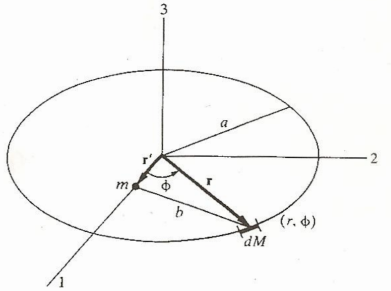
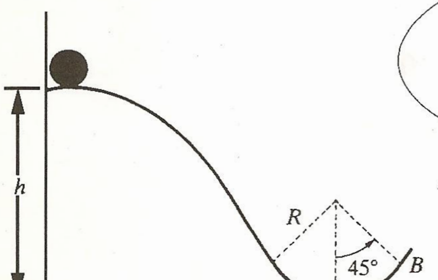
دانشگاه الزهرا
۱۵۹

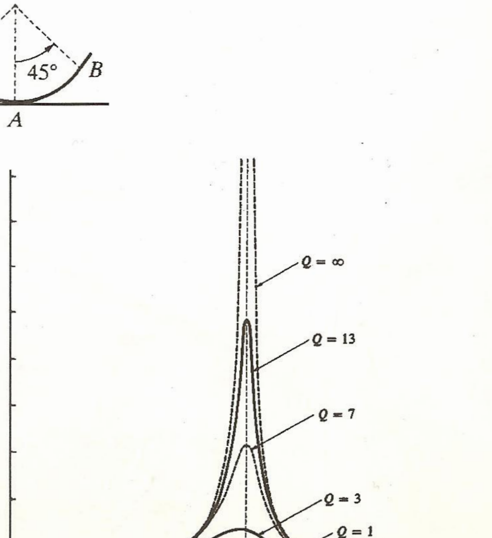
نویسنده: دکتر محمد رضا سرکرده ای

مروری بر مبانی مکانیک کلاسیک

Classical Mechanics







جلد اول

مباحث برگزیده

مکانیک پایه

مروری بر مبانی مکانیک کلاسیک

جلد اول

مباحث برگزیده مکانیک کلاسیک پایه

مؤلف:

دکتر محمدرضا سرکرده‌ای

به نام خدا

پیشگفتار جلد اول

در این مجموعه از قدیمی‌ترین دانش بشر یعنی مکانیک سخن می‌گوییم و به ویژه به بینش نیوتنی می‌پردازیم، و بر اساس قوانین جا افتادهٔ آن در حرکت،سعی می‌کنیم مسائل مکانیک را حل کنیم.

هدف نخست این مجموعه، نمایش و عرضه ایده‌های مهم در مکانیک کلاسیک است، آن طور که فراخور فیزیک امروزی باشد. به واقع اهمیت واقعی مکانیک کلاسیک برای فیزیک پیشگان، پیش از آنکه در گستره وسیع کاربردهای آن باشد، در نقش آن به عنوان پایه‌ای است که مخروط فیزیک نیوتنی بر روی آن بنا شده است. از این‌رو در بررسی تحلیلی مکانیک کلاسیک می‌توان بیشتر بر جنبه‌هایی از فیزیک تأکید ورزید که در مکانیک کوانتومی و نسبیت حائز اهمیت هستند، به ویژه قوانین بقا و رابطه بین تقارن و قوانین بقا که به نحوی در تمام نظریه‌های فیزیکی نقش اساسی دارند. این مهم به ویژه در جلد دوم این مجموعه صورت تحقق به خود می‌گیرد.

یکی از نکات عمده و برجسته این است که چه چیزی و چگونه به دانشجوی فیزیک در سرآغاز تلاش خود بیاموزیم. شاید طبق اعتقاد فاینمن بهترین نحوهٔ آموزش فیزیک موقعی است که رابطه‌ای انفرادی و مستقیم میان دانشجو و یک معلم خوب برقرار باشد، وضعیتی که در آن دانشجو درباره عقاید و ایده‌ها بحث می‌کند، راجع به اشیاءِ اندیشه می‌کند، و درباره آنها سخن می‌گوید. این غیرممکن است که صرفاً با نشستن در یک کلاس درس، یا حتی فقط با حل مسائل و تصحیح آنها بتوان چیزی آموخت. اما در دوران جدید، ما تعداد زیادی دانشجو برای تعلیم داریم که ناگزیریم سعی در یافتن جانشین و جایگزین برای حالت ایده‌آل باشیم.

از آنجا که تمامی قوانین اساسی دنیای فیزیک را نمی‌دانیم و نیز بیان صحیح

قوانین فیزیک درگیر ایده‌های بسیار ناآشنایی است که برای توصیف آنها ریاضیات پیشرفته‌ای مورد نیاز است، بنابراین برای درک معنای حتی یک کلمه به آموزش مقدماتی مفصلی نیاز داریم. از این‌رو تنها می‌توانیم گام به گام جلو برویم. در واقع در هر گام نیز هر چه راکه می‌دانیم تنها نوعی تقریب است چراکه «ما می‌دانیم که تمام قوانین را به واقع نمی‌شناسیم». در متن پیش رو، حرکت گام به گام و پی‌گیری مطالب با توجه به روند تکاملی مکانیک کلاسیک، از مفاهیم ساده به مفاهیم دشوار است.

لازم است یادآور شوم که در بعضی متون فیزیک کلاسیک مانند دوره لاندائو، رهیافت آنها عدم استفاده از روند تاریخی و تکاملی است. آنها از همان ابتدا بر پایه عمومی‌ترین اصول فیزیک کار کرده‌اند، یعنی اصل نسبیت گالیله، و اصل کمترین کنش هامیلتون. اعتقاد آنها بر این است که فقط با این رهیافت به راستی می‌توان یک روش منطقی درست بنا کرد و از تعاریف کمیتهای بنیادی مکانیک پرهیز کرد. به نظر، این روش زمانی مناسب است که شخص آگاهی اولیه را از مبانی ریاضیات و فیزیک داشته باشد و به هر حال در سطح پیشرفته‌تر می‌توان از آن سخن گفت. همچنین برخی را باور بر این است که در نخستین مرحله از دینامیک، یاکمی جلوتر، از انرژی و ماده، شروع کنیم. اما به سبب رعایت ترتیب متعارف و سنتی در متون شناخته شده و نیز اتخاذ شیوه گام به گام، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

عنوان فصلها بر اساس مصوبه‌های متعارف آموزشی انتخاب شده است. شیوه بررسی و نگرش هر فصل مشابه و یکسان بوده است. از مباحث اولیه مکانیک، سینماتیک و حرکت در یک و دو بعد آغاز و سپس به قانون بنیادی $\vec{F}=m\vec{a}$ می‌پردازیم. قوانین اساسی بقای انرژی و اندازه حرکت مطرح می‌شود و از دینامیک ذره راهی به دینامیک سیستم ذرات می‌گشاییم. از دینامیک دوران یا چرخش سخن می‌گوییم. مقدمات تعادل نیروها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مبحث عمده نوسان را مطرح می‌کنیم و سرانجام با بحثی درباره قانون جهانی گرانش جلد اوّل مجموعه را به پایان می‌بریم.

کوشش بر این است که عمدتاً اگر نه همه، لااقل به پاره‌ای پرسشهای مطرح شده

در کتابهایی چون هالیدی پاسخ دهیم و برخی مسائل برگزیده هر فصل با ارائه حل توضیح داده شود، بی‌آنکه در این رهگذر اشاره‌ای مستقیم به پرسشی ویژه شده باشد. یافتن پرسش خاص و پاسخ مربوط به آن از بخش راهنمای پرسشها به دانشجو واگذار می‌شود تا بدین وسیله توانایی خود را در یافتن پرسش خاص و پاسخ متناسب با آن بیازماید.

بدیهی است که یافتن پرسش و پاسخ خاص مرتبط با هم با کمی وسواس و حوصله امکان‌پذیر است. این جستجوی علمی سبب تقویت ذهنی دانشجو می‌شود. شخصاً با تجربه روی تعدادی دانشجو و پس از بحث و گفتگو با آنها این شیوه را برگزیدم؛ چرا که جز این کاری همانند حل‌المسائل صورت می‌گرفت که البته از آن گریزان بودم. ذکر این نکته نیز با ارزش است که بسیاری از پرسشهای کتابهایی چون هالیدی را از چند جنبه می‌توان به آنها نگریست و پاسخ‌گویی به یک سؤال به‌طور عام با در نظر گرفتن تمام جنبه‌ها می‌تواند بیشتر آموزنده باشد. هر چند احاطه به تمامی جهات یک پرسش و پاسخ عمومی شاید در بسیاری موارد از توان علمی نگارنده خارج باشد، اما از سوی دیگر پرداختن به تمامی جنبه‌ها قصه‌ای طولانی می‌شود که خواننده جوان ما را ممکن است زود از مطالعه خسته کند.

این مجموعه در دو جلد ارائه می‌شود. در نخستین جلد آن به بررسی مسائلی در سطح کتابهایی همچون هالیدی و فرنچ و اوهانیان می‌پردازیم. سپس در جلد دوم مسائل مکانیک کلاسیک (تحلیلی) بر اساس کتابهای سایمون و ماریون بررسی می‌شود. و در ادامه کار در همین جلد پاره‌ای از مسائل و مطالب برگزیده از کتابهایی همچون گلدشتین (مکانیک کلاسیک پیشرفته) تحلیل می‌گردد.[۱] جهت آشنایی کامل با مباحث فیزیکی، در ابتدای هر فصل مقدمه‌ای در ارتباط با موضوع فیزیکی آن فصل به تناسب اهمیت موضوع، بیان می‌شود و سپس مسائل مربوط به مباحث گفته شده و نیز مسائلی دیگر از کتابهای هم سطح آنها حل می‌شود و در پایان هر فصل تعدادی مسئله فراخور موضوع

۱. در این باره به پیشگفتار جلد دوم مراجعه کنید.

مورد بررسی برای حل ارائه می‌شود.

در آغاز کار عمدتاً کتاب هالیدی را مد نظر قرار داده‌ام، چراکه باور بسیاری از منتقدان فیزیک پایه بر این است که علیرغم پاره‌ای انتقادها شاید بتوان گفت هنوز بهترین کتاب درسی است که تاکنون در فیزیک مقدماتی نوشته شده است.[1] هر چند خود هالیدی و رزنیک (۱۹۸۰) به نحوی اعتراف کرده‌اند که در ارائه آنها از قوانین حرکت- یعنی همان ارائه سنتی- آشفتگی‌هایی وجود دارد. این مبحثی است که از دیرباز در تدریس فیزیک پایه مطرح بوده است. مثلاً در ارائه مفاهیم مناسبی برای نیرو، جرم و شتاب هنوز اتفاق نظر و توافق همه جانبه وجود ندارد و اغلب به درک و شهود می‌پردازیم تا بینش علمی آموزشی. چنانچه اولری[2] در ۱۹۴۷ می‌نویسد:

«مبحث دینامیک در بیشتر کتب درسی فیزیک عمومی تقریباً به همان صورتی مطرح می‌شود که نیوتن در دو قرن و نیم پیش مطرح کرد. کمیتهای مهم به‌طور صریح تعریف نشده‌اند و بر شهود و تشبیه انسان‌انگارانه بیش از حد لازم تکیه شده است. به‌طور خلاصه بیان این نظریه فاقد دقت و صراحت لازم است.»

یک بخش که بنا بر اعتقاد بعضی از اساتید و دانشجویان، و در دوران شکوفایی فن آوری رایانه‌ای، طرح آن ضروری به نظر می‌رسد، استفاده از رایانه در بررسی مسائل دینامیکی است. رهیافتی جامع بر دینامیک کلاسیکی به کمک رایانه مقوله‌ای است قابل تأمل. امیدواریم بتوانیم حداقل این باب را بگشاییم و پژوهش عمیق‌تر را به فرصتی دیگر موکول کنیم، یعنی در حل مسائل از طریق سنتز روشهای عددی و نمودارهای رایانه‌ای از این فن آوری بهره بگیریم.

در مورد بررسی انتقادی اشاره می‌شود که انتخاب مطالب، نوع کار، و شیوه نگارش در این مجموعه عمدتاً به منزله نوعی نقد و بررسی تلقی شده است. البته روند انتقادی شاید در مورد جلد اول کمتر مشاهده می‌شود چراکه با توجه به مطالب گفته شده در بالا پذیرا شده‌ام که همچنان متن هالیدی هنوز از شایسته‌ترین متون مکانیک مقدماتی

---

1. Robert Weinstock: Am. J. Phys., 29,698 (1961).

2. A. J. O'Leary; Am. J. Phys., 15,336 (1947).

کلاسیک است و سعی شده که بافت و ساختار عمومی کتاب همچنان حفظ شود. فقط در جاهایی که احتما لاً نارسایی‌هایی از دید نگارنده وجود دارد به رهیافت‌های دیگری نیز متوسل شده‌ام. روند نقد و کنکاش موضوعات عمدتاً در جلد دوم بهتر بـه چشـم می‌خورد چراکه اساساً کتاب خاصی مد نظر نبوده وکوشش بر این است که با مراجعه به مراجع مختلف موضوع به نحوی شفاف انتقال یابد. اساساً آنچه در کل این مجموعه مشاهده می‌شود تلویحاً روش انتخابی و سلیقه نگارنده را به عـنوان الگـوی بـرگزیده نوشتاری برای تدریس و مطالعه مکانیک کلاسیک نشان می‌دهد: طرح و ارائه به‌گونه‌ای به خود وانهاده است که شیوه انتخاب و نقد و بررسی را در خود دارد.

با این امید که مجموعه حاضر در ادامه سنگ پایه تجربه‌ای تازه در بخشی عمده از فیزیک مقدماتی و پیشرفته دانشگاهی باشد آن را آغاز می‌کنیم، اما بی‌هیچ تردید خالی از اشتباه نیست و امیدوارم در مسیر خود با یادآوری صحیح و انتقاد علمی دانشجویان و استادان عزیز فیزیک به راه تکامل افتد و جای واقعی خود را بازیابد.

و باز امیدوارم که جز این باور خطایی دیگر و لغزشی عمدی در ارائه کار نـباشد، وگرنه به روایت زنده‌یاد اخوان ثالث: «... خطا نسلم اگر جز این خطای دیگری دارم». و یا:

گر خطا گفتیم اصلاحش تو کُـن   مصلحی تو ای تو سلطان سُـخُن

محمدرضا سرکرده‌ای

۱۳۸۶

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۲: بردارها

فصل ۳: حرکت در یک بعد

فصل ۴: حرکت در یک صفحه

فصل ۵: دینامیک ذره I

فصل ٦: دینامیک ذره II

فصل ۷: کار و انرژی

فصل ۸: پایستگی (بقای) انرژی)

فصل ۹: مرکز جرم- بقای اندازه حرکت خطی

فصل ۱۰: برخورد

فصل ۱۱: سینماتیک دورانی

فصل ۱۵: نوسان

فصل ۱۶: گرانش

عنوان **صفحه**

فصل ۱

اندازه‌گیری، خطاهای فیزیکی و حسابهای تقریبی

۱ـ۱ـ مقدمه

انسان هنگام رویارویی با طبیعت ـ به منظور شناخت و آگاهی بر ویژگیهای آن که هدف غایی فلسفه نیز هست ـ به کمک حواس خود فرآیندهای گوناگون را در پرتو نظریه‌ای پذیرفته شده به محک تجربه و عمل می‌گذارد، و در حین عمل بینش خود را نسبت به نظریه پذیرفته شده‌اش حک و اصلاح می‌کند، تا در جریان تکامل نتایج پذیرفتنی به دست آورد. در این رهگذر، ویژگیهای هیچ پدیده‌ای را بدون انجام تجربه نمی‌توان در پناه یک نظریه صرف پذیرفت و نیز هیچ تجربه و آزمایش به یقین بیرون از مجال نظریه‌ای محکم و گسترده نخواهد بود.

با توجه به این مطالب فیزیک دانشی است تجربی، یعنی بخشی از تلاش انسان در کنار طبیعت به کمک تجربه. تجربه یگانه پایگاه سنجش خصوصیات پدیده‌های فیزیکی است. از طریق آزمایش کمیت‌های عددی معرف ویژگیهای پدیده‌های گوناگون را می‌یابیم و از قیاس با داده‌های پیشین و تعمیم آن قانونی فیزیکی به وجود می‌آوریم، یا میزان سازگاری نتایج پیش‌بینی شده توسط یک نظریه را با تجربه تحقیق می‌کنیم. آنچه

در این دگرگونی و تحول چشمگیر است، نیاز انکارناپذیر فیزیک به دنیای تجربه و اندازه‌گیری است. از این‌رو، هر جا سخن از دانشی تجربی است ـ و فیزیک از این گونه است ـ پای اندازه‌گیری به میان می‌آید. بنابراین آزمایش فیزیکی، به سخنی، به عدد درآوردن پدیده‌های فیزیکی است. بدین ترتیب بنا به گفته‌ای فیزیک را می‌توان «دانش ارقام» نامید.

در این فصل کوشش می‌شود مطالبی چون خطاهای فیزیکی، حسابهای تقریبی (با تأکید بر محاسبه ارقام با معنی)، معادلهٔ ابعادی، تا آنجاکه بیشتر در فیزیک آزمایشگاه با آنها سروکار داریم، به روشنی بیان شود. بالاخره در پایان فصل چند جدول شامل ثابتهای فیزیکی، و دستگاه واحدهای معمول جهانی در فیزیک گنجانده می‌شود که در مراجعات بعدی در آزمایشگاهها و دیگر درسها نیاز دانشجویان را تا حد امکان برطرف سازد.

۱ـ۲ـ خطاهای فیزیکی

بررسی پدیده‌های فیزیکی نیازمند آزمایش است. هر آزمایش یا کیفی است یا کمی. فنری را از نقطه‌ای می‌آویزیم. به آن وزنه‌هایی وصل می‌کنیم. اگر به وزنه‌ها بیفزاییم، کشیدگی در فنر افزایش می‌یابد. کشیده شدن فنر در اثر وزنه‌ها یک پدیده فیزیکی و میزان افزایش طول فنر، کمیت فیزیکی است. پس «هر خاصیت سنجش‌پذیر را کمیت می‌گوییم».

سنجش یا اندازه‌گیری یک کمیت تعیین دقیق اندازه آن بر حسب یکای مربوطه است. نتیجه به دست آمده در هر سنجش به علل گوناگون با مقدار واقعی اندازه‌گرفتنی تفاوت دارد. این اختلاف را «بیراهی» یا «خطا» می‌نامیم. در اندازه‌گیریهای فیزیکی نیازمند دانستن دقت سنجش هستیم چرا که از هدر رفتن وقت آزمایشگر و نیز سنجشهای بیهوده اضافی جلوگیری می‌کند. آزمایشگر باید بداند که نتیجه اندازه‌گیری که با روش و وسایل معین انجام‌گرفته تا چه اندازه قابل اطمینان است و در صورت

امکان چگونه می‌توان این نتیجه را دقیقتر به دست آورد. همچنین آگاهی از حدود خطا به طرح روش مناسب و انتخاب نوع اسباب اندازه‌گیری کمک می‌کند تا دقت نتیجه آزمایش از حد معینی کمتر نشود.

۱ـ۲ـ۱ـ علل خطا و انواع آن

به‌طور کلی می‌توان عوامل ایجادکننده خطای فیزیکی را به صورت زیر خلاصه کرد:

الف) تغییرات ذاتی یا نهادی کمیت مورد اندازه‌گیری: مثلاً، هنگام اندازه‌گیری دمای یک کوره خود دما کاملاً ثابت نیست، یا آنجا که سخن از تجربهٔ یافتن یک خط دقیق بیناب هستیم، عملاً پهنای طبیعی خط ظاهر می‌شود.

ب) عیب روش اندازه‌گیری: مثلاً، در سنجش گرمای ویژه مایع اگر مایع مورد آزمون به عنوان جسم گرم به کار رود، مقداری از آن تبخیر می‌شود و نتیجه آزمایش دقیق نخواهد شد.

پ) عدم مهارت و سهل انگاری آزمایشگر: مثلاً، ممکن است آزمایشگر بر اثر خستگی یا بی‌میلی خواندن اسبابها را به خوبی انجام ندهد.

ت) عیب و نقص اسباب اندازه‌گیری: مثلاً، فرسودگی اسباب یا بدی تنظیم آن نتایج اندازه‌گیری را از مقدار واقعی آنها دور می‌کند.

حال می‌پردازیم به بررسی خود خطا. به‌طور کلی، خطاها را می‌توان به چهار دسته متمایز تقسیم کرد:

۱) خطاهای شخصی: منشأ این خطاها در شخص آزمایشگر است. از موارد برجسته آن می‌توان به‌گونه‌های زیر اشاره کرد:

میزان آزمودگی شخص ـ عدم دقت در تنظیم اسباب ـ خطای ناشی از پارالاکس (خطای حاصل از تغییر مکان ناظر، که تغییر مکان ظاهری جسم مورد آزمایش را سبب می‌شود).

۲) خطاهای اسبابی: این خطا اغلب هنگامی به وجود می آید که اسباب را در شرایط نامتعادل به کار بگیریم. مثلاً، اگر خط کشی آهنی برای ۲۰ درجه سانتیگراد مدرج شده باشد، اما در دمای ۵ درجه سانتیگراد از آن استفاده شود، نتایج اندازه گیری دقیق نخواهد بود.

۳) خطاهای سیستماتیک: خطای حاصل از هر نوع نقص ساختمانی اسباب را می‌گوییم، مانند خطای ناشی از بدی تنظیم اسباب، عیب طریقه سنجش، بدی طرز درجه‌بندی کردن. معمولاً این خطا در یک جهت است بدین معنا که اندازه کمیت مورد آزمایش را همیشه در یک جهت، مثبت یا منفی، تغییر می‌دهد. مثلاً در اندازه‌گیری با خط کشی که انتهای طرف صفر آن فرسوده باشد تمام نتایج، بر حسب نوع فرسودگی، همواره بزرگتر یا همواره کوچکتر از مقدار واقعی خواهد بود.

۴) خطاهای تصادفی: این نوع خطا معمولاً در اثر شرایط و عواملی به وجود می آید که از حدود اختیار آزمایشگر خارج است. موارد عمده آن چنین است:

خطای ناشی از قضاوت در خواندن اسبابهای اندازه‌گیری- خطای ناشی از متغیر بودن شرایط آزمایش، مثلاً، تغییر دمای محیط در آزمایشهای حرارتی- خطای مربوط به عوامل غیرمهار مانند انحرافهای عقربه گالوانمتر در آزمایشهای الکتریسیته در اثر لرزشهای خفیف ساختمان- خطای ناشی از ثابت نبودن کمیت مورد اندازه‌گیری در حدود دقت مورد نظر. مثلاً، اندازه‌گیری ولتاژ برق شهر با دقت یکهزارم ولت ممکن نیست چرا که ولتاژ برق شهر هیچگاه تا این اندازه ثابت نیست.

هرگاه به وسیله یک اسباب معین و در شرایط و حالتهای یکسان، کمیت معینی را چندین بار اندازه بگیریم، اختلاف نتایج بیشتر به سبب وجود خطاهای تصادفی است. به ویژه در سنجشهای دقیق و در مواقع تکرار اندازه‌گیریها این نوع خطا ظاهر می‌شود، و معمولاً با روشهای آماری برآورد می‌شود.

در پاره‌ای از کتابها خطاها را تحت دو نام متمایز گروه‌بندی می‌کنند: خطای سیستماتیک و خطای تصادفی.

مثال ۱ـ۱ـ فرض کنید دورهٔ نوسان آونگ را با ساعت اندازه می‌گیریم، و اندازه‌گیری چندین بار تکرار می‌شود. خطای موجود در به کار انداختن و خواباندن ساعت، بی‌نظمی‌های کوچک در حرکت آونگ، همگی تأثیری خواهند داشت که سبب ایجاد خطای تصادفی می‌شوند. حال اگر علاوه بر این، ساعت کند یا تند کار کند نتایج خیلی متفاوت خواهند بود. این خطای سیستماتیک است.

۱ـ۲ـ۲ـ خطای مطلق و نسبی

فرض کنید اندازه واقعی کمیتی $X_\circ$ باشد (توجه کنید که مقدار $X_\circ$ هیچ وقت بر ما معلوم نیست). اگر نتیجه به دست آمده از اندازه‌گیری را X بنامیم، اختلاف میان نتیجه به دست آمده از سنجش و مقدار واقعی یعنی:

$$\Delta X=|X_\circ-X| \qquad (۱ـ۱)$$

«خطای مطلق» نامیده می‌شود. یادآور می‌شویم که مقدار ΔX نیز هرگز بر ما معلوم نیست چرا که در غیر این صورت خطا محسوب نمی‌شود، و چون گفتیم مقدار واقعی هرگز معین نیست پس ΔX مثبت یا منفی است. معمولاً به صورت قدر مطلق نوشته و آن را بیشترین حد خطایی که در اندازه‌گیری رخ می‌دهد در نظر می‌گیریم و به همین سبب «خطای مطلق ماکزیمم» نامیده می‌شود. در این صورت، می‌توان مطمئن بود که $X_\circ$ مقدار واقعی کمیت، میان $X+\Delta X$ و $X-\Delta X$ قرار دارد.

خطای مطلق از جنس کمیت اندازه‌گرفتنی است پس واحد همان کمیت را دارد. خطای مطلق به تنهایی نمی‌تواند دقت سنجش را نشان دهد و باید دید که این خطا در اندازه‌گیری چه مقدار از کمیت وجود دارد. مثلاً، اگر در سنجش طولی برابر ۱۰ متر خطای مطلق برابر یک سانتیمتر باشد، مثل این است که در هر متر یک میلیمتر خطا وجود دارد. اگر همین خطای مطلق یک سانتیمتر در سنجش طول ۲ متر ایجاد شود، مانند این است که در هر متر ۵ میلیمتر خطاست. بنابراین، دقت اندازه‌گیری آزمایش اول پنج برابر دقت اندازه‌گیری دومی است. به بیان دیگر، خطای آزمایش اول پنج برابر کمتر از

خطای اندازه‌گیری دوم است. بنابراین، برای آنکه بتوانیم دو یا چند سنجش را با هم مقایسه کنیم دانستن خطای مطلق کافی نیست. از این رو، خطای نسبی را تعریف می‌کنیم که عبارتست از نسبت خطای مطلق به مقدار واقعی کمیت. اما، چون باز مقدار واقعی کمیت را نمی‌دانیم پس خطای نسبی را به صورت نسبت خطای مطلق به مقدار حاصل از اندازه‌گیری تعریف می‌کنیم:

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\text{خطای مطلق}}{\text{مقدار واقعی کمیت}} = \frac{\Delta X}{X_\circ}$$

یا

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\text{خطای مطلق}}{\text{مقدار به دست آمده از اندازه‌گیری}} = \frac{\Delta X}{X} \qquad (۱\text{-}۲)$$

از آنجاکه خطای نسبی، نسبت بین دو کمیت هم‌جنس است عددی مطلق بوده مقدار آن با تغییر یکای اندازه‌گیری تغییر نمی‌کند. هر چه مقدار دقیق خطای نسبی کمتر باشد، سنجش دقیقتر انجام گرفته است. این خطا معمولاً با درصد بیان می‌شود.

۱-۲-۳- خطای مطلق ماکزیمم و خطای مطلق میانگین

فرض می‌کنیم آزمایشگر خطاهای مربوط به دستگاه را حذف کرده باشد و اسباب آزمایش به حد کافی درست باشد، و نیز خطاهای شخصی نباشد، با وجود این مقداری از خطاهای تصادفی باقی می‌ماند. با این شرایط اگر سنجش را چند بار تکرار کنیم و میانگین بگیریم بسیاری از خطاهای موجود از بین می‌رود. مثلاً، فرض می‌کنیم نتایج حاصل از n اندازه‌گیری $X_۱, X_۲, ..., X_n$ باشد: مقدار میانگین آنها، بنابر آنچه در آمار و روشهای آماری می‌بینیم، چنین به دست می‌آید:

$$\overline{X} = \frac{X_۱ + X_۲ + ... + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n} \qquad (۱\text{-}۳)$$

اگر تعداد آزمایشها، n، بزرگ باشد، مسلماً خطاها همگی در یک جهت نخواهند بود و مقدار واقعی کمیت میان کوچکترین و بزرگترین مقدار $X_۱, X_۲, ..., X_n$ قرار می‌گیرد.

وقتی $\overline{X}$ را به عنوان مقدار واقعی انتخاب می‌کنیم خطای ماکزیممی که مرتکب شده‌ایم بزرگترین مقدار مطلق تفاضلهای زیر است:

$\varepsilon_1=|X_1-\overline{X}|\ ,\ \varepsilon_2=|X_2-\overline{X}|\ ;\ \ldots\ ,\ \varepsilon_n=|X_n-\overline{X}|$

$(X_1-\overline{X}),\ \ldots,\ (X_n-\overline{X})$ خطای ظاهری است و جمع جبری آنها صفر است اما مقدار میانگین $\varepsilon_1\ ,\ \ldots\ ,\varepsilon_n$ صفر نیست و آن را خطای مطلق میانگین می‌نامیم.

$$\overline{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ \ldots+\varepsilon_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}| \qquad (۴\_۱)$$

۱ـ۲ـ۴ـ محاسبهٔ خطا در اندازه‌گیریهای غیرمستقیم

آنچه گفته شد معمولاً طریق محاسبه خطا در سنجشهای مستقیم است. حال می‌پردازیم به محاسبه خطا در اندازه‌گیریهای غیرمستقیم:

برخلاف پاره‌ای کمیتها چون طول و جرم که از طریق مقایسه مستقیم با یکای خودشان اندازه‌گیری می‌شوند، اغلب کمیتها را نمی‌توان مستقیماً اندازه‌گرفت. برای سنجش این گونه کمیتها باید رابطه‌ای ریاضی به کار برد که کمیت مورد سنجش را به کمیتهای دیگر مربوط می‌کند که آن کمیتها مستقیماً سنجش‌پذیرند. آنگاه در حساب خطا از دستورالعمل‌های ریاضی موجود دربارهٔ این کمیتها کمک می‌گیریم.

الف) خطای مجموع دو کمیت

فرض کنید کمیت u برابر مجموع دو کمیت x و y است:

$u=x+y$

اگر خطای مطلق x ، y ، u به ترتیب Δx، Δy، Δu باشد،

$u+\Delta u=(x+\Delta x)+(y+\Delta y)=x+y+\Delta x+\Delta y$

$\Rightarrow \Delta u=(u+\Delta u)-u=x+y+\Delta x+\Delta y-(x+y)=\Delta x+\Delta y$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta x + \Delta y \qquad (۱\text{-}۵)$$

این نتیجه را می‌توان برای تعداد بیشتر کمیتها تعمیم داد. بنابراین:

«خطای مطلق مجموع دو یا چند کمیت برابر است با مجموع خطاهای مطلق آنها».

خطای نسبی چنین است:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y} \qquad (۱\text{-}۶)$$

ب) خطای تفاضل دو کمیت

$$u = x - y$$

$$\Rightarrow \Delta u = (u + \Delta u) - u = (x + \Delta x) - (y + \Delta y) - (x - y)$$

اما چون منظور یافتن خطای مطلق ماکزیمم u است، نتیجه می‌شود که:

$$\Delta u = \Delta x + \Delta y \qquad (۱\text{-}۷)$$

یعنی: «خطای مطلق تفاضل دو کمیت برابر است با مجموع خطاهای مطلق آن کمیتها».

خطای نسبی چنین است:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x-y} \qquad (۱\text{-}۸)$$

پ) خطای حاصلضرب و تقسیم

به‌طور کلی فرض می‌کنیم که کمیت u از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$u = x^{\alpha} . y^{\beta}$$

که در آن α و β دو عدد حقیقی‌اند. x و y کمیتهایی‌اند که مستقیماً اندازه‌گیری می‌شوند. نخست خطای نسبی را به دست می‌آوریم، آنگاه خطای مطلق. برای محاسبه بیراهی نسبی، دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم:

$$u = x^{\alpha} . y^{\beta} \Rightarrow \ln u = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y}$$

سپس به جای دیفرانسیل هر کمیت خطای مطلق ماکزیمم آن را قرار می‌دهیم (یعنی $d\rightarrow\Delta$)؛ به بیان دیگر مثل این است که خطای نسبی هر کمیت را جانشین دیفرانسیل لگاریتم آن کنیم:

$$\frac{\Delta u}{u}=\alpha\frac{\Delta x}{x}+\beta\frac{\Delta y}{y} \qquad (۱\_۹)$$

چنانچه α و β منفی باشند، در رابطهٔ آخر در تعین $\frac{\Delta u}{u}$ فقط مقدار مثبت آنها را در نظر می‌گیریم. از این رابطه به راحتی می‌توان خطای مطلق را یافت:

$$\Delta u=u\left(\alpha\frac{\Delta x}{x}+\beta\frac{\Delta y}{y}\right)=x^{\alpha}.y^{\beta}\left(\alpha\frac{\Delta x}{x}+\beta\frac{\Delta y}{y}\right) \qquad (۱\_۱۰)$$

این رابطه را برای وابستگی u به تعداد بیشتری کمیت نیز می‌توان تعمیم داد.

۱_۳_ حسابهای تقریبی (ارقام با معنی)

هر اندازه گیری فیزیکی توأم با تقریب است. یعنی، هرگز نمی‌توان سنجش را صد در صد صحیح دانست. مهمترین عامل این تقریب (یا به گونه‌ای دیگر، دقت) وابسته به دستگاهی است که اندازه گیری به وسیلهٔ آن انجام می‌گیرد. بنابراین، باید نتیجهٔ آزمایش را چنان نوشت که دقت سنجش را نشان دهد.

فرض کنید می‌خواهیم قطر یک سکهٔ ده ریالی را تعیین کنیم. اگر وسیلهٔ اندازه گیری خط کش معمولی باشد نتیجه عددی مانند ۲۱ میلیمتر است (دقت خط کش حدود میلیمتر است)، اما با کولیس می‌توان قطر سکه را برابر ۲۱/۲ میلیمتر به دست آورد یعنی، دقت تا حدود دهم میلیمتر است. حال اگر وسیله‌ای بیابیم که بتواند قطر سکه را تا صدم میلیمتر اندازه بگیرد نتیجه عددی است مانند ۲۱/۲۱ میلیمتر.

اکنون بدون آنکه به نوع وسیلهٔ اندازه گیری توجه کنید، فقط به نتیجه‌های به دست آمده نگاه کنید: ۲۱، ۲۱/۲، ۲۱/۲۱، میلیمتر. از این عددها چه نتیجه می‌گیرید؟ بدون دانستن نوع وسیلهٔ سنجش و بی آنکه آزمایشگر شیوهٔ آزمایش را برای ما بیان کند، تنها از دقیق شدن به این عددها می‌توان دریافت که دقت اندازه گیری بار اول یک میلیمتر، بار دوم یک دهم میلیمتر، و دفعهٔ سوم یک صدم میلیمتر است. از این‌رو

می‌گوییم عدد اول، دو رقم با معنی دارد (۱ و ۲)، عددد دوم، سه رقم (۲ و ۱ و ۲)، و عدد سوم، چهار رقم (۱ و ۲ و ۱ و ۲). در ضمن چون قطر واقعی سکه را نمی‌دانیم، و هرگز به این مقدار واقعی دست نخواهیم یافت، پس آخرین رقم با معنی، در حالی که ضامن درستی ارقام پیش از خود است، و خود جزء این ارقام به حساب می آید دقیقاً معلوم نیست و آن را «رقم مشکوک» می‌خوانیم پس می توان گفت که هر عدد فیزیکی دارای نوسانی است که این نوسان را رقم مشکوک معلوم می‌کند. مثلاً، در اندازه‌گیری قطر سکه وقتی نتیجه را به صورت ۲۱ میلیمتر می‌نویسیم رقم ۱ مشکوک است و این عدم اطمینان یک میلیمتر است (گاه نیم میلیمتر). در اندازه‌گیریهای دوم و سوم حدود نوسان به ترتیب یک دهم، و یک صدم (گاهی نصف این مقادیر) میلیمتر است.

اگر اندازه‌گیری اول را به صورت ۲۱/۰ میلیمتر بنویسیم، یعنی توانسته‌ایم قطر سکه را تا دهم میلیمتر اندازه بگیریم. در حالی که با خط کش معمولی نمی‌توان با چنین دقتی اندازه‌گیری کرد. لازم به یادآوری است که صفرهای پیش از ارقام جزء ارقام با معنی نیست اما صفرهای بعد از ارقام می‌تواند به حساب ارقام با معنی منظور گردد. اگر نتیجه بالا را به صورت ۰/۰۰۲۱ بنویسیم باز دو رقم با معنی داریم. صفرهای پیش از رقم ۲ فقط برای تعیین محل ممیز اعشاری است. در واقع جای ممیز اثری در تعداد ارقام با معنی ندارد و تنها نشان می‌دهد که یکای کمیت تغییر کرده است. چنانچه جرم جسمی را اندازه بگیریم و نتیجه ۷۵۰۰گرم باشد ممکن است دو رقم آخر جزء ارقام با معنی باشد و ممکن است نباشد. اگر صفرها جزء ارقام با معنی نباشد رقم ۵ مشکوک است بنابراین دقت اندازه‌گیری حدود ۱۰۰گرم است. چنانچه نتیجه را به صورت $۷/۵۰ \times ۱۰^{۳}$گرم بنویسیم سه رقم با معنی داریم و دقت اندازه‌گیری حدود ۱۰گرم است. می توان نتیجه را به صورت $۷/۵۰۰ \times ۱۰^{۳}$گرم نوشت که در این حالت چهار رقم با معنی داریم و دقت حدود یک گرم است. باز به همین علت است که برای درست نشان دادن نتیجه آزمایش از توانهای ده استفاده می‌کنیم.

۱-۳-۱-گرد کردن اعداد

باید به خاطر داشت که هر عدد فیزیکی تنها می‌تواند دارای یک رقم مشکوک باشد. بنابراین وقتی در محاسبات به عددی برخورد می‌کنیم که بیش از یک رقم مشکوک دارد، لازم است از سمت راست یک یک ارقام مشکوک زائد را حذف کنیم تا فقط یک رقم مشکوک باقی بماند. به این عمل «گرد کردن» می‌گوییم. اگر رقمی که می‌خواهیم حذف کنیم از پنج بزرگتر باشد به رقم پیش از آن یک واحد می‌افزاییم، چنانچه این رقم ۵ باشد به رقم پیش از آن توجه می‌کنیم، اگر این رقم فرد باشد یک واحد بیشتر می‌خوانیم و اگر زوج باشد رقم ۵ را حذف می‌کنیم بدون آنکه به رقم پیشین دست بزنیم. بالاخره در صورتی که رقم از ۵ کوچکتر باشد آن را حذف می‌کنیم بی‌آنکه به رقم پیشین از آن چیزی بیفزاییم.

مثال: اعداد زیر را گرد می‌کنیم به‌طوری که هر کدام تنها یک رقم اعشاری داشته باشد:

۱۵۷/۷۵ ← ۱۵۷/۸

۴۸۳/۳۲ ← ۴۸۳/۳

۵۷/۷۴۶ ← ۵۷/۸

۱۲/۶۵ ← ۱۲/۶

۱-۳-۲-جمع و تفریق ارقام با معنی

عمل جمع یا تفریق را به صورت معمولی انجام می‌دهیم بعد به حاصل نگاه می‌کنیم اگر حاصل بیش از یک رقم مشکوک داشته باشد آنها را از سمت راست یک یک گرد می‌کنیم تا نتیجه فقط دارای یک رقم مشکوک باشد.

در تعیین ارقام با معنی حاصل جمع یا تفریق از قاعدهٔ زیر کمک می‌گیریم:

قاعدهٔ یک: حاصل جمع (تفریق) یک رقم مشکوک با (از) هر رقم دیگر خود رقمی است مشکوک. اگر حاصل جمع دو رقمی باشد تنها رقم راست آن مشکوک خواهد بود.

چند مثال:

مثال ۱ـ۲ـ قانون کیرشف در مورد شدت جریان به صورت $I=I_1+I_2+...$ نوشته می‌شود. فرض کنید I_1 را با دستگاه دقیقی (میلی آمپر متر) اندازه گرفته‌ایم و عدد ۲۲۰ میلی آمپر به دست آمده است. I_2 و I_3 را با آمپر متر اندازه گرفته نتیجه، ۲/۰ آمپر و ۳/۴ آمپر بوده است. هرگاه بدون در نظر گرفتن ارقام با معنی طبق قانون کیرشف آنها را جمع کنیم خواهیم داشت: $۲/۰ + ۳/۴ = ۰/۲۲۰۰ = ۵/۶۲۰$ آمپر

عدد ۵/۶۲۰ نشان می‌دهد دقت سنجش جریان تا هزارم آمپر بوده است، در حالی که می‌دانیم فقط I_1 را توانسته‌ایم با چنین دقتی اندازه بگیریم و در دو مورد دیگر دقت تنها تا دهم آمپر بوده است. پس برای آنکه جواب صحیح را به دست آوریم و نتیجهٔ محاسبه واقعیت را نشان دهد می‌نویسیم:

$$۲/\bar{۰} + ۳/\bar{۴} + ۰/۲۲\bar{۰} = ۵/\bar{۶}\bar{۲}\bar{۰} = ۵/۶ \text{ آمپر}$$

مثال ۱ـ۳ـ $۵۸/۰ + ۰/۰۰۳۸ + ۰/۰۰۰۰۱ = ?$

فعلاً تا فراگیری کامل، روی ارقام مشکوک هر عدد خطی کوچک قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{l} ۵۸/\bar{۰} + \\ ۰/۰۰۳\bar{۸} \\ ۰/۰۰۰۰\bar{۱} \\ \hline ۵۸/\bar{۰}۰\bar{۳}\bar{۸}\bar{۱} \end{array}$$

می‌بینیم حاصل جمع بیش از یک رقم مشکوک دارد. جواب واقعی که باید شامل تنها یک رقم مشکوک باشد پس از گرد کردن ۵۸/۰ می‌شود.

مثال ۱ـ۴ـ

$$\begin{array}{l} ۲۵/۳۴\bar{۰} + \\ ۵/۴۶\bar{۵} \\ ۰/۳۲\bar{۲} \\ \hline ۳۱/۱۲\bar{۷} \end{array}$$

در این مثال چنانکه مشاهده می‌شود ارقام مشکوک زیر هم قرار می‌گیرند و به یقین حاصل بیش از یک رقم مشکوک ندارد و به صورت ۳۱/۱۲۷ نوشته می‌شود.

۱ـ۳ـ۳ـ ضرب و تقسیم ارقام با معنی

الف) ضرب: در ضرب و تقسیم نیز لازم است چنان عمل کنیم که حاصل معرف دقت اندازه‌گیری باشد.

قاعدهٔ دو: حاصلضرب یک رقم مشکوک در هر رقم دیگر رقمی است مشکوک. در صورتی که حاصلضرب دو رقم داشته باشد فقط رقم سمت راست آن مشکوک است.

مثال ۱ـ۵ـ رابطهٔ میان مقاومت سیم، شدت جریانی که از سیم می‌گذرد و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر سیم چنین است: $V=RI$

I شدت جریان، R مقاومت سیم، و V اختلاف پتانسیل الکتریکی است. حال فرض کنید در یک آزمایشگاه مقاومت سیم را اندازه‌گیری کرده‌اید و نتیجه ۲/۳۴ اهم شده، همچنین از سنجش شدت جریان عدد ۱۹۲۸ میلی آمپر به دست آورده‌اید. اگر برای به دست آوردن اختلاف پتانسیل دو عدد را طبق معمول در یکدیگر ضرب کنید حاصل ۴۵۱۱/۵۲۰ میلی ولت است. این نتیجه چنین تصوری را پیش می‌آورد که شما در آزمایشگاه به طریقی اختلاف پتانسیل دو سر سیم را تا چنین دقتی (هزارم میلی ولت) اندازه‌گرفته‌اید حال آنکه واقعیت چنین نیست. پس حاصل باید نمودار دقت اندازه‌گیری شما باشد.

به کمک ارقام مشکوک عمل ضرب را انجام می‌دهیم. بنابر قاعدهٔ دو، ضرب هر رقم مشکوک در یک رقم، رقمی مشکوک می‌دهد (همانند ضرب علامتهای منفی در هم یا در علامت مثبت که در جبر مقدماتی دیده‌ایم). بنابراین:

۱۹۲$\overline{۸}$ ×
۲/۳$\overline{۴}$
———
$\overline{۷}\overline{۷}\overline{۱}$ $\overline{۲}$
۵۷۸$\overline{۴}$ ×
۳۸۵$\overline{۶}$
———
۴۵$\overline{۱}$$\overline{۱}$/$\overline{۵}$$\overline{۲}$

پس از حذف ارقام اضافی با روش گرد کردن نتیجه کلی عدد ۱۰× ۴۵۱ یا ۱۰^{۳}× ۴/۵۱ می‌شود. معمولاً تعداد ارقام با معنی حاصلضرب (همچنین حاصل تقسیم) دو عدد برابر است با تعداد ارقام با معنی عددی که کمترین تعداد ارقام را دارد. یعنی در این مثال عدد ۲/۳۴. این مطلب عمومیت ندارد و بهتر است به همان روش ارقام مشکوک عمل شود.

ب) تقسیم: در عمل تقسیم از قواعد ضرب و تقسیم استفاده می‌شود و عمل تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که تمام ارقام باقیمانده مشکوک باشد.

مثال ۱ـ۶ـ $\qquad$ ۶۹/۵۷:۲/۹۳ =?

عمل تقسیم را تا آنجا که همهٔ رقمهای باقیمانده مشکوک شود ادامه می‌دهیم. بنابراین، با توجه به مفهوم رقم مشکوک و آنچه در ضرب دیدیم نتیجه چنین می‌شود:

۶۹۵۷̄	۲۹۳̄
۵۸۶̄	۲۳/۷۴
۱۰۹̄۷̄	
۸۷۹̄	
۲۱̄۸̄۰̄	
۲۰۵۱̄	
۱̄۲̄۹̄۰̄	
۱۱۷۲̄	
۱̄۱̄۸̄	

رقم ۷ در خارج قسمت ۲۳/۷ مشکوک است اما از آنجا که می‌خواهیم عمل تقسیم با ترتیب بهتری صورت گیرد و واقعاً بدانیم آیا آخرین رقم خارج قسمت ۷ است یا نه، تقسیم را تا یک رقم دیگر پیش می‌بریم. آشکار است این رقم اضافی که ۴ می‌شود خود مشکوک است. رقم اضافی را به روش گرد کردن حذف کنیم. در این مثال چون ۴ کمتر از ۵ است نتیجهٔ تقسیم پس از گرد کردن همان ۲۳/۷ می‌شود.

۱ـ۳ـ۴ـ بستگی میان ارقام با معنی و خطای مطلق و نسبی

هر گاه مقدار تقریبی عددی تا $\frac{۱}{۱۰^{n}}$ در دست باشد آن عدد دارای n رقم اعشار مطمئن خواهد بود. مثلاً، اعداد ۳/۱۴۱۵ و ۳/۱۴۱۶ هر کدام چهار رقم اعشار صحیح و مطمئن دارند.

«هر گاه عددی معرف یک کمیت فیزیکی باشد و این عدد n رقم با معنی داشته باشد خطای مطلق کمیت مورد نظر از $\frac{۱}{۱۰^{n-۱}}$ کوچکتر یا تقریباً برابر آن است و برعکس». مثلاً در مثال بالا هر دو عدد ۳/۱۴۱۵ و ۳/۱۴۱۶ پنج رقم با معنی دارند و بیراهی مطلق در هر دو عدد از $\frac{۱}{۱۰^{۴}}$ کوچکتر (یا حدود آن) است.

حال اعداد ۷۲۳۵۸، ۷۲۳۵/۸ و ۷۲۳/۵۸ را در نظر بگیرید. همهٔ این اعداد دارای ۵ رقم با معنی هستند منتها تعداد ارقام اعشاری آنها با هم تفاوت دارد. خطای مطلق این اعداد به ترتیب حدود ۱، $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰}$ است. اما خطای نسبی هر سه عدد با هم برابر است.

$$\frac{\Delta x_{۱}}{X_{۱}}=\frac{۱}{۷۲۳۵۸}<\frac{۱}{۷\times۱۰^{۴}}$$

$$\frac{\Delta x_{۲}}{X_{۲}}=\frac{۰/۱}{۷۲۳۵/۸}=\frac{۱}{۷۲۳۵۸}<\frac{۱}{۷\times۱۰^{۴}}$$

$$\frac{\Delta x_{۳}}{X_{۳}}=\frac{۰/۰۱}{۷۲۳/۵۸}=\frac{۱}{۷۲۳۵۸}<\frac{۱}{۷\times۱۰^{۴}}$$

بنابراین خطای نسبی به جای ممیز در عدد بستگی ندارد.

به طور کلی، می‌توان دستور العمل زیر را دربارهٔ تعداد ارقام با معنی یک عدد و رابطهٔ آن با خطای نسبی به کار برد. این عمل ضمن اینکه روش گفته شده از طریق ارقام مشکوک را تأیید می‌کند راهی عمومی‌تر و اساسی‌تر است. در بیشتر مواقع این دستور العمل تعداد ارقام با معنی عدد حاصل از ترکیب چند نتیجهٔ آزمایش را یک رقم

کمتر از طریق ارقام مشکوک به دست می‌دهد.

دستورالعمل: اگر عددی دارای $n+1$ رقم با معنی باشد و a نخستین رقم سمت چپ آن، خطای نسبی این عدد از $\frac{1}{a\times10^{n}}$ کوچکتر، یا حدود آن، خواهد بود. و برعکس، اگر خطای نسبی از $\frac{1}{b\times10^{n}}$ کوچکتر باشد دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) اگر $b\leq a$ باشد، عدد دارای n رقم با معنی است.

ب) اگر $b>a$ باشد، عدد دارای $n+1$ رقم با معنی است.

مثال ۱-۷- طول و عرض میزی را اندازه گرفته‌ایم. نتیجه‌های زیر به دست آمده است:

$$\ell=252/5\ \text{cm} \quad \text{و} \quad d=121/3\ \text{cm}$$

می‌خواهیم حساب کنیم سطح میز با چه تقریبی به دست می‌آید (به بیان دیگر چند رقم با معنی دارد).

حل.

$$S=\ell\times d=252/5\times121/3=30628/25\ \text{cm}^2$$

برای تعیین تعداد ارقام با معنی، خطای نسبی آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{\Delta_\ell}{\ell}+\frac{\Delta d}{d}=\frac{0/1}{252/5}+\frac{0/1}{121/3}\angle\frac{1}{2\times10^{3}}+\frac{1}{1\times10^{3}}=\frac{3}{2\times10^{3}}$$

یا:

$$\frac{\Delta S}{S}\angle\frac{3\times3}{2\times3\times10^{3}}\simeq\frac{1}{6\times10^{2}}$$

با مراجعه به دستورالعمل کلی گفته شده، a رقم اول سمت چپ عدد S برابر ۳ است و $b=6$ چون $b>a$ است پس عدد S دارای $3=1+2$ رقم با معنی است؛ یعنی خطا در رقم چهارم است.

$$S=30629/25=306\times10^{2}\text{cm}^2$$

همین مسئله را از طریق ارقام مشکوک عمل می‌کنیم:

۲۵۲/۵̄
۱۲۱/۳̄

۷̄۵̄۷̄۵̄
۲۵۲۵̄
۵۰۵۰̄
۲۵۲۵̄

$۳۰۶\bar{۲}\,\bar{۸}/\bar{۲}\bar{۵} \simeq ۳۰۶/۲ \times ۱۰^{۲}$

اما با توجه به $\frac{\Delta S}{S} \simeq \frac{۱}{۶ \times ۱۰^{۲}}$ خواهیم دید که روش اول کلی‌تر و دقیق‌تر است.

۱ـ۴ـ معادلهٔ ابعادی "Dimensional equation"

بررسی پدیده‌های فیزیکی نیازمند آزمایش است. تصور کنید طولهایی را اندازه گرفته‌ایم و نتیجه‌های زیر به دست آمده است: ۲ متر، ۴ سانتیمتر، ۲۰۰ میلیمتر. اجسامی را وزن کرده‌ایم، مقادیر زیر نتیجه شده است: ۲ کیلوگرم، ۱۰ گرم. سرعت‌سنج اتومبیلی، هنگام حرکت ۶۰ کیلومتر بر ساعت (اصطلاحاً ۶۰ کیلومتر) را نشان می‌دهد. به نوشته‌های روی یک لامپ توجه کنید: ۲۲۰ V و ۱۰۰ W دیده می‌شود، که در تمام مثالهای بالا با عددی که بزرگی کمیت را نشان می‌دهد یکایی همراه است. «یکا را مقدار معین از کمیت مورد نظر تعریف کرده‌اند.» به سادگی می‌توان طول اتاقی را با قطعه‌ای چوب، یا تکه‌ای ریسمان، اندازه گرفت. این قطعه چوب یا تکه ریسمان همان «مقدار معین» از کمیت طول است. اما، از آنجا که این یکا تعریف شده نیست، در مقایسه مقادیر گوناگون با دشواری‌هایی روبرو می‌شویم. پس کوشیده‌اند تا یکاهایی یکسان تعریف کنند. امروز یکاهای جهانی مورد پذیرش بیشتر کشورهاست. اما شمارهٔ کمیت‌های فیزیکی کم نیست و چون این دانش در حال گسترش است مرتباً بر شمارهٔ کمیت‌ها افزوده می‌گردد. برگزیدن یکاهای جداگانه، برای هر کمیت مسلماً کاری بسیار دشوار

است. از سوی دیگر، می‌دانیم میان کمیت‌های فیزیکی وابستگی‌هایی وجود دارد- روابطی کمیت‌های فیزیکی را به هم پیوند می‌دهد. پس اگر چند کمیت را به عنوان «کمیت‌های اصلی» انتخاب و برای هر یک یکاهایی مستقل تعریف کنیم، نیازمند تعریف یکاهای مستقل برای دیگر کمیت‌ها نیستیم و می‌توان از روی یکای کمیت‌های اصلی، یکای کمیت‌های دیگر راکه «کمیت‌های فرعی» نامیده می‌شود، تعریف کرد. اگر کمیتهای طول، جرم، زمان، بار الکتریکی، درجه حرارت و روشنایی را به ترتیب با حروف L، M، T، q، K، و cd نشان دهیم، این واحدهای اصلی تشکیل سیستمی به نام «سیستم آحاد» یا «سیستم اندازه‌گیری» می‌دهند که بر حسب مقادیر مختلف، انتخاب شده برای واحدهای اصلی، سیستم‌های مختلف اندازه‌گیری به دست می‌آید، ولی از آنجاکه موضوع بحث ما مکانیک است برای مطالعه پدیده‌های مکانیکی به سه واحد اصلی اول یعنی L، M و T اکتفا می‌شود. بدین ترتیب اگر در روابطی که گفتیم از این سه کمیت به عنوان کمیت‌های اصلی استفاده کنیم یعنی، دیگر کمیت‌ها را با این روابط به سه کمیت اصلی انتخابی پیوند دهیم- معادله‌ها یا روابطی خواهیم داشت که در آنها تنها L، M و T به کار رفته است. این روابط را «معادله‌های ابعادی» می‌نامیم.

یکی از کاربردهای معادله ابعادی این است که با انتخاب یکای کمیت‌های اصلی، می‌توان یکای کمیت‌های فرعی را به دست آورد.

درکاربرد دیگر اگر فرض کنیم g کمیت فرعی و m، l، t کمیت‌های اصلی باشند، در حالت کلی می‌توان رابطهٔ زیر را بین آنها نوشت:

$$g=km^{\alpha}L^{\beta}t^{\ell}$$

اگر M_1، L_1 و T_1 یکای کمیت‌های اصلی در دستگاه (۱) و M_2 و L_2 و T_2 یکای این کمیت‌ها در دستگاه (۲) باشند بنابر رابطهٔ بالا، یکای G کمیت g در دو دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{matrix} G_1=kM_1^{\alpha}L_1^{\beta}T_1^{\gamma} \\ G_2=kM_2^{\alpha}L_2^{\beta}T_2^{\gamma} \end{matrix} \Rightarrow \frac{G_1}{G_2}=\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{\beta}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$$

چنانچه $M=\frac{M_۱}{M_۲}$ و $L=\frac{L_۱}{L_۲}$ و $T=\frac{T_۱}{T_۲}$ باشد، داریم:

$$\frac{G_۱}{G_۲}=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma} \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

یعنی، نسبت یکاهای فرعی در دو دستگاه (ضریب تبدیل) معادله‌ای می‌دهد که آن را معادلهٔ ابعادی کمیت g می‌نامیم.

مثال ۱ـ۸ـ می‌خواهیم نسبت دو یکای نیرو را در دستگاههای C.G.S و M.K.S به دست آوریم.

در دستگاه C.G.S $\qquad F_۱:L_۱.M_۱T_۱$

در دستگاه M.K.S $\qquad F_۲:L_۲M_۲.T_۲$

پس معادلهٔ ابعادی نیرو در دو دستگاه چنین است:

$$\begin{matrix} F_۱=M_۱L_۱T_۱^{-۲} \\ F_۲=M_۲L_۲T_۲^{-۲} \end{matrix} \Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲}=\left(\frac{M_۱}{M_۲}\right).\left(\frac{L_۱}{L_۲}\right).\left(\frac{T_۱}{T_۲}\right)^{-۲}$$

$$\frac{M_۱}{M_۲}=۱۰^{-۳} \quad , \quad \frac{L_۱}{L_۲}=۱۰^{-۲} \quad , \quad \frac{T_۱}{T_۲}=۱$$

بنابراین:

$$\frac{F_۱}{F_۲}=۱۰^{-۳}\times ۱۰^{-۲}\times ۱=۱۰^{-۵}\Rightarrow \frac{\text{dyne}}{\text{Newton}}=\frac{\text{دین}}{\text{نیوتن}}=۱۰^{-۵}$$

مثال ۱ـ۹ـ متحرکی مسافت ۱۰۰ متر را در ۲۰ ثانیه طی کرده است. بنابراین، سرعت متوسط متحرک عبارت است از:

$$(V_m)_۱=\frac{l}{t}=\frac{۱۰۰}{۲۰}=۵\ \text{m/sec}$$

حال اگر اندازه l را در عددی مثل ۴ و اندازهٔ t را در عددی دیگر چون ۲ ضرب کنیم داریم:

$$(V_m)_۲=\frac{۱۰۰\times ۴}{۲۰\times ۲}=\frac{۴۰۰}{۴۰}=۱۰\ \text{m/sec}$$

از طرفی با توجه به معادلهٔ ابعادی داریم: $\qquad [V]=LT^{-۱}=۴\times ۲^{-۱}=۲$

یعنی کافی است مقدار سرعت $(V_m)_۱$ در حالت نخست را در عدد ۲ ضرب کنیم تا سرعت حالت دوم، $(V_m)_۲$ به دست آید.

۱ـ۵ـ دستگاه واحدها ـ ثابت‌های فیزیکی

در این فصل تنها به ذکر پاره‌ای واحدهای فیزیکی و روابطشان با هم، و چند جدول و ثابت فیزیکی مهم، اکتفا می‌کنیم.

در یازدهمین کنفرانس اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۰، پاره‌ای تصمیمات جدید اتخاذ گردید.

I- سنجهٔ طول: یعنی، متر برابر است با ۱۶۵۰۷۶۳/۷۳ برابر طول موج نارنجی کریپتون ۸۶ ($\lambda=$ ۶۰۵۷/۹۱۱ Å) در خلاء، در انتقال میان ترازهای انرژی $2P_{10}$ و $5d_5$.

از اکتبر ۱۹۸۳ سنجه جدیدی برای متر انتخاب شده است. بر اساس اندازه‌گیریهای دقیق توسط تکنولوژی لیزر و اینکه سرعت نور در خلاء یک ثابت جهانی و طبیعی است متر به صورت مسافتی تعریف می‌شود که نور در خلاء در مدت $\frac{1}{299792458}$ ثانیه طی می‌کند.[1]

II- سنجهٔ زمان: ثانیه، مساوی $\frac{1}{31556925/9747}$ طول سال میلادی ۱۹۰۰. در سیزدهمین مجمع عمومی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۷، سنجهٔ بین‌المللی زمان به صورت زیر تعریف شد: ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دورهٔ تناوب مربوط به یک تحول خاص Cs^{133} را به عنوان یک ثانیه در نظر گرفتند. با این عمل دقت اندازه‌گیری زمان تا 10^{-12} ثانیه افزایش یافت، یعنی بیش از 10^{3} بار بیشتر از دقت روشهای نجومی.[2]

---

1. French & Ebison: Introduction to classical Mechanics; Van Nostrand Reinhold (uk), 1986, P.10.

۲. با کشف تپ اخترها، به خصوص تپ اخترهای میلی ثانیه‌ای به نظر می‌رسد بتوان مقیاس زمان نجومی جدیدی تعریف کرد که دقیق‌تر و مناسب‌تر از ساعتهای اتمی است. در این مورد اعتقاد بر این است که زمان تپ اختری آشکارساز کاملاً حساسی برای امواج گرانشی است. (مجلهٔ فیزیک: سال ۷، شماره ۱ و ۲، بهار و تابستان ۱۳۶۸).

III- سنجهٔ جرم: استاندارد جرم در دستگاه بین‌المللی استوانه‌ای از آلیاژ پلاتین-ایریدیوم است که در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقادیر نگهداری می‌شود با توافق بین‌المللی جرم یک کیلوگرم به آن نسبت داده شده است. در مقیاس اتمی، استاندارد زیر برای جرم وجود دارد که متعلق به دستگاه SI نیست. این استاندارد جرم اتم $C^{۱۲}$ است که بنابر تعریف دقیق ۱۲ برابر یکای اتمی جرم (با علامت u) است. رابطهٔ میان دو استاندارد گفته شده تقریباً چنین است:

$$۱^{u} = ۱/۶۶۰ \times ۱۰^{-۲۷} kg$$

اکنون به یک استاندارد دیگر برای جرم احتیاج داریم تا پاسخگوی دقتهای بیش از آنچه فعلاً موجود است باشد.

در آوریل سال ۲۰۰۰، نتایج و توصیه‌های نشست سال ۱۹۹۸ کمیته CODATA[1] مربوط به استفاده جهانی از ثابتهای اساسی و ضرایب تبدیل آنها در فیزیک و شیمی، در مقاله‌ای مفصل چاپ شده است.[2] همچنین مجموعه مقادیر پیشنهاد شده روی (WWW) World Wide Web تحت عنوان Physics. nist. gov/constants موجود است و می‌توان به آن مراجعه کرد.

نام مضارب و اعشار یکاها به ترتیب زیر است:

شماره	پیشوند	نسبت پیشوند به یکا	علامت قراردادی
۱	tera (ترا)	$۱۰^{۱۲}$	T
۲	giga (ژیگا-گیگا)	$۱۰^{۹}$	G
۳	mega (مگا)	$۱۰^{۶}$	M
۴	kilo (کیلو)	$۱۰^{۳}$	K
۵	hecto (هکتو)	$۱۰^{۲}$	h

1. Committee on Data for Science and Technology.
2. Peter J. Mohr and Barry N. Taylor; "CODATA recommended values of the fundamental physical constants", Rev. Mod. Phys., Volume 72, No 2, 351-495, April 2000.

٦	deca (دکا)	$۱۰^{۱}$	da
۷	deci (دسی)	$۱۰^{-۱}$	d
۸	centi (سانتی)	$۱۰^{-۲}$	c
۹	milli (میلی)	$۱۰^{-۳}$	m
۱۰	micro (میکرو)	$۱۰^{-٦}$	μ
۱۱	nano (نانو)	$۱۰^{-۹}$	n
۱۲	pico (پیکو)	$۱۰^{-۱۲}$	p
۱۳	femto (فمتو)	$۱۰^{-۱۵}$	f

چند ثابت فیزیکی:

سرعت نور: c= ۲۹۹۷۹۲/۵ ± ۰/۳km/sec

جرم الکترون: m_e= ۹/۱۰۹ ×$۱۰^{-۳۱}$kg

جرم پروتون: m_p= ۱/٦۷۲۵ ×$۱۰^{-۲۷}$kg

جرم نوترون: m_n= ۱/٦۷۴۸۱ ×$۱۰^{-۲۷}$kg

نسبت جرم اتم هیدروژن به جرم پروتون: $\frac{H}{m_p}$= ۱/۰۰۰۵۴۴٦۲۲۵

بار الکتریکی الکترون: e= ۱/٦۰۲۱۸ ×$۱۰^{-۱۹}$c

عدد آووگادرو: N= ٦/۰۲۲۵۷ ×$۱۰^{۲۳}$$\text{mole}^{-۱}$

ثابت ریدبرگ: R= ۱/۰۹۷۳۷۳۰۹ ×$۱۰^{۷}$$\text{m}^{-۱}$

ثابت ساختمان ریز: $\frac{۱}{\alpha}=\frac{۲\pi hc}{e^{۲}}$= ۱۳۷/۰۳۸۹

ثابت پلانک: h= ٦/٦۲۵۵۴ ×$۱۰^{-۲۷}$erg.sec= ٦/٦۲۵۵۴ ×$۱۰^{-۳۴}$j.s

شعاع کلاسیک الکترون: r_e= ۲/۸۱۷۷ ×$۱۰^{-۱۵}$m

شعاع مدار الکترون در اتم هیدروژن (مدار بوهر): a= ۵/۲۹۱٦٦ ×$۱۰^{-۱۱}$m

شعاع کرهٔ زمین: R_E= ٦/۳۷ ×$۱۰^{٦}$m

قطر خورشید $d_s= ۱/۴ \times ۱۰^{۹} m$

قطر کرهٔ ماه $d_m= ۳/۴۷۶ \times ۱۰^{۶} m$

فاصلهٔ متوسط زمین تا خورشید (واحد نجومی فاصله) $d_{SE}= ۱/۴۹۵ \times ۱۰^{۱۱} m$

فاصلهٔ متوسط زمین تا ماه $d_{SE}= ۳/۸۴ \times ۱۰^{۸} m$

دورهٔ گردش زمین دور خورشید (حرکت انتقالی) ۳۶۵ روز، ۵ ساعت، ۴۷ دقیقه، ۴۶ ثانیه $=T_{ES}$

دورهٔ گردش وضعی زمین (حرکت چرخشی) ۲۳ ساعت، ۵۶ دقیقه و ۴ ثانیه $=T_E$

سرعت زمین در حرکت به دور خورشید $V_{SE}= ۲۹/۷۶ \text{ km/sec}$

جرم زمین $m_E= ۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۷} gm= ۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴} kg$

چگالی زمین $D_E= ۵۵۲۲ \text{ kg/m}^{۳}$

جرم خورشید $m_s= ۳۳۲۰۰۰ \; m_E$

جرم ماه $m_M= \frac{۱}{۸۰} m_E$

ثابت جاذبهٔ نیوتنی $G= ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۸} \text{dyne cm}^{۲}/\text{gm}^{۲}$

شتاب متعارف سنگین $g= ۹۸۰/۶۶۵ \text{ cm/sec}^{۲}$

سرعت صوت در هوا ـ در آب ـ در آهن $V_s= ۳۱۱/۳۶-۱۵۰۰-۵۱۷۰ \text{ m/sec}$

حجم یک ملکول گرم گاز $V_m= ۲۲/۴۱۵۷ \text{ litres}$

۱ـ۶ـ کمیت‌ها و واحدهای فیزیکی

I- فضا

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۱	درازا (طول)	L	متر	m	واحد اصلی
۲	سطح	S	متر مربع	$m^{۲}$	$۱ m^{۲}= ۱ m \times ۱ m$
			آر	a	$۱ a= ۱ \times ۱۰^{۲} m^{۲}$
			هکتار	ha	$۱ ha= ۱ \times ۱۰^{۴} m^{۲}$

ادامه I- فضا

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۳	حجم	V	متر مکعب	$m^۳$	$۱ m^۳ = ۱ m \times ۱ m \times ۱ m$
			لیتر	L	$۱ L = ۱ \times ۱۰^{-۳} m^۳$
۴	زاویهٔ سطحی		رادیان	rad	$۱ rad = \frac{\text{قوس } ۱ m}{\text{شعاع } ۱ m}$
			درجه	°	$۱° = \frac{\pi}{۱۸۰} rad$
			دقیقه	′	$۱' = \frac{\pi}{۱۰۸۰۰} rad$
			ثانیه	″	$۱'' = \frac{\pi}{۶۴۸۰۰۰} rad$

II- زمان و فضا

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۱	زمان	t , T	ثانیه	S, sec	واحد اصلی
			دقیقه	min	۱ min= ٦۰ sec
			ساعت	h	۱ h= ٦۰ min= ۳٦۰۰ sec
			روز	d	۱ d= ۲۴ h= ۸٦۴۰۰ sec
۲	فرکانس	f , ν	هرتز	Hz	$۱ Hz = ۱ sec^{-۱}$
۳	سرعت	v	متر بر ثانیه	m/sec	$۱ m/sec = ۱ msec^{-۱}$
۴	سرعت زاویه‌ای	ω	رادیان بر ثانیه	rad/sec	$۱ rad/sec = ۱ rad\ sec^{-۱}$
۵	شتاب	a	متر بر مجذور ثانیه	$m/sec^۲$	$۱ m/sec^۲ = ۱ msec^{-۲}$
٦	شتاب زاویه‌ای	α	رادیان بر مجدوز ثانیه	$rad/sec^۲$	$۱ rad/sec^۲ = ۱ rad\ sec^{-۲}$

III- مکانیک

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۱	جرم	m	کیلوگرم	kg	واحد اصلی
			گرم	g	$۱ g= ۱ \times ۱۰^{-۳} kg$
			تن	t	$۱ t= ۱ \times ۱۰^{۳} kg$
			واحد جرم اتمی	u	$۱ u= ۱/۶۶۰۲۷۷ \times ۱۰^{-۲۷} g$
۲	جرم مخصوص	ρ	کیلوگرم بر مترمکعب	$kg/m^{۳}$	$۱ kg/n^{۳}= ۱ kg \times m^{-۳}$
			گرم بر سانتی متر مکعب	$g/cm^{۳}$	$۱ g/cm^{۳}= ۱ \times ۱۰^{۳} kg/m^{۳}$
۳	وزن مخصوص	γ	کیلوپوند بر مترمکعب	$kp/m^{۳}$	
۴	نیرو	F	نیوتن	N	$۱ N= ۱ m \times ۱ kg \times sec^{-۲}$
			پوند	P	$۱ P= ۹/۸۰۶۶۵ \times ۱۰^{-۳} N$
			کیلوپوند	KP	$۱ kp= ۹/۸۰۶۶۵ N$
۵	گشتاور نیرو	M	نیوتن متر	Nm	$۱ Nm= ۱ m^{۲}.kg.sec^{-۲}$
۶	فشار	P	نیوتن بر مترمربع	$N/m^{۲}$	$۱ N/m= ۱ m^{-۱}.kg.sec^{-۲}$
			بار	bar	$۱ bar= ۱ \times ۱۰^{۵} N/m^{۲}$
			کیلوپوندبر سانیمترمربع	$kp/cm^{۲}$	$۱ kp/km^{۲}= ۹/۸۰۶۵۵ \times ۱۰^{۴} N/m^{۲}$
			اتمسفر	at	$۱ at= ۱ kp/cm^{۲}$

ادامه III- مکانیک

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۷	تکان‌نیرو (ضربه)	I	کیلوگرم متر بر ثانیه	kg.m/sec	۱ kgm/sec= ۱ kg.m.sec$^{-۱}$
۸	کار- انرژی	W,A,E	ژول	J	۱ J= ۱ N.m= ۱ w.s
			ارگ	erg	۱ erg= ۱ ×۱۰ $^{-۷}$J
			الکترون ولت	ev	۱ ev= ۱/٦۰۲۱ ×۱۰ $^{-۱۹}$J
۹	توان	P	وات	w	۱ W= ۱ J/sec= ۱ N.m.sec$^{-۱}$= ۱ m^{۲}.kg.sec$^{-۲}$
			اسب بخار	hp	۱ hp= ۷۴۵/۸۳ w

IV- الکتریسیته و مغناطیس

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۱	شدت جریان	I	آمپر	A	واحد اصلی
۲	بار الکتریکی	Q	کولمب	C	۱ C= ۱ A×۱ sec
۳		D	کولمب بر مترمربع	$\frac{C}{m^{۲}}$	۱ C/m^{۲}= ۱ m$^{-۲}$.sec.A
۴		ψ	کولمب	C	۱ C= ۱ $(\frac{C}{m^{۲}})$.m^{۲}= ۱ sec.A
۵	توان الکتریکی	P	وات	W	۱ W= ۱ /sec= ۱ m^{۲}.kg.sec$^{-۳}$

ادامه IV- الکتریسیته و مغناطیس

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
٦	ولتاژ	U	ولت	V	$1\,V= 1\,W/A= 1\,m^{2}.kg.sec^{-3}.A^{-1}$
۷	میدان الکتریکی	E	ولت‌برمتر	$\frac{V}{m}$	$1\,V/m= 1\,N/Asec= 1\,m.kg.sec^{-3}.A^{-1}$
۸	ظرفیت	C	فاراد	F	$1\,F= 1\,C/V= 1\,Asec/V= 1\,m^{-2}.kg^{-1}.sec^{4}.A^{2}$
۹	مقاومت الکتریکی	R	اهم	Ω	$1\,\Omega= 1\,V/A= 1\,m^{2}.kg.sec^{-3}.A^{-2}$
۱۰	مقاومت مخصوص	ρ	اهم‌متر	Ω.m	$1\,\Omega.m= 1\,m^{3}.kg.sec^{-3}.A^{-2}$
۱۱	شار مغناطیسی	ϕ	وبر	Wb	$1\,Wb= 1\,V.sec\, 1\,m^{2}kg.sec^{-2}.A^{-1}$
۱۲	القای مغناطیسی	B	تسلا	T	$1\,T= 1\,Wb/m^{2}= 1\,kg.sec^{-2}.A^{-1}$
۱۳	میدان مغناطیسی	H	آمپربرمتر	A/m	$1\,A/m= 1\,m^{-1}.A$
۱۴	اندوکتانس (خودالقا)	L	هانری	H	$1\,H= 1\,Vsec/A= 1\,m^{2}.kg.sec^{-2}.A^{-2}$

V-گرما

ردیف	کمیت فیزیکی	علامت قراردادی	نام واحد	علامت اختصاری واحد	رابطه با واحدهای اصلی
۱	دما (درجه حرارت)	T,t,θ	کلوین	K	واحد اصلی
			سانتیگراد	O	$O^{o}C= ۲۷۳/۱۵\ K$
۲	مقدارگرما	Q	ژول	J	$1\,J= 1\,w.sec= 1\,N.m= 1\,m^{2}.kg.sec^{-2}$
۳	گرمای ویژه	C	ژول / کلوین	J/K	
			کالری / سانتیگراد	$\frac{cal}{^{o}C}$	

۱ـ۷ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

آنچه مسلم است اینکه، یک حادثهٔ فیزیکی را می‌توان به تعداد زیادی کمیت وابسته کرد که این کمیتها از یکدیگر مستقل نیستند، اما بی‌شک ما قادر نیستیم برای شناخت یک حادثهٔ فیزیکی تمامی این کمیتها را بررسی کنیم. بنابراین ناگزیریم کمترین تعداد کمیت فیزیکی را که قادر باشند به ساده‌ترین روش، وصف جامعی از حادثهٔ فیزیکی به دست دهند برگزینیم و دیگر کمیتها را نسبت به این کمیتهای اصلی بسنجیم. از این‌رو پس از توافق گروهی از دانشمندان کشورهای گوناگون این کمیتها انتخاب می‌شوند و پس از انتخاب کمیتهای اصلی، با استفاده از روشهای تجربی پیشنهاد شده، برای هر استاندارد تعریف کاملی می‌یابیم. البته نباید از نظر دور داشت که استاندارد باید هم قابل دسترسی و هم تغییرناپذیر باشد.

بعضی از فیزیکدانان و فلاسفه معتقدند که اگر نتوانیم برای تعیین یک کمیت فیزیکی روشی بیابیم، می‌گوییم آن کمیت قابل کشف نیست و باید به دلیل نداشتن واقعیت فیزیکی، کنار گذاشته شود. این امر کاملاً صحیح است که اگر نتوانیم به یک کمیت فیزیکی دسترسی پیدا کنیم آن کمیت برای ما ناپیدا است. اما دلیلی ندارد که تصور کنیم هر کمیت فیزیکی که برای ما ناپیداست، به ناچار واقعیت فیزیکی ندارد بلکه این امر ناشی از ناتوانی ما در فهم واقعیت فیزیکی است و این محدودیت قوا و حواس ماست که ما را معذور می‌دارد، هر چند امکان دارد در بعضی موارد حقیقتاً واقعیت فیزیکی در کار نباشد.

یک کمیت فیزیکی در کنار روشی که برای اندازه گیری آن بیان می‌کنیم و یکایی که به آن نسبت می‌دهیم معنا پیدا می‌کند و علت اینکه یک کمیت را مطرح می‌کنیم این است که می‌خواهیم آن را برای سنجش به کار بریم و این بدون بیان روش مفهوم ندارد.

کلیه یکاهای اصلی در واحد زمان تعریف می‌شوند و هر کدام به‌گونه‌ای با زمان در ارتباطند بنابراین دستگاه یکاهای اصلی را نمی‌توانیم بدون زمان در نظر بگیریم.

قبلاً اشاره کردیم، برای هر کمیت یک استاندارد تعریف می‌کنیم مثلاً برای تعیین

استاندارد طول، یک متر (واحد طول) را دقیقاً ۷۳ /۱٦۵۰۷٦۳ برابر طول موج تابش نارنجی- سرخ خاصی که از یک ایزوتوپ مشخص کریپتون ۸٦، در تخلیه الکتریکی گسیل می‌شود انتخاب می‌کنیم، بنابراین اگر ابعاد تمام اشیاء تغییر کند چون طول استاندارد ثابت است می‌توانیم این تحولات را اندازه گیری کنیم.

آنچه به ذهن آدمی راه می‌یابد خالی از نقص و اشکال نیست و علی‌رغم تمام تلاشها و کوشش‌ها، همواره برای بشر موانع و مشکلات گوناگونی وجود داشته است و در این میان تعیین یک واحد استاندارد نیز از این نقصها مبرا نیست. خلاصه مطلب اینکه هر چند یک استاندارد ایده آل باشد باز هم برای سنجش واحدهای خیلی کوچکتر و یا خیلی بزرگتر از استاندارد، ناچاریم محاسباتی انجام دهیم، مثلاً اینطور نیست که عده‌ای ادعا کنند «چون واحد جرم در دستگاه متر یک کیلوگرم است بنابراین برای خرید یک پوند از کالایی باید ۴۵۲ / ۰ کیلوگرم از آن کالا را درخواست بکنند.»

اگر پوند را ایده آل‌تر از کیلوگرم در نظر بگیریم، آنگاه برای خرید یک کیلوگرم از کالایی باید $\frac{۱}{۰ / ۴۵۲}$ پوند از آن کالا را طلب کنیم. و باز هم همان ایراد وارد است و این دور باطل...، بنابراین اختلافها را کنار می‌گذاریم و همه یک سیستم بین‌المللی را انتخاب می‌کنیم. برای یک استاندارد فیزیکی داشتن خواصی چون، دسترس‌پذیر بودن، تغییرناپذیری، تخریب‌ناپذیری و سهولت مقایسه با سایر اجسام، الزامی است و واحد جرم استاندارد- کیلوگرم- دارای چنین خواصی می‌باشد.

در مورد جرم، مانند طول و زمان از استاندارد اتمی استفاده نمی‌کنیم زیرا مقیاس اتمی جرم تاکنون تعریف نشده است به این دلیل که تا این زمان اندازه گیری جرمهای اتمی با دقتی بیشتر از دقت در اندازه گیریهای ماکروسکوپی میسر نشده است.

برای تعریف یک واحد استاندارد لازم است که شرایط اوضاع و محیط را نیز استاندارد در نظر بگیریم، به عنوان مثال استاندارد طول که از فلز ساخته شده است در اثر تغییرات دما کوتاه و بلند می‌شود، بنابراین باید در یک شرایط محیطی استاندارد، طول این فلز را به عنوان واحد در نظر بگیریم و این به تعریفی که برای کمیتهای اصلی کردیم

خللی وارد نمی‌کند و همچنان طول یک کمیت اصلی به حساب می آید.

گالیله در بعضی از آثارش یک ثانیه را تقریباً برابر با زمان ۱/۲۰ تپش نبض انسان تعریف می‌کند، اما از طرفی این امر تغییرپذیر است، یا به بیانی دیگر به هیچ وجه استاندارد نیست زیرا نبض ماگاهی تند وگاهی کند می تپد و از سوی دیگر نمی‌توان آن را با سایر اجسام مقایسه کرد و تکثیر یک واحد مشخص آن امکان‌پذیر نیست و...

گروهی زمان استاندارد را با زمان تناوب آونگ می‌سنجند، اما می‌دانیم که زمان تناوب آونگ به مقدار g بستگی دارد و این مقدار نیز در همه جای کره زمین یکسان نیست بنابراین زمان تناوب آونگ، استاندارد مفیدی نمی‌باشد.

۱ـ۸ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ واحد کمیت انرژی در دستگاههای CGS و M.K.S به ترتیب ارگ و ژول است. نسبت یکای انرژی را در این دو دستگاه بیابید.

حل. $W=F.x \Rightarrow [W]=[F].[x]=M\ L\ T^{-2}.L=ML^{2}T^{-2}$

$$\frac{[W_{C.G.S}]}{[W_{M.K.S}]}=\frac{\left[ML^{2}T^{-2}\right]_{C.G.S}}{\left[ML^{2}T^{-2}\right]_{M.K.S}}=\frac{M_{C.G.S}}{M_{M.K.S}}.\left(\frac{L_{C.G.S}}{L_{M.K.S}}\right)^{2}.\left(\frac{T_{C.G.S}}{T_{M.K.S}}\right)^{-2}$$

اما

$$\frac{M_{C.G.S}}{M_{M.K.S}}=\frac{1gr}{1kgr}=10^{-3}$$

$$\frac{L_{C.G.S}}{L_{M.K.S}}=\frac{1cm}{1m}=10^{-2}$$

$$\frac{T_{C.G.S}}{T_{M.K.S}}=\frac{1sec}{1sec}=1$$

$$\frac{[T_{C.G.S}]}{[T_{M.K.S}]}=\frac{erg}{joule}=10^{-3}\times10^{-4}\times10^{-2}=10^{-7}$$

۲ـ می‌خواهیم مساحت مربع مستطیلی را به طول ۸۴ m و ۱۲/۴ m به دست آوریم نتیجه چقدر می‌شود؟

حل.

$S = ۱۲/۴ \times ۸۴ = ?$

$$\begin{array}{r} ۱۲/\bar{۴} \quad \times \\ ۸\bar{۴} \\ \hline \bar{۴}\bar{۹}\bar{۶} \\ ۹۹\bar{۲} \\ \hline ۱۰\bar{۴}\bar{۱}/\bar{۶} \simeq ۱۰\bar{۴} \times ۱۰ = ۱/۰\bar{۴} \times ۱۰^{۳} \end{array}$$

۳ـ طول یک آونگ ساده ℓ است. اگر آونگ را به اندازهٔ $\alpha = ۳۰^{\circ}$ از وضع ترازمندی خارج و آزادانه رها کنیم، آونگ شروع به نوسان می‌کند. در صورتی که از مقاومت هوا صرفنظر شود، زمان نوسان کامل آونگ از روابط

$$T_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad , \qquad T_۲ = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(۱ + \frac{\alpha^۲}{۱۶}\right)$$

به دست می‌آید. در آزمایشگاههای معمولی فیزیک معمولاً خطای آزمایش از یک درصد بیشتر است. به نظر شما آیا لازم است که محاسبه از فرمول دوم انجام گیرد؟ چرا؟

حل.

$$T_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad , \qquad T_۲ = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(۱ + \frac{\alpha^۲}{۱۶}\right)$$

$$\frac{R}{۲\pi} = \frac{D}{۳۶۰}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{۲ \times ۳/۱۴} = \frac{۱}{۳۶۰} \Rightarrow R \simeq ۰/۰۱۷ \text{ Rad}$$

$$\frac{|T_۲ - T_۱|}{T_۱} = \frac{۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(۱ + \frac{\alpha^۲}{۱۶}\right) - ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\alpha^۲}{۱۶}$$

$$= \frac{(۳ \times ۰/۰۱۷)^۲}{۱۶} \simeq ۱/۶۲ \times ۱۰^{-۴} = ۱/۶۲ \times ۱۰^{-۲}\%$$

چون این خطا از درصد معمول خطای موجود در آزمایشهای معمولی خیلی کمتر است پس در نوسانهای کم دامنه لزومی به استفاده از فرمول دوم نیست.

۴ـ مساحت دایره‌ای برابر $S=۴۸/۷۵\ cm^۲$ است. با چه دقتی می‌توان شعاع دایره، R را حساب کرد؟

حل.

$\pi=۳/۱۴۱۶$

$$S=\pi R^۲ \Rightarrow R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$\frac{dR}{R}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{dS}{S}+\frac{d\pi}{\pi}\right)$$

$$\frac{dS}{S}=\frac{۰/۰۱}{۴۸/۷۵}\simeq\frac{۱}{۵\times۱۰^{۳}}$$

$$\frac{d\pi}{\pi}\leq\frac{dS}{S}=\frac{۱}{۵\times۱۰^{۳}}$$

چون $C=۳ < b=۵$ است پس π باید حداقل $(n+۱)$ رقم با معنی داشته باشد یعنی از ۴ رقم بیشتر. پس برای اطمینان ۵ رقمی می‌گیریم.

$\pi=۳/۱۴۱۶$

$$\frac{dR}{R}\simeq\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵\times۱۰^{۳}}+\frac{۱}{۳\times۱۰^{۴}}\right)\simeq\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳}\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳۰}\right)=\frac{۷}{۶۰}\times۱۰^{-۳}\simeq\frac{۱}{۸\times۱۰^{۳}}$$

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\frac{۴۸/۷۵}{۳/۱۴۱۶}=۳/۹۰۳۸\simeq۳/۹۰۴$$

بنابراین با توجه به مقدار $\frac{dR}{R}$، R باید چهار رقم با معنی داشته باشد:

$$\Delta R=\frac{\Delta R}{R}\times R=\frac{۱}{۸\times۱۰^{۳}}\times۳/۹۰۴\simeq\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳}=۵\times۱۰^{-۴}$$

$R=۳/۹۰۴\pm۰/۰۰۰۵$

۵ـ الف) میان مقدار اندازه گرفتنی u و کمیت‌های x و y، که مستقیماً از آزمایش به دست می‌آیند، رابطهٔ ریاضی $u=f(x,y)$ برقرار است. رابطه‌ای بیابید که از آن Δu، خطای مطلق u، را بر حسب x و y به دست دهد.

ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) کمک بگیرید و خطای مطلق کمیت g را از رابطهٔ سقوط آزاد، $x=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ حساب کنید.

پ) اگر $t=۲/۱۱\ sec$ و $x=۲۱/۲\ m$ باشد، مقدار g را محاسبه کنید و تعیین کنید چند رقم با معنی دارد. چنانچه مقدار واقعی $g=۹/۸\ m/s^{۲}$ باشد، درصد خطای g در این آزمایش چقدر است؟

حل.

$$u=f(x,y)$$

$$\ln u=\ln f(x,y) \Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{df}{f} \Rightarrow du=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\Rightarrow \Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$x=\frac{۱}{۲}gt^{۲} \Rightarrow g=\frac{۲x}{t^{۲}}=۲xt^{-۲}$$

$$dg=۲t^{-۲}dx-۴xt^{-۱}dt \Rightarrow \Delta g=۲t^{-۲}\Delta x+۴xt^{-۱}\Delta t$$

$$g=۲xt^{-۲}$$

$$\ln g=\ln ۲+\ln x-۲\ln t \Rightarrow \frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta x}{x}+۲\frac{\Delta t}{t}$$

$$\Delta g=g(\frac{\Delta x}{x}+۲\frac{\Delta t}{t})=۲t^{-۲}\Delta x+۴xt^{-۱}\Delta t$$

عین رابطه‌ای است که به کمک قسمت الف به دست می‌آوریم:

$$g=۲xt^{-۲}=۲\times ۲۱/۲\times(۲/۱۱)^{-۲}=۴۲/۴\times(۴/۴۵)^{-۱}=۹/۵۲\simeq ۹/۵\ m/sec^{۲}$$

محاسبه عبارت بالا مانند محاسبه ارقام با معنی است که در مثالهای قبلی بررسی شد و حاصل با دو رقم با معنی به دست می‌آید.

$$\Delta g=|g-g_{\circ}|=\circ/۳\ m/sec^{۲}$$

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\circ/۳}{۹/۸}\times ۱\circ\circ\%=۳/\circ ٦\%\simeq ۳\%$$

٦ـ قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن نشان می‌دهد که نیروی متقابل میان دو جسم مادی به جرم دو جسم، و به فاصلهٔ میان آنها بستگی دارد. ضریب ثابت در این رابطه را با G نشان می‌دهیم. بعد این ضریب چنین است:

$[G]=M^{-1}L^{3}T^{-2}$

الف) به کمک معادلهٔ ابعادی، و با توجه به مفهوم اصل همگنی در فیزیک، رابطهٔ ریاضی نمایشگر قانون جاذبه را بیابید.

ب) واحد G را در دستگاه M.K.S بر حسب واحد نیرو، فاصله، و جرم بنویسید.

حل.

$$F=Gm^{\alpha}m^{\beta}R^{\gamma}$$

از آنجاکه تفاوتی میان دو جرم از نظر این قانون وجود ندارد حتماً باید $\alpha=\beta$ باشد. در نتیجه:

$$F=Gm^{2\alpha}R^{\gamma} \Rightarrow [F]=[G].[m]^{2\alpha}[R]^{\gamma}$$

$$MLT^{-2}=M^{-1}L^{3}T^{-2}\times M^{2\alpha}L^{\gamma}=M^{2\alpha-1}L^{3+\gamma}T^{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-1=1 \\ 3+\gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha=1 \\ \gamma=-2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow F=Gmm'R^{-2}=G\frac{mm'}{R^{2}}$$

$$\Rightarrow G=\frac{FR^{2}}{mm'} \Rightarrow \text{واحد } G_{M.K.S}=\frac{\text{متر مربع} \times \text{نیوتن}}{(\text{کیلوگرم})^{2}}=Nm^{2}kg^{-2}$$

۷ـ در اندازه‌گیری طولی برابر ۵۰۰ cm خطایی برابر یک سانتیمتر مرتکب شده‌ایم. در اندازه‌گیری طول دیگری که مساوی ۵۰ cm است خطای ۰/۵ cm روی داده است. کدام اندازه‌گیری دقیقتر است؟

حل.

$$\begin{cases} x_1=500\,cm \\ \Delta x_1=1\,cm \end{cases} , \quad \begin{cases} x_2=50\,cm \\ \Delta x_2=0/5\,cm \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\Delta x_1}{x_1}=\frac{1}{500}=0/2\% \\ \frac{\Delta x_2}{x_2}=\frac{0/5}{50}=1\% \end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{x_1}<\frac{\Delta x_2}{x_2}$$

پس آزمایش اول دقیقتر است.

۸ـ در یک اندازه‌گیری، مساحت میزی به عرض ۲/۹۳ m برابر ۶۹/۵۷ m^2 به دست آمده است. طول این میز چقدر است؟ عدد حاصل چند رقم با معنی دارد؟

حل.

۶۹/۵۷	۲/۹۳
۵۸۶	۲۳/۷۴
۱۰۹۷	
۸۷۹	
۲۱۸۰	
۲۰۵۱	
۱۲۹۰	
۱۱۷۲	در اینجا عمل تقسیم باید پایان یابد.
۱۱۸	

پس عدد حاصل ۲۳/۷ خواهد شد. یعنی ۳ رقم با معنی دارد.

۹ـ در اندازه‌گیری سرعت نور نتیجهٔ زیر به دست آمده است:

$$C=(\text{۲/۹۹۷۹۲۵} \pm \text{۰/۰۰۰۰۰۳})\times \text{۱۰}^{\text{۵}}\,\text{km/sec}$$

الف) C چند رقم با معنی دارد؟ رقم مشکوک در این عدد کدام است؟

ب) درصد خطای این سنجش چقدر است؟

حل.

الف) C هفت رقم با معنی دارد و رقم ۵ مشکوک است.

ب)

$$\Delta C = \text{۰/۰۰۰۰۰۳}\times \text{۱۰}^{\text{۵}}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\text{۰/۰۰۰۰۰۳}\times \text{۱۰}^{\text{۵}}}{\text{۲/۹۹۷۹۲۵}\times \text{۱۰}^{\text{۵}}}\times \text{۱۰۰}\% = \text{۰/۰۰۰۱}\%$$

۱ـ۹ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

۱ـبسیاری از محققان، بر مبنای شواهدی، به ادراکات فوق حس اعتقاد دارند. با فرض و وجود این ادراکات در طبیعت چه کمیت یا کمیتهای فیزیکی را برای توصیف کمی آن تعریف می‌کنید؟

۲ـ آیا می‌توان دما را به عنوان یک کمیت فرعی بر حسب طول، جرم و زمان تعریف کرد؟

۳ـ متر در ابتدا برابر ده میلیونیم فاصلهٔ قطب شمال تا استوا، در امتداد نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، در نظر گرفته شده بود. ولی این تعریف به اندازهٔ ۰/۰۲۳ درصد با میله استاندارد اختلاف دارند. آیا منظور این است که میلهٔ متر استاندارد تا این اندازه خطا دارد؟

۴ـ آیا می‌توان طول را در امتداد یک خط منحنی اندازه گرفت؟ اگر این کار ممکن است، چگونه؟

۵ـ آیا می‌توانید روشی برای تعریف استاندارد طول بر حسب استاندارد زمان یا برعکس، پیدا کنید؟ به ساعت آونگی فکر کنید. اگر این امر امکان‌پذیر است، آیا می‌توان هم طول و هم زمان را کمیت اصلی دانست؟

۶ـ یک مقاطعه کار اظهار می‌دارد که در ساختن یک پل ۲۰۰ یارد بتون ریخته است منظورش چیست؟

۷ـ یکاهای عدد π چه هستند؟

۸ـ در مسیری کوهستانی شیب ۱۵۰ متر بر کیلومتر است. این شیب را با عدد بدون بعد بیان کنید.

۹ـ اگر از شما بخواهند کسینوس سه متر را حساب کنید، آیا می‌توانید یا نه؟

۱۰ـ آب‌شناسان برای سنجش سرعت حجمی یکای «ثانیه‌ـ فوت» را به کار می‌برند. آیا از دیدگاه فنی این یکا صحیح انتخاب شده است؟ اگر صحیح نیست، یکای صحیح چیست؟

۱۱ـ در این فصل به‌طور غیرمستقیم با روشهای تجربی در فیزیک آشنا شدید. به نظر شما هدفهای اصلی فیزیک عملی یا روشهای تجربی در فیزیک چیست؟

۱۲ـ زمان تناوب یک آونگ را با ساعتی که کند کار می‌کند اندازه می‌گیریم. از بیراهی آزمایشگر صرفنظر می‌کنیم. به نظر شما چه نوع خطا یا خطاهایی ممکن است وجود داشته باشد؟

۱۳ـ طول میزی را چهار بار اندازه‌گیری کرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

۱۷۵/ ۵ ۱۷۵/ ۴ ۱۷۵/ ۸ ۱۷۵/ ۸

خطای مطلق و خطای نسبی این سنجش چقدر است؟ آیا می‌توانید حدس بزنید این اندازه‌گیری با چه وسیله‌ای صورت گرفته است؟

۱۴ـ یک استوانه فلزی را وزن کنید. حجم آن را تعیین کنید. خطای ناشی از دو سنجش چقدر است؟ وزن مخصوص استوانه را به دست آورید. خطای مطلق و نسبی وزن مخصوص چقدر است؟ در این اندازه‌گیریها به نظر شما بهتر است چه وسایلی به کار ببریم؟ اگر جسم فوق غیرهندسی باشد چگونه عمل می‌کنیم و خطاها چگونه محاسبه می‌شود؟

۱۵ـ محیط دایره‌ای به قطر ۲۱/ ۲ mm را به دست آورید. π= ۳/ ۱۴

۱۶ـ در محاسبه جرم مخصوص جسمی، جرم آن را ۱۵۶/ ۵ gr و حجم آن را ۷۸ cm^3 به دست آورده‌ایم. اگر جرم را با ۵/ ۲ گرم تقریب و حجم را با ۴ سانتیمتر مکعب تقریب اندازه گرفته باشیم خطای مطلق و نسبی را برای تعیین جرم مخصوص به دست آورید.

۱۷ـ اگر در اندازه‌گیری حجم یک استوانه یک بار کولیس و بار دیگر ریزسنج به کار ببریم، درصد اشتباه دو سنجش را تعیین کنید.

۱۸ـ با توجه به مفهوم ارقام با معنی، نتیجهٔ تقریب زیر را بنویسید:

۴۷۲ mm− ۰/ ۴ mm=?

۱۹ـ حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید:

۹۲۱ ×۸۷۲۴ =؟ ۷۸۴۶:۸۲۳ =؟

۲۰ـ در اندازه‌گیری بار الکترون نتیجهٔ زیر به دست آمده است:

q_e=(۱/۶۰۲۱۰ ± ۰/۰۰۰۰۲)×۱۰ $^{-۱۹}$ (کولن)

الف) درصد خطای این سنجش چقدر است؟ q_e چند رقم با معنی دارد؟

ب) دقت این اندازه‌گیری حدود چند کولن است؟ رقم مشکوک در این عدد کدام است؟

پ) آیا مجاز هستیم عدد بالا را به صورت ۱۰ $^{-۱۹}$×(۱/۶۰۲۱ ± ۰/۰۰۰۰۲) بنویسیم؟ چرا؟

۲۱ـ تجربه نشان می‌دهد که S (مسافت یا فاصله) سقوط یک جسم به جرم m (جرم جسم)، g (شتاب سنگین)، و t (زمان سقوط) بستگی دارد. با توجه بـه فـرمول ابعادی هریک از کمیتهای فیزیکی بالا، ساده‌ترین شکل رابطهٔ S و کمیتهای یاد شده را به دست آورید.

۲۲ـ در درس فیزیک خواهید دید که در حرکت نوسانی فنری که وزنه‌ای به آن آویزان و از حال تعادل خارج شده، زمان تناوب بر حسب کمیتهای شناخته شده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T=A\sqrt{\frac{mh}{f}}=A\sqrt{\frac{m}{k}}$$

که در آن f نیروی الاستیک، m جرم جسم، h مقدار کشیدگی فنر در اثر افزودن f است، و A ضریب تناسب. آیا می‌توانید این رابطه را به کمک معادله ابعادی کمیتها (و با توجه به مفهوم اصل همگنی در فیزیک) به دست آورید؟

۲۳ـ می‌خواهیم مقدار g را به وسیلهٔ آونگ از روی فرمول $T= ۲\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ به دست آوریم، به‌طوری که حداقل چهار رقم با معنی داشته باشد. خطای نسبی روی اندازهٔ T حدود $۱۰^{-۵}$ و طول ℓ حدود ۵۰ cm است با چه دقتی طول ℓ را باید اندازه گرفت؟
$g \simeq ۱۰۰۰ cm/sec^۲$

۲۴ـ به نظر شما برای یک استاندارد فیزیکی چه ویژگیهایی مطلوب است؟

فصل ۲

بردارها

۲ـ۱ـ مقدمه

آنالیز برداری، که کاربرد واقعی آن در فیزیک از میانه قرن ۱۹ بوده، در سالهای اخیر به عنوان بخش اساسی پس‌زمینه ریاضی مورد نیاز فیزیکدانها، مهندسین، ریاضیدانها، و دیگر علاقمندان علوم جای خود را باز کرده است. این نیاز تصادفی نبوده، و بدین دلیل است که اولاً، آنالیز برداری توجه دقیقی برای نمایش معادلات ریاضی ناشی از مسائل فیزیکی و هندسی دارد. ثانیاً کمک طبیعی مفیدی در تشکیل تصویر ذهنی ایده‌های فیزیکی و هندسی است. به‌طور خلاصه، از آن می‌توان به عنوان یکی از پیشرفته‌ترین زبانها، و گونه‌های تفکر در علوم فیزیکی نام برد. در فیزیک، به ویژه باگسترش و تکامل نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول و در ارتباط با ماهیت برداری کمیتهایی همچون میدان الکتریکی و مغناطیسی، نیاز به آنالیز برداری بیشتر محسوس شد.

بنابراین، حتی درک مختصر، اما دقیق مفاهیم برداری به یقین کمکی در پیگیری مفاهیم فیزیک و کوششی در درک آسانتر آنهاست. در این فصل، نخست با نگاهی گذرا به مجموعه‌ها و اصول موضوعه میدان، بردارها را به عنوان عناصر فضای برداری

تعریف می‌کنیم. از آنجا که مجموعه پاره خط‌های جهت‌دار نیز از این اصول تبعیت می‌کنند و تجسم فضایی آنها امکان‌پذیر است در بررسیهای بعدی همان رهیافت مقدماتی بردارها- یعنی پاره خط جهت‌دار- مد نظر قرار می‌گیرد. نگرش پیشرفته‌تر بردارها ما را به مبحث تانسورها و فضای هیلبرت رهنمون می‌شود.

۲-۲- قوانین ترکیب در مجموعه‌ها

در نخستین فصل از ریاضیات، مجموعه[1] و خواص مقدماتی آن تعریف می‌شود. در اینجا به مجموعه از دیدگاهی دقیقتر می‌نگریم، و چند قانون و تعریف اساسی را بیان می‌کنیم.

۲-۲-۱- قانون ترکیب داخلی

می‌گوییم روی مجموعه E، یک قانون ترکیب داخلی وجود دارد در صورتی که به هر زوج $a\in E$ و $b\in E$ بتوان به گونه‌ای یگانه، یک جزء یا عنصر $c\in E$ مربوط کرد. این بیان را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$c=axb$ یا $c=a\times b$

عنصر c را مرکب a و b به وسیله قانون x می‌نامند. عناصر a و b ممکن است متمایز یا مساوی باشند. اصطلاحاً می‌گوییم مجموعه E نسبت به این قانون ترکیب بسته است.

مثال: در مجموعه اعداد حقیقی، جمع یک قانون ترکیب داخلی است. در اثر این عمل، (+)، از ترکیب هر دو عنصر این مجموعه، عنصر جدید متعلق به این مجموعه تشکیل می‌شود.

---

۱. بحث مفصلتر را می‌توانید در فصل اول کتاب «روشهای ریاضی در فیزیک»، جلد اول، تألیف نگارنده، انتشارات دانشگاه الزهرا، سال ۱۳۸۳، بیابید.

۲ـ۲ـ۲ـ قانون ترکیب خارجی

دو مجموعه E و ϕ داده شده است. اگر بتوان به هر عـنصر $a\in E$ و $\alpha\in\phi$ یک عنصر $b\in E$ نسبت داد می‌گوییم قانون ترکیب خارجی روی E داریم و می‌نویسیم:

$b=\alpha\times a$ یا $b=\alpha a$

۲ـ۲ـ۳ـ فضای برداری

یکی از ساختمانهای بنیادی جبر خطی، فضای برداری است:

تعریف: مجموعه E را فضای برداری روی میدان C می‌نامیم، اگر این مجموعه مجهز به دو قانون ترکیب داخلی و خارجی باشد با شرایط و خواص زیر:

الف) روی E یک قانون ترکیب داخلی به نام جمع وجود دارد و اجزاء E نسبت به این قانون یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند (با خواص زیر):

۱ـ خاصیت جابجایی: $a\in E, b\in E \Rightarrow a+b=b+a=c \in E$

۲ـ خاصیت شرکت‌پذیری: $(a+b)+c=a+(b+c)$

۳ـ وجود عنصر بی‌اثر (یا صفر): $0+a=a+0=a$

۴ـ وجود عنصر قرینه (یا معکوس): $a'=-a$ $\quad a+(-a)=0$ یا $a+a'=a'+a=0$

ب) روی E یک قانون ترکیب خارجی تعریف می‌شود:

۵ـ $\alpha\in C\ ,\ a\in E \Rightarrow \alpha a\in E$

۶ـ وجود عنصر بی‌اثر (یا واحد): $\alpha=1 \Rightarrow 1a=a\ ,\ a\in E$

۷ـ وجود عنصر صفر: $\alpha=0 \Rightarrow 0a=0$

۸ـ خاصیت شرکت‌پذیری: $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a=\alpha\beta a;\ \forall\alpha,\beta\in C$

۹ـ خاصیت توزیعی: $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$

۱۰ـ خاصیت توزیعی: $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$

عناصر E را <u>بردار</u>، و اجزاء C را اسکالر یا <u>عدد</u> می‌نامند. اگر C میدان اعـداد مختلط باشد (C)، می‌گوییم فضای برداری روی میدان مختلط تعریف شده، و چنانچه C

میدان اعداد حقیقی (R) باشد فضای برداری E را روی میدان حقیقی تعریف شده می‌گوییم. در اینجا با میدان اعداد حقیقی سروکار داریم. آنچه گفته شد معمولاً به عنوان اصول موضوعه میدان بیان می‌گردد.

مثال: بعدها در درس مکانیک کوانتومی خواهید دید که مجموعه توابع موج پاسخ معادله شرودینگر یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط تشکیل می‌دهد.

بعد یک فضای برداری-بیشترین شماره بردارهای مستقل خطی موجود در یک فضای برداری را بعد آن فضا می‌نامند.

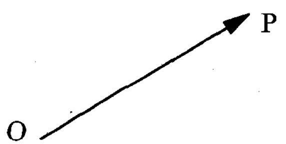
حال می‌پردازیم به معرفی مقدماتی بردارها و بیان خاصیت و ویژگیهای آنها.

۲ـ۳ـ بردار و اسکالر

بردار کمیتی است که دارای جهت و مقدار است (پاره خط جهت‌دار). به بیان دیگر، یک بردار با چهار مشخصه شناخته می‌شود:

نقطه اثر (مبدأ)- راستا یا محمل- جهت یا سو- طول یا مقدار.

جابجایی، سرعت، شتاب، کمیت‌های برداری شناخته شده‌اند. برای نشان دادن بردار، مطابق شکل (۲ـ۱)، از یک سهم استفاده می‌شود. سهم OP جهت را می‌شناساند، اندازه سهم نمایشگر طول بردار است، نقطه O مبدأ یا نقطه اثر بردار است، و P انتهای بردار.



شکل (۲ـ۱)

هنگام بررسی تحلیلی معمولاً بردار A را به صورت $\vec{A}$ و اندازه‌اش را با A یا $|\vec{A}|$ نمایش می‌دهند. می‌توان بردار را با حرف اول و آخر سهم نمایش داد مانند بردار $\vec{OP}$ با

طول OP یا $|\vec{OP}|$.

اسکالر یا عدد کمیتی است دارای مقدار اما بدون جهت. مانند جرم، طول، زمان، دما، و هر عدد حقیقی. همانند جبر مقدماتی، اسکالر تنها با یک عدد یا حرف مشخص می‌شود.

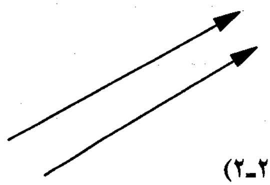
۲ـ۳ـ۱ـ جبر برداری

همانطور که در آغاز این فصل گفته شد، بردارها عناصر متعلق به فضای برداری هستند. عملیات جبری بردارها نیز با قواعدی خاص خود جبر برداری را می‌سازند که البته برای درک بهتر آن می‌توان با تعاریف مناسب، از گسترش عملیات جبری روی اعداد حقیقی به آن قواعد دست یافت.

تعریف‌های زیر در جبر بردارها بنیادی است:

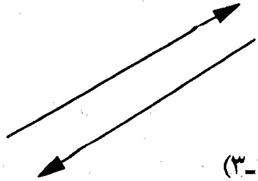
I- دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را برابر یا همسنگ می‌گوییم، اگر مقدار و جهت آنها یکی باشد صرفنظر از جای مبدأ آنها. آنگاه می‌نویسیم:

$\vec{A}=\vec{B}$



شکل (۲ـ۲)

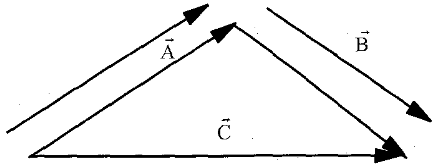
II- دو بردار $\vec{A}$ و $-\vec{A}$ را متقابل گوییم، چنانچه طولشان برابر و جهتشان مخالف هم باشد. در شکل (۲ـ۳)، دو بردار $\vec{A}$ و $-\vec{A}$ متقابلند.



شکل (۲ـ۳)

III- مجموع برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برداری است مانند $\vec{C}$ که مطابق شکل (۲ـ۴) تعریف می‌شود، و می‌نویسیم:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$



شکل (۲ـ۴)

بردار $\vec{C}$ بدین طریق تشکیل می‌شود: از انتهای بردار اول (بردار $\vec{A}$)، بردار همسنگ بردار $\vec{B}$ را رسم می‌کنیم آنگاه ابتدای $\vec{A}$ را به انتهای بردار جدید وصل می‌کنیم. نتیجه بردار $\vec{C}$ خواهد شد. این تعریف را به هر تعداد بردار می‌توان تعمیم داد. بدین ترتیب توجه خواهیم داشت که یک کمیت فیزیکی که به وسیله یک بردار نمایش داده می‌شود باید دارای دو ویژگی اساسی زیر باشد:

الف) باید از قانون متوازی‌الاضلاع در مورد جمع پیروی کند؛

ب) باید علاوه بر جهت دارای طول یا بزرگی باشد که مستقل از انتخاب هر نوع محور مختصات است.

IV- تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$، که با $\vec{A}-\vec{B}$ نمایش می‌دهیم بلافاصله از تعریف جمع آشکار می‌شود (چگونه؟) اگر $\vec{A}=\vec{B}$ باشد، $\vec{A}-\vec{B}$ را بردار صفر تعریف می‌کنیم؛ طول این بردار صفر است و جهت خاصی ندارد.

V- حاصلضرب بردار $\vec{A}$ در اسکالر m، برداری است به صورت $m\vec{A}$ که طولش $|m|$ برابر طول بردار $\vec{A}$ است. راستا و نقطه اثر بردار جدید با بردار $\vec{A}$ یکی است. جهت این بردار، بر حسب اینکه $m>0$ یا $m<0$ باشد هم جهت یا در خلاف جهت $\vec{A}$ است. اگر $m=0$ باشد، آنگاه $m\vec{A}=0$ بردار صفر است.

به‌طور خلاصه، اصولی که دربارهٔ مجموعه پاره خطهای جهت‌دار به عنوان بردار

موجود است در زیر بیان می‌گردد. تحقیق این اصول به راحتی امکان‌پذیر است:

قانون ترکیب داخلی «جمع»

۱ـ $\vec{A}\ ,\ \vec{B}\in E$ فضای برداری $\Rightarrow \vec{C}=\vec{A}+\vec{B}\ ;\ \vec{C}\in E$

۲ـ خاصیت جابجایی: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

۳ـ خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به قانون جمع: $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

۴ـ وجود بردار قرینه یا متقابل: $\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{o}$

۵ـ وجود بردار صفر یا بی‌اثر: $\vec{o}+\vec{A}=\vec{A}+\vec{o}=\vec{A}$

۶ـ برای هر عدد $\alpha\in R$، و هر بردار $\vec{A}\in E$، برداری یگانه به نام حاصلضرب α در $\vec{A}$ وجود دارد. آن را با $\alpha\vec{A}$ نمایش می‌دهیم: $\alpha\vec{A}\in E$.

قانون ترکیب خارجی «ضرب»

۷ـ خاصیت شرکت‌پذیری نسبت به قانون ضرب:

$\alpha(\beta\vec{A})=(\alpha\beta)\vec{A}=\alpha\beta\vec{A}\quad \forall\alpha,\beta\varepsilon R\ ,\ \forall A$

۸ـ وجود بردار واحد یا بی‌اثر با قانون ترکیب ضرب: $|\vec{A}|\,\vec{1}=\vec{A}\ ;\ \forall\vec{A}$

۹ـ خاصیت توزیعی: $(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$

۱۰ـ خاصیت توزیعی: $\alpha(\vec{a}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$

دو خاصیت ۹ و ۱۰، بسیار مهم و نمایشگر این ویژگی است که فضای برداری یک فضای خطی است.

۲ـ۳ـ۲ـ بردار واحد یا بردار یکه (یکا)

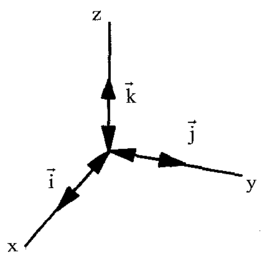
معمولاً از دو طریق به بررسی بردارها می‌پردازیم. نخست روش ترسیمی و دوم روش تحلیلی. از آنجایی که تعمیم دادن و کار کردن با روش تحلیلی آسانتر است و انعطاف‌پذیری این شیوه بیشتر، از این‌رو اغلب از این دیدگاه به بردارها توجه می‌شود.

روش ترسیمی به خصوص در مورد بیش از دو بردار مشکل و خسته‌کننده است.

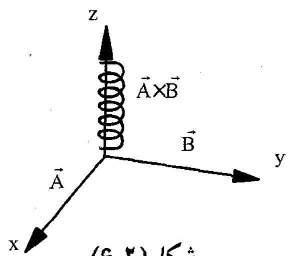
برداری که طولش واحد است، بردار واحد یا یکا می‌نامند. اگر $\vec{A}$ برداری با طول غیر صفر باشد، $|\vec{A}| \neq 0$، آنگاه $\hat{e}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ بردار واحد در جهت $\vec{A}$ است. از این تعریف به راحتی معلوم می‌شود که:

$$\vec{A}=|A|\hat{e}$$

بردارهای یکه متعامد: مجموعه بردارهای یکه مهم آنهایی است که در دستگاه محورهای مختصات متعامد بنا می‌کنیم (شکل ۲ـ۵). بردارهای واحد سه محور ox، oy و oz را به ترتیب $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ می‌نامیم. در بخش بعد رابطه میان این سه بردار را یادآور می‌شویم. ما در تمام اوقات دستگاه مختصات راستگرد را بنا می‌کنیم. اگر سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ با مبدأ مشترک فرض کنیم که هم صفحه نباشند، آنگاه در این دستگاه پیچی که از سمت راست در زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه از $\vec{A}$ به $\vec{B}$ می‌پیچد و پیشروی می‌کند در جهت C جلو می‌رود (شکل ۲ـ۶).



شکل (۲ـ۵)



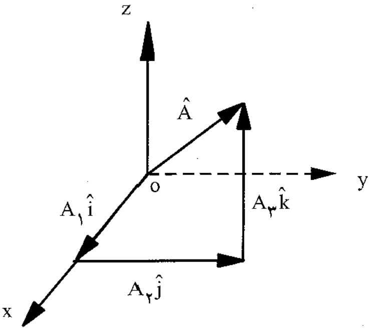
شکل (۲ـ۶)

به بیان دقیق‌تر، سه تایی مرتب $(\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k})$ بردارهای پایه در فضای برداری سه بعدی را تشکیل می‌دهد، که معمولاً با $\hat{e}_i(i=1,2,3)$ نشان می‌دهند. خواهیم دید که $\hat{e}_i.\hat{e}_j=\delta_{ij}$ که در آن $\delta_{ij}=\begin{cases}1; i=j\\ 0; i\neq j\end{cases}$ نماد کرونکر است.

مؤلفه‌های یک بردار: هر بردار $\vec{A}$ را در سه بعد می‌توان با دستگاه مختصات متعامد نشان داد به طوری که نقطه اثر بردار در مبدأ مختصات باشد. فرض می‌کنیم (A_1,A_2,A_3) مختصات نقطه انتهایی بردار باشد. بردارهای $A_1\hat{i}$ و $A_2\hat{j}$ و $A_3\hat{k}$ را به

ترتیب مؤلفه‌های عمومی بردار $\vec{A}$ در سه جهت x ، y و z تعریف می‌کنیم. در این صورت با توجه به شکل (۲ـ۷)، به راحتی داریم:

$$\hat{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k} \qquad (۲\text{ـ}۱)$$



شکل (۲ـ۷)

طول یا اندازهٔ $\vec{A}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2} \qquad (۲\text{ـ}۲)$$

در حالت خاص بردار مکان با بردار شعاعی $\vec{r}$ از نقطه O تا نقطه (x,y,z) به صورت زیر نشان می‌شود:

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k};\ |\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (۲\text{ـ}۳)$$

۲ـ۴ـ حاصلضرب اسکالر و برداری

تعریف ۱ـ حاصلضرب اسکالر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$، که با $\vec{A}.\vec{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{A}.\vec{B}=|A|\ |B|\cos(A,\hat{\ }B) \qquad (۲\text{ـ}۴)$$

یعنی: حاصلضرب اسکالر دو بردار = حاصلضرب طول دو بردار در کسینوس زاویه میانشان. این زاویه میان صفر و π است.

توجه دارید که نتیجه حاصلضرب اسکالر یک عدد است نه بردار. چنانچه دقت

کنیم می‌توانیم $|B|\cos(A,\hat{\ }B)$ را تصویر یا مؤلفهٔ بردار $\vec{B}$ در راستای بردار $\vec{A}$ تعریف کنیم. آنگاه حاصلضرب اسکالر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چنین تعریف می‌شود:

«حاصلضرب بردار اول در مؤلفه بردار دوم بر راستای بردار اول».

دربارهٔ حاصلضرب اسکالر، قوانین زیر به راحتی نتیجه می‌شود:

۱ـ $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

۲ـ $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

۳ـ $m(\vec{A}.\vec{B})=(m\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}.(m\vec{B})=(\vec{A}.\vec{B})m$

۴ـ $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=۱ \quad ; \quad \hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=۰$

۵ـ اگر $\vec{A}=A_۱\hat{i}+A_۲\hat{j}+A_۳\hat{k}$ و $\vec{B}=B_۱\hat{i}+B_۲\hat{j}+B_۳\hat{k}$ باشند، آنگاه

$\vec{A}.\vec{B}=A_۱B_۱+A_۲B_۲+A_۳B_۳$

$\vec{A}.\vec{A}=A^۲=A_۱^۲+A_۲^۲+A_۳^۲ \; ; \; \vec{B}.\vec{B}=B^۲=B_۱^۲+B_۲^۲+B_۳^۲$

۶ـ اگر $\vec{A}.\vec{B}=۰$، و $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای غیرصفر باشند، در این صورت $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را عمود بر هم تعریف می‌کنیم.

۷ـ به کمک ویژگیهای ضرب اسکالر می‌توان رابطه‌ای مربوط بـه مـجموع دو بردار را به آسانی به دست آورد. از رابطه $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ داریم:

$C^۲=(\vec{A}+\vec{B})^۲.(A^۲+B^۲)=(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=A^۲+B^۲+۲\vec{A}.\vec{B}$

$=A^۲+B^۲+۲AB\cos\theta$

$\Rightarrow|C|=|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{A^۲+B^۲+ABCos\,\theta}$

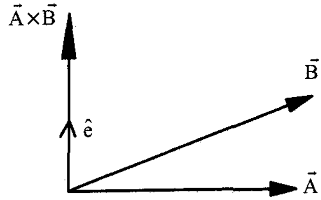
$A-B=\sqrt{A^۲+B^۲+۲ABCos\,\theta}$

تعریف ۲ـ حاصلضرب برداری $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که با $\vec{A}\wedge\vec{B}$ یا $\vec{A}\times\vec{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت برداری مانند $\vec{C}$ تعریف می‌شود با این ویژگی‌ها: بزرگی یا طول $\vec{C}$ عبارتست از حاصلضرب به مقدار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و سینوس زاویه میانشان:

$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}|\;|\vec{B}|\sin(A,\hat{\ }B)$ (۵ـ۲)

و یا

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin(\hat{A,B})\vec{e} \qquad (۲\_۶)$$



شکل (۲_۸)

که در آن $\vec{e}$ بردار واحدی است در راستای $\vec{A}\times\vec{B}$. جهت بردار $\vec{C}$ عمود بر صفحه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است، به طوری که $\vec{A}$، $\vec{B}$، و $\vec{C}$ یک دستگاه راستگرد را تشکیل می‌دهند. در این دستگاه اگر ناظری در مبدأ مختصات O طوری بایستد که جهت چرخش بردار اول برای منطبق شدن بر بردار دوم، در جهت چرخش دست راست به چپ (و در جهت دایره مثلثاتی) باشد، جهت از پا به طرف سر ناظر، جهت بردار حاصلضرب را نشان می‌دهد.

