا عضوهـای اول دوتاییهای مرتب (c,x) و (c,z) برابر است، ولـی عضوهای دوم آنها یکی نیست واین امربا تعریف تابع تناقض دارد. به‌نمودار زیر توجه کنید:



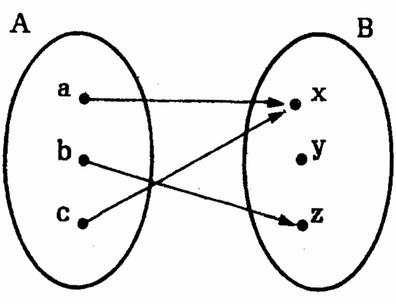
شکل ۲۸

می‌بینیم که از c دوپیکان خارج و به‌دو عضو متفاوت مجموعهٔ B منتهی شده است.

مثال ۲: هرگاه $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{x, y, z\}$ باشد، رابطهٔ:

$$f=\{(a, x) , (b, z) , (c, x)\}$$

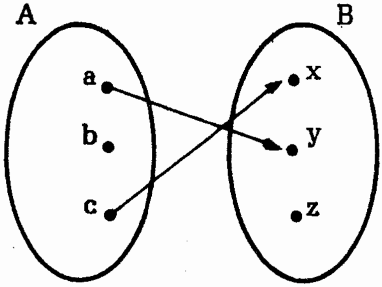
تابع است، زیرا هیچ دو دوتایی مرتبی وجود نداردکه عضوهای اول برابر و عضوهای دوم مخالف داشته باشند، به‌نمودار زیرتوجه کنید:



شکل ۲۹

می‌بینید که ازهیچ‌عضوی ازمجموعهٔ A دوپیکان‌خارج نشده‌است، واین‌شرط تابع بودن‌است. همچنین به‌عضو $y \in B$ هیچ پیکانی منتهی‌نشده‌است، با وجوداین، f تابع‌است. دراین‌مثال $R_f \neq B$.

تبصره: دربرخی ازکتابها، اگر ازیکی ازعضوهـای A پیکانی خارج نشود، مانند نمودار زیر:



شکل ۳۰

f را تابع نمی‌دانند. یعنی معتقدندکـه حتماً باید $D_f=A$ باشد. ما ایـن شرط را قبول نمی‌کنیم ومی‌گوییم همان‌طورکه ممکن است $R_f\neq B$ باشد، امکان دارد $D_f\neq A$ باشد. درواقع، همان‌طورکه قبلاً گفتیم، اگر $D_f=A$ باشد، تابع را نگاشت می‌نامیم. به‌همین ترتیب، اگر $R_f=B$ باشد، یعنی هرعضو B دست‌کم تصویر یکی از عضوهای A باشد، f را تابع از A روی B می‌نامیم، یا به‌اختصار می‌گوییم تابع f پوشا (برروی) است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۲: ثابت‌کنید رابطهٔ زیرتابع است:

$$f=\{(x,\ y)\in R\times R|y=۲x+۱\}$$

حل: طبق تعریف تابع:

$$[(a,b)\in f\wedge(a,b')\in f]\ \Rightarrow\ [(b=۲a+۱)\wedge(b'=۲a+۱)]$$

$$\Rightarrow\left[\left(a=\frac{b-۱}{۲}\right)\wedge\left(a=\frac{b'-۱}{۲}\right)\right]\Rightarrow\left[\frac{b-۱}{۲}=\frac{b'-۱}{۲}\right]\Rightarrow$$

$$[b-۱=b'-۱]\ \Rightarrow\ b=b'$$

پس، این رابطه تابع است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۳: آیا رابطهٔ زیرتابع است؟

$$f=\{(x,\ y)\in R\times R|x<y\}$$

حل: شرط تابع بودن یك رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$[(a,b)\in f \wedge (a,b')\in f] \Rightarrow [a<b \wedge a<b']$$

واضح است که نمی‌توان $b=b'$ را نتیجه گرفت. مثلاً اگر ۵>۲ و ۷>۲ باشد، نتیجه ۷ = ۵ نیست. پس، رابطهٔ f تابع نیست.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۴: آیا رابطهٔ زیر تابع است؟

$$f=\{(x,y)\in R\times R \mid x^{۲}=۲y+۴\}$$

حل: شرط تابع بودن یك رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$[(a,b)\in f \wedge (a,b')\in f] \Rightarrow$$

$$[(a^{۲}=۲b+۴)\wedge(a^{۲}=۲b'+۴)] \Rightarrow [۲b+۴=۲b'+۴]$$

$$\Rightarrow b=b'$$

پس، رابطهٔ بالا تابع است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵: آیا رابطهٔ زیر تابع است؟

$$f=\{(x,y)\in R\times R \mid y^{۲}=۲x+۴\}$$

حل: شرط تابع بودن یك رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$[(a,b)\in f \wedge (a,b')\in f] \Rightarrow [(b^{۲}=۲a+۴)\wedge(b'^{۲}=۲a+۴)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{۲}=b'^{۲} \not\Rightarrow b=b'$$

پس، این رابطه روی عددهای حقیقی تابع نیست. مثلاً:

$$\left[\left(\frac{۵}{۲},۳\right)\in f \wedge \left(\frac{۵}{۲},-۳\right)\in f\right] \not\Rightarrow ۳=-۳$$

قرارداد: اگر f تابعی از A در B باشد و $(x,y)\in f$، در این صورت y را مقدار (ارزش) تابع f به‌ازای x می‌نامند وچنین نمایش می‌دهند:

$$y=f(x)$$

y را تصویر x نیز می‌نامند.

توجه کنید که تابع f را، که ازمجموعهٔ دوتاییهای مرتب تشکیل شده است، بامقدار آن به‌ازای x، یعنی با $f(x)$، اشتباه نکنید.

قرارداد: اگر تابع $f:A\to B$ به‌هرعضو ازمجموعهٔ $X\subset A$ عضو منحصر به‌فردی

ازمجموعهٔ $Y \subset B$ نسبت دهد، به‌طوری‌که همهٔ عضوهای Y به‌وسیلهٔ تابع f دررابطه‌قرار گیرند، می‌نویسیم:

$$Y = f(X)$$

مجموعهٔ Y را تصویرمجموعهٔ X می‌نامیم.

۷ـ۳: قانون تابع

اگر f تابعی از A در B باشد، ضابطه‌ای‌که به‌هرعضو از دامنهٔ f، یعنی D_f، یك‌وتنها یك عضو ازمجموعهٔ B را ربط دهد، قانون تابع نام دارد.

مثال ۱: تابع f از R در R به‌صورت زیرتعریف شده است:

$$f: R \rightarrow R \quad , \quad f(x) = x^{۲} + ۴$$

از ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} + ۴$ عضودوم دوتایی مرتب با افزودن چهارواحد به‌مجذور عضو اول به‌دست می‌آید. این ضابطه را قانون تابع می‌نامند.

مثال ۲: تابع f از R در R به‌صورت زیرتعریف شده است:

$$f: R \rightarrow R, \ f(x) = \begin{cases} x^{۲}: & \text{اگر } x > ۰ \\ ۵: & \text{اگر } x = ۰ \\ ۲x: & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$

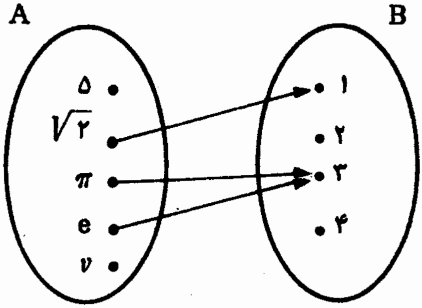
دراین مثال، ضابطهٔ تابع با ۳ گزاره نما معین شده است.

گاهی برای تابع ضابطه یا قانونی به صورت رابطه‌های جبری وجود ندارد. در این حالت با تشکیل جدول، یـا با رسم نمودار ضابطه را مشخص می‌کنیم. مثلاً*، فرض می‌کنیم‌که $A = \{۵, \sqrt{۲}, \pi, e, v\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد و نمودار شکل ۳۱ تابع f از A به B را مشخص کند. واضح است‌که این تابع پوشا نیست.

قرارداد: اگرتابع f از A در B باگزاره نمای $y = f(x)$ تعریف شده باشد، f را به‌صورت زیرنمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ x \rightarrow f(x) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

ومی‌خوانیم: «تابع f از A در B به‌صورت $y = f(x)$ تعریف شده‌است.». اگر $A = B$



شکل ۳۱

باشد، می‌نویسیم:

$$f: A \to A$$

$$y = f(x)$$

ومی‌خوانیم: «تابع f روی مجموعهٔ A به‌صورت $y = f(x)$ تعریف شده است.» x، یعنی عضواول را متغیر مستقل و y، یعنی عضودوم را متغیر تابع می‌نامند.

۷ـ۴: تابعهای حقیقی با متغیرهای حقیقی

در آنالیز ریاضی، عموماً با تابعهایی روبه‌رو هستیم که از R به R است و تنها به‌مشخص کردن قانون تابع قناعت می‌کنیم. این‌گونه تابعها را، تابعهای حقیقی با متغیر حقیقی می‌نامند.

مثال ۱: منظور ازتابع $y = f(x) = ۳x - ۲$ عبارت است از:

$$f: R \to R$$

$$y = ۳x - ۲$$

دراین مثال $$D_f = R_f = R$$

مثال ۲: منظور از تابع $y = f(x) = (x+۲)/(۳x-۱۲)$ چنین است:

$$f = \left\{\left(x, \frac{x+۲}{۳x-۱۲}\right) \middle| x \in R - \{۴\}\right\}$$

در ایـن مثال $D_f = R - \{۴\}$، زیرا به ازای $x = ۴$ کسر $(x+۲)/(۳x-۱۲)$ تعریف نمی‌شود. همچنین، $R_f = R - \{۱/۳\}$، زیرا عددی ازمجموعهٔ R برای x وجودنداردکه به‌ازای آن مقدار y برابر ۱/۳ شود. زیرا:

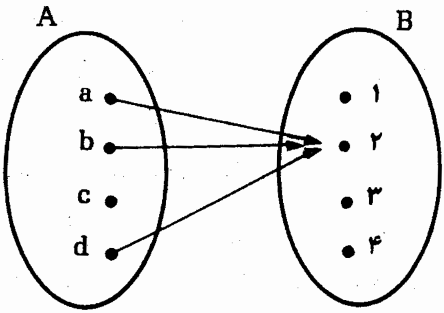
$$y = \frac{x+۲}{۳x-۱۲} \Rightarrow ۳xy - ۱۲y = x+۲ \Rightarrow x(۳y-۱) = ۱۲y+۲$$

$$x = \frac{۱۲y+۲}{۳y-۱}$$

حال مشاهده می‌کنیم‌که به‌ازای $y = ۱/۳$، x تعریف نمی‌شود.

۷ـ۵: تابع ثابت

تابع $f{:}A \to A$ را ثابت می‌گویند، هرگاه بردآن فقط یـك عضو داشته باشد. در زیر نمودار یك تابع ثابت نشان داده شده است:



شکل ۳۲

۷ـ۶: تابع یکسان

تابع $f{:}A \to A$ را یکسان می‌گویند، هرگاه قانون تابع $f(x) = x$ باشد.

۷ـ۷: تابعهای برابر

دوتابع f و g را برابر می‌گویند، هرگاه دامنهٔ آنها برابرباشد و به‌ازای هر $a \in D$ مقدار f و g برابر باشد.

مثال ۱: تابعهای $f_{1}(x)=x^{2}$ و $f_{2}(y)=y^{2}$ و $f_{3}(z)=z^{2}$ و f_{4}، که هرعدد را با مجذور آن عدد ارتباط دهد، همگی برابرند.

مثال ۲: تابعهای f و g و h چنین تعریف شده‌اند:

الف- $f(x)=x^{2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$

ب - $g(y)=y^{2} \quad (2\leqslant y\leqslant 8)$

ج - $h(z)=z^{2} \quad z\in R$

هیچیك ازاین تابعها برابر نیستند، زیرا دامنه‌های آنها یکی نیست.

۷-۸: تابع یك به یك

تعریف- تابع $f:A\rightarrow B$ را یك به یك می‌گویند، هرگاه به‌ازای هر $y\in R_{f}$ تنها یك $x\in D_{f}$ یافت شود که $y=f(x)$ باشد. یا با قراردادهای ریاضی تابع f را یك به‌یك می‌نامیم هرگاه استلزام زیردرست باشد:

$$\forall x,\ x'\in D_{f}\ :\ [f(x)=f(x')]\ \Rightarrow\ x=x'$$

مثال ۱: تابع f روی مجموعهٔ عددهای حقیقی به‌صورت $f(x)=3x+2$ تعریف شده است. این تابع یك به‌یك است. برای اثبات این ادعا کافی است که استلزام یك به‌یك بودن تابع را به‌کاربریم:

$$\forall x,\ x'\in R: [f(x)=f(x')]\ \Rightarrow\ [3x+2=3x'+2]\ \Rightarrow\ x=x'$$

پس، این تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۲: تابع $f(x)=x^{2}$ را در مجموعهٔ عددهای حقیقی درنظرمی‌گیریم و استلزام یك‌به‌یك بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\forall x,\ x'\in R\ :\ [f(x)=f(x')]\ \Rightarrow\ x^{2}=x'^{2}\ \not\Rightarrow\ x=x'$$

پس، این تابع یك به‌یك نیست. (توجه کنید که اگرزیرمجموعه‌ای از R را درنظربگیریم، ممکن است درآن فاصله یك به‌یك باشد.)

۷-۹: تابع قدرمطلق

تعریف- تابع زیررا درنظر می گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x>0 \\ 0 & \text{اگر } x=0 \\ -x & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

این تابع را، که با نماد $|x|$ نشان می‌دهند، تابع قدرمطلق می‌نامند. درحقیقت $\sqrt{x^2}=|x|$.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶: تابع f روی مجموعهٔ عددهای حقیقی به‌صورت $f(x)=x/(1+|x|)$ تعریف شده‌است. نخست برد این تابع‌را بیابید، سپس ثابت کنید که این تابع یك به‌یك است.

حل: واضح است که $D_f=R$.

اگر $x\geqslant 0$ باشد، $f(x)=x/(x+1)$ خواهد بود. با درنظر گرفتن جدول زیر

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow 1$

نتیجه می‌شود که $0\leqslant R_f<1$.

اگر $x\leqslant 0$ باشد، $f(x)=x/(1-x)$ می‌شود. با درنظر گرفتن جدول زیر

x	$-\infty$	0
$f(x)$	-1	$\nearrow 0$

نتیجه می‌شود که $-1<R_f\leqslant 0$. پس:

$$R_f=\{f(x)\,|\,f(x)\in R,\ -1<f(x)<1\}$$

اینك شرط یك به‌یك بودن تابع را با استلزام مربوط به‌آن بررسی می‌کنیم:

$$\forall x,x'\in R\ :\ [f(x)=f(x')]\ \Rightarrow\left[\frac{x}{1+|x|}=\frac{x'}{1+|x'|}\right]$$

ابتدا یادآور می‌شویم که اگر درتناسب $a/b=c/d$، d و b هم‌علامت باشند، آنگاه c و a نیز هم‌علامت خواهند بود.

دراینجا $1+|x|>0$ و $1+|x'|>0$ است، پس مخرج دوکسر هم‌علامتند. درنتیجه:

$$x,\ x'>0\ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x}=\frac{x'}{1+x'}\ \Rightarrow\ x+xx'=x'+x'x\ \Rightarrow\ x=x'$$

$$x, x' < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{x'}{1-x'} \Rightarrow x - xx' = x' - x'x \Rightarrow x = x'$$

۷ـ۱۰: تابع پوشا

تعریفـ تابع $f: A \to B$ را پوشا می‌نامند هرگاه هر عضو B دست‌کم تصویر یکی از عضوهای A باشد.

به‌زبان ریاضی تابع f پوشاست، اگر به ازای هر $y \in B$ دست‌کم یک $x \in D_f$ یافت شود، به‌طوری که $f(x) = y$.

مثال: تابع $f: R \to (-1, 0]$ با قانون:

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

تعریف شده است. برد این تابع، بازهٔ[17] $(-1, 0]$ است. برای اثبات پوشا بودن آن عضوی مانند y در بازهٔ $(-1, 0]$ درنظر می‌گیریم.

$$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1 - \frac{y}{1+y}} = \frac{y}{1+y-y} = y$$

پس، تابع پوشاست.

۷ـ۱۱: وارون تابع

تعریفـ هرگاه f درفاصلهٔ D تابعی یک‌به‌یک ازمجموعهٔ A درمجموعهٔ B باشد، با استفاده از شرط یک به‌یک بودن، ثابت می‌کنیم که رابطهٔ زیر نیز تابعی از B به A است:

$$h = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}$$

روش اثبات چنین است:

۱۷ـ فاصلهٔ نیم‌بستهٔ $(a, b]$ یعنی $\{x \mid a < x \leqslant b\}$

$$[(b, a) \in h, (b, a') \in h] \Rightarrow$$

$$[(a, b) \in f, (a', b) \in f] \Rightarrow$$

$$[b=f(a), b=f(a')] \Rightarrow [f(a)=f(a')] \Rightarrow a=a'$$

با این شرط h را وارون تابع f می‌نامند و با نماد f^{-1} نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$f^{-1}=h=\{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in f\}$$

مثال ۱: فرض می‌کنیم که تابع حقیقی f با ضابطهٔ $f(x)=2x+3$ تعریف‌شده باشد. چون $f(2)=7$، پس $f^{-1}(7)=2$. یعنی اگر f تابعی از A به B باشد و $b \in B$، آنگاه وارون b که با $f^{-1}(b)$ نشان داده می‌شود، عضوی است از A که تصویرش b از B باشد. به‌بیانی ساده‌تر، اگر $f: A \to B$ آنگاه:

$$f^{-1}(b)=\{x | x \in A, f(x)=b\}$$

توجه کنید که همیشه $f^{-1}(B)$ زیرمجموعهٔ A است. در بیان، f^{-1} به‌عنوان «وارون f» خوانده می‌شود.

مثال ۲: فرض می‌کنیم که تابع f درمجموعهٔ عددهای‌حقیقی باضابطهٔ $f(x)=x^2$ تعریف شده باشد ودامنهٔ آن $4 \leqslant x \leqslant 9$ باشد، در این حالت دامنهٔ تابع وارون آن $16 \leqslant x \leqslant 81$ خواهد بود.

از آنچه گفته شد نتیجه‌های زیر حاصل می‌شود $\left(f: A \underset{y=f(x)}{\longrightarrow} B\right)$:

الف- $R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$

ب - $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$

ج - $(f^{-1})^{-1}=f$

د - $f^{-1}(B)=\{x | x=f^{-1}(y), x \in A, y \in B\}$

ه - $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$

و - نمودار دو تابع وارون نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول وناحیهٔ سوم قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین، وارون یک تابع خطی نیز تابع خطی است.

نکته‌های قابل توجه:

الف- وارون تابعی که یك به‌یك نباشد، تعریف نشده است.

ب - برای یافتن ضابطهٔ $f^{-۱}$، یعنی وارون تابع f، روش این است که نخست x را در دستور $y=f(x)$، برحسب y تعیین می کنیم و به‌صورت $x=h(y)$ درمی آوریم. سپس جای x و y را در $x=h(y)$ عوض می کنیم و به‌صورت $y=h(x)$ می نویسیم. در این حالت خواهیم داشت:

$$f^{-۱}(x)=h(x)$$

مثال ۳: می‌خواهیم وارون تابع $f=\{(-۱,۱),(۰,۲۰),(۳,۵)\}$ را به‌دست آوریم. چون این تابع یك به‌یك است، پس وارون دارد. روش یافتن آن چنین است:

$$f^{-۱}=\{(۱,-۱),(۲,۰),(۵,۳)\}$$

مثال ۴: می‌خواهیم وارون تابع یك به‌یك $f(x)=۴x+۳$ را به‌دست آوریم. برای این کار براساس نکتهٔ (ب) عمل می کنیم. $y=۴x+۳$، حال x را برحسب y می یابیم: $x=(y-۳)/۴$. اینك جای x و y را عوض می کنیم: $y=(x-۳)/۴$. در نتیجه، $f^{-۱}(x)=(x-۳)/۴$. یعنی

$$f=\{(x,۴x+۳)|x\in R\} \text{ و } f^{-۱}=\left\{\left(x,\frac{x-۳}{۴}\right)|x\in R\right\}.$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۶: تابع f درمجموعهٔ عددهای حقیقی به‌صورت $f(x)=x/(۱+|x|)$ تعریف شده است. وارون این تابع را بیابید.

حل: در مسئلهٔ نمونهٔ ۳۵ ثابت کردیم که این تابع یك به‌یك است، پس وارون دارد و دیدیم که $D_f=R$ و $-۱<R_f<۱$.

اینك برای یافتن وارون آن، دو حالت زیر را بررسی می کنیم:

$$x>۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow x=\frac{y}{۱-y},\ ۰\leqslant y<۱$$

$$x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow x=\frac{y}{۱+y},\ -۱<y\leqslant ۰$$

این دو حالت را می‌توان با ضابطهٔ $x=y/(۱-|y|)$ نمایش داد. با جابه‌جایی x و y خواهیم داشت $y=x/(۱-|x|)$، یعنی:

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|},\ D_{f^{-1}}=R_f=\{x|-1<x<1\}\ ,\ R_{f^{-1}}=D_f=R$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۷: وارون تابع $f(x)=3x+|x|$ را بیابید.

حل: دامنهٔ این تابع R است. این تابع یك‌به‌یك و پوشاست. طبق روشی که‌درپیش گفتیم عمل می‌کنیم:

$$x>0 \Rightarrow f(x)=4x \Rightarrow y=4x \Rightarrow x=\frac{y}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4}$$

$$x<0 \Rightarrow f(x)=2x \Rightarrow y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$

درگذشته دیدیم کــه وارون یك تابع خطی نیز تابعی خطی است. بنابراین، تابع وارون را به‌شکل $f^{-1}(x)=ax+b|x|$ درنظر می‌گیریم.

$$x>0 \Rightarrow ax+bx=\frac{x}{4} \Rightarrow a+b=\frac{1}{4}$$

$$x<0 \Rightarrow ax-bx=\frac{x}{2} \Rightarrow a-b=\frac{1}{2}$$

ازحل این دستگاه دومعادله با دومجهول خواهیم داشت:

$$a=\frac{3}{8}\ ,\ b=-\frac{1}{8}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}|x|$$

توجه: اگر تابع $f:A\rightarrow B$ یك به‌یك نباشد، آنگاه ممکن است $f^{-1}(b)$ بیش از یك مقدار، یعنی یك مجموعه باشد، و دراین صورت f^{-1} دیگر یــك تابع نیست. گاه ممکن است این مجموعه ϕ باشد. همچنین اتفاق می‌افتد کــه تابعی یك به‌یك نیست ولی دامنهٔ آن را می‌توان به‌چندین زیردامنه تقسیم کرد که درهریك ازآن زیردامنه‌ها تابع یك به‌یك شود. دراین صورت، بــرای هــرزیر دامنه ضابطه‌ای جداگانه برای تابــع وارون می‌یابیم. مسئلهٔ نمونهٔ زیرروشنگر این نکته است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۸: وارون تابع $f(x)=x^4-2x^2$ را بیابید.

حل: تابع یك به‌یك نیست، زیرا به ازای $y=-۳/۴$، برای x چهارجواب خواهیم داشت که عبارتند از $x=\pm\sqrt{۳/۲}$ و $x=\pm\sqrt{۱/۲}$.

اگردامنهٔ این‌تابع را به‌چهار زیردامنهٔ $]-\infty\,,\,-۱]$، $[-۱\,,\,۰]$، $[۰\,,\,۱]$ و $[۰\,,\,+\infty[$ تقسیم‌کنیم، در هریك ازاین چهار زیردامنه، تابع یك‌به‌یك است ودرهرزیر دامنه تابع $y=x^۴-۲x^۲$ وارونی دارد. اگر طبق دستور یافتن تابع وارون عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$y=x^۴-۲x^۲ \Rightarrow x^۴-۲x^۲-y=۰ \Rightarrow x^۲=۱\pm\sqrt{۱+y}$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{۱\pm\sqrt{۱+y}} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\pm\sqrt{۱\pm\sqrt{۱+x}}$$

درزیردامنهٔ $[۰\,,\,۱]$، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}$ قابل‌قبول‌است.ضابطه‌های دیگر $f^{-۱}(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}$ و $f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}$ هستند.به‌عنوان‌تمرین، معین‌کنیدکدام ضابطه متعلق به‌کدام زیردامنه است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۳۹: تابع $f:R \underset{f(x)=x^۲}{\longrightarrow} R$ را درنظر می گیریم. مطلوب است محاسبهٔ:

الف- $f^{-۱}(۲۵)$، ب- $f^{-۱}(-۹)$، ج- $f^{-۱}(\{x|x\leqslant ۰\})$،

د - $f^{-۱}(\{x|۴\leqslant x\leqslant ۲۵\})$

حل:

الف- $f^{-۱}(۲۵)=\{۵\,,\,-۵\}$ است، زیرا $f(۵)=۲۵$ و $f(-۵)=۲۵$.

ب - $f^{-۱}(-۹)=\phi$ است، زیرا مجذور هیچ عدد حقیقی منفی نیست.

ج - $f^{-۱}(\{x|x\leqslant ۰\})=\{۰\}$ است، زیـرا $f(۰)=۰\leqslant ۰$ و مجذور عددهای دیگربزرگتر ازصفراست.

د - $f^{-۱}(\{x|۴\leqslant x\leqslant ۲۵\})=\{x|۲\leqslant x\leqslant ۵\}\bigcup\{x|-۵\leqslant x\leqslant -۲\}$

قضیه: هرگاه $f:X\rightarrow Y$، آنگاه برای هردو زیرمجموعهٔ A و B از مجموعهٔ X داریم:

الف- $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$

ب - $f(A\bigcap B)\subset[f(A)\bigcap f(B)]$

اثبات:

الف- نخست ثابت می کنیم که $f(A\bigcup B)\subset[f(A)\bigcup f(B)]$

فرض می‌کنیم که $y \in f(A \bigcup B)$، یعنی:

$$\exists\, x \in A \bigcup B : y = f(x)$$

ولی $x \in A \bigcup B$ نشان می‌دهد که $x \in A$ یا $x \in B$.

$$x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)$$

$$x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)$$

درهردوحال $y \in [f(A) \bigcup f(B)]$.

حال ثابت می‌کنیم که $[f(A) \bigcup f(B)] \subset f(A \bigcup B)$.

فرض می‌کنیم که $y \in [f(A) \bigcup f(B)]$، پس $y \in f(A)$ یا $y \in f(B)$.

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists\, x \in A : f(x) = y$$

$$y \in f(B) \Rightarrow \exists\, x \in B : f(x) = y$$

درهردوحالت $y = f(x)$ یعنی، $y \in f(A \bigcup B)$.

پس طبق تساوی مجموعه‌ها:

$$f(A \bigcup B) = [f(A) \bigcup f(B)]$$

اثبات ب نیز به‌همین صورت است که آن را برعهدهٔ علاقه‌مندان می‌گذاریم.

قضیه: هرگاه $f: X \rightarrow Y$، آنگاه برای هردو زیرمجموعهٔ A و B ازمجموعهٔ X داریم:

الف- $[f(A) - f(B)] \subset f(A - B)$

ب - $(A \subset B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

اثبات: الف- فرض می‌کنیم که $y \in [f(A) - f(B)]$، پس:

$$y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$$

$$\Rightarrow [\exists\, x \in A : y = f(x)] \wedge [\nexists\, x \in B : y = f(x)]$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in A \wedge x \notin B : y = f(x)$$

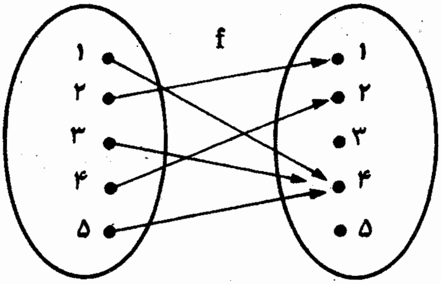
$$\Rightarrow \exists\, x \in (A - B) : y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A - B)$$

$$\Rightarrow [f(A) - f(B)] \subset f(A - B)$$

اثبات ب را برعهدهٔ علاقه‌مندان می‌گذاریم.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۰: فرض می‌کنیم که $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f:A \to A$ با نمودار زیر تعریف شود:



شکل ۳۳

مطلوب است محاسبهٔ:

الف- $f(\{۱,\ ۳,\ ۵\})$، ب- $f^{-۱}(\{۲,\ ۳,\ ۴\})$، ج- $f^{-۱}(\{۳,\ ۵\})$

حل:

الف- $f(\{۱,\ ۳,\ ۵\})=\{f(۱),\ f(۳),\ f(۵)\}=\{۴\}$

ب - $f^{-۱}(\{۲,\ ۳,\ ۴\})=\{۴,\ ۱,\ ۳,\ ۵\}$

ج - $f^{-۱}(\{۳,\ ۵\})=\phi$

زیرا عضوی در A یافت نمی‌شود که تصویرش ۳ یا ۵ باشد. توجه‌کنید که f تابعی یك‌به‌یك نیست و بنابراین وارون ندارد. درواقع وارون آن تابع نیست. این موضوع در بخش ب واضح است، چون $f^{-۱}(۴)=\{۱,\ ۳,\ ۵\}$. درواقع اگر نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنیم، از ۴ سه‌پیکان خارج می‌شود و این نشان می‌دهد که $f^{-۱}$ تابع نیست.

۷-۱۲: ساختن تابعهای جدید با استفاده از تابعهای داده شده

تعریف- اگر f و g دو تابع باشند که D_f و D_g به‌ترتیب دامنه‌های آنها باشند و داشته باشیم $D=D_f \bigcap D_g$، طبق تعریف می‌توان به‌یاری آنها ۶ تابع جدید به‌شرح زیر ساخت:

۱. (c مقداری است ثابت) $(cf)(x)=c\cdot f(x)$

۲. $(\forall x \in D_f \ , \ f(x)\neq ۰)$ $\left(\frac{۱}{f}\right)(x)=\frac{۱}{f(x)}$

۳. $(\forall x \in D)$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

۴. $(\forall x \in D)$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

۵. $(\forall x \in D)$ $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

۶. $(\forall x \in D, g(x)\neq ۰)$ $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

مثال ۱: اگر

$f=\{(۴,\ ۱),\ (۲,\ ۳),\ \{۰,\ ۱)\}$ و $g=\{(-۱,\ ۸),\ (۲,\ ۶),\ (۰,\ ۸),\ (۴,\ ۰)\}$

باشد، داریم:

$$(۲f)(x)=۲f(x)=\{(۴,۲),\ (۲,۶),\ (۰,۲)\}$$

$$(-۳g)(x)=-۳g(x)=\{(-۱,-۲۴),\ (۲,-۱۸),\ (۰,-۲۴),\ (۴,۰)\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\{(۴,۱),\ (۲,۹),\ (۰,۹)\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\{(۴,۱),\ (۲,-۳),\ (۰,-۷)\}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\{(۴,۰),\ (۲,۱۸),\ (۰,۸)\}$$

$$\left(\frac{۱}{f}\right)(x)=\frac{۱}{f(x)}=\left\{(۴,۱),\ \left(۲,\ \frac{۱۰}{۳}\right),(۰,۱)\right\}$$

$۱/g$ و f/g به‌ازای $x=۴$ تعریف نمی‌شود، زیرا $g(۴)=۰$.

$$\left(\frac{۱}{g}\right)(x)=\left\{\left(-۱,\frac{۱}{۸}\right),\ \left(۲,\frac{۱}{۶}\right)\left(۰,\frac{۱}{۸}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\left(۲,\frac{۱}{۲}\right),\ \left(۰,\frac{۱}{۸}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\{(۴,۰),\ (۲,۲),\ (۰,۸)\}$$

۷ـ۱۳: همنهادهٔ (ترکیب) دوتابع

فرض می‌کنیم که f تابعی از A در B، و g تابعی از B در C باشد، طبق تعریف همنهادهٔ

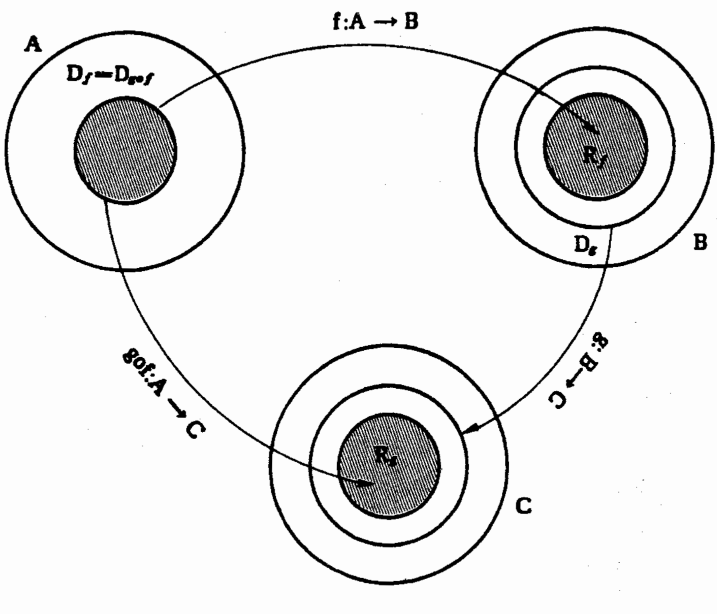
دو تابع f و g (یا تابع تابع f و g) کــه با fog نشان داده می‌شود، تابعی است از A در C به‌طوری که:

$$(gof)(x)=g[f(x)] \quad , \quad \forall x \in D_{gof}$$

که در آن $D_{gof}=\{x|x\in D_f \ , \ f(x)\in D_g\}=$ دامنهٔ (gof)

دراین تعریف، سه‌حالت‌روی می‌دهد:

حالت اول- برد f یعنی R_f زیرمجموعـهٔ دامنهٔ g یعنی D_g است $(R_f\subset D_g)$. در این حالت دامنهٔ gof همان D_f است. به‌شکل زیر توجه کنید تا مفهوم بهتردرك شود.

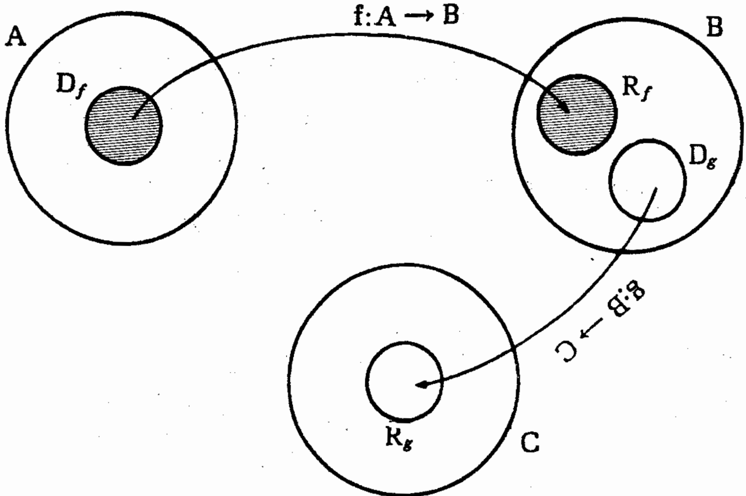


شکل ۳۴

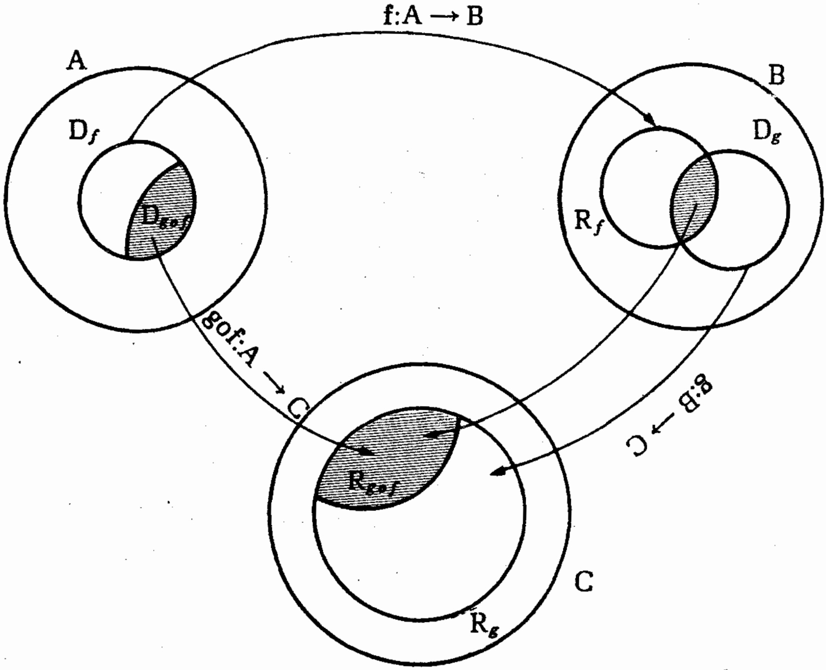
حالت دوم- اشتـراك R_f و D_g تهـی است، یعنی $R_f\bigcap D_g=\phi$. درایـن حالت همنهادهٔ gof دامنهٔ تعریف ندارد، یعنی gof وجود ندارد. به‌شکل ۳۵ توجه‌کنید تامفهوم بهتر درك شود.