قوانین زیر، در مورد حاصلضرب برداری، به راحتی ثابت می‌شود:

۱_ $\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$

۲_ $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

۳_ $m(\vec{A}\times\vec{B})=(m\vec{A})\times\vec{B}=(\vec{A}\times\vec{B})m$

۴_ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0\ ;\ \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

۵_ اگر $\hat{B}=B_1\hat{i}+B_2\hat{j}+B_3\hat{k},\hat{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}$ باشد، آنگاه

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=(A_2B_3-A_3B_2)\hat{i}-(A_1B_3-A_3B_1)\hat{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\hat{k} \qquad (۲\_۷)$$

۶_ مقدار $|\vec{A}\times\vec{B}|$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی ضلعهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بنا می‌شود.

۷_ اگر $\vec{A}\times\vec{B}=0$ و $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای غیرصفر باشند، آنگاه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را موازی گویند.

تعریف ۳ـ حاصلضرب مختلط اسکالر سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$= حاصلضرب مختلط اسکالر

نتیجه این ترکیب، یک عدد یا اسکالر است. چنانچه فرض می‌کنیم:

$\vec{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}$; $\vec{B}=B_1\hat{i}+B_2\hat{j}+B_3\hat{k}$; $\vec{C}=C_1\hat{i}+C_2\hat{j}+C_3\hat{k}$

در این صورت داریم:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{۸ـ۲}$$

علاوه بر این، به راحتی می‌توان نشان داد که قانونهای زیر درباره این حاصلضرب برقرار است:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{۹ـ۲}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} \tag{۱۰ـ۲}$$

نتیجه حاصلضرب بالا یک عدد است و برابر است با حجم متوازی‌السطوحی که اضلاعش A، B و C است و معمولاً با [ABC] نمایش می‌دهند.

تعریف ۴ـ همانند تعریف بالا، حاصلضرب سه گانه برداری $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ را تعریف می‌کنیم، با خواص زیر:

۱ـ در این حاصلضرب قانون شرکت‌پذیری معتبر نیست:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

۲ـ

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(A.\vec{B}) \tag{۱۱ـ۲}$$

به همین ترتیب می‌توان از حاصلضرب مختلط چهار بردار سخن گفت. مثلاً در مورد چهار بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ و $\vec{D}$ می‌توان حاصلضرب‌های زیر را تعریف کرد:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C}) \tag{۱۲ـ۲}$$

$$\vec{A}\times[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})]=(\vec{A}\times\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}\times\vec{D})(\vec{B}.\vec{C}) \tag{۱۳ـ۲}$$

۲ـ۵ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

دانستنیهای زیر در درک و پاسخگویی پرسشهای این فصل کمک بزرگی خواهد بود. به راحتی می‌توانید درستی احکام زیر را تحقیق کنید:

۱ـ برآیند دو بردار با بزرگیهای مختلف نمی‌تواند صفر باشد و فقط برآیند دو بردار متقابل صفر می‌شود. اما جمع برداری سه بردار متفاوت می‌تواند صفر شود (چگونه؟) در این مورد یک ادعا این است که سه بردار در یک صفحه باشند؛ این مطلب را تحقیق کنید.

۲ـ معمولاً کمیتی به بزرگی صفر را بردار تعریف نمی‌کنیم اما در هر حال بردار صفر تعریف شدنی است.

۳ـ قوانین جابجایی و انجمنی در مورد جمع برداری برقرار است ولی در تفریق این خاصیتها صادق نیست.

۴ـ از کمیتهای عمده اسکالر می‌توان از زمان، کار، انرژی، دما، چگالی، گرمای ویژه و... نام برد و نیز کمیتهای مهم برداری عبارتند از جابجایی، سرعت، نیرو، اندازه حرکت، گشتاور، میدان الکتریکی و مغناطیسی و... مقدار یک کمیت اسکالر برخلاف کمیت برداری به دستگاه مختصات انتخاب شده بستگی ندارد.

۵ـ از آنجا که قوانین ترکیب روی مجموعه فضای برداری (و اساساً هر مجموعه‌ای) یگانه هستند و در مورد تقسیم برخلاف جمع و ضرب یگانگی تعریف وجود ندارد، لذا عمل تقسیم در مورد تقسیم بردارها به صورت عادی تعریف نمی‌شود.

۶ـ در جمع و ضرب اسکالر دو بردار لزومی به مشخص کردن دستگاه مختصات نیست ولی در ضرب برداری دو بردار و یافتن مؤلفه‌های بردارها انتخاب دستگاه مختصات ضروری است.

۷ـ اگر جهت تمام مؤلفه‌های یک بردار را وارون کنیم جهت بردار هم عکس می‌شود. همچنین در ضرب برداری با تغییر جهت مؤلفه‌ها در یک زمان جهت بردار حاصلضرب عوض نمی‌شود و این ناشی از این مطلب عمده است که روابط بین بردارها

(و در نتیجه قوانین فیزیکی که حاصل روابط میان بردارها است) در اثر انتقال یا چرخش محورهای مختصات تغییرناپذیر است.

۸ـ اگر $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ باشد، الزاماً $\vec{b}=\vec{c}$ نیست زیرا اساساً مجموعه بردارها با عمل دوتایی (قانون ترکیب) ضرب اسکالر، تشکیل گروه نمی‌دهد (زیرا ضرب اسکالر دارای خاصیت انجمنی نیست) و در نتیجه خاصیت حذف عناصر از چپ و راست تساویها که ویژگی مشخص گروههاست در اینجا وجود ندارد.

۲ـ۶ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ الف) زاویه بین دو بردار $\vec{A}=۳\hat{i}+۳\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{B}=۲\hat{j}+\hat{j}+۳\hat{k}$ را به دست آورید.

ب) عبارت $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$ را محاسبه کنید، که در آن $\vec{C}=۲\hat{i}+۲\hat{j}-۲\hat{k}$ است.

حل. الف)

$$\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}=\frac{۰}{\sqrt{۲۷}\sqrt{۱۴}}=۰\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

ب)

$$\vec{B}.\vec{C}=۴+۲-۶=۰\Rightarrow\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})=۰$$

۲ـ سه بردار زیر داده شده‌اند:

$$\vec{A}=۳\hat{i}+۳\hat{j}-۲\hat{k}\ ,\ \vec{B}=-\hat{i}-۴\hat{j}+۲\hat{k}\ ,\ \vec{C}=۲\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k}$$

مطلوبست: الف) $\vec{A}\times(\vec{B}-\vec{C})$

ب) $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})$

حل. الف)

$$\vec{B}-\vec{C}=-۳\hat{i}-۶\hat{j}+\hat{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}-\vec{C})=-۹\hat{i}+۳\hat{j}-۹\hat{k}$$

ب)

$$\vec{B}+\vec{C}=\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k}$$

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=۳-۶-۶=-۹$

۳ـ بردارهای $\vec{A}=۳\hat{i}+۳\hat{j}-۲\hat{k}$ و $\vec{B}=۲\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k}$ داده شده‌اند.

الف) بزرگی $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ و زاویه‌ای راکه هرکدام با محور افقی می‌سازند چقدر است؟

ب) $\vec{A}.\vec{B}$ و $\vec{B}\times\vec{A}$ را محاسبه کنید.

ج) $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{B}-\vec{A}$ و زاویه بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را محاسبه کنید.

حل. الف)

$$|\vec{A}|=۴/۷\quad,\ |\vec{B}|=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\hat{i}}{|\vec{A}|\,|\hat{i}|}=\frac{۳}{۴/۷}$$

$$\cos\theta'=\frac{\vec{B}.i}{|\vec{B}|\,|\hat{i}|}=\frac{۲}{۳}$$

ب)

$$\vec{A}+\vec{B}=۵\hat{i}+۵\hat{j}-\hat{k}\quad,\ \vec{B}-\vec{A}=-\hat{i}-\hat{j}+۳\hat{k}$$

ج)

$$\vec{A}.\vec{B}=۱۰\quad,\ \cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}=۰/۷۱$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۳ & ۳ & -۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=۷\hat{i}-۷\hat{j}$$

۴ـ اگر $\vec{r}_۱=۲\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{r}_۲=\hat{i}+۳\hat{j}-۲\hat{k}$ ، $\vec{r}_۳=-۲\hat{i}+\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{r}_۴=۳\hat{i}+۲\hat{j}+۵\hat{k}$ باشد، اعداد a ، b و c را به گونه‌ای بیابید که $\vec{r}_۴=a\vec{r}_۱+b\vec{r}_۲+c\vec{r}_۳$

حل. رابطه خواسته شده در مسئله چنین است:

$$۳\hat{i}+۲\hat{j}+۵\hat{k}=a(۲\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})+b(\hat{i}+۳\hat{j}-۲\hat{k})+c(-۲\hat{i}+\hat{j}-۳\hat{k})$$

$$=(۲a+b-۲c)\hat{i}+(-a+۳b+c)\hat{j}+(a-۲b-۳c)\hat{k}$$

از آنجایی که $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ هم صفحه نیستند، بنابراین شرط لازم و کافی برای برقراری

تساوی بالا این است که مؤلفه‌های همنام با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} ۲a+b-۲c=۳ \\ -a+۳b+c=۲ \\ a-۲b-۳c=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-۲ \\ b=+۱ \\ c=-۳ \end{matrix} \Rightarrow \vec{r}_۴=-۲\vec{r}_۱+\vec{r}_۲-۳\vec{r}_۳$$

بردار $\vec{r}_۴$ را وابسته خطی بردارهای $\vec{r}_۱$، $\vec{r}_۲$ و $\vec{r}_۳$ می‌نامیم.

۵ـ بردار یکّه عمود بر صفحه $\vec{A}=۲\hat{i}-۶\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{B}=۴\hat{i}+۳\hat{j}-\hat{k}$ را تعیین کنید.

حل. فرض می‌کنیم بردار $\vec{C}=c_۱\hat{i}+c_۲\hat{j}+c_۳\hat{k}$ عمود بر صفحه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است. بنابراین $\vec{C}$ بر خود بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نیز عمود است. آنگاه

$$\vec{C}.\vec{A}=۲C_۱-۶C_۲-۳C_۳=۰ \Rightarrow ۲C_۱-۶C_۲=۳C_۳$$

$$\vec{C}.\vec{B}=۴C_۱+۳C_۲-C_۳=۰ \Rightarrow ۴C_۱+۳C_۲=C_۳$$

از حل همزمان دستگاه بالا داریم:

$$C_۱=\frac{۱}{۲}C_۳ \quad , \quad C_۲=-\frac{۱}{۳}C_۳$$

و در نتیجه:

$$C=C_۳(\frac{۱}{۲}\hat{i}-\frac{۱}{۳}\hat{j}+\hat{k})$$

بردار یکه در جهت $\vec{C}$ عبارت است از:

$$\frac{\vec{C}}{C}=\frac{C_۳(\frac{۱}{۲}\hat{i}-\frac{۱}{۳}\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{C_۳^۲(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+۱)}}=\frac{۳}{۷}\hat{i}-\frac{۲}{۷}\hat{j}+\frac{۶}{۷}\hat{k}$$

۶ـ کدام‌یک از جمله‌های زیر صحیح است. با مختصر توضیح یا محاسبه درستی حدس خود را تحقیق کنید.

الف) اگر $\vec{A}\times\vec{B}=۰$ باشد، دو بردار لزوماً بر هم عمودند.

ب) اگر $\vec{A}.\vec{B}=۰$ باشد، آنگاه $|\vec{A}\times\vec{B}|$ عبارتست از AB.

ج) اگر $\vec{r}=a(\hat{i}\cos\theta+\hat{j}\sin\theta)$ باشد، a مقدار ثابتی است، آنگاه $\vec{r}$ بر بردار مشتق خود عمود است.

حل. دو جمله (ب) و (ج) هر دو صحیح هستند. ابتدا واضح است اگر $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta=۰$، باشد، آنگاه دو بردار بر هم عمودند، یعنی $\cos=\frac{\pi}{۲}$ آنگاه

$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\frac{\pi}{2}=AB$. همچنین $\vec{r}$ برداری است با طول ثابت a (چرا؟) بنابراین همواره بر بردار مشتق خود (در اینجا نسبت به θ) عمود است یعنی:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}=a(\hat{i}\cos\theta-\hat{j}\sin\theta)$$

به روش دیگر، چنانچه حاصلضرب اسکالر $\vec{r}$ و بردار جدید را حساب کنیم، حاصل صفر می‌شود، یعنی دو بردار بر هم عمودند.

۲ـ۷ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱) آیا بردار یکه واحد دارد؟

۲ـ آیا حاصلضرب نرده‌ای می‌تواند یک کمیت منفی باشد؟ چرا؟

۳ـ نشان دهید که چه موقع تفاضل دو بردار با برآیند دو بردار برابر است؟

۴ـ آیا زبان بردارها برای بیان قوانین فیزیکی ایده‌آل است؟ چرا؟

۵ـ نشان دهید که بزرگی حاصلضرب برداری از لحاظ عددی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که این بردارها دو ضلع مجاور آن را تشکیل می‌دهند؟

۶ـ چه وقت یک کمیت فیزیکی را می‌توان با بردار نمایش داد؟

۷ـ می‌توان با ضرب کردن تمام بردارهای واحد در یک اسکالر، یک دستگاه مختصات راست را به یک دستگاه مختصات چپ تبدیل کرد. این اسکالر چیست؟

ب) مسائل

۱ـ نتیجه جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

الف) جمع برداری به طول ۲cm در راستای شرق با برداری به طول ۳cm در راستای شمال غرب.

ب) جمع برداری به طول ۸cm در راستای شرق با برداری به طول ۱۲ cm در راستای شمال غرب.

ج) نتایج دو قسمت الف و ب را با هم مقایسه کنید و قضیه‌ای درباره جمع یک

جفت بردار که مضربهایی از جفت بردار دیگر هستند طرح کنید.

۲ـ دو ذره از یک چشمه به بیرون پرتاب شده‌اند و در یک زمان معین به صورت زیر تغییر مکان داده‌اند:

$\vec{r}_1 = ۴\hat{i} + ۵\hat{j} + ۸\hat{k}$ $\qquad$ $\vec{r}_2 = ۲\hat{i} + ۱۰\hat{j} + ۵\hat{k}$

الف) جای ذرات را مشخص کنید و رابطه‌ای بنویسید که تغییر مکان ذره ۲ را نسبت به ذره ۱ نشان دهد.

ب) بزرگی بردار را با استفاده از حاصلضرب اسکالر به دست آورید.

جواب: $r = ۶/۱۶$ و $r_2 = ۱۱/۳۵$ و $r_1 = ۱۰/۲۴$

ج) طول تصویر $\vec{r}$ را روی $\vec{r}_1$ حساب کنید. جواب: $-۱/۲$

د) حاصلضرب برداری $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ را حساب کنید. جواب: $-۶۵\hat{i} - ۴\hat{j} + ۳۰\hat{k}$

۳ـ نشان دهید که بزرگی بردار $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ با حجم متوازی‌السطوح حاصل از بردارهای $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ برابر است.

۴ـ یالهای یک متوازی‌السطوح نسبت به مبدأ با بردارهای $\vec{i} + ۲\vec{j}$ و $۴\vec{j}$ و $j + ۳\vec{k}$ مشخص شده است حجم آن را تعیین کنید. جواب: ۱۲

۵ـ ثابت کنید که اگر جمع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، بزرگی‌های آن دو برابر با هم برابر است.

۶ـ نزدیکترین فاصله بین دو ذره ـ دو ذره ۱ و ۲ روی دو محور x و y حرکت می‌کنند و سرعت آنها به ترتیب $v_1 = ۲\hat{i}\,cm/s$ و $\vec{v}_2 = ۳\hat{j}\,cm/s$ است و در لحظه $t = ۰$ بعدها آنها برابر است با:

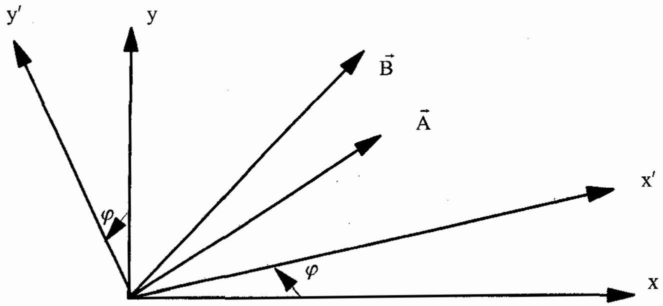
الف) بردار $r_2 - r_1$ را که نمایشگر مکان ذره ۲ نسبت به ذره ۱ به صورت تابعی از زمان است به دست آورید.

جواب: $\vec{r} = (۳ - ۲t)\vec{i} + (۳t - ۳)\vec{j}$

ب) چه وقت و کجا این ذره نزدیکترین فاصله را نسبت به هم دارند؟

جواب: $t=1/15$

۷ـ شکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که در آنها محورهای x و x' و y و y' با هم زاویهٔ φ می‌سازند. به طریق تحلیلی ثابت کنید که بزرگی و جهت $\vec{A}+\vec{B}$ در دو دستگاه برابر است و اینکه برای تحلیل از کدام دستگاه استفاده شود اهمیتی ندارد.



۸ـ بردار $\vec{P}(t)$ با بزرگی ثابت داده شده است. ثابت کنید که مشتق این بردار همواره بر خود بردار عمود است. در این مورد یک مثال فیزیکی بزنید.

فصل ۳

حرکت در یک بعد

۳ـ۱ـ تعاریف بنیادی

در این فصل و فصل بعد سخن از حرکت است بی آنکه انگیزه و علت حرکت مد نظر باشد که به آن حرکت‌شناسی یا سینماتیک گفته می‌شود. در این فصل حرکت در یک بعد مطرح می‌شود و از ذره سخن می‌گوییم. آنگاه در فصل بعد حرکت همین ذره در دو بعد (حرکت در صفحه) بیان می‌شود.

اساساً تغییر پیوستهٔ مکان یک ذره را از دید یک ناظر، حرکت می‌گوییم. حرکت امری نسبی است و از دیدگاه ناظران مختلف این تغییر متفاوت است (و ممکن است در موردی و از دید ناظری خاص اصلاً تغییری وجود نداشته باشد). در تغییر وضعیت جسم جای پای برداری که از مبداء مختصات انتخابی به موضع ذره در هر لحظه وصل می‌شود، دنبال می‌گردد و این بردار را بردار جابجایی $\vec{r}$ می‌گوییم. $\vec{r}=\vec{r}(t)$

فعلاً با ذره فیزیکی سروکار داریم یعنی جسمی که از ابعاد آن بتوان در مقابل تغییر مکانش صرفنظر کرد. این مسئله طبیعتاً نسبی است. مثلاً در حرکت وضعی زمین نمی‌توان آن را ذره فرض کرد ولی در حرکت انتقالی (گردش به دور خورشید) به سبب

بعد مسافت می‌توان در تقریب نخست زمین را ذره فرض کرد.

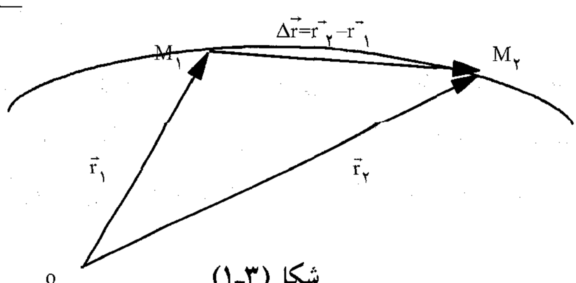
در یک بعد جابجایی فقط در یک راستا است از این‌رو رابطه برداری بالا به رابطه جبری تبدیل می‌شود. $x=x(t)$

مسیر: مکان هندسی اوضاع مختلف جسم متحرک در یک دستگاه معین مسیر جسم نامیده می‌شود.

سرعت: وقتی ذره‌ای بر خطی راست به طور یکنواخت حرکت می‌کند منظور این است که در زمانهای مساوی مسافتهای مساوی می‌پیماید. بنابر تعریف مسافت پیموده شده در یکای زمان را «سرعت» می‌نامیم.

سرعت متوسط: اگر ذره M به طور غیریکنواخت بر مسیری خمیده چون C حرکت کند می‌دانیم در هر لحظه مکان ذره به وسیله برداری مانند $\vec{r}$ که آن را بردار جابجایی یا شعاع حامل می‌گوییم مشخص می‌گردد. فرض می‌کنیم ذره در لحظه t_1 در نقطه M_1 و در لحظه t_2 در نقطه M_2 باشد. برای اینکه بتوانیم همانند حرکت مستقیم یکنواخت، سرعتی به این متحرک نسبت دهیم متحرکی فرضی در نظر می‌گیریم که در لحظه t_1 در نقطه M_1 بر متحرک اصلی منطبق باشد. دو متحرک در لحظهٔ t_1 حرکت می‌کنند. به طوری که متحرک اصلی کمان $\widehat{M_1M_2}$ را به طور غیرمشخص می‌پیماید و متحرک فرضی وتر $\overline{M_1M_2}$ را به طور یکنواخت طی می‌کند و هر دو در لحظه t_2 به نقطه M_2 می‌رسند. با توجه به تعریف سرعت در حرکت مستقیم یکنواخت سرعت متحرک فرضی در فاصله زمانی t_2-t_1 چنین است:

$$v_{\text{فرضی}}=\frac{\overline{M_1M_2}}{t_2-t_1}=\frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$$



شکل (۳-۱)

این سرعت را «سرعت متوسط» متحرک اصلی در فاصله $M_۱M_۲$ یا در فاصله زمانی Δt می‌گوییم:

$$\text{سرعت متوسط متحرک اصلی} = V_m = \frac{\overline{M_۱M_۲}}{\Delta t}$$

به صورت برداری می‌توان $\overrightarrow{M_۱M_۲}$ را تفاضل بردار مکان $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ دانست:

$$\overrightarrow{M_۱M_۲} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = \vec{\Delta r}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \qquad (۱\text{-}۳)$$

همچنان که می‌دانیم $\vec{\Delta r}$ بردار جابجایی است. یعنی می‌توان سرعت متوسط متحرک اصلی را بردار جابجایی نسبت به زمان و یا «تغییر بردار مکان نسبت به زمان» دانست.

مثال ۳ـ۱: دو اتومبیل در یک زمان از نقطهٔ A به سوی نقطهٔ B راه می‌افتند. اتومبیل اول نصف راه را با سرعت ثابت $V_۱$ و نصف دیگر را با سرعت ثابت $V_۲$ طی می‌کند. اتومبیل دوم نصف مدت حرکت خود را با سرعت $V_۱$ و نصف دوم زمان را با سرعت $V_۲$ می‌پیماید. معلوم کنید سرعت متوسط هر اتومبیل را در صورتی که $V_۱ = ۳۰\ \text{km/h}$ و $V_۲ = ۵۰\ \text{km/h}$ است.

حل. شاید در نگاه اول به نظر برسد که سرعت متوسط اتومبیل‌ها $V_m = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$ خواهد بود. در حالی که چنین نیست. در صورتی سرعت متوسط با این مقدار مساوی می‌شود که زمان حرکت با سرعت $V_۲$ مانند اتومبیل دوم باشد، یعنی برای اتومبیل دوم می‌توان عبارت فوق را به کار برد، هر چند بهتر است سرعت متوسط همیشه از نسبت مسافت طی شده به زمان حرکت حساب شود.

برای تومبیل اول:

$$V_m = \frac{x}{t} = \frac{v_۱t_۱ + v_۲t_۲}{t_۱ + t_۲} = \frac{x_۱ + x_۲}{t_۱ + t_۲}$$

x مسافت طی شده و $t = t_۱ + t_۲$ زمان حرکت است، ضمناً برای اتومبیل اول محاسبه اینطور ادامه پیدا می‌کند:

$$x = ۰/۵x + ۰/۵x,\ t = t_۱ + t_۲ = \frac{۰/۵x}{v_۱} + \frac{۰/۵x}{v_۲}$$

$$v_{m۱} = ۳۷/۵\ \text{km/h}$$

$$v_{m1}=\frac{x}{t_1+t_2}=\frac{x}{0/5(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})x}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

برای اتومبیل دوم:

$$t=0/5t+0/5t\ ,\ x=0/5tv_1+0/5tv_2$$

$$v_{m2}=40\ \mathrm{km/h}$$

$$v_{m2}=\frac{x}{t}=\frac{0/5v_1t+0/5v_2t}{t}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

سرعت لحظه‌ای: سرعت متوسط که به ذره M در فاصله زمانی Δt نسبت داده می‌شود دانشی از چگونگی حرکت (شکل مسیر و وضع متحرک) به ما نمی‌دهد. به این جهت ناگزیر از تعریف مفهومی هستیم که آن را سرعت لحظه‌ای می‌نامیم. با توجه به مفهوم حد و مشتق، سرعت لحظه‌ای را به صورت مشتق بردار جابجایی نسبت به زمان تعریف می‌کنیم:

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۲\text{-}۳)$$

شتاب: متحرکی بر خطی مستقیم چنان حرکت می‌کند که بر سرعت آن در فاصله‌های زمانی مساوی مقدار ثابتی افزوده می‌شود. چنین حرکتی را «مستقیم متشابه» می‌گوییم و تغییر سرعت متحرک را در یکای زمان شتاب می‌نامیم. هرگاه نقطه مادی در لحظهٔ t_1 در نقطه M_1 و دارای سرعت $\vec{V}_1$ و در لحظه t_2 در نقطهٔ M_2 با سرعت $\vec{V}_2$ باشد، می‌توان گفت در فاصله زمانی $\Delta t = t_2-t_1$ سرعت متحرک از $\vec{V}_1$ به $\vec{V}_2$ تغییر کرده است.

اینک متحرکی فرض می‌کنیم که در لحظه t_1 بر متحرک اصلی منطبق و دارای سرعت V_1 باشد سپس هر دو حرکت کرده و در لحظه t_2 به M_2 برسند و دارای سرعت V_2 باشد با این تفاوت که متحرک فرضی وتر $\overline{M_1M_2}$ را طی کند و افزایش سرعت آن یکسان باشد. بنابر تعریف شتاب متحرک فرضی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_m=\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1} \qquad (۳\text{-}۳)$$

این شتاب را شتاب متوسط متحرک اصلی می‌نامیم. هر چه فاصله زمانی Δt کوتاهتر شود شتاب متوسط به شتاب متحرک اصلی در یک لحظه معین نزدیکتر می‌شود. زمانی که وتر $\overline{M_1M_2}$ به اندازه کافی کوچک انتخاب گردد می‌توان حرکت جسم را با حرکت متحرکی فرضی که بر خطی مستقیم حرکت می‌کند و تغییر سرعت آن ثابت است اشتباه گرفت و شتاب آن را به شتاب لحظه‌ای متحرک اصلی نسبت داد.

در فصل بعد بررسی دقیق‌تری نسبت به حرکت یک بعدی انجام می‌دهیم و آن را به صورت حالت خاصی از حرکت در دو یا سه بعد مطرح می‌کنیم. بدین ترتیب، با توجه به مفهوم حد، شتاب لحظه‌ای را به صورت مشتق بردار سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم بردار جابجایی نسبت به زمان تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^3} \qquad (۴\text{-}۳)$$

مثال ۳-۲: جسمی که حرکت متشابه‌التغییر کند شونده دارد در مدت ۸ ثانیه مسافت ۱۸۰ متر طی کرده است و در آخر مسیر فوق سرعتش ۵ متر بر ثانیه شده است. سرعت اولیه و شتاب کند شونده را معلوم کنید.

حل. برای یافتن شتاب و سرعت اولیه از روابط فوق استفاده می‌کنیم:

$$\nu=\nu_0+at$$

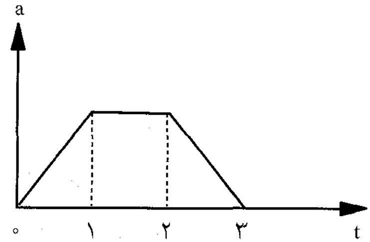
$$x=\frac{1}{2}at^2+\nu_0 t\Rightarrow x=\frac{1}{2}at_2+(\nu-at)t \qquad x=-\frac{1}{2}at^2+\nu t$$

این مقدار را در رابطهٔ اول قرار داده ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=180\\ t=8\\ \nu=5\end{cases} \qquad a=\frac{-35}{8}=-4/4\,m/s^2$$

مثال ۳-۳: رابطهٔ شتاب حرکت جسمی با زمان مطابق منحنی زیر است. حرکت جسم در ثانیه اول و دوم و سوم چگونه است. در چه موقعی سرعت جسم ماکزیمم

است؟



حل. در ثانیه اول جسم شتابدار حرکت می‌کند و شتاب آن زیاد می‌شود. در ثانیه دوم حرکت جسم متشابه‌التغییر است و مقدار شتاب ثابت است. در ثانیه سوم باز حرکت جسم شتابدار است، مقدار شتاب کم می‌شود ولی مثبت باقی می‌ماند لذا سرعت جسم زیاد می‌شود. به این ترتیب در انتهای ثانیه سوم سرعت جسم ماکزیمم است.

۳ـ۲ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

اطلاعات اولیه زیر به یقین در پاسخ دادن به پرسشهای این فصل کمک مؤثری خواهد بود:

۱ـ برای سرعت دو گونه تعریف به کار می‌رود:

الف) بردار سرعت متوسط که عبارت از $\vec{V}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ است و بردار سرعت لحظه‌ای که چنین تعریف می‌شود:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

ب) بزرگی بردار سرعت متوسط (تندی متوسط) که عبارت است از طول بردار سرعت متوسط. به شیوه دیگر تندی متوسط نسبت مسافت کل پیموده شده به زمان طی این مسافت است.

البته این دو تعریف فقط در یک مسیر مستقیم با هم معادلند و در بقیه حالتها، مثلاً مسیرهای بسته، با هم برابر نیستند. همچنین وقتی سرعت ثابت است، سرعت متوسط

در هر فاصله زمانی همان سرعت لحظه‌ای ذره است.

۲ـ اگر سرعت V_x در امتداد محور X ثابت باشد، سرعت متوسط در هر فاصله زمانی با سرعت لحظه‌ای یکی است و چنانچه سرعت به طور یکنواخت نسبت به زمان تغییر کند (شتاب ثابت باشد) مقدار متوسط سرعت از رابطه ($\bar{V}=\frac{1}{2}(Vx_\circ+V_x)$) به دست می‌آید. اما اگر شتاب متغیر باشد دیگر رابطه بالا سرعت متوسط را نتیجه نمی‌دهد.

۳ـ از مهمترین حرکات یک بعدی، سقوط آزاد اجسام است و چنانچه از مقاومت هوا چشم‌پوشی شود این حرکت در مسیر رفت و برگشت (در امتداد قائم) متقارن است. حال اگر توپی را در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب کنیم و مقاومت هوا را در نظر بگیریم، زمان پایین آمدن از زمان بالا رفتن آن تا ارتفاع مشخص بیشتر است. زیرا هوا سبک است و در هر حال تمایل دارد به طرف بالا برود. اگر توپی را با سرعت اولیه u به طرف بالا پرتاب کنیم و توپ دیگری را با همان سرعت از همان ارتفاع به پایین بیاندازیم با نادیده گرفتن مقاومت هوا تقارن این حرکت نشان می‌دهد که هر دو با یک سرعت به زمین می‌رسند (چگونه؟).

۴ـ در نوشتن معادلات و روابط فیزیکی باید مفهوم نسبی بودن کمیت‌ها همواره مد نظر باشد. تغییرات جسم حتماً نسبت به یک دستگاه مرجع سنجیده می‌شود نه به طور مطلق، پس لزوم انتخاب دستگاه مختصات کاملاً حس می‌شود. حال چنانچه رابطه‌ای از دیدگاه یک دستگاه مرجع نوشته شود اعتبار این رابطه مستقل از تغییر خود این دستگاه است (مثلاً انتقال یا چرخش این دستگاه). همینطور برای بیان مشخصات کمیتها زبان واحدی مورد نیاز است که همان یکاها است و در فصل اول از آن سخن گفتیم.

۵ـ بردار سرعت جسمی که شتاب دارد، می‌تواند صفر هم باشد زیرا تغییرات سرعت در واحد زمان شتاب است، نه نسبت بردار سرعت به زمان. در ضمن سرعت و شتاب یک جسم می‌توانند در یک جهت و یا در خلاف جهت یکدیگر باشند، مانند حرکت نوسانگر و یا سقوط آزاد.

۶ـ اگر V و a همسو باشند حرکت تند شونده و اگر در سوی مخالف هم باشند حرکت کند شونده است. اگر شتاب جسمی ثابت باشد سرعت آن می‌تواند از نظر بزرگی ثابت اما جهت متغیر داشته باشد.

۷ـ اگر شتاب گرانشی در یک کره دو برابر شتاب گرانشی زمین باشد و ما در آن کره جسمی را با سرعت معین به طرف بالا پرتاب کنیم، جسم تا مسافت h' بالا می‌رود و اگر همین آزمایش را در سطح زمین انجام دهیم تا ارتفاع h بالا می‌رود که از فرمول $V^2 - V_0^2 = 2gh$ به این نتیجه می‌رسیم که $h = 2h'$ می‌شود. همینطور اگر سرعت جسم دو برابر شود باز هم از رابطه مذکور معلوم می‌شود که $h' = 2h$.

۸ـ در حرکت پرتابی که ذره در یک صفحه مسیر منحنی را می‌پیماید مؤلفهٔ افقی شتاب صفر است و جسم فقط در جهت قائم تحت تأثیر شتاب g قرار دارد و شتاب جسم در بعد قائم است.

۹ـ اگر از یک نقطه بالاتر از سطح زمین دو جسم را با یک سرعت و در دو جهت مخالفِ (بالا و پایین) پرتاب کنیم هر دو با یک سرعت به زمین برخورد می‌کنند (بدون مقاومت هوا). زیرا جسم اول هنگام برگشت به محل پرتاب طبق قاعده سقوط اجسام همان سرعت را خواهد داشت.

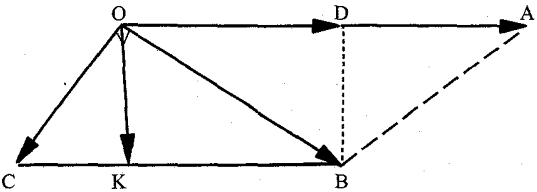
۱۰ـ در آزمایش گالیله جرمها با شتاب یکسان سقوط می‌کنند و شتاب اجسام در این سقوط ربطی به جرم آنها ندارد. پس اگر دو جرم متفاوت M و m را به هم متصل کنیم همان شتاب یا تغییرات سرعتی را خواهد داشت که جرمهای M و m به طور جداگانه داشتند.

۳ـ۳ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ قطاری با سرعت ۲۷ کیلومتر در ساعت در جهت مشرق حرکت می‌کند. مسافری که جلوی پنجره نشسته است فکر می‌کند باد از جهت شمال می‌وزد. موقعی که در جهت قبلی، سرعت قطار به ۵۴ کیلومتر در ساعت می‌رسد مسافر خیال می‌کند باد از

شمال شرق می‌وزد. امتداد سرعت باد را معلوم کنید.

حل. متوازی‌الاضلاع سرعتها یعنی OABC را رسم می‌کنیم:



$\overrightarrow{OD}$ بردار سرعتی است که مسافر احساس می‌کند و نسبت به جهت و سرعت حرکت قطار است. $\overrightarrow{OA}$ سرعت بعدی قطار است و زاویهٔ آن با سرعت نسبی باد یعنی $\overrightarrow{OC}$ معلوم است. $\overrightarrow{OB}$ سرعت مطلق باد است که می‌خواهیم پیدا کنیم. متوازی‌الاضلاع ODBK را رسم می‌کنیم. $\overrightarrow{OK}$ متوجه جنوب است، $\overrightarrow{OD}$ نصف $\overrightarrow{OA}$ است. مثلث OBA متساوی‌الساقین است. (زیرا BD هم ارتفاع است و هم میانه) $\overrightarrow{OA}$= ۵۳ km/h= ۱۵ m/sec. بنابراین طبق قضیه فیثاغورث می‌دانیم: $\overrightarrow{OD}$= ۲۷ km/h= ۷/۵ m/sec؛ در نهایت:

$$\vec{OB}^{2}=\vec{OD}^{2}+\vec{BD}^{2} \Rightarrow v^{2}= ۷/۵^{2}+۷/۵^{2}= ۱۱۲/۵$$

$$\Rightarrow \vec{v}= ۱۰/۶ \text{ m/s}$$

مقدار سرعت مطلق باد $\vec{V}$= ۱۰/۶ متر بر ثانیه و جهت آن شمال غربی است.

۲ـ مسافر قطاری که با سرعت ۳۶ km/h حرکت می‌کند، قطار دیگری را که به طول ۶۰۰ متر است، و در همان جهت قطاری که مسافر در آن است در حرکت است، نگاه می‌کند. قطار دوم به مدت ۶۰ ثانیه از جلوی مسافر می‌گذرد. سرعت قطار دوم چقدر است؟ عبور قطار اول از مقابل مسافر قطار دوم چند ثانیه طول می‌کشد؟ طول قطار اول ۹۰۰ متر است. سپس پیدا کنید اگر دو قطار در جهت مخالف هم حرکت کنند هر مسافر قطار دیگر را چند ثانیه خواهد دید؟

حل. (الف) قطارها در یک جهت حرکت می‌کنند. سرعت قطار دوم نسبت به قطار اول (یا اول نسبت به دوم) $V=V_۲-V_۱$ است. از طرف دیگر می‌توان سرعت نسبی را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$V=\frac{L_۲}{t_۱}=\frac{L_۱}{t_۲}$$

$t_۱$ زمانی است که در جریان آن مسافر قطار اول می‌تواند قطار دوم به طول $L_۲$ را ببیند و از آنجا $V=۱۰\ m/sec$ به دست می‌آید. لذا می‌توان نوشت:

$$V_۲=V_۱+V=۱۰\ m/sec+۱۰\ m/sec=۲۰\ m/sec=۷۲\ km/h$$

مدت زمانی که در جریان آن مسافر قطار دوم، اولی را می‌بیند.

$$t_۲=\frac{L_۲}{V}=۹۰\ sec$$

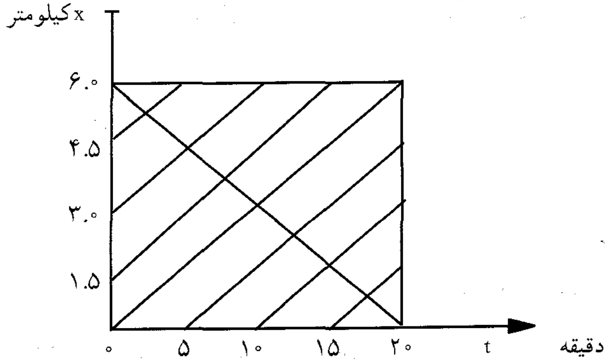
ب) قطارها در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. سرعت نسبی آنها $V=V_۱+V_۲$ خواهد بود. مدتی که هر مسافر قطار دیگر را می‌بیند چنین حساب می‌شود:

$$t_۱=\frac{L_۲}{V}=۲۰\ sec\ ,\ t_۲=\frac{L_۱}{V}=۳۰\ sec$$

$t_۱$ زمانی است که در جریان آن مسافر قطار اول می‌تواند قطار دوم به طول $L_۲$ را ببیند و $t_۲$ زمانی است که در جریان آن مسافر قطار دوم می‌تواند قطار اول به طول $L_۱$ را ببیند.

۳ـفاصله دو ایستگاه ابتدایی و انتهایی اتوبوسهای برقی شهر ۶ کیلومتر است. هر ۵ دقیقه یک اتوبوس از ایستگاه مبدأ حرکت می‌کند و با سرعت متوسط ۱۸ کیلومتر در ساعت مسیر خود را طی می‌کند. معلوم کنید: مسافری که تمام طول یک خط را سوار **شده در راه چند اتوبوس خواهد دید.**

حل. نمایش هندسی اتوبوسهای برقی که همدیگر را ملاقات می‌کنند رسم می‌کنیم. از ترسیم مشاهده می‌شود مسافر ۷ اتوبوس برقی را می‌بیند، چرا؟



۴ـ قایق ماهیگیری روی رودخانه‌ای حرکت می‌کرد. موقع عبور از زیر پل پاروی ماهیگیر به آب افتاد. ماهیگیر بعد از یک ساعت متوجه گم شدن پارو شده، به عقب برمی‌گردد و ۶ کیلومتر پایین‌تر از پل پاروی خود را پیدا می‌کند. سرعت حرکت آب رودخانه چقدر بوده است؟ فرض می‌کنیم سرعت حرکت ماهیگیر در جهت و خلاف آب یکی بوده است.

حل. اگر حرکت پارو و ماهیگیر را نه به ساحل بلکه نسبت به جریان آب رودخانه بسنجیم، پارو که با جریان آب حرکت می‌کند نسبت به آب ساکن فرض می‌شود. ماهیگیر ابتدا از پاروی ساکن (نسبت به جریان آب) دور می‌شود ولی بعداً به آن نزدیک می‌شود. سرعت حرکت ماهیگیر طبق صورت مسئله در هر دو حالت با هم مساوی است. اگر زمان گم کردن پارو تا آغاز اقدام جهت یافتن آن را t فرض کنیم از آغاز گم شدن تا گرفتن پارو ۲t خواهد بود. لذا ۲t زمان حرکت پارو در آب خواهد بود، و اگر مسافت طی شده توسط پارو را (در واقع جریان آب را) با S نشان دهیم برای سرعت حرکت پارو (یا آب) خواهیم داشت:

$$V = \frac{S}{2t} = 3\,\text{km/h}$$

مسئله را می‌توان با توجه به سرعت حرکت پارو و ماهیگیر نسبت به ساحل نیز حل کرد. با توجه به شکل مدت حرکت پارو و ماهیگیر را معلوم می‌کنیم.

v سرعت جریان آب و u سرعت حرکت ماهیگیر فرض می‌شود. آنگاه:

$$x_1=(v-u)t=v-u$$

$$x_2=u\times 1=u$$

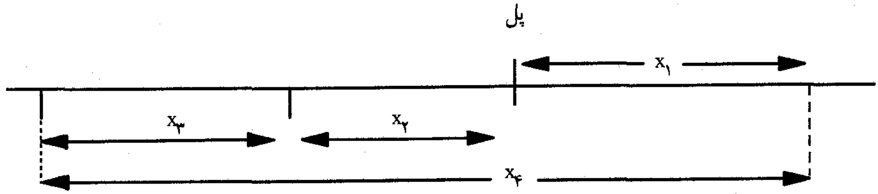
$$x_3=ut \quad\Rightarrow\quad x_4=x_1+x_2+x_3$$

$$x_4=(v+u)t$$

$$\Rightarrow (v+u)t=(v-u)+u+ut \qquad \Rightarrow vt=v \;\Rightarrow t=1$$

$t=1$، زمان پیمودن مسافت x_3 است.

$$x_2+x_3=u\times 1+u\times t \Rightarrow 6=u\times 1+u\times 1=2u \Rightarrow u=3\,km/h$$



باید به این نکته توجه کرد که مقدار سرعت ماهیگیر در حل مسئله دخالت ندارد. هم‌چنین اگر قایق در راستای جریان آب هم حرکت می‌کرد، همین پاسخ را به دست می‌آوریم.

۵ـ پلکان برقی مسافرینی را که روی آن ایستاده‌اند در مدت یک دقیقه بالا می‌برد. اگر پلکان ساکن باشد مسافرین در مدت سه دقیقه از آن بالا می‌روند. معلوم کنید مسافر از پلکان متحرک در چند دقیقه بالا خواهد رفت.

حل. معادله حرکت مسافر را با توجه به معلومات مسئله در حالات مختلف می‌نویسیم:

$$S=V_1t_1 \qquad S=V_2t_2 \qquad S=(V_1+V_2)t_3$$

که در اینجا S طول پلکان متحرک و V_1 سرعت حرکت آن و V_2 سرعت حرکت مسافر

نسبت به حالت ساکن پله‌ها است. t_1 زمان بالا رفتن مسافر در پله‌های متحرک در حالت سکون خویش است. t_2 زمان بالا رفتن مسافر از پله‌های ساکن است. t_3 زمان بالا رفتن مسافر از پله‌های متحرک است که مجهول مسئله می‌باشد.

از معادله اول و دوم V_1 و V_2 را یافته در معادله سوم قرار می‌دهیم:

$$S=\left(\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}\right)t_3 \qquad t_3=\frac{3}{4}\ \text{min}$$

۶ـ اتومبیلی فاصله دو نقطه A تا B را با سرعت $V_1 = 60$ km/h رفته موقع برگشت با سرعت ۲۰ km/h حرکت کرده است. سرعت متوسط حرکت اتومبیل را معلوم کنید؟

حل. سرعت متوسط از تقسیم مسافتهای طی شده به زمانشان به دست می‌آید. یعنی می‌توانیم بنویسیم $V_m=\frac{2S}{t_1+t_2}$ که S فاصله دو نقطه A و B است:

$$t_2=\frac{S}{V_2}\ ,\ t_1=\frac{S}{V_1}$$

است به این ترتیب خواهیم داشت:

$$V_m=\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}=30\ \text{km/h}$$

۷ـ فاصلهٔ دو بندر رودخانه‌ای ۱۰۰ کیلومتر است. ناوچه‌ای این فاصله را در جهت جریان رودخانه در مدت ۴ ساعت ولی در خلاف جهت رودخانه در مدت ۱۰ ساعت طی می‌کند. سرعت V_1 آب را و نیز سرعت V_2 ناوچه را نسبت به آب معلوم کنید.

حل. برای حرکت دقیق ناوچه به طرف بالا و به طرف پایین رودخانه می‌توان نوشت:

$$L=(V_1+V_2)t_1\ ,\ L=(V_2-V_1)t_2$$

معادله فوق را حل می‌کنیم.

$$V_1=7/5\ \text{km/h} \qquad V_2=17/5\ \text{km/h}$$

۸ـ جسمی که با شتاب ثابتی حرکت می‌کند دو فاصله متوالی را که هر کدام $x=10$ m هستند طی می‌کند. قسمت اول را در مدت $t_1=1/06$ ثانیه و قسمت دوم را در مدت $t_2=2/2$ sec می‌پیماید. سرعت اولیه جسم را در آغاز قسمت اول و سپس

شتاب حرکت را معلوم کنید.

حل. با توجه به شرایط مسئله می‌توان نوشت:

$$S=V_{\circ}t_{1}+\frac{at_{1}^{2}}{2} \quad , \quad S=Vt_{2}+\frac{at_{2}^{2}}{2}$$

که $V=V_{\circ}+at_{1}$ است. از معادله اول $V_{\circ}$ را به دست می‌آوریم.

$$V_{\circ}=\frac{2S-at_{1}^{2}}{2t_{1}}$$

از معادله دوم مقدار a را با توجه به مقدار V بر حسب $V_{\circ}$ معلوم می‌کنیم.

$$a=\frac{2S(t_{1}-t_{2})}{t_{1}t_{2}(t_{1}+t_{2})}\approx -3\,m/sec^{2}$$

سپس مقدار a را قرار می‌دهیم و $V_{\circ}$ به دست می‌آید:

$$V_{\circ}\approx 11\ m/sec$$

۹ـ حرکت نقطه مادی با رابطه $x=2t^{3}-15t^{2}+36t-10$ مشخص گردیده است. x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. وضعیت، سرعت و شتاب نقطه مادی را پس از زمان $t=4$ ثانیه معین کنید.

حل. از آنجایی که می‌دانیم سرعت مشتق مسافت نسبت به زمان است، می‌نویسیم:

$$\frac{dx}{dt}=V=6t^{2}-30t+36 \Rightarrow V=6\times(4)^{2}-30(4)+36=12\ m/s$$

و شتاب مشتق سرعت نسبت به زمان است:

$$\frac{dV}{dt}=a=12t-30 \Rightarrow a=12\times 4-30=18\ m/s^{2}$$

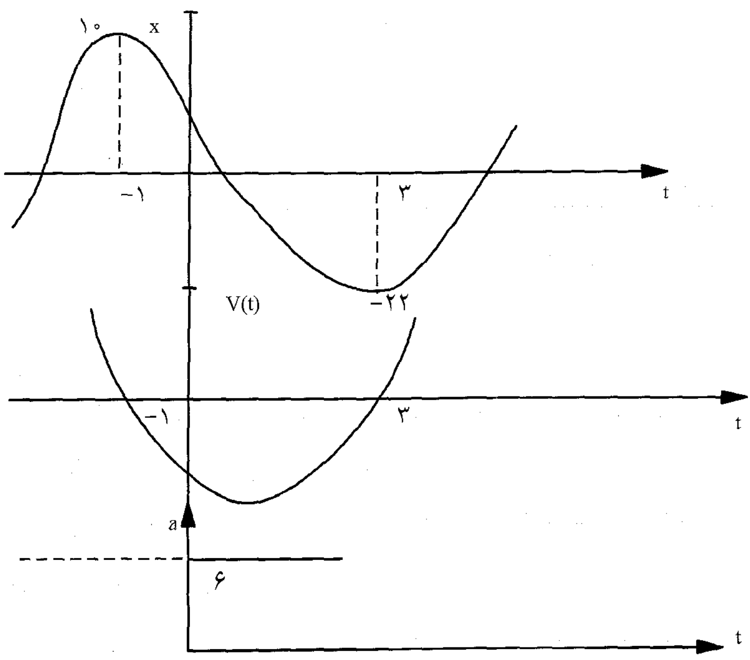
۱۰ـ ذره‌ای مطابق قانون $x=t^{3}-3t^{2}-9t+5$ روی محور xها حرکت می‌کند. در چه فاصله زمانی حرکت ذره به سمت xهای مثبت است؟ به سمت xهای منفی است؟ تند شونده و کند شونده است؟ نمودار x و V و a را بر حسب زمان رسم کنید.

حل. با استفاده از معادله $V=\frac{dx}{dt}$ برای سرعت لحظه‌ای داریم:

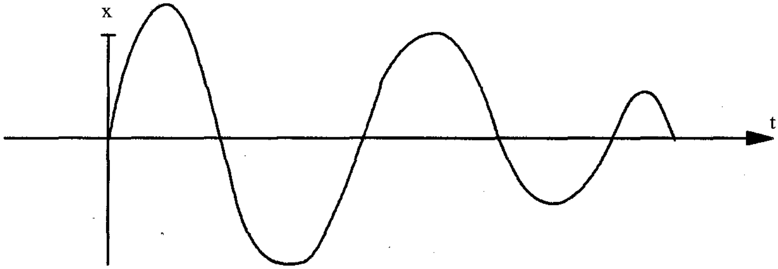
$$V=\frac{dx}{dt}=3t^{2}-6t-9=3(t+1)(t-3)$$

طبق نمودارهای زیر مشاهده می‌شود که به ازای $t<-1$ سرعت مثبت و حرکت در سوی

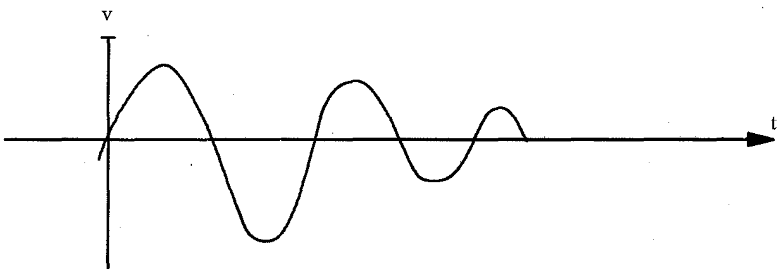
xهای مثبت صورت می‌گیرد. به ازای ۱ −=t و ۱۰ =x سرعت برابر صفر است. برای ۳ >t< ۱ − سرعت منفی است و سوی حرکت عوض می‌شود و ذره در جهت xهای منفی جابجا می‌شود. به ازای ۳ =t یعنی هنگامی که ۲۲ −=xاست سرعت دوباره برابر صفر می‌شود. به ازای ۳ <t سرعت از نو مثبت و سوی حرکت مجدداً تغییر می‌کند و ذره سوی xهای مثبت جابجا می‌شود. شکل الف مکان تقریبی ذره را نشان می‌دهد. A و B نمایش نقاط بازگشت هستند، یعنی جایی که سرعت برابر صفر است. از نمودار و شتاب مشاهده می‌شود که برای ۱ −>t حرکت کند شونده است (بزرگی V_0 کاهش می‌یابد؛ به گفتهٔ دیگر a و V مخالف هم می‌باشند). برای ۱ >t< ۱ − حرکت تند شونده برای ۳ >t< ۱ + حرکت دوباره کند شونده است و برای ۳ <t حرکت تند شونده است. این مثال نشان می‌دهد که نمودار x و V و a بر حسب زمان تا چه حد برای آشکار کردن مشخصات حرکت سودمند است.



۱۱ـ نمودار مکان ـ زمان جسمی مطابق شکل است. نمودار سرعت ـ زمان آن را رسم کنید.



حل. چون جهت حرکت جسم به طور متناوب تغییر می‌کند و جسم حرکت رفت و برگشتی دارد، بنابراین سرعت نیز باید به طور متناوب تغییر علامت دهد و در دو انتهای مسیر صفر شود. هم‌چنین سرعت جسم در آغاز حرکت صفر نیست بنابراین نمودار سرعت ـ زمان به شکل زیر خواهد بود.



۱۲ـ در بسیاری از فرودگاه‌های بزرگ «پیاده‌روهای متحرک» نصب شده است. اگر تسمهٔ متحرک با سرعت $1/25$ m/s حرکت کند و مسافت $75/5$ m را بپیماید، شخصی که روی تسمه با سرعت $0/80$ m/s نسبت به تسمه در جهت حرکت آن راه می‌رود، چه مدت روی تسمه می‌ماند؟

حل. سرعت شخص نسبت به تسمه را، v و سرعت تسمه نسبت به ناظر زمینی را v_2 در نظر می‌گیریم. با توجه به جهت حرکت شخص روی تسمه، سرعت او نسبت به

ناظر زمین برابر با حاصل جمع سرعت نسبت به تسمه و سرعت تسمه نسبت به زمین است. به عبارت دیگر:

$$\vec{v}=\vec{v}_۱+\vec{v}_۲ \Rightarrow |v|=|(\ v_۱+v_۲)|$$

با توجه به سرعت به دست آمده، مدت زمانی که شخص روی تسمه می‌ماند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$t=\frac{x}{v} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{۷۵/۰}{۱/۲۵+۰/۶}=۳۶/۶\ S$$

۱۳ـ یک آسانسور روباز با سرعت ثابت $v=۹/۸$ m/s صعود می‌کند. هنگامی که ارتفاع آسانسور از زمین به $h=۳۰/۹$ m می‌رسد، توپی از داخل آن مستقیماً به طرف بالا پرتاب می‌شود. سرعت اولیه توپ نسبت به آسانسور $v_۰=۱۹/۶$ m/s است.

الف) این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به داخل آسانسور برگردد؟

حل. سرعت توپ نسبت به زمین برابر است با $v_۰=۹/۸+۱۹/۶=۲۹/۴$ m/s

بنابراین حداکثر ارتفاع توپ عبارت است از:

$$h=h_{\circ}+\frac{v_{\circ}^{۲}}{۲۹}=۳۰/۹+\frac{(۲۹/۴)^۲}{۲\times ۹/۸}=۷۵\ \text{m}$$

ب) در حین صعود توپ، آسانسور نیز ارتفاعی را طی می‌کند که این مسافت را می‌توان با توجه به زمان صعود توپ محاسبه کرد:

$$t=\frac{v_{\circ}}{۲۹}=۳۸$$

و جابجایی آسانسور در این زمان $x=vt=۹/۸\times ۳=۲۹/۴$ m بنابراین هنگامی که توپ به ارتفاع اوج می‌رسد در فاصلهٔ $۱۴/۷$ m $(۷۵-(۳۰/۹+۲۹/۴))$ از آسانسور است. این فاصله توسط آسانسور و توپ طی می‌شود تا توپ وارد آسانسور شود به عبارت دیگر داریم:

$$h_۱ = \nu t \qquad , \qquad h_۱ + h_۲ = ۱۴/۷\ \text{m}$$
$$h_۲ = \frac{۱}{۲} g t^۲$$

$$\Rightarrow ۹/۸\, t + \frac{۱}{۲}\, ۹/۸\, t^۲ - ۱۴/۷ = ۰ \quad \begin{cases} t = ۱\ \text{sec} \\ t = -۳\ \text{sec} \end{cases}$$ غ.ق.ق

بنابراین مدتی که طول می‌کشد توپ وارد آسانسور شود $t = ۳ + ۱ = ۴\ \text{sec}$ است.

۱۴ـ یک گلولهٔ سربی را بالای تخته شیرجه‌ای که در ارتفاع $۴/۹\ \text{m}$ بالای سطح آب دریاچه قرار دارد رها می‌شود. گلوله با سرعت معینی با آب برخورد می‌کند و سپس با همین سرعت، که ثابت باقی می‌ماند، به داخل دریاچه فرو می‌رود. گلوله $۵/۰\ \text{S}$ بعد از رها شدن به ته دریاچه می‌رسد.

الف) عمق دریاچه چقدر است؟

ب) سرعت متوسط گلوله چقدر است؟

ج) فرض کنید تمام آب دریاچه خالی شود و گلوله از تخته شیرجه طوری پرتاب شود که پس از $۵/۰\ \text{S}$ به ته دریاچه برسد. سرعت اولیهٔ گلوله چقدر است؟

حل. گلوله از حال سکون رها می‌شود و وقتی با آب دریاچه برخورد می‌کند دارای سرعت ν خواهد بود:

$$\nu^۲ = \nu_۰^۲ + ۲ g h_۰ \Rightarrow \nu = \sqrt{۲ g h_۰} = ۹/۸\ \text{m/s}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا گلوله با سرعت اولیهٔ صفر به سطح آب برسد عبارت است از:

$$\nu = g t \Rightarrow t = ۱\ \text{S}$$

و از آنجاکه زمان رها شدن گلوله تا رسیدن آن به ته دریاچه $۵/۰\ \text{S}$ است، بنابراین گلوله در مدت $i = ۴\ \text{S}$ دریاچه را طی کرده است. بنابراین به سادگی می‌توان عمق دریاچه را حساب کرد.

$$h' = \nu t' \Rightarrow h' = ۳۹/۲\ \text{m}$$

حرکت گلوله در دریاچه حرکت یکنواخت (بدون شتاب) است.

ب) $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Sigma v t}{\Sigma t}=\frac{۴۴/۱}{۵}=۸/۸۲\ \text{m/s}$

ج) اگر آب دریاچه خالی شود و گلوله با سرعت $v_\circ$ در راستای قائم پرتاب شود به طوری که پس از ۵/۰ ثانیه به ته دریاچه برسد، حرکت گلوله، حرکت شتابدار خواهد بود که با توجه به قسمت الف، می‌توان نوشت:

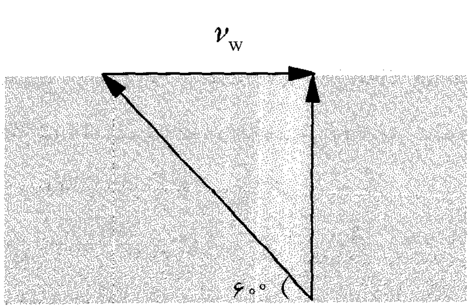
$$h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_\circ t$$
$$۴۴/۱=\frac{۱}{۲}g(۵)^{۲}+۵v_\circ \Rightarrow v_\circ=-۱۵/۷\ \text{m/s}$$

با توجه به اینکه جهت مثبت محور yها را سمت پایین در نظر گرفته‌ایم، علامت منفی نشان می‌دهد سرعت به سمت بالاست.

۱۵ـ یک قایق موتوری در عرض رودخانه‌ای که سرعت جریان آب در آن ۵/۶ km/h است، چنان حرکت می‌کند که درست در نقطهٔ روبه‌روی نقطهٔ آغاز حرکت به ساحل دیگر رودخانه برسد. برای این منظور قایق با زاویهٔ °۶۰ نسبت به خط ساحلی به طرف بالای رودخانه حرکت می‌کند، سرعت قایق نسبت به ساحل چقدر است؟

حل. برای اینکه قایق به نقطهٔ مقابل نقطهٔ شروع برسد باید سرعتی داشته باشد که حاصل جمع برداری آن با سرعت جریان آب، سرعتی در راستای مورد نظر بدهد. بنابراین با توجه به شکل و صورت مسئله، این سرعت باید در راستایی باشد که با خط ساحلی زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. بنابراین:

$$v_b=\frac{v_w}{\cos ۶۰}=۱۱/۲\ \text{km/h}$$



۳ـ۴ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ آیا می‌توانید چند پدیدهٔ فیزیکی را نام ببرید که در آنها نتوان زمین را به صورت ذره در نظر گرفت؟

۲ـ آیا سرعت جسمی که شتابش به سمت غرب است، می‌تواند به سمت شرق باشد؟

۳ـ آیا جهت سرعت جسمی که شتابش ثابت است می‌تواند تغییر کند؟

۴ـ در اثر معکوس شدن جهت زمان، معادلات سینماتیکی به چه صورت درمی‌آیند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۵ـ آیا ممکن است در حرکت دو بعدی شتاب فقط در یک بعد باشد؟

۶ـ با توجه به آنچه که دربارهٔ زاویه می‌دانید، چه ابعادی را می‌توانید به زاویه نسبت بدهید؟ آیا یک کمیت می‌تواند بدون داشتن بُعد یکا داشته باشد.

۷ـ کدامیک از حالتهای زیر غیرممکن است؟ (a) سرعت و شتاب یک جسم هر دو به طرف مشرق‌اند. (b) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب به طرف غرب است. (c) سرعت جسمی صفر است اما شتاب آن صفر نیست. (d) شتاب یک جسم ثابت ولی سرعت آن متغیر است. (e) سرعت یک جسم ثابت ولی شتاب آن متغیر است.

۸ـ شخصی با سرعت ثابت V از یک آینهٔ تخت دور می‌شود. تصویر شخص در آینه، چه وضعیتی دارد؟

۹ـ شخصی که بلندی قامتش h است با سرعت ثابت v از یک چراغی که در ارتفاع H از سطح خیابانی آویخته شده است در طول خیابان می‌دود. سرعت سایهٔ سر او بر زمین با سرعت حرکت او چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

۱۰ـ آیا جمله زیر صحیح است: اگر موجودی حرکتی تولید کند، یک موجود دیگر با یک نیروی دو برابر بزرگتر، حرکتی دو برابر و یک موجود با یک نیروی سه برابر بزرگتر، حرکتی سه برابر تولید می‌کند. چرا؟

ب) مسائل

۱ـ دو جسم که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند اگر به سوی هم حرکت کند فاصله آنها هر ۱۰ ثانیه ۱۶ متر کم می‌شود. ولی اگر در یک جهت حرکت کنند فاصلهٔ آنها هر ۵ ثانیه ۳ متر زیاد می‌شود. سرعت حرکت هر کدام از آنها را بیابید.

۲ـ فاصلهٔ دو ایستگاه رودخانه‌ای را قایق موتوری در جهت جریان آب در مدت ده دقیقه طی می‌کند ولی در خلاف جهت جریان این عمل ۳۰ دقیقه طول می‌کشد. معلوم کنید این فاصله را، گروه نجات که داخل آب شده و با سرعت جریان آب شنا می‌کنند در چه مدتی طی خواهند کرد؟

۳ـ هلیکوپتری به طور قائم با سرعت ثابت ۹۰ کیلومتر بر ساعت بالا می‌رود و خورشید تحت زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق آن می‌تابد. سرعت سایهٔ هلیکوپتری بر روی زمین، بر حسب کیلومتر بر ساعت را پیدا کنید؟

۴ـ شتاب نقطه مادی با رابطه $a=k\sin \pi t/T$ تعیین می‌شود. در صورتی که بدانیم در لحظه $t=0$ سرعت و فاصله نقطه مادی از مبدأ برابر با صفر است معین کنید: (a) معادلات حرکت (b) ماکزیمم سرعت (c) وضع متحرک در لحظه $t=2t$ (d) سرعت متوسط در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=2T$.

۵ـ شتاب نقطه مادی که از نقطه P به طرف زمین رها می‌شود برابر است با $a=-gR^2/r^2$ که r فاصله نقطه مادی از مرکز زمین و R شعاع زمین و g شتاب جاذبه بر روی سطح زمین می‌باشد. رابطه‌ای برای سرعت فرار به دست آورید، یعنی حداقل سرعت اولیه برای پرتاب جسم به طرف بالا و در امتداد قائم از سطح زمین که دیگر به طرف زمین برنگردد.

۶ـ در ایستگاه متروی شهر در ساعت پرازدحام در هر پله ۱۲۰ پلکان مترو ۲ نفر می‌ایستند. در مقابل آنها پلکان متحرک دیگری از سوی مقابل با همان مشخصات حرکت می‌کند، سرعت هر دو پلکان برقی $V=0/9$ m/sec است، فاصله پله‌ها $L=450$ mm است. معلوم کنید:

(a) از پلکانی که بالا می‌رود در هر دقیقه چند مسافر از مقابل نگهبان که در بالا ایستاده است می‌گذرند.

(b) در هر دقیقه چند نفر از مقابل مسافر ایستاده در پلکانی که پایین می‌آید می‌گذرند.

۷ـ از قطاری که در حال حرکت است واگن آخری جدا شده، قطار با سرعت قبلی به حرکت خود ادامه می‌دهد. نسبت راهی که قطار طی می‌کند به راهی که واگن تا ایستادن می‌پیماید چقدر است؟ فرض می‌کنیم حرکت واگن دارای شتاب کند شونده است.

۸ـ جسمی که حرکت متشابه‌التغییر تند شونده دارد در ثانیه چهارم حرکت خود ۳۵ متر راه پیموده (a) شتاب حرکت جسم چقدر است؟ (b) سرعت جسم را در آخر ثانیه چهارم و ثانیه دهم بیابید (c) در ثانیه دوم و در ثانیه پنجم جسم چقدر راه طی می‌کند. (d) در ثانیه دوم و سوم جسم روی هم چقدر راه رفته است.

۹ـ دو قطار که سرعت هر دو با هم برابر است، بر روی یک مسیر مستقیم به سوی هم حرکت می‌کنند. وقتی که فاصلهٔ دو قطار از همدیگر ۸۰ km است، پرنده‌ای که می‌تواند با سرعت ۴۰ km/h پرواز کند، یکی از قطارها را ترک و مستقیماً به طرف قطار دیگر پرواز می‌کند. پرنده به محض رسیدن به قطار دوم آن را ترک می‌کند و مستقیماً به طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را به همین ترتیب تکرار می‌کند (a) قبل از اینکه دو قطار به هم برسند، این پرنده چند بار می‌تواند میان آنها رفت و آمد کند؟ (b) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟ سرعت قطارها را ۶۰ km/h بگیرید.

۱۰ـ در لحظه‌ای که چراغ راهنمایی سبز می‌شود، اتومبیلی با شتاب ثابت a_x برابر با $1/8\ m/s^2$ به راه می‌افتد. در همان لحظه کامیونی که با سرعت ثابت $9/0\ m/s$ در حرکت است، به اتومبیل می‌رسد و از آن سبقت می‌گیرد (a) در چه فاصله‌ای از نقطه شروع حرکت، اتومبیل از کامیون جلو خواهد افتاد؟ (b) سرعت اتومبیل در آن لحظه چقدر است؟ (منحنی تغییرات کیفی x بر حسب t را برای هر یک از این دو وسیلهٔ نقلیه

رسم کنید).

۱۱ـ متحرکی $\frac{۱}{۲}$ مسیر خود را با سرعت v، $\frac{۱}{۴}$ مسیر را با $\frac{v}{۲}$، $\frac{۱}{۸}$ مسیر را با سرعت $\frac{v}{۴}$ و... و به همین صورت تا انتها طی می‌کند. سرعت متوسط این متحرک چقدر است؟

جواب: $\bar{v}=۰$

۱۲ـ دو بارانداز درست به فاصلهٔ ۱/۰۰ km در امتداد ساحل رودخانه‌ای واقعند که آب در آن با سرعت ۱/۴ km/h جریان دارد. یک قایق موتوری با سرعت ثابت نسبت به آب در مدت ۳۰/۰ min این فاصله را می‌پیماید و برمی‌گردد. سرعت قایق موتوری نسبت به آب چقدر است؟

۱۳ـ رودخانه‌ای به عرض ۱۰۰ m را در نظر بگیرید. سرعت آب این رودخانه نسبت به ساحل ۴m/s است. یک قایق می‌خواهد از نقطهٔ A در یک طرف رودخانه به نقطهٔ مقابلش، B، برود. پاروزنها قایق را با تندی ۳m/s نسبت به آب رودخانه می‌رانند. با چه زاویه‌ای نسبت به خط عمود باید قایق رانده شود تا به نقطهٔ B برسد سرعت قایق را در این حالت نسبت به ساحل حساب کنید.

۱۴ـ دو قطار یکی با سرعت ۹۰ km/h و دیگری با سرعت ۱۰۸ km/h در یک مسیر مستقیم و افقی به سوی هم درحرکتند. وقتی فاصلهٔ دو قطار به ۲/۰ km می‌رسد راننده‌های آنها هم زمان قطارهای یکدیگر را می‌بینند و ترمز می‌کنند. اگر این ترمزگیری سرعت هر یک را با آهنگ ۱/۰ m/s^2 کُند کند آیا برخوردی رخ می‌دهد یا نه؟

فصل ۴

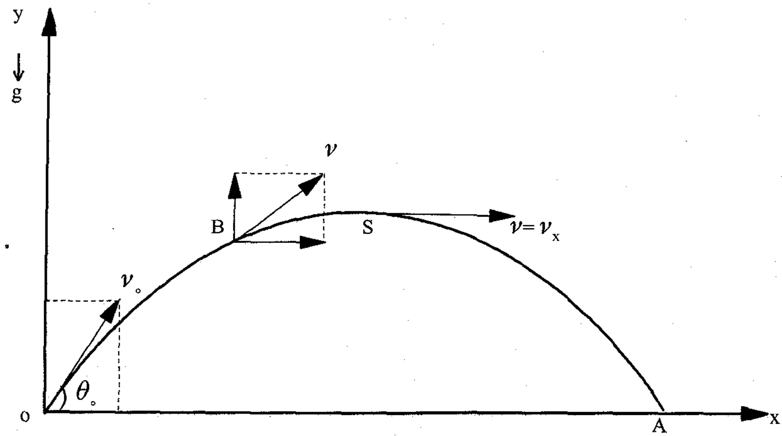
حرکت در یک صفحه

در این فصل حرکت ذره در دو بعد مطرح می‌شود. مهمترین نوع حرکت دو بعدی حرکت پرتابی و حرکت دورانی است. از این‌رو با طرح و حل دو مسئله تقریباً تمامی نکات مربوط به سینماتیک دو بعدی و نیز حرکت یک بعدی که حالت خاص آن است بررسی می‌شود. در پایان با طرح مسئله‌ای به مفهوم نسبیت و جمع سرعتها در مکانیک نیوتنی می‌پردازیم.

۴ـ۱ـ مسئله حرکت پرتابی

با توجه به تعریف و مفهوم فیزیکی سرعت متوسط، معادلات پارامتری حرکت پرتابی را بنویسید و از آنجا معادله مسیر را نتیجه بگیرید. ویژگیهای مختلف این حرکت را بررسی کنید.

حل.



شکل(۴ـ۱)

در این مسئله به بررسی حرکتی می‌پردازیم که در آن جسم تحت اثر نیروی گرانشی در جهتی پرتاب می‌شود و بدین سبب این نوع حرکات را پرتابی می‌نامیم. در مطالعه این حرکت شتاب گرانشی را ثابت فرض کرده از مقاومت هوا چشمپوشی می‌شود. به زاویه‌ای که جسم با سطح افق در نقطه پرتاب می‌سازد «زاویه پرتاب» می‌گویند.

وجود شتاب گرانشی به طرف پایین سبب می‌شود که مسیر جسم خمیده باشد و در زیر نشان می‌دهیم مسیر سهمی است. متحرک M تحت زاویه $\theta_\circ$ (به افق) با سرعت $V_\circ$ پرتاب شده است. متحرک منحنی شکل OBA را می‌پیماید و پس از t ثانیه به نقطه‌ای مانند B می‌رسد. در لحظه پرتاب مؤلفه‌های سرعت جسم بر دو راستای x و y چنین است:

$$(V_x)_\circ = V_\circ \cos\theta_\circ$$

$$(V_y)_\circ = V_\circ \sin\theta_\circ \qquad (۱ـ۴)$$

در راستای محور x همواره سرعت ثابت و برابر مقدار $V_x = V_\circ \cos\theta_\circ$ است. اما در راستای محور y در هر ثانیه به اندازه g از سرعت جسم از این سرعت جسم در این راستا کاسته می‌شود: یعنی در لحظه t مؤلفه‌های سرعت نقطه B عبارت است از:

$$(V_x)_B=V_\circ\cos\theta_\circ \qquad (۱\text{-}۴)'$$
$$(V_y)_B=V_\circ\sin\theta_\circ-gt$$

سرعت متوسط تصاویر متحرک M را بر روی دو محور x و y در نقطه B می‌نویسیم:

$$(\text{الف})\quad (V_m)_x=\frac{(V_x)_\circ+(V_x)_B}{۲}=\frac{V_\circ\cos\theta_\circ+V_\circ\cos\theta_\circ}{۲}=V_\circ\cos\theta_\circ$$

$$(\text{ب})\quad (V_m)_y=\frac{(V_y)_\circ+(V_y)_B}{۲}=\frac{V_\circ\sin\theta_\circ+V_\circ\sin\theta_\circ-gt}{۲}=V_\circ\sin\theta_\circ-\frac{۱}{۲}gt$$

در راستای x چون سرعت همواره ثابت است رابطه بالا همیشه برقرار است. در مورد مؤلفه V_y چون تغییرات سرعت یکنواخت است (یعنی شتاب در این راستا برابر g است) می‌توان رابطه بالا را برای مقدار متوسط نوشت.

با توجه به تعریف فیزیکی سرعت متوسط

$$(V_m)_x=\frac{x}{t}$$
$$(V_m)_y=\frac{y}{t}$$

پس:

$$x=(V_m)_x t=V_\circ t\cos\theta_\circ$$
$$y=(V_m)_y t=V_\circ t\sin\theta_\circ-\frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۲\text{-}۴)$$

رابطه (۴-۲) معادلات پارامتری حرکت است (معادلات حرکت تصویر ذره M بر دو محور x و y) و رابطه (۴-۱) معادلات پارامتری سرعت (معادلات سرعت تصاویر ذره بر دو محور x و y) است. با حذف t از رابطه (۴-۲) داریم:

$$t=\frac{x}{V_\circ\cos\theta_\circ}$$

$$y=V_\circ t\sin\theta_\circ-\frac{۱}{۲}gt^۲=V_\circ\sin\theta_\circ\left(\frac{x}{V_\circ\cos\theta_\circ}\right)-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{x}{V_\circ\cos\theta_\circ}\right)^۲$$

$$y=x\,tg\,\theta_\circ-\frac{g}{۲V_\circ^۲\cos^۲\theta_\circ}x^۲ \qquad (۳\text{-}۴)$$

معادله (۴-۳) معادله مسیر ذره M است که معادلهٔ یک سهمی است. اکنون به بررسی ویژگیهای این حرکت می‌پردازیم:

الف) نقطه اوج: بالاترین نقطه‌ای که متحرک به آن می‌رسد «نقطه اوج» نامیده می‌شود. سرعت در راستای محور y عبارت است از: $V_y=V_\circ\sin\theta_\circ-gt$

این رابطه نشان می‌دهد که در t ثانیه به اندازه gt از سرعت اولیه $V_\circ\sin\theta_\circ$ کاسته می‌شود. باگذشت زمان t بزرگ می‌شود یعنی جمله gt به $V_\circ\sin\theta_\circ$ نزدیک می‌شود و سرانجام زمانی می‌رسد که $V_\circ\sin\theta_\circ=gt$ است یعنی سرعت در راستای y صفر می‌شود و سرعت متحرک تنها برابر $V=V_x=V_\circ\cos\theta_\circ$ در راستای موازی محور xهاست (مماس بر مسیر در نقطه S در شکل (۴ـ۱)). چنین نقطه‌ای را نقطه اوج می‌گوییم. از این به بعد متحرک به طرف پایین برمی‌گردد، چراکه از این پس بر اثر شتاب گرانشی g در هر ثانیه به اندازه g بر سرعت آن افزوده می‌شود. در نتیجه جسم تحت اثر دو سرعت $V_\circ\sin\theta_\circ$ و gt مسیر BA را طی می‌کند.

زمانی که جسم به نقطه S می‌رسد از رابطه $V_\circ\sin\theta_\circ=gt_s\Rightarrow t_s=\dfrac{V_\circ\sin\theta_\circ}{g}$ به دست می‌آید. با قرار دادن t_s در رابطه (۴ـ۲) داریم:

$$X_s=V_\circ t_s\cos\theta_\circ=V_\circ\cos\theta_\circ\frac{V_\circ\sin\theta_\circ}{g}=\frac{V_\circ^2\sin\theta_\circ\cos\theta_\circ}{g}=\frac{V_\circ^2\sin 2\theta_\circ}{2g}$$

(۴ـ۴)

$$Y_s=V_\circ t_s\sin\theta_\circ-\frac{1}{2}gt_s^2=V_\circ\sin\theta_\circ\frac{V_\circ\sin\theta_\circ}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{V_\circ\sin\theta_\circ}{g}\right)^2=\frac{V_\circ^2\sin^2\theta_\circ}{2g}$$

y_s و x_s به ترتیب ارتفاع نقطه اوج از سطح افق و فاصله افقی از نقطه پرتاب است.

ب) برد: برد مسافتی افقی است از نقطه پرتاب تا نقطه‌ای که متحرک دوباره سطح افق را قطع می‌کند. آشکار است در این نقطه (نقطه A روی شکل ۴ـ۱)، $y=\circ$ است. پس:

$$y_A=V_\circ t\sin\theta_\circ-\frac{1}{2}gt^2=\circ\Rightarrow t_\circ=\circ\ ,\ t_A=\frac{2V_\circ\sin\theta_\circ}{g}\qquad(۴ـ۵)$$

$t_\circ=\circ$ مربوط به ابتدای حرکت و t_A مربوط به انتهای حرکت است، یعنی در این دو زمان $y=\circ$ است. با قرار دادن t_A در رابطه (۴ـ۲) الف برد R را به دست می‌آوریم.

$$x_A = R = V_\circ t_A \cos\theta_\circ = V_\circ \cos\theta_\circ \left(\frac{2V_\circ \sin\theta_\circ}{g}\right) = \frac{2V_\circ^2 \sin 2\theta_\circ}{g} \qquad (۵ـ۴)'$$

بحث کلی در مورد تغییرات زاویه پرتاب در حرکت پرتابی.

I- $\theta_\circ = 90^\circ$ یعنی جسم با سرعت اولیه $V_\circ$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. در این حالت معادلات پارامتری حرکت چنین می‌شود:

$$X = V_\circ t\cos\theta_\circ = V_\circ t\cos 90 = 0$$

$$Y = V_\circ t\sin 90 - \frac{1}{2}gt^2 = V_\circ t - \frac{1}{2}gt^2$$

پس در راستای محور x حرکتی وجود ندارد (نقطه مادی M بر محور x تصویری ندارد)

معادله مسیر چنین است:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_\circ t$$

یعنی حرکت بر خط مستقیم است. از معادلات پارامتری سرعت داریم:

$$V_y = V_\circ \sin\theta_\circ - gt = V_\circ - gt$$

نقطه اوج این حرکت وقتی است که $V_y = 0$ باشد، یعنی:

$$V_\circ - gt = 0 \Rightarrow t_s = \frac{V_\circ}{g}$$

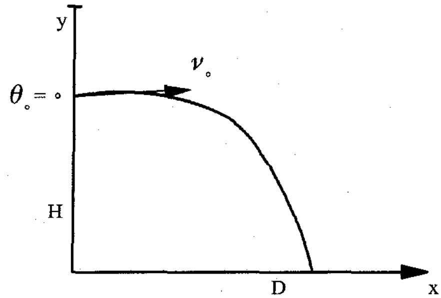
در این لحظه پس از $t'_s = t_s$ به نقطه o (نقطه پرتاب) می‌رسد. y_s از قرار دادن t_s در رابطه y به دست می‌آید.

$$Y_s = V_\circ t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = V_\circ \left(\frac{V_\circ}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_\circ}{g}\right)^2 = \frac{V_\circ^2}{2g}$$

II- $\theta_\circ = 0$ ذره متحرک در راستای افق پرتاب می‌شود. مثلاً سنگ در راستای افق از بالای یک برج در این حالت برای معادلات حرکت داریم:

$$x = V_\circ t\cos\theta_\circ = V_\circ t$$

$$y = V_\circ t\sin\theta_\circ - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2$$



شکل (۴ـ۲)

از حذف t، معادله مسیر به دست می‌آید:

$$y=-\frac{۱}{۲}g(\frac{x^{۲}}{۲v_{\circ}^{۲}})=\frac{-g}{۲v_{\circ}^{۲}}x^{۲}$$

III- $\circ<\theta_{\circ}<-۹\circ^{\circ}$ یعنی جسم با سرعت اولیه $V_{\circ}$ در زیر افق پرتاب می‌شود.
معادلات حرکت همان معادلات کلی حرکت است فقط $\theta_{\circ}$ را منفی انتخاب می‌کنیم.

$$x=V_{\circ}t\cos\theta$$

$$y=V_{\circ}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

IV- $\theta_{\circ}=-۹\circ^{\circ}$ مثال: جسمی را در راستای قائم با سرعت اولیه به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. معادلات حرکت به صورت زیر است:

$$x=V_{\circ}t\cos(-۹\circ)=\circ$$

$$y=V_{\circ}t\sin(-۹\circ)-\frac{۱}{۲}gt^{۲}=-V_{\circ}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

در راستای محور x حرکتی وجود ندارد. معادلات پارامتری سرعت (در راستای y) عبارت است از:

$$V_x=V_{\circ}\cos(-۹\circ)=\circ$$

$$V_y=V_{\circ}\sin(-۹\circ)-gt=-V_{\circ}-gt$$

دیده می‌شود که وقتی جسمی در راستای قائم و به طرف پایین با سرعت اولیه $V_{\circ}$ رها می‌شود در هر ثانیه بر مقدار سرعت به اندازه g افزوده می‌شود. یعنی اختلاف این حرکت با حرکت پرتابی در راستای قائم به سمت بالا در این است که در مورد اخیر g در خلاف جهت سرعت اولیه است و باعث کُند شدن و سرانجام توقف ذره در نقطه S می‌گردد. در حالی که در حرکت اول g باعث افزایش سرعت اولیه می‌شود یعنی $V_{\circ}$ و g هم علامت هستند. بنابراین با تغییر جهت محور yها می‌توان y را به این صورت نمایش داد:

$$y=V_{\circ}t+\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

در این نوع حرکت اگر $V_{\circ}=\circ$ باشد حرکت، «سقوط آزاد» نامیده می‌شود و داریم:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^{۲} \quad و \quad V=gt$$

۴ـ۲ـ مسئله حرکت دورانی

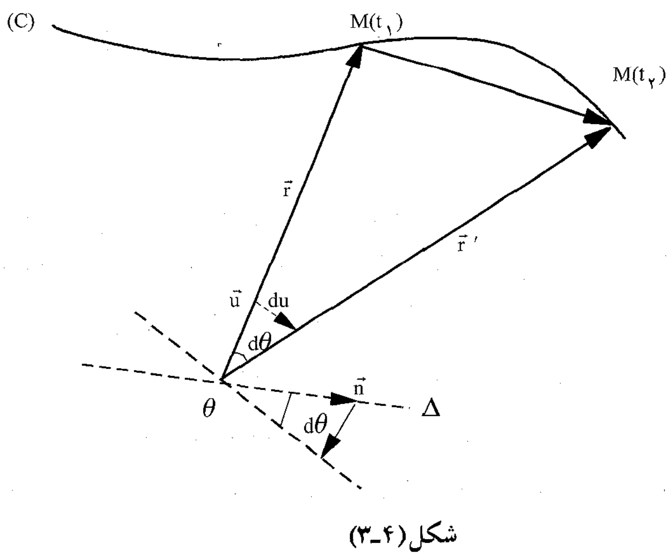
متحرکی بر مسیری خمیده شکل به شعاع انحناء r در حرکت است $\vec{r}=\vec{r}(t)$. در انواع مختلف حرکت این ذره بحث کنید. به ویژه حالتهای حرکت مستقیم‌الخط و حرکت بر دایره را نتیجه بگیرید.

حل. فرض می‌کنیم متحرکی بر مسیر خمیده C در حرکت است. شکل (۴ـ۳) چگونگی وضعیت متحرک را در دو لحظه t_1 و t_2 نشان می‌دهد. بر روی بردار شعاع حامل بردار یکای $\vec{u}$ را انتخاب می‌کنیم. بنابر تعریف بردار یکا داریم:

$\vec{r}=|\vec{r}|\ \vec{u}=r\vec{u}$

پس سرعت متحرک در هر لحظه بنابر آنچه در فصل سوم دیدیم چنین است:

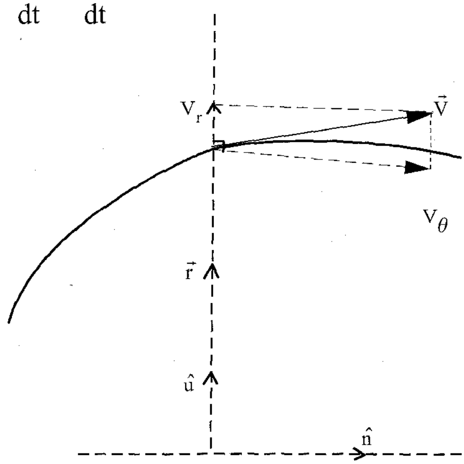
$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\vec{u})=\frac{dr}{dt}\vec{u}+r\frac{d\vec{u}}{dt} \tag{۴ـ۶}$$



شکل (۴ـ۳)

اما $\frac{d\vec{u}}{dt}$ برداری عمود بر $\vec{u}$ ثابت است (مسئله ۸ فصل دوم را ببینید). راستای $\frac{d\vec{u}}{dt}$ خط Δ و بردار یکای این راستا $\vec{n}$ است.

$$|d\vec{u}|=|\vec{u}|d\theta=d\theta \Rightarrow \frac{du}{dt}=\frac{d\theta}{dt}$$



شکل (۴ـ۴)

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\hat{n} \tag{۴ـ۷}$$

$$\vec{V}=\frac{dr}{dt}\hat{u}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{n}=\vec{V}_r+\vec{V}_\theta$$

از آنجاکه بردار سرعت $\vec{v}$ حد بردار جابجایی است (تقسیم بر Δt) و جابجایی خود خط قاطع منحنی است پس سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر است و دو مؤلفه دارد:

$$\vec{v}_r=\frac{dr}{dt}\hat{u}$$

$$\vec{v}_\theta=r\frac{d\theta}{dt}\hat{n} \tag{۴ـ۷'}$$

که در آن $\vec{v}_r$ در راستای شعاع حامل و $\vec{v}_\theta$ عمود بر شعاع حامل است. $\vec{v}_r$ تغییر اندازه بردار شعاع حامل و $\vec{v}_\theta$ تغییر جهت آن را نسبت به زمان نشان می‌دهد.

اکنون از معادلهٔ (۴ـ۷) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم تا شتاب حرکت به دست آید:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\hat{u}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{n}\right]$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}+\frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{n}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{n}+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{n}}{dt}$$

$$\vec{a}=\left[\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}\right]\hat{u}+\left[r\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+۲\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{n} \qquad (۸\text{ـ}۴)$$

این رابطه شتاب را در مختصات قطبی (r,θ) به دست می‌دهد. عبارت اول نمودار برداری است در راستای شعاع حامل و عبارت دوم برداری را نشان می‌دهد، عمود بر شعاع حامل. به بیان دیگر در حرکت دو بعدی مسیر خمیده، از آنجا که بردار سرعت تغییر می‌کند بردار شتاب کل در هر لحظه به طرف داخل منحنی مسیر است و دو مؤلفه دارد: یکی در راستای سرعت و مماس بر مسیر است و تغییر اندازه بردار سرعت را نسبت به زمان نشان می‌دهد. دیگری قائم بر مسیر است و تغییر جهت بردار سرعت را نسبت زمان مشخص می‌کند.

اکنون با توجه به دو رابطه (۴ـ۷) و (۴ـ۸) به بحث کلی دربارهٔ نوع حرکت می‌پردازیم:

۱ـ اگر داشته باشیم: $\vec{V}_{\theta}=r\frac{d\theta}{dt}\hat{n}=۰$

چون $\hat{n}$ و $\vec{r}$ مخالف صفر هستند، پس $\frac{d\theta}{dt}=۰$ یعنی جهت بردار شعاع حامل باگذشت زمان تغییر نمی‌کند ($\theta=$ ثابت). در این حال مسیر حرکت یک خط راست و فقط بزرگی بردار سرعت تغییر می‌کند و این تغییرات نسبت به زمان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\vec{v}=\vec{v}_{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}\hat{u}$$

و از رابطهٔ (۴ـ۴) شتاب حرکت برابر است با:

$$\vec{a}=\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}\hat{u}$$

و دو حالت تشخیص می‌دهیم:

الف) $\vec{a}=۰$، یعنی باگذشت زمان بزرگی سرعت نیز تغییر نمی‌کند. بر محور x متحرک با تندی ثابت V حرکت می‌کند. در لحظه $t_۱$ در نقطه A و در لحظه $t_۲$ در نقطه B است و بردار سرعت آن در هر دو لحظه یکسان است: یعنی $V_A=V_B$. بنابر تعریف تندی متوسط

$$V_m=\frac{V_A+V_B}{۲}=\frac{۲V_A}{۲}=V_A$$

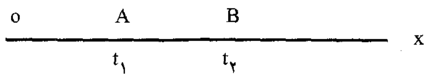
مشاهده می‌شود که در حرکت مستقیم یکنواخت سرعت متوسط و لحظه‌ای یکی است.
اما بنابر تعریف سرعت متوسط

$$V_m=V_A=\frac{x}{t} \Rightarrow x=V_A t$$

اگر مبدأ زمان و مکان بر هم منطبق نباشد یعنی در لحظه $t=0$ متحرک در فاصله x_0 از مبدأ باشد رابطه کلی حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت چنین می‌شود:

$$x=Vt+x_0$$

ب) اگر $\vec{a}\neq 0$ باشد، در این حالت ممکن است شتاب با زمان تغییر نکند و مقداری ثابت و مخالف صفر داشته باشد و یا به صورت تابعی از t بیان شود. در اینجا حالت نخست مورد توجه است.



بر محور x متحرکی در حرکت است که در هر ثانیه سرعتش به اندازه ثابت a تغییر می‌کند. چنانچه متحرک در لحظه t_1 در نقطه B باشد بنا به تعریف سرعت متوسط داریم:

$$V_m=\frac{V_A+V_B}{2}$$

اما سرعت V_B عبارت است از سرعت V_A که به آن at افزوده شده است $(t=t_2-t_1)$

$$V_B=V_A+at$$

$$\Rightarrow V_m=\frac{V_A+V_A+at}{2}=V_A+\frac{1}{2}at$$

از طرفی بنا به تعریف سرعت متوسط

$$V_m=\frac{x}{t} \Rightarrow x=V_m t=V_A t+\frac{1}{2}at^2$$

اگر در لحظه $t=0$ متحرک در نقطه A به فاصله x_0 از مبدأ باشد سرعت V_A را با V_0 نشان داده سرعت اولیه می‌گوییم:

$$x=x_0+V_0 t+\frac{1}{2}at^2$$

و این رابطه کلی حرکت مستقیم‌الخط با شتاب ثابت است. سرعت از رابطهٔ زیر به دست

می آید:

$$V=V_{\circ}+at$$

در این نوع حرکت چون شتاب ثابت است تغییرات اندازه سرعت نسبت به زمان ثابت است و در فاصله‌های زمانی معین بر بزرگی سرعت مقداری معین اضافه یا کم می‌شود. حرکت را به‌طور کلی متشابه مستقیم می‌نامند و اگر تندی جسم اضافه شود آن را «تند شونده» و چنانچه از تندی جسم کاسته شود آن را «کُند شونده» می‌گویند.

برای آنکه بدانیم چه موقع حرکت کُند شونده و چه زمان تند شونده است داریم:

$V>\circ\Rightarrow$
- تند شونده $a.v>\circ$ ⇐ $a>\circ$ سرعت زیاد می‌شود $\Delta V=V_{۲}-V_{۱}>\circ$
- کند شونده $a.v<\circ$ ⇐ $a<\circ$ سرعت کم می‌شود $\Delta V=V_{۲}-V_{۱}<\circ$

$V<\circ\Rightarrow$
- تند شونده $a.v>\circ$ ⇐ $a<\circ$ سرعت زیاد می‌شود $\Delta V=V_{۲}-V_{۱}<\circ$
- کند شونده $a.v<\circ$ ⇐ $a>\circ$ سرعت کم می‌شود $\Delta V=V_{۲}-V_{۱}>\circ$

۲ـ اگر داشته باشیم:

$$\vec{V}_r=\frac{dr}{dt}\,\hat{u}=\circ$$

چون $\hat{u}\neq\circ$ است، پس $\frac{dr}{dt}=\circ$ یعنی بزرگی بردار شعاع حامل تغییر نمی‌کند. مسیر یک دایره است و فقط جهت شعاع حامل تغییر می‌کند و این تغییر از رابطه

$$\vec{V}_\theta=r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{n}$$

به دست می‌آید. شتاب حرکت در مختصات قطبی برابر است با:

$$\vec{a}=-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}\hat{u}+r\,\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}\,\hat{n}$$

در اینجا نیز دو حالت تشخیص می‌دهیم:

الف) هرگاه تغییرات جهت شعاع حامل نسبت به زمان، یعنی $\frac{d\theta}{dt}$ ثابت باشد. در این حال می‌گوییم «سرعت زاویه‌ای» متحرک $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ ثابت است. اگر متحرک بر دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_{\circ}$ حرکت کند، در نقطه‌های A و B داریم:

$$\omega_m=\frac{\omega_A+\omega_B}{۲}=\omega_{\circ}$$

$$\omega_m=\omega_\circ=\frac{\theta}{t} \Rightarrow \theta=\omega_\circ t$$

$$S=R\,\theta=R\,\omega_\circ t=V_\circ t$$

θزاویه پیموده شده و Sکمان طی شده روی دایره است و در این حالت ذره در زمانهای مساوی کمانهای مساوی می‌پیماید و حرکت را «دورانی یکنواخت» می‌گوییم و سرعت زاویه‌ای را زاویهٔ پیموده شده در واحد زمان تعریف می‌کنیم.

شتاب در این حالت برابر است با:

$$\vec{a}=-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}\hat{u}=-r\,\omega^{۲}\hat{u}=\frac{V^{۲}}{r}\,\hat{u}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد شتاب در این گونه حرکت به طرف مرکز دایره است و مقدارش برابر $r\omega^{۲}$ است. اگر مدت زمانی که طول می‌کشد تا نقطه مادی یک دور کامل به گرد دایره بگردد با T نمایش دهیم:

$$\frac{۲\pi}{T}=\omega$$

و اگر N تعداد دور در یک ثانیه باشد:

$$۲\pi N=\omega$$

T را دوره یا زمان تناوب و N را فرکانس یا تواتر می‌نامیم. حرکت دورانی یکنواخت را معمولاً با حرکت مستقیم یکنواخت همانند می‌دانند.

ب) اگر تغییرات جهت شعاع حامل نسبت به زمان ثابت نباشد ممکن است آن را به صورت $\frac{d\theta}{dt}=f(t)$ نمایش دهیم. فرض می‌کنیم $f(t)$ تابع درجه اول زمان باشد، پس:

$$f(t)=At \qquad , \qquad A=const.$$

اگر سرعت زاویه‌ای جسم در دو نقطه A و B به ترتیب $\omega_\circ$ و ω باشد چون در هر ثانیه مقدار ثابتی بر مقدار سرعت زاویه‌ای افزوده می‌شود که آن را با α نمایش می‌دهیم:

$$\omega=\omega_\circ+\alpha t$$

و بنا به تعریف سرعت زاویه‌ای متوسط

$$\omega_m=\frac{\omega_\circ+\omega}{۲}=\frac{۲\omega_\circ+\alpha t}{۲}=\omega_\circ+\frac{۱}{۲}\,\alpha t$$

در نهایت:

$$\omega_m=\frac{\theta}{t} \Rightarrow \theta=\omega_m t=\omega_\circ t+\frac{۱}{۲}\,\alpha t^{۲}$$

این حرکت را می‌توان همانند حرکت متشابه‌التغیر مستقیم‌الخط دانست. شتاب می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ چنانچه مثبت باشد، بر سرعت زاویه‌ای مرتباً افزوده می‌شود و اگر منفی باشد سرعت آن مرتباً کاهش می‌یابد. شتاب خطی در این حالت چنین است:

$$\vec{a}=-r\ \omega^{2}\hat{u}+r\,\alpha\hat{n}=\vec{a}_n+\vec{a}_t$$

$\vec{u}$ در امتداد شعاع دایره و $\hat{n}$ مماس بر دایره در هر لحظه است. $\vec{a}_n=-r\ \omega^{2}\hat{u}$ را شتاب عمودی یا نرمال می‌نامیم و هر لحظه تغییر می‌کند در حالی که $\vec{a}_t=r\,\alpha\hat{n}$ را شتاب مماسی گویند و چون α و r ثابت هستند در حرکت دورانی ثابت می‌ماند. در این حالت نیز $\frac{2\pi}{T}=2\pi N$ است و $V=r\,\omega$ سرعت خطی است که در هر لحظه تغییر می‌کند.

۴ـ۳ـ مسئله حرکت نسبی

قطاری با سرعت ثابت $\vec{u}$ از مقابل شما می‌گذرد و شما در فاصله‌ای از ریل ساکن ایستاده‌اید و مسافری را نظاره می‌کنید که درون قطار با سرعت $\vec{V}$ می‌دود. حرکت این فرد از نظر شخصی که در قطار نشسته است چگونه است؟

حل. حرکت امری نسبی است و یک حرکت مشخص از دیدگاه ناظران در دستگاه‌های متفاوت فرق می‌کند. مثلاً قطرات باران که به‌طور قائم نسبت به ناظری ساکن روی زمین فرو می‌ریزد از دید شخصی که در یک قطار نشسته است و ریزش باران را از پشت پنجره نظاره می‌کند مایل فرو می‌ریزد و بالعکس.

فرض کنید نقطه P روی جسم S دارای حرکت است و مسیر C را می‌پیماید. اگر جسم S نیز نسبت به دستگاه XYZ در حرکت باشد، دستگاه xyz را متصل به جسم S در نظر می‌گیریم و تعریفهای زیر را بیان می‌کنیم:

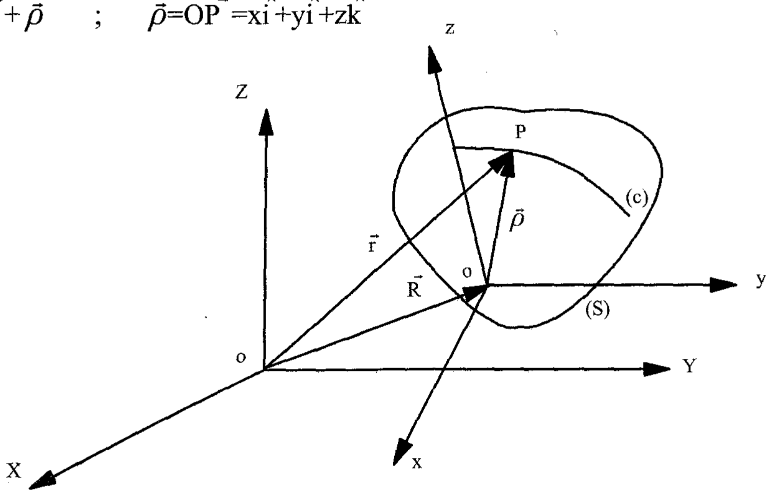
سرعت مطلق = سرعت نقطه P نسبت به دستگاه XYZ ؛ $\vec{V}_a$

سرعت کششی = سرعت جای پای P نسبت به XYZ ، به عبارت دیگر سرعت دستگاه مختصات xyz نسبت به دستگاه xyz ؛ $\vec{V}_e$

سرعت نسبی = سرعت نقطه P نسبت به دستگاه xyz ؛ $\vec{V}_r$

وضعیت نقطه P را نسبت به xyz می‌نویسیم:

$\vec{r}_p=\vec{R}+\vec{\rho} \quad ; \quad \vec{\rho}=\vec{OP}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$



شکل (۴-۵)

(x,y,z) مختصات نقطه P در دستگاه xyz است. پس:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt}=\frac{d\vec{R}}{dt}+\frac{d\vec{\rho}}{dt}=\frac{d\vec{R}}{dt}+\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}+x\frac{d\hat{i}}{dt}+y\frac{d\hat{j}}{dt}+z\frac{d\hat{k}}{dt}$$

اما

$$\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}=\vec{V}_r$$

و

$$\frac{d\vec{R}}{dt}+x\frac{d\hat{i}}{dt}+y\frac{d\hat{j}}{dt}+z\frac{d\hat{j}}{dt}=\vec{V}_e$$

پس:

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e \qquad (۹-۴)$$

چنانچه دستگاه xyz نسبت به دستگاه قدیم xyz فقط حرکت انتقالی داشته باشد (مانند حرکت قطار یا اتوبوس نسبت به ناظری ساکن روی زمین) در این صورت $\frac{d\hat{i}}{dt}=\circ, \frac{d\hat{j}}{dt}=\circ, \frac{d\hat{k}}{dt}=\circ$ و رابطه (۴-۷) همچنان به همان صورت پابرجا می‌ماند:

$\vec{r}=\vec{\rho}+\vec{R}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{\rho}}{dt}+\frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow \vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e$$

یک بار دیگر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}_r}{dt}+\frac{d\vec{V}_e}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

حال اگر xyz نسبت به دستگاه اصلی حرکت نداشته باشد (یا با سرعت ثابت u در راستای مشخص حرکت کند) آنگاه:

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{u}$$

و چون $\frac{d\vec{u}}{dt}=0$ است، داریم:

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r$$

یعنی اگر دو دستگاه مختصات نسبت به هم ساکن باشند یا حرکت یکنواخت داشته باشند شتاب حرکت یک متحرک در هر دو دستگاه یکسان است و دو ناظر هر کدام در یک دستگاه تفاوتی در حرکت جسم مشاهده نمی‌کنند. این نوع دستگاههای مختصات را دستگاه مختصات اینرسی می‌نامیم و یادآور می‌شویم چنانچه حرکت جسم نسبت به دو دستگاه مرجع با شتابهای متفاوت مشاهده شود، آنها را دستگاههای مختصات غیراینرسی می‌نامیم. در این مسئله حرکت را در یک بعد تصور می‌کنیم که در فرصت مناسب بیشتر از آن صحبت خواهد شد و معادله (۹ـ۴) را در راستای حرکت تصویر می‌کنیم:

$$V_a=V_r+u \Rightarrow V_r=V_a-u$$

$$a_r=a_a$$

یعنی حرکت ذره از نظر شخص نشسته در قطار با ناظر کنار ریل یکسان است.

۴ـ۴ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ جهت پاسخ دادن به اکثر سؤالات می‌توانیم فرمول مربوط به آن مورد را بررسی کنیم و از آن نتیجه‌گیری نماییم. به عنوان مثال، پرش طول را می‌توان به یک حرکت پرتابی تشبیه کرد. همانطور که در متن اشاره شد مسیر حرکت پرتابی یک سهمی

است و معادله مسیر آن چنین است:

$$y=x\,tg\,\theta_{\circ}-\frac{g}{2\,n_{\circ}^{2}\cos^{2}\theta_{\circ}}\,x^{2}$$

۲ـ با بررسی روی مؤلفه‌های سرعت حرکت یک پرتابه به راحتی معلوم می‌شود که سرعت یک پرتابه در نقطهٔ اوج می‌نیمم، در نقطهٔ پرتاب و نقطه برخورد به سطح افق ماکزیمم است.

۳ـ هرگاه پرتابه‌ای را با زاویهٔ $\theta_{\circ}$ پرتاب کنیم برد آن با برد پرتابه‌ای با زاویهٔ $(90^{\circ}-\theta_{\circ})$ برابر است.

۴ـ همانطور که می‌دانیم برای به دست آوردن برد یک پرتابه از فرمول: $R=\dfrac{V_{\circ}^{2}\sin 2\theta}{g}$ استفاده می‌کنیم. این فرمول نشان می‌دهد که زمانی برد R ماکزیمم است (در صورت ثابت بودن $V_{\circ}$ و g) که $\sin 2\theta=1$ باشد. از این طریق محدودیتهایی برای زاویه θ به دست می‌آید، که اگر بتوانیم زاویه پرتاب را با آن مطابق کنیم به برد ماکزیمم دست خواهیم یافت.

۵ـ هنگامی که یک ذره حرکت می‌کند، اگر بزرگی سرعت تغییر کند شتاب مماسی حاصل می‌شود و اگر راستای سرعت تغییر کند شتاب حاصل عمودی است. بنابراین شتاب یک پرتابه را می‌توان به صورت مؤلفه‌های شتاب مماسی و شعاعی آن نشان داد.

۶ـ از آنجایی که در یک فاصلهٔ کوتاه می‌توان با تقریب خوب، سهمی را کمانی از دایره فرض کرد، اگر سرعت اولیه متحرک $V_{\circ}$ و زاویه پرتاب $\theta_{\circ}$ باشد، برای به دست آوردن شعاع دایره‌ای که مسیر ذره را به طور تقریبی در نزدیکی بالاترین نقطهٔ مسیرش نشان می‌دهد روش زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$tg\theta_{\circ}=\frac{x}{R-y}\Rightarrow R=\frac{x+tg\,\theta_{\circ}\,y}{tg\theta_{\circ}}$$

$$R=\frac{\dfrac{V_{\circ}^{2}\sin 2\theta_{\circ}}{2g}+\dfrac{tg\theta_{\circ}V_{\circ}^{2}\sin^{2}\theta}{tg\theta_{\circ}}}{tg\theta_{\circ}}$$

۵ـ۴ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ جسمی را از ارتفاع H با سرعت اولیهٔ V_0 در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. در همان زمان جسم دومی را از زمین و در همان امتداد و با همان سرعت به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. معلوم کنید پس از چه مدت دو جسم به هم می‌رسند.

حل. حرکات از این نوع را که جسم با سرعت V_0 به طرف بالا پرتاب می‌شود می‌توان دو نوع حل کرد، زیرا از آغاز حرکت تا برگشتن جسم به زمین حرکت آن دو قسمت می‌شود.

۱ـ حرکت جسم از آغاز پرتاب تا رسیدن به ارتفاع ماکزیمم.

۲ـ برگشت جسم از ارتفاع ماکزیمم به زمین، که حرکت سقوط آزاد است.

در اغلب موارد اگر مسئله از حالت دوم حل شود بهتر است. توجه شود که حرکت جسم به بالا حرکت مرکبی است که از حرکت یکنواخت $x_1=V_0t$ به طرف بالا و حرکت سقوط آزاد $x_2=\frac{1}{2}gt^2$ به طرف پایین تشکیل یافته است. با این حساب مسافتی که جسم در زمان t از زمین دور می‌شود، شامل مقدار زیر خواهد بود:

$$x=x_1-x_2=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

این مقدار مسافت طی شده از زمین است. همین‌طور برای سرعت آن در هر لحظه می‌توان نوشت $v_t=v_0-gt$. از این معادله است که مسئله را حل می‌کنیم.

چون متحرک اول از ارتفاع H به طرف بالا پرتاب شده پس از t ثانیه فاصله آن از زمین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x_1=v_0t-\frac{1}{2}gt^2+H$$

اگر t زمانی باشد که این دو به هم رسیده‌اند لذا باید $x_1=x_2$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$V_0t-\frac{1}{2}gt^2+H=V_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$t=\frac{H}{V'_0-V_0}$$

۲ـ جسمی از نقطهٔ A سقوط آزاد می‌کند. در همان مبدأ زمان جسم دیگری را از

نقطهٔ B با سرعت اولیهٔ $V_{\circ}$ و تحت زاویهٔ α با افق پرتاب می‌کنیم. هر دو جسم در فضا به هم برخورد می‌کنند. تحقیق کنید که زاویه α مستقل از سرعت اولیه $V_{\circ}$ است و نیز مقدار α را برای حالت $\frac{H}{L}=\sqrt{۳}$ به دست آورید. مقاومت هوا را در نظر نگیرید.

حل. هر دو جسم می‌توانند روی خط AB و در نقطهٔ C همدیگر را ملاقات نمایند. سرعت اولیه جسم پرتاب شده از نقطه B را روی دو امتداد افقی $V_{\circ x}$ و قائم $V_{\circ y}$ تجزیه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$V_{\circ y}=V_{\circ}\sin\alpha \quad , \quad V_{\circ x}=V_{\circ}\cos\alpha$$

در امتداد افق به جسم نیرو وارد نمی‌شود لذا حرکتش در این امتداد یکنواخت است. اگر از لحظهٔ پرتاب تا ملاقات دو جسم t ثانیه طول بکشد می‌توان زمان فوق را چنین یافت:

$$t=\frac{L}{V_{\circ}x}=\frac{L}{V_{\circ}\cos\alpha} \qquad (۱)$$

در همان مدت جسم A مقداری سقوط می‌کند که چنین حساب می‌شود:

$$H-h=\frac{۱}{۲}gt^{۲} \qquad (۲)$$

و جسم B به ارتفاع h بالا می‌رود:

$$h=V_{\circ y}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \qquad (۳)$$

از حل دو معادله ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$H=V_{\circ}t\sin\alpha \qquad (۴)$$

پس از قرار دادن مقدار t از معادله یک در معادله چهار خواهیم داشت:

$$H=V_{\circ}\sin\alpha\frac{L}{V_{\circ}\cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha=\frac{H}{L}$$

اگر $\frac{H}{L}=\sqrt{۳}$ باشد $tg\alpha=\sqrt{۳}$ و $\alpha=۶۰^{\circ}$ خواهد شد.

۳ـ گلوله‌ای که خاصیت ارتجاعی (فنری) دارد از ارتفاع ۲ متر روی سطح شیبداری سقوط کرده بعد از روی آن برمی‌گردد. معلوم کنید در چه فاصله‌ای نسبت به دفعهٔ اول روی سطح شیبدار خواهد افتاد. زاویهٔ شیب سطح $\alpha=۳۰^{\circ}$ است.

حل. گلوله پس از برخورد در مسیر AC حرکت خواهد کرد. این حرکت را می‌توان ترکیب دو حرکت در نظر گرفت. حرکت در امتداد AB و سقوط آزاد در امتداد

قائم. در زمان پرواز t گلوله در امتداد سرعت اولیه خود به‌طور $AB=Vt$ جابجا می‌شود که در آن $V=\sqrt{2gh}$ است. در این موقع جسم تحت اثر نیروی جاذبه زمین به قدر $BC=\frac{1}{2}gt^2$ سقوط می‌کند. مثلث ABC متساوی‌الساقین است بنابراین $Vt=\frac{1}{2}gt^2$ و یا $\frac{1}{2}gt=\sqrt{2gh}$ و بالاخره $t=\sqrt{\frac{8h}{g}}$ و از شکل دیده می‌شود:

$$\frac{1}{2}AC=AB\sin\alpha$$

و از آنجا:

$$AC=2\sqrt{2gh}*\sqrt{\frac{8h}{g}}\sin\alpha=8h\sin\alpha=8\,m$$

۴ـ شخصی با کمان تیری را به سیبی می‌زند که از درخت آویزان است. در لحظه‌ای که او تیر را از سطح زمین رها می‌کند سیب نیز از درخت جدا شده، در امتداد قائم به زمین می‌افتد نشان دهید که سرعت اولیه هر چه باشد مسیر تیر به اندازهٔ لازم انحناءِ یافته، تیر به سیب برخورد می‌کند.

حل. اگر شتاب گرانشی وجود نداشت سیب سقوط نمی‌کرد و تیر در راستای خط دید مستقیماً به طرف هدف می‌رفت شتاب گرانش باعث می‌شود که این دو جسم با آهنگ یکسان به طرف پایین شتاب پیدا کنند. بنابراین، در مدت زمان t تیر به اندازه $\frac{1}{2}gt^2$ نسبت به موضعی که در راستای خط دید داشته است، پایین می‌آید و سیب نیز از نقطهٔ شروع حرکتش به همان اندازه سقوط می‌کند. وقتی تیر به خط سقوط هدف می‌رسد فاصله‌اش تا محل اولیهٔ سیب با فاصلهٔ خود سیب تا محل اولیه‌اش برابر خواهد بود و در نتیجه برخورد روی می‌دهد. اگر تیر تندتر حرکت کند، برد بیشتری خواهد داشت و خط سقوط را در نقطهٔ بالاتری قطع خواهد کرد ولی چون زودتر به آن نقطه می‌رسد سیب نیز در همین زمان مسافت کمتری پایین می‌آید و با تیر برخورد می‌کند. ارتفاع اولیهٔ سیب $x\,tg\theta_0$ است و پس از گذشت زمان t به اندازهٔ $\frac{1}{2}gt^2$ به پایین می‌افتد. سپس در لحظهٔ برخورد ارتفاع سیب از زمین برابر است با:

$$y=x\,tg\,\theta_0-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

و در همین زمان تیر فاصله x را با مؤلفهٔ شتاب ثابت $V_\circ \cos\theta_\circ$ طی می‌کند پس:

(۲) $x=V_\circ t\cos\theta_\circ$

$$(۲ \text{ و } ۱) \rightarrow y=x\,tg\,\theta_\circ-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_\circ\cos\theta_\circ}\right)^2$$

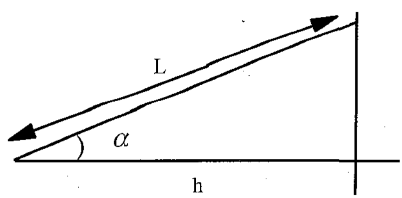
۵ـ حداقل شیب شیروانی چقدر باشد تا آب باران از آن زودتر پایین آید. اصطکاک ناچیز است.

حل. زاویه شیب شیروانی را با افق α می‌نامیم. شتاب ثقل g وارد بر قطرهٔ باران را به دو شتاب (در امتداد مسیری که می‌لغزد و عمود بر مسیر) تجزیه می‌کنیم. معلوم است که شتاب موجود در امتداد مسیر عبارت است از: $a=g\sin\alpha$. اگر بامی به طول ۲L را قطرات باران در مدت t ثانیه طی کنند، می‌توان نوشت:

$$L=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}}$$

از شکل دیده می‌شود $L=\dfrac{h}{\cos\alpha}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{4h}{g\sin2\alpha}}$$



عبارت زیر رادیکال زمانی حداقل می‌شود که مخرج کسر حداکثر شود. یعنی $\sin2\alpha=1$ گردد. که $2\alpha=90$ و از آنجا $\alpha=45^\circ$ خواهد بود.

۶ـ گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $V_\circ=24\ m/s$ و زاویهٔ $\alpha=60^\circ$ نسبت به افق پرتاب شده است. گلوله به نقطهٔ واقع در ارتفاع ۵۰۰ متر از افق می‌افتد. فاصله افقی این نقطه را از محل پرتاب معلوم کنید. ثانیاً زمان پرواز گلوله را به دست آورید.

حل. جسم به نقطه‌ای به ارتفاع $h=500\ m$ نسبت به افق هم موقع صعود و هم موقع نزول می‌توانست بیافتد. حرکت جسم در امتداد قائم کُند شونده است و معادله

حرکت آن در این امتداد به صورت $h=V_\circ t-\frac{1}{2}gt^2$ است که $V_1=V_\circ \sin\alpha$ است و معادلهٔ کامل به صورت زیر خواهد بود:

$$h=V_\circ t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

و از آنجا t چنین حساب می‌شود:

$$gt^2-2V_\circ t\sin\alpha+2h=0 \Rightarrow t=g\, V_\circ\sin\alpha\mp\sqrt{V_\circ^2\sin^2\alpha-2gh}$$

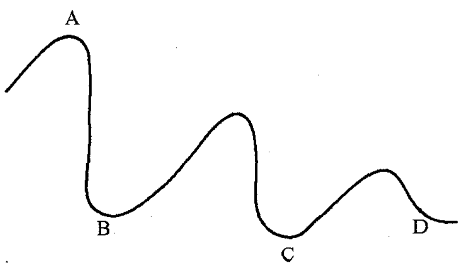
و با احتساب $g=10\ m/s^2$ خواهیم داشت:

$$t=\frac{120\sqrt{3}\mp\sqrt{43200-10000}}{10}\Rightarrow t_1\simeq 39sec\quad,\quad t_2=2/6sec$$

هر دو جواب قابل قبول است، جسم در نیمهٔ اول مسیر موقع صعود در مدت تقریباً ۲/۶ ثانیه به ارتفاع ۵۰۰ متر می‌رسد ولی در موقع نزول در نیمه دوم مسیر پس از ۳۹ ثانیه به ارتفاع فوق می‌رسد. اگر مقاومت هوا را به حساب نیاوریم حرکت جسم در امتداد افق یکنواخت و با سرعت $V_2=V_\circ\cos\alpha=120\ m/sec$ است و مسافتهای طی شده در امتداد افق به ترتیب چنین خواهد بود.

$$S_1\simeq 312m\quad,\quad S_2\simeq 4680m$$

۷ـ اتومبیلی روی یک مسیر افقی مارپیچ که در شکل نشان داده شده است حرکت می‌کند. اندازهٔ سرعت اتومبیل ثابت است. شتاب اتومبیل در کدامیک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟



حل. شتاب در نقاط انحنا از رابطهٔ $\frac{v^2}{R}$ به دست می‌آید که در آن R شعاع انحنای مسیر می‌باشد. با توجه به اینکه سرعت در تمام نقاط یکسان است بنابراین بیشترین شتاب

مربوط به کمتر شعاع انحنا R، می‌باشد بنابراین در نقطهٔ B شتاب بیشتر است.

۸ـ دو جسم را از یک ارتفاع، h، با سرعتهای مختلف ν_1 و ν_2 ($\nu_1 > \nu_2$) پرتاب می‌کنیم. دو جسم به دیواری قائم در فاصلهٔ ℓ از نقطهٔ پرتاب برخورد می‌کنند، به‌طوری که در محل برخورد، ارتفاع h را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند. نسبت $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ چقدر است؟

حل. با توجه به فرض مسئله $\nu_1 > \nu_2$ است بنابراین نقطهٔ برخورد جسم دوم در فاصلهٔ $\frac{h}{3}$ از زمین است و نقطهٔ برخورد جسم اول در فاصلهٔ $\frac{2h}{3}$ از زمین است.

اگر مبدأ مختصات را در نقطهٔ پرتاب قرار دهیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{h}{3} = -\frac{9\ell^2}{2\nu_1^2} \\ -\frac{2h}{3} = -\frac{9\ell^2}{2\nu_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{2}$$

۹ـ یک هواپیمای اسباب‌بازی لای شاخه‌های درختی به ارتفاع ۱۴/۰ m بالاتر از شانه‌های شخصی قرار دارد. او تلاش می‌کند که آن را با انداختن سنگ از فاصلهٔ افقی ۱۰/۰ m از لابه‌لای شاخه‌ها خارج کند به‌طوری که وقتی سنگ به هواپیما برخورد می‌کند، بردار سرعتش در جهت افقی باشد. بردار سرعت اولیهٔ سنگ و سرعت برخوردش با هواپیما چقدر باید باشد؟

حل. در حرکت پرتابی بردار سرعت اولیه را می‌توان به دو مؤلفه در راستای افق و قائم تجزیه کرد. مؤلفهٔ قائم سرعت به علت وجود گرانش پیوسته کاهش می‌یابد تا در نقطهٔ اوج به صفر می‌رسد. به عبارت دیگر بردار سرعت در نقطهٔ اوج فقط در راستای افقی است. اما مؤلفهٔ افقی سرعت اولیه در طول حرکت تغییری نمی‌کند و همواره ثابت است. از این‌رو با توجه به فرض مسئله (بردار سرعت هنگام برخورد افقی است)، سنگ در نقطهٔ اوج خود به هواپیما برخورد می‌کند. بنابراین می‌توان گفت ارتفاع درخت، ارتفاع اوج و فاصلهٔ شخص از درخت، نصف برد پرتابه (سنگ) می‌باشد. برد پرتابه را

می‌توان از رابطهٔ $x_{max}=R=\frac{\nu_\circ^2 \sin 2\theta}{g}$ به دست آورد و با جایگزینی آن در رابطهٔ $y=tg\,\theta x-\frac{g}{2\nu_\circ^2\cos^2\theta}x^2$ می‌توان رابطهٔ ارتفاع اوج را به شکل $h=\frac{\nu_\circ^2\sin^2\theta}{2g}$ به دست آورد. بنابراین:

$$10=\frac{\nu_\circ^2\sin 2\theta}{2g} \quad , \quad 14=\frac{\nu_\circ^2\sin^2\theta}{2g}$$

$$\Rightarrow tg\theta=\frac{28}{10} \Rightarrow \theta=70/3^\circ$$

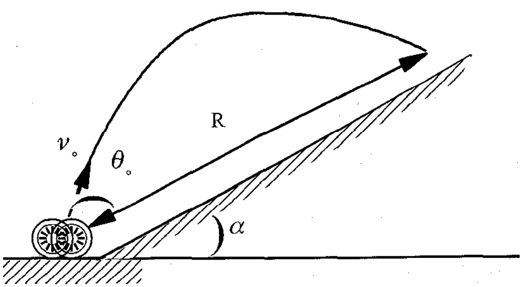
و با قرار دادن مقدار θ در یکی از دو رابطهٔ فوق:

$$\nu_\circ=\sqrt{\frac{28g}{\sin^2\theta}} \Rightarrow \nu_\circ=17/6 \ \text{m/s}$$

همان‌طور که گفتیم سرعت افقی پرتابه در طول حرکت ثابت است. بنابراین سرعت در نقطهٔ اوج برابر است با مؤلفهٔ افقی سرعت اولیه. به عبارت دیگر:

$$\nu=\nu_\circ\cos\theta \Rightarrow \nu=5/93 \ \text{m/s}$$

۱۰ـ توپی مطابق شکل طوری قرار گرفته است که گلوله‌هایی را با سرعت اولیهٔ $\nu_\circ$ به طرف بالای تپه‌ای با شیب α شلیک می‌کند. این توپ تحت چه زاویه‌ای نسبت به افق باید نشانه‌گیری شود تا بیشتر برد ممکن، R در دامنه تپه به دست آید؟

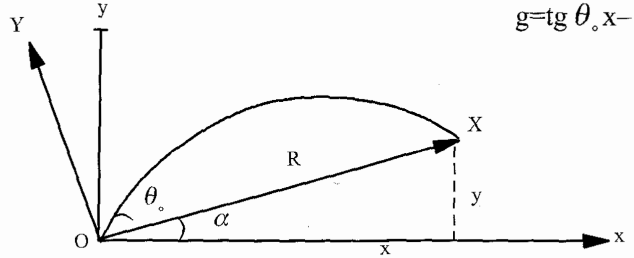


حل. دستگاه جدید XOY را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم. معادلات حرکت در دستگاه جدید طبق تبدیلات زیر تغییر می‌کنند:

$$x=R\cos\alpha \quad , \quad y=R\sin\alpha$$

بقیه مسئله را مانند دستگاه قدیم دنبال می‌کنیم. در دستگاه قدیم داشتیم:

$$g=\text{tg}\,\theta_\circ x-\frac{g}{۲(v_\circ\cos\theta_\circ)^۲}x^۲$$



$$\frac{y}{x}=\text{tg}\,\theta_\circ-\frac{g}{x(v_\circ\cos\theta_\circ)^۲}x \Rightarrow \text{tg}\alpha=\text{tg}\,\theta_\circ-\frac{g}{۲(v_\circ\cos\theta_\circ)^۲}R\cos\alpha$$

$$R=\frac{۲(v_\circ\cos\theta_\circ)^۲}{g\cos\alpha}(\text{tg}\theta_\circ-\text{tg}\,\alpha)$$

می‌خواهیم زاویه‌ای را به دست آوریم که به ازای آن برد ماکزیمم شود. به عبارت دیگر باید $\frac{dR}{d\theta_\circ}=\circ$

$$\frac{dR}{d\theta_\circ}=\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos\alpha}(-۲\sin\theta_\circ\cos\theta_\circ)(\text{tg}\theta_\circ-\text{tg}\,\alpha)+\frac{۲(v_\circ\cos\theta_\circ)^۲}{g\cos\alpha}(۱+\text{tg}^۲\theta_\circ)$$

$$\frac{dR}{d\theta_\circ}=\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos\alpha}\left[۱-\sin ۲\theta_\circ(\text{tg}\theta_\circ-\text{tg}\,\alpha)\right]$$

$$=\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos\alpha}\left[۱-۲\sin\theta_\circ\cos\theta_\circ\left(\frac{\sin\theta_\circ\cos\alpha-\cos\theta_\circ\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\theta_\circ}\right)\right]$$

$$=\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos\alpha}\left[\frac{\cos\alpha(۱-۲\sin^۲\theta_\circ)-\sin ۲\theta_\circ\sin\alpha}{\cos\alpha}\right]$$

$$=\frac{۲v_\circ^۲}{g\cos\alpha}\left(\frac{\cos(۲\theta_\circ-\alpha)}{\cos\alpha}\right)=\circ$$

$$\cos(۲\theta_\circ-\alpha)=\circ \Rightarrow ۲\theta_\circ-\alpha=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta_\circ=\frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲}$$

۱۱ـ ذره‌ای در بالاترین نقطه نیمکره‌ای به شعاع R قرار دارد. کمترین سرعت افقی که باید به ذره داده شود تا ذره، نیمکره را بدون لغزیدن به طرف پایین ترک کند

چقدر است؟

حل. برای اینکه ذره روی نیمکره نلغزد، باید شعاع دایره مسیر ذره بزرگتر از شعاع نیمکره باشد یعنی:

$R' > R$

از طرفی داریم:

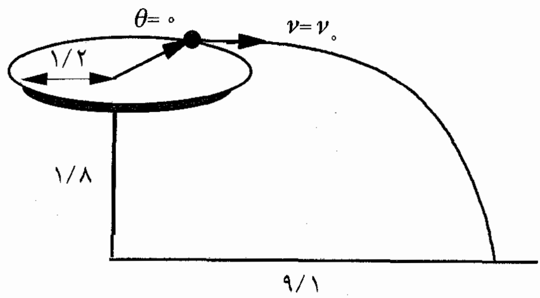
$$R' = \frac{v^2}{g} \qquad (a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a})$$

بنابراین:

$$\frac{v^2}{g} > R \Rightarrow v > \sqrt{Rg}$$

۱۲ـ شخصی سنگی را که به انتهای ریسمانی به طول ۱/۲ m بسته شده است بر روی یک دایرهٔ افقی در ارتفاع ۱/۸ m از زمین می‌چرخاند. در اثر پاره شدن ریسمان سنگ در راستای افق پرتاب می‌شود و ۹/۱ m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ هنگام حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

حل. در اثر پاره شدن ریسمان، سنگ با سرعت مماس بر مسیر دایره‌ای در نقطهٔ انفصال پرتاب می‌شود از این‌رو زاویهٔ پرتاب، $\theta_\circ$ صفر است.



$$y = \mathrm{tg}\,\theta_\circ x - \frac{g}{2v_\circ^2 \cos^2\theta_\circ} x^2$$

$$v_\circ^2 = \frac{gx^2}{2y} \Rightarrow v_\circ = ۵\ \mathrm{m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a = ۲۰/۸\ \mathrm{m/s^2}$$

٦ـ۴ـ پرسشها و مسایل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ در باد و باران شدید بهترین وضع قرارگرفتن چتر را چگونه تعیین می‌کنند؟

۲ـ هرگاه ماهواره‌ای در هر شبانه روز یک دور به دور زمین بچرخد از نظر ناظر

زمینی چگونه به نظر می‌رسد؟

۳ـ سرعت اولیه هر چه باشد حرکت پرتابه (بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا) در یک صفحه است. چرا چنین است؟

۴ـ شتاب وارد بر یک مهره را که بر روی یک سیم مارپیچی بدون اصطکاک با سرعت ثابت به طرف داخل پیش می‌رود، به‌طور کیفی توصیف کنید.

۵ـ در یک باران یکنواخت قطره‌ها در راستای قائم سقوط می‌کنند. برای اینکه در چنین بارانی هنگام رفتن از محلی به محل دیگر با تعداد کمتری قطره باران برخورد کنید، با چه سرعتی باید حرکت کنید؟

۶ـ شخصی در قسمت عقب قطاری که با سرعت ثابت حرکت می‌کند ایستاده است. او در حالی که به جلو خم شده سکه‌ای را رها می‌کند. مسیر سکه را از نظر اشخاص زیر توصیف کنید.

الف) شخصی که در قطار است.

ب) شخصی که روی زمین نزدیک به خط آهن ایستاده است.

ج) شخصی که در قطار دیگری است و در جهت مخالف روی خط موازی با قطار اول حرکت می‌کند.

۷ـ آیا این جمله صحیح است؟ مقدار عددی شتاب در حرکت با شتاب ثابت بدون سرعت اولیه، برابر است با دو برابر مسافت پیموده شده در ثانیه اول حرکت.

۸ـ گلوله‌ای بدون سرعت اولیه و در شرایط خلاء از ارتفاع h سقوط می‌کند. پس از چه مدت قدر مطلق سرعت آن برابر با h است؟

۹ـ گلوله‌ای سنگین و کوچک بدون سرعت اولیه از ارتفاع زیاد به طرف زمین سقوط می‌کند. در سومین ثانیهٔ حرکت چند برابر اولین ثانیه می‌تواند سقوط کند؟

ب) مسائل

۱ـ جسمی از نقطهٔ B به ارتفاع H= ۴۵ m از زمین سقوط آزاد می‌کند. در همان زمان جسم دیگری را از نقطهٔ A واقع در مکانی به فاصلهٔ h= ۲۱ m زیر نقطه B با سرعت

V_0 به طرف بالا و در امتداد قائم پرتاب می‌کنیم. دو جسم در یک زمان به زمین می‌رسند. مقدار V_0 را بیابید. جواب: $V_0 \simeq ۶/۹ m/s$

۲ـ جسمی از ارتفاع h سقوط آزاد می‌کند. در همان زمان جسم دیگری با سرعت اولیه V_0 از ارتفاع H ‏(H>h) و با سرعت اولیه V_0 در امتداد قائم به طرف زمین پرتاب می‌شود. هر دو جسم در یک زمان به زمین می‌رسند. سرعت اولیه جسم دوم را معلوم کنید. برای جواب عددی h= ۱۰ m و H= ۲۰ m انتخاب شود.

جواب: $V_0 = \frac{H-h}{2h}\sqrt{2gh} = 7 m/sec$

۳ـ هواپیمایی در ارتفاع h با سرعت V به‌طور افقی پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که هواپیما در بالای یک توپ ضدهوایی قرار دارد، روی هواپیما آتش گشوده می‌شود. حداقل V_0 سرعت پرتاب و نیز α زاویهٔ نشانه‌گیری را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که گلوله به هواپیما برخورد کند.

۴ـ یک بازیکن بیسبال توپ را هنگایم که ۱ m از زمین فاصله دارد با سرعت ۱۶ m/s در راستایی که با صفحهٔ افقی زاویهٔ °۳۰ می‌سازد، پرتاب می‌کند. بازیکن دیگری که در فاصلهٔ ۳۰ m از بازیکن اول و در صفحهٔ مسیر توپ قرار دارد، درست از لحظهٔ پرتاب توپ شروع به دویدن می‌کند. حداقل سرعتی را که این بازیکن باید داشته باشد تا بتواند هنگامی که توپ در ارتفاع ۲/ ۵ m از سطح زمین است به آن برسد حساب کنید. بازیکن دوم چه مسافتی را باید بدود؟

۵ـ مردی بر روی ترنی که با سرعت ثابت ۹/ ۱ m/s در حرکت است، ایستاده است و می‌خواهد توپی را درون حلقهٔ ساکنی که در فاصلهٔ قائم ۴/ ۹ m بالای دست اوست بیندازد. اندازهٔ سرعت پرتاب توپ نسبت به دست مرد ۱۲/ ۲ m/s است. در ضمن حرکت ترن به سمت حلقهٔ ساکن است.

الف) مؤلفه قائم سرعت پرتاب چقدر باید باشد؟

ب) چند ثانیه پس از پرتاب توپ از حلقه می‌گذرد؟

ج) در چه فاصلهٔ افقی جلو حلقه باید توپ را رها کرد؟

۶ـ گلوله‌ای را در امتداد افق از بالای کوهی پرتاب می‌کنند. زاویهٔ شیب کوه α است. معلوم کنید سرعت اولیه $V_{\circ}$ پرتاب چقدر باشد تا در فاصلهٔ L از قله به دامنه کوه بیافتد.

جواب: $V_{\circ}=\sqrt{\dfrac{gL\cos\alpha}{2\sin\alpha}}$

۷ـ ظرفی تا ارتفاع H آب دارد. از شکاف ریزی که ثلث ارتفاع ظرف را دارد، آب به بیرون می‌ریزد. ارتفاع شکاف بالایی را معلوم کنید تا اینکه برد آب در امتداد افق یکسان باشد. جواب: به ارتفاع $\frac{2}{3}$ از ته ظرف

راهنمایی: فاصله شکافها را از سطح آزاد $x_1=H-\frac{H}{3}$ و $x_2=H-h$ در نظر گرفته سرعت خروج را از رابطهٔ $V=\sqrt{2gx}$ برای هر کدام بیابید. برد آنها را تعیین و با هم مساوی بگیرید، جواب به دست خواهد آمد.

۸ـ شخصی در اوقات فراغت به نمایشهای حیرت آوری می‌پردازد. آخرین نمایش او پرش با موتور سیکلت از روی رودخانه است. زاویهٔ شیب سطح پرتاب 53°، عرض رودخانه $40\ m$ و سطح کنارهٔ مقابل $15\ m$ زیر بالاترین نقطهٔ سطح شیبدار است که پرش از روی آن صورت می‌گیرد. سطح اب رودخانه $100\ m$ زیر بالاترین نقطه سطح شیبدار است. در بالاترین نقطه چه سرعتی داشته باشد تا پرش در کنارهٔ مقابل امکان‌پذیر باشد؟

۹ـ مسیر دانه‌های تگرگ برای ناظری که از کناره پنجره داخل یک ترن نگاه می‌کند و سرعت ترن برابر با $10\ m/s$ است زاویهٔ 30° با امتداد قائم دارند. بعد از اینکه سرعت ترن به $20\ m/s$ رسید این زاویه با امتداد قائم 45° به نظر می‌رسد. هرگاه ترن متوقف می‌بود تحت چه زاویه و با چه سرعتی افتادن دانه‌های تگرگ به ناظر می‌رسید.

۱۰ـ اتومبیل A از سمت غرب با سرعت $15\ m/s$ در حرکت است. وقتی اتومبیل به چهارراه مطابق شکل می‌رسد، اتومبیل B از حالت سکون و به فاصلهٔ $90\ m$ از چهارراه به طرف جنوب با شتاب ثابت $4\ m/s^2$ شروع به حرکت می‌نماید. معین کنید فاصلهٔ سرعت و شتاب اتومبیل B را نسبت به A پس از ۵ ثانیه بعد از اینکه اتومبیل A از

چهارراه گذشته است.

۱۱ـ ترنی با سرعت ۹ m/s روی یک قسمت انحناء راه آهن که شعاع انحناء آن ۳۰۰۰ m است حرکت می‌کند. راننده ناگهان ترمز نموده و باعث می‌شود که حرکت آن کُند شده و پس از ٦ ثانیه سرعت آن به ٦۰ m/s برسد. مطلوبست شتاب ترن در لحظه ترمز کردن.

۱۲ـ کمانداری سنجابی را نشانه می‌گیرد که روی یک تیر تلفن به ارتفاع ۱۵/۰ m در فاصلهٔ ۲۰/۰ m از کماندار نشسته است. کمان در ارتفاع ۱/۰ m بالای سطح زمین قرار دارد. اگر سنجاب، کماندار را ببیند و درست در لحظه‌ای که تیر از کمان رها می‌شود پایین بپرد، کماندار در چه جهتی باید نشانه گیری کند تا سنجاب را بزند؟ اگر سرعت اولیهٔ تیر ۲۸/۰ m/s باشد، آیا پیش از رسیدن سنجاب به زمین به آن می‌خورد؟ اگر چنین است سنجاب در چه فاصله‌ای از هدف قرار می‌گیرد؟

جواب: ۳۵°، بلی، ۱۱/۴ m

۱۳ـ شخصی توپ فوتبالی را با سرعت اولیهٔ ۲۰ m/s تحت زاویهٔ ۴۵° شوت می‌کند. در همان لحظه، دروازه‌بان از روی خط گل که فاصلهٔ آن تا محل زدن توپ ۴۵ m است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. کمینه سرعت دروازه‌بان چقدر باید باشد تا بتواند توپ را قبل از برخورد با زمین بگیرد.

۱۴ـ برف در راستای قائم با سرعت ثابت ۸/۰ m/s می‌بارد. از نظر راننده‌ای که در جادهٔ مستقیمی با سرعت ۵۰ km/h حرکت می‌کند، ذرات برف (الف) تحت چه زاویه‌ای نسبت به قائم و (ب) با چه سرعتی سقوط می‌کنند؟

۱۵ـ سرعت دو جسم را طوری پیدا کنید که اگر با سرعت یکنواخت به طرف هم حرکت کنند در هر ثانیه ۴/۰ m به هم نزدیک شوند و اگر با همان سرعت یکنواخت قبلی در یک جهت حرکت کنند، در هر ۱۰ S، ۴/۰ m به هم نزدیک شوند.

جواب: ۲/۲ m/s و ۱/۸ m/s

فصل ۵

دینامیک ذره I

۵ـ۱ـ مقدمه

به شاخه‌ای از مکانیک که در آن از علت حرکت (نیرو) سخن به میان می آید دینامیک می‌گوییم. هر حرکت نسبی است، و یک حرکت در نتیجه علتهایش اگر نسبت به دستگاههای مختلف در نظر گرفته شود مطلقاً متفاوت است. این واقعیت را که نهاد یک حرکت داده شده نسبت به محیطهای مختلف، متفاوت است «نسبیت حرکت» می‌نامیم. واژهٔ دستگاه مختصات یا چارچوب مرجع از این مفهوم برمی‌آید: «آزمایشگاهی که در آن تجربه صورت می‌گیرد». به بیانی دیگر، چارچوب مرجع مجموعهٔ محورهای مختصاتی است که در آن رفتار شیئی از طریق نمودار مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

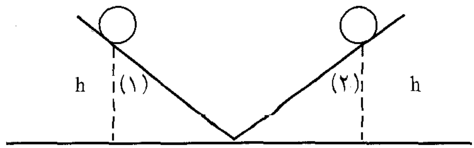
۵ـ۲ـ قانون اینرسی‌ـ دستگاههای مرجع اینرسی

قرنها مسئله حرکت مورد بحث حکماء و دانشمندان بوده و هست. پیش از گالیله حکمت طبیعی ارسطویی حاکم بر افکار حکما بود و می‌پنداشتند که بنابراین اصل که «هر چیز به اصل خود بازمی‌گردد» هر جسم تمایل دارد در حالت عادی به صورت

طبیعی خود باقی بماند و در مقابل هر عاملی که سبب برهم زدن این حالت طبیعی او شود مقاومت می‌کند. بنابراین بدیهی بود که تصور شود این حالت بنیادی به ساده‌ترین شکل خود باشد یعنی سکون، و اگر جسم در حالت طبیعی حرکت دارد آن هم ساده‌ترین شکل حرکت باشد که حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت است (در این حالت شتاب وجود ندارد).

باور بر این بود که برای خارج شدن جسم از حالت طبیعی خود باید از خارج عاملی بر آن اثر کند (این عامل همان نیرو است و بعداً از آن سخن می‌رود). مثلاً می‌دیدند اگر جسمی را روی میزی بگذارند برای این که حرکتی یکنواخت و مستقیم‌الخط داشته باشد باید دائم عاملی خارجی (مانند دست) بر آن اثر کند و اگر این عامل حذف شود حرکت جسم خود به خود کُند شده می‌ایستد. غافل از این که عامل دیگری در سطح تماس جسم و میز وجود دارد که باعث توقف یا کُند شدن حرکت جسم می‌شود و آن اصطکاک است.

گالیله نخستین کسی بود که این پندار را مردود دانست و به تحقیق تجربی مسئله پرداخت. او دو سطح شیب‌دار همانند و کاملاً صاف گرفت و گلوله‌ای را از بالای یک سطح رها کرد (مطابق شکل ۱ـ۵). ناگفته نماند که خود گالیله متأثر از حکمت ارسطویی بود و می‌پنداشت مطابق این طرز تفکر باید گلوله در سطح دوم به همان ارتفاع سطح اول هنگام رها کردن برسد، یعنی پس از حذف عامل خارجی باید به حالت طبیعی خود برگردد و در اینجا از نظر حرکتی وضع طبیعی گلوله همان وضعیت ارتفاعی یکسان با حالت قبل است. وی ملاحظه کرد چنین امری اتفاق نمی‌افتد، اما هر چه دو سطح صافتر باشد حرکت جسم دیرتر متوقف می‌شود و در سطح دوم بیشتر بالا می‌رود اما به هر حال به جای اولش نمی‌رسد. شیب سطح دوم را به مرور کم کرد و مشاهده کرد مسیر پیشروی گلوله بر این سطح بیشتر می‌شود تا این که سطح را کاملاً افقی کرد. دریافت که جسم همچنان به حرکتش ادامه می‌دهد و چنانچه اصطکاکی میان گلوله و سطح نباشد این حرکت بیشتر می‌شود. نتیجه گرفت برای این که جسم علاوه بر سکون به حرکت بدون شتاب (حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت) خود نیز ادامه دهد به هیچ وجه نیرو لازم نیست و فقط برای تغییر سرعت یعنی ایجاد شتاب، عامل خارجی لازم است.



شکل (۵ـ۱)

بعدها نیوتن این برداشت گالیله را پذیرفت و آن را به عنوان قانون اول خود بیان کرد: «اگر جسمی تحت اثر دیگر اجسام نباشد، چنانچه ساکن باشد در حالت سکون خود می‌ماند و اگر از ابتدا در حرکت بوده حرکتش نسبت به دستگاه سنجش (مثلاً زمین) حرکت یکنواخت مستقیم‌الخط خواهد بود».

بنابراین قانون برای اینکه جسمی را نسبت به زمین یا دستگاه مقایسه با شتاب حرکت دهند باید اجسام دیگر بر جسم اثر کنند. «شتاب به وسیله کنش اجسام دیگر به وجود می آید.»

۵ـ۲ـ۱ـ اینرسی

در نهاد جسم خاصیتی است که سبب می‌گردد جسم در برابر هر نوع تغییر حرکتی مقاومت کند و حالت طبیعی حرکتی خود را حفظ کند. این خاصیت نهادی جسم را ماند یا اینرسی می‌نامیم. از این جهت است که قانون اول نیوتن راگاه اصل جبر، اصل ماند،[۱] یا

---

۱. الکساندر کویر (A. Koyre) مورخ علم فرانسوی بر آن است ه کشف اصل ماند نقطه عطف جهان‌بینی‌های جدید و قدیم و مرز جداکننده دنیای قبل از علم ر بعد از آن است و نشانهٔ پیروزی نگرش افلاطونی بر نگرش ارسطویی نسبت به پدیده‌هاست.

A. Koyre: From the closed world to the infinte Vniverse; N. Y 1958.

دکارت (Descartes) نخستین کسی بود که اصل ماند را به شلک جدیدش عرضه کرد. وی در اصول فلفسه خود (Principles of Philosophy) به عنوان اولین قانون طبیعت می‌نویسد: «هر چیز در همان حالتی که هست باقی می‌ماند تا وقتی که چیزی حالت آن را تغییر نداده است... چراکه سکون ضد حرکت است و هیچ چیز بر حسب خود، به ضد خود و یا به از بین بردن خود تمایل ندارد.»

اصل اینرسی می‌گوییم و حرکت جسم وقتی اجسام دیگر بر آن اثر نمی‌کنند «حرکت تحت اثر اینرسی» می‌نامیم.

۵ـ۲ـ۲ـ دستگاههای مرجع اینرسی

دستگاههایی راکه در آنها اثر اینرسی پایدار است دستگاههای اینرسی می‌نامیم. تجربه گالیله ثابت کرد که زمین یک مرجع اینرسی است. تعداد این دستگاهها زیاد است. قطاری که با سرعت ثابت در خط مستقیم حرکت می‌کند نیز یک سیستم اینرسی است.

به طور کلی هر دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت بر خطی مستقیم نسبت به هر سیستم اینرسی دیگر (مثلاً زمین) حرکت انتقالی انجام می‌دهد خود یک دستگاه اینرسی است. در واقع شتاب اجسام در چنین دستگاههایی یکسان است. یعنی جسمی که تحت اثر دیگر اجسام نیست نسبت به چنین دستگاههایی بدون شتاب حرکت خواهد کرد چنانچه نسبت به زمین اینطور است.

شگفت آور نیست اگر به دستگاههایی که در آن قانون اینرسی برقرار نیست دستگاه غیراینرسی گفته شود. باید خاطرنشان ساخت که تجربیات گالیله مانند هر تجربه‌ای، تا میزان مشخصی دقت دارد. اندازه گیریهای دقیق بعدی ثابت کرد که زمین را فقط با تقریب می‌توان دستگاهی اینرسی در نظر گرفت. دستگاه وابسته به خورشید و دیگر ستاره‌ها چارچوب مرجع اینرسی واقعی است. هر چند خورشید نیز به سبب حرکتش به دور مرکز کهکشان یک چارچوب اینرسی نیست. شاید هرگز نتوانیم یک دستگاه مرجع اینرسی واقعی را بیابیم. با این همه برای مقاصد عملی، هر کدام از این دو جسم را می‌توان به عنوان یک چارچوب اینرسی به کار برد.

اکنون به این پرسش پاسخ دهید: در کدام‌یک از دستگاههای مرجع زیر قانون اول نیوتن برقرار است؟

۱ـ در ماشینی که با سرعت ثابت دایره‌ای کامل را می‌پیماید.

۲ـ در قطاری که با سرعت ثابت در خط مستقیم حرکت می‌کند.

۳ـ در اتوبوسی که در جاده‌ای مستقیم حرکتش کُند می‌شود.

۵ـ۲ـ۳ـ اصل نسبیت گالیله

قطاری را تصور کنید که بر خط مستقیم حرکت یکنواخت دارد. شما در کوپه نشسته‌اید و پرده‌ها را کشیده‌اید. بنابراین نمی‌توانید بگویید آیا قطار در حرکت است یا ایستاده است. حال فرض کنید مثلاً مسافری توپی را به کف واگن می‌زند و سرعتش را نسبت به واگن می‌سنجد. دیگری توپی را با همان نیرو بر زمین می‌زند و سرعتش را نسبت به زمین اندازه می‌گیرد. سرعتی که برای هر دو توپ به دست می‌آید یکی است. البته هر کدام مطابق با دستگاه مقایسه خودش. همین‌طور سیبی که از بالای واگن قطاری می‌افتد نسبت به واگن، یا سیبی که از شاخه درختی بر زمین می‌افتد، نسبت به زمین، هر دو از یک قانون پیروی می‌کنند.

تمامی این تجربه‌ها و مشاهده‌ها نشان می‌دهند که اجسام نسبت به دستگاههای مقایسه اینرسی شتاب یکسانی می‌گیرند اگر دیگر اجسام اثر یکسانی بر آنها داشته باشند. یعنی «تمام دستگاههای اینرسی نسبت به علتهای شتاب به طور مطلق برابرند». این را اصل نسبیت گالیله می‌نامیم.

از این‌رو وقتی به سرعت جسمی می‌پردازیم لازم است که دستگاه مقایسه اینرسی را مشخص کنیم که سرعت نسبت به آن سنجیده می‌شود، چراکه این سرعت در دستگاههای مختلف متفاوت است، حتی اگر جسم تحت کنش دیگر اجسام نباشد. مثلاً جسمی داده شده ممکن است نسبت به قطار سرعت صفر داشته باشد حال آنکه سرعتش نسبت به زمین ۱۰۰ km/h و نسبت به دستگاه خورشید ـ ستاره‌ها ۳۰ km/sec باشد (سرعت گردش زمین به دور خورشید). اما در هر حال شتابش نسبت به قطار، زمین، و یا خورشید یکی خواهد بود. بنابراین گفته می‌شود که نسبت به دستگاههای مقایسه اینرسی مختلف شتاب مطلق و سرعت نسبی است (به بخش ۴ـ۳ مراجعه شود).

۵ـ۳ـ نیرو و جرم ـ قانون دوم نیوتن

چنانچه جسم A در خلاء کامل قرار بگیرد (به دور از هر جسم دیگر) هر وضعی که داشته باشد آن را به‌عنوان وضع طبیعی خود حفظ می‌کند (مثلاً اگر ساکن باشد ساکن می‌ماند و در غیر این صورت حرکت مستقیم یکنواخت دارد). حال چنانچه در گوشه‌ای از فضا جسمی چون B وجود داشته باشد تغییر به علت وجود این جسم برای A پیدا می‌شود زیرا در راستای A به B وضع و حالت برای A با دیگر راستاهای فضا تفاوت دارد (خاصیت وجود میدان).

همان‌گونه که نیوتن در کتاب اصول، «پرینسیپیا» بیان می‌دارد «... به دلایل بسیار این گمان در من پدید می‌آید که تمام پدیده‌های طبیعت ممکن است بستگی به نیروهایی داشته باشند که به وسیله آنها اجسام بر اثر عللی که تاکنون شناخته نشده یکدیگر را جذب می‌کنند و به اشکال طبیعی به هم می‌پیوندند». وی اثر جسم B را بر A بررسی می‌کند و از آن به عنوان عامل تغییر در وضع طبیعی A نام می‌برد. به بیان دیگر این تغییر به سبب نیرویی است که B بر A وارد می‌کند و تظاهرش به صورت شتابی (تغییر سرعتی) است که پیدا می‌کند. بدین جهت نیرو را «کنش اجسام بر یکدیگر که ایجاد شتاب می‌کند» تعریف می‌کنند. نیوتن این تأثیرپذیری A از B را تحت عنوان قانون دوم به صورت زیر بیان می‌دارد:

«چنانچه بر جسمی نیرویی وارد شود به آن شتابی می‌دهد متناسب با آن نیرو به طوری که همواره داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a} \qquad (۱ـ۵)$$

در این زمینه به راحتی می‌توان تجربه کرد و خاصیت برداری بودن $\vec{F}$ را تحقیق کرد. برای یافتن ضریب تناسب و تحقیق تجربی این قانون کلی، دقیقتر به مسئله می‌نگریم

۵ـ۳ـ۱ـ رابطه میان نیرو و شتاب ـ جرم

می‌خواهید میزی را تکان دهید، خسته می‌شوید. از دوستتان کمک می‌گیرید و به

راحتی آن را جابجا می‌کنید. چرا بار اول میز تکان نخورد؟ بار دوم شما و میز که تغییر نکردید! چه چیزی از خارج اثر کرد و میز را از حالت عادیش بیرون برد؟

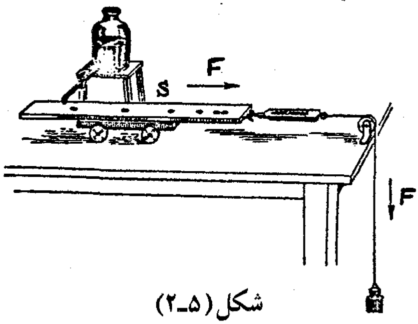
به یقین تاکنون دستگاههایی که قدرت (زور) اشخاص را می‌سنجد دیده‌اید و چه بسا خودتان هم یک یا چند بار قدرت خود را با آن سنجیده‌اید. چه چیزی در دسته‌های ماشین (به عنوان یک جسم) هست که سبب می‌شود تقلای زیادی بکنید تا دسته‌ها را نزدیک به هم نگهدارید؟ و بالاخره چه کار می‌کنید و چی صرف می‌کنید تا دسته‌ها را نگهدارید؟ حالا که آنها را رها می‌کنید چه می‌شود؟ آیا به همان وضع می‌مانند یا به حالت نخستین خود برمی‌گردند؟

خوب! حال کمی بیندیشید، در ذهنتان جستجو کنید شاید پاسخ این پرسشها را بیابید. از قانون ماند یا اینرسی نتیجه گرفتیم که جسم شتاب می‌گیرد اگر تحت اثر نیرویی قرار بگیرد. هرگاه شتاب تمام نقطه‌های جسم یکی باشد می‌توانیم آن را به تمامی جسم نسبت دهیم.

آیا هیچ از خودتان پرسیده‌اید اگر قدرت شما همان نیرو یا عامل خارجی باشد که بر جسم اثر می‌کند جسم را چقدر حرکت می‌دهد. به بیان دیگر چقدر به جسم شتاب می‌دهد؟ بهتر است بگوییم، رابطه میان نیرو و شتاب چیست؟ بیایید با هم آزمایشی انجام دهیم شاید پاسخ این سؤال را پیدا کنیم:

به یک گاری دستی کوچک نیروسنجی وصل می‌کنیم که به وسیله نخی از روی قرقره‌ای می‌گذرد و در پایین میز وزنه‌ای به آن اضافه می‌شود. وزنه، فنر را می‌کشد و نیروی فنر سبب حرکت گاری می‌شود. گاری ابتدا ساکن است. هر چه وزنه سنگین‌تر باشد فنر بیشتر کشیده می‌شود و گاری تندتر شتاب می‌گیرد. می‌بینیم در طول حرکت کشش نیروسنج تغییر نمی‌کند. معنایش این است که نیروی وارد بر گاری ثابت است. آن را روی نیروسنج با F نشان می‌دهیم. از لحظهٔ شروع حرکت به کمک یک قطره‌چکان فاصله پیموده شده به وسیلهٔ گاری را در زمانهای معین t اندازه می‌گیریم. قطره‌چکان طوری تنظیم شده که قطره‌هایش در فاصله زمانی برابر (مثلاً هر ثانیه) بچکد. اندازه‌گیریها نشان

می‌دهند فاصله‌ای که گاری می‌پیماید (S) متناسب با مجذور زمانی است که از شروع حرکت می‌گذرد (t). یعنی گاری دارای حرکت با شتاب ثابت است. حتماً می‌دانید که در این حالت شتاب a از رابطهٔ $a=\frac{2S}{t^2}$ به دست می‌آید.



شکل (۵-۲)

تا اینجای آزمایش روش اندازه‌گیری شتاب را یادگرفتیم. حال بیایید وزنه‌های مختلف به انتهای نخ ببندیم. بدین ترتیب هر زمان نیروی متفاوتی بر گاری اثر می‌کند. با انتخاب مقدار نیروهای متفاوت وارد بر گاری در هر لحظه ($F_1, F_2, ...$) و اندازه‌گیری شتابهای ایجاد شده در آن ($a_1, a_2, ...$)، آزمایش نشان می‌دهد که شتابهای جسم به طور مستقیم با نیروهای وارد بر آن متناسبند:

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\frac{F_3}{a_3}=... \qquad (۵-۲)$$

تجربه نشان می‌دهد که نه تنها در این مثال، بلکه در حالت کلی شتاب یک جسم داده شده متناسب با نیروی وارد بر آن است. ضریب تناسب را جرم جسم می‌نامیم (m). این آزمایش در مورد تحقیق رابطه میان نیرو و شتاب تنها یک تقریب است. داده‌های مشاهدات دقیق اخترشناسی این امکان را می‌دهد که دریابیم تناسب مستقیم میان نیروی وارد بر جسم و شتابی که دریافت می‌کند به وسیلهٔ آزمایشها کاملاً تأیید می‌شود.

در بالا گفتیم نیروی وارد بر جسم و شتابی که جسم می‌گیرد با هم متناسبند. حال بیایید شتابهای حاصل از نیروها را بر اجسام مختلف مقایسه کنیم. آزمایش گاری را دنبال می‌کنیم. نیرو را ثابت نگه می‌داریم و جسمها را عوض می‌کنیم یعنی وزنه‌های

مختلف روی گاری می‌گذاریم. عقربهٔ نیروسنج همیشه یک درجه را نشان می‌دهد چرا که نیرو را ثابت گرفتیم. اندازه گیری شتاب در چنین آزمایشهایی نشان می‌دهد که به طور کلی اجسام مختلف تحت اثر یک نیرو شتابهای مختلف می‌گیرند، یعنی مقاومت و به سخن دیگر اینرسی اجسام مختلف در برابر یک عامل خارجی (نیرو) متفاوت است.

کمی فکر کنیم ببینیم چه کمیتی است که اندازه ماند اجسام مختلف را تعیین می‌کند؟ شتابی که از اثر یک نیرو بر جسمی ایجاد می‌شود به کدام ویژگی جسم بستگی دارد؟ یا برعکس، کدام ویژگی جسم است که مقدار نیروی لازم را برای ایجاد شتاب تعیین می‌کند؟

اجسامی را که تحت اثر یک نیرو شتابهای برابر به دست می‌آورند از نظر مکانیکی می‌توان هم ارز در نظر گرفت. بنابراین، می‌توان پذیرفت که اندازه اینرسی این اجسام نیز باید برابر باشد. اندازه اینرسی جسم را می‌توانیم مستقیماً با اندازه گیری شتاب و با استفاده از وسایل مکانیکی تعیین کنیم. کمیت یا اندازه ماند یا بالاخره ذرات سازنده جسم را «جرم» می‌نامیم و این همان ضریب تناسب میان نیروی وارد بر جسم و شتاب ایجاد شده است که معمولاً آن را «جرم اینرسی» می‌گوییم تا با «جرم گرانشی» اشتباه نشود. همین جا یادآور می‌شویم چنانچه در رابطهٔ (۵-۲) به جای F وزن جسم (W) و به جای a شتاب گرانشی (g) را قرار دهیم نسبت حاصل جرم گرانشی نامیده می‌شود.

بنا به گفتهٔ خود نیوتن مقدار ماده (جرم)، اندازه همان مقدار است که از وزن مخصوص و جثه (حجم) آن توأماً نتیجه می‌شود. پس: «جرم یک جسم عبارت است از خاصیت فیزیکی مشخصه آن جسم که رابطه بین نیروی وارد بر جسم و شتابی که در اثر آن جسم گرفته است، نشان می‌دهد. در تعریف دقیق‌تر اندازه اینرسی به جای جرم از اندازه حرکت (mv) جسم استفاده می‌شود.

قانون دوم دربرگیرندهٔ قانون اول نیز هست زیرا حالت سکون یا حرکت یکنواخت بدون شتاب است پس از رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$ نتیجه می‌شود $\vec{F}=0$ و برعکس. یعنی اگر هیچ نیرویی بر جسم اثر نکند (یا برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم صفر شود)

شتاب نیز صفر است و بنابراین جسم یا ساکن می‌ماند و یا به حرکت یکنواخت بر خط مستقیم ادامه می‌دهد.

۵ـ۳ـ۲ـ کاربرد قانون دوم نیوتن

بر پایه قانون دوم نیوتن، که رابطه میان شتاب هر جسم و نیروی وارد بر آن را می‌دهد، هر مسئله مکانیک را می‌توان به طور اصولی حل کرد. اما در هر حال محدودیتهایی نیز بر این قانون متصور است:

قانون دوم هنگام مطالعه حرکاتی کشف شد که هم در شرایط عادی در زمین اتفاق می‌افتد و هم در حرکات اجسام سماوی. در هر دو حالت سرعت اجسام در مقایسه با سرعت نور ($\sim ۳\times۱۰^{۵}$ km/sec) کوچک است. سرعتهای نزدیک به سرعت نور نخستین بار وقتی مشاهده شد که فیزیکدانها به بررسی حرکت ذرات بنیادی همچون الکترون و پروتون در شتابگرها پرداختند. شتابگر دستگاهی است که در آن ذرات بنیادی تحت اثر نیروهای الکترومغناطیس شتاب می‌گیرند. قانون دوم نیوتن برای چنین سرعتهایی معتبر نیست. مطابق این قانون وقتی نیرویی ثابت در راستای مسیر ذره عمل می‌کند ذره باید شتاب ثابت پیدا کند یعنی سرعتش باید به طور یکنواخت تغییر کند. معلوم شده که هر چند قانون $\vec{F}=m\vec{a}$ در شروع ایجاد شتاب درست است و ذره به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد اما همین که سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می‌شود (با توجه به قوانین نسبیت) شتاب کمتر و کمتر می‌شود یعنی قانون نیوتن از اعتبار می‌افتد. چنانچه شتابگر به عملش ادامه دهد آهنگ افزایش سرعت ذره کمتر و کمتر می‌شود تا به سرعت نور نزدیک شود اما هرگز به آن نمی‌رسد. مثلاً اگر سرعت جسم ۰/۹۹۵ سرعت نور باشد شتاب دریافت شده به وسیله جسم وقتی شتابی در راستای حرکتش اثر می‌کند تنها یک هزارم شتابی است که از قانون نیوتن حساب می‌شود. حتی اگر سرعت برابر یک دهم سرعت نور باشد کاهش شتاب با آنچه از قانون نیوتن محاسبه می‌شود ۱/۵ درصد است. تصحیح برای سرعتهای کم در زندگی روزانه و حتی برای سرعتهای

اجسام کیهانی چنان کوچک است که می‌توان از آن صرف نظر کرد. مثلاً کاهش شتاب برای زمین که به دور خورشید درگردش است با سرعت ۳۰ km/sec تنها یک میلیونیم در هر صد قسمت است.

در نتیجه، قانون دوم نیوتن را تنها می‌توان در مورد اجسامی به کار برد که سرعتشان در مقایسه با سرعت نور کوچک است.

نکتهٔ دیگر، کاربرد قانون دوم در ابعاد کوچک (یا جرمهای کوچک) است. فیزیکدانها ضمن بررسی حرکت ذرات بنیادی نظیر الکترون و پروتون نشان دادند که قانون دوم نیوتن برای چنین ابعادی، حتی در سرعتهای پایین، نیز معتبر نیست. در این مورد ماهیت ذره‌ای و موجی مطرح می‌شود. همچنین نمی‌توان مکان و اندازه حرکت دقیق جسم را تعیین کرد، لذا معادلهٔ شرودینگر جایگزین قانون دوم نیوتن می‌شود.

همان‌گونه که در مورد نسبیت صادق است، فیزیک کوانتومی بیانگر تعمیمی از فیزیک کلاسیک است که قوانین کلاسیک را همچون حالتهای خاص دربر می‌گیرد. درست همانطور که نسبیت گسترهٔ کاربرد قوانین فیزیکی را به حوزهٔ سرعتهای زیاد گسترش می‌دهد، فیزیک کوانتومی نیز آن گستره را به حوزهٔ ابعادی کوچک بسط می‌دهد؛ و عیناً همانطور که یک ثابت جهانی با اهمیت بنیادی، یعنی سرعت نور، شاخص نسبیت است، ثابت جهانی با اهمیت دیگری موسوم به ثابت پلانک h، شاخص فیزیک کوانتومی است. پلانک ضمن تلاش در تبیین خواص مشاهده شده تابش گرمایی این ثابت را در مقاله سال ۱۹۰۰ خود به کار برد و آن را وارد دنیای فیزیک کرد.

۴ـ۵ـ قانون سوم نیوتن ـ عمل و عکس‌العمل

وقتی دو توپ بیلیارد به هم می‌خورند هر دو سرعتشان تغییر می‌کند یعنی شتاب می‌گیرند. زمین ماه را به طرف خود می‌کشد (نیروی گرانش) و سبب می‌شود ماه در مسیر منحنی‌الخط حرکت کند. ماه نیز به نوبه خود زمین را جذب می‌کند (همان نیروی گرانشی). البته نمی‌توان شتاب زمین حاصل از این نیرو را، مستقیماً در دستگاه مرجع

وابسته به زمین نشان داد اما این شتاب به صورت جزر و مد (کشندها) ظاهر می‌شود.

دو مثال بالا نمونه‌هایی هستند که میان اجسام عمل می‌کنند. این مثالها نشان می‌دهند که نیروها هرگز به تنهایی ظاهر نمی‌شوند بلکه همیشه به صورت زوج هستند. اگر یک جسم با نیروی معینی بر جسم دیگر اثر کند (کنش)، جسم دیگر نیز بر اولی با همان نیرو اثر می‌کند (واکنش). تجربه نشان می‌دهد که نهاد این پدیده جهانی است. تمام نیروها به طور متقابل به هم مربوطند و کنش اجسام بر یکدیگر همیشه کنش متقابل است.

آزمایشها ثابت می‌کنند که در تمامی حالتها اگر یک جسم به جسم دیگر نیرویی معین وارد کند جسم دوم نیز با نیرویی برابر و در جهت مخالف بر اولی اثر می‌گذارد و هر دو نیرو در یک صفحه قرار می‌گیرند. این قانون کنش و واکنش است که توسط نیوتن کشف شد و قانون سوم حرکت نامیده می‌شود.

«کنش همواره برابر واکنش است». باید توجه داشت که نیروهای کنش و واکنش مربوط به یک جسم نیستند بلکه بر دو جسم اثر می‌کنند، بنابراین هرگز نمی‌توان آنها را با هم جمع کرد و گفت برآیند شتاب صفر است چراکه برآیند دو نیروی متقابل بر روی یک جسم صفر است نه روی دو جسم، در ضمن نیروهای کنش و واکنش در سکون و حرکت وجود دارند و قانون عمل و عکس‌العمل در مورد نیروهایی که در حال تماس اجسام اثر می‌کنند و نیروهایی که از فاصله عمل می‌کنند صادق است.

اگر تا به حال با مشت محکم به میز کوبیده باشید توجه کرده‌اید که هرگاه به میز می‌کوبید میز نیز به شما محکم ضربه می‌زند. شما با نیروی معین بر میز عمل کرده‌اید و میز با نیرویی برابر به شما عکس‌العمل نشان داده است. یک کتاب بر میزی تخت بگذارید و آن را رها کنید، کتاب نیز شما را تنها رها می‌کند (کنش برابر واکنش است). بر کتاب فشار آورید یعنی بر کتاب عمل کنید. کتاب بر انگشتان شما به عقب عمل می‌کند. به راستی این واکنش کتاب است که شما احساس می‌کنید. محکمتر فشار دهید آنگاه کتاب هم سریعتر شتاب می‌گیرد و واکنش بزرگتر می‌شود. عقیده ذهنی این است که از قرار معلوم واکنش برابر کنش است. ممکن بود فکر کنید که می‌توان، با قرار دادن

نیروسنجهایی در میان دست و کتاب این مسئله را حل کرد. چگونه نیروسنج می‌تواند به ما بگوید به کدام انتها کشیده شده است یا هول داده شده است؟

ما نمی‌دانیم که نیروسنج کنش را اندازه می‌گیرد یا واکنش را. بنابراین هر چند نمی‌توانیم این مسئله را مستقیماً ثابت کنیم، به نظر منطقی می‌رسد که پذیرا شویم، کنش برابر واکنش است، این تصور قانون سوم نیوتن است. قانون سوم را می‌توان به طور غیرمستقیم تحقیق کرد. اندازه حرکت و اصل بقای اندازه حرکت مبحثی است که تحقیق تجربی در مورد این اصل را امکان‌پذیر می‌سازد.

۵ـ۵ـ اندازه حرکت خطی جسم

به جرأت می‌توان گفت که قانون سوم نیوتن جهان شمول نیست. یعنی در مورد هر زوج نیرو حتماً قانون عمل و عکس‌العمل صدق نمی‌کند و فقط دربارهٔ نیروهای حقیقی صادق است. در ضمن این قانون تنها در سرعتهای معمولی صدق می‌کند. در مقابل این قانون، بقای اندازه حرکت که جهان شمول است مطرح می‌شود و از طریق همین قانون می‌توان قانون سوم نیوتن را به شکل غیرمستقیم تحقیق کرد. در زیر نشان داده می‌شود اگر نتایج زیر را از قانون دوم بگیریم استفاده از این قانونها برای حل مسائل به مراتب آسانتر می‌شود. نیروی ثابت $\vec{F}$ را بر جسمی به جرم m اثر می‌دهیم. در اینجا شتاب جسم نیز ثابت می‌ماند $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$. فرض کنید سرعت جسم در اولین لحظهٔ فاصله زمانی t که در خلال آن نیرو عمل می‌کند برابر $\vec{V}_\circ$ باشد و در لحظه نهایی این فاصله زمانی $\vec{V}$ باشد. از سینماتیک داریم:

$$\vec{a}=\frac{\vec{V}-\vec{V}_\circ}{t}$$

بنابراین:

$$m\vec{v}-m\vec{v}_\circ=\vec{F}t \qquad (۳ـ۵)$$

حاصلضرب جرم جسم و سرعتش را اندازه حرکت جسم می‌نامیم، $\vec{P}=m\vec{v}$. از آنجاکه سرعت کمیتی برداری است، اندازه حرکت نیز یک بردار است. رابطه بالا قانون

تغییر اندازه حرکت را نشان می‌دهد. «تغییر اندازه حرکت جسم تحت اثر نیروی ثابت برابر است با حاصلضرب نیرو در مدت زمان تأثیر نیرو». کمیت $\vec{F}t$ (و در حالت کلی در مورد نیروی متغیر، رابطه $\int \vec{F}dt$) را تکان نیرو (ضربه) می‌نامیم. اگر نیرو ثابت نباشد این رابطه فقط برای فاصله‌های زمانی بسیار کوتاه به کار می‌رود که در این مدت کوتاه نیرو فرصت تغییر قابل ملاحظه‌ای در مقدار یا جهت ندارد.

۵ـ۵ـ۱ـ اصل بقای اندازه حرکت خطی

حال ببینیم نتایج جالب توجه قانونهای نیوتن چیست؟ مطابق قانون دوم نیوتن نیرو عبارتست از تغییر زمانی اندازه حرکت

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۴ـ۵)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که مثلاً در مورد سیستم شامل دو ذره، چنانچه نیرویی از خارج عمل نکند، میزان تغییر زمانی اندازه حرکت $\vec{P}_1$ ذرهٔ ۱ برابر منهای میزان تغییر اندازه حرکت $\vec{P}_2$ ذره ۲ است، یعنی اگر اندازه حرکت دو ذره را با هم جمع کنیم. میزان تغییر مجموع این دو ناشی از نیروهای متقابل (که نیروهای داخلی نامیده می‌شود) میان ذره‌ها صفر است. یعنی:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1+\vec{P}_2)=0 \qquad (۵ـ۵)$$

فرض شده که نیروی دیگری در مسئله موجود نیست. اگر میزان تغییر این جمع همیشه صفر باشد، مثل این است که به شیوه‌ای دیگر بگوییم که $\vec{P}=\vec{P}_1+\vec{P}_2$ تغییر نمی‌کند. $\vec{P}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$ را اندازه حرکت کل دو ذره می‌نامیم.

این عبارت قانون بقای اندازه حرکت در مثال خاص گفته شده را بیان می‌کند. اگر استدلال را برای چند جسم تعمیم دهیم و در شرایط پیچیده‌تر، آشکارا تا آنجا که به بحث نیروهای داخلی می‌پردازیم اندازه حرکت کل تمام ذره ثابت می‌ماند. به بیان دیگر نیروهای داخلی اندازه حرکت کل سیستم را تغییر نمی‌دهند.

این نتیجه به این مطلب بستگی ندارد که آیا اجسام سیستم مدت طولانی یا کوتاه

بر هم کنش دارند، در تماس هستند یا از هم فاصله دارند. به ویژه از معادله بالا نتیجه می‌شود که اگر دو جسم از ابتدا ساکن باشند اندازه حرکت کل سیستم برابر صفر باقی می‌ماند مگر نیروهای خارجی بر آن اثر کند.

این قانون بقا جهانی است زیرا نه تنها می‌توان آن را در مکانیک به کار گرفت بلکه برای هر نوع سیستم و هر فرآیندی که در آن اجسام سیستم مورد نظر گنجانده شده قادر به استفاده از آن هستیم. اگر دستگاهی تحت تأثیر نیروهای خارجی نباشد، اندازه حرکت آن یکسان می‌ماند حتی اگر اجسام از بین بروند (در اثر برخورد مثلاً)، اگر واکنشهای شیمیایی بعضی از مواد را به مواد دیگر تبدیل کند یا اگر عناصری از ذرات بنیادی به عناصر یا ذرات دیگر در اثر واکنشهای هسته‌ای تبدیل شوند.

اگر سیستم شامل تنها یک جسم باشد بقای اندازه حرکت بدین معنی است که اگر هیچ نیرویی بر جسم اثر نکند، اندازه حرکتش تغییر نمی‌کند. این هم ارز قانون اینرسی است (سرعت جسم تغییر نمی‌کند). در جای خود در فصلهای بعدی اندازه حرکت سیستم و اصل بقای اندازه حرکت را به طور مفصل مورد بحث قرار می‌دهیم. بد نیست همینجا به طور مختصر به یکی از مهمترین پدیده‌های موجود یعنی سقوط آزاد اشاره شود.

۵ـ۵ـ۲ـ سقوط آزاد اجسام

اگر یک سنگ را همراه با ورقه کاغذی همزمان از ارتفاعی رها کنیم سنگ زودتر به زمین می‌رسد. از چنین مشاهداتی به نظر می‌رسد که اجسام سنگین‌تر تحت اثر نیروی گرانشی سریعتر سقوط می‌کنند. این نتیجه غلط به وسیله دانشمند یونانی ارسطو به صورت یک نظریهٔ صحیح علمی در دو هزار سال پیش به کار گرفته شد. تنها در ۱۵۸۳ گالیله عقیده ارسطو را رد کرد و نشان داد که در شرایط عادی اجسام نه تنها تحت کنش نیروی وزن سقوط می‌کنند بلکه همچنین تحت اثر مقاومت هوا نیز هستند. مطابق نظر گالیله تمام اجسام در نبود مقاومت هوا به طور یکنواخت سقوط می‌کنند و آنچه بسیار مهم است این است که شتاب تمام اجسام هنگام سقوط در نقطه‌ای معین از زمین یکسان است.

می‌توان آزمایش گالیله را دوباره تکرار کرد. مقاومت هوا به شکل و ابعاد اجسام بستگی دارد. هر چه جسم حجیم‌تر و بزرگتر باشد مقاومت هوا در برابر حرکت جسم بیشتر است. از این جهت وقتی مثلاً یک پر و یک قطعه آهن را از بالای لوله شیشه‌ای رها می‌کنیم اگر هوای لوله را از پیش خالی کرده باشیم دو جسم تقریباً با هم سقوط می‌کنند و در یک زمان به پایین شیشه می‌رسند. حال اگر در شرایط عادی آهن یا سنگ از پر زودتر سقوط می‌کنند به علت وجود مقاومت هواست که برای پر بیشتر از گلوله آهنی است (ابعاد پر بیشتر است)، و در ضمن نیروی گرانشی برای آهن فوق‌العاده بیشتر است تا برای پر. از این رو برآیند نیروی گرانشی و مقاومت هوا در مورد آهن بیشتر است و مطابق قانون حرکت نیوتن شتاب بیشتری به آهن می‌دهد و در نتیجه زودتر سقوط می‌کند.

$$\vec{F}=\vec{w}+\vec{R}=m\vec{a} \qquad (۶ـ۵)$$

اگر مقاومت هوا چنان کوچک باشد که بتوان از آن گذشت جسمی که رها می‌شود عملاً به طور ثابت فقط در اثر جاذبه زمین سقوط می‌کند (سقوط آزاد). نیروی جاذبه هرگز به طور دقیق هنگام سقوط جسم ثابت نیست؛ به ارتفاع جسم بالای زمین بستگی دارد. اما اگر جسمی از ارتفاع کم بالای زمین سقوط کند چون تغییر ارتفاع جسم در مقایسه با شعاع زمین بسیار کوچک است می‌توان برای مقاصد عملی این نیرو را ثابت در نظر گرفت. بنابراین می‌توان فرض کرد که شتاب جسم در سقوط آزاد در شرایط معمولی ثابت می‌ماند و سقوط آزاد حرکتی با شتاب یکنواخت است.

۳ـ۵ـ۵ـ وزن و جرم

وزن اجسام در نزدیکی زمین نیروی گرانشی است که از سوی زمین بر آنها اثر می‌کند. جهت بردار نیروی وزن تقریباً به طرف مرکز زمین است. شتابی که این نیرو به جسم می‌دهد شتاب گرانشی یا شتاب ثقل نامیده می‌شود. این شتاب دقیقاً از نقطه‌ای به نقطه دیگر زمین تغییر می‌کند. اگر وزن جسم را با $\vec{w}$ و جرم آن را با m و شتاب سنگینی را

با $\vec{g}$ نشان دهیم بنابر قانون دوم نیوتن

$$\vec{w}=m\vec{g} \tag{۷ـ۵}$$

در یک محل مشخص از زمین که g ثابت است وزن جسم متناسب با جرمش است. اگر در این محل دو جسم با جرمهای m_1 و m_2 داشته باشیم وزن آنها چنین است:

$$\begin{matrix} w_1=m_1 g \\ w=m_2 g \end{matrix} \quad \Rightarrow \frac{w_1}{w_2}=\frac{m_1}{m_2} \tag{۸ـ۵}$$

بنابراین اگر وزن دو جسم در نقطه‌ای از زمین برابر باشد جرمشان نیز با هم برابر است. از این خاصیت برای سنجش جرم یک جسم به کمک ترازو استفاده می‌شود. بدین معنی اگر دو نیروی برابر و موازی (در اینجا نیروی وزن) به دو کفه ترازو اثر کند ترازو متعادل می‌ماند. نتیجه می‌شود که جرم این دو جسم با هم برابر است. اگر این ترازوی متعادل را به هر ارتفاعی از سطح زمین ببریم شتاب و در نتیجه وزن دو کفه به یک اندازه تغییر می‌کند و باز هم تعادل خواهد داشت. جرم در هر نقطه ثابت است ولی وزن تغییر می‌کند.

متأسفانه در زندگی عادی اغلب «وزن» و «جرم» را به خطا استفاده می‌کنیم و بیشتر اوقات که از وزن جسم سخن می‌گوییم منظور جرم جسم است. در فیزیک هرگز نباید چنین اشتباهی را مرتکب شد، چراکه وزن نیروی کششی میان جسم و زمین است (البته اگر در کره دیگری جز کره زمین باشیم منظور نیروی کشش جسم و کره است). به هر حال وزن جسم تابع مکان است، مثلاً وزن شخص در کره ماه یک ششم وزن در سطح زمین است. در فضای میان ستارگان همین شخص بی‌وزن است حال آنکه گفتیم جرم مقدار ذرات سازنده جسم را مشخص می‌کند و تابع مکان نیست.

سؤال: ۱ـ حال بگویید وزن یک گلوله به جرم یک کیلوگرم چقدر است ($g=۹/۸\ m/sec^۲$)؟

۲ـ اگر ترازوی متعادل در مثال بالا را در آسانسوری قرار دهیم که به سمت بالا یا پایین شتاب دارد آیا دو کفه ترازو به حالت تعادل باقی خواهد ماند یا نه؟

۶۵ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ در این فصل از نیرو سخن رفته است. مثالهای آشنا برای نیرو عبارتند از کشش زمین ـ مقاومت هوا در برابر حرکت ـ مالش زمین در برابر لغزش ـ برخورد توپ تنیس با راکت ـ و فشار وارد از طرف هوا بر جسم.

۲ـ با توجه به مطالب گفته شده در مورد نیروی اینرسی و بررسی حرکت در دستگاههای مختلف شتابدار اکنون می‌توان به راحتی دریافت که چرا وقتی یک قطار در حال حرکت ترمز می‌کند به جلو پرت می‌شویم و یا هنگامی که قطار ساکن به حرکت درمی‌آید به عقب پرت می‌شویم.

۳ـ در زندگی روزانه بسیاری از تظاهرات اینرسی را می‌بینیم: حرکت ناگهانی ماشین یا قطار، یا ترمز کردن آن مثالهای بارز تظاهر آن است. حال بگویید در اعمال زیر از چه خاصیت و ویژگی اجسام استفاده می‌شود: تکان دادن قالی ـ تکان دادن قلم برای ریختن قطره جوهر اضافی ـ تکان دادن دماسنج برای پایین آوردن جیوهٔ درون آن ـ در این اعمال جسم مورد بررسی کدامند؟

۴ـ بر پایه قانون سوم به آسانی درمی‌یابیم که جفت نیروهای زیر نمونه‌هایی از عمل و عکس‌العمل هستند:

الف) زمین یک توپ را جذب می‌کند و آن توپ هم زمین را.

ب) اسبی یک گاری را به طرف جلو می‌کشاند بدون آنکه آن را حرکت دهد و آن گاری هم اسب را به طرف مخالف می‌کشاند.

۵ـ به راحتی می‌توانید درستی مطالب زیر را تحقیق کنید:

الف) جرم خاصیتی است مربوط به یک جسم، در حالی که وزن از تأثیر متقابل دو جسم نتیجه می‌شود.

ب) وزن یک جسم متناسب با جرم آن است.

پ) جرم یک جسم با تغییر وزن موضعی آن تغییر نمی‌کند.

۶ـ وزنه‌ای توسط طناب به سقف آسانسور آویزان است. وقتی آسانسور با تندی

رو به کاهش پایین می‌رود (یا معادل این با تندی رو به افزایش به بالا می‌رود) کشش طناب بیشترین مقدار را دارد و وقتی آسانسور با تندی رو به افزایش پایین می‌رود (یا معادل این با تندی رو به کاهش بالا می‌رود) کشش کمترین مقدار را دارد.

۷ـ با حل مسئله‌ای مانند مسئله ۵ـ۳۳ کتاب هالیدی می‌توان دریافت که در سقوط آزاد جسم با در نظر گرفتن مقاومت هوا زمانی که سرعت جسم به سرعت نهایی می‌رسد شتاب حرکت صفر است و جسم با تندی ثابت برابر همین سرعت نهایی بقیه مسیر را طی می‌کند. بدین ترتیب می‌توانید پاسخ دهید که چرا قطرات باران در مراحل آخر سقوط با تندی ثابت فرود می‌آید.

۸ـ در یک مسابقه «طناب کشی» همیشه باید دو تیم به یک اندازه یکدیگر را بکشند و این ناشی از قانون دوم نیوتن است و تیمی که بیشتر بر زمین فشار می‌آورد با وارد شدن اصطکاک مسابقه را می‌برد (توضیح دهید!).

۹ـ برای به حرکت درآوردن یک جسم لازم نیست تا حتماً نیرویی بیش از نیرویی که جسم به ما وارد می‌کند به کار بریم بلکه می‌توانیم از نیروی اصطکاک کمک بگیریم و با فشاری که به زمین وارد می‌کنیم از عکس‌العمل متقابل آن استفاده کنیم. یا به بیان دیگر از قانون سوم نیوتن بهره‌مند شویم و از نیروی اصطکاک در جهت افزایش برآیند نیروی وارد بر جسم استفاده کنیم.

۱۰ـ ما نمی‌توانیم بگوییم تعریف جرم تنها در مورد اجسامی صادق است که ابتدا در حال سکون بوده‌اند، زیرا تغییر سرعت جسم در واحد زمان در اثر نیروی خاص وارد شده بر جسم تعیین کنندهٔ جرم جسم است، نه فقط صرفاً سرعت اولیه جسم بنابراین می‌توانیم با در نظر گرفتن نیروی وارد شده بر جرم و اینکه شتاب این جرم مشتق دوم مسافت نسبت به زمان است بعد جرم را با استفاده از کمیتهای اصلی طول، جرم و زمان و از طریق قانون دوم نیوتن به دست بیاوریم.

۱۱ـ نکات زیر را می‌توانیم به سهولت تحقیق کنیم:

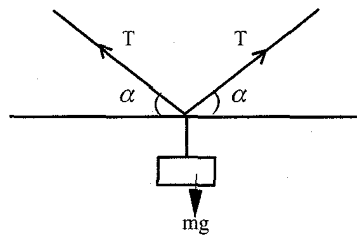
* برای به حرکت درآوردن یک جسم لازم است نیرویی بیش از برآیند

نیروهای وارد بر آن جسم وارد کرد.

* قانون سوم نیوتن روی دو جسم بحث می‌کند و در ترکیب نیروهای وارد بر یک جسم دخالتی ندارد.

۱۲ـ اگر بخواهیم طنابی را که وزنه‌ای به وسط آن آویزان شده است به شکل افقی نگه داریم باید علاوه بر این که دو سر طناب را به یک اندازه می‌کشیم نیرویی را که توسط وزنه به سمت پایین وارد می‌شود خنثی کنیم. نیروی بی‌نهایت بزرگی برای افقی نگه داشتن طنابی که وزنه به آن آویزان است، لازم است. برای آنکه طناب افقی شود باید $\alpha=0$ باشد.

$$2T\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{mg}{2T} \xrightarrow{\alpha=0} T\rightarrow\infty$$



۱۳ـ تا هنگامی که روی یک ترازوی فنری ایستاده‌ایم می‌توانیم وزن خود را یادداشت کنیم. اما همین که شروع به حرکت می‌کنیم نیروی اصطکاک را هم داخل کرده‌ایم که متناوباً این نیروی اصطکاک کم و زیاد می‌شود (متناسب با راه رفتن) و در نتیجه ما نمی‌توانیم مقدار ثابتی را برای وزن خود در نظر بگیریم زیرا عددی را که ترازو نشان می‌دهد، در واقع برآیند دو نیروی اصطکاک و وزن است.

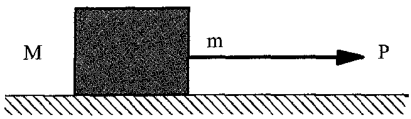
۱۴ـ اگر روی یک ترازوی فنری در آسانسوری ایستاده باشیم، هرگاه کابل آسانسور پاره شود، ترازو مقدار صفر را نشان خواهد داد و چنانچه آسانسور با حرکت شتابداری به طرف بالا برود، ترازو بیشترین مقدار را نشان خواهد داد.

۱۵ـ اگر بتوانیم آنقدر از کرهٔ زمین دور شویم که دیگر در میدان جاذبه آن نباشیم می‌توانیم ادعا کنیم که در حالت بی‌وزنی بسر می‌بریم. البته به نظر می‌رسد که این

امر به چارچوب مرجع هم بستگی دارد (چگونه؟)

۵ـ۷ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ جسمی به جرم M توسط طنابی به جرم m روی یک سطح افقی بدون اصطکاک (مطابق شکل) کشیده می‌شود، نیروی افقی P به انتهای طناب وارد می‌شود.



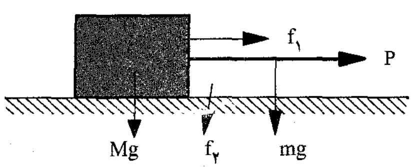
الف) نشان دهید که طناب باید خمیدگی پیدا کند، حتی اگر مقدار آن ناچیز باشد.
با فرض اینکه خمیدگی قابل چشم‌پوشی است، مطلوبست

ب) شتاب طناب و جسم

ج) نیرویی که طناب به جسم M وارد می‌کند.

د) نیروی کشش در وسط طناب

حل. الف) چون نیروی mg به سمت پایین و نیروی P در جهت افقی طناب وارد می‌شود پس کمی خمیدگی در طناب به وجود می‌آید که در مقایسه با نیروی P ناچیز است بنابراین احساس نمی‌شود. مانند خمیدگی پلها و...



ب) طبق قانون دوم نیوتن:

$$\Sigma F = \Sigma ma \Rightarrow P = (M+m)a \quad \Rightarrow a = \frac{P}{M+m}$$

ج) قانون سوم نیوتن بین جسم و طناب برقرار است.

$$\Sigma F=ma \Rightarrow f_1=M\left(\frac{P}{M+m}\right) \Rightarrow f_1=\frac{PM}{M+m}$$ نیروی وارد بر جسم

$$\Sigma F=ma \Rightarrow P_1-f_2=m\left(\frac{P}{M+m}\right) \Rightarrow f_2=\frac{Pm}{M+m}$$ نیروی وارد بر طناب

د) نیروی کشش در وسط طناب

$$\Sigma F=ma \Rightarrow P-f_2=\frac{m}{2}\left(\frac{P}{M+m}\right) \Rightarrow f_2=\frac{P}{2}\left(\frac{2M+m}{M+m}\right)$$

۲ـ جسمی به جرم $10\ kg$ بر اثر نیروی $F=(120\ t+40)N$ خط مستقیم جابجا می‌شود. در لحظهٔ $t=0$ جسم در نقطه $x_0=5\,m$ با سرعت اولیه $V_0=6\,m/s$ قرار دارد. سرعت و مکان جسم را در لحظات بعد به دست آورید.

حل.

$$120\ t+40=10\ a \Rightarrow a=12\ t+4\ m/s^2 \qquad ; \qquad a=\frac{dV}{dt}$$

$$\int_6^V dV=\int_0^t (12t+4)dt \Rightarrow V=6t^2+4t+6$$

با قرار دادن $V=\frac{dx}{dt}$ و انتگرال‌گیری مجدد:

$$\int_5^x dx=\int_0^t Vdt=\int_0^t (6t^2+4t+6)dt \Rightarrow x=2t^3+2t^2+6t+5$$

این رابطه امکان می‌دهد مکان جسم را در هر لحظه دلخواه به دست آوریم.

۳ـ تیر چوبی به طور قائم از سقف آویزان است. یک بچه گربه به روی تیر می‌پرد. در این موقع، طناب آویز پاره می‌شود و تیر سقوط می‌کند. شتاب تیر را در موقع سقوط معلوم کنید، در حالی که در زمان سقوط تیر، گربه از آن طوری بالا می‌رود که ارتفاع گربه از کف اتاق ثابت می‌ماند. جرم گربه m و جرم چوب M است.

حل. چون ارتفاع گربه از کف اتاق تغییر نکرده لذا نسبت به کف اتاق ساکن است و برآیند نیروهای وارد به آن نسبت به کف اتاق تعادل دارند یعنی از طرف تیر بر گربه نیروی mg به طرف بالا اثر می‌کند. لذا بنا به قانون عمل و عکس‌العمل، بر تیر عکس‌العملی برابر mg و در خلاف جهت حرکت گربه وارد خواهد شد. رابطهٔ اساسی

دینامیک در مورد حرکت تیر چنین نوشته خواهد شد:

$$Mg+mg=Ma \Rightarrow a=\frac{M+m}{M}g$$

۴ـ قطرهٔ باران در موقع سقوط از ارتفاع زیاد کمی تبخیر می‌شود. معلوم کنید این پدیده چه اثری در حرکت آن به وجود می‌آورد.

حل. در موقع سقوط قطره به آن دو نیرو یکی وزن قطره یعنی mg و نیروی مقاومت هوا F وارد می‌شود که نیروی F با سطح بزرگترین مقطع قطره متناسب است. در اثر تبخیر قطره حجم و بزرگترین سطح مقطع آن کاهش پیدا می‌کند. بنابراین نیروی مقاومت هوا با مجذور شعاع کاهش پیدا می‌کند ولی وزن با مکعب شعاع، لذا کاهش وزن بیشتر از کاهش مقاومت هوا خواهد بود و در نتیجه سرعت قطره به مرور زمان کم خواهد شد.

۵ـ از قرقره‌ای که محورش افقی است طنابی به طول L عبور کرده طول هر دو طرف با هم مساوی و نصف طول طناب است. دو بچه هم وزن از طرفین طناب را گرفته از آن بالا می‌روند، سرعت یکی v و دیگری ۲v است. معلوم کنید هر کدام پس از چه مدت به قرقره می‌رسند. از جرم نخ و قرقره صرفنظر می‌شود.

حل. نیروی کشش طناب در تمام طول آن یکسان است در نتیجه سرعت و شتاب بچه‌ها نسبت به قرقره یکسان خواهد بود. لذا با سرعت ۳v به هم نزدیک خواهند شد و تمام مسافت را در مدت $t=\frac{L}{۳v}$ طی خواهند کرد.

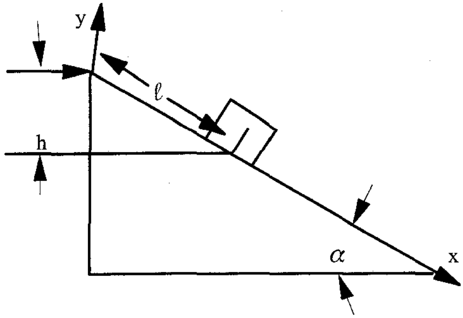
۶ـ اسکی‌بازی از کوه آزادانه پایین می‌آید. پس از طی مسافت l، موشک علامت را پرتاب می‌کند. سرعت وی را بلافاصله پس از این پرتاب موشک به دست آورید. جرم اسکی‌باز با دستگاه پرتاب کننده، کلاً M و جرم موشک m، سرعت پرتاب آن V و زاویه شیب کوه α فرض شود.

حل. در موقع پرتاب، اسکی‌باز و موشک دارای اندازه حرکت $(M+m)V_۱$ هستند، که در امتداد محور x است. سرعت اسکی‌باز را قبل از پرتاب موشک می‌توان به دست آورد.

$\nu = \sqrt{2gh}$

$(\nu^2 - \nu_0^2 = 2gh)$

$h = l\sin\alpha$



سرعت اسکی‌باز را بلافاصله پس از پرتاب موشک V_2 می‌نامیم. در آن صورت طبق اصل بقای اندازهٔ حرکت خواهیم داشت:

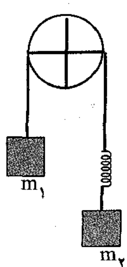
$$(m+M)V_1 = -m\nu\sin\alpha + MV_2$$

که $(-m\nu\sin\alpha)$ تصویر اندازهٔ حرکت موشک روی محور xهاست. با قرار دادن مقدار V_1 در رابطه، چنین به دست می‌آوریم:

$$(m+M)\sqrt{2gl\sin\alpha} = -m\nu\sin\alpha + MV_2$$

$$V_2 = \sqrt{2gl\sin\alpha}\left(\frac{m+M}{M} + \frac{m\nu}{M}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2gl}}\right)$$

۷ـ دستگاهی مطابق شکل داده شده است. $m_1 = 50\ gr$ و $m_2 = 30\ gr$ و فنر بی‌وزن و نخ بی‌وزن و با طول ثابت است، فنر نوسان نمی‌کند. معلوم کنید حرکت دستگاه چگونه خواهد بود؟ ثانیاً طول فنر در حالت سکون ۱۰ cm می‌باشد. طول آن را در حال حرکت معلوم کنید در صورتی که بدانیم این فنر در ازاء نیروی ۰/۱ نیوتن به اندازه ۲ سانتی‌متر دراز می‌شود و اصطکاک ناچیز است. وزن قرقره را هم ناچیز بگیرید.



حل. برای سادگی در حل چنین دستگاهی می‌گوییم $f=(m_۱-m_۲)g$ نیروی مؤثر و جرم کل $m_۱+m_۲$ است و می‌توان نوشت:

$$a=\frac{f}{m}=\frac{m_۱-m_۲}{m_۱+m_۲}g=\frac{۵۰-۳۰}{۵۰+۳۰}g \Rightarrow a=\frac{g}{۴}$$

اگر فنر حالت سکون و یا حرکت یکنواخت داشته باشد فقط در اثر نیروی $P_۲=m_۲g$ طولش زیاد می‌شود. ولی در این حالت علاوه بر $P_۲$ مقدار $f_۱=m_۱a$ نیز سبب زیاد شدن طولش می‌شود یعنی بر فنر نیروی F وارد می‌شود که:

$$F=P_۲+f_۱=m_۲g+m_۱a=\frac{۵}{۴}m_۲g=\frac{۵}{۴}\times\frac{۳۰}{۱۰۰۰}\times ۹/۸ \Rightarrow F=۰/۳۷ \text{ نیوتن}$$

ازدیاد طول طبق شرایط مسئله چنین حساب خواهد شد:

$$\Delta l=\frac{۰/۳۷}{۰/۱}\times ۲=۷/۴ \text{ cm}$$

طول فنر در حالت حرکت $l=۱۰+۷/۴=۱۷/۴ \text{ cm}$

۸ـ دو جسم که با نخی به هم وصلند با دو برابر شتاب ثقل سقوط می‌کنند. معلوم کنید نیرویی که آنها را حرکت می‌دهد چند برابر نیروی کشش نخ بین وزنه‌هاست. جرم جسم پایینی سه برابر جرم جسم بالایی است.

حل. برای وزنه پایینی بنا به قانون اساسی دینامیک می‌توان نوشت:

$$F_H-F'_H+۳mg=۳ma$$

و برای وزنهٔ بالایی:

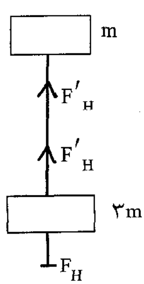
$$F'_H+mg=ma$$

بنا به شرط مسئله $a=g$ است. در آن صورت روابط بالا به صورت زیر درمی‌آیند.

$$F_H-F'_H+۳mg=۶mg \quad , \quad F'_H+mg=۲mg$$

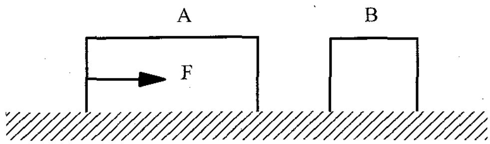
از حل دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{F_H}{F'_H}=۴$$



۹ـ دو مکعب مستطیل به جرمهای m_1 و m_2 از جنس چوب مطابق شکل بر روی سطح افقی بدون اصطکاک تحت اثر نیروی F حرکت می‌کنند. نیروی F بر جسم A وارد می‌گردد و بر جسم B همان نیرو از طرف جسم A وارد می‌شود. طبق قانون عمل و عکس‌العمل دینامیک باید جسم B با $(-F)$ بر جسم A نیرو وارد کند و این بدان معنی است که برآیند نیروهای وارد بر A صفر است.

$$\sum F=0 \Rightarrow a=\frac{\sum F}{m}=0$$



لذا باید جسم A حرکت نکند، یعنی با هیچ نیروی F نمی‌توان دو جسم فوق را به حرکت آورد. اشتباه در کجاست؟

حل. اشتباه در اینجاست که نیروی F به تیر A وارد شده توسط آن به تیر B انتقال پیدا می‌کند. یعنی در واقع نیروی F به هر دو وارد می‌شود و این مطلب منطبق با اصل دینامیک نیست. بنابراین رابطهٔ دینامیک برای دستگاه فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$F=(m_1+m_2)a\ ,\ a=\frac{F}{m_1+m_2}$$

از این نیرو مقداری که بر B مؤثر می‌شود چنین است:

$$F_1=m_2 a=\frac{m_2}{m_1+m_2}F$$

۱۰ـ شتاب حرکت دو وزنهٔ m_1 و m_2 را در دستگاه شامل ۳ قرقره متحرک و یک قرقره ثابت معلوم کنید. چه نسبتی بین جرمهای فوق باید باشد تا دستگاه تعادل داشته باشد؟ اصطکاک محوری و جرم قرقره‌ها ناچیز است.

حل. اگر کشش نخ را با T و شتاب وزنه‌ها را با a_1 و a_2 نشان دهیم، با توجه به اینکه وزنهٔ اول به پایین و دومی به بالا حرکت می‌کند، برای هریک از وزنه‌ها طبق اصول دینامیک می‌توان نوشت:

$$m_1 g-T=m_1 a_1$$

$8T - m_2 g = m_2 a_2$

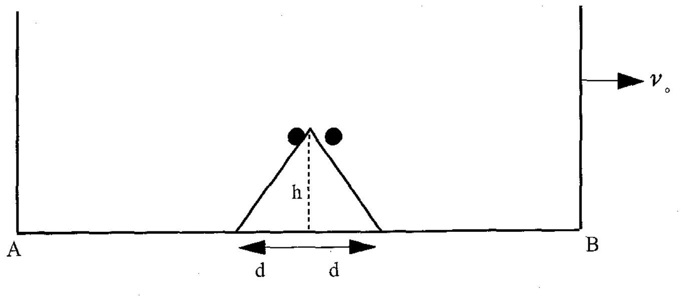
از آنجا که زمان حرکت وزنه‌ها مساوی است لذا:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{S_1}{S_2} = 8$$

S_1 و S_2 مسافت طی شده توسط وزنهٔ اول و دوم است. از حل دستگاه اول با توجه به آنکه $\frac{a_1}{a_2} = 8$ است خواهیم داشت $a_2 = \frac{8m_1 - m_2}{8m_1 + m_2} g$ و $a_1 = \frac{8(8m_1 - m_2)}{8m_1 + m_2} g$. دستگاه موقعی حالت تعادل خواهد داشت که $a_1 = a_2 = 0$ باشد و این درصورتی امکان دارد که $m_2 = 8m_1$ باشد.

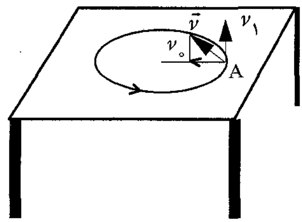
۱۱ـ واگنی با سرعت v_0 در حال حرکت است. در بالای سطح شیبدار دو طرفه‌ای که به وسط کف واگن چسبیده، دو گلولهٔ کوچک یکسان قرار دارند. این دو گلوله هم زمان از بالای سطح شیبدار و از حالت سکون نسبت به واگن رها می‌شوند. اختلاف زمان رسیدن گلوله‌ها به نقاط A و B را به دست آورید:

حل. واگن با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین چارچوب متصل به واگن یک چارچوب لخت است و دقیقاً نتایج آزمایش مانند حالتی است که این آزمایش در روی زمین انجام شود. بنابراین دو گلوله مسیرهای مشابه را می‌پیمایند و هم زمان به نقاط A و B می‌رسند.



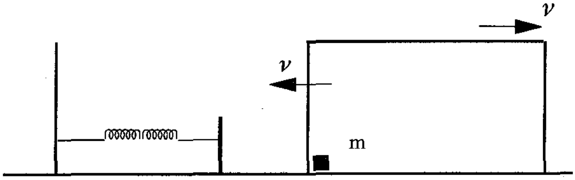
۱۲ـ بر روی یک میز ساکن افقی، تپانچه‌ای مطابق شکل با سرعت ثابت در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. جهت لولهٔ تپانچه همواره به سمت مرکز دایره است و

دوران آن پاد ساعتگرد است. در لحظه‌ای که تپانچه از نقطهٔ A می‌گذرد گلوله‌ای از آن شلیک می‌شود. مسیر حرکت گلوله کدام است؟



حل. در لحظهٔ رها شدن، گلوله دارای سرعت رو به مرکز v_0 و سرعت مماسی v_1 است. برآیند این دو سرعت $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}_1$ مقداری ثابت است که در شکل نشان داده شده است. بنابراین گلوله در راستای سرعت $\vec{v}$ و در خط مستقیم از نقطهٔ A دور می‌شود.

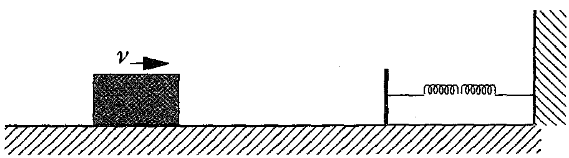
۱۳ـ مطابق شکل، داخل یک جعبه، جسمی به جرم m و به فاصلهٔ h از یک انتهای آن قرار دارد. جعبه همراه با جسم درون آن با سرعت v به سمت فنری با منحنی بزرگ در حرکت است. انتهای آزاد را قبل از برخورد جعبه با آن، مبدأ مختصات می‌گیریم. بعد از برخورد با فنر و بازگشت آن جسم برای نخستین بار در نقطه‌ای به مختصهٔ x با انتهای جعبه برخورد خواهد کرد. با چشم‌پوشی از کلیهٔ اصطکاکها جسم m در چه محدوده‌ای (بر حسب h) با انتهای جعبه برخورد خواهد کرد.



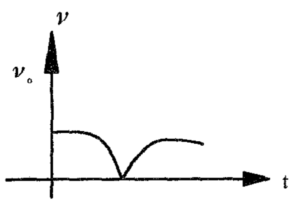
حل. فرض می‌کنیم فنر بسیار سخت است $(k=\infty)$ به طوری که به محض اینکه جعبه با آن برخورد می‌کند، در همان لحظه و با همان سرعت برخورد، به عقب برمی‌گردد. در این حالت هر چند جعبه با همان سرعت اولیه برخورد (مثلاً v) به عقب

برمی‌گردد، اما جسم درون آن با همان سرعت v به پیشروی ادامه می‌دهد و بدیهی است این جسم با انتهای جعبه در نقطه‌ای به مختصات $x=\frac{h}{2}$ برخورد می‌کند. با این حال چون ضریب سختی فنر واقعاً بی‌نهایت نیست، جعبه پس از برخورد اندکی پیش می‌رود و فنر را فشرده می‌کند و سپس به عقب برمی‌گردد و در نهایت با سرعت v فنر را ترک می‌کند. بنابراین جسم درون جعبه که به محض برخورد با فنر با همان سرعت v نسبت به زمین پیش می‌رود، مدت زمان بیشتری در راه است و در نقطه‌ای با مختصات $x<\frac{h}{2}$ با انتهای جعبه برخورد می‌کند.

۱۴ـ جسمی با سرعت v_0 روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حال حرکت است. مطابق شکل با فنری برخورد می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان جسم را رسم کنید.



حل. پس از برخورد جسم با فنر سرعت آن کم می‌شود و فنر فشرده می‌شود. هنگامی که فنر بیشترین فشردگی را پیدا می‌کند سرعت جسم صفر است. البته بلافاصله به علت وجود نیروی کشسانی فنر، جسم به سمت عقب برمی‌گردد و سرعت آن افزایش می‌یابد و در نهایت با همان مقدار سرعت اولیه در مسیر خلاف جهت حرکت اولیه برمی‌گردد. با توجه به اینکه در لحظه‌ای که سرعت جسم صفر می‌شود، شتاب آن صفر نیست. نمودار سرعت مطابق شکل است.

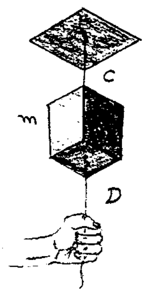


۸ـ۵ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ با در نظر گرفتن قانون جاذبه قانون جاذبه عمومی و قانون دوم نیوتن تفاوتهایی بین دو جرم اینرسی و گرانشی به چشم می‌خورد، در این مورد توضیح دهید.

۲ـ جسمی به جرم m به وسیلهٔ ریسمان c از سقف آویخته شده است و ریسمان D هم به قسمت پایین آن وصل است (شکل زیر). اگر به ریسمان D یک تکان شدید بدهید پاره می‌شود ولی اگر آن را به آرامی بکشید c پاره می‌شود. علت را توضیح دهید.



۳ـ یک طناب بدون جرم از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته است. میمونی یک سر طناب را گرفته و به سر دیگر آن آینه‌ای هم‌وزن میمون که در مقابل میمون قرار دارد وصل شده است. میمون چگونه می‌تواند از تصویر خود در آینه بگریزد؟

۴ـ به دلایل پزشکی تعیین منظم جرم بدن فضانوردان لازم است. راهی را برای تعیین جرم در محلی که شتاب گرانش صفر است پیشنهاد کنید؟

۵ـ پرنده‌ای روی سیم کشیده‌ای نشسته است. آیا این پرنده کشش سیم را تغییر می‌دهد؟ اگر می‌دهد، مقدار آن کمتر از وزن پرنده، مساوی با آن یا بیشتر از آن است؟

۶ـ اگر ناگهان نیروی گرانش بین زمین و خورشید از بین برود زمین باید بر خط مستقیم حرکت کند. آیا در این صورت چرخش موضعی زمین حفظ می‌شود؟ چرا؟ اصولاً عامل حرکت موضعی زمین چیست؟

۷ـ اگر به جای نیروی جاذبه عمومی، نیروی دافعه عمومی در جهان حکم‌فرما بود آنگاه چه اتفاقی می‌افتاد؟

۸ـ چرا حرکت انتقالی و موضعی زمین از چپ به راست است؟ آیا این دو حرکت با هم ارتباطی دارند؟ قوانین نیوتن در این مورد چه پیشنهادی دارند؟

۹ـ ناظری داخل آسانسور قرار دارد و دو وزنه غیرمساوی که در دو طرف یک قرقره آویخته شده‌اند نیز در آسانسور وجود دارد، اگر ناگهان کابل آسانسور پاره شود و ناظر و وزنه‌ها با شتاب g سقوط کنند، ناظر داخل آسانسور وضعیت وزنه‌ها را چگونه مشاهده می‌کند؟

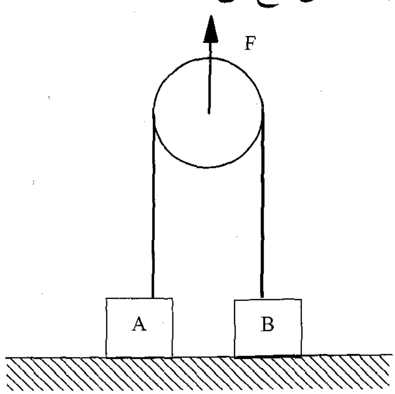
۱۰ـ آیا این جمله صحیح است: «سنگی که در شرایط خلاء در حال سقوط است، سرعتی دارد که به میزان ثابتی افزایش می‌یابد». چرا؟

۱۱ـ آیا در همه حال راستای نیروی واکنش سطح، عمود بر سطح است؟ یا اینکه اگر بر جسم نیرویی وارد نشود، نیروی واکنش سطح عمود بر سطح است؟ توضیح دهید.

۱۲ـ دو نفر سر طنابی را در دو جهت مخالف می‌کشند. اگر هریک از آنها با نیرویی برابر با F نیوتون طناب را بکشد، نیروی کشش طناب چقدر خواهد بود؟

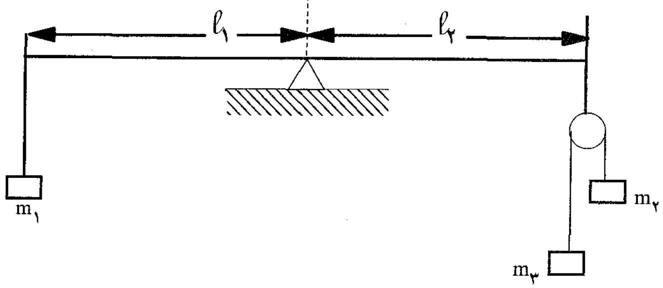
ب) مسائل

۱ـ در شکل زیر A و B به ترتیب دارای جرمهای ۳kg و ۱kg هستند. اگر نیروی $F = 5t_2N$ در راستای قائم به قرقره وارد شود شتاب A و B را بر حسب t پیدا کنید. هنگامی که B به قرقره می‌رسد چه اتفاقی رخ می‌دهد؟



۲ـ ثابت کنید در شرایطی که رابطهٔ زیر برقرار باشد میلهٔ AB در شکل زیر در حال ترازمندی است. در ضمن نیرویی را که تکیه‌گاه روی میله وارد می‌کند پیدا کنید.

$m_۱(m_۲+m_۳)\ell_۱ = ۴m_۲m_۳\ell_۲$



۳ـ مردی به جرم ۸۰ kg از روی سکویی به ارتفاع ۲ m روی زمین می‌پرد. در موقع فرود آمدن پاهای خود را راست نگاه می‌دارد ولی از وقتی که پایش به زمین تماس پیدا می‌کند زانوهایش را خم کرده تنه‌اش ۰/٦m پایین آمده و به حال توقف کامل می‌رسد.

الف) وقتی پایش با زمین تماس پیدا می‌کند سرعتش چقدر است؟

ب) وقتی تنه‌اش پایین می‌آید به فرض اینکه شتاب ثابت فرض شود اندازه شتاب تنه‌اش چقدر است؟

ج) هنگام خم شدن پس از تماس با زمین، چه نیرویی از طرف پاهای او به زمین وارد می‌شود. این نیرو را بر حسب نیوتن و نیز بر حسب درصد وزن شخص بیان کنید.

۴ـ طنابی به طول ۱۲ متر به وزن ٦۰ N از روی قرقره‌ای می‌لغزد. کشش طناب در وسط آن موقعی که طول یک طرف ۸ متر باشد چقدر می‌شود؟ اصطکاک طناب با قرقره ناچیز است. جواب: ۲۰ N

راهنمایی: ابتدا شتاب حرکت را حساب کنید. وزن ۸ متر نیروی موافق و وزن ۴ متر نیروی مخالف برای تمام طناب است. از آنجا شتاب در همان لحظه $a=\frac{g}{۳}$ به دست می‌آید که می‌توان کشش نخ را از فرمول مربوطه در وسط آن یافت: $F-\frac{P}{۲}=-ma$

۵ـ طنابی وزنهٔ ۹۰۰ کیلوگرمی را با شتاب a بالا می‌برد و با همان شتاب می‌تواند وزنه ۱۱۰۰ کیلوگرمی را پایین بیاورد. معلوم کنید با این طناب چند کیلوگرم بار را می‌توان یکنواخت بالا برد؟ جواب: ۹۹۰ kg

راهنمایی: در این حالت می‌تواند باری را که با نیروی کشش در دو دفعه فوق مساوی است بالا ببرد، نیروی کشش در دو حالت قبلی برابرست و می‌توان آن را یافت.

۶ـ چتربازی پس از آنکه ۲۰ متر سقوط می‌کند چتر خود را باز می‌کند و در ۳ ثانیه سرعت آن ۳ بار کاهش پیدا می‌کند. کشش نخهای چتر را در موقع حرکت کُند شونده معلوم کنید. وزن چترباز ۶۰۰ نیوتن است. جواب: تقریباً ۹۶۰ نیوتن

راهنمایی: از سقوط آزاد ۲۰ متر سرعت اولیه موقع باز شدن چتر حساب می‌شود. از معادلهٔ سرعت در حرکت کُند شونده شتاب کُند شونده محاسبه شده بعد کشش نخ محاسبه می‌شود.

۷ـ بر سقف آسانسوری که با شتاب a_0 بالا می‌رود نیروسنجی آویزان شده است. از نیروسنج قرقره‌ای آویزان است و می‌تواند آزادانه حول محور افقی بچرخد. بر روی قرقره نخی عبور داده به طرفین نخ دو وزنه m_1 و m_2 به ترتیب ۲۰۰ و ۳۰۰ گرمی باشند نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد؟ جواب: $F= ۵/۲۸\ N$

راهنمایی: نیروسنج دو برابر کشش نخ را نشان می‌دهد. می‌توان کشش نخ را از حرکت وزنه‌ها نسبت به زمین حساب کرد. مثلاً وزنهٔ کوچک که بالا می‌رود شتابش مجموع شتاب آسانسور و شتاب خودش نسبت به آسانسور است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. $T-m_1g=m_1(a+a_0)$ یا $T=m_1(g+a+a_0)$

۸ـ بر روی سطح افقی بدون اصطکاک دو جسم مثل هم قرار دارند. این اجسام به وسیلهٔ نخ به هم وصلند و نخ حالت کشیده و مستقیم دارد. نخ کشش بیشتر از ۲۰ نیوتن را نمی‌تواند تحمل کند. بر یکی از این دو جسم چه نیرویی افقی وارد سازیم تا نخ پاره نشود؟ آیا وجود اصطکاک بین اجسام و سطح در مقدار نیرو تأثیر می‌گذارد؟ ضریب اصطکاک دو جسم با سطح یکسان فرض می‌شود. جواب: $F= ۴۰\ N$ - خیر

راهنمایی: کافی است معادله حرکت هر دو جسم را با نیروی کشش نخ بنویسید، جواب به دست خواهد آمد.

۹ـ یک اسلحه خودکار در هر دقیقه ۳۰۰ تیر با سرعت $V= ۳۰۰\ m/s$ پرتاب می‌کند. معلوم کنید، نیروی متوسط فشاری که بر شانهٔ تیرانداز وارد می‌کند چقدر است. جرم هر تیر ۳۰گرم است. جواب: $F= ۱۵\ N$

راهنمایی: از رابطهٔ اندازه حرکت $F.t=Mv \times n$ حساب می‌شود. n تعداد تیرها در زمان است.

۱۰ـ ستون آب به سطح مقطع ۴ سانتیمتر مربع با سرعت ۵ متر بر ثانیه در امتداد افقی خارج می‌شود و به شیشه قائم برخورد می‌کند و به طور آزاد پایین می‌ریزد. معلوم کنید نیروی افقی را که با آن، ستون آب به شیشه برخورد می‌کند.

جواب: $F= ۱۰\ N$

راهنمایی: از رابطهٔ $F.t=mv$ حل می‌شود و به جای m مقدار $svd \times t$ گذاشته می‌شود که d وزن مخصوص، v سرعت و s سطح مقطع و t زمان جریان آب است.

۱۱ـ قایقی به وزن $P_۱ = ۱۴۰۰\ N$ در آب ساکنی ایستاده است. شخصی به وزن $P_۱ = ۶۰۰\ N$ در قایق ایستاده از دماغهٔ قایق به عقب آن می‌رود و در نتیجه قایق $۱/۲\ m$ جابجا می‌شود. طول قایق را معلوم کنید. مقاومت آب ناچیز فرض می‌شود.

جواب: ۴ متر

راهنمایی: از رابطهٔ مجموع اندازهٔ حرکت مساوی صفر است، حل می‌شود. ضمناً سرعت شخص $V_۲-V_۱$ منظور شود که سرعت او نسبت به ساحل است. $V_۲$ سرعت مطلق شخص نسبت به ساحل و $V_۱$ سرعت قایق است.

۱۲ـ یک موشک با سرعت V پرواز می‌کند. پس از جدا شدن قسمت اصلی سرعت آن ۲ بار کاهش پیدا می‌کند، ولی امتداد حرکت موشک و قسمت اصلی آن فرق نمی‌کند. سرعت قسمت اصلی موشک چند بار افزایش می‌یابد، در صورتی که جرم آن ۶ بار از جرم موشک کمتر است. جواب: $V_۱ = ۴V$

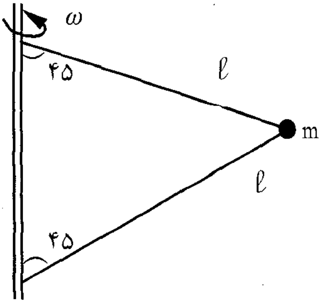
۱۳ـ پسری به جرم ۶۰ kg روی ترازویی ایستاده است. اگر این پسر ناگهان با شتاب ۲۴۵ cm/s خود را به سمت بالا بکشد ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟ با به‌کار بردن ماشینی که شتابهای یک جسم را با اندازه‌گیری نیروهای وارد بر آن اندازه‌گیری می‌کند در رابطه با این مسئله بحث کنید.

۱۴ـ گلوله‌ای را از توپی که لولهٔ آن قائم قرار دارد با سرعت اولیهٔ $V_{\circ}$ به طرف بالا پرتاب می‌کنند. در بالاترین نقطهٔ مسیر گلوله منفجر شده، دو تکه می‌شود. قسمت اول در نزدیکی نقطهٔ پرتاب با سرعت $۲V_{\circ}$ سقوط می‌کند. معلوم کنید قسمت دوم پس از چه مدت و با چه سرعتی به زمین سقوط خواهد کرد. مقاومت هوا ناچیز فرض می‌شود.

جواب: $t_{۲}=\frac{V_{\circ}}{g}(۳+\sqrt{۳})^{sec}, V_{۲}=۲V_{\circ}$

راهنمایی: از اصل بقای اندازه حرکت استفاده می‌کنیم و از فرمول نقطهٔ اوج، زمان فرود تکهٔ اول را پیدا می‌کنیم. و زمان سقوط قسمت دوم مجموع سه زمان رسیدن گلوله به نقطهٔ اوج و زمان بالا رفتن قسمت دوم پس از انفجار گلوله و زمان سقوط از ارتفاع $H=\frac{V_{\circ}^{۲}}{۲g}+\frac{3V_{\circ}^{۲}}{۲g}=\frac{۲V_{\circ}^{۲}}{g}$ به زمین است که می‌توانیم از رابطهٔ سقوط آزاد استفاده کنیم.

۱۵ـ مطابق شکل، جرم m به وسیلهٔ دو نیم سیم به طول ℓ به یک محور دوران کننده و قائم متصل‌اند و با محور زاویهٔ °۴۵ می‌سازند. محور و جرم m هر دو با سرعت زاویه‌ای ۵ در حال دوران‌اند. جهت نیروی گرانش به طرف پایین است.



الف) یک نمودار نیروی واضح برای m بکشید.

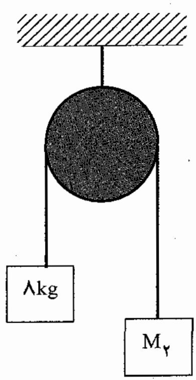
ب) کشش سیم‌های بالایی و پایینی را پیدا کنید.

۱۶ـ نیروی افقی $۲۵/۰$ N به جعبه‌ای که ابتدا روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حالت سکون است وارد می‌شود. اگر جعبه در مدت $۴/۰$ S مسافت $۴۰/۰$ m را بپیماید، جرم آن چقدر است؟ جواب: $M = ۵/۰$ kg

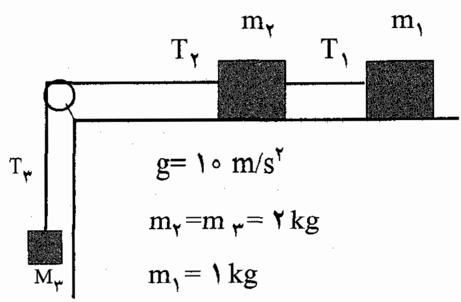
۱۷ـ جرمی را با وارد آوردن مختصر رانشی با سرعت اولیهٔ $۱/۵$ m/s به سوی پایین سطح شیبدار به حرکت درمی‌آوریم. چه مدت طول می‌کشد تا این جرم مسافت $۴/۸$ m را طی کند و بعد از این مدت سرعت آن چقدر است؟ $(\theta = ۳۰^\circ ,\ M = ۴\text{kg})$

۱۸ـ در شکل زیر، سیستم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. جرم $M_۲$ چقدر باشد تا جرم $۸/۰$ kg مسافت $۰/۹۸$ متر را در یک ثانیه سقوط کند.

جواب: $M = ۵/۳۳$ kg



۱۹ـ اجسام $m_۱$ و $m_۲$ و $m_۳$ مطابق شکل زیر به هم وصل شده‌اند و دستگاه به سمت پایین حرکت می‌کند. از اصطکاک بین سطوح صرف‌نظر کنید. شتاب حرکت این اجسام و کشش نخ چقدر است؟



فصل ۶

دینامیک ذره II

۶ـ۱ـ مقدمه

در فصل پیش ضمن ورود به مبحث دینامیک و معرفی نیرو توجه اصلی بیشتر به نیروی ثابت (از نظر اندازه و جهت) معطوف بود. در این فصل ابتدا مسئله اصطکاک را مطرح می‌کنیم، بعد حرکت دایره‌ای، و آنگاه به طبقه‌بندی نیروها پرداخته و از نیروهای اینرسی سخن می‌گوییم. حرکت دایره‌ای تقریباً به تمامی در فصل چهارم بحث شده است و در این فصل دینامیک این حرکت را از نقطه نظر وارد کردن نیرو مطرح خواهیم کرد. در خاتمه در مورد نیروهای مختلف در طبیعت بحث مختصری ارائه می‌شود.

۶ـ۲ـ اصطکاک

تجربه نشان می‌دهد وقتی جسمی می‌خواهد بر جسمی دیگر بلغزد، نیروی مقاومی در سطح تماس دو جسم و در خلاف جهت حرکت پدید می‌آید. این نیرو را «نیروی اصطکاک ایستایی» می‌نامند. به طور ساده، نیروی اصطکاک را می‌توان در اثر ناهمواری‌های بسیار کوچک سطح تماس و نیروی چسبندگی میان ذره‌های دو جسم

دانست. (در زمینه اصطکاک، نظریه‌ای کامل بیان نشده و هنوز یکی از مسایل مورد بررسی فیزیک است). در حال حرکت نیز نیروی اصطکاک وجود دارد که آن را «نیروی اصطکاک جنبشی» می‌نامند.

برای دانستن چگونگی ارتباط میان نیروهای اصطکاک و خواص جسم و محیط بر اساس تجربه، قوانین تجربی اصطکاک را در زیر تعریف می‌کنیم:

۱ـ وقتی دو جسم بر هم می‌لغزند، نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت نسبی دو جسم، در سطح تماس آنها پدید می‌آید. این نیرو می‌تواند از صفر تا مقدار ماکزیمم F_ℓ را اختیار کند. F_ℓ را «نیروی اصطکاک حدی» می‌نامند. باز یادآور می‌شویم که جهت اصطکاک همواره در خلاف جهت نیرویی است که می‌خواهد جسم را به حرکت درآورد و بزرگی آن تا حد F_ℓ همواره برابر با این نیرو است.

۲ـ به طور کلی نیروی اصطکاک وابسته به جنس دو جسم و صافی یا ناصافی سطح تماس است.

۳ـ تا حد زیادی می‌توان نیروی اصطکاک حدی را مستقل از بزرگی سطح تماس در جسم (مساحتها و شکل سطوح در تماس) دانست.

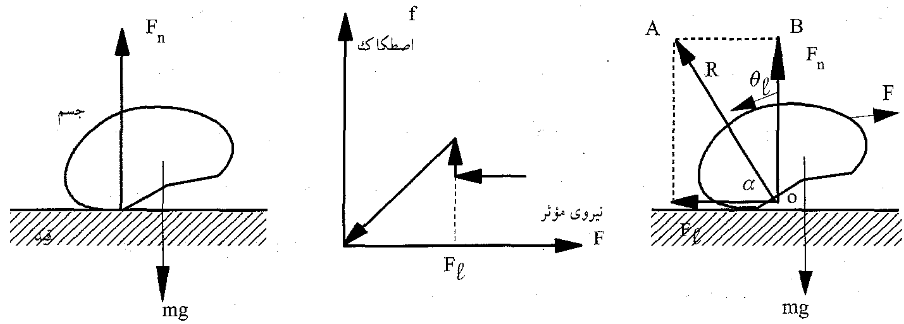
۴ـ نیروی اصطکاک جنبشی تا اندازه‌ای مستقل از سرعت جسم است.

۵ـ نیروی اصطکاک حدی با واکنش عمودی در حالت سکون و نیروی اصطکاک جنبشی با واکنش عمودی در حال حرکت متناسب است.

٦ـ۲ـ۱ـ واکنش قیدهای سخت ـ زاویه و ضریب اصطکاک

وقتی جسمی روی جسمی دیگر قرار می‌گیرد، جسم اول بر جسم دوم نیرویی وارد می‌کند (کنش). به طور متقابل جسم دوم به جسم اول نیز نیرویی برابر و در خلاف جهت اثر می‌دهد (واکنش). معمولاً جسم دوم را سطح اتکا، یا قید، می‌گویند. هرگاه از اصطکاک صرفنظر شود، واکنش عمود بر سطح اتکا و اگر میان جسم و قید اصطکاک وجود داشته باشد، واکنش سطح اتکا دارای دو مؤلفه است، عمود بر سطح اتکا و در

راستای آن. پس دیده می‌شود که در این حالت واکنش سطح اتکا با عمود بر سطح زاویه‌ای می‌سازد که آن را «زاویه اصطکاک» گویند. هنگامی که نیروی وارد بر جسم از صفر تا مقدارِ حدی F_ℓ، که می‌تواند جسم را به حرکت درآورد، تغییر می‌کند واکنش سطح اتکا از F_n تا مقدار R و زاویه اصطکاک از صفر تا مقدار حدی θ_ℓ تغییر می‌کند.



شکل (۶-۱)

در لحظه شروع به حرکت لازم است نیروی وارد بر جسم، F، و نیروی اصطکاک حدی، F_ℓ، برابر باشند. از مثلث OAB دیده می‌شود:

$$\mathrm{tg}\theta_\ell = \frac{F_\ell}{F_n} = \mu_s \qquad (۶\text{-}۱)$$

μ_s را ضریب اصطکاک ایستایی گویند.[۱]

هنگام حرکت جسم نیز رابطه‌ای همانند می‌توان نوشت:

$$F_\ell = \mu_s F_n \qquad (۶\text{-}۲)$$

$$F_k = \mu_k . F_n \qquad (۶\text{-}۳)$$

μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است که تجربه نشان می‌دهد همواره از μ_s کوچکتر است.

بدین ترتیب دو نوع ضریب اصطکاک وجود دارد: «ضریب اصطکاک ایستایی» μ_s که هرگاه در نیروی عمودی ضرب شود حداقل نیروی لازم برای به حرکت

---

۱. رابطه نمایشگر μ ضریب اصطکاک را نخستین بار فیزیکدان فرانسوی کولن (۱۸۰۶-۱۷۳۶) در سال ۱۷۸۱ کشف کرد (قانون اصطکاک کولن).

درآوردن نسبی دو جسم در حال تماس و در حال سکون نسبت به هم را به دست می‌دهد، و «ضریب اصطکاک جنبشی» که چنانچه آن را در نیروی عمودی ضرب کنیم نیروی لازم برای متوقف کردن دو جسم در حرکت نسبی یکنواخت را به‌دست می‌دهد.

اساساً اصطکاک یک مفهوم آماری است، زیرا نیروی F_ℓ نمایش مجموع تعداد زیادی نیرو بین ملکولهای دو جسم در حال تماس است. بدیهی است غیرممکن است تک‌تک این نیروهای ملکولی را به حساب آورد، بنابراین آنها را با یک شیوه تجربی به صورت جمعی به دست می‌آورند و به طور تقریبی با ضریب اصطکاک نمایش می‌دهند.

اگر جسمی روی سطح شیب‌دار قرار گیرد تحت برآیند نیروهای وزن جسم، واکنش عمودی سطح شیب‌دار، و نیروی اصطکاک بین دو سطح تماس حرکت می‌کند.

محور x را در راستای خط بزرگترین شیب سطح شیب‌دار و جهتش را از بالا به پایین می‌گیریم. همچنین محور y را در راستای عمود بر سطح شیب‌دار و هم‌جهت با واکنش عمودی سطح در نظر می‌گیریم. آنگاه نیروهای مؤثر را بر دو محور تصویر می‌کنیم. چون جسم در راستای y حرکتی ندارد بنابراین جمع تصویرهای نیروها روی آن صفر می‌گردد:

$$F_y=F_n-mg\cos\theta=0 \Rightarrow F_n=mg\cos\theta \qquad (۴\text{-}۶)$$

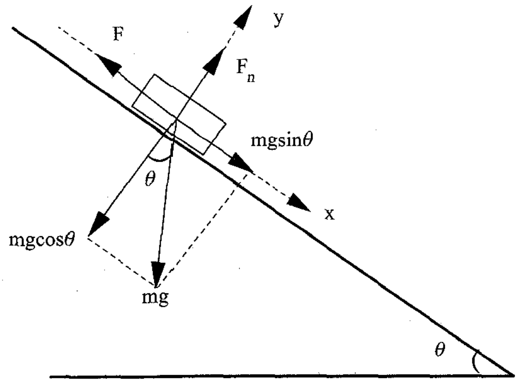
اما ممکن است جسم در امتداد سطح شیب‌دار حرکت کند یعنی جمع تصویرها روی محور x صفر نشود. در نتیجه جسم تحت اثر نیروها شتاب می‌گیرد. جمع نیروها در راستای سطح (محور x) برابر است با:

$$F_x=mg\sin\theta-F \qquad (۴\text{-}۶)'$$

که در آن F نیروی اصطکاک جنبشی است. چنانچه F_x صفر شود، اگر جسم در حال سکون باشد به همان حال می‌ماند و اگر سرعت داشته باشد با سرعت یکنواخت به حرکتش ادامه می‌دهد و رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$mg\sin\theta-F=0 \Rightarrow F=mg\sin\theta$$

θ زاویه شیب سطح است.



شکل (۶ـ۲)

وقتی جسم ساکن است F نیروی اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. حال جسمی ساکن را روی سطح شیب‌دار در نظر می‌گیریم. زاویه سطح را زیاد می‌کنیم. در زاویه معین θ_ℓ مقدار $mgsin\theta$ برابر با بزرگترین مقدار ممکن نیروی اصطکاک (یعنی F_ℓ) می‌شود و جسم روی سطح شروع به حرکت سوی پایین می‌کند. در این حالت ضریب اصطکاک حدی چنین تعریف می‌شود:

$$\mu_s=\frac{F_\ell}{F_n}=\frac{mgsin\theta_\ell}{mgcos\theta_\ell}=tg\ \theta_\ell \qquad (۶ـ۵)$$

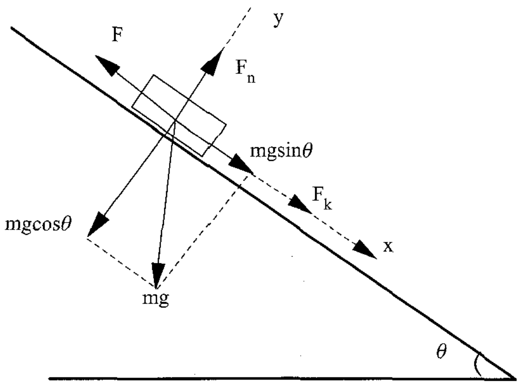
در حالی که جسم حرکت یکنواخت دارد F را با F_k نشان داده آن را «نیروی اصطکاک جنبشی» می‌نامند. آنگاه برای ضریب اصطکاک جنبشی داریم:

$$\mu_k=\frac{F_k}{F_n}=\frac{mgsin\theta_k}{mgcos\theta_k}=tg\ \theta_k \qquad (۶ـ۶)$$

آزمایش نشان می‌دهد که μ_k و F_k به ترتیب از μ_s و F_ℓ کوچکترند.

چنانچه جسم روی سطح شیب‌دار سوی بالا در حرکت باشد، علاوه بر نیرویی که برای مقابله با نیروی اصطکاک لازم است نیرویی نیز برای خنثی کردن نیروی وزن ضروری است و در این حالت جمع نیروها در راستای سطح (محور x) برابر است با:

$$F_x=mgsin\ \theta+F_k$$



شکل (۶ـ۳)

بنابراین از رابطه (٦ـ۴) داریم:

$$\mu_k = \frac{F_k}{F_n} = \frac{F_x - mg\sin\theta}{mg\cos\theta} \qquad (٧ـ٦)$$

٦ـ۳ـ دینامیک حرکت دایره‌ای

در فصل چهارم دیدیم هرگاه یک ذره حرکت دایره‌ای داشته باشد، یکنواخت یا غیریکنواخت، شتابی خواهد داشت که شتاب جانب مرکز نام دارد و در جهت شعاع و به طرف مرکز دایره است و اندازه آن $a_r = \frac{v^2}{R}$ است. این شتاب به وسیله نیرویی ایجاد می‌شود که آن را نیروی جانب مرکزگویند. این نام تنها چگونگی تأثیر این نیرو را بیان می‌کند و اندازه آن از قانون دوم نیوتن به دست می‌آید: $F = ma_R = m\frac{v^2}{R}$. جهت این نیرو همواره متوجه مرکز دایره است. یادآور می‌شویم که این نیرو از سوی محیط تأمین می‌شود یعنی جسم خاصی از طرف محیط به جسم شتابدار در حال دوران این نیرو را وارد می‌کند. جهت نیروی F لزوماً باید با جهت شتاب یکی باشد. به هر حال جهت شتاب متغیر است و مقدار آن بستگی به تغییرات سرعت دارد، اما مسلم این است که هیچ لزومی ندارد شتاب هم جهت با حرکت باشد. در این مورد خاص راستای شتاب بر حرکت عمود است.

برای روشن شدن مطلب در این زمینه مثالی را مطرح می‌کنیم:

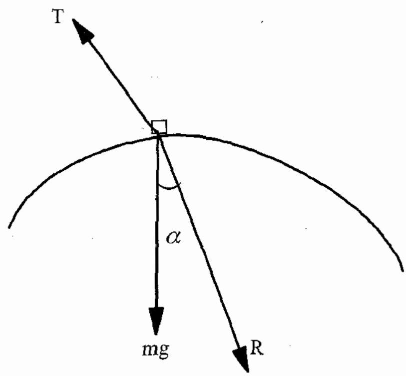
مثال: با چه سرعتی باید اتومبیل از پل محدبی که قسمتی از یک دایره فرضی به شعاع R است عبور کند تا در هیچ نقطه‌ای از مسیر راننده فشاری به صندلی وارد نکند.

حل. بر راننده در امتداد شعاع دوران دو نیرو وارد می‌شود، نیروی $mg\cos\alpha$ حاصل از وزن، و عکس‌العمل صندلی که راننده روی آن نشسته است. برآیند این دو نیرو به راننده شتاب جانب به مرکز می‌دهد که چنین حساب می‌شود:

$$mg\cos\alpha - T = m\frac{v^2}{R}$$

چون طبق شرط مسئله راننده هیچ فشاری به صندلی وارد نمی‌کند یعنی $T=0$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR\cos\alpha}$$



در این لحظه اتومبیل هیچ فشاری به پل وارد نمی‌کند، یعنی اتومبیل و راننده در حالت بی‌وزنی قرار دارند. برای آشنایی بیشتر با تأثیر اصطکاک در حرکت دایره‌ای به مسائل حل شده مراجعه شود.

۴-۶-طبقه‌بندی نیروها

تاکنون پی برده‌ایم که همه رویدادهای گیتی در پرتو بی‌پایان چهار نیروی بنیادی روی می‌دهند (فیزیکدانان ترجیح می‌دهند به جای نیرو واژه بر همکنش را به کار برند،

ولی از آنجایی که نیرو واژه آشناتری است همان را به کار می‌بریم). این نیروها به ترتیب میزان بزرگی عبارتند از:

۱ـ نیروی قوی

۲ـ نیروی الکترومغناطیس

۳ـ نیروی ضعیف

۴ـ نیروی گرانش

زورمندترین نیرو، یعنی نیروی هسته‌ای قوی نیرویی است که پروتونها و نوترونها را در هسته اتم به هم نگاه می‌دارد. انرژی مربوط به این نیرو را انرژی بستگی هسته می‌نامند. انرژی بستگی پروتون‌ـنوترون در هسته دوترون برابر Mev ۲/۲۳ است، حال آنکه اگر این بستگی را ناشی از نیروی الکترومغناطیس بدانیم حدود $\frac{۱}{۲۰۰}$ مقدار واقعی آن خواهد شد. نیروی الکترومغناطیس آن است که الکترونها را به هسته و اتمها را به ملکولها می‌پیوندد و ملکولها را در آبگونها و جامدها نگاه می‌دارد. برد این نیروها تا بی‌نهایت است ولی ضعیفتر از نیروهای هسته‌ای است. نیروی گرانشی چنانکه می‌دانیم نیرویی است که با آن جسم، جسم دیگر را سوی خود می‌کشد و نیز مسؤول به هم بستن مواد سازنده زمین است. نیروی گرانشی چنان ضعیف است که مگر جسم بسیار بزرگ باشد تا بتوان آن را اندازه گرفت. در ردهٔ ذرات بنیادی از تأثیرش صرفنظر می‌شود. بد نیست خاطرنشان کنیم که نیروی جاذبه گرانشی و الکتریکی میان هسته اتم هیدروژن و تنها الکترونش چنین است:

$$F_{el} = ۹/۲۲ \times ۱۰^{-۸} N \quad , \quad F_{gra} = ۴/۰۹ \times ۱۰^{-۴۷} N$$

تنها نیرویی که مانده یعنی نیرویی که در برهمکنش‌های ضعیف شرکت دارد نیرویی است که آگاهی چندان زیادی تا این اواخر درباره آن نداشته‌ایم. اینکه چنین نیرویی باید وجود داشته از این واقعیت استنباط می‌شود که در برخی از واکنشهای تباهی (تلاشی) ذره‌ها (مثلاً تباهی بتا که در آن الکترونها با پروتونها از هسته‌های رادیو اکتیو خارج می‌شوند) واکنش بسیار آهسته‌تر از آن موقعی صورت می‌گیرد که نیروهای هسته‌ای یا

الکترومغناطیس در کار می‌بودند. مقصود از واکنش آهسته واکنشی است که مثلاً یک ده میلیونیم ثانیه طول می‌کشد. در نظر فیزیکدان هسته‌ای این پدیده بسیار بسیار تنبلی است. برای تشریح این رخوت لازم آمده نیرویی فرض کنند ضعیفتر از الکترومغناطیس و قویتر از نیروی بسیار ضعیف گرانشی و آن را برهمکنش ضعیف می‌نامند.