حالت سوم- R_g و D_f متقاطعند. در ایـن حالت قسمتی از D_f دامنهٔ gof است که

تصویر آن با قانون f، داخل مجموعهٔ D_g قرار گیرد. شکل ۳۶روشنگر این مفهوم است.



شکل ۳۵



شکل ۳۶

همچنین اگر g تابعی از A در B و f تابعی از B در C باشد، طبق تعریف، همنهادهٔ g و f که با fog نشان داده می‌شود، تابعی است از A در C به‌طوری که:

$$(fog)(x)=f[g(x)],\ \forall x\in D_{fog}$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ \ ,\ g(x)=D_f\}$$

دراینجا نیز سه‌حالت روی می‌دهد:

حالت اول- $R_g\subset D_f$، دراین‌حالت $D_{fog}=D_g$.

حالت دوم- $R_g\bigcap D_f=\phi$، دراین‌حالت fog وجود ندارد.

حالت سوم- D_f و R_g متقاطعند. در این حالت قسمتی از D_g متعلــق به‌دامنهٔ fog است که تصویرش‌درداخل D_f قرارمی‌گیرد (رسم‌شکل این‌سه‌حالت‌را به‌عهدهٔ خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌کنیم).

مثال ۱: اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۴)\}$ و $g=\{(-۱,۱),(۳,۲),(۴,۷)\}$ باشد، تابعهای gof و fog را به‌دست می‌آوریم.

الف- محاسبهٔ gof:

چون $D_g=\{-۱,۳,۴\}$ و $R_f=\{۳,۴\}$ است، پس:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{۱,۲\}=D_f$$

بنابراین:

$$(gof)(۱)=g[f(۱)]=g(۳)=۲$$

و

$$(gof)(۲)=g[f(۲)]=g(۴)=۷$$

به‌شکل ۳۷ توجه کنید.

ب- چون $R_g=\{۱,۲,۷\}$ و $D_f=\{۱,۲\}$ است، پس:

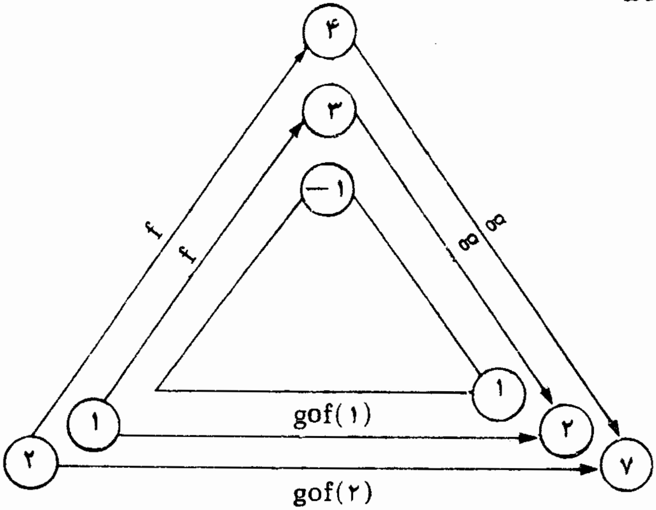
$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ \ ,\ g(x)\in D_f\}=\{-۱,۳\}$$

بنابراین:

$$(fog)(-۱)=f[g(-۱)]=f(۱)=۳$$

$$(fog)(۳)=f[g(۳)]=f(۲)=۴$$

به‌عنوان تمرین برای این حالت نیزشکلی رسم کنید.



شکل ۳۷

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۱: تابعهای f و g درمجموعهٔ عددهای حقیقی با ضابطه‌های

$$f(x)=۳x+۲ \quad , \quad g(x)=x^۲+۳$$

تعریف شده‌اند. مطلوب است تعیین ضابطهٔ تابعهای همنهادهٔ $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$.

حل:

الف- یافتن gof. چون $R_f=D_g=R$ است، پس $D_{gof}=R$ وداریم:

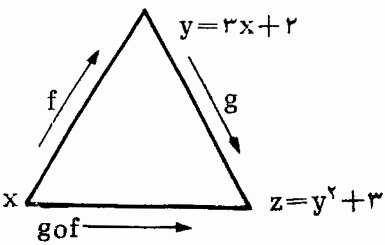
$$(gof)(x)=g[f(x)]=g(۳x+۲)=(۳x+۲)^۲+۳=$$
$$=۹x^۲+۱۲x+۷$$

ب- یافتن fog. چون $(R_g=[۳, +\infty[)\subset(D_f=R)$ پس $D_{fog}=D_g=R$

و داریم:

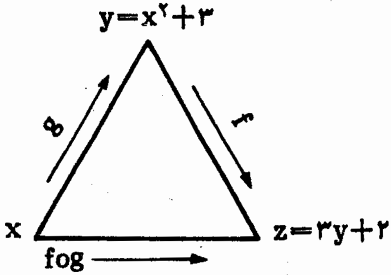
$$(fog(x))=f[g(x)]=f(x^۲+۳)=۳(x^۲+۳)+۲=۳x^۲+۱۱$$

شکلهای زیر به‌خوبی روشنگر درك مفهوم تابع تابع و روش محاسبهٔ آن هستند:



شکل ۳۸

$$z=g(y)=g[f(x)]=(gof)(x)$$
$$z=g(y)=y^2+3=(3x+2)^2+3=9x^2+12x+7$$



شکل ۳۹

$$z=f(y)=f[g(x)]=(fog)(x)$$
$$z=3y+2=3(3x^2+3)+2=3x^2+11$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۲: هرگاه f و g دو تابع حقیقی با ضابطه‌های زیر باشند:

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\ ,\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

الف- دامنه و برد هرکدام از این دو تابع را بیابید.
ب - آیا می‌توان تابع همنهادهٔ $(fog)(x)$ را تعریف کرد؟
ج - تابع همنهادهٔ $(gof)(x)$ را بررسی کنید.

حل:

الف- $D_f=R\ ,\ R_f=\{x|x\in R\ ,\ 0\leqslant x<1\}$

$$D_g=\{x|x<0\vee x>1\}\ ,\ R_g=R^+$$

ب- چون برد g مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت است و این مجموعه زیرمجموعهٔ $D_f=R$ است، پس $(fog)(x)$ به‌ازای همهٔ عضوهای D_g وجود دارد و ضابطهٔ آن چنین است:

$$(fog)(x)=f[g(x)]=\frac{[g(x)]^2}{1+[g(x)]^2}=\frac{\frac{1}{x(x-1)}}{1+\frac{1}{x(x-1)}}=$$

$$=\frac{۱}{x^{۲}-x+۱}\ ,\ \forall x\in D_g$$

ج- برد f کاملاً خارج از دامنهٔ g است. یعنی $R_f\bigcap D_g=\phi$، پس gof وجود ندارد. این حقیقت را می‌توان با تشکیل gof طبق ضابطه نیز دریافت.

$$(gof)(x)=g[f(x)]=g\left(\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}\right)=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}\left(\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}-۱\right)}}=\frac{۱+x^{۲}}{\sqrt{-x^{۲}}}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنید $D_{gof}=\phi$، چون زیررادیکال همواره منفی است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۳: (تعریف جایگشت با استفاده از تابع) فرض می‌کنیم که $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد و داشته باشیم:

$$f(۴)=۱\ ,\ f(۳)=۳\ ,\ f(۲)=۴\ ,\ f(۱)=۲$$

این واقعیت را چنین نمایش می‌دهیم:

$$f=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۴&۳&۱\end{pmatrix}$$

حال اگر داشته باشیم:

$$g=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۳&۱&۴&۲\end{pmatrix}$$

که جایگشت دیگری ازمجموعهٔ A باشد، با استفاده ازهمنهادهٔ دوتابع، می‌توان جایگشتهای دیگری ازاین مجموعه ساخت. مثلاً،

$$gof=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۳&۱&۴&۲\end{pmatrix}o\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۲&۴&۳&۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۱&۲&۳&۴\\۱&۲&۴&۳\end{pmatrix}$$

زیرا:

$$(gof)(۱)=g[f(۱)]=g(۲)=۱$$

$$(gof)(۲)=g[f(۲)]=g(۴)=۲$$

$$(gof)(۳)=g[f(۳)]=g(۳)=۴$$

$$(gof)(۴)=g[f(۴)]=g(۱)=۳$$

توجه کنیدکه در مجموعهٔ A تابع f یا g چنین عمل می‌کندکه تصویرش یکی از عضوهای همین مجموعه می‌شود. این‌عمل را درآنالیزترکیبی(تکنیك شمارش)، جایگشت می‌نامند[18]. دریك مجموعه مانند A می‌توان جایگشتهای مختلف نوشت. یکی از راههای یافتن این جایگشتها استفاده از همنهادهٔ تابعهاست.

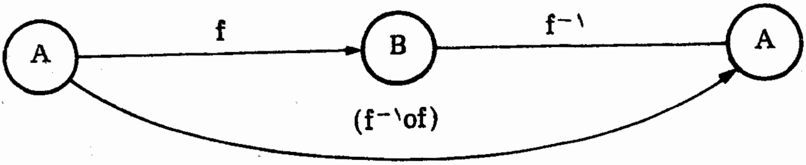
توجه: شرطی‌که برای وجود وارون یك تابع عنوان کردیم یك‌به‌یك بودن آن بود. حال تابع $f:A \rightarrow B$ را درنظرمی گیریم وفرض می کنیم که عضو $a \in A$ را روی $b \in B$ تصویرکند. شرط بالا تضمین می کند که به‌ازای $b \in B$ تنها یك عضو مانند $a \in A$ وجود دارد؛ یعنی تضمین می‌کندکه $f^{-۱}$ تابع است. بنابراین:

$$f^{-۱}:B \rightarrow A$$

اینك با شناختی‌که از ترکیب توابع داریم، می‌گوییم:

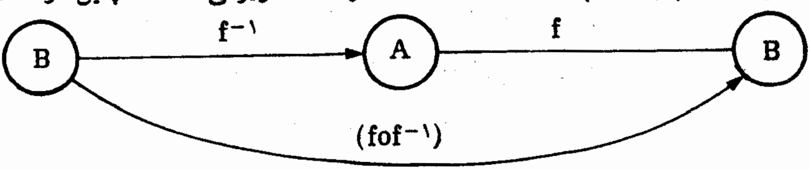
$$(f^{-۱}of)(x)=f(x)$$

توضیح بیشتراینکه، فرض می‌کنیم که $f:A \rightarrow B$ دارای وارون $f^{-۱}:B \rightarrow A$ باشد. نمودار زیر



شکل ۴۰

نشان می‌دهدکه $(f^{-۱}of)$ مجموعهٔ A را روی خود A تصویرمی کند، همچنین‌نمودارزیر



شکل ۴۱

نشان می‌دهدکه همنهادهٔ $(fof^{-۱})$، مجموعهٔ B را روی خود B تصویر می کند، یعنی:

$$(f^{-۱}of):A \rightarrow A$$

۱۸ـ برای‌آگاهی بیشتر دراین‌باره، رجوع کنیدبه‌کتاب آمار و احتمال ازهمین مجموعه.

$$(fof^{-1}):B \to B$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴: هرگاه f تابعی از A به B و y زیرمجموعهٔ دلخواهی از B باشد، ثابت کنید:

$$f^{-1}(B-y)=A-f^{-1}(y)$$

حل: فرض می‌کنیم $x\in f^{-1}(B-y)$. پس:

$$[x\in f^{-1}(B-y)] \iff [f(x)\in(B-y)]$$

$$\iff [f(x)\in B\wedge f(x)\notin y]$$

$$\iff [x\in f^{-1}(B)]\wedge[x\notin f^{-1}(y)]$$

$$\iff [x\in f^{-1}(B)-f^{-1}(y)]$$

در نتیجه: $f^{-1}(B-y)=A-f^{-1}(y)$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۵: تابع

$$f:(0,1)\to(a,\ b)$$

$$f(x)=bx+(1-x)a$$

را درنظر می‌گیریم.

الف- ثابت کنید این تابع یك‌به‌یك و پوشاست.

ب - وارون این تابع را بیابید.

حل:

الف- برای اثبات یك‌به‌یك بودن، کافی است دوستی استلزام زیررا ثابت کنیم:

$$f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$$

$$bx+(1-x)a=bx'+(1-x')a$$

$$bx+a-ax=bx'+a-ax'$$

$$b(x-x')-a(x-x')=0$$

$$(b-a)(x-x')=0$$

چون $b\neq a$ است، پس $x-x'=0$ یعنی $x=x'$ است.

برای اثبات پوشابودن، عضو دلخواهی مانند y درفاصلهٔ (a, b) درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم عضوی مانند x درفاصلهٔ $(۰,۱)$ وجود دارد که $y=f(x)$ باشد.

$$y=bx+(۱-x)a \Rightarrow x=\frac{y-a}{b-a}$$

می‌دانیم که $y\in(a, b)$ یعنی $a<y<b$ وازآنجا $a-a<y-a<b-a$ در نتیجه $۰<(y-a)/(b-a)<۱$، یعنی $(y-a)/(b-a)\in(۰,۱)$. اگر $(y-a)/(b-a)$ را x بپنداریم $f(x)=y$ می‌شود. زیرا:

$$f(x)=f\left(\frac{y-a}{b-a}\right)=b\frac{y-a}{b-a}-a\left(۱-\frac{y-a}{b-a}\right)a=$$

$$=\frac{by-ab+ab-a^۲-ay+a^۲}{b-a}=\frac{y(b-a)}{b-a}=y$$

ب- چون f تابعی است یك‌به‌یك، بنابراین وارونی مانند $f^{-۱}$ دارد، به‌قسمی کـه

$$f^{-۱}:(a, b)\to(۰,۱)$$

برای یافتن ضابطهٔ $f^{-۱}$ می‌گوییم:

$$f^{-۱}:(a, b)\to(۰,۱)$$

$$f^{-۱}(y)=\frac{y-a}{b-a}$$

طبق معمول جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$f^{-۱}:(a, b)\to(۰,۱)$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۶: اگرتابعهای $f_۱:X_۱\to Y_۱$ و $f_۲:X_۲\to Y_۲$ هردو یك‌به‌یك وپوشا باشند، ثابت کنید که تابع $h:X_۱\times X_۲\to Y_۱\times Y_۲$ نیز یك‌به‌یك وپوشاست.

حل: تعریف h چنین است (با توجه به‌تعریف ضرب دکارتی):

$$h[(x_۱, x_۲)]=[f_۱(x_۱)\ ,\ f_۲(x_۲)]$$

برای اثبات یك‌به‌یك بودن، فرض می‌کنیم کـه $z=(a, b)$ و $z'=(a'\ ,\ b')$ متعلق به h باشند، ودرستی استلزام زیر را ثابت می‌کنیم:

$$[h(z)=h(z')] \Rightarrow z=z'$$

ولی:

$$h(z')=h[(a', b')]=(f_۱(a'), f_۲(b')), \ h(z)=h[(a, b)]=(f_۱(a), f_۲(b))$$

$$[h(z)=h(z')] \Rightarrow (f_۱(a), f_۲(b))=(f_۱(a'), f_۲(b'))$$

طبق تعریف دوتاییهای مرتب و تعریف تابعهای $f_۱$ ، $f_۲$:

$$\begin{cases} f_۱(a)=f_۱(a') \\ f_۲(b)=f_۲(b') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases} \Rightarrow (a, b)=(a', b')$$

واز آنجا $z=z'$.

برای اثبات پوشابودن h، فرض می‌کنیم که $(y_۱, y_۲) \in Y_۱ \times Y_۲$. ثابت می‌کنیم که عضوی مانند a متعلق به $X_۱ \times X_۲$ وجود دارد به‌طوری که:

$$h(a)=(y_۱, y_۲)$$

واضح است که a دوتایی مرتبی‌است به‌شکل $a=(t, t')$. چون $f_۱$ پوشاست، پس به‌ازای $y_۱ \in Y_۱$ حتماً tای وجود دارد که $f_۱(t)=y_۱$. همچنین چون $f_۲$ پوشاست، پس به‌ازای $y_۲ \in Y_۲$ حتماً t'ای وجود دارد که $f_۲(t')=y_۲$. ازآنجا:

$$(y_۱, y_۲)=(f_۱(t), f_۲(t'))=h(t, t')=h(a)$$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۷: اگر:

$$\begin{cases} g:R \to R^۲ \\ t \to (t, ۲-t) \end{cases} , \quad \begin{cases} f:R^۲ \to R \\ (x, y) \to |x+y| \end{cases}$$

تابعهای gof و fog را حساب کنید.