لازم است گفته شود که تلاش و پی‌گیری فیزیک عصر حاضر یافتن سرچشمه یگانه این نیروهاست و تاکنون به موفقیتهای چشمگیری نایل آمده است. مثلاً اکنون با نظریه electroweak عبدالسلام و دیگران منشأ یگانه نظریه الکترومغناطیس و برهمکنش ضعیف شناخته شده است و این دو از این راه به هم پیوند خورده‌اند. همچنین نظریه ریسمانها (string theory) جای خود را در فیزیک ذرات بنیادی باز کرده است.

اثر متقابل بین ملکولها، کشش سطحی، و جاذبه میان ذرات دو جسم و اصطکاک و نیروی الاستیک از نوع نیروهای الکترومغناطیس است.

۶ـ۴ـ۱ـ نیروهای اینرسی

آنچه در بالا بیان شد همگی نیروهای حقیقی هستند؛ یعنی می‌توان آنها را به اجسام معینی از محیط وابسته کرد و در هر دستگاه مختصات وجود خارجی دارند. در مقوله نیروهای گرانشی مثلاً هر چه نیرویی که مطرح می‌شوند وجود خارجی دارند و حقیقی هستند یعنی قانون سوم نیوتن در مورد آنها صدق می‌کند. از طرف دیگر در بررسیهای مکانیکی معمولاً فرض می‌کنیم که اندازه‌گیریها و مشاهدات در یک دستگاه مرجع اینرسی صورت می‌گیرد. دستگاههای اینرسی مجموعه‌ای از دستگاههای مرجع هستند که توسط قانون اول نیوتن تعریف می‌شوند. یعنی دستگاههایی که اگر در آنها اجسام قابل شناسایی تولید کننده نیرو در محیط یک جسم وجود نداشته باشند ($F=0$)، آن جسم شتاب نخواهد داشت ($a=0$). انتخاب دستگاه اختیاری است و انتخاب دستگاههای اینرسی به هیچ وجه قدرت ما را در به کار بردن مکانیک کلاسیک در مورد پدیده‌های طبیعی محدود نخواهد کرد. می‌توانیم در موقع مناسب مکانیک را از

دید ناظری در یک دستگاه غیراینرسی به کار بریم، مانند دستگاههای متصل به یک جسم در حال سقوط آزاد، یا جسم در حال چرخش. برای این کار باید از نیروهای غیرنیوتنی استفاده کنیم که آنها را نیروهای اینرسی می‌گوییم. این نیروها را نمی‌توان به یک جسم مشخص در محیط ذره مورد نظر وابسته کرد و در نتیجه نمی‌توانیم آنها را در ردیف یکی از نیروهای چهارگانه ذکر شده به حساب آوریم. علاوه بر این چنانچه حرکت ذره را از یک دستگاه اینرسی مشاهده کنیم نیروهای مذکور ناپدید می‌شوند. قانون سوم نیوتن در مورد نیروهای اینرسی معتبر نیست. به بیان دیگر نیروی عکس‌العملی در برابر نیروی اینرسی وجود ندارد.

به‌طور کلی می‌توان گفت رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$ که در دستگاه اینرسی معتبر است، در یک دستگاه غیراینرسی به صورت $\vec{F}-m\vec{a}=0$ درمی‌آید و تعبیری که در این حالت از $-m\vec{a}$ می‌شود این است که این نیروی مجازی است (از نوع نیروهای اینرسی) که فقط در یک دستگاه شتابدار وجود دارد و به ما امکان می‌دهد که جسم را تحت تأثیر آن همواره در حال تعادل بدانیم (طرف دوم رابطه صفر می‌شود). این نیروها عمدتاً از تغییر جای ناظر پدیدار می‌شوند و محو می‌گردند. شکل جدید رابطه نیوتن به صورت $\vec{F}-m\vec{a}=0$ عموماً به نام اصل دالامبر معروف است.

گاهی اوقات آسانتر و مناسب‌تر این است که بررسی خود را از دید ناظری در دستگاه مختصات غیراینرسی انجام دهیم.

۲-۴-۶- میدان نیرو

برای توصیف نیروهای بنیادی مفهوم میدان وارد می‌شود. منظور از میدان خاصیتی فیزیکی است که در ناحیه‌ای از فضا گسترده است و با تابعی از زمان و مکان مطرح می‌شود. مثلاً فضایی که به هر نقطه آن بتوان یک نیروی گرانشی نسبت داد «میدان گرانشی» نامیده می‌شود. چنین تعریفی برای میدان الکترومغناطیس و بقیه نیروها وجود دارد. هر ذره‌ای که به آن میدان نیرویی اثر می‌کند خود می‌تواند پدید آورنده یک

میدان باشد. مثلاً ذره‌ای که دارای بار الکتریکی است می‌تواند پدید آورنده میدان الکترومغناطیس باشد و خود تحت تأثیر چنین میدانی قرارگیرد. پس هرگونه برهمکنش ذرات را می‌توان چنین نمایش داد: ذره-میدان-ذره؛ یعنی ابتدا یک ذره (ذره نخستین) میدانی پدید می‌آورد و سپس این میدان بر ذره دوم اثر می‌کند حتی اگر بتوان نیرو را به وسیله میدان توصیف کرد تمام میدانها لزوماً به نیرو مربوط نیستند. مثلاً در حرکت شاره‌ها در هر نقطه سرعت شاره یک میدان برداری تشکیل می‌دهد بنابراین مفهوم میدان کاربردهای فراوان و گسترده‌ای در تمام فیزیک دارد. میدان پدید آمده توسط ذرات مادی است و خواص میدان با خواص ذره پدید آورنده متفاوت است، در نتیجه امروز دانشمندان باور دارند که ماده دو صورت دارد: میدان و ذات ماده یا جسم (برای مطالعه بیشتر به جلد دوم این مجموعه مراجعه کنید).

۶ـ۵ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ در درس به این مطلب اشاره کردیم که نیروی عمودی و نیروی اصطکاک با هم متناسب هستند و ضریب این تناسب را μ یعنی ضریب اصطکاک نام نهادیم و در این مورد به رابطه زیر اشاره کردیم:

$$F_\ell = \mu_s F_n$$

از این رابطه با در دست داشتن دو نیرو می‌توان ضریب اصطکاک را به دست آورد: $\mu = \frac{f_\ell}{f_n}$، اما از آنجا که نیروی اصطکاک نمی‌تواند از نیروی عمودی بیشتر شود (جز در مواردی خاص) بنابراین به نظر می‌رسد که معمولاً مقدار این ضریب کوچکتر از واحد خواهد بود.

۲ـ همانگونه که در درس اشاره شد ضریب اصطکاک به عوامل زیادی از جمله ماهیت مواد، درجه صیقلی بودن سطح، لایه‌های نازک سطحی، دما و میزان آلودگی سطح بستگی دارد. در این مورد برای صیقلی کردن سطح حدی وجود دارد و اگر از آن تجاوز کند مقاومت اصطکاکی حاصل به جای کاهش یافتن افزایش می‌یابد. در این مورد

نیروهای ملکولی پس از صیقلی کردن و نزدیکتر شدن بیش از حد، سطح تماس بسیار زیادتر می‌شود و مقاومت اصطکاکی بیشتر می‌شود.

۳ـ بی‌شک نیروی اصطکاک گذشته از هدر دادن انرژی، در زندگی روزمره ما دارای نقش مفید نیز هست که یکی از موارد آن راه رفتن است. مثلاً اگر اصطکاک وجود نداشته باشد ما در تغییر مکانهای بسیار جزیی نیز دچار اشکال می‌شویم، حتی در اغلب این موارد و روی سطوح صاف و صیقلی، ایستادن هم مشکل است. به هر حال انتخاب هرگونه وضعیتی برای ما دشوار می‌شود. بنابراین بهتر است در این گونه موارد برای تغییر مکان از لغزش و لیز خوردن استفاده کنیم.

۴ـ اگر بخواهیم در یک جاده لغزنده اتومبیل خود را در کوتاهترین فاصله متوقف کنیم روش صحیح این است که با ترمز کردن به حدی که ماشین نلغزد عمل کنیم. اگر در سطح صاف از ترمزها به طور کامل استفاده نشود لغزش روی می‌دهد. عملاً در یک سطح با ضریب اصطکاک μ_s، مسافت طی شده قبل از توقف چنین است: $x=\frac{v_0^2}{2\mu_s g}$ (چرا)؟

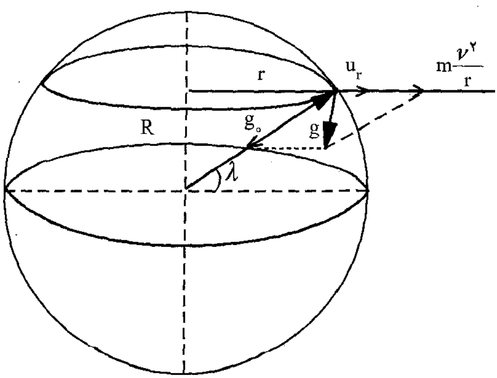
در این حال هر چه سطح صاف‌تر باشد مسافت طی شده قبل از توقف زیادتر می‌شود. در همین جا می‌توانید دریابید که چرا به منظور زیادتر کردن ایمنی رانندگی در جاده‌های یخ زده ماشین را سنگین می‌کنند؟ (در این رابطه فرض کرده‌ایم که بین لاستیکها و جاده لغزش وجود ندارد، پس ضریب μ_s را به کار می‌بریم).

۵ـ در حرکت سقوطی، اگر مقاومت هوا را در نظر بگیریم، زمان پایین آمدن توپ بیشتر از زمان بالا رفتن است. در مورد حرکت پرتابی هم هنگام رها کردن جسم در زاویه θ_0 چون مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت (در جهت شتاب عمل می‌کند) پس جسم زودتر پایین می‌آید و مانع از بالا رفتن آن می‌شود. به بیان دیگر برد ماکزیمم کوتاهتر می‌شود. به جای $\theta_0 = 45$ لازم است زاویه پرتاب را بیشتر کنیم.

۶ـ در حرکت دایره‌ای علاوه بر دو نیروی قائم یعنی وزن و نیروی عکس‌العمل عمودی یک نیروی افقی مرکزگرا وجود دارد که در مورد راه‌آهن این نیرو توسط ریلها

ایجاد می‌شود و در مورد اتومبیل توسط نیروی جانبی اصطکاک در میان جاده و لاستیک ایجاد می‌شود. هیچکدام از این نیروها قابل اطمینان نیستند و موجب فرسایش هم می‌شوند. از این جهت قسمتهای منحنی جاده‌ها را شیب عرضی می‌دهند. در این مورد نیروی عمودی N علاوه بر مؤلفه قائم (در راستای وزن) دارای یک مؤلفه افقی هم می‌شود که نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را فراهم می‌کند.

۷ـ در بررسیهای حرکت اجسام اغلب در تقریب نخست از حرکت وضعی زمین چشم‌پوشی می‌شود و از این‌رو شتاب $g_\circ$ درست از جسم به مرکز زمین است. حال اگر دوران زمن به دور خودش را مطرح کنیم علاوه بر نیروی وزن $W=mg_\circ$ به سمت مرکز زمین به علت دوران زمین چنانچه دستگاه مختصات روی زمین باشد و (عملاً هم چنین است) یعنی در دستگاه مختصات شتابدار نیروی اینرسی و مجازی گریز از مرکز پیدا می‌شود. از این‌رو در واقع جسم تحت تأثیر برآیند دو نیروی $mg_\circ$, $m\frac{v^2}{r}$ قرار می‌گیرد و اندکی از راستای شاقول (راستای جسم به مرکز زمین) منحرف می‌شود و این انحراف در نیمکره شمالی به سمت مشرق است (مقدار شتاب $a=\frac{v^2}{r}$ نسبت به $g_\circ$ بسیار کم است پس میزان انحراف اندک است). $\vec{g}=\vec{g}_\circ+\vec{a}$



پس وزن ظاهری اجسام در نقاط مختلف چنین است:

$$\vec{w}=\vec{w}_\circ+m\vec{a} \Rightarrow \vec{w}=\vec{w}_\circ+m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r=\vec{w}_\circ+mr\,\omega\cos\lambda\vec{u}_r \qquad (۹ـ۶)$$

که در آن λ عرض جغرافیایی نقطه مورد بررسی و R شعاع زمین است. البته در نقاط مختلف زمین سرعت دوران متفاوت است، مثلاً در قطب‌ها صفر و در استوا $v=r\omega$ ماکزیمم است. پس در استوا وزن ظاهری کمترین مقدار و در قطبها بیشترین مقدار را دارد. طبق رابطه $g=g_{\circ}-r\omega^{2}$ در استوا یکی دیگر از اثرات چرخش زمین به دور محورش ایجاد فرورفتگی در قطب‌ها است و اینکه شکل زمین از حالت کروی کامل درمی‌آید و به صورت بیضوی فرو رفته می‌شود. از همین جا درمی‌یابیم که چرا امتداد شاقول در بیشتر عرضهای جغرافیایی دقیقاً در امتداد نیروی ثقل زمین نیست و اندکی به سمت مشرق انحراف دارد. (در واقع در راستای $\vec{g}$ است نه $\vec{g}_{\circ}$ جز در استوا و قطب‌ها).

۸ـ اتومبیلی بر جاده‌ای خمیده در حرکت است. نیروی مرکزگرا در این مورد توسط نیروی جانبی اصطکاک از طرف جاده به لاستیک ایجاد می‌شود. در مورد جسمی که با یک ریسمان به نقطه‌ای از یک مسیر وصل است و حرکت دایره‌ای می‌کند این نیروی مرکزگرا همان نیروی الاستیکی است که توسط ریسمان وارد می‌شود. حال اگر اصطکاک نباشد یا سرعت ماشین مناسب نباشد در پیچ مسیر خود منحرف می‌شود، و اگر ریسمان را از جسم قطع کنیم مماس بر مسیر خود از مسیر دور می‌شود. بدین ترتیب می‌توانید بگویید اگر سکه‌ای را روی صفحه گرامافون بگذاریم و موتور آن را روشن کنیم چرا قبل از رسیدن سرعت به مقدار نهایی خود سکه از صفحه به بیرون پرتاب می‌شود.

۹ـ دو وزنه غیرمساوی که از سقف یک آسانسور در دو طرف یک قرقره آویخته شده‌اند از دید ناظری دوران آسانسور در تعادل هستند، یعنی قرقره حرکتی ندارد. از این مطلب چه نتیجه‌ای در مورد حرکت آسانسور می‌توانید بگیرید؟ اگر آسانسور ساکن باشد شتاب دستگاه قرقره و وزنه‌ها (یعنی شتاب مطلق) چنین است:

$$a=\frac{(M-m)g}{M+m} \qquad (۶ـ۱۰)$$

اکنون که شتاب نسبی دو وزنه (a_M-a_m) صفر است، پس با فرض $a_{\circ}$، شتاب آسانسور

نسبت به زمین، داریم:

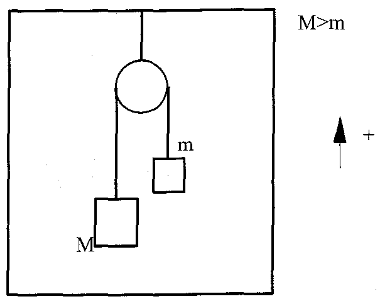
$\vec{a}=\vec{a}_{\circ}+\vec{a}_{m}$, $\vec{a}=\vec{a}_{\circ}+\vec{a}_{M}$

در مورد دو وزنه این دو رابطه را تصویر می‌کنیم:

شتاب جسم بزرگتر $-a=-a_{\circ}+a_{\circ M}$ $\Rightarrow$ $-a=-a_{\circ}$

شتاب جسم کوچکتر $+a=a_{\circ}+a_{\circ m}$ $\quad$ $a=a_{\circ}$

یعنی آسانسور با شتاب $a_{\circ}$ به سمت پایین حرکت می‌کند.

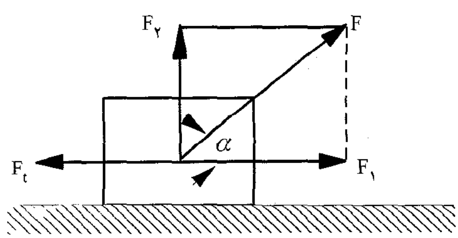


٦ـ٦ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ بر جسمی به جرم m که بر روی سطح افقی قرار دارد، نیروی F تحت زاویه α با افق اثر کرده سبب می‌شود جسم با شتاب a روی سطح بلغزد مقدار این نیرو را محاسبه کنید. ضریب اصطکاک μ_k است.

حل. با توجه به شکل نیروی F وارد بر جسم را به دو نیروی افقی F_1 و قائم F_2 تجزیه می‌کنیم و مقدار آنها را از روابط زیر به دست می‌آوریم:

$$F_1=F\cos\alpha \ , \ F_2=F\sin\alpha \qquad (1)$$



بنا به قانون اساسی دینامیک

$$F_1 - F_t = ma$$

مقدار نیروی اصطکاک F_t چنین محاسبه می‌شود:

$$F_t = \mu(mg - F_2) = \mu(mg - F\sin\alpha) \qquad (۲)$$

با قرار دادن مقدار F_t در رابطه شماره ۲ می‌توان F را یافت.

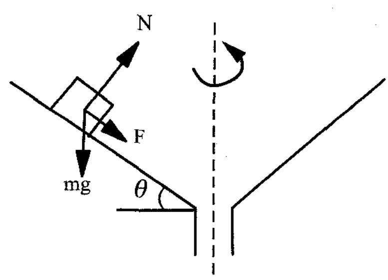
$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma \Rightarrow F = \frac{m(a+\mu g)}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

الف) ماکزیمم (۱) آنقدر است که اگر اندکی زیاد شود جسم به طرف بالا می‌رود.

۲ـ مکعب بسیار کوچکی به جرم m در داخل قیفی که حول محوری قائم با آهنگ ثابت γ دور بر ثانیه می‌چرخد قرار گرفته است. دیوارهٔ قیف با افق زاویه θ می‌سازد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان مکعب و قیف μ باشد، و مرکز مکعب از محور دوران به فاصلهٔ r قرار گرفته باشد.

الف) بیشترین، ب) کمترین مقدار γ چقدر باشد تا مکعب نسبت به قیف حرکت نکند.

حل. الف)



$$N - mg\cos\theta = ma\sin\theta$$

$$mg\sin\theta + F_s = ma\cos\theta$$

$$F_s = ma\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta + ma\sin\theta \qquad F_s \le \mu N$$

$$ma\cos\theta - mg\sin\theta \le \mu(mg\cos\theta + ma\sin\theta)$$

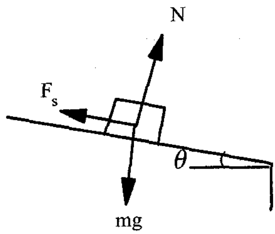
$$a = r\omega^2$$

$$\omega^2 \le \frac{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{r(\cos\theta - \mu\sin\theta)}$$

$$\Rightarrow \nu \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu\sin\theta)}}$$

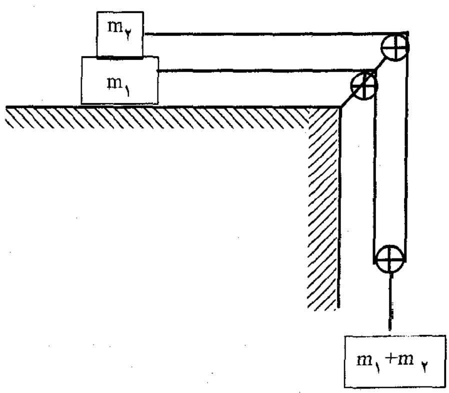
ب)

$$\begin{cases} N-mg\cos\theta=ma\sin\theta \\ mg\sin\theta-F_s=ma\cos\theta \end{cases} \quad F_s\leq\mu_s N$$



$$\nu \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu\sin\theta)}}$$

۳ـ بر سطح افقی مکعب مستطیلی به جرم m_1 قرار دارد بر روی آن قالب دیگری به جرم m_2 گذاشته شده است. مطابق شکل به وسیله دستگاه قرقره‌ها آنها را به وزنه m_1+m_2 بسته‌اند. معلوم کنید چه نسبتی بین m_1 و m_2 وجود داشته باشد تا قالبها روی یکدیگر نلغزند. ضریب اصطکاک بین آنها μ است اما ضریب اصطکاک قالب زیری با سطح افقی مساوی صفر است. نخ‌ها کش پیدا نمی‌کنند و وزنشان ناچیز است. از اصطکاک در محور قرقره‌ها و وزن آنها صرف نظر شود.



حل. از آنجا که هر دو نخ با نیروی یکسان F_H کشیده می‌شوند قانون اساسی دینامیک برای سه وزنه (m_1+m_2)، m_1 و m_2 چنین است.

$$(m_1+m_2)g-2F_H=(m_1+m_2)a$$

$$F_H-R=m_1a_1$$

$$F_H+R=m_2a_2$$

این معادلات هم در حالت وجود لغزش و هم عدم وجود آن درستند. جهت نیروی اصطکاک قبلاً تعیین نشده، فقط لازم است توجه کرد که علامت R در دو معادله اخیر مختلف است.

اگر لغزش نباشد $a=a_1=a_2$ خواهد شد و R نیروی اصطکاک حالت سکون است که می‌تواند از مقادیر از صفر تا $\mu m_2 g$ را داشته باشت. در شرایط مسئله R دارای یک معنی است. معلوم است که لغزش موقعی شروع می‌شود که $R-\mu m_2 g$ باشد. با علامتی که در معادلات برای R انتخاب شده (وزنه پایینی شتاب کمتری پیدا می‌کند تا بالایی)ـ اگر $R=-\mu m_2 g$ انتخاب شود (وزنه پایینی شتاب بیشتری خواهد داشت). با این حساب لغزش در شرایط $-\mu m_2 g<R<\mu m_2 g$ به وجود نخواهد آمد. نیروی اصطکاک R را از دستگاه سه معادله بالایی پیدا می‌کنیم. برای این منظور ابتدا معادلات فوق را جمع می‌کنیم.

$$(m_1+m_2)g=2(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{1}{2}g$$

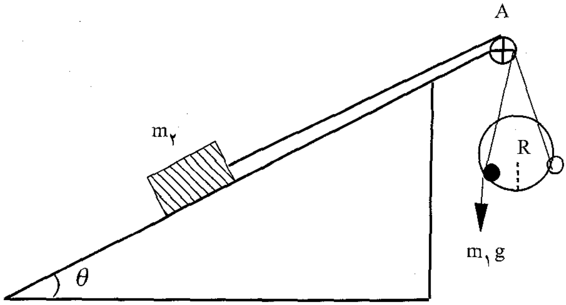
حالا از معادله سوم دومی را کم می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$2R=(m_2-m_1)a=(m_2-m_1)\frac{g}{2} \Rightarrow R=\frac{(m_2-m_1)g}{4}$$

اکنون مقدار R را در نامساوی قرار داده به دست می‌آوریم:

$$-4\mu\leq 1-\frac{m_1}{m_2}\leq 4\mu$$

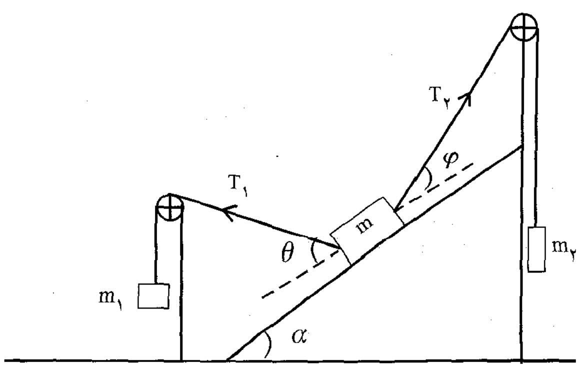
۴ـ در شکل زیر اگر سرعت پاندول مخروطی که از حلقه A گذشته از $\vec{v}^{m/s}$ تجاوز کند جرم m_2 بر روی سطح شیبدار به سمت بالا حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک سطح شیبدار را به دست آورید.



حل.
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = m_2 g\sin\theta + F_L,\ F_L = \mu m_2 g\cos\theta \Rightarrow$$
$$T = m_2(\sin\theta + \mu\cos\theta)g \qquad (1)$$

کشش نخ در تمام طولش مقدار ثابتی است پس:
$$T = \sqrt{w_1^2 + F^2} = \sqrt{m^2 g^2 + F^2}$$
$$F = \frac{m_1 V^2}{R} \Rightarrow T = \sqrt{m_1^2 g^2 + \frac{m_1^2 v^4}{R^2}} \qquad (2)$$
$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow m_2(\sin\theta + \mu\cos\theta)g = \sqrt{m_1^2 g^2 + \frac{m_1^2 v^4}{R^2}}$$
و از این رابطه به سادگی می‌توان μ یافت.

۵ـ در شکل زیر ضریب اصطکاک میان قطعه و سطح شیبدار μ فرض شده است. حداقل مقدار m_1 را به دست آورید تا m_2 بر سطح ساکن بایستد.



حل.

$$F_{۲}=(m_{۲}g\cos\alpha-T_{۱}\sin\theta-T_{۲}\sin\varphi)\mu$$

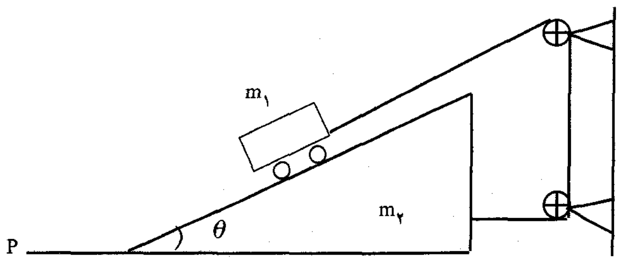
$$T_{۱}=m_{۱}g \qquad T_{۲}=m_{۲}g$$

$$T_{۲}\cos\varphi+F_{۲}=T_{۱}\cos\theta+mg\sin\alpha$$

$$m_{۲}g\cos\varphi+\mu g\cos\alpha-\mu m_{۱}g\sin\theta-\mu m_{۲}g\sin\varphi=m_{۱}g\cos\theta+mg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow m_{۱}=\frac{m_{۲}(\cos\varphi-\mu\sin\varphi)-m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$$

۶ـ در دستگاه زیر چهار چرخه‌ای به جرم کل $m_{۱}$ بر روی سطح شیبداری به جرم $m_{۲}$ قرار داده شده است اگر ضریب اصطکاک بین چهارچرخه و جرم $m_{۲}$ صفر باشد و ضریب اصطکاک جرم $m_{۲}$ با زمین μ باشد، حداقل نیروی P را برای شروع حرکت به دست آورید.



حل.

$$m_{۱}g\cos\theta=N_{۱}, m_{۱}g\sin\theta=T$$

$$\Sigma F_x=۰ \qquad P=T+F+\frac{۱}{۲}m_{۱}g\sin ۲\theta$$

$$F=\mu N_{۲}=\mu(m_{۲}+m_{۱}\cos^{۲}\theta)g$$

$$P=m_{۱}g\sin\theta+\mu(m_{۲}+m_{۱}\cos^{۲}\theta)g+\frac{۱}{۲}m_{۱}g\sin ۲\theta$$

۷ـ اتومبیلی به جرم m روی صفحه‌ای به جرم M قرار دارد و هر دو روی سطح شیبداری که با افق زاویه α می‌سازد قرار دارند. اتومبیل با چه شتابی روی صفحه به طرف پایین حرکت کُند تا صفحه به طور یکنواخت بالا برود؟ ضریب اصطکاک اتومبیل با صفحه μ_1 و صفحه با سطح شیبدار μ_2 است.

حل. طبق اصل دینامیک برای حرکت اتومبیل می‌نویسیم:

$$mg\sin\alpha+Mg\sin\alpha+\mu_2 Mg\cos\alpha+\mu_1 mg\cos\alpha=ma_1$$

و از آنجا به دست می‌آید:

$$a_1=g\left(1+\frac{M}{m}\right)(\sin\alpha+\mu_2\cos\alpha)$$

باید توجه کرد که شتاب اتومبیل به μ_1 بستگی ندارد یعنی به اصطکاک بین صفحه و اتومبیل مربوط نیست.

۸ـ باری به وزن P به وسیله نخی که از دور قرقره بی‌وزنی عبور کرده به جسمی به وزن مساوی خودش که روی سطح شیبدار است وصل است. معلوم کنید شتاب حرکت وزنه‌ها را در صورتی که $\alpha=30°$ و ضریب اصطکاک سطح ۰/۰۵ است.

حل. با توجه به قانون اساسی دینامیک برای هریک از وزنه‌ها می‌نویسیم:

$$m_1 g-F_H=ma \qquad\qquad 2ma=mg-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha$$

$$F_H-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \quad \Rightarrow a=\frac{1}{2}g(1-\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\simeq 2/2\ \frac{m}{s^2}$$

۹ـ هواپیمایی در صفحه قائم دایره‌ای به شعاع $R=800\ m$ را با سرعت $720\ \frac{km}{h}$ دور می‌زند معلوم کنید خلبان که جرمش ۷۰ کیلوگرم است در بالاترین و پایین‌ترین نقطه مسیر چه نیرویی بر صندلی وارد خواهد ساخت؟

حل. در بالاترین نقطه مسیر وزن mg خلبان و نیروی عکس‌العمل N_1 صندلی و شتاب جانب به مرکز $\frac{v^2}{R}$ همگی به طرف پایین هستند لذا داریم:

$$N_1+mg=m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N_1=m\left(\frac{v^2}{R}-g\right)=2814\ N$$

در پایین‌ترین نقطه مسیر آن $N_۲$ و $\frac{v^۲}{R}$ به طرف بالا هستند لذا داریم:

$$mg-N_۲=-m\ \frac{v^۲}{R} \Rightarrow N_۲=mg(g+\ \frac{v^۲}{R})= ۴۲۸۶\ \ N$$

۱۰ـ ورزشکاری میله بارفیکس را گرفته در صفحه قائمی دوران می‌کند. جرم او m و فاصله مرکز ثقلش از میله L است. اگر تمام جرم ورزشکار را در مرکز ثقل آن در نظر بگیریم و در بالاترین نقطه مسیر سرعتش صفر باشد معلوم کنید در پایین‌ترین نقطه مسیر چه نیرویی به دستهای او وارد می‌شود؟

حل. در پایین ترین نقطه مسیر به دست ورزشکار برآیند نیروی ثقل و جانب مرکز وارد می‌شود. بنابراین داریم:

$$F=mg+m\ \frac{v^۲}{L}$$

در این رابطه v سرعت حرکت ورزشکار در پایین‌ترین نقطه مسیر است. این سرعت برابر سرعتی است که ورزشکار در اثر سقوط از ارتفاع ۲h به دست می‌آورد یعنی:

$$v=\sqrt{۲g\times ۲L}=۲\sqrt{gL}$$

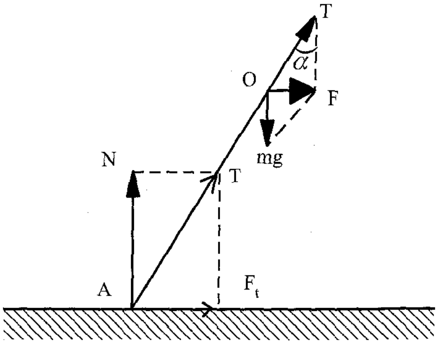
با قرار دادن مقدار v در فرمول نیروی F خواهیم داشت:

$$F=mg+m\ \frac{۴gL}{L}=۵\,mg$$

۱۱ـ موتورسواری در سطح افقی دایره‌ای به شعاع R= ۹۰ متر را دور می‌زند ضریب اصطکاک سطح با چرخها $\mu=۰/۹$ است. حداکثر سرعت موتورسوار را پیدا کنید. ثانیاً اگر سرعت موتورسوار $v_۱=۱۵\ \frac{km}{h}$ باشد، موتورسوار چه زاویه‌ای را باید در امتداد قائم خم شود.

حل. بر موتورسوار این نیروها وارد می‌شوند: وزنش mg و عکس‌العمل زمین N و نیروی اصطکاک F_t به اندازه‌ای است که برآیندش با N نیروی T را به وجود می‌آورد که در امتداد موتورسوار است. به مرکز ثقل O موتورسوار سه نیروی T و P و F وارد می‌شود. شتاب جانب مرکز $\frac{v^۲}{R}$ را نیروی جذب مرکز $F=m\frac{v^۲}{R}$ به‌وجود آورده است.

لذا داریم:



$$\mu mg=\frac{mv_{max}^{2}}{R}$$

بنابراین:

$$F=T\sin\alpha=F_t\leq\mu mg$$

و از آنجا

$$v_{max}=\sqrt{\mu Rg}\Rightarrow v_{max}=۲۸/۱۷m/s$$

همچنین

$$F=mgtg\,\alpha\Rightarrow\frac{mv_1^{2}}{R}=mgtg\,\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{v_1^{2}}{Rg}=۰/۰۱۹۶\quad\Rightarrow\alpha=۱/۱۲^\circ$$

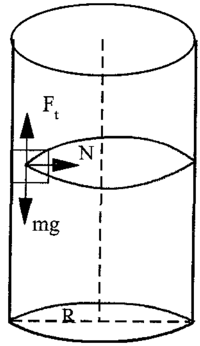
۱۲ـ موتوسواری در داخل خانه استوانه‌ای یک دایره افقی را دور می‌زند سرعت موتورسوار را معلوم کنید درصورتی که شعاع دوران ۶m که ضریب اصطکاک برابر حداقل ضریب اصطکاک سطح افقی باشد و این امکان را می‌دهد که با سرعت ۲۰ $\frac{m}{s}$ دایره‌ای به شعاع R= ۵/۵ m را دور بزنند.

حل.

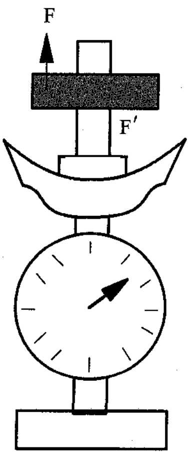
$$F=\mu N\ ,\ F=mg\qquad N=m\ \frac{\nu^{2}}{r}\Rightarrow mg=\mu m\frac{\nu^{2}}{r}\Rightarrow\nu^{2}=\frac{rg}{\mu}$$

از طرفی:

$$\mu=\frac{v_1^{2}}{Rg}\qquad\nu=\frac{g}{v_1}\sqrt{Rr}=۲/۸۱m/s$$



۱۳ـ در شکل زیر، پایه‌ای به جرم ۱۵ kg را بر روی ترازویی فنری قرار داده‌ایم. مهرهٔ m به جرم ۰/۵ kg از میله متصل به پایه عبور داده می‌شود. اگر مهره رها شود با شتاب ۲ m/s^2 به پایین می‌لغزد. ترازو هنگام لغزیدن میله به پایین چند نیوتن را نشان می‌دهد؟ ($g= 10\ m/s^2$)



حل. اگر بین مهره و میله اصطکاک وجود نداشت، ترازو در مدت سقوط مهره فقط وزن پایه را نشان می‌داد. از آنجا که گلوله در حال سقوط با نیروی مقاوم مواجه است به طوری که شتاب سقوط آن ۲ m/s^2 است، عکس‌العمل این نیروی مقاوم از طرف مهره به میله وارد می‌شود و جهت آن به سوی پایین است. نیرویی که میله به مهره وارد می‌کند به سمت بالاست و مقدار آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

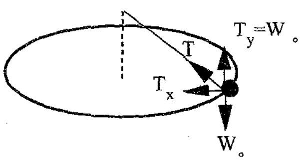
$\Sigma F=ma$

$W-F=ma \Rightarrow F=mg-ma \qquad F=۴N$

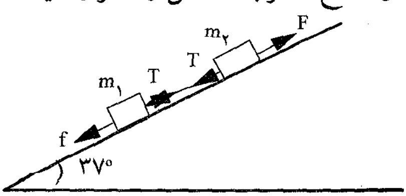
بنابراین یک نیروی ۴N از طرف مهره به میله و رو به پایین وارد می‌شود در نتیجه ترازو نیروی $W+F=$ ۱۹ N را نشان می‌دهد.

۱۴ـ شخصی به وزن W روی ترازویی ایستاده است. او گلوله‌ای به وزن $W_۰$ را به ریسمان سبکی بسته است و می‌چرخاند به طوری که صفحهٔ حرکت گلوله افقی است. در این حالت ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد.

حل. گلوله در مسیر افقی حرکت می‌کند کشش نخ متصل به آن همواره ثابت است و مؤلفهٔ قائم کشش نخ برابر وزن گلوله است. بنابراین نیروی عمودی وارد از طرف نخ به شخص برابر $W_۰$ است. در نتیجه نیروی قائم وارد بر ترازو $W+W_۰$ است.



۱۵ـ دو جرم ۴/۰۰ kg با ریسمان نازکی به هم متصل شده‌اند و مطابق شکل از یک شیب °۳۷ رو به بالا کشیده می‌شوند. ضریب اصطکاک بین $m_۱$ و سطح شیبدار ۰/۵ است؛ ضریب اصطکاک بین $m_۲$ و سطح صفر است. اگر نیروی F برابر ۱۲۰ N باشد، شتاب سیستم و کشش را در ریسمان پیدا کنید. با فرض اینکه $m_۱$ بدون اصطکاک روی سطح بلغزد و ضریب اصطکاک بین $m_۲$ و سطح صفر باشد حل را تکرار کنید.



حل. معادله حرکت برای دو جرم عبارتند از:

$T-f=m_۱a$

$F-T=m_۲a$

با حذف T بین دو معادله و قرار دادن $F=\mu m_1 g\cos 37$ خواهیم داشت:

$$F-\mu m_1 g\cos 37=(m_1+m_2)a$$

$$a=13/04\ m/s^2$$

با توجه به مقدار به دست آمده برای شتاب، با قرار دادن آن در هریک از معادلات می‌توان T، کشش نخ، را محاسبه کرد.

$$T=F-m_2 a \Rightarrow F=67/8\ N$$

با فرض قسمت دوم، معادلات حرکت به شکل زیر خواهد بود:

$$\left.\begin{array}{l} T=m_1 a \\ F-T-\mu m_2 g\cos\theta=m_2 a \end{array}\right\} \Rightarrow F-\mu m_2 g\cos\theta=(m_1+m_2)a$$

$$a=13/04\ m/s^2$$

می‌بینیم در این قسمت شتاب با قسمت قبل برابر است چون جرمها برابرند اما کشش نخ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود: $T=m_1 a \qquad T=52/16\ N$

۶ـ۷ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ توضیح دهید که چگونه برد نور بالای اتومبیل، سرعت رانندگی بی‌خطر در شب را محدود می‌کند؟

۲ـ فضانوردی می‌خواهد ضمن دوران سفینه فضایی وزن روزانه خود را یادداشت کند. با توجه به اینکه فضانورد در حالت «بی‌وزنی» است، چگونه می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳ـ آیا جمله زیر صحیح است:

احساس حالت بی‌وزنی در مدار یک ماهواره به این علت است که شتاب جاذبه زمین شتاب جانب مرکز ماهواره است.

۴ـ در انواع حرکتهای دورانی متغیر نیروی ایجادکننده حرکت به دو نیرو تجزیه می‌شود، نیروی مماسی $\vec{F}_t$ و نیروی عمودی (جانب مرکز) $\vec{F}_n$. آیا صحیح است اگر بگوییم: نیروی $\vec{F}_t$ اندازه بردار سرعت $\vec{V}$ و نیروی $\vec{F}_n$ راستا و جهت آن را تغییر می‌دهد؟ توضیح دهید.

۵ـ اتومبیلی روی یک جاده پرفراز و نشیب در حال حرکت است. سرعت اتومبیل را یکنواخت فرض کنید و نیروی وارد بر قسمت افقی جاده را با نیروی وارد بر جاده در بالا یا پایین یک تپه مقایسه کنید.

۶ـ مسافری روی صندلی جلو اتومبیلی نشسته است، هنگامی که راننده ناگهان به سمت چپ می‌پیچد مسافر احساس می‌کند که در حال کشیده شدن به طرف راست نیروهای وارد بر مسافر است. در لحظه گردش به چپ اتومبیل، موارد زیر را توصیف کنید:

الف) حرکت از یک چارچوب مرجع متصل به زمین مشاهده شود.

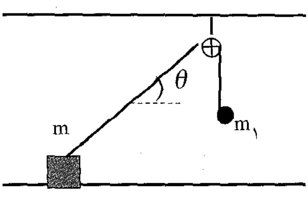
ب) حرکت از یک چارچوب مرجع متصل به اتومبیل مشاهده شود.

۷ـ توضیح دهید چرا پاسخ دادن به پرسش «سرعت خطی یک نقطه روی استوا چقدر است؟» مستلزم فرض یک چارچوب مرجع است. نشان دهید که با تغییر دادن چارچوبهای مرجع پاسخ نیز تفاوت می‌کند.

۸ـ چه تفاوتی میان چارچوبهای مرجع اینرسی و چارچوبهایی که فقط در انتقال یا دوران محورهای مختصات با هم اختلاف دارند وجود دارد؟

ب) مسائل

۱ـ در شکل زیر فرض کنید جرم m بر اثر نیروی وزن m_1 در حال حرکت یکنواخت بر روی سطح افقی است. در این لحظه جرم m را بر حسب μ و m_1 و θ به دست آورید.



۲ـ قطعه‌ای به جرم ۱ kg روی قطعه‌ای به جرم ۱۰ kg که خود روی یک سطح افق قرار دارد گذاشته شده است. نیروی F با زمان t (بر حسب ثانیه) مطابق قانون دینامیک $F=0/2t$ تغییر می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی ۰/۴ و ضریب اصطکاک لغزشی بین سایر سطوح ۰/۱۵ باشد، حرکت هریک از قطعه‌ها را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۳ـ شخصی آتشدانی را در مسیر دایره‌ای قائمی به گردش درمی‌آورد. حداقل سرعت آتشدان را برای جلوگیری از ریزش مواد سوختنی آن بیابید. حداقل کشش نخ در این شرایط چقدر است؟

۴ـ به نخی که می‌تواند $F=10\ N$ نیرو را تحمل کند وزنه ۵ نیوتنی آویزان است. مقاومت هوا در مقابل حرکت وزنه به‌طور متوسط یک نیوتن است. حداکثر ارتفاعی را معلوم کنید که می‌توان وزنه را در مدت یک ثانیه بالا برد.

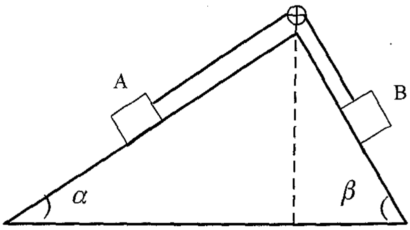
جواب: ۳/۹۲ متر

راهنمایی: چون تحمل نخ ۱۰ نیوتن است برای حداکثر ارتفاع حداکثر نیرو یعنی ۱۰ نیوتن باید به نخ وارد شده و وزنه را بالا ببرد. نیروی مقاومت هوا و وزن وزنه نیروی مخالفند. از رابطه اساسی دینامیک شتاب محاسبه و مسافت پیدا می‌شود.

۵ـ نخی از روی قرقره ثابتی که به آسانی می‌چرخد عبور کرده است. بر یک طرف نخ وزنه‌ای به جرم M آویزان است. از طرف دیگر نخ حلقه‌ای با شتاب ثابت a_2 نسبت به نخ می‌لغزد، جرم حلقه m است. a_1 شتاب وزنه M را معلوم کنید. ثانیاً نیروی اصطکاک وزنه m با نخ چقدر است؟

جوابها:
$$F_L=\frac{M}{M+m}(2mg-ma_2),\quad a_1=\frac{(M-m)g+ma_2}{M+m}$$

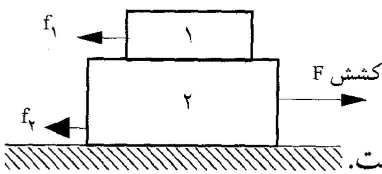
۶ـ دو جسم A و B که دارای جرم یکسانی هستند مطابق شکل به هم وصلند ضریب اصطکاک μ_1 و μ_2 و زوایای شیب α و β است جسم B به طرف پایین می‌آید معلوم کنید شتاب وزنه‌ها را؟



جواب: $a=\frac{1}{2}g(\sin\beta-\sin\alpha-\mu_2\cos\beta-\mu_1\cos\alpha)$

راهنمایی: $P\sin\beta$ نیروی موافق حرکت وزنه‌ها ولی اصطکاک دو سطح و $P\sin\alpha$ نیروی مخالف حرکتند. و جرم دستگاه $2m$ است که با نوشتن رابطه دینامیک می‌توان جواب را یافت.

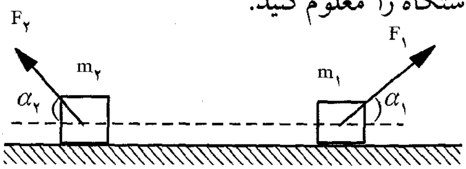
۷ـ بر روی سطح افقی دو وزنه مطابق شکل قرار دارند. معلوم کنید چه نیروی حداکثری بر وزنه دوم وارد سازیم تا وزنه اول حرکت با شتاب ثابت تند شونده پیدا کند. ضریب اصطکاک اولی $\mu_1=0/1$ و دومی $\mu_2=0/2$ وزنه بالایی $P_1=10\ N$ و پایینی $P_2=20\ N$ است.



جواب: ۹ نیوتن

راهنمایی: شتاب حرکت دو جسم با هم یکی است.

۸ـ بر دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 که بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارند دو نیروی F_1 و F_2 مطابق شکل وارد می‌شود. این نیروها با افق زوایای α_1 و α_2 تشکیل می‌دهند. شتاب حرکت دستگاه را معلوم کنید.



جواب: $$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-\mu[(m_1+m_2)g-F_1\sin\alpha_1-F_2\sin\alpha_2]}{m_1+m_2}$$

راهنمایی: به فرض نیروی F_1 با شتاب هم جهت باشد در آن صورت نیروی

$F_1\cos\alpha_1$ مؤلفه افقی آن نیروی موافق حرکت ولی نیروی اصطکاک و $F_2\cos\alpha_2$ مخالف حرکت خواهند بود و ضمناً نیروهای عمود بر سطح $N_1=P_1-F_1\sin\alpha_1$ و $N_2=P_2-F_2\sin\alpha_2$ می‌باشد.

۹ـ بر سقف آسانسوری که با شتاب $a=1/2\ \frac{m}{s^2}$ بالا می‌رود نیروسنجی آویزان شده است. از نیروسنج قرقره‌ای آویزان است و می‌تواند آزادانه حول محور افقی بچرخد بر روی قرقره نخی عبور داده به طرفین نخ دو وزنه ۲۰۰ و ۳۰۰ گرمی وصل کرده‌اند، از وزن نخ و قرقره صرفنظر می‌کنیم. معلوم کنید: نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد. جواب: $F=5/28\ N$

راهنمایی: نیروسنج دو برابر کشش نخ را نشان می‌دهد. می‌توان کشش نخ را از حرکت وزنه‌ها نسبت به زمین حساب کرد، مثلاً وزنه کوچک که بالا می‌رود شتابش مجموع شتاب آسانسور و شتاب خودش نسبت به آسانسور است که از رابطه ماشین آتوود به دست می‌آید. $T=m_1(g+a+a_0) \Rightarrow T-m_1g=m_1(a+a_0)$

۱۰ـ یک هواپیمای جت با سرعت $1000\ \frac{km}{h}$ پرواز می‌کند. اگر معلوم شود که خلبان حداکثر پنج برابر افزایش وزن را تحمل می‌کند، حداقل شعاع دوران را موقع انجام مانور بیابید. جواب: $R\simeq 1570\,m$

۱۱ـ در واگونی که با سرعت $72\ \frac{km}{h}$ دایره‌ای به شعاع $R=400\ m$ را دور می‌زند جسمی به جرم $m=5\,kg$ از نیروسنجی آویزان است. عددی را که نیروسنج نشان می‌دهد معلوم کنید. ثانیاً در چه سرعتی نیروسنج عددی ۰/۵٪ بیش از وزن جسم نشان خواهد داد؟ جوابها: $F\simeq 49/25\ N$, $v_1\simeq 19/7\ \frac{m}{s}$

۱۲ـ دوچرخه‌سواری یک بار در سطح افقی و یک بار در سطح شیبدار که شیب عرضی آن α است با سرعت یکسانی دایره‌ای به شعاع R را دور می‌زند ضریب اصطکاک در هر دو حالت μ است. نسبت سرعت دوچرخه‌سوار را در دو حالت بیابید؟

جواب: $\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{\mu(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}}$

۱۳ـ دوچرخه‌سواری می‌خواهد مسیر قائم گردی به شعاع $R=\text{۸}m$ را که در پایین سطح شیبدار است دور بزند از چه ارتفاعی بدون پا زدن حرکت کند تا بتواند بدون جدا شدن از سطح آن را دور بزند؟ جواب: $h\geq \text{۲۰}\ m$

۱۴ـ پیچ جاده‌ای دارای شیب عرضی ۱۰ درجه و شعاع انحنای ۱۰۰ متر است معلوم کنید پیچ فوق برای چه سرعتی حساب شده است؟

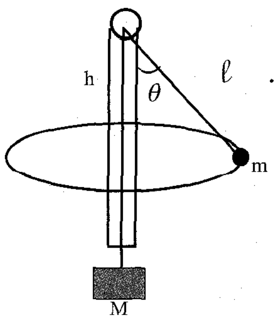
جواب: $V=\text{۱۳/۲}\ \frac{m}{s}$

۱۵ـ دو جسم به جرمهای m و M $(M>m)$ به دو سر یک نخ که از میان یک لولهٔ شیشه‌ای عبور کرده است بسته شده‌اند. جسم m را با زمان تناوب T حول لولهٔ شیشه‌ای به دوران درمی آوریم به‌طوری که در این حالت جسم M ساکن باقی بماند.

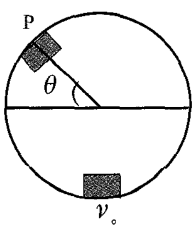
الف) در این حالت زاویهٔ بین نخ و لوله چقدر است؟

ب) زمان تناوب را بر حسب g و h بنویسید.

ج) طول ℓ را بر حسب T و m و M حساب کنید.



۱۶ـ ذرهٔ کوچکی به جرم m بر روی مسیر دایره‌ای شکل عمودی بدون اصطکاک در حال حرکت است. وقتی که m در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر است، تندی‌اش v_0 می‌باشد.



الف) کمترین مقدار v_0، یعنی v_m چقدر باشد تا ذره بدون اینکه تماسش را با مسیر قطع کند آن را طی نماید؟

ب) فرض کنید $\nu_{\circ} = \circ / ۷۷۵ \ \nu_{m}$ باشد. ذره در طول مسیر بالا می‌رود و در نقطهٔ P تماسش با مسیر قطع می‌گردد. زاویهٔ θ را حساب کنید.

۱۷ـ اتومبیلی وارد پیچی به شعاع R می‌شود. این جاده دارای زاویهٔ θ است و ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده μ است. بیشینه و کمینهٔ سرعتها را برای اینکه اتومبیل بدون سُر خوردن به اطراف روی جاده بماند پیدا کنید.

۱۸ـ دو جرم با سرعت ثابت از سطح شیبدار به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک بین جرم $\circ$/۵ kg و سطح $\circ$/۵ است. ضریب اصطکاک بین جرم $\circ$/۴ kg و سطح شیبدار و کشش ریسمان بین این دو جرم را پیدا کنید.

۱۹ـ ذره‌ای به جرم m در بالاترین نقطه روی نیمکره ثابت بدون اصطکاک به شعاع a قرار دارد. ذره با اندک انحراف بدون غلتش بر سطح کره می‌لغزد.

الف) در چه زاویه‌ای نسبت به وضع افقی ذره نیمکره را ترک می‌کند.

ب) سرعت ذره در این وضعیت چقدر است؟

ج) اگر اصطکاک وجود داشته باشد آیا ذره زودتر سطح را ترک می‌کند یا دیرتر؟ چرا؟

۲۰ـ جسمی در طول خط مستقیم OA بر سطحی می‌لغزد و در نقطه‌ای از مسیر سرعت جسم $\nu_{\circ}$ است و آنگاه پس از طی مسافت $x_{\circ}$ می‌ایستد. ثابت کنید ضریب اصطکاک از عبارت $\frac{\nu_{\circ}^{۲}}{۲ g x_{\circ}}$ به دست می‌آید.

فصل ۷

کار و انرژی

۷ـ۱ـ مقدمه

در این فصل همچنان به بحث در مورد دینامیک ذره ادامه می‌دهیم و برای توصیف جایگاه مادی و حرکت آن از زبان ریاضی مدد می‌جوییم. در اینجا نقطه مادی را در حکم الگوی ساده‌ای به کار می‌بریم که در آن شکل جسم در نحوه حرکت آن بی‌تأثیر باشد. می‌دانیم مسئله اصلی دینامیک شناختن و یافتن چگونگی حرکت جسم با آگاهی از نیروهایی است که به آن وارد می‌شود و نیرو به‌طور خلاصه، نمود برهم کنشهای یک ذره شاهد با بقیه اجزای جهان است.

در فیزیک مسائل متعددی وجود دارند که کاربرد مستقیم قوانین نیوتن در حل آنها عملی نیست، بنابراین برای رفع این گونه مسائل باید از مفاهیم تازه‌ای نظیر کار و انرژی کمک بگیریم. اهمیت این مفاهیم تا بدانجاست که امکان بسط و استفاده در زمینه‌های دیگر فیزیک نظیر ترمودینامیک و اپتیک را مهیا می‌سازند و یا به بیان دیگر در حکم اساسی‌ترین مفاهیم ایجاد وحدت در کل مباحث فیزیک و مکانیک عمل می‌کنند و با طرح این مفاهیم وحدت‌بخش قضایا و قوانین تازه‌ای در خصوص کار و

انرژی پدیدار می‌شود.

در این فصل تمرکز سخن بر بیان مفاهیم کار و انرژی و چگونگی ارتباط بین این دو است. البته با توجه به این نکته که مسئله اصلی دینامیک جستجوی چگونگی حرکت ذره است و چگونگی حرکت ذره چیزی مانند یافتن موضع ذره یعنی تابع $\vec{r}(t)$ است که با شناخت نیروی $\vec{F}$ از طریق معادله بنیادی دینامیک و حل معادله دیفرانسیل $\vec{F}=m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ می‌توان به آن دست یافت. اما در حالتهایی که $\vec{F}$ ثابت نیست مطلب کمی دشوار می‌شود هر چند شتاب از قانون دوم نیوتن در هر موقعیتی حاصل می‌شود اما یافتن موضع ذره و سرعت ذره در هر لحظه به آسانی میسر نیست و نیاز به روشهای جدیدتر برای دسترسی به این مطلب مشهود است. به ویژه برای آن دسته از نیروهایی که تابع موضع ذره هستند و در فیزیک بسیار مهم هستند مانند نیروی ثقل و نیروی وارد بر یک جسم از یک فنر کشیده؛ از این رو ما در این رهگذر تا حدودی در جهت رفع این گونه نیازها می‌کوشیم.

۷ـ۲ـ کار

در اصطلاح عوام کار به هر نوع فعالیتی استناد می‌شود که در آن تلاش ماهیچه‌ای و فکری به تنهایی یا تواماً صورت گرفته باشد. اما در اصطلاح فیزیکدانان کار یک مفهوم خاص است و به جابجایی یک جسم در نتیجه تأثیر نیرو بر آن بستگی دارد؛ یعنی هر گاه نیرویی بر جسمی اثر کرده و آن را جابجا کند ـ چنانچه جابجایی بر راستای نیرو عمود نباشد ـ بر روی آن کار انجام داده است.

برای تعیین کار نیروهای وارد بر یک سیستم بایستی نیروهای داخلی و نیروهای خارجی را جداگانه در نظر گرفت. منظور از نیروهای داخلی نیروهایی است که نقاط مادی مختلف سیستم روی یکدیگر وارد می آورند و نیروهای خارجی نیروهایی هستند که از خارج بر این سیستم وارد می‌شود مانند نیروی وزن و عکس‌العمل اتکاء و...

کار نیروهای داخلی با تغییر فاصله نقاط مختلف سیستم ارتباط دارد و هنگامی که فاصله بین نقاط تغییر نکند، مانند سیستمی که از یک جسم صلب تشکیل شده است کار

این نیروها صفر می‌باشد و بحث ما فعلاً در همین موارد است. بنابراین کار نیروهای وارد بر یک جسم صلب در حرکت انتقالی برابر کار برآیند عمومی نیروهای وارد بر جسم صلب می‌باشد که بر یکی از نقاط جسم اثر کند.

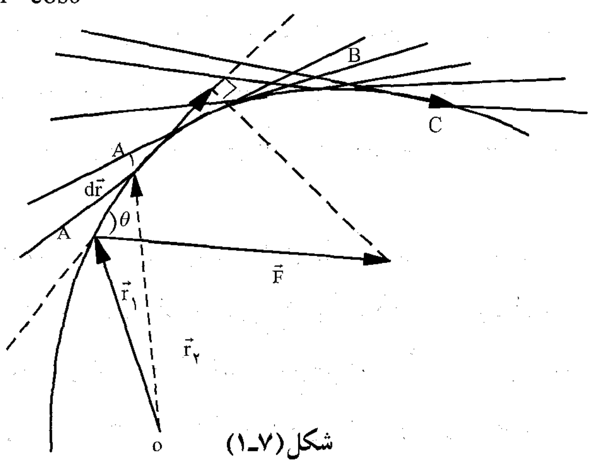
هرگاه جسمی در نتیجه اثر نیروی $\vec{F}$ فاصله $\vec{r}$ را در امتداد نیرو بپیماید کار W انجام شده توسط این نیرو چنین تعریف می‌شود:

$$W=\vec{F}.\vec{r} \qquad (۱\text{ـ}۷)$$

البته هیچ لزومی ندارد که امتداد اثر نیرو بر امتداد جابجایی منطبق باشد بنابراین ممکن است نیروی $\vec{F}$ با امتداد جابجایی زاویه θ بسازد. در نتیجه طبق تعریف کار انجام شده توسط این نیرو وقتی اندازه جابجایی $\vec{r}$ باشد برابر حاصل ضرب اندازه جابجایی در مؤلفه نیرو بر امتداد جابجایی است. این تعریف به شرطی برقرار است که $\vec{F}$ در طول مسیر جابجایی $\vec{r}$ ثابت باشد.

فرض می‌کنیم $\vec{F}$ یکی از نیروهای وارد بر نقطه A مطابق شکل باشد و این نقطه از وضع A به وضع بی‌نهایت نزدیک $A_۱$ تغییر مکان دهد، بر حسب تعریف کار نیروی $\vec{F}$ در تغییر مکان جزیی $\vec{AA}_۱=d\vec{r}$ عبارت است از مقدار جبری بی‌نهایت کوچک حاصل ضرب داخلی زیر:

$$dW=\vec{F}.d\vec{r}=Fdr\cos\theta \qquad (۲\text{ـ}۷)$$



شکل (۷ـ۱)

جمع نیروهای قائم نیز صفر است پس: $m\vec{g}=\vec{T}\cos\theta$

و از تقسیم این دو رابطه نتیجه می‌شود: $\vec{P}=m\vec{g}\tan\theta$

نقطه اثر نیروی $\vec{P}$ روی قوس s جابجا می‌شود چون $s=R\,\theta$, $ds=Rd\,\theta$ داریم:

$$W=\int \vec{P}.d\vec{s}=\int P\cos\theta ds$$

$$=\int_{\circ}^{\theta_\circ} mg\tan\theta\cos\theta R d\theta$$

$$=mgR\int_{\circ}^{\theta_\circ}\sin\theta d\theta=mgR(1-\cos\theta_\circ) \qquad (۵\text{-}۷)$$

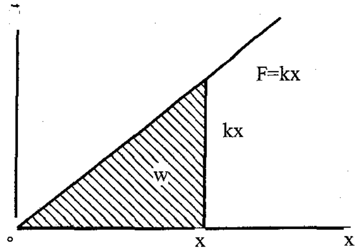
اگر $\theta_\circ=\circ$ باشد جابجایی وجود ندارد در نتیجه $\cos\theta_\circ=1$ و $dW=\circ$ خواهد شد که باید چنین باشد. هرگاه $\theta_\circ=۹۰^\circ$ باشد، $\cos\theta_\circ=\circ$ و $W=mgR$ می‌شود. در این حال کار برابر وقتی است که کودک به وزن mg در امتداد قائم به اندازه R به بالا رود. به آسانی می‌توان دید که $R(1-\cos\theta_\circ)$ افزایش ارتفاع کودک در حین جابجایی است. $\theta_\circ$ هر چه باشد کار انجام شده توسط $\vec{P}$ برابر تغییر ارتفاع در وزن کودک است.

در هر دستگاهی یکای کار بر حسب حاصل‌ضرب یکایی از نیرو در یکایی از طول بیان می‌شود و از آنجا که نیرو را بر حسب نیوتن و طول را بر حسب متر اندازه می‌گیریم می‌توانیم یکای کار را نیوتن-متر بدانیم. در مکانیک این ترکیب یکاها مکرراً مشاهده می‌شود از این رو به نیوتن-متر نام ویژه ژول را نسبت می‌دهیم. البته ژول نه تنها یکای سنجش کار است بلکه می‌تواند یکای سنجش هر نوع انرژی در دستگاه SI باشد.

۷-۳- انرژی جنبشی و قضیه کار- انرژی

اگر سیستمی در حین انجام کار باشد و یا استعداد انجام کار را داشته باشد دارای انرژی است. به بیان دیگر انرژی همان توانایی انجام کار است. انرژی به انواع مختلف وجود دارد و یک نوع آن را انرژی مکانیکی می‌گویند که به دو صورت وجود دارد. یکی از صورتهای آن انرژی جنبشی است. یک ذره مادی به جرم m زمانی دارای انرژی

جابجایی را در شکل نشان داده‌ایم.



برای یافتن کار انجام شده برای کشیدن بدون شتاب فنر به اندازه x باید از معادله (۳_۷) بهره جست، یعنی می‌توانیم بنویسیم:

$$W=\int_{0}^{x}\vec{F}\cdot d\vec{x}=\int_{0}^{x}kx\,dx=\frac{1}{2}kx^{2} \qquad (۴\_۷)$$

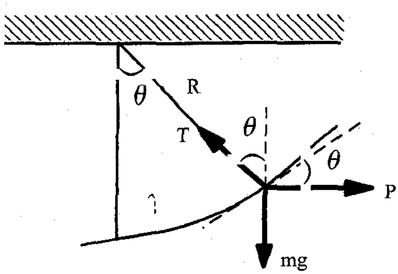
این کاری است که در جابجایی x انجام می‌شود. این نتیجه را می‌توانیم با حساب کردن مساحت مثلث هاشور خورده در شکل نیز به دست آوریم، یعنی:

$$W=\frac{1}{2}(\text{ارتفاع}\times\text{قاعده})=\frac{1}{2}(x)(kx)$$
$$=\frac{1}{2}kx^{2}$$

مثال ۷_۲_کودکی به وزن mg، مطابق شکل، در تابی به طول R نشسته است. نیروی متغیر واقعی P، که از صفر شروع شده تدریجاً افزایش می‌یابد، برای به پیش راندن کودک بر او وارد می‌شود (به‌طوری که در هر لحظه او تقریباً در حال تعادل است) تا به تدریج زاویه انحراف تاب از وضع قائم برابر θ_{0} شود. کار نیروی P را حساب کنید.

حل. کودک همواره در حال تعادل است، پس جمع نیروهای افقی همواره صفر است.

$$\vec{P}=\vec{T}\sin\theta$$



بنابراین کار برابر است با جابجایی ضرب در مؤلفه نیرو روی امتداد جابجایی. از معادله فوق مقدار کار در یک جابجایی بی‌نهایت کوچک به دست می آید. کار کلی که روی ذره در جابجایی از نقطه A تا B انجام می‌گیرد برابر است با مجموع تمام کارهای انجام یافته در جریان جابجاییهای بی‌نهایت کوچک پیاپی یعنی:

$$W=\vec{F}_1.\Delta\vec{r}_1+\vec{F}_2.\Delta\vec{r}_2+\vec{F}_3.\Delta\vec{r}_3+...$$

$$W=\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \qquad (۳\_۷)$$

نکته قابل توجه این است که کار توسط دو کمیت برداری محاسبه می‌شود اما خود کمیتی نرده‌ای است. از طرفی هر گاه راستای مؤلفه نیرو با راستای جابجایی یکسان باشد کار مثبت یا کار محرک و چنانچه مخالف باشد کار منفی یا کار مقاوم است؛ بنابراین کار کمیتی جبری است.

زمانی که نیرو و جابجایی بر هم عمود باشند مؤلفه در امتداد جابجایی وجود ندارد و طبق تعریف کار فیزیکی صفر است. بنابراین اگر وزنه سنگین را با دست برداریم و در فضا ساکن نگه داریم نباید آن را کار فیزیکی منظور کنیم، هر چند از لحاظ فیزیولوژی انرژی مصرف کرده‌ایم. برای به دست آوردن کار مطلوب است به رابطه بین $\vec{F}$ و $\vec{r}$ بپردازیم و معادله مسیری را که ذره روی آن حرکت می‌کند به دست بیاوریم. در صورتی که $\vec{F}$ و $\vec{r}$ به شکل توابعی از یک متغیر مانند زمان معلوم باشند کل کار انجام شده توسط این نیروی متغیر در فواصل بی‌نهایت کوچک با مساحت زیر منحنی نیرو بر حسب تغییرات مسافت برابر است و این نکته به سهولت به وسیله معادله (۳_۷) قابل توجیه است.

مثال ۷_۱_کار لازم برای افزایش طول یک فنر به اندازه x بدون شتاب.

می‌دانیم چنانچه فنری به اندازه طول کوچک x کشیده شود فنر نیرویی متناسب و مخالف این جابجایی، یعنی $-kx$ از خود بروز می‌دهد. اگر فنر بدون شتاب کشیده شود لازم است نیرویی برابر و مخالف این نیرو یعنی $F=kx$ به فنر وارد کنیم. تغییرات نیرو با

جنبشی است که با سرعت v در حال حرکت باشد و در آن صورت مقدار انرژی جنبشی آن ذره از رابطه $k=\frac{1}{2}mv^2$ حاصل می‌شود.

می‌دانیم کار انجام شده بر روی یک ذره توسط نیرو مستقیماً به تغییرات حرکتی جسم مربوط است و یافتن معادله حرکت از طریق محاسبه معادله (۷ـ۳) کار ساده‌ای نیست. لذا برای گشودن راهی به سوی حل این گونه مسائل ناچاریم رابطه (۷ـ۳) را به صورت دیگری درآوریم که برای مسائل مختلف قابل استفاده باشد. یکی از این روشها بیان ریاضی قضیه کار ـ انرژی است که رابطه جابجایی و سرعت را به دست می‌دهد. برای به دست آوردن چنین رابطه‌ای فرض می‌کنیم جسمی به جرم m روی مسیر مستقیمی در حرکت است و بر آن نیروی $\vec{F}$ وارد می‌شود که امتداد آن بر مسیر منطبق است. شتاب این جرم را می‌توانیم از قانون دوم نیوتن به دست آوریم. اگر این جسم از نقطه r_0 به نقطه r تغییر مکان دهد و در این جابجایی سرعت آن از v_1 به v_2 برسد می‌توانیم بنویسیم:

$$W=\int_{r_0}^{r}\vec{F}.d\vec{r}=\int_{r_0}^{r}m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r}=\int_{r_0}^{r}m\frac{dv}{dt}.\vec{v}dt$$

$$=\int_{v_0}^{v}m\vec{v}.d\vec{v}=\int_{v_0}^{v}\frac{1}{2}md(\vec{v}.\vec{v})=\frac{1}{2}m\int_{v_0}^{v}d(v^2)$$

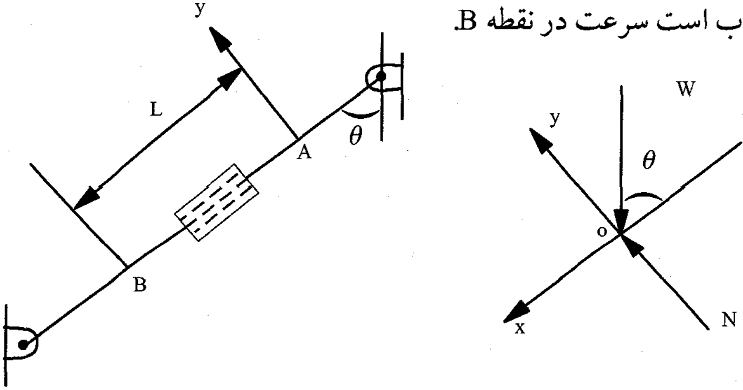
$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\Delta k=k-k_0 \qquad (۷ـ۶)$$

معادله (۷ـ۶) به قضیه کار و انرژی معروف است و با صراحت بیان می‌دارد، کاری که برآیند نیروهای وارد بر جسم روی آن انجام می‌دهد با تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است. بنابراین می‌توان گفت چنانچه سیستمی از ذرات با بقیه اجسام و عناصر جهان در حال برهم کنش باشد دیگر انرژی جنبشی سیستم ثابت نمی‌ماند بلکه تغییر می‌کند و مقدار این تغییر با کار مبادله شده برابر است.

آنچه مسلم است انرژی نیز مانند کار کمیتی نرده‌ای است و انرژی جنبشی یک ذره متحرک به جهت حرکت بستگی ندارد و تنها تابع سرعت آن است. با استفاده از قانون کار و انرژی به این مفهوم پی می‌بریم که تغییرات انرژی جنبشی تابع کار است و به

مقادیر نیرو و مسافت بستگی ندارد. اگر در حین حرکت یک جسم انرژی جنبشی آن افزایش یابد کار W محرک است و چنانچه کاهش یابد کار W مقاوم است اما در یک حالت خاص اگر کار انجام شده توسط نیروهای برآیند صفر شود آنگاه می‌توانیم ادعا کنیم که انرژی جنبشی جسم ثابت مانده است. انرژی جنبشی، خود کمیتی مثبت است اما تغییرات آن می‌تواند منفی باشد.

مثال ۷ـ۳ـ جسمی به وزن w در روی سیم مستقیمی از نقطه A به سوی نقطه B حرکت می‌کند. اگر ضریب مالش بین جسم و سیم μ و سرعت جسم در نقطه A برابر با $v_{\circ}$ باشد مطلوب است سرعت در نقطه B.



(الف)   (ب)

شکل (۷ـ۲)

حل. اگر مبدأ مختصات را در نقطه A فرض کنیم به‌طوری که محور x در امتداد سیم و محور t عمود بر آن باشد شرایط اولیه مسئله چنین می‌شود:

وقتی $t=\circ$ است، $x=\circ$ و $\frac{dx}{dt}=v_{\circ}$ می‌شود. نمودار جسم آزاد در شکل نشان داده شده است. واضح است که با انتخاب محور x روی سیم $dy=dz=\circ$، بنابراین باید تنها مؤلفه نیرو در امتداد x را در نظر گرفت. طبق قضیه کار و انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_{x_۱}^{x_۲} F_x dx=\frac{۱}{۲} m_i(v_۲^۲-v_۱^۲)$$

$$\int_{\circ}^{L} (w\cos\theta-F_f)dx=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{w}{g}(v_B^۲-v_A^۲) \qquad \text{(الف)}$$

و چون $F_f=m\ \frac{d^2y}{d^2t}=0$ پس $N-w\sin\theta=0$ و یا $N=w\sin\theta$ و از آنجا که $F_f=\mu N$ است، بنابراین:

$$F_f=\mu w\sin\theta$$

با قرار دادن جانشین کردن این مقادیر در رابطه (الف) و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت:

$$w=Lw\cos\theta-\mu wL\sin\theta=\frac{w}{2}\ g(V_B^2-V_0^2)$$

بنابراین:

$$V_B^2=2\ gL(\cos\theta-\mu\sin\theta)+V_0^2 \qquad (7\text{-}7)$$

و این رابطه نشان می‌دهد که سرعت در نقطه B از جرم جسم مستقل است.

۷ـ۴ـ توان

یکی از عواملی که در تعریف کار دخالت ندارد زمان انجام کار است یعنی اگر جرم m را تا ارتفاع h بالا ببریم به اندازه mgh کار انجام داده‌ایم. حال چنانچه این کار در مدت یک ثانیه، یک ساعت، یا یک روز صورت گرفته باشد در مقدار کار بی‌تأثیر است و به بیان دیگر در اندازه‌گیری کار انجام شده بر روی یک جسم به هیچ وجه محدودیت زمانی در نظر گرفته نمی‌شود. اما در بعضی از کاربردهای عملی روزانه، به موارد متعددی برخورد می‌کنیم که تندی یا کُندی انجام کار و یا به بیانی دانستن سرعت یا آهنگ انجام کار بسیار بااهمیت و قابل توجه است. بنابراین مفهوم تازه‌ای مطرح می‌شود که آن را توان می‌نامیم. توان در واقع همان آهنگ زمانی انجام کار یا انتقال انرژی است.

$$\text{توان متوسط}=\frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان انجام کار}}$$

یعنی کار انجام یافته در واحد زمان در فاصله زمانی کوتاه توان لحظه‌ای نامیده می‌شود:

$$P=\frac{dW}{dt}$$

هرگاه آهنگ تغییرات کار نسبت به زمان ثابت نباشد این نسبت تغییر کرده و در این حال

توان لحظه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{dw}{dt} \qquad (۸_۷)$$

همچنین با بهره‌جویی از تعریف کار و یادآوری رابطه $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ و با فرض نیروی ثابت می‌توان نوشت:

$$P=\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{r})=\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}.\vec{V}$$

همانطور که از تعریف توان پیداست یکای توان در دستگاه SI، یک ژول بر ثانیه ($j.s^{-1}$) است که آن را به اختصار یک وات ($1\,w$) می‌نامند. البته کیلووات ($10^{3}w$) و مگاوات ($10^{6}w$) نیز رایج هستند. یکای بزرگتری که رایج است توان اسب بخار است.

$$1\,hP=746\ w$$

مثال ۷_۴_ یک دونده ماراتن از پله‌های آسمانخراشی به ارتفاع h در مدت t ثانیه بالا می‌رود. اگر جرم m باشد، توان متوسط او به دست آورید.

حل. کار کل انجام شده برابر است با: $W=mgh$ ژول

پس توان متوسط عبارت است:

$$P=\frac{mgh}{t}\ \text{وات}$$

از طرف دیگر مؤلفه قائم سرعت متوسط برابر است با:

$$v_y=\frac{h}{t}\ \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$$

و توان متوسط برابر است با:

$$P=F.v=mgh\ \frac{h}{t}=\frac{mgh}{t}\ \text{وات}$$

۷_۵_ راهنمای پاسخ به پرسشها

اکنون کوشش کنید تا به کمک دانسته‌های خود در این فصل به پرسشهای کتاب پاسخ دهید:

۱_ در افسانه‌های یونان باستان، قهرمان افسانه‌ای Atlas کره سماوی را بر دو

دست نگه داشته است از نظر فیزیکی هیچ کاری انجام نمی‌دهد و دستهایش را می‌توان با یک ستون قوی تعویض کرد، هر چند از دیدگاه عوام توان و تلاش زیادی لازم است تا بار عظیم نگه داشته شود و این تلاش به صورت کار خارق‌العاده جلوه می‌کند. از همین جا می‌توان دریافت که واژه‌هایی مانند کار، بازی، سلول، جابجایی و... با آنچه در علم به آنها برمی‌خوریم متفاوت است.

۲ـ با توجه به خواص بردارها (فصل دوم را ببینید) می‌توان دریافت که کار کمیتی است جمع‌پذیر. یعنی اگر مثلاً $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ دو نیروی وارد بر یک ذره باشند و حاصل این تأثیر جابجایی $\vec{r}$ جسم بین دو نقطه باشد در این صورت:

$$W=(\vec{F}_1+\vec{F}_2).\vec{r}=\vec{F}_1.\vec{r}+\vec{F}_2.\vec{r}=W_2$$

این نتیجه را به تعداد بیشتری نیرو می‌توان تعمیم داد. شرط اصلی این است که جابجایی حاصل از تأثیر تک تک نیروها و نیز برآیند نیروها در هر حال یکی باشد. بدین معنا کار برآیند چند نیرو در یک جابجایی برابر است با مجموع کارهای حاصل از تأثیر تک تک نیروها در جابجایی مذکور.

۳ـ استفاده از ماشینهای ساده همچون سطح شیبدار، گوه، اهرم، پیچ و چرخ دندانه‌دار و قرقره سبب صرفه‌جویی در کار انجام شده نمی‌شود. فقط در هر کدام به موجب نیاز $\vec{F}$ (اندازه یا جهت نیرو) یا $\vec{r}$ (جابجایی) را تغییر می‌دهیم به‌طوری که $W=\vec{F}.\vec{r}$ همچنان ثابت می‌ماند.

۴ـ کار نیروی اصطکاک در یک جابجایی همواره منفی است زیرا نیروی اصطکاک همیشه در خلاف جهت حرکت ظاهر می‌شود پس زاویه بین جابجایی و نیرو همیشه 180° است. در مسابقات طناب‌کشی هر دو تیم به یک اندازه نیرو وارد می‌کنند (بنابر قانون عمل و عکس‌العمل) و تیمی که فشار بیشتری وارد می‌کند برنده می‌شود یعنی نیروی اصطکاک را بیشتر می‌کند. به عبارت دیگر نیروی اصطکاک هر تیمی که فشار بیشتر وارد می‌کند کار منفی انجام می‌دهد و مانع از حرکت آن تیم می‌شود و در نتیجه برنده می‌شود.

۵ـ جسم سنگینی را از زمین بلند کنید و در راستای قائم جابجا کنید. به نظر دو نیرو بر جسم وارد می‌شود $+mg$ از طرف دست شما به سمت بالا و $-mg$ نیروی وزن جسم. برآیند دو نیرو صفر است و کار برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر می‌شود. در حالی که عملاً جسم را مقداری جابجا کرده‌اید و کار انجام شده است. آیا فکر می‌کنید کجای استدلال اشتباه است. دقیقاً نیروهای وارد بر جسم را بررسی و مشخص کنید آنگاه به پاسخ صحیح خواهید رسید. برای خنثی کردن $-mg$ و بالا بردن جسم باید نیرو مصرف کرد (بیشتر از آن). $+mg$ فقط برای خنثی کردن آن است پس نیرویی مانند نیروی عضلانی یا نیروی موتور در بالا برنده‌ها لازم است تا جسم بالا رود.

۶ـ کاری که روی یک فنر صرف می‌شود تا آن را به اندازه x بکشیم (یا متراکم کنیم) چنین است:

$$w=\frac{1}{2}kx^2$$

که در آن k ضریب سختی فنر است. برای دو فنر A و B با $k_A>k_B$ و با فرض $x_A=x_B$ یا $F_A=F_B$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} w_A=\frac{1}{2}k_Ax_A^2 \\ w_B=\frac{1}{2}k_Bx_B^2 \end{array}\right\} \xRightarrow{x_A=x_B} w_A=\frac{1}{2}k_Ax_A^2>\frac{1}{2}k_Bx_B^2=w_B \Rightarrow w_A>w_B$$

و یا

$$F_A=F_B \Rightarrow k_Ax_A=k_Bx_B \Rightarrow x_A<x_B$$

$$w_A=F_Ax_A=F_Bx_A<F_Bx_B=w_B \Rightarrow w_A<w_B$$

۷ـ در انرژی جنبشی چون v^2 ظاهر می‌شود پس صرفنظر از جهت سرعت مقدار انرژی همواره مثبت است، اما تغییرات انرژی جنبشی در یک فرآیند می‌تواند منفی شود. بنابراین کاری که یکی از نیروها به تنهایی انجام می‌دهد می‌تواند از تغییر انرژی جنبشی بیشتر باشد مثلاً کار نیروی اصطکاک همواره منفی است. پس در تمام مواردی که نیروی اصطکاک وارد می‌شود کار نیروهای دیگر باید از تغییر انرژی جنبشی بیشتر

باشد تا اثر کار منفی اصطکاک را از بین ببرد و حاصل برابر تغییر انرژی جنبشی در دو وضع ابتدایی و نهایی جسم باشد.

۸ـ توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم و بعد آن را می‌گیریم. در این حرکت رفت و برگشت بدون احتساب مقاومت هوا چون اتلاف انرژی نیست سرعت اولیه و نهایی یکی می‌شود (در دو جهت مختلف)، یعنی انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ در هر دو حال یکی است و بنابراین تغییر انرژی صفر است. از روی تعریف کار نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

رفت $w_1=\vec{F}.\vec{x}=-mgx$

$\Rightarrow w=w_1+w_2=0$

برگشت $w_2=\vec{F}.\vec{x}=+mgx$

با احتساب مقاومت هوا چون جسم هنگام پایین آمدن دیرتر می‌رسد (چرا)؟ پس در نقطه پرتاب سرعت رفت بیشتر از برگشت است. بنابراین انرژی جنبشی در رفت و برگشت کم می‌شود و تغییرات آن منفی است:

$w_1=(-mg-R)x$

$\Rightarrow w=w_1+w_2=-2mgx<0$

$w_2=(-mg+R)x$

۹ـ از آنجا که سرعت پدیده‌ای نسبی است و سرعت یک متحرک از دیدگاه ناظران مختلف در دستگاههای مختصات مختلف فرق می‌کند، پس انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ نیز با انتخاب دستگاه مرجع مقدارش فرق می‌کند. انرژی جنبشی کمیتی اسکالر است. تغییر انرژی جنبشی بستگی به دستگاه مرجع ندارد زیرا تغییر سرعت (یعنی شتاب) مستقل از دستگاه مختصات است. در نتیجه کار برآیند نیروها مستقل از دستگاه انتخابی است.

$\vec{V}=\vec{V}_0+\vec{u}$

$$\begin{cases} \vec{V}_2=(\vec{V}_0+\vec{u})_2 \\ \vec{V}_1=(\vec{V}_0+\vec{u})_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2-\vec{V}_1=\vec{V}_{02}-\vec{V}_{01}$$

۱۰ـ باید یادآور شد که توان نه تنها به کار انجام شده و زمان انجام کار بستگی دارد بلکه به نیروی وارد بر جسم و سرعت انجام کار نیز بستگی دارد. لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که توان به جرم، شتاب و مقدار جابجایی جسم نیز بستگی دارد، اما به مسیر طی شده بستگی ندارد.

٦٧ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ اتومبیلی در یک سربالایی ملایم با سرعت v_1 حرکت می‌کند. اگر اتومبیل سرازیری حرکت کند با همان توان قبلی می‌تواند با سرعت v_2 حرکت کند. معلوم کنید اتومبیل با این توان و در سطح افقی با چه سرعتی می‌تواند حرکت کند. برای حل مسئله فرض می‌شود نیروی کشش تابع سرعت نیست.

حل. برای این سه حرکت اتومبیل که توان یکسان است می‌توان نوشت:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = F_0 v_0$$

هریک از نیروهای مسیرهای فوق را جداگانه حساب می‌کنیم. برای حالتی که اتومبیل روی سطح شیبدار بالا می‌رود می‌توان نوشت:

$$F_1 = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha$$

که در اینجا k ضریب اصطکاک سطح است و α زاویه سطح شیبدار با افق است. واضح است برای حالتی که اتومبیل پایین می‌آید نیروی محرکه چنین خواهد شد:

$$F_2 = kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

اما بر روی سطح افق مقدار نیروی محرکه چنین می‌شود:

$$F_0 = kmg$$

بنابراین با قرار دادن مقدار نیروها در رابطه توان خواهیم داشت:

$$(mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha)v_1 = kmgv_0$$

$$(kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha)v_2 = kmgv_0$$

پس از ساده کردن طرفین به دست می‌آید:

$$(\sin\alpha + k\cos\alpha)v_1 = kv_0 \ , \ (k\cos\alpha - \sin\alpha)v_2 = kv_0$$

و از حل دو معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$v_{\circ}=۲\cos\alpha\ \frac{v_۱ v_۲}{v_۱+v_۲}$$

۲ـ راننده اتومبیلی که با سرعت v حرکت می‌کرد، غفلتاً در مقابل خود و در فاصله s دیوار عریضی را مشاهده می‌کند. ترمز کردن به نفع اوست یا فرمان را به طرفی پیچاندن؟

حل. اگر راننده ترمز کند اتومبیل می‌ایستد در این صورت انرژی حرکتی اتومبیل، کار نیروی اصطکاک در ترمزها می‌شود. در موقع دوران نیروی اصطکاک کار نیروی جانب مرکز را انجام می‌دهد و امکان می‌دهد اتومبیلی دور بزند. در موقع ترمز که اتومبیل پس از طی مسافت x می‌ایستد اگر نیروی ترمز F باشد داریم:

$$\frac{mv^۲}{۲}=Fx \Rightarrow x=\frac{mv^۲}{۲F}$$

البته در عمل باید $x\leq s$ و $F\geq\frac{mv^۲}{۲s}$ باشد. در موقع دوران $F=\frac{mV^۲}{R}$ می‌شود، برای اینکه اتومبیل واژگون نشود باید $R\leq s$ و $F\geq\frac{mv^۲}{s}$ باشد.

۳ـ قطاری به وزن $w=۶\times۱۰^۴N$ با سرعتی ثابت از کوه بالا می‌رود. شیب کوه ۵ متر برای هر کیلومتر راه است. نیروی اصطکاک $R=۱۰^۴N$ و سرعت حرکت $۷۲\ \frac{km}{h}$ است. توان لوکوموتیو را معلوم کنید.

حل. در سطح شیبدار حرکت اتومبیل یکنواخت است، باید نیروی موتور مساوی مجموع نیروی اصطکاک R و نیروی ثقل در سطح شیبدار باشد:

$$F=R+w.\ \frac{h}{L}$$

و توان آن خواهد شد:

$$P=(R+w\ \frac{h}{L})=۸۰۰\ K.w$$

۴ـ یک مسلسل در هر دقیقه ۶۰۰ تیر شلیک می‌کند سرعت تیرها $۸۰۰\ \frac{m}{sec}$ است و جرم هر کدام ۱۰ گرم است. قدرت پرتاب مسلسل را (توان پرتاب را) معلوم کنید.

حل. جرم تعداد گلوله‌های پرتاب شده در دقیقه: $۶۰۰ \times ۱۰ = ۶۰۰۰\ gr$

جرم گلوله‌های پرتاب شده در ثانیه: $m = ۶۰۰۰ \div ۶۰ = ۱۰۰\ gr$

جرم گلوله‌های پرتاب شده در ثانیه: $m = ۱۰۰ \div ۱۰۰۰ = ۰/۱\ Kgr$

محاسبه انرژی پرتاب در هر ثانیه:

$$E_c = \frac{۱}{۲} mv^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times (۸۰۰)^۲ = ۳۲۰۰۰\ kgm^۲/s^۲$$

چون انرژی پرتاب شده در هر ثانیه با توان پرتاب برابر است، لذا انرژی فوق را توان گرفته، به اسب بخار تبدیل می‌کنیم:

$P = ۳۲۰۰۰ \div ۷۵۰ = ۴۳\ hp$ $\qquad$ $P = ۳۲۰۰۰ \div ۷۵۰ \simeq ۴۴\ hp$

۵ـ صندوقی به وزن $۲۲۰۰\ N$ از انتهای طنابی به طول ۱۲ متر آویخته شده است. این صندوق را به اندازه $۱/۲\ m$ از حالت قائم منحرف می‌کنیم و در همان وضع نگاه می‌داریم.

الف) چه نیرویی در امتداد کمان برای نگه داشتن صندوق در این وضعیت لازم است؟

ب) آیا برای نگهداری صندوق در این وضع کاری انجام می‌شود؟

ج) آیا برای منحرف کردن آن کاری انجام می‌شود؟ اگر انجام می‌شود، مقدار آن چقدر است؟

د) آیا کشش طناب روی صندوق کاری انجام می‌دهد؟

حل.

الف) $\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow F = mg\sin\theta = ۰ \Rightarrow F = mg\sin\theta\ (۱)$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow T - mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow F = mg\cos\theta\ (۲)$

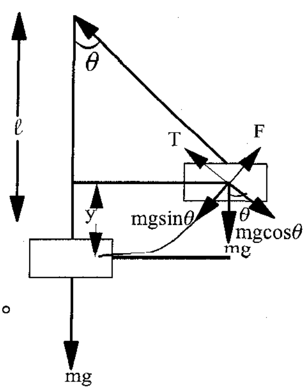
$L - y = L\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = ۰/۹ \Rightarrow \sin\theta = ۰/۴۳$

$y = L(۱ - \cos\theta)$

$(۱) \Rightarrow F = ۹۴۶\ N \quad (۲) \Rightarrow T = ۱۹۸۰\ N$

ب) برای نگهداری صندوق $W = \Delta K = \frac{۱}{۲} m(v^۲ - v_۰^۲) = ۰$

ج) برای انحراف صندوق $= ۲۲۰۰ \times ۱/۲ = ۲۶۴۰\ j$



چون mg در راستای افقی کار انجام نمی‌دهد.

د) $F_y=mg\sin\theta$

$$W=\int \vec{F}.\vec{dr}=\int_{\circ}^{\theta} mg\sin\theta dr=\int_{\circ}^{\theta} Lmg\sin\theta d\theta=-mgL[\cos\theta]_{\circ}^{\theta}=-mgL\cos\theta+mgL$$

$$W=mg\underbrace{L(1-\cos\theta)}_{y}\Rightarrow W=mgy$$

۶ـ برای اینکه لکوموتیو برقی قطار خود را با سرعت ثابت $v=54\ km/h$ حرکت دهد توان $P=900\ Kw$ لازم است. اگر راندمان عمل $\eta=0/8$ باشد، نیروی کشش لکوموتیو برقی را معلوم کنید.

حل. برای تعیین نیروی کشش موتور فرمول زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\eta P=F.v\ \Rightarrow F=\frac{\eta P}{v}=48000\ N$$

۷ـ آسانسوری به وزن $w=2\times10^{4}N$ با طنابی که هر متر آن ۲۰ نیوتن است از معدنی به عمق ۲۰۰ متر بالا کشیده می‌شود. معلوم کنید کار انجام یافته در این عمل را. ثانیاً راندمان دستگاه چقدر است؟

حل. موقعی که آسانسور به وزن $w=2\times10^{4}N$ به ارتفاع h پایین می‌رود مرکز ثقل طناب آن که به وزن $w_1=20\frac{N}{m}\times200\ m=4\times10^{3}N$ است به اندازه $\frac{h}{2}$ بالا خواهد رفت. برای بالا بردن نیروی w در مسیر h و برای طناب در مسیر $\frac{h}{2}$ کار مفید لازم است.

کار مفید لازم برای نیروی w: $w=4\times10^{6}j$ است.

کار لازم برای بالا بردن طناب: $w_1=4\times10^{5}j$ است.

لذا کل کار انجام یافته $w=44\times10^{5}j$ خواهد بود و از آنجا راندمان عمل چنین حساب می‌شود ($\eta=\%90$).

۸ـ گلوله‌ای به وزن ۴ کیلوگرم روی سطح شیب‌دار با سرعت ثابت ۱/۵ متر بر ثانیه پایین می آید. نیروی اصطکاک ۲ کیلوگرم است. شیب جاده را تعیین کنید و انرژی

جنبشی جسم را بر حسب ژول محاسبه کنید.

حل. بر جسم دو نیروی $mg\sin\alpha$ و اصطکاک اثر می‌کند و حرکتش یکنواخت است لذا $a=0$ می‌شود. می‌توان نوشت:

۱) $mg\sin\alpha - R = ma$ از حالت خاص پایین آمدن در سطح شیبدار

$4g\sin\alpha - 2g = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

۲) $E_{\circ} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 4 \times 1/5^2 = 4/5$ ژول

۹ـ اتومبیلی به جرم ۸ تن در جاده افقی که ضریب اصطکاک برای آن ۰/۱ و نیروهای مقاومت هوا ثابت و کلاً ۰/۰۱۵ وزن اتومبیل است از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲۰۰۰ متر راه سرعتش به ۲۰ متر در ثانیه می‌رسدز معلوم کنید: اولاً توان متوسط موتور را در آن قسمت از مسیر در دستگاه mks و ثانیاً بر حسب اسب بخار در صورتی که راندمان کار موتور ۵۰ درصد بوده است. $g = 10\ m/s^2$

حل. جرم اتومبیل $mg = 8\times 1000 = 8000\ Kg \Rightarrow 800 = m$

نیروی مالش $R = 0/1 \times 8000 = 800\ Kg$

نیروی مقاومت هوا $R' = 0/025 \times mg = 200\ Kg$

$v^2 = 2ax \Rightarrow 400 = 2\times 2000\, a \Rightarrow a = 0/1\ ^{m/s^2}$

$\Sigma F = ma \Rightarrow F - (R + R') = ma$

نیروی موتور $F = 800 - 200 = 8\times 0/1 \Rightarrow F = 1080\ Kgf$

کار انجام شده $w = FL = 1080 \times 2000 = 2160000\ Kgr.m$

مدت این کار $V = at \Rightarrow 20 = 0/1\,t \Rightarrow t = 200\ s$

$P_m = \frac{W}{t} = 10800\ Kgm/s$

توان مفید ۵۰٪ توان است، پس توان کل دو برابر می‌شود.

$P_m = 10800 \times 2 = 21600\ kgm/s$

توان متوسط بر حسب اسب بخار $P = \frac{21600}{75} = 288\ h.p$

۱۰ـ قطاری به جرم ۸۰۰ تن با سرعت $v=۳۰ \ m/s$ به سطح شیبداری می‌رسد که زاویه شیب ریلهای آن با افق $\alpha=۱^\circ$ است اگر موتور لوکوموتیو خاموش شود، معلوم کنید قطار پس از طی چه مسافتی خواهد ایستاد. ضریب اصطکاک $k=۰/۰۰۴$ است. (از نیروهای مقاوم دیگر صرف نظر شود). همچنین اگر بخواهیم قطار با سرعت ثابت در این سطح شیبدار بالا برود چه توان حداقلی لازم است.

حل. انرژی جنبشی قطار در آغاز سربالایی صرف خنثی کردن کار نیروهای $mg\sin\alpha$ و $kmg\cos\alpha$ می‌شود:

$$\frac{mv^۲}{۲}=(mg\sin\alpha+kmg\cos\alpha)s$$

و از آنجا:

$$s=\frac{v^۲}{۲g(\sin\alpha+k\cos\alpha)}=۲۱۴۰ \ m$$

حرکت قطار در صورتی یکنواخت خواهد بود که نیروی کشش لکوموتیو $F=mg\sin\alpha+kmg\cos\alpha$ باشد. در این صورت حداقل توان موتور:

$$P=F.v=(mg\sin\alpha+kmg\cos\alpha)v=۵۰۴۵ \ kw$$

۷ـ۷ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ غالباً از بحران انرژی صحبت به میان می‌آید. آیا صحیح است به جای آن از بحران توان گفتگو شود؟

۲ـ اگر فردی به یک جسم نیرو وارد کند و به آن شتاب بدهد، بنابر قانون عمل و عکس‌العمل جسم نیز به فرد نیروی مساوی و مخالف وارد می‌کند. آیا کل کار انجام شده صفر است؟ توضیح دهید.

۳ـ آیا جمله زیر می‌تواند صحیح باشد:

«در مواردی خاص ممکن است اصطکاک وارد بر یک جسم انرژی مکانیکی آن را افزایش دهد.»

۴ـ فنری به ته ظرفی متصل است. در حالی که فنر را با سرعت ثابت می‌کشیم مقداری اسید در ظرف می‌ریزیم تا فنر حل شود. انرژی جسم چه می‌شود؟

۵ـ اگر نیروی ثابتی به یک جسم شتاب ثابت دهد، توان این نیرو ثابت است یا نه؟ اگر نیست تغییر نیرو با زمان چگونه باید باشد تا توان ثابت بماند؟

۶ـ در طول یک فاصله زمانی توان میانگین یک ماشین را چگونه اندازه می‌گیریم؟

۷ـ جسمی به جرم m از ارتفاع h سقوط آزاد می‌کند. رابطه‌ای بنویسید که تغییر انرژی جنبشی جسم را با کاری که جرم آن انجام می‌دهد مربوط سازد.

۸ـ آیا در حرکت ماه دور زمین و یا الکترون دور هسته اتم کار صورت می‌گیرد؟ توضیح دهید.

۹ـ اگر شخصی روی تاب ایستاده باشد و مشغول بازی شود می‌تواند با نشستن و برخاستن به موقع دامنه حرکت تاب را افزایش دهد. چرا؟ این انرژی چگونه به وجود می‌آید؟

۱۰ـ موتور دستگاه متحرکی با توان ثابت کار می‌کند و به آن شتاب می‌دهد تا اینکه به سرعت ثابت برسد. شتاب در طی این عمل کاهش می‌یابد یا افزایش. چرا؟

۱۱ـ آیا می‌توانیم ادعا کنیم در ضمن تبادل انرژی با یک دستگاه، انرژیی که از دستگاه می‌گیریم منفی و انرژیی که به دستگاه می‌دهیم مثبت است؟

۱۲ـ اگر چند پرتابه را با سرعتهای یکسان و زاویه‌های پرتاب مختلف در نظر بگیریم، با توجه به اینکه جرم این پرتابه‌ها یکسان است به این نکته پی می‌بریم که انرژی جنبشی در همه این حالتها یکی است اما ارتفاع بالا رفتن در همه حالتها یکسان نیست. چرا؟

ب) مسائل

۱ـ جسمی به جرم m با سرعت v نسبت به ناظر o و با سرعت v' نسبت به o' حرکت می‌کند. سرعت نسبی o و o' برابر v است. رابطه بین انرژی جنبشی E_x و E'_x

جسم را که به وسیله o و o′ اندازه‌گیری می‌شود پیدا کنید.

۲ـ آسانسوری به وزن $w = ۶۰۰$ N با شتاب ثابت $a = ۱/۴$ m/s بالا می‌رود. معلوم کنید کار انجام یافته را موقعی که آسانسور ۱۰ متر بالا می‌رود. $۶/۸۶ \times ۱۰^{۴}$ j

۳ـ یک تکه یخ را یک بار با زاویه ۴۵ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. بار دوم همین یخ را با همان سرعت اولیه روی سطح یخ زدهٔ دریاچه‌ای رها می‌کنیم تا سُر بخورد. اگر دفعه دوم ۱۰ برابر اولی در امتداد افقی حرکت کند، ضریب اصطکاک یخ و یخ‌ها را در حالت دوم معلوم کنید.

جواب: $k = ۰/۰۵$

۴ـ جسمی با نیرویی به طرف مبدأ مختصات کشیده می‌شود که اندازه آن در هر نقطه با $F = -(۶\text{N.m}^{-۳})x^{۳}$ مشخص می‌شود. در این رابطه F بر حسب نیوتن و x بر حسب متر سنجیده می‌شوند.

الف) اندازه نیرو وقتی جسم در a به فاصله ۱ m از مبدأ قرار دارد چقدر است؟

ب) و اندازه آن در b به فاصله ۲ m از مبدأ چقدر است؟

ج) کار نیرو در انتقال جسم از a تا b چقدر است؟ این کار مثبت است یا منفی؟

۵ـ شخصی سوار دستگاهی است که روی یخها سُر می‌خورد. این شخص در ابتدا سنگی به وزن ۱۰۰ نیوتن را با سرعت افقی ۳ متر بر ثانیه پرتاب می‌کند. دستگاه پس از پرتاب ۰/۵ متر جابجا می‌شود. اگر وزن کل آن با شخص ۶۰۰ نیوتن باشد، ضریب اصطکاک و کار انجام شده را در این عمل معلوم کنید.

جوابها: $k \simeq ۰/۰۲۵$ و ژول $w = ۵۳/۶$

۶ـ اتومبیلی به وزن ۱۰۰۰ نیوتن در یک جاده افقی حرکت می‌کند. هنگامی که موتور حداکثر توان خود ۵ hp را به کار می‌برد، اتومبیل به سرعت بیشینه خود ۳۲ m/s می‌رسد. سرعت بیشینه اتومبیل را هنگامی که از یک تپه به شیب ۵٪ بالا می‌رود حساب کنید. مقاومت هوا را ثابت فرض کنید.

۷ـ جسم کوچکی به جرم ۰/۰۵ kg که به نخی بسته شده است روی سطح افقی

بدون اصطکاکی قرار دارد. انتهای دیگر نخ از سوراخ با سرعت $0/6\ m/s$ روی سطح در گردش است. نخ را رو به پایین می‌کشیم تا فاصله جسم از سوراخ $0/1\ m/s$ شود در این مدت سرعت جسم برابر $1/2\ m/s$ می‌شود. چه کاری توسط نیروی کشش وارده از دستی که نخ را کشیده انجام شده است؟

۸ـ جسمی به جرم $5\,kg$ بر روی سطح افقی بدون اصطکاکی ساکن است. نیروی F طوری بر آن اثر می‌کند که جسم در امتداد x به حرکت درآمده معادله حرکت آن: $x(t)=(5\,m.s^{-2})t^{2}+(2\,m.s^{-3})t^{3}$ می‌شود. در این رابطه t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر است.

الف) در لحظه $t=4\,s$ سرعت جسم چقدر است؟

ب) کار انجام شده توسط F را در $4\,s$ اول حرکت حساب کنید.

۹ـ جسمی به وزن ۵ نیوتن را از ارتفاع ۱۰۰ متر با سرعت اولیه $v_0=10\ m/s$ در امتداد افقی پرتاب می‌کنیم انرژی جنبشی جسم را هنگام رسیدن به زمین پیدا کنید.

جواب: $E_c \simeq 525/5\ j$

۱۰ـ فرض می‌کنیم که الکترونی در مداری دایره‌ای شکل به دور پروتون در فاصله‌ای برابر $2\times 10^{-10}\,m$ در حرکت است و فرض می‌کنیم پروتون ساکن است.

الف) سرعت الکترون را با برابر قرار دادن نیروی گریز از مرکز و جاذبه الکتروستاتیکی به دست آورید.

ب) انرژی جنبشی آن چقدر است؟

ج) چه مقدار انرژی لازم است تا سیستم را یونیزه کرد، یعنی الکترون را بدون سرعت نهایی به فاصله بی‌نهایت فرستاد؟ به علامتها توجه خاص شود.

فصل ۸

پایستگی (بقای) انرژی

۸ـ۱ـ نیروی پایستار

در فصل پیش دیدیم که کار برآیند نیروهای وارد بر ذره‌ای در جابجایی از نقطه‌ای به نقطه دیگر برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره یعنی:

$$W = \Delta K \qquad (۸ـ۱)$$

به این ترتیب انرژی جنبشی یک جسم را به عنوان توانایی انجام کار جسم در اثر حرکت تعبیر می‌کنیم. بدیهی است چنانچه از کلیه آثار بازدارنده و استهلاک نیرو صرفنظر کنیم، در یک رفت و برگشت کامل توانایی انجام کار نیرو به یک میزان باقی می‌ماند. چنین نیرویی را نیروی ابقایی یا پایستار می‌نامیم. مثلاً نیروی ثقل، پایستار است. اگر توپی را در غیاب مقاومت هوا و عوامل بازدارنده دیگر در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب کنیم توپ با همان انرژی جنبشی که هنگام پرتاب داشت به دست ما برمی‌گردد.

در عمل چنین اتفاقی نمی‌افتد، یعنی اگر توپی را در راستای قائم رها کنیم پس از برخورد به زمین به همان ارتفاع خود برنمی‌گردد و در ارتفاعی کمتر از ارتفاع پرتاب می‌ایستد. در این صورت انرژی جنبشی کمتر از حالت قبل می‌شود و در یک رفت و

برگشت توانایی انجام کار توسط جسم تغییر می‌کند. در این مورد توانایی انجام کار محفوظ نمانده است و لااقل یکی از نیروهای وارد بر جسم غیرابقایی است.

یکی از مهمترین نمونه‌های نیروی غیرپایستار اصطکاک است. کار نیروی اصطکاک در هر جابجایی همواره منفی است و در یک رفت و برگشت کار این نیرو صفر نمی‌شود. بنابراین به‌طور کلی، کار نیروی پایستار در یک مسیر رفت و برگشت همواره صفر است و چنانچه صفر نباشد، نیرو غیرابقایی است و این یکی از مهمترین تفاوتهای این دو نوع نیرو است.

بیایید نیروی پایستار را از طریق دیگر تعریف کنیم: فرض می‌کنیم از دو مسیر متفاوت متحرکی تحت تأثیر نیروی پایستار فاصله میان دو نقطه a و b را می‌پیماید و به جای خود برمی‌گردد.

$$W_{a \underset{۱}{\rightarrow} b} + W_{b \underset{۲}{\rightarrow} a} = ۰$$

و یا

$$W_{a \underset{۱}{\rightarrow} b} = -W_{b \underset{۲}{\rightarrow} a}$$

بدیهی است که رابطه زیر برقرار است:

$$W_{a \underset{۲}{\rightarrow} b} = -W_{b \underset{۲}{\rightarrow} a}$$

بنابراین:

$$W_{a \underset{۱}{\rightarrow} b} = W_{a \underset{۲}{\rightarrow} b} \qquad (۲\_۸)$$

این رابطه به ما می‌گوید که کار انجام شده روی ذره توسط یک نیروی پایستار در رفتن از a به b برای هر دو مسیر یکسان است. به بیان دیگر، یک نیرو درصورتی پایستار است که کار انجام شده توسط آن روی ذره‌ای که بین دو نقطه حرکت می‌کند فقط به این دو نقطه بستگی داشته باشد نه به مسیر طی شده بین دو نقطه.

۸ـ۲ـ انرژی پتانسیل

اساساً در بررسی اجسام در حال حرکت ترجیح می‌دهیم بگوییم پیکربندی

دستگاه شامل جسم و محیطی که بر هم اثر متقابل دارند در حال تغییر است. در این حالت مفهوم انرژی پیکربندی دستگاه یا انرژی پتانسیل U را معرفی می‌کنیم. چنانچه نیرویی که سبب تغییر حالت دستگاه می‌شود از نوع نیروهای پایستار باشد، آنگاه انرژی جنبشی دستگاه، وقتی پیکربندی اولیه‌اش را به دست می‌آورد (یعنی یک حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد) به مقدار اولیه‌اش برمی‌گردد. تحت این شرایط می‌گوییم اگر K در دستگاهی به اندازه ΔK تغییر کند، در این صورت U برای این دستگاه باید به مقدار مساوی آن ولی با علامت مخالف تغییر کند به طوری که مجموع دو تغییر صفر شود یعنی:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

و یا

$$K+U=E= \text{مقدار ثابت} \tag{۳-۸}$$

E را انرژی کل دستگاه یا انرژی مکانیکی دستگاه می‌گوییم و رابطه (۳-۸) معرف صورتی از بقای انرژی مکانیکی برای نیروهای پایستار است. انرژی پتانسیل یک دستگاه معرف یک انرژی ذخیره شده است که می‌توان از آن به‌طور کامل استفاده کرد و تمام آن را به انرژی جنبشی تبدیل کرد.

به کمک قضیه کار- انرژی، $W= \Delta K$ به راحتی در مورد نیروهای پایستار خواهیم داشت:

$$W= \Delta K=- \Delta U \Rightarrow \Delta U=-W=-\int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{۴-۸}$$

چنانچه نیرو پایستار نباشد (مانند اصطکاک) اساساً نمی‌توان انرژی پتانسیل را تعریف کرد. زیرا انرژی جنبشی دستگاهی که این نیرو به آن اثر می‌کند، هنگام برگشتن به پیکربندی اولیه به مقدار اولیه خود برنمی‌گردد. از رابطه بالا با توجه به این که $F(x)$ فقط تابع موضع جسم است، داریم: $F(x)=-dU(x)/dx$. توجه کنید که بنابر معادله بالا ΔU را فقط موقعی می‌توان تعریف کرد که نیروی F فقط به موضع ذره (یعنی هیئت دستگاه)

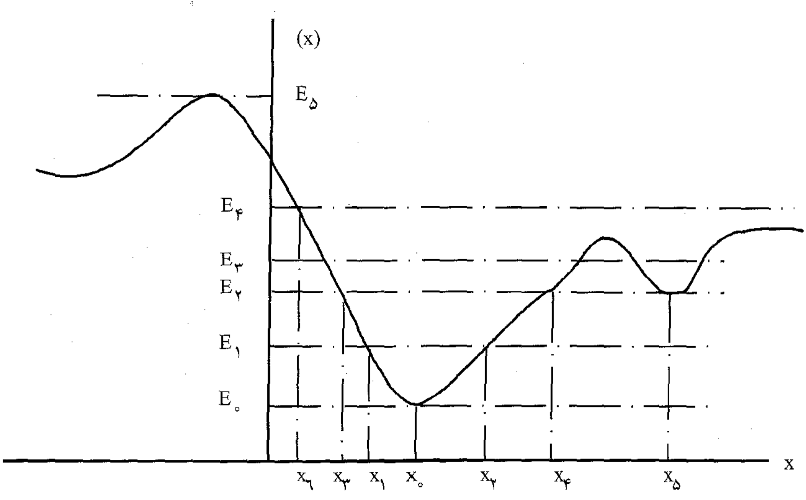
بستگی داشته باشد. (البته شرط ریاضی چنین تعریفی این است که $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ باشد. به این مطلب بعداً در جلد دوم این مجموعه خواهیم رسید). بدین ترتیب انرژی پتانسیل تابعی از موضع ذره است که مشتق آن با علامت منفی نیرو را به دست می‌دهد. در رابطه (۸ـ۴) نقطه x_0 موضع مرجع است و به انرژی پتانسیل جسم در این نقطه مقدار اختیاری $U(x_0)$ را نسبت می‌دهیم. بنابراین:

$$U(x)=-\int_{x_0}^{x} F(x)dx+U(x_0) \qquad (۸ـ۵)$$

معمولاً به انرژی پتانسیل جسم در نقطه مرجع به‌طور اختیاری مقدار $U(x_0)=0$ نسبت داده می‌شود. بهتر است نقطه مرجع x_0 را در نقطه‌ای انتخاب کنیم که در آن نقطه نیروی وارد به جسم صفر است. مثلاً در مورد فنر، وقتی فنر در وضعیت عادی کشیده نشده‌اش قرار دارد نیروی وارد بر آن صفر است. همچنین وقتی که جسم از زمین دور می‌شود نیروی ثقل زمین روی آن کاهش می‌یابد (با عکس مجذور فاصله) و در بی‌نهایت صفر می‌شود. معمولاً بی‌نهایت را به عنوان نقطه مرجع در نظر می‌گیریم و انرژی پتانسیل ثقلی را در این نقطه مرجع صفر در نظر می‌گیریم. در بررسی مسایل عادی مربوط به کشش زمین در فاصله‌هایی که نسبت به شعاع زمین بسیار کوچک است بهتر است که انرژی پتانسیل را نه در بی‌نهایت بلکه در سطح زمین برابر صفر بگیریم.

نکات گفته شده می‌رساند که انتخاب نقطه مرجع برای انرژی پتانسیل اهمیتی ندارد زیرا همیشه با اختلاف انرژی پتانسیل در نقاط مختلف سروکار داریم نه مقدار مطلق انرژی پتانسیل در یک نقطه معین. انرژی جنبشی نیز نسبی است چراکه سرعت جسم از دید هر ناظری در دستگاه‌هایی مرجع متفاوت فرق می‌کند. بنابراین نکته مهم در مورد انرژی مکانیکی دستگاه E، این است که مقدار واقعی آن در حین حرکت معین نیست (بستگی به ناظر دارد) بلکه مهم این است که این مقدار، در مورد نیروهای پایستار، برای یک ناظر خاص در حین حرکت تغییر نمی‌کند. شکل (۸ـ۱) منحنی تغییرات کیفی انرژی پتانسیل را بر حسب فاصله در یک مثال نوعی نشان می‌دهد. حتی

در حالاتی که انتگرال (۸ـ۵) به سادگی قابل محاسبه نباشد، رابطه انرژی مکانیکی (۸ـ۳) اطلاعات مفیدی در مورد جواب معادله می‌دهد. همانطور که از این رابطه مشاهده می‌شود، برای یک انرژی معلوم E، حرکت ذره محدود به آن نواحی از محور x است که به ازاء آنها $U(x) \le E$ باشد. به علاوه سرعت با جذر تفاضل E و $U(x)$ متناسب است. بنابراین اگر منحنی $U(x)$ را بر حسب تغییرات x رسم کنیم، می‌توانیم بیان کیفی خوبی درباره انواع حرکات ممکن ذره عرضه کنیم. توجه کنید که در این مثال برای تابع انرژی پتانسیل، کمترین انرژی ممکن E_0 است. ذره با این انرژی، فقط می‌تواند در نقطه x_0 ساکن باشد و با انرژی اندکی بیشتر از E_1 می‌تواند بین x_1 و x_2 حرکت کند. با نزدیک شدن به x_1 یا x_2 سرعت آن کاهش می‌یابد و وقتی به نقطه x_1 یا x_2 که نقاط بازگشت نامیده می‌شوند می‌رسد، توقف می‌کند و تغییر جهت می‌دهد. ذره با انرژی E_2، می‌تواند بین نقاط بازگشت x_3 و x_4 نوسان کند و یا در نقطه x_5 ساکن بماند. با انرژی E_3، چهار نقطه بازگشت وجود دارد و ذره می‌تواند در هریک از دو چاه پتانسیل نوسان کند.



شکل (۸ـ۱) تابع انرژی پتانسیل برای حرکت یک بعدی

با انرژی E_4، فقط یک نقطه بازگشت وجود دارد، اگر ذره ابتدا به سمت چپ در حرکت باشد، در نقطه x_6 به سمت راست برمی‌گردد و سرعت آن حین عبور از نقاط x_0 و x_5 در چاههای پتانسیل افزایش می‌یابد و روی تپه کم می‌شود. با انرژی‌های بالاتر از E_5 هیچ نقطه بازگشتی وجود ندارد و ذره فقط در یک جهت حرکت می‌کند و سرعت بر حسب عمق پتانسیل در هر نقطه متغیر است.

نقطه‌ای که در آن تابع $U(x)$ می‌نیمم می‌شود، نقطه تعادل پایدار نامیده می‌شود. ذره‌ای که در چنین نقطه‌ای ساکن باشد، ساکن باقی می‌ماند. اگر کوچکترین تغییر مکانی پیدا کند، تحت تأثیر نیروی بازگرداننده‌ای قرار می‌گیرد که سعی می‌کند ذره را به مکان اولیه برگرداند و حول نقطه تعادل نوسان خواهد کرد. نقطه‌ای که در آن تابع $U(x)$، دارای ماکزیمم است، نقطه تعادل ناپایدار نامیده می‌شود. ذره‌ای که در چنین نقطه‌ای ساکن باشد از دیدگاه نظری می‌تواند ساکن باقی بماند، زیرا هیچ گونه نیرویی بدان وارد نمی‌شود. ولی اگر کوچکترین تغییر مکانی پیدا کند، نیروی وارد بر آن، آن را از نقطه تعادل ناپایدار دور می‌کند. ناحیه‌ای که در آن $V(x)$ ثابت است، ناحیه تعادل خنثی نامیده می‌شود، زیرا ذره می‌تواند تغییر مکان کوچکی پیدا کند بی آنکه تحت تأثیر نیروی بازگرداننده و یا دائمی قرار گیرد. این نوع بحث کیفی بر اساس انتگرال انرژی، بسیار ساده و مفید است و اگر خوب فهمیده شود می‌توان با یک نظر کوتاه بر هر منحنی انرژی پتانسیل، انواع حرکات ممکن را تشخیص داد.

۳ـ۸ـ بررسی حرکت با روش انرژی

در اینجا به ذکر مسئله‌ای یک بعدی در مورد حل کامل حرکت یک جسم در میدان نیروی یک بعدی پایستار می‌پردازیم: «جسمی تحت تأثیر نیروی پایستار $F(x)$ در حرکت است. معادله مسیر را بیابید.» برای حل از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x)=E \tag{۶ـ۸}$$

بدیهی است تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ تعریف پذیر است چرا که نیروی وارد بر

جسم از نوع نیروهای پایستار است (فقط به موضع ذره بستگی دارد). از حل این معادله برای v خواهیم داشت:

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{۲}{m}\left[E-U(x)\right]} \qquad (۷\text{-}۸)$$

یا

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{۲}{m}\left[E-U(x)\right]}}=dt$$

حال تابع $x(t)$ را می‌توان از حل معادله

$$\pm\int_{x_\circ}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{۲}{m}\left[E-U(x)\right]}}=\int_{t_\circ}^{t}dt=t-t_\circ \qquad (۸\text{-}۸)$$

بر حسب x به دست آورد. در اینجا ذره در لحظهٔ $t_\circ$ در نقطه $x_\circ$ است و E انرژی کل آن ثابت است. هنگام استفاده از این معادله باید توجه داشت که علامت جذر بستگی دارد به این که v در جهت مثبت یا منفی x باشد. اگر جهت v در حین حرکت تغییر کند ممکن است لازم باشد که برای هر قسمت از حرکت جداگانه انتگرال‌گیری شود. معمولاً هنگامی که v در جهت مثبت x تغییر می‌کند علامت + و در جهت مخالف آن علامت − را اختیار می‌کنند.

حتی اگر نتوان معادله به دست آمده را حل کرد معادله بقای انرژی اطلاعات مفیدی دربارهٔ جواب مسئله به ما می‌دهد، به خصوص هنگامی که تابع تغییرات انرژی پتانسیل $U(x)$ بر حسب x در دسترس باشد. یعنی اگر تابع پتانسیل را برای ناحیه‌ای از محور x که جسم بر روی آن حرکت می‌کند بدانیم مقدار زیادی درباره حرکت جسم می‌دانیم. برای درک بهتر مفهوم انرژی پتانسیل و اهمیت آن، به مثالهای پایان فصل مراجعه کنید.

۴ـ۸ـ جرم و انرژی

در فیزیک کلاسیک دو اصل بقای جداگانه داشتیم: ۱ـ اصل بقای جرم ۲ـ اصل

بقای انرژی. در نسبیت این دو اصل به یک اصل به نام اصل بقای جرم- انرژی تبدیل می‌شود. این دو قانون کلاسیک را می‌توان به صورت خاص در نظر گرفت که تنها به شرطی با تجربه تطبیق می‌کنند که انتقال انرژی به سیستم و یا از آن نسبت به جرم در حال سکون سیستم آنقدر کوچک باشد که تغییر نسبی جرم در حال سکون سیستم به علت کوچکی قابل اندازه گیری نباشد. طبق تعریف بقای جرم و انرژی، ماده نه از بین می‌رود و نه بوجود می‌آید بلکه از شکلی به شکل دیگر تبدیل می‌شود و طبق نتایج اینشتین اگر بخواهیم بعضی از قوانین فیزیک را پایدار نگاه داریم، باید جرم را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$m=\frac{m_\circ}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (۸\_۹)$$

که در آن $m_\circ$ جرم ماده است وقتی که نسبت به ناظر در حال سکون است و جرم سکون نامیده می‌شود. m جرم ذره است وقتی که با سرعت v نسبت به ناظر، در حال حرکت است. c سرعت نور است که برابر مقدار ثابت حدود $3\times10^8\,m/sec$ است.

با توجه به تعریف جدید m و تعریف انرژی جنبشی یک جسم (کاری را که نیروی برآیند برای به حرکت درآوردن جسم انجام می‌دهد) دیگر انرژی جنبشی از رابطه $k=\int_\circ^v \vec{F}.d\vec{r}=\frac{1}{2}m_\circ v^2$ به دست نمی‌آید بلکه برابر است با:

$$k=mc^2-m_\circ c^2=(\Delta m)c^2 \qquad (۸\_۱۰)$$

بنابراین انرژی جنبشی یک ذره عبارت است از حاصلضرب c^2 در افزایش جرم Δm ناشی از حرکت. در سرعتهای معمولی اختلاف چندانی بین m و $m_\circ$ نیست، از این رو در سرعتهای کم انتظار داریم که نتایج نسبیتی با نتایج کلاسیکی سازگار باشند. حال تعمیم رابطه $K=\Delta m.c^2$ موسوم به اصل هم ارزی جرم و انرژی را می‌یابیم. با توجه به اینکه وقتی به مقدار Q انرژی گرمایی به جسمی می‌افزاییم، جرمش به اندازه Δm بیشتر می‌شود که برابر است با $\frac{Q}{C^2}$. بنابراین طبق اصل هم‌ارزی جرم و انرژی به ازای هر واحد انرژی E، در هر نوع، که به یک جسم مادی اضافه می‌شود جرم آن به اندازهٔ $\Delta m=\frac{E}{C^2}$

افزایش می‌یابد و طبق فرمول معروف اینشتین $E=\Delta mc^2$ این حقیقت را که جرم خودش یک نوع انرژی است را بیان می‌کند. در نتیجه یک جسم ساکن به علت جرم در حال سکونش به اندازهٔ $m_\circ c^2$ انرژی دارد که به انرژی در حال سکون معروف است. البته چون ضریب C^2 خیلی بزرگ است نباید انتظار داشت که در تجربیات عادی مکانیکی متوجه تغییر جرم شویم.

۵ـ۸ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

اکنون کوشش کنید که به کمک هم به پرسشهای این فصل پاسخ دهیم.

۱ـ حرکت مثلاً ماشین در جاده‌های کوهستانی به سبب نیروی مؤثر وزن است. این جاده‌ها را به تدریج پیچ می‌دهند و بالا می‌برند تا شیب سطح تغییر نکند چراکه در غیر این صورت وسیله نقلیه قادر به ادامه حرکت در شیب‌های تند نخواهد بود. چون نیروی وزن نیرویی پایستار است و کار این نیرو (و یا کار برای غلبه بر این نیرو) فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد و نه به شکل مسیر طی شده، از این‌رو تغییر طول مسیر تأثیری در کار انجام شده نخواهد داشت فقط مدت زمان طی مسیر بیشتر می‌شود و در عوض این کار امکان‌پذیر می‌گردد.

۲ـ در حرکت یکنواخت یک ماشین، تغییر انرژی جنبشی نداریم ولی نیرو بر جسم وارد می‌شود (نیروی موتور با نیروی اصطکاک)، اما برآیند نیروها صفر است و کار برآیند نیروها نیز صفر است. حال اگر ناگهان ترمز کنیم و اتومبیل پس از کمی بایستد، انرژی جنبشی از دست رفته $(\frac{1}{2}mv^2)$ به صورت حرارت در تماس چرخها با زمین و داخل ساختمان چرخها ظاهر می‌شود.

۳ـ اگر راننده‌ای پشت سر هم ترمز بگیرد و مانع از لغزیدن ماشین شود، حرارت ایجاد شده محسوس نیست و عمدتاً تغییر انرژی جنبشی به کار برآیند نیروها تبدیل می‌شود، منتها پس از مسافت بیشتری ماشین می‌ایستد.

۴ـ اکنون با اندکی تعمق می‌توانید بگویید که چرا برای نگه داشتن یک جسم در

دست کاری صورت نمی‌گیرد و اساساً چرا خسته می‌شویم؟

۵ـ حال بگویید که وقتی آسانسوری از بالای یک ساختمان به پایین می آید و متوقف می‌شود، انرژی پتانسیل آن چه می‌شود؟ پاسخ این است: مقداری در وزنهٔ تعادل آسانسور به صورت انرژی پتانسیل در بالا درمی آید و مقداری دیگر به صورت گرما در ترمزها از بین می‌رود.

۶ـ اگر آونگ در حال نوسان سرانجام متوقف شود، نباید تصور کنیم که این موضوع با قانون پایستگی انرژی تناقض دارد. زیرا چنانچه نیروی اصطکاک و مقاومت هوا را که نیروهای غیر پایستار هستند در نظر بگیریم، قانون بقای انرژی کل همچنان پا برجا می‌ماند.

۷ـ می‌دانیم چنانچه از نیروی باز دارنده و غیر پایستار اصطکاک صرفنظر کنیم، سرعت یک جسم در انتهای مسیر به سرعت اولیه و تغییر ارتفاع بستگی دارد و مستقل از شکل سطح است.

۸ـ یک کودک می تواند با استفاده از قضیه کار ـ انرژی یا بقای انرژی مکانیکی تابی را از حالت سکون به حرکت با دامنهٔ زیاد وادارد، توضیح دهید.

۹ـ این ادعا که کارآیی پیاده‌ها و دونده‌ها نسبت به پرندگان، ماهیها، و دوچرخه‌سواران خیلی کمتر است امری صحیح است. چراکه در راه رفتن یا دویدن در اثر تماس مکانیکی دونده با زمین اصطکاک ظاهر می‌شود و می‌دانیم نیرویی غیر پایستار است و کار این نیرو همواره منفی است. پس اتلاف انرژی داریم و کارآیی آن کمتر می‌شود.

۱۰ـ نیروهای ناپایستار گاهی می‌توانند به عنوان مبدّل انرژی نیز عمل کنند. در این حالت دیگر تلف کننده انرژی نخواهند بود. به عنوان مثال اگر فنری را که در آن انرژی پتانسیل ذخیره شده است (مثلاً دو سر آن به هم بسته شده است) درون ظرف اسید بیندازیم، انرژی ذخیره شده‌اش به گرما تبدیل می‌شود. این گرما ناشی از انرژی جنبشی تولید شده است که می‌تواند به انرژیهای لازم برای انجام فعل و انفعالات

شیمیایی تبدیل شود و یا اینکه به عنوان کاتالیزور در واکنشها استفاده شود که در تمام این موارد در جهت مثبت کار انجام می‌دهد.

۱۱ـ اگر راننده اتومبیلی که با سرعت حرکت می‌کند ناگهان دیواری در فاصله معینی مقابل خود مشاهده کند، بهتر است به جای دور زدن، ترمز کند. اگر راننده ترمز کند وقتی اتومبیل متوقف می‌شود که انرژی جنبشی آن صرف کار نیروی اصطکاک می‌شود. در عوض وقتی از همان نیروی اصطکاک استفاده کرده دور می‌زند و نیروی جانب مرکز را تأمین کرده و در مسیر یک قوس از منحنی حرکت می‌کند. در حالت اول که ترمز می‌کند: $F.x=\frac{mv^2}{2}$ که F نیروی اصطکاک و x فاصله طی شده از وقتی که ترمز گرفته تا اتومبیل متوقف می‌شود پس: $x=\frac{mv^2}{2F}$. برای آنکه اتومبیل به مانع برخورد نکند باید: $x=\frac{mv^2}{2F}\leq a$ و $F\geq\frac{mv^2}{2a}$ باشد. وقتی اتومبیل دور می‌زند $F=\frac{mv^2}{R}$ می‌شود. برای اینکه به مانع برخورد نکند: $R=\frac{mv^2}{F}$, $F\geq\frac{mv^2}{a}$. در حالت اول نیروی ترمز نصف نیروی ترمز در حالت دوم باید باشد، پس بهتر است ترمز کنیم و دور نزنیم.

۱۲ـ درصورتی که دو قرص به وسیله یک فنر به هم متصل باشند، می‌توان قرص بالایی را آنقدر به پایین فشار داد که هنگام رها شدن به بالا بجهد و قرص پایینی را از روی میز بلند کند.[1] چنانچه نیروی مؤثری راکه قرص بالایی وارد می‌کند، قطع کنیم فنر دراز می‌شود. فرض کنیم حداکثر مقدار این ازدیاد طول فنر x باشد. در نتیجهٔ این ازدیاد طول به طرفین فنر دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت اثر خواهد کرد. مقدار این نیرو $F=kx$ خواهد بود که k، ضریب ارتجاعی فنر است. به انتهای پایین فنر این نیرو از طرف جسم m_2 وارد می‌شود و طبق اصل سوم دینامیک از طرف فنر نیز به همان مقدار نیرو به جسم m_2 وارد می‌شود که به سمت بالا است. اگر این نیرو از وزن صفحهٔ پایینی بیشتر باشد m_2 می‌پرد. یعنی:

---

۱. اقتباس از کتاب مسائل مسابقات فیزیک و مکانیک، صفحهٔ ۵۹۲ و ۶۲۲. کتاب فیزیک عملی، صفحهٔ ۱۱ و ۸۶.

$$kx > m_2 g \qquad (1)$$

فرض کنیم بر صفحهٔ بالایی نیروی F وارد شده بود. نیروی فوق فنر را به اندازهٔ $x_0 = \frac{F}{k}$ جمع می‌کرد. بنابراین حداکثر ازدیاد طول فنر نسبت به حالت اولیه‌اش x_0 می‌شد. اما حالت اولیهٔ فنر (قبل از اثر نیروی F) با تغییر شکل توأم بوده زیرا تحت اثر نیروی سنگینی صفحهٔ m_1 قرار داشته لذا طول آن از حالت آزادش $x_1 = \frac{m_1 g}{k}$ کوتاه‌تر می‌شد. پس از قطع اثر نیروی F طول فنر نسبت به حالت اولیه‌اش به مقدار زیر زیاد می‌شود:

$$x = x_0 - x_1 = \frac{F - m_1 g}{k}$$

این مقدار x را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

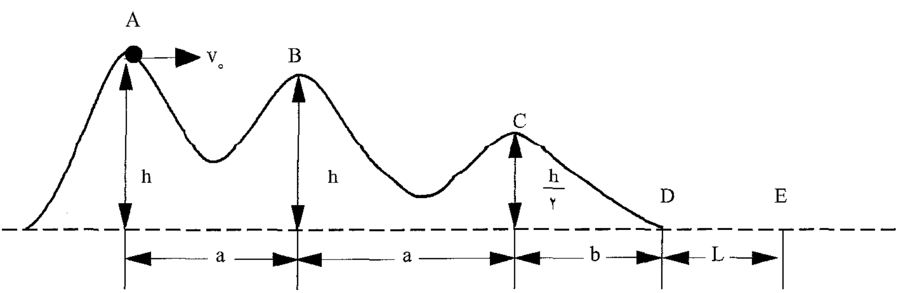
$$k\frac{F - m_1 g}{k} > m_2 g \Rightarrow F > (m_1 + m_2)g$$

۶۸ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ گلوله‌ای به جرم m روی سطح بدون اصطکاک از نقطهٔ A با سرعت V_0، مطابق شکل، شروع به حرکت می‌کند. فرض کنید که این گلوله را می‌توان ذره‌ای در نظر گرفت که همیشه روی مسیر حرکت باقی می‌ماند.

الف) سرعت گلوله در نقاط B و C چقدر است؟

ب) اگر گلوله در نقطهٔ D تحت تأثیر نیروی کُند کننده‌ای قرار گیرد، چه شتاب کُند کنندهٔ ثابتی لازم است تا آن را در نقطه E متوقف کند؟



حل.

الف) $v^2 - v_0^2 = 2gh$

$v^2 = v_0^2 + 2\frac{gh}{2} = v_0^2 + gh$

$v = \sqrt{v_0^2 + gh}$

ب) $v^2 - v_0^2 = 2gh$

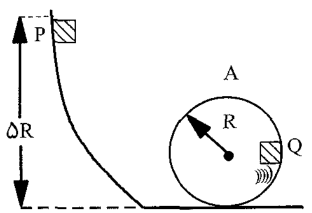
$v^2 = v_0^2 + 2gh$

$v_0^2 + 2gh = 2aL \Rightarrow a = \frac{2gh + v_0^2}{2L}$

۲ـ جسم کوچکی به جرم m بر روی مسیر بدون اصطکاکی مطابق شکل، می‌لغزد.

الف) اگر این جسم از حالت سکون از نقطهٔ p شروع به حرکت کند، نیروی برآیند وارد بر آن در نقطهٔ Q چقدر است؟

ب) این جسم از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه باید رها شود تا نیرویی که در بالاترین نقطهٔ حلقه از طرف سطح به جسم وارد می‌شود با وزن آن مساوی باشد؟



حل.

الف) $E_p = E_Q$

$\frac{1}{2}mv_p^2 + mgh_p = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgh_Q$

$0 + 5mgR = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgR$ و $N = mv_Q^2/R$

$4mgR = \frac{1}{2}mv_Q^2 \Rightarrow v_Q^2 = 8Rg \Rightarrow N = 8mgR/R = 8mg$

ب) $E_p = E_A \Rightarrow \frac{1}{2}mv_p^2 + mgh_p = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$

$F = mv_A^2/R \Rightarrow N + mg = mv_A^2/R$ و $N = mg$

$v^2 = 2mRg/m = 2Rg$

$0 + mgh_p = \frac{1}{2}mv_A^2 + 2mgR$

$\Rightarrow h_p = 3mgR/mg = 3R$

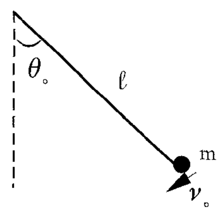
۳ـ آونگ ساده‌ای به طول L داریم که جرم گلولهٔ آن m است. وقتی که نخ این آونگ مطابق شکل با امتداد قائم زاویهٔ θ_0 می‌سازد ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$)، سرعت گلوله v_0 است، بر حسب g و کمیتهای داده شدهٔ بالا، مطلوب است:

الف) v_1 سرعت گلوله هنگامی که در پایین‌ترین وضعیت خود قرار دارد.

ب) v_2 کمترین مقداری که v_0 می‌تواند داشته باشد تا نخ در حین حرکت به حالت افقی درآید.

ج) v_3 سرعت گلوله به‌طوری که به ازای $v_0 > v_3$ آونگ به جای حرکت نوسانی حرکت دایره‌ای در روی یک صفحهٔ قائم انجام دهد.

حل. $E_A = E_C$ $\qquad$ $E_A = E_B$



(الف) $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgL(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

(ب) $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgh_c$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgL(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgL \quad , \quad v_c = 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gL\cos\theta_0}$$

(ج) $E_A = E_D$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + mgL(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgL$$

$$mg + T = \frac{mv_D^2}{L}$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 = -gL(1 - \cos\theta_0) + \frac{1}{2}Lg + 2Lg$$

$$v_3^2 = 2gL(\cos\theta_0 + \frac{3}{2})$$

$$v_2 = \sqrt{2gL(\cos\theta_0 + \frac{3}{2})}$$

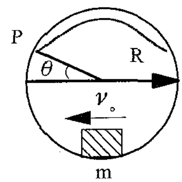
کمترین سرعت به ازای $T = 0$ حاصل می‌شود.

$$v_D^2 = \frac{L(mg+T)}{m} \Rightarrow v_{D\min}^2 = Lg$$

۴ـ در شکل زیر ذره‌ای به جرم m در قسمت داخلی یک دایرهٔ قائم به شعاع R حرکت می‌کند و اصطکاک وجود ندارد. سرعت m وقتی که در پایین‌ترین وضعیت خود قرار دارد $v_\circ$ است.

الف) می‌نیمم مقدار $v_\circ$ چقدر باشد تا m بدون آنکه از مسیر جدا شود تمام دایره را طی کند؟

ب) فرض کنید که $v_\circ$ برابر با $V_{\circ min}$ ۷۷۵ / ۰ است. در این حالت ذره تا نقطهٔ p بالا می‌رود و در آنجا از مسیر خارج می‌شود و در امتداد مسیری که با خط‌چین نشان داده شده است حرکت می‌کند. موضع زاویه‌ای θ در نقطهٔ p را پیدا کنید.



حل.

الف) $E_B=E_A$

$$\frac{1}{2}mv_B^2+mgh_B=\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A \ ,\ T+mg\cos\theta=\frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow mg=\frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2=Rg$$

$$v_\circ^2=Rg+4Rg=5Rg$$

ب) $T+mg\sin\theta=mv_p^2/R \ ,\ h_p=R+R\sin\theta \ ,\ g\sin\theta=\frac{v_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2=Rg\sin\theta$

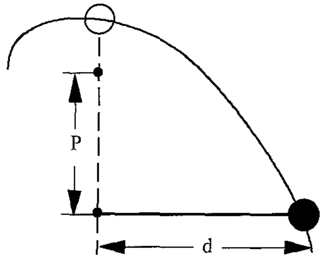
$$E_p=E_A$$

$$\frac{1}{2}mv_p^2+mgh_p=\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A$$

$$\frac{1}{2}mv_p^2+mgh_p=\frac{1}{2}mv_\circ^2 \Rightarrow Rg\sin\theta+2g(R+R\sin\theta)=v_\circ^2 \Rightarrow \theta=19/5^\circ$$

۵ـ در شکل مقابل فاصلهٔ میخ تا نقطهٔ آویز برابر با d است. نشان دهید که d باید حداقل برابر با L ۶ / ۰ باشد تا گلوله روی دایره‌ای به مرکز میخ به‌طور کامل دور بزند.

حل.



$E_B = E_A$

$\frac{1}{2} m v_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A \qquad T + mg = m\frac{v^2}{R}$

$\frac{1}{2} m \times 2gL = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A \qquad V^2 = Rg$

$gL = \frac{1}{2} gR + 2g(L-d)$

$d = \frac{3}{5} L = 0/6L$

٦ـ دو کودک که مشغول بازی هستند سعی دارند با استفاده از یک تفنگ فنری مهره‌انداز، که به‌طور افقی روی میز بدون اصطکاکی قرار گرفته است، به طرف یک جعبهٔ کوچک واقع بر روی زمین نشانه‌گیری کنند. کودک اول فنر را به اندازهٔ $1/0\ cm$ متراکم می‌کند و مهره $20\ cm$ قبل از هدف، در حالی که فاصلهٔ افقی آن از لبهٔ میز $2/0\ m$ است، به زمین می‌افتد. کودک دوم فنر را چقدر باید متراکم کند تا مهره به داخل جعبه بیفتد؟

حل.

$F = -kx$

$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} \Rightarrow x^2 = m\frac{v^2}{k} = \frac{m}{k}\left(\frac{L}{t}\right)^2 = \frac{m}{k}\left(\frac{L}{\sqrt{2\frac{h}{g}}}\right)^2$

$L = vt$

$h = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{m}{k} \frac{L^2}{2h/g} = \frac{gm}{2kh} L^2$

$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{180}{200} \Rightarrow x_2 = \frac{20}{18}\ m$

۷ـ استوانه‌ای توخالی به جرم m به‌طور آزاد روی میله قائم، بدون اصطکاک حرکت می‌کند. استوانه توسط فنری با ثابت k و طول آزاد L به نقطه A متصل شده است. اگر سرعت اولیهٔ استوانه ـ در لحظه‌ای که فنر افقی است ـ برابر با v_0 و به طرف پایین باشد مطلوبست سرعت استوانهٔ به جرم m در هر لحظه (با استفاده از اصل بقاء انرژی).

حل. چون اصطکاک وجود ندارد، پس دستگاه نیروها پایستار است. از طرفی چون نیروی واکنش میله و استوانه، همیشه بر محور میله عمود است پس کار انجام شده توسط آن برابر صفر است. از قضیه انرژی جنبشی نتیجه می‌شود: $u_2+k_2=u_1+k_1$ که همان اصل بقاء انرژی مکانیکی است. پس:

$$\frac{1}{2}kx^2-mgd+\frac{1}{2}mv^2=0+\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \text{(الف)}$$

در شکل داریم:

$$(L+x)\cos\theta=L \Rightarrow x=L\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$$

این مقدار را در معادلهٔ (الف) قرار داده، رابطهٔ حاصل را برای v حل می‌کنیم:

$$v=\left[v_0^2+2g\left[Ltg\theta-\frac{kL^2}{m}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]\right]^{\frac{1}{2}}$$

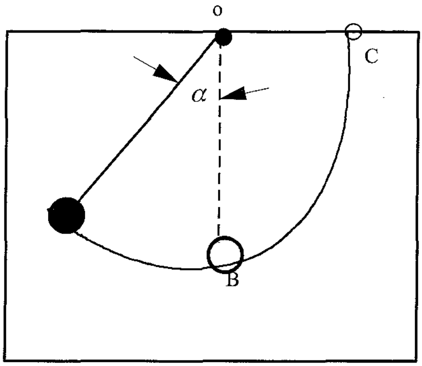
۸ـ گلوله‌ای از نخی آویزان شده است. طرف دوم نخ به چهارچوبی که به‌طور قائم آویزان است وصل شده است. گلوله را به اندازهٔ α از حالت تعادلش منحرف ساخته رها می‌کنیم. موقعی که گلوله به نقطه تعادل B می‌رسد چهارچوب شروع به سقوط آزاد می‌کند. موقعی که گلوله به نقطهٔ C می‌رسد (زاویهٔ انحراف گلوله از محل تعادل $90°$ می‌شود) چهارچوب را ناگهان نگه می‌داریم. معلوم کنید زاویهٔ انحراف α آونگ چقدر باشد تا موقع نگه داشتن چهارچوب سرعت گلوله صفر شود.

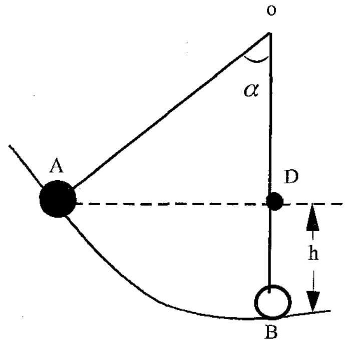
حل. گلوله که به ارتفاع h بالا می‌رود دارای انرژی پتانسیل می‌شود.

$$E_p=mgh=mgL(1-\cos\alpha) \qquad (1)$$

در نقطهٔ B گلوله دارای انرژی جنبشی می‌شود.

$$\frac{mv^{۲}}{۲}=mgL(۱-\cos\alpha)\Rightarrow v=\sqrt{۲gL(۱-\cos\alpha)} \qquad (۲)$$





موقعی که گلوله در نقطهٔ B سرعت فوق را به دست می‌آورد، چهارچوب شروع به سقوط می‌کند. در اثر این اتفاق نیروی ثقل به چهارچوب و گلوله شتاب یکسانی می‌دهد. تغییر شکل دیگری به حساب جاذبه و سقوط آزاد به وجود نمی‌آید. بنابراین حرکت گلوله نسبت به چهارچوب مانند حالتی خواهد بود که جاذبه وجود نمی‌داشت. گلوله از این به بعد با سرعت زاویه‌ای ثابت حرکت دورانی حول نقطه o و به شعاع دوران L انجام خواهد داد و این حرکت دوران در تمام مدت سقوط چهارچوب ادامه خواهد داشت. برای ناظر ساکن گلولهٔ دوار با شتاب g سقوط می‌کند. در موقع حرکت گلوله روی مسیر دایره از نقطهٔ B تا C سرعت سقوط گلوله به مقدار $v_۱=gt$ خواهد رسید. ضمناً در مدت t گلوله با حرکت دورانی یکنواخت یک چهارم مسیر دایرهٔ خود $s=\frac{\pi L}{۲}$ را طی می‌کند.

$$t=\frac{s}{v}=\frac{\pi L}{۲\sqrt{۲gL(۱-\cos\theta)}}$$

بنابراین:

$$v_۱=gt=\frac{\pi gL}{۲\sqrt{۲gL(۱-\cos\alpha)}}$$

موقعی که گلوله به نقطهٔ C می‌رسد برآیند سرعت روی دایره و سرعت سقوط آزاد مساوی صفر می‌شود. یعنی $v=v_1$

یا:

$$\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = \frac{\pi gL}{2\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}$$

و از آنجا به دست می‌آید.

$$\cos\alpha = 1-\frac{\pi}{4} = 0/2146 \Rightarrow \alpha = 77°,37'$$

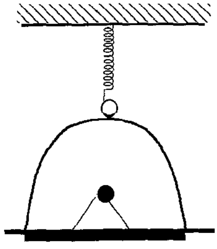
۹ـ n تخته سنگ مثل هم روی زمین افقی پهلوی هم قرار دارند. وزن هر کدام از آنها p و ضخامتشان h است. حداقل چه کاری از نظر تئوری باید انجام داد تا تخته سنگها را روی هم چید؟

حل. کار کل با مجموع کار لازم جهت بالا بردن هر کدام از تخته سنگها برابر است. اولین سنگ برداشته نمی‌شود، دومی به ارتفاع h بالا برده می‌شود. سومی به ارتفاع ۲h چهارمی به ارتفاع ۳h و سنگ n ام به ارتفاع $(n-1)h$، بنابراین:

$$W = ph + p\times 2h + p\times 3h + \dots + p(n-1)h$$
$$= ph(1+2+3+\dots+(n-1)) = \frac{n}{2}(n-1)ph$$

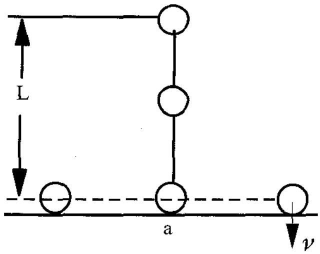
این مسئله را با استفاده از اصل بقای انرژی حل کنید.

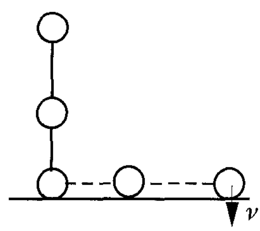
۱۰ـ فنر یک نیروسنج که کفه‌ای به آن آویزان شده از قانون هوک تبعیت می‌کند. طبق شکل در کفه وزنه‌ای قرار می‌دهیم، با چه نیرویی کفه را پایین بکشیم تا وقتی کفه رها می‌شود در یک نقطه وزنه به کفه فشاری وارد نکند؟



حل. وقتی وزنه در کفه نیروسنج قرار دارد و در حال تعادل است فنر نیروسنج باز شده نیروی ارتجاعی فنر برابر وزن کفه درون آن می‌باشد. اگر فنر را باز هم کمی پایین بکشیم و رها کنیم در اطراف حالت تعادل شروع به نوسان می‌کند. وقتی کفه به بالاترین نقطه برسد، کشش فنر حداقل می‌شود. اگر بخواهیم وزنه فشاری به کفه وارد نکند لازم است کفه با شتابی به اندازه شتاب ثقل g از بالاترین نقطه به طرف پایین حرکت کند. واضح است وقتی کفه به بالاترین نقطه برسد و طول فنر برابر طول فنر در حالت آزاد باشد شرط بالا تحقق پیدا می‌کند. چون فاصله کفه از نقطه تعادل در بالاترین و پایین‌ترین وضع مساوی است پس باید کفه و وزنه داخل آن را با نیروی برابر مجموع وزن وزنه و کفه پایین کشید.

۱۱ـ میلهٔ بی‌وزنی به طول L در نظر می‌گیریم، که به وسط و طرفین آن سه جسم کروی مثل هم وصل است. میله به‌طور عمودی بر سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. اگر میله بیافتد معلوم کنید سرعت جسم بالایی را موقع برخورد با سطح افقی. ثانیاً اگر گلوله آخری طوری به میز مربوط می‌شد که هنگام افتادن میله حول آن نقطه چرخیده می‌افتاد، سرعت چقدر می‌شد؟





حل. در هر دو حالت موقع تماس کره‌ها با سطح، سرعت مرکز ثقل دستگاه کره‌ها در امتداد افق برابر صفر است و گلوله سمت راست در این حالت دارای سرعت v ولی وسطی $\frac{1}{2}v$ است. اصل بقای انرژی برای هر دو حالت چنین است:

$$mgL+mg\frac{L}{۲}=m\frac{v^{۲}}{۸}+m\frac{v^{۲}}{۲}$$

در رابطهٔ بالا m جرم هریک از گلوله‌هاست. خواهیم داشت:

$$v=۲\sqrt{\frac{۳}{۵}gL}$$

۱۲ـ دانشجویی فنری را به اندازهٔ معینی می‌کشد. در این موقع مردی به کشیدن فنر کمک کرده به همان اندازه هم او فنر را کشیده باز می‌کند. معلوم کنید کار انجام یافته توسط این مرد چند برابر کار انجام یافته به وسیلهٔ دانشجو است.

حل. ازدیاد طول فنر با نیروی وارد بر آن نسبت مستقیم دارد. بنابراین نیروی متوسط وارد از طرف دانشجو بر فنر $\frac{۰+F}{۲}=۰/۵F$ ولی توسط مرد $\frac{F+۲F}{۲}=۱/۵F$ است. با این حساب کار انجام یافته توسط مرد ۳ برابر کار انجام یافته توسط دانشجو خواهد بود.

۸ـ۷ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ آیا می‌دانید چرا مقدار انرژی مکانیکی که در اثر اصطکاک به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود، برای ناظرهایی با سرعتهای متفاوت یکسان است، در صورتی که ناظرها به‌طور کلی مقادیر مختلفی برای کار کل انجام شده و تغییرات انرژی جنبشی اندازه‌گیری می‌کنند.

۲) ابتدا نیروی ناپایستاری غیر از نیروی اصطکاک نام ببرید. آیا این نیرو هم تلف کنندهٔ انرژی است؟ کار انجام شده توسط این نیرو منفی است یا مثبت؟

۳ـ در نیروی پایستار (ابقایی) چه چیز پایسته است و بقا دارد؟ در نیروی غیرابقایی چه چیز بقا ندارد؟

۴ـ یک مگس در انتهای لوله آزمایش قرار دارد، لوله آزمایش را آزادانه رها می‌کنیم تا به‌طور قائم پایین بیاید. اگر مگس ضمن سقوط آزاد لوله به طرف بالای لوله

پرواز کند در حرکت لوله چه تغییری خواهد داد؟

۵ـ ترازویی روی یک ارابه ساکن قرار دارد. به یک طرف ترازو وزنه‌ای آویزان است، به طرف دیگر ترازو فنری وصل است که به ارابه متصل می‌باشد. اگر به ارابه در امتداد سطح افق نیروی ثابتی وارد کنیم تا شتاب پیدا کند، وزنه در خلاف جهت حرکت ارابه منحرف می‌شود. آیا کشش فنر در طرف دیگر تغییر می‌کند؟

٦ـ هرگاه فقط یک نیرو بر جسمی اثر کند جسم می‌تواند در حال تعادل باشد یا نه؟ آیا یک بالن معلق در حال تعادل است؟

۷ـ برای متوقف کردن اتومبیل روی جادهٔ پوشیده از یخ باید ترمز را چنان محکم گرفت که چرخ بلغزد یا در حدی که چرخ بغلتد. چرا؟

۸ـ اگر اتومبیلی که با سرعت حرکت می‌کند ترمز کند، قسمت جلو اتومبیل پایین می‌آید، علت چیست؟

۹ـ چنانچه نیروهای مرکزی را پایستار فرض کنیم، توضیح دهید چرا با آنکه خورشید نیروی گرانشی و مرکزگرای پیوسته‌ای به زمین وارد می‌کند، زمین به درون خورشید سقوط نمی‌کند؟

۱۰ـ با پرشهای متوالی روی تشک فنری می‌توان ارتفاع پرش را افزایش داد، سرچشمه افزایش انرژی مکانیکی کجاست؟

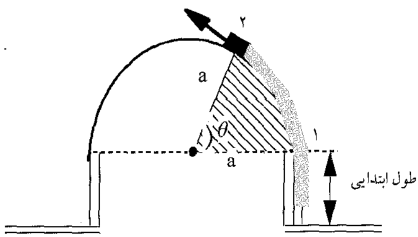
ب) مسائل

۱ـ جسمی به جرم $0/5\,\mathrm{kg}$ از ارتفاع $1\,\mathrm{m}$ روی فنر کوچکی که در راستای قائم قرار دارد و یک سر آن به زمین متصل است می‌افتد و متصل به فنر باقی می‌ماند. ثابت فنر برابر $2000\,\mathrm{N/m}$ است. حداکثر تغییر شکل فنر را حساب کنید.

۲ـ نقطه‌ای مادی که با سرعت زیاد (در مقام سنجش با سرعت نور) حرکت می‌کند، تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=F\hat{i}$ از ابتدا بدون سرعت اولیه و از مبدأ مختصات در لحظهٔ $t=0$ حرکت خود را آغاز می‌کند. سرعت و جابجایی آن را به صورت توابعی از زمان پیدا کرده و با حالتی که m ثابت است مقایسه کنید.

۳ـ گلولهٔ سنگین کوچکی را در درون یک چاه خیالی به محور یکی از اقطار کرهٔ زمین رها می‌کنیم. ژرفای این چاه برابر با قطر زمین بوده و گلوله در سطح کرهٔ زمین و از حالت سکون، در آن رها می‌شود. حرکت گلوله در چاه و سرعت آن را هنگام عبور از مرکز زمین تعیین کرده و مدت زمانی را که طول می‌کشد تا گلوله از سطح زمین به مرکز آن برسد، محاسبه کنید. شعاع زمین $R = ۶۳۷ \times ۱۰^{۶}$ cm و $g = ۹۸۰$ cm/sec^{۲} است.

۴ـ مطابق شکل نیروی متغیر p را همواره مماس بر سطح استوانه‌ای به شعاع a نگاه می‌داریم. این نیرو جسمی به وزن w را که به فنری وصل است می‌کشد. سر دیگر فنر به نقطهٔ ثابتی متصل است. جسم از وضع ۱ به وضع ۲ منتقل می‌شود. کار انجام شده توسط p را حساب کنید.



۵ـ هرگاه جسمی را به فنر قائمی آویزان کرده و به آرامی آن را پایین آوریم تا به وضع تعادل درآید ملاحظه می‌شود که فنر به اندازهٔ d کشیده می‌شود. اگر همین جسم را به همین فنر آویزان کرده آن را ناگهان رها کنیم حداکثر فاصله‌ای که جسم پایین می‌آید چقدر است؟

۶ـ فنری تابع قانون هوک نیست و وقتی به اندازهٔ x کشیده یا متراکم شود نیروی کشسانی در آن به صورت زیر است:

$$F(x) = -۸۰x - ۱۵x^{۲}$$

هرگاه x بر حسب متر باشد F بر حسب نیوتن خواهد بود.

الف) تابع انرژی پتانسیل کشسانی u(x) را برای این فنر پیدا کنید به شرط آنکه به ازای $x = ۰$، $u = ۰$ باشد.

ب) وزنهٔ $2\,kg$ که به این فنر وصل شده است روی سطح افقی بدون اصطکاکی $1/0\,m$ به طرف راست کشیده می‌شود و سپس آزاد می‌گردد. سرعت این جسم وقتی به فاصلهٔ $0/5\,m$ در طرف راست نقطهٔ تعادل $x=0$ قرار دارد چقدر می‌شود؟

۷ـ یک نقطهٔ مادی به جرم m_1 به نخی به طول L و جرم m_2 بسته شده است و روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد. در اثر سنگینی وزنه که در کنار میز است نخ بدون سرعت اولیه شروع به حرکت نموده و روی میز سُر می‌خورد. (وزنهٔ m_1 قائم حرکت می‌کند.) سرعت نخ را موقع ترک میز پیدا کنید.

جواب: $v=\sqrt{\dfrac{2m_1+m_2}{m_1+m_2}g.L}$

۸ـ اسکی‌بازی که با سرعت v حرکت می‌کند می‌خواهد از کوهی بالا برود. معلوم کنید تا چه ارتفاعی خواهد توانست با این سرعت اولیه بالا برود.

جواب: $h=\dfrac{v^2}{2g(1+\frac{k}{tg\alpha})}$

۹ـ منحنی نمایش انرژی جنبشی و پتانسیل و کل انرژی مکانیکی جسمی را معلوم کنید که با سرعت اولیهٔ $v_0=9/8\,m/s$ در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب شده است.

۱۰ـ چرخی به شعاع R و جرم m در مقابل یک پله به ارتفاع h قرار دارد. کمترین نیروی افقی لازم F را محاسبه کنید که باید به محور چرخ وارد کرد تا از روی پله بالا رود. از نیروی اصطکاک صرف نظر کنید.

فصل ۹

مرکز جرم-بقای اندازه حرکت خطی

۹-۱- مقدمه

در این فصل به تعریف مرکز جرم اجسام می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان موضع آن را محاسبه کرد. در فصل بعد آن دسته از خواص مرکز جرم را مورد بحث قرار می‌دهیم که برای توصیف چگونگی حرکت اجسام بزرگ با مجموعه‌هایی از ذرات مفید هستند.

برای سادگی می‌پذیریم که دستگاه، متشکل از دو ذره است. این فرض از کلیت مسئله نمی‌کاهد و آنچه نتیجه می‌شود به راحتی تعمیم‌پذیر است.

در حرکت انتقالی، جابجایی تمام نقاط جسم در طول زمان یکسان است و بنابراین حرکت یک نقطه به منزله حرکت کل جسم است. اما در حرکت دورانی یا حرکت ارتعاشی وضع چنین نیست و در فصلهای بعد خواهیم دید که بردار جابجایی نقاط جسم با هم فرق می‌کند. اما در این حالت‌ها نیز نقطه‌ای وجود دارد (بهتر بگوییم، چنین نقطه‌ای را تصور می‌کنیم) به نام مرکز جرم که حرکتش مانند حرکت ذره‌ای است که تحت تأثیر همان نیروهای خارجی قرار دارد. با حل یک مسئله، مرکز جرم را تعریف

می‌کنیم.

۹ـ۲ـ مسئله مرکز جرم

حرکت دستگاهی متشکل از دو ذره p_1 و p_2 به جرمهای m_1 و m_2 را بررسی کنید.

حل. فرض می‌کنیم که نیروهای خارجی وارد بر دو ذرهٔ p_1 و p_2 به ترتیب $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ باشد. علاوه بر آن مطابق قانون سوم نیوتن اثر متقابل دو ذره را بر هم با نیروهای عمل و عکس‌العمل $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

آنگاه، طبق قانون دوم نیوتن:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1=\vec{F}_1+\vec{F}_{21}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2=\vec{F}_2+\vec{F}_{12}$$

که در آن $\vec{r}_1=\vec{r}_1(t)$ و $\vec{r}_2=\vec{r}_2(t)$ به ترتیب بردارهای جابجایی دو ذره ۱ و ۲ است. حرکت کلی دستگاه شامل دو ذره چنین است:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1+m_2\ddot{\vec{r}}_2=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)+(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}) \qquad (۹ـ۱)$$

اکنون نقطه‌ای در فضا فرض می‌کنیم که بردار جابه‌جایی آن، $\vec{r}_{cm}$، با رابطه زیر تعریف شود:

$$\vec{r}_{cm}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (۹ـ۲)$$

به نظر می‌رسد تعریف این نقطه از نظر اصولی امکان‌پذیر باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}$ و $M=m_1+m_2$ باشد. M جرم کل دستگاه و $\vec{F}$ کل نیروی خارجی وارد بر دستگاه است. از طرفی بعد از دو بار مشتق‌گیری از رابطهٔ (۹ـ۲) خواهیم داشت:

$$M\ddot{\vec{r}}_{cm}=m_1\ddot{\vec{r}}_1+m_2\ddot{\vec{r}}_2=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F} \qquad (۹ـ۳)$$

و این همان قانون حرکت نیوتن است. به عبارت دیگر دستگاه شامل دو ذره p_1 و p_2

طوری حرکت می‌کند که گویی تک ذره‌ای است به جرم M که در نقطه‌ای با خاصیت رابطه (۹-۲) متمرکز شده و تحت تأثیر نیروی برآیند $\vec{F}$ در حرکت است. نقطه تعریف شده بالا را مرکز جرم دستگاه می‌نامیم. در مورد تعداد بیشتر ذرات و همچنین هنگامی که توزیع جرم در یک دستگاه یکنواخت است به ترتیب دو رابطه زیر را داریم:

(۹-۴) الف) $\vec{r}_{cm}=\dfrac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}$ ب) $\vec{r}_{cm}=\dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$

رابطه بالا را اولین گشتاور جرم برای سیستم می‌نامیم. رابطه (۹-۱) بیان می‌کند که حرکت مرکز جرم مجموعه‌ای از ذرات چنان است که گویی تمام جرم سیستم در مرکز جرمش متمرکز شده است و تمامی نیروهای خارجی بر این نقطه اثر می‌کنند. وقتی نیروی خارجی نیروی ثقل باشد این نیرو به مرکز ثقل یا گرانیگاه جسم اثر می‌کند، به شرط آنکه از تغییرات جزیی شتاب ثقل g بر حسب فاصله جسم از مرکز زمین صرفنظر کنیم.

۹-۳- اندازه حرکت خطی سیستم ذرات

اندازه حرکت خطی یک ذره عبارتست از بردار $\vec{p}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

که در آن m جرم ذره و $\vec{v}$ بردار سرعت ذره است. با این تعریف قانون نیوتن به صورت زیر درمی‌آید:

$$\vec{F}_{ext}=\frac{m d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹-۵)$$

میزان تغییر اندازه حرکت هر جسم متناسب با برآیند نیروهای خارجی است که بر جسم اثر می‌کند و این تغییر در امتداد نیرو است. سیستم ذرات در یک دستگاه مرجع خاص دارای اندازه حرکت کل $\vec{p}$ است که بر حسب تعریف برابر حاصل جمع برداری اندازه حرکتهای تک تک ذرات در همان دستگاه مرجع می‌باشد. یعنی:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_n\vec{v}_n \qquad (۶\text{-}۹)$$

اگر این رابطه را با (۹-۳) مقایسه کنیم فوراً به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\vec{p}=M\vec{v}_{cm} \qquad (۷\text{-}۹)$$

این تعریف دیگری است برای اندازه حرکت سیستم ذرات. به عبارت دیگر این معادله بیان می‌کند که: «اندازه حرکت کل سیستمی از ذرات برابر است با حاصلضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن».

۹-۴- بقای اندازه حرکت خطی

فرض می‌کنیم که برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم صفر باشد. در این صورت بنابر معادله (۹-۵) خواهیم داشت:

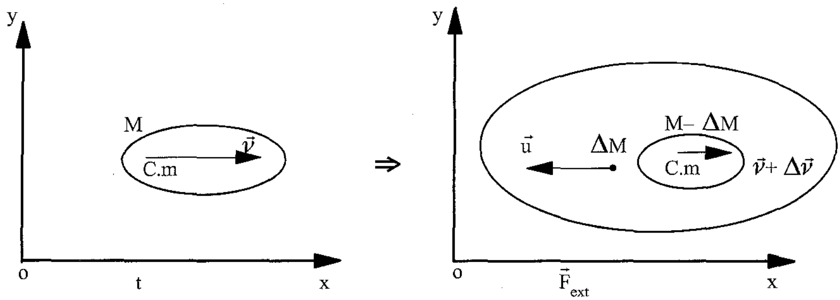
$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{p}= \text{ثابت} \qquad (۷\text{-}۹)'$$

یعنی اگر برآیند نیروی‌های خارجی وارد بر یک سیستم صفر باشد بردار اندازه حرکت کل سیستم ثابت می‌ماند. این نتیجه مهم را اصل بقای اندازه حرکت خطی می‌نامیم و پس از اصل بقای انرژی، دومین اصل بقایی است که تاکنون به آن برخورده‌ایم. قانون بقای اندازه حرکت خطی در تمامی محدوده فیزیک و جایی که قانون نیوتن نیز صادق نیست معتبر است. بنابراین در استنتاج این قانون باید فرمهایی قوی‌تر از آنچه به کار برده‌ایم (قانون عمل و عکس‌العمل) به کار برده باشیم. از قانون سوم نیوتن برای توجیه این فرض استفاده کردیم که مجموع نیروهای داخلی وارد بر تمام ذرات صفر است. ولی این شکل قانون سوم با این فرض که نیروهای داخلی یک ذره نتیجه جفت نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت بین جفت اتمهای مختلف است تا حدودی ساختگی و مجازی است. نیروهای داخلی در واقع نیروهای چند جسمی هستند نه دو جسمی که علاوه بر بستگی به فاصله دو اتم و طرز قرارگرفتن آنها در فضا، به موضع اتمهای مجاور نیز بستگی دارند. در حالت کلی قانون بقای اندازه حرکت خطی را بدون استفاده از قانون سوم نیوتن و به کمک قضیه کارهای مجازی ثابت می‌کنیم.

۹ـ۵ـ بررسی سیستمهای با جرم متغیر

تاکنون دستگاههایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که جرم آنها ثابت بوده است. اما دستگاههای مختلفی می‌توان یافت که هنگام آزمایش و در طول حرکت، جرم آنها نیز تغییر می‌کند. با طرح دو مثال، موضوع را بهتر پی‌گیری می‌کنیم.

مثال ۹ـ۱: حرکت موشک



دستگاه به جرم M را در نظر می‌گیریم که مرکز جرم آن نسبت به ناظر ساکن xoy با سرعت $\vec{v}$ در حرکت است و نیروی خارجی $\vec{F}_{ext}$ نیز به آن وارد می‌شود. پس از زمان Δt همپیکری دستگاه به صورت شکل دوم است. جرم ΔM از دستگاه خارج شده و مرکز جرم آن مجموعه نسبت به ناظر ساکن با سرعت u در خلاف جهت حرکت دستگاه حرکت می‌کند. جرم دستگاه این بار $M-\Delta M$ می‌شود، سرعت مرکز جرم آن $\vec{v}+\Delta\vec{v}$ می‌شود.

$$\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{p}}{t}\simeq\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{[(M-\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v})+\vec{u}\Delta M]-M\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۹ـ۸)$$

$$=M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+[\vec{u}-(\vec{v}+\Delta\vec{v})]\frac{\Delta M}{\Delta t}$$

اگر $\Delta t\to 0$ میل کند به شکل اول نزدیک می‌شویم. $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ به $\frac{d\vec{v}}{dt}$ تبدیل می‌شود و ΔM میزان جرم خارج شده از دستگاه است پس منفی است، یعنی M بر حسب t تابعی نزولی می‌شود. بنابراین $\frac{\Delta M}{\Delta t}\to-\frac{dM}{dt}$ و در نتیجه در تقریب مرتبه اول:

$$\vec{F}_{ext}=M\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dM}{dt}-\vec{u}\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}(M\vec{v})-\vec{u}\frac{dM}{dt} \qquad (۹\_۹)$$

که همان قانون دوم نیوتن است. کمیت $\vec{V}_{rel}=\vec{u}-(\vec{v}+\Delta\vec{v})$ سرعت نسبی جرم خارج شده نسبت به سرعت جسم اصلی است.

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_{ext}+(\vec{u}-\vec{v})\frac{dM}{dt}=\vec{F}_{ext}+\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} \qquad (۱۰\_۹)$$

عبارت $\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$ عبارتست از میزان تغییر انتقال اندازه حرکت خطی به داخل (یا خارج) دستگاه توسط جرمی که از دستگاه خارج (یا به آن وارد) می‌شود. این کمیت به صورت نیرویی تعبیر می‌شود که جسم خارج شده از (یا وارد شده به) دستگاه روی آن اعمال می‌کند. در موشک این نیرو را نیروی پیشران می‌نامیم و هدف این است که هر چه ممکن است بزرگتر شود. بدین منظور باید تا جایی که ممکن است جرم بیشتری در واحد زمان از موشک خارج شود و سرعت جرم خارج شده نسبت به موشک هم تا حد امکان کم باشد یا در مورد ارّابه و واگن و مسلسل، $\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$ به عنوان نیروی واکنشی عمل می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم $\vec{F}_{ext}=0$ باشد آنگاه:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

برای راحتی مسئله را در یک بعد بررسی می‌کنیم.

$$d\vec{v}=V_{rel}\frac{dM}{M}\Rightarrow\int_{v_\circ}^{v}dV=\int_{M_\circ}^{M}V_{rel}\frac{dM}{M}$$

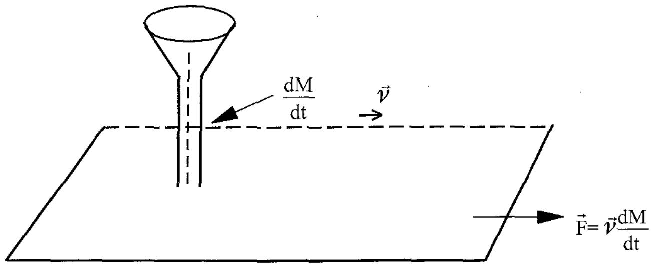
$$\vec{v}-\vec{v}_\circ=V_{rel}\ln\frac{M}{M_\circ}=-V_{rel}\ln\left(\frac{M_\circ}{M}\right)=-V_{rel}\ln\left(1+\frac{M_\circ-M}{M}\right) \qquad (۱۱\_۹)$$

$M_\circ>M$ است. چنانچه $v_\circ=0$ باشد، و با جرم اولیه $M_\circ$ شروع به حرکت کند داریم:

$$\frac{v}{V_{rel}}-\ln\left(\frac{M}{M_\circ}\right)\Rightarrow\frac{V_{final}}{V_{rel}}=\ln\frac{M_{final}}{M_\circ}\Rightarrow\frac{M_{final}}{M_\circ}=e^{-V_{final}/V_{rel}} \qquad (۱۲\_۹)$$

V_{rel} سرعت خروج گازها از دستگاه است.

مثال ۹-۲: قیف و تسمه متحرک



در این مسئله نیرو صرفاً ناشی از تغییر جرم است و سرعت در حین حرکت ثابت می‌ماند. باید چنین باشد یعنی تسمه انتقال با سرعت یکنواخت حرکت کند. همانند رابطهٔ (۹-۹) داریم:

$$F_{ext}=\frac{d}{dt}(MV)-u\ \frac{dv}{dt}=M\frac{dM}{dt}+V\frac{dM}{dt}-u\frac{dM}{dt}$$

در اینجا $\frac{dv}{dt}=\circ$، $u=\circ$ است، یعنی چیزی به‌طور نسبی از سیستم در خلاف جهت حرکت خارج نمی‌شود. برعکس طبق رابطه $V_{rel}=u-v$، داریم $V_{rel}=-V$؛ پس $u=\circ$ می‌شود. یعنی ناظری که روی تسمه ساکن ایستاده است می‌بیند که ذرات شن و قیف با سرعت افقی V در خلاف جهت سرعت تسمه در آزمایشگاه حرکت می‌کند.

$$F_{ext}=V\frac{dM}{dt}$$

$$P=F.V=V.V\ \frac{dM}{dt}=V^{۲}\frac{dM}{dt}=۲\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}MV^{۲})=۲\frac{dK}{dt}$$

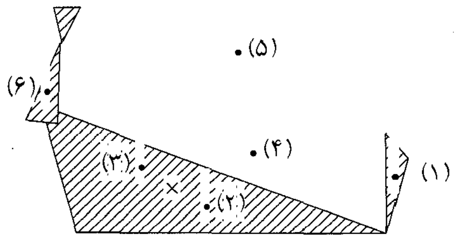
یعنی توان لازم برای حفظ حرکت تسمه دو برابر میزان تغییر (افزایش) انرژی جنبشی دستگاه است. پس بقای انرژی مکانیکی چگونه مطرح و توجیه می‌شود؟

۹-۶-راهنمایی پاسخ به پرسشها

۱-لزومی ندارد که در مرکز جرم یک جسم، جرمی وجود داشته باشد و ممکن است در بعضی موارد مرکز جرم یک دستگاه خالی از ذرات جسم باشد. از طرفی به نظر

می‌رسد مرکز جرم جسم هر جسم در اغلب موارد در داخل جسم قرار می‌گیرد.

۲ـ اگر جسمی مانند شکل زیر داشته باشیم و شش نقطه پیشنهادی به عنوان مرکز جرم، می‌توانیم مرکز جرم آن را حدس بزنیم. چنانچه مرکز جرم مثلث بزرگ را تعیین کنیم (از طریق برخورد میانه‌ها)، نقطه‌ای می‌شود که با علامت (×) مشخص کرده‌ایم، بنابراین حدس می‌زنیم مرکز جرم کل دستگاه نقطهٔ (۳) باشد.



۳ـ مرکز جرم در اصل یک نقطهٔ فرضی است، که فاصلهٔ آن از یک مبدأ به وسیلهٔ فرمول احتمالات شناخته می‌شود و خصوصیت آن این است که به جای بررسی حرکت ذره به ذرهٔ یک جسم، می‌توانیم حرکت ذره‌ای فرضی با جرم معادل جرم جسم واقع در مرکز جرم را بررسی کنیم. بنابراین هیچ دلیلی مبنی بر اینکه حتماً در مرکز جرم، جرمی وجود داشته باشد به نظر نمی‌رسد.

۴ـ مرکز جغرافیایی و مرکز جمعیت، هر دو عملی مشابه با مرکز جرم انجام می‌دهند. تنها تفاوت آنها این است که پارامتر مورد بررسی برای مرکز جغرافیایی واحد سطح جغرافیایی و پارامتر مورد بررسی برای تعیین مرکز جمعیت تعداد انسانهایی است که در نواحی مختلف زندگی می‌کنند و در هر دو مورد پارامترها مانند ذرات جسم برای تعیین مرکز جرم، عمل می‌کنند. چنانچه مرکز جغرافیایی با مرکز جمعیت تفاوت داشته باشد، می‌فهمیم توزیع جمعیت به شکل نایکنواخت صورت گرفته است.

۵ـ هر دستگاه مرجعی که انتخاب کنیم، برای هر نقطه، مختصات مخصوص به همان نقطه را خواهیم داشت. بنابراین محل مرکز جرم مجموعه‌ای از ذرات، نسبت به خود ذرات، به دستگاه مرجع به کار رفته برای تعریف این مجموعه بستگی ندارد.

۶- استفاده از نیروی ترمز در اصل استفاده از یک نیروی خارجی به نام اصطکاک با زمین است که روی مرکز جرم تأثیر می‌گذارد.

۷- تکانه (یا اندازه حرکت) یک کمیت برداری است که با سه معادله نرده‌ای که هر کدام مربوط به یک محور مختصات است، هم‌ارز است. بنابراین پایستگی تکانه خطی برای حرکت یک دستگاه سه شرط به دست می‌دهد. در حالی که پایستگی انرژی برای حرکت یک دستگاه فقط یک شرط در اختیار ما قرار می‌دهد، چون انرژی یک کمیت نرده‌ای است. بنابراین یک دستگاه، بدون داشتن تکانه، می‌تواند انرژی داشته باشد ولی بدون داشتن انرژی، نمی‌تواند تکانه داشته باشد، زیرا برای داشتن تکانه باید حرکت کند و تا انرژی نداشته باشد نمی‌تواند حرکت کند.

۸- طبق قانون عمل و عکس‌العمل، هر عملی را عکس‌العملی است مساوی و مخالف آن، اما چنانچه شرایط محیطی و حرکتی به شکلی باشد که نیروی عکس‌العمل کم شود باعث حرکت در جهت مورد نظر می‌شود. اما به نظر می‌رسد چنانچه پنکه‌ای را درون قایقی روشن کنیم، اگر بادی که پنکه تولید می‌کند به اندازه کافی زیاد باشد، یعنی در واقع نیروی القایی تولید شده توسط پنکه به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌تواند قایق را به حرکت درآورد و این درست مانند حالتی است که شخصی داخل قایق نشسته و با پارو زدن یک نیروی خارجی به قایق القا می‌کند و باعث حرکت آن می‌گردد.

۹- در مورد نیروهای خارجی وارد بر جرمهای ثابت داریم:

$$F_{ext}=\frac{d(Mv)}{dt}=M\frac{dv}{dt}$$

ولی در حالتی که جرم متغیر است بعد از مشتق‌گیری از Mv خواهیم داشت:

$$F_{ext}=\frac{d(Mv)}{dt}=M\frac{dv}{dt}+v\frac{dM}{dt} \Rightarrow (F_{ext}-M\frac{dv}{dt})/(\frac{dM}{dt})=v$$

که این رابطه کاملتر است، چون شامل حالت قبل نیز می‌باشد، ولی نمی‌توان آن را به عنوان یک حالت کلی در نظرگرفت، چون سرعت v از دید هر ناظر در هر دستگاه فرق

می‌کند و یک کمیت نسبی است. در این صورت رابطه (۹ـ۹) که شامل سرعت نسبی u علاوه بر $\frac{dp}{dt}$ می‌باشد، دچار تناقض نخواهد شد.

۱۰ـ هنگامی که دستگاهی از ذرات را در نظر می‌گیریم، تفاوتی نمی‌کند که ذرات، جامد باشند یا مایع و یا گاز، در هر حال حرکت در تمامی حالات را می‌توانیم از روی حرکت مرکز جرم بررسی کنیم، و البته هر تحولی در حالات آنها صورت گیرد، همان تغییرات روی مرکز جرم نیز تأثیر می‌گذارد. در هر صورت تکانه کل، یعنی تغییرات تکانه در کل دستگاه ثابت می‌ماند چون در فضای بدون گرانش می‌باشد!!

۱۱ـ در تمام موارد نیروهای خارجی وارد بر مرکز جرم را بررسی می‌کنیم و نیروهای داخلی را خنثی فرض می‌کنیم. در فضای بین سیارات نیروی خارجی وجود نخواهد داشت و موشک نباید در آنجا عمل کند. اما در اصل چنین نیست، چرا؟

۹ـ۷ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ هستهٔ اتم پولونیم Po^{210} ذره α با سرعت ۱۶۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه پرتاب می‌کند. معلوم کنید بقیهٔ هستهٔ پولونیم در اثر این عمل با چه سرعتی حرکت می‌کند.

حل. طبق اصل بقای اندازهٔ حرکت، mv مقداری ثابت است. حال اگر جرم ذرهٔ α را m و جرم هستهٔ به دست آمده پس از صدور α را M نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$Mv_1+mv_2=0\rightarrow v_1=-\frac{mv_2}{M}\simeq -30\,\mathrm{km/s}$$

(توجه: $m=4$ و $M=210-4=206$ واحد جرم اتمی است).

۲ـ دو قایق مثل هم در آب ساکنی مطابق قانون اول به سوی هم حرکت می‌کنند. سرعت حرکت آن‌ها $v_1=0/6\,\mathrm{m/s}$ است. موقعی که دو قایق به مقابل هم می‌رسند از قایق اول با همان سرعت v_1 جسمی به جرم $m=60\ \mathrm{kg}$ را به قایق دوم پرتاب می‌کنند. قایق دوم به راه خود ادامه می‌دهد ولی سرعت حرکتش $v_2=0/4\,\mathrm{m/s}$ می‌شود. جرم قایق دوم را معلوم کنید.

حل. طبق اصل بقای اندازهٔ حرکت مجموع اندازه حرکت جسم و قایق قبل از پرتاب با اندازه حرکت بعدی آنها مساوی است.

$$Mv_1+mv'=(m+M)v_2$$

که v_1 سرعت قایق، v' سرعت جسم، v_2 سرعت قایق با جسم یک جا است. $v_1=-v'$ می‌شود، زیرا به سوی هم حرکت می‌کنند. لذا می‌نویسیم:

$$Mv_1-Mv_2=mv_1+mv_2 \Rightarrow M=\frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}m=300\ kg$$

۳ـ سه قایق مثل هم که وزن هر کدام p است با سرعت v به دنبال هم حرکت می‌کنند. از قایق وسطی در یک زمان دو جسم هر کدام به وزن p_1 را با سرعت نسبی u یکی به قایق جلویی و دیگری به قایق عقبی پرتاب می‌کنند. سرعت هر قایق را پس از این پرتاب معلوم کنید.

حل. مقدار اندازه حرکت قایق اول قبل از انداختن جسم $\frac{p}{g}v$ بوده است. مقدار اندازه حرکت جسم پرتاب شده به قایق جلویی $\frac{p_1}{g}(v+u)$ می‌شود. در این صورت طبق اصل بقای اندازه حرکت برای قایق جلویی می‌نویسیم:

$$\frac{p+p_1}{g}v_1=\frac{p}{g}v+\frac{p_1}{g}(v+u) \Rightarrow v_1=\frac{p_1(v+u)+pv}{p+p_1}$$

برای قایق وسطی اصل بقای اندازهٔ حرکت به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{p+2p_1}{g}v=\frac{p}{g}v_2+\frac{p_1}{g}(v-u)+\frac{p_1}{g}(v+u) \Rightarrow v_2=v$$

برای قایق آخری می‌نویسیم:

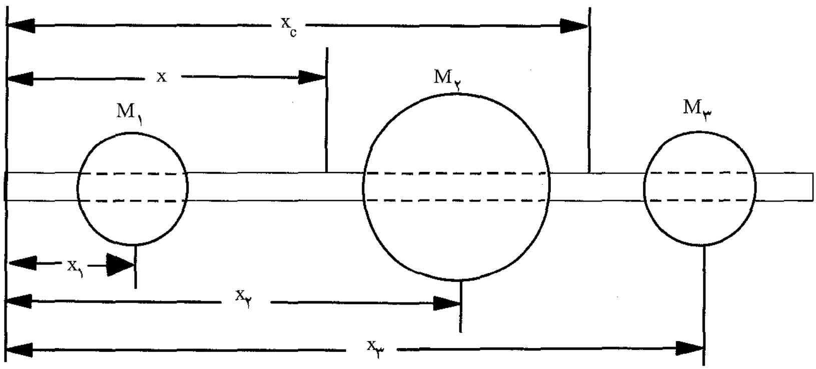
$$\frac{p+p_1}{g}v_3=\frac{p}{g}v+\frac{p_1}{g}(v-u_1) \Rightarrow v_3=\frac{p_1(v-u)+pv}{p+p_1}$$

۴ـ یک میله نازک بدون وزن از مرکز سه کره با جرمهای M_1 و M_2 و M_3 می‌گذرد. فاصله مرکز کره اول از انتهای میله x_1 فاصله مرکز کره دوم از انتهای میله x_2 و

فاصله مرکز کره سوم از انتهای میله x_3 است. فاصله مرکز ثقل دستگاه را از انتهای میله حساب کنید.

حل. ابتدا محل مرکز ثقل دو کره اول را پیدا می‌کنیم. واضح است با پیدا کردن این نقطه فاصله x_2-x_1 به دو قسمت که نسبت بین آنها عکس نسبت جرم M_1 و M_2 است تقسیم شده است. اگر فاصله این نقطه از انتهای میله x باشد، داریم:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{M_2}{M_1} \qquad x=\frac{(M_1x_1+M_2x_2)}{M_1+M_2}$$



در این نقطه مجموع وزن دو کره وارد می‌شود که آن را M فرض می‌کنیم. اگر نتایج حاصله را در مورد جرم M و M_3 به کار بریم که به ترتیب در فواصل x و x_3 از انتهای میله قرار دارند، ملاحظه می‌کنیم مرکز ثقل دستگاه متشکل از سه کره در فاصله x_0 از انتهای میله قرار دارد. اگر به جای M و x، مقدار قرار دهیم نتیجه چنین می‌شود:

$$x_0=\frac{Mx+M_3x_3}{M+M_3}=\frac{M_1x_1+M_2x_2+M_3x_3}{M_1+M_2+M_3}$$

به‌طور کلی تعداد کره‌ها هر چقدر باشد رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}M_ix_i/\sum_{i=1}^{n}M_i$$

۵- ریسمانی را از روی قرقره‌ای که در ارتفاع زیاد آویزان شده است عبور داده دو میمون هم‌وزن هر کدام از یک طرف بالا می‌روند، سرعت یکی نسبت به ریسمان بیشتر از دیگری است. کدام زودتر به قرقره می‌رسد. قرقره و ریسمان هر دو، بدون وزن هستند.

حل. چون نیروی خارجی به میمونها وارد نمی‌شود اندازه حرکت آنها ثابت می‌ماند. نتیجه می‌شود که میمونها به یکدیگر تنها از طریق طناب اندازه حرکت مساوی وارد می‌کنند. پس هر چه میمونها با سرعت بیشتری از طناب بالا روند ارتفاعشان به میزان مساوی نسبت به زمین بیشتر می‌شود، چون جرمشان یکی است. طناب از روی قرقره به طرف میمونی که با سرعت بیشتری بالا می‌رود حرکت می‌کند تا میزان بالا رفتن میمونها نسبت به زمین مساوی باشد. پس هر دو میمون با هم به قرقره می‌رسند.

به طریق ساده‌تر نیز می‌توان مسئله را حل کرد که کاملاً روشن می‌باشد. فرض کنیم میمونها روی یک سطح کاملاً صاف و افقی قرار گرفته و دو طرف طنابی را در دست دارند. چون نیروی خارجی به آنها وارد نمی‌شود، مرکز ثقل دو میمون باید ثابت باشد، پس فقط میمونها می‌توانند فواصل مساوی نسبت به مرکز ثقل در زمانهای مساوی طی کنند و به سرعت کشیدن طناب در دست میمونها بستگی ندارد. پس هر دو میمون به نقطه وسط فاصله اولیه بین میمونها هم زمان می‌رسند.

با همین استدلال می‌توان مسئله را وقتی دو میمون جرمشان مساوی نباشد حل کرد. (هر کدام سبک‌تر باشد زودتر بالا می‌رود).

۶- قایقی در آب ساکن بدون حرکت است. مردی به جرم ۶۰ کیلوگرم از یک طرف قایق به طرف دیگر در انتهای آن می‌رود. جرم قایق ۱۲۰ کیلوگرم و طول آن ۳ متر است. قایق چند متر تغییر مکان می‌دهد؟ از مقاومت آب صرفنظر می‌شود.

حل. فرض می‌کنیم قایقران با حرکت یکنواخت در مدت زمان t فاصله سر تا ته قایق را طی کند. چون نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود، اندازه حرکت دستگاه قایق با

قایقران تغییر نمی‌کند. وقتی قایقران به حرکت درمی آید، قایق در جهت مخالف طوری حرکت می‌کند که اندازه حرکت دستگاه صفر باشد. اگر در همان مدت زمان t قایق فاصله x را در جهت مخالف طی کند، سرعت قایقران نسبت به زمین در این مدت $\frac{L-x}{t}$ و سرعت قایق $\frac{x}{t}$ است. از قانون بقاء اندازه حرکت نتیجه می‌شود:

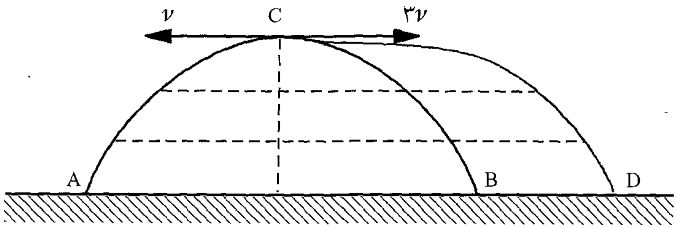
$$\frac{m(L-x)}{t}-\frac{Mx}{t}=0 \qquad x=\frac{mL}{M+m}=\frac{60\times 3}{180}=1\,m$$

همین نتیجه را می‌توان از قانون بقای اندازه حرکت نتیجه گرفت. چون نیروی خارجی بر دستگاه وارد نمی‌شود، مرکز ثقل دستگاه باید ثابت باشد. وقتی قایقران در جلو قایق ایستاده است مرکز ثقل قایق با قایقران روی خط قائم عبور کننده از A قرار دارد به‌طوری که AC= ۰/۵ m است. وقتی قایقران به عقب قایق برمی‌گردد مرکز ثقل دستگاه روی خط قائم ماربر نقطه B قرار می‌گیرد، به‌طوری که BC= ۰/۵ m است. چون نیروی خارجی وقتی قایقران از جلو به عقب قایق می‌رود، به دستگاه وارد نمی‌شود مرکز ثقل دستگاه ساکن می‌ماند و قایق باید طوری حرکت کند که محل نقطه B به همان نقطه که A قرار داشت برود. یعنی قایق فاصله AB معادل یک متر را طی می‌کند.

۷ـگلوله‌ای تحت زاویه معینی شلیک می‌شود. در ارتفاع اوج مسیر سهمی، گلوله به دو جزء مساوی تقسیم می‌شود. یک جزء به نقطه پرتاب اولی برگشته عکس مسیر اولیه را طی می‌کند. جزء دوم در چه محل به زمین می‌افتد؟ آیا هر دو جزء در یک لحظه به زمین می‌رسند؟ از مقاومت هوا صرفنظر می‌کنیم.

حل. چون قسمت اول آن در اثر انفجار برمی‌گردد و از نقطه اوج سهمی در امتداد مسیر قبلی به نقطه شروع حرکت می‌رسد، پس نتیجه می‌گیریم که در اثر انفجار اندازه حرکت mv همان مقداری که قبلاً داشته در جهت مخالف پیدا می‌کند. پس تغییر اندازه حرکت این قسمت ۲m – می‌باشد. از قانون بقای اندازه حرکت نتیجه می‌شود که قسمت دیگر در اثر انفجار همان مقدار اندازه حرکت در جهت مخالف دریافت کرده است. پس در همان جهت حرکت اولیه تغییر اندازه حرکت آن ۲mv + می‌شود. یعنی اندازه

حرکت قسمت دوم پس از انفجار برابر $3mv$ است، و حرکتش را از نقطه اوج سهمی با سه برابر سرعت اولی ادامه می‌دهد، و پس در امتداد افقی مسافتی معادل سه برابر قسمت اول طی می‌کند، یعنی برد آن دو برابر موقعی است که انفجاری در کار نباشد. چون هر دو قسمت در موقع انفجار در امتداد قائم مؤلفه اندازه حرکت ندارند، سرعت اولیه آن در این امتداد صفر بوده و از نقطه اوج سقوط آزاد خواهند داشت، پس در یک لحظه به زمین برخورد می‌کنند.



به طریق دیگر می‌توان مسئله را حل کرد. از این مطلب استفاده می‌کنیم که در انفجار مزبور نیروهای خارجی دخالت ندارند، پس سرعت مرکز ثقل گلوله قبل و بعد از انفجار تغییر نمی‌کند. چون اضافه بر آن هر دو قسمت در امتداد قائم سقوط آزاد دارند، مرکز ثقل گلوله همان مسیر سهمی را طی می‌کند که انفجاری در کار نباشد. چون دو قسمت جرمشان مساوی است همیشه فاصلهٔ دو قسمت نسبت به سهمی مسیر مرکز ثقل قرینه می‌باشد. یعنی قسمت دوم در نقطه D سقوط می‌کند به‌طوری که BD مساوی ABاست.

۸ـ مرکز جرم یک صفحهٔ نیمدایره‌ای همگن را پیداکنید. شعاع دایره را a فرض کنید.

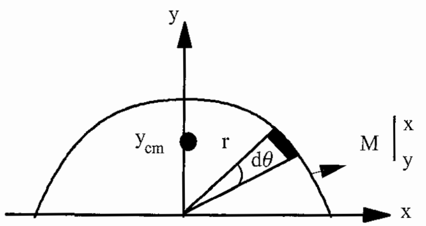
حل. در نقطه‌ای مانند $M\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ که $y=r\sin\theta$ و x مهم نیست، زیرا نیمدایره نسبت به محور yها متقارن است و مؤلفه x مرکز جرم صفر می‌شود.

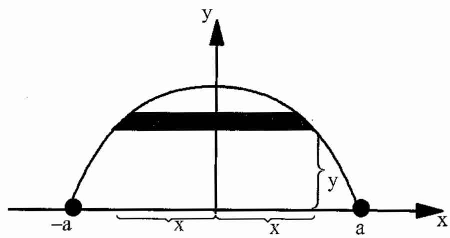
$\rho=$ چگالی سطحی $\qquad dm=\rho ds$

$ds=$ کل مساحت عنصر کوچک انتخابی $\quad dm=\rho dr.dL=\rho dr.rd\theta$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int y\rho r dr.d\theta=\frac{\rho\int_0^a\int_0^\pi r^2\sin\theta drd\theta}{\rho\int_0^a\int_0^\pi rdrd\theta}\Rightarrow y_{cm}=\frac{\int_0^a\left[-r^2\cos\theta\right]_0^\pi dr}{\int_0^a\left[r\theta\right]_0^\pi dr}$$

$$=\frac{\int_0^a 2r^2dr}{\int_0^a \pi rdr}=\frac{2\frac{a^3}{3}}{\pi\frac{a^2}{2}}=\frac{4a}{3\pi}$$





راه دوم: مستطیل کوچکی را انتخاب می‌کنیم و از ρاستفاده می‌کنیم.

$dm=\rho ds \qquad\qquad dm=\rho dy.2x$

رابطه بین x و y را به وسیله معادله دایره به دست می‌آوریم:

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^a y\rho.dy.2x=\frac{2\rho\int_0^a ydy\sqrt[2]{a^2-y^2}}{\rho\int 2ydx}$$

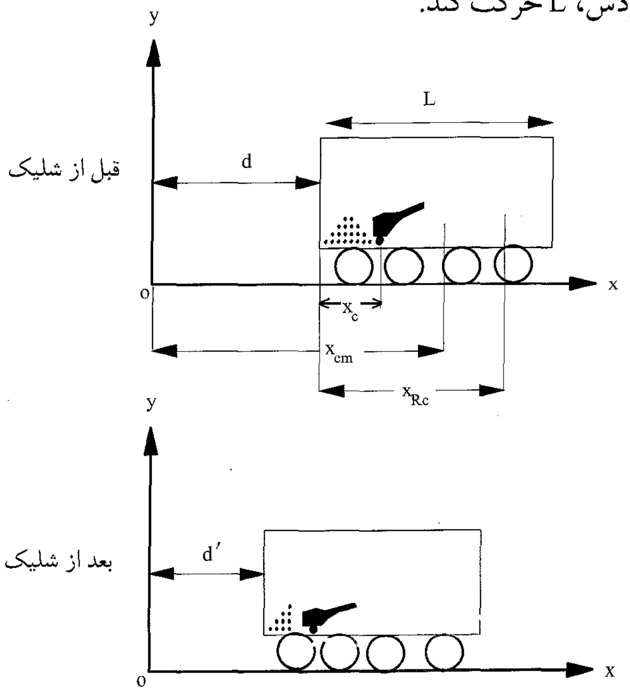
$$x^2+y^2=a^2\Rightarrow x=\sqrt{a^2-y^2}$$

$$y_{cm}=\frac{2\int_0^a ydy\sqrt[2]{a^2-y^2}}{\pi a^2}=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin 2\theta\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}{\pi a^2}d\theta$$

$$y^2=a^2\sin^2\theta \qquad 2ydy=2a^2\cos\theta\sin\theta\, d\theta=a^2\sin 2\theta\, d\theta$$

$$y_{cm}=\frac{2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^{2}\theta\cos\theta\, d\theta}{\pi}=2a\int_{0}^{\pi}\left[\frac{2\sin\theta\cos^{2}\theta}{\pi}\right]d\theta=\frac{4a}{\pi}\left[\frac{-1}{3}\cos^{3}\theta\right]_{0}^{\theta}=\frac{4a}{3\pi}$$

۹- یک توپ و تعدادی گلوله در داخل یک واگن در بسته مطابق شکل قرار دارند. توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس زده می‌شود. گلوله‌ها بعد از برخورد به دیوار روبرو، در داخل واگن باقی می‌مانند. نشان دهید که با فرض ساکن بودن واگن قبل از شلیک، گلوله‌های توپ به هر نحوی شلیک شوند، واگن نمی‌تواند بیش از طول خودش، L حرکت کند.



حل.

C=canon توپ

R=Rail واگن

b=ball گلوله توپ

مرکز جرم پایدار است و حرکت نمی‌کند. طبق قانون بقای اندازه حرکت داریم:

قبل از شلیک $M_{cm}=(m_c+m_b)(x_c+d)+m_{Rc}(c_{Rc}+d)$

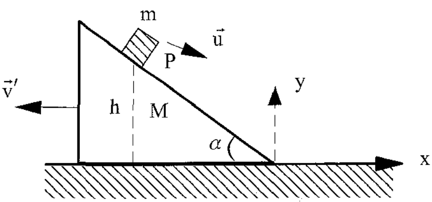
بعد از شلیک $M_{cm}=m_c(x_c+d')+m_{Rc}(x_{Rc}+d')+m_b(L+d')$

در نتیجه:

$$m_cx_c+m_cd+m_bx_c+m_bd+m_{Rc}x_{Rc}+m_{Rc}d=$$
$$m_cx_c+m_cd'+m_{Rc}x_{Rc}+m_{Rc}d'+m_bL+m_bd$$
$$\Rightarrow d-d'=\frac{(L-x_c)m_b}{m_c+m_b+m_{Rc}}=\frac{(L-x_c)m_b}{M}$$

بیشترین مقدار وقتی است که $x_c=0$ باشد. پس چنانچه کسر کوچکتر از یک $\frac{mb}{M}$ در L ضرب شود $d-d'$ از L کمتر خواهد بود. از طرفی اگر m_b همه جرم باشد و $\frac{mb}{M}$ به سمت یک برود، $d-d'$ به سمت L خواهد رفت.

۱۰ـ قطعه‌ای به جرم m بر گوه‌ای به جرم M قرار دارد که خود بر سطحی افقی آرام واقع است. تمام سطوح بدون اصطکاک هستند. اگر سیستم از حال سکون، با نقطه P به عنوان جایگاه m واقع در ارتفاع h بالای سطح افق، شروع به حرکت کند، سرعت گوه را در لحظه‌ای بیابید که جرم m به سطح میز می‌رسد.



حل.

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}'$$

که در آن v' سرعت گوه نسبت به زمین است. u سرعت قطعه m نسبت به گوه، و v سرعت قطعه m نسبت به زمین است. بنابراین:

$$\vec{u}=\hat{i}(u\cos\alpha)-\hat{j}(u\sin\alpha)$$
$$\vec{v}'=-v'\hat{i}$$

آنگاه

$$\vec{v}=(u\cos\alpha-v')\hat{i}-u\sin\alpha\hat{j}$$
$$\Rightarrow v^{2}=u^{2}+v'^{2}-2uv'\cos\alpha$$

اما بقای اندازه حرکت خطی چنین می‌دهد:

$$M\vec{v}'+m\vec{v}=0$$

حرکت بر راستای x را می‌نویسیم:

$$Mv'=m(u\cos\alpha-v')\Rightarrow u=\frac{M+m}{m\cos\alpha}v'$$

بقای انرژی در لحظه‌ای که قطعه m به میز می‌رسد چنین می‌دهد:

$$E_{1}=E_{2}\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}Mv'^{2}+\frac{1}{2}mv^{2}$$
$$mgh=\frac{1}{2}Mv'^{2}+\frac{1}{2}mv^{2}\Rightarrow v^{2}=2gh-\frac{M}{m}v'^{2}$$
$$\Rightarrow 2gh-\frac{M}{m}v'^{2}=\frac{(M+m)}{(m\cos\alpha)^{2}}v'^{2}+v'^{2}-2\frac{M+m}{m\cos\alpha}v'^{2}\cos\alpha$$
$$\Rightarrow v'^{2}=\frac{2gh}{\frac{M}{m}+\frac{(M+m)^{2}}{m^{2}\cos^{2}\alpha}+1-2\frac{M+m}{m}}=\frac{2ghm^{2}\cos^{2}\alpha}{(M+m)(M+m\sin^{2}\alpha)}$$

۹ـ۸ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ با خم کردن جسمی به شکل مثلث که از سیم درست شده است، موضع مرکز جرم آن را پیدا کنید. درمی‌یابید که مرکز جرم در خارج از ذرات جسم قرار می‌گیرد. چگونه این امر را توجیه می‌کنید؟

۲ـ اصل بقای تکانه را هنگامی که در مورد مولکول ئیدروژن منزوی به کار می‌رود شرح دهید.

۳ـ لوبیای جهندهٔ مکزیکی (که وقتی در ظرف قرار می‌گیرند خودبه‌خود به بالا می‌جهند) چگونه عمل می‌کند؟ آیا جهش آن مخالف اصل پایستگی تکانه است؟ آیا مخالف اصل پایستگی انرژی است؟

۴ـ در محدوده‌ای از فضا که گرانش صفر است، آیا فضاپیمایی که با موشک پرتاب می‌شود می‌تواند به سرعتی بیش از سرعت نسبی خروج گازهای حاصل از سوختن برسد؟

۵ـ روشن کنید چگونه از راه آزمایش می‌توانید جای مرکز جرم ورقه‌ای را تعیین کنید.

٦ـ چطور ممکن است شخصی که به حالت سکون روی یک سطح افقی بدون اصطکاک ایستاده است، به کلی از آن سطح خارج شود؟

۷ـ سرعت نهایی آخرین مرحلهٔ یک موشک چند مرحله‌ای خیلی بیشتر از سرعت نهایی یک موشک تک مرحله‌ای با همان وزن کل و همان مقدار سوخت است. این واقعیت را توضیح دهید.

۸ـ انرژی جنبشی انتقالی یک جسم سبک و یک جسم سنگین با هم برابر است. تکانهٔ کدام‌یک بیشتر است؟

۹ـ در پرش ارتفاع آیا ممکن است بدن شخص پرنده از بالای میله بگذرد. در حالی که مرکز جرمش از پایین آن می‌گذرد؟ برای او چه فایده‌ای دارد؟

۱۰ـ شخصی در وسط یک استخر یخ‌زده کاملاً صاف و بدون اصطکاک ایستاده است. او با پرت کردن چیزی می‌تواند حرکت کند. ولی فرض کنید که او چیزی برای پرت کردن ندارد. آیا او بدون انداختن چیزی می‌تواند خودش را به کنار استخر برساند؟

ب) مسائل

۱ـ از چهار آجر که طول هر کدام L است پله‌ای درست شده به‌طوری که هر آجر مقداری از آجر زیری بیرون آمده است. معلوم کنید حداکثر مقداری که یک آجر

از دیگری بیرون می‌زند، چقدر باشد تا به حال تعادل باشند.

جواب: $\frac{۱}{۶}L$، $\frac{۱}{۴}L$، $\frac{۱}{۲}L$

۲ـ چهار کره به وزنهای ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ نیوتن به میلهٔ بی‌وزنی طوری وصل شده‌اند که مرکزهای آنها به فاصلهٔ مساوی از هم قرار گیرند. مرکز ثقل دستگاه را معلوم کنید.

جواب: به فاصله‌های $\frac{۱۳}{۱۲۱}L$، $\frac{۸}{۲۱}L$ از طرفین قرار دارد

۳ـ یک میز که صفحهٔ آن گرد و به شعاع R و به جرم M است روی سه پایه تکیه دارد. از یک سمت این صفحه و مماس بر محیط آن قسمت گردی به شعاع r و به جرم m بریده‌اند. معلوم کنید پایه‌های سه گانه میز در کجاها نصب شوند تا نیروی وارد از آنها بر کف اتاق با هم مساوی باشد.

۴ـ دو عدد تفنگ مشابه در دو طرف ارابه‌ای که آزادانه می‌تواند روی خط آهن حرکت کند در مقابل هم در جهت عکس نصب شده‌اند. زاویه لوله تفنگ طوری میزان شده است که اگر آنها را همزمان آتش کنند، گلوله‌ها به هدف مورد نظر اصابت می‌کند. اگر یکی را کمی زودتر آتش کنند، آیا باز هم گلوله‌ها به هدف می‌خورند. پس از شلیک گلوله دوم ارابه چگونه حرکت می‌کند؟ از اصطکاک بین چرخ و خط آهن صرف نظر می‌کنیم.

۵ـ از موشکی که در راستای قائم پیش می‌رود، با آهنگ $۵\times۱۰^{-۲} m_{\circ} kgs^{-۱}$ گاز بیرون می‌جهد، جرم آغازی موشک $m_{\circ}$ است. سرعت خروج گاز نسبت به موشک برابر است با $۵\times۱۰^{۳} ms^{-۱}$ سرعت و ارتفاع موشک را در پایان $۱۰\ s$ پیدا کنید.

۶ـ خمپاره‌ای که به‌طور افقی با سرعت $۸ kms^{-۱}$ نسبت به زمین حرکت می‌کند در انفجار به سه تکهٔ برابر تقسیم می‌شود. یک تکه با سرعت $۱۶\ kms^{-۱}$ به حرکت افقی خود ادامه می‌دهد. تکهٔ دیگر با زاویهٔ ۴۵° به سوی بالا پرتاب می‌شود و سومی با زاویهٔ ۴۵° زیر خط افقی به سوی پایین حرکت می‌کند. سرعت تکه‌های دوم و سوم را پیدا کنید.

۷ـ مسلم است که می‌توان موشک را با سرعت زیاد پرتاب کرد، اما بیشترین سرعت معقول چقدر است؟ فرض کنید موشکی به محلی پرتاب شود که در آن شتاب گرانش وجود نداشته باشد.

الف) هرگاه سرعت خروج گاز نسبت به موشک $2400\ m.s^{-1}$ باشد و بخواهیم آن را به سرعت $0/001C$ (C سرعت نور) برسانیم، چه کسری از جرم موشک باید سوخت باشد؟

ب) هرگاه سرعت نهایی $3000\ m.s^{-1}$ باشد مقدار این کسر چقدر است؟

۸ـ این مسئله اهمیت مرکز جرم را نشان می‌دهد. طنابی به طول L روی سطح افقی و بدون اصطکاک میزی قرار دارد و ثلث طول آن از یک گوشهٔ میز آویزان است. جرم واحد طول طناب λ است و انتهای دیگر طناب که روی میز است با دست شخصی نگاه داشته شده است. این شخص انتهای طناب را به آرامی می‌کشد تا بخش آویزان آن به روی مسز منتقل شود. چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ مسئله را به دو طریق حل کنید.

الف) نیروی وارده از دست شخص بر طناب و سپس کار این نیرو را حساب کنید. توجه کنید نیرو متغیر است زیرا طول بخشی از طناب که روی میز قرار دارد با زمان تغییر می‌کند.

ب) فرض کنید جرم بخش آویزان طناب در مرکز جرم آن متمرکز است. کار لازم برای جابه‌جایی این نقطه تا سطح میز را حساب کنید. احتمالاً این راه‌حل را ساده‌تر از راه‌حل (الف) می‌یابید. پاسخها با هم چگونه قیاس می‌شوند؟

۹ـ میلهٔ متشابه فولادی به طول $1\ m$ از وسط خم شده و به شکل زاویهٔ قائمه درآمده است. مرکز جرم آن را پیدا کنید. (راهنمایی: جرم هر ضلع زاویهٔ قائمه را می‌توان در وسط آن ضلع فرض کرده).

۱۰ـ زن و مردی که وزن آنها به ترتیب ۶۰۰ و $800\ N$ است، در سورتمه‌ای به وزن $1200\ N$ نشسته‌اند. ناگهان با دیدن حشرهٔ گزنده‌ای مرد با سرعت $5\ ms^{-1}$ در امتداد $30°$ بالای افق به طرف چپ، وزن با سرعت $9\ ms^{-1}$ در امتداد $37°$ بالای افق به راست

می‌پرند. اندازه و جهت سرعت سورتمه را در امتداد افقی، پس از پریدن آنها مشخص کنید.

۱۱- نقاط $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(4,4)$ و $D(0,4)$ به جرمهای $m_A = 1$ و $m_B = m_D = 2$ و $m_C = 4$ مفروض‌اند.

الف) موضع مرکز ثقل E جرمهای m_A و m_C و هم‌چنین مرکز جرمهای m_B و m_D را بیابید.

جواب: $E:(\frac{16}{5}, \frac{16}{5})$, $F:(2,2)$

ب) مرکز ثقل H نقاط E و F که تحت تأثیر ضرایب $m_F = 4$ و $m_E = 0$ هستند کدام است.

جواب: $H:(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$

ج) تحقیق کنید مرکز ثقل چهار نقطه بر H منطبق است.

۱۲- تبدیل دستگاه مختصات ساکن به دستگاه مرکز جرم.

دو پروتون در خلاف جهت یکدیگر از یک نقطه مشترک با سرعتهای $B = 0/5$ تغییر مکان می‌دهند. انرژی و اندازه حرکت یک پروتون نسبت به نقطه مشترک چیست؟

فصل ۱۰

برخورد

۱۰ـ۱ـ مفهوم فیزیکی برخورد و نیروهای ضربه‌ای

وقتی چوب بیسبال را به گوی می‌زنیم و یا هنگامی که دو ماشین با هم تصادف می‌کنند؛ زمانی که توپی را به دیوار می‌کوبیم و یا وقتی ذره α با هسته سنگین در فعل و انفعال است؛ و نیز هنگامی که ذره‌ای بنیادی مثلاً پروتون وارد هسته نقره می‌شود و تشکیل یک ساختمان مرکب می‌دهد؛ و بالاخره آن زمان که تلاشی (decay) خود به خود یک ذره بنیادی را به دو یا چند ذره بررسی می‌کنیم، در تمام این حالتها و در بسیاری از حالتهای مشابه، مفهوم برخورد به معنای عام آن در فیزیک ظاهر می‌شود.

به‌طور کلی تمام برهمکنش‌های میان دو ذره یا دو جسم بدون آنکه لزوماً تماس مکانیکی داشته باشند تحت نام برخورد مطرح می‌شود. در یک برخورد نیروی نسبتاً بزرگی در زمانی نسبتاً کوتاه بر هر یک از ذرات برخورد کننده، اثر می‌کند. نکته خاص و اصلی در برخورد این است که حرکت ذرات مذکور یا حداقل یکی از آنها نسبت به قبل به‌طور ناگهانی تغییر محسوس کند و اینکه بتوانیم به وضوح زمان قبل و بعد از برخورد را از هم تشخیص دهیم. در حین برخورد نیروی موجود به نحو بسیار پیچیده‌ای بر حسب

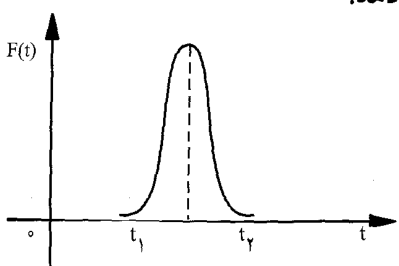
زمان تغییر می‌کند به‌طوری که به دشواری می‌توان آن را اندازه گرفت. «نیروهایی بزرگ که در زمانی کوتاه نسبت به زمان آزمایش عمل می‌کنند نیروهای ضربه‌ای نامیده می‌شوند». توجه داریم که اصول بقا را در تمامی این موارد می‌توان به کار برد.

حتی با وجود نبودن تماس بین ذرات ممکن است از برخورد سخن گفت. مثلاً در پراکندگی ذره α (He^{4}) با هسته‌ای سنگین مانند هسته طلا بدون تماس مکانیکی، یک نیروی نسبتاً قوی در زمانی که نسبت به زمان مشاهدهٔ ذرهٔ α کوتاه است اثری محسوس در حرکت ذره α ایجاد می‌کند.

معمولاً هدف از مطالعه برخوردها این است که دریابیم با دانستن حرکت اولیه ذرات برخورد کننده و با استفاده از اصول بقای اندازه حرکت و انرژی چه اطلاعاتی می‌توانیم درباره حرکت نهایی آنها کسب کنیم. البته فرض بر این است که، چیز زیادی دربارهٔ نیروهای عمل کننده در این برخورد نمی‌دانیم، تنها می‌دانیم که چون تغییر تندی نقاط اجسام هنگام برخورد خیلی زیاد است، شتاب حرکت این نقاط نیز زیاد بوده و در نتیجه نیرویی که دو جسم هنگام برخورد بر یکدیگر وارد می‌آورند خیلی زیاد می‌باشد.

۱۰ـ۱ـ۱ـ نیروی ضربه‌ای و تغییر مکانیکی در جسم

شکل زیر چگونگی تغییرات زمانی نیروی ضربه‌ای $F(t)$ را در یک برخورد در زمان کوتاه $\Delta t=t_{2}-t_{1}$ نشان می‌دهد.



شکل (۱۰ـ۱)

معمولاً تابع $F(t)$، به ویژه وقتی Δt بسیار کوتاه است، به صورت شبه توابعی چون تابع

دلتای دیراک نمایش داده می‌شود. قانون نیوتن را در زمان برخورد می‌نویسیم:

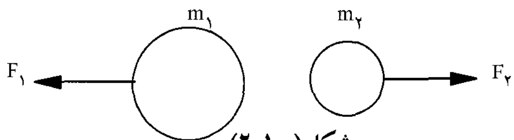
$$d\vec{p}=\vec{F}(t)dt$$

$$\Rightarrow \vec{p}_2-\vec{p}_1=\int d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt=\vec{J} \qquad (۱\_۱۰)$$

انتگرال نیرو در زمانی که نیرو اثر می‌کند ضربه $\vec{J}$ ناشی از آن نیرو نامیده می‌شود. تأثیر این ضربه روی جسم سبب تغییر اندازه حرکت جسم می‌گردد. ضربه و اندازه حرکت هر دو بردار هستند و دارای یکا و ابعاد یکسان می‌باشند. بزرگی نیروی ضربه‌ای توسط سطح زیر منحنی نیرو بر حسب زمان محاسبه می‌شود.

۱۰ـ۲ـ بقای اندازه حرکت خطی در برخورد

اکنون به بررسی بقای اندازه حرکت خطی در اثر برخورد دو جسم می‌پردازیم. برای سهولت حالتی را بررسی می‌کنیم که دو جسم تماس مکانیکی دارند. این بحث عمومیت دارد و در حالتهای دیگر که نیرو از فاصله عمل می‌کند (با خاصیت میدان) نیز معتبر است. مطابق شکل، دو ذره m_1 و m_2 هنگام برخورد به هم نیرو وارد می‌کنند. این نیروها طبق قانون سوم نیوتن مساوی و در خلاف جهت یکدیگر هستند و در امتداد خطی اثر می‌کنند که دو ذره را به هم وصل می‌کند؛ یعنی $\vec{F}_1(t)=-\vec{F}_2(t)$ است. $\vec{F}_1$ نیرویی است که از ذره ۲ به ذره ۱ وارد می‌شود و F_2 نیرویی است که از طرف ذره ۱ به ذره ۲ وارد می‌شود.



شکل (۱۰ـ۲)

تغییر اندازه حرکت ذره ۱ در اثر برخورد در زمان برخورد $\Delta t=t_2-t_1$ چنین است:

$$\Delta\vec{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_1(t)dt=\vec{F}_1\Delta t \qquad (۲\_۱۰)$$

$\vec{F}_1$ میانگین نیروی $\vec{F}_1$ در مدت برخورد است و چنانچه این زمان بسیار کوتاه باشد این تقریب پذیرفتنی‌تر است. به همین ترتیب تغییر اندازه حرکت ذره ۲ برابر است با:

$$\Delta\vec{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2\, dt = \vec{F}_2 \Delta t \quad (۱۰\text{-}۳)$$

اگر نیروهای دیگری بر ذرات اثر نکنند آنگاه $\Delta\vec{p}_1$ و $\Delta\vec{p}_1$ تغییر کل اندازه حرکت هر ذره را به دست می‌دهد. از سوی دیگر $\vec{F}_2 = \vec{F}_1$. در نتیجه:

$$\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1 \quad (۱۰\text{-}۴)$$

اگر سیستم شامل دو ذره m_1 و m_2 را منفرد در نظر بگیریم، اندازه حرکت کل سیستم عبارتست از:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (۱۰\text{-}۵)$$

و تغییر در اندازه حرکت کل سیستم در اثر برخورد صفر می‌شود:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

در این صورت با حل دستگاه معادلات موجود و با دانستن سرعتهای دو جسم قبل از برخورد (v_{2i}, v_{1i}) آگاهی کامل از سرعتهای اجسام پس از برخورد (v_{2f}, v_{1f}) پیدا می‌کنیم. از بحث در مورد حل این دستگاه می‌گذریم و آن را به حل مسایل پایان فصل موکول می‌کنیم.

۱۰ـ۳ـ انواع برخورد

به‌طور کلی می‌توانیم برخوردها را به دو دسته تقسیم کنیم:

دسته اول: برخورد مستقیم: برخورد مستقیم آن است که تندی هریک از دو جسم قبل از برخورد، در راستای خط واصل گرانیگاههای دو جسم باشد. برخورد مستقیم را از نظر چگونگی حفظ و بقای انرژی به انواع مختلف تقسیم می‌کنند. یکی از انواع آن برخورد الاستیک است. در این نوع برخورد، قانون بقای اندازه حرکت و انرژی جنبشی صادق است. نوع دیگر این برخورد، برخورد غیرالاستیک است که در آن طبق تعریف انرژی جنبشی محفوظ نمی‌ماند و بسته به نوع فعل و انفعال، ممکن است انرژی جنبشی نهایی کمتر یا بیشتر از انرژی جنبشی اولیه باشد و هر کدام ویژگیهای

خاص خود را خواهد داشت. در برخورد کاملاً غیرالاستیک دو ذره پس از برخورد به یکدیگر می‌چسبند و در نتیجه تنها یک سرعت نهایی $\vec{v}_f$ خواهیم داشت. با استفاده از اصل بقای اندازه حرکت و با معلوم بودن $\vec{v}_{1i}$ و $\vec{v}_{2i}$ می‌توان $\vec{v}_f$ مشترک را پیدا کرد:

$$m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}=(m_1+m_2)\vec{v}_f \tag{۱۰ـ۶}$$

نوع دیگر، برخورد اجسام عادی است، این نوع برخورد نه کاملاً الاستیک است و نه کاملاً غیرالاستیک. تندی نسبی میانگین قبل و بعد از برخورد با رابطه زیر مشخص می‌شوند:

$$(\vec{v}_{1f}-\vec{v}_{2f})=-e(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{2i}) \tag{۱۰ـ۷}$$

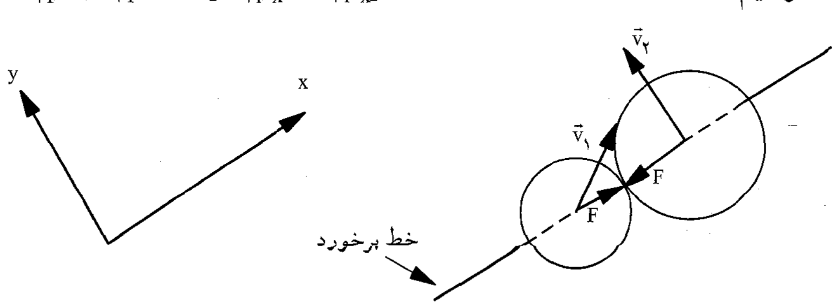
e در رابطه فوق، ضریب بازگشت یا استرداد نامیده می‌شود، که به جنس، شکل و ابعاد جسم برخورد کننده بستگی دارد. در برخورد الاستیک، ۱ =e و در برخورد کاملاً غیرالاستیک، ۰ =e می‌باشد. e بدون بعد است و بین صفر تا یک تغییر می‌کند، در ضمن مقدار آن تا وقتی که سرعتهای برخورد از حد معینی نگذشته‌اند، ثابت است. در برخورد عادی دو جسم، کاهش انرژی در نتیجهٔ برخورد برابر است با:

$$k_0-k_1=\frac{1}{2}(m_1\vec{v}_{1i}^2+m_2\vec{v}_{2i}^2-m_1\vec{v}_{1f}^2-m_2v_{2f}^2)$$

$$\Delta k=\frac{1}{2}\ \frac{m_1m_2}{2m_1+m_2}(\vec{v}_{1i}-\vec{v}_{2i})^2(1-e^2) \tag{۱۰ـ۸}$$

دسته دوم: برخورد غیرمستقیم: در برخورد مستقیم تندیها همواره در راستای برخورد بودند، اما در برخورد غیرمستقیم اگر راستای x را به عنوان خط برخورد در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$(v_{1f})-(v_{2f})=-e\ [(v_{1i})_x-(v_{2i})_x]$$



شکل (۱۰ـ۳)

البته آن عده از مؤلفه‌های سرعت که بر خط برخورد عمودند، طبق معادلات ضربه و اندازه حرکت، در حین برخورد ثابت می‌مانند، به عبارت دیگر سرعتها در امتداد محور xها متغیر و در امتداد محور yها ثابتند.

۱۰ـ۴ـ Q فعل و انفعال و معادلهٔ Q

به‌طور کلی بقای انرژی ایجاب می‌کند که:

$$\underbrace{E_k+U_{int}}_{\text{قبل از برخورد}}=\underbrace{E'_k+U'_{int}}_{\text{پس از برخورد}}$$

که در آن E_k و U_{int} به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی داخلی است. اگر در برخورد انرژی داخلی تغییر کند، انرژی جنبشی نیز تغییر می‌کند. کمیت Q که به Q واکنش یا برخورد معروف است با عبارت $Q=E'_k-E_k$ تعریف می‌شود. بنابراین Q برابر است با اختلاف انرژی جنبشی پایانی و انرژی جنبشی ابتدایی. اگر $Q=0$ باشد تغییر انرژی جنبشی وجود ندارد و برخورد راکشسان می‌گوییم. در غیر این صورت برخورد را ناکشسان می‌گوییم.

چنانچه $Q<0$ باشد، در انرژی جنبشی کاهش داریم منطبق بر افزایش انرژی داخلی ذرات. می‌گوییم برخورد ناکشسان نوع اول (یا انرژی‌گیر) وجود دارد. اگر $Q>0$ باشد، افزایش انرژی جنبشی یا کاهش انرژی داخلی ذرات داریم (مصرف کننده) که این کاهش انرژی داخلی باید به همان اندازه افزایش انرژی باشد. این برخورد را ناکشسان نوع دوم (انرژی‌زا) می‌نامیم.

اکنون به محاسبه و استخراج معادلهٔ Q می‌پردازیم: ابتدا فرض می‌کنیم که جرم m_1 با اندازه حرکت $\vec{p}_1$ به جرم ساکن m_2 $(\vec{p}_2=0)$ برخورد می‌کند. m'_1 و m'_2 را جرم ذرات پس از برخورد می‌گیریم که در حالت کلی با جرمهای قبل از برخورد متفاوت است.

$$\vec{p}_1=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2 \Rightarrow \vec{p}'_2=\vec{p}_1-\vec{p}'_1$$

از بقای اندازه حرکت خطی داریم:

$$\Rightarrow p'^2_2=(\vec{p}_1-\vec{p}'_1)^2=p^2_1+p'^2_1-2\vec{p}_1.\vec{p}'_1$$
$$=p^2_1+p'^2_1-2p_1p'_1\cos\theta$$

اما برای Q رابطه زیر را خواهیم داشت (این رابطه را به دست آورید):

$$Q=\left(\frac{p'^2_1}{2m'_1}+\frac{p'^2_2}{2m'_2}\right)-\left(\frac{p^2_1}{2m_1}+\frac{p^2_2}{2m_2}\right) \qquad (۹\text{-}۱۰)$$

بنابراین با کمی عملیات جبری به معادلهٔ Q به صورت زیر خواهیم رسید که در فیزیک هسته‌ای کاربرد فراوان دارد.

$$Q=E'_{k,1}\left(1+\frac{m'_1}{m'_2}\right)-E_{k,1}\left(1-\frac{m_1}{m'_2}\right)-\frac{2\sqrt{m_1m'_1E'_{k,1}E_{k,1}}}{m'_2}\cos\theta \qquad (۱۰\text{-}۱۰)$$

۱۰ـ۵ـ سطح مقطع مؤثر و برخورد در فیزیک هسته‌ای

واکنشها و فرآیندهای واپاشی پرتوزای اتمها، هسته‌ها و ذرات بنیادی را می‌توان با مطالعهٔ برخوردها بررسی کرد؛ یعنی می‌توان اصول پایستگی اندازه حرکت خطی و انرژی را در دوره‌های «قبل از برخورد» و «بعد از برخورد» به کار برد. اما باید توجه داشت که برای این فرآیندها از پایستگی انرژی کل استفاده می‌شود؛ چرا که انرژی جنبشی پایسته نیست.

مقطع‌های برخورد تقریباً همواره به انرژی ذرهٔ فرودی بستگی دارند و در انرژیهایی با مشخصات نسبتاً دقیق، احتمال وقوع واکنش خیلی زیادتر از انرژیهای دیگر است.

به‌طور مثال برای شکستن یک پروتون درون هسته، آنقدر انرژی باید مصرف کرد تا جرم سکون و انرژی جنبشی ذرات تولید شده، حاصل گردد. در یک برخورد نوترون-پروتون، در انرژیهای بالا، می‌توانیم پیوندهای خنثای π^0 تولید کنیم، مشروط بر اینکه انرژی جنبشی نوترون برخورد کننده، به قدر کافی بزرگ باشد. این انرژی باید آنقدر زیاد باشد تا برابری انرژی جنبشی، n و p و π^0 نهایی، به علاوه انرژی در حال

سکون فرون π° را تأمین کند.

از نقطه نظر بقای انرژی و بقای اندازه حرکت π° قبل از برخورد وجود نداشت و در برخورد بوجود آمد. نوترون و پروتون، انرژی و اندازه حرکت لازم برای ایجاد مزون π° را تأمین کرده‌اند. تولید مزون π° از هیچ را به‌طور عینی شبیه به تولید الکترون- پوزیترون از اشعه γ. شرح و بسط چنین مکانیسمی جز به زبان مکانیک کوانتمی نسبیتی مقدور نیست.

برهم‌کنش بین مزونهای π^{-} و پروتون با نوترون چنان است که اگر می توانستیم با یک میکروسکوپ ایده‌آل داخل هسته را ببینیم، حضور مزون π° را تشخیص می‌دادیم؛ ولی اگر با یک ضربه، این مزون را از پروتون یا نوترون خارج می‌ساختیم، غیبت آن در هسته، بلافاصله، موجب پیدایش جدید آن می‌شد. پروتون یا نوترون نهایی از هر نقطه نظر، مشابه هسته‌ای است که مزونی را ایجاد نکرده باشد؛ چون نتیجه خالص ایجاد یک مزون آزاد بوده است. بقای انرژی ایجاب می‌کند که تمام انرژی جرم در حال سکون مزون در واکنش تأمین شده باشد.

به منظور آزمون اغلب ذرات بنیادی، برای همگی به جز چند تایی که پایدار هستند (الکترون، پروتون، نوترون مقیّد در هسته و فوتونها) لازم است آنها را در برخوردهای انرژی‌زا تولید کرد. حتی در چنین حالتی نیز ذرات ممکن است آنچنان زود تجزیه گردند که برای کشف هریک از خواص آنها باید دائماً آنها را تولید کرد. برای تولید یک ذره بنیادی به جرم M لااقل به میزان انرژی جرم در حال سکون آن، انرژی لازم است و این مقدار زیادی نیست. سنگین‌ترین ذرات بنیادی که تاکنون شناخته شده است، جرمی دارد که از ۴۰۰۰ برابر جرم الکترون تجاوز نمی‌کند، به‌طوری که انرژی در حال سکون آن حداکثر 1×10^{-10} ژ می‌شود. یک چراغ‌قوه جیبی می‌تواند آنقدر انرژی بدهد که برای تولید هزاران ذره در ثانیه کافی باشد، اما باید این انرژی را به حد کافی متمرکز کرد. این عمل با یک شتاب‌دهندهٔ بزرگ صورت می‌گیرد. طی یک برخورد، ذره اصابت کننده به اندازه کافی انرژی به دست می‌آورد تا یک واکنش

مطلوب را راه اندازد یا تولید یک یا چندین ذرهٔ بنیادی را عملی سازد. بخصوص شتاب دهنده‌های با انرژی بالا، برای شتاب دادن به پروتونها، مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی وقتی بخواهند ساختمان پروتون یا نوترون را مطالعه کنند از شتاب دهنده‌های الکترون با انرژی بالا استفاده می‌شود.

با تمام این نکات؛ می‌توانیم با استفاده از اندازهٔ جرم در حال سکون و از روی بقای انرژی و اندازه حرکت، وجود یک ذره را بدون آنکه آن را مستقیماً مشاهده کنیم، نتیجه بگیریم. ذرات باردار، مسیر خود را در موارد مناسب (مثل اتاق ویلسون یا اتاق حباب و...) آشکار می‌سازند. با یک میدان مغناطیسی می‌توانیم اندازه حرکت و در نتیجه انرژی ذرات را قبل و بعد از برخورد، اندازه بگیریم.

۱۰ـ۶ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ در برخورد الاستیک تک بُعدی، سرعت نسبی نزدیک شدن اجسام قبل از برخورد مساوی سرعت نسبی دور شدن آنها پس از برخورد است.

۲ـ اگر یک ذره سبک با ذره ساکنی که جرمش خیلی بیشتر است برخورد کند، سرعت ذره سبک تقریباً معکوس می‌شود و ذره سنگین تقریباً در حالت سکون باقی می‌ماند. این مطلب را در برخورد یک توپ به زمین تحقیق کنید.

۳ـ در یک برخورد الاستیک، بین ذراتی که دارای جرم مساوی هستند و یکی از آنها در ابتدا ساکن است، ذرات پس زده شده (پراکنده شده) همواره در جهت عمود بر یکدیگر از هم دور می‌شوند. می‌توانید صحت این مطلب را تحقیق کنید.

۴ـ شتاب وارد شده به جسم بر اثر ضربه، در نتیجه تغییر تندی جسم می‌باشد و به تندی اولیهٔ جسم بستگی دارد. بنابراین نه تنها سرعتهای قبل و بعد از برخورد با هم متناسبند، بلکه شتابها نیز دارای چنین رابطه‌ای می‌باشند.

۵ـ می‌دانیم هر قدر اندازه حرکت جسم بیشتر باشد هنگام برخورد ضربه بیشتری به جسم وارد می‌شود. هر چه زمان برخورد را گسترش دهیم و در واقع اندازه حرکت را

طی این زمان منتقل کنیم نیروی کمتری هنگام برخورد به جسم وارد می‌شود. فرمان تاشو اتومبیل و داشبورد با مواد نرم با ایجاد چنین خاصیتی باعث یک برخورد نرم می‌شود و سرنشینان را از خطرات جدی مصون نگه می‌دارد.

۶ـ اگر جرم چوب گلف را افزایش دهیم و به همان اندازه حجم آن هم افزایش یابد، پس از برخورد سرعت توپ تغییر مشهودی نمی‌کند. زیرا سطح مؤثر برخورد تقریباً ثابت است و برخورد از طریق همان سطح برخورد اولیه صورت می‌گیرد و انتقال انرژی جنبشی یا اندازه حرکت هم همان مقدار است، زیرا با توجه به کوتاه بودن زمان برخورد، مقدار محدودی انرژی با اندازه حرکت منتقل می‌شود. بنابراین چنانچه نیاز به انتقال اندازه حرکت بیشتری داشته باشیم، می‌توانیم سطح مؤثر برخورد را افزایش دهیم.

۷ـ در قانون پایستگی انرژی جنبشی در برخورد کاملاً ناکشسان، یک جمله Q مربوط به تبدیل انرژی به صورتهای مختلف نیز وجود دارد که توجیه کنندهٔ عدم یا کاهش سرعت بعد از برخورد ناکشسان می‌باشد. البته تا وقتی که سرعت مرکز جرم دو ذره برخورد کننده تغییر نکند، در تکانه (اندازه حرکت) کل دستگاه دو ذره تغییری حاصل نمی‌شود و فقط توزیع تکانهٔ میان آنها تغییر می‌کند و البته هنگامی که هیچ نیرویی خارجی به دستگاه اثر نکند نیز، تکانه قبل و بعد از برخورد ثابت است و مرکز جرم در تمام مدت با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۸ـ برای اینکه در انواع برخوردها، انرژی کمتری هدر رود معمولاً شکل ابزار و وسایل را متناسب با مورد استفاده چنان تهیه می‌کنند که حتی‌الامکان برخورد الاستیک باشد. در توربینها هم به همین جهت پره‌ها را با انحناء می‌سازند تا سرعت شاره، قبل و بعد از برخورد ثابت بماند و طی این عمل بیشترین انرژی صرف گرداندن توربین شود.

۹ـ هنگامی که می‌گوییم ماده‌ای از مادهٔ دیگر کشسان‌تر است، به این معناست که در هنگام برخورد تغییر شکل کمتری می‌دهد؛ مثلاً چوب از آب کشسان‌تر است.

۱۰ـ در مورد برخورد ذرات با تحریک داخلی باید بگوییم که اگر برخورد الاستیک باشد، قانون بقای انرژی ایجاب می‌کند که سرعت انتهایی با سرعت ابتدایی

برابر باشد. اگر یکی از دو ذره، هنگام برخورد، تحریک داخلی گردد، در نتیجه طبق قانون بقای انرژی $v_f<v_i$ است؛ اگر یک یا هر دو ذره از ابتدا در حال تحریک داخلی باشد، تحریک داخلی خود را به صورت انرژی جنبشی آشکار می‌سازد و در نتیجه $v_i<v_f$ خواهد شد.

۱۱ـ اگر هنگام ریخته شدن ماده‌ای در کفه ترازو، آن را وزن کنیم، تنها وزن آن را حساب نکرده‌ایم، زیرا هنگام برخورد ماده با کفه ترازو نیرویی به کفه ترازو وارد می‌شود و ما در واقع این وزن ظاهری را که در حین برخورد ایجاد می‌شود حساب کرده‌ایم.

۱۲ـ هرگاه برخورد در فضا صورت گیرد، نیروی وارده از طرف دو جسم می‌تواند تصویری در ابعاد مختلف فضا، داشته باشد و البته منظور از این برخورد، همان واقع شدن یک ذره در میدان موجود در اطراف ذره دوم نیز می‌باشد.

۱۳ـ پرواضح است که با یک ضربه معمولی نمی‌توان یک آجر و یا یک قطعه چوب را شکست، اما چنانچه نیروی ضربه‌ای را در یک دست بتوانیم متمرکز کنیم و ضربه را به مرکز جرم آجر و یا قطعه چوب وارد کنیم و خیلی سریع این عمل را انجام دهیم، موفق می‌شویم آنها را بشکنیم، اما انجام این عمل توانایی و تکنیک خاص لازم دارد که عموماً کاراته‌بازان از آن برخوردارند.

۱۴ـ برخوردهای بین ذرات، به‌طور مستقیم قابل دسترس ما نیستند؛ تنها با استفاده از احتمال برخورد می‌توان در مورد این نوع برخوردها حدسهایی ارائه نمود. بنابراین در این‌گونه آزمایشها و اندازه گیریها نمی‌توان کاملاً دقیق بود، هر چند با استفاده از فرمولهای تعیین شده می‌توان محاسباتی را انجام داد ولی در عمل غالباً دچار مشکل خواهیم بود.

۱۰ـ۷ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ در تفنگهای قدیمی، گلنگدن که در انتهای لوله قرار دارد با متراکم شدن یک فنر به اندازهٔ معین d توسط گلنگدن، که بعد از شلیک فشنگ عقب زده می‌شود، به‌طور خودکار پر می‌شود.

الف) نشان دهید که v سرعت گلوله‌ای به جرم m، هنگام شلیک شدن باید لااقل $d\sqrt{kM}/m$ باشد تا تفنگ به‌طور خودکار پر شود. در اینجا k ثابت نیروی فنر و M جرم گلنگدن است.

ب) از چه نظر این فرایند را می‌توان یک برخورد در نظر گرفت؟

حل.

$$mv-Mv'=0$$

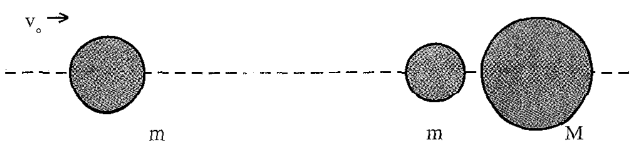
$$T=\frac{1}{2}Mv'^2=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kd^2$$

$$v=\frac{M}{m}v'=\frac{M}{m}\left(\frac{kd^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}=d\sqrt{\frac{kM}{m^2}}=\frac{d}{m}\sqrt{kM}$$

۲ـ در شکل زیر، دو جرم سمت راست اندکی از هم فاصله دارند و در حال سکون‌اند. جرم سمت چپ با سرعت v_0 به طرف راست پرتاب می‌شود. با فرض آنکه برخوردها کشسان و رو در رو هستند:

الف) اگر $M\leq m$ نشان دهید که دو برخورد صورت می‌گیرد و سرعتهای نهایی را پیدا کنید.

ب) اگر $M>m$ نشان دهید که سه برخورد صورت می‌گیرد و سرعتهای نهایی را پیدا کنید.



حل.

الف) سرعت جسم دوم پس از برخورد $mv_0=mv_1 \Rightarrow v_1=v_0$

$$\begin{cases} mv_0+0=mv'_1+Mv' \\ \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv'_1+\frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases} \Rightarrow v'_1=v_0-\frac{M}{m}v'$$

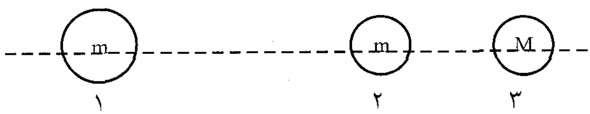
سرعت جسم بعد از برخورد $mv_0^2=n(v_0-\frac{M}{m}v')^2 \Rightarrow v'=\frac{2mv_0}{m+M}$

سرعت جسم دوم بعد از برخورد

$$v'_1=v_0=\frac{M}{m}(\frac{2mv_0}{m+M})=v_0-\frac{2Mv_0}{m+M} \Rightarrow v'_1=\frac{m-M}{m+M}v_0$$

با توجه به اینکه شرط $M\leq m$ برقرار است.

ب)



اولین برخورد بین جرم m_1 و m_2 روی می‌دهد و از آنجاکه $m_1=m_2$ است جرم m_1 ساکن می‌شود و جرم m_2 با سرعت v_0 حرکت خود را آغاز می‌کند. برخورد دوم بین جرم m_2 و جرم M روی می‌دهد. از بقای انرژی و اندازه حرکت داریم:

$$\begin{cases} mv_1+0=mv'_1+Mv' \Rightarrow mv_0=mv'_1+Mv' \\ \frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv'^2_1+\frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

با جایگذاری $v'_1=v_0-\frac{M}{m}v'$ از معادله اول در معادله انرژی داریم:

$$v'=\frac{2m}{M+m}v_0 \qquad , \qquad v'_1=\frac{m-M}{m+M}v_0$$

اگر $M=m$ باشد، ذره ۲ پس از برخورد ساکن شده و ذره سوم با سرعت v_0 در جهت راست شروع به حرکت می‌کند. اگر $M<m$ باشد (با توجه به دو مقدار v' و v'_1) ذرهٔ دوم و سوم هر دو در جهت راست حرکت خواهند کرد.

در مورد $M>m$ ، ذره سوم با سرعت v' در جهت راست حرکت می‌کند و ذره

دوم با سرعت v'_1 اما به دلیل علامت منفی برای v'_1 در جهت چپ سرعت می‌گیرد. بنابراین با ذره m_1 مجدداً برخورد خواهد کرد؛ یعنی در این حالت سه برخورد خواهیم داشت.

۳ـ جرم m از ارتفاع h روی جرم M که توسط فنری با ثابت k نگه داشته شده است، سقوط می‌کند. اگر جرم M در امتداد قائم به اندازهٔ y جابجا شود، مطلوبست ضریب e و ارتفاعی که جرم m پس از برخورد به M بالا می‌آید.

حل. سرعت جرم m در لحظهٔ قبل از برخورد برابر است با $\sqrt{2gh}$ در حین برخورد، جرم M حرکت می‌کند و بنابراین می‌توان اصل بقای اندازه حرکت خطی را به کار برد و چون برآیند نیروهای خارجی برابر با صفر است در نتیجه:

$$mv'_m + Mv'_M - m\left[-\sqrt{2gh}\right] = 0$$

$$v'_m + v'_M = -e\left[-\sqrt{2gh}\right]$$

بنابراین:

$$v'_m = \frac{Me-m}{M+m}\sqrt{2gh} \quad , \quad v'_M = \frac{-m(1+e)}{M+m}\sqrt{2gh}$$

طبق اصل بقای انرژی برای جرم M خواهیم داشت:

$$K+V=E=\frac{1}{2}Mv'^2_M + \frac{1}{2}ky^2_{st} = \frac{1}{2}M\left[\frac{m(1+e)}{M+m}\right]^2(2gh) + \frac{1}{2}ky^2_{st}$$

که در آن $y_{st}=\frac{Mg}{k}$ است. پس:

$$0 - Mgy + \frac{1}{2}k(y+y_{st})^2 = Mgh\left[\frac{m(1+e)}{M+m}\right]^2 + \frac{1}{2}ky^2_{st}$$

و سرانجام:

$$e=y\left[1+\frac{M}{m}\right]\left[\frac{k}{2Mgh}\right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

از اصل بقای انرژی در مورد جرم m پس از برخورد، ارتفاع برگشت h' را می‌توان به دست آورد:

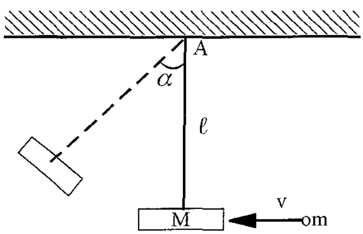
$$h' = h\left[\frac{y}{mg}\left(\frac{Mgk}{۲h}\right)^{\frac{۱}{۲}} - ۱\right]^{۲}$$

۴ـ ستون آب به سطح مقطع ۴ سانتی‌متر مربع با سرعت ۵ متر بر ثانیه در امتداد افق خارج می‌شود و به شیشه قائم برخورد می‌کند و به‌طور آزاد پایین می‌ریزد. معلوم کنید نیروی افقی راکه با آن، ستون آب به شیشه برخورد می‌کند.