حل:

الف- محاسبهٔ gof. طبق نمودار شکل ۴۲ $gof:R^۲ \to R^۲$ است.

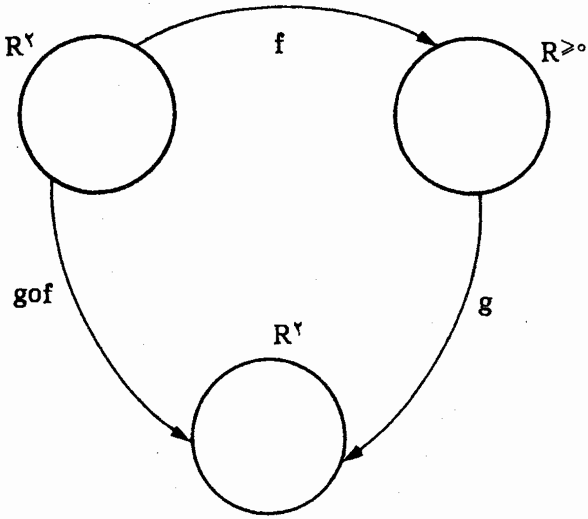
حال فرض می‌کنیم که $t=(x, y)$ عضوی از gof باشد:

$$gof(t)=g[f(t)]=g(|x+y|)=$$

$$(|x+y| \ , \ ۲-|x+y|)$$

یعنی

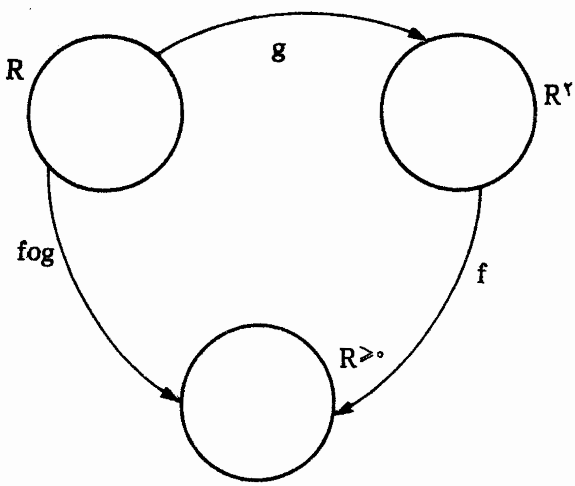
$$\begin{cases} gof:R^۲ \to R^۲ \\ (x, y) \to (|x+y|, \ ۲-|x+y|) \end{cases}$$



شکل ۴۲

ب- محاسبهٔ fog. طبق نمودار زیر $fog:R\to R^{\geqslant \circ}$ است.

$$fog(t)=f[g(t)]=f(t,\ 2-t)=f(h,\ 2h')=$$
$$=|h+h'|=t+2-t=2$$



شکل ۴۳

در نتیجه:

$$fog: R \to R^{\geq \circ}$$
$$x \to ۲$$

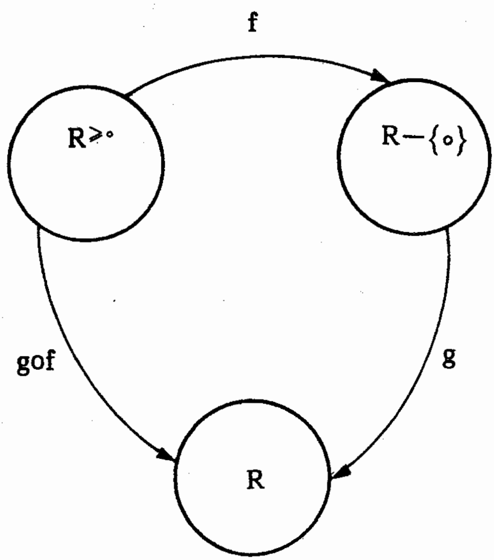
یعنی، fog تابعی است ثابت.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۸: هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f: R^{\geq \circ} \to R \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} g: R - \{\circ\} \to R \\ g(x) = \dfrac{۱}{x} \end{cases}$$

آیا gof و fog وجود دارند؟ اگر وجود دارند آنها را حساب کنید.

حل: طبق نمودار زیر



شکل ۴۴

$gof: R^{\geq \circ} \to R$ وجود دارد و

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$$

fog وجود ندارد، زیرا $fog: R \to R^{\geq \circ}$ و

$$(fog)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

fog به‌ازای $x\leqslant 0$ تعریف نمی‌شود. یعنی تمامی برد g در دامنهٔ f نیست.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۹: هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f:R\rightarrow R \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}\end{cases} \quad , \quad \begin{cases} g:R\rightarrow R \\ g(x)=x^2+1\end{cases}$$

آیا f و g وارون یکدیگرند؟

حل: شرط اینکه دوتابع وارون یکدیگر باشند این است که داشته باشیم:

$$(gof)(x)=x$$

$$(fog)(x)=x$$

ولی،

$$(gof)(x)=g\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2+1\neq x$$

پس، g معکوس چپ f نیست و

$$(fog)(x)=f(x^2+1)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\neq x$$

پس، g وارون راست f نیز نیست. درنتیجه f و g وارون یکدیگر نیستند.

مسئلهٔ نمونهٔ ۵۰: تابع $f:R^2\rightarrow R$ و $(x, y)\rightarrow x^2+y^2$ مفروض است. $f^{-1}(\{2\})$ ، $f^{-1}([1, 3])$ را حساب کنید.

حل:

$$f^{-1}(\{2\})=\{(x, y)|(x, y)\in R^2 \wedge f(x, y)\in\{2\}\}=$$

$$=\{(x, y)|(x, y)\in R^2 \wedge x^2+y^2=2\}$$

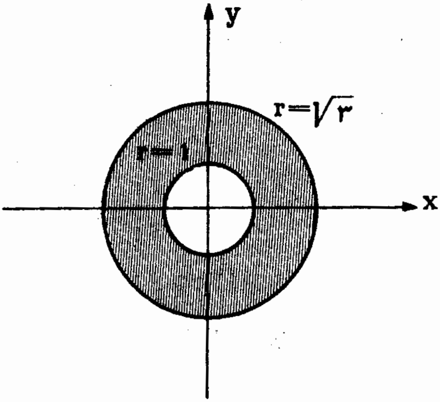
که نمایش هندسی آن دایره‌ای است به‌مرکز مبدأ مختصات وشعاع $\sqrt{2}$.

$$f^{-1}([1, 3])=\{(x, y)|(x, y)\in R^2, f(x, y)\in[1,3]\}=$$

$$=\{(x, y)|(x, y)\in R^2 \wedge x^2+y^2\in[1,3]\}=$$

$$=\{(x, y) | (x, y) \in R^2 \wedge 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3\}$$

چون $\sqrt{x^2+y^2}$ فاصلهٔ نقطهٔ (x, y) ازمبدأ مختصات است، پس $f^{-1}([1,3])$ مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی از R^2 است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچکتر یا مساوی $\sqrt{3}$ و بزرگتر یا مساوی یک است. به‌شکل زیر توجه کنید. مکان نقطه‌ها هاشور خورده است.



شکل ۴۵

تمرین ۷

۱. هرگاه $A=\{1,2,3,4\}$ و $x \in A$ و $y \in A$ باشد، کدام رابطه از رابطه‌های زیر تابع هستند؟

الف- $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

ب - $\{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2)\}$

ج - $\{(1,3), (2,3), (1,4), (2,4)\}$

د - $\{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

هـ - $\{(4,1), (3,2), (2,3)\}$

۲ . کدام رابطه ازرابطه‌های زیر تابع هستند؟

الف- {(همدان, اردشیر) , (شیراز , کوروش) , (تهران , احمد)}

ب - {(شیراز, اردشیر) , (شیراز , کوروش) , (تهران , احمد)}

ج - {(همدان, کوروش) , (شیراز , کوروش) , (تهران , احمد)}

● هرگاه $x \in R$ و $y \in R$ باشد، تعیین کنید که کدام یك از رابطه‌های زیر تابع هستند؟

۳ . $\{(x, y) | x+y=۴\}$

۴ . $\{(x, y) | x+y>۴\}$

۵ . $\{(x, y) | y-۴=۰\}$

۶ . $\{(x, y) | x+۲=۰\}$

۷ . $\{(x, y) | y=x^۲\}$

۸ . $\{(x, y) | xy=۴\}$

۹ . $\{(x, y) | x^۲+y^۲=۲۵\}$

۱۰. $\{(x, y) | x^۲+y^۲=۲۵ \ , \ x>۰\}$

۱۱. $\{(x, y) | x^۲+y^۲=۲۵ \ , \ y<۰\}$

۱۲. $\{(x, y) | x^۲+y^۲<۲۵\}$

۱۳. $\{(x, y) | x+y>۴\} \cap \{(x, y) | x+y<۶\}$

۱۴. $\{(x, y) | y-۱=۰\} \cup \{(x, y) | y-۲=۰\}$

۱۵. $\{(x, y) | y^۲=x^۲\}$

۱۶. $\{(x, y) | y^۳=x\}$

۱۷. $\{(x, y) | y^۴=x\}$

۱۸. $\{(x, y) |$ x عامل اولی از y است$\}$

۱۹. $\{(x, y) |$ (اگر x زوج باشد، $y=۰$) ، (اگر x فرد باشد، $y=۱$)$\}$

(در این مثال x و y عددهای صحیح ونسبی هستند)

۲۰. $\{(x, y) | x=|y|\}$

۲۱. $\{(x, y) | y=|x|\}$

۲۲. $\{(x, y) |$ y پدر x است$\}$

۲۳. $\{(x, y) |$ y پسر x است$\}$

۲۴. $\{(x, y) |$ تفاضل x و y مقداری ثابت است$\}$

۲۵. $\{(x, y) |$ مجموع x و y مضرب صحیحی از x است$\}$

● در تمرینهای ۲۶ تا با ۳۵، x و y عددهای حقیقی هستند. تعیین کنید آیا تابعهای مربوط یك‌به‌یك هستند یا نه؟ دامنه و برد هریك را معین کنید.

۲۶. $\{(x, y) | x + y = ۴\}$

۲۷. $\{(x, y) | y - ۴ = ۰\}$

۲۸. $\{(x, y) | y^۳ = x\}$

۲۹. $\{(x, y) | y = x^۴\}$

۳۰. $\{(x, y) | xy = ۴\}$ (حالتهایی را که $x = ۰$ یا $y = ۰$ باشد، به حساب نیاورید.)

۳۱. $\{(x,y) | (y = ۱$ اگر x فرد باشد$,$ $y = ۰$ اگر x زوج باشد$)\}$
(y, x عددهای صحیح نسبی هستند.)

۳۲. $\{(x, y) | y = |x|\}$

۳۳. $\{(x, y) | y = x^۲ + ۱\}$

۳۴. $\{(x, y) | y = \sqrt{۴ - x^۲}\}$

۳۵. $\left\{(x, y) | y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}\right\}$

۳۶. اگر $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{x + ۱}$ ودامنهٔ f و g مجموعهٔ $x = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد، برد تابعهای $f(x)$ و $g(x)$ را بیابید.

۳۷. اگر $f_۱(x) = x$ و $f_۲(x) = -x$ و $f_۳(x) = \frac{۱}{x}$ و $f_۴(x) = \frac{-۱}{x}$ باشد،

همنهاده‌های زیر را بیابید:

الف- $(f_۲ o f_۳)(x)$ ب- $(f_۲ o f_۴)(x)$

ج- $(f_۳ o f_۲)(x)$ د- $(f_۱ o f_۴)(x)$

هـ- $(f_۴ o f_۴)(x)$ و- $(f_۲ o f_۳ o f_۴)(x)$

۳۸. اگر $f_۱(x) = x$ و $f_۲(x) = \frac{۱}{۱ - x}$ و $f_۳(x) = \frac{x - ۱}{x}$ و $f_۴(x) = \frac{۱}{x}$ و $f_۵(x) = ۱ - x$ و $f_۶(x) = \frac{x}{x - ۱}$ باشد، همنهاده‌های زیر را بیابید:

الف - $(f_1 o f_2)(x)$ ب- $(f_2 o f_1)(x)$

ج - $(f_2 o f_3)(x)$ د- $(f_3 o f_2)(x)$

هـ - $(f_3 o f_4)(x)$ و- $(f_4 o f_3)(x)$

ز - $(f_5 o f_5)(x)$ ح- $(f_4 o f_4)(x)$

۳۹. هرگاه 2^A و 2^B به‌ترتیب مجموعه‌های توانی مجموعه‌های A و B باشند و $f: A \to B$ یك‌به‌یك باشد، ثابت کنید که $g: 2^A \to 2^B$ نیز یك‌به‌یك است.

۴۰. هرگاه $f: A \to B$ تابعی پوشا باشد، ثابت کنید که $g: 2^A \to 2^B$ نیز تابعی پوشاست (2^A و 2^B را در تمرین ۳۹ تعریف کردیم).

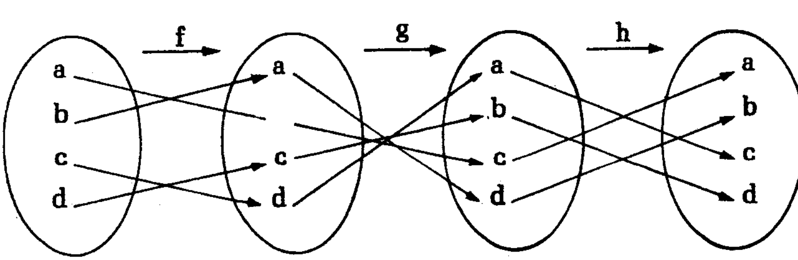
۴۱. تابع حقیقی $O_A: A \to R$ که به‌ازای هر x عضو A به شکل $O_A(x) = 0$ تعریف می‌شود، تابع صفر در A نام دارد. ثابت کنید که برای هر تابع $f: A \to R$ داریم:

الف - $f + O_A = f$ ؛   ب - $f \cdot O_A = O_A$

۴۲. تابع حقیقی $f = \{(1, 2), (2, -3), (3, -1)\}$ را درنظر می‌گیریم. مطلوب است یافتن:

الف - $f + 4$ ؛   ب - $|f|$ ؛   ج - f^2.

● شکل زیر را درنظر بگیرید ومقدار هریك از تابعهای زیر را بیابید:



۴۳. $(f o g)(d)$

۴۴. $f o [g o h](b)$

۴۵. $[f o g] o h(b)$

۴۶. $[g o f] o h(d)$

۴۷. $g o [f o h](d)$

۴۸. نخست ثابت کنید که درفضای R^{2} رابطهٔ $x^{2}+y^{2}=x'^{2}+y'^{2}$ یك‌رابطهٔ‌هم‌ارزی است. سپس، m راچنان بیابید که $(3m-1, m+4)$ و $(m+3, 3m)$ دوعضو ازاین رابطه باشند.

۴۹. با ذکرمثال ثابت‌کنیدکه ترکیب تابعها ویژگی جابه‌جایی ندارد.

۵۰. با ذکرمثال ثابت‌کنیدکه ترکیب تابعها ویژگی شرکتپذیری دارد. یعنی:

$$ho(gof)=(hog)of$$

۵۱. هرگاه

$$f:R \to R \qquad g:R \to R$$

$$x \to \frac{x}{x-1} \quad \text{و} \quad x \to \frac{-2}{x^{2}-1}$$

باشد ضابطهٔ تابعهای $f.g$ و $\frac{f}{g}$ وهمچنین دامنهٔ آنها را بیابید.

۵۲. هرگاه $f:A \to B$ و X و Y دوزیرمجموعهٔ A باشند، ثابت کنیدکه:

$$X\subset Y \Rightarrow f(X)\subset f(Y)$$

۵۳. اگر f تابعی از A در B باشد و X و Y دوزیرمجموعهٔ دلخواه B باشند، ثابت کنید که:

$$(X\subset Y) \Rightarrow [f^{-1}(X)\subset f^{-1}(Y)]$$

۵۴. ثابت‌کنیدکه:

$$f:B \to A$$

$$f(x, y)=(x, y+2)$$

یك‌به‌یك وپوشاست.

۵۵. هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f:R \to R \\ f(x)=x-2 \end{cases}, \quad \begin{cases} g:R \to R^{\geqslant 0} \\ g(x)=|x-2| \end{cases}$$

تعیین کنیدکه fog و gof وجود دارند؟ اگر وجود دارند، ضابطهٔ آنها را بیابید

۵۶. هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f:R \to R \\ f(x)=3-2x \end{cases}, \quad \begin{cases} g:R \to \{x|x>1\} \\ g(x)=|x-1| \end{cases}$$

تعیین کنیدکه fog و gof وجود دارند؟ اگروجود دارند، ضابطهٔ آنها رابیابید

۵۷. هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f: R-\{-1\} \to R \\ f(x)=\dfrac{1}{x+1} \end{cases} , \begin{cases} g: R \to R \\ g(x)=x+1 \end{cases}$$

الف- آیا g و f وارون یکدیگرند؟

ب - آیا fog^{-1} و $g^{-1}of$ وجوددارند؟ اگروجود دارند، ضابطهٔ آنهاراحساب کنید.

۸

ترکیب داخلی در مجموعه

۸-۱: تعریف

قراردادی را که به‌هردو عضو a و b ازمجموعهٔ E، یك وفقط یك عضومانند c از مجموعهٔ E وابسته‌کند، قانون ترکیب داخلی، یا عمل داخلی، یا به‌اختصار عمل می گویند.

تاکنون با عملهایی که با علامتهای $+$، $-$، $\times$، $\div$ در مجموعهٔ عددهای حقیقی یا $\cup$ و $\cap$ درجبر مجموعه‌هـا مشخص می‌شوند آشنا شده‌ایم. اینك اضافه می‌کنیم کـه می‌توان عملهای‌جدیدی باعلامتهای‌گوناگون مانند $\square$، $\bigcirc$، $*$، Δ، $\top$ و... تعریف‌کرد.

مثال ۱: فرض می‌کنیم‌که عمل $\square$ با ضابطهٔ

$$a \square b = a + b + ab$$

تعریف شود، می‌خواهیم عبارتهای $۲ \square ۳$ و $۲ \square (۳ \square ۴)$ را محاسبه‌کنیم.

$$۲ \square ۳ = ۲ + ۳ + ۲ \times ۳ = ۱۱$$

$$۲ \square (۳ \square ۴) = ۲ \square (۳ + ۴ + ۱۲) = ۲ \square ۱۹ = ۲ + ۱۹ + ۳۸ = ۵۹$$

مثال ۲: فرض می‌کنیم که عمل $\bigcirc$ با ضابطهٔ

$a \bigcirc b =$ ماکزیموم[19] a یا b

تعریف شود، می‌خواهیم عبارتهای $۳ \bigcirc ۴$ و $۳ \bigcirc (۴ \bigcirc ۵)$ را محاسبه‌کنیم.

$$۳ \bigcirc ۴ = ۴$$

$$۳ \bigcirc (۴ \bigcirc ۵) = ۳ \bigcirc ۵ = ۵$$

۱۹- در بعضی ازکتابها بزرگترین عددمجموعهٔ $\{a, b\}$ را با $\mathrm{Max}\{a, b\}$ نشان می‌دهند.

مثال ۳: فرض می‌کنیم که عمل Δ با ضابطهٔ

$$a\Delta b=|a-b|$$

تعریف شود. می‌خواهیم عبارتهای ۳Δ۵ و ۳Δ(۴Δ۷) را محاسبه کنیم.

$$۳\Delta۵=|۳-۵|=۲$$

$$۳\Delta(۴\Delta۷)=۳\Delta۳=۰$$

توجه: گاهی ممکن است که $a\in E$ و $b\in E$ باشد، ولی عمل ∇ آن چنان باشد که $a\nabla b=c\notin E$. دراین صورت عمل را خارجی می‌نامند. ضرب اسکالر درمجموعهٔ بردارها مثال بارزی از عمل خارجی است. مثلاً، $\vec{V}|_{۴}^{۵}$ و $\vec{U}|_{۶}^{-۳}$ دو بردار هستند و به‌مجموعهٔ بردارها تعلق دارند، ولی حاصلضرب اسکالرآنها:

$$\vec{U}\cdot\vec{V}=۵(-۳)+۶\times۴=۹$$

یك عدد است.[۲۵]

توجه: ممکن است دریك عبارت چند عمل به‌کاربرده شود. مثلاً، اگر a و b و c و d عضوهای مجموعهٔ E وعملهای $*$ و $\perp$ و $\top$ سه قانون ترکیب داخلی باشند و $u\in E$ چنین تعریف شود

$$u=a\top[(b*c)\perp d]$$

u را چنین می‌یابیم:

۱. b و c را با قانون $*$ ترکیب می‌کنیم.
۲. $(b*c)$ و d را با قانون $\perp$ ترکیب می‌کنیم.
۳. $[(b*c)\perp d]$ و a را با قانون $\top$ ترکیب می‌کنیم.

۸-۲: ویژگی بسته بودن عمل در مجموعه

تعریف مجموعهٔ E را نسبت به‌عمل $*$ بسته می‌گویند هرگاه برای هر a و b متعلق به‌مجموعهٔ E، $a*b=c$ نیز متعلق به‌مجموعهٔ E باشد. یعنی:

$$\forall a,\, b\in E:\ a*b=c\,|\,c\in E$$

۲۵ــ برای اطلاعات بیشتردربارهٔ بردارها به‌کتاب جبر تحلیلی (۱) ازهمین مجموعه رجوع کنید.

بعضی از ریاضیدانان معتقدندکه ویژگی بسته بودن درذات عمل داخلی مستتر است و می گویند: پس‌ازآنکه دانستیم عمل داخلی است، دیگر لزومی ندارد بسته بودن آن را مورد بررسی قراردهیم.

مثال ۱: مجموعهٔ عددهای طبیعی نسبت به‌عملهای تفریق وتقسیم بسته نیست.

مثال ۲: مجموعهٔ عددهای طبیعی نسبت به‌عملهای جمع‌وضرب بسته است.

مثال ۳: مجموعهٔ Z نسبت به‌عمل تقسیم بسته نیست.

مثال ۴: مجموعهٔ $\{-۱,۰,۱\}=E$ نسبت به‌عمل‌جمع بسته نیست، زیرا بادرنظر گرفتن اصل گسترش دراین مجموعه:

$$۱+۱=۲\notin E$$

مثال ۵: دومجموعهٔ دیگر درریاضیات وجود دارند به‌نامهای مجموعهٔ ماتریسها و مجموعهٔ عددهای همبافته که در این کتاب امکان بحث دربارهٔ آنها نیست. فقط یادآور می‌شویم که این دومجموعه نسبت به‌عملهای جمع وضرب وتفریق وتقسیم (تعریف شده در آن مجموعه‌ها) بسته هستند.

۸ــ۳: ویژگی شرکتپذیری عمل در مجموعه

تعریف ــ عمل $*$ را در مجموعهٔ E شرکتپذیر می‌نامیم، هرگاه برای هرسه عضو a و b و c از مجموعهٔ E داشته باشیم:

$$x*(y*z)=(x*y)*z$$

مثال ۱: درمثال ۱ ازبخش ۸ــ۱، عمل $\square$ را تعریف‌کردیم. این عمل درمجموعهٔ عددهای حقیقی شرکتپذیراست، زیرا:

$$a\square(b\square c)=a\square(b+c+bc)=a+b+c+bc+$$
$$ab+ac+abc$$

و

$$(a\square b)\square c=(a+b+ab)\square c=a+b+ab+c+$$
$$ac+bc+abc$$

حال به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$$

مثال ۲: عملهای جمع و ضرب درمجموعهٔ R شرکتپذیرند.

مثال ۳: عملهای $\cap$ و $\cup$ درجبرمجموعه‌ها شرکتپذیرند.

۸-۴: ویژگی جابه‌جایی عمل در مجموعه

تعریف- عمل $*$ را درمجموعهٔ E تعویض‌پذیر (دارای ویژگی جابه‌جایی) می‌گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$\forall a, b \in E \ : \ a*b = b*a$$

مثال ۱: عملهای جمع و ضرب درمجموعهٔ R ویژگی جابه‌جایی دارند.

مثال ۲: عملهای تفریق و تقسیم درمجموعهٔ R دارای ویژگی جابه‌جایی نیستند.

مثال ۳: عمل ضرب درمجموعهٔ ماتریسها دارای ویژگی جابه‌جایی نیست.

۸-۵: ویژگی توزیعپذیری در مجموعه

تعریف- الف- درمجموعهٔ E عمل $\perp$ را از سمت‌چپ نسبت به‌عمل $*$ توزیعپذیر می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$\forall a, b, c \in E \ : \ a \perp (b*c) = (a \perp b)*(a \perp c)$$

ب- عمل $\perp$ را ازسمت راست نسبت به‌عمل $*$ توزیعپذیر می‌گوییم، هرگاه:

$$\forall a, b, c \in E \ : \ (a*b) \perp c = (a \perp c)*(b \perp c)$$

مثال ۱: در R عمل ضرب برروی عمل‌جمع توزیعپذیر است (از هردوسو).

مثال ۲: در R عمل‌جمع برروی عمل ضرب توزیعپذیر نیست.

مثال ۳: درجبرمجموعه‌ها عملهای $\cup$ و $\cap$ از هردوسو نسبت به‌هم توزیعپذیرند.

۸-۶: عضو بی‌اثر یك عمل

تعریف- عمل $*$ درمجموعهٔ E دارای عضو بی‌اثر $e \in E$ است، هرگاه‌داشته‌باشیم:

$$\forall x \in E \ : \ x*e = e*x = x$$

مثال ۱: در مجموعهٔ R صفرعضو بی‌اثـر عمل‌جمع ویك عضو بی‌اثر عمل ضرب است.

مثال ۲: درمجموعهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ تهی (ϕ) عضو بی‌اثر عمل اجتماع است.

مثال ۳: درمجموعهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ مـرجع (M) عضو بی‌اثـر عمل اشتراك است.

توجه: اگر درمجموعهٔ E برای عمل $*$ فقط داشته باشیم:

$$\forall a \in E \; : \; e' * a = a$$

e' راعضو بی‌اثر چپ‌عمل $*$ می‌نامند. همچنین اگر درمجموعهٔ E فقط داشته باشیم:

$$\forall a \in E \; : \; a * e'' = a$$

e'' را عضو بی‌اثر راست عمل $*$ در مجموعهٔ E می‌نامند.

قضیه: اگرعمل $*$ دریك مجموعه دارای عضو بی‌اثر باشد، این عضوبی‌اثرمنحصر به‌فرد است.

اثبات (برهان خلف): اگر e و e' هردو عضـو بی‌اثرعمل $*$ درمجموعهٔ E باشند، چون e و e' هردوعضو مجموعهٔ E هستند، خواهیم داشت:

$$e * e' = e' * e = e' \quad (۱) \quad (\text{برای عضو بی‌اثر } e)$$

$$e' * e = e * e' = e \quad (۲) \quad (\text{برای عضو بی‌اثر } e')$$

ازمقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$e = e'$$

۸ــ۷: عضو متقابل

تعریف ــ عمل $*$ درمجموعهٔ E تعریف‌شده‌است، عضو دلخواه x متعلق به‌مجموعهٔ E دارای عضو متقابل است، هـر گاه عضوی از مجموعهٔ E مانند x^{-1} وجـود داشته باشد، به‌طوری که:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \quad (\text{عضو بی‌اثر است } e)$$

x^{-1} را عضو متقابل x نسبت به‌عمل $*$ درمجموعهٔ E می‌نامند.

مثال ۱: درمجموعهٔ N هیچ عضوی نسبت به $+$ و $\times$ متقابل ندارد. توجه کنید که مثلاً، $۰=۳+(-۳)=(-۳)+۳$ ولی $N\notin(-۳)$.

مثال ۲: در مجموعه‌های Q^* و R^* هرعضوی نسبت بـه عمل ضرب عضو متقابل دارد. ($R^*=R-\{۰\}$, $Q^*=Q-\{۰\}$).

مثال ۳: درمجموعه‌های Q و R هرعضوی نسبت به‌عمل جمع، متقابل دارد.

قضیه: اگرقانون ترکیب شرکتپذیر باشد، عضو متقابل هـرعضو درصورت وجود منحصر به‌فرد است.

اثبات: اگر e عضو بی‌اثـرعمل $*$ درمجموعهٔ E باشد و x' و x'' دو عضو متقابل x نسبت به‌عمل $*$ باشند، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} x''*x*x'=(x''*x)*x'=e*x'=x' \\ x''*x*x'=x''*(x*x')=x''*e=x'' \end{array}\right\} \Rightarrow x'=x''$$

قضیه: اگرعمل $*$ درمجموعهٔ E شرکتپذیر باشد و $a^{-۱}$ و $b^{-۱}$ به‌ترتیب عضوهای متقابل a و b نسبت به‌عمل $*$ در مجموعهٔ E باشند، عضو متقابل $a*b$ درمجموعهٔ E برابر $b^{-۱}*a^{-۱}$ است.

اثبات: بااستفاده از شرکتپذیری عمل $*$ درمجموعهٔ E خواهیم داشت:

$$(a*b)*(b^{-۱}*a^{-۱})=a*(b*b^{-۱})*a^{-۱}=a*e*a^{-۱}=$$

$$=a*a^{-۱}=e$$

به‌همین ترتیب:

$$(a^{-۱}*b^{-۱})*(a*b)=e$$

پس، $b^{-۱}*a^{-۱}$ عضومتقابل $a*b$ نسبت به‌عمل $*$ است.

تمرین ۸

● درپرسشهای ۱ تابا ۱۲ عمل $*$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف شده است. معین کنید که این عمل کدام‌یك ازویژگیهای جابه‌جایی وشرکتپذیری را داراست.

۱. $a*b=a-b$

۲. $a*b=a\sim b$ (مقصود از «$\sim$» قدرمطلق تفاضل است)

۳. $a*b=\frac{۱}{۲}(a+b)$

۴. $a*b=b$ یا a

۵. $a*b=a+b+۱$

۶. $a*b=\sqrt{ab}$

۷. $a*b=a+۲b$

۸. $a*b=a^{۲}+b^{۲}$

۹. $a*b=\begin{cases} ۱ & a\geqslant b \text{ اگر} \\ ۰ & a<b \text{ اگر} \end{cases}$

۱۰. $a*b=۲^{a+b}$

۱۱. $a*b=\max\{a, b\}$

۱۲. $a*b=\log(a+b)$

۱۳. عملهای $\square$ و $\bigcirc$ درمجموعهٔ $\{a, b, c, d\}$ با جدولهای زیر تعریف شده‌اند:

$\bigcirc$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\square$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

الف ــ آیا عملهای بالا ویژگی جابه‌جایی دارند؟ اگر دارند، برای اثبات‌هرکدام چندحالت را باید امتحان‌کرد؟

ب ــ آیا این عملها شرکتپذیرند؟ (ازهرجدول سه‌آزمایش‌کافی است.)

۱۴. ۶ تابع به‌شرح زیر تعریف شده‌اند:

$$f_{۱}(x)=x \quad , \quad f_{۲}(x)=\frac{۱}{۱-x} \quad , \quad f_{۳}(x)=\frac{x-۱}{x}$$

$$f_4(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f_5(x)=1-x\ ,\ f_6(x)=\frac{x}{x-1}$$

ثابت کنید که عمل ترکیب تابعها (همنهادگی) درمورد این ۶ تابع شرکتپذیر است، ولی جابه‌جایی نیست.

۱۵. عملهای $\sim$ و $*$ درمجموعهٔ عددهای طبیعی چنین تعریف شده‌اند:

$$a\sim b=|a-b|\ ,\ a*b=a$$

الف- آیا $\sim$ و $*$ ویژگی جابه‌جایی دارند؟

ب- آیا $\sim$ و $*$ شرکتپذیرند؟

ج- آیاعمل $\sim$ روی عمل $*$ توزیعپذیر است؟ ازکدام‌سو؟

د- آیاعمل $*$ روی عمل $\sim$ توزیعپذیر است؟ ازکدام‌سو؟

۱۶. درجبرمجموعه‌ها عمل $*$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$X*Y=(X\cap Y)\cup(x'\cap y')$$

ثابت کنید کــه عمل $\cup$ روی $*$ از هردوسو توزیعپذیراست.

۱۷. ثابت کنید که درمجموعهٔ عددهای طبیعی، عمل‌ضرب روی عمل $\sim$ (که‌در تمرین ۱۵ تعریف شد) توزیعپذیر است.

۱۸. اگر درمجموعهٔ عددهای طبیعی $a\,H\,b$ بـزرگترین شمارندهٔ مشترک b، a، و $a\,L\,b$ کوچکترین مضرب مشترک a , l باشد، ثابت کنید که H روی L توزیعپذیر است، و برعکس عمل L روی عمل H توزیعپذیر است.

۱۹. هرگاه a و b دوعدد حقیقی دلخواه باشند، وعمل $\sim$ در R^2 چنین تعریف شود:

$$(x,y)\sim(w,z)\ \text{iff}^{21}\ \exists k\in z\ :\ x-w=ka,\ y-z=kb$$

ثابت کنید که «$\sim$» یک‌رابطه هم‌ارزی است ونمودار چنددستهٔ هم‌ارزی را رسم کنید.

۲۱- iff یعنی اگر و فقط اگر.

۹

کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها

۹ـ۱: مجموعهٔ جوابها

هر گاه یك ضابطه زیرمجموعه‌ای از یك مجموعهٔ مرجع را معرفی کند، این زیرمجموعه را مجموعهٔ جواب آن ضابطه می‌نامند. این ضابطه ممکن است یك شرط، یا یك معادله، یا یك نامساوی باشد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۴: اگر $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعهٔ جوابهای ضابطه‌های زیر را بیابید:

الف- x عدد زوج است

ب- $۵+x>۱۰$

ج- $۵+x<۱۰$

د- $۳x+۱=۱۰$

هـ- $x+۴=۱۵$

و- x مجذور کامل است

حل: مجموعه‌های جواب عبارتند از:

الف- $\{۲,۴,۶,۸\}$

ب- $\{۶,۷,۸,۹\}$

ج- $\{۱,۲,۳,۴\}$

د- $\{۳\}$

هـ- ϕ

و- $\{۱,۴,۹\}$

مسئلهٔ نمونهٔ ۴۵: هر گاه مجموعهٔ عددهای طبیعی مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعهٔ جوابهای گزاره‌نماهای زیر عبارتند از:

$\{x|۳x-۱=۵\} \Rightarrow$ مجموعهٔ جواب $=\{۲\}$

$\{x|x+۲>۵\} \Rightarrow \{۴,۵,۶,\ldots\}=$ مجموعهٔ جواب

$\{x|x+۶=۶+x\} \Rightarrow N=$ مجموعهٔ جواب

$\left\{x\left|\frac{۱}{۲}x=۵\right.\right\} \Rightarrow \{۱۰\}=$ مجموعهٔ جواب

$\{x|۵x-۱=۲\} \Rightarrow \phi=$ مجموعهٔ جواب

۹-۲: استنتاج

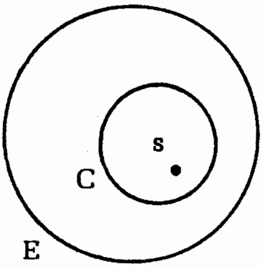
به‌استدلال و نتیجه‌گیری زیر توجه کنید:

۱. نمك طعام کلرور است.

۲. تمام کلرورها جسمهای مرکبند.

نتیجه: نمك طعام یك جسم مرکب است.