حل. طبق اصول دینامیک، مقدار ضربه‌ای که آب به دیواره وارد می‌کند باید مساوی تغییر اندازه حرکت آن باشد. چون آب پس از برخورد سقوط آزاد می‌کند، لذا می‌توان گفت: $Ft=mv$. در زمان t جرم مقدار آبی که بر دیواره وارد می‌شود یعنی m عبارت از ذرات آبی است که در استوانه به طول $L=vt$ و به سطح مقطع عرضی s قرار دارد. بنابراین $m=\rho svt$ خواهد شد که ρ جرم مخصوص آب است و بالاخره داریم:

$$F=\rho svt\times\frac{v}{t}=\rho sv^{۲}= ۱۰\ N$$

۵ـ در آونگ بالیستیک گلوله‌ای به جرم m به تکه چوبی به جرم M برخورد می‌کند. تکه چوب به ریسمانی به طول L متصل است، گلوله داخل چوب می‌شود، اگر سرعت گلوله v باشد، تکه چوب تا چه زاویه منحرف می‌شود؟



حل. گلوله‌ای که با جرم m و با سرعت v حرکت کرده، اندازه حرکت آن mv است. پس از برخورد به چوب آونگ بالیستیک اندازه حرکت آونگ و گلوله مساوی اندازه حرکت گلوله قبل از برخورد است (برخورد غیرالاستیک). پس سرعت آونگ پس از برخورد از قانون بقاء اندازه حرکت تعیین می‌شود:

$$mv=(M+m)v_1$$

انرژی جنبشی آونگ وگلوله چنین است:

$$\frac{(M+m)v_1^2}{2}=\frac{m}{M+m}\cdot\frac{mv^2}{2}$$

آونگ بالا می‌رود، انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود، چون جرم M+m از حال تعادل به اندازه L منحرف شده، مرکز ثقل بالا می‌رود: $\Delta h=L(1-\cos\alpha)$ در حداکثر دامنه آونگ یعنی زاویهٔ α_0، انرژی پتانسیل مساوی انرژی جنبشی اولیه می‌شود:

$$\frac{m}{M+M}\cdot\frac{mv^2}{2}=(M+m)gL(1-\cos\alpha_0)$$

زاویه α_0 را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\sin^2\frac{\alpha_0}{2}=\frac{m^2v^2}{4(M+m)^2gL}$$

۶ـ یک گلوله به‌گلوله ثابت دیگر به همان جرم به‌طور مایل برخورد می‌کند (در امتداد غیر از خط‌المرکزین دوگلوله). مسیر آن دو پس از برخورد چه زاویه‌ای با هم درست می‌کنند. فرض می‌کنیم گلوله‌ها کاملاً صیقلی و الاستیک باشند.

حل. همانطور که به خوبی می‌دانیم اگر گلوله‌ای به‌گلوله دیگر با جرم مساوی در حالت سکون مستقیماً برخورد کند و برخورد کاملاً الاستیک باشد، سرعت دو گلوله عوض می‌شود، یعنی گلوله ساکن با سرعت گلوله اول به حرکت درمی‌آید وگلوله دوم ساکن می‌ماند. ولی اگر امتداد سرعت گلوله متحرک از مرکز گلوله ساکن نگذرد، در لحظه برخورد سرعت v گلوله متحرک را می‌توان به دو مؤلفه عمود بر هم، که یکی در امتداد مرکز گلوله دوم باشد تجزیه کرد. می‌توان فرض کرد که گلوله متحرک دارای دو سرعت v_1 و v_2 است. در امتداد خط سرعت v_1 برخورد مستقیم وکاملاً الاستیک انجام شده گلوله ساکن با سرعت v_1 به حرکت درمی‌اید وگلوله قبلی در این امتداد سرعتش صفر می‌شود و همان سرعت v_2 را خواهد داشت. پس گلوله‌ها پس از برخورد در دو

امتداد عمود بر هم حرکت می‌کنند.

۷ـ بر سطح افقی بدون اصطکاکی در فاصلهٔ غیرمعینی از دیوار قائم گلوله‌ای قرار دارد که جرم آن M است. گلولهٔ دومی به جرم m از پای دیوار در امتداد اولی با سرعتی می‌لغزد. دو گلوله در امتداد خط‌المرکزین برخورد می‌کنند. برخورد کاملاً الاستیک است، معلوم کنید چه نسبتی بین جرمهای m و M باید وجود داشته باشد تا گلولهٔ دوم موقع برگشت به دیوار برسد.

حل. برای تعیین سرعت کره‌ها پس از برخورد از اصل بقای اندازهٔ حرکت و انرژی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{Mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2} \quad , \quad mv_0=Mv_1-mv_2$$

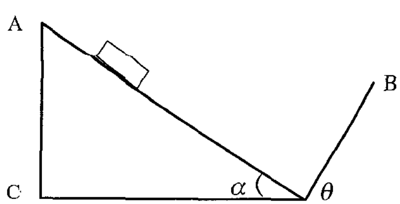
که v_0 سرعت کرهٔ به جرم m قبل از برخورد، و v_1 و v_2 سرعت کره‌ها پس از برخورد است. از حل روابط فوق خواهیم داشت:

$$v_1=\frac{2m}{m+M}v_0 \quad , \quad v_2=\frac{M-m}{M+M}v_0$$

برای این که کرهٔ دوم پس از برگشت کاملاً الاستیک از دیوار بتواند به کرهٔ اول برسد لازم است $v_2>v_1$ باشد و محاسبه چنین ادامه پیدا کند:

$$\frac{M-m}{m+M}v_0>\frac{2m}{m+M}v_0 \Rightarrow M>3m$$

۸ـ مهره‌ای بر سطح شیبداری می‌لغزد. در انتهای مسیر مهره با دیوار OB برخورد می‌کند. اگر ضربه را الاستیک کامل در نظر بگیریم. مهره تا چه ارتفاعی بالا رفته و برخواهد گشت؟ زاویهٔ AOC مساوی α و BO عمود بر OA و AC=h ؛ ضریب اصطکاک k است.



حل. در اثر لغزیدن به پایین جهت برطرف کردن نیروی اصطکاک باید کار انجام داد.

$$A_R=kmgL\cos\alpha=kmg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha=kmgh\ \mathrm{cotg}\alpha$$

هنگام بالا رفتن کار لازم برای خنثی کردن نیروی اصطکاک چنین خواهد بود:

$$A'_R=kmgL'\cos\alpha=kmg\frac{h_۱}{\sin\alpha}\cos\alpha=kmgh_۱\ \mathrm{cotg}\alpha$$

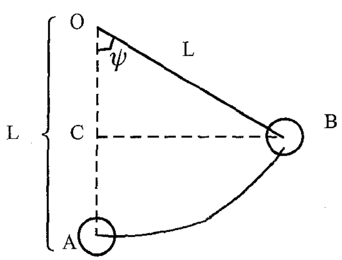
بنا به اصل قانون بقا و تبدیل انرژی می‌توان نوشت:

$$mgh-kmgh\ \mathrm{cotg}\alpha=mgh_۱+kmgh_۱\ \mathrm{cotg}\alpha \Rightarrow h_۱=h\frac{۱-k\mathrm{cotg}\ \alpha}{۱+k\mathrm{cotg}\ \alpha}$$

۹ـ گلوله‌ای به جرم $M=۳$ کیلوگرم از نخی به طول $L=۱/٦$ متر آویزان است. گلوله را از امتداد قائم به اندازهٔ $\psi=٦۰^\circ$ منحرف ساخته رها می‌سازند. هنگامی که گلوله به نقطهٔ تعادل خودش برمی‌گردد به آن در امتداد افق و برخلاف جهت حرکتش گلوله‌ای به جرم $m=۳۰\ g$ پرتاب می‌کنند. گلوله‌ها در امتداد خط‌المرکزین خود به هم اصابت می‌کنند، در نتیجه هر دو ساکن می‌شوند. سرعت گلوله‌ها را موقع برخورد معلوم کنید.

حل. مقدار انحراف گلوله از حالت تعادل (مقداری که گلوله بالا می‌رود):

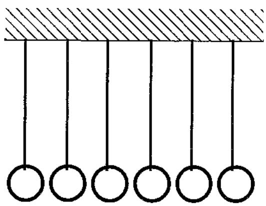
$$h=AO-CO=L(۱-\cos\psi)=\frac{۱}{۲}L$$



گلوله در موقع برگشت از B به نقطهٔ A سرعت $v_۱=\sqrt{۲gh}=\sqrt{gL}$ پیدا می‌کند. پس از برخورد دستگاه ساکن مانده است بنابراین مجموع اندازهٔ حرکت گلوله‌ها مساوی صفر شده است:

$$mv_۱+mv_۲=۰\Rightarrow v_۲=-\frac{mv_۱}{m}\simeq-۳/۹۵$$

۱۰ـ در شکل زیر چند گلوله فولادی یا استخوانی به وسیله ریسمان از تخته‌ای آویزان شده است. در حال تعادل گلوله‌ها در کنار هم در تماسند و ریسمانها موازیند. اگر گلوله سمت راست را منحرف کرده رها کنیم پس از برخورد ساکن شده فقط گلوله سمت چپ منحرف می‌شود و اگر دو گلوله را با هم منحرف کرده رها کنیم دو گلوله در طرف دیگر منحرف می‌شوند. چگونه این آزمایش را توجیه می‌کنیم.



حل. گلوله‌های استخوانی کاملاً الاستیک می‌باشند. اگر گلوله‌ای به گلوله ساکن دیگر برخورد مستقیم کاملاً الاستیک داشته باشد گلوله ساکن پس از برخورد به حرکت درمی‌آید و گلوله متحرک ساکن می‌شود. در این مثال چند برخورد کاملاً الاستیک مستقیم متوالی از یک گلوله به گلوله دیگر با همان نتایج بالا انجام می‌شود. گلوله‌های وسط سرعت خود را به گلوله بعدی منتقل می‌کنند و ساکن می‌شوند. گلوله آخری با همان سرعتی که گلوله اول برخورد کرده به حرکت درمی‌آید، چون بعد از گلوله آخری دیگر گلوله‌ای وجود ندارد. به همان ارتفاعی که گلوله اول از آن ارتفاع رها شده بالا خواهد رفت (صرف‌نظر از اتلاف انرژی). اگر دو گلوله را به سمت راست برده، رها کنیم. آن دو بدون اینکه روی هم نیرویی وارد کنند پایین آمده به گلوله‌های دیگر برخورد کرده و برخورد نه یک بار، بلکه دو بار می‌باشد که یکی پس از دیگری انجام می‌شود. یعنی اول گلوله دوم به سوم برخورد کرده بعد گلوله اول به دوم برخورد می‌کند. اولین برخورد به گلوله آخر می‌رسد و آن را بالا می‌برد، گلوله آخر ارتباطش با گلوله قبلی از بین رفته و بالا می‌رود. برخورد دوم به گلوله‌ها منتقل شده گلوله ماقبل آخر را بالا می‌برد. واضح است که این دو گلوله آخری به اندازه دو گلوله اول به طرف بالا رانده می‌شوند.

۱۰ـ۸ـ پرسشها و مسایل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ برخورد کشسان یک بعدی میان جسم متحرک A و جسم ساکن B را در نظر می‌گیریم. جرم B در مقایسه با جرم A چقدر باشد تا B با الف) سرعت بیشینه، ب) تکانه بیشنه و ج) انرژی جنبشی بیشینه، پس زده شود؟

۲ـ وقتی برد نیروهای برهم کنش میان دو ذره، مانند نیروی جاذبهٔ گرانشی متقابل میان دو جسم، بی‌نهایت است، آیا مقطع مؤثر در برخورد می‌تواند محدود باشد؟ آیا فایده دارد که این برهم کنش را به صورت برخورد در نظر بگیریم؟

۳ـ آیا علی‌الاصول می‌توان مقطع مؤثر در یک برخورد را فقط با استفاده از یک ذره بمباران کننده و یک ذرهٔ هدف به دست آورد؟ در عمل چطور؟

۴ـ دیدیم که اصل پایستگی تکانه را چه انرژی جنبشی پایسته باشد و چه نباشد می‌توان به کار برد. آیا عکس این مطلب هم صادق است؟ یعنی آیا در فیزیک کلاسیک پایستگی انرژی جنبشی حاکی از پایستگی تکانه است؟

۵ـ می‌توانید توپ بیسبالی را در هوا با دست بگیرید، اگر به شما اختیار دهند که گلولهٔ تفنگی با همان تکانه، یا با همان انرژی جنبشی را در هوا بگیرید کدامیک را انتخاب می‌کنید؟

۶ـ دانه‌های باران به زمین می‌ریزند. تکانه‌های آنها در برخورد به زمین چه می‌شود؟ آیا پاسخ شما دربارهٔ سیب مورد نظر نیوتون نیز صادق است؟

۷ـ گلوله‌های مسلسلی به صفحه‌ای آهنی برخورد می‌کنند. اگر گلوله‌ها به این صفحه بچسبند نیروی متوسط وارد بر آن بیشتر است یا اگر پس زده شود؟

۸ـ در بازی بیسبال گیرندهٔ توپ موقع گرفتن، بازوی خود را آزاد می‌گیرد نه محکم به‌طوری که دستکش او در موقع گرفتن توپ چند سانتیمتر جابجا می‌شود. چرا این امر مهم است؟

۹ـ چگونه می‌توانید حرکت یک قایق بادبانی در خلاف جهت باد را با اصل

پایستگی تکانه توجیه کنید؟

۱۰ـ در برخورد یک کامیون سنگین با یک اتومبیل شخصی سرنشینان اتومبیل بیشتر آسیب می‌بینند. چرا؟

۱۱ـ در شکستن چوب با تبر، آیا کارایی تبر سنگین بیشتر است یا سبک؟ چرا؟

۱۲ـ در این مورد بحث کنید که: «افتادن شما را آزار نمی‌دهد بلکه توقف ناگهانی در انتهای افتادن است که باعث آزار شما می‌شود.»

ب) مسائل

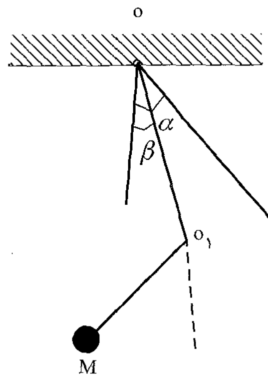
۱ـ یک نوترون با انرژی ۱ mev از پهلوی یک پروتون و به فاصله‌ای که همان نوترون نسبت به پروتون تقریباً برابر با $۱۰^{-۳۳}$ باشد می‌گذرد. حداقل فاصله نزدیکی چقدر است؟ (از انرژی برهمکنش دو ذره صرف نظر می‌شود).

جواب: ۴×۱۰^{-۱۲}

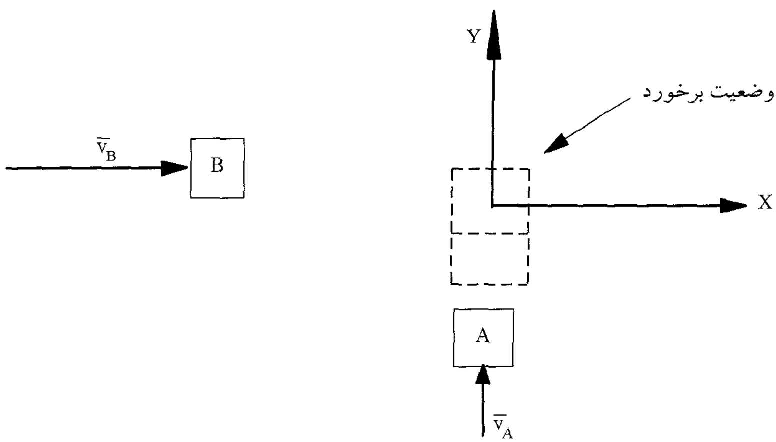
۲ـ توپ بیسبالی به جرم ۰/۲۵ kg را با چوب می‌زنند. لحظه‌ای قبل از برخورد، توپ با سرعت $۴۰\ m.s^{-۱}$ روی زمین افقی در حرکت است و پس از برخورد در امتداد ۳۰° بالای افق با سرعت $٦۰\ m.s^{-۱}$ از چوب جدا می‌شود. هرگاه زمان تماس چوب و توپ ۰/۰۰۵s باشد مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی متوسط وارد بر توپ را حساب کنید.

۳ـ توپ گلفی به جرم ۰/۱ kg که ساکن است، با سرعت $۵۰\ m.s^{-۱}$ زده می‌شود. هرگاه زمان تماس چوب با توپ ۰/۰۰۲s باشد نیروی متوسط وارد بر توپ چقدر است؟ اثر وزن توپ در طول مدت تماس اهمیتی دارد یا نه؟

۴ـ وزنهٔ M به جرم m به نخ OM بسته شده که در لحظهٔ $t=۰$ با خط قائم زاویهٔ α می‌سازد و در این لحظه سرعت M صفر است. در حین حرکت، نخ به سوزن $O_۱$ برخورد می‌کند که بر صفحهٔ حرکت عمود است. در صورتی که $oo_۱=h$ باشد مطلوبست تعیین کمترین مقدار α که در آن زاویه نخ حول سوزن $O_۱$ می‌پیچد. هم‌چنین تعیین کنید در لحظهٔ برخورد نخ به سوزن، در نیروی کشش آن چه تغییری حاصل می‌شود؟



۵ـ یک گلولهٔ کوچک فولادی از ارتفاع h_0 و از حالت سکون روی یک صفحهٔ فولادی سقوط می‌کند و پس از برگشت، مجدداً با صفحه برخورد می‌کند و این عمل ادامه می‌یابد. ارتفاع بیشینهٔ گلوله پس از x بار برخورد با صفحه چقدر است در صورتی که ضریب بازگشت e باشد؟



۶ـ برای پیدا کردن تندی حرکت گلوله، سابقاً از آونگ بالیستیک **استفاده** می‌شد. این دستگاه یک آونگ مرکب است که در قسمت تحتانی یک استوانهٔ محتوی ماسه دارد. هنگامی که یک گلوله به جرم m با تندی v در راستای افقی، در داخل کیسه

پرتاب شود، پس از طی مسافتی در داخل کیسه متوقف می‌گردد. در اثر ضربهٔ وارده، آونگ با تندی زاویه‌ای ω شروع به حرکت کرده و به انحراف ماکزیمم θ مـی‌رسد. معمولاً برای آنکه ضربهٔ محور صفر شود، گلوله به موازات مرکز ضربهٔ دستگاه پرتاب می‌گردد. درصورتی که جرم دستگاه M و طول آونگ ساده همزمان آونگ بالیستیک L و فاصلهٔ گرانیگاه آونگ تا محور آویز a باشد، رابطهٔ بین v و θ را پیدا کنید.

۷ـ دو میله مشابه BA و BC که هر یک جرمش m و طولش ۲a می‌باشد، در نقطهٔ B به وسیله یک مفصل به یکدیگر متصل هستند. مفصل کاملاً لغزنده و بدون مـالش است. دو میله را در یک امتداد قرار می‌دهیم و روی یک سطح افقی می‌گذاریم یک ضربه افقی $\vec{p}$ بر انتهای C و عمود بر میله BC وارد می‌آوریم. حرکت دو میله را در نتیجه ورود ضربه پیدا کنید. منظور تعیین تندی گرانیگاه هریک از دو میله و تندی دورانی آنها به دور گرانیگاه می‌باشد. از اصطکاک سطح اتکا صرف نظر شود.

فصل ۱۱

سینماتیک دورانی

۱۱ـ۱ـ مقدمه

حرکت دورانی یکی از مهمترین انواع حرکت است. از نظر تاریخی، در پی تلاشهای به عمل آمده در مورد حرکت سیارات در مدارهای تقریباً دایره‌ای به دور خورشید، این نوع حرکت مورد توجه قرار گرفت. بسیاری از مسایل دینامیک شامل حرکت ذرات و یا جسم صلب[1] در یک مسیر دایره‌ای است. از جمله مسئله حرکت الکترون به دور هسته (ساختار اتم؛ نظریه بور) و مسئله حرکت سیارات منظومه شمسی.

بنابراین آشنایی با مفاهیم سرعت و شتاب زاویه‌ای به عنوان زیربنای سینماتیک دورانی و در توسعه مفاهیمی چون اندازه حرکت زاویه‌ای بسیار ضروری است. از این رو قصد داریم در این فصل از سینماتیک دورانی سخن بگوییم و به بیان مفاهیم اصولی در مطالعه حرکت دورانی بپردازیم و از این مفاهیم در دینامیک دورانی جسم صلب که در دو فصل آینده مورد بحث قرار خواهند گرد، استفاده کنیم.

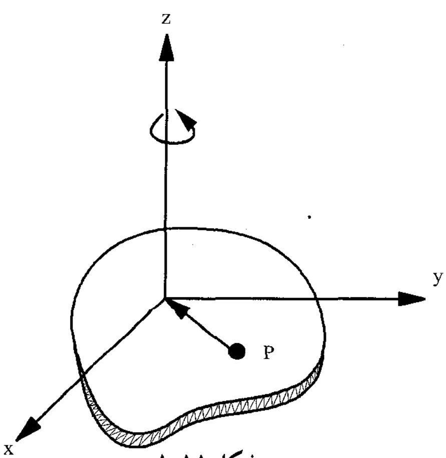
---

۱. جسمی با شکل و اندازه کاملاً معین را، با این ویژگی که فاصلهٔ هر دو نقطه آن ثابت باشد، جسم صلب می‌نامیم.

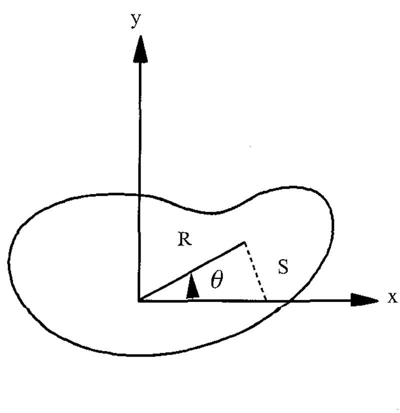
۱۱ـ۲ـسینماتیک دورانی

یک جسم سخت یا صلب می‌تواند به‌طور هم زمان دو نوع حرکت داشته باشد: مکان خود را در فضا تغییر دهد و یا در جهت خود در فضا تغییری ایجاد کند. تغییر در مکان حرکت انتقالی است و آن را به راحتی می‌توان به وسیله حرکت مرکز جرم توصیف کرد. تغییر در جهت مبیّن حرکت چرخشی است؛ به‌طور ریاضی می‌توان ثابت کرد که هر تغییری در جهت یک جسم سخت را می‌توان به صورت چرخشی حول یک محور در نظر گرفت (قضیه اویلر).

شکل ۱۱ـ۱ جسم صلبی را که حول محور ثابتی منطبق بر محور xها می‌چرخد، نشان می‌دهد. در حین چرخش، هر نقطه‌ای از جسم صلب در یک فاصله معین از این محور باقی می‌ماند و در امتداد دایره‌ای که مرکزش روی محور است حرکت می‌کند. برای توصیف جسم در هر لحظه، ذره‌ای از جسم را برمی‌گزینیم و آن را به عنوان نقطه مرجع به کار می‌گیریم؛ هر ذره می‌تواند نقطه مرجع باشد به شرط آنکه روی محور چرخش نباشند. آنگاه حرکت دایره‌ای این ذره قراردادی که در شکل با P نمایش داده شده است، نماینده حرکت چرخشی تمامی جسم و وضعیت زاویه‌ای این ذره، نمایندهٔ وضعیت زاویه‌ای جسم است.



شکل ۱۱ـ۱



شکل ۱۱ـ۲

شکل ۱۱ـ۲ جسم سخت را آن طور که از امتداد محور چرخش دیده می‌شود، نشان می‌دهد. مؤلفه‌ها در شکل طوری انتخاب شده‌اند که محور Z، منطبق بر محور چرخش باشد، در حالی که محورهای x و y در صفحه دایره‌ای قرار می‌گیرند. برای مشخص کردن مکان ذره در هر لحظه می‌توان از مختصات x و y ذره در هر لحظه استفاده کرد. اما بهتر است مکان ذره را بر حسب زاویه θ و شعاع دایره مسیر، r به دست آوریم (مختصات قطبی) زیرا بدین ترتیب یکی از دو مختصه (عموماً r) ثابت خواهد ماند و این در حالی است که مختصه x و y هر دو تغییر می‌کنند. بنابراین زاویه θ وضعیت دورانی جسم را مشخص می‌کند. جهت مثبت دوران را پادساعتگرد اختیار می‌کنیم، در نتیجه θ هنگام حرکت پادساعتگرد، افزایش و هنگام حرکت ساعتگرد، کاهش می‌یابد.[1] زاویه θ را همیشه بر حسب رادیان اندازه گیری می‌کنیم؛ در نتیجه طول مسیر بین محور x و نقطه p چنین است:

$$S=\theta R \qquad (۱ـ۱۱)$$

که R شعاع دایره مسیر است. زاویه وضعی θ برای جسم چرخنده تابعی از زمان است، $\theta=\theta(t)$. چون زاویه θ از نسبت دو طول (طول کمان و شعاع) حاصل می‌شود، کمیتی بدون بُعد است.

همانند حرکت خطی، در این نوع حرکت نیز دو کمیت به نام سرعت زاویه‌ای متوسط و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای تعریف می‌کنیم که به ترتیب با روابط زیر داده می‌شوند:

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ و سرعت زاویه‌ای متوسط $\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$. یکای

---

۱. اینکه سوی حرکت را بر حسب گردش عقربه‌های ساعت تعیین کنیم، توصیف نامناسبی است. زیرا اگر صفحه چرخش قائم باشد، آنچه یک ناظر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌بیند ناظری که در طرف دیگر متحرک ایستاده، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت خواهد دید. برای رفع این ابهام، بهتر است جهت θ را جهتی بگیریم که هر گاه یک پیچ راستگرد به اندازه θ پیچانده شود، در آن جهت پیش رود.

سرعت زاویه‌ای، رادیان بر ثانیه است.

اگر جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت بچرخد، می‌توان آهنگ چرخش را بر حسب بسامد، یا تعداد دور در واحد زمان، نیز حساب کرد. از آنجاکه هر چرخش کامل شامل 2π رادیان است، اگر بسامد را با ν نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{۱۱-۲}$$

هرگاه سرعت زاویه‌ای جسم صلب تغییر کند، جسم دارای شتاب زاویه‌ای می‌شود. تعریف شتاب زاویه‌ای متوسط چنین است:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

و شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \tag{۱۱-۳}$$

و واحد آن rad/S^2 (رادیان بر مجذور ثانیه) است.

اگر ذره در فاصله R از محور باشد، طول مسیر دایره شکل چنین است:

$$S = \theta R$$

از آنجاکه R ثابت است، با مشتق‌گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

در اینجا $\frac{ds}{dt}$ سرعت خطی ذره است که بر مسیر دایره‌ای ذره مماس است و $\frac{d\theta}{dt}$ نیز سرعت زاویه‌ای است. بنابراین معادله فوق برابر است با:

$$V = R\,\omega \tag{۱۱-۴}$$

این رابطه نشان می‌دهد که سرعت انشعابی ذره در امتداد مسیر دایره‌ای خود حول محول با افزایش شعاع زیاد می‌شود؛ هر چه یک ذره جسم صلب از محور دورتر باشد حرکتش سریعتر است. مشتق‌گیری از معادله فوق نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}$$

در اینجا $\frac{dv}{dt}$ شتاب مماسی ذره است و از آنجا که این شتاب نماینده تغییر در طول بردار سرعت است، در همان راستای بردار سرعت، یعنی مماس بر دایره است. اگر این شتاب مماسی را با a_T نمایش دهیم و در نظر بگیریم که $\frac{d\omega}{dt}$ شتاب زاویه‌ای است، معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$a_T = R\,\alpha \tag{۵_۱۱}$$

توجه کنید که یک ذره در حرکت دایره‌ای علاوه بر شتاب مماسی، دارای شتاب مرکزگرا با مقدار $a_R = \frac{V^2}{R} = R\,\omega^2$ نیز هست. شتاب کل، جمع برداری دو شتاب مماسی و شعاعی (مرکزگرا) است. شتاب مماسی موجب تغییر مقدار سرعت و شتاب شعاعی باعث تغییر راستای سرعت می‌شود.

۱۱_۳_ دوران با شتاب زاویه‌ای ثابت

در حرکت انتقالی یک ذره یا یک جسم صلب در یک امتداد ثابت مانند محور x، دیدیم در ساده‌ترین نوع حرکت، شتاب a صفر است. حرکت ساده یک بعدی، حرکتی است که در آن a مقدار ثابت غیر صفر داشته باشد.

در حرکت دورانی یک ذره یا یک جسم صلب حول یک محور ثابت نیز ساده‌ترین نوع حرکت، حرکتی است که در آن شتاب زاویه‌ای α صفر است (مانند حرکت دایره‌ای یکنواخت). بعد از آن ساده‌ترین حرکت دورانی، حرکتی است که در آن α مقدار ثابتی است که دقیقاً با حرکت خطی مربوطه متناظر است. در اینجا نیز می‌توانیم چهار معادله به دست آوریم که چهار متغیر سینماتیکی θ و ω و α و t را در تمام حالتهای ممکن به هم مربوط کند. هر دو مجموعهٔ معادلات در جدول ۱۱_۱ آمده است.

حرکت با شتاب ثابت خطی یا زاویه‌ای

حرکت انتقالی (امتداد ثابت)	حرکت دورانی (محور ثابت)
$V=V_\circ+at$	$\omega=\omega_\circ+\alpha t$
$x=\frac{V_\circ+V}{2}t$	$\theta=\frac{\omega_\circ+\omega}{2}t$
$x=V_\circ t+\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\omega_\circ t+\frac{1}{2}\alpha t^2$
$V^2=V_\circ^2+2ax$	$\omega^2=\omega_\circ^2+2\alpha\theta$

فرض کنید $\omega_\circ$ سرعت زاویه‌ای جسم صلبی در لحظه $t=\circ$ و ω سرعت زاویه‌ای آن در لحظه دلخواه t است. شتاب زاویه‌ای α ثابت و اندازه متوسط آن در هر فاصله زمانی دلخواه یکسان است. در فاصله زمانی ۰ تا t خواهیم داشت:

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_\circ}{t-\circ}$$

و یا

$$\omega=\alpha t+\omega_\circ$$

حاصلضرب αt تغییر کلی ω در فاصله (t و ۰) است. اگر شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، سرعت زاویه‌ای با آهنگ یکنواخت تغییر می‌کند؛ لذا اندازه متوسط آن $\omega_{av}=\frac{\omega_\circ+\omega}{2}$ است. همچنین می‌دانیم که ω برابر خارج قسمت جابجایی زاویه کل $\theta-\theta_\circ$ بر فاصله زمانی $(t-\circ)$ است، یعنی:

$$\omega_{av}=\frac{\theta-\theta_\circ}{t-\circ}$$

$$\theta-\theta_\circ=\frac{1}{2}(\theta-\theta_\circ)t$$

از دو رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\theta-\theta_\circ=\frac{1}{2}\alpha t^2+\omega_\circ t \qquad (۶\text{-}۱۱)$$

از حذف t در دو رابطه بالا به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$\omega^2=\omega_\circ^2+2\alpha(\theta-\theta_\circ) \qquad (۷\text{-}۱۱)$$

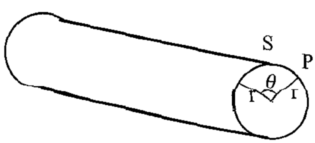
به خاطر داشته باشید که این نتایج فقط در صورتی صادق است که شتاب زاویه‌ای ثابت باشد. در حرکت دورانی نیز مشابه با حرکت انتقالی باید برای کمیت‌های θ و ω و α جهتی در نظر بگیریم. ولی تا زمانی که محور ثابت باشد می‌توان کمیت‌ها را نرده‌ای در نظر گرفت. در مورد جابجایی‌های زاویه‌ای اگر بی‌نهایت کوچک باشند می‌توان آنها را برداری در نظر گرفت[1]. کمیت‌هایی که بر حسب جابجایی‌های زاویه‌ای کوچک تعریف می‌شوند ممکن است خودشان بردار باشند. به عنوان مثال، سرعت زاویه‌ای از رابطه $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ به دست می‌آید و چون $d\theta$ بردار و dt یک کمیت نرده‌ای است، خارج قسمت آن برداری است و از این‌رو سرعت زاویه‌ای یک کمیت برداری خواهد بود. طبق قرارداد اگر انگشتان دست راست در جهت دوران جسم به دور محور حلقه شوند، انگشت شست جهت بردار سرعت زاویه‌ای را نشان خواهد داد.

شتاب زاویه‌ای نیز یک کمیت برداری است و این موضوع از تعریف $\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ نتیجه می‌شود که در آن $d\vec{\omega}$ کمیتی برداری و dt یک کمیت نرده‌ای است.

۱۱ـ۴ـ رابطه بین حرکت دورانی و انتقالی

هر گاه جسم صلب حول محور ثابت بچرخد، هر ذره از آن بر روی یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. از این‌رو می‌توانیم حرکت چنین ذره‌ای را با متغیرهای خطی یا متغیرهای زاویه‌ای توصیف کنیم. با استفاده از رابطه میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای می‌توان از توصیف کلی، کمیت دیگر را نتیجه گرفت، که این موضوع بسیار مفید است.

در شکل زیر استوانه‌ای را مشاهده می‌کنید که بر یک نقطه بر سطح آن علامتگذاری شده است.



شکل ۱۱ـ۳

---

۱. برای مطالعه بیشتر در این مورد به فصل ۱۱ کتاب هالیدی مراجعه کنید.

وقتی که استوانه یک دور کامل می‌چرخد، نقطهٔ P مسیر دایره‌ای به شعاع r را طی می‌کند و مسافت $2\pi r$ را می‌پیماید. طول مسیری که یک استوانه می‌پیماید، درست برابر طول کمان S است و بنابر تعریف رادیان، رابطه این طول با جابجایی زاویه‌ای θ عبارت است از: $S=r\theta$

این رابطه ساده بین طول کمان و زاویه فقط در صورتی برقرار است که زاویه بر حسب رادیان اندازه‌گیری شده باشد. چنین رابطه‌ای را بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای جسم در حال دوران نیز داریم:

$$V=r\omega$$

و نیز بین شتابها:

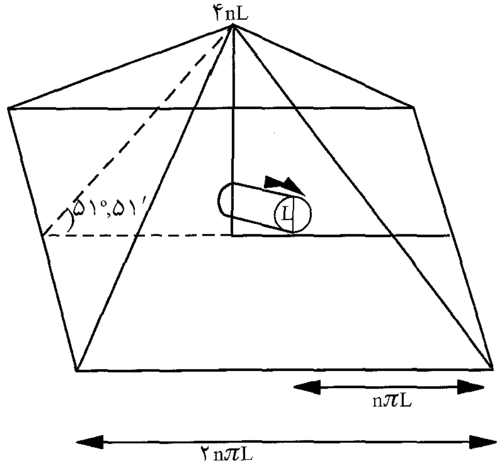
$$a_T=r\alpha \qquad , \qquad a_R=\frac{V^2}{r}=r\omega^2 \tag{۸-۱۱}$$

اهرام بزرگ مصر قرن‌هاست که باستان‌شناسان را مجذوب خود کرده است. یکی از جنبه‌های جالب این بناها، یکنواختی و وحدت صورت طراحی آنهاست. اگر چه این هرم‌ها از نظر اندازه بسیار متفاوتند. اما همه آنها غیر از دو تا، شکل یکسانی دارند؛ به‌طوری که نسبت محیط مربع قاعده به ارتفاع هرم دقیقاً 2π است. زاویه هر وجه با قاعده $52°$ (دقیقاً $51°52'$) است. این زاویه‌ای عجیب است؛ انتخاب زاویه $45°$ یا $53°$ (مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳-۴-۵ فیثاغورتی که مصریان می‌شناختند) به آسانی قابل درک است. اما چرا $52°$؟ آیا معماران باستان در آن زمان π را با چنین دقتی محاسبه کرده بودند و بر آن شدند که با ساختن بناهای عظیم این موقعیت بزرگ را جاودانه سازند و نسل‌های آتی را با مهارت ریاضی خود به شگفتی وا دارند؟

کانلی (T.E. Connely) توضیح محتمل‌تری را عنوان کرده است. فرض کنید ارتفاع هرم ۴nL باشد، که n عددی صحیح و L یک طول استاندارد است. اگر معماران مصری برای اندازه‌گیری فاصله مرکز ساختمان مورد نظر تا ضلع آن از استوانه‌ای به قطر L استفاده می‌کردند، و آن را در امتداد زمین دقیقاً n دور کامل می‌غلتاندند، طول هر ضلع عبارت می‌شد از $52°$. در نتیجه، نسبت محیط به ارتفاع دقیقاً برابر

$$۲\pi=\frac{۴\times ۲\, n\pi L}{۴nL}$$ و ناگزیر زاویه هر وجه با قاعده برابر است با:

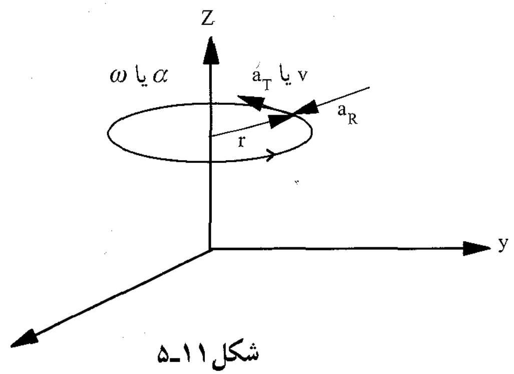
$$\tan\theta=\frac{۴nL}{\pi nL}=\frac{۴}{\pi} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{۴}{\pi}\right)=۵۱^{\circ}۵۲'$$



شکل ۱۱ـ۴

واقعیت دیگری که احتمال درستی این توصیف را تقویت می‌کند مربوط به هرم دیگری مشهور به هرم قرمز است که از این الگوی کلی پیروی نمی‌کند و زاویهٔ هر وجه آن با قاعده $۴۳/۵^{\circ}$ است (نه ۴۵°). این زاویه دقیقاً $\tan^{-1}\frac{۳}{\pi}$ است و در صورتی به دست می‌آید که ارتفاع به جای ۴nL برابر با ۳nL باشد.

در پایان توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که روابطی که در این قسمت آمده، مربوط به کمیت‌های نرده‌ای است. زیرا هم متغیرهای خطی و هم متغیرهای زاویه‌ای به صورت نرده‌ای بیان شده‌اند. ما باید بتوانیم روابطی به دست آوریم که در آنها متغیرها به شکل برداری ظاهر شوند. اکنون این کار را انجام می‌دهیم. این کار مخصوصاً در حالتهایی مفید خواهد بود که در آنها محور دوران ثابت نیست. شکل زیر بردارهای r و v و a_T و a_R و ω و α را برای ذره در حال دوران نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ـ۵

کمیت‌های زاویه‌ای روی محور دوران هستند و جهتشان از قاعده دست راست به دست می‌آید. روابط مورد نظر عبارتند از:

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r} \quad , \quad \vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_R$$

$$\vec{a}_R=\vec{\omega}\times\vec{V} \quad , \quad \vec{a}_T=\vec{\alpha}\times\vec{r} \qquad (۱۱ـ۹)$$

۱۱ـ۵ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ حرکت کلی یک جسم صلب، دوران محض نیست، بلکه ترکیبی از انتقال و دوران است. وابسته به هر حرکت در فضای سه بعدی سه پارامتر عمل می‌کند و مجموعاً شش پارامتر خواهیم داشت، که سه مختصه آن x و y و z می‌باشد (وابسته به انتقال) و سه مختصه دیگر، (مثلاً سه زاویه) تا با آنها نحوه جهت‌گیری جسم را نسبت به دستگاه مختصات مشخص کنیم. حال اگر فضا به دو بعد تقلیل یابد، دو مختصه x و y مربوط به انتقال خواهیم داشت و یک زاویه θ (مربوط به دوران) که مشخص کننده وضعیت جهت‌گیری جسم نسبت به دو محور صفحه می‌باشد. بنابراین در فضای دو بعدی حرکت کلی یک جسم صلب وابسته به سه پارامتر خواهد بود.

۲ـ در عملیات ریاضی بین کمیتها باید توجه داشت که این کمیتها هم‌جنس باشند. حال اگر کمیتهای زاویه‌ای را که خود با کمیتهای خطی رابطه دارند، بر حسب رادیان ـ عدد بدون بعد ـ بیان کنیم، می‌توانیم این ارتباط خطی ـ زاویه‌ای را از نظر صحت

دیمانسیون مورد توجه قرار دهیم.

۳ـ اگر سرعت‌سنج یک اتومبیل طوری تعبیه شده باشد که سرعت را متناسب با سرعت دورانی چرخهای عقب آن نشان دهد، هر گاه به جای لاستیکهای معمولی، یخ‌شکن قرار دهیم نیازی به تصحیح اعدادی که سرعت‌سنج نشان می‌دهد نیست، هر چند وجود یخ‌شکن سبب کاهش سرعتها شود اما چون سرعت‌سنج به طور استاندارد تنظیم شده است نیازی به تصحیح نیست.

۴ـ می‌دانیم که سرعت زاویه‌ای با شعاع دوران نسبت عکس دارد، حال اگر دو چرخ دندانه‌دار متصل به هم در نظر بگیریم، نسبت سرعتهای زاویه‌ای آنها با عکس نسبت شعاعهای آنها متناسب است.

۵ـ اگر چرخی حول یک محور که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحه چرخ عمود است دوران کند، حرکت نقطه‌ای واقع بر لبهٔ چرخ در حالتهای مختلف به شکل زیر بررسی می‌شود:

الف) زمانی که چرخ با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد، مؤلفه مماسی شتاب (a_t) صفر است و مؤلفه شعاعی (a_r) به علت وجود نیروی جانب مرکز $F=\frac{mv^2}{R}$، مقدار ثابتی خواهد داشت که ماکزیمم مقدار آن خواهد بود.

ب) زمانی که چرخ با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد هر دو شتاب وجود دارند و در ضمن هر دو شتاب نسبت به حالت اول تغییر خواهد کرد به نحوی که همواره بزرگی برآیند دو شتاب مقدار ثابتی باقی بماند.

٦ـ هنگامی که مسئله چرخشی یک صفحه، مثلاً صفحه یک گرامافون مطرح می‌شود، از دید ناظرهای نوعی به صورت گوناگونی بیان می‌گردد. مثلاً از دید ناظر ثابت نسبت به زمین، با توجه به رابطه $S=r\,\theta$ برای به دست آوردن مسافتی که یک سوزن گرامافون روی یک صفحه طی می‌کند نیاز به دانستن زاویه θ در هر لحظه داریم $(\theta=\omega t)$. کافیست شعاع صفحه و سرعت زاویه‌ای آن مشخص باشد تا بتوان مسافت را محاسبه کرد. از طرفی از دید ناظری که نسبت به صفحه در حال دوران است، کافی است

که علاوه بر اطلاعات فوق، زاویه دوران دستگاه ناظر را نسبت به صفحه بدانیم، در حالی که اگر قضیه را از دید ناظر ساکن نسبت به بازوی گرامافون ارزیابی کنیم، نیاز به اطلاعات ویژه‌ای غیر از r و ω نخواهیم داشت.

۷ـ معمولاً بردار دوران هر جسم را در امتداد محور دوران گرفته و جهتش را از قانون دست راست تعیین می‌کنیم، ولی این روش بیشتر برای تعیین جهت کمیتهایی مثل ω به کار می‌رود که در حل ساده‌تر مسائل استفاده می‌شود؛ در حالی که کمیتهایی مثل $\vec{L}$ بستگی به فاصله مرکز جرم تا محور دوران دارند و تعیین دقیق بردار دوران در این نوع مسائل مهم است.

۸ـ در یک سانتریفوژ، هرگاه دستگاه ذرات و دستگاه شاره، دارای چگالی مختلف باشند، آنگاه ممان اینرسی متفاوت و در نتیجه سرعتهای مختلف خواهند داشت. حال اگر این دو دستگاه با سرعت مختلفی روی هم بلغزند، هر دستگاه بر دستگاه دیگر نیرویی در امتداد حرکت نسبی وارد می‌آورد که آن را نیروی چسبندگی (ویسکوزیته) می‌نامند و برخلاف نیروی اصطکاک بین این دو سیستم که ارتباطش با سرعت نسبی کم است، نیروی چسبندگی بین دو دستگاه با سرعت نسبی دو دستگاه متناسب می‌باشد. بنابراین هر چه سرعت نسبی بیشتر باشد، این نیرو که در این حالت خاص باعث جدا شدن ذرات از شاره می‌شود، بیشتر خواهد بود.

تبصره: این مطالب در مورد دستگاه اینرسی؛ زمانی که برآیند نیروهای خارجی وارد بر شاره صفر است صادق بوده و در دستگاه غیراینرسی دخالت نیروهای خارجی نیز در محاسبات مذکور مؤثر است.

۹ـ در مکانیک کلاسیک تعبیر حوادث از دیدگاه یک دستگاه اینرسی همیشه آسان‌تر است. اگر خود را در چنین دستگاهی قرار دهیم، شتابها را به نیروهای وارد از طرف اجسام مشخصی در محیط وابسته می‌کنیم. حال ناظری را در نظر می‌گیریم که روی چرخ و فلکی در حال دوران قرار دارد و شخصی را که در امتداد یک خط شعاعی با سرعت ثابت $U_r = \frac{dr}{dt}$ راه می‌رود نگاه می‌کند. از دید این ناظر آن شخص در حال

تعادل است زیرا شتابی ندارد، با وجود این کف دستگاه یک نیروی اصطکاک (حقیقی) بر کف پای آن شخص وارد می‌کند که شامل دو مؤلفه است یکی $(-F_r\vec{u}_r)$ در امتداد شعاع و متوجه به داخل و یک مؤلفه $(F_\theta\vec{u}_\theta)$ در جهت θ. حال از دید این ناظر که شخص را در حال تعادل می‌بیند، چگونه می‌توان این دو مؤلفه را توجیه کرد؟ چه چیز اثر چرخشی مؤلفه $(F_\theta\vec{u}_\theta)$ را جبران خواهد کرد؟

وی مجبور است برای کمک گرفتن از مکانیک کلاسیک، نیروهای اینرسی موجود را معرفی کند و این نیروهای اینرسی، اثر نیروهای حقیقی اصطکاک را خنثی می‌کنند، یکی از این نیروهای اینرسی، نیروی گریز از مرکز نامیده می‌شود که دارای بزرگی F_r شعاعی و به طرف خارج است که اثر مؤلفه $(-F_r\vec{u}_r)$ را خنثی می‌کند و نیروی اینرسی دیگر که نیروی کوریولی نامیده می‌شود که دارای بزرگی F_θ و در جهت منفی θ که مؤلفه $(\vec{u}_\theta F_\theta)$ اصطکاک را خنثی می‌کند.

از دید یک ناظر زمینی مؤلفه‌های F_r و F_θ وابسته به اصطکاک کاملاً قابل درک و لازم می‌باشند. F_r به شتاب مرکزگرای $r\omega^2$ و F_θ به شتاب کوریولویس $2\omega v_r$ وابسته است و وی شخص را در حال تعادل نمی‌بیند و برای او حرکت دورانی نیز منظور می‌کند؛ ترکیبی از حرکت دورانی، شعاعی و به طرف خارج.

۱۱ـ۶ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ زاویه‌ای که چرخ لنگر یک مولد برق در بازه زمانی t طی می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta=at+bt^3-ct^4$$

که در آن a و b و c مقادیر ثابتی هستند. رابطه مربوط به شتاب زاویه‌ای چرخ چگونه است؟

حل. برای شتاب زاویه‌ای چرخ لنگر داریم:

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}=\frac{d}{dt}\,(a+۳bt^{۲}-۴ct^{۳})=۶bt-۱۲\,ct^{۲}$$

۲ـ حرکت صفحه دور گرامافونی که با سرعت ۷۸ دور در دقیقه می‌چرخد، پس از خاموش کردن دستگاه کُند می‌شود و بعد از ۳۰ s صفحه می‌ایستد.

الف) شتاب زاویه‌ای صفحه را پیدا کنید.

ب) در این مدت صفحه چند دور چرخیده است؟

حل. سرعت زاویه‌ای اولیه حرکت صفحه گرامافون عبارت است از:

$$\omega_{\circ}=۸۷\ \text{rev/min}=۸/۱۶\ \text{rad/s}$$

در محاسبهٔ $\omega_{\circ}$ بر حسب رادیان بر ثانیه از این نکته استفاده کردیم که هر دور کامل ۲π رادیان است. برای محاسبهٔ شتاب زاویه‌ای از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_{\circ}}{t}=\frac{\circ-۸/۱۶}{۳\circ}=\circ/۲۷\ \text{rad/s}^{۲}$$

از طرفی داریم $n=\frac{\theta}{۲\pi}$. بنابراین با محاسبهٔ θ می‌توان تعداد دور چرخش صفحه را محاسبه کرد:

$$\theta=\frac{۱}{۲}\,\alpha t^{۲}+\omega_{\circ}t$$

$$\theta=۱۲۳/۳\ \text{rad}\ \Rightarrow\ n=\frac{۱۲۳/۳}{۳\pi}\simeq ۲\circ\ \text{rev}$$

۳ـ جسم صلبی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت α حول محور ثابتی می‌چرخد. ذره‌ای را به فاصله r از محور در نظر بگیرید.

الف) شتاب شعاعی و شتاب مماسی این ذره از جسم را بر حسب α، r و زمان t بیان کنید.

ب) اگر در یک لحظه امتداد شتاب برآیند این ذره با امتداد شتاب مماسی آن زاویه $۶\circ^{\circ}$ بسازد جسم مورد نظر تا این لحظه چه زاویه‌ای را طی کرده است؟

حل. چون ذره از حالت سکون شروع به حرکت کرده است داریم:

$$\omega_{\circ}=\circ\ ,\quad \omega=\omega_{\circ}+\alpha t\ \Rightarrow\ \omega=\alpha t$$

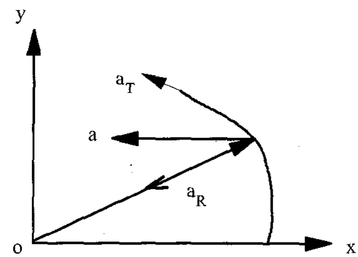
الف) برای شتاب شعاعی با توجه به رابطه $a_R = \omega^2 r$ داریم (توجه شود که جهت a_R به سمت محور دوران است): $a_R = r\alpha^2 t^2$

ب) شتاب مماسی از رابطهٔ $a_T = \alpha r$ محاسبه می‌شود.

ج) اگر در یک لحظه امتداد شتاب برآیند این ذره با امتداد شتاب مماس آن زاویه $\sigma = 60^\circ$ بسازد با توجه به شکل داریم:

$$tg\sigma = \frac{a_R}{a_T} = \alpha t^2$$

$$\Rightarrow tg60^\circ = \sqrt{3} = \alpha t^2$$



برای زاویه‌ای که جسم مورد نظر تا لحظه مذکور طی کرده می‌توان نوشت:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_\circ t = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\text{rad} = 49/6^\circ$$

۴ـ با مشتق‌گیری از معادله $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ معادله

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

از طرفی $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ و $\vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{v}$. در نتیجه معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

۵ـ سیم‌بافتی که یک آسانسور را نگه می‌دارد از روی قرقره‌ای به شعاع $0/36\ m$ می‌گذرد. اگر آسانسور با یک شتاب به سمت بالا به مقدار $0/47\ m/s^2$ بالا رود، شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ اگر این حرکت شتابدار که از حرکت سکون شروع شده است ۵ ثانیه طول بکشد، قرقره چند دور می‌زند؟

فرض کنید سیم‌بافت از روی قرقره بدون لغزش حرکت می‌کند.

حل. اگر هیچ لغزشی وجود نداشته باشد، تندی سیم‌بافت باید همیشه با تندی یک

نقطه روی قرقره منطبق شود؛ آنگاه شتاب $a= ۰/۴۷\ m/s^۲$ سیم‌بافت باید با شتاب مماسی یک نقطه روی قرقره منطبق باشد:

$$a=a_T=\alpha R$$
$$\alpha=\frac{a}{R}=\frac{۰/۴۷}{۰/۳۶}=۱/۳\ rad/s^۲$$

۶ـ یک پرتاب کننده دیسک با شتاب زاویه‌ای $۵۰\ rad/s^۲$ دیسکی را روی دایره‌ای به شعاع $۰/۸m$ به حرکت درمی‌آورد. بازوی شخص را جسم صلب فرض کنید، لذا r ثابت است. مؤلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب دیسک را، وقتی با سرعت زاویه‌ای $۱۰\ rad/s$ در حرکت است، پیدا کنید.

حل. دیسک را ذره‌ای فرض می‌کنیم که روی مسیر دایره‌ای در حرکت است.

شتاب شعاعی : $a_R=r\omega^۲=۸۰\ m/s^۲=(۱۰\ \frac{rad}{s})^۲(۰/۸m)=۸۰\ m/s^۲$

شتاب مماسی : $a_T=r\alpha=۴۰\ m/s^۲=(۰/۸m)(۵۰\ rad/s^۲)=۴۰\ m/s^۲$

بنابراین اندازه شتاب برابر است با:

$$a=\sqrt{a_R^۲+a_T^۲} \qquad a=۸۹/۵m/s^۲$$

این مقداردر حدود ۹ برابر شتاب گرانش زمین است.

توجه کنید: یکای رادیان در محاسبه شتاب مماسی و شتاب شعاعی حذف شده است. این کار درست است زیرا رادیان دیمانسیون ندارد.

۷ـ استوانه‌ای به شعاع $۰/۴۰\ m$ از بالای یک سطح شیبدار و از حالت سکون، بدون لغزش به پایین شروع به غلتیدن می‌کند. از لحظه رها شدن آن تا رسیدن به نقطه B که ۸/۰ متر پایین‌تر روی سطح شیبدار است $۱۰/۰\ s$ طول می‌کشد. شتاب زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای در امتداد B و تعداد دورانهای کامل استوانه را برای پیمودن مسافت A تا B به دست آورید. فرض کنید استوانه با شتاب ثابت از سطح پایین می‌آید.

حل. سرعت انتقالی متوسط عبارت است از:

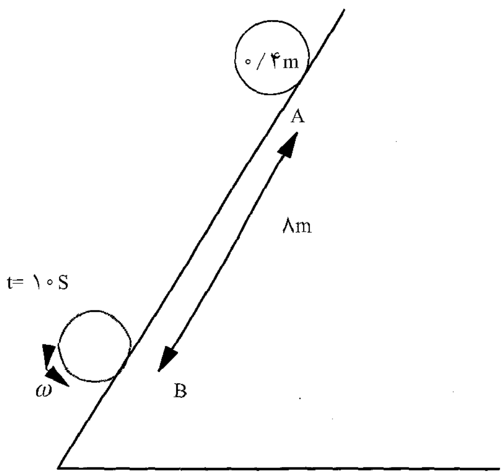
$$\bar{V}=\frac{۸/۰}{۱۰/۰}=۰/۸\,m/s$$

از طرفی:

$$\bar{v}=\frac{v_B+v_۰}{۲}=\frac{v_B}{۲}$$

$$\Rightarrow v_B=۱/۶۰\ m/s$$

که v_B سرعت در نقطهٔ B است و شتاب مماسی به شکل زیر خواهد بود:



$$\alpha_t=\frac{\Delta v}{\Delta t}=۰/۱۶۰\ m/s^۲$$

و شتاب زاویه‌ای که از $a_t=r\,\alpha$ به دست می‌آید برابر است با:

$$\alpha=\frac{۰/۱۶۰}{۰/۴۰}=۰/۴۰\ rad/s^۲$$

سرعت زاویه‌ای در نقطه B عبارت است از:

$$\omega_B=\frac{v_B}{r}=\frac{۱/۶۰}{۰/۴۰}=۴/۰۰\ rad/s$$

و تعداد دورانهای کامل استوانه، N، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

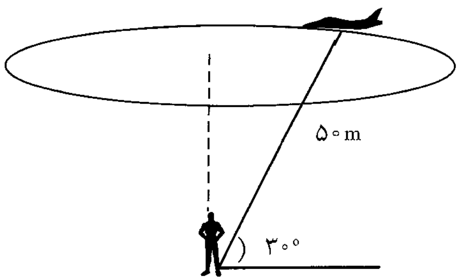
$$N=\frac{\theta}{۲\pi}$$

$$\theta=\frac{S}{r}=\frac{۸}{۰/۴}=۲۰\ rad$$

که در آن

$$\Rightarrow N=\frac{۲۰}{۲\pi}=۳/۱۸\ \text{rad}$$

۸ـ یک هواپیمای اسباب‌بازی به جرم ۰/۵ kg در یک دایرهٔ افقی در حال حرکت است و توسط سیمی به طول ۵۰ m توسط کودکی کنترل می‌شود. سرعت هواپیما ۵۰ m/s و زاویهٔ سیم با افق ۳۰° است. کشش سیم را محاسبه کنید ($g=۱۰\ m/s^۲$).



حل. نیروهای وارد بر هواپیما عبارتند از نیروی وزن، کشش سیم و نیروی مرکزگرا، بنابراین داریم:

$$T=\sqrt{mg+m\frac{v^۲}{r}}$$

که با توجه به زاویه سیم با زمین داریم:

$$\cos ۳۰=\frac{r}{۵۰}\Rightarrow r=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۲}m$$

$$\Rightarrow T=\left(۰/۵\times ۱۰+۰/۵\times\frac{۵۰^۲}{\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow T=۵/۸N$$

۹ـ شعاع زمین تقریباً $۶/۴۰\times ۱۰^۶ m$ است.

الف) سرعت زاویه‌ای زمین چقدر است؟

ب) سرعت نقطه‌ای روی سطح زمین در منطقه استوا چقدر است؟

ج) شتاب شعاعی این نقطه چقدر است؟

حل. الف) با توجه به اینکه دوره تناوب حرکت زمین ۲۴ h است داریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۸۶۴۰۰}=۷/۲\times ۱۰^{-۵}\text{rad/s}$$

ب)

$$V=r\,\omega \Rightarrow V=۴۶۱\ \text{m/s}$$

ج)

$$a_R=\frac{V^۲}{r}\Rightarrow a_R=۰/۰۳۳\ \text{m/s}^۲$$

۱۰ـ پروانه یک هواپیمای تک موتوره، وقتی که هواپیما با سرعت ۲۴۰ km/h گشت می‌زند، با سرعت ۶۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد. اگر قطر پروانه ۱/۸ m باشد، سرعت نقطه‌ای واقع بر لبه پروانه: الف) از دید خلبان؛ ب) از دید ناظر روی زمین، چقدر است؟

حل. الف) سرعت زاویه‌ای پروانه بر حسب rad/s عبارت است از:

$$\omega=۶۰۰\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}\times\frac{۲\pi}{۶۰}=۲۰\,\pi\text{rad/s}$$

$$V=r\,\omega \Rightarrow V=۰/۹\times ۲۰\,\pi=۵۶/۵\ \text{m/s}$$

ب) از دید ناظر روی زمین، پروانه هواپیما علاوه بر سرعت خطی ناشی از چرخش خود، دارای سرعت خطی ناشی از چرخش هواپیما نیز هست. این دو سرعت خطی بر هم عمودند. ناظر روی زمین برآیند این دو سرعت را برای نقطه‌ای واقع بر لبه پروانه محاسبه می‌کند. $V_۱$ سرعت خطی گردش هواپیماست:

$$V_۱=۲۴۰\ \text{km/h}\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}=۶۶/۷\ \text{m/s}$$

$$V_۱=\sqrt{V^۲+V_۱^۲}=\sqrt{(۵۶/۵)^۲+(۶۶/۷)^۲}=۸۷/۴\text{m/s}$$

۱۱ـ مطابق مدل اتم هیدروژن بور، الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع $۵/۲۸\times ۱۰^{-۱۱}$m پروتون را دور می‌زند و پروتون را می‌توان ساکن فرض کرد. سرعت مماسی الکترون $۲/۲\times ۱۰^{۶}$m/s است. الکترون چند دور در ثانیه می‌گردد و با چه نیرویی به سوی پروتون جذب می‌شود؟ ($m_e=۹/۱۱\times ۱۰^{۳۱}$kg)

حل.

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{۲/۲\times۱۰^{۶}}{۵/۲۸\times۱۰^{-۱۱}}=۴/۲\times۱۰^{۱۶}\text{rad/s}$$

برای اینکه بسامد الکترون (تعداد دور آنها در یک ثانیه) را به دست آوریم کافیست جواب فوق را بر ۲π تقسیم کنیم.

$$\nu=\frac{\omega}{۲\pi}=۶/۶۸\times۱۰^{۱۵}\text{rev/s}$$

الکترون با نیروی مرکزگرا جذب پروتون می‌شود. بنابراین:

$$F=m\frac{V^{۲}}{r}\Rightarrow F=۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\frac{(۲/۲\times)^{۲}}{۵/۲۸\times۱۰^{-۱۱}}=۸/۳۵\times۱۰^{-۸}\text{N}$$

۱۱ـ۷ـ پرسشها و مسایل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ توضیح دهید چرا اندازه زاویه‌ای بر حسب رادیان برای تمام دستگاه یکاها به یک اندازه مناسب است. آیا این مطلب برای درجه نیز صادق است؟

۲ـ الف) برداری توصیف کنید که بتواند سرعت زاویه‌ای دوران زمین حول خودش را نشان دهد. ب) برداری توصیف کنید که بتواند سرعت زاویه‌ای دوران زمین حول خورشید را نشان دهد.

۳ـ سرعت زاویه‌ای شما حول محوری که از مرکز جرمتان می‌گذرد نسبت به یک چارچوب مرجع لخت، و در همین لحظه کنونی چیست؟

۴ـ اتومبیلی با سرعت ثابت در جاده‌ای حرکت می‌کند که شامل دو مسیر مستقیم است که با یک منحنی به شکل کمان دایره به هم متصل شده‌اند. اگر مرکز دایره را مبدأ بگیرید، راستای اندازه حرکت زاویه‌ای اتومبیل چیست؟ آیا طی حرکت اتومبیل در جاده اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت است؟

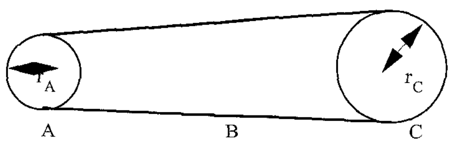
۵ـ تفاوت میان شتاب مماسی و شعاعی یک نقطه از یک جسم چرخان چیست؟

۶ـ آیا یک نیروی وارد به یک جسم می‌تواند حرکت انتقالی و دورانی آن را

تغییر دهد؟

ب) مسایل

۱ـ چرخ A به شعاع $r_A = 10\ cm$ به وسیله تسمهٔ B به چرخ C به شعاع $r_C = 25\ cm$ وصل شده است. سرعت زاویه‌ای چرخ A از حالت سکون با شتاب یکنواخت $\frac{\pi}{2} rad/s^2$ افزایش می‌یابد.



با فرض اینکه تسمه نلغزد، مدت زمانی را که لازم است تا سرعت چرخ C به ۱۰۰ دور بر دقیقه برسد تعین کنید.

۲ـ موتور اتومبیل در ۷ ثانیه با آهنگ ثابت از ۲۰۰ دور در دقیقه تا ۳۰۰۰ دور در دقیقه شتاب می‌گیرد و پس از آن با تندی ثابت حرکت می‌کند.

الف) سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را در $t = 0$ (درست پیش از پایان گرفتن شتاب) بیابید.

ب) چرخ طیاری به شعاع $18\ cm$ به شَفت موتور وصل است، شتاب مماسی و مرکزی نقطه‌ای روی کناره چرخ را در زمان‌های یاد شده فوق حساب کنید.

ج) بردار شتاب خالص در $t = 0$ و $t = 7\ s$ با شعاع چه زاویه‌ای می‌سازد؟ نمودارهایی بکشید که چرخ و بردار شتاب را در این زمان‌ها نشان دهد.

۳ـ هواپیمایی به تندی $900\ km/h$ و در ارتفاع $10000\ m$ مستقیماً از بالای سر شما رد می‌شود. سرعت زاویه‌ای هواپیما (نسبت به شما) هنگامی که مستقیماً بالای سر شماست چقدر است؟ سه دقیقه بعد چقدر؟

۴ـ لبه بیرونی قسمت شیاردار یک صفحه گرامافون دور زیاد دارای فاصله شعاعی $14/6\ cm$ از مرکز است. لبه درونی فاصله شعاعی $6/35\ cm$ دارد. صفحه با سرعت $33\frac{1}{3}$ دور در دقیقه می‌چرخد. سوزن گرامافون ظرف ۲۵ دقیقه صفحه را

می‌پیماید و در این فاصله زمانی به طور یکنواخت در امتداد شعاعی از لبه بیرونی به سوی لبه درونی حرکت می‌کند. تندی شعاعی سوزن چقدر است؟ تندی لبه بیرونی نسبت به سوزن چقدر است؟ تندی لبه درونی نسبت به سوزن چقدر است؟

۵ـ اگر یک قطعه فولاد روی چرخ سمباده‌ای به قطر ۱۰ cm و سرعت ۱۸۰۰ دور در دقیقه قرار گیرد، نیروی اصطکاک بین فولاد و محیط چرخ ۶/۲۵ N است. موتور باید چه توانی را تأمین کند تا چرخ همچنان با ۱۸۰۰ دور در دقیقه بچرخد؟

۶ـ پیچ یک جاده، دارای شعاع ۱۲۰ m و زاویهٔ شیب عرضی ۱۲ است. اگر اتومبیلی به جرم ۱۰۰۰ kg با سرعت ۴۰ km/h بدون لغزش از این پیچ عبور کند، نیروی اصطکاک بین چرخهای اتومبیل و جاده چقدر است؟ این نیرو در چه جهتی است؟

۷ـ یک جاروبرقی با چرخ تسمه کار می‌کند. شعاع چرخ کوچک، متصل به موتور، ۰/۴ cm و شعاع چرخ بزرگ متصل به مکنده، ۲ cm است. محور موتور با سرعت ۶۰ دور در ثانیه می‌چرخد و تسمه حرکت را به چرخ کوچک منتقل می‌کند تا دستگاه مکنده را به کار اندازد. فرض کنید تسمه لغزش ندارد.

الف) سرعت یک نقطه واقع بر روی تسمه را پیدا کنید.

ب) سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک چند رادیان بر ثانیه است.

۸ـ چرخ لنگری به شعاع ۰/۳ m از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت ۰/۶ دور بر مجذور ثانیه شروع به دوران می‌کند. اندازه شتاب مماسی، شتاب شعاعی و بردار شتاب نقطه‌ای از محور چرخ را الف) در لحظهٔ شروع؛ ب) پس از °۱۲۰ چرخیدن و ج) پس از °۲۴۰ چرخیدن به دست آورید.

۹ـ چرخی به شعاع ۳۰ cm از حالت سکون شروع به حرکت کرده و در مدت ۲ ثانیه ده دور می‌چرخد. اگر شتاب حرکت ثابت فرض شود مطلوب است: الف) شتاب زاویه‌ای حرکت؛ ب) سرعت زاویه‌ای نهایی؛ ج) سرعت خطی؛ د) شتاب جانب مرکز یک نقطه روی محیط چرخ در پایان ثانیه دوم.

۱۰ـ الف) ثابت کنید که وقتی جسمی از حال سکون و با شتاب ثابت حول یک

محور ثابت می‌چرخد، شتاب لحظه‌ای هر نقطه از آن جسم با جابجایی زاویه‌ای آن نسبت مستقیم دارد.

ب) در لحظه‌ای که زاویه شتاب برآیند یک نقطه با راستای شعاعی آن $30°$ است، جسم چه زاویه‌ای را پیموده است؟

۱۱ـ قرص صلب یکنواختی به جرم m و به شعاع R حول یک محور افقی گذرنده از مرکز آن لولا شده و جسم کوچکی به جرم m به کناره این قرص متصل است. اگر در حالتی که جرم کوچک در انتهای شعاع افقی قرار دارد، قرص را از حال سکون رها کنیم، سرعت زاویه‌ای آن جسم در پایین چقدر است؟

۱۲ـ یک یویو از دو قرص یکنواخت با جرم مساوی m و شعاع R ساخته شده است. این دو قرص توسط یک محور سبک به شعاع b به یکدیگر وصل شده‌اند. ریسمان را چند بار حول این محور می‌پیچیم و سپس یویو را از حال سکون رها می‌کنیم تا ریسمان باز شود. شتاب یویو و کشش ریسمان را پیدا کنید.

۱۳ـ قرص صلبی بدون لغزیدن بر روی یک سطح افقی با سرعت ثابت $4/0\ m/s$ می‌غلتد. این قرص چه مسافتی را بر روی یک سطح شیبدار $30°$ به طرف بالا می‌پیماید؟

۱۴ـ یک ایستگاه فضایی به شکل یک شیرینی دونات (شیرینی گردی که وسطش سوراخ است) با قطر خارجی $240\ m$ و قطر داخلی $200\ m$ ساخته شده است. این دستگاه با چه آهنگی باید بچرخد تا بر ساکنان آن وقتی که در قطر خارجی ایستگاه هستند، شتاب g وارد آید؟ وقتی که یکی از ساکنان این ایستگاه از قسمت خارجی دونات به قسمت داخلی آن می‌رود، وزنش چند درصد تغییر می‌کند؟

فصل ۱۲

دینامیک دورانی (۱)

۱۲ـ۱ـ مقدمه

همانطور که قبلاً دیدیم قانون دوم نیوتن معادله‌ای است که حرکت انتقالی یک جسم را معین می‌کند و به ما اجازه می‌دهد که تغییر سرعت و مکان را محاسبه کنیم. معادله‌ای مشابه برای حرکت چرخشی، شتاب زاویه‌ای را به دست می‌دهد و محاسبه سرعت زاویه‌ای و مکان زاویه‌ای را ممکن می‌سازد. معادلهٔ حرکت چرخشی یک قانون دیگر فیزیک سوای سه قانون نیوتن نیست، بلکه نتیجه‌ای از این قوانین است. در این فصل و فصل بعد به بررسی دینامیک حرکت دورانی و پاره‌ای کاربردهای آن می‌پردازیم.

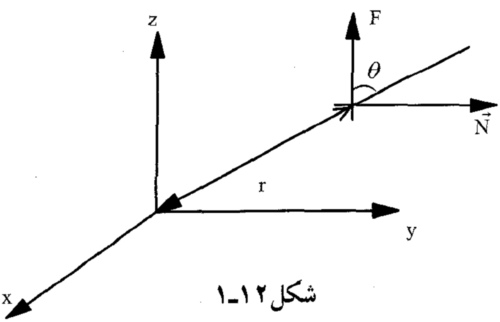
۱۲ـ۲ـ گشتاور

نقطه اتکایی به من بدهید تا زمین را جابجا کنم (ارشمیدس).

پیش از اینکه قوانین حرکت چرخشی یک جسم صلب را مطرح کنیم باید مفهوم گشتاور نیرو را بررسی کنیم. چنان که خواهیم دید این کمیت در حرکت چرخشی همان

نقشی را بازی می‌کند که نیرو در حرکت انتقالی دارد. برای مثال، رانش دست شما روی دستهٔ یک چرخ، یک گشتاور نیرو یا «پیچش» وارد می‌کند که باعث شتاب زاویه‌ای چرخ می‌شود. برای تعریف کامل گشتاور نیرو، فرض کنید که نیروی $\vec{F}$ به ذره‌ای که نسبت به مبدأ مفروض دارای برد مکان $\vec{r}$ است وارد می‌شود؛ آنگاه گشتاور $\vec{N}$ این نیرو نسبت به مبدأ به صورت حاصلضرب خارجی $\vec{r}$ و $\vec{F}$ تعریف می‌شود: $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$.

پس گشتاور نیرو یک بردار است. مقدار آن بر حسب زاویه بین بردار مکان و نیرو یعنی θ چنین است:
$$N=rF\sin\alpha$$
و راستای گشتاور نیرو، چنان که از دستور دست راست برمی‌اید، بر هر دو بردار مکان و نیرو عمود است. کمیت $r\sin\theta$ که در معادله فوق ظاهر می‌شود دارای یک تفسیر ساده هندسی است: این کمیت فاصله عمود بین خط کنش نیرو و مبدأ بردار $\vec{r}$ است. این فاصله عمود بازوی گشتاور نیرو نامیده می‌شود. به گونه‌ای دیگر، به کمیت $F\sin\theta$ نیز می‌توان معنایی نسبت داد: این کمیت، مؤلفه نیرو بر روی راستایی عمود بر بردار مکان است.



شکل ۱۲ـ۱

اگر نیرو موازی بردار مکان باشد، آنگاه $N=0$ خواهد شد و اگر نیرو عمود بر بردار مکان باشد $N=rF$ خواهد شد. بدین ترتیب، یک نیرو با مقدار معلوم، به صورت تابعی از زاویه θ اگر عمود بر بردار مکان باشد، بیشترین گشتاور را ایجاد می‌کند. اگر ذره‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود متعلق به یک جسم صُلب باشد، آنگاه به آسانی درمی‌یابیم که این بستگی به زاویه θ با برداشت ذهنی ما دربارهٔ اثر چرخشی یک نیرو سازگار است. برای مثال، اگر بخواهیم چرخی را حول یک مبدأ در مرکز چرخ به

چرخش درآوریم، باید به نقطه‌ای از چرخ به طور متقاطع با خط شعاعی، نیرو وارد کنیم؛ اگر در امتداد خط شعاعی نیرو وارد کنیم، صرفاً چرخ را در راستای این رانش، بدون چرخش، جابجا خواهیم کرد.

به خاطر سپردن این موضوع حائز اهمیت است که گشتاور یک نیروی مفروض به انتخاب مبدأ بستگی دارد؛ یکای گشتاور در سیستم SIنیوتن ـ متر (N.m) است. این بدان معناست که یکای گشتاور با یکای کار یکی است. از آنجا که نیوتن متر با واحد بین‌المللی ژول همانند است، از حیث اصولی می‌توانیم گشتاور را بر حسب ژول اندازه‌گیری کنیم. اما به خاطر این که دست‌کم تمایزی بین بین یکاهای گشتاور و کار قائل شویم بر استفاده انحصاری نیوتن متر برای گشتاور و ژول برای کار، اصرار می‌ورزیم.

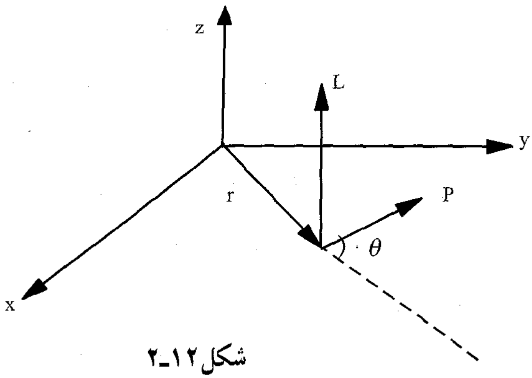
ذکر این نکته مهم است که شرط لازم برای ایجاد حرکت دورانی وجود گشتاور نیروهای وارد بر جسم است، اما این شرط کافی نیست.

۱۲ـ۳ـ اندازه حرکت زاویه‌ای

در این قسمت هدف ما یافتن همتای اندازه حرکت خطی در حرکت دورانی است. در فصل‌های قبل دیدیم که اندازه حرکت خطی در بررسی حرکت انتقالی ذرات منفرد و یا دستگاههای ذرات یک مفهوم مفید است. کمیت همانند آن در حرکت دورانی اندازه حرکت زاویه‌ای است و به همان میزان اندازه حرکت خطی اهمیت دارد. این مفهوم به ما کمک می‌کند معادلهٔ عمومی حرکت چرخشی برای جسم صلب و یک قانون پایستگی را به دست آوریم. نخست مفهوم اندازه حرکت زاویه‌ای را برای حالت خاص یک ذره تنها معرفی می‌کنیم و سپس به حالت یک سیستم ذرات، مانند یک جسم صلب می‌رسیم. ذره منفردی به جرم m را در نظر بگیرید که در یک لحظه از زمان، دارای اندازه حرکت $\vec{p}$ است و در فاصله r از مبدأ قرار دارد. اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ این ذره به صورت برداری با رابطهٔ

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P} \qquad (۱ـ۱۲)$$

تعریف می‌شود، که راستای L در آن امتداد عمود بر صفحه‌ای است که با بردارهای r و P ساخته می‌شود و جهت آن با قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود.



شکل ۱۲ـ۲

وقتی نیروی F بر ذره‌ای وارد می‌شود، سرعت آن تغییر می‌کند، پس سرعت زاویه‌ای آن نیز تغییر خواهد کرد. می‌توان نشان داد که آهنگ تغییر اندازه زاویه‌ای برابر گشتاور نیروست. از رابطه (۱۲ـ۱) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم با استفاده از مشتق حاصلضرب می‌توان نوشت:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\,\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{N} \qquad (۲ـ۱۲)$$

آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره برابر گشتاور برآیند نیروهای وارد بر آن است (قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای).

اندازه حرکت زاویه‌ای ذره‌ای که در نبود نیروها با سرعت ثابت حرکت می‌کند، ثابت است. این پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره آزاد چندان اهمیتی ندارد (هیچ چیز جدیدی دربارهٔ حرکت ذره به ما نمی‌گوید). برای مشاهده حالتی از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای که تا حدی جالب‌تر است، ذره‌ای را در حرکت دایره‌ای یکنواخت در نظر بگیرید، همچون سنگی که در انتهای نخی که به آن بسته شده در

امتداد دایره‌ای گردانده می‌شود، یا زمین که در امتداد مداری که دایره فرض می‌شود حول خورشید حرکت می‌کند. از آنجا که بردار مکان همیشه بر بردار سرعت عمود است، مقدار بردار اندازه حرکت زاویه‌ای چنین است $L=rp=rmv$.

راستای بردار اندازه حرکت زاویه‌ای بر صفحهٔ دایره عمود است. مادام که ذره حول دایره حرکت می‌کند، مقدار و راستای L ثابت باقی می‌ماند. بدین ترتیب می‌توان رابطهٔ ساده و مفید $L=I\omega$ را نیز تعریف کرد، که در آن $I=mr^{۲}$ گشتاور ماند است. این رابطه را به کمک $v=r\omega$ به راحتی می‌توان به دست آورد.

تا کنون فقط دربارهٔ ذرات منفرد صحبت کردیم. اکنون توجه خود را به یک جسم صلب معطوف می‌کنیم. اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک جسم صلب مجموع اندازهٔ حرکت‌های زاویه‌ای همهٔ ذرات تشکیل دهنده جسم است. اگر ذرات دارای جرم‌های m_i و سرعتهای $\vec{v}_i$ و بردارهای مکان $\vec{r}_i$ باشند، آنگاه اندازه حرکت زاویه‌ای کل چنین است:

$$\vec{L}=\sum_{i=۱}^{N} m_i\,\vec{r}_i\times\vec{v}_i \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

همانند حالت یک ذره تنها مقدار اندازه حرکت زاویه‌ای به دست آمده از این فرمول به انتخاب مبدأ بستگی دارد. برای محاسبهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم صلب که حول یک محور ثابت می‌چرخد، معمولاً بهتر است مبدأ را روی محور چرخش یا در مرکز جرم انتخاب کنیم. بردار اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم همیشه لازم نیست روی محور چرخش قرار گیرد. اما اگر محور چرخش یک محور تقارن جسم نیز باشد، آنگاه در امتداد این محور قرار خواهد گرفت. در چنین جسم متقارنی، هر ذره در یک طرف محور، همتایی در طرف دیگر محور دارد. اندازه حرکت زاویه‌ای این دو ذره، در امتداد محور مؤلفه‌های یکسان ولی در راستای عمود بر محور، مؤلفه‌های مخالف دارد.

۱۲ـ۴ـ پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

به ندرت پیش می آید که جسمی در امتداد یک خط راست یا تحت تأثیر یک نیروی ثابت حرکت کند، چون نیروی وارد بر جسم معمولاً با سرعت جسم زاویه‌ای می‌سازد که از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. برای بررسی چنین مواردی مفاهیم جدیدی مانند گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای را معرفی می‌کنیم.

اکنون به بیان اصل پایستگی بسیار مهمی به نام پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای می‌پردازیم. این اصل را مستقیماً از رابطه $\Sigma\vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ نتیجه می‌گیریم: «هرگاه جمع گشتاورهای همهٔ نیروهای خارجی وارد بر دستگاهی صفر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای کل ثابت (پایستار) می‌ماند».

وقتی دستگاهی چند جزء داشته باشد، نیروهای داخلی که این اجزاء بر یکدیگر وارد می‌کنند باعث تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای آنها می‌شوند، اما اندازه حرکت زاویه‌ای کل تغییر نمی‌کند. آکروبات‌های سیرک، کسانی که از روی تخته به درون استخر می‌پرند، و اسکیت‌بازان همگی از این اصل برای کارهای نمایشی خود استفاده می‌کنند. فرض کنید آکروباتی با دست و پای باز از تاب جدا می‌شود و اندازه حرکت زاویه‌ای او در جهت پاد ساعتگرد است. اگر او دست و پای خود را جمع کرده و به حال چمباتمه درآید گشتاور ماند I او کاهش چشمگیر پیدا می‌کند. چون اندازه حرکت زاویه‌ای $L=I\omega$ ثابت است و I کاهش یافته است، پس باید ω افزایش یابد یعنی: $I_1\omega_1=I_2\omega_2$. وقتی اسکیت‌باز با دست‌های باز افقی به دور محور قائمی دوران می‌کند و ناگهان دست‌ها را می‌اندازد، سرعت زاویه‌ای او افزایش می‌یابد زیرا گشتاور ماند او نسبت به محور چرخش کم می‌شود. در هریک از این موارد، اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ثابت می‌ماند.

۵ـ۱۲ـ انرژی جنبشی دوران و گشتاور ماند

جسم صلب دوّار، جسم متحرک است، پس انرژی جنبشی دارد. می‌توان این انرژی جنبشی را بر حسب سرعت زاویه‌ای و کمیت جدیدی موسوم به گشتاور ماند بیان کرد. وقتی جسم صلبی به دور محور ثابتی می‌چرخد سرعت V_i ذره نمادین از $V_i=r_i\omega$ به دست می‌آید. مقدار r برای ذرات مختلف متفاوت است اما ω برای همه آنها یکسان است (در غیر این صورت جسم صلب نیست.) انرژی جنبشی ذره نمادین عبارت است از:

$$\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

و انرژی جنبشی کل جسم، جمع انرژی جنبشی‌های این ذرات است.

$$K=\sum_i\frac{1}{2}m_i.r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i.r_i^2\right)\omega^2 \qquad (۴ـ۱۲)$$

کمیت درون پرانتز گشتاور ماند جسم نسبت به محور نامیده می‌شود و آن را با I نشان می‌دهیم. گشتاور ماند میزان مقاومتی است که جسم در مقابل تغییر حرکت چرخشی‌اش از خود نشان می‌دهد درست همان‌طور که جرم میزان مقاومتی است که جسم در مقابل تغییر حرکت انتقالی‌اش از خود بروز می‌دهد. این همسانیها بین کمیتهای انتقالی و چرخشی، درک معادلات چرخشی را آسان می‌کند. انرژی جنبشی کل k بر حسب گشتاور ماند I چنین می‌شود: $K=\frac{1}{2}I\omega^2$ که مشابه $K=\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی ذره در حرکت انتقالی است.

ممکن است تصور کنید که با فرض تمرکز تمامی جرم جسم در مرکز جرم آن و سپس ضرب مقدار جرم در مجذور فاصله مرکز جرم تا محور می‌توان گشتاور ماند را حساب کرد. در برابر این تمایل ایستادگی کنید که غلط است! (چرا؟) مثلاً وقتی میلهٔ نازکی به جرم M و به طول L به دور محوری که از یک انتهای آن می‌گذرد لولا شده است، گشتاور ماند آن نسبت به این محور $I=\frac{ML^2}{3}$ است. چنانچه همهٔ جرم را در مرکز جرم فرض کنیم که فاصلهٔ آن از محور $\frac{L}{2}$ است، گشتاور لختی برابر $I=M(\frac{L}{2})^2=\frac{ML^2}{4}$

به دست می‌آید که صحیح نیست. اگر فرض کنیم که جرم یک جسم جامد بـه طـور پیوسته روی تمامی حجم آن توزیع شده است، آنگاه می‌توانیم گشتاور ماند دورانی را با تبدیل معادلهٔ $I=\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ به یک انتگرال محاسبه کنیم. همانند محاسبه مکان مرکز جرم، تصور می‌کنیم حجم کلی به حجم‌های کوچکی با جرم‌های زیر تقسیم شده است:

$\Delta m_i = \rho \Delta V_i$

که در آن ρ چگالی است. آنگاه:

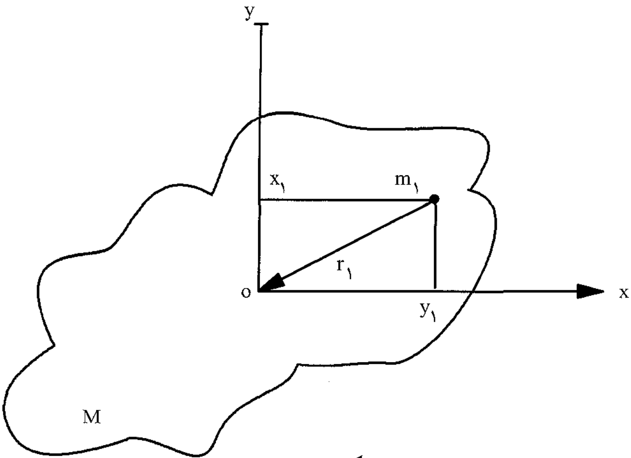
$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2=\sum_{i=1}^{n} \rho R_i^2 \Delta V_1 \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

این در حد $\Delta v \to 0$ به انتگرال زیر تبدیل خواهد شد:

$$I=\int \rho R^2 dv \qquad (۶\text{-}۱۲)$$

یکی از قضایای عمومی در مورد محاسبه گشتاور ماند، قضیه محورهای موازی است: گشتاور ماند I حول محوری که از نقطه‌ای می‌گذرد، برابر است با مجموع گشتاور ماند I_{cm} حول محوری موازی آن که از نقطه مرکز جرم می‌گذرد و حاصلضرب جرم کل جسم در مجذور فاصله محور دوران تا مرکز جرم. به عبارت دیگر: $I=I_{cm}+MR^2$ که در آن M جرم کل جسم و R فاصلهٔ بین دو محور است. از معادلهٔ فوق می‌توان چنین استنتاج کرد که گشتاور ماند حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد همواره کمتر از گشتاور حول هر محور موازی دیگر است.

قضیه دیگر قضیه محورهای متعامد است که گشتاور ماند یک صفحه نازک هموار (مثل یک ورقهٔ فلزی) حول سه محور دو به دو متعامد را به هم مربوط می‌کند. اگر I_x و I_y به ترتیب گشتاورهای ماند ورقهٔ مورد نظر نسبت به محورهای x و y و I گشتاور ماند این ورقه نسبت به محوری باشد که در نقطهٔ O بر صفحه xy عمود شده است، خواهیم داشت: $I_\circ=I_x+I_y$.



شکل ۱۲ـ۳

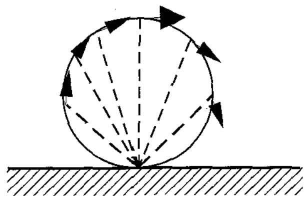
برای فهم بهتر مطالب این بخش، چند نمونه به عنوان مسائل حل شده در پایان فصل آورده شده است.

۱۲ـ٦ـ حرکت غلتشی (ترکیب حرکت انتقالی و دورانی)

در بررسی حرکت چرخشی جسم صلب تاکنون فقط با چرخش حول یک محور ثابت سروکار داشتیم. این محدودیت، تبدیل معادلهٔ آهنگ تغییر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای $(N=\frac{dL}{dt})$ را به معادله‌ای برای آهنگ تغییر سرعت زاویه‌ای $N_z=I\frac{d\omega}{dt}$ که از روی آن حرکت را می‌توان محاسبه کرد، آسان می‌سازد. البته می‌توانیم به بررسی چرخشی حول محوری که دارای حرکت انتقالی یکنواخت است بپردازیم؛ این حرکت محور هیچ تفاوت اساسی ایجاد نمی‌کند، چراکه می‌توان با یک تغییر ساده چارچوب مرجع، آن را حذف کرد. اکنون به بررسی در مورد حرکت ترکیبی انتقالی و چرخشی که اندکی پیچیده‌تر و دارای اهمیت عملی قابل توجهی است، خواهیم پرداخت. به عنوان مثال، استوانه‌ای راکه در روی یک سطح افقی، می‌غلتد در نظر می‌گیریم. هر نقطه تماس استوانه و سطح در حال سکون است، زیرا استوانه نمی‌لغزد. جسم حول محور عمود بر

شکل که از نقطه P می‌گذرد دارای یک حرکت دورانی محض (و لحظه‌ای) است. انرژی جنبشی کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K=\frac{1}{2} I_p\omega^2$$



شکل ۱۲-۴

که در آن I_p لختی دورانی یا گشتاور ماند نسبت به محوری است که از P می‌گذرد. حال با استفاده از قضیه محورهای موازی داریم:

$$I_P=I_{cm}+MR^2$$

و برای انرژی جنبشی داریم:

$$k=\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

کمیت $R\omega$ سرعتی است که مرکز جرم استوانه نسبت به نقطه ثابت P دارد. فرض می‌کنیم $R\omega=V$. آنگاه برای انرژی جنبشی داریم:

$$k=\frac{1}{2} I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2} MV_{cm}^2 \qquad (۷-۱۲)$$

ترکیب حرکت انتقالی مرکز جرم و حرکت دورانی حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد با حرکت دورانی محض با همان سرعت زاویه‌ای حول محوری که از نقطهٔ تماس جسم غلتان می‌گذرد، هم‌ارز است.

۱۲-۷- راهنمای پاسخ به پرسشها

۱- می‌دانیم که اندازه حرکت زاویه‌ای از رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ محاسبه می‌شود. دیمانسیون اندازه حرکت زاویه‌ای هم طبق همین رابطه ML^2T^{-1} است که همان دیمانسیون انرژی در زمان است. دیمانسیون انرژی × زمان در تمامی فیزیک، از کلاسیک تا کوانتومی دارای اهمیت ویژه‌ای است. این بُعد، همان بعد کنش سیستم

فیزیکی است. این مسئله را مفصل در مکانیک کلاسیک هامیلتون و نیز در بررسی مکانیک کوانتمی به عنوان کوانتوم کنش h، (ثابت پلانک) خواهیم دید.

۲ـ بردارهای مانند $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$ و $\vec{N}$ و $\vec{L}$ بردارهای محوری هستند و بردارهایی نظیر $\vec{r}$ و $\vec{v}$ و $\vec{a}$ و $\vec{F}$ و $\vec{P}$ بردارهای قطبی نامیده می‌شوند. تمام بردارهایی که به صورت حاصلضرب دو بردار قطبی تعریف می‌شوند، بردارهای محوری هستند زیرا تعیین جهت همه آنها به قاعده اختیاری دست راست بستگی دارد. توجه داریم، بردار قطبی برداری است که دارای جهتی مستقل از دستگاه مرجع باشد، اما بردار محوری برداری است که مفهوم جهت آن به چپگرد بودن یا راستگرد بودن دستگاه مرجع بستگی دارد. مثلاً در $\vec{\omega}=\vec{r}\times\vec{v}$ جهتی که برای $\vec{\omega}$ توسط قاعده دست راست انتخاب می‌شود صرفاً قراردادی است و بر مبنای یک قاعدهٔ اختیاری است. اگر قاعده دست چپ را به کار ببریم برای $\vec{\omega}$ جهتی عکس جهت مذکور پیدا می‌شود.

۳ـ کمیت فیزیکی I راگشتاور ماند سیستم چند ذره‌ای می‌نامیم. این رابطه برای سیستم n ذره‌ای از رابطهٔ $I=\sum_i m_i r_i^2$ به دست می آید و برای جسمی که توزیع ماده در آن پیوسته است به رابطه $I=\int r^2 dm$ تبدیل می‌شود، که r فاصله عنصر جرم dm از محور دوران می‌باشد. بنابراین در محاسبه اینرسی دورانی نمی‌توان جرم جسم را در مرکز جرمش متمرکز فرض کرد. بنابراین I بر خلاف m کمیتی نسبی است و بستگی به محوری دارد که I نسبت به آن محاسبه می‌شود.

۴ـ طبق قضیه محورهای موازی چون مرکز جرم مکعب یکنواخت در مرکزش (مرکز تقارن یا مرکز شکل) قرار دارد، مقدار لختی دورانی نسبت به محوری که از مرکزش می‌گذرد کمینه است.

۵ـ با توجه به رابطهٔ $I=\sum_i m_i r_i^2$ و با در نظر گرفتن $\rho=\frac{m}{v}$ داریم $I=\int r^2\rho dv$ که نشان می‌دهد برای دو جسم با شکل یکسان، آن که چگالتر است، دارای اینرسی دورانی بیشتری حول محور مرکزی خود می‌باشد.

۶ـ هرگاه بخواهیم لختی دورانی (گشتاور ماند) اجسام پیچیده را به دست

آوریم، گاه می‌توان از طریق حرکت دورانی جسم، آن را پیدا کرد، مانند دوران چرخ و پرّه (چرخ دوچرخه) و تعیین سقوط آزاد یک جسم در روی چرخ و گاه می‌توان از طریق نوسان دادن جسم لختی دوران را یافت، مانند آونگ مرکب.

۷ـ در مقایسه لختی دورانی چند جسم جامد با جرم یکسان نسبت به محوری که به طور عمودی از مرکز جرم جسم می‌گذرد، ممان اینرسی جسمی بیشتر است که توزیع جرم آن در دورترین جای ممکن نسبت به مرکز قرار داشته باشد.

۸ـ هرگاه دو جسم با چگالیهای متفاوت به یکدیگر متصل باشند (در امتداد طول) و ابعاد آنها هم با یکدیگر مساوی باشد و نیروی ثابتی یک بار به جسم با چگالی بیشتر و بار دیگر به جسم با چگالی کمتر وارد شود، چون نیرو در هر دو حالت و r، فاصله نقطه اثر F تا مرکز نوسان نیز در هر دو حالت با هم برابر است، گشتاور N که از رابطه $\vec{N}=\vec{r}\times F$ به دست می‌آید نیز دارای مقادیری یکسان خواهد بود.

از طرفی می‌دانیم که ممان اینرسی I در حالت اول بیشتر از حالت دوم است، بنابراین طبق رابطه $N=I\,\alpha$ ، چون N مقدار ثابتی دارد مقدار α یعنی شتاب زاویه‌ای در حالت دوم نسبت به حالت اول بیشتر خواهد بود.

۹ـ هرگاه چرخیدن تخم‌مرغ پخته را با خام مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که تخم‌مرغ پخته بیشتر از تخم‌مرغ خام می‌چرخد، می‌دانیم با عمل چرخش گشتاور یکسانی وارد می‌شود ($N=I\,\alpha$). در مورد تخم‌مرغ خام چون جرم با چرخش به دیواره‌ها می‌چسبد و توزیع جرم در فاصله بیشتری تا مرکز جرم قرار خواهد داشت، بنابراین ممان اینرسی خام از پخته بیشتر است. بنابراین α خام از α پخته کمتر می‌شود و شتاب و سرعت حرکت تخم‌مرغ پخته بیشتر می‌شود. بدین ترتیب از تفاوت سرعت چرخیدن تخم‌مرغ پی می‌بریم، کدام پخته و کدام خام است.

نکته دیگر، اگر به تخم‌مرغ پخته‌ای که در حال چرخیدن است انگشت بزنیم فوراً از دوران باز می‌ایستد، ولی اگر این کار را با تخم‌مرغ خام انجام دهیم، پس از برداشتن انگشت دوباره حرکت خود را از سر می‌گیرد. عامل حرکت نیروی اینرسی است. پس از

اینکه پوست سخت تخم‌مرغ خام متوقف شود محتویات آبگونه درون آن همچنان به حرکت خود ادامه می‌دهد، در نتیجه پس از برداشتن انگشت، دوباره پوسته را به حرکت وا می‌دارد، در حالی که محتویات تخم‌مرغ پخته، با خود پوسته متوقف می‌شود.

۱۰ـ می‌دانیم که دیمانسیون گشتاور و انرژی یکسان می‌باشد، اما این دو یکی نیستند، زیرا کار یک کمیت اسکالر است در حالی که گشتاور برداری عمود بر صفحه $(\vec{F},\vec{r})$ می‌باشد.

۱۱ـ سرعت استوانه غلتان کمتر از سرعت استوانه لغزنده است، زیرا در استوانه غلتان قسمتی از انرژی پتانسیل از دست رفته به انرژی جنبشی دورانی تبدیل شده است و مقدار کمتری برای بخش انتقالی انرژی جنبشی باقی می‌ماند، پس بهتر است در سرازیری از اسکی‌هایی استفاده شود که چوبهای آن نچرخند و در مسابقات مارپیچ چوبهای آن، بچرخند تا سرعت کمتر و قابل کنترل و مهار کردن باشد و در پیچ از مسیر بیرون نرود.

۱۲ـ می‌دانیم که بین اسکی و برف اصطکاک کمی وجود دارد و مرکز جرم اسکی‌باز تقریباً بالای جرم اسکی‌هاست. از این‌رو برای چرخیدن یا متوقف ساختن اسکی‌باز باید گشتاوری وارد کند، که این کار را به وسیله تغییر موضع مرکز جرم خود نسبت به مرکز جرم چوبهای اسکی انجام می‌دهد. در واقع نیروی وارده به دو مؤلفه تجزیه شده، مولفه آن گشتاور لازم را جهت چرخش چوبهای اسکی فراهم می‌آورد.

۱۳ـ اندازه حرکت کل یک سیستم ذرات به حرکت این ذرات نسبت به مرکز جرم سیستم بستگی ندارد. یعنی اصل بقای اندازه حرکت صادق است.

$$m_1 v_1 = m_1 v_2$$

$$\frac{d}{dt} mv = 0$$

در حالی که برای انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = Fv$$

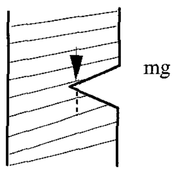
پس انرژی جنبشی بقا ندارد.

۱۴ـ اگر یک جسم کروی بر روی دو سطح شیبدار با ارتفاع برابر ولی با

شیب‌های متفاوت به پایین بغلتد، در هر حالت تندی و زمان طی مسافت یکسان نخواهد بود و در حالتی که شیب کمتر است، جسم مدت زمان بیشتری در راه خواهد بود و سرعت آن نیز کمتر است.

۱۵ـ در غلتش اجسام دوار، هنگام عبور از سطح شیبدار به سطح افقی، هر چقدر شعاع جسم دوار بیشتر باشد، ممان اینرسی آن بیشتر بوده و در هنگام انتقال از سطح شیبدار به افق با سرعت بیشتری این انتقال صورت می‌گیرد.

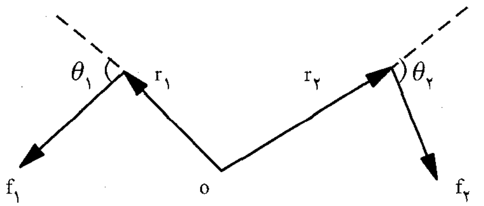
۱۶ـ هیزم‌شکن هنگام قطع درخت، در طرف مقابل محلی که می‌خواهد درخت بیفتد شروع به بریدن درخت می‌کند. او با این کار تطابق مرکز جرم و مرکز ثقل درخت را از بین می‌برد و درخت به سمت جرم بیشتر سنگینی کرده و سقوط می‌کند. چنانچه دقیقتر بگوییم، مطابق شکل بخش باقیمانده نمی‌تواند گشتاور نیروی وزن را تحمل کند و در نتیجه درخت می‌افتد.



۱۷ـ اگر چوب مستقیمی را در نظر بگیریم که از یک انتها روی یخ قرار گرفته است، چنانچه این چوب بیفتد، مسیر حرکت مرکز جرمش روی یک خط راست خواهد بود.

۱۲ـ۸ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ در شکل، خط اثر و بازوی گشتاور دو نیرو نسبت به مبدأ o نشان داده شده است. فرض کنید این نیروها بر جسم صلبی که می‌تواند حول نقطه o بچرخد وارد می‌شوند. تمام بردارهای نشان داده شده در صفحه شکل قرار دارند. بزرگی و جهت گشتاور نیروی برآیند وارد بر جسم را پیدا کنید.



حل. فرض می‌کنیم شکل در صفحه x–y قرار دارد و z به طرف خارج صفحه شکل است.

$$\vec{N}_1=\vec{r}_1\times\vec{f}_1=\hat{k}\,(r_1 f_1 \sin\theta_1)$$
$$\vec{N}_2=\vec{r}_2\times\vec{f}_2=-\hat{k}\,(r_2 f_2 \sin\theta_2)$$
$$\Rightarrow\ \vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2=(r_1 f_1 \sin\theta_1-r_2 f_2 \sin\theta_2)\hat{k}$$

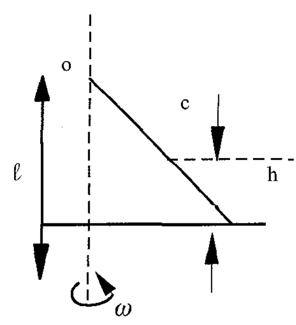
۲ـ میله نازکی به طول ℓ و جرم m از یک انتهایش به‌طور آزاد آویخته شده است. این میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم تا حول یک محور افقی به نوسان درآید. سرعت زاویه‌ای پایین‌ترین نقطه میله ω است. مرکز جرم این میله نسبت به پایین‌ترین وضعیت آن تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ از اصطکاک و مقاومت هوا صرفنظر کنید.

حل. گشتاور ماند میله نسبت به نقطه آویز o

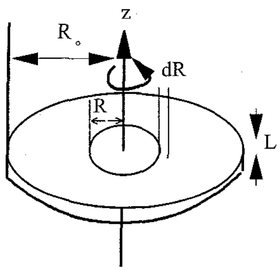
$$I_o=m\,\frac{\ell^2}{3}$$

بنابر پایستگی انرژی مکانیکی

$$mgh=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\omega^2$$
$$h=\frac{I^2\omega^2}{6g}$$



۳ـ گشتاور ماند یک قرص نازک با چگالی یکنواخت به جرم M و شعاع $R_\circ$ را که حول محور تقارن می‌چرخد پیدا کنید.



حل. این قرص را می‌توان همچون ترکیبی از تعداد زیادی حلقه‌های نازک هم‌مرکز که هریک دیگری را احاطه کرده است در نظر گرفت. حجم حلقه عبارت است از:

$$dV = ۲\pi RLdR$$

$$I = \int_{o}^{Ro} \rho R^{۲} 2\pi RLdR = ۲\pi\rho L \frac{R_\circ^{۲}}{۴}$$

جرم کل قرص حاصلضرب حجم $\pi R_\circ^{۲} L$ در چگالی ρ است.

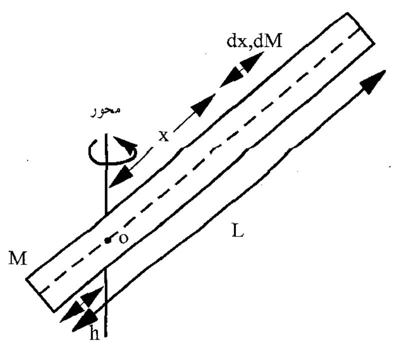
$$M = \pi R_\circ^{۲} l\rho \Rightarrow I = \frac{۱}{۲} MR_\circ^{۲}$$

۴ـ در شکل زیر میلهٔ نازک به جرم M و طول L نشان داده شده است. می‌خواهیم گشتاور ماند آن را نسبت به محوری که از نقطه o به فاصله h از یک سر میله، بر آن عمود شده است، حساب کنیم.

حل.

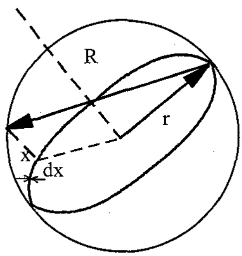
$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L}$$

$$I = \int x^{۲} dm = \frac{M}{L}\int_{-h}^{L-h} x^{۲} dx = \left[\frac{M}{L}\frac{(x^{۳})}{۳}\right]_{-h}^{L-h} = \frac{۱}{۳} M(L^{۲} - ۳Lh + ۳h^{۲})$$



اگر محور از انتهای چپ میله بر میله عمود باشد. داریم $h=o$ ؛ یعنی $I=\frac{1}{3}ML^2$. اگر محور در انتهای راست باشد، $h=L$ و باز خواهیم داشت $I=\frac{1}{3}ML^2$. اگر محور بر وسط میلهٔ عمود باشد $h=\frac{1}{2}$ و داریم: $I=\frac{1}{12}ML^2$.

۵ـ گشتاور ماند کرهٔ یکنواخت به شعاع R را محاسبه کنید که محور آن از مرکز می‌گذرد.



حل. کره را به قرص‌های نازک تقسیم می‌کنیم، شعاع r قرص برابر است با $r=\sqrt{R^2-x^2}$

اگر انتگرال این جزء را از صفر تا R محاسبه کنیم، گشتاور ماند نیمکره به دست می‌آید و گشتاور I کره با استفاده از تقارن دو برابر انتگرال می‌شود.

$$dI=\frac{1}{2}r^2dm=\frac{\pi\rho}{2}(R^2-x^2)dx$$

$$I=2\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2-x^2)dx=\frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

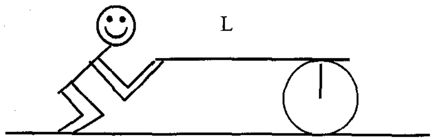
$$M=\rho V=\frac{4\pi\rho R^3}{3}\quad ; \quad I=\frac{2}{5}MR^2$$

۱۲ـ۹ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ با توجه به اینکه کمی نیروی اصطکاک میان اسکیها و برف وجود دارد و همچنین با توجه به اینکه مرکز جرم اسکی باز تقریباً بالاتر از مرکز اسکی‌هاست، چگونه اسکی باز می‌تواند برای دور زدن یا جلوگیری از دور زدن گشتاور نیرو وارد کند؟

۲ـ یک شبکهٔ استوانه‌ای به وسیله تخته‌ای از حالت اولیه به اندازهٔ مسافت $\frac{L}{۲}$، که برابر نصف طول تخته است، روی زمین به جلو می‌غلتد. در هیچ‌یک از نقاط تماس لغزش وجود ندارد. در این حالت تخته درکجاست؟ این شخص چه مسافتی را طی کرده است؟



۳ـ شاید توجه کرده باشید که در برخی فیلمهای قدیمی به نظر می‌رسد چرخ ارابه‌ها یا دلیجان‌های در حال حرکت به سوی عقب می‌چرخد. چرا؟

۴ـ برای آنکه به بدن خود کمترین لختی دورانی ممکن را بدهید چه حالت بدن و چه محوری را باید داشته باشید؟ برای بیشترین لختی کدام؟

۵ـ دوچرخه‌ای در جاده‌ای هموار به سوی شرق در حرکت است. راستای اندازهٔ حرکت زاویه‌ای چرخ‌های آن کدام است؟

۶ـ فرض کنید روی لبهٔ بشقابک صفحهٔ گرامافون ساکنی فشار می‌آورید. راستای گشتاور نیرویی که حول مرکز بشقابک وارد می‌آید چیست؟

۷ـ یک بندباز برای حفظ تعادلش از یک میله استفاده می‌کند. میله چه کمکی می‌کند؟

۸ـ چرا هلیکوپتر باید یک پروانهٔ کوچک عمودی روی دم خود داشته باشد؟

۹ـ چرا انتهای جلوی اتومبیل هنگام ترمز شدید رو به پایین می‌رود؟

۱۰ـ آیا یک نیروی وارد بر جسم می‌تواند حرکت انتقالی و دورانی آن را تغییر دهد؟

۱۱ـ جرم یک جسم استوانه‌ای M و شعاع آن R است. آیا گشتاور ماند آن می‌تواند از $MR^۲$ بیشتر باشد؟

۱۲ـ یک گلولهٔ توپر، یک استوانهٔ توپر و یک استوانهٔ توخالی از یک سطح شیبدار به پایین می‌غلتند. کدامیک زودتر به پایین سطح می‌رسد؟ کدام دیرتر می‌رسد؟ آیا شعاع آنها تأثیری در این امر دارد؟

۱۳ـ یک چرخ چاقو تیزکنی برقی بعد از خاموش کردن موتور چند دقیقه می‌چرخد در حالی که آسیاب برقی بعد از خاموش کردن موتور فقط چند ثانیه می‌چرخد. علت این تفاوت چیست؟

۱۴ـ دیمانسیون گشتاور نیرو مانند دیمانسیون کدام کمیت است؟ ضربه- اندازهٔ حرکت زاویه‌ای- انرژی- هیچکدام.

۱۵ـ گشتاور ماند شیئی نسبت به محوری که از مرکز آن نمی‌گذرد: همواره بزرگتر است؛ گاهی کوچکتر است از؛ گاهی برابر است با؛ همیشه کوچکتر است از گشتاور ماند نسبت به محور موازی که از مرکز جرم همان شیئی می‌گذرد.

ب) مسائل

۱ـ گشتاور ماند لولهٔ جدار نازکی به جرم M و شعاع R را نسبت به محوری که از یک گوشه بر سطح قاعدهٔ آن عمود شده است، به دست آورید.

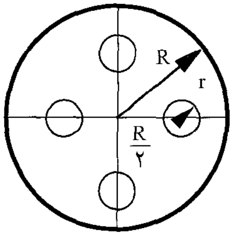
۲ـ گشتاور ماند مخروطی به جرم M و ارتفاع h را نسبت به محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد و بر قاعده مخروط عمود است حساب کنید. چگالی مخروط ثابت و شعاع قاعده آن R است.

۳ـ استوانه توپری به جرم ۴kg بدون لغزش روی سطح شیبدار به شیب °۳۴ به پایین می‌غلتد. شتاب نیروی اصطکاک، وکمترین ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغزش را به دست آورید.

۴ـ لختی دورانی (گشتاور ماند) میلهٔ نازکی به جرم M و طول L را حول محوری که از مرکز می‌گذرد و با میله زاویه θ می‌سازد حساب کنید.

۵ـ لختی دورانی چرخ طیاری به جرم M را پیدا کنید، که از بریدن چهار سوراخ بزرگ به شعاع r در صفحه یکنواختی به شعاع R ساخته شده است. مرکز سوراخ‌ها در

فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز چرخ طیار قرار دارد.



۶ـ یک ماهواره ارتباطی به جرم ۱۰۰ kg در مداری دایره‌ای به شعاع $۴/۲۲ \times ۱۰^{۷}$ m دور زمین قرار دارد. مدار در صفحهٔ استوای زمین است و ماهواره روی آن با تندی $۴/۹ \times ۱۰^{۲} \frac{m}{s}$ به شرق حرکت می‌کند. مقدار و راستای اندازهٔ حرکت زاویه‌ای این ماهواره چیست؟

۷ـ اتومبیلی به وزن ۱۵۰۰ kg هنگام ترمز با آهنگ $۸\frac{m}{s^{۲}}$ شتاب منفی می‌گیرد. مقدار نیروی ترمزی که جاده روی اتومبیل وارد می‌کند چقدر است؟ این نیرو چه گشتاور نیرویی حول مرکز جرم اتومبیل ایجاد می‌کند؟ آیا اثر این گشتاور نیرو در جهت بلند کردن انتهای جلوی اتومبیل است یا پایین بردن آن؟ فرض کنید مرکز جرم اتومبیل ۶۰ cm بالاتر از سطح جاده است.

۸ـ میلهٔ باریکی به جرم M و طول L از محوری در انتهای آن آویخته است. توپی گلی به جرم m و سرعت افقی V به انتهای پایینی میله می‌خورد و به آن می‌چسبد (برخورد کاملاً کشسان). پس از برخورد میله چقدر بالا خواهد رفت؟

۹ـ جعبهٔ یکنواختی به طول ۲۰ cm و ارتفاع ۵۰ cm بر سطح شیبدار قرار دارد. گره کوچکی از لغزش جعبه به پایین سطح جلوگیری می‌کند. اگر زاویهٔ سطح شیبدار با راستای افقی به تدریج زیاد شود، در چه زاویه‌ای جعبه واژگون می‌شود؟

۱۰ـ زمین و ماه حول مرکز جرم مشترکشان می‌گردند و هر ۲۷/۳ روز یک دور کامل را می‌پیمایند. فرض کنید این دو جسم آسمانی را بتوان کره‌هایی با چگالی یکنواخت پنداشت. گشتاور ماند این سیستم چرخان را نسبت به مرکز جرم و انرژی جنبشی این حرکت چرخشی را محاسبه کنید.

۱۱ـ جرم ۲kg به ریسمان بدون جرمی متصل است که به دور قرقره‌ای با قطر ۰/۸m و گشتاور ماند ۰/۶kgm^2 پیچیده شده است. اگر سیستم در ابتدا ساکن باشد، کشش ریسمان، سرعت جرم ۲kg و انرژی جنبشی کل سیستم را هنگامی محاسبه کنید که جرم ۲kg به نقطه‌ای درست ۳m پایین‌تر از نقطهٔ آغاز حرکت می‌رسد. از لحظهٔ آغاز حرکت تا لحظه‌ای که جرم ۲kg از این نقطه می‌گذرد چه زمانی سپری شده است؟

۱۲ـ قرقره‌ای که گشتاور ماند آن ۱×۱۰^{۴}g.cm^2 و شعاعش ۱۰ cm است، تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که مماس بر کنارهٔ قرقره وارد می‌شود و رابطهٔ آن با زمان به صورت F= ۰/۵t+ ۰/۳t^2 است، که در آن F بر حسب نیوتن و t بر حسب ثانیه است. اگر این قرقره ابتدا ساکن باشد، سرعت زاویه‌ای آن را پس از ۳/۰ s پیدا کنید.

۱۳ـ اگر طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت ۲۵ cm و جرم آن ۳۰ gr باشد اندازه حرکت زاویه‌ای آن حول محور گذرانده از مرکز ساعت چقدر است؟ عقربهٔ دقیقه‌شمار را مانند میلهٔ باریکی در نظر بگیرید که حول یک انتهایش می‌چرخد.

فصل ۱۳

دینامیک دورانی (۲)

۱۳ـ۱ـ مقدمه

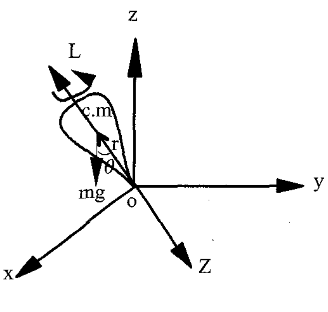
تاکنون دینامیک حرکت دورانی جسم صلب را حول محوری که در یک چارچوب مرجع لخت ثابت بود بررسی کردیم، و دیدیم که رابطه نرده‌ای $N=I\,\alpha$ که در آن فقط مؤلفه‌های گشتاور نیرو در امتداد محور دوران مورد نظر بودند، برای حل مسائل دینامیکی کافی است. در این فصل تحلیل مربوط به دینامیک حرکت دورانی را برای حالتهایی که محور دوران حرکت می‌کند، یعنی حرکت دورانی و انتقالی همزمان صورت می‌گیرند، ارائه می‌دهیم. برای حل مسائل دینامیکی در این حالت کلی‌تر از رابطه برداری عام مربوط به حرکت دورانی یعنی $\vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ استفاده می‌کنیم. مثال‌های آشنا در این مورد عبارتند از: حرکت یک توپ که از تپه‌ای به پایین می‌غلتد و یویو که در انتهای یک نخ باز می‌شود.

۱۳ـ۲ـ فرفره و ژیرسکوپ

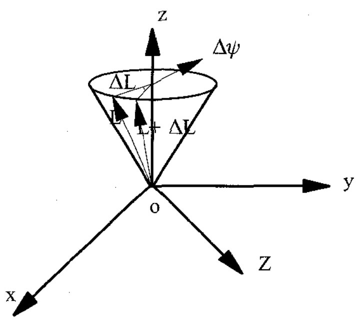
شکل ۱۳ـ۱ الف فرفره‌ای را نشان می‌دهد که حول محور تقارنش می‌چرخد و

نوک آن در مبدأ مختصات ثابت شده است. محور این فرفره، حول یک محور قائم حرکت می‌کند و یک سطح مخروطی را جاروب می‌کند. این حرکت را حرکت تقدیمی می‌نامند. هدف محاسبه ω_p یعنی سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی است. دو نیرو به فرفره وارد می‌شود. یکی نیروی رو به بالاست که به نقطه اتکای o وارد می‌شود و در نتیجه هیچ گشتاوری نسبت به این نقطه تولید نمی‌کند و دیگری نیروی کششی گرانشی یا وزن است که به طرف پایین به مرکز جرم وارد می‌شود و گشتاور نیرویی نسبت به o تولید می‌کند:

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{g} \qquad (۱\_۱۳)$$



شکل ۱۳ـ۱ الف



شکل ۱۳ـ۱ ب

که در آن r فاصله مرکز جرم از تکیه گاه است. جهت گشتاور مطابق قاعده دست راست به دست می آید و بر صفحه شامل $\vec{r}$ و $m\vec{g}$ عمود است. توجه کنید که هنگام حرکت تقدیمی فرفره $\vec{N}$ و همچنین $\vec{L}$ و $\vec{r}$ با سرعت زاویه‌ای ω_p حول محور می چرخند.