گزاره‌های ۱ و ۲ را مقدمات استنتاج (HYPOTHESES یا PREMISES) وگزارهٔ ۳ را نتیجه (CONCLUSION) می‌نامند. این نوع دلیل‌آوری معتبر (VALID) است و ارزش گزارهٔ ۳ را با T (مخفف کلمهٔ TRUTH) نشان می‌دهیم. با نمودار ون می‌توانیم اعتباراین نتیجه‌گیری رانشان‌دهیم. درشکل زیر E مجموعهٔ‌جسمهای



شکل ۴۶

مرکب است و C مجموعهٔ کلرورها. بنابراین، C زیر مجموعهٔ E است. s (نمك طعام) عضوی است از مجموعهٔ C. پس، s عضوی است از مجموعهٔ E. به‌بیانی منطقیتر:

$$۱) \rightarrow s \in C$$

$$۲) \rightarrow C \subset E$$

بنابراین، از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود $s \in E$، یعنی ۳.

توجه کنید که گزاره‌های فرض باید حتماً درست باشند، درغیراین‌صورت نتیجه غلط خواهد بود. مانند مثال زیر:

۱. پاریس در ایالت اوهایو $(OHIO)$ است.

۲. اوهایو در امریکاست.

نتیجه: پاریس در امریکاست.

می‌بینیم که نتیجه غلط است. علت غلط بودن نتیجه این است که فرض ۱ غلط است. همچنین، نباید به‌درستی پاسخ اکتفا کرد. مثلاً، ازگزاره‌های $۷>۴$ و $۳=۷$ نتیجه می‌شود که $۳>۴$. این نتیجه حقیقتی را بیان می‌کند، ولی این استدلال غلط است، زیرا $۳\neq۷$ است.

به‌مثال دیگری توجه کنید:

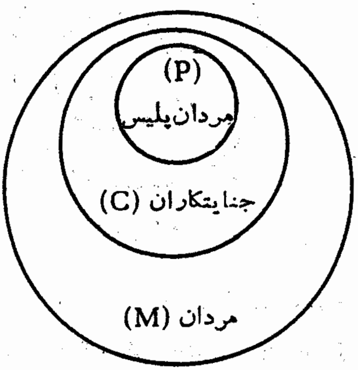
۱. همهٔ جنایتکاران مرد هستند.

۲. همهٔ پلیسهای مرد جنایتکارند.

نتیجه: همهٔ پلیسهای مرد، مرد هستند. یعنی:

$$P\subset C\subset M \Rightarrow P\subset M$$

می‌بینیم که نتیجه درست است ونمودار ون هم این موضوع را نشان می‌دهد، ولی استدلال غلط است، زیرا مردان پلیس، مردانی شرافتمندند.



شکل ۴۷

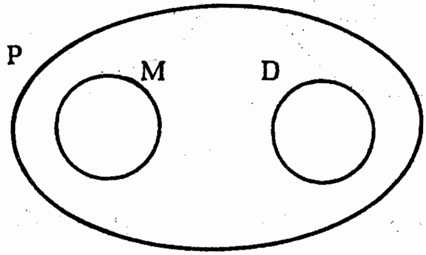
گاهی، نمودار ون و جبر مجموعه‌ها برای کنترل استنتاج بی‌فایده نیستند، به‌مثال زیر توجه کنید:

۱. بعضی از مسئله‌ها، مسئلهٔ ریاضی هستند.

۲. بعضی از مسئله‌ها مشکل هستند.

نتیجه: بعضی از مسئله‌های ریاضی مشکل هستند.

نتیجه به‌طور قطع صحیح است. همچنین، مقدمه‌های استنتاج نیزصحیح هستند.ولی این استدلال را نمی‌توان صحیح دانست یا به گفتهٔ منطقیون، این استدلال معتبر نیست.فرض می کنیم که Pمجموعهٔ مسئله‌ها، وM مجموعهٔ مسئله‌های ریاضی وD مجموعهٔ همهٔ مسئله‌های مشکل باشد.(شکل۴۸). لزومی‌ندارد‌که M وD متقاطع باشند، یعنی ممکن است $M\cap D$ تهی باشد،کــه نتیجه را نفی می کند. درعین‌حال امکان دارد‌که $M\cap D\neq\phi$ باشد. حالا، مسئله را از راه جبر مجموعه‌ها بررسی می کنیم.



شکل ۴۸

واضح است که: $P\cup M=P$

همچنین: $P\cup D=P$

$$(P\cup M)\cap(P\cup D)=P\cap P=P \qquad (۱)$$

ولی طبق عکس توزیعپذیری $\cup$ در $\cap$ داریم:

$$(P\cup M)\cap(P\cup D)=P\cup(M\cap D) \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$P\cup(M\cap D)=P \qquad (۳)$$

می بینیم که اگر $M\cap D=\phi$، برابری ۳ برقـرار خواهد بود (قانون اتحاد). بنا براین، هیچ لزومی ندارد‌که اشتراك M و D غیرتهی باشد.

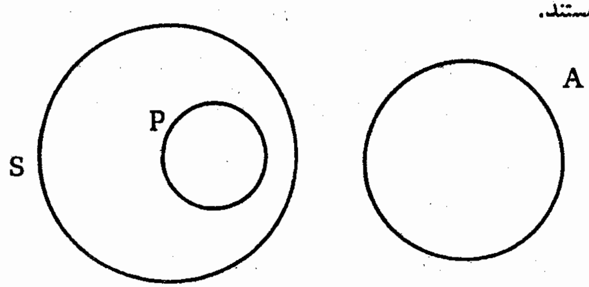
به‌مثال زیر توجه کنید:

۱. همهٔ فیزیکدانها دانشمندند.

۲. هیچ دانشمندی هنرمند نیست.

نتیجه: هیچ فیزیکدانی هنرمند نیست.

البته این استدلال کاملاً صحیح است، ولی نتیجه مورد سؤال قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم P مجموعهٔ فیزیکدانها و S مجموعهٔ دانشمندان و A مجموعهٔ هنرمندان باشد. به‌نمودار زیر توجه کنید که طبق فرضهای بالا تهیه شده است و نشان می‌دهد که P و A دو مجموعهٔ جدا ازهم هستند.



شکل ۴۹

این مثال را ازراه جبرمجموعه‌ها نیزمی‌توان بررسی کرد:

$$P \cap S = P$$

و
$$S \cap A = \phi$$

درنتیجه:
$$\begin{aligned} P \cap A &= (P \cap S) \cap A \\ &= P \cap (S \cap A) \\ &= P \cap (\phi) \\ &= \phi \end{aligned}$$

دوباره به‌همان نتیجه می‌رسیم که هیچ فیزیکدانی هنرمند نیست. پس، هم ازراه نمودار ون، وهم با استفاده ازجبر مجموعه‌ها، نتیجه گرفتیم که استنتاج صحیح است. ولی آیا این استنتاج مورد سؤال قرارنمی‌گیرد؟

۹ـ۳: گزاره‌ـرابط

درمثالهای قبل روشن شدکه هرنتیجه‌ای نمی‌تواند معتبرباشد. اعتبار یک استنتاج باید با

قانونهای ویژه‌ای بررسی‌شود که‌کار منطق است. ولی‌در‌این زمینه، جبرمجموعه‌ها با انتخاب علامتها وروابطها بسیار به‌منطق کمك می‌کند و در‌این راه به‌راهی‌دست پیدا می‌کنیم که‌آن را جبر بول یا جبر کلیدی نامیده‌اند.

در منطق برای هر گزاره یکی از حرفهای لاتین را انتخاب می‌کنیم. مثلاً: مجموعهٔ بازیکنان فوتبال را با f ومجموعهٔ بازیکنان تنیس را با t نشان می‌دهیم. اگـراحمد هم تنیس وهم فوتبال بازی‌کند، احمد متعلق است به $f \cap t$.

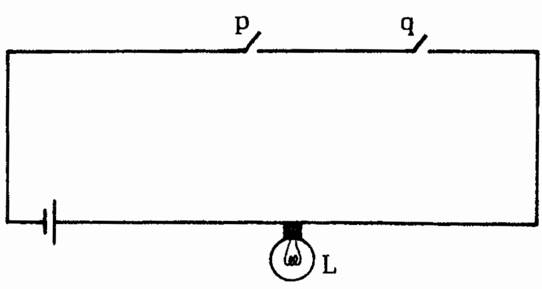
نقیض‌گزارهٔ a را با $\sim a$ نشان می‌دهیم که مجموعه‌ای است جـدا از a. علامتهایی که‌گزاره‌ها را با هم مربوط می‌کنند رابط نام دارند. مثلاً، رابط $\vee$ علامت فاصل، ورابط $\wedge$ علامت عاطف است. علامت $\rightarrow$ نشانهٔ ارتباط دو گـزاره به‌شکل شرطی است وعلامت $\leftrightarrow$ نشان می‌دهد که دو گزاره از دوسو شرطی هستند[۲۲]. اینك فرض می‌کنیم که:

$$P =$$ کلید p بسته است

$$Q =$$ کلید q بسته است

$$C =$$ الکتریسیته جریان دارد

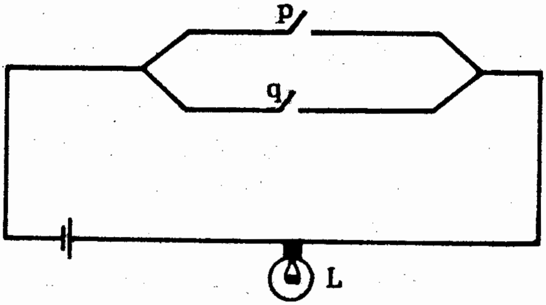
ترکیب $C \leftrightarrow (P \wedge Q)$ نشان می‌دهد کـه اگـر کلیدهای p و q بسته باشند (شکل ۵۰) الکتریسیته جریان دارد ولامپ L روشن می‌شود. برعکس، اگرلامپ روشن باشد، کلیدهای p و q بسته هستند.



شکل ۵۰

همچنین، ترکیب $C \leftrightarrow (p \vee q)$ نشان می‌دهد که اگر یکی از دو کلید p یا q بسته باشند (شکل ۵۱) لامپ روشن می‌شود. برعکس، روشن بـودن لامپ دلیل این است که دست‌کم یکی ازدوکلید p و q بسته هستند.

۲۲ـ برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به‌کتاب منطق و استدلال ریاضی ازهمین مجموعه.



شکل ۵۱

پس، نتیجه می‌گیریم که کلیدهای متوالی شبیه ترکیب عطفی و کلیدهای موازی شبیه ترکیب فصلی هستند و این مقدمه‌ای است برای بحث دربارهٔ جبر بول یا جبر کلیدی[۲۳].

۲۳ــ برای اطلاع بیشتر از این مباحث به کتاب درسهایی از جبرجدید از همین مجموعه رجوع کنید.

خودآزمایی

اکنون، با توجه به‌آنچه دراین کتاب آموخته‌اید، به‌پرسشهای زیرپاسخ دهید. توجه داشته باشیدکه دراین پرسشها برای هرسؤال چهارجواب پیشنهاد شده است، که فقط یکی ازآنها صحیح است. جواب صحیح را بیابید.

۱. حاصل عبارت $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup B')$ برابر است با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ A' د‌ـ B'

۲. حاصل عبارت $(A'\bigcup B)\bigcap(A'\bigcup B')$ برابر است با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ A' د‌ـ B'

۳. حاصل عبارت $(A\bigcup B)\bigcap(A'\bigcup B)\bigcap(A'\bigcup B')$ برابراست با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ $A\bigcap B$ د‌ـ $A'\bigcap B$

۴. حاصل عبارت $[A\bigcup(B\bigcap C)]\bigcap(A\bigcup B'\bigcup C')$ برابراست با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ A' د‌ـ B'

۵. کدام‌یك از عبارتهای زیربرابر $A\bigcap B$ است؟

الف‌ـ $A\bigcup(A\bigcap B)$ ب‌ـ $B\bigcap(A\bigcup B)$

ج ـ $A\bigcup(A'\bigcap B)$ د ـ $A\bigcap(A'\bigcup B)$

۶. کدام‌یك از عبارتهای زیربرابر $A\bigcup B$ است؟

الف‌ـ $A\bigcup(A\bigcap B)$ ب‌ـ $B\bigcap(A\bigcup B)$

ج ـ $A\bigcup(A'\bigcap B)$ د ـ $A\bigcap(A'\bigcup B)$

۷. عبارت $A\bigcap(A-B')$ برابر است با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ $A\bigcap B$ د‌ـ $A\bigcup B$

۸ . عبارت $[A\bigcup(A\bigcap B)]-[B\bigcap(B\bigcup A)]$ برابراست با:

الف‌ـ $A\bigcap B$ ب‌ـ $A\bigcup B$ ج‌ـ $A\bigcap B'$ د‌ـ $A\bigcup B'$

۹ . عبارت $(A'\bigcup B'\bigcup C')\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)$ برابراست با:

الف‌ـ M ب‌ـ ϕ ج‌ـ A د‌ـ B

۱۰. عبارت $[A\bigcap(A'\bigcup B)]\bigcup[B\bigcap(A'\bigcup B')]$ برابراست با:

الف‌ـ A ب‌ـ B ج‌ـ A' د‌ـ B'

● اگر $P=\{a, b, c, d, e\}$ و $Q=\{b, c, e, f, g, h\}$ و $R=\{a, b, d, e, g\}$ باشد، جواب تستهای ۱۱ تا ۲۰ را بیابید. مجموعهٔ مرجع عبارت است از:

$$M=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

۱۱. $P\Delta(Q\Delta R)$ برابراست با:

الف‌ـ $\{a, c, d\}$ ب‌ـ $\{b, e, f, h\}$

ج ـ $\{a, c, d\}$ د ـ $\{f, h\}$

(Δ علامت تفاضل متقارن‌است. به‌بخش ۳ـ۶ مراجعه کنید.)

۱۲. $P\bigcap(Q\Delta R)$ برابراست با:

الف‌ـ $\{b, e, f, h\}$ ب‌ـ $\{f, h\}$

ج ـ $\{a, d, f, g, h\}$ د ـ $\{a, c; d\}$

۱۳. $P\bigcup(Q\Delta R)$ برابراست با:

الف‌ـ $\{a, b, c, d, e, f, h\}$ ب‌ـ $\{a, c, d\}$

ج ـ $\{a, d, f, g, h\}$ د ـ $\{b, e, f, h\}$

۱۴. $P\Delta(Q\bigcap R)$ برابراست با:

الف‌ـ $\{a, c, d\}$ ب‌ـ $\{b, e, f, h\}$

ج ـ $\{a, c, d, g\}$ د ـ $\{f, h\}$

۱۵. $P\Delta(Q\bigcup R)$ برابراست با:

الف- $\{f, h\}$ ب- $\{b, e, f, h\}$

ج - $\{a, c, d, g\}$ د - $\{f, g, h\}$

۱۶. $(P\Delta Q)\bigcup(P\Delta R)$ برابراست با:

الف- $\{f, h\}$ ب- $\{a, c, d, f, g, h\}$

ج - $\{a, c, d\}$ د - $\{a, c, d, h\}$

۱۷. $(P\Delta Q)\bigcap(P\Delta R)$ برابراست با:

الف $\{c, g\}$ ب- $\{f, h\}$

ج - $\{a, c, d\}$ د - $\{a, c, d, f, g, h\}$

۱۸. $(P\bigcup Q)\Delta(P\bigcup R)$ برابراست با:

الف- $\{a, c, d\}$ ب- $\{a, d\}$

ج - $\{f, h\}$ د - $\{c, g\}$

۱۹. $(P\bigcap Q)\Delta(P\bigcap R)$ برابراست با:

الف- $\{f, h\}$ ب- $\{c, g\}$

ج - $\{a, d\}$ د - $\{a, c, d\}$

۲۰. $(P\Delta Q)\Delta R$ برابراست با:

الف- $\{b, e, f, h\}$ ب- $\{a, c, d\}$

ج - $\{h, h\}$ د - $\{c, g\}$

۲۱. کدام‌یك ازرابطه‌هایی که باگزاره‌نماهای زیر درمجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف می‌شوند، تراگذر نیست؟

الف- $x \leqslant y$ ب- x می‌شمرد y را

ج - $x+y=۱۰$ د - x و y در تقسیم بر ۳ همنهشت هستند.

۲۲. درمجموعهٔ $E=\{۱,۲,۳\}$ رابطه‌های زیرتعریف شده‌اند، کدام‌یك تراگذرنیست؟

الف- $R_۱=\{(۱,۲) , (۲,۲)\}$ ب- $R_۲=\{(۱,۲)\}$

ج- $R_۳=\{(۱,۱)\}$

د - $R_۴=\{(۱,۲)\ ,\ (۲,۳)\ ,\ (۱,۳)$ و $(۲,۱)\ ,\ (۱,۱)\}$

۲۳. درمجموعهٔ $E=\{۱,۲,۳\}$ کدام‌یك ازرابطه‌های زیرضد متقارن است؟

الف- $R_۱=E\times E$

ب - $R_۲=\{(۱,۲)\ ,\ (۲,۱)\ ,\ (۲,۲)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۲,۳)\}$

ج - $R_۳=\{(۱,۱)\ ,\ (۲,۳)\ ,\ (۳,۲)\}$

د - $R_۴=\{(۱,۲)\}$

۲۴. رابطه‌های زیردرمجموعهٔ عددهای طبیعی تعریف شده‌اند. کدام رابطه متقارن‌است؟

الف- $x<y$ ب- x می‌شمرد y را

ج - $x+y=۱۰$ د - $x+۲y=۱۰$

۲۵. فرض می‌کنیم که R رابطه‌ای تعریف‌شده درمجموعهٔ A باشد. کدام‌یك از گزاره‌های زیرنادرست است؟

الف- اگر R متقارن باشد، $R^{-۱}$ نیزمتقارن است.

ب - اگر R ضد متقارن باشد، $R^{-۱}$ نیزضد متقارن است.

ج - اگر R متقارن باشد، $R\cap R^{-۱}=\phi$.

د - اگر R بازتابی باشد، $R\cap R^{-۱}\neq\phi$.

۲۶. فرض می‌کنیم که R و S دورابطهٔ متفاوت باشند که در مجموعهٔ A تعریف شده‌اند. کدام‌گزاره نادرست است؟

الف- اگر R و S هردو تراگذر باشند، $R\cup S$ نیزتراگذر است.