هر گاه گشتاور نیرو به یک جسم صلب وارد شود اندازه حرکت زاویه‌ای آن را طبق رابطه $\vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ تغییر می‌دهد. معادله مذکور بیان می‌کند که جهت تغییر L باید هم جهت با N باشد. شکل ۱۳ـ۱ ب نشان می‌دهد که $\vec{N}$ بر $\vec{L}$ عمود است. از این‌رو تغییر $\vec{L}$ نیز که بر اثر گشتاور نیرو ایجاد می‌شود باید بر $\vec{L}$ عمود باشد. برای بررسی کمی این موضوع فرفره را در مدت زمان Δt در نظر می‌گیریم. پس از گذشت زمان Δt اندازه

حرکت زاویه‌ای فرفره برابر با جمع برداری $\vec{L}$ و $\Delta\vec{L}$ است. چون $\Delta\vec{L}$ بر $\vec{L}$ عمود است و در مقایسه با بزرگی $\vec{L}$ بسیار کوچک فرض شده است، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای جدید همان بزرگی بردار قبلی را دارد ولی جهت آن متفاوت است. بنابراین نوک بردار اندازه حرکت زاویه‌ای با گذشت زمان بر روی یک دایرهٔ افقی می‌چرخد. چون این بردار همیشه در امتداد محور دوران فرفره قرار دارد به این ترتیب ما حرکت تقدیمی فرفره را به طور کیفی توجیه کرده‌ایم.

$$\Delta L = L\sin \Rightarrow \Delta\psi \simeq \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{N\Delta t}{L\sin\theta}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{N}{L\sin\theta}$$

$$\Rightarrow N = rmg\sin(180^\circ - \theta) = rmg\sin\theta \Rightarrow \omega_p = \frac{mgr}{L}$$

معادله فوق را می‌توان به صورت برداری بیان کرد. برای این کار می‌نویسیم:

$$N = \omega_p L\sin\theta$$

ω_p برداری است قائم و جهت آن در شکل ۱۳ـ۱ ب به طرف بالاست. در این شکل θ زاویه میان ω_p و L است. در نتیجه بزرگی و جهت به صورت رابطه برداری از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\vec{N} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \qquad (۲ـ۱۳)$$

ژیروسکوب: کلمه ژیروسکوپ واژه یونانی است متشکل از دو بخش Gyro به معنای دوران یا چرخش و scope به معنای نشان دادن. بدین ترتیب معنای ظاهری آن دوران‌نما (چرخش نما) است. نخستین پدیدهٔ ژیروسکوپ توسط ابرخوس در ۱۲۵ سال قبل از میلاد مسیح کشف گردید و آن عبارت بود از حرکت زمین در مطالعهٔ اعتدال شب و روز که در واقع بررسی حرکت محور دوران زمین است که بر بستر مخروطی گردش می‌کند. نیوتن با استفاده از قوانین جاذبه و اینرسی علت حرکت تقدیمی زمین را به نحوی توجیه کرد. در قرن هیجدهم اویلر ریاضیدان سویسی تحقیقات اساسی در مورد دینامیک اجسام صلب انجام داد. در اواسط قرن نوزدهم فوکو برای نشان دادن دوران

زمین از دستگاهی استفاده کرد و برای اولین بار نام ژیروسکوپ را بر آن گذاشت.

ژیروسکوپ عنصر اصلی سیستمهای هدایت اینرسی است و عمدتاً برای اندازه‌گیری مقدار دوران، سرعت دوران و ایجاد محورهای مختصات مرجع در وسایل نقلیه هوایی، فضایی، و دریایی (مانند هواپیما، موشک، ماهواره، کشتیها و زیردریاییها) به کار می‌رود.

ژیروسکوپ دارای دو خاصیت اساسی است: ۱ـ صلبیت (سخت بودن) ۲ـ حرکت تقدیمی.

ویژگی اول به ثابت بودن اندازه حرکت زاویه‌ای در فضای اینرسی مربوط می‌شود، وقتی که گشتاور خارجی به محور چرخش ژیروسکوپ (روتور) وارد نشود، آنگاه $\vec{L}=\text{const}$ است. این خاصیت معرف پایداری و استحکام آن از وضعیت خویش است.

ویژگی دوم ژیروسکوپ آن است که چنانچه گشتاوری مانند $\vec{N}$ در راستایی غیر از راستای بردار اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}$ به روتور آن اعمال شود، محور چرخش در راستای برداری عمود بر صفحه بردار گشتاور خارجی و اندازه حرکت زاویه‌ای دوران می‌کند و جهت این دوران اینطور مشخص می‌شود که بردار $\vec{L}$ همواره سعی دارد با طی زاویه کوچکتر به طرف بردار $\vec{N}$ دوران کند. این حرکت را «حرکت تقدیمی» می‌نامیم.

حرکت ژیروسکوپی یکی از جالبترین مسائل دینامیک است. این حرکت وقتی صورت می‌گیرد که محوری که جسم حول آن می‌چرخد خود نیز حول محور دیگری در حال دوران باشد. توصیف کامل این حرکت بسیار پیچیده است. معمولترین و مفیدترین نمونه‌های حرکت ژیروسکوپی وقتی صورت می‌گیرد که محور روتوری که با سرعت ثابت می‌چرخد حول محور دیگری با آهنگ پایداری بگردد (حرکت تقدیمی داشته باشد).

رفتار دینامیکی ژیروسکوپ بر مبنای قانون دوم نیوتن استوار است، و این قانون در دستگاههای اینرسی معتبر است. حرکت انتقالی یک جسم صلب از رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$

تبعیت می‌کند و در مورد حرکت زاویه‌ای حول محور ثابت داریم: $\vec{N}=I\vec{\alpha}$ که در آن $\vec{N}$ گشتاور خالص و I گشتاور ماند ($I=\int r^2\,dm$) و $\vec{\alpha}$ شتاب زاویه‌ای است.

اندازه حرکت خطی $\vec{p}=m\vec{v}$، و اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ و یا $\vec{L}=I\vec{\omega}$ است. دینامیک انتقالی و دورانی جسم صلب را می‌توان از روابط $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ و $\vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ استخراج کرد.

اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب مستقل از دستگاه مختصاتی است که به نقطه مبدأ وصل می‌کنیم. یعنی این دستگاه می‌تواند ساکن یا دوار باشد. در مورد ژیروسکوپ می‌توان دستگاه مرجعی را در نظر گرفت که به روتور متصل بوده و از دو حرکت آن تبعیت می‌کند. در این صورت معادله کوریولیس این امکان را فراهم می‌سازد که به کمک آن بتوان قانون دوم نیوتن را برای دستگاههای دوار (از جمله ژیروسکوپ) به کار برد. معادله کوریولیس در واقع عبارت است از مشتق یک بردار تعریف شده در دستگاه مرجع دوار نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسی[۱]:

$$\frac{\vec{d}}{dt}=\frac{\vec{d}^*}{dt}+\vec{\omega}\times \qquad (۳\text{–}۱۳)$$

۳-۱۳-راهنمای پاسخ به پرسشها

۱- برخی کمیتهای برداری مستقل از انتخاب مبدأ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند؛ نظیر جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو و اندازه حرکت خطی.

۲- اگر فرفره‌ای در حال چرخیدن نباشد، می‌افتد. اگر اندازه حرکت زاویه‌ای فرفره در مقایسه با تغییر حاصل از گشتاور نیروی وارد شده زیاد باشد، فرفره حرکت تقدیمی خواهد داشت. در حالت بینابینی، یعنی هنگامی که فرفره به آرامی می‌چرخد. حرکت تقدیمی روی مسیر باز است.

۳- یک تخم‌مرغ کاملاً پخته را در نظر می‌گیریم. این تخم‌مرغ وقتی نمی‌چرخد

---

۱. در جلد دوم این مجموعه به طور مفصل دربارهٔ دستگاههای مختصات متحرک بحث شده است.

به پهلو به حالت سکون قرار می‌گیرد، و هنگامی که می‌چرخد واژگون می‌شود و روی قسمت کوچک می‌ایستد. می‌دانیم مرکز جرم (مرکز ثقل) تخم‌مرغ پخته نزدیکتر به قسمت بزرگ آن است، لذا موقعی که این تخم‌مرغ نمی‌چرخد می‌بایست مرکز جرم در ارتفاع کمتر از سطح زمین باشد لذا به پهلو به حال سکون قرار می‌گیرد. هنگامی که به این تخم‌مرغ گشتاور وارد می‌کنیم برای اینکه تخم‌مرغ بچرخد باید $\vec{N}=\vec{r}\times m\vec{g}$ دارای $\vec{r}$ بزرگ باشد (r فاصله مرکز جرم از مبدأ دوران است) و این موقعی اتفاق می‌افتد که تخم‌مرغ بر روی قسمت کوچک بایستد.

۴ـ باربری چمدانی را حمل می‌کند که درون آن چرخ لنگری با سرعت در حال چرخش است. اگر باربر در یک پیچ تند بخواهد دور بزند باید توجه کند که در این حالت جهت $\vec{L}$ دائماً در حال تغییر است پس $\frac{d\vec{L}}{dt}\neq \circ$ و بنابراین $\vec{N}\neq \circ$ لذا از طرف چرخ لنگر گشتاوری به باربر وارد می‌شود که اگر او متوجه نباشد و نتواند آن را با نیرویی خنثی کند، به زمین می‌افتد.

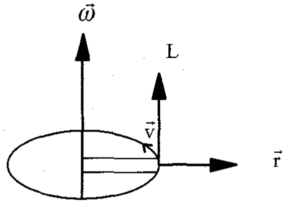
۵ـ یک میله بلند به کسی که روی طناب راه می‌رود کمک می‌کند تا مقاومتش را حفظ کند. چون در این حالت دو نیرو به شخص وارد می‌شود یکی mg و دیگری نیروی عکس‌العمل سطح که گشتاور این دو نیرو همدیگر را خنثی می‌کنند یعنی:

$$N=\circ \Rightarrow \frac{dL}{dt}=\circ \Rightarrow L=I\,\omega=cte$$

وقتی فرد میله‌ای را به طور متقارن در دست می‌گیرد، I افزایش و بنابراین ω کاهش می‌یابد. اگر فرد تعادلش را از دست بدهد و بخواهد بیفتد گشتاور جدیدی به سمت انحراف ایجاد می‌شود. برای پایداری مجدد، در خلاف جهت، گشتاوری ایجاد می‌کند که این کار به وسیله میله صورت می‌گیرد.

٦ـ اگر روی یک نرده باریک در حال راه رفتن باشید و از طرف راست در حال افتادن باشید طبق توضیح ارائه شده در پرسش قبل باید بدن خود را به سمت چپ متمایل کنید.

۷ـ در شکل زیر جهت بردار ω به وسیله قانون دست راست تعیین می‌شود. جهت L را می‌توان به کمک رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ تعیین کرد که در این صورت L و ω هم جهت هستند و این در حالتی است که تقارن حفظ شود، که در این صورت گشتاور ماند به صورت عدد ظاهر می‌شود (نه تانسور).



۸ـ آب شدن یخ‌های قطبی باعث افزایش I می‌شود زیرا با آب شدن یخها در اثر دوران زمین فاصله ذرات نسبت به محور دوران زیاد می‌شود و نتیجه آن افزایش $I=mr^2$ است. از آنجایی که نیرو مرکزی است و $L=I\omega$ ثابت است، در این صورت ω کاهش می‌یابد و در نتیجه زمان دوران زمین تغییر می‌یابد.

۹ـ بیشتر رودهای بزرگ که به طرف استوا جریان دارند، رسوباتی را با خود به دریا می‌برند. این موضوع باعث می‌شود که گشتاور ماند I زمین تغییر کند و لذا دوران زمین تغییر کند (به سؤال ۸ مراجعه کنید).

۱۰ـ شخصی که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد در حالی که دستهایش را کاملاً باز کرده است دو جرم مساوی w را که در دو دستش بود بدون آنکه بازوهایش را حرکت دهد، رها می‌کند. این عمل باعث می‌شود که گشتاور ماند I کوچکتر می‌شود و سرعت زاویه‌ای افزایش می‌یابد، چرا که در هر حال $L=I\omega$ باید ثابت بماند.

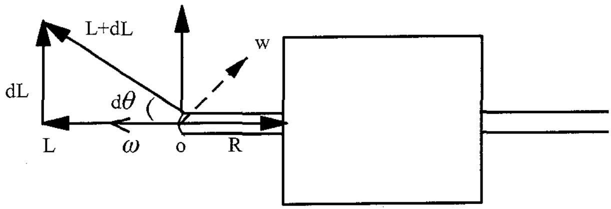
۱۱ـ اگر ظرفی دایره‌ای شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت بچرخد و ته ظرف با لایه‌ای از یخ پوشیده شده که با ظرف می‌چرخد، یخ ذوب می‌شود ولی آب از ظرف خارج نمی‌شود. با این کار گشتاور ماند افزایش می‌یابد و چون گشتاور صفر است پس $\vec{L}=cte$ و لذا بایست سرعت زاویه‌ای کاهش یابد (به چند پرسش اخیر مراجعه شود).

۱۳ـ۴ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ شکل زیر نمای بالایی ژیروسکوپ استوانه‌ای شکل که با یک موتور الکتریکی می‌چرخد نشان داده شده است. نقطه اتکا o و جرم محور و موتور ناچیز است.

الف) حرکت تقدیمی ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

ب) اگر یک دوره کامل حرکت تقدیمی ۴ ثانیه باشد، سرعت زاویه‌ای چرخ چقدر است؟



حل. قانون دست راست نشان می‌دهد که ω و L رو به چپ‌اند و وزن w رو به داخل صفحه تصویر: $\vec{N}=\vec{R}\times\vec{W}$ و $\frac{dL}{dt}$ نیز رو به بالای صفحه است. حرکت تقدیمی وقتی از بالا دیده می‌شود ساعتگرد است.

ب) مواظب باشید ω و Ω را با هم اشتباه نکنید. داریم:

$$\Omega=(۱\,rev)/(۴/۰\,s)=(۲\pi rad)/۴/۰\,s=\frac{\pi}{۲}\,(\frac{rad}{s})$$

وزن برابر mg و گشتاور ماند استوانه توپر به شعاع r برابر $I=\frac{۱}{۲}mr^۲$ است.

$$\omega=\frac{WR}{I\Omega}=\frac{mgR}{(mr^۲/۲)\Omega}$$

$$=\frac{۲\times ۹/۸m/s^۲\times ۲\times ۱۰^{-۲}m}{(۳\times ۱۰^{-۲}m)^۲(\frac{\pi}{۲}rad/s)}=۲۸۰rad/s=۲۶۰۰rad/s$$

توجه کنید که جرم چرخ حذف می‌شود.

۲ـ ژیروسکوپی شامل قرص دواری به شعاع ۰/۰۵m است. این قرص طوری در مرکز محوری به طول ۰/۱۲ m قرار گرفته است که می‌تواند آزادانه بچرخد و

حرکت تقدیمی داشته باشد. اگر این محور افقی و از یک طرف ثابت شده باشد و آهنگ چرخش ژیروسکوپ ۱۰۰۰ دور بر دقیقه باشد، آهنگ حرکت تقدیمی آن بر حسب دور بر دقیقه چقدر است؟

حل. اگر M جرم قرص دوار، d فاصله قرص از تکیه‌گاه، و R شعاع قرص باشد، از آنجایی که وزن قرص گشتاوری نسبت به تکیه‌گاه بر دستگاه وارد می‌کند (جرم محور ناچیز فرض می‌شود) و $\vec{\tau}=\vec{\omega}_p\times\vec{L}$ و $L=I\omega$، پس می‌توان نوشت:

$$Mgd=\omega_p L=\omega_p(2\pi\nu I)$$

در نتیجه، برای آهنگ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ خواهیم داشت:

$$\omega_p=2\pi\nu_p=\frac{Mgd}{2\pi\nu I} \quad , \quad I=\frac{MR^2}{2} \quad , \quad \nu=1000\ \text{rev/min}=16/6\ \text{rev/s}$$

$$\nu_p=\frac{gd}{2\pi^2\nu r^2}=\frac{9/8\times 0/06}{2\pi^2\times 16/6\times(0/05)^2}=0/72\ \text{Hz}=43\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$

۱۳ـ۵ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ نقاطی روی چوگان وجود دارد که اگر توپ به آنها بخورد دست شما درد می‌گیرد و ممکن است چوگان بشکند. علت را توضیح دهید.

۲ـ فرض کنید میلهٔ یکنواختی به حالت قائم روی سطحی با اصطکاک قابل چشم‌پوشی قرار دارد. در این حالت یک ضربهٔ افقی به انتهای پایینی میله وارد می‌شود. چگونگی حرکت سرِ بالایی و مرکز جرم میله را شرح دهید.

۳ـ بیشتر رودهای بزرگ به طرف استوا جریان دارند. رسوباتی که این رودها با خود به دریا می‌برند، چه اثری روی چرخش زمین دارد؟

۴ـ یک یویو روی میزی قرار دارد. اگر نخ آن را به‌طور افقی بکشید در کدام سمت حرکت خواهد کرد؟ اگر به‌طور عمودی بکشید در کدام سمت؟

۵ـ مدادی را روی نوکش روی یک میز بایستانید و رها کنید. مداد خواهد افتاد.

الف) اگر میز خیلی صاف باشد، نوک مداد در جهت خلاف افتادن می‌لغزد، چرا؟

ب) اگر میز قدری لیز باشد یا با تکه‌ای کاغذ پوشیده شده باشد، نوک مداد در همان جهت افتادن خواهد جهید چرا؟

راهنمایی: طی مراحل اولیه افتادن، اصطکاک نوک مداد را ثابت نگه می‌دارد، به این ترتیب مداد یک اندازه حرکت افقی به دست می‌آورد.

٦ـ یک کره و یک حلقه با جرم مساوی روی یک صفحهٔ شیبدار بدون لغزیدن به پایین می‌غلتند. کدامیک نخست به پایین می‌رسد؟ آیا وقتی به پایین می‌رسند، دارای انرژی جنبشی برابر هستند.

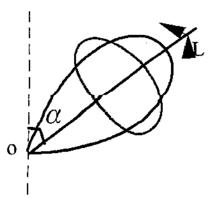
ب) مسائل

۱ـ ژیروسکوپ پایدار کننده ـ جرم ژیروسکوپی که حرکت یک کشتی را متعادل می‌کند kg ۵۰۰۰۰ و شعاع آن m ۲/۰ است و با $\frac{\text{rev}}{\text{min}}$ ۸۰۰ می‌چرخد.

الف) با توان متحرک $7/46 \times 10^{4}\,\text{w}$ در چه مدت به دور مناسب می‌رسد؟

ب) برای اینکه سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی یک ثانیه شود، چه گشتاوری لازم است؟

۲ـ فرض کنید چرخ طیار ژیروسکوپی که در شکل نشان داده شده دیسک یکنواختی به جرم g ۲۵۰ و شعاع cm ۳/۵ است. فاصلهٔ این چرخ طیار از نقطهٔ اتکا $4\,\text{cm}$ است. اگر چرخ طیار ۱۲۰ دور در ثانیه بزند بسامد تقدیم چه خواهد بود؟



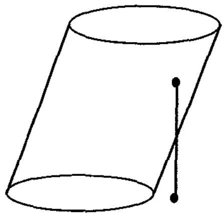
۳ـ فرفره‌ای با بسامد ۳۰ Hz (۳۰ دور بر ثانیه) حول محوری که با خط قائم زاویه ۳۰ می‌سازد می‌چرخد. جرم این فرفره ۰/۵ kg و گشتاور ماند آن 5×10^{-4} kg.m^2 است. مرکز جرم فرفره ۴ cm از نقطهٔ اتکای آن فاصله دارد. اگر چرخش فرفره با دید از بالا ساعتگرد باشد، جهت سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی آن چگونه است؟

فصل ۱۴

تعادل اجسام صلب

۱۴ـ۱ـ مقدمه

در ادامهٔ مباحث مربوط به جسم صلب و دانستن اصول اساسی دینامیک دورانی، می‌توانیم به موضوع تعادل برگردیم و تعادل یک جسم صلب را به‌طور کلی مورد بحث قرار دهیم. جسمی که بتوان آن را نقطهٔ مادی فرض کرد وقتی به حال تعادل درمی‌آید که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد. اما وقتی با یک جسم صلب سروکار داریم این شرط کافی نیست. برآیند نیروهای وارد بر چنین جسمی باید صفر باشد، اما باید شرط دیگری نیز برقرار باشد که به موجب آن جسم تمایلی به دوران نیز نداشته باشد. این شرط بر اساس دینامیک دوران حاصل شده است: مجموع گشتاورهای نیرو حول هر محوری باید صفر باشد تا جسم تمایلی به چرخیدن پیدا نکند. قبل از توضیح مطالب این فصل، با ذکر چند مثال سعی در روشن شدن مطلب داریم: اجسام وقتی به پهلو می‌افتند که خط قائمی که از مرکز ثقلشان می‌گذرد از سطح اتکا آنها نگذرد. مثلاً استوانه کجی که در شکل نشان داده شده است محکوم به سقوط است. ولی اگر خط قائمی که از مرکز ثقل می‌گذرد از سطح اتکاء نیز عبور کند جسم نمی‌افتد.



شکل ۱۴ـ۱

به همین دلیل برج‌های کج مشهور پیزا[1] و بولونیا[2] که قائم نیستند با وجود میلی که دارند درست به همین علت نمی‌افتند. البته پایه‌های این بنا تا عمق زیادی در زمین فرو رفته است و این هم دلیل دیگری برای سقوط نکردن آنهاست. تا موقعی که خط قائمی که از مرکز ثقل بدن شما می‌گذرد از داخل سطحی که کناره‌های خارجی کف پاهای شما ساخته‌اند عبور می‌کند شما نخواهید افتاد. به این علت است که ایستادن روی یک پا خیلی مشکل است و حفظ تعادل روی طنابی که محکم کشیده شده است از آن هم مشکل‌تر. در این حالت سطح اتکا بسیار کوچک می‌شود و امتداد قائم مرکز ثقل به آسانی از حدود این سطح خارج می‌گردد. یک نمونه دیگر: همهٔ شما حداقل در تصاویر یا فیلمها زنانی راکه کوزه بر سر دارند دیده‌اید. علت آن است که این اشخاص با سر خود بار را حمل می‌کنند و بایستی سر و بدن خود را از راست و کشیده نگه دارند. به علت باری که بر سر دارند مرکز ثقل آنها بالاتر از حد معمول است و اگر به طرفی خم شوند امتداد قائم مرکز ثقل آنها فوراً از سطح اتکاء خارج می‌شود و تعادلشان از بین می‌رود.

۱۴ـ۲ـ شرایط تعادل

در فصل‌های قبل دیدیم که اگر چند نیرو بر یک نقطهٔ مادی اثر کند وقتی ذره (در یک مرجع لخت) به حال تعادل است که جمع برداری نیروهای وارد بر آن صفر باشد، $\sum \vec{F} = 0$. این شرط را اغلب شرط اول تعادل می‌نامند. این معادلهٔ برداری به صورت سه معادلهٔ نرده‌ای درمی‌آید:

---

1. Pisa   2. Bologna

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{۱\_۱۴}$$

برای جسم صلب یک شرط دوم تعادل نیز وجود دارد: جمع برداری گشتاورهای نیروهای مؤثر بر جسم، نسبت به هر نقطهٔ دلخواه باید صفر باشد. این شرط باید برقرار باشد تا اطمینان حاصل شود که جسم تمایل به چرخش ندارد.

شرط دوم تعادل بر پایهٔ دینامیک دورانی استوار است، به همان صورتی که شرط اول بر قانون اول نیوتن متکی است. اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب ساکن صفر است، $\vec{L}=0$ و برای ساکن ماندن آن باید آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای $d\vec{L}/dt$ نیز صفر باشد و از اینجا نتیجه می‌شود که جمع گشتاوری همه نیروهای وارد بر جسم $\Sigma\vec{N}$ باید صفر باشد. علاوه بر این، چون همهٔ نقاط جسم در یک دستگاه مرجع لخت ساکن هستند، هر نقطه را می‌توان به عنوان مبدأ انتخاب کرد. بنابراین جمع گشتاورها نسبت به هر نقطه باید صفر باشد. لازم نیست واقعاً جسم بر روی محوری که گشتاور نسبت به آن سنجیده می‌شود میخکوب باشد. اگر جسم صلبی به حال تعادل باشد تمایلی به چرخش به دور هیچ محوری ندارد. پس جمع گشتاورها باید صفر باشد و انتخاب نقطه برای سنجش گشتاور اثری در این امر ندارد، یعنی:

$$\Sigma N = 0 \quad \text{نسبت به هر نقطهٔ دلخواه} \tag{۲\_۱۴}$$

با آنکه انتخاب نقطه اختیاری است، پس از انتخاب آن باید همهٔ گشتاورها را نسبت به همین نقطه سنجید. یکی از عناصر مهم تکنیک حل مسئله، انتخاب نقطه یا نقاط به گونه‌ای است که تا حد ممکن محاسبات را آسان می‌کند. وقتی جسم صلب به حال تعادل است همهٔ نقاط آن متعادلند. یک ذره در حال حرکت یکنواخت (سرعت ثابت) در یک دستگاه مرجع لخت، متعادل است. همچنین جسم صلبی که حرکت انتقالی یکنواخت (بدون چرخش) دارد در حال تعادل است. دوران یکنواخت یک جسم صلب حالت تعادل نیست حتی اگر برآیند نیروها و گشتاورهای مؤثر بر آن صفر باشد، زیرا ذره‌های منفرد جسم دارای شتاب هستند.

۱۴ـ۳ـ مرکز گرانش

نیروی گرانی (یاگرانشی) نقش مهمی در بسیاری از مسائل ایستایی‌شناسی بازی می‌کند. نیروی گرانی وارد بر یک جسم روی تمام بخش‌های آن جسم توزیع می‌شود، به‌طوری که هر بخشی تحت نیرویی متناسب با جرم آن قرار می‌گیرد. اما، برای محاسبه گشتاوری که گرانش به یک جسم صلب وارد می‌کند، ممکن است تمامی نیروی گرانشی را چنان انگاشت که گویی در مرکز جرم عمل می‌کند. اثبات این دستور آسان است: فرض کنید که جسم را رها می‌کنیم و به آن اجاره می‌دهیم که از یک حالت اولیه سکون، آزادانه سقوط کند. از آنجا که همهٔ ذرات جسم با آهنگ یکسانی سقوط می‌کنند، حین سقوط جهت جسم تغییر نمی‌کند. عدم وجود شتاب زاویه‌ای ایجاب می‌کند که گرانش هیچ گونه گشتاوری حول مرکز جرم ایجاد نکند. از این‌رو، اگر بخواهیم گرانش را به وسیله یک نیروی تنها که در یک نقطه از جسم صلب عمل می‌کند، شبیه‌سازی کنیم، آن نقطه باید مرکز جرم باشد، به‌طوری که این نیروی تنها هیچ گونه گشتاوری ایجاد نکند. پس هم گرانش و هم نیروی تنهایی که جایگزین آن می‌شود حرکت‌های چرخشی دقیقاً یکسانی به دور مرکز جرم ایجاد می‌کنند (یعنی، هیچ حرکتی) و بنابراین از هر نظر معادله‌های حرکت چرخشی جسم هم‌ارز هستند. اما توجه کنید که این هم‌ارزی فقط برای جسم صلب درست است. برای یک جسم کشسان یا یک شاره، توزیع گرانش میان همهٔ بخش‌های جسم در معادلات حرکت نقش اساسی بازی می‌کند. این واقعیت که مرکز گرانش و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند از آنجا ناشی می‌شود که ما فرض کردیم میدان گرانشی زمین g بر حسب فاصلهٔ جسم از مرکز زمین تغییر می‌کند و جهت آن نیز در هر نقطه در امتداد شعاع و به طرف مرکز زمین است.

مرکز گرانش چند خاصیت مهم دارد: نخست اینکه اگر جسمی در میدان گرانش به حال تعادل بوده و بر یک نقطه متکی یا به یک نقطه آویزان باشد، مرکز گرانش بر امتداد قائمی که از این نقطه می‌گذرد، قرار دارد. اگر در جای دیگری بود وزن نسبت به این نقطه دارای گشتاور می‌شد و جسم تعادل چرخشی نداشت. از این واقعیت در تعیین

مرکز گرانش اجسامی که شکل هندسی منظمی ندارند استفاده می‌شود.

دوم نیروی وارد بر مرکز گرانش یک جسم نمی‌تواند آن را به دور محوری که از مرکز جرم می‌گذرد بچرخاند. نیروی وارد بر هر نقطه دیگر می‌تواند هم انتقال و هم چرخش در جسم ایجاد کند.

سوم، همان‌طور که قبلاً گفته شد، اندازه حرکت خطی کل یک جسم برابر حاصلضرب جرم کل جسم در سرعت مرکز جرم آن است. شتاب مرکز جرم برابر شتاب یک نقطهٔ مادی به همین جرم است که برآیند نیروهای مؤثر بر جسم بر آن وارد شود.

۱۴ـ۳ـ۱ـ تغییرات ظاهری وزن

چگونه خود را وزن می‌کنید؟ اگر بخواهید وزن دقیق خود را بدانید باید بی‌حرکت روی ترازو بایستید، موقعی که خم می‌شوید ترازو وزن کمتر را نشان می‌دهد. چرا؟ وقتی که انسان خم می‌شود عضلاتی که برای این کار به فعالیت می‌افتند نیمه پایینی بدن را به سمت بالا می‌کشند و به این ترتیب از فشاری که بر ترازو وارد می‌شود کم می‌کنند. به عکس وقتی بدن را راست می‌کنید عضلات فعال، نیمه پایینی بدن را به دو طرف می‌رانند. در این حالت ترازو، وزن بیشتری را نشان می‌دهد، زیرا نیمهٔ پایینی بدن فشار بیشتری را به صفحهٔ ترازو وارد می‌کند. اگر ترازو به قدر کافی حساس باشد می‌توانید با بلند کردن یک دست وزنی را که عقربهٔ ترازو نشان می‌دهد تغییر دهید. این حرکت اخیر وزن ظاهری شما را کمی بالا می‌برد. عضلاتی که برای بلند کردن بازو به کار می‌افتند از شانه به عنوان تکیه‌گاه استفاده می‌کنند، در نتیجه، شانه را همراه با بدن به سمت پایین می‌رانند و بدین ترتیب به فشار روی ترازو می‌افزایند. موقعی که عمل بلند کردن دست تمام شد فعالیت یک رشته عضلات دیگر آغاز می‌شود. این عضلات سبب می‌شوند که شانه به سمت بالا رانده شود و به انتهای بازو نزدیک گردد، این عمل سبب تقلیل وزن، یا دقیق‌تر بگوییم، کاهش فشار روی ترازو می‌گردد. برعکس وقتی دست را پایین می‌آورید ابتدا از وزن بدن کم شده و پس از پایان عمل به وزن افزوده می‌گردد.

خلاصه با به کار انداختن عضلات می‌توانید وزنتان را کم یا زیاد کنید. در این رابطه چند مثال در بخش مسائل حل شده بیان می‌شود.

۱۴ـ۳ـ۲ـ تعادل پایدار ـ ناپایدار و خنثی در میدان گرانشی

برای تعادل انتقالی یک جسم شرایط را به این صورت بررسی می‌کنیم: می‌دانیم که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. برای نیروهای پایستار می‌توانیم یک تابع انرژی پتانسیل U تعریف کنیم. وقتی U کمینه است ذره در حال تعادل پایدار است و هر جابجایی از این موضع یک نیروی بازگرداننده ایجاد می‌کند که می‌کوشد ذره را به حالت تعادل برگرداند. راه دیگر برای بیان این مطلب آن است که بگوییم اگر ذره‌ای در حالت تعادل پایدار باشد، برای تغییر موضع آن باید یک عامل خارجی روی آن کار انجام دهد. این امر باعث افزایش انرژی پتانسیل ذره می‌شود. وقتی U بیشینه است، ذره در حال تعادل ناپایدار است و هر جابجایی از این موضع نیرویی ایجاد می‌کند که می‌کوشد ذره را هر چه بیشتر از حال تعادل دور کند. در این مورد، کار انجام شده برای جابجایی توسط نیروهای پایستار داخلی تأمین می‌شود و انرژی پتانسیل آن را کاهش می‌دهد.

وقتی U ثابت است، ذره در حال تعادل خنثی است. در این حالت ذره را می‌توان بدون اعمال نیروی دور کننده یا بازگرداننده کمی جابجا کرد. توجه کنید که یک ذره می‌تواند نسبت به یک مختصهٔ دستگاه در حال تعادل پایدار و نسبت به مختصهٔ دیگر دارای تعادل ناپایدار باشد.

حال اگر جسم صلب را در نظر بگیریم باید علاوه بر تعادل انتقالی، تعادل دورانی آن را نیز بررسی کنیم. البته حل مسئله جسم صلب در میدان گرانشی نسبتاً ساده است، زیرا می‌توان فرض کرد که تمام نیروهای گرانشی وارد بر ذرات جسم صلب در حرکتهای انتقالی و دورانی به یک نقطه وارد می‌شوند. شرایط تعادل یک جسم صلب را به‌طور خلاصه چنین بیان می‌کنیم: یک جسم صلب وقتی در حال تعادل پایدار است که

اعمال نیرو بتواند مرکز گرانش آن را بالا ببرد نه اینکه آن را پایین بیاورد و زمانی در حال تعادل خنثی است که هیچ نیروی افقی نتواند مرکز گرانش آن را بالا یا پایین ببرد.

۱۴ـ۳ـ۳ـ یک آزمایش ساده

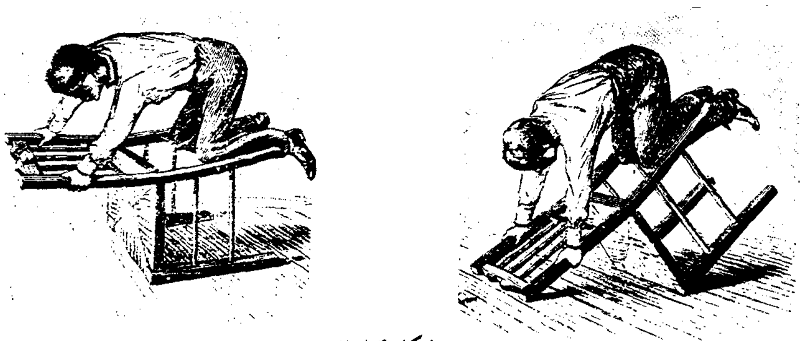
قند را بردارید[۱]

با یک آزمایش شوخی‌آمیز، تعادل پایدار و ناپایدار را، در ارتباط با وضع گرانیگاه نسبت به تکیه‌گاه بهتر درک می‌کنید. وسیله‌های لازم برای انجام آن. یک صندلی چوبی معمولی و یک حبه قند است. و اما آزمایش:

صندلی را مطابق شکل، روی زمین بخوابانید. به‌طوری که دو پای جلوی آن بر سطح زمین منطبق شوند. در این وضعیت پشت صندلی را محکم بگیرید و از دوست خود بخواهید که با توجه تصویر، در این وضعیت روی صندلی بنشیند و زانوها و ساق‌های وی بر پایه‌های عقب صندلی منطبق شود و با دست‌های خود پشتی صندلی را محکم بگیرد. در این صورت بالاتنهٔ دوست شما، موازی زمین خواهد بود. حال دست خود را آرام آرام کنار بکشید، تا دوست شما به‌طور مستقل در این وضعیت باقی بماند. تا اینجا مطلب زیاد جالبی در آزمایش به چشم نمی‌خورد، اما حالا شما یک حبه قند را در وسط پشتی صندلی قرار دهید و از دوست خود بخواهید که حبه قند را با دهان خود بردارد و برنده شود. دوست شما به خیال اینکه کاری ساده است، سرش را به این منظور پایین خواهد آورد، که ناگهان پشتی صندلی به زمین خواهد آمد و حبه قند به کناری خواهد رفت ولی شما که کاملاً مراقب اوضاع هستید، به کمک دوست خود خواهید شتافت تا احتمالاً زمین نخورد.

---

۱. آزمایشهای ساده و شگفت‌انگیز، ترجمه کاظم فائقی، انتشارات تکنیک، ۱۳۷۱.



شکل ۱۴ـ۲

چرا چنین می‌شود؟ زیرا در حالت اول، چون تصویر گرانیگاه داخل تکیه‌گاه جسم قرار می‌گیرد، تعادل پایدار است. اما در حالت دوم (هنگام برداشتن حبه قند) وقتی دوست شما سر خود را پایین می‌آورد، گرانیگاه مجازی مجموعه تا حدی به جلو می‌آید، و تصویر آن از داخل تکیه‌گاه جسم خارج می‌شود. در این صورت تعادل ناپایدار می‌گردد، و صندلی سقوط می‌کند.

۱۴ـ۴ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ $\Sigma\vec{F}=0$ و $\Sigma\vec{N}=0$ شرایط لازم و کافی برای تعادل مکانیکی هستند. برای داشتن تعادل مکانیکی لازم نیست جسم نسبت به ناظر، ساکن باشد بلکه نباید شتاب داشته باشد. به عبارت دیگر ممکن است مرکز جرم جسم با سرعت ثابت v_{cm} حرکت کند یا جسم حول محور ثابتی با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد. برای تعادل ایستا جسم باید در حال سکون باشد یعنی $v_{cm}=0$ و $\omega=0$. اما با انتخاب یک چارچوب مرجع مناسب می‌توان دو شرط فوق را برای هر دو نوع تعادل به کار برد.

۲ـ وقتی جسمی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در حال دوران است، هر ذره دارای اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L}=I\vec{\omega}$ است. از طرفی می‌دانیم $\vec{N}=\frac{d\vec{L}}{dt}$. از آنجا که ω ثابت است و توزیع جرم متقارن، $N=\frac{dL}{dt}=0$ می‌شود. بنابراین شرط تعادل مکانیکی برقرار است (در حالی که شتاب چرخ $a\neq 0$ است).

۳ـ اگر یکی از شرایط تعادل برقرار نباشد جسم در حال تعادل نخواهد بود. مثلاً در الاکلنگ، برآیند نیروها صفر است ولی چون برایند گشتاور نیروها صفر نیست، الاکلنگ در حال تعادل نیست. همچنین جسمی که با سرعت ثابت روی سطح شیبدار با ضریب اصطکاک μ در حرکت است، در حال تعادل نیست با اینکه برایند نیروهای وارد بر آن صفر است.

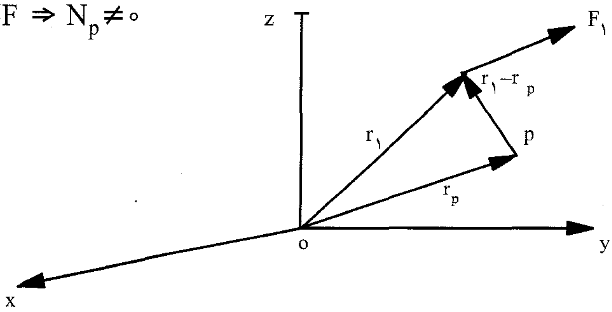
۴ـ اگر جسمی در حال تعادل انتقالی نباشد و گشتاور نیرو نسبت به نقطهٔ خاصی صفر باشد، گشتاور نیرو نسبت به هر نقطه‌ای صفر خواهد بود. فرض کنیم گشتاور نیرو حول نقطهٔ o صفر باشد:

$$\Sigma\vec{F}\neq 0$$

$$\vec{N}_o=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2+\ldots+\vec{r}_n\times\vec{F}_n$$

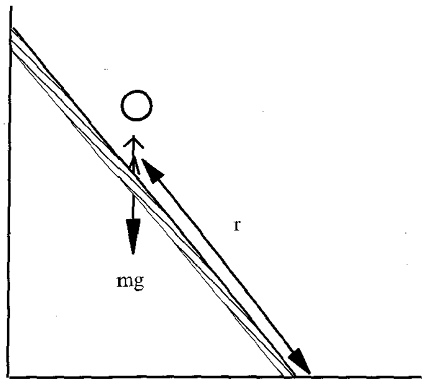
گشتاور حول نقطهٔ دلخواه p عبارت است از:

$$\vec{N}_p=(\vec{r}_1-\vec{r}_p)\times\vec{F}_1+\ldots+(\vec{r}_n-\vec{r}_p)\times\vec{F}_n$$
$$=(\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2+\ldots+\vec{r}_n\times\vec{F}_n)-\vec{r}_p\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n)$$
$$N_p=N_o-r_p\times\Sigma F \Rightarrow N_p\neq 0$$



۵ـ اگر شخصی در قسمت بالای نردبان (بالاتر از مرکز جرم نردبان) قرار بگیرد، احتمال لغزش نردبان بیشتر است. وقتی شخص بالاتر از مرکز جرم نردبان باشد، گشتاور نیروی وزن شخص حول مرکز جرم نردبان در جهت لغزش نردبان روی دیوار (پاد ساعتگرد، جهت خطر) است ولی وقتی شخص پایین‌تر از مرکز نردبان باشد گشتاور در خلاف جهت (ساعتگرد) است.

اگر گشتاور را حول نقطهٔ اتکا به زمین حساب کنیم، با بالا رفتن شخص، بازوی گشتاور بزرگ می‌شود بنابراین گشتاور بزرگ می‌شود و احتمال لیز خوردن افزایش می‌یابد.



۶ـ اگر فرض کنیم میدان گرانش زمین برای تمام قسمتهای یک جسم صلب یکسان است، مرکز جرم و گرانیگاه یک ساختمان بر هم منطبقند. در صورتی که واقعاً g در تمام قسمتها یکسان نیست و بر حسب فاصلهٔ جسم از مرکز زمین تغییر می‌کند. بنابراین در ساختمانهای بسیار بلند نمی‌توان مرکز جرم را بر گرانیگاه منطبق دانست.

۷ـ جسم صلب وقتی در حال تعادل پایدار است که اعمال نیرو بتواند مرکز گرانش آن را بالا ببرد. حالت تعادل پایدار جسم صلب دارای انرژی پتانسیل کمینه است.

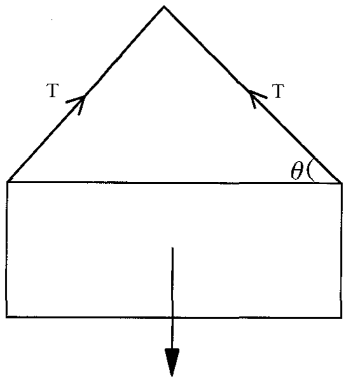
۸ـ ذره‌ای داخل یک لولهٔ پر از مایع در حرکت دایره‌ای یکنواخت است، به عبارت دیگر سرعت زاویه‌ای ذره، ω ثابت است. بنابراین:

$$N=\frac{dl}{dt}=I\frac{d\omega}{dt}=0$$

و جسم در حال تعادل مکانیکی است (پرسش ۱). از دید ناظری که با دستگاه مرکزگریز می‌چرخد، ذره در حال تعادل ایستاست و همان طور که گفته شد اختلاف در نوع تعادل (ایستا و ناایستا) مربوط به چارچوب مرجع دو ناظر است.

۹ـ یک تابلو به وسیله دو سیم به دیواری آویخته شده است. با توجه به شکل در حال تعادل خواهیم داشت:

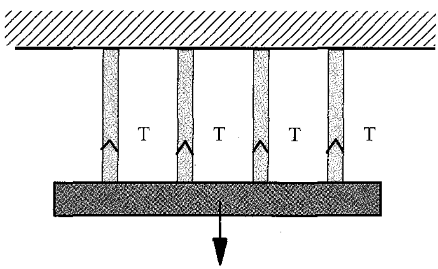
$$۲\,T\sin\theta = mg \;\Rightarrow\; T = \frac{mg}{۲\sin\theta}$$



بدین ترتیب نحوه ارتباط کشش T با زاویهٔ بسته شدن سیمها از طریق رابطهٔ فوق بررسی می‌شود. مثلاً در زاویه‌های کوچک θ، میزان T افزایش می‌یابد تا همچنان تعادل برقرار باشد.

۱۰ـ اگر جسمی را به وسیلهٔ چند طناب هم اندازه آویزان کنیم، نیروی وزن جسم بین طنابها تقسیم می‌شود و با اندازه‌گیری نیروی وارد بر یک طناب می‌توان وزن جسم را تعیین کرد. در این شکل،

$$T = \frac{mg}{۴}$$



۱۱ـ وقتی جسمی بدون چرخش به هوا پرتاب شود، گشتاور نیروی وارد بر آن صفر است (چون نمی‌چرخد). با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، تنها نیروی وارد بر جسم، وزن جسم است، بنابراین گشتاور نیرو حول گرانیگاه صفر است. از طرفی برای تمام

سخت‌گیری‌های دورانی جسم، مرکز جرم جسم تنها نقطه‌ای است که در آن رابطهٔ $\vec{N}=0$ برقرار است. پس در این حالت گرانیگاه بر مرکز جرم منطبق است.

۱۲ـ هنگام وزش باد شدید، اگر گشتاور نیروی ناشی از باد به وسیلهٔ گشتاور نیروی دیگری خنثی شود درخت تعادل خود را حفظ می‌کند. این گشتاور مخالف ناشی از نیروی وارد به درخت از طرف زمین است. اگر این گشتاور نیرو بتواند گشتاور ناشی از نیروی باد را خنثی کند، درخت ریشه کن نمی‌شود.

۱۳ـ چیزی به نام جسم صلب واقعی وجود ندارد، زیرا از تغییرات ناشی از نیروهای داخلی در یک جسم صلب به‌طور تقریبی صرف نظر می‌شود (به قضیهٔ کارهای مجازی نیز مراجعه شود).

۱۴ـ در یک اتومبیل پارک شده در حالی که در جای راننده نشسته‌اید، اگر نیروهای رو به بالای وارد شده از طرف زمین به چهارچرخ متفاوت باشند، نشان می‌دهد نیروهای وارد به چهارچرخ از طرف اتومبیل یکسان نیست. از این‌رو بهترین کار این است که از اتومبیل خارج شوید. در این حالت نیروهای کل از زمین به چهارچرخ وارد می‌شود باید مساوی باشند.

۱۵ـ جسم صلب وقتی دارای تعادل پایدار است که اِعمال نیرو بتواند مرکز گرانش آن را بالا ببرد. در حالت تعادل پایدار، جسم دارای انرژی پتانسیل کمینه است. مکعب مستطیل با نسبت ابعاد ۱:۲:۳ وقتی تعادل پایدار دارد که ارتفاع آن (h) کمترین مقدار باشد. بنابراین وقتی مکعب روی سطح با نسبت اضلاع ۲:۳ قرار دارد پایدارترین حالت را خواهد داشت.

۱۶ـ ذره‌ای که داخل یک لولهٔ پر از مایع دستگاه مرکزگریز در حال دوران است، از نظر ناظر ساکن در آزمایشگاه دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت است. به عبارت دیگر سرعت زاویه‌ای ذره $\vec{\omega}$ ثابت است. بنابراین $\vec{N}=\frac{d\vec{l}}{dt}=I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ و جسم در تعادل مکانیکی به سر می‌برد (پرسش ۲). از دید ناظری که با دستگاه مرکزگریز می‌چرخد، ذره در حال تعادل ایستاست. همان طور که پیش از این گفته شد، اختلاف در

نوع تعادل (ایستا و ناایستا) مربوط به چارچوب مرجع انتخاب شده است.

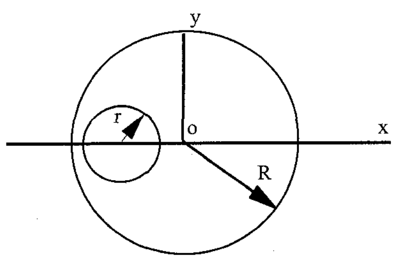
۱۷ـ در رابطهٔ $\vec{F}=m\vec{a}$، بردار $\vec{F}$ برآیند نیروهای وارد بر جسم است و $\vec{a}$ برآیند شتابها. بنابراین وقتی جسم در حال تعادل و شتاب صفر است، برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است، نه تک تک نیروها. یعنی نیروها به‌گونه‌ای وارد شده‌اند که هریک اثر دیگری را خنثی می‌کند.

۵ـ۱۴ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ یک قطعه دایره‌ای شکل به شعاع r را از قرص یکنواخت به شعاع R می‌بریم. فاصلهٔ مرکز سوراخ ایجاد شده از مرکز قرص برابر $\frac{R}{۲}$ است. مرکز جرم جسم باقی مانده را مشخص کنید.

حل. با توجه به شکل به علت تقارن جسم باقی مانده نسبت به محور x، مرکز جرم آن روی محور x قرار دارد. اگر M جرم جسم باقی مانده و m جرم قطعهٔ دایره‌ای شکل بریده شده باشد، از آنجایی که مرکز جرم قرص کامل در نقطه o ($x_{cm}=۰$) و مرکز جرم جسم باقی مانده در نقطهٔ o ($x_{cm}=\frac{R}{۲}$) قرار دارند پس:

$$x_{cm}=\frac{m(x_m)+M(x_{cm})}{m+M} \qquad (۳\text{ـ}۱۴)$$



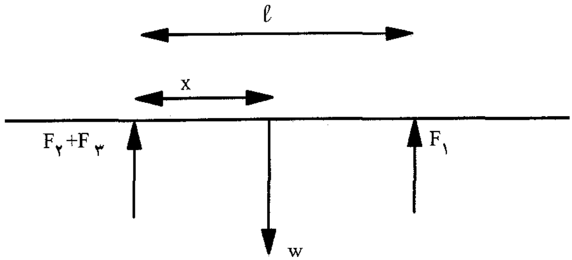
که در آن x_M مربوط به مرکز گرانی جسم باقی مانده است. اگر σ جرم یکای سطح باشد رابطهٔ بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{m(-R/۲)+M(x_M)}{m+M}=۰ \Rightarrow x_M=\frac{mR}{۲M}$$

$$x_M=\frac{\pi r^{۲}\sigma R}{۲\pi(R^{۲}-r^{۲})\sigma}=\frac{Rr^{۲}}{۲(R^{۲}-r^{۲})} \qquad (۴\_۱۴)$$

پس، مرکز جرم جسم باقی مانده در امتداد خط واصل مرکز قسمت بریده شده به مرکز قرص کامل و به فاصلهٔ x_m و در سمت راست مرکز قرص قرار دارد.

۲ـ سه نفر تیری را حمل می‌کنند. یکی از آنها سر تیر راگرفته است و دو نفر دیگر تیر را روی قطعهٔ چوبی گذاشته و به کمک آن تیر را حمل می‌کنند. این قطعه چوب طوری در زیر تیر قرار دارد که وزن تیر به‌طور مساوی میان هر سه تقسیم می‌شود. محل قطعه چوب را پیدا کنید (از جرم صرف نظر کنید).

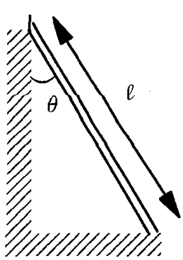


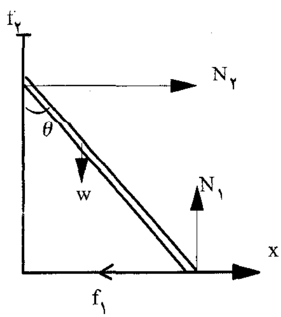
حل. از آنجا که وزن تیر به‌طور مساوی و میان هر سه نفر تقسیم شده است داریم:

$$F_۱=F_۲=F_۳=\frac{W}{۳} \qquad \Sigma N_\circ=F_۱(\frac{L}{۲})=(F_۲+F_۳)(x)=\circ$$

$$\Rightarrow x=\frac{L}{۳}$$

۳ـ انتهای پایینی یک میلهٔ فنری روی کف قرار داشته و انتهای بالایی آن به دیوار تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و کف زمین $\mu_s=\circ/۴$ باشد، بیشینه زاویه‌ای که میله می‌تواند با دیوار بسازد بدون اینکه بلغزد، چیست؟





حل. اگر میله در آستانهٔ لغزیدن باشد نیروهای اصطکاک بیشینه مقدار خود را دارا هستند:

$$f_1 = \mu_s N_1 \qquad f_2 = \mu N_2$$

وزن میله در مرکز جرم به‌طور عمودی به سوی پایین عمل می‌کند. مجموع گشتاورهای این نیروها باید صفر باشد. اگر گشتاورها را حول نقطهٔ مماس با کف در نظر بگیریم، این شرط چنین می‌شود:

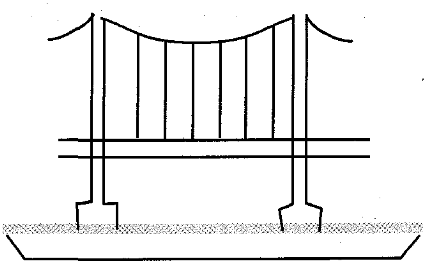
$$\ell N_2 \cos\theta + \ell\mu_s N_2 \sin\theta - \frac{1}{2} Mg\sin\theta = \begin{cases} N_1 = \dfrac{Mg}{(\mu_1^2+1)} \\ N_2 = \mu_1 \dfrac{Mg}{(\mu_1^2+1)} \end{cases}$$

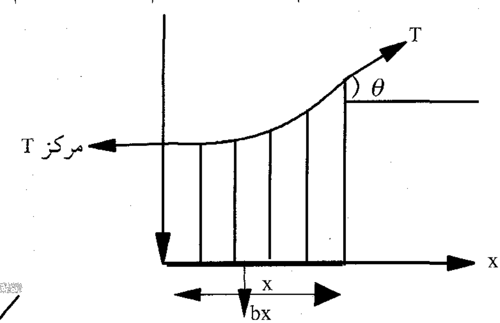
$$-\mu_s N_1 + N_2 = 0$$

$$\frac{Mg\ell\mu_s}{\mu_s^2+1}\cos\theta + \frac{\mu_s^2 Mg\ell}{\mu_s^2+1}\sin\theta - \frac{Mg\ell}{2}\sin\theta = 0$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{2\mu_s}{1-\mu_s^2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\times 0/4}{1-(0/4)^2} = 0/95$$

۴ـ یک پل معلق شامل یک جفت سیم بافت است که بین دو برج آویخته‌اند و گذرگاه پل به وسیلهٔ میله‌های عمودی که فاصلهٔ نزدیکی با هم دارند از سیم بافت‌ها آویخته است. فرض کنید وزن گذرگاه پل به‌طور یکنواخت در تمام طول آن توزیع شده است و از وزن سیم بافت‌ها چشم بپوشید. سیم بافت‌ها چه شکلی دارند؟





حل. قطعه‌ای از پل را از وسط پل تا فاصلهٔ x در نظر بگیرید. نیروهای خارجی

وزن آن قطعه از گذرگاه، یعنی bx که در آن b وزن واحد طول است به اضافه، نیروی کشش در راست و چپ قطعه سیم بافت.

$T\cos t=T_{\text{مرکز}}$ شرط تعادل افقی نیروها

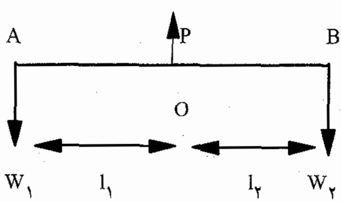
$T\sin t=bx$ شرط تعادل عمومی نیروها

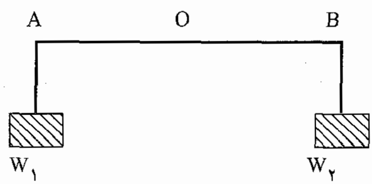
$\Rightarrow \tan t=\frac{bx}{T_{\text{مرکز}}}$

$\tan t=\frac{dy}{dx}=\frac{bx}{T}$ یا $dy=\frac{b}{T_{\text{مرکز}}}x\,dx \Rightarrow y=\frac{b}{۲T_{\text{مرکز}}}x^۲+$ مقدار ثابت

که معادلهٔ یک سهمی با محوری در $x=۰$ است. پل‌های معلق واقعی به‌طور تقریبی سهمی‌گون هستند چرا که سیم بافت‌های نگهدارندهٔ آن، نسبتاً سنگین هستند و وزن بر شکلی که سیم بافت به خود می‌گیرد اثر می‌گذارد.

۵ـ گلدان B به وزن $W_۲$ را مطابق شکل از انتهای یک میلهٔ افقی که روی نردهٔ بالکن قرار دارد آویخته‌ایم. به انتهای دیگر میله جسمی به وزن $W_۱$ آویخته‌ایم تا میله در حال تعادل بماند. با این فرض که وزن میله ناچیز است وزن $W_۱$ و نیروی رو به بالای P در نقطهٔ O را که به میله وارد می‌شود، پیدا کنید.





حل.

شرط اول تعادل: $\Sigma F_y=p-W_۱-W_۲$

اکنون گشتاورهای نیرو را حول محوری که از O گذشته و بر صفحهٔ شکل عمود است حساب می‌کنیم. شرط دوم تعادل:

$\Sigma T_o=W_۱L_۱-W_۲L_۲=۰$

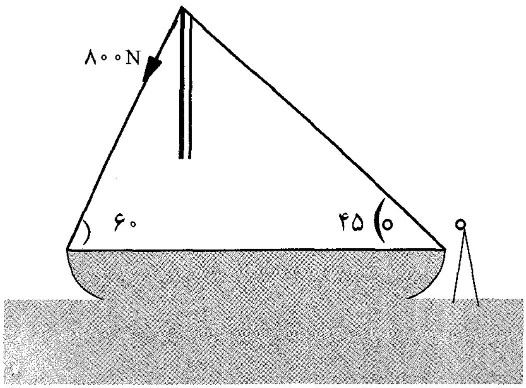
فرض کنید: $W_۱=۲۰\ N \quad , \quad p=۳۵\ N$

با توجه به اینکه گشتاور کل حول هر محوری صفر است، گشتاور نیرو را حول محوری که از نقطهٔ A گذشته است حساب می‌کنیم:

$\Sigma T_t=pI_۱-W_۲(I_۱+I_۲)=(۳۵\ N)(۱/۲\ m)-(۱۵\ N)(۲/۸\ m)=۰$

نقطه‌ای که برای محاسبهٔ گشتاورهای نیرو انتخاب می‌کنیم لازم نیست حتماً روی میله قرار داشته باشد.

۶ـ دکلی به جرم ۸۰/۰ kg توسط سیمهای مهار مطابق شکل، در وضعیت قائم نگه داشته شده است. کشش سیم کوتاهتر ۸۰۰ N است. کشش سیم دیگر و سایر نیروهایی راکه بر دکل وارد می‌آید، به دست آورید.

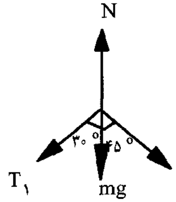


حل. نیروهای وارد بر دکل عبارتند از نیروهای وزن، کشش سیمهای نگهدارنده و نیروی وارده از طرف آب. با توجه به نمودار آزاد نیروهای وارد بر دکل، چون دکل در حال تعادل است مؤلفه‌های افقی نیروهای کشش برابرند.

$T_۱ \cos ۶۰ = T_۲ \cos ۴۵$

$T_۱ = ۸۰۰\ N$

$\Rightarrow T_۲ = ۵۶۶\ N$



با تعریف N به عنوان نیروی وارد بر دکل از سوی آب و با توجه به تعادل دکل داریم:

$mg + T_۱ \sin ۶۰ + T_۲ \sin ۴۵ = N$

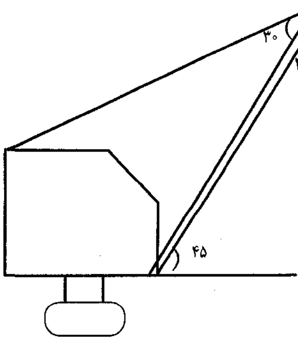
$N = ۱/۸ \times ۱۰^{۳} N$

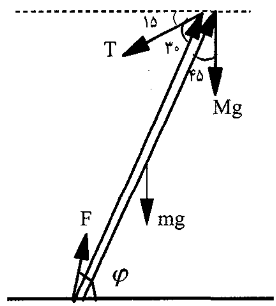
۷ـ جرثقیلی باری به جرم $۱۰^۴ kg$ را بالا می‌برد. جرم بازوی متحرک جرثقیل ۱۰۰۰ kg و طول ۱۰ m است. نیروی کشش سیم و نیروی وارد بر بازوی محرک از سوی محور پایین را محاسبه کنید.

حل. با رسم نیروهای وارد بر بازوی متحرک جرثقیل داریم: T نیروی کشش سیم، F نیروی وارد از سوی محور پایین، m جرم بازوی متحرک، M جرم باری است که توسط جرثقیل جابجا می‌شود و s طول بازوی متحرک است.

$$۱)\ \Sigma\vec{N}=۰ \Rightarrow \frac{s}{۲}\, mg\sin۴۵ + smg\sin ۴۵ - sT\sin ۳۰ = ۰$$

توجه: جهت گشتاورها بر اساس قانون دست راست تعیین می‌شود.





$$\Rightarrow T=\frac{g(M+\frac{m}{۲})\sin۴۵}{\sin۳۰} \Rightarrow T=۱۰۴۶\times۱۰^۵N$$

$$۲)\ \Sigma\vec{F}=۰ \Rightarrow \begin{cases} F_۱=T\cos ۱۵ \\ F_۱=T\sin ۱۵ + Mg+mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_x= ۱/۴۱ \times۱۰^{۵}N$$

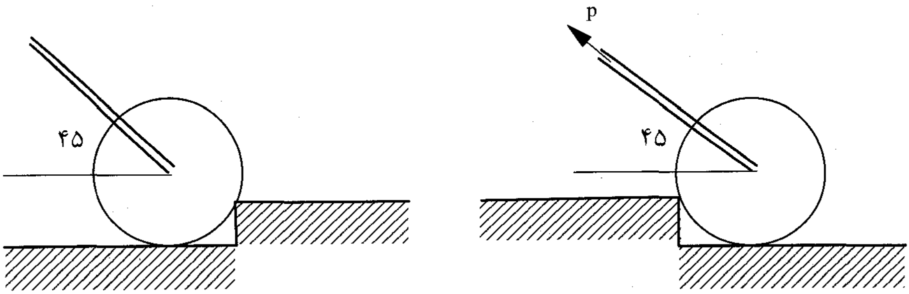
$$\Rightarrow F_y= ۱/۴۶ \times۱۰^{۵}N$$

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}=۲/۳\times۱۰^۵N$$

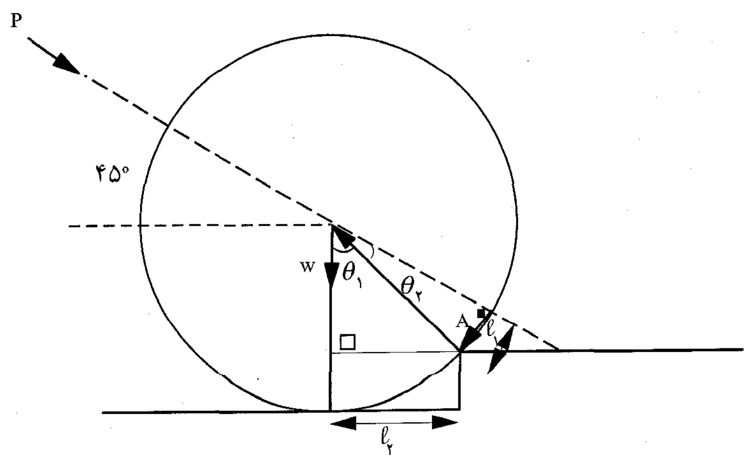
$$\tan\varphi=\frac{F_x}{F_y}=\frac{۱/۴۶}{۱/۴۱}=۱/۳۵ \Rightarrow \varphi=۴۶^{\circ}$$

۸ـ دو غلتک به جرم $200\ kg$ و قطر $1/0\ m$ مفروض است. نیروی p را مطابق شکلهای زیر به غلتکها وارد می‌کنیم تا روی یک پله به ارتفاع ۲ cm بغلتند. بزرگی نیروی P را در هر حالت به دست آورید.

حل. در ابتدا هر دو غلتک در تعادلند، زیرا نیروهایی که روی آنها اعمال می‌شود، در شرایط زیر صدق می‌کند: $\Sigma\vec{N}=0$, $\Sigma\vec{F}=0$



اما اگر p به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، می‌تواند این تعادل را به هم بزند. برای حالت الف که غلتک در حال بالا رفتن از پله است، غلتک حول نقطهٔ A می‌چرخد. کمترین نیروی مورد نیاز برای شروع حرکت p از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $N_A=pl_1-wl_2$



شکل الف

$l_۱$ و $l_۲$ فاصلهٔ عمودی اثر نیرو تا تکیه‌گاه A است. نکته قابل توجه این است که نیرویی که از طرف زمین وارد می‌شود، وقتی غلتک حول A شروع به حرکت می‌کند به سمت صفر میل می‌کند. از طرفی نیرویی که از طرف نقطهٔ تماس A وارد می‌شود، گشتاوری حول A ایجاد نمی‌کند. با توجه به شکل فوق داریم:

$l_۱=r\sin\theta_۲ \quad , \quad l_۲=r\sin\theta_۱$

$\cos\theta_۱=\frac{۵۰-۲}{۵۰}\left(\frac{cm}{cm}\right)=۰/۹۶ \Rightarrow \sin\theta_۱=\sqrt{۱-\cos^۲\theta_۱}=۰/۲۸$

$\Rightarrow \theta_۱=۱۶/۲۶\ ^\circ$

از طرفی با توجه به شکل داریم:

$\theta_۱+\theta_۲=۴۵^\circ$

$\Rightarrow \sin\theta_۲=\sin ۲۸/۷۴ = ۰/۴۸۱$

$N_A=p(۰/۵)(۰/۴۸۱)-(۲۰۰)(۹/۸)(۰/۵)(۰/۲۸)$

$N_A=۰ \Rightarrow p=۱۱۴۱\ N$

برای حالت ب مانند آنچه در قسمت الف انجام دادیم داریم:

$l_۱=r\sin\theta_۲$

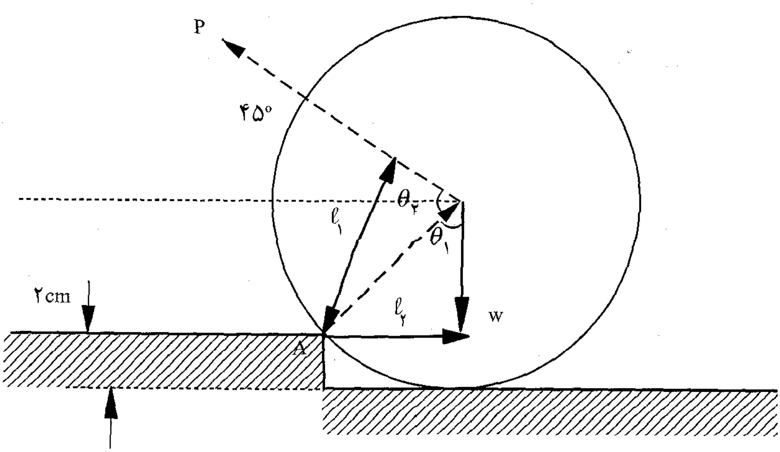
$l_۲ r\sin\theta_۱$

$\cos\theta_۱=۰/۹۶ \Rightarrow \sin\theta_۱=۰/۲۸ \Rightarrow \theta_۱=۱۶۲۶\ ^\circ$

با توجه به شکل در اینجا $\theta_۱+\theta_۲=۱۳۵^\circ$

$\theta_۲=۱۱۸/۷۶\ ^\circ \Rightarrow \sin\theta_۰=۰/۸۷۷$

$N_A=pl_۱-wl_۲=۰ \Rightarrow p=۶۲۵/۸\ N$



۶ـ۱۴ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ یک میلهٔ فولادی خیلی کمتر از یک ریسمان بافته فولادی با همان قدرت انعطاف‌پذیر است. توضیح دهید چرا؟

۲ـنجاری می‌خواهد سقف هموار بنایی را با تیرکهای افقی چوبی که سطح مقطع مستطیلی دارند بسازد. برای به دست آوردن بیشترین مقاومت سقف (کمترین شکم یا برآمدگی) آیا باید ضلع باریک تیرکها را بالا قرار دهد یا ضلع پهن آنها را؟

۳ـگاهی لاستیک‌های اتومبیل را با یک دستگاه خاص «بالانس» می‌کنند. در این دستگاه، لاستیک حول مرکزش می‌چرخد و وزنه‌هایی (لقمه‌هایی) را بـه لبـهٔ ریـنگ وصل می‌کنند تا لاستیک در صفحهٔ افقی منحرف نشود. علت امر را با توجه به مرکز گرانش شرح دهید.

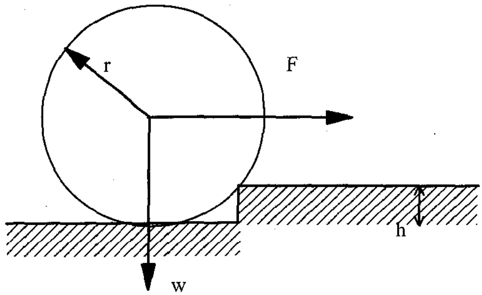
۴ـ آیا ممکن است در مرکزگرانش یک جسم صلب ماده‌ای وجود نداشته باشد؟ برای مثال، یک قرص راکه وسطش سوراخ است، یک بطری خالی، و یک استوانه تو خالی را در نظر بگیرید.

۵ـ مردی از یک نردبان بلند وکهنه بالا می‌رود و نردبان به این سو و آن سو تاب می‌خورد. او متوجه می‌شود که وقتی در بالای نردبان می‌ایستد، نسبت به حالتی که در پایین نردبان می‌ایستد ناپایدارتر است. چرا؟

۶ـ وقتی بار سنگینی را در مکانی عقب‌تر از چرخ‌های یک کامیون، بر روی آن قرار می‌دهیم، قسمت جلوی کامیون بالا می‌رود. چرا؟

ب) مسائل

۱ـچه نیرویی (F) در راستای افق باید به محور چرخ وارد شود تا آن را از مانعی به ارتفاع h بالا ببرد؟ شعاع چرخ را r و وزن چرخ را w بگیرید.



۲ـ چهار آجر که طول هر کدام ℓ است، طوری روی یکدیگر قرار گرفته‌اند که قسمتی از آجر از لبهٔ هر آجر پایین‌تر جلوتر است. نشان دهید حالت تعادلی که در آن آجرها حداکثر جلورفتگی را می‌توانند داشته باشند به صورت زیر است.

الف) بالاترین آجر از آجر زیریش به اندازه $\frac{۱}{۲}$ جلوتر قرار گیرد.

ب) آجر دوم از بالا به اندازه $\frac{۱}{۴}$ از آجر زیریش جلوتر باشد.

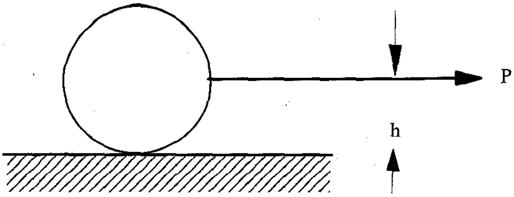
ج) آجر سوم از بالا به اندازه $\frac{۱}{۶}$ از آجر پایین جلوتر قرار گیرد.

۳ـ کرهٔ همگنی به شعاع r و وزن w تحت تأثیر نیروی ثابت افقی $\vec{p}$ که به وسیلهٔ یک نخ وارد می‌شود روی کف اتاق می‌لغزد.

الف) نشان دهید که اگر μ ضریب اصطکاک جنبشی میان کره و کف اتاق باشد، ارتفاع h از رابطهٔ $t=r(1-\mu\frac{w}{p})$ به دست می‌آید.

ب) نشان دهید که که در این شرایط کره در حال تعادل افقی نیست. آیا نقطه‌ای وجود دارد که کره نسبت به آن در حال تعادل چرخشی باشد؟

ج) آیا با انتخاب مقدار دیگری برای h، می‌توان کره را هم به حال تعادل چرخشی و هم به حال تعادل انتقالی نگه داشت؟ با تغییر جهت $\vec{p}$ چطور؟ توضیح دهید.



۴ـ کف پای یک مرد متوسط ۲٦ cm و ارتفاع مرکز جرم از کف ۱/۰۳ cm است. در حال ایستاده مرکز جرم با مرکز پا در یک خط عمود قرار دارد. مرد تا چه زاویه‌ای می‌تواند در حالی که بدن خود را مستقیم و پاهایش را صاف و بی‌حرکت نگه داشته بدون از دست دادن تعادل به جلو یا عقب کج شود؟

۵ـ میلهٔ یک متری به جرم M از ریسمانی به طول ۱/۵ m که در محل نشانهٔ ۸۰ cm به آن وصل است آویخته است. اگر انتهای سر پایینی را با فشار افقی به مقدار $\frac{Mg}{2}$ به یک سو برانیم زوایای تعادل میلهٔ متر و ریسمان چه خواهند بود؟

٦ـ دوچرخه‌سواری پیچی به شعاع ٦m را با تندی ثابت ۲۰ km/h طی می‌کند. دوچرخه‌سوار باید با چه زاویه‌ای دوچرخه را به سمت مرکز پیچ خم کند؟

۷ـ ریسمانی دور شاخهٔ درختی پیچیده و جرم‌های نابرابر m_1 و m_2 به دو سر آن متصلند. ضریب اصطکاک لغزشی برای ریسمان روی شاخه μ_k است. شتاب جرم‌ها چقدر است؟

۸ـ درب یکنواختی به وزن ۳۴۰ N در سطح افقی قرار دارد و به یک طرف خود لولا شده است. چه مقدار نیرو آن را در آستانه چرخش به دور لولا قرار می‌دهد اگر: الف) نیرو بر وسط در وارد آید و یا ب) بر کنارهٔ روبروی لولا وارد شود؟

۹ـ وزن دری ۲۵۰ N ارتفاع آن ۲/۵ m و عرض آن ۱ m است. دو لولا یکی ۰/۵ m از بالای در و دیگری ۰/۵ m از پایین آن فاصله دارند. به هر لولا نصف وزن در وارد می‌شود. اگر مرکز گرانش وسط در باشد مؤلفه‌های افقی نیروهای وارد بر دو لولا را به دست آورید.

۱۰ـ یک انتهای تختهٔ یکنواختی را روی یک آجر و انتهای دیگر تخته را روی یک تخم‌مرغ قرار داده‌ایم. طول تخته ۸m و وزن آن ٦۰ N و وزن شما ۴۵۰ N است. اگر نیروی ۱۵۰ N بتواند تخم‌مرغ را بشکند شما در چه فاصله‌ای از آجر می‌توانید بر روی تخته بایستید تا تخم‌مرغ نشکند؟

۱۱ـ ملوان یک کشتی، بادبانها را به کمک چرخی جمع می‌کند که با دسته‌ای به

طول ۲۵/۰ cm چرخانده می‌شود. قطر چرخ ۸/۰۰ cm است. اگر ملوان دستهٔ چرخ را با نیروی ۲۰۰ N بکشد، کشش طناب بادبان چقدر است؟

۱۲ـ جعبهٔ یکنواختی به طول ۲۰/۰ cm و ارتفاع ۵۰/۰ cm بر سطح شیبداری قرار دارد که زاویهٔ شیب آن نسبت به افق قابل تغییر است. حداقل مقدار ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و سطح را پیدا کنید به‌طوری که وقتی زاویه‌ای بین سطح و راستای افقی افزایش می‌یابد، جعبه به جای لغزیدن واژگون شود.

فصل ۱۵

نوسان

۱۵ـ۱ـ مقدمه

در زندگی روزمره خود با مثال‌های زیادی از حرکت‌هایی که مرتباً تکرار می‌شوند سروکار داریم. این حرکت‌ها را دوره‌ای یا نوسانی می‌نامند و این فصل به بررسی آنها می‌پردازد. کودکی که تاب‌بازی می‌کند، بالا و پایین رفتن امواج جزر و مد دریا، تکان خوردن یک درخت در باد، سیم‌های مرتعش یک آلت موسیقی و ارتعاشات اتم‌ها در شبکه بلوری از نمونه‌های این نوع حرکتند.

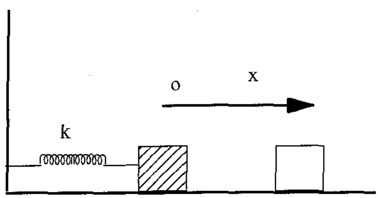
چون اصطلاح هماهنگ (هارمونیک) به عبارتهایی اطلاق می‌شود که شامل توابع سینوسی و کسینوسی هستند، حرکت تناوبی را غالباً «حرکت نوسانی هماهنگ» می‌گویند. بسیاری از اجسام نوسان‌کننده دقیقاً میان دو حد مشخص نوسان نمی‌کنند زیرا نیروهای اصطکاک مقداری از انرژی حرکت را تلف می‌کنند. به همین دلیل است که سیم ویولن سرانجام از ارتعاش می‌افتد. این حرکت را حرکت نوسانی هماهنگ میرا می‌نامند. اماگاهی اوقات می‌توان با دادن انرژی به دستگاه نوسان‌کننده، انرژی تلف شده توسط اصطکاک را جبران و اثر میرایی را حذف کرد. وزنه ساعت آونگی انرژی

خارجی را تأمین می‌کند و در نتیجه دستگاه نوسان‌کننده، چنان حرکت می‌کند که گویی حرکتش نامیراست. به چنین حرکتی، «نوسان هماهنگ واداشته» می‌گویند.

یکی از ساده‌ترین دستگاههایی که می‌تواند حرکت تناوبی انجام دهد، جرم متصل به فنر است که بر روی مسیر بدون اصطکاکی حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهد. جسم را به یک انتهای فنر می‌بندیم و انتهای دیگر فنر را ثابت نگه می‌داریم. فرض کنید x جابه‌جایی جسم نسبت به مکان تعادل آن باشد. هنگامی که $x=0$ است فنر کشیدگی یا فشردگی ندارد. هرگاه جسم به سمت راست برود x مثبت و فنر کشیده است. مؤلفه x نیروی F یعنی (F_x) که فنر به جسم وارد می‌کند، به طرف چپ و F منفی است. وقتی جسم به طرف چپ جابه‌جا می‌شود، x منفی است و فنر فشرده می‌شود. نیروی وارد به جسم به طرف راست یعنی به طرف مکان تعادل و F نیز مثبت است. بنابراین علامت F همیشه با علامت x مخالف است و نیروی فنر یک نیروی بازگرداننده است.

اگر فنر از قانون هوک پیروی کند، رابطه F با x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F=-kx \qquad (1\text{-}15)$$



شکل ۱۵ـ۱

در این رابطه k ثابت نیروی فنر است. علامت منفی به این دلیل به‌کار رفته است که نشان دهد نیرو را فنر به جرم وارد کرده است و نیروی وارد به فنر را نشان نمی‌دهد. معادله فوق برای xهای مثبت و منفی صادق است و در هر دو حالت، علامتهای F و x مخالف یکدیگرند.

اکنون فرض کنید جسم را به اندازه A به طرف راست جابه‌جا می‌کنیم، و سپس بدون آنکه سرعت اولیه‌ای به آن بدهیم، آن را رها می‌کنیم. فنر جسم را به طرف مکان

تعادل می‌کشد و در همان جهت به آن شتاب می‌دهد. این شتاب ثابت نیست، زیرا هر چه جسم به مکان تعادل نزدیکتر می‌شود، نیرو کاهش می‌یابد. وقتی جسم به $x=0$ می‌رسد، نیرو و شتاب صفر می‌شوند، اما سرعت جسم باعث می‌شود جسم از مکان تعادل بگذرد و به حرکتش به طرف چپ ادامه دهد. از این به بعد جهت نیرو عکس می‌شود و سرعت جسم کم شده و متوقف می‌شود، سپس به طرف مکان تعادل برمی‌گردد.

در بخش‌های بعد با استفاده از نکات مربوط به انرژی نشان خواهیم داد که حرکت جسم در میان $x=\pm A$ در طرفین مکان تعادل، محدود است و زمان رفت و برگشت کامل، یکسان است. اگر انرژی مکانیکی بر اثر اصطکاک تلف نشود، حرکت ادامه پیدا می‌کند. این حرکت خاص را که بر اثر نیروی بازگرداننده فنر (متناسب با جابجایی) انجام می‌شود، حرکت هماهنگ ساده یا به اختصار SHM می‌نامند. ارتعاش کامل یا چرخه یا سیکل یک رفت و برگشت کامل از A تا $-A$ و از $-A$ تا A است. حرکت از صفر تا A یا از $-A$ تا صفر حرکت از یک سو به سوی دیگر (مثلاً از A تا $-A$) معادل نصف چرخه است. دوره تناوب حرکت با T نشان داده می‌شود و زمان لازم برای پیمودن یک چرخه است. بسامد با f نشان داده می‌شود و تعداد چرخه‌های پیموده شده در واحد زمان است. بسامد عکس دوره تناوب است: $f=\frac{1}{T}$. یکای بسامد در دستگاه SI، چرخه بر ثانیه یا سیکل بر ثانیه است که هرتز نامیده می‌شود ($1\ Hz=1\ s^{-1}$) دامنه با A نشان داده می‌شود و جابجایی ماکزیمم نسبت به مکان تعادل است. بُرد کلّ حرکت $2A$ است. حرکت هماهنگ ساده، ساده‌ترین حرکت تناوبی است. در حرکت‌های تناوبی پیچیده، نیرو ممکن است به صورت پیچیده‌ای به جابجایی بستگی داشته باشد، ولی ما فقط موقعی حرکت را «حرکت هماهنگ ساده» می‌نامیم که نیرو با جابجایی نسبت مستقیم داشته باشد. با وجود این، در حرکتهای بسیار پیچیده اگر جابجایی به قدر کافی کوچک باشد، می‌توان گفت که آن حرکت تقریباً هماهنگ ساده است. حرکت هماهنگ ساده، مدتی است که بسیاری از حرکت‌های تناوبی در زندگی واقعی ما را توجیه می‌کند و از این رو ارزش بررسی دقیق‌تر را دارد.

۱۵-۲- حرکت هارمونیک ساده

در نوسان ساده، دوره نوسان تابع جرم جسم و مقدار نیروی بازگرداننده است اما به دامنه حرکت بستگی ندارد. حرکت را می‌توان هم با استفاده از قوانین نیوتن و هم با به کارگیری قضیه انرژی به‌طور دقیق مورد بررسی قرار داد. دیدیم که نیروی افقی وارد از فنر تنها نیروی وارد بر جسم است.

این نیرو پایستار است و نیروهای قائم کار انجام نمی‌دهند، لذا انرژی کل دستگاه پایسته است. همچنین جرم فنر را ناچیز فرض می‌کنیم. انرژی جنبشی جسم $k=\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل آن $u=\frac{1}{2}kx^2$ است:

$$E=k+u \quad \Rightarrow E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=const \qquad (۱۵-۲)$$

وقتی جسم به نقطه $x=A$، ماکزیمم جابجایی از وضع تعادل، می‌رسد برای یک لحظه کوتاه متوقف می‌شود تا بازگشت به سوی وضع تعادل را آغاز کند. یعنی وقتی $x=A$ (یا $-A$)، $v=0$ است. در اینجا همه انرژی از نوع پتانسیل است و $E=\frac{1}{2}kA^2$. چون E ثابت است این مقدار E در نقاط دیگر نیز به همین صورت است.

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

v را از این رابطه به دست می‌آوریم.

می‌توان از این رابطه برای پیداکردن سرعت (بدون تعیین علامت) در هر وضعیت استفاده کرد. مثلاً وقتی $x=\pm\frac{A}{2}$ است، داریم:

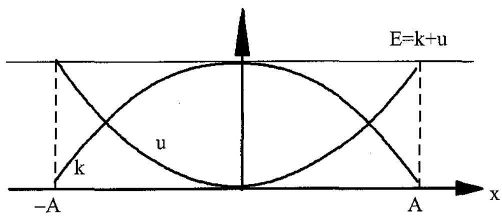
$$v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}\left[A^2-\left(\pm\frac{A}{2}\right)^2\right]}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}\frac{k}{m}}A \qquad (۱۵-۳)$$

همچنین با قرار دادن $x=0$ در رابطه فوق، سرعت ماکزیمم v_{max}، به صورت زیر درمی‌آید:

$$v_{max}=\sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad (۱۵-۴)$$

همان‌طور که شکل زیر نشان می‌دهد انرژی جنبشی میان صفر و این مقدار بیشینه ($\frac{1}{2}KA^2$) در تغییر است. در هر نقطه در مسیر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل مقادیری را دارند که مجموع آنها همواره برابر با $\frac{1}{2}KA^2$ است. انرژی کل ذره‌ای که حرکت

هماهنگ ساده دارد، با مجذور دامنه حرکت متناسب است. با استفاده از اصل پایستگی انرژی و انتگرال‌گیری از معادله (۱۵ـ۳) می‌توان جابجایی را به صورت تابعی از زمان به دست آورد.



شکل ۱۵ـ۲

۱۵ـ۲ـ۱ـ معادلات حرکت هارمونیک ساده

در رابطه (۱۵ـ۳) مقدار v را با $\frac{dx}{dt}$ جانشین می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^۲-x^۲)} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{A^۲-x^۲}}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$$

$$-\arccos\frac{x}{A}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\theta$$

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\theta\right) \qquad (۱۵ـ۵)$$

دوره تناوب T زمان لازم برای انجام یک نوسان کامل است. تابع کسینوس با افزایش مقدار درون پرانتز به میزان ۲π رادیان، تکرار می‌شود. پس اگر حرکت در زمان t= ۰ آغاز شود، زمان T (که پس از آن یک دوره کامل حرکت انجام شده است) چنین از طریق زیر محاسبه می‌شود. دوره تناوب حرکت بر حسب جرم و ثابت نیروی k مشخص می‌شود و تابع دامنه یا انرژی کل نیست.

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T=۲\pi \quad\Rightarrow\quad T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۱۵ـ۶)$$

فرکانس زاویه‌ای چنین به دست می‌آید:

$$\omega = ۲\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۷\_۱۵)$$

یکای این کمیت $\frac{rad}{s}$ است. بیشتر معادلات حرکت نوسانی ساده را می‌توان با استفاده از رابطه فوق به صورت ساده‌تر نوشت:

$$v = \pm\ \omega \sqrt{A^۲ - x^۲} \quad , \quad v_{max} = \omega A \quad , \quad a = -\ \omega^۲ x \qquad (۸\_۱۵)$$

بار دیگر بر این نکته تأکید می‌کنیم که روابط مربوط به فرکانس و دوره تناوب حرکت نوسانی ساده شامل دامنه A نیستند. در حرکت نوسانی ساده فرکانس تابع دامنه نیست. به همین دلیل می‌توان از دیاپازون به عنوان وسیله سنجش ارتفاع صوت، که فرکانس آن ثابت می‌ماند و تابع دامنه نیست، استفاده کرد. اگر حرکت آونگ و غیره نوسانی ساده نبودند ساختن ساعتهای مکانیکی و الکترونیکی نیز امکان‌پذیر نبود و آلات موسیقی قابل کوک کردن نبودند.

در این بخش می‌خواهیم بدانیم چگونه ثابتهای A و θ را در یک مسئله خاص می‌توان پیدا کرد و چگونه از این رابطه در به دست آوردن اطلاعات لازم و مفید استفاده می‌کنند. قانون دوم نیوتن را به صورت $F = -kx$ بیان می‌کنیم:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = \frac{k}{m}\, x \qquad (۹\_۱۵)$$

در اینجا قانون دوم نیوتن درباره اینکه x چگونه تابعی از زمان است چیزی نمی‌گوید فقط از این رابطه می‌توان فهمید که اگر مشتق دوم x نسبت به t محاسبه شود، نتیجه آن برابر حاصلضرب خود x در $\frac{k}{m}$ است. توابع سینوس و کسینوس تنها توابع حقیقی هستند که چنین خاصیتی دارند.

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \theta\right)$$

رابطه (۱۵_۹) یک معادله دیفرانسیل است و رابطه $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \theta\right)$ یک پاسخ آن است. بر حسب فرکانس زاویه‌ای داریم: $x = A\cos(\omega t + \theta)$. ثابت θ که زاویه فاز نامیده می‌شود، نقطه‌ای را که حرکت در لحظه $t = ۰$ از آنجا آغاز شده است مشخص می‌کند.

وضعیت نقطه آغاز حرکت (به ازای $t = ۰$) را با $x_۰$ نشان می‌دهند: $x_۰ = A\cos\theta$

با محاسبه مشتق‌های متوالی x نسبت به زمان می‌توان سرعت v و شتاب a را به صورت توابعی از زمان به دست آورد:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\theta) \tag{۱۰ـ۱۵}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^{2}x}{dx^{2}}=-\omega^{2}A\cos(\omega t+\theta) \tag{۱۱ـ۱۵}$$

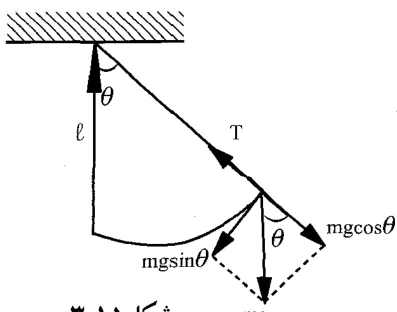
۱۵ـ۳ـ کاربردهای حرکت هماهنگ ساده

در این بخش به بررسی چند دستگاه فیزیکی که حرکت هماهنگ ساده دارند می‌پردازیم.

۱۵ـ۳ـ۱ـ آونگ ساده

آونگ ساده مدل ایده‌آلی است که شامل یک نقطه مادی m می‌باشد که به نخ بدون وزن و کاملاً ناکشسانی آویزان و در میدان گرانشی یکنواختی قرار گرفته باشد. وقتی وزنه را نسبت به مکان تعادل به یک طرف منحرف کرده و سپس رها می‌کنیم، حول مکان تعادلش نوسان می‌کند.

همان‌طور که شکل زیر نشان می‌دهد، مسیر حرکت آونگ به صورت کمانی از یک دایره به شعاع r مساوی با طول ریسمان است. ما مسافت پیموده شده x در طول این کمان را به عنوان مختصه گلوله آونگ در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۵ـ۳

اگر حرکت هماهنگ ساده باشد نیروی بازگرداننده بایستی با θ متناسب باشد. در این شکل نیروهای وارد بر m عبارتند از: mg و T ، مؤلفه شعاعی mg شتاب مرکزگرای لازم برای نگه داشتن ذره بر روی مسیر دایره‌ای را تأمین می‌کنند. مؤلفه مماسی یک نیروی بازگرداننده است که بر m وارد می‌شود و می‌کوشد آن را به وضع تعادل بازگرداند. در این صورت نیروی بازگرداننده برابر است با:

$$F=-mg \sin\theta$$

بنابراین نیروی بازگرداننده با θ متناسب نیست بلکه با $\sin\theta$ متناسب است. یعنی حرکت هماهنگ ساده نیست، اما اگر زاویه θ کوچک باشد $\sin\theta$ تقریباً با θ مساوی می‌شود. با اینّ تقریب رابطه بالا چنین می‌شود:

$$F=-mg\ \theta=-mg\ \frac{x}{l}=-\left(\frac{mg}{l}\right)x$$

بنابراین برای جابجایی‌های کوچک، نیروی بازگرداننده با جابجایی متناسب و در خلاف جهت آن است. و این دقیقاً شرط لازم برای حرکت هماهنگ ساده است. ثابت نیروی k برابر مقدار ثابت $\frac{mg}{l}$ است. فرکانس زاویه‌ای ω آونگ ساده با دامنه کم چنین است:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

و فرکانس و دوره تناوب نظیر این فرکانس زاویه‌ای چنین هستند:

$$f=\frac{\omega}{۲\pi}=\frac{1}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T=\frac{۲\pi}{\omega}=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۱۲\text{-}۱۵)$$

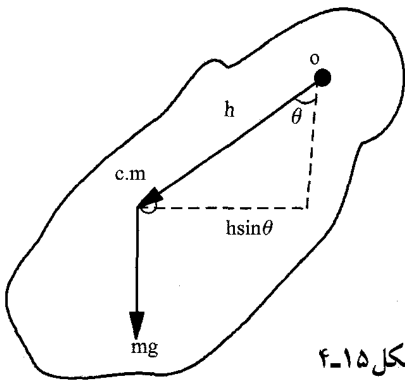
دقت کنید که این روابط شامل جرم وزنه نیستند. گالیله پنج قرن پیش، بحث زیبایی را مطرح کرد تا نشان دهد که دوره تناوب آونگ، مستقل از جرم آن است. او گفت: آونگ ساده‌ای بسازید و آنگاه آونگ، نخ و وزنه، را از وسط به دو نیمه تقسیم کرده و دو آونگ ساده به دست آورید. به دلیل تقارن هیچ‌یک از این دو نیمه قبل از نصف شدن آونگ یکدیگر را نه می‌راندند و نه می‌کشیدند. پس دو نیمه کردن آونگ نمی‌تواند حرکت آن را تغییر دهد و هر نیمه باید با همان دوره تناوب قبل از نصف شدن،

نوسان کند! پس دوره تناوب تابع جرم نیست.

۱۵ـ۳ـ۲ـ آونگ فیزیکی

هر جسم صلبی که بتواند در یک صفحه قائم حول محوری که از آن صفحه می‌گذرد تاب بخورد، آونگ فیزیکی نامیده می‌شود. این تعریف تعمیم تعریف آونگ ساده است که در آن نخ بدون وزنی یک ذره منفرد را نگه می‌دارد. عملاً تمام آونگ‌های واقعی آونگ‌های فیزیکی‌اند.

شکل زیر جسمی با شکل نامنظم را نشان می‌دهد که در نقطه o لولا شده است و می‌تواند بدون اصطکاک حول محور گذرانده از o دوران کند. در مکان تعادل، مرکز گرانش درست در زیر نقطه آویز قرار دارد، در مکانی که شکل نشان می‌دهد، جسم به اندازه زاویه θ نسبت به مکان تعادل منحرف شده و θ مختصه دستگاه است. فاصله نقطه o تا مرکز گرانش مساوی با h، گشتاور ماند جسم حول محور گذرانده از o مساوی با I، و جرم کل جسم مساوی با m است. وقتی جسم جابجا می‌شود، نیروی mg گشتاور بازگرداننده‌ای تولید می‌کند که برابر است با: $N=-(mg)(h\sin\theta)$



شکل ۱۵ـ۴

وقتی جسم را رها می‌کنیم، حول مکان تعادل نوسان می‌کند. حرکت این جسم مانند آونگ ساده، حرکت هماهنگ ساده نیست زیرا گشتاور نیروی t به جای θ با $\sin\theta$ متناوب است. اما، اگر θ کوچک باشد، ما می‌توانیم به جای $\sin\theta$ به‌طور تقریبی مقدار θ

را قرار دهیم، و حرکت تقریباً هماهنگ خواهد بود. با این تقریب داریم:

$$N=-(mgh)\ \theta=-k\ \theta$$

که در آن k=mgh است. از طرفی

$$N=I\ \alpha=I\ \frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}$$

در نتیجه:

$$I\ \frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}=-k\ \theta \Rightarrow \frac{d^{2}\theta}{dt^{2}}+\frac{k}{I}\ \theta=0 \qquad (۱۳\_۱۵)$$

اکنون می‌توانیم روابطی برای بسامد زاویه‌ای و دوره تناوب به دست آوریم. بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{I}}=\sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad (۱۴\_۱۵)$$

و دوره تناوب برابر است با:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad (۱۵\_۱۵)$$

۱۵ـ۴ـ نوسانهای میرا و واداشته

در دستگاههای نوسانی ایده آل که تاکنون مورد بحث قرار دادیم، اصطکاک وجود نداشت. در چنین وضعی نیروی ناپایستار وجود ندارد و انرژی مکانیکی کل، پس از به نوسان درآمدن دستگاه، ثابت می‌ماند و دامنه حرکت همواره یکسان است. اما دستگاههای دنیای واقعی ما حتماً تحت اثر اصطکاک هستند و چنانچه انرژی مکانیکی تلف شده توسط اصطکاک جبران نشود، نوسان میراست و به تدریج ضعیف شده و از بین می‌رود. اگر فنر کوک ساعت، کوک نشود، یا در ساعتهای وزنه‌ای، بالا برده نشود، ساعت می‌خوابد، زیرا انرژی لازم برای جبران اتلاف انرژی در آونگ وجود ندارد. کاهش دامنه نوسان بر اثر نیروهای تلف کننده را میرایی و حرکت مربوط به آن را نوسان میرا می‌نامند. سیستم تعادل یک اتومبیل، مثال آشنایی برای نوسانات میرا است. برای آنکه مسافرین احساس راحتی بکنند، سیستم باید نیروی میرایی کافی وارد کند تا بعد از هر دست‌انداز، اتومبیل فقط یک یا دو بار جهش کند. اگر ضربه گیرها کهنه یا فرسوده

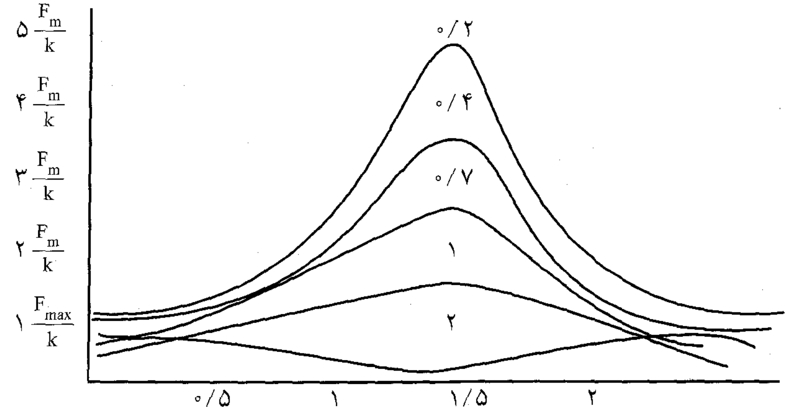
باشند، میرایی کم و جهش زیاد می‌شود. این امر نه تنها باعث تهوع می‌شود، بلکه برای کنترل اتومبیل نیز بد است زیرا تماس چرخ‌های جلو با زمین کم می‌شود. بنابراین در این دستگاه، میرایی مفید است. اما در دستگاهی مانند ساعت یا نوسانگر الکتریکی فرستنده رادیو، معمولاً مایلیم میرایی تا حد ممکن کم شود.

در موارد عملی زیادی ما مایل هستیم دامنه نوسان یک دستگاه نوسانی میرا ثابت بماند. مثال آشنا در این مورد بچه نشسته بر روی تاب است. ما برای جلوگیری از توقف تاب، گاهی آن را هل می‌دهیم تا دامنه نوسان تقریباً ثابت بماند. به‌طور کلی، برای ثابت نگه داشتن دامنه نوسان میرا، یک نیروی نوسانی، یعنی یک نیروی متغیر با زمان، به آن وارد می‌کنیم. ما این نیروی اضافه را به عنوان نیروی واداشته به جرم نوسانگر هماهنگ وارد می‌کنیم، تا جسم یک حرکت تناوبی با بسامدی مساوی با بسامد نیروی واداشته انجام دهد. ما این حرکت را نوسان واداشته می‌نامیم. این، با حرکت نوسانی جسمی که با بسامد طبیعی مربوط به m و k نوسان می‌کند، متفاوت است.

هرگاه بسامد نیروی واداشته با بسامد طبیعی دستگاه مساوی باشد، نسبت به حالتی که بسامدها متفاوتند، انتظار داریم دامنه نوسان نهایی بزرگتر باشد و این امر با تحلیل و تجربه به اثبات رسیده است. فرض کنید نیروی F را که به صورت سینوسی و بر طبق معادله:

$$F=F_{max}\cos\omega_d t \qquad (۱٦_۱۵)$$

با زمان تغییر می‌کند، به دستگاه وارد می‌کنیم. اگر ω_d نیروی واداشته را تغییر دهیم، دامنه نوسان واداشته مانند شکل زیر تغییر می‌کند. اگر میرایی بسیار کم باشد، وقتی بسامد واداشته ω_d با بسامد طبیعی ω مساوی می‌شود، قله منحنی دامنه نیز تیز می‌شود. اگر میرایی زیاد باشد، قله منحنی دامنه پهن و ارتفاع آن کم می‌شود و به طرف بسامدهای کم منتقل می‌شود.



شکل ۱۵ـ۵

این واقعیت را که وقتی بسامد واداشته به بسامد طبیعی دستگاه نزدیک می‌شود قله دامنه ماکزیمم می‌شود، تشدید یا بازآوایی می‌نامند. در فیزیک مثال‌های فراوانی برای تشدید وجود دارد: افزایش دامنه نوسان در تاب‌بازی، لرزش شدید فرمان اتومبیل در یک سرعت خاص، مثال‌هایی از تشدید هستند. شما شاید در مورد خطرناک بودن رژه رفتن سربازان روی یک پل چیزهایی شنیده باشید، اگر بسامد قدم زدن سربازان در حدود بسامد ارتعاش طبیعی پل باشد، دامنه نوسان به‌طور خطرناک افزایش می‌یابد.

۱۵ـ۵ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ نوسانهایی که در آنها جابجایی و نیرو هم‌راستا باشند از قانون هوک پیروی می‌کنند. در نوسانگرهایی که به‌طور تقریبی از قانون هوک پیروی می‌کنند (تور پرش، ترامپولین) می‌توان از جابجایی‌هایی که با نیرو هم‌راستا نیستند، صرف نظر کرد.

۲ـ هرگاه با ثابت بودن نیروی وارد بر فنر طولش را به $\frac{1}{n}$ مقدار اولیه تقسیم کنیم، ضریب ثابت آن n برابر می‌شود. بنابراین دوره تناوب این فنر بر حسب دوره‌های تناوب فنر اولیه عبارت است از:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{nk_1}} \quad , \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}T_1 \qquad (۱۵\text{ـ}۱۷)$$

۳ـ اگر فنر در حالت تعادل در حد کشسانی قرار داشته باشد ثابت نیروی فنر برای جابجایی‌هایی که در جهت کم‌شدن طول فنر است همان k است ولی برای جابجایی‌هایی که در جهت افزایش طول فنر است ثابت فنر k نیست. چون قانون هوک تقریباً تا حد کشسانی برای فنر صادق است و اگر فنر از این حد خارج شود، پس از حذف نیرو، فنر به شکل اولیه باز نخواهد گشت.

۴ـ شخصی روی یک ترازوی فنری ایستاده است. این ترازو از یک سکو که روی فنر بزرگی قرار دارد تشکیل شده است. ترازو در حال نوسان در راستای قائم است. تغییرات مقادیری که ترازو در یک دوره حرکت نشان می‌دهد به شکل زیر است:

$$N=mg+kx=ma$$

هنگام پایین رفتن نیروهای وارد بر شخص عبارتند از:

$$\Rightarrow N=mg-kx\pm ma$$

و هنگام بالا آمدن ترازو مقدار N را می‌خواند. بنابراین ابتدا x در حال افزایش است و بنابراین مقداری که ترازو نشان می‌دهد در حال کاهش است. در حالت بیشترین کشش، کمترین نیرو توسط ترازو خوانده می‌شود. به همین ترتیب هنگام برگشت فنر، N افزایش می‌یابد.

۵ـ خواص آونگ را نمی‌توان مبنای استاندارد جرم، طول زمان قرار داد. چون خواص آونگ از جرم آونگ مستقل است. هم‌چنین اگر بخواهیم دورهٔ تناوب آونگ را به عنوان استاندارد زمان برگزینیم، $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$، چون طول آونگ با دما تغییر می‌کند، T در دماهای مختلف مقادیر مختلفی خواهد داشت.

٦ـ بسامد یک نوسانگر، مستقل از دامنهٔ آن است. بنابراین با تغییر دامنه (مثلاً کاهش دامنه تاب) بسامد تغییر می‌کند.

۷ـ اگر نقطهٔ آویز آونگی با شتاب a، در راستای افق حرکت کند دوره تناوب آن به شکل زیر تغییر خواهد کرد:

$$a_T=\sqrt{a^2+g^2}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}$$

اگر با شتاب a در راستای قائم به طرف بالا حرکت کند:

$$a_T=g+a \quad \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

اگر با شتاب a<g در راستای قائم به طرف پایین حرکت کند:

$$a_T=g-a \quad \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

۸ـ برای آونگی که نخ رابط آن بی‌وزن است، مرکز جرم سیستم در مرکز کره است. وقتی جرم ریسمان را در نظر می‌گیریم، مرکز جرم سیستم کمی بالا می‌رود، بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ آویز تا مرکز جرم کم می‌شود. در نتیجه طبق رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{Mgd}}$، دورهٔ تناوب افزایش می‌یابد.

۹ـ دو آونگ را در نظر بگیرید متشکل از یک میلهٔ سبک و یک قرص که متصل به آن است. در یکی از آنها قرص محکم به میله متصل است و در دیگری قرص می‌تواند حول انتهای میله دوران کند. دوره تناوب آونگی که قرص آن محکم بسته شده است بیشتر است. چون حرکت چرخشی مانع از حرکت نوسانی است.

۱۰ـ در اکثر سیستمهای فیزیکی از وسایل میراکننده استفاده می‌شود. مثلاً بدنهٔ اتومبیل به وسیلهٔ فنر روی چرخها قرار می‌گیرد. اگر کمک‌فنر وجود نداشته باشد، پس از آنکه اتومبیل از روی دست‌انداز عبور می‌کند به شدت بالا و پایین خواهد رفت. کمک‌فنرها نیروی اتلافی وارد می‌کنیم، وگشتاور نیرویی که به عقربه وارد می‌آید باعث چرخیدن عقربه می‌شود. در این وسیله فنری وجود دارد باگشتاور حول وضعیت تعادل عقربه که متناسب باگشتاور نیروست. اگر در ساختمان این سنجه، وسیلهٔ میراگر کار نمی‌گذاشتند، عقربه مدتهای طولانی حول وضعیت تعادل نهایی نوسان می‌کرد. اما سیستم میرا می‌شود و به این ترتیب، عقربه نسبتاً سریع به وضعیت نهایی خود می‌رسد.

۱۱ـ یکی از مثالهای تشدید در سیستم‌های زیست‌شناختی، که همهٔ ما دیده‌ایم ولی معمولاً آن را به عنوان نمایش طبیعی از تشدید مکانیکی در نظر نمی‌گیریم، له‌له

زدن سگ در هوای گرم یا در حین فعالیتهای بدنی است. له‌له زدن به عنوان روشی برای خنک کردن نسبت به عرق کردن چند ایراد مسلم دارد. اولاً تهویهٔ بیش از حد می‌تواند مقدار CO_2 موجود در خون را شدیداً کم کند (این امر منجر به وضعیت غیرعادی به نام آلکالوسیس می‌شود). مشکل آلکالوسیس را کوتاه بودن تنفس در زمان له‌له زدن حل می‌کند. ثانیاً گرمای اضافی حاصل از تلاش ماهیچه‌ای که برای تسریع تنفس لازم است، بیش از مقداری است که بر اثر تبخیر از بدن خارج می‌شود، جز در حالتی که جانور از تشدید طبیعی حفره تنفسی استفاده کند. قفسهٔ سینه و مجرای تنفس فرکانس طبیعی دارد که حجم سیستم، جرم متناظر با ساختمان نگه دارنده و خواص کشسان غشاها و ماهیچه‌های اطراف حفره آن را تعیین می‌کند. اگر این سیستم در حالت تشدید به حرکت واداشته شود، می‌تواند با صرف مقدار کمی انرژی در هر دوره دامنهٔ نسبتاً زیاد به دست آورد.

فرکانس تشدید در یک سگ معمولی ۵ Hz است. وقتی سگ با این فرکانس تنفس می‌کند می‌تواند با مقدار بسیار کمی فعالیت ماهیچه‌ای میزان جریان هوا را به بخش بالایی مجرای تنفس و از آنجا به بیرون به شدت بیفزاید.

کوک کردن و نواختن سازها بر اساس تشدید استوار است. همچنین زمانی که رادیو و تلویزیون را تنظیم می‌کنیم به‌طوری که به قسمت باریکی از طیف الکترومغناطیس حساس باشد که ایستگاه مورد نظر ما در آن طیف برنامه پخش می‌کند از تشدید کمک می‌گیریم. ارتعاش بالهای حشرات با فرکانس تشدید این سیستم تعیین می‌شود. اکثر پرندگان نیز دمای بدن خود را با له‌له زدن در فرکانس تشدید دستگاه تنفسی خود کنترل می‌کنند.

۱۵ـ۶ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ فرض کنید که اتومبیل روی فنرهایی سوار شده است که در راستای قائم نوسان می‌کنند. در اتومبیلی فنرها چنان تنظیم شده‌اند که بسامد نوسان آنها برابر ۳ Hz است.

الف) اگر جرم این اتومبیل $۱۵۰۰\ kg$ باشد، ثابت نیروی فنر چقدر است؟

ب) اگر پنج مسافر که جرم هریک به‌طور متوسط برابر $۷۵\ kg$ است، سوار این اتومبیل شوند، بسامد نوسان چقدر خواهد شد؟

حل.

$$F=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k=۴\pi^۲F^۲M=(۴\pi)^۲(۳Hz)^۲(۱۵۰۰\ kg)\approx ۵/۴\times ۱۰^۵\frac{N}{m}$$

که در آن M جرم ماشین است.

ب) در حالتی که مسافرها سوار اتومبیل شده‌اند، بسامد نوسان عبارت است از:

$$F'=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{M+۵M'}}$$

که در آن M' جرم متوسط هر مسافر است. پس خواهیم داشت:

$$F'=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۵/۴\times ۱۰^۵\frac{N}{m}}{۱۵۰۰kg+۵(۷۵kg)}}=۲/۷Hz$$

۲ـ دو ذره با دامنه و بسامد یکسان در امتداد یک خط راست حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند. این دو ذره هنگام حرکت در جهت‌های مخالف وقتی از کنار هم دور می‌شوند که جابجایی حرکت آنها نصف دامنه آنهاست. اختلاف فاز میان حرکت این دو ذره چقدر است؟

حل.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}&=\cos\frac{\pi}{۳}=\cos(\omega t+\psi_۱)\\ \frac{۱}{۲}&=\sin\frac{\pi}{٦}=\sin(\omega t+\psi_۲)\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}&\frac{\pi}{۳}+۲k\pi=\omega t+\psi_۱\\ &\frac{\pi}{٦}+(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}=\omega t+\psi_۲\end{aligned}$$

از آنجاکه این دو ذره در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، لذا معادله حرکت یک ذره به صورت cos و معادله حرکت ذره دیگر به صورت sin نوشته شده است. روابط بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$\psi_۱-\psi_۲=k\pi-\frac{\pi}{۳}$$

با انتخاب $k=۱$ داریم:

$$\psi_۱-\psi_۲=\frac{۲\pi}{۳}(rad)=۱۲۰^{\circ}$$

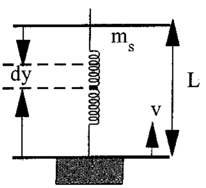
۳ـ اگر m_s جرم فنر قابل چشم‌پوشی نباشد ولی در مقایسه با m جرم جسم آویخته شده به آن کوچک باشد، دوره تناوب حرکت برابر است با:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}} \qquad (18\text{ـ}15)$$

این نتیجه را اثبات کنید.

حل. از آنجایی که جابجایی یک نقطه از فنر با فاصله آن نقطه از انتهای ثابت فنر متناسب است، پس اگر v سرعت انتهای آزاد فنر باشد، سرعت انتهای ثابت آن صفر و سرعت نقطه‌ای از فنر به فاصله $(L-y)$ از انتهای ثابت فنر برابر است با:

$$v_y=v\ \frac{(L-y)}{L}$$



برای انرژی جنبشی عنصری به طول dy از فنر داریم:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{m_s dy}{L}\right]v^2 y=\frac{m_s(L-y)^2 v^2}{2L^3}\ dy$$

پس برای انرژی جنبشی تمام فنر خواهیم داشت:

$$k_2=\frac{m_s v^2}{2L^3}\int_0^L (L-y)^2 dy=\frac{1}{6}\ m_s v^2$$

در نتیجه انرژی جنبشی کل دستگاه (فنر + جسم) برابر است با:

$$k=k_m+k_s$$
$$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{6}m_s v^2=\frac{1}{2}(m+\frac{1}{3}\ m_s)v^2$$

از آنجایی که انرژی در دستگاه تلف نمی‌شود، پس جمع کل انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی دستگاه ثابت است:

$$E=\frac{1}{2}(m+\frac{m_s}{3})v^2+\frac{1}{2}\ kx^2=cost \qquad v=\frac{dx}{dt}\rightarrow (m+\frac{m_s}{3})\ \frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{m_s}{3}}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{m_s}{3}}{k}}$$

۴ـ فرض کنید آونگ فیزیکی یک میله یکنواخت به طول L باشد که به یک انتهای خود آویزان است. دوره تناوب آن را پیدا کنید.

حل. می‌دانیم که گشتاور ماند میله نسبت به محوری که از یک انتها بر آن عمود است $I=(\frac{1}{3})ML^2$ می‌شود. فاصله محور از مرکز گرانش $d=\frac{L}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}}=2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

اگر این میله یک خط کش مدرج ۱ متری و $g=9/8\ \frac{m}{s^2}$ باشد:

$$T=2\pi\sqrt{(\frac{2}{3})(1/0m)/9/8m/s^2}=1/64s$$

دوره تناوب این خط کش $(\frac{1}{2})^{1/2}=0/816$ برابر دورهٔ تناوب آونگ ساده‌ای با همین طول است.

۵ـ فنری با جرم ناچیز و ثابت نیروی $7/0$ N/m را نصف می‌کنیم.

الف) ثابت نیروی هر نیمه فنر چقدر است؟

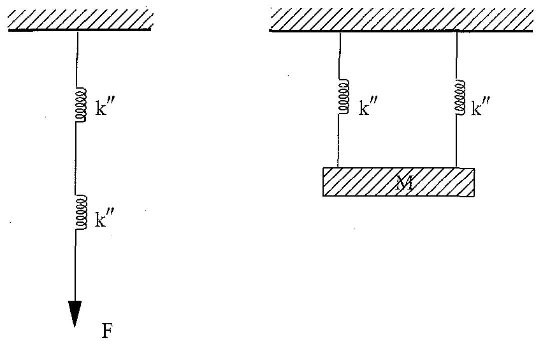
ب) دو نیمه را جدا از هم آویزان می‌کنیم و جسمی به جرم M را مطابق شکل الف به آنها متصل می‌کنیم. اگر دستگاه با بسامد $3/0$ Hz ارتعاش کند مقدار جرم M چقدر است؟

حل. اگر دو نیمه را مطابق شکل الف، به‌طور سری، به هم وصل کنیم و نیروی F را بر مجموعه دو فنر وارد کنیم، افزایش طول ناشی از فنر اول، x_1 افزایش ناشی از طول فنر دوم، x_2 و افزایش طول کل، x است. در این صورت:

$$x=x_1+x_2$$

$$\frac{F}{k}=\frac{F}{k''}+\frac{F}{k''}\Rightarrow k''=2k$$

$$k''=14\ N/m$$



الف   ب

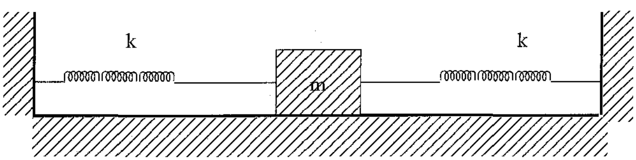
ب) مطابق شکل ب، دو فنر به‌طور موازی به هم بسته شده‌اند. در این حالت:

$$F=F_1+F_2 \Rightarrow k'x=k''x+k''x \Rightarrow k'=2k''$$

به عبارت دیگر ثابت معادل ثابت دو فنر که به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند برابر است با مجموع ثابت دو فنر. بنابراین فرکانس نوسان جرم M که به این دو فنر آویخته شده است برابر است با:

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{M}} \Rightarrow M=\frac{k'}{4\pi^2 v^2}=\frac{28}{4\pi^2\times 3^2}=0/079\ \mathrm{kg}$$

٦ـ جسمی به جرم $0/80$ kg روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و مطابق شکل به دو فنر یکسان متصل است. اگر جرم را در امتداد خطی که سرهای مقید دو فنر را به هم وصل می‌کند، بکشیم و سپس رها کنیم، فرکانس نوسان ۱۲ Hz می‌شود. ثابت فنر این فنرها را بیابید.



حل. اگر جسم m را به اندازه x بکشیم (به طرف چپ جابجا کنیم) و سپس رها سازیم، معادله حرکت آن به صورت زیر است: (در حالت عمومی فرض کنید جنس دو فنر متفاوت است)

$$-k_1x-k_2x=m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow -(k_1+k_2)x=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k_1+k_2}{m}x=0$$

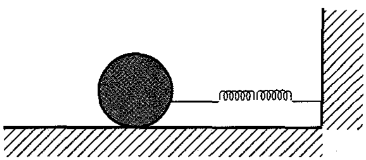
$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \quad , \quad v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

با فرض یکسان بودن فنرها داریم:

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{0/8}}$$

$k=2273$ N/m

۷ـ استوانه توپری را به یک فنر افقی و با جرم ناچیز طوری وصل می‌کنیم که بتواند در روی یک سطح افقی مطابق شکل بدون لغزش بغلتد. k، ثابت نیروی فنر، برابر است با ۰/۳ N/m. اگر دستگاه را در حالی که فنر به اندازهٔ ۰/۲۵ کشیده شده است رها می‌کنیم، مطلوب است:



الف) انرژی جنبشی انتقالی

ب) انرژی جنبشی دورانی استوانه هنگام عبور از وضع تعادل

ج) نشان دهید در این شرایط مرکز جرم استوانه یک حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$ انجام می‌دهد که در آن M جرم استوانه است.

حل. الف) از پایستگی انرژی داریم: $E_1=E_2$

که E_1 انرژی کل در موضع تعادل است.

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I_c=\frac{1}{2}MR^2 \qquad \omega=\frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)$$

$$\Rightarrow E_k=\frac{1}{3}kA^2=\frac{1}{3}kA^2=\frac{1}{3}3\times(0/25)^2=6/25\times10^{-2}j$$

ب)

$$\frac{۱}{۲} I\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} MR^{۲}\right)\frac{v^{۲}}{R^{۲}}=\frac{۱}{۴} Mv^{۲}=\frac{۱}{۲} E_k$$

$$\Rightarrow E_{kr}=۳/۱۲۵ \times ۱۰^{-۲} j$$

ج) انرژی در هر لحظه برابر است با مجموع انرژی جنبشی انتقالی و انرژی جنبشی دورانی و انرژی پتانسیل. از طرفی انرژی ثابت حرکت است (مشتق زمانی آن صفر است). بنابراین داریم:

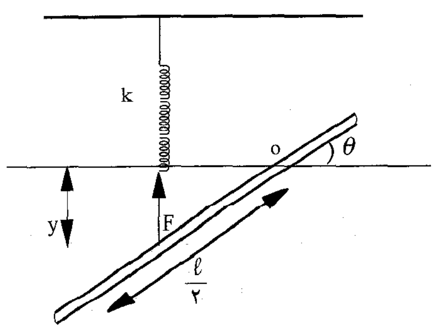
$$E=\frac{۱}{۲} Mv^{۲}+\frac{۱}{۴} Mv^{۲}+\frac{۱}{۲} kx^{۲}=\frac{۳}{۴} Mv^{۲}+\frac{۱}{۲} kx^{۲}$$

$$\frac{dE}{dt}=۰=\frac{۳}{۴} M(۲v)\frac{dv}{dt}+\frac{۱}{۲} k(۲x)\frac{dx}{dt}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} M\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}+kx=۰ \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۲k}{۳M}}$$

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{۳M}{۲k}}$$

۸ـ یک میله یکنواخت بلند به طول ۱ به جرم m می‌تواند در یک صفحهٔ افقی آزادانه حول محور قائمی که از مرکز میله می‌گذرد، دوران کند. فنری با ثابت نیروی k در راستای افق میان انتهای میله و یک دیوار ثابت، مطابق شکل، بسته شده است. اگر انتهای میله را اندکی فشار دهیم و سپس آن را رها کنیم، دورهٔ تناوب نوسانهای کوچک حاصل چقدر است؟



حل.

$\tau=F\ \frac{l}{۲}\cos\theta$

$y=\frac{l}{۲}\sin\theta$

از آنجا که زاویه θ بسیار کوچک است داریم:

$$\cos\theta\approx ۱ \quad , \quad \sin\theta\approx\theta$$

$$\Rightarrow \tau=F\frac{l}{۲} \quad , \quad y=\frac{l}{۲}\theta$$

$$F=-ky \Rightarrow F=-\frac{kl}{۲}\theta$$

$$\tau=I\alpha \quad , \quad I=\frac{۱}{۱۲}ml^{۲} \quad , \quad \alpha=\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}$$

$$\Rightarrow F\frac{l}{۲}=I\alpha \Rightarrow -\frac{kl}{۲}\theta\frac{l}{۲}=\frac{۱}{۱۲}ml^{۲}\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}$$

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}=-\frac{۳k\theta}{m} \Rightarrow \frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+\frac{۳k}{m}\theta=۰$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۳k}{m}} \quad , \quad T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{۳k}}$$

۹ـ در قرصی توپر به شعاع $۰/۳۰\ m$ سوراخی کوچک به یک فاصله از مرکز و لبه‌اش، تعبیه شده است. قرص به کمک میخی که از این سوراخ می‌گذرد، از دیوار آویزان است. دورهٔ تناوب این آونگ فیزیکی برای نوسانات کوچک چقدر است؟

حل. می‌دانیم دورهٔ تناوب آونگ فیزیکی برای نوسان‌های کم دامنه از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ به دست می‌آید که I گشتاور اینرسی حول نقطهٔ آویز است. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی و اینکه گشتاور ماند حول مرکز جرم قرص برابر با $\frac{۱}{۲}mR^{۲}$ است، گشتاور ماند حول نقطهٔ o برابر است با:

$$I_o=I_{cm}+\frac{۱}{۴}R^{۲}m=\frac{۳}{۴}mR^{۲}$$

$$\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۳}{۴}mR^{۲}}{mgh}}=۲\pi\sqrt{\frac{۳\times(۰/۳)^{۲}}{۴\times۹/۸\times۰/۱۵}}=۱/۳۵s$$

۱۵ـ۷ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ شخصی روی یک ترازو ایستاده است. این ترازو از یک سکو که روی فنر بزرگی قرار دارد تشکیل شده است. تمام دستگاه یک حرکت هماهنگ ساده در راستای قائم انجام می‌دهد. تغییرات مقادیری راکه ترازو در یک دوره حرکت نشان می‌دهد، توصیف کنید.