ب - اگر R و S هردو تراگذر باشند، $R\cap S$ نیزتراگذر است.

ج - اگر R و S هردوضد متقارن باشند، $R\cap S$ نیزضد متقارن است.

د - اگر R و S هردو بازتابی باشند، $R\cup S$ نیزبازتابی است.

۲۷. فرض می‌کنیم که R و S دورابطهٔ متفاوت باشند که درمجموعهٔ A تعریف شده‌اند. کدام‌گزاره نادرست است؟

الف- اگر R و S هردو بازتابی باشند، $R\cap S$ نیزبازتابی است.

ب - اگر R و S هردو متقارن باشند، $R\cup S$ نیزمتقارن است.

ج - اگر R و S هردو ضد متقارن باشند، $R\cap S$ نیزضد متقارن است.

د - اگر R و S هردو ضد متقارن باشند، $R\cup S$ نیزضد متقارن است.

۲۸. کدام‌یك از رابطه‌های زیر تابع نیست؟

الف- $\{(x, y)|x^۲+y^۲=۲۵ \ , \ y\leqslant ۰\}$

ب - $\{(x, y)|$ پدر x است $y\}$

ج - $\{(x,y)| \ x^۲+y^۲=۲۵ \ , \ x\geqslant ۰\}$

د - $\{(x, y)|y^۳=x\}$

۲۹. کدام‌یك ازرابطه‌های زیر تابع است؟

الف- $\{(x, y)|$ پسر x است $y\}$

ب - $\{(x, y)|y=|x|\}$

ج - $\{(x, y)|y^۴=x\}$

د - $\{(x, y)|x^۲+y^۲=۲۵\}$

۳۰. درمجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، رابطهٔ R چنین تعریف شده است:

$$R=\{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۲,۳), (۳,۲)\}$$

کدام‌یك از گزاره‌های زیر درست است؟

الف- R بازتاب است، ولی تراگذر نیست.

ب - R بازتاب است، ولی متقارن نیست.

ج - R نه‌متقارن است، ونه‌تراگذر.

د - R یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳۱. کدام‌یك ازعملهای زیرروی دیگری توزیعپذیراست؟

الف- $\cup$ روی Δ ب- $\cap$ روی Δ

ج - Δ روی $\cup$ د - Δ روی $\cap$

۳۲. اگر مجموعهٔ توانی‌یك مجموعهٔ k عضوی دارای ۳۰۷۲ عضوکمتر ازمجموعهٔ‌توانی یك مجموعهٔ $k+۲$ عضوی باشد، k برابراست با:

الف- ۱۱   ب- ۱۰   ج- ۹   د- ۱۲

● هرگاه $f=\{(a,۱), (b,-۲), (c,۳)\}$ و $g=\{(a,-۲), (b,۰), (c,۱)\}$، تعیین‌کنید پاسخ تستهای ۳۳ تا ۳۷ کدام است:

۳۳. $f+۲g$

الف- $\{(a,-۳), (b,-۲), (c,۵)\}$

ب - $\{(a,۳), (b,۲), (c,۴)\}$

ج - $\{(a,-۲), (b,-۲), (c,-۲)\}$

د - $\{(a,۳), (b,۲), (c,۴)\}$

۳۴. $f\cdot g-۲f$

الف- $\{(a,۲), (b,-۵), (c,۳)\}$

ب - $\{(a,۳), (b,-۲), (c,-۵)\}$

ج - $\{(a,-۳), (b,۲), (c,۵)\}$

د - $\{(a,-۴), (b,۴), (c,-۳)\}$

۳۵. $f+۴$

الف- $\{(a,۴), (b,-۸), (c,۱۲)\}$

ب - $\{(a,۵), (b,۲), (c,۷)\}$

ج - $\{(a,۱), (b,-۲), (c,۲)\}$

د - $\left\{\left(a,\frac{۱}{۴}\right), \left(b,-\frac{۱}{۲}\right), \left(c,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$

۳۶. $|f|$

الف- $\{(a,۳), (b,۲), (c,-۵)\}$

ب - $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

ج - $\{(a,۱), (b,۲), (c,۳)\}$

د - $\{(a,-۱), (b,۲), (c,-۳)\}$

۳۷. $f^۲$

الف- $\{(a,-۲), (b,-۴), (c,۶)\}$

ب - $\{(a,۱), (b,۴), (c,۶)\}$

ج - $\{(a,-۱), (b,-۴), (c,-۹)\}$

د ـ $\{(a,۱), (b,۴), (c,۹)\}$

۳۸. هرگاه $f=\{(۱,۳), (۲,۵), (۳,۳), (۴,۱), (۵,۲)\}$
و $g=\{(۱,۴), (۲,۱), (۳,۱), (۴,۲), (۵,۳)\}$
دوتابع از $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به X باشند gof کدام است؟

الف ـ $\{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۳), (۴,۵), (۵,۳)\}$

ب ـ $\{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۱), (۴,۴), (۵,۱)\}$

ج ـ $\{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵)\}$

د ـ $\{(۱,۱), (۳,۲), (۱,۳), (۴,۵), (۱,۵)\}$

۳۹. با مفروضات سؤال ۳۸، fog کدام است؟

الف ـ $\{(۱,۱), (۳,۲), (۱,۳), (۴,۵), (۱,۵)\}$

ب ـ $\{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵)\}$

ج ـ $\{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۳), (۴,۵), (۵,۳)\}$

د ـ $\{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۱), (۴,۴), (۵,۱)\}$

۴۰. درمجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ داریم:

$$f=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۴ & ۵ \end{pmatrix} ، \quad g=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$$

fog برابر است با:

الف ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۵ & ۴ \end{pmatrix}$ ب ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$

ج ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۳ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ د ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$

۴۱. در سؤال شمارهٔ ۴۰، gof برابر است با:

الف ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$ ب ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$

ج ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۵ & ۴ \end{pmatrix}$ د ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}$

۴۲. درمجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ داریم:

$$g=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۵ & ۴ \end{pmatrix} \quad , \quad f=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$h=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$$

$ho(gof)$ کدام است؟

الف ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۵ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$ ب ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۲ & ۳ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$

ج ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ د ـ $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۲ & ۵ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$

۴۳. تابعهای f و g و h همگی حقیقی هستند، کدام یك از گزاره‌های زیر غلط است؟

الف ـ وارون تابع $f(x)=x^۲$، تابع $f^{-۱}(x)=\sqrt{x}$ است.

ب ـ وارون تابع $g(x)=x+۱$، تابع $g^{-۱}(x)=x-۱$ است.

ج ـ وارون تابع $h(x)=|x-۱|$ عبارت است از:

$$h^{-۱}(x)=\begin{cases} x+۱ & \text{اگر } x\geqslant ۱ \\ ۱-x & \text{اگر } x<۱ \end{cases}$$

د ـ وارون تابع $f(x)=\sin x$ تابع $f^{-۱}(x)=\operatorname{Arc}\sin x$ است.

پاسخ تمرینها

تمرین ۱

۱ . {شوال ,رمضان ,شعبان ,رجب ,ربیع‌الثانی ,ربیع‌الاول ,صفر ,محرم
ذیحجه‌الحرام ,ذیقعدةالحرام}

۲ . {زمستان ,پاییز ,تابستان ,بهار}.

۳ . $\{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹\}$

۴ . $\{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰\}$

۵ . $A = \{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰\}$

۶ . $B = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹\}$

۷ . $C = \{۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷\}$

۸ . $D = \{-۱, ۸, -۲۷, ۶۴, -۱۲۵, ۲۱۶, -۳۴۳\}$

۹ . $\{۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷\}$

۱۰ . $\{۲, ۵, ۱۳, ۱۷, ۲۹, ۳۷, ۴۱, ۵۳, ۶۱, ۷۳, ۸۹, ۹۷\}$

۱۱ . $\{۱۳, ۱۴\}$

۱۲ . $\{۱, ۱۱, ۱۰۱, ۱۱۱, ۱۰۱۱, ۱۱۰۱, ۱۰۰۰۱, ۱۰۰۱۱, ۱۰۱۱۱, ۱۱۱۰۱\}$

۱۳ . $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۱۵, ۲۱, ۲۳, ۲۷, ۳۵, ۳۷, ۴۵, ۵۱, ۵۳, ۵۷\}$

۱۴ . $\{۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ۱۲۵, ۲۱۶, ۳۴۳, ۵۱۲, ۷۲۹, ۱۰۰۰\}$

۱۵ . ϕ

۱۶ . $A = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۹}, \frac{۳}{۲۸}, \frac{۴}{۶۵}, \frac{۵}{۱۲۶}, \frac{۶}{۲۱۷}, \frac{۷}{۳۴۴}, \frac{۸}{۵۱۳}, \frac{۹}{۷۳۰}, \frac{۱۰}{۱۰۰۱}\right\}$

۱۷ . $B = \left\{\frac{۳}{۲}, ۱, \frac{۷}{۱۰}, \frac{۹}{۱۷}, \frac{۱۱}{۲۶}, \frac{۱۳}{۳۷}, \frac{۳}{۱۰}, \frac{۱۷}{۶۵}, \frac{۱۹}{۸۲}, \frac{۲۱}{۱۰۱}\right\}$

۱۸ . $C = \left\{\frac{-۱}{۲}, ۱, \frac{-۵}{۴}, \frac{۷}{۵}, \frac{-۹}{۶}, \frac{۱۱}{۷}, \frac{-۱۳}{۸}, \frac{۱۵}{۹}, \frac{-۱۷}{۱۰}, \frac{۱۹}{۱۱}\right\}$

۱۹. $D=\left\{۱, \frac{-۳}{۵}, \frac{۹}{۲۹}, \frac{-۲}{۱۱}, \frac{۱۵}{۱۲۷}, \frac{-۹}{۱۰۹}, \frac{۷}{۱۱۵}, \frac{-۱۲}{۲۵۷}, \frac{۲۷}{۷۳۱}, \frac{-۵}{۱۶۷}\right\}$

۲۰. $E=\left\{\frac{-۳}{۲}, \frac{-۶}{۵}, \frac{۹}{۱۰}, \frac{۱۲}{۱۷}, \frac{-۱۵}{۲۶}, \frac{-۱۸}{۳۷}, \frac{۲۱}{۵۰}, \frac{۲۴}{۶۵}, \frac{-۲۷}{۸۲}, \frac{-۳۰}{۱۰۱}\right\}$

۲۱. $F=\{x|x=۲n+۱, n\in N\}$

۲۲. $G=\{x|x=n^۲+۱, n\in N\}$

۲۳. $H=\{x|x=n^۲, n\in N\}$

۲۴. $K=\{x|x=n^۳+۱, n\in N\}$

۲۵. $L=\{x|x=(-۱)^{n+۱}(۲n+۱), n\in N\}$

۲۶. $M=\left\{x|x=(-۱)^{n+۱}\cdot\frac{۱}{n^۲+۱}, n\in N\right\}$

۲۷. $N=\{x|x=(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}(n^۲+۱), n\in N\}$

۲۸. $P=\left\{x|x=(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}\cdot\frac{۱}{n^۴+۱}, n\in N\right\}$

۲۹. $Q=\{x|x=(-۱)^{n+۱}(n^۳+۲), n\in N\}$

۳۰. $T=\{x|x=n^۳-۱, n\in N\}$

۳۱. تهی نیست و $\left\{\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}\right\}=$ مجموعهٔ جواب

۳۲. ϕ

۳۳. ϕ

۳۴. $\{۱۰۵, ۱۱۲, ۱۱۹, ۱۲۶, ۱۳۳, ۱۴۰, ۱۴۷\}=$ مجموعهٔ جواب

۳۵. نامیدن همهٔ عضوها غیرممکن است، ولی بدزبان ریاضی می‌توان نوشت:

$\{x|x=۱۳۱k, k\in N\}=$ مجموعهٔ جواب

۳۶. ϕ

۳۷. ϕ

۳۸. $\{x|x=(۲k+۱)^۲,\ k\in N\}=$ مجموعهٔ جواب

۳۹. {آزرمیدخت , پوراندخت}

۴۰. ϕ

تمرین ۲

۱. G ۲. E

۳. J ۴. I

۵. H ۶. B

۷. D ۸. K

۹. F ۱۰. L

۱۱. هیچ کدام ۱۲. A و B

۱۳. $۵\in A$ ولی $۵\notin B$.

۱۴. همیشه $\phi\subset A$ است و اگر $A\subset\phi$ باشد، طبق تعریف برابری دومجموعه داریم:

$$A=\phi$$

۱۵.
$$P(A)=\{\phi,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}\}$$

۱۶. $P(S)=\{\{۳\},\{۱,۴\}\{۳,\{۱,۴\}\},\phi\}$

۱۷. $p\in\{p,q,r\}$ ۱۸. $\{p,q,r\}=\{q,r,p\}$

۱۹. $\{p\}\subset\{r,p,q\}$ ۲۰. $S\notin\{p,q,r\}$

۲۱. $\subset$ ۲۲. $\subset$

۲۳. $\subset$ ۲۴. $\subset$

۲۵. $\in$ ۲۶. $\subset$

۲۷. $\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$

۲۸. $\{۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$

۲۹. $\{۱,۲,۳\}$

۳۰. $\{۲,۳,۵,۷,۱۱\}$

۳۱. پنج مجموعه خواهیم داشت که عبارتند از: {سام ,برنا ,سارا ,آیدین}، {برنا ,سارا ,تارا ,آیدین}، {سام ,برنا ,سارا ,تارا}، {سام ,برنا ,تارا ,آیدین}، و {سام ,آیدین ,سارا ,تارا}.

۳۲. {سارا ,سام}، {سارا ,آیدین}، {تارا ,آیدین}، {سارا ,برنا}، {تارا ,برنا}، و {تارا ,سام}.

۳۳. {سام ,برنا ,تارا}، {برنا ,آیدین ,تارا}، و {سام ,آیدین ,تارا}

۳۴. {برنا ,آیدین ,سارا ,تارا}، {سام ,آیدین ,سارا ,تارا}، و {سام ,برنا ,سارا ,تارا}

۳۵. $P(۵)=۲^{۵}=۳۲$

۳۶. درست

۳۷. نادرست

۳۸. درست

۳۹. درست

۴۰. درست

۴۱. محدود

۴۲. نامحدود

۴۳. نامحدود

۴۴. محدود

۴۵. نامحدود

۴۶. نامحدود

۴۷. نامحدود

۴۸. محدود (ϕ)

۴۹. محدود

۵۰. محدود (ϕ)

۵۱. $k=۶$

۵۲. $k=۵$

تمرین ۳

۱. $M-\{f\}$

۲. $\{a, c, e\}$

۳. $\{b, f\}$

۴. $\{b, d, f\}$

۵. $\{f\}$

۶. $\{d, b, f, e, g\}$

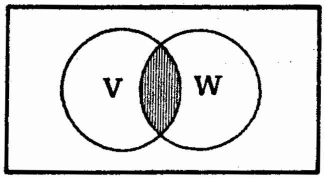
۷. $\{b, e, f, g\}$ ۸. $\{a, c, d\}$

۹. $\{b, d, f, g\}$ ۱۰. M

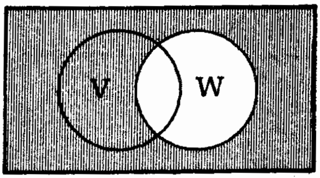
۱۱. فرض می‌کنیم که $x \in A$. چون A و B جدا ازهمند، پس $x \notin B$، یعنی $x \in B'$. در نتیجه:

$$(x \in A \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow A \subset B'$$

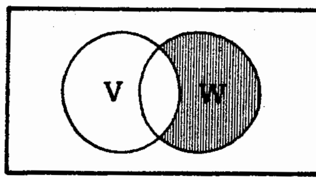
۱۲. در نمودار ۱:



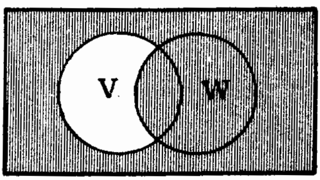
الف



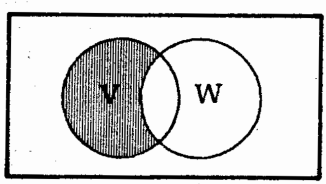
ب



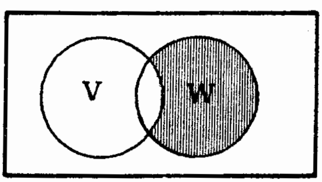
ج



د

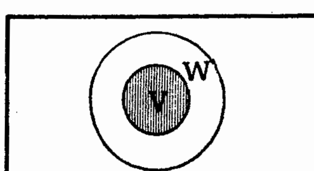


ه

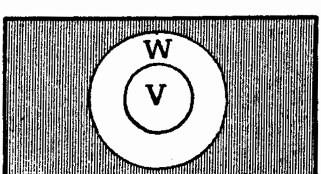


و

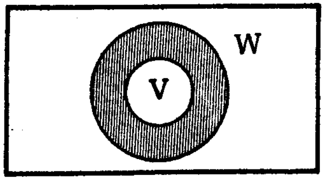
در نمودار ۲:



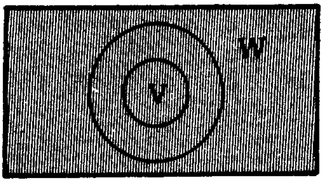
الف



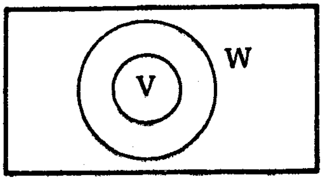
ب



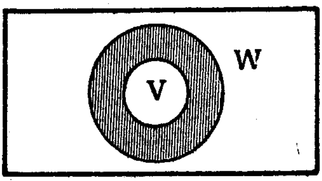
ج



د

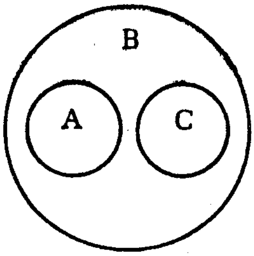


ه

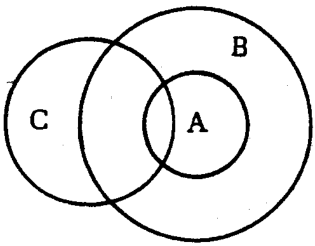


و

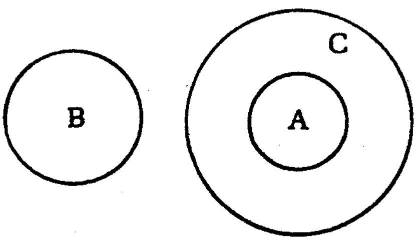
۱۳.



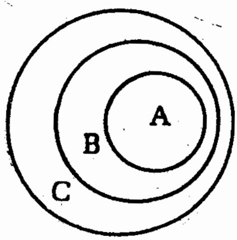
۱۴.



۱۵.



.۱۶



.۱۷ $\supset$

.۱۸ $\supset$

.۱۹ $\supset$

.۲۰ $\subset$

.۲۱ nc

.۲۲ nc

۲۳، ۲۴، و ۲۵. این سه‌پرسش را با عضوگیری ثابت‌کنید.

تمرین ۴

۱. ۸ وسیلهٔ نقلیه فقط نقص چراغ دارند و ۲۸ وسیله فقط یك نقص دارند.

۲. عدهٔ دانش‌آموزان طبق آمار امتحانات ۵۰نفر می‌شود، درحالی‌که عدهٔدانش‌آموزان کلاس ۶۰نفر بوده است.

۳. با روش عضوگیری حل‌کنید، اثبات شامل دوبخش است.

تمرین ۵

۱. $A\times B=\{(-۳,-۴),(-۳,۳),(-۳,۵),(-۱,-۴),(-۱,۳),$

$(-۱,۵),(۱,-۴),(۱,۳),(۱,۵),(۳,-۴),(۳,۳),(۳,۵)\}$

$B\times A=\{(-۴,-۳),(-۴,-۱),(-۴,۱),(-۴,۳),(۳,-۳),$

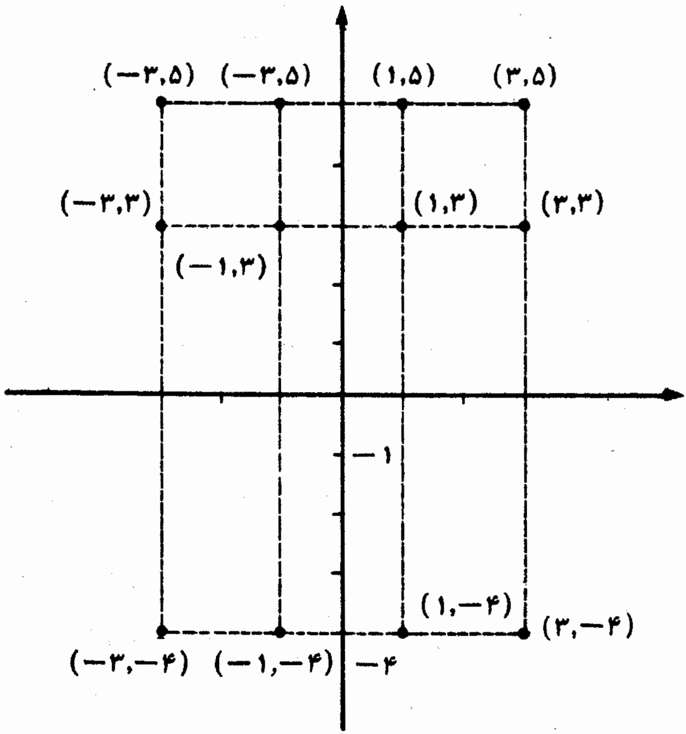
$(۳,-۱),(۳,۱),(۳,۳),(۵,-۳),(۵,-۱),(۵,۱),(۵,۳)\}$

$A\times A=\{(-۳,-۳),(-۳,-۱),(-۳,۱),(-۳,۳),(-۱,-۳),$

$(-۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,۳),(۱,-۳),(۱,-۱),$

$(۱,۱),(۱,۳),(۳,-۳),(۳,-۱),(۳,۱),(۳,۳)\}$

$$B\times B=\{(-۴,-۴),(-۴,۳),(-۴,۵),(۳,-۴),(۳,۳),(۳,۵),(۵,-۴),(۵,۳),(۵,۵)\}$$



۱۰. $A\times B\times C=\{(a,۱,x),(a,۱,y),(a,۲,x)$
$(a,۲,y),(a,۳,x),(a,۳,y)$
$(b,۱,x),(b,۱,y),(b,۲,x)$
$(b,۲,y),(b,۳,x),(b,۳,y)\}$

۱۱. $A\times B=\phi \Rightarrow A=\phi \wedge B=\phi$
$ab=۰ \Rightarrow a=۰ \vee b=۰$

۱۲. $y=۱,\ x=۲$

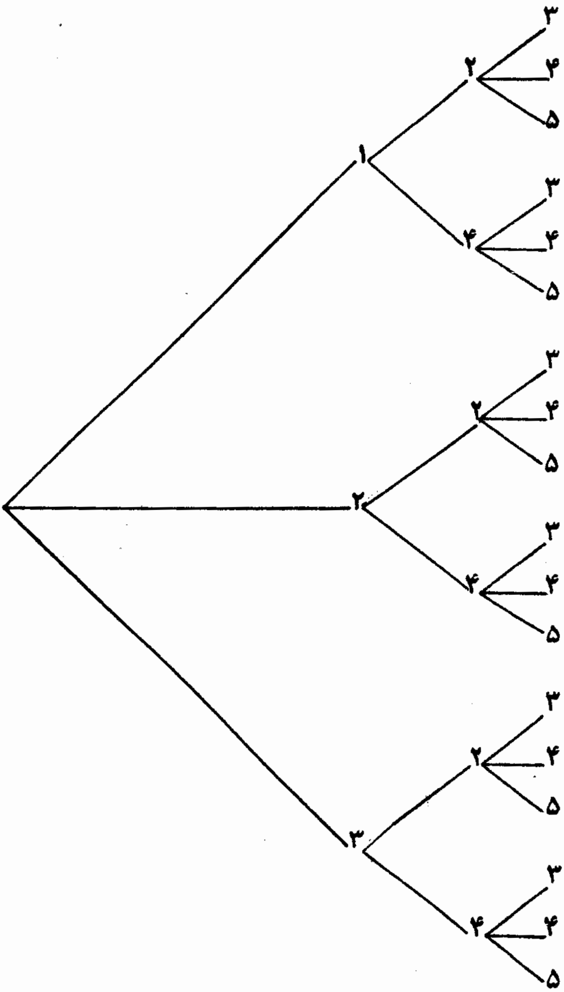
۱۳. $\{(a,۲),(a,۳),(a,۴),(b,۲),(b,۳),(b,۴)\}$

۱۴. $\{(a,۲),(a,۳),(a,۴),(b,۲),(b,۳),(b,۴)\}$

۱۵. $\{(a,۳), (b,۳)\}$

۱۶. $\{(a,۳), (b,۳)\}$

۱۷.



(۱,۲,۳)
(۱,۲,۴)
(۱,۲,۵)
(۱,۴,۳)
(۱,۴,۴)
(۱,۴,۵)
(۲,۲,۳)
(۲,۲,۴)
(۲,۲,۵)
(۲,۴,۳)
(۲,۴,۴)
(۲,۴,۵)
(۳,۲,۳)
(۳,۲,۴)
(۳,۲,۵)
(۳,۴,۳)
(۳,۴,۴)
(۳,۴,۵)

۱۸. $\{(a,۳), (a,۵), (b,۳), (b,۵)\}$

۱۹. $\{(۰,۶)\}$

۲۰. $\left\{\left(۱\frac{۱}{۲},\ ۱\frac{۱}{۲}\right)\right\}$

۲۱. $\{(۶,۰)\}$

۲۲. $\{(۱,۳)\}$

۲۳. $\{(۳,۱)\}$

تمرین ۶

۱. T ‏ ۲. R و S و T ‏ ۳. S

۴. R و S و T ‏ ۵. R و S و T ‏ ۶. R و S و T

۷. R ‏ ۸. R و S و T، به‌شرط آنکه انطباق را حالتی از توازی بدانیم.

۹. R و S و T، به‌شرط آنکه انطباق را حالتی از توازی بدانیم.

۱۰. S ‏ ۱۱. S ‏ ۱۲. T

۱۳. S و T ‏ ۱۴. R و S و T ‏ ۱۵. R و S و T

۱۶. R و S و T ‏ ۱۷. S

۱۸. هیچ یك از ویژگیها را ندارد. ‏ ۱۹. S

۲۰. R و S و T ‏ ۲۱. R و S ‏ ۲۲. R و S و T

۲۳. R و S و T ‏ ۲۴. R و S و T ‏ ۲۵. R و S و T

۲۷. خیر

۳۰. الف- $\{(a, b), (b, a)\}$

ب - $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$

ج - $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

د - $\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b), (b, a), \{a, b)\}$

۳۱. نه، زیرا ویژگی بازتابی ندارد.

۳۲. بله ‏ ۳۷. الف، ب، د، و، ز، ط، ی رابطه‌های هم‌ارزی هستند.

۳۸. ۲،۴،۵،۶،۸،۹،۱۴،۱۵،۱۶،۲۰،۲۲،۲۳،۲۴،۲۵

۳۹. درست ‏ ۴۰. درست ‏ ۴۱. درست

۴۲. نادرست ‏ ۴۳. نادرست ‏ ۴۴. درست

۴۵. نادرست ‏ ۴۶. درست ‏ ۴۷. درست

۴۸. درست

تمرین ۷

۱. الف- تابع است، ب- تابع است، ج- تابع نیست، د- تابع نیست،

هـ ـ تابع است

۲ . الف و ب

۳ . تابع است	۴ . تابع نیست	۵ . تابع است	۶ . تابع نیست
۷ . تابع است	۸ . تابع است	۹ . تابع نیست	۱۰. تابع نیست
۱۱. تابع است	۱۲. تابع نیست	۱۳. تابع نیست	۱۴. تابع نیست
۱۵. تابع نیست	۱۶. تابع است	۱۷. تابع نیست	۱۸. تابع نیست
۱۹. تابع است	۲۰. تابع نیست	۲۱. تابع است	۲۲. تابع است
۲۳. تابع نیست	۲۴. تابع است	۲۵. تابع نیست	

در تمرینهای ۲۶ تا با ۳۵ نخست دامنه، سپس برد معین شده است.

۲۶. یك‌به‌یك، R و R

۲۷. یك به‌یك نیست، R و ۴

۲۸. یك به‌یك، R و R

۲۹. یك به‌یك نیست، R و R^+

۳۰. یك به‌یك، $R-\{۰\}$ و $R-\{۰\}$

۳۱. یك به‌یك نیست، مجموعه عددهای صحیح و $\{۰,۱\}$

۳۲. یك به‌یك نیست، R و R^+

۳۳. یك به‌یك نیست، R و $\{y|y\in R,\ y>۱\}$

۳۴. یك به‌یك نیست، $\{x|-۲\leqslant x\leqslant ۲\}$، $\{y|۰\leqslant y\leqslant ۲\}$

۳۵. یك به‌یك نیست، R و $\{y|۰\leqslant y\leqslant ۱\}$

۳۶. $\{۲,۳,۴,۵\}$ و $\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵}\right\}$

۳۷. الف ـ $f_۴(x)$ ب ـ $f_۳(x)$ ج ـ $f_۱(x)$

د ـ $f_۴(x)$ هـ ـ $f_۱(x)$ و ـ $f_۱(x)$

۳۸. الف ـ $f_۲(x)$ ب ـ $f_۳(x)$ ج ـ $f_۱(x)$

د ـ $f_۱(x)$ هـ ـ $f_۵(x)$ و ـ $f_۶(x)$

ز ـ $f_۱(x)$ ح ـ $f_۱(x)$

۴۲. الف ـ $f+۴=\{(۱,۶),(۲,۱),(۳,۳)\}$

ب- $|f|=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$

ج- $f^{۲}(x)=(f\cdot f)(x)=\{(۱,۴),(۲,۹),(۳,۱)\}$

۴۳. b ۴۴. b ۴۵. b ۴۶. d ۴۷. d

۴۸. $m=۲$

۵۱. $(fog)(x)=\dfrac{۲x}{(x-۱)^{۲}(x+۱)}$, $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{x(x+۱)}{-۲}$, $D=R-\{-۱,۱\}$

۵۵. gof وجود ندارد،ولی fog وجود دارد وضابطه‌اش $(fog)(x)=|x-۱|-۲$ است.

۵۶. gof وجود ندارد و $(fog)(x)=۳-۲|x-۱|$.

۵۷. f و g وارون یکدیگر نیستند، $(fog^{-۱})(x)=\dfrac{۱}{x}$ $(g^{-۱}of)(x)=\dfrac{x}{x+۱}$.

تمرین ۸

۱. هیچ‌کدام ۲. جابه‌جایی ۳. جابه‌جایی ۴. هردو

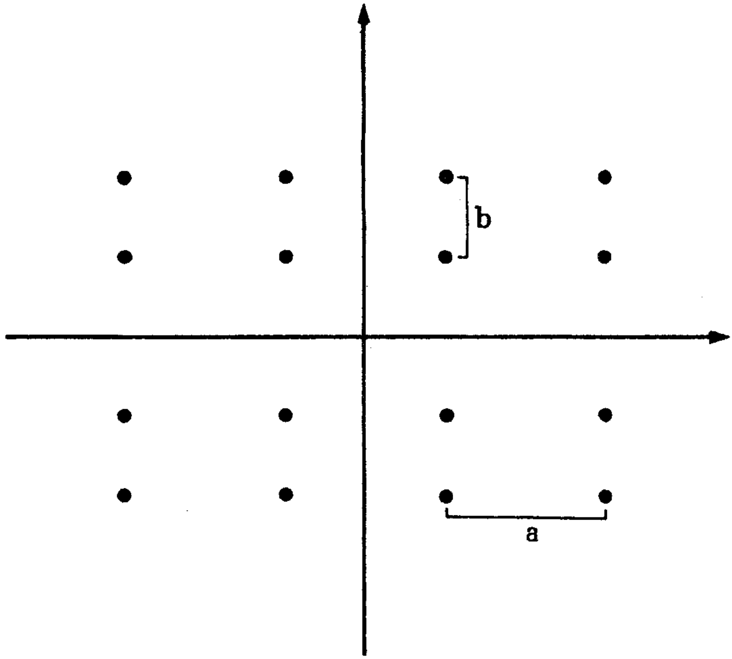
۵. هردو ۶. جابه‌جایی ۷. هیچ‌کدام ۸. جابه‌جایی

۹. هیچ‌کدام ۱۰. جابه‌جایی ۱۱. هردو ۱۲. جابه‌جایی

۱۳. الف- آری ب- ۲۴طریق ج- آری

۱۵. عمل ~ جابه‌جایی است ولی شرکتپذیر نیست، عمل * جابه‌جایی نیست ولی شرکتپذیر است. عمل ~ روی عمل * از هردوسو توزیعپذیر است، ولی عمل * روی عمل ~ تنها ازراست توزیعپذیر است.

۱۹. نمودار صفحهٔ بعد یك دستهٔ هم‌ارزی متداول را نشان می‌دهد . فاصلهٔ بین نقطه‌هایی که در امتداد افقی قرار گرفته‌اند برابر a وفاصلهٔ نقطه‌هایی که درامتداد قائم قرار گرفته‌اند برابر b است.


b
a

پاسخ خودآزماییها

۱. الف	۲. ج	۳. د	۴. الف
۵. د	۶. ج	۷. ج	۸. ج
۹. الف	۱۰. ب	۱۱. ب	۱۲. د
۱۳. الف	۱۴. ج	۱۵. د	۱۶. ب
۱۷. الف	۱۸. ج	۱۹. د	۲۰. الف
۲۱. ج	۲۲. د	۲۳. د	۲۴. ج
۲۵. ج	۲۶. الف	۲۷. د	۲۸. ج
۲۹. ب	۳۰. د	۳۱. ب	۳۲. ب
۳۳. الف	۳۴. د	۳۵. ب	۳۶. ج
۳۷. د	۳۸. ب	۳۹. ج	۴۰. د
۴۱. الف	۴۲. ب	۴۳. الف	

از این مجموعه منتشر شده است:

*** آمار و احتمال**
ترجمه و تألیف جلیل‌الله قراگزلو

*** تصاعدها و لگاریتم**
تألیف عبدالحسین مصحفی

*** جبر تحلیلی(۱)**
تألیف غلامرضا عسجدی

*** سیری در عددهای طبیعی**
تألیف جلیل‌الله قراگزلو

*** عبارتهای جبری**
تألیف عبدالحسین مصحفی

*** مثلثات پایه**
تألیف جلیل‌الله قراگزلو

*** منطق و استدلال ریاضی**
تألیف عبدالحسین مصحفی

تئوری **مجموعه‌ها** در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم میلادی مطرح شد و بنیان بینش ریاضیدانان را دگرگون کرد. از آن پس، ریاضیدانان، به یاری تئوری مجموعه‌ها، توانستند بخشهای به ظاهر گوناگون ریاضیات را به یکدیگر ارتباط دهند.

مجموعه‌ها کتابی است که مقدمات این تئوری را با مثالها وتمرینها و مسئله‌های توصیفی وتستیِ متنوع در اختیار دانشپژوهان علم ریاضیات قرار می‌دهد. خواندن و فهمیدن کتاب به معلومات تخصصی نیاز ندارد. با این حال، آشنایی با منطق ریاضی دانشپژوهانِ ریاضیات را در درک بهتر مفاهیم کتاب یاری می‌کند. کتاب در زمینهٔ این شاخه از علم ریاضیات، از جمله آموزش پیش‌دانشگاهی، خودآموز و مفید است.

ISBN 9789643181529
شابک ۹-۱۵۲-۳۱۸-۹۶۴
انتشارات فاطمی
قیمت: ۶۵۰۰ تومان

انتشارات فاطمی
www.fatemi.ir