۲ـ آیا خواص آونگ را می‌توان مبنای استانداردهای جرم، طول و زمان قرار داد؟ توضیح دهید.

۳ـ با دلایل کافی تعیین کنید که آیا دوره تناوب آونگی که با دامنه بزرگ در حال نوسان است، از دوره تناوب آن هنگامی که با دامنه کوچک نوسان می‌کند، بیشتر است یا کمتر؟

۴ـ اگر نقطه آویز آونگی با شتاب a الف) در راستای افق حرکت کند، ب) در راستای قائم به طرف بالا حرکت کند، ج) با شتاب $a<g$ در راستای قائم به طرف پایین حرکت کند، دوره تناوب آن چه تغییراتی می‌کند؟ کدامیک از حالتهای بالا در مورد آونگی که بر روی یک ارابه نصب شده است و از سطح شیبداری به پایین می‌غلتد صدق می‌کند؟

۵ـ یک توپ کاملاً کشسان وقتی روی یک سطح سخت می‌افتد و برمی‌گردد، تقریباً حرکتی تناوبی انجام می‌دهد. این حرکت از چه نظر به حرکت هماهنگ ساده شبیه است؟ از چه نظر با آن تفاوت دارد؟

۶ـ اگر جلو یا عقب یک اتومبیل را به پایین فشار دهیم و رهاکنیم، آیا می‌توانیم ثابت نیروی فنرهای اتومبیل را معین کنیم؟

۷ـ در هر حرکت تناوبی، اصطکاک باعث کم شدن دامنه می‌شود، آیا اصطکاک روی دوره تناوب حرکت نیز مؤثر است؟

۸ـ اگر یک ساعت آونگی را به بالای کوه ببریم، آیا زمان کمتری نشان می‌دهد

یا زمان بیشتری را؟

۹ـ بچه‌ای که روی تاب نشسته است، با جمع و باز کردن پاهایش می‌تواند دامنه حرکت را افزایش دهد. این انرژی زیاد از کجا تأمین می‌شود؟ (این انرژی را بچه تأمین نمی‌کند.)

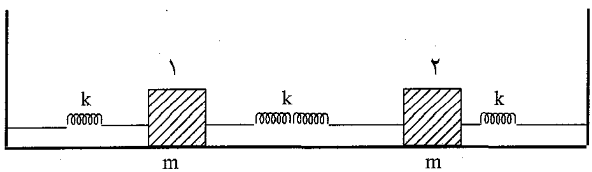
ب) مسائل

۱ـ دو جرم مساوی m و سه فنر یکسان با ثابت نیروی k مطابق شکل به هم بسته شده‌اند.

الف) اگر x_1 و x_2 جابجایی هر جرم نسبت به موضع تعادل باشد، نشان دهید که:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(x_2-2x_1)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(x_1-2x_2) \qquad (۱۹\text{ـ}۱۵)$$



ب) با فرض اینکه یک پاسخ دو معادله بالا به صورت $x_1=A_1\sin\omega t$ و $x_2=A_2\sin\omega t$ است، بسامدهای ارتعاش این دستگاه را پیدا کنید.

۲ـ در حرکت هماهنگ ساده، هنگامی که جابجایی نصف دامنه A است، چه کسری از انرژی کل به صورت جنبشی و چه کسری از آن به صورت پتانسیل است؟ هنگامی که نصف انرژی کل جنبشی و نصف دیگر آن پتانسیل است، جابجایی چقدر است؟

۳ـ جسمی به جرم ۱۰۰ kg را به سیمی به طول اولیه L_0 به اندازهٔ ۲ m آویزان می‌کنند. ۴×۱۰^{۳} به طول آن اضافه می‌شود. سطح مقطع سیم، که ثابت فرض می‌شود، برابر است با $۰/۱\ cm^2$. اگر جسمی را کمی پایین کشیده و رها کنند، فرکانس ارتعاش آن

چقدر است؟

۴ـ جسمی به جرم m_1 به یک فنر افقی با ثابت نیروی k وصل است و با دامنه A نوسان می‌کند. وقتی در حال عبور از وضع تعادل است، قطعه‌ای خمیر به جرم m_2 در امتداد قائم بر روی آن افتاده و به آن می‌چسبد.

الف) دوره تناوب و دامنه جدید نوسان را به دست آورید.

ب) آیا اتلاف انرژی مکانیکی وجود دارد؟

ج) اگر وقتی جسم در یکی از دو انتهای مسیر است، خمیر به روی آن بیفتد پاسخ‌های قسمت (الف) چه خواهد بود؟

۵ـ آونگ سه ثانیه‌ای: می‌خواهند آونگی با دوره تناوب ۳s بسازند.

الف) طول آونگ ساده‌ای با این دوره تناوب چقدر است؟

ب) فرض کنید این آونگ باید در جایی نصب شود که بیشتر از ۰/۵m ارتفاع ندارد. می‌توانید آونگی توصیه کنید که با این وضع وفق دهد و دوره تناوب آن نیز ۳s باشد؟

۶ـ آچار فرانسه‌ای به جرم ۱/۵ kg به یک انتهای خود آویزان است و قادر به نوسان می‌باشد. دوره تناوب آن ۰/۸۲ s و فاصله محور نوسان تا مرکز گرانش ۰/۲m است.

الف) گشتاور ماند آن نسبت به محور چقدر است؟

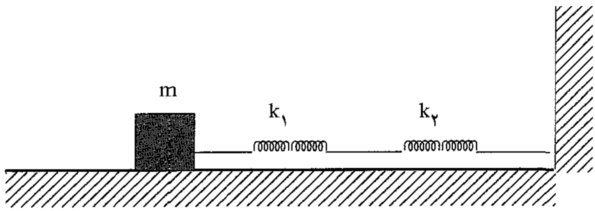
ب) اگر آچار را ابتدا ۰/۶rad از وضع تعادل منحرف کنند سرعت زاویه‌ای آن هنگام عبور از وضع تعادل چقدر می‌شود؟

۷ـ جسمی به جرم ۵kg روی کف اتاق قرار دارد و جسم دیگری به جرم ۰/۵kg بر روی این جسم واقع است. جسم بزرگتر را به یک فنر افقی با ثابت نیروی ۱۵ $N.m^{-1}$ وصل و آن را جابجا می‌کنیم تا حرکت هماهنگ ساده انجام دهد. بیشترین دامنه جسم ۵ کیلوگرمی چقدر می‌تواند باشد تا جسم کوچک نسبت به جسم بزرگ ساکن بماند؟ ضریب اصطکاک ایستایی میان دو جسم ۰/۳ است. بین جسم بزرگتر و

کف اتاق اصطکاک وجود ندارد.

۸ـ دو فنر را مطابق شکل به هم وصل کرده و سپس به جرم m وصل می‌کنیم. سطوح را بدون اصطکاک فرض کنید. اگر ثابت نیروی فنرها، k_1 و k_2 باشد، نشان دهید که بسامد نوسان جرم m از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} \qquad (۱۵\text{ـ}۲۰)$$



۹ـ یک آونگ ساده به طول ۱ و جرم m در اتومبیلی که با سرعت ثابت v روی یک مسیر دایره‌ای شعاع R حرکت می‌کند، آویخته شده است، اگر این آونگ در امتداد شعاع مسیر حلو وضع تعادل نوسانهای کوچک انجام دهد، بسامد نوسان چقدر خواهد بود؟

۱۰ـ آونگ ساعتی از یک میله به طول ۸۰/۰ cm و جرم ۱/۲۰ kg تشکیل یافته است. نزدیک به سر زیرین میله قرصی برنجی و توپر به جرم ۱/۰۰ kg و قطر ۱۵/۰ cm قرار دارد. مرکز قرص دقیقاً کجا باشد تا دورهٔ تناوب ۰/۷۰ s شود؟

۱۱ـ از قرصی توپر به عنوان آونگ فیزیکی استفاده می‌شود. قطر قرص ۸۰/۰ cm است. فاصلهٔ نقطهٔ آویز از مرکز قرص چقدر باشد تا دورهٔ تناوب آن ۴/۰ s شود.

۱۲ـ آونگی را از حالت سکون رها می‌کنیم. طول آونگ ۰/۸۰ m است. در حالتی که ریسمان نگاهدارندهٔ آن زاویهٔ °۵/۰ با امتداد قائم می‌سازد. عبارتی برای سرعت زاویه‌ای آونگ به صورت تابعی از زمان بنویسید.

فصل ۱۶

گرانش

آدم باید نیوتن باشد تا ماه را در حالی ببیند که انگار دارد سقوط می‌کند، در همان حالی که در نظر هیچ کس دیگری، ماه در حال سقوط نیست. «پل والری»

۱۶ـ۱ـ مقدمه

در این فصل به بحث و بررسی پیرامون قانون گرانش می‌پردازیم. گفته می‌شود این قانون «بزرگترین تعمیمی است که به ذهن بشر رسیده است.» تاریخچه این قانون به عهد باستان برمی‌گردد و قرنها طول کشید تا از روی حرکت سیاره‌ها در آسمان دریافتند که همه آنها و از جمله زمین به دور خورشید می‌گردند. این روند در طی سالها تکامل یافت تا اینکه کپلر موفق شد با تحلیل اطلاعات بفهمد که حرکت سیاره‌ها به دور خورشید از چه نوعی است. وی در این راه، از روش آزمون و خطا استفاده کرد و سرانجام چکیده مشاهدات و مطالعات خود را در قالب سه قانون بیان کرد:

مدارها به شکل بیضی است؛ و در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی جارو

می‌شوند؛ و مدت یک دور چرخیدن متناسب است با اندازه مدار به توان $\frac{۳}{۲}$ یعنی با جذر مکعب اندازه مدار. این سه قانون کپلر، حرکت سیارات به دور خورشید را به طور کامل توصیف می‌کنند. بعد از آن گالیله ضمن مطالعه این قوانین و انجام تعدادی آزمایش، موفق شد اصل مهمی به اسم اصل ماند را کشف کند که می‌گوید: «اگر بر جسمی هیچ چیزی اثر نکند با سرعتی یکنواخت بر خطی مستقیم حرکت می‌کند، و تا ابد با همان سرعت و درست روی همان مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه دهد.» پس از گالیله نوبت به نیوتن رسید تا از این پس ابتکار عمل را به دست گرفته و نظریه گرانش خود را چنان به ثبوت برساند که تا قرن نوزدهم به طور مطلق بر اذهان حکومت کند. اما مفهوم کشش گرانشی زمین بر اجسام را نیوتن کشف نکرده بود. آنچه عمیقاً نو و تازه بود، این نگرش تابناک نیوتن بود که: «چون این نیروی گرانشی تا دورترین فاصله از سطح زمین که می‌توانیم بالا برویم، در بالای بلندترین ساختمانها، یا حتی بر قله بلندترین کوهها، کاهش قابل ملاحظه‌ای نمی‌یابد، این نتیجه گیری معقول به نظر می‌رسد که حوزه تأثیر آن باید فراتر از آن باشد که معمولاً به تصور آدمی درمی‌آید: چرا مثلاً حوزه تأثیر آن تا ماه نباشد؟ اگر چنین باشد، باید بر حرکت ماه تأثیر بگذارد، شاید ماه توسط این نیرو بر مدار خود باقی می‌ماند». نخستین نوشته‌هایی که از نیوتن منتشر شد در زمینه نور شناخت (اپتیک) بود که مفهوم جدید پاشندگی را مطرح می‌کرد و هم عصرانش وی را از این بابت سخت نکوهش کردند: «از بحثهایی که انتشار نظریه نوری من برانگیخت، چندان آزرده شدم که وقتی آرامش و خونسردی‌ام همچون سایه‌ای گریزان از دست رفت، نابخردی خود را در ترک موهبتی چنان بزرگ سرزنش کردم.»

در نتیجه، مهمترین کارهای او، به مدت دو دهه، همچنان در پس ذهنش باقی ماند. آنگاه، در سال ۱۶۸۴، بین کریستوفر رن، رابرت هوک، و ادموند هالی، در مورد فرض قانون عکس مجذور جاذبه خورشید نسبت به حرکت سیارات بحثی درگرفت. هالی برای حل این مشکل به کمبریج رفت و مسئله را برای نیوتن مطرح کرد. جان کاندویت ماجرا را به این شرح نقل کرده است: «پس از آنکه مدتی در کنار هم بودند، از

وی پرسید که با فرض آنکه نیروی جاذبه سیارات به سوی خورشید عکس مجذور فاصله آنها از خورشید باشد، نظر او در مورد شکل منحنی پیموده شده توسط سیارات چیست. سر آیزاک بی‌درنگ پاسخ داد که این مسیر بیضی است.»

هالی در کمال تعجب پرسید که او این موضوع را از کجا می‌داند. او گفت: «محاسبه کرده‌ام.» هالی خواهش کرد که محاسبات او را ببیند. سر آیزاک میان کاغذهای خود به دنبال محاسبات گشت، اما آنها را نیافت، ولی قول داد که دوباره محاسبات را بنویسد و برای او بفرستد.»

این کار سه سال دیگر طول کشید، اما آنچه هالی سرانجام از نیوتن دریافت کرد، اثر ماندگار اصول (پرینسیپیا) بود، که قانون جاذبه گرانشی تنها یکی از چندین کشف و مفهوم مهمی بود که نیوتن در آن گنجانده بود. نظریه گرانش نیوتن پیروزی‌های بزرگی داشت، اما یک شکست نیز داشت: عدم توجیه و تطابق تغییرات مدار حرکت سیاره تیر (عطارد) به دور خورشید. سیاره تیر، در هر قرن ۴۳ ثانیه کمانی از موقعیت پیش‌بینی شده خود، جلو می‌افتد. این انحراف کوچک با نظریه نیوتن توجیه‌پذیر نبود. سرانجام نظریه‌گرانش اینشتین، یا نسبیت عمومی آن را توضیح داد. نظریه‌ای که از یک بازنگری ریشه‌ای در برداشتهای اساسی ما از فضا و زمان پا گرفته است.

سوای انحرافی که در حرکت تیر به سختی قابل توجیه بود، نظریه گرانش نیوتن به طرز قابل ملاحظه‌ای از آزمون زمان سرافراز بیرون آمد و به عنوان یکی از دقیق‌ترین و موفق‌ترین نظریه‌ها در تمامی فیزیک، یا بهتر بگوییم، در تمامی علم، باقی ماند.

۱۶ـ۲ـ قانون جهانی گرانش نیوتن

نیوتن در ضمن مطالعه حرکت سیاره‌ها به دور خورشید، قانون گرانش را کشف و در سال ۱۶۸۶ آن را منتشر کرد. قانون گرانش را به صورت زیر می‌توان بیان کرد: «هر ذره مادی در جهان، ذرات دیگر را با نیرویی جذب می‌کند که با حاصلضرب جرمها نسبت مستقیم و با مربع فاصله میان آنها نسبت معکوس دارد.» این قانون را می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$F_g=G\ \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{۱-۱۶}$$

که در آن، G یک ثابت بنیادی فیزیکی به نام ثابت گرانشی است. مقدار عددی G به دستگاه یکاهای به کار رفته بستگی دارد. نیروهای جاذبه گرانش همیشه در راستای خط واصل دو ذره اثر می‌کنند، و یک زوج نیروی کنش ـ واکنش‌اند. حتی موقعی که جرمها متفاوتند، بزرگی نیروهای برهم‌کنش میان آنها مساوی است. توجه کنید که فقط کافی است جسم بزرگ متقارن کروی باشد، نه همگن، یعنی تا وقتی که این نیرو به مختصات زاویه‌ای بستگی نداشته باشد، می‌تواند به فاصله از مرکز وابسته باشد. این موضوع اهمیت عملی زیادی دارد؛ چون چگالی زمین و سایر سیارات، و نیز خورشید، یکنواخت نیست و به طرف مرکزشان شدیداً افزایش می‌یابد. اگر ما زمین را کره همگنی به جرم m_E در نظر بگیریم، نیرویی که زمین به هر جسم کوچک m در فاصله r از مرکز آن وارد می‌کند، برابر است با:

$$F_g=G\ \frac{mM_E}{r^2} \tag{۲-۱۶}$$

در اینجا شرط بر این است که جسم m در خارج زمین قرار دارد، یعنی r از شعاع زمین بزرگتر است. همین نیرو از طرف جسم به زمین وارد می‌شود. در نقاط داخل زمین، وضعیت کاملاً متفاوت است. اگر ما بتوانیم سوراخی تا مرکز زمین ایجاد کنیم و نیروی گرانش وارد بر یک جسم را در عمقهای مختلف اندازه بگیریم، متوجه خواهیم شد که هر چه به مرکز زمین نزدیکتر می‌شویم، نیروی گرانش، به جای افزایش با نسبت $\frac{1}{r^2}$ کاهش می‌یابد. وقتی جسمی به داخل زمین (یا هر جسم کروی دیگر) وارد می‌شود، قسمتی از جرم زمین در یک طرف جسم و قسمتی از آن در طرف دیگر جسم قرار می‌گیرد، که جسم را در دو جهت مخالف جذب می‌کنند، دقیقاً در مرکز زمین، نیروی گرانشی وارد بر جسم صفر است.

برای تعیین مقدار ثابت گرانشی G، ما باید نیروی گرانشی میان دو جسم با جرمهای معلوم m_1 و m_2 به فاصله معین از یکدیگر را اندازه بگیریم.

برای اجسام بزرگ، این نیرو بسیار کم است ولی آن را می‌توان با وسیله‌ای به نام ترازوی پیچشی اندازه گرفت؛ این نوع ترازو در سال ۱۷۹۸ توسط سرهنری کاوندیش برای تعیین G به کار رفته است. مقدار G (بر حسب یکای SI) برابر است با:

$$G = ۶/۶۷۳ \times 10^{-۱۱} \quad N.m^{۲}kg^{-۲}$$

نیروهای گرانشی به صورت برداری با هم ترکیب می‌شوند. اگر هر یک از دو جرم نیرویی به جرم سوم وارد کند، نیروی کل وارد بر جرم سوم با مجموع برداری نیروهای دو جرم اول و دوم مساوی است.

۱۶-۳- تغییرات شتاب گرانش

تاکنون شتاب گرانش g را ثابت فرض می‌کردیم، اما طبق قانون گرانش نیوتن g با ارتفاع، یعنی با فاصله از مرکز زمین، تغییر می‌کند. اکنون تغییرات g را هنگام دور شدن از سطح زمین محاسبه می‌کنیم. اگر از رابطه $F=G\dfrac{m_۱ m_۲}{r^۲}$ نسبت به r دیفرانسیل بگیریم، داریم:

$$dF = -۲G\frac{m_۱ m_۲}{r^۳}dr$$

از تقسیم دو معادله بالا بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{dF}{F} = -۲\frac{dr}{r} \qquad (۳\text{-}۱۶)$$

بنابراین تغییر نسبی F دو برابر تغییر نسبی r است. علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. اگر $m_۱$ را جرم زمین و $m_۲$ را جرم جسم بگیریم، نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به جسم برابر است با:

$$F = m_۲ g$$

که جهت آن به طرف زمین است. اگر از این معادله دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$dF = m_۲\, dg$$

و از تقسیم آن بر معادله قبلی نتیجه می‌شود:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dg}{g} = -۲\frac{dr}{r}$$

مثالی در رابطه با این موضوع می‌آوریم: سالهای ۱۸۶۵ تا ۱۸۷۰ شاهد طبع کتاب «از زمین تا ماه» ژول‌ورن بود. وی در این کتاب داستانی خیالی از پرتاب گلوله بزرگی، با عده‌ای مسافر در آن، بیان کرده است. داستان ظاهراً عملی به نظر می‌رسد و اکثر کسانی که کتاب او را خوانده‌اند، احتمالاً تصور کرده‌اند که این کار واقعاً شدنی است. بخش جالب کتاب درباره عبور گلوله از مرزی است که در آنجا جاذبه ماه و زمین با هم برابر است. در این مرز اتفاقات عجیبی رخ می‌دهد. تمامی اجسام درون گلوله بی‌وزن می‌شوند: خود مسافرین هم در هوای داخل گلوله به پرواز درمی‌آیند. هیچ ایرادی به تمام این گفته‌ها نیست. فقط چیزی را که ژول‌ورن ندیده آن است که این وضع تنها در موقعی که نویسنده گفته است به وجود نمی‌آید. قبل و بعد از آن موقع، یعنی در واقع از لحظه‌ای که پرواز آزاد شروع می‌شود، این حالت موجود است. برای توضیح از خود ژول‌ورن کمک می‌گیریم. لابد فراموش نکرده‌اید که فضانوردان سگ مرده‌ای را بیرون انداختند و وقتی دیدند که سگ به جای آنکه به زمین سقوط کند، دنبال گلوله حرکت می‌کند، بسیار متعجب شدند. ژول‌ورن این نکته را درست تشریح می‌کند، سرعت سقوط همه اجسام در خلاء یکی است، زیرا نیروی جاذبه زمین به همه آنها شتاب یکسان می‌دهد؛ لذا به علت جاذبه باید سرعت گلوله با سرعت سگ مرده برابر باشد. بهتر است بگوییم، به علت جاذبه سرعت اولیه هر دوی آنها به یک اندازه کم شده است. در نتیجه هر دو با یک سرعت و همواره با هم حرکت می‌کنند: به این علت است که سگ مرده پس از پرتاب به خارج در پی گلوله به راه می‌افتد.

نکته‌ای را که ژول‌ورن به آن توجه نکرده این است: اگر مرده پس از بیرون انداختن به زمین سقوط نمی‌کند پس چرا وقتی داخل گلوله است باید سقوط نماید؟ در هر دو حال که نیروهای عمل کننده یکی است! سگ مرده را اگر در وسط محوطه داخل گلوله به‌طور معلق قرار دهند به همان حال باقی خواهد ماند چون سرعت آن درست برابر سرعت گلوله است و لذا نسبت به گلوله ساکن است.

آنچه را درباره سگ گفتیم برای تمام مسافرین و اشیاء موجود در داخل گلوله نیز

صادق است؛ چون همه آنها با همان سرعت گلوله در حرکت هستند. حتی اگر تکیه گاهی برای ایستادن، نشستن یا خوابیدن نداشته باشند، باز هم سقوط نخواهند کرد. انسان می‌تواند یک صندلی را بردارد، آن را وارونه کند و روی سقف بگذارد؛ صندلی نخواهد افتاد زیرا همراه با سقف در حرکت است. انسان می‌تواند وارونه روی این صندلی بنشیند و نیفتد، آخر چه چیز می‌تواند او را بیندازد؟ اگر او بیفتد، یا در فضای داخل محفظه غوطه‌ور شود بدان معنی است که سرعت گلوله بیشتر از سرعت انسان و صندلی است، چرا که در این صورت صندلی یا انسان می‌افتد. این امر غیرممکن است، زیرا به‌طوری که می‌دانیم شتاب کلیه اجسام داخل گلوله برابر شتاب خود گلوله است. این همان چیزی بود که ژول‌ورن نتوانسته بود به حساب آورد. او فکر می‌کرد که اگر اشیاء داخل گلوله وارد فضا شوند، باز هم به کف گلوله فشار وارد می‌کنند. او فراموش کرد که یک جسم تنها به این علت روی تکیه گاه خود فشار وارد می‌کند که خود تکیه گاه ساکن است. اما اگر هم جسم و هم تکیه گاه با یک سرعت به فضا پرت شوند نمی‌توانند بر هم فشار وارد کنند. بدین ترتیب همین انرژی جنبشی خود گلوله است که سبب ادامه پرواز می‌شود. مسافرین کاملاً بی‌وزن می‌شوند و می‌توانند همانند کلیه اجسام دیگر، در داخل گلوله غوطه‌ور شوند. تنها نکته‌ای که می‌تواند بلافاصله به مسافرین نشان دهد که آیا به فضا پرت شده‌اند یا هنوز داخل توپ هستند همین است. و اما ژول‌ورن می‌گوید که در نیم ساعت اول پس از پرتاب گلوله، مسافرین هر قدر تلاش کردند نتوانستند بفهمند که آیا در حرکتند یا ساکن هستند.

گلوله ژول‌ورن قاعدتاً جای بسیار عجیبی باید باشد: جهان کوچکی که در آن اشیاء وزن ندارند و هر جا باشند، حتی در وسط هوا، همانجا باقی می‌مانند؛ در این گلوله اشیاء به هر وضعی که قرار گیرند در حال تعادل‌اند، حتی آب از شیشه‌ای که به پهلو افتاده است نمی‌ریزد.

موضوعی را که در آن این همه مطالب فراوان و لذت‌بخش برای خیال‌پردازی

وجود داشت، ژول‌ورن ارزان از دست داد![1]

۱۶ـ۴ـ حرکت ماهواره‌ای

حرکت ماهواره‌ای به دور زمین یکی از واقعیتهای آشنا در زندگی عصر حاضر است. می‌دانیم که این حرکتها تنها در مقیاس، ولی نه در اصول، با حرکت ماه به دور زمین یا حرکت اقمار مشتری به دور آن تفاوت دارند. اما هنوز با پرسشهایی از قبیل «چه عاملی این اشیاء را در آن بالا نگاه می‌دارد؟ روبه‌رو هستیم. پس ببینیم، چگونه می‌توان در بررسی حرکت ماهواره‌ها، از قوانین نیوتن درباره حرکت و قانون گرانش استفاده کرد.

یک مدار دایره‌ای ساده‌ترین حالت برای تحلیل است. بسیاری از ماهواره‌های ساخت بشر در مدارهای تقریباً دایره‌ای حرکت می‌کنند و مدار سیاره‌ها به دور خورشید نیز تقریباً دایره‌ای است. می‌دانیم که اگر ذره‌ای با سرعت v در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهد، دارای شتاب $\frac{v^2}{r}$ خواهد بود و جهت این شتاب به طرف مرکز دایره است. برای یک ماهواره، نیرویی که این شتاب را تولید می‌کند جاذبه گرانشی زمین با جرم m_E است که به ماهواره با جرم m وارد می‌شود. اگر شعاع مدار دایره‌ای که از مرکز زمین اندازه گیری می‌شود r باشد، نیروی گرانشی از معادله $F_g = G\frac{m_E m}{r^2}$ به دست می‌آید. با استفاده از قانون دوم نیوتن، این نیرو را با حاصلضرب جرم ماهواره (m) و شتاب $\frac{v^2}{r}$ آن مساوی قرار می‌دهیم:

$$G\,\frac{m m_E}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

سرعت ماهواره از معادله بالا به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{G m_E}{r}} \qquad (۱۶ـ۴)$$

این رابطه نشان می‌دهد که ما نمی‌توانیم شعاع مدار r و سرعت را مستقل از یکدیگر انتخاب کنیم؛ همچنین معلوم می‌شود که حرکت ماهواره به جرم m ماهواره بستگی

---

۱. سرگرمیهای فیزیک، ج ۱، پرلمان.

ندارد زیرا m در معادله بالا ظاهر نمی‌شود.

ما می‌توانیم رابطه‌ای برای شعاع مدار r و دوره تناوب T، یعنی مدت زمان یک دوران ماهواره، به دست آوریم. سرعت v با مسافت $2\pi r$ پیموده شده در یک دوره تقسیم بر دوره تناوب T، مساوی است، پس:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

با استفاده از این دو معادله می‌توان مقدار T را پیدا کرد:

$$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}}=\frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}} \tag{۵ـ۱۶}$$

معادلات بالا نشان می‌دهند که سرعت در مدارهای بزرگتر، کمتر و دوره تناوب بیشتر است. متناسب بودن T^2 با r^3 توسط یوهان کپلر کشف شده است. این نتیجه‌گیری در مورد ماهواره‌های ساخت بشر به دست آمد، ولی این تحلیل در مورد هر جسمی که تحت جاذبه‌گرانشی حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد، معتبر است. ایزاک نیوتن با قوانین حرکت و گرانش نشان داد که این رفتار سیاره‌ها را می‌توان بر اساس اصول فیزیکی که او برای تحلیل حرکت زمینی به‌کار برد، مطالعه‌کرد. بعد از گذشت ۳۰۰ سال به این نتیجه رسیده‌ایم که تلفیق نیوتنی یکی از بهترین دستاوردهای تاریخ علم است، و از نظر ارزش و معنا با مکانیک کوانتومی، نظریه نسبیت، و کشف DNA در قرن ما، قابل مقایسه است. این جهش بسیار شگفت در مقوله ادراک، حتماً توسط یک متفکر بزرگ صورت گرفته است.

۱۶ـ۵ـ میدان گرانشی

می‌توان قانون گرانش نیوتن را با استفاده از مفهوم میدان گرانشی به صورت مفید بازگو کرد. به جای استفاده مستقیم از رابطه $F=G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$ و محاسبه نیروهای برهم‌کنش بین دو جسم، با فرآیندی دو مرحله‌ای محاسبه را انجام می‌دهیم. یک جرم در فضای

اطراف خود، میدان گرانشی ایجاد می‌کند، اما میدان گرانشی چیست و چگونه می‌توان به وجود آن پی برد؟ از جرم آزمون m به عنوان آشکارساز میدان گرانشی استفاده می‌کنیم. جرم آزمون را به دفعات در نقاط مختلفی قرار داده هر بار نیروی وارد بر آن را اندازه می‌گیریم. آنگاه میدان گرانشی g در هر نقطه را برابر خارج قسمت F_g نیروی وارد بر جرم آزمون بر اندازه این جرم تعریف می‌کنیم یعنی:

$$g=\frac{F_g}{m}$$

به بیان دیگر در نقطه‌ای که شتاب گرانشی g است، نیروی گرانشی F_g وارد بر جرم m برابر است با:

$$F_g=mg$$

نیرو کمیتی برداری است، پس میدان گرانشی نیز بردار خواهد بود.

بزرگی میدان گرانشی g که در فاصله r از جرم نقطه‌ای M ناشی می‌شود، برابر است با:

$$g=\frac{GM}{r^۲} \qquad (۱۶\_۶)$$

جهت این میدان به طرف جرم نقطه‌ای است. هرگاه جرمهای مختلف در کنار هم قرار گیرند، میدان گرانشی کل در آن نقطه با مجموع برداری میدانهای گرانشی جرمهای مجزا، برابر است. اگر ما میدان در یک نقطه را بدانیم، به آسانی می‌توانیم نیروی گرانشی وارد بر هر جسم واقع در آن نقطه را حساب کنیم. به‌طور کلی، میدان گرانشی از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند. بنابراین میدان گرانشی یک کمیت برداری تنها نیست بلکه مجموعه‌ای از بردارها است که هر بردار مربوط به یک نقطه از فضا است. ما برای میدان گرانشی و شتاب سقوط آزاد از یک نماد (g) استفاده کردیم. این امر تصادفی نیست. در واقع، در یک چارچوب مرجع لخت، شتاب سقوط آزاد در هر نقطه با میدان گرانشی در آن نقطه مساوی است. اگر نیروی $F_g=mg$ تنها نیروی مؤثر بر جسم m باشد، قانون دوم نیوتن به صورت $F=ma$ نوشته می‌شود و شتاب برابر است با $a=g$. مخصوصاً اگر g میدان گرانشی زمین باشد، نیروی گرانشی F_g با وزن w جسم مساوی است و رابطه آشنای $w=mg$ به دست می‌آید.

۶ـ۱۶ـ بزرگی نیروی سیاره‌ای

نیوتن به همین اکتفا نکرد که ادعا کند یک جاذبهٔ دو سویهٔ گرانشی میان دو جسم وجود دارد. برای آنکه دعوی او موجه باشد می‌بایست مشخص می‌کرد که کدام عامل کمی اندازهٔ آن نیروهای دو سویه را تعیین می‌کنند و همچنین چگونه می‌توان این نیروها را به روش مستقیم یا غیرمستقیم، اندازه گرفت.

نخستین مسئله، تعریف دقیق فاصلهٔ R بود و به اعتقاد تاریخ‌نویسان دست نیافتن نیوتن به پاسخ درست این مسئله سبب می‌شد که او برای مدت چندین سال مطالعات خود را رها کند.

سرانجام، نیوتن به حل مسئله دست یافت. نیروی گرانشی که به وسیلهٔ یک جسم کروی اعمال می‌شود، چنان است که گویی همهٔ جرم در مرکز آن متمرکز شده است. «پس می‌توانیم در فکر خود اجسام را با «نقاط جرمی» جایگزین کنیم.» بر طبق قانون سوم نیوتن، هرگاه این قانون به‌طور جهانی درست باشد مقدار نیرویی که خورشید بر یک سیاره وارد می‌کند باید دقیقاً با مقدار نیرویی که سیاره به خورشید وارد می‌کند برابر باشد. برای چنان جرم بسیار بزرگ و چنان جرم بسیار کوچک، این ممکن است با حس مشترک یا درک عمومی ناسازگار باشد. اما برابری این دو نیرو را به آسانی می‌توان ثابت کرد.

برای مثال: فوراً درمی‌یابیم که مقدار یک کیلوگرم مادهٔ مشتری، همان کششی را بر مقدار یک کیلوگرم مادهٔ خورشید وارد می‌کند که به وسیلهٔ آن کشیده می‌شود. اکنون کل جاذبهٔ میان مشتری و خورشید را در نظر می‌گیریم که جرم آن حدود ۱۰۰۰ برابر جرم مشتری است. خورشید را کره‌ای محتوی ۱۰۰۰ مشتری در نظر بگیریم. پس یک واحد نیرو را چنان تعریف می‌کنیم که دو جرم به اندازهٔ مشتری به فاصله‌ای معادل R برهم وارد می‌سازند. در این صورت، مشتری، خورشید را با نیروی ۱۰۰۰ واحد جذب می‌کند. هر یک از ۱۰۰۰ قطعهٔ خورشید نیز سیارهٔ مشتری را با نیروی یک واحد به سوی خود جذب می‌کند، بنابراین کل کشش خورشید بر مشتری نیز ۱۰۰۰ واحد است.

هر قطعه خورشید سنگین نه تنها سیاره را جذب می‌کند، بلکه به وسیلهٔ آن نیز جذب می‌شود. هر چه مقدار جرمی که جذب می‌کند بیشتر باشد، جرمی هم که جذب می‌شود بیشتر است.

اما هر چند نیروهای دو سویهٔ جاذبه در بزرگی برابرند، شتابهای حاصل برابر نیستند. مشتری خورشید را با همان شدتی جذب می‌کند که خورشید مشتری را جذب می‌کند. اما خورشید تنها با شتابی معادل $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ شتاب مشتری به این نیرو پاسخ می‌دهد، زیرا اینرسی آن ۱۰۰۰ بار بیش از اینرسی مشتری است.

اماگالیله مدعی بود که اجسام با جرمهای مختلف در نزدیک سطح زمین با شتاب یکسان سقوط می‌کنند. وی اثبات کرد که هر چه اینرسی جسم بیشتر باشد، با شدت بیشتری تحت تأثیر گرانش قرار می‌گیرد. به عبارت دقیقتر: در نزدیک سطح زمین، نیروی گرانش وارد بر یک جسم با جرم آن نسبت مستقیم دارد و اما نیوتن این اثر زمینی را به گرانش عمومی بسط داد. پس این نتیجه به دست می‌آید که اندازهٔ نیروی گرانشی با جرم خورشید و با جرم سیاره متناسب است.

$$F_g \propto m_{\text{خورشید}} \times m_{\text{سیاره}}$$

پیش از این نیز نتیجه گرفته بودیم که جاذبه به مربع فاصلهٔ میان مراکز دو جسم بستگی دارد. از ترکیب این دو تناسب:

$$F_g \propto \frac{m_{\text{سیاره}} \times m_{\text{خورشید}}}{R^2} \qquad (۷\_۱۶)$$

این تناسب را می‌توان با وارد کردن یک ضریب ثابت به صورت یک معادله درآورد. این ثابت امکان استفاده از واحدهای اندازه‌گیری را به ما می‌دهد.

$$\frac{L^3}{MT^2} = [G] \qquad (۸\_۱۶)$$

این معادله نشان می‌دهد که نیروی میان خورشید و هر سیاره فقط به سه عامل بستگی دارد. این عوامل عبارتند از: جرم خورشید، جرم سیاره و فاصلهٔ میان خورشید و سیاره.

در مقایسه با پیچیدگی ظاهری حرکتهای رصد شدهٔ سیاره‌ها سادگی این معادله باور کردنی نیست. اما هریک از قوانین تجربی کپلر در این مورد با رابطهٔ فوق توافق

دارد. در حقیقت می‌توان حتی قوانین تجربی کپلر را از این قانون نیرو و قانون دوم حرکت نیوتن نتیجه گرفت و باز هم مهمتر اینکه، این نیرو به ما امکان می‌دهد که جزییاتی از حرکت سیاره‌ای را محاسبه کنیم که تنها با قوانین کپلر به دست آوردن آن امکان‌پذیر نیست. اما نیوتن دلیلی نمی‌دید که این نیروی دو سویه را به خورشید و سیاره‌ها یا به زمین و سیبها منحصر کند. بلکه او اصرار داشت رابطهٔ مشابهی باید به‌طور «عام» در کار باشد. این رابطه در مورد هر دو جسمی که به فاصله‌ای بزرگ در مقایسه با ابعادشان از یکدیگر قرار دارند می‌بایست صادق باشد.

مطالعات بسیار نشان داده است که راهی برای اصلاح جزییات مکانیک نیوتنی به منظور توضیح عده‌ای از رصدها و مشاهده‌ها وجود ندارد. بلکه این رصدها را تنها با ساختن نظریه‌های نو بر پایهٔ پاره‌ای فرضهای کاملاً متفاوت می‌توان توجیه کرد.

پیش‌بینی‌های حاصل از این نظریه‌ها در مورد پدیده‌های معمولی با پیش‌بینی‌های قوانین نیوتن تقریباً یکسان است. اما این پیش‌بینی‌ها در پاره‌ای از موارد حدی که پیش‌بینی‌های نیوتنی بی‌دقتی نشان می‌دهد همچنان دقیق هستند. به این ترتیب علم نیوتنی از یک سو با نظریهٔ «نسبیت» پیوند دارد که برای اجسام خیلی سنگین یا دارای سرعت خیلی زیاد اهمیت دارد و در سوی دیگر به «مکانیک کوانتومی» نزدیک می‌شود، که برای اجسام یا ذرات دارای جرم و اندازهٔ کوچک اهمیت می‌یابد. می‌توان آن را عیناً در مورد دو اتم یا دو ستاره به کار برد. در حقیقت به جایی رسیده‌ایم که فرض کنیم این معادله در همه جا و در همهٔ زمانها، گذشته، حال و آینده برقرار است.

۱۶ـ۷ـ انرژی پتانسیل گرانشی

نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است؛ یعنی کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره‌ای که از نقطه P_1 و به نقطه P_2 می‌رود به مکان این نقاط وابسته است ولی به شکل مسیر ارتباطی بین آنها مربوط نمی‌شود. نقطه مرجع P_0 را نقطه‌ای در فاصله بی‌نهایت از جرم مرکزی M در نظر می‌گیریم. مقدار انرژی پتانسیل را در این نقطه

$U(P_\circ)=\circ$ انتخاب می‌کنیم. آنگاه:

$$U(r)=-\int_{\infty}^{r}\vec{F}.\vec{dr} \tag{۹ـ۱۶}$$

در تعیین مقدار این انتگرال، هر مسیری راکه ∞ و r را به هم پیوند دهد می‌توان به کار گرفت. مناسبترین انتخاب مسیر شعاعی مستقیم است. اگر محور x را روی امتداد این مسیر جای دهیم، آنگاه $F=-(\frac{GMm}{x^{۲}})x$ و $dr=dx$ هستند، به‌طوری که:

$$\vec{F}.\vec{dr}=-(\frac{GMm}{x^{۲}})dx$$

و

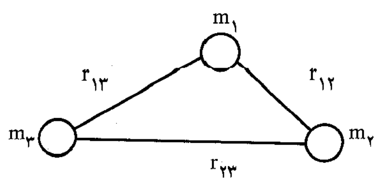
$$U(r)=-\int_{\infty}^{r}-(\frac{GMm}{x^{۲}})dx$$

یا

$$U(r)=-\frac{GMm}{r} \tag{۱۰ـ۱۶}$$

انرژی پتانسیل با زیاد شدن فاصله افزایش می‌یابد (از یک مقدار بزرگ منفی به سوی صفر افزایش می‌یابد). این گونه افزایش انرژی پتانسیل با فاصله، مشخصه یک نیروی جاذبه است. توجه کنید که $U(r)$ در واقع انرژی پتانسیل دو سویه هر دو ذره M و m است. اما اگر M یک جرم بسیار بزرگ باشد که حرکت نکند (مثلاً خورشید)، آنگاه خوب است $U(r)$ را انرژی پتانسیل جرم m که حرکت می‌کند تصور کنیم.

حال سه جسم به جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ و $m_۳$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که ابتدا فاصله این جرمها از هم بی‌نهایت است. مسئله عبارت است از محاسبه کاری که یک عامل خارجی باید انجام دهد تا این سه جسم را به وضع نشان داده شده در شکل درآورد.



شکل ۱۶ـ۱

فرض کنید ابتدا m_2 را از بی‌نهایت به فاصلهٔ r_{12} از m_1 نزدیک می‌کنیم. کاری که در مقابل نیروی گرانش وارد از طرف m_2 و m_1 انجام می‌شود برابر است با $-G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}}$.
حال فرض کنید که m_3 را از بی‌نهایت به فاصله r_{23} از m_2 و r_{13} از m_1 بیاوریم. کاری که در مقابل نیروی گرانشی وارد از طرف m_1 به m_3 انجام می‌شود برابر است با $-G\dfrac{m_1 m_3}{r_{13}}$
و کاری که در مقابل نیروی گرانشی وارد از طرف m_2 بر m_3 انجام می‌شود برابر است با $-G\dfrac{m_2 m_3}{r_{23}}$. کل کار انجام شده برای گرد آوری این دستگاه یعنی انرژی پتانسیل کل دستگاه برابر است با:

$$-(G\frac{m_1 m_2}{r_{12}}+\frac{Gm_1 m_3}{r_{13}}+\frac{Gm_2 m_3}{r_{23}})$$

توجه کنید که در این روش، هیچ نیازی به استفاده از محاسبات برداری نیست.

۸ـ۱۶ جرم اینرسی و جرم گرانشی

تعریف جرم که در بخشهای قبل ارائه شد بر مقایسه شتابهای دو جرم در حال برهم‌کنش، جرم مجهول و جرم استاندارد، تکیه دارد. به‌طور خلاصه جرمهای مجهول و استاندارد وادار می‌شوند تا به یکدیگر نیرو وارد کنند؛ و سپس نسبت شتابهای نتیجه شده عکس نسبت جرمها را به دست می‌دهد. طبق این تعریف، جرم میزان لختی است، یعنی میزان مخالفتی است که جسم در مقابل هر تلاشی در جهت تغییر حالت حرکت خود نشان می‌دهد. از این‌رو جرم اندازه‌گیری شده با این روش، جرم لختی (یا جرم اینرسی) نامیده می‌شود.

اما، در عملکردهای روزمره، جرم به وسیله ترازویی که وزنهای دو جرم، و نه اینرسی، آنها را، مقایسه می‌کند اندازه‌گیری می‌شود. اگر وزنهای دو کفه برابر باشند، ترازو در حالت تعادل خواهد بود. بدین ترتیب ترازو نیروی گرانشی را که از زمین به جرمها وارد می‌کند، اندازه می‌گیرد. جرمی که با این روش اندازه‌گیری می‌شود، جرم گرانشی نامیده می‌شود.

تحقیق اینکه دو روش اندازه‌گیری جرم با یکدیگر سازگارند، یعنی این که جرم اینرسی و جرم گرانشی هر جسمی با هم برابر است، حائز اهمیت اساسی است. صحت این برابری جرمهای لختی و گرانشی برای جرم استاندارد (کیلوگرم استاندارد) فرض است، اما برای هر جسم دیگری، برابری باید به وسیله آزمایش، آزموده شود.

برای اینکه ببینیم این امر متضمن چیست، فرض کنید دو جسم به ترتیب دارای جرمهای لختی m_1 و m_2 و وزنهای w_1 و w_2 هستند. باز فرض کنید بر اساس آزمونی که به وسیله ترازو انجام شد، وزنها دقیقاً یکسانند.

$$w_1 = w_2$$

با دانستن اینکه $w=mg$ است، این معادله چنین می‌شود:

$$m_1 g = m_2 g$$

پس از حذف عامل g در دو طرف، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$m_1 = m_2$$

یعنی جرمهای اینرسی نیز دقیقاً یکسانند. بدین ترتیب وزنها، یا جرمهای گرانشی دو جسم یکسانند اگر و فقط اگر جرمهای لختی آنها یکسان باشند. اما این استدلال بر یک فرض ضمنی متکی است و آن اینکه عاملهای g را در صورتی می‌توان از طرفین حذف کرد که این دو جسم دارای شتاب سقوط آزاد یکسان باشند. از این‌رو برابری جرمهای گرانشی و لختی برای یک جسم مورد نظر صحیح خواهد بود اگر و فقط اگر این جسم دارای شتاب سقوط آزاد برابر با جرم استاندارد باشد. پرسشی که در اینجا داریم این است که: آیا آهنگ سقوط آزاد انواع مختلف اجسام به راستی دقیقاً یکی است؟ تازه‌ترین و دقیق‌ترین آزمایشها از این نوع تأیید کرده است که آهنگ سقوط آزاد همهٔ اجسام که از مواد مختلف ساخته شده‌اند با دقتی بهتر از ۱ در 10^{12} برابرند.

همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم، جهانی بودن آهنگ سقوط آزاد به پدیده بی‌وزنی برای ناظری که آزادانه سقوط می‌کند، منجر می‌شود. از این‌رو در چارچوب مرجع شتابدار فضانورد، شرایطی از بی‌وزنی ظاهری حاکم است: اجسام چنان رفتار

می‌کنند که گویی در جایی به دور از دنیا، به دور از گرانش زمین، خورشید یا ستارگان دیگر هستند. این نشان می‌دهد که حرکتی از چارچوب مرجع که شتاب مناسبی داشته باشد می‌تواند اثرات گرانشی را حذف کند. به‌طور عمومی‌تر، یک حرکت شتابدار چارچوب مرجع می‌تواند گرانشی ظاهری را کاهش یا افزایش دهد. حرکت شتابدار چارچوب مرجع اثرات گرانشی را شبیه‌سازی می‌کند.

تشابه بین اثرات گرانی و اثرات حرکتی از چارچوب مرجع که به‌طور مناسبی شتاب گرفته باشد، اصل برابری یا هم‌ارزی نامیده می‌شود. اینشتین این اصل را به عنوان نقطه آغازین نظریه نسبیت عمومی خود برگزید.

۱۶ـ۹ـ راهنمای پاسخ به پرسشها

۱ـ در رصدهای اخترشناسی جدید و روشهای دریانوردی از نظریهٔ زمین مرکزی (یا بطلمیوسی) با استفاده از کره سماوی چرخان استفاده می‌کنند. زیرا در سیستم‌های دور پدیده زمین مرکزی و خورشید مرکزی (کوپرنیکی) تفاوت زیادی با هم ندارند ولی در بررسی حرکت اطراف و داخل منظومهٔ شمسی حتماً باید از نظریهٔ کوپرنیکی استفاده کرد.

۲ـ سرعت سقوط اجسام بسته به شتابی است که به آنها وارد می‌شود. بنابراین از آنجا که شتاب وارد بر همهٔ اجسام در حال سقوط، از طرف زمین (در غیاب نیروهای بازدارندهٔ نظیر مقاومت هوا) یکسان است، سرعت سقوط آنها برابر است.

۳ـ در بررسی حرکت یک جسم میان زمین و ماه می‌توان مشاهده کرد که وزن جسم در اطراف زمین وقتی به طرف ماه در حرکت است، کمتر می‌شود در حالی که همواره جرمش ثابت باقی می‌ماند.

۴ـ سرعت افقی آونگی که با ضربه زدن از حالت سکون شروع به نوسان می‌کند عبارت است از:

$$v=at=gt \quad \tan\theta$$

که در آن $a=g\tan\theta$ است (a شتاب افقی آونگ). نسبت سرعت آونگ در سطح زمین

به سرعت آن در سطح ماه عبارت است از:

$$\frac{v_E}{v_m}=\frac{g_E}{g_m}=6 \Rightarrow g_E=6\,g_m$$

۵ـ وزن اجسام در قطب بیشتر از استواست. چون فاصلهٔ استوا تا مرکز زمین از فاصلهٔ قطبها تا مرکز زمین بیشتر است، بنابراین مقدار g، شتاب گرانش، از استوا تا قطب، مرتباً افزایش می‌یابد اما جرم اجسام مستقل از موقعیت مکانی است و در همه جا یکسان است.

۶ـ نیروی جاذبه گرانشی میان دو انسان معمولی به فاصلهٔ ۱۰ m از یکدیگر تقریباً $\frac{10^{-11}\times 10^{4}}{10^{2}}=10^{-9}N$ است. وقتی این دو نفر به فاصله ۱۰ سانتیمتر از هم باشند این نیرو به $\frac{10^{-11}\times 10^{4}}{10^{-4}}=10^{-3}N$ افزایش می‌یابد، اما همواره بسیار کمتر از وزن متعارف آنهاست.

۷ـ تراکم جرم زمین در حوالی مرکز آن روی تغییرات g بر حسب ارتفاع در مقایسه با یک کرهٔ همگن اثر دارد. اگر زمین کره‌ای با چگالی ثابت (کرهٔ همگن) بود، هر چه ذره در داخل زمین فرو می‌رفت، نیروی گرانشی وارد بر آن از طرف زمین کمتر می‌شد، زیرا پوسته‌هایی از کره که خارج از محل ذره قرار دارند نیرویی به آن وارد نمی‌کنند. بنابراین مرکز زمین نیرو صفر می‌شد و g در سطح زمین بیشینه می‌بود. شتاب گرانشی در اعماق زمین در برخی قسمتها از مقدار آن در سطح زمین نیز بیشتر می‌شود (به عنوان مثال در عمق ۶۰۰ کیلومتری شتاب گرانش حدود $10/01\ m/sec^2$ است). این تفاوت ناشی از ناهمگن بودن زمین و تراکم جرم در حوالی مرکز آن است.

۸ـ اطراف زمین سطوح بستهٔ فرضی به نام ژئویید (زمین‌وار) در نظر می‌گیریم که سطحی با پتانسیل گرانشی ثابت است. سطح ژئویید کاملاً بیضوی نیست بلکه در محل کوهها بر اثر جرم آنها برآمده و در محل اقیانوسها فرو رفته است. سرچشمه همهٔ رودخانه‌ها در ژئویید (پتانسیل گرانشی) بالاتری نسبت به مصب آنها قرار دارد. این مطلب در مورد رودخانهٔ می‌سی‌سی‌پی نیز برقرار است و علت به اصطلاح سربالا رفتن

آب این رود ناشی از موقعیت جغرافیایی سرچشمه و مصب رود است (در حالی که آب رود از نظر پتانسیل گرانشی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر جاری است و ناقض قوانین گرانشی نیست).

۹ـ زمین به خاطر پهن شدگی ناشی از دوران به صورت یک شبه کره تخت درآمده و فاصله استوا تا مرکز زمین از فاصلهٔ قطبها تا مرکز زمین بیشتر است. بنابراین طول کمان یک درجه در نزدیکی استوا بیشتر است.

۱۰ـ با مطالعه حرکت یک ماهواره مصنوعی بیشتر از مطالعه حرکت ماه می‌توانیم دربارهٔ شکل زمین آگاهی پیدا کنیم. چون او لاً جرم ماهواره در مقایسه با ماه بسیار کمتر است و ثانیاً فاصله ماهواره به زمین بسیار کمتر است.

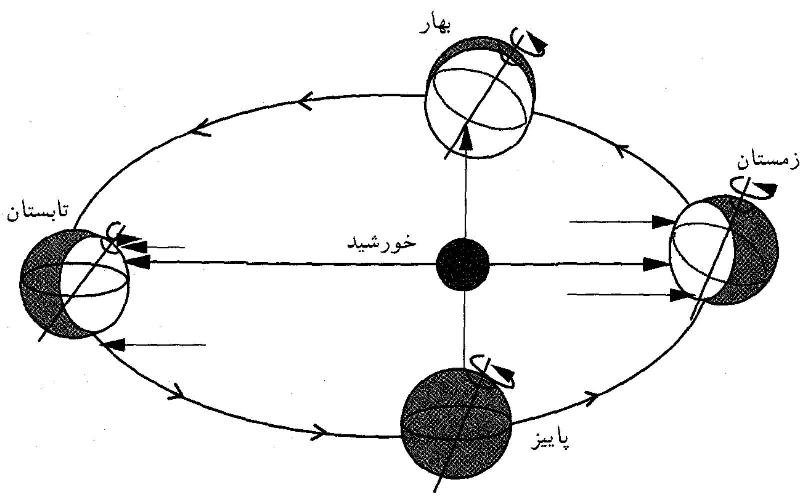
۱۱ـ جرم ماه را می‌توان بر اساس مقدار کشند (جزر و مد) اندازه‌گیری کرد.

۱۲ـ دورهٔ تناوب فنر نوسان کننده $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است و با توجه به این معادله مشاهده می‌شود T فقط به جرم نوسانگر و ثابت فنر بستگی دارد. بنابراین در مریخ دورهٔ تناوب آن تغییر نمی‌کند. دورهٔ تناوب آونگ ساده $T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ است. با توجه به مقادیر داده شده شتاب گرانش در مریخ عبارت است از:

$$g_m=\frac{GM_m}{R_m^۲}=\frac{G(۰/۱)M_E}{\frac{۱}{۴}R_E^۲}=۰/۴g_E$$

بنابراین $T'=\frac{۱}{\sqrt{۰/۴}}T$ و یا $T'\simeq ۱/۶T$. بنابراین دو ساعت در مریخ هم‌زمان نیستند.

۱۳ـ با توجه به شکل، هنگامی که زمین به خورشید نزدیک است، به شکل مایل به نیمکره شمالی می‌تابد و بنابراین در این هنگام در نیمکره شمالی زمستان است. وقتی زمین از خورشید دور است، تابش خورشید به نیمکره شمالی عمود است، از این‌رو در این هنگام در نیمکره شمالی تابستان است.



۱۴ـ قانون گرانش جهانی قدری با مدار سیارات منظومه شمسی رصد شدهٔ فعلی تفاوت دارد که این رمز ناشی از تصحیح نسبیتی است. این موضوع برای مدار تمام سیارات وابسته به ستارهٔ دیگری مانند خورشید نیز مشابه خواهد بود.

۱۵ـ از روابط نیوتن داریم:

$$\frac{GM_s m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

که در آن r فاصله هر سیاره از خورشید است. m جرم سیاره، M_s جرم خورشید و v سرعت مداری هر سیاره است. با توجه به روابط فوق هر چه سیاره از خورشید دورتر باشد سرعت مداری آن کمتر خواهد بود.

۱۶ـ نیروی گرانشی وارد از طرف خورشید به ماه در حدود دو برابر نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به ماه است. علت اینکه ماه (مثلاً در خلال گرفت خسوف) از زمین فرار نمی‌کند این است که برآیند نیروهای وارد بر ماه مدار حرکتی آن را تعیین می‌کند.

۱۷ـ نیروی گرانش زمین تنها عامل سنگینی هر جسم روی زمین است و اینکه گفته شد «هنگام نیمه شب» که خورشید درست در زیر زمین قرار دارد خورشید و زمین

یک جسم را در یک جهت حذف می‌کنند و به هنگام ظهر که خورشید درست در بالای زمین قرار دارد، آن جسم را در دو جهت مخالف جذب می‌کنند؛ بنابراین جمعاً تمام اجسام در نیمه شب یا در شب سنگین‌تر از ظهر (یا در روز) خواهند بود» درست نیست.

۱۸ـ اثر جاذبه گرانشی خورشید و ماه بر روی زمین جزر و مد را ایجاد می‌کند. اثر جزر و مد خورشید در حدود نصف اثر جزر و مد ناشی از ماه است. اما اثر جاذبه مستقیم خورشید بر روی زمین در حدود ۱۷۵ برابر اثر جاذبه ماه بر روی زمین است، لیکن چون فاصله ماه به زمین نزدیکتر است، اثر جزر و مدی آن قویتر از خورشید است.

۱۶ـ۱۰ـ مسائل برگزیده حل شده

۱ـ اگر دوره تناوب آونگی در استوا دقیقاً یک ثانیه باشد، دوره تناوب آن در قطب جنوب چقدر خواهد بود؟

حل.

$$\frac{T_{\text{استوا}}}{T_{\text{قطب}}}=\sqrt{\frac{g_{\text{استوا}}}{g_{\text{قطب}}}}=\sqrt{\frac{۹/۸۳۲۱۷}{۹/۷۸۰۳۹}}$$

اما $T=۱\ s$ (استوا)، پس خواهیم داشت:

$$T_{\text{قطب}}=۰/۹۹۷۴\ s$$

۲ـ دو پوسته کروی هم مرکز با چگالی یکنواخت و جرمهای M_1 و M_2 قرار دارند. نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m را هنگامی که این ذره در فاصله الف) $r=a$ ب) $r=b$ ج) $r=c$ قرار دارد، حساب کنید. فاصله r نسبت به مرکز پوسته‌ها اندازه‌گیری می‌شود همچنین $c<b<a$.

حل. برای حل این مسئله از دو مطلب مهم زیر استفاده می‌کنیم:

۱) هر پوسته کروی همگن، یک نقطه مادی خارجی را طوری جذب می‌کند که گویی تمام جرم پوسته در مرکزش متمرکز شده است.

۲) نیروی وارد از طرف یک پوسته کروی بر جرم داخل آن صفر است.

الف) در فاصله $r=a$، ذره در خارج هر دو پوسته قرار دارد، بنابراین داریم:

$$F=F_1+F_2$$
$$=G\frac{M_1 m}{a^2}+\frac{GM_2 m}{a^2}=\frac{Gm}{a^2}(M_1+M_2)$$

ب) در فاصله $r=b$، ذره در داخل پوسته M_2 (یعنی $F_2=0$) و در خارج پوسته M_1 است، پس داریم:

$$F=F_1=G\frac{M_1 m}{b^2}$$

ج) در فاصله $r=c$، ذره در داخل هر دو پوسته قرار دارد. پس خواهیم داشت:

$$F=F_1=F_2=0$$

۳ـ در کتاب ژول‌ورن، با نام «از زمین تا ماه»، سه مرد را در گلوله توپی قرار داده و آن را به سوی ماه شلیک کردند:

الف) سرعت اولیه گلوله چقدر باشد تا به ارتفاعی از سطح زمین برابر شعاع آن برسد؟

ب) چه سرعت اولیه‌ای برای فرار کامل از حوزه جاذبه زمین لازم است؟ برای ساده‌تر شدن مسئله از اثر گرانش ماه و مقاومت هوا صرف نظر کنید.

حل. $k_1+U_1+w_{\text{غیر}}=k_2+U_2$

تنها نیرویی که کار انجام می‌دهد گرانش است. پس $w_{\text{غیر}}=0$. نقطه ۱ را شروع و ۲ را نقطه ارتفاع ماکزیمم می‌گیریم، که در آن $v=0$ فرض می‌شود. داریم: $r_1=R_E$ و $r_2=2R_E$ و $v_2=0$. مقدار v_1 نیز باید پیدا شود:

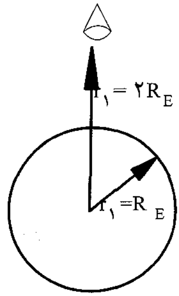
$$K_1+U_1=K_2+U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2+\left[-G\frac{mm_E}{R_E}\right]=0+\left[-G\frac{mm_E}{2R_E}\right]$$

$$\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{Gm_E}{R_E}}=7910\,m/s$$

اگر v_1 اندازهٔ سرعت فرار باشد $r_1=R_E$، $r_2=\infty$ و $v_2=0$ می‌خواهیم جسم به $r_2=\infty$

برسد و در اینجا انرژی جنبشی نداشته باشد.

$$\frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲}-\frac{GM_E}{R}=\circ+\circ$$



با تعمیم دادن این نتیجه می‌توان گفت سرعت فرار از سطح هر کره به جرم M و شعاع R (با صرف نظر کردن از مقاومت هوا) برابر است با:

$$v_{۱}=\sqrt{\frac{۲GM}{R}}$$

۱۶ـ۱۱ـ پرسشها و مسائل برگزیده برای حل

الف) پرسشها

۱ـ اگر نیروی گرانشی وارد بر اجسام با جرم آنها متناسب است، چرا یک جسم سنگین سریع‌تر از یک جسم سبک سقوط نمی‌کند؟

۲ـ چگونه می‌توان جرم ماده را تعیین کرد؟

۳ـ آیا یک ماهواره می‌تواند در روی مداری پایدار واقع در صفحه‌ای که از مرکز زمین نمی‌گذرد، حرکت کند؟ توضیح دهید.

۴ـ در کدام مورد، فضانوردان شتاب بیشتری را حس می‌کنند: هنگام پرتاب و قرارگرفتن در مدار یا هنگام بازگشت دوباره به زمین؟

۵ـ فرض کنید هواپیمایی در امتداد استوا حول زمین پرواز می‌کند، اگر این هواپیما خیلی تند حرکت کند برای نگهداری خود به بالها نیاز نخواهد داشت. چرا؟

۶ـ آیا راه انداختن موشکها از پایگاهی در ارتفاع بسیار بالای یک کوهستان مزیتی دارد؟ چرا چنین کاری نمی‌کنند؟

۷ـ نیروی گرانشی که جرم یک پوسته تو خالی کروی بر ذره‌ای در درون خود وارد می‌کند صفر است. آیا این بدان معناست که پوسته به صورت یک حفاظ گرانشی عمل می‌کند؟

۸ـ دو سیاره از مواد یکسانی تشکیل شده‌اند. پس، جرمشان متناسب با توان سوم شعاع‌هایشان، r_1 و r_2 است. نتیجه می‌شود که $\frac{g_1}{g_2}$ نسبت شتابهای گرانی در سطح دو سیاره عبارت است از:

الف) $\frac{r_2}{r_1}$ ب) $\frac{r_1}{r_2}$ ج) $(\frac{r_2}{r_1})^2$ د) $(\frac{r_1}{r_2})^2$

۹ـ کاوندیش اندازه گیری ثابت گرانشی G را «وزن کردن زمین» نامید. این بیان به آزمایش او مربوط نیست بلکه نتیجه آزمایش را مشخص می‌کند. چرا؟

۱۰ـ یک دانشجو در ورقه امتحان خود نوشته است: «تنها دلیل برای آنکه سیب به طرف زمین سقوط می‌کند ولی زمین به سوی سیب سقوط نمی‌کند، این است که جرم زمین بیشتر است و نیروی جاذبه بیشتری به سیب اعمال می‌کند، آن را نقد کنید.

۱۱ـ با آنکه زمین به‌طور پیوسته به طرف خورشید جذب می‌شود، چرا زمین به روی خورشید نمی‌افتد؟

ب) مسائل

۱ـ دنباله‌دار هالی در مداری بیضوی حول خورشید می‌چرخد (در ۱۹۸۶ به نزدیکترین نقطه خورشید رسید). وقتی دنباله‌دار در این نقطه باشد فاصله آن از خورشید $8/78 \times 10^{10} m$ و تندی آن $5/45 \times 10^{4} \frac{m}{s}$ است. در دورترین نقطه از خورشید فاصله آن $5/28 \times 10^{12} m$ است. تندی در این نقطه چقدر است؟

۲ـ طبق یک برآورد در اثر کوبش یک شهاب‌سنگ 13×10^{9} تنی با تندی $70000 \frac{Km}{h}$ بر سطح زمین، گودال بزرگی در ویلکس‌لند قاره قطب جنوب پدید آمد. تندی این شهاب سنگ نسبت به سطح زمین هنگامی که فاصله «زیاد»ی با زمین داشت چقدر بود؟

۳ـ تغییر شتاب گرانشی بین نقطه‌ای در سطح دریا و نقطه‌ای در عمق $4000\ m$ زیر سطح دریا را محاسبه کنید. برای منظور این مسئله فرض کنید زمین یک کره است و تا عمق بیش از $4000\ m$ با آب پوشیده شده است. آیا شتاب گرانش در این عمق کمتر یا بیشتر از شتاب در سطح است؟

۴ـ تعداد زیادی ماهواره در سطح استوایی به دور زمین در گردش‌اند. ارتفاع آنها به اندازه‌ای است که همواره بالای نقطه معینی از زمین قرار دارند. این ارتفاع نسبت به سطح زمین چقدر است؟ چنین مداری را همزمان با زمین می‌نامند.

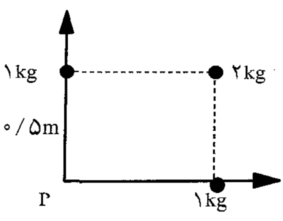
۵ـ چکشی به جرم m از ارتفاع h بالای سطح زمین سقوط می‌کند که در مقایسه با R_E شعاع زمین، الزاماً کوچک نیست. اگر از مقاومت هوا صرفنظر شود رابطه‌ای برای v سرعت چکش در موقع رسیدن به سطح زمین بر حسب h، R_E و m_E پیدا کنید.

۶ـ میله نازکی به جرم M و طول L مفروض است. میدان گرانشی حاصل از میله در نقطه‌ای واقع بر امتداد آن و به فاصله d از یک انتها چقدر است؟ اگر d به مراتب از L بیشتر باشد پاسخ را به صورتی معقول و مورد انتظار خلاصه کنید.

۷ـ سه جرم نقطه‌ای در نقاطی مانند شکل زیر قرار گرفته‌اند.

الف) مؤلفه‌های x و y میدان گرانشی در نقطه p مبدأ مختصات، ناشی از این جرمهای نقطه‌ای چقدر است؟

ب) بزرگی و جهت نیروی وارده بر جرم $0/025$ کیلوگرم در نقطه p را معین کنید.



۸ـ فرض کنید جاذبه گرانشی بین دو جرم، به جای $\frac{1}{r^2}$ با $\frac{1}{r^3}$ تغییر کند. این تغییر چه تأثیری بر قانون سوم کپلر دارد؟

۹ـ دو ماهواره در مدارهایی دایره‌ای بر فراز استوای زمین، طوری قرار گرفته‌اند که دوره تناوب یکی دو برابر دوره تناوب دیگری است. فرض کنید مدار ماهواره پایینی $1800\ km$ بالای سطح زمین باشد. ماهواره دیگر چه قدر بالاتر از سطح زمین است؟

۱۰ـ برای مسافرت به ستارگان، فضاپیما باید بتواند از جاذبه‌گرانشی کل منظومه شمسی فرار کند. اگر سفینه‌ای به جرم $2000\ kg$ از حالت سکون از سطح زمین به حرکت درآمده باشد، چه مقدار انرژی لازم است تا از جاذبه‌گرانشی منظومه شمسی خارج شود؟ (توجه: از اثر همه سیارات غیر از زمین چشم بپوشید).

۱۱ـ عبارتی برای نیروی گرانشی وارد بر جرم M بر خطی بین زمین و خورشید، به صورت تابعی از فاصله جرم از مرکز زمین، به دست آورید. روی این خط، در چه فاصله‌ای از مرکز زمین نیروی کل وارد بر M صفر است؟

۱۲ـ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر یک نیروی جاذبه مرکزی به بزرگی $\frac{k}{r^2}$ قرار دارد که در آن k مقدار ثابت است. اگر در لحظه‌ای که ذره در دورترین نقطه مدار بسته‌اش یعنی در فاصله a از مرکز نیرو قرار دارد سرعت آن $\sqrt{\frac{k}{2ma}}$ باشد، مطلوب است:

الف) محل نزدیکترین نقطه از مرکز نیرو

ب) سرعت ذره در این محل.

۱۳ـ دو ذره به جرمهای m و M که ابتدا در حال سکون‌اند، به فاصله بی‌نهایت از هم قرار دارند. نشان دهید که سرعت نسبی نزدیک شدن آنها بر اثر جاذبه‌گرانشی، در هر لحظه مساوی است با $\sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$ که در آن d فاصله ذرات در آن لحظه است.

ضمیمه فصل ۱٦

«ما پدیده‌های آسمان و دریاها را به وسیلهٔ قدرت گرانش توضیح داده‌ایم، اما هنوز علت این قدرت و توانمندی را نمی‌دانیم... من قادر نشده‌ام علت ویژگیهای گرانش را از این پدیده‌ها کشف کنم، و هیچ فرضیه‌ای نیز تدوین نمی‌کنم.»

نیوتن- پرنیسیپیا (۱٦۸۷)

الف) نیوتن و دانش قرن هفدم

آیزاک نیوتن در روز میلاد مسیح، سال ۱٦۴۲ در روستای کوچکی در لینکلن شایر انگلستان به دنیا آمد. او روستازاده‌ای آرام بود. و همچون گالیلهٔ جوان، به ساختن ابزارهای مکانیکی عشق می‌ورزید و به ریاضیات علاقه‌مند بود. تا ۲۴ سالگی به اکتشافهای جالب توجهی دست یافته بود. در ریاضیات، قضیهٔ دو جمله‌ای و حساب دیفرانسیل؛ در نور شناخت بر روی نظریهٔ رنگها؛ در مکانیک، قانون اول و دوم حرکت و قانون جاذبهٔ گرانشی و همچنین معادلهٔ شتاب مرکزگرا را کشف کرده بود. اما او کشف این معادله را تا سالها پس از ارائه معادلهٔ مشابه از طرف هویگنس اعلام نکرد.

در آغاز، نوشته‌های او اغلب در موضوع نور شناخت بود. نظریهٔ «نور و رنگ» او، که سرانجام در سال ۱٦۷۲ منتشر شد، مجادله‌ای تلخ و طولانی میان او و برخی از دانشمندان دیگر برانگیخت. از آن پس نیوتن، که مردی گوشه گیر و پیچیده بود، چیز دیگری منتشر نکرد.

در سال ۱٦۸۴ دوست صمیمی نیوتن، هالی، اخترشناس معروف به سراغ او آمد

تا نظرش را در مورد نیروی لازم برای حرکت دادن یک جسم در مدار بیضوی بر طبق قوانین کپلر جویا شود. این یکی از جالب توجه‌ترین و بحث‌انگیزترین مسایل علمی آن روزگار بود.

هالی وقتی فهمید، نیوتن قبلاً این مسئله را حل کرده، شادمان و شگفت‌زده شد و از این‌رو دوست خود را بر آن داشت که این مطالعات ارزنده را منتشر کند.

نیوتن در مدتی کمتر از سه سال، کتاب اصول را برای چاپ آماده کرد. انتشار اصول در سال ۱۶۸۷، به زودی نیوتن را در زمرهٔ بزرگترین متفکران تاریخ قرار داد.

ب) اصول نیوتن

کتاب اصول نیوتن یک سند فوق‌العاده است. سه بخش اصلی آن شامل مجموعه‌ای از کشفیات ریاضی و فیزیک است. اما در این میان نظریه‌گرانش جهانی بر هر چیز دیگر سایه می‌افکند. نیوتن از استدلالی که پس از اقلیدس شکل گرفته، استفاده می‌کند (استدلالات هندسی). اما جزییات مراحل هندسی آن امروزه برای ما ناآشناست.

پیشگفتار نیوتن بر چاپ اول کتاب (اصول) که قسمتی از آن را در اینجا می‌آوریم، خطوط کلی کتاب را به دست می‌دهد: «چون پیشینیان (آنطور که پاپوس به ما گفته) در بررسی اشیای طبیعی، بیشترین اهمیت را برای علم مکانیک قائل بوده‌اند و امروزیها با کنار گذاشتن صورتهای جوهری و چشمپوشی از کیفیتهای مرموز، تلاش کرده‌اند که پدیده‌های طبیعت را تابع قوانین ریاضی بدانند، من در این رساله، تا آنجا که به فلسفه مربوط است، ریاضیات را پرورانده‌ام... گویی تمامی بار فلسفه [فیزیک] در این است که از پدیده‌های حرکت، نیروهای طبیعت را بیابیم [استقرا] و سپس به کمک این نیروها پدیده‌های دیگر را ثابت کنیم [قیاس]، و در راستای این هدف است که در کتابهای اول و دوم گزاره‌هایی کلی ارائه شده‌اند. در کتاب سوم، مثالی از این هدف در تشریح نظام جهان آورده‌ام. به‌طوری که در کتاب سوم، به کمک گزاره‌هایی که در کتابهای قبلی به‌طور ریاضی اثبات کرده‌ام، از پدیده‌های آسمانی نیروهای گرانشی را

استنتاج کرده‌ام که اجسام را متمایل به خورشید و سیاره‌های گوناگون نگه می‌دارد. سپس به کمک این نیروها، با گزاره‌های دیگری که آنها نیز ریاضی هستند حرکت سیاره‌ها، دنباله‌دارها، ماه و دریا را استنتاج کرده‌ام...»

کتاب با تعریفهایی از جرم، اندازه حرکت، اینرسی و نیرو، آغاز می‌شود. پس از آن، قانون حرکت و اصول جمع نیروها و سرعتها آورده می‌شود.

نیوتن همچنین متن قابل توجه و بسیار مهمی دربارهٔ «قواعد استدلال در فلسفه» می‌آورد. چهار قاعده، یا چهار فرض او نمایانگر ایمان عمیق او نسبت به یکنواختی تمامی طبیعت است.

ج) قواعد استدلال نیوتن

نیوتن اینها را قواعدی می‌داند که راهنمای دانشمندان در ساختن فرضیه‌ها هستند. این قواعد از یونان باستان مایه می‌گرفت و هنوز هم سودمند است. نخستین قاعده به نام اصل صرفه‌جویی و قاعده‌های دوم و سوم به نام اصول یگانگی خوانده شده‌اند. چهارمین قاعده مبین لزوم ایمان به استفاده از روند منطقی است.

از زمان یونانیان، دانشوران عموماً بر آن بودند که مدار سیاره‌ها، حرکت طبیعی آنهاست. اما به نظر نیوتن حرکت طبیعی هر جسم حرکتی است با سرعت یکنواخت در راستای خطی مستقیم.

چهار قاعدهٔ استدلال نیوتن به اختصار چنین‌اند: این قاعده‌ها را نیوتن در آغاز کتاب سوم اصول آورده است.

۱ـ «طبیعت به بیهودگی رفتار نمی‌کند، و بیشتر بیهوده است، آن زمان که کمتر کارآیی دارد» و به تعبیر دیگر از گالیله بیان شده: «طبیعت... آنچه را که با کمتر انجام‌پذیر است با بسیار انجام نمی‌دهد».

۲ـ «بنابراین، تا آنجا که ممکن است، باید برای پدیده‌های طبیعی علتهای یکسان نسبت دهیم. مثلاً به تنفس انسان و حیوان؛ سقوط سنگ در اروپا و آمریکا؛ بازتاب نور

در سیاره‌ها و در زمین».

۳ـ چنین فرض می‌شود که خواص مشترک همهٔ اجسامی که مورد آزمایش قرار می‌دهیم، در مورد همهٔ اجسام دیگر وجود دارند. (مگر آنکه خلاف آن ثابت شود.) برای مثال، همهٔ اشیای فیزیکی که تاکنون برای آزمایشگران شناخته نشده‌اند همواره دارای جرم بوده‌اند. از این رو، نیوتن پذیرفت که هر جسم، حتی آنها که دور از دسترس ما در آسمان وجود دارند، دارای جرم است. فرض نیوتن تمایز میان مادهٔ زمینی و آسمانی را رد می‌کند.

۴ـ در «فلسفهٔ تجربی» فرضیه‌ها یا کلیتهایی که بر اساس تجربه به دست آمده‌اند «هر چند فرضیه‌های مخالف قابل تصور باشند باید، با تقریب زیاد یا تحقیقاً، درست پذیرفته شوند.» دانشمندان باید چنان فرضهایی را تا هنگامی که شواهد بیشتر برای اصلاح یا تجدید نظر آنها یافته شود، بپذیرند.

د) قانون عکس مربع نیروهای سیاره‌ای

نیوتن عقیده داشت که مسیر طبیعی مستقیم‌الخط سیاره‌ها تحت تأثیر خورشید به صورت منحنی درمی‌آید. او نشان داد که قانون کپلر دربارهٔ مساحتها فقط و فقط در صورتی می‌تواند درست باشد که نیروهایی که بر سیاره‌ها اثر می‌کنند همواره به سوی یک نقطه باشند. او همچنین نشان داد که آن نقطهٔ ثابت، مکان خورشید است. قانون مساحتها تا وقتی که نیروها متوجه یک نقطهٔ ثابت هستند بدون توجه به «بزرگی نیروها» همواره برقرار است. اما نیوتن باید نشان می‌داد که یک نیروی گرانش مرکزی می‌تواند رابطهٔ دقیق میان شعاع مداری و دورهٔ گردش آنها را به دست دهد. نیروی گرانش؟

قوانین کپلر

۱ـ سیاره‌ها در مدارهای بیضی شکل حرکت می‌کنند و خورشید در یکی از دو کانون این بیضی‌ها قرار دارد.

۲ـ خطی که خورشید را به یک سیاره متصل می‌کند سطوحی را می‌پیماید که اندازهٔ آن با فاصله‌های زمانی لازم برای پیمودن آنها متناسب است.

۳ـ مربعهای دوره‌های گردش سیاره‌ها با مکعبهای فاصله‌های متوسط آنها از خورشید متناسب است.

قوانین نیوتن

۱ـ هر جسم به حرکت مستقیم‌الخط و یکنواخت خود ادامه می‌دهد یا در حال سکون باقی می‌ماند، مگر آنکه تحت تأثیر نیرویی قرار گیرد (قانون اینرسی یا اصل ماند).

۲ـ نیروی مؤثر بر یک جسم، متناسب با شتابی است که جسم در جهت آن به دست می‌آورد.

۳ـ برای هر کنشی، واکنشی مساوی آن و در خلاف جهت آن وجود دارد.

ترکیب قانونهای کپلر با قوانین نیوتن، مثال شیوایی از قدرت استدلال منطقی است.

بر طبق قانون اول نیوتن، تغییر حرکت، چه در جهت و چه در بزرگی سرعت مستلزم کنش نیرویی مؤثر است. اما طبق قانون کپلر، سیاره‌ها در مدارهای بیضی شکل که مستقیم‌الخط نیستند حرکت می‌کنند. بنابراین برای تغییر حرکت آنها باید نیرویی مؤثر وجود داشته باشد (بدون در نظر گرفتن نوع و جهت نیرو).

ترکیب قانون دوم نیوتن با دو قانون اول و دوم کپلر جهت نیروی مؤثر را به دست می‌دهد. بر طبق قانون دوم نیوتن، نیروی مؤثر وارده در جهت شتاب عمل می‌کند. اما جهت نیروی وارده بر سیاره‌ها کدام است؟ تحلیل هندسی نیوتن معلوم کرد که جسمی که تحت اثر نیروی مرکزی حرکت می‌کند، هنگامی که از مرکز نیرو مشاهده شود، از قانون کپلر دربارهٔ سطوح پیروی می‌کند. اما این به فاصلهٔ سیاره‌ها از خورشید مربوط است.

بنابراین نیوتن توانست به این نتیجه برسد که خورشید در یکی از کانونهای هر مدار بیضی شکل، منشاء نیروی مرکزی وارد بر سیاره‌هاست.

نیوتن، آنگاه دریافت که حرکت در مسیر بیضی شکل تنها در صورتی ممکن است که نیروی مرکزی با عکس مربع فاصله تغییر کند یعنی $F\alpha\frac{1}{R^2}$. بنابراین، تنها یک نیروی عکس مربع از اطراف خورشید می‌توانست مدارهای مشهود بیضی شکل را که به وسیلهٔ کپلر شرح داده شده بود به وجود آورد. وی سرانجام ثابت کرد که وجود چنان نیرویی قانون سوم کپلر، یعنی قانون دوره‌های گردش $T^2=KR_{av}^3$ را ثابت می‌کند و به این ترتیب به استدلال خود پایان داد. از این تحلیل، نیوتن به این نتیجه رسید که یک قانون کلی گرانش جهانی برای همهٔ اجسامی که در منظومهٔ شمسی حرکت می‌کنند وجود دارد. این موضوع محور اصلی بحث در ترکیب بزرگ نیوتنی است. اکنون حرکتهای شش سیارهٔ شناخته شده را بر حسب شتاب مرکزگرای آنها به دور خورشید در نظر می‌گیریم. بر طبق استدلال نیوتن، که در بالا به آن اشاره شد، این شتاب با عکس مربع فاصله‌های متوسط سیاره از خورشید کاهش می‌یابد. دایره شکل خاص و ساده‌تر بیضی است که کانونهای بیضی بر هم منطبق شده‌اند. استدلال برای مدار دایره‌ای شکل بسیار کوتاه است. عبارتی که شتاب مرکزگرای a_c جسمی را که حرکت دورانی یکنواخت دارد، بر حسب R شعاع و دورهٔ گردش T به دست می‌دهد، چنین است:

$$a_c=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

قانون کپلر دربارهٔ دوره‌های گردش، رابطهٔ معینی دربارهٔ دوره‌های گردش مداری سیاره‌ها و فواصل متوسط آنها از خورشید به دست می‌دهد:

$$\frac{T^2}{R_{av}^3}=\text{ثابت}$$

با استفاده از علامت k برای مقدار ثابت می‌توان نوشت:

$$T^2=KR_{av}^3$$

برای مدارهای دایره‌ای شکل، R_{av} درست همان R است. در معادلهٔ نیروی مرکزگرا، به جای T^2 مقدار KR^3 را قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$a_c=\frac{4\pi^2 R}{KR^3}=\frac{4\pi^2}{KR^2}$$

چون $\frac{4\pi^2}{K}$ مقداری ثابت است، نتیجه می‌شود:

$$a_c \alpha \frac{1}{R^2}$$

نیوتن ثابت کرد که این نتیجه دربارهٔ همهٔ بیضی‌ها صدق می‌کند. در واقع دربارهٔ هر جسمی که در مداری به دور یک مرکز نیرو می‌گردد صدق می‌کند. شکلهای مداری ممکن، دایره، بیضی، سهمی و هذلولی هستند (مقاطع مخروطی).

در عصر نیوتن، چهار قمر مشتری و چهار قمر زحل مشاهده شده بود. با مشاهدهٔ تلسکوپی قمرهای مشتری و زحل، هنگامی که سیاره را در مرکز بپنداریم قمرهای هر سیاره از قانون کپلر دربارهٔ مساحتها پیروی می‌کنند. برای قمرهای مشتری، این قانون و قانون دورهٔ گردش، ثابت $=\frac{T^2}{R^3}$، صدق می‌کند. اما اندازهٔ این ثابت با اندازه‌ای که برای سیاره‌ها به دور خورشید به دست می‌آید متفاوت است. این قانون برای قمرهای زحل هم صدق می‌کند، اما اندازهٔ ثابت آن متفاوت است. بنابراین قمرهای مشتری تحت تأثیر نیرویی مرکزی هستند که به سوی مشتری تمایل دارد و با مربع فاصله از مشتری کاهش می‌یابد. به همین ترتیب برای قمرهای زحل. این اعمال متقابل، یا برهم کنشهای مشاهده شده از اجرام آسمانی، قانون عکس مربع نیروهای جاذبه‌ای مرکزی نیوتن را تأیید می‌کند.

ه) حرکت سیاره‌ای و ثابت گرانشی

فرض می‌کنیم سیاره‌ای به جرم m_p در امتداد مداری به شعاع R و دورهٔ گردش T حرکت می‌کند. بر طبق مکانیک نیوتن، شتاب مرکزگرای پیوسته‌ای برابر با $a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ وجود دارد. پس باید نیروی پیوستهٔ $F_c = m_p a_c$ بر آن وارد آید. هرگاه گرانش را با نیروی مرکزی یکسان فرض کنیم $F_g = F_c$:

$$G\ \frac{m_p m_s}{R^2} = \frac{4\pi^2 R m_p}{T^2}$$

$$G = \frac{4\pi^2}{m_s}\left(\frac{R^3}{T^2}\right) = \text{ثابت}$$

بر طبق قوانین کپلر، در حرکت سیاره‌ها برگرد خورشید نسبت $\frac{R^{3}}{T^{2}}$ مقداری ثابت است؛ $4\pi^{2}$ نیز یک عدد ثابت است. اگر m_s را نیز ثابت فرض کنیم آنگاه همهٔ عوامل برای G ثابت هستند. اما اگر فرض کنیم G یک ثابت جهانی است، می‌توان جرمهای نسبی خورشید و سیاره‌ها را به دست آورد.

$$m_s=\frac{4\pi^{2}R^{3}}{GT^{2}} \quad ; \quad \frac{T^{2}}{R^{3}}=K_s$$

$$m_s=\frac{4\pi^{2}}{GK_s}$$

با عملیات مشابه و با در دست داشتن $\frac{T_2}{R_3}$ برای هر دو سیاره می‌توان جرمهای آنها را با هم مقایسه کرد.

مقایسهٔ جرمها با جرم زمین:

زمین	۱
زحل	۹۵
مشتری	۳۱۸
خورشید	۳۳۳۰۰۰

این مقایسه‌ها بر پایهٔ این فرض قرار دارند که G یک ثابت جهانی است. محاسبات بر پایهٔ این فرض برای انواع گوناگون اطلاعات نجومی به نتایج سازگار انجامیده است. گردش مداری و فرود موفقیت آمیز خودروی فضایی بر ماه مثالی از این گونه است. همچنین در محاسبات دشوار مربوط به اثرات کوچک اغتشاشی سیاره‌ها بر یکدیگر نتایجی سازگار بااین فرض پدیدار شد.

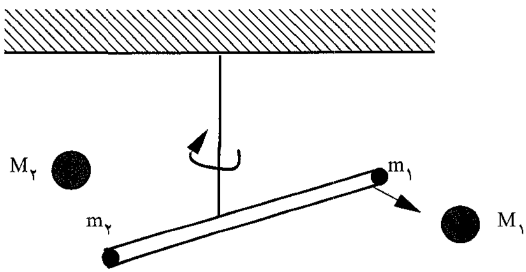
و) مقدار G و جرمهای حقیقی سیاره‌ها

جرم اجسام کوچک جامد را می‌توان به آسانی از وزن آنها پیدا کرد. اندازه گیری فاصلهٔ میان دو جسم جامد کروی نیز مشکلی پیش نمی‌آورد. اما چگونه می‌توان نیروی

کوچک دو سویهٔ گرانشی بین دو جسم نسبتاً کوچک را در آزمایشگاه اندازه گرفت؟

با توجه به اینکه هر دو جسم، جداگانه تحت اثر نیروی عظیم گرانشی به طرف زمین وزین قرار دارد، این مسئله جدی فنی سرانجام به وسیلهٔ دانشمند انگلیسی، هنری کاوندیش (۱۸۱۰-۱۷۳۱) حل شد. او برای اندازه‌گیری نیروهای گرانشی از یک ترازوی پیچشی استفاده کرد (اولین کسی که زمین را وزن کرد).

در این وسیله، جاذبهٔ گرانشی میان دو جفت کرهٔ سربی، ریسمان نگهدارندهٔ یکی از دو جفت را می‌پیچاند. پیچش ریسمان علیه پیچش حاصل از نیروهای کوچک معلوم، قابل اندازه‌گیری بود.



در این آزمایش برای نمونه یک کرهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی و یک کرهٔ ۱ کیلوگرمی که فاصلهٔ میان مراکز آنها ۰/۱ متر بود نیروی حاصل را در حدود یک میلیونیم نیوتن محاسبه می‌کرد. محاسبات حاشیه نشان می‌دهد این داده‌ها برای G مقداری در حدود $10^{-10} N.m^2/kg^2$ به دست می‌دهند. این آزمایش پیوسته انجام و اصلاح گردید و مقدار مورد قبول G هم اکنون چنین است:

$$G = 6/67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$$

پس گرانش یک نیروی ضعیف است و فقط هنگامی که دست‌کم یکی از جرمها خیلی بزرگ باشد، اهمیت پیدا می‌کند.

نیروی گرانش وارد بر یک جرم ۱ کیلوگرمی در سطح زمین ۹/۸ نیوتن است، با جایگزین کردن آن برای F_g و شعاع معلوم زمین، می‌توان جرم زمین و همچنین مقادیر

جرمهای دیگر سیارات را حساب کرد.

سیاره‌ها بر روی هم، اندکی بیش از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ جرم منظومه شمسی را تشکیل می‌دهند. قسمت اعظم جرم در خورشید است. به این سبب خورشید بر حرکت سیاره‌ها حاکم است و تقریباً مانند یک جسم بی‌نهایت سنگین و پا برجا عمل می‌کند.

اما با پذیرش دینامیک نیوتنی، خورشید نمی‌تواند در فضا، حتی در منظومهٔ شمسی، واقعاً ثابت و پا برجا بماند. بلکه اندکی برگرد مرکز جرم مشترک خورشید و هر سیاره حرکت می‌کند. این در مورد هر یک از ۹ سیارهٔ منظومهٔ شمسی درست است و چون همهٔ این سیاره‌ها به ندرت در یک راستا قرار می‌گیرند، حرکت خورشید در حقیقت ترکیبی از ۹ بیضی کوچک است.

این گونه حرکت در یک منظومهٔ شمسی که در آن سیاره‌ها در مقایسه با خورشیدشان بسیار سنگین باشند دارای اهمیت است. اما در منظومهٔ شمسی ما، برای اغلب مقاصد، آنقدر بزرگ نیست که قابل توجه باشد.

ز) گفتار پایانی: موفقیتهای بیشتر...

نیوتن در «اصول» نشان داد که قانون گرانش جهانی قادر است بر هم‌کنشهای پیچیده گرانشی از جمله جزر و مد دریا و جابجایی خاص دنباله‌دارها در عرض آسمان را توضیح دهد. وی دریافت نیروی جزر و مدساز ماه بیش از نیروی جزر و مدساز خورشید است و در هر روز معمولاً دو مد بلند رخ می‌دهد. همچنین ماهی دوبار زمین، خورشید و ماه در یک راستا قرار می‌گیرند. در این زمانها، مد به مراتب بلندتر از مد متوسط است. اما چرا مدّ در هر دو سوی زمین، سوی مقابل ماه و سوی مخالف آن رخ می‌دهد؟ و چرا در یک نقطهٔ معین وقوع مد چند ساعت پس از قرارگرفتن ماه در اوج صورت می‌گیرد؟

نیوتن می‌دانست که جاذبه‌های گرانشی ماه و خورشید به کل زمین جامد شتاب می‌دهند. این نیروها به آب سیال در سطح زمین نیز شتاب می‌دهند. وی دریافت که جزر

و مد در اثر تفاوت شتاب زمین و آبهای آن پدید می آید.

فاصلهٔ ماه از مرکز زمین ۶۰ برابر شعاع زمین است. پس طرف نزدیکتر زمین به ماه ۵۹ برابر شعاع زمین و طرف دورتر ۶۱ برابر شعاع زمین، از ماه فاصله دارند. در نتیجه در سمت نزدیکتر زمین به ماه، شتاب آب به سوی ماه بزرگتر از شتاب آب نسبت به ماه در طرف دیگر زمین است. اثر برآیند این است که آب با شتاب بیشتر از زمین دور می‌شود. اما آبهایی که بر اثر جاذبهٔ ماه از بخشهای دوردست اقیانوس حرکت می‌کند به سبب اصطکاک با بستر اقیانوس، به ویژه در آبهای کم عمق، از سرعت حرکتشان کاسته می‌شود. به این ترتیب زمان وقوع مد دچار تأخیر می‌شود.

و اما جوّ زمین و خود زمین نیز دچار جزر و مد می‌شوند. زمین کاملاً صلب نیست و می‌تواند مانند فولاد خم شود.

مد در زمین ۳۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و جزر و مدهای جوّی عموماً در پس دیگر تغییرات آب و هوایی پنهان می‌مانند.

در مورد دنباله‌دارها، هالی و نیوتن نشان دادند که آنها فقط جرمهای ابری درخشانی هستند که همچون سیاره‌ها بر طبق قوانین کپلر برگرد خورشید حرکت می‌کنند و اغلب دنباله‌دارها فقط هنگامی که از مشتری به خورشید نزدیکتر باشند، دیده می‌شوند.

برخلاف سیاره‌ها، که مدارهای همهٔ آنها تقریباً در یک صفحه واقعند، مدارهای دنباله‌دارها در صفحه‌های متفاوت که با هم زاویه می‌سازند، قرار دارند.

ادموند هالی مفاهیم حرکت آسمانی نیوتن را در مورد حرکت دنباله‌دارهای درخشان به کار برد و با معلوم کردن دورهٔ گردش یک دنباله‌دار، توانستند زمانهای ظهور آن را در طول تاریخ تحقیق کنند.

اما علم را چون یک فعالیت ذهنی گروهی باید دانست که با زمان و به مرزهای ملی محدود و منحصر نمی‌شود. علم برخوردار از موفقیت دائمی و بدون شکست نیست، بلکه رشد آن به رشد جنگل می‌ماند. بخشهای تازه از بخشهای کهنه تغذیه می‌کنند و به جای آنها می‌نشینند و آنگاه دگرگونیهای نامنتظره در بخشهای گوناگون به

همراه می‌آورد. علم یک پیگردی بی‌روح و حساب شده نیست و چه بسا مجادلات مهیج، عقاید مذهبی، داوری دربارهٔ زیبایی و گهگاه تفکرات سرکش شخصی در آن راه می‌یابد.

همچنین نتایج کار نیوتن به حل همهٔ مسائل نینجامید، بلکه شاهراههای تازه‌ای برای تحقیقات نظری و مشاهدات بازگشود. در حقیقت بخش بزرگی از علم و تکنولوژی امروزی ما در اثر کارهای نیوتن آغاز به شکل‌گیری کرد. مسئله‌ای که پس از کار نیوتن بر جای ماند بررسی اجسامی بود که بر هم‌کنش آنها نه با نیروی گرانش، بلکه با اصطکاک و برخورد بود، که به پیدایش مفاهیم اندازه حرکت و انرژی منجر شد و دید بسیارگسترده‌تری در میان بخشهای گوناگون علم مانند فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی پدید آورد. سرانجام بررسی در این مسیر موجب پیدایش احکامی به اهمیت قانون گرانش جهانی از جمله قوانین پایستگی گردید که پایهٔ بخش عمده از علم و تکنولوژی جدید بر آن استوار است.

تأثیر نیوتن به محدودهٔ علم منحصر نشد، تأثیر او بویژه در فلسفه و ادبیات و... محسوس بود.

در سالهای قرن هجدهم که عصر خرد یا قرن روشنگری خوانده می‌شود، «خرد» شعار فیلسوفان آن زمان بود. اما نظریه‌های آنها دربارهٔ اصلاح مذهب و جامعه پیوند قانع کننده‌ای نداشت. فیزیک نیوتنی، آزادی مذهب و حکومت جمهوری همگی بر اثر جنبشی واحد پدید آمدند. (نه به این معناکه میان این مفاهیم واقعاً پیوندی منطقی وجود داشته است). با این حال موضوع غالب قرن هجدهم خوشبختی در حد وسط بود و بر تحمل عقاید گوناگون، منع زیاده‌روی و تعادل نیروهای مخالف تأکید می‌شد. نظام وارسی و توازن در قانون اساسی یکی از پایدارترین ره‌آوردهای این دوران بود که از احراز قدرت بیش از حد به وسیلهٔ یک گروه جلوگیری کند. این قانون می‌کوشد که در عرصهٔ سیاست حالتی تعادلی میان گرایشهای مخالف برقرار کند. برخی می‌اندیشیدند که این‌گونه تعادل به توازن میان کشش گرانشی خورشید و تمایل سیاره به گریز از مدار آن

در یک خط مستقیم شباهت دارد!

به هر حال چنین برمی‌آید که زندگی و آثار نیوتن، هر دو، اندیشهٔ دمکراسی سیاسی را تأیید می‌کند. او نشان داد که همهٔ مواد، چه خورشید و چه یک سنگ معمولی برابر خلق شده‌اند. در ادبیات نیز از آن (دیدگاه جدید علمی) استقبال کردند. این دیدگاه اندیشه‌های تازهٔ بسیار، شکلهای مناسب کلام، تناظرات و مفاهیم بسیار برای نویسندگان و شعرا فراهم آورد. اما نخستین واکنش نیرومند علیه کیهان‌شناسی نیوتنی جنبش رمانتیک بود که توسط گوته در آلمان آغاز شد. رمانتیکها دید ریاضی نسبت به طبیعت را خوار می‌داشتند و اصرار داشتند که پدیده‌ها را نمی‌توان با توضیحات مکانیکی و به‌طور نتیجه‌بخش تحلیل کرد و به اجزای جداگانهٔ آنها تقلیل داد. همچنین فیلسوفان رمانتیک آلمانی که گوته را بزرگترین دانشمند و شاعر خود می‌شماردند، نظریهٔ نور نیوتن را نیز نفی می‌کردند. گوته بر آن بود که نور سفید مخلوطی از رنگها نیست و کاری بی‌فایده است که باگذراندن پرتو نور سفید از یک منشور آن را تقلیل دهیم تا رنگهای جداگانه طبیعی آن را مطالعه کنیم.

فهرست راهنما

الف

ب

پ

ت

ث

ج

چ

ح

خ

د

ذ

ر

ز

ژ

س

ش

ض

ف

ق

م

ن

و

ه

ی

کتابنامه

I. معرفی چند کتاب به زبان فارسی (ترجمه و تألیف) دربارهٔ مکانیک کلاسیک به ترتیب سال انتشار

۱ـ **نام کتاب:** مکانیک نظری و عملی
نویسنده: عبدالله ریاضی
مترجم: ــ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۱۹

۲ـ **نام کتاب:** مکانیک سینماتیک
نویسنده: احمد وزیری
مترجم: ــ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۳۵

۳ـ **نام کتاب:** فیزیک عمومی (جلد اول)
نویسنده: حبیب‌الله ایزدیان
مترجم: ــ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۳۹

۴ـ **نام کتاب:** مکانیک ریاضیات عمومی
نویسنده: احمد وزیری
مترجم: ــ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۴۲

۵ـ **نام‌کتاب:** فیزیک استاتیک (جلد ۲)
نویسنده: ح. شمسی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران

۶ـ **نام‌کتاب:** مکانیک مقدماتی (قسمت اول)
نویسنده: مهدی برکشلی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۴۵

۷ـ **نام‌کتاب:** مکانیک فیزیک
نویسنده: کمال‌الدین جناب
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات چهر ـ چاپ پنجم ۱۳۴۹

۸ـ **نام‌کتاب:** مکانیک برداری، دینامیک
نویسنده: جلیل فامیلی ـ کاظم ابهری
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات امیرکبیر ـ بهمن ماه ۱۳۴۹

۹ـ **نام‌کتاب:** روش حل مسائل فیزیک
نویسنده: ن. م. اسپرانسکی
مترجم: غضنفر بازرگان
ناشر: انتشارات خوارزمی ـ فروردین ۱۳۴۹

۱۰ـ **نام‌کتاب:** دوره مختصر مکانیک استدلالی و الفبایی از مکانیک موج و نسبیت
نویسنده: نصرالله حاج‌سید جوادی
مترجم: ـ
ناشر: ؟ ـ ۱۳۴۹

۱۱ـ نام کتاب: مکانیک عمومی (جلد اول و دوم)
نویسنده: مجتبی ریاضی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۴۹

۱۲ـ نام کتاب: مکانیک کلاسیک
نویسنده: ل. د. لانلائو ـ ا. م. بیفشتیز
مترجم: کامیار نیکپور ـ مهیار نیکپور
ناشر: انتشارات امیرکبیر ـ بهمن ۱۳۵۰

۱۳ـ نام کتاب: نیروها در طبیعت
نویسنده: گری گوریف ـ میاکشیف
مترجم: غلامرضا جلالی نائینی
ناشر: انتشارات رُز ـ چاپ اول، ۱۳۵۰

۱۴ـ نام کتاب: قوانین حرکت
نویسنده: عبدالجلیل مستشاری
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد ایران ـ ۱۳۵۳

۱۵ـ نام کتاب: فیزیک دانشگاهی
نویسنده: سیرز ـ فرانسیس وستون
مترجم: فضل‌الله فروتن
ناشر: دانشکده علم و صنعت ایران ـ چاپ سوم، آذر ۱۳۵۳

۱۶ـ نام کتاب: مبانی فیزیک (جلد اول)
نویسنده: ژان بریکار ـ هانری بنوآ
مترجم: علی خلیلی ـ محمود رهبر
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ ۱۳۵۳

۱۷ـ نام‌کتاب: انتقال انرژی
نویسنده: ابوالقاسم جمشیدی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد ایران، ۱۳۵۴

۱۸ـ نام‌کتاب: دینامیک تحلیلی سیستمهای گسسته
نویسنده: راین هارد ـ ام. روزنبرگ
مترجم: محسن بهرامی ـ مهرداد صباغی
ناشر: ؟ ـ ۱۳۵۷

۱۹ـ نام‌کتاب: مکانیک (در دو جلد)
نویسنده: کیث. ر. سایمون
مترجم: محمدرضا سرکرده‌ای
ناشر: انتشارات دهخدا، مرداد ماه ۱۳۵۸

۲۰ـ نام‌کتاب: مکانیک سیستمها، مکانیک تحلیلی نسبیت خاص
نویسنده: ژان میشل رکار
مترجم: صمد سبحانیان
ناشر: ؟ ـ ۱۳۵۹

۲۱ـ نام‌کتاب: مکانیک کلاسیک
نویسنده: ت. و. کیبل
مترجم: اعظم پورقاضی ـ محمدعلی شاه‌زمانیان
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۶۲

۲۲ـ نام‌کتاب: دوره مکانیک (جلد دوم) دینامیک برداری
نویسنده: بیر ـ جانسون
مترجم: ابراهیم واحدیان
ناشر: ابوالفضل حسینیان ـ چاپ چهارم، اردیبهشت ۱۳۶۲

۲۳ـ نام کتاب: نگاهی به فیزیک
نویسنده: ل. تاراسو ـ آ. تاراسو
مترجم: علی معصومی
ناشر: شرکت ایران چاپ ـ چاپ دوم، زمستان ۱۳۶۵

۲۴ـ نام کتاب: فیزیک برای سرگرمی
نویسنده: ی. ا. پرلمان
مترجم: احسان قوام‌زاده
ناشر: انتشارات نیلوفر ـ چاپ چهارم، ۱۳۶۶

۲۵ـ نام کتاب: فیزیک (جلد اول)
نویسنده: دیوید هالیدی ـ رابرت رزنیک
مترجم: نعمت‌الله گلستانیان ـ محمود بهار [گلشنی ـ مقبلی]
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ ۱۳۶۶

۲۶ـ نام کتاب: آزمونهای فیزیک
نویسنده: سوزان لی
مترجم: ناصر مقبلی
ناشر: انتشارات دانا ـ چاپ اول، ۱۳۶۶

۲۷ـ نام کتاب: مبانی دینامیک اقیانوسها
نویسنده: و. ام. کامینکویچ
مترجم: پرویز مؤدب
ناشر: چاپ مؤسسه اطلاعات ـ چاپ اول، ۱۳۶۶

۲۸ـ نام کتاب: پدیده‌های ارتعاش و انتشار
نویسنده: هـ. و. دراون
مترجم: محمود مصلحی‌فرد ـ مصطفی علی شیرین‌پور
ناشر: انتشارات دانشگاه تبریز ـ ۱۳۶۷

۲۹ـ نام‌کتاب: فیزیک دانشگاهی
نویسنده: فرانسیس سیرز ـ مارک زیمانسکی
مترجم: فضل‌الله فروتن
ناشر: نشر علوم دانشگاهی ـ چاپ اول ۱۳۶۸

۳۰ـ نام‌کتاب: مکانیک برکلی
نویسنده: شارل کتیل ـ والتر. د. نایت
مترجم: صمد فرخی ـ ابوالقاسم قلم‌سیاه ـ منصور بینا
ناشر: ؟

۳۱ـ نام‌کتاب: سرگذشت حرکت
نویسنده: ف. نومان. دمیتری ـ ویچ. ب. نیکوف
مترجم: پرویز شهریاری
ناشر: نشر گستره ـ چاپ اول، پاییز ۱۳۶۸

۳۲ـ نام‌کتاب: سرگرمیهای فیزیک (جلد اول)
نویسنده: ای. پرلمان
مترجم: احمد تمدن
ناشر: کتابهای سیمرغ وابسته به انتشارات امیرکبیر ـ چاپ دوم، ۱۳۶۸

۳۳ـ نام‌کتاب: فیزیک
نویسنده: استفن پاپل
مترجم: محمود بهار ـ اصغر لطفی
ناشر: انتشارات علوی ـ چاپ اول، پاییز ۱۳۶۹

۳۴ـ نام‌کتاب: مرزهای فیزیک ـ ستاره‌شناسی
نویسنده: فرد هویل ـ جایانت نارلیکا
مترجم: بهزاد قهرمان
ناشر: انتشارات آستان قدس رضوی ـ چاپ اول ۱۳۶۹

۳۵ـ **نام کتاب:** راهنمای آزمایش فیزیک
نویسنده: محمدحسن ریاضی هدی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات جهاد دانشگاهی صنعتی شریف ـ چاپ دوم، ۱۳۶۹

۳۶ـ **نام کتاب:** ماجراهایی با فیزیک
نویسنده: تام دانکن
مترجم: اختر رجبی
ناشر: نشر مرکز ـ چاپ اول، ۱۳۷۰

۳۷ـ **نام کتاب:** مکانیک، مسائل فیزیک دانشگاهی
نویسنده: س. پ. سترلکوف ـ آی. آ. یاکوولف
مترجم: جهانشاه میرزابیگی
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ چاپ اول، ۱۳۷۰

۳۸ـ **نام کتاب:** دورهٔ فشرده فیزیک نظری (جلد اول: مکانیک و الکترودینامیک)
نویسنده: لاندائو ـ لیف شیتز
مترجم: رضا منصوری
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ ؟

۳۹ـ **نام کتاب:** فیزیک عمومی (جلد اول: مکانیک)
نویسنده: آلونسو ـ فین
مترجم: لطیف کاشیگر
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ ؟

۴۰ـ **نام کتاب:** پاسخنامه لرزشهای مکانیکی
نویسنده: تامسون
مترجم: مهرداد خاجوی ـ رضا نخعی
ناشر: نشر صدوق ـ چاپ اول، ۱۳۷۱

۴۱ـ **نام کتاب:** ۳۰۰۰ مسئله حل شده در فیزیک (۱) از سری کتابهای شومز
نویسنده: الوین هالپرن
مترجم: سوسن جاویدی
ناشر: نشر بشری ـ چاپ اول، ۱۳۷۱

۴۲ـ **نام کتاب:** تشریح مسائل فیزیک دانشگاهی
نویسنده: فرانسیس سیرز ـ مارک زیمانسکی
مترجم: هادی عربشاهی ـ رضا یزدی
ناشر: انتشارات استاد ـ چاپ اول، ۱۳۷۱

۴۳ـ **نام کتاب:** مکانیک
نویسنده: کیث. ر. سایمون
مترجم: اعظم نیرومندراد ـ غلامحسین همدانی
ناشر: انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ سوم ۱۳۷۱

۴۴ـ **نام کتاب:** آشنایی با مکانیک کلاسیک
نویسنده: آ. پ. آریا
مترجم: جعفر گودرزی
ناشر:

۴۵ـ **نام کتاب:** فیزیک اوهانیان (۲ جلد)
نویسنده: هانس اوهانیان
مترجم: ناهید ملکی جیرسرایی
ناشر: انتشارات پوریا و نقش جهان ـ چاپ اول ۱۳۷۱ و ۱۳۷۲

۴۶ـ **نام کتاب:** راهنمای یادگیری فیزیک اوهانیان (جلد ۱ و ۲)
نویسنده: ون. نی ـ پیتر رایلی
مترجم: ناهید ملکی جیرسرایی
ناشر: کتار ماد وابسته به نشر مرکز ـ ۱۳۷۱ و ۱۳۷۲

۴۷ـ **نام‌کتاب:** فیزک
نویسنده: م. فرانسون
مترجم: مختار تبریزی ـ لطیف کاشیگر
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران ـ مهر ۱۳۷۱

۴۸ـ **نام‌کتاب:** دستورهای فیزیک
نویسنده: مازیار کاظمی ـ صفا برهانی
مترجم: ـ
ناشر: نشر اعتماد ـ چاپ اول، ۱۳۷۲

۴۹ـ **نام‌کتاب:** فیزیک دانشگاهی (جلد اول)
نویسنده: هیو یانگ ـ ویرایش هفتم، ۱۹۹۲
مترجم: فصل‌الله فروتن
ناشر: نشر علوم دانشگاهی

۵۰ـ **نام‌کتاب:** چگونه فیزیک را درک کنیم؟
نویسنده: لوئیز اسپشتین
مترجم: جهانشاه میرزابیگی
ناشر: مترجم ـ چاپ اول، تابستان ۱۳۷۲

۵۱ـ **نام‌کتاب:** فیزیک در خدمت علوم بهداشت
نویسنده: کارل. آر. نیو ـ برنداسی. نیو
مترجم: علی‌اصغر تکالو
ناشر: انتشارات آستان قدس رضوی ـ چاپ اول، ۱۳۷۲

۵۲ـ **نام‌کتاب:** تجزیه و تحلیل مسائل ایستایی
نویسنده: جی. ال. مریام
مترجم: اکبر فدایی ایام
ناشر: انتشارات تلاش ـ چاپ دوم، ۱۳۷۲

۵۳ـ **نام کتاب:** تشریح کامل مسائل مکانیک تحلیلی
نویسنده: گرونت فولز
مترجم: علیرضا بینش
ناشر: نشر کهن ـ چاپ اول، ۱۳۷۲

۵۴ـ **نام کتاب:** آزمون فیزیک و مکانیک
نویسنده: چارلز رابرتسون ـ ج. پ. سون
مترجم: جلال‌الدین پاشایی‌راد ـ فیروز آرش
ناشر: کتاب ماد وابسته به نشر مرکز ـ چاپ اول، ۱۳۷۲

۵۵ـ **نام کتاب:** مکانیک تحلیلی
نویسنده: گ. ر. فاولز
مترجم: جعفر قیصری
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ ؟

۵۶ـ **نام کتاب:** فیزیک
نویسنده: ویرا. هرولدس ـ اسلوشر
مترجم: جلال‌الدین پاشایی‌راد
ناشر: شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، چاپ اول، اسفند ۱۳۷۳

۵۷ـ **نام کتاب:** موفقیت در فیزیک
نویسنده: تام دانکن
مترجم: بهرام معلمی
ناشر: کتاب ماد وابسته به نشر مرکز ـ چاپ اول، ۱۳۷۳

۵۸ـ **نام کتاب:** تجزیه و تحلیل مسائل مکانیک
نویسنده: هالیدی
مترجم: اکبر فدایی ایام ـ شهرام نوروزی حقیقی
ناشر: انتشارات فتح دانش ـ چاپ اول، ۱۳۷۳

۵۹- **نام‌کتاب:** فیزیک مکانیک
نویسنده: محمود قرآن‌نویس- حسین جوادی
مترجم: ــ
ناشر: مؤلفین- چاپ اول، اسفند ۱۳۷۳

۶۰- **نام‌کتاب:** فیزیک پیش‌دانشگاهی
نویسنده: فردریک بیوکی
مترجم: محمدرضا خواجه‌پور- احمد شایگان
ناشر: انتشارات خوارزمی- چاپ اول، ۱۳۷۳

۶۱- **نام‌کتاب:** فیزیک زنده
نویسنده: پیتر وارن
مترجم: اسفندیار معتمدی
ناشر: انتشارات مدرسه- چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴

۶۲- **نام‌کتاب:** راهنمای مسائل استاتیک
نویسنده: فردیناند. پییر- راسل جانسون
مترجم: آرش ضیایی- بابک نظرزاده
ناشر: انتشارات صفار- چاپ اول، ۱۳۷۴

۶۳- **نام‌کتاب:** دوره کامل مسائل فیزیک پایه- جلد اول مکانیک
نویسنده: الوین هالپرن
مترجم: محمد عابدینی- حسین بیدادی
ناشر: انتشارات جزیل- چاپ دوم، تابستان ۱۳۷۴

۶۴- **نام‌کتاب:** ژیروسکوپ
نویسنده: علی امام‌جمعه- رامز نجف تومرایی
مترجم: ــ
ناشر: چاپ اول ۱۳۷۴

۶۵ـ نام کتاب: فیزیک برای علوم زیستی
نویسنده: آلن. اچ. کرومر
مترجم: محمود بهار
ناشر: نشر مبتکران ـ چاپ دوم، تابستان ۱۳۷۴

۶۶ـ نام کتاب: حل مسائل استاتیک
نویسنده: سری شومز
مترجم: ابراهیم دارابی
ناشر: نشر دنیای نو ـ چاپ اول، تابستان ۱۳۷۴

۶۷ـ نام کتاب: فیزیک پیش‌دانشگاهی
نویسنده: محمد قرآن‌نویس ـ حسین جوادی
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات ققنوس ـ چاپ اول، زمستان ۱۳۷۴

۶۸ـ نام کتاب: در قلمرو مکانیک (جلد اول و دوم)
نویسنده: هامفری ـ دوپینگ
مترجم: هوشنگ شریف‌زاده
ناشر: ؟ ـ ۱۳۷۴

۶۹ـ نام کتاب: دینامیک کلاسیک، ذرات، و سیستمها
نویسنده: جری ماریون ـ استیفن تورنتون
مترجم: جلال‌الدین پاشایی‌راد ـ بهرام معلمی
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ـ چاپ اول، ۱۳۷۴

۷۰ـ نام کتاب: مبانی فیزیک
نویسنده: ب. م. یاورسکی ـ ا. ا. پنیسکی
مترجم: محمدتقی توسلی ـ مهرانگیز طالب‌زاده ـ ناصر مقبلی
ناشر: نشر دانشگاهی ـ چاپ اول، ۱۳۷۴

۷۱ـ **نام کتاب:** راهنمای فیزیک دانشگاهی
نویسنده: جیمز گانیز ـ ویلیام. ف. پالمر
مترجم: فضل‌الله فروتن
ناشر: انتشارات علوم دانشگاهی ـ چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴

۷۲ـ **نام کتاب:** آشنایی با دینامیک
نویسنده: ا. پرسیوال ـ د. ریچاردز
مترجم: نادر رابط
ناشر: نشر دانشگاهی ـ چاپ اول، ۱۳۷۴

۷۳ـ **نام کتاب:** استاتیک
نویسنده: ف. پیر ـ ا. راسل. جانسون
مترجم: حمید لعل
ناشر: انتشارات پرهام ـ چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴

۷۴ـ **نام کتاب:** متمم دینامیک (جلد اول و دوم)
نویسنده: سیدمحجوب مقدس
مترجم: ـ
ناشر: انتشارات دانشگاه امام حسین ـ چاپ اول، ۱۳۷۵

۷۵ـ **نام کتاب:** فیزیک عمومی (جلد اول)
نویسنده: ریموند سروی
مترجم: عزیز بهکامی ـ نعمت‌الله گلستانیان
ناشر: انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی ـ چاپ چهارم، پاییز ۱۳۷۵

۷۶ـ **نام کتاب:** ۳۰۰۰ مسئله حل شده در فیزیک (۲) از سری کتابهای شومز
نویسنده: ایون هالپرن
مترجم: سوسن جاویدی
ناشر: نشر اشاره ـ چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵

۷۷- **نام‌کتاب:** دینامیک (جلد اول)
نویسنده: جیمز مریام-گلن کریگ
مترجم: سیدمحجوب مقدس
ناشر: انتشارات دانشگاه امام حسین- چاپ اول، ۱۳۷۵

۷۸- **نام‌کتاب:** آشنایی با مکانیک
نویسنده: دانیل کلپنر- رابرت. جی. کلنکو
مترجم: هوشنگ سپهری- محمدعلی مقیمی- ولی‌الله ناصری
ناشر: ؟ - ۱۳۷۶

۷۹- **نام‌کتاب:** فیزیک برای علوم حیاتی (جلد اول)
نویسنده: آلن. اچ. کرومر
مترجم: جمیل آریایی
ناشر: انتشارات فانوس کرمان- چاپ دوم، ۱۳۷۶

II. انتشارات به زبان انگلیسی دربارهٔ مکانیک کلاسیک، و ریاضیات مورد نیاز در فیزیک، به ترتیب حروف الفبای نام نویسنده.

1. G. Arfkin, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed. Academic Press, Orlando, Florida, 1995.
2. V. I., Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
3. G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics*. Cambridge, New York, 1990.
4. V. Barger and M. Olsson, *Classical Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1995.
5. R. A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1954.
6. T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*. wiley, New York, 1968 (reprinted by Krieger, Melbourne, Florida, 1981).

7. F. Byron and R. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

8. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. 1. Wiley (Interscience), New York, 1953.

9. A. D. Davis, *Chassical Mechanics.* Academic Press, Orlando, Florida, 1986.

10. H. F. Davis, *Introduction to Vector Analysis.* Allyn & Bacon, Boston, 1961.

11. H. F. Davis. *Fourier Series and Orthogonal Functions.* Allyn & Bacon, Boston, 1963.

12. A. Sommerfeld, *Mechanics.* Academic Press, New York, 1964.

13. P. Dennery and A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists.* Harper & Row, New York, 1967.

14. A. Einstein, *Relativity,* 15th ed. Crown, New York, 1961.

15. G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechonics,* Harcourt Brace College Publishers, Sixth edition, 1999.

16. A. P. French, *Newtonian Mechanics.* W. W. Norton, New York, 1971.

17. H. Goldstein, *Classical Mechanics.* 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2002.

18. L. N. Hand and J. D. Finch, Analytical Mechanics, Cambridge Uniw. Press, 1998.

19. R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford, New York, 1994.

20. W. Kaplan, *Advanced Calculus,* 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.

21. C. Kittel, Knight, W. D., and Ruderman, M. A. *Mechanics,* Berkeley Physics Course, vol. 1, McGraw-Hill, 1965.

22. C. Kleppner, and Kolenkow, R. J., *An Introduction to Mechanics,* McGraw-Hill, 1973.

23. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics.* University of Toronto Press, Toronto, 1949.

24. L.D. Landau, and Lifshitz, E. M., *Mechanics,* third edition, Pregamon

press, reprinted 1986.

25. J. B. Marion, *Principles of Vector Analysis.* Academic Press, New York, 1965.
26. J. B. Marion and S. T. Thornton, Classical Dynamics of Particles and Systems. Harcourt College Pablishers, 4th edition, 1995.
27. J. Matthews and R. Walker, *Mathematical Mehods of Physics,* 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1977.
28. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics,* 2 vols. McGraw-Hill, New York, 1953.
29. Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems,* Cambridge University Press, 1993.
30. I. Precival, and Richards, D., *Introduction to Dynamics,* Cambridge Univ. Press, 1982.
31. S. N. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems.* Wiley, Now York, 1990.
32. W. Rindler, *Introduction to Special Relativity.* Charendon, Oxford, 1982.
33. F. W. Sears, *Mechanics, Wave Motion, and Heat.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1958.
34. K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, Reding, Massachusetts, 1971.
35. J. M. T. Thompson, and Stewart, H. B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons, 1986.
36. E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particled and Rigid Bodies*, 4th ed. Cambridge University Press, London and New York, 1937 (reprinted by Dover, New York 1959